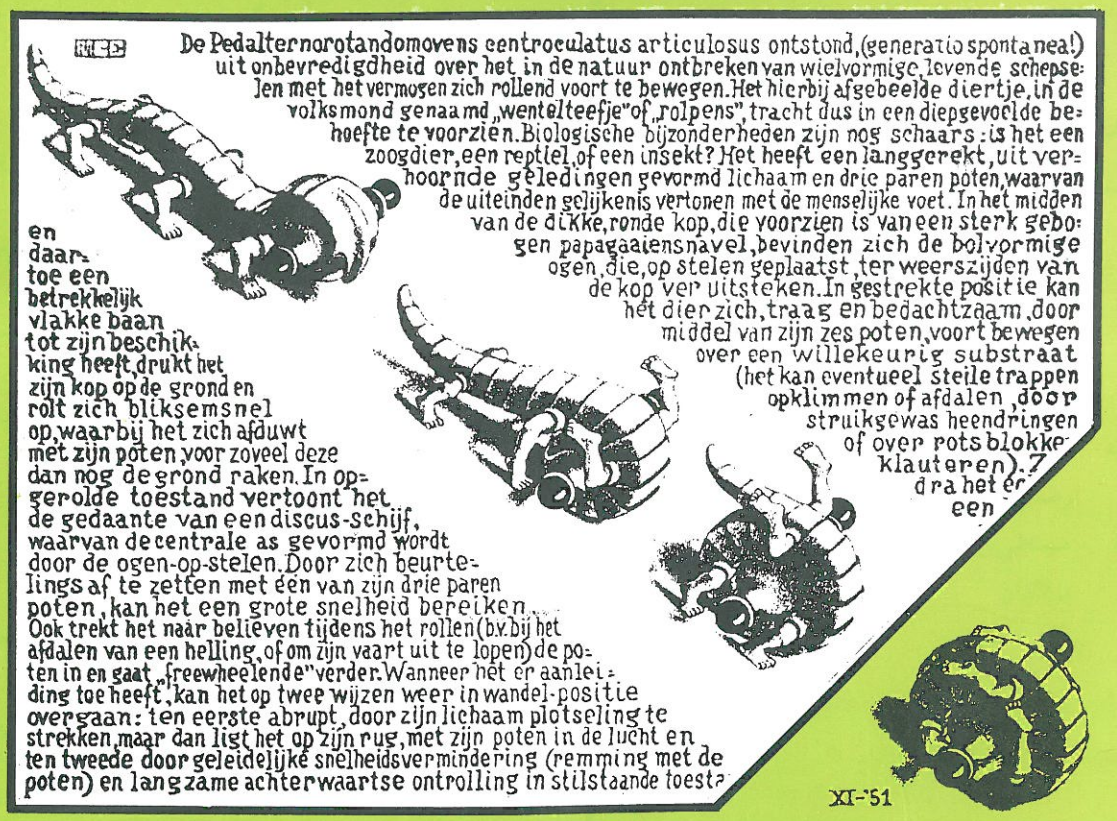
مجلهٔ ریاضی

دانشجویان دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

شمارهٔ پنجم، پاییز ۱۳۷۳



سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات

بیست و پنج سال کنفرانس ریاضی

داستان حدس پوانکاره در ابعاد بالا (در سواحل ریو واقعاً چه گذشت)

نقش فشردگی در ایده‌آلهای ماکزیمال حلقهٔ توابع پیوستهٔ $R(A)$

چند سؤال در کوهمولوژی موضعی

معادلات سیاله

نگاهی به تاریخ ریاضیات ایران

گفتگو با دکتر امین شکراللهی

بسم الله الرحمن الرحیم

مجلهٔ ریاضی

دانشجویان دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف
شمارهٔ ۵، پاییز ۱۳۷۳

استاد مشاور: یحیی تابش

سردبیر: حسین حاجی‌ابوالحسن

همکاران:

رامین تکلوبیغش
روح‌الله جهانی‌پور
مانی رضائی
بهشته مستغنی‌یزدی
آریان مولائیان

و

مهری باقری‌هامانه، رؤیا بهشتی، مرتضی علی‌گلی،
مریم میرزاخانی، سیروس همایونی

طرح: کیومرث کاوه

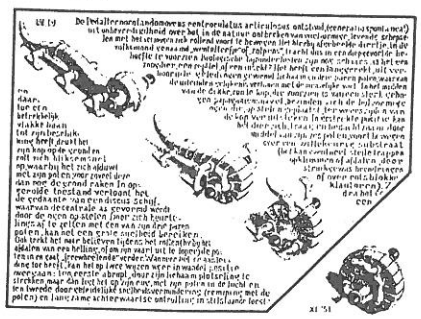
حروفچینی: زهره اسدی
(دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف)

لیتوگرافی، چاپ، صحافی: چاپخانهٔ دانشگاه صنعتی شریف

فهرست مطالب

خرده یادداشت		۱
سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات		۳
بیست و پنج سال کنفرانس ریاضی	مانی رضائی	۵
داستان حدس پوانکاره در ابعاد بالا (در سواحل ریو واقعاً چه گذشت)	استیو اسمیل	۷
نقش فشردگی در ایده‌آلهای ماکزیمال حلقهٔ توابع پیوسته $R(A)$	جواد حاجی‌بابایی	۱۷
چند سؤال در کوهمولوژی موضعی	کامران دیوانی‌آذر	۲۱
معادلات سیاله	مهدی عسگری	۲۵
نگاهی به تاریخ ریاضیات ایران	روح‌الله جهانی‌پور	۲۹
گفتگو با دکتر امین شکراللهی		۳۳

مجلهٔ ریاضی
دانشجویان دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف
شمارهٔ پنجم، پاییز ۱۳۷۳



روی جلد:

اثری از موریتس کورنلیس اشر
Maurits Cornelis Escher
(۱۸۹۸ – ۱۹۷۲)

خرده یادداشت

اولین فارغ‌التحصیل دورهٔ دکترای ریاضیات دانشکدهٔ علوم ریاضی

خانم دکتر نسرین سلطانخواه اولین فارغ‌التحصیل دورهٔ دکترای دانشکدهٔ علوم ریاضی در تاریخ ۱۴ فروردین ماه ۱۳۷۳ از رسالهٔ خود تحت عنوان **طرحهای بلوکلی جهت‌دار** دفاع کرد و به اخذ درجهٔ دکترا نائل آمد.

استاد راهنمای رسالهٔ ایشان آقای دکتر محمودیان استاد دانشکدهٔ علوم ریاضی بود. و اعضای کمیتهٔ رسالهٔ ایشان دکتر مهدوی‌هزاوه‌ای و دکتر زنگنه (ممتحنین داخل دانشکده) و خانم دکتر آن استریت و آقایان دکتر هادی خرقانی و دکتر غلامرضا خسروشاهی (ممتحنین خارج از دانشکده) بودند.

خانم دکتر سلطانخواه رسالهٔ خود را با درجهٔ خیلی خوب گذراندند.

مسابقات دانشجویی

در کنفرانس ریاضی امسال نیز مانند سالهای پیش شاهد برگزاری مسابقه دانشجویی ریاضی بودیم که با موفقیت دانشجویان دانشکده توأم بود. در این مسابقه نتایج زیر بدست آمد:

نفر اول	رامین تکلو بیغش	دانشگاه صنعتی شریف
نفر دوم	کسری رفیع	دانشگاه صنعتی شریف
نفر سوم	بهرنگ نوحی	دانشگاه صنعتی شریف
نفر چهارم	پیمان لکسایی	دانشگاه صنعتی شریف
نفر پنجم	امین‌الله زرگریان	دانشگاه تهران

برای نخستین بار مؤسسهٔ انتشاراتی اشپرینگر فرلاگ هزار مارک آلمان اعتبار برای خرید کتاب به برگزیدگان مسابقه دانشجویی اختصاص داد که عمل قابل تقدیری بود.

المپیاد ریاضی سال ۷۳

مرحلهٔ اول یازدهمین المپیاد ملی ریاضی در تاریخ ۵ آذرماه ۱۳۷۳ با شرکت حدود ۶هزار دانش‌آموز سالهای سوم و چهارم دبیرستانهای سراسر کشور برگزار شد. لازم به ذکر است که امسال برای اولین بار دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان نیز می‌توانستند در المپیاد مقدماتی ریاضی شرکت کنند. از این تعداد حدود ۱۸۰ نفر از دانش‌آموزان سالهای سوم و چهارم و ۱۵ نفر از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان برای شرکت در مرحلهٔ دوم که در شیراز برگزار شد پذیرفته شدند. این مرحله از آزمون همزمان با دههٔ فجر از تاریخ ۲۶ تا ۳۱ بهمن در طی دو مرحله برگزار شد و بالاخره ۱۰ نفر پذیرفته شدند. جهت آمادگی برای شرکت در المپیاد جهانی ریاضی از اول اسفند ماه اردویی در دانشگاه صنعتی شریف زیر نظر دکتر تابش برگزار شد. این اردو تا اواخر اردیبهشت ادامه داشت و در طی آن مباحث مختلف ریاضی توسط افرادی که

اکثر آنان را منتخبان المپیادهای سالهای گذشته تشکیل می‌دادند، تدریس می‌شد. در ضمن جهت آمادگی بیشتر هر پنج‌شنبه، امتحانی گرفته می‌شد و سپس برای انتخاب دانش‌آموزان اعزامی به المپیاد جهانی ریاضی امتحانی برگزار و سپس مجدداً یک ماه اردو مخصوص این دانش‌آموزان تشکیل شد و در نهایت در ۱۵ تیر دانش‌آموزان به هنگ‌کنگ (محل برگزاری سی و پنجمین المپیاد جهانی ریاضی) اعزام شدند. مانند المپیادهای گذشته امتحان در دو مرحله که هرکدام شامل سه سؤال ۷ امتیازی بودند برگزار شد و تیم ایران موفق به کسب دو مدال طلا، دو مدال نقره و دو مدال برنز گردید و در بین ۷۰ کشور شرکت کننده، تیم ایران مقام هشتم را پس از کشورهای آمریکا، چین، روسیه، بلغارستان، مجارستان، ویتنام و انگلستان کسب کرد. اعضاء تیم عبارت بودند از

مریم میرزاخانی و مازیار رامین‌راد که مدال طلا گرفتند؛
رویا بهشتی‌زواره و رضا صادقی که مدال نقره گرفتند؛
و علی نورمحمدی و امید نقشینه‌ارجمند که مدال برنز گرفتند.

اولین المپیاد ریاضی اکو

در جهت گسترش همکاریهای علمی بین کشورهای اسلامی منطقه، امسال اولین المپیاد ریاضی اکو با میزبانی ایران و در تهران از تاریخ ۱۰ الی ۱۶ شهریور ماه برگزار شد. اعضای تیم ایران را خانمها شیوا آشینه و مریم میرزاخانی و آقایان روزبه پورنادر، علیرضا بحرینی، شهریار مطلوب و مازیار رامین‌راد تشکیل می‌دادند. نیز جهت آمادگی بیشتر برای شرکت در این المپیاد اردویی به مدت دو هفته به سرپرستی دکتر محمودیان و آقای رامین تکلوبیغش در محل دانشگاه زنجان برگزار شده بود.

کشورهای شرکت کننده در این مسابقه عبارت بودند از: ایران، ترکمنستان، آذربایجان، قزاقستان، افغانستان، ترکیه و جامعه مسلمانان ترک قبرس.

در ضمن از کشورهای پاکستان و قرقیزستان نیز دعوت به‌عمل آمده بود. در پایان تیم ایران با کسب سه مدال طلا توسط شهریار مطلوب، مازیار رامین‌راد و روزبه‌پورنادر و سه مدال نقره توسط شیوا آشینه، علیرضا بحرینی و مریم میرزاخانی به مقام اول رسید و کشورهای ترکیه و قزاقستان به ترتیب به مقامهای دوم و سوم رسیدند.

دورهٔ تابستانی آشنایی با ریاضیات

سومین دورهٔ تابستانی آشنایی با ریاضیات، ویژهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی، مردادماه سال ۷۳ در دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف برگزار شد. در این دوره که به مدت ۵ روز به‌طول انجامید، حدود ۸۰ نفر از دانش‌آموزان دبیرستانهای تهران و چندتن از دانش‌آموزان شهرهای اطراف تهران شرکت داشتند. برنامه‌های این دوره همچون سالهای گذشته به دو بخش عمده تقسیم می‌شد: صبحها کلاسهای درسی که توسط اساتید و دانشجویان فعال این دانشکده برگزار می‌شد و بعداز ظهرها به نمایش فیلمهای آموزشی ریاضی و نرم‌افزارهای ریاضی اختصاص داشت. در پایان دوره، گواهینامه‌های شرکت در این دوره به دانش‌آموزان شرکت کننده اهداء گردید.

آخرین قضیه فرما اثبات شد؟

در شمارهٔ قبل مجلهٔ ریاضی، خبر «پایان کار قضیه آخر فرما به‌وسیله اندرو وایلز» را آوردیم. پس از مدتی مطلع شدیم که در اثبات طولانی وایلز یک شکاف جدی وجود دارد که خوشبینانه‌ترین اظهار نظرها حکایت از آن داشت که احتمالاً با یک کار یکی دو ساله می‌توان مشکل را برطرف کرد. در آخرین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان که تابستان گذشته در زوریخ (سوئیس) برگزار شد نیز وایلز آخرین سخنران عمومی بود که دربارهٔ کارهایش که اثبات آخرین قضیهٔ فرما از آن نتیجه می‌شد سخن گفت. بنابر قول شرکت کنندگان در کنگره وایلز لحن امیدوارکننده‌ای نداشت. ولی در اواسط آبان ماه ۱۳۷۳ یک پیام در شبکه‌های پست الکترونیکی پخش گردید که مضمون آن می‌تواند به معنای پایان واقعی کار باشد.

به این معنی که اندرو وایلز و یکی از شاگردانش تیلور توانسته‌اند اثباتی جدید از قضیه آخر فرما ارائه دهند که در آن از ایدهٔ سیستم‌های اویلری که مشکل اثبات قبلی را به‌وجود آورده بود استفاده نمی‌شود و به همین دلیل به‌طور قابل ملاحظه‌ای از اثبات قبلی «آسانتر» است. اما با وجود این، اظهار نظر قطعی منوط به بررسی‌های دقیقتری است که احتمالاً چندین ماه به‌طول خواهد انجامید.

سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات، بیانیهٔ ریودو ژانیرو*

در ششم مه سال ۱۹۹۲ پروفسور ژاک لوئی لیونس[۱] رئیس اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیات (IMU)، در مراسم جشن چهلمین سالگرد تأسیس انستیتو ریاضیات محض و کاربردی (IMPA)، در ریودوژانیرو اعلام کرد که سال ۲۰۰۰ سال جهانی ریاضیات نام خواهد گرفت.

سال جهانی ریاضیات تحت نظارت سازمان یونسکو (پروفسور فردریکو مایور[۲])، فرهنگستان علوم جهان سوم (پروفسور عبدالسلام و پروفسور کارلوس چاگاس[۳] که در بیانیهٔ ریودوژانیرو شرکت داشتند)، وزیر تحقیقات و فضای فرانسه (پروفسور ه. کورین[۴])، فرهنگستان علوم برزیل (پروفسور اسرائیل وارگاس[۵])، و رایزنی فدرال سوئیس (دکتر فلاویو کوتی[۶]) برگزار خواهد شد. کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات نیز در آگوست ۱۹۹۴ در زوریخ برگزار خواهد شد.

بیانیهٔ ریودوژانیرو سه هدف مشخص را تعیین نموده است:

هدف نخست: چالشهای عظیم قرن بیست و یکم

دیوید هیلبرت[۷] در کنفرانس سال ۱۹۰۰ در پاریس فهرستی از مهمترین مسائلی را که ریاضیدانان قرن حاضر می‌بایست با آنها دست و پنجه نرم می‌کردند، ارائه کرد. انجمن ریاضی آمریکا[۸] در سال ۱۹۹۰ در گردهمائی عمومی IMU در کوبه[۹] (ژاپن)، پیشنهاد کرد که ریاضیدانان تراز اول که می‌بایست در کمیتهٔ گردش قرن نماینده می‌شدند، ترتیبی صورت دهند که معلوم شود چالشهای عظیم سال ۲۰۰۰ کدامند. رئیس این کمیته پروفسور ژاکوب پالیس[۱۰] (IMPA)، دبیر IMU بود.

هدف دوم: ریاضیات راه توسعه

ریاضیات محض و کاربردی از راههای اصلی درک عالم و گسترش آن است. به همین دلیل کشورهای عضو یونسکو باید به تدریج به سطحی برسند که بتوانند در IMU که در حال حاضر پنجاه عضو دارد، عضو شوند. بنابراین هدف دوم بیانیهٔ ریودوژانیرو این بود که با تمام شدن قرن اغلب کشورهای عضو یونسکو به این سطح برسند. این خود محتاج تلاشی مضاعف در امر تعلیم و تربیت و ـ نکتهٔ بسیار حساس برای کشورهایی که با مشکلات مربوط به منابع مالی روبرو هستند ـ دستیابی به اطلاعات علمی است. این تلاشها که تاکنون به‌طور وسیعی صورت گرفته است مورد تأیید و حمایت دو کمیسیون اصلی IMU بوده است: یکی کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی (ICMI) به ریاست پروفسور م. دِکوتسمان[۱۱] از مادرید و دبیری پروفسور م. نیس از دانمارک و دیگری کمیسیون

---

۱) Jacques Louis Lions
۲) Frederico Mayor
۳) Carlos Changa
۴) H. Curien
۵) Israel Vargas
۶) Flavio Cotti
۷) David Hilbert

---

۸) American Mathematical Society
۹) Kobe
۱۰) Jacob Palis
۱۱) M. de Guzman

گسترش و تبادل ریاضی (CDE) به ریاست پروفسور ناراسیمهان[۱] از بمبئی و دبیری پروفسور پ. برار[۲] از گرنوبل[۳] فرانسه بوده است. هر دوی این کمیسیونها با یونسکو در ارتباط هستند. نمایندهٔ یونسکو در ریودوژانیرو پروفسور آ. مارزولو[۴]، مسئول ریاضیات بود.

هدف سوم: تصویر ریاضیات

بیانیهٔ ریودوژانیرو هدف سومی را نیز مقرر می‌سازد که بنوبهٔ خود حائز اهمیت فراوانی است. این هدف عبارت است از ارائهٔ سازمان یافته ریاضیات در سایهٔ مثالها و کاربردهایی که از نظر علمی دقیق‌اند و نیز طوری که راه برای تمام افراد مشتاق باز باشد. این کار در ارتباط با تلاشهایی که بسیاری از کشورهای عضو IMU تاکنون انجام داده‌اند صورت خواهد پذیرفت. بیانیهٔ ریودوژانیرو مبنی بر اعلام سال ۲۰۰۰ به عنوان سال جهانی ریاضیات نه تنها مورد حمایت صمیمانه تمام ریاضیدانان حاضر در آنجا و نیز آنهایی که از دیگر قاره‌ها آمده بودند و نیز ریاضیدانان برجستهٔ کشور برزیل قرار گرفت، بلکه استادان علوم دیگر، و به‌ویژه پروفسور کارلوس چاگاس رییس سابق فرهنگستان علوم مذهبی[۵] نیز از آن حمایت نمودند.

ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور

*) Declaration of Rio De Janeiro on Mathematics, *Newsletter World Mathematical Year 2000*,1(Summer 1993).

---

۱) M. S. Narasimhan
۲) P. Berard
۳) Gernoble
۴) Marzollo
۵) Pontifical Academy of Science

بیست و پنج سال کنفرانس ریاضی

مانی رضائی
دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

دانشگاه شیراز که در سال ۱۳۴۱ با پذیرش دانشجو دورهٔ جدید فعالیت خود را به نظامی پیشرو و متحول آغاز کرد به کانونی برای جذب نسل دوم ریاضیدانان ایرانی تبدیل شده بود. نظام دانشگاه شیراز مبتنی بر تشویق فعالیتهای علمی و پژوهشی بود و ذهنیت ریاضیدانان نسل دوم برای فعالیت استادی دانشگاه تنها به کارهای آموزشی توجه نداشت و کارهای پژوهشی را نیز طلب می‌کرد. این شرایط بستر مناسبی فراهم کرد تا «کنفرانس ریاضی» در دانشگاه شیراز از ۱۰ تا ۱۲ فروردین ۱۳۴۹ تشکیل شود. بعدها این کنفرانس به‌عنوان «اولین کنفرانس ریاضی کشور» تلقی شد و کنفرانسهای ریاضی به‌طور سالیانه تداوم یافت و اکنون در آستانهٔ برگزاری بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی قرار گرفته‌ایم.

کنفرانسهای ریاضی تاکنون محل ارائهٔ مقالات تحقیقاتی و عرضهٔ سخنرانیهای عمومی در زمینهٔ دستاوردهای نوین ریاضیات و محل تبادل آراء دربارهٔ فعالیتهای سازندگی دانشگاهی بوده است. ریاضیدانان صاحب‌نام بین‌المللی نیز در بعضی از کنفرانسها حضور داشته‌اند که ریاضیدانان ایرانی از تماس با آنان بهره‌مند شده‌اند.

دومین کنفرانس از ۹ تا ۱۲ فروردین ۱۳۵۰ در دانشگاه صنعتی شریف برگزار شد. «انجمن ریاضی ایران» که پیشنهاد تأسیس آن در کنفرانس شیراز مطرح شده بود، در دومین کنفرانس شکل گرفت. شاید بتوان تأسیس انجمن را مهمترین دستاورد کنفرانسهای اول و دوم دانست. از دیگر ویژگیهای کنفرانس دوم حضور ریاضیدانان معروف مانند ژان دیودونه و سرگئی سوبولف و جان مک‌کارتی در آن بود. ریاضیدان معروف ایرانی، لطفی عسگرزاده که مقیم آمریکا است نیز در این کنفرانس حضور داشت. مباحثات دیودونه و سوبولف دربارهٔ ریاضیات محض و کاربردی و مباحثات دیودونه و مک‌کارتی دربارهٔ نقش هندسهٔ اقلیدسی در آموزش ریاضیات در این کنفرانس در خاطرها به یاد مانده است.

روند حضور ریاضیدانان صاحب‌نام خارجی و نیز ریاضیدانان ایرانی که جلای وطن کرده بودند تا چندین کنفرانس بعد ادامه یافت. در بین آنان می‌توان علاوه بر افرادی که به آنها اشاره شد از افراد دیگری چون: گرت بیرکاف، پاول اردیش، پاول هالموس، ژاک لوئی لیونز، رنه‌توم، جیمز ایلز، هرشتاین، کوهن، لارس هورماندر، رائو، لاسال و از میان ریاضیدانان ایرانی مقیم خارج، از حیدر رجوی، ابوالقاسم غفاری، صمد هدایت، فریدون شهیدی، امیرحسین اسدی نام برد.

کنفرانسهای اول تا بیست و چهارم از سال ۱۳۴۹ تا سال ۱۳۷۱ به ترتیب در دانشگاههای زیر برگزار شده‌اند: شیراز، صنعتی شریف، شهید بهشتی (ملی)، تهران، شیراز، شهید چمران (اهواز)، تبریز، صنعتی شریف، اصفهان، تربیت معلم، مشهد، صنعتی اصفهان، شهید باهنر (کرمان)، تبریز، شیراز، تربیت معلم، سیستان و بلوچستان، بیرجند، رشت، تهران، اصفهان، مشهد، کرمانشاه، شهید بهشتی.

کنفرانسهای ریاضی تا کنفرانس نهم به‌طور گسترده و با حضور ریاضیدانان خارجی برگزار شد، ولی پس از آن به علت تحولات اجتماعی و مشکلات ناشی از جنگ کنفرانسها به‌صورت محدودتری برگزار شد و خارجیها و به‌ویژه ریاضیدانان صاحب‌نام رغبت چندانی برای حضور در کنفرانسها نشان ندادند ولی در چند کنفرانس اخیر بار دیگر حضور ریاضیدانان خارجی مشهود بوده است.

مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران نیز همه ساله همزمان با کنفرانسها تشکیل می‌شود. گذشته از مجمع عمومی انجمن در هر یک از کنفرانسها جلسات میزگرد و گفت و شنودهای متنوعی نیز برگزار شده است که در برخی از آنها ایده‌های منسجمی برای سازندگی دانشگاهها و پیشبرد ریاضیات متبلور شده‌اند. در بعضی موارد این ایده‌ها به دست‌آوردهایی اساسی و پرثمر منجر شده‌اند؛ ایده‌هایی همچون تشکیل کمیتهٔ واژه‌ها و نگارش که هنوز هم کار واژه‌گزینی ریاضی در ادامهٔ کار آن کمیته در جریان است و مسابقات ریاضی دانشجویی که همزمان با کنفرانس چهارم شروع شد.

پیرو کنفرانسهای ریاضی کشور، سمینارهای تخصصی نیز شکل گرفت که تاکنون چند سمینار جبر، آنالیز و سمینارهایی در معادلات دیفرانسیل و هندسه برگزار شده است. قابل ذکر است که این سمینارها در سالهای اخیر رونق بیشتری یافته‌اند. نظام اجرایی کنفرانسها اکنون مبتنی بر هدایت کلی از سوی انجمن ریاضی ایران است. انجمن، برگزاری کنفرانس در دانشگاههای داوطلب را تصویب کرده و خط‌مشی کلّی را نیز به کمیتهٔ برگزاری کنفرانس پیشنهاد می‌کند ولی کمیتهٔ برگزاری کار اصلی برنامه‌ریزی و برگزاری کنفرانس را عهده‌دار است.

با این مقدمه و تصویر از سال ۵۰ در دومین کنفرانس ریاضی کشور، امسال همهٔ افراد در دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف اعم از استاد و دانشجو و کارمند در جنب و جوش بودند. و ۸ الی ۱۱ فروردین روزهایی به یادماندنی برای همه شد.

افتتاحیهٔ کنفرانس بیست و پنجم به همراه تجلیل از پیشکسوتان بود. استادان احمد بیرشک و دکتر علی افضلی‌پور و دکتر اسداله آل‌بویه و دکتر بهمن مهری و دکتر مهدی بهزاد هر یک تلاشهایی ارزنده برای جامعهٔ ریاضی کشور داشته‌اند و وجودشان قوت قلب است. در این کنفرانس، برگزاری سخنرانیهای عمومی در موضوعات مختلف و سخنرانیهای تخصصی در شش کارگاه، سیستمهای دینامیکی و جبر غیرجابجایی و آنالیز تصادفی و ترکیبیات و روشهای عددی و آموزش ریاضی، گستردگی موضوعات را نشان می‌داد.

در حاشیه این کنفرانس نمایشگاهی از کتب ریاضی برگزار شد که شرکت وسیع چند ناشر بین‌المللی در این خصوص قابل ذکر است. در کنار نمایشگاه کتاب، نرم‌افزارهای TEX معرفی شدند. اهمیت TEX در خصوص تهیه مقالات برای اکثر ریاضی‌دانان حاضر روشن شده است و این نمایشگاه به معرفی گونه‌های فارسی شدهٔ این زبان پرداخت. انتشار دو کتاب به مناسبت کنفرانس و تمبر یادبودی از طرف پست جمهوری اسلامی ایران از دیگر موارد قابل ذکر است.

تهیه جزوه‌ای در تجلیل از پیشکسوتان از طرف کمیته برگزاری کنفرانس و شرح زندگی آنان و درج مقالاتی خواندنی در یادنامهٔ بیست و پنج سال کنفرانس جالب توجه بود.

داستان حدس پوانکاره در ابعاد بالا
(در سواحل ریو واقعاً چه گذشت)

*استیو اسمیل**
ترجمهٔ مجید حسینی

با وجود اینکه این صفحات عمدتاً گویای ماجرایی شخصی هستند بگذارید که با توصیفی از «حدس پوانکارهٔ nـبعدی» شروع کنیم. این حدس مدعی است که: یک خمینهٔ فشردهٔ nـبعدی M^n که نوع هوموتوپی آن همانند کرهٔ nـبعدی $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ باشد با S^n همسانریخت است.

یک «خمینهٔ فشردهٔ nـبعدی» را می‌توان یک رویهٔ nـبعدی بسته و کراندار (مشتق‌پذیر و هموار) در یک فضای اقلیدسی در نظرگرفت. راه دیگر تعریف شرط هوموتوپی این است که بگوییم که نگاشت پیوستهٔ $f : M^n \to S^n$ وجود دارد که یک یکریختی بر روی گروههای هوموتوپی القا می‌کند؛ یا هر نگاشت پیوستهٔ $g : S^k \to M^n$ و $k < n$ (یا فقط $k \leq n/2$) را می‌توان به یک نقطه تغییر شکل داد. به‌طور معادل می‌توان گفت که M^n ساده‌ـهمبند باشد و گروههای هومولوژی S^n را داشته باشد.

هانری پوانکاره این مسأله را در مقالات بدیع و بی‌سابقهٔ خود راجع به توپولوژی مورد بررسی قرار داد. او در ۱۹۰۰ در [۱۳] مدعی اثباتی برای حالت کلی nـبعدی شد. او در مقالهٔ بعدی [۱۴]، ۱۹۰۴، خود را به حالت ۳ـبعدی محدود کرد و مثال نقضی برای روش خودش آورد. در این مقاله او مسأله مشهور خود را مطرح کرد ولی نه به عنوان یک حدس. با توجه به این نکته توصیف مسأله، به عنوان «حدس پوانکاره» نادقیق است.

پس از پوانکاره خیلی از ریاضیدانان دیگر مدعی یافتن اثباتهایی برای حالت ۳ـبعدی شدند. برای شرحی ساده از بعضی از این تلاشهای بی‌ثمر به‌عنوان مثال به [۱۸] مراجعه کنید. از طرف دیگر مجموعه‌ای از قضایا و روشهای توپولوژی از زمان پوانکاره تاکنون به‌طور یکپارچه در حال رشد است.

در سال ۱۹۶۰ من نشان دادم که این حکم برای تمامی $n > 4$ درست است و این مقاله شرحی از آن کشف است. داستانی که در اینجا می‌آید با دو مقالهٔ [۱۵] و [۱۶] تکمیل می‌شود ولی‌این مقاله‌ها نکات مشترک بسیار کمی با یکدیگر دارند.

حدس پوانکاره را اولین بار موقعی شنیدم که در آن‌آربور[۱] مشغول نوشتن رساله‌ای دربارهٔ مسأله‌ای در توپولوژی بودم. پس از مدت کوتاهی گمان کردم که اثباتی (برای حالت ۳ـبعدی) یافته‌ام. به دفتر کار هانس ساملسن[۲] رفتم و با حالتی بسیار هیجان زده کلیات افکارم را برایش بیان کردم. ابتدا ۳ـخمینه را مثلث‌بندی کنید و یک سادک ۳ـبعدی بردارید. کافی است نشان دهیم که خمینهٔ باقیمانده با یک «۳ـسادک» همسانریخت است. پس از آن ۳ـسادک‌ها را یکی‌یکی بردارید. این فرآیند نوع همسانریختی را تغییر نمی‌دهد و در نهایت تنها یک ۳ـسادک باقی می‌ماند .Q.E.D. ساملسن چیز زیادی نگفت. بعد از ترک دفتر او متوجه شدم که «اثبات» من هیچ فرضی را بر روی ۳ـخمینه به کار نمی‌گیرد.

کمتر از پنج سال بعد در ریودوژانیرو مثال نقضی برای حدس پوانکارهٔ ۳ـبعدی یافتم. «اثبات» ناوردایی متعلق به روخلین ریاضیدان اهل لنینگراد را به کار می‌بست و من تمامی جزییات ریاضی آن را نوشتم. اگر این نتیجه درست بود مکمل خوبی

---

۱) Ann Arbor
۲) Hans Samelson

می‌شد برای اثباتی که در همان موقع برای ابعاد بالاتر از چهار یافته بودم. خوشبختانه در مرور این مثال نقض متوجه اشتباه بزرگی شدم.

بگذارید به عقب برگردیم. من در «دوران طلایی توپولوژی» متولد شدم. امروز به‌سادگی می‌توان فراموش کرد که در آن دوران توپولوژی تا چه مقدار بر سرحدات ریاضیات استیلا یافته بود. گفته می‌شود که نیمی از بورسهای فوق دکتری اسلون در آن سالها به توپولوژیست‌ها داده شدند. امروز به‌سختی می‌توان چنین توزیع نامتعادلی را تصور کرد. در واقع توپولوژی آن دوران تأثیرات انقلابی بر جبر (نظریهٔ K و هندسهٔ جبری) و آنالیز (سیستمهای دینامیکی، مطالعه فراگیر معادلات دیفرانسیل جزیی) داشت.

در ۱۹۵۴ مقالهٔ کوبوردیسم توم منتشر شد. هیرتسبروخ این نظریه را به‌کار گرفت تا «قضیه نشان»[۱]اش را (به عنوان قسمتی از توسیعش از ریمان-رخ) ثابت کند. میلنور نیز در ۱۹۵۶ قضیهٔ نشان را به‌کار گرفت تا وجود کرات ۷-بعدی غریب را ثابت کند. این نتایج را از نزدیک دنبال می‌کردم. همچنین رائول بوت که دانشجویش بودم مطّلعم کرد که سِر (Serre) دنباله‌های طیفی و نظریهٔ مورس را به‌کار گرفته است تا اطلاعاتی دربارهٔ گروههای هوموتوپی کرات بیابد. پس از چندی بوت با استفاده از نظریهٔ مورس قضایای تناوب-اش را ثابت کرد.

در ۱۹۵۶ دکتریم را با بوت گرفتم. اولین برخورد تمام‌عیار من با دنیای ریاضی در تابستان همان سال درگردهمایی مکزیکوسیتی دربارهٔ توپولوژی جبری بود. قبل از آن هیچگاه به کنفرانسی نرفته بودم. و این کنفرانس با هر معیاری که در نظر بگیرید یک اتفاق تاریخی در ریاضیات بود. هیچگاه تمرکزی از ریاضیات خلاق قابل قیاس با این گردهمایی را ندیده‌ام. همسرم کلارا و من که در ابتدا فقط بوت و ساملسن را می‌شناختیم، از آن‌آربور تا مکزیکوسیتی را با اتوبوس رفتیم. قبل از ترک مکزیکو، بیشتر ستارگان توپولوژی را ملاقات کردم. در آنجا با موهرش[۲] و الون لیما که دانشجوی دکتری دانشگاه شیکاگو بودند آشنا شدم و این دو بعداً جزیی از ماجرای ما شدند.

در پاییز آن سال اولین کارم را به عنوان مربی کالج دانشگاه شیکاگو با تدریس نظریهٔ مجموعه‌ها به دانشجویان علوم انسانی آغاز کردم. با دانشکدهٔ ریاضی رابطهٔ خوبی داشتم و در سخنرانی‌های استاد میهمان پروفسور رنه توم (که با او در مکزیکوسیتی آشنا شده بودم) دربارهٔ نظریهٔ تقاطع شرکت می‌کردم. همچنین کارم را در توپولوژی با نشان دادن اینکه «می‌توان کره را پشت و رو کرد» ادامه دادم.

شیکاگو در آن دوران پیش از آنکه ویل، چرن و چند ریاضیدان مهم دیگر آنجا را ترک کنند، مرکز ریاضی مهمی بود. قسمت عمده‌ای از این محیط را ریاضیدانان جوان‌تر به‌خصوص موهرش، الون لیما، دیک لاشوف، دیک پالیس و اشلومو استرنبرگ[۳] ایجاد کرده بودند. این خوش‌شانسی من بود که در آن دوران آنجا بودم.

یک بورس فوق دکتری دو ساله از طرف بنیاد ملی علوم این امکان را فراهم کرد که در پاییز ۱۹۵۸ به مؤسسه مطالعات عالی [پرینستون -م.] بروم. در آن موقع توپولوژی به‌صورت فعالانه در پرینستون دنبال می‌شد. من و موهرش دفتر مشترکی داشتیم و با هم در سخنرانی‌های شلوغ میلنور راجع به رده‌های مشخصه و در سمینار بورل دربارهٔ گروههای تبدیلها شرکت می‌کردیم. بارها با دین مونتگومری، مارستن مورس و هاسلر ویتنی روبه رو شدم و به‌کرّات با رالف فاکس (در حالی که او به من آوانس می‌داد) گو[۴] بازی کردم و با شاگردانش لی‌نوویرث[۵] و جان‌استالینگز آشنا شدم.

علاوه بر این در تابستان ۱۹۵۸ لیما مرا با ماریتسیو پشوتو(Mauricio Peixoto) آشنا کرد و او علاقهٔ مرا به پایداری ساختاری برانگیخت. این علاقه منجر به دعوتی شد تا شش ماه پایانی بورس را در ایمپا(.I.M.P.A) (مؤسسهٔ ریاضیات محض

---

۱) Signature Theorem

۲) Moe Hirsch

۳) Shlomo Sternberg

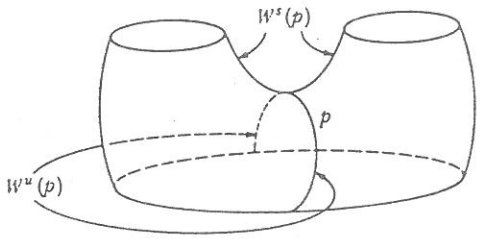
۴) گو(Go)یک بازی دو نفرهٔ فکری است محبوب‌ترین بازی روی صفحهٔ ژاپن است. بر روی یک صفحهٔ خطکشی شده (۱۹ خط افقی، ۱۹ خط خط عمودی) انجام می‌شود و ۱۸۱ مهرهٔ سیاه و ۱۸۰ مهرهٔ سفید وجود دارد، احتیاج به مهارت، استراتژی و حوصله دارد و قوانین آن بسیار ساده است. قوانین آوانس بخصوصی وجود دارند که یک فرد ماهر و یک فرد مبتدی با یکدیگر می‌توانند بازی کنند. رالف فاکس (۱۹۷۳-۱۹۱۳) ریاضیدان مشهور آمریکایی و متخصص برجستهٔ نظریهٔ گره‌ها در بازی گو مهارت و تبحر فراوانی داشت و در سال ۱۹۶۳ یکی از دو عضو تیم ملی آمریکا در تورنمنت جهانی گو در توکیو بود. -م.

۵) Lee Neuwirth

دینامیک و تجزیهٔ خمینه

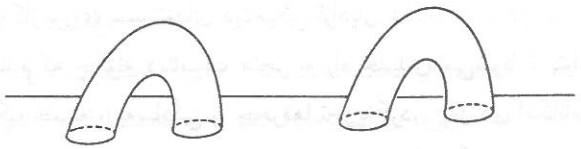
یک خمینهٔ M^n با یک متریک ریمانی و یک تابع $f : M^n \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. سیستم دینامیکی که توسط معادلهٔ دیفرانسیل $dx/dt = -\text{grad } f$ بر روی M تعریف می‌شود را بسازید.

اگر P یک نقطهٔ بحرانی ناتبهگون f باشد آنگاه مجموعهٔ $W^s(p)$ شامل تمامی نقاطی که تحت دینامیک به سمت به P میل می‌کنند وقتی‌که $t \to \infty$ یک حجره نشانده شده است؛ همین حرف در مورد مجموعه $W^u(p)$ شامل تمامی نقاطی که به سمت P میل می‌کنند وقتی‌که $t \to -\infty$ نیز صادق است. در تصویر دوبعدی $W^s(p)$ و $W^u(p)$ هر دو ۱ـحجره (یا کمان هستند).



حال فرض کنید نقاط بحرانی f همگی ناتبهگونند. می‌توانیم فرض کنیم که برای همهٔ نقاط بحرانی p و q وابسته به f $W^s(p) \pitchfork W^u(q)$ ؛ یا می‌توان گفت که «خمینه‌های پایدار و ناپایدار f grad به‌طور متقاطع با یکدیگر تلاقی دارند». تحت این فرض $W^s(p)$ها تجزیهٔ خوبی از M به دست می‌دهند. مرز یک حجره اجتماعی از حجره‌های با بعد پایین‌تر است. رنه‌توم قبلاً این تجزیه را بدون شرط تقاطع در نظر گرفته بود و در نتیجه مرز حجره می‌توانست از حجره‌های با بعد بالاتر تشکیل شده باشد.

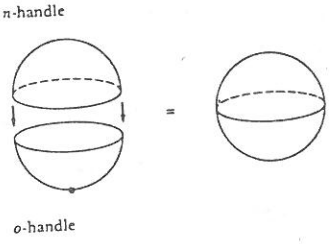
پس از آن با استفاده از این سیستم دینامیکی آنچه را دستواره نامیدم ساختم.



این نمایی از یک ۱ـدستواره است که تشکیل شده است از یک ۱ـحجره ضخیم شده که به یک ۳ـقرص متصل است. پس از آن می‌توان تمامی ۲ـدسته‌ها را یک‌جا اضافه کرد، و الی آخر، تا جایی که خمینه با این دسته‌ها ساختاری صافی مانند پیدا کند.

این نقطهٔ شروعی است برای حذف جفت جفت دسته‌ها تا اینکه نهایتاً از فرض هوموتوپی و بعد برروی M استفاده کنیم.

در نهایت توصیف ذیل از خمینه اولیه‌امان را بدست می‌آوریم که همان چیزی است که می‌خواستیم.



و کاربردی) در برزیل بگذرانم.

بنابراین در اوایل ژانویه ۱۹۶۰ با کلارا و فرزندانمان نات و لورا به برزیل رفتیم. درست پس از کودتای ناموفق یک سرهنگ نیروی هوایی بود که به برزیل رسیدیم. او از کشور فرار کرده بود تا به آرژانتین پناهنده شود و در نتیجه توانستیم آپارتمان او را اجاره کنیم! آپارتمان شیکی بود که ۱۱ اتاق داشت و ما دو خدمتکار او را نیز استخدام کردیم. آن روزها دلار آمریکا ارزش زیادی داشت.

اکثر همسایگان نزدیک ما در ارتش آمریکا و یا در ارتش برزیل بودند. می‌توانستیم در پاسیوی مرتفع و گل‌کاری شدهٔ آپارتمان بنشینیم و تپهٔ فاولا[۱] (بابیلونیا) را که فیلم اُرفیوس سیاه در آنجا فیلمبرداری شده بود نظاره کنیم. در بعدازظهرهای گرم و مرطوب قبل از کارناوال صدها تن از ساکنین فاولا را می‌دیدیم که مسیر مارپیچ دور کوه را پایین می‌آمدند تا در خیابانها سامبا برقصند. بعضی وقتها من هم به رقص توفانی آنان که چندین مایل ادامه می‌یافت ملحق می‌شدم.

درست یک بلوک آن‌طرف‌تر، در جهت مخالف تپه سواحل مشهور کوپاکابانا (کرانهٔ لِم) گسترده شده بودند. صبحها را در آن ساحل شنی وسیع و زیبا به شنا کردن و اگر ارتفاع امواج مناسب بود به موج‌سواری می‌گذراندم. یک مداد و یک دسته کاغذ هم می‌بردم و به ریاضیات می‌پرداختم.

بعدازظهرها را در ایمپا به بحث با پشوتو و لیما به ترتیب راجع به معادلات دیفرانسیل و توپولوژی می‌گذراندم. آن روزها ایمپا در ساختمانی قدیمی و کوچک در خیابانی شلوغ واقع بود. دفعهٔ

---

۱) Favela

بعد که به ریو رفتم ایمپا در ساختمانی بزرگتر در خیابانی شلوغ‌تر قرار داشت. هم اکنون ایمپا به کاخی مدرن در حومهٔ ریو که در جنگلی احاطه شده انتقال یافته است.

در ادامهٔ داستان باید بگویم که توجهم ابتدا به سمت سیستمهای دینامیکی جلب شد و «نعل اسب» را ساختم [۱۵]. همین طور که کار برروی سیستمهای دینامیکی گرادیان را ادامه می‌دادم متوجه شدم که چگونه دینامیک منجر به راه جدیدی می‌شود تا بتوان یک خمینه را به‌سادگی به حجره‌ها تجزیه کرد. به‌زودی امکانات استفاده از این تجزیه برای حمله به حدس پوانکاره گسترش یافتند و من همهٔ کارم را برروی این مسأله متمرکز کردم.

وقتی که دیدم ظاهراً در بُعدهای بالاتر از چهار موفق شده‌ام اثباتم را به دقت مرور کردم؛ بعد تمام جزییات را با لیما مورد بحث قرار دادم. پس از آنکه اطمینان خاطر یافتم به هرش در پرینستون نامه‌ای نوشتم و نیز گزارشی از تحقیقاتم را برای سامی آیلنبرگ فرستادم. تابلو با عنوان «دینامیک و تجزیهٔ خمینه» شرحی ریاضی است از آنچه که اتفاق افتاد.

از اول قصد داشتم تا ریو را به مدت سه هفته به مقصد اروپا در ژوئن آن سال، ۱۹۶۰، ترک کنم. آربایتستاگونگ[۱]، گردهمایی ریاضی سالانه و مشهوری که هیرتسبروخ آن را ترتیب می‌داد، در اروپا برگزار می‌شد. قرار بود بعد از آن یک کنفرانس راجع به توپولوژی جبری در زوریخ تشکیل شود که من هم به آن دعوت شده بودم. این دو گردهمایی فرصت خوبی بودند تا نتایجی را که به دست آورده بودم ارائه کنم. برای تغییر آهنگ و با اجازهٔ جان استالینگز دو نامهٔ اخیر او را به زیمان در تابلویی در این مقاله قرار داده‌ام. این نامه‌ها به خوبی وقایعی را که در اروپا اتفاق افتاد توصیف می‌کنند. با وجود اینکه به‌طور کلی خاطرات من با خاطرات استالینگز هماهنگ است ولی گمان نمی‌کنم آن‌طور که استالینگز فکر می‌کند هرش به من [در حل حدس پوانکاره. ـم.] کمک کرده باشد. یادم است که پس از یک هفتهٔ پرهیجان و فراموش نشدنی در بن روزهای آرامی را با موهرش و رائول بوت در سنت‌ـموریس گذراندم.

گاهی اوقات از آنچه که به گمان من بی‌دقتی در شرح تاریخی کشف حدس پوانکاره در ابعاد بالا است، برآشفته‌ام. مثلاً اندی گلیسون در ۱۹۶۴ چنین نوشت [۱]: « ... بنابراین وقتی که استالینگز در ۱۹۶۰ (۴) ثابت کرد که حدس پوانکاره برای ابعاد ۷ به بالا درست است همه را غافلگیر کرد. زیمان پس از مدت کوتاهی نتیجهٔ او را تعمیم داد تا شامل بعدهای ۵ و ۶ شود (۱۰).» (از من در مقاله او نامی برده نشده بود)

پال هالموس در زندگینامهٔ خود ([۸] ص ۳۹۸،) از خشم من نسبت به خود می‌نویسد. متأسفم که از دست پال عصبانی شدم و ایکاش به‌طورکلی نسبت به این موضوع با آرامش بیشتری برخورد می‌کردم. مکاتبات اخیرم با جک میلنور نشانگر این موضوع است.

جک عزیز،

علت نوشتن این نامه مقاله‌ای است که تو دربارهٔ آثار م. فریدمان به مناسبت اهدأ مدال فیلدز به او نوشته‌ای (*Proc. of Int. Congress 1986*). تو در آنجا در بحث راجع به «حدس پوانکاره nـبعدی» چنین گفته‌ای:

حالتهای $n = 1, 2$ در قرن نوزدهم شناخته شده بودند و حالتهای $n \geq 5$ را اسمیل و مستقلاً استالینگز و زیمان و والاس در ۶۱ـ۱۹۶۰ ثابت کردند.

لغت مستقلاً با تاریخچهٔ این کشف ظاهراً ناسازگار است.

استالینگز در پیش‌چاپ خود به نام «توپولوژی خمینه‌های تکه‌ای‌ـخطی با ابعاد بالا» چنین نوشته است:

هنگامی که شنیدم که اسمیل حدس پوانکارهٔ تعمیم یافته را برای خمینه‌های با بعد ۵ به بالا ثابت کرده است، خودم در جستجوی اثباتی برای این حقیقت برآمدم.

همچنین یادم است که زیمان نیز به دقت راجع به این وقایع نوشته است و تصویر مشابهی ارائه داده است.

پس از آنکه ادعای من انتشار یافت، والاس در نامه‌ای (۲۹ سپتامبر ۱۹۶۰) از من خواست تا جزییات اثباتم را برایش بفرستم و گفت که او در تلاشهایش ناکام مانده است. من پیش‌چاپهایم از اثبات را برایش فرستادم و او وصول آن را اعلام کرد (هنوز نامه‌های او را دارم).

در اولین پیش‌نویس اثباتم اشتباهی داشتم که به سادگی آن را اصلاح کردم؛ ولی این ربطی به این موضوع ندارد.

مسلماً استالینگز، زیمان و والاس بر روی این موضوع کارهای خوبی کرده‌اند. با این وجود ایکاش ریاضیدانان از حقایقی که اکنون توضیح دادم بیشتر خبر داشتند. رونوشتهایی از این نامه را برای استالینگز، زیمان و والاس و عدهٔ معدودی از دیگر ریاضیدانان نیز می‌فرستم.

بهترین درودها

استیو اسمیل

---

۱) Arbeitstagung

میلنور در جواب (که کمی توصیف ماجرا را بسط داده و اصلاح کرده بود) چنین نوشت:

۲۷ فوریه ۱۹۸۸

استیو عزیز

خیلی متأسفم که تلاش من برای بیان کلیات تاریخچهٔ حدس پوانکاره نادقیق بود. قسمتی از این به‌خاطر این بود که من تکلیفم را به‌خوبی انجام نداده بودم ولی بیشتر به‌خاطر این بود که منظور خودم را خیلی بد بیان کرده بودم. آنچه که من مسلماً بایستی می‌گفتم این بود که اثبات استالینگز که زیمان آن را برای بعدهای ۵ و ۶ کامل کرد منطقاً از اثبات تو مستقل بود؛ ولی مسلماً اثبات تو اول آمد. مشابهاً بایستی می‌گفتم که اثبات والاس، برای ابعاد اکیداً بزرگتر از ۵، مشخصاً بعداً آمد و واقعاً خیلی متفاوت از اثبات تو نبود.

باید توجه کرد که اثبات اسمیل (یا والاس)، به قیمت فرض قوی‌تر مشتق‌پذیری، نتیجه‌ای بس قوی‌تر به‌دست می‌دهد. یعنی، نشان می‌دهد که nـخمینهٔ هموار شامل یک $(n-1)$ـکرهٔ استاندارد است که به‌طور هموار در آن نشانده شده است و آن را به دو nـگوی بسته تقسیم می‌کند. اثبات استالینگز-زیمان با این فرض ضعیف‌تر که M یک خمینهٔ ترکیباتی است شروع می‌شود و این نتیجهٔ ضعیف‌تر را که اگر از M یک نقطه برداریم آنگاه به‌طور ترکیباتی با فضای اقلیدسی استاندارد همسانریخت است به‌دست می‌آورد.

مخلص شما

جان میلنور

به او نامه‌ای نوشتم و مراتب تشکر و قدردانی خودم را به‌خاطر نامه‌اش به او اعلام کردم.

پس از کنفرانس زوریخ به ریو بازگشتم تا در آنجا به خانواده‌ام ملحق شوم و پس از مدت کوتاهی ریو را ترک کردیم و در برکلی مشغول به‌کار شدم.

سال بعد در یک سری مقاله این نتایج را بسط دادم و نهایتاً در ژوئن ۱۹۶۱ «قضیهٔ hـکوبوردیسم» را ثابت کردم. در مقالهٔ [۱۷] محتوی ریاضی همهٔ این مطالب مرور و مراجعی نیز ذکر شده است.

به سبب پیشنهاد وسوسه‌انگیزی که دانشگاه کلمبیا به من کرد و چون سرج لانگ در آنجا بود خانه‌مان را فروختیم و در تابستان ۱۹۶۱ برکلی را ترک کردیم. به مدت سه سال در نیویورک وجوه مختلف آنالیز فراگیر (global analysis)را مطالعه کردم و بعد به علت دور نمای شرایط بهتر کار به برکلی برگشتیم.

پاییز ۱۹۶۴ بود که این اتفاق افتاد و در همان موقع بود که به نهضت آزادی بیان[۱] علاقه‌مند شدم. پس از اعتصاب بزرگ[۲]، کمک کردم تا دیوید فرانک و مایک شوب که دانشجویان ریاضی دورهٔ تحصیلات تکمیلی بودند از زندان آزاد شوند.[۲′]

در اوایل ۱۹۶۵ جنگ ویتنام شدیداً بالا گرفت. به نظرم بمباران سنگین ویتنام به دست آمریکا غیرقابل توجیه بود و صلح جهانی را تهدید می‌کرد. در اعتراضاتی که بر جنگ ویتنام می‌شد به‌طور فعال‌تری شرکت کردم، تظاهرات و سخنرانی‌ها و سمینارهایی در این مورد ترتیب دادم و تظاهرات خشونت‌آمیزی را در مقابل قطارهای حامل سربازان سازماندهی کردم.[۳] همراه با جری روبین سرپرست مشترک کمیتهٔ روز ویتنام شدم.[۴] (مقر ما که در نزدیکی محوطهٔ دانشگاه قرار داشت بعداً توسط یک بمب تخریب شد.)

در طی پاییز ۱۹۶۵ تصورات واهی که نسبت به کمیتهٔ روز ویتنام داشتم به تدریج از میان رفتند و دوباره به‌کار اثبات کردن قضایا مشغول شدم. قسمت بعدی این ماجرا در [۱۶] شرح داده شده است. در اوت ۱۹۶۶ در مسکو[۵] عملکرد ایالات متحده در ویتنام (و همچنین روسیه) را مورد انتقاد

---

۱) نهضت آزادی بیان حرکت دانشجویی بزرگی بود که در سال ۱۹۶۴ از برکلی در کالیفرنیا شروع شد و به تمامی ایالات متحده سرایت کرد و در حدود ۵ یا ۶ سال ادامه داشت. ـم

۲) و ۲′) منظور اعتصاب حدود ۸۰۰۰ دانشجوی دانشگاه برکلی است که در اعتراض به دستگیری چندین دانشجو که در ادارهٔ امور آموزشی آن دانشگاه متحصن شده بودند انجام گرفت. دیوید فرانک و مایک شوب دو تن از دستگیرشدگان بودند. ـم.

۳) منظور تظاهراتی است که در آن عده‌ای از دانشجویان و استادان دانشگاه برکلی به بندر اوکلند رفتند و در روی ریل قطارهایی که به آنجا سرباز و اسلحه می‌آوردند خوابیدند و درگیریهای خیلی شدیدی در آن بوجود آمد. ـم.

۴) عده‌ای از دانشجویان و استادان برکلی قصد داشتند روزی را به نام روز ویتنام نامگذاری کنند و در آن روز عموم مردم را از آنچه که در ویتنام می‌گذشت آگاه کنند. کمیته‌ای برای انجام این کار تشکیل شد که آن را کمیتهٔ روز ویتنام نامیدند. ـم.

۵) شانزدهمین کنگرهٔ جهانی ریاضیات در مسکو برگزار شد و استیو اسمیل یکی از برندگان مدال فیلدز بود. دیگر برندگان عبارت بودند از م. آتیا، پ. کوهن و آ. گروتندیک. ـم.

نامه‌های جان استالینگز به کریستوفر زیمان

۱۵ مارس ۱۹۸۸

کریس عزیز

رونوشت نامه‌ات به میلنور به دستم رسید که دربارهٔ مطالبی بود که او دربارهٔ کارهای من، تو و اسمیل در سالهای ۱۹۶۰ گفته یا نوشته بود. به گمانم اسمیل هم نامه‌ای راجع به این موضوع برایم فرستاده بود ولی احتمالاً موقعی که اتاقم را جمع و جور می‌کردم آن را هم بین بقیهٔ کاغذها دور ریخته‌ام و الان یادم نیست که اسمیل چه گفته بود؛ نمی‌دانم که میلنور هم چه گفته است. شاید بهتر باشد که دوباره بخوابم.

خاطرات تو از این موضوع نسبت به من خیلی دقیق‌تر است. بهار ۱۹۶۰ یادم می‌آید. یادم است در مورد اسمیل شایعاتی بر سر زبانها بود و من آنها را باور نمی‌کردم تا اینکه پاپاکیریاکوپولوس (Papakyriakopoulos) به دیدار ما آمد، به گمانم پاپا گفت که آیلنبرگ اثبات اسمیل برای حدس پوانکاره در ابعاد بالا را به‌دقت مطالعه کرده است و معتقد است که درست است. به‌طور مبهمی یاد می‌آید که تو یک سخنرانی کردی؛ این سخنرانی راجع به مقالاتی بود که پنروز، زیمان و وایتهد نوشته بودند؛ و یک جور روش در خود فرو بردن در آن برزسی شده بود؛ و چیزی که خوب یادم می‌آید این است که یکنفر گفت که این تنها مقالهٔ مشترک جی. اچ. سی. وایتهد است که نام او در انتهای فهرست الفبایی نویسندگان آن نیست. یادم می‌آید تا دیر وقت در دفتر کار کوچکم در مؤسسه قدیمی ریاضیات در آکسفورد بیدار می‌نشستم و در حالی که به تخته سیاه خیره می‌شدم سعی می‌کردم راهی برای حذف دسته‌ها پیدا کنم. به‌دلیلی فکر می‌کردم که اسمیل باید مسأله را به این صورت حل کرده باشد ولی گمان نمی‌کنم این را کسی به من گفته بود. نمی‌دانستم که چطور باید از شر ۱ـدسته‌های مزاحم خلاص شوم چون می‌دانستم که نمایشهای خیلی بدی از گروه بدیهی وجود دارد. بعد به ذهنم خطور کرد که می‌توانم با استفاده از آن روش در خود فرو بردن (engulfing) و فکری که به گمانم بری‌میزر (Barry Mazur) در فرمول‌بندی مورتون بروان به‌کار برده است تمامی مشکلات را به سوی بینهایت هل بدهم.

یاد می‌آید یوان جیمز ما را با اتومبیل به بن برد. یک آمریکایی دیگر هم بود که احتمالاً باب هانتر یا دیک سوان بود. در بن من و اسمیل سخنرانی کردیم. یادم است که آ. بورل در سخنرانی من اعتراض کرد که من بیشتر از آنچه باید در مورد مسائلی از مبانی توپولوژی تکه‌ای‌ـخطی دست تکان می‌دهم که هنوز به‌طور کامل ثابت نشده‌اند؛ و این انتقاد در طی شش‌ـهفت سال بعد مرا می‌آزرد. آنچه که از سخنرانی اسمیل یادم می‌آید این است که به این فکر می‌کردم که او واقعاً مسأله امکان وجود نمایشهای خیلی بد ازگروه بدیهی را در نظر نگرفته است؛ به‌عبارت دیگر، او می‌خواست ۱ـدسته‌ها را با ۲ـدسته‌هایی حذف کند بدون اینکه این موضوع را خیلی جدی بگیرد. تصور می‌کردم که این اشتباه بزرگی در روش اسمیل است و در دل از این موضوع خیلی خوشحال شدم. با وجود این هفتهٔ بعد در زوریخ اسمیل این اشکال را برطرف کرده بود؛ در واقع اگر «فضاهای سادکی، هسته‌ها و mـگروهها»ی وایتهد را به‌خاطر سپرده بودم خودم می‌توانستم بفهمم چطور می‌شود این کار را انجام داد. تصور من که برای آن هیچ دلیلی هم ندارم این است که موهرش که احتمالاً بسیار فرهیخته‌تر از اسمیل است (به عبارت دیگر، اسمیل یک نابغهٔ رام نشده است و هرش یک فرد

قرار دادم[1] و زیرتوفانی از انتقادات به خانه بازگشتم. بابت تحقیقاتم در طی تابستان، از طرف بنیاد ملی علوم، می‌بایست حقوقی دریافت می‌کردم، که دانشگاه کالیفرنیا پرداخت آن را معوق کرد.[2]

دان گرینبرگ [۲] از آنچه که بعداً اتفاق افتاد شرح کاملی داده است:

> اسمیل بعد از آنکه از تحریکات موجود در اطرافش خبردار شد و [مسئولان دانشگاه ـم.] از پرداخت چک حقوقش به او امتناع کردند گزارشی از تحقیقاتش در تابستان را برای کونیک[3] فرستاد. گزارشی که احتمالاً در تاریخ ادبیات حکومتی و علمی سندی کلاسیک خواهد شد. او ثابت کرد که در ازای دو ماه حقوقی که می‌بایست به او می‌پرداختند به مدت دو ماه به تحقیق اشتغال داشته است.

کونیک، نایب رییس امور آکادمیک در برکلی بود. عبارت «سند کلاسیک» که گرینبرگ به‌کار برده بود مرا متعجب کرد ولی

---

۱) در روز آخر برگزاری کنگره در مسکو، اسمیل، بنابر تقاضای خبرگزاری ویتنام شمالی در یک مصاحبهٔ مطبوعاتی شرکت کرد. او در این مصاحبه سیاست آمریکا در ویتنام، عملکرد کمیتهٔ فعالیتهای ضد آمریکایی کاخ سفید، مداخلهٔ روسیه در مجارستان که در ده سال پیش اتفاق افتاده بود و نبودن کوچکترین امکان اعتراض در شوروی را مورد انتقاد قرار داد. (به نقل از [۱۱].) ـم.

۲) مسئولان دانشگاه ادامهٔ پرداخت حقوق را منوط به دریافت گزارش دقیقی از فعالیتهای اسمیل در طول تابستان کرده بودند. [۱۱]. ـم.

۳) Connick

پرکار و پرتلاش) به او گفت که اشکال را چگونه برطرف کند. نکته در اینجا بود که می‌توان جفت‌های بدیهی ۲ و ۳ـحجره‌ها را افزود که بر روی ۲ـاستخوان بندی با اضافه‌کردن رابطه‌های بدیهی معادل است؛ این نوع برتر و ظریف «تبدیل تیتسه» است که برای به‌طور جبری به‌کاربردن ۲ـحجره‌ها نیاز داریم تا بتوانیم با استفاده از آنها ۱ـحجره‌ها را حذف کنیم. اگر بعد به اندازه کافی بالا باشد این عمل را می‌توان به‌طور هندسی انجام داد. به گمانم در ظرایف و جزییات این کار هندسی است که این سؤال پیش می‌آید که آیا اسمیل این کار را در بعد ۵ انجام داده است یا نه.

بعد از آن یادم می‌آید که در طی تابستان ۱۹۶۰ از مهمان‌نوازی تو، تغییر آب و هوا در بلچلی و پرداختن به هندسه لذت بردم.

واقعاً نمی‌توانم بفهمم که چرا مردم این قدر مشتاق‌اند بدانند که در آن موقع دقیقاً چه رخ داد. نهایتاً این که یک موضوع بزرگ ملی مثل مسأله نیوتون و لایب نیتس نیست. همهٔ ما از آن موقع تا به‌حال خیلی کارهای ریاضی دیگر کرده‌ایم؛ چیزی که من به آن علاقمندم موضوعی است که هم اکنون به آن مشغولم و درباره آن مطالعه می‌کنم. اسمیل هم همکاری است که اهمیت و ارزش زیادی برای برکلی و برای من دارد. زمان خاصیت عجیبی دارد. هستی، نه فقط در حرکت به سوی آینده، بلکه در گذشته نیز به دفعات نامحدودی انشعاب می‌یابد. به‌عبارت دیگر اگر بتوانم از خیابانی عبور کنم و کامیونی که در همان لحظه در حال عبور است مرا نقش زمین نکند آنگاه در جهانی دیگر کامیون مرا به زیر گرفته است؛ فقط من در آن مسیر رو به آینده قرار ندارم بلکه یک من دیگر آنجاست. چند ماه پیش این فرصت پیش آمد که میزبان پاسی(Passi)، ریاضیدانی که از ۱۹۷۷ ندیده بودمش، باشم. چهرهٔ او در سال ۱۹۷۷ را به وضوح به یاد دارم حالا او ۱۰، ۱۱ سال مسن‌تر به‌نظر می‌رسد ولی غیر از این فرقی نکرده است به‌جز اینکه بینی او با آنچه که در گذشته بود تفاوت دارد! بنابراین به گمان من در ده سال پیش چندین پاسی وجود داشتند که وجود من از کنار یکی از آنها عبور کرد ولی آنکه اخیراً به برکلی آمده بود با قبلی تفاوت مختصری داشت و از گذشتهٔ متفاوتی آمده بود. به همین ترتیب خاطراتم از اتفاقات ۲۸ سال پیش کمی مضحک به‌نظرم می‌رسند و فکر می‌کنم همهٔ ما از گذشته‌هایی اندک متفاوت می‌آییم.

مخلص شما
جان استالینگز

***

۱۴ مارس ۱۹۸۸

کریس عزیز

در دهم مارس شرحی از خاطراتم از روزهای توپولوژی تکه‌ای‌ـخطی در ۱۹۶۰ را برایت فرستادم. قصد دارم این‌بار به‌جای آنکه صرفاً راجع به واقعیات صحبت کنم مطالبی نیز دربارهٔ فلسفهٔ خودم بگویم. تصمیم گرفته‌ام این نامه را برای اسمیل و میلنور نیز بفرستم.

در سالهای ۵۹ـ۱۹۵۶ من در پرینستون یک دانشجوی تحصیلات تکمیلی بودم؛ به آمادگی برخی دیگر از دانشجویان نبودم و نظرم این بود که خلق ریاضیات از فراگرفتن آن بسیار مهم‌تر است. مقداری از جزییات توپولوژی با بعد بالایی که راجع به آن صحبت می‌کردم را فرا گرفتم. فاکس در کلاسهای خود روشهای جی. اچ. سی. وایتهد، م. ه. آ. نیومان و و. گاگنهایم و

نامهٔ من شامل جمله‌ای بود که بعدها بیشتر از هر سخنی که گفته‌ام از جانب من نقل شد. همان‌طور که گرینبرگ تعریف کرده بود به کونیک چنین نوشتم: [۱]

> با وجود این در بقیهٔ این مدت نیز به ریاضیات اشتغال داشتم مثلاً وقتی که در هتل یا محوطهٔ دانشگاه و یا سوار بر یک کشتی بخار بودم. مثلاً وقتی که سوار بر کشتی اس. اس. فرانس بودم با ریاضیدانان برجسته‌ای راجع به مسائل ریاضی بحث کردم و در سالن استراحت آن به‌کار ریاضی پرداختم. (شناخته شده‌ترین کار من در سواحل ریودوژانیرو در ۱۹۶۰ انجام شد!) در اینجا مراتب تنفر خودم را از قطع حقوقی که بنیاد ملی علوم می‌بایست پرداخت کند به علت نکات فنی سطحی تکرار می‌کنم. علت واقعی این امر احضار شدن من است به کمیتهٔ فعالیتهای ضد آمریکایی کاخ سفید و حملات متعاقبی که از جانب کنگره و روزنامه‌ها به من شد.

پس از مدتی حقوقم را دریافت کردم و سروصداها خوابیدند. با وجود این در کمتر از یک‌سال، وقتی که بنیاد ملی علوم، تحت فشار کنگره، تقاضای کمک مالی طرح تحقیقاتی جدیدم را رد کرد، انفجار بزرگتری رخ داد.

مقالات [۷ـ۳] در مجلهٔ ساینس به قلم دان گرینبرگ این اتفاقات

---

۱) قسمت آغازین نامهٔ اسمیل چنین است: برای ثبت در دفاتر بنیاد ملی علوم می‌توان زیرمجموعه‌ای دو ماهه از تابستان را انتخاب کرد که در آن مدت دفتر کار مشخصی داشتم و یا در کنفرانسی شرکت کرده بودم مثلاً ۳۰ـ۱۳ ژوئن و ۲۷ـ۱۶ اوت و ۲۳ـ۱۴ سپتامبر. ـم.

دیگران را تدریس می‌کرد. میلنور کرات ۷ـبعدی غریب را ساخته بود و دروسی در توپولوژی دیفرانسیل ارائه می‌کرد. بنابراین زمان برای وقوع یک اتفاق کاملاً مناسب بود.

به‌نظر می‌رسید اکثر دانشجویان تحصیلات تکمیلی سعی می‌کردند معلومات وسیع و تیزهوشی فکری خود را به رخ یکدیگر بکشند؛ بافه‌ها و دنباله‌های طیفی فراگیرترین موضع گفتگوها بودند. بعد میزر قضیهٔ نشاندن کره‌اش را ثابت کرد. ناگهان (در زمستان یا بهار ۵۸ـ۵۷) بری میزر پس از مدتی طولانی که معلوم نبود در پاریس به چه کاری مشغول است در حالی که قضیه‌اش را ثابت کرده بود دوباره در انظار ظاهر شد. این قضیه اثباتی ساده و به راحتی قابل فهم از مطلبی به‌دست می‌داد که چنان پیچیده به‌نظر می‌رسید که هیچ‌کس جرأت حدس زدن آن را هم نداشت. این قضیه بعداً توسط دیگران کاملتر و شسته و رفته‌تر شد ولی نبوغ نهفته در آن از آن میزر بود؛ این نبوغ عبارت بود از بی‌باکی و سادگی جوانان بی‌تجربه منتها از نوع ریاضی آن.

در ریاضیات فراوانند کسانی که تیزهوشند و کسانی که معلومات مفصلی را جذب کرده‌اند. به‌نظر من میزر گونه بودن پدیده‌ای بس جذاب‌تر و مهم‌تر است. پس از آنکه شخصی مانند میزر به سرزمین جدیدی یورش می‌برد، توده‌های ریاضی‌کاران، در حالی که قطرات عرق وی را که برزمین ریخته است می‌لیسند، جدولها و فهرستها را تهیه می‌کنند و موانع را برطرف می‌کنند و دنباله‌های طیفی و بافه‌ها را محاسبه می‌کنند، به دنبال او می‌روند. بدین‌گونه است که عدهٔ زیادی اشتغال می‌یابند.

من رسالهٔ دکترایم را، در سطحی که در آن زمان معمولی به‌نظر می‌رسید، دربارهٔ قضیهٔ گراشکو نوشتم (در دوران پیری فهمیدم که باید قدر این رساله را خیلی بیشتر بدانم). ولی کسی که تحسینش می‌کردم و به او غبطه می‌خوردم و امیدوار بودم سرمشق خود قرار دهم بری میزر بود.

به گمان من داستان کار اسمیل بر روی حدس پوانکاره در ابعاد بالا چنین است. اسمیل از قبل بر روی توپولوژی دیفرانسیل در ابعاد بالا کار می‌کرد؛ او در یورش به این موضوع تنها چند قدم از میلنور عقب‌تر بود. آنگاه روش حل حدس پوانکاره «در سواحل ریو» به ذهنش رسید.

گمان می‌کنم که اگر من در سواحل ریو بودم این فکر به این سادگی به ذهنم خطور نمی‌کرد چونکه همان‌طور که قبلاً اشاره کرده بودم مشکل بزرگی را در خلاصی از دست ۱ـدسته‌ها مشاهده می‌کردم. فکر می‌کنم اسمیل به آن میزان از این مشکل خبر نداشت که نگرانش کند و در نتیجه به این نتیجهٔ بزرگ دست یافت. فکر می‌کنم ایراد کوچکی در اثبات او وجود داشت ولی مخرب نبود. ۲۰ سال قبل جی. اچ. سی وایتهد در شرایطی متفاوت به مسألهٔ ۱ـدسته‌ها پرداخته بود.

واقعاً فکر می‌کنم که قضیهٔ بزرگ اسمیل نتیجهٔ کنار هم قرار دادن یک بینش جدید در ابعاد بالا، تکنیکهای باقیمانده از دوران گذشته از وایتهد و ویتنی و روشهای خاص خود اسمیل بود. احتمالاً دیگران این قضیه را کامل کردند و پیگیر (محاسبات و برطرف کردن موانع و تنظیم جداول) آن شدند. علی‌الخصوص به نظر من میلنور تأثیر به‌سزایی در خلق روشهای توپولوژی دیفرانسیل و تشریح آنها داشت؛ و بزرگ ترین محصول این کار استوارسازی پایه‌های قضیهٔ اسمیل بود.

بعد از آن حدس پوانکاره در ابعاد بالا با استفاده از نظریهٔ در

را به‌ترتیب وقوع ذکر می‌کنند. همچنین [۱۱] و [۱۲] را نیز ملاحظه کنید.

نهایتاً وقتی که وضعیت رو به آرامی بود، عبارت من راجع به سواحل ریو دوباره بر سر زبانها افتاد. این بار دانلد هورنیگ، مشاور علمی جانسون رییس جمهور وقت آمریکا، بود که درساینس [۹] چنین نوشت:

> این خوشی بی‌خیالانهٔ این تصور را به‌طور جدی در ریاضیدانان پیش خواهد آورد که احساس یک فرد عادی که مالیات می‌پردازد باید این باشد که خلاقیت ریاضی را باید با بیت‌المال در سواحل ریودوژانیرو و یا جزایر اژه پشتیبانی کرد.

(من در اوت ۱۹۶۶ به جزایر یونانی سفر کرده بودم ولی این مسافرت با پول بنیاد ملی علوم انجام نشده بود.)

پاسخی که شورای انجمن ریاضی آمریکا و همچنین سی. موری رییس این انجمن به این اظهارات داده بودند مرا بسیار خوشحال کرد. نامهٔ موری در ساینس [۱۵] بدین گونه آغاز می‌شد:

> شورای انجمن ریاضی امریکا در گردهمایی ۲۸ اوت از من خواست تا این توضیحات را به نظر مجلهٔ ساینس برسانم:
>
> قطعات انتخاب شده از سخنرانی دانلد هورنیگ، مشاور علمی رییس جمهور، مایهٔ حیرت و نگرانی بسیاری از ریاضیدانان شد. انتقادات و نظرات ... وی در مورد ریاضیات و ریاضیدانان ... بی‌مورد و بی‌معنی‌اند. در اظهارات او راجع به تعطیلات در سواحل ریو یا جزایر اژه به‌طور ضمنی ولی نه‌چندان پوشیده

خود فرو بردن (engulfing) ثابت شد. این را «قضیهٔ خودم» می‌نامم. در واقع با وجود اینکه قضیهٔ من و قضیهٔ اسمیل معنای مشابهی دارند ولی منطقاً از یکدیگر متمایزند. قضیهٔ اسمیل ثابت می‌کند که اگر یک خمینهٔ مشتق‌پذیر یک کره‌ـهوموتوپی باشد آنگاه ساختار تکه‌ای‌ـخطی آن همانند کره است. قضیهٔ من ثابت می‌کند که اگر یک خمینهٔ تکه‌ای‌ـخطی یک کره‌ـهوموتوپی باشد آنگاه ساختار توپولوژیک آن همانند کره است.

چیزهای زیادی بودند که راه را برای اثبات قضیهٔ من هموار کردند. من با بحث‌های میزر آشنایی داشتم (فکر می‌کنم اولین نفری که او متقاعد کرد من بودم؛ موقعی که دانشجوی کارشناسی بودم این مطلب بامزه را فهمیده بودم: گروهی که بتوان در آن یک حاصلضرب نامتناهی تعریف کرد گروه بدیهی است، که واضح است). و دیگر اینکه از طریق کلاسهای فاکس با توپولوژی تکه‌ای‌ـخطی آشنا بودم. مانع روانی وجود داشت که نمی‌گذاشت مطلبی دربارهٔ کره‌ـ هوموتوپی‌های با بعد بالا ثابت کنم. و پس از آنکه شنیدم اثباتی که اسمیل آورده با نظر مساعد روبرو شده تقلیل یافت. و همان‌طور که تو اشاره کردی ترفند پنزوز ـ زیمان‌ـ وایتهد در دسترسم بود.

به مجرد اینکه قضیه‌ام را ثابت کردم چنین به‌نظرم رسید که اثبات آن بسیار ساده‌تر و واضحتر از اثبات اسمیل از قضیه خودش است. با وجود اینکه من و تو و دیگران مطالب زیادی راجع به مبانی توپولوژی تکه‌ای‌ـخطی نوشته‌ایم، واقعیت امر این است که در آن هیچ چیز جالب و عمیقی وجود ندارد (در قیاس با مثلاً قضیهٔ سارد در توپولوژی دیفرانسیل)؛ تمام این چیزها راجع به وضعیت عام با وجود جزییات پردردسری که دارند ولی چندان جذاب و باور نکردنی به‌نظر نمی‌رسند. آنچه که در کتابهای توپولوژی تکه‌ای‌ـخطی جالب است نتایج پایانی است، مثل قضایای باز کردن گره‌ها و hـکوبوردیسم و sـکوبوردیسم؛ اکثر این نتایج هم صورت در خود فروبردنی (engulfing) دارند و هم صورت دستواره‌ای. و مسلم است که بعدها سرچشمهٔ نسل‌های جدیدی از نظریات ریاضی شدند.

حالا هم قضیهٔ من و هم قضیهٔ اسمیل در ابعاد ۵ به بالا صحت و اعتبار دارند. اثبات آنها در ابعاد ۷ به بالا ساده‌تر است. شهود اینکه در بعد ۵ درست هستند از ابتدا وجود داشت. مسألهٔ عمدهٔ ارائهٔ لم‌های مناسب و آوردن دلایل معقول و پذیرفتنی بود. نظری که تو راجع به قضیهٔ من ابراز کردی و آن را «خلاص شدن از شر تکینی‌های با بالاترین بعد» نامیدی یک فرمول‌بندی خوب از آن بود.

(به‌گمانم مطلبی که در اینجا می‌خواهم بگویم ترستن و گروموف را خوشحال خواهد کرد. در ۱۹۶۰ من و اسمیل هر دو گناهانی را مرتکب شدیم که مشابه گناهان ترستن و گروموف بود. این دو مدعی چیزهایی شدند که اگر به طرز مناسبی تفسیر شوند درستند، بدون اینکه اثبات خوبی برای آنها بیاورند، و بنابراین مدعی مالکیت تمامی مناطق ریاضیات و قضایای درون آن شدند و کسانی را که کارهای پر زحمت را انجام دادند از وجهه و شهرت فراوانی که نصیب خود کردند محروم نمودند. من و اسمیل هم چنین کارهایی را بر خود روا دانستیم، چون می‌دانستیم که بعضی از این قضایا درست است و، لااقل در خلوت، این را می‌گفتیم، بدون اینکه بدانیم چطور باید آنها را ثابت کنیم، یا شاید بدون اینکه بخواهیم خودمان را گرفتار این کار کنیم.)

به استفان اسمیل حمله شده است. دانیل. اس. گرینبرگ در مقالات خود در مجلهٔ ساینس دربارهٔ جدال بین اسمیل و بنیاد ملی علوم عدم صحت این ادعاها را به اندازهٔ کافی نشان داده است.

در همان موقع نامه‌ای درنوتیسز چاپ شد که قسمت پایانی آن را در اینجا می‌آورم:

ایجاد جنجال بر سر وجود ملاحظات سیاسی در اعطای بورس تحقیقاتی که ظاهراً با هدف آرام کردن و دفع حملهٔ عوام فریبانهٔ یک نمایندهٔ کنگره انجام شود، باعث جلب احترام هیچ‌کس (مخصوصاً نمایندگان کنگره) نسبت به این اصول و صداقت پیروان آن نمی‌شود.

تمامی مجریان علمی دولت فدرال [آمریکا] در مقابل اثرات آتی سربازگیری و جنگ ویتنام بر جامعهٔ علمی آمریکا سکوت اختیار کرده‌اند. در همین زمینه هورنیگ به‌منظور منحرف کردن بحث از بحران فعلی در مورد عدم حمایت دولت فدرال از علوم پایه سعی در قربانی کردن ریاضیدانان با اشاره به گفتهٔ اسمیل در مورد مطالعاتش در سواحل ریو کرد.

البته این کوشش در ظاهر عبث به نظر می‌آید اما نتایج مخربی دربر خواهد داشت.

هایمن باس — ئی. ر. کولچین

ف. ئی. بروردر — س. لانگ

تا جایی که من می‌دانم اسمیل اکثر کارش را خودش انجام داد و احتمالاً هرش هم همکاری خیلی کمی با او کرد. من و تو در تابستان ۱۹۶۰، در اصلاح کردن استدلالها برای بعد ۵ و همچنین در استفاده از استدلالهای مشابه در نتایج مختلف مربوط به بازکردن گره‌ها، همکاری فراوانی با یکدیگر کردیم. در نهایت ما مقاله‌هایمان را به‌طور مجزا از هم چاپ کردیم، هر چند که کارهای مشترک کوچکی هم در جاهای مختلف منتشر کردیم. اگر واقعاً نگران این بودیم که چه کسی اول فکر چه چیزی را کرد می‌بایست یک منشی را به این کار می‌گماشتیم که تمامی مکالمات ما را یادداشت کند. هر دو علاقه‌ای به اینکه مقالات مشترکی بنویسیم نداشتیم. ولی آن همکاری ما را به فعالیت واداشت و کمک کرد تا برای هر دومان به اندازهٔ کافی قضایای خوب ثابت کنیم.

کلام آخر اینکه: بعد از چند سال که بر روی این موضوع کار کردم علاقه‌ام نسبت به آن از بین رفت. چون این قضایای بزرگ و ساده به‌وجود آمده بودند و دیگر چیزی باقی نمانده بود. اگر کسی می‌خواهد راجع به آنها سخنرانی کند به خودش مربوط است و اگر کسی می‌خواهد از این قضایا برای محاسبات و رده‌بندی [خمینه‌ها ـم.] استفاده کند برایش دعای مختصری می‌کنم. ولی تمام این مطالب به‌نظرم خسته کننده و ملال‌آورند.

قربانت
جان استالینگر

ویلیام برودر — س. لانگ
ش. ش. چرن — م. لووه
رابرت آ. هرمان — ر. س. پالیس
ی.ن. هرشتاین — م. ه. پروتر
ئی. ر. کولچین — جی. واشینتزر

مشاهدهٔ چنین پشتیبانی از جانب دوستانم بسیار مایهٔ خوشحالی من شد.

اجازه بدهید که سخنانم را همان‌گونه تمام کنم که در فونیکس به پایان برده بودم: «از این که به داستان من گوش سپردید بسیار سپاسگزارم.»

* استیو اسمیل، دانشگاه کالیفرنیا در برکلی آمریکا

مراجع

[۱] Gleason, A., Evolution of an active mathematical theory, *Science* 145 (July 31, 1964) 451-457.

[۲] Greenberg, Dan, The Smale case: NSF and Berkeley pass through a case of jitters, *Science* 154 (Oct. 7, 1966) 130-133.

[۳] ———, Smale and NSF: A new dispute erupts, *Science* 157 (Sept. 15, 1967) 1285.

[۴] ———, Handler statements on Smale case, *Science* 157 (Sept. 22, 1967) 1411.

[۵] ———, The Smale case: Tracing the path that led to NSF's decision, *Science* 157 (Sept. 29, 1967) 1536-1539.

[۶] ———, Smale: NSF shifts position, *Science* 158 (Oct. 6, 1967) 98.

[۷] ———, Smale: NSF's records do not support the charges, *Science* 158 (Nov. 3, 1967) 618-619.

[۸] Halmos, P., *I Want to be a Mathematician, an Automathography*. New York: Springer-Verlag (1985).

[۹] Hornig, D., A point of view, *Science* 161 (July 19, 1968) 248.

[۱۰] Morrey, C., Letter to the editor, *Science* 162 (Nov. 1, 1968) 514-515.

[۱۱] ———, The case of Stephen Smale, *Notices of the American Math. Soc.* 14 (Oct. 1967) 778-782.

[۱۲] ———, The case of Stephen Smale: Conclusion, *Notices of the American Math. Soc.* 15 (Jan. 1968) 49-52 and 16 (Feb. 1968) 297 (by Serge Lang).

[۱۳] Poincaré, H., *Oeuvres*, VI, Gauthier-Villars, Paris 1953, Deuxiéme Complément à L' Analysis Situs, 338-370.

[۱۴] ———, Cinquiéme Complément à L' Analysis Situs, 435-498.

[۱۵] Smale, S., On How I Got Started in Dynamical Systems, *The Mathematics of Time*. New York: Springer-Verlag (1980).

[۱۶] ———, On the Steps of Moscow University, *Math. Intelligencer* 6 no. 2 (1984) 21-27.

[۱۷] ———, A survey of some recent developments in differential topology, *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963) 131-145.

[۱۸] Taubes, G., What happens when Hubris meets Nemesis, *Discover*, July 1987.

نقش فشردگی در ایده‌آلهای ماکزیمال حلقهٔ توابع پیوسته $R(A)$

جواد حاجی‌بابایی
دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

آنالیز و توپولوژی از جمله میدانهای وسیع ریاضیات می‌باشند و فشردگی از آرگومانهای درونی و با اهمیت آن. دادن یک تصویر واقعی از نقش فشردگی در دنیای ریاضیات نیازمند این حقیقت است که بازدید وسیعی از آنها انجام شود و نمی‌توان به‌سهولت همهٔ این نقش آفرینی را به تصویر کشید. بلکه باید گفت: ریاضیات راهی است بی‌پایان که هرکس در گوشه‌ای از آن به اندازه توان خود خوشه می‌چیند و بهره‌مند می‌گردد. فشردگی نقشی حیاتی در آنالیز ایفاء می‌کند. از جمله در وجود بعضی از قضایای اساسی به‌عنوان تکنیک‌هایی در اثبات آنها، برای مشاهدهٔ ظرافت و چگونگی انجام این کار به مرجع [۱] رجوع کنید. فشردگی بر زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ یک مفهوم (ویژگی) کلی‌تر از متناهی بودن است. می‌توان نشان داد که فشردگی تعمیمی از متناهی بودن است و به‌علاوه پُلی است بین حالات متناهی و بعضی حالات نامتناهی (فشرده) که خواص روی مجموعه متناهی را به حالت نامتناهی (فشرده) تعمیم و انتقال می‌دهد و به‌طور کلی می‌توان بسیاری از گزاره‌های آنالیز را در سه ردهٔ زیر دسته‌بندی کرد:

۱) برای مجموعه متناهی بدیهی‌اند؛

۲) برای مجموعه‌های نامتناهی فشرده درست هستند و به‌طور معقول ساده می‌باشند؛

۳) برای مجموعه‌های نافشرده یا غلط‌اند و یا خیلی مشکل اثبات می‌شوند.

البته حرکت از وضعیت متناهی به وضعیت نامتناهی فشرده نیازمند برخی توجهات معمولی نیز می‌باشد. هدف اصلی این مقاله آشکارکردن نقش فشردگی در رده‌بندی ایده‌آلهای ماکزیمال حلقه توابع پیوسته روی $A = [a, b]$ است ولی این نتیجهٔ مهم جنبی نیز عاید می‌گردد که دیدگاه فوق را تأیید می‌کند. فرض کنید $R(A)$ مجموعهٔ همه توابع پیوسته روی زیرمجموعه A از اعداد حقیقی باشد. $R(A)$ تحت عملگرهای جمع و ضرب معمولی به یک حلقه تبدیل می‌شود.

تعریف: یک ایده‌آل I از $R(A)$ یک زیر مجموعه ناتهی از $R(A)$ می‌باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر f و g در I و هر φ در $R(A)$ داشته باشیم:

(i $g - f \in I$

(ii $\varphi f \in I$

بدیهی است که $R(A)$ و $\{\theta\}$ دو ایده‌آل بدیهی $R(A)$ هستند. در اثبات ذیل حالات بدیهی را کنار می‌گذاریم.

اکنون اگر F زیرمجموعه متناهی از $\mathbb{R}$ باشد، یافتن همه ایده‌آلهای $R(F)$ ساده است!

گزاره (I_f): گیریم F زیرمجموعه متناهی $\mathbb{R}$، $R(F)$ حلقه همه توابع پیوسته حقیقی روی F و I ایده‌آلی از $R(F)$ باشد. آنگاه یک زیرمجموعه نابدیهی H از F موجود است به‌طوری‌که I دقیقاً شامل عناصری از $R(F)$ است که روی H پوچ (صفر) می‌شوند.

اثبات: اگر $I = \{\theta\}$ (تابع صفر) آنگاه حکم بدیهی است زیرا

$H = F$ کار می‌کند؛ گیریم $I \neq \{\theta\}$ لذا fی در I هست به‌طوری‌که اگر $F = \{x_1, \dots, x_p\}$ آنگاه

$$f(x_j) \neq 0 \qquad \forall\, j = 1, 2, \dots, p$$

تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_i : F \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$\varphi_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که:

$$\frac{1}{f(x_j)}.\varphi_j.f = \varphi_j \in I$$

طبق شرط دوم ایده‌آل بودن.

حال قرار می‌دهیم $E = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_l}\}$، که E شامل تمام xهائی در F است به‌طوری‌که fی در I موجود باشد که: $f(x_j) \neq 0$. در این‌صورت هر تابع حقیقی g از $R(F)$ که روی $H = F \cap E^c$، پوچ شود به شکل

$$g = \sum_{k=1}^{l} g(x_{j_k})\varphi_{j_k}$$

است و لذا متعلق به I است. بدیهی است که هر عضو I روی H توصیف شده در بالا صفر می‌شود و لذا اثبات کامل می‌گردد. □

اکنون از حالت متناهی به نامتناهی فشرده گذر می‌کنیم. اگرچه نمی‌توانیم همه ایده‌آلهای $R(A)$ را برای هر زیرمجموعه نامتناهی A از $\mathbb{R}$ دسته‌بندی کنیم ولی اگر A فشرده باشد همه ایده‌آلهای $R(A)$ دارای خاصیت ویژه‌ای خواهند بود که در گزاره I_c ارائه می‌گردد.

گزاره I_c: فرض کنید A زیرمجموعه فشرده از $\mathbb{R}$ باشد و I یک ایده‌آل $R(A)$، آنگاه لااقل یک نقطه p در A وجود دارد به‌طوری‌که برای هر f در I داریم: $f(p) = 0$.

اثبات: (برهان خُلف). فرض کنیم برای هر $p \in A$، تابعی چون f_p در I موجود باشد که $f_p(p) \neq 0$، داریم: $f_p^2 \in I$ و چون $f_p^2 > 0$ و f_p^2 پیوسته است یک بازهٔ باز J_p شامل p موجود است به‌طوری‌که برای هر $t \in A \cap J_p$ داریم: $f_p^2(t) > 0$ و چون A فشرده است تعداد متناهی J_p مانند $J_{p_1}, J_{p_2}, \dots J_{p_m}$ موجود است که A را می‌پوشاند. چنانچه تابع $g = \sum_{i=1}^{m} f_{p_i}^2$ را بیازمائیم خواهیم داشت:

$$g \in I, g(x) > 0 \qquad \forall\, x \in A$$

لذا برای هر φ در $R(A)$ داریم: $\varphi = (\frac{\varphi}{g}).g \in I$ پس $I = R(A)$ که متناقض است با انتخاب I. □

گزاره I_c نتایج زیبائی بدنبال می‌آورد که در ذیل ملاحظه خواهیم کرد.

نتیجه: فرض کنید M یک ایده‌آل ماکزیمال $R(A)$ باشد (A هر زیرمجموعه فشرده $\mathbb{R}$) آنگاه یک نقطه p در A وجود دارد که M شامل تمام توابعی است که در p صفر می‌شوند، بدین ترتیب ایده‌آلهای ماکزیمال دسته‌بندی می‌شوند!

(M را ماکزیمال گوئیم هرگاه اگر ایده‌آل N بین M و $R(A)$ واقع شود آنگاه یا $N = M$ یا $N = R(A)$).

اکنون در وضعیتی هستیم که کاربردهایی از احکام فوق ارائه کنیم. $R([0, 1])$ و مجموعه همه توابع f متعلق به $R([0, 1])$ که روی برخی از بازه‌های $[0, \delta]$ صفر می‌شوند را در نظر بگیرید ($0 < \delta < 1$ ، $\delta = \delta(f)$)، واضح است که این مجموعه یک ایده‌آل $R([0, 1])$ است و این ایده‌آلها تنها در یک ایده‌آل ماکزیمال واقع خواهد شد. این روش یک رده از ایده‌آلها را مشخص خواهد کرد. برای یک کلاس دیگر از ایده‌آلها دنبالهٔ $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ که $0 \leq t_n \leq 1$ و $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ و همه fهایی از $R([0, 1])$ را که $f(t_n) = 0$ برای $n > N$ $(N = N(f))$ در نظر بگیرید، سپس همه fهایی که متعلق به $R([0, 1])$ بوده و $|x^{-1}f(x)|$ کراندار باشند ($0 < x \leq 1$) ایده‌آل دیگری بدست می‌دهند که تنها در یک ایده‌آل ماکزیمال واقع خواهد بود!

این دو شیوهٔ ایده‌آلهای ماکزیمال $R([0, 1])$ را رده‌بندی خواهد کرد و به‌علاوه قابل تعمیم به هر زیرمجموعه A (نامتناهی فشرده) از $\mathbb{R}$ خواهد بود.

گزاره I_c و I_f با هم ارتباط زیبائی دارند که به بررسی آن می‌پردازیم:

گزاره I_c': گیریم A یک زیرمجموعه نامتناهی فشرده $\mathbb{R}$ باشد

و I یک ایده‌آل $R(A)$ که تحت فرم حد یکنواخت بسته است. به‌عبارت دیگر اگر (f_n) در I باشند و $f_n \xrightarrow{\text{unif}} \varphi$ (حد یکنواخت روی A) آنگاه $\varphi \in I$.

تحت این شرایط یک زیرمجموعه بستهٔ ناتهی E از A موجود است به‌طوری‌که I دقیقاً شامل توابعی از $R(A)$ خواهد بود که روی E صفر می‌شوند؛ به‌عکس اگر E هر زیرمجموعه بسته ناتهی A باشد، مجموعه توابعی از $R(A)$ که روی E صفر می‌شوند تشکیل یک ایده‌آل می‌دهند که تحت حد یکنواخت بسته است. گیریم E بزرگترین زیرمجموعه A باشد که همه توابع I روی آن صفر می‌شوند.

اثبات: باید ثابت کنیم هر تابع φ که روی E پوچ (صفر) شود حد یکنواخت (روی A یک دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در I خواهد بود). این نشان می‌دهد که φ در I قرار دارد.

اگر $E = A$ آنگاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. (در این حالت $I = \{\theta\}$) لذا فرض می‌کنیم $E \subsetneq A$ و D هر زیرمجموعه بسته A که مجزای از E است و به‌علاوه p نقطه‌ای دلخواه در D باشد.

چون $p \notin E$، پس یک تابع f_p در I وجود دارد به‌طوری‌که $f_p(p) \neq 0$. توابع f_p^2 نامنفی و در I واقعند، لذا مشابه گزاره I_c یک تعداد متناهی از نقاط p_1، p_2، ...، p_m در D وجود دارد که: $f_p \neq 0$، $f_{p_i}^2 > 0$ و $f = \sum_{i=1}^{m} f_{p_i}^2$ تابعی مثبت روی D است و روی D از پائین کراندار است. مثلاً با کران پائین α؛ چون f در I است لذا f، E را پوچ (صفر) می‌کند. اکنون تابع g را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{f(x)} & f(x) \geq \alpha \\ 1 & f(x) < \alpha \end{cases}$$

واضح است که g روی A پیوسته است و تابع $h = (\frac{1}{\alpha}g)f$ در I واقع است به‌علاوه داریم:

$$(0 \leq h \leq 1); h(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in E \\ 1 & \forall x \in D \end{cases}$$

حال فرض کنیم φ تابعی دلخواه در $R(A)$ باشد به‌طوری‌که برای xهای در E، $\varphi(x) = 0$. قرار می‌دهیم: $D_n = \{x : x \in A, |\varphi(x)| \geq 1/n\}$ اگر $\varphi \neq 0$ باشد آنگاه برای nهای بقدرکافی بزرگ D_n ناتهی است. فرض کنید برای هر n، h_n تابعی در I باشد که

$$h_n(x) = 1 \quad \forall x \in D_n;$$
$$0 \leq h_n(x) \leq 1 \ \forall x \in A$$

h_n موجود است زیرا D_n زیرمجموعه بسته A بوده و مجزای از E می‌باشد. چون h_n در I است پس $h_n\varphi \in I$. حال با توجه به ساختار h_n داریم:

$$|h_n(x)\varphi(x) - \varphi(x)| \leq 1/n \quad \forall x \in A$$

لذا $\varphi \overset{\text{unif}}{\Leftarrow} h_n\varphi$ که این اثبات را کامل می‌کند.□

گزاره I_c تحت زیرمجموعه‌های نافشرده $\mathbb{R}$ برای اکثر روشهای مفید نادرست است. ذیلاً برای یک حالت نافشرده گزاره‌ای ارائه می‌کنیم.

گزاره I_n: فرض کنید B زیرمجموعه‌ای نافشرده (نابسته و یا بی‌کران) از $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه یک ایده‌آل I در $R(B)$ وجود دارد که تحت فرم حد یکنواخت بسته است، به‌طوری‌که برای هر x در B یک f در I وجود دارد که $f(x) \neq 0$.

اثبات: فرض کنید B از بالا کراندار نباشد. برای هر عدد صحیح n فرض کنید f_n تابعی روی $\mathbb{R}$ باشد به‌طوری‌که

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \geq n \\ 1 & x \leq n-1 \\ \text{خطی} & [n-1, n] \end{cases}$$

با محدود کردن دامنهٔ f_nها به B، f_n در $R(B)$ قرار می‌گیرد. اکنون فرض کنید I. مجموعه همه توابع به شکل $\varphi = \varphi_1 f_{n_1} + \varphi_2 f_{n_2} + \cdots + \varphi_l f_{n_l}$ باشد. که در آن φ_1، ...، φ_l در $R(B)$ می‌باشند. واضح است که $I. \neq R(B)$ زیرا برای $x \geq \max\{n_1, \ldots, n_l\}$ داریم $\varphi(x) = 0$ (B از بالا کراندار نیست) و چون همه f_nها در I. واقعند و $f_n(x) > 0$ برای $n > [x] + 1$. اکنون فرض کنید I مجموعه همه حدود یکنواخت دنباله‌هایی از توابع در I. باشد. آنگاه I یک ایده‌آل است و برابر $R(B)$ نیست زیرا:

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in I. \qquad \square$$

شایسته است حالات دیگر نافشرده را به‌عنوان سرگرمی و تمرین به خواننده واگذار کنیم و به‌عنوان حسن ختام کلام زیبای حافظ را یادآور شویم که:

«ما درس سحر در ره میخانه نهادیم»

مرجع

[۱] Edwin Hewitt, Rings of real-valued continuous function I, *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 64 (1948) 45-99.

چند سؤال در کوهمولوژی موضعی

کامران دیوانی‌آذر
دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف.

در این مقاله به‌طور مختصر به معرفی مدولهای کوهمولوژی موضعی و مفهوم اعداد باس یک مدول می‌پردازیم و سؤالهای مهمی را که تحقیقات در شاخهٔ کوهمولوژی موضعی بر پایهٔ آنها استوار بوده است بیان می‌کنیم. در پایان چند حدس "باز" را مطرح می‌کنیم.

(در سراسر این مقاله فرض کنید A یک حلقهٔ جابجایی و یکدار و M یک Aـمدول است. هرگاه A موضعی با ایده‌آل ماکزیمال m باشد،از علامت (A, m) استفاده می‌کنیم.)

§۱: الف) معرفی مفهوم اعداد باس یک مدول

(در سراسر این بخش فرض کنید که حلقهٔ A نوتری است).

تعریف: i) زیر مدول N از Aـمدول M را تحویل‌ناپذیر (irreducible) در M نامند هرگاه $M \neq N$ و N را نتوان به‌صورت اشتراک دو زیر مدول M که اکیداً بزرگتر از N هستند نوشت.

ii) Aـمدول M را تجزیه‌ناپذیر (indecomposable) نامند، هرگاه $M \neq o$ و تنها جمعوندهای مستقیم آن o و M باشند.

iii) برای Aـمدول ناصفر M، Aـمدول E را که شامل M است، یک توسیع اساسی M گویند هرگاه به ازای هر زیرمدول ناصفر N از E داشته باشیم $N \cap M \neq o$.

بنابر قضیه ۳.۱.۵ [۷] هر Aـمدول M، دارای یک توسیع اساسی وانژکتیو است که آن را پوشش انژکتیو (injective envelope) M نامند و با علامت $E(M)$ نمایش می‌دهند.

بنابر گزاره ۲.۲۸ و نتیجه ۱ آن در [۶] قضیه زیر را داریم.

قضیهٔ ۱: فرض کنید M یک Aـمدول ناصفر باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

i) $E(M)$ تجزیه ناپذیر است؛

ii) $E(M)$ توسیع انژکتیو هر زیر مدول ناصفر خودش می‌باشد؛

iii) زیرمدول صفر M در M تحویل ناپذیر است.

نتیجه: اگر P یک ایده‌آل اول A باشد، آنگاه P یک ایده‌آل تحویل ناپذیر A است، در نتیجه بنابر قضیهٔ فوق $E(\frac{A}{P})$ یک Aـمدول تجزیه‌ناپذیر می‌باشد.

بنابر لم ۲.۲۹، نتیجهٔ لم ۲.۳۱ و نتیجهٔ قضیهٔ ۲.۳۲ در [۶] قضیه زیر را داریم.

قضیهٔ ۲: یک تناظر یک به یک بین $Spec(A)$ و مجموعهٔ همهٔ کلاسهای هم‌ارزی (تحت Aـایزومورفسیم) Aـمدولهای تجزیه ناپذیر انژکتیو بصورت $P \longleftrightarrow E(\frac{A}{P})$ موجود است و به‌ویژه اگر به‌ازای $p, q \in Spec(A)$ داشته باشیم $E(A/p) \cong E(A/q)$، آنگاه $p = q$.

بنابر نتیجه قضیه ۳.۱۳ و ۴.۴ در [۶] قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳: هر Aـمدول انژکتیو E را می‌توان به‌صورت مجموع مستقیمی از Aـمدولهای تجزیه ناپذیر انژکتیو نوشت که دارای خاصیت یکتایی به‌صورت زیر است.

اگر $(E_i)_{i\in I}$ و $(F_j)_{j\in J}$ دو خانواده از Aـمدولهای تجزیه ناپذیر انژکتیو باشند، به‌طوری‌که $\bigoplus_{i\in I} E_i \cong \bigoplus_{j\in J} F_j$ آنگاه یک جایگشت $\delta : I \to J$ چنان موجود است که به‌ازای هر $i \in I$، E_i و $F_{\delta(i)}$ ایزومورفند.

تعریف: برای Aـمدول M رشتهٔ دقیق

$$o \to M \xrightarrow{d^{-1}} E^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \to E^i \xrightarrow{d^i} E^{i+1} \to \cdots$$

را که در آن به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}.$، $E^i \cong E(\ker d^i)$ یک رزلوشن انژکتیو مینیمال برای M گویند.

قضیه ۴: فرض کنید

$$o \to M \xrightarrow{d^{-1}} I^0 \to \cdots \to I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1} \to \cdots$$

و

$$o \to M \xrightarrow{e^{-1}} Q^0 \to \cdots \to Q^i \xrightarrow{e^i} Q^{i+1} \to \cdots$$

رزلوشن‌های انژکتیو مینیمال برای M باشند، دراین‌صورت به ازای هر $i \in \mathbb{N}.$، ایزومورفسیم $f^i : I^i \to Q^i$ چنان موجود است که دیاگرام زیر جابجایی باشد

$$\begin{array}{ccccccccccc} o & \to & M & \to & I^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \to\cdots\to & I^i & \xrightarrow{d^i} & I^{i+1} \to \cdots \\ & & id_M \downarrow & & f^0 \downarrow & & f^1 \downarrow & & f^i \downarrow & & f^{i+1} \downarrow \\ o & \to & M & \to & Q^0 & \xrightarrow{e^0} & Q^1 & \to\cdots\to & Q^i & \xrightarrow{e^i} & Q^{i+1} \to \cdots \end{array}$$

بنابر قضیه فوق هرگاه $o \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ یک رزلوشن انژکتیو مینیمال برای Aـمدول M باشد، آنگاه برای هر $i \in \mathbb{N}.$، I^i تحت ایزومورفیسم یکتا است. لذا مجاز به نام‌گذاری آن هستیم و از علامت $E^i(M)$ برای آن استفاده می‌کنیم. بنابر قضایای ۳ و ۲ به ازای هر $i \in \mathbb{N}.$، $E^i(M)$ تحت ایزومورفیسم به‌صورت یکتا به‌صورت جمع مستقیمی مانند $E^i(M) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ بیان می‌شود که در آن به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، ایده‌آل اول $p \in Spec(A)$ موجود است به‌طوری‌که $E_\lambda \cong E(\frac{A}{p})$. کاردینال مجموعهٔ $\{\lambda \in \Lambda | E_\lambda \cong E(\frac{A}{p})\}$ را که فقط به مدول M، ایده‌آل اول p و عدد نامنفی i بستگی دارد، iـامین عدد باس (Bass) مدول M نامند و با علامت $\mu^i(p, M)$ نشان می‌دهند. با استفاده از این علامتگذاری داریم $E^i(M) \cong \bigoplus_{p\in spec(A)} \mu^i(p, M)E(\frac{A}{p})$ (که در آن $\mu^i(p, M)E(\frac{A}{p})$ به معنی حاصل جمع مستقیم $\mu^i(p, M)$ کپی از مدول $E(\frac{A}{p})$ می‌باشد.)

ب) معرفی مدولهای کوهمولوژی موضعی

فرض کنید M یک Aـمدول و I یک ایده‌آل A باشد تعریف می‌کنیم $\Gamma_I(M) = \{m \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} \ni I^n m = o\}$ اگر $f : M \to N$ یک Aـهمومورفیسم باشد، آنگاه $f(\Gamma_I(M)) \subseteq \Gamma_I(N)$. هومومورفیسم $f|_{\Gamma_I(M)} : \Gamma_I(M) \to \Gamma_J(N)$ را با علامت $\Gamma_I(f)$ نمایش می‌دهیم. به‌راحتی می‌توان دید که $\Gamma_I(\cdot)$ یک فانکتور هومورد Aـخطی و دقیق چپ ازکاتگوری Aـمدولها و Aـهمومورفیسمها به خودش است. به ازای هر $i \in \mathbb{N}.$، iـامین فانکتور مشتق شدهٔ راست $\Gamma_I(\cdot)$ را iـامین فانکتور کوهمولوژی موضعی (Local cohomology functor) نسبت به I نامند و آن را با علامت $H^i_I(\cdot)$ نمایش می‌دهند.

برای هر Aـمدول M، $H^i_I(M)$ به‌صورت زیر بدست می‌آید:

فرض کنید

$$o \to M \xrightarrow{d^{-1}} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \to \cdots \to E^i \xrightarrow{d^i} E^{i+1} \to \cdots$$

یک رشتهٔ دقیق باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}.$، E^i یک Aـمدول انژکتیو است. در این‌صورت همبافت زیر را داریم:

$$o \xrightarrow{\Gamma_I(d^{-1})} \Gamma_I(E^0) \xrightarrow{\Gamma_I(d^0)} \Gamma_I(E^1) \to \cdots \to \Gamma_I(E^i) \xrightarrow{\Gamma_I(d^i)} \Gamma_I(E^{i+1}) \to \cdots$$

$H^i_I(M)$، iـامین مدول همولوژی همبافت اخیر است یعنی $H^i_I(M) = \frac{\ker \Gamma_I(d^i)}{Im\, \Gamma_I(d^{i-1})}$. $H^i_I(M)$ را iـامین مدول کوهمولوژی موضعی (Local cohomology module) نسبت به I M می‌نامند.

§۲: چند سؤال مهم در کوهمولوژی موضعی

از دههٔ شصت میلادی تا کنون بیشتر تحقیقات انجام شده در کوهمولوژی موضعی جهت پاسخ دادن به سؤالات زیر بوده است.

فرض کنید M یک Aـمدول، I یک ایده‌آل A و $i \in \mathbb{N}.$ است.

سؤال ۱: در چه حالتهای $H^i_I(M)$ مساوی صفر است؟

سؤال ۲: در چه حالتهای $H^i_I(M)$ با تولید متناهی است؟

سؤال ۳: در چه حالتهای $H^i_I(M)$ آرتینی است؟

سؤال ۴: آیا در حالتیکه M باتولید متناهی باشد آنگاه $Ass_A(H^i_I(M))$ متناهی است؟

سؤال ۵: فرض کنید I با t عضو تولید شود در چه حالتهای $H^i_I(A)$ مساوی صفر است؟

در بارهٔ سؤال یک، پیشرفتهای زیر حاصل شده است.

قضیه ۱: فرض کنید A یک حلقه نوتری، M یک Aـمدول و I یک ایده‌آل از A باشد که با t عضو تولید شود. در این‌صورت برای هر $i > t$، $H^i_I(M) = o$.

قضیه ۲: فرض کنید A یک حلقهٔ نوتری، M یک Aـمدول با تولید متناهی و I یک ایده‌آل A باشد. در این‌صورت برای هر $i > \dim(M)$، $H^i_I(M) = o$ (که دراینجا منظور از $\dim(M)$، بعد کرول M است).

تعریف: حلقه موضعی و نوتری (A, m) با بُعد کرول n را منتظم گویند، هرگاه $x_1, \ldots, x_n \in m$ موجود باشند به‌طوری‌که $(x_1, \ldots, x_n) = m$.

در بارهٔ سؤال ۳، پیشرفتهای زیر حاصل شده است:

قضیه ۳: ([۵]) فرض کنید (A, m) یک حلقهٔ موضعی منتظم شامل اعداد گویا و I ایده‌آل A باشد و فرض کنید که به ازای هر $n > j$، $Supp(H^n_I(A)) = \{m\}$. در این‌صورت برای هر $n > j$، $H^n_I(A)$ آرتینی است.

قضیه ۴: ([۴]) فرض کنید (A, m) یک حلقه موضعی نوتری و M یک Aـمدول با تولید متناهی باشد. در این‌صورت به ازای هر $i \in \mathbb{N}.$، $H^i_m(M)$ آرتینی است.

در بارهٔ سؤال ۴، در [۲] مطلب زیر ثابت شده است:

قضیه ۵: فرض کنید (A, m) یک حلقهٔ موضعی منتظم با مشخصه $p > o$ باشد. در این‌صورت برای هر ایده‌آل I از حلقهٔ A و هر $i \in \mathbb{N}.$، $Ass_A(H^i_I(A))$ متناهی است.

§۳: چند حدس "باز"

در شاخه کوهمولوژی موضعی حدسهای زیر هنوز باز هستند:

حدس ۱: فرض کنید (A, m) یک حلقهٔ موضعی منتظم و I یک ایده‌آل A باشد. در این‌صورت برای هر $i \in \mathbb{N}.$، $Hom_A(\frac{A}{I}, H^i_I(A))$ با تولید متناهی است.

تعریف: برای هر Aـمدول M، مجموع تمام زیرمدولهای سادهٔ M را سُکل $M(Socle)$ گویند و با علامت $Soc(M)$ نمایش می‌دهند.

حدس ۲: فرض کنید (A, m) یک حلقهٔ موضعی منتظم و I یک ایده‌آل A باشد. در این‌صورت به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}.$، $Soc(H^i_I(A))$ با تولید متناهی است.

در حالتی‌که مشخصهٔ A ناصفر باشد درستی حدس فوق در [۲] نشان داده شده است.

حدس ۳: فرض کنید (A, m) یک حلقهٔ موضعی منتظم و I یک ایده‌ال A باشد. در این‌صورت به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}.$، تمام اعداد باس $H^i_I(A)$ متناهی هستند.

در حالتیکه مشخصهٔ A ناصفر و یا اینکه مشخصهٔ A صفر و $\dim(A) \leq ۳$ (بعد کرول) باشد درستی حدس فوق در [۲] ثابت شده است.

مراجع

[۱] C. Huneke, Problems on local cohomology, preprint.

[۲] C. Huneke, R. Y. Sharp, Bass numbers of local cohomology modules, preprint.

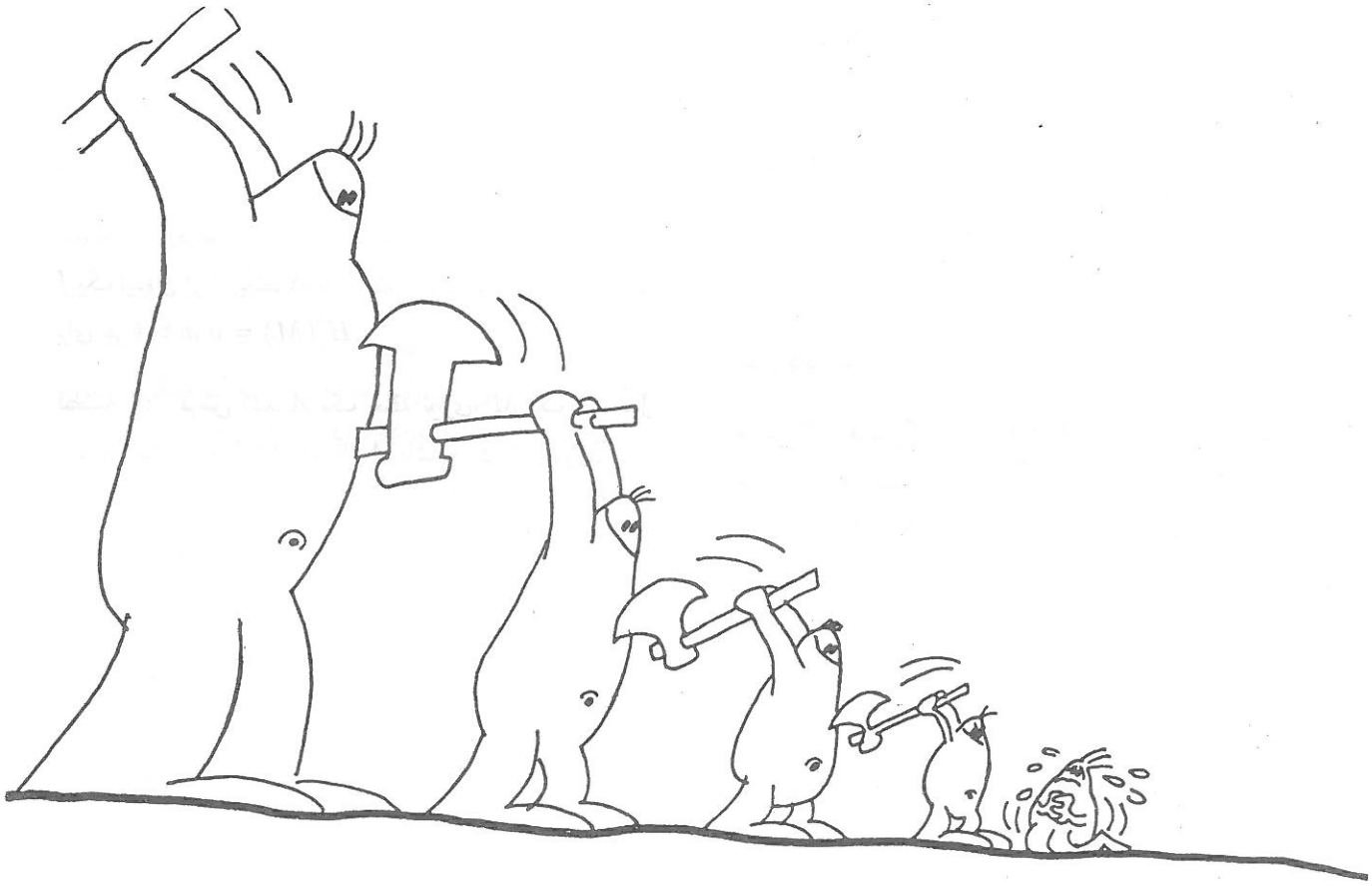
[۳] E. Matlis, Injective modules over noetherian rings, *Pacific J. Math.* **8** (1958) 511-528.

[۴] I. G. Macdonald, R. Y. Sharp, An elementary proof of the non-vanishing of certain local cohomology modules, *Quart. J. Math. Oxford* **23** (1972) 197-204.

[۵] A. Ogus, Local cohomological dimension of algebraic varieties, *Annals of Math*, **98** (1973), 327-365.

[۶] D. W. Sharpe, P. Vamos, *Injective modules*, Cambridge University Press, 1972.

[۷] J. R. Strooker, *Homological questions in local algebra*, London Math. Society Lecture Note Series 145.



اصل خوشتری

معادلات سیّاله

مهدی عسگری
دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

مقدمه:

می‌خواهیم مسألهٔ حلّ معادلات سیّاله در اعداد صحیح (یا اعداد گویا) را برای معادلات با بیش از یک متغیر مطالعه کنیم. می‌توان ادعا کرد که بسیاری از مسأله‌های قدیمی و تاریخی در ریاضیات راهنمای ریاضیدانان در خلق نظریه‌های جدید و بسیار مفید از این سری مسائل بوده‌اند. سعی خواهیم کرد این مطلب را با مثالهایی روشن کنیم.

معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$x^2 - dy^2 = n \qquad (1)$$

که در آن d یک عدد صحیح خالی از مربع کامل است و $x, y \in \mathbb{Z}$. معادلهٔ (۱) را می‌توان به این صورت نوشت

$$(x - y\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) = n$$

این بدان معناست که $x^2 - dy^2$ در میدان $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ به دو عامل خطی تجزیه می‌شود. با وارد کردن تابع نرم توسیع[1] N، $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$، می‌توان مسأله را به این شکل تبدیل کرد که به دنبال $\xi = x + y\sqrt{d}$ می‌گردیم که $x, y \in Z$ و $N(\xi) = n$. فرض کنید $D = \{x + y\sqrt{d} | x, y \in Z\}$. D یک حلقه در $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ خواهد بود و به دلیل ضربی بودن تابع N، حل (۱) در ارتباط نزدیک با حساب در حلقهٔ D است؛ مثلاً اگر $\xi_0 \in D$ یک جواب (۱) را بدهد و α در D یک یکه باشد (یعنی دارای وارون ضربی $\beta \in D$ باشد) داریم:

$$N(\alpha\beta) = 1 \Rightarrow N(\alpha)N(\beta) = 1 \Rightarrow N(\alpha) = \pm 1$$

حال اگر α طوری باشد که $N(\alpha) = 1$، آنگاه هر عدد به شکل $\xi_0\alpha^k$ نیز یک جواب (۱) را می‌دهد زیرا

$$N(\xi_0\alpha^k) = N(\xi_0)N(\alpha)^k = n \times (1)^k = n$$

این مثالی از ارتباط حل یک معادلهٔ سیّاله با مطالعهٔ حساب در حلقهٔ اعداد صحیح یک توسیع متناهی است.

در واقع از نظر تاریخی، آخرین قضیهٔ فرما[2] بوده که کومر[3] را واداشته است تا کارهایی اساسی دربارهٔ نظریهٔ بخشپذیری و تجزیه در میدانهای اعداد جبری (توسیع‌های متناهی $\mathbb{Q}$) انجام دهد. لذا بهتر است برای روشن شدن مطلب به قضیهٔ فرما بپردازیم. قضیهٔ فرما می‌گوید معادلهٔ

$$x^n + y^n = z^n \qquad (2)$$

برای $n > 2$ جوابی ندارد ($x, y, z \in \mathbb{Z}$) مگر جوابهای مبتذل ($xyz = 0$).

اگر این قضیه برای یک n ثابت شود برای مضارب n نیز برقرار خواهد بود؛ لذا کافی است که قضیهٔ فرما را برای $n = 4$ و nهای فرد اول ثابت کنیم.

---

۱) یک راه برای توصیف تابع نرم توسیع متناهی L/K چنین است: برای $\alpha \in L$ نگاشت خطی $T_\alpha : L \to L$ با $x \to \alpha x$ تعریف می‌شود. حال تعریف کنید: $N(\alpha) = \det(T_\alpha)$، به این ترتیب ضربی بودن تابع N روشن است.

۲) Fermat

۳) Kummer

گزاره: معادلهٔ (۲) برای $n = ۴$ جواب غیر مبتذل ندارد.

اثبات: (فرما-اویلر[۱])؛ این اثبات روشی را بکار می‌گیرد به نام نزول نامتناهی که ظاهراً از ابداعات فرماست. کافی است نشان دهیم معادلهٔ

$$x^۴ + y^۴ = z^۴$$

جواب غیرمبتذل ندارد. فرض کنید چنین نباشد و از بین جوابها جواب $(x_۰, y_۰, z_۰)$ را انتخاب کنید که $z_۰ > ۰$ حداقل مقدار ممکن را داشته باشد (اصل خوشترتیبی). حال داریم: $(x_۰, y_۰) = ۱$، زیرا اگر $(x_۰, y_۰) = d > ۱$ آنگاه:

$$d^۴ | z_۰^۴ \Rightarrow d | z_۰$$

و در نتیجه $(\frac{x_۰}{d}, \frac{y_۰}{d}, \frac{z_۰}{d})$ نیز یک جواب خواهد بود که با حداقل بودن $z_۰$ تناقض دارد. بنابراین $(x_۰^۲, y_۰^۲, z_۰^۲)$ یک جواب اولیه برای معادلهٔ فیثاغورس $(X^۲ + Y^۲ = Z^۲)$ است و بنابر حل معادلهٔ فیثاغورس اعداد صحیح a، b، $۰ < b < a$ وجود دارند که $(a, b) = ۱$ و یکی از a یا b زوج است و

$$x_۰^۲ = ۲ab \ , \ y_۰^۲ = a^۲ - b^۲, \ z_۰^۲ = a^۲ + b^۲$$

حال a فرد است و b زوج؛ زیرا در غیر این صورت

$$y_۰^۲ \equiv -b^۲ \equiv -۱ (\mathrm{mod}\ ۴)$$

که تناقض است. بنابراین داریم

$$b^۲ + y_۰^۲ = a^۲$$

و چون $(a, b) = ۱$ مجدداً $(b, y_۰, a)$ یک جواب اولیهٔ معادلهٔ فیثاغورس است؛ یعنی اعداد صحیح u و v وجود دارند به‌طوری که $(u, v) = ۱$ و

$$b = ۲uv, \ y_۰ = v^۲ - v^۲, \ a = u^۲ + v^۲$$

ولی $(a, b) = ۱$ نتیجه می‌دهد که

$$(u, u^۲ + v^۲) = (v, u^۲ + v^۲) = ۱$$

و از طرفی داریم

$$x_۰^۲ = ۲ab = ۴uv(u^۲ + v^۲)$$

بنابراین u, v و $u^۲ + v^۲$ مربع کامل‌اند.

$$u = r^۲ \ , v = s^۲ \ , u^۲ + v^۲ = t^۲$$

یعنی

$$r^۴ + s^۴ = t^۲$$

و $r \neq ۰$، $s \neq ۰$ و نیز

$$t^۲ = u^۲ + v^۲ = a \leq a^۲ < a^۲ + b^۲ = z_۰$$

لذا $t < z_۰$ و این با فرض وجود جواب متناقض است. □

حالت‌های $n = p$ که p عدد اوّل فردی است باقی می‌ماند. اثبات حالتهایی که با این روش‌ها حل شده‌اند نشان داده‌اند که دو مرحله اثبات باید انجام شود. (i) معادله (۲) جوابی در اعداد صحیح ندارد که x, y, z بر p بخش‌پذیر نباشند. (ii) معادلهٔ (۲) جوابی که در آن دقیقاً یکی از x, y و z بر p بخش‌پذیرند ندارند. (بدیهی است که بیش از یکی از آنها نمی‌تواند بر p بخش‌پذیر باشد.)

اصولاً مسائلی که برای (i) و (ii) باید حل شوند مشابه‌اند ولی تکنیک‌های حل آنها متفاوت است، گرچه معمولاً حل (ii) مشکل‌تر از (i) است. ما فعلاً به (i) می‌پردازیم:

اینجاست که کارهای اساسی کومر مطرح می‌شود. اولاً حالت $p = ۳$ که وضعیت خاصی دارد جداگانه حل می‌شود.

گزاره: معادلهٔ همنهشتی $x^۳ + y^۳ \equiv z^۳ (\mathrm{mod}\ ۹)$ جواب غیر مضرب ۳ ندارد. (این گزاره حکم را برای $p = ۳$ نتیجه می‌دهد.)

اثبات: فرض کنید چنین جوابی موجود است. با استفاده از قضیه کوچک فرما از معادلهٔ

$$x^۳ + y^۳ \equiv z^۳ (\mathrm{mod}\ ۳)$$

نتیجه می‌شود $x + y \equiv z$ یعنی $z = x + y + ۳k$. و لذا

$$\begin{aligned} x^۳ + y^۳ &\equiv z^۳ \\ &= (x + y + ۳k)^۳ \\ &\equiv x^۳ + y^۳ + ۳xy(x + y) (\mathrm{mod}\ ۹) \end{aligned}$$

ودرنتیجه $xy(x+y) \equiv ۰ (\mathrm{mod}\ ۳)$ یعنی $xyz \equiv ۰ (\mathrm{mod}\ ۳)$ که با فرض متناقض است. □

برای $p > ۳$ اثبات کومر بطور کلی شامل دو مطلب است. یکی استفاده از اینکه تجزیه به عوامل اول در حلقهٔ $\mathbb{Z}[\xi]$ (که ξ یک ریشهٔ اولیهٔ p-ام واحد است) منحصر بفرد است و دیگری تحقیق امتناع بعضی همنهشتی‌های خاصّ به هنگ p. البته

---

۱) Euler

این بدان معنا نیست که با ابزار همنهشتی‌ها می‌توان به حلّ قضیهٔ فرما پرداخت. زیرا معادلهٔ $x^p + y^p \equiv z^p \pmod p$ در واقع (بنا به قضیهٔ کوچک فرما) هم‌ارز $x + y \equiv z \pmod p$ است که جوابهای زیادی دارد که بر p بخش‌پذیر نیستند. حتی مثلاً برای $p = ۷$ می‌توان نشان داد که همنهشتی $x^۷ + y^۷ \equiv z^۷$ برای هر هنگی جوابهای غیر مضرب ۷ دارد.

بنابراین تا اینجا دو سؤال اساسی مطرح خواهد بود:

۱ـ در کدام میدانهای اعداد جبری تجزیه به عوامل اول یکتاست؟

۲ـ خواص حسابی میدانهایی که در آنها تجزیه یکتا نیست چگونه است؟

به عنوان مثالی از حالتی که تجزیهٔ یکتا نداریم $\mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$ را در نظر بگیرید که در مورد توسیع $\mathbb{Q}(\sqrt{-۵})$ مطرح می‌شود. در این حالت داریم

$$۲۱ = ۳ \times ۷$$
$$۲۱ = (۱ + ۲\sqrt{-۵})(۱ - ۲\sqrt{-۵})$$

حال با استفاده از تابع نرم نشان می‌دهیم عوامل سمت راست همگی در $\mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$ اول هستند. مثلاً فرض کنید $۳ = \alpha\beta$، $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$ و غیر یکّه باشد. حال از آنجا که

$$N(x + y\sqrt{-۵}) = x^۲ + ۵y^۲$$

و داریم

$$N(۳) = N(\alpha\beta) \Rightarrow N(\alpha)N(\beta) = q$$

خواهیم داشت $N(\alpha) = ۳$؛ ولی معادلهٔ $x^۲ + ۵y^۲ = ۳$ در اعداد صحیح جواب ندارد. بنابراین ۳ اول است. مشابهاً می‌توان نشان داد ۷، $۲\sqrt{-۵} + ۱$ و $۲\sqrt{-۵} - ۱$ در $\mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$ اول‌اند. از طرفی اینها شریک نیز نیستند (یعنی هیچ یک از ضرب دیگری در یک یکّه بدست نیامده‌اند) زیرا $\frac{۵ \pm ۲\sqrt{-۵}}{۳}$ و $\frac{۱ \pm ۲\sqrt{-۵}}{۷}$ در $\mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$ قرار ندارند. بنابراین ۲۱ واقعاً دو تجزیه دارد.

البته نبودن تجزیهٔ یکتا بدین معنا نیست که نمی‌توان یک نظریهٔ کامل حساب برای این میدانها داشت. در واقع کومر نشان داد در این حالتها می‌توان نگاشتی از عناصر غیر صفر حلقهٔ اعداد صحیح مربوط به این میدانها به مجموعه‌ای جدید تعریف کرد که تصویرها در مجموعهٔ جدید دارای تجزیهٔ یکتا هستند. در واقع تصویر یک عنصر اول در تجزیهٔ غیریکتا در مجموعهٔ جدید دیگر اول نخواهد بود و بطور غیر بدیهی تجزیه می‌شود. مثلاً در مورد مثال بالا، اگر تصاویر عناصر $\mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$ را با خودشان نشان دهیم داریم

$$۳ = p_۱p_۲ \qquad ۷ = p_۳p_۴;$$
$$۱ + ۲\sqrt{-۵} = p_۱p_۳ \qquad ۱ - \sqrt{-۵} = p_۲p_۴$$

و لذا تجزیهٔ ۲۱ نیز یکتا خواهد بود (مگر در ترتیب عوامل).

کومر این موجودات جدید را اعداد ایده‌آل نامید و امروزه آنها را شمارنده می‌گوییم.

وجود نظریهٔ بخش‌پذیری برای یک میدان با ارزیابی‌های آن میدان در ارتباط است و این مسأله توصیف حساب را برای میدانهای اعداد جبری به بررسی ارزیابی‌های آن میدانها مربوط می‌کند. قضیه زیر را که بدون اثبات می‌آوریم این مطلب را روشن می‌کند.

قضیه: D را یک حلقه با میدان کسرهای K بگیرید و فرض کنید R مجموعهٔ همهٔ ارزیابی‌های K است. ارزیابی‌های R یک نظریهٔ بخش‌پذیری روی D القاء می‌کنند اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشند.

(i) برای هر $\alpha \neq ۰$ از D، $v(\alpha) = ۰$، برای تقریباً هر ارزیابی $v \in R$ (مگر تعداد متناهی).

(ii) α از K به D متعلق است اگر و فقط اگر $v(\alpha) \geq ۰$ برای هر $v \in R$.

(iii) برای هر زیرمجموعهٔ متناهی ارزیابی‌های $v_۱$، ...، v_m از R و هر مجموعه از اعداد صحیح نامنفی $k_۱$، ...، k_m، عنصر $\alpha \in D$ وجود داشته باشد که

$$v_۱(\alpha) = k_۱, \ldots, v_m(\alpha) = k_m .$$

می‌توان نشان داد که اگر D یک حلقه با میدان کسرهای k باشد و D' بستار صحیح D در یک توسیع متناهی K از k باشد آنگاه اگر D یک نظریهٔ بخش‌پذیری داشته باشد، D' نیز چنین است. این مطلب در مورد میدانهای اعداد جبری به این دلیل مهم است که ما همهٔ ارزیابی‌های میدان $\mathbb{Q}$ را از قبل می‌شناسیم که عبارتند از ارزیابی‌های pـآدیک وارزیابی معمول، $p = \infty$. (قضیه Ostrowski) از آنجا که $\mathbb{Z}$ دارای نظریهٔ بخش‌پذیری

می‌باشد حلقهٔ اعداد صحیح هر میدان اعداد جبری نیز دارای نظریهٔ بخش‌پذیری است.

می‌توان سؤال مشابه در مورد وجود نظریهٔ بخش‌پذیری را برای گروه ضربی K^* شامل عناصر غیر صفر میدان کسرهای K نیز مطرح ساخت که این مطلب منجر به تعریف شمارندهٔ کسری می‌شود.

اگر D یک حلقه با نظریهٔ بخش‌پذیری با میدان کسرهای K باشد و p_1، ... ، p_m یک مجموعهٔ متناهی از شمارنده‌های اول آن باشند، عبارت

$$q = p_1^{k_1} \dots . p_m^{k_m}$$

که در آن $k_i \in \mathbb{Z}$ را یک شمارندهٔ میدان K می‌گویند. اگر k_iها همگی نامنفی باشند آنرا شمارندهٔ معمولی و در غیر این‌صورت شمارندهٔ کسری گویند. اگر $\xi \in K^*$، تعدادی متناهی ارزیابی $\{v_{p_i} : i = 1, \dots, m\}$ متناظر با شمارنده‌های p_i، وجود دارند که $v_{p_i}(\xi) \neq 0$، در این وضعیت

$$\prod_{i=1}^{m} p_i^{v_{p_i}(\xi)}$$

را یک شمارنده اصلی (ξ) متناظر با عنصر $\xi \in K^*$ می‌گویند.

حال می‌توان یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ شمارنده‌ها تعریف کرد. دو شمارندهٔ a و b در یک میدان اعداد جبری K، هم‌ارزند اگر اختلافشان در یک شمارندهٔ اصلی باشد یعنی

$$a \sim b \Leftrightarrow a = b(\xi) \quad \xi \in K^*$$

می‌توان دید که این یک رابطهٔ هم‌ارزی است و مجموعهٔ رده‌های هم ارزی به‌طور طبیعی تشکیل یک گروه می‌دهند که به آن گروه رده‌های شمارنده‌ها گویند. این گروه برای میدانهای اعداد جبری متناهی است و تعداد عناصر آن را عدد رده‌ای، h، گویند. عدد h در بررسی حساب میدانهای اعداد جبری نقش بسیار مهمی بازی می‌کند. به‌عنوان مثال می‌توان نشان داد که اگر عدد رده‌ای یک میدان h باشد توان hـام هر شمارندهٔ آن اصلی است.

تعیین عدد h یک بحث مهم است. از آنجا که h یک شاخص برای همهٔ شمارنده‌های میدان K است و همهٔ شمارنده‌ها، حاصلضرب شمارنده‌های اول هستند که تعدادشان نامتناهی است، لذا برای محاسبهٔ عدد h در تعدادی متناهی مرحله باید فرآیندهای نامتناهی را به‌کار بگیریم. به همین دلیل برای محاسبهٔ h، سریهای نامتناهی مطرح می‌شوند. به‌طورکلی برای محاسبهٔ h روش‌های آنالیزی به‌کار می‌رود که در آن تابع زتای ددکیند[1] میدان K نقش اساسی دارد. به این ترتیب این مبحث با گروه شاخص‌ها و سریهای L نیز ارتباط طبیعی پیدا می‌کند و می‌توان عدد h را برحسب سریهای L نوشت. این شاخه از نظریهٔ اعداد در حال حاضر فعّال است و انتظار می‌رود در آینده نتایج عمیقی از آن حاصل شود.

مراجع

[۱] W. W. Adams, L. J. Goldstein, *Introduction to number theory*, Prentice-Hall, 1976.

[۲] Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number theory*, Academic Press, 1966.

[۳] J. W. Cassels, A. Frohlich, *Algebraic number theory*, Academic Presss, 1967.

[۴] I. R. Shafarouich, Abelian and nonabelian mathemathics, *The Math. Intelligencer*, No.1, Vol 13, (1991) 67-75.

۱) Dedekind

نگاهی به تاریخ ریاضیات ایران

روح‌الله جهانی‌پور
دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ ریاضیات سرگذشت رنجها، سختیها، پیروزیها و شکستهای ریاضیدانان پرتلاشی است که عمر گرانبهای خود را صرف پیشبرد وگسترش این شاخهٔ مهم و بنیادی علم نمودند. هر چند در دنیای امروز ملاک برتری علمی، کارهای علمی نوین و امروزی می‌باشد لکن تنها به این دلیل نمی‌توان از مطالعهٔ تاریخ و سرگذشت کارهای ریاضیدانان گذشته صرف‌نظر نمود. گذشته از اینکه می‌توان با بررسی و مطالعهٔ تاریخ از تلاشهای بی‌وقفه و شبانه‌روزی درس عبرت گرفت، معلوم می‌شود که چه کسانی در تکوین آثار گذشته پیشرو بوده‌اند و بدین سان حقی که احیاناً پایمال شده است، باز پس گرفته خواهد شد.

ظهور اسلام و اشاعهٔ فرهنگ اسلامی، خلق آثار ناب علمی و گسترش فرهنگ علم‌خواهی را در بین مسلمانان در پی داشت. از آنجا که در اسلام به کسب علم توصیهٔ فراوان شده است عجیب نیست که جهان علم درگذشته در سیطرهٔ دانشمندان مسلمان بود. در این میان ریاضیات نیز همچون دیگر علوم مورد توجه خاص دانشمندان مسلمان قرارگرفت. به‌ویژه اینکه ریاضیات به نحوی با مسائل عقیدتی و آداب دینی مسلمانان در ارتباط بود. مثلاً تعیین جهت قبله در نقاط مختلفِ کرهٔ زمین زمینه‌ای بود برای مطالعه و کار بر روی مثلثات کروی و لذا ریاضیدانان اسلامی در خلق آثار بسیاری دربارهٔ مثلثات کروی نقش داشته‌اند. یا در اختیار داشتن حساب دقیق ماه و سال یا به عبارت دیگر یک تقویم دقیق، موجبات روی آوری دانشمندان مسلمان را به سمت علم نجوم فراهم آورد و تحقیقات نجومی، تحقیقات هندسی را در پی داشت. مسائل مربوط به معاملات، خمس، زکات، ارث و غیره نیز عوامل مهمی در توجه مسلمانان به جبر بود و در این زمینه کارهای خوارزمی یادآوری می‌شود. بدین ترتیب می‌بینیم که حتی اگر از دید علمی مجرد نیز به وقایع ننگریم مسائل مذهبی و دینی خود انگیزه‌هایی قوی برای گسترش علم در میان مسلمین بوده‌اند.

دربارهٔ تاریخ ریاضیات و نیز تاریخ ریاضیات ایران نوشتجات فراوان است. در این مقاله قصد بررسی یک موضوع خاص ریاضی را نداریم بلکه می‌خواهیم نگاهی گذرا بر کارهای بزرگی که توسط ریاضیدانان مسلمان ایرانی انجام شده است بکنیم و در نهایت تحلیل مختصری دربارهٔ نقش ریاضیدانان ایرانی ارائه دهیم.

مطلب را بیشتر حول سه محور، می‌گردانیم مثلثات، هندسه و جبر. مثلثات از جمله علومی است که بی‌شک می‌توان گفت ریشه در نجوم دارد. قدمت علم مثلثات بسیار زیاد است و البته این موضوع برای تمدنهای قدیمی که نیازمند تحقیقات علمی و به‌ویژه ریاضی بودند جای تعجب ندارد چون هر ملتی که محتاج تقویم بود تا بتواند کارهای روزمره و امور درازمدت سالیانهٔ خویش را به موقع انجام دهد، گریزی از تحقیقات نجومی نداشت و ناخودآگاه هرچند خیلی اندک و در محدودهٔ کوچک به سمت مثلثات کشیده می‌شد. در این میان کارهای یونانیان بیشتر از دیگر ملل به چشم می‌خورد. کاملترین کتابی که در یونان قدیم، دربارهٔ مثلثات نگاشته شده است، **المجسطی بطلمیوس** است. عمدهٔ کارهایی که ریاضیدانان ایرانی در مثلثات انجام داده‌اند در زمینهٔ مطالب این کتاب بوده است. برای یونانیان آن زمان تعیین موقعیت خورشید،

ماه و پنج سیاره‌ای که در آن زمان شناخته شده بود، در هر لحظه اهمیت داشت و لذا ابزار دقیقی لازم بود تا بتوان به کمک آن به این پرسش پاسخ داد که «در هر لحظه موقعیت اجرام سماوی فوق چیست؟». مطالب کتاب المجسطی در این مورد است.

بسیاری از روشهای ریاضی بطلمیوس به جدولی که آن را «جدول وترها در دایره» نامیده بود بستگی دارد. این جدول در مقالهٔ اول کتاب المجسطی واقع است. جدولی از این دست، همراه با آگاهی از چگونگی استفاده از آن، همهٔ چیزی بود که منجمین قدیم برای حل مسائل مثلثات مسطحه در اختیار داشتند. با این حال این جداول قدرت کافی برای حل مسائل مذکور را داشتند و ریاضیدانان ایرانی نیز از همین ابزار برای محاسبات نجومی کمک می‌جسته‌اند. از جمله خواجه نصیرالدین طوسی به نحوهٔ ساخت و استفاده از این گونه جدولها اشاره کرده است و از آنها برای حل مثلث استفاده نموده است. اما ریاضیدانان ایرانی به این جدولها بسنده نکردند و با معرفی شش تابع مثلثاتی معروف یعنی سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت روشهای مثلثاتی یونانیان را توسعه دادند. در اینجا به‌طور مختصر به بعضی از کارهای مهمی که ریاضیدانان ایرانی در مثلثات انجام دادند اشاره می‌کنیم. ابوالوفای بوزجانی شکل جدید فرمول سینوس مجموع دو کمان را به اثبات رساند. این مطلب به شکلی ابتدایی در المجسطی بیان شده بود. خواجه نصیرالدین طوسی توانست اثبات جدیدی از قانون سینوسها در مثلث ارائه کند. همچنین ابوریحان بیرونی، توانست با به‌کارگیری روشهای مثلثاتی شعاع زمین را با تقریب خوبی محاسبه کند. از جمله کارهای دیگر می‌توان به درون‌یابی‌های خطی و مرتبهٔ دو برای محاسبهٔ مقادیر توابع مثلثاتی به ازای زوایایی که در جدول موجود نبود، اشاره کرد. مثلاً غیاث‌الدین جمشید کاشانی به کمک درونیابی خطی مقدار $\sin ۱^\circ$ را به‌طور تقریبی محاسبه نمود. او همچنین از روشی که امروز به تکرار موسوم است و اساس حل معادلات غیرخطی را تشکیل می‌دهد نیز استفاده نمود. در این روش نقطهٔ ثابت تابعی که به‌طور مناسب انتخاب می‌شود، جواب معادلهٔ غیرخطی مورد نظر خواهد شد و این نقطهٔ ثابت حد یک دنباله از تکرارهای آن تابع است.

در حیطهٔ جبر کارهای عظیمتری انجام شده است. پیش از این به انگیزهٔ شیوع مباحث جبری در بین مسلمانان اشاره نمودیم. تأثیر کارهای ریاضیدانان مسلمان و به‌ویژه ایرانی، در جبر بر کارهای ریاضیدانان کشورهای دیگر بسیار مشهود است. معروفترین و احتمالاً نخستین جبردان مسلمان، خوارزمی بوده است. نام جبر و کلمهٔ Algebra، از نام کتاب او با عنوان **حساب فی الجبر و المقابله** برداشت شده است. نیز کلمهٔ الگوریتم که به مجموعه‌ای از اعمال سازمان یافتهٔ متوالی برای رسیدن به یک هدف معین اطلاق می‌شود از نام خود خوارزمی گرفته شده است. کتاب خوارزمی به‌طور کامل به روشهای حل انواع معادلات جبری اختصاص دارد. او ابتدا معادلات درجهٔ دو را رده‌بندی کرده و در هر مورد با آوردن مثالهایی روشهای حل را توضیح می‌دهد. این روشها به‌طور کلی در فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم یعنی:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

برای معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ خلاصه می‌شود. چون در آن زمان هنوز اعداد منفی در محاسبات به کار نمی‌رفت و ریاضیدانان با اعداد منفی آشنایی نداشتند، رده‌بندی خوارزمی از معادلات درجهٔ دو بر اساس این است که آیا همهٔ ضرایب معادله هم علامتند یا مختلف‌العلامه، مثلاً اگر $b < ۰$، معادلهٔ فوق در ردهٔ معادلاتی به شکل

$$ax^۲ + c = bx$$

می‌گنجد. پس از بررسی معادلات درجهٔ دوم، خوارزمی معادلات رادیکالی را نیز مورد بحث قرار می‌دهد. سپس در مباحث مربوط به ارث به حل معادلات کسری و چند مجهولی می‌پردازد.

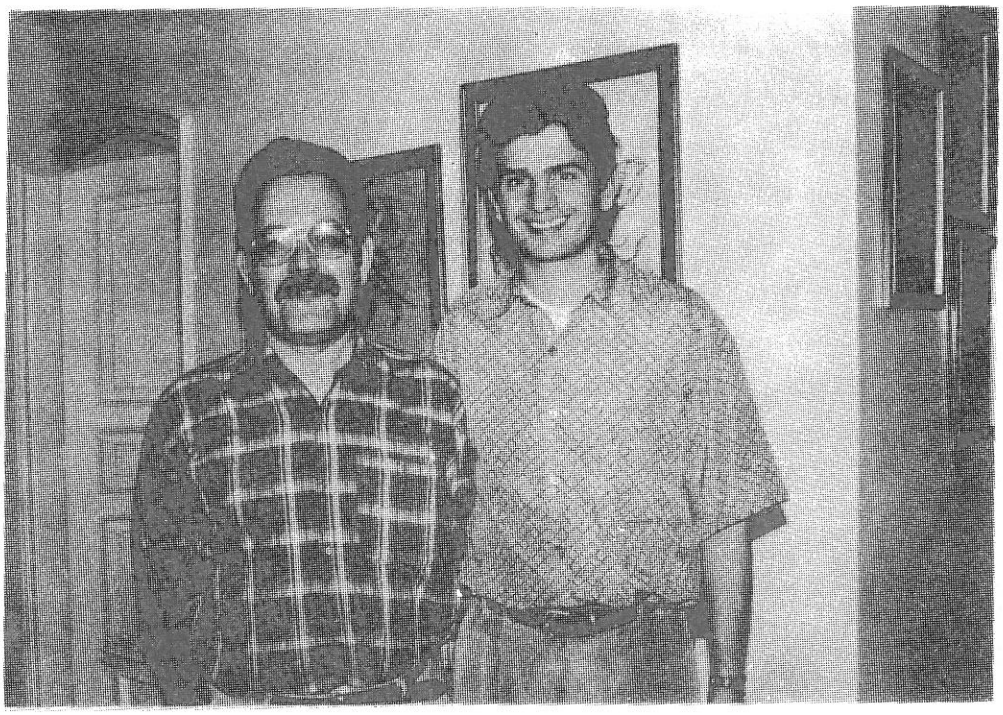
پس از کار بزرگ خوارزمی می‌توان به کار خیام در حل معادلهٔ درجهٔ سه اشاره نمود، که از جمله کارهای جبری معروف در تاریخ ریاضیات ایران است. در این حیطه می‌توان به کارهای ثابت بن قره اشاره کرد. او تمام سعی خود را بر روی روشهای هندسی در حل معادلات درجهٔ دو گذاشت. با این حال ابوکامل که ریاضیدان فعالی بود و تقریباً با ثابت بن قره همزمان می‌زیست، بیشتر تلاش کرد که جبر را به کمک روشهای جبری تحلیل کند و کمتر به هندسه متوسل شد. در این میان کارهای الکرجی برای حسابی ساختن جبر از کارهای نمایان در تاریخ ریاضیات اسلامی است.

حال نگاهی به هندسه می‌اندازیم. شاید بتوان گفت نخستین کتابی که هندسه را به‌صورت سازمان یافته درآورد، کتاب «**اصول**» اقلیدس بود. روش اقلیدسی همان چیزی است که امروزه به روش «**اصل موضوعی**» موسوم است. ابتدا اصول متعارفی یعنی آنچه از جهت منطقی برای همگان واضح و بی‌نیاز از اثبات

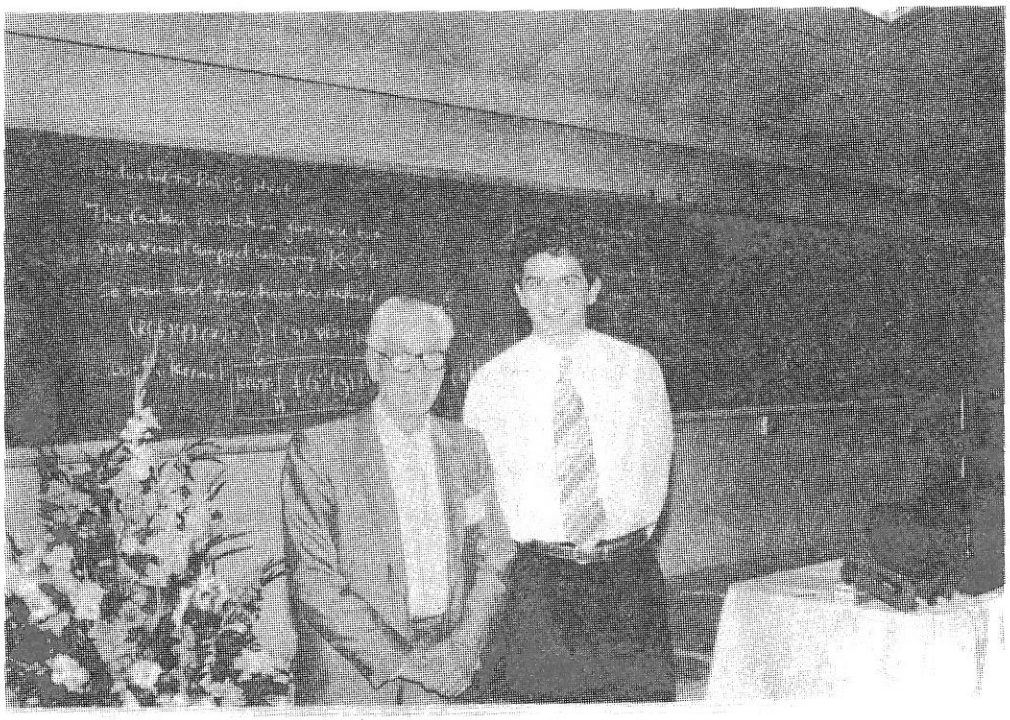
است وضع می‌شود، آنگاه اصول موضوع که اصلهای بدون اثبات و مربوط به هندسه است و پس از آن انبوهی از تعاریف و قضایا که برهانهای آنها تنها مبتنی بر اصول موضوع یا قضایای از پیش ثابت شده است. برای ریاضیدانان اسلامی هم نفس این روش اهمیت داشت و هم قضایای هندسی. از این قضایا در محاسبات نجومی استفاده می‌شد و بحث روی اصول موضوع، آنها را برصحت منطقی این روش و اینکه آیا اصول وضع شده واقعاً بی‌نیاز از اثباتند یا بعضی از بقیه نتیجه می‌شوند، مطمئن می‌ساخت. مثلاً رسالهٔ «**شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس**» که خیام آن را نگاشته است مختص بررسی اصل‌های موضوع اقلیدس و به ویژه اصل توازی است. در این رساله، خیام، منحنی را به عنوان مسیر حرکت یک ذره در صفحه تعریف می‌کند. اصل موضوع توازی منشأ کارهای متعدد ریاضیدانان بر روی اصل مذکور بوده است. آنان می‌خواستند بدانند که آیا این اصل از اصول دیگر نتیجه می‌شود یا مستقل از آنها است. از جمله ریاضیدانان ایرانی که روی این موضوع کار کردند، خواجه نصیرالدین طوسی بود که سعی کرد ثابت کند این اصل از اصول دیگر نتیجه می‌شود اما برهان او نادرست بود یعنی از اصلی استفاده می‌کرد که خود معادل توازی است. با این حال می‌توان گفت او اولین ریاضیدانی بود که به هندسهٔ نااقلیدسی خیلی نزدیک شد.

همان طورکه پیشترگفته‌ایم مثلثات و هندسه هردو درمحاسبات نجومی ریشه دارند. بنابراین طبیعی است ریاضیدانان اسلامی که به نجوم علاقهٔ فراوان داشتند در هندسه نیز نقش بسزایی ایفاء نمودند. علاوه بر هندسهٔ مستقیم‌الخط کارهای متعددی برروی مقاطع مخروطی در بین کارها و آثار ریاضیدانان اسلامی به چشم می‌خورد.

هر چند در این مقالهٔ مختصر نتوانستیم به طورکامل و دقیق، کارهای ریاضیدانان ایرانی را بررسی کنیم لیکن از همین مطالب اندک نیز واضح است که آنان در بسط، نشر و گسترش ریاضیات قدیم نقش بسیار مهمی داشته‌اند. این نقش تنها به خاطر ترجمهٔ آثار یونانیان و توسعهٔ روشهای آنها نبوده است بلکه کارهای نوین بسیاری در بین آثار آنان به‌چشم می‌خورد.



بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور ـ دانشگاه صنعتی شریف
دکتر امین شکراللهی ـ دکتر سیدعباداله محمودیان



بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور ـ دانشگاه صنعتی شریف
دکتر امین شکراللهی ـ پروفسور ریچارد گای

گفتگو با دکتر امین شکراللهی

دکتر امین شکراللهی از ریاضیدانان نسل جدید ایرانی مقیم خارج از کشور است که ارتباط نزدیک و ویژه‌ای با جوامع ریاضی داخل کشور برقرار کرده است. دکتر شکراللهی در موقعیتهای گوناگون به ایران سفر کرده است و در جوامع مختلف حضور یافته است. گفتگوی زیر در فروردین ماه ۱۳۷۲ در تهران انجام یافت. در این گفتگو ایشان شرح حال و نظرات خود را بیان داشتند.

• ***قبل از هر چیز برای خوانندگانی که با شما آشنانیستند، مقداری دربارهٔ سوابق تحصیلی خودتان صحبت کنید.***

ـ منظورتان از سابقهٔ تحصیلی، دبستان به بعد است؟

• ***اگر چه دبستان هم برای ما جالب است ولی از دانشگاه شروع کنید.***

ـ من دوران دانشگاهم را نمی‌توانم جدا از دورهٔ قبل از آن بدانم چون چهار سال اول را در مدرسهٔ ایرانی بودم بعد رفتم مدرسهٔ آلمانی تهران که در آن موقع برای دانش آموزان ممتاز تهران کنکور برگزار می‌کردند. تا کلاس یازدهم آنجا بودم که انقلاب شد کلاس دوازدهم هم مدرسه باز بود، در آلمان دورهٔ دبستان تا دبیرستان سیزده سال طول می‌کشد. بعد از انحلال مدرسه به ما گفتند که دانش آموزان ایرانی بروند و ما رفتیم آلمان به همین علت من گفتم که دورهٔ دانشگاهم را از دورهٔ قبل از آن نمی‌توانم جدا کنم. در آلمان ترم اول را راه و ساختمان خواندم چون می‌گفتند به علوم احتیاجی نداریم ولی به رشته‌های مهندسی احتیاج داریم. بعد در سال ۸۲ در دانشگاه کارلسروهه شروع به خواندن ریاضی کردم.

• ***در آن موقع سن شما چقدر بود؟***

ـ من موقعی که کلاس سیزدهم را تمام کردم شانزده سال و نیم داشتم و در سن ۱۷ سالگی وارد دانشگاه شدم و در سن ۱۸ سالگی خواندن ریاضی را شروع کردم و یک سالی را که راه و ساختمان می‌خواندم از دست دادم و شش سال بعد یعنی در سال ۱۹۸۸ مدرک دیپلم را که در اینجا معادل فوق لیسانس ارزشیابی می‌شود ولی دقیقاً با آن قابل مقایسه نیست، گرفتم. در طول تحصیل کارهای مختلفی انجام دادم. مثلاً پیش استادی به نام تئوپولد (Teopold) که متخصص نظریهٔ اعداد است و کتابهایی در زمینه میدانهای دایره‌بُر (Fields Cyclotomic) نوشته است نظریهٔ اعداد می‌خواندم و بعد گرایشم را به سمت جبر معطوف کردم که کدهای جدید پیدا شدند. این کدها به طریق هندسهٔ جبری ساخته می‌شوند و در این زمینه کار می‌کردم، رساله‌ام را می‌نوشتم و بیشتر به کامپیوتر می‌پرداختم؛ یعنی کمک از ریاضیات محض در نظریهٔ اعداد در زمینهٔ کامپیوتر البته منظورم کامپیوتر نظری نیست که در حوزهٔ منطق ریاضی است. در منطق بیشتر بحث بر سر این است که فلان مسأله قابل حل هست یا نه؟ ولی در زمینه‌ای که من کار می‌کردم پیدا کردن روش حل مسائلی که قابل حل هستند مطرح است. به هر حال در فوریهٔ سال ۸۸ درسم تمام شد و قرار بود که آگوست ۸۸ آن را ادامه بدهم. در دورهٔ دکترای آنجا کلاسی وجود ندارد شخص برای دانشگاه کار می‌کند. اگر یک پروفسوری شخصی را به‌عنوان آسیستان قبول کند او شروع می‌کند با آن استاد کارکردن و تزش را می‌نویسد. در هر حال من تا آگوست ۸۸ بیکار بودم ولی کارهای تحقیقاتی کوچکی انجام می‌دادم. بعد دورهٔ دکتری را شروع کردم. شروع کردم به خواندن چیزهایی که دلم می‌خواست مثل: گروه‌های همولوژی و این جور چیزها. یک

سالی این گونه گذشت تا اینکه شخصی که او را می‌شناختم به بن رفت و پروفسور کامپیوتر شد او به من گفت که اگر می‌خواهی بیا با من کار کن. من هم رفتم و با او کار کردم. با هم در زمینهٔ پیچیدگی محاسبات کار می‌کردیم. سال ۸۹ بود که رفتم به بن و در آنجا خیلی سریع ظرف شش ماه تزم را تمام کردم. تزم در مورد پیچیدگی محاسبات بود و کدگذاری و نظریهٔ اعداد یعنی مبحثی بود که همهٔ اینها با هم ترکیب می‌شد. سال ۱۹۹۰ کار رساله‌ام تمام شد ولی نوشتن آن خیلی بیش از آنچه فکر می‌کردم طول کشید چون در دپارتمان کامپیوتر نمی‌توان مطالب را به همان راحتی دپارتمان ریاضی نوشت، باید همه چیز را بازکرد و توضیح داد و این باعث شد که کار نوشتن رساله یک سال طول بکشد یعنی تا سال ۹۱ و در این سال مدرکم را گرفتم و امتحاناتم را دادم و از آن زمان در همانجا مشغول به کار شدم و بر سر چند پروژه کار می‌کنیم که یکی بیش از همه وقتم را می‌گیرد کتابی است در مورد پیچیدگی محاسبات و با سه نفر دیگر مشغول نوشتن آن هستیم.

• ***عنوان دقیق رسالهٔ دکترای شما چیست؟***

ـ ترجمهٔ انگلیسی آن است.

Contribution to Coding and Complexity by Function Theory

(کاربرد تئوری توابع در کدگذاری و پیچیدگی)

• ***ارتباط علمی ایران با کشورهای دیگر اخیراً وضع بهتری پیدا کرده است و شما از کسانی هستید که در برقراری این ارتباط سهم دارید، نظر شما دربارهٔ این ارتباط و اینکه چطور می‌توان آن را بهتر ادامه داد چیست؟***

ـ البته نحوهٔ ارتباط من با دیگران فرق می‌کند چون دایی من ریاضی‌دان است و از طریق او ارتباط زیادی دارم یعنی از بچگی با این چیزها سروکار داشتم و وقتی آدم از بچگی با چیزی بزرگ می‌شود به راحتی آن را از دست نمی‌دهد و همیشه سعی می‌کند که آن را نگه دارد. البته در این چند سال ارتباط من به خاطر مسألهٔ خدمت نظام وظیفه که مسأله‌ای جزیی بود و به تازگی حل شد، شکل خوبی نداشت. در این دو سال و نیم اخیر چون نمی‌توانستم به ایران بیایم از خیلی از چیزهایی که در ایران رخ می‌داد بی‌خبر بودم. از مسائل اینجا و از موفقیت‌هایی که کسب می‌شد بی‌اطلاع بودم. من خودم می‌خواهم ارتباطم را ادامه دهم و می‌توانم آن را با ارتباطی که با جاهای دیگر دارم مقایسه کنم. مثلاً دایی من در برزیل است و با او خیلی تماس دارم در تابستان اخیر به آنجا رفتم و کار کردم و سمینار دادم، سخنرانی کردم که خیلی هم جالب بود و اینجا مسلماً از جهات دیگری جالبتر است چون به هر حال اقوام من در اینجا هستند. من همیشه می‌گویم که علم ریاضی یا هر علم دیگری بین‌المللی است و ملی نیست و درست نیست که بگوییم فلان کار اروپایی است و یا آمریکایی است یا ایرانی است. یعنی کار باید جهانی باشد و تا وقتی ایران این کار را انجام ندهد علم در ایران پیشرفت نمی‌کند و شما گفتید که وضع ارتباط علمی این اواخر بهتر شده است که امیداوارم باعث پیشرفت باشد. من در این زمینه مطلب زیادی نمی‌توانم بگویم چون دست اندرکار نیستم و خود شما از وضع موجود بهتر اطلاع دارید و می‌دانید که دقیقاً چه مسائلی مطرح است و دربارهٔ آنها چه تصمیماتی می‌توان گرفت.

• ***شما دو سال و نیم پیش هم اینجا بودید، تغییرات این مدت را چگونه ارزیابی می‌کنید؟***

ـ اگر تغییرات عینی را در نظر بگیریم که باید بگویم وضع خیلی فرق کرده است. مثلاً وضع تهران خیلی عوض شده است ولی تغییرات در مرکز تحقیقات باید بگویم که اطلاع دقیقی نداشتم. دفعه پیش که به ایران آمدم بیشتر با دانشگاه در تماس بودم سخنرانی‌هایم در دانشگاه بود و به همین علت از تغییراتی که به‌وجود آمده است اطلاع زیادی ندارم. البته تغییرات خیلی زیادی انجام شده است مثلاً از جمله چیزهای خیلی مهم پست الکترونیکی (e-mail) است که امیدوارم بتوان بیشتر از آن استفاده کرد؛ یعنی فقط بیت‌نت[1] نباشد بلکه اینترنت[2] هم باشد که با سهولت بیشتری بتوان ارتباط برقرار کرد فایل فرستاد و فایل گرفت و اصلاً احتیاجی به پست نباشد. کتابخانهٔ مرکز تحقیقات دفعهٔ قبل که آمدم درحال تکمیل بود یعنی کتابها را سفارش داده بودند ولی هنوز کتابها نرسیده بودند و از روی لیست کتابهایی که سفارش داده بودند دیدم که کتابخانهٔ نسبتاً کاملی خواهد شد و امیدوارم بتواند شماره‌های مربوط به قبل از سال ۱۹۸۵ مجلات را تهیه کند.

• ***مطلبی که برای خیلی از دانشجویان ایرانی مطرح است و جنجالی هم هست مسألهٔ ریاضیات کاربردی و ریاضیات محض است و اینکه موضوعات مهم و ناب پژوهشی در جهان چیست؟ و اصلاً چطور می‌توان تعریفی از ناب و مهم بودن موضوع به‌دست داد؟ دربارهٔ ریاضیات کاربردی نظر دکتر شهشهانی را هم بشنوید. ایشان می‌گویند در ایران ریاضیات کاربردی یعنی ریاضیات کارمندی. مثلاً کسی که در دانشگاه ریاضیات کاربردی می‌خواند می‌خواهد بعد از فراغت از تحصیل در جایی مشغول شود و دیگر کاری با ریاضیات ندارد.***

ـ این وضع مختص فقط ایران نیست. در آلمان هم مثلاً در رشتهٔ کاربرد در کامپیوتر دانشجویانی داریم که می‌گویند ما زبان پاسکال بلدیم دیگر چه لزومی دارد که کامپیوتر بخوانیم؟ من شخصاً با تفکیک این چنین قسمت‌های مختلف ریاضی مخالفم. در این قرن دیده‌ایم که قسمتهایی از ریاضی که قبلاً کاملاً از هم جدا فرض می‌شدند با هم تلفیق شده‌اند و مطالب جدیدی پیدا شده است. مثلاً از تلفیق جبر

---

۱) Bitnet

۲) Internet

و توپولوژی از یک طرف هندسه و جبر از طرف دیگر جبر توپولوژیک یا توپولوژی جبری به وجود آمد، هندسه جبری پیدا شد. مطالبی که خیلی‌ها اصلاً فکرش را هم نمی‌کردند پیدا شد. در ضمن شما پرسیدید که نظر من دربارهٔ موضوعات ناب پژوهشی چیست؟

مثلاً یکی از چیزهایی که الان از آن خیلی صحبت می‌شود سیستمهای دینامیکی است که خیلی‌ها آن را از زمینه‌های ناب پژوهش می‌دانند.

در ریاضی هم مثل جاهای دیگر که چیزهایی مُد می‌شود مطلب خاصی مُد می‌شود و مُد را کسانی تعیین می‌کنند که نخبه هستند. مثلاً در فیزیک نظریهٔ ریسمان نه فقط از دههٔ ۸۰ بلکه از دههٔ ۶۰ مطرح بود ولی در آن زمان اشخاص زیادی در این زمینه کار نمی‌کردند چون به نظر عجیب و غریب و بی‌فایده می‌آمد؛ ولی در دههٔ ۸۰ چند نفر در این زمینه مطالبی ثابت کردند که ناگهان نخبه‌های جهان فیزیک به این زمینه روی آوردند و مدام مقاله نوشتند و دیگران هم به تبع آنها به این سمت آمدند. مثلاً وقتی شخصی مانند ویتن[۱] در این زمینه کار مداوم انجام می‌دهد پس معلوم می‌شود که این زمینه ناب است و این مُد می‌شود. امکان دارد وقتی ۵۰ سال دیگر نتایج این دوره را که می‌نویسند بگویند چقدر بد شد که این همه آدمهای نخبه در این رشته کار کردند و امکان دارد بگویند چقدر خوب شد و ما الان می‌توانیم به سؤالات زیادی جواب دهیم. یعنی اینکه اگر چیزی مُد می‌شود دلیل بر این نیست که چیز خیلی خوبی باشد و از طرفی نظر افراد خیلی برجسته که در زمینه‌ای کار می‌کنند مهم است. در ریاضی هم مثل جاهای دیگر دیکتاتوری است؛ یعنی عده‌ای معدود که وضع خیلی خوبی دارند نخبگانی که انگشت‌شمارند به کارهای دیگران جهت می‌دهند. پس تعریف رشتهٔ ناب این است که فرضاً آدمی مثل ژان پیرسر[۲] بگوید که این زمینه خوب است در این صورت به نظر من کسی نمی‌تواند در این مورد حرفی بزند.

• ***الان چه زمینه‌هایی مد هستند؟***

ـ من آنقدر اطلاعات وسیع ندارم که اظهار نظر کنم ولی مثلاً هندسه جبری، حسابی مُد است. این قضایای فالتینگز[۳] که ثابت شده است یعنی از راه آراکلوف[۴] ثابت شده است چیزهایی را حل کرده است که قبلاً اصلاً قابل تصور نبود. واقعاً حدس‌های قوی‌ای را ثابت کرده است.

• ***بعد از ۶۰ سال؟***

ـ ۶۰ سال ممکن است خیلی زیاد نباشد مسأله این است که فکر نمی‌کردند که بتوانند آن را حل کنند ولی حل کردند. در هندسهٔ جبری مطالب پیچیدهٔ دیگری هست که من از آنها خیلی اطلاع ندارم. در نظریهٔ اعداد یکی از کارهای اساسی‌ای که باید انجام شود برنامهٔ لنگ‌لندز[۵] است که لاوِس دو سال پیش در انستیتو چهار مقاله دربارهٔ‌اش ارائه داد. در برنامهٔ لنگ‌لندز در یک حالت خاص با تصاویر دو L-سری مختلف سر و کار داریم، به این طریق که یکی را در دیگری ذخیره می‌کنیم و این L-سری‌ای که در L-سری دیگر ذخیره شده است را با آن مساوی می‌گیرد که منجر به نتایج خیلی عجیب و غریب می‌شود. به‌عنوان مثال دیگر، به نظر من برنامه‌ریزی سیستم ناب است، مُد است. البته مُد که می‌گویم منظورم این نیست که ارزش آن را پایین بیاورم. مُد بودن به تنهایی دلیل بالا یا پایین بودن نیست. مُد یعنی عدهٔ زیادی فرضاً عدهٔ خیلی خوبی روی این موضوع کار می‌کنند. در زمینه‌های دیگر ریاضی هم موضوعات نابی هست که من اطلاعی از آنها ندارم.

علم ریاضی یا هر علم دیگری بین‌المللی است و ملی نیست و درست نیست که بگوییم فلان کار اروپایی است و یا آمریکایی است یا ایرانی است. یعنی کار باید جهانی باشد و تا وقتی ایران این کار را انجام ندهد علم در ایران پیشرفت نمی‌کند

• ***از نظر شما مُد در زمینه‌های ریاضی کاربردی و دور از زمینه‌های مجرد چیست؟***

ـ در مورد اینکه ریاضیات کاربردی دقیقاً چیست باید فکر کنم من الان می‌خواستم در دنبالهٔ این جور چیزها چیزی بگویم که شاید خیلی‌ها ندانند. چیزی که به نظر من الان خیلی مهم است. در پیچیدگی محاسبات چیزی که به آن می‌گویند $P = NP$ درست است یا نه؟ دربارهٔ حرف شما موضوع دیگر تجزیهٔ اعداد به عوامل اول است و این مسأله‌ای است که الان هم هنوز روی آن کار می‌کنم. یکی از دلایلش هم این است که شما می‌توانید سیستمهای رمزنگاری را با آن شیوه درست کنید یا بشکنید. من در یک سخنرانی در دو سال پیش شنیدم که سخنران می‌گفت وقتی ما توانستیم یک عدد فرما یعنی دو به توان یک عدد بزرگ‌تر به علاوهٔ واحد را تجزیه کنیم تلفنهای ما یک لحظه هم آرام نداشت چون اشخاص رمزنگار مرتب سؤال می‌کردند که تا چه حد سیستمهای رمزنگاری دچار صدمه می‌شوند؟ منظور این است که برای تجزیه اعداد به عوامل اول کاربردهایی پیدا شده است که تا پنجاه سال پیش اصلاً قابل تصور نبود. در ریاضیات کاربردی زمینه‌هایی هست که متأسفانه اطلاع زیادی از آنها ندارم.

---

۱) Witten

۲) J. P. Serre

۳) Faltings

۴) Arakelov

۵) Langlands

• ***وضعیت آموزشی را در کشور چطور می‌بینید بهتر است بگویم وضع آموزش و پژوهش.***

ـ من در این مورد اصلاً نمی‌توانم نظری بدهم. خودم را خیلی کوچکتر از آن می‌دانم که بتوانم دربارهٔ وضع آموزشی ایران نظری بدهم. من دربارهٔ چیزهایی که دیده‌ام و به نظرم خوب نیست می‌توانم نظر بدهم. نظرم را مبتنی بر تفکر زیاد نمی‌دانم بلکه چیزی را که احساس می‌کنم بیان می‌کنم و ممکن است که در یک بحث و مجادله سریع نتوانم درباره‌اش درست فکر کنم. چیزی که در اینجا دیدم برنامهٔ دوره لیسانس است که به نظر من خیلی قوی و سنگین است. این واحدهای دوره لیسانس که حدود ۱۴۰ واحد است و من دیدم چیزی است که خودم تا دورهٔ فوق لیسانس آنها را گذارندم با اینکه من نسبت به بقیه کسانی که فوق لیسانس گرفتند مطالعات خیلی وسیعی داشتم فقط شصت درصد اینها را بلد بودم حتی نمی‌توانم بگویم کاملاً بلد بودم چهل یا پنجاه درصدش را کاملاً بلد بودم ولی شصت درصد را می‌دانستم و بقیه را هم بلد نبودم. البته این ممکن است که در ایران اجرا شدنی باشد ولی فکر می‌کنم که این حجم زیاد را در مدت کم نمی‌شود خوب یاد گرفت و فهمید. فهمیدن نه این است که به طور موضعی مطلب را بفهمید ولی به طور جمعی درک درست و کاملی از آن نداشته باشید. من خود شخصاً دنبال یک مقصدی هستم که در آلمان به آن می‌گویند «کمتر بیشتر است» یعنی اگر آدم بتواند مطلب کمی را خیلی خوب یاد بگیرد بهتر است از اینکه چیز زیادی را خوب یاد نگیرد. البته این مطلبی است که شاید نتوانم آن را در بحث با عده‌ای که نظری مخالف نظر من دارند ثابت کنم.

• ***یکی از برنامه‌هایی که خیال دارند اجرا کنند زیاد کردن همین حجمی است که مورد اعتراض شماست به عنوان مثال درسی به اسم جبر III را که از درسهای دوره فوق‌لیسانس است به دوره لیسانس منتقل کرده‌اند یا مسائل مهندسی. و پنجاه درصدی هم که شما گفتید برای من جالب بود، به نظر شما چه قسمتهایی در برنامهٔ اینجا زیادی است؟***

ـ نمی‌توانم بگویم چه چیزهایی زیادی است ولی با سیستم آلمان که خودم دیده‌ام مقایسه‌اش می‌کنم. ما در آنجا یک دورهٔ مقدماتی داریم که در حدود یک سال و نیم است و این دوره چه چیزی را دربرمی‌گیرد؟ جبر خطی I و II آنالیز I و II و III و یک درس احتمالات و یک درس ریاضیات اولیه و یک رشتهٔ فرعی هم هر دانشجو باید داشته باشد که کامپیوتر I و II خواهد بود یا فیزیک I و II که به انتخاب دانشجو مربوط می‌شود. در دورهٔ مقدماتی شما درس را می‌گیرید و امتحان می‌دهید و بعد وارد دورهٔ بالاتر می‌شوید. در دورهٔ بالاتر به شما می‌گویند برای اینکه مدرک دیپلم بگیرید باید چهار امتحان بدهید. امتحانات هم همیشه شفاهی است و این چهار امتحان یکی ریاضیات محض است و دیگری ریاضیات کاربردی و یک رشتهٔ اصلی است و دیگری رشتهٔ فرعی. بعد به شما می‌گویند که برای ریاضیات محض ۱۸ ساعت امتحان بدهید ۱۸ ساعت یعنی چی؟ یعنی شما یک کلاس بزرگ که تشکیل می‌دهید چهار ساعت است و ۱۸ ساعت تقریباً ۴ تا کلاس بزرگ است. فرضاً این ۱۸ ساعت از آنالیز I و II و جبر I و II. آنالیز تابعی I تشکیل می‌شود. اینها چیزهایی است که شما برای ریاضیات محض باید امتحان بدهید. می‌توانید اینها را در صورتی که بخواهید به ترتیب دیگری بگیرید. مثلاً جبر بیشتر بگیرید. ریاضیات کاربردی ۱۴ ساعت است و خود من ریاضیات کاربردی I و II و III را امتحان دادم البته دربارهٔ اینکه جبر I و II و III چی هست باید توضیح داد. همین‌طور برای آنالیز مختلط I و II. بعد ریاضیات کاربردی امتحان دادم. سپس رشتهٔ اصلی که برای من نظریه اعداد بود و بعد یک رشتهٔ فرعی که برای من کامپیوتر بود. بعد از اینکه اینها را امتحان دادم و تزم را نوشتم تازه فوق‌لیسانس ریاضی گرفته بودم. این را با سیستم دوره لیسانس اینجا مقایسه کنید. در اینجا آنالیز مختلط می‌گیرید آنالیز تابعی چند درس جبری می‌گیرید مثلاً نظریهٔ گالوا. پس شما تمام چیزهایی را که من از بین آنها فقط چند درس را انتخاب کردم می‌خوانید.

• ***ولی امثال ما دانشجویانی که وقتی می‌خواهند کاری را انجام دهند بیشتر در زمینهٔ مورد علاقهٔ خود، کار می‌کنند و کار زیادی به بقیهٔ مطالب در زمینه‌های دیگر ندارند کم نیستند یعنی تحت تأثیر جوی که شما می‌گویید قرار نمی‌گیرند.***

ـ بله ممکن است این طور باشد ولی حتی این افراد هم باید وقتی را صرف یاد گرفتن و امتحان دادن دروس دیگر بکنند. حالا من از شما سؤالی دارم: فرض کنید شخصی به جبر علاقهٔ زیادی ندارد اگر شما به او نظریهٔ نمایش گروه‌ها یاد بدهید بالاخره باید طوری در این درس نمرهٔ قبولی بگیرد که مستلزم صرف وقت است در حالی که به درد او نمی‌خورد.

• ***البته در اینجا سیستم آنقدری هم که شما فکر می‌کنید فشرده و الزامی نیست. مثلاً در دورهٔ لیسانس درس جبر I و II داریم آنالیز I و II داریم و یک آنالیز III یک درس توپولوژی مقدماتی هست بعد یک درس توابع مختلط و یک درس آمار و احتمال اینها دروس اصلی دوره لیسانس است.***

ـ مثلاً آمار و احتمال چند واحد است؟

• ***آمار و احتمال ۸ واحد است ولی خوب در عمل بستگی به دانشگاه دارد که دروس را چگونه ارائه دهد. مثلاً در دانشگاه ما آمار و احتمال در سالهای گذشته خیلی خوب ارائه نمی‌شد. در آنجا من نمی‌دانم چه چیزی را عمیق می‌خوانند؟***

ـ من دربارهٔ جبری که خودم خواندم توضیح می‌دهم. جبری که ما خواندیم چه بود؟ یک درس جبر I داشتیم که شامل نظریهٔ گروه‌ها

بود بعد نظریهٔ حلقه‌ها و میدان‌ها و نظریهٔ گالوا و کاربردهای آن دربارهٔ حل‌ناپذیری معادلهٔ درجهٔ پنج به وسیله رادیکالها.

• *این چیزهایی که گفتید برنامهٔ درسی جبر I و II است؟*

ـ بله جبر I ما این سرفصلهایی بود که گفتم و همه باید اینها را بدانند چون جزو مطالب اساسی است. بعد جبر II بود که دست خط استاد را پیدا می‌کند یعنی اینکه استادی هست که فرضاً بعداً می‌خواهد جبر جابجایی درس بدهد چنین استادی در درس جبر II فقط جبر جابجایی درس می‌دهد. در جبر III ما نظریهٔ نمایش گروههای متناهی را خواندیم. جبر IV داشتیم که موضوعش این بود: که اگر یک گروه متناهی داشته باشیم آیا می‌توانیم آن را به‌عنوان گروه گالوا روی Q پیدا کنیم یا نه؟ این از کارهای تحقیقاتی استادی بود که درس را ارائه کرده بود. بعد درس جبر V داشتیم که اسمش را گذاشتند کوهمولوژی گالوا. قرار بود یک درس جبر VI هم داشته باشیم که موضوعش نظریهٔ میدانهای رده‌ای (Class Field Thory) بود و البته این درس اختیاری بود که استادش رفت و ارائه نشد. منظورم این است که درسهای جبری‌ای که خواندیم طوری بود که بعد از گذراندن مثلاً جبر II اطلاعات عمیقی داشتیم و دروس دیگر هم همین‌طور بود و این البته به استاد درس هم بستگی دارد. آنالیز مختلط را متأسفانه آنقدر که باید و شاید نخواندیم. آنالیز مختلط قضیهٔ کُشی بود و نگاشت همدیس و مطالب مقدماتی دیگر. آنالیز مختلط II عبارت بود از توابع وایرشتراس و معادلات تابعی که به نظر من زیاد خوب نبود و تکرار می‌کنم که این کاملاً به نظرات و ارائه دهندهٔ درس مربوط است.

• *الان در دانشگاهها یا لااقل دانشگاه ما روشی مرسوم است که بعضی درسها را برای کسانی که علاقه‌مند باشند یا وضع خاصی داشته باشند به صورت ویژه برگزار می‌کنند. مثلاً درس آنالیز ویژه I ارائه شد و یا درس آنالیز ویژه II ارائه شده است یا درس ریاضیات گسسته، در درس آنالیز ویژه I توابع چند متغیره و قضیه وارون هم گفته شده.*

ـ این آنالیز I بود؟

• *بله این آنالیز ویژه I بود. در درس آنالیز ویژه II تمام مطالبی که در دانشگاههای دیگر گفته می‌شود ظرف یک ماه اول گفته شد و بعد مثلاً نظریهٔ اندازه را گفتند و برای ادامهٔ درس چند مقاله مطرح شد.*

در واقع این کلاسها برای دانشجویانی است که خیلی قویتر از دانشجویان دیگر هستند و برای آنها مزایایی دارد. ولی در خیلی از دانشگاهها ممکن است برنامهٔ عادی هم برای دانشجویان سنگین باشد به هرحال می‌خواستم بدانم که آیا در آلمان هم مسألهٔ طبقه‌بندی دانشجویان هست یا نه؟

ـ نه در آنجا چنین طبقه‌بندی‌ای وجود ندارد و درسها در سطوح مختلف ارائه نمی‌شود. ولی سطح درسها را خود استاد مشخص می‌کند. مثلاً در بُن عالیترین سطح ریاضیات آلمان تدریس می‌شود. به دلیل اینکه اولاً انستیتو ماکس پلانک در بُن است ثانیاً چندین نفر از بهترین استادان آلمان آنجا هستند. در آنجا جای یک پروفسوری خالی شد دویست نفر برای به دست آوردن جای او اقدام کردند. از این دویست نفر ده نفر را انتخاب کردند و گفتند که خودشان را معرفی کنند که همه افراد نخبه‌ای بودند و بعد از میان این ده نفر یکی را انتخاب کردند. به هر صورت سطح درس در آنجا فقط به وسیلهٔ استاد تعیین می‌شود. استادی هست در رشته نظریهٔ اعداد به اسم فاربر[۱] که خیلی هم معروف است ایشان درسهای نظریهٔ اعداد I و II را ارائه می‌دهد و به قسمتهای خیلی عجیب و غریب می‌رسد که هیچ کس متوجه نمی‌شود و دانشجویان می‌دانند که هرکس پیش فاربر می‌رود باید از بهترینها باشد. دانشجویان المپیادی آنجا وقتی که اشکال پیدا می‌کنند یا پیش فاربر می‌روند و یا استاد دیگری که او هم خیلی معروف است و قضیهٔ ریمان-رخ را در سال ۱۹۵۳ ثابت کرد. خود من که به بُن رفتم فکر می‌کردم که یک سری دروس در آنجا ارائه می‌شود. فرضاً توپولوژی جبری در سطح خیلی بالا ارائه می‌شود ولی چنین چیزی نبود. در عوض سمینارهای بسیار عجیبی داشتند. مثلاً نظریهٔ توپوزگروتندیک را که مطلب بسیار عجیبی است می‌خوانند و اگر استاد هم نیاید خودشان کار را انجام می‌دهند؛ یعنی دانشجویانی که تجربهٔ بیشتری دارند در ردیف جلو می‌نشینند و مرتباً غلط‌گیری می‌کنند و بحث و تبادل نظر می‌کنند و به نظر من اصل قضیه همین سمینارها هستند و این درسهای ویژه در آنجا اصلاً رواج ندارد. با اینکه بهترین دانشگاه آلمان هم هست نه فقط به خاطر استادهایش بلکه به خاطر اینکه بهترین دانشجویان ریاضی آلمان در آنجا هستند. بچه‌های المپیاد اکثراً به آنجا می‌روند. خلاصه همه چیز توسط خود استاد مشخص می‌شود که چطور درس بدهد که معلوم شود چه کسانی بیایند و چه کسانی نیایند و البته ممکن است استاد به خاطر دانشجویانی که خیلی قوی نیستند سطح درس را پایین بیاورد.

در این درسهای ویژه عدهٔ قابل توجهی بودند که عنوان خاصی نداشتند ولی البته دانشجویان قوی‌ای بودند.

البته این خیلی قابل تحسین است و نشان می‌دهد که همه چیز به علاقهٔ شخصی بستگی دارد چون استادان برای کلاس ویژه پول اضافه نمی‌گیرند و این در محیطی که بالاترین رتبه را پول دارد درخور تحسین است.

• *یک سؤال خیلی کلی می‌کنم. مدتی پیش شفرویچ[۲] در مقاله‌ای که ارزیابی خود را از ریاضیات آینده گفته بود. مثلاً می‌گوید قرن*

---

۱) E. Farber

۲) Shafarevich

بیستم صرف مسائلی که به ساختارهای آبلی مربوط است و قرن بیست ویکم صرف مسائل مربوط به ساختارهای غیرجابه‌جایی خواهد شد.

ـ اگر او گفته حتماً درست است.

• ***شما در این مورد چه فکر می‌کنید؟***

ـ من به خودم اجازهٔ صحبت کردن در این زمینه را نمی‌دهم و البته فکر می‌کنم منظور شفرویچ بیشتر زمینهٔ نظریهٔ اعداد بوده است نه جاهای دیگر. این‌طور که من دستگیرم شده است شما اگر کتاب نظریهٔ اعداد آندره ویل[۱] را بخوانید می‌بینید طوری تنظیم شده است که تمام حالات گروه جبری GL_1 را در بردارد و نیز قضیه‌هایش به‌عنوان گروه جبری و گروه یکه‌های یک جبر تقسیم، در این کتاب هست ولی ثابت نشده است. البته در GL_1 این عدد یک است که مهم است نه جابه‌جایی پذیری‌اش و البته این جابه‌جایی‌پذیری‌ای که شما می‌گویید منظورتان نظریهٔ میدانهای رده‌ای است که از مطالب اصلی نظریهٔ اعداد است.

بله چون این مقوله راجع به همان موضوع است و از آن دید بررسی کرده است.

درست است برنامهٔ لنگ‌لندز که من اسم آن را آوردم از روی نظریهٔ میدانهای رده‌ای درست شده است، یعنی حالت غیر آبلی آن است. قضیه در قرن نوزدهم با کومر شروع شد. کومر برای پیدا کردن قضیهٔ فرما باعث شد که عدد رده‌ای پیدا شود و میدان دایره‌بر و شاخص گروه. بعد هیلبرت کارهایی انجام داد که اساسی هم بود و بعد از آن آرتین آمد که شما باید کارها را تقسیم کنید به قبل از آرتین و بعد از او. درست مثل میلاد مسیح که می‌گویند قبل از میلاد مسیح و بعد از میلاد مسیح. آرتین در این زمینه قضایایی اساسی ثابت کرد. میدان آرتین یکی از چیزهایی است که او ابداع کرد به‌علاوه L-سری‌هایی که غیر جابه‌جایی بودند آرتین دید اینها در حالت آبلی یکی می‌شوند مثل یکی شدن L-سری‌ها در برنامهٔ لنگ‌لندز که قبلاً گفتم. در حالت غیر آبلی با گروه غیر توسیعی مواجه هستیم که الان در نظریهٔ اعداد داغترین موضوع روز است. و مسأله برای GL_2 هنوز حل نشده است؛ یعنی اگر GL_2 را در نظر بگیرید مسأله این است که شما نمایشهایی را باید در نظر بگیرید و پیدا کنید که مربوط به گروه درجهٔ دو است. از کارکردن روی GL_2 می‌رسیم به چیزهایی که فرمهای پیمانه‌ای روی آن تعریف شده است. $SL_2(\mathbb{Z})$ را در نظر بگیرید و آن را روی نیم‌صفحهٔ بالا بشکنید و از روی آن چیزهایی که در می‌آید $SL_2(\mathbb{Z})$ را در یک زیر گروه بگیرید که ماتریس‌هایش به هنگ یک عدد باشند آنگاه فرمهای پیمانه‌ای در می‌آید و اینها نمایشهای درجهٔ دومی به ما می‌دهد که شناخته شده هستند. در گروه جبری درجهٔ بالاتر به قضیهٔ شیمورا[۲] می‌رسیم که یکی از بخشهای خیلی مشکل نظریهٔ اعداد است که درست بلد نیستم و در آنجا نمایشهای عجیب و غریبی پیدا می‌شود که به قول یکی از اساتید ما گل سرسبد ریاضیات است و به قول دکتر شهیدی برنامهٔ لنگ‌لندز ممکن است پس از ۸۰۰ سال به نتیجه‌ای برسد البته از ۸۰۰ سال منظور ایشان زمان زیاد است نه دقیقاً ۸۰۰ سال.

• ***موضوع تحقیقات فعلی خود شماست؟***

ـ من شخصی هستم که نمی‌خواهم فقط روی یک رشته کار کنم. الان خوشبختانه در چند زمینه کار می‌کنم. یکی نظریهٔ اعداد است که البته در این زمینه تحقیقات نمی‌کنم بلکه می‌خواهم مطالبی را که هست یاد بگیرم. زمینهٔ دیگر پیچیدگی محاسبات است و کدگذاری که این سه زمینه گرچه جدا هستند ولی ارتباط دارند. برطبق یکی از سخنرانیهایم کدگذاری و نظریهٔ اعداد با هم خیلی رابطه دارند و از طرفی کدگذاری و پیچیدگی محاسبات هم با یکدیگر رابطه دارند و همان‌طور که در سخنرانی دو سال پیش گفتم کدگذاری و میدانهای جبری خیلی با هم مرتبطند. همین‌طور پیچیدگی محاسبات و میدانهای جبری. به علت همین ارتباط است که من در هر سه زمینه کار می‌کنم و کار دیگرم نوشتن همان کتاب مربوط به پیچیدگی محاسبات است که طولانی و بغرنج و مشکل است و در همین حال روی کدهایی که از میدانهای اعداد جبری می‌آیند کار می‌کنم و سعی می‌کنم از آنها چیزی به‌دست آورم. و در مورد میدانهای اعداد جبری هم مطالعه می‌کنم که چیزهایی از آنها یاد بگیرم در این زمینه در حدی نیستم که بتوانم تحقیق کنم بلکه فقط می‌خواهم یاد بگیرم.

• ***دربارهٔ ارتباط خود با دانشجویانی که از المپیاد ریاضی می‌آیند صحبت‌هایی کردید.***

ـ من هیچوقت نرفتم از آنها بپرسم که شما چه کار می‌کنید؟ اطلاعاتی که من در مورد دوستانم که جزو تیم المپیاد بوده‌اند دارم این است که اولاً اینها از تکیه‌گاه مالی بسیار خوبی برخوردار هستند که در کشورشان شناخته شده‌اند. مثالی بزنم: یکی از دوستانم جزو تیم المپیاد آلمان بود و مدال هم گرفته بود. گفت که من نمی‌خواهم برای دانشگاه کار کنم می‌خواهم بورس داشته باشم که دکترای ریاضی‌ام را بگیرم. هنوز نگفته بود که بورسش آماده بود و بورس خیلی خوبی هم بود. اصلاً مسأله‌ای نبود یا یک نفر دیگر که گفت من می‌خواهم از فلان جا دکتری بگیرم هیچ مسأله‌ای نبود. الان دکتری گرفتن در بُن خیلی مشکل است ولی این آقا از مونیخ که درسش تمام شد به بُن آمد. پرسیدم چطور آمدی گفت کاری ندارد؛ از بچه‌های المپیاد هستم. بچه‌های المپیاد در تمام دوران تحصیل بورس دارند و اصلاً مسألهٔ مالی ندارند و برنامه‌های دیگری دارند. اینجا هم حتماً همین‌طور است یعنی کسانی که در المپیاد پذیرفته می‌شوند مسؤولیت دارند که دیگران را تربیت کنند و نه فقط بورس مالی دارند بلکه اگر کامپیوتری چیزی بخواهند هم

---

۱) A. Weil *Basic Number Theory*

۲) G. Shimura

تأمین می‌کنند. البته من دقیقاً نمی‌دانم بورس آنها چه چیزهایی را در برمی‌گیرد هیچ وقت هم سؤال نکردم چون پرسیدن این مطالب در آلمان خیلی مشکل است. در مورد امور مالی هیچ کس از کسی مستقیماً سؤالی نمی‌کند ولی چیزی که من دیدم این است که از نظر مالی خیلی تأمین می‌شوند و هیچ مضیقه‌ای ندارند. خیلی هم تشویق می‌شوند. تشویقهای مختلف و این تشویقها برای بقیه دانشجویان قوی هم صادق است. همین‌طور تأمین مالی. البته آن دوست من شاید چون در المپیاد مدال طلا گرفته بود مشمول بورس می‌شد ولی فکر نمی‌کنم بین مدال طلا و نقره فرقی بگذارند. آنجا یک سری مسابقات دبیرستانی دارند که از بین آنها بچه‌های المپیاد را انتخاب می‌کنند. این سری مسابقات یک دور اول دارد که هر کسی در آن قبول بشود مقداری پول می‌گیرد دور دوم و یک دور سوم. به دور سوم که رسیدند و اول شدند آنها را جمع می‌کنند که از آنها یک تست بگیرند.

• *این تست جنبهٔ ریاضی دارد؟*

ـ جنبهٔ غیر ریاضی هم دارد و مثلاً در مورد شخصیت افراد با آنها صحبت می‌کنند. کسانی که انتخاب می‌شوند به تیم المپیاد می‌روند ولی آنهایی که به مرحلهٔ سوم می‌رسند هم تأمین مالی می‌شوند. من حدس می‌زنم قسمت آخری یک مقدار شانس است یعنی خیلی‌ها در یک ردیف هستند؛ ولی مثلاً بسته به این است که در مقابل مطلبی که به آنها می‌گویند چه‌جور عکس‌العمل نشان می‌دهند وگرنه افراد در این مرحله فرق زیادی با هم ندارند. بالاخره باید یک راهی در نظر گرفت که در مرحلهٔ آخر چه کسی را انتخاب کرد و چه کسی را انتخاب نکرد. البته کسانی که در مرحلهٔ سوم انتخاب نمی‌شوند هم تأمین مالی خوبی دارند. کسی که در مرحلهٔ اول قبول می‌شود مبلغ ناچیزی می‌گیرد مثلاً صد مارک. برای دور دوم مبلغ بیشتری که نمی‌دانم چقدر است می‌پردازند و مبلغ دور سوم خیلی بیشتر است و حتی بورس می‌گیرند و اگر کسی در دور سوم قبول شود خیلی مورد توجه است چون سرمایهٔ علمی محسوب می‌شود.

• *در آنجا آیا ریاضیات ترکیبی و گراف هم جزو معلومات عمومی دانشجویان هست یا نه؟*

ـ به نظرم خیلی از کسانی که معلومات خوبی ندارند ممکن است تا دورهٔ فوق لیسانس هم برسند بدون اینکه از گراف چیز زیادی بدانند یا شخصی باشد که در ریاضیات کاربردی از کد گذاری فقط بداند که چنین چیزی هست و نه بیشتر چون برای آنها درس به اصطلاح اجباری نیست. ولی خود استادها می‌گویند در دوران دانشجویی شما باید سعی کنید معلومات وسیعی کسب کنید چون بعد از آن دیگر نمی‌توانید و فقط تا آن زمان امکان پذیر است.

• ***در ضمن صحبت اصطلاحاتی از گرافها را به کار می‌برید که همه می‌دانند، مثل گرافهای همبند.***

ـ اینکه گراف چی هست را همه باید بدانند ولی دانستن قضایای گرافها الزامی نیست.

• *در کجا اینها را یاد می‌گیرند؟*

ـ در درسهای مختلف. مثلاً شخصی ممکن است در جبرخطی یاد بگیرد و شخصی دیگر ممکن است در رشتهٔ کامپیوتر در رشتهٔ ریاضی بعضی را می‌دیدم که دقیقاً می‌دانستند که گراف چیست. معمولاً وقتی به آنها می‌گفتیم گراف چیست؟ می‌گفتند خوب بله گراف نقطه دارد خط دارد، ولی ممکن بود اگر تعریف اصلی آن را می‌پرسیدیم، نتوانند جواب دهند.

من در یک سخنرانی در دو سال پیش شنیدم که سخنران می‌گفت وقتی ما توانستیم یک عدد فرما یعنی دو به توان یک عدد بزرگ‌تر به علاوهٔ واحد را تجزیه کنیم تلفنهای ما یک لحظه هم آرام نداشت چون اشخاص رمزنگار مرتب سؤال می‌کردند که تا چه حد سیستمهای رمزنگاری دچار صدمه می‌شوند؟

• *فکر نمی‌کنید که این نقص است؟*

ـ احتمالاً هست. به نظر من ـالبته اگر نظر من را بخواهید ـ هرکسی که تعاریف اساسی یک قسمت از ریاضیات را نداند حالا این قسمت هرچه باشد این یک نقص است. چند وقت پیش انشاهای جالبی از امیل آرتین خواندم. از ایشان پرسیده بودند که نظرش راجع به وضع آموزش ریاضی در آلمان چیست؟ البته این متن به آلمانی است نه به انگلیسی. به نظرم در این متن هرچه که باید گفته شده است. یعنی چیز دیگری نمی‌شود به آن اضافه کرد. از چیزهایی که گفته بود یکی این بود که نباید تفکیک کرد. مثالهای خوبی آورده بود چون خودش ریاضیدان درجه اولی بوده و در تحول چند رشته از ریاضی پرچمدار بوده است و بهتر از هرکسی می‌توانسته است در این مورد صحبت کند و در مورد اینکه شخصی که ریاضی می‌خواند چه چیزهایی را حتماً باید بداند خیلی جالب صحبت کرده است. ایشان از گراف صریحاً اسم نبرده است ولی این که گراف چیست و کجا استفاده می‌شود را جزو مطالبی می‌داند که ریاضیدان باید حتماً آن را بداند. چون به نظر من گراف چیزی است که به وسیلهٔ آن مطالب مختلف را می‌توان توضیح داد و خیلی جاها به کار می‌رود و هرجا که ساختار گسسته داشته باشیم

گراف حتماً به‌کار می‌رود.

• ***شما گفتید که گراف یا مطالب دیگر را به‌صورت معلومات اولیه لزومی ندارد که یاد بگیرند. چه چیزهایی را به‌صورت معلومات اولیه می‌خوانند. یعنی در سیستم آموزشی آنها چه چیزهایی اصل است؟***

- چون من خودم تجربه‌ای ندارم و دست اندرکار نیستم اگر نظرم را بگویم ممکن است اشتباه باشد یعنی واقعاً عملی نباشد.

• ***این خیلی جالب است چون در ایران اگر کسی دست‌اندرکار نباشد نظرش را می‌گوید، نه تنها می‌گوید، اگر مسؤولیت داشته باشد اجرا هم می‌کند.***

- نمی‌دانم، ولی من شخصاً ممکن است نظرهایی داشته باشم ولی وقتی عملی شد تازه می‌بینم که چه چیزهایی از آن درست و چه چیزهایی غلط است.

• ***قاعدتاً باید اینجور باشد.***

- من نظرم این است که خیلی از مطالب مقدماتی هر رشته‌ای از ریاضیات را باید بلد بود. ولی خوب از طرف دیگر این خیلی مشکل است و باعث می‌شود که همان برنامهٔ سنگین دورهٔ لیسانس به وجود بیاید و به هر حال کسی که می‌رود در رشتهٔ جبر اقلاً باید قضایای اولیه را بلد باشد و باید بیشتر از این هم بداند. به کسی که مشغول تحقیق می‌شود چیزی برای گفتن ندارم و هیچ گونه معذرت‌خواهی را نمی‌پذیرم چون کارش این است و باید بداند. در آنجا بعضی ریاضی می‌خوانند و بعد هم اصلاً با ریاضی سروکار ندارند فقط از عنوان ریاضیدان یا فوق لیسانس ریاضی استفاده می‌کنند و در شرکتهای مختلف کار می‌کنند خوب اگر آنها ندانند که مثلاً میدانهای توابع جبری چه میدانهایی هستند مسأله‌ای نیست چون به درد آنها نمی‌خورد. در اینجا هم باز این مسأله پیش می‌آید که آدم می‌تواند دو کلاسه کند فعلاً بگوید تو که مشغول تحقیق می‌شوی این را یاد بگیر و تو که می‌روی جای دیگر اینها را یاد بگیر. یکی از دلایلی که شرکتهای بزرگ آلمان ریاضیدان استخدام می‌کنند بدون اینکه این ریاضیدان اطلاعاتی را که اینها می‌خواهند داشته باشد این است که می‌گویند ریاضیدان از لحاظ فکری انعطاف‌پذیر است می‌تواند خیلی سریع چیزهای جدید را یاد بگیرد. یعنی ریاضیدان در تمام دوران تحصیلش این کار را می‌کند با چیزهای جدید مواجه می‌شود و این مسلماً باید در هر برنامهٔ تحصیلی باشد. همین مواجه شدن با مطالب جدید و چیزی که در دانشگاه حتماً باید یاد گرفت این است که چطور انسان خودش به خودش چیزهای جدید یاد بدهد و همیشه نسبت به خودش حالت انتقادی داشته باشد. مطلب جدیدی را که یاد می‌گیرد از خودش بپرسد آیا این مطلب را درست یاد گرفتم یا نه؟ خودش با خودش بازی کند خودش با خودش به اصطلاح بحث کند در این صورت فرد دو شخصیتی می‌شود یک شخصیتی که یاد می‌گیرد و یک شخصیتی که از یاد گیرنده می‌پرسد که آیا درست یاد گرفتی یا نه؟ این را اگر در دانشگاه به کسی یاد بدهند که به نظر من یکی از مطالب اساسی‌ای که باید در دانشگاه یاد گرفت همین است می‌توان گفت که دیگر کاری ندارد.

• ***من مطلب خاصی برای پرسیدن ندارم. خود شما موضوعی را برای مطرح کردن در نظر دارید؟***

- باید فکر کنم الان به خاطرم نمی‌آید. از همه بیشتر علاقه‌مندم که دربارهٔ خود ریاضی بحث کنم و اینکه ریاضی را چطور باید یاد داد. دربارهٔ درس ریاضی می‌خواستم مطلبی را بگویم: خود درس ریاضی خیلی مشکل است. من به‌تازگی یک کتاب از هِکه[1] خوانده‌ام، که این شخص در هامبورگ نظریهٔ اعداد کار می‌کرد و خیلی معروف بود. این کتاب تازه چاپ شده است و در اصل دست‌نویسهای هِکه بوده است برای درس نظریهٔ اعدادی که در سال ۱۹۲۰ در هامبورگ داده است. این را دوباره تایپ کرده‌اند و چاپ کردند و کسی که مقدمهٔ این کتاب را نوشته است گفته است که آنچه اینجا نوشته شده است چیزی است که باید یک مقالهٔ درست باشد. تمام مطالبش دقیق است. حتی مثالها را با دقت تمام انتخاب کرده است مثالهایی که می‌آورده مطالب قبل را روشن می‌کرده است. در مثالهایش گاهی نکات اساسی‌ای هست که در همان نگاه اول معلوم نمی‌شود و بعد می‌بینی که در این مثال چند نکتهٔ اساسی نهفته است. خوب نوشتن کتابی با این سبک کار هرکسی نیست و هرکسی هم هِک نیست. می‌خواهم بگویم که درس دادن ریاضی را نمی‌توان سرسری گرفت این که آدم بداند مطلبی را به چه کسی چه جوری باید یاد داد خیلی مهم است. خود من مطمئنم که این مطلب را بلد نیستم. به همین علت در موقع درس دادن ناراحت هستم چون می‌دانم شخصی که می‌خواهد یاد بگیرد از درس من صد در صد استفاده نمی‌کند چون من نمی‌توانم مطلب را به طرف مقابل بفهمانم. در آلمان خیلی‌ها را دیده‌ام که درس دادن بلد نبودند ولی از طرفی می‌خواهم بگویم دانشجوی ریاضی که می‌خواهد مشغول تحقیق شود معلم لازم ندارد نباید لازم داشته باشد باید خودش بتواند برای خودش کار کند. اگر کسی نتواند برای خودش کار کند معلوم می‌شود برای تحقیق ساخته نشده است. دانشجوی ریاضی که می‌خواهد مشغول تحقیق شود استاد راهنما هم لازم ندارد. البته اگر بخواهیم به اصطلاح رادیکال کار کنیم افراط است و استاد راهنما از جایی به بعد درست نیست. کسی که می‌خواهد تحقیقی را شروع کند و نمی‌داند که از کجا باید شروع کرد باید یک نفر باشد که به او بگوید از این راه برو و این کار را بکن ولی نه بیشتر از آن. مثلاً من خودم کامپیوتر درس می‌دهم یا اینکه می‌آیند تز می‌نویسند یک تصور اشتباه دارند و فکر می‌کنند که اگر هفته‌ای یا

---

۱) Hecke

دو هفته‌ای یک بار پیش من بیایند باید بهترین نمره را بگیرند و بعد که می‌بینند که نمرهٔ آنها بهترین نشده تعجب می‌کنند. اگر در رده‌بندی ۱ تا ۵ بهترین نمره ۱ باشد و بدترین ۵ باشد وقتی می‌بینند که نمره آنها مثلاً ۳+ شده است نمی‌شود به آنها تفهیم کرد که کسی نمرهٔ ۱+ می‌گیرد که اول کار برایش توضیحاتی می‌دهی و شاید یکی دوبار می‌آید که آیا من بیراهه نرفته‌ام؟ و آخر هم تزش را تحویل می‌هد. اگر به آن شخص بهترین نمره را بدهیم به این شخص باید ۲- داد که نمی‌شود. این مطلبی است که من همیشه خواسته‌ام بگویم و هر جا فرصتی پیدا شده است گفته‌ام. ریاضیدان و کسی که می‌خواهد مشغول تحقیق در ریاضی شود باید بتواند این کار را انجام دهد چون بعدها یاد نمی‌گیرد. در همان دورهٔ تحصیل یاد می‌گیرد که چطور خودش با خودش کار کند بعدها کسی نیست که به آدم بگوید این کار را بکن و این کار را نکن.

• ***این نکتهٔ بسیار مهمی است و چون خود شما دست اندرکار تحقیق هستید این مطلب را می‌گویید. جو عمومی دانشگاههای ایران متأسفانه این طور نیست و مخصوصاً در دانشگاهها فکر می‌کنند باید آنقدر درس گرفت که دیگر هیچ درسی باقی نماند. و پس از آن باید رفت خارج. در صورتی که نکاتی را که لازم است خوانده است و باید شروع به تحقیق کند. یکی از دانشجویان بسیار خوب ما که اخیراً به کانادا رفته است و در یکی از دانشگاههای خوب آنجا مشغول شده است از آنجا نامه داده است که من فکر می‌کردم حالا که آمده‌ام اینجا باید درسهای دیگری را یادبگیرم دیدم که دیگر تمام درسی که بوده گرفته‌ام و شروع به کار کردم و این کار کردن را در هرکجا می‌شود انجام داد مخصوصاً با این ارتباطات پست الکترونیکی که پیدا کرده‌ایم در هر جایی می‌توان نشست و کار کرد.***

ـ بله این کار کردن را می‌توان در هر کجا انجام داد. البته در کارکردن فراغت فکر هم لازم است. مثلاً فکر آدم از چیزهای دیگری مثل نان و گوشت فارغ باشد در ایران الان این مسائل مطرح نیست ولی تا چند سال پیش بود و فکر آدم خوب کار نمی‌کرد و حرفی که شما زدید کاملاً درست است. به نظر من یکی از اهداف مهم این است که به دانشجو یاد داد و معمولاً این یاد دادنها باید غیرمستقیم باشد. کار درست این است که به مسأله‌ای فکر کند و تا موقعی که آن را کاملاً نفهمیده است رهایش نکند. البته بعضی وقتها این خطرناک است این را می‌دانم. می‌گویم شما نمی‌توانید کتاب جدید را یاد بگیرید و از بعضی مسائل آن صرف نظر نکنید یعنی نمی‌شود همه چیز را فهمید. من آن اوایل اصرار داشتم که باید همه چیز را که در کتابی نوشته شده بفهمم و بعد فهمیدم که بعضی مسائل آنقدر بغرنج است که بار اول مسلماً نخواهم فهمید. حالا سعی می‌کنم یک مطلب را کم‌کم تا آخرش و تا اصلش بفهمم. ولی فهمیدن اصل مطالب خیلی طول می‌کشد. مثلاً من تازگی پی بردم که جبر خطی را واقعاً فهمیده‌ام چون بعضی از مسائل در پیچیدگی محاسبات هست که جبر خطی قوی لازم دارد این غیر از جبر است که در دانشگاه یاد گرفتم ولی متدهای جبر خطی یکی است فقط مسائل فرق می‌کند و آن وقت آدم می‌فهمد که آیا جبر خطی را فهمیده است یا نه؟ یعنی فهمیدن اصل مطلب خیلی طول می‌کشد و به همین علت پیشنهاد می‌کنم دانشجویان اگر دوست دارند خودشان مرتب سمینار بگذارند به قول آلمانیها روی انگشتهای همدیگر یعنی کسی که پای تخته است را مرتب سؤال‌پیچ کنند البته نه به صورت بد و آن کسی هم که پای تخته است باید بداند که اینها قصد بدی ندارند و به این طریق شخصی که پای تخته است می‌فهمد که مطلب را واقعاً فهمیده است یا نه؟ باید اینطور باشد که مثل یک گرگ بیفتند به جان گله و بتوانند از خودشان دفاع کنند.

دانشجویانی که تجربهٔ بیشتری دارند در ردیف جلو می‌نشینند و مرتباً غلط‌گیری می‌کنند و بحث و تبادل نظر می‌کنند و به نظر من اصل قضیه همین سمینارها هستند و این درسهای ویژه در آنجا اصلاً رواج ندارد.

• ***علاوه بر این مطالبی که شما گفتید ما نیز تجربیاتی داریم مثلاً در المپیاد پارسال بچه‌ها خودشان از هم امتحان گرفتند و قرار بود هر هفته یک امتحان باشد و کسانی که با بچه‌ها کار می‌کردند خبر نداشتند. مثلاً شروع می‌کردند به امتحان گرفتن و یکی که کتابی را خوب فهمیده بود می‌آمد آن را به صورت مسأله از بچه‌ها می‌خواست بقیه وقتی با سؤال کلنجار می‌رفتند تازه می‌فهمیدند که مطلب چیست و این بهترین نوع آموزش است.***

ـ البته بچه‌های المپیاد آموزش لازم ندارند آنها خودشان کار خودشان را انجام می‌دهند چون خیلی معتقدند و کسانی که متعقدند به آموزش ریاضی احتیاج ندارند و کار خودشان را انجام می‌دهند و اگر غیر از این چیزی بود که شما گفتید تعجب می‌کردم.

• ***به عنوان آخرین مطلب از شما می‌پرسم که نظرتان راجع به بازگشت به ایران چیست؟***

ـ البته این سؤال مشکل است.

• ***منظور من جنبه‌های شخصی مسأله نبود.***

ـ چرا اتفاقاً به مسائل شخصی مربوط می‌شود که من سعی می‌کنم از مسائل شخصی خودم زیاد صحبت نکنم. این مطلب را خیلی از من

می‌پرسند و الان فکر می‌کنم خیلی‌های دیگر و خود من که در خارج هستیم نمی‌توانیم در یک کشور کار کنیم مثلاً من الان که در آلمان هستم مرتب گریز می‌زنم که از آنجا به بیرون بروم و در جاهای دیگر کار کنم و از طرفی می‌خواهم آنجا هم باشم و کار کنم. چیزی که برای من خیلی ایده‌آل است این است که در آن واحد بتوانم در چند جا کار کنم. یک مدت آنجا یک مدت اینجا که این مشکل است بخصوص وقتی مشکل می‌شود که آدم زن و بچه داشته باشد چون بچه احتیاج دارد که محیط رشد داشته باشد و هر شش ماه یکبار نمی‌تواند دوستانش را عوض کند. این چیزی است که الان همهٔ ما گریبانگیرش هستیم به اصطلاح انگلیسی چند ملیتی هستیم یعنی در یک جا نمی‌توانیم کار کنیم. نظر من دربارهٔ بازگشت به ایران همین است؛ یعنی همان‌طور که آنجا نمی‌توانم همیشه کار کنم اینجا هم نمی‌توانم بخصوص که الان در ایران متوجه شده‌ام که خیلی چیزها را نمی‌دانم و مثل خارجی‌ها شده‌ام که این شروع عجیب و غریبی است ولی این مسأله‌ای است که به خودم مربوط است و به برگشتن و همیشه ماندن فکر نمی‌کنم نه تنها ایران در هیچ جای دیگر دنیا.

• *جناب آقای دکتر شکراللهی از اینکه وقت خودتان را به ما دادید و در این گفتگو شرکت کردید صمیمانه تشکر می‌کنیم و آرزو می‌کنیم که ارتباط خودتان را با ما حفظ کنید.*

- من هم متشکرم.