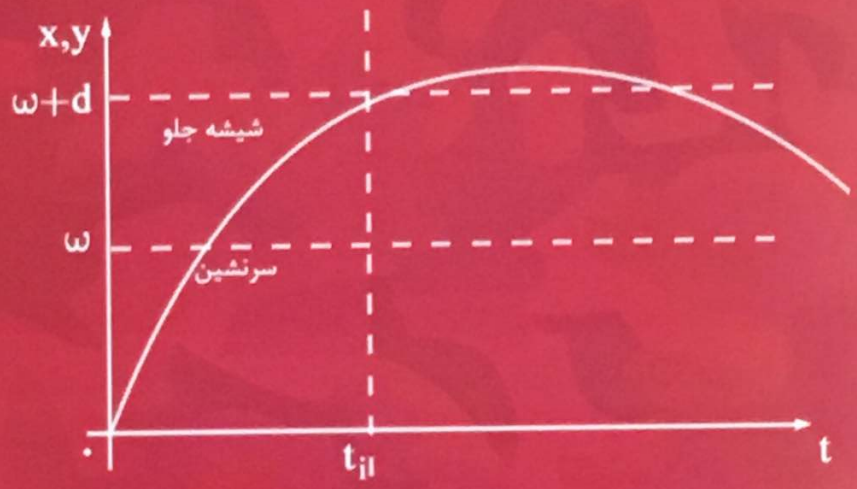
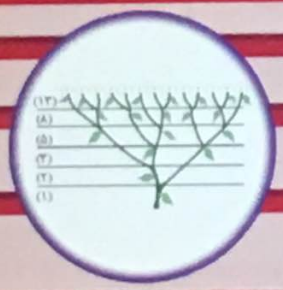
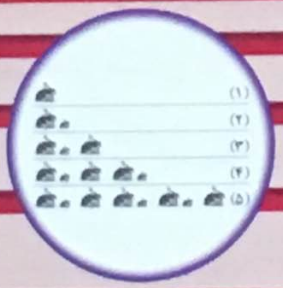
فرنود

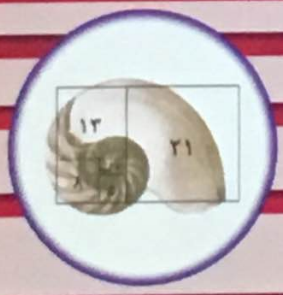
شماره پانزدهم- زمستان ۸۵

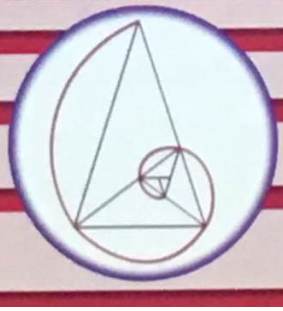
نشریه انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان اصفهان

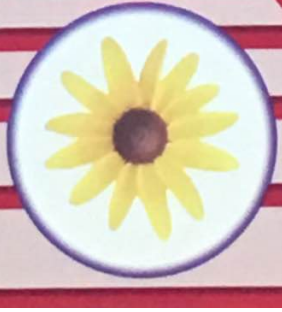




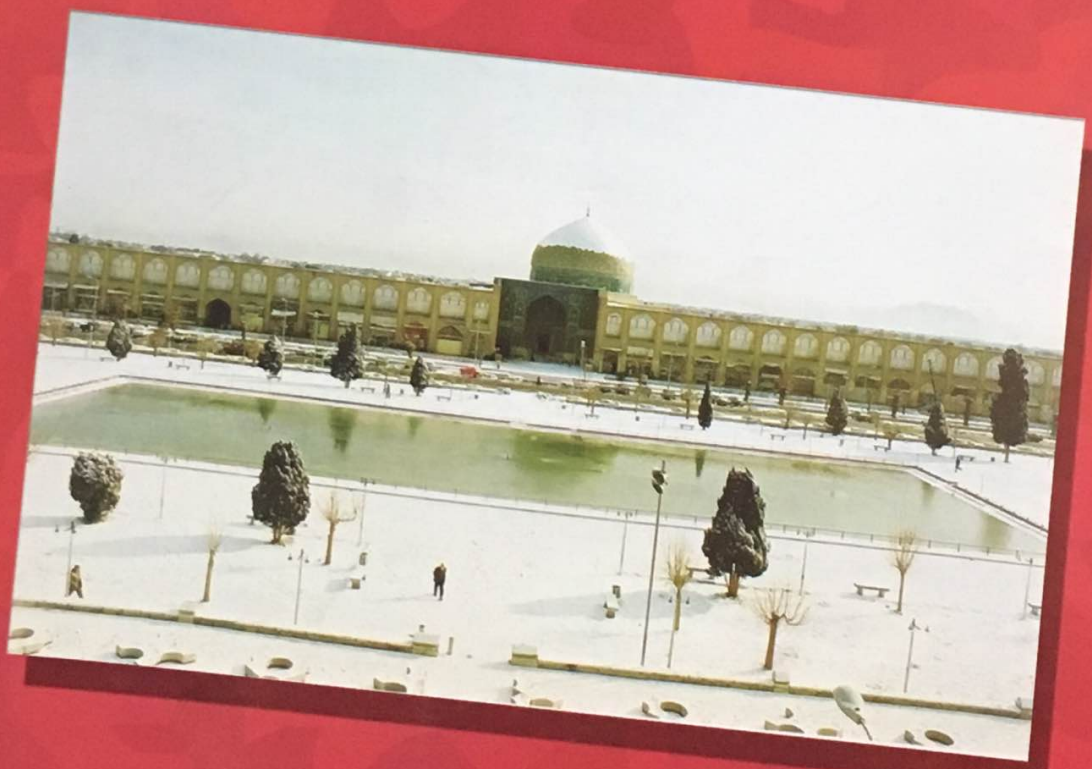








آنچه در این شماره می‌خوانید:



به نام آن که جان را فکرت آموخت

فرنود

نشریه انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان اصفهان

مدیر مسئول و سردبیر: محمود تلگینی

هیئت تحریریه: منیره انصاری‌پور، عبدا... امینی، فروزان خردپژوه، اکبر زمانی، محمدعلی نقش و فاطمه هانی طبائی

تاریخ انتشار: زمستان ۸۵

نشانی پستی انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی اصفهان:

اصفهان- خیابان احمدآباد- روبروی خیابان گلزار- کوچه خواجه نظام‌الملک-

مرکز انجمن‌های علمی آموزشی معلمان استان اصفهان

پست الکترونیک: info@farnud.org

کلام نخست

آموزش نیز همانند اغلب سیستم ها علاوه بر این که تحت تأثیر عوامل درونی قرار دارد، می‌تواند از عوامل بیرونی نیز تأثیر پذیرد. سیاست های آموزشی یک کشور معمولاً توسط کارشناسان، متفکرین و مسئولین آموزش و پرورش آن کشور تدوین و به اجرا در می‌آید. معمولاً این سیاست‌ها براساس استانداردهای آموزشی جهانی، امکانات کشور از قبیل سیستم موجود آموزش، فضاهای آموزشی، بودجه اختصاص یافته و از همه مهمتر نیروی انسانی ماهر آموزش و پرورش آن کشور بنا می‌گردد. ولی تعیین این سیاست ها و اختصاص امکانات مورد نیاز به تنهایی نمی تواند تضمین کننده دستیابی به هدف باشد، زیرا همان‌گونه که یادآور شدیم عوامل بیرونی نیز می‌توانند تأثیر گذار باشند. در کشور ما یکی از مهمترین عوامل بیرونی تأثیر گذار در آموزش نحوه گزینش دانش آموزان برای مقاطع بالاتر است. انتخاب دانش آموزان دبستانی برای دوره راهنمایی دانش‌آموز دوره راهنمایی برای دبیرستان و از همه مهمتر دانش آموز دبیرستانی برای دانشگاه است. در بسیاری از مدارس ابتدایی شهر های کشور مان حرکتی در جهت آموزش دانش آموزان (چه رسمی در برنامه مصوب و چه غیر رسمی به صورت کلاس‌های اضافه و یا خصوصی) به گونه ای که آن‌ها بتوانند در مدارس راهنمایی ویژه قبول شوند، دیده می‌شود. دربسیاری از موارد این حرکت تحت فشار والدین دانش‌آموزان به مدارس و حتی پرداخت هزینه های آن انجام می‌شود. مشابه همین امر در مورد دانش‌آموزان راهنمایی و دبیرستانی نیز عمل می‌شود. این برنامه‌ها می‌تواند گاهی برنامه اصلی و مصوب وزراتخانه را تحت‌الشعاع قرار داده به طوری که دانش‌آموز و والدین و حتی مسئولین مدارس احساس می‌کنند که نیازی به اجرای برنامه اصلی وجود ندارد. چه از نظر دانش آموز و والدین آن‌ها فقط موفقیت در آن آزمون ها مهم است و از نظر مسئولین مدارس نیز هر چه تعداد این گونه دانش آموزان بیشتر باشد آموزشگاه آن‌ها در موقعیت بهتری قرار می‌گیرد و اعتبار بیشتری کسب می‌کند. (Teaching for the test)

مورد اصلی ما کنکور است، که خوشبختانه چند سالی است با برگزاری سمینارها و ارائه مقالات و طرح‌های جایگزین ضرورت تغییر آن به همه دست اندرکاران به اثبات رسیده است، ولی سؤال مهم این است که آن چه جایگزین وضع فعلی می‌شود چیست؟

متأسفانه زمزمه هایی به گوش می رسد که تغییرات بسیار در راه است، حذف کنکور به شکل فعلی آن و پذیرش فقط از روی نمرات دوره دبیرستانی و پیش دانشگاهی، آیا این راه حل مناسب است؟

همان طور که می‌دانیم این کار از یک طرف فقط هنگامی میسر و عادلانه است که امتحانات سراسری با تصحیح مناسب صورت گیرد و یا حداقل با تقسیم‌بندی کشور که مناطق مختلف

(برخوردار، نیمه برخوردار، محروم و غیره) برای هر یک امتحانات خودشان را طرح و برگزار کنند. در حالی که اگر هم اکنون به سراغ مسئولین آموزش و پرورش هر استان، مثلاً اصفهان بروید مشخص می‌شود که در خود شهر اصفهان مدارسی با امکاناتی در حد مناطق محروم وجود دارد! از طرف دیگر امتحانات که سؤالات آن از بیرون طرح می‌شود آزادی عمل معلم را در کلاس کاهش می‌دهد و مجبور است همه وقت و انرژی خود را به گونه ای تنظیم نماید که دانش‌آموزانش در آن امتحانات موفق شوند و ممکن است پس از چند سال هر یک از این امتحانات همان ویژگی کنکور فعلی را با همه مشکلاتش پیدا کنند.

آیا نمی توان راه حل میانه‌ای را پیشنهاد کرد و آن را به طور آزمایشی روی داده‌های مربوط به کنکور سال‌های آتی به کار برد، آیا نمی توان پذیرش فقط تعدادی از دانشگاه‌ها را در سیستم جدید آزمایش کرد و نتایج را سنجید و سپس به تغییر همگانی اقدام کرد. معمولاً در بسیاری، سیستم‌های اجتماعی با مطالعه در حالت‌های خاص می‌توان پارامترهای تأثیر گذار را شناسایی و آن‌ها را کنترل و سیستم آن را تعمیم داد.

امیدواریم که مسئولین کشور این بار در برخورد با این مسئله اجتماعی تصمیمی عجولانه نگیرند، که متأسفانه در گذشته در مورد نظام جدید آموزش و پرورش طرح کاد و ... شاهد آن بوده‌ایم، (چه اجرای طرحهای فوق و چه لغو آن‌ها) و این امکان را ایجاد نمایند که سیستم آموزش و پرورش و بدنه اصلی آن دانش آموزان و معلمان کمترین آسیب را در این میان ببینند.

هیئت تحریریه

منزلگاه اینترنتی انجمن معلمان ریاضی اصفهان

با توجه به گسترش استفاده از اینترنت در جامعه و امکان ارتباط ساده و ارزان‌قیمت از این طریق، پنجمین دوره شورای اجرایی انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان اصفهان تصمیم به ایجاد منزلگاهی برای این انجمن به منظور ارتباط بهتر و بیشتر با اعضاء در این شبکه جهانی گرفت.

با توجه به اینکه در زمان آغاز به کار مجله انجمن بررسی و دقت نظر بسیاری برای انتخاب نام آن به کار رفته بود، لذا تصمیم بر آن شد که وب سایت انجمن نیز به همین نام ثبت شود. در حال جاضر این وب سایت با آدرس الکترونیکی www.farnud.org قابل دسترسی است. ناگفته پیداست که موتورهای جستجوی اینترنتی مانند yahoo، google و ... ، **" انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی اصفهان"** و یا عبارت‌های مشابه را به همین وب سایت متصل می‌کنند.

این وب سایت شامل اطلاعاتی در مورد تاریخچه، اهداف، اساسنامه، اخبار و اعضاء انجمن به علاوه لینک مجلات آموزش ریاضی دنیا، نهادها و سازمان‌های مرتبط می‌باشد. در این وب سایت تالار گفتمانی نیز برای اعضاء انجمن در نظر گرفته شده است.

امیدواریم که اعضاء انجمن و خوانندگان مجله فرنود ضمن مراجعه به این وب سایت نقطه نظرات و پیشنهادات خود را برای بهبود کیفیت سایت از طریق پست الکترونیک info@farnud.org یا از طریق پست عادی به نشانی: اصفهان- خیابان احمدآباد- روبروی خیابان گلزار- کوچه خواجه نظام الملک- مرکز انجمن های علمی آموزشی معلمان استان اصفهان در اختیار انجمن قرار دهند.

خلاقیت در آموزش ریاضی

توران قلمزن

آموزش و پرورش اصفهان

چکیده:

خلاقیت به عنوان یک فرایند فکری، راه حلی برای یک مسئله، یک محصول یا یک تلاش ارائه می‌دهد. باید خلاقیت اندیشی آموزش داده شود و با آزمون های از پیش ساخته جهت کشف خلاقیت به دو گونه‌ی « کلامی» و «دیداری» خلاقیت را کشف نمود. معلمان چه کار می‌توانند بکنند؟ بهترین روش خلاقیت را به آن‌ها بشناسانند، مجموعه های جالب و کامل از انواع اجسام کاغذی و وسائل تحریر و وسایل طراحی تهیه نماید، شرایط جو کلاس باعث نوآوری، وحدت و هیجان شود. ضمناً اعتماد به نفس را در او قوی گرداند. آن جاست که باید قوه‌ی خلاقه آفرینش گری را نیز تقویت نمود. با روشی شبیه «تداعی آزاد» بارش مغزی را برای تفکر آفرینشی ایجاد نماید. سعی را هدف قرار ندهد، کوشش را وسیله ای برای هدف قرار دهد. ساماندهی ذهنی و رمز گردانی مفاهیم و دانسته های ریاضی توسط شاگردان موجب کاهش کشمکش های ذهنی و یادگیری معنا دار آنان در عرصه ریاضیات می‌شود. لازمهٔ آموزش دادن خلاقیت به دانش آموزان، داشتن معلمی خلاق می‌باشد و همچنین محیطی آرام که موجبات یورش فکری را در آموزندگان فراهم آورد. از طرفی به دانش آموزان یاد بدهد که آن چه بر کار ما اثر می‌گذارد، برداشتی است که از ارزش خود داریم، این برداشت یا توانائی ذاتی، ما را برای رسیدن به موفقیت مهیا ساخته و نیروهای مان را برای رسیدن به هدف های مولد و کارا بسیج می‌نماید.

«شعار نابودی در انتظار شماست، مگر این‌که خلاق و نوآور باشید».

مقدمه:

واژه‌ی « خلاقیت» معادل واژه ی «creativity» و «نوآوری» برابر واژه‌ی «innovation» می‌باشد . «تونی پروکتور» (۱۹۹۹) به نقل از ورتهایمر (۱۹۵۹، ۱۹۴۵) بیان می‌دارد، «خلاقیت» عبارت است از توانائی نگاه جدید و متفاوت به یک موضوع و به عبارتی فرآیند شکستن و دوباره ساختن دانش خود در باره ی یک موضوع و به دست آوردن بینش جدید نسبت به ماهیت آن .

ریکادرز (۱۹۹۷) می نویسد، « خلاقیت»، عبارت است از خارج شدن از قالب های ذهنی و همچنین خلاقیت، عبارت است از چیزهای جدید و معنی‌دار. گیلفورد (۱۹۵۴) خلاقیت را عبارت از تفکر واگرا (در برابر همگرا) می‌داند.

به بیان ماگیاری، فرآیند های خلاق در سطح افراد فرآیند خلاقیت و حل مسئله می‌باشند. قابلیت حل کردن مسائل ریاضی به آسانی و به تدریج در طول یک دوره زمانی ایجاد می‌شود. حل موفقیت آمیز یک مسئله متضمن هماهنگ کردن دانش و تجربه فعلی و قبلی فرد، تصمیم‌سازی وی، توانائی‌های مختلف تحلیلی و فضائی او، شناسائی و غلبه بر پیچیدگی‌های تکلیف مورد نظر می‌باشد. می توانیم از جنبه‌های مختلف به خلاقیت بنگریم. آیا عاملی در محیط وجود دارد که خلاقیت را ترغیب کند؟ آیا مجموع تمامی جریانات درونی ذهن است که خلاقیت را می‌سازد؟ یا اینکه، خلاقیت نیازمند یک بازده عینی است، مانند تولید یک محصول یا ارائه یک برنامه اجرایی، احتمالاً هر سه مفهوم در خلاقیت وجود دارند.

خلاقیت، بازی با تخیل و امکانات است که در حین تعامل با عقاید افراد و محیط، منجر به ارتباطات و نتایج جدید و معنا دار می‌شود. خلاقیت یک فعالیت پویاست که ضمیر خودآگاه و نیمه خود آگاه را در بر می‌گیرد. در واقع خلاقیت تمامی ذهن را در بر می‌گیرد. ندهرمان نویسنده کتاب «ذهن خلاق» در تعریف خلاقیت چنین می نویسد:

به نظر من خلاقیت در معنای کامل خود، هم مفهوم ایده را شامل می‌شود و هم نشان دادن آن را. یعنی باعث رخ دادن چیزی شبیه یک نتیجه می‌گردد. به منظور تقویت توانایی خلاقیت می‌باید فکر یا ایده را به صورتی به کار گرفت که تجربه از یک سو و واکنش خود شخص و سایرین از سوی دیگر باعث تقویت عملکرد شوند.

هنگامی که یک فکر خلاق به طور گسترده به اجرا گذاشته می‌شود، طوری که باعث یک تحول دائمی شود، می‌توان گفت که نوآوری به وقوع پیوسته است. خلاقیت به ندرت در انزوا رخ می‌دهد، زیرا نیازمند ذهن، افکار و اختراعات سایر مردم است. در مدرسه برای رسیدن به نتیجه نیاز به معلومات دارید در حالیکه در زندگی برای رسیدن به نتیجه نیازمند خلاقیت هستید. (تفکر خلاق و حل خلاقانه مسأله، ترجمه و تعریف خیریه بیگم حائری زاده و لیلی محمد حسین).

خلاقیت تولید ایده یا محصولی نو و مبتکرانه است که در برهه‌ای از زمان برای خالق یا برای شخص دیگری رضایتبخش باشد.

خلاقیت = دانش + تجربه+ بینش کودکانه

متأسفانه تفکر خلاق در مدارس و دانشگاه‌های ما تدریس نمی شود، برنامه های آموزشی تنها بر افزایش اطلاعات دانش آموزان تأکید دارند و روش آموزش دروس علوم و ریاضی به گونه‌ای است که تفکر تحلیلی را القا می‌کند.

اهمیت خلاقیت:

اصولاً ریاضیات راهی برای توسعه مهارت‌های تفکر و تقویت تفکر خلاق و نقاد است. این باورهاست که ما را به این سو سوق می‌دهد که مفاهیم ریاضی را درک کنیم و آن‌ها را با تجربیات زندگی روزانه خود مربوط سازیم. در این صورت است که می توانیم درک مفهومی واستدلال ریاضی را جایگزین حفظ کردن قواعد و رویه ها نمائیم. ریاضیات ابزاری است در دست بشر تا به کمک آن سلطه خود را بر وجود خویش و بر تمامی طبیعت اطراف خود تحقق بخشیده و کامل کند. ناکامی در حل برخی از مسائل، مربوط به نبودن استعداد و یا نقص ابزار محاسبه نیست بلکه محدود بودن ذاتی ظرفیت ذهنی ایشان و ماشین است که موجب این ناکامی

می‌شود. گاردنر معتقد است، تصور و تخیلی که در دوران کودکی شکل می‌گیرد، مبنائی برای خلاقیت در دوران بلوغ است.

تحریک خلاقیت:

وقتی بچه ها راه‌هائی برای پاسخ دادن به یک موقعیت انتخاب می‌کنند از روش‌هائی موسوم به تکانه های خلاق استفاده می نمایند. یعنی قبل از اینکه بچه ها جواب درست یا قابل قبولی برای یک موقعیت پیدا کنند روش‌هائی برای رسیدن به خواسته ها و علایق خود ابداع می نمایند. در نتیجه شرط خلاقیت قرار گرفتن در شرایط مطلوب وآموزش خلاق اندیشی می‌باشد. سه عامل می‌تواند روی تمایل کودک به برخورد خلاق با مسائل تأثیر بگذارد:

۱- طرز تلقی شخصی کودک در قبال فعالیت

۲- کار (اثر) در رابطه با زمینه ی کار (یا اثر) (مثلا مقایسه یک نقاشی با سایر سبک‌های نقاشی)

۳- نقش آموزگاران یا بزرگترها. (آیا خلاقیت مورد حمایت قرار می‌گیرد؟)

نمود خلاقیت:

اسباب خلق موجودات جدیدی که مشابه و همنوع نداشته باشد را بالقوه هر انسانی در ذهن خود دارد و این قوه از بدو تولد با او همراه است و در صورتی که بتواند ذهنیات خود را در شکل مادی و قابل عرضه «متبلور کند» دستاورد او خلاقیت تلقی خواهد شد. برقراری رابطه میان اطلاعات و خلاقیت بر عهده‌ی «سمت گیری» است. انسان با هر بار سمت گیری برای استفاده از نیروهای خلاقه اش، می تواد طیفی از بود تا نمود خلاقیت را طی کند. در یک سر طیف، خلاقیت فقط قوه ای بی شکل است و در سر دیگر طیف، خلاقیت نمودی «فعلیت یافته» و کاملاً واقعی پیدا می‌کند. بین این دو، هر آنچه را که بشر میآفریند، ابتدا شکل ذهنی می‌گیرد و سپس با تکمیل تدریجی آن شکل، به شکل قابل مشاهده در می‌آید. در مسیر پرورش نسل آینده، ترویج و تأکید بر توانمندی استفاده از راه‌حل‌های شناخته شده، ذهن‌های «مستقل‌نگر» و «متفاوت‌نگر» و «مبدع و مبتکر» را کمیاب می‌کند.

شناسائی خلاقیت در کودکان:

پرکینز (۱۹۸۴) به شش ویژگی خاص در اشخاص به شدت خلاق اشاره کرده است:

۱- کودکان خلاق مترصد زیبائی هستند.

۲- به راحتی مسایل را شناسایی می‌کنند و با انعطاف پذیری مسایل را از میان بر می دارند.

۳- اندیشمندان خلاق عینی هستند.

۴- کارشان تحلیل و به انتقاد دیگران توجه دارند.

۵- تن به قبول ریسک می‌دهند.

۶- از انگیزه فراوان برخوردارند و برای ارضای نیازهای شخصی میل به خلاقیت دارند.

حاکم شدن تعلیم و تربیت سئوال محور بر جهت‌گیری بر جریان یاددهی یادگیری، آن را از شکل انفعالی خارج کرده و به شکل فعال در می‌آورد.

آموزش خلاقیت:

لازمه‌ی آموزش دادن خلاقیت به دانش آموزان، داشتن معلمی خلاق می‌باشد و همچنین محیطی آرام که موجبات یورش فکری را در

آموزندگان فراهم آورد. از طرفی به دانش‌آموزان یاد بدهد که آنچه بر کار ما اثر می گذارد، برداشتی است که از ارزش خود داریم، این برداشت یا توانائی ذاتی، ما را برای رسیدن به موفقیت مهیا می سازد.

خلاقیت در آموزش ریاضی:

ریاضیات دانشی بسیار نظام مند و سازمان یافته است که فراگیری آن نیازمند یادگیری هوشمند در سطحی عالی است. یادگیری هوشمند به خاطر سپردن تعدادی تعریف و مهارت و قاعده نیست، بلکه مستلزم ساختن ساختارهای دانش از نقشه های عملی متنوعی به هنگام ضرورت است. در نظریه یادگیری هوشمند یادگیری به مثابه ارتباط و تعامل اندیشه ها و مفاهیم و تجربه های جدید فراگیران با یک طرحواره موجود است. (اسکمپ، (۱۹۸۹)). ساماندهی ذهنی و رمز گردانی مفاهیم و دانسته های ریاضی توسط شاگردان موجب کاهش کشمکش های ذهنی و یادگیری معنا دار آنان در عرصه ریاضیات می‌شود و تأثیری به سزا بر رفتار ریاضی شان خواهد داشت.

دانش ریاضی عمدتاً شامل شکل گیری طرحواره‌هایی است که به مجموعه ای از روش‌های اجرایی و مهارتی منجر می‌شود. این روش‌های اجرایی به ویژه در حساب و جبر که الگوریتم نام دارد، عملیات لازم برای حل مسئله توسط فراگیران را هدایت می‌کند. رایلی و همکاران (۱۹۸۳) معتقدند هر مسئله ریاضی به سه نوع دانش ریاضی نیازمند است که عبارتند از:

۱- طرحواره مسئله که از ساختار معنایی و محتوایی صورت مسئله استنباط و استخراج می‌شود.

۲- طرحواره اقدام برای حل مسئله که از مهارت‌ها و تجربه های ذخیره شده در حافظه نشأت می‌گیرد.

۳- دانش راهبردی که برای برنامه‌ریزی و ساماندهی مراحل حل مسئله به کار می‌رود.

از مطالعات موجود می‌توان نتیجه گرفت که حل مسئله با شکل‌گیری انواع گوناگون طرحواره‌های مسئله ارتباط دارد و مسائل ریاضی عمدتاً مجموعه‌ای از طرحواره‌ها را می‌طلبد که در مورد اغلب دانش آموزانی که در یک عرصه مثلاً جبر و یا هندسه فعالیت دارند، مشترک است. شاید ساده‌ترین راه کسب ظرفیت بیشتر برای حل مسئله رشد پیوسته و منظم دانسته‌های فرد است که از طریق افزودن اطلاعات جدید یک طرحواره از پیش موجود صورت می‌پذیرد. (گلاور و همکاران، ۱۹۹۰).

عده‌ای معتقدند که حل مسئله جوهر اصلی ریاضیات است، در حالی که دیگران ریاضیات را به مثابه مجموعه‌ای از ابزارهای تفکر می‌دانند که برای فرآیند فعال حل مسئله در دسترس فراگیر قرار می‌گیرد. این فرآیند کشمکش عمل خلاقی است که برای نیل به هدف مشخصی مبتنی بر کشف راه‌های جدیدی از ترکیب قاعده‌های موجود به کار می‌رود. بصیرت نیز بدین ترتیب حاصل می‌آید.

کاک کرافت (۱۹۸۲) حل مسئله را توانایی به کار بردن ریاضیات در موقعیت‌های مختلف می‌داند و معتقد است که دانش آموز نمی‌تواند حل یک مسئله ریاضی را آغاز کند مگر این‌که مسئله به عبارت‌های مناسبی تبدیل شود. این نخستین و اصلی‌ترین گام، مشکلات فراوانی را برای بسیاری از دانش آموزان به بار می‌آورد. در حالی که ما به عنوان معلمان ریاضی کمتر به آن توجه داریم. به‌کارگیری روش‌های ریاضی در حل

مسائل را می‌توان به چرخ کردن گوشت تشبیه کرد. علاوه بر این که تیغ چرخ گوشت باید تیز باشد لازم است دسته آن نیز در جهت درست چرخانده شود. هنگامی که پیچیدگی‌های یک مسئله متناسب با قابلیت‌ها و ظرفیت‌های ذهنی و مفهومی دانش آموزان و مرتبط با تجربه آن در عرصه ریاضیات تنظیم شوند، فعالیت حل مسئله می‌تواند موجب ایجاد انگیزش بالا در آنان شود و دانش آموزان به سطح قابل قبولی از توافق در بروز رفتار ریاضی مطلوب نائل آیند. در عین حال باید توجه داشت که مسئله به تنهایی نمی‌تواند موجب بسط انگیزش در دانش‌آموزان و ایجاد رغبت در عرصه فعالیت‌های ریاضی شود، مگر این‌که دانش آموز رغبت چالشی مسئله را بپذیرد و خود را برای مقابله با آن آماده سازد. امروزه آموزش حل مسئله به رویکرد آموزش ریاضیات از طریق حل مسئله تغییر یافته است و بسیاری از پژوهشگران کوشیده‌اند تا رویکرد حل مسئله به تدریس ریاضیات را تبیین و تعریف کنند. آموزش مطالب ریاضی در بسترهای حل مسئله و محیط‌های آمیخته با پرسشگری در واقع کمک به فراگیران در رسیدن به درکی عمیق از ریاضیات است که با درگیر شدنشان در انجام فعالیت‌های ریاضی، ابتکار و خلاقیت، حدس زدن، تحقیق و تفحص فراهم می‌آید. پژوهشگران برخی از ویژگی‌های رویکرد حل مسئله به آموزش ریاضیات را به صورت زیر مطرح کرده‌اند:

۱- تعامل میان فراگیران با هم و فراگیران با معلمان،

۲- گفتمان ریاضی و اجماع میان فراگیران،

۳- معلمان برای تدارک اطلاعات کافی به منظور طرح و ارائه مسائل ریاضی بکوشند و فراگیران به تفسیر و تلاش برای ارائه راه حل‌های متنوع بپردازند.

۴- معلمان راه حل‌های درست یا نادرست را با روش‌های غیرارزشی و متکی به نمره بررسی کنند.

۵- معلمان به هدایت، نظارت، کنترل و طرح پرسش‌های روشنگرانه بپردازند و در فرآیندهای حل مسئله مشارکت جویند.

۶- معلمان با درک حقیقت و شرایط به نحو مقتضی در فعالیت‌های حل مسئله شاگردان مداخله کنند و به آنان فرصت دهند که خود راه خویش را برای حل مسائل مورد نظر برگزینند.

۷- یکی از ویژگی‌های عمده رویکرد حل مسئله به آموزش ریاضیات، تشویق فراگیران به تعمیم مفاهیم و قواعد و فرآیندهایی است که در مرکز فعالیت‌های ریاضی قرار دارند. به هر حال فارغ از این مباحث، کدامیک از باورهای زیر می‌توانند مبنای قضاوت ما باشند، مبنی بر اینکه یک حل کننده خوب و توانای تکلیف‌ها و مسائل ریاضی چه کسی است؟

الف) با دادن مقدار زیادی تکلیف و مسئله ریاضی به دانش آموزان می‌توانیم آنان را بهترین حل کننده‌ها در این عرصه تربیت کنیم و شعار هر چه بیشتر بهتر، همیشه برخاسته از یک نیاز و واقعیت علمی است.

ب) با ارائه مسائل خوب و متنوع به دانش آموزان می‌توانیم آنان را یاری دهیم تا مسائل ریاضی را بهتر حل کنند.

واقعاً حل مسئله چیست؟ روانشناسان حل مسئله را پردازش شناختی برای تبدیل موقعیت مفروض به موقعیت مطلوب می‌دانند، در حالی که شخص حل کننده، برای حل آن روش واضح و آماده‌ای ندارد. این تعریف شامل چند مقوله اساسی است که عبارتند از:

۱- حل مسئله امری شناختی است، یعنی درون ذهن یا دستگاه شناختی حل کننده روی می‌دهد

و وجود آن را تنها از بروز رفتار ریاضی فراگیر می‌توان استنباط کرد

۲- حل مسئله یک فرآیند است. یعنی متضمن دستکاری معلومات در دستگاه شناختی یا ذهن حل کننده است.

۳- حل مسئله نوعی تفکر جهت‌دار است در مقابل تفکر بی‌جهت و فاقد هدف.

۴- حل مسئله امری فردی است، یعنی دشواری تبدیل یک حالت مفروض از یک مسئله به حالتی مطلوب و روشن به دانش و تجربه فرد حل کننده بستگی دارد.

هایز (۱۹۷۸) معتقد است وقتی می‌خواهید کاری انجام دهید و چگونگی انجام آن را نمی‌دانید با یک مسئله روبرو هستید. فرآیند حل مسئله را می‌توان به مراحل چهارگانه زیر تقسیم کرد:

۱- بازنمایی،

۲- طرح‌ریزی،

۳- اجرا،

۴- بازبینی.

جورج پولیا مراحل چندی برای حل مسائل ریاضی طراحی کرده است.

تکنیک چهار مرحله‌ای پولیا عبارتند از:

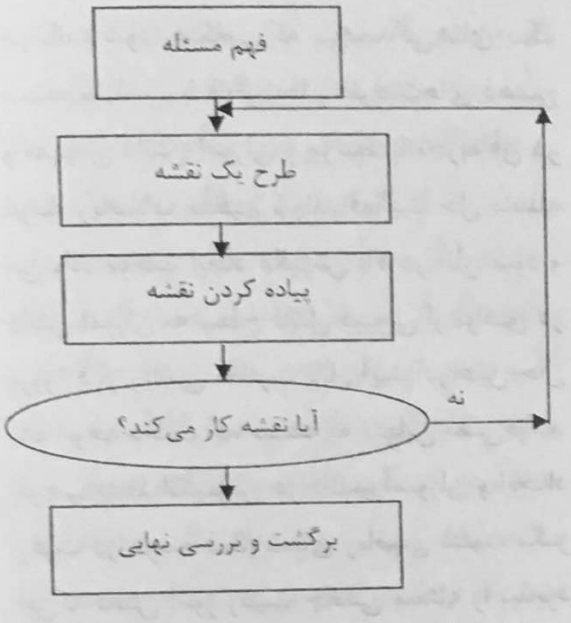
۱- فهم مسئله،

۲- طرح یک نقشه برای حل مسئله،

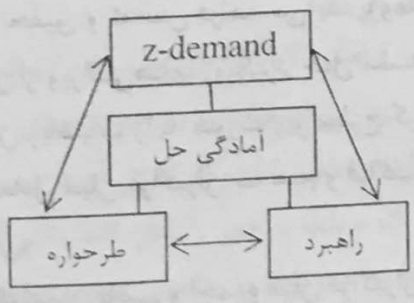
۳- پیاده کردن نقشه در موقعیت حل مسئله،

۴- برگشت به عقب و بررسی نهایی نمودار کلی مراحل چهارگانه پولیا برای حل مسئله در شکل بعد ترسیم شده است.

برخلاف پولیا برخی از پژوهشگران از نگرش‌های اسلوب‌دار حمایت می‌کنند. مثلاً گانیه معتقد است که ما قادر نیستیم افراد را برای این که حل کننده بهتر مسائل بشوند، آموزش دهیم. زیرا در واقع نمی‌توان مهارت‌های تفکر را در خلاء به فراگیران آموخت. هر مسئله‌ای دربردارنده محتوا و بافت خود است و بنابراین نمی‌توان راهبردهای کلی‌ای برای حل هر نوع مسئله‌ای به کار گرفت.



هنگامی که دانش آموز مسئله را حل می‌کند، چیزهایی را آموخته است ولی نمی‌توان مدعی شد که او به خودی خود در وضعیت‌های مختلف قادر است تا از عهده مسائل متنوع برآید. چه بسا به رغم حل مسائل زیاد هنوز هم درک درستی از بسیاری از مفاهیم ریاضی ندارد. با وجود این با کمک الگوی آمادگی ریاضی که قبلاً مورد بحث قرار گرفت، الگوی خلاصه‌تری را می‌توان به عنوان الگوی آمادگی حل مسئله را به صورت شکل ارائه داد.



در این الگو عامل‌هایی چون تکلیف (z)، طرحواره‌ها (S) و راهبردهای حل مسئله (y) به گونه‌ای نظام‌مند از منظر درون ریاضی با یکدیگر در تعاملند تا آمادگی حل مسئله را توسط فراگیر

تبیین کنند. در ابتدا باید سؤال کنیم که مسئله چیست؟ سپس نتیجه را طرح ریزی کرده راه‌های ممکن برای رسیدن به آن را جستجو کنیم. در نهایت طرح را تصویب و نتایج را مورد بررسی نهایی قرار دهیم. همه ما تاحدودی با این روش در مدرسه آشنا شده‌ایم. مشکل هنگامی بروز می‌کند که ما از این روش در مواردی که کارآیی ندارد استفاده کنیم، زیرا باعث ایجاد خلل در تفکر منسجم و کل‌نگر می‌شود. حل خلاقانه مسئله دارای پنج مرحله مجزاست که دارای سبک‌های مختلف فکر می‌باشد. حل خلاقانه مسئله از مراحل متوالی تفکر واگرا به تفکر همگرا تشکیل شده که به طور متناوب ظاهر می‌شوند. سپس اطلاعات را تجزیه و تحلیل و به صورت عوامل و دلایل اصلی خلاصه می‌کنیم. در مدل یادگیری پویا، بیش از هر چیز، به نظریه‌ی آهنگ تعلیم و تربیت که توسط وایت هد، ریاضیدان و فیلسوف مشهور تعلیم و تربیت ارائه شد، شباهت دارد. وایت هد تأکید می‌کند که یادگیری یا رشد، فرایندی دورانی و ادامه یابنده بوده و با حفظ چنین آهنگ یا چرخه‌ای تداوم می‌یابد. با مواجه ساختن دانش‌آموزان با افراد دارای اندیشه‌های جدید، نبوغ و خلاقیت آن‌ها را می‌توان آشکار ساخت. کلید تربیت فرهنگی را که خود، کلید توسعه، ترقی و تکامل جامعه است، باید به دست معلمانی نوجو و نوآوری یافت که نسبت به استفاده‌ی هوشمندانه، خلاقانه و مبتکرانه از الگوهای مختلف تدریس، وفادارند. با روش تدریس اکتشافی، دانش‌آموزان در فرآیند یاددهی یادگیری، نقش فعالی را ایفا می‌نمایند.

ریاضیات چیست؟

ریاضیات در واقع محصول کوشش خلاق فکر بشر است که با فرآیندهای پیچیده‌ای مشتمل بر تجارب ایده‌ها و مفاهیم. درک و شهود آن‌ها و به کارگیری راهبردهای کلی تحقیقاتی، ایده‌های اشتباه و حک و اصلاح آن‌ها و همکاری‌های مشترک پدید آمده است. تدریس ریاضیات به صورت اصولی ثابت و لامتغیر باعث شده است، تا زمینه‌ای این فکر در اذهان فراهم گردد که ریاضیات کلاً امری فسیل شده و فاقد هرگونه پویایی و تحرک می‌باشد. واقعیت این است که این مطلب صحت ندارد. در طی ۳۰۰ سال گذشته و بخصوص در قرن اخیر، گام‌های مؤثری در ریاضیات برداشته شده است و ریاضیات دارای مطالب خسته کننده که در مدارس تدریس می‌گردد نیست و بسیار متفاوت است. پس اصولاً ریاضیات چیست؟ در این مورد یک تعریف فلسفی شده است و آن این‌که «ریاضیات علمی است که در مورد چند و چون روابط حاکم بر دنیای ما از نظر کمی بحث می‌کند». دیوید هیلبرت آلمانی می‌گفت: «ریاضیات را فقط آن‌هایی می‌فهمند که شایستگی و صلاحیت درک آن را دارند». با این همه برای درک صحیح هر علمی، شخص باید در اولین مرحله حوزه تأثیرات، اهداف کلی و روش‌های به کارگیری و اعمال آن را برای خود دقیقاً مشخص و معلوم سازد. ریاضیات مدرن بر ایده مجموعه‌ها استوار است. ریاضیات نیز مانند هنر از نمودهای واقعی زندگی تأثیر می‌گیرد. وقایع فرآیندها و واقعیات را با یکدیگر مقایسه کرده با هم درمی‌آمیزد و سپس از آن میان قوانینی کلی را نتیجه می‌گیرد. بازی‌ها به آموزش ریاضیات کمک می‌کند. یک وسیله کمک آموزشی ریاضی و یا یک معما

می‌تواند علاقه دانش‌آموز را به گونه‌ای مؤثرتر از انجام یک تمرین برانگیزد، به ویژه اگر این تمرین خارج از حیطه تجربه او باشد. «بازی یک راه میان بر برای دسترسی به مسائل دنیاست.» (اسدی، نسترن، ریاضی جبرانی، تهران، ۱۳۷۹، ص ۸۳).

فواید داشتن مهارت‌های حل خلاقانه مسئله

این مهارت‌ها باعث غنای زندگی می‌شوند، زیرا از این مهارت‌های تفکر می‌توان در منزل، به هنگام تفریح و به خصوص در رابطه با دیگران استفاده کرد. می‌توان در زمینه شغلی موفقیت‌های چشمگیری کسب کرد و می‌توان به شغل خود، چالش و هیجان بیشتری بخشید. از آنجا که مهارت‌های حل خلاقانه مسئله افکار تحلیلی و تخیلی را در هم می‌آمیزد، باعث ایجاد تعادل در تفکر می‌شود. همانگونه که تفکر شهودی برای دستیابی به نتایج برتر حائز اهمیت است. تفکر انتقادی و ساختاری نیز دارای اهمیت است. اگر ما در پی یافتن راه حل‌های مناسب برای بسیاری از مشکلات فنی، اقتصادی، بومی، آموزشی، اجتماعی و سیاسی دنیای صنعتی و رو به رشد خود هستیم نیاز به متفکران خلاق داریم. با بهره جستن از تفکر خلاق و قابل انعطاف، رهبران و اکثر افرادی که با یکدیگر مشغول به فعالیت هستند، می‌توانند برای حل چنین مسائلی به راهکارهای نوین دست یابند. مهارت‌های تفکرخلاقانه به این افراد امکان می‌دهد که علاوه بر قبول تغییرات خود را با آن وفق دهند. پس آیا اصولاً خلاقیت آموختنی است؟ در جواب باید گفت: علاوه بر این‌که خلاقیت آموختنی است، به چند نکته کلیدی در این مورد باید توجه نمود:

۱- لازمه‌ی آموزش دادن خلاقیت به دانش‌آموزان، داشتن معلمی خلاق می‌باشد.

۲- محیطی آرام که موجبات یورش فکری را در آموزندگان فراهم آورد.

۳- آن‌چه بر کار دانش آموز اثر می‌گذارد، برداشتی است که از ارزش خود دارد. این برداشت یا توانایی ذاتی او را برای موفقیت مهیا می‌سازد.

۴- برای رسیدن به هدف‌های مولد و کارا روی سلامت تصویر ذهنی دانش‌آموز وقت گذاشته شود.

۵- برای یادگیری هوشمند در سطح عالی، ساختن ساختارهای دانش از نقشه‌های عملی متنوع لازم می‌باشد.

۶- ارتباط و تعامل اندیشه‌ها و مفاهیم و تجربه‌های جدید دانش‌آموزان با یک طرحواره که به مجموعه‌ای از روش‌های اجرایی و مهارتی منجر شود.

۷- برای کسب ظرفیت بیشتر جهت حل مسئله، رشد پیوسته و منظم دانسته‌های دانش‌آموز، از طریق افزودن اطلاعات جدید یک طرحواره لازم می‌باشد.

ویژگی‌های افراد خلاق

۱- آزردگی از کارهای تکراری،

۲- توان فکر کردن و پرداختن به چند موضوع در یک زمان،

۳- ایجاد شرایط نشاط و علاقه به موضوع در خویش،

۴- فرانگری و بازنگری در انجام وظایف،

۵- درک سریع و صحیح از روابط بین پدیده‌ها،
۶- مستقل بودن و نگرانی نداشتن از اینکه نسبت به دیگران متفاوت به نظر آیند،
۷- نداشتن تعصب نسبت به تغییر و تحول،
۸- علاقه به یادگیری و کنجکاو بودن،
۹- علاقه به آزمایش و تجربه دایمی،
۱۰- گرایش به مقوله‌ها و کارهای پیچیده،
۱۱- توسعه دامنه دانش و آگاهی خود،
۱۲- داشتن بینش ژرف‌تر نسبت به محدوده‌ی زندگی،
۱۳- شوخ طبعی،
۱۴- قدرت و آمادگی پذیرش افکار نامتعارف،
۱۵- تجربه بیشتر در استفاده از قوای فکری خود،
۱۶- جهت‌دار بودن انگیزه‌ها و شوق‌ها،
۱۷- واقع بینی نسبی،
۱۸- میل به ریسک کردن،
۱۹- اعتماد به نفس بالا،
۲۰- پشتکار و تلاش مستمر،
۲۱- وقار و خودانگیختگی و خودجوش بودن،
۲۲- توجه به زمان و وقت شناسی.

موانع خلاقیت

عبارتند از: ۱- موانع فردی، ۲- موانع اجتماعی، ۳- موانع سازمانی.

از موانع فردی می‌توان تأکید بر عادت‌های پیشین، دلسرد شدن، کمرویی، عدم تحسین و تشویق به موقع، ترس از انتقاد و شکست، مقاوم نبودن و عدم انعطاف پذیری و... را نام برد.

از موانع اجتماعی می‌توان خانواده و محیط آموزشی را نام برد. از موانع سازمانی می‌توان مدیریت، ساختار سازمان، فرهنگ سازمان و آموزش نیروی انسانی را نام برد.

منابع و مأخذ:

۱- یا، جوزگین، «اندیشه و جستجو ترجمه مهرداد رهبری».

۲- پولیا، جرج (۱۳۷۲)، «خلاقیت ریاضی، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی».

۳- اگو، فراکنو آگوستین، «بازی‌های ریاضی و منطق، ترجمه حسن نصیرنیا».

۴- گریوز گارگیلو، اسلادر، «خلاقیت، ترجمه مهدی قراچه داغی».

۵- حائری زاده، خبریه بیگم و محمدحسین، لیلی. مترجم، «تفکر خلاق و حل خلاقانه مسئله».

۶- گلستان هاشمی، سیدمهدی، (۱۳۷۷)، مجموعه آموزشی تکنیک‌های خلاقیت. مؤسسه علمی جهان دانش.

۷- صفوی، امان اله، (۱۳۷۶)، «کلیات روش‌ها و فنون تدریس».

۸- علم الهدایی، سید حسن، ۱۳۸۱، «راهبردهای نوین در آموزش ریاضی».

۹- ابوترابیان، محمدرضا، ۱۳۸۲، «پرورش نسل خلاق در ایران» جلد ۱.

۱۰- اسدی، نسترن، ۱۳۸۲، «شناخت و آموزش خلاقیت در مدارس».

مدل‌سازی ریاضی تصادف رانندگی

سیدمصطفی سیادت‌موسوی

این نوشته ترجمه‌ای آزاد از فیلم Crashing with Safety از مجموعه فیلم‌های آموزش ریاضی Modeling by Mathematics است. مجموعه‌ای از این فیلم‌ها در خانه ریاضیات اصفهان برای استفاده علاقمندان جمع‌آوری شده است.

اهمیت ایمن‌سازی جاده، اتومبیل و ... برای کاهش خطرات احتمالی در حوادث رانندگی بر کسی پوشیده نیست. در این مقاله سعی می‌شود به بررسی برخورد اتومبیل با مانع، از دیدگاه مدل‌سازی ریاضی پرداخته شود.

وقتی اتومبیل با مانعی سخت برخورد می‌کند اتومبیل پس از مدت کوتاهی متوقف می‌شود اما نیروی موثر لازم برای متوقف کردن سرنشین بر وی وارد نمی‌شود و بنابراین او به حرکت خود ادامه می‌دهد و با شیشه جلوی ماشین برخورد می‌کند. شاید جالب باشد که بدانیم ضربه وارد بر صورت سرنشین، وقتی اختلاف سرعتی حدود ۱۰ متربرثانیه (۳۶ کیلومتر بر ساعت) بین صورت او و شیشه جلوی اتومبیل وجود دارد معادل ضربه‌ای است که شیشه جلو اتومبیل اگر از بالای یک ساختمان دو طبقه رها شود بر زمین وارد می‌کند. هدف اصلی این مقاله، مدل‌سازی فرآیند برخورد سرنشین با شیشه جلوی ماشین در حین تصادف اتومبیل با یک مانع و ارائه پیشنهادهایی برای کاهش خطرات در حین حادثه است.

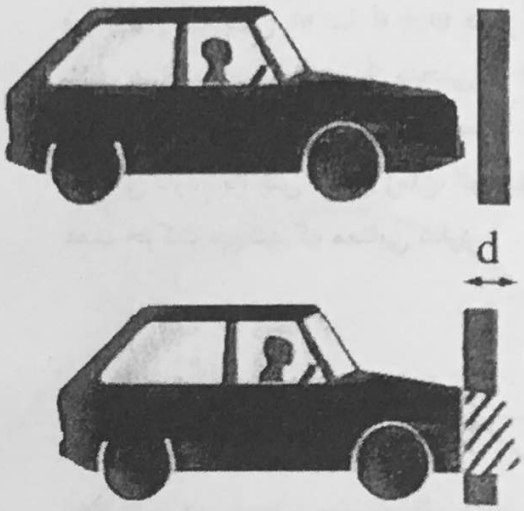
فرضیات زیر در مدل‌سازی فرآیند برخورد در نظر گرفته می‌شود:

۱- اگرچه اتومبیل پس از برخورد با مانع همچنان حرکت‌هایی جزئی دارد اما فرض می‌شود سرعت این حرکت‌ها در مقایسه با سرعت اولیه ناچیز است. همچنین فرض می‌شود اتومبیل دور خود نمی‌چرخد و از زمین بلند نمی‌شود. این فرض‌ها برای سرعت‌های کم‌تر از ۱۵ متربرثانیه در لحظه قبل از برخورد چندان دور از واقعیت نیست. پس فرض می‌کنیم سرعت اولیه اتومبیل (قبل از برخورد با مانع) u و سرعت نهایی بعد از برخورد آن $v = 0$ باشد. همچنین میزان له شدن جلوی ماشین در انتهای برخورد را با d نمایش می‌دهیم. (شکل (۱) را ببینید)

۲- اگرچه بدن سرنشین ماشین انعطاف‌پذیر است و بخش‌های مختلف آن واکنش‌های متفاوتی در حین برخورد با مانع دارند اما فرض می‌شود که بدن سرنشین مانند جرم متمرکز عمل می‌کند.

۳- پس از برخورد، سرنشین در طول یک مسیر مستقیم به جلو حرکت می‌کند و سرعت آن نیز برابر سرعت اتومبیل قبل از برخورد با مانع (u) است. این بیش‌ترین

سرعت حرکت ممکن برای سرنشین است که متناظر با بیش‌ترین ضربه ممکن بین او و شیشه جلو اتومبیل است.



شکل ۱، اتومبیل قبل و بعد از برخورد با مانع

۴- اصطکاک یا نیروی موثر دیگری بین سرنشین با صندلی یا کف اتومبیل وجود ندارد.

۵- تابع تغییرات شتاب مشاهده شده در حالت واقعی بسیار پیچیده است اما در این‌جا برای سادگی مقداری ثابت برای شتاب فرض می‌شود. شکل (۲) نمونه‌ای از تغییرات واقعی اندازه (قدرمطلق) شتاب و شتاب متوسط در نظرگرفته شده در مدل‌سازی را نشان می‌دهد.

از آن‌جا که با حرکت اجسام سر و کار داریم ناگزیر به استفاده از قوانین مکانیک هستیم. می‌دانیم:

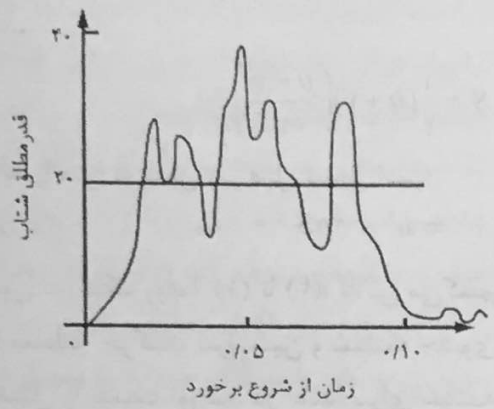
$$\text{شتاب متوسط} = \frac{\text{سرعت اولیه - سرعت نهایی}}{\text{زمان سپری شده برای تغییر سرعت}}$$

و بنابراین

$$a = \frac{v-u}{t}$$

که به صورت زیر نیز قابل نمایش است:

$$v = u + at \qquad (۱)$$



شکل ۲، قدرمطلق شتاب واقعی و شتاب میانگین اتومبیل پس از برخورد

همچنین چون شتاب ثابت فرض شده است داریم:

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{سرعت نهایی + سرعت اولیه}}{۲} = \frac{u+v}{۲}$$

از طرفی سرعت متوسط بر حسب کل مسافت جابه‌جا شده، S، برابر است با:

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{کل مسافت طی شده}}{\text{زمان مورد نیاز}} = \frac{S}{t}$$

و از ترکیب دو رابطه فوق خواهیم داشت:

$$S = \left(\frac{u+v}{۲}\right)t \qquad (۲)$$

با ترکیب دو رابطه (۱) و (۲) و حذف v خواهیم داشت:

$$S = ut + \frac{۱}{۲}at^{۲} \qquad (۳)$$

دقت شود که از رابطه (۱) مقدار t برابر می‌شود با

$$t = \frac{v-u}{a}$$

و اگر این مقدار در رابطه (۳) قرار گیرد خواهیم داشت:

$$S = \frac{1}{2}(u+v)\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

که به راحتی به شکل زیر قابل تبدیل است:

$$v^2 = u^2 + 2aS \qquad (4)$$

اکنون به کمک روابط (۱) تا (۴)، تلاش می‌کنیم تا معادله حرکت سرنشین و شیشه جلوی اتومبیل را بدست آوریم. در ابتدا برای شیشه جلوی اتومبیل و به کمک رابطه (۴) و نیز با توجه به $S = d$ (شکل (۲) را ببینید) و $v = 0$ داریم:

$$0 = u^2 + 2ad \Rightarrow a = -\frac{u^2}{2d}$$

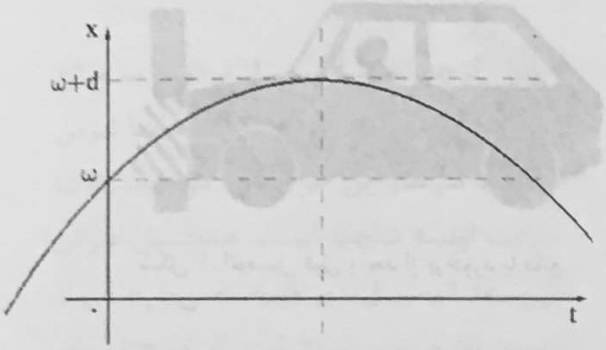
و با ترکیب رابطه فوق با رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$S = ut + \frac{1}{2}at = ut - \frac{u^2 t}{4d}$$

بدین ترتیب S، یعنی فاصله موقعیت شیشه در هر لحظه از موقعیت اولیه شیشه، از رابطه فوق قابل محاسبه است. اما ما به دنبال محاسبه موقعیت شیشه از موقعیت اولیه سرنشین در هر لحظه، که آن را x می‌نامیم، هستیم. حال اگر فاصله سرنشین و شیشه جلوی اتومبیل در ابتدا w نامیده شود داریم: $x = w + S$. دقت کنید که چون S در هر لحظه برابر با موقعیت شیشه نسبت به موقعیت اولیه آن است پس در ابتدا صفر است و در نهایت برابر d، میزان له‌شدگی اتومبیل، خواهد شد. بنابراین x از w تا $w + d$ تغییر می‌کند. طبق بحث فوق مشخص می‌شود که:

$$x = w + S = w + ut - \frac{u^2 t^2}{4d} \qquad (5)$$

اکنون اگر x بر حسب t رسم شود، سهمی شکل (۳) بدست می‌آید. البته با بحث فوق مشخص است که تنها بخشی از این منحنی قابل قبول است که بین w تا $w + d$ قرار داشته باشد. همچنین تنها بخشی از منحنی که از زمان صفر تا زمان وقوع حداکثر سهمی است مفهوم فیزیکی دارد زیرا پس از این زمان، اتومبیل رو به عقب حرکت می‌کند که معنایی ندارد.



شکل ۳. فاصله شیشه جلو از مکان اولیه سرنشین در لحظات بعد از شروع برخورد

اکنون به یافتن معادله حرکت سرنشین می‌پردازیم. با توجه به فرض حرکت سرنشین با سرعت ثابت u پس از تصادف، میزان جابه‌جایی او نسبت به حالت قبل از تصادف در هر لحظه از رابطه:

$$y = ut \qquad (6)$$

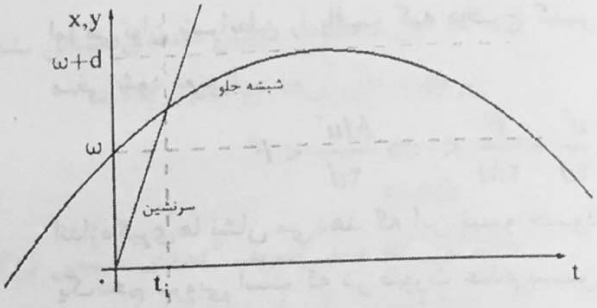
قابل محاسبه است. حال اگر دو معادله (۵) و (۶) در یک نمودار رسم شوند و نقطه برخورد آن‌ها یافته شود، زمانی را بدست می‌آوریم که آن را t_1 می‌نامیم و در آن شیشه جلو اتومبیل و سر سرنشین در یک محل قرار دارند (شکل (۴) را ببینید) و این به معنای رخ دادن حادثه برای

سرنشین اتومبیل است! بنابراین برای یافتن t_i خواهیم داشت:

$$y(t_i) = ut_i = x(t_i) = w + ut_i - \frac{u^2 t_i^2}{4d}$$

و پس از ساده‌سازی رابطه زیر بدست می‌آید:

$$t_i = \frac{2\sqrt{dw}}{u}$$



شکل ۴، نمودار مکان سرنشین و شیشه جلو در هر لحظه بعد از شروع برخورد

آن‌چه شدت ضربه وارد بر سرنشین را تعیین می‌کند اختلاف سرعت او و شیشه جلوی اتومبیل در لحظه برخورد است. بنابراین به کمک رابطه (۱) سرعت شیشه را در لحظه برخورد می‌یابیم:

$$v(t_i) = u + at_i =$$

$$u + \left(-\frac{u^2}{2d}\right)\left(2\frac{\sqrt{dw}}{u}\right) = u - u\sqrt{\frac{w}{d}}$$

از آن‌جایی که سرعت سرنشین برابر u است، پس اختلاف سرعت سرنشین و شیشه جلوی اتومبیل در لحظه برخورد برابر است با:

$$u - v(t_i) = u\sqrt{\frac{w}{d}}$$

همان‌طور که انتظار می‌رود، هرچه سرعت اتومبیل در لحظه برخورد بیش‌تر باشد ضربه شدیدتری به سرنشین وارد می‌شود. همچنین وجود عامل d در مخرج نشان می‌دهد هر چه اتومبیل بیش‌تر له شود (بدنه ماشین انعطاف‌پذیرتر باشد) ضربه کم‌تری به سرنشین وارد می‌شود. اما جالب‌ترین نتیجه، حضور w (فاصله سرنشین و شیشه جلو) در صورت کسر زیر رادیکال است. بدین معنا که هر چه سرنشین از شیشه دورتر باشد ضربه شدیدتری در حین برخورد بر او وارد خواهد شد. بنابراین طراحی شیشه اتومبیل باید به‌گونه‌ای باشد که سرنشین تا حد ممکن به شیشه جلو نزدیک باشد. همچنین سرنشین باید قبل از حادثه سعی کند خود را به شیشه نزدیک کند اما این بر خلاف رفتار طبیعی انسان است. یعنی در حین حادثه، سرنشین به طور ناخودآگاه خود را به صندلی‌اش، روبه‌عقب، فشار می‌دهد. بنابراین مسئله ایمن‌سازی سرنشین باید به‌گونه‌ای دیگر حل شود.

استفاده از کمربند ایمنی می‌تواند به حل این مشکل کمک کند. در واقع به کمک کمربند ایمنی، حرکت سرنشین توسط نیرویی کنترل می‌شود. به عبارت دیگر وقتی در حین تصادف، سرنشین به جلو پرتاب می‌شود، کمربند کشیده شده و در طول این مدت نیروی نگهدارنده‌ای به سرنشین وارد می‌کند. می‌توان این نیروی را به شکل نیرویی ثابت در مدل‌سازی وارد کرد. در واقع طراحی کمربند ایمنی هم به گونه‌ای صورت می‌گیرد که هر چقدر هم که کمربند کشیده شود همچنان نیروی ثابتی برابر F را به سرنشین وارد کند. نکته جالب توجه این است که اگر نیروی کمربند کنترل نشود (از حد مجاز بیش‌تر شود)، خود این نیرو می‌تواند موجب آسیب‌دیدگی سرنشین شود.

در حالت استفاده از کمربند ایمنی، معادله حرکت شیشه جلوی اتومبیل (x) تغییری نمی‌کند. اما اکنون سرنشین به جای سرعت ثابت -که معادل حرکت با شتاب صفر است- نیرویی

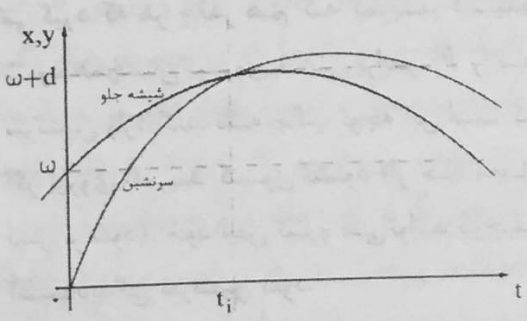
بازدارنده دارد و بنابراین حرکت آن کندشونده است. قانون دوم نیوتن بیان می‌کند که نیرو از حاصل‌ضرب جرم و شتاب بدست می‌آید. واضح است که چون شتاب سرنشین در جهت کند کردن سرعت او است، علامت شتاب، منفی است. بنابراین برای شتاب سرنشین، a_p، داریم:

$$a_p = -\frac{F}{M}$$

که در آن M، جرم سرنشین است. حال با به کارگیری رابطه (۳) داریم:

$$y = ut + \frac{1}{2}\left(-\frac{F}{M}\right)t^2 = ut - \frac{Ft^2}{2M} \qquad (7)$$

اکنون اگر y بر حسب t رسم شود یک سهمی بدست می‌آید. به یاد بیاورید که قبل از استفاده از کمربند ایمنی این منحنی، خط راست بود (معادله (۶) را ببینید). سوال اصلی این است که میزان F چقدر باشد تا سرنشین و شیشه جلو با هم برخورد نکنند. به بیان ریاضی یعنی معادلات (۵) و (۷) با هم برخورد نکنند. برای این منظور این دو معادله را برابر قرار می‌دهیم و تلاش می‌کنیم شرایط حاصل در هیچ زمانی برقرار نباشد. برخورد این دو منحنی در زمان t_i به این معنا است که برای زمان t_i، دو سهمی یک مکان را مشخص کنند. (شکل (۵) را ببینید)



شکل ۵، نمودار مکان سرنشین با استفاده از کمربند ایمنی و شیشه جلو در هر لحظه بعد از شروع برخورد

بنابراین از تساوی معادلات (۵) و (۷) داریم:

$$ut_i - \frac{Ft_i^2}{2M} = w + ut_i - \frac{u^2 t_i^2}{4d}$$

با ساده کردن رابطه فوق خواهیم داشت:

$$t_i^2 = \frac{w}{\frac{u^2}{4d} - \frac{F}{2M}}$$

ما به دنبال آن هستیم که این کسر جوابی نداشته باشد. صورت کسر فوق حتما مثبت است اما می‌توان شرایطی را یافت که مخرج کسر منفی شود یعنی:

$$\frac{u^2}{4d} - \frac{F}{2M} < 0 \Rightarrow \frac{Mu^2}{2d} < F$$

اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهد که این نیرو حدود یک‌دهم نیرویی است که در صورت عدم بستن کمربند ایمنی در حین برخورد بر سر سرنشین وارد می‌شود. لازم به ذکر است که کمربند ایمنی باید بتواند به اندازه کافی کشیده شود و تا زمانی که سرنشین متوقف می‌شود نیروی ثابت F را وارد کند. یعنی فاصله صندلی سرنشین از شیشه جلو باید به اندازه کافی زیاد باشد. پس در این حالت بر خلاف حالت قبل، عکس‌العمل طبیعی سرنشین یعنی فشاری که او به صورت ناخودآگاه بر صندلی وارد می‌کند و خود را از شیشه جلو دور می‌کند در جهت کاهش ایمنی نیست.

برخی از مسایل حل نشده در مورد اعداد اول

گردآورنده : علی‌رضا نقش نیلچی

"در این مجموعه با بیان تعدادی مسائل نشده در مورد اعداد اول به کوشش‌های انجام شده در مورد حل آن‌ها خواهیم پرداخت"

مقدمه:

عدد اول که طبق تعریف "عددی طبیعی بزرگتر از ۱ است و تنها شمارنده‌های آن ۱ و خود آن عدد است" یکی از مباحث اصلی در نظریه اعداد است و در تاریخ نظریه اعداد [۱]همواره مورد توجه متخصصان این رشته از دانش بشری بوده وحتی با توسعه امکانات رایانه‌ای توجه به این اعداد بنا به دلایل کاربردهای آن در تعیین مدت لازم برای انجام برنامه‌ها و نیز توانمندی بشر در پیدا کردن اعداد بزرگ اول مورد علاقه می‌باشد.

قبل از گزارش پیشرفت در مورد برخی از مسائل مرتبط با اعداد اول به چند تعریف اشاره می‌کنیم.

۱. **تعریف** : تجزیه عدد n به صورت :

$$n=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

باشد عدد n را k-حداکثر اول[1] گویند هر گاه جمع توان p_i ها، k گردد یعنی: $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=k$.

مجموعه اعداد k-حداکثر اول را با P_k نشان می‌دهیم.

مجموعه اعداد اول معادل مجموعه اعداد ۱-حداکثر اول[2] است.[۵,۷]

۲. **تعریف**: مجموعه اعداد ۲-حداکثر اول را با P_2 نشان داده و **اعداد نیم اول**[3] گویند.[۵,۷]

مثال : اعداد زیر نیم اول می‌باشند:

۴,۶,۹,۱۰,۱۴,۱۵,۲۱,۲۲,....

مثال : اعداد ۳-حداکثر اول عبارتند از:

۸,۱۲,۱۸,۲۰,۲۷,۲۸,.....

مثال : اعداد ۵-حداکثر اول عبارتند از:

۳۲,۴۸,۷۲,۸۰,.....

---

[1] k-almost prime

[2] Almost Prime

[3] Semi primes

۳. **تعریف: تابع حسابی** یعنی تابعی از یک یا چند متغیر صحیح مثبت است که مقادیرش اعدادی حقیقی یا مختلط باشد.

مجموع دیریکله یک تابع حسابی: فرض کنید که f یک تابع حسابی باشد .تابع F روی اعداد طبیعی با ضابطه‌ی:

$$F(n)=\sum_{d|n} f(d)$$

را **مجموع دیریکله یک تابع حسابی** f گویند. [۸]

۴. **تعریف**: بازاء هر عدد طبیعی n اگر تجزیه استانده n بصورت : $n=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ باشد

$$\Omega(n)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i$$

یعنی عده کلیه‌ی عوامل اول n است و

$$\omega(n)=\sum_{p|n} 1=r$$

یعنی عده عوامل اول متمایز n است. [۸]

۵. **تعریف: (توابع سیگما σ)** : تابع σ_x با ضابطه‌ی

$$\sigma_x(n)=\sum_{d|n} d^x \text{ و } (n\in N)$$

تعریف می‌شود. دو حالت خاص از این تعریف عبارتند از:

$$\sigma(n)=\sum_{d|n} d \text{ و } (n\in N)$$

$$\tau(n)=\sigma_0(n)=\sum_{d|n} 1 \text{ و } (n\in N)$$

یا به عبارت دیگر $\sigma(n)$ مجموع مقسوم‌علیه‌های n و $\tau(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های n است. [۸]

۶. **تعریف**: (تابع φ) بازاء هر عدد طبیعی n، $\varphi(n)$ عبارتست از عده‌ی اعدادی طبیعی مانند k که در دو گزاره نمای $1\le k\le n$ و $(k,n)=1$ صدق می‌کنند. به عبارت دیگر:

$$\varphi(n)=\sum_{\substack{1\le k\le n\\(k,n)=1}} 1 \text{ و } (n\in N)$$

$\varphi(n)$ به یاد ریاضیدان سویسی لئونهارد اویلر، که اول بار خواص آن را مطالعه کرد، تابع فی اویلر نامیده می‌شود. [۸]

۷. اعداد اول ویلسون

۷,۱. **قضیه (قضیه ویلسون)**: فرض کنید p عدد صحیح بزرگتر از یک باشد در این صورت داریم: $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$ اگر و فقط اگر p اول باشد.

به موجب قضیه ویلسون هر عدد اول p، $(p-1)!+1$ را می‌شمرد. [۲]

۷,۲. **تعریف**: p را **عدد اول ویلسون** گویند هرگاه p^2 عدد $(p-1)!+1$ را بشمرد. [۲]

مثال: ۵ عدد اول ویلسون است زیرا ۲۵، عدد $(5-1)!+1=25$ را می‌شمرد. [۲]

۷,۳. **تذکر**: تنها اعداد اول ویلسون شناخته شده ۵ و ۱۳ و ۵۶۳ است. [۲]

۷,۴. **قضیه** :فرض کنید n یک عدد صحیح بزرگتر از یک باشد و فرض کنید m ضرب همه اعداد صحیح مثبت کوچکتر از n، ولی نسبت به n اول باشد. (بنابراین $m=(n-1)!$ اگر n اول باشد) آنگاه n، یا $m+1$ یا $m-1$ را می‌شمرد [۲].

۷,۵. **تعریف**: عدد تجزیه‌پذیر n، **تجزیه‌پذیر ویلسون** نامیده می‌شود هر گاه n^2، یا $m+1$، یا $m-1$ را بشمرد. [۲]

۷,۶. تذکر: اعداد
۵۹۷۱،۵۵۸۷۷۱،۱۹۶۴۲۱۵،۸۱۲۱۹۰۹،۱۲
۳۲۶۷۱۳ اعداد تجزیه پذیر ویلسون کوچکتر از ۱۰۰۰۰۰۰۰ هستند. [۲].

۸. اعداد اول مرسن

۸,۱. قضیه: هرگاه n عدد صحیح مثبت باشد و 2^n-1 اول باشد آنگاه n اول است.

برهان: فرض کنید r و s اعداد صحیح مثبت باشند داریم:

$$x^{rs}-1=(x^s-1)\times$$
$$(x^{s(r-1)}+x^{s(r-2)}+\ldots+x^s+1)$$

بنابراین اگر $n=rs$ تجزیه‌پذیر باشد به طوری که $1<r<n$ آنگاه 2^n-1 بر 2^s-1 بخش‌پذیر خواهد بود که خلاف فرض است.

۸,۲. فرع: فرض کنید a و n اعداد صحیح بزرگتر از ۱ باشند .اگر a^n-1 اول باشد آنگاه a برابر ۲ و n اول است.

۸,۳. قضیه: (قضیه کوچک فرما): هرگاه p عددی اول باشد و $(p,a)=1$ (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و p) آنگاه

$a^{p-1}\equiv 1$ (پیمانه p)

۸,۴. قضیه: اگر $(n,a)=1$ ، آنگاه

$a^{\varphi(n)-1}\equiv 1$ (پیمانه n)

که $\varphi(n)$ تابع فی اویلر است.

۸,۵. قضیه : فرض کنیم که a و n اعداد صحیح بزرگتر از ۱ باشند و q یک عامل اول عدد a^n-1 باشد. در این صورت،

i. q به صورت $kn+1$ است ، یا

ii. q مقسوم‌علیه عددی است به صورت a^m-1، که $m|n$ و $m<n$.

بالاخص، اگر p عددی فرد اول باشد هر عامل فرد اول a^p-1 که $a-1$ را عاد نکند به صورت $2kp+1$ است.

برهان: اگر (ii) برقرار باشد فبها؛ فرض کنیم که چنین نباشد، بنا بر مفروضات $(a,q)=1$ و $a\equiv 1$ (m به پیمانه). پس، اگر h مرتبهٔ a به پیمانه q باشد اولاً $h|n$، ثانیاً $h|q-1$ (۱). اگر $h<n$ آنگاه (با توجه به این که $q|a^h-1$) حالت (ii) با $m=h$ برقرار خواهد بود، و این خلاف فرض است پس $h=n$، و از آنجا، بنا بر (۱)، $q=kn+1$، که k عددی طبیعی است.

در حکم خاص، رابطهٔ $m|p, m<p$ فقط به ازای $m=1$ برقرار است پس اگر q یک مقسوم‌علیه فرد اول a^p-1 باشد، بنا بر حکم کلی، $q=kp+1$ یا $q|a-1$. و در نتیجه، اگر $q|a-1$ نباشد آنگاه $q=kp+1$. به علاوه، چون p و q فردند، k زوج است.

تذکر: $2^{25}-1=31\times601\times1801$ و عوامل طرف دوم اولند. از این عوامل، اولی 2^5-1 را عاد می‌کند و دو عامل دیگر به صورت $25k+1$ است.

تذکر: شرایط مذکور در قضیه مانعةالجمع نیستند. مثلاً به ازاء $n=2$، $a=4$ و $q=4$، q به صورت $kn+1$ است و نیز $q|4^1-1$

۸,۶. قضیه: اگر p عددی اول باشد هر مقسوم‌علیه مثبت عدد 2^p-1 به شکل $2kp+1$ است که k عدد صحیح نامنفی است.

برهان: واضح است که مقسوم‌علیه‌های 2^p-1 فردند پس، حکم در مورد مقسوم‌علیه‌های فرد اول 2^p-1 برقرار است. برای اتمام برهان کافی

است که ملاحظه کنیم که اولاً ۱ به صورت $2kp+1$ (با $k=0$) و ثانیاً، حاصل ضرب هر دو عدد که بدین صورت باشند به همین صورت است.

۹. تعریف : هر گاه 2^p-1 عدد اول باشد به آن عدد اول مرسن گویند.

۹,۱. اعداد اول مرسن شناخته شده:

کاشف	سال کشف	تعداد رقم	عدد p	شماره
----	----	۱	۲	۱
----	----	۱	۳	۲
----	----	۲	۵	۳
----	----	۳	۷	۴
ناشناس[4]	۱۴۵۶	۴	۱۳	۵
کاتالدی[5]	۱۵۸۸	۶	۱۷	۶
کاتالدی	۱۵۸۸	۶	۱۹	۷
اویلر[6]	۱۷۷۲	۱۰	۳۱	۸
پروشن[7]	۱۸۸۳	۱۹	۶۱	۹
پاورز[8]	۱۹۱۱	۲۷	۸۹	۱۰
پاورز	۱۹۱۴	۳۳	۱۰۷	۱۱
لوکاس[9]	۱۸۷۶	۳۹	۱۲۷	۱۲
رابینسون[10]	۱۹۵۲	۱۵۷	۵۲۱	۱۳
رابینسون	۱۹۵۲	۱۸۳	۶۰۷	۱۴
رابینسون	۱۹۵۲	۳۸۶	۱۲۷۹	۱۵
رابینسون	۱۹۵۲	۶۶۴	۲۲۰۳	۱۶
رابینسون	۱۹۵۲	۶۸۷	۲۲۸۱	۱۷
ریسل[11]	۱۹۵۷	۹۶۹	۳۲۱۷	۱۸
هورویتز[12]	۱۹۶۱	۱۲۸۱	۴۲۵۳	۱۹
هورویتز	۱۹۶۱	۱۳۳۲	۴۴۲۳	۲۰
گیلیس[13]	۱۹۶۳	۲۹۱۷	۹۶۸۹	۲۱
گیلیس	۱۹۶۳	۲۹۹۳	۹۹۴۱	۲۲
گیلیس	۱۹۶۳	۳۳۷۶	۱۱۲۱۳	۲۳
تاکرمن[14]	۱۹۷۱	۶۰۰۲	۱۹۹۳۷	۲۴
نول[15] نیکل[16]	۱۹۷۸	۶۵۳۳	۲۱۷۰۱	۲۵
نول	۱۹۷۹	۶۹۸۷	۲۳۲۰۹	۲۶
نیلسون[17] اسلووینسکی[18]	۱۹۷۹	۱۳۳۹۵	۴۴۴۹۷	۲۷
اسلووینسکی	۱۹۸۲	۲۵۹۶۲	۸۶۲۴۳	۲۸
کول کویت[19] ولش[20]	۱۹۸۸	۳۳۲۶۵	۱۱۰۵۰۳	۲۹
اسلووینسکی	۱۹۸۳	۳۹۷۵۱	۱۳۲۰۴۹	۳۰
اسلووینسکی	۱۹۸۵	۶۵۰۵۰	۲۱۶۰۹۱	۳۱
اسلووینسکی گیج[21]	۱۹۹۳	۲۲۷۸۳۲	۷۵۶۸۳۹	۳۲
اسلووینسکی گیج	۱۹۹۴	۴۲۰۹۲۱	۸۵۹۴۳۳	۳۳
اسلووینسکی گیج	۱۹۹۶	۸۹۵۹۳۲	۱۲۵۷۷۸۷	۳۴
ولتمن[22] آرمنگاد[23]	۱۹۹۶	۴۲۰۹۲۱	۱۳۹۸۲۶۹	۳۵
اسپنس[24] ولتمن	۱۹۹۷	۸۹۵۹۳۲	۲۹۷۶۲۲۱	۳۶
کلارکسون[25] ولتمن کوروسکی	۱۹۹۸	۹۰۹۵۲۶	۳۰۲۱۳۷۷	۳۷
حجرتوالا[26] ولتمن کوروسکی	۱۹۹۹	۲۰۹۸۹۶۰	۶۹۷۳۵۹۳	۳۸
کامرون[27] ولتمن کوروسکی	۲۰۰۱	۴۰۵۳۹۴۶	۱۳۴۶۶۹۱۷	۳۹
شافر[28] ولتمن کوروسکی	۲۰۰۳	۶۳۲۰۴۳۰	۲۰۹۹۶۰۱۱	۴۰
فیندلی[29] ولتمن کوروسکی	۲۰۰۴	۷۲۳۵۷۳۳	۲۴۰۳۶۵۸۳	۴۱

4 anonymous
5 Cataldi
6 Euler
7 Pervushin
8 Powers
9 Lucas
10 Robinson
11 Riesel
12 Hurwitz
13 Gillies

14 Tucherman
15 Noll
16 Nickel
17 Nelson
18 Slowinski
19 Colquitt
20 Welsh
21 Gage
22 Woltman
23 Armenguad
24 Spence
25 Clarkson
26 Hajratwala
27 Cameron
28 Shafer
29 Findley

نوواک[30] ولتمن کوروسکی	۲۰۰۵	۷۸۱۶۲۳۰	۲۵۹۶۴۹۵۱	۴۲
بونه[31] کوپر[32] ولتمن کوروسکی	۲۰۰۵	۹۱۵۲۰۵۲	۳۰۴۰۲۴۵۷	۴۳
بونه کوپر ولتمن کوروسکی	۲۰۰۶	۹۸۰۸۳۵۸	۳۲۵۸۲۶۵۷	۴۴

۱۰. اعداد اول فیبونانچی[33]

۱۰,۱. تعریف: اعداد فیبونانچی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ و } u_1 = u_2 = 1$$

۱۰,۲. قضیه: u_n جمله u_{nm} را می‌شمرد.
بنابراین برای این که u_n اول باشد باید زیرنویس آن ۴ یا یک عدد اول باشد.[۶]

۱۰,۳. جملات با مرتبه زیر اولند:

۳,۴,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۲۳,۲۹,۴۳,۴۷,۸۳,۱۳۱,
۱۳۷,۳۵۹,۴۳۱,۴۳۳,۴۴۹,۵۰۹,۵۶۹,۵۷۱,
۲۹۷۱,۴۷۲۳,۵۳۸۷,۹۳۱۱,۹۶۷۷,۱۴۴۳۱,
۲۵۲۶۱,۳۰۷۵۷,۳۵۹۹۹,۸۱۸۳۹

یک دی واتر حدس زده است جملات با مرتبه زیر اولند:

۳۷۵۱۱,۵۰۵۳۳,۱۰۴۹۱۱

دی فاکس حدس زده است جمله با مرتبه زیر اول است:

۱۳۰۰۲۱

تی.دی. نو حدس زده است جمله با مرتبه زیر اول است:

۱۴۸۱۹۸

اچ.لیفچیتز حدس زده است جملات با مرتبه زیر اولند:

۲۰۱۱۰۷,۳۹۷۳۷۹,۴۳۳۷۸۱

۱۰,۴. در جدول زیر بزرگترین اعداد اول فیبونانچی آمده است:[۶]

زمان کشف	تعداد رقم	عدد اول	رتبه
۲۰۰۱	۱۷۱۰۳	$u(۸۱۸۳۹)$	۱
۲۰۰۱	۷۵۲۳	$u(۳۵۹۹۹)$	۲
۲۰۰۱	۶۴۲۸	$u(۳۰۷۵۷)$	۳
۲۰۰۱	۵۳۴۲	$u(۲۵۵۶۱)$	۴
۲۰۰۱	۳۰۱۶	$u(۱۴۴۳۱)$	۵
۲۰۰۱	۲۰۲۳۰	$u(۹۶۷۷)$	۶
۱۹۹۵	۱۹۴۶	$u(۹۳۱۱)$	۷
۱۹۹۰	۱۱۲۶	$u(۵۳۸۷)$	۸

۱۱. اعداد اول فاکتوریل

۱۱,۱. تعریف: اعداد اول فاکتوریل به یکی از فرم‌های زیر می‌باشند:

۱۱,۱,۱. اعداد اول فاکتوریل به علاوه ۱: $n!+1$

۱۱,۱,۲. اعداد اول فاکتوریل منهای ۱: $n!-1$

۱۱,۲. اعداد اول فاکتوریل به علاوه ۱ شناخته شده عبارتند از:

۱,۲,۳,۷,۲۷,۳۷,۴۱,۷۳,۷۷,۱۱۶,۱۵۴,
۳۲۰,۳۴۰,۳۹۹,۴۲۷,۸۷۲,۱۴۷۷,۶۳۸۰

۱۱,۳. اعداد اول فاکتوریل منهای ۱ شناخته شده عبارتند از:

۳,۴,۶,۷,۱۲,۱۴,۳۰,۳۲,۳۳,۳۸,۶۴,۱۶۶,۳۲۴,
۳۷۹,۴۶۹,۵۴۶,۹۷۴,۱۹۶۳,۳۵۰۷,۳۶۱۰,۶۹۱۷

۱۱,۵. تذکر: تنها فاکتوریل اول عدد !۲ است.

۱۱,۴. در جدول بعد، بزرگترین اعداد اول فاکتوریل شناخته شده آمده است:

---

[30] Nowak
[31] Boone
[32] Cooper
[33] Fibonacci prime

زمان	تعداد رقم	عدد اول	مرتبه
۲۰۰۴	۱۴۹۲۸۹	۳۴۴۷۹!−۱	۱
۲۰۰۴	۱۰۷۷۰۷	۲۶۹۵۱!+۱	۲
۲۰۰۱	۸۴۲۲۷	۲۱۴۸۰!−۱	۳
۱۹۹۸	۲۴۵۶۰	۶۹۱۷!−۱	۴
۱۹۹۸	۲۱۵۰۷	۶۳۸۰!+۱	۵
۱۹۹۴	۱۱۲۲۷	۳۶۱۰!−۱	۶
۱۹۹۴	۱۰۹۱۴	۳۵۰۷!−۱	۷
۱۹۹۴	۵۶۱۴	۱۹۶۳!−۱	۸
۱۹۸۴	۴۰۴۲	۱۴۷۷!+۱	۹
۱۹۹۴	۲۹۹۰	۹۷۴!−۱	۱۰
۱۹۸۴	۲۴۸۸	۸۷۲!+۱	۱۱
۱۹۹۴	۱۲۶۰	۵۴۶!−۱	۱۲
۱۹۸۱	۹۵۹	۴۶۹!−۱	۱۳

۱۲. اعداد اول پری مریال

۱۲.۱. لم: عدد طبیعی $n>1$ حاصل ضرب چند عدد اول است.

۱۲.۲. قضیه (اقلیدس): بینهایت عدد اول وجود دارد.

برهان: اگر چنین نباشد، آنگاه تعدادی متناهی، مثلا k عدد اول وجود خواهد داشت که آنها را با $p_1, p_2, \ldots, p_k$ نمایش می‌دهیم. قرار می‌دهیم

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$$

بنا به لم، عدد اولی مانند p موجود است به طوری که $p|n$. چون p اول است و $p_1, p_2, \ldots, p_k$ کلیه اعداد اول می‌باشند بایستی iای باشد به طوری که $p = p_i$. بنابراین $p|p_1 p_2 \ldots p_k$. این حقیقت به انضمام $p|n$ ایجاب می‌کند که $p|1$. این تناقض نتیجه را ثابت می‌کند.

۱۲.۱. تعریف: اعداد اول به شکل: $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ که $p_1, p_2, \ldots, p_n$ اعداد اول کوچکتر از n می‌باشند را اعداد اول پری مریال[34] گویند و با علامت $n\#$ نشان می‌دهیم.

مثال:

$$4\# = 3\times 2+1 = 7$$

و

$$10\# = 2\times 3\times 5\times 7+1 = 211$$

منابع:

1. http://primes.utm.edu/
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Wilson_prime
3. http://mathworld.wolfram.com/PrimeNumber.html
4. http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.prime.num.html
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Semiprime
6. http://mathworld.wolfram.com/FibonacciPrime.html
7. http://mathworld.wolfram.com/SemiprimeIdeal.html
8. غلام‌حسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد ،جلد دوم،قسمت ۲و۳،انتشارات سروش چاپ اول (اسفند ۱۳۵۸)

[34] Primorial primes

دنباله‌ی فیبوناتچی

نیلوفر ذاکری - دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

«یک جفت خرگوش یکی نر و یکی ماده در یک مزرعه داریم که در اولین روز سال متولد شده‌اند...» این همان مساله‌ای است که در کتاب «لیبر آباکی»[1] مطرح و باعث پیدایش دنباله‌ای از اعداد به نام «اعداد فیبوناتچی» شد. در این مقاله با شگفتی‌های این اعداد بیشتر آشنا می‌شویم.

اعداد فیبوناتچی و دنباله این اعداد، مثال‌هایی هستند از این که چگونه ریاضیات با دنیای اطراف ما پیوندی ناگسستنی دارد. این اعداد در سال ۱۲۰۲ (قرن سیزدهم میلادی) در کتاب با عنوان «لیبرآباکی» توسط لئوناردو پیزانو[1] مشهور به فیبوناتچی از ریاضی‌دانان بزرگ ایتالیا معرفی شد و تا امروز با خواص جالب توجه و شاید اسرارآمیز خود هم چنان باعث شگفتی آدمی می‌شوند.

مساله‌ای در کتاب «لیبر آباکی» مطرح و باعث پیدایش این دنباله اعداد شد و لوکا[2] دانشمند فرانسوی ضمن مطالعه روی این دنباله نام فیبوناتچی را به آن اطلاق کرد. مساله به قرار زیر است:

«یک جفت خرگوش، یکی نر و یکی ماده در یک مزرعه داریم که در اولین روز سال متولد شده‌اند، فرض بر آن است که همه ماده‌ها به لحاظ تعداد روز، طولی یکسان دارند. شرایط زیر را در مورد خرگوش‌ها داریم:

۱ـ خرگوش‌ها در ماه اول تولدشان نابالغ بوده و بچه‌ای از آن‌ها متولد نمی‌شود، اما با شروع ماه دوم، خرگوش‌ها بالغ شده و از هر جفت، یک جفت نوزاد (یکی نر و یکی ماده) متولد می‌شود. به همین ترتیب در پایان ماه سوم دو جفت خرگوش و در پایان ماه چهارم ۳ جفت خرگوش داریم، چرا که در پایان ماه چهارم فرزندان نسل دوم که بالغ شده‌اند به دنیا می‌آیند و این روند به همین نحو ادامه می‌یابد.

۲ ـ خرگوش‌ها هرگز نمی‌میرند.

حال این سؤال مطرح می‌شود که در پایان سال چند جفت خرگوش داریم؟

دنباله تعداد جفت خرگوش‌ها در پایان هر ماه دنباله فیبوناتچی است.

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، ...

و در پایان سال ۱۴۴ جفت خرگوش داریم.

هر عدد در دنباله فیبوناتچی را «عدد فیبوناتچی» می‌نامیم.

---

[1] Leonardo Pisano

[2] Lucas

مشاهده می‌کنید که هر عدد فیبوناتچی در واقع مجموع دو عدد ماقبل خود است. پس این دنباله یک دنباله بازگشتی است و اگر nامین عدد فیبوناتچی را با F_n نمایش دهیم، داریم:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 3,$$
$$F_1 = F_2 = 1 \quad (F_0 = 0)$$

یکی از جذاب‌ترین نکته‌ها در مورد اعداد فیبوناتچی ارتباطی است که این اعداد با طبیعت، هنر و موسیقی دارند. علاوه بر این‌ها، روابط جالب توجهی هم در ریاضیات دارند که در این‌جا تنها به چند مورد از آن‌ها و بدون ذکر دقیق اثبات اشاره می‌کنیم.

۱ـ از اساسی‌ترین خواص دنباله نسبت دو عدد متوالی آن می‌باشد که به نسبت طلایی معروف است. هم‌چنان که دنباله ادامه پیدا می‌کند، اختلاف نسبت‌ها کم و کمتر می‌شود به طوری که در بی‌نهایت نسبت $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ به نسبت طلایی بسیار نزدیک می‌شود. این نسبت با Φ نمایش داده می‌شود و برابر است با $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ که عددی است گنگ و به طور تقریبی برابر با ۱/۶۱۸۰۳۳۹ است. برای اثبات مطلب بالا قرار می‌دهیم: $R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ و $R = \lim_{n\to\infty} R_n$ و نشان می‌دهیم که $R = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow R = 1 + \frac{1}{R} \Rightarrow R^2 - R - 1 = 0 \Rightarrow R = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

اما R همیشه مقداری مثبت است. لذا مقدار قابل قبول برابر است با $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. با توجه به این‌که Φ جوابی برای معادلهٔ $R^2 - R - 1 = 0$ است پس $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ و رابطه جالبی از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$\Phi^2 = \Phi + 1,\ \Phi^3 = 2\Phi + 1,$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 2, \ldots$$

مشاهده می‌کنیم که ضریب Φ و جملات ثابت از قانون زیر پیروی می‌کنند:

$$\Phi^n = \Phi F_n + F_{n-1}, \qquad n \geq 2$$

به سادگی از طریق استقرا می‌توان رابطه بالا را اثبات نمود.

۲ـ رابطه دیگر، رابطه‌ای است که با استفاده از آن می‌توان مقدار nامین عدد فیبوناتچی را پیدا کرد. این رابطه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$$

اگر قرار دهیم $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\hat{\Phi} = 1 - \Phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ خواهیم داشت:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - \hat{\Phi}^n\right]$$

اثباتی که ارائه می‌شود اثباتی بر پایه جبر خطی است. در ضمن اثبات، تعاریف لازم و قضایای مورد نیاز بدون ذکر اثبات بیان می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که معادله $(A - \lambda I)X = 0$ را معادله مشخصه ماتریس A گوییم که λ یک اسکالر و X یک بردار است. چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A عبارت است از: $\det(A - \lambda I)$.

قضیه کیلی ـ هامیلتون[3] بیان می‌کند اگر A یک ماتریس $m\times n$ و $\det(A-\lambda I)$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد، آن‌گاه A نیز خود جوابی از این چند جمله‌ای است.

اگر دو عدد متوالی از اعداد فیبوناتچی F_{n+2} و F_{n+1} را به صورت یک ماتریس ستونی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1}+F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

قرار می‌دهیم $Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$Q^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب $Q^3=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ و...

اگر به ماتریس Q^3 دقت کنید می‌بینید که می‌توان Q^3 را به صورت زیر نوشت:

$$Q^3=\begin{pmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{pmatrix}$$

و این مسأله در مورد Q و توان‌های بالاتر Q نیز صادق است. از این رو به سادگی با استقرای ریاضی می‌توان نشان داد که:

$$Q^n=\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad \forall n\geq 1$$

حال باید چند جمله‌ای مشخصه ماتریس Q را تعیین کنیم. معادله مشخصه ماتریس Q برابر است با $\lambda^2-\lambda-1=0$ که معادله‌ای است مشابه معادله‌ای که برای تعیین نسبت حدی دو عدد متوالی از اعداد فیبوناتچی به کار می‌رفت.

ریشه‌های این معادله برابر است با $\lambda_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ و $\lambda_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

حال با توجه به قضیه کیلی ـ هامیلتون برای ماتریس Q خواهیم داشت: $Q^2-Q-I=O$. اگر قرار دهیم

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

ماتریس وارون پذیری چون $P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ وجود دارد که $Q=PAP^{-1}$ و واضح است

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

از طرف دیگر برای توان‌های بالاتر Q می‌توان نشان داد که رابطه $Q^n=PA^nP^{-1}$ همواره برقرار است. اما دیدیم که $Q^n=\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ برای $n\geq 1$. پس می‌توان نوشت:

$$Q^{n-1}=\begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

و از این‌جا داریم:

[3] Cayley-Hamilton

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس از محاسبات لازم خواهیم دید:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \right]$$

۳ـ یک بار دیگر به این دنباله اعداد توجه می‌کنیم:

۰,۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,۸۹,۱۴۴,۲۳۳,...

آیا می‌توانید الگویی برای رقم‌های پایانی بیابید؟

۰,۱,۱,۲,۳,۵,۸,۳,۱,۴,۵,۹,۴,۳,۷,...

جالب است بدانید که سری اعداد بالا بعد از شصت‌امین عدد دوباره مانند بالا تکرار خواهد شد و به عبارت دیگر:

سری رقم‌های پایانی دنباله فیبوناتچی دارای یک دور به طول ۶۰ می‌باشد.

آیا در مورد دو رقم پایانی نیز می‌توان الگویی پیدا کرد؟ پاسخ مثبت است و این بار این سری اعداد دارای دوری به طول ۳۰۰ می‌باشد. برای سه رقم پایانی نیز دوری به طول ۱۵۰۰ و به همین ترتیب برای چهار رقم پایانی دور به طول ۱۵۰۰۰ و پنج رقم پایانی، دور ۱۵۰۰۰۰ خواهیم داشت و

۴ـ هر دو عدد فیبوناتچی متوالی نسبت به هم اولند.

اثبات این مطلب به روش برهان خلف است. فرض کنیم F_n و F_{n+1} دو عدد فیبوناتچی متوالی باشند که دارای عامل مشترکی مانند d هستند $(d>1)$. اما $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$. پس F_{n-1} نیز دارای عامل d است و به نحو مشابه چون $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ پس F_{n-2} و F_{n-1} نیز دارای عامل مشترک d می‌باشند. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، سرانجام به F_1 و F_2 می‌رسیم و آن‌ها نیز باید دارای عامل مشترک d باشند. اما $F_1 = F_2 = 1$ و $d > 1$ و این با فرض اولیه ما متناقض است، پس نتیجه می‌گیریم:

«هر دو عدد متوالی در دنباله فیبوناتچی متباین‌اند».

به طور کلی می‌توان نشان داد که:

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$$

۵ـ هر عدد فیبوناتچی عاملی از تعداد نامتناهی عدد فیبوناتچی است. به عنوان مثال: هر سه تا سه تا عدد در دنباله، عددی زوج است. به عبارت دیگر یک مضرب از F_3 است. هر چهار تا چهار تا عدد در دنباله، عددی است از مضرب ۳ به عبارت دیگر یک مضرب از F_4 است. هر ۵ تا ۵ تا عدد در دنباله، عددی است از مضرب ۵. به عبارت دیگر مضربی از F_5 است. هر ۶ تا ۶ تا عدد در دنباله، یک مضرب ۸ و به عبارت دیگر یک مضرب F_6 است.

روابط بالا قانون کلی زیر را در پی دارد:

k-امین عدد فیبوناتچی مضربی است از F_k؛ یا به طور دقیق‌تر برای هر n,k طبیعی، F_{nk} مضربی از F_k است.

۶ـ اگر k عدد نخست این دنباله را جمع کنیم، حاصل یکی کمتر از $(k+2)$-امین عدد فیبوناتچی است:

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$$

رابطهٔ بالا با توجه به این که $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ به سادگی اثبات می‌شود.

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_k = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \ldots + (F_{k+1} - F_k) + (F_{k+2} - F_{k+1})$$
$$= F_{K+2} - F_2 = F_{K+2} - 1$$

از رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n},$$
$$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

۷ـ اندیس اعداد فیبوناتچی که اول هستند نیز اول است. مانند F_{11}=۸۹. اما عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست؛ مانند F_{19}=۴۱۸۱ چرا که ۵۷×۱۳=۴۱۸۱ ولی ۱۹ عددی است اول.

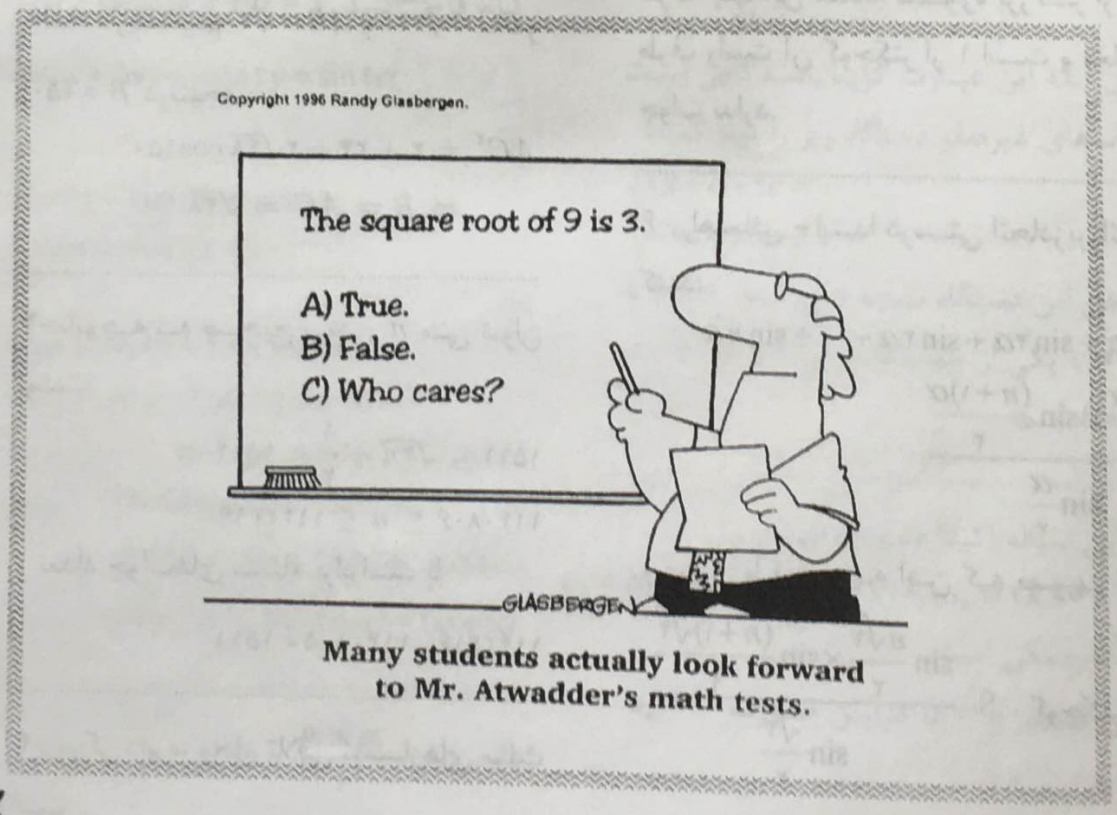
۸ـ ۱۴۴ تنها عدد فیبوناتچی است که مربع کامل است.

منابع:

۱ ـ جبر خطی، مایکل اونان.

۲ ـ م. معتمدی، اعداد فیبوناتچی، پیک ریاضی، جلد سوم، شماره اول، بهار ۱۳۶۷.

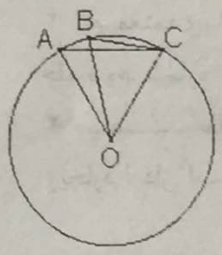
۳ ـ نسبت طلایی و اعداد فیبوناتچی، ریچارد ا. دان لپ، ترجمه‌ی م. معتمدی.



راهنمایی و جواب برخی از مسائل فرنود شماره ۱۴

۱- $x^2 < 1 - 2\sin 2x \le 3 \Rightarrow x^2 < 3$،
جواب‌های درست نامعادله ۱-، ۱ و ۰ است که ۱ قابل قبول نیست.

۲- اگر AB و AC دو ضلع نامساوی ۱۲ضلعی باشند:



$\hat{O} = 60^\circ$ و $A\hat{B}C = 150^\circ$، مثلث OAC متساوی الاضلاع است و AC=R. درمثلث ABC داریم $AB = \sqrt{2}$ و $BC = \sqrt{24}$ و $\hat{B} = 150^\circ$ درنتیجه:

$$AC^2 = 2 + 24 - 2\sqrt{48}\cos 150^\circ$$
$$\Rightarrow R = AC = \sqrt{38}$$

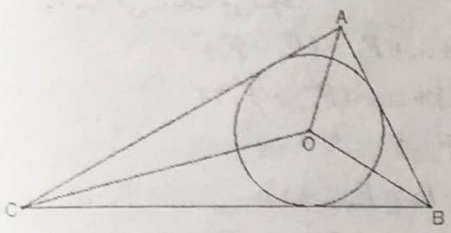
۳- باتوجه به صحیح بودن n می توان نوشت:

$$1511 \le \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < 1512 \Rightarrow$$
$$1140806 \le n \le 1142316$$

و تعداد جواب‌های مسئله برابراست با

$$1142316 - 1140805 = 1511$$

۴- مرکز دایره، محل تلاقی نیمسازهای مثلث است.



درمثلث OAB، $\frac{\hat{A}}{2} > \frac{\hat{B}}{2}$ پس $OA < OB$ و در مثلث OBC، $\frac{\hat{B}}{2} > \frac{\hat{C}}{2}$ پس $OB < OC$ یا $OA < OB < OC$ یعنی مرکزبه A نزدیکتر است.

۵- $(x^2 + [x] + 1)^2 + [x^2] + 2 = x - [x]$
طرف چپ این معادله همواره بزرگتر از ۲ و طرف راست آن کوچکتر از ۱ است و معادله جواب ندارد.

۶- راهنمائی - ابتدا درستی اتحادزیرراثابت کنید:

$$S = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha$$
$$= \frac{\sin\frac{n\alpha}{2} \times \sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

و سپس با توجه به این که صورت کسر

$$S = \frac{\sin\frac{n\sqrt{2}}{2} \times \sin\frac{(n+1)\sqrt{2}}{2}}{\sin\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

کوچکتر از ۱

و مخرج آن بزرگتر از $\frac{1}{2}$ است نتیجه بگیرید:

$S<2$

.....

۷- فرض کنید $n>0$ و $r_1=r+\frac{1}{n}$ درنتیجه

$$r_1^2=r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2}<r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n}$$

$$=r^2+\frac{2r+1}{n}$$

کافی است n را طوری تعیین کنید که $r^2+\frac{2r+1}{2}<2$ یا $n>\frac{2r+1}{2-r^2}$. مسئله بی‌شمار جواب دارد.

.....

۸- صورت و مخرج کسر را در $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$ ضرب کنید مخرج کسر پس از ساده شدن به شکل زیر است:

$$(8a+b-2c)\sqrt[3]{4}+(-4a+8b+c)\sqrt[3]{2}$$
$$+2a-4b+8c$$

برای آنکه این عبارت گویا باشد کافی است جواب‌های غیرصفر دستگاه زیر را پیدا کنید:

$$\begin{cases}8a+b-2c=0\\-4a+8b+c=0\end{cases}$$

از حل این دستگاه نتیجه می شود $b=0$ و $c=4a$ یکی از جواب‌ها برای $a=1$، $c=4$ و $b=0$ است.

.....

۹- این دنباله اکیداً صعودی است زیرا:

$$a_k=a_{k+1}=n\Rightarrow(a_n=3k)\wedge(a_n=3k+3)$$

که غیرممکن است.

فرض کنید $a_1=n$ دراین صورت $a_n=3$ درنتیجه $n<3$.

اگر $a_1=1$ نتیجه می‌شود $a_1=a_{a_1}=3$ که غیرممکن است. پس $a_1=2$ درنتیجه:

$$a_2=3\to a_3=6\to a_6=9\to a_9=18$$
$$\to a_{18}=27\to a_{27}=54\to a_{54}=81$$
$$\to a_{81}=162\to a_{162}=243$$

چون دنباله اکیداً صعودی است و $162-81=243-162$ پس $a_k=81+k$ وقتی $81\le k\le 162$ بنابراین $a_{100}=181$

.....

۱۰- شرط لازم وکافی برای آنکه عدد θ بین دو ریشه معادله $f(x)=ax^2+bx+c=0$ باشد آنست که $af(\theta)<0$ باشد پس برای آن که عدد ۱ بین دو ریشه باشد باید

$$(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^2+\alpha+1+2\alpha-3+\alpha-5)<0$$

یا $\alpha^2+4\alpha-7<0$ یا

$$-2-\sqrt{11}<\alpha<-2+\sqrt{11}$$

.....

۱۱- فرض کنید $x+\alpha=y$ درنتیجه:

$$\cos(y+2\alpha)-\frac{1}{4}\sin 2y=\sin 4\alpha$$

یا

$$2\cos(y+2\alpha)-\sin y\cos y$$
$$-4\sin 2\alpha\cos 2\alpha=0$$

یا

$$2\cos y\cos 2\alpha+2\sin y\sin 2\alpha$$
$$-\sin y\cos y-4\sin 2\alpha\cos 2\alpha=0$$

که به شکل زیرتجزیه می‌شود

$$(\cos y-2\sin 2\alpha)(\sin y-2\cos 2\alpha)=0$$

معادلات $\cos(x+a)=2\sin 2\alpha$ و $\sin(x+a)=2\cos 2\alpha$ را حل وبحث کنید.

.....

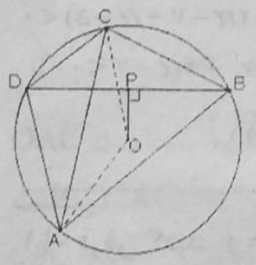
۱۲- عدد $n=\frac{p_1+p_2}{2}$ بین p_1 و p_2 قرار دارد و نمی‌تواند اول باشد.

۱۳- اگر $(۲+\sqrt{۳})^n = a_n + b_n\sqrt{۳}$ آنگاه $(۲-\sqrt{۳})^n = a_n - b_n\sqrt{۳}$ زیرا در بسط $(۲-\sqrt{۳})^n$ جملات اصم منفی است. از این دو رابطه نتیجه می شود :

$$(a_n + b_n\sqrt{۳})(a_n - b_n\sqrt{۳})$$
$$= (۲+\sqrt{۳})^n \times (۲-\sqrt{۳})^n$$

و یا $a_n^۲ - ۳b_n^۲ = ۱$

۱۴- ازنقطه o مرکزدایره به A و C وصل کرده وبر BD عمودکنید تا نقطه P بدست آید AC بر BD عموداست پس می توان نوشت :



$$S_{AOCD} = S_{AOC} + S_{CDA} = \frac{۱}{۲}AC \times PD$$

و چون نقطه P وسط BDاست پس :

$$S_{AOCD} = \frac{۱}{۴}AC \times BD = \frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

۱۵- از دستگاه

$$\begin{cases} \sqrt{۱-y^۲} = ۱-x \\ \sqrt{۱-x^۲} = \sqrt{۳}-y \end{cases}$$

نتیجه بگیریدکه :

$۰ \le ۱-x \le ۱$ یا $۰ \le x \le ۱$ و

$۰ \le \sqrt{۳}-y \le ۱$ یا $\sqrt{۳}-۱ \le y \le \sqrt{۳}$

از مجذورکردن طرفین رابطه‌های دستگاه نتیجه بگیرید:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰ \\ x^۲ + y^۲ - ۲y\sqrt{۳} + ۲ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{۳}y - ۱$$

و یا

$$۴y^۲ - ۴\sqrt{۳}y + ۳ = ۰$$

و

$$\Rightarrow (۲y - \sqrt{۳})^۲ = ۰ \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$x = \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱ = \frac{۱}{۲}$$

۱۶- با استفاده از رابطه‌های $V = \pi.r^۲h$، $h = ar + b$ و $h'(t) = ۳r'(t)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} h'(t) = ar'(t) \\ h'(t) = ۳r'(t) \end{cases} \Rightarrow a = ۳$$

و با توجه به $h(۱) = ۶$ نتیجه می‌شود $a + b = ۶$ و $b = ۳$. از رابطه $v = \pi.r^۲h$ نتیجه می‌شود:

$$v'(t) = ۲\pi.r'(t).r(t).h(t) + \pi.r^۲(t).h'(t)$$

می‌دانیم اگر $r(t) = ۶$ آنگاه $v'(t) = ۱$ و در نتیجه $h(t) = ۲۱$ پس

$$۱ = ۲\pi.r'(t) \times ۶ \times ۲۱ + ۳۶\pi \times ۳r'(t)$$

$$\Rightarrow r'(t) = \frac{۱}{۳۶۰}\pi$$

واگر $r(t) = ۳۶$ و $v'(t) = n$ آنگاه

$$n = ۲\pi \times ۳۶ \times \frac{۱}{۳۶۰}\pi(۳ \times ۳۶ + ۳) +$$

$$\pi(۳۶)^۲ \times \frac{۳}{۳۶۰}\pi \Rightarrow n = ۳۳$$

۱۷- تابع $f(x) = ۵x^۲ + \frac{A}{x^۵}$ وقتی $x > ۰$ مشتق‌پذیر است و از حل معادله $f'(x) = ۱۰x - \frac{۵A}{x^۶} = ۰$ نتیجه می‌شود:

طول نقطه می‌نیمم تابع $x=(\frac{5A}{2})^{\frac{1}{7}}$ و عرض آن $f\left((\frac{5A}{2})^{\frac{1}{7}}\right)$ است، کافی است A را طوری تعیین کنید که عرض نقطه می نیمم برابر ۲۴ یا $A=2(\frac{24}{7})^{\frac{7}{2}}$ باشد.

۱۸- دربازه $[0,a]$ داریم:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^6}\Rightarrow\begin{cases}\min f=m=\frac{1}{1+a^6}\\ \max f=M=1\end{cases}$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1-x^2+x^4}{1+x^6}\ ،$$

اگر فرض کنیم $g(x)=1-x^2+x^4$، دو تابع در بازه فوق انتگرال‌پذیر و برای هر x در این بازه داریم:

$$m\int_0^a g(x)\,dx\le\int_0^a f(x).g(x)\,dx\le M\int_0^a g(x)\,dx$$

و یا:

$$\frac{1}{1+a^6}\int_0^a(1-x^2+x^4)dx\le\int_0^a\frac{1-x^2+x^4}{1+x^6}dx\le\int_0^a(1-x^2+x^4)dx$$

درنتیجه:

$$\frac{1}{1+a^6}(a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5})\le\int\frac{1}{1+x^2}dx\le a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}$$

و برای $a=\frac{1}{10}$،

$$0/0996685\le\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{1}{1+x^2}dx\le 0/0996686$$

و $\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{1}{1+x^2}dx=0/099669$

۱۹- اگر تغییر متغیر $t^2=u$ بدهید نتیجه می‌شود:

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\sin t^2dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\sin u\,du$$

طبق تعمیم قضیه مقدارمیانگین برای انتگرال‌ها داریم:

اگر f و g دوتابع پیوسته دربازه $[a,b]$ ودراین بازه $g(x)>0$ آنگاه عددحقیقی c، $a\le c\le b$ وجوددارد که

$$\int_a^b g(x)f(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$$

با استفاده از این قضیه می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{\sqrt{u}}\times\sin u\,du=\frac{1}{2\sqrt{c}}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin u\,du=\frac{(-1)^n}{\sqrt{c}}$$

$$\sqrt{n\pi}\le\sqrt{c}\le\sqrt{(n+1)\pi}$$

درنتیجه

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\sin t^2dt=\frac{(-1)^n}{C}$$ و

$$\sqrt{n\pi}\le C\le\sqrt{(n+1)\pi}$$

۲۰- تابع $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ رادربازه $\left[1,\frac{4}{3}\right]$ در نظربگیرید در این بازه ماکسیمم تابع $M=\frac{1}{2}$ ومی‌نیمم آن $m=\frac{9}{25}$ است. پس:

$$\frac{9}{25}(\frac{4}{3}-1)\le\int_1^{\frac{4}{3}}\frac{dx}{1+x^2}\le\frac{1}{2}(\frac{4}{3}-1)$$ و

یا $\frac{3}{25} \le \tan^{-1}(\frac{4}{3}) - \tan^{-1}(1) \le \frac{1}{6}$ و

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \le \tan^{-1}(\frac{4}{3}) \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

۲۱- با تغییرمتغیر $t = aT$ نتیجه می‌شود:

$$f(x,a) = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{(aT)^p \times a dt}{(a^2T^2 + a^2)^q} =$$

$$a^{p+1-2q} \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{T^2 dt}{(T^2+1)^q} = a^{p+1-2q} f(x,1)$$

۲۲- اگر دو نقطه $A(x, \frac{x}{x^2+1})$ و $B(z, \frac{z}{z^2+1})$ را روی نمودار تابع درنظربگیریم به طوری که $\frac{x}{x^2+1} = \frac{z}{z^2+1}$ یا $z = \frac{1}{x}$. حجم استوانه برابراست با:

$V = \pi \times \frac{x^2}{(x^2+1)^2}(x - \frac{1}{x})$ و از $V' = 0$ نتیجه می شود $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ جواب‌های این معادله $-(\sqrt{2}-1)$، $-(\sqrt{2}+1)$، $\sqrt{2}+1$، $\sqrt{2}-1$ و جواب مسئله $V = \frac{\pi}{4}$ است.

۲۳- با استفاده ازقاعده هوپیتال و قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل وانتگرال نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{(b - \cos x)\sqrt{a+x}} = 1$$ یا

$a = 4$ و $b = 1$

۲۴- ابتدا ثابت کنید

$$2\sqrt{n} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$$

و از آن نتیجه بگیرید:

$1382 < x < 1383$ و $[x] = 1382$

۲۵- الف) جواب 9×10^9

ب) جواب $9 \times 9!$

ج) $10^9 \le 11111k \le 10^{10} - 1 \Rightarrow$

$9001 \le k \le 900009$

و تعداد جواب‌ها برابر ۸۱۰۰۰۹ است.

۲۷- اگر $x = y$ باشد آنگاه $f(2f(x)) = 2x$ درنتیجه f یک به یک است زیرا:

$f(x) = f(x') \Rightarrow 2f(x) = 2f(x') \Rightarrow$

$f(2f(x)) = f(2f(x')) \Rightarrow 2x = 2x'$

$\Rightarrow x = x'$

حال چون:

$$f(f(x+1) + f(1)) = f(f(x) + f(2))$$
$$= x + 2$$

ازیک به یک بودن تابع و رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$f(x+1) + f(1) = f(x) + f(2)$$

یا

$$f(x+1) - f(x) = f(2) - f(1) = c$$

پس مقادیرتابع فوق یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند یعنی $f(x) = ax + b$، بااستفاده ازاین مطلب مقادیر a و b و ضابطه تابع f را پیدا می‌کنیم.

جواب قابل قبول $f(x) = x$ است.

۲۸- با استفاده از اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال:

فرض می‌کنیم $f(t) = \max\{1, t^2\}$ و

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

برای $0 \le x \le 1$ واضح است که

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x dt = x$$

برای $x > 1$،

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 dt + \int_1^x t^2 dt$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$$

با همین روش $F(x)$ را برای $-1 \le x < 0$ و $x < -1$ حساب می‌کنیم.

۲۹- نمودار تابع f را با استفاده از نمودار دو تابع $y = 2|x|$ و $y = |x+1|$ رسم می‌کنیم. چون می‌نیمم تابع f درنقطه تلاقی دو نمودار اتفاق می‌افتد داریم:

$$|x+1| = 2|x| \Rightarrow x = 1, x = \frac{-1}{3}$$

و در نتیجه $\min f = \frac{2}{3}$

۳۰- از معادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2000}$ نتیجه می‌شود $x, y, z > 2000$ می‌دانیم یکی ازجواب‌های معادله $x = y = z = 6000$ است. حال اگریکی ازاعداد x یا y یا z (مثلاً z) بزرگتر از ۶۰۰۰ باشد حداقل یکی ازآن‌ها (مثلاً y) کوچکتر از ۶۰۰۰ است، و برای هر $2000 < y < 6000$ با همین روش ثابت می‌شود معادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2000} - \frac{1}{c}$ تعداد محدودی جواب دارد.

اندازه‌گیری و ارزیابی رفتار ریاضی افراد چیزی جز سنجش قدرت استدلال و تفکر، توانایی حل مسئله و ایجاد ارتباط معنادار میان مفاهیم و مقوله‌های ریاضی و کاربرد آن‌ها در سایر علوم نمی‌باشد. بنابراین یادگیری ریاضی به مثابه فرآیندهای فعال و سازنده شناخته می‌شود، نه انتقال بی‌روح و غیرفعال مفاهیم و مهارت‌های ریاضی توسط معلمان به فراگیران به صورت یک‌طرفه.

مسئله حل کنید

۱- اگر F تابعی متناوب و c یک دوره تناوب و T دوره تناوب اصلی آن باشد، ثابت کنید عدد صحیح $K \neq 0$ وجود دارد که c=k.T (در واقع هر دوره تناوب یک تابع متناوب، مضرب صحیحی از دوره تناوب اصلی آن است)

.....

۲- اگر تابع حقیقی f با دامنه R دارای دو محور تقارن $x = a$ ، $x = b$ $(a < b)$ باشد آنگاه f تابعی متناوب است.

.....

۳- ترکیب دو تقارن محوری با محورهای موازی یک انتقال و با محورهای متقاطع یک دوران است.

.....

۴- الف) حد هر جمله از بسط $(1+\frac{1}{n})^n$ را وقتی $n \to \infty$ و بخصوص حد جمله عمومی آن را تعیین کنید.

ب) $\lim_{n \to \infty}(1+\frac{1}{n})^n$ را به صورت یک سری بنویسید.

ج) ثابت کنید دنباله $\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right\}$ یکنوا و کران‌دار است.

د) از الف و ب و ج چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

.....

۵- اگر x+y=a و $n \in N, a > 0$ ثابت کنید :

$$x^n + y^n \geq \frac{a^n}{2^{n-1}}$$

.....

۶- نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x^3 + x}$ را رسم کنید.

.....

۷- در چه نقطه‌ای از تابع $y = \frac{2x}{x^2+1}$ قدر مطلق شیب خط مماس ماکزیمم است؟
این نقطه برای تابع مورد نظر چه نقطه‌ای است؟

.....

۸- هر گاه تابع f روی بازه [۱،۲] پیوسته و روی (۱،۲) مشتق‌پذیر باشد و f(۱)=۱ و f(۲)=۲ باشد؛ ثابت کنید وجود دارد نقطه $C \in (1,2)$ به طوری که خط مماس بر نمودار f در نقطه بطول C از مبداء مختصات عبور می‌کند.

.....

۹- اگر g و f دو تابع پیوسته و پوشا از بازه [۰،۱] به بازه [۰،۱] و برای هر $x \in [0,1]$ اگر $f(x) \leq g(x)$ و $(fog)(x) = (gof)(x)$؛ ثابت کنید وجود دارد $C \in [0,1]$، به طوری که $f(c) = g(c) = c$.

.....

۱۰- ثابت کنید $\lim_{n \to +\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = 0$ می‌باشد.

۱۱- ثابت کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n+5^n}$ همگرا و مقدار آن برابر $\frac{10}{9}$ نیست.

.....

۱۲- تحقیق کنید آیا می‌توان تابعی معرفی کرد که

الف) سه مجانب افقی داشته باشد

ب) سه مجانب مایل داشته باشد

ج) مجموعاً سه مجانب افقی و مایل داشته باشد.

.....

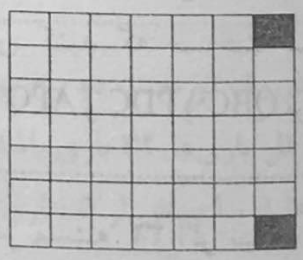
۱۳- ثابت کنید اگر f تابعی متناوب و T دورهٔ تناوب اصلی آن باشد و C یک دورهٔ تناوب آن باشد آنگاه $\frac{C}{T}$ همواره عددی صحیح است.

.....

۱۴- اگر $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ باشد، آن‌ها را طوری بدست آورید که $(\overline{ab})(\overline{cb})=\overline{ddd}$

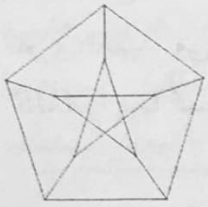
.....

۱۵- در جدول شطرنجی ۷×۷ زیر، دو مربع هاشور خورده را حذف می کنیم، تعیین کنید در شکل مانده چند مربع و چند مستطیل وجود دارد؟



.....

۱۶- ثابت کنید در گراف پترسن زیر دوری به طول هفت وجود ندارد.



.....

۱۷- به کمک رسم نموداری مناسب ثابت کنید:

$$\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}=(n-1)^2$$

.....

۱۸- تعیین کنید چند عدد اول بصورت n^5+n+1 که $n \in \mathbb{N}$ است وجود دارد.

.....

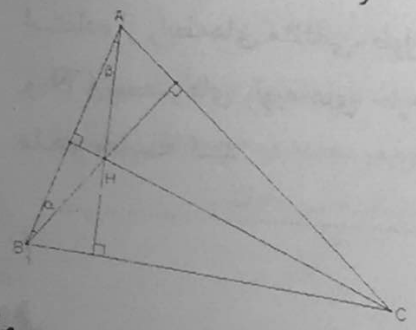
۱۹- به کمک برهان خلف ثابت کنید عدد $\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}$ عددی اصم است .

.....

۲۰- هرگاه $n \in \mathbb{N}$ باشد، ثابت کنید دست کم یک عدد طبیعی با ارقام صفر و یک و حداکثر n رقمی وجود دارد به طوری که بر n بخش‌پذیر است.

.....

۲۱- فرض کنید H نقطه برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC باشد، اندازه زاویه‌های داخلی مثل ABC را پیدا کنید در صورتی که $B\hat{A}H=\alpha$ و $A\hat{B}H=\beta$ باشد.



۲۲-در مثلث ABC: $A=۴۵^\circ$ و $B=۱۵^\circ$ بر امتداد ضلع AC ، از طرف نقطه c، نقطه M طوری اختیار می‌شود که CM=2AC، زاویه $A\hat{M}B$ را پیدا کنید.

.....

۲۳- در مثلث ABC زاویه $A = ۶۰^\circ$ است. نیمسازهای CC', BB' را رسم می کنیم ثابت کنید: $A\hat{C'}C = B\hat{B'}C$

.....

۲۴- در مثلث ABC ارتفاع CC' ارتفاع AA' را نصف کرده است ثابت کنید $\tan B . \tan C = ۲$

.....

۲۵- در مثلث ABC میانه AM را به اندازه خودش تا نقطه A' امتداد می دهیم. سپس ضلع BC را از طرف C به اندازه $CC' = BC$ امتداد می دهیم ثابت کنید ضلع های مثلث $AA'C'$ دو برابر میانه های مثلث ABC است.

.....

۲۶- میانه AM از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

$$\frac{AB + AC - BC}{۲} < AM < \frac{AB + AC}{۲}$$

.....

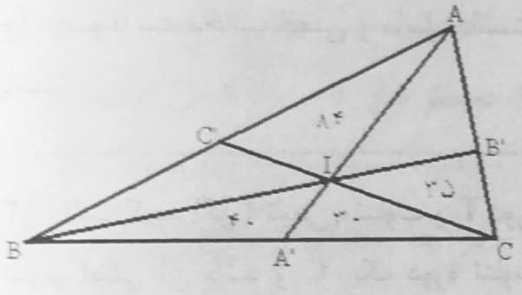
۲۷- در مثلث ABC اندازه زاویه B برابر ۱۲° و اندازه زاویه C برابر ۱۳۲° است. بدون استفاده از رابطه‌های مثلثاتی، طول های BM و CN نیمسازهای زاویه های خارجی C,B را با هم مقایسه کنید.

.....

۲۸- روی ضلع‌های BC,AB از مثلث ABC مربع های ABDE و BCKM را رسم کرده‌ایم، ثابت کنید که طول پاره‌خط DM دو برابر طول میانه BP از مثلث ABC است.

.....

۲۹- در مثلث زیر مساحت چهار تا از مثلث‌های کوچک معلوم است. مساحت مثلث بزرگ اصلی چقدر است؟



.....

۳۰- از هر رأس متوازی‌الاضلاع به وسط دو ضلع غیر مجاور خود رسم کرده‌ایم. این هشت خط راست یک هشت ضلعی به وجود می آورند. ثابت کنید مساحت این هشت ضلعی، $\frac{۱}{۶}$ مساحت متوازی الاضلاع است.

.....

۳۱- در یک نیم دایره یک مربع محاط کنید.

.....

۳۲- مستطیل ABCD مفروض است. بر ضلع AB نقطه Q و بر ضلع AD نقطه P را چنان مشخص کنید که مساحت مثلث‌های قائم الزاویهٔ APQ و PDC و QBC برابر باشد.

.....

۳۳- در مسئله ۳۲ اگر نسبت ضلع AB به AD عدد طلایی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ باشد، نشان دهید که مثلث POC متساوی الساقین است.

۳۴- اگر پنج جز از شش جز دو مثلث (سه ضلع و سه زاویه) برابر باشند آن دو مثلث متشابه‌اند. در مورد نسبت تشابه بحث کنید.

۳۵- در مسأله قبل اگر دو مثلث قائم‌الزاویه باشند نسبت تشابه چیست؟

.....

۳۶- کلیه جواب‌های معادله $x! = ۲۰y!$ $(x,y \in \mathbb{N})$ را پیدا کنید.

.....

۳۷- از بین اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ پانزده عدد متمایز به تصادف انتخاب کرده، احتمال آنکه دو جفت از این اعداد دارای قدرمطلق تفاضل برابر باشند چقدر است؟

.....

۳۸- اولاً درستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$C(x+۱,۲)^۲ - C(x,۲)^۲ = x^۲$$

ثانیاً با استفاده از رابطه بالا عدد $۷۷۳^۳$ را به صورت تفاضل مربع‌ها بنویسید.

.....

۳۹- اعداد پنج رقمی حاصل از ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را چنان درنظر بگیرید که هر رقم حداکثر یک بار در هر عدد بکار رفته باشد. مجموع این اعداد را پیدا کنید.

.....

۴۰- ده تیم در یک تورنمنت دو به دو بازی می‌کنند. اگر کل بازی‌ها ۳۲ بازی باشد، چرا بعضی از تیم‌ها ۵ یا بیش از ۵ بازی انجام داده‌اند؟

.....

۴۱- دوازده گلوله داریم که همه از نظر شکل مشابه هستند اما وزن دقیقا یکی از آن‌ها با بقیه متفاوت است (دقت شود که نمی‌دانیم این گلوله از بقیه گلوله‌ها سبک‌تر است یا سنگین‌تر.) می‌خواهیم تنها با سه‌بار استفاده از ترازوی دوکفه‌ای

الف) گلوله متفاوت را شناسایی کنیم.

ب) تعیین کنیم که این گلوله نسبت به سایر گلوله‌ها سبک‌تر است یا سنگین‌تر.

.....

۴۲- جفت عدد صحیح (a,b) بر روی کارتی نوشته شده است.

ماشین (الف) کارت با جفت عدد (a,b) می‌گیرد و کارتی با جفت عدد $(a+b,a)$ را پس می‌دهد.

ماشین (ب) کارت با جفت عدد (a,b) می‌گیرد و کارتی با جفت عدد (b,a) را پس می‌دهد.

ماشین (ج) کارت با جفت عدد (a,b) می‌گیرد و کارتی با جفت عدد $(a,b-a)$ را پس می‌دهد.

آیا با شروع از کارت (۱۳،۸۵) و استفاده از سه دستگاه فوق می‌توان به کارت (۲۰۰۷،۱۳۸۶) رسید؟

.....

با تشکر از:
آقایان محمدعلی نقش، عبدا... امینی، اکبر زمانی، منصور معتمدی، محمدعلی پروانیان و خانم ملیحه‌السادات سادات

روش ابراهیم بن سنان ریاضیدان قرن سوم هجری در رسم سهمی

به نقل از کتاب گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی تألیف جی. ال. برگون، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل و دکتر علیرضا جمالی

روی خط AG پاره‌خط ثابت AB را جدا و BE را عمود بر AB رسم کنید. اینک بر BG نقاط Z, D, H و .... را به تعداد دلخواه انتخاب کنید. با شروع از H، نیم‌دایره به قطر AH را رسم کنید و فرض کنید که عمود BE آن را در T قطع کند. از T خطی به موازات AB و از H خطی به موازات BE رسم کنید. فرض کنید این خط‌ها یکدیگر را در K قطع کنند. سپس نیم‌دایره‌ای به قطر AD رسم و فرض کنید که این دو خط یکدیگر را در L قطع کنند. همین عمل ترسیم را در مورد نقاط باقی‌مانده Z و ... انجام دهید تا نقاط متناظر را به دست آورید. در این صورت نقاط M, L, K, B و .... روی سهمی به رأس B ، محور BG و پارامتر AB قرار دارند. اگر M', L', K' و ... بر امتدادهای $MZ. LD, KH$ و ... انتخاب شوند به طوری که $KH = HK'$ و $LD = DL'$ و $MZ = ZM'$ و ... در این صورت آن‌ها روی سهمی قرار دارند. روش ابراهیم بن سنان برای اثبات این که K روی سهمی است به شرح زیر است:

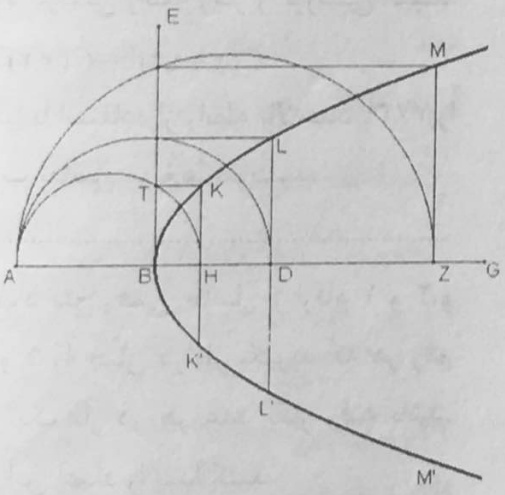
اگر سهمی از نقطه K نگذرد فرض کنید از نقطه دیگری روی KH، مثلاً N بگذرد. در این صورت بنابر خاصیت سهمی $NH^2 = AB.BH$.

از سوی دیگر چون TB بر قطر نیم‌دایره ATH عمود است داریم:

$TB^2 = AB.BH$ و با توجه به اینکه TBHK متوازی‌الاضلاع است TB=KH. بنابراین:

$KH^2 = TB^2 = AB.BH = NH^2$

و لذا KH=NH که یک تناقض است. بنابراین K روی سهمی قرار دارد و به همین ترتیب نقاط M,L و... روی سهمی قرار دارند.



گردآورنده: اکبر زمانی

استفاده از منابع انگلیسی می‌تواند در زمینه‌های گوناگون کمک شایانی برای همکاران باشد، لذا تصمیم گرفتیم از این شماره، یکی دو صفحه به زبان انگلیسی اختصاص دهیم. متن زیر مربوط به حل یک مسئله از مجموعه سوالات المپیاد ریاضی در کشور لتونی از چند روش مختلف است. امیدواریم نظرات خود را در این مورد با ما در میان بگذارید.

هیئت تحریریه

Juices, Broken lines and more in one inequality

Liga Ramana, Agnis Andzans

from WFNMC conference presentations

1. Problem. Let $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ be positive real numbers. Is it possible that the inequality $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{y_1 + \ldots + y_n} > \frac{x_i}{y_i}$ holds for all $i = 1; 2; \ldots; n$?

2. General Remarks. This is an original Olympiad problem. It was proposed to student of 9th Grades at the school level in Latvia, academic year 2001/2002. So it is easy by definition. It is chosen because of many different approaches it admits and many questions it raises.

3. Answer. no.

4. Solutions. We give 5 different Solutions.

A. Proof by Contradiction.
Suppose that $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{y_1 + \ldots + y_n} > \frac{x_i}{y_i}$ for $i = 1; 2; \ldots; n$. As all variables are positive we obtain:

$$y_i(x_1 + \ldots + x_n) > x_i(y_1 + \ldots + y_n)$$

for $i = 1; 2; \ldots; n$.

Adding these inequalities for $i = 1; 2; \ldots; n$, we obtain:

$$(y_1 + \ldots + y_n)(x_1 + \ldots + x_n) > (x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n)$$

which is a contradiction.
(Note that the method of invariant is presented in this solution.)

B. Proof by extremal element.
Let's denote the largest ratio among $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}$ by k. Then $x_1 \le ky_1$, $x_2 \le ky_2$, $\ldots, x_n \le ky_n$. Therefore:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{y_1 + \ldots + y_n} \le \frac{ky_1 + \ldots + ky_n}{y_1 + \ldots + y_n} = k$$

But $k = \frac{x_j}{y_j}$ for some j. So the answer is "no".

C. Proof by mathematical induction.
We will proof that:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{y_1 + \ldots + y_n} \le \max\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}\right)$$

For $k=1$ it's obvious. For $k=2$ use approaches A, B, D, E or any else. Now suppose that we have proved it for $k \le n$, $n \ge 2$. Then

$$\frac{x_1+\ldots+x_{n+1}}{y_1+\ldots+y_{n+1}} = \frac{(x_1+\ldots x_n)+x_{n+1}}{(y_1+\ldots y_n)+y_{n+1}}$$

$$\le \max\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{y_1+\ldots+y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right)$$

$$\le \max\left(\max\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}\right), \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right)$$

$$= \max\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right)$$

D. Proof by geometrical interpretation.

Consider the following configuration, consisting of n right triangles with acute angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Clearly for some i must be $\alpha_i \ge \alpha$. But then $\tan\alpha_i \ge \tan\alpha$, from which we obtain:

$$\frac{x_i}{y_i} \ge \frac{x_1+\ldots+x_n}{y_1+\ldots+y_n}$$

E. Proof by "physico-chemical" interpretation.

Suppose we have y_1 litters of a juice containing x_1 units of sugar; y_2 litters of another juice containing x_2 units of sugar, etc. ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ must be measured in another units that liters, because it's possible that $x_i > y_i$ for some i. Then $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}$ are the concentrations of sugar in our juices.

Suppose we mix all the juices into one barrel. Then $\frac{x_1+\ldots+x_n}{y_1+\ldots+y_n}$ is the concentration of the mixture. Clearly it can not be more than the concentration of each component, and we have solved the problem again.

(Note that the concept of mean value is present in this sulotion.)