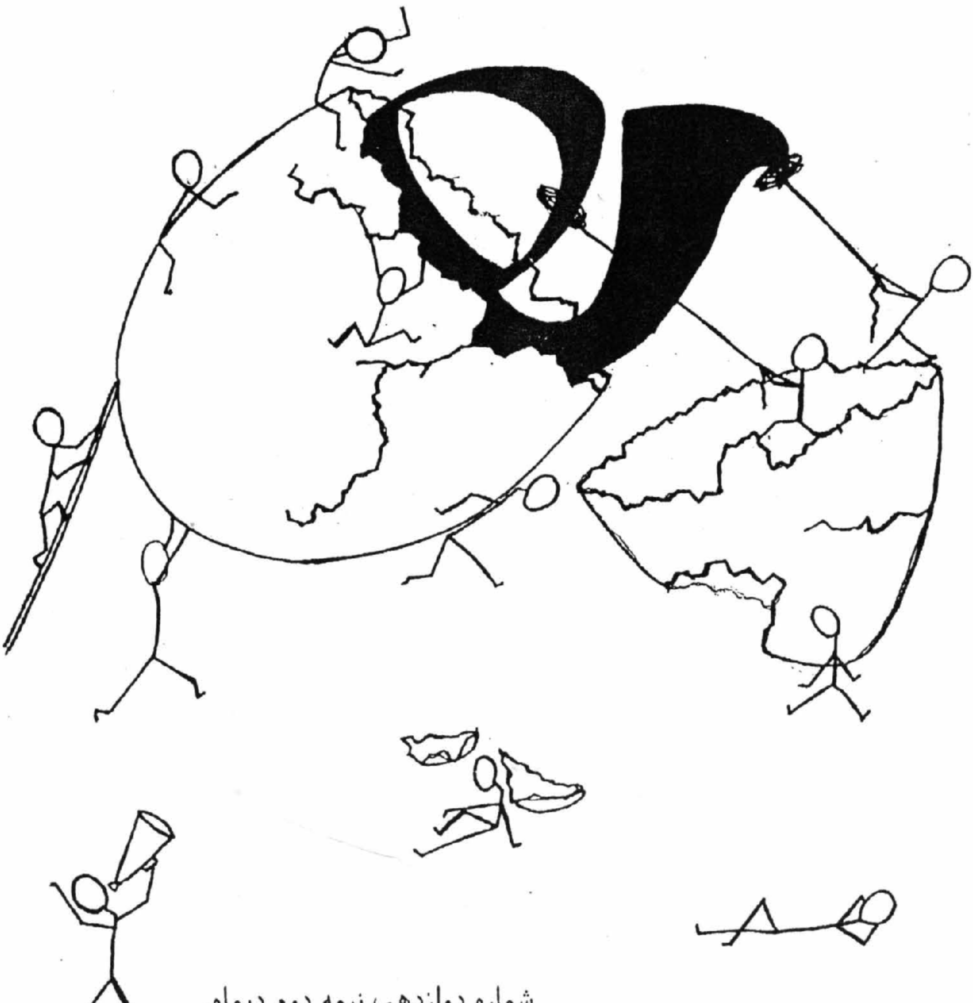
تولد

1

هفته‌نامه ریاضی

دانشجویان دانشکده علوم ریاضی شریف

تولدت مبارک ...



شماره دوازدهم، نیمه دوم دیماه.

به بهانه اولین سالگرد انتشار دوهفته‌نامه ریاضی شریف

همراهان یک‌ساله دوهفته‌نامه

مژگان ناصری (سردبیر):

ما فقط می خواستیم تو دانشکده یه نشریه‌ای داشته باشیم که هم دو کلمه حرف ریاضی توش زده بشه که وقتی داریم چای می‌خوریم بشه بخونیمش هم لابه لاش با هم حرف بزنیم، بخندیم، درد دل کنیم و ... این بود که دو هفته نامه به دنیا اومد!

یه آدم کار درست احتمالا می‌گه که نشریه‌مون به هیچ دردی نمی‌خوره! نه مطالب علمی درست و حسابی داره و نه نوشته‌های غیرعلمی‌اش قابل توجه‌اند.ولی برای ما دوهفته‌نامه یه بهونه است برای با هم چیز یاد گرفتن و از هم چیز یاد گرفتن. ما ترجیح می‌دیم که یه مساله قشنگ یا یه حرف قشنگ رو از زبون یه دوست بشنویم تا اینکه توی یه کتاب یا یه مجله بخونیم و دوست داریم اگه یه جایی چیزی خوندیم که خوشمون اومد یا فکر جالبی به ذهنمون رسید یادمون باشه که می‌تونیم اون رو بگیم و یه عده دیگه رو هم خوشحال کنیم.

توی دنیا هزار تا مجله خوب هست ولی فقط دوهفته‌نامه است که به خاطرش دیر رفتیم خونه، فقط دوهفته‌نامه است که به خاطرش شب نخوابیدیم، که توی افطاری درگیرش بودیم که به خاطرش غرغر این و اون رو شنیدیم، تاش کردیم، منگنه‌اش زدیم و ... ! شاید به خاطر اینه که دوستش داریم و دلمون می‌خواد بزرگ و بزرگ‌تر بشه.

اگه شما هم با ما موافقین بهتون می‌گیم که دوهفته‌نامه مال شماست. بیاین توی میدون و تا دیر نشده فرصت این تجربه رو از دست ندین.و اگه شما یه آدم کار درست هستین، باید بهتون گفت که وقتتون رو با خوندن دوهفته‌نامه ما تلف نکنید. اون بالا توی کتاب‌خونه هزار تا مجله دارن خاک می‌خورن و منتظرن که یکی بره سراغشون.

به هر حال خوشحالیم که دو هفته نامه یه ساله شده و تولدش رو به همه کسایی که دوستش دارن تبریک می‌گیم.

فاضله فلاح: این دو نفر (این آقاهه اسمش مهدی اعتمادسعیده) که می‌بینید مسئول تامین مقاله و ترجمه هستند که معمولاً همدیگر رو پیدا نمی‌کنند. راستی برای روشن کردن اذهان باید بگیم که بیش از ده بار به این آقاهه گفتیم که یه چیزی بنویس، ولی هر بار با لبخند می‌گفت: باشه، فردا. خلاصه قراره فردا یه چیزی بنویسه و بده به ما!

تولد دو هفته نامه است. احساس خوبی دارم، یه موجود که باهاش رشد کردیم، باهامون بزرگ شد. شاید هم چون تولد خودم نزدیکه این احساس رو دارم. بهر حال تولدمون مبارک!

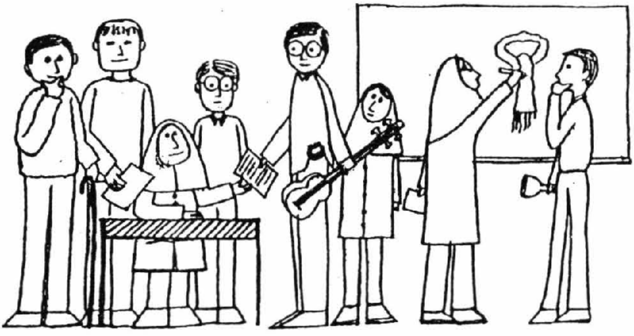
هما کبیری: بالاخره دوهفته‌نامه هم صاحب یک ویراستار به‌درد بخور شد.

یه روزی می‌خواستن یه فضای همبند و در عین حال جدائی ناپذیر دوهفته‌نامه‌ای بسازن. نیاز به یه سری آدم‌هایی داشتن که در این راه پایه باشن، اونم از نوع متعارفش و لزوماً شمارش پذیر. بچه‌ها خیلی خوب دست به دست هم دادند و این فضا رو با حضور خودشون ساختن.

حتی اگر هرکس مسئولیت یک صفحه رو هم قبول کنه، تو هر شماره بعد فضای دوهفته نامه از ۱۲ تجاوز نمی‌کنه! (خب این هم از خواص منحصر بفرد دو هفته نامه است !! دیگه.)

با این حساب یه تابع یک به یک (البته با شرط بالا) بین صفحات دو هفته نامه و مسئولینش برقرار می‌شه. همچنین یه تابع بین هر یه دونه دوهفته نامه منتشر شده و مخاطبش وجود دارد که البته لزوماً یک به یک نیست! و امیدواریم که نزولی نباشه. (میشه به ترکیب این توابع هم فکر کرد، به نظر می‌رسه خواص جالبی دارن) خلاصه اینکه آدم‌های زیادی زحمت می‌کشن تا این دوهفته نامه به موقع به دست من و شما برسه.

امیدوارم از این به بعد، سیر انتشار دوهفته نامه و ارتباطش با مخاطبین صعودی اکید باشه و بتونیم اون رو به عنوان یه پوشش درست و حسابی برای دانشکده به حساب بیاریم!



کیمیا قبادی: فعلاً که رفته شورا وسرش شلوغه، ولی برای ترم بعد قول یه کارایی رو داده.

خوب بالاخره دو هفته نامه هم داره بزرگ می‌شه! مبارکه!... اما آهای جوونا حواستون باشه که یه وقت پیر نشه‌ها.

حسام‌الدین عباسپور: راستی ما رفتیم و یکی از اعضای شورا رو بدون هیچ قصد خاصی! مسئول خبر کردیم ولی ظاهراً اعضای شورا یک نفر را بدون هیچ قصد خاصی به دوهفته‌نامه فرستاده‌اند.

هابیل زارع: پدر بزرگ!

همیشه بهانه‌هایی برای زندگی کردن وجود دارند، کوچک و بزرگ؛ که دوهفته نامه یکی از آنها بود،
یکی از آنها هست. دوهفته نامه! تولدت مبارک!
یادباد آن شبان که خوابمان را جانشستی؛ آن روزها که مشغله‌مان بودی؛

دوهفته‌نامه، با ما بمان، حالا دیگر در این دنیای بزرگ جایی برای زندگی کردن داری و به تو سهمیه داده‌اند، از تلاش ما، از توجه خوانندگان.

شیرین خداکرم‌زاده: گرافیستمون چون نوشتن رو زیاد دوست نداره نظرش رو روی لوگوی دوهفته نامه نقاشی کرد.

مجتبیٰ نادری: ایشون در راستای خودشیرینی گاهی مقاله می‌نویسد. درضمن دارن متخصص تولید آلودگی صوتی هم می‌شن.

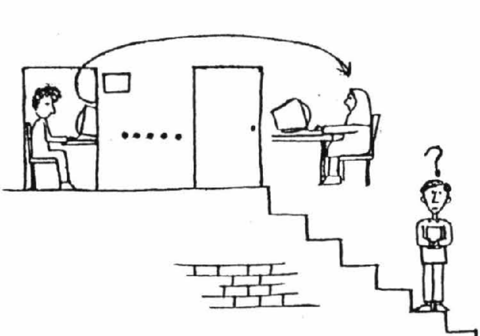
یک سال از تولد دوهفته‌نامه می‌گذره و تو این مدت برای من دوهفته‌نامه بهونه‌ای بوده تا با دوست جونایی که من‌رو اهلی کردن (اکثراً همون موجوداتی که تو نقاشی می‌بینینشون) یه همکاری صمیمانه داشته باشم. امیدوارم همیشه از این بهونه‌ها پیدا بشه.

سید عباس موسوی: از خواص صفحه‌بند بودن یکی هم اینه که آدم آخرین نفریه که کار رو میبینه بنابراین میتونه جلوی نوشته‌شدن یادداشت‌های عجیب و غریب کنار اسمش رو بگیره. [مسئول صفحه‌بندی و ... ساعت ۱:۳۰ بامداد]

دو هفته نامه از درکات دوزخ با پشتکار اعضاش رد شد. از راه‌های برزخ با دوستی‌هایشان و این روزها ...این روزها خودش آواره دشت‌های بهشت شده، اعضاش سرگردان بام‌های آسمان. (هیچ وقت نفهمیدم بهشت را باید دوست تر داشت یا جهنم را، به خصوص اگر پای حوصله و هیجان در میان باشد. شما هم لابد اون علامت سوال کذایی رو بالای کاریکاتور نگارنده دیده‌اید!)

روزگاری نویسنده‌ای در مورد یک روزنامه گفته بود خواندنش مثل خوردن کوکاکولای اصل در آفتابه است. هر چند مطالب ما قرار است حداکثر به خوشمزگی چای بوفه دانشگاه باشند — که باهاش خورده یا خونده می‌شن — و ضمناً اوضاع فنی ما هم به مراتب از آفتابه بهتر است ولی به همین قیاس باید گفت کار کردن توی دو هفته نامه مثل تلاش برای اثبات حدس پوانکاره سه بعدی در ازای یک بستنی یخی گاز زده شده است. بنماند هیچش الا ....

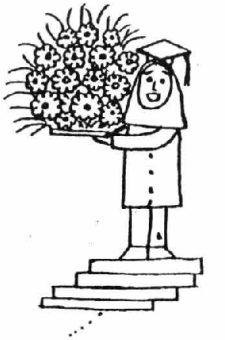
خلاصه، فعلاً که هستیم پس دو هفته نامه‌مون هم هست اما هر نردبانی از جمله بستنی یخی داستان ما هم آخری دارد که وقتی اونجا باشی سرد باشد جستجوی نردبان. پس روزی هم هست شاید نه چندان دور که ما دیگه نیستیم اونوقت شما باید باشید تا دوهفته‌نامه‌تون باشه. پس اگر اهل بالا رفتن از چنین نردبانی هستید راه بیفتید و به خاطر داشته باشد مردم سه دسته بیشتر نیستند: آنها که بالای همه نردبان‌ها ایستاده‌اند، آنها که دنبال نردبانی — که نوعش زیاد هم مهم نیست — می‌گردند و خس و خاشاک روی آب.



محمد حسین مشتاق: یک دوهفته‌نامه‌ای ظاهراً از نوع نادم و پشیمان!

یه سال گذشت، خداحافظ.

رویا کریمیان: با وجود مشغله زیاد زحمت تایپ دوهفته‌نامه رو می‌کشند. ایشون هم با وجود اصرار ما چیزی ننوشت. از طرف بچه‌های دوهفته‌نامه فارغ‌التحصیل شدنش رو تبریک می‌گیم.



حمید شکاری: ایشون هم که معلومه چیکاره‌اند!

تو این یه سالی ۴ هفته نامه بوده و گاهی هم ۵ و ۶ و ... این یکی دو شماره داره ۲ هفته نامه می‌شه. پس احتمالا سال دیگه «دوهفته‌نامه» است. اینو می‌گن دور اندیشی ماها!

سلمان ابوالفتح‌بیگی: ایشون یکی از ناظران علمی مقالات‌اند. با اینکه خیلی دلش می‌خواست چیزی برای این صفحه بنویسه، ولی چون دیدنش دوبار متوالی سخت بود ما فقط تونستیم بهش بگیم یه چیزی بنویسه ولی نشد متنش رو بگیریم!

علیرضا شیخ‌عطار: چون تایپیست ما نوشته این دوستمون رو با تمرین غلط دیکته برادر کوچیکش اشتباه گرفت و اون رو تایپ نکرد به‌ناچار نوشته رو اسکن کردیم.

دو سر خط هوا ، دو سر خط فکر ، دو سر خط حرف ، درک ، بینایی ، شنوایی ، لامسه ، روح انسان ، عقل ، باور ، ایمان ، قلب ، رفتار ، حضور ، همیشه حضور ، دنیا ، بی کران ، خلقت بی کران ، عشق ، حادثه ، درک ، بینایی ، شنوایی ، لامسه ، روح ، معبود ، بندگی ، سخن ، باران ، کلام باران ، سلام ، با طلوع ، حضور ، همیشه حضور ، سفر ، تاریخ ، زمین ، پویش ، زندگی ، عشق ، حادثه ، یاسمن ، نرگس ، گل ، بویایی ، درخت ، بینایی ، بلبل ، شنوایی ، لمس ، حادثه ، دست ، حادثه ، گرما ، لطافت ، تبسم ، بی کران ، نگاه ، بی کران ، و خالق بی کران ، نماز ، سؤال ، شبنم ، جواب ، ... ، باران ، بی کران ، ... ، باران ، بی کران .

تحویل ناپذیری چندجمله‌ای‌ها

بهنام ترابی

در اینجا قصد داریم ارتباطی بین نظریه اعداد و هندسه جبری را روشن‌تر کنیم. ابتدا برای آشنایی دو قضیه زیر را بدون اثبات می‌آوریم:

قضیه ۱. *فرض کنید که $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ و d بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک تمام ضرایب آن باشد. در این صورت $f(x)$ در $\mathbb{Q}[x]$ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $\frac{1}{d}f(x)$ در $\mathbb{Z}[x]$ تحویل‌ناپذیر باشد.*

قضیه ۲. *(مک آیزنشتاین): فرض کنید $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$، چندجمله‌ای در $\mathbb{Z}[x]$ باشد. فرض کنیم که عدد اول p وجود داشته باشد به طوری که $p|a_i$، $0 \leq i \leq n-1$ و $p \nmid a_n$ و $p^2 \nmid a_0$، در این صورت $f(x)$ در $\mathbb{Z}[x]$ تحویل ناپذیر است.*

فرض کنیم $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ و مجموعه مقادیر $f(\mathbb{Z}^+)$، مقسوم‌علیه مشترکی بزرگ‌تر از واحد نداشته باشند. این سوال مطرح می‌شود که آیا در $f(\mathbb{Z}^+)$ بی‌نهایت عدد اول وجود دارد؟ طبق قضیه‌ای از دیریشله، اگر $\deg f = 1$، آنگاه حکم درست است. ولی اگر $\deg f > 1$ با مسالهٔ‌ای مهم و حل نشده مواجه می‌شویم. به هر صورت اگر در $f(\mathbb{Z}^+)$ بی‌نهایت عدد اول وجود داشته باشد آنگاه $f(x)$ تحویل ناپذیر است، چون اگر $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ وجود داشته باشند که $f(x) = g(x)h(x)$، آنگاه دست کم یکی از $g(x)$ و $h(x)$ نامتناهی بار مقدارهای ± 1 را می‌گیرند که درست نیست. حکم بهتری هم می‌توان گفت که اگر $n \in \mathbb{Z}$ به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد و $f(n)$ اول باشد آنگاه $f(x)$ تحویل ناپذیر است. طبق قضیه‌ای از Cohn اگر نمایش عدد اول p در مبنای ۱۰ به صورت $p = \sum_{i=0}^{m} a_i 10^i$ باشد آنگاه چندجمله‌ای $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$، در $\mathbb{Z}[x]$ تحویل ناپذیر است. سعی می‌کنیم که حالات کلی‌تری را ثابت کنیم:

قضیه ۳. *فرض کنید $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ چند جمله ای در $\mathbb{Z}[x]$ باشد و $H = \max_{0 \leq i \leq m-1} |a_i/a_m|$. اگر $f(n)$ برای عدد صحیح $n \geq H+2$، عددی اول باشد آنگاه $f(x)$ در $\mathbb{Z}[x]$ تحویل ناپذیر است.*

برای اثبات از لم ساده زیر بهره می‌گیریم:

لم ۴. *با شرایط قضیه ۳، اگر $\alpha \in \mathbb{C}$، ریشه‌ای از $f(x)$ باشد آنگاه $|\alpha| < H + 1$.*

برهان. می توان نوشت

$$|\alpha|^m = |\frac{-a_{m-1}}{a_m}\alpha^{m-1} + \ldots + \frac{-a_0}{a_m}| \leq H(|\alpha|^{m-1} + \ldots + 1) = H(\frac{|\alpha|^m - 1}{|\alpha| - 1})$$

می توانیم فرض کنیم که $|\alpha| > 1$ پس $|\alpha|^{m+1} - |\alpha|^m < H|\alpha|^m$. ■

برهان. حال به اثبات قضیه می‌پردازیم. فرض کنیم که $f(x)$ در $\mathbb{Z}[x]$ تحویل پذیر باشد و $f(x) = g(x)h(x)$ که در آن $g(x),\ h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ چون $f(n)$ اول است فرض کنیم که $g(n) \in \{\pm 1\}$ و $g(x) = c\Pi_i(x - \alpha_i)$ که در آن c ضریب

پیشرو $g(x)$ و α_i ها مجموعه‌ای از ریشه‌های $f(x)$ هستند. حال داریم:

$$1 = |g(n)| \ge \Pi_i(n - |\alpha_i|) > \Pi_i(n - (H + 1)) \ge 1$$

که تناقض است پس $f(x)$ در $\mathbb{Z}[x]$ تحویل ناپذیر است. ■

به عنوان مثال اگر $f(x) = x^4 + 6x^2 + 1$، چون $f(8) = 4481$ عددی اول است پس f روی $\mathbb{Z}$ تحویل ناپذیر است. دقت می‌کنیم که طبق قضیه ۳ نمی توان قضیه Cohn را نتیجه گرفت چون بنا بر قضیه بالا، حداقل مقدار n، باید ۱۱ باشد. در واقع اینجا نمی‌توانیم بگوییم که اگر $f(10)$ اول باشد آنگاه $f(x)$ تحویل ناپذیر است، به عنوان مثال ناقضی برای این مطلب فرض کنید $f(x) = x^3 - 9x^2 + x - 9$. کمی جدی‌تر با مساله برخورد کنیم. می‌دانیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت $\sum_{i=0}^{r} a_i 10^i$ نوشت که در آن $-1 \le a_i \le 8$ چون اعداد صحیح واقع در بازه‌ی $[-1, 8]$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به پیمانه ۱۰ را تشکیل می‌دهند. و نیز اگر $b > 2$ عددی صحیح باشد، هر عدد را می‌توان به شکل $\sum_{i=1}^{r} a_i b^i$ نمایش داد که در آن $|a_i| \le b/2$.

لم۵. *فرض کنید $f(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i x^i$ متعلق به $\mathbb{Z}[x]$ باشد. فرض کنید $a_n \ge 1$، $a_{n-1} \ge 1$ و $|a_i| \le H$ برای $0 \le i \le n-1$ که H عددی مثبت و ثابت است. در این صورت اگر α ریشه‌ای مختلط از $f(x)$ باشد، قسمت حقیقی α نامثبت است یا $|\alpha| < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4H})$.*

برهان. فرض کنیم که $|\alpha| > 1$ و $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. در این صورت:

$$0 = \left|\frac{f(\alpha)}{\alpha^n}\right| \ge \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{\alpha}\right| - H\left(\frac{1}{|\alpha|^2} + \dots + \frac{1}{|\alpha|^n}\right) > Re\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{\alpha}\right) - \frac{H}{|\alpha|^2 - |\alpha|} \ge 1 - \frac{H}{|\alpha|^2 - |\alpha|}$$

پس $|\alpha|^2 - |\alpha| < H$. ■

حال به مهم‌ترین قضیه این مقاله می‌رسیم:

قضیه۶. *فرض کنید که $b > 1$ عددی صحیح و p عدد اولی باشد که بسط مبنای b آن به صورت*

$$p = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

است. در این صورت چندجمله‌ای $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ روی $\mathbb{Q}$ تحویل ناپذیر است.

برهان. توجه کنید که بنابر قضیه ۱، می‌توانیم تحویل ناپذیری را در $\mathbb{Z}[x]$ در نظر بگیریم. فرض کنیم که چندجمله‌ای‌های غیر ثابت $g(x)$ و $h(x)$ در $\mathbb{Z}[x]$ موجود باشند به طوری که $f(x) = g(x)h(x)$ چون $f(b) = p$ عددی اول است، فرض کنیم که $g(b) \in \{\pm 1\}$. فرض کنیم که $g(x) = c\Pi_i(x - \alpha_i)$ که در آن α_i ها زیرمجموعه‌ای از صفرهای f و c عددی درست و غیر صفر است. دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $b > 2$. در این صورت بنابر لم ۵ برای هر ریشه‌ی f مثل α، یا $R(\alpha) < 0$ پس $|b - \alpha| \ge b$، یا $|\alpha| < \frac{1+\sqrt{1+4(b-1)}}{2} \le b - 1$. و لذا در هر حال برای هر i داریم: $|b - \alpha_i| > 1$ و در نتیجه $1 = |g(b)| > 1$ که تناقض است. پس در این حالت $f(x)$ تحویل ناپذیر است.

حالت دوم: $b = 2$. در این حالت از لم زیر استفاده می‌کنیم:

لم ۷. *فرض کنید α ریشه‌ای مختلط از $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ باشد که در آن $a_m = 1$ و هر a_i دیگر ۰ یا ۱ است. اگر $|\arg\alpha| \leq \frac{\pi}{4}$، آنگاه $|\alpha| < \frac{3}{2}$ در غیر این صورت*

$$Re(\alpha) < (1+\sqrt{5})/(2\sqrt{2})$$

برهان. حالات $m = 1$ و $m = 2$ مستقیماً به دست می‌آیند. فرض کنید که $m \geq 3$ و $z \neq 0$. در این صورت

$$|\frac{f(z)}{z^m}| \geq |1 + \frac{a_{m-1}}{z} + \frac{a_{m-2}}{z^2}| - (|\frac{1}{|z|^3} + \ldots + \frac{1}{|z|^m})$$

حال برای z هایی که $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$، $\mathrm{Re}(1/z^2) \geq 0$ که نتیجه می‌شود:

$$|\frac{f(z)}{z^m}| > 1 - \frac{1}{|z|^2(|z|-1)} = \frac{|z|^3 - |z|^2 - 1}{|z|^2(|z|-1)}$$

می دانیم که تابع $p(z) = x^3 - x^2 - 1$ دقیقاً یک ریشه حقیقی در بازه‌ی $(\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$ دارد. پس اگر $|z| \geq \frac{3}{2}$ و $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$، $f(z) > 0$ و لذا اگر $|\arg\alpha| \leq \frac{\pi}{4}$، $|\alpha| < \frac{3}{2}$. از طرف دیگر اگر $|\arg\alpha| > \frac{\pi}{4}$، بنابر لم ۵، $|\alpha| < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ پس $\mathrm{Re}(\alpha) < \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. ■

با توجه به لم ۷، برای ریشه‌های $g(x)$ برای هر i، $\mathrm{Re}(\alpha_i) < \frac{3}{2}$. حال چون ضرایب $g(x + \frac{3}{2})$ مثبت است (چرا؟) و اگر $x \geq 0$ آنگاه ضرایب $g(-x + \frac{3}{2})$ متناوب است، پس $\pm g(-x + \frac{3}{2}) < g(x + \frac{3}{2})$ و لذا $|g(-x + \frac{3}{2})| < g(x + \frac{3}{2})$. پس اگر بگیریم $x = \frac{1}{2}$ آنگاه $|g(1)| < g(2)$. ولی $g(1) \neq 0$ پس $1 < g(2) \in \{\pm 1\}$ که تناقض است و در نتیجه در این حالت هم $f(x)$ تحویل ناپذیر است. ■

می‌توانیم تعمیمی از قضیه‌ی Cohn ارائه دهیم. فرض کنیم که F_q میدانی با q عضو باشد که q توانی از یک عدد اول است. می‌خواهیم نرمی[1] روی $K = F_q(t)$، میدان توابع گویا روی F_q، بگذاریم. در اینجا ما روی K نرم $|f(t)/g(t)| = q^{\deg f - \deg g}$ را در نظر می‌گیریم که در آن $f(t)$ و $g(t)$ چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب در F_q اند. چون در زیر ما از ریشه‌های یک چمدجمله‌ای می‌خواهیم نرم بگیریم بهتر است که این نرم را روی تتمیمی[2] از $F_q(H)$ گسترش دهیم. در واقع یک تتمیم از F تحت $||$ وجود دارد (به‌عنوان تمرینی در آنالیز ۱ می‌توانید این مطلب را ثابت کنید.)

[1] یک نرم مثل $|.|$، نگاشتی از میدانی مانند F به میدانی مرتب است به طوری که برای هر $a, b \in F$، داشته باشیم: $|a| \geq 0$ و $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ و $|ab| = |a||b|$ و $|a+b| \leq |a| + |b|$.

می‌گوییم نرم $||$ روی F، ارشمیدسی است اگر برای هر $a, b \in F$ که $b \neq 0$ عدد صحیح n وجود داشته باشد به طوری که $|nb| > |a|$ در غیر این صورت می‌گوییم $||$ ناارشمیدسی است. در واقع اگر برای هر $a, b \in F$، $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ آنگاه $||$ ناارشمیدسی است که عکس این مطلب هم درست است.

[2] اگر $||$ نرمی روی میدان F باشد، آنگاه یک تتمیم از F تحت $||$، یک سه‌تایی $< \hat{F}, ||', \phi >$ است که در آن $\hat{F}$ یک میدان، $||'$ یک نرم از $\hat{F}$ و ϕ یک همریختی یک به یک از F به $\hat{F}$ است به طوری که بابت متر وابسته به $||'$، ($d(a,b) = |a-b|'$) هر دنباله‌ی کوشی از عناصر $\hat{F}$، به یک عنصر در $\hat{F}$ همگراست، برای هر $a \in F$، $|a| = |\phi(a)|'$ و $\phi(F)$ در $\hat{F}$ چگال است. (در توپولوژی وابسته به $||'$.)

می گوییم F تحت || تام است اگر $<F, ||, i_F>$، که i_F نگاشت همانی روی F است، یک تتمیم از F تحت || باشد. طبق قضیه‌ای اگر F تحت نرم ناارشمیدسی || تام باشد و E توسیعی متناهی از F باشد و $n = [E:F]$، آنگاه || گسترشی یکتا به یک نرم $||_E$ روی E دارد. و اگر $\alpha \in E$ آنگاه $|\alpha|_E = |N_{E/F}(\alpha)|^{\frac{1}{n}}$ که در آن $N_{E/F}$ نرم از E به F است. حال فرض کنیم که $b(t)$ یک چندجمله‌ای از درجه مثبت و $p(t)$ یک چمدجمله‌ای تحویل ناپذیر باشد که در پایه‌ی $b(t)$ به صورت $p(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) b(t)^i$ باشد. در این صورت چندجمله‌ای $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) x^i$ در $K[x]$ تحویل ناپذیر است. در واقع اگر $\bar{K}$ بستار جبری K باشد، g بدین صورت تجزیه می‌شود: $g(x) = x(t)\Pi_i(x - \alpha_i(t))$ پس داریم

$$|g(b(t))| \geq \Pi_i(|b(t)| - |\alpha_i(t)| > \Pi_i(q^{\deg b} - (q^{\deg b - 1} + 1)) \geq 1$$

مگر اینکه $q = 2$ و $\deg b = 1$ که این حالت هم بدیهی است.

مثلا اگر $p(t) = t^4 + t + 1$ و $b(t) = t^2 + 1$ آنگاه در $F_2(t)$، $p(t) = (t^2 + 1)^2 + t$ که به وضوح $f(x) = x^2 + t$ روی $F_2(t)$ تحویل ناپذیر است. حسن ختام این مقاله، مساله زیر است:

فرض کنید n عددی طبیعی و $f(x)$ چندجمله‌ی درجه n ام در $\mathbb{Z}[x]$ باشد. ثابت کنید اگر به ازای n عدد صحیح متمایز مقدار $p(x)$ مخالف صفر و قدر مطلقش از $\frac{(n-\frac{n}{2})!}{2^{n-\frac{n}{2}}}$ کمتر باشد، آنگاه $f(x)$ در $\mathbb{Z}[x]$ تحویل ناپذیر است.

دو هفته پیش سر یکی از کلاسهام این نکته رو درباره ذهن یاد گرفتم، البته در جواب یکی از همکلاسی‌ها که پرسید: Moduli Space چیه؟ و جواب:

بشر این توانایی رو داره که از بیرون به ذهن و افکار خودش نگاه کنه، به این می‌گن عقل انتقادی و شاید به این دلیل به بشر اعطا شده که با وجود ذهن بسیط بشر، بدون این توانایی دلیلی وجود نداشت که انسان خودش رو خدا فرض نکنه و بنابراین ممکن نبود که بتونه به خدا ایمان بیاره. Moduli Space هم چیزی شبیه به اینه!

جواب قشنگیه، نه؟

دکتر بهزاد در دانشکده ریاضی

مژگان ناصری

هجدهمین سمینار از سلسله سمینارهای سرنخ و اولین سمینار در سال جاری روز ۲۰ آذر با سخنرانی دکتر بهزاد برگزار شد.

دکتر بهزاد در آغاز سخنرانی گفت با وجود مشغله‌های مختلف هیچ وقت دعوت دانشجویان را رد نمی‌کند چون اعتقاد دارد کار با دانشجویان از هر کار دیگری واجب‌تر است و اضافه کرد: «اجازه بدهید امروز هرچه به ذهنم می‌رسد بگویم.»

وی در ابتدای صحبت در یک فضای بسیار صمیمی و مملو از انرژی به بیان چند لطیفه ریاضی پرداخت.

روزی آماردانی تصمیم می‌گیرد با هواپیما به جایی برود. قبل از سوار شدن به هواپیما، بازرسان در وسایل آماردان یک بمب پیدا می‌کنند و او را بازداشت می‌کنند و متوجه می شوند که او یک دانشمند معروف است و با کلی تعجب از او می‌پرسند که هدفش از این کار چه بوده؟ آماردان جواب می‌دهد با محاسبات مختلف متوجه شده که احتمال این که یک بمب در هواپیمایی باشد $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ است و این احتمال خیلی زیاد است. ولی احتمال اینکه ۲ بمب در هواپیمایی باشد $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$ است و این احتمال به اندازه کافی کوچک است!

(به علت کمبود جا از نوشتن بقیه لطیفه‌ها معذوریم ولی توصیه می‌کنیم اگر در جلسه شرکت نداشته‌اید، بقیه لطیفه‌ها را از کسانی که در جلسه حاضر بوده‌اند بپرسید!)

در ادامه دکتر بهزاد با بیان این نکته که محض و کاربردی در ریاضیات معنی ندارد به دانشجویان خصوصاً مقطع کارشناسی توصیه کرد بدون توجه به محض و کاربردی بودن درس‌ها سر کلاس‌ها بروند و درس‌های متنوعی بگیرند و اطلاعات خود را بالا ببرند.

وی افزود ۷۴ سال پیش در کشور هیچ ریاضیدانی نداشتیم و وقتی سیر این علم را تا به امروز نگاه می‌کنیم می‌بینیم که به جای خیلی خوبی رسیده‌ایم ولی صنعت ریاضیات ما خیلی کهنه است و نیاز فراوانی به بازنگری دارد. وی با انتقاد از وضعیت کتب ریاضی و تدریس آنها در مدارس و دانشگاه‌ها گفت برنامه‌های درسی دانشگاه برنامه‌هایی است که ۳۰ سال پیش وزارت علوم نوشته است و برای امروز اصلاً کارآمد نیست و گفت انجمن ریاضی ایران با پیشنهاد طرحی ۲ ساله به وزارت علوم خواستار آن شده است که مسئولیت برنامه‌ریزی بخش ریاضی را در مدارس و دانشگاه‌ها به عهده بگیرد که در نهایت درگیرو دار کارهای اداری پذیرفته نشده است. و به اساتید توصیه کرد با وجود موانع بسیار همه تلاش خود را برای بهبود کیفیت آموزشی به کار ببرند.

دکتر بهزاد در ادامه با بیان اینکه لذتی که از ریاضی خواندن به انسان دست می‌دهد توصیف کردنی نیست گفت فرق ریاضی و بازی فوتبال در این است که در فوتبال ۱۱ نفر بازی می‌کنند و صدهزار نفر می‌توانند لذت ببرند ولی برای لذت بردن از ریاضی هرکسی خودش باید بازی کند و گفت انجمن ریاضی ۱۰ روز اول آبان ماه را دهه ریاضی

نامیده و از سال آینده قرار است که در این ده روز با برپایی سمینارها و نمایشگاه‌هایی به عامه مردم خدمات ریاضی داده شود و به سمت عمومی کردن ریاضی پیش برویم.

در پایان دکتر بهزاد به طرح چند سوال جایزه دار پرداخت.

اولین سوال این بود که آیا نسخه‌ای وجود دارد که مساله معروف مسطح نبودن گراف $K_{3,3}$ را به شیخ بهایی منسوب کند. دکتر بهزاد با بیان اینکه این مساله را در کودکی به عنوان مساله‌ای از شیخ بهایی از پدرش شنیده است، گفت در صورت پیدا شدن چنین نسخه‌ای تاریخ پیدایش گراف، که در حال حاضر مربوط به مساله هفت پل کونیگسبرگ است، ۲۰۰ سال به عقب می‌رود و افزود برای این سوال ۱۰۰ هزار تومان جایزه گذاشته است!

مساله بعدی حدسی راجع به عدد رنگی کلی گراف بود: اگر χ'' را کوچک‌ترین عددی تعریف کنیم که بتوان یال‌ها و راس‌های یک گراف را با آن رنگ زد بدون این که هیچ دو راس و هیچ دو یال و هیچ راس و یال مجاوری همرنگ باشند؛ آنگاه $\Delta + 1 \leq \chi'' \leq \Delta + 2$ که Δ ماکسیمم درجه گراف است.

اثبات شده است، احتمال این که این حدس اشتباه باشد تقریبا صفر است. با توجه به این حدس می‌توان گراف‌ها را بر اساس عدد رنگی کلی آنها رده‌بندی کرد و احتمال اینکه برای یک گراف دلخواه $\chi'' = \Delta + 1$ تقریباً یک است.

این حدس به صورت $\Delta + 1 \leq \chi'' \leq \Delta + 10^{27}$ ثابت شده بود و ۲ سال پیش 10^{27} به ۵۰۰ تقلیل پیدا کرد که موفقیت بزرگی بود.

با تشکر از دکتر بهزاد که دعوت بچه‌های انجمن علمی را پذیرفتند برای ایشان آرزوی سلامت و توفیق روزافزون می‌کنیم و امید داریم که جامعه ریاضی کشور به‌خصوص کسانی که در ابتدای راه قرار دارند، سالیان سال از شادابی و طراوت ایشان بهره ببرند.

چند قضیه درباره مشتق راست انتگرال بعضی توابع

مریم طریری

در این یادداشت فرض می‌کنیم f یک تابع حقیقی مقدار روی بازه $[0,1]$ بوده و روی این بازه کران‌دار است و همچنین f روی بازه $(0,1]$ پیوسته بوده و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ وجود ندارد.

حال قرار می‌دهیم

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

سوال این است که آیا مشتق راست F وجود دارد یا نه؟

$$F'_+(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$$

قبل از بیان نتیجه کلی، ϕ را یک تابع دوبار مشتق پذیر، نزولی و نامنفی در نظر می‌گیریم که روی بازه $(0,1]$ تعریف شده است به طوری که $\phi'(x)$ روی بازه $(0,1]$ صعودی است و:

$$\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^+} x\phi'(x) = -\infty$$

حال، g را یک تابع حقیقی مقدار، پیوسته و کراندار روی بازه $[0,\infty)$ در نظر بگیرید که $G' = g$ و G روی $[0,\infty)$ کراندار باشد و $\lim_{x\to\infty} g(x)$ وجود نداشته باشد.

قضیه ۱. *با توجه به تعریف ϕ و g و G در بالا قرار می‌دهیم: $f(x) = g(\phi(x))$ آنگاه خواهیم داشت:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-1} \int_0^x f(t)dt = 0$$

برهان. با توجه به کران دار بودن G،

$$\exists M > 0, \ \forall x \geq 0, \ |G(x)| \leq M$$

با توجه به شرایط ϕ در تعریف خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0^+} \phi'(x) = -\infty$$

پس $\lim_{t\to 0^+} G(\phi(t))/\phi'(t) = 0$

با قرار دادن $u = \frac{1}{\phi'}$ و $v = G(\phi)$ و انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_0^x f(t)d(t) = \int_0^x g(\phi(t))dt = \frac{G(\phi(x))}{\phi'(x)} - \int_0^x G(\phi(t))(\frac{1}{\phi'(t)})'dt$$

و با توجه به کراندار بودن G داریم:

$$\begin{aligned}|\int_0^x f(t)dt| &\le \frac{M}{|\phi'(x)|} + M\int_0^x |(\frac{1}{\phi'(t)})'|dt\\ &\le \frac{M}{|\phi'(x)|} - M\int_0^x (\frac{1}{\phi'(t)})'dt\\ &\le \frac{M}{|\phi'(x)|} + \frac{M}{|\phi'(x)|} = \frac{2M}{|\phi'(x)|}\end{aligned}$$

با تقسیم طرفین بر x :

$$|\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}| \le \frac{2M}{|x\phi'(x)|}$$

از فرض مساله داشتیم: $\lim_{x\to 0^+} x\phi'(x) = -\infty$

پس به دست می‌آید: $\lim_{x\to 0^+} \int_0^x f(t)dt = 0$ و قضیه ۱ ثابت می‌شود.

برای مثال اگر $g(x) = \sin x$ و $\phi(x) = \frac{1}{x}$ و یا $g(x) = \cos x$ و $\phi(x) = \frac{1}{x}$ نتایج آشنایی به دست می‌آیند.

در بررسی بعدی به $\lim_{x\to 0^+} \int_0^x x^{-1} \sin(\ln t)dt$ می پردازیم که در شرایط قضیه صدق نمی‌کند و می دانیم که وجود ندارد.

برای آنکه نگاه دقیقی‌تری به این پدیده بیاندازیم یک خانواده از ϕ_n ها طوری می‌سازیم که :

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-1} \int_0^x \sin(\phi_n(t))dt$$

برای هیچ n ای موجود نباشد.

فرض کنید $\phi_1(t) = \ln t$ و برای هر عدد طبیعی n، $\phi_n(t)$ را با فرمول بازگشتی :

$$\phi_{n+1}(t) = \ln(\ln(e^{\phi_n(t)} + 1), \quad (t > 0)$$

برای مثال :

$$\phi_2(t) = \ln(\ln(t+1)), \quad \phi_3(t) = \ln(\ln(\ln(t+1)+1)))$$

به خاطر داشته باشید که $\lim_{t\to 0^+} \phi_n(t) = -\infty$ و همچنین $\lim_{t\to 0^+} t\phi_n'(t) = 1 (\forall n \ge 1)$

دو واقعیتی که وضوح کمتری دارند در زیر به صورت لم آمده‌اند:

لم ۲. *برای تابع ϕ_n داریم:*

$$\lim_{t\to 0^+} e^{\phi_n(t)} \cdot \phi_n'(t) = 1, \quad (\forall n \ge 1)$$

برهان. با استقرا روی n خواهیم داشت

$$n = 1, \quad e^{\phi_1(t)}\phi_1'(t) = 1 \quad \forall t > 0$$

برای استقرا رابطه $\phi_{n+1}(t) = \ln(\ln(e^{\phi_n(t)} + 1))$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}\phi'_{n+1}(t) &= \frac{1}{\ln(e^{\phi_n(t)}+1)}\cdot\frac{d}{dt}(\ln(e^{\phi_n(t)}+1)) \\ &= e^{\phi_{n+1}(t)}\end{aligned}$$

به دست می‌آوریم:

$$e^{\phi_{n+1}(t)}\cdot\phi'_{n+1}(t) = \frac{1}{e^{\phi_n(t)}+1}\cdot e^{\phi_n(t)}\cdot\phi'_n(t)$$

در حد که x از راست به صفر میل می‌کند، اولین جمله سمت راست به سمت ۱ میل می‌کند. پس از فرض استقرا خواهیم داشت

$$\lim_{t\to 0^+} e^{\phi_{n+1}(t)}\cdot\phi'_{n+1}(t) = \lim_{t\to 0^+} e^{\phi_n(t)}\cdot\phi'_n(t) = 1$$

و لم ثابت می‌شود ■

لم ۳. *برای* $n \geq 2$ *داریم* $\lim_{t\to 0^+}[\phi_n(t) - \ln t] = 0$

برهان. $n \geq 2$ را ثابت در نظر می‌گیریم، عبارت $\lim_{t\to 0^+} e^{|\phi_n(t)-\ln t|}$ یا هم ارز آن $\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{\phi_n(t)}}{t}$ نامعین است.

با به کار بردن قانون هوپیتال و لم ۲ می‌بینیم که $\lim_{t\to 0^+} e^{\phi_n(t)}\cdot\phi'_n(t) = 1$ در نتیجه

$$\lim_{t\to 0^+} e^{|\phi_n(t)-\ln t|} = 1$$

با ln گرفتن از دو طرف لم ثابت می‌شود. ■

حال آماده‌ایم تا ادعای اصلی را راجع به تابع ϕ_n ثابت کنیم.

قضیه ۴. *برای هر عدد طبیعی* n $\lim_{x\to 0^+} x^{-1}\int_0^x \sin(\phi_n(t))dt$ موجود نیست.

برهان. به حالت $n = 1$ قبلاً اشاره شد. دو بار به کار بردن انتگرال‌گیری جزء به جزء نشان می‌دهد که

$$\int_0^x \sin(\ln t))dt = (\frac{x}{2})[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$$

این نتیجه می‌دهد که وقتی x از سمت راست به صفر میل کند مقدار $x^{-1}\int_0^x \sin(\ln t)dt$ بین دو مقدار $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ نوسان می‌کند.

برای حالت‌های باقیمانده، $n \geq 2$ را ثابت نگه می‌داریم و ϵ دلخواه را در نظر می‌گیریم. تابع sin به طور یکنواخت روی تمام اعداد حقیقی پیوسته است پس وجود دارد $\delta > 0$ که:

$$|\sin x - \sin y| < \epsilon, \quad |x - y| < \delta$$

با توجه به لم ۳ وجود دارد $b > 0$ به طوری که $|\ln t - \phi_n(t)| < \delta$

به شرطی که $0 < t \leq b$. پس برای هر چنین t ای داریم

$$|\sin(\ln t) - \sin(\phi_n(t))| < \epsilon$$

نتیجه می‌گیریم که برای $0 < x \leq b$،

$$\left|\frac{\int_0^x \sin(\ln t)dt}{x} - \frac{\int_0^x \sin(\phi_n(t))dt}{x}\right| \leq \frac{\int_0^x |\sin(\ln t) - \sin(\phi_n(t))|dt}{x} < \frac{\int_0^x \epsilon dt}{x} = \epsilon$$

چون $\epsilon > 0$ دلخواه بود و مقدار $x^{-1}\int_0^x \sin(\ln t)dt$ بین $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ نوسان می‌کند قضیه نتیجه می‌شود. ■

اثبات قضیه ۲ این ایده را می‌دهد که مقدار $x^{-1}\int_0^x \sin(\phi_n(t))dt$ بین $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ نوسان کند (وقتی $\forall n, x \to 0^+$) ایده‌ای که توسط نرم‌افزارهای قدرتمند مانند Maple تخمین زده شده‌است. هم‌چنین بدیهی است که با توجه به اثبات، تابع $\sin x$ می تواند با تابع g که به طور یکنواخت روی اعداد حقیقی پیوسته است و $x^{-1}\int_0^x g(\ln t)dt$ وجود نداشته باشد عوض شود.

صرف‌نظر از تابع $\cos x$ (که حالتی بدیهی است)، از تابع دیگری اطلاعی نداریم.

شماره دوازدهم، نیمهٔ دوم دیماه ۱۳۸۱

همکاران این شماره:

سلمان ابوالفتح بیگی، مهدی اعتماد سعید، شیرین خداکرم زاده، هابیل زارع، حمید شکاری، علیرضا شیخ‌عطار، حسام عباس‌پور، فاضله فلاح، هما کبیری، رویا کریمیان، سیدعباس موسوی، مژگان ناصری.

اخبار دانشکده

اگر اهل سمینار دادن و سمینار گوش کردن باشید، متوجه شده‌اید که تعداد سمینارهای هفتگی در دانشکده رشد زیادی کرده است و ان‌شاء الله منظم‌تر خواهد شد.

دکتر رستگار که زحمت هماهنگ کردن این سمینارها را به عهده دارند، در تلاشند تا در ترم آینده هر روز یک سمینار در دانشکده داشته باشیم که برنامه آن از طریق اینترنت و جداول مخصوصی اعلام می‌شود. این سمینارها انواع مختلفی دارند که به شرح زیر است:

۱) سمینار دانشجویی دانشکده ریاضی:

هر هفته دو نفر از دانشجویان کارشناسی ارشد و دکترا یک سخنرانی از فعالیت خود برای دیگر دانشجویان انجام می‌دهند.

۲) سلام ریاضی:

مخصوص ورودی‌های جدید است ولی برای ورودی های قدیم هم مفید است.

۳) سمینار دانشکده ریاضی:

مخصوص بزرگ‌ترهاست و استادان در آن شرکت خواهند کرد.

۴) سرنخ:

همان سرنخ پرسابقه است که توصیفی و شهودی است و برای آشنایی کلی عامه دانشجویان توسط اهل فن انجام می‌شود.

۵) تریبون ریاضی:

دانشجویان فرصتی دارند تا برای دوستان خود از تجارب و یافته‌های لذت‌بخش خود آزادانه سخن بگویند.

به امید آنکه این تلاش به پویشی مداوم در جو علمی دانشکده‌مان بیانجامد.