بی‌نهایت

نشریه دانشجویی بی‌نهایت | مسلسل دوازدهم | زمستان ۱۴۰۰

e، سرور همه‌ی ما

در این شماره می‌خوانید:

حدس‌های نادرست از آن‌چه فکر می‌کنید به شما نزدیک‌ترند

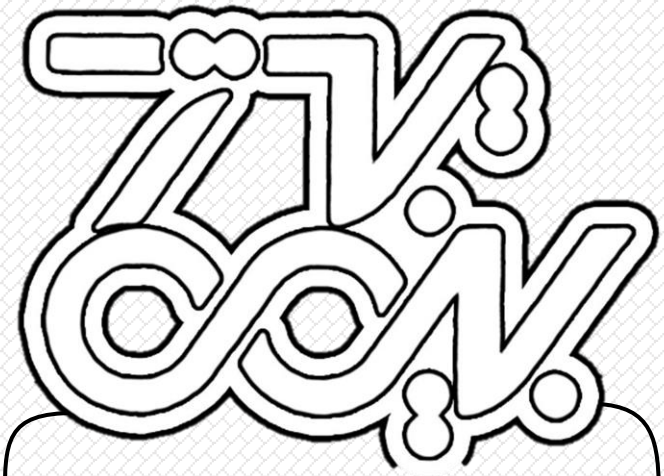
سرگرمی با حدس کولاتز

دیدگاهی بی‌فایده که ریاضیات را دگرگون کرد

الی ∞

با نام خدا

بی‌نهایت



نشریه دانشجویی بی‌نهایت/ مسلسل دوازدهم/ زمستان ۱۴۰۰

صاحب امتیاز:
انجمن علمی دانشجویی ریاضی

مدیر مسئول:
دکتر محرم نژاد ایردموسی

سردبیر:
مریم خلج

همکاران این شماره:
محمدعلی اعرابی، سیده مهدیس امامی، وانیا امیری
مونس تابان‌رو، فاطمه زین‌آبادی، درسا سماوی
سیده مریم سیادتی، زهرا صمدی، آیلار کاظمی

طراحان جلد:
جلیل نوربخش مروست، سید علی میرباقری

کاریکاتور:
مجید خسروانجم

با تشکر ویژه از:
پریسا الیاسی، مهدیس فتحی، آیدین منظوری، محمد نوربخش

-زیر نظر کمیته ناظر بر نشریات دانشگاه-

در این شماره میخوانید

سرمقاله..... ۳

من و ریاضیات

حدس‌های نادرست از آن‌چه فکر می‌کنید به شما نزدیک‌ترند..... ۷

سرگرمی با حدس کولاتز: چگونه یک مسئله حل‌نشده، یک جعبه شن ریاضی ایده‌آل برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند..... ۱۱

در ریاضیات، اغلب نیاز به یک نقشه خوب برای یافتن پاسخ است..... ۱۷

دو شکل از زیبایی ریاضی..... ۲۱

مقالات علمی

e: سرور همه‌ی ما..... ۲۷

دیدگاهی «بی‌فایده» که ریاضیات را دگرگون کرد..... ۴۱

قضیه دوستان و غریبه‌ها – یک پروفسور به پیشرفتی غیرمنتظره در اعداد رمزی دست یافت..... ۴۷

الگوریتم‌های کوانتومی جدید سرانجام معادلات غیرخطی را شکستند..... ۴۹

ریاضی‌دانان نوع جدیدی از اعداد اول را کشف کردند..... ۵۳

روی تخته سیاه

یک اثبات زیبا: چرا حد $\frac{\sin x}{x}$ وقتی x به ۰ میل می‌کند، برابر با ۱ است؟ ۵۷

ده مسئله دشوار ریاضی که حل‌نشده باقی مانده‌اند..... ۶۹

با انجمن علمی ریاضی در ارتباط باشید:

@mathsbu
@math.sbu
MathSBU.InfinityMagazine@gmail.com

سرمقاله

هر روز در زندگی با مسائل و انتخاب‌هایی روبه‌رو می‌شویم که چگونگی مواجهه با آن‌ها و حل ایشان، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است چرا که با انتخاب هر گزینه، دیگر گزینه‌هایمان را از دست می‌دهیم و در اصطلاح منجر به مرگ آن‌ها می‌شویم. از سمتی دیگر انتخاب هر گزینه، گزینه‌های دیگری را پیش رویمان قرار می‌دهد و این سلسله انتخاب‌ها به مرور مسیر ما را روشن می‌سازند. از این رو، انتخاب کردن، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

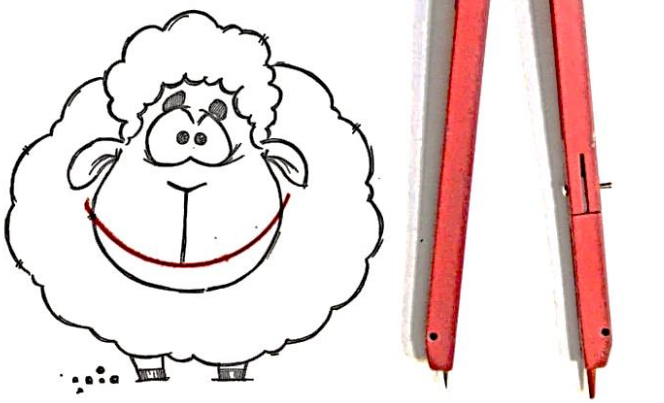
ما پیش از انتخاب‌هایمان، لیستی فرضی از گزینه‌های احتمالی در ذهن می‌آوریم و با حدس آن‌چه که پیامد این انتخاب‌هاست و نیز بررسی آن‌چه که معایب یا محاسن آن‌هاست، قدم در راه می‌گذاریم.

«حدسیات» بخش مهمی از رفتارهای روزانه ما را مدیریت می‌کنند؛ حدس درباره انتخاب‌هایمان، حدس درباره فکرهای به زبان نیامده‌ی آن‌هایی که با ایشان مراوده داریم، حدس درباره آن‌چه که در آینده‌ی نزدیک یا دور، براساس آن‌چه که تاکنون اتفاق افتاده است، پیش خواهد آمد.

در جهان ریاضیات هم حدسیات اهمیت فراوانی دارند. اساساً ما با مشاهده و پی بردن به الگویی - در زندگی روزمره یا جهان ریاضی - حدسی را بیان می‌کنیم و در صدد بر می‌آییم تا آن حدس را به اثبات برسانیم و مشاهداتمان را برای موارد کلی‌تری عمومیت ببخشیم. زمانی که یک حدس به طور دقیق اثبات شود، به یک قضیه تبدیل می‌شود.

در این شماره می‌آموزیم که چگونه حدس بزنیم، چگونه آن را اثبات یا رد کنیم و با مهم‌ترین حدس‌های اثبات‌نشده و یا آن‌هایی که به تازگی اثبات شده‌اند، آشنا می‌شویم.

من وریاضیات



حدس‌های نادرست از آن‌چه فکر می‌کنید به شما نزدیک‌ترند

نویسنده: محرم نژادایردموسی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهیدبهشتی

به طور قطع حدس زدن کار ساده‌ای نیست. به ویژه اگر در دنیای ریاضیات باشد. یک حدس ریاضی گزاره‌ای است که شواهد موجود دلالت بر درستی آن دارند اما هنوز اثباتی برای آن نداریم. حدس‌های ریاضی همانند مسئله‌های ریاضی موتور محرکه ریاضیات هستند و جنب‌وجوشی در میان ریاضی‌دانان پدید می‌آورند. حتی ممکن است ریاضی‌دانان در تلاش برای اثبات یک حدس ریاضی، به حقایق ارزشمند دیگری نیز دست پیدا کنند.

اما حدس زدن را نباید کار ساده‌ای تصور کرد. نمونه‌های تاریخی بسیاری وجود دارند که حدس‌های ارائه شده نقض شده‌اند یعنی با ارائه یک مثال که به مثال نقض مشهور است، نادرستی حدس مشخص شده است. در ادامه به یک نمونه از این حدس‌ها می‌پردازیم:

حدس ۱. برای هر عدد صحیح و نامنفی n، عدد $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$ اول است.

این حدس اولین بار توسط فرما ریاضی‌دان معروف فرانسوی ارائه شد. او با جایگذاری مقادیر ۰ تا ۴ به جای n، به اعداد اول ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ دست یافت. مقدار F_5 برابر است با ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ که فرما احتمالاً موفق به بررسی اول یا مرکب بودن آن نشده بود. اما فرما پنج مقدار اول را مبنای حدس خود قرار داد و ادعا کرد که این مقادیر همگی اول هستند. این حدس در سال ۱۷۳۲ توسط لئونارد اویلر ریاضی‌دان سوئیسی رد شد. اویلر نشان داد که F_5 بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است و در نتیجه اول نیست.

تمرین ۱. سعی کنید به کمک دو تساوی $۶۴۱ = ۲^۴ + ۵^۴$ و $۶۴۱ = ۲^۷ \times ۵ + ۱$ بخش‌پذیری F_5 بر ۶۴۱ را اثبات کنید.

درباره مقادیری از اعداد فرما که اول هستند اطلاعات زیادی نداریم و سوال‌های زیادی درباره آن‌ها مطرح هستند. آیا اعداد اول در میان اعداد فرما بی‌شمار هستند؟ اعداد مرکب چطور؟

در سال ۲۰۱۴ ثابت شده است که برای مقادیر $۵ \leq n \leq ۳۲$، F_n مرکب است. هر چند تجزیه F_n به عامل‌های اول تنها برای مقادیر $۰ \leq n \leq ۱۱$ مشخص شده است و جالب‌تر این که هنوز هیچ کدام از عامل‌های اول $F_{۲۰}$ و $F_{۲۴}$ معلوم نیست!

حدس جدیدی که درباره‌ی اعداد فرما وجود دارد آن است که اعداد اول فرما همان اعداد F_0 تا F_4 هستند که فرما بررسی کرده بود. بررسی درستی این حدس یکی از چالش‌های فعلی ریاضی‌دانان است به ویژه آن‌هایی که به موضوع نظریه اعداد علاقه‌مند هستند.

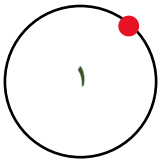
حدس‌های نادرست از آن‌چه فکر می‌کنید به شما نزدیک‌ترند

تمرین ۲. اگر $۲^m + ۱$ اول باشد، آن‌گاه ثابت کنید m عامل اول فرد ندارد و باید به فرم $m = ۲^n$ باشد.

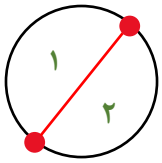
در ادامه می‌خواهیم شما را به دو چالش برای حدس زدن دعوت کنیم.

چالش اول. روی دایره‌ی C، n نقطه در نظر بگیرید و آن‌ها را دو به دو به هم وصل کنید. سطح دایره به حداکثر چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

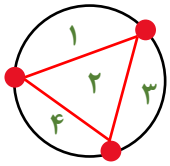
ابتدا مسئله را برای چند مقدار اولیه n بررسی می‌کنیم. برای $n = ۱$ تنها یک ناحیه وجود دارد (شکل ۱) و برای $n = ۲$، دو ناحیه وجود دارد (شکل ۲). برای $n = ۳$ و $n = ۴$ به ترتیب ۴ و ۸ ناحیه ایجاد می‌شود (شکل ۳). تا این‌جای کار پاسخ‌های به دست آمده توان‌های متوالی ۲ هستند. برای اطمینان مسئله را برای $n = ۵$ نیز بررسی می‌کنیم. برای $n = ۵$ شکل ۴ نشان می‌دهد که حداکثر ۱۶ ناحیه یا $۲^۴$ ناحیه در داخل دایره پدید می‌آید و مقدار به دست آمده این حدس را به ذهن تبادر می‌کند که شاید پاسخ مسئله در حالت کلی $a_n = ۲^n - ۱$ باشد. پس برای درستی حدس، مسئله را برای $n = ۶$ بررسی می‌کنیم. شکل ۵ نشان می‌دهد که حدسمان نادرست است! و تعداد ناحیه‌های پدید آمده ۳۱ تاست.

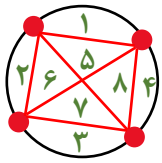


شکل ۱

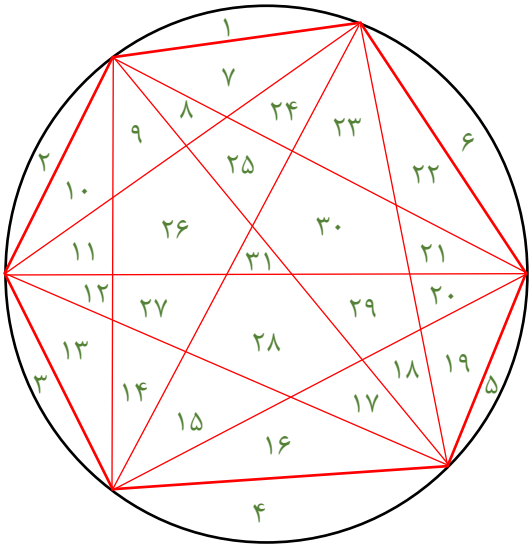


شکل ۲

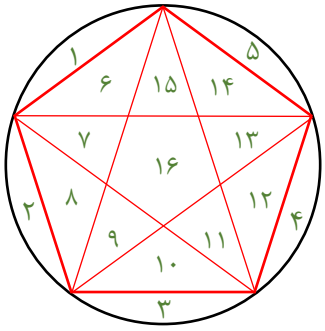




شکل ۳



شکل ۵



شکل ۴

تمرین ۳. ثابت کنید تعداد ناحیه‌ها در چالش اول برابر است با $a_n = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴}$.

این نکته درباره پاسخ فوق شاید برای شما جالب باشد که جمله اول یعنی $\binom{n}{۰}$ یا همان مقدار ۱ نشان‌دهنده دایره اولیه، جمله دوم $\binom{n}{۲}$ نشان‌دهنده تعداد پاره‌خط‌ها و یا وترهای رسم‌شده و جمله سوم $\binom{n}{۴}$ نشان‌دهنده تعداد نقاط برخورد وترها است.

چالش دوم. اعداد طبیعی فرد بزرگ‌تر از ۴۲ را در نظر بگیرید:

۴۳, ۴۵, ۴۷, ۴۹, ۵۱, ...

جمله نخست عددی اول است:

۴۳, ۴۵, ۴۷, ۴۹, ۵۱, ...

بعد از آن، یک جمله را حذف کنید:

۴۳, ~~۴۵~~, ۴۷, ۴۹, ۵۱, ...

جمله بعد از آن مجدداً عددی اول است:

۴۳, ~~۴۵~~, ۴۷, ۴۹, ۵۱, ...

بعد از آن، دو جمله بعدی را حذف کنید:

۴۳, ~~۴۵~~, ۴۷, ~~۴۹~~, ~~۵۱~~, ...

جمله بعد از جملات حذف شده، عددی اول است:

۴۳, ~~۴۵~~, ۴۷, ~~۴۹~~, ~~۵۱~~, ۵۳, ۵۵, ...

بعد از آن، سه جمله را حذف کنید:

۵۳, ~~۵۵~~, ~~۵۷~~, ~~۵۹~~, ۶۱, ...

جمله بعد از جملات حذف شده، عددی اول است:

۵۳, ~~۵۵~~, ~~۵۷~~, ~~۵۹~~, ۶۱, ۶۳, ...

بعد از آن، ۴ جمله را حذف کنید خواهید دید که مجدداً جمله بعد از جملات حذف شده باز هم اول است:

۶۱, ~~۶۳~~, ~~۶۵~~, ~~۶۷~~, ~~۶۹~~, ۷۱, ...

در ادامه چه حدسی می‌زنید؟ بعد از حذف ۵ جمله بعد از ۷۱، باز هم به یک عدد اول می‌رسیم؟ امتحان می‌کنیم:

۷۱, ~~۷۳~~, ~~۷۵~~, ~~۷۷~~, ~~۷۹~~, ~~۸۱~~, ۸۳, ...

پاسخ مثبت است!

آیا آن‌قدر شواهد موجود برای شما قوی هستند که بخواهید حدسی بزنید؟ آیا ترغیب شده‌اید که یک مرحله دیگر هم پی بگیرید؟ برای آن که چالش را چالشی‌تر کنیم یک مرحله دیگر این فرآیند را انجام می‌دهیم:

۸۳, ~~۸۵~~, ~~۸۷~~, ~~۸۹~~, ~~۹۱~~, ~~۹۳~~, ~~۹۵~~, ۹۷, ...

فکر می‌کنید این فرآیند حذف کردن و اول بودن جمله بعد از جملات حذف شده در دنباله اعداد فرد بزرگ‌تر از ۴۱، همواره برقرار باشد؟ پاسخ منفی است!

تمرین ۴. سعی کنید جمله عمومی دنباله اعداد حاصل از این فرآیند یعنی دنباله‌ی

۴۳, ۴۷, ۵۳, ۶۱, ۷۱, ۸۳, ۹۷, ...

را بر حسب n به دست آورید و اول بودن آن را بررسی کنید. سپس جمله‌ای پیدا کنید در این دنباله که مرکب باشد.

در تمرین فوق سعی نکنید اولین جمله مرکب را پیدا کنید. سی و نه جمله‌ی نخست این دنباله همگی اول هستند. این مثال یک واقعیت مهم را آشکار می‌کند. ممکن است مثال نقض یک حدس، مدت‌ها طول بکشد تا خود را به شما نشان بدهد و در حدس‌های جدی ریاضیات گاهی این زمان چند ده سال و یا حتی قرن‌ها طول بکشد. پس عجله‌ای برای به ثبت رساندن حدس به نام خودتان نداشته باشید. حدس‌های نادرست از آن‌چه فکر می‌کنید به شما نزدیک‌ترند!

پی‌نوشت: این مقاله با موافقت سردبیران دو نشریه «بی‌نهایت» و «همگام با ریاضی»، به طور هم‌زمان در هر دو نشریه منتشر شده است.

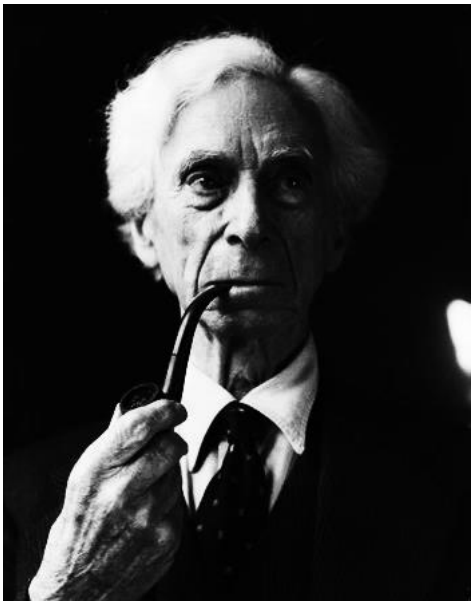
مراجع

http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number

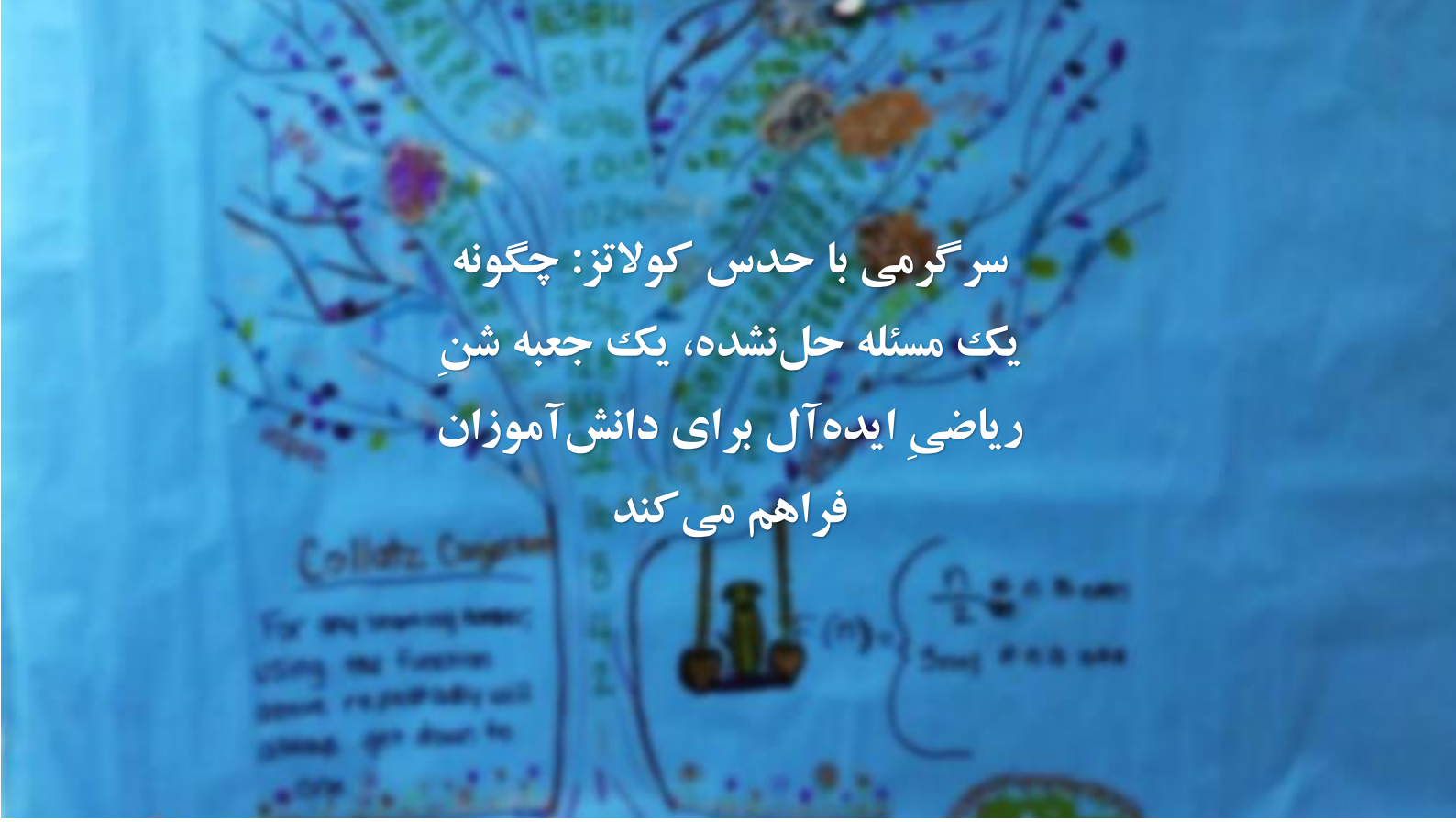
http://www.youtube.com/watch?v=n4VWgquP8D0

Bertrand Russell

May 18, 1872 - Feb 2, 1970



روش اصل موضوع که آن را می‌پسندیم،
مزایای بسیاری دارد؛ این مزایا همانند مزایای
دزدی نسبت به کار شرافتمندانه است.



سرگرمی با حدس کولاتز: چگونه یک مسئله حل‌نشده، یک جعبه شنِ ریاضیِ ایده‌آل برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند

مترجم: آیلار کاظمی

دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهیدبهشتی

مقدمه‌ی مترجم: در مقاله‌ی پیش رو که توسط یک توسعه‌دهنده و مدرس ریاضیات بسیار ماهر نوشته شده است یکی از تجربیات این فرد در راستای نحوه‌ی درست آموزش ریاضیات و نحوه‌ی درست مطرح کردن حدسیات و یا قضایای اثبات نشده‌ی ریاضیات را خواهیم خواند. روند مطرح شده توسط این مدرس شامل توضیحات کامل، یک بازی از پیش طراحی شده با تاس، پروژه‌ای تحقیقاتی با زمان محدود و همچنین تکالیفی مانند درخواست طراحی پوستر از ریاضی‌آموزان است که خود نویسنده در آموزش و مطرح کردن حدس کولاتز امتحان کرده و تجربه‌ی موفقی نیز از آب درآمده است. در ادامه می‌توانید اطلاعاتی درباره حدس کولاتز و و نحوه‌ی آموزش آن به دیگر مشتاقان توسط این فرد را بخوانید.

توضیح حدس کولاتز پیش از شروع مقاله: اگر بخواهیم حدس کولاتز را به صورت تابعی از n تعریف کنیم به صورت زیر خواهد بود

$$F(n)=\begin{cases}\frac{n}{۲} & \text{اگر } n \text{ به پیمانه ۲ با ۰ همنهشت باشد}\\ ۳n+۱ & \text{اگر } n \text{ به پیمانه ۲ با ۱ همنهشت باشد}\end{cases}$$

به عبارتی این حدس می‌گوید اگر عدد مورد نظر زوج بود آن را نصف کنید و اگر فرد بود سه برابر کرده و با یک جمع کنید که در انتهای انجام مکرر این عملیات خواهیم دید که، صرف نظر از آن که عدد ابتدایی چه بوده است، در انتها به عدد ۱ خواهیم رسید.

در قلب هنر ریاضیات، حدس و قضیه‌هایی نهفته است. این حدس‌ها در این علم مانند رمان‌ها و شعرهای بی‌نظیر در هنر نوشتار و زبان هستند. هر دانش‌آموز یا دانشجویی باید آن‌ها را بشناسند، نه صرفاً به دلیل وجود مهارت‌هایی که در خللشان از ریاضیات استفاده می‌شود و دارای کاربردهایی در دنیای واقعی هستند، بلکه به دلیل اهمیتش در دارا بودن بخش عظیمی از زینت و زیبایی گسترش علم ریاضیات. یک مسئله حل‌نشده‌ی مدرن در ریاضیات شامل یک حدس است که بیش از ۸۰ سال ریاضی‌دانان را درگیر خود کرده است. ممکن است شما هم اسم این حدس هشتادساله را شنیده باشید. . . «حدس کولاتز». زیرا اخیراً به دلیل فعالیت‌های ترنس تائو این مسئله در کمال تعجب، پیشرفت زیادی نیز کرده است.

پل اردوش در بیانیه‌ای مشهور به آن اشاره کرد و این‌طور گفت: «**ریاضیات هنوز برای چنین مسئله‌هایی آماده نیست**». من دوست دارم دانش‌آموزانم را در معرض مسائل حل‌نشده ریاضیاتی قرار دهم، چون به آن‌ها درک حقیقی‌ای مانند ریاضی‌دانان می‌دهد. حتی فشار

پیدا کردن «راه حل نهایی» را از بین می‌برد و تمرکز آن‌ها را به سمت کاوش و پیدایش الگوها و ساختار سوق می‌دهد. به عنوان یک معلم، حدس کولاتز را در سال‌های زیادی مورد بررسی قرار داده و درباره‌اش کاوش کرده‌ام. قصد دارم یکی از پربارترین تجربیات خود را در رابطه با بحث و پویش راجع به یک حدس را در کلاسی مشمول چند پایه‌ی مختلف (دانش‌آموزان کلاس پنجم و ششم) به اشتراک بگذارم و اضافه کنم که این روند می‌تواند با دانش‌آموزان چند پایه بالاتر یا پایین‌تر هم به ثمر بنشیند. در ادامه می‌توانید بازی‌ای را ببینید که برای معرفی این حدس استفاده شد و پروژه‌ای را که برای دانش‌آموزان طراحی کردم تا روشی را برای معکوس کردن فرمول بازگشتی «رشد درخت کولاتز» کشف کنند و به الگوها و ساختارها به طور عمیق‌تر نگاه کنند. این تحقیق به طرز ویژه‌ای با استانداردهای عبارات و معادلات در حیطه ریاضیات هماهنگ است.

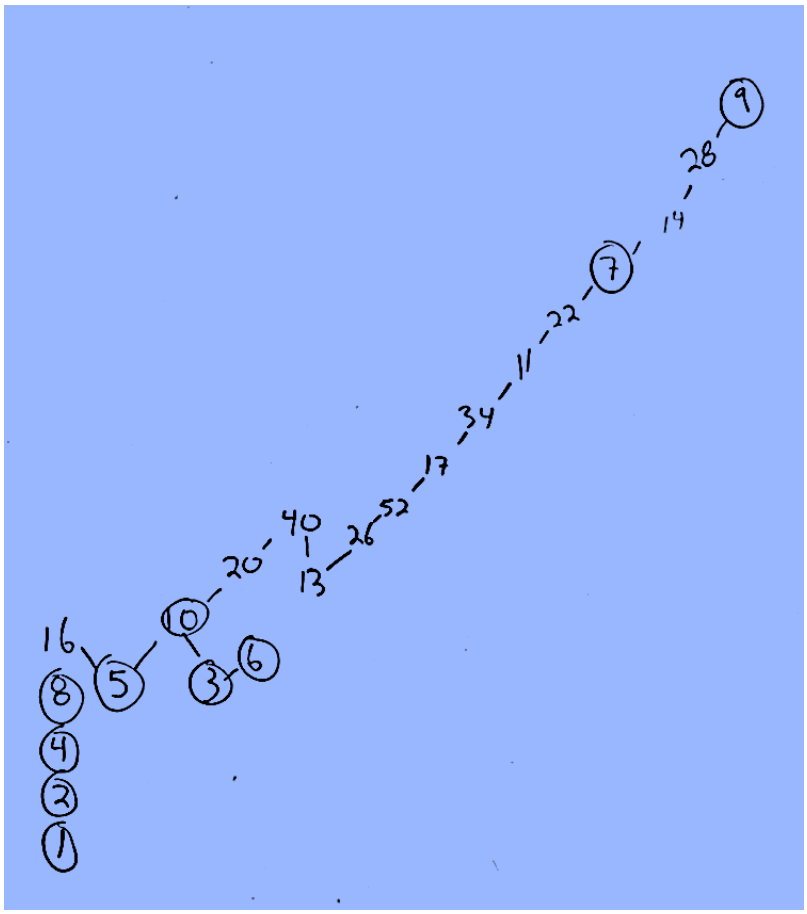
حدس کولاتز:

۱- عدد دلخواه n را از خانواده‌ی اعداد طبیعی در نظر بگیرید.

۲- اگر زوج است، بر دو تقسیم کنید، اگر فرد است، در سه ضرب کنید و یکی اضافه کنید. به عنوان مثال، فرض کنیم شما با ۵ شروع می‌کنید دنباله شما ۵، ۱۶، ۸، ۴، ۲، ۱ خواهد بود.

معرفی بازی کولاتز

راه اصلی که برای معرفی حدس کولاتز استفاده کردم این است که از دانش‌آموزان خواستم تا برای انتخاب عدد آغازین یک تاس ده وجهی را پرتاب کنند. سپس فردی که بیشترین دفعات را تجربه کند تا به عدد یک برسد برنده است. دانش‌آموزان به سرعت دریافتند (یا در مواردی هم من آن‌ها را به سمت ایده راهنمایی کردم) که می‌توانند یک دیاگرام یا یک نمودار درختی ایجاد کنند، که بلافاصله به آن‌ها بگوید چه کسی برنده خواهد شد. سپس خودمان بازی را ارتقا دادیم یعنی در ادامه با تاس‌های ۲۰ وجهی پیش رفتیم و برای حل این نسخه از بازی تلاش کردیم. در شکل زیر یک نمودار درختی از مراحل بازی با تاس‌های ۱۰ وجهی را نمایش داده‌ایم.



هنگام بازی با تاس ۱۰ وجهی، ۹ بهترین حالت است، زیرا دورترین مرحله از ۱ است.

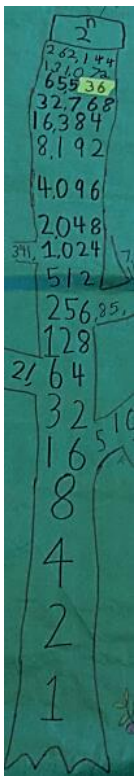
کاوش در درخت کولاتز: توجه و شگفتی

بعد از معرفی بازی، دوست داشتم یک جلسه تحت عنوان «توجه و شگفتی» را با دانش‌آموزانم تشکیل دهم، جلسه‌ای که مشاهدات و سوالات آن‌ها را یادداشت کنم. این فهرست همواره با صورت‌های مختلف از این پرسش پایان می‌یابد که: «آیا همیشه به یک نتیجه می‌رسیم؟».

در پایان جلسه همواره توضیح می‌دهم که حدس کولاتز دقیقاً چیست و با توضیح پیشینه‌های تاریخی و ریاضیاتی آن برای دانش‌آموزان، آن‌ها را بیشتر شگفت‌زده می‌کنم. برای مثال توضیح می‌دهم که اثبات یک حدس می‌تواند منجر به دریافت یک دیپلم افتخاری برای اثبات کننده‌اش بشود و نتیجتاً شهرتی هم به دنبال خواهد داشت.

بگذارید بچه‌ها در عجایب خود سرگردان شوند . . .

در طول سال‌های فعالیتم این بخش از پروژه را توسعه داده‌ام تا به دانش‌آموزان فرصت بیشتری دهم که قبل از این که سریعاً سراغ ساخت



2^n

پوستر با درخت کولاتز بروند در گروه‌های کوچک خودشان، به شخصه چیزهایی اگرچه کوچک اما شگفت‌آور و قابل توجه کشف کنند. در راستای این طرح به اندازه ۳ زنگ آموزشی کامل به آن‌ها فرصت داده‌ام تا موارد مد نظرم را کشف کنند. فرصت دادن به دانش‌آموزان برای فرو رفتن در سوراخ‌های خرگوش (استعاره از کنشگری و پویش فعال دانش‌آموزان)، برخورد به دیوارها و بن‌بست‌ها، ساختن لم‌ها (لم یا برهان کمکی به قضیه‌ای گفته می‌شود که به عنوان وسیله‌ای برای اثبات برهانی دیگر استفاده شود) و اثبات یا رد همان لم‌ها طعم واقعی از ریاضی‌دان بودن را به بچه‌ها می‌چشاند.

رشد درخت کولاتز با معکوس کردن روند . . .

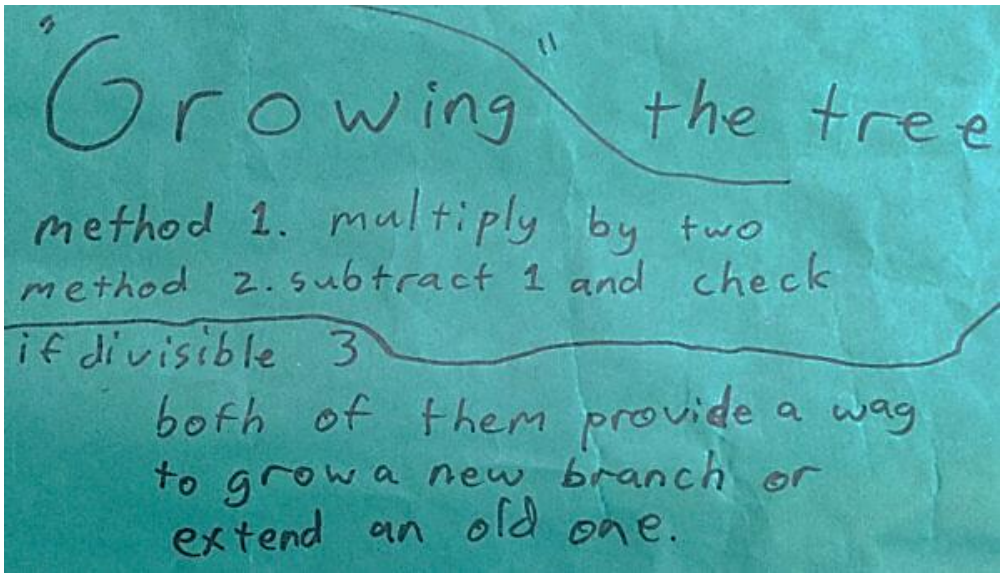
وقتی دانش‌آموزان با معنای درخت کولاتز آشنا می‌شوند کمی درباره‌ی حدس و معنای واقعی آن صحبت می‌کنیم. به عنوان مثال، آیا می‌توانیم ثابت کنیم که همواره مجموعه خاصی از اعداد به عدد یک می‌رسد؟ به سرعت دانش‌آموزان می‌فهمند که به محض برخورد با توان ۲، تا انتها مشغول تقسیم بر دو هستند. من دوست دارم این را «برج قدرت» بنامم (زیرا من عاشق قافیه‌ها هستم).

من از توان‌های دو به عنوان «تنه»ی درخت کولاتز و اولین مثال از راهی برای «رشد درخت کولاتز» استفاده می‌کنم. می‌توانید فرمول بازگشتی را معکوس کنید و هر عدد را دو برابر کنید تا «شاخه درخت» رشد کند. به عنوان مثال، ۵ می‌تواند از ۱۰ بیاید (۱۰/۲)، که ده هم می‌تواند از تقسیم (۲۰/۲) بیاید، که بیست هم می‌تواند از تقسیم (۴۰/۲) بیاید و الی آخر.

قانون انشعاب $(n-1)/3$

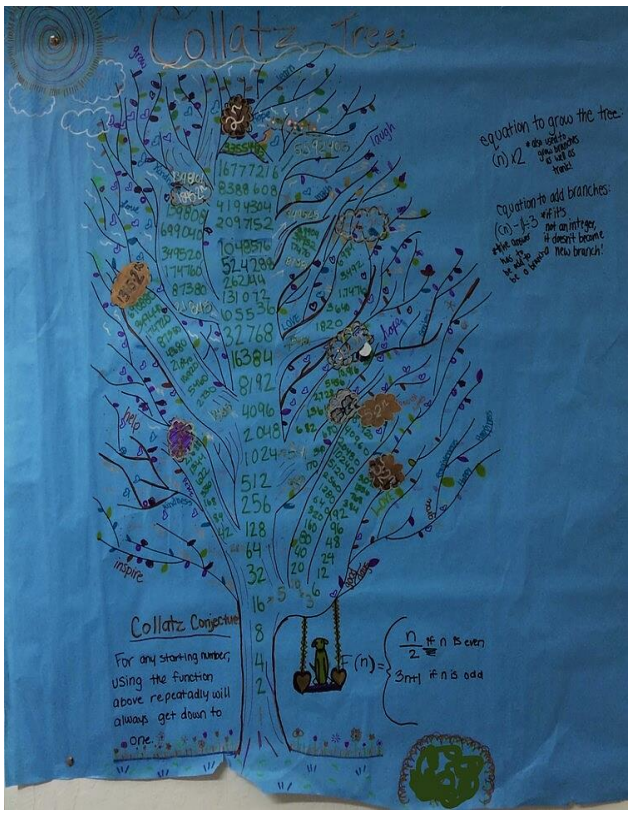
سپس از دانش‌آموزان می‌خواهم که توجه داشته باشند چه زمانی «شاخه‌هایی» در درخت شکل می‌گیرد. به عبارت دیگر، چه زمانی دو عدد وجود دارد که منجر به یک عدد می‌شود مانند ۵ و ۳۲، که هر دو طبق صورت حدس کولاتز (اگر عدد فرد بود سه برابر شود و با یک جمع شود، اگر زوج بود نصف شود) به ۱۶ منتهی می‌شوند.

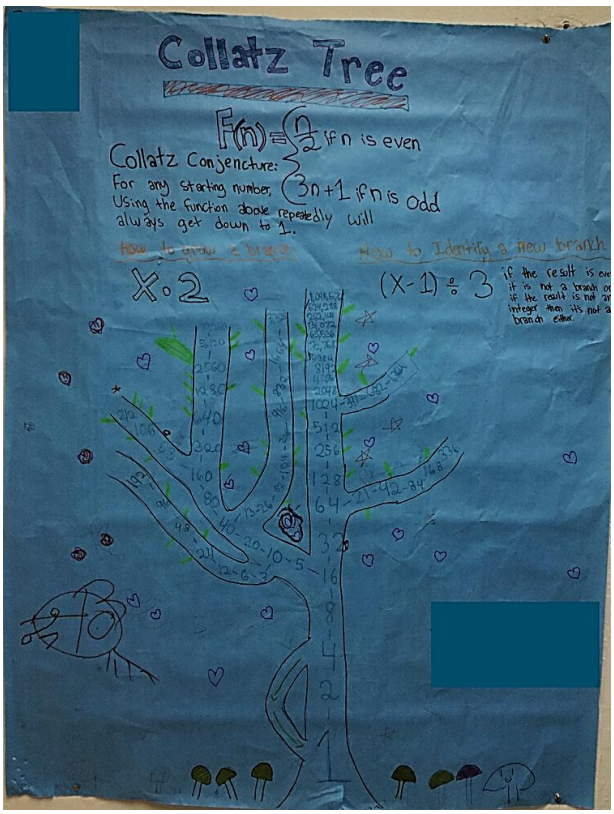
در این‌جا دانش‌آموزان باید به این فکر می‌کردند که چه زمانی $(x-1)/3$ یک جواب صحیح دارد. این عبارت زمانی یک جواب صحیح خواهد داشت که صورت کسر مضربی از سه باشد و سپس قانون بخش‌پذیری بر سه را بررسی کردیم و چند مثال از آن امتحان شد.



پوسترهای درخت کولاتز

دانش‌آموزان به صورت گروهی کار کردند تا از این دو روش برای رشد درخت کولاتز استفاده کنند. فرصت‌های زیادی برای متمایز پیش بردن روند وجود داشت. دانش‌آموزان الگوها را در شاخه‌های درخت کولاتز مشاهده می‌کردند و برخی حتی از عبارات جبری برای توصیف شاخه‌ها استفاده می‌کردند. برای مثال شاخه ۳-۶-۱۲... می‌تواند با عبارت 3×2^n تعریف شود. در این‌جا می‌توانید نمونه‌هایی را ببینید که اولین بار پروژه را انجام دادم:

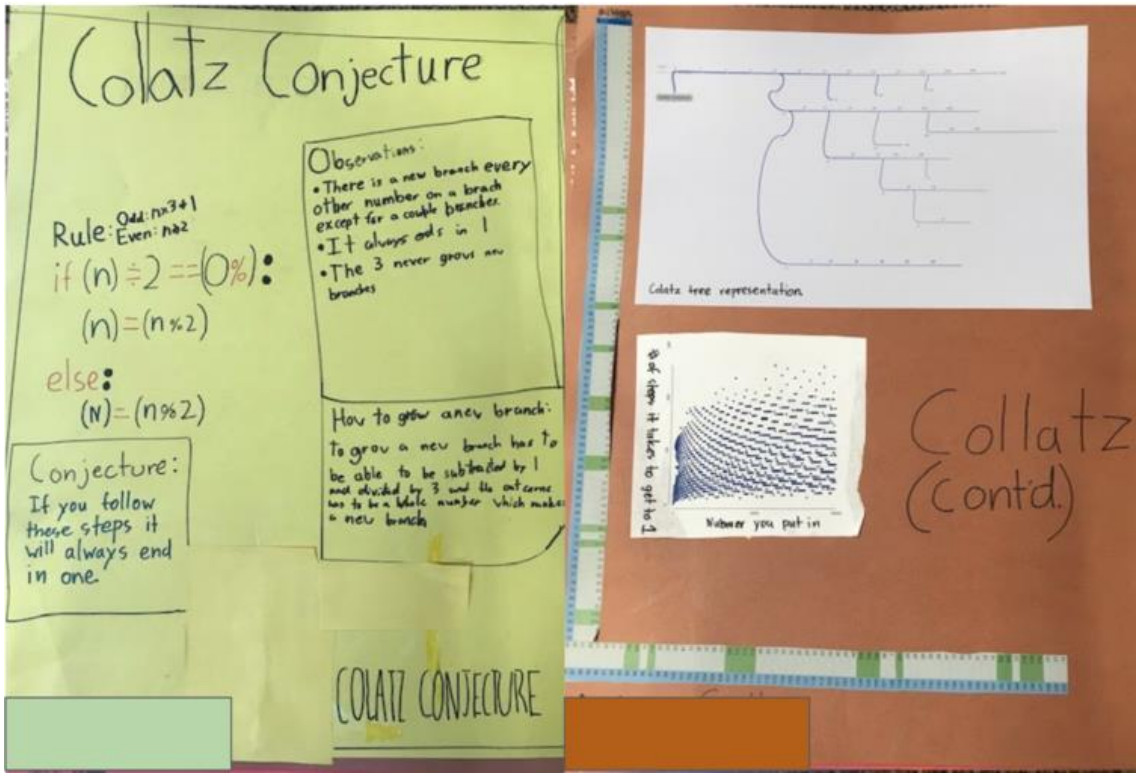


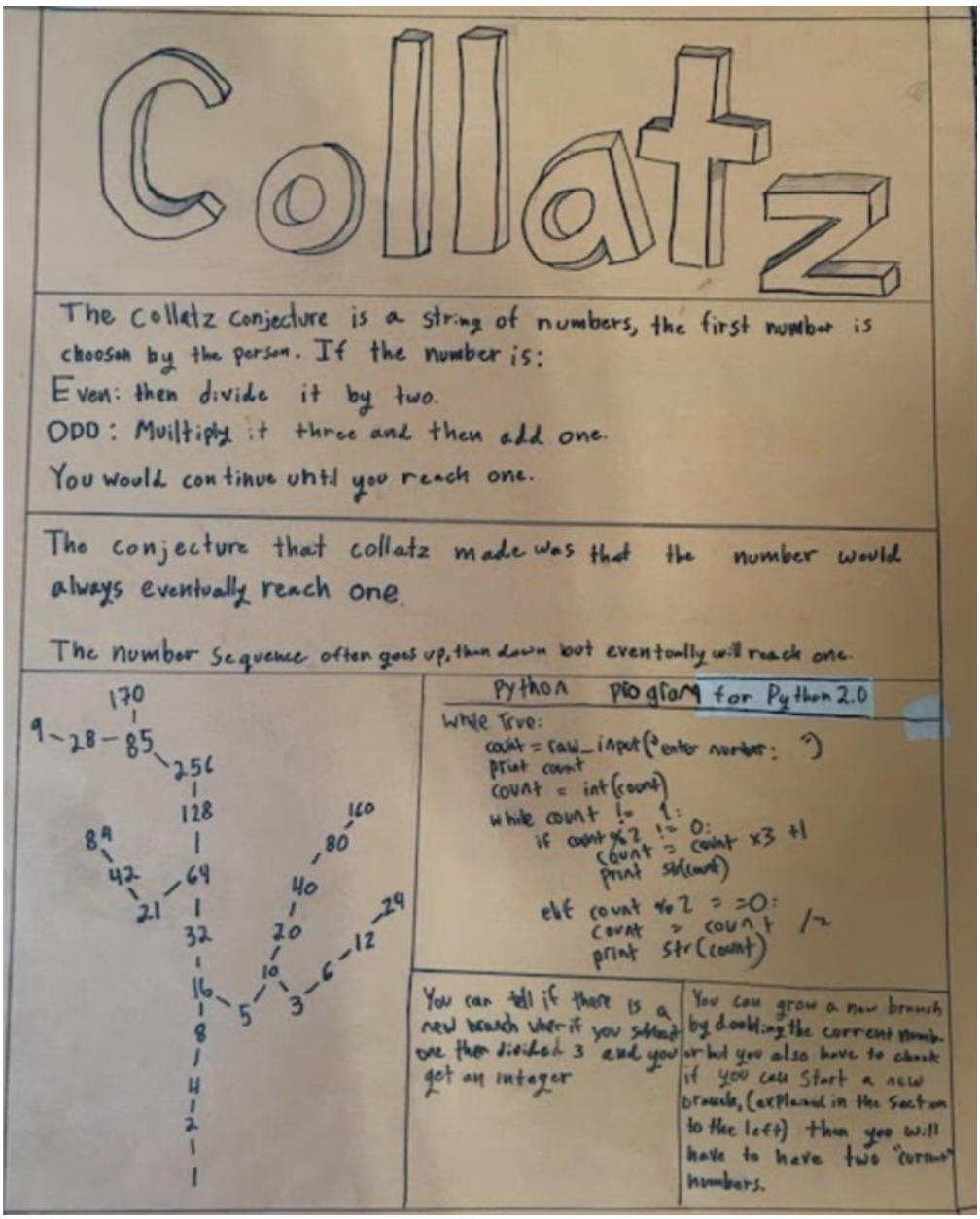


ادغام کدگذاری (علوم کامپیوتر)

کدنویسی نیز چیزی بود که به طور طبیعی به پروژه راه پیدا کرده بود. دانش‌آموزان برنامه‌های مختلفی را در اسکرچ، پایتون و غیره نوشتند. این پروژه یک برنامه معتبر برای کدگذاری فراهم می‌کرد که به دانش‌آموزان اجازه می‌داد حدس را در عمق بیشتری کشف کنند. مهارت‌های کدنویسی مورد نیاز برای دانش‌آموزان دوره راهنمایی نیز کاملاً در دسترس است.

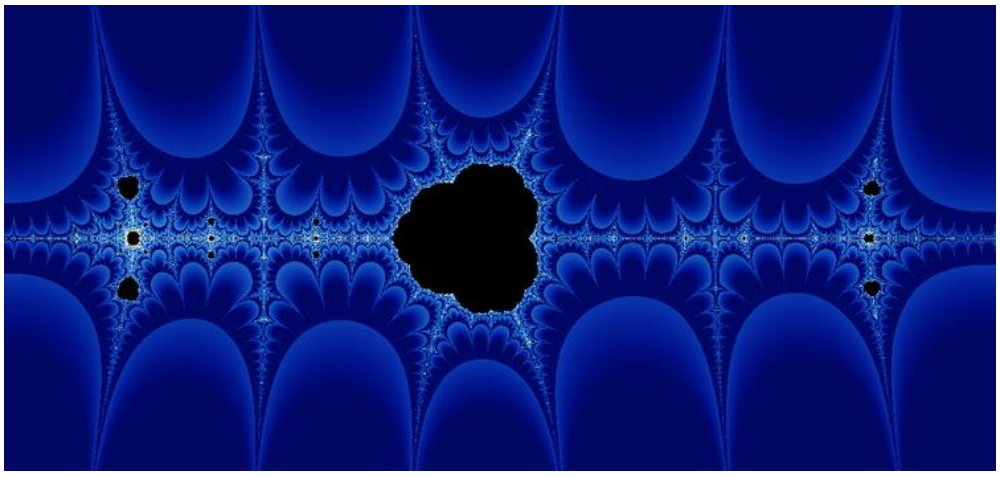
در این‌جا چند نمونه آورده شده است که دانش‌آموزان تصمیم گرفتند برخی از کدهای نوشته شده‌شان در طول تحقیق را در پوستر ساخته‌شده‌ی خود قرار دهند.



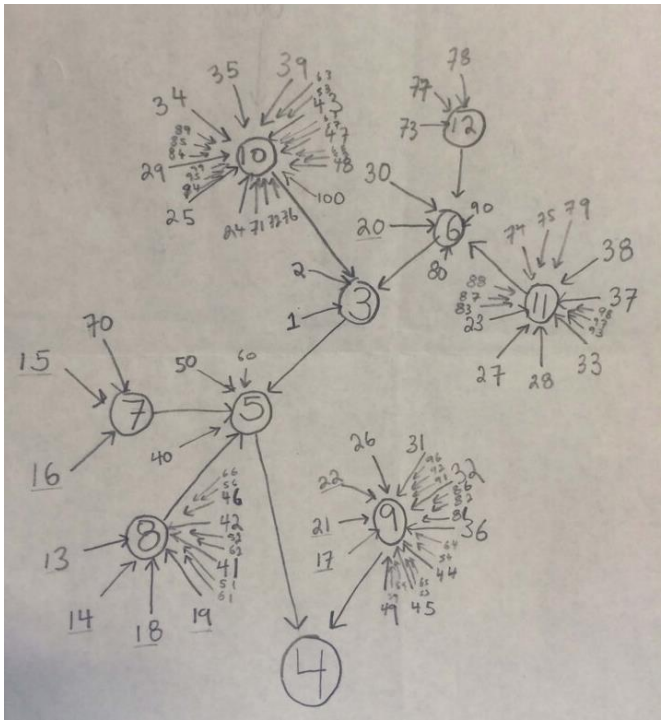


تعمیمات و ارتباطات

۱. اگر فرمول بازگشتی را به صفحه مختلط گسترش دهیم، فراکتال زیر را دریافت می‌کنیم. برای توضیحات کامل‌تر می‌توانید به پست وبلاگ ناتانیل جانستون[1] رجوع کنید.



۲. دن فینکل[۲] مطالب متنوعی تحت عنوان «The Dr. Squares Puzzle» دارد که در آن فرآیند بازگشتی مشابهی با چند حلقه ارائه می‌دهد.



۳. در این‌جا یک فرآیند بازگشتی دیگر وجود دارد که شامل اعداد و فرم نوشتاری آن‌ها است (همچنین ساختار درختی هم دارد) که به شرح زیر است:

مرحله اول: یک عدد از مجموعه اعداد طبیعی در نظر بگیرید.

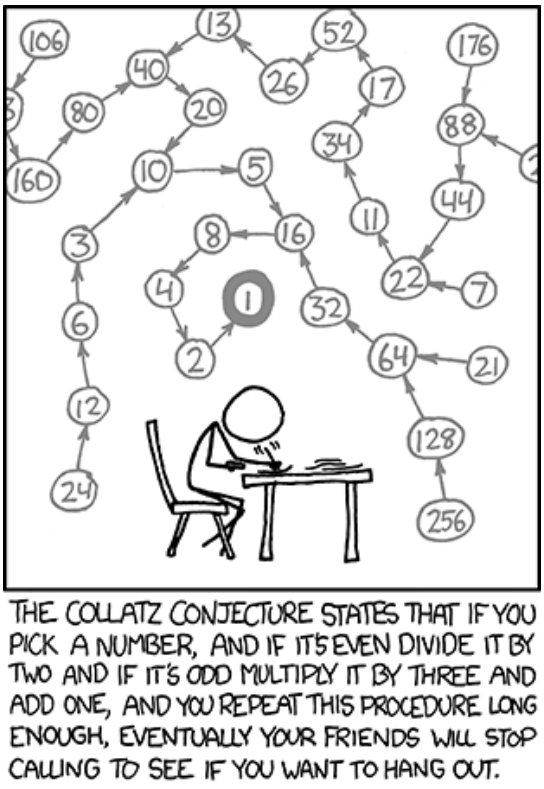
مرحله دوم: عدد مورد نظر را به حروف بنویسید، تعداد حروف کلمه را بشمارید و آن را بنویسید.

مرحله سه: مرحله‌ی دو را مجدداً برای عددی که درآوردید تکرار کنید.

به طور مثال: ۱۱ (یازده) که شامل ۵ حرف است. . . (پنج) که شامل ۳ حرف است. . . (سه) که شامل ۲ حرف است و الی اخر.

لازم به ذکر است که شما این فرآیند را می‌توانید به زبان‌های دیگر نیز امتحان کنید. :)

و در انتها اشاره کنیم یک مقاله درباره‌ی حدس کولاتز بدون XKCD کامل نمی‌شود:



مرجع

https://www.joyfulmathematics.com/blog/collatz

[۱] Nathaniel Johnston

[۲] Dan Finkel

در ریاضیات، اغلب نیاز به یک نقشه خوب برای یافتن پاسخ است

ریاضی‌دانان در تلاشند تا بفهمند چه زمانی می‌توان مسائل را با به کارگیری دانش فعلی حل کرد و در عوض چه زمانی به ترسیم یک مسیر جدید نیاز است.

مترجم: سیده مهدیس امامی

دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهیدبهشتی

در اواخر قرن پانزدهم، لئوناردو داوینچی طرح‌هایی را برای ماشین پرنده کشید که امروزه هلیکوپتر نامیده می‌شود. امروزه «پیچ هوایی» داوینچی، خیالی و تکان‌دهنده‌تر از زمان خودش ظاهر می‌شود. در حالی که دستگاه برای پرواز بسیار سنگین بود، ایده‌های پشت آن درست بودند و ایده‌های مشابه در نهایت به پرواز هلیکوپترهای مدرن منجر شدند. تکنولوژی ابتدا نیاز داشت به اندازه‌ی چند قرن پیشرفت کند.

ریاضی‌دانان معمولاً در شرایط مشابهی با داوینچی قرار دارند. آن‌ها رویاهای بزرگ دارند. اما دانش ریاضی ممکن است به حد کافی برای برآورده کردن خواسته‌ی آن‌ها پیشرفته نباشد.

برای مثال، بسته به این که از چه کسی بپرسید، ریاضی‌دانان امروزی تقریباً به همان اندازه داوینچی برای ساختن ماشینی که واقعاً می‌تواند پرواز کند، برای حل فرضیه ریمان - معروف‌ترین مسئله حل‌نشده در ریاضیات - شانس دارند.

جیکوب تسیمرمن[1] از دانشگاه تورنتو می‌گوید: «هنوز هیچ استراتژی مطرحی برای بررسی فرضیه ریمان وجود ندارد که حتی نیمی از آن قابل قبول باشد.»

در حالی که در زمان داوینچی این موضوع واضح بوده است که نسخه‌ی کاربردی پیچ هوایی نیاز به صبر دارد، معمولاً در ریاضیات واضح نیست که چه چیز ممکن است و چه چیز ممکن نیست.

گاهی یک مسئله فقط برای یک ریاضی‌دان که متوجه می‌شود که اجزای راه حل در یک دیدگاه ساده پنهان شده است، می‌تواند ناامیدکننده به نظر برسد. این چیزی است که برای اثبات اخیر وسلین دیمیتروف[2] برای مسئله‌ای که حدس شینزل-زاسنهاوس[3] نامیده می‌شود اتفاق افتاد. مقاله‌ای تحت عنوان «اندازه‌گیری نیروی دافعه درون چندجمله‌ای‌ها»، در مسلسل ۱۱ بی‌نهایت، به این موضوع پرداخته است.

ریاضی‌دانان برای مدت زیادی در اثبات حدسی که بیان شد، شکست خورده بودند و بسیاری باور داشتند که ممکن است یک ابداع ریاضی جدید برای رسیدن به اثبات لازم باشد. اما دیمیتروف سد این مسئله را با یافتن راهی بدیع از ترکیب تکنیک‌ها شکست که بیش از چهل سال از وجود آن روش می‌گذشت!

تسیمرمن گفته است: «ریاضی‌دانان گاهی خیلی سریع می‌توانند احتمال حل یک مسئله را رد کنند. ریاضیات بسیار دشوار است و گاهی مردم چیزها را نادیده می‌گیرند.»

پس ریاضی‌دانان چگونه می‌دانند که یک مسئله، غیر قابل حل یا فقط بسیار دشوار است؟ بدیهی است که روش واضحی برای گفتن آن وجود ندارد. پس آن‌ها باید به سرنخ‌ها اعتماد کنند و بزرگ‌ترین راهنمایی برای غیر قابل حل بودن یک مسئله این است که بسیاری از افراد نمی‌توانند آن را حل کنند.

یک راه دیگر این است که ببینیم چگونه یک مسئله با مسئله‌ی دیگری ارتباط دارد. اگر ریاضی‌دانان یک مسئله را حل کرده باشند، اعتماد به نفس آن‌ها در حل مسئله‌ی دیگری که شبیه به آن به نظر می‌رسد، افزایش می‌یابد.

جیمز مینارد[۴] از دانشگاه آکسفورد گفته است: «بعضی مسائل به طور طبیعی به هم متصل هستند و شما تکنیک‌هایی دارید که می‌تواند بین آن‌ها عبور کند.» اگر شما طریقه‌ی ساخت یک میز را کشف کنید، به طور منطقی احتمال این که بتوانید یک صندلی هم بسازید وجود دارد.

اما برخی مسائل به طور کل، غیر مشابه با مسائل حل‌شده‌ی دیگر به نظر می‌رسند. برای مثال دو تا از بزرگ‌ترین مسائل در مبحث نظریه اعداد، حدس اعداد اول دو قلو و حدس گلدباخ هستند. آن‌ها بسیار شبیه به یکدیگر به نظر می‌رسند. اما آن‌ها همچنین از هر چیز دیگری که ریاضی‌دانان موفق به اثبات آن‌ها شده‌اند، متمایز هستند.

مینارد این دو مسئله را زوجی از جزیره‌ها در نظر می‌گیرد، یک مجمع‌الجزایر دورافتاده. فاصله‌ی آن‌ها از ساحل دانش ریاضیات بیانگر این است که برای رسیدن به آن‌جا کشف بزرگی لازم است. او گفته است: «شما به ایده‌های توسعه یافته‌ی خیلی بیشتری برای عبور از اقیانوس نیاز دارید.»

اما شباهت بین حدس گلدباخ و اعداد اول دوقلو، این ایده را می‌دهد که شاید آن‌ها هر دو به یک تکنیک یکسان تسلیم شوند! مینارد گفته است: «این باور من است که شاید بتوانیم هر دو را هم‌زمان حل کنیم! حتی اگر آن‌ها از هر جزیره‌ای که می‌دانم چگونه با تکنیک‌های ریاضی خود به آن برسم، دور به نظر برسند.»

گاهی، ریاضی‌دانان به اندازه‌ی کافی یادگرفته‌اند که بدانند چه چیز را نمی‌دانند! اعداد اول دوقلو و حدس گلدباخ هر دو سوال‌هایی در حیطه‌ی اعداد اول هستند. در حال حاضر ریاضی‌دانان فاقد یک روش همه جانبه برای تشخیص این که آیا یک عدد صحیح دارای تعداد زوج یا تعداد فردی عامل اول است، هستند. اگر آن‌ها نتوانند تمایزی بین اعداد با تعداد فرد عامل اول و اعداد با تعداد زوج عامل اول قائل شوند، نمی‌توانند اعداد اول را به طور قابل اعتماد شناسایی کنند، زیرا همه‌ی اعداد اول تعداد فردی عامل اول دارند! این به عنوان مسئله زوجیت[۵] شناخته می‌شود.

مینارد گفته است: «شما می‌توانید در این موارد اشتباه کنید، اما من واقعاً مسئله‌ی زوجیت را سد اصلی برای حدس گلدباخ یا اعداد اول دوقلو می‌دانم. اگر شما بتوانید این سد را بشکنید، فکر می‌کنم شما برای حل هر دو مسئله موفق شوید!»

هر چند در موارد دیگر حتی مشخص نیست که برای حل مسئله چه کاری لازم است! تنها مشهود است که ریاضی‌دانان نمی‌توانند آن را حل کنند! فرضیه‌ی ریمان این‌گونه است. این مسئله درباره‌ی توزیع اعداد اول است و این موضوع، کاملاً مرموز است!

کورتیس مک مولن[۶] از دانشگاه هاروارد گفته است: «این برای من سخت است که در مورد چگونگی حل فرضیه ریمان حدسی بزنم. اما فکر می‌کنم این مهم است که اذعان کنیم نمی‌دانیم!»

وقتی مسائل بسیار از نقشه دور هستند که ریاضی‌دانان حتی نمی‌توانند تصور کنند که چگونه به آن‌ها برسند، چالش فراتر از تهیه‌ی یک قایق بهتر است. در واقع نقشه‌ی بهتری لازم است. اگر شما ندانید که یک جزیره کجا واقع شده است، هیچ حدی از نبوغ نمی‌تواند شما را به آن برساند. اما به محض این که آن را مکان‌یابی می‌کنید، ممکن است مسیر شگفت‌انگیزی پیدا کنید که شما را به سواحل آن برساند.

مانند آن‌چه که برای مشهورترین نتیجه‌ی ریاضی قرن بیست و یکم، اثبات گریگوری پرلمن[۷] در سال ۲۰۰۳ برای حدس پوآنکاره، اتفاق افتاد. مسئله‌ای درباره‌ی این که تحت چه شرایطی یک شکل سه بعدی با یک کره همانریخت است. مسئله‌ای که ریاضی‌دانان را به مدت یک قرن درگیر کرده بود. سپس در اوایل دهه ۱۹۸۰، ویلیام ترستون[۸] حدس پوآنکاره را در یک دیدگاه نظری گسترده‌تر قرار داد و از آن‌جا، ریاضی‌دانان شروع به کشف راه‌های جدید برای مسئله کردند.

مک مولن گفته است: «من فکر می‌کنم یکی از دلایلی که ما به در بسته خورده بودیم، این نبود که ما روش‌های درست نداشتیم. بلکه مسئله در چهارچوب درستی گذاشته نشده بود. مسئله‌ی تغییریافته، تکنیک‌های تغییریافته را به دنبال داشت.»

به عبارت دیگر، اگر یک نقشه‌ی جدید مسیر دریایی شگفت‌انگیزی به مقصد را نشان دهد، ممکن است ساخت یک کشتی به ذهن شما خطور کند.

هنوز هم هیچ تضمینی برای حل یک مسئله وجود ندارد! برای مثال حدس خاصی بیان می‌کند که ارقام عدد پی، به طور یکنواخت توزیع شده‌اند. پس تمام اعداد ۰ تا ۹ هر کدام با تناوب یکسانی ظاهر می‌شوند. محاسبات آزمایشگاهی این حدس را تایید می‌کند، اما ریاضی‌دانان ایده‌ای برای اثبات آن ندارند و ممکن است هیچ وقت نداشته باشند.

مک مولن گفته است: «با احتمال بالایی این حدس درست است اما حقیقت آن ممکن است تصادفی باشد که دسترسی به آن با منطق محض بسیار دشوار است.»

متأسفانه برای ریاضی‌دانان، بسیاری از حدس‌ها در مورد پدیده‌های پایه‌ای ریاضی - از جمله رفتار اساسی اعداد اول - ممکن است قابل حل نباشند.

مک مولن گفته است: «گردایه وسیعی از مسائل وجود دارند که درست هستند زیرا احتمالاً باید درست باشند و ما ممکن است هیچ‌گاه پاسخ آن‌ها را ندانیم زیرا آنچه مشاهده می‌کنیم، توضیح منطقی ندارد. این تقریباً مثل یک راز عمومی است که ما می‌توانیم به راحتی هزاران مسئله‌ی ریاضی بنویسیم که تقریباً به طور حتم، طی هزار سال آینده حل نخواهند شد!»

با توجه به این عدم اطمینان، ریاضی‌دانان در تلاشند تا درک کنند که با استفاده از تکنیک‌هایی که قرن‌هاست در دست دارند، چه مسائلی را می‌توانند حل کنند.

مینارد گفته است: «این برای شما مهم است که یک شهود قوی درباره‌ی چگونگی قرار گرفتن این ایده‌ها در کنار هم و چگونگی استفاده از ترکیبی از تکنیک‌های موجود داشته باشید.»

یک راه غیرمتعارف مینارد این است که با صرف زمان به خود یادآوری کند که چرا تکنیک‌های موجود در مقابل بزرگ‌ترین مسائل باز ریاضی کارایی ندارند.

او گفت: «من اغلب بعد از ظهرهای جمعه فقط به این فکر می‌کنم که بخواهم به طور مستقیم به یک مسئله مشهور حمله کنم. این کار را کمتر برای این انجام می‌دهم که فکر می‌کنم مسیری واقع‌گرایانه برای حل مسئله وجود دارد؛ بلکه بیشتر به این دلیل این کار را می‌کنم که فکر می‌کنم درک این که تکنیک‌های قابل قبول کجا شکست می‌خورند، برایم مهم است.»

قطعاً، حتی دقیق‌ترین شهود در مورد آن‌چه در ریاضیات ممکن است، چیزهایی را از دست خواهد داد، شاید خیلی از چیزها را. بهترین گواه برای این موضوع این است که داشتن اثبات‌هایی همانند دیمیتروف که به طور غیرمنتظره‌ای مسائل دشوار را با استفاده ابزارهای قدیمی حل می‌کند، غیر معمول نیست.

از دید ریاضی‌دانان این گاهی بهترین نتیجه است. از این گذشته، به طور حتم این موفقیتی در اوایل قرن ۲۰ بود که بشر سرانجام متوجه شد که چگونه می‌توان هلیکوپتر ساخت. اما تصور کنید که اگر فناوری ساخت چنین دستگاهی در تمام مدت در دسترس داوینچی بود، چقدر شاعرانه بود!

مینارد گفته است: «گاهی اوقات این می‌تواند هیجان‌انگیزتر باشد؛ زیرا تکنیک‌هایی که جامعه‌ی ریاضی به خوبی درک می‌کند، در نهایت قوی‌تر از آن چیزی است که قدردانی می‌شود.»

مرجع

https://www.quantamagazine.org/in-math-it-often-takes-a-good-map-to-find-answers-20200601/

---

۱ Jacob Tsimerman
۲ Vesselin Dimitrov
۳ Schinzel-Zassenhaus
۴ James Maynard
۵ parity problem
۶ Curtis McMullen
۷ Grigori Perelman
۸ William Thurston

شاید پیش از این ندیده باشید

COUNTEREXAMPLE TO EULER'S CONJECTURE ON SUMS OF LIKE POWERS

BY L. J. LANDER AND T. R. PARKIN

Communicated by J. D. Swift, June 27, 1966

A direct search on the CDC 6600 yielded

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

as the smallest instance in which four fifth powers sum to a fifth power. This is a counterexample to a conjecture by Euler [1] that at least n nth powers are required to sum to an nth power, $n>2$.

REFERENCE

1. L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. 2, Chelsea, New York, 1952, p. 648.

در سال ۱۷۶۹ میلادی حدسی از اویلر به صورت زیر مطرح شد:

هرگاه مجموع k توان nام برابر با توان nام باشد، آن‌گاه k بزرگ‌تر یا مساوی n است.

این حدس در سال ۱۹۶۶ توسط دو ریاضی‌دان با استفاده از محاسبات کامپیوتری رد شد.

آن‌ها این یافته را در مقاله‌ای ۵ خطی منتشر کردند که یکی از کوتاه‌ترین مقالاتی است که به حل یک مسئله ۲۰۰ ساله پرداخته است.

منبع: @qomat

دو شکل از زیبایی ریاضی

ریاضی‌دانان معمولاً زیبایی عمومی و یا استثنایی موجود در کار خود را تحسین می‌کنند اما یک نوع در توصیف جهان مفیدتر است.

مترجم: مونس تابان‌رو
دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهیدبهشتی

یک عادت دیرینه و باارزش در حوزه‌های ریاضی این است که این رشته را به دو قسمت تقسیم کنید. وجود یک بحث سنتی با عنوان «کاربردی در مقابل محض» نشان‌دهنده شکاف نظری-تجربی میان سایر رشته‌های موجود است، تنش بین پیشبرد دانش به سوی یک هدف ویژه و انجام این کار به خاطر ماهیت خودش. یا این که می‌توان ریاضی را به همان نحوی که مغز ما شکل گرفته و به دو نیم تقسیم شده است، بخش‌بندی کرد: با یک نیم‌کره چپ که جبری است و تابع منطق و یک نیم‌کره راست که هندسی است و رویکرد بصری بیشتری دارد. اما این رشته با توجه به یک وجه تمایز دقیق‌تر دسته‌بندی می‌شود: ترجیح بین دو طعم از زیبایی ریاضیاتی.

برای افراد غیرمتخصص در زمینه ریاضیات سخت است که آن را در ابتدای راه زیبا ببینند. درست است که زیبایی در نظر بیننده است اما قطعاً دیدن یک اثر هنری پنهان شده در تاریکی در میان ابری غیر قابل نفوذ از نمادها و اصطلاحاتِ سخت، دشوار است. تلاش برای تحسین ریاضیات بدون داشتن یک شهود کامل از عملکرد داخلی آن، مانند خواندن توضیحات سمفونی پنجم بتهوون به جای شنیدن آن است.

با این حال ریاضی‌دانان هیچ تردیدی در با شور و هیجان توضیح دادن معادلات و اثبات‌ها به عنوان یک زیبایی ندارند. این در اصل یک حس زیبایی‌شناسی است که به طرز چشم‌گیری جهانی شده و در میان فرهنگ‌ها و زمان‌ها پیدایش یافته است: یک ریاضی‌دان بابلی و یک دانشجوی دنیای مدرن می‌توانند به یک اندازه از مطالعه طبقه‌بندی خطوط در هندسه صفحه یا حل معادله درجه دوم لذت ببرند.

به طور خلاصه زیبایی ریاضی می‌تواند به دو شکل عمومی یا استثنایی در نظر گرفته شود. من تا آن‌جا پیش می‌روم که بگویم خود ریاضی‌دانان در میان این دو طعم متفاوت ریاضی قرار گرفته‌اند و تمایل دارند به یکی از این دو قطب جذب شوند.

نوع اول یک شکل اثیری از زیبایی منعکس شده در ساختارها و الگوهای رسمی است. در اصل حسی شگفت‌انگیز از نظم غیرقابل انکار جهان ریاضی. فقط به این فکر کنید که چگونه اعداد طبیعی به صورت کامل در یک ردیف بی‌نهایت قرار می‌گیرند. یا دنباله فضاهای اقلیدسی با ابعاد فزاینده را در نظر بگیرید، یک خط-یک صفحه-یک فضا و غیره. یا دقت و صحت خود منطق صوری. این ساختارها فوق‌العاده مفید و قدرتمند هستند و چشم‌انداز خاصی را شکل می‌دهند که می‌تواند زیبا باشد.

اما برای کسانی که در دسته دیگر طبقی‌بندی قرار دارند - که به نظر می‌رسد بیشتر مردم و افراد غیرمتخصص در ریاضی در این دسته

حضور دارند - سخت است که از مفهوم فضای برداری در n بعد یا یک تابع پیوسته روی اعداد حقیقی هیجان‌زده شوند. تحسین این ایده‌ها در اصل تحسین یک نوع انتزاع است و اغلب باعث می‌شود این حس زیبایی‌شناسی سرد یا رسمی به نظر بیاید. این زیباییِ ملکه یخی است که از فاصله ایمن و نه از نزدیک تحسین می‌شود.

حال شکل دوم زیبایی ریاضی بیشتر از نوع قبلی در دسترس است و با استثنائات قوانین ارتباط دارد، اشیایی که در هیچ رسته بزرگ‌تری قرار نمی‌گیرند. این‌ها چیزهایی غریب، تجسماتی ریاضی از فسیل‌های فریبنده و مواد معدنی عجیبی هستند که قفسه‌های تاریخ طبیعی را در قرن‌های ۱۷ و ۱۸ پر کرده‌اند. این زیبایی حس بسیار متفاوتی دارد: عجیب، غریب، صمیمی و البته کاملاً ذهنی است.

برای مثال یک دوازده وجهی را که یک شئ محبوب در بسیاری از قفسه‌های غریب ریاضیات است، در نظر بگیرید. این یک جسم معمولی است که از دوازده وجه پنج‌ضلعی ساخته شده و در دسته پنج جسم کاملاً متقارن قرار گرفته است. جاذبه آن برای من این‌گونه توصیف شد: «پیچیده اما نه چندان پیچیده». این شکل به عنوان نمادی از باطن، سابقه طولانی دارد که به یونان باستان برمی‌گردد: زمانی که افلاطون ارتباط بین پنج شئ (که اکنون اجسام افلاطونی نامیده می‌شوند) و جهان فیزیکی را ارائه کرد. دوازده وجهی نماد تمام اجرام آسمانی، ستارگان و سیارات بود که هر یک از نظر شکل و حرکت کامل بودند. از آن زمان به بعد این شکل ریاضی نشانگر فرازمینی‌ها بود و به نمادی محبوب از کیمیاگران و ستاره‌شناسان بدل شد. از نظر ریاضیات مدرن، این مورد هنوز هم استثنایی در نظر گرفته می‌شود، یکی از معدود اشیای متقارن که در جایگاه خود ایستاده‌اند و بخشی از یک الگوی بزرگ‌تر نیستند. برای مثال تعمیم یک مکعب یا حتی چهار وجهی به یک شئ مشابه در ابعاد دلخواه آسان است اما هیچ شیء مشابه با دوازده وجهی در ابعاد بالاتر وجود ندارد.

یکی دیگر از ناسازگاری‌های ریاضی، یک دارایی ارزشمند برای هر قفسه، به سادگی به عنوان یک هیولا شناخته می‌شود. (این هیولا را می‌توان به عنوان یک گروه گالوا بر روی اعداد حقیقی درک کرد که وجود آن در بین گروه‌های ساده غیر معمول است زیرا هیچ راه آسان و شناخته شده‌ای برای نمایش عناصر آن وجود ندارد.) این بزرگ‌ترین بنای استثنایی است که می‌توان از طریق آن همه گروه‌های تقارن را ایجاد کرد: یک هیولای ریاضیاتی که فقط در فضایی با بُعدی بزرگ‌تر از ۱۹۶۸۸۳ قابل تجسم است. بسته به دیدگاه و سلیقه شما این می‌تواند زیباترین و یا زشت‌ترین شئ ریاضیاتی باشد.

هر دو نوع زیبایی در طول سال‌ها ریاضی‌دانان را مجذوب خود کرده و پیشرفت‌های زیادی را به دنبال داشته‌اند. انتزاع یک ابزار واضح و قدرتمند است و این اجازه را می‌دهد تا فرد با همه اعضای یک خانواده به طور هم‌زمان برخورد کند و مشکلات را از زاویه دید وسیع‌تری ببیند. ریاضی‌دانانی که ملکه یخ را دنبال می‌کنند اغلب از کاربردهای واقعی یا حالت‌های خاص خوششان نمی‌آید. الکساندر گروتندیک[1] - یکی از کاهنان اعظم جبر مجرد - زمانی عدد ۵۷ را به عنوان نمونه‌ای از اعداد اول انتخاب کرد (که این‌طور نیست!). علاقه به طردشدگان ریاضی نیز یک استراتژی سازنده بوده‌است. چنین اشیایی اغلب میان تقاطع ایده‌های متعدد زندگی می‌کنند و می‌توانند نقطه دسترسی بین جهان‌های کاملاً متفاوت باشند. طرفداران این سبک به «یاوه‌های انتزاعی» اهمیت نمی‌دهند و ویژگی‌های خاص را با همه کاستی‌ها گرامی می‌دارند.

اما دنیای واقعی با چشم‌انداز ایده‌آل ریاضیات بسیار متفاوت است. اکثر علوم به جهانی متصل هستند که جهان واقعی را توصیف می‌کند اما این فقط یکی از بی‌نهایت امکانات ریاضی است. ژان پیر سر[2] به همکار ریاضی‌دان خود گفته است: «در حالی که سایر علوم به دنبال پیدا کردن قوانینی هستند که خدا برای این جهان انتخاب کرده، ما ریاضیدان‌ها در پی یافتن قوانینی هستیم که حتی خدا هم باید از آن‌ها پیروی کند!»

در مواجهه با سوال موجود - در واقع جهان از چه قوانینی پیروی می‌کند؟ - طبیعی است که اکثر دانشمندان به سمت جذابیت‌های مربوط به اشیای استثنایی در قفسه‌های ریاضیات متمایل شوند، اما علم به ما آموخته است که شکل مجرد و دشوار زیبایی ریاضی اغلب یک دیدگاه طولانی مدت و امن‌تر را ارائه می‌دهد.

یک نمایش مشهور در این مورد، ظهور اجسام افلاطونی در کار اولیه منجم یوهانس کپلر[3] است. او مدلی از منظومه شمسی ارائه کرد که فاصله بین مدارهای سیاره‌ای را بر اساس ترتیب خاصی از پنج جسم، استوار می‌کند. این ایده زیبا بود و همچنین محکوم به نابودی. کپلر این مدل را پس از نتیجه‌گیری‌اش در مورد مدار سیارات که شکل کامل یک دایره را تشکیل نمی‌دهند و در عوض ظاهر زشت یک بیضی را دارند (که می‌تواند طیف وسیعی از اشکال را داشته باشد)، رد کرد. به نظر می‌رسید یک قدم محکم رو به عقب است. او این کشف را با "واگن مملو از کود" که در طویله آوگیاس[4] (طویله سلطان آوگیاس مربوط به افسانه‌های یونان است و ذکر شده که جای بسیار کثیفی بوده) باقی مانده است، مقایسه کرد.

اما در حالی که ترجیح کپلر به اجسام استثنایی بود و به بیراهه کشیده شد، اسحاق نیوتن مدارهای بیضوی سیارات را بر اساس نظریه

جهانی خودش از گرانش توضیح داد. در واقع، او نشان داد که چگونه تمام حرکات در آسمان شکل‌هایی مثل دایره، بیضی، هذلولی و سهمی هستند. زیبایی در قوانین مجرد نیوتن نهفته است نه راه حل‌های خاص.

این درسی است که فیزیک‌دانان و به طور کلی دانشمندان بارها آن را یاد گرفته‌اند. در قرن نوزدهم، دانشمندان از گردایه‌های تصادفی قفسه‌های غریب فاصله گرفتند و به مطالعه منظم‌تری از دنیای طبیعی روی آوردند. زیست‌شناسان، به جمع‌آوری تمام نمونه‌های موجود در گروهی از موجودات زنده، نه فقط زیباترین پروانه‌ها یا پرندگان، در طبیعت پرداختند و نظریه کلی تکامل را کشف کردند. شیمی‌دانان همه عناصر را فراتر از ترکیب آسان نقره و طلا، طبقه‌بندی کردند و الگوهای پنهان جدول تناوبی را در این فرآیند نشان دادند. سپس فیزیک‌دانان تقارن ذرات بنیادی را که در اتم‌های عناصر مختلف پنهان شده بودند، آشکار کردند.

آن‌ها هر بار کشف کردند که زیبایی جهان در ساختارهای انتزاعی پنهان شده در میان پدیده‌های فیزیکی، نهفته است. ممکن است این ساختارها در ابتدا گیج‌کننده باشند و نتوانیم به سادگی با آن‌ها ارتباط برقرار کنیم اما نگاه دراز مدت به آن بسیار قوی‌تر و معنادارتر است. و در واقع، زیباتر.

مرجع

https://www.quantamagazine.org/how-is-math-beautiful-20200616/

تلاش برای تحسین ریاضیات بدون داشتن یک شهود کامل از عملکرد داخلی آن، مانند خواندن توضیحات سمفونی پنجم بتهوون به جای شنیدن آن است.

[۱] Alexander Grothendieck
[۲] Jean-Pierre Serre
[۳] Johannes Kepler
[۴] Augean stable

شاید پیش از این ندیده باشید

$\ln(n)$ برای هر عدد صحیح $n > 1$ گنگ است

فرض کنید که اعداد صحیح a و b وجود دارند به طوری که $\ln(n) = \frac{a}{b}$ یک عدد گویا باشد. در این صورت داریم

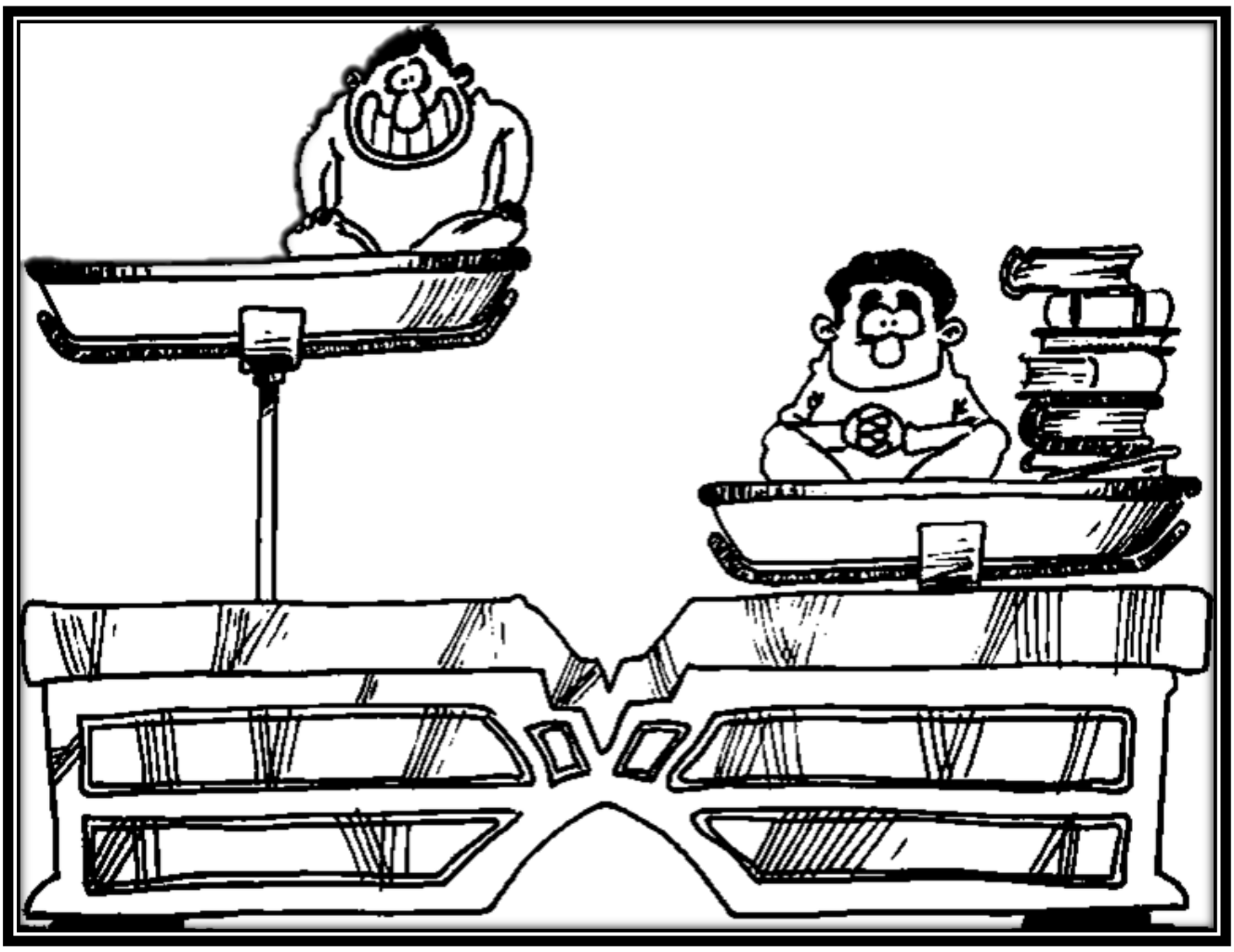
$$e^a = n^b$$

چون a و b هر دو عدد صحیح مثبت هستند، نتیجه می‌گیریم که e ریشه یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است، برای مثال چندجمله‌ای $x^a - n^b$ بنابراین e عدد متعالی نیست که این تناقض است.

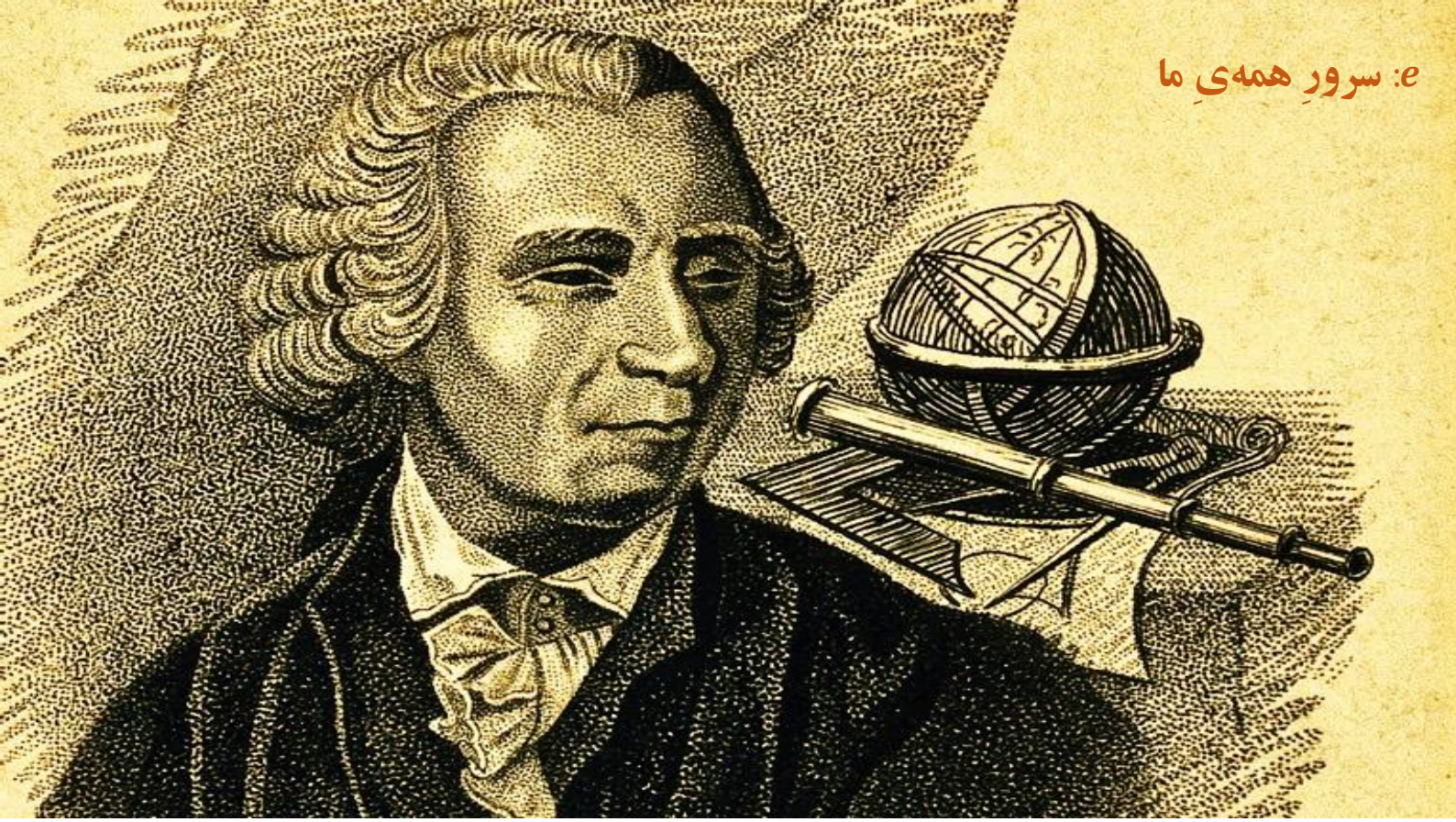
منبع:

https://www.fermatslibrary.com/

مقالات علمی



e: سرورِ همه‌یِ ما



مترجم: محمدعلی اعرابی

کارشناسی ارشد انفورماتیک (علوم کامپیوتر)، دانشگاه فرایبورگ

«اویلر را بخوانید، اویلر را بخوانید. او سرورِ همه‌یِ ما است.»

لاپلاس

گفته‌یِ لاپلاس را می‌توان چنین بازگفت: «e را مطالعه کنید، e را مطالعه کنید. او سرورِ همه است.»

چنان که گاؤس در میانِ هم‌رده‌هایش لقبِ "شاهزاده‌یِ ریاضیات" را گرفت، e می‌تواند لقبِ "شاهزاده‌یِ نمادهایِ ثابت‌ها" را از آنِ خود کند. قطعن اویلر هم با ما هم‌رای بوده، و اگر نه چرا لطف کرد و حرفِ آغازینِ نامِ خود را رویِ آن گذاشت؟

ریشه‌هایِ تاریخیِ e فرسختانه ردیابی شده‌اند و در دست‌رس‌اند. هم‌چنین، ویژه‌گی‌هایِ بنیادینِ e مانندِ تعریفِ حدی‌ش، نمایشِ سریی‌ش، پیوندِ نزدیک‌ش با هذلولیِ راست، و ارتباطش با ربحِ مرکب، واپاشیِ رادیواکتیو، و تابع‌هایِ مثلثاتی و هذلولوی، آن اندازه شناخته‌شده‌اند که نیازی به فروشکافی‌شان نیست.

پس من در این مقاله به چیزهایی مرتبط به e می‌پردازم که چندان به آن‌ها پرداخته نشده، یا دستِ کم زیرِ یک سقف گردِ هم آورده نشده‌اند. پراکنده‌گیِ کاربردهایی که از e خواهم شمرد ناسخته [= ناسنجیده] نیست؛ فرسختیگی هدف نیست. نی، پهنا و ژرفایِ گفتارمان را گونه‌یی گزیده‌ام که همه‌کاره بودنِ این عددِ تحسین‌برانگیز را بنمایانم و نیز اشتهایِ خواننده را برایِ واکاویِ بیش‌تر برانگیزانم.

بازِeگران

به خلافِ برادرِ بزرگ‌ترش π، ردِ پایِ e را نمی‌توان در زمان‌هایِ پیش‌ازتاریخ یافت. بل که e در اوایلِ قرنِ هفدهم به عالمِ وجود شلیک شد، در متنِ معامله‌هایِ تجاری که شاملِ ربحِ مرکب[1] بودند. رباخواران (که نام‌شان را نمی‌برم) دریافتند با افزایشِ بسامدِ ترکیب ولی با کاهشِ درصدِ بهره می‌توان سودِ کل را افزود. به سخنِ دیگر، $(1+1/n)^n$ با افزایشِ n افزوده می‌شود. پس نخست e در قالبِ حدِ زیر دیده به جهان گشود:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = 2.71828182845904\cdots, \qquad (1)$$

هر چند غسلِ تعمیدش برایِ اویلر تا قرنِ هجدهم به وقفه افتاد. ممکن است کسی از رویِ ساده‌گی گمان کند که هر آن چه می‌توانسته از برابریِ بالا برچیده شود، باید زمان‌هایِ بسیار دور برچیده شده باشد. ولی پس از این همه سال این تنها نتیجه‌یِ برچیده‌شده از برابریِ

بالا است:

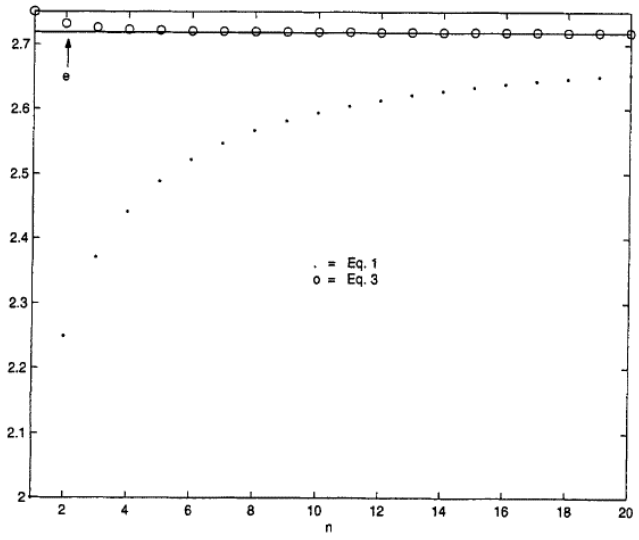
$$\tilde{e}_n = (1 + 1/n)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e_\nu}{n^\nu};\ e_\nu = e \sum_{k=0}^{\nu} \frac{S_1(\nu+k,k)}{(\nu+k)!} \sum_{l=0}^{\nu-k} \frac{(-1)^l}{l!}, \qquad (2)$$

و S_1 نمایانگرِ عددِ استرلینگِ نوعِ اول است.

هر چند رسم است e را با حدِ (۱) تعریف کنند، تعریفِ e با حدِ

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}} - \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \right) \qquad (3)$$

که برادرز و نوکس آن را در ۱۹۹۸ یافته‌اند بهتر است. نمودارِ ۱ سرعتِ گراییدنِ دو حدِ (۱) و (۳) به e را می‌نمایاند. گراییدنِ بهترِ حدِ (۳) نمایان است.



شکل ۱

با توجه به این که هر دویِ حدهایِ (۱) و (۳) تقریب‌هایِ گویایِ e اند، جالب است بدانید ۲.۷۱۸۲۶۰۰۰ = ۸۷۸/۳۲۳ بهترین تقریبِ گویایِ e با صورت و مخرجِ کوچک‌تر از چهار رقم است. با اندیشه به این که همه‌یِ ثابت‌هایِ بنیادینِ طبیعی (سرعتِ نور در خلأ، جرمِ الکترون، ثابتِ پلانک، و دیگرها) تنها تا شش رقمِ اعشار دقت دارند، درمی‌یابیم این دقت به حقیقت تحسین‌برانگیز است. اگر ما از رویِ کنج‌کاوی رقم‌هایِ کم‌ارزشِ صورت و مخرجِ کسر را حذف کنیم، می‌رسیم به ۸۷/۳۲، بهترین تقریبِ گویایِ e با صورت و مخرجِ کوچک‌تر از سه رقم. راستی به نظرِ شما این خاصیت به e برمی‌گردد یا به دستگاهِ اعدادِ دهدهی؟

در سالِ ۱۶۶۹ نیوتن نمایشِ سریِ معروفِ e را منتشر کرد، که حاصل به کار بردنِ بسطِ دوجمله‌یی رویِ برابریِ (۱) بود:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot (1 + \cdots) \right) \right). \qquad (4)$$

سپس برادرز نمایش‌هایِ سریِ بسیارِ دیگری را نیز یافت، مانند:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+2}{(2k)!}. \qquad (5)$$

نمودارِ ۲ جمع‌هایِ جزئیِ برابری‌هایِ (۴) و (۵) را می‌نمایاند که در آن بهتر شدنِ سرعتِ گراییدن نمایان است.

اویلر شماری از نمایش‌هایِ دیگرِ e با کسرهایِ مسلسل را یافت. مانند:

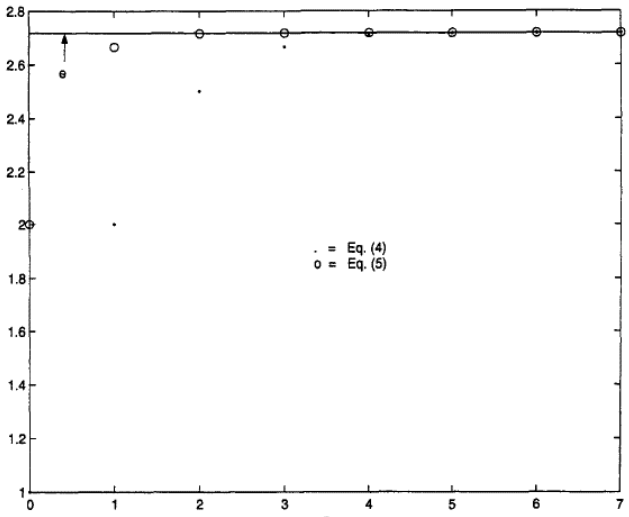
$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}} \qquad (6)$$

یا کسرِ مسلسلِ زیر:

$$e = ۲ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۲}{۳ + \cfrac{۳}{۴ + \cfrac{۴}{۵ + \cfrac{۵}{۶ + \cfrac{۶}{۷ + \cfrac{۷}{۸ + \cdots}}}}}}}}} \qquad (۷)$$

در سالِ ۱۶۵۵ جان والیس ضربِ نامتناهیِ زیر را منتشر کرد:

$$\frac{\pi}{۲} = \frac{۲}{۱}\frac{۲}{۳}\frac{۴}{۳}\frac{۴}{۵}\frac{۶}{۵}\frac{۶}{۷}\frac{۸}{۷}\frac{۸}{۹}\frac{۱۰}{۹}\frac{۱۰}{۱۱}\frac{۱۲}{۱۱}\frac{۱۲}{۱۳}\frac{۱۴}{۱۳}\frac{۱۴}{۱۵}\frac{۱۶}{۱۵}\cdots, \qquad (۸)$$



شکل ۲

هر چند جهان برایِ ضربِ پیپنجر[۲] می‌بایست تا ۱۹۸۰ منتظر می‌ماند:

$$\frac{e}{۲} = \left(\frac{۲}{۱}\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۲}{۳}\frac{۴}{۳}\right)^{\frac{۱}{۴}}\left(\frac{۴}{۵}\frac{۶}{۵}\frac{۶}{۷}\frac{۸}{۷}\right)^{\frac{۱}{۸}}\left(\frac{۸}{۹}\frac{۱۰}{۹}\frac{۱۰}{۱۱}\frac{۱۲}{۱۱}\frac{۱۲}{۱۳}\frac{۱۴}{۱۳}\frac{۱۴}{۱۵}\frac{۱۶}{۱۵}\right)^{\frac{۱}{۱۶}}\cdots. \qquad (۹)$$

برابری‌هایِ (۸) و (۹) با آن که بسیار زیبا اند، بسیار کند می‌گرایند. یک نمایشِ حاصلِ‌ضربیِ e که هم‌سرعت با برابریِ (۴) می‌گراید، این است:

$$u_۱ = ۱;\ u_{n+۱} = (n+۱)(u_n+۱) \Longrightarrow$$
$$e = \prod_{n=۱}^{\infty}\frac{u_n+۱}{u_n} = \frac{۲}{۱}\frac{۵}{۴}\frac{۱۶}{۱۵}\frac{۶۵}{۶۴}\frac{۳۲۶}{۳۲۵}\cdots. \qquad (۱۰)$$

یک نابرابریِ شگفت‌انگیز

در سالِ ۱۷۴۴ اویلر با استفاده از کسرِ مسلسلِ (۶) نشان داد e گنگ است. در سالِ ۱۸۴۰ لیوویل نشان داد e گنگِ درجه‌یِ دوم نیست. و آخر در سالِ ۱۸۷۳ هرمیت نشان داد e در حقیقت متعالی است.

از آن پس گلفوند نشان داده‌است که e^{π} نیز متعالی است، و این عدد که به عنوانِ ثابتِ گلفوند نیز شناخته می‌شود، نظرِ ریاضی‌دانِ تأثیرگذارِ آمریکایی بنجامین پیرس را نیز جلب کرد. همان پیرس که رفت و رویِ تخته‌یِ سیاه صورتِ دیگری از اتحادِ اویلر را نوشت:

$$i^{-i} = \sqrt{e^{\pi}}, \qquad (۱۱)$$

سپس رو به کلاس برگشت و گفت «ما هیچ ایده‌یی نداریم که این برابری چه می‌گوید، ولی شک نداریم که چیزی بسیار مهم می‌گوید.».

اما درباره‌یِ π^e چه می‌دانیم؟ حتا نمی‌دانیم آیا این عدد گویا است. نیون شیطنت‌آمیزانه پرسید: «کدام بزرگ‌تر است؟ e^{π} یا π^e؟» او نه تنها به سؤال پاسخ گفت که

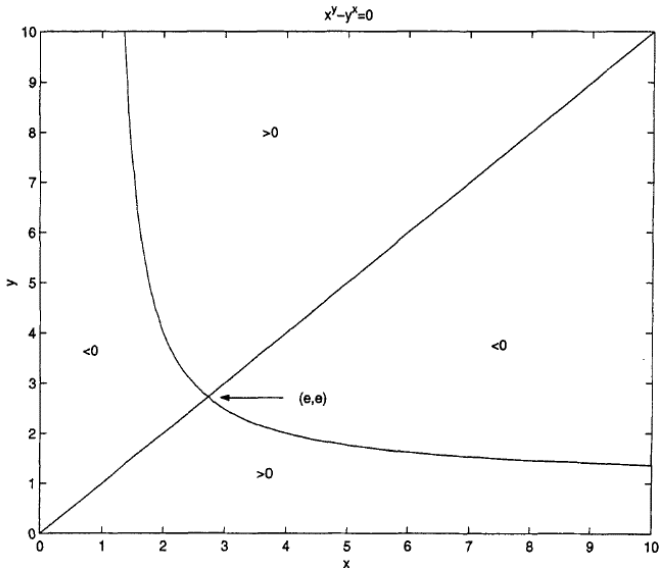
$$e^{\pi} > \pi^e, \qquad (۱۲)$$

بل که نابرابریِ همه‌گانی‌تری را نیز ارائه کرد:

$$\beta > \alpha \geq e \Longrightarrow \alpha^{\beta} > \beta^{\alpha};\ e \geq \alpha > \beta > ۰ \Longrightarrow \beta^{\alpha} > \alpha^{\beta}. \qquad (۱۳)$$

e: سرورِ همه‌یِ ما

این نتیجه در نمودارِ ۳ به خوبی نموده شده‌است.



شکل ۳

به زور متعالـه

بالا اشاره کردیم که e متعالی است، ولی خب باید بگوییم که به زحمت متعالی است. در سالِ ۱۸۴۴ لیوویل نشان داد درجه‌یی که می‌توان یک عددِ جبریِ گنگ را با عددهایِ گویا تقریب زد محدود است، در نتیجه از نظرِ تقریبِ گویا "ساده‌ترین اعداد بدترین اعداداند". دانسته بود که اگر عددِ گنگی به سرعت با اعدادِ گویا تقریب زده شود، باید متعالی باشد. لیوویل از این ویژه‌گی سود جست و نخستین عددِ متعالیِ شناخته‌شده را ساخت، که آن را عددِ لیوویل نامیده‌اند: $L=\sum_{l=۱}^{\infty}۱۰^{-l!}=۰.۱۱۰۰۰۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰۰۰\cdots$
در سالِ ۱۹۵۵ کلاؤس روث با یافتنِ فرجامین حدی که می‌توان اعدادِ گنگ را با اعدادِ گویا تقریب زد، پالایش[۳]ی صریح از قضیه‌یِ لیوویل ارائه کرد، و به سببِ این کارش در سالِ ۱۹۵۸ جایزه‌یِ فیلدز را برد.

برایِ بیانِ کارِ روث، برایِ هر عددِ حقیقیِ $۰<\xi<۱$ و هر کسرِ تحویل‌ناپذیرِ p/q، بگذارید R نشان‌دهنده‌یِ همه‌یِ rهایی باشد که به ازایِ آن‌ها نابرابریِ

$$۰<\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{۱}{q^r} \qquad (۱۴)$$

حدِ اکثر تعدادی متناهی جواب بدارد. سپس ویژه‌گیِ لیوویل-روث (اندازه‌یِ گنگی) را چنین تعریف کنید:

$$r(\xi)=\inf_{r\in R} r. \qquad (۱۵)$$

روث نشان داد این ویژه‌گی چنین تفسیر می‌شود $r(\xi)=۱$ هر گاه r گویا است، $r(\xi)=۲$ هر گاه r جبری با درجه‌یِ بزرگ‌تر از ۱ است، و $r(\xi)\geq ۲$ هر گاه r متعالی است.

$$r(\xi)=\begin{cases}=۱ & \text{هر گاه } \xi \text{ گویا است}\\ =۲ & \text{هر گاه } \xi \text{ جبری با درجه‌یِ بزرگ‌تر از ۱ است}\\ \geq ۲ & \text{هر گاه } \xi \text{ متعالی است}\end{cases} \qquad (۱۶)$$

و باید بگوییم که دانسته است

$$r(e)=۲, \qquad (۱۷)$$

یعنی e ساکنِ برزخِ میانِ گنگ‌هایِ جبری و اعدادِ متعالی است.

تابعِ اولـ[۴]ـل

بگذارید p_n نشان‌دهنده‌یِ nامین عددِ اول باشد، اولیلِ p_n را چنین تعریف می‌کنیم:

$$p_n\#=\prod_{k=1}^{n} p_k. \qquad (۱۸)$$

پس دنباله‌یِ اولیل چنین است:

$$۲,۶,۳۰,۲۱۰,\cdots.$$

یک عددِ صحیح، «اولِ اولیل» خوانده می‌شود هر گاه عددی اول و به صورتِ $p\#\pm ۱$ باشد؛ برایِ نمونه $۲۰۳۰۵۰۷+۱=۲۱۱$ یک اولِ اولیل است. دانسته نیست که آیا تعدادی نامتناهی عددِ اولِ p موجود است که $p\#\pm ۱$ اول باشد یا آیا تعدادی نامتناهی عددِ اولِ p موجود است که $p\#\pm ۱$ مرکب باشد.

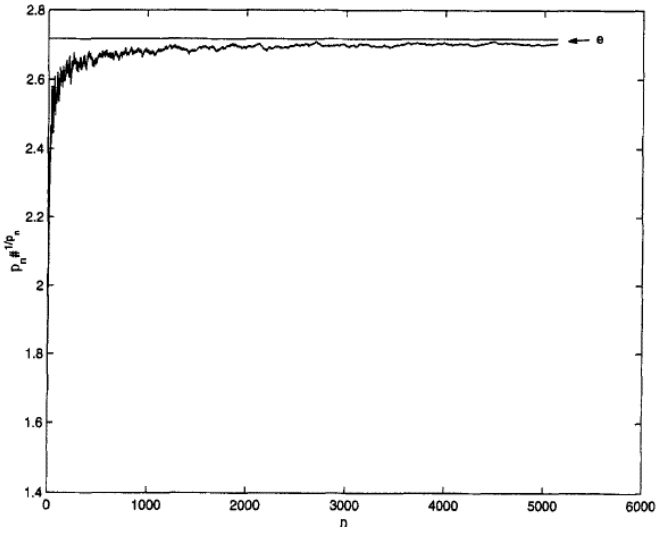
به هر حال، رویز حدِ زیبایِ زیر را منتشر کرده‌است که e را به اعدادِ اول مرتبط می‌سازد:

$$\lim_{n\to\infty}(p_n\#)^{۱/p_n}=e. \qquad (۱۹)$$

چنان که نمودارِ ۴ می‌نمایاند، گراییدنِ این حد به e نه به اندازه‌یِ شکل‌هایِ ۱ و ۲ رام است و نه به اندازه‌یِ شکل‌هایِ ۱ و ۲ تند.

نتیجه‌یی که از برابریِ بالا برچیده می‌شود و ارزشِ برشمردن دارد: بگذارید A_n نشان‌دهنده‌یِ میانگینِ حسابی و G_n نشان‌دهنده‌یِ میانگینِ هندسی برایِ nهایِ طبیعی باشند. خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{G_n}=\frac{e}{۲}. \qquad (۲۰)$$



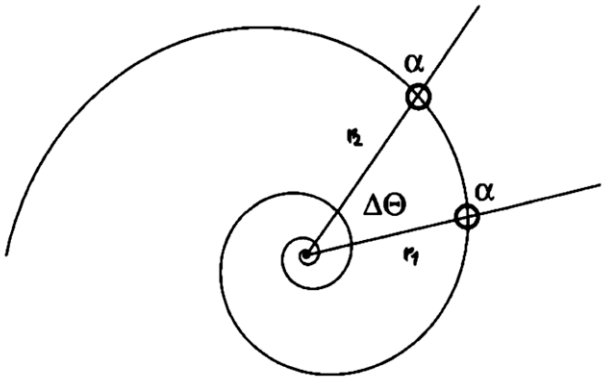
شکل ۴

مارپـeـچِ برابرگوشه

نمودارِ ۵ مارپیچِ برابرگوشه (لگاریتمی) را می‌نمایاند که با

$$r=e^{\cot\alpha\cdot\theta} \qquad (۲۱)$$

تعریف شده‌است، و دارایِ این ویژه‌گیِ مشخصه است که همه‌یِ خط‌هایِ گذرنده از مرکزش را با زاویه‌یِ برابرِ α قطع می‌کند. این مارپیچ بسیاری ویژه‌گی‌هایِ تحسین‌برانگیزِ خودزایی دارد، از آن جمله این که گسترده‌یِ خودش است. این مارپیچ یاکوب برنولی (برادر و گاهی دشمنِ یوهان برنولی استادِ اویلر) را نیز نیک افسوده بود، تا آن‌جا که یاکوب او را بر سنگِ قبرِ خود نگاشت و پیرامون‌ش به لاتینی نوشت «می‌وَردَد و ناوَرداست[۵]، من باز برخواهم خاست».



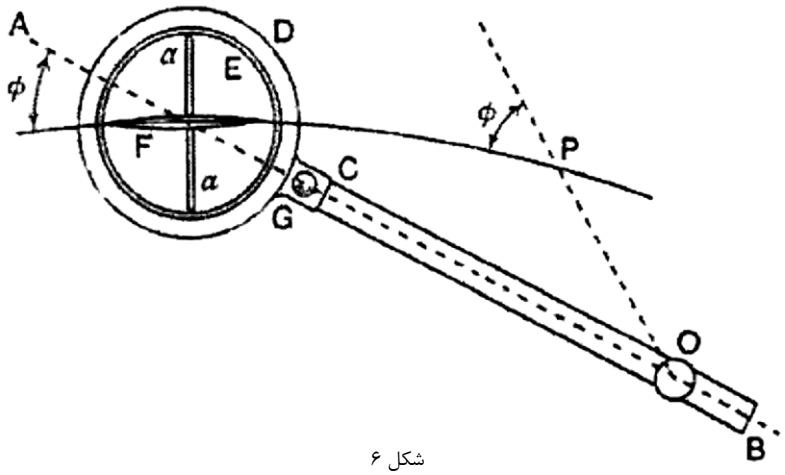
شکل ۵

در حالی که e تعبیرِ هندسیِ سرراستی دارد: جایی که سطحِ زیرِ هذلولیِ $y=۱/x$ از $x=۱$ تا آن نقطه برابر با یک باشد؛ π توسطِ نسبتِ دو طول تعریف می‌شود: نسبتِ محیطِ دایره به قطرِ آن. ولی با توجه به نمودارِ ۵، e نیز می‌تواند توسط نسبتِ دو طول تعریف شود:

$$\Delta\theta=\tan\alpha\Longrightarrow\frac{r_۲}{r_۱}=e. \qquad (۲۲)$$

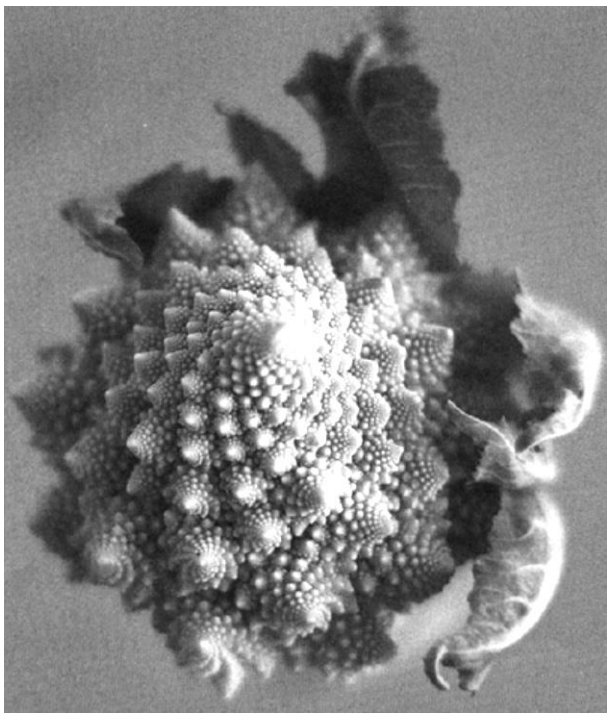
(برایِ نمونه اگر $\alpha=\pi/۴$ پس باید $\Delta\theta$ برابرِ ۱ رادیان گزیده شود.) پرسشی پیش می‌آید: با یادآوریِ نمایشِ مختلطیِ دایره، آیا برابریِ

(۲۱) نشانگرِ دایره نیست؟ پاسخ منفی است. نشانگرِ مارپیچ است، زیرا یک مارپیچِ لگاریتمی می‌تواند بدونِ مراجعه به برابریِ (۲۱) نگاشته شود![۶] شکلِ ۶ یک مارپیچ‌نگار را می‌نمایاند که به همین کار می‌آید. نوکِ مارپیچ‌نگار بر نقطه‌یِ O می‌ایستد، و می‌تواند به آرامی از B تا C بلغزد. چرخِ مارپیچ‌نگار، F، که درونِ یک هامونِ متعامد با صفحه‌یِ کاغذ[۷] خوابیده‌است، می‌تواند در زاویه‌یی که می‌خواهیم قفل شود. برآمده‌گیی در G هست که با گذاشتنِ شصت‌مان رویِ آن و دو انگشتِ بعدی رویِ دسته می‌توانیم کلِ مارپیچ‌نگار را بچرخانیم. تیزیِ لبه‌یِ چرخِ مارپیچ‌نگار سبب می‌شود که از مسیر منحرف نشود. با چرخاندنِ مارپیچ‌نگار، چرخِ آن می‌چرخد، و نوکِ آن می‌لغزد، پس مارپیچِ برابرگوشه با زاویه‌یِ خواسته می‌نگارد.



شکل ۶

مارپیچِ لگاریتمی در بسیاری از پدیده‌هایِ طبیعی دیده می‌شود (و خب، صد البته در پدیده‌های غیرِطبیعی). یکی از آن‌ها در شکلِ ۷ نمایان است. گلِ کلم (بروکلیِ رومی) که در شکل ۷ نموده‌است، با مارپیچِ لگاریتمی باشکوه شده‌است. این کلم نه تنها بسی خوش‌مزه است، که سرشار است از ویتامین E!



شکل ۷

فرمولِ استرلـe‌ـنگ

در سالِ ۱۷۳۰ استرلینگ فرمولِ مجانبیِ زیر را منتشر کرد:

$$n! \sim e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2\pi n}. \quad (۲۳)$$

این فرمول نه تنها ارتباطِ دیگری را میانِ π و e می‌نمایاند، که حدِ

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} \quad (۲۴)$$

را نیز موجب می‌شود. هر چند گفتنی است می‌توان برابریِ (۲۴) را با میان‌گین‌گیریِ مقدماتی سرراستانه از برابریِ (۱) برچید. و نیز گفتنی است که برابریِ (۲۰) نتیجه‌یِ فوریِ برابریِ (۲۴) است. برابریِ (۲۴) با بسیاری از برابری‌هایی که تا کنون برشمرده‌ایم ارتباط دارد، و این سبب می‌شود برایِ ما برابریی خاص به نظر آید. با فرمولِ والیس (۸) می‌آغازیم، که استرلینگ برایِ یافتنِ ضریبِ ثابتِ فرمولِ مجانبی‌ش از آن استفاده کرد. پیپنجر در رسیدن به نمایشِ حاصلِ‌ضربی‌ش (۹) از فرمولِ استرلینگ سود جست. فرمولِ استرلینگ جزئی ضروری از اثباتِ بوروین از برابریِ (۱۷) است. و در نهایت، هر دویِ سنجشِ رویز از حدِ اولیل (۱۹) و یابشِ حدِ میانگینِ حسابی-هندسی (۲۰) ناچار اند به توسل به فرمولِ استرلینگ.

بیایید بکوشیم حسی از دقتِ فرمولِ استرلینگ بیابیم. برایِ نمونه، $۱۰۰! = ۹.۳۳۲۶\cdots \times ۱۰^{۱۵۷}$، در حالی که فرمولِ استرلینگ به دست می‌دهد $۱۰۰! \approx ۹.۳۲۴۸\cdots \times ۱۰^{۱۵۷}$، با خطایی کم‌تر از $\frac{۱}{۱۰}\%$. بگذارید از فرصت استفاده کنیم و عظمتِ $n!$ را حتا برایِ مقدارهایِ نه‌چندان بزرگِ n قدر بشناسیم. خب، عمرِ کائنات باوریده است $O(۱۰^{۱۷})$ ثانیه باشد، و تعدادِ اتم‌هایِ دیده‌شدنیِ کائنات $O(۱۰^{۷۹})$

برآورد شده‌است. هر چند، با این همه نباید در برابرِ عظمتِ $n!$ دست‌وپایمان را گم کنیم و سرِ تعظیم فرود آوریم: تعدادِ بازی‌هایِ ممکنِ شطرنج $O(10^{10^{50}})$ است!

وe‌ـژه‌تابع

معادله‌یِ تابعیِ

$$f(x+y) \equiv f(x)\cdot f(y) \qquad (25)$$

معادله‌یِ نماییِ کوشی نامیده می‌شود. اگر f رویِ مجموعه‌یی با اندازه‌یِ مثبت کراندار باشد، سپس تنها پاسخ‌هایِ معادله $f(x)=0$ و $f(x)=e^{cx}$ هستند، که c ثابتی دل‌خواه است. اگر بپنداریم $f(x)$ مشتق‌پذیر است، پژوهشِ این گفته ساده خواهد شد. در آن صورت

$$f'(x+y)=f'(x)\cdot f(y)=f(x)\cdot f'(y), \qquad (26)$$

که با بازآرایی خواهیم داشت

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=c=\frac{f'(y)}{f(y)}\Longrightarrow f(x)=Ae^{cx}. \qquad (27)$$

از آن‌جا که برابریِ (25) می‌بایاند $f(0)=[f(0)]^2$، باید بداریم $A=0$ یا $A=1$ و $f(0)=1$، و این‌گونه همه‌یِ پاسخ‌ها به دست می‌آیند.

بنگرید که برابریِ (27) ویژه‌تابعی از عملگرِ دیفرانسیل است، و ضرورتِ پاسخِ نمایی نتیجه‌یی سرراست بود از همین ویژه‌گی‌ش:

$$(D-c)y(x)=0\Longrightarrow y(x)=Ae^{rx};\ D\equiv\frac{d}{dx}. \qquad (28)$$

همین ویژه‌گیِ بنیادین سبب شده تابعِ نمایی نقشی کلیدی در معادلاتِ دیفرانسیل و کاربردهایش بدارد.

معادله‌یِ اسکالرِ مرتبه‌یِ اول با ضریبِ ثابت را در نظر گیرید:

$$y'(x)-ry(x)=f(x) \qquad (29)$$

با ضرب در عاملِ انتگرال‌ساز $\mu=e^{-rx}$ و توسل به ویژه‌گیِ ویژه‌تابع صورتِ خودالحاقیِ

$$[e^{-rx}y(x)]'=e^{-rx}f(x) \qquad (30)$$

ساخته می‌شود، که با انتگرال‌گیری سرراستانه پاسخِ عمومی را به دست می‌دهد:

$$y(x)=e^{rx}\int e^{-rx}f(x)\,dx, \qquad (31)$$

که منظورمان از $\int \phi(x)\,dx$ همآن $\int^x \phi(\xi)\,d\xi$ است.

بگذارید پاسخ را بارِ دیگر با استفاده از عملگرهایِ دیفرانسیل بیابیم. برابریِ (29) به صورتِ

$$(D-r)y(x)=f(x) \qquad (32)$$

درخواهد آمد، پس پاسخ‌ش، برابریِ (31)، به صورتِ

$$y(x)=\frac{1}{D-r}\cdot f(x)=e^{rx}\int e^{-rx}f(x)\,dx \qquad (33)$$

درمی‌آید، نمایشی صریح از وارونِ عملگرِ دیفرانسیلِ $D-r$.

از یافته‌مان سوءاستفاده می‌کنیم تا به روشی برایِ حلِ معادلاتِ درجه‌یِ دوم با ضریبِ ثابت دست بیابیم. بسنجید، برای نمونه،

$$y''(x)-3y'(x)+2y(x)=xe^x, \qquad (34)$$

یا با نمایشِ عملگری،

$$(D^2-3D+2)y(x)=xe^x. \qquad (35)$$

تجزیه با استفاده از وارون‌گیری ما را به این‌جا می‌رساند:

$$y(x)=\frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}\cdot xe^x. \qquad (36)$$

با یک بار استفاده از فرمولِ وارون‌گیری (33) به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{D-2}\cdot xe^x=e^{2x}\int e^{-2x}xe^x\,dx=-(1+x)e^x. \qquad (37)$$

و با بارِ دومِ استفاده یک پاسخِ خصوصی می‌یابیم:

$$y(x)=\frac{1}{D-1}\cdot[-(1+x)e^x]=-e^x\int e^{-x}(1+x)e^x\,dx=-\frac{1}{2}(1+x)^2e^x. \qquad (38)$$

به وضوح، این پروسه‌یِ نمادین تعمیم‌یافتنی است به معادلاتِ درجه‌یِ nام با ضرایبِ ثابت. هر چند غالبن طبیعی‌تر است که معادله‌یِ درجه‌یِ بالاتر را به دستگاهی از معادلاتِ درجه‌یِ اول تحویل کنند:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t);\ \vec{x}(\cdot) = \vec{x}_{\cdot}. \quad (۳۹)$$

با تعریفِ تابعِ نماییِ ماتریسی به صورتِ

$$e^{tA} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \quad (۴۰)$$

به پاسخی همان‌گو با برابریِ (۳۱) می‌رسیم:

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_{\cdot} + \int_{\cdot}^{t} e^{(t-\tau)A}\vec{f}(\tau)\, d\tau\,. \quad (۴۱)$$

این نتیجه‌یِ پرکاربرد «فرمولِ وردشِ پارامترها» خوانده می‌شود. بخشی از زیبایی‌یِ این فرمول به این سبب است که پاسخ را در قالبی بیان می‌کند که تأثیرِ شرطِ آغازی، $\vec{x}_{\cdot}$، و تأثیراتِ خارجی، $\vec{f}(t)$، جدا هستند و بنا بر این می‌توانند جداگانه مطالعه شوند.

پُلِ e از پیوسته به گسسته

بخشِ کنونی درباره‌یِ رویکردی عملگری به معادلاتِ دیفرانسیل (مدل‌هایِ پیوسته) بر پایه‌یِ ویژه‌گیِ ویژه‌تابعِ تابعِ نمایی است. یک حسابِ نمادیِ همان‌گو برایِ مطالعه‌یِ معادلاتِ تفاضلی (مدل‌هایِ گسسته) نیز ساخته و پرداخته خواهد شد. همان طور که انتظار داریم، وجودِ پلِ میانِ دنیاهایِ پیوسته و گسسته را مدیونِ e خواهیم بود.

نخست، عملگرِ انتقال، E، را چنین تعریف می‌کنیم:

$$Ef(x) = f(x+h), \quad (۴۲)$$

و عملگرِ تفاضلِ پیش‌رویی، Δ، را چنین:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x). \quad (۴۳)$$

سپس با استفاده از قضیه‌یِ تیلور، E بر حسبِ D (که در بخشِ پیشین تعریف اش کردیم) بیان‌شدنی است:

$$۱ + \Delta = E = e^{hD}. \quad (۴۴)$$

اکنون با برابریِ (۴۴) برایِ ما توانستنی است از دنیایِ گسسته‌یِ Δ به دنیایِ پیوسته‌یِ D برویم یا بازگردیم:

$$Df(x) = \frac{۱}{h}\ln(۱+\Delta)\, f(x) = \frac{۱}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^{۲}}{۲} + \frac{\Delta^{۳}}{۳} - \cdots\right] f(x). \quad (۴۵)$$

$$\Delta f(x) = \left(e^{hD} - ۱\right) f(x) = \left[hD + \frac{h^{۲}}{۲!}D^{۲} + \cdots\right] f(x). \quad (۴۶)$$

رابطه‌هایِ بالا می‌توانستند با عملگرِ تفاضلِ پس‌رویی یا تفاضلِ مرکزی نیز بیان شوند، اما همین اندازه کافی بود تا نقشِ کلیدیِ e را به عنوانِ میانجی‌گرِ میانِ این دو سرزمینِ بسیار دور بنمایانیم.

تابعِ فرآورنده‌یِ نمایی‌ِ e

می‌گوییم دنباله‌یِ $\{a_n\}_{n=\cdot}^{\infty}$ توسطِ تابعِ $g(x)$ فرآورده می‌شود اگر

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,. \quad (۴۷)$$

برایِ نمونه، تابعِ $(۱+x)^m$ ضرایبِ دوجمله‌یی، $C(m,n)$ها، را فرمی‌آورد. همان‌طور، $g(x)$ را «تابعِ فرآورنده‌یِ نمایی» برایِ دنباله‌یِ $\{a_n\}_{n=\cdot}^{\infty}$ خوانیم اگر

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\,. \quad (۴۸)$$

برایِ نمونه، تابعِ برنولی، $B(x)$، فرآورنده‌یِ نماییِ برایِ اعدادِ برنولی، B_nها، است:

$$B(x) \equiv \frac{x}{e^x - ۱} = \sum_{n=\cdot}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \quad (۴۹)$$

اعدادِ برنولی در شمار و گوناگونیِ گیج‌کننده‌یی از حوزه‌هایِ آنالیزی و ترکیبیاتی یافته می‌شوند، مانندِ فرمولِ زیر برایِ جمعِ توان‌هایی از اعدادِ صحیح:

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{p-k+1} \cdot B_{p-k+1} \cdot p!}{k! \cdot (p-k+1)!} n^k. \qquad (50)$$

در بخشِ سپسین، کاربردِ تابع‌هایِ فرآورنده‌یِ نمایی را در ترکیبیات و نگره‌یِ گراف‌ها خواهیم کافت. اما بگذارید نخست کاربردی مهم از تابعِ برنولی را در حوزه‌یِ خودش بکاویم.

تابعِ برنولی و اختلالِ تَک‌ـe‌ـن

پدیده‌هایِ طبیعیِ بسیاری هستند که توسطِ معادلاتِ دیفرانسیلی بیان می‌شوند که در آن‌ها بالاترین مشتق در پارامتری بسیار کوچک چون ϵ ضرب شده‌است. از آن جمله‌اند پراکنده‌گیِ آلاینده در مدخلِ یک رود، آلوده‌گیِ هواسپهری، نگره‌یِ جنبشی‌مولکولیِ گازها، دستگاه‌هایِ نیمه‌رسانا، ترابریِ آب‌هایِ زیرزمینی، جریانِ سیالِ رویِ یک هواپیما، و دیگرها.

این شاخه از ریاضیاتِ کاربردی «نگره‌یِ اختلالِ تکین» نام دارد، زیرا شیوه‌یِ حلِ آن درست به این می‌ماند که به ساده‌گی ϵ را ۰ بپنداریم. یک مسأله‌یِ پیش‌نمونه‌یی این است:

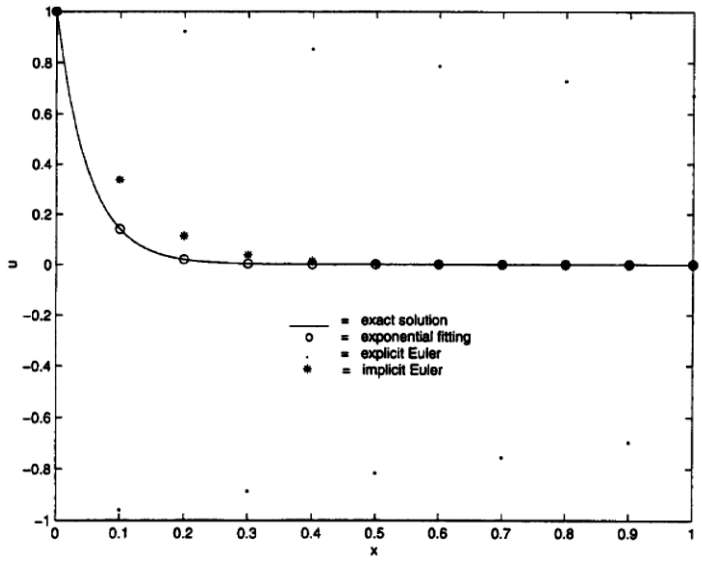
$$\epsilon \cdot u'(x) + u(x) = 0 \Longrightarrow u_i = e^{-\Delta x/\epsilon} \cdot u_{i-1}. \qquad (51)$$

که نمادگذاریِ نمایی نمایان‌گرِ این است که مسأله رویِ بافته‌یی با پهنایِ Δx گسلیده‌است [= گسسته‌است]. پاسخِ دقیقِ برابریِ (۵۱) با $u_0 = u(0) = 1$ در نمودارِ ۸ نمایانده شده‌است.

اگر معادله‌یِ دیفرانسیلِ بالا را با شیوه‌یِ صریحِ اویلر تقریب بزنیم، به دست خواهیم آورد

$$\epsilon \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + u_{i-1} = 0 \Longrightarrow u_i = (1 - \Delta x/\epsilon) \cdot u_{i-1}. \qquad (52)$$

با مقایسه‌یِ پاسخ‌هایِ برابری‌هایِ (۵۱) و (۵۲) درمی‌یابیم این روش معادل است با استفاده از سریِ تیلورِ مرتبه‌یِ یکم برایِ تقریبِ تابعِ نمایی، $e^z \approx 1 + z$. این تقریب برایِ $\Delta x/\epsilon = 1.9608$ در نمودارِ ۸ نمایانده شده‌است و به روشنی نابسنده‌گی‌ش نمایان است.



شکل ۸

اگر ما تابعِ برنولی را به جایی مهم از تقریب بیفزایانیم،

$$\epsilon \cdot B(-\Delta x/\epsilon) \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + u_{i-1} = 0 \Longrightarrow u_i = e^{-\Delta x/\epsilon} \cdot u_{i-1}, \qquad (53)$$

پاسخِ دقیق یافته خواهد شد! به این شیوه‌یِ چشم‌گیرانه موفق «تجهیز نمایی» گویند.

بگذارید اکنون شیوه‌یِ بازگشتیِ اویلر را برایِ آماده ساختنِ تقریب، به معادله‌یِ دیفرانسیلِ

$$\epsilon \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + u_i = 0 \Longrightarrow u_i = \frac{1}{1 + \Delta x/\epsilon} \cdot u_{i-1} \qquad (54)$$

به کار بگیریم. با مقایسه‌یِ پاسخ‌هایِ برابری‌هایِ (۵۱) و (۵۴) اکنون درمی‌یابیم این روش معادل است با استفاده تقریبِ $(0,1)$-پاده

e: سرورِ همه‌یِ ما

برایِ تقریبِ تابعِ نمایی، $e^z \approx 1/(1-z)$. با بازبینیِ نمودارِ ۸ خواهیم یافت شیوه‌یِ بازگشتی بسی نیرومندتر از شیوه‌یِ صریح ما را به پاسخ نزدیک خواهد کرد، با این همه در بسیاری از کاربردها نابسنده است.

بارِ دیگر تابعِ برنولی که در جایِ درست قرار بگیرد به پاسخ دقیق خواهیم رسید:

$$\epsilon \cdot B(\Delta x/\epsilon) \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + u_i = 0 \Longrightarrow u_i = e^{-\Delta x/\epsilon} \cdot u_{i-1}. \qquad (55)$$

پس اکنون نقشِ کلیدی و قاطعِ تابعِ برنولی در تقریبِ معادلاتِ دیفرانسیل با اختلالِ تکین بر همه‌گان آشکار شده.

تقریبِ نمایـی e

با حال و هوایِ بخشِ پیش ادامه می‌دهیم — نباید نتیجه گرفت یک چیزِ ریاضی نمی‌تواند در یک تحلیلِ ارزشمندِ ریاضیک از یک مسأله‌یِ فیزیک حضور بدارد، تنها به این خاطر که کوچک است. به تصویرِ ۹ بنگرید، که یک مرغابی رویِ سطحِ آب حرکت می‌کند، و در ردِ حرکتِ خود خمینه‌تاب[۸]ی می‌سازد که با زاویه‌یی در حدودِ ۴۰° می‌گراید. بیرون از این ردِّ حرکت، اثرِ جنبش "نماییانه کوچک" است؛ درونِ ردِّ حرکت و رویِ خمینه‌تاب، اثرِ جنبش می‌تواند با تقریب‌هایِ مجانبی به دست آید. هر چند، بر اساسِ مشاهده‌یِ استوکس در سالِ ۱۸۴۷، برایِ پالایشِ تقریبِ مجانبی باید این اثرهایِ نماییانه کوچک را نیز برشمرد.

شکل ۹

دقتِ کمّی تنها اهمیتِ تقریبِ نمایی نام‌برده نیست. خودِ هستیگیِ حل به این چیزهایِ نماییانه کوچک وابسته است. برایِ نمونه، در پیش‌رویِ کریستال، چیزی نماییانه کوچک در انرژیِ میانِ دو سطحِ جامد و مایع پرورشِ انگشت‌هایِ شاخک‌دار را نیرو می‌بخشد. این، اکنون حوزه‌یی بسیار پرطرف‌دار در ریاضیاتِ کاربردی است.

ترادیسشِ نمایـی e

اکنون بگذارید به بحثِ تابع‌هایِ فرآورنده‌یِ نمایی بازگردیم. در آنالیزِ ترکیبیاتی تابع‌هایِ فرآورنده در مسأله‌هایِ مربوط به ترکیب‌ها کاربرد دارند، در حالی که تابع‌هایِ فرآورنده‌یِ نمایی در مسأله‌هایِ مربوط به جایگشت‌ها. هر چند، تابع‌هایِ فرآورنده‌یِ نمایی کاربردی وسیع‌تر در مسأله‌هایِ شمارشِ نموداری یافته‌اند. بگذارید $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n/n!$ تابعی فرآورده‌یِ نمایی از دنباله‌یِ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد و بگذارید $B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n/n!$ تابعی فرآورده‌یِ نمایی از دنباله‌یِ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد. اگر بداریم $1 + B(x) = e^{A(x)}$، $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ را تَرادیسشِ نمایی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌نامیم، و $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را ترادیسشِ لگاریتمیِ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

فرمولِ ریدل شمارِ گراف‌هایِ n-رأسی را به شمارِ گراف‌هایِ n-رأسیِ همبند مرتبط می‌کند. اگر a_n شمارِ گراف‌هایِ برچسب‌دار و همبندِ n-رأسی با ویژه‌گیِ خاصی باشد، b_n شمارِ کلِ گراف‌هایِ برچسب‌دارِ n-رأسی با آن ویژه‌گی است. بگذارید آن ویژه‌گیِ خاص داشتنِ دقیقن دو مؤلفه‌یِ همبندی باشد، به ساده‌گی جمله‌یی که آوردیم نادرست خواهد شد. (در این نمونه برایِ هر n داریم $a_n = 0$، پس فرمولِ ریدل به دست می‌دهد $b_n = 0$ برایِ هر n، اما $b_2 = 1$.) متأسفانه وایشتاین این خطا را تکرار کرده‌است.

اسلاؤن و پلاؤف از هاراری و پالمر نقل کرده‌اند، و آن دو از خودِ ریدل. اگر در کارِ اصلیِ ریدل بازجوییم، درمی‌یابیم او هرگز ترادیسشِ نمایی را بر ویژه‌گیی چون همبندی به کار نبرده‌است. تعمیمِ درستِ فرمولِ ریدل چنین خواهد بود: «... b_n شمارِ کلِ گراف‌هایِ برچسب‌دارِ

n-رأسی است که هر مؤلفه‌ی آن دارای آن ویژه‌گی است.» پس اکنون که خطای منطقیِ سخنِ ریدل را برطرف کردیم، می‌توانیم آن را چونان ابزاری قوی برای شمارش به کار گیریم. برای نمونه اگر ویژه‌گیِ خاصِ ما "زوجیگی" [= زوجیت، زوج بودن] باشد، فرمولِ ریدل به ساده‌گی شمارِ گراف‌های اویلری را به تعدادِ گراف‌های زوج مرتبط خواهد کرد.

روشِ پرونی

گاهی بایسته است به تابعی با جمعِ توابعِ نمایی نزدیک شویم. با این که مسأله سترگانه ناخطی است، می‌تواند به مسأله‌ی یافتنِ صفرهای یک چندجمله‌یی تراندیسد! این روش به پرونی منسوب است.

مقدارِ تابعِ f در نقطه‌های $\{۰, ۱, \cdots, N-۱\}$ داده شده‌است، به دنبالِ تقریبی نمایی هستیم، مانندِ

$$f(x) \approx c_۱ e^{\alpha_۱ x} + \cdots + c_n e^{\alpha_n x} \qquad (۵۶)$$

که $N \geq ۲n$. با تعریفِ $f_j := f(j)$ و $\mu_k := e^{\alpha_k}$، روشِ پرونی چنین پرداخته خواهد شد:

۱. برای $\beta_۱, \ldots, \beta_n$ این $N-n$ معادله‌ی خطی را با روشِ کم‌ترین توان‌های دوم حل کنیم:

$$\begin{aligned} &f_n + f_{n-۱}\beta_۱ + \cdots + f_۰\beta_n = ۰ \\ &\vdots \\ &f_{N-۱} + f_{N-۲}\beta_۱ + \cdots + f_{N-n-۱}\beta_n = ۰. \end{aligned} \qquad (۵۷)$$

۲. ریشه‌های $\mu_۱, \ldots, \mu_n$ این معادله را بیابیم:

$$\mu^n + \mu^{n-۱}\beta_۱ + \cdots + \mu\beta_{n-۱} + \beta_n = ۰, \qquad (۵۸)$$

و برای $k = ۱, \ldots, n$ تعریف کنیم $\alpha_k = \ln \mu_k$.

۳. برای $c_۱, \ldots, c_n$ این N معادله‌ی خطی را با روشِ کم‌ترین توان‌های دوم حل کنیم:

$$\begin{aligned} &c_۱ + c_۲ + \cdots + c_n = f_۰ \\ &\mu_۱ c_۱ + \mu_۲ c_۲ + \cdots + \mu_n c_n = f_۱ \\ &\vdots \\ &\mu_۱^{N-۱} c_۱ + \mu_۲^{N-۱} c_۲ + \cdots + \mu_n^{N-۱} c_n = f_{N-۱}. \end{aligned} \qquad (۵۹)$$

با توجه به اندازه‌ی n می‌توان معادله‌ی (۵۸) را سرراستانه با الگوریتم‌های ریشه‌یابی حل کرد یا با تراندیساندنِ آن به مسأله‌یی ویژه‌مقداری برای ماتریسِ زیر:

$$\begin{bmatrix} -\beta_۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ -\beta_۲ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ -\beta_۳ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_n & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}. \qquad (۶۰)$$

از جمله‌ی کاربردهای امروزینِ روشِ پرونی می‌توان به این‌ها اشاره کرد: طراحیِ فیلترهای دیجیتالی، پردازشِ سیگنال‌های رادار و سونار، سنجشِ ترابرشِ هواسپهری، و حتا رادیوتراپی برای بیمارانِ سرطانی. هستی پذیرفتنِ الگوریتمِ اصلیِ پرونی به سالِ ۱۷۹۵ برمی‌گردد که تنها برای $N = ۲n$ کار می‌کرد. پرونی پیوستن به ناپلئون در تازش به مصر را نپذیرفت، به خلافِ هم‌دوره‌یی‌هایش مونژ و فوریه. تنها دوستیِ نزدیکِ هم‌سرِ او با جوزفین بود که سبب شد سرِ او بر باد نرود.

احتمالِ e

e عادتِ نادری دارد و آن هم این که دوست دارد در مسأله‌های احتمالاتیِ عجیب و غریب خود بنمایاند. برای نمونه، بپندارید عددهایی تصادفانه از بازه‌ی $[۰,۱]$ گزیده شده‌اند. امید دارید شمارِ دفعه‌های گزینش چه باشد تا مجموعِ عددهای گزیده از ۱ بیش‌تر شود؟ برهان‌های بسیاری هست که می‌گوید امیدِ دفعه‌های گزینش مؤکدانه برابر خواهد بود با e.

نمونه‌ی دیگر، مسأله‌ی "جهیزیه‌ی سلطان" است. سلطان به یک مردِ روستایی فرصتی داده تا به عقدِ یکی از n دخترش درآید. پس دخترهای سلطان یک‌به‌یک به حضورِ روستایی می‌آیند، و جهیزه‌ی هر کدام در همان زمان به روستایی نمایانده می‌شود. روستایی تنها در حضورِ دختر می‌تواند او را برگزیند، و اگر دختری از پیشِ او برود فرصتِ برگزینش از روستایی گرفته می‌شود. روستایی می‌خواهد با دختری ازدواج کند که بهترین جهیزه را دارد. اکنون هدف یافتنِ بهترین روش برای بیشینه ساختنِ احتمالِ برگزینشِ دختری با بهترین جهیزه است. نخستین روشی که به اندیشه خواهد آمد (که البته پاسخِ معما است)، این است: برای عددِ صحیحِ k (که سپس‌تر در بهینه‌سازیآن را خواهیم یافت)، هیچ یک از k دخترِ نخست را برنگزینند، و سپس از میانِ $n-k$ دخترِ مانده، نخستین دختری را برگزینند

که جهیزیه‌یی بهتر از k دخترِ نخست دارد. در حدگیری برایِ nهای بزرگ، مقدارِ بهینه برایِ k برابر است با n/e، و احتمالِ برگزینشِ دختری با بهترین جهیزیه مجانبانه برابر خواهد بود با $۱/e$. این تنها یکی از بسیار مسأله‌یِ برگزینشِ بهینه است؛ جالب است بدانید این شیوه در کافتنِ بدنِ اجساد برایِ یافتنِ کلیه [= قلوه]ایِ مناسبِ پیوند به کار برده شده‌است!

پس سلطان مردِ روستایی را فرمود که تا چند روز به خورِش و دارِش نیک و سزاوار بپرورد. سپس دخترِ خویش به زنیِ او داد. پس دخترِ سلطان از او آبستن شد و کودکی بزاد. اکنون روزها که مردِ روستایی و سلطان به نخجیر و شکار می‌روند، نوه‌یِ سلطان وسایلِ خانه را برایِ بازی برمی‌دارد، و در پایانِ بازی آن‌ها را سر جاهایشان می‌گذارد، ولی نه لزومانه هر وسیله را سرِ جایِ خودش! حال مسأله‌یِ "جهیزیه‌یِ نامرتبِ سلطان" پیش می‌آید. احتمالِ آن که نوه‌یِ سلطان در گذرِ روز n چیز را برایِ بازی بردارد و در پایانِ روز هیچ کدام از چیزها را سرِ جایِ خود نگذاشته باشد، چه‌قدر است؟ نخستین بار اویلر این سؤال را پرسید، پاسخ داد، و نشان داد، که احتمالِ خواسته‌شده مجانبانه به $۱/e$ می‌گراید. پس، رویِ دیگرِ مسأله این است: احتمالِ این که جایگشتی از n چیز دستِ کم یک نقطه‌یِ ثابت بدارد چه‌قدر است؟ بر پایه‌یِ چیزی که در بالا گفتیم، پاسخ مجانبانه برابر خواهد بود با $۱/e - ۱$.

به راستی خسته شدیم از بس در احتمالات حضورِ e را دیدیم، ولی هنگامِ آن فرارسیده تا به خواهرِ این علم سری بزنیم.

آمار e

اگر حضورِ e در احتمالات پراکنده است، در آمار آکنده است. نخست دموار در سالِ ۱۷۳۳ حدِ توزیعِ دوجمله‌یی را یافت: توزیعِ بهنجار، $N(x;\alpha,\beta) = (\sigma\sqrt{۲\pi})^{-۱}e^{-(x-\mu)^۲/(۲\sigma^۲)}$، که زاده شد تا بر سرزمینِ آمار حکم براند. پس با ظهورِ این نوزاد e نیز به آمار قدم گشود. با نگره‌یِ "خطاهایِ مشاهده" که گاؤس در سالِ ۱۸۰۹ منتشر کرد و مقاله‌یِ لاپلاس در باره‌یِ قضیه‌یِ حدیِ مرکزی که در سالِ ۱۸۱۲ منتشر کرد، مطالعه‌یِ توزیعِ بهنجار گویی با پژوهشِ آمار هم‌معنی شد. مطالعه‌یِ توزیعِ بهنجار در پایانِ قرنِ نوزدهم در دستانِ آدلف کتلت و سر فرانسیس گالتون به اوجی نابهنجار رسید. این شوریده‌گی در قرنِ بیستم به سببِ کارل پیرسن (شاگردِ گالتون) و دشمنِ او سر رونالد فیشر کمی آرامید، اما دیگر تا آن روز توزیعِ بهنجار جایگاهی ویژه در قلب و روانِ آماردانان یافته بود.

e صمیمانه درگیرِ دو توزیعِ آماریِ دیگر نیز بود، یکی گسسته، همان توزیعِ پواسون با پارامترِ a (میانگین):

$$Prob\{X = k\} = e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!}, \qquad (۶۱)$$

و دیگری پیوسته، همان توزیعِ نمایی با پارامترِ c (وارونِ میانگین):

$$f(x) = ce^{-cx} \cdot U(x), \qquad (۶۲)$$

که $U(x)$ نشانگرِ تابعِ پله‌یِ هوی‌سایْد است.

این دو توزیع توسطِ نگره‌یِ فرآیندهایِ تصادفی به هم مرتبط می‌شوند، که توزیعِ پواسون برایِ الگو کردنِ تعدادِ ورودها به یک صف در یک بازه‌یِ زمانی استفاده می‌شود و، متناظرانه، توزیعِ نمایی برایِ الگو کردن زمانِ انتظار. پس این دو به الگوهایِ ریاضیکِ صف‌هایِ انتظارِ سوپرمارکت‌ها و تصادف‌هایِ خودروها راه یافتند. اگر متغیرِ مستقل را زمان نگیریم، که چیزی چون فاصله یا فضا، توزیعِ نمایی می‌تواند برایِ الگو کردنِ فاصله‌یِ دو تصادف در جاده استفاده شود، یا فاصله‌یِ دو جهشِ ژنتیکیِ متوالی در یک رشته‌یِ DNA.

توزیعِ نمایی ویژه‌گیِ خاصی دارد که او را به ابزاری نیرومند در نگره‌یِ اعتمادپذیری ترامی‌دیساند. درستیِ این سخن می‌تواند با محاسبه‌یِ احتمالِ خرابیِ یک دستگاهِ فیزیکی در بازه‌یِ $(x, x+dx)$ پژوهیده شود، با پندارشِ این که پیش از آن درست کار می‌کرده‌است:

$$f(x|X \le t)dx = f(x-t)dx, \qquad (۶۳)$$

که $x \ge t$ و X زمانِ تصادفیِ خرابی است.

پس نرخِ خرابیِ مشروط،

$$\beta(t) \equiv f(t|X \ge t) = f(\cdot) = c, \qquad (۶۴)$$

از t مستقل است. به این ویژه‌گی "بی‌حافظه‌گی" گویند، و ژرفانه، تنها تابعِ نمایی این ویژه‌گی را دارد. در نتیجه، در هر کاربردی که نرخِ خرابی تقریبانه ثابت است، توزیعِ نمایی خود می‌نمایاند. خودنماییِ مکررِ او در الگو کردنِ عمرِ میانگینِ دستگاه‌هایِ گوناگون، از ماشین‌هایِ صنعتی تا انسان، این گفته را گواه است.

تابعِ نمایی در ساختنِ تابعِ فرآورنده‌یِ گشتاورِ توزیعی آماری با تابعِ چگالیِ $f(x)$ نیز استفاده می‌شود:

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{sx}\, dx \Longrightarrow m_n \equiv E\{X^n\} = \Phi^{(n)}(\cdot), \qquad (۶۵)$$

که E مقدارِ امید است. برآیندانه، $\Phi(x)$ تابعِ فرآورنده‌یِ نماییِ دنباله‌یِ گشتاورها، $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$، است. در واقع، تابع‌هایِ فرآورنده توسطِ لاگرانژ و لاپلاس در پژوهش‌هایِ احتمالی‌شان به کار گرفته شده‌اند. هنوز در پیِ نمایاندنِ ارتباطِ میانِ بخش‌هایی که در مقاله آورده‌ام، باید بگویم فرمولِ استرلینگ جزئی ضروری از یکی از برهان‌هایِ قضیه‌یِ دموار است!

درختِ خانواده‌گـ*e*ـی (شجره‌نامه)

در گذشتِ این چهار سده، e همواره وظیفه‌شناسانه به این رهنمودِ فرقانی سر سپرده‌است: «بارور باش و زایا»؛ و فرزندانی صالح پرورانده‌است. در میانِ این خانواده اند:

- تابع‌هایِ هذلولی: $\sinh(z) = (e^z - e^{-z})/2$، و دیگرها.
- تابع‌هایِ مثلثاتی: $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2$، و دیگرها.
- تابعِ برنولی: $B(x) = x/(e^x - 1)$.
- تابعِ گاؤسی: $G(x;\alpha,\beta) = e^{-((x-\alpha)/\beta)^2}$.
- تابعِ خطا: $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$.
- انتگرالِ نمایی: $Ei(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$.
- چندجمله‌یی‌هایِ متعامد:
  - هرمیت: $w(x) = e^{-x^2}$ رویِ $(-\infty,\infty)$.
  - لاگر: $w(x) = x^{\alpha}e^{-x}$ رویِ $(0,\infty)$ برایِ $\alpha > -1$.
- تراديسش‌هایِ انتگرالی:
  - فوریه: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{txy}f(y)dy$.
  - لاپلاس: $\int_0^{\infty} e^{-xy}f(y)dy$.
  - گاؤس: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2}f(y)dy$.

با توجه به درختِ بالا جدالی پدید خواهد آمد که اگر می‌توانید شاخه‌یی از ریاضیات را برشمرید که e در آن نفوذ نکرده باشد. نیز از خواننده‌ها دعوت می‌کنیم شاخه‌یِ دوست‌داشتنیِ خود را بر این درخت بنگارند.

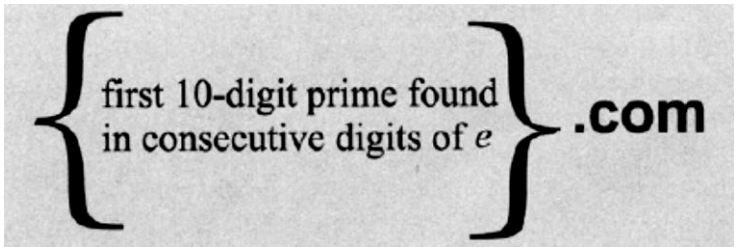
نتـ*e*ـجه‌گیری

انگار زمانِ ما برایِ گشتن و کافتن درونِ باغِ عدن رو به پایان است، هر چند زمانی چند مانده تا میوه‌یی چند بچشیم، میوه‌هایی چون تکه‌یی‌چندجمله‌یی‌ها[9]یِ نمایی. ولی، من دوست دارم سیرم را سبک‌تر به سرانجام برسانم.

رقم‌هایِ آغازینِ بسطِ دهدهیِ e بسیار راحت به خاطر سپرده می‌شوند: ۴۵ ۹۰ ۴۵ ۱۸۲۸ ۱۸۲۸ ۲.۷. با این وجود، عبارت‌هایی ساخته شده‌اند تا بر اساسِ تعدادِ حرف‌هایِ کلمه‌هایِ آن‌ها بتوان این رقم‌ها را به خاطر سپرد. یکی از دوست‌داشتنی‌ها این است:

«it enables a numskull to memorize a quantity of numerals»

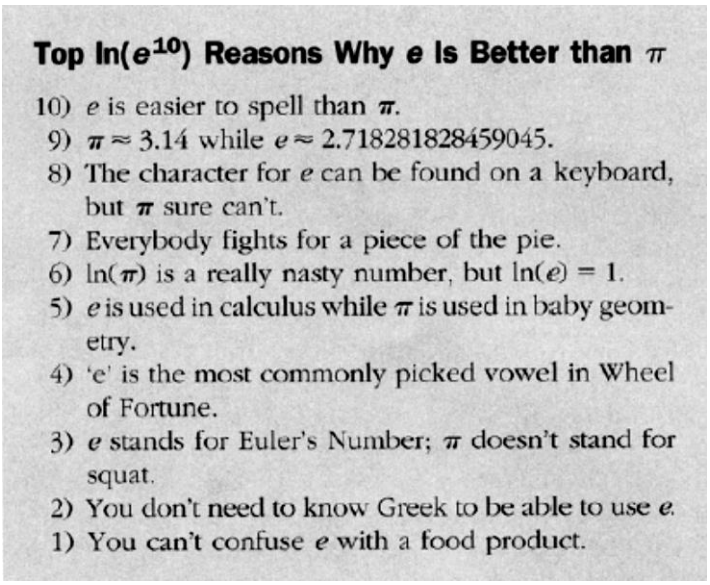
این یکی را نیز مترجم ساخته‌است: «فرزندانِ e فرسخانه به زاینده‌گی و سرسختانه به پاینده‌گی گواه استند.» (هر چند، این عبارت بیش‌تر گواهی است بر این که پارسیِ زاینده‌تر در ریاضی نیز پاینده‌تر است!) البته که هر عبارتی می‌تواند به عنوانِ یک یادآور گرفته شود، اما این عبارتِ ۴۰-کلمه‌یی به حقیقت تحسین‌برانگیز است.



شکل ۱۰

گوگلِ کبیرِ اینترنت این امتیاز را در کارنامه‌یِ خود دارد که توانسته با موفقیت یک اسمِ ریاضیک (گوگُل) را به یک فعل تراديساند. گواهِ دیگری بر ریاضی‌نژاد بودنِ گوگل این است: در سالِ ۲۰۰۴ هنگامِ پر کردنِ فرمِ ثبتِ نام برایِ آغازین عرضه‌یِ عمومیِ سهام با کمیسیونِ اوراقِ بهادار و ارز، آن‌ها تعدادِ سهامی که می‌خواستند بفروشند را نگفته بودند، که در عوضِ مقدارِ پولی را که می‌خواستند از این فروش برخیزد اعلام کرده بودند: $2,718,281,828!

سپس‌تر در همان سال، از ژرفایِ یکی از بخش‌هایِ شرکت‌شان در ارتفاعاتِ کالیفرنیا (گوگل‌پلکس)، یک ایده‌یِ نادر برایِ استخدام زاده شد. بیل‌بوردها و بنرهایی، همان‌طور که در تصویرِ ۱۰ نمایان است، بی‌نام‌ونشان در سیلیکون ولی و کمبریجِ ماساچوست پدیدار شدند. پس از رمزگشاییِ معما (که پاسخش عجیبانه از رقمِ ۱۰۱اُمِ بسطِ دهدهیِ e می‌آغازد) و با رفتن به 7427466391.com، ناگاهانه به درخواستِ استخدام در گوگل راهنمایی می‌شدید.



شکل ۱۱

هر چند e زنده‌گی‌نامه‌یِ خودش را دارد، رسمن هنوز در سایه‌یِ تیتررُبایِ پرآوازه، π، به سر می‌برد. گواهِ این سخن: در فرهنگِ اعدادِ جالب و نادر، ۸ صفحه وقفِ π شده‌است، در حالی که به e تنها یک نیم‌صفحه اختصاص یافته‌است! هر چند، اوضاع کمی به سودِ e دیگرگون شده از زمانی که e برایِ خود در اینترنت صفحه‌یی یافته‌است، که ما نمودارِ ۱۱ را نیز از آن‌جا آورده‌ایم.

مرجع

McCartin, B.J. e: The Master of All. *The Mathematical Intelligencer* **28**, 10-21 (2006).

---

[۱] ربح مرکب آن است در دوره‌هایِ ثابت بهره‌یِ پول را حساب می‌کنند و به اصلِ پول می‌افزایند که به این کار ترکیب گویند. یعنیِ در دوره‌یِ سپسینِ بهره را بر مجموعِ پولِ اولیه و سودها محاسبه می‌کنند. برایِ نمونه اگر کلِ پول ۱۰۰۰ دلار، دوره‌یِ ترکیب یک ماه، و بهره ٪۵ باشد، در ماهِ یکم ۵۰ دلار و در ماهِ دوم ۵۲.۵ دلار سود به پول افزوده خواهد شد.

[۲] Pip-penger product

[۳] پالایش (refinement)، ناصریحانه یعنی بهتر کردن، زدودن از ضعف‌ها، تظریف.

[۴] اولیل (primorial) (بخوانید /avvaliel/)، چیزی شبیه به فاکتوریل ولی برایِ اعدادِ اول.

[۵] توضیحی بایسته است. فعلِ ‹گشتن، گَرد-› در پارسیِ میانه به صورتِ ‹وَشتن، وَرد-› بوده و در هر دو معنایِ 'سیر کردن' و 'تغییر کردن' استفاده می‌شده‌است. (روشنگری: فعل‌ها را همه جا به صورتِ ‹A، B-› یا ‹A, B-› می‌نویسیم، که A مصدرِ فعل است و B بنِ مضارع.) امروزه فعلِ ‹گشتن، گرد-› کم‌تر در معنایِ دومِ خود به کار می‌رود. واژه‌گزینانِ ریاضی از این فرصت حسنِ‌استفاده کردند و برایِ ساختنِ واژه برایِ مصطلحاتِ علمیِ ریاضیِ بسیاری که از فعلِ ‹-var› مشتق شده‌اند، از صورتِ پارسیِ میانه‌یِ فعلِ نام‌برده و در معنایِ دومِ آن استفاده کردند، که با صورتِ فعلِ انگلیسی هم نزدیک است. پس این واژه‌ها چنین گزیده شدند و در "واژه‌نامه‌یِ ریاضی و آمار" نوشته شدند: وردش (variation)، ناوردا (invariant)، ناوردایی (invariance). و و در واژه‌هایِ مصوبِ فرهنگستان: هم‌وردایی (covariance)، خودهم‌وردایی (autocovariance)، و حتا وردایی (variance). ولی این واژه‌ها چندان که باید در میانِ مترجمان و ریاضی‌خوانان و ریاضی‌نویسانِ ایرانی جای نگرفته‌اند. و علت این است: فعلِ ‹وَشتن، وَرد-› برایِ ریاضی‌خوانان زایا نیست. یعنی کسی نمی‌تواند این فعل را صرف کند و از آن مشتق بسازد، در نتیجه برایِ خواننده واژه‌یی چون "ناوردایی" معنایی ندارد و به آن چونان واژه‌یی جامد خواهد نگریست. شاید بگویید علت ناآشنا بودنِ این واژه‌ها است. چنین نیست. واژه‌هایی بسی ناآشناتر و جامدتر هستند که اکنون چنان با زبان‌مان آمیخته‌اند که گمان می‌کنید از ازل در زبان‌مان بوده‌اند؛ نمونه‌یِ آن‌ها: "آمار"، که در دورانِ فرهنگستانِ اول به عنوانِ برابری برایِ "احصائیه" گزیده شد. اکنون تا کسی "احصائیه" را می‌شنود کنج‌کاو می‌شود که ریشه‌اش چیست، و می‌کوشد از ریشه‌یی که یافته مشتق‌هایی بسازد تا شاید یکی‌شان را شنیده باشد. ولی به اندیشه‌یِ کسی خطور نمی‌کند که توانستنی است "آمار" و "شمار" ربط بدارند. طبیعی است، ما از صرفِ فعل‌هایِ ساده‌یِ پارسی درمانده ایم، چه رسد به ریشه‌یابی واژه‌یی که مشتقِ فعلی نیست. و سخنِ ما همین است. اگر عربی‌گرایی بد است، نه چون ما پارس ایم، که با عربی‌گرایی‌مان از زبانِ خود بازمانده‌ایم. و بازماندن از زبانِ پارسی بد نیست چون ما پارس ایم، بد است چون زبانِ عربی از پس رفعِ نیازِ واژه‌گانیِ خود برنمی‌آید، و زبانِ پارسیِ ما از هر زبانی که می‌شناسید زایاتر است. بسی نزدیک راه رفتنِ کبک نیاموخته، روشِ خود را نیز فراموش کنیم.

برایِ گشایشِ این مشکل کاری از ما برمی‌آید: استفاده از فعل‌هایِ ساده در نوشته‌هایمان. حتا اگر برایِ خواننده غیرِعادی و ناآشنا باشد، دست‌کم ذهنِ او را به چالش می‌کشاند، و این سبب خواهد شد بکوشد بفهمد، و در فهمیدن بورزد، و با این ورزیدن توانایی خواهد یافت، توانایِ فهمیدن و فهماندن، پارسی نوشتن و پارسی خواندن. سخنِ ما این است که این ورزشی است برایِ ایستاده‌گی در برابرِ تازشِ واژه‌هایِ بیگانه، و ما بر آن ایم که تنها ورزش است.

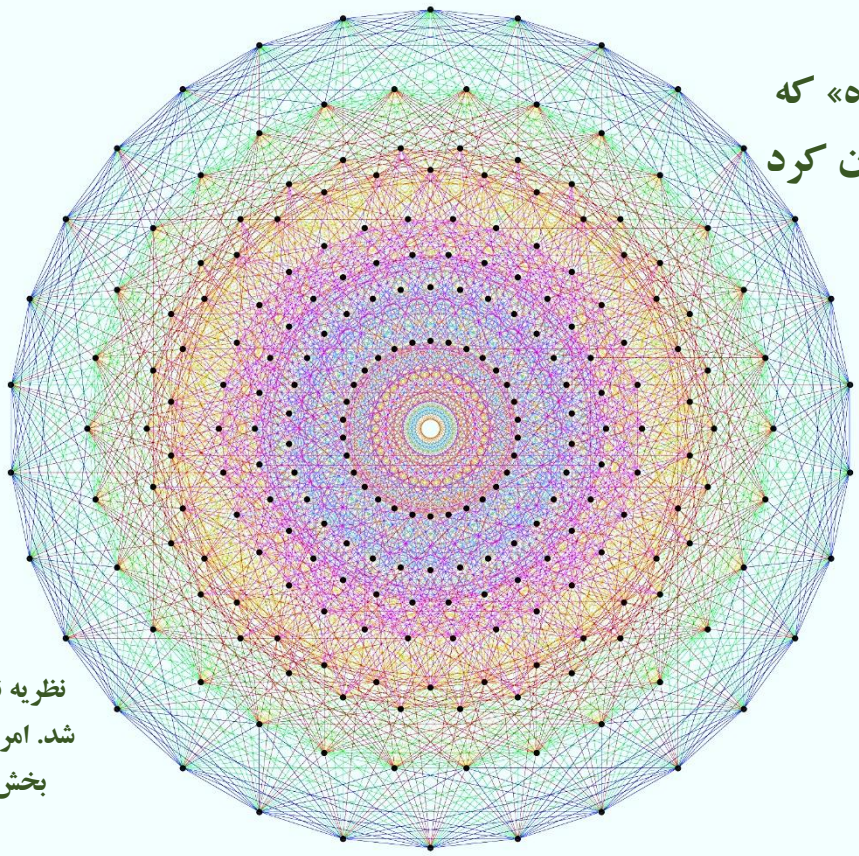
[۶] به وضوح علتی که نویسنده برشمرده‌است قانع‌کننده نیست. در حقیقت برابریِ $c_1 = e^{c_2\theta}$ نشانگرِ دایره است، و به این علت است که برابریِ (۲۱) دایره را نشانگری نمی‌کند.

[۷] ترجمه‌یِ «a plane perpendicular to the page». این جمله به خوبی نمایان‌گرِ این است که نباید واژه‌یِ "plane" را به "صفحه" برگردانیم. پس ما واژه‌یِ "هامون" را گزیده‌ایم (بسنجید با هامن (plane) [مرکزِ نشر]، هامونی (planar) [فرهنگستان]).

[۸] خمینه‌تاب (caustic) دسته‌یی پرتو است که توسطِ یک خمینه (manifold) شکسته شده‌اند یا بازتابیده شده‌اند.

[۹] تکه‌یی‌چندجمله‌یی (spline) به تابعی کافیانه خوش‌رفتار گویند که هر تکه‌اش یک چندجمله‌یی است.

دیدگاهی «بی‌فایده» که ریاضیات را دگرگون کرد



نظریه نمایش در ابتدا کنار گذاشته شد. امروزه، این نظریه در بسیاری از بخش‌های ریاضیات لازم است.

مترجم: فاطمه زین‌آبادی

دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهید بهشتی

وقتی نظریه نمایش در اواخر قرن نوزدهم پدیدار شد، بسیاری از ریاضی‌دانان ارزش آن را زیر سوال بردند. در سال ۱۸۹۷، ویلیام برنساید[۱]، ریاضی‌دان انگلیسی نوشت که شک دارد این دیدگاه نامتعارف اصلاً نتایج جدیدی به همراه داشته باشد.

جوردی ویلیامسون[۲] از دانشگاه سیدنی در یک سخنرانی در سال ۲۰۱۵ گفت: «اساساً آن‌چه [برنساید می‌گفت] این است که نظریه نمایش بی‌فایده است.»

پس از گذشت بیش از یک قرن از آغاز فعالیتش، نظریه نمایش به عنوان جزء کلیدی بسیاری از مهم‌ترین اکتشافات در ریاضیات خدمت کرده است. با این وجود هنوز هم درک مفید بودن آن در نگاه اول دشوار است.

امیلی نورتون[۳] از دانشگاه فنی کایزرسلاوترن[۴] در آلمان گفت: «بلافاصله مشخص نمی‌شود که نظریه نمایش موضوع معقولی برای مطالعه باشد.»

نظریه نمایش راهی برای گرفتن اشیای پیچیده و «بازنمایش» آن‌ها با اشیای ساده‌تر است. اشیای پیچیده غالباً گردایه‌ای از اشیای ریاضی هستند -مانند اعداد یا تقارن‌ها- که در یک رابطه ساختاری خاص با یکدیگر قرار دارند. به این گردایه‌ها گروه گفته می‌شود. اشیای ساده‌تر، آرایه‌هایی از اعداد هستند که ماتریس نامیده می‌شوند و عنصر اصلی جبر خطی هستند. در حالی که گروه‌ها مجردند و درک آن‌ها غالباً دشوار است، ماتریس‌ها و جبر خطی، ابتدایی هستند.

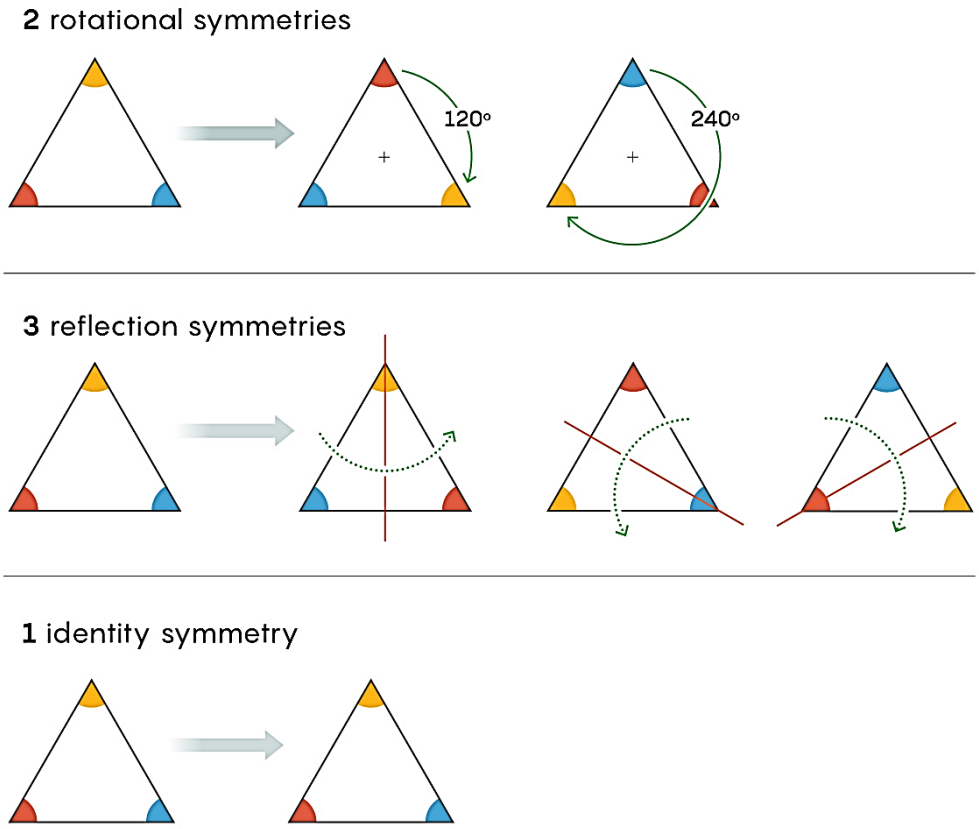
به گفته جارد وینستین[۵] از دانشگاه بوستون: «ریاضی‌دانان اساساً هر آن‌چه را که می‌توان در مورد ماتریس دانست، می‌دانند. این یکی از معدود مباحثی در ریاضی است که کاملاً درک شده است.»

برای دیدن این که چگونه می‌توان گروه‌ها را با ماتریس نمایش داد، لازم است به نوبت در مورد هر شیء به نوبه خود فکر کرد.

در ابتدا گروه‌ها را داریم. برای در نظر گرفتن یک مثال ساده، شش تقارن مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید:

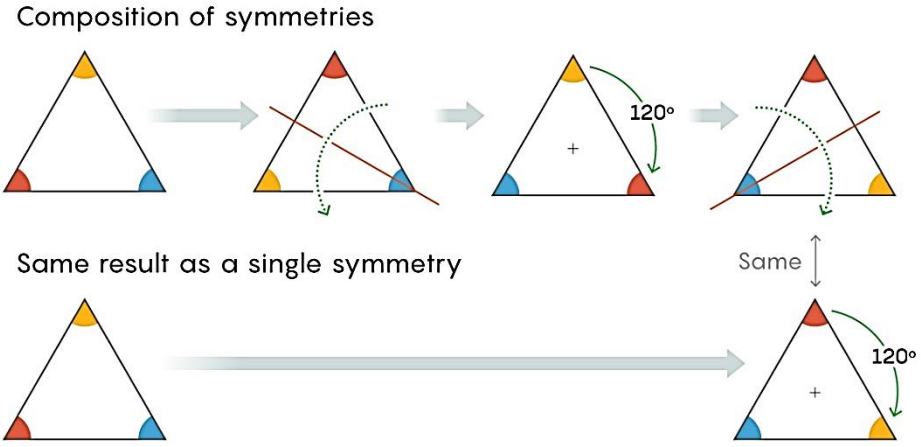
- دو تقارن چرخشی[۶]. (با ۱۲۰ و ۲۴۰ درجه)
- سه تقارن انعکاسی[۷]. (نسبت به خطوط کشیده شده از هر راس و میانه ضلع مقابل آن)
- یک تقارن همانی[۸]، که در آن شما هیچ کاری با مثلث نمی‌کنید.

این شش تقارن، جهان بسته‌ای از عناصر را تشکیل می‌دهند - یک گروه - که نام رسمی آن‌ها S_3 است. آن‌ها یک گروه تشکیل می‌دهند



زیرا شما می‌توانید هر تعداد از آن‌ها را پشت سر هم و با هر ترتیبی بر روی مثلث اعمال کنید و نتیجه نهایی همانند آن خواهد بود که فقط یک تقارن اعمال کرده باشید. مثلاً، مثلث را منعکس کنید و سپس آن را ۱۲۰ درجه بچرخانید، نتیجه رئوس را به گونه‌ای مرتب می‌کند که انگار فقط انعکاس متفاوتی انجام داده‌اید.

نورتون گفت: «من کاری انجام می‌دهم و سپس کار دیگری. نکته مهم این است که نتیجه هنوز هم یک تقارن مثلث است.»



ریاضی‌دانان از ادغام دو تقارن به عنوان یک ترکیب یاد می‌کنند: از یک عمل گروه (انعکاس) که با عملی دیگر (یک چرخش) ترکیب شده است، یک عمل سوم (انعکاس متفاوت) حاصل می‌شود. شما می‌توانید ترکیب را همانند ریاضی‌دانان یک عمل ضرب در نظر بگیرید.

نورتون گفت: «ما دوست داریم که عملیات خود را به صورت ضرب در نظر بگیریم؛ با این وجود که من اعداد را ضرب نمی‌کنم، من تبدیلات را ضرب می‌کنم».

ساده‌ترین حالتی که می‌توان دید اعداد حقیقی ناصفر هستند که یک گروه تشکیل می‌دهند. اعداد حقیقی یک عنصر همانی دارند - عدد ۱. هر عدد حقیقی که با ۱ ترکیب شود، یا ضرب شود، بدون تغییر باقی می‌ماند. همچنین می‌توانید هر ترکیبی از اعداد حقیقی را با

ترتیب دلخواه ضرب کنید و حاصل ضرب نیز همیشه یک عدد حقیقی است. ریاضی‌دانان می‌گویند که گروه اعداد حقیقی تحت عمل ضرب «بسته» است، به این معنی که شما هرگز فقط با ضرب عناصر، گروه را ترک نمی‌کنید.

از زمان کشف گروه‌ها در دهه ۱۸۳۰، آن‌ها به یکی از مهم‌ترین اشیای ریاضیات تبدیل شده‌اند که اطلاعات مربوط به اعداد اول، فضاهای هندسی و تقریباً تمام مواردی را که ریاضی‌دانان به آن‌ها اهمیت می‌دهند رمزگذاری می‌کنند. حل یک مسئله مهم غالباً درک گروه خاصی را که به آن مرتبط است به جریان می‌اندازد. اما درک اکثر گروه‌ها دشوارتر از گروه تقارن مثلث متساوی‌الاضلاع است. به عنوان مثال، به جای شش عنصر، «گروه‌های لی»، بی‌نهایت عضو دارند.

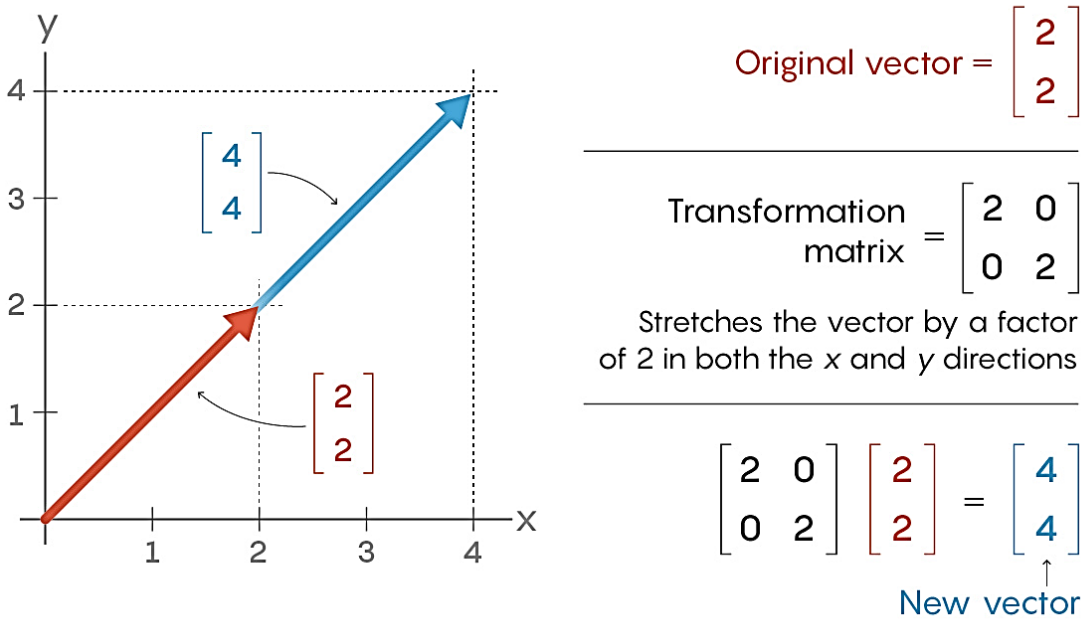
وینستین گفت: «گاهی اوقات گروه‌ها بسیار پیچیده می‌شوند.»

این امر ما را به نظریه نمایش می‌رساند، که دنیای گاه مرموز گروه‌ها را به قلمرو خوب جبر خطی تبدیل می‌کند. جبر خطی مطالعه تبدیل‌های ساده‌ی انجام شده بر روی اجسامی به نام بردار است، این اشیاء توسط مختصات‌هایی تعریف می‌شوند که می‌توانند به صورت ماتریس، آرایه‌ای از اعداد، نمایش داده شوند.

تبدیلات زمانی اتفاق می‌افتد که ماتریس دیگری بر بردار اعمال شود. به عنوان مثال اعمال ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

به یک بردار داده شده آن را با ضریب دو بزرگ می‌کند. این نمونه‌ای از تبدیل «خطی» است.



ماتریس‌های دیگر انواع مختلف تبدیلات خطی مانند انعکاس، چرخش و برش را انجام می‌دهند. همچنین یک ماتریس «همانی» وجود دارد که بردار را بدون تغییر می‌گذارد (همان‌طور که تقارن همانی مثلث را بدون تغییر و عدد ۱ سایر اعداد حقیقی را بدون تغییر می‌گذارد):

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

جبر خطی محاسبات پشت تبدیل‌ها را مشخص می‌کند. ماتریس‌ها را می‌توان به همان راحتی که روی اعداد عادی انجام می‌دهیم، ضرب، جمع و تفریق کرد.

نظریه نمایش با اختصاص یک ماتریس به هر عنصر در یک گروه، طبق قوانین خاص، پلی بین نظریه گروه و جبر خطی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال، عضو همانی گروه باید به ماتریس همانی اختصاص یابد. همچنین باید به روابط بین عناصر گروه احترام بگذارد. اگر یک انعکاس ضرب در یک چرخش داده شده، برابر با یک انعکاس دوم باشد، پس ماتریس اختصاص یافته به اولین انعکاس ضرب در ماتریس اختصاص داده شده به چرخش باید ماتریس اختصاص داده شده به انعکاس دوم شود. مجموعه‌ای از ماتریس‌ها که به این الزامات احترام می‌گذارند، نمایش یک گروه نامیده می‌شود.

یک نمایش، تصویر ساده‌ای از یک گروه ارائه می‌دهد، همان‌طور که عکس سیاه و سفید می‌تواند بدلی از تصویر رنگی اصلی با هزینه کم‌تر

باشد. به عبارت دیگر، یک نمایش برخی از اطلاعات پایه‌ای اما اساسی در مورد گروه را «به یاد می‌سپارد»، در حالی که بقیه موارد را فراموش می‌کند. هدف ریاضی‌دانان این است که از درگیری با پیچیدگی کامل یک گروه جلوگیری کنند. در عوض آن‌ها با بررسی نحوه رفتار، وقتی به قالب کاملاً شناخته شده‌ی تبدیلات خطی تبدیل می‌شود، از خصوصیات آن آگاهی پیدا می‌کنند.

نورتون گفت: «ما مجبور نیستیم یک باره به گروه نگاه کنیم؛ ما می‌توانیم به نمایشی نگاه کنیم که کوچک‌تر باشد و باز هم چیزی در مورد گروه‌مان درک کنیم.»

تقریباً همیشه می‌توان یک گروه را به روش‌های مختلف نشان داد. به عنوان مثال برای S_3، هنگامی که از اعداد حقیقی برای پر کردن ماتریس استفاده می‌شود، سه نمایش متمایز دارد: نمایش بدیهی، نمایش انعکاسی و نمایش علامتی.

ریاضی‌دانان نمایش‌های یک گروه داده شده را در یک جدول تدوین می‌کنند که اطلاعات مربوط به گروه را خلاصه می‌کند و به آن جدول مشخصه[9] می‌گویند. سطرها به نمایش‌های مختلف اشاره می‌کنند؛ ستون‌ها به ماتریس‌های مهم در آن نمایش اشاره می‌کنند: ماتریس اختصاص داده شده به عضو همانی گروه، و ماتریس‌های اختصاص داده شده به عناصر «مولد» گروه که، با هم باعث به وجود آمدن سایر عناصر می‌شود. درایه‌های جدول مقداری به نام «اثر» هر ماتریس هستند و با جمع کردن درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس (از بالا سمت چپ به پایین سمت راست) محاسبه می‌شود. در زیر جدول مشخصه برای سه نمایش S_3 آورده شده است.

Character Table of S_3

	IDENTITY 1	REFLECTION S_1	ROTATION S_1S_2
Trivial representation	1	1	1
Reflection representation	2	0	-1
Sign representation	1	-1	1

جدول مشخصه تصویری ساده از گروه ارائه می‌دهد. هر نمایش در آن اطلاعات اندک متفاوتی را ارائه می‌دهند. ریاضی‌دانان دیدگاه‌های مختلف ارائه شده توسط نمایش‌ها را با درک کلی از گروه ترکیب می‌کنند.

نورتون می‌گوید: «شما نمایش‌های مختلفی دارید که چیزهای متفاوتی را به یاد می‌سپارند، و وقتی همه این اطلاعات را کنار هم قرار می‌دهید به نوعی یک تصویر جورواجور (کالیدوسکوپی) از گروه خود دارید».

جدول مشخصه بالا بلافاصله برای ریاضی‌دانان به عنوان جدول S_3 قابل تشخیص است. اما گاهی اوقات یک جدول مشخصه می‌تواند گروه‌های مختلفی را نشان دهد، که این درجه از ابهام، در کار با ساده‌سازی اجتناب‌ناپذیر است.

در این موارد مبهم، ریاضی‌دانان ابزارهای بیشتری در اختیار دارند. یکی از آن‌ها تغییر سیستم اعدادی است که در آن نمایش را ایجاد می‌کنند. نمایش S_3 در بالا شامل ماتریس‌هایی با درایه‌های حقیقی است، اما می‌توانید از درایه‌های مختلط نیز استفاده کنید. (به طوری که هر عدد دارای یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی باشد). در حقیقت، غالباً نظریه نمایش این‌گونه است.

برخی از مفیدترین نمایش‌ها نه شامل اعداد حقیقی هستند و نه اعداد مختلط. در عوض، آن‌ها از ماتریس‌هایی استفاده می‌کنند که درایه‌های آن از سیستم‌های عددی «مدولار[10]» گرفته شده است. این همانند دنیای محاسبات ساعت است که در آن ۶ + ۷ در بسته‌بندی ۱۲ ساعته برابر ۱ می‌شود. دو گروه که دارای جدول مشخصه‌های یکسان با نمایش اعداد حقیقی هستند ممکن است جدول‌های مشخصه متفاوتی با نمایش‌های مدولار داشته باشند، این به شما اجازه می‌دهد آن‌ها را از هم جدا کنید.

امروزه نظریه نمایش ابزار اساسی در بسیاری از زمینه‌های ریاضی است: جبر، توپولوژی، هندسه، ریاضی فیزیک و نظریه اعداد - از جمله برنامه گسترده لنگلندز[11].

ویلیامسون[12] در مصاحبه‌ای گفت: «این فلسفه نظریه نمایش در نیمه دوم قرن بیستم به بخش‌های گسترده‌ای از ریاضیات وارد شده است.»

نظریه نمایش - به ویژه نمایش‌های مدولار - نقش مهمی در اثبات برجسته‌ی اندرو وایلز[۱۳] برای قضیه آخر فرما در سال ۱۹۹۴ داشت. مسئله این بود که آیا برای معادلات به فرم $a^n + b^n = c^n$ جواب‌های صحیح وجود دارد یا نه؟ وایلز ثابت کرد که وقتی n از ۲ بزرگ‌تر باشد، چنین جواب‌هایی وجود ندارد. تقریباً، او استدلال کرد جواب‌ها، اگر وجود داشته باشند، منجر به گروهی (یا «خم بیضوی») با خصوصیات بسیار غیرمعمول می‌شوند. این خصوصیات به قدری غیرمعمول بودند که به نظر می‌رسید وجود این شیء امکان ندارد. با این حال، اثبات مستقیم عدم وجود آن بسیار دشوار بود. در عوض، وایلز با خانواده‌ای از نمایش‌های مدولار کار می‌کرد که در صورت وجود گروه به دست می‌آمد. او ثابت کرد که این خانواده از نمایش مدولار نمی‌تواند وجود داشته باشد، به این معنی که گروه (یا خم بیضوی) نمی‌تواند وجود داشته باشد، که یعنی جواب‌ها نیز وجود ندارند.

این بدان معنی است که حدود ۱۰۰ سال پس از آن که ویلیام برنساید نظریه نمایش را رد کرد و بی‌فایده دانست، نظریه نمایش یک مولفه اساسی قابل بحث در مشهورترین اثبات قرن ۲۰ شد.

وینستین گفت: «من نمی‌توانم اثباتی از آخرین قضیه فرما را تصور کنم که در جایی شامل نظریه نمایش نباشد.»

مرجع

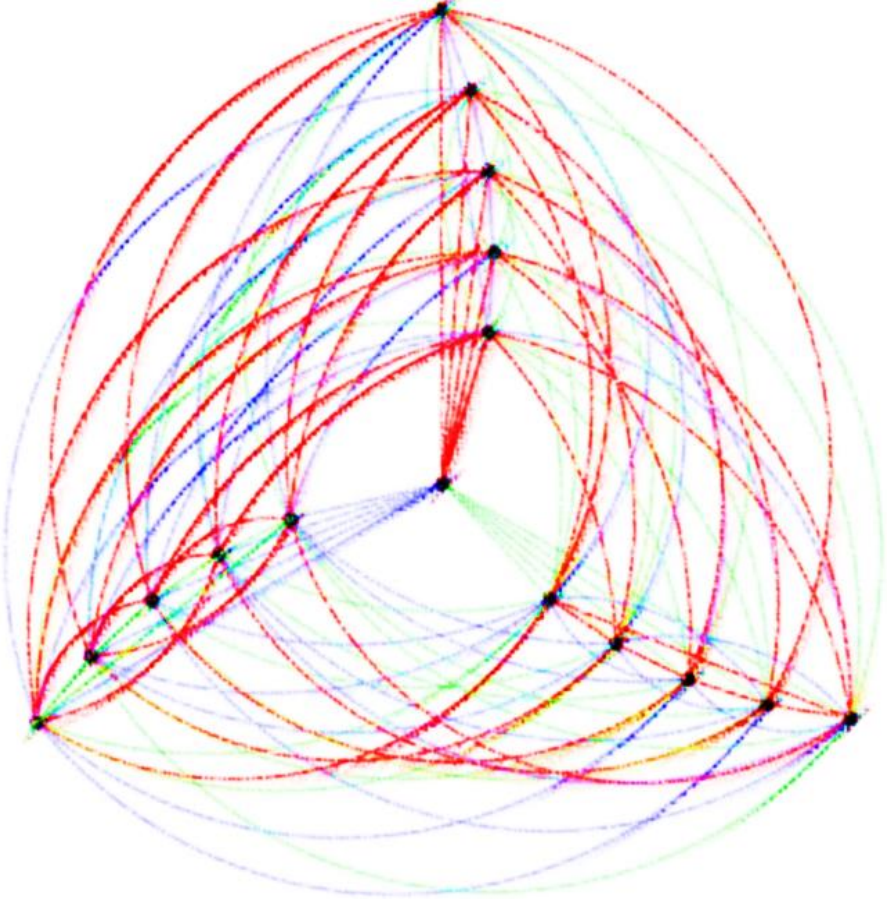
https://www.quantamagazine.org/the-useless-perspective-that-transformed-mathematics-20200609/

---

۱ William Burnside
۲ Geordie Williamson
۳ Emily Norton
۴ Kaiserslautern
۵ Jared Weinstein
۶ Rotational symmetry
۷ Reflection symmetry
۸ Identity symmetry
۹ Character table
۱۰ Modular
۱۱ Langlands program
۱۲ Williamson
۱۳ Andrew Wiles

سنگ‌نوشته بر روی پل دوبلین: همیلتون در ۱۶ اکتبر ۱۸۴۳ با قدم زدن بر روی سنگ‌فرش‌های این پل، عمل ضرب گروه چهارگان‌های همیلتونی را کشف کرد

قضیه دوستان و غریبه‌ها – یک پروفسور به پیشرفتی غیرمنتظره در اعداد رمزی دست یافت



مترجم: سیده مهدیس امامی

دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهیدبهشتی

در یک جشن به چند نفر نیاز دارید تا حداقل سه نفر یکدیگر را بشناسند؟ یا حداقل سه نفر همدیگر را نشناسند؟ کار کردن روی این مسأله با کاغذ و خودکار ممکن است زمان‌بر به نظر برسد. اما بسیاری از ریاضی‌دانان فوراً به شما می‌گویند که پاسخ شش نفر است. این سناریوی جشن که «قضیه‌ی دوستان و غریبه‌ها» نیز نامیده می‌شود، بر پایه‌ی حوزه‌ای به نام اعداد رمزی[1] است و در اوایل قرن بیستم، به نام ریاضی‌دان بریتانیایی، فرانک رمزی نام‌گذاری شد.

اکنون فرض کنید تعداد بیشتری مهمان در این جشن فرضی دعوت کرده‌ایم. چند مهمان نیاز است تا یکی از دو حالت زیر رخ دهد؟

۱. حداقل ۵ نفر پیدا شوند که با یکدیگر آشنا هستند. ۲. حداقل ۵ نفر پیدا شوند که با هم غریبه‌اند.

پاسخ واضح نیست! ریاضی‌دانان تنها می‌دانند که این عدد حداقل ۴۳ و نابیشتر از ۴۸ است. پاسخ دقیق، عددی در این بازه است. اما آن را نمی‌دانیم. افزودن تنها چند مهمان به این جشن می‌تواند مسأله‌ی عدم قطعیت را به سرعت بزرگ کند!

اکنون، برای اولین بار در دهه‌های اخیر، دیوید کانلن[2] پروفسور ریاضی کالتچ[3] و همکارش اسف فربر[4] از دانشگاه کالیفرنیا، این عدم قطعیت را برای رسته خاصی از اعداد رمزی که با عنوان اعداد رمزی چندرنگی شناخته می‌شود، با مقادیر نمایی کاهش داده‌اند.

کوین هارنت[5] در مقاله‌ای راجع به این تحقیق در مجله‌ی اینترنتی کوانتا نوشته است: «بالاخره یکی از سرسخت‌ترین اعداد ریاضی تکان خورد!»

کانلن می‌گوید: «راه حل بسیار بسیار سریع ارائه شد. در واقع ما تعجب کردیم که این‌قدر خوب کار کرد.»

ریاضیات به مسئله‌ی اعداد رمزی، در قالب نقاطی که با یک سری خطوط به هم وصل شده‌اند که به آن گراف می‌گویند، نگاه می‌کند. افرادی که در مثال جشن حضور داشتند، همان رأس‌ها هستند. اگر دو فرد یکدیگر را بشناسند، رئوس متناظر با آن‌ها را با یک خط آبی به هم وصل می‌کنیم و اگر نه، رئوس متناظر با آن‌ها را با خط قرمز متصل می‌کنیم.

در حالتی که در ابتدا توضیح داده شد، با ۶ مهمان در جشن، حداقل سه نفر دو به دو آشنا یا سه نفر دو به دو غریبه‌اند. پس در گرافی که این شرایط را مدل‌سازی می‌کند، حداقل یک مثلث با اضلاع یک رنگ (قرمز یا آبی) وجود دارد.

کانلن می‌گوید: «ما به الگوهایی علاقه‌مند هستیم که در این سناریوها ظاهر می‌شوند. اعداد رمزی به ما می‌گویند که حتی زمانی که همه چیز آشفته به نظر می‌رسد، هنوز الگوهایی برای کشف وجود دارد.»

در مطالعات جدید، کانلن و فربر، اعداد رمزی را در حالتی مورد بررسی قرار داده‌اند که ۳ رنگ و یا بیشتر برای اتصال رئوس گراف استفاده می‌شود، (حالت «چند رنگ»). برای مثال اگر رنگ‌های آبی، قرمز و سبز را برای اتصال رئوس به کار ببریم، ۱۷ رأس لازم است تا مطمئن باشیم که حداقل یک مثلث تک رنگ داریم. از مثال دو رنگ می‌دانیم که ۶ رأس برای داشتن یک مثلث تک رنگ لازم است. اساساً برای حالت‌های چندرنگی، تعداد رأس بیشتری لازم است.

به علاوه، زمانی که ریاضی‌دانان می‌خواهند شکل‌هایی با چهار، پنج یا تعداد بیشتری رأس و نه مثلث را تشخیص دهند، عدم قطعیت در تعداد کل نقاط لازم حتی در حالت چند رنگ سریع‌تر افزایش می‌یابد.

برای این کار، کانلن و فربر یک نوع جدید از اثبات را برای کم کردن عدم قطعیت حالت چند رنگ به کار بردند که در آن از مقادیر نمایی استفاده می‌شود. آن‌ها می‌گویند از رویکردی ترکیبی استفاده کردند که استراتژی‌های قدیمی‌تر را که در آن تصادفی بودن وارد بازی می‌شود، با استراتژی‌های جدیدتر که قطعی‌تر هستند ترکیب می‌کند.

کانلن می‌گوید: «ما پی بردیم که راه حلی بهتر از رنگ‌آمیزی تصادفی برای حل مسأله وجود دارد. ما این رویکرد را با روشی ترکیب کردیم که دقیقاً می‌دانیم چه چیزی را با یک رنگ خاص رنگ می‌کنیم.»

کانلن می‌گوید که اکنون به مسئله اعداد رمزی در حالت دو رنگی بازگشته است. او برای رساله دکترای خود در سال ۲۰۰۹، اولین توسعه‌های مهم از سال ۱۹۳۵ را در کاهش عدم قطعیت راه حل‌ها انجام داد. او می‌گوید برای توسعه‌ی چشمگیر این نوع مسائل، به چیزی کاملاً جدید نیاز است.

او می‌گوید: «حالت دو رنگ، احتمالاً ایده‌ی جدیدی را نیاز دارد که فکر می‌کنم در سایر مسائل حل‌نشده ریاضی مفید خواهد بود. در ریاضیات، شما شروع به کار می‌کنید زیرا به موضوعی به خاطر خود آن علاقه دارید، اما بعداً به دلایل دیگری مهم یا جالب می‌شود.»

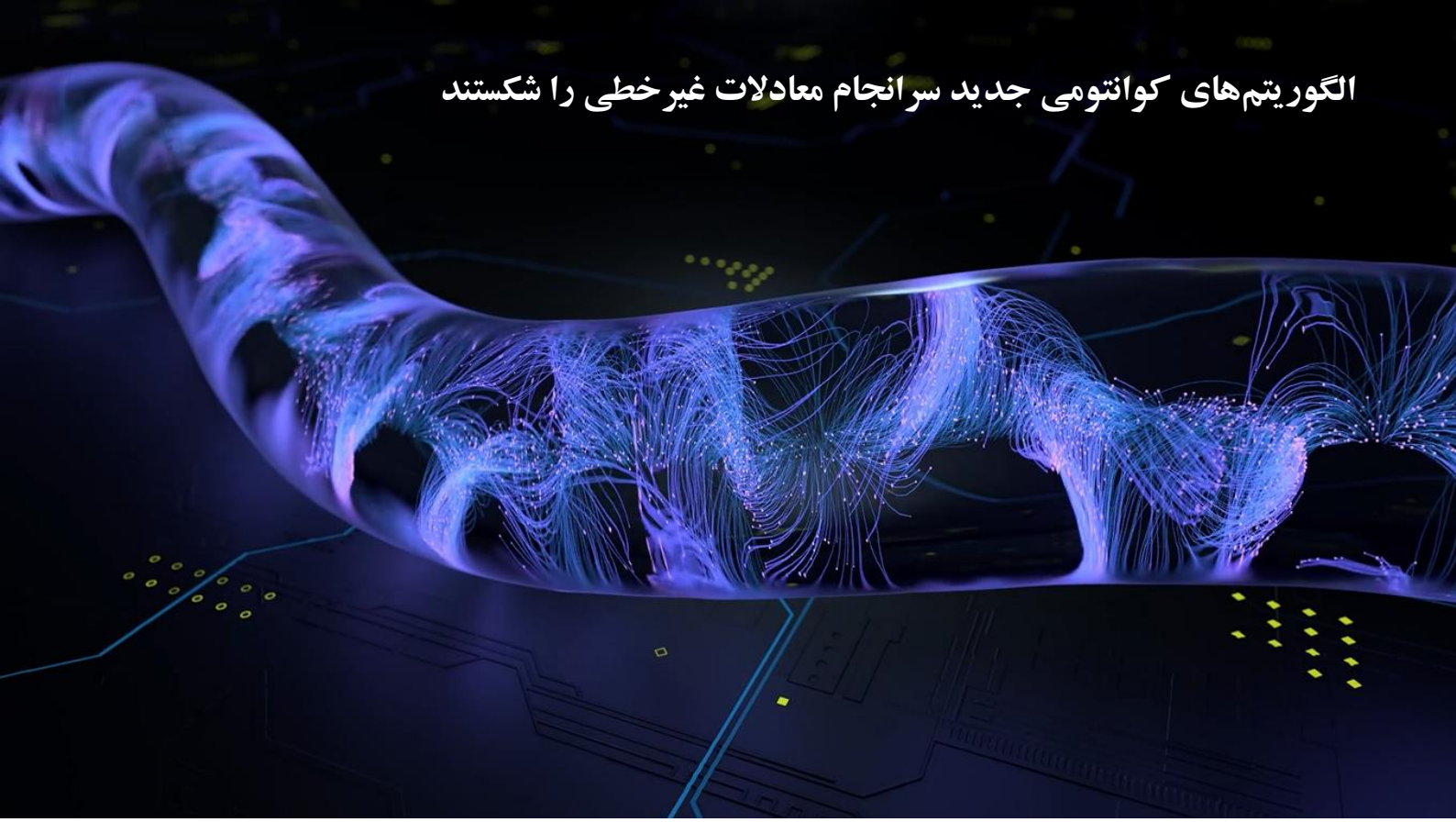
مرجع

https://scitechdaily.com/friends-and-strangers-theorem-math-professor-makes-breakthrough-in-ramsey-numbers/

---

۱ Ramsey numbers
۲ David Conlon
۳ Caltech
۴ Asaf Ferber
۵ Kevin Harnett

الگوریتم‌های کوانتومی جدید سرانجام معادلات غیرخطی را شکستند



مترجم: درسا سماوی

دانش‌آموخته ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهیدبهشتی

گاهی اوقات پیش‌بینی کردن آینده برای یک کامپیوتر، کار راحتی است. پدیده‌های ساده‌ای مثل این که چه‌طور شیره‌ی گیاه از تنه‌ی درختی جاری می‌شود، واضح هستند و می‌توان آن‌ها را با چند خط کدنویسی با استفاده از مبحثی که ریاضی‌دانان به آن معادلات دیفرانسیل خطی می‌گویند، به راحتی به دست آورد. اما در دستگاه‌های غیرخطی، فعل و انفعالات می‌توانند بر هم اثر بگذارند: هنگامی که جریانات هوایی از بال‌های یک جت عبور می‌کند، جریان هوا باعث برهم‌کنش‌های مولکولی می‌شود و همین، جریان هوا را تغییر می‌دهد و غیره. این واکنش‌های چرخه‌ای، آشوب ایجاد می‌کنند، طوری که تغییرات کوچک در شرایط اولیه، به رفتارهای کاملاً متفاوتی بدل می‌شوند و پیش‌بینی را تقریباً غیرممکن می‌کنند - هر چه‌قدر هم کامپیوتر ما قوی باشد.

اندروز چایلدز[1]، محقق اطلاعات کوانتومی در دانشگاه مریلند می‌گوید: «یکی از دلایل سختی پیش‌بینی آب و هوا یا فهمیدن جریانات پیچیده‌ی مایعات همین است. اگر قادر به حل این دینامیک‌های غیرخطی باشید، آن‌گاه مسائل محاسبه‌ای سختی وجود دارد که می‌توانید حل کنید.»

احتمالاً این کار به زودی امکان‌پذیر خواهد بود. در تحقیقات مجزایی که در ماه نوامبر منتشر شده است، دو گروه ابزارهای قدرتمندی را توضیح داده‌اند که به کامپیوترهای کوانتومی اجازه می‌دهد دینامیک‌های غیرخطی را مدل‌سازی کنند؛ یکی به سرپرستی چایلدز و دیگری که در دانشکده‌ی تکنولوژی ماساچوست پایه‌گذاری شده است.

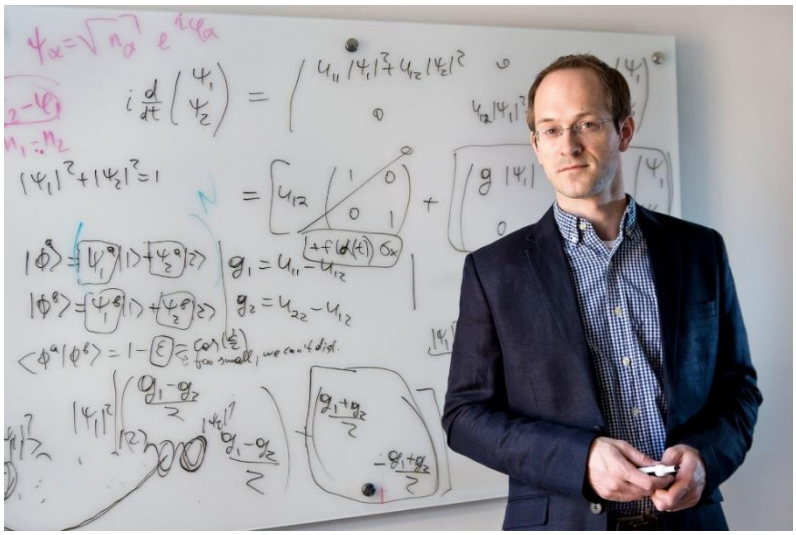
کامپیوترهای کوانتومی، از پدیده‌های کوانتومی برای اجرای برخی محاسبات بهره می‌برند تا سودبخش‌تر از نسخه‌های کلاسیک خود عمل کنند. به لطف این مهارت‌ها، می‌توانند معادلات دیفرانسیل خطی پیچیده را به طور تصاعدی، سریع‌تر از ماشین‌های کلاسیک تمام کنند. محققان امیدوارند بتوانند به طور مشابه، مسائل غیرخطی را نیز با الگوریتم‌های هوشمندانه‌ی کوانتومی کنترل کنند.

دیدگاه‌های جدید غیرخطی‌ها را به مجموعه‌ی زود هضم‌تر تقریبات خطی تبدیل می‌کند، در صورتی که روش‌های دقیق این دو، تفاوت‌های قابل‌توجهی دارند. در نتیجه، محققان دو راه متفاوت برای پرداختن به مسائل غیرخطی با کامپیوترهای کوانتومی دارند.

ماریا کیفروا[2]، محقق محاسبه‌ی کوانتومی در دانشگاه تکنولوژی سیدنی که به هیچ یک از این دو گروه تحقیقاتی وابسته نیست، گفته است: «جالبی این دو مقاله این است که نظمی یافته‌اند که با پذیرفتن فرضیاتی، الگورتیمی کارآمد دارند. این خیلی هیجان‌انگیز است و هر دو تحقیق، از تکنیک‌های بسیار زیبایی استفاده کرده‌اند.»

هزینه‌ی آشوب

بیش از ده سال است که محققان اطلاعات کوانتومی تلاش کرده‌اند تا از معادلات خطی به عنوان کلیدی برای بازگشایی معادلات غیرخطی استفاده کنند. یکی از کشفیات مهمی که در سال ۲۰۱۰ منتشر شد، زمانی است که دومینیک بری[۳] که در حال حاضر در دانشگاه مک کواری واقع در سیدنی است، اولین الگوریتمی را برای حل معادلات دیفرانسیل خطی ابداع کرد که روی کامپیوترهای کوانتومی به طور تصاعدی سریع‌تر از کامپیوترهای کلاسیک عمل می‌کند. بعد از مدت کوتاهی، تمرکز بری هم به معادلات دیفرانسیل غیرخطی تغییر پیدا کرد.



اندرو چایلدز، از دانشگاه مریلند، یکی از دو تلاش را رهبری کرد که به کامپیوترهای کوانتومی اجازه داد تا دینامیک‌های غیرخطی را بهتر مدل کنند. الگوریتم تیم او این سیستم‌های آشوبناک را با استفاده از تکنیکی به نام خطی‌سازی کارلمن به مجموعه‌ای از معادلات خطی قابل درک‌تر تبدیل کرد.

بری می‌گوید: «پیش از این نیز روی این مبحث هم کار کرده بودیم، اما خیلی خیلی ناکارآمد بودند.»

مشکل این‌جاست که فیزیک زیربنای خود کامپیوترهای کوانتومی نیز، اساساً خطی هستند. بابک کیانی[۴]، نویسنده‌ی همکار در مطالعه‌ی MIT می‌گوید: «مثل این است که به یک ماشین، پرواز کردن یاد بدهی.»

در نتیجه، ترفند این است که راهی پیدا کنیم تا با ریاضی، یک دستگاه غیرخطی را به یک دستگاه خطی تبدیل کنیم. چایلدز می‌گوید: «می‌خواهیم دستگاه‌های خطی داشته باشیم، چرا که ابزارهای ما این چنین هستند.». دو گروه، این کار را به دو شیوه‌ی متفاوت انجام دادند.

گروه چایلدز از خطی‌سازی کارلمن - روشی ریاضیاتی قدیمی که به ۱۹۳۰ برمی‌گردد - برای تبدیل کردن مسائل غیرخطی به آرایه‌ای از معادلات خطی استفاده کرد.

متاسفانه، مجموعه‌ی چنین معادلاتی، نامتناهی است. محققان باید بفهمند چه تقریبی برای متوقف کردن این مجموعه مناسب است. نونو لوریرو[۵]، فیزیک‌دان پلاسما در MIT و نویسنده‌ی همکار مطالعات مریلند می‌گوید: «آیا در معادله‌ی شماره‌ی ۱۰ توقف کنم؟ شماره‌ی ۲۰ چطور؟». این گروه اثبات کرد که برای محدوده‌ی خاصی از غیرخطی‌ها، می‌توان مجموعه‌ی نامتناهی را کوتاه کرد و سپس معادلات را حل کرد.

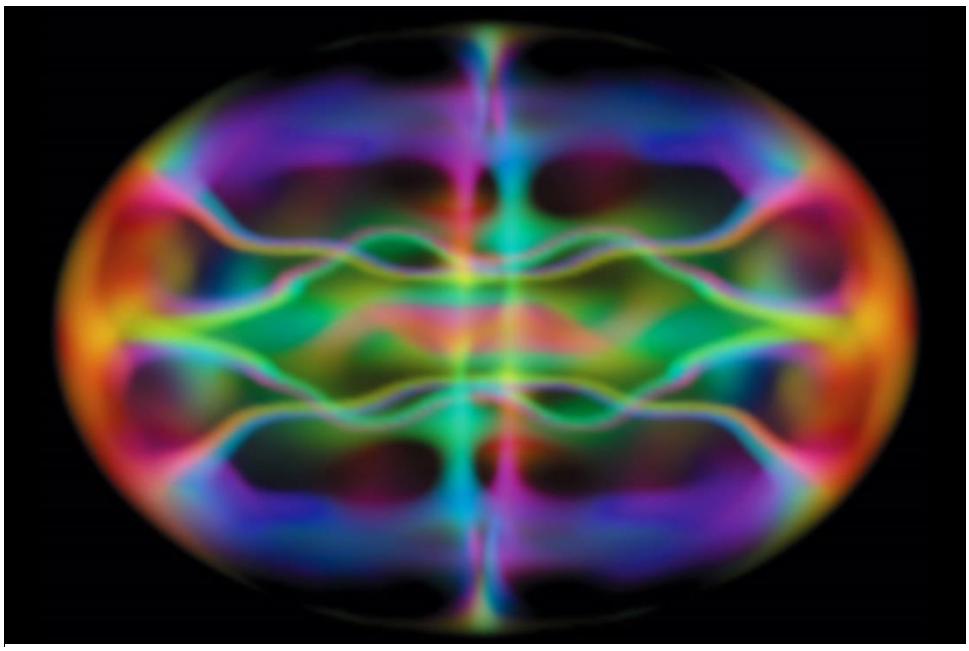
مقاله‌ای که توسط MIT رهبری می‌شد، دیدگاه متفاوتی را بررسی کرد. تمامی مسائل غیرخطی را به عنوان چگالش بوز-اینشتین مدل‌سازی کرد. در چنین وضعیتی، برهم‌کنش‌ها در گروهی از ذرات فوق سرد باعث همسان شدن رفتار تک تک ذره‌های مجزا می‌شود. تمام ذرات به هم متصل هستند، بنابراین رفتار هر یک از ذرات، طی چرخه‌ای از ویژگی‌های غیرخطی، بر سایر ذرات اثر می‌گذارد.

الگوریتم MIT این پدیده‌ی غیرخطی را، با استفاده از ریاضیات بوز-اینشتین، بر روی یک کامپیوتر کوانتومی تطبیق می‌دهد تا خطی و غیرخطی را به هم ارتباط دهد. بنابراین با تصور کردن یک شبه سازگاری چگالش بوز-اینشتینی، که برای هر مسئله‌ی غیرخطی ساخته شده باشد، این الگورتیم پیامد کارآمدی برای تقریبات خطی خواهد داشت. توبیاس آزبورن[۶]، دانشمند اطلاعات کوانتومی در دانشگاه لیبنیز هانوور - که در هیچ یک از دو تحقیق، دست نداشته است - می‌گوید: «معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی مورد علاقه‌ی خود را به من بدهید تا شبیه‌سازی چگالش بوز - اینشتین آن را بسازم. از این ایده خیلی خوشم می‌آید!»

از نظر بری، هر دو مقاله به روش‌های مختلفی مهم هستند (او در هیچ یک از این دو مقاله، دست نداشته است). طبق گفته‌ی او: «در آخر، اهمیت آن‌ها این است که نشان می‌دهند می‌توان از این روش‌ها برای تعیین رفتارهای غیرخطی استفاده کرد.»

دانستن محدودیت‌ها

با این که این‌ها پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای هستند، اما تازه اولین قدم‌ها در رمزگشایی دستگاه‌های غیرخطی هستند. محققان بیشتری این روش‌ها را آنالیز و اصلاح خواهند کرد؛ حتی پیش از این که سخت‌افزاری که برای اجرای آن‌ها نیاز است، به حقیقت بپیوندد. کیفروا می‌گوید: «با استفاده از هر دو روش، به آینده نگاه می‌کنیم.» استفاده از آن‌ها برای حل مسائل غیرخطی شدنی، نیازمند کامپیوترهای کوانتومی با هزاران کیوبیت است تا میزان خطا و اختلال را به حداقل برساند - خیلی فراتر از آن‌چه امروزه امکان‌پذیر است.



الگوریتم تیم تحت رهبری MIT، هر مسئله غیرخطی را به عنوان چگالش بوز - اینشتین مدل‌سازی کرد، حالتی عجیب از ماده که در آن ذرات متصل به هم، همه یکسان رفتار می‌کنند.

همچنین هر دو الگوریتم، به طور واقع‌بینانه تنها کمی از مسائل غیرخطی را حل می‌کنند. مطالعات مریلند مقدار دقیق غیرخطی بودن آن را با پارامتر جدید R (که نشان‌دهنده‌ی نسبت غیرخطی مسئله به خطی آن است) اندازه‌گیری می‌کند - میزان گرایش آن به آشفتگی در مقایسه با اصطکاکی که باعث ادامه یافتن سیستم می‌شود.

آزبون می‌گوید: «مطالعات چایلدز، از نظر ریاضی دقیق است. دلایل روشنی مبنی بر این که چه موقع روشش کار می‌کند و چه موقع کار نمی‌کند، ارائه کرده است. به نظر من، این خیلی خیلی جالب است. کمک اصلی که کرده، همین است.»

طبق گفته‌ی کیانی، مطالعه‌ای که زیر نظر MIT صورت گرفته است، هیچ قضیه‌ای را به طور دقیق اثبات نمی‌کند تا الگوریتمش را محدود کند. اما این گروه تصمیم دارد پیش از پرداختن به مسائل پیچیده‌تر، با انجام آزمایش‌هایی در مقیاس کوچک روی کامپیوتر کوانتومی، اطلاعات بیشتری درمورد محدودیت‌های الگوریتم کسب کند.

مهم‌ترین هشدار برای هر دو روش این است که راه حل‌های کوانتومی، اساساً با راه‌حل‌های کلاسیک تفاوت دارند. حالت‌های کوانتومی شباهت بیشتری به احتمالات دارند تا مقادیر مطلق؛ بنابراین به طور مثال به جای پیش‌بینی جریان هوا حول تمام بخش‌های بدنه‌ی جت، می‌توان سرعت میانگین را به دست آورد یا توده‌های هوای راکد را شناسایی کرد.

طبق گفته‌ی آزبورن، مهم است که توانایی‌های کامپیوترهای کوانتومی را بیش از حد نشان ندهیم. اما محققان مصمم‌اند تا ۵ الی ۱۰ سال آینده، الگوریتم‌های کوانتومی موفق بسیاری را روی مسائل عملی این چنینی، اعمال کنند. آزبورن می‌گوید: «همه نوع حالتی را امتحان خواهیم کرد و اگر به محدودیت‌ها فکر کنیم، ممکن است خلاقیتمان را محدود کند.»

مرجع

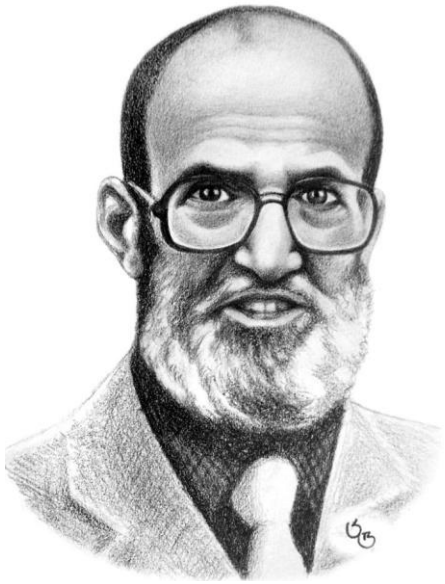
https://www.quantamagazine.org/new-quantum-algorithms-finally-crack-nonlinear-equations-20210105/

---

[۱] Andrew Childs
[۲] Mária Kieferová
[۳] Dominic Berry
[۴] Bobak Kiani
[۵] Nuno Loureiro
[۶] Tobias Osborne

Paul Halmos

March 3, 1916 - October 2, 2006



ریاضیات کاربردی همواره به ریاضیات محض احتیاج دارد، دقیقاً به همان اندازه که مورچه‌خوارها همواره به مورچه‌ها نیاز دارند.

ریاضی‌دانان نوع جدیدی از اعداد اول را کشف کردند

مترجم: سیده مریم سیادتی

دانش‌آموخته ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهیدبهشتی

- اعداد اول ظریف[1]، با این ترفند عجیب به عدد مرکب تبدیل می‌شوند.
- محققان ریاضی با استفاده از روش اثبات دلو[2] ثابت کردند که این اعداد اول وجود دارند.
- تاکنون هیچ مثال شناخته‌شده‌ای وجود ندارد، اما ریاضی‌دانان امیدوار هستند.

به تازگی، ریاضی‌دانان رسته‌ی جدیدی از اعداد اول ظریف را پیدا کرده‌اند. این اعداد اول بی‌نهایت طولانی، با تغییر هر یک از ارقام خود، سریع‌تر از سیندرلا در نیمه شب، به اعداد مرکب تبدیل می‌شوند.

اعداد اول ظریف دارای تعداد نامتناهی رقم هستند و با جایگزینی هر رقم توسط هر مقدار دیگری، به عددی مرکب تبدیل می‌شوند. برای مثال ، عدد ۱۰۱ که اول است را در نظر بگیرید. ارقام را به ۲۰۱، ۱۰۲ یا ۱۱۱ تغییر دهید، شما مقادیری دارید که بر ۳ بخش‌پذیرند و در نتیجه اعدادی مرکب‌اند.

این ایده دهه‌ها قدمت دارد، پس چه چیزی جدید است؟ در حال حاضر، ریاضی‌دانان دانشگاه کارولینای جنوبی یک طیف خاص‌تر از اعداد اول ظریف ایجاد کرده‌اند: *اعداد اول بسیار ظریف*[3]. این‌ها اعداد اولی هستند که به آن‌ها نامتناهی «صفرهای پیشرو» اضافه شده و عدد اول اصلی را تغییر نمی‌دهند، اما برای آزمایش ظرافت، با تغییر صفرها به سایر ارقام تفاوت ایجاد می‌شود.

شما این چیزها را دوست خواهید داشت!

بنابراین به جای عدد ۱۰۱، عدد ۰۰۰۱۰۱ را درنظر بگیرید. این مقدار، یک عدد اول است و اساساً صفرها در آن‌جا تنها برای نمایش وجود دارند. اما اگر صفرها را تغییر دهید، مثل این که ۰۰۰۱۰۱ را به ۱۰۰۱۰۱ تبدیل کنید، یک عدد مرکب دارید که بر ۳ بخش‌پذیر است. ریاضی‌دانان باور دارند که بی‌نهایت عدد اول بسیار ظریف وجود دارد، اما تاکنون آن‌ها نتوانسته‌اند یک مثال واقعی پیدا کنند. آن‌ها با اضافه کردن صفرهای پیشرو و انجام محاسبات، تمام اعداد اول تا ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ را آزمایش کرده‌اند.

استاد ریاضیات دانشگاه کارولینای جنوبی، مایکل فیلاستا[4]، و دانشجوی فارغ‌التحصیل سابق، جرمیا ساوتویک[5]، با هم روی اعداد بسیار ظریف کار کردند و یافته‌های خود را در ژورنال ریاضیات محاسبات و arXiv منتشر کردند. آن‌ها حتی بدون داشتن مثالی خاص، ثابت کردند که این اعداد در مبنای ۱۰ وجود دارند و تعداد آن‌ها نامتناهی است.

خود اثبات بر نوعی از منطق استوار است، که مانند قواعد تقسیم ساده درباره استروئیدها[6] است. خانواده‌ای خاص از اعداد، مثل آن‌هایی

که حاوی ۹ هستند یا آن‌هایی که مجموعشان برابر با مقدار خاصی است، می‌توانند کاملاً ثابت شوند و سپس به دلوهای جداگانه اختصاص یابند. هرچه دلوهای بیشتری وجود داشته باشد، تعداد بیشتری از مجموعه عظیم اعداد صحیح، توسط این اثبات پوشش داده می‌شود.

استیو نادیس[۷] از مجله اینترنتی کوانتا گزارش می‌دهد: «البته وضعیت مربوط به اعداد اول بسیار ظریف پیچیده‌تر است. شما به دلوهای بیشتری نیاز دارید، چیزی از مرتبه ۱۰۲۵۰۰۰ و در یکی از آن دلوها؛ اگر هر کدام از ارقام اعداد اول از جمله صفرهای پیشرو، افزایش یابد؛ به طور قطع به عدد مرکب تبدیل می‌شود.»

این نوعی از ریاضیات نیست که کاربرد عملی داشته باشد، بله این نظریه اعداد است که بیشتر به عنوان راهی برای کشف محدودیت‌های ریاضیات عمل می‌کند. حتی از زمانی که فیلاستا و ساوتویک اثبات خود را منتشر کردند، موارد خاص‌تری از اعداد ظریف در آثار وجود دارد زیرا سایر ریاضی‌دانان از تحقیقات آن‌ها به عنوان نقطه پرشی استفاده می‌کنند.

چه می‌شود اگر ۱۰۱ را در نظر بگیرید و یک ۱ وارد کنید تا به ۱۰۱۱ برسید و یا یک رقم بردارید تا به ۱۰ برسید؟ از نقطه نظر ارقام، امکانات نامحدود است.

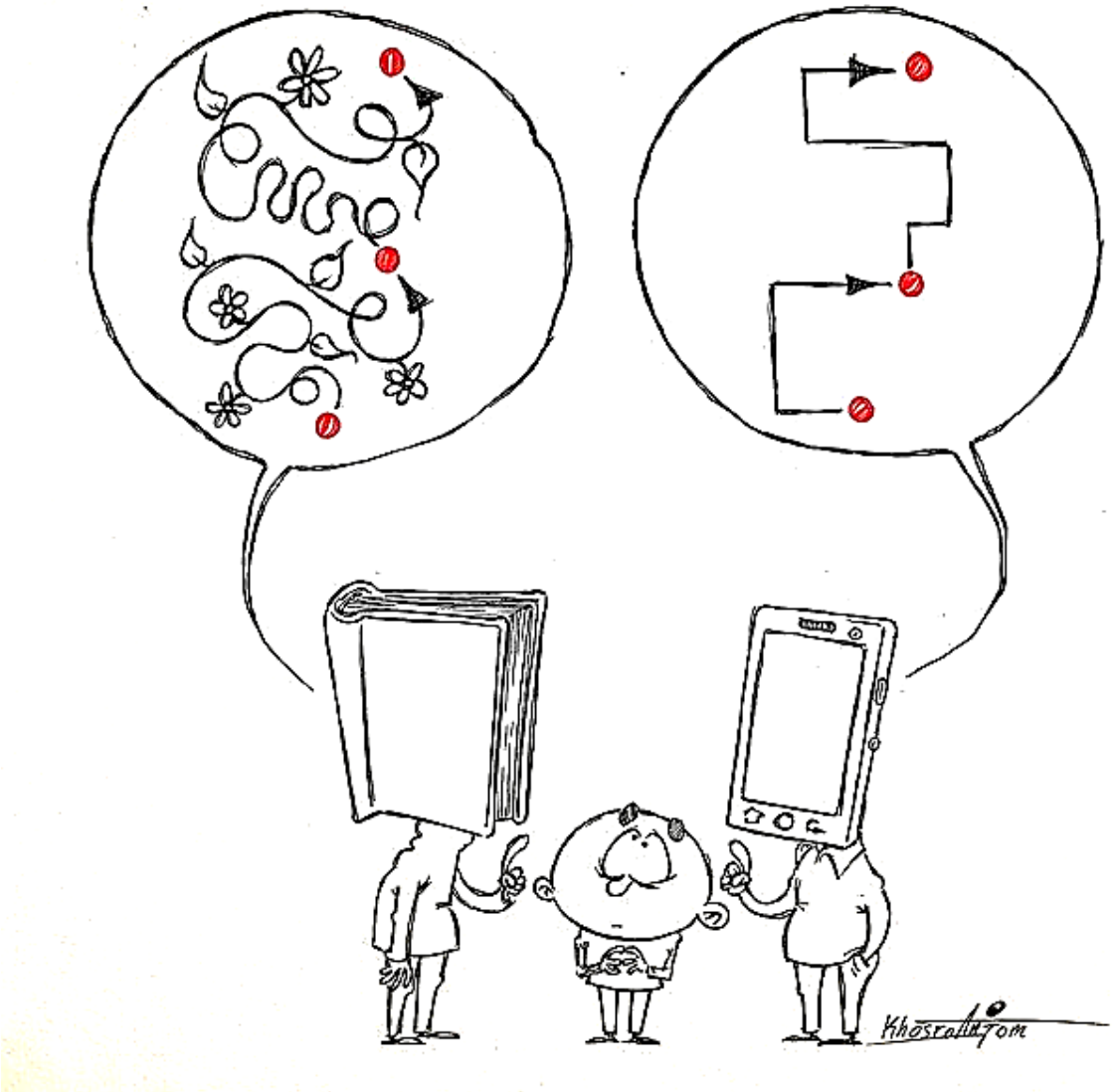
مرجع

https://www.popularmechanics.com/science/math/a36014795/mathematicians-discover-new-kind-of-prime-number/

---

۱ digitally delicate prime numbers
۲ bucket argument
۳ widely digitally delicate primes
۴ Michael Filaseta
۵ Jeremiah Southwick
۶ steroid
۷ Steve Nadis

روی تخته سیاه


Khosrotom

یک اثبات زیبا: چرا حد $\frac{\sin(x)}{x}$ وقتی x به سمت ۰ میل می‌کند، برابر با ۱ است؟

مترجم: وانیا امیری

دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهیدبهشتی

از وقتی که حسابان را یاد گرفتم، مدام به دنبال این بوده‌ام تا سر از کار هر چیز خاصی دربیاورم و بفهمم که این چیزها چه‌طور عمل می‌کنند. درک این که هر چیزی چه‌طور کار می‌کند واقعاً جالب است. اما این که بفهمیم چه‌طور چیزی کشف شده، از آن هم جالب‌تر است. و شگفت‌انگیزتر از تمام این‌ها، این است که خودمان یاد بگیریم که یک چیز چه‌طور عمل می‌کند یا چه‌طور وجود دارد. مثلاً برای یک دانش‌آموز ابتدایی، دانستن این که ۲ × ۲ برابر است با ۴، ارزش چندانی ندارد اما اگر این دانش‌آموز بتواند با استفاده از بلوک‌های چوبی استدلال کند که چرا ۴ = ۲ × ۲، آن‌گاه این درک او بسیار ارزشمند و تحسین برانگیز است.

به همین خاطر است که فکر کردن راجع به اثبات‌ها و خواندن درباره آن‌ها بسیار لذت‌بخش است. نوشتن یک اثبات نیازمند مهارتی فراتر از تفکر راجع به آن است. اغلب اوقات، افراد برجسته تلاش می‌کنند تا بنویسند که چرا تمام چیزها دقیقاً همان‌طورند که هستند. نوشتن یک اثبات، تحصیلات ویژه‌ی خودش را می‌طلبد. متأسفانه مدارس چیزی راجع به اثبات‌ها، این که آن‌ها چه هستند و چه‌طور به ذهن خطور می‌کنند، به دانش‌آموزان یاد نمی‌دهند. من واقعاً امیدوارم که این موضوع به زودی اصلاح شود. اگر می‌خواهید یاد بگیرید که چگونه اثبات‌ها را بسازید، پیشنهاد می‌کنم کتاب «**چگونه مسأله حل کنیم، نوشته‌ی جورج پولیا**» را بخوانید.

در ابتدا باید ذکر کنم که فردی که برای اولین بار، قضیه‌ای (که در ادامه آورده می‌شود) را اثبات نمود، آن را به طور اتفاقی کشف نکرد. او این حقیقت را کشف کرد چون شخص درخشان و برجسته‌ای بود. از سوی دیگر، او این کار را تنها با استفاده از چند ایده‌ی پایه‌ای مثلثات انجام داد. این نشان می‌دهد که **شما هم می‌توانید با دانشی ساده، اثبات‌ها و حقایق زیبای ریاضی را پیدا کنید.**

باید بدانیم این که فردی یک قضیه را اثبات کرده، به این معنا نیست که شما نیز به صورت جداگانه نمی‌توانید آن را تحقیق و بازبینی کنید. مثلاً اگر همین‌طور که در خانه نشسته‌اید، برای قضیه‌ی مورد بحثمان اثباتی بیاورید، آن قضیه، دیگر مال شماست؛ هر چند دنیا آن را به نام شما نشناسد.

چندی پیش، در بین دانش‌آموزان دوره درسی حسابان پیشرفته در آکادمی خان تئوری بسیار مشهوری را دیدم که در ادامه، اثبات آن را به صورت مرحله به مرحله باز خواهم کرد. ممکن است برای بعضی‌ها پیچیده به نظر برسد اما در کل، اثبات نسبتاً ساده‌ای است.

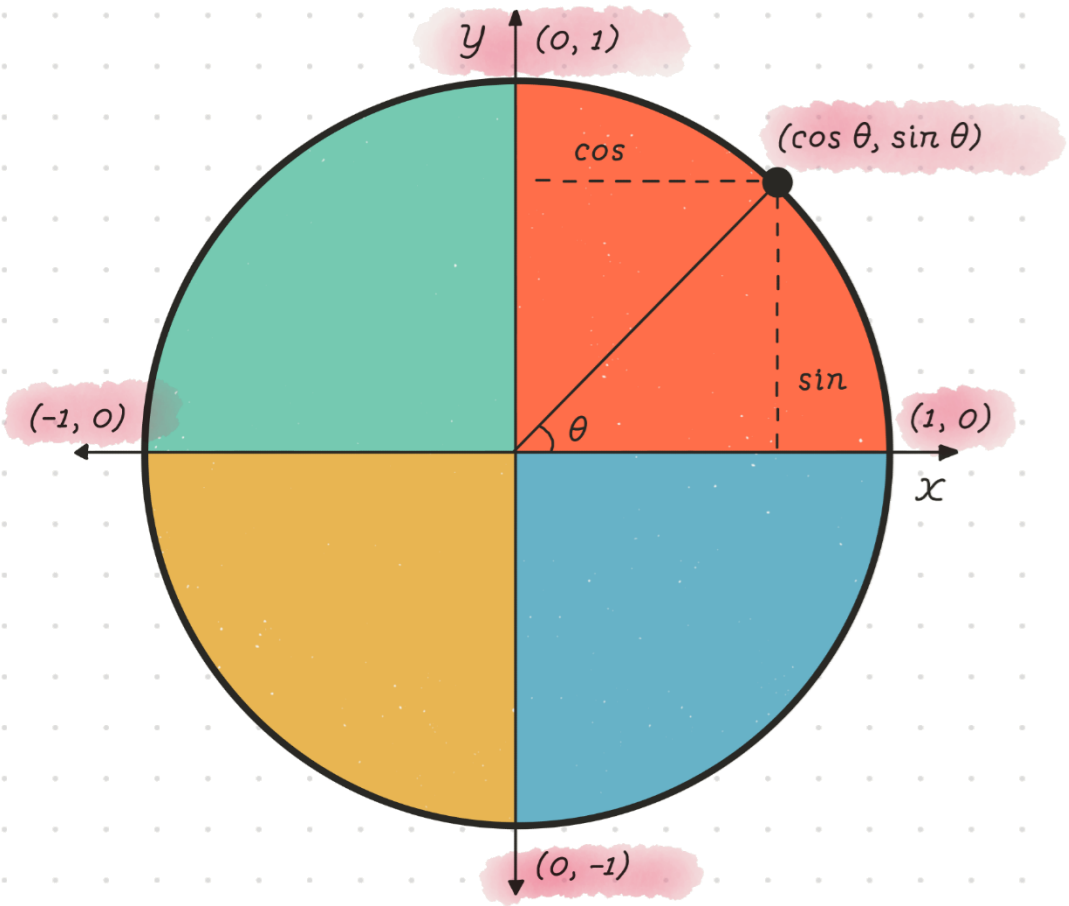
یک اثبات زیبا: چرا حد $\frac{\sin(x)}{x}$ وقتی x به سمت ۰ میل می‌کند، برابر با ۱ است؟

ریاضیدان‌ها اثبات‌هایی را دوست دارند که ساده شده و به اصطلاح «شسته رفته» باشند. حقیقتی که برای اثباتش چندین صفحه نگاشته شده و در آن معادله‌های گوناگون و زیادی به کار رفته، هیچ‌گاه زیبایی اثبات را منعکس نمی‌کند. این اثبات ممکن است طولانی به نظر برسد اما این به آن دلیل است که من سعی کرده‌ام هر قسمت را با تمامی جزئیات و به طور مبسوط ارائه کنم. اگر به میانه اثبات رسیدید و احساس کردید که هنوز آن را متوجه نشده‌اید، لطفاً وحشت نکنید. فقط باید کمی با دقت بیشتری آن را بخوانید.

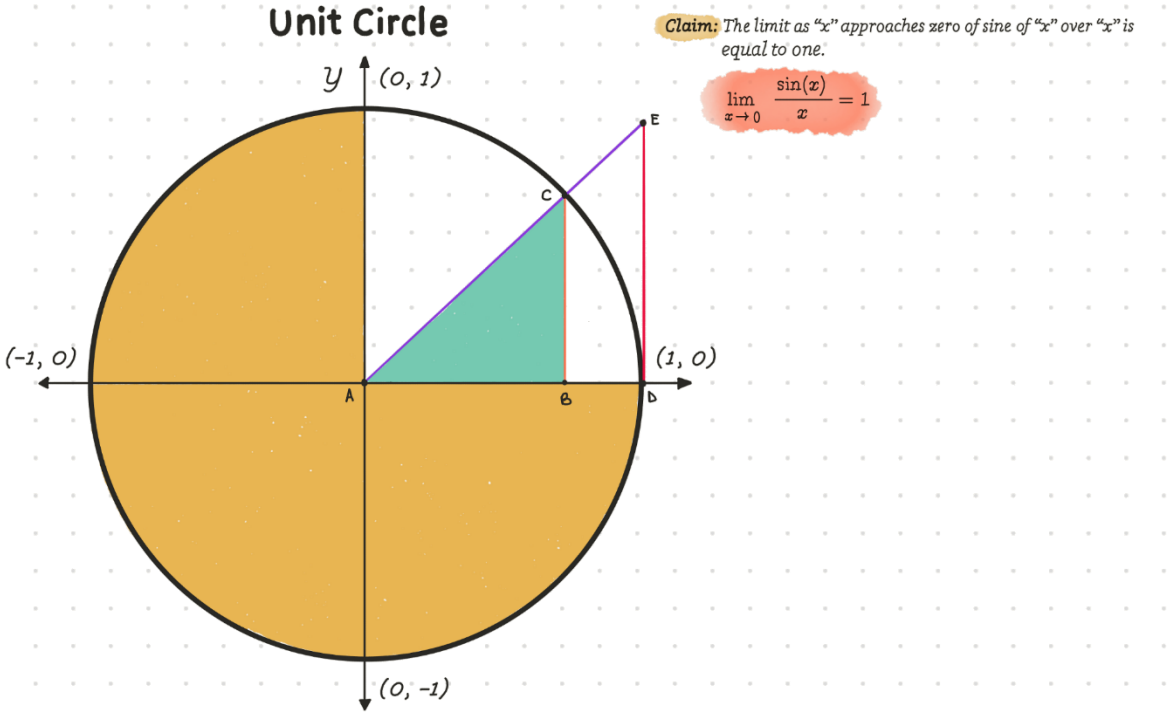
ادعا: حد $\frac{\sin(x)}{x}$ وقتی x به سمت ۰ میل می‌کند برابر است با ۱.

برای ساختن اثبات، با چند ترسیم مثلثاتی شروع می‌کنیم. هرگاه به مثلثات فکر می‌کنیم ناخودآگاه به یاد دایره مثلثاتی (واحد) میفتیم. طبق تعریف، دایره مثلثاتی، دایره‌ایست به شعاع ۱. در ابتدا، برای این که بتوانیم عملیات مثلثاتی خودمان را روی این دایره نمایش دهیم، آن را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم.

دایره مثلثاتی: دایره مثلثاتی دایره‌ایست به شعاع ۱ در دستگاه مختصات دکارتی و در صفحه اقلیدسی؛ که مرکز آن مبدا مختصات $(۰,۰)$ است. برای خواندن نکاتی جالب راجع به دایره‌ی واحد، سری به این مقاله بزنید.



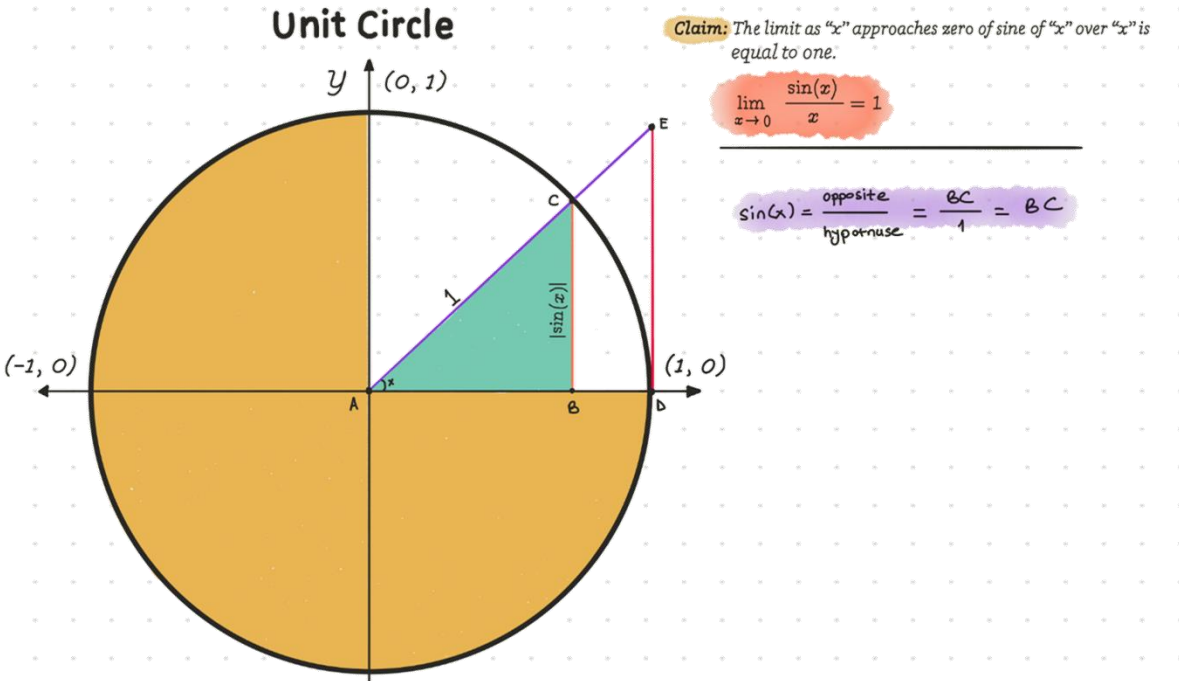
اثبات: نخست، اثباتمان را در ربع اول دایره مثلثاتی بنا می‌کنیم. برای شروع، دو مثلث متشابه **ABC** و **ADE** را رسم می‌کنیم. حال به منظور مشخص شدن شکل، مثلث **ABC** را سبز رنگ می‌کنیم. اگر دقت کنید، می‌بینید که وترهای هر دو مثلث روی «یک» خط واقع شده‌اند.



تعریف: "وتر"، بزرگ‌ترین ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه است که رو به روی زاویه‌ی قائمه قرار دارد.

طبق تعریف، **شعاع دایره مثلثاتی برابر ۱ است**. بنابراین وتر **AC** در مثلث کوچک‌تر هم برابر با **۱** خواهد بود. حال، اندازه‌ی **BC** چه‌قدر است؟ نقطه **C** در محل برخوردِ شعاع با دایره مثلثاتی واقع شده است. پس طول **BC** برابر است با مقدار y در نقطه‌ی **C**.

اگر می‌خواستیم مقدار $\sin(x)$ را پیدا کنیم، آن‌گاه طبق تعریف، $\boldsymbol{\sin(x)=BC/1}$. در نتیجه، $\boldsymbol{BC=\sin(x)}$. لازم است به یاد داشته باشیم که هرگاه مقدار عددی $\boldsymbol{\sin(x)}$ را نمی‌دانیم، می‌توانیم آن را به همان شکل «$\boldsymbol{\sin(x)}$» استفاده کنیم.



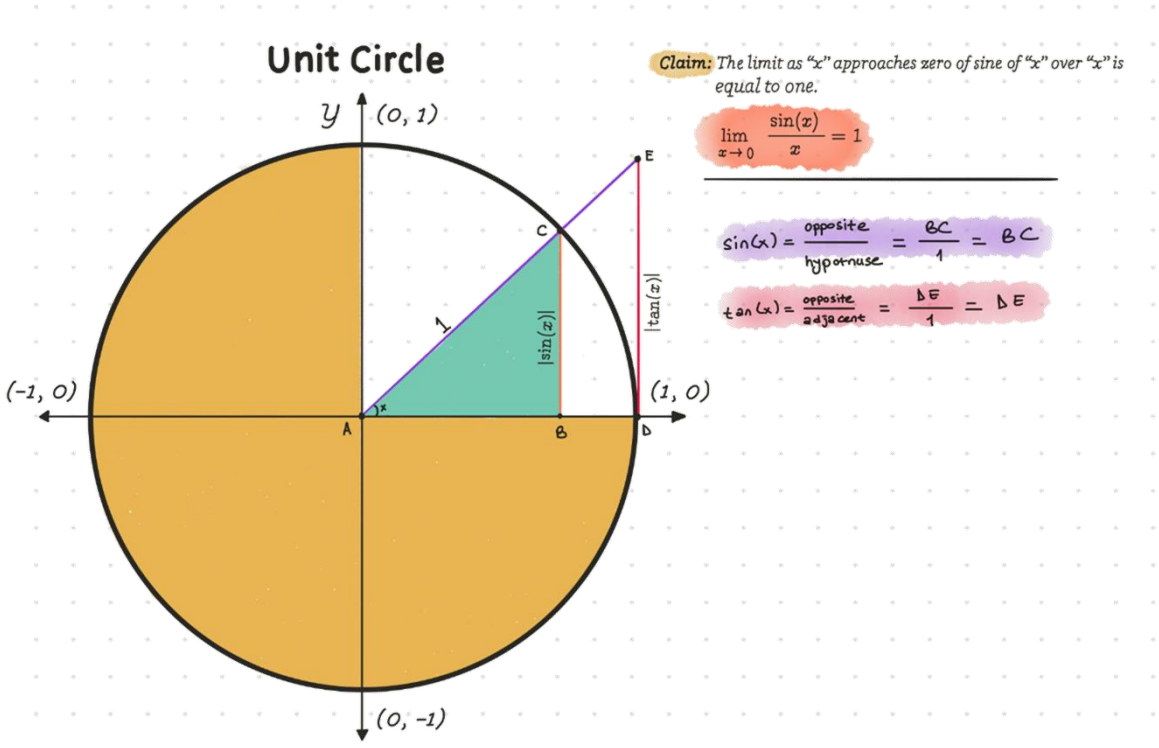
تذکر: از آن‌جا که $sin(x)$ یک «طول» را مشخص می‌کند، باید مقداری مثبت باشد. بنابراین ما باید $sin(x)$ را به صورت قدر مطلقی نمایش دهیم $|sin(x)|$. از طرفی دیگر با این کار، اگر در ربع‌های دیگر نیز عملیاتمان را تکرار کنیم به جوابی یکسان خواهیم رسید.

یک اثبات زیبا: چرا حد $\frac{\sin(x)}{x}$ وقتی x به سمت ۰ میل می‌کند، برابر با ۱ است؟

همان‌طور که دیدید، ما طول **BC** را با استفاده از یک تابع مثلثاتی تعریف کردیم. حالا همان‌طور که برای ضلع **BC** در مثلث **ABC** این کار را انجام دادیم، می‌توانیم طول ضلع **DE** در مثلث **ADE** را نیز با استفاده از یک تابع مثلثاتی تعیین کنیم.
از آن‌جایی که اندازه وتر مثلث **ADE** را نمی‌دانیم، بیایید تابع دیگری را برای مشخص کردن آن به کار ببریم.

با توجه به این که طول **AD**در مثلث **ADE** برابر با شعاع دایره‌ی واحد است، به نظر منطقی است که از تابع تانژانت استفاده کنیم. چون $\tan(x)$ برابر است با نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور. یعنی $\tan(x) = DE/۱$، و از آن‌جایی که روی دایره واحد کار می‌کنیم پس داریم: $DE = \tan(x)$.

تذکر: ضلع مجاور، ضلعی است غیر از وتر که کنار زاویه‌ی داده شده است.



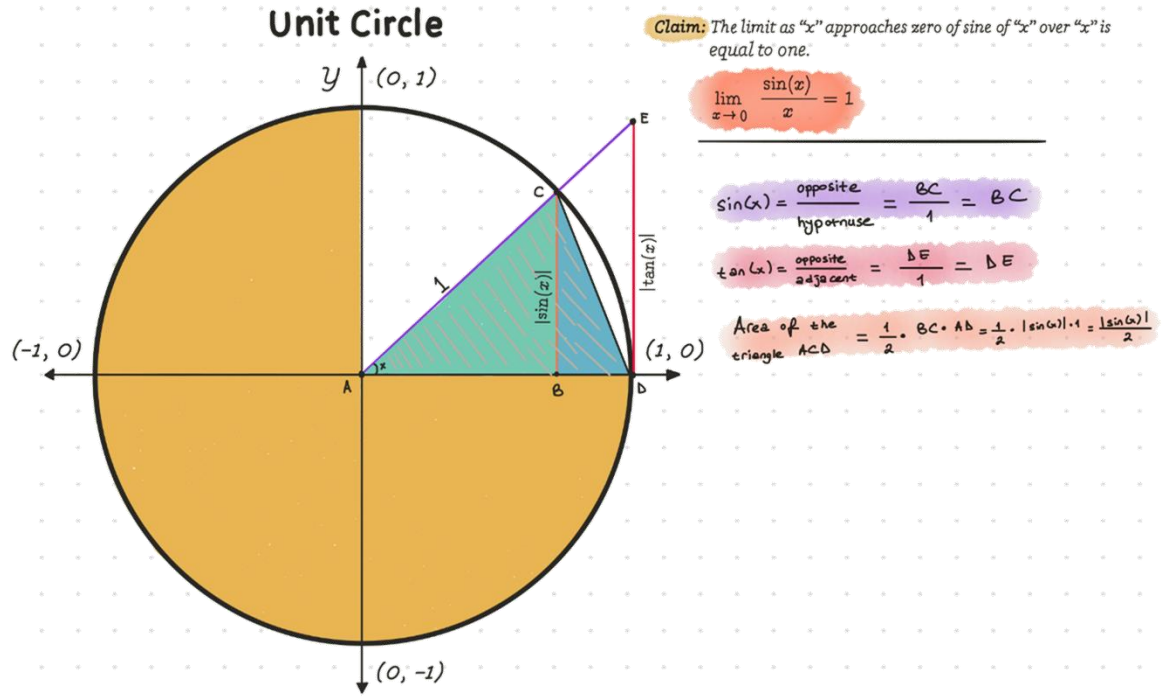
دوباره به دلیل این که $tan(x)$ هم این‌جا یک «طول» را معرفی می‌کند، باید مقدارش مثبت باشد. بنابراین ما از قدر مطلق استفاده می‌کنیم $|tan(x)|$.

خب، عالی! تقریباً طول همه ضلع‌ها را پیدا کرده‌ایم. حالا باید چه کار کنیم؟

...

حالا که طول اکثر ضلع‌ها را پیدا کردیم، بیایید کمی با محاسبه مساحت سر و کله بزنیم. برای این کار، نقاط **C** و **D** را با یک خط به یکدیگر وصل می‌کنیم و مثلث جدیدی که درون دایره تشکیل می‌شود را **ACD** می‌نامیم. سپس فضای خالی داخل این مثلث را آبی رنگ می‌کنیم.
بسیار عالی! حالا می‌توانیم روی مثلث **ACD** -که از رنگ‌های آبی و سبز تشکیل شده- کار کنیم. خب، چگونه می‌توان مساحت مثلث **ACD** را بیان کرد؟ درباره مثلث‌ها ما این نکته را می‌دانیم که: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده‌ی آن.

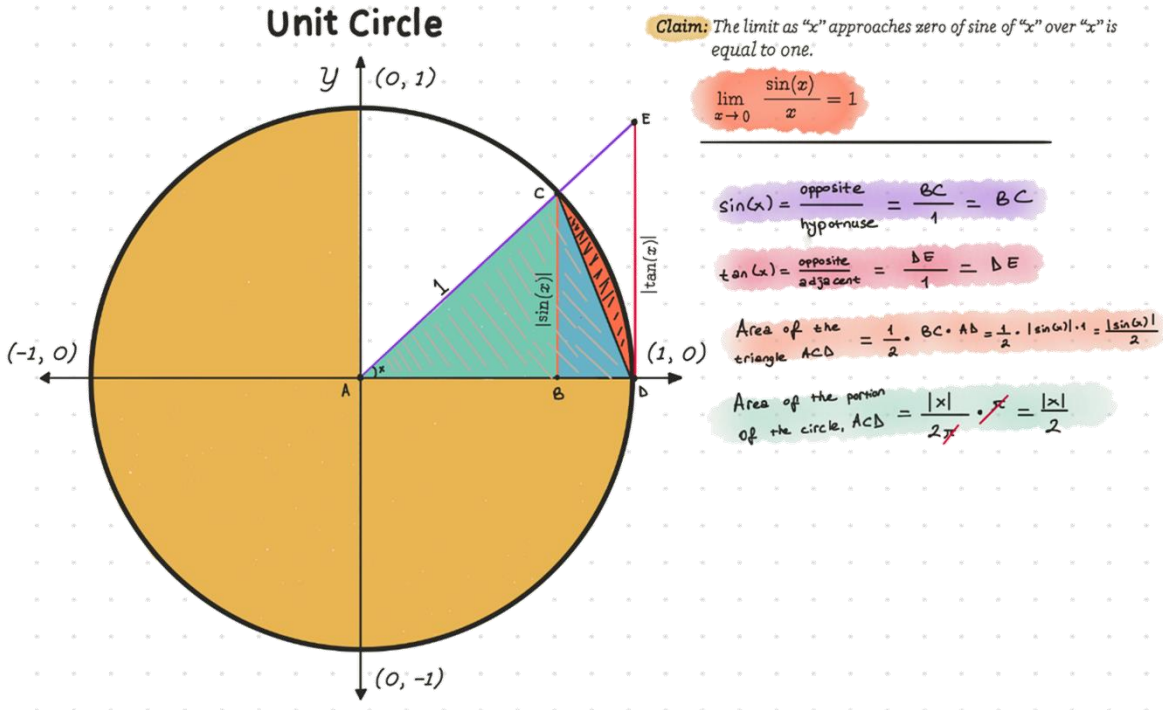
واضح است که طول قاعده‌ی مثلث **ACD** برابر است با ۱. ارتفاع آن نیز **BC** است که همان‌طور که قبلا نتیجه‌گیری کردیم، **BC** برابر است با $|\sin(x)|$. بنابراین مساحت مثلث **ACD** برابر است با $\frac{۱\times|\sin(x)|}{۲}$ یا $\frac{|\sin(x)|}{۲}$.



مساحت مثلث **ACD** را پیدا کردیم. حال نیاز داریم که مساحت قطعه **ACD** از دایره‌مان را هم پیدا کنیم (**ناحیه سبز** + **ناحیه آبی** + **ناحیه نارنجی**). خب، ما می‌دانیم که چه‌طور باید مساحت یک دایره را محاسبه کنیم. **مساحت یک دایره عبارت است از شعاع به توان دو ضرب در π**. اما ما تمام سطح دایره را لازم نداریم. ما تنها مساحت **ناحیه سبز** + **ناحیه آبی** + **ناحیه نارنجی** را می‌خواهیم. بنابراین باید نسبت مساحت مطلوب به کل مساحت را پیدا کنیم. این‌جا می‌توان از منطق زیر استفاده کرد:

اگر بخواهیم دور تا دور دایره را طی کنیم، زاویه‌ی کل، 2π رادیان خواهد بود. در نتیجه، نسبتِ قسمتی که زاویه‌ی x آن را پوشش می‌دهد، به کل دایره برابر می‌شود با $x/2\pi$.

ما حین کار کردن روی دایره مثلثاتی، از منطقی که به آن اشاره شد، بیشترین استفاده را خواهیم کرد. از آن‌جایی که شعاع دایره مثلثاتی برابر با ۱ است، با استفاده از فرمول πr^2، می‌دانیم که مساحت دایره برابر است با π؛ چون اگر به جای r، یک را قرار دهیم، خواهیم داشت: $\pi \times 1^2 = \pi$.



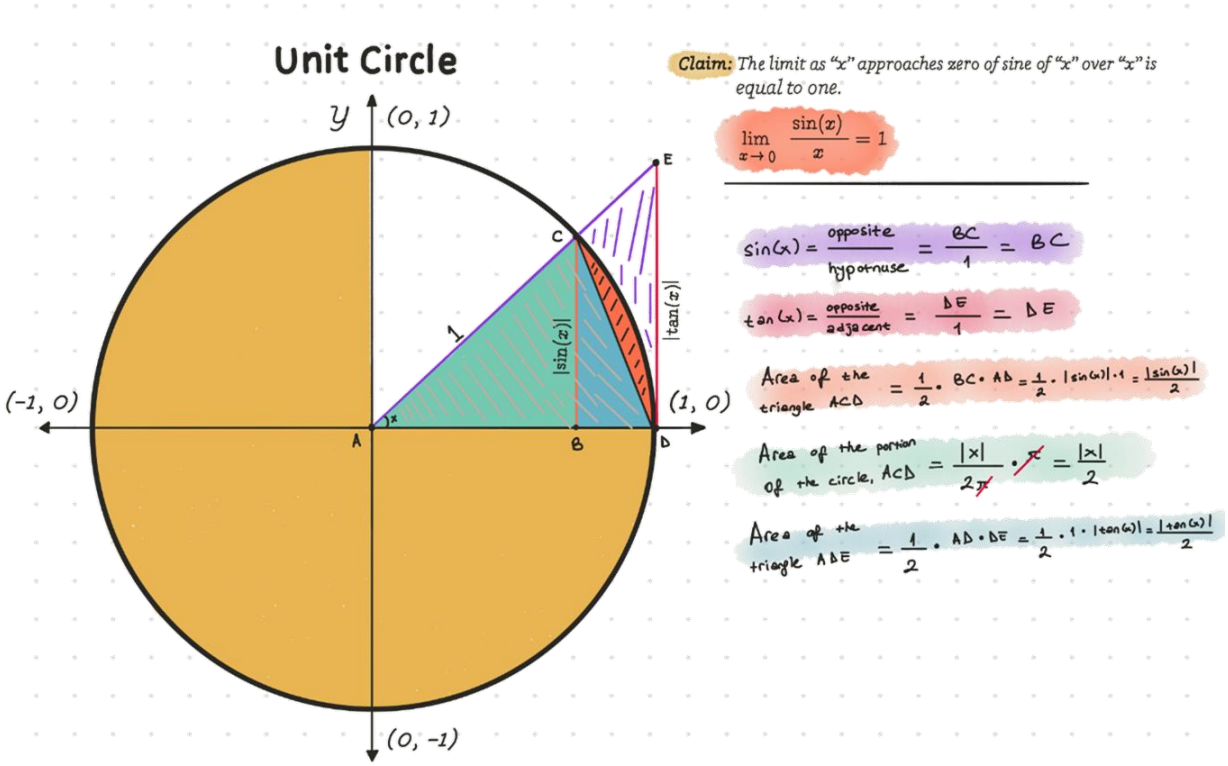
یک اثبات زیبا: چرا حد $\frac{\sin(x)}{x}$ وقتی x به سمت ۰ میل می‌کند، برابر با ۱ است؟

نکته: مساحت دایره‌ی واحد برابر است با π.

...

حال، می‌توانیم مساحت قطعه‌ی **ACD** از دایره را پیدا کنیم. مساحت دایره برابر با π و نسبت مساحت مطلوب به مساحت کل برابر با $x/2\pi$ است. بنابراین، مساحت **ACD** (ناحیه سبز + ناحیه آبی + ناحیه نارنجی) برابر است با $\pi \times x/2\pi$، یا $x/2$. علاوه بر این، به دلیل آن که مساحت باید مقداری مثبت باشد، دوباره از علامت قدر مطلق استفاده می‌کنیم.

حالا می‌توانیم به محاسبه‌ی مساحت بزرگ‌ترین مثلث، یعنی مثلث **ADE**، فکر کنیم. در حقیقت، پیدا کردن این مساحت نسبتاً ساده است و تمام کاری که ما باید انجام دهیم این است که طول **AD** را در طول **DE** ضرب کرده و حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم. کمی قبل، دریافتیم که طول **DE** برابر است با $|\tan(x)|$. از آن‌جایی که طول **AD** برابر با شعاع است، اندازه‌ی آن برابر می‌شود با ۱. در نتیجه مساحت مثلث **ADE** مساوی است با $|\tan(x)|/2$. بسیار عالی!

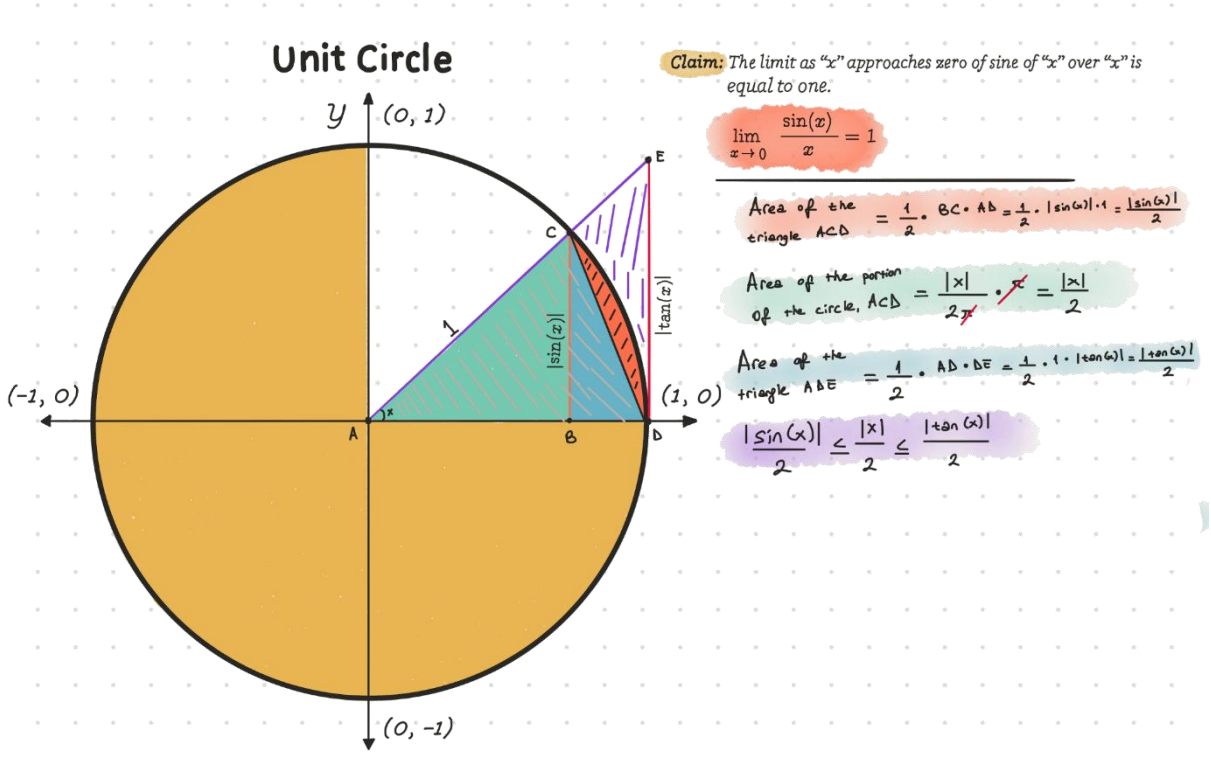


...

اما با مقادیر این مساحت‌ها می‌خواهیم چه کار کنیم؟ قرار است تا این مقادیر را با یکدیگر مقایسه کنیم. اما چگونه؟ ما مساحت مثلث‌های **ACD** و **ADE** و همچنین قطعه‌ی **ACD** از دایره را داریم که می‌توانیم با یکدیگر مقایسه‌شان کنیم. همان‌طور که می‌بینید، مساحت مثلث **ACD** کوچک‌تر یا مساوی است با مساحت قطعه‌ی **ACD** از دایره. از طرفی دیگر مساحت قطعه‌ی **ACD** دایره، کوچک‌تر یا مساوی است با مساحت مثلث **ADE**. پس:

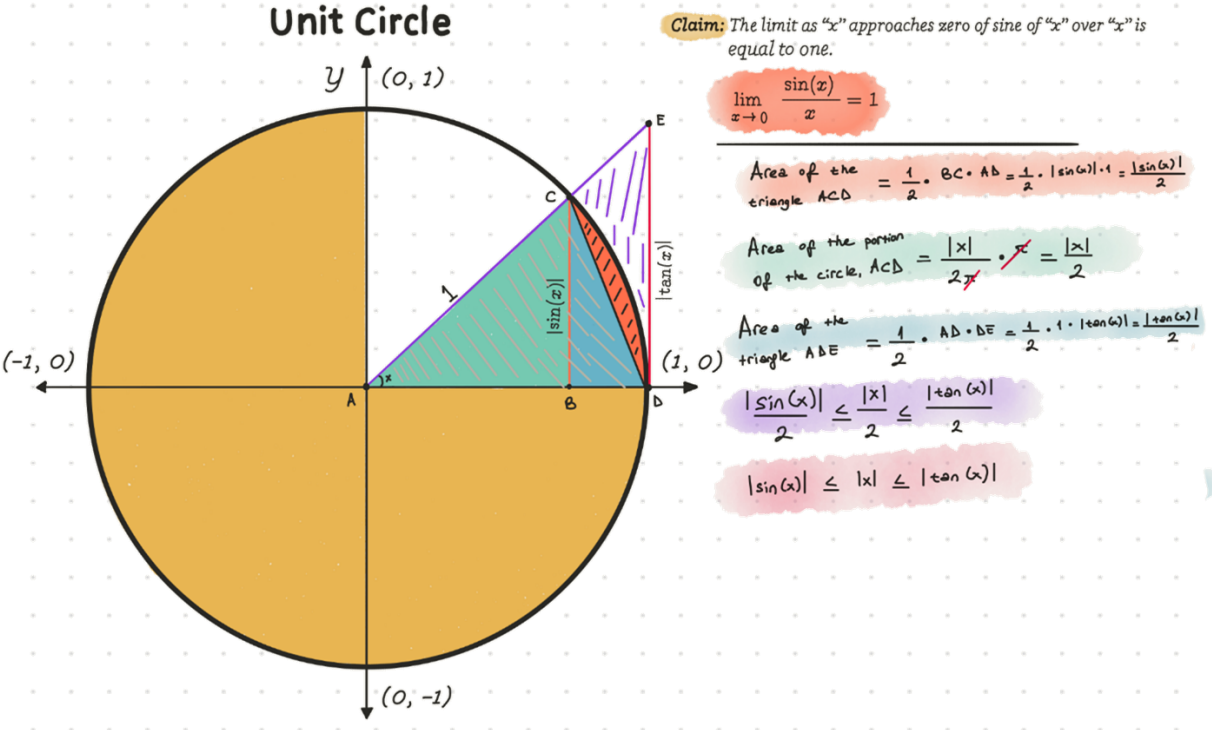
$$\frac{|\sin(x)|}{2} \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{|\tan(x)|}{2}$$

خب، تا این‌جا همه چیز خوب است. حال باید در این نامعادله کمی تغییر ایجاد کنیم. نکته‌ای که می‌بایست همواره مراقب آن بود، این است که باید اطمینان حاصل کنیم که نامعادله همیشه برقرار نگه داشته شود. **برای مثال، به جای ۳، می‌توان نوشت ۶/۲؛ و همه چیز مثل قبل باقی خواهد ماند.**



همه‌ی جملات در این نامعادله تقسیم بر ۲ شده‌اند؛ پس برای ساده‌تر کردن نامعادله، می‌توانیم آن‌ها را در ۲ ضرب کنیم تا مخرج از بین برود. با این کار خواهیم داشت: $|\sin(x)|$ کوچک‌تر یا مساوی با $|x|$ است و $|x|$ هم کوچک‌تر یا مساوی با $|\tan(x)|$ است.

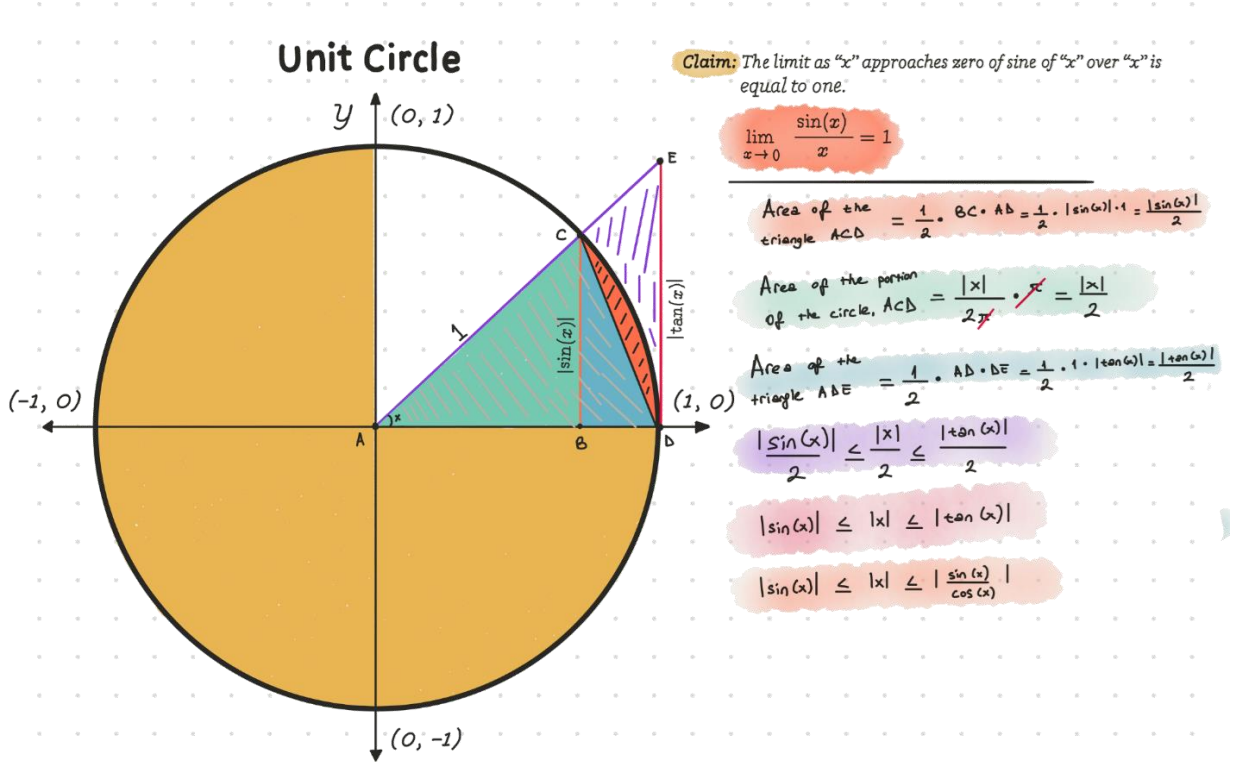
$$|\sin(x)| \leq |x| \leq |\tan(x)|$$



در این مرحله تابع تانژانت را کمی تغییر داده و آن را به شکل متفاوتی می‌نویسیم. چرا که $\tan(x)$ برابر است با $\sin(x)$ تقسیم بر $\cos(x)$.

یک اثبات زیبا: چرا حد $\frac{\sin(x)}{x}$ وقتی x به سمت ۰ میل می‌کند، برابر با ۱ است؟

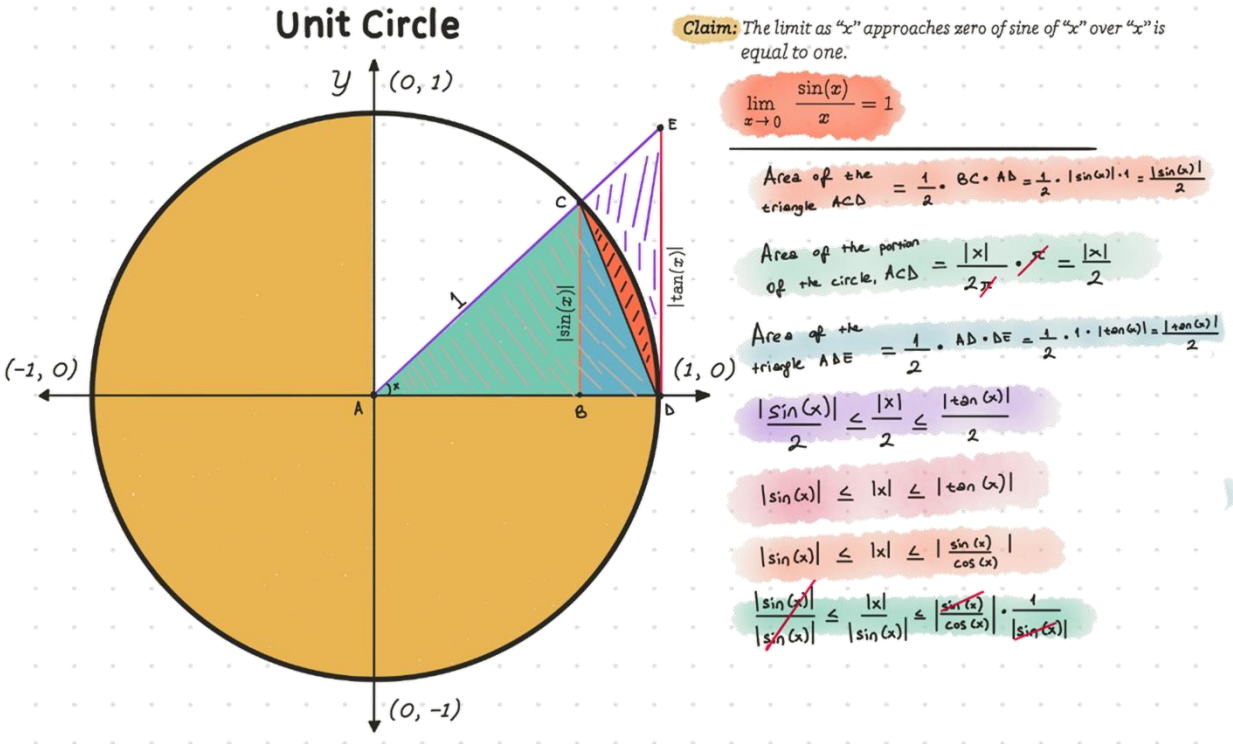
$$|\sin(x)| \leq |x| \leq \frac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|}$$



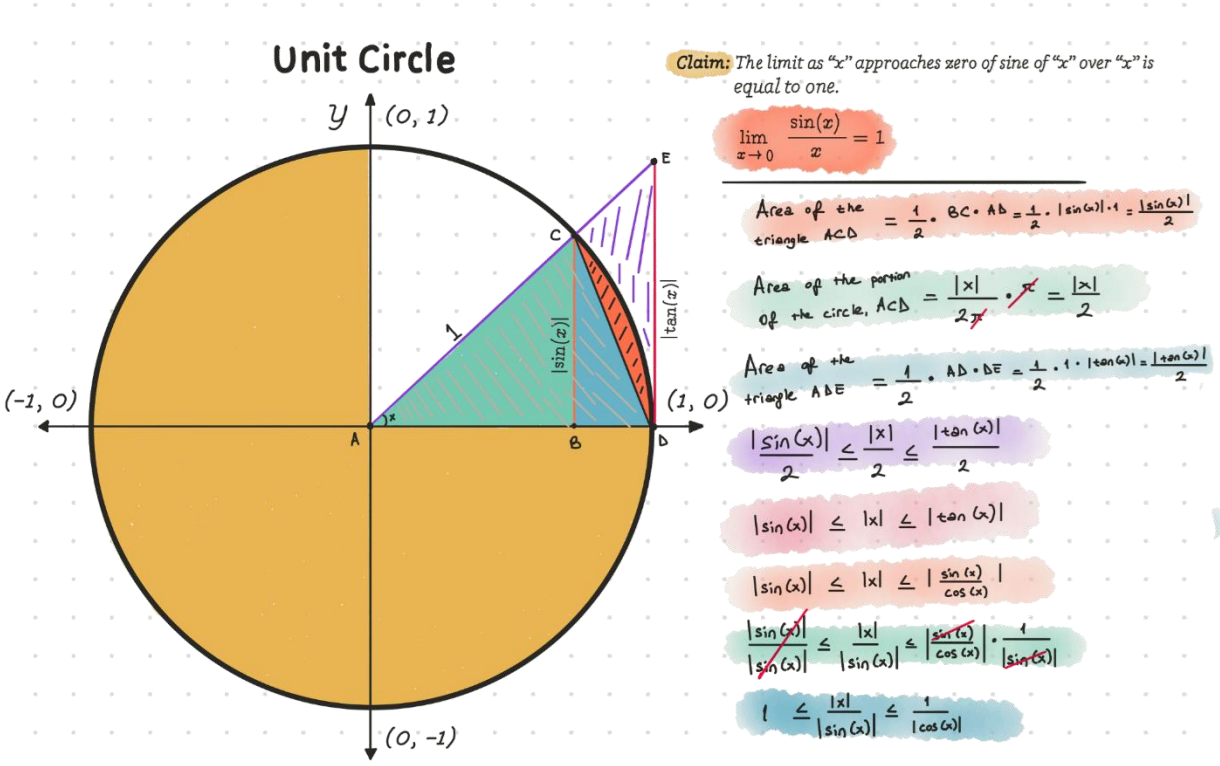
همان‌طور که می‌بینید، نامعادله‌ای که به دست آورده‌ایم، بسیار متفاوت است. با این وجود، نیاز داریم که باز هم در آن تغییراتی ایجاد کنیم. خب، بیایید همه جملات را بر $|\sin(x)|$ تقسیم کنیم. که این کار، نامعادله‌ی زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\frac{|\sin(x)|}{|\sin(x)|} \leq \frac{|x|}{|\sin(x)|} \leq \frac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|} \times \frac{1}{|\sin(x)|}$$

تذکر: از آن‌جایی که ما در این‌جا جملات را بر یک مقدار مثبت تقسیم می‌کنیم، جهت نامعادله تغییر نمی‌کند.



حالا با ساده کردن آخرین نامعادله‌مان می‌توانیم به $1 \leq \frac{|x|}{|\sin(x)|} \leq \frac{1}{|\cos(x)|}$ برسیم.



در این‌جا لازم است که هدفمان را به یاد بیاوریم. **عبارتی که در حکم ما وجود دارد، $\frac{\sin(x)}{x}$ است**. اگر به نامعادله نگاه کنیم، درمی‌یابیم که ما $\frac{|x|}{|\sin(x)|}$ را داریم. در این شرایط، باید یک چیز را به خاطر بیاوریم. بله! **معکوس کردن**!

معکوس: وارون ضربی. اگر شما کسر a/b را معکوس کنید، b/a به دست می‌آید.

اگر در این‌جا تمام جملات را معکوس کنیم، $\frac{\sin(x)}{x}$ که همان عبارت موجود در حکم است، ظاهر می‌شود. البته یک چیز بسیار مهم را نباید فراموش کنیم و آن **عوض کردن جهت نامعادله** است. به این ترتیب، علامت کوچک‌تر یا مساوی به علامت بزرگ‌تر یا مساوی تبدیل می‌شود.

خوشبختانه، **معکوس ۱ همان ۱ می‌شود**. در نتیجه، نامعادله‌ی جدید به شکل زیر خواهد بود:

$$1 \geq \frac{|\sin(x)|}{|x|} \geq |\cos(x)|$$

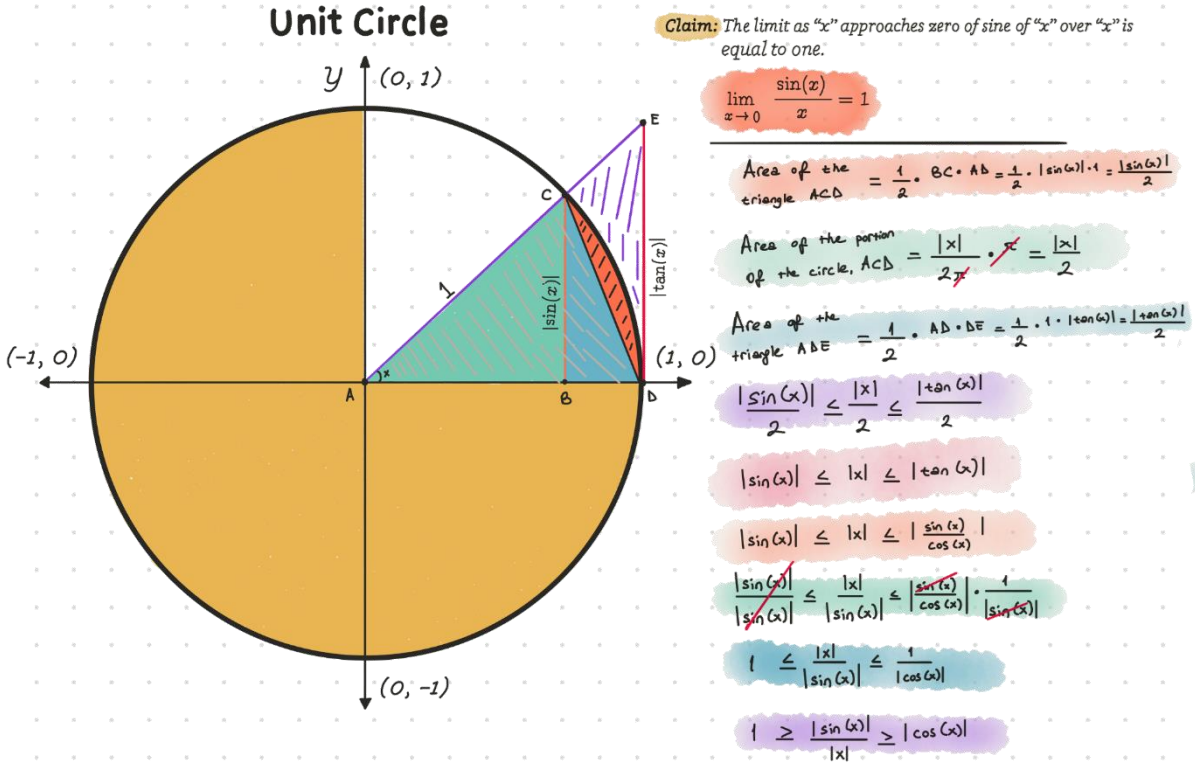
تذکر: تنها ربع اول و چهارم برای ما اهمیت دارد (چون حد تابع مورد نظر در حوالی $x = 0$ مطلوب است). در ربع اول، $\sin(x)$ و x هر دو مثبت هستند. در ربع چهارم نیز، هر دو منفی‌اند؛ اما وقتی آن‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم، یک مقدار مثبت خواهیم داشت. بنابراین می‌توانیم قدر مطلق آن را برداریم. همچنین، چون در ربع اول و چهارم، مقدار $\cos(x)$ مثبت است، تمام علامت‌های قدر مطلق را حذف می‌کنیم.

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$$

...

صبر کنید! تقریباً به پایان راه رسیدیم.

یک اثبات زیبا: چرا حد $\frac{\sin(x)}{x}$ وقتی x به سمت ۰ میل می‌کند، برابر با ۱ است؟



در نامعادله‌ی به دست آمده، تمام جملات نشان دهنده‌ی یک تابع هستند.

بنابراین، می‌توان گفت که $f(x) = ۱$ ، $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ و $h(x) = \cos(x)$. چرا که اگر بخواهیم حدودی که به دنبالشان بودیم را پیدا کنیم، نیاز داریم که از بعضی قضایا استفاده کنیم.

The squeeze theorem is formally stated as follows.

Let I be an interval having the point a as a limit point. Let g, f, and h be functions defined on I, except possibly at a itself. Suppose that for every x in I not equal to a, we have

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

and also suppose that

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Then $\lim_{x \to a} f(x) = L.$

قضیه فشردگی (ساندویچ):

اگر " / " بازه‌ای شامل نقطه a باشد. و توابع f ، g و h روی این بازه (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشند، فرض کنید برای هر x در این بازه، به جز احتمالاً خود a، داریم:

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

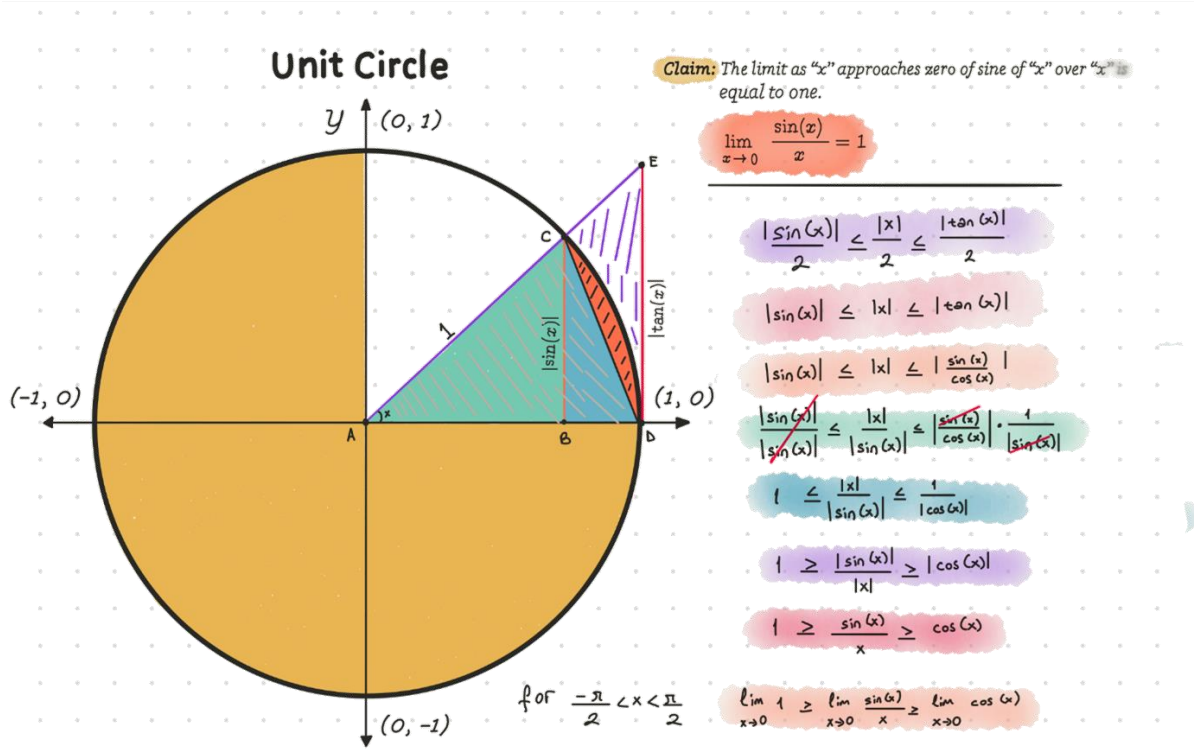
و همچنین مفروض است:

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

آن‌گاه،

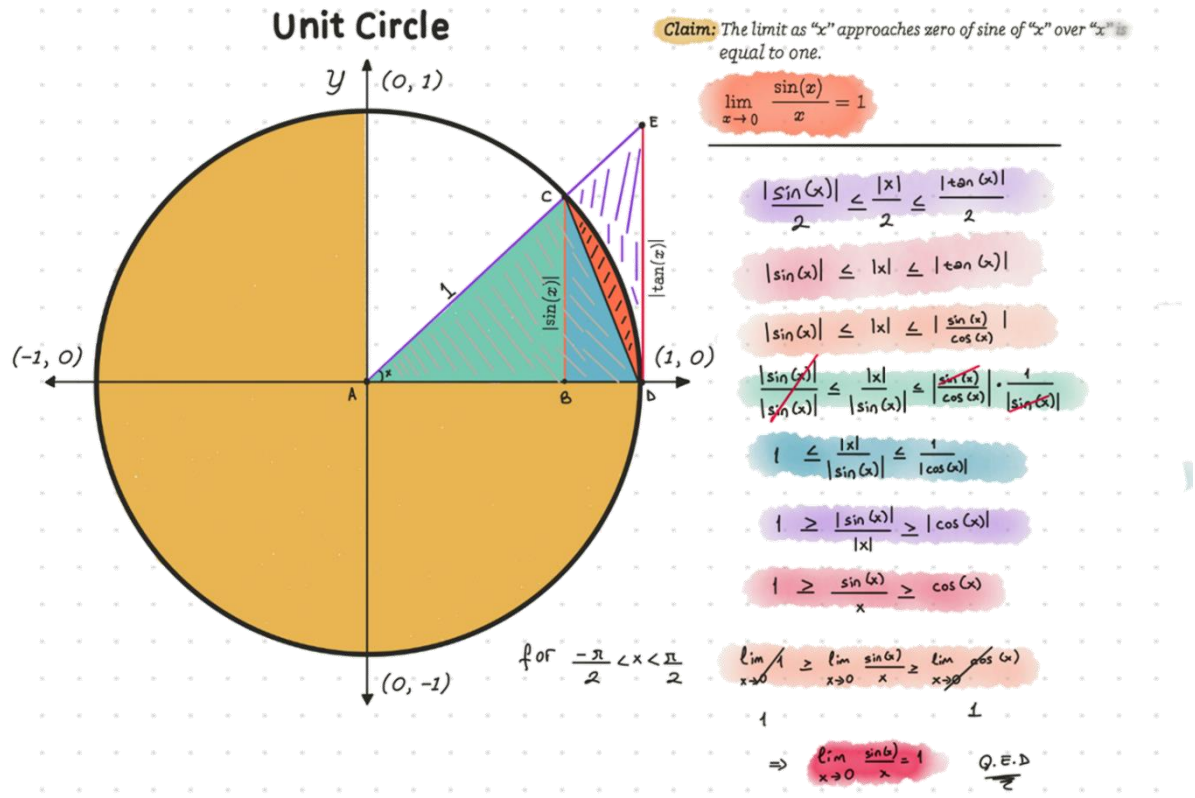
$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

قضیه‌ی فوق به این معناست که اگر در یک نامعادله، هر دو تابع چپ و راست به عدد یکسانی میل کنند (حدشان برابر باشد)، تابع میانی نیز مجبور است به همان عدد میل کند. در واقع حد تابع میانی با حد دو تابع چپ و راست خود برابر است.



حال اگر به نامعادله‌مان نگاه کنیم، واضح است که تابع اول، $f(x)$، به ۱ میل می‌کند. تابع $h(x)$ چه‌طور؟ به این معنا که حد تابع $\cos(x)$ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، چند است؟ بله، $\cos(0)$ برابر با ۱ و تابع کسینوس هم تابعی پیوسته است. در نتیجه این حد برابر است با ۱.

بنابراین حد مورد نظر ما کوچک‌تر یا مساوی با ۱ و هم‌زمان، بزرگ‌تر یا مساوی با ۱ نیز خواهد بود. پس، باید برابر با ۱ باشد. پایان!



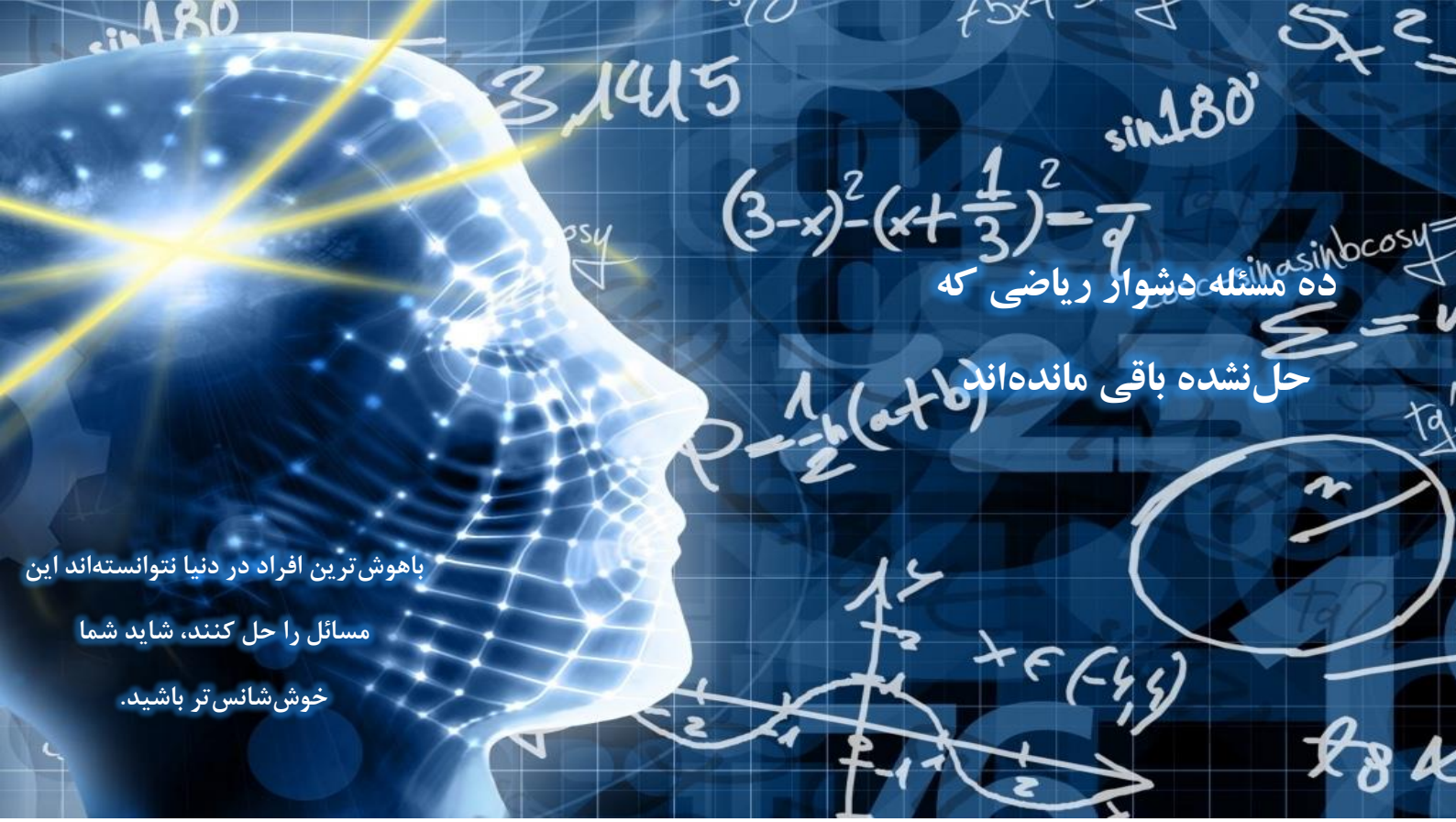
مرجع

https://medium.com/however-mathematics/a-beautiful-proof-why-the-limit-of-sin-x-x-as-x-approaches-0-is-1-c9709e72fda

Gottfried Wilhelm Leibniz

July 1, 1646 - November 14, 1716

لذتی که از موسیقی می‌بریم از شمارش می‌آید، اما شمارشی ناخودآگاه. موسیقی چیزی جز حساب ناخودآگاه نیست.



ده مسئله دشوار ریاضی که حل‌نشده باقی مانده‌اند

باهوش‌ترین افراد در دنیا نتوانسته‌اند این مسائل را حل کنند، شاید شما خوش‌شانس‌تر باشید.

مترجم: زهرا صمدی

دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهیدبهشتی

با وجود تمام گام‌های اخیری که در دنیای ریاضی برداشته‌ایم، همچنان به دنبال دانش عددی عمیق‌تر هستیم – مانند ابررایانه‌ای که در نهایت مسئله‌ی مجموع سه مکعب را که به مدت ۶۵ سال ریاضی‌دانان را درگیر کرده‌بود، حل کرد. برخی از مسائل ریاضی قرن‌هاست که ما را به چالش می‌کشند، و در حالی که این سخت‌ترین مسائل ریاضی که در ادامه می‌آیند ممکن است غیرممکن به نظر برسند، کسی مجبور است در نهایت آن‌ها را حل کند. شاید.

اکنون می‌توانید برای حل سخت‌ترین مسائل ریاضی شناخته شده برای ماشین‌ها و انسان‌ها تلاش کنید.

۱

حدس کولاتز[۱]

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & if\ n\ is\ even \\ 3n+1 & if\ n\ is\ odd \end{cases}$$

در سپتامبر ۲۰۱۹، خبر حل حدودی این مسئله۸۲ ساله توسط ریاضی‌دان پرکار ترنس تائو پخش شده‌بود[۲]، گرچه این مسئله هنوز کاملاً حل نشده‌است.

حدس کولاتز درباره تابع $f(n)$ است که هر عدد زوجی را که می‌گیرد نصف می‌کند در حالی که اعداد فرد را سه برابر و سپس با یک جمع می‌کند. هر عدد طبیعی را که انتخاب کنی و بارها fرا روی آن اعمال کنی در نهایت به ۱ می‌رسی. این موضوع برای هر عددی که تا به حال امتحان کرده‌ایم صادق بوده‌است و حدس می‌زنیم که این رابطه برای تمام اعداد طبیعی صدق می‌کند.

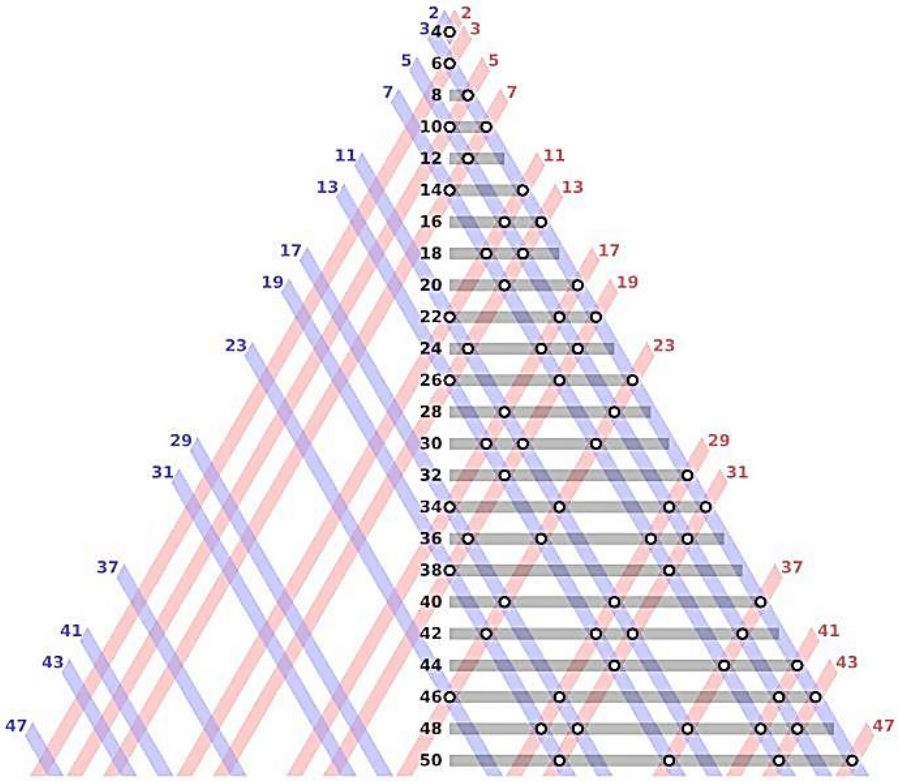
کار اخیر تائو به طرز ظریفی نزدیک به راه‌حل اصلی حدس کولاتز است اما به احتمال زیاد او نمی‌تواند با راه‌حلش به اثبات نهایی این مسئله ریاضی برسد. پس ممکن است که برای دهه‌های بیشتری روی این مسئله کار کنیم.

این حدس زیرمجموعه رشته سیستم‌های دینامیکی است و به نظر می‌رسید که مسئله‌ای ساده‌ای باشد اما همین موضوع آن را خاص می‌کند. چرا پاسخ به چنین مسئله‌ی پایه‌ای دشوار است؟ زمانی که آن را حل کنیم می‌توانیم به سراغ مسائل سخت‌تری برویم و این معیاری برای درک ما از مسئله است.

مطالعه سیستم‌های دینامیکی می‌تواند قوی‌تر از آن چیزی شود که هر کسی امروز تصور می‌کند. اما برای شکوفا شدن این رشته لازم است تا حدس کولاتز را حل کنیم.

۲

حدس گلدباخ



یکی از بزرگ‌ترین معماهای حل‌نشده‌ی ریاضی به سادگی نوشته می‌شود. «حدس گلدباخ» این است که: «تمام اعداد زوج بزرگ‌تر از دو، جمع دو عدد اول هستند.» حدس گلدباخ را می‌توان برای اعداد کوچک در ذهن امتحان کرد به طور مثال ۱۸ می‌شود ۵ + ۱۳ و ۴۲ می‌شود ۱۹ + ۲۳. کامپیوترها این حدس را تا اعداد بسیار بزرگی ادامه داده‌اند، اما برای دیدن درستی حدس گلدباخ برای تمام اعداد طبیعی نیاز به اثبات داریم.

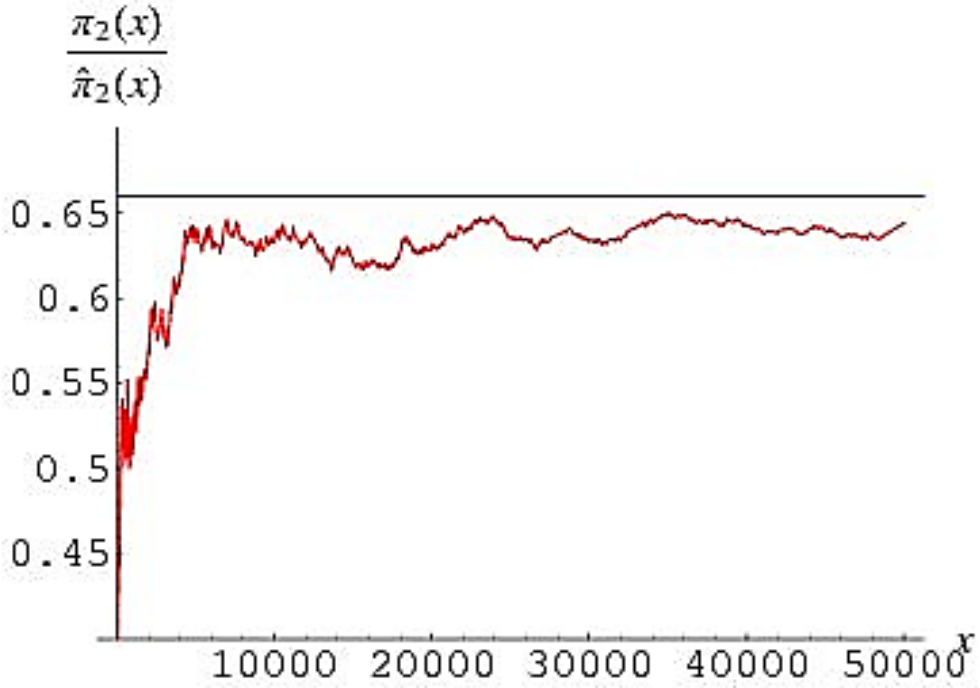
حدس گلدباخ در سال ۱۷۴۲ در نامه‌های بین گلدباخ آلمانی و ریاضی‌دان افسانه‌ای سوئیسی، لئونارد اویلر، به وجود آمد و به عنوان یکی از بزرگ‌ترین معماهای تاریخ ریاضی است. اویلر درباره‌ی حدس گلدباخ می‌گوید: «من آن را یک قضیه کامل در نظر می‌گیرم هرچند نمی‌توانم اثباتش کنم».

ممکن است اویلر متوجه شده‌باشد که چه چیزی حل این مسئله را به طور غیر شهودی سخت کرده‌است. وقتی به اعداد بزرگ‌تر نگاه می‌کنیم، راه‌های بیشتری هست که آن‌ها را به صورت جمع دو عدد اول بنویسیم، نه کمتر. به طور مثال ۵ + ۳ تنها روشی است که ۸ را به جمع دو عدد اول تبدیل می‌کند، اما ۴۲ می‌تواند به ۵ + ۳۷، ۳۱ + ۱۱، ۲۹ + ۱۳ و ۲۳ + ۱۹ تبدیل شود. پس به نظر می‌رسد که حدس گلدباخ برای اعداد بسیار بزرگ دست‌کم گرفته شده‌است.

تا به امروز ریاضی‌دانان از اثبات درستی این حدس برای تمام اعداد درمانده‌اند. از این حدس به عنوان یکی از قدیمی‌ترین سوال‌های تاریخ ریاضیات یاد می‌شود.

۳

حدس اعداداول دوقلو



به همراه حدس گلدباخ، حدس اعداد اول دوقلو نیز یکی از مشهورترین حدس‌های موجود در نظریه اعداد است. از آن‌جایی که شما با این اعداد از دوران ابتدایی آشنا هستید، بیان این حدس ساده است.

به اعداد اولی که تفاضل آن‌ها برابر با ۲ باشد، اعداد اول دوقلو گفته می‌شود. پس ۱۱ و ۱۳ مانند ۵۹۹ و ۶۰۱ اعداداول دوقلو هستند. می‌دانیم بی‌شمار عدد اول وجود دارد. آیا بی‌شمار عدد اول دوقلو نیز داریم؟ پاسخِ حدس اعداد اول دوقلو بله است.

بگذارید کمی عمیق‌تر شویم. اولین عدد در یک جفت از اعداد اول دوقلو، با یک استثنا، همیشه یک واحد از مضرب ۶ کمتر است. پس دومین عدد اول دوقلو همیشه یک واحد از مضرب ۶ بیشتر است. اگر آماده باشید تا کمی از نظریه اعداد اغواکننده را دنبال کنید، می‌توانید دلیل این موضوع را متوجه شوید.

تمام اعداد اول بعد از دو فرد هستند. اعداد زوج همیشه ۰، ۲ یا ۴ واحد از مضربی از ۶ بزرگ‌تر هستند، در صورتی که اعداد فرد همیشه ۱، ۳یا ۵ واحد از مضرب ۶ بزرگ‌ترند. یکی از سه حالت ممکن برای اعداد فرد باعث مشکل می‌شود. اگر عددی ۳ واحد از مضرب ۶ بزرگ‌تر باشد، پس بر ۳ بخش‌پذیر است. داشتن عامل ۳ به این معناست که عدد اول نیست (با در نظر گرفتن ۳ به عنوان استثنا) و به همین دلیل است که هر سومین عدد فرد نمی‌تواند اول باشد.

بعد از خواندن پاراگراف قبل چه حسی دارید؟ حال تصور کنید در ۱۷۰ سال گذشته همه کسانی که برای حل این مسئله تلاش کرده‌اند چه دردسرهایی را تجربه کرده‌اند.

خبر خوب این است که ما در دهه‌ی گذشته پیشرفت امیدبخشی داشته‌ایم. ریاضی‌دانان موفق شده‌اند به نسخه‌های هر چه نزدیک‌تر به حدس اعداد اول دوقلو بپردازند. ایده‌ی آنان این بود: آیا در اثبات وجود بی‌شمار عدد اول با اختلاف دو واحد مشکل دارید؟ چه‌طور است که اثبات کنیم بی‌شمار عدد اول با اختلاف ۷۰،۰۰۰،۰۰۰ وجود دارد. این موضوع را یتان ژانگ[۳] از دانشگاه نیوهمپشر[۴] در سال ۲۰۱۳ اثبات کرد.

در ۶ سال گذشته، ریاضی‌دانان این عدد را در اثبات ژانگ از میلیون‌ها به صدها رسانده‌اند. کاهش این عدد تا ۲ راه‌حلی برای حدس اعداد اول دوقلو خواهدبود. نزدیک‌ترین عددی که به آن رسیده‌ایم – با اضافه کردن تعدادی فرض تکنیکی - ۶ است. زمان نشان خواهد داد که آیا آخرین مرحله از ۶ تا ۲ درست در گوشه و کنار است، یا این که آیا آن بخش آخر ریاضی‌دانان را برای چندین دهه به چالش خواهد کشید.

٤

فرضیه ریمان

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

امروزه ریاضی‌دانان توافق نظر دارند که فرضیه ریمان قابل توجه‌ترین مسئله‌ی باز در تمام دنیای ریاضیات است. فرضیه ریمان یکی از هفت مسائل جایزه هزاره با جایزه ۱ میلیون دلار است. حل کردن این مسئله مستلزم دانستن شاخه‌های زیادی از ریاضیات است، اما در عین حال توضیح دادن ایده‌ی اصلی آن به اندازه‌ی کافی ساده است.

تابعی به نام تابع زتای ریمان $\zeta(s)$ وجود دارد که ضابطه آن در تصویر فوق آمده‌است. این تابع برای هر s، یک سری نامتناهی است که برای محاسبه آن به ازای ساده‌ترین مقادیر s نیز به حسابان پایه‌ای نیاز داریم. به طور مثال، برای $s = ۲$، $\zeta(s)$ همان سری شناخته‌شده $۱ + ۱/۴ + ۱/۹ + ۱/۱۶ + \cdots$ است که مقدار آن به طور عجیبی دقیقاً برابر با $\pi^۲/۶$ است. وقتی s عددی مختلط است، به دست آوردن $\zeta(s)$ نیازمند مهارت بالاست، در حقیقت به سخت‌ترین مسئله‌ی ریاضی تبدیل شده‌است. مخصوصاً فرضیه ریمان راجع به وقتی است که $\zeta(s) = ۰$؛ حکم رسمی این فرضیه بدین صورت است: «قسمت حقیقیِ هر ریشه نابدیهی تابع زتای ریمان برابر است با ۱/۲».

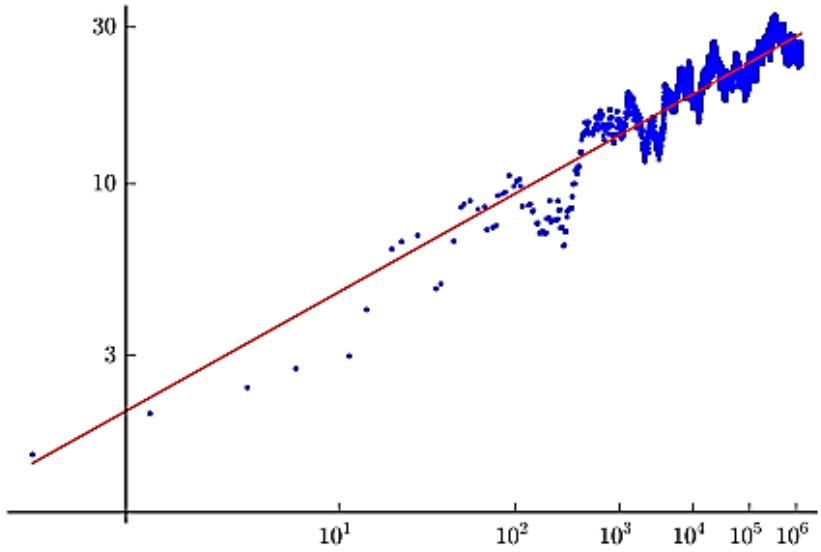
در دنیای اعداد مختلط این بدان معنی است که تابع رفتار مشخصی در امتداد خط قائم خاصی دارد. فرضیه این است که این رفتار در طول آن خط تا بی‌نهایت ادامه دارد.

این فرضیه و تابع زتا توسط یک ریاضی‌دان آلمانی به نام برنارد ریمان در سال ۱۸۵۹ به وجود آمد. ریماناین فرضیه را در زمان مطالعه‌ی اعداد اول و توزیع آن‌ها گسترش داد. دانش ما از اعداد اول از ۱۶۰ سال پیش شروع به پیشرفت کرده‌است و ریمان هیچ‌گاه قادر به تصور قدرت ابررایانه‌ها نبوده‌است. اما نبود راه‌حل برای فرضیه ریمان یک شکست بزرگ است.

اگر فرضیه ریمان فردا حل شود، تحول عظیمی در پیشرفت بیشتر ریاضیات رخ می‌دهد و خبر بزرگی در سرتاسر نظریه اعداد و آنالیز خواهدبود. تا آن‌زمان، فرضیه ریمان یکی از بزرگ‌ترین سدهای رودخانه‌ی پژوهش‌های ریاضی است.

٥

حدس برچ و سوینرتون-دایر[٥]



حدس برچ و دایر نیز یکی دیگر از ۶ مسئله‌ی حل نشده‌ی مسائل جایزه‌ی هزاره و تنها مورد دیگری است که می‌توانیم آن را به زبان ساده توضیح دهیم. این حدس شامل مبحث ریاضی معروف به خم‌های بیضوی است.

یکی از بزرگ‌ترین دستاوردهای قرن بیستم ریاضیات حل قضیه آخر فرما بود که اندرو وایلز آن را با استفاده از خم‌های بیضوی اثبات کرد. پس شما می‌توانید آن را یکی از پرقدرت‌ترین شاخه‌ی ریاضیات بدانید.

به طور مختصر می‌توان گفت که خم بیضوی یک تابع خاص است. آن‌ها به فرم $y^2 = x^3 + ax + b$ هستند. توابعی مانند این دارای خواص معینی هستند که منجر به فهم موضوعات ریاضی مانند جبر و نظریه اعداد می‌شوند.

ریاضی‌دانان بریتانیایی برایات برچ و پیتر سوینیرتون دایر حدس خود را در دهه ۶۰ میلادی توسعه دادند. حکم دقیق آن بسیار فنی است و طی سالیان زیاد تکمیل شده‌است و یکی از مباشران اصلی این تکامل کسی جز وایلز نبوده‌است.

٦

مسئله عدد بوسان[٦]

بخش بزرگی از مسائل ریاضی، مسائل مربوط به پر کردن فضا توسط کره است. این مسائل از ریاضیات محض تا کاربردهای عملی را شامل می‌شود و اصطلاحات ریاضی را به ایده چیدن کره‌ها در یک فضای معین، اختصاص می‌دهد. برخی سوالات در این مطالعه به جواب رسیده‌اند در حالی که برخی از سوالات ساده مانند مسئله‌ی عدد بوسان همچنان مجهول است.

زمانی که دسته‌ای از این کره‌ها در ناحیه‌ی خاصی قرارگرفته‌اند، هر کره یک عدد بوسان دارد که تعداد کرات دیگری است که مماس به آن است. اگر ۶ کره در مجاورت شما باشد، عدد بوسان شما ۶ است. یک دسته از کره‌های بسته‌بندی شده دارای یک عدد بوسان میانگین است که به لحاظ ریاضیاتی به توصیف موقعیت کمک می‌کند. اما هنوز سوالی پایه‌ای راجع به عدد بوسان بی‌پاسخ است.

ابتدا به یک نکته درباره ابعاد توجه کنید. بُعدها در ریاضیات معنای به خصوصی دارند: آن‌ها محورهای مختصات مستقل هستند. محور x و yنشان‌دهنده بُعد ۲ در صفحه مختصات هستند. وقتی شخصیتی در فیلمی علمی تخیلی می‌گوید که به بعد دیگری می‌رود، توجیه ریاضیاتی ندارد. شما نمی‌توانید به محور x بروید.

خط ۱ بُعدی است و صفحه دوبعدی است. ریاضی‌دانان برای این بعدهای کوچک، تعداد ماکسیمم عدد بوسان ممکن را پیدا کرده‌اند. به طور مثال وقتی روی خط یک بعدی هستیم این عدد ۲ است، یک کره در سمت راست و کره‌ای دیگر در سمت چپ شما. اثباتی دقیق برای بُعد ۳ نیز وجود دارد که تا دهه‌ی ۵۰ میلادی طول کشید.

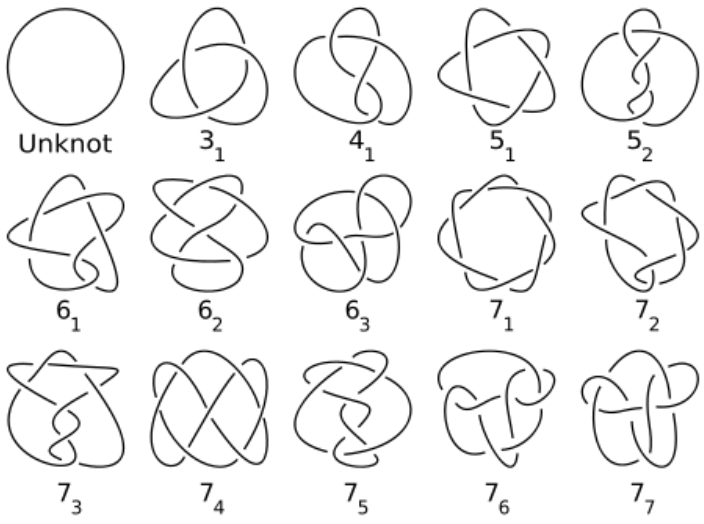
در ابعاد بالاتر از ۳ مسئله عدد بوسان حل نشده باقی‌مانده‌است. در جدول زیر کران پایین و بالای ممکن برای عدد بوسان تا بُعد ۲۴ و همچنین تعداد کمی از اعداد بوسان که دقیقاً شناخته شده، آورده شده‌است. برای اعداد بزرگ‌تر و یا حالت کلی، این مسئله به طور کامل باز است. موانع زیادی شامل محدودیت‌های محاسباتی تا حل کامل این مسئله وجود دارد. بنابراین انتظار پیشرفت تدریجی در حل این

ده مسئله دشوار ریاضی که حل‌نشده باقی مانده‌اند

مسئله را برای سال‌های آینده داشته باشید.

Upper bound	Lower bound	Dimension
۲		۱
۶		۲
۱۲		۳
۲۴[۷]		۴
۴۴	۴۰	۵
۷۸	۷۲	۶
۱۳۴	۱۲۶	۷
۲۴۰		۸
۳۶۳	۳۰۶	۹
۵۵۳	۵۰۰	۱۰
۸۶۹	۵۸۲	۱۱
۱,۳۵۶	۸۴۰	۱۲
۲,۰۶۶	۱,۱۵۴[۱۳]	۱۳
۳,۱۷۷	۱,۶۰۶[۱۳]	۱۴
۴,۸۵۸	۲,۵۶۴	۱۵
۷,۳۳۲	۴,۳۲۰	۱۶
۱۱,۰۱۴	۵,۳۴۶	۱۷
۱۶,۴۶۹	۷,۳۹۸	۱۸
۲۴,۵۷۵	۱۰,۶۶۸	۱۹
۳۶,۴۰۲	۱۷,۴۰۰	۲۰
۵۳,۸۷۸	۲۷,۷۲۰	۲۱
۸۱,۳۷۶	۴۹,۸۹۶	۲۲
۱۲۳,۳۲۸	۹۳,۱۵۰	۲۳
۱۹۶,۵۶۰		۲۴

۷
مسئله گشودن گره[۷]



آسان‌ترین نسخه‌ی این مسئله حل شده‌است، پس تا حدودی موفقیت‌هایی در این باره وجود دارد. حل کردن نسخه‌ی کامل این مسئله پیروزی بزرگ‌تری خواهدبود. احتمالاً تا به حال راجع به نظریه گره‌ها نشنیده‌اید، زیرا تقریباً در هیچ دبیرستان و تعداد کمی از دانشگاه‌ها

تدریس نمی‌شود. ایده این است که سعی کنید ایده‌های ریاضی رسمی، مانند اثبات را برای گره‌ها، آن‌چه که بند کفش‌هایتان را با آن می‌بندید، به کار ببرید.

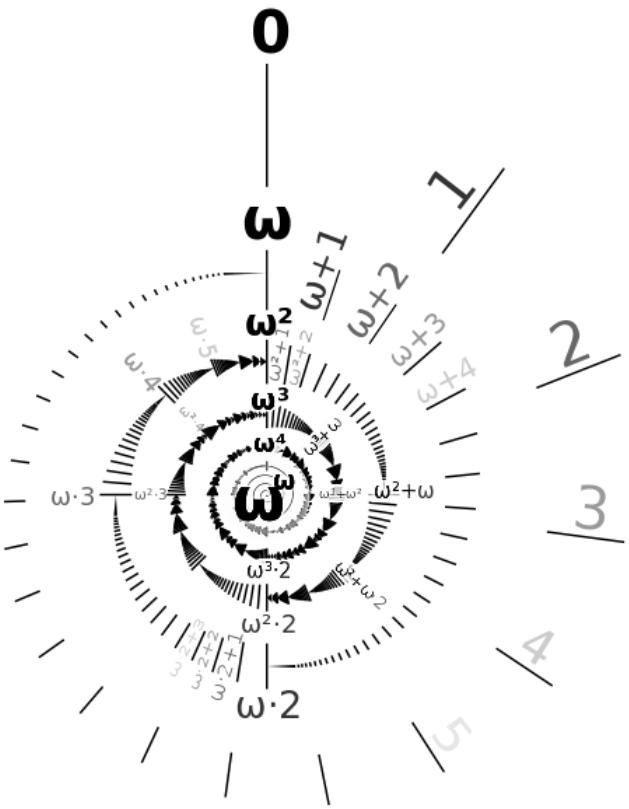
برای مثال: شما شاید نحوه‌ی بستن «گره چهارگوش» و «گره مادربزرگ» را بدانید. آن‌ها مراحل یکسانی دارند با این تفاوت که یک پیچ از گره چهارگوش به گره مادربزرگ برعکس می‌شود. اما آیا می‌توانید ثابت کنید که این گره‌ها متفاوت هستند؟ نظریه‌پردازان گره می‌توانند.

مسئله «جام مقدسِ» نظریه‌پردازان گره الگوریتمی بود برای تشخیص این که آیا برخی از آشفتگی‌های در هم پیچیده واقعاً گره خورده است یا این که می‌توان آن را به طور کامل از هم باز کرد. خبر جالب این است که این کار انجام شده‌است! چندین الگوریتم کامپیوتری برای این کار در ۲۰ سال گذشته نوشته شده‌است.

اما این مسئله همچنان در حال محاسبه است. می‌دانیم که الگوریتم‌های ما قادر به باز کردن هر گره با هر پیچیدگی هستند، اما در حال حاضر با پیچیده‌تر شدن آن‌ها، زمانِ ناممکن طولانی نیاز است.

اگر کسی الگوریتمی ارائه دهد که بتواند هر گره‌ای را در زمانی که زمان چندجمله‌ای نامیده می‌شود، باز کند، مسئله گره‌گشایی به طور کامل متوقف می‌شود. از طرف دیگر، کسی می‌تواند ثابت کند که این امکان‌پذیر نیست، و این که شدت محاسباتی مسئله گره‌گشایی به طور اجتناب‌ناپذیری عمیق است.

۸
پروژه اعداد کاردینال بزرگ



اگر تا به حال درباره کاردینال‌های بزرگ را نشنیده‌اید، آماده یادگیری باشید. در اواخر قرن ۱۹ میلادی، ریاضی‌دان آلمانی به نام جورج کانتور کشف کرد که بی‌نهایت در اندازه‌های متفاوتی ظاهر می‌شود. در حقیقت از دید عمیق ریاضیاتی، برخی از مجموعه‌های نامتناهی عناصر بیشتری از سایر آن‌ها دارند و کانتور این را اثبات کرد.

اولین مقدار بی‌نهایت که کوچک‌ترین بی‌نهایت است با علامت $\aleph_0$ نشان داده می‌شود. این علامت یکی از الفبای زبان عبری است و «الف صفر» خوانده می‌شود و اندازه مجموعه اعداد طبیعی است که به صورت $|\mathbb{N}|=\aleph_0$ نوشته می‌شود.

اندازه برخی از مجموعه‌های رایج بزرگ‌تر از $\aleph_0$ است. کانتور اثبات کرد که مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر است و آن را به صورت $|\mathbb{R}|>\aleph_0$ نوشت. اما اعداد حقیقی آن‌قدر هم بزرگ نیستند؛ ما تازه ابتدای راه بی‌نهایت‌ها هستیم.

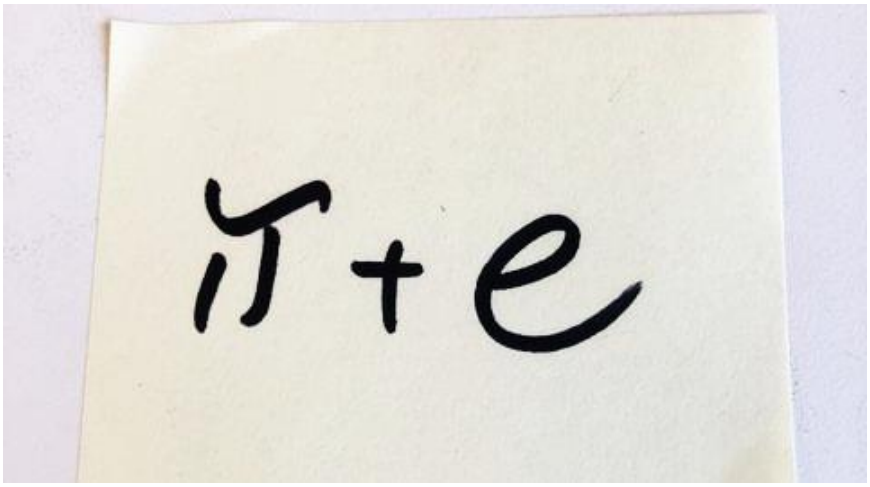
ریاضی‌دانان برای مجموعه‌های واقعاً بزرگ، مدام اندازه‌های بزرگ‌تر یا آن‌چه را که ما کاردینال‌های بزرگ می‌نامیم، کشف می‌کنند. این یک فرآیند ریاضی محض است که به این صورت پیش می‌رود: فردی می‌گوید «من به تعریفی برای کاردینال فکر کرده‌ام و می‌توانم اثبات کنم که این کاردینال از تمام کاردینال‌های شناخته‌شده بزرگ‌تر است.» سپس اگر اثبات او درست باشد آن، بزرگ‌ترین کاردینال شناخته‌شده می‌شود تا زمانی‌که کسی کاردینالی بزرگ‌تر مطرح کند.

در قرن بیستم، سرحد کاردینال‌های بزرگ به طور پیوسته به جلو رانده می‌شد. در حال حاضر یکی از کاردینال‌های بزرگ شناخته‌شده به افتخار کانتور نام‌گذاری شده است. آیا برای این اعداد پایانی وجود دارد؟ پاسخ مثبت است اگرچه بسیار پیچیده است.

از برخی جهات، رأسِ سلسله مراتبِ کاردینال‌های بزرگ در معرض دید است. قضایایی ثابت شده‌اند که نوعی سقف برای کاردینال‌های بزرگ ممکن تحمیل می‌کنند. اما بسیاری از مسائلِ باز باقی مانده‌اند و تا همین سال ۲۰۱۹، کاردینال‌های جدیدی شناسایی شده‌اند. بسیار محتمل است که در دهه‌های آینده نیز کاردینال‌های بزرگ‌تری کشف کنیم. امیدواریم در نهایت فهرستی جامع از همه کاردینال‌های بزرگ داشته‌باشیم.

۹

درباره $\pi + e$ چه می‌دانید؟



با توجه به همه چیزهایی که درباره دو مورد از معروف‌ترین ثابت‌های ریاضی، π و e، می‌دانیم، این موضوع که اطلاعات زیادی درباره‌ی حاصل جمع آن‌ها نداریم کمی شگفت‌آور است.

این معما تماماً درباره‌ی اعداد حقیقی جبری است. عددی حقیقی وقتی جبری است که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. برای مثال $x^2 - 6$ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است، زیرا ۱ و -6 عدد صحیح هستند. ریشه‌های $x^2 - 6 = 0$ برابر است با $x = \sqrt{6}$ و $x = -\sqrt{6}$، پس $\sqrt{6}$ و $-\sqrt{6}$ جبری هستند.

همه‌ی اعداد گویا و ریشه‌های آن‌ها جبری هستند. پس ممکن است این حس را داشته‌باشید که «اغلب» اعداد حقیقی جبری‌اند که خلاف این موضوع حقیقت دارد. متضاد جبری، متعالی است و به نظر می‌رسد که تقریباً تمام اعداد حقیقی متعالی هستند. پس کدام جبری و کدام متعالی است؟

عدد حقیقی π به ریاضیات باستانی برمی‌گردد، در حالی که عدد e از قرن هفدهم وجود داشته‌است. احتمالاً نام هر دو را شنیده‌اید و فکر می‌کنید که ما پاسخ هر سؤال اساسی را که در مورد آن‌ها پرسیده می‌شود می‌دانیم، درست است؟

در واقع می‌دانیم که π و e متعالی هستند. اما به نحوی نمی‌دانیم که آیا $\pi + e$ جبری یا متعالی است. به طور مشابه درباره πe، π/e و هر ترکیب ساده دیگری از آن‌ها چیزی نمی‌دانیم. پس به طرز باورنکردنی سوال‌های ساده‌ای درباره‌ی اعدادی که هزاران سال است می‌شناسیم وجود دارد که هنوز بی‌پاسخ مانده‌است.

۱۰

آیا γ گویا است؟

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

این یکی دیگر از مسائل ریاضی است که بیان آن آسان اما حل آن بسیار دشوار است. تنها چیزی که نیاز به یادآوری دارد تعریف اعداد گویا است.

اعداد گویا را می‌توان به صورت p/q نوشت، وقتی p و q عدد صحیح هستند. پس ۴۱ و ۱۱/۳− گویا هستند، در حالی که π و $\sqrt{۲}$ گویا نیستند این یک خاصیت بسیار پایه‌ای است، پس ممکن است فکر کنید که به راحتی می‌توان گفت کدام عدد گویا است و کدام عدد گویا نیست، درست است؟

با ثابت اویلر-ماسکرونی[۸] γ آشنا شوید. این عددی حقیقی تقریباً برابر با ۰.۵۷۷۲ است با یک فرم شبیه تصویر بالا که خیلی هم بی‌قواره نیست.

روش شفاف برای تبدیل این نمادها به کلمات بدین صورت است: «گاما برابر با حدِ تفاضلِ سری هارمونیک و لگاریتم طبیعی است». پس گاما ترکیبی از دو شیء ریاضی بسیار شناخته‌شده است. گاما دارای فرم‌های دیگری نیز هست و در صدها فرمول ظاهر می‌شود.

اما به نحوی ما حتی نمی‌دانیم که γ گویا است یا خیر. ما تا نیم تریلیون رقم آن را محاسبه کرده‌ایم، ولی هنوز کسی نمی‌تواند گویا بودن آن را پیش‌بینی کند. پیش‌بینی رایج این است که γ گویا نیست. در ادامه مثال قبلی‌مان $\pi + e$، سوال دیگری در مورد یک ویژگی ساده برای یک عدد شناخته‌شده داریم که حتی نمی‌توانیم به آن پاسخ دهیم.

مرجع

https://www.popularmechanics.com/science/math/g29251596/impossible-math-problems/

---

[۱] Collatz Conjecture
[۲] Terence Tao
[۳] Yitang Zhang
[۴] University of New Hampshire
[۵] The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture
[۶] The Kissing Number Problem
[۷] Unknotting Problem
[۸] Euler-Mascheroni constant

اطلاعیه مهم

بی‌نهایت و افتخاری دیگر

خرسند و مفتخریم اعلام کنیم که نشریه‌ی علمی دانشجویی بی‌نهایت، برای سومین دوره‌ی متوالی، توانست در جشنواره‌ی کشوری نشریات دانشجویی با کسب مقام سوم در رسته‌ی نشریات تخصصی علوم پایه، افتخارآفرینی کند.

مسلسل یازدهم نشریه علمی دانشجویی بی‌نهایت به صاحب امتیازی انجمن علمی دانشجویی ریاضی دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه شهیدبهشتی و مدیر مسئولی دکتر محرم نژاد ایردموسی توانست در دوازدهمین جشنواره‌ی کشوری نشریات دانشجویی (تیتر ۱۲)، مقام سوم را در بین نشریات علمی تخصصی علوم پایه کسب نماید. پیش از این، مسلسل دهم این نشریه نیز در تیتر ۱۱ با سردبیری آقای محمدحسین باباخانی موفق به کسب رتبه‌ی سوم کشوری شده بود. هم‌چنین مسلسل نهم به سردبیری خانم مهدیس فتحی‌اول، توانسته بود با کسب دو رتبه‌ی نخست کشوری هم در رسته نشریه علمی تخصصی و هم در رسته‌ی مقاله‌ی علمی (چگونه ریاضی بنویسیم به قلم مهدیس فتحی‌اول) افتخارات ارزشمند دیگری برای تاریخ این نشریه به یادگار بگذارد.

ضمن تبریک مجدد به تمامی همکاران و همراهان سلسله نشریات بی‌نهایت، درصدد برآمدیم تا با برگزاری چالشی در زمینه‌ی ارائه‌ی ترجمه‌ی مقالات علمی و نیز تالیف مقالات، ضمن ارتقای کیفیت علمی نشریه، محفلی برای ارتقای سطح علمی و عملی همکاران و همراهان هر مسلسل از نشریه، ایجاد نماییم.

چالشی که در نظر گرفته‌ایم به این شرح است: در هر مسلسل، یک مقاله‌ی علمی تالیفی و یک مقاله ترجمه شده‌ی برتر از نگاه خوانندگان از طریق نظرسنجی و با داوری اساتید دانشکده، انتخاب می‌شود. نتیجه داوری در مسلسل بعدی نشریه اعلام می‌شود. برای برگزیدگان، لوح تقدیر دانشگاه شهیدبهشتی و نیز هدیه نقدی در نظر گرفته شده است.