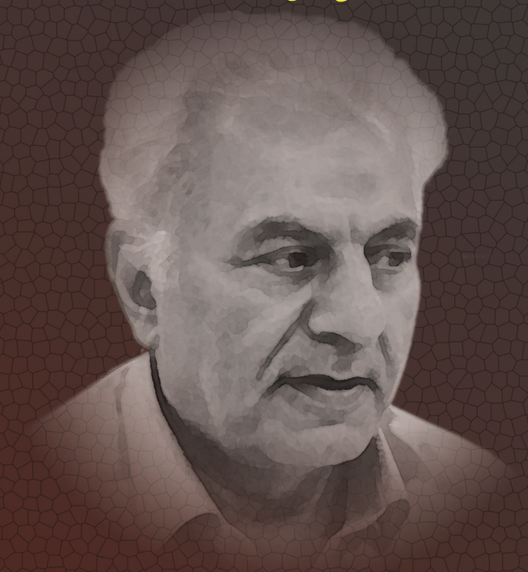
فرنود

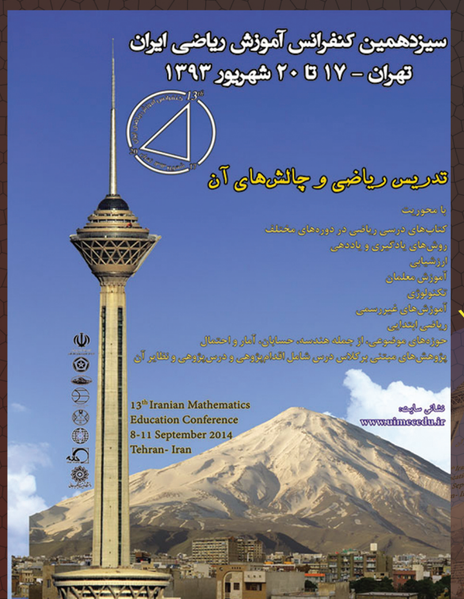
نشریه انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان اصفهان

شماره بیستم
تابستان ۱۳۹۳

آن‌چه در این شماره می‌خوانید

عنوان	نویسنده/مترجم	صفحه
کلام نخست	هیئت تحریریه	۱
جایزه فیلدز، مریم میرزاخانی	رامین جوادی	۴
شرح حال استاد ابن‌حجازی	از زبان سرکار خانم فاطمه استکی	۸
استاد ابن‌حجازی	طاهره حسنی	۹
جلوه‌های معلمی استاد ابن‌حجازی	فریبا حقانی	۹
به یاد استاد ابن‌حجازی	طغیان انگشتری	۱۱
مقدمه شناخت رشد پایدار کودکان	طغیان انگشتری	۱۳
چند مطلب درباره عدد طلایی	اکبر زمانی	۲۴
چندجمله‌ای‌های خوش‌رفتار	منصور معتمدی	۲۶
رساله‌ای جدید از کاشانی پیرامون انحطاط افق مرئی	محمد باقری، مقداد قاری	۳۲
آموزش ریاضی در ایران به کجا می‌رود؟	حسین میرحسینی	۴۲
خاصیت شرکت‌پذیری ضرب خارجی در مجموعه بردارها	ایاز بهرامی اسفرجانی	۴۵
حل هندسی معادلات درجه دوم توسط فیثاغورسیان		۴۷
حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال در یک نگاه	محمدعلی نقش	۴۹





کلام نخست

در بازه زمانی بین انتشار شماره قبل و این شماره، جهان ریاضیات شاهد شکوفایی یکی از دانشمندان زن ایرانی بود. خانم پروفسور مریم میرزاخانی که یکی از نخبگان واقعی جامعه ایران و از استعدادهای درخشان ملکه زیبائی‌های علم یعنی ریاضیات است، در تاریخ سیزدهم اوت ۲۰۱۴ (۲۲ مرداد ۱۳۹۳) نخستین مدال فیلدز را برای ایرانیان و نیز بانوان عالم کسب نمود.

اما جامعه معلمان ریاضی اصفهان برای کسب این افتخار سهم کوچکی دارد، که به‌جاست به آن ببالد. در سال ۱۳۶۲ موتوری در اصفهان به نام مسابقات ریاضی تولید شد که محملی را برای شناسایی و پرورش استعدادهای درخشان ریاضی ایجاد کرد. این مسابقات، المپیادهای ریاضی ایران و درخشش جوانانی همچون مریم میرزاخانی استاد فعلی دانشگاه استانفورد را به عنوان میوه‌های درخشان علمی به ارمغان آورد و معلمان ریاضی اصفهان باید بر خود ببالند که این هم ثمره دیگری از تلاش‌ها و همفکری‌های آنان از ۳۱ سال قبل است، که با جلسات دوشنبه‌های معلمان ریاضی جرقه‌های آن آغاز و در قرن بیست و یکم باعث افتخار و اعتلای کشور عزیزمان در عرصه‌های بین‌المللی شد.

اما آموزگاران اصفهان در این بازه، عزیزی را هم از دست دادند. مرحوم استاد سیدکاظم ابن‌حجازی سال‌ها با تواضع و فروتنی عمر گران‌بهایش را صرف آموزش معلمان، راهنمایی و هدایت این قشر تأثیرگذار و راه‌اندازی انجمن علمی آموزشی معلمان دوره ابتدایی اصفهان نمود و سرانجام در تاریخ سی‌ام آذر ماه ۱۳۹۲ به دیار باقی پیوست.

او علاوه بر راهنمایی و آموزش آموزگاران اصفهانی و دانشجویان مراکز تربیت‌معلم، سال‌ها در امر برنامه‌ریزی آموزش ابتدایی و کمک به برنامه‌های خانه ریاضیات اصفهان مساعدت می‌نمود و متواضعانه و بدون انتظار، راهنمای دوستان خود در خانه ریاضیات بود. روحش شاد.

اما ...

ازسال ۱۳۴۹ تاسال ۱۳۷۴که بیست وشش کنفرانس ریاضی در دانشگاه‌های ایران با موفقیت برگزار شد، معلمان ریاضی کشور به‌طور فعال در این کنفرانس‌ها شرکت می‌کردند. گرچه از سخنرانی‌ها و ارائه مقالات و سایر برنامه‌ها استفاده می‌نمودند، ولی همیشه احساس می‌کردند که به‌عنوان میهمان در این کنفرانس‌ها شرکت می‌کنند. در آن سال‌ها دغدغه معلمان بیشتر آموزش ریاضی بود به‌خصوص سال‌ها بود که در کشورهای پیشرفته جهان برای آموزش ریاضی اهمیت زیادی قائل بودند، ولی بسیاری از ما معلمان ریاضی هنوز به شیوه‌های سنتی و با روشی که از معلمان خود آموخته بودیم تدریس می‌کردیم.

درسال ۱۳۷۵ اولین کنفرانس آموزش ریاضی در اصفهان برگزار شد. در جلسه افتتاحیه این کنفرانس

وزیر وقت آموزش و پرورش[1] ضمن سخنانی درباره تحولاتی که در آموزش ریاضی به‌وجودآمده است و اشاره به فعالیت دانشمندان ریاضی به‌خصوص جورج پولیا در این زمینه و لزوم استفاده از آن‌ها در کشورمان اظهار داشت «به‌هرحال در ارتباط با مسئله آموزش ریاضی به‌طور کلی که هم مشتمل بر آموزشگر ریاضی است و هم مشتمل بر برنامهٔ درسی ریاضی و هم آموزش‌گیرنده و هم مشتمل بر روش‌ها و شیوه‌های کار است، دنیایی ازمسائل جدید در کشورهای مختلف مطرح شده است و یک موج تازه‌ای پیدا شده است که ما باید در آموزش و پرورش کشورمان نسبت به این نظریات حساسیت از خودمان نشان دهیم و آمادگی تحلیل منطقی این حرف‌ها را داشته باشیم و آمادگی نقّادی نسبت به این حرف‌ها را داشته باشیم و فراموش کردن و غفلت از این مباحث ساده‌ترین کار ممکن است، اما قطعاً این راه ساده ما را به جایی نخواهد رساند و از آن هدف بزرگ احیاء فرهنگ ریاضی و رسیدن به آن جایگاه علمی جهانی باز خواهد داشت.[2]»

ولی معلمان ریاضی کشور ما آن راه ساده را انتخاب نکردند و می‌دانستند این کنفرانس نخستین گام در راه اعتلای آموزش ریاضی کشور است و اگر بخواهند تحولی در آموزش ریاضی ایجاد کنند باید قدم‌های بعدی را محکم و به‌موقع بردارند و برای تداوم برگزاری کنفرانس آموزش ریاضی تلاش کنند، لذا نمایندگان انجمن‌های علمی آموزشی استان‌های مختلف کشور تصمیم گرفتند به نوبت این کنفرانس را برگزارکنند، خوشبختانه آن تصمیم عملی شد و با تلاش معلمان ریاضی کشور تاکنون دوازده کنفرانس در استان‌های مختلف کشور با موفقیت برگزار شده است. شرکت‌کنندگان در این کنفرانس‌ها علاوه برآن‌که از مسائل علمی و آموزشی آن‌ها استفاده کرده‌اند با معلمان ریاضی آن استان‌ها آشنا شدند و توانائی‌ها و تلاش آن‌ها برای برگزاری کنفرانس آموزش ریاضی دراستانشان را مشاهده کردند. شرکت‌کنندگان دراین کنفرانس‌ها هرگز زحمات برگزارگنندگان را فراموش نمی‌کنند و صمیمانه از آن‌ها تشکر می‌کنند. خوشبختانه امسال سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی در تهران برگزارمی‌شود. انتظار می‌رود این کنفرانس پربارتر و مؤثرتر از کنفرانس‌های قبلی باشد زیرا:

۱- شرکت دراین کنفرانس برای علاقه‌مندان آموزش ریاضی خارج و داخل کشور ساده‌تر است و قطعاً شاهد ارائه مقاله‌ها و سخنرانی‌های جالبی خواهیم بود.

۲- یک بخش مهم از مطالب هر کنفرانس آموزش ریاضی مربوط به انتقاد و بررسی کتاب‌های درسی و مشکلات آموزشی کشور و ارائه پیشنهادهائی برای برطرف کردن آن مشکلات است، قطعاً امسال تعداد بیشتری از مسئولان اجرائی وزارت آموزش و پرورش در این کنفرانس شرکت می‌کنند و از نزدیک با نظرات معلمان و پیشنهادات آن‌ها آشنا می‌شوند و پس از کارشناسی توسط کارشناسان خبره ازآن‌ها عملاً در برنامه‌های اجرائی استفاده می‌کنند.

۳ – در حاشیه هرکنفرانس جلساتی تشکیل می‌شودکه می‌تواند برای بهبود آموزش کشور مؤثر باشد، امید می‌رود که درکنفرانس سیزدهم با توجه به شرکت بیشتر صاحب‌نظران آموزش ریاضی و مسئولین وزارت آموزش و پرورش این جلسات مؤثرتر باشد.

برخی از جلساتی که معمولاً درحاشیه این کنفرانس‌ها تشکیل می‌شوند و امید می‌رود که در

---

۱. محمدعلی نجفی

۲. گزارش اولین کنفرانس آموزش ریاضی

این کنفرانس از آن‌ها نتیجه بهتری گرفته شود عبارتند از:

الف- جلسات اتحادیه انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی کشورکه انتظار می رود در این جلسات با حضور نمایندگان وزارت آموزش و پرورش مشکلات موجود در آموزش کشور مطرح شود و برای برطرف کردن آن‌ها راه‌حل‌هائی پیدا شوند.

یکی از این مشکلات تعیین جایگاه انجمن‌های علمی آموزشی و چگونگی تأمین اعتبار مالی جهت تشکیل جلسات آموزشی، انتشار نشریه‌ها و سایر هزینه‌های ضروری است.

یکی دیگر از این مشکلات حضور افراد بدون صلاحیت تدریس و بعضاً سودجو درآموزش کشور است که نه تنها معلمان ریاضی بلکه جامعه فرهنگیان کشور انتظاردارند، این اتحادیه با همکاری نمایندگان معلمان سایر رشته‌ها برای سالم‌سازی فضای آموزشی و حفظ حیثیت و مقام معلم برنامه‌ریزی و اقدام کند، به نظر می‌رسد در یک برنامه کوتاه مدت لازم است این اتحادیه از مسئولان آموزش و پرورش و رسانه‌های عمومی به‌خصوص صدا و سیما بخواهد از تدریس این افراد که بعضاً ضدآموزش می‌باشد، جلوگیری نمایند و در یک برنامه درازمدت خواستار صدور مجوز برای تدریس و فعالیت‌های آموزشی افراد شود.

ب- جلسات نمایندگان معلمان با مؤلفان کتاب‌های درسی و مسئولین دفتربرنامه‌ریزی و تألیف که با توجه به تغییر سیستم آموزشی و تغییر تمام کتاب‌های درسی و حذف کلاس چهارم یا پیش‌دانشگاهی از آموزش متوسطه، باید برنامه دقیق وعملی هر شش سال دوره اول و دوم دبیرستان و جایگاه مطالب علمی در هرکتاب درسی برای معلمان مشخص شود.

معلمان کشور انتظار دارند پیش‌نویس هر کتاب درسی جدید یک سال قبل از چاپ منتشر شود، تا پس از تشکیل کلاس‌های ضمن خدمت برای معلمان و بررسی آن کتاب، مؤلفان بتوانند مشکلات احتمالی آن‌را برطرف کرده و برای چاپ آماده کنند تا در طول سال تحصیلی معلمان و دانش‌آموزان به‌راحتی از آن‌ها استفاده کنند.

ج- جلسات مدیران و نمایندگان خانه‌های ریاضیات کشورکه خوشبختانه امسال خانه ریاضیات تهران میزبان نمایندگان این خانه‌ها می‌باشد، با توجه به نقش مهم این خانه‌ها در آموزش ریاضی کشور و مشکلات زیادی که دارند انتظار می رود در این جلسات با دعوت از نمایندگان وزارت‌خانه‌های علوم و آموزش و پرورش مشکلات آن‌ها بررسی شود و در سیستم آموزش کشور جایگاهی برای کمک به آن‌ها تعیین شود.

فرنود ضمن آرزوی موفقیت برای برگزارکنندگان این کنفرانس این شماره را به‌صورت ویژه نامه به مناسبت سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی منتشر می‌کند.

هیئت تحریریه

جایزه فیلدز، مریم میرزاخانی

رامین جوادی

دانشگاه صنعتی اصفهان و خانه ریاضیات اصفهان

rjavadi@cc.iut.ac.ir

مرداد ماه ۱۳۹۳ همراه با خبر مسرت‌بخشی مبنی بر دریافت مدال فیلدز توسط خانم مریم میرزاخانی به عنوان اولین زن و اولین ایرانی در تاریخ ۸۰ ساله این جایزه بود. ضمن تبریک به ایشان برای این دستاورد بزرگ، در این مقاله می‌خواهیم به‌طور مختصر به پاسخ این سوالات بپردازیم که مدال فیلدز چیست؟ مریم میرزاخانی کیست؟ و چگونه موفق به کسب این موفقیت گردید؟

مدال فیلدز که به عنوان «مدال بین‌المللی برای یافته‌های چشمگیر ریاضیات» شناخته می‌شود، از سال ۱۹۳۶ میلادی هر چهار سال یک بار در کنگره بین‌المللی ریاضیات به دو، سه یا چهار ریاضیدان زیر ۴۰ سال اهدا می‌شود. مدال فیلدز و جایزه آبل بزرگترین افتخاراتی محسوب می‌شوند که یک ریاضیدان می‌تواند دریافت کند. با توجه به این‌که جایزه نوبل در ریاضیات وجود ندارد، این جوایز به «نوبل ریاضی» مشهورند. (تنها تفاوت این دو جایزه در محدودیت سنی دریافت‌کننده آن‌هاست.) مدال فیلدز همراه با جایزه نقدی ۱۵۰۰۰ دلاری اهدا می‌شود.

مریم میرزاخانی اولین زن ریاضیدان در تاریخ است که موفق به دریافت این مدال شده است. او پس از دریافت آن در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان در سئول گفت: «این یک افتخار بزرگ است. خوشحال خواهم شد اگر این اتفاق، دانشمندان و ریاضیدانان زن جوان را به کار بیشتر ترغیب کند. مطمئنم که در سال‌های آینده زنان بیشتری موفق به کسب چنین جوایزی می‌شوند.»

این مدال به‌خاطر کارهای عمیق و اصیل میرزاخانی در زمینه هندسه و سیستم‌های دینامیکی و به ویژه ارتقاء درک ما از تقارن رویه‌های خم‌وار شبیه کره، دونات و رویه‌های اشیاء هذلولوی، به او اهدا شده است.

اما مریم میرزاخانی کیست؟

مریم میرزاخانی در سال ۱۳۵۶ در تهران متولد و بزرگ شد. در نوجوانی آرزو داشت نویسنده شود. اما در دبیرستان علاقه و استعداد او در حل مسایل ریاضی نگرشش را تغییر داد. به گفته خودش اولین بار برادرش بود که او را به موضوع علم علاقه‌مند کرد، وقتی که داستانی را که در مدرسه شنیده بود برای مریم بازگو کرد. او درباره کارل فردریش گاوس ریاضیدان شهیر آلمانی گفت که وقتی کودک بوده است، چطور به یک شیوه کاملاً هنرمندانه در چند ثانیه جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را محاسبه کرده است (روش گاوس دسته‌بندی اعداد در ۵۰ دسته دوتایی است که جمع هر دسته ۱۰۱ می‌شود). مریم میرزاخانی می‌گوید این اولین بار بود که از یک راه‌حل زیبا لذت بردم، هرچند خودم آن را به‌دست

نیاورده بودم.

او به عنوان دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان در سال‌های ۱۳۷۳ و ۱۳۷۴ در المپیاد بین‌المللی ریاضیات (IMO) مدال طلا گرفت که در المپیاد دوم نمره کامل را از کل سوالات دریافت کرد.سپس به دانشگاه شریف راه یافت و در دوره کارشناسی نیز در مسابقه بین‌المللی دانشجویی ریاضی (IMC) موفق به کسب مدال طلا همراه با امتیاز کامل شد. این سال‌ها همراه بود با حادثه تلخ سقوط اتوبوس حامل دانشجویان نخبه دانشگاه شریف به دره که منجر به کشته شدن چند تن از بهترین استعدادهای جوان ریاضی کشور شد. خوشبختانه میرزاخانی از این حادثه جان سالم به در برد. او سپس در سال ۱۳۷۸ برای ادامه تحصیل در مقطع دکتری به دانشگاه هاروارد رفت تا تحت راهنمایی برنده مدال فیلدز کرتیس مک‌مولن تحصیلات خود را ادامه دهد. او اطلاعات عمیق و گسترده‌ای از تکنیک‌های ریاضی در موضوعات کاملاً متفاوت از جبر و آنالیز مختلط گرفته تا هندسه هذلولوی داشت و با بهره‌گیری از اصولی در چند گرایش مختلف، توانست درک جدیدی در یک شاخه از ریاضیات به نام توپولوژی ابعاد پایین ایجاد کند. یکی از ویژگی‌های منحصر به فرد او این بود که می‌توانست از یک مثال ساده یک نظریه خلق کند.

کارهای اولیه میرزاخانی مربوط به حل مساله محاسبه حجم فضاهای مدولی خم‌ها روی رویه‌های ریمانی بود که برای دهه‌ها بدون حل مانده بود. این‌ها اشیای هندسی هستند که هر نقطه آن‌ها متناظر با یک رویه هذلولوی است. او با پیدا کردن فرمولی که حجم یک فضای مدولی با جینس داده شده را به‌صورت چندجمله‌ای از تعداد مولفه‌های مرزی آن بیان می‌کرد، این مساله را حل نمود.

سهم عمده کارهای میرزاخانی که منجر به دریافت مدال فیلدز برای او شد، ارتباط ماهرانه‌ای است که بین هندسه و سیستم‌های دینامیکی ایجاد کرده است. استیون کرکهوف یکی از همکاران او در دانشگاه استنفورد درباره او می‌گوید: «ویژگی که میرزاخانی را منحصر به فرد می‌کند، اصالت روشی است که او برای کنار هم گذاشتن و ربط دادن قطعات کاملاً متفاوت و به ظاهر بی ربط دارد. این از تز دکتری او شروع شد که منجر به مقالات بسیار با کیفیت شد و ابتکار رهیافت او، آن را به یک شاهکار تبدیل کرده است.»

مریم میرزاخانی از سال ۲۰۰۴ تا ۲۰۰۸ میلادی استادیار دانشگاه پرینستون و از سال ۲۰۰۸ تاکنون استاد دانشگاه استنفورد است. تحقیقات اخیر او بیشتر بر روی مطالعه تقارن هندسه رویه‌ای است. او ثابت کرد که ژئودزیک‌های مختلط و بستار آن‌ها در فضای مدولی به‌طور شگفت‌انگیزی منظم است.

اگر چه کار او کاملاً نظری و محض است، با توجه به کاربردهایی که در نظریه میدان کوانتومی دارد، می‌تواند تاثیراتی در فیزیک نظری درباره فهم نحوه پیدایش جهان داشته باشد. در ریاضی نیز کار او کاربردهایی در مطالعه اعداد اول و رمزنگاری دارد. علی‌رغم کاربردهای متنوعی که برای تحقیقات او وجود دارد، میرزاخانی می‌گوید که از ریاضیات محض به‌خاطر زیبایی، ظرافت و دیرپایی مسایل آن لذت می‌برد. او در مصاحبه با موسسه کلی، در پاسخ به این سوال که چه چیزی برایتان ارزشمندتر است، می‌گوید: «ارزشمندترین بخش لحظه کشف است، لذت فهمیدن مطلبی جدید، احساس بودن در بالای یک تپه و داشتن یک دید و اشراف روشن. ولی برای من در بیشتر مواقع، انجام دادن ریاضیات، شبیه یک پیاده‌روی طولانی بدون مسیر و پایان مشخص در

دید است.» میرزاخانی هم‌چنین درباره روش تحقیق خود می‌گوید: «من هیچ دستورالعمل خاصی را دنبال نمی‌کنم. همین مساله است که انجام تحقیقات را چالشی و در عین حال جذاب می‌کند. شبیه این است که در یک جنگل گم شده باشید و تلاش می‌کنید همه دانش خود را به کار گیرید تا ترفندهای جدیدی خلق کنید و با اندکی شانس راه نجاتی بیابید.»

کسب مدال فیلدز توسط مریم میرزاخانی از دو جنبه اهمیت ویژه دارد. جنبه اول این است که طلسم دریافت یک جایزه مهم ریاضی توسط یک ریاضیدان زن شکسته شد. کریستین روسو، رئیس اتحادیه بین‌المللی ریاضیات (IMU) گفت: «این یک موقعیت استثنایی است. در ابتدای قرن بیستم ماری کوری جایزه نوبل فیزیک و شیمی را دریافت کرد. اما در ریاضیات این اولین بار است که یک زن، معتبرترین جایزه را کسب می‌کند. این یک جشن برای زنان است.» با توجه به بحث دیرینه رابطه زنان و ریاضیات و سخنرانی جنجالی لورنس سامرز، رئیس اسبق دانشگاه هاروارد در سال ۲۰۰۵ میلادی که در آن، دلیل کمرنگ بودن حضور زنان در موقعیت‌های مهم در علوم و مهندسی را بیشتر ناشی از تفاوت استعداد و نه شرایط اجتماعی و تبعیض جنسیتی خواند، کسب بالاترین جایزه ریاضی توسط یک زن می‌تواند در عمل جوابی به بسیاری از این مناقشه‌ها باشد. سر تیم گورز، برنده جایزه فیلدز و استاد ریاضی دانشگاه کمبریج می‌گوید: «من مسرورم که بالاخره این روز فرا رسید. اگرچه زنان زمان زیادی است که در ریاضیات در بالاترین سطح نقش‌آفرینی می‌کنند، اما این حقیقت از دید عموم پنهان بود. امیدوارم وجود یک بانوی برنده مدال فیلدز، که مطمئناً اولین از چندین خواهد بود، به تمام افسانه‌هایی که درباره زنان و ریاضیات وجود دارد پایان داده و زنان جوان بیشتری را ترغیب کند که به تحقیقات ریاضی به عنوان یک حرفه فکر کنند.»

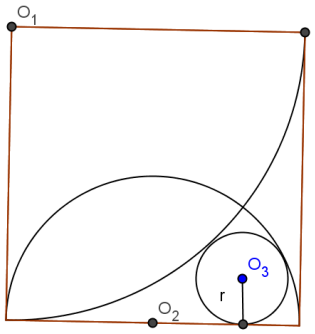
هرچند هنوز سهم زنان در پیشبرد علوم پایه و مهندسی در سایه تسلط مردان است، افزایش اعتماد به نفس زنان به همراه رفع موانع اجتماعی و فرهنگی می‌تواند موجب شکوفایی استعداد زنان و چه بسا باعث انقلابی در نقش آنان در این علوم شود. میرزاخانی در مصاحبه سال گذشته‌اش با انجمن ریاضی آمریکا (AMS) چنین گفت: «موانع اجتماعی برای دخترانی که به علوم ریاضی علاقه‌مندند، اکنون کمتر از زمانی که من بزرگ می‌شدم، نیست. ضمن این‌که هنوز هم برقراری تعادل بین حرفه و خانواده یک چالش بزرگ است.»

جنبه دوم اهمیت مدال فیلدز مریم میرزاخانی، ایرانی بودن اوست. می‌توان از چند منظر به این وجه از این اتفاق تاریخی پرداخت. اولاً کسب این موفقیت برای اولین بار توسط یک ایرانی، مایه مباهات و افتخار ایرانیان در سراسر جهان خواهد بود و انگیزه، امید و خودباوری را در بین جوانان این مرز و بوم مضاعف می‌کند، مسایلی که کشور بیش از هر زمان دیگری، اکنون به آن نیازمند است. از طرف دیگر، توجه به این نکته که خانم میرزاخانی تحصیلات خود را تا مقطع کارشناسی در ایران گذرانده است، این موفقیت او می‌تواند تبلیغات منفی که نسبت به وضعیت زنان و همینطور سیستم آموزشی در ایران وجود دارد را خنثی کند. او در مصاحبه با موسسه کلی، می‌گوید: «سیستم آموزشی در ایران آن‌گونه که برخی فکر می‌کنند، نیست. من به‌عنوان یک دانشجوی دکتری در هاروارد، مجبور شدم چند بار توضیح دهم که به‌عنوان یک زن اجازه داشتم که در دانشگاه تحصیل کنم. اگرچه در ایران دانش‌آموزان دختر و پسر در مدارس جداگانه درس می‌خوانند، ولی

این مانعی برای شرکت آنان در چیزهایی مثل المپیاد یا اردوهای تابستانه نیست.» علاوه براین، با توجه به این‌که میرزاخانی پایه ریاضی خود را در بستر آموزش ریاضی ایران ساخته است، این نتیجه چندان غیرمعقول نیست که مدیریت و برنامه‌ریزی صحیح می‌تواند موجب کشف و شکوفایی استعدادهای ریاضی و ارتقای سطح ریاضیات ایران در جهان شود. پس می‌توان این امید را در ذهن پروراند که روزی برنده جایزه فیلدز یک ایرانی باشد که در ایران مشغول به تحقیق است، به شرطی که از آفات بدنه رو به رشد تحقیقات ریاضی در ایران مانند توجه بیش از حد به کمیت به‌جای کیفیت، جلوگیری شود.

مسئله حل کنید

۱- در شکل زیر طول ضلع مربع یک می‌باشد. اندازه شعاع دایره را بیابید.



۲- اگر فضا را با یک صفحه، دو صفحه، سه صفحه، ... و n صفحه قطع کنیم ماکزیمم ناحیه‌های ایجاد شده چقدر است؟

۳- شش ضلعی رسم کنید که همه زاویه‌های آن برابر باشند ولی هیچ یک از دو ضلع آن برابر نباشند.

۴- تابع $f(x) = \begin{cases} -۲ & x < -۲ \\ x & -۲ \le x \le ۲ \\ ۲ & x > ۲ \end{cases}$ را با یک ضابطه بنویسید.

آموزگاران اصـــفهان معلمی فداکار و راهنمایی دلســـوز را از دست داده‌اند. استاد سیدکاظم ابن‌حجازی سال‌ها وقت خود را صـــرف آموزش معلمان و هدایت آن‌ها می‌نمود. ایشـــان در سال‌های اخیر با بخش ابتدایی خانه ریاضیات اصفهان همکاری صـمیمانه داشـته‌اند. در زیر زندگی‌نامه و شـرح حال وی را از زبان همسر، شاگردان و همکاران ایشان می‌خوانید.

شرح حال استاد ابن‌حجازی

از زبان سرکار خانم فاطمه استکی

همسر استاد

آقای ســـیدکاظم ابن‌حجازی در تاریخ ۲۲ خرداد ماه سال ۱۳۲۲ هجری شمسی در شهر اصفهان در یـک خانواده مذهبی به دنیا آمدند، شـــش خواهر و برادر بودنـد و ایشـــان فرزنـد چهارم خانواده بودند. تحصیلات ابتدایی را در مدرسه علیه و متوسطه را در دبیرستان ادب به پایان رساندند و از دانشسرای عالی سپاهدانش لیسانس گرفتند. بر اساس گفته خودشان در شـــهرهـای مختلف ورامین، رودبـار بـه تدریس مشـغول بودند و بعد به سمت سرپرستی سپاه دانش رودبار و بعد نجف‌آباد به خدمت مشـغول شدند و در طول خدمت ایشـان تا آن حدی که شـاهد بودم، در سـاختن و اصـلاح وضـعیت آموزشـی مختلف این شـهرستان، جدیت زیادی به خرج می‌دادند. در سال ۱۳۵۷ همزمـان با شـــکوفایی انقلاب اســـلامی به اصـــفهـان منتقل شـــدند و در مراکز تربیت‌معلم و همچنین دانشـگاه مشـغول به تدریس شـدند. از آن زمان به بعد همه همت و تلاش ایشـــان مصـــروف تغییر و اصـلاح وضعیت آموزشی، دوره ابتدایی بود و با ارگان‌های مختلف همکاری می‌کردند. همه همت و آرزوی ایشان به سرانجام رسیدن این اهداف بود و سرانجام در در روز سی‌ام آذر ماه ۱۳۹۲، با آرزوی به تحقق نشـستن این اهداف و آرزوها به دیدار دوست شتافتند، و دنیای فانی را وداع گفتند.

روحش شاد و راهش روشن و پررهرو باد!

انشاا...

استاد ابن‌حجازی

طاهره حسنی

دانشجوی سال ۱۳۷۱ استاد در مرکز تربیت معلم زینب کبری (س)

تقدیم به رساترین قصیده خدمت و اخلاص

بی‌کران‌تر از سخاوت خورشید، صادقانه‌تر از ترنم باران، پرشکوه‌تر از ستاره‌های فلک و رساترین قصیده خدمت و اخلاص...

او که هر چه دانسته بود را در طبق اخلاص نهاده و آن‌چنان شایسته و بایسته تقدیم می‌کرد که بذر پژوهش هر دانش‌پژوهی در حیطه معرفت او به بار می‌نشست و کوشش هر دانش‌دوستی از تشویق و ترغیب او در امان نبود. و چه زیبا بی‌آلایشی و بی‌پیرایگی را در اندک جملات و در شایسته‌ترین رفتارها توصیف می‌کرد.

در قاموسش یاس از نداشته‌ها و پذیرفتن ناکامی از نبودها شرم‌آور بود.امید به داشته‌ها، دلخوش کردن به آن‌چه بود و آفرینش از ناممکن‌ها و نداشته‌ها، تفکر ناب او بود.

و حال در این زمانه آهن و آدم که یخی‌تر از عصر یخبندان و خشن‌تر از خشونت پولاد و آهن است، کجاست روحی به بلندای روح جسور و بلندپرواز او؟! که وادی علم به دانایانی چنین مطمئن و کاربلد، به اسوه‌هایی چنین رسا، گویا و زیبا و قله‌هایی چنین بلند و استوار نیازمند است.

خدایش بیامرزاد ... او که رخت همت و نوآوری بر قامت استوارش برازنده بود و هر آن‌چه در چنته معرفت خود او اندوخته بود از دل و جان با سخاوت دستانش می‌بخشید و تشنگان علم و معرفت را سیراب می‌کرد. روحش شاد و یادش گرامی باد!

جلوه‌های معلمی استاد ابن‌حجازی

به یاد استاد ارجمند شادروان سیدکاظم ابن‌حجازی

فریبا حقانی

دانشگاه اصفهان

fariba.haghani@gmail.com

معلمان اثرگذار را می‌توان از طول زمان تأثیرگذاریشان شناخت. معلمان خوب آنچه یاد می‌دهند در گذر زمان و سال‌ها نابود نمی‌شود، بلکه پررنگ و زنده همچنان درس‌هایشان در روح و جان شاگردان اثرگذار است. این معلمان با کلام تدریس نمی‌کنند که به فراموشی سپرده شود، آن‌ها با عمل

خود درس می‌دهند، یکی از این معلمان خوب، استاد سیدکاظم ابن‌حجازی است که امروز، بعد از سال‌ها، همچنان آموزش‌هایش در ذهن و جان من جای دارد. شروع آشنائیم با این استاد بزرگوار در تربیت معلم بود، آموزش علوم تدریس می‌کرد. کلاس‌هایش با بقیه فرق داشت. تکیه کلامی که بعد از سال‌ها فکر می‌کنم تمامی شاگردان استاد به خاطر دارند این بود "تو روستا". هر پاسخی که می‌دادیم می‌پرسید در روستا چه می‌کنی؟ هدفش این بود که به ما بفهماند بعد از فارغ‌التحصیلی قرار نیست در شهر و با بهترین امکانات تدریس کنیم. دائما ما را با چالش روستا و نبودن امکانات روبه‌رو می‌کرد تا بدانیم چگونه باید عمل کنیم. کلاس‌هایش پر از سئوال بود. دائم ما را با سئوال مواجه می‌کرد و چه بسا در آن زمان به مذاقمان خوش نمی‌آمد. ما فارغ‌التحصیل شدیم و مشغول کار در روستاهایی که استاد می‌گفتند؛ باز هم با ایشان ارتباط داشتیم و اگرسئوالی بود از محضرشان استفاده می‌کردیم. با عوض شدن کتاب‌های علوم، استاد جهاد بزرگی را در راه تبیین اهداف کتاب جدیدالتألیف علوم ابتدایی آغاز کردند.

در گروه‌های درسی و جلسات سازمان آموزش و پرورش شاهد بودم که چقدر از جسم و جان خود مایه می‌گذارند تا به معلمان تأکید کنند که هدف کتاب پرورش حواس و تفکر است نه حفظ کردن مطالب.

سال‌ها بعد در تربیت معلم همکار ایشان شدم. همان تازگی فکر و چالش برانگیز بودن همچنان وجود داشت و چه متواضعانه شاگردان خود را می‌پذیرفت و حتی نظرشان را می‌پرسید. اگر بخواهم در مورد ایشان بنویسم، صفات و ویژگی‌های‌شان بسیار است، اما ترجیح می‌دهم به ویژگی‌های بارزی که او را در ذهن بسیاری از شاگردان به یک الگوی معلم تأثیرگذار تبدیل کرده است، اشاره کنم، باشد که آموخته باشیم، این گونه عمل کنیم.

پرورش تفکر

از دغدغه‌های اصلی استاد در طول دوران کارشان، آموزش تفکر و تأکید بر آن بود. گوهر گم‌گشته‌ای که در نظام آموزشی ما کمتر به آن توجه می‌شود. از هر فرصتی و هر مکانی برای این امر استفاده می‌کردند. شیوه‌ی پرسش و پاسخ و واداشتن دانشجو به تفکر را هم در کلاس‌هایشان و هم در جلسات بحث و گفتگو بسیار شاهد بودم.

شوق به یادگیری

سال‌ها پس از بازنشستگی همچنان اشتیاق به یادگیری داشتند و چه جالب بود که مایل بودند، برداشت‌های خودشان را بیان کرده و نظر فرد مقابل را در این مورد بپرسند. هرگز فکر نمی‌کردند که آنچه من فهمیده‌ام درست است و دائم در حال بازبینی و کامل‌تر نمودن دانش خود بودند. به نوعی می‌توان گفت اهل مباحثه بودند و استدلال درست را، حتی از یک کودک می‌پذیرفتند.

تواضع

در دنیایی که بسیاری از افراد پس از اخذ مدرک یا کسب تجربه دچار توهم و خود بزرگ‌بینی می‌شوند استاد ابن‌حجازی برای من و بسیاری از شاگردانشان الگوی کامل تواضع بود. چه متواضعانه به حرف‌های همه گوش می‌داد، چه متواضعانه می‌آمد و چه متواضعانه می‌رفت، بی هیچ ادعایی.

برقراری ارتباط بسیار خوب

از ویژگی‌های معلمان اثربخش، برقراری ارتباط موثر است. استاد با هر قشر و گروهی به راحتی ارتباط برقرار می‌کردند. گاه شاهد بودم، پدر و مادری همراه با فرزند خود برای انجام کار اداری مراجعه

کرده بودند؛ استاد از فرصت استفاده کرده و با کودک در مورد کتاب علوم یا بعضی از آزمایش‌های آن به گفتگو می‌پرداختند و برایم جالب بود که روی جواب‌های او نیز بسیار تأمل می‌نمودند.و در یک کلام، استاد ابن حجازی یک الگوینقش (Role Model) کامل بود. با تمامی گفتار، عمل و رفتارش آموزش می‌داد.

روحش شاد و یادش ماندگار!

به یاد استاد ابن‌حجازی

طغیان انگشتری

angoshtari@gmail.com

بخت یار من بوده ا ست، چرا که توانسته‌ام در تابستان سال‌های ۹۱ و ۹۲ در سایه زنده‌یاد استاد ابن حجازی، نقشی در برگزاری دوره ابتدایی **کارگاه‌های بازی و ریاضی هندسه‌آموز** برای دانش‌آموزان دوره ابتدایی، در خانه ریاضیات اصفهان داشته باشم. فرصت نیم ساعته مابین انتهای هر جلسه و ابتدای جلسه بعدی، فرصتی بود تا در آبدارخانه، ایشان چای و من آب‌جوش بنوشیم و در گپ و گفت‌های پیرمردی غرقه گردیم.

بی‌شک مسیرهای مختلفی که پیموده بودیم، نشان از تفاوت‌های عمیق ما داشت، اما عجبا که در رفتار عملی هماهنگ بودیم. مثلاً هنگامی‌که موضوع تعیین اهداف برگزاری کارگاه‌ها مطرح شد، ایشان بیش از پنجاه هدف را برشمرد، و من سکوت کردم. (برخی از آن‌ها تبدیل به پرسشنامه ارزیابی از رضایت والدین در مورد برگزاری دوره گردید.) به گمان من این هماهنگی عملی ما نشانی قاطع از صحت فعالیت ما، در آن کارگاه‌ها داشت و دارد، چراکه ما دو نفر، کار برای کودکان را، از نقاط متمایزی آغاز کرده بودیم، اما در نقطه‌ای عملی، با توافقی عمیق به هم رسیده بودیم.

بارها در مورد فرازهای آموزش به کودکان با هم گپ زدیم، اینک او که دیگر در بین ما نیست، من مطمئنم که می‌توانسته‌ایم آن‌ها را به صورت زیر جمع‌بندی کنیم. از نظر من و او اینکه کدام بخش آن‌ها از دهان من یا او مطرح شده، مطرح نبوده است، اما تاکید می‌کنم، همه نقاط مثبت و صحیح آن از استاد تصور گردد، این حقیر مسئولیت همه کاستی‌هایش را به جان می‌پذیرم:

۱- **آموزش کودکان باید ضمنی، غیرمستقیم و همراه با فعالیت مناسب کودک باشد.**

۲- کودک باید از آموزش لذت ببرد، نمود این امر، پرداختنِ داوطلبانه کودک به انجام آن است.

۳- در همه مراحلِ آموزشِ کودکان، نباید هیچ گونه تنشی از بیرون (نسبت به

کودکان) اعمال گردد.

۴- آموزش باید با برنامه، مستند و نسبت به توانایی‌های هر کودکی، انعطاف‌پذیر باشد.

۵- آموزش بـاید در قبال پیشـــرفت همه کودکان، پاسخگو باشد.

۶- بـه منظور تسـهیل آموزش کودکان، همـه امکانات محیطی کودکان باید در جهت آموزش آنان هماهنگ گردند.

آشـــنـایـان بـه کارگاه‌های فوق‌الذکر، می‌توانند آشـــکارا تحقق بی‌نظیر موارد فوق را در این دوره‌ها پی‌گیری نمایند.

آشنایی با استاد ابن‌حجازی برایم حادثه‌ای معمول نبود، از این حادثه، و مسـبب آن، بسـیار خرسـند و شاکر بوده و هستم.

و اینـک در تـابسـتـان ۱۳۹۳، دلتنگ اسـتاد ابن‌حجازی هستم.

مسئله حل کنید

۱- عدد طبیعی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۱ = -\log_۲ \log_۲ \sqrt{۲}$$

$$۲ = -\log_۲ \log_۲ \sqrt{\sqrt{۲}}$$

$$۳ = -\log_۲ \log_۲ \sqrt{\sqrt{\sqrt{۲}}}$$

$$۴ = -\log_۲ \log_۲ \sqrt{\sqrt{\sqrt{۲}}}$$

$$\vdots$$

$$n = -\log_۲ \log_۲ \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots.\sqrt{۲}}}}}_{n \text{ مرتبه}}$$

۲- ثابت کنید $\forall n \in N \quad \sqrt{۲\sqrt{۳\sqrt{۴ \ldots \sqrt{x}}}} < ۳$

مقدمه شناخت رشد پایدار کودکان

"باز تعریف" جانبدارانه کودکی، بازی، آموزش و ریاضیات

طغیان انگشتری

angoshtari@gmail.com

مقدمه:

در جوامع امروزی مشاغل زیادی به‌طور مستقیم و غیرمستقیم درگیر کودک و کودکی هستند، از جمله پزشکان، روانشناسان، متخصصین تعلیم و تربیت، معلمان، مربیان، نویسندگان و شاعران کودک، طراحان و تولیدکنندگان اسباب‌بازی کودکان، فیلمسازان، آهنگسازان، ورزشکاران، تولیدکنندگان پوشاک و وسایل موردنیاز کودکان، تولیدکنندگان غذا و مواد خوراکی برای کودکان، و ... همچنین کسان دیگری به‌صورت غیرمستقیم به مقولهٔ کودکان می‌پردازند، از جمله فیلسوفان، ریاضی‌دانان، مصلحین و معلمین اخلاق، برنامه‌ریزان اجتماعی، و ...

همهٔ این تلاش‌ها اصولاً با هدف کمک به اولیاء در جهت مهیّا نمودن شرایط و الزامات رشد کودکان انجام می‌گردد، به همین دلیل هزینهٔ فعالیت‌های آنان را، اولیاء تامین می‌نمایند.

جامعه در صد سال اخیر شاهد تغییرات و پیشرفت‌های زیادی در همهٔ این رشته‌های متنوع بوده‌است. در این مدت هر یک از این رشته‌ها حقایق بیشماری را در مورد کودک وکودکی کسب نموده و مورد استفاده قرارداده و می‌دهند.

اما در مورد کودکان در جوامع مختلف مسایلی رخ نموده و الزاماتی مطرح گردیده‌است که جز با همکاری همزمان رشته‌های مختلف مرتبط با کودکان نمی‌توان برای آن‌ها پاسخ درخور را یافت.

از جملهٔ مسایل پیش آمده مثلاً می‌توان به مشکل بلوغ زودرس اشاره نمود، که از حدود ۱۷ سالگی، بعضاً به زیر ۷ سالگی کودکان تنزل نموده‌است و ریشه در تغییر عادات تغذیه‌ای و رفتاری در جوامع دارد. پزشکی و پزشکان به تنهایی مطلقاً قادر نخواهند بود به آن پاسخ دهند.

از جملهٔ الزامات مطرح شده، مثلاً می‌توان به الزام تبحّر بیشتر کودکان در ریاضیات، و علاقه‌مندی بخش بزرگتری از آنان به فراگیری ریاضیات، در جوامع مختلف اشاره نمود، که دست‌اندرکاران ریاضی مطلقاً قادر نیستند به تنهایی برای آن پاسخ لازم را یافته و ارائه نمایند.

از این دست مسایل و الزامات بازهم می‌توان برشمرد، اما همین اندک نیز کفایت می‌کند که بپذیریم، به منظور تلاش مشترک برای پاسخ به مشکلات مبتلا به کودک و کودکی در جوامع، لازمست بدواً برسر "تعریف" مشترک برخی از مفاهیم و عبارات، به تفاهمی جمعی دست یابیم.

بدیهی‌ست از آن‌جا که این تلاش‌ها صرفاً در جهت تامین شرایط عملی رشد پایدار کودکان خواهند بود، باید نتایج حاصل از این تعاریف بتوانند راهنمای عمل یک مادر، پدر، مربی، یا معلم مرتبط با کودکان باشد.

ابتدا در مورد مفاهیم: کودک، بازی‌کودکان، آموزش، و ریاضیات تعاریفی را عرضه کرده‌ایم، که

یـک مـادر، پـدر، مربی، یـا معلم بتواند بخش اعظم مشکلاتش در مورد کودکان را با آغاز از این تعاریف تنظیم نماید. پس از آن نشـــان داده‌ایم که می‌توان برمبنـای این تعـاریف، راهکـاری کارا برای آموزش ریاضی به کودکان، عرضه نمود.

کودکی:

همـهٔ ما زمانی کودک بوده‌ایم، و در حافظهٔ خود خـاطراتی از کودکی خویش داریم، بـه این دلیـل هیچ‌کس در مواجهـه با کلمهٔ "کودکی" احســاس نفهمیـدن این کلمـه را نـدارد. اما هرگونه تسـرّی خـاطرات کودکی مـا، در رابطـه بـا برخورد تربیتی و آموزشی با کودکانِ حال حاضر، به دلایل زیر نادرست است:

خـاطرات کودکی مـا معمولاً واقعی و صـحیح نیستند، چرا که اغلب برخی از قسمت‌های آنها اشاره بـه کـارکردهای مغزی ویژه‌ای دارد که در ســنین مربوط بـه خـاطرات مـا، هنوز بـه رشـد کـامـل نرســیده‌بوده‌اند. مثلاً توانایی "دیدن" در کودکان تا حدود ۱۰ سـالگی رشد و تکامل می‌یابد، لذا خاطرات تصـویری ما در ۵ ســالگی، مطلقاً غیرقابل اطمینان است.

رشـد ذهنی کودک در مقاطعی نه صـرفاً به گذر زمـان، بلکـه به تجربیات او ربط دارد، لذا مقایســهٔ کودکان عملی کور، بی‌هدف، و نهایتاً مخرب است.

تعاریف رسمی مختلفی از کودکی در سطح جامعه به دلایل مختلفی و از سـوی مراجع مختلفی تدوین گردیده و مورد استفاده و استناد قرار می‌گیرند.

مثلاً تعـاریف مـذهبی از کودک کـه بـه منظور آگـاهی از زمـان تکلیف انجام فرایض دینی و نحوهٔ برخوردهای اجتماعی از جمله مسئولیت‌های محوله و نحوهٔ ارث‌بری، محرمات و... از ســوی مراجع ادیان مختلف، تنظیم گردیده‌اند.

یـا تعاریف حقوقی از کودک که برای شـــناخت مسـئولیت‌های حقوقی، مثلاً حق برداشـت از حساب شـــخصـــی، یا نحوهٔ برخورد کیفری، و امثال آن‌ها تدوین گردیده‌اند.

یا تعریف یونسـکو از کودکی که برطبق آن همه انســان‌هـا از بدو تولد تا ۱۸ ســالگی کودک تلقی می‌گردند.

در کـنـار این تعـاریف، تعریفی نیز از کودکی لازمســت کـه بر مبنای آن یک پدر، مادر، معلم، یا مربی بتواند رفتار روزمره با کودک را شـــکل داده و رهبری نماید.

در عرف جامعه، تعریف ضـمنی کودک، شـرایط بسـیار نامطلوبی را داراسـت، و دیگر کسـی آن‌ها را قابل اعتناء نمی‌بیند. مثلاً در قابوس‌نامه ثبت اســت "کودک علم را به چوب آموزد نه به شفقت" ؟! و یا باب هفتم گلسـتان سعدی، در تاثیر تربیت، مشحون اسـت از عباراتی چون "هر آن طفل کو جور آموزگار نبیند جفا بیند از روزگار" و یا "استاد معلم چو بود بی آزار خرسک بازند کودکان در بازار" ، و یا "جور استاد به زمهر پدر"؟! و ... که امروزه، توجیهی بر خشـونت علیه کودکان تلقی می‌کردند.

از نظر ریشـهٔ لغوی نیز در زبان فارسـی کلمات کودک، کوچک، و کوتک ریشـهٔ مشترک دارند، این امر به سـهولت ارتباط تربیت عرفی ذکر شدهٔ کودک را، به ذهن متبادر می‌نماید.

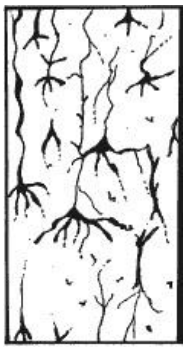
از منظری دیگر همهٔ آنچه از نظر عرفی و قانونی در ارتباط با کودکان منع گردیده اســت و جرم تلقی می‌گردد، حـداقـل در مقطعی از زمـان جزو واقعیات جاری جوامع بوده‌است. میزان بزه‌های موجود در این زمینه نشـان از نحوهٔ برخورد ذهنی بخشی از جامعه در مورد کودک اســت. (این مبحـث را بیش از این نمی‌گشاییم.)

با عنایت به مطالب فوق بایستی چنان تعریفی را از کودکی عرضه نماییم که بتواند گام اول و مبنای راهنمای عملی برای کسانی باشد که در ارتباط مستقیم و هرروزه با کودکان هستند.

تعریف کودکی:

کودکی دورانی از عمر انسان است که در طیآن چگالی سیناپس‌های موجود در توده خاکستری مغز او، ازمقدار آن در بقیّه عمرش بیشتر است.

چگالی سیناپس‌های بخش خاکستری مغز



هنگام تولد

هفت سالگی

پانزده سالگی

برای ارایهٔ این تعریف زیست‌شناسانه از کودکی، که به ظاهر مستقل از سن کودک است، از این یافته استفاده شده که علی‌رغم تغییر مقدار چگالی سیناپس‌های مغز انسان در زندگی، چگالی سیناپس‌های مغز، در هنگام تولد و در بزرگسالی، تقریباً مساویست.

در واقع تغییرات چگالی سیناپس‌ها در مغز انسان از الگوی "∩" شکل پیروی می‌کند، یعنی پس از تولد به سرعت افزایش می‌یابد، و از سنین حدود ۹ سالگی به کندی آغاز به کاهش می نماید، به‌طوریکه در حدود ۱۸– ۱۹ سالگی (یعنی در آستانهٔ بزرگسالی) به نصف، یعنی همان میزانِ بدو تولد، بازمی‌گردد و در بقیهٔ عمر تقریباً در همان سطح باقی می‌ماند. (این الگو، در بخش‌های مختلف مغز، از نظر زمان و سرعت فراز و فرود، مستقل رخ می‌دهد.)

چرا این تعریف راهگشاست؟

۱– این تعریف نشان می‌دهد کودکان چیزی "دارند" که اولیاء آن‌ها فاقد آنند!

شایان ذکر است این پرپشتی سیناپس‌ها در بخش خاکستری مغز در گذر زمان با به وجود آمدن پوشش چربی رشته‌های عصبی، هرس خواهند شد. در واقع همهٔ سیناپس‌هایی که از آن‌ها استفاده نشود پایدار نخواهند ماند.

همچنین باید دانست که در بدو تولد، هر انسانی همهٔ نورون‌های مغزش تا پایان عمر را در سر دارد و پس از تولد دیگر نورونی در مغز او به‌وجود نخواهد آمد. وزن مغز یک نوزاد در هنگام تولد فقط یک چهارم وزن مغز در بزرگسالی اوست. در حالیکه وزن مغز یک کودک پنج‌ساله نه‌دهم وزن مغزش در بزرگسالی است. این افزایش وزن عمدتاً مربوط است به افزایش غلاف چربی رشته‌های عصبی سلول‌های مغز.

مغز انسان عضوی است که تجلی‌گاهِ شعور، عواطف، شناخت، و نیز ارگان رهبریِ همهٔ حواس و توانایی‌های جسمی انسان است. نوزاد انسانی در

فرصتی یگانه (در فاصلهٔ تولد تا بزرگسالی) همهٔ این توانایی‌ها را، با تغییراتی که در طی این مدت در ساختمانِ مغز وهمچنین دیگر اعضای بدنش به وقوع می‌پیوندد، از محیط پیرامونیش کسب می‌نماید.

باید توجه نمود که سیناپس‌های قشر خاکستری مغز، مسیر هم‌آهنگی نورون‌های مغز هستند، لذا آشکار است که چگالی بالای آن‌ها در قشر خاکستری مغز در کودکی، تضمین‌کنندهٔ کسب سریع شناخت از محیط پیرامونی توسط کودک است. در واقع شناخت در کودکی منجر به تشکیل مدارهای عصبی لازم و پایدار، برای انجام فعالیت‌های مختلف، می‌گردد.

اگر مجاز باشیم که مغز انسان را به رایانه تشبیه نماییم، به این نتیجه می‌رسیم که مغز هرکدام از ما یک سیستم عامل نیز دارد، و هرگونه افزایش شناخت ما بخشی به مجموعهٔ کد این سیستم عامل می‌افزاید. اما در کودکی، شناخت با تغییر سخت افزار نیز اتفاق می‌افتد. به این دلیل واکنش‌های عضلانی کودکان در انجام حرکات نو، سریع‌تر از واکنش‌های بزرگسالان است.

کودکان واجد توانمندی‌هایی می‌باشند که بایستی شناختی مدون از آن‌ها در جامعه تدوین گردد.

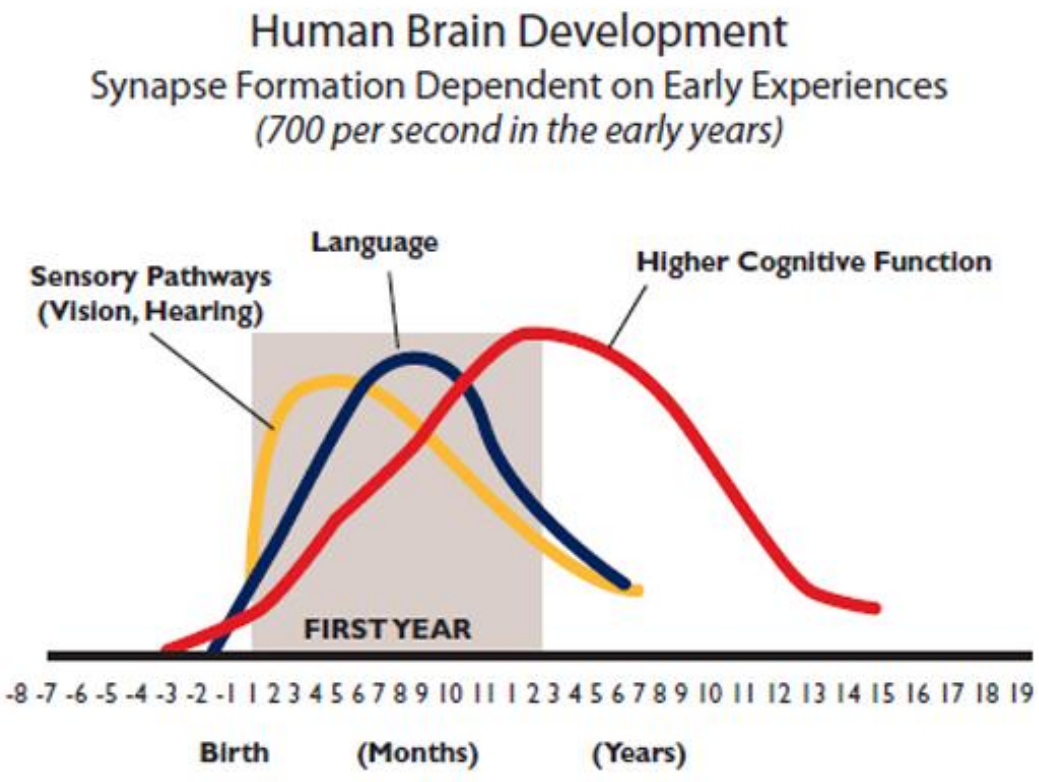
۲- با مدّ نظر قراردادن این تعریف مجاب می‌شویم که به رفتارمان با کودکان در سنین مختلف فکر کنیم.

در نمودار بعد تشکیل سیناپس‌ها، از دوران جنینی تا اواخر کودکی، به تفکیک نوع توانمندی‌های ذهنی کودک، نشان داده شده است.

کاهش تشکیل سیناپس‌ها به دلیل افزایش پوشش چربی رشته‌های عصبی می‌باشد. تشکیل غلاف رشته‌های عصبی باعث افزایش حجم بخش مربوط مغز می‌گردد، و در ضمن نمایشگر تشکیل مدارهای عصبی و ارتقاء قابلیت‌های ذهنی کودک در موارد مرتبط است. به این‌ترتیب این نمودار نشان می‌دهد هر توانمندی (عمدتاً) از کدام بخش مغز، نشأت می‌یابد.

این نمودار همچنین به‌طور تلویحی نشان می‌دهد نیازهای تغذیه‌ای کودک در گذر زمان چیست و چگونه باید تامین گردد. به این ترتیب آگاهی از نیازهای غذایی کودک، و همچنین سطح انتظارات اولیاء از کودکان مبنایی واقعی می‌یابد.

باید یادآوری مود که حتی تصور تشریح مغزنسان زنده به منظور آگاهی از تغییرات مغزی انسان غیراخلاقی، غیرانسانی و غیرممکن است. لذا همهٔ این آگاهی‌ها بایستی به شکل غیرمستقیم و با توجه به فعالیت معمولی کودکان بررسی گردد. تا به امروز نیز این آگاهی‌ها در جریان کمک به بیماران صرعی، و یا کسانی‌که به علّت حوادث مختلف (جنگ، تصادفات، سکته و بیماری) دچار ضایعه‌های مختلف مغزی بوده‌اند کسب گردیده، مستندات کالبدشناسی‌ها نیز از طریق کالبدشکافی افرادی که به دلایل دیگری مورد کالبدشکافی قرارداشته‌اند، به‌دست آمده است. همچنین بخشی از دانش در این مورد از طریق تشریح مغز پستانداران مختلف کسب شده‌است.



Data source: C. Nelson (2000); Graph courtesy of the Center on the Developing Child at Harvard University

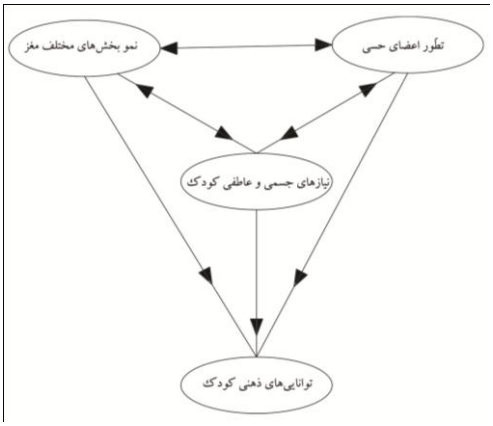
توانایی شناخت جهان در ذات انسانیست، ولی کیفیت و نحوهٔ این شناخت، مستقل از روابط پیرامونی کودک نیست. کودک چیزی را که در "مواجهه" با آن نباشد نخواهد شناخت. اما برای شناخت هر مفهومی علاوه بر رخداد این "مواجهه"، وجود ابزاری متناسب، در درون کودک نیز ضروریست. این ابزار، مغز، اعضای حسی، تجربه، و همچنین شناخت کودک هستند، که همگی در حال پیدایش، شکل‌گیری، و شدن می‌باشند.

برای تدوین انتظارات و معیارها در مورد آموزش کودکان باید موارد زیر را در نظر داشت:

۱- شناخت مراحل مختلف و چگونگی رشد بخش‌های متمایز مغز انسان، و متناظراً اعضای حسی او، در طول زمان.

۲- شناخت نیازهای جسمی و عاطفی کودک در هر یک از مراحل سنی او.

۳- تعیین ارتباط متقابل نحوهٔ شکل‌گیری توانایی‌های شناختی کودک، و مراحل رشد فیزیولوژیک او، و نیز تاثیر عوامل محیطی کودک.



بازی‌کودکان

آزمایش فرضی

عناصـر و شرایط آزمایش: موضوع A (که ما فرض می‌کنیم در زندگی ما مهم است!)، دو نفر یکی کـامـل و دیگری کودک. کـامـل مغزی کمال یافته دارد، یعنی می‌تواند موضـوع A را در قالب مقولات مختلف بازشـناسـی کند. کودک صاحب مغزی است کـه بـاید کمال یابد، و برای اولین بار اسـت که با موضوع A مواجه گردیده است.

وضعیت اول:

کامل موضـوع A را محور قضـاوت می‌بیند. در این‌صـورت رفتار کودک را نسـبت به آن ناپایدار و ناموزون می‌یابد.

وضعیت دوم:

کامل نحوهٔ شـناخت و تلاش کودک جهت شـناخت A را محور قضاوت قرار می‌دهد.

در این‌صورت کامل خواهد دید که مغز کودک بسیار موزون و پایدار در تلاش شناخت است.

اتخاذ وضـعیت اول بسـیار توجیه‌پذیر اسـت، چرا که کودک همچون تمامی آنان که قبلاً زیسـته‌اند باید بتواند موضـوع را مدیریت نماید، و اگر نمی‌تواند به دلیـل کودکی اوسـت بـا گذشـت زمان او خواهد توانست.

اتخاذ وضـعیت دوم مشکل است، چرا که ما باید خود را جـای کودک بگـذاریم، کیفیـت حواس غیر کامل او را بشـناسـیم تا نحوهٔ احسـاس او از A را دریابیم، لوازم اِبراز او را بشناسیم، تا بفهمیم او چه و چگونـه می‌بینـد و در بـارهٔ دیدهٔ خود چگونه واکنش نشان می‌دهد.

معمولاً رفتاری که در سـطح جوامع با کودکان انجام می‌شـود، اتخاذ وضـعیت اول است. نمونه‌های بسـیاری را می‌توان برشـمرد. مهمترین آن‌ها مقولهٔ بازی کودکان است.

کلمـهٔ بـازی در زبـان فـارسـی در ترکیب‌های بسـیاری با کلمات مختلف معانی متنوع و بسیاری را داراست. از جمله غیرجدّی، بی‌فکر، فکر نشده.

این جنبه از معنای بازی، مشابهت دارد با برخورد بدوی کودکان با موضـوعاتی که برای اولین بار در مقابلشـان قرار می‌گیرد (البته اگر ما وضـعیت اول آزمایش فرضی بالا را برگزیده باشیم).

بـه این دلیـل عمومـاً برای معنـا نمودن "بـازی کودکان" آن‌را شـامل دو کلمه تلقی نموده و برای تعریف آن ابتدا برخی از مشـخصـات کلمهٔ بازی را برمی‌شـمارند و سـپس با افزودن نامحسـوس کلمهٔ کودکـان به آن، گمان می‌نمایند که بازی کودکان را معنا نموده‌اند. (مراجعه نمایید به همهٔ متونی که بازی کودکان را معنا نموده‌اند!)

بـازی‌کودکـان (یعنی تلاش نوزاد برای حرکـت دادن جغجغـهٔ متلوّنی که در مقابلش آویخته شـده) تلاش او برای شـناخت جهان پیرامونی اوسـت. این تلاش بی‌وقفهٔ مغز اوست برای شناخت و هم‌آهنگی با دنیایی که او را فرا گرفته است. کودک در بازی (و همهٔ فعالیت‌هایی که ما نمی‌توانیم معنایی برآن تصور کنیم) تـک‌تـک توانـایی‌هایی که ما حتی نمی‌توانیم همهٔ آن‌ها را نام ببریم، برای خود می‌سازد. (کافیست هرکسـی تلاش نماید تا **همهٔ** مهارت‌هایی که فقط برای دیدن لازم است را برشمارد! به جرات می‌توان مدعی شـد که هیچ متخصص چشم‌پزشکی نیز قادر به انجام آن نیسـت.) این آن غولی‌اسـت که در پس بازی کودکان قرار دارد.

در واقع ما شـاهد رفتاری هستیم که طی آن مغز

کودک، در پی تشکیل مدارهای سیناپسی خود است.

تنها راهبرد کودکان برای شـــناخت جهان، بازی نامیده شـــده اســـت. یعنی؛ **بازی کودکان راهبرد منحصـــر بـــه‌فرد آنان برای شـــناخت جهان است!** انجام "یک قطره" از چنین فعالیتی منجر به شـــناخت "یک قطره" از جهان پیرامونی توســـط کودک می‌گردد. اما باید توجه نمود که؛ شـــناخت یا آگـاهی انســـان، چیزی از قبل موجود، تغییرناپذیر و منفعل نیســـت، بلکه براثر فعالیت شـــکل می‌گیرد، و انســـان‌ها در ســـازگاری خود با محیط، نه تنها برای انطباق با شـرایط، همچنین برای بازسـازی شـرایط، آن‌را به‌کار می‌گیرند.

در کودکان این چرخهٔ بازی_شناخت_ بازی... با گذر زمان به سـطوح بالاتری از شـناخت و کشـف بیشـــتر جهان و هم‌آهنگی با فرهنگ موجود، ارتقاء می‌یابد.

این مطـالب آشـــکار می‌نماید؛ هر فعالیتی که از کودک سـرمی‌زند، می‌تواند سه منشاء مختلف ذهنی داشته باشد:

الف- هیچ محرک معلوم خارجی نداشـته باشد. (مانند خندیدن یا صدا درآوردن نوزادان.)

ب- نـاشـــی از عکس‌العمل های ذهنی کودک نسـبت به عواملی در محیط که ذهن او را مسـتقیم تحریک نموده‌اند، باشـد. (مانند عقب کشـیدن دست هنگامی‌که با سوزن یا حرارت تماس یابد.)

پ- ناشی از شناخت ذهنی کودک باشد. (مانند پرت شـــدن کودک نوپـا از بلنـدی به علّت خزیدن کودک، یا تلاش کودک برای گرفتن ماه با دست.)

باید توجه نمود که این افعال از مراکز مختلفی از مغز و دستگاه عصبی انسان منشاء می‌یابند. بنابراین برای اصـــلاح رفتـار کودکان قبل از هر چیز باید به شـناخت شرایط ذهنی کودکان پرداخت، و سپس به اتخاذ رویه‌های رفتاری مناسب، همت گماشت.

خلاصه کنیم اتخاذ وضعیت اول آزمایش فرضی فوق، توسـط پدر، مادر، معلم، یا مربی لطمات جبران ناپذیری به روند رشد کودکان وارد می‌سازد.

آموزش کودکان

آموزش فعـالیتی اجتمـاعی اســـت که جامعه در جریان بازتولید خویش به انجام آن می‌پردازد.

هـدف از آموزش‌کودکـان تـداوم ارکان فرهنگی کـل جـامعه اســـت. لذا باید همهٔ کودکان جامعه در معرض آن قرار گیرند.

عـمـده‌تـرین راهبرد آموزش کودکـان، ایجـاد هم‌آهنگی بین شـــنـاخت کودکان امروز از جهان، و عام‌ترین شـیوه‌های شـناختی نسـل‌های پیشـین از هستی است.

در واقع نســـل فعـال امروز، وظیفـه دارد تـا همهٔ‌میراث خود و نسل‌های قبل را، در اختیار آیندگان قرار دهد.

بـدون شـــنـاخـت کـارآمد و به‌روز از کودکی و کودکـان، نمی‌توان در انجـام این وظیفهٔ مهم موفق بود.

ریاضیات

گفتـه شـــد: عمده‌ترین راهبرد آموزش کودکان، ایجاد هم‌آهنگی بین شناخت کودکان امروز از جهان، و عام‌ترین شـیوه‌های شـناختی نسـل‌های پیشین از هسـتی اسـت. اما عامترین شـیوه‌های شناختی بشر چیست؟

اینـک مدت‌های طولانیســـت‌که زبان به عنوان وســـیلهٔ ارتباطی، خود مهمترین ابزار انســـان برای شناخت گردیده‌است.

هرچند در کودک، اندیشه و زبان منشائی متمایز دارند، اما تطّور اندیشهٔ کودکان پس از زبان‌آموزی، تا مدت‌ها، در سایهٔ تسلط بر زبان، به پیش می‌رود. به‌طوری‌که باید گفت: بخش اعظم "شناخت" کودکان و کودکی در واقع مطالعهٔ ارتباط متقابل اندیشه و زبان است.

پس از این مقدمه اگر کاربری علوم ریاضی در جامعه را "دانش تبدیل علوم کیفی به فنون کاربردی" تعریف کنیم، با توجه به جایگاه منحصر به‌فردی که اینک ریاضیات، در رابطه با ارایهٔ خدمات به همهٔ شئونات زندگی بشری، کسب نموده، روشن است که **علوم ریاضی پس از زبان مهم‌ترین جایگاه را در شیوه‌های شناختی بشر دارد.**

روی دیگر این بیان متضمن این حقیقت استکه، ریاضیات به چنان مفاهیم عامی از جهان می‌پردازد که در کلیهٔ شئونات زندگی بشری تاثیرگذار و حاضرند.

این به معنی آنست که زرادخانهٔ عظیمی از مفاهیم مختلف در ریاضیات وجود دارد که می‌توان از آن‌ها برای ارتقاء زبان و اندیشهٔ کودکان و به تبع آن، هم‌آهنگی اندیشهٔ کودک با فرهنگ موجود جامعه، استفاده نمود. انجام این امر از عهدهٔ هیچ بخش دیگری از فرهنگ بشری برنمی‌آید. از این منظر است که باید گفت؛ **هدف از آموزش ریاضیات به کودکان، در درجهٔ اول و مهمتر از همه، ایجاد و ارتقاء توانایی‌های ذهنیِ عمومیِ کودک است.**

(همین جا باید به جدّ تاکید کنیم آن‌چه اکنون در مورد علوم ریاضی بیان گردید مطلقاً هیچ قرابتی نه در موضوع، و نه در شیوهٔ ارائه، با آنچه که به‌طور سنتی به‌نام ریاضی، استعداد و توان کودکان را می‌فرساید، ندارد!)

اگر کودک دارای عقل سلیم باشد، مطمئناً از عهدهٔ محاسبات روزمره‌اش هم برخواهد آمد. اما همه شاهدیم که اصرار بر آموزش یک‌سویهٔ محاسبه، بدون لحاظ نمودن شرایط واقعیِ کودک وکودکی، نه تنها برایکودکان عقل سلیم را به ارمغان نیاورده، بلکه‌کسب‌آن‌را حتی به تعویق می‌افکند، گذشته از آن باعث انزجار و وحشت کودکان (و بالتبع جامعه)، از فراگیری ریاضیات نیز گردیده است. در صورتی‌که با رفتار آموزشی درست و همسو با توانمندی‌های کودکان، معلوم می‌شود که همهٔ کودکان به‌راحتی در زمانی کمتر، توان تسلط بر مفاهیمی بسیار بیشتر، و پیشرفته‌تر را دارا هستند.

ما اکنون در درجه اول تمرکز خود را به یافتن شیوهٔ عملی ارتقاء پایدار و حداکثری همهٔ توانمندی‌های کودکان معطوف نموده‌ایم. بدیهی‌ست پس از ارتقاء سریع توانمندی ذهنی کودک، در طول دورهٔ تحصیلات ابتدایی، باید چنان آموزشی را برای کودک فراهم نمود که او در کوتاه‌ترین زمان ممکن توانایی استفادهٔ مستقل و بهره‌مندی از خدمات مختلف اجتماعی را بیابد.

راه حل:

با عنایت به همهٔ مطالب فوق، و ادامهٔ آن‌ها تا تحلیل شرایط موجود، چارچوب‌های سلبی و ایجابیِ راه حل، به‌شرح زیر آشکار می‌گردد:

۱- آموزش کودکان باید ضمنی، غیرمستقیم و همراه با فعالیت مناسب کودک باشد.

۲- کودک باید از آموزش لذّت ببرد، نمود این امر، پرداختنِ داوطلبانهٔ کودک به انجام آن است.

۳- در همهٔ مراحلِ آموزشِ کودکان، نباید هیچ‌گونه تنشی از بیرون (نسبت به کودکان) اعمال

گردد.

۴- آموزش باید با برنامه، مستند و نسبت به توانایی‌های هر کودکی، انعطاف‌پذیر باشد.

۵- آموزش باید در قبال پیشرفت همهٔ کودکان، پاسخ‌گو باشد.

۶- به منظور تسهیل آموزش کودکان، همهٔامکانات محیطی کودکان باید در جهت آموزش آنان هم‌آهنگ گردند.

برای تمامی کسانی‌که به کودکان در حین بازی توجه‌نموده‌اند، روشن است‌که: **"بازیِ کودک" هم‌زمان همهٔ این خواسته‌ها را محقّق می‌نماید.** در یک جمله، باید:

آموزش را به بازی جذابی برای همهٔ کودکان تبدیل نماییم.

یعنی پاسخ و راه‌حل در طراحی بازی‌های آموزشی مناسب و هدفمند (که مدل آموزشی ریاضی نامیده شده است) نهفته است. بازی‌هایی که در عمل:

۱- با توجه به رشد ذهنی کودک، برایش جذابیت داشته باشد.

۲- امکان نمایش بخش هرچه گسترده‌تری از شناخت بشری را در خود داشته باشد.

۳- کودک خود بتواند در حین بازی، مطالب متنوعی از جهان را کشف نماید.

۴- عملاً و آشکارا توانمندی‌های فردی کودک با انجام بازی‌ها افزایش یابد.

به منظور تکمیل جنبه‌های مختلف راه‌حل ارائه شده، لازمست به نکتهٔ بسیار مهم زیر نیز توجه نمود.

چه عاملی به کودکان در حین بازی آموزش می‌دهد؟

عاملی که در یک بازی به کودک آموزش می‌دهد، نه صرفاً وسیلهٔ بازی (که تشکیل شده از مشتی چوب یا پلاستیک و یا کاغذ و غیره)، بلکه"ذهنی" انسانی است که در طرف مقابل کودک نسبت به وسیلهٔ بازی قرار دارد، حتی هنگامی‌که بازی به ظاهر انفرادی است!

دست‌ورزی با وسیلهٔ بازی، کودک را در مواجهه با مفهومی که وسیله متناسب با آن طراحی گشته قرار می‌دهد، که این آغاز ماجراست. اما، مراودهٔ کودک با فرد "مقابل" است که آشنایی کودک با فرهنگ بشری را به شکل مستمر میسّر و رهبری کرده و تداوم می‌بخشد.

وسیلهٔ بازی، که در واقع نقش "بند ناف" یا "دستگیرهٔ" دو طرفهٔ ارتباط کودک با "فرهنگ بشری" را ایفا می‌نماید، وظیفه دارد، به شکلی ملموس، ولو خام، مفهومی را در ذهن کودک چنان برجسته سازد، که در او انگیزهٔ مراوده در مورد آن (مفهوم) را به‌وجود آورد. رخداد این حادثه در روند آموزش بسیار اساسی است، چرا که تلاشِ کودک برای این مراوده، نه فقط چگونگیِ آغاز، جهت، وکیفیتِ بیان، نسبت به مفهوم مورد اشارهٔ کودک را، برای فرد مقابلِ کودک آشکار می‌گرداند (و از این نظر مربی را راهنمایی می‌نماید)، بلکه همزمان همهٔ توان ذهنی خودِ کودک را نیز برای شناختِ فعالِ آن مطلب، برمی‌انگیزاند. در نتیجهٔ این تعامل، ذهنیت کودک هم‌آهنگ با شعور اجتماعیِ موجود شکل می‌پذیرد.

آنچه مشتی چوب و کاغذ و پلاستیک را تبدیل به مجردترین دست‌سازهٔ بشر (یعنی اسباب بازی کودکان) می‌نماید، توانایی برآورد همزمان همگی خواسته‌های فوق است.

آنچه یک مربیِ امروزی کودک را، از للهٔ عهدباستان، متمایز می‌سازد نقش مربی در مرتبط نمودن کودک با فرهنگ امروزهٔ بشری است. در حالی‌که للهٔ وظیفه داشت زمانی که با کودک می‌گذراند را چنان مدیریت کند، که به کودک صدمهٔ جسمی وارد نشود، **مربی وظیفه دارد با توجه به موقعیت ذهنی لحظه‌ای کودک، مسیر او را در شناخت فرهنگی جامعه هموار سازد.**

به این ترتیب معلوم می‌گردد که علاوه بر طراحی نرم‌افزار و سخت‌افزارِ وسایل آموزشی، تربیت و آموزش چنین مربیان توانمندی، خود بخش مهمی از راه حل است.

کارگاه‌های بازی و ریاضی هندسه‌آموز در تابستان سال‌های ۱۳۹۱ و ۱۳۹۲ برای حدود ۱۸۰۰ نفر از کودکان ۶ تا ۱۲ساله اصفهانی به همراه اولیاء آن‌ها در خانه ریاضیات اصفهان برگزار گردید.

کل زمان برگزاری کارگاه‌ها ۱۲ ساعت بود (۱۲ هفته هر هفته یک جلسه یک ساعته). در هرجلسه کودکان در کارگاه‌ها و اولیاء در جلسه آموزش اولیاء شرکت می‌کردند.

تصاویر زیر شرکت‌کنندگان را در مراحل مختلف دوره و در پایان دوره نشان می‌دهد.

در پایان عیناً نتایج گزارش ارزیابی رضایت والدین از برگزاری این کارگاه‌ها درج می‌گردد، متن کامل گزارش در سایت خانه ریاضیات اصفهان در دسترس است.

آنچه بیش از همهٔ در برگزاری این دوره به چشم می‌آید، عمق و وسعت تغییراتی است که در کودکان مشاهده گردیده است. این تغییرات نتیجهٔ حدود ۳۵۰ ساعت فعالیت داوطلبانهٔ کودکان در منزل خودشان

اسـت، از این نظر مسـلماً این آزمایش، اسـتانداردی نوین را در کارایی یک فعالیت آموزشـــی پی ریخته است.

کارگاه هندسه آموز- خانه ریاضیات اصفهان

تابستان ۱۳۹۱

فعالیت	امتیاز	وضعیت
برنامه زمانبندی کلاس‌ها	۴/۴۲	بسیار مطلوب
طول مدت کلاس	۴/۴۹	بسیار مطلوب
تنوع مطالب ارائه شده	۴/۴۱	بسیار مطلوب
جذابیت مطالب ارائه شده	۴/۴۷	بسیار مطلوب
نحوه ارائه مطالب	۴/۴۵	بسیار مطلوب
طول مدت دوره	۴/۳۵	بسیار مطلوب
افزایش دقت در توجه به دنیای اطراف خود	۴/۰۶	بسیار موثر
استفاده بهتر از حس بینایی	۴/۰۳	بسیار موثر
استفاده بهتر از هر دو دست در بازی‌ها	۴/۲۱	بسیار موثر
افزایش تمرکز	۴/۰۳	بسیار موثر
تقویت قدرت تکلم	۳/۶۶	موثر
تقویت حافظه	۴/۱۲	بسیار موثر
افزایش هماهنگی بین حس بینایی و به کارگیری دست	۴/۳۵	بسیار موثر
افزایش اعتماد به نفس	۴/۱۲	بسیار موثر
بهبود مهارت برقراری ارتباط با دیگران	۴	بسیار موثر
افزایش تمایل به شرکت در کار گروهی	۴/۲۵	بسیار موثر
کمک به والدین در شناسایی توانایی‌های فرزندان	۴/۱۴	بسیار موثر
برقراری ارتباط بیشتر میان والدین و فرزندان	۴/۱۱	بسیار موثر
سپری کردن اوقات مفرح با حل مسائل ریاضی در قالب بازی‌ها	۳/۹۲	موثر
کاهش ساعات انجام بازی‌های کامپیوتری	۳/۵۴	موثر

بنابراین با توجه به جدول فوق، از دیدگاه والدین کارگاه هندسه آموز یک دوره مناسب و بسیار موثر در جهت افزایش دقت در توجه به دنیای اطراف خود، استفاده بهتر از حس بینایی، استفاده بهتر از هر دو دست در بازی‌ها، افزایش تمرکز، تقویت حافظه، افزایش هماهنگی بین حس بینایی و به کارگیری دست، افزایش اعتماد به نفس، بهبود مهارت برقراری ارتباط با دیگران، افزایش تمایل به شرکت در کار گروهی، کمک به والدین در شناسایی توانایی‌های فرزندان و برقراری ارتباط بیشتر میان والدین و فرزندان بوده است که این معیارها و شاخص‌های محاسبه شده، نشان‌دهنده توانایی ویژه کارگاه هندسه آموز و رضایت فوق‌العاده والدین از این دوره می‌باشد.

۱۴

مراجع:

1. www.zerothree.org/child-development/early-development/
2. Synapse formation in the early years
3. Synapse density

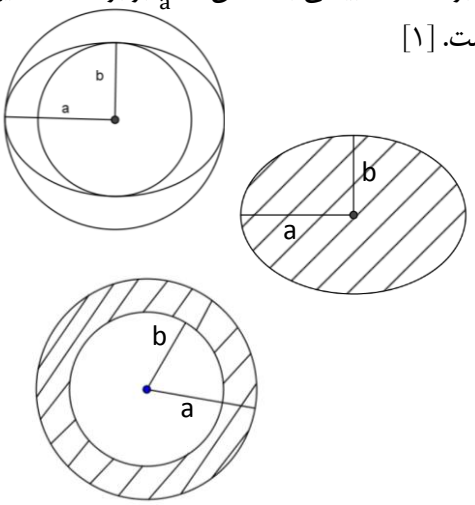
چند مطلب درباره عدد طلایی

مترجم: اکبر زمانی

دبیر بازنشسته ریاضی

zamani_eff@yahoo.com

۱- اگر دایره‌های محاطی و محیطی یک بیضی به قطر بزرگ ۲a و قطر کوچک ۲b را رسم کنیم به‌طوری‌که مساحت بین دو دایره (مساحت حلقه) برابر مساحت بیضی باشد، آن‌گاه $\frac{b}{a}$ برابر عدد طلایی است. [۱]



$E = \pi ab$ مساحت بیضی

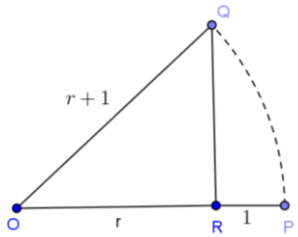
$A = \pi(a^2 - b^2)$ مساحت حلقه

$$E = A \Longrightarrow \pi ab = \pi(a^2 - b^2)$$
$$\Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$
$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} b$$

چون a و b مثبت‌اند

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times b$$

۲- در شکل زیر اگر حجم حاصل از دوران مثلث OQR حول OP برابر با حجم حاصل از دوران شکل RQP حول OP باشد آن‌گاه r عدد طلایی است. [۲]



حجم حاصل از دوران مثلث $V_1 = OQR$

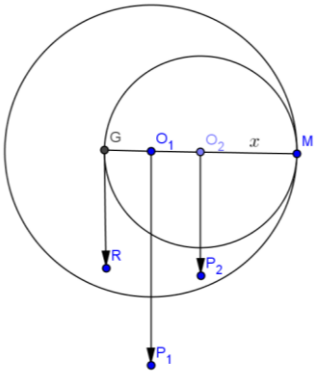
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi(RQ)^2 \times r$$
$$= \frac{\pi}{3}[(r+1)^2 - r^2] \times r = \frac{\pi r}{3}(2r+1)$$

حجم حاصل از دوران شکل $V_2 = RQP$

$$V_2 = \int_r^{r+1} \pi y^2 dx$$
$$= \pi \int_r^{r+1} [(r+1)^2 - x^2] dx$$
$$= \frac{\pi}{3}(3r+1)$$
$$V_1 = V_2 \Longrightarrow \frac{\pi r}{3}(2r+1) = \frac{\pi}{3}(3r+1)$$
$$\Rightarrow r^2 - r - 1 = 0, r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

۳- گوشواره طلایی: اگر از یک دایره به شعاع $r = 1$ یک دایره به شعاع x حذف کنیم $(x < 1)$ و مرکز ثقل شکل باقیمانده نقطه G باشد، آن‌گاه:

$$\frac{\text{شعاع دایره بزرگ}}{\text{شعاع دایره کوچک}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad [۳]$$



حل: گشتاورهای نقاط $G\ O_2, O_1$، را نسبت به نقطه M به دست می‌آوریم:

$$GM \times \vec{R} + O_2M \times \vec{P_2} = O_1M \times \vec{P_1}$$

$$2x(\pi \times 1^2 - \pi x^2) + x \times \pi x^2 = 1 \times 1^2 \times \pi$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{غ ق ق}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{و}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{جواب}$$

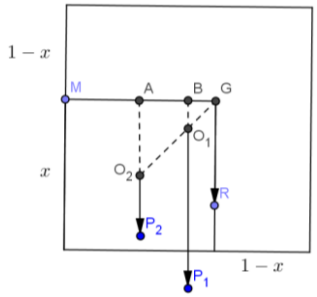
$$x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{غ ق ق}$$

$$\frac{r}{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

اگر به جای دو دایره دو کره به شعاع‌های ۱ و x قرار دهیم باز هم $\frac{r}{x}$ برابر عدد طلایی می‌شود.

۴- اگر از یک مربع به ضلع یک مربع به ضلع x حذف کنیم $(x < 1)$ به‌طوری‌که G مرکز ثقل شکل باقیمانده باشد آن‌گاه

$$\frac{\text{طول ضلع مربع بزرگ}}{\text{طول ضلع مربع کوچک}} = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad [۴]$$



حل: گشتاورهای نقاط A, B, G را نسبت به نقطه M به دست می‌آوریم:

$$MA \times \vec{P_2} + GM \times \vec{R} = BM \times \vec{P_1}$$

$$\frac{1}{2}x.x^2 + x(1-x^2) = \frac{1}{2} \times 1^2$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{غ ق ق}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ ,$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

به طریق مشابه اگر از یک گوشه ابر مکعبی به ضلع واحد (در فضای k بعدی) یک ابرمکعب به ضلع x برداریم $(x < 1)$ و G مرکز ثقل جسم باقیمانده باشد $\frac{1}{x}$ عدد طلایی می‌شود.

مراجع:

[1] A.D.RAWLINS, T. (1995): ANOTE on The Golden Ratis. Mathematical Gazette, 79, pp. 159.

[2] PAUL GLAISTER, T. (1990): Another Peek at the Golden Section. Mathematical Gazette, 79, pp. 45-46.

[3] PAUL GLASTER, T. (1996): Golden Earrings. Mathematical Gazette, 80, pp. 224-225.

[4] NICK LORD, T. (1995): Balancing and Golden Rectangles. Mathematical Gazette, 79, pp. 573-574.

چندجمله‌ای‌های خوش‌رفتار

منصور معتمدی

خانه ریاضیات اصفهان

motamedi.mansoor@gmail.com

مقدمه:

یکی از مسایل همیشگی درس حسابان، رسم نمودار چندجمله‌ای‌هاست. از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که محل تقاطع تابع چندجمله‌ای با محور xها را یافته، ماکزیمم و می‌نیمم‌های موضعی و نیز نقطه‌های عطف را مشخص کنند. این کار مستلزم یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای، ریشه‌های مشتق مرتبه اول و مرتبه دوم است. اگر در هر مرحله ریشه‌ها اعداد صحیح باشند. رسم نمودار، ساده‌تر انجام می‌گیرد. بدین‌ترتیب مسئله کلی زیر مطرح می‌شود:

تمام چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح را مشخص کنید که ریشه‌های آن و ریشه‌های مشتق‌های آن از هر مرتبه، اعداد صحیح (گویا) باشند.

این مسئله در حالت کلی آن حل نشده است. هر چندجمله‌ای با ضرایب صحیح را که ریشه‌های آن و ریشه‌های مشتق آن اعداد صحیح باشند، یک چندجمله‌ای خوش‌رفتار می‌نامیم.

هدف اصلی این یادداشت بررسی چندجمله‌ای خوش‌رفتارِ از درجه ۳ می‌باشد. در پایان مطالبی درباره چندجمله‌ای‌های خوش‌رفتارِ درجه ۴ بیان می‌شود. در اولین بخش مطالب کلی پیش‌نیاز یادآوری می‌شوند.

۱. پیش‌نیازها

متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ را در نظر می‌گیریم. اولین، دومین و kامین چندجمله‌ای متقارن را به ترتیب چنین تعریف می‌کنیم:

$$S_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$S_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$

$$\vdots$$

$$S_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \dots x_n$$

همچنین

$$S_0(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$$

بدین ترتیب kامین عبارت متقارن، متغیرهای $x_1, x_2, \dots x_n$ حاصل جمع تمام حاصل‌ضرب‌های kتایی آن n متغیر است.

مثال: اگر $n = 2$

$$S_0(x_1, x_2) = 1\ ,$$
$$S_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2\ ,$$
$$S_2(x_1, x_2) = x_1x_2$$

مثال: اگر $n = 3$

$$S_0(x_1, x_2, x_3) =$$
$$S_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$S_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_3,$$
$$S_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$$

قضیه معروف زیر ضرایب یک چندجمله‌ای را برحسب ریشه‌های آن بیان می‌کند.

قضیه ۱: فرض کنیم

$$P(x) = C_n x^n + C_n x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C.$$

یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و از درجه n باشد. اگر این چندجمله‌ای دارای ریشه‌های $x_n, \ldots, x_2, x_1$ باشد آن‌گاه:

$$P(x) = C_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

علاوه بر آن برای هر $0 \le k \le n$

$$C_k = (-1)^{n-1} C_n S_{n-k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

از آخرین رابطه که C_Kها را بر حسب عبارت‌های متقارن بیان می‌کند نتیجه مفید زیر به دست می‌آید.

نتیجه: اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای تکین ($C_n = 1$) و تمام ریشه‌های آن اعداد صحیح باشد، آنگاه تمام ضرایب آن نیز اعداد صحیح هستند.

در ادامه مجموعه اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ و مجموعه اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نمایش می‌دهیم. برای سهولت در نگارش چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح (گویا) را که ریشه‌های آن نیز اعداد صحیح (گویا) باشند، $\mathbb{Z}$- چندجمله‌ای ($\mathbb{Q}$- چندجمله‌ای) می‌نامیم. برای چندجمله‌ای $P(x)$ و عدد حقیقی $\alpha \neq 0$، چندجمله‌ای $P_\alpha(x)$ را با $P_\alpha(x) = P(\alpha x)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت r یک ریشه $P(x)$ است اگر و تنها اگر $\frac{r}{\alpha}$ یک ریشه $P_\alpha(x)$ باشد.

در قضیه بعد ارتباط بین $\mathbb{Z}$- چندجمله‌ای‌ها و $\mathbb{Q}$- چندجمله‌ای‌ها مشخص می‌شود.

قضیه ۲: چند جمله‌ای $P(x)$ یک $\mathbb{Q}$- چندجمله‌ای است، اگر و تنها اگر اعداد گویای $\alpha, \beta \neq 0$ وجود داشته باشند، به طوری که $\beta P_\alpha(x)$ یک $\mathbb{Z}$- چندجمله‌ای تکین باشد.

اثبات: فرض کنیم $P(x)$ یک $\mathbb{Q}$- چندجمله‌ای از درجه n باشد، فرض کنیم γ کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج تمام ریشه‌های $x_n, \ldots, x_2, x_1$ باشد. قرار می‌دهیم $\alpha = \frac{1}{\gamma}$ دراین‌صورت $P_\alpha(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح و ریشه‌های $\gamma x_n, \ldots, \gamma x_2, \gamma x_1$ است. بنابراین یک ضریب گویای یک $\mathbb{Z}$- چندجمله‌ای است. اثبات عکس بدیهی است.

از آن‌جا که $P_\alpha(x)_{\frac{1}{\alpha}} = P(x)$ ملاحظه می‌کنیم که هر $\mathbb{Q}$-چندجمله‌ای به شکل $\mu q(x)_\lambda$ است که در آن λ و μ اعداد گویا و $q(x)$ یک $\mathbb{Z}$- چندجمله‌ای است.

از طرفی تساوی $(P_\alpha(x))' = \alpha\big(P(x')\big)_\alpha$ نتیجه می‌دهد که برای هر عدد گویای α گویا بودن ریشه‌ها بین $P(x)$ و $P'_\alpha(x)$ حفظ می‌شود.

۲. چندجمله‌ای خوش‌رفتار از درجه ۳

نخست توجه می‌کنیم که چند جمله‌ای‌های خوش‌رفتار از هر درجه وجود دارند. اگر α یک عدد صحیح باشد، چندجمله‌ای $(x - \alpha)^n$ برای هر n یک چندجمله‌ای خوش‌رفتار است. چنین حالتی را حالت بدیهی می‌نامیم.

برای یافتن چندجمله‌ای از درجه ۳ که ریشه‌های آن و نیز ریشه‌های مرتبه اول و دوم آن نیز گویا باشد، گوییم اگر $P'(x) = (x - r)(x - s)$ و r، s گویا باشند آن‌گاه $\gamma'(x) = rx - r - s$ دارای ریشه گویای $\frac{r+s}{2}$ می‌باشد. پس کافی است به $P(x)$ و $P'(x)$ توجه کنیم.

فرض کنیم:

$$P(x) = (x^2 + bx + c)(x - d)$$

که در آن d, c, b اعداد حقیقی هستند و فرض کنیم عامل درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی است. پس

$$\Delta = b^2 - 4ac \ge 0$$

اما

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4}$$

و

$$P(x)=\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)-\left(\frac{b}{2}+d\right)\right)$$

قرار می‌دهیم.

$$y=x+\frac{b}{2}\ ,u=\frac{b}{2}+d\ ,v^2=\frac{\Delta}{4}$$

پس کافی است چند جمله‌ای

$$P(y)=(y^2-v^2)(y-u)$$

که در آن v,u اعدادی گویا هستند را در نظر بگیریم. در واقع برای این‌که تمام ریشه‌های $P(y)$ گویا باشند، کافی است فرض کنیم v,u و یکی از دو مقدار b یا d گویا باشد. چند جمله‌ای

$$P'(y)=3y^2-2yu-v^2$$

دارای ریشه گویاست، اگر و تنها اگر مبین آن $4(u^2+3v^2)$ مربع یک عدد گویا باشد. مشاهده می‌کنیم که هر زوج اعداد گویای v,u که به ازای آن‌ها $4(u^2+3v^2)$ مربع یک عدد گویا باشد، مضرب گویایی از اعداد صحیح v,u هستند به طوری که u^2+3v^2 مربع یک عدد صحیح باشد. بنابراین مسأله در نهایت به یافتن تمام جواب‌های صحیح معادله

$$u^2+3v^2=w^2 \quad (1)$$

باز می‌گردد، فرض می‌کنیم w,v,u مثبت هستند. نخست فرض می‌کنیم w,v,u نسبت به یکدیگر اول هستند، یعنی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها ۱ است. هر سه عدد نمی‌توانند زوج باشند، دیگر این‌که زوج بودن و فرد بودن w,v امکان‌پذیر نیست، زیرا در این حالت باقی‌مانده u^2+3v^2 بر ۴ برابر ۳ است، حال آن‌که باقی‌مانده آن بر ۴ برابر ۱ می‌شود. بنابراین کافی است دو حالت زیر در نظر گرفته شود.

حالت اول: u فرد، v زوج و w فرد است.

از آنجا که w,v,u نسبت به هم اولند. با توجه به (۱) در می‌یابیم که w,v,u دو به دو نیز نسبت هم اولند. فرض کنیم $v=2t$ که در آن t یک عدد صحیح است، پس:

$$3v^2=12t^2=w^2-u^2=(w+u)(w-u)$$

اینک به علت این که w,u هر دو فردند، $w+u$ و $w-u$ هر دو زوج هستند، پس

$$3t^2=\frac{u+w}{2}.\frac{u-w}{2}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که ۳ ,$\frac{w+u}{2}$ یا $\frac{w-u}{2}$ و اما نه هر دو را می‌شمارد. (زیرا این دو نسبت به هم اولند). فرض کنیم ۳، $\frac{u+w}{2}$ را بشمارد، پس:

$$t^2=\frac{1}{3}\frac{u+w}{2}.\frac{w-u}{2}$$

اکنون گوییم چون $\frac{1}{3}\frac{w+u}{2}$ و $\frac{w-u}{2}$ نسبت به هم اولند، هرکدام باید مربع یک عدد صحیح باشند در این صورت:

$$\frac{1}{3}\frac{w+u}{2}=m^2$$

و

$$\frac{w-u}{2}=n^2$$

که در آن n,m اعداد صحیح‌اند. از اینجا تمام جواب‌های حالت اول بر حسب n,m به‌دست می‌آید:

$$u=3m^2-n^2, v=2mn, w=3m^2+n^2$$

لازم است توجه شود که n,m نسبت به هم اولند، یکی زوج و دیگری فرد است، علاوه برآن n بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

مثال: اگر $n=1, m=2$ آن‌گاه

$$(u,v,w)=(11,14,13)$$
$$11^2+3\times 4^2=169=13^2$$

حالت دوم: v,u فرد و w زوج است.

مـانند حالت اول نتیجه می‌گیریم که w, v, u دو به دو نسبت به هم اولند، داریم:

$$۳v^۲ = w^۲ - u^۲ = (w+u)(w-u)$$

مـانند حـالـت اول فرض می‌کنیم که۳، $u+v$ را می‌شمارد. پس

$$v^۲ = \frac{w+u}{۳}(w-u)$$

از آنجا که $\frac{w+u}{۳}$ و $w-u$ نسـبت به هم اولند، هر کدام باید مربع کامل باشند. اگر

$$\frac{w+u}{۳} = m^۲ w - u = n^۲$$

تمام جواب‌ها از تساوی‌های زیر به دست می‌آیند. در اینجـا n, m نسـبـت به هم اول و هر دو فردند. از طرفی چون v, u مثبت فرض شده‌اند $۳m^۲ > n^۲$. همچنین n بر۳ بخش‌پذیر نیست.

مثال۲: اگر $m = ۳$ و $n = ۱$ آن‌گاه

$$(u, v, w) = (۱۳, ۳, ۱۴)$$

و

$$۱۳^۲ + ۳ \times ۳^۲ = ۱۴^۲$$

پس از بررسـی حـالـت‌هـای اول و دوم ضـرایب چندجمله‌ای $P(x)$را بر حسـبd, v, u به دسـت می‌آوریم. از آنچه که در مقدمه آمد، آشکار است که:

$$b = ۲(u-d),$$

$$c = \frac{b^۲ - ۴v^۲}{۴} = (u-d-v)(u-d+v) \quad (۲)$$

پس

$$P(x) = (x^۲ + bx + c)(x-d)$$
$$= x^۳ + (۲u - ۳d)x^۲$$
$$+(u^۲ - ۴ud + ۳d^۲ - v^۲)x$$
$$-d(u-d-v)(u-d+v) \quad (۳)$$

پس

$$P'(x) = ۳x^۲ + ۲(۲u - ۳d)x$$
$$+(u^۲ - ۴ud + ۳d^۲ - v^۲)$$

که مبین آن $۴(u^۲ + ۳v^۲)$ مربع یک عدد صـحیح است. به ویژه اگر قرار دهیم $u = d$ داریم

$$P(x) = x^۳ - ux^۲ - v^۲x + uv^۲$$
$$= (x-u).(x^۲ - v^۲) \quad (۴)$$

در جـدول‌هـای ۱ و ۲ بعضـی از چندجمله‌ای‌های مطلوب درج شده‌اند.

جدول ۱. حالت $u = d$.

u	v	$P(x)$	ریشه‌های $P(x)$
۱	۱	$x^۳ - x^۲ - x + ۱$	$۱, ۱, -۱$
۱	۴	$x^۳ - x^۲ - ۱۶x + ۱۶$	$۱, ۴, -۴$
۱۱	۵	$x^۳ - ۱۱x^۲ - ۱۶x + ۲۷۵$	$۵, -۵, ۱۱$
۱۱	۴	$x^۳ - ۱۱x^۲ - ۱۶x + ۱۷۶$	$۴, -۴, ۱۶$
۱۳	۳	$x^۳ - ۱۳x^۲ - ۹x + ۱۱۷$	$۳, -۳, ۱۳$

جدول ۲. حالت $u \neq d$.

u	v	d	b	c	$P(x)$	ریشه‌های $P(x)$
۱	۴	۲	-۲	-۱۵	$x^۳ - ۴x^۲ - ۱۱x + ۱۰$	$۲, -۳, ۵$
۱۱	۴	۳	۱۶	۴۸	$x^۳ + ۱۳x^۲ - ۱۴۴$	$۳, -۴, -۱۲$
۱۱	۵	۲	۱۸	۵۶	$x^۳ + ۱۶x^۲ + ۲۰x - ۱۱۳$	$۲, -۴, -۱۴$
۱۳	۳	۵	۱۶	۵۵	$x^۳ + ۱۱x۶۲ - ۲۵x - ۲۷۵$	$۵, -۵, -۱۱$

از آنچه که در بخش پیش‌نیازها آمد و نیز مطالب بیان شده در این بخش قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه۳: فرض کنیم $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد. دراین‌صورت $P(x), P'(x), P''(x)$ دارای ریشه‌های گویا هستند، اگر و تنها اگر $P(x) = \mu q(x)_{\lambda}$ که در آن μ و λ اعداد گویا هستند، $q(x)$ یک چندجمله‌ای به شکل (۳) یا (۴) است و u, v همان‌هایی هستند که در حالت‌های (۱) و (۲) به دست آمده‌اند.

مثال: برای $d = u = ۱, v = ۴$ فرمول (۴) چندجمله‌ای $P(x) = x^۳ - x^۲ - ۱۶x + ۱۶$ یا ریشه‌های $۱, ۴, -۴$ را به دست می‌دهد. برای $\lambda = ۲$، اگر $q(x)_{۲}$ را تشکیل دهیم داریم:

$$P(x) = \frac{۱}{۴} q_{۲}(x) = ۲x^۳ - x^۲ - ۸x + ۴$$

که ریشه‌های آن عبارتند از: $۲, ۲, \frac{۱}{۲}, -۲$.

۳. چندجمله‌ای‌های درجه ۴

فرض کنیم

$$P(x) = ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ + dx + e$$

یک چندجمله‌ای خوش‌رفتار با درجه ۴ باشد. با تقسیم این چندجمله‌ای بر $a \neq ۰$ ریشه‌های آن تغییر نخواهد کرد. پس می‌توان فرض کرد که $a = ۱$ با توجه به نتیجه قضیه۱ در بخش۱ تمام ضرایب اعداد صحیح‌اند، پس اگر چندجمله‌ای

$$\frac{۱}{۴} P'(x) = x^۳ + \frac{۳}{۴} bx^۲ + \frac{۱}{۲} x + \frac{۱}{۴} d$$

را در نظر بگیریم ۴، باید b را بشمارد. با جایگزینی $x = x' - \frac{۱}{۴} b$ ریشه‌های $P(x)$ به اندازه $\frac{۱}{۴} b$ انتقال یافته و ضریب $x^۳$ صفر می‌شود. این انتقال ضرایب جمله‌های از درجه کمتر را نیز تغییر می‌دهد، اما همچنان عدد صحیح باقی می‌مانند. بدین ترتیب کافی است تنها چندجمله‌ای‌های به شکل زیر را در نظر بگیریم.

$$P(x) = x^۴ + cx^۲ + dx + e$$

برای سهولت باز هم خود را محدودتر کرده و فرض می‌کنیم $d = ۰$. یعنی $P(x)$ متقارن باشد. مشتق $P(x)$ یعنی $P'(x) = ۲x(x^۲ + c)$ نیز دارای ریشه‌های صحیح است. پس به‌ازای یک عدد صحیح باید داشته باشیم $c = -۲T^۲$. اگر $P(x)$ را به عنوان یک چندجمله‌ای در $x^۲$ در نظر بگیریم. داریم

$$x^۲ = T^۲ \pm \sqrt{T^۴ - e}$$

این نشان می‌دهد که $T^۴ - e$ باید مربع یک عددصحیح مانند S باشد. فرض کنیم ریشه‌های $P(x)$ عبارت باشند از $\pm M, \pm N$، پس

$$N^۲ = T^۲ + S \ , \qquad M^۲ = T^۲ - S$$

با جمع این دو معادله داریم:

$$۲T^۲ = N^۲ + M^۲$$

باز هم حل مسأله به یافتن جواب‌های یک معادله دیوفانتی مربوط می‌شود. اما تمام جواب‌های این معادله دیوفانتی عبارتند از:

$$T = v^۲ + u^۲$$
$$N = v^۲ - ۲uv - w^۲$$
$$M = v^۲ + ۲uv - u^۲$$

که در آن‌ها v, u اعداد صحیح‌اند [۳]. بدین‌ترتیب ریشه‌های معادله دو مجذوری $P(x)$ برابرند با

$$\pm(v^۲ - ۲uv - u^۲) \ \pm (v^۲ + ۲uv - u^۲)$$

و ریشه‌های $P'(x)$ برابرند با $\pm(v^۲ + u^۲)$

در جدول ۳ چندجمله‌ای خوش رفتار که از این طریق به دست می‌آید فهرست شده‌اند.

تمرین: نشان دهید که $P''(x)$ نمی‌تواند ریشه صحیح داشته باشد. محاسبات کامپیوتری نشان می‌دهد که چندجمله‌ای‌های خوش رفتار درجه ۴ که متقارن نیستند نیز وجود دارند. [۴] برای مثال

$$P'(x) = ۴(x + ۶۹۳۱)(x - ۶۴۸)(x - ۶۲۸۳)$$
$$P(x) = (x + ۹۸۱۷)(x + ۱۳۰۷)(x - ۲۷۴۱)(x - ۸۳۸۳)$$

جدول۳.

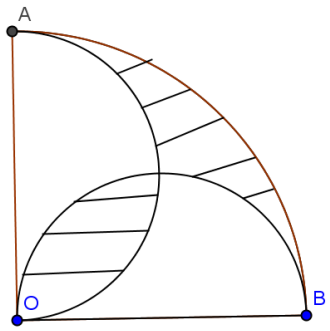
u	v	$P(x)$	$P'(x)$
۱	۲	$(x+۷)(x+۱)(x-۱)(x-۷)$	$۴x(x+۵)(x-۵)$
۲	۳	$(x-۱۷)(x+۷)(x-۷)(x-۱۷)$	$۴x(x+۱۳)(x-۱۳)$
۱	۴	$(x+۲۳)(x+۷)(x-۷)(x-۲۳)$	$۴x(x+۱۷)(x-۱۷)$
۳	۴	$(x+۳۱)(x+۱۷)(x-۱۷)(x-۳۱)$	$۴x(x+۲۵)(x-۲۵)$

منابع:

1. T. Bruggeman and T. Gash. Nice polynomials for curve sketching. Mathematical Magazine *53* (*1988*) *233-234*.
2. Chrink. Caldwell. Nice Polynomials of degree *4*. Math spectrum *93*(*2*) *1990*, *36-39*.
3. L. E. Dickson, History of the Theory of Number. Vol. II, (chelsea, New York *1966*).
4. Shive, K Gupta and Waclaw Szymanski, Cubic Polynomial with rational roots and Critical points. The college Mathematics Journal. Vol *41* No.*5*, *2010*, *365-369*.

مسئله حل کنید

OAB ربع دایره به شعاع ۱ می‌باشد به قطر OA و OB نیم‌دایره‌ای می‌زنیم، مساحت قسمت هاشور زده چقدر است؟



رساله‌ای جدید از کاشانی پیرامون انحطاط افق مرئی

نویسنده: محمد باقری

دانشگاه تهران، پژوهشکده تاریخ علم

mohammad.bagheri2006@gmail.com

مترجم: مقداد قاری

پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

meghdadghari@gmail.com

فرنود- نشریه انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان اصفهان

در این مقاله[1] متن ویرایش شده عربی و ترجمهٔ انگلیسی رساله‌ای کوتاه را عرضه می‌کنم، که به اشتباه به بابا افضل الدین کاشانی (قرن هفتم) نسبت داده شده است، او شاعری صوفی بوده که در کاشان، ایران، زندگی می‌کرده است. این رساله در مورد تعیین افق مرئی است، مساله‌ای هندسی که در دو نامه از غیاث‌الدین جمشید کاشانی (۸۲۶ هجری قمری) به پدرش مطرح شده است. من در مورد تاریخچهٔ این مساله بحث می‌کنم و همچنین نشان می‌دهم که این رسالهٔ کوتاه توسط بابا افضل نوشته نشده بلکه به احتمال زیاد توسط جمشید کاشانی نگاشته شده است.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان و منجم برجستهٔ ایرانی در قرن نهم، زادگاهش کاشان را به قصد سمرقند در ۸۲۵ هجری قمری ترک کرد و به حلقهٔ علمی الغ‌بیگ پیوست. از سمرقند نامه‌هایی به زبان فارسی به پدرش که در کاشان زندگی می‌کرد و مسلماً با ریاضی و نجوم آشنا بود نوشت. در این نامه‌ها کاشانی _در میان مطالب دیگر_ به توصیف مسائل علمی که در جلسات علمی در سمرقند بحث می‌شد پرداخت. یکی از این نامه‌ها از سال ۱۲۳۸ هجری شمسی شناخته شده است، هنگامی که یک شاهزادهٔ فاضل قاجار به نام اعتضاد السلطنه بخشی از آن را در گزارش ملاقاتش از رصدخانهٔ مراغه به همراهی ناصرالدین قاجار نقل کرد. این نامه چندین بار منتشر شده است، و همچنین ترجمه‌هایی از آن بهانگلیسی، ترکی، عربی، روسی و ازبکی به همراه مقدمه‌ها و شرح‌ها در دسترس قرار گرفته است. نامهٔ دیگری اخیرا یافت شد. متن آن در کتاب *من از سمرقند به کاشان: نامه‌های غیاث‌الدین جمشید کاشانی به پدرش* [۱۰] منتشر شد؛ و ترجمهٔ انگلیسی

[1]. این مقاله ترجمه‌ای است از مقالهٔ زیر:

Mohammad Bagheri, ***A new treatise by al-Kashi on the depression of the visible horizon***, *From China to Paris: 2000 years transmission of the mathematical ideas*, ed. Y. Dold et al., Franz Steiner Verlag, Stuttgart, pp. 357-368, 2002.

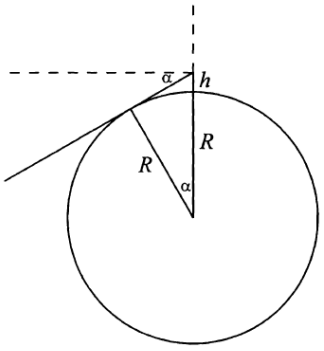
مترجم مایل است از آقای دکتر محمد باقری به پاس زحماتشان جهت ویرایش ترجمه این مقاله صمیمانه سپاسگزاری نماید.

آن بـه همراه مقدمه و شـــرح در [۱] می‌تواند یافت شود.

مسالهٔ انحطاط افق مرئی در هر دو نامه در میان مســـائل متعدد دیگر مورد توجه الغبیگ ذکر شـــده اسـت. این مساله در سمرقند حل نشده باقی ماند تا هنگامی که کاشـانی به آن جا رسید و توانست آن‌را حل کند. در نامهٔ شـــناخته شـــده از ۱۲۳۸ هجری شمسی، این مساله به صورت زیر توصیف می‌شود:

"دیگر فرمودند که شـخصـی بر موضـعی [که] اسـتدارت زمین [آنجا] صـحیح [است] بایستد. فرضاً قامت آن‌کس بذراع الید سـه گز و نیم باشـد. خطی شعاعی که از بصر او خارج شود . مماس سطح زمین شـــود بر چـه بعـد افق حقیقی را قطع کند و بر چه انحطاط به فلک اعلی رسد."[۱] [۶، صفحات ۹۷-۹۸]

کاشانی مساله را ساده یافت و آن‌را به طور کامل در یک روز حل کرد. صابیلی توضیح هندسی عرضه نمی‌کند، ولی می‌نویسـد "در مسـالهٔ شـعاع مرئی و افقحقیقی، مشکل احتمالا در محاسبه و اشتقاق نتایج عـددی بـا درجه‌ی معینی از دقت رخ می‌دهد." [۶، صـفحه ۴۷] پروفسور ای. اس. کندی، که همچنین ترجمه‌ای انگلیسی از این نامه را منتشر کرد، توضیح زیر را از این مســـاله بدون هیچ تصـــویری عرضـــه می‌کند: "اگر R شـعاع زمین و h ارتفاع شخص (که با واحد یکسـانی اندازه‌گیری شـده‌اند) باشـد، در این صـورت فاصـله‌ی زاویه‌ای افق حقیقی برابر است با $\arccos[R/(R+h)]$، و این زاویه به اضـافهٔ ربع دایره برابر اســـت بـا انحطـاط افق حقیقی کـه از سـمت‌الرأس اندازه‌گیری شـده اسـت" [۴، صـفحه ۲۰۸] (شکل ۱ را ببینید).



شکل ۱

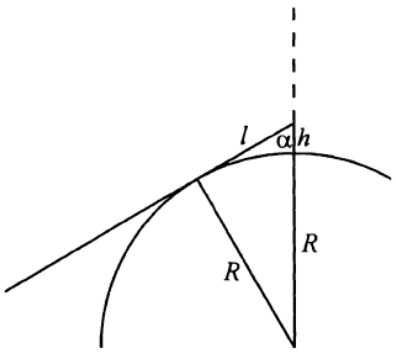
گ. صـابروف در شرحش در ترجمهٔ روسی این نامه تعبیر دیگری از این مساله عرضه کرده است، که در شـکل ۲ نشـان داده شـده است، که در آن او متمم زاویه‌ای را که کندی محاسبه کرد به دست می‌آورد. صابروف فرمول‌های زیر را برای زاویه و فاصلهٔ مورد نظر در مساله عرضه می‌کند

$$\alpha = \arcsin\frac{R}{R+h}$$

و

$$l = \sqrt{h(2R+h)}$$

[۵، صـــفحـات ۲۰۴-۲۰۵]. در ویرایش‌هـا و ترجمه‌های دیگر این نامه اشـاره‌ای به آنچه کاشانی ممکن است در مورد این مساله در ذهن داشته باشد نشده است.



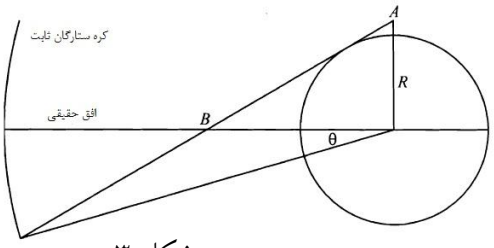
شکل ۲

کشـف نامهٔ دیگر کاشانی به پدرش این مساله را بیشتر روشن می‌کند. در این نامه او می‌نویسد:

[۱]. در اینجا به جای ترجمه متن انگلیسی، نوشته جمشید کاشانی را از [۱۰] صفحه ۶۵ نقل کردیم. مترجم.

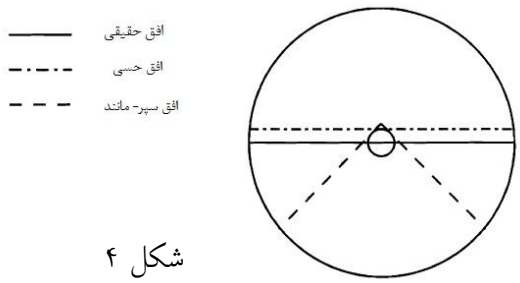
"در مدتی که میدان ایشان داشتند [رقیبان او در سمرقند که درصدد بودند او را بیازمایند] مباحثهٔ که ایشان را واقع می‌شده در حضرت سلطنت پناهی [الغبیگ] ایشان را مشکلی چند افتاده بود که یک ماه یا دو ماه بلکه یک سال در آن فکر کرده‌اند و هیچ حل نشده مثل آن که [اجازه دهید فرض کنیم] شخصی بر سطح زمینی که صحیح الاستداره باشد یا بسطح دریایی ایستاده باشد خط شعاعی که از بصر او خارج شود مماس آن سطح شود و [سپس] بگذرد تا فلک البروج [یعنی کره ستارگان ثابت[1]] بر چه بعد [آن خط شعاعی] افق حقیقی را قطع کند و آن‌جا که به فلک البروج رسد چه مقدار از افق حقیقی منخفض بود و بسیاری دیگر که شرح آن رفته."[2]

در تفسیرم در مورد این مساله (شکل ۳ را ببینید)، ابعاد آسمانی داده شده در سلم السماء [۱۳، صفحات ۳۴-۳۶] را استفاده کرده‌ام، که در آن شعاع زمین R برابر ۱۲۷۲ فرسنگ است (یک فرسنگ ۱۲۰۰۰ ذراع می‌باشد) و کمترین فاصلهٔ کره ستارگان ثابت ۲۶۳۲۸R است، و بنابراین AB را تقریباً برابر ۱۴۷۷R و θ را تقریباً برابر ″۲′۱۲ محاسبه کرده‌ام. در نامهٔ شناخته شده از ۱۲۳۸ هجری شمسی کاشانی به "فلک اعلی" اشاره می‌کند، که شعاع آن برابر است با بیشترین فاصله از ستارگان ثابت، و او مقدار ۲۶۳۴۰R را برای آن در سلم السماء عرضه می‌کند. با استفاده از این مقدار، می‌توان نتیجهٔ مشابهی به‌دست آورد، زیرا به کمترین فاصلهٔ ستارگان ثابت بسیار نزدیک است.



شکل ۳

در متون نجومی دورهٔ اسلامی قرون وسطی سه نوع افق تعریف می‌شود (شکل ۴ را ببینید): ۱) افق حقیقی، یعنی دایرهٔ عظیمه روی کرهٔ آسمانی که به وسیلهٔ صفحه‌ای که از مرکز عالم می‌گذرد به وجود می‌آید؛ ۲) افق حسی، یعنی تقاطع صفحه‌ی مماس بر زمین در موقعیت ناظر با کرهٔ آسمانی؛ و ۳) افق تُرسی (افق سپر- مانند، و همچنین افق حسی در معنایی کلی‌تر)، یعنی دایرهٔ رسم شده روی کرهٔ آسمانی به وسیلهٔ شعاع‌های بصری که از چشم ناظر مماس بر سطحزمین خارج می‌شود. متناظر با ارتفاع ناظر و مکانی که او ایستاده است، این دایره ممکن است دایره‌ای کوچک یا دایره‌ای بزرگ منطبق بر افق حقیقی باشد. این مرز واقعی بین بخش‌های مرئی و غیرمرئی آسمان است. مسالهٔ موجود در نامهٔ کاشانی در واقع به موقعیت افق حقیقی نسبت به افق سپر- مانند اشاره دارد.



شکل ۴

قاضی‌زادهٔ رومی در شرحش بر *الملخص فی‌الهیئة*از چغمینی افق سپر- مانند را بدون استفاده

[1]. این عبارت برای کره ستارگان ثابت در بخش اصطلاحات نجومی در شرح بیرجندی(وفات ۹۳۴ هجری قمری) در مورد زیج الغ بیگ یافت می‌شود (تهران، کتابخانهٔ سپهسالار، نسخهٔ خطی شماره ۶۸۰، برگ ۶۱ پشت).

[2]. این نقل قول شامل جملات جمشید کاشانی از [۱۰] صفحه‌های ۳۸ و ۳۹، و توضیحات نویسنده در مقالهٔ اصلی می‌باشد. مترجم.

از صفت ترسی تعریف می‌کند [۱۱، صفحه ۴۴]. بیرجندی در شرح عربی‌اش بر تذکره طوسی سه نوع افق را ذکر می‌کند و برای سومی از صفت ترسی استفاده کرده است.

انحطاط افق مرئی به وسیلهٔ ابوسهل کوهی (وفات حدود ۴۰۴ هجری قمری) در رساله‌اش فی معرفت ما یری من السماء و البحر (در شناخت بخشهای مرئی آسمان و دریا) مورد بحث قرار گرفته است. در این رساله کوهی پاسخی هندسی برای این مساله عرضه کرده است، ولی مقدار عددی نداده است.[۱]

این نوشتهٔ کوهی توسط ابن هیثم (وفات بعد از ۴۳۰ هجری قمری در قاهره) در بخشی از رساله‌اش رساله فی ان الظاهر من السماء اکثر من نصفها (رساله‌ای پیرامون [اثبات] این‌که [بخش] ظاهر آسمان بیشتر از نصف آن است) که در کتابخانه بادلیان آکسفورد به عنوان Thurston ۳ (برگ ۱۱۶ رو) و Marsh. ۷۱۳ (برگ‌های ۲۳۲ رو– ۲۳۲ پشت) نگهداری می‌شود، ذکر شده است. سزگین از نسخهٔ خطی سومی از این بخش که در اسکندریه نگهداری می‌شود نام برده است [۸، صفحه ۲۶۰]. در بخش دیگری از این رساله، که در کتابخانه بادلیان آکسفورد، Thurston ۳ (برگ ۱۰۴ رو)، نگهداری می‌شود، ابن هیثم می‌گوید که اگر ارتفاع چشمان ناظر ۳/۵ ذراع باشد، بخش قابل مشاهدهٔ آسمان ۴′۲۶″ بزرگتر از بخش غیر قابل مشاهدهٔ آن خواهد بود. در واقع، اگر θ انحطاط افق مرئی باشد، آن گاه بخش مرئی از نیم دایرهٔ عظیمه از سمت الرأس تا سمت القدم θ +۹۰ درجه و بخش غیرمرئی آن θ–۹۰ درجه خواهد بود. بنابراین کمان مرئی به اندازهٔ 2θ بزرگتر از کمان غیرمرئی است. نتیجهٔ ابن هیثم به 2θ بسیار نزدیک است، همان‌طور که من (۴′۲۴″) بر اساس پارامترهای کاشانی محاسبه کردم.

سموأل بن یحیی (وفات حدود ۵۶۹/۵۷۰ هجری قمری) در کشف عوار المنجمین (کشف قصور منجمان، دستنوشته لیدن ۹۸/۱ شرقی برگهای ۷۵ پشت و ۸۴ رو)، به هر دو نوشتهٔ ابن هیثم و کوهی اشاره می‌کند و نقل قول‌هایی از آن‌ها می‌آورد.

کمال‌الدین فارسی (وفات ۷۱۷/۷۱۸ هجری قمری) شرحی با عنوان تنقیح المناظر بر کتاب المناظر ابن‌هیثم نوشت. در هفتمین مقاله از این اثر [۱۲، جلد ۲، صفحه ۱۵۶] فارسی می‌گوید که شکست نور روی دید ما از اجرام آسمانی و فواصل بین آنها به دو طریق زیر تاثیر می‌گذارد:

۱) اگر شکست را تصحیح کنیم، فاصلهٔ ماه کمتر از آنچه در جدول‌های نجومی ذکر شده است به‌دست می‌آید، و بنابراین فاصله‌ها و اندازه‌های دیگر اجرام آسمانی کمتر از مقادیر داده شده در جدول‌ها هستند؛ ۲) شکست همچنین بر بخشی از آسمان که از نقطه‌ای مرتفع قابل مشاهده است تاثیر می‌گذارد. فارسی اضافه می‌کند که ابوسهل کوهی و دیگران رساله‌هایی پیرامون این مساله نگاشته‌اند.

او همچنین می‌افزاید که شکست روی بخش مرئی آسمان هنگامی که ارتفاع چشم‌ها از سطح زمین یا سطح دریا سه (و نیم) ذراع است تاثیر می‌گذارد. فارسی می‌گوید که ابن‌هیثم بخش مرئی آسمان را برای این حالت بدون در نظر گرفتن شکست محاسبه کرد.

ابوریحان بیرونی در تحدید نهایات الاماکن لتصحیح مسافات المساکن (تعیین مختصات مکان‌ها برای تصحیح فاصلهٔ بین شهرها)، به بحث پیرامون

[۱]. من نسخه‌ی خطی از رساله‌ی او را که در کتابخانه‌ی آستان قدس (مشهد، ایران) به شماره‌ی ۵۴۱۲ کتابت شده در ۶۵۱/۲ هجری قمری، نگهداری می‌شود دیده‌ام. برای دیگر نسخه‌های خطی [۷، صفحه ۳۲۰] را ببینید.

انحطاط افق مرئی در ارتباط با شعاع زمین می‌پردازد، اما نه در ارتباط با شعاع عالم [۲، صفحات ۱۸۳-۱۸۶].

پس از این‌که متن فارسی و ترجمهٔ انگلیسی نامه‌ی نویافته کاشانی را منتشر کردم، همکارم توفیق حیدرزاده متذکر شد که رسالهٔ عربی منتشر نشدهٔ کوتاهی در کتابخانهٔ مجلس سنای سابق (تهران)، یعنی دستنوشته ۸۹/۲ برگهای ۱۴-۱۵، شامل پاسخی به این مساله است. این رساله منسوب است به مولانا افضل کاشانی، اما در یادداشتی حاشیه‌ای این نسبت به نویسنده مورد شک واقع می‌شود. نشان می‌دهم که این رساله به احتمال زیاد از آن خود جمشید کاشانی است، و نه افضل کاشانی که به بابا افضل معروف است. او یکی از شعرای عارف قرن هفتم ایران است، که با نجوم آشنا بوده است. نام کامل او افضل الدین محمدبن حسین کاشانی (یا کاشی) است. متن عربی این رساله کوتاه، که حاوی سه بخش است، به همراه ترجمهٔ انگلیسی[۱] آن در پیوست مقالهٔ حاضر دوباره عرضه می‌شود.

در بخش اول این رساله، پاسخ‌های عددی به صورت زیر داده شده است:

" اگر شخصی به طول قامت ۳/۵ ذراع روی مکانی دایره‌ای روی سطح زمین بایستد، هر شعاعی که از چشمان او خارج می‌شود و بر سطح زمین مماس است، اگر به سمت آسمان امتداد یابد مطابق با اصل <توازی> اقلیدس افق حقیقی را قطع خواهدکرد. ما آن را تا فلک اعلی امتداد خواهیم داد. در این‌صورت فاصلهٔ بین مرکز افق <حقیقی> و نقطه‌ی <تلاقی> خط شعاعی مذکور تقریباً ۲۲,۵۶۶,۱۱۳,۱۴۱ ذراع خواهد بود، و خط شعاعی مذکور فلک اعلی را قطع خواهد کرد به طوری که جیب کمان انحطاط تقریباً ۱۹۱,۱۳۴,۸۳۸ ذراع خواهد بود."[۲]

روش‌هایی برای یافتن این مقادیر در بخش دوم توضیح داده می‌شود. با استفاده از نمادگذاری شکل ۵ (در ترجمهٔ فارسی رساله در پیوست) و با قرار دادن HI=h و EA=R، فرمول امروزی زیر را به دست می‌آوریم:

$$EI = \frac{R^{۲}}{\sqrt{[R^{۲} - R^{۴}/(R+h)^{۲}]}}$$

و

$$ZN = \frac{R(EZ - EI)}{EI}.$$

اثبات‌های درستی این روش‌ها در بخش سوم رساله عرضه می‌شوند. از فرمول EI نتیجه می‌گیریم:

$$R \cong \sqrt[۳]{۲h \times EI^{۲}}.$$

با استفاده دو مقدار مذکور در بالا h=۳/۵ و EI=۲۲,۵۶۶,۱۱۳,۱۴۱، داریم

R ≅ ۱۵,۲۷۵,۷۹۶ ذراع = ۱۲۷۲/۹۳ فرسنگ

در سلم السماء کاشانی مقدار R=۱۲۷۲ فرسنگ را عرضه می‌کند، که به آنچه ما در اینجا محاسبه کردیم بسیار نزدیک است؛ این تفاوت ممکن است به خاطر تقریب‌هایی باشد که در نظر گرفته‌ایم [۱۳، صفحه ۳۴]. از طرف دیگر، بابا افضل قطر زمین را برابر ۲۲۶۷ فرسنگ بیان می‌کند، که مطابق است با R=۱۱۳۳/۵ فرسنگ، که بیش از ۱۰٪ از آنچه در بالا برای R محاسبه شد تفاوت دارد. بابا افضل این مقدارش از قطر زمین را در یک پیوست (ملحق) بر عرَض نامه (کتابی پیرامون عرَض‌ها)، که در مجموعهٔ

---

۱. که در اینجا به فارسی ترجمه شده است. مترجم.

۲. جیب(Sin)نشان دهنده سینوس در دایره پایه با شعاعR می‌باشد، یعنی، Sin x= R.sin x. جیب تمام (Cos) و ظل تمام(Cot)که در ادامهٔ این مقاله به کار می‌رود به طور مشابه به صورت Cos x=R.cosx و Cot x=R.cot x تعریف می‌شوند.

آثارش [۹، صفحه ۲۴۴] چاپ شده، عرضه می‌کند.

از فرمول ZN نتیجه می‌گیریم که:

$$EZ \cong ZN\sqrt{(R/2h)}$$

با جایگزین کردن مقدارهای عددی برای ZN (از رسالهٔ منتشر شده در اینجا)، R (مقدار کاشانی از سلم السماء)، و h=۳/۵ ذراع، داریم:

ذراع EZ ≅ ۲۸۲,۲۴۴,۱۹۰,۵۰۰

.فرسنگ۲۱/۳۴۹,۵۲۰,۲۳ =

این مقدار از مقدار ۲۶,۳۲۸R یا ۳۳,۵۰۹,۱۸۸ فرسنگ، که مطابق با سلم السماء کاشانی کمترین فاصله از کرهٔ ستارگان ثابت است، به صورت قابل توجهی متفاوت است. از آنجایی که

$$\frac{۲۳,۵۲۰,۳۴۹/۲۱}{۳۳,۵۰۹,۱۸۸} = \frac{۱}{۱/۴۲۵}$$

$$\cong \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۱/۴۱۴}$$

این تفاوت می‌تواند به صورت زیر توضیح داده شود: کاشانی از روش محاسباتی غلطی استفاده کرده است، که با فرمول زیر معادل است:

$$EZ \cong ZN\sqrt{(R/h)}.$$

بنابراین نتیجهٔ او می‌توانست ۳۳,۲۶۲,۷۹۶/۸۴ باشد، که تنها ٪۰/۷۴ با ۳۳,۵۰۹,۱۸۸ متفاوت است. این تفاوت می‌تواند به خاطر گرد کردن و خطاهای تقریبی باشد. اگر کاشانی دچار این اشتباه نمی‌شد، او جیب انحطاط را

$$(۱۹۱,۱۳۴,۸۳۸).\sqrt{۲} = ۲۷۲,۴۳۳,۴۶۶/۵$$

محاسبه می‌کرد. از طرف دیگر، مقدار EZ=۲۳,۵۲۰,۳۴۹/۲۱ فرسنگ، که در بالا محاسبه کردیم، معادل است با

$$.EZ \cong ۱۸,۴۹۰R$$

اما کمترین فاصله از کرهٔ ستارگان ثابت مطابق با [۹، صفحه ۲۴۵]، که می‌تواند از توصیفش از ضخامت کره‌های آسمانی به‌دست آید، حدوداً ۴۳,۸۰۰R یا ۴۹,۶۴۷,۳۰۰ فرسنگ است. بنابراین، رسالهٔ عرضه شده در پیوست بر مبنای پارامترهای بابا افضل نیست.

شاهد بیشتری موجود است که نشان می‌دهد کاشانی مولف این رساله است. اگر این مساله توسط بابا افضل مورد بحث قرار گرفته بود، که حدود دو قرن قبل از کاشانی در کاشان می‌زیست، نمی‌توانست مسألهٔ بدیعی برای کاشانی و پدرش باشد، و کاشانی می‌توانست به آن به عنوان مسالهٔ بابا افضل ارجاع دهد. هرچند بابا افضلبا نجوم آشنا بود، او را نمی‌توان با کاشانی یا قاضی‌زادهٔ رومی مقایسه کرد. بنابراین خیلی محتمل است که به دلیل شباهت اسمی این رساله به اشتباه به جای جمشید کاشانی به بابا افضل کاشانی نسبت داده شود. به علاوه، ما اصطلاح فلک اعلی یا فلک الاعلی را در یکی از نامه‌های کاشانی می‌یابیم و همچنین در رسالهٔ کوتاه عرضه شده در پیوست، بابا افضل از این اصطلاح در نوشته‌هایش استفاده نمی‌کند.

بعداً من رسالهٔ دیگری شامل این پاسخ در دست‌نوشته ۳۵۸۵/۷ که در کتابخانهٔ ملی ملک در تهران نگهداری می‌شود یافتم. در فهرست مندرجات در ابتدای نسخهٔ قدیمی، عنوان رساله به صورت رساله‌ای از میرزا کافی القائنی پیرامون تفاوت بین دو افق بیان شده است. در این رساله اثبات و توصیف مشابه است با آنچه در رسالهٔ منسوب به بابا افضل کاشانی آمده است، اما مقدارهای عددی عرضه نشده است. یادداشتی حاشیه‌ای روشی دیگر معادل با

$$EI = \frac{R(R+h)}{\sqrt{(R+h)^۲ - R^۲}},$$

عرضه می‌کند، که صورت ساده شده‌ای از فرمول مذکور در بالا برای EI است.

این یادداشت بدون شک توسط محمد مهدی الحسینی الموسوی اضافه شده است، که می‌گوید

این پاسخ ساده‌تر از پاسخی است که توسط دایی پدر بزرگش در قهستان بیان شده است. قهستان ناحیه‌ای تاریخی در استان خراسان است که از جنوب نیشابور تا جنوب شرقی ایران بالای سیستان گسترده شده است و در قرن چهارم هجری بوزجان را در بر داشته است؛ مرکزش قائن بوده است. این شهر مرکز فعالیت علمی در دوره اسلامی بوده است، و تعدادی ریاضیدان از قائن برای ما شناخته شده هستند.

یادداشت حاشیه‌ای دیگری بیان می‌کند که ZN در حقیقت جیب مطلوب نیست، زیرا کمان ZK دارای مرکز E نیست.

بنابراین مسالهٔ انحطاط افق مرئی که توسط کوهی و ابن هیثم پیشنهاد شده بود و چهار قرن بعد در سمرقند ظاهر شد، توسط نامه کاشانی به پدرش از سمرقند به کاشان انتقال داده شد، و همچنین به قهستان در شرق ایران راه یافت.

قدردانی

از دکتر چارلز برنت[1] از موسسهٔ واربورگ (لندن) و دکتر هانس فان دِ ولده از کتابخانهٔ دانشگاه لیدن هلند برای در اختیار گذاشتن کپی‌هایی از نسخه‌های خطی تشکر می‌کنم. همچنین از دکتر یان پ. هوخندایک برای توضیحات گران‌بهایشان در مورد این مقاله سپاسگزارم.

پیوست

در ادامهٔ این صفحات ویرایشی از متن عربی رسالهٔ کوتاه منسوب به بابا افضل کاشانی را به همراه ترجمهٔ انگلیسی عرضه می‌کنم.[2] الحاقات من برای بازسازی متن اصلی در <> بیان شده است. کلمات لازم برای تکمیل متن در [ ] نشان داده شده‌اند. پرانتزها برای شماره‌گزاری من از پاراگراف‌ها استفاده شده است.

متن عربی

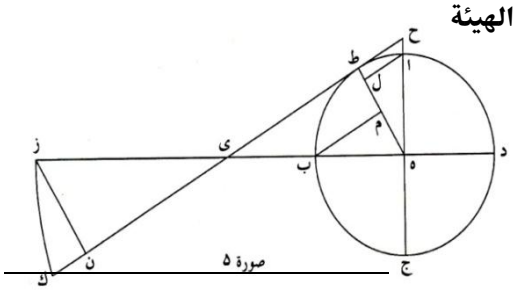
لمولانا افضل الكاشي رحمه الله تعالي

بسم ا... الرحمن الرحيم

(١) اذا قام شخص طول قامته ثلث اذرع ونصف في موضع الاستدارة علي وجه الأرض فالشعاع الخارج من بصره المماس لسح الارض الممتد الي جهة السماء يقطع الأفق وموضع الخط الشعاعي المذكور ٢٢٥٦٦١١٣١٤١ ذراعا تقريبا ويصل[3] الخط الشعاعي المذكور الي الفلک الأعلي علي إنحطاط قوس جيبها ١٩١١٣٤٨٣٨ ذراعاً تقريباً

(٢) وطريق معرفة ذلک ان نقسممربع ذراعات نصف قطر الارض علي ذراعات نصف القطر مضافا اليها طول قامة الشخص و نسقط مربع الخارج عن مربع نصف القطر <ونقسم علي جذر الباقي مربع نصف القطر> حتي يحصل المقدار الأول فاذا نقصناه من نصف قطر العالم وضربنا الباقي في نصف قطر الأرض و قسمناه علي المقدار الأول حصل المقدار الثاني

(٣) ولنفرض لبيان ذلک اب ج <د> كرة الأرض علي مركز ه و ه ز نصف قطر العالم و ا ح طول قامة الشخص و ح ط ي ک الخط الشعاعي المماس للأرض علي نقطة ط القاطع للأفق علي ي و للفلک الأعلي <علي> ک ثم نصل بين المركز و نقطة ط بخط ه ط <ونخرج من ا عمود ال علي ه ط> ومن ب عمود ب م عليه ومن ز عمود ز ن علي الخط الشعاعي علي هذه الصورة الهيئة



صورة ٥

[1] .Charles Burnett.

[2] البته ما در اینجا ترجمهٔ فارسی رساله را می‌آوریم.مترجم.

[3] در متن به جای یصل واژه نصل نوشته شده است، که با توجه به محتوا مناسب‌تر است.

فمثلثا ال ه ح ط ه متشابهان لإشتراک زاویة ه وکون ط و ل قائمتین فنسبة ح ه الي ا ه أعني ه ط کنسبه ه ط الي ه ل بالرابع من سادسة *الأصول* فاذا ضربنا نصف القطر أعني ه ط في نفسه وقسمناه علي ح ه یکون الخارج مقدار ه ل لما تقرر في الأصول أن مسطح الوسطین في الأربعة المتناسبة إذا قسم علي أحدالطرفین یکون الخارج الطرف الآخر ثم إن ه ل جیبا لقوس ب ط لما تقرر أن <جیب> تمام اي قوس الي نصف القطر جیبا لتمام تلک القوس فیکون مساویا لخط ب م واذا نقصنا مربع ب م عن مربع ب ه واخذنا جذر الباقي حصل مقدار ه م بإستبانة شکل العروس فنقول مثلثا ه ب م ه ي ط ایضا متشابهان متساویا الزوایا کل لنظیرها ونسبة ه م الي ه ط أعني ه ب کسبة ه ب الي ه ي فنضرب ب ه في نفسه ونقسم علي م ه حتي یحصل ه ي و هو المقدار الأول

(٤) ثم إذا نقصناه> عن ه ز نصف قطر العالم بقي ز ي معلوما فمثلثا ز ن ي ه ط ي متشابهان متناسبان بمثل ما ذکرنا أعني نسبة ه ط الي ن زکنسبة ه ي الي ز ي و المجهول هیهنا أحد الوسطین فنضرب زي في ه ط ونقسم الحاصل علي ه ي فالخارج من القسمة ز ن وهو المقدار الثاني

(٥) وبطریق آخر نقول بعد استخراج قوسي ا ط ب ط کما ذکر نقسم جیب احدیهما علي [تمام] جیب الأخري لیحصل ظل کل واحد من القوسین أعني الظل المصطلح لها وهو ح ط ي ط ثم نتمم التقریب بمثل ما ذکرناه ولو ظهر تفاوت بین ما إستخرجناه وما إستخرجه غیرنا فلعله لإهمال بعض الکسور في أحدالحسابین والأمر فیه سهل إذا المقصود في أمثال هذه التعریف لا التحقیق والتدقیق والله ولي التوفیق تم

ترجمه‌ی فارسی

از مولانا افضل کاشانی رحمت خدا بر او باد

بسم الله الرحمن الرحیم

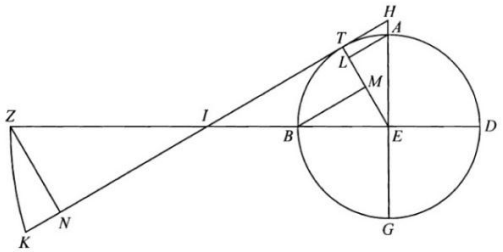
۱) اگر شخصی به طول قامت ۳/۵ ذراع روی مکانی دایره‌ای روی سطح زمین بایستد، هر شعاعی که از چشمان او خارج می‌شود و بر سطح زمین مماس است، اگر به سمت آسمان امتداد یابد مطابق با اصل <توازی> اقلیدس[۱] افق حقیقی را قطع خواهد کرد. ما آن را تا فلک اعلی امتداد خواهیم داد. در این‌صورت فاصله بین مرکز افق <حقیقی> و نقطه <تلاقی> خط شعاعی مذکور تقریباً ۲۲,۵۶۶,۱۱۳,۱۴۱ ذراع خواهد بود، و خط شعاعی مذکور فلک اعلی را قطع خواهد کرد به طوری که جیب کمان انحطاط تقریباً ۱۹۱,۱۳۴,۸۳۸ ذراع خواهد بود.

۲) راه به‌دست آوردن این دو مقدار (به صورت زیر است): مربع شعاع زمین به ذراع را بر شعاع زمین به اضافهٔ ارتفاع آن شخص به ذراع تقسیم می‌کنیم. سپس مربع نتیجه را از مربع شعاع کم می‌کنیم (و مربع شعاع را بر جذر باقیمانده تقسیم می‌کنیم)، تا اینکه مقدار اول به‌دست آید. اگر آن را از شعاع عالم کم کنیم و باقیمانده را در شعاع زمین ضرب کنیم و آن را بر مقدار اول تقسیم کنیم، مقدار دوم بدست می‌آید.

۳) برای توضیح این مطلب، فرض کنید ABGD کرهٔ زمین با مرکز E، EZ شعاع عالم، AHارتفاع شخص، و HTIK شعاع مماس بر زمین در نقطه‌ی T که افق را در I و فلک اعلی را در K قطع می‌کند باشد. سپس مرکز و نقطه‌ی T را با خط ET به هم متصل می‌کنیم <و از A عمود AL را بر

[۱]. قضیه ۵ از مقاله اول کتاب *اصول* [۳، جلد ۱، صفحه ۱۵۵].

ET رسـم می‌کنیم>، و از B عمود BM را بر آن و از Z عمود ZN را بر خط شـعاعی رسـم می‌کنیم، همان‌طور که در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۵

در این‌صـورت مثلث‌هـای ALE و HTE متشـابهند، زیرا زاویه‌ی E در آن‌ها مشترک است، و T و L زاویـه‌هـای قـائمه‌انـد. پس مطابق با کتاب اصول قضیه چهارم مقاله ششم نسبت HE به AE، که برابر ET است، برابر نسبت ET به EL می‌باشد. اگر شعاع، یعنی ET، را در خودش ضرب کنیم و آن را بر HE تقسیم کنیم، نتیجه مقدار EL خواهد بود، زیرا در کتاب اصـول نشـان داده شده است که برای هر چهار عدد متناسب، اگر حاصلضرب میانگین‌ها را بر یکی از طرفین تقسـیم کنیم، <طرف> دیگر به‌دسـت می‌آید.[۱] پس EL جیب کمان BT اسـت، زیرا نشـان داده شـده است که جیب تمام هر کمان برابر بـا جیـب متمم آن کمان اسـت، و بنابراین با <پاره> خط BM برابر اسـت. اگر مربع BM را از مربع BE کم کنیم و جذر باقیمانده را به‌دست آوریم، مقـدار EM مطابق با قضـیهٔ فیثاغورس به‌دسـت می‌آید.[۲] پس می‌گوییم که مثلث‌های EBM و EIT نیز متشـابهند و زاویه‌های متناظرشان مساوی است. نسبت EM به ET، که برابر EB است، برابر نسبت EB به EI می‌باشد. BE رادر خودش ضرب می‌کنیم و بر ME تقسـیم می‌کنیم تا EI نتیجه شـود، و این مقدار اول است.

سـپس اگر آن را از شـعاع عالم EI کم کنیم، بـاقیماندهٔ ZIمعلوم اسـت. مثلث‌های ZNI و ETI همان‌طور که گفتیم متشابه و متناسبند، یعنی نسبت ET به NZ مسـاوی است با نسبت EI به ZI، و در اینجا مجهول یکی از میانگین‌ها است. ZI را در ET ضـرب می‌کنیم و نتیجه را بر EI تقسـیم می‌کنیم، خارج قسمت ZN است و این مقدار دوم است.

بـه روشـی دیگر، می‌گوییم: پس از یـافتن کمان‌های AT و BT همان‌طور که گفته شد، جیب یکی از آنهـا را بر جیب دیگری تقسـیم می‌کنیم تا ظل تمام هر کدام از این دو کمان به‌دست آید، یعنی ظل تمام که طبق قرارداد برای آن اسـتفاده می‌شود: HT و IT. سـپس تقریب را مشـابه آنچه گفته شد تمام می‌کنیم. اگر تفاوتی بین آنچه ما یافتیم با آنچه دیگری می‌یـابد وجود دارد، به خاطر در نظر نگرفتن بعضـی کسـرها در یکی از محاسـبات است. این امر ساده‌ای است زیرا در چنین حالاتی توصیفی <کلی> مقصود است و نه نتیجهٔ <عددی> دقیق و مشخص. و خداوند توفیق دهنده است. تمام شد.

مراجع:

[1] Bagheri, Mohammad 1997. *A Newly Found Letter of al-Kāshī on ScientificLife in Samarkand*. Historia Mathematica 24: 241-256.

[2] al-Bīrunī 1967. The Determination ofthe Coordinates of Positions for the Correction of Distances between Cities, Jamil Ali, Trans. Beirut: The American University of Beirut;

[۱]. کتاب *اصولقضیه ۱۸ مقاله هفتم* [۳، جلد ۲، صفحات ۳۱۸-۳۲۹] را ببینید.

[۲]. قضیهٔ فیثاغورس عرضه شده در کتاب *اصول*قضیه ۴۷ مقاله اول [۳، جلد ۱، صفحات ۳۴۹-۳۵۰].

reprinted in Fuat Sezgin, Ed., Islamic Geography, Vol. 26. Frankfurt am Main: Institute for the History ofArabic-Islamic Science, 1992.

[3] Euclid 1956. The Thirteen Books ofEuclid's Elements, Thomas L. Heath, Trans., 2nd edition, 3 vols. New York: Dover. Unaltered reprint of the edition Cambridge: University Press, 1926.

[4] Kennedy, Edward S. 1960. A Letter of Jamshīd al-Kāshī to His Father. Scientific Research and Personalities at a Fifteen Century Court. Orientalia 29: 191-213; reprinted in E.S. Kennedy et al., Studies in the Islamic Exact Sciences, David A. King & Mary Helen Kennedy, Eds. Beirut: American University, 1983: 722-744.

[5] Sabirov, G. 1973. Creative Cooperation of the Scientists ofCentral Asia in Ulugh Beg's Scientific School in Samarkand (in Russian). Dushanbe: Irfon.

[6] Sayili, Aydin 1960. Ghiyāth al-Dīn al-Kāshī's Letter on Ulugh Bey and the Scientific Activity in Samarkand (in Turkish and English). Ankara: Turk Tarih Kurumu Basimevi (Turkish Historical Society); 2nd edition 1985.

[7] Sezgin, Fuat 1974. Geschichte des arahischen Schrifttums, Vol. 5: Mathematik bis ca. 430 H. Leiden: Brill.

[8] Sezgin, Fuat 1978. Geschichte des arahischen Schrifttums, Vol. 6: Astronomie bis ca. 430 H. Leiden: Brill.

[۹] بابا افضل، *مصنفات افضل الدین محمد مراغی کاشانی*، به تصحیح مجتبی مینوی و یحیی مهدوی، چاپ دوم، تهران، انتشارات خوارزمی، ۱۳۶۶ هجری شمسی.

[۱۰] باقری، محمد، *از سمرقند به کاشان: نامه‌های غیاث‌الدین جمشید کاشانی به پدرش*، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۷۵ هجری شمسی.

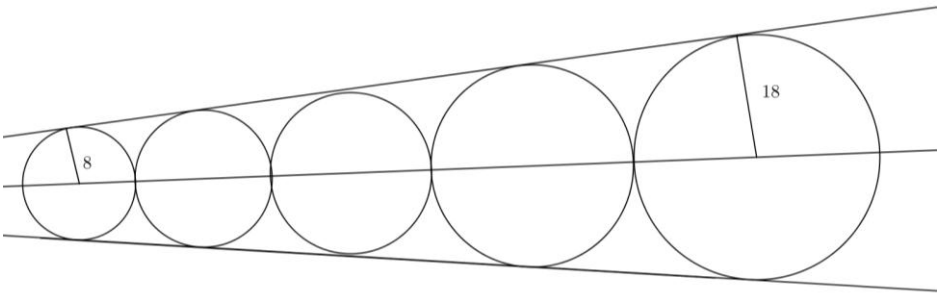
[۱۱] رومی، موسی بن محمد قاضی زاده، *شرح چغمینی*، چاپ سنگی، تهران، ۱۲۹۹ هجری قمری.

[۱۲] فارسی، کمال الدین حسن، *تنقیح المناظر*، دو جلد، حیدر آباد: دایرة المعارف عثمانیه، ۱۳۴۸ هجری قمری.

[۱۳] کاشانی، غیاث الدین جمشید، *سلم السماء*،چاپ سنگی، تهران، ۱۲۹۹ هجری شمسی.

مسئله حل کنید

در شکل مقابل شعاع دایره وسط چقدر است؟



فرنود تصمیم گرفته است نظرات همکاران محترم آموزش و پرورش را در رابطه با مسایل آموزشی دریافت و در شماره‌های مختلف جهت تبادل نظر بین همکاران به معرض دید قرار دهد. لازم به ذکر است که همکاران عزیز باید توجه کنند نظام آموزش مدرسه‌ای با هدف تربیت شهروندان تواناست و تنها هدف آن آماده‌سازی برای ادامه تحصیل در دانشگاه‌ها نیست. با ذکر این نکته و با طرح نظرات یکی از همکاران، از سایر دوستان درخواست می‌نمائیم نظرات خود را برای شماره‌های بعد ارسال کنند. **هیئت تحریریه**

آموزش ریاضی درایران به کجا می رود؟

حسین میرحسینی

دبیر ریاضی دبیرستان‌های اصفهان

عقل گران‌بهاترین هدیه خداوند به انسان است که او را از دیگر موجودات متمایز کرده است و این قدرت باید پرورش یابد تا تکامل صورت پذیرد.

بسیاری ازروانشناسان معتقدند که بهترین روش پرورش عقل با آموزش ریاضی در مراحل آموزش‌هایمتوالی صورت می‌گیرد. زیرا نمود عقل در حل‌مساله است و مساله حل کردن با تعریف مسئله شروع می‌شود. در هر مسئله‌ای داده‌هایی و خواسته‌هایی وجود دارد و بین داده‌ها و خواسته‌ها یک فضای تاریکی موجود است،وباید با تفکر منطقی و ارتباطات معنایی این فضا به روشنایی گراید و مسئله حل شود و به حافظه فرستاده شود. مطالبی که با عبور از قوه تعقل به حافظه می‌رود، قوام بیشتری دارد و اینجاست که می‌بینیم هندسه اقلیدسی دربسیاری از مدارس جهان برای آموزش تفکر منطقی تدریس می‌شود. زیرا منطق از شهود که هماهنگی چشم و گوش و عقل است، شروع می‌شود و در هندسه به وضوح نمایان می‌شود.

اگر فکر کردن یک موضوع باشد و صحیح فکر کردن شاخه‌ای از آن موضوع، می‌توان گفت ریاضیات ابزاری برای آموزش صحیح فکر کردن است. اگر این مقوله را ادامه دهیم و مسئله آموزش ریاضی را با توجه به تاریخ آن در کشورهای پیشرفته بررسی کنیم، حرف به درازا می‌کشد. با این مقدمه به نظر می‌رسد که مدتی است در کشور ما آموزش ریاضی از بستر خود خارج شده است و مشکلاتی برای خانواده‌ها و معلمان و مدارس به‌وجود آورده‌است و برنامه‌ریزی درستی بر آن حاکم نیست. این سؤال مطرح می‌شود که: در کشور ما آموزش ریاضی به کجا می‌رود و با آن چه کرده و می‌کنند؟

برای برطرف کردن مشکلاتی که در راه آموزش ریاضیات کشور وجود دارد، نیاز به یک عزم همگانی شامل مسئولین آموزش و پرورش کشور و معلمان ریاضی برای تغییر و اصلاح است. علاوه برآن لازم است که یک برنامه جامع برای تغییرشیوه‌های تدریس، اصلاح کتاب‌های درسی وجلوگیری از ورود

عوامل مزاحم در آموزش صحیح تنظیم و اجرا شود.

برنـامه‌ریزان در اصـــلاح برنامه‌ها و کتاب‌های درســی تغییرات زیادی باید بدهند، از جمله آن‌ها به نظر می‌رسد لازم است به نکات زیر نیز توجه داشته باشند:

۱- بـایـد کف اطلاعـات ریـاضـــی برای ورود دانش‌آموزان بـه آموزش عـالی و زنـدگی ســالم و پرمحتوی مشـخص شود و این اطلاعات با توجه به موضـوعات آن طبقه‌بندی شـود و با نظرکارشناسان آموزش و روانشـناسـی و رشد با رعایت تقدم و تاخر مطالب در مراحل آموزش پخش شود.

۲- یک فصل بسیار کوتاه و کارآمد در سال اول دبیرستان تحت عنوان منطق ریاضی از برنامه حذف شـده اسـت، که می‌توانسـت مقابله مطالب درسـی دانش‌آموز، معلم و امتحان را روان و ســاده کند. از طرفی مفـاهیمی از آن‌را بـه‌صـــورت ناقص و بدون انســجام در جبر و احتمال و هندســه۲ آورده‌اند، که برای آموزش آن‌ها دیرشـده اسـت و بسیار وقت‌گیر اسـت و در جواب چرایی آن می‌گویند «کارآمد نبوده است، یا به انحراف فهم صحیح می‌انجامیده است». ولی باید گفت آموزش و به‌کارگیری آن صحیح نبوده اســت وگرنه منطق ابزار تفکر اســت و چه بهتر که قواعد منطق ریاضی قبل از شروع آموزش استدلالی ریاضی تدریس شود.

۳- درکتاب‌های درسـی برای بعضـی از تعاریف صـورت جامع و مانع آن در نظر گرفته نمی‌شود و به ضـرورت مقوله تعبیر می‌شـود که این مشکل بزرگ کتاب‌های درسـی ریاضـی است که بعضی ازمؤلفان محترم بدون در نظر گرفتن قضـایا و مسـائل، یک مقوله تعریفی متناســب با فهم خود می‌نویســند و صورت استاندارد آن‌را در نظر نمی‌گیرند.

۴- مفاهیم کتاب‌ها پیوســتگی اطلاعاتی ندارند، زیرا بعضـی از مؤلفان کتاب‌های درسی، کتاب مقدم آن‌را تدریس نکرده‌اند و فقط مروری بر آن داشته‌اند و با این وضــعیت کتاب می‌نویســند و می‌بینیم که حجم مطالب فشــرده شــده در کتاب‌های مختلف تناســب ندارد. (مثال واضـح آن ریاضـی[۳] تجربی و ریاضیات چهارم تجربی است.)

۵- بعضـی ازمفاهیم سـال‌های قبل به‌صـورت ســاده‌تر تکرار می‌شــود و گاهی پرش ناگهانی به مطلـب ســخت دارد. مانند مســائل بازتابندگی در ریاضـی چهارم تجربی یا حل نامعادله در فصل صفر دیفرانسیل.

۶- بعضـــی از کتاب‌های درســـی ثبات مطالب ندارند. درصــورتی‌که اگر حتی‌المقدور مطالب ثابت باشـد، تجربه تدریس خوب و صـحیح و اصلاح شده آن همگانی می‌شود و یک مرتبه تمام تجربه تدریس در سراسر کشور بر باد نمی‌رود. در جواب چرائی این تغییرات مکرر می‌گویند «دبیران ریاضـی نمی‌توانند خود را بـا شـــرایط جـدید وفق دهند». این عزیزان نمی‌دانند که وقتی امتحان‌ها ســراســری و کنکور سـراسـری است، باید گفتمان مطالب درسی وحدت داشـته باشند و اجرای آن زمان‌بر است. زیرا دانستن مطلب یک موضــوع اســت، و نحوه انتقال آن به دانش‌آموز با توجه به اطلاعات او مطلب دیگر.

۷-بحث مثلثات را در کتاب‌های درسـی ضـمن تـدریس مطـالـب دیگر آورده‌اند و در نتیجه ارتباط مطالب آن قطع و وصــل‌هایی دارد،که تداعی معانی آن برای دانش‌آموز مشکل است و در اینجا این سؤال پیش می‌آیـد کـه چرا طبقـه‌بندی داده‌ها ضـــروری نیســت؟ و چرا از این‌که کتابی به‌نام مثلثات تالیف و تدریس شـود تا مفاهیم آن پیوسته و هماهنگ باشد خودداری می‌شود؟

۸- تالیف بعضـی ازکتاب‌های درسـی به صورت گزینش بخش‌هایی از یک کتاب مرجع توسط مؤلف، بدون اجرای آزمایشـی آن و حتی مشورت با دبیران

باتجربه اســتان‌ها باعث می‌شــود که گاهی مطالب بی‌معنی و یا با یکدیگر متناقض باشــند. برای مثال درکتاب دیفرانسـیل سـال تحصیلی ۹۲-۹۱ به علت بررسی نشدن تناقض تعریف (تابع علامت) داشت.

۹- منطق حکم می‌کنـد برای روشـــن شـــدن مفاهیم یک فصــل، آخر فصــل مســائلی که بتواند ظرافت‌های معانی را معین کند تالیف شــود، ولی در بعضـی ازکتاب‌های درسـی مسائل ربطی به موضوع فصــل ندارد. (نمونه مســائل فصــل صــفر کتاب دیفرانسیل)

۱۰- مسأله مهم‌تر ازمطالب فوق این‌که مراکزی در سراسر کشور به‌وجود آمده‌اند، که زمان فکرکردن را از دانش‌آموزان می‌گیرند و برای ساده‌ترین مفاهیم فرمول ساخته‌اند و نوع بیان این فرمول‌ها شبیه شعر اســت، نـه معنی کـاربردی آن. عجیب این‌که این مطالب مضــر که خیانت به فکر و اندیشــه و تعالی دانش‌آموزان اسـت از رسـانه‌های عمومی نیز پخش می‌شـود و ریاضـیات به سـبک آگهی برای تولیدات تجاری تدریس می‌شود.

در اثر مشــکلات فوق و ده‌ها مشــکل دیگرکه برای آموزش ریاضی با روش‌های صحیح وجود دارد، متأســفانه تعداد زیادی از دانش‌آموزان که باید تفکر صحیح را با استدلال‌های زیبای ریاضی مشاهده و از آن لذت ببرند در مدرســه فرمول و در راه مدرســه اســتفاده نـامناســب از موبایل و در خانه بازی و سرگرمی با اینترنت را می‌آموزند. در اینجا باید سؤال کرد که پس جای فکر کجاســت؟ کدام فضــا برای فعالیت و تربیت عقل نهاده شده‌است؟

متأسفانه درآموزش ریاضی به جائی رسیده‌ایم که اکثر دبیران ریاضی برای اثبات یک قضیه یا درستی راه حل یک مسئله در کلاس با مخالفت دانش‌آموزان مواجـه می‌شــوند وآن‌ها ازمعلم می‌خواهندکه بدون اثبات و چرا و چگونه و حتی‌المقدور به ســاده‌ترین شــکل مطالب رابیان کند، تا آن‌ها بتوانند به حافظه بسپارند! چراکه دانشگاه‌ها انگیزه یادگیری است و تا زمانی که دانشــگاه‌ها با شــرایط موجود بدون هیچ ضــابطه‌ای در هر رشــته ثبت‌نام می‌کنند، آیا معلم می‌تواند وعده‌ای به دانش‌آموز برای اثبات یک قضیه یا حل یک مسئله بدهد؟

آن‌چه به نظر می‌رســد این‌اســت که در آینده مفهوم، معنی و اســتدلال غریب می‌شــود و حافظه جـای عقـل را پر می‌کنـد و تفکر منطقی و عقـل و درایت بر باد می‌رود.

اصل بقای جهالت

اگر مفهوم غلطی یک بار در ذهن جای گرفت، دیگر به آسانی بیرون نمی‌رود.

(جرج کانتور)

خاصیت شرکت‌پذیری ضرب خارجی در مجموعه بردارها

ایاز بهرامی اسفرجانی

دبیر ریاضی اصفهان

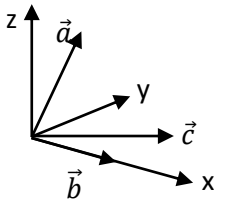
قبل از ورود به بحث فوق لازم اســت یادآوری گردد که در کتاب درسی هندسه تحلیلی و جبرخطی چهارم ریاضــی دبیرســتان، فصــل اول تمرینی بدین شکل آمده است که:

مســئلــه: فرض کنید c, b, a بردارهایی دلخواه باشند، ثابت کنید:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} \qquad (۱)$$

در لحظه نخسـت این سئوال به ذهن دانش‌آموز متبادر می‌گردد که با توجه به عدم ارتباطی روشــن بین دو طرف تسـاوی فوق چگونه می‌توان از سمت چپ تسـاوی به سمت راست رسید؟ واضح است که اگر سمت چپ را $\vec{d}$ بنامیم، $d \perp (\vec{b} \times \vec{c}), \vec{d} \perp \vec{a}$ پس $\vec{d}$ برداری در صفحه شامل $\vec{c}, \vec{b}$ می‌باشد و این به آن معنی اســت که $\vec{d}$ یک ترکیب خطی از $\vec{c}, \vec{b}$ می‌باشد، یعنی: $\vec{d} = m\vec{b} + n\vec{c}$

اکنون برای اثبات تسـاوی (۱) کافی اسـت ثابت کنیم $\vec{a}.\vec{b} = -n, \vec{a}.\vec{c} = m$ اســت. جهت نیل به این هدف دستگاه مختصات فضایی سه قائم را چنان در نظر می‌گیریم که بردار $\vec{b}$ روی جهت مثبت محور xهــا و بردار $\vec{c}$ در صــفحــه xoy قرار گیرد در این‌صورت داریم:



$$\vec{b} = (x, ۰, ۰), \vec{c} = (x'', y'', ۰)$$

بردار $\vec{a}$ در این دســتگاه به شــکل به‌صــورت $\vec{a} = (x, y, z)$ خواهد بود.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (x, y, z) \times (۰, ۰, x'y'')$$
$$= (x', yy'', -xx'y'', ۰)$$
$$= (x'yy'', ۰, ۰) - (۰, xx'y'', ۰)$$

به این حاصـل بردار $(xx'x'', ۰, ۰)$ را اضـافه و کم می‌کنیم.

$$= (x'yy'', ۰, ۰) - (۰, xx'y'', ۰)$$
$$+(xx'x'', ۰, ۰) - (xx'x'', ۰, ۰)$$
$$= yy''(x', ۰, ۰) - xx'(۰, y'', ۰)$$
$$+xx''(x', ۰, ۰) - xx'(x'', ۰, ۰)$$
$$= \underbrace{(xx'' + yy'')}_{a.c}\underbrace{(x', ۰, ۰)}_{\vec{b}} - \underbrace{xx'}_{a.b}\underbrace{(x'', y'', ۰)}_{\vec{c}}$$
$$= (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

پس با توجه به قانون (۱)

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ داریم:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{c} \times (\vec{b} \times \vec{a}) \qquad (۲)$$
$$= (\vec{c}.\vec{a})\vec{b} - (\vec{c}.\vec{b})\vec{a} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - \vec{b}.\vec{c})\vec{a}$$

بـا ملاحظه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ با $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ در حالت کلی برابر نیست.

تمرین: برای سه بردار دو به‌دو و غیر همراستای

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ اگر $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ باشد، ثابت کنید بردار $\vec{b}$ بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{c}$ عمود است. (سه بردار غیر صفر فرض شده‌اند)

تمرین: ثابت کنید:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}$$

تمرین: اگر $\vec{a}\perp\vec{b}$ و $\vec{a}=(1,1,3)$ و $\vec{a}\times\vec{b}=(-6,3,1)$ باشد، بردار $\vec{b}$ را به دست آورید

تمرین: اگر $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2|\vec{a}|=2$ و زاویه بین $\vec{a},\vec{c}$ برابر 120° و $\vec{a}\perp\vec{b}$ باشد، ثابت کنید:

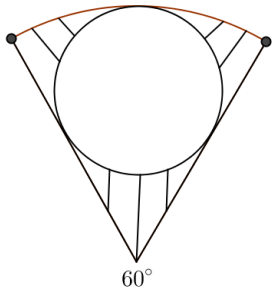
$$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c})=4$$

تمرین: $\vec{a}.\vec{c}=1$ و $\vec{a}.\vec{d}=2$ و $\vec{b}.\vec{c}=3$ و $\vec{b}.\vec{d}=4$ ثابت کنید: $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d})=-2$

مسئله حل کنید

۱- معادله مقابل در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟ $x^3-1377=\sqrt[3]{x+1377}$

۲- مساحت قسمت هاشور زده چقدر است؟



۳- کدام بزرگترند؟

1000^{1000} یا 1001^{999}

$\int_4^5$ یا $\int_5^6$

۴- معادله $[x[x]]=1$ را حل کنید.

۵- ثابت کنید که $\int_0^1 \frac{x}{cosx}dx<log2$

حل هندسی معادلات درجه دوم توسط فیثاغورسیان

برگرفته شده از کتاب آشنایی با تاریخ ریاضیات جلد ۱

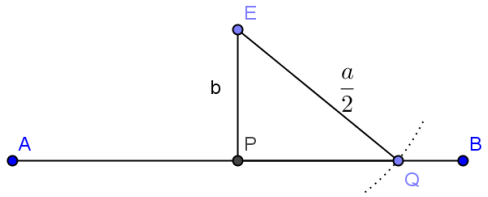
نوشته ادوارد. و. ایوز، ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل صفحات ۸۰-۷۸

فیثاغورسیان برای حل معادله $x^۲ - ax + b^۲ = ۰$ به طریق زیر عمل می‌کردند.

۱- پاره خط AB را مساوی a جدا می‌کنیم و وسط آن‌را P می‌نامیم.

۲- درنقطه P عمود PE را به اندازه b جدا می‌کنیم.

۳- به مرکز E و شعاع $\frac{a}{۲}$ کمانی رسم می‌کنیم تا AB را در Q قطع کند. AQ و QB جواب‌های معادله داده شده‌اند.



$$AQ + QB = AB = a$$
$$AQ \times QB = (AP + PQ)(PB - PQ)$$
$$= (AP + PQ)(AP - PQ)$$
$$= AP^۲ - PQ^۲$$
$$= EQ^۲ - PQ^۲$$
$$= PE^۲ = b^۲$$

شرط آنکه معادله دارای دو جواب باشد آن است که دایره به مرکز E و شعاع $\frac{a}{۲}$ پاره خط AB را قطع کند یعنی $EQ > PE$

$$\Delta EPQ: PQ^۲ = \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ - b^۲ \Rightarrow PQ = \frac{\sqrt{a^۲ - ۴b^۲}}{۲}$$

$$AQ = AP + PQ = \frac{a}{۲} + \frac{\sqrt{a^۲ - ۴b^۲}}{۲}$$
$$= \frac{a + \sqrt{a^۲ - ۴b^۲}}{۲}$$

$$QB = PB - PQ = \frac{a}{۲} - \frac{\sqrt{a^۲ - ۴b^۲}}{۲}$$
$$= \frac{a - \sqrt{a^۲ - ۴b^۲}}{۲}$$

$$EQ > PE \Rightarrow \frac{a}{۲} > b \Rightarrow$$
$$a > ۲b \Rightarrow a^۲ > ۴b^۲$$
$$\Rightarrow a^۲ - ۴b^۲ > ۰, \Delta > ۰$$

مثال: معادله $x^۲ - ۵x + ۴ = ۰$ را به روش فیثاغورسیان حل کنید.

حل: پاره خط $AB = ۵$ جدا می‌کنیم وسط آن‌را P می‌نامیم و $PE = \frac{۵}{۲}$ را عمود بر AB اختیار می‌کنیم به مرکز E و شعاع $\frac{۵}{۲}$ کمانی رسم می‌کنیم تا نقطه Q به دست آید.

$$AB = a = ۵$$
$$b = \sqrt{۴} = ۲$$
$$\Delta PEQ: PQ^۲ = \left(\frac{۵}{۲}\right)^۲ - ۲^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow PQ$$
$$= \frac{۳}{۲}$$

$$AQ = AP + PQ = \frac{۵}{۲} + \frac{۳}{۲} = ۴$$
$$QB = PB - PQ = \frac{۵}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۱$$

توجه: ریشه‌های معادله درجه دوم $x^۲ + ax + b^۲ = ۰$ مانند حالت قبل حل می‌شوند و طول‌های AQ و QB با علامت منفی نمایش داده می‌شوند.

برای حل معادله $x^۲ + ax + b^۲ = ۰$ به طریق زیر عمل می‌کنیم:

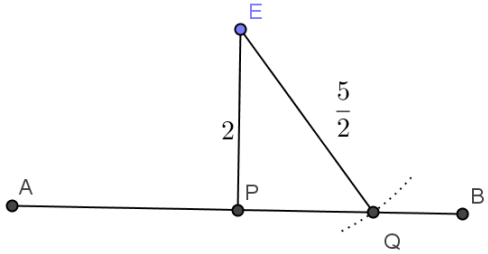
۱- پاره خط AB را مساوی a رسم می‌کنیم و وسط آن‌را P می‌نامیم.

۲- در نقطه B عمود BE را به اندازه b جدا می‌کنیم.

۳- به مرکز P و شعاع PE کمانی رسم می‌کنیم که امتداد ABرا در Q قطع کند.

۴- AQ و QB جواب‌های معادله‌اندAQ را مثبت و QB را منفی در نظر می‌گیریم.

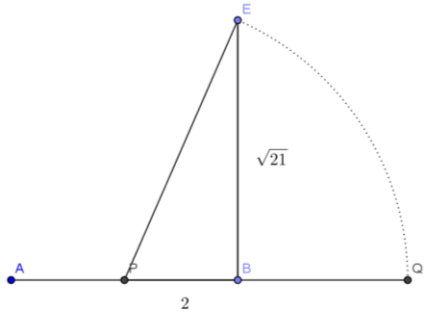
$$AQ.QB = (AP + PQ)(PQ - PB)$$
$$= (PB + PQ)(PQ - PB)$$
$$PQ^۲ - PB^۲ = PE^۲ - PB^۲ = BE^۲ = b^۲$$



معادله $x^۲ - ۴x - ۲۱ = ۰$ را به روش فیثاغورسیان حل کنید.

حل: پاره‌خط AB را به اندازه ۴ واحد جدا می‌کنیم و در نقطه B عمودی اخراج می‌کنیم و BE را به اندازه $\sqrt{۲۱}$ جدا می‌کنیم.

به مرکز P و شعاع PE کمانی رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در Q قطع کند.



$$PE^۲ = PB^۲ + BE^۲ = ۲^۲ + \left(\sqrt{۲۱}\right)^۲$$
$$= ۴ + ۲۱ = ۲۵$$
$$\Rightarrow PE = ۵ = PQ$$
$$AQ = AP + PQ = ۲ + ۵ = ۷$$
$$BQ = PQ - PB = ۵ - ۲ = ۳$$

AQ را مثبت و BQ را منفی در نظر می‌گیریم لذا جواب‌های معادله می‌شوند ۷ و ۳-

ریشه‌های معادله $x^۲ + ax - b^۲ = ۰$ همان ریشه‌های معادله $x^۲ - ax - b^۲ = ۰$ می‌باشند به‌جز آن‌که علامت‌های آن‌ها عوض شده‌اند.

مثال: جواب‌های معادله $x^۲ - ۴x - ۲۱ = ۰$ را به روش فیثاغورسیان به دست آورید.

حل: ریشه‌های معادله $x^۲ - ۴x - ۲۱ = ۰$ همان ریشه‌های معادله $x^۲ - ۴x - ۲۱ = ۰$ می‌باشند. که در بالا حل شد و علامت‌های آن‌ها عوض می‌شوند پس جواب‌ها می‌شود ۷- و ۳

اعداد خوب

عدد خوب عددی است که در مبنای ۲ تعداد یک‌های موجود آن زوج باشد؛

مجموع اعداد خوب کمتر از ۲^n چقدر است؟

حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال در یک نگاه

محمدعلی نقش

انجمن علمی معلمان ریاضی اصفهان

ma_naghsh@mathhouse.org

کتاب‌های درسی دبیرستان اگر چه هرکدام موضوع خاصی را بررسی می‌کنند، اما یک هدف مشترک آن‌ها تقویت قوه تفکر و نتیجه‌گیری‌های منطقی از اصول و نظریه‌ها و تعقل و پی بردن به حقایق امور و پاسخ‌گویی به چراهاست.

کلاس درس نباید مانند یک رستوران باشد و معلم سرآشپز! همه چیز پخته و آماده و به‌صورت جذاب تزیین شده و در اختیار دانش‌آموز قرار گیرد و او هم تنها هزینه آن‌را پرداخت نماید! و شاید بر پایه دستورالعمل‌های کلیشه‌ای قادر به حل چند مساله یا تست شده و با کوهی از اطلاعات خام همچون یک لوح فشرده از دبیرستان فارغ‌التحصیل شود بدون آن‌که قادر به تجزیه و تحلیل و پردازش اطلاعات برای حل مساله و نوآوری باشد. معلم باید با طرح سوال‌های مناسب و در جهت اهداف آموزش هر مفهوم، انگیزه و شوق لازم را در دانش‌آموز ایجاد و او را تشنه‌ی جواب کند تا خود با هدایت مربی راه‌کارها را بیابد، فکر کردن و فرورفتن درعمق و صید مفاهیم و خلق کردن را بیاموزد. از "چشم" گفتن بگذرد و به "چرا" گفتن برسد.

آب کم جو تشنگی آور به دست

تا بجوشد آبت از بالا و پست

با این مقدمه کوتاه که "خود حدیث مفصل بخوان"، نگاهی از این منظر به حسابان و دیفرانسیل و انتگرال خواهیم داشت.

صرفنظر از ابتدای کتاب حسابان که در تکمیل ریاضی سال اول و دوم (ریاضی ۱و۲) مطالبی مطرح شده، تابع را باید از مفاهیم اساسی کتاب تلقی کرد. توابع به عنوان خطوط ارتباطی در دستگاه اعداد حقیقی که ما را از عددی به عددی هدایت می‌کنند مطرح هستند. عمده بحث در دو کتاب، زیر دو عنوان "شناختن" و "ساختن" تابع طبقه‌بندی می‌شود.در زمینه شناخت تابع موارد زیر بررسی می‌شود:

ضابطه‌ی تابع (دستورالعمل تعیین مقدار تابع به ازاء هر عضو دامنه تابع)

دامنه تابع (معمولا وسیعترین زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ که مقدار تابع برای هر عضو آن تعریف شده)

برد تابع (محصول انجام اعمال روی عضوهای دامنه)

نوع تابع: زوج، فرد، صعودی، صعودی اکید، نزولی، نزولی اکید، یک به یک، پوشا، متناوب.

حد در یک نقطه، حد دربی نهایت، حد بی‌نهایت، پیوستگی در هر نقطه دامنه، مشتق‌پذیری در هر نقطه دامنه، تابع مشتق، نقاط بحرانی، اکسترمم‌ها، تغییرات، تقعر، نقاط عطف، نمودار.

برای تأمل و توقف و در نتیجه فرورفتن در عمق می‌توان سئوالاتی در زمینه رابطه خواص تابع مطرح کرد (آموزش طرح سئوال). به عنوان نمونه:

۱- از نظر زوج یا فرد، توابع به چند دسته تقسیم می‌شوند؟

۲- آیا تابعی وجود دارد که هم زوج و هم فرد باشد؟

۳- آیا تابعی که هم صعودی باشد و هم نزولی وجود دارد؟

۴- آیا تابعی هست که هم صعودی اکید و هم نزولی اکید باشد؟ (توجه کنید برای رد صعودی اکید یا نزولی اکید بودن، تابع باید حداقل دو عضو داشته باشد).

۵- آیا تابع زوج و یک به یک وجود دارد؟

۶- آیا هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید یک به یک است ؟

۷- آیا هر تابع یک به یک یکنوای اکید است؟

۸- آیا تابع یک به یک می‌تواند متناوب باشد؟

۹- آیا تابع متناوب می‌تواند یک به یک باشد؟

۱۰- از خاصیت یک به یک بودن تابع در حل چه مسایلی می‌توان استفاده کرد؟ (مثلا معادلات)

۱۱- از خاصیت یکنوای اکید بودن تابع در حل چه مسایلی می‌توان استفاده کرد؟ (مثلا نامعادلات)

۱۲- آیا دامنه یک تابع متناوب می‌تواند متناهی باشد؟

و ...

از آن‌جا که تابع با عضوها یا با نمودار یا با ضابطه و دامنه معرفی می‌شود، دانش‌آموزان باید راه‌های بررسی خواص تابع را در هر سه مورد بیاموزند به‌خصوص چون نمودار تابع جلوه هندسی خواص تابع است، تشخیص خواص با توجه به نمودار مورد توجه کتاب است.

اما "ساختن" توابع با استفاده از توابعی که در این بحث آن ها را "توابع ساده" می‌نامیم و اعمال توابع صورت می‌گیرد.

با آنالیز توابعی که در دو کتاب حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال مطرح هستند به بیست تابع ساده برمی‌خوریم که آشنایی با خواص این توابع برای دانش‌آموزان بسیار مفید و کارساز است. این توابع عبارتند از:

۱. $f(x) = c$ (تابع ثابت)

۲. $f(x) = x$ (تابع همانی)

۳. $f(x) = -x$ (تابع قرینه ساز)

۴. $f(x) = \frac{1}{x}$ (تابع وارون ساز)

۵. $f(x) = x^n$ ($n \in N$ و $n > 1$ تابع توان طبیعی)

۶. $f(x) = x^0$ (تابع توان صفر)

۷. $f(x) = sgn(x)$ (تابع علامت)

۸. $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ($n \in N$ و $n > 1$ تابع ریشه‌گیر)

۹. $f(x) = |x|$ (تابع قدرمطلق)

۱۰. $f(x) = [x]$ (تابع جزء صحیح)

۱۱. $f(x) = a^x$ ($a > 0$ و $a \neq 1$ تابع نمایی)

۱۲. $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ و $a \neq 1$ تابع لگاریتم)

۱۳. $f(x) = \sin x$ (تابع سینوس)

۱۴. $f(x) = \cos x$ (تابع کسینوس)

۱۵. $f(x) = \tan x$ (تابع تانژانت)

۱۶. $f(x) = \cot x$ (تابع کتانژانت)

۱۷. $f(x) = \sin^{-1} x$ (تابع وارون سینوس)

۱۸. $f(x) = \cos^{-1} x$ (تابع وارون کسینوس)

۱۹. $f(x) = \tan^{-1} x$ (تابع وارون تانژانت)

۲۰. $f(x) = \cot^{-1} x$ (تابع وارون کتانژانت)

برای ساختن توابع جدید اعمال جمع، تفریق، ضرب،

تقسیم، ترکیب، تابع وارون و تابع مشتق در دو کتاب مطرح شده است. یک روش که برای بررسی خواص تابع‌هایی که ساخته می‌شوند کارایی دارد و بسیاری از قضایا زیر چتر آن جای دارند راهی است که در این نوشته "روش جزء به کل" خوانده می‌شود. منظور این است که با توجه به خواص اجزاء خاصیت کل را بررسی کنیم. یکی از اهداف این نوشته آشنایی با این روش است. اگرچه بحث بسیار گسترده است، تا جایی که موجب اطاله کلام و لبریز شدن کاسه صبر نشود، سعی می‌کنیم با ذکر چند نمونه روش را توضیح و بررسی همه حالت‌ها در هر نمونه و تکمیل آن‌را به عهده علاقه‌مندان واگذار می‌کنیم.

نمونه۱- فرض کنید a و b دوعدد حقیقی باشند. $a+b$ و$a-b$ و$a.b$ و$\frac{a}{b}$ را با توجه به علامت a وb تعیین علامت کنید. در بعضی حالت‌ها نتیجه قطعی است (مثل جمع دو عدد مثبت، مثبت است) و بعضی موارد مبهم است.

(مثل مجموع یک عدد مثبت و یک عدد منفی که ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد).

در این بحث دانش‌آموز با موارد استفاده از کلمه "مبهم" نیز آشنا می‌شود. معمولا مساله‌ای که داده‌های آن کافی نیست و با تکمیل اطلاعات و بررسی شرایط می‌توان پاسخ قطعی را مشخص کرد، مبهم خوانده می‌شوند. مانند پرونده ناقصی که قاضی قبل از تکمیل پرونده حکمی صادر نمی‌کند.

نمونه۲- اگر a و b اعدادی طبیعی باشند، در مورد زوج یا فرد بودن $a+b$ و$a.b$ بحث کنید.

مثال: مجموع دو عدد زوج، زوج است.

نمونه۳- اگر aو b اعدادی حقیقی باشند، در مورد گویا یا گنگ بودن $a+b$ و $a-b$ و $a.b$ و $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ بحث کنید. مثال: مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، گنگ است.

موارد زیر در بررسی همگرایی یا واگرایی دنباله و حد، پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع بسیار شبیه نمونه۳ هستند.

نمونه۴- دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مفروضند. درمورد همگرایی یا واگرایی دنباله‌های $\{a_n + b_n\}$ و$\{a_n - b_n\}$ و $\{a_n.b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b_n \neq 0)$ بحث کنید.

مثال: مجموع یک دنباله همگرا و یک دنباله واگرا، واگرا است. (مشابه مثال نمونه ۳) حاصلضرب دنباله همگرا به غیر صفر و دنباله واگرا، واگراست.

حاصلضرب دنباله همگرا به صفر و دنباله واگرا، مبهم است. مثال: حاصلضرب دنباله‌های $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و$\{n\}$ همگرا ولی حاصلضرب دنباله‌های $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و$\{n^2\}$ واگرا ست.

نمونه۵- اگر $D_f \cap D_g$ شامل یک همسایگی a باشد، در مورد حد توابع $f+g$ و$f-g$ و$f.g$ و $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی a بحث کنید.

مثال: اگر f در نقطه a حد داشته باشد ولی g در نقطه a حد نداشته باشد آن‌گاه f+g در نقطه a حد ندارد.

اگر f در نقطه a حد داشته باشد و حد آن صفر نباشد و g درنقطه a حد نداشته باشد آن‌گاه f.g در نقطه a حد ندارد.

نمونه۶- در بررسی خاصیت یک به یک بودن توابع با روش جزء به کل به حالت جالبی برمی‌خوریم:

اگر f و g توابعی یک به یک باشند آن‌گاه fog یک به یک است.

اثبات: برای هر x_1وx_2 از D_{fog}:

$$(fog)(x_1) = (fog)(x_2) \Rightarrow f\big(g(x_1)\big)$$
$$= f\big(g(x_2)\big) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال: توابع $h(x)=\log\sqrt{\frac{2x+1}{3x-1}}$ و $h(x)=2^{\cos^{-1}x}$ و $h(x)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)$ یک به یک هستند.

با استفاده از خواص نامساوی‌ها به عنوان سرچشمه و روش جزء به کل، یکنوایی بسیاری از توابع به راحتی قابل بررسی است. به بعضی از خواص نامساوی‌ها که کمتر در کتاب به آن‌ها اشاره شده و بسیار مفید هستند اشاره می‌کنیم:

$$a<b \text{ و } c<d \Rightarrow a+c<b+d$$

$$a<b \text{ و } c\le d \Rightarrow a+c<b+d$$

$$a\le b, c\le d \Rightarrow a+c\le b+d$$

$$0<a<b, 0<c<d \Rightarrow a.c<b.d$$

$$0<a\le b, c<d \Rightarrow a.c<b.d$$

$$0<a\le b, 0<c\le d \Rightarrow a.c\le b.d$$

$$a<b<0, c<d<0 \Rightarrow a.c>b.d$$

$$0<a<b \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$

$$a<b<0 \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$

نمونه۷: اگر f تابع صعودی (یا نزولی) و g تابع صعودی اکید (یا نزولی اکید) باشد، آن‌گاه f+g صعودی اکید (یا نزولی اکید) است.

اثبات: برای هر x_1وx_2 از دامنه $f+g$:

$$f(x_1)\le f(x_2), g(x_1)<g(x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)$$

$$\Rightarrow (f+g)(x_1)<(f+g)(x_2)$$

مثال: $h(x)=[x]+\tan^{-1}x$ صعودی اکید است.

نمونه۸– اگر f و g صعودی اکید و برای هر x از $D_{f.g}$ داشته باشیم $f(x)<0$ و $g(x)<0$ آن گاه $f.g$ نزولی اکید است. در اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم به موارد مبهم نیز بر می‌خوریم. مثلا مجموع یک تابع صعودی اکید و تابع نزولی اکید مبهم است. اما جالب است که در ترکیب توابع یکنوا یا یکنوای اکید حالت مبهم وجود ندارد.

نمونه۹– اگر f صعودی اکید و g نزولی اکید باشد، آن گاه fog نزولی اکید است.

اثبات: برای هر x_2 و x_1 از D_{fog} اگر $x_1<x_2$ آن‌گاه $g(x_1)>g(x_2)$

آن‌گاه $f(g(x_1))>(fog)(x_1)$

بنابراین $(fog)(x_1)>(fog)(x_2)$

نمونه۹– اگر f نزولی و g نزولی اکید باشد آن گاه fog صعودی است.

نمونه۱۰– اگر $D_f\cap D_g$ شامل یک همسایگی a باشد، در مورد پیوستگی توابع $f+g, f-g, f.g$ و $\frac{f}{g}$

مثال: اگر f در تقطه a پیوسته و $f(a)\neq 0$ و g در نقطه a ناپیوسته باشد آن‌گاه $f.g$ در a ناپیوسته است.

نمونه۱۱– مساله‌ای مشابه نمونه ۱۰ برای بررسی مشتق‌پذیری طرح و همه حالت‌ها را بررسی کنید.

امید است علاقه‌مندان از این مشت نمونه خروار استفاده و خود بحث را تکمیل فرمایند.

هرگونه پیشنهاد یا انتقادی در جهت بهبود ارائه این بحث را به آدرس الکترونیکی زیر ارسال فرمایید.

ma.naghsh@mathhouse.org

اولین مسابقه سراسری ریاضی
بین دانش آموزان ممتاز دبیرستانهای کشور

HARVARD UNIVERSITY

PRINCETON
UNIVERSITY

STANFORD
UNIVERSITY