

## روش‌های خلاقانه‌ی تمرین مهارت‌های ریاضی<sup>۱</sup>



کالین فاستر

تیرماه ۹۷

(نوشته شده برای ویکی‌نوشت)

### مقدمه

چرا درس‌های ریاضی مدرسه این قدر کسالت‌بارند؟ شاید این سؤال کمی غیرمنصفانه باشد، همه دانش‌آموزان و همیشه، ریاضیات را کسالت‌بار نمی‌دانند، برخی از آن‌ها ریاضی را دوست دارند و از درس‌های ریاضی‌شان لذت می‌برند. ولی تعداد زیادی از دانش‌آموزان چنین لذتی را از ریاضی تجربه نمی‌کنند. معمولاً بزرگسال‌ها درباره‌ی ریاضی گلایه می‌کنند که در زمان مدرسه کسالت‌بارترین درس‌شان بوده است. چرا این طور است؟ یکی از دلایلی که معمولاً گفته می‌شود، وجود صفحه‌های پشت سرهم از تمرین‌های تکراری است. در انگلیس، معمولاً کتاب‌هایی که دانش‌آموزان در کلاس ریاضی حل می‌کنند، با عنوان «کتاب تمرین» شناخته می‌شوند. در این کتاب‌ها، تمرین‌ها برجسته‌ترین فعالیت نوشتنی است که سر کلاس درس انجام می‌شود و تمرین‌های سنتی ریاضی می‌توانند بسیار ناخوشایند باشند.

چرا معمولاً معلم‌ها و مدارس به جای تمرکز بر کاوش و حل مسئله، دانش‌آموزان را با انبوهی از تمرین‌های تکراری درباره‌ی رویه‌ها درگیر می‌کنند؟ به نظرم جواب این سؤال، نیاز جدی به مهارت در استفاده از رویه‌ها است. اگر قرار باشد دانش‌آموز، ریاضی پیچیده‌تری یاد بگیرد یا درگیر حل مسئله‌های سخت‌تر شود، به کسب مهارت در استفاده از رویه‌های مهم ریاضی، نیاز خواهد داشت. دانش‌آموزانی که جعبه ابزاری دم دستی از رویه‌های ریاضی ندارند، برای رویارویی با مسئله‌ها و موقعیت‌های جدید توانمند نیستند. بنابراین کسب مهارت در استفاده از رویه‌ها برای پیشرفت دانش‌آموزان در ریاضی ضروری است.

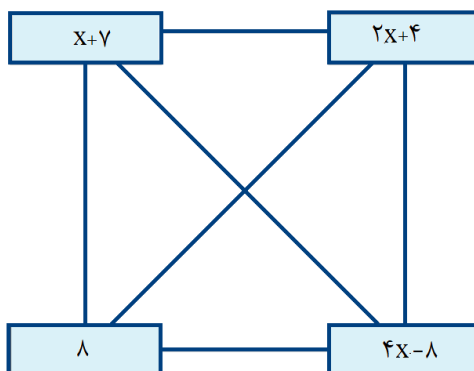
برخی از افراد ادعا می‌کنند نیازی به حل کردن تمرین‌های مهارتی در ریاضیات نیست، چرا که دانش‌آموزان با انبوهی از مسئله‌های ریاضی به عنوان تکلیف مواجه می‌شوند و در حین حل مسئله، با تمام رویه‌های رایج روبه‌رو می‌شوند و آن‌ها را ضمن حل مسئله یاد می‌گیرند. این ادعا شبیه این است که بگوییم یک موسیقی‌دان برای کسب مهارت در موسیقی، نیازی ندارد روی گام‌ها و یا اتودها تمرین کند، و فقط کافی است تعداد زیادی از قطعات متنوع را بنوازد. من فکر می‌کنم این ایده، اصولاً در یادگیری موسیقی ایده‌ی مناسبی نیست، به این دلیل که در هیچ قطعه‌ای، به اندازه‌ی کافی روی هیچ کدام از مهارت‌های مورد نیاز در موسیقی تمرکز نمی‌شود؛ بلکه معمولاً در نواختن هر قطعه، با چندین چالش تکنیکی مواجه می‌شویم. ممکن است نوازنده بتواند هر یک از این چالش‌ها را کج‌دار و مریز از سر بگذراند، ولی قطعاً با این روش نمی‌تواند اشکالات خود را برطرف کند و در موسیقی پیشرفت کند. در نتیجه پس از مدتی، پیشرفتش متوقف می‌شود. برای تسلط به هر تکنیک، لازم است بر یادگیری همان تکنیک تمرکز کنیم؛ در غیر این صورت حافظه‌ی فعال‌مان در یک زمان با تمام چیزهایی که باید به آن‌ها فکر کنیم مشغول می‌شود. این استدلال، همان استدلال سنتی‌ای است که ما را به استفاده از تمرین‌های مهارتی در ریاضی سوق می‌دهد. اما اگر این تمرین‌ها خلاقانه طراحی نشده باشند، حل کردن‌شان نمی‌تواند برای دانش‌آموزان لذت‌بخش باشد. در این صورت ممکن است ذهن دانش‌آموز خاموش شود و تمرین‌ها را طوطی‌وار حل کند و در نتیجه یادگیری خیلی کمی از این تمرین‌ها حاصل شود. همچنین، ممکن است استفاده از تمرین‌های غیر خلاقانه، احساسات منفی دانش‌آموزان را نسبت به ریاضی بیشتر کند. در این صورت دانش‌آموزان رغبتی نخواهند داشت که به چیزی فراتر از موضوع تمرین برسند.

<sup>۱</sup> فاستر، کالین (خرداد ۱۳۹۷)، روش‌های خلاقانه‌ی تمرین مهارت‌های ریاضی، ویکی‌نوشت شماره ۴.

## اتوذهای ریاضی

سؤال مورد علاقه من این است: آیا استفاده از تمرین‌های مهارتی، تنها راه برای کسب مهارت در استفاده از رویه‌های مهم ریاضی است؟ من اخیراً جایگزینی برای تمرین‌های مهارتی در ریاضی پیدا کرده‌ام. این جایگزین را شبیه اتودها در موسیقی، «اتوذهای ریاضی» می‌نامم. اتودها در موسیقی، قطعه‌هایی هستند که با هدف ارتقای توانایی نوازنده در یک تکنیک خاص، طراحی شده‌اند. مثلاً یکی از این تکنیک‌ها می‌تواند نواختن تعداد زیادی نت پشت سر هم با سرعت زیاد در پیانو باشد. البته معمولاً این اتودها طوری نوشته می‌شوند که ترکیب زیبایی هم داشته باشند. مثلاً اتوذهای شوپن، حیرت‌انگیزند و این روزها، افراد زیادی این قطعه‌ها را گوش می‌کنند، بدون این که بدانند آن‌ها اتوداند. شاید حتی بتوان ادعا کرد که محدودیت تمرکز بر چالش‌های فنی خاص، باعث ایجاد خلاقیت در موسیقی است.

فکر کردن به اتودها در موسیقی، مرا به سمت این سؤال برد: آیا ما می‌توانیم چیزی مشابه این اتودها را در ریاضی داشته باشیم؟ و در این صورت، اتوذهای ریاضی باید چه شکلی باشند؟ من در سایت [www.mathematicaletudes.com/](http://www.mathematicaletudes.com/) در حال جمع‌آوری و طراحی فعالیت‌هایی هستم که بتوانیم آن‌ها را مثال‌هایی از اتوذهای ریاضی بدانم (فوستر؛ ۲۰۱۳، ۲۰۱۴، ۲۰۱۷). در اتوذهای ریاضی به دنبال این هستیم که تمرین‌های مورد نیاز دانش‌آموزان را تأمین کنیم، ولی به شکلی غنی‌تر و هیجان‌انگیزتر. در ادامه مثالی می‌زنم که می‌تواند برای دانش‌آموزان ۱۱ تا ۱۴ ساله مناسب باشد. فرض کنید می‌خواهید دانش‌آموزان تان معادلات خطی‌ای حل کنند که در دو طرف مجهول دارند. شما می‌توانید راه حل سنتی را انتخاب کنید و به آن‌ها تعداد زیادی معادله شبیه  $2x + 7 = 5 - 3x$  بدهید تا حل کنند؛ یا در عوض، از اتود زیر استفاده کنید. به نظر من در صورتی که اتود زیر را انتخاب کنید، دانش‌آموزان تان علاوه بر کسب مهارت در حل معادله‌ها، چیزهای بیشتری کسب می‌کنند (شکل ۱ [فوستر ۲۰۱۵]).



شکل ۱. یک چهارضلعی از عبارت‌ها (فوستر، ۲۰۱۵)

شکل ۱، یک چندضلعی از عبارت‌ها است (فوستر ۲۰۱۵). در این شکل، چهار عبارت جبری می‌بینید که هر کدام با خطی به بقیه عبارت‌ها وصل شده است. هر خطی که دو عبارت را به هم وصل می‌کند، یک معادله را مشخص می‌کند. مثلاً خطی که دو عبارت  $x + 7$  و  $2x + 4$  را به هم وصل کرده، معادله‌ی  $x + 7 = 2x + 4$  را نشان می‌دهد.

در ابتدای این تکلیف از دانش‌آموزان می‌خواهیم که هر یک از شش معادله را کنار خطوط متناظرشان بنویسند و هر یک از آن‌ها را حل کنند. در ادامه خواهیم دید که این اتود چیزی بیش از حل شش معادله است؛ الگویی در جواب شش معادله وجود دارد؛ جواب‌های شش معادله ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ هستند. هنگام طراحی اتود، معادله‌ها را طوری انتخاب کرده‌ایم تا چنین الگویی وجود داشته باشد؛ قرار است این الگو راهی برای ادامه کار فراهم کند. زمانی که دانش‌آموزان معادله‌ها را حل کردند، ممکن است بگویند «چه بامزه!» یا مثلاً «چه طور این کار را کردید؟» بعد از این، مسئله جدیدی مقابل دانش‌آموزان شما است؛ می‌توانید از آن‌ها بخواهید یک چندضلعی از عبارت‌ها بسازند که جواب معادله‌هایش ترکیب قشنگی داشته باشد (این که ترکیب قشنگ، چه نوع ترکیبی است، به خودشان واگذار کنید).

حل این مسئله، از آن چه به نظر می‌رسد، سخت‌تر خواهد بود. لازم است دانش‌آموز سعی و خطاهای زیادی کند، در این بین معادله‌های زیادی را حل کرده و بعد دوباره بعضی از عبارات‌ها را تغییر دهد و باز هم معادله حل کند. این همان چیزی است که از تعداد زیاد تمرین مهارتی انتظار داشتیم. طی حل این مسئله، دانش‌آموزان کم‌کم سعی و خطایشان را هوشمندانه‌تر می‌کنند و می‌فهمند چه طور عبارات‌های جبری را تغییر دهند تا به جواب‌های مطلوب‌شان برسند. مهندسی معکوس حل معادله، باعث می‌شود در حل معادله‌ها مهارت لازم را کسب کنند. ممکن است دانش‌آموزی بخواهد با اعمال تغییراتی روی چهار عبارت اولیه مسئله را حل کند. مثلاً دانش‌آموزی را تصور کنید که می‌خواهد به جواب‌های ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ برسد و برای این کار، هر چهار عبارت را دو برابر می‌کند؛ ولی مشاهده می‌کند که جواب‌ها فرقی نمی‌کنند؛ این، یک نقطه شروع مناسب برای بحث درمورد معادله‌هاست. یا ممکن است دانش‌آموزی به مجموعه جوابی کاملاً متفاوت فکر کند، مثلاً بخواهد شش عدد اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ و ۱۳ جواب معادله‌هایش باشد. حتی برای شروع، این که بخواهیم هر شش معادله جواب‌های صحیح داشته باشند هم به اندازه کافی چالش‌برانگیز است.

این فعالیت را می‌توانیم به شکل‌های مختلفی انجام دهیم. مثلاً با تغییر تعداد عبارات‌های جبری؛ می‌توانیم برای شروع از یک مثلث با سه عبارت جبری شروع کنیم. یا در نقطه مقابل می‌توانیم فعالیت را چالش‌برانگیزتر کنیم، مثلاً به جای تولید یک ترکیب جالب از جواب‌ها، از دانش‌آموزان بخواهیم به این سؤال فکر کنند که چه ترکیب‌هایی از شش عدد می‌تواند جواب‌های معادله‌هایی باشد که از شکل ۱ به دست می‌آید؛ مثلاً آیا ممکن است یک ترکیب از جواب‌ها به شکل ۲، ۲، ۲، ۲ و ۳ باشد؟ بعضی از دانش‌آموزان مشغول حل مسئله اول خواهند بود، در حالی که دانش‌آموزانی که در حل معادله‌ها مهارت بیشتری کسب کرده‌اند، می‌توانند با مسائل متنوع‌تر و پیچیده‌تر حول و حوش همین فعالیت دست و پنجه نرم کنند. در این حین تمرکز این دانش‌آموزان از این که رویه حل معادله چیست به بررسی ساختار این چندضلعی‌ها و کاوش درمورد معادله‌ها تغییر می‌کند. به این شکل، این فعالیت قرار است تکرار یک رویه ضروری را در دل یک مسئله‌ی ریاضی غنی و چالش‌برانگیز جا دهد.

می‌خواهم تأکید کنم که اتودها باید بعد از این که معلم رویه‌ی مورد نظر را درس داد، به کار گرفته شوند. قرار نیست دانش‌آموزان هنگام کار روی اتود، خودشان هم رویه‌ها را کشف کنند. همچنین نباید به اتودها به چشم یک فعالیت اضافه نگاه کنیم که می‌تواند به انتهای طرح درس‌های پر از تمرین‌مان اضافه شود. همیشه معلم‌ها با کمبود وقت برای طرح درس‌هایشان مواجه‌اند و اضافه کردن یک فعالیت بیشتر به طرح درس‌های قبلی کار سختی است. **اتودها قرار است جای تمرین‌های پرتکرار را بگیرند**، نه این که به تمرین‌ها اضافه شوند. معلم‌ها مثل قبل درس را می‌دهند و بعد به جای اینکه بگویند «حالا تمرین‌های ۱ تا ۲۰ از صفحه ۵۲ را حل کنید»، می‌گویند «حالا این اتود را حل کنید»؛ این یعنی که اتودها باید دست کم به اندازه تمرین‌هایی که جای‌شان را گرفته‌اند، کارآمد باشند. حال این سؤال تجربی پیش می‌آید که آیا واقعا چنین موضوعی محقق خواهد شد یا نه.

### تحقیق تجربی

اخیراً در مجموعه‌ای از تحقیق‌های شبه آزمایشی (فوستر ۲۰۱۸)، اتودها را با تمرین‌های سنتی در دو حوزه مفهومی مقایسه کردم:

- یک موضوع جبری: حل کردن معادلات خطی که دو طرف‌شان مجهول دارند (با استفاده از اتودی که در بالا شرح دادم)؛
- یک موضوع هندسی: تجانس یک شکل روی صفحه شطرنجی، حول یک نقطه مشخص با ضریب تجانس معلوم.

پیش‌آزمون و آزمون نهایی فقط روی انجام درست رویه متمرکز بود. هدف این بود که ببینیم آیا برای کسب مهارت در رویه‌ها، استفاده از اتود می‌تواند به اندازه استفاده از تمرین‌های سنتی کارآمد باشد یا نه. به نظرم، استفاده از اتودها، منافع دیگری هم دارد که البته سنجش‌شان سخت است؛ مانند بهبود درک مفهومی از ساختارهای ریاضی و افزایش توانایی‌های حل مسئله‌ی دانش‌آموزان. همچنین امیدوارم اتودها برای دانش‌آموزان هیجان‌انگیزتر از تمرین‌ها باشند و به همین خاطر بیشتر بتواند دانش‌آموزان را درگیر ریاضی کند. به هر حال ارزیابی این ادعاها کار راحتی نیست و به همین خاطر، در این مجموعه تحقیق اولیه، کار را فقط به بررسی اثر اتودها بر مهارت در رویه‌ها معطوف کردم. به این ترتیب، هم پیش‌آزمون و هم پس‌آزمون به نحوی،

بیشتر به نفع گروه کنترل بود که فقط از تمرین‌های مهارتی استفاده کرده بودند. با این وجود، بر اساس نتایج این تحقیقات، برای کسب مهارت در رویه‌ها، هیچ فرقی بین تمرین‌های سنتی و استفاده از اتودها نیست؛ این یعنی حتی اگر برای معلم فقط مهارت در رویه‌ها مهم باشد، استفاده از اتودها می‌تواند به طور کامل جایگزین تمرین‌های مهارتی پرتکرار باشد. این تحقیقات نشان می‌دهند که ما مجبور نیستیم رویه‌ها را فدای فعالیت‌های غنی‌تر و جالب‌تر کنیم؛ هر چند که این نتیجه‌گیری بر اساس نتایج اولیه و تنها در دو موضوع به دست آمده است. در حال حاضر به دنبال این هستیم که اتودهای بیشتری را بررسی کنیم و بینم زمانی که دانش‌آموزان با اتودها کار می‌کنند، در مقایسه با تمرین‌های سنتی، چه قدر درگیر فعالیت می‌شوند.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، اتودها و تمرین‌های سنتی را در کسب مهارت در رویه‌ها با هم مقایسه کردم. ادعا نمی‌کنم که ایده‌ی اتودها، ایده‌ای کاملاً بدیع است، شما می‌توانید در وبسایت‌هایی مثل <https://nrich.maths.org/>، فعالیت‌هایی پیدا کنید که بسیار شبیه اتودها هستند. کاری که قصد داشتم بکنم این بود که به دنبال پتانسیل‌های اتودها، برای جایگزینی تمرین‌های سنتی باشم. نتایج تحقیقاتم نشان می‌دهند که برای کسب مهارت در رویه‌ها، اتودها از تمرین‌های سنتی ناکارآمدتر نیستند و به نظرم خیلی محتمل است که اتودها منافع دیگری هم داشته باشند.

در این مدت، اتودها خیلی زیاد مورد استقبال برخی معلم‌ها قرار گرفته است. دغدغه اصلی این معلم‌ها این است که اگر نیاز به اتود برای یک موضوع داشته باشند، از کجا می‌توانند مثال‌های مناسبی پیدا کنند. من در حال ساخت یک مجموعه در [www.mathematicaletudes.com/](http://www.mathematicaletudes.com/) هستم، در آن جا می‌توانید بیشتر درباره پروژه‌ی اتودهای ریاضی بخوانید. اگر هم شنیدن را به خواندن ترجیح می‌دهید، اخیراً در این مورد مصاحبه‌ای انجام داده‌ام:

[www.mrbartonmaths.com/blog/colin-foster-mathematical-etudes-confidence-and-questioning/](http://www.mrbartonmaths.com/blog/colin-foster-mathematical-etudes-confidence-and-questioning/)

### مراجع

- Foster, C. (۲۰۱۳), Mathematical études: Embedding opportunities for developing procedural fluency within rich mathematical contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44 (۵), ۷۶۵-۷۷۴. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.770089>
- Foster, C. (۲۰۱۴), Mathematical fluency without drill and practice. *Mathematics Teaching*, 240, ۵-۷.
- Foster, C. (۲۰۱۵), Expression polygons. *Mathematics Teacher*, 109 (۱), ۶۲-۶۵.
- Foster, C. (۲۰۱۷), [Mathematical études](https://nrich.maths.org/13206). NRICH article available at: <https://nrich.maths.org/13206>
- Foster, C. (۲۰۱۸), [Developing mathematical fluency: Comparing exercises and rich tasks](https://doi.org/10.1007/s10649-017-9788-x). *Educational Studies in Mathematics*, 97 (۲), ۱۴۱-۱۲۱. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9788-x>



مترجم: آمنه ابراهیم‌زاده طاری، دبیرستان دخترانه دوره‌ی اول مفید