فرزود

نشریه انجمن معلمان ریاضی استان اصفهان

و قد تنشأ من جميع
المربعات كل مع المثلث
الذي دونه في المرتبه
ابن سينا $P_n = n^2 + T_{n-1}$

۶ تا ۸ شهریور ۱۳۷۵

اصفهان ایران

ویژه نامه

فرنود

نشریهٔ انجمن معلّمان ریاضی استان اصفهان

هیئت تحریریه :

محمود تلگینی ، فروزان خردپژوه ، محمّدعلی سازش ، حسین مشتاقیانپور و فاطمه‌هانی طبائی

تایپ کامپیوتری : احمد پایدارفر

چاپ : واحد چاپ اداره کل آموزش و پرورش استان اصفهان

تیراژ : ۲۰۰۰

تاریخ انتشار : شهریور ۱۳۷۵

کلام نخست

به‌نام خداوند جان و خرد

کزاو برتر اندیشه برنگذرد

مدتهاست ، شاید بیش‌از هفده سال است ، که تعدادی از معلمین ریاضی اصفهان ، استانی باسابقه‌ای درخشان در علوم ریاضی ، بایکدیگر جلساتی دارند . طی این جلسات باتجربه‌ها علاوه برعلم ، آنچه راکه سالهاست آزموده‌اند در اختیار جوانترها قرارداده و جوانترها نیز به‌نوبهٔ خود با انرژی و شوری که از خود نشان می‌دهند آنچه راکه به‌تازگی آموخته‌اند در اختیار دیگران قرار داده و سایرین را به‌تلاشی همپای خود تشویق می‌نمایند.

شروع حرکتهایی از قبیل تشکیل مرکز تحقیقات معلّمان ، ایجاد ارتباط بین معلّمان دوره‌های مختلف تحصیلی ، برگزاری اوّلین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در سال ۱۳۶۲ را می‌توان ثمرهٔ این تجمع دانست . یکی از دلایل درخشش دانش‌آموزان استان اصفهان در المپیادهای ریاضی را می‌توان نتیجهٔ فعّال و بروزبودن معلّمان آنها دانست.

به‌تدریج جلسات معلّمان ریاضی شکل منظم‌تری یافته به‌طوری‌که این روزها ، بعدازظهر دوشنبه‌ها در برنامهٔ هفتگی اغلب دبیران ریاضی اصفهان و شهرهای‌اطراف به مرکز تحقیقات معلّمان و جلسه باسایر همکاران‌ا ختصاص یافته است.

تشکیل انجمن معلّمان ریاضی اصفهان از دیگر نتایج این گردهم‌آیی بوده که چند سال است مقدمات آن فراهم شده و هیئت مؤسس آن از سال ۱۳۷۳ تشکیل و اقدام به تهیهٔ اساسنامه نمود تا اینکه در روز یکشنبه ۷۴/۱۰/۱۷ مصادف با نیمهٔ شعبان طی دعوتی عام از همهٔ معلّمان ریاضی اصفهان انجمن رسماً کار خودرا با انتخاب شورای اجرایی شروع کرد.

یکی از اهداف این انجمن انتشار نشریه‌ای ترویجی در ریاضی در سطح استان اصفهان به‌منظور ایجاد ارتباط بین معلّمین ریاضی و احتمالاً دانش‌آموزان علاقه‌مند دبیرستانها و مراکز پیش‌دانشگاهی است . این نخستین گام بابرگزاری کنفرانس آموزش ریاضی ایران مصادف شد به‌همین دلیل بی‌مناسبت ندیدیم که ویژه‌نامه‌ای منتشر سازیم . از آنجایی که شورای اجرایی انجمن معلّمان ریاضی و هیئت تحریریهٔ نشریه فعّالانه در برگزاری کنفرانس شرکت دارند و فرصت نیز محدود ، مطمئن هستیم که کارمان ایراد بسیار دارد . امیدواریم برما بخشیده و راهنماییمان کنید تا برطرف گردد ، انشاءالله.

ادامهٔ انتشار این مجله که آن را فرنود* نامیده‌ایم . بدون همکاری شما دوست و خوانندهٔ گرامی ، که باارسال مقالات خود و نیز مسایل مناسب در این زمینه مارا یاری می‌کنید ، امکان‌پذیر نیست . مطالب ارسالی شما پس از داوری به‌نام خودتان درج خواهد شد.

در این‌جا می‌بایست از زحمات معلّم ارجمند آقای دکتر علی‌رجالی دانشیار دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان که از روز نخست تشکیل جلسات ما معلّمان ریاضی حضور فعّال داشته و اکنون نیز در کنار شورای اجرایی انجمن و هیئت‌تحریریه مجله هستند و همچنین از حمایتهای بیدریغ ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان اصفهان در تشکیل انجمن و نیز چاپ این‌نشریه‌تشکرو قدردانی کرد . امید آنکه این حمایتها کماکان ادامه یابد .

هیئت‌تحریریه

---

* فرنود در فرهنگ لغات فارسی به‌معنی برهان و دلیل است.

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

جای خوشوقتی است که در جهت تحقق اهداف عالی آموزش و پرورش درنظام جمهوری اسلامی ، « انجمن معلّمان ریاضی استان اصفهان » بااساسنامهٔ جدید ، فعّالیّت‌های علمی و پژوهشی گسترده‌ای را آغاز کرده است .

معلّمان ریاضی اصفهان از همان ابتدای تأسیس مدارس به‌شکل کنونی گردهمایی‌هایی داشته‌اند اما دوره جدید گردهمایی‌های معلّمان ریاضی دبیرستان‌ها باتنی چند از دانشگاهیان محترم اصفهان به‌سال تحصیلی (۵۹ـ۱۳۵۸) برمی‌گردد .

دراین گردهمایی‌ها ، شرکت‌کنندگان ضمن رفع مشکلات تدریس ریاضی ، پیشنهاد برای اصلاح کتابهای درسی ، به‌تجزیه و تحلیل روشهای نو درآموزش ریاضی می‌پرداخته‌اند . طرح و اجرای برگزاری مسابقات درسی بین دانش‌آموزان ، تدریس نمونه درشاخه‌های گونا گون ریاضی به‌وسیلهٔ معلّمان فرهیخته ، ایجاد مرکز معلّم ، ایجاد تقویت روحیهٔ تعاون و همکاری درپیشبرد آموزش ریاضی را در دستور کار خود قرار داده‌اند .

در اثر همین تلاشهای خالصانه و پیگیر دبیران محترم ریاضی استان بوده است که خوشبختانه دانش‌آموزان بااستعداد ما موفق شده‌اند ، ازنظر دانش ریاضی ، مانند سایر شاخه‌های علمی گوی سبقت را از همگنان خود در سطح جهان بربایند.

« تغییر نظام آموزشی کشور » از یکسو و حمایت بیدریغ وزارت آموزش و پرورش از تشکیل « انجمن‌های علمی دبیران » از سوی دیگر موجب شد ، انجمن معلّمان ریاضی استان اصفهان فعالیت‌های گسترده‌ای را درقلمرو مسائل علمی و پژوهشی با روندی نو آغاز کند ، که انتشار « نشریهٔ انجمن معلّمان ریاضی استان اصفهان » یکی از آن فعالیت‌هاست.

امید است انتشار این نشریه بتواند پاسخگوی نیازهای دانش ریاضی دانش‌آموزان بااستعداد و معلّمان ارجمند ریاضی ما باشد .

در این مجله مسائل جدید ریاضی به گونه‌ای مطرح خواهد شد که ضمن اشاره به‌زندگی و آثار پرافتخار ریاضیدانان ایرانی ، اندیشهٔ دانشوران زمان مارا تابناک‌تر کند.

از درگاه خداوند متعال موفقیّت همکاران عزیز ریاضی که این اقدام مهّم را به‌انجام رسانیده‌اند مسئلت می‌نمایم.

سیدمرتضی امام‌جمعه‌زاده

مدیرکل آموزش وپرورش استان اصفهان

شهریورماه ۱۳۷۵

مرکز تحقیقات معلمان اصفهان

(ره‌آوردانقلاب)

از سال ۱۳۳۱ که چندنفر از دبیران ممتاز اصفهان جهت دیدن کلاسهای روش تدریس به‌تهران اعزام شدند و به‌دنبال آن در سال ۱۳۴۰ که زنده‌یاد دبیر ریاضی آن زمان هدایت‌الله موسوی با عنوان مدیر کل آموزش و پرورش دستور تشکیل انجمن معلمان علوم اصفهان را صادر نمودند ، همواره اندیشه‌ای ذهن معلمین برجستهٔ شهرمان را مشغول داشته و آن تشکیل واحدی برای فعالیت معلمان بوده است .

پیشرفت ره‌آوردهای علمی موجب شد که در سال ۱۳۵۰ انجمن دبیران هررشته جداگانه اعلام موجودیت نماید و در این زمان دبیران باتجربه عهده‌دار رفع مشکلات درسی و علمی همکاران جوان خود شدند که به‌ترتیب در فیزیک آقای محمّدحسن باقی ، در ریاضی آقای صفرعلی جمالی و در شیمی نگارندهٔ مقاله این مأموریت را به‌عهده گرفتند . این فعالیت‌ها تا سال ۱۳۵۷ ادامه یافت که مصادف باپیروزی شکوهمند انقلاب اسلامی و انتخاب آقای حسن نیلفروشان دبیر خوشنام فیزیک به‌سمت مدیر کلی آموزش و پرورش که خود موجب رونق هرچه بیشتر جلسات دبیران علوم شد . در این زمان دبیران فیزیک اقدام به‌تهیه و ساخت ۴۰۰ سری لوازم آزمایشگاهی فیزیک نمودند و دبیران شیمی به‌همّت دبیرانی چون زنده‌یاد منوچهر یاراحمدیان به‌تحقیق و آزمایش پرداختندودبیران ریاضی باهمراهی آقای دکتر علی رجالی استاد محترم دانشگاه صنعتی اصفهان و آقایان حسینعلی موحدی و انوشه‌یاد تیمور غیاثی‌نژاد به‌تحقیقات و رفع مشکلات درسی دبیران ریاضی همّت گماشتند و در این زمان است که فکر تشکیل و ایجاد واحدی به‌نام مرکز معلّم که بعدها مرکز تحقیقات معلمان نام گرفت به‌ذهن مرحوم تیمور غیاثی‌نژاد رسید.نامبرده در این راستا طرحی تهیه نمود که طی نامهٔ شماره ۲۱۳۰-۱۳۵۹/۵/۲ به وزارت آموزش و پرورش ارائه کرد . نامهٔ شمارهٔ ۶/۹۲۳ب-۱۳۶۰/۲/۲۶ وزارت آموزش و پرورش دستور اجرای آزمایشی این طرح را در اصفهان صادر نمود و به‌دنبال این تلاشهای پیگیر در اواخر سال ۱۳۶۰ مدرسهٔ راهنمایی علیرضا عباسی واقع در خیابان سیدعلیخان در اختیار دبیران قرار گرفت و با افشاندن بذر تحقیق اکنون شاهد گلهای دانش آن هستیم . این مرکز به‌تدریج تکامل یافت . آزمایشگاههای نسبتاً مجهّز ، کتابخانه‌ای بابیش از ۶۵ هزار جلد کتاب و مرکز کامپیوتر و ... بخشهایی از این مرکز را تشکیل می‌دهند و از آن زمان تاکنون دهها دورهٔ آموزش ضمن خدمت برای دبیران و متصدیان آزمایشگاه برگزار شده است . همچنین واحد انتشارات آن بحث‌ها و سخنرانیها را تکثیر نموده و در اختیار معلمان گذاشته است . از دیگر فعالیتهای این مرکز همکاری باصدا و سیما برای تهیهٔ برنامه‌های علمی و پاسخگویی به‌پرسشهاس

فعالیتهای این مرکز همکاری باصدا و سیما برای تهیهٔ برنامه‌های علمی و پاسخگویی به‌پرسشهاس شنوندگان می‌باشد.

اخیراً مدیریت کل آموزش و پرورش را آقای سید مرتضی امام‌جمعه‌زاده که از دبیران باتجربه و کارآمد ریاضی می‌باشد عهده‌دار هستند باهمّت ایشان محل مرکز تحقیقات به‌خیابان فلسطین کوی حسن‌آباد انتقال یافت که از نظر مساحت وسیعتر است و نسبت به‌محل قبلی امکانات بیشتری دارد به‌طوری که غیر از دبیران رشته‌های مختلف درسی متوسطه دبیران دورهٔ راهنمایی تحصیلی و معلمان دورهٔ ابتدایی در این واحد به‌تحقیق و بررسی مشغول می‌باشند.

در پایان امید است نظیر این مرکز در شهرهای بزرگ کشور تأسیس گردد و مشکل‌گشای پویندگان علم و دانش باشد.

از خداوند جوییم توفیق ادب

« جعفرشیخ‌الاسلام »

آیا می‌دانید ؟

خجندی در رسالهٔ خود برهان امتناع حل معادلهٔ $x^3 + y^3 = z^3$ را آورده است.

آیا می‌دانید ؟

خیّام طول سال اعتدالی را برابر ۳۶۵/۲۴۲۱۹۸۵۸ روز می‌داند در حالی که بادستگاهها و تکنیک‌های مجهز امروزی طول سال را برابر ۳۶۵/۲۴۲۱۹۸۷۹ روز محاسبه نموده‌اند.

آیا می‌دانید ؟

خیّام و طوسی اعتقاد به‌وجود هندسه نااقلیدسی داشته‌اند که بعدها « پوانکاره » ، « لباچفسکی » و « گوس » باپیگیری آن تحوّلی در هندسه به‌وجود آورده‌اند.

بازی یا ریاضیات؟

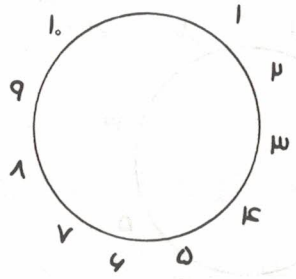
احمد حقانی
دانشکدهٔ ریاضی - دانشگاه صنعتی اصفهان

پس از آنکه دوست و همکار محترم آقای دکتر رجالی پیشنهاد نمود که در اولین جلسهٔ مجمع عمومی دبیران ریاضی استان اصفهان سخنرانی نمایم مدتی درجستجوی مباحثی مناسب برای این موقعیت صرف نمودم. بالاخره تصمیم گرفتم که چند مطلب را که اخیراً خوانده و از آنها لذت بردم برای شما بازگو کنم. امیدوارم که انتخاب موضوع گفتار امروز چندان دور از ذوق و سلیقهٔ شما نباشد و شاید درپایان نیز برای سؤالی که در عنوان سخنرانی آمده کمی عینی‌تر جوابی یافت شود.

مسألهٔ جوزفوس:
(Josephus Problem)

روایت کرده‌اند که یک مورخ قرن اول میلادی به‌نام جوزفوس یکی از ۴۱ نفر یهودی بود که در یک غار توسط رومیها محاصره شده‌بود. این محاصره‌شده‌گان برای آنکه اسیر نشوند تصمیم به خودکشی می‌گیرند، بدین‌ترتیب که در گرداگرد دایره‌ای نشسته، هربار نفرسوم باقیمانده را به قتل برسانند. امّا جوزفوس و یک فرد دیگر از این تصمیم ناراضی بودند، لذا جوزفوس به‌سرعت محلهایی که خود و دوستش با قرارگرفتن در آن محلها از مرگ رهایی می‌یافتند را محاسبه نمود. (و زنده‌ماند که این قصه را برای دیگران تعریف کند)!

ما مسأله را کمی تغییر داده واعداد ۱ تا n را به n شخص نشسته دور یک دایره نسبت می‌دهیم و هرفرد دوم را حذف می‌کنیم تا فقط یک‌نفر باقی می‌ماند. مثلاً اگر $n = ۱۰$ آنگاه به‌ترتیب شماره‌های ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۳، ۷، ۱ و ۹ حذف می‌شوند سرانجام شخصی که شماره‌اش پنج است باقی می‌ماند.



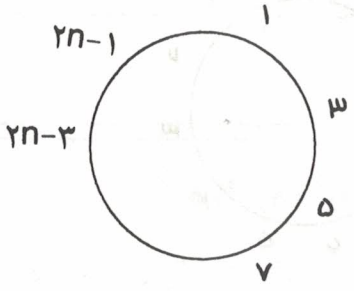
مسأله: اگر در بازی فوق n نفر شرکت نمایند و $J(n)$ شمارهٔ فردی باشد که سرانجام باقی می‌ماند مطلوبست تعیین فرمولی برای $J(n)$.

ملاحظه کردیم که $J(۱۰) = ۵$، پس دراین وهله ممکن‌است حدس زده شود. هرگاه n زوج باشد $J(n) = \frac{n}{۲}$، خاصه که درحالت $n = ۲$ نیز حدس ما تأییدمی‌شود: $J(۲) = ۱$. امّا مقادیر دیگر چون

$n=۴$ و $n=۶$ حدس را رد می‌کنند :

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$J(n)$	۱	۱	۳	۱	۳	۵

بسیارخوب ، این‌بار حدس می‌زنیم $J(n)$ همواره فرد است ، دلیل خوبی هم برای این حدس اخیر داریم زیرا در اولین دور بازی تمام اشخاصی که شمارهٔ آنها زوج است حذف می‌شوند . وانگهی اگر n زوج باشد ، پس از دور اول بازی ما به موقعیتی مشابه می‌رسیم بااین تفاوت که تعداد افراد نصف شده و شماره‌هایشان نیز تغییر کرده است . حال فرض کنیم از ابتدا $۲n$ شخص در بازی شرکت داشته باشند . پس از اولین دور بازی وضعیت چنین خواهد بود :



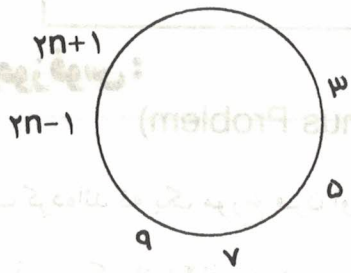
وشخص شمارهٔ ۳ اولین نفری است که در ادامهٔ بازی حذف می‌گردد. این وضعیت درست مثل آن است که با nتا شخص شروع کرده باشیم به‌جز آنکه شمارهٔ هر شخص دوبرابر منهای یک شده‌است . بنابراین:

$$J(۲n) = ۲J(n) - ۱ \quad ; n \geq ۱ \qquad (۱)$$

می‌دانیم $J(۱۰) = ۵$ ، پس بنابر رابطهٔ بالا $J(۲۰) = ۲J(۱۰) - ۱ = ۲ \times ۵ - ۱ = ۹$ ومتشابهاً $J(۴۰) = ۱۷$. از رابطهٔ (۱) می‌توان نتیجه گرفت :

$$J(۵\times ۲^m) = ۲^{m+۱} + ۱ \qquad (۲)$$

اینک حالتی را در نظر می‌گیریم که تعداد افراد بازی فرد و $۲n + ۱$ باشد . شخص شمارهٔ ۱ بلافاصله بعد از آنکه شخص‌شماره $۲n$ حذف شود باید از بازی خارج شود و ما با وضعیت زیر روبرو می‌شویم:



مجدداً ما کمابیش همان وضعیت اولیه را داریم ، منتهی با nتا شخص که در این وهله شمارهٔ هرشخص دوبرابر به‌اضافهٔ‌یک شده‌است . درنتیجه

$$J(۲n + ۱) = ۲J(n) + ۱ \quad ; n \geq ۱ \qquad (۳)$$

روابط (۱) و (۳) همراه با $J(۱) = ۱$ اصطلاحاً فرمولهای بازگشتی (یاتراجعی) خوبی هستند که‌نه‌تنها $J(n)$ را از $J(n-۱)$ بدست می‌دهند ، بلکه هردفعه تابع J را بکاربریم n را توسط یک عامل ۲ یا بیشتر تقلیل می‌دهد . بااین وجود چون مسألهٔ ما ریشه درمرگ و زندگی دارد باید یک فرمول بیابیم که سریعاً $J(n)$ را بدست دهد ! لذا بافرمولهای فوق جدول زیر را می‌سازیم:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
J(n)	۱	۱	۳	۱	۳	۵	۷	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱

بااندکی تأمل در جدول درمی‌یابیم که گویا باتوانهای ۲ می‌توانیم نوعی دسته‌بندی کنیم .بارسم خطهای قائم درجدول ملاحظه می‌شود که همواره J(n) در ابتدای هر دسته ۱ است و درآن دسته مقدارش باافزایش ۲ بدست‌می‌آید .پس اگر n را به‌شکل $n = ۲^m + \ell$ بنویسیم که درآن ۲^m بزرگترین توان ۲ است که نابیشتر از n می‌باشد و $\ell = n - ۲^m$ آنگاه بنظر می‌رسد که جواب مسأله چنین است :

(۴) $J(۲^m + \ell) = ۲\ell + ۱$ ؛ $m \geq ۰$ ، $۰ \leq \ell < ۲^m$

دقت‌کنیدکه اگر $۲^m \leq n < ۲^{m+۱}$ آنگاه $\ell = n - ۲^m$ در $۰ \leq \ell < ۲^{m+۱} - ۲^m = ۲^m$ صدق می‌کند .

حال فرمول (۴) را بااستقراء بر n ثابت می‌کنیم :

$m = ۰$ ؛ پس $\ell = ۰$ و می‌توان استقراء را شروع کرد زیرا $J(۱) = ۱$. درادامه فرض کنیم $m > ۰$ ودو مرحله ℓ فرد و ℓ زوج را جداگانه بررسی می‌کنیم . اگر $n = ۲^m + \ell$ آنگاه ℓ نیز زوج است و

$$J(۲^m + \ell) = ۲J(۲^{m-۱} + \frac{\ell}{۲}) - ۱ = ۲(\frac{۲\ell}{۲} + ۱) - ۱$$

↓ بنابراستقراء

$$= ۲\ell + ۱$$

متشابهاً وقتی‌که $n = ۲^m + \ell$ نتیجه حاصل می‌شود . درضمن بنابر (۳) داریم :

$$J(۲n + ۱) - J(۲n) = ۲$$

وبهر تقدیر استقراء کامل ورابطهٔ(۴) اثبات می‌گردد.

دیدیم که توانهای ۲ نقش مهمی دارند و بدین لحاظ طبیعی است که n و J(n) را در مبنای دو مطالعه کنیم . فرض کنید :

$$n = (b_m b_{m-۱} \ldots b_۱ b_۰)_۲$$

یعنی :

$$n = b_m \times ۲^m + b_{m-۱} \times ۲^{m-۱} + \ldots + b_۱ \times ۲ + b_۰$$

که درآن $b_m = ۱$ وهر b_i صفر یا یک است. $(i<m)$

چون $n = ۲^m + \ell$ ، می‌توان نوشت :

$$n = (۱ b_{m-۱} b_{m-۲} \ldots b_۱ b_۰)_۲$$

$$\ell = (۰ b_{m-۱} b_{m-۲} \ldots b_۱ b_۰)_۲$$

$$۲\ell = (b_{m-۱} b_{m-۲} \ldots b_۱ b_۰ ۰)_۲$$

$$۲\ell + ۱ = (b_{m-۱} b_{m-۲} \ldots b_۱ b_۰ ۱)_۲$$

$$J(n) = (b_{m-۱} b_{m-۲} \ldots b_۱ b_۰ b_m)_۲$$

به‌عبارت دیگر :

$$J(b_m b_{m-۱} \ldots b_۱ b_۰)_۲ = (b_{m-۱} \ldots b_۱ b_۰ b_m)_۲$$

یعنی می‌توان J(n) راازروی n بایک انتقال یک تکه‌ای به‌چپ بدست آورد! بطور مثال :

$$n = ۱۰۰ = (۱۱۰۰۱۰۰)_۲ \Rightarrow$$

$$J(n) = J((۱۱۰۰۱۰۰)_۲)$$

$$= (۱۰۰۱۰۰۱)_۲ = ۶۴ + ۸ + ۱$$

یعنی $J(۱۰۰) = ۷۳$

بازی چینی نیم :

(Chinese Game of Nim)

این بازی با چوب کبریت و توسط دو نفر انجام

می‌شود . بازیکنهای ما A و B نام دارند و تعدادی چوب کبریت را در چند دسته روبروی خود قرار می‌دهند . تعداد دسته‌ها و تعداد چوب‌کبریتهای هردسته دلخواه (امّامتناهی است). بازیکنی که بازی را شروع می‌کند از هرکدام دسته‌ها که انتخاب کند هرتعداد چوب‌کبریت را که مایل باشد برمی‌دارد . مثلاً از یک‌دسته ممکن است یک یا حتی کلیهٔ چوب‌کبریتهای آن دسته را بردارد . البته فقط و فقط از یک‌دسته باید چوب‌کبریت را بردارد . سپس نوبت بازیکن دیگر می‌رسد که وی نیز حرکت (یاعمل) مجازش شبیه بازیکن اول است . بازی به‌نوبت ادامه می‌یابد و فردی برنده است که آخرین چوب‌کبریت را برمی‌دارد ؛ لذا بازیکنی بازنده است که در نوبت خود نتواند حرکت (مجازبازی) را انجام دهد . اکنون می‌خواهیم استراتژی برد را توصیف کنیم ، یعنی مشخص سازیم بااتخاذ چه روشی می‌توان برنده شد .

تعریف : یک وضعیت (قرارگرفتن چوب‌کبریتها) را وضعیت بُرد (یابرنده) نامیم هرگاه یک بازیکن P (یعنی A یا B) بتواند با حرکت خود آن‌را به‌وجود آورده بطوری‌که وقتی بازی را به‌حریف خود Q (یعنی B یا A) وامی‌گذارد هر حرکتی Q انجام دهد P می‌تواند چنان بازی کند که ببرد . هر وضعیت دیگر را وضعیت باخت (یابازنده) نامیم .

بطورمثال : ۰۰ | ۰۰ یا (۲،۲) یک‌وضعیت برد است. اگر A این وضعیت را به B واگذارکند B باید یک یا دو چوب‌کبریت را از یک دسته بردارد . اگر B دوتا بردارد A دوتای باقیمانده را برمی‌دارد و برنده می‌شود و اگر B یکی بردارد آنگاه A از دستهٔ دیگر یکی برمی‌دارد و بازهم A برنده خواهد شد . شما هم بررسی کنید که ۰۰۰ | ۰۰ | ۰ یا (۱،۲،۳) یک‌وضعیت برد است . حال وضعیت درست (یاصحیح) را بطریق زیر تعریف می‌کنیم . ابتدا شمار کبریتهای هردسته را در پایهٔ دو یافته و در یک ستون می‌نویسیم تا اصطلاحاً یک جدول به‌دست آید . مثلاً وضعیتهای (۲،۲) ، (۱،۲،۳) ، (۲،۳،۶،۷) جدولهای زیر را به‌دست می‌دهند .

۰۱۰	۰۱	۱۰
۰۱۱	۱۰	۱۰
۱۱۰	۱۱	۲۰
۱۱۱	۲۲	
۲۴۲		

ملاحظه کردید که ۰۱۰ را به‌جای ۱۰ و ۰۱۱ را به‌جای ۱۱ نوشته‌ایم به‌نحوی که تعداد رقمهای اعداد ستونهای هر جدول مساوی است و سپس ستونها را مثل بالا جمع نموده‌ایم . اگر حاصلجمع هرستون زوج باشد وضعیت مربوطه را وضعیت درست نامیم و در غیراین‌صورت آن وضعیت را نادرست (یاغلط) گوییم .

هرسه وضعیت فوق درست هستند ولی وضعیت (۱،۲،۴) نادرست است زیرا جدول آن چنین است :

۰۰۱

۰۱۱

۱۰۰

۱۱۲

بسیار خوب ، اگر می‌خواهید قضیهٔ زیر را به‌راحتی درک کنید یکبار دیگر تعریفهای وضعیت برد و وضعیت درست را در ذهن مرور کنید .

قضیه : در بازی چوب‌کبریتها یک وضعیت برنده است اگر و تنها اگر درست باشد .

برهان :

۱- ابتدا حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که هیچ دسته‌ای بیش از یک چوب‌کبریت نداشته باشد . واضح است که وضعیت برنده است هرگاه تعداد چوب‌کبریتهای مانده زوج باشد و وضعیت بازنده است اگر این تعداد فرد باشد . مثلاً : ۰ | ۰ | ۰ یک وضعیت برد است . همین شرایط وضعیتهای درست و نادرست را نیز تعریف می‌کنند.

۲- فرض کنید بازیکن P باید از یک وضعیت درست شروع کند . وی باید عددی که سطری از جدول را تعریف می‌کند به‌عددی کوچکتر تقلیل دهد و اگر ما عددی را که در پایهٔ دو نوشته شده با عدد کوچکتری جایگزین کنیم فرد یا زوج بودن حداقل یکی از رقمهایش را تغییر می‌دهیم . پس : وقتی که P از یک وضعیت درست بازی را پی می‌گیرد لزوماً وضعیت را به‌یک وضعیت نادرست تبدیل می‌کند.

۳) : اگر وضعیتی نادرست باشد ، آنگاه حاصلجمع حداقل یکی از ستونهای جدول آن فرد است . مثلاً فرض کنید حاصلجمع‌های ستونها چنین باشند :

زوج ، فرد ، زوج ، فرد ، زوج ، زوج ، زوج

پس درستون سوم حداقل یک ۱ وجود دارد (ستون سوم اولین ستونی است که حاصلجمع اعضاء آن فرد است). دوباره برای آنکه مشخص باشد فرض کنید سطری که در آن این اتفاق می‌افتد چنین باشد :

* *
۰۱۱۱۰۱

در اینجا * به‌معنای آن است که اعداد زیر آنها در ستونهایی هستند که حاصل جمع آنها فرد است . می‌توانیم به جای این ، عدد کوچکتر

* *
۰۱۰۱۱۱

را بگذاریم که در آن ارقام ستاره‌دار و فقط آنها تغییر یافته‌اند . این تغییر به یک حرکت مجاز بازی متناظر است و حاصلجمع هرستون را زوج می‌سازد و البته این بحث کلیّت دارد . لذا اگر P با یک وضعیت نادرست مواجه شود می‌تواند همواره آن را به یک وضعیت درست تبدیل کند .

۴) : اگر A یک وضعیت درست را پشت سرگذارد B مجبور است آن را به یک وضعیت نادرست

تبدیل کند و آنگاه A می‌تواند چنان حرکت کند که یک وضعیت درست به‌جای گذارد . این فرایند ادامه می‌یابد تا هنگامی که هر دسته تمام شود یا فقط یک چوب‌کبریت در آن باشد . لذا قضیه به‌حالت خاصی که پیش از این اثبات شد تحویل می‌گردد و موضوع بازی اینک واضح است . در حالت کلی ، چنانچه وضعیت اولیه نادرست باشد . اولین بازیکن می‌برد . اگر حرکت درستی بکند ، امّا می‌بازد هرگاه وضعیت اولیه درست باشد و بازیکن دوم حرکت درستی بکند .

حال به‌عنوان تمرین ثابت کنید هر یک از وضعیتهای زیر برنده است :

$۱ , ۲n , ۲n + ۱ ; n , ۷ - n , ۷ ; ۲ , ۳ , ۴ , ۵$

نشان دهید وضعیتهای به‌شکل :

$۲ + ۲n , ۱ + ۲n , ۱ + ۲n$ بازنده‌اند.

بازی با چوب‌کبریت را می‌توان به‌صورتهای دیگری نیز در آورد . یکی از این بازیها منسوب به Wythoff است .

بازی ویتهوف : در این بازی دو دسته چوب کبریت و دو بازیکن داریم . هر بازیکن می‌تواند زوج (m , n) متناظر باتعداد چوب‌کبریتهای دو دسته را تبدیل کند به یکی از زوجهای زیر:

$(m-t,n-t),(m-t,n),(m,n-t)$ همواره $t \leq ۱$

پس هر بازیکن می‌تواند از یک و یا از هر دو دسته چوب‌کبریتهایی را (به تعداد مساوی) بردارد . برنده آن بازیکنی است که آخرین چوب‌کبریت را برمی‌دارد .

تعریف : زوج (a,b) در بازی ویتهوف یک وضعیت (=موقعیت) برد (یابرنده) است برای بازیکن A هرگاه روشی وجود داشته باشد به‌قسمی که هر حرکتی B از (a,b) انجام دهد . A می‌تواند بااتخاذ آن روش بازی را ببرد.

مثال : وضعیت (۲،۱) برنده است ، زیرا هرچهار حرکت مجاز از (۲،۱) منجر به وضعیت باخت برای حریف می‌شود .

کلیهٔ موقعیتهای برد در بازی ویتهوف را می‌توان مشخص کرد و این کار بااستفاده از یک قضیهٔ جالب در نظریهٔ اعداد انجام می‌گیرد . فرض کنید x یک‌عدد مثبت اصم است . دنباله‌های

$\{[n(۱+x)]\}_{n\in N}$ و $\{[n(۱+\frac{۱}{x})]\}_{n\in N}$

موسومند به دنباله‌های بیتی (Beatty) متناظر با x در اینجا [ ] همان تابع بزرگترین جزء صحیح است.

قضیهٔ بیتی . هرگاه x عدد مثبت اصم باشد هرعدد طبیعی در تنها یکی از روج دنباله‌های بیتی متناظر با x و دقیقاً یکبار ظاهر می‌شود .

برهان : چون x عدد مثبت اصم است هر عدد

به‌صورت

$n(1+x)$ یا $n(1+y)$ که $y=\frac{1}{x}$ و $n \in N$ بازهم اصم است و قطعاً عدد صحیح نیست . حال کافی است ثابت کنیم هرعدد طبیعی m به‌صورت جزء صحیح یک و تنها یک عدد به‌شکل $n(1+x)$ یا $n(1+y)$ می‌باشد . تعداد مضارب صحیح $1+x$ که کمتر از mاند برابر است با $[\frac{m}{1+x}]$ یعنی جزء صحیح $\frac{m}{1+x}$. بطریق مشابه تعداد مضارب صحیح $1+y$ که کمتر از mاند برابر است $[\frac{m}{1+y}]$. امّا هیچکدام از اعداد $\frac{m}{1+x}$ و $\frac{m}{1+y}$ صحیح نیست ، درنتیجه :

$$\frac{m}{1+x}-1<[\frac{m}{1+x}]<\frac{m}{1+x}$$

و

$$\frac{m}{1+y}-1<[\frac{m}{1+y}]<\frac{m}{1+y}$$

باجمع نامساویهای فوق و ملاحظهٔ اینکه

$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}=1$ خواهیم داشت :

$$m-2<[\frac{m}{1+x}]+[\frac{m}{1+y}]<m$$

و چون عدد وسط در نامساویهای فوق صحیح است نتیجه می‌شود :

$$[\frac{m}{1+x}]+[\frac{m}{1+y}]=m-1$$

پس تعداد کل آن دسته از اعضای هردو دنباله بیتی متناظر با x که کمتر از mاند دقیقاً $m-1$ است . متشابهاً تعداد کل اعدادی که در زوج دنباله‌های بیتی متناظربا x ظاهر می‌شوند و کمتر از $m+1$ هستند برابر است با m . بدین لحاظ اگر m را به $m+1$ تبدیل کنیم دقیقاً یک عضو از زوج دنباله‌ها باید به لیست پیشین ما اضافه گردد . این امر به‌معنای آن است که خود m فقط و فقط در یکی از دنباله‌ها و آنهم تنها یکبار ظاهر می‌شود .

اکنون بااستفاده از قضیهٔ زیبای فوق ، موقعیتهای برد در بازی ویتهوف به‌دست می‌آید .

قضیه : موقعیتهای برد در بازی ویتهوف عبارتند از $(0,0)$ و (a_n,b_n) که در آن $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌های بیتی متناظر باعدد واسطهٔ طلایی $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ می‌باشند.

برهان : قرار می‌دهیم $t=1+x=\frac{1}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و ملاحظه می‌کنیم که $t^2=1+t$ حال دنباله‌های بیتی متناظر با x را در نظر گرفته و تعریف می‌کنیم .

$$(*)\ (a_n,b_n):=([nt],[nt^2]);n\in N$$

فرض کنید W مجموعهٔ موقعیتهای برد باشد . واضح است که اگر $(a,b)\in W$ آنگاه $(b,a)\in W$ زیرا ترتیب قرار گرفتن دسته چوب‌کبریت‌ها بی‌اهمیت است . قرارداد می‌کنیم که عدد کوچکتر یک زوج را ابتدا بنویسیم . حال ثابت می‌کنیم که زوجهای (a_n,b_n) دارای خواص زیرند:

الف - $b_n-a_n=n$ برای $n\in N$ (همچنین طبق تعریف $(a_0,b_0)=(0,0)$)

ب - مؤلفهٔ a_n از nامین زوج کوچکترین عدد صحیح است که در هیچ زوج ماقبل ظاهر نشده است . برعکس زوجهایی که دارای خواص الف و ب باشند لزوماً به شکل *اند .

حال در اثبات الف باتوجه به $t^2 = 1+t$ داریم :

$$b_n - a_n = [nt^2] - [nt] = [n(1+t)] - [nt]$$
$$= [n + nt] - [nt] = n$$

در مورد ب گوییم بنابر قضیهٔ بیتی اگر $i \neq j$ آنگاه $A_i \neq b_j$ و هر عدد صحیح مثبت به یکی از دنباله $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ متعلق است . حال فرض کنید c کوچکترین عدد طبیعی باشد که $c \neq a_k$ و $c \neq b_k$ برای $k = 1,000 , n-1$. پس c باید متعلق به یکی از دو مجموعهٔ

$$\{ a_k \mid k \geq n \} ; \{ b_k \mid k \geq n \}$$

باشد . امّا در مجموعه‌های فوق که کوچکترین عدد صحیح a_n است زیرا دنباله‌های ما اکیداً صعودی‌اند و $a_j < b_j$ برای هر $j > 0$. بنابراین

$$c = a_n$$

برعکس خواص الف و ب را می‌توان به‌عنوان دستورالعملی تراجعی برای ساختن زوجهایی بکار برد . در واقع nامین زوج ، $(p , p+n)$ است که در آن pکوچکترین عدد صحیح است که قبلاً بکار نرفته است . چون دستورالعمل ما بطور یگانه زوجهایی را مشخص می‌سازد ، نتیجه می‌گیریم که زوج دنباله‌های بیتی تنها دنباله‌هایی هستند که دارای خواص الف و ب هستند.

اینک ثابت می‌کنیم که W مجموعهٔ موقعیتهای برد همانا مجموعه W' متشکل از زوجهایی (نامرتب) (a_n , b_n) است . خواهیم دید هرحرکتی از یک زوج $(a_n , b_n) \in W'$ منجر می‌شود به یک زوج که در W' نیست و برای هر زوجی که در W' نباشد حرکتی وجود دارد که منجر می‌شود به زوجی در W' ، بنابراین $W = W'$. توضیح آنکه اگر $(a_n , b_n) \in W'$ بعد از حرکت از آن ما یکی از سه زوج زیر را خواهیم داشت :

$$(a_n - t , b_n) : (a_n , b_n - t) : (a_n - t , b_n - t)$$

امّا زوجهای اولی و دومی هرکدام حاوی یک عدد است که به nامین زوج تعلق دارد و می‌دانیم هرعدد طبیعی در یک و تنها یک زوج از W' ظاهر می‌شود . در مورد زوج سوم هم تفاضل n است در حالی‌که این زوج nامین زوج نیست ($t \neq 0$) . پس هیچکدام از سه زوج فوق در W' نیست .

اکنون فرض شود $(c,d) \notin W'$. ثابت می‌کنیم عدد δ وجود دارد که یکی از سه زوج زیر در W' است

$$(c-\delta , d-\delta) \quad , \quad (c , d-\delta) \quad , \quad (c-\delta , d)$$

اگر $c = d$ قرار دهید $c = d = \delta$ و برسید به $(0,0)$ که موقعیت برد است .

اگر $c \neq d$ بانامگذاری فرض کنید $c < d$. می‌دانیم هرعدد صحیح دقیقاً در یکی از دنباله‌های بیتی است، پس برای c یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:

۱) $c = a_k$ ؛ ۲) $c = b_\ell$

یعنی c متعلق است به یکی از موقعیتهای برد (a_k, b_k) یا (a_ℓ, b_ℓ)

در حالت اول، چنانچه $b_k < d$، قرار دهید $\delta = d - b_k$ و لذا می‌توان حرکت کرد به

$$(c, d-\delta) = (a_k, b_k) \in W'$$

واگر $d < b_k$، آنگاه $c < d < b_k$، لذا $0 < d-c < b_k - c = k$ و با $n = d - c$ داریم $n < k$ و لذا

$$\delta = c - a_n \quad (> 0)$$
$$= c - (b_n - n) \quad \text{خاصیت الف}$$
$$= c - b_n + (d - c) \quad \text{تعریف } n$$
$$= d - b_n$$

و حرکت می‌کنیم به

$$(c-\delta, d-\delta) = (a_n, b_n) \in W'$$

در حالت دوم، نتیجه می‌گیریم که $a_\ell < d$ زیرا $a_\ell < b_\ell$ برای هر ℓ و بنا بر فرض $b_\ell = c < d$

قرار می‌دهیم $\delta = d - a_\ell$ و حرکت می‌کنیم به

$$(c, d-\delta) = (b_\ell, a_\ell) \in W'$$

بنابراین همانطور که گفته شد $W = W'$ و اثبات قضیه کامل است.

بالاخره آخرین بازی که مطرح می‌کنیم و از دیگر بازیهای ما ساده‌تر است بازی بسجمله‌ای است. در این بازی دوبازیکن وجود دارد که می‌خواهند بسجمله‌ای

$$f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1 x + 1$$

را باضرایب حقیقی مشخص نمایند. بازیکن A یکی از ضرایب را بدلخواه خود معین می‌کند، مثلاً بجای a_i یکعدد حقیقی قرار می‌دهد. سپس نوبت بازیکن B می‌رسد که از بین بقیهٔ ضرایب یکی را معین می‌کند. بازی به‌ترتیب فوق ادامه می‌یابد تا کلیهٔ ضرایب انتخاب شوند. اگر A بازی را شروع کند گوییم A برنده است. هرگاه درانتهای بازی بسجمله‌ای حاصل ریشهٔ حقیقی نداشته باشد و درغیر این‌صورت B برنده است. اینک می‌خواهیم استراتژی برد برای بازیکن دوم یعنی B را پیداکنیم.

استراتژی برد: بازیکن B خواهد برد هرگاه بطریق زیر بازی کند: اگر A یک ضریب دارای اندیس فرد(زوج) را مشخص ساخت وی (یعنی B) در نوبت خود یک ضریب دارای اندیس زوج(فرد) را معین نماید.

برای آنکه نشان دهیم B بااتخاذ روش فوق می‌تواندبرنده شود، فرض کنید بازی را A شروع کرده و B بطریق فوق بازی را ادامه دهد. چون تعداد ضرایب نامعین $2n - 1$ یعنی فرد است پس در ادامهٔ بازی می‌رسیم به وقتیکه فقط سه ضریب نامعین باقیمانده‌اند و دراین وهله دوتا از ضرایب لزوماً دارای اندیس فرد و یکی دارای اندیس زوج خواهد بود. اکنون نوبت A است که حرکت خودرا انجام دهد و بعد از او نوبت B می‌شود که باید از دو

ضریب باقیمانده فرضاً a_3 و a_5، یکی را معین سازد. در اینجا دو حالت وجود دارد :

الف - از ۳ و ۵ یکی فرد و دیگری زوج است .

ب - هردوی ۳ و ۵ فرد هستند .

اکنون تعریف می‌کنیم :

$$P(x) = f(x) - a_3 x^3 - a_5 x^5$$

در حالت الف فرض کنیم مثلاً ۵ زوج و ۳ فرد باشد ، لذا

$$f(1) = P(1) + a_5 + a_3$$

$$f(-1) = P(-1) - a_3 + a_5$$

و درنتیجه $f(1) + f(-1) = P(1) + P(-1) + 2a_5$

حال B باهوشیاری ضریب a_5 را چنان انتخاب می‌کند که : $f(1) + f(-1) = 0$ یعنی a_5 را برابر $-\frac{f(1) + f(-1)}{2}$ اختیار می‌کند . اگر $f(1) = f(-1) = 0$ ، دراین صورت f دارای ریشه‌های حقیقی ۱ و ۱- است و B بازی را برده است . در حالتی که $f(1) \neq 0$ و $f(-1) \neq 0$ از این اعداد لاجرم یکی مثبت و دیگری منفی است . پس (بنابر پیوستگی) تابع f در عددی بین ۱- و ۱ صفر می‌شود که در این حال نیز B می‌برد .

درحالت ب داریم :

$$f(-1) = P(-1) - a_3 - a_5$$

$$f(2) = P(2) + 2^3 a_3 + 2^5 a_5$$

که از اینها رابطهٔ زیر به‌سهولت حاصل می‌شود :

$$2^5 f(-1) + f(2)$$

$$= 2^5 P(-1) + P(2) + (2^3 - 2^5) a_3 ،$$

و چون $5 \neq 3$ بازیکن B می‌تواند a_3 را چنان انتخاب کند که مجدداً

$$2^5 f(-1) + f(2) = 0$$

حال اگر $f(2) = f(-1) = 0$ که B برده است و اگر نه باز از $f(2)$ و $f(-1)$ یکی مثبت و دیگری منفی است ، پس f ریشه‌ای در فاصلهٔ (۲ و ۱-) دارد و لذا B در این حالت نیز برنده شده است .

درپایان از دقت و حوصلهٔ شما سپاسگزارم.

منابع

1- Graham R.L,Knuth D.E. and patashnik O.,Concrete Mathematics , A Foundation for Computer Science,(1992), Addison Wesley.

2- Hardy G .H, and Wright E.M.,An Introduction to the theory of Numbers,(1984) Oxford University Press.

3- Honsberger R , More Mathematical Morsels (1991), the Mathematical Association of America.

4- Honsberger R, Ingenuity in Mathematics (1970), The Mathematical Association of America.

«اعداد مصوّر»

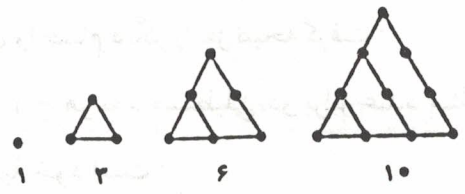
«حسینعلی موحدی»

عدد مصوّر عددی است که از شمارش تعداد نقاطی به‌دست می‌آید که به فاصله‌های مساوی از هم در امتداد اضلاع یک چندضلعی قرار دارند. بطورکلی اعداد مصوّر از هر تصاعد حسابی با جملهٔ اوّل واحد با جمع کردن جمل متوالی آن تشکیل می‌گردند. بدیهی است اگر قدرنسبت تصاعد مزبور d باشد می‌توان عدد مصوّر $d+2$ ضلعی تشکیل داد:

۱- از تصاعد ... و n و ... و ۳ و ۲ و ۱ اعداد مثلثی به‌صورت زیر تشکیل می‌گردد:

... و $\frac{n(n+1)}{2}$ و ... و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱

اعداد مثلثی



ابن‌سینا در این مورد می‌گوید:

«کل مثلث فانّه نصف مضروب مرتبة فی‌الازید منه بواحد»: $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$

همچنین ابن‌سینا پیرو مطلب مذکور در خواص این اعداد یادآور می‌شود:

«فیکون کل مربّع من مثلث فی درجته و مثلث انقص من درجته بواحد»

مجموع هردوعدد مثلثی متوالی مربّع کامل است:

$t_n + t_{n-1} = n^2$

بدیهی است تفاضل هردوعدد مثلثی متوالی نیز برابر با مرتبهٔ عدد بزرگتر می‌باشد:

$t_{n+1} - t_n = n + 1$

همچنین باتوجه به‌اینکه هرعددمثلثی به‌صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد بنابر این:

$8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 1 = (2n+1)^2$

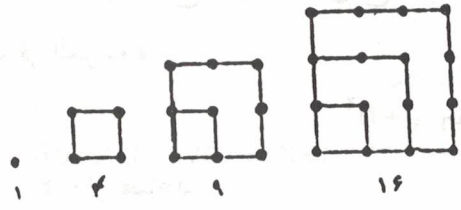
یعنی ۸ برابر هرعددمثلثی به‌علاوهٔ یک مربّع کامل است.

۲- از تصاعد

... و ۱-۲n و ... و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ اعداد مربعی به‌صورت زیرتشکیل می‌شود:

... و n^2 و ... و ۱۶ و ۹ و ۴ و ۱

اعدادمربعی



واضح است هرعدد مربعی مرتبهٔ n برابر مجموع دوعددمثلثی مرتبهٔ n و n - ۱ می‌باشد:

$S_n = t_n + t_{n-1}$

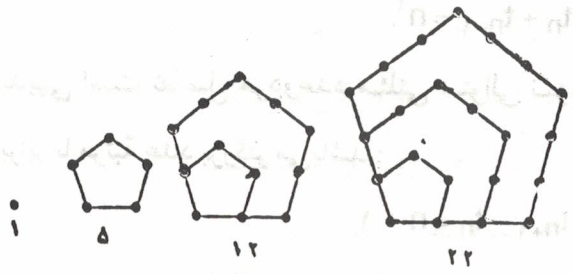
۳- از تصاعد

... و ۲-۳n و ... و ۱۳ و ۱۰ و ۷ و ۴ و ۱

اعداد مخمسی به‌صورت زیر تشکیل می‌گردد:

... و $\frac{n}{2}(3n-1)$ و ... و ۳۵ و ۲۲ و ۱۲ و ۵ و ۱

اعدادمخمسی



روشن است هرعدد مخمسی مرتبهٔ n برابر با مجموع دوعدد مربعی مرتبهٔ n و مثلثی مرتبهٔ n - ۱ می‌باشد :

$$p_n = s_n + t_{n-1}$$

همچنین هرعدد مخمسی مرتبهٔ n برابر است بامجموع n و ۳ برابر عدد مثلثی مرتبهٔ n - ۱ :

$$p_n = 3t_{n-1} + n$$

شیخ‌الرئیس ابوعلی‌سینا در مورد اعداد مخمسی می‌گوید :

« وقد تنشأ من جمیع‌المربعات کل مع‌المثلث‌الّذی دونه فی‌المرتبه »

$$p_n = t_{n-1} + n^2$$

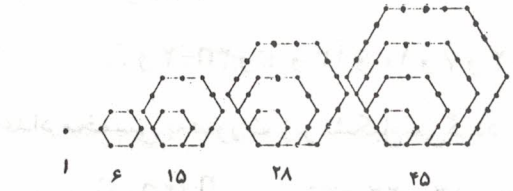
۴ - از تصاعد

... و ۳-۴n و... و ۱۷ و ۱۳ و ۹ و ۵ و ۱

اعداد مسدّسی به‌صورت زیر تشکیل می‌شود :

... و n(۲n-۱) و ... و ۴۵ و ۲۸ و ۱۵ و ۶ و ۱

اعدادمسدسی



بدیهی است هرعدد مسدسی مرتبه n برابر است بامجموع دو عدد مخمسی مرتبه n و مثلثی مرتبه n-۱ :

$$H_n = p_n + t_{n-1}$$

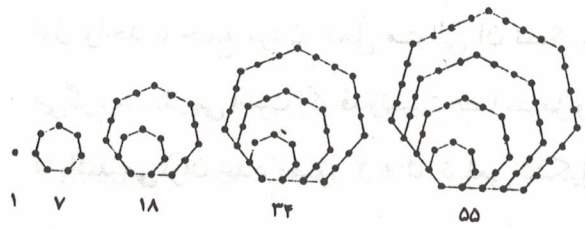
۵ - از تصاعد

... و ۴-۵n و... و ۲۱ و ۱۶ و ۱۱ و ۶ و ۱

اعداد مسبّعی به‌صورت زیر تشکیل می‌شود :

... و $\frac{n}{2}(5n-3)$ و ... و ۳۴ و ۱۸ و ۷ و ۱

اعداد مسبّعی



بطورکلی از تصاعد:

... و (n-۱)d + ۱ و... و ۲d + ۱ و d + ۱ و ۱

اعداد d + ۲ ضلعی به‌صورت زیرتشکیل می‌شود :

...و $\frac{n}{2}(nd-d+2)$ و...و۶d+۴و۳d+۳و۲d+۲و۱

شایان ذکر است که از اعداد مثلثی می‌توان اعداد اشکال واجسام دیگر را نیز نتیجه گرفت :

۱ - هرعدد مستطیلی دو برابر عدد مثلثی هم‌مرتبهٔ خود است :

$$R_n = n(n+1)$$

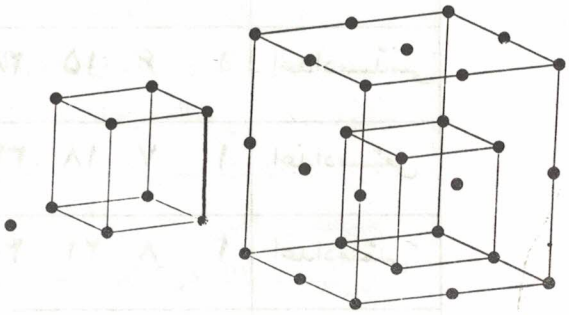
... و n(n + ۱) و ... و ۲۰ و ۱۲ و ۶ و ۲

اعداد مستطیلی

۲ - اعداد مکعبی باجملهٔ عمومی $C_n = n^3$

به‌صورت ذیل‌اند :

۱^3 و ۲^3 و ۳^3 و ... و n^3 و ...



بدیهی است مجموع n عدد مکعبی متوالی که از یک شروع شود مساوی است بامربع عدد مثلثی مرتبه nام .

$$۱^3 + ۲^3 + ۳^3 + ... + n^3 = (۱ + ۲ + ... + n)^2$$

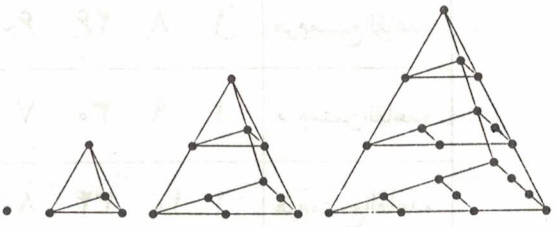
$$t^2_n = ۱ + ۸ + ۲۷ + ... + C_n$$

۳ - هرعدد هرمی (مثلث‌القاعده) مرتبهٔ n برابر است بامجموع اعداد مثلثی مرتبهٔ یک تا n :

$t\pi_۱ = t_۱$ و $t\pi_۲ = t_۱ + t_۲$ و $t\pi_۳ = t_۱ + t_۲ + t_۳$ و ...

و $t\pi_n = ۱ + ۳ + ... + \frac{n(n+۱)}{۲}$

و ... و ۱ و ۴ و ۱۰ و ۲۰ و ... و $\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$ و ...



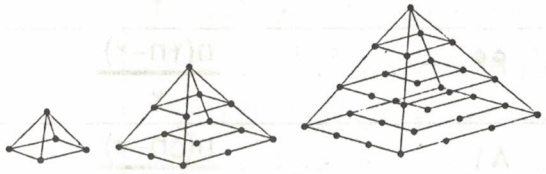
۴ - هرعدد هرمی (مربع‌القاعده) مرتبهٔ n برابر است بامجموع اعداد مربعی مرتبهٔ یک تا n :

$s\pi_۱ = s_۱$ و $s\pi_۲ = s_۲ + s_۱$

$s\pi_۳ = s_۳ + s_۲ + s_۱$ و ...

$s\pi_n = ۱ + ۴ + ۹ + ... + n^2$

و ... و ۳۰ و ۱۴ و ۵ و ۱

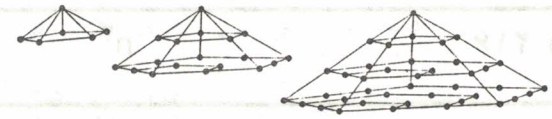


۵ - هرعدد هرمی (مخمس‌القاعده) مرتبهٔ n برابراست بامجموع اعداد مخمسی مرتبهٔ یک تا n :

$p\pi_۱ = p_۱$ و $p\pi_۲ = p_۱ + p_۲$

$p\pi_۳ = p_۱ + p_۲ + p_۳$ و ...

$p\pi_n = ۱ + ۵ + ۱۲ + ۲۲ + ... + \frac{n}{۲}(۳n - ۱)$



بطور کلی اعداد مصوّر در جدولهای صفحهٔ بعد مشخص گردیده است .

منابع و مآخذ

1- Apostol introduction to Analytic Number Theory .

2- Theory of Numbers : Dickson .

3- Boyer : Ahistory of Mathematics .

۴- تاریخ ریاضیات : EVES

۵- مجلات یکان

۶- مجلات رشد ریاضی

۷- ریاضیدانان ایرانی از خوارزمی تاابن‌سینا : قربانی

اعدادمثلثی	$\frac{n(n+1)}{2}$ . . . ۲۱ ۱۵ ۱۰ ۶ ۳ ۱
اعدادمربّعی	n^2 . . . ۳۶ ۲۵ ۱۶ ۹ ۴ ۱
اعدادمخمّسی	$\frac{n(3n-1)}{2}$ . . . ۵۱ ۳۵ ۲۲ ۱۲ ۵ ۱
اعدادمسدّسی	$\frac{n(4n-2)}{2}$ . . . ۶۶ ۴۵ ۲۸ ۱۵ ۶ ۱
اعدادمسبّعی	$\frac{n(5n-3)}{2}$ . . . ۸۱ ۵۵ ۳۴ ۱۸ ۷ ۱
اعدادمثمّنی	$\frac{n(6n-4)}{2}$ . . . ۹۶ ۶۵ ۴۰ ۲۱ ۸ ۱
اعدادمتسّعی	$\frac{n(7n-5)}{2}$ . . . ۱۱۱ ۷۵ ۴۶ ۲۴ ۹ ۱
اعدادمعشّری	$\frac{n(8n-6)}{2}$ . . . ۱۲۶ ۸۵ ۵۲ ۲۷ ۱۰ ۱
چندضلعی	$\frac{n[(n-2)n-(n-4)]}{2}$ . . . ۱۵n-۲۴ ۱۰n-۱۵ ۶n-۸ ۳n-۳ n ۱
مکعبی	n^3 . . . ۲۱۶ ۱۲۵ ۶۴ ۲۷ ۸ ۱
هرم‌مثلث‌القاعده	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ . . . ۵۶ ۳۵ ۲۰ ۱۰ ۴ ۱
هرم‌مربع‌القاعده	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . . . ۹۱ ۵۵ ۳۰ ۱۴ ۵ ۱
هرم‌مخمس‌القاعده	$\frac{۹^2(n+1)}{2}$ . . . ۱۲۶ ۷۵ ۴۰ ۱۸ ۶ ۱
هرم‌مسدس‌القاعده	$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ . . . ۱۶۱ ۹۵ ۵۰ ۲۲ ۷ ۱
هرم‌مسبع‌القاعده	$\frac{n(n+1)(5n-2)}{6}$ . . . ۱۹۶ ۱۱۵ ۶۰ ۲۶ ۸ ۱
هرم‌مثمن‌القاعده	$\frac{n(n+1)(2n-1)}{2}$ . . . ۲۳۱ ۱۳۵ ۷۰ ۳۰ ۹ ۱
هرم‌متسع‌القاعده	$\frac{n(n+1)(7n-4)}{6}$ . . . ۲۶۶ ۱۵۵ ۸۰ ۳۴ ۱۰ ۱
هرم‌معشرالقاعده	$\frac{n(n+1)(8n-5)}{6}$ . . . ۳۰۱ ۱۷۵ ۹۰ ۳۸ ۱۱ ۱
هرم‌باقاعدهٔnضلعی	$\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{3+(n-2)(n-1)}{3}$ . . . ۳۵n-۴۹ ۲۰n-۲۵ ۱۰n-۱۰ ۴n-۲ ۱n+۱

کاربرد ریاضی در مسائل روزمره[1]

علی رجالی
دانشکدهٔ ریاضی - دانشگاه صنعتی اصفهان

« بسیاری از ما ، ریاضی را بادید مجرد مورد بررسی قرار می‌دهیم و انتظار نداریم که این علم زیبا ، پایه‌ای و اصولی در پدیده‌های اطراف ما ظاهر شوند . در این مقاله درحد بضاعت اندک نویسنده سعی می‌شود مواردی از این مشاهدات مطرح شوند . علاوه برآن مواردی از ارتباط بین رشته‌های مختلف ریاضی نیز می‌تواند بینش دانش‌آموزان را گسترش دهد . طرح این‌گونه مسائل در کلاس باعث می‌شود از طرفی ریاضی ملموس‌تر عرضه گشته و درنتیجه گامهایی درجهت عمومی کردن ریاضی برداشته شود و از طرف دیگر سبب ایجاد همکاری و همفکری بین دانش‌آموزان جهت ارائهٔ مدلهای ریاضی خواهد شد و انگیزه‌های لازم جهت یادگیری برای همه فراهم می‌شود .

ابتدا به‌بیان تغییرجهتهای اصلی در تغییر استانداردهای حرفه‌ای در آموزش ریاضی می‌پردازیم . این تغییرها بیشتر برمسائل زیر تکیه دارند . [۱]

۱ - کمک به‌دانش‌آموزان تا بتوانند برای درک بهتر ریاضی باهم کارکنند .

۲ - کمک به‌دانش‌آموزان برای یادگیری استدلال ریاضی.

۳ - کمک به‌دانش‌آموزان برای اتکاء به‌خود برای تعیین این‌که موضوعی از نظر ریاضی صحیح است یا نه .

۴ - کمک به‌دانش‌آموزان برای یادگیری حدس‌زدن ، اکتشاف و حل مسائل .

۵ - کمک به‌دانش‌آموزان برای ایجاد ارتباط بین مسائل مختلف ریاضی ، ایده‌ها و کاربردهای آن وایجاد انگیزه در آنان برای یادگیری مفاهیم ریاضی .

تمام این تغییر جهتها در زیر چتر هدف اصلی " ریاضی برای همه " قرار دارد . امّا نکتهٔ مهم این است که هرگونه تغییر برنامه و روش باید علاوه بر توجّه و رعایت مطالعات بین‌المللی ، ریشه در سنّت دیرینهٔ ریاضی ما داشته باشد . ترجمهٔ صرف برنامه‌ها و مواد درسی و تقلید از روشهای آموزشی به‌مصلحت جامعه نیست و حتی برای تحقّق "ریاضی برای همه " باید به‌اصالت اجتماعی و سنّتهای جاری جامعه توجه شود . [۲]

امّا دراین رابطه ، نکات مهم دیگری نیز مطرح

هستند که بطور خلاصه برخی از آنهارا می‌توان یادآوری کرد :

۱ - ریاضی برای همه است و هرفرد جامعه باید ریاضی بداند . اکنون پیشرفت تکنولژی و نقش ریاضی در رشته‌های مختلف و حتی زندگی روزمره، بی‌سوادی ریاضی را به‌عنوان یک ناتوانایی شناسایی کرده و اعتقاد براین است که همه باید ریاضی بدانند . [۲]

البته هرفرد براساس رشته و علاقه‌اش به‌موضوعی از ریاضی بیشتر توجّه دارد و برای هرفرد،سطحی از آگاهی ریاضی مطرح است ولی بطورکلی هیچ کس از ریاضی بی‌نیاز نیست . در این مقاله با بیان برخی از مسائل سادهٔ ریاضی به اهمیت این مسأله بیشتر توجّه می‌کنیم .

۲ - کمک به‌دانش‌آموزان جهت درک استعداد خود برای یادگیری ریاضی و ایجاد انگیزهٔ لازم در آنان برای رسیدن به‌هدف فوق از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است . به‌نظر نویسنده حل این مسأله بطور کامل به‌معلّم بستگی دارد و معلّمان ریاضی هستند که می‌توانند در این راستا مؤثر باشند. [۳]

۳ - معلّم همواره باید نقش راهنما را داشته باشد . در حال حاضر دانش‌آموزان عادت کرده‌اند که معلّم برای آنها مثال پیدا کند ، مسأله حل کند و فقط آنچه راکه معلّم به‌آنها می‌آموزد یاد بگیرند . این مسأله ، قدرت ابتکار و اندیشیدن را از دانش‌آموز سلب می‌کند و درنهایت به ضرر آموزش و برنامه‌ریزی آیندهٔ جامعه است . معلّمان به‌جای اینکه همهٔ مطالب را به‌دانش‌آموزان بگویند ، باید به‌آنها اجازه دهند خود فکر کنند ، به‌اطراف خود بنگرند ، زیباییهای ریاضی را در طبیعت اطراف خود و کاربردهای آن را در زندگی روزمرهٔ خویش شناسایی کنند .

۴ - در آموزش ریاضی باید به همهٔ جنبه‌های مختلف ریاضی توجّه شود . شهود ، دقّت ، یادگیری روش ، ارتباطات ، اندیشیدن صحیح ، حل مسائل ، مدلسازی و قدرت تعمیم همه از ابزارها و نمودهای مختلف ریاضی و آموزش هستند . نمی‌توان یکی را فدای دیگری کرد .

امّا آنچه که در حال حاضر و در آموزش ریاضی ما بیشتر تکرار می‌شود و در صورت ادامهٔ آن سنّت خوب یادگیری ریاضی و اهمیّت‌دادن به آن که در جامعهٔ ما ریشه دوانده است از بین می‌رود و نه‌تنها در راستای فعالیتهای جهانی قدم برنخواهیم داشت بلکه در این زمینه هم از دیگران عقب می‌افتیم ، توجّه کامل به‌شهود و یا در برخی از مقاطع تحصیلی دور شدن از شهود است . در بسیاری ازکتب جدید فقط شهود ملاک کار قرار

گرفته و دقّت ریاضی به‌حساب نمی‌آید که این باعث شده بسیاری از دانش‌آموزان فکر کنند آنچه را که می‌بینند و لمس می‌کنند فقط درست است و یا با داشتن حالتهای خاص قابل مشاهده ، موضوعی همواره برقرار است . هردو جنبهٔ آن خطرناک و مضرّ است . از طرف دیگر گریز از شهود و توجّه مطلق به تئوری‌ها بدون مشاهدهٔ موارد استعمال و مثالهای ملموس آن هم در آموزش عالی ما خلل وارد ساخته است . هردو مقوله اهمیّت دارند و باید به‌آنها توجّه شود .

۵ - آموزش روشها و مفاهیم اصلی ریاضی ، بیشتر از یاد دادن یک تکنیک خاص اهمیّت دارد . بسیاری از دانش‌آموزان ما قدرت حل مسائل جدید را ندارند ، چون ذهنشان را با حفظیات پرکرده‌ایم و فقط به آنها آموزش داده‌ایم که فلان مسأله را به این صورت حل کنند . این مشکل خلّاقیّت ، جرأت و جسارت را نه‌تنها در حل مسائل و درک مفاهیم جدید ریاضی از دانش‌آموز می‌گیرد ، بلکه او در اجتماع هم خلّاقیّت و ابتکار خودرا از دست می‌دهد .

۶ - جداسازی ریاضی از زندگی روزمره و مشهودات و محض‌نگری به ریاضی نیز از بدآموزیهای ریاضی است . دانش‌آموز باید به اطراف خود بنگرد و مفاهیم ریاضی را در طبیعت و زندگی عادی کشف کند . بیشتر مفاهیم ریاضی در اثر آزمایشهای بسیار ساده و روزمره کشف شده‌اند ، سپس چرا ما نباید بتوانیم آنهارا مجدداً پیدا کنیم؟

«پولیا» گفته است : موضوع « پرسه‌زدن تصادفی »[۲] را در آزمایش زیر کشف کرده و تئوریهای خودرا در این رابطه براین ریشهٔ تاریخی بنا نهاده است .

« روزی پولیا با هم‌اتاقی خود و دوست دختر هم‌اتاقیش به پارک می‌روند ، چون آن دو نفر قصد صحبت خصوصی داشته‌اند ، پولیا از آنها جدا می‌شود . آن دو باهم و پولیا جداگانه در پارک پرسه می‌زنند ، ولی چندین بار آنها به هم برخورد می‌کنند. پولیا خیلی ناراحت می‌شود که مبادا دوستش فکر کند او قصد مزاحمت برای آنها را دارد لذا پارک را ترک کرده به‌منزل می‌رود ، در آنجا این پدیده را بازنگری می‌کند تا شانس اتفاق افتادن این مسأله را بررسی کند . همین مطلب پایهٔ علم «پرسه‌زدن تصادفی » است . »[۴]

پس امکان این وجود دارد که هر یک از ما هم بانگرشی دقیق به اطراف خود ، مفاهیم ریاضی جدیدی را کشف کنیم . در قسمت اصلی این مقاله این موضوع بیشتر مورد توجّه قرار خواهد گرفت .

۵ - عدم آگاهی از ریشه‌های تاریخی رشته‌های مختلف ریاضی از یک‌طرف و یک بُعدی

اندیشیدن به‌مسائل ریاضی ، باعث شده که ما ارتباطات موجود بین رشته‌های مختلف را کمتر کشف کنیم . وسعت ارتباطات ریاضی آنقدر وسیع است که نه‌تنها یک موضوع ریاضی در رشته‌های دیگر ریاضی تأثیر دارد ، بلکه ابعاد ارتباطی آن به رشته‌های دیگر از دانش بشری نیز ریشه دوانده است . کارآیی ریاضی و آمار در علوم مختلف نمودی از این مدعاست . [۵]

۶ - ایجاد حس همکاری و مشارکت در انجام پروژه‌های بزرگ که نیاز به اندیشه‌ها و زمینه‌های قبلی وسیع دارند از یک‌طرف و همکاری و همفکری در زندگی روزمره ، آموزش روحیهٔ همکاری و مشارکت را از سالهای تحصیل در مدرسه می‌طلبد . مسائلی که در حال حاضر با رقابتهای ناصحیح در کلاس درس که با کنکور و متأسفانه با این روند مسابقات ریاضی [۶] گسترش یافته‌اند ، بسیار خطرناک و مضرّ هستند . معلّمان ریاضی با راهنمایی دانش‌آموزان به اجرای پروژه‌های مشترک و انجام مطالعات با همکاری چند نفر از دانش‌آموزان می‌توانند ارزش واقعی کار گروهی را آموزش دهند . و این مسأله هم در آموزش ریاضی بسیار اهمیّت دارد .

در پایان بطور خلاصه چند راه حل تکرار می‌شوند :

۱ - ارائهٔ پروژه‌های آموزشی به گروههای مختلف دانش‌آموزان .

۲ - طرح سؤالاتی که نیاز به تحقیق و جستجو دارند (در سطوح مختلف).

۳ - شروع کردن از شهود ، توجّه به دقّت و اصول در آموزش ریاضی .

۴ - همراه کردن کاربرد با مفاهیم تئوری.

۵ - بحث راجع به ریشه‌های تاریخی مسائل ریاضی.

۶ - بحث پیرامون ارتباط بین رشته‌های مختلف ریاضی .

۷ - آموزش مدلسازی ریاضی و حل مسأله با تکیه به مثالهای ساده و روزمره.

اگر چه محتوی درسی در این رابطه مهم است ولی مهمتر از آن توجّه و اعتقاد معلّمان به این نکات است ، که باید سعی کنیم قبل از هر چیز با انجام آزمایش و اندیشیدن صحیح به این اعتقاد برسیم.

چند مثال:

۱ - همانطور که در مقدمهٔ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال [۷] هم آمده است :

« اساس بیان تعاریف ، قوانین و روشها در این درس ، کاربردهای عملی و واقعی است و باید از آنها برای انتقال مفاهیم کمک گرفت . »

به این مثال ساده توجّه کنید :

مفهوم تابع:

تابع f عبارت است از یک دامنه یا حوزهٔ تعریف D_f و یک دستورالعمل یا ضابطه ، به طوری که برای هر عضو دامنه ، یکی و فقط یک مقدار ارائه شود.

یا برای دو مجموعهٔ A و B ، $f \subset A \times B$ (به عنوان یک رابطه) تابع است ، هرگاه

$(x, y_1) \in f$ و $(x, y_2) \in f$ ، آنگاه $y_1 = y_2$

(که آن را با $f(x)$ نمایش می‌دهند .)

در این حالت دامنهٔ f ،

$$D_f = \{x : \exists y \in B \ni (x, y) \in f\}$$

زیر مجموعه‌ای است از A و

$$R_f = \{f(x) : x \in D_f\}$$

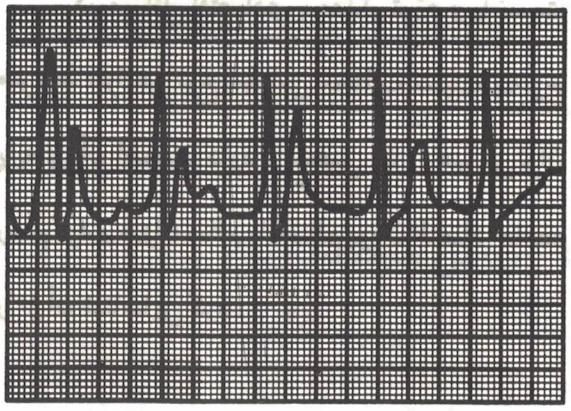
برد تابع است .

با بیان یک مثال می‌توان از دانش‌آموزان خواست به مثالهای دیگر در اطراف خود فکر کنند :

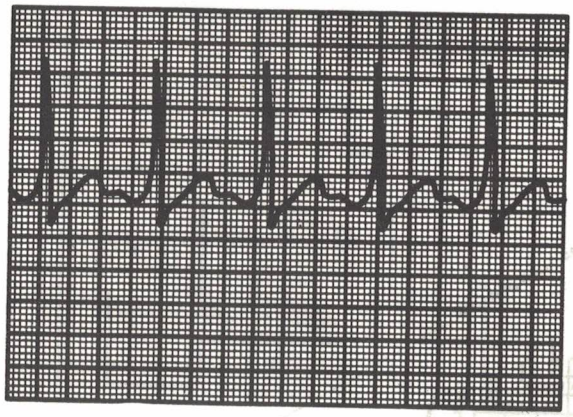
- نمرهٔ درس حساب‌ان ۱ هر یک از دانش‌آموزان کلاس .
- نتیجهٔ هر مسابقه برای یکی از تیمها .
- نرخ هر یک از کالاهای اساسی .

و .....

تابع را با جدول ، نمودار و یا فرمول می‌توان نمایش داد . شکل زیر تصاویر الکتروکاردیاگرام (EKG) برای دو بیمار است که روند ضربان قلب آنها را نشان می‌دهند . [۸]



(بیمار)



(سالم)

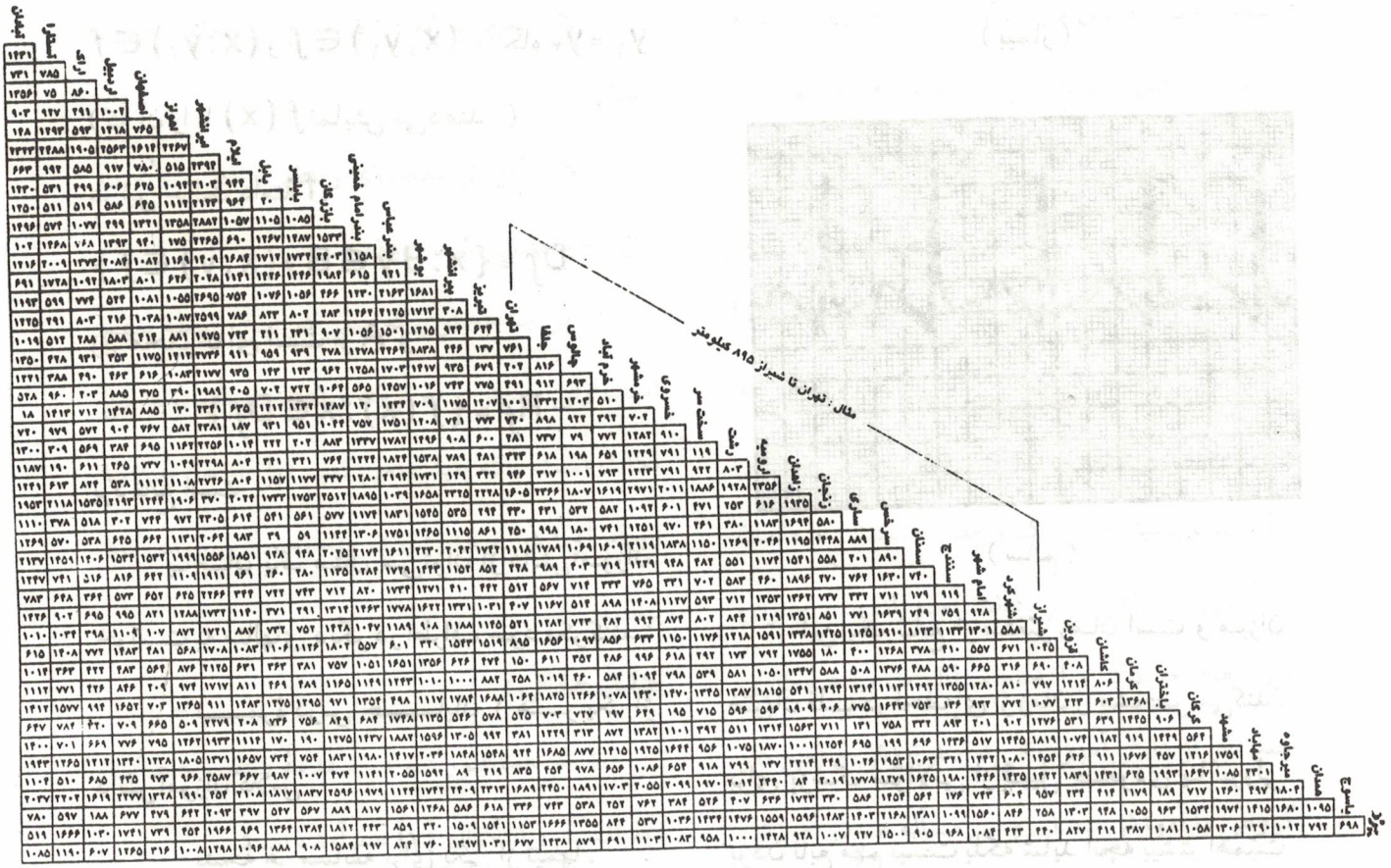
این یک تابع از متغیّر زمان است و میزان ضربان قلب در لحظه‌ای از زمان را مشخص می‌کند . برای پزشک سؤالاتی از قبیل صعودی یا نزولی بودن تابع مهم نیست بلکه شاید آنچه بیشتر اهمیّت داشته باشد ، پریودیک و منظم بودن آن است . در برخی از موارد هم میزان تغییرات در زمانهای کوتاه عامل تصمیم‌گیری است . امّا بهر حال مانند احتمال

علاوه برپایه‌های علمی یک دید شخصی است که براساس تجربه و اطلاعات ، پزشک به آن توجّه می‌کند .

در مسائل اقتصادی ، مقدار تورّم و یا نسبت متوسط افزایش نرخ اجناس مختلف نسبت به‌نرخ پایه‌ای آن اهمیّت دارد ، منحنی آن را هم می‌توان رسم کرد و میزان سالم یا ناسالم بودن اقتصاد جامعه را از آن شناسایی کرد .

بیشتر این مثالها فقط روشها و اطلاعات ریاضی را نمی‌طلبد بلکه نیاز به آگاهی محقق از مسائل دیگر جامعه و علوم دیگر هم هست که با همکاری و همفکری قابل درک‌اند .

در جستجوی مثالهای ساده از یک تابع بودم ، در سررسیدنامهٔ خود به مسافتهای بین شهرهای ایران برخوردم ، به این داده‌ها توجّه کنید :



مسافت‌های بین شهرهای ایران

به این داده‌ها به‌صورتهای مختلف می‌توان نگاه کرد :

الف - یک شهر را ثابت درنظر بگیرید ، مثلاً شیراز ، تابع فاصلهٔ شهرهای دیگر تا شیراز را به‌عنوان یک تابع می‌توان در نظر گرفت که دامنهٔ آن تمام شهرهای ایران است وبطور مثال :

f (اصفهان) = ۴۸۱

f (شیراز) = ۰

f (تهران) = ۸۹۵

میزان دور و نزدیک بودن یک‌شهر به‌شیراز ، مدت زمان لازم برای حرکت از شیراز برای رسیدن به‌شهرهای مختلف و حتی هزینهٔ مسافرت بین شیراز و شهرهای دیگر از مواردی است که این تابع در آن نقش اساسی دارد .

ب - حتی می‌توان فاصله را به‌عنوان یک تابع بادامنه‌ای دوبُعدی درنظرگرفت و $d(x,y)$ را فاصلهٔ بین دو شهر x و y تعریف کرد . که دراین‌حالت برای هر x ، $d(x,x) = ۰$

و برای هر x,y ، $d(x,y) = d(y,x)$

ج - اگر جدول را به‌صورت یک مستطیل کامل کنیم ، ماتریسی ۴۵ × ۴۵ متقارن به‌دست می‌آید که تمام عناصر قطری آن صفرند . و .....

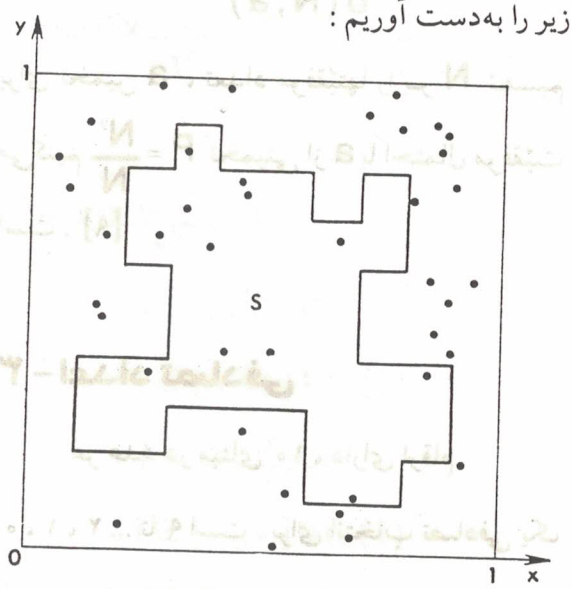
در حساب دیفرانسیل و انتگرال ، مثالهای متعدد کاربردی در رابطه با رشد و زوال ، بهینه‌سازی و .... وجود دارد ، که در کتابهای مختلف به آنها توجّه شده‌اند .

در اینجا سعی می‌کنیم ارتباط بین رشته‌های مختلف ریاضی را بحث کنیم :

۲ - روش مونت‌کارلو :

به مثال زیر توجّه کنید :

فرض کنید می‌خواهیم مساحت سطح S در شکل زیر را به‌دست آوریم :



N عدد را به تصادف در مربّع واحد انتخاب می‌کنیم ، مقدار تقریبی مساحت عبارت است از $\frac{N'}{N}$ که N' تعداد نقاط داخل این شکل است .

در این مثال $N = ۴۰$ و $N' = ۱۲$ و در نتیجه مساحت برابر ۰/۳ است . در صورتی که مقدار واقعی مساحت ۰/۳۵ است .

اصل مسأله چیست ؟

آزمایش عبارت است از انتخاب نقطه‌ای به تصادف داخل مربّع واحد . احتمال انتخاب شدن آن در داخل S ، عبارت است از مساحت S . حال ما یک آزمایش برنولی داریم با شانس موفقیّت a = مساحت S.

آزمایش را به طور مستقل N بارتکرار می‌کنیم ، متغیّر تصادفی دو جمله‌ای به‌دست می‌آید :

$$b(N, a)$$

برای تخمین a ، تعداد موفقیّتها را بر N تقسیم می‌کنیم $P = \frac{N'}{N}$ تخمینی از a یا احتمال موفقیّت است . [۹]

۳ - اعداد تصادفی :

هر عدد در مبنای ۱۰ ، دارای ارقام ۰ ، ۱ ، ۲ ... تا ۹ است . برای انتخاب تصادفی یک عدد با تعداد ارقام کمتر یا مساوی ۴ در مبنای ۱۰ ، می‌توان ۴ رقم را به تصادف بین ارقام ۰ ، ۱ ، ۲ ... تا ۹ انتخاب کرد و از آن چهار رقم یک عدد تصادفی ساخت ، حال شانس انتخاب شدن عددی خاص $\frac{1}{10^4}$ است .

روش دیگر هر عدد را نیز می‌توان در مبنای ۲ نوشت و درنتیجه ارقام آن صفر یا یک است ، طریقهٔ انتخاب تصادفی یک عدد در مبنای ۲ به شرح زیر است :

ابتدا برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم اگر شیر آمد .

$$X_i = 1$$

و اگر خط آمد :

$$X_i = 0$$

را در نظر می‌گیریم و این عمل را n بار به تصادف و مستقل انجام می‌دهیم .

عدد به‌دست آمده دارای ارقام

$$X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots . X_n$$

است شانس انتخاب هر عدد در این دستگاه برابر $\frac{1}{2^n}$ است .

توزیع یکنواخت :

به همین ترتیب هر عدد بین ۰ و ۱ را در مبنای ۲ می‌توان به‌فرم زیر نوشت :

$$t = 0 / x_1(t)\, x_2(t)\, x_3(t) \ldots$$

$$= \frac{x_1(t)}{2} + \frac{x_2(t)}{2^2} + \frac{x_3(t)}{2^3} + \ldots .$$

تناظر یک به یک بین بازهٔ [۰ , ۱] و دنبالهٔ

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

وجود دارد که در آن x_iها یا یک و یا صفر هستند .

حال انتخاب یک عدد به تصادف در بازه [۰ , ۱] معادل انتخاب دنباله برنولی با شانس $\frac{1}{2}$ است. [۱۰]

٤ ـ حال به رابطه‌ای دیگر توجّه کنید. [۱۱]

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$= 2^2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$$
$$\vdots$$
$$= 2^n\sin\frac{x}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$$

امّا برای هر x، داریم:

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty} 2^n\sin\frac{x}{2^n}$$

پس:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\sin\frac{x}{2^n} = x$$

یعنی:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$$

که برای $x=\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

از دیدی دیگر به مسأله نگاه کنید:

دیدیم، اگر t عددی تصادفی در بازهٔ $[0\ و\ 1]$ باشد، آنگاه:

$$t = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k(t)}{2^k}$$

که در آن برای هر k،

$$P(X_k(t)=1) = 1 - P(X_k(t)=0) = \frac{1}{2}$$

و X_k ها مستقل‌اند.

برای هر k فرض می‌کنیم،

$$r_k(t) = 1 - 2X_k(t)$$

پس $r_k(t)$ یا ۱ و یا ۱- است، هردو با احتمال $\frac{1}{2}$ و داریم:

$$1 - 2t = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k(t)}{2^k}$$

امّا:

$$(1-2t) = \int_0^1 e^{ix(1-2t)}dt = e^{ix}\left(-\frac{e^{2ixt}}{2ix}\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix} = \frac{\sin x}{x}$$

$(i=\sqrt{-1})$. از طرف دیگر برای هر k،

$$\int_0^1 \exp\left(ix\frac{r_k(t)}{2^k}\right)dt = \cos\frac{x}{2^k}$$

چون

$$\int_0^1 \exp\left(ix\frac{r_k(t)}{2^k}\right)dt$$
$$= \int \exp\left(\frac{ix}{2^k}\right)dt$$
$$\{t\in[0\ و\ 1]\ \ni r_k(t)=1\}$$
$$+\int \exp\left(\frac{-ix}{2^k}\right)dt$$
$$\{t\in[0\ و\ 1]\ \ni r_k(t)=-1\}$$
$$= e^{i\frac{x}{2^k}}\,\ell\{t\in[0\ و\ 1]\ \ni r_k(t)=1\}$$
$$+ e^{-i\frac{x}{2^k}}\,\ell\{t\in[0\ و\ 1]\ \ni r_k(t)=-1\}$$

که در آن $\ell(A)=p(A)$ چون ℓ اندازهٔ طول زیر مجموعه‌های $[0\ و\ 1]$ را مشخص می‌کند. سپس:

$$\int_0^1 \exp\left(ix\frac{r_k(t)}{2^k}\right)dt$$

$$= e^{i\frac{x}{2^k}} \frac{1}{2} + e^{-i\frac{x}{2^k}} \frac{1}{2}$$

$$= \cos \frac{x}{2^k}$$

$(. P(r_k(t) = 1) = P(X_k(t) = 1) = \frac{1}{2}$ دقّت کنید

از طرفی :

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 e^{ix(1-2t)}\, dt$$

$$= \int_0^1 \exp\left(ix \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(t)}{2^k}\right) dt$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \exp\left(ix \frac{r_k(t)}{2^k}\right) dt$$

یعنی :

$$= \int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(ix \frac{r_k(t)}{2^k}\right) dt$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \exp\left(ix \frac{r_k(t)}{2^k}\right) dt$$

یعنی جای انتگرال و حاصلضرب عوض شده است.

ازاحتمال می‌دانیم وقتی می‌توانیم این کار را بکنیم که استقلال داشته باشیم که در اینجا داریم . [۱۱] این مبنای مفهومی است که در نظریهٔ اعداد تحت عنوان استقلال مطرح است ، در احتمال نظریهٔ اعداد ، مسائل شمارش و بطور کلی بسیاری از محاسبات این مفهوم بکار می‌رود .

اینها نوعی ارتباط بین رشته‌های مختلف ریاضی را نمایش می‌دهند .

منابع:

[1]-Professional Standards for Teaching Mathematics,National Council of Teachers of Mathematics,NCTM,1991

[2]-Mathematics for all , Science Education Worldwide , Unesco,1990.pp.50-59

[۳] - رجالی ، علی : عمومی کردن ریاضی ، آیین فرزانگی شماره انتشارات آموزش و پرورش اصفهان (۱۳۷۴) ، صفحات ۱۲۳ تا ۱۳۸

[۴] - نقل از پروفسور پرسی‌دیاکونس در کارگاه آموزشی New trends in probability که در سال ۱۹۹۳ در دانشگاه استانفورد برگزار شد .

[۵] - رجالی ، علی : احتمال ، گزارش کارگاه آموزش ریاضی بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور ، دانشگاه شهید باهنر کرمان (۱۳۷۴) ، صفحات ۱۵۹ تا ۲۰۱ .

[۶] - رجالی ، علی : مسابقات ریاضی دانش‌آموزی ارائه شده در بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور ، ۱۳۷۳

[۷] - تلگینی ، محمود و دیگران : کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲ ، وزارت آموزش و پرورش (۱۳۷۴) .

[۸] - صالحی‌ابری ، ایرج : الکتروکاردیگرافی تشخیص ، انتشارات دانشگاه علوم پزشکی اصفهان ۱۳۶۹ .

[9]- Sobol,I.M.,The Monte CarloMethod , Mir publishers (1975)

[10]- Kac . M , Statistical independence in probabilityb , analysis and number theory , MAA,1972.

[۱۱]- چانگ ، کای‌لای : نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرآیندهای تصادفی ، ترجمهٔ آقایان ابوالقاسم میامئی و محمدقاسم وحیدی‌اصل ، مرکز نشر دانشگاهی ، ۱۳۶۴ .

---

۱ - قسمتی از مقاله در بیست و هفتمین کنفرانس ریاضی کشور در فروردین‌ماه ۱۳۷۵ در دانشگاه شیراز به‌صورت سخنرانی ارائه گردید .

2- Random Walk

سرگرمی ریاضی

اگر $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ و $A = (1! + 2!)(3! + 1!)$ باشند . مطلوب است حاصل دو عبارت زیر:

الف: $f(A) + f'(A + 2) + f''(A + 4) - 22$

ب: $f(A) + f'(A) + f''(A) + 22$

(f' و f'' مشتق اول و دوم تابع f می‌باشند.)

و امّا عدد ۲۲ عبارت است از:

$$22 = (75 - 13)_{\text{سال شمسی}} + (17 + 14)_{\text{سال قمری}} - (96 + 19)_{\text{سال میلادی}}$$

«رضا جمشیدیان»

« مسأله حل‌کنیم »

خوانندهٔ گرامی:

بخشی از مجله را با عنوان « مسأله حل کنیم » به‌طرح ، راهنمایی برای حل و یا حل برای مسائل جالب ریاضی اختصاص داده‌ایم . در این شماره فقط به‌طرح چند مسأله پرداخته‌ایم و از شمارهٔ آینده به‌راهنمایی برای حل آنها می‌پردازیم . از شما تقاضا می‌نماییم با ارسال مسائل جالب و آموزنده (باذکر منبع و اینکه مخاطب چه افرادی هستند و راهنمای حل مسأله و یا راه‌حل) و یا پاسخ به‌مسائل مطرح شده با ماهمکاری نمایید . مطالب ارسالی باذکر نام نویسنده درج خواهد گردید .

۱ - در معادلهٔ $x^n + ax^2 + b = 0$ ، a و b دوعدد حقیقی مخالف صفر و n عدد طبیعی بزرگتر از ۲ است این معادله حداکثر چند ریشهٔ حقیقی دارد ؟

۲ - نمودار تابع f از نقطهٔ M (۱۶ و ۰) می‌گذرد و ضریب زاویهٔ خط مماس برآن در هر نقطه به‌طول x برابر $4x^3y$ است . ضابطهٔ این تابع را تعیین کنید .

۳- اگر x_i عدد طبیعی باشد تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n \qquad (r \leq n)$$

را تعیین کنید .

۴ - ثابت کنید :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

۵ - اگر f تابع پیوسته و متناوب با دورهٔ تناوب T باشد ثابت کنید :

$$g(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$$

تابع ثابتی است .

۶- تحقیق کنید سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^{k-1}}$ همگرا است یا واگرا ، اگر همگرا است مقدار آن را تعیین کنید.

۷- به‌ازای چه مقادیری از k دنبالهٔ $\left\{\frac{n^2+k}{n^2+1}\right\}$ یک دنبالهٔ صعودی است .

۸- دنبالهٔ $\left\{(1-\frac{1}{n^2})^n\right\}$ همگرا است یا واگرا ؟

۹- ثابت کنید بین هر دوعدد حقیقی حداقل یک‌عدد گویا و حداقل یک‌عدد اصم وجود دارد.

۱۰-الف : در یک‌صفحه مثلثی به‌تصادف رسم می‌کنیم احتمال اینکه یکی از زوایای این مثلث منفرجه باشد چقدر است ؟

ب: سه نقطهٔ A و B و C به‌تصادف از محیط یک‌دایره انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه این سه نقطه روی محیط یک نیمدایره باشند چقدر است ؟

۱۱- n خط متمایز دوبه‌دو متقاطع در یک‌صفحه رسم می‌کنیم به‌طوری که هیچ سه خطی از یک نقطه نگذرد . این خطوط صفحه را به‌چند قسمت تقسیم می‌کنند ؟

۱۲- معادلهٔ $x^2 + ax + b = 0$ مفروض است ثابت کنید اگر این معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز باشد معادلهٔ :

$x^2+ax+b+(x+m)(2x+a) = 0 \quad (m \in R)$

نیز دارای دو ریشهٔ حقیقی است .

«ازسؤالات‌امتحانی‌مرحوم‌قوام‌نحوی»

۱۳- تابع $Y = ax^2 - bx + a$ مفروض است . اولاً a و b را طوری بگیرید که فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم یا می‌نیمم نمودار تابع از خطّ $5x + 12y + 8a = 0$ برابر a شود و مماس برمنحنی در نقطه‌ای به‌طول $\frac{1}{2}$ - بانیمساز ربع دوم موازی باشد . ثانیاً منحنی تابع $y = -(x+1)^2$ را رسم کنید .

«ازسؤالات‌امتحانی‌مرحوم‌قوام‌نحوی»

۱۴- اولاً : ثابت کنید منحنی

$$y = \frac{mx^2+x-2m}{x^2+mx-2}$$

همواره از رؤس یک متوازی‌الاضلاع ثابت می‌گذرد .

ثانیاً : مقدار m را چنان تعیین کنید که منحنی تبدیل به‌دو خط راست شود .

«ازسؤالات‌امتحانی‌مرحوم‌قوام‌نحوی»

۱۵- اولاً : نمودار $y = |x-3| - |x+1|$ را رسم کنید . ثانیاً : دامنه و برد تابع f باضابط $f(x) = \sqrt{|x-3| - |x+1|}$ را پیدا کنید.

«محمداعلمی»

۱۶- پیوستگی تابع باضابطهٔ $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$ را در بازهٔ $[0 , 2\pi]$ بررسی کنید .

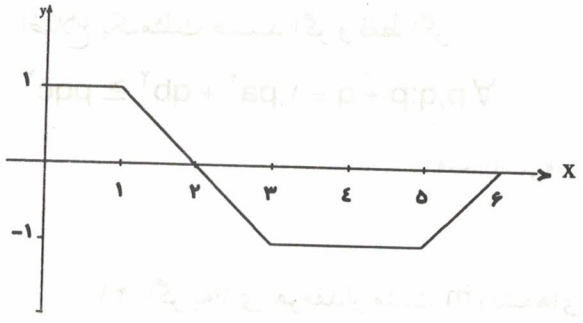
«محمداعلمی»

۱۷-اگرنمودار $y = f'(x)$ دربازهٔ $[0 ، 6]$ به‌صورت زیر باشد و $f(0) = 0$ مطلوب است :

الف - رسم تابع $y = f(x)$

ب - ضابطهٔ $y = f(x)$

«محمداعلمی»



۱۸- معکوس‌پذیری تابعهای زیر را که باضابطه معلوم شده بررسی کرده سپس ضابطهٔ معکوس هر یک را پیدا کنید.

الف) $y = f(x) = \sin x \qquad \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$

ب) $y = f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \qquad x > 1$

ج) $y = f(x) = 3 + g(2x-1)$

(اگر g معکوس‌پذیر باشد)

د) $y = 4x + |x-1|$

«محمداعلمی»

۱۹- $f(x)$ چندجمله‌ای از درجه $k+1$ مفروض است که در آن داریم:

$f(x) = f(x-1) \equiv x^k$ و $f(0) = 0$

اولاً: سه ضریب اولیهٔ این چندجمله‌ای را محاسبه کنید.

ثانیاً: به‌کمک فرض قبل حاصل

$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$

را برای $k = 1, 2, 3, 4$ برحسب n محاسبه کنید.

«احمدجهانمرد»

۲۰- ثابت کنید اعداد مثبت a و b و c اضلاع یک‌مثلث هستند اگر و فقط اگر

$\forall p,q: p+q=1, pa^2 + qb^2 \ge pqc^2$

«محمدقاسمی»

۲۱- اگر به‌ازای هرمقدار مثبت m ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c + m = 0$ حقیقی و مثبت باشند آنگاه: $a = 0$

«محمدقاسمی»

۲۲- ثابت کنید که معادلهٔ درجه دوم

$a^2x^2 + (b^2 + a^2 - c^2)x + b^2 = 0$

نمی‌تواند دارای ریشه‌های حقیقی باشد، اگر

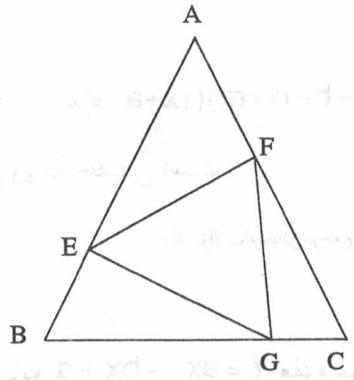
$|a-b| < c, a+b > c$

«محمدقاسمی»

۲۳- در شکل زیر ABC متساوی‌الساقین $(AB = AC)$ و مثلث EFG مثلث متساوی‌الاضلاع است ثابت‌کنید:

$$\hat{EGB} = \frac{\hat{AEF} + \hat{GFC}}{2}$$

«علی‌فقیه»



۲۴- مثلث ABC را به‌وسیلهٔ رسم خطی به‌موازات یک ضلع به‌دو مثلث هم‌مساحت تجزیه کنید.

«علی‌فقیه»

۲۵ - دردومثلث ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A}=\hat{A'}$ و $AC=A'C'$ و مجموع دو ضلع دیگر نیز برابرند . ثابت کنید دو مثلث متساویند.

«علی فقیه»

۲۶ - شرط لازم و کافی برای آنکه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد آن است که :

$$(\text{Cotan}A+\text{Cotan}B+\text{Cotan}C)\sqrt{\text{Sin}A\text{Sin}B\text{Sin}C}=\frac{۳}{۲}$$

«علی فقیه»

۲۷ - پرویز و خسرو و بیژن با بانوان خود به‌نامهای افسانه و پروانه و لاله به‌بازار رفته و هریک تعدادی دستمال می‌خرند به‌قسمی که تعداد دستمالهایی که هر یک از آنها می‌خرند به‌صورت عدد مطلق برابر است بابهای یک دستمال برحسب ریال . هرگاه جمع خرید هر مرد ۶۳ ریال بیش جمع خرید همسرش باشد و به‌علاوه پرویز ۲۳ دستمال بیش از پروانه و خسرو ۱۱ دستمال بیش از افسانه خریده باشد معلوم کنید که هریک از خانمها همسر کدامیک از آقایان هستند ؟

(ازکتاب ریاضی دانشسرای راهنمایی تحصیلی)

«حیدر علی جوادی»

۲۸- الف : دوعدد طبیعی m و n مفروضند . نمودار گردشی الگوریتمی را رسم کنید که حاصلضرب این دوعدد را تولید کند .

(از عملگرهای ضرب و تقسیم استفاده نکنید)

ب : الگوریتم قسمت الف را تعمیم دهید به‌طوری که m و n دوعدد صحیح باشند .

۲۹- عدد مثبت a مفروض است . نمودار گردشی الگوریتمی را رسم کنید که جذر a را تولید کند .

۳۰- عدد حقیقی a مفروض است نمودار گردشی الگوریتمی را رسم کنید که کعب a را تولید کند .

بسمه تعالی

اساسنامهٔ انجمن معلّمان ریاضی استان اصفهان

فصل اول: کلیات و اهداف

مادهٔ ۱- باتوجه به‌نقش حساس علوم ریاضی دربسط و توسعهٔ دانش ریاضی و ارتقاء کیفیت آموزش و همگانی‌کردن آن ، انجمن معلّمان ریاضی استان اصفهان که از این پس در این اساسنامه «انجمن» نامیده می‌شود تشکیل می‌گردد.

مادهٔ ۲- انجمن غیرانتفاعی بوده و دارای شخصیت حقوقی است و دبیر انجمن نمایندهٔ قانونی و مجری تصمیمات شورای اجرایی و مجمع عمومی آن خواهد بود.

مادهٔ ۳- انجمن به‌مدت نامحدود تشکیل می‌شود و ملزم به‌رعایت قوانین جمهوری اسلامی ایران است.

مادهٔ ۴- دفتر مرکزی انجمن درشهر اصفهان بوده و درصورت لزوم شعباتی درسایر مناطق دایر خواهد شد.

مادهٔ ۵- اعضاء انجمن به‌نام انجمن حق فعالیت سیاسی و وابستگی به‌احزاب و گروههای مختلف را ندارند.

مادهٔ ۶- فعالیت انجمن در زمینه‌های علمی و تحقیقاتی است و در این رابطه باآموزش و پرورش و مؤسسات آموزشی و علمی و تحقیقاتی و غیره همکاری نموده و یا ارتباط برقرار می‌نماید.

فصل دوم: وظایف

مادهٔ ۷- تهیهٔ نشریات و مجلات ریاضی در سطوح مختلف

مادهٔ ۸- نقد و بررسی برنامه‌های آموزشی و کتب‌ریاضی و ارائهٔ نظرات و پیشنهادات به مسؤولین ذیربط.

مادهٔ ۹- تهیهٔ مقالات و کتب‌آموزشی از طریق تألیف و ترجمه به‌وسیلهٔ اعضاء و محققین برجستهٔ ریاضی در سطوح مختلف.

مادهٔ ۱۰- برگزاری کنفرانس‌ها و سمینارها و فراهم نمودن امکانات لازم جهت شرکت اعضاء در کنفرانس‌های علمی داخل و یا خارج کشور.

مادهٔ ۱۱- ایجاد تسهیلات برای استفاده از امکانات پژوهشی و آموزشی دانشگاهها و مراکز تحقیقاتی برای اعضاء انجمن ، اعم از دانشگاههای داخل و یا خارج کشور.

مادهٔ ۱۲- همکاری باآموزش و پرورش برای آموزش مستمر معلّمان ریاضی متناسب با پدیده‌های جدید بین‌المللی به‌منظور بهینه‌سازی روش‌های تدریس از طریق آموزش ضمن‌خدمت.

مادهٔ ۱۳- تجلیل از مقام والای پیش‌کسوتان ریاضی از طریق برگزاری جلسات و یا ارائهٔ مقالات علمی از آنان.

مادهٔ ۱۴- همکاری باسایر انجمن‌های علمی داخلی و یا خارج از کشور

فصل سوم: عضویت

مادهٔ ۱۵- انجمن دارای چهار نوع عضو به‌شرح زیر است :

الف- اعضاء پیوسته : کلیهٔ دبیران ریاضی و مدرسین علوم ریاضی دانشگاهها و مراکز آموزشی آموزش و پرورش باحداقل درجهٔ لیسانس (شاغل و بازنشسته) می‌توانند عضو پیوستهٔ انجمن باشند .

ب- اعضاء وابسته : معلّمانی که به‌تدریس ریاضی اشتغال دارند و یادانشجویانی که در دورهٔ لیسانس دبیری ریاضی به‌تحصیل اشتغال دارند می‌توانند عضو وابستهٔ انجمن باشند.

ج- اعضاء افتخاری : به‌پیشنهاد شورای اجرایی و تصویب مجمع عمومی ، شخصیت‌های علمی و کسانی که در پیشبرد اهداف انجمن مؤثر باشند و یا دارای تألیفات و تحقیقاتی در زمینه‌های ریاضی و یا آموزش ریاضی می‌توانند عضو افتخاری انجمن باشند.

د- اعضاء حقوقی : سازمانهای آموزشی ، پژوهشی اعم از دولتی و یاغیر آن می‌توانند عضو حقوقی انجمن باشند .

مادهٔ ۱۶-هر یک‌از اعضاء پیوسته و یا وابسته درهر سال تحصیلی مبلغی که میزان آن از طرف شورای‌اجرایی انجمن تعیین می‌شود به عنوان حق عضویت

پرداخت خواهند کرد.

تبصرهٔ ۱- نحوه و میزان حق عضویت اعضاء حقوقی به‌پیشنهاد شورای اجرایی و تصویب مجمع عمومی تعیین می‌گردد.

تبصرهٔ ۲- حق عضویت‌های اعضاء و کمکهای مادی علاقمندان به‌ریاضی و سازمانهای دولتی و رسمی کشوری منبع تأمین هزینه‌های انجمن است.

مادهٔ ۱۷- عضویت هریک از اعضاء در موارد زیر خاتمه می‌پذیرد:

الف - استعفای کتبی. ب - عدم پرداخت حق عضویت به‌مدت یک سال

فصل چهارم: تشکیلات

مادهٔ ۱۸- تشکیلات انجمن عبارتند از: مجمع عمومی، شورای اجرایی و دبیرخانه

الف- مجمع‌عمومی

مادهٔ ۱۹- مجمع‌عمومی از گردهمایی اعضاء پیوستهٔ انجمن به‌یکی از دو صورت زیر تشکیل می‌گردد و حداقل بانصف بعلاوهٔ یک نفر رسمیّت می‌یابد.

۱- مجمع‌عمومی عادی که هرسال یک‌بار تشکیل می‌شود.

۲- مجمع‌عمومی فوق‌العاده که در مواقع ضروری و باتقاضای کتبی بیش از $\frac{1}{3}$ اعضاء پیوسته و یاسه‌نفر از اعضاء شورای اجرایی و یا تقاضای کتبی هردو بازرس امکان‌پذیر است.

مادهٔ ۲۰-برای تشکیل مجمع‌عمومی، شورای‌اجرایی موظف است حداقل سی‌روز قبل از تشکیل مجمع‌عمومی برای هریک از اعضاء دعوت‌نامهٔ کتبی باذکر دستور جلسه ارسال نماید.

مادهٔ ۲۱-تصمیمات مجمع‌عمومی بااکثریت آراء شرکت‌کننده در مجمع قابل اجرا است.

مادهٔ ۲۲- وظایف مجمع‌عمومی: تعیین خط‌مشی کلی انجمن، انتخاب اعضاء شورای‌اجرایی و دو بازرس با رأی مخفی، تصویب و اصلاح اساسنامه درصورت لزوم، تصویب بودجهٔ انجمن و بالاخره تصویب پیشنهادات شورای اجرایی.

فصل پنجم: شورای اجرایی و وظایف آن

مادهٔ ۲۳- شورای‌اجرایی مرکب است از ۷نفر عضو اصلی و ۳نفر عضو علی‌البدل که هردو سال یک‌بار در جلسهٔ مجمع‌عمومی بارأی مخفی از بین اعضاء پیوسته باحداقل ده‌سال سابقهٔ تدریس در دبیرستان انتخاب می‌شوند. درهر دوره ۲نفر بازرس هم به‌همان طریق انتخاب می‌شوند.

تبصرهٔ۱- شورای‌اجرایی در اولین جلسه که بادعوت دبیر دورهٔ قبل تشکیل می‌شود از بین خود یک‌نفر را به‌عنوان دبیر انجمن، یک‌نفر را به‌عنوان خزانه‌دار و یک‌نفر را به‌عنوان مسؤول دبیرخانه بارأی کتبی انتخاب می‌نماید.

تبصرهٔ۲- اولین دورهٔ شورای‌اجرایی با دعوت هیأت مؤسس تشکیل می‌گردد.

مادهٔ ۲۴- دورهٔ شورای‌اجرایی از اول مهر هرسال تاپایان شهریور ۲ سال بعد است.

مادهٔ ۲۵- دبیر انجمن می‌تواند یک‌نفر از اعضای شورای اجرایی را باتصویب اعضاء به‌عنوان قائم‌مقام خود معرفی نماید.

مادهٔ ۲۶- شورای اجرایی برای رسیدگی به‌امور جاری انجمن باید حداقل ماهی یک‌مرتبه تشکیل جلسه دهد.

مادهٔ ۲۷- جلسات شورای‌اجرایی باحضور حداقل ۵نفر عضو آن رسمیت می‌یابد و تصمیمات آن باموافقت حداقل ۴نفر قانونی و قابل اجراست.

مادهٔ ۲۸- عضویت در شورای‌اجرایی افتخاری است.

تبصره- هیچ عضوی نمی‌تواند سه‌بار متوالی به‌عضویت شورای‌اجرایی انتخاب شود.

مادهٔ ۲۹- مکاتبات اداری انجمن باامضاء دبیر و مهر انجمن انجام خواهد گرفت.

مادهٔ ۳۰- مبادلهٔ اسناد و اوراق بهادار و افتتاح حساب باامضاء دبیر و خزانه‌دار و مهر انجمن انجام‌پذیر

است.

مادهٔ ۳۱- عدم شرکت در جلسات شورای‌اجرایی برای سه‌نوبت متوالی و یا پنج‌نوبت غیرمتوالی بدون عذرموجه برای هرعضو به‌عنوان استعفاء آن عضو تلقی می‌گردد.

مادهٔ ۳۲- درصورت استعفا و یا فوت یکی از اعضای شورای اجرایی جانشین وی از بین اعضاء علی‌البدل و بااخذ رأی بقیهٔ اعضاء تعیین خواهد شد.

مادهٔ ۳۳- وظایف شورای‌اجرایی

الف - رسیدگی به‌امور جاری انجمن.

ب - دعوت برای تشکیل مجمع‌عمومی و تهیهٔ گزارش سالیانه و تنظیم ترازنامه برای ارائه به مجمع‌عمومی طبق مقررات اساسنامه.

ج- تهیه و تصویب آیین‌نامه‌های اجرایی اساسنامه و انجمن .

د- اتخاذ تصمیم در کلیهٔ امور مالی انجمن و جذب اعتبار و کمکهای مالی در چهارچوب اهداف انجمن.

هـ- تشکیل جلسات سخنرانی و گردهمایی‌های علمی و آموزشی بارعایت آیین‌نامه‌های انجمن.

و- انتخاب و معرفی نمایندگان انجمن به‌مجامع علمی.

ز- اقامه دعوی و پاسخگویی به‌اشخاص حقیقی و حقوقی در کلیهٔ مراکز ذیصلاح.

ح- پیشنهاد تشکیل کمیته‌هایی از اعضاء باتصویب مجمع‌عمومی جهت پیشبرد اهداف انجمن.

ط- چاپ و نشر مجلات ریاضی بارعایت قانون مطبوعات.

ی- بکارگیری کارکنان مورد نیاز و میزان حقوق آنها پس از تأمین اعتبار.

ک- همکاری با ادارهٔ کل آموزش و پرورش دربرگزاری سمینارها و دوره‌های آموزش ضمن‌خدمت.

ل- اجرای کلیهٔ امور مربوط به وظایف انجمن.

م- پیشنهاد عضویت اعضاء افتخاری.

مادهٔ ۳۴- وظایف مسؤول دبیرخانه :

۱- گردآوری و نگهداری صورت جلسه‌های تشکیلات انجمن.

۲- ثبت‌نام اعضا باتوجه به شرایط و مقررات مندرج در اساسنامه و آئین‌نامه‌های مربوط پس از تصویب شورای‌ا جرایی.

۳- انجام امور محوله از طرف شورای‌اجرایی.

مادهٔ ۳۵- وظایف بازرسها نظارت برحسن اجرای مصوبات مجمع عمومی و شورای‌اجرایی و امورمالی انجمن و گزارش سالیانه به‌مجمع‌عمومی است.

فصل ششم : کمیته‌های انجمن

مادهٔ ۳۶- کمیته‌های انجمن به‌شرح زیر است که اعضاء و مسوولان هریک توسط شورای اجرایی از میان اعضا انتخاب می‌شوند :

الف - کمیتهٔ پذیرش عضو

ب - کمیتهٔ انتشارات

ج - کمیته‌های تخصصی

د- کمیتهٔ برنامه‌ریزی گردهمایی‌های علمی - کمیتهٔ روابط عمومی که وظایف هریک در آئین‌نامه‌های مربوط تعیین خواهد شد.

تبصره : شورای اجرایی می‌تواند درصورت لزوم کمیته‌های جدیدی تشکیل دهد و یا در کمیته‌های موجود تغییراتی ایجاد نماید.

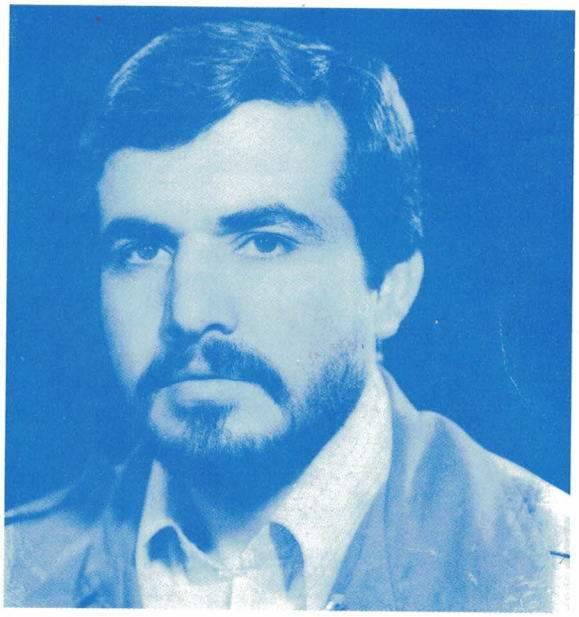
فصل هفتم : انحلال انجمن

مادهٔ ۳۷-

۱ - انحلال انجمن بارأی مثبت $\frac{۲}{۳}$ اعضاء پیوسته قابل اجراست.

۲ - در صورتی که تصمیم به‌انحلال انجمن گرفته شود ، کلیهٔ دارایی انجمن اعم از منقول و یا غیرمنقول بعد از تسویه حسابها باتصویب شورای‌اجرایی و نظارت ادارهٔ کل آموزش و پرورش به یکی از مؤسسات آموزشی و یا پژوهشی دولتی استان تحویل داده خواهد شد.

«مجتبی»ای به حقیقت «مجتبی» از یاران اندیشمند ریاضی



در طلوع این چکامه دریغمان آمد از یاری معلّم، مخلصی مسلمان، سرداری مبتکر، اندیشمندی ریاضیدان کلامی نگوییم. او «سردار شهید حاج مجتبی کلاهدوزان» معلّم ریاضی نامی دارای جاذبه‌های فراوانی بود که هرکدام نیاز به دقّت و تعمّق دارد. مثلاً:

در مساجد ـ از همان ایام نوجوانی دانش‌آموزان مساجد را آگاه می‌کرد. در همان مساجد کلاس درس می‌گذاشت و بسیاری از نام‌آوران آگاه مسلمان امروز شاگردان مساجد دیروز او هستند. یکی از این پایگاههایش «مسجد عباس‌آباد» اصفهان بود.

در محیط‌های ورزشی ـ او قهرمان فوتبال هم بود و بسیاری از افراد از راه ورزش، آشنای صفای او شدند و بهره‌های فراوانی در این مسیر از تقوای او بردند و ساخته شدند.

در محیط‌های اجتماعی ـ وقار و متانت - صبر و بردباری - تبسّمی روح‌افزا که همیشه درچهره داشت بسیاری افراد را جذب کرده بود و چه بهره‌ها که در این مسیر از او بردند و توانستند نجات خودرا از شیوهٔ اسلامی این شهید عزیز بیابند.

بیان خوش ـ برای یک معلّم شیرینی و خوشی بیان کلید رمز موفقیّت است که همه به تسلّط علمی عجین شده و از او یک معلّم موفّق ساخته بود.

صمیمیت و وداد ـ دربین دوستان و همکاران با صمیمیتی عجیب یار همه بود. با قدرت و خلّاقیّت و ابتکار زائدالوصفی چه بسیار مشکلات دوستان و همکاران را حل می‌کرد.

این چکیده نه شرح حال اوست و جای قال و نه راقم را قدرت گفتار بگذار تا یاران اندیشمند از جای دیگر شرابی گواراتر بنوشند و شهد یاد اورا بلکه کاملتر بیابند. زیرا خوشبختانه کمتر «باخبری» است که از «مجتبی» بی‌خبر باشد و هرکه بخواهد. یا از شاگردان یا از یاران یا از همکاران و یا از همسنگرانش و یا از ... می‌تواند کمی به‌عظمتش واقف شود.

آری پیچ و خمهای ظریف هدایت و وصل و دیدار معشوق را همه نتوانند و رندی و عارفی باید.

راه پنهانی میخانه نداند همه‌کس
جز من و شاهد و رند و دو سه رسوای دگر

روانش شاد، یادش گرامی، راهش پر رهرو باد بگذار پایان نیافته خاتمه دهم.

«علی مقدّس»

« فهرست مطالب »

کلام نخست	هیئت تحریریه	۱
پیام مدیرکل آموزش و پرورش استان اصفهان	مرتضی امام جمعه زاده	۲
مرکز تحقیقات معلّمان اصفهان	جعفر شیخ الاسلام	۳
بازی یا ریاضیات	احمد حقّانی	۵
اعداد مصوّر	حسینعلی موحدی	۱۵
کاربرد ریاضی در حل مسایل روزمره	علی رجالی	۱۹
مسأله حل کنیم		۳۰
اساسنامهٔ انجمن معلّمان ریاضی استان اصفهان		۳۴
« مجتبی » از یاران اندیشمند ریاضی	علی مقدّس	۳۷