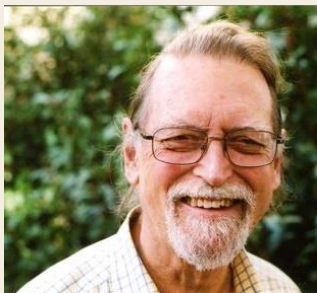


آشتی دادن مردم با جبر^۱



دیوید مانفورد

شهریورماه ۹۸

(نوشته شده برای ویکی‌نوشت)

من، تقریباً از سال ۱۹۵۳ تا الان مشغول ریاضی ورزیدن هستم و در این مدت بارها، به طور مایوس‌کننده‌ای با مردمی برخورد کرده‌ام که گاهی با شرمساری، ولی بیشتر اوقات، با نوعی غرور یادآوری می‌کنند که «ریاضی بدترین درس آنها در مدرسه بوده است». بیشتر اوقات، وقتی کنجکاو می‌شوم به خرج می‌دهید و از آنها سؤال می‌پرسید، در می‌یابید که دانش حساب آنها به طور قابل قبولی خوب است (و حتی با کمی یادآوری و کمک به یاد می‌آورند که چگونه $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ را انجام دهند)، اما از جبر هیچ چیزی به خاطر نمی‌آورند. در «الماس‌های ایندرا» کتاب ریاضی دم دستی‌ای که دیوید رایت، کارولین سریز و من نوشتیم، خواننده‌ی مورد نظر خود را فردی در نظر گرفتیم که «در کار با جبر دبیرستان اعتماد به نفس دارد». وقتی که نسخه‌هایی از کتاب را به دوستان خود دادیم، زود دریافتم که این شرط، خواننده‌های کتاب را بسیار محدود خواهد کرد.

از بیست سال پیش تلاش می‌کنم که این موقعیت دیوانه‌کننده را درک کنم. چرا می‌گویم دیوانه‌کننده؟ خیلی ساده است: چون مقدار بسیار زیادی وقت و پول صرف درس دادن موضوعی می‌شود که بیشتر دانش‌آموزان آن را فراموش می‌کنند. به مدرسه‌های راهنمایی و کلاس‌های دبیرستان سر زدم و کتاب‌های درسی را خریدم و خواندم و خودم را با جریان رایج آموزش ریاضی آشنا کردم. فکر می‌کنم الان به خوبی درک می‌کنم چه چیزی اشتباه است؛ در یک خط: «کل موضوع به گونه‌ای آموزش داده می‌شود که هیچ ربط ملموسی به زندگی دانش‌آموزان ندارد». موضوع به شکل ریاضیات محض آموزش داده می‌شود، نه ریاضیات کاربردی. قسمت‌های کاربردی شامل مسئله‌های معروف به «مسائل کلامی» می‌شوند که بیشتر دانش‌آموزان از آنها متنفرند چرا که با حفظ کردن قواعد نمی‌توان آنها را حل کرد. مهم‌تر اینکه بیشتر این مسائل کلامی، سؤال‌های طبیعی و جالب در مورد جهان نیستند. بیشتر آنها مسئله‌های احمقانه‌ی من در آوردی‌ای هستند که هیچ دردی را از کسی دوا نمی‌کنند. علاوه بر این‌ها، بیشتر فرمول‌هایی که در جبر مدرسه‌ای آموزش داده می‌شوند با دو حرف مرموز x و y بیان می‌شوند در حالی که در فرمول‌های دنیای واقعی همیشه از مخفف‌ها استفاده می‌شود. دانشمندان، اقتصاددان‌ها، آماردان‌ها، متخصصان علوم کامپیوتر و غیره، از x و y فقط برای بیان مختصات نقاط در هندسه استفاده می‌کنند. این حقیقت نیز که در ریاضیات محض از x و y زیاد استفاده می‌شود، خود اثباتی بر نظر من است که جبر مدرسه‌ای در تسخیر ریاضیات محض است.

ما باید یک قدم به عقب برداریم و از خودمان بپرسیم: واقعاً چرا جبر مفید است و چگونه می‌توانیم دانش‌آموزان را به یادگیری آن تشویق کنیم؟ جواب این است که ما در دنیای واقعی، معمولاً با مجموعه‌هایی از اعداد سر و کار داریم که اگرچه از موردی به موردی دیگر تغییر می‌کنند، اما همیشه تابع یک فرمول هستند. بهترین راه برای فهمیدن این نکته از طریق یک مثال است. می‌خواهم ساده‌ترین مثال را برایتان توضیح بدهم، مثالی که باید اولین آشنایی هر دانش‌آموز با جبر باشد، مثالی که نشان می‌دهد فرمول‌ها

^۱ مانفورد، دیوید (شهریورماه ۱۳۹۸)، آشتی دادن مردم با جبر، ویکی‌نوشت شماره ۱۲.

ترسناک، عجیب و غریب، و مشکل نیستند، بلکه راه ساده و دوستانه‌ای هستند برای فهم اعدادی که با آنها سر و کار داریم. مثال مورد نظرم این است:

$$\text{زمان} \times \text{سرعت} = \text{فاصله}$$

این فرمول برای هر سفر، حرکت و هر رویدادی که در فضا-زمان رخ دهد، صدق می‌کند. این فرمول اولاً شهودی است؛ دوماً قوی است، زیرا اگر هر دو تا از مقادیر فاصله، سرعت و زمان را بدانیم، سومی را می‌توانیم از طریق این فرمول به دست آوریم. از آنجایی که دانش‌آموز به راحتی می‌بیند که فرمول از کجا آمده است، برای او واضح است که می‌توان همین فرمول را به صورت زیر هم نوشت:

$$\text{سرعت} = \frac{\text{فاصله}}{\text{زمان}} \quad \text{یا} \quad \text{زمان} = \frac{\text{فاصله}}{\text{سرعت}}$$

به همین خاطر، در نگاه دانش‌آموز این بازآرایی از فرمول نه یک قاعده‌ی حفظی بلکه یک روش شهودی است. در قدم دوم، درست مثل فرمول معروف اینشتین $E = mc^2$ که در آن E نشان دهنده‌ی انرژی (Energy)، m نشان دهنده‌ی جرم (mass) به انگلیسی است و c صرفاً یک قرارداد برای نشان دادن سرعت نور است، هر فرمولی را می‌توان با استفاده از حروف اول کلمات در زبان انگلیسی نشان داد. در مثال اول، از آنجایی که حروف اول کلمات فاصله (distance)، سرعت (speed) و زمان (time) به انگلیسی به ترتیب d ، s و t هستند، فرمول به صورت $d = s \times t$ در می‌آید. می‌توان جزئیات بیشتری هم به فرمول اضافه کرد: فرض کنید که این سفر در طول یک بزرگراه با تابلوهایی که مسافت را به کیلومتر نشان می‌دهد، انجام شده است. این تابلوها مختصات یک مسیر یک بعدی را به ما می‌دهند. بنابراین، برای سفر از نقطه‌ی آ به نقطه‌ی ب داریم:

$$(\text{زمان در نقطه آ} - \text{زمان در نقطه ب}) \times \text{سرعت} = \text{کیلومتر در نقطه آ} - \text{کیلومتر در نقطه ب}$$

این نکته‌ی مهم را که فرمول بیان یک رابطه‌ی عددی همیشه پابرجاست، می‌توان به بهترین شکل با استفاده از نرم‌افزار صفحه گسترده^۲ دید. در نرم‌افزار صفحه گسترده، فاصله و سرعت تعداد زیادی سفر را در دو ستون بنویسید. سپس تنها در خانه‌ی بالایی ستون سوم، فرمول زمان بر حسب سرعت و فاصله را بنویسید و نه مقدار زمان متناظر برای هر سفر خاص را (برای مثال، از آنجایی که ستون اول و دوم با حروف A و B نشان داده می‌شوند، فرمول سرعت در خانه‌ی بالایی ستون سوم به صورت $A1/B1$ خواهد بود). سپس، با استفاده از ماوس، خانه‌ی بالایی ستون سوم را به سمت پایین بکشید تا نرم‌افزار با کمک فرمول، مقادیر زمان برای تمام خانه‌های ستون سوم را حساب کند. قطعاً این روش جادویی قرن ۲۱امی، هوش از سر دانش‌آموزان می‌پراند!

بنابراین، فرمول، روشی برای خلاصه کردن تعداد زیادی مثال در یک شکل کلی و راحت است. آشنایی با فرمول به ما نشان می‌دهد که فرمول، مانند یک جمله‌ی فارسی، هیچ ترسی ندارد؛ همان طور که جمله رابطه‌ی بین فاعل، مفعول، و فعل را بیان می‌کند، فرمول رابطه‌ی بین اعداد را. فرمول همیشه در خدمت شماست. برای مثال ممکن است بپرسید صاعقه‌ای که دیدید در چه فاصله‌ای از شما رخ داد؟ جواب این است: (۱) زمان بین دیدن صاعقه (با تقریب خوبی همزمان با رخ دادن صاعقه) و شنیدن آن را در (۲) سرعت صوت بر حسب متر بر ثانیه ضرب کنید. یک درس مهم دیگر از این مثال این است که در دنیای واقعی فرمول‌ها با اعداد/رای واحد،

^۲ spreadsheet

در این مثال ثانیه و متر، سر و کار دارند و باید این واحدها را متناسب با یکدیگر استفاده کرد. بدون شک، مهم‌ترین فرمول در یک سفر به اروپا عبارت است از:

$$\text{(قیمت به یورو)} \times (\text{نرخ تبدیل ریال به هر یورو}) = \text{(قیمت به ریال)}$$

که بر حسب واحدهای یورو و ریال است. دور از انصاف نیست اگر بگوییم ریاضی‌دانان محض از واحدها بیزارند و حاضرند به هر قیمتی از آنها اجتناب کنند؛ در حالی که ریاضی‌دانان کاربردی به اجتناب‌ناپذیری واحدها واقفند.

این برای شروع خوب بود، اما بقیه جبر را چطور درس بدهیم؟ دانش‌آموزان راهنمایی و دبیرستان، جبر را وقتی خوب می‌فهمند که به پول ربط مستقیم داشته باشد. حقوق، پس‌انداز و قیمت‌ها از موضوعاتی هستند که هر کسی به آنها فکر می‌کند. در اینجا هم نرم‌افزار صفحه گسترده ابزار مهمیست برای بررسی بودجه و این که چطور تغییر یک عدد روی همه‌ی اعداد تأثیر می‌گذارد. بهره‌ی مرکب^۳ باید یکی از موضوعات اصلی ریاضیات دبیرستانی باشد. خیلی از مردم و حتی فارغ‌التحصیلان دانشگاه از رشد تصاعدی بهره و از این که موقع گرفتن وام دانشجویی به حقوق مورد نیاز برای بازپرداختش در آینده فکر نکردند، احساس پشیمانی می‌کنند. وقتی داشتیم با خودم کلنجار می‌رفتم تا کاربردی برای چند جمله‌ای‌ها پیدا کنم، مطلبی در وبلاگم با عنوان "چه طور دانش‌آموزان دبیرستانی را عاشق چند جمله‌ای‌ها کنیم؟" نوشتم. اما به طور کلی باید چند جمله‌ای‌ها، فاکتورگیری و حل معادلات درجه‌ی دو از مباحث درسی دبیرستان حذف شوند. این مباحث همان اندازه برای اکثر دانش‌آموزان مفید هستند که زبان لاتین صد سال پیش مفید بود. به جای آنها، کدنویسی کامپیوتر و ریاضیات مالی با نرم‌افزار صفحه گسترده به خاطر کاربرد فراوانشان باید به مباحث درسی اضافه شوند.

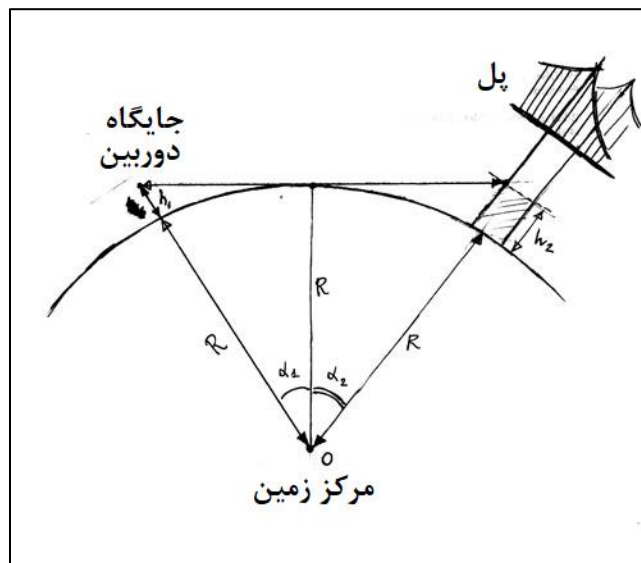
همین اصل در مورد هندسه هم صادق است. سؤالات ملموس، مثل حساب کردن ارتفاع یک درخت یا ساختمان بر اساس مشاهده از سطح زمین و از طریق مثلث‌های متشابه، توجه دانش‌آموزان را به خود جلب می‌کنند. درسی با دانشجویان رشته‌های غیر ریاضی در دانشگاه برآون تدریس می‌کردم. در هفته دوم از تدریس این سؤال را مطرح کردم: شعاع کره‌ی زمین را با داشتن اطلاعات زیر حساب کنید؛ یک عکس از پل نیو پورت که از فاصله‌ی ۳۰ کیلومتری از خلیج نارآگان ست و در ارتفاع ۶ متری بالای سطح آب گرفته شده، یک عکس از پل که از فاصله‌ی حدوداً یک و نیم کیلومتری گرفته شده، و دانستن ارتفاع دکل پل. همچنین با کمک شکل زیر به آن‌ها نشان دادم که چه‌طور انحنای سطح زمین باعث می‌شود تا بخشی از دکل پایین‌تر از سطح افق در عکس قرار بگیرد. تخمین شعاع کره‌ی زمین با این روش خیلی موفقیت‌آمیز بود!

نوشته‌ام را با تعدادی پیشنهاد به پایان می‌برم. می‌دانم که افراد زیادی در جریان آموزش مدارس دخیل‌اند و هر تغییری باید مرحله به مرحله شکل بگیرد. به عقیده‌ی من، جامعه‌ی ریاضی کاربردی باید نقش بیشتری ایفا کند. آماردانان و متخصصان علوم کامپیوتر

^۳ یادداشت مترجم: بهره‌ی مرکب نوعی بهره است که در آن میزان بهره به اصل وام اضافه می‌شود و در نوبت‌های بعدی علاوه بر اصل وام، به بهره نیز بهره تعلق می‌گیرد.

^۴ یادداشت مترجم: ابوریحان بیرونی در کتاب *الاسطرلاب* و بعدها کتاب *قانون مسعودی* روشی مشابه با آنچه نویسنده پیش‌رو گذاشته، برای محاسبه شعاع زمین ارائه می‌کند (به وسیله افتِ افق وقتی از ارتفاعات به افق نگاه می‌کنیم). <https://en.wikipedia.org/wiki/Al-Biruni>.

نقش خیلی پر رنگ‌تری در پیشنهاد دادن مباحث درسی نوین مرتبط با قرن ۲۱ام ایفا کرده‌اند. آنها این کار را با ترویج تدریس آمار و احتمال مقدماتی و مهارت‌های اولیه‌ی کدنویسی کامپیوتر انجام داده‌اند، مباحثی که برای دانش‌آموزان بسیار سودمند هستند.



شکل ۱: R را با داشتن h_1 ، h_2 و فاصله‌ی دوربین از دکل محاسبه کنید (h_2 را می‌توان از مقایسه‌ی عکس‌ها و دانستن ارتفاع واقعی دکل به دست آورد). ملاحظه: این مسئله می‌تواند به محاسبات طاقت‌فرسای منجر شود، اما این محاسبات، با صرف نظر کردن از بعضی مقادیر کوچک به راحتی قابل اجتناب‌اند. این یک درس بزرگ دیگر برای استفاده از ریاضیات در دنیای واقعی است: داده‌های واقعی هیچ وقت دقیق نیستند و به همین خاطر نیازی نیست که ریاضیاتی هم که به کار برده می‌شود صد در صد دقیق باشد.

بدون شک، تأثیرگذارترین طرح اخیر برای بازنگری برنامه‌ی آموزشی مدرسه‌ای (از پیش‌دبستان تا پایه‌ی ۱۲) در آمریکا، طرح "استاندارد اساسی همگانی"^۵ است. بخش ریاضی این طرح روی مدل‌سازی تأکید دارد که طبیعتاً، کاربردهایی را نیز به دنبال خود مطرح می‌کند، اما به‌کارگیری چنین روشی مصداق مَثَل سُرُنا را از ته گشادش زدن است. به عقیده‌ی من باید از مباحث کاربردی شروع کرد و با استفاده از آنها دانش‌آموزان را با مباحث مجرد آشنا کرد؛ در حالی که بخش ریاضی این طرح از ایده‌های مجرد شروع کرده و تنها پس از آن به معلم اجازه می‌دهد که مبحث را با ارائه‌ی یکی دو مدل ریاضی زیبا کند. ظاهراً اکثر بخش ریاضی این طرح توسط سه نفر (به نام‌های دارو، مک کالوم، و زیمبا) نوشته شده که هیچ کدامشان پیش زمینه‌ای در ریاضیات کاربردی یا تجربه‌ای در تدریس در مدارس ندارند.^۶ این طرح با یک مشت اهداف بلندنظر و پُر زرق و برق منتشر شد. اما چه طور می‌توان این اهداف را جدی گرفت وقتی که اکثر مردم حتی حاضر نیستند متنی را که در آن فرمولی به کار رفته بخوانند؟ اهداف بلند و غیر واقع‌بینانه‌ی آنها تنها در صورتی به دست می‌آید که جبر مقدماتی را قابل درک‌تر کرده و به طور مستمر به ارتباط مطالب درسی با زندگی و آینده‌ی شغلی دانش‌آموزان توجه کنیم.

^۵ Common Core Standard

^۶ <https://seattleducation.com/common-core-standards/who-wrote-the-common-core-standards-the-common-core-24/> for a critical view.

توصیه‌ی من ساده است: به آنچه برای دانش‌آموزان مهم، جذاب، و مفید است توجه بیشتری کنید. خیلی‌ها اعتراض می‌کنند که پیشنهاد من باعث ساده‌سازی بیش از حد ریاضی شده و نمی‌تواند توانایی - غیر قابل اندازه‌گیری اما به عقیده‌ی آنها عمیق - قدرت تفکر منطقی و مجرد را پرورش دهد. به نظر من، آنها با استدلال‌شان می‌خواهند وقت و انرژی زیادی را که برای خیره شدن در جبر صرف کرده‌اند، توجیه کنند. وگرنه تفکر عمیق در هر موضوع علمی، قدرت تفکر منطقی را پرورش می‌دهد. برای رسیدن به این هدف، لازم به شکنجه‌ی دانش‌آموزان برای خیره شدن در فاکتورگیری چندجمله‌ای‌ها نیستیم. من فکر می‌کنم ما وقتی در این راه موفق شده‌ایم که به افراد بیشتری یاد داده باشیم تا به یک فرمول به مثابه یک جمله نگاه کنند که رابطه‌ی واقعی و معنی‌داری را بین اعداد بیان می‌کند.



مترجم

مهدی یزدی؛ پژوهشگر ریاضی دانشگاه آکسفورد

بازبینی متن

امیرحسین اصغری؛ دانشگاه جان مورس لیورپول

ویرایش متن، آماده و خوشگل‌سازی فایل پی - دی - اف

شراره تقی دستجردی؛ خانه‌ی ریاضیات اصفهان