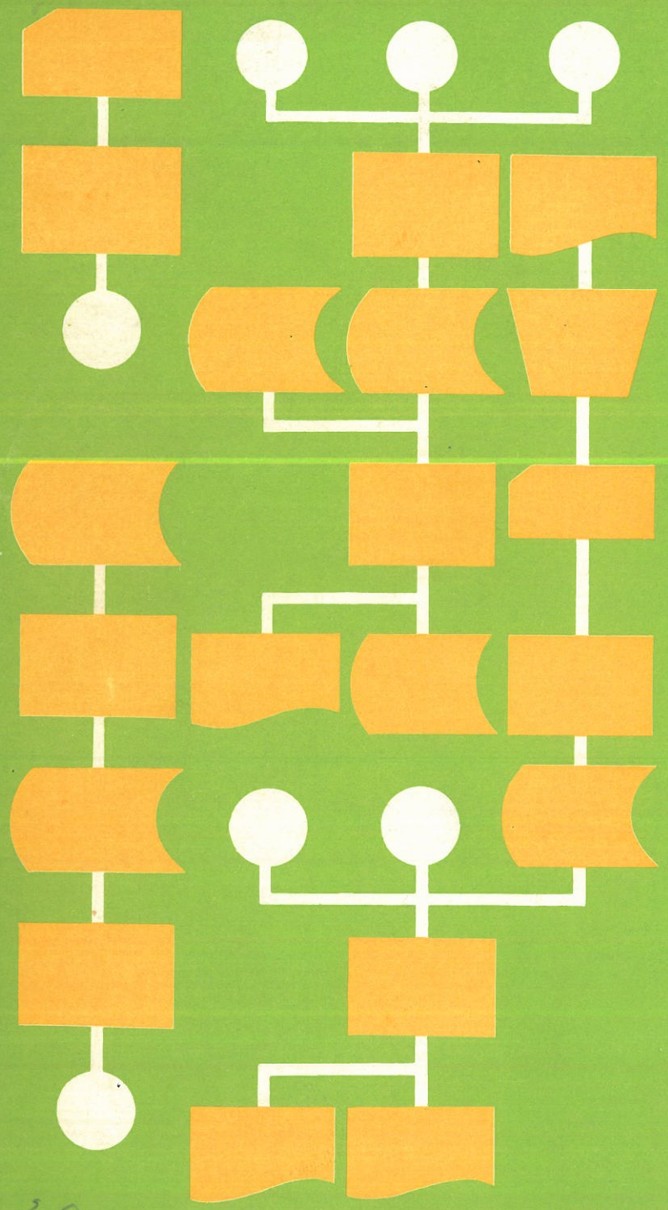
دانشکده ریاضی

علوم کامپیوتر



الگوریتم

از انتشارات دانشگاه صنعتی آریامهر

بهار ۱۳۵۳

الگوریتم شماره ۸

****

با همکاری :

دکتر بهمن مهری
****

مهندس ایرج هیرمن‌پور
****

اسفند ۱۳۵۲

قیمت برای عموم ۳۰ ریال

قیمت برای دانشجو ۱۵ ریال

فهرست مطالب

****

سخنی برای گفتن

****

خوشحالیم که در سالگرد انتشار اولین شمارهٔ "الگوریتم" سوّمین شماره آنرا به دوستداران ریاضی تقدیم می‌کنیم. تشویق دوستان مارا برآن داشت که بکوشیم تا دورهٔ تناوب انتشار مجله را به سه ماه تقلیل دهیم و امیدواریم ارشاد و محبّت آنان بیش‌از پیش‌مارا در ادامهٔ کار خود توان بخشد.

از شماره‌های گذشته تجربهٔ تلخی داریم. در مورد مسائلی که تحت‌عنوان "مسائل ریاضی" ارائه داده و حل آنها را از خوانندگان درخواست می‌نمودیم امّا هنوز چشم براه پاسخ آنان نشسته‌ایم. این مشاهده امکان وجود دو علت را برای‌ما متصوّر ساخت. نخست‌آنکه اصولا" در سطح دانشگاه کسی علاقمند به تفکر در مورد مسائل‌ریاضی نیست و دوّم آنکه مسائلی که ارائه دادیم ارزش‌چنین تفکری رانداشته‌اند که ما امیدواریم تصوّر دوّم قرین به حقیقت باشد. برای رفع این محظور دست به دامن خوانندگان می‌زنیم و ارائه مسائل جالب و ابتکاری را چه در زمینهٔ ریاضی وچه درزمینهٔ برنامه ریزی و برنامه نویسی بین خوانندگان بمسابقه می‌گذاریم. امّا اگر احتمال‌واقعی بودن تصوّر نخست‌نیز صفر نباشد درمان آن ازعهده ما خارج است و فقط می‌توانیم به تحلیل علتها برخیزیم. در اینجا بشرح مختصر یکی ازآنها و شاید مهمترین‌آنها می‌پردازیم.

در مجلات مشابهی که در سطح دبیرستان انتشار می‌یابد شاهد استقبال شایان توجّه دانش‌آموزان علاقمند به مسائل ریاضی از این مجلات هستیم حتّی بدون آنکه "جایزه" ای برای حل آنها منظور شود. امّا همین دانش‌آموز علاقمند وقتی در

سطح بالاتر علمی قرار می‌گیرد آنچنان استقبالی از مسائل ریاضی می‌کند که ما در دو شمارهٔ گذشته شاهد آن بودیم. شاید بگوئید او اکنون نیازی بریاضی ندارد. او در یك رشتهٔ مهندسی یا علمی تحصیل می‌کند. امّا کدام رشته مهندسی یا علمی بی‌نیاز از ریاضی است. واقعیّت این است که او "ریاضی" را در رشته خود نمی‌بیند و یا بهتر بگوئیم پیران طریقت ریاضی را به او نمی‌نمایانند. پیران طریقت را نیز نباید سرزنش نمود زیرا فراوانی تکنیکها هرگز به آنان امکان آموزش کاربردهای ریاضی در رشته‌های خاص خود را نمی‌دهد. ولی خوشحال خواهیم بود که مجلهٔ ما آئینه‌ای باشد برای نمایش کاربردهائی از ریاضی.

امّا علتی را که می‌خواستیم بیان کنیم هنوز روشن نساخته‌ایم. اگر دانشجویان مهندسی و رشته‌های غیر ریاضی شور و جذبه‌ای برای مسائل ریاضی ندارند چرا دانشجویان رشتهٔ ریاضی هم فاقد چنین شور و شوقی هستند؟ مسئله اینست که باید تحرّك و علاقهٔ اکثر دانش‌آموزان را به حل مسائل ریاضی و فکری در وجود "هدفی" بنام عبور از سد "کنکور" جستجو نمود در صورتیکه برای دانشجویان چنین سدّی وجود ندارد و اگر هم باشد دانشجو خود را ملزم به عبور از آن نمی‌داند و بقول شیخ اجل: "هر واحدی که میگذرد مفرّح حال است و مولّد مال و منال".

هیأت تحریریه.

****

در محضر استاد

****

مصاحبه‌ای از: محمدعلی نجفی (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

شاید هیچ دانشجوئی در دانشگاه آریامهر نباشد که با چهره خندان صمیمی و دوست داشتنی دکتر مهری آشنائی نداشته باشد. ایشان که هفت سال از فعالیت و کوشش مستمرشان در دانشگاه ما میگذرد در واقع از بنیانگذاران دانشکده ریاضی دیروز هستند که امروز دامنه وسیع آن علوم کامپیوتر را نیز در بر گرفته است. دکتر مهری سدهای استانداردی را که بین دانشجو و استاد وجود دارد شکسته و دوستی خود را با آنان به نهایت ممکنه رسانیده‌اند و کلاسهای شلوغ ایشان که گویای محبت دوجانبه موجود میباشد مبین این حقیقت است. دکتر بهمن مهری استادی عجول و خونگرم و سخت مهربان میباشند که قلب دانشجویان ـ استادان و کارمندان دانشکده را با صفای ذاتی خود تسخیر کرده‌اند. با دوستان خود سعید قهرمانی و فروزان خردپژوه به محضر گرانبهای ایشان میرویم و سخنان شیرین و آموزنده‌ای را برای خوانندگان عزیز به ارمغان میآوریم. امیدواریم که این هدیه همگان را بیشتر با پیش‌کسوت دانشکده آشنا سازد.

س ـ جناب آقای دکتر مهری اگر ممکن است مختصری از بیوگرافی خود را برای خوانندگان مجله شرح دهید.

ج ـ در سال ۱۳۱٤ در شهر اصفهان متولد شده و یکسال و نیم بعد به رشت رفتم. تحصیلات ابتدائی را در مدرسه امید و عنصری و تحصیلات متوسطه را تا سال سوم در دبیرستان شاهپور پشت سر گذاشتم و آنگاه به تهران آمده و در دبیرستان البرز تحصیلات متوسطه خود را ادامه داده و از آنجا دیپلم گرفتم و بعد به دانشکده علوم

تهران رفته و در رشته ریاضی با تخصص مکانیك استدلالی پس از سه سال لیسانسیه شدم آنگاه در دبیرستانهای طباطبائی و رهنما به شغل دبیری پرداختم و پس از یکسال یعنی در ۱۳۳۸ برای ادامه تحصیل به دانشگاه مینسوتا MINNESOTA در امریکا مراجعه کرده و در ۱۳٤۰ فوق لیسانس گرفتم. بعد دو سال در یك موسسه کامپیوتری به برنامه‌نویسی پرداختم آنگاه در ۱۳٤۲ وارد دانشگاه ویکانسین شدم ولی بعد از ۱۳٤۳ ترك تحصیل کرده در کالج فرد دنیا در نیویورك مشغول تدریس گشته و در ۱۳٤٤ دوباره به دانشگاه ویکانسین آمده و سرانجام در ۱۳٤٦ موفق به اخذ درجه دکترا شده و به ایران مراجعت نمودم و در دانشگاه صنعتی آریامهر مشغول تدریس و تحقیق گردیدم. نکته جالب اینکه دو روز پس از مراجعتم به ایران در تصحیح اوراق کنکور کمك کرده و به تدریس در اینجا علاقمند شدم چه دانش‌آموزان بسیار خوبی را داوطلب تحصیل در دانشگاه آریامهر دیدم که از آن‌میان حسام‌الدین ارفعی هنوز نامش در خاطرم میباشد وی تمام مسائل ریاضی کنکور را کاملا صحیح حل نموده و موفق به کسب نمره بیست شده بود. خوشبختانه این دانشجو اکنون در دانشگاه برکلی آمریکا مشغول تحصیل است وی در طی دوره لیسانس خود در چندین درس دانشجوی من بود.

س ــ تخصص شما چیست و چه کارهای مهم تحقیقاتی انجام داده‌اید؟

ج ــ رشته تخصصی من در زمینه معادلات دیفرانسیل میباشد و تز دکترایم TURNING-POINT در معادلات دیفرانسیل معمولی است و علاقه‌ام بیشتر در بدست آوردن جوابهای محدود و تناوبی برای معادلات دیفرانسیل بوده و درحدود هشت مقاله علمی و تحقیقاتی در مجلات امریکا ــ انگلستان ــ مجارستان و رومانی بچاپ رسانیده‌ام. چند

مقاله نیز دارم که هنوز چاپ نشده‌اند.

س ــ چرا از بین تمام رشته‌های ریاضی معادلات دیفرانسیل را برگزیده‌اید؟

ج ــ خیلی ساده بآن سخت علاقمند شدم. البته علاقمند شدن دلیل نمیخواهد ولی طرز تدریس و تشویقهای دکتر ابوالقاسم غفاری در دانشکده علوم دانشگاه تهران در زمینه معادلات دیفرانسیل در رهنمون کردن من باین سوی موثر بوده است.

س ــ آیا بنظر شما بین ریاضیات علمی و محض فرق اساسی وجود دارد؟

ج ــ خیر محض یا عملی بودن ریاضی مهم نیست بلکه نظام ریاضی است که حائز اهمیت میباشد و برای ریاضیدانان اصولا کاربرد مطرح نیست. تاریخ ریاضی نشان داده است که اغلب کسانی که در ریاضی محض استاد بوده‌اند در ریاضیات عملی نیز مهارت داشته‌اند و بالعکس. برای مثال PONTRIAGEN دانشمند باارزش روسی و یا SOLMON-LEFSCHITZ استاد بزرگ امریکائی و همچنین HEWRIWITZ متفکران بزرگی هستند که در هر دو رشته ریاضیات محض و عملی صاحب نظر و خود مخترع و مکتشف میباشند.

س ــ میگویند ریاضیات نیز مانند فلسفه خواهد شد و بتاریخ خواهد پیوست آیا این بنظر شما صحیح است؟

ج ــ مسلما خیر واضح است که پایداری علم ریاضی همیشگی است چه آیا ممکن است علمی که راه را برای پیشرفت همه علوم میگشاید از بین برود و یا بدرد نخورد؟ امروزه سیستم علمی طوری شده است که دقت فنون و علوم مختلف را با ریاضی می سنجند و آنکه بدان نزدیکتر است یا قوانینش را بهتر بتوان با آن تلفیق داد دقیقتر میباشد و اگر فرض کنیم که ریاضیات مسکوت بماند در اینصورت اغلب مشکلات بشر لاینحل باقی

میماند . پس حس حل مشکلات در بشر باعث میشود که به ریاضیات بیشتر توجه کند .

س ــ آیا بنظر شما کامپیوتر روزی جای ریاضیدانان را میگیرد ؟

ج ــ اگر روزی صندلی جای نجار را بتواند بگیرد کامپیوتر هم جای ریاضیدانان را خواهد گرفت.

س ــ تا آنجا که من میدانم در دانشگاههای دیگر دنیا ،شته‌های ریاضی و علوم کامپیوتر کاملا ازهم جدا هستند نظر شما درباره ادغام این دورشته چیست؟

ج ــ بنظر من این یك کار اصولی است چه اینها مکمل یکدیگر هستند و عملا هم نتیجه رضایتبخش بوده است.

س ــ پس چرا مرکز محاسبات از دانشکده ما جدا میباشد ؟

ج ــ مرکز محاسبات جنبه اداری دارد و اگرچه بعضی از افراد این مرکز در کار تدریس بما یاری میکنند ولیکن ارتباطی اصولی بین دانشکده و این مرکز موجود نیست جز اینکه ما از کامپیوتر دانشگاه که در مرکز محاسبات میباشد استفاده میکنیم. البته هر دانشکده دیگری نیز میتواند استفاده نماید .

س ــ آیا راه حلی برای پیشرفت ریاضی در ایران بنظرتان میرسد ؟

ج ــ بایستی دانشجویان بیشتری را باین رشته علاقمند کرد و آنگاه پس از تربیت آنها تا حد لیسانس یا فوق لیسانس آنها را بخارج فرستاد . یا اینکه وسائلی فراهم نمود تا بتوانند در مملکت خودمان تا حد دکترا نیز پیش بروند . البته انکارپذیر نیست که پیشرفت ریاضی در ایران منوط به گذشت اقلا دو یا سه نسل است و هیچ انتظاری برای پیشرفت آن در یك نسل منطقی نیست. برای ایجاد علاقه و فکر ریاضی در مردم بایستی این فکر و اندیشه بیهوده را که میگوید عایدات و درآمد در ریاضی کم است

بطور کلی ازبین برد و به آنها فهمانید که تیتر مهندسی هیچگونه شخصیتی برای انسان بهمراه ندارد . چه بسیارند کسانی که میانگارند مهندسی دارای ارزشی علمی بیش از لیسانس است و تنها بهمین خاطر بدان روی می‌آورند درحالیکه علاقه ذاتی آنها به ریاضیات می باشد . بایستی یادآور شوم که وظیفه مهمی بعهده دبیران مملکت است و آن تدریس باعلاقه و عشق میباشد و همچنین فهماندن ارزشهای ریاضی به دانش‌آموزان مملکت.

س ــ بنظر من دانشکده ما با تزریق کامپیوتر موجب گشته است که حس و علاقه دانشجویان به ریاضی روزبروز کمتر و ضعیفتر گردد نظر شما در اینمورد چیست؟

ج ــ ما تا آنجا که در مقدوراتمان بوده در راه ترغیب دانشجویان به ریاضیات کوشیده‌ایم و عدّه زیادی دانشجو برای ادامه تحصیلات در سطح دکترا تربیت کرده و به خارج گسیل داشته‌ایم.

س ــ دکتر مهری ضمن سپاس فراوان از اینکه وقت گرانبهایتان را بعهده ما گذاشتید اگر پیامی برای نوباوگان ریاضی دارید بفرمائید .

ج ــ پیام من به نوباوگان ریاضی این است که پیشرفت ریاضی کشور بردوش آنهاست و آنهایند که بایستی با فداکاری و ازخود گذشتگی در تحصیل علم مقدس ریاضی کوتاهی نورزند و امیدوارم که جوانان عزیز مملکت این وظیفه خطیر را به خوبی بانجام برسانند .

****

جوابهای تناوبی برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی

****

نوشته : دکتر بهمن مهری (دانشیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه آریامهر)

بدست آوردن جوابهای تناوبی برای معادلات دیفرانسیل رسته دوم منجر به بدست آوردن جوابهای بسته در صفحه فاز (PHASE-PLANE) میگردد . این مطلب در گذشته توسط بسیاری از ریاضیدانان مورد استفاده قرار گرفته است. SMITH و LEVINSON دو ریاضیدان آمریکائی از مطلب فوق استفاده نموده و توانستند جوابهای تناوبی برای معادلات غیرخطی

$$\frac{d^2X}{dt^2} + f(X,V)\frac{dX}{dt} + g(X)=0 \qquad V = \frac{dX}{dt}$$

بدست آورند .

در این مقاله ما معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2X}{dt^2} + f(X).\left(\frac{dX}{dt}\right)^{2n} + g(X) = 0 \qquad (1)$$

را که در آن توابع $f(X)$ و $g(X)$ برای جمیع مقادیر X پیوسته و n عددی است صحیح و مثبت درنظر گرفته و قضیه زیر را با درنظر گرفتن مطلب فوق ثابت می کنیم .

قضیه ۱ : هرگاه توابع $f(X)$ و $g(X)$ در شرایط زیر صدق کنند :

۱ — برای $X \neq 0$ $\quad Xg(X) > 0$

۲ — عدد مثبتی مانند b موجود است بطوریکه $f(X) \geqslant b$

۳ — برای جمیع مقادیر بزرگ X: $\left|g(X)\right| > \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{X \to 0} \frac{g(X)}{X} = a \neq 0$

آنوقت معادله (۱) دارای جوابهای تناوبی می باشد . درحالت خاص هرجواب معادله (۱) که درشرایط $X(0) = -m^2$ و $X'(0) = 0$ صدق نماید جوابی است تناوبی .

اثبات :

هرگاه $V = \frac{dX}{dt}$ فرض شود معادله (۱) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$V\frac{dV}{dt} + f(X).V + g(X) \neq 0 \qquad (2)$$

اگر در معادله (۲) $V^2 = Z$ فرض کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{dZ}{dX} = -2f(X).Z^n - 2g(X) \qquad (3)$$

اکنون اگر بردارهای مماس بر منحنی های جواب معادله (۳) در صفحه X,Z را در نظر بگیریم مشاهده می شود که مکان هندسی نقاط $\frac{dZ}{dX} = 0$ عبارت است از منحنی $Z^n = -\frac{g(X)}{f(X)}$ که این منحنی برای مقادیر فرد n در ربع دوّم و چهارم و برای مقادیر زوج n در ربع دوّم و سوّم قرار میگیرد . درهردوصورت فرض می کنیم $Z = F(X)$ قطعه‌ای از منحنی فوق باشد که در ربع دوّم قرار گرفته است و تابع $F(X)$ برای مقادیر $X \leqslant 0$ تابعی است یك ارزشی و $F(0) = 0$ وبرای $X < 0$ داریم $F(X) > 0$.

اکنون عدد حقیقی m را انتخاب نموده و نقطهٔ $P_0 = (-m^2, 0)$ را در صفحه $X - Z$ درنظر میگیریم. واضح است که در نقطهٔ P_0 داریم $\frac{dZ}{dX} > 0$ و برای $Z < F(X)$ و $X < 0$ داریم $\frac{dZ}{dX} > 0$ نتیجتاً منحنی جواب معادله (۳) از نقطهٔ P_0 صعود کرده تا اینکه منحنی $Z = F(X)$ را در نقطهٔ $P_1 = (X_1, Z_1 > 0)$ قطع نماید . درنقطهٔ P_1 مسلماً $\frac{dZ}{dX} = 0$ خواهد بود .

برای نقاطی که در ناحیه $A = (X < 0, Z > F(X))$ قرار دارد $\frac{dZ}{dX} < 0$ بوده و منحنی نمایش جواب معادله (۳) نزول نموده تا محور Z ها را درنقطهٔ $(X_2 = 0, Z_2 > 0)$ قطع نماید . درغیر اینصورت لازم است که منحنی نمایش جواب معادله (۳) به مبداء مختصات برگردد و با مقایسه ضریب زاویه خط مماس برمنحنی جواب معادله (۳) معلوم

اکنون معادله (۱) را برای مقادیر فرد n درنظر می گیریم . یعنی :

$$x'' + f(X) \cdot (X')^{2n-1} + g(X) = 0 \qquad (٤)$$

قضیه ۲ : هرگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ شرایط زیر را صدق نمایند :

۱ — $X \cdot g(X) > 0$

۲ — $f(X) \geqslant 0$

۳ — $\lim\limits_{|X| \to \infty} \int_0^X g(u)\, du = \infty$

آنوقت هرجواب معادله (٤) که برای مقادیر $t > 0$ معینی باشد جوابی است محدود .

بایستی توجه داشت از فرضیات قضیهٔ دوّم که از فرضیات قضیهٔ اوّل ساده‌تر است نمی توان وجود جوابهای تناوبی را اثبات نمود . درحقیقت در حالت $n = 1$ میتوانیم $f(X) = p$ و $g(X) = q \cdot X$ و $q > 0$ فرض نموده و مسلماً درحالتی که $p^2 - 4q > 0$ است حتّی جواب نوسانی نیزنخواهیم داشت.

اثبات قضیه دوّم را درحالت کلی تر در قضیه سوّم بیان می نمائیم.

قضیه ۳ : هرگاه توابع $f(X)$ و $g(X)$ شرایط زیر را صدق نمایند :

۱ — برای $X \neq 0$ $\quad X \cdot g(X) > 0$

۲ — $f(X) \geqslant 0$

۳ — $\lim\limits_{|X| \to \infty} \int_0^X g(u)\, du = \infty$

٤ — $Z \cdot m(Z) > 0$

میشود که روی نقاط سرحدی ناحیه A داریم :

$$F'(0-) = \lim_{X \to 0-} \frac{F(X)}{X} = \lim_{X \to 0-} \frac{1}{X} \left(\frac{-g(X)}{f(X)}\right)^{1/n} = -\infty$$

(زیرا $\lim\limits_{X \to 0} \frac{g(X)}{X} = a$ و $0 \leqslant b < f(X)$) ازطرف دیگر :

$$\lim_{X \to 0} \frac{dZ}{dX} = -2\, f(0) \cdot Z^n$$

که مقداریست محدود و مخالف $-\infty$. بنابراین منحنی جواب معادله (۳) به مبداء مختصات برنگشته و الزاماً محور Z ها را درنقطهٔ $Z_2 > 0$ قطع می نماید .

برای ناحیه اوّل معین $X > 0$ و $Z > 0$ داریم $\frac{dZ}{dX} < 0$ یعنی منحنی جواب معادله (٤) نزول نموده و مسلماً هم نمیتواند به مبداء مختصات برگردد .

بنابراین دوحالت زیر ممکن است پیش‌آید :

الف) محور Xها را درنقطه $X_3 > 0$ قطع نماید.

ب) $\lim\limits_{X \to \infty} Z(X) = P$ و $\lim\limits_{X \to \infty} \frac{dZ}{dX} = 0$

حالت (ب) امکان پذیر نیست زیرا دراین حالت $\frac{dZ}{dX} \leqslant -2b \cdot p^n - \varepsilon < -\varepsilon < 0$ که این امر $\lim\limits_{X \to \infty} \frac{dZ}{dX} = 0$ را نقض مینماید . بنابراین منحنی جواب معادله (۳) محور Xها را درنقطهٔ $P_3\ (X_3 > 0,\ Z_3 = 0)$ قطع می نماید .

بنابراین برای شرایط اولیه $X_0 = -m^2$ و $Z_0 = 0$ جوابی برای معادله (۳) بدست می آوریم که در شرایط زیر نیز صدق میکند.

$Z(-m^2) = Z(X_3) = 0$ برای $-m^2 < X < X_3$ تابعی است مثبت نتیجتاً منحنی $V^2 = Z(X)$ در صفحه X, Z یك منحنی بسته ساده خواهد بود . البته این خود نتیجه می دهد که در صفحه X, V نیز یك منحنی بسته داریم و برای معادله (۱) جواب تناوبی خواهیم داشت.

آنوقت هرجواب معادله (٥) بصورت زیر :

$$X'' + f(X) \cdot m(X') + g(X) = 0 \qquad (5)$$

جوابی است محدود .

اثبات :

معادله (٥) را بصورت

$$\begin{cases} X' = V \\ V' = - f(X) \cdot m(V) - g(X) \end{cases}$$

نوشته و تابع مثبت

$$E^2 = 2 \int_0^X g(u)du + V^2$$

را درنظر گرفته و چون رابطه زیر برقرار است

بنابراین تمام جوابهای معادله (٥) محدوداند .

$$EE' = g(X) \cdot X' + VV' = - V \cdot f(X) \cdot m(V) \leqslant 0$$

****

تضاد گودمن در روش استقرائی استدلالهای علمی

****

نوشته : محمدعلی نجفی (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

لازم به تذکر است که این نوشته بر مبنای مقاله‌ای نوشته شده است که آقای دکتر مین‌باشیان در دوران تحصیل خود نوشته بودند . بدینوسیله از مساعدتهای بیدریغ ایشان صمیمانه تشکر می‌کنم .

همانطوریکه می‌دانیم ایده‌آل علم امروز فرموله کردن نتایج علمی به فشرده‌ترین صورت ممکنه می‌باشد . بنابراین نظریه‌های متعددی وجود دارد که هریك می‌خواهد بگوید استدلال علمی ایده‌آل چگونه باید باشد و از این میان دو روش استفاده از استقرا (که امید است خواننده آن را با استقرای ریاضی اشتباه ننماید) و منطق قیاسی متداولتر است .

روش استقرا بر این مبناست که بر پایه شواهدی از پیش معلوم نتیجه‌ای گرفته می‌شود و آن نتیجه به منزله یك قانون طبیعت اختیار میشود . یکی از ساده‌ترین مثالها در این مورد قوانین مندل است . مهمترین نمایندگان روش استقرائی " ویلیام اوکام " " جان هرشل " و " جان استوارت میل " می‌باشند و فلسفه علومی که بر پایه روش استقرائی مبتنی است بر سه اصل زیر استوار است : اصل گردآوری اصل استقرا و اصل تأئید به کمك شواهد . بنا بر اصل استقرا می‌توان قوانین علمی را از واقعیات سادهٔ گرد آمده و مشاهدات استنتاج کرد . (ولی قوانین مربوط به چگونگی این استنتاج تا امروز معلوم نگشته است) .

روش دیگر استدلال علمی منطق قیاسی و منطق ریاضی است . واضح است که

اگر بخواهیم تمامی مبنای استدلالهای علمی را بر منطق قیاسی قرار دهیم پیشرفت علمی فوق‌العاده کند و در بعضی رشته‌ها غیرممکن خواهد بود . بنابراین طبیعی است که عده زیادی از دانشمندان مدتها سرگرم این مسئله بوده‌اند که قوانینی بدست دهند تا توسط آنها استدلال علمی به روش استقرا بطور صحیح عملی گردد . متأسفانه باید گفت تا بامروز نتوانسته‌اند در این راه بطور کامل و رضایت بخش موفق شوند .

اینکه اصولا چرا روش استقرا قابل قبول است باید اثبات شود و این اثبات توسط استقرا امکان پذیر نیست پس باید توسط منطق قیاسی آنرا اثبات نمود که این امر مربوط است به مسئله هیوم که در اینجا مورد بحث واقع نمیشود . مسئله دیگر یافتن قوانینی است که توسط آنها استقرای صحیح در علوم تجربی صورت گیرد و آنچه در سطور زیر از دیدگانتان میگذرد ادعائی است که توسط " نلسون گودمن" ایراد گشته است مبنی بر اینکه دست یابی به چنین قوانین غیرممکن است. در این مقاله با تضاد گودمن و سپس کوشش دانشمندان برای رد آن آشنا میگردید .

اولین بار توسط " نلسون گودمن" در کتاب "FACT, FICTION AND FORECOST" مسئله استقرای جدید پیش کشیده شد که عبارت است از یافتن تابعی روی یك کلاس داده شده که ممکن است دارای تعدادی متناهی یا نامتناهی عضو باشد با در دست داشتن فقط یك زیرکلاس متناهی از آن .

طبق معمول به هر تابع کلاسی از جفتهای مرتب نسبت میدهیم که در آن تابع صادقند . بنابراین برای هر کلاس متناهی از جفتهای مرتب تعدادی نامتناهی از توابع متفاوت که روی کلاسهای بزرگتری تعریف شده‌اند وجود دارد که شامل جفتهای مرتب مورد نظر میباشد . مثلا اگر کلاس متناهی $\{(1,1),(2,4)\}$ را درنظر بگیریم

هر دو تابع $f_1(x)=x^2$, $f_2(X)=3X-2$ روی آن تعریف شده‌اند و نیز بینهایت تابع دیگر میتوان یافت که روی کلاس فوق صدق کنند . بهرحال چنانچه قلمرو بررسی خویش را وسعت دهیم فقط تعدادی از این توابع خواهند بود که روی کلاس تعمیم یافته نیز تعریف شده‌اند و بالاخره فقط یك تابع موجود است که روی تمام کلاس تعریف میشود . در مثال فوق اگر قلمرو بررسی را کلاس

$$\{(1,1),(2,4),(3,9)\}$$

قرار دهیم تابع f_2 حذف خواهد شد زیرا روی این کلاس صدق نمیکند . اشکال در این است که اگر کلاس نامتناهی باشد انجام تمام آزمایشهای مربوطه غیرممکن خواهد بود . بنابراین با این مسئله روبرو هستیم که با توجه به تعدادی متناهی آزمایش و از بین تعدادی توابع مختلف تابع "حقیقی" را تعیین نمائیم که البته چنین انتخابی باید با توجه به سایر خواص تابع انجام گیرد . مسئله نوین استقرا به چگونگی چنین انتخابی می پردازد و میگوید آیا چنین انتخابی علمی است یا خیر.

گودمن با طرح مسئله زیر به سئوال فوق پاسخ منفی میدهد . چون ازنظر منطقی اختلافی بین روابط و خواص نیست بنابراین مسئله گودمن را که درباره خواص ذکر شده است میتوان به روابط (و یا توابع) تعمیم داد .

ابتدا دو خاصیت bleen , grue را بصورت زیر تعریف میکنیم*:

فرض میکنیم X یك جسم و t لحظه‌ای از زمان باشد گوئیم X در لحظه t, grue است اگر لحظه‌ای مشخص و ثابت چون t_0 موجود باشد بطوریکه X در زمان قبل از t_0, green (سبز) و در زمان بعد از t_0, blue (آبی) باشد یعنی :

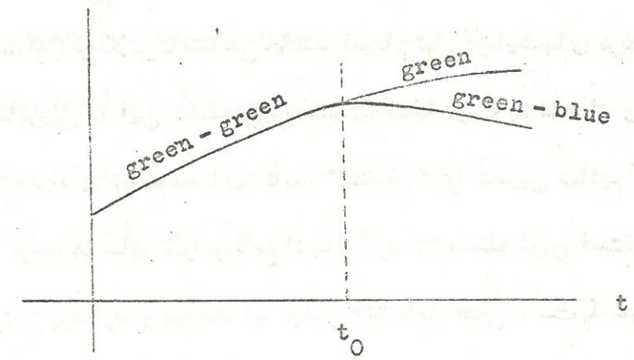
$$(\forall X)(\forall t)\left[\mathrm{grue}(X,t)\equiv(\mathrm{green}(X,t),t<t_0)\vee(\mathrm{blue}(X,t),t\geqslant t_0)\right]$$

بهمین ترتیب اصطلاح "bleen" را تعریف میکنیم :

$$(\forall X)(\forall t)\left[\text{bleen}(X,t)\equiv(\text{blue}(X,t),t<t_0)\vee(\text{green}(X,t),t\geqslant t_0)\right]$$

که در فرمولهای فوق منظور از "A(X,t)" این است که X در زمان t دارای خاصیت A است.

حال اگر تصور کنیم که لحظه‌ای چون t_0 موجود است که در آن لحظه تمام اشیای سبز آبی و تمام اشیای آبی سبز شوند میتوانیم بگوئیم دو خاصیت grue و bleen در عالم واقع موجود و قابل لمس میباشند .



مسلما ما نمیخواهیم grue را بصورت یك خاصیت جدید و مستقل بیان کنیم و نیز هدف ما باید این باشد که قوانینی برای استقرای صحیح بدست دهیم که مطابق آن قوانین خاصیت green بودن قابل پیش‌بینی و خاصیت grue بودن غیرقابل پیش‌بینی باشد زیرا تمام اشیای سبز قبل از زمان t_0, grue میباشند .حال آنکه بعد از t_0 پیش‌بینی ما غلط خواهد بود و این اشیاء دیگر grue نخواهند بود .

(*) کلمات grue و bleen با استفاده از دو کلمه green و blue ساخته شده‌اند و دلیل این سازش را خواهید دید . امیدوارم استفاده از کلمات انگلیسی را بر من خرده نگیرید .

در اینجا گودمن میگوید هر کوششی برای یافتن چنین قوانینی غیرممکن است و ما را بیك تضاد آشکار میرساند .

اختلاف واضح بین green و grue این است که در تعریف grue زمان نیز دخالت دارد و برای اینکه بدانیم " X, grue است یا نه" باید روشی داشته باشیم برای تشخیص این امر که زمان مورد نظر قبل از لحظه t_0 است یا بعد از آن . پاسخ گودمن باین سئوال این است که اگر ما از ابتدای امر با دو خاصیت grue و bleen شروع بکار نمائیم آنگاه blue و green برحسب این دو خاصیت و با دخالت زمان تعریف خواهند شد و در واقع داریم :

$$(\forall X)(\forall t)\left[\text{green}(X,t)\equiv\text{grue}(X,t),t<t_0)\vee(\text{bleen}(X,t),t\geqslant t_0)\right]$$

blue نیز بصورت مشابه فوق برحسب grue و bleen قابل تعریف است. بنابراین دخالت یا عدم دخالت زمان نمیتواند ملاکی برای این امر باشد زیرا با روش فوق این green و blue هستند که برحسب زمان و grue و bleen تعریف میگردند . بهرحال تفاوتی بین دو زوج (grue,bleen) و (green,blue) نیست بجز دخالت زمان و چنانکه دیدیم این عامل نیز قابل حذف است. پس هرقانون استقرائی که یك جفت را رد نماید باید جفت دیگر را نیز رد کند و این یك تناقض است زیرا هیچ معیاری برای شناسائی اصول استقرائی نمیتوان بدست داد . درواقع هیچ دلیلی در دست نیست که عناصری که امروز green هستند در واقع grue نباشند .

دوتن از دانشمندان در مقاله‌ای* برای برطرف ساختن این اشکال مسئله رنگ را پیش‌کشیدند و گفتند که خواص green و blue قابل نمایش با یك رنگ ثابت هستند و حال آنکه برای نمایش grue و bleen ناچاریم از دو رنگ سود جوئیم

و این امر نشانه برتری جفت اول بر جفت ثانی است.

پاسخ گودمن این بود که ما میتوانیم برای نمایش خاصیت grue روی یك عنصر از چیزی مانند هاشور استفاده کنیم و برای خاصیت bleen از هاشورهائی در خلاف جهت فوق بدینترتیب برای نمایش green و blue ناگزیریم از دونوع هاشـــور استفاده نمائیم که درست اشکالی مشابه اشکال استفاده از رنگ بوجود میآورد . پاسـخ دیگر این است که میتوانیم بجای کلمه "رنگ" از کلمه "ژنگ" استفاده کنیم. بدین‌معنی که عناصر grue دارای یك "ژنگ" بخصوص و عناصر bleen دارای یك "ژنگ" مشخص دیگر باشند بدینترتیب عناصر green و blue دارای دو "ژنگ" متفاوت هستند که با زمان تغییر میکند و باز همان اشکال فوق بوجود میآید .

بالاخره "کنث شمال" باین مسئله پاسخ قانع کننده‌تری داد . بدینترتیب که وی گفت اصولا در اینجا دارای دو زبان متفاوت هستیم که نمیتوانیم بین آنها ارتباطی برقرار کنیم و آنها را نسبت بهم ترجمه نمائیم. زبان اول زبانی است که در آن (bleen,grue) برحسب (blue,green) و با دخالت زمان تعریف میشوند . در زبان دوم دارای خواص green و blue نیستیم بلکه در اینجا دو خاصیت جدید داریم که آنهـا را (green*) و (blue*) میخوانیم و این‌دو برحسب (grue*) و (bleen*) و با دخالت زمان تعریف گشته‌اند . بدینترتیب دارای دو زبان L و L* هســتیم. فرض میکنیم اشخاص A و A* بترتیب به ایندوزبان تکلم نمایند و نیز فرض میکنیم سایر

(*) "On the New Riddle of Induction"

by: S.F.BARKER and P.ACHINSTEIN

کلمات و خواص در ایندو زبان یکسان باشند بطوریکه A و A* بتوانند باهم صحبت نمایند . قبل از زمان t_0 طبیعی ترین ترجمه برای کلمات green و blue در زبان L* عبارتند از grue* و bleen* درحالیکه بعداز t_0 این ترجمه غلط است زیرا اشیای green برای A درلحظه t_0 برای A* از grue* به bleen* تغییر می یابند . بنابراین بعداز t_0 برای ترجمه grue* و bleen* درزبان L بهتر است کلمات grue و bleen را بکار بریم و درنتیجه دیده میشود که ترجمه L به L* و بالعکس کاری است غیرعملی زیرا اگر این ترجمه بصـــورت اخیر انجام گیرد چنانچه شیئی از نظر A* از grue* به bleen* تغییر یابـد آن شیی ازنظر شخص A از grue به bleen تغییر شکل میدهد یعنی از green به green که درواقع تغییر نیست. بطورخلاصه میتوان گفت که دو زبـــان L و L* نسبت بهم قابل ترجمه نیستند زیرا تغییر دریکی تغییر دردیگری راایجاب نمیکند و بنابراین تضادی که گودمن پیش‌کشید قابل قبول نیست زیرا او دو زبـان L و L* را نسبت بهم ترجمه نموده است بدون اینکه باین مسئله توجهی داشته باشـــد . اصولا تقارن موجود بین (green,blue) و (grue*,bleen*) بی معنـی است. این دو جفت هیچ ارتباطی باهم نخواهند داشت .

ارتباط میان فیزیك کلاسیك و فیزیك نسبیت درست مانند ارتباط L و L* اســت که به یکدیگر قابل ترجمه نیستند زیرا در فیزیك نسبیت طول و جرم بر اثر حرکت تغییـــر می یابند . حال آنکه در فیزیك کلاسیك چنین نیست و درنتیجه تغییر دریك زبان تغییـر در دیگری را ایجاب نمینماید . ظاهرا مشکلاتی که مدتها گریبانگیر فیزیکدانان بـــوده است این بود که آنها سعی به برقراری ارتباطی بین ایندو نظریه داشتند و دراین امر

تا امروز با عدم موفقیت روبرو گشته‌اند .

در اینجا باید توجه داشت که باوجود اینکه تضاد گودسن رد شده است ولی هنوز مسئله اصلی یعنی یافتن قوانینی برای استفاده از استقرا بجای خود باقی است و تا امروز دانشمندان نتوانسته‌اند جوابی برای آن بیابند .

****

دوران طلائی ریاضیات

****

نوشته : E.T.BELL
ترجمه : سعید قهرمانی (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

کتب تاریخی گاهی انسان را بسوی بخشهای غیرمستقیم و پیشرفت بشریت میکشانند قرنی یا نیم‌قرنی که با تواریخ دقیق از همدیگرممیزند. یکی از این ادوار دوره پنجاه‌ساله ۱۶۳۷ تا ۱۶۸۷ که اکنون میتوان حدس زد در آینده دیگر هرگز چنین دوران درخشانی پدیدار نخواهد گشت. آغاز این نیم قرن که " دوران طلائی ریاضیات" نامیده شده است با طلوع درخشان ستاره آسمان ریاضی " دکارت" و اختراع هندسه تحلیلی بوقوع میپیوندد و پایان آن با درخشش قویترین چهره ریاضیات "نیوتن" و با کتاب "اصول نیوتن" میباشد .

دوران طلائی باعث پیشرفت فراوان همه شاخه‌های درخت بارور ریاضی و خصوصاً CALCULUS میباشد و مولد این عصر با شکوه کسانی هستند که هریك دربدن ریاضی میزیسته‌اند و امروز وجود آنها بهتر احساس میشود و ما نزدیکی کافی نسبت بآنها داریم .

موسسین ریاضیات مدرن عده کوچکی نبوده‌اند که معروفیت آنها اندك باشد بلکه این گروه در رأس برجی بلند از تمام نوابغی که قبل آنها بوده و بعد از آنها تا بحال آمده‌اند قرار دارند . آنان نخواسته‌اند ریاضی را در قالب مخروط و یا هرم ببینند و این اندیشه والای آنها بود که ریاضی را تا مرزهای بینهایت کشانید و محصول کار آنان یك تکامل تدریجی و آهسته نبود بلکه یك جهش و انفجار غیر مترقبه در این جهان هستی ما بود .

ریاضیات مدرن در پنج رشته بشرح زیر از آغاز قرن هفدهم شروع به خود نمائی کرد :

۱— هندسه تحلیلی فرما در ۱۹۲۶ و دکارت در ۱۶۳۷

۲— انتگرال و دیفرانسیل از نیوتن (۱۶۸۴ — ۱۶۶۶) و لیپ نیتز (۱۶۷۳ — ۱۶۱۵)

۳— آنالیز ترکیبی و بخصوص تئوری احتمالات از فرما و پاسکال (۱۶۵۴)

۴— ریاضیات عالی از فرما (۱۶۶۵ — ۱۶۳۰)

۵— دینامیك گالیله (۱۶۱۲ — ۱۵۹۱) و نیوتن و اصل جاذبه دنیائی نیوتن .

و بعد دو رشته دیگر نیز دیری نپائید که بآنها اضافه شد :

۱— هندسه تصویری و ترکیبی از دزارگو و پاسکال (۱۶۳۹ — ۱۶۳۶)

۲— شروع فلسفه سمبولیك (۱۹۶۰ — ۱۶۶۵) از لیپ نیتز .

در اوائل نیم قرن طلائی ریاضیات با وجودی که احساسات ضد دانش و دانشمندان توأم با شکست بود ولی ادامه می یافت. این تعصب ها در سال ۱۶۳۳ با محکومیت گالیله توسط قضات کاتولیك به اوج رسیده بود که دکارت در سال ۱۶۳۷ با جرأت تمام شاهکار خود را بچاپ رسانید و انجمنهای علمی آنزمان از آن پشتیبانی کردند . این انجمنها که خود نقش سازنده‌ای داشتند عبارتند از :

۱— انجمن سلطنتی لندن بریاست نیوتن

۲— آکادمی علوم فرانسه که متشکل بود از نوابغ عصر مانند دکارت و مرسن

۳— آکادمی برلن که بوسیله لایپ نیتز شروع بکار کرد و برخلاف انجمن سلطنتی لندن و همانند آکادمی علوم فرانسه بریاضیات محض توجه وافری داشت.

مسئولیت این انجمنها حتی از مدارس عالی و دانشگاهها نیز زیادتر بوده ومهمترین وظیفه آنها چاپ کتب سودمند علمی اعضا گروه بود و شایسته است که جهان علم دین خود

را نسبت باین انجمنها که همّ قدرت خود را مصروف میداشتند تا هرروز پله‌ای بریلکان دانش بیفزایند و از عوام هم وحشتی نداشته باشند فراموش ننماید .

علت مهم پیشرفت در این پنجاه سال مورد بحث آن بود که تمام قسمتها با هم جلو رفتند نه حساب و تبدیلات ساده و نه شانس هیچکدام نمیتوانند بما بفهمانند که چگونه تئوری احتمالات اینچنین پیشرفت و یا اختراع هندسه تحلیلی — تئوری معادلات پیوستگی منحنی ها — سطوح و غیره و غیره باعث کشف CALCULUS مهمترین اکتشاف آن عصر گردیدند . البته دراین میان باعث تعجب نیست که بعد از پیدا شدن کاربردهای CALCULUS درهندسه و نجوم و مکانیك و دینامیك همه نوابغ بسوی آنها جلب شدند و کمتر به شاخه‌های اعداد و یا فلسفه سمبولیك و هندسه تصویری پرداختند زیرا راه حلی پیدا شده بود که میتوانست مسائل بغرنج و لاینحل هندسه و نجوم را حل نماید . چه در این زمان مسائلی که ممکن بود هریك بتنهائی ارشمیدس را از پیشرفت بازدارد بوسیله افرادی که حتی ارزش جارو کردن شنی را که ارشمیدس رویش دیاگرام میکشید نداشتند حل میشد .

CALCULUS نیوتن و لایپ نیتز متد تحقیق کردن پیوستگی را چه در علوم و چه در ریاضی از تمام مظاهرش میسر نمود و تنها راهی که بتوان از تفسیرات پیوستگی و چگونگی آن مطلع شد همین روش بود حال آنکه مهمترین معادلات مکانیکی — نجومی — دیفرانسیل — انتگرال و علوم طبیعی بستگی شدیدی به مطالعه پیوستگی دارند .

فرما و پاسکال در سال ۱۹۴۵ احتمالات و آنالیز ترکیبی را از ریاضیات تفریحی به ریاضیات شدیداً علمی رسانید و پنج سال بیشتر از تولد احتمالات نمیگذشت که بوسیله آن جدول مرگ و میر سنجیده شد .

هندسه تصویری و ترکیبی و منطق سمبولیك تباین جالبی بین بقا و فنای ریاضی عرضه میدارند . این قسمت از هندسه در اوائل قرن نوزدهم بوسیله ریاضیدانان مخالف با انقلاب ریاضی و پدیدار شدن موج نو نضج گرفت. لایپ نیتز درباره منطق قیاسی در ریاضی ساکت ماند زیرا اهمیت منطق سمبولیك را پیش‌بینی کرده بود و خودش در حد گروهها به پیشرفتهائی نائل شده بود . درهرحال در اوائل قرن بیستم منطق وارد ریاضی شده و حال قسمت اعظمی از آنرا تشکیل داده است حال‌آنکه هندسه تصویری کم‌کم خود را کنار کشیده و قبول کرد که نمیتواند با هندسه تحلیلی دکارت رقابت نماید .

نیم قرن طلائی ریاضیات این عقیده را که میگوید پایه هرکدام از پیشرفتهای اصلی پیشرفتهای فرعی است منسوخ میکند چه هندسه تحلیلی بدون هیچ تعریف یا اتکا به قسمت دیگری از سیستم مختصات آغاز شد و تا بامروز توانسته سخت درخشان و موفق باشد . نکته مهم دیگر در این دوران نجات ریاضی است از خیالبافی چه ریاضیدانانی مثل "کاوالیو" معتقد بوده‌اند که خط تشکیل شده‌است از یك سری نقاط قابل شمارش ولی اندازه ناپذیر یعنی بدون اندازه و سطح از یك سری خطوط قابل شمارش اندازه ناپذیر و بهمین ترتیب حجم از مجموعه سطوح بدون اندازه و قابل شمارش و با وجودیکه کسانی همچو لایپ نیتز نیز این تعاریف را نپذیرفته بودند نیوتن عدم منطقی بودن آنرا باثبات رسانید و آنالیز را از خیالبافی نجات داد . پس بطور خلاصه میتوان گفت که دوران طلائی ریاضی دوران اختراع CALCULUS — دوران درك مفاهیم مشکل و حل تعداد زیادی مسئله تئوریك و علمی بسیار سخت — دوران اثبات امکان ایجاد رشته‌ای بدون اتکا به سایر قسمتهای دیگر و بالاخره در راه نجات ریاضی از خیالبافی میباشد .

یك متریك روی $Q' = Q - \{0\}$

****

نوشته : مهندس جواد اردشیر لاریجانی

روی مجموعهٔ Q' می توان فاصله‌های مختلف تعریف کرد . یکی از آنها فاصلهٔ زیر است.

قسمت ۱ — تعریف تابع $V_2(x)$: فرض کنید که $p > 0$ یك عدد اوّل باشد . در این صورت بازاء هر $n > 0$ (n یك عدد صحیح است) اگر تجزیهٔ n به حاصلضرب عوامل اوّل بصورت :

$$n = p^{\alpha} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots\cdots p_n^{\alpha_n}$$

باشد که در آن α ممکن است صفر نیز باشد . مقدار $V_p(n)$ را برابر α تعریف می کنیم . از این تعریف برمیآید که :

$$V_p(-n) = V_p(n)$$

$$V_p(nn') = V_p(n) + V_p(n') \qquad (1)$$

در معادلهٔ (۱) n و n' دو عدد صحیح دلخواه و بزرگتر ازصفرهستند .

اکنون فرض کنید که $x = \pm\frac{r}{s}$ (r و s دوعدد صحیح و مثبت هستند) . باتوجه به رابطهٔ (۱) منطقی است که بگوئیم مقدار $V_p(r) - V_p(s)$ بستگی به x دارد و فرمهای مختلف نمایش x آنرا ثابت نگاهمیدارد . بنابراین یك تعریف منطقی برای $V_p(x)$ بصورت زیر خواهد بود :

$$V_p(x) = V_p(r) - V_p(s)$$

چون باید $s \neq 0$ باشد پس $V_p(x)$ روی مجموعهٔ $Q' = Q - \{0\}$ تعریف شده است. باتوجه به تعریف فوق بدیهی است که رابطهٔ زیر به ازاء جمیع

مقادیر $x , y \in Q'$ برقرار است :

$$V_p(xy) = V_p(x) + V_p(y) \qquad (۲)$$

قضیه : اگر $x , y \in Q'$ و $x \neq y$ باشد در اینصورت :

$$V_p(x-y) \geqslant \mathrm{Min}\ (V_p(x) , V_p(y)) \qquad (۳)$$

اثبات ــ باتوجه باینکه $V_p(x-y) = V_p(y-x)$ می توان فرض کرد که :

$$V_p(x) \geqslant V_p(y) \qquad (٤)$$

اکنون با تعریف $Z = \frac{x}{y}$ داریم :

$$V_p(x-y) = V_p\left[y(\frac{x}{y} - 1) \right] = V_p(y) + V_p(Z-1)$$

پس کافی است ثابت کنیم :

$$V_p(Z-1) \geqslant 0 \qquad (٥)$$

امّا با توجه به رابطهٔ (٤) داریم :

$$V_p(Z) \geqslant 0 \qquad (٦)$$

از رابطهٔ (٦) معلوم میشود که می توان Z را بصورت $Z = \pm p^h \frac{r}{s}$ نوشت که در آن $h \geqslant 0$ که در تجزیه r و s بحاصلضرب عوامل اوّل هیچ توانی از p وجود ندارد . اکنون عدد $Z-1$ را درنظر می گیریم :

$$Z - 1 = \pm p^h \frac{r}{s} - 1 = \frac{\pm p^h r - s}{s} = \pm \frac{q}{s} \qquad (۷)$$

با توجه به رابطهٔ (۷) داریم :

$$V_p(Z-1) = V_p(q) \geqslant 0$$

که همان رابطهٔ (٥) است.

قسمت ۲ ــ تعریف فاصلهٔ $d(x,y)$ (p - adic distance) : روی مجموعهٔ Q' فاصله d را مطابق فرمول زیر تعریف می کنیم :

$$d(x,y) = p^{-V_p(x-y)} \qquad \text{if: } x \neq y$$

$$d(x,y) = 0 \qquad \text{if: } x = y$$

می خواهیم نشان دهیم که d روی Q' یك فاصله است.

الف) بسهولت می توان دید که $d(x,y) \geqslant 0$

ب) از روی تعریف بالا نتیجه میشود که $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

ج) از روی خواص تابع V_p که در قسمت ۱ آمد داریم :

$$d(x,y) = d(y,x)$$

د) اکنون باید رابطهٔ "مثلث" را ثابت کنیم :

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \qquad (۸)$$

باتوجه به اینکه در حالتهای $x = y$ یا $x = z$ ویا $y = z$ رابطه فوق بطور واضح برقرار است می توانیم فرض کنیم که x و y و z متمایز هستند .

ما بجای اینکه رابطهٔ (۸) را ثابت کنیم نامساوی زیر را که قویتر از آنست اثبات می کنیم :

$$d(x,z) \leqslant \mathrm{Max}(d(x,y) , d(y,z)) \qquad (۹)$$

مطابق تعریف اثبات رابطهٔ (۹) منجر میشود به اثبات رابطهٔ زیر :

$$V_p(x-z) \geqslant \mathrm{Min}(V_p(x-y) , V_p(y-z)) \qquad (۱۰)$$

حال اگر مقادیر X و Y را مطابق زیر تعریف کنیم :

$$X = x-y \quad ; \quad Y = -y+z$$

رابطهٔ (۱۰) بصورت زیر در می آید :

$$V_p(X-Y) \geqslant \mathrm{Min}(\, V_p(X)\, ,\, V_p(Y)\,)$$

که همان رابطهٔ (۳) است.

بنابراین (Q', d) یك فضای متریك است.

****

منابعی که درتهیه این مقاله مورد استفاده قرار گرفته‌اند :

[۱]: N. Bourbaki "Algebre, Chaptire I, P. 49."

[۲]: J. Dieudonne' "Foundations of Modern Analysis, Chapter 3, P. 28"

کامپیوترهای کنترل کننده

(بخش ۲)

****

نوشته : هاشمی اقدم (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

کامپیوترهای کنترل کننده را بر اساس اصول متفاوتی میتوان طبقه‌بندی نمود . مهمترین این طبقه‌بندیها براساس الگوریتم کنترلی است که در سیستم اعمال میشود . طبق این طبقه‌بندی همهٔ انواع ماشینهای کنترل به چهار گروه تقسیم میشوند :

۱ — ماشینهای کنترلی که از یك واحد محاسبه برای اجرای یك الگوریتم منطقی و ریاضی استفاده می کنند .

۲ — ماشینهای کنترلی که براساس یك الگوریتم منطقی کار می کنند .

۳ — وسائلی که کنترل آنها بطور رقمی برنامه‌ریزی شده است.

٤ — سیستمهای کنترل که جستجوی خودکار برای فرآیند بهینه انجام میدهند .

هریك از طبقه‌بندیهای فوق نیز می تواند خود حاوی گروه‌بندیهای دیگری باشند که ابتدا به گروه‌بندی و شرح ماشینهای طبقهٔ اوّل می پردازیم .

بطور کلی ماشینهائی را که بر اساس یك الگوریتم منطقی و ریاضی کار می کنند بسته به اینکه عمل آنها به جل چه نوع رابطهٔ ریاضی منجر میگردد میتوان به سه گروه دسته‌بندی نمود :

۱ — حل معادلات جبری

۲ — حل معادلات دیفرانسیل

۳ — حل سایر معادلات و روابط ریاضی

البته حل معادلات غیرجبری (Transcendental) نیز گاهی درکاربردظاهر

میشود که آنها را در گروه سوم قرار میدهیم. معادلات جبری خود به دو دستهٔ خطی و غیرخطی تقسیم میشوند که روشهای حل آنها رشته‌های جداگانه‌ای از آنالیز عددی بنامهای "برنامه ریزی خطی" و "برنامه ریزی غیرخطی" رابوجود آورده‌اند. اینجا هدف تشریح این روشها نیست بلکه نشان دادن برخی از کاربردهای ماشینهای کنترل ریاضی در رشته‌های مختلف است. اما در بعضی از این مقولات ناگزیر از توسل به این روشها خواهیم بود. لذا به توضیح برخی روشهای کلی و عمومی می‌پردازیم. البته این روشها را در مورد معادلات غیرخطی مشروح میداریم ولی واضح است که می‌توان آنها را بحالت کلی نیز تحدید نمود.

یکی از روشهای عمومی آنالیز عددی که در حل معادلات اعم از جبری ـ دیفرانسیل و غیرجبری بکار میرود تکرّر (Interation) می‌باشد. ما بذکر روش و ارائه شرائط کافی برای همگرائی آن می‌پردازیم و برای تسریع همگرائی آن توجه خوانندگان را بمنابع ذکرشده در پایان مقاله معطوف می‌داریم.

سیستم معادلات زیر را درنظر می‌گیریم:

$$X = F(X) \qquad (۱)$$

که درآن $X = (X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$ و $F = (f_1(X), f_2(X), \cdots\cdots, f_n(X))$ بطوریکه $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n$ توابعی حقیقی و پیوسته دریك همسایگی W از $X^* = (X_1, X_2, \quad , X_n)$ می‌باشند که X^* تنها جواب دستگاه (۱) در این همسایگی می‌باشد. (برای مطالعه روش پیدا کردن این همسایگی به [۲] مراجعه شود)

برای حل دستگاه معادلات فوق ساده‌ترین روش بکاربردن تکرّر است یعنی تشکیل

دنباله‌ای از بردارها طبق رابطهٔ:

$$X^{(0)} = \text{بردار دلخواه معقول}$$

$$X^{(P+1)} = F(X^{(P)}), \qquad P = 0, 1, 2, \cdots\cdots \qquad (۲)$$

در مورد معقول بودن $X^{(0)}$ تجربه اهمیت فراوانی دارد. برخی از این تجارب را در کتب آنالیز عددی میتوان یافت. توجه کنیم که اگر دنبالهٔ فوق همگرا باشد مقدار نهائی:

$$X = \lim_{P \to \infty} X^{(P)}$$

جواب دستگاه معادلات (۱) خواهد بود.

با فرض برقراری رابطهٔ (۳) و حد گرفتن از رابطهٔ (۲) وقتی که $P \to \infty$ و توجه باینکه تابع F پیوسته است خواهیم داشت:

$$\lim_{P \to \infty} X^{(P+1)} = F(\lim_{P \to \infty} X^{(P)})$$

یعنی: $X = F(X)$

بنابراین X جواب دستگاه معادلات (۱) می‌باشد.

این متد می‌تواند به حالت کلی دستگاه معادلات زیر نیز اعمال شود:

$$F(X) = 0 \qquad (٤)$$

که درآن $F(X)$ یك تابع برداری است که در همسایگی W از جواب منفرد X^* تعریف شده و پیوسته است. مثلاً این دستگاه را می‌توان بصورت زیر درآورد:

$$X = X + AF(X) \qquad (٥)$$

که درآن A یك ماتریس غیرمنفرد می‌باشد. اگر $X + AF(X)$ را با $Q(X)$ نمایش دهیم دستگاه معادلات فوق بصورت زیر درخواهد آمد که روش فوق قرای آن قابل اجرا

است :

$$X = Q(X) \qquad (۶)$$

اگر تابع $F(X)$ در همسایگی W دارای مشتق پیوستهٔ $F'(X)$ باشد خواهیم داشت :

$$G'(X) = E + AF'(X) \qquad (۷)$$

که در آن E ماتریس واحد می باشد . می توان ثابت نمود درصورتیکه نرم $F'(X)$ کوچك باشد عمل تکرّر بسرعت همگرا خواهد بود . باتوجه به این موضوع میتوان ماتریس A را طوری انتخاب نمود که :

$$F'(X^{(0)}) = E + AF'(X^{(0)}) = 0 \qquad (۸)$$

درحالتی که ماتریس $F'(X^{(0)})$ غیرمنفرد باشد خواهیم داشت :

$$A = -\left[F'(X^{(0)})\right]^{-1} \qquad (۹)$$

درصورتیکه ماتریس $F'(X^{(0)})$ منفرد باشد برای انتخاب A بهتر است که $X^{(0)}$ را معقول‌تر انتخاب کنیم .

با فرض اینکه $F(X)$ و $F'(X) = \left[\frac{\partial F_i(X)}{\partial X_j}\right]$ در قلمرو بسته کرانه‌دار و محدب G $(G \subset E_n)$ پیوسته می باشند بسراغ شرایط کافی برای همگرائی روش تکرّر می رویم . برای این منظور از دو نوع نرم استفاده می کنیم :

$$\|X\|_m = \mathrm{MAX}_i |X_i| \qquad \text{و} \qquad \|X\|_t = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$

باتوجه به قلمرو G نرمهای زیر را تعریف می کنیم :

$$\|F'(X)\|_I = \mathrm{MAX}_{X \in G} \|F'(X)\|_t \qquad \text{و} \qquad \|F'(X)\|_{II} = \mathrm{MAX}_{X \in G} \|F'(X)\|_t$$

که در آن :

$$\|F'(X)\|_m = \mathrm{MAX}_i \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial F_i(X)}{\partial X_j}\right|$$

و

$$\|F'(X)\|_t = \mathrm{MAX}_j \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial F_i(X)}{\partial X_j}\right|$$

قضیه (۱) : فرض کنید توابع $F(X)$ و $F'(X)$ درقلمرو G پیوسته بوده و رابطهٔ زیر برقرار باشد (q یك مقدار ثابت)

$$\|F'(X)\|_I \leqslant q < 1$$

اگر تقریبهای مکرّر

$$X^{(P+1)} = F(X^{(0)}) \quad , \quad P = 0,1,2,\cdots\cdots$$

متعلق بقلمرو G باشند عمل تکرّر همگرا خواهد بود و بردار نهائی

$$X = \lim_{P \to \infty} X^{(P)}$$

به تنها جواب دستگاه (۱) میل خواهد کرد .

نتیجه : عمل تکرّر همگراست اگر داشته باشیم :

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial F_i(X)}{\partial X_j}\right| \leqslant q_i < 1 \qquad i = 1,2,\cdots\cdots$$

توجه : فاصله $X^{(P)}$ از جواب حقیقی در نامساوی زیر صدق می کند :

$$\|X - X^{(P)}\|_m \leqslant \frac{q^{(P)}}{1-q} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_m \quad , \quad P = 0,1,2,\cdots\cdots$$

قضیه (۲) : اگر $F(X)$ و $F'(X)$ در قلمرو بسته ــ محدب و کرانه‌دار پیوسته باشند (قلمرو G) و رابطه زیر برقرار باشد (که q مقداری ثابت است) :

$$\|F(X)\|_{II} \leqslant q < 1$$

و اگر $X^{(0)} \in G$ و همه تقریبهای مکرّر :

$$X^{(P+1)} = F(X^{(P)}) \quad , \quad P = 0,1,2,\cdots\cdots$$

متعلق به قلمرو G باشند در اینصورت عمل تکرّر (۶) همگرا خواهد بود .

نتیجه عمل تکرّر (۶) به سوی جواب $X=Q(X)$ درقلمرو G همگرا خواهد

بود اگر برای هر $X \in G$ نابرابری زیر برقرار باشد :

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F_i(X)}{\partial X_i} \right| \leqslant q_X < 1$$

توجه : نامساوی زیر برای فاصله $X^{(P)}$ از جواب حقیقی صادق است :

$$\left\| X^{*} - X^{(P)} \right\|_t \leqslant \frac{q^P}{1-q} \left\| X^{(1)} - X^{(0)} \right\|_t$$

(این مقاله در شماره‌های بعد دنبال میشود)

****

منابـــــع :

[۱]: V. LOSKUTOV "Mathematical Control machines"
MIR Publisher, MOSCOW.

[۲]: B.P,Demidovich, I.A, Maron. "Computational mathematics"
MIR Publisher, MOSCOW.

[۳]: P.Henrei,"Elements of numerical Analysis"
John Wiley & Sons, INC. NEWYORK.

عمـر خیـــــــام

****

نوشته : سعید قهرمانـی (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

کشتی زمان را بر دل اقیانوس تاریخ به عقب میرانیم تا به اوائل قرن پنجم هجـری برسیم و گام بر دل شهری نهیم که در آن قلب عاشق عارف شوریده گوشه نشینی میتپد کـه سایه فکرش خیال تصرف جهان ریاضی را دارد . در این شهر ساکت و آرام دو جـوان بی باك را می بینیم یکی پسر ابراهیم و دیگری رحیم رحیم‌زاده که آرام و بی خیال در کـوی کتابفروشان وارد دکه‌ای میشوند پر از کتاب و پسر ابراهیم کتابی را که سالهاست آرزوی همزبانی با اوراقش را دارد جستجو می کند غافل از آنکه "یاسمه" دختر کتابفروش از روی شیطنت این کتاب سرخ مصور را که خطوط و دایره‌ها و مربعهای عجیبی دارد در میـان کتابهای دیگر پنهان کرده است. یاسمه که در امان بودن از آسیب تیرهای دلدوزچشمانش قدرتی خدائی میخواهد پس از خوشنودی از شیطنت خود و آزار پسر ابراهیم کتـاب را بیرون کشیده و در این هنگام برگی از آن پاره میشود و این حادثه خشم کتابفـروش را برمی انگیزد و باعث می گردد که رحیم آنرا برای پسر ابراهیم که از مال دنیا بضاعتی ندارد خریداری کند . عمر پسر ابراهیم خیام آنشب چراغی به عاریت میگیرد و همراه با چـراغ خودش را باطاق گلین بام خانه‌ای میرساند که در آن پیاز و علف میریزند و کرایه‌اش چنـد سکه‌ای بیش نیست و برای نظاره ستارگان جای مناسبی است. عمر در آنشب فراموش نشدنی کتاب سرخ مصور اقلیدس را برگ میزند و بدقت مطالعه می کند گاهی هم با خطکش و پرگار شکلی می کشد و آنرا به قطعاتی تقسیم میکند و آنقدر در خود فرو میرود که همه چیـز از ضمیرش خارج اسـت.

بلی ، نیشابور این خطه پرخاطره از ناهماهنگی های تاریخ اینك جوانی را در خود می پرورد که عمری به او افتخار کند . جوانی که جز مصاحبت با رحیم فقط کتاب میخواند و بمدرسه میرود و گاهی هم به دکه خیمه‌دوزان گذرش می افتد تا یاد پدرش را که از این صنف بوده و اکنون چهره درخاك کشیده‌است زنده کند . جوانی که آرزوی داشتن یك رصدخانه ـ یك نقشه آسمان و نسخه‌ای از جدولهای نجومی پتولمه منجم معروف یونان را در سر می پروراند و بالاخره جوانی که محبوب وارث زیباترین چهره‌های زمان و قلب شوریده شاعری چون خیام است.

عمر مردی است که خلاف تصور همه بفالگوئی و پیش‌بینی سرنوشت از روی ستارگان اعتقادی ندارد و سید احمد فالگیر را با آن اوارد و غرائم و اصطرلابش ابله‌ترین ابلهان و خرعرکننده مینامد . زندگی او با مطالعه و تجسس میگذرد تا اینکه با رحیم پسر نعیم نیشابوری و دسته‌ای از جنگده‌های مزدور روانه غرب میگردد تا به سپاه آلب ارسلان بپیوندد و شمشیر بر دشمن بکشد . در این جنگ عمر به شوخی سه پیش‌بینی میکند که در سرنوشت وی تأثیر بسزائی دارد . وی برادر شیریش رحیم را ازدست میدهد و در سوك او مدتی دراز عزاداری میکند او مرتب میگوید : "ای رحیم تن چون خیمه‌ایست که درآن روح اندك زمانی می‌آرامد پس‌چون خیمه فروافتد رو به سفر دراز خود میرود. ای رحیم من تو رادرآن سفر بازخواهم یافت".

یکسال پس‌از جنگ هنگامی که آرامش سرزمین تازه از جنگ فراغت‌یافته را درآغوش کشیده است عمر به کنار راه کویر نمك نزد استاد علی ریاضیدان زمان میرود و به زمره شاگردان او میپیوندد . استاد علی که به "آئینه‌خرد" ملقب است سعی میکند تا ریاضیات را در این گوشه جهان پایدار نگهدارد و اکنون مشغول نوشتن جبر و مقابله

است . وی عقیده دارد که ریاضیات مثل پلی است که برای گذشتن از نادانی به دانائی باید حتماً از روی آن گذر کرد . دیری نمی پاید که استادعلی به تخیل خارق‌العاده خیام ایمان می‌آورد و به آینده او سخت مشکوك میشود . امّا استادعلی می بیند خیام چیزهائی مینویسد و در جعبه مخصوص قرار داده در زیر بالینش از آنها نگهداری میکند پس به عمر مشکوك شده و اندیشه میکند که وی جاسوس خواجه‌نظام الملك‌وآلب‌آرسلان است و علت این اندیشه آن است که استادعلی به پیش‌گوئیهای نجومی معتقد نیست و اینکار جرم بحساب می‌آید . اما این فکر همینطور نمیماند و استادعلی بیشتر به عمر ظنین میشود چه خیام اندامی پهلوانی دارد و سخت‌نیرومند است و ظاهراً تحصیل ریاضیات برایش بیمورد مینماید . مدتها بهمین منوال میگذرد تا اینکه استادعلی از بند این اندیشه واهی خلاص میشود چه او پسر ابراهیم را می بیند که روی کاغذ چیزهائی مینویسد و چون از وی میخواهد تا نوشته‌هایش‌را به او نشان بدهد با کمال تعجب ملاحظه میکند که وی مسئله‌ای را در سطوح مرکب حل کرده است. استادعلی از این حادثه سخت خوشحال شده و فرصتی بدست میآورد تا بهترین و سخت‌ترین مسئله مطرح از زمان یونان قدیم را در کتاب خود و باسم خود توضیح دهد مسئله‌ای را که حتی خوارزمی هم جرأت نکرده بود در کتاب خود اسمی از آن ببرد و در این زمان است که دریچه نوی بر کاخ استوار و عظیم فکر عمر باز شده و وی با قدرتی عجیب مسائلی را در سطوحی دشوار حل میکند و از هدیه آنها به استادعلی امتناع میورزد زیرا میخواهد کارهای خودش‌را بنام خودش ثبت نماید .

زمان پرجوش‌و خروش بدینسان جلو میرود که روزی از جانب وزیر آلب ارسلان یعنی خواجه نظام‌الملك شخصی بنام "توتوش" نزد استادعلی می‌آید و از چگونگی وضع خیام

سئوالاتی میکند و استادعلی جواب میدهد که عمر معادله‌های مکعب را بهمان سادگی حل میکند که تو این دانه‌های عاج را میان انگشتان خود میچرخانی او کتابهای مرا میخواند و تنها در کنار بیابان قدم میزند . گاهی نرد بازی میکند و انار میخورد و خیلی هم کم حرف میزند . توتوش در رفتار عمر شك کرده و استادعلی را مأمور میکند تا رفتار عمر را زیر نظر داشته و بعد از مدتی هم او را به دفتر آلب ارسلان بفرستد و بدین ترتیب استادعلی که خود می اندیشد عمر جاسوس نظام‌الملك است حال مأمور رفتار عمر میشود . مدتی دیگر نیز امواج پر تلاطم تاریخ میخروشد تا اینکه عمر عازم دربار آلب ارسلان میشود و هدف خودرا در زندگی با چند کلمه ای که در زیر میخوانیم برای آلب ارسلان تشریح میکند :

" اول از همه باید ببینیم چگونه حکمت باین دنیای دنی روی آورده است. حکمت بزرگ از جانب پیامبران که درسی نیاموخته بودند ولی بینائی خداداد داشتند و بر اسرار واقف بودند آشکار گردید . پیامبران از نخستین آورندگان حکمت هستند . بعد از آنها حکما هستند که براثر مطالعه تعالیم پیامبران و تسلط بر علوم میتوانند آنچه را که در نظر عوام‌الناس پنهان است به آنها آشکار کنند در این میان ازنظر زمان اولین همهٔ پیامبران اولی العزم موسی بود سپس عیسی و سومی پیامبر ما محمد و همچنین از حکما افلاطون و ارسطو و سپس ابن سینا در کاشتن تخم حکمت اندر ضمیر نادان بینوای ما سهم بسیار ارزنده‌ای دارند . و بعد از حکما شاعران می‌آیند . هنر شاعری هنر خطرناکی است چه وظیفه او برانگیختن تخیّل است تا بدینگونه چیزهای بزرگ را کوچك و

چیزهای کوچك را بزرگ جلوه دهند و مهر و کینه یا هیجان و نفرت برانگیزند و شاعراست که انجام کارهای بزرگ و کوچك را در دنیا باعث میشود . اما چون شاعر تخیل را برمی انگیزد ونمیتواند دانائی راصفا دهد از اینرو هنر شاعری پائین‌تر از توانائی حکیم است" .

اما هنوز عمر بخدمت آلب ارسلان نرسیده است که آلب ارسلان به قتل میرسد و ملکشاه جای اورا می گیرد . عمرمدتی نزد یاسمه می ماند وبعد باتوتوش نزد خواجه نظام الملك می رود که خود در سایهٔ قدرت سلطان فرمانروائی نیرومند است .

عمر چون بخدمت خواجه نظام‌الملك میرسد با این سئوال روبرو میشود که چطور نتیجه نبرد و مرگ دو پادشاه یعنی سه پیش‌بینی را با هم انجام داده است و هرسه آنها به حقیقت پیوسته‌اند و عمر جواب میدهد که این شوخیی بیش نبوده است و درهرحال پس از بحثی که بین دو عالم بزرگ درمیگیرد خواجه از عمر خوشش می‌آید و از او میپرسد که چه آرزوئی داری ؟ و عمر میگوید که آرزوی داشتن یك رصدخانه یك اصطرلاب بغدادی که سه ذراع قطر آن باشد . جدولهای نجومی پتولمه و یك کره سماوی از مفرغ با حلقه‌ای افقی و چیزهائی دیگر را دارد و دیری نمی‌پاید که برجی مشرف به گورستان را به وی میدهند تا از آن بعنوان رصدخانه استفاده کند و همچنین وسائل نجومی کامل را در اختیارش میگذارند و خیام تحقیقات علمی خود را آغاز میکند .

خیام فیلسوفی است شاعر که نسبت به طبیعت دیدی عرفانی دارد و در میان منجمین و ریاضیدانان زمان بی نظیر است. وی که شاگردی کسانی مثل امام موفق نیشابوری ـ امام محمد غزالی و شاید ابوعلی سینا را کرده است مردی بدخوی و تنگ حوصله بوده است و گویند که در تعلیم و تصنیف نیز بخیل بوده که در این روایت شك است.

غیاث‌الدین ابوالفتح عمربن ابراهیم خیام نیشابوری از خود آثاری بجای میگذارد که

تعدادی از آنها مفقود میشوند ولی هرکدام از این آثار کافیست که نام او را برپیشانی جهان با افتخار تمام آن چنان حك کند که هیچ عاملی نتواند آنرا پاك گرداند. خیام جز رباعیات و اشعارش بعربی رساله‌ای دارد در جبر و مقابله که از شاهکارهای این عالم ریاضی بشمار میرود و رساله‌های دیگر وی عبارتند از: رساله‌ای در شرح مشکلات مصادرات کتاب اقلیدس — رساله‌ای در باب یافتن مقدار طلا و نقره در جسمی که از این دو فلز مرکب باشد — رساله میزان الحکم — رساله‌ای در صحت طرق هندسی برای استخراج جذر و کعب — مشکلات الحساب — رساله‌ای در طبیعیات — رساله‌ای در وجود یا صحیفه‌ای در علم کلیات — رساله‌ای در کون و تکلیف — رساله لوازم الامکنه — رساله‌ای دربیان زیج ملکشاهی — ترجمه فارسی خطبه ابن سینا — رساله‌ای در سه مسئله حکمت — ضیاءالعقلی در موضوع علم کلی — رساله‌ای در وجود — رساله‌ای در صورت تضاد در در جواب کلی بعربی — رساله نظام الملك راجع به حکومت — یك مقاله در رساله روضة القلوب و بالاخره نوروزنامه و البته میدانیم که وی در ایجاد تقویم جلالی نقشی اساسی را بعهده داشته و این تقویم از تقویم گریگوری که هر ۳۰۰۰ سال یك روز خطا دارد دقیقتر است و هر ۵۰۰۰ سال دارای یك روز خطا میباشد.

جبر و مقابله خیام که مورد توجه جهانیان است دارای مباحثی راجع به حل معادلات است. وی حل عددی یك معادله را شامل دو قسمت میداند. اول به معنائی که ما از این لفظ استنباط می کنیم و دوم تعیین شرائطی که باید ضرایب معادله در آنها صدق کنند تا جواب معادله صحیح باشد و میگوید در مورد مسائلی که موضوع آنها مقادیر هندسی است این دو شرط لازم نمیباشد و معادله را وقتی جواب مثبت نداشته باشد ممتنع می نامد. خیام مقادیر متصله را به خط — سطح — حجم و زمان

تقسیم میکند و میگوید عادتاً زمان وارد جبر نمیشود و بعد تذکر میدهد که x و x^2 و x^3 در مقادیر نظیر طول و سطح و حجم میباشند و قوای بالاتر از آنها بعلت انحصار ابعاد در سه بعد در حقیقت در مقادیر وارد نمیشوند و استعمال آنها برسبیل مجاز است. خیام اولین کسی است که معادلات درجات اول و دوم و سوم را بطریق منظمی تقسیم کرده است ولی گرچه این طبقه‌بندی اکنون بی ارزش است جاکی از منظم بودن فکر او میباشد.

سیر در دنیای خیام و جستجو در آثار او و توجیه شخصیت واقعی این مرد بزرگ کاری نیست که در این مقوله بگنجد پس مشتاقان وی را به مراجع ذکر شده در پایان مقاله راهنمائی کرده و کشتی زمان را بجلو میرانیم تا به حال برسیم. راستی چه سفرشورانگیزی بود گرچه خیلی کوتاه و سطحی به صفحات نیشابور نه قرن پیش نظری افکندیم ولی لااقل بی بوجود مردی بردیم که با وجود تمام بیوفائیهای دنیا نامش از روز اول درخشانتر بر چهره ریاضیات و ادبیات جهان جلوه‌گری میکند و گرچه میگوید که:

بر کوزه‌گری پریر کردم گذری — از خاك همی نمود هردم هنری

من دیدم اگر ندید هربی بصری — خاك پدرم در کف هر کوزه‌گری

لیکن وجود خود خیام را نه از کوزه بلکه از میان یك‌یك جملات او چه در ریاضی — فلسفه — رباعی و ... میتوان مشاهدت کرد.

****

مراجع

عمر خیام — تألیف: هارولد لمب — ترجمه: دکتر محمدعلی اسلامی

جبر و مقابله خیام — " دکتر غلامحسین مصاحب

خیامی نامه — " استاد همایی

دمی با خیام — " علی دشتی

(بخش ۱) روشی درحل معادلات دیفرانسیل خطی

****

نوشته : فروزان خردپژوه (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

سیستم معادلات دیفرانسیل خطی که x_0 نقطهٔ ایـــزوله منظم آن باشد را می توان بصورت :

$$(x-x_0)\frac{dY}{dx} = A(x)\,Y \qquad (1)$$

نوشت که معمولا " فرض می شود ماتریس $A(x)$ - $n\times n$ درنقطهٔ x_0 تحلیلی باشد . (معادله (۱)بصورت برداری می باشد) . حل چنین معادلاتی از لحاظ ریاضی بسیار جالب بوده و اغلب اوقات مستلزم معلومات عمیق ریاضی است. در این مقاله روشی ذکر میگردد که به روش پوانکاره (H.Poincare') مشهور است. این روش شامل دو مرحـــله بشرح زیر است :

الف) تمام عملیات بدون دلیل محکم ریاضی (Formally) انجام میگیرد . یعنی در همگرائی یا واگرائی سریهای بکار برده شده صحبتی نمیگردد (قسمت (۱) این شماره) .

ب) بحث اصلی ریاضی (Analytic) که همگرائی یا واگرائی ســریهای مزبـور را نشان میدهد (قسمت(۲)شماره آینده) .

ناگفته نماند که معادله (۱) حالت خاصی از فرم کلی معادله زیر است :

$$(x-x_0)^h\frac{dY}{dx} = A(x)\,Y \qquad h>1$$

که خود این معادله نیز حالت بسیار جالبی است ولی در این مقاله مجال پرداختن به این حالت کلی نیست. درشماره‌های بعدی بآن اشاره خواهد شد .

مرحله الف : برای سهولت عمل فرض می کنیم که نقطه ایـزوله معادله (۱) نقطهٔ $x_0=0$ باشد . دراینصورت تبدیل زیر را درنظر می گیریم :

$$Y = P(x)\,Z$$

که $P(x)$ ماتریسی است تحلیلی و معکوس‌پذیر. با این تبدیل معادله (۱) به معادله زیرتبدیل می شود :

$$x\frac{dZ}{dx} = P^{-1}(x)\left\{A(x)P(x) - xP'(x)\right\}Z$$

و هدف ما اینستکه تا حد امکان عبارت زیر را ساده کنیم :

$$P^{-1}(x)\left\{A(x)P(x) - xP'(x)\right\}$$

فرض می کنیم که صورت ساده شده ماتریس فوق برابر ماتریس $B(x)$ باشد یعنی :

$$A(x)P(x) - xP'(x) = P(x)B(x)$$

و یا می خواهیم معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائیم :

$$A(x)P(x) - P(x)B(x) = xP'(x) \qquad (2)$$

در مرحله اول صورت معادله (۲) بمراتب از صورت معادله (۱) سخت تر بنظر میرسد و حل چنین معادله‌ای آسانتر از حل معادله اصلی نمی باشد . ولی خوشبختانه چون ماتریس B در اختیار ما می باشد به حل معادله فوق امیدی میدهدکه پوانکاره روش زیر را ارائه داد .

پوانکاره فرض کرد که ماتریس‌های $A(x)$ و $B(x)$ و $P(x)$ دارای بسط باشند :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k$$

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k$$

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

چون در معادله (۲) قرار دهیم و فقط عملیات جمع و ضرب را انجام داده و روابط بدست آمده را ساده نمائیم خواهیم داشت :

$$\begin{cases} A_0P_0 - P_0B_0 = 0 \\ (A_0 - kI)P_k - P_kB_0 = \sum_{i=0}^{k-1} P_iB_{k-i} - \sum_{i=1}^{k} A_iP_{k-i} \end{cases} \qquad k = 1, 2, \cdots\cdots \qquad (۳)$$

هدف ما در این مرحله اینستکه P_k ها را بدست آوریم (البته برای B_i های مناسب) . برای پرداختن باین مطلب به لم کوچك زیر نیازمندیم :

لـم : هرگاه A و B دو ماتریس مربع باشند بطوریکه دارای یك مقدار خاص مشترك باشند در آنصورت معادله زیر حداقل دارای یك جواب غیرصفر می باشد :

$$AX - XB = 0$$

برای اثبات رجوع شود به [1] در پایان مقاله .

بعد از این لم ملاحظه می کنیم که اگر در دستگاه معادلات (۳) مقادیر $P_0 = I$ و $B_0 = A_0$ باشند در آنصورت معادله اول (۳) برقرار است و معادلات بعدی بصورت زیر درمی آید :

$$(A - kI)P_k - P_kA_0 = \sum_{i=0}^{k-1} P_iB_{k-i} - \sum_{i=1}^{k} A_iP_{k-i} \qquad (٤)$$

اکنون اگر فرض کنیم که تفاضل هیچیك زوج از مقادیر خاص A_0 یك عدد صحیح نباشد در آنصورت ماتریس های $A_0 - kI$ و A_0 دارای مقادیر خاص مشترك نبوده و درنتیجه با فرض $B_k = 0$ برای مقادیر $k \geqslant 1$ معادلات (٤) را یکی پس ازدیگری حل نموده و تمام P_k ها را بدست می آوریم . بسهولت دیده می شود که در اینحالت خاص معادله (۱) بمعادله ساده (٥) بشرح زیر تبدیل میشود :

$$x \frac{dZ}{dx} = A_0 Z \qquad (٥)$$

یك جواب ماتریس اصلی برای معادله (٥) بصورت :

$$Z = x^{A_0} = e^{A_0 \ln x}$$

خواهد بود و جواب ماتریس اصلی برای معادله (۱) بصورت :

$$Y = P(x) \cdot e^{A_0 \ln x}$$

میباشد . در مرحله بعدی ثابت می کنیم که ماتریس :

$$P(x) = I + \sum_{k=1}^{\infty} P_k x^k$$

در همسایگی نقطهٔ $x_0 = 0$ تحلیلی است (شماره آینده) .

در حالتیکه تفاضل دو مقدار خاص A_0 یك عدد صحیح باشد روش جالبی توسط ریاضیدان مشهور آمریکائی (G. Birkhoff) ارائه داده شده است. ما در این مقاله برای سهولت نوشتن حالت خاص $n = 2$ را درنظر میگیریم (در حالت کلی مستلزم استفاده از فرم جردن است که خارج از حوصله این مقاله می باشد) .

واضح است که ماتریس ثابتی مانند T وجود دارد که دراثر تبدیل $Y = T \cdot Z$ معادله (۱) تبدیل گردد بمعادله :

$$x \frac{dZ}{dx} = T^{-1} A(x) \; T \cdot Z \qquad (٦)$$

که :

$$T^{-1} A_0 T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + k \end{bmatrix}$$

است که البته فرض بر اینستکه λ و $\lambda + k$ مقادیر خاص ماتریس A_0 میباشند . بدون هیچگونه ایرادی میتوان فرض کرد که :

$$B(x) = T^{-1} A(x) \; T = \begin{bmatrix} \lambda + x\varphi_{11}(x) & x\varphi_{12}(x) \\ x\varphi_{21}(x) & \lambda + k + x\varphi_{22}(x) \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

که $i,j=1,2$ $\varphi_{ij}(x)$ در همسایگی $x=0$ تحلیلی اند . بنابراین بدون هیچ ایرادی میتوان فرض کرد که در معادلهٔ (٦) ماتریس $A(x)$ را بفرم معادله $B(x)$ در معادلهٔ (٧) فرض نمود . حال در معادلهٔ (٦) تبدیل زیر را درنظر میگیریم :

$$Y = S(x)\, Z$$

که در این تبدیل $S(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ می باشد . دراینصورت خواهیم داشت :

$$x \frac{dZ}{dx} = S^{-1}(x) \left\{ A(x)S(x) - xS'(x) \right\} Z \qquad (٨)$$

پس از عملیات بسیار ساده مشاهده می گردد که :

$$A_1(x) = S^{-1}(x) \left\{ A(x)S(x) - xS'(x) \right\} = \begin{bmatrix} \lambda + x\varphi_{11}(x) & x^2\varphi_{12}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \lambda + k - 1 + x\varphi_{22}(x) \end{bmatrix}$$

و مقادیر خاص ماتریس فوق در نقطه $x = 0$ برابر λ و $\lambda + k - 1$ می باشد .

بنابراین با تکرار این تبدیل به تعداد k دفعه به معادله :

$$x \frac{dw}{dx} = A_k(x)\, w \qquad (٩)$$

میرسیم که مقادیر خاص ماتریس $A_k(x)$ فقط λ بوده و تفاضل آنها صفر است که مخالف عدد صحیح فرض نموده و معادلهٔ (٩) را به روش پوانکاره میتوان حل نمود که جواب آن بصورت :

$$w(x) = e^{A_k(0) \ln x}$$

خواهد بود .

همانطوریکه قبلاً گفته شده اثبات همگرائی سری $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k$ در شماره آینده خواهد آمد .

****

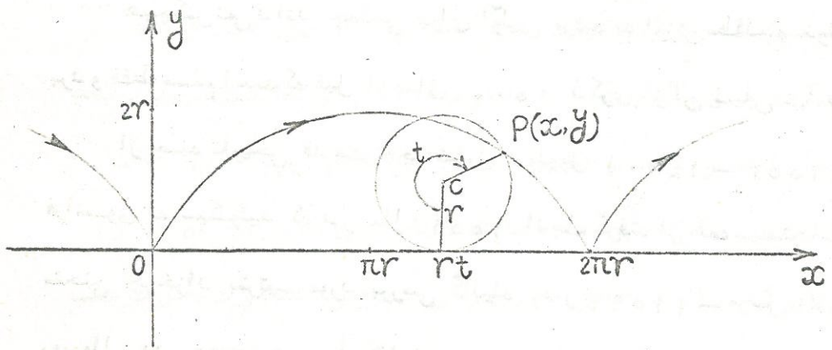
Reference:

[1] C.C. MAC DUFFEE "Vector and Matrices"
Carus Mathematical Monograph 7, 1943.

هلـــــن هندسه

****

نوشته : حمید کاظمی (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)



$x=r(t-\sin t)$

$y=r(1-\cos t)$

هدف از نوشتن این مقاله بدست دادن تاریخچه‌ای از یك منحنی معروف است. بهمین جهت گاه که خواصی از آنرا ذکر می کنیم ایجاد شرایط دقیق بیان آن خواص مورد اعتنای ما نیست ولی خواننده با کمی دقت خود می تواند آن شرایط را دقیقاً بیان کند . بسیاری از خواص هندسی ذکر شده در این مقاله را می توان با روشهای کلی و مقدّماتی حساب جامعه و فاضله یافت ولی در سایر موارد ــ تا آنجا که اطلاعات نگارنده اجازه میداده است ــ خواننده را به کتابهائی حواله داده‌ایم که در آنها می تواند اطلاعاتی جامعتر کسب کند .

بطور کلی و با تعریفی غیر رسمی ــ وقتی یك منحنی متکی بر منحنی دیگر بغلتد هر نقطه از آن منحنی ای بوجود می آورد (ضمن غلتش) که نسبت به منحنی ثابت دوّم "رولت" نامیده می شود . درحالت خاصی که منحنی ثابت یك خط است و منحنی

غلتنده یك دایره باشد منحنی حاصل از حرکت هر نقطه دایره "سیکلوئید" نامیده می‌شود. سیکلوئید یا باصطلاح دایرةالمعارف فارسی (به سرپرستی غلامحسین مصاحب) "چرخزاد" را به خاطر خواص زیبا و جالبش و نیز بخاطر منازعاتی که برسر آن بین ریاضیدانان درگرفته هلن هندسه(*) نامیده‌اند.

هیچکس نمی‌داند چه‌کسی برای اوّلین مرتبه به ارزش مطالعه خواص سیکلوئید پی برد و فقط مسلم است که قبل از سال ۱۵۰۰ ذکری از آن بمیان نیامده است.

از جنبه تاریخی قدمت توجه شارل دولوول (۱۴۷۰ — ۱۵۵۳ Bouvelles) فرانسوی به سیکلوئید که در سال ۱۵۵۱ انجام گرفته از همه بیشتر است. سپس منحنی چرخزاد بترتیب مورد بررسی گالیله (در ۱۵۹۹) — مرسن (در ۱۶۲۸) — روبروال (در ۱۶۳۴) — پاسکال (در ۱۶۵۹) — ژاك و ژان برنویی و هویگسن (در ۱۶۷۳) قرار گرفت.

اولین مقاله مهم درباره این منحنی بوسیله فیزیکدان ایتالیائی (Toricelli) تریچلی یکی از شاگردان گالیله Galilee برشته تحریر درآمده است. حدود ۱۴ سال بعد بلز پاسکال به هنگامی که ریاضیات را بخاطر آنکه معتقد بود مسائل علمی وسائل وقت‌گذرانی بیهوده‌ای هستند که باید از آنها برحذر بود تا به روح آدمی

(*) هلن از مشاهیر اساطیر یونانی است. او خواهر بسیار زیبای پولوکوس و کاستور و دختر پادشاه لدا بود و زوجه منلاس یونانی گردید. پاریس از اهالی تروا اورا ربود و همین باعث جنگ مشهور تروا گردید.

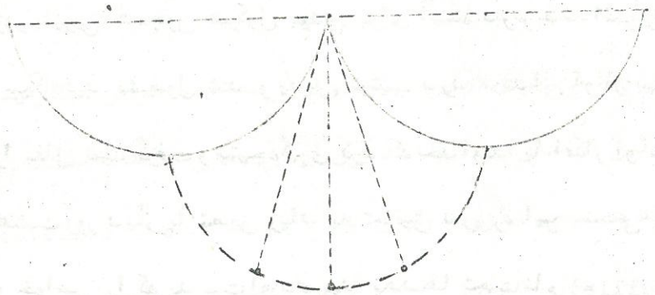
برای اطلاع بیشتر از اسامی به دائرةالمعارف ذکرشده درفوق مراجعه شود.

تأثیر ناهنجار باقی نگذارند — ترك کرده و به زندگی مذهبی گرویده بود یکبار و فقط یکبار دست باین گناه زد و آنگاه که به درد دندان شدیدی مبتلا بود (آنهم در زمانی که هنر دندانسازی بوسیله سلمانی بمقام اجرا درمی‌آمد و وسیله کار این هنرمندان انبر و زور بازویی همچون هرکول بود) برای اینکه درد دندانش را فراموش کند به تفکر درباره سیکلوئید مشغول شد و بدین ترتیب درد دندان او از بین رفت. وی این موضوع را بفال نیك گرفت و نتیجه‌گیری کرد که خداوند با افکار او مخالفت ندارد. بعد از آن هشت روز دیگر با تعمق زیاد به تحقیق درباره این منحنی پرداخت و برخی از نتایج و خواصی را که بدست آورده بود بعدها تحت نام (D' Amos Dolonville) داموس و تونویل منتشر کرد و البته مطابق معمول زمان همه این انتشارات بصورت طلب مبارز از ریاضیدانان فرانسوی و انگلیسی بوده است.

سر کریستوفر رن (Sir Chritopher Wre) معمار کلیسای سنت پول لندن ظاهرا اولین کسی بود که ثابت کرد (در ۱۶۵۸) طول یك قوس سیکلوئید چهار برابر قطر دایره مولد آن یا بعبارت دیگر برابر محیط مربعی بطول قطر دایره مولد آن است.

گالیله حدس می‌زد که مساحت زیر منحنی سیکلوئید پی (πا) برابر مساحت دایره مولد آن باشد. این برآورد را باین وسیله بدست آورده بود که دایره هادی و یك قوس سیکلوئید با سطح زیر آنرا از ماده نازکی بریده و وزن آنها را مقایسه کرده بود. تریچلی ثابت کرد که این مساحت دقیقا" ۳ برابر مساحت دایره مولد آنست و این موضوع سخت باعث تعجب همکارانش گردید. امّا فی الواقع این موضوع قبلا بوسیله ریاضیدان فرانسوی "ژیل پرسون دو روبروال" محقق شده بود و تریچلی از آن بی اطلاع بود. دکارت که این مسئله را بی اهمیّت تلقی می‌کرد راهی ساده‌تر برای تعیین این مساحت

یافت و موضوع رسم مماس بر منحنی سیکلوئید را طرح و حل کرد (مراجعه شود به کتاب آنالیز ریاضی ــ آندره دولاشه به ترجمه پرویز شهریاری) . فرما نیز مسئله‌مماس را به نتیجه رساند .



خواص مکانیکی سیکلوئید نیز همچون خواص هندسی آن قابل ملاحظه است. در فیزیک دبیرستانی آموخته‌ایم که زمان تناوب نوسانات پاندول تقریبا" مستقل از دامنه نوسان است. یك پاندول چه مسیری را باید طی کند که زمان تناوب نوسانات آن دقیقا" مستقل از دامنه نوسان باشد .؟ مسیر جواب را " ایزوکرون" (همزمان) نام داده‌اند . اگر آنطور که از شکل بالا مشهود است پاندولی را بین دو سیکلوئید به نوسان وادارایم این پاندول همان پاندول مطلوب است. میتوان ثابت کرد که مسیر نقطه‌چین دراین حالت یك سیکلوئید است(اثبات در صفحه ۲۲۱ کتاب Piskunov, Calculus) . این خاصیت سیکلوئید اوّل بار توسط فیزیکدان هلندی" کریستیان هویگسن (در ۱۶۷۳) اعلام شد . اما ساعتسازان "عطای" سیکلوئید را به "لقایش" بخشیدند و ترجیح دادند که ساعتهای خود را بهمان صورت اول بسازند زیرا اصطکاك بر روی سیکلوئید ها موجد خطای بیشتری می شد .

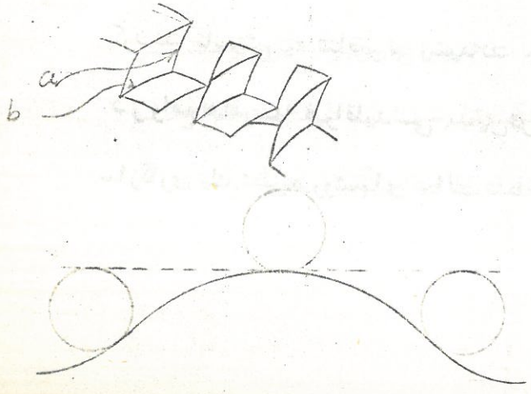
هویگسن همچنین ثابت کرد که سیکلوئید توتوکرون (با سرازیری یکنواخت) است . بدین معنی که در هرنقطه از منحنی که گلوله‌ای را رها کنیم برای رسیدن بپائین سیکلوئید زمان ثابتی لازم دارد .

سیکلوئید همچنین براکیستوکرون (با سریعترین سرازیری) است. دونقطه A و B (B پائین‌تراز A است) درنظر بگیرید . برای اینکه گلوله‌ای بدون اصطکاك فاصله از A تا B را درکمترین مدت بپیماید مسیر آن باید روی یك سیکلوئید ماربر A و B باشد (اثبات در صفحه ۵۲۵ از کتاب ریاضیات چیست ــ ریچارد کورانت به‌ترجمه حسن صفاری) . این مسئله که مسیر چه باید باشد اولین بار در ۱۶۹۶ توسط ژان برنولی فیزیکدان وریاضیدان سویسی در مجله علمی مشهور آن روزگار مطرح شد (Acta Eruditoram) و ابتدا توسط برادرش ژاکوب و بعد توسط لایب نیتز و نیوتن و دیگران حل شد . نیوتن این مسئله و مسئله دیگر مربوط به سیکلوئید را در ۱۲ ساعت حل کرد .

سیکلوئید دارای خواص مکانیکی جالب دیگری نیز می باشد و چنانکه گالیله‌حدس زده بود محکمترین قوس برای پل قوس سیکلوئیدی است و اغلب پلهای بتونی دارای قوسهای سیکلوئیدی می باشند . چرخ دنده‌هانیز خاصیت جالب دیگری از سیکلوئید را میرسانند (منظور قوس b از چرخ دنده‌هاست زیرا قوس a معمولا بشکل دولوپانت دایره درست می شود ــ اثبات در صفحه ۱۵۳ ازکتاب Piskumov, Calculus)

استانلی اوگیلوی مسئله جالب زیر را مطرح کرده است:

" دایره بر روی چه منحنی ای بغلتد تا مسیر حرکت یك نقطه ثابت آن یك خط راست باشد؟" ــ جالب اینجاست که برخلاف انتظار ما جواب مسئله سیکلوئید نیست.



****

تناقض در ریاضی

****

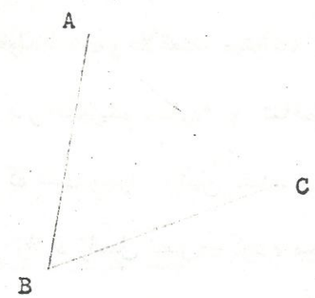
نوشته : غلامرضا بیات (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

وقتی نظریه جدیدی در ریاضی بوجود می‌آید اساس آن برچند تعریف و چند اصل مخصوص استوار است که رویهم با اصول و قوانین منطقی می‌توان آن نظریه را بسط داد. از آنجاکه در ریاضی مجاز هستیم از هرچند تعریف که بخواهیم استفاده کنیم ممکن است تعاریف توأم با اصول مخصوص و اصولی منطقی مارا به یك تناقض رهبری کند. پس بایستی اصول و تعاریف طوری انتخاب گردند که اولا کمترین باشند یعنی با کمتر ازآنها امکان نداشته باشد تئوری را بناکرد و هر اصل دیگری که اضافه کنیم با استفاده از اصول قبل بتوان آنرا یافت (البته اگر صحیح باشد) و ثانیا" هرگز به تناقض نرسیم یعنی تئوری ما سازگار باشد (نظریه‌ای را ناسازگار گویند که درآن هم گزاره A و هم گزاره A صحیح باشند). برای رفع نقیصه اول ریاضیدانان روش جالبی ابداع کرده‌اند که برای اولین بار در مورد هندسه بکار برده‌اند. بدینمعنی که وقتی میخواستند بدانند آیا اصل پنجم هندسهٔ اقلیدسی را میتوان با استفاده از چهار اصل دیگر بثبوت برسانند یا خیر؟ برای اینکار نفی این اصل را به چهار اصل قبلی اضافه کرده و هندسه جدیدی را بنیان نهادند که درآن مشاهده شد که به تناقض نخواهند رسید در حالیکه اگر اصل پنجم قضیه بود و از چهار اصل دیگر بدست می‌آمد چون نفی آنرا به چهار اصل اضافه کردند بایستی به تناقض می‌رسیدند چه هم خود اصل پنجم صحیح بود و هم خود آن در واقع هندسهٔ غیراقلیدسی بدین ترتیب بوجود آمد (لازم به تذکر است که برای اثبات سازگاری یك نظریه روشهای جالب منطقی مودند که بحث یا مثال راجع بآنها خارج ازحد

این مقوله است و علاقمند میتواند به کتابهای منطق ریاضی مراجعه کند).

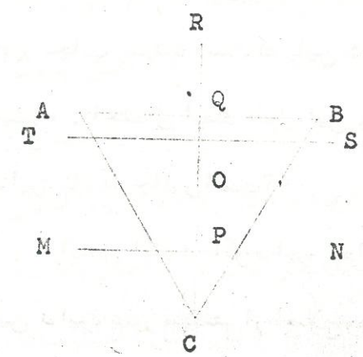
در الگوریتم شمارهٔ ۲ تناقض راسل را در تئوری مجموعه‌ها دیدیم و بعد مشاهده کردیم که علت وجود چنین تضادی عدم وجود تعریف دقیقی از مجموعه‌هاست و اصولا" کلاسی را که راسل تعریف کرده مجموعه نیست. تضادهائی از این قبیل وقتی به وجود می‌آیند ریاضیدانها را وادار می‌کنند تا در رفع آنها کوشیده و عواملی را که در نظریه باعث ایجاد تضاد میگردند از بین ببرند و تئوری را دقیق سازند. ولی چنین تضادهائی که برای رفع آنها احتیاج به مطالعه تئوری از نقطه‌نظر منطق و اصول تعاریف وسازگاری است بسیار اندك هستند و غالبا" تناقض‌هائی که مطرح میشوند به سبب عدم رعایت قوانین و قضایای ریاضی بطور دقیق تولید شده‌اند و باکمی دقت می‌توان اشکال آنها را یافت. برای مثال تقسیم طرفین یك رابطه بر صفر جایز نیست اگر چنین کاری راانجام دهیم فوری به تناقض می‌رسیم و یا بعنوان مثالی دیگر میتوان تناقض راسل را در مورد تئوری احتمالات بررسی کرد. صورت مسئله‌ای را که راسل مطرح میکند در شماره ۲ صفحه ۸۳ بچاپ رسیده است که باین شرح است: "یك وتر بطور تصادفی دریك دایره رسم میشود. احتمال اینکه طول این وتر بزرگتر از طول ضلع مثلث متساوی الاضلاح محاط در دایره باشد چقدر است؟"

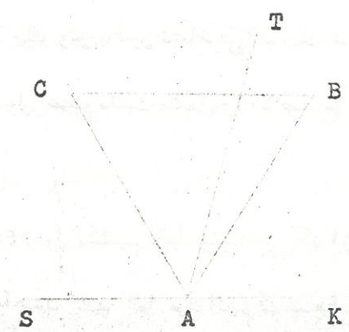
راه‌حل اوّل: اگر دایره محاطی مثلث ABC را بکشیم فقط وترهائی که ازداخل این دایره عبور میکنند از اضلاح مثلث بزرگتر خواهند شد اما میدانیم که شعاع دایره محاطی نصف شعاع دایره محیطی است و دراین حالت هروتر مماس بر دایره کوچکتر دارای طولی برابر ضلع مثلث است. پس احتمال اینکه وتر رسم شده طولش بزرگتراز ضلع مثلث باشد برابر است با نسبت مساحت دایره کوچکتر به دایره بزرگتر. یعنی:



$$\frac{R^2}{(2R)^2} = \frac{1}{4}$$

راه حل دوّم: وتر دلخواه TS را بطور تصادفی می‌کشیم سپس قطر RC را برآن عمود کرده و مثلث ABC را طوری می‌کشیم تا متساوی‌الاضلاع باشد. دراینصورت AB و TS موازی خواهند شد. حال MN را چنان می‌کشیم تا هم موازی و هم مساوی AB باشد. دراینصورت واضح است که تمام وترهائی که طول آنها بزرگتر از ضلع AB باشد بین P و Q رسم شوند اما PQ = QR + PC پس احتمال اینکه وتر TS بین P و Q رسم شده باشد برابراست با $\frac{1}{2}$.





راه حل سوّم: فرض کنید وتر AT را بطور تصادفی رسم کرده باشیم در اینصورت مثلث محاطی متساوی‌الاضلاع ABC را می‌کشیم. اگر این وتر داخل زاویه CAB باشد

طول ضلعش از طول ضلع مثلث بزرگتر و درغیر اینصورت کوچکتر است. اما $CAB = 60^\circ$ و میتوان نوشت:

$$P(X) = \frac{BAC}{SAK} = \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{3}$$

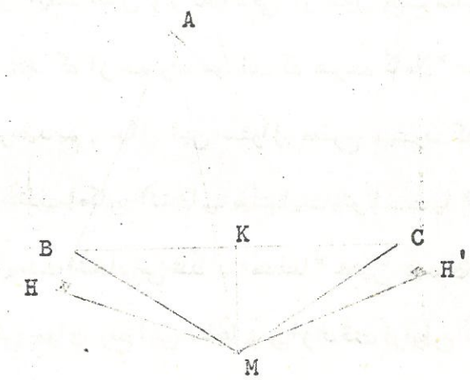
احتمال اینکه طول وتر تصادفی از طول ضلع مثلث بزرگتر شود.

ملاحظه شد که از سه راه مختلف که هرسه کاملاً صحیح و منطقی می‌باشند به سه جواب متناقض رسیدیم. حال این سئوال مطرح میشود که آیا عدم دریافت جواب واحد درسه حالت مختلف امکان انتخاب بینهایت وتر است یا اینکه درحل مسئله کاری انجام داده‌ایم که نبایست انجام می‌شد. مسلماً چنین نیست یعنی دوسئوال هردو جواب منفی دارند ولی برای رفع این مدعا پس از دقت فراوان مشاهده میشود که درواقع ما سه مسئله مختلف را حل کرده‌ایم که ظاهراً یکی بوده‌اند یعنی نحوهٔ انتخاب وتر تصادفی متفاوت بوده است. مثلاً در حالت اول طریقه رسم وتر تصادفی بدین شکل بوده که ابتدا بطور تصادفی نقطه‌ای در دائره انتخاب کرده و سپس از این نقطه یک وتر تصادفی رسم کرده‌ایم و جواب $\frac{1}{4}$ را دریافت نموده‌ایم درحالیکه در حالات دوّم و سوّم بدو طریق جداگانه وتر تصادفی انتخاب نموده‌ایم.

تضادهائی که در هندسه پیش می‌آیند اغلب بواسطه عدم رسم دقیق شکل میباشد ولی از آنجا که اثبات از روی شکل در ریاضی مجاز نیست پس تضادهائی که موجبات آنها شکل است ظاهراً معتبر میباشند (برای اینکه خواننده متوجه شود که چرا اثبات از روی شکل مجاز نیست میتواند از دیاگرام "ون" در تئوری مجموعه‌ها استفاده نموده وروابطی پیدا کند که همیشه درست نباشند).

برای مثال هیلبرت اثبات کرد که هر مثلثی متساوی‌الساقین است. روش او بدین

ترتیب است که می گوید ابتدا مثلث غیر مشخص ABC را درنظر بگیرید . نیمساز A و عمود منصف BC را بکشید تا همدیگر را در M قطع کنند . در اینصورت اگر از M دو عمود MH و MH' را بترتیب بر AC و AB رسم کنیم دو مثلث MH'C و MHB باهم مساویند زیرا :



$$MH = MH'$$

$$MC = MB$$

$$H = H' = 90^\circ$$

از تساوی این دو مثلث داریم :

$$MCH' = MBH \qquad (1)$$

دو مثلث MKB و MKC نیز باهم مساویند زیرا

$$MB = MC$$

$$MKC = MKB = 90^\circ$$

از تساوی این دو مثلث داریم :

$$MCB = MBC \qquad (2)$$

که از جمع طرفین روابط (۱) و (۲) داریم :

$$HBC = H'CB$$

از تساوی دو زاویه HBC و H'CB نتیجه می شود که مکمل آنها نیز برابرند . یعنی :

$$ACB = ABC$$

پس مثلث غیر مشخص که کشیده بودیم مثلثی متساوی الساقین است یعنی به تناقض رسیدیم .

وقتی سیستمی ناسازگار شود یعنی درآن هم A درست باشد وهم A (که یك قضیه است) سپس هر مطلبی درآن سیستم درست است. مثلاً نتایج فوری از قضیهٔ فوق عبارتند از : "هر مثلثی متساوی الاضلاع است" — "هر دوپاره خط مساویند" — "هر دو زاویه باهم مساوی هستند" و نظایر اینها . همانطوریکه گفتیم در اینجا شکل را غلط کشیده‌ایم ولی اگر شکل را دقیق هم می کشیدیم باز استدلال ما نمیتوانست صحیح بوده و برای هر مثلث دیگری صادق باشد زیرا ما ازبین بینهایت مثلث مختلف یکی را کشیده و روی آن قضیه را ثابت کرده‌ایم.

ریاضیدانان برای رفع این مشکل یعنی عدم استناد به شکل از ساختمانهای جبری کمك گرفته و هندسه را بر اساس ساختمانهائی نظیر قضای برداری — هیئت — حلقه و گروه بنا کرده‌اند و بدین وسیله اثبات قضایا را بطور مجدد انجام میدهند و درسیستمی که ساخته‌اند بطور کلی محتاج کشیدن شکل نیستند و فقط گاهی بعنوان یك تعبیر ساده از رسم اشکال استفاده می کنند به اینگونه هندسه‌ها — هندسهٔ جبری می گویند که هندسهٔ تصویری یکی از انواع مختلف هندسه‌های جبری می باشد .

****

سیری سریع در سرگذشت اعداد متعالی

****

نوشته : حمید کاظمی (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

تعریف و چگونگی وجود این اعداد: عدد x را جبری می گوئیم — x میتواند حقیقی یا مختلط باشد-که در معادله‌ای جبری به صورت :

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

که در آن $n \geqslant 1$ و $a_n \neq 0$ و اعداد a_k صحیح هستند صدق کند .

تمام اعداد جبری نیستند و این موضوع را می توان بوسیله استدلالی که از "کانتور" بجا مانده است ثابت کرد که به موجب آن مجموعه تمام اعداد جبری. شمارش پذیر است و چون مجموعه اعداد حقیقی شمارش ناپذیر است بنابراین حتماً" اعدادی حقیقی وجود دارد که جبری نیستند (برای این اثبات به قضیهٔ ۳—۳—۶ صفحه ۷۲۱ کتاب دوّم آنالیز ریاضی — نوشته غلامحسین مصاحب مراجعه کنید) . این اعداد غیرجبری را متعالی یا ترانساندان میگویند زیرا "اولر" درباره آنها گفته است "اینها از قدرت روشهای جبری عروج می نمایند ."

"They transcend the power of algebraic Methods"

راه استدلالی مبنی بر وجود اعداد ترانساندان که قبل از استدلال کانتور می باشد به وسیله ریاضیدان فرانسوی "ژ.لیوویل(J.Liouville ۸۲ — ۱۸۰۹) داده شد . این روش بواقع وسیله ساختمان مثالهای متعددی از اعداد ترانساندان را بدست می دهد . قبل از توضیح حکم لیوویل و روش او تعریف ذیل را می آوریم :

فرض می کنیم z در معادله جبری (۱) با ضرایب صحیح و شرط $a_n \neq 0$

صدق کند ولی در هیچ معادله‌ای از این قبیل و از درجه پائین‌تر صادق نباشد در اینصورت گوییم z عددی جبری از درجه n می باشد . مثلا $\sqrt[3]{2}$ عدد جبری از درجهٔ ۳ است (برای اثبات به بخش سوم از کتاب ریاضیات چیست — بترجمه حسن صفاری) .

اگر z عدد جبری از درجه $n \geqslant 1$ باشد حتماً" اصم است ولی (طبق قضیه ۳—۴—۴ از کتاب دوم آنالیز ریاضی — غلامحسین مصاحب) می توانیم رشته‌ای از اعداد گویا مانند $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots\dots\dots$ بیابیم که رشته مخرجهای صعودی بوده و $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = 0$ باشد .

قضیه لیوویل : برای هرعدد جبری z از درجه $n \geqslant 1$ اگر q بمقدار کافی بزرگ اختیار شود همواره :

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{n+1}} \qquad (3)$$

بدون اثبات این حکم نشان میدهیم که چگونه بر اساس این حکم می توان اعداد ترانساندان ساخت.

عدد $z = a_1 \cdot 10^{-1!} + a_2 \cdot 10^{-2!} + \dots\dots + a_m \cdot 10^{-m!} + \dots\dots$

را که در آن a_i ها ارقام اختیاری مابین ۱ و q (یا مساوی آنها) هستند میتوان بصورت :

$$z = 0, a_1 a_2 \dots a_3 \dots\dots\dots\dots\dots a_4 \dots\dots$$

نوشت. فرض می کنیم z_m عبارت از کسر اعشاری محدودی باشد که از روی کسر فوق با حذف تمام ارقام z که بعد از $a_m \cdot 10^{-m!}$ هستند بدست آمده باشد و بنابراین :

$$\left| z - z_m \right| < 10 \cdot 10^{-(m+1)!} \qquad (4)$$

(بکمک قضیهٔ ۱—۲—۲ از کتاب آنالیز ریاضی مصاحب می توان استدلال دقیقی از این

مطلب بدست آورد) . حال فرض می کنیم z عدد جبری از درجه n باشد دراین حال اگر در رابطه (۳) مقدار $\frac{p}{q} = z_m = \frac{p}{10^{+m!}}$ را قرار دهیم طبق قضیه‌لیوویل به ازاء مقادیر بقدر کافی بزرگ m باید :

$$\left| z - z_m \right| < \frac{1}{10^{(n+1)m!}}$$

و اگر این رابطه را با رابطه (٤) ترکیب کنیم باید داشته‌باشیم :

$$\frac{1}{10^{(n+1)m!}} < \frac{10}{10^{(m+1)!}} = \frac{1}{10^{(m+1)!-1}}$$

یعنی بازاء مقادیر بقدر کافی بزرگ m باید $(n+1)m! > (m+1)! - 1$

ولی این رابطه به ازاء همه مقادیر $m > n$ غلط است. حصول این تناقض متعالی بودن z را ثابت می کند .

طی دوره‌های ده‌ساله گذشته مطالعاتی برای بدست آوردن نتایج دقیق‌تر در زمینهٔ تقریب مربوط به حکم لیوویل انجام شد . از همان دوران لیوویل حدس میزد که در نامساوی وی نه فقط عدد $n+1$ را می توان کوچکتر ساخت بلکه احتماً میتوان بجای آن عدد ثابت ۲ را قرار داد . طی متجاوز از یك قرن این موضوع لاینحل ماند . و اگرچه ریاضیدان نروژی "تو" (A.Thue ۱۸٦۳—۱۹۲۲) در ۱۹۰۵ ثابت کرد که میتوان بجای $n+1$ مقدار $1 + \frac{n}{2}$ را قرار داد . بعدها کارل لودویك زیگل در ۱۹۲۱ نشان داد که می توان بجای $n+1$ مقدار $2\sqrt{n}$ را قرار داد وریاضیدان انگلیسی دایزون (Dyson) در ۱۹٤۸ اصلاحی در مورد مقدار مذکور بعمل آورد . موضوع همچنان لاینحل ماند تا آنکه ریاضیدان جوان انگلیسی ك.ف.راث در سال ۱۹۵۵ طی استدلال حیرت انگیزی حکم کلی را ثابت کرد و چنان شهرتی یافت که کنگره ریاضیدانان در سال ۱۹۵۸ مدال "فیلد" را که بزرگترین امتیاز درجهان ریاضی است به او اعطا کرد (برای اثبات حکم راث به کتاب

W.J.Leveque: Topics in Number Theory. Addison Wesley مراجعه شود) .

هیلبرت در سال ۱۹۰۰ گزارشی از مسائل مربوط به آینده ریاضیات به کنگره دوّم بین‌المللی ریاضی که در پاریس تشکیل شده بود داد که ضمن آن ۲۳ مسئله حل نشده (تا آنموقع) را مطرح کرده بود . هفتمین مسئله تحقیق در متعالی بودن اعدادی بصورت a^b با مفروضات $a \neq 0, 1$ و جبری بودن a و b واصم بودن b بود (باید تذکر داد که قبل از هیلبرت ــ اولر در ۱۷٤۸ همین مسئله را بصورتی خاص مطرح کرده بود) . بسیاری از مسائل هیلبرت خیلی زود حل شدند اما مسئله اولر ــ هیلبرت در جریان سی سال برای حل باقی ماند . تنها در سال ۱۹۲۹ گلفوند (A.Gelfond) ریاضیدان روسی حالت‌خاصی از آنرا ثابت کرد . یعنی ثابت کرد اعدادی به صورت $\alpha^{\sqrt{p}}$ که α جبری و بجز صفر و یك و $p > 0$ عدد گویا و غیر مربع کامل متعالی هستند .

در سال ۱۹۳۰ کوزمین (۱۸۹۱—۱۹٤۹) ریاضیدان دیگر روسی روش گلفوند را با مختصر اختلافی برای حالت نمای حقیقی بکاربرد و ثابت کرد که $\alpha^{\sqrt{p}}$ با همان شرایط متعالی است. مثلا $2^{\sqrt{2}}$ یك عدد متعالی است. بالاخره در سال ۱۹۳٤ گلفوند موفق شد مسئله اولر ــ هیلبرت را بطور کامل حل کند . در سال ۱۹۳٦ شیندر ریاضیدان آلمانی اثبات دیگری از نتیجه‌گیری گلفوند داد .

لیندمان (۱۸۵۲—۱۹۳۹) در سال ۱۸۸۲ ثابت کرد که π عددی است متعالی و باین ترتیب ثابت شد که نه تنها تربیع دایره با خطکش و پرگار امکان ندارد بلکه با وسایل مکانیکی دیگری نیز نمی توان این عمل را انجام داد . لیندمان از این قضیه کمك می گیرد که اگر α عددی جبری باشد e^{α} نمی تواند عددی گویا باشد و سپس چنین استدلال می کند که چون طبق رابطه اولر $e^{i\pi} = -1$ و -1 یك عدد

گویاست بنابراین $i\pi$ متعالی است اما i عددی جبری است پس π متعالی است.

در سال ۱۸۸۵ وایرشتراس (۱۸۱۵ — ۱۸۹۷) اثبات ساده‌تری از متعالی بودن π داد و علاوه براین متذکر شد که می‌توان متعالی بودن $\sin\alpha$ (α عددی جبری است) را از قضیه کلی لیندمان(*) نتیجه گرفت.

متعالی بودن e را هرملت (در ۱۸۷۳) ثابت کرد و درسال ۱۸۹۳ هیلبرت (۱۸۶۲—۱۹۴۳) ضمن اثر کوچکی اثبات جدیدی از قضایای هرملت و لیندمان بدست داد که گوروتیس (۱۸۵۹—۱۹۱۹) استدلال او را ساده‌تر کرد.

مقاله را با یادداشتی از حسن صفاری خاتمه می‌دهیم:

"حتی امروزه نیز اطلاعات ما در مورد اعداد ترانساندان ناچیز است و تقریبا" مسائل اصلی آنرا می‌توان در دو کتاب زیر یافت:

A.Gelfond: Transcendental and algebraic Numbers

کتاب اصلا" روسی است — و

TH. Schneider: Einfüehrung in die Transzendenten Zahlen

که غیر از اصل آلمانی ترجمه فرانسوی و انگلیسی آن نیز موجود می‌باشد.

****

(*) منظور این است که عبارت $A_0e^{\alpha_0} + A_1e^{\alpha_1} + \dots\dots + A_ne^{\alpha_n}$ همواره مخالف صفر است — بشرطیکه ضرایب معادله اعداد صحیح و مخالف صفر و توانهای معادله اعداد مختلف جبری باشند و لااقل یکی از آنها مخالف صفر باشد. ازاین قضیه میتوان متعالی بودن e (α جبری و مخالف صفر) و لگاریتم طبیعی اعداد جبری مخالف واحد A را نتیجه گرفت.

ضد مثالی در توپولوژی

****

نوشته: فروزان خردپژوه (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

در فضاهای متریکی دیده می‌شود که مفاهیم جداشدنی (Separability) و لیندلف (Lindelof) و اصل دوم شمارش (Second Countablity) با یکدیگر معادل بوده یعنی به آسانی می‌توان ثابت نمود که اگر فضائی یکی از خواص فوق را دارا باشد حتما" دو خاصیت دیگر را نیز دارد. نکته جالب اینست که درهر فضای توپولوژیکه دلخواه X اگر اصل دوم شمارش برقرار باشد حتما" فضا جدا شونده و لیندلف است درصورتیکه عکس این مطلب صحیح نیست.

هدف این مقاله ارائه مثالی است از یك فضای توپولوژیکه جداشونده و لیندلف بطوریکه در اصل دوم شمارش صدق نکند.

اعداد حقیقی R را درنظر گرفته و روی آن توپولوژی T را بصورت زیر تعریف می‌کنیم که عناصر آن دارای مکمل متناهی باشد (متناهی $\tilde{u}$ $\Longleftrightarrow u \in T$).

اعداد منطق Q یك زیرمجموعه متراکم (dense) و شمارش‌پذیر از R است. برای نشان دادن اینکه Q متراکم است فرض کنیم که u یك زیرمجموعه بازوغیر تهی باشد. $u \cap Q$ مخالف تهی است زیرا درغیر اینصورت $Q \subset \tilde{u}$ میگردد که غیرممکن است. پس (R, T) یك فضای جداشونده است. برای نشان دادن اینکه این فضا لیندلف نیز هست فرض کنید که $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ پوشش بازی برای R باشد دراین صورت:

$$R \subset \bigcup_{\alpha \in A} u_\alpha$$

حال اگر یکی از این مجموعه‌های u را جدا کرده و خواهیم نوشت :

$$R - u_{\alpha_1} \subset \bigcup_{\alpha \neq \alpha_1} u_\alpha$$

ولی طرف چپ رابطه فوق متناهی است (n عنصر) دراینصورت R توسط حداکثر $(n+1)$ امی از u_α ها پوشیده میگردد . دراینصورت (R,T) نه‌تنها لیندلف است بلکه دارای خاصیت قوی‌تر و فشردگی نیز می باشد .

حال نشان میدهیم که این فضا دراصل دوم شمارش‌پذیری صدق نمی کند یعنی هیچ پایه شمارش‌پذیری برای آن نمی تواند وجود داشته باشد . بدین‌منظورفرض کنید که پایه شمارش‌پذیری مثل $\{ B_i : i \in N \}$ برای آن موجود باشد .در اینصورت مجموعه $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ را درنظر گرفته که یك مجموعه شمارش‌پذیر است. پس $R - B$ مخالف تهی بوده و عنصر x را از آن اختیار می کنیم ($x \in R - B$) و مجموعه $R - \{ x \}$ را درنظر میگیریم. این مجموعه باز است ولی هیچ $i \in N$ وجود ندارد که $B_i \subseteq R - \{ x \}$ باشد زیرا کلیه B_i ها شامل x هستند و به تناقض می رسیم.

همانگونه که دیده شد (R , T) تمام خواصی را که از آن انتظارداشتیم دارا می باشد .

****

حل دو مسئله

****

نوشته : محمدعلی نجفی (دانشجوی دانشکده ریاضی وعلوم کامپیوتر)

۱ــ مسئله : تابعی خطی بیابید که در هیچ نقطه‌ای از قلمرو خود پیوسته نباشد .

حل : می دانیم که هر هیأت بر روی یك زیر هیأت خود دارای ساختمان فضای برداری است و بنابراین فضای برداری R را روی Q درنظر می گیریم.

با استفاده از اصل انتخاب می توان گفت که هر فضای برداری دارای پایه‌ای هَمَل است. پس می توان فرض کرد $\{ X_\alpha \}$ پایه هَمَل برای فضای فوق باشد . بدیهی است که این فضا با نُرم قدرمطلق یك Norm Linear Space خواهد بود و اکنون خواهیم داشت :

$$\forall X \in R, \quad \exists a_{\alpha 1}, \quad a_{\alpha n} \in Q:$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i} \cdot X_{\alpha i}$$

و نمایش فوق یگانه است.

اکنون تابع $f: R \longrightarrow R$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}$$

چون نمایش هر $X \in R$ بفرم فوق یگانه است پس f تابع خواهد بود و به آسانی دیده می شود که تابعی است خطی و اکنون ادعا می شود که f درهیچ نقطه پیوسته نیست زیرا واضح است که اگر یك تابع خطی روی یك Norm Linear Space دریك نقطه پیوسته باشد آنگاه در تمامی نقاط پیوسته خواهد بود پس چنانچه f در یك نقطه از R پیوسته باشد باید در قضیه مقادیر میانی صدق کند و حال آنکه چنین

نیست زیرا اگر $a , b \in f(R)$ و $a \neq b$ داریم :

$$\exists c \in R - Q : \quad a < c < b$$

ولی هیچ نقطه $X \in R$ موجود نیست بطوریکه $f(X) = c$ باشد زیرا داریم :

$$f(R) \subseteq Q$$

بنابراین f در هیچ نقطه‌ای از R پیوسته نیست.

۲— راه‌حل توپولوژیکی قضیه نقطه ثابت :

اگر $f : [0 , 1] \longrightarrow [0 , 1]$ تابعی پیوسته باشد آنگاه $X \in [0,1]$ موجود است بطوریکه : $f(X) = X$.

حل : اگر $f(0) = 0$ یا $f(1) = 1$ باشد $X = 0$ یا $X = 1$ خواهد بود و قضیه برقرار است و درغیر اینصورت خواهیم داشت $f(0) > 0$ و $f(1) < 1$

تابع $F : [0 , 1] \longrightarrow R^2$ را بصورت $F(X) = (X , f(X))$ تعریف می کنیم.

بدیهی است که تابعی پیوسته است . اکنون زیرمجموعهٔ A و B را (ازصفحه) درنظر میگیریم :

$$A = \{ (x , y) : \quad x > y \}$$

$$B = \{ (x , y) : \quad x < y \}$$

$$(1 , f(1)) \in A \quad , \quad (0 , f(0)) \in B$$

برای $c = R^2 - (A \cup B) = \{ (x , y) : \ x = y \}$ اگر $F(0 , 1)$ شامل نقطه‌ای از c نباشد آنگاه $A \cup B$ یك disconnection برای $F([0 , 1])$ است که این یك تناقض است زیرا $[0 , 1]$ مجموعه‌ای یکپارچه (Connected) و F

تابعی است پیوسته پس $F([0 , 1])$ نمی تواند (disconnected) باشد بنابراین :

$$\exists (x , y) \in c \cap F([0 , 1])$$

$$\Longrightarrow (x , f(x)) \in c \quad \Longrightarrow f(x) = x$$

خوانندگان دعوت می شوند که درصورت یافتن راه‌حل این مسئله از طریق آنالیز آنرا به دفتر مجله الگوریتم ارسال دارند تا درصورت جالب بودن به نام خودشان چاپ گردد .

****

(قسمت اول)

اصول نه‌گانه رازی در حساب

****

نوشته : جواد همدانی زاده

ترجمه : مجتبی مظفری (دانشجوی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

در این مقاله شکل جملات در بیشتر موارد حفظ شده است تا خواننده ایده‌ای از زبان ریاضی در این دوره داشته باشد ولی در بعضی موارد برای سادگی یا اختصار از این روش سر باز زده‌ایم. مقاله آقای همدانی زاده شامل چهار قسمت بشرح زیر میباشد.

۱— مقدمه.

۲— منابع.

۳— ترجمه فصل ٤٤ کتاب جامع العلوم نوشته امام فخر رازی.

٤— توضیح درباره مطالب ترجمه شده و بیان آن بصورت ریاضی امروز و اثبات بعضی قضایا.

در اینجا به قسمت سوّم پرداخته‌ایم.

در علم حساب خواص اعداد بررسی می شوند. در اینجا ۹ اصل برای حساب میآوریم:

اصل ۱ :

هر عدد (صحیح) فرد یا زوج است. زوج آنستکه بتوان آنرا بدو قسمت صحیح و مساوی تقسیم نمود مانند ٤ و ۸ و فرد آنستکه نتوان آنرا بدو قسمت صحیح و مساوی تقسیم نمود. اعداد زوج خود به سه دسته تقسیم می شوند :

الف : زوج الزوج

زوج الزوج عددی است که میتوان آنرا آنقدر نصف کرد تا به عدد ۱ برسیم

مانند ٦٤ که نصف آن ۳۲ و نصف ۳۲ عدد ١٦ و نصف ١٦ عدد ۸ و نصف ۸ عدد ٤ و نصف ٤ عدد ۲ و نصف ۲ عدد ۱ می باشد.

ب : زوج الفرد

زوج الفرد عددی است که نصف آنرا نمیتوان نصف نمود مانند ٦ که نصف آن ۳ است ولی ۳ را نمیتوان نصف کرد.

ج : زوج ازوج و فرد

زوج الزوج و فرد عددی است که میتوان آنرا نصف نمود ولی به ۱ نخواهیم رسید مانند ۱۲ که نصف آن ٦ و نصف ٦ عدد ۳ است ولی ۳ را نمیتوان نصف نمود. هر عدد فرد یا اوّل است یا غیر اوّل.

اصل ۲ :

هر عدد نصف مجموع اعداد حاشیه خود است زیرا آنها از نظر بعد مساوی‌اند. مثلا یك حاشیه ٥ عدد ٤ و دیگری ٦ است که مجموع آنها ۱۰ میشود که ٥ نصف ۱۰ است. همچنین ٥ نصف مجموع ۳ و ۷ یا ۲ و ۸ یا ۱ و ۹ است و چون عدد ۱ فقط دارای یك حاشیه است و تمام اعداد نصف مجموع دو حاشیه شان هستند پس ۱ عدد نیست.*

اصل ۳ :

درباره تصاعدی بودن اعداد فرد میباشد بدینترتیب که برای بدست آوردن اوّلین

(*) در سنت ریاضی اسلامی ۱ را عدد محسوب نمیکردند بلکه آنرا منشاء اعداد دانسته و چنانچه در اصل ۳ آمده است برای تولید اعداد از آن استفاده میکردند. (مترجم)

عدد فرد اوّلین عدد زوج را به ۱ میافزائیم تا عدد ۳ بدست آید و برای بدست آوردن دوّمین عدد فرد اوّلین عدد زوج را به ۳ میافزائیم تا ۵ بدست آید و این دوّمین عدد فرد است و بهمین ترتیب میتوان اعداد فرد بعدی را بدست آورد .

یکی از خواص اعداد فرد اینستکه اگر اعداد فرد بترتیب از اوّلی درنظر گرفته شوند اوّلین عدد فرد (یعنی ۳) عدد فردی را که دوعدد فرد با آن فاصله دارد سه بار میشمرد وعدد فردی راکه با عدد اخیر (یعنی ۹) دوعدد فرد فاصله دارد (یعنی ۱۵) را برابر عدد فرد دوّم (یعنی ۵) می شمرد و بهمین ترتیب عدد فردی راکه دوعدد فرد با عدد اخیر فاصله دارد (یعنی ۲۱) را برابر عدد فرد سوّم (یعنی ۷) می شمرد .

۳ ، ۵ ، ۷ ، ۹ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۱۵ ، ۱۷ ، ۱۹ ، ۲۱ ، ۲۳ ، ۲۵ ، ۲۷

۹ = ۳×۳
۱۵ = ۳×۵
۲۱ = ۳×۷
۲۷ = ۳×۹

اصل ٤ :

این اصل درباره یکی از خواص اعداد زوج است. اگر تمام اعداد زوج را از اوّلی یعنی ۲ بترتیب بنویسیم اولین عدد زوج دومین عدد زوج را برابر خودش (یعنی ۲) می شمرد وعدد زوج بعدی (یعنی ٦) را برابر عدد بعد از خودش (یعنی ۳ بار) می شمرد وعدد زوج چهارم را برابر با عددی که درترتیب معمولی بعد ازآن آمده است (یعنی ٤ بار) می شمرد .

۲ ، ٤ ، ٦ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۲ ، ۱٤ ، ۱٦ ، ۱۸

٤ = ۲×۲
٦ = ۲×۳
۸ = ۲×٤
۱۰ = ۲×۵
۱۲ = ۲×٦
۱٤ = ۲×۷
۱٦ = ۲×۸
۱۸ = ۲×۹

اصل ۵ :

این اصل درباره اعداد کامل ــ زائد و ناقص است . عدد کامل عددی است که برابر مجموع مقسوم علیه‌های واقعی خود باشد (مقسوم علیه‌های یك عدد باستثناء خود عدد را مقسوم علیه واقعی می نامند ــ مترجم) . اگر مجموع مقسوم علیه‌های واقعی عددی کوچکتر از خود عدد باشد عدد مربوطه ناقص نامیده می شود (مثل عدد ۸ که مقسوم علیه‌های واقعی آن اعداد ٤ و ۲ و ۱ می باشند که مجموع آنها ۷ است) . اگر مجموع مقسوم علیه‌های واقعی عددی بزرگتر از خودعدد باشد عدد مربوطه زائد نامیده می شود (مانند عدد ۱۲ که مقسوم علیه‌های واقعی آن اعداد ٦ و ٤ و ۳ و ۲ و ۱ می باشند و مجموع آنها ۱٦ است) .

اصل ٦ :

این اصل درباره اعداد متحابه است. اینها جفت اعدادی هستند که مجموع مقسوم علیه‌های واقعی هریك برابر دیگری باشد و همیشه یکی از اینها زائد و دیگری ناقص است. مثلا اعداد ۲۲۰ و ۲۸٤ اعداد متحابه هستند (درمقاله اصلی متحابه بودن اینها نشان داده شده است) . عدد ۲۲۰ زائد و ۲۸٤

ناقص است.

اصل ۷ :

این اصل درباره تعیین اعداد کامل است. باید دانست که در هر مرتبه ارقام بیش از یك عدد کامل وجود ندارد. مثلا ٦ در مرتبه یکان و ۲۸ در مرتبه دهگان و ٤۹٦ در مرتبه صدگان و ۸۱۲۸ در مرتبه هزارگان.

روش تعیین اعداد اوّل بشرح زیر است:

یك عدد زوج الزوج گرفته و به آن یك واحد میافزائیم بطوریکه حاصل عدد اوّل باشد. به چند مثال می پردازیم ۲ و ۱ می شود ۳ که عددی است اوّل بنابراین آنرا در بزرگترین عدد زوج مجموع (یعنی ۲) ضرب می کنیم نتیجه (یعنی ٦) عدد کاملی است. اگر ۱ و ۲ و ٤ را جمع کنیم ۷ بدست میآید که عدد اوّل است و باید آنرا در ٤ که بزرگترین عدد حاصل جمع است ضرب کنیم تا ۲۸ که عدد کامل دیگری است بدست آید. بهمین ترتیب می توان اعداد کامل دیگری بدست آورد.

اصل ۸ :

یکی از خواص اعداد کامل اینستکه رقم یکان یك عدد کامل ٦ ویا ۸ است مانند ٦ در ٦ و ٤۹٦ و ۸ در ۲۸ و ۸۱۲۸

اصل ۹ :

این اصل درباره اعداد سطحی و اعداد دایره ایست. عددی که از حاصلضرب دو عدد بدست آید سطحی نامیده می شود. اگر عوامل ضرب مساوی نباشند عدد سطحی با طولهای متفاوت نامیده می شود مانند ٦ که حاصلضرب ۲ و ۳ است و ۱۲ که حاصلضرب ۳ و ٤ است و ۱۵ که حاصلضرب ۳ و ۵ است. اگر عوامل ضرب برابر

باشند حاصلضرب عدد سطحی همطول نامیده می شود مانند ٤ که حاصلضرب ۲ و ۲ است. اگر از ضرب عددی در خودش عددی حاصل شود که عدد اولیه را در تمام ضربها حفظ کند عدد اولیه عدد دایره‌ای نامیده می شود مانند ۵ که هرگاه آنرا در خودش ضرب کنیم ۲۵ نتیجه می شود که ۵ در آن وجود دارد و هرگاه حاصل را دوباره در ۵ ضرب کنیم ۱۲۵ نتیجه می شود که ۵ در آن وجود دارد و بهمین ترتیب ۵ در تمام توانهای ۵ وجود دارد. (دنباله در شماره آینده)

****

انجام عملیات برروی کمیت های رشته‌ای در زبان فورترن

****

پروژه لیسانس مصطفی شهسواری و کریم جاهد پری
(زیرنظر دکتر سمسارزاده)

زبان فورترن یکی از اوّلین (و ابتدائی ترین) زبانهای سطح بالا میباشد.

ماهیت این زبان اجازه انجام عملیات زیادی بر روی کمیت های عددی از قبیل (Real, Integer) را میدهد. داشتن یك کتابخانه برنامه مجهز انجام بسیاری از اعمال ریاضی را آسان میکند. لیکن انجام عملیات بر روی واحد های اطلاعاتی که ارزش عددی ندارند بسیار دشوار و در بعضی موارد غیرممکن است. سیستم مورد بحث به برنامه نویس زبان فورترن اجازهٔ استفاده از متغییرهای رشته‌ای را میدهد. محتوای اطلاعاتی این متغییرها می توانند هرنوع اطلاعات (با طول متغییر و درعمل نامحدود) باشند. برای مثال استفاده کننده از این زبان می تواند متغییر C را از نوع CHARACTER تعریف کرده و رشته: Aryamehr University of Technology را از روی کارت DATA بخواند و با استفاده از جملات اضافه شده به زبان فورترن کلیه عملیات لازم را روی متغییر C انجام بدهد. برای مثال می توان کلمه University را به College تبدیل کرده و یازیررشتهٔ "of Technology" را حذف کرده و درنتیجه محتوای C را به "Aryamehr University" تبدیل کند و همچنین رشته "In Tehran" را بآن وصل کرده و محتوای C را به "Aryamehr University in Tehran" تبدیل نماید.

امکان پذیری انجام اینگونه عملیات در کاربرد های کامپیوتر مانند Text Analysis و یا ساختن کامپایلر و یا پردازش اطلاعات تجاری رل بسزائی را بازی میکند.

سیستم تدوین شده از لحاظ قدرت عمل بر روی کمیت های رشته‌ای معادل با زبان PL/1 است. این امتیاز که در این سیستم وظیفه حفاظت و نگاهداری حافظه (که بطور دینامیك در هنگام اجرای برنامه درحال تغییر است) به عهده کامپیوتر است نه برنامه‌نویس.

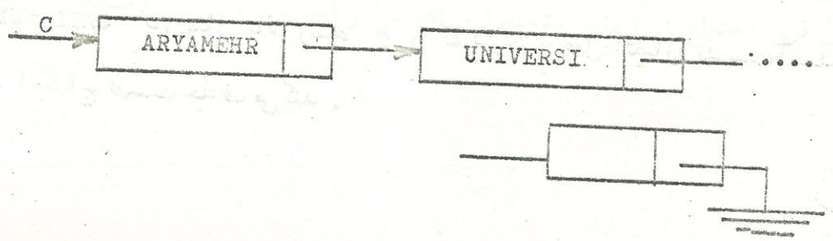
در زبان PL/1 تخصیص حافظه به کمیت های رشته‌ای به صورت Static انجام میگیرد و برنامه‌نویس قبل از اجرای برنامه باید حداکثر حافظه تخصصی را برای یك متغییر در اوّل برنامه معلوم کند و این حافظه تخصیصی نمی تواند درمورد متغییرهای دیگری مورد استفاده قرار گیرد.

کمیت های رشته‌ای بصورت لیست های خطی در حافظه ماشین ذخیره میشود. محتوای یك متغییر رشته‌ای (مانند C) درعمل یك Pointer به اولین عنصر یك لیست است. یك لیست متشکل از N عنصر ($N \geq 0$) است که هر عنصر ظرفیت ذخیرهٔ حداکثر هشت کاراکتر را دارد. بعلاوه هر عنصر حاوی یك Link field است که آدرس عنصر بعدی را مشخص می کند. محتوای Link field آخرین عنصر یك لیست صفر است و این مشخص کننده انتهای لیست می باشد.

محتوای یك عنصر رشته‌ای درعمل یك Pointer به اولین عنصر چنین لیست می باشد. برای مثال اگر محتوای اطلاعاتی متغییر رشته‌ای C معادل با:

"ARYAMEHR UNIVERSITY IN TEHRAN"

باشد طریقی که اطلاعات در حافظه ماشین ذخیره میشود به شکل زیر است:



برنامه‌ای که توسط برنامه‌نویس تدوین شده است ابتدا بوسیله یك Pre compiler به زبان فورترن ترجمه می شود . این Pre Compiler خود به زبان فورترن نوشته شده و عملیات مهم آن از اینقرار است :

۱) اختصاص قسمتی از حافظه برای نگاهداری لیست هائی که درحین اجرای برنامه بوجود می آیند .

۲) ایجاد جدولهای مربوطه برای نگاهداری و کنترل اسامی متغییرهائی که توسط برنامه نویس از نوع متغییرهای رشته‌ای معرفی شده‌اند .

۳) ترجمه کلیه جملاتی که در آنها متغییرهای رشته‌ای وجود دارند . برای مثال جمله READ A,B به جملات :

```
CALL INPUT(A)
CALL INPUT(B)
```

تبدیل می شود . همچنین جمله A=B∘C∘D رشته‌های B و C و D را بهم اتصال داده و رشته حاصله را در A قرار میدهد . جمله فوق به جملات :

```
T = CONCAT (B,C)
A = CONCAT (T,D)
CALL NULL (T)
```

تبدیل می شود .

۴) برای جلوگیری از اتلاف حافظه رشته‌های Temporary که درحین ترجمه جملات برنامه اصلی بوجود میآیند توسط Pre Compiler حذف میگردند . جمله CALL NULL (T) درمثال بالا رشته T را که درحین عمل اتصال بدست آمده و دیگر مورد احتیاج نیست حذف می کند .

عملیات بر روی رشته‌ها توسط یك سری SUBROUTINE و FUNCTION که به زبان فورترن نوشته شده است صورت میگیرد .

وظیفه اصلی این Pre Compiler تفکیك جملات معمولی فورترن از جملات رشته‌ای و ترجمه این جملات بوسیله CALL کردن SUBROUTINE ها و FUNCTION ها است.

عملیات مختلف بر روی رشته‌ها توسط دستورات زیر قابل اجرا هستند :

۱ــ تعریف متغییرهای رشته‌ای (character Variable definition) :

همانطوریکه در زبان فورترن بعضی از متغییرها از نوع Real و بعضی دیگر از نوع Integer هستند متغییرهائی که محتوای اطلاعاتی آنها رشته است باید از نوع Character تعریف شوند .

فرم کلی این جملات بصورت زیر است :

```
CHARACTER C1,C2,C3,.......,Cn
```

محتوای متغییرهای C1,C2,.....,Cn دیگر عددی نیست و نمی توان از آنها در عملیات حسابی استفاده کرد .

۲ــ جمله انتساب رشته‌ها *String* :

فرم کلی جمله فوق بصورت C = *String* است . با اجرای این جمله رشته دلخواه String به متغییر C نسبت داده می شود . مثال :

```
C1 = *ALI*
C2 = *+-*/*
```

درمثال فوق محتوای اطلاعاتی متغییر C2 برابر است با : "+-*/"

۳- اتصال رشته (Concat) :

فرم کلی این جمله بصورت : C = C1•C2•C3•••••••Cn

است. محتوای اطلاعاتی متغییرهای C1,C2,C3,••••,Cn بهم وصل شده و رشته حاصله به متغییر C نسبت داده می شود . مثال :

```
CHARACTER BLANK, NAME, FAMILY, FULNAME
NAME = *AHMAD*
BLANK = * *
FAMILY = *REZAI*
FULNAME = NAME•BLANK•FAMILY
```

محتوای متغییر FULNAME مساوی است با : "AHMAD REZAI"

٤- انتقال رشته‌ها (Copy) :

فرم کلی جمله فوق بصورت C1 = C2 است. بوسیله اجرای جمله فوق محتوای رشته‌ای C2 به C1 انتقال داده می شود . چنانچه بجای C2 کاراکتر "O" رابکار بریم محتوای اطلاعاتی C1 تهی خواهد شد .

٥- طول رشته‌ها (Length) :

فرم کلی جمله فوق بصورت N = LENGTH(C) است که درآن N با طول رشته C برابر میگردد .

٦- بدست آوردن یك زیررشته از یك رشته (Substr) :

فرم کلی این جمله بصورت C = SUBSTR(C1,N,I) است. با اجرای این فرمان تعداد I کاراکتر بعد از اولین N کاراکتر از رشته C1 به زیررشته C نسبت داده

می شود . مثال : FAMILY = SUBSTR(FULNAME,6,5)

که درآن FAMILY برابر است با "REZAI"

۷- جستجوی بخشها (Index) :

فرم کلی این جمله به صورت N = INDEX(C1,C2) است. که درآن C2 احتمالا یك زیررشته C1 است. مثال : فرض کنید متغییرهای رشته‌ای NAME و FAMILY و FULNAME قبلا تعریف شده باشند و داشته باشیم:

```
NAME = *AHMAD*
FAMILY = *REZAI*
FULNAME = *AHMAD REZAI*
N = INDEX(FULNAME,FAMILY)
```

با اجراء برنامه فوق N = 7 می شود (عدد N نشاندهنده موقعیت زیررشته احتمالی C2 در رشته C1 است) .

توضیح اینکه چنانچه N برابر صفر باشد نتیجه میگیریم که رشته C2 زیررشته C1 نیست.

۸- جانشینی (Replace):

فرم کلی این جمله بصورت C = REPLACE(C1,C2,C3) است. با این جمله رشته C3 بجای تمام زیر رشته‌های C2 در رشته C1 قرار می گیرد ورشته جدیدی به نام C تولید می شود .

توضیح اینکه اگر C3 یك رشته تهی باشد کلیه زیررشته‌های C2 از رشته C1 حذف می شود . مثال : فرض کنید در مثال "جستجوی بخشها" شخص AHMAD تغییر نام داده و نام جدیدش "HOSAIN" باشد در اینصورت با تعریف:

```
NEWNAME = *HOSAIN*
FULNAME = REPLACE(FULNAME,NAME,NEWNAME)
```

داریم :

که اسم کامل شخص "HOSAIN REZAI" خواهد شد .

۹- تبدیل یك رشته عددی به تعداد عددی آن (Ilist) :

. چون کمیت های رشته‌ای قابلیت محاسباتی ندارند اگر چنانچه محتوای اطلاعاتی آنها یك‌رشته عددی باشد با جمله زیر میتوان به آن مقدار عددی داد .

فرم کلی این جمله به صورت : N = ILIST(C) است. مثال : فرض کنید

```
C = *1234*
N = ILIST(C)
```

در اینصورت‌عدد N یك عدد صحیح و برابر ۱۲۳٤ است. در این فرم C نمیتواند اعشاری باشد .

تبدیل یك عدد صحیح به یك رشته (Bilist) :

فرم کلی این جمله‌بصورت C = BILIST(N) است. عمل این جمله عکس جمله فوق است. مثال : فرض‌کنید لیست‌حقوق و مشخصات اداری کارکنان یك شرکت‌بصورت زیر تعریف شده باشد :

```
C = * NAME: AHMAD REZAI, SALARY: 30000$*
```

می خواهیم به هریك از کارکنان معادل ۱۰٪ حقوق به حقوقشان اضافه کنیم

```
DOLL = *$*
SAL = *SALARY*
N = INDEX(C,SAL)
I = INDEX(C,DOLL )
```



```
C1 = SUBSTR(C,N+6,I-N-7)
ISAL = ILIST(C1)
ISAL = ISAL + ISAL/10
C2 = BILIST(ISAL)
C = REPLACE(C,C1,C2)
```

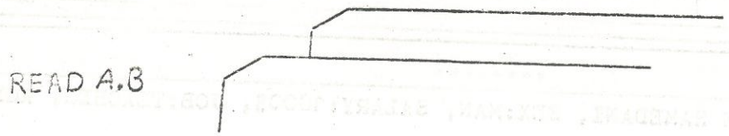
۱۰- جملات ورودی و خروجی (Read , Print) :

فرم کلی این جملات بصورت زیر است .

$$\begin{bmatrix} \text{PRINT} \\ \text{READ} \end{bmatrix} C1,C2,C3,\cdots\cdots,C_n$$

در جمله READ محتوای هریك از متغییرها برابر یك رشته بطول ۸۰ از یك کارت خوانده می شود . مثال : با جمله READ A,B دو کارت خوانده می شود .

در جمله PRINT متغییرهای فوق در روی کاغذ از ستون ٦ تا ۱۲٦ چاپ می شود .



۱۱- جمله Assigne و Convert :

فرم کلی این جملات به صورت زیر است :

```
1. C = A,N
2. CONVERT C,A,N
```

در جملات فوق A یك بردار یك بعدی است. جمله ۱ محتوای متغییرهای

A(1),A(2),.....,A(N)

را به یك متغییر رشته‌ای C نسبت میدهد . مثال : فرض‌کنید داشته باشیم

```
A(1) = 10HALI
A(2) = 6HHOSAIN
C = A,2
```

در اینصورت محتوای رشته‌ای C بصورت : "ALI␣␣␣␣␣␣␣HOSAIN␣␣␣" است.

جمله ۲ عکس جمله ۱ می باشد .

مثال : فرض کنید محتوای متغییر C برابر است با

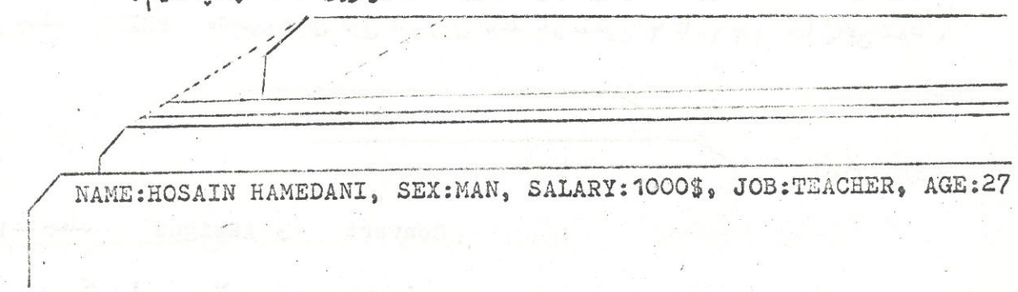
"ARYA MEHR UNIVERSITY"

N در جمله ۱ برابر طول وکتور A که استفاده کننده باید مقدار آنرا معلوم کند . و

N در جمله ۲ برابر طول وکتور A است که برنامه به استفاده کننده میدهد .

مثال کلی :

فرض کنید می خواهیم از یك فایل پرسنلی که دارای ۲۰۰۰ رکورد است لیست مردانی را که خدمتشان بیشتر از ۲۵ سال است، بر روی کاغذ چاپ کنیم.



فرض کنید مشخصات هرشخص در روی یك کارت که در فوق شرح داده شده است پانچ شده است و همچنین فرض کنید که سن هر شخص یك عدد دو رقمی است.

```
PROGRAM NAME(INPUT,OUTPUT)
CHARACTER MAN, LIST, AGE
MAN=*MAN*
AGE=*AGE*
DO 6 I=1,2000
READ LIST
```



```
  IF(INDEX(LIST,MAN))5,6,5
5 IF(ILIST(SUBSTR(LIST,INDEX(LIST,AGE)+3,2))-25)6,6,7
7 PRINT LIST
6 CONTINUE
  STOP
  END
```

درخاتمه فرصت را مغتنم دانسته از راهنمائیهای آقای دکتر سمسارزاده استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر سپاسگزاری می کنیم.

****

```
100   DTI=SIGNE.ONE
      GO TO 200
C     IF TI=+ICOEF THEN  DTI=BLANK
105   DTI=BLANK
200   DP=DP.DTI
      IF(FLAG)GO TO 10
      PRINT DP
      NULLIFY  P
      GO TO5
      END
```



```
PROGRAM  INPUT TO  PRECOMPILER
      PROGRAM SEMSAR (INPUT,OUTPUT,TAPE2=INPUT,TAPE3=OUTPUT)
      CHARACTER P,DP,DTI,FINISH,PLUS,MIN,STAR,TSTAR,  CENT,X,ONE,BLANK,SIGNE
     -GNE
      LOGICAL FLAG
      PLUS=*+*
      MIN=*-*
      BLANK=* *
      STAR=***
      TSTAR=****
      CENT=*C*
      X=*X*
      ONE=*1*
      FINISH=*FINISH*
C     THE ALGORITHM CONSIDER A POLYNOMIALIN FORM OF:
C      P=+TI1+TI2-TI3+..    ...+TIN
C     TERM TI OF THE POLYNOMIAL IS IN THE FORM OF:
C     TI=ICOEF*X**IPOWER
C     FRIST READ A POLYNOMIAL P AND REPLACE ** BY C
C     ISOLATE A TERM TI AND SET THE FLAG IF IT IS THE LEAST TERM
5     READ P
      DP=0
      FLAG=.TRUE.
      PRINT P
      IF(INDEX(P,FINISH).NE.0) STOP
      P=REPLACE(P,TSTAR,CENT)
10    I1=INDEX(SUBSTR(P,2,LENGTH(P)-2)  ,PLUS)
      I2=INDEX(SUBSTR(P,2,LENGTH(P)-2)    ,MIN)
      SIGNE=SUBSTR(P,0,1)
      IF(I1.EQ.0.AND.I2.EQ.0) GO TO 25
      IF(I1.EQ.0.OR.I2.EQ.0)  I=I1+I2+1
      IF(I1.NE.0.AND.I2.NE.    0)I=AMIN1(I1,I2)+1
      TI=SUBSTR(P,1,I-1)
       P=SUBSTR(P,I,LENGTH(P)-I)
      GO TO 35
25    FLAG=.FALSE.
      P=REPLACE(P,BLANK,0)
      TI=SUBSTR(P,1,LENGTH(P)-1)
C     FOR THE TERM TI FIND ICOEF AND IPOWER
35    IPOWER=1
      ICOEF=1
      J=INDEX(TI,STAR)
      K=INDEX(TI,CENT)
      IF(J.NE.0)ICOEF=ILIST(SUBSTR(TI,J,J-1))
      IF(K.NE.0)IPOWER=ILIST(SUBSTR(TI,K,LENGTH(TI)-K))
C
C     START TO COMPUTE THE DERIVATIVE OF TI
      IF(J*K)45,55,45
C     IF TI=ICOEF*X**IPOWER
C       THEN DTI=(ICOEF*IPOWER)*X**IPOWER-1
45    DTI=SIGNE.BILIST(ICOEF*IPOWER).STAR.X.TSTAR.BILIST(IPOWER-1)
      GO TO 200
55    IF(K)90,75,90
75    IF(J)85,85,85
C     IF TI=ICOEF*X  THEN DTI=ICOEF
85    DTI=SIGNE.BILIST(ICOEF)
C     IF  TI=X**IPOWER THEN DTI=IPOWER*X**IPOWER-1
90    DTI=SIGNE.BILIST(IPOWER).STAR.X.TSTAR.BILIST(IPOWER-1)
      GO TO 200
95    IF(INDEX(TI,X))100,105,100
C     IF TI=+X  THEN  DTI=+1
```

```
00    DTI=SIGNE.ONE
      GO TO 200
      IF TI=+ICOEF THEN  DTI=BLANK
05    DTI=BLANK
00    DP=DP.DTI
      IF(FLAG)GO TO 10
      PRINT DP
      NULLIFY  P
      GO TO5
      END
```

```
PROGRAM  INPUT TO  PRECOMPILER
      PROGRAM SEMSAR (INPUT,OUTPUT,TAPE2=INPUT,TAPE3=OUTPUT)
      CHARACTER P,DP,DTI,FINISH,PLUS,MIN,STAR,TSTAR,  CENT,X,ONE,BLANK,SIGNE
     -GNE
      LOGICAL FLAG
      PLUS=*+*
      MIN=*-*
      BLANK=*  *
      STAR=***
      TSTAR=****
      CENT=*C*
      X=*X*
      ONE=*1*
      FINISH=*FINISH*
C     THE ALGORITHM CONSIDER A POLYNOMIALIN FORM OF:
C      P=+TI1+TI2-TI3+..    ...+TIN
C     TERM TI OF THE POLYNOMIAL IS IN THE FORM OF:
C     TI=ICOEF*X**IPOWER
C     FRIST READ A POLYNOMIAL P AND REPLACE ** BY C
C     ISOLATE A TERM TI AND SET THE FLAG IF IT IS THE LEAST TERM
5     READ P
      DP=0
      FLAG=.TRUE.
      PRINT P
      IF(INDEX(P,FINISH).NE.0) STOP
      P=REPLACE(P,TSTAR,CENT)
10    I1=INDEX(SUBSTR(P,2,LENGTH(P)-2)  ,PLUS)
      I2=INDEX(SUBSTR(P,2,LENGTH(P)-2)    ,MIN)
      SIGNE=SUBSTR(P,0,1)
      IF(I1.EQ.0.AND.I2.EQ.0) GO TO 25
      IF(I1.EQ.0.OR.I2.EQ.0)  I=I1+I2+1
      IF(I1.NE.0.AND.I2.NE.    0)I=AMIN0(I1,I2)+1
      TI=SUBSTR(P,1,I-1)
       P=SUBSTR(P,I,LENGTH(P)-I)
      GO TO 35
25    FLAG=.FALSE.
      P=REPLACE(P,BLANK,0)
      TI=SUBSTR(P,1,LENGTH(P)-1)
C     FOR THE TERM TI FIND ICOEF AND IPOWER
35    IPOWER=1
      ICOEF=1
      J=INDEX(TI,STAR)
      K=INDEX(TI,CENT)
      IF(J.NE.0)ICOEF=ILIST(SUBSTR(TI,J,J-1))
      IF(K.NE.0)IPOWER=ILIST(SUBSTR(TI,K,LENGTH(TI)-K))
C
C     START TO COMPUTE THE DERIVATIVE OF TI
      IF(J*K)45,55,45
C     IF TI=ICOEF*X**IPOWER
C       THEN DTI=(ICOEF*IPOWER)*X**IPOWER-1
45    DTI=SIGNE.BILIST(ICOEF*IPOWER).STAR.X.TSTAR.BILIST(IPOWER-1)
      GO TO 200
55    IF(K)80,75,80
75    IF(J)85,85,85
C     IF TI=ICOEF*X  THEN DTI=ICOEF
85    DTI=SIGNE.BILIST(ICOEF)
C     IF  TI=X**IPOWER THEN DTI=IPOWER*X**IPOWER-1
80    DTI=SIGNE.BILIST(IPOWER).STAR.X.TSTAR.BILIST(IPOWER-1)
      GO TO 200
95    IF(INDEX(TI,X))100,105,100
C     IF TI=+X  THEN  DTI=+1
```

```
217   25    FLAG=.FALSE.
220         P=REPLACE(P,BLANK,0)
      C     FOR THE TERM TI FIND ICOEF AND IPOWER
223         TI=SUBSTR(P,1,LENGTH(P)-1)
232   35    IPOWER=1
233         ICOEF=1
234         J=INDEX(TI,STAR)
236         K=INDEX(TI,CENT)
241         IF(J.NE.0)ICOEF=ILIST(SUBSTR(TI,0,J-1))
      C
      C     START TO COMPUTE THE DERIVATIVE OF TI
252         IF(K.NE.0)IPOWER=ILIST(SUBSTR(TI,K,LENGTH(TI)-K))
      C     IF TI=ICOEF*X**IPOWER
      C       THEN DTI=(ICOEF*IPOWER)*X**IPOWER-1
264         IF(J*K)45,55,45
267   45    OOOOO(1)=BILIST(ICOEF*IPOWER)
273         OOOOO(2)=CONCAT(SIGNE,OOOOO(1))
276         OOOOO(3)=CONCAT(OOOOO(2),STAR)
301         OOOOO(4)=CONCAT(OOOOO(3),X)
304         OOOOO(5)=CONCAT(OOOOO(4),TSTAR)
307         OOOOO(6)=BILIST(IPOWER-1)
313         DTI=CONCAT(OOOOO(5),OOOOO(6))
317         CALL NULL(OOOOO(1))
320         CALL NULL(OOOOO(2))
322         CALL NULL(OOOOO(3))
324         CALL NULL(OOOOO(4))
325         CALL NULL(OOOOO(5))
330         CALL NULL(OOOOO(6))
332         GO TO 200
333   55    IF(K)90,75,90
      C     IF TI=ICOEF*X  THEN DTI=ICOEF
334   75    IF(J)85,95,85
      C     IF  TI=X**IPOWER THEN DTI=IPOWER*X**IPOWER-1
335   85    OOOOO(1)=BILIST(ICOEF)
337         DTI=CONCAT(SIGNE,OOOOO(1))
343         CALL NULL(OOOOO(1))
344   90    OOOOO(1)=BILIST(IPOWER)
346         OOOOO(2)=CONCAT(SIGNE,OOOOO(1))
351         OOOOO(3)=CONCAT(OOOOO(2),STAR)
354         OOOOO(4)=CONCAT(OOOOO(3),X)
357         OOOOO(5)=CONCAT(OOOOO(4),TSTAR)
362         OOOOO(6)=BILIST(IPOWER-1)
366         DTI=CONCAT(OOOOO(5),OOOOO(6))
372         CALL NULL(OOOOO(1))
373         CALL NULL(OOOOO(2))
375         CALL NULL(OOOOO(3))
377         CALL NULL(OOOOO(4))
401         CALL NULL(OOOOO(5))
403         CALL NULL(OOOOO(6))
405         GO TO 200
      C     IF TI=+X  THEN  DTI=+1
406   95    IF(INDEX(TI,X))100,105,100
411   100   DTI=CONCAT(SIGNE,ONE)
      C     IF TI=+ICOEF THEN  DTI=BLANK
414         GO TO 200
414   105   DTI=COPY(    BLANK)
417   200   DP=CONCAT(DP,DTI)
421         IF(FLAG)GO TO 10
```



```
                PROGRAM SEMSAR (INPUT,OUTPUT,TAPE2=INPUT,TAPE3=OUTPUT)
000003          DIMENSION OOOOO(50)
000003          REAL      P,DP,DTI,FINISH,PLUS,MIN,STAR,TSTAR, CENT,X,ONE,BLANK,S
               -GNE
000003          LOGICAL FLAG
000003          OOOOOO=ASSIGNE(      1H+,1)
000005          PLUS=SUBSTR(OOOOOO,0,   1)
000011          CALL  NULL(OOOOOO)
000012          OOOOOO=ASSIGNE(      1H-,1)
000014          MIN=SUBSTR(OOOOOO,0,   1)
000020          CALL  NULL(OOOOOO)
000021          OOOOOO=ASSIGNE(      1H ,1)
000023          BLANK=SUBSTR(OOOOOO,0,   1)
000027          CALL  NULL(OOOOOO)
000030          OOOOOO=ASSIGNE(      1H*,1)
000032          STAR=SUBSTR(OOOOOO,0,   1)
000036          CALL  NULL(OOOOOO)
000037          OOOOOO=ASSIGNE(      2H**,1)
000041          TSTAR=SUBSTR(OOOOOO,0,   2)
000045          CALL  NULL(OOOOOO)
000046          OOOOOO=ASSIGNE(      1HC,1)
000050          CENT=SUBSTR(OOOOOO,0,   1)
000054          CALL  NULL(OOOOOO)
000055          OOOOOO=ASSIGNE(      1HX,1)
000057          X=SUBSTR(OOOOOO,0,   1)
000063          CALL  NULL(OOOOOO)
000064          OOOOOO=ASSIGNE(      1H1,1)
000066          ONE=SUBSTR(OOOOOO,0,   1)
000072          CALL  NULL(OOOOOO)
          C     THE ALGORITHM CONSIDER A POLYNOMIALIN FORM OF:
          C      P=+TI1+TI2-TI3+,.   ...+TIN
          C     TERM TI OF THE POLYNOMIAL IS IN THE FORM OF:
          C     TI=ICOEF*X**IPOWER
          C     FRIST READ A POLYNOMIAL P AND REPLACE ** BY C
          C     ISOLATE A TERM TI AND SET THE FLAG IF IT IS THE LEAST TERM
000073          OOOOOO=ASSIGNE(      6HFINISH,1)
000075          FINISH=SUBSTR(OOOOOO,0,   6)
000101          CALL  NULL(OOOOOO)
000102    5     CALLTNPUT(P)
000104          DP=0
000105          FLAG=.TRUE.
000106          CALLOUTPUT(P)
000107          IF(INDEX(P,FINISH).NE.0) STOP
000114          P=REPLACE(P,TSTAR,CENT)
000120    10    OOOOO(1)=SUBSTR(P,2,LENGTH(P)-2)
000126          I1=INDEX(OOOOO(1),PLUS)
000132          CALL NULL(OOOOO(1))
000133          OOOOO(1)=SUBSTR(P,2,LENGTH(P)-2)
000141          I2=INDEX(OOOOO(1),MIN)
000145          CALL NULL(OOOOO(1))
000146          SIGNE=SUBSTR(P,0,1)
000151          IF(I1.EQ.0.AND.I2.EQ.0) GO TO 25
000160          IF(I1.EQ.0.OR.I2.EQ.0) I=I1+I2+1
000170          IF(I1.NE.0.AND.I2.NE.   0)I=AMIN0(I1,I2)+1
000203          TI=SUBSTR(P,1,I-1)
000210          P=SUBSTR(P,I,LENGTH(P)-I)
000217          GO TO 35
```

مسابقهٔ برنامه نویسی

بعلت عدم استقبالی که ازمسائل ریاضی شد . درنظرگرفتیم درهرشماره یک مسأله جالب درتئوری یاعمل مطرح کنیم . وامیدواریم که خوانندگان ازاین مسائل استقبال کنند . برنامه ای درذیل ازخوانندگان خواسته می شود . وبه کسی که بهترین برنامه (برنامه ای که ازلحاظ طول وزمان ومکان می نیمم باشد) معادل سه هزارریال جایزه تعلق میگیرد :

فرض کنید درخانه های بنام Input الی Input-1999 یک متن ۱۰،۰۰۰ حرفی وجود دارد (هرحرف درنمایش Mixed Charactor Code یک بایت حافظه رااشغال میکند) . برنامه ای درزبان Mix بنویسید که دریک متغیر به اسم Vowel تعداد حروف باصدا (A,E,I,O,U) ودرمتغیردیگری به اسم Conson تعداد حروف بی صدا (Consonent) ودرمتغیرسومی به اسم Spechar تعداد حروف دیگر (مثل : 1 , 2 , ، وغیره) رادرمتن فوق قراردهد . کد حروف درذیل داده می شود .

حرف	b	A	B ...	I	C	J ...	R	Σ	Π	S ...	Z	0	1 ...	9
کد	0	1	2 ...	9	10	11 ...	19	20	21	22 ...	29	30	31 ...	39

حرف	.	،	(	)	+	-	*	/	=	$	<	>	@	;	:	'
کد	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55


```
000423        CALL OUTPUT(DP)
000425        CALL NULL(P)
000427        GO TO 5
000430        END
```

اخبار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

****

* اعضای تیم ریاضی دانشگاه صنعتی آریامهر از میان دانشجویان دوره‌ٔ لیسانس این دانشکده بشرح ذیل انتخاب شدند :

۱ـ خانم ترانه	برادران	دانشجوی سال چهارم	
۲ـ " شهرزاد	شمس شعاعی	"	" سوّم
۳ـ آقای سعید	قهرمانی	"	" "
٤ـ " محمدعلی	نجفی	"	" چهارم
٥ـ " فروزان	خردپژوه	"	" "

اعضای تیم در تاریخ یازدهم فروردینماه ۱۳۵۳ در مسابقات ریاضی کشور در شیراز شرکت خواهند نمود .

* تیم فوتبال دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر در مسابقات فوتبال بین دانشکده‌های دانشگاه صنعتی آریامهر مقام دوّم را بدست آورد . این پیروزی را بدوستان ورزشکارمان تهنیت گفته به پیروزیهای درخشانتر آنان امید بسته‌ایم.

* تیم والیبال دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر در مسابقات جام ششم بهمن باپیروزی بر تیم ملی ناشنوایان (قهرمان دوّم المپیک) و تیمهای دانشکده هنرهای زیبا و دانشکده علوم اداری به این جام دست یافت. اعضای این تیم بودند از :

۱ـ آقای	مرتضی	نیکتاش
۲ـ "	کورش	پورقاسمی
۳ـ "	علی	شفیعی تهرانی
٤ـ "	سعید	ملکی
٥ـ "	ایرج	توکلی
٦ـ "	محمدعلی	نجفی
۷ـ "	رضا	وهاب .

****