جلد سوم پانزدهم بهمن ماه ۱۳۰۶ شمسی سال اول

حل المسائل

ریاضی

که شامل حل مسائل شعب مختلفه علوم ریاضی است

ناصر - هورفر - ریاضی

در اول وپانزدهم هر ماه منتشر خ

وجه اشتراك سالیانه در طهران وولا

قیمت یك جلد دهشاهی

اشخاصیکه مایل باشتراك باشند بکتابخانه تهران خیابان لاله زار رجوع نمایند

برای اشخاصیکه بعد از انتشار چند جلد مشترك میشوند مجلدات

ماقبل نیزفرستاده خواهد شد

مسائلي که در این مجموعه حل میگردد عموماً ازمسابقه‌ها وامتحانات نهائی ایران واروپا

وغیر آن اتخاذ میشود ضمناً بعضی از مسائل که در یکی دو جلد بعد حل میشود در

جلدهای قبل بعنوان سوال طرح خواهدشد و اسامي مشترکیني که مسائل مندرجه را

پانزده روز بعد ازنشرهمان جلد صحیح حل کرده بکتابخانه تهران بفرستند درذیل همان مسئله درج

خواهد شد ضمناً تذکرمیدهیم که در یك جلدنصف صفحات مخصوص

بحل مسائل راجع بدوره اول متوسطه بوده و بقیهٔ آن

بدورهٔ دوم اختصاص خواهد داشت

محل تك فروشي کتابخانه تهران وقرائتخانه شرافت است

مطبعهٔ نهضت شرق

جلد سوم پانزدهم بهمن ماه ۱۳۰۶ ش

حل المسائل

ریاضی

که شامل حل مسائل شعب مختلفه علوم ریاضی است در تحت نظر و مراقبت

ناصر - هورفر - ریاضی

در اول و پانزدهم هر ماه منتشر خواهد شد

وجه اشتراك سالیانه در طهران و ولایات یك تومان

قیمت یك جلد دهشاهی است

اشخاصیکه مایل باشتراك باشند بکتابخانه تهران خیابان لاله زار رجوع نمایند

برای اشخاصیکه بعد از انتشار چند جلد مشترك میشوند مجلدات

ماقبل نیز فرستاده خواهد شد

مسائلي که در این مجموعه حل میگردد عموماً از مسابقه‌ها و امتحانات نهائی ایران و اروپا و غیر آن اتخاذ میشود ضمناً بعضی از مسائل که در یکی دو جلد بعد حل میشود در جلدهای قبل بعنوان سوال طرح خواهند شد و اسامي مشترکیني که مسائل مندرجه را پانزده روز بعد از نشر هماں جلد صحیح حل کرده بکتابخانه تهران بفرستند در ذیل همان مسئله درج خواهد شد ضمناً تذکر میدهیم که در یك جلد نصف صفحات مخصوص

بحل مسائل راجع بدوره اول متوسطه بوده و بقیهٔ آن

بدورهٔ دوم اختصاص خواهد داشت

محل نك فروشي کتابخانه تهران و قرائتخانه شرافت است

مطبعهٔ نهضت شرق

روابط بین ضرایب و ریشه های یک معادله

اصل - عبارت $f(x)-f(a)$ بر $x-a$ قابل قسمت است

$f(x)$ نمایش کثیرالجمله از x و $f(a)$ مقدار آن بازاء $x=a$ میباشد

زیرا اگر فرض کنیم $f(x)=a_1x^n+a_2x^{n-1}+\dots\dots+a_n$

باشد پس $f(a)=a_1a^n+a_2a^{n-1}+\dots\dots+a_n$ و از اینجا:

$$f(x)-f(a)\equiv a_1(x^n-a^n)+a_2(x^{n-1}-a^{n-1})+\dots\dots+(a_n-a_n)$$

چنانکه دیده میشود جمیع جمل طرف ثانی این اتحاد بر $x-a$ قابل قسمت بوده

و بنابراین $f(x)-f(a)$ بر $x-a$ قابل قسمت است.

نتیجه - اگر $f(a)=0$ یعنی a ریشه $f(x)$ باشد $f(x)$ بر $x-a$

قابل قسمت خواهد بود

محض سهولت فرض کنیم $f(x)\equiv ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

کثیرالجمله درجه چهارمی از x باشد حال اگر m و n و p و r

ریشه های آن باشد $f(x)$ بر تبا بر $(x-m)$ و $(x-n)$ و $(x-p)$

و $(x-r)$ قابل قسمت بوده و بنابراین $g(x)\equiv(x-m)(x-n)(x-p)(x-r)$

نیز قابل قسمت میباشد آنا چون $f(x)$ و $g(x)$ هر دو از یکدرجه اند خارج

قسمت آنها مقداری است ثابت که اگر آنرا K فرض کنیم میتوان چنین نوشت

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=K(x-m)(x-n)(x-p)(x-r)$$

و چون ضرایب جمل متشابه طرفین یک اتحاد همواره باید متساوی باشند ضرایب x^4

در طرفین این اتحاد یعنی a و K متساوی خواهند بود و بنابراین از تقسیم طرفین

اتحاد اخیر بر $a=K$ چنین نتیجه میشود

$$\frac{e}{a}+x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x\equiv(x-m)(x-n)(x-p)(x-r)$$

$$\equiv x^4-(m+n+p+r)x^3+(mn+mp+mr+np+nr+pr)x^2-(mnp+mnr+mpr+npr)x+mnpr=0$$

پس $m+n+p+r=-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}$

$mn+mp+mr+np+nr+pr=\frac{c}{a}$

و $mnp+mnr+mpr+npr=-\frac{d}{a}$ و $mnpr=\frac{e}{a}$

و از آنجا نتایج ذیل حاصل میشود.

نتیجه ۱ - مجموع ریشه های هر معادله درجه n ام مساوی است با ضریب

درجه $n-1$ بر ضریب درجه n با علامت مخالف و مجموع حاصل ضربهای

دو ریشه ها مساوی است با ضریب درجه $n-2$ بر ضریب درجه n

و همچنین مجموع حاصل ضربهای سه سه ریشه ها مساوی است با ضریب $n-3$

بر ضریب درجه n با علامت مختلف و بالاخره حاصل ضرب ریشه های

معادله درجه n مساویست با جمله معلوم بر ضریب درجه n با علامت

خود اگر n زوج و با علامت مختلف اگر n فرد باشد.

مثلاً در معادله $x^5-3x^3+7=0$ مجموع ریشه ها صفر و حاصل ضرب

آنها -7 میباشد و در معادله $3x^8-5x^7+17x+2=0$ مجموع ریشه ها

$\frac{5}{3}$ و حاصل ضرب ریشه ها $\frac{2}{3}$ است

مسئله - در معادله $x^3-7x+a=0$ مقدار a را تعیین انتخاب

کنید که یکی از ریشه های آن دو برابر ریشه دیگری از آن باشد

فرض کنیم α و β و γ ریشه های معادله مفروض باشند پس بنابر

فرض مسئله (۱) $\alpha=2\beta$ و بنابر روابط بین ضرایب و ریشه ها

$\alpha+\beta+\gamma=0$ (۲) و $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=-7$ و $\alpha\beta\gamma=-a$

حال چون در معادله (۲) بجای α مقدارش 2β را قرار دهیم $\gamma=-3\beta$

روابط بین ضرایب و ریشه های یک معادله

اصل - عبارت $f(x)-f(a)$ بر $x-a$ قابل قسمت است

($f(x)$ نمایش کثیر الجمله از x و $f(a)$ مقدار آن بازاء $x=a$ میباشد)

زیرا اگر فرض کنیم $f(x)=a_1x^n+a_2x^{n-1}+\dots\dots+a_n$

باشد پس $f(a)=a_1a^n+a_2a^{n-1}+\dots\dots+a_n$ و از آنجا:

$$f(x)-f(a)\equiv a_1(x^n-a^n)+a_2(x^{n-1}-a^{n-1})+\dots\dots+(a_n-a_n)$$

چنانکه دیده میشود جمیع جمل طرف ثانی این اتحاد بر $x-a$ قابل قسمت بوده

و بنابراین $f(x)-f(a)$ بر $x-a$ قابل قسمت است.

نتیجه - اگر $f(a)=0$ یعنی a ریشه از $f(x)$ باشد $f(x)$ بر $x-a$

قابل قسمت خواهد بود

محض سهولت فرض کنیم $f(x)\equiv ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

کثیر الجمله درجه چهارمی از x باشد حال اگر m و n و p و r

ریشه های آن باشد $f(x)$ بر مرتبا بر $(x-m)$ و $(x-n)$ و $(x-p)$

و $(x-r)$ قابل قسمت بوده و بنابراین $g(x)\equiv(x-m)(x-n)(x-p)(x-r)$

نیز قابل قسمت میباشد آنا چون $f(x)$ و $g(x)$ هر دو از یکدرجه اند خارج

قسمت آنها مقداری است ثابت که اگر آنرا K فرض کنیم میتوان چنین نوشت

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=K(x-m)(x-n)(x-p)(x-r)$$

و چون ضرایب جمل متشابه طرفین یک اتحاد همواره باید متساوی باشند ضرایب x^4

در طرفین این اتحاد یعنی a و K متساوی خواهند بود بنابراین از تقسیم طرفین

اتحاد فوق بر $a=K$ چنین نتیجه میشود

$$\frac{e}{a}+x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x\equiv(x-m)(x-n)(x-p)(x-r)$$

$$\equiv x^4-(m+n+p+r)x^3+(mn+mp+mr+np+nr+pr)x^2-(mnp+mnr+mpr+npr)x+mnpr=0$$

پس $m+n+p+r=-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}$ و $mn+mp+mr+np+nr+pr=\frac{c}{a}$ و $mnp+mnr+mpr+npr=-\frac{d}{a}$

و $mnpr=\frac{e}{a}$

و از آنجا نتایج ذیل حاصل میشود.

نتیجه - مجموع ریشه های هر معادله درجه n ام مساوی است با ضریب درجه $n-1$ بر ضریب درجه n با علامت مخالف و مجموع حاصل ضربهای بدو ریشه ها مساوی است با ضریب درجه $n-2$ بر ضریب درجه n و همچنین مجموع حاصل ضربهای سه سه ریشه ها مساوی است با ضریب $n-3$ بر ضریب درجه n با علامت مختلف و بالاخره حاصل ضرب ریشه های هر معادله درجه n مساویست با جمله معلوم بر ضریب درجه n با علامت خود اگر n زوج و با علامت مختلف اگر n فرد باشد.

مثلاً در معادله $x^5-3x^3+7=0$ مجموع ریشه ها صفر و حاصل ضرب آنها -7 میباشد و در معادله $3x^8-5x^7+17x+2=0$ مجموع ریشه ها $\frac{5}{3}$ و حاصل ضرب ریشه ها $\frac{2}{3}$ است

مسئله - در معادله $x^3-7x+a=0$ مقدار a را بقسمی انتخاب کنید که یکی از ریشه های آن دو برابر ریشه دیگری از آن باشد

فرض کنیم α و β و γ ریشه های معادله مفروض باشند پس بنابر

فرض مسئله (۱) $\alpha=2\beta$ و بنابر روابط بین ضرایب و ریشه ها

$$\alpha+\beta+\gamma=0\ (2)\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=-7\quad \alpha\beta\gamma=-a$$

حال چون در معادله (۲) بجای α مقدارش 2β را قرار دهیم $\gamma=-3\beta$

و معادله (۲) بصورت $\beta^2 - 3\beta^2 - 2\beta^2 = 0$ و یا $\beta = \pm 1$ درمیآید

و از آنجا $\alpha = \pm 1$ و $\gamma = \frac{\pi}{2}$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ پس اگر a را $a = -$ اختیار کنیم

ریشه های معادله یک و دو و منهای سه و اگر آنرا فرض نمائیم -1 و -2 و -3

خواهند بود و در هر دو حالت ریشه ها در فرض مسئله صدق مینمایند

مسئله — معادله $x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 15x + 4 = 0$ را حل کنید

میدانیم که $x^4 + 6x^3 = (x^2 + 3x)^2 - 9x^2$ و بنابراین معادله

فوق بصورت ذیل نوشته میشود $(x^2 + 3x)^2 - 5x^2 - 15x + 4$

$$\equiv (x^2 + 3x)^2 - 5(x^2 + 3x) + 4 = 0$$

فرض کنیم $x^2 + 3x = y$ و یا $y^2 - 5y + 4 = 0$ که از آن نتیجه میشود

$y = 4$ و $y = 1$ و بنابراین $x^2 + 3x - 4 = 0$ و $x^2 + 3x - 1 = 0$ و لهذا

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \quad \text{و} \quad x = 1 \quad \text{و} \quad x = -4$$

ریشه های معادله میباشند

مسئله — معادله $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$ را حل کنید

پس از حذف پرانتز های طرف اول معادله بصورت ذیل درمیآید

$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x = 24$ و چون بر طرفین تساوی واحدی اضافه

کنیم $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 25$ طرف اول این معادله

مجذور $x^2 + 3x + 1$ میباشد پس میتوان از طرفین معادله استخراج

جذر نموده آنرا بینصورت نوشت $x^2 + 3x + 1 = \pm 5$ و بنابراین

حل معادله مفروض بحل دو معادله درجه دوم $x^2 + 3x - 4 = 0$

و $x^2 + 3x + 6 = 0$ تبدیل میگردد

مسئله — معادله معکوس $10x^6 - 19x^5 + 11x^4 - 28x^3 + 11x^2 - 19x + 10 = 0$

را حل کنید طرفین معادله را بر x^3 تقسیم نموده و آنرا بصورت ذیل مینویسیم

$$10\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 19\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 11\left(x + \frac{1}{x}\right) - 28 = 0$$

حال فرض میکنیم $x + \frac{1}{x} = y$ (۱) و طرفین آنرا دفعه مجذور و دفعه دیگر

مکعب میکنیم نتیجه میشود $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y^2$ و $x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x} = y^3$

و بنابراین $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ و $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$ و لهذا معادله

فوق بصورت ذیل درمیآید $10(y^3 - 3y) - 19(y^2 - 2) + 11y - 28 = 0$ و یا

$10y^3 - 19y^2 - 19y + 10 = 0$ طرف اول این معادله بر $y+1$

قابل قسمت است پس میتوان آنرا چنین نوشت $(y+1)(10y^2 - 29y + 10) = 0$

ریشه های این معادله عبارتند از $y = -1$ و $y = \frac{5}{2}$ و $y = \frac{2}{5}$ و چون

در رابطه (۱) بجای y مقادیر شان قرار دهیم مرتبا چنین خواهیم داشت

$x + \frac{1}{x} = -1$ و $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ و $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{5}$ ریشه های

دو معادله اول و سوم موهومی و ریشه های معادله دوم $\frac{1}{2}$ و 2 میباشند

پس معادله مفروض دارای دو ریشه حقیقی و چهار ریشه موهومی است

مسئله دستگاه — $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5}$ و $\frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6}$ و $\frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7}$

را حل کنید طرفین معادلات فوق را معکوس میکنیم تا حاصل شود

$\frac{x+y}{xy} = 5$ و $\frac{x+z}{xz} = 6$ و $\frac{y+z}{yz} = 7$ و یا

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$ و (۲) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 6$ و (۳) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$

و چون این سه معادله را عضو بعضو با یکدیگر جمع نموده و طرفین آنرا

نصف کنیم :

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9$ حال متوالیا معادلات (۱) و (۲) و (۳)

از این معادله نقصان میکنیم پس چنین خواهیم داشت $\frac{1}{z} = 4$ و $\frac{1}{y} = 3$

و $\frac{1}{x}=2$ و از آنجا $x=\frac{1}{2}$ و $y=\frac{1}{3}$ و $z=\frac{1}{4}$

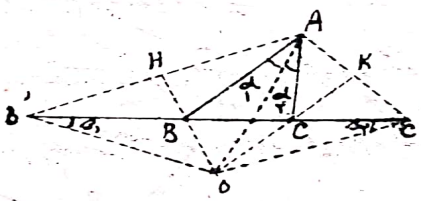
مسئله - کسر $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x+y)(x^3-y^3)}$ را بصورت ساده‌تری تبدیل کنید ابتدا صورت آنرا بدین ترتیب چنین نوشت

$$x^4+x^2y^2+y^4 \equiv x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2 \equiv (x^2+y^2)^2-x^2y^2 \equiv$$
$$(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$$

و در مخرج x^3-y^3 بر $x-y$ قابل قسمت بوده و خارج قسمت آن x^2+xy+y^2 میباشد پس

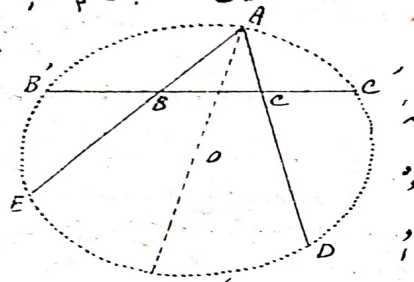
$$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x+y)(x^3-y^3)} \equiv \frac{(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)}{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}$$

بند سه مسئله - هرگاه بر امتداد ضلع BC از مثلث ABC و طول CC' و BB' را بترتیب برابر CA و BA جدا کنیم ثابت کنید که مرکز دایره محیطی مثلث B'AC' بر منصف الزاویه A واقع است



طریقه اول - مرکز دایره محیطی مثلث AB'C' بر محل تلاقی عمودهای منصف اضلاع AC' و AB' واقع است اما چون مثلثات ABB' و ACC' متساوی الساقین اند عمودهای منصف اضلاع AC' و AB' از رئوس C و B خواهند گذشت و از طرف دیگر در مثلث متساوی الساقین عمود منصف قاعده زاویه رأس را نصف میکند یعنی دو خط OK و OH منصف زوایای ABB' و ACC' میباشند و بنابراین همین خطوط منصف زوایای خارجی مثلث ABC بوده و نقطه تلاقی آنها یعنی نقطه O از دو ضلع AB و AC بیک فاصله و بانجهت متعلق بمنصف الزاویه A میباشد

طریقه دوم - دو مثلث OBA و OBB' در ضلع OB مشترک بوده و دو ضلع دیگر آنها نیز بفرض مساوی است پس لازم میآید $\alpha_1=\alpha$ باشد اما از تساوی دو مثلث OCC' و ACC' تساوی ذیل حاصل است $\alpha_2=\beta_2$ ولی چون مثلث OBC' متساوی الساقین است پس $\beta_1=\beta_2$ یعنی $\alpha_1=\alpha_2$



طریقه سوم - بر سه نقطه B' و A و C' دایره مرور داده اضلاع AB و AC را امتداد میدهیم تا محیط دایره را بر نقاط D و E قطع کنند از دو تساوی $CA\times CD=CB'\times CC'$ و $BA\times BE=BB'\times BC'$ با ملاحظه تساویهای $CC'=AC$ و $AB=BB'$ نتیجه میشود $CD=CB'$ و $C'B=BE$ حال اگر طرفین این چهار تساوی را دو بدو بیکدیگر اضافه کنیم حاصل میشود $AE=AD=B'C'$ و بنابراین این سه وتر از مرکز O متساوی البعد بوده نقطه O مرکز دایره محاط خارج مثلث ABC و بانجهت بر منصف الزاویه A واقع است

حساب مسئله - سه عدد فرد متوالی چنان تعیین کنید که مجموع مربعات آنها عدد چهار رقمی تشکیل دهد که ارقامش با یکدیگر برابر باشند اگر عدد وسطی را x فرض کنیم بنا بر فرض مسئله :

$$(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=3x^2+8=yyyy=1111y$$

با قیمانده طرف اول و طرف ثانی این تساوی بر ۳ مرتباً ۲ و y میباشد و چون y یکرقمی است پس ۲ یا ۵ و یا ۸ خواهد بود اما چون مجذور هر

عدد فردی فرد است نمی‌تواند غیر از ۵ عدد دیگری بشود بنابراین

$x^2 = 1849$ و از آنجا $3x^2 + 8 = 5555$ و بنابراین $x = 43$

ولهذا سه عدد مطلوب ۴۱ و ۴۳ و ۴۵ میباشند

(حسن جلیلی - سعید عزیزی - محمد منتظری - عزالدین مهدوی)

مسئله - دستگاه $x^4+y^4=97x^2$ و $x^2+y^2=13x^2$ و $x+y=5x$ را حل کنید.

چون طرفین معادله اول را مجذور نموده و آنرا با معادله دوم مقایسه کنیم:

$25x^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=13x^2+2xy$

و بنابراین $xy=6x^2$ و همچنین اگر طرفین معادله دوم را مجذور نموده حاصل را با معادله سوم مقایسه کنیم:

$169x^4=(x^2+y^2)^2=$

$97x^4-97x^2=0$ یا $97x^4+2x^2y^2=97x^4+72x^4$

که از آن نتیجه میشود $x=0$ یا $x=\pm1$ پس اگر x را صفر فرض کنیم x و y نیز صفر خواهند بود اما اگر $x=\pm1$ باشد $xy=6$ و $x+y=\pm5$

و بنابراین x و y ریشه‌های دو معادله درجه دوم $s^2-5s+6=0$ و $s^2+5s+6=0$ یعنی $x=2$ و $y=3$ و $x=-2$ و $y=-3$ خواهند بود

(حسن جلیلی - سعید عزیزی - تقی بورفسه - محمد منتظری - محمدعلی محمدی)

جبر - مسئله - تابع $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ مفروض است مطلوبست:

اولا - رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات آن

ثانیا - تعیین مقادیر m بقسمیکه خط $y=mx+1$ منحنی را در دو نقطه P و P' قطع کند.

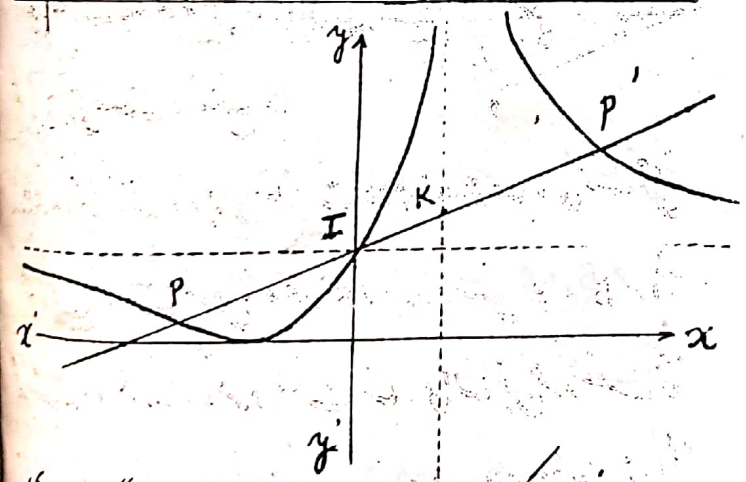
ثالثا - ثابت کنید که اگر m تغییر کند وسط PP' همواره بر خط مستقیم معینی خواهد بود

رابعا - طول PP' را بحسب زاویه α حادثه از تلاقی PP' با محور x تعیین نموده تغییرات آنرا معین کنید:

۱- تابع مفروض بازاء جمیع مقادیر x همیشه مثبت است و بازاء $x=-1$ مقدار آن صفر و بازاء $x=1$ بینهایت و بازاء $x=\pm\infty$ واحد است

مشتق تابع عبارتست از $y'=-4\cdot\frac{x+1}{(x-1)^3}$ و مقدار آن بازاء $x=-1$ صفر و از منفی به مثبت تبدیل میگردد و بازاء $x=1$ بینهایت شده از مثبت بمنفی تبدیل میشود. مشتق ثانی تابع عبارتست از $y''=\frac{8(x+2)}{(x-1)^4}$ و بسهولت معلوم میشود که بازاء $x=-2$ این مشتق صفر و بنابراین $x=-2$ طول نقطه عطف منحنی است خلاصه مطالب فوق در جدول ذیل مندرج است و از روی آن منحنی نمایش تابع رسم میگردد.

x	$-\infty$	↗	-2	↗	-1	↗	0	↗	$+1$	↗	$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		$\vert$		$-$
y	$+1$	↘	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	1	↗	$+\infty$	↘	1



۲- واضحست که خط $y=mx+1$ همیشه از نقطه I میگذرد و برای آنکه این خط منحنی را در دو نقطه دیگر قطع کند $mx+1=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ و یا پس از اختصارات لازمه $x(mx^2-2mx+m-4)=0$ بسهولت دیده میشود که $x=0$ یکجواب مسئله و آن نقطه I است

طولهای پارهٔ نقاط تقاطع خط و منحنی عبارتند از ریشه های معادله

درجه دوم $mx^2-2mx+m-4=0$ یعنی $x=\frac{m\pm2\sqrt{m}}{m}$ و بدیهیست

باز ازاء مقادیر مثبت m ریشه های این معادله حقیقی و بنابراین خط $y=mx+1$

سه نقطه منحنی را قطع میکند ضمناً واضح است که وقتی $m=4$ باشد $x=0$ شده

یعنی نقطهٔ P بر I منطبق میگردد و بعبارة اخری بوضع حد قاطع یعنی

مماس بر منحنی قرار میگیرد .

۳ - طول نقطهٔ K وسط PP' عبارتست از $\frac{x'+x''}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{2m}{m}=1$

یعنی آن نقطه واقع است بر روی خط $x=1$

۴ - اگر عرضهای نقاط P و P' را به y' و y'' بنمائیم فاصلهٔ PP' عبارتست

از $PP'=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}$ (۱) حال چون در رابطهٔ

$y=mx+1$ بجای x مرتباً مقادیر x' و x'' یعنی $\frac{m\pm2\sqrt{m}}{m}$

را قرار دهیم رابطهٔ ذیل حاصل میگردد $|y'-y''|=4\sqrt{m}$ و چون

$|x'-x''|=\frac{m+2\sqrt{m}}{m}-\frac{m-2\sqrt{m}}{m}=\frac{4\sqrt{m}}{m}$ پس رابطهٔ (۱) چنین

نوشته میشود $PP'=\sqrt{\frac{16}{m}+16m}$ و یا $PP'=4\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$

از طرف دیگر میدانیم که $m=tg\alpha$ است (ضریب زاویه) بنابراین برای تعیین

تغییرات طول PP' کافی است α را از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر و ترقی دهیم؛

باز ازاء $\alpha=0$ مقدار m نیز صفر و بنابراین $PP'=\infty$ است و باز ازاء

$\alpha=\frac{\pi}{2}$ مقدار $m=\infty$ و $PP'=\infty$ میباشد .

اما اگر PP' را بصورت ذیل بنویسیم $PP'=4\sqrt{tg\alpha+\frac{1}{tg\alpha}}=4\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

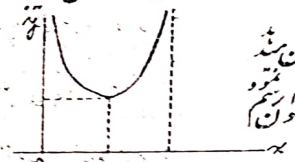
$=4\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}=4\sqrt{\frac{2}{\sin2\alpha}}=\sqrt{\frac{32}{\sin2\alpha}}$

$(PP')'=\frac{-32\times2\cos2\alpha}{\sin^2 2\alpha}:2\sqrt{\frac{32}{\sin2\alpha}}=\frac{-8\cos2\alpha}{\sin^2 2\alpha\sqrt{\frac{2}{\sin2\alpha}}}$

علامت مشتق در فاصلهٔ ۰ و $\frac{\pi}{2}$ بعلامت $-\cos2\alpha$ بستگی دارد و باز ازاء

$2\alpha=\frac{\pi}{2}$ یا $\alpha=\frac{\pi}{4}$ صفر شده تغییر علامت میدهد (از مثبت بمنفی)

بنابراین باز ازاء $\alpha=\frac{\pi}{4}$ تابع مینیموم است و مقدار m مساوی واحد میباشد



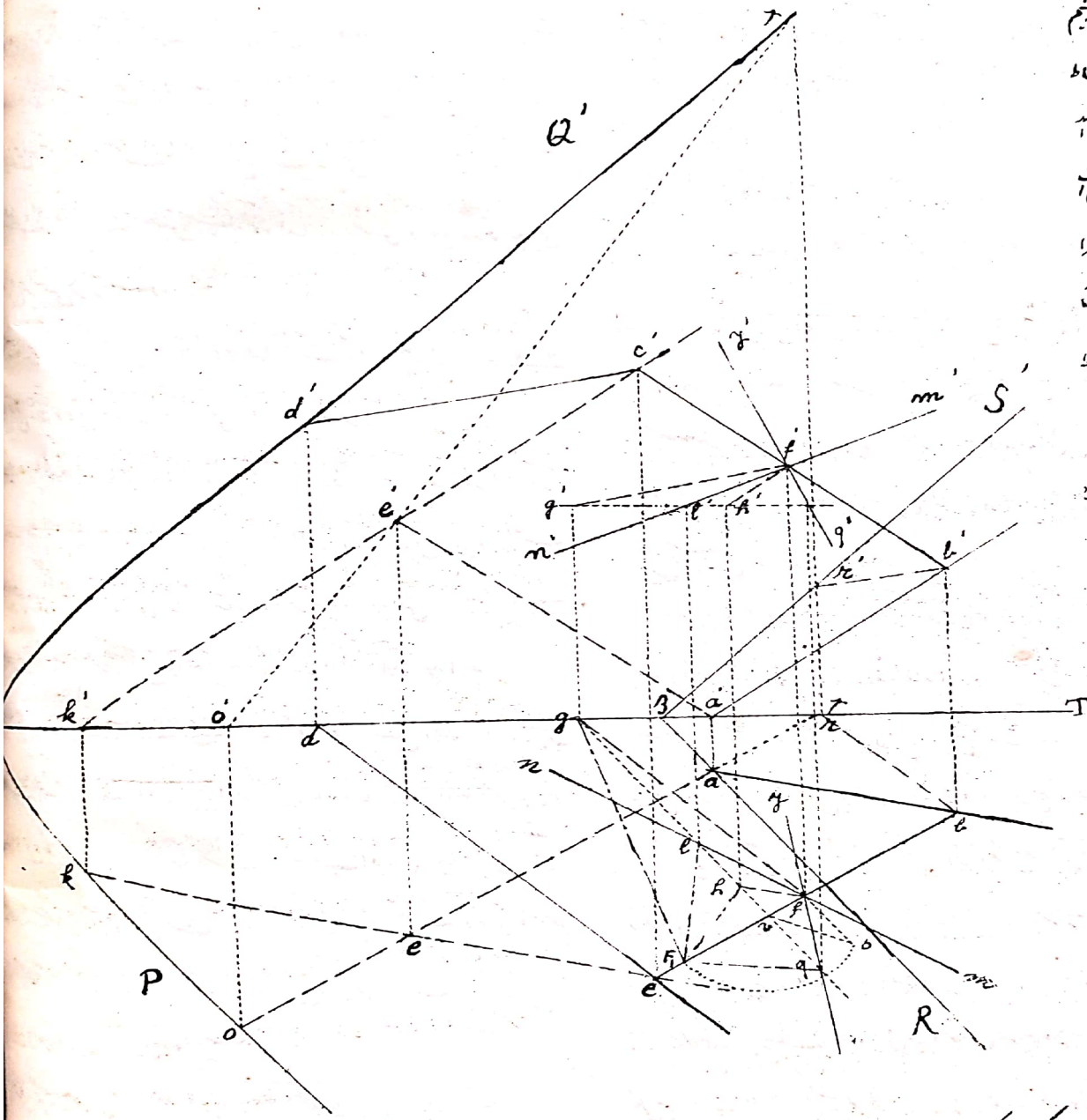
جدول ذیل تغییرات طول PP' را نشان میدهد و از روی آن منحنی نمایش تغییرات آنرا میتوان رسم نمود

α	۰		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$(PP')'$		$-$	۰	$+$	
PP'	$+\infty$	↘	$4\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

مسئله - هندسه ترسیمی مطلوبست مکان هندسی نقاطی که از دو خط متنافر یکفاصله باشند (حل هندسی این مسئله در جلد قبل ذکر شده)

حل ترسیمی - دو خط ab و $a'b'$ و cd و $c'd'$ را فرض کرده از نقطهٔ cc' مفروض بر دومی خط $cec'e'$ را بموازات ab و $a'b'$ و از نقطهٔ aa' مفروض بر اولی خط $aea'e'$ را بموازات cd و $c'd'$ رسم کرده بر هر یک از این دو خط متقاطع سطحی مرور میدهیم مانند PAQ و RBS واضح است این دو سطح با یکدیگر موازیند حال از نقطهٔ aa' مفروض بر ab و $a'b'$ خط $aea'e'$ بر سطح PAQ عمود میکنیم و برای تعیین موقع آن بر این سطح ao را اثر قائم سطح افقی فرض کرده تصویر قائم فصل مشترک این سطح را با سطح PAQ که خط no است رسم میکنیم تا عمود $aea'e'$ و از نقطهٔ ee' تقاطع کند حال از این نقطه خط $ece'c'$ را بموازات ab و $a'b'$ رسم میکنیم تا خط cd و $c'd'$ را بر نقطهٔ cc' تلاقی کند و موافق احکام هندسه اگر از نقطهٔ cc' خطی بموازات $aea'e'$ رسم کنیم خط ab و $a'b'$ را قطع کرده بر آن نیز عمود میشود و بنابراین تصویر عمود مشترک خط cc' خواهد بود . حال از وسط این خط یعنی نقطهٔ hh' دو خط بموازات ab و $a'b'$ و cd و $c'd'$ رسم میکنیم سطح این دو خط بموازات

دو سطح PQ و RSS' بوده علاوه براین بر عمود مشترک نیز عمود است . یکی از رافقیه‌های این سطح را مانند gh و gh رسم کرده زاویه gfh و gfh را



تولای gh تسطیح میکنیم
اینطور که چون نقاط
g و h بر تولا واقع اند
تسطیحشان بر آنها منطبق است
پس کافیست نقطه f را
تسطیح کنیم و برای تسطیح آن
از نقطه f عمودی بر تولا
فرود میآوریم که بر ef
منطبق خواهد بود [زیرا f
چون بر سطح زاویه عمود است
بر رافقیه آن سطح عمود
میگردد و قسماً چون تصویر
زاویه قائمه که یک ضلعش در
موازی با سطح تصویر باشد
قائمه است پس عمود وارد
از نقطه f بر تولا بر امتداد
عمود مشترک است]
و از همین نقطه خط ef
را موازی با تولا و مساوی
اختلاف ارتفاع نقطه و تولا رسم کرده و بمرکز ef و شعاع ef قوسی رسم میکنیم تا عمود را بر نقطه F قطع کند بهمین طریق تسطیح زاویه f زاویه F میشود و چون دو مثلث الزاویه

$F_1 q$ را رسم کرده ترفیع کنیم مکان هندسی مطلوب دو خط mn و $qyqy$ خواهد بود.

مسئله - جسمی بجرم یک گرم را از نقطه O در سطح قائم xOy طوری که با خط افقی Ox زاویه $\alpha = 15^\circ$ تشکیل میدهد پرتاب کنید بعد از چند جسم دیگری را بجرم یک گرم در همان سطح قائم با همان سرعت و با امتداد یک زاویه $\beta = 15^\circ$ تشکیل میدهد پرتاب کنیم تا در نقطه جسم اولرا ملاقات کند (زمان پرتاب T ثانیه باشد). سرعت v را میتوان موافق دو امتداد Ox و Oy تجزیه نمود بنسبت کمیت مؤلفه اول $v\cos\alpha$ و مؤلفه دوم $v\sin\alpha$ بود حال اگر x_1 و y_1 مختصات نقاط واقعه بر مسیر گلوله اول باشند:

$$y_1 = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad x_1 = vt\cos\alpha$$

همچنین اگر فرض کنیم گلوله دوم T ثانیه بعد از گلوله اول پرتاب شود مختصات نقاط واقعه بر مسیر آنرا x_2 و y_2 فرض کنیم:

$$y_2 = v(t-T)\sin\beta - \frac{1}{2}g(t-T)^2 \qquad x_2 = v(t-T)\cos\beta$$

حال برای آنکه این دو خط نقطه مشترکی داشته باشند $vt\cos\alpha = (1)$

$$vt\cos\alpha = v(t-T)\cos\beta \quad \text{و} \quad vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = v(t-T)\sin\beta - \frac{1}{2}g(t-T)^2$$

پس برای تعیین مقدار T باید t را بین این معادله حذف نمود.

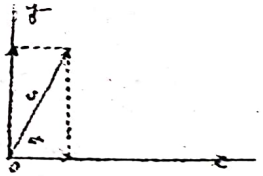
برای ایجاد مقدار t را از معادله (۱) استخراج میکنیم حاصل میشود $t = \frac{T\cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}$ و چون در معادله (۲) بجای t مقدار آن را قرار دهیم پس از اختصارات لازمه:

$$\frac{vT\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta - \cos\alpha} = \frac{gT^2}{2} \cdot \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}$$

پس اگر از ریشه $T = 0$ صرفنظر کنیم مقدار دیگر T چنین بدست میآید:

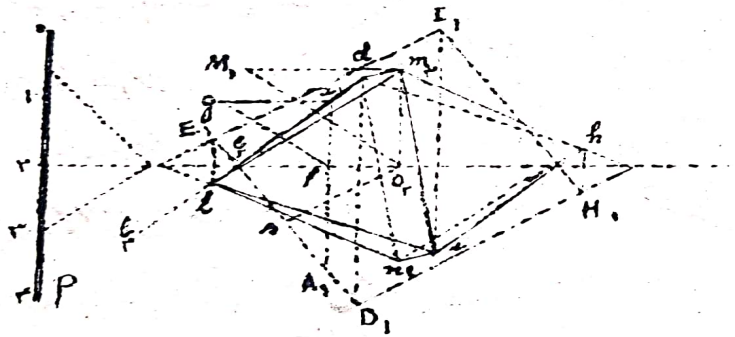
$$T = \frac{2v}{g} \cdot \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{2 \times 30}{9{,}81} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\cos 25^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{60 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{9{,}81 \times 2\cos 25^\circ \cos 30} = \frac{60\sqrt{3} \times 2 \times 2}{9{,}81 \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} \# 4{,}32 \text{ ثانیه}$$

و از آنرو بسهولت میتوان مقدار t و همچنین مختصات نقطه تقاطع دو منحنی را بدست آورد.



مسئله هندسه قومی - نقطه O_2 تصویر مرکز هست و جهی منتظمی است که امتداد یکی از خط الراسهای آن بر $P_2 a_2$ منطبق است مطلوبست رسم مقطع جسم.

ابتدا خط $P_2 a_2$ را حول افقیه رقوم ۲ سطح $P_2 a_2 O_2$ (سطح قطری) که مقیاس شیب آن به P نموده شده بسطح میکنیم با فرض که چون نقطه e_2 بر لوله واقع است سطح آن بر آن منطبق است پس کافی است نقطه دیگری



از خط مثلاً نقطه e_2 را بسطح کنیم باینطریق که از این نقطه عمودی بر لوله فرود آورده خطی موازی لوله مساوی یک واحد مقیاس رسم کرده طول fg را بر امتداد عمود نقل میکنیم A_0 بدست میآید و چون از این نقطه بنقطه e_2 وصل کنیم تسطیح خط $P_2 a_2$ معلوم میشود. حال اگر از نقطه خطی مانند $d_2 e_2$ بر آن عمود کنیم انحنا مساوی نصف خط الراس جسم است اما چون سطح قطری بر قائم است پس از نقطه d و در طول $d_1 E_1$ و

را بدو o_2 جدا کرده با خط E_1D_1 مربعی بنا کرده آنرا ترفیع میکنیم تصویر چهار رأس l و d و h و n از جسم معلوم میشود اما چون دو رأس دیگر از طرفی بر استاد عمودی که از نقطه o_2 بر سطح P اخراج شود واقعند و از طرف دیگر فاصله آنها از سطح قطری باندازه نصف قطر مربع $H_1I_1E_1A_1$ است پس کافیست از نقطه o_2 عمودی بر سطح P اخراج کرده آنرا تسطیح کنیم در آن طول o_2M_1 را برابر o_2E_1 جدا کنیم و از این نقطه عمودی بر خط اول فرود آوریم نقطه تصویر رأس دیگر از جسم بدست میآید و چون خط o_2m_2 را مساوی خود امتداد دهیم نقطه m_1 نیز معلوم میشود و برای تعیین رقوم رؤس جسم چون نقاط h و d و l و n در سطح P واقعند از آنها عمودها بر مقیاس شیب فرود آورده رقومشان را تعیین میکنیم و برای تعیین رقوم دو رأس m و n گوئیم چون خط mn عمود بر سطح P است پس اساسش عکس اساس سطح و ترقی رقومش را در جهت مخالف ترقی رقوم سطح براحات میکنیم

(مسائل حل کردنی)
برای دوره اول متوسطه

مسئله ـ دستگاه

$$\begin{cases} m(m-1)x-(m-1)(2m-1)y=1+m-m^2 \\ 2(m-1)x+3(m-1)y=9-2m \end{cases}$$

را بحسب m حل نموده و جوابهای آن بازاء مقادیر مختلف m بحث کنید و نیز مقدار m را بقسمی تعیین کنید که مجموع مربعات x و y مساوی مربع عدد مفروضی مانند k باشد.

مسئله ـ دستگاه معادلات $\sqrt[2]{x+y}=2$ و $x^3=(x+y)^3$ را بنا بر آنکه x و y صحیح و مثبت باشند حل کنید.

مسئله $(x+y)(x^3+y^3)=432$ و $x^2+y^2=20$

مسئله $x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$

$$\begin{cases} (x-y+xy)(x-y-xy)=(1+xy)(1-xy) \\ x^2-y^2=169-2y(x+y) \end{cases}$$

مسئله ـ مقدار واقعی $\sqrt[3]{x^3+5x^2}-\sqrt[3]{x^3+8x}$ بازاء $x=\infty$ تعیین کنید

مسئله ـ عبارت $\dfrac{\sqrt{65}-\sqrt{26}-\sqrt{65}}{\sqrt{26}+1\sqrt{65}}-\dfrac{\sqrt{26}+1\sqrt{65}}{\sqrt{26}-1\sqrt{65}}$ ساده کنید.

(برای دوره دوم متوسطه)

جبر مسئله ـ دستگاه $x+y=mz$ ، $4xy=z^2$ و $x^2+y^2+z^2=1$ (m عددی است مثبت) را حل نموده و اولاً در عدد جوابهای آن بحسب مقادیر مختلف m بحث کنید. ثانیاً تعیین کنید بین چه حدودی m باید تغییر کند تا x و y و z جوابهای معادله بتوانند اضلاع مثلثی باشند ثالثاً معین کنید بازاء چه مقادیری از m این مثلث قائم الزاویه یا متساوی الساقین است رابعاً مقدار m را بقسمی اختیار کنید که یکزاویه مثلث منفرجه باشد خامساً مقدار m را طوری انتخاب کنید که سطح مثلث مقدار معین K گردد و تحقیق کنید بازاء چه مقدار m این سطح ماکزیموم است

مسئله ـ معادله سیاله $x^3+y^3+z^3+t^3=v^3$ را از روی اتحادهای جبری حل کنید (محسن بشترودی)

مثلثات مسئله ـ حاصل جمع ذیل را بدست آورید

$$S=\sin^2 x+2\sin^2 2x+3\sin^2 3x+\cdots+n\sin^2 nx$$

(کتبه زیر بخط)