

# آشنائی با ریاضیات



جلد

سی و هفتم

آشنائی با ریاضیات (جلد سی و هفتم)

ویراستار: پرویز شهریاری

امورفنی: حسنیک بخت

ناشر: انتشارات فردوس، تلفن ۳۱۲۴۵۳۳

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

چاپ اول: پائیز ۱۳۷۱

حروفچینی: مهدی

چاپ و صحافی: رامین

فهرست جلد سی و هفتم

- |     |                     |                                  |
|-----|---------------------|----------------------------------|
| ۲۴۱ | ترجمه پرویز شهریاری | امنیت (ریاضی دان)                |
| ۲۵۲ | —                   | مسئله هایی برای حل               |
| ۲۵۵ | ترجمه ابراهیم عادل  | طرح مسئله در هندسه               |
| ۲۶۵ | غلامرضا یاسی پور    | نظریه اعداد یونانی               |
| ۲۸۱ | ترجمه هرمز شهریاری  | فیبوناچی و رشته های عددی         |
| ۲۹۴ | جمال طاهری          | طرح                              |
| ۲۹۵ | ترجمه پرویز شهریاری | معادله ها و نامعادله های خطی (۲) |
| ۳۱۴ | —                   | از مجله های ریاضی خودمان         |
|     |                     | نظرات دانشمندان در چگونگی پیدایش |
| ۳۲۲ | دکتر یوسف فضایی     | کرات آسمان و مکانیسم کنونی جهان  |
| ۳۲۸ | —                   | حل مسئله ها                      |

۶۰۰ ریال

آشنایی با ریاضیات (جلد سی و هفتم)

ویراستار: پرویز شهریاری

امورفنی: حسن نیک بخت

ناشر: انتشارات فردوس، تلفن ۳۱۲۴۵۳۳

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

چاپ اول: پالیز ۱۳۷۱

حروفچینی: مهدی

چاپ و صحافی: رامین

فهرست جلد سی و هفتم

۲۴۱	ترجمه پرویز شهریاری	امی نتر (ریاضی دان)
۲۵۲	—	مسئله هایی برای حل
۲۵۵	ترجمه ابراهیم عادل	طرح مسئله در هندسه
۲۶۵	غلامرضا یاسی پور	نظریه اعداد یونانی
۲۸۱	ترجمه هرمز شهریاری	فیبوناچی و رشته های عددی
۲۹۴	جمال طاهری	طرح
۲۹۵	ترجمه پرویز شهریاری	معادله ها و نامعادله های خطی (۲)
۳۱۴	—	از مجله های ریاضی خودمان
		نظرات دانشمندان در چگونگی پیدایش
۳۲۲	دکتر یوسف فضایی	کرات آسمان و مکانیسم کنونی جهان
۳۲۸	—	حل مسئله ها

(به مناسبت یکصد و دهمين  
سال تولد او)  
زندگی نامه «امی نتر» پیچیده نیست. در ۲۳ مارس ۱۸۸۲ در ارلانگن، در خانواده ماکس بیتر ریاضی دان، پهندنی آمد. استعداد ریاضی او به تدریج ظاهر شد. در سال ۱۹۰۷، از رساله خود درباره «نظریه صوری - نظری انواریانها» دفاع کرد. ده سال بعد، اثر خود را درباره «انواریان های دیفرانسیلی» آماده کرد (۱۹۱۸)؛ این دو اثر، نشانه خوبی بود بر استعداد و شایستگی امی نتر در ریاضیات. کشش او به سمت تنظیم کلی مسئله های ریاضی بود و می خواست به چنان سازمان های ریاضی دست یابد که چهره ریشه ای و منطقی موضوع موردنظر را، به دور از هرگونه پیچیدگی و ابهام و موقعیت های تصادفی، نشان دهد.

امی نتر، رساله مربوط به انواریان های دیفرانسیلی را در گوتینگن نوشت که از سال ۱۹۱۶ در آنجا اقامست داشت. کارهای ریاضی این دوره او، بهشدت تحت تأثیر هیلبرت بود. اغلب فراموش می کنند که فعالیت های امی نتر در این دوره، روی مسئله های مربوط به جبر هیلبرتی متصرک بود. همین کارها و کار او درباره انواریان های دیفرانسیلی، به خودی خود، او را در ردیف ریاضی دانان درجه اول قرار می دهد،

۱- این مقاله از سخن رانی با اول سرگه یهودیچ آلکساندروف، عضو فرهنگستان و رئیس انجمن ریاضی دانان مسکو در ۵ سپتامبر ۱۹۳۵، که به مناسبت مرگ امی نتر ایجاد شده، برداشته شده است.

مربوط به همسانی<sup>۱</sup> و هم ریختی<sup>۲</sup>، مفهوم هایی مثل قطعه زنجیره صعودی یا نزولی زیر گروهها یا ایده آل و، به خصوص، مفهومی مثل «گروه های با عمل کننده»، برای نخستین بار، به وسیله امیتتر تنظیم شد و امروز، به عنوان وسیله نیرومندی در یک رشته از ریاضیات کاربرد دارد. کافی است نظری کلی به کارهای افسوس می یونو و چیز پوچ باگین در زمینه نظریه گروه های پیوسته، کارهای آندره نیکلایه و چیز کولموگروف در زمینه تپولوژی ترکیبی فضاهای بهم پیوسته موضعی، کارهای ابرهاردهوب<sup>۳</sup> در زمینه نظریه نگاشته های پیوسته و کارهای وان درواردن<sup>۴</sup> در زمینه هندسه جری بیندازیم، تا به تأثیر اندیشه های امیتتر بی بیریم. این تأثیر را، در کتاب هرمان ویل<sup>۵</sup> هم می توان دید.<sup>۶</sup>

می توان از خود جبر (همراه با نظریه گروهها) صحبت کرد که، به ظاهر، جزو بررسی های مستقیم امیتتر نیست. در اینجا هم، عده ای از با استعداد ترین ریاضی دان ها، توансند با ادامه کارهای امیتتر در جهت های مشخص و مختلف، تکامل این شاخه ریاضیات را در زمان ما، تأمین کنند. به خصوص نظریه کلی استشانها و نظریه گوناگونی های جبری، از جمله موقیت های چشم گیری هستند که تحت تأثیر نظریه کلی ایده آل های امیتتر پدید آمدند. در همین رابطه، باید بادآوری کنم که در مسکو، در بین ریاضی دانانی که در زمینه جبر کار کرده اند، کارهای مشهور او تپوله و چیز شمیت درباره منحصر به فرد بودن تعزیزه گروهها به ضرب مستقیم، و یک رشته از کارهای آ. کوروش، تحت تأثیر جدی امیتتر بوده است.

با مطالعه نتیجه گیری های امیتتر در دوره های خلاقیت او در تمامی زندگی، تردیدی باقی نمایند که کنش اصلی و جوش و خروش اساسی درونی او، در جهت موضوع های کلی و، تا حد زیادی، اصل موضوعی کردن ریاضیات بوده است. توجه امیتتر به این جنبه کار، کاملاً به موقع و بسیار ضروری بود، زیرا در زمان ما، مسئله مربوط به اصل موضوعی کردن و سازمان دادن ریاضیات به صورتی کلی، انتزاعی و مشخص، یکی از مسئله های اساسی عمل ریاضی است. علاقه به تعامی مسئله، در مجموع و به طور کامل، به ویژه از این جهت ثمر بخش است که، از یک طرف،

1 - Homomorphism.

2 - Isomorphism.

3 - Hopf

4 - Van der Waerden.

5 - Weyl (1885 - 1955)

6-Cruppen theorie und Quanten mechanik.

به نحوی که نمی توان اعتبار او و تأثیر او را در دانش ریاضی، کمتر از بررسی های سوفیا واسیلیونا کووالوسکایا (۱۸۵۰ - ۱۸۹۱) داشت. با وجود این، وقتی از امیتتر، به عنوان یک ریاضی دان صحبت می شود، نه به این کارهای اولیه او، بلکه به دورانی از زندگی او توجه می شود که، آغاز آن را، باید از سال ۱۹۲۰ به حساب آورد، دورانی که امیتتر، در نقش پدیدآورنده سمت گیری تازه های در جبر، ظاهر می شود.

خود امیتتر هم، به این امر که کارهای نخستین او را کمتر به یاد آورند، کمک می کرد: او می خواست خودش هم، سال های نخست فعالیت های علمی خود را، فراموش کند، زیرا گمان می کرد، نتیجه هایی که در آن سال ها به دست آورده است، در برایر مسیر اصلی علمی او، یعنی پدیدآوردن جبر انتزاعی کلی، ارزشی ندارد.

در این جانمی خواهم درباره همه کارهایی که امیتتر برای ریاضیات کرده است، صحبت کنم، بلکه می خواهم سیمای این زن دانشمند را، هم به عنوان یک ریاضی دان، هم به عنوان فصلی از یک مکتب بزرگ علمی و هم به عنوان شخصیتی درخشنان، بی نظری و جذاب، به صورتی صمیمانه نز در برایر شما قرار دهم.

امیتتر، راه خاص خودش را در زمینه ریاضیات، از سال های ۱۹۱۹ - ۱۹۲۵ آغاز کرد. خود او، آغاز این دوره فعالیتش را از زمانی می داند که کار مشترک و معروف خود را با د. شینی دلرانجام داده است. این کار، مقدمه ای بود بر «نظریه عمومی ایده آل ها»<sup>۷</sup> او که با عنوان «Idealtheorie in Ringbereiche» در سال ۱۹۲۱ منتشر شد. به اعتقاد من، درین همه کارهای امیتتر، پایه های نظریه عمومی ایده آل ها و همه آن چه که بدین پایه ها مربوط می شود، بیشترین تأثیر را، بر مجموعه ریاضیات داشته و خواهد داشت. این اندیشه ها، نه تنها کاربردهای جدی، مثلًا در کارهای وان دز وارین در زمینه هندسه جبری پیدا کرد، بلکه در ضمن، بر خود تفکر جبری و تاحذی بر تفکر عمومی ریاضی زمان ما، تأثیری جدی و عمیق داشته است. اگر در زمان ما، تکامل ریاضیات زیر پرچم «جبری شدن» انجام می گیرد، اگر مفهوم ها و روش های جبری، در گوناگون ترین نظریه های ریاضی نفوذ کرده است، تنها به خاطر کارها و آفرینش های امیتتر است. او به ما آموخت، به جای عمل های بغرنج جبری، به مفهوم های ساده و کلی جبری (تصویر یکسان، گروه یا حلقه با عمل کننده ها، ایده آل ها) بیندیشیم و به این ترتیب بود که سیر یافتن قانون مندی های جبری، در آن جاهای، این قانون مندی ها، زیر پوششی از موقعیت های خاص و پیچیده جبری پوشیده شده و از دید متخصصان جبر رسمی پنهان بودند، گشوده شد. قضیه هایی مثل «قضیه

ورزیده شده‌ایم، به تدریج رو به تحلیل بود و از پا درآید. و به همین مناسبت، می‌ترسم، نسل رو به رشد ریاضی‌دانان، در برای مرحله دشواری از ریاضیات ایستاده باشد. آن وقت هرمان ویل ادامه می‌دهد: «می‌بین، علیه این دیدگاه به اعتراض برخاست، در اقع هم، توانست با تکیه بر روش اصل موضوعی، مسئله‌های مشخص تازه‌ای کشف کند و راه حل‌های آن‌ها را نشان دهد.

این نقل قول، شایسته توجه بسیار است. قبل از هرچیز باید گفت، این دیدگاه، که هر تلاشی برای اصل موضوعی کردن موضوع‌های ریاضی، باید بعد از تعزیه و تحلیل و بررسی این موضوع‌ها انجام گیرد، برخوردي ساده‌اندیشانه است؛ از این گذشته، اصل موضوعی کردن، تنها وقتی جالب است که با معرفت واقعی ریاضی (چیزی که هرمان ویل آن را «جوهر ریاضیات» می‌نامد) بستگی داشته باشد و، البته، در این صورت، آب در هاون کوییدن نیست. در واقع، «می‌بین» علیه همان روحیه بدینانه و نامیدکننده‌ای اعتراض می‌کند که در سخن رانی سال ۱۹۳۱ هرمان ویل دیده می‌شود. جوهر معرفت انسانی، و از آن جمله ریاضیات، دست‌کم برای سال‌های بسیار زیادی، پایان ناپذیر است و این، همان چیزی است که «می‌بین» به آن باور داشت. ممکن است جوهر ریاضیات چند ده ساله اخیر، به پایان خود برسد، ولی جوهر ریاضیات به طور کلی، همچنان زاینده است، چراکه با هزاران رشته آشکار و پنهان، به جهان واقعی و به زندگی انسانی مربوط شده است. «می‌بین»، این بستگی را، حتی برای انتراعی ترین جنبه‌های ریاضیات، به خوبی احساس می‌کرد، و با آن که به جنبه فلسفی موضوع نمی‌اندیشید، به عنوان یک دانشمند واقعیین و به عنوان انسانی که هرگز خود را به زنجیر مفهوم‌های انتراعی نیسته بود، واقعیت را در کم می‌کرد. «می‌بین» به ریاضیات، به عنوان وسیله نیرومندی برای شناخت جهان می‌نگریست، نه به عنوان یک بازی با نمادها؛ او در عین حال، در برابر کسانی که می‌خواستند تهبا با درنظر گرفتن شاخه‌هایی از ریاضیات کاربردی، بستگی ریاضیات را با زندگی و عمل توجیه کنند، مخالفت می‌کرد. او ریاضیات را، همچون معرفت و شناخت به طور کلی، می‌دید که، از یک طرف باید به صورت واحدهای جداگانه مورد بررسی قرار گیرند و، از طرف دیگر، با توجه به بستگی‌های متقابل این واحدهای، به یکپارچگی و یگانگی آن لطمه‌ای نخورد، چرا که هر دو جنبه ریاضیات، به یک اندازه، اهمیت دارد.

احساس و درک عمیق واقعیت‌ها، مبنای اصلی خلقت «می‌بین» بود؛ شخصیت

نشریه‌های ریاضی، با مجموعه‌ای از مقاله‌های کم و بیش مزاحم خود درباره تعمیم و اصل موضوعی کردن و مانند آن، اغلب از مضمون مشخص ریاضی دور می‌شوند و، از طرف دیگر، این جا و آن جا اعلام می‌شود که، ریاضیات امروزی، به جز همین‌ها، چیز دیگری نیست. آن‌ها، با این شعار، مسئله‌های مهم ریاضی را تنها به این دلیل به یاد می‌آورند که با «عقل سليم» سازگار نیستند و از مفهوم‌هایی استفاده می‌شود که در چند ده سال گذشته معمول نبوده است، مثل مفهوم حلقه‌های جبری یا حلقه‌های جبری عام، مفهوم فضای توپولوژی و غیره. هرمان ویل، در سخن رانی خود، در نشستی که برای بزرگداشت «می‌بین» در ۲۶ آوریل ۱۹۳۵، در پنسیلوانیای امریکا تشکیل شده بود، همین مسئله کلی رامطرح می‌کند. او چنان خوب در ماهیت موضوع وارد شده است که نمی‌توانم، در اینجا، از سخن او صرف نظر کنم:

در سال ۱۹۳۱، در سخن رانی خود درباره توپولوژی و جبر انتراعی، به عنوان دوسیر درک ریاضیات، گفته بودم: «نمی‌توانم درباره این حقیقت سکوت کنم که، در زمان ما این اعتقاد در میان ریاضی‌دانان منتشر می‌شود که، ثمریخشی این‌گونه روش‌های انتراعی، روزبه روز کمتر و ناچیز‌تر می‌شود. موضوع این است که، این مفهوم‌های انتراعی و کلی، با همه زیبائی و دلفریبی خود، ملموس نیستند و از دسترس ما بیرون‌اند. هر مسئله مشخص، به نحوی حل می‌شود که بستگی به میزان دشواری آن دارد و، در آغاز، موقیت در حل مسئله، با دشواری و به طور تقریبی حاصل می‌شود. آن وقت، اصل موضوع گرایان از راه می‌رسند و می‌گویند: به جای این که از نیروی بازوی خود استفاده کنید، و برای بازکردن در، آن را با زور بشکنید، برای خود تان کلید مخصوصی تهیه کنید و در را، به سادگی و بدون دشواری، به کمک کلید، باز کنید. ولی حقیقت این است که، این‌ها، تنها به این دلیل می‌توانند کلید را بسازند که، باشکسته شدن در، این امکان را به دست آورده‌اند که قفل را، از هر دو طرف، از بیرون و از درون، مورد بررسی قرار دهند. پیش از آن که بتوانید تعمیم دهید، تنظیم کنید و به صورت اصل موضوعی در آورید، باید جوهر ریاضیات را در اختیار داشته باشید. یعن آن دارم که، جوهر ریاضیات، در نوع سازمان‌دهی که در چند ده ساله اخیر به آن عادت کرده‌ایم و

دور بود، اغلب برای سردرآوردن از دیدگاههای او، دچار زحمت بسیار می‌شد. از سال ۱۹۲۷، تأثیر اندیشه‌های <sup>امی‌بتر</sup> بر ریاضی‌دانان معاصر او، روزبه روز پیشتر می‌شد و، همراه با آن، اعتبار علمی صاحب این اندیشه‌ها، بالاتر می‌رفت. کار شخصی او، در این دوران متوجه بود و تغییر می‌کرد، اغلب، از حوزهٔ جبر غیرجایه‌جایی، به سراغ نظریهٔ عمومی حساب در دامنهٔ فرامختلط‌ها می‌رفت. کارهای او در این زمینه‌ها، بحث‌های زیادی را در نظریهٔ جبری عده‌ها برانگیخت. از شاگردان این دوره از فعالیت او، می‌توان از م. دورینگ<sup>۱</sup>، ویت<sup>۲</sup> و فیننگ<sup>۳</sup> نام برد. دورینگ، رساله‌ای را در زمینهٔ کار <sup>امی‌بتر</sup> در حوزهٔ فرامختلط‌ها، منتشر کرد.

<sup>امی‌بتر</sup> برای به رسمیت شناخته شدن کامل اندیشه‌های خود، انتظار می‌کشید. اگر در سال‌های ۱۹۲۳ - ۱۹۲۵، در تلاش دائم برای اثبات اهمیت نظریهٔ خود بود، در سال ۱۹۳۲، در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات در زوریخ، توانست موفقیت زیادی به دست آورد. سخنرانی او در این کنگره، یک پیروزی درخشان برای او بود و نه تنها توانست درستی اندیشه‌های خود را، چه از نظر ریاضی و چه از نظر درونی، ثابت کند، بلکه در عین حال، همه را به مسیر تکاملی موردنظر خود در ریاضیات قانع کرد. ولی پیروزی نازیسم، پیش آمد داشت انگریزی که تمامی معرفت و فرهنگ انسانی را تهدید می‌کرد، مکتب ریاضی گوتینگ را برم زد و، <sup>امی‌بتر</sup> ناچار به مهاجرت از آلمان شد (۱۹۳۲). او یک سال و نیم آخر عمر خود را در «براون ماور» و «پرینستون» گذراند.

□

رفتار با <sup>امی‌بتر</sup> را در آلمان، می‌توان به عنوان نمونهٔ روشنی از کهنه‌پرستی نفرات انگریز و، در ضمن، ناتوانی و بی‌قابلیتی فرهنگستان‌نشیان و مستولان بوروکرات پروسی در رفع دشواری‌ها، به یاد آورد. دانشیار شدن او در سال ۱۹۱۹، تنها درنتیجه پافشاری هیلبرت و کلابن و بعد از مقابله‌ای جدی با مقاومت لجوچانه استادان ارتاجاعی دانشگاه، مورد تأیید قرار گرفت. اعتراض اصلی، به ظاهر، به «جنسیت» <sup>امی‌بتر</sup> مربوط می‌شد. می‌گفتند: «چگونه می‌توان اجازه داد، یک زن دانشیار بشود؛ بعد از دانشیاری، نوبت به استادی و، سپس، عضویت سنای دانشگاه می‌رسد، و مگر می‌شود یک زن را به سنا فرستاد؟» و در همین جا، هیلبرت، نیش دار و پرطنز تذکر می‌دهد: «آقا، مگر سنای

1 - M. Deuring.

2 - Witt

3 - Fitting.

علمی او (در گردهم آیی‌ها و انجمن‌های ریاضی) همیشه رودر روی کسانی قرار می‌گرفت که می‌خواستند، ریاضیات را، به نوعی ورزش ذهنی و اندیشه‌ای تبدیل کنند. در گفت و شنوهای مکرری که با او، دربارهٔ ماهیت ریاضیات داشته‌ام (و همیشه ساده و بدون توجه به جنبه‌های فلسفی موضوع بود)، <sup>امی‌بتر</sup> بارها این جمله ریای لابلس را به یاد می‌آورده که:

اگر انسان، خود را تنها به جمع آوری حقیقت‌ها محدود کند، آن‌وقت دانش، به مجموعه‌ای از اصطلاح‌های بزرگ طبیعت را نخواهد شناخت. درنتیجه، هرگز قانون‌مندی‌های بزرگ دانش بشری جاری شده است، در این سخن، که از زبان یکی از نمایندگان بزرگ دانش بشری شده است، بستگی تکان‌گشتنی داشت با واقعیت عینی جهان خارج، به خوبی شان داده شده و شامل برنامهٔ کاملی از رابطهٔ متقابل دست آوردهای مشخص و انتزاعی، با شناخت آدمی به طور کلی و، از آن جمله، ریاضیات است. و به اعتقاد من، <sup>امی‌بتر</sup> در آفرینش‌های خود، این برنامه را اجرا کرده است.

مکتب <sup>امی‌بتر</sup> در سال‌های ۱۹۲۴ - ۱۹۲۵، یکی از درخشان‌ترین موفقیت‌های خود را به دست آورد: واندر واردن، دانشجوی آمستردامی، شاگرد این مکتب شد. او تنها ۲۲ سال داشت و یکی از درخشان‌ترین چهره‌های جوان ریاضیات اروپا بود. واندر واردن، به سرعت نظریه‌های <sup>امی‌بتر</sup> را فراگرفت و آن‌ها را با نتیجهٔ گیری‌های کاملاً تازه‌ای فنی تر کرد. او نظریهٔ کلی ایده‌آل‌های، در سال ۱۹۲۷، در گوتینگن و با موفقیت بالایی گذراند. اندیشه‌های <sup>امی‌بتر</sup>، با طرح سیار جالب واندر واردن، ابتدا در گوتینگن و، سپس، در دیگر مرکزهای ریاضی اروپا، ریشه دوانید. تصادفی نیست که <sup>امی‌بتر</sup>، به عالم کردن اندیشه‌های خود و به بیان آن‌ها بازبان ساده نیاز داشت: سخن‌رانی‌ها و درس‌های او، به گروه نه‌چندان بزرگ شاگردانی مربوط می‌شد که در جهت پژوهش‌های او کار می‌کردند و، به طور دائم، سر درس او حاضر می‌شدند. این سخن‌رانی‌ها و درس‌ها، به هیچ وجه، برای گروه وسیعی از ریاضی‌دانان، مناسب نبود: استفاده از کلاس <sup>امی‌بتر</sup> کم و یش دشوار بود، او تن، درهم و نامفهوم صحبت می‌کرد؛ ولی در عوض، تفکر ریاضی بسیار نیرومندی داشت و شوق و شوری بی‌اندازه به وجود می‌آورد. وقتی هم که در انجمن‌ها و سمینارهای ریاضی صحبت می‌کرد، به همین گونه بود. اگر ریاضی‌دانی اندیشه‌های او را فرامگرفت و به کارهای او علاقه‌مند می‌شد، می‌توانست از درس و سخن‌رانی او استفاده کند، ولی ریاضی‌دانی که از کار و کلاس او

وقتی که من و زنده‌یاد پاول ساموئل‌لوویچ اوریسون، برای نخستین بار به گوتینگن رفته بودیم، بلافصله، در گروه ریاضی که امیدیتر آن را اداره می‌کرد، شرکت کردیم. در همان برخورد اول می‌شد خطوط اصلی مکتب پیتر را دید: جوش و خروش رهبر مکتب که به شاگردان او هم سرایت کرده بود، اعتقاد عمیق او را به اهمیت و پرباری اندیشه‌هایش (اعتقادی که، در آن زمان، حتی در گوتینگن، خریدار چندانی نداشت) و سادگی و مهربانی غیرعادی که در رابطه رهبر مکتب با شاگردانش وجود داشت. در آن زمان، این مکتب، تنها شامل دانشجویان جوان ساکن گوتینگن می‌شد؛ هنوز به دورانی نرسیده بودیم که، این مکتب، جهانی شود و در مرکز همه اندیشه‌های جبری قرار گیرد. علاقه‌های ریاضی امیدیتر (که در آن زمان، در گرگرم کارهای خود در زمینه نظریه عمومی ایده‌آل‌ها بود) و علاقه‌های ریاضی من و اوریسون - که در اطراف مسئله به‌اصطلاح توبولوژی جبری دور می‌زد - نقطه‌های مشترک زیادی با هم داشت و، به همین مناسبت، تقریباً هر روز، بحث‌های ریاضی جالبی با هم داشتیم. امیدیتر، نه تنها به کارهای ما در زمینه توبولوژی، بلکه به همه کارهای ریاضی که در کشور ما می‌شد (و نه تنها کارهای ریاضی) علاقه‌مندی نشان می‌داد. او علاقه‌خود را به کشور ما و به نظام اجتماعی و حکومتی آن، پنهان نمی‌کرد، در حالی که می‌دانست، این تمایل و علاقه، می‌تواند موجبی برای آزار او باشد. کار دشمنی با امیدیتر به جائی رسید که او را از پانسیونی که در آن زندگی می‌کرد، به خواست دانشجویانی که در همین پانسیون بودند و نمی‌خواستند «با یک یهودی مارکسیست» زیر یک سقف زندگی کنند، اخراج کردند؛ و این آغازی بود بر ماجراهی غم‌انگیزی که او را به پایان زندگی خود نزدیک کرد.

امیدیتر، با شنیدن موقفيت‌های علمی، و به ویژه موقفيت‌های ریاضی کشور ما، به شوق می‌آمد، زیرا این موقفيت‌های را پاسخی دندان‌شکن به کسانی می‌دانست که مدعی بودند «انقلابیون، فرنگ را ویران کرده‌اند» و احساس می‌کرد، در همین موقفيت‌هاست که فرنگ جدید آینده می‌شکفت. امیدیتر، به عنوان نماینده یکی از انتراعی ترین شاخه‌های دانش ریاضی، نسبت به درک جریان‌های تاریخی زمان ما، حسابیت فوق العاده‌ای داشت، به طور جدی به سیاست علاقه‌مندی نشان می‌داد، با تمامی وجود خود، از جنگ و از شوونیسم - به هر شکل و به هر صورت خود - نفرت داشت و، در این باره، هرگز دچار تزلزل نشد؛ همیشه و بدون تغیر، اعتقاد و تمایل خود را به کشور ما حفظ کرد، چرا که آن را، آغازی برای دوران جدید تاریخ انسانی و

حمام مردانه است که زن نتواند وارد آن بشود؟ ولی در واقع، این ظاهر امر بود. اعتراض متولیان فرنگستان گوتینگن، بیشتر از زن بودن امیدیتر، اعتقادهای سیاسی رادیکال او بود. او سرانجام، دانشیاری و، سپس، استادی افتخاری (یعنی بدون حقوق) را به دست آورد؛ تنها تلاش‌های کورانت موجب شد تا حق الزحمه ناچیزی (۲۰۰ تا ۴۰۰ مارک در ماه) برای او تعیین کنند که، البته، باید هر سال به تایید وزیر می‌رسید. با همه این‌ها و با وجودی که ماهیانه تضمین شده‌ای نداشت، تا زمان اخراج از دانشگاه و اجبار به مهاجرت از آلمان، به زندگی و کار خود ادامه داد. او عضو هیچ فرنگستانی نبود، حتی فرنگستان شهری که تمامی فعالیت‌های خود را، در آن جا، متمرکز کرده بود. هرمان ویل، به این مناسبت، می‌نویسد:

وقتی در سال ۱۹۳۵ ۱۹۳۵ کرسی استادی خود را به دست آوردم، ۱ بسیار کوشیدم تا وزیر را، برای بهتر کردن شرایط زندگی او (امیدیتر) قانع کنم. از این که در برابر این ریاضی دان بزرگ، مقام والاتری داشتم، خجالت می‌کشیدم؛ می‌فهمیدم که او، به عنوان یک ریاضی دان، در جهت‌های بسیاری، والا از من است؛ ولی من، به نتیجه‌ای نرسیدم. در تلاش خود، برای انتخاب او به عضویت جامعه علمی گوتینگن هم، شکست خوردم. سنت‌های کهنه، کچ فکری و محافظه‌کاری، در مقابل مقام علمی و نفوذ و تأثیر علمی او، برنده شد. در سال‌هایی که من در گوتینگن بودم (۱۹۳۲-۱۹۳۵) بی‌هیچ تردیدی، امیدیتر، مرکزی نیرومند برای فعالیت‌های خلاق ریاضی به شمار می‌رفت، چه از دیدگاه بارور بودن پژوهش‌های علمی خود او، و چه از نظر تأثیری که بر گروه زیادی از شاگردان خود داشت.

گمان می‌کنم لزومی نداشته باشد، چیزی به سخنان ویل بیفزایم.

امیدیتر رابطه نزدیکی با مسکو داشت. این رابطه، از سال ۱۹۴۳ آغاز شده بود،

۱ - وقتی در سال ۱۹۳۵، هیلرت، به دلیل سن خود (۶۸ سالگی)، کار رسمی خود را رها کرد، هرمان ویل کرسی او را بدست آورد. کرسی هیلرت، نخستین کرسی ریاضی دانیکا (در ۱۹۳۳)، هاسه جای او را گرفت.

دربارهٔ جبر، بدون شک، نتیجهٔ معاشرت او با امیدیتر است. امیدیتر در مسکو، خیلی زود، با نوع زندگی ما، چه زندگی علمی و چه زندگی روزمره، خوگرفت. در اطاق نسبتاً محترمی زندگی می‌کرد و، اغلب، پیاده به دانشگاه می‌آمد. او به زندگی مردم کشور ما و، به خصوص، زندگی و نوع کار دانشجویان ما، علاقهٔ زیادی نشان داد.

□

امیدیتر، انسانی کم‌نظیر و پرجاذبه بود. صمیمیت و مهربانی غیرعادی، پرهیز از هرگونه خودنمایی و دوروئی، زنده‌دلی و سادگی، از ویژگی‌های او بود. هیچ‌چیز و هیچ حادثه‌ای، آرامش او را بهم نمی‌زد. بر محیط دور ویر او، چنان آرامش و شادی ساده‌ای حاکم بود که، برای همهٔ کسانی که با او معاشرت داشتند فراموش نشدندی است. باوجود این، سادگی و مهربانی او، هرگز به معنای ساده‌لوحی و بی‌تفاوتوی او نبود. اعتقادهای خودش را داشت و، با استواری، از آن‌ها دفاع می‌کرد. هرچه پیش می‌آمد و در هر موقعیتی، بدون هراس از پی‌آمدی‌ای که در انتظار او بود، مستقیم و بی‌پرده، عقیدهٔ خود را می‌گفت. زندگی او با شاگردانش می‌گذشت، به آن‌ها عشق می‌ورزید، چراکه جای خالی خانواده را، برای او پر می‌کردند. در برابر بی‌حرمتی‌هایی که نسبت به شخص او می‌شد، تهمی خنده‌ید، ولی اگر به یکی از شاگردان او بی‌حرمتی می‌کردند، سخت برانگیخته می‌شد و به دفاع برپی‌خاست.

چنین بود امیدیتر؛ بزرگترین زن ریاضی‌دان، دانشمندی سترگ، معلمی بی‌مانند و انسانی فراموش نشدندی. از آن به‌اصطلاح «زنان دانشمند»‌ای نبود که ادای مردان را در می‌آوردند؛ او در عین حال یک زن بود، با همهٔ عاطفه‌ها و روحیه‌های یک زن. او مردم را دوست داشت، دانش را دوست داشت، زندگی را دوست داشت و، در عین حال، یک زن، به معنای واقعی آن، بود.

ترجمهٔ پرویز شهریاری

نزدیک به نهصد سال، از زمان محمدبن موسی خوارزمی  
(تنظيم‌کنندهٔ نخستین کتاب جبر) تا زمان ویت و لاپینیش طول کشید تا  
صورت کلی یک معادلهٔ جبری را، به رابطهٔ زیر نشان دادند:  
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

تکیه‌گاهی برای شکوفائی اندیشه می‌دید. این چهرهٔ امیدیتر، چنان روش نبود که، ردپای آن را، در تمامی زندگی او می‌توان پژوهش‌های من در زمینهٔ توپولوژی، به معنای تحریف زندگی امیدیتر، به عنوان یک دانشمند و یک انسان است.

رابطهٔ علمی و دوستی شخصی من با امیدیتر، از سال ۱۹۳۲ آغاز شد و تا پایان زندگی او ادامه داشت. هرمان ویل، با یادآوری این دوستی، این احتمال را مطرح می‌کند که، اندیشه‌های امیدیتر، در پژوهش‌های من در زمینهٔ توپولوژی، بی‌تأثیر نبوده است. خوشحالم که، در اینجا، نظر ویل را تایید کنم: تأثیر امیدیتر، هم بر کارهای من و هم بر پژوهش‌های سایر ریاضی‌دانانی که، در مسکو، در زمینهٔ توپولوژی کار می‌کردند، بسیار زیاد بود و بسیاری از فعالیت‌های علمی‌مارا، زیر نفوذ خود گرفته بود. بدرویزه، تا حد زیادی، تحت تأثیر بحث‌هایی که با امیدیتر در دسامبر ۱۹۲۵ و زانویه ۱۹۲۶ در هلند داشتم، توانستم نظریهٔ تقسیم‌های پیوستهٔ فضاهای توپولوژی را سازمان دهم. از طرف دیگر، در همین زمان بود که نخستین اندیشه‌های امیدیتر در پایه‌گذاری نظریهٔ گروهها براساس نظریهٔ مجموعه‌ها شکل می‌گرفت؛ او در تابستان سال ۱۹۲۶، در این‌باره، یک دورهٔ کلاس داشت. ولی این اندیشه‌ها، در شکل مقدماتی خود باقی ماند و تکامل پیدا نکرد، اگرچه بعد‌ها هم، امیدیتر، چندبار به این موضوع توجه کرده بود. علت این امر را، به احتمالی، باید در دشواری اصل موضوعی کردن مفهوم گروه دانست. ولی خود اندیشهٔ تجزیه و تحلیل مفهوم گروه، به کمک نظریهٔ مجموعه‌ها، چنان بارور بود که راه پژوهش‌های بعدی را به آرده (Orch) و کوروش نشان داد.

امیدیتر، سال‌های بعد را، صرف علاقه‌های خود نسبت به توپولوژی و تعمیق آن کرد. او در تابستان سال‌های ۱۹۲۶ و ۱۹۲۷، سر کلاس من و هوپ در گوتینگن حاضر شد تا دورهٔ سخن‌رانی‌های مارا دربارهٔ توپولوژی بشنود. او به سرعت خود را، با شاخه‌ای از ریاضیات که برای او تازگی داشت، وفق داد و، اغلب، نکه‌های ظریف و عمیقی را یادآوری می‌کرد.

امیدیتر، در زمستان سال‌های ۱۹۲۸-۱۹۲۹ به مسکو آمد و، در دانشگاه مسکو، یک دورهٔ کلاس را، در زمینهٔ جبر انتزاعی اداره کرد، همچنین، سمیناری دربارهٔ هندسهٔ جبری، در فرهنگستان تشکیل داد. در همین زمان، تماس‌های زیادی با ریاضی‌دانان ساکن مسکو و، به خصوص، بال، س. پوتیریاگین و ایو. شمیت برقرار کرد. تأثیر امیدیتر را، بر تکامل استعداد ریاضی پوتیریاگین، به سادگی می‌توان دید. کارهای پوتیریاگین

# مسئله هایی برای حل

در هر کلاسی باشید، می توانید مساله های مورد نظر خود را، در اینجا پیدا کنید.

## اول. هندسه و مثلثات

۱. خط راستی رسم کنید، که ذوزنقه مفروض را، به دو چهار ضلعی مشابه تقسیم کند.

۲. چهار دایره  $w_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), که شعاع هایی با طول برابر دارند، از نقطه  $M$  گذشته اند. نقطه برخورد دوم دو دایره  $w_k$  و  $w_r$ ،  $A_{ik}$  می نامیم. ثابت کنید، سه پاره خط راست  $A_{12}A_{24}$  و  $A_{23}A_{14}$  از یک نقطه می گذرند و به وسیله این نقطه نصف می شوند.

۳. می دانیم در مثلث متساوی الساقین  $|AC| = |BC|$ ، خط راستی که از راس  $A$  و مرکز دایره محیطی مثلث گذشته است، ساق مثلث را به دو پاره خط راست با طول های  $a$  و  $b$  تقسیم کرده است. اگر پاره خط های راستی با طول های  $a$  و  $b$  داده شده باشند، مثلث متساوی الساقین  $ABC$  را چگونه می توان رسم کرد؟  
۴. روی محیط دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع با ضلع به طول  $a$  نقطه دلخواهی را انتخاب کرد و ایم. اگر فاصله این نقطه تا سه راس مثلث را  $x, y$  و  $z$  بگیریم، ثابت کنید:

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2a^4$$

۵.  $a, b, c$  را طول ضلع های یک مثلث و  $x, y, z$  را طول ضلع های متاظر مثلثی می گیریم که، راس های آن، در با ارتفاع های مثلث مفروض باشند. ثابت کنید:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq \frac{3}{4}$$

۶.  $\alpha, \beta, \gamma$  زوایه های یک مثلث می گیریم و فرض می کنیم، هر سه زوایه  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  حاده باشند. ثابت کنید:

$$lg''\alpha + lg''\beta + lg''\gamma \geq 3 + \frac{3n}{4}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

۷. یک چهار ضلعی داده شده است که هم قابل محاط در یک دایره و هم قابل محیط بر دایره ای دیگر است. اگر شعاع دایره محیطی چهار ضلعی، طولی برابر  $R$  و شعاع دایره محاطی آن، طولی برابر  $r$  داشته باشد، ثابت کنید:

$$R \geq 2r$$

## دوم جبر و حساب

۸. این معادله را حل کنید:

$$x^5 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$$

۹. بیست عدد مثبت درست داده شده اند و می دانیم:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{20} < 70$$

ثابت کنید، بین تفاضل های  $a_j - a_k$  ( $j > k$ )، دست کم چهار عدد برابر وجود دارد.

۱۰. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی  $n$  دو مجموع زیر، باهم برابرند:

$$S_1 = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n;$$

$$S_2 = \frac{1}{2} [n(n+1) + (n-1)n + (n-2)(n-1) + \dots + 2 \times 1]$$

۱۱. سکه هم ارزش داریم که، درین آنها، یکی از سکه ها تقلی است.

می دانیم، وزن سکه تقلی بیشتر از وزن سکه سالم است. ثابت کنید، به شرط  $N \leq 3^n$  برای پیدا کردن سکه تقلی، کافی است  $n$  بار از ترازو استفاده کنیم.

۱۲. ثابت کنید، برای عده های طبیعی و دلخواه  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و همیشه داریم:

$$(D(m(a_1, a_2, \dots, a_n))) = m(D(a_1, I), D(a_2, I), \dots, D(a_n, I))$$

که در آن،  $m$  معنای کوچکترین مضرب مشترک و  $D$  به معنای بزرگترین مقسوم عليه مشترک عده های واقع در پرانتز است.

$$13. \text{ این معادله را حل کنید: } \frac{(1+a^2)^x}{2a} - \left( \frac{1-a^2}{2a} \right)^x = 1$$

۱۴. ثابت کنید، همه ریشه های معادله

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-a} + \dots + \frac{A_n}{x-a} = 0$$

عدد هایی حقیقی اند، به شرطی که  $A_1 > A_2 > \dots > A_n$  هم، مختلف اند.

۱۵. (الف) حداقل اینتابع را پیدا کنید:

$$y = \sqrt{x^2 - 2mx + n^2} + \sqrt{x^2 - 2px + q^2}$$

با شرط  $|p| < |q|$ ،  $|m| < |n|$

(ب) حداقل اینتابع را پیدا کنید:

$$y = \sqrt{x^2 + mx + n^2} - \sqrt{x^2 - 2px + q^2}$$

که در آن  $n > m > p > q$

# طرح مسئله در هندسه

حل مسئله، در سراسر سال‌های ۱۹۸۵، از اهمیت به سزایی برخوردار بوده، و به نقطه اوج خودش، رسیده است، اگرچه، در نقطه مقابل آن، موضوع طرح مسئله، کمتر مورد توجه قرار گرفته است. بعضی کارهای برجسته و به یاد ماندنی، از براون و والتر<sup>۱</sup>، کلامکین<sup>۲</sup> و البه پولیا<sup>۳</sup> را باید از استشانها به شمار می‌آورد. در این مقاله، یک نمونه از قضیه‌های هندسی را آورده‌ایم، و مسئله‌هایی را در ارتباط با آن قضیه، طرح کرده‌ایم. روش‌های ارائه شده در این مقاله، می‌توانند برای طرح مسئله‌های هندسه در امتحان‌ها، مسابقه‌های ریاضی بین دانش آموزها، و طرح مسئله برای مجله‌های ریاضی مورد استفاده قرار گیرند. اگرچه، این روش‌ها، در مرحله اول برای معلمان دبیرستانی مطرح می‌شوند، ولی دانش آموزان خلاق در هندسه، می‌توانند از این روش‌ها، برای کشف‌های ریاضی خود، استفاده کنند.

ابتدا، فرض را برابر آن می‌گذاریم، که ما مطالعه واحد را ببروی و دایره تمام کرده‌ایم، سپس، می‌خواهیم، قضیه زیر را به دانش آموزان خود یاد دهیم: قضیه. اگر از نقطه‌ای واقع در خارج یک دایره، دو مسas بر دایره رسم کنیم، آنگاه دو قطعه مماس، باهم هم نهشت‌اند.

اثبات متداول، این قضیه بر بنای برابری مثلث‌های  $PBO$  و  $PHO$  است (شکل ۱ را

1. Brownand Walter(۱۹۸۴)

2. Klamkin(۱۹۸۶)

3. Pólya(۱۹۷۳)

۱۶. چهار عدد درست  $a_0$ ،  $b_0$ ،  $c_0$  و  $d_0$  داده شده است. به کمک این

چهار عدد، چهار عدد جدید می‌سازیم:

$$a_1 = |a_0 - b_0|, \quad a_2 = |b_0 - c_0|, \quad c_1 = |c_0 - d_0|, \quad d_1 = |d_0 - a_0|$$

سپس، چهار عدد جدید دیگر می‌سازیم:

$$a_3 = |a_1 - b_1|, \quad b_2 = |b_1 - c_1|, \quad c_2 = |c_1 - d_1|, \quad d_2 = |d_1 - a_1|$$

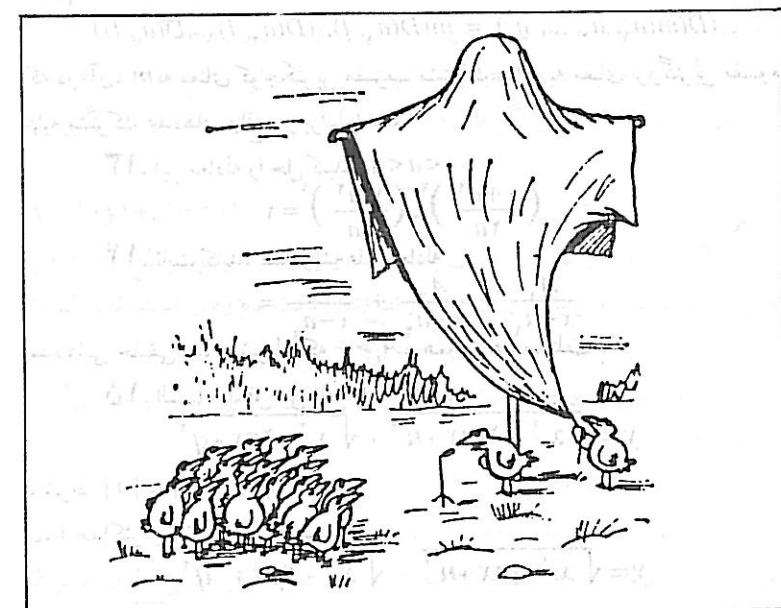
و غیره. ثابت کنید، اگر روش پیدا کردن عددهای جدید را، به همین ترتیب، ادامه دهیم، سرانجام به چهار عدد  $a_n$ ،  $b_n$ ،  $c_n$  و  $d_n$  می‌رسیم که، به طور هم زمان، برابر صفرند.

۱۷. عدد درستی پیدا کنید که مجدور کامل باشد و، در ضمن، دو رقم سمت آن، برابر صفر نباشند.

۱۸. به شرط  $x > p$  این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x$$

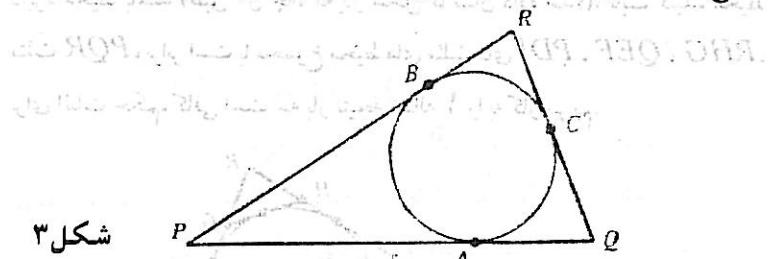
حل این معادله را در صفحه ۳۴۲ بیینید.



$$|PA| + |PB| = |PD| + |DC| + |CP|$$

مسئله ۲. فرض کنید،  $\overline{PB}$  و  $\overline{PA}$  دو مماس بر یک دایره و نقطه  $Q$ ، نقطه‌ای بر کمان  $AB$  باشد. اگر  $CD$  در نقطه  $Q$  بر دایره مماس باشد، ثابت کنید، محیط مثلث  $PCD$ ، مقداری ثابت است.

روش دوم، در افزودن به پیچیدگی شکل ۱، رسم مماس دیگری بر دایره است، همان طور که در شکل ۳ رسم شده است. دو طرح جدید، اما دوباره در دو سطح کاملاً متمایز، از نقطه نظر مشکل بودن، فوراً به ذهن خودنمایی می‌کند.



شکل ۳

مسئله ۳.  $A, B, C$  و  $P, Q, R$  نقطه‌های تماس، ضلع‌های  $RP, QR, PQ$  از مثلث  $PQR$  بر یک دایره‌اند. ثابت کنید:

$$|PA| + |QC| + |RB| = |AQ| + |CR| + |BP|$$

مسئله ۴. نقطه‌های  $x, y, z$  را برابر ضلع‌هایی مثلث نامشخص  $PQR$  (شکل ۴) را نگاه کنید، مشخص کنید، به طوری که داشته باشیم:

$$|PX| = |PZ|, |QX| = |QY|, |RY| = |RZ|$$

جواب مسئله، نقطه‌های تماس دایره محاط در مثلث  $PQR$ ، بر ضلع‌های مثلث است. شکل ۴، به طور ضمنی روش دیگری از حل مسئله‌ها را نشان می‌دهد - ساده‌تر کردن یک شکل (برای مثال، شکل ۳)، این ساده‌تر کردن شکل، توان حل آنکنده مسئله را، دریافت مجهول مسئله زیادتر می‌کند.

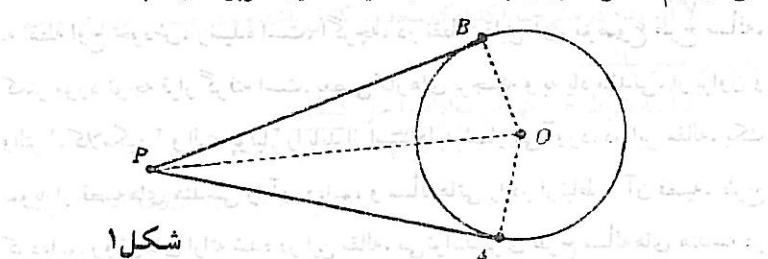
روش سوم طرح مسئله‌های جدید، ترکیب دو یا چند نتیجه به دست آمده، با هم است. در اینجا، مامی خواهیم، از ترکیب شکل‌های ۲ و ۳ مسئله زیر را ارائه دهیم.

نگاه کنید). اگرچه، می‌توان اثبات دیگری را با استفاده از برابری زاویه‌ها انجام داد.

$$\widehat{PBA} = \frac{\widehat{AB}}{2} \quad (\text{زاویه ظلی}) \quad \widehat{PAB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \quad (\text{سپس مثلث } APB \text{ متساوی الساقین})$$

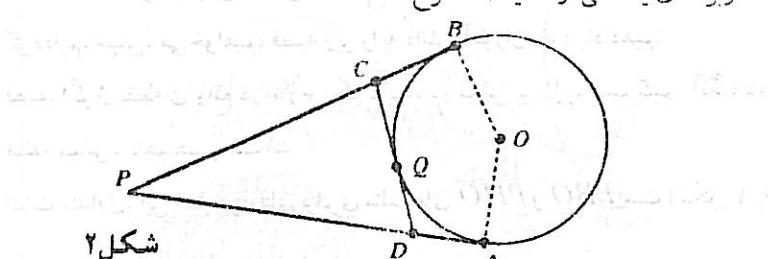
است، در نتیجه،  $|PA| = |PB|$ .

می‌توانیم، تمرین‌های مختلف عددی را مطرح کنیم، که می‌توانند در تفهیم این قضیه، به داش آموزان کمک کنند (و استفاده از بعضی از آنها، بسیار خوب است)، ولی ما مسئله‌هایی را ترجیح می‌دهیم، که هندسه تراند تا حسابی. به عبارت دیگر، می‌خواهیم، داش آموزان، با استفاده از قضیه ۱، نتیجه مربوطه را، ثابت کنند.

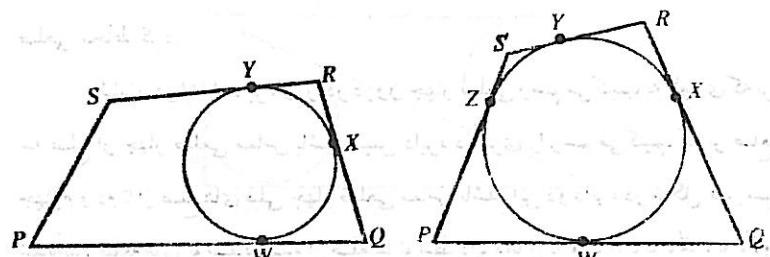


شکل ۱

یک روش پیدا کردن «نتیجه‌های مربوطه» اندک افزایشی به پیچیدگی شکل است. برای نمونه، طبق آن چه که، در شکل ۲ نشان داده شده است، مماس دیگری بر دایره رسم می‌کنیم. در این صورت، یک مسئله خواهیم داشت، که می‌توانیم آن را، از نقطه نظر شکل بودن، در دو سطح کاملاً متمایز مطرح کنیم، در هر کدام از آنها کاربردهای یکسانی از قضیه ۱، مطرح است.



مسئله ۱. مطابق با شکل ۲، فرض کنید  $DC, PB, \overline{PA}$  مماس بر یک دایره باشند. ثابت کنید:



شکل ۷

$$= |QR| + |SP|$$

نتیجه می شود:

$$|PQ| + |RS| = |QR| + |SP|$$

از نتیجه بدست آمده در بالا، مسئله دیگری طرح می شود:

مسئله ۶. اگر یک چهار ضلعی محیط بر دایره باشد، آنگاه مجموع طول های دو ضلع روبرو، برابر است با مجموع طول های دو ضلع روی دیگر.

در تعمیم مسئله ها، ممکن است بادام هایی مواجه شویم، به عبارت دیگر تمام نتیجه های به دست آمده قابل تعمیم نیستند. فرض کنید، می خواهیم مسئله ۴ را درباره چهار ضلعی ها، تعمیم دهیم.

مسئله ۷. نقطه های  $Z, Y, X, W$  را بر ضلع های چهار ضلعی  $PQRS$  مشخص کنید، به طوری که، داشته باشیم:

$$|PW| = |QX|, |PZ| = |PY|$$

$$|RX| = |RY|, |SY| = |SZ|$$

شکل ۷ نشان می دهد، که مسئله ۷ ممکن است، همیشه قابل حل نباشد. روش پنجم در خلق مسئله های ریاضی، در نظر گرفتن عکس نتیجه های قبلی است.

برای نمونه، عکس مسئله ۷، به شرح زیر است:

مسئله ۸. اگر مجموع طول های دو ضلع روبرو از یک چهار ضلعی برابر با مجموع طول های دو ضلع روبروی دیگر باشد، آنگاه می توان دایره ای را در چهار

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

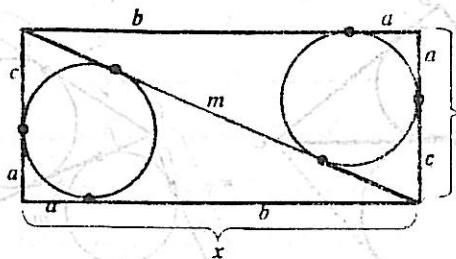
$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$

$$|PQ| + |DC| + |CB| = |BQ| + |AB|$$



شکل ۹

می شود، در هر یک از مثلث ها، دایره هایی محاط می کنیم. ثابت می کنیم، طول «پاره خط» میانی واقع بر قطر (مimas مشترک) دو دایره که بر قطر مستطیل منطبق است، برابر است با تفاضل طول های دو ضلع مجاور مستطیل.

چون در مسئله ۹، هیچ یک از ویژگی های مثلث قائم الزاویه، مورد استفاده قرار نگرفته است، می توانیم به جای مستطیل، مسئله را برای متوازی الاضلاع در نظر بگیریم، تابیینم در مسئله جدید، چه پیش می آید. آیا می توان به جای «متوازی الاضلاع»، «ذوزنقه» یا چهار ضلعی دیگری را در نظر گرفت؟ جواب این پرسش، در طرح بعدی جواب داده خواهد شد:

مسئله ۱۰. فرض کنید،  $w$ ،  $x$  و  $y$  طول های ضلع های یک چهار ضلعی محدب دلخواه، باشند، همان طور که در شکل ۱۰ نشان داده شده، فرمولی برای محاسبه  $m$ ، بر حسب ضلع های  $x$ ،  $y$ ،  $z$  و  $w$  پیدا کنید.

از قضیه اصلی مقاله، درباره خطوطی مimas استفاده می کنیم، خواهیم داشت:  $b = m + c$  و  $e = f + m$  (توجه کنید، در شکل فرض بر این است، که  $f \geq e$  و  $b \geq c$ )، و بعد نتیجه می شود:

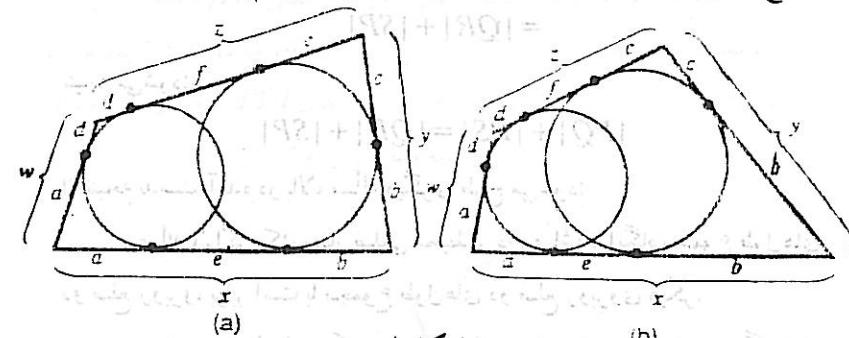
$$m = e - f \quad m = b - c$$

بنابراین:  $m = (e - f) + (b - c) =$

$$(e + b) - (f + c) =$$

ضلعی محاط کرد.

اثبات. در ابتدا، دایره ای را در درون چهار ضلعی رسم می کنیم، به طوری که بر سه ضلع از چهار ضلعی مimas باشد. سپس دایره دیگری را رسم می کنیم، که بر ضلع چهارم و دو تا از ضلع های قبلی چهار ضلعی مimas باشد. این دو دایره در شکل ۱۰ رسم شده اند، قطعه های پوشیده شده از ضلع ها توسط دایره ها را با  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ،  $d$ ،  $e$ ،  $f$ ،  $g$ ،  $h$  نشان می دهیم. چون در هر شکل چهار ضلعی را با  $w$ ،  $x$ ،  $y$ ،  $z$  نشان می دهیم، چون در هر شکل



شکل ۱۰

$w + y = x + z$  پس خواهیم داشت:

$$(b + c) + (a + d) = (a + e + b) + (c + f + d)$$

پس از ساده کردن بر از بالا، نتیجه می شود،  $e + f = 0$ . پس،  $e = f = 0$ . در نتیجه، دو دایره بر هم منطبق اند، که این اثبات را کامل می کند.

در حل مسئله ۱۰، ما دو دایره را در یک چهار ضلعی در نظر گرفتیم. اگر دو دایره توسط یک قطر چهار ضلعی از هم جدا می شوند، یا شاید دو دایره بر هم مimas می شوند، چه حالتی پیش می آید؟ در طرح مسئله، ما در ابتدا نمی خواهیم حالت کلی را در نظر بگیریم، بنابراین، ما یک مستطیل را در نظر می گیریم، همان طور که در شکل ۹ نشان داده شده، با شرط  $y > x$  چون  $m + c = b$ ، پس

$m = b - c = (a + b) - (a + c) = x - y$  یعنی ما مسئله زیر را خواهیم داشت:

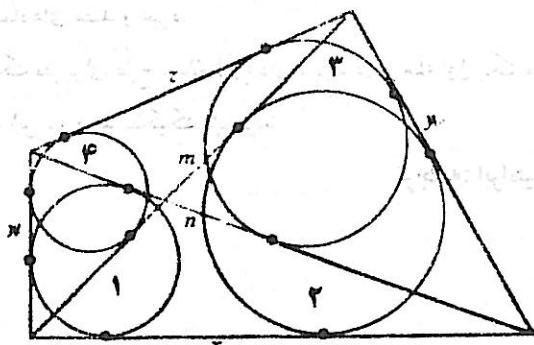
مسئله ۹. یک قطر مستطیل را رسم می کنیم، مستطیل به دو مثلث تجزیه

در ابتدا، دایره‌ای را در مثلث  $ABC$  محاط می‌کنیم، شکل ۱۱ رانگاه کنید.

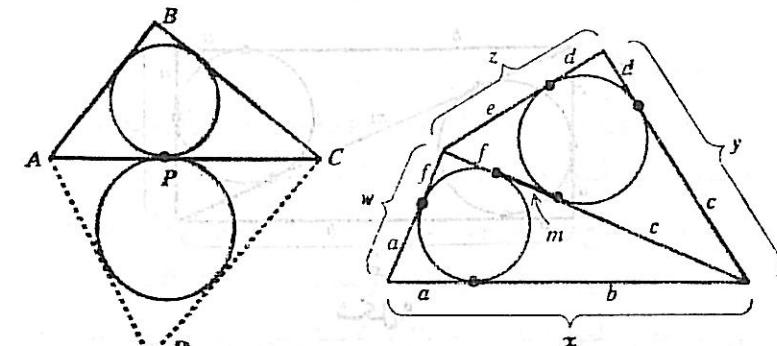
فرض کنید. نقطه تماس دایره بر ضلع  $AC$  باشد. دایره‌ای در بیرون مثلث تماس در نقطه  $P$  بر ضلع  $AC$  رسم می‌کنیم. از نقطه‌های  $C, A$ ، دو تماس بر این دایره رسم می‌کنیم، دو معاس را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در نقطه  $D$  قطع کنند. اگر معاس‌های وارد از دو رأس  $C, A$  بر دایره باهم موازی شوند، آنگاه دایره کوچک‌تر را مرا مطمئن خواهد ساخت، که بالاخره دو معاس وارد از  $A, C$  بر دایره همدیگر را در نقطه  $D$  قطع کنند (شکل ۱۱ رانگاه کنید)، با توجه به این که، دایره بزرگ‌تر نتیجه را در چهارضلعی غیر محدب مشخص خواهد کرد (با یک استثناء). بنابر مسئله ۱۱، نقطه مورد نظر مسئله است.

روش دیگر طرح مسئله، رفتار کردن با «قرینه» طرح قبلی است. برای نمونه در مسئله ۱۰ و شکل ۱۰، مانعی توانیم از قطر دیگر چهارضلعی استفاده کنیم (شکل ۱۲) رانگاه کنید، به نتیجه مشابه  $m = n = \frac{xz}{2} - \frac{w+y}{2}$  می‌رسیم، بنابراین،  $m = n$  در این صورت، باز هم طرح جدیدی را خواهیم داشت:

مسئله ۱۳. فرض کنید ۱، ۲، ۳، ۴، چهار دایره محاط، در چهار مثلث تشکیل شده، بین یک قطر و دو ضلع متوازی از یک چهارضلعی محدب باشند. (مانند شکل ۱۲).  $m$  و  $n$  را طول‌های «پاره خطهای» می‌انه، از قطرها مابین نقطه‌های تماس دایره‌ها



شکل ۱۲



شکل ۱۱ رانگاه کنید.

$$(e+d+b+a) - (f+a+c+d) = \\ = (z+x) - (y+w)$$

در نتیجه:  $m = \frac{x+z}{2} - \frac{y+w}{2}$   
در شکل ۱۰، اگر  $x+z=w+y$ ، آنگاه  $m=n$ . طور «تصادفی» کشف کرده‌ایم. ولی چون بنایه تعریف، حادثه‌ها بدون طراحی (نقشه قبلی) اند، مانعی توانیم از آن‌ها به عنوان یک روش طرح مسئله قابل اطمینان استفاده کنیم، ولی ما باید در استفاده از فرصت‌ها هوشیار باشیم (برای نمونه، همان طور که می‌دانیم، ضد پیغام طور تصادفی کشف شده است). طرح جدید ما به صورت زیر است:

مسئله ۱۱. اگر دایره‌های محاط شده در مثلث‌های تشکیل شده توسط یک قطر و دو ضلع مجاور یک چهارضلعی بر هم مماس باشند، آنگاه یک دایره قابل محاط شدن در چهارضلعی است و بر عکس.

با ساده‌تر کردن شکل ۱۰، طرح دیگری را خواهیم داشت:

مسئله ۱۲. اگر  $AC$  بزرگ‌ترین ضلع مثلث  $ABC$  باشد، با روش ترسیم نقطه  $D$  را در خارج مثلث  $ABC$  مشخص کنید، به طوری که داشته باشیم:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

من در این مبحث از مباحثی در ریاضیات و تاریخ ریاضیات می‌گذرد که در آن فصلی از کتاب ریاضیات و تاریخ ریاضیات (سالههای ۱۰۰۰) در آن مذکور شده است. مساله همانجا در زیر آمده است.

غلامرضا یاسی پور (دانشجوی دکtoral دانشگاه تهران) با عنوان «نظریه اعداد یونانی»

**نظریه اعداد یونانی**

### ۱۰.۳ نقش نظریه اعداد

در فصل اول ملاحظه کردیم که در تاریخ ریاضیات نظریه اعداد حداقل به اندازه هندسه اهمیت داشته و از لحاظ بنیادی ممکن است مهتر هم بوده باشد. و علیرغم این، نظریه اعداد هیچ گاه تسلیم روش سیستماتیکی شیوه نداشت. آنچه که بر هندسه مقدماتی در مقدمات افلاطیس تحمیل شده، نگرددیده است. نظریه مزبور در جمیع مراحل پیش رفتش به علت سازش ناپذیری مسائل مقدماتیش رخنه های آشکار داشته است. در حقیقت غالب مسائل حل نشده واقعاً قدیمی ریاضیات، سوالات ساده ای در مورد اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳... اند. عدم وجود روشی کلی در حل معادلات دیوفانتی (بخش ۳۰۱) و مسئله شناخت اعداد اول به صورت  $1 + 2^n$  (بخش ۳۰۲) را مورد توجه قرار داده ایم، و در بخش های بعدی این فصل به ذکر مسائل حل نشده دیگر نظریه اعداد خواهیم پرداخت.

از لحاظ اهمیت، نقش نظریه اعداد در تاریخ ریاضیات کاملاً از نقش ریاضیات متفاوت بوده است. هندسه نقشی ثابتگر و متحکم کننده، در رابطه با به تأخیر افکنندن گسترش بیشتر گاهگاه آن واچگان این عقیده عمومی که ریاضیات موضوعی استناست، ایفا کرده است، در حالیکه، نظریه اعداد، از نظر کسانی که توانائی در کآن را دارند، محرك پیشرفت و تغییر به حساب می آید. تنها تعداد قلیلی از ریاضیدانها در پیشرفت های نظریه اعداد سهیم بوده اند، اما همین تعداد کم شامل بعضی از بزرگان این علم - فی المثل، دیوفانت، فرما، اولر، لاگرانژ، و گوس - بوده است. این کتاب بر پیشرفت های از نظریه اعداد تأکید می ورزد که از ارتباطات عمیق آن با سایر قسمت های ریاضیات، بهخصوص هندسه، پذید آمده اند، زیرا این موارد از لحاظ کلی

بر همان قطر در نظر می گیریم. ثابت کنید،  $m=n$ .

درست مانند یک خواننده این مقاله، می توان گفت حالا دیگر مساله ها خیلی پیچیده و مشکل تر شده اند. بنابراین، ممکن است که طراح مساله بخواهد که در جهت های دیگر کار کند. برای نمونه، کدام یک از مساله های طرح شده در قبل، نقطه مقابل هائی را دارد، برای:

۱- چهار ضلعی های غیر محدب،

۲- پنج ضلعی ها، شش ضلعی های محدب و غیر محدب، و همانظور برای

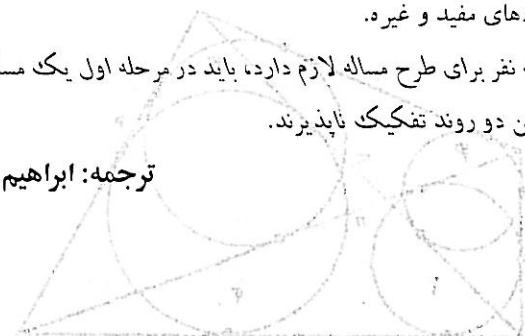
ضلعی ها، می توان (با توجه به محدودیت های مساله) مسئله را بطور ممکن

۳- کره ها و چندوجهی ها،

۴- قضیه را در مورد قاطع ها در نظر بگیرید، یعنی: اگر از نقطه ای در خارج یک دایره، دو قاطع بر آن دایره رسم کنیم، حاصل ضرب قطعه های قاطع روی یک قاطع برابر است با حاصل ضرب قطعه های قاطع روی قاطع دیگر. در طرح مساله ها، خواننده دقیق توجه خواهد داشت، که مار در طرح مساله ها، از بعضی از همان تکنیک ها و روش هایی استفاده کردیم، که در حل مساله نیز بسیار مفید و ضروری اند، برای نمونه حالت های خاص، تعمیم ها، مساله های مربوط به هم، عکس مساله ها، تقارن، تصادف، نتیجه های قبلی، شکل های مفید، برگشت به عقب، الگوهای نمادهای مفید و غیره.

تمام آن چه که یک نظر برای طرح مساله لازم دارد، باید در مرحله اول یک مساله حل کن خوبی باشد، این دو روند تفکیک ناپذیرند.

ترجمه: ابراهیم عادل



مجموع سری حسابی معینی (تمرین ۱)، و نشان دادن این که، فی المثل، یک مربع مجموع دو عدد شبه مثبت است، تمرینی آسان است. غیر از کارهای دیوفانت که شامل نتایج مؤثری در مورد مجموعات مربعات اند، نتایج یونانی درمورد اعداد شبه چند ضلعی از نوع ابتدائی آن بوده اند.

در مجموع چنین به نظر می رسد که یونانیان قدیم در اهمیت سیار دادن بداعداد شبه چند ضلعی به خطا بوده اند. درمورد این اعداد قضیه مهمی، شاید جز دو قضیه زیر، موجود نیست. اولین این دو، قضیه ای است که باشه<sup>۵</sup> [1621] (در چاپ آثار دیوفانتس) آن را جدست زده و براین است که هر عدد صحیح مثبت مجموع چهار مربع عدد صحیح است. این قضیه توسط لاگرانژ [1770] به اثبات رسید. تعمیمی که فرمای [1670] بدون اثبات در این مورد، بیان کرد، این است که هر عدد صحیح مثبت مجموع  $n$  عدد شبه  $n$  ضلعی است. این مطلب توسط کوشی [1813] به اثبات رسید، اگرچه اثبات مذبور تا اندازه ای ضعیف است زیرا جمیع اعداد غیر از چهار عددی توانند هستند. در این مورد اثبات کوتاهی از قضیه کوشی توسط ناثانسون<sup>۶</sup> داده شده است [1987]. قضیه قابل توجه دیگری درمورد اعداد شبه چند ضلعی فرمول

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) = 1 + \prod_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x^{(3k^2-k)/2} + x^{(3k^2+k)/2})$$

است که توسط اول اثبات، و از آنجا که نمایهای  $\frac{1}{2}(3k^2-k)$  اعداد شبه پنج ضلعی اند، به عنوان قضیه عدد شبه پنج ضلعی اول<sup>۷</sup> معروف شده است. (درمورد اثبات از آن Hall [1967], p.33)

(قضیه چهار مربع و قضیه عدد شبه پنج ضلعی، هردو، در حدود ۱۸۳۰ در نظریه توابع تئی ڈاکوبی<sup>۸</sup>، نظریه بسیار وسیعتری، مستحلی شدند.) اعداد اول<sup>۹</sup> نیز، به عنوان اعداد بدون تماش شبه مستطیلی<sup>۱۱</sup>، در قالب

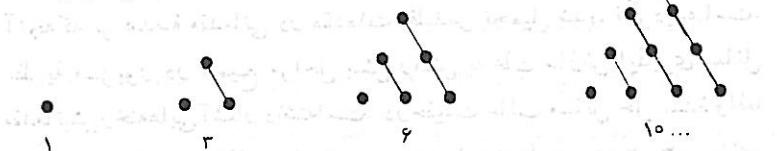
- 
- |                                       |              |                                      |
|---------------------------------------|--------------|--------------------------------------|
| 5. Bachet                             | 6. Nathanson | 7. Euler's pentagonal-number theorem |
| number theorem                        |              | 8. four square theorem               |
| 9. Jacobi's theory of theta functions |              | 10. prime numbers                    |
|                                       |              | 11. rectangular representation       |

برای ریاضیات از اهمیت بسیاری برخوردار بوده اند. با وجود این، موضوعاتی در نظریه اعداد موجود ندکه، حتی اگر (در حال حاضر) چنین به نظر آیند که دور از مسیر اصلی مان قرار دارند، جالب تر از آنند که نادیده انگاشته شوند، و به همین مناسبت محدودی از آنها را در بخش بعدی مورد بحث قرار می دهیم.

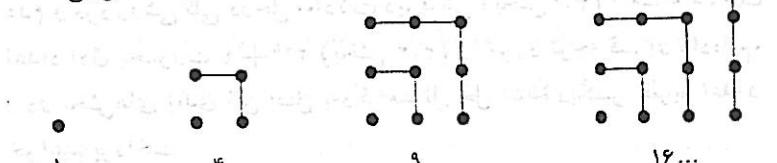
### ۴.۳. اعداد شبه چند ضلعی، اول، و کامل

اعداد شبه چند ضلعی<sup>۱</sup>، که توسط فیثاغورسیان مورد بررسی قرار گرفتند، از انتقال خام منشأه مفاهیم هندسی به نظریه اعداد، نتیجه شدند. از شکل ۱۰.۳ محاسبه عبارتی در مورد  $m$  امین عدد شبه  $n$ -ضلعی به صورت

اعداد شبه مثبت<sup>۲</sup>



اعداد مربعی<sup>۳</sup>



اعداد شبه پنج ضلعی<sup>۴</sup>



۳۰۱ شکل

- 
- |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| 1. polygonal numbers | 2. triangular numbers |
| 3. square numbers    | 4. pentagonal numbers |

در ریاضیات باشد. نظر به قضیه اولر، وجود اعداد کامل زوج بستگی به وجود اولایی به صورت  $1 - 2^n$  دارد. این اعداد، به اتفاقی مارین مرسین<sup>۱۵</sup> ( $1588 - 1648$ )، که برای اولین بار توجه ریاضیدانها را به مسئله شناخت اولایی به این صورت معطوف کرد، به اولایی مرسینی<sup>۱۶</sup> معروفند. معلوم نیست که آیا بی‌نهایت عدد مرسینی موجود است یا خیر، گرچه به نظر می‌رسد که در این مورد به طور کاملاً منظمی اعداد بزرگ‌تر و بزرگتری یافت می‌شوند. در سالهای اخیر هر رکورد جهانی تازه عدد اولی، اولی مرسینی بوده که رکورد جهانی عدد کامل نظیر آن را به دست داده است.

## تمرینات

۱. نشان‌دهید که  $\frac{1}{k}$  امین عدد شبه پنج‌ضلعی  $\frac{1}{2}(k^2 - 3k + 1)$  است.
۲. نشان‌دهید که هر مربع مجموع دو عدد شبه مثلث متواالی است.
۳. نشان‌دهید اگر  $1 - 2^n$  اول باشد، آنگاه  $(1 - 2^n)^{-1}$  کامل است.

## ۳.۳. آلگوریتم اقلیدس

این آلگوریتم را به این علت به‌اسم اقلیدس نام‌داده‌ایم که قدیمی‌ترین ظهور شناخته شده‌اش در کتاب VII مقدمات اوست. اما، به اعتقاد بسیاری از مورخین (از جمله، Heath [1921], p. 399) آلگوریتم مورد بحث و بعضی از توابع آن احتمالاً پیش از آن نیز شناخته شده بوده‌اند. دست کم، اقلیدس به‌خاطر ارائه ماهرانه اساس نظریه اعداد بر مبنای این آلگوریتم، سزاوار این نامگذاری است.

آلگوریتم اقلیدس برای یافتن بزرگترین عامل مشترک (hcf<sup>۱۷</sup> یا ب.ع.<sup>۱۸</sup>) دو عدد صحیح و مشبّت  $a$  و  $b$  به‌کار می‌رود. اولین مرحله در این مورد تشکیل زوج  $(a_1, b_1)$  است که در آن

15. Marin Mersenne

16. Mersenne primes

17. highest common factor

18. بزرگترین عامل مشترک

هنده‌سه مورد بررسی قرار می‌گرفتند. يك عدد اول، که عاملی غیر از ۱ و خودش ندارد، دارای تنها نمایشی «خطی»<sup>۱۹</sup> است. البته، این موضوع چیزی بیش از بازگویی تعریف عدد اول نیست، و اغلب قضایای مربوط به اعداد اول به مفاهیم بسیار قدر تمدن‌تری نیاز دارند؛ اما، یونانیان به نتیجه مهمند در این مورد رسیدند، و آن اثبات این مطلب که بی‌نهایت عدد اول موجود است، در کتاب IX از مقدمات اقلیدس<sup>۲۰</sup> بود.

با مفروض بودن مجموعه متناهی بی از اعداد اول،  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ، با مفروض بودن مجموعه متناهی بی از اعداد اول  $p_1, p_2, \dots, p_n + 1$

به‌دست بیاوریم. این عدد برو  $p_1, p_2, \dots, p_n$  بخش‌پذیر نیست (هر تقسیم باقیمانده ۱ به جا می‌گذارد). در نتیجه، یا  $p$  خود اول است، و  $p_n > p$ ، یا عامل اولی  $p_1 \neq p$ ،  $p_2, \dots, p_n$  دارد. عدد کامل<sup>۲۱</sup> یا تام عددی است که برابر مجموع عواملش (از جمله ۱، اما غیر از خودش) می‌باشد. به عنوان مثال،  $1 + 2 + 3 = 6$  عددی کامل است، همچنان که

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

نیز چنین است. گرچه این مفهوم به فیثاغورسیان باز می‌گردد، تنها دو قضیه ارزشمند در مورد اعداد کامل شناخته شده‌اند. اقلیدس کتاب IX مقدمات را با اثبات این که اگر  $1 - 2^n$  اول باشد، در این صورت  $(1 - 2^n)^{-1}$  کامل است (تمرین ۳) خاتمه می‌دهد. اعداد کامل مزبور البته زوچند، و اول [1849] (در چاہی پس از مرگ نویسنده‌اش) ثابت کرد که هر عدد کامل زوج به صورت عدد اقلیدس می‌باشد. اثبات شکفت‌آورانه ساده اول را می‌توان در Burton [1985], p. 504 یافت. مشخص نشده که آیا اعداد کامل فردی موجودند یا خیر؛ و این مسئله شاید قدیمی‌ترین مسئله حل شده

12. linear representation 13. Euclid's Elements of

14. perfect number

اعداد صحیح  $m$  و  $n$  برقرار است.

۰.۴ اگر  $p$  عدد اولی که  $ab$  را می‌شمارد باشد، آنگاه  $p$ ،  $a$  یا  $b$  را می‌شمارد.

برای ملاحظه این موضوع، فرض می کنیم  $p$ ،  $a$  را نمی شمارد. در این صورت از آنجا که خود  $p$  عاملی ندارد، داریم  $1 = \text{hcf}(p, a)$ . در نتیجه بنا به نتیجه قبلی اعداد  $m$  و  $n$  را چنان به دست می آوریم که

Thus, using the definition,  $ma + np = v$

ضرب دو طرف این رابطه در  $b$  می‌دهد

$$mab + nb \equiv b$$

۳. هر عدد صحیح و مثبت یک تجزیه به عوامل اول منحصر به فرد دارد

برخلاف مطلب فوق فرض می کنیم که عدد صحیح  $n$  دارای دو تجزیه به عوامل اول متفاوت باشد:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_j = q_1 q_2 \cdots q_k$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق بر عوامل مشترک، البته در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که  $p_i$  بی که در میان  $q$ ‌ها نیست موجود است. اما این فرض مناقض نتیجه قبلی است، زیرا عدد  $q_k \dots q_1 q_0 = n$  را می‌شمارد، و با این همه هیچیک از  $q_1, q_2, \dots, q_k$  را به طور مجزا نمی‌شمارد، زیرا آنها اعداد اولی  $\neq p_i$ ‌اند.

نمرینات

۱۰ اگر  $\text{hcf}(a,b) = d$ ، نشان دهید که اعداد  $m$  و  $n$ ی چنان موجودند که  $ma + nb = d$

۲۰. (درا حل معادلات دیوفانتی خطی) آنکه ریتمی به دست دهد که،  
با معلوم بودن اعداد صحیح  $a, b, c$ , بتواند مشخص کند که آیا اعداد صحیح

$$a_1 = \max(a, b) - \min(a, b)$$

$$b_1 = \min(a, b)$$

( $a, b$ ) باشد، زوج حاصل در مرحله ۱ + خ عبارت است از را به سادگی تکرار می کنند. به این ترتیب، اگر زوج تشکیل شده در مرحله  $n$ ، پر قرار می باشد، و سپس شخص عمل تفربیق عدد کوچکتر از عدد بزرگتر را به سادگی تکرار می کند.

$$a_{i+1} = \max(a_i, b_i) - \min(a_i, b_i)$$

$$b_{i+1} = \min(a_i, b_i)$$

آنکه  $a_{i+1} = b_{i+1}$  باشد، اینکه  $b$  می‌بذرد، و این مقدار مشترک  $(a, b)$  است، و این بدان علت است که عمل تفاضل گرفتن عوامل مشترک را حفظ می‌کند، و در نتیجه، چون  $a_{i+1} = b_{i+1}$  دارد،  
 $\text{hcf}(a, b) = \text{hcf}(a_1, b_1) = \dots = \text{hcf}(a_{i+1}, b_{i+1}) = a_{i+1} = b_{i+1}$   
 سادگی آنکه مورد بحث استخراج بعضی از نتایج مهم را آسان می‌کند.  
 البته اقليدس نماد ما را به کار نمی‌برده اما با وجود این، در اساس، نتایج زیر را به دست آورده است.

۱. اگر  $\text{hcf}(a,b) = 1$ ، در این صورت اعداد صحیح  $m$  و  $n$  چنانکه  $ma + nb = 1$  باشند.

$$a_1 = \max(a, b) - \min(a, b)$$

$$b_1 = \min(a, b)$$

$$a_{i+1} = \max(a_i, b_i) - \min(a_i, b_i)$$

$$b_{i+1} = \min(a_i, b_i)$$

بهطور متوالی نشان می دهند که  $a_1, a_2, b_1, b_2$  ترکیبات خطی درست،  $ma + nb$  اعداد  $a$  و  $b$  اند، در نتیجه  $a_2 = a_1 + nb$  چنینست، در نتیجه  $a_3 = a_2 + nb = a_1 + 2nb$  ... و سرانجام این مطلب در مورد  $a_{i+1} = a_i + nb$  نیز راست است. اما از آنجا که  $\text{hcf}(a, b) = 1$  به ازاء

$m$  و  $n$  چنانکه

$$ma + nb = c$$

برقرار باشد، موجود هست یا نه. و  $m$  و  $n$  را در صورت وجود بیایید.

### ۴۰.۳ معادله پل<sup>(۱۹)</sup>

معادله دیوفانتی<sup>(۲۰)</sup>  $x^2 - Dy^2 = 1$ ، که در آن  $D$  عدد صحیح غیر مربع است، به این علت به معادله پل موسوام است که اولر به اشتباه راه حل آن را به پل، ریاضیدان انگلیسی قرن هفدهم نسبت داده بود (این راه حل باید به برآونکر<sup>(۲۱)</sup> منسوب می شد). معادله پل احتمالاً معروفترین معادله دیوفانتی بعد از معادله مر بوط به سه تأثیرهای فیثاغورسی  $a^2 + b^2 = c^2$ ، و از بعضی جهات مهمتر از آن است. راه حل معادله پل مرحله اصلی در راه حل معادله دیوفانتی درجه دوم کلی دو متغیره است (فی المثل، [Gelfond 1960] را ملاحظه کنید) و نیز وسیله کلیدی اثبات قضیه ماتیاسویچ<sup>(۲۲)</sup> مذکور در پخش ۳۰.۱، در این مورد که آنگوریتی برای حل جمیع معادلات دیوفانتی موجود نیست، می باشد (فی المثل، [Davis 1973] را ملاحظه کنید). نظر به این موضوع، مناسب و ضروری بوده که معادله پل اولین ظهور خود را در اساس ریاضیات یونانی داشته باشد، و ملاحظه این که چگونه یونانیان آن را درکردند مؤثر و گیر است. ساده‌ترین مثال معادله پل  $x^2 - 2y^2 = 1$  توسط فیثاغورسیان در رابطه با  $\sqrt{2}$  مورد مطالعه قرار گرفت. اگر  $x$  و  $y$  جوابهای بزرگ این معادله باشند، در این صورت  $\sqrt{2} \approx y/x$  و در واقع فیثاغورسیان طریقی برای تولید جوابهای بزرگتر و بزرگتر، به کمک روابط بازگشتی<sup>(۲۳)</sup>

19. Pell's Equation 20. Brouncker 21. Matiasevich

22. recurrence relations

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + 2y_n \\y_{n+1} &= x_n + y_n\end{aligned}$$

به دست آوردند. محاسبه‌ای مختصراً نشان می‌دهد که

$$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 = -(x_n^2 - 2y_n^2)$$

در نتیجه، اگر  $(x_n, y_n)$  در  $x^2 - 2y^2 = 1$  صدق کند،  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  در  $x^2 - 2y^2 = 1$  صدق می‌کند. در این صورت، با آغاز از جواب بدیهی  $(1, 0) = (x_0, y_0)$  معادله  $x^2 - 2y^2 = 1$ ، جوابهای متواتیاً بزرگتر  $(x_2, y_2), (x_4, y_4), \dots$  را به دست می‌آوریم. اما روابط بازگشتی فوق برای اولین بار چگونه کشف شده‌اند؟ وان در واردن<sup>(۲۴)</sup> [1976] و فاولر<sup>(۲۵)</sup> [1980, 1982] چنین مطرح می‌کنند که رمز این کار آنگوریتم اقلیدسی به کار رفته در قطعه خطها، عملی که یونانیان آن را تفریق نشانی<sup>(۲۶)</sup> می‌نامیدند، است. با مفروض بودن دو طول  $a$  و  $b$ ، شخصی می‌تواند مانند مورد بخش ۲۰.۳، دنباله  $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots$  را، با استفاده از تفریق مکرر طول کوچکتر از طول بزرگتر، تعریف کند. اگر  $a$  و  $b$  مضارب صحیح واحدی باشند، در این صورت جریان مورد بحث مانند مورد بخش ۳۰.۳ مختوم می‌شود، اما اگر  $a/b$  گنگ باشد، برای همیشه ادامه می‌یابد. می‌توانیم به راحتی تصویر کنیم که فیثاغورسیان به تفریق نشانی به کار رفته در مورد  $b = \sqrt{2}, a = 1$  علاقه‌مند بوده‌اند. این چیزی است که در این مورد رخداد دهد.  $a$  و  $b$  را با اضلاع یک مستطیل نمایش می‌دهیم، و هر تفریق عدد کوچکتر از عدد بزرگتر را با بریدن مربع مربوطه بر پسرخ کوچکتر آن مطرح می‌کنیم (شکل ۲۰.۳). ملاحظه می‌کنیم که مستطیل باقیمانده بعد از مرحله ۲، با اضلاع  $1 - \sqrt{2}$  و  $(1 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 2$ ، به همان شکل مستطیل اصلی، با این تفاوت، است که ضلع بزرگتر آن در این حالت به جای این که افقی باشد قائم است. نتیجه می‌شود که مراحل مشابهی برای همیشه رخ می‌دهند، که در ضمن، اثبات دیگری در مورد این که  $\sqrt{2}$  اصم است، نیز هست. اما،

این روابط را به دست می‌دهد. ممکن است این حقیقت که روابط یکسانی جوابهای معادلات  $x^2 - Dy^2 = \pm 1$  را تولید می‌کند، به عنوان نتیجه‌ای از این تمايل که آلگوریتم اقلیدسی با  $x_1 = 1, y_1 = 0$  ختم شود، کشف شده باشد. اگر فیثاغورسیان با  $x_1 = 1, y_1 = 0$  آغاز کرده و رابطه‌ای بازگشته مورد بحث را به کار برد، در این صورت، همچنانکه قبل در یافتیم می‌توانستند در یا بند که  $(x_n, y_n)$  در  $x^2 - Dy^2 = \pm 1$  صدق می‌کند.

مثالهای بسیار دیگری از معادله پل  $x^2 - Dy^2 = 1$  در ریاضیات یونانی رخ می‌دهد. و آنها را می‌توان به روش مشابه، با استفاده از کار بر د تفریق نشانی در مستطیلی به اضلاع  $1, \sqrt{D}$ ، بررسی کرد. در قرن هفتم میلادی بر اهما گوپتا<sup>۲۶</sup>، ریاضیدان هندی، رابطه‌ای بازگشته برای تولید جوابهای  $x^2 - Dy^2 = 1$  به دست داد. هندیها آلگوریتم اقلیدسی بر طولهای  $1$  و  $\sqrt{D}$  را «ذره ساز»<sup>۲۷</sup> می‌نامیدند زیرا آلگوریتم مزبور قطعات مورد بحث را به تکه‌های کوچکتر و کوچکتر تجزیه می‌کند. برای به دست آوردن رابطه‌ای بازگشته شخص باید بداند که «مالاً» مستطیلی متناسب با مستطیل اصلی باز گردد، حقیقتی که تنها در سال ۱۷۶۸ توسط لگرانژ به دقت به اثبات رسید. کارهای بعد اروپائیان در مورد معادلات پل، که در قرن هفدهم با بر اونکر و دیگران آغاز شد، مبتنی بر کسر مسلسل مربوط به  $\sqrt{D}$  بود، گرچه این روش نیز به همان روش تفریق نشانی منجر می‌شود (تمرینات را ملاحظه کنید). در مورد تاریخ متراکم اما مفصل معادله پل مورد زیر را ملاحظه کنید:

Dickson[1920], pp. 341–400

جنبه جالب نظر یه مورد بحث همان رابطه نامنظم بین  $D$  و تعداد مراحل تفریق نشانی قبل از بازگشت مستطیلی متناسب با مستطیل اصلی است. اگر تعداد مراحل مزبور زیاد باشد کوچکترین جواب غیر بدیهی<sup>۲۸</sup>  $x^2 - Dy^2 = 1$  بسیار بزرگ است. یکی از مثالهای مشهور این مورد مسئله موسوم به مسئله دهه ارشمیدس<sup>۲۹</sup> (۲۸۷–۲۱۲ ق.م.) است. این مسئله به محاولة

26. Brahmagupta

27. pulverizer

28. nontrivial

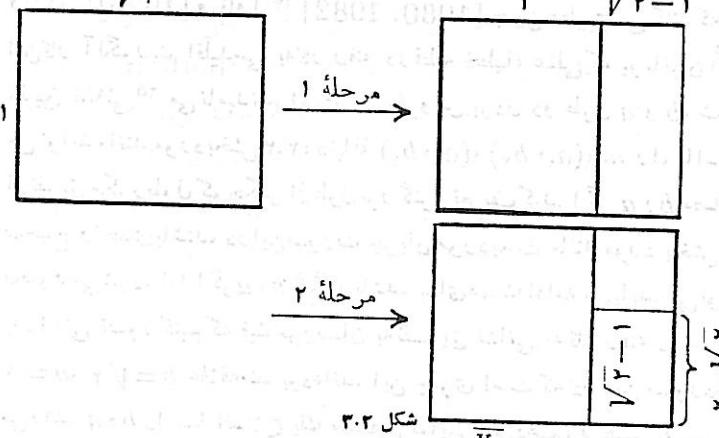
29. cattle problem of Archimedes

توجه فلیمان به رابطه بین مستطیلهای مشابه متوالی است. اگر فرض کنیم که اضلاع بزرگتر و کوچکتر مستطیلهای مشابه متوالی  $x_{n+1}, y_{n+1}, x_n, y_n$  باشند، می‌توانیم در مورد  $x_{n+1}^2 - Dy_{n+1}^2 = 1$  رابطه بازگشته زیر را، با استفاده از شکل ۳۰.۳ استخراج کنیم:

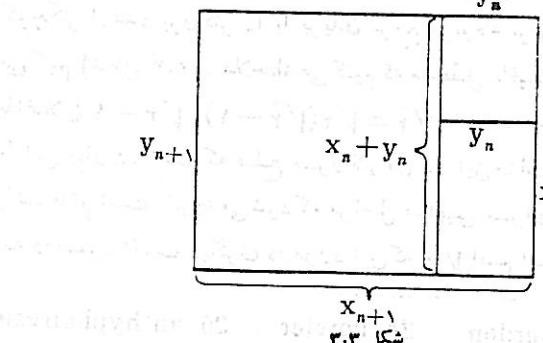
$$x_{n+1} = x_n + 2y_n$$

$$y_{n+1} = x_n + y_n$$

این روابط همان روابط فیثاغورسیانند؛ و تفاوتشان در این است که  $x_n, y_n$  زمان اعداد صحیح نیستند، و در  $x^2 - Dy^2 = 1$  و  $x^2 - 2y^2 = 5$  صدق می‌کنند. با وجود این، شخص حس می‌کند که شکل ۳۰.۳ طبیعی ترین تعبیر



شکل ۳۰.۲



شکل ۳۰.۳

بر دایرہ استفاده کردیم. اگر  $0 = p(x, y)$  معادله درجه دوم دلخواهی بر حسب  $x$  و  $y$  با ضرایب گویا باشد، و اگر این معادله دارای جواب گویای  $x = r_1, y = s_1$  باشد، در این صورت می‌توانیم هر جواب گویای آن را، با رسم خط گویای  $c = mx + c$  بری گذرنده از نقطه  $(r_1, s_1)$  و یافتن تقاطع دیگریش با منحنی  $0 = p(x, y)$ ، به دست آوریم. دو تقاطع با منحنی مورد بحث، مثلاً  $r_2, r_3$ ،  $x = r_2, r_3$  توسط  $c = mx + c$  ریشه‌های معادله

$$p(x, mx + c) = 0$$

داده‌می‌شود. این بدان معنی است که  $(x - r_1)(x - r_2) = k(x - r_1)(x - r_2)$ ، و از آنجاکه جمیع ضرایب واقع در سمت چپ معادله مورد بحث گویا هستند و  $r_1$  نیز گویاست، در این صورت  $k = r_2/r_1$  نیز باید گویا باشد. مقدار  $r_2$ ، چون نقطه گویای دیگری بر  $0 = p(x, y)$  است. بر عکس، هر خط گذرنده از دو نقطه گویای، گویاست، در نتیجه و به این ترتیب جمیع نقاط گویای یافت می‌شوند.

اکنون اگر  $0 = p(x, y)$  منحنی‌یی از درجه ۳ باشد، تقاطعاً تنش با خط  $c = mx + c$  توسط ریشه‌های معادله مکعبی  $0 = p(x, mx + c)$  داده‌می‌شود. اگر دو نقطه گویای واقع بر منحنی مورد بحث را بشناسیم، در این صورت خط گذرنده از آنها گویا خواهد بود، و تقاطع سومش با منحنی مزبور نیز با استدلال شبهی استدلال قبل گویا می‌شود. این حقیقت هنگامیکه شخص دریا بده که دو نقطه گویای معلوم را می‌توان منطبق بر هم در نظر گرفت، که در این صورت خط‌مان، مماس گذرنده از نقطه گویای معلوم می‌شود، مفیدتر می‌شود. به این ترتیب از یک جواب گویا می‌توانیم جواب دیگری را با استفاده از رسم مماس ایجاد کنیم، و از دو جواب گویا می‌توانیم جواب سوم را با در نظر گرفتن و ترین آن دو ترسیم کنیم.

دیو فانت جوابهای گویای معادلات مکعبی را به طریقی که به نظر می‌رسد که در اساس به همین طریق بوده، به دست آورده است. آثار بازمانده از

$$x^2 - 4,729,494y^2 = 1$$

منجر می‌شود که کوچکترین جوابش که توسط امثور [1880] به دست آمده دارای  $545,206$  رقم است!

تمرینات

۱. کسر مسلسل عدد حقیقی  $\alpha$  به صورت

$$\alpha = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4 + \dots}}}}$$

که در آن  $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$  اعداد صحیح حاصل از اعمال زیرنده، توشته می‌شود. فرض می‌کنیم  $n_1 = \text{جزء صحیح } \alpha$  باشد. در این صورت  $\alpha - n_1 > 1$  و  $\alpha - n_1 < 1$  مخصوص کنیم، و همینطور الی آخر. عملیات جدا کردن جزء صحیح و معکوس کردن با قیمانده را بر حسب تعریق نشانی تغییر کنید.

۲. نشان دهید که

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

۳. کسر مسلسل مر بوط به  $\sqrt{3}$  را بیابید.

### ۵.۳ ترسیمات و تر و مماس دیو فانت

در بخش ۱.۰.۳ از روش دیو فانت برای پیدا کردن جمیع نقاط گویای واقع

یونانی، همراه با ماقبی تمدن غربی، درحال انحطاط بود. حواله‌ای که غرب را فراگرفت همراه با افول رم و ظهور قدرت اعراب، و آتش‌سوزی در کتابخانه اسکندریه در ۶۴۰ میلادی، تقریباً تمام جزئیات زندگی دیوفانت را نابود کرد. تاریخ زندگیش را می‌توان به این بین ۱۵۵ تا ۳۵۵ میلادی قرارداد، زیرا ذکری از هیپ‌سیکلیس<sup>۳۵</sup> (در قید خیات در حدود ۱۵۵ میلادی) به میان می‌آورد تئون<sup>۳۶</sup> اسکندرانی (حدود ۳۵۵) یادی از او به میان آورده است. مدرک پاره دیگری، نامه‌ای از میخائل پسلوس<sup>۳۷</sup> (قرن یازدهم)، ۲۵۰ میلادی را به عنوان محتمل ترین زمان اوج زندگی دیوفانت مطرح می‌کند. گذشته از این، تنها نشان از زندگی دیوفانت معماًی در گلچین یونانی<sup>۳۸</sup> (حدود ۶۰۰ میلادی) است:

دیوفانت با لطف خداوند یک ششم زندگیش را در کودکی سر کرد و با افزودن یک دوازدهم عمرش به آن گل صورتش به سیزه آرامش شد. پس از یک هفتمن عمرش زن ستاند، و پنج سال پس از این واقعه خداوند پسری به او عطا کرد. درینکه تقدیر پسر را پس از اینکه به اندازه نیمی از حیات پدر زندگی کرد از جهان برد. عمر دیوفانت چهار سال پس از این اندوه پایان گرفت.<sup>۳۹</sup>

به این ترتیب، در صورتی که اطلاعات فوق درست باشد، دیوفانت در ۳۳ سالگی ازدواج کرده و پسری داشته که در ۴۲ سالگی، چهار سال پیش از آنکه پدر در ۸۴ سالگی بمیرد، از دنیا رفته است. طی قرنها بی متمادی به اثر دیوفانت توجه نشد و تنها قسمت‌هایی از آن باز ماند. اولین آثار توجه به دیوفانت در قرون وسطی رخداد، اما پیشترین سهم در تجدید حیات نهایی آثار او به رافائل بومبلی (۱۵۲۶-۱۵۷۲) و

35. Hypsicles

36. Theon

37. Michael Psellus

38. Greek Anthology

39. (Cohen and Drabkin [1958], P. 27)

40. Rafael Bombelli

دیوفانت مقدار اندکی از روش‌های اورآشکار می‌کند، اما در این مورد ترسیم قابل قبول دوباره‌ای صورت جبری ترسیمات و ترموماس است توسط باشما کو<sup>۴۰</sup> [1981] داده شده است. احتمالاً اولین نفری که روش‌های دیوفانت را دانست فرما، در قرن هفدهم میلادی، بود، و اولین نفری که تعبیر مماس و تر مورد بحث را به دست داد نیوتن بود [اوخر دهه ۱۶۷۰]. در مکعبی‌ها، برخلاف حالت درجه‌دوم، اختیاری در مورد ضریب زاویه خط گویای موربد بحث نداریم. بنابراین به همیچ ترتیبی شخص نیست که این روش جمیع نقاط گویای واقع بر مکعبی را بدست دهد. قضیه جالب توجهی، که توسط پوانکاره<sup>۴۱</sup> [1901] حدس زده، و توسط موردل<sup>۴۲</sup> [1922] اثبات شد، براین است که جمیع نقاط گویایی توانند توسط ترسیمهای مماس و تری که در مورد نقاطی به تعداد متناهی، به کار رفته‌اند، ایجاد شوند. اما، هنوز شخص نیست که آنکه یعنی برای پیدا کردن مجموعه‌ای متناهی از چنین ایجاد کننده‌های گویایی در مورد هر منحنی مکعبی موجود است یا خیر.

### تمرینات

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = y \quad (\text{معادله } y = 71/8, x = 21/8)$$

داده شده توسط دیوفانت (Heath [1910], p. 242) را با دسم مماس

گذرنده از نقطه گویای آشکار واقع برای منحنی توضیح دهید.

۲. ترتیب زیر از ۱۴۵ vieté [1593], p. 145 را با استفاده از ترسیم

مماس استخراج کنید. با معلوم بودن نقطه گویای (a, b) نشان دهید که نقطه

گویای دیگر واقع بر منحنی  $y^3 = a^3 - b^3 = a^3 - b^3 - x^3$  عبارت است از

$$x = a \frac{a^3 - 2b^3}{a^3 + b^3}, \quad y = b \frac{2a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$$

### ۶.۰۳. شرح احوال دیوفانت

دیوفانت در دورانی در اسکندریه می‌زیست که به طور کلی ریاضیات

32. Bashmakova

33. Poincaré

34. Mordell



## فیبوناچی و رشته‌های عددی

لئوناردو پیزائی مشهور به فیبوناچی یعنی «پسر بوناچیو» از بزرگترین ریاضی‌دانان اروپا در سده‌های میانی است. پدر فیبوناچی مدیر یکی از تجارتخانه‌های ایتالیائی در الجزایر بود. لئوناردو گرچه در پیزا بس دنیا آمد ولی در الجزایر بود که نخستین آموزش‌های ریاضی را از آموزگاران سرخانه و مسلمان آنجا فراگرفت و با دستگاه دهدزی هند و عربی آشنا شد. لئوناردوی جوان خیلی زود دریافت که دستگاه دهدزی با دارابودن نشانه صفر و موضعی بودن سایر نمادها یعنی، نسبت به دستگاه ناهمجارت رومی، که هنوز در کشورش رایج بود، از چه برتری‌هایی برخوردار است. در بهترین و مشهورترین اثر فیبوناچی به نام *Liber abaci* یا «کتاب چرتکه» از شایستگی نمادسازی در دستگاه هند و عربی به شدت تمجید شده است. این کتاب در واقع جزوی بازارگانی جامعی است پژوهش حساب و جبر.

گرچه کتاب چرتکه و بحث واستدلالهایش چندان مورد توجه بازارگان نبود آن روز ایتالیا قرار نگرفت، ولی بعدها با نفوذترین و تنها کتابی شد که تو انس است دستگاه هند و عربی را به غرب زمین بشناساند. کتاب چرتکه در سال ۱۲۰۲ در پیزا تکمیل شد، ولی تا چند سال در رخوت گمنامی به سرمی برداشته شد. تا این که با تجدید چاپش در ۱۲۲۸، که به منجم مشهور آن زمان پیشکش شده بود، جانی تازه‌گرفت. از کتاب چرتکه هرگز بدان انگلیسی ترجمه‌ای انجام نگرفت. با این که لئوناردو والاترین خدمت‌ها را به ریاضیات کرده است جسای

ویلهلم هولتزمان<sup>۴۱</sup> (معروف به زایلندر<sup>۴۲</sup>، ۱۵۳۲-۱۵۷۶) متعلق است. بومیلی نسخه‌ای از کتاب حساب دیو فانت را در کتابخانه و ایکان یافت و ۱۴۳ از آن را در کتاب جیرش به چاپ رساند. زایلندر اولین ترجمه به لاتین کتاب حساب را در ۱۵۷۵ انتشار داد. مشهورترین چاپ کتاب حساب از آن باشه دو مزیر یاک<sup>۴۳</sup> [۱۶۲۱] بود. باشه امکان اصول کلی مخفی در مسائل خاصی از حساب را ملاحظه کرد، و در تفسیری برای کتاب معاصر ینش را به رقابت در شناخت کامل دیو فانت و بررسی بیشتر اندیشه‌های او فراخواند، و این فرما پوکه این دعوت را اجابت کرد و اولین پیشرفت‌های مهم در نظریه اعداد از دوران کلاسیک تازمان خود را انجام داد (فصل ۱۰ را ملاحظه کنید).

\* \* \*

41. Wilhelm Holtzmann

43. Bachet de Meziriac

42. Xylander

برای تهیه شماره‌های گذشته «آشنائی با ریاضیات» و همچنین «آشتی با ریاضیات»، می‌توانید به یکی از کتابفروشی‌های زیر در تهران مراجعه و یا با آن‌ها مکاتبه کنید:

۱. گوتنبرگ، خیابان انقلاب، رو بروی دانشگاه تهران، شماره ۱۳۴۶،

تلفن ۶۴۰۲۵۷۹

۲. فردوس، خیابان مجاهدین اسلام، نبش خیابان ایران، شماره ۲۶۲،

تلفن ۳۰۲۵۳۳

۳. چشم، کریم خان زند، نبش میرزای شیرازی، شماره ۱۶۷، تلفن ۸۹۷۷۶۶

۴. تهران، خیابان پاسداران، چهارراه پاسداران شماره ۲۶، تلفن ۲۴۵۲۱۹

اگر تعداد جفت‌هایی که در آخر هر ماه خواهیم داشت پشت‌سر هم بنویسیم، رشته‌ای عددی به صورت

$$(1) \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

به دست می‌آوریم. همچنان که فیبوناچی یاد آورمی شود در این رشته عددی، هر عدد برابر است با مجموع دو عدد پیشین. در آخر ۱۲ ماه مجموع خرگوش‌ها ۳۷۷ جفت خواهد شد.

فیبوناچی بیش از این، تحقیقی روی این رشته انجام نداد و تا آغاز سده نوزدهم نیز سخن دیگری از آن به میان نیامد، تا این که لوکاس ضمن مطالعه روی رشته‌ها، آن‌های را که با دو عدد مثبت آغاز و هر عددش بر این مجموع دو عدد پیشین می‌بود (که اکنون به نام رشته‌های عمومی فیبوناچی خوانده می‌شوند)، مورد بررسی عمیق قرار داد. او ساده‌ترین آن‌ها مثل رشته (۱) را رشته فیبوناچی نامید. (ساده‌ترین رشته بعدی یعنی ۱۱۸۰۰... ۱۱۴۶۷۱۱۸۰۰... اکنون رشته لوکاس خوانده می‌شود).

مرسوم است که نخستین عدد رشته فیبوناچی را  $F_1$  و دومین عدد را  $F_2$  و  $n$  مین عدد را  $F_n$  می‌گویند به طوری که جای هر عدد در این رشته با یک‌اندیس زیر  $F$  نشان داده می‌شود. بنابراین  $F_1 = 1$  و  $F_2 = 1$  و  $F_3 = 2$  و  $F_4 = 3$  و ... و مانند آن‌ها (نخستین ۴۵ عدد فیبوناچی در جدول شکل ۲ داده شده است)  $F_n$  را به عددی از رشته فیبوناچی نسبت می‌دهند.  $F_{n+1}$  عدد پس از  $F_n$ ، عدد پیش از  $F_n$  می‌باشد.  $F_{n+1}$  عددی است در رедیف دو بر این رедیف  $F_n$  و مانند این‌ها.

دها سال بود که رشته فیبوناچی ریاضی دانان را مجذوب و فریته خود کرده بود و این نمی‌توانست بی‌علت باشد، یکی این که در بسیاری جاها که هیچ انتظارش نمی‌رود، به ناگاه ظاهر می‌شود، ولی مهمتر این که، هر دوستدار واقعی نظریه عددها، هر کس با اندک دانشی از حساب و ریاضیات، می‌تواند روی این رشته کار کند و به قضیه‌های متعدد و زیبائی‌هایی گوناگون بی‌پایانش دست یابد. پیشرفت‌های تازه در برنامه‌نویسی کامپیوتر موجب توجه دوباره‌ای به این رشته شده است. چه معلوم شده است که رشته فیبوناچی در رده بندی‌های داده‌ها، بازیابی اطلاعات، ایجاد عددهای تصادفی و حتی در روش بدست آوردن سریع مقدار تقریبی ماکریم و می‌نیمم تابع‌های پیچیده‌ای که مشتق آن‌ها شناخته نشده است، کاربردهای سودمندی دارد.

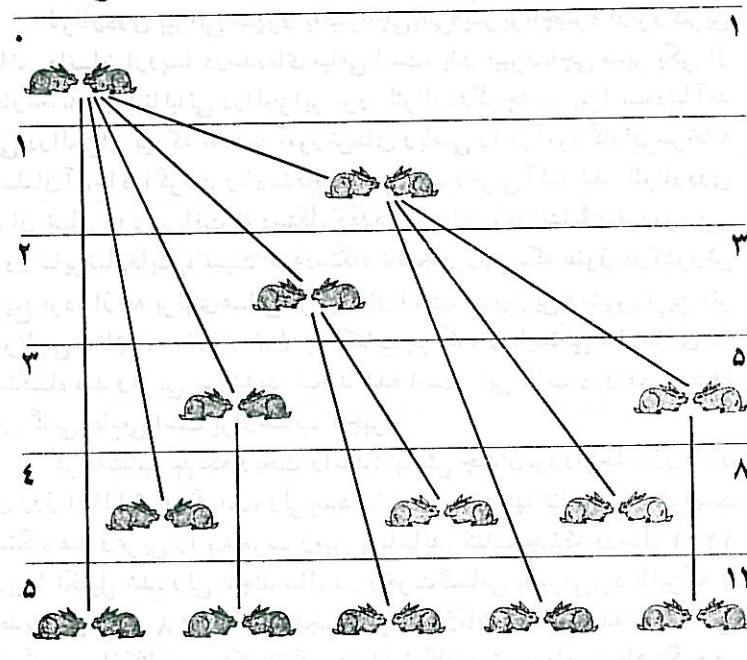
«فیبوناچی کوارتلی» (*The Fibonacci Quarterly*) که با یاری

تأسف است که امروزه چندان یادی از اونتی شود و تنها به خاطر این که ادوارد لوکاس - دانشمند فرانسوی سده نوزده - یک رشته عددی را به فیبوناچی نسبت داده است، نامی ازاو به میان می‌آید. لوکاس یکی از صاحب نظران عدد و فراهم آورنده کتابی چهارجلدی از ریاضیات ترقه که، اشاره‌ای هم به فیبوناچی دارد. لئوناردو مسأله این چنین در کتاب چرتکه آورده بود:

فرض کنید یک جفت خرگوش بالغ را برای تکثیر در یک قفس جا داده باشیم، اگر خرگوش‌ها دو ماه پس از تولدشان بتوانند بارور شوند و تنها یک جفت تر و ماده بزایند و تولید را در آخر هر ماه بعدی تکرار کنند، در صورتی که مرگ و میری میان آن‌ها روی ندهد، آخر سال چند جفت خرگوش در این قفس خواهیم داشت؟

نمودار شکل ۱ دو دمان این خرگوش‌ها را پس از ۵ ماه نشان می‌دهد.

آخر ماه



شکل ۱ - نموداری از دو دمان خرگوش‌های فیبوناچی

انجمن فیبوناچی از ۱۹۶۳ تا به حال منتشر می شود، از این گونه کاربردها و همچنین موضوع های تازه درباره عددهای فیبوناچی سخن می دارد. این مجله بیشتر به بحث و شناساندن خواص عددهای فیبوناچی و عددهای مشابه (مثل عددهای تریفیبوناچی و لوکاس) می پردازد، با این حال از بررسی عددهای با خواص ویژه نیز خودداری نمی کند.

در فیبوناچی کوارتلی اکتبر ۱۹۶۳ مقاله ای جالب از جوان ریاضی دانی به نام مارک فین بر گ (Mark Feinberg) دیده می شود که در آن رشته عددهایی که هر عدد آن برابر با مجموع سه عدد پیشین خود باشد، تریبوناچی (Tribonacci) نامیده شده است. رشته تریبوناچی که توسط فین بر گ طرح شده است عددهای

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, \dots$$

را نشان می دهد، ولی رشته سال های زندگی خود او، عدد چندانی را نشان نمی دهد. رشته زندگی این جوان پر استعداد خیلی زود از هم گسیخته شد، فین بر گ در سال ۱۹۶۷ آن هنگام که دانشجوی سال دوم دانشگاه پنسیلوانیا بود، جان خود را در یک سانحه موتورسیکلت از دست داد.

فین بر گ در مقاله اش یادآور می شود که نسبت دو عدد پیاپی، در رشته تریبوناچی، هر چه رشته در ازترمی شود، بدرویشه معادله  $x^5 = 1 + x^3 + x^2 - x$  یعنی به بعد  $\dots, 0/5436895126\dots$  نزدیکتر می شود. می توانیم با این رشته ها عمومیت بدھیم و رشته عددهای تشکیل دھیم که هر عدد آن از مجموع چهار عدد پیشین یا پنج عدد پیشین و یا به طور کلی  $n$  عدد پیشین درست شده باشد. در همه این رشته ها خارج قسمت هر عدد به عدد پس از خود به سوی عدد مشخصی سیر می کند به طوری که هر چه  $n$  بزرگتر گرفته شود، نسبت دو عدد مجاور کوچکتر می شود تا در حد (که  $n$  برابر با تعداد همه عددهای پیشین گرفته شود) به  $0/5$  می رسد.

از چشمگیر ترین خاصیت های رشته فیبوناچی (و همچنین رشته های تعیین یافته اش) نسبت دو عدد متولی آن است که بد طور متناوب، یکی بزرگتر و دیگری کوچکتر از نسبت طلائی می شود و همچنان که رشته ادامه پیدا می کند، اختلاف این نسبت ها کمتر و کمتر می شود، به طوری که در حد بالا با نسبت طلائی برابر می شوند.

نسبت طلائی از نصف حاصل جمع ۱ وریشه ۵ به دست می آید که عددی است گنگ و برابر با  $1/61803\dots$  و به عدد فی (φ) نیز مشهور است. در باره

$F_1$	1	$L_1$	1
$F_2$	1	$L_2$	3
$F_3$	2	$L_3$	4
$F_4$	3	$L_4$	7
$F_5$	5	$L_5$	11
$F_6$	8	$L_6$	18
$F_7$	13	$L_7$	29
$F_8$	21	$L_8$	47
$F_9$	34	$L_9$	78
$F_{10}$	55	$L_{10}$	123
$F_{11}$	89	$L_{11}$	199
$F_{12}$	144	$L_{12}$	322
$F_{13}$	233	$L_{13}$	521
$F_{14}$	377	$L_{14}$	843
$F_{15}$	610	$L_{15}$	1364
$F_{16}$	987	$L_{16}$	2207
$F_{17}$	1597	$L_{17}$	3571
$F_{18}$	2584	$L_{18}$	5778
$F_{19}$	4181	$L_{19}$	9349
$F_{20}$	6765	$L_{20}$	15127
$F_{21}$	10946	$L_{21}$	24474
$F_{22}$	17711	$L_{22}$	39603
$F_{23}$	28857	$L_{23}$	64079
$F_{24}$	46268	$L_{24}$	103782
$F_{25}$	75025	$L_{25}$	167761
$F_{26}$	121393	$L_{26}$	271443
$F_{27}$	199418	$L_{27}$	439204
$F_{28}$	317811	$L_{28}$	710677
$F_{29}$	514229	$L_{29}$	1149851
$F_{30}$	832040	$L_{30}$	1860498
$F_{31}$	13242269	$L_{31}$	3010379
$F_{32}$	2178209	$L_{32}$	4870837
$F_{33}$	3524587	$L_{33}$	7881199
$F_{34}$	5702887	$L_{34}$	12752043
$F_{35}$	9227465	$L_{35}$	206232239
$F_{36}$	14930352	$L_{36}$	33385282
$F_{37}$	24157817	$L_{37}$	53018521
$F_{38}$	39088169	$L_{38}$	87403803
$F_{39}$	63245986	$L_{39}$	141422242
$F_{40}$	102334155	$L_{40}$	228826127

شکل ۲- نخستین چهل عدد فیبوناچی و لوکاس

رنگ خاکستری نشان داده شده‌اند. تعداد مارپیچ‌های یک‌گروه با گروه دیگر، توفیر می‌کنند و به عدد متواالی فیبوناچی گرایش نشان می‌دهند. در آفتاب‌گردان‌های متوسط، به طور معمول این تعداد ۳۴ و ۵۵ مارپیچ می‌باشدند ولی در آفتاب‌گردان‌های بسیار بزرگ‌تر به ۸۹ و ۱۴۴ هم می‌رسند. دانیل اکتل زمین‌شناس و همسرش در «ماهنشا علمی» نوامبر ۱۹۵۱ گزارش داده‌اند که در مزرعه خود آفتاب‌گردان غول پیکری پیدا کرده‌اند که در داشته است.

از رابطه زیر که عدد  $n$  فیبوناچی به دست می‌آید، ارتباط تنگ‌تر نشان می‌باشد:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

معادله بالا می‌تواند به‌طور دقیق عدد  $n$  فیبوناچی را بدهد ( $\sqrt{5}$  های آن از هم حذف می‌شوند)، ولی چنین محاسبه‌ای، بخصوص اگر  $n$  بزرگ‌تر گرفته شود، بسیار کسل کننده می‌باشد، هر چند که از راه لگاریتم می‌توان مقدار تقریبی آن را حساب کرد. ولی فرمول بسیار ساده‌تری وجود دارد که آن هم عدد  $n$  فیبوناچی را می‌دهد. اگر توان  $n$  نسبت طلائی را بر ریشه دوم ۵ بخش کنیم، مقدار تقریبی  $F_n$  پیدا می‌شود. مقدار دقیق آن، نزدیکترین عدد صحیح به همان عدد تقریبی خواهد بود. این هر دو رابطه نشان می‌دهند که بازگشتی نیستند. چون عدد  $n$  را به‌طور مستقیم از  $n$  به دست می‌دهند؛ به عکس آن‌ها، «روش بازگشتی» یک رشته عمل‌های است که هر یک از آن‌ها وابسته به عمل قبلی می‌باشد. اگر برای پیدا کردن  $n$  این عدد  $F_n$ ، عدددهای متواالی آن را دو به دو (در رشته ساده فیبوناچی) جمع نماید تا به عدد  $n$  برسید، شما به‌طور بازگشتی عمل کرده‌اید. پیدا کردن عدد  $n$  از راه جمع زدن دو عدد قبلی، ساده‌ترین مثال از روشن بازگشتی است.

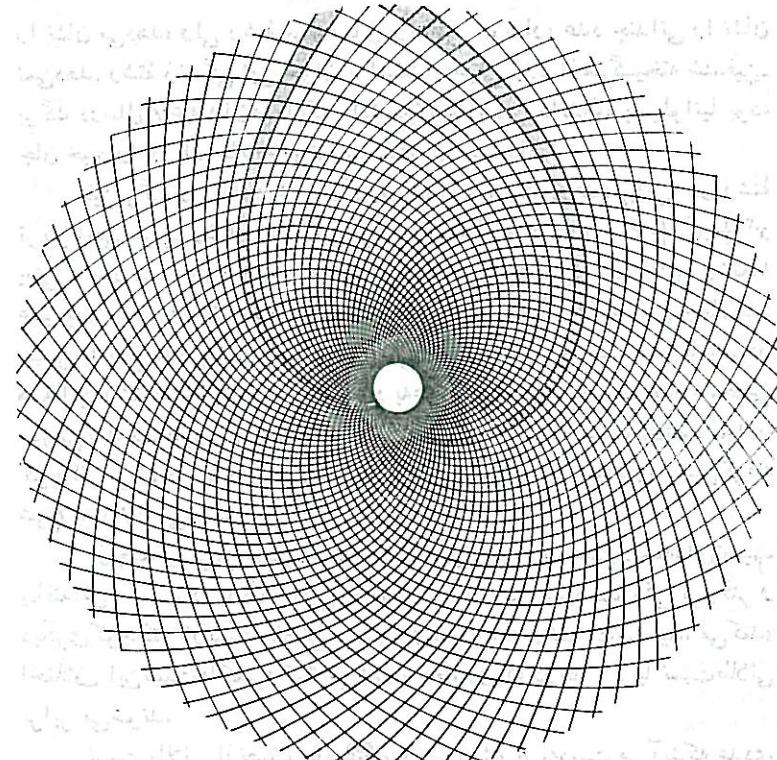
رشته لوکاس نیز رشته عدددهایی است مشابه فیبوناچی با این توفیر که رشته فیبوناچی با دو عدد ۱ و ۱ آغاز می‌شود ولی لوکاس با دو عدد ۱ و ۳ فرمولی که عدد  $n$  رشته لوکاس را می‌دهد به‌طور دقیق عبارت است از:

$$L_n = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

ولی مانند عدددهای فیبوناچی راه ساده‌تری برای یافتن عدد لوکاس وجود دارد. کافی است که نسبت طلائی را به توان  $n$  برسانیم و سپس رقم صحیح نزدیک به آن را انتخاب کنیم.

کاربرد نسبت طلائی و خویشاوند نزدیکیش رشته فیبوناچی در هنر، معماری و حتی ادبیات سخنان بسیاری رفته است. جرج دوك و روث استاد دانشگاه پرینستون در کتابش (چاپ ۱۹۶۳) بیان می‌دارد که رشته فیبوناچی، در شهرهای ویرژیل و دیگر شاعران رومی (لاتین) آن زمان آگاهانه مورد بهره‌برداری قرار گرفته است.

در رشد و رویش اندام‌گیاهان و جانوران نیز پیروی از نسبت طلائی و رشته فیبوناچی آشکارا به چشم می‌خورد. بهترین مورد نمایش عدددهای فیبوناچی در گیاهان را می‌توان در گونه‌های معینی از گل آفتاب‌گردان مشاهده کرد. نظام مارپیچی دانه‌های این گیاه سخت حیرت‌انگیز است. دو گروه مارپیچ لگاریتمی-یکی راست گرد و دیگری چپ گرد-در روزی بندی دانه‌های سطح این گل دیده می‌شود که در شکل ۳ با



شکل ۳- گل آفتاب‌گردان غول پیکر با ۵۵ مارپیچ چپ گرد و ۸۹ مارپیچ راست گرد

اختلاف دارد. این کاهش یا افزایش ۱، همچنانکه رشته پیش می‌رود، یک در میان تغییر می‌کند. برای جمله‌های لوکاس نیز این اختلاف، عددی است ثابت و مساوی ۵. بهطور کلی برای رشته عمومی فیبوناچی این اختلاف برابر است با  $(F_{n+2} - F_n)$ .

- مجموع مربع‌های هر دو عدد  $F$  پیائی،  $F_{n+1}^2 + F_n^2$  می‌شود  $F_{n+1}$  که اندیس آن همیشه فرد است. فرد بودن آن از این قضیه ریشه می‌گیرد که اگر مربع‌های عده‌های  $F$  را به صورت رشته‌ای بنویسیم، مجموع هر دو مربع بی‌دریبی، عدد  $F$  رشته را با اندیس فرد بدست می‌دهد.

- برای هر چهار عدد بی‌دریبی  $F$  مثل  $A, B, C, D$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$C^2 - B^2 = A \times D$$

- آخرین رقم جمله‌های رشته فیبوناچی، هر ۶ عددی یک بار تکرار می‌شود، دورقム آخر در هر دوره ۳۰ تا می‌تکرار می‌شوند. دوره تکرار سه‌رقم آخر ۱۵۰۰ و چهار رقم آخر ۱۵۰۰۰ و پنج رقم آخر ۱۵۰۰۰۰ است، و بهمین سان برای رقم‌های بالاتر.

- برای هر عددی مثل  $m$ ، جمله‌های بی‌شماری از  $F$  یافت می‌شوند که بر  $m$  بخش‌بذری می‌باشد و دست کم یکی از آنها در میان  $2m$  جمله نخستین رشته فیبوناچی پیدامی شود. این خاصیت در رشته لوکاس وجود ندارد چنان‌که در هیچ یک از جمله‌های  $L$ ، عددی با مضرب ۵ نمی‌توان یافت.

- میان دو عدد پیائی فیبوناچی (و همچنین لوکاس) هیچ وقت مضرب مشترکی پیدا نمی‌شود.

- به جز عدد ۳، هر جمله  $F$  که اول باشد، اندیس  $F$  آن هم اول است (مانند ۲۳۳ که اول است و اندیس  $F$  آن یعنی ۱۳ نیز اول است). از طرف دیگر اگر اندیسی مرکب باشد عدد هم مرکب است. متأسفانه عکس آن همیشه صادق نیست، یعنی اگر اندیسی اول باشد، معلوم نیست که خود عدد هم اول باشد. به نخستین مثالی از این دست که برخورد می‌کنیم،  $F_{19}$  و  $F_{19}^2 = 4181$  است که ۱۹ عددی است اول در حالی که ۴۱۸۱ عددی است مرکب و برای بر با آنها  $113 \times 37$ . در هر صورت هنوز معلوم نشده است که شماره عده‌های اول در رشته فیبوناچی محدود است یا بی‌نهایت. اگر قضیه عکس در همه‌جا صادق بود، پاسخ به چنین مسئله‌ای چندان دشوار نبود. چه می‌دانیم که شماره عده‌های اول بی‌نهایت است و اگر هر عدد  $F$  با اندیس اول، خود نیز اول می‌بود،

میان عده‌های فیبوناچی و لوکاس می‌توان رابطه‌های زیادی پیدا کرد. از جمله  $n$  مین عدد لوکاس برابر است با حاصل جمع  $1 + n$  مین عدد فیبوناچی یعنی:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

همچنین حاصل ضرب  $F_n$  و  $L_n$  برابر است با  $F_{2n}$ . معادله دیوفانتی  $x^2 + 5x + 4 = 0$  تنها هنگامی دارای جواب‌های عدد صحیح است که  $a$  عددی فیبوناچی باشد، در این صورت لز هم عدد لوکاس مرتبه می‌شود. یعنی  $5F_n^2 + 4 = L_n^2$ .

به جز عدد ۱ و عدد ۳، عدد دیگری نمی‌توان یافت که میان عده‌های فیبوناچی و عده‌های لوکاس مشترک باشد.

اگر یکی از عده‌های فیبوناچی (به جز یک) را داشته باشیم، برای پیدا کردن عدد بعدی نیازی به دانستن شماره ردیف (اندیس  $F$ ) آن نیست، چنان‌که اگر آن عدد را  $A$  فرض کنیم، عددی بعدی فیبوناچی عبارت خواهد بود از:

$$\left[ \frac{A+1+\sqrt{5A^2}}{2} \right]$$

و ما آن را در گروشه قرارداده‌ایم تا نشان دهیم عددی که به دست می‌آید تقریبی است و باید آن را، با نزدیکترین عدد درست سرداشت کرد. همین رابطه عدد بعدی لوکاس را نیز برای هر عدد بزرگتر از ۳ می‌دهد.

در یک رشته عمومی فیبوناچی، مجموع نخستین  $n$  جمله آن برای است  $\frac{F_{n+2}^2 - 1}{5}$  منهای دومین جمله رشته. با بهره‌گیری از این خاصیت می‌توان به شیرین‌کارهای زیادی دست زد. اگر دوست شما دو عدد دلخواه برگزیند و با آنها یک رشته عمومی فیبوناچی بسازد. شما می‌توانید مجموع تمام جمله‌های رشته را از آغاز تا آن جا که او بخواهد، خیلی زود حساب کنید. کافی است که دومین جمله پس از عدد انتخابی را یادداشت کنید و جمله دوم رشته را از آن کسر نمایید. برای این اساس در رشته معمولی فیبوناچی عدد ۱ و در رشته لوکاس عدد ۳ را باید کسر کرد.

اگرچه چند خاصیت مشهور رشته فیبوناچی را در اینجا می‌آوریم و باید آور می‌شویم که همه آنها حالت‌های خاصی از قضیه‌های رشته فیبوناچی می‌باشند که اثبات آنها چندان دشوار نیست.

۱- مربع هر جمله  $F$  با حاصل ضرب دو جمله طرفین آن، یک عدد

این خاصیت را می‌توانید با انجام عمل زیر آزمایش کنید

$5/0112358$

۱۳

۲۱

۳۴

۵۵

۸۹

۱۴۴

۲۳۳

۳۳۷

۶۱۰

...

....

....

$5/011235955059179775 \dots \dots \dots$

$\frac{1}{89} = 5/011235955059179775 \dots \dots \dots$

از این گونه خاصیت‌ها، می‌توان کتابی را پر کرد. همچنین می‌توان از موارد کاربرد رشته فیبوناچی در فیزیک و ریاضیات یاد کرد.  
لئوموزر (Leo Moser) درباره پرتوهای نور که به طور مورب به دوشیشه تخت و بهم چسبیده می‌تابد، چنین توضیح می‌دهد: پرتوی که بازتاب ندارد، در عبور از شیشه‌ها، تنها یک راه دارد (شکل ۴ را بینید). اگر پرتوی یک بازتاب داشته باشد، دو راه برایش وجود خواهد داشت. اگر دو بار بازتاب کند، سه راه و اگر سه بار، پنج راه می‌تواند داشته باشد. بهمان ترتیب که تعداد بازتاب‌ها افزایش می‌یابد، تعداد راه‌های ممکن، یک رشته فیبوناچی درست می‌کنند، به طوری که برای  $n$  بازتاب،  $F_{n+2}$  راه گوناگون وجود خواهد داشت.

مسیرهای مختلفی که یک زنپور عسل می‌تواند برای رفتن از حجره‌ای به حجره دیگر انتخاب کند بر ابراست با یکی از عده‌های فیبوناچی. به شکل ۵ توجه کنید که از دو ردیف حجره زنپور عسل تشکیل یافته است. فرض کنید که حجره‌ها به سمت راست تا هر جا که بخواهیم، گسترش دارند. زنپوری که

باید بی‌نها بیت عدد  $F$  اول نیز وجود می‌داشت. حال که نمی‌دانیم شماره عده‌های اول  $F$  بی‌نها است، از محدود بودن آن هم اطمینان نداریم. تا آن جا که معلوم است تاکنون هیچ کس نمی‌داند بزرگترین عدد اول در رشته فیبوناچی وجود دارد یا نه، و در رشته لوکاس نیز چنین است. بزرگترین عدد اول  $F$  که تاکنون شناخته شده،  $F_{521}$  است که عددی است ۱۱۹ رقمی و بزرگترین عدد اول نیز  $L_{353}$  است با عددی ۷۶ رقمی.

در یک رشته عمومی فیبوناچی، اگر نخستین دو عدد آن بر عدد اولی بخش‌پذیر باشند همه عده‌های دیگر، بهمان عد اول بخش‌پذیر می‌شوند، و در این صورت رشته دارای شماره معینی عدد اول خواهد بود. ولی اگر دو عدد نخستین رشته، دارای مقصوم عليه مثمر کی نباشند چنین رشته‌ای از عدد اول تهی خواهد بود. نخستین بار در جلد ۵۷ مجله ریاضیات (Mathematics Magazine) رشته‌هایی که همه عده‌های آن مرکب باشند، توسط گراهام (R. L. Graham) مطرح شد. گراهام بیان داشت که بی‌نها بیت رشته فیبوناچی، عاری از عدد اول وجود دارد، ولی این را هم داشته باشید که کوچکترین دو عدد آغازین رشته‌ای که عاری از عدد اول می‌باشد، دو عدد زیر است:

۱۷۸۶۷۷۲۷۵۱۹۲۸۸۰۲۶۳۲۲۶۸۷۱۵۱۳۰۴۵۵۷۹۳

۱۰۵۹۶۸۳۲۲۵۰۵۳۹۱۵۱۱۱۰۵۸۱۶۵۱۴۱۶۸۶۹۹۵

۸- بحسبتی ای ۵ (۵ را برای  $F$  در نظر بگیرید) تنها عدد  $F$  مجذور کامل،  $F_{12}$  است که ۱۴۰ می‌باشد و شگفت‌ابن که مجذور اندیس خودش می‌باشد. تاسال ۱۹۶۳ مشخص نشده بود که این عدد تنها عدد  $F$  است که مجذور کامل است تا این که جان کوهن (John H. E. Cohn) از کالج یلدفورد در دانشگاه لندن نشان داد که مجذور کاملی بزرگتر از ۱۴۴ در عده‌های  $F$  یافت نمی‌شود. او همچنین ثابت کرد که در رشته لوکاس تنها ۱ و ۴ هستند که مجذور کامل می‌باشند.

۹- تنها مکعب کامل در میان عده‌های فیبوناچی ۱ و ۸ می‌باشد و در میان عده‌های لوکاس ۱.

۱۰- عکس ۸۹، یازدهمین عدد  $F$ ، می‌تواند از رشته فیبوناچی به دست آید. اگر رشته را از ۵ آغاز و جمله‌های آن را یکی پس از دیگری بددیف بعد از میز قراردهیم، بدین صورت:

$\frac{1}{89} = 0/0 F_0 F_1 F_2 F_3 F_4 \dots \dots \dots$

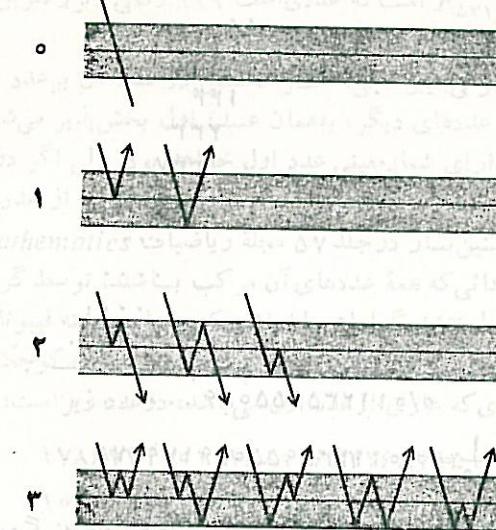
طولانی کردن راه پرهیز می نماید. دیده می شود که برای رسیدن به حجره ۵  
یک راه وجود دارد و برای حجره ۱ دو راه وجود دارد و برای حجره ۲ سه راه  
پنج راه و به همین گونه برای رسیدن به حجره  $F_{n+2}$  راه وجود دارد.  
گویند سه گونه زنبور عسل در یک کندو به سر می بردند، زنبور کارگر تخم گذار تولید  
می شود و پدر ندارد. در این صورت، همچنان که C. A. B. Smith<sup>۱</sup> بیان داشته است، یک زنبور نر دارای ۱ مادر است و ۲ جد و جده (والدین مادرش) و ۳ مادر جد و پدر جد (یک پدر جد و دو مادر جد) و ۵ جد در جد و به همین سان روی یک رشته فیبوناچی به پیش می رود.

شما می توانید با بهره گیری از خاصیت های رشته فیبوناچی به شیرین-  
کاری های متنوعی دست بزنید. از دوست خود بخواهید تا دو عدد دلخواه را زیر هم بنویسد. آن گاه جمع آنها را زیر هردو یادداشت کند. سپس آنرا با عدد دوم جمع بزنند و باز زیر هم بنویسد. به همین ترتیب هر عدد را با عدد بالای خود جمع بزنند و زیر هم یادداشت کند. این عمل را ادامه دهد تا ستونی از ۱۵ ردیف عدد درست شود، به طوری که از دو عدد دلخواه، یک رشته فیبوناچی ۱۵ جمله ای تشکیل یابد. حال به او بگوئید خطی زیر همه عددها بکشد. شما می توانید جمع همه آن ۱۵ عدد را بلافاصله زیر خط یادداشت کنید. برای این کار کافی است عدد هفتم رشته را در ذهن خود ۱۱ برا بر کنید. اگر عدد اول دوست خود را  $a$  و عدد دوم را  $b$  فرض کنید، با توجه به جدول زیر دلیل کار شما روشن می شود.

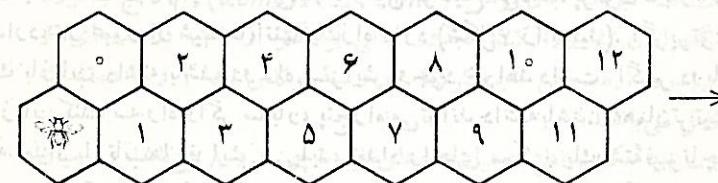
$$\begin{array}{l} 1. \quad a \\ 2. \quad b \\ 3. \quad a+b \\ 4. \quad a+2b \\ 5. \quad 2a+3b \\ 6. \quad 3a+5b \\ 7. \quad 5a+8b \\ 8. \quad 8a+13b \\ 9. \quad 13a+21b \\ 10. \quad 21a+34b \\ \hline 55a+88b \end{array}$$

به این ترتیب، جمع همه آنها ۱۱ برابر هفتیم عدد است. در ضمن به ضربهای  $a$  و  $b$  که خود یک رشته فیبوناچی را تشکیل داده اند توجه کنید.

این نهایت عدد  $F_{n+2}$  اولی است، لذا آن هم اینسانی ندارد. تا آنجا که معلوم است تا کنون هیچ گوشه ای از این قدر در این دنیا نمایند. وجود راههای گوناگون تعداد بازتاب



شکل ۴-۲ مسیر گو نازون برای پر توانی که  $n$  بار از دو جام شیشه بازتاب می کند، وجود دارد.



شکل ۵- برای زنبوری ۵ بخواهد به حجره  $F_{n+2}$  بر سد راه وجود دارد. در سمت چپ قرار دارد و می خواهد خود را به حجره ای در سمت راست بر ساند مجبور است از حجره ای به حجره مجاور برود تا به مقصد بر سد. انتخاب حجره های بین راه را ممکن است تغییر دهد و از راههای مختلفی خود را به مقصد بر ساند ولی هیچ وقت جهت را فراموش نمی کند و نیز همواره از

## معادله ها و نامعادله های خطی (۲)

### ۵۶. ویرگی قدر مطلق مجموع ها

در عمل، تقریباً هرگز، نمی توانیم به مقدار دقیق کمیت ها دست بایم. هیچ وزنی، هرقدر دقیق محاسبه شده باشد، نمی تواند معرف دقت مطلق وزن یک چیز باشد؛ هر میزان الحرارتی، درجه حرارت را با کم و بیش اشتباه نشان می دهد؛ هیچ آپریتری، شدت جریان برق را که با دقت مطلق نشان نمی دهد وغیره. در ضمن، چشم ما، در موقعیتی نیست که بتواند اندازه هایی را که بر روی ابزارها ثبت می شود، با دقت مطلق، بخواند. بنابراین، همه جا، به جای تکیه بر مقدارهای واقعی، باید با مقدارهای تقریبی کار کنیم.

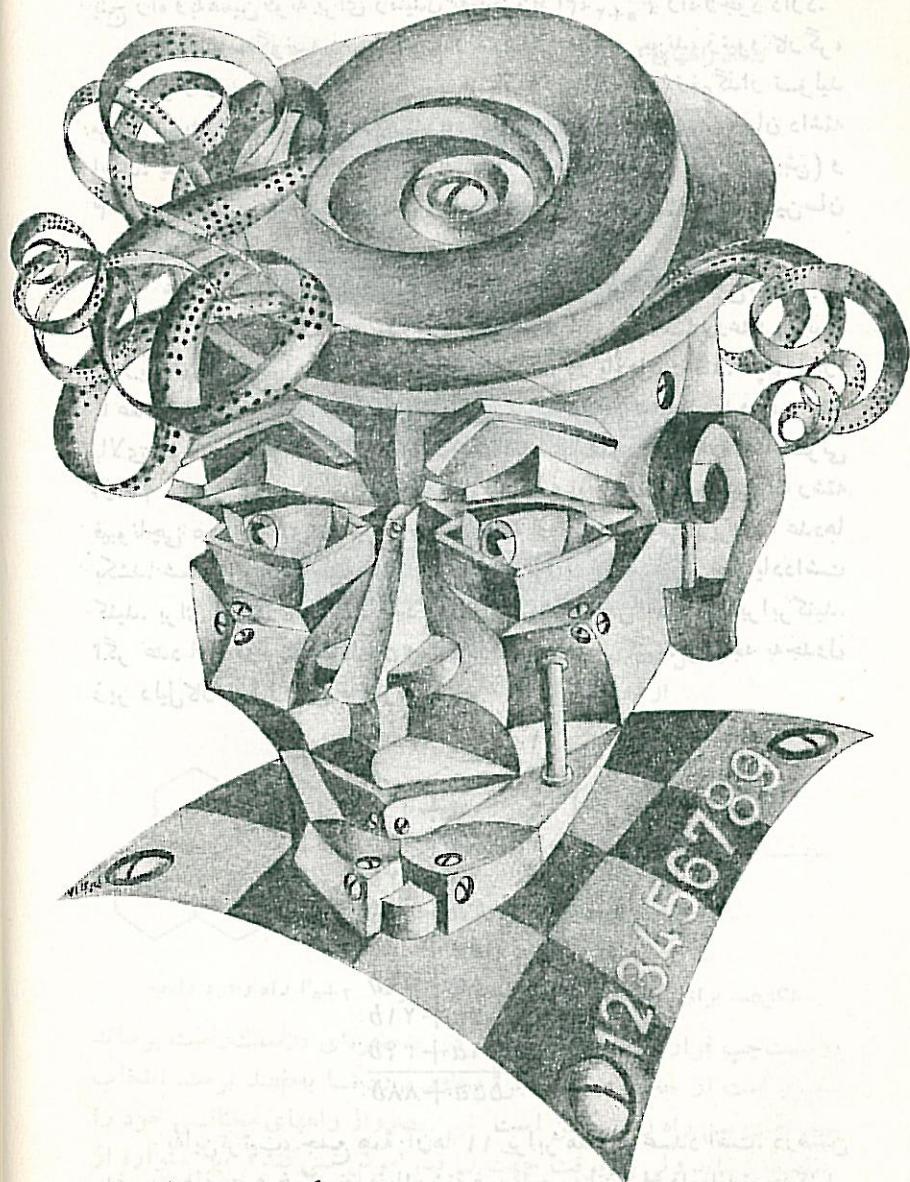
اگر  $a'$ ، مقدار تقریبی کمیت  $a$  باشد، آن وقت تفاضل  $a' - a = \Delta$  را خطای تقریب می نامند. مثلاً، اگر به جای عدد  $\frac{3}{7} 756$ ، مقدار تقریبی آن،  $\frac{3}{7} 780$  را در نظر بگیریم، آن وقت، خطای برابر است با

$$\Delta = \frac{3}{7} 756 - \frac{3}{7} 780 = 0.056$$

و اگر  $\frac{3}{8}$  را به عنوان مقدار تقریبی مورد استفاده قرار دهیم، خطای حاصل برابر است با

$$\Delta = \frac{3}{7} 756 - \frac{3}{8} 800 = 0.044$$

در عمل، اغلب، به جای خطای تقریب  $\Delta$ ، از قدر مطلق آن  $|\Delta|$  استفاده می کنند. اینجا به بعد، قدر مطلق خطای تقریب را، به طور ساده، خطای مطلق می نامیم. یک تقریب را بهتر از دیگری می دانند، وقتی که خطای مطلق اولی، از خطای مطلق دومی کمتر باشد. مثلاً تقریب  $\frac{3}{8}$  برای عدد  $\frac{3}{7} 756$ ، بهتر از تقریب  $\frac{3}{7}$  برای آن است، زیرا برای تقریب اولی  $= 0.044 = |\Delta|$  و برای تقریب دومی



کار: جمال طاهری

$$|a+b| < |a| + |b| = |(a+b)-(a+b)|$$

حالی می‌ماند که یکی، یا هر دو عدد  $a$  و  $b$ ، برابر صفر باشد. در این حالت، خود خواننده می‌تواند، به سادگی، مطلب را دنبال کند.

مثال.  $| -20 | + | 1 | \leq | 1 - 20 |$  در واقع،

$$| -20 | = 19;$$

$$| 1 | + | -20 | = 1 + 20 = 21; \quad 19 \leq 21$$

### تمرین

۱۱۲. با چه دقیقی می‌توان، به کمک خطکش معمولی، اندازه گرفت؟

۱۱۳. ساعت، با چه دقیقی، زمان رانشان می‌دهد؟

۱۱۴. آیا می‌دانید، وزن جسم‌ها را، به کمک ترازووهای الکترونیکی، با چه دقیقی می‌توان اندازه گرفت؟

۱۱۵. کدام تقریب  $\frac{3}{14}$  بهتر است:  $\frac{3}{2}$  یا  $\frac{93}{2}$ ؟

۱۱۶. در چه حالتی، قدرمطلق مجموع دو عدد:

(الف) برابر مجموع قدرمطلق‌های این عددها؛

(ب) کوچکتر از مجموع قدرمطلق‌های دو عدد؛

(ج) کوچکتر یا برابر مجموع قدرمطلق‌های این دو عدد است؟

۱۱۷. ثابت کنید. الف)  $|a-b| \leq |a| + |b|$ ؛

$$(ب) |a-b| \geq | |a| - |b| |$$

علامت برابری، در چه حالتی پیش می‌آید؟

۱۱۸. آیا می‌توان مقدار تقریبی یک عدد را با دقت تا  $1/5$ ، مقدار تقریبی همین عدد، با دقت تا  $1/10$  هم نامید؟ بر عکس چطور؟

۱۷۵. تقریب مجموع و ضرب در یک عدد

$a'$  را مقدار تقریبی عدد  $a$  با دقت تا  $1/4$  و  $b'$  را مقدار تقریبی عدد  $b$  با دقت تا  $1/4$  می‌گیریم. در این صورت، مجموع  $a' + b'$  مقدار تقریبی  $a + b$  خواهد بود. دقت این تقریب چقدر است؟ برای پاسخ دادن به این پرسش، از ویژگی قدرمطلق مجموع استفاده می‌کنیم. داریم:

$$|\Delta| = |a + b - a' - b'| = |(a-a') + (b-b')|$$

عدد  $a'$  مقدار تقریبی عدد  $a$ ، با دقت تا  $1/4$  نامد، وقتی که خطای مطلق، این تقریب، از  $1/4$  کوچکتر باشد:

$$|a - a'| < \frac{1}{4}$$

مثلاً  $\frac{3}{14}$ ، مقدار تقریبی عدد  $\frac{3}{2}$ ، با دقت تا  $1/10$  است، زیرا

$$|\frac{3}{14} - \frac{3}{2}| = |\frac{9}{14} - \frac{21}{14}| = |\frac{-12}{14}| = \frac{6}{7} < \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2}$ ، مقدار تقریبی عدد  $\frac{1}{3}$ ، با دقت تا  $\frac{1}{5}$  است، زیرا

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

اگر به جای مجموع عددهای  $a$  و  $b$ ، از مجموع مقدارهای تقریبی آنها استفاده کنیم، آن وقت  $a' + b'$ ، مقدار تقریبی مجموع  $a + b$  است. این پرسش پیش می‌آید که، اگر دقت تقریب‌های هر یک از جمله‌های جمع را بدانیم، چگونه می‌توانیم، دقت تقریب مجموع آنها را ارزیابی کنیم؟ پاسخ به این پرسش و پرسش‌های مشابه آن، بر اساس ویژگی زیر از قدرمطلق‌ها داده می‌شود:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

قدرمطلق مجموع هر دو عدد، از مجموع قدرمطلق‌های آنها، تجاوز نمی‌کند.

اثبات. اگر عددهای  $a$  و  $b$  مثبت باشند، آن وقت مجموع آنها هم مثبت می‌شود. در این حالت  $|a+b| = a+b$ ،  $|a| = a$  و  $|b| = b$ ، در نتیجه

$$|a+b| = |a| + |b|$$

اگر  $a$  و  $b$ ، عددهایی منفی باشند، آن وقت مجموع آنها هم، عددی منفی می‌شود. در این حالت  $-a = |a|$  و  $-b = |b|$  و  $-(a+b) = -(a+b)$ ، یعنی در این حالت هم  $|a+b| = |a| + |b|$  با  $|a| + |b|$  برابر است. سرانجام، فرض می‌کنیم، از دو عدد  $a$  و  $b$ ، یکی مثبت و دیگری منفی باشد؛ در این صورت، اگر  $|a| \geq |b|$ ، آن وقت  $|a| - |b| \leq |a+b| = |a|$  و اگر  $|a| \leq |b|$ ، آن وقت  $|a| - |b| \geq |a+b| = |b| - |a|$ . در هر یک از این دو حالت، تفاضل دو عدد مثبت  $|a|$  و  $|b|$ ، از مجموع آنها کوچکر است. به این ترتیب، اگر یکی از عددهای  $a$  و  $b$  مثبت و دیگری منفی باشد، آن وقت

تقریبی عدد  $ka$  با تقریب  $\sqrt{a'/k}$  خواهد بود. مثلاً، چون  $\sqrt{10} \approx 3/1$  با دقت  $1/10$  پس

$$5\sqrt{10} \approx 5 \times 3/1 = 15/5$$

با دقت  $1/10^5$ ، یعنی  $1/5$  بدست می‌آید. به همین ترتیب،

$$-7\sqrt{10} \approx -7 \times 3/1 = -21/7$$

با دقت  $1/10^6$ ، یعنی  $1/7$  به دست می‌آید.

**اثبات قضیه ۲.** اگر  $a'$  مقدار تقریبی  $a$  با دقت  $1/\varepsilon$  باشد، آن وقت

$$|a-a'| < \varepsilon$$

بنابراین

$$|ka-ka'| = |k(a-a')| = |k| |a-a'| < |k| \cdot \varepsilon$$

در پایان، این مثال را در نظر می‌گیریم. فرض کنید با دقت  $1/10$  داشته باشیم:

$$a \approx a' = 2/7 \quad \text{و} \quad b \approx b' = 3/6$$

مطلوب است مقدار تقریبی  $5a-3b$  و تعیین میزان دقت این تقریب:

داریم:

$$5a-3b \approx 5a'-3b' =$$

$$= 5 \times 2/7 - 3 \times 3/6 = 12/5 - 10/8 = 2/7$$

دقت این نتیجه را می‌توان با استفاده از ویژگی قدر مطلق مجموع ارزیابی کرد:

$$|(5a-3b') - (5a'_-3b')| = |(5a-5a') - (3b-3b')| \leq$$

$$\leq |5(a-a')| + |-3(b-b')| = 5|a-a'| +$$

$$+ 3|b-b'| < 5 \times 1/10 + 3 \times 1/10 = 1/8$$

$$\text{یعنی } 2/7 \approx 5a-3b \text{ با دقت } 1/8.$$

تمرین.

۱۱۹. با دقت  $1/10$  محاسبه کنید:

$$|(a+b) - (a'+b')| = |(a-a') + (b-b')| \leq |(a-a') + (b-b')|$$

طبق فرض  $|\varepsilon_1| < |a-a'|$  و  $|\varepsilon_2| < |b-b'|$  بنابراین

$$|(a+b) - (a'+b')| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

به این ترتیب می‌توان گفت  $a+b \approx a'+b'$  با دقت  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$  یعنی قضیه

زیر را ثابت کردیم:

**قضیه ۱.** اگر  $a \approx a'$  با دقت  $\varepsilon_1$  و  $b \approx b'$  با دقت  $\varepsilon_2$  آن وقت

$$a+b \approx a'+b'$$

مثال ها. ۱) اگر یکی از عدد ها با دقت  $1/10$  و دیگری با دقت  $1/20$  داده

شده باشند، مجموع آن ها را با چه دقتی می‌توان پیدا کرد؟

قضیه ۱، تقریب این مجموع را، با دقت  $1/20 + 1/10 = 1/10$  تضمین می‌کند.

۲) می‌خواهیم مجموع  $\sqrt{12} + \sqrt{10}$  را با دقت  $1/10$  محاسبه کنیم.

اگر از عدد های  $10$  و  $12$  تا دو رقم بعد از میز جذر بگیریم، بدست می‌آید:

$$\sqrt{10} = 3/46 \dots, \quad \sqrt{12} = 3/46 \dots$$

همین دو رقم بعد از میز کافی است: زیرا در این حالت، هر یک از دو عدد، با دقت  $1/10$

تقریب محاسبه شده اند و، بنابراین، مجموع

$$\sqrt{10} + \sqrt{12} \approx 3/46 + 3/46 = 6/62$$

با دقت  $1/10 + 1/10 = 1/10$ ، یعنی  $2/5$  به دست می‌آید که  $1/10$  کوچکتر است. اگر از

عدد ها، تنها تا یک رقم بعد از میز جذر می‌گرفتیم، به نتیجه مطلوب نمی‌رسیدیم،

زیرا در این حالت، مقدار تقریبی هر جمله، با دقت  $1/10$  به دست می‌آید و، در این

صورت، مقدار تقریبی

$$\sqrt{10} + \sqrt{12} \approx 3/4 + 3/4 = 6/5$$

با دقت  $1/10 + 1/10 = 1/10$  تضمین نمی‌شد. در واقع، این مجموع، تنها با دقت  $1/10 + 1/10 = 1/10$ ، یعنی

۱/۲ تقریب می‌تواند تضمین شده باشد.

**قضیه ۲.** اگر  $a'$  مقدار تقریبی عدد  $a$  با دقت  $1/\varepsilon$  باشد، آن وقت

مقدار  $ka'$  با دقت  $1/\varepsilon$  باشد.

نخستین ویژگی نامعادلهای هم ارز. اگر به دو طرف یک نامعادله، عددی یا عبارتی که برای همه مقدارهای مجھول معین است، اضافه کنیم، به نامعادلهای هم ارز با نامعادله مفروض می‌رسیم.

اثبات.  $x$ -را کمیتی مجھول می‌گیریم. سمت چپ نامعادله را با  $P(x)$  و سمت راست آن را با  $Q(x)$  نشان می‌دهیم. در این صورت، نامعادله به این صورت است:

$$P(x) > Q(x) \quad (1)$$

(مثلث)، برای نامعادله  $x - 2 < x$ ، داریم:  $P(x) = x$  و  $Q(x) = 2 - x$ . فرض می‌کنیم  $R(x)$  عبارتی باشد که همه مقدارهای کمیت مجھول  $x$  را قبول کند. به ویژه، به جای  $R(x)$  می‌توان هر عدد حقیقی را در نظر گرفت. ثابت می‌کنیم، در این صورت، نامعادله (1)، هم ارز است با نامعادله:

$$P(x) + R(x) > Q(x) + R(x) \quad (2)$$

فرض کنید، نامعادله (1)، به ازای  $x = x$  برقرار باشد. این، به معنای آن است که  $P(x) > Q(x)$  بنا بر فرض،  $R(x)$  برای همه مقدارهای  $x$ ، از آن جمله برای  $x$  معین است. یعنی عدد  $R(x)$  وجود دارد. اگر این عدد را، به دو طرف نابرابری عددی  $P(x) > Q(x)$  اضافه کنیم، به نابرابری

$$P(x) + R(x) > Q(x) + R(x) \quad (3)$$

می‌رسیم. ولی این نابرابری به معنای آن است که: «نامعادله (2)، به ازای  $x = x$  برقرار است»، به این ترتیب اگر نامعادله (1) به ازای  $x = x$  برقرار باشد، نامعادله (2) هم، به ازای  $x = x$  برقرار است.

بر عکس، فرض می‌کنیم  $x$  در نامعادله (2) صدق کند: یعنی داشته باشیم:

$$P(x) + R(x) > Q(x) + R(x) \quad (4)$$

اگر به دو طرف این نابرابری عددی، عدد  $R(x) - R(x)$  را اضافه کنیم، به نابرابری عددی  $P(x) > Q(x)$  می‌رسیم و این، به معنای آن است که: «نامعادله (1)، به ازای  $x = x$  برقرار است. به این ترتیب، اگر  $x$  در نامعادله (2) صدق کند، در نامعادله (1) هم صدق خواهد کرد. در نتیجه، هر عددی در یکی از دو نامعادله (1) یا (2) صدق کند، در دیگری هم صدق خواهد کرد و، بنابراین، نامعادلهای (1) و (2) هم ارزند. مثال‌ها. اگر به دو طرف نامعادله  $x < 2x$ ، عدد  $1 - x$  را اضافه کنیم، به نامعادله

$$\sqrt{2} + \sqrt{17} ; \sqrt{12} + \frac{2}{\sqrt{7}} ; 5\sqrt{3} ; \frac{367}{546} - \frac{1}{75}$$

۲۰. می‌دانیم با دقت تا  $1/10$  داریم:

$$a \approx -3/05 \quad b \approx 3/01$$

مقدار تقریبی هر یک از عبارت‌های  $2a + vb$ ،  $2a - vb$  و  $3a - 4b$  و دقت این تقریب‌ها را محاسبه کنید.

۲۱. هر یک از عددهای  $a$  و  $b$  با دقت تا  $1/10$  داده شده است. چقدر باشد تا بتوان  $b - a$ ،  $a - b$ ،  $a + b$  را با دقت تا  $1/10$  بدست آورد؟

۲۲. نامعادلهای هم ارز. نخستین ویژگی نامعادلهای هم ارز  
تا این جا، نابرابری‌های اتحادی را مورد بررسی قرار دادیم، یعنی نابرابری‌هایی که، برای هر مقدار قابل قبول حروف‌ها وارد در آن‌ها، برقرار باشند. اکنون به نابرابری‌هایی می‌پردازیم که، تنها به ازای مقدارهای قابل قبول کمیت‌های مجھول برقرار باشند. مثلاً نابرابری  $x < 2x$  از این گونه است. این نابرابری، تنها برای مقدارهای مشتبه، برقرار است، در حالی که، دامنه تعریف  $x$ ، مجموعه همه عددهای حقیقی است. به این گونه نابرابری‌ها، نامعادله هم می‌گویند.

حل نابرابری شامل مجھول (یعنی، حل نامعادله) به معنای پیدا کردن مقدارهایی از مجھول است که، به ازای آن‌ها، نابرابری مفروض برقرار باشد. شیوه معادله، حل نامعادله هم از این راه انجام می‌گیرد که، آن را به نامعادله‌ای ساده تر و هم ارز با آن، تبدیل کنیم.

دو نامعادله را، که هر دو با یک کمیت مجھول سروکار داشته باشند، وقتی هم ارز گویند که، اگر به ازای مقداری از مجھول یکی از نامعادله‌ها برقرار باشد، دیگری هم، به ازای همان مقدار برقرار شود. مثلاً، دو نامعادله  $x < 2x$  و  $x < 3x$  هم ارزند، زیرا هر دوی آن‌ها، به ازای مقدارهای مشتبه  $x$  برقرارند (و هیچ عددی نمی‌توان پیدا کرد که، به ازای آن، یکی از نامعادله‌ها برقرار باشد و دیگری برقرار نباشد). نامعادلهای  $x < 2x$  هم ارز نیستند، زیرا نامعادله اول، تنها به ازای مقدارهای مشتبه  $x$  برقرار است، در حالی که نامعادله دوم، علاوه بر همه مقدارهای مشتبه، به ازای همه مقدارهای منفی  $x$  هم برقرار است.

$$\begin{aligned} \text{الف) } & -x > x^2 + x + 1, \\ \text{ب) } & 0 \leq x \leq \frac{6}{x}, \quad 2x + 6 < x^2, \\ \text{ج) } & 0 < x - \frac{1}{4x} < 1 - x, \\ \text{د) } & 0 < x - 4 < x_1 + x_4. \end{aligned}$$

### ۱۹۵. ویژگی‌های دیگر نامعادله‌های هم ارز

دو مین ویژگی نامعادله‌های هم ارز، اگر دو طرف نامعادله را، در یک عدد مثبت و یاد رعایت که به ازای همه مقدارهای  $x$  معین است و، در ضمن، به ازای هر مقدار  $x$  به عددی مثبت تبدیل می‌شود، ضرب کنیم، نامعادله‌ای هم ارز با نامعادله مفروض بدست می‌آید.

اثبات. فرض کنید  $R(x)$ ، تنها مقدارهای مثبت را قبول کند و، به ازای همه مقدارهای  $x$ ، معین باشد. در حالت خاص،  $R(x)$  می‌تواند، به طور ساده، عددی مثبت باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، نامعادله‌های

$$P(x) > Q(x) \quad (1)$$

$$P(x) R(x) > Q(x) R(x) \quad (2)$$

دو نامعادله هم ارزند.

فرض می‌کنیم، نامعادله (۱) به ازای  $x$  برقرار باشد؛ یعنی داشته باشیم:  $P(x) > Q(x)$  بنا بر شرط، عبارت  $R(x)$  به ازای  $x$  معین و مقداری مثبت است. دو طرف نابرابری عددی  $(1) > Q(x) R(x) > P(x)$  را در عدد مثبت  $R(x)$  ضرب می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$P(x) R(x) > Q(x) R(x)$$

بنابراین، اگر به ازای  $x$  نامعادله (۱) برقرار باشد، آن وقت نامعادله (۲) هم برقرار است.

بر عکس فرض کنید، نامعادله (۲)، به ازای  $x$  برقرار باشد. در این صورت

$x > 1 - 2x$  می‌رسیم که هم ارز با آن است. همچنین، اگر به دو طرف نامعادله اصلی، عبارت  $x^3 + x^2$  را اضافه کنیم، به نامعادله  $1 + x^3 + 2x > 1 + x^2$  هم ارز با آن می‌رسیم. شرط اصلی در ویژگی اول نامعادله‌های هم ارز، این است که عبارت  $R(x)$ ، که باید آن را به دو طرف نامعادله (۱) اضافه کرد، برای همه مقدارهای مجھول  $x$  معین باشد. اگر این شرط رعایت نشود، آن وقت ممکن است نامعادله‌های (۱) و (۲) هم ارز نباشند!

برای تأکید بر این مطلب، مثالی می‌آوریم. نامعادله  $x + 1 > 0$  به ازای  $x = 0$  برقرار است. ولی اگر به دو طرف نامعادله، عبارت  $\frac{1}{x} > 1 + x$  را اضافیم، به نامعادله  $\frac{1}{x} > 1 + x$  می‌رسیم که، به ازای  $x = 0$ ، برقرار نیست، زیرا سمت راست و سمت چپ این نامعادله، به ازای  $x = 0$  معنا ندارد. به این ترتیب، نامعادله‌های  $x + 1 > 0 > \frac{1}{x} + 1 + x$  هم ارز نیستند. این ناهم ارزی را از این جاتیحه می‌گیریم که عبارت  $\frac{1}{x}$ ، که به دو طرف نامعادله اضافه شده است، به ازای  $x = 0$  معین نیست.

نتیجه‌ای از ویژگی اول. هر جمله از نامعادله را، به شرطی که برای همه مقدارهای  $x$  معین باشد، می‌توان از یک طرف نامعادله به طرف دیگر آن برد، به شرطی که علامت آن را تغییر دهیم.

مثال نامعادله  $M(x) + N(x) > K(x)$  را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $N(x)$  برای همه مقدارهای  $x$  معین باشد، ثابت می‌کنیم، این نامعادله با نامعادله  $M(x) - N(x) > K(x)$  هم ارز است. در واقع، نامعادله دوم، از نامعادله اول و با اضافه کردن عبارت  $-N(x)$  به دو طرف آن، به دست آمده است.

مثال. همه جمله‌های شامل  $x$  را در نامعادله  $2x - 1 > 3x$ ، به سمت چپ و همه جمله‌های ثابت را به سمت راست منتقل می‌کنیم، در این صورت، به نامعادله  $3x > 4$  می‌رسیم.

### تمرین

#### ۱۲۲. آیا این نامعادله‌ها، هم ارزند:

- از اثباتی که آوردیم، به سادگی فهمیده می‌شود که، می‌توان محدودیت مربوط به تابع  $R(x)$  را ضعیف تر کرد. کافی است شرط کنیم که تابع  $R(x)$  برای همه مقدارهای  $x$  که به ازای آن‌ها نامعادله (۱) برقرار است، معین باشد. در این صورت، دو نامعادله (۱) و (۲)، باز هم هم ارز می‌شوند.

$$P(x_0)R(x_0) > Q(x_0)R(x_0)$$

دو طرف این نابرابری عددی را، بر عدد مثبت  $(x_0)$  تقسیم می کنیم، به نابرابری عددی  $P(x_0) > Q(x_0)$  می رسمیم، بنابراین، اگر  $x = x_0$  در نامعادله (۲) صدق کند، در نامعادله (۱) هم صدق خواهد کرد. به این ترتیب، دو نامعادله (۱) و (۲)، نامعادله هایی هم ارزند.

مثال ها. با ضرب دو طرف نامعادله  $2x - 7 > x - 4$ ، در عدد مثبت ۶، نامعادله  $14 > 2x$  بدست می آید که با نامعادله مفروض هم ارز است. از آن جا که، به ازای همه مقدارهای  $x$  داریم  $5 + x^2 > 1 + x^2$  بنابراین، اگر دو طرف نامعادله مفروض را در  $1 + x^2$  ضرب کنیم، به نامعادله  $(x^2 + 1)(x - 7) > (x^2 + 1)(x - 4)$  می رسمیم که با نامعادله مفروض هم ارز است.

در ویژگی دوم نامعادله های هم ارز، دو شرط اساسی، ضرورت دارد: (۱) فقط عدد های مثبت را قبول کند، (۲)  $R(x)$  برای همه مقدارهای  $x$  معین باشد. حتی اگر یکی از این شرط ها، وجود نداشته باشد، آن وقت نامعادله های (۱) و (۲)، ممکن است هم ارز نباشند. ضمن حل تمرین های این بند، به نمونه هایی از این نوع، برخورد خواهید کرد.

**سوالات ویژگی نامعادله های هم ارز.** اگر عبارت  $(R(x))$  تنها مقدارهای منفی را قبول کند و در ضمن، برای همه مقدارهای  $x$  معین باشد، آن وقت، نامعادله  $P(x) > Q(x)$  با نامعادله  $P(x).R(x) > Q(x).R(x)$

هم ارز است. اثبات این ویژگی، کاملاً شبیه حالت  $0 < R(x)$  انجام می شود که، آن را به عهده خواننده می گذاریم.

### تمرین

۱۲۳. آیا می توان دو طرف نامعادله  $3 > 2x$  را در

- الف) ۶؛ ب) ۶-؛ ج)  $x^2 + 1$ ؛ د)  $x^2 + 1$ ؛ ه)  $\frac{1}{x-1}$ ؛ و)  $x$ ؛ ز)  $\frac{1}{x^2-4}$ ؛ ح)  $|x|$ ، ضرب کرد، به نحوی که به نامعادله های هم ارز با نامعادله مفروض برسیم؟

## ۵. نامعادله های خطی

اگر هر دو طرف نامعادله، تابع هایی خطی نسبت به کمیت مجھول باشند، آن وقت، نامعادله را خطی گویند. مثلاً

$$2x - 1 \geq x + 3$$

$$5 > 4 - 6x$$

$$7x \leq 0$$

$$9x < x + 5$$

نمونه هایی از نامعادله های خطی اند. برای مشخص بودن وضع، تنها از نامعادله هایی صحبت می کنیم که شامل علامت  $>$  باشند. صورت کلی نامعادله خطی (با علامت  $>$ )، چنین است:

$$(1) ax + b > cx + d$$

اگر  $cx$  را از سمت راست به چپ، و  $db$  را از سمت چپ به سمت راست ببریم، به دست می آید:

$$(a - c)x > db$$

بنابراین، هر نامعادله خطی، سرانجام، منجر به نامعادله ای به صورت  $mx > n$  (۲)

می شود که در آن،  $m$  و  $n$  عدد هایی مفروض و  $m \neq 0$  کمیت مجھول است. به معین نسبت، از این به بعد هرجا، اشاره ای به نامعادله خطی داشته باشیم، منظورمان، نامعادله ای است که به صورت (۲) باشد.

اگر  $m > 0$  آن وقت، با تقسیم دو طرف نابرابری (۲) بر  $m$  به دست می آید:

$$x > \frac{n}{m}$$

این نابرابری، مجموعه همه مقدارهای  $x$  را که به ازای آن ها نامعادله (۲) برقرار است، به ما می دهد. از نظر هندسی، این مجموعه را می توان به صورت نیم خط راستی از محور عددی، که از نقطه به طول  $\frac{n}{m}$  به سمت راست ادامه دارد، نشان داد (شکل ۲۰).

خود نقطه  $\frac{n}{m}$  متعلق به این مجموعه نیست.

اگر  $m < 0$  آن وقت با تقسیم دو طرف نابرابری (۲) بر عدد منفی  $m$  به

۲. نامعادله  $-7x \geq -5$  را حل کنید.

بعد از جابه‌جایی های لازم جمله، به دست می‌آید:  $-8x \geq -8$ . اگر دو طرف نامعادله اخیر را برابر عدد منفی ۸ تقسیم کنیم، جهت نامعادله عوض می‌شود و به نامعادله  $1 \leq x$  می‌رسیم. در شکل ۲۳، این مجموعه جواب‌ها، روی محور عددی داده شده است. (نقطه ۱ =  $x$  متعلق به این مجموعه است).

تموین. این نامعادله‌ها را حل کنید؛ در ضمن، مجموعه جواب‌ها را روی محور عددی نشان دهید:

$$-2x \geq 4 - 5x \quad ۱۲۵$$

$$-7x < x + 12 \quad ۱۲۴$$

$$\frac{2}{3x} > 0 \quad ۱۲۷$$

$$1 - x \geq 2x + 3 \quad ۱۲۶$$

$$9x - 7 < 1 - 17x \quad ۱۲۸$$

$$x + \frac{x-1}{a+1} > \frac{x+1}{a+1} \quad ax : ۱۲۹$$

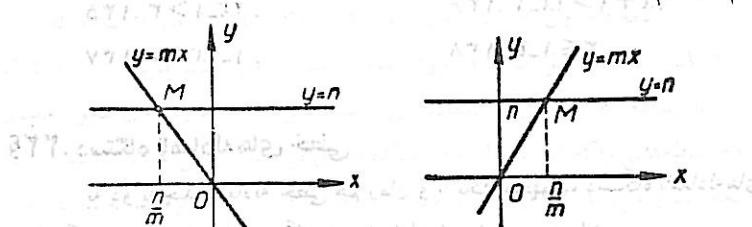
$$ax + 1 > 2 - 5x \quad ۱۳۱$$

$$\frac{ax+b}{a+b} > \frac{ax-b}{a+b} \quad ۱۳۲$$

$$x - \frac{x+1}{2} > \frac{x-2}{4} - \frac{x-2}{3} \quad ۱۳۴$$

۳. روش نموداری حل نامعادله  $mx > n$

روی یک دستگاه محورهای مختصات، نمودار دو تابع  $y = mx$  و  $y = n$  را رسم می‌کنیم.



شکل ۲۵



شکل ۲۶

نابرابری  $\frac{n}{m} > x$  می‌رسیم که مجموعه همه مقدارهای  $x$  را، که در نامعادله (۲) صدق

نمایند، نشان می‌دهد.

شکل ۲۱

شکل ۲۰

می‌کنند، به ما می‌دهد. از نظر هندسی، این مجموعه، نیم خط راستی را مشخص می‌کند که از نقطه به طول  $\frac{n}{m}$ ، به سمت چپ آن ادامه دارد (شکل ۲۱). خود نقطه  $\frac{n}{m}$ ، متعلق به این مجموعه نیست.

اگر  $n$  فرض می‌کنیم  $= m$  نامعادله (۲) به این صورت در می‌آید:

$$x > 1$$

اگر  $1$  عددی منفی باشد، این نابرابری، برای همه مقدارهای  $x$  برقرار است.

ولی اگر  $n$  عددی غیرمنفی باشد، هیچ مقداری از  $x$  در نابرابری صدق نمی‌کند. مجموعه همه عددهایی را، که در (۲) صدق می‌کنند، مجموعه جواب‌های نامعادله (۲) گویند.

نامعادله خطی را که مورد بررسی قرار دادیم، با علامت  $>$  مشخص می‌شد؛ در

حالت‌هایی هم که با یکی از علامت‌های  $<$ ،  $\geq$  یا  $\leq$  سروکار داشته باشیم، روش مشابهی به نتیجه می‌رسیم. به چند مثال می‌پردازیم.

۱. نامعادله  $-2x + 3 > 4$  را حل کنید.

اگر همه جمله‌های شامل  $x$  را به سمت چپ و همه مقدارهای عددی را به سمت راست نامعادله منتقل کنیم، سرانجام به نامعادله  $-1 < 2x$  می‌رسیم؛ از آنجا  $-1 < x$ . در شکل ۲۲، این مجموعه جواب‌ها، روی محور عددی نشان داده شده است (نقطه  $\frac{1}{2} = x$  متعلق به این مجموعه نیست).

در شکل ۲۳ نامعادله  $\frac{1}{2} < x$  را در دستگاه مختصات رسم کردیم. نتیجه آن است که همه  $x$  های بزرگ‌تر از  $\frac{1}{2}$  را در نیم خط راستی را مشخص می‌کند.

۲. روشی را بفرمایید که از نامعادله  $\frac{1}{2} < x$  می‌توانسته باشد. این روش را در شکل ۲۴ نشان دادیم. این روش را در شکل ۲۵ نشان دادیم.

شکل ۲۳

$$\begin{cases} 14x - 3 \leq 7 + 9x \\ 1 < x - 3 \end{cases}$$

حل دستگاه نامعادلهای، به معنای پیدا کردن مقدارهایی از مجهول است که، به ازای هر یک از آن‌ها، همه نامعادلهای دستگاه برابر باشند.

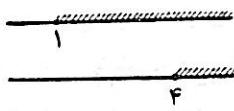
مثال ۱. این دستگاه را حل کنید.

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 2x - 8 > 0 \end{cases}$$

دو محور خطی را، یکی زیر دیگری در نظر می‌گیریم (شکل ۲۸). روی محور اول، نقطه‌هایی را نشانه می‌گذاریم که، به ازای آن‌ها، نامعادله اول برابر باشد ( $x > 1$ )، و روی دومی، نقطه‌هایی که در نامعادله دوم صدق کنند ( $2x > 8$ ). اگر نتیجه‌هایی را که روی دو محور عددی به دست آمده‌اند، باهم مقایسه کیم، متوجه می‌شویم که، دو نامعادله، وقتی به طور همان برقرارند که داشته باشیم:  $x > 4$



شکل ۲۹



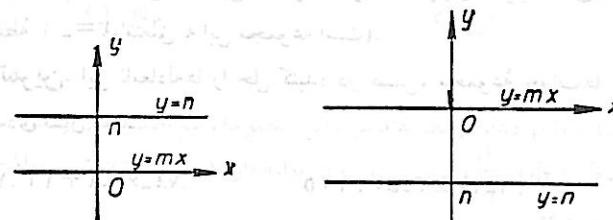
شکل ۲۸

مثال ۲. این دستگاه نامعادلهای را حل کنید:

$$\begin{cases} 1 - x < 2x - 5 \\ 3 - x > -5 \end{cases}$$

از نامعادله اول به دست می‌آید:  $-4 < 2x - 1$  یا  $2 < 2x - 1$  و از نامعادله دوم:  $-8 < x < 8$  مثل مثال ۱، روی محور عددی اول، نقطه‌هایی از  $x$  را نشانه می‌گذاریم که، به ازای آن‌ها، نامعادله اول دستگاه برابر باشد و، روی محور عددی دوم، نقطه‌هایی را که در نامعادله دوم دستگاه صدق می‌کنند (شکل ۲۹). مقایسه این دو نتیجه، نشان می‌دهد که، هر دو نامعادله، برای مقدارهایی از  $x$  برقرارند که بین دو عدد ۲ و ۸ باشند. مجموعه این مقدارها را می‌توان به کمک تابعی دو گانه  $x < 8$  و  $x > 2$  نشان داد.

اگر  $m \neq 0$  آن وقت خط راست  $mx = n$  بدون شک، خط راست  $y = n$  را قطع می‌کند (شکل ۲۴ برای  $m > 0$  و شکل ۲۵ برای  $m < 0$ ). نقطه برخورد این خط‌های راست را با  $M$  نشان می‌دهیم. طول این نقطه، ریشه معادله  $mx = n$  و



شکل ۲۷

شکل ۲۶

بنابراین، برابر  $\frac{n}{m}$  است. در حالت  $m > 0$  همان طور که روی شکل ۲۴ دیده می‌شود،  $mx$  برای همه مقدارهای  $x$  که از  $\frac{n}{m}$  بیشتر باشند، از  $n$  بزرگتر است. در حالت  $m < 0$  (شکل ۲۵)،  $mx$  وقتی از  $n$  بزرگتر است که مقدار  $x$  از  $\frac{n}{m}$  کمتر باشد. در حالت  $m = 0$  خط راست  $y = mx$ ، برای محور طول منطبق می‌شود؛ اگر در این حالت،  $n$  عدد منفی باشد، مقدار  $mx$  همیشه از مقدار  $n$  بزرگتر است (شکل ۲۶)؛ در این حالت، هر مقدار دلخواه  $x$  در نامعادله  $mx > n$  صدق می‌کند. ولی اگر  $n$  عددی غیرمنفی باشد (شکل ۲۷)، آن وقت، هرگز مقدار  $x$  از مقدار  $n$  بزرگتر نمی‌شود.

تمرین. حل نموداری این نامعادله‌ها را بدھید:

$$\begin{aligned} & .x + 1 > 2x - 1. \quad ۱۳۶ \\ & .2x - 1 > 3. \quad ۱۳۵ \\ & .3 \leq 1 - x. \quad ۱۳۸ \\ & .1 - 2x > 7. \quad ۱۳۷ \end{aligned}$$

## ۲۲۵. دستگاه نامعادلهای خطی

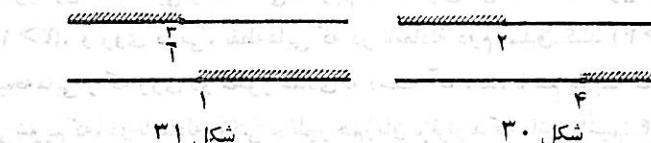
به دو یا چند نامعادله خطی هم زمان و با یک مجهول، دستگاه نامعادلهای خطی گویند. نعمونه‌هایی از دستگاه‌های نامعادلهای خطی، چنین‌اند:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 2x - 8 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - x > 2x - 5 \\ 3 - x > -5 \end{cases} \quad ۱$$

مثال ۲. مطلوب است عمل دستگاه نامعادلهای

$$\begin{cases} 14x - 3 \leq 7 + 9x \\ 1 < x - 3 \end{cases}$$

نامعادله اول دستگاه می‌دهد:  $1 \leq 5x \leq 2$  یا  $\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{2}{5}$  و دومی  $x > 4$  بنابراین، مقداری از مجهول  $x$  به طور هم زمان در هر دو نامعادله صدق می‌کند که از  $4$  بزرگتر باشد و از  $2$  بزرگتر نباشد (شکل ۳۰). ولی چنین عددی وجود ندارد. بنابراین، دستگاه به ازای هیچ مقداری از  $x$  برقرار نیست. دستگاه نامعادلهای مفروض جواب ندارد.



شکل ۳۰

تمرین. این دستگاه‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} 1 - 2x < -9 \\ 3x + 1 < 12 \end{cases} \quad .140 \quad \begin{cases} 2x - 1 > 1 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \quad .139$$

$$\begin{cases} 2x - 2 > x - 3 \\ 4x + 3 > 8 - x \end{cases} \quad .142 \quad \begin{cases} 5x + 2 > 8 \\ 5/7 - 2x \leq -2/6 \end{cases} \quad .141$$

$$\begin{cases} x + 4 < 2x \\ 1 - x > -2 \end{cases} \quad .144 \quad \begin{cases} 3x + 7 \geq 9 + 2x \\ 5 + x > 2x + 2 \end{cases} \quad .143$$

.۱۴۵ در این برابری‌ها،  $a$  چه مقدارهایی را می‌تواند قبول کنند:

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{3-5a} = b \quad (\text{الف})$$

$$b) \quad \frac{b}{a-3} = \sqrt{9-2a} + \sqrt{3a-6} \quad ?$$

.۱۴۶ نامعادله را حل کنید:

$$(2\pi - 2x - 15)(x + 4) < 0.$$

۱۴۷. درجه حرارت  $15$  لیتر آب چقدر باشد که، اگر با  $16$  لیتر آب  $15$  درجه مخلوط شود، درجه حرارت آب مخلوط، از  $35$  درجه کمتر و از  $45$  درجه بیشتر نباشد؟

۱۴۸. طول یک ضلع مثلثی برابر  $4$  سانتی‌متر و مجموع طول‌های دو ضلع دیگر، برابر  $10$  سانتی‌متر است. طول هر یک از این دو ضلع را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم، طول هر یک از آن‌ها، با عددی درست بیان می‌شود.

۱۴۹. می‌دانیم، یک دستگاه نامعادلهای خطی، به ازای هیچ مقداری از مجهول  $x$  برقرار نیست. آیا می‌توان گفت که، هیچ کدام از نامعادلهای دستگاه، جواب ندارد؟ برای عکس این حکم چه می‌گوید؟

۲۳۵. تعیین علامت کسر  $\frac{ax+b}{cx+d}$

کسر  $\frac{ax+b}{cx+d}$  را در نظر می‌گیریم که، در آن،  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  عددهایی معین و  $x$  کمیت متغیر است. تعیین علامت این کسر، یعنی این که مشخص کنیم، حاصل این کسر، به ازای چه مقدارهایی از  $x$  مثبت و، به ازای چه مقدارهایی از  $x$  منفی است. مقدار این کسر، وقتی مثبت می‌شود که صورت و مخرج آن، هم علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی)، و وقتی منفی است که صورت و مخرج آن علامت‌های متفاوتی داشته باشند (یکی مثبت باشد و دیگری منفی). بنابراین، تعیین علامت کسر، منجر به تعیین علامت‌های صورت و مخرج و مقایسه آن‌ها با هم می‌شود. برای مقایسه علامت‌های صورت و مخرج، بهتر است از محورهای عددی استفاده کنیم.

فرض کنید بخواهیم علامت کسر  $\frac{x-1}{3-7x}$  را پیدا کنیم.

برای تعیین علامت صورت کسر، نامعادله  $0 > 1 - x$  را حل می‌کنیم که، از آن، به دست می‌آید  $1 > x$  بنابراین صورت کسر مفروض، به ازای  $1 > x$  مثبت و به ازای  $1 < x$  منفی است. در شکل ۳۱، روی محور عددی دوم، این وضع را نشان داده‌ایم (نیم خط راست هاشور خورده، بدون در نظر گرفتن مبدأ آن، نماینده نقطه‌هایی است که، به ازای آن‌ها، صورت کسر مثبت می‌شود و نیم خط راست ساده، باز هم بدون در نظر گرفتن مبدأ نیم خط، نماینده نقطه‌هایی است که، به ازای آن‌ها، صورت کسر منفی می‌شود). به همین ترتیب، علامت مخرج کسر را معین می‌کنیم: مخرج کسر، به ازای  $\frac{3}{7} < x$  مثبت و به ازای  $\frac{3}{7} < x$  منفی است (محور عددی اول در شکل ۳۱).

اکنون، مقایسه این دو محور عددی، پاسخ مسئله را به ما می دهد.

پاسخ. کسر  $\frac{x-1}{3-7x}$  برای  $x < 1$  مثبت و برای  $x > 1$  منفی است.

تمرین

۱۵۰. علامت هر یک از کسرهای  $\frac{7x+21}{2x-5}$  و  $\frac{3x-8}{9-3x}$  را پیدا کنید.

۱۵۱. این نامعادله ها را حل کنید:

$$\frac{1}{x} < 1 ; \quad \frac{x-1}{x+5} > 7$$

۱۵۲. به ازای چه مقدارهایی از  $x$  مقدار کسر  $\frac{1+x}{x-1}$  بین ۰ و ۲ قرار می گیرد؟

۱۵۳. نامعادله  $2 \leq \frac{1+x}{1-x} < 1$  را حل کنید.

۱۵۴. این معادله ها را حل کنید.

$$(الف) \quad \frac{x-1}{x-3} = \frac{1-x}{2x-4} \quad (ب) \quad \frac{2x-4}{3x} = \frac{x}{x}$$

$$(ج) \quad \frac{ax}{bx} = \frac{5x-10}{x-b} = \frac{10-5x}{3}$$

۱۴۶. نامعادله های شامل علامت قدرمطلق

در این بند، روی چند مثال، نشان می دهیم که، نامعادله های به صورت زیر را، چگونه باید حل کرد:

$$|ax+b| < c, \quad |ax+b| > c$$

مثال ۱. این نامعادله را حل کنید:

$$(1) \quad |2x-5| < 1$$

همه عددهایی که، قدرمطلق آنها، از واحد کوچکر باشد، روی محور عددی در سمت راست -۱ و در سمت چپ ۱ قرار دارند (شکل ۳۲). بنابراین، نامعادله (1) را می توان این طور نوشت:

$$-1 < 2x-5 < 1$$

اگر به هر طرف این نامعادله دوگانه، ۵ واحد اضافه کنیم، به دست می آید:

$$4 < 2x < 6$$

که از آن جاتیجه می شود  $2 < x < 3$ .



شکل ۳۲



شکل ۳۳

شکل ۳۴

پاسخ:  $3 < x < 2$  (شکل ۳۴ را بینید).

مثال ۲. نامعادله  $1 > |3x|$  را حل کنید.

اگر قدرمطلق عددی از واحد بزرگتر باشد، روی محور عددی در سمت چپ ۱ یا در سمت راست ۱ + قرار دارد (شکل ۳۴). بنابراین، باید داشته باشیم:

$$1 < 3x \text{ یا } x < \frac{1}{3}$$

از نامعادله اول  $4 < x$  و از نامعادله دوم  $x < 2$  به دست می آید.

پاسخ:  $2 < x \text{ یا } x < 4$

تمرین. این نامعادله ها را حل کنید:

$$1. \quad |x-2| \leq 3. \quad 155$$

$$2. \quad |2x-4| \geq 6. \quad 156$$

$$3. \quad |1+x| < 2. \quad 157$$

$$4. \quad |2x| > 1. \quad 158$$

$$5. \quad |x+4| \leq 2. \quad 159$$

$$6. \quad |2x+1| > 1. \quad 160$$

$$7. \quad |3+x| \geq x. \quad 161$$

$$8. \quad |x-3| \leq 2. \quad 162$$

۱۴۴. حل نموداری این نامعادله ها را بدھید:

$$\text{الف) } |x-3| \leq 2, \quad \text{ب) } |1x| \geq 3$$

$$\text{ج) } |x| > 1.$$

ترجمه پرویز شهریاری

برای این مسأله از دو محور عددی استفاده می شود. این دو محور عددی در سمت چپ ۱ و در سمت راست ۱ قرار دارند (شکل ۳۲).

برای حل این مسأله از دو محور عددی استفاده می شود. این دو محور عددی در سمت چپ ۱ و در سمت راست ۱ قرار دارند (شکل ۳۲).

برای حل این مسأله از دو محور عددی استفاده می شود. این دو محور عددی در سمت چپ ۱ و در سمت راست ۱ قرار دارند (شکل ۳۲).

## از مجله‌های ریاضی خودمان

● مصاحبه با دکتر لطفعلی عسکریزاده، ترجمه هنام میرزا

دکتر لطفعلی عسکری زاده استاد دانشکده مهندسی برق دانشگاه کالیفرنیا در برکلی و به وجود آورنده منطق مشکک "fuzzy logic" است. عسکری زاده که در آذربایجان متولد شده، دارای درجات لیسانس از دانشگاه تهران (۱۹۴۲)، فوق-لیسانس از اسستیتو تکنولوژی ماساچوست (۱۹۴۶) و دکتری مهندسی برق از دانشگاه کلمبیا در نیویورک (۱۹۴۹) است.

عسکری زاده مقاله اصلی خود در زمینه مجموعه‌های مشکک را در سال ۱۹۶۵ زمانی که رئیس دانشکده مهندسی برق در دانشگاه کالیفرنیا در برکلی بود منتشر ساخت. وی در حال حاضر ساکن برکلی است و اخیراً جایزه هوندا را به خاطر کارش در زمینه منطق مشکک دریافت کرد.

سؤال . اتکیزه شما برای ایجاد منطق مشکک چه بود؟

عسکری زاده . من هیچگاه عضوی از جامعه متخصصین هوش مصنوعی نبوده‌ام، ولی همیشه نسبت به آن احساس علاقه کرده‌ام. کار من بیشتر در زمینه تحلیل سیستمهای نظریه اطلاعات، و تحلیل تصمیم‌گیری بود. ولی در تلاش برای تعیین شکل کلی تحلیل سیستمهای احساس کردم که منطق و ریاضیات سنتی که به طور ساختاری تنها دارای دو ارزش (درست و نادرست) هستند، برای حل مسائل یعنیجه که غالباً تعریف درستی هم ندارند کاملاً مناسب نیستند. در جهان واقعی، بیشتر مسائلی که با آنها روبه رویم دارای تعاریف دقیقی در نقاط مرسی نیستند، در حالی که در ریاضیات همه طبقات "classes" تعریف مرسی دقیق دارند. بنابراین ما در حال تلاش برای انطباق دو چیز، یکی انعطاف پذیر و دیگری خشک و انعطاف ناپذیر هستیم. بعضی از موارد با استفاده از روش‌های متداول موفق می‌شویم مسائلمان را حل کنیم، ولی در بسیاری از

موارد به بن بست می‌رسیم و نمی‌توانیم از مرحله خاصی جلوتر برویم.  
من احساس می‌کرم که در تحلیل سیستمهای بعضی از مفاهیم به خوبی تعریف شده‌اند، ولی بعضی دیگر، مانند سیستمهای غیر مرکز "decentralized systems" یا سیستمهای چند طبقه "hierarchical systems" در هیچ تعریف دقیقی نمی‌گنجند. این افکار تقریباً از سال ۱۹۶۱ در من پرورش یافت تا اینکه نهایتاً در سال ۱۹۶۴ من فقط یک فکر داشتم: کاری که باید انجام دهیم این است که مفهوم میزان عضویت یا "grade of membership" را معرفی کنیم. وقتی که ما یک مجموعه داریم از متعلق بودن یا نبودن یک عضو به این مجموعه صحبتی نمی‌کنیم بلکه میزان عضویت آن را در مجموعه مشخص می‌کنیم. این یک عمل ساده است، ولی با استفاده از آن هر عنصر در یک طبقه، میزان عضویت خاصی پیدا می‌کند که ممکن است صفر، یک، یا مقداری بین این دو باشد.

به نظر می‌آید که کلمه مشکک کمی بحث‌انگیز باشد، و در واقع چنین نیز هست؛ ولی من پیش بینی نمی‌کرم که این کلمه یک ارزش تبلیغاتی پیدا کند، به طوری که اگر شما مقاله‌ای در مورد هر چیز مشکک، بنویسید توجه مردم به آن جلب شود. این روزها شما به آسانی مقالاتی پیرامون منطق مشکک در نشریات عمومی پیدا می‌کنید. من مطمئن هستم که اگر به جای منطق مشکک اسم دیگری به کار رفته بود، این تعداد مقاله وجود نداشت.

■ هنگام نوشن اولین مقاله‌ام در مورد مجموعه‌های مشکک "fuzzy sets" پیش بینی کاربردهای امروزی مانند ماشینهای شستشو و دوربینهای ویدئو را نمی‌کرم.

■ در سال ۱۹۷۲، مقاله‌ای با عنوان توضیح اصول کنترل مشکک، منتشر کردم که امکان استفاده از منطق مشکک در کنترل رانشان می‌داد.

■ در سال ۱۹۷۶ از منطق مشکک برای کنترل یک کوره سیمانی در دانمارک استفاده شد.

■ مجله گزارش کامپیوتر، فروردین و اردیبهشت ۷۶ شلوغیه هست. در این مقاله از منطق مشکک برای کنترل رانشان می‌دانم.

● نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت، دکتر غلامرضا دانش نارویی.  
یک مسئله اساساً از دو قسمت تشکیل می‌شود:  
۱- مفروضات یا داده‌ها

## ۲- حکم یا هدف

منظور از حل یک مسئله این است که با بهره‌برداری از داده‌ها و قواعد استنتاج، حکم خواسته شده را نتیجه‌گیری کنیم. برای این کار نیاز به شیوه‌ای منظم (یا سیستماتیک) داریم که آن را برهان (یا اثبات) می‌نامیم. داده‌ها، هدف و همه راههای ممکن به کارگیری دستورهای استنتاج (یا قالبها)، چه در مجموعه اولیه و چه نتایج حاصل از آنها، همراه با داشش قبلي (اصول، تعاریف و قضایا) رویهم "فضای کاوش" مربوط به مسئله را می‌سازند. شیوه کاوش منظم برای بررسی مفروضات و رسیدن به هدف "الگوریتم" (یا دستورالعمل) برهان را مشخص می‌کند.

یک الگوریتم از دو مؤلفه تشکیل می‌شود: مؤلفه منطق و مؤلفه کنترل.

به عبارت دیگر:

$$\text{الگوریتم} = \text{کنترل} + \text{منطق}$$

مؤلفه منطق شامل داده‌ها، خواسته (ها)، نمایش آنها به زبان منطقی (یا ریاضی) و کشف روابط بین آنهاست. مؤلفه کنترل شامل طرز رویهم گذاشتن قالبهای سازنده و نحوه رسیدن به هدف در فضای کاوش است. به عبارت دیگر، مؤلفه منطق، دانشی را که در حل یک مسئله به کار می‌آید، و نمایش آن را به زبان ریاضی مشخص می‌کند، در حالی که مؤلفه کنترل، طریقه برهان را رائه می‌نماید و تغیرات آن، راههای حل یک مسئله را به دست می‌دهد و تنها بر کارآئی راه حل اثر می‌گذارد. کارآئی یک الگوریتم را غالباً می‌توان به وسیله مؤلفه کنترل، بدون این که تغییری در مؤلفه منطق بدھیم، بهبود بخشد. این روش به ویژه در برنامه‌ریزیهای کامپیوتری بسیار مؤثر است.

برای این که برهان عاری از لغزش و قانع کننده باشد لازم است مراحل استنتاج روش و بایکدیگر سازگار باشند. برای این منظور ضرورت دارد جمله‌ها خالی از ابهام و دستور ترکیب آنها حتی امکان ساده باشد. به عبارت دیگر، زبان مورد استفاده برای بیان جمله‌ها، عاری از ابهام و از نظر دستوری برخوردار از سادگی باشد. به همین علت به زبانی نمادی (یا صوری) نیاز داریم.

فضای کاوش از دو بخش تشکیل می‌شود:

(الف) فضای حال، یعنی، فضای حاصل از مسئله مورد بحث.

ب) فضای گذشته (مشکل از تعاریف، اصول و قضایا).

حرکت اول در حل یک مسئله، مشخص کردن فضای حال است. برای این کار باید فرض را از حکم یا داده‌ها را از هدف تمیز دهیم و آنها را به زبان ریاضی (به صورت نمادی) بنویسیم و حتی امکان روابط بین آنها را به کمک فضای گذشته کشف و مشخص کنیم. پس از این مرحله نوبت به مؤلفه کنترل، یعنی انتخاب روش برهان یا شیوه پوشش در فضای گذشته می‌رسد.

تحلیل دستورهای استنتاج منطقی، به عنوان دستورهای "مسئله حل کن" دو طریقه کلی و متمایز زیر را مشخص می‌کنند:

(الف) روش ترکیب یا اتحاد "که عبارت است از استدلال از "پایین به بالا" که در آن، استدلال از داده‌ها آغاز می‌شود و مرتبًا از ترکیب مفروضات (یا داده‌ها) نتایج جدید به دست می‌آوریم تا به حکم برسیم.

(ب) روش "تجزیه یا تفرقه" که عبارت است از استدلال از "بالا به پایین" که در آن استدلال را از حکم آغاز می‌نماییم و مرتب هر حکم را به احکام معادل تبدیل، یا به احکام جزئی تر تجزیه می‌کنیم تا این که تمام احکام جزئی مستقیماً به وسیله داده‌ها نتیجه شوند (سیر قهقهائی).

در زیر اهم نکات مفیدی را که در حل مسائل باید در نظر گرفت، به طور اجمال می‌آوریم.

- ۱- درک صورت مسئله
- ۲- مشخص کردن معلوم و مجهول (داده‌ها و حکم)
- ۳- انتخاب نمادگذاری مناسب
- ۴- نمایش داده‌ها و حکم به صورت نمادی
- ۵- کشیدن شکل یا دیاگرام
- ۶- مشخص کردن فضای گذشته
- ۷- کوشش برای یافتن رابطه‌های موجود بین داده‌ها و حکم
- ۸- فرمولیندی به یک مسئله معادل یا تعديل یا اصلاح کردن روابط
- ۹- استفاده از تقارن‌ها یا ثابت‌های ریاضی
- ۱۰- کاوش برای دستیابی به الگو با استفاده از خالتهای خاص
- ۱۱- تجزیه به حالات (در روش از بالا به پایین)

## ۱۲- بحث از طریق تاقاض

### ۱۳- استفاده از اصول استقرار و لانه‌کبوتر

مؤلفه منطق را می‌توان دانش فنی و مؤلفه کنترل را دانش مدیریت نامید، و هدف از مقدمات بالا تأکید بر این دو نکته است که: هر دو دانش چه فنی و چه مدیریت برای پیروزی در حل مسائل و اصولاً در انجام کارهای روزمره (فردي یا اجتماعي) لازمند و هیچ یک از اين دو به تنهائي برای رسيدن به هدف و بهره‌گيری مطلوب و بهينه‌كافي نیستند. يك دليل مهم شکست سيازي از افراد در انجام وظایف محوله، از اين جا ناشی می‌شود که تصور می‌رود اگر فردی دارای دانش فنی در موردی خاص باشد می‌تواند بخوبی از عهده انجام آن کار برآید؛ يا اگر فردی دانش مدیریت داشته باشد می‌تواند هر کاري را به او محول کند به خوبی انجام دهد! تصور کنید اگر کاري به کسی که نه دارای دانش فنی است نه دانش مدیریت، واگذار شود چه گرفتاري پيش خواهد آورد!

**مجله رشد آموزش ریاضی، شماره مسلسل ۳۴، تابستان ۱۳۷۱**

### ۱۴- تفاوت ریاضیات دبیرستانی با ریاضیات دانشگاهی، دکتر امیدعلی کرمزاده

منظور من از تفاوت فوق تفاوتی نیست که بین مطالب کتب درسی ریاضیات دبیرستانی با کتب درسی ریاضیات دانشگاهی وجود دارد، بلکه تفاوتی است بین مطالب ریاضی که ریاضی کاران دبیرستانی در کتب غیر درسی یا مجلات مربوط منتشر می‌کنند با ریاضیاتی که ریاضی کاران دانشگاهی در کتب غیر درسی یا مجلات مربوط منتشر می‌کنند. اولین چیزی که باید در نظر گرفته شود این موضوع است: ریاضیات در هر مقطعی که باشد چه دبیرستانی و چه دانشگاهی دارای اهمیت یکسان است. ولی تفاوتی که بین این دو وجود دارد به طور خلاصه این است که در ریاضیات دبیرستانی با مطالبی نظری "با فرض داشتن  $P$  ثابت کنید  $Q$  برقرار است" مواجه هستیم، ولی در ریاضیات دانشگاهی یا مطالبی نظری "با داشتن  $P$  چه می‌توان گفت؟" مواجهیم و همین موضوع باعث شده است که در ریاضیات دبیرستانی همه مشغول حل مسئله‌ای هستند که دیگری آن را حل کرده است. اگرچه این نوع کار ریاضی کاری است مشکل، ولی حتی اگر شخص موفق به حل صدها مسئله از این نوع شود متأسفانه امتیازی در ریاضی کسب نمی‌کند. ولی ریاضی کار دانشگاهی با فرض  $P$  بالاخره چیزی می‌گوید و

مقاله‌ای منتشر می‌کند، یعنی خودش برای خودش مسئله مطرح می‌کند و جوابی به آن می‌دهد و همیشه هم شرایط مسئله را طوری تعین می‌کند که بتواند به آن جوابی بدهد. اما حل مسئله اگر برای همان مسئله باشد، متأسفانه، نه تنها مفید نیست بلکه ضرر هم دارد. هدف ریاضیات این نیست که عده‌ای مسئله طرح کنند و خودشان آن را حل کنند و بعد دیگران را برای حل آن به مبارزه دعوت کنند. حتی هدف مسابقات ریاضی نیز این نیست. تعداد زیادی از مسائل که در نشایرات مطرح می‌شود و مخصوصاً در مسابقات ریاضی، برای ریاضی مضرند.

متأسفانه معمولاً تعداد ریاضیدانانی که هم در ریاضیات دانشگاهی کار می‌کنند و هم در ریاضیات دبیرستانی، خیلی کم‌اند. يك علت آن این است که بیشتر افراد مطالعه جدی ریاضیات را از زمان دانشگاه به بعد انجام داده‌اند و ریاضیات دبیرستانی را در زمان مناسب به طور جدی مطالعه نکرده‌اند و فرصت تسلط بر آن را از دست داده‌اند. متأسفانه در صورت نداشتن تسلط بر این ریاضیات، حتی با بردن جایزهٔ فیلدز نیز نمی‌توان آن را به سادگی به دست آورد.

درست است که در ریاضیات دبیرستانی تحقیقاتی اصلی نمی‌شود و با تسلط بر ریاضیات دبیرستانی نمی‌توان دکترای ریاضی گرفت، ولی این ریاضیات به هیچ وجه نه ساده‌تر است نه کم اهمیت‌تر. و با این همه صحبت‌ها نمی‌شود از ریاضیات دبیرستانی و ریاضی کاران آن استفاده نکرد. زیرا این افراد در سالهای گذشته همیشه این فرصت را داشته‌اند که شاخه‌هایی از ریاضیات را که مطالعه آن با روشهای مقدماتی امکان پذیر بوده است. به ریاضیات دبیرستانی بپرند، در آن تحقیق کنند و با روشهای خود آن را به پیش ببرند و لی همیشه این فرصت را از دست داده‌اند و این کار را به ریاضی کاران دانشگاهی سپرده‌اند و بعد از این که در مجلات دانشگاهی، آن شاخه خاص ریاضی پیشرفت کرد به فکر می‌افتد که قسمت‌هایی از آن را به شکل مسئله به ریاضیات دبیرستانی بپرند و برای خود و دیگران معما‌سازی کنند، خوشختانه، همیشه می‌توان شاخه‌ای مناسب یافت و کار تحقیقی اصلی با همان روش مقدماتی را شروع کرد. يكی از شاخه‌های مناسب، بدون شک، ریاضیات ترکیباتی است که خود شاخه‌ای وسیع است. بدون شک، ریاضیات، بدون شک، مانند سایر چیزها دارد، است، یعنی هر مدتی يك قسمت خاصی از ریاضیات رونق پیدا می‌کند، تبلیغات ازین‌دادی روی آن می‌شود،

این خیلی بد است. ما زمانی می‌توانیم روی ریاضی، فیزیک و علوم پایه امیدی داشته باشیم که اول برای شغل معلمی ارزش قائل شویم. بعد از آن باید برای ایجاد محیطی سالم در مدارس تلاش کنیم. یک مدرسه باید امکانات اولیه آموزشی را دارا باشد تا بتواند رقابتی سالم بین داش آموزان ایجاد کند.

کیهان علمی، سال چهارم، شماره ۳

● قواعد استنتاج، از: خلامرضا یاسی‌پور  
دو باب اصلی منطق یکی باب تصور است و دیگری باب تصدیق. تصور همان تعریف و تعریف همان قول شارح است و تصدیق همان قضیه، و قضیه همان قول جازم یا لفظ مرکب تمام خبری، که در منطق ریاضی آن را گزاره می‌نامند و کل این دو را عالم می‌گویند، چنانکه گفته‌اند: علم، در صورتی که اقرار به نسبت (ین دو چیز) باشد تصدیق و گرنه تصور است.

و هر یک را به بدیهی و نظری تقسیم می‌کنند، چنانکه فرموده‌اند: باب معرفت و به ضرورت به دو قسم بدیهی و نظری تقسیم می‌شود، و نظری ملاحظه معلوم برای حصول به مجہول است.  
باب معرفت در تصور نظری و باب حقّت در تصدیق نظری است، و در همین باب است که از گزاره‌هایی به نام مقدمات به گزاره‌ای به نام نتیجه می‌رسیم و در مورد همین رسیدن از مقدمات به نتیجه است که استنتاج می‌کنیم و بنابراین به قواعد استنتاج نیاز داریم.

مجله ریاضی برهان، شماره ۳، تابستان ۱۳۷۱

در کتاب «جبر» شیفیل، که در سده ۱۶ نوشته شده است، ۲۰۰ صفحه برای توضیح حل معادله درجه دوم، اختصاص داده است.

تحقیقات زیادی روی آن انجام می‌گیرد و همه جا صحبت از آن قسم است. ریاضیات دیبرستانی نیز باید با این مد خود را هم آهنج کند و، هم زمان، با انتشار مطالبی در آن زمینه‌ها اقدام نماید. ذکر این نکته نیز جالب است که در سال ۱۹۷۵ این مسئله که «آیا هر مثلث را می‌توان با ۵ مثلث متشابه فرش کرد؟»، توسط کمیته برگزاری مسابقات المپیاد شوروی برای مسابقات داخلی پیشنهاد شد، ولی کولموگروف ریاضیدان بر جسته این قرن، که اخیراً فوت کرده است، به علت مشکلی آن را رد کرد. کولموگروف اقرار کرد که حل این مسئله در چند ساعت یا حتی چند روز برای خود او مشکل است و بهتر است حذف شود. این احساس که کولموگروف نسبت به این مسئله ابراز کرد احساسی است ریاضی، که نمی‌توان آن را تعریف کرد و ساده هم به دست نمی‌آید. کولموگروف گرچه مانند هیلبرت تقریباً در تمام شاخه‌های پیشرفته ریاضی کارهای اساسی کرده است ولی این احساس را با صرف سالها کار در ریاضیات دیبرستانی به دست آورده بود.

مجله رشد آموزش ریاضی، شماره مسلسل ۳۴، تابستان ۱۳۷۱

● مصاحبه با دکتر امیدعلی کرم زاده سرپرست تیم المپیاد ریاضی کشور ریاضی علمی است که به تکلیف احتیاج ندارد و کشورهایی مثل کشور ما به راحتی می‌توانند در آن موفق باشند. البته باید از دوران دبستان و به صورت پایه‌ای روی آن کار شود. معلمهای خوب، باساد و خوش برخورد و انسانهای درست برای این کار لازم است. البته زندگی آنها هم باید تأمین باشد و لااقل در حد متوسط جامعه زندگی کنند. بهترین چیز در شغل معلمی ارزش اجتماعی است، به طوری که در جامعه جوانهای با استعداد و علاقه‌مند به سمت این شغل گرایش پیدا کنند. چند وقت پیش تیمی از زبان آمده بود و گزارش می‌داد که در آنجا رشته معلمی درست مثل رشته پزشکی در ایران است. مثلاً اگر ما پذیرش در این رشته را مشکل کنیم و ککور سختی برای آن بگذاریم و بگوییم که فقط امتیازهای خلی بالا می‌توانند دیبر شوند، آن وقت جوانها به این سمت گرایش پیدا می‌کنند. اصولاً جوانها رقابت را دوست دارند و برای این که نشان بدهنند صلاحیت قبولی در چنین رقابتی را دارند آن شغل را انتخاب می‌کنند. متأسفانه این رشته در دانشگاههای ما در پایین ترین سطح قرار گرفته و مأخذمان از اول قبول کردیم که دیبر باید ضعیف ترین انسان باشد و

دکتر یوسف فضائی:

## نظرات دانشمندان در چگونگی

### پیدا شدن آسمان و مکانیسم کنونی جهان

#### ۱ - مقدمه

قبل از یونانیان، توجیه مکانیسم کرات آسمانی و تبین کیهان‌شناسی، در مصر و بابل و ایران قدیم جنبه «اسطوره شناختی» داشت: از دیدگاه میتولوزی مربوط به خدایان به ستارگان نگاه می‌کردند؛ اراده خدایان را به گونهٔ غیرعلمی عامل و منشاء پیدایش کرات و ستارگان آسمان می‌شمردند؛ ستارگان را - احیاناً - صاحب شعور و مظاهر خدایان می‌پنداشتند؛ مطالعه‌ی ستارگان را مقامهٔ پی بردن به مقاصد و تیات خدایان و ارباب انواع حساب می‌کردند؛ جبرگرایانه سرنوشت آدمیان را وابسته به حرکات ظاهری ستارگان تصور می‌کردند؛ از این رو، خصوصاً در تمدن بابلی و دنباله‌ی آن در نجوم دورهٔ اسلامی - مخصوصاً در ایران آن دوره - ستارگان را به منظور طالع‌بینی و کشف آثار آنها در سرنوشت آدمیان مطالعه می‌کردند، که همه‌ی این دیدگاه‌ها همان «اسطوره شناختی» است. در عین حال، با همان دیدگاه بعضی مسائل گاه شماری (تقویم) و تقسیم ایام سال را لابلای آن گونه توجیهات استخراج کرده بودند. در بعضی اساطیر دینی اقوام قبل از یونانیان - خصوصاً در مصر و بابل - که چکیده آنها در میان مطالب «سفر پیدایش» تورات کنونی مشاهده می‌شود، با نظر «آسمان محوری» مسائل خلقت و تکوین عالم را بیان می‌کردند. چنانکه در تورات آمده است که خدای قوم یهود، یعنی «یهوه» در شش روز جهان را خلق کرده است: در پنج روز اول آسمانها و ستارگان و زمین و کوهها و دریاها را آفرید و آنها را مقادمه قرار داد برای خلقت انسان و سپس، انسان را به صورت خود (آدم و حوا) آفرید.<sup>(۱)</sup> این جریان آفرینش یهوه، همان مفهوم اسطوره شناختی «آسمان محوری» است. به عبارت دیگر، در توجیه مفهوم اسطوره شناختی رایج در میان اقوام قبل از یونانیان، مسئله تکوین عالم و پیدایش کرات آسمانی، صبغهٔ (رنگ) مذهبی داشت (مذهب به معنای غیرعلمی

قدیم) و در تأیید معارف مربوط به اساطیر خدایان و ارباب انواع در معابد مورد بحث قرار می‌گرفت. از این رو، منجمان و ستاره‌شناسان آن روزگار، گروهی از دین‌یاران و کاهنان معابد مصری و بابلی بودند.

این عقیدهٔ اسطوره شناختی «آسمان محوری» در دوره‌های بعدی (یونانی و تمدن اسلامی) به صورت دیگری در اذهان منجمان باقی ماند، و باعث شد که ستاره‌شناسان مهم یونانی، مثل بطليموس اسکندرانی در قرن دوم میلادی، تصور «آسمان محوری» را به شکل مرکزیت زمین بیان کنند و به خاطر وجود انسان در آن، آن را مرکز عالم شمرند. این عقیدهٔ قدیمی تا عصر کوپرینیک به قوت خود باقی بود، که در آن عصر (اوآخر قرن شانزده و قرن ۱۷ میلادی در غرب) ثابت شد که، کرهٔ زمین در میان ستارگان جهان یک سیارهٔ کوچک است، و بعدها در قرن‌های ۱۹ و ۲۰ معلوم گردید که، این زمین در کهکشان یک ذرهٔ بی مقداری بیش نیست، میلاردها در جهان مثل کرهٔ زمین وجود دارد. تصور اینکه: همهٔ عالم مقدمهٔ پیدایش زمین و بخاطر انسان است، غیرعلمی است.

۲ - آغاز توجیه فلسفی و علمی

اما از آن وقت که تالس ملطی یونانی در سال ۵۸۵ قبل از میلاد مسیح در یونان که آشنایی کامل با مسائل نجوم مبتنی بر انسان محوری مصر قدیم داشت - یک خسوف را چند ماه قبل از وقوع با محاسبات نجومی پیش‌بینی کرد، و درست اتفاق افتاد،<sup>(۲)</sup> اساس ستاره‌شناسی علمی پایه‌گذاری شد و، رفقهٔ آن علم و فن از هالهٔ اسطوره شناختی بیرون آمد؛ پس از تالس، شاگردش انکسیمندروس در نیمه‌های قرن پنجم قبل از میلاد در یونان باستان نظریه‌ای در توجیه مکانیسم جهان ستارگان ارائه داد و گفت: زمین به عنوان یک کره در فضا شناور است و مرکز عالم نیست، و فیثاغورس هم اندکی بعد از او، در قرن پنجم قبل از میلاد، شکل زمین را مانند یک گوی کروی دانست و پیروان او (فیثاغوریان) زمین را یکی از ستارگان آسمان دانستند - در حالی که قبل از آن زمین جهانی مسطح و ساکن تصور می‌شد.<sup>(۳)</sup>

بعداً در حوزهٔ نجومی رومی هم، بعضی منجمین مکانیسم آسمان را علمی گونه توجیه کردند: آریستارخوس (۲۳۰ - ۳۱۵ م) نظریه‌ای شبیه نظریهٔ جدید کوپرینیک اظهار کرده گفت: همهٔ ستارگان از جمله زمین در مدارهایی، گرد خورشید می‌چرخند، و زمین هر یست و چهار ساعت یکبار به گرد خود می‌چرخد.<sup>(۴)</sup>

دارد که از مبدأ نخستین صادر شده. بدین ترتیب تا عقل دهم، که آن را «عقل فعال» و منشاء عالم جسمانی و سفلی می‌پنداشتند، عقول از یکدیگر صادر شده‌اند. به عقیده آنان مظاهر جسمانی این عقول، از بالا به پایین، همان افلاک نهیگانه، از فلک نهم تا فلک قمر (ماه) پنداشته می‌شدند. این نظام عقول عشره را فلوطین (Plotin) اسکندرانی (متوفی بسال ۲۷۵ میلادی) بعدها ارائه داده مرتب کرد، و در فلسفه اسلامی در مکتب مشائی محمد فارابی (متوفی بسال ۳۲۸ هجری) و پیروان او نیز پذیرفته شد.<sup>(۵)</sup>

احتمالاً مکانیسم آسمانها در نظام بطلمیوس بدین گونه توجیه شده بود که: زمین احیاناً مستطح و در مرکز افلاک (جهان) قرار داشت، و مجموعهٔ جهان هستی شامل عالم علوی (عالم لاهوت) و عالم سفلی (عالم ناسوت) است؛ عالم علوی همان افلاک یا کرات و اجرام آسمانی بوده است که همان نه فلک باشد؛ و عالم سفلی یا «ناسوت» که شامل عناصر چهارگانه - یعنی کرهٔ خاک و آب و هوا و آتش است، که بر آن سه عنصر (خاک و آب و هوا) محیط بود و کلیهٔ جهان علوی و سفلی به گرد مرکز زمین می‌چرخیدند. هریک از اجسام عنصری مکان طبیعی داشت: مکان طبیعی خاک در مرکز زمین بود، که پس از آن مکانهای طبیعی آب و هوا و آتش قرار داشتند. چنین تصور می‌شد که اگر اجسام عنصری (جهان ناسوت) در مکان طبیعی خود قرار داشته باشند، ساکنند؛ اما اگر از مکان طبیعی خود خارج باشند، برای رسیدن به مکان طبیعی خود حرکت می‌کنند - یعنی عنصرهای خاک و آب بطرف زیر و پائین حرکت می‌کنند، ولی هوا و آتش بطرف بالا - به عقیده آنان همین امر منشاء سبکی و سنجینی آنها شمرده می‌شده است. زیرا هنوز نیروی جاذبه و قانون سقوط اجسام کشف نشده بود.

در آن نظام، افلاک نه گانه‌ذکور از پائین یعنی از فلک قمر (آسمان اول) به طرف بالا به فلک اعظم یا فلک‌الافلاک متنه می‌شدند، که بر کل جهان زیرین محیط بوده و محرك آنها شمرده می‌شده است. پس از فلک‌الافلاک (آسمان نهم) چیزی وجود نداشته و آن سوی آن، عدم مطلق تصور می‌شده است. این فلک نهم گاهی در زبان عربی «عرش اعظم» خوانده شده است. اجرام علوی به عقیده آنها دور از کون و فساد و تغیر و دگرگونی و تحول، ولی عالم سفلی به آن صفات متصف است. این کیهان‌شناسی بطلمیوس - چنانکه بالاتر گفته شد - تا قرن شانزدهم میلادی، مانند نظام فلسفی ارسطو - افلاطونی، یک نظام ثابت و غیر قابل تردید محسوب می‌شد؛

اما این نظریات، که زمین را از مرکزیت عالم ناشی از عقیدهٔ انسان محوری خارج می‌کرد، مورد قبول همگان قرار نگرفت. زیرا با عقاید مذهبی آن روزگاران و با مشاهدات سطحی تطبیق نمی‌کرد. به هر حال، همهٔ آنان - چه نامبردگان و چه مخالفان آنان - به وجود افلاک - یعنی آسمانهای محیط و محاط یکدیگر، قادر بودند؛ خصوصاً منجمان مکتب اسکندریه - که از قرن سوم پیش از میلاد تا اواخر قرن سوم و اوائل قرن چهارم میلادی دایر بود - در حالی که دانشمندان دیگر را به گونهٔ تخصصی مطالعه می‌کردند ( - نه فلسفی)، مکانیسم آسمان را براساس همان مرکزیت زمین (انسان محوری) توجیه می‌کردند، که شاخص آنان بطلمیوس منجم اسکندرانی بود.

۳- بطلمیوس پایه‌گذار هیئت قدیم بطلمیوس اسکندرانی (اهل اسکندریه مصر) (۱۷۰ - ۱۵۰ م)، معروفترین منجمان مکتب اسکندریه مصر و پایه‌گذار هیئت قدیم و مکانیسم آسمان هیئت و مکانیسمی در دنیای قدیم تدوین کرد که، در آن حرکات کرات کرات آسمان و افلاک را براساس مرکزیت کرهٔ زمین، یعنی تقریباً بر مبنای همان «انسان محوری» قدیم توجیه نمود، که نظرات او مدتی حدود ۱۳ قرن در دنیای قدیم (در شرق و غرب) مورد قبول قرار گرفت و به صورت سنت و اصول ادیان قدیم، مثل مسیحیت قرون وسطائی، پذیرفته گردید؛ به گونه‌ای که در آن روزگار مخالفت با آن و اظهار نظر خلاف اصول آن - هم در مسیحیت قرون وسطائی و هم در میان منجمان دورهٔ اسلامی - شیوهٔ الحاد و ارتداد بود.

مکانیسم جهان و آسمان در هیئت بطلمیوس، که کیفیت آن را در اثر خود به نام «کتاب کبیر» (المگست - Almagast) بیان کرده است و در زبان عربی آن کتاب را به نام «المجسطی» ترجمه کرده‌اند، بر مرکزیت و ساکن بودن زمین نهاده شده است، و همde ستارگان ثابت (ثوابت - خورشیدها) و سیارات در فلکهای سقف مانند خود، با حرکات عمومی فلکها (افلاک) و خصوصی خود، به دور زمین می‌چرخدند. او مجموعهٔ هستی و اجرام آسمانی را در نه فلک (ستقهای منحنی و مستدير) که محیط و محاط یکدیگر تصور می‌شند، منحصر و محدود دانست.

مکانیسم کیهان‌شناسی نظام بطلمیوس از نظام عقول دهگانهٔ فلسفی - عرفانی نوافلاطونیان مکتب اسکندریه متأثر شده است، که از درجات بالا به پائین از یکدیگر صادر شده‌اند. بعد از مبدأ نخستین و محرك اول (خدا)، عقل اول یا «صادر اول»، قرار

شیمیائی، فیزیکی، زیستی و ستاره‌شناسی چیست؟ این هدف مثبت و ممکن الحصول و احیاناً سهل‌الحصول، آغازی شد برای دگرگون شدن همهٔ معارف قدیمی در بارهٔ شناخت حقایق جهان؛ از این رو از آن پس (از قرن ۱۶ بعد)، دیدگاههای فلسفه و دانشمندان و روش تحقیق آنان در توجیه مکانیسم جهان هستی تغیر کرد و در راه درست و پویا و مسیر واقعی افتاد.

در این میان، در قرن شانزده میلادی در اروپا، سه شخصیت علمی با شیوهٔ استقرائی و تجربه‌گرایی (تجربه و آزمایش و مشاهده روی پدیده‌های طبیعی) به مطالعهٔ مکانیسم آسمانها و ستارگان و پدیده‌های بالای زمین پرداختند: کوپرینیک (Copernic) ستاره‌شناس لهستانی (۱۵۴۳ - ۱۵۷۳ م)، کپلر (Kepler) آلمانی (۱۵۷۱ - ۱۶۲۰ م) و گالیله (Galilee) ایتالیائی (۱۶۰۴ - ۱۶۴۲ م) از آن پیش قدمان بودند. از میان نامبردگان، کوپرینیک بنیان‌گذار هیئت جدید و مؤسس توجیه علمی مکانیسم کرات آسمان است. زیرا او نخستین ستاره‌شناس غربی است که گفت: خورشید مرکز سیارات از جمله زمین است. او وجود افلاک بطلمیوس و موضوع ساکن بودن زمین را رد کرد. کپلر نیز، متعاقب کوپرینیک، مطالعات او را تکمیل نمود و بر اثر مشاهدات و محاسبات، قواعد حرکت سیارات به دور خورشید را کشف کرد.<sup>(۱)</sup> او این کشفیات را توسط دوربین گالیله، که اختراع کرده بود، ثابت نمود. گالیله با محاسبات ریاضی و نجومی و با کمک همان دوربین (تلسکوپ ابتدائی) خود، حرکت زمین به دور خورشید را ثابت کرد و از بعضی کوه‌های ماه عکس گرفت. او وقتی این کشفیات خود را اعلام کرد، از طرف اولیاء کلیسائی کاتولیک مسیحی مورد تکفیر و تعقیب واقع شد و به زندان افتاد. چیزی نمانده بود اعدام شود که، با توبه و استغفار مصلحتی نجات یافت.

بطور مختصر اشاره می‌شود که، مطابق قواعد هیئت جدید کوپرینیک و تحقیقات کپلر و گالیله و پیروان آنان، هیچ گونه فلکی (سقف مدوری) در آسمان وجود ندارد، بلکه ستارگان در آسمان (یعنی در فضای بی‌کران) به صورت واحدهای کوچک «منظمهٔ شمسی» و سیستم خورشیدی (یک خورشید در مرکز با چند تاسیاره و ضمایم آنها) در پیرامون آن، در داخل یک سیستم بزرگی به نام «کهکشان» در حال حرکت و گردشند.

قوانين علمی این هیئت جدید هنوز در قرن شانزده و هفده میلادی توجیه و تبیین نشده بود. زیرا قانون سقوط اجسام، یعنی نیروی جاذبهٔ عمومی، شناخته و کشف

و اگر نظریهٔ مخالف آن از کسانی مثل ابوریحان بیرونی در جهان اسلام اظهار می‌گردید، به عنوان نوعی ارتداد و سنت‌شکنی تلقی می‌شد. از این رو، مکانیسم جدید کیهان‌شناسی که در اواخر قرن ۱۶ میلادی توسط گالیله و کوپرینیک ارائه گردید، به عنوان کفر و الحاد به حساب می‌آمد و صاحبان آن عقاید مورد تکفیر قرار می‌گرفتند.

**۴- نظرات دانشمندان غرب در قرن‌های ۱۷ و ۱۶**

نهضت علمی عصر جدید غربی در حقیقت از اوآخر قرن پانزده میلادی بر اثر پیدایش علل و اسباب آن در اروپا شروع شده، در ابعاد مختلف علمی (فیزیک، شیمی، ستاره‌شناسی و ...) و فلسفی (به صورتهای خردگرایی دکارتی و تجربه‌گرایی فرانسیس یکی) به پویائی افتاد: بنیان‌گذار مکتب فلسفی خردگرایی اصحاب تعلق در فرانسه، رنه دکارت (۱۶۴۵ - ۱۶۹۶ م) و پیشوای مکتب تجربه‌گرایی اصحاب تجربه، فرانسیس یکن انگلیسی (۱۶۲۵ - ۱۶۶۰ م) و جان لاسک (۱۷۰۴ - ۱۶۳۲ م) بودند. فرانسیس یکن را پایمبر علوم جدید لقب داده‌اند، که تهراه تحقیق حقایق و شناخت پدیده‌های جهان طبیعی را همان تجربه و آزمایش و مشاهده (استقراء - نه قیاس عقلی) داشت و گفت: «طبیعت را آنقدر شکنجه بدهید تا اسرار خود را فاش کند!»

به طور کلی، در ادیان قدیم و مکاتب فلسفی قرون وسطائی قدیم (افلاطونی، ارسطوئی، نوافلاطونی، مثائی، اشراقی و عرفانی) دانایان همهٔ کوشش‌های خود را برای رسیدن به این منظور انجام می‌دادند که: بدانند جهان را کی بوجود آورده و چگونه بوجود آورده، و به عبارت دیگر، جهان چگونه بوجود آمده و از کجا آمده است؟ آنان در این راه نمی‌توانستند به منظور خود برسند؟ و راه بجایی نمی‌برند؛ بدین جهت هر کسی چیزی می‌گفت و نظری می‌داد و خاموش می‌شد. زیرا بعداً معلوم شد که، جهان از جایی نیامده، بلکه همیشه به صورتهای مختلف در همین جا بوده و از جای دیگر نیامده است؛ و به جای اینکه بدانیم چگونه آمده ( - که از جایی نیامده)، باید بدانیم که چگونه تحول یافته است. اما در مکاتب فلسفی جدید، خصوصاً در مکتب تجربه‌گرایی بویژه علوم طبیعی جدید، از منظورهای قدیمیان (که جهان را کی بوجود آورده و چگونه بوجود آمده) صرف نظر کردن و پرداختن به تجربه و بقول یکن «شکنجه دادن طبیعت»، و هدف از مطالعات و تحقیقات فلسفی و علمی خود، این را قرار دادند که بدانند، جهان طبیعت چگونه است و خواص پدیده‌های طبیعی از نظرات

فیزیکدانها با وسائل علمی محدودی که در آن روزگار در اختیار داشتند، توانستند مکانیسم حرکات آسمانها را توجیه کنند، حتی در باره جریان پیدایش منظمه شمسی مطالعه کنند، تا اینکه نوبت به علمای قرن ۱۹ رسید.

۵- نظریات ستاره‌شناسان قرن‌های ۱۸ و ۱۹ در توجیه مکانیسم آسمانها

پس از نیوتن، که کشف نیروی جاذبه او تا حدودی مکانیسم حرکات و ارتباط علی ستارگان و اجرام آسمان را توجیه کرد، منجمان نیمة دوم قرن ۱۸ و قرن ۱۹ میلادی اروپا، با تکیه بر فیزیک - ستاره‌شناسی نیوتن، پرداختند به تبیین و توجیه چگونگی پیدایش و تکون منظمه‌های خورشیدی، از جمله منظمه شمسی خودمان، که کره زمین جزء آن است.

ژرژ دو بوون (George de Buffon) دانشمند علوم طبیعی فرانسوی (۱۷۰۷ - ۱۷۸۸م)، در آغاز کتاب خود موسوم به «تاریخ طبیعی» گفت: براثر تصادم یک سیاره دنباله‌دار بزرگ با خورشید اولیه، سیارات آن، مثل زمین و مریخ و غیره جدا و به اطراف آن پراکنده شده از میدان جاذبه خورشید نتوانستند دور شوند و، در نتیجه، در مدارهای معین نسبت به حجم و وزنشان، در پرامون آن به گردش پرداختند. در آن زمان، این نظریه جدید در توجیه پیدایش سیارات خورشید، در آغاز پذیرفته شد ولی بعدها ستاره‌شناسان توجیه بوون را علمی نشمردند و چنین انتقاد از آن کردند: منجمله اینکه اگر مسئله استثنائی تصادم دو ستاره عامل بوجود آمدن منظمه‌های شمسی پر شمار آسمان باشد، باید تعداد این نوع منظمه‌ها بسیار اندک باشد؛ در صورتی که بسیار پرشمارند. بعضی طرفداران نظریه تصادم در این باره گفتند: تصادم حقیقی نبوده، بلکه عبور ستاره بزرگتری از نزدیک خورشید اولیه باعث مدد بزرگی در سطح خورشید شده قطعاتی از آن به اطراف پرتاب گردیده سیارات را بوجود آورده است. این «تئوری جذر و مدد» نیز نتوانست جریان پیدایش منظمه‌های خورشید و مکانیسم آسمان را توجیه کند.

۶- نظریه کانت و لاپلاس

امانوئل کانت (Immanuel Kant ۱۷۲۴ - ۱۸۰۴م) فیلسوف و دانشمند بزرگ آلمانی در ضمن مسائل فلسفی خود، به توجیه مکانیسم آسمان پرداخت؛ زیرا فلسفه او جامع بود: هم جنبه خردگرایی داشت و هم جنبه تجربه‌گرایی و

۳۲۹

نشده بود. اما در نیمة دوم قرن هفده و اوائل قرن هجده میلادی، که آن قانون توسط نیوتن کشف شد، قوانین علمی هیئت جدید و مکانیسم کوپرینیکی توجیه و تبیین گردید. ایزاک (اسحاق) نیوتن (Isaac Newton) ریاضی دان انگلیسی (۱۶۴۲ - ۱۷۲۷م) با کشف مهم خود، علماء ستاره‌شناس را از بن‌بست بیرون آورد و دروازه بزرگی به روی آنان گشود، و از آن پس آنان توانستند حرکات ستارگان و منظمه خورشیدی را قانونمندانه توجیه کنند. بنا به گفته یکی از نویسندهای آن: یکی از مهمترین آثار (اثرات) علمی نیوتن که در جهان داشت کمتر چیز به این اهمیت است، کشف قانون جاذبه عمومی عالم است. او با این کشف معلوم کرد جمیع اجزاء جهان از زمینی و آسمانی جاذب و مجدوب یکدیگرند و حرکات همه آنها معلول این علت است؛ منشاء حرکات ستارگان آسمان همان امری است که سبب سقوط اجسام بر روی زمین و علت سنگینی آنها می‌شود.<sup>(۷)</sup>

در بیان شمول قانون جاذبه نیوتن، نقایصی وجود داشت که دو قرن بعد توسط اشتبین تکمیل شد: نیوتن جاذبه، فضا و زمان و مکان را مطلق می‌دانست و در همه جای جهان یکنواخت تصور می‌کرد، که اشتبین آن نواقص را اصلاح کرد و گفت: فضا و جاذبه مطلق نیست، بلکه در شرایط مختلف در رابطه با حرکات ماده و انرژی نسبی می‌باشد - یعنی قانون نسبیت اشتبین مکمل قانون جاذبه نیوتن گردید.

کیفیت این قانون (قانون جاذبه و سقوط اجسام) در حوزه فیزیک و ستاره‌شناسی را همه تا حدودی می‌دانند، که در اینجا نیازی به تبیین آن نیست. همین اندازه باید گفت که، نیروی جاذبه از نظر فیزیکی، صفت نوعی از ذرات هسته‌ای به نام «گراویتون» است، که از همه اجسام ساطع می‌شود و اجرام دیگر را بطرف خود می‌کشد. جاذبه عامل همه تحولات و حرکات فیزیکی پدیده‌های طبیعی در جهان شناخته شده می‌باشد، و این اصل را ثابت می‌کند که مجموعه جهان مانند یک دستگاه ماشینی است که، اجزاء آن به یکدیگر مربوط و مرتبط است، و مطابق قانون علیت و «ضرورت علی» یعنی «دترمینیزم - Determinism» عمل می‌کند: اگر جاذبه زمین نبود، آب و هوای روی آن باقی نمی‌ماند؛ اگر جاذبه آن نبود، ابر و باران بوجود نمی‌آمدند، رودخانه‌ها به جریان نمی‌افتادند، همه موجودات در هوا معلق می‌شدند؛ اگر جاذبه نیرومند خورشید نبود، سیاره زمین و سیارات دیگر در مدارهای ثابت به گرد آن نمی‌چرخیدند، فصول مختلف پدید نمی‌آمدند و ...

در نیمة دوم قرن ۱۷ و قرن ۱۸ میلادی دانشمندان فیزیک‌شناس و ستاره-

ستاره‌شناسان قرار داشت، که در نیمة قرن یستم برای اختراع تلکوپهای نیر و مند و پیشافت و تکامل علوم فیزیک و ستاره‌شناسی مبتنی بر کیهان نوری و پیدایش دیدگاههای جدید در علوم، نظریه کانت - لاپلاس تکمیل شد و موضوع نوجیه مکانیسم کل جهان هستی و فضای شناخته شده مورد بحث و مطالعه واقع شد، و نظریه نسبت انشتین آن را توسعه داده مجددًا تبیین علمی نمود.

در همین نیمة قرن یستم بعضی ستاره‌شناسان روسی، مثل آتواشمیت و فنکف در توجیه نظریه کانت - لاپلاس اظهار کردند که: سیارات خورشید با خود خورشید در آغاز از یک توده عظیم ابر و گازها بوجود نیامده‌اند، بلکه خورشید اولیه از میان یک توده سحابی عبور کرده و قسمتهایی از آن را اسیر خود نموده و از آنها سیارات بوجود آمدند. در صفحات پائین به عقیده آنها از جهتی اشاره خواهم کرد.

۷- انشتین و کشفیات جدید در قرن یستم در توجیه مکانیسم جهان  
همه‌ی این توجیهات فوق قبل از انشتین براساس قانون جاذبه نیوتینی تبیین می‌شد، که خالی از اشکال نبود. اما در نیمة اول قرن یستم میلادی، که آن قانون توسط انشتین ویراسته شده از محدودیت بیرون آنده تکمیل گردید، آن توجیهات هم در بیان مکانیسم جهان و حرکات کرات کامل شد.

آلبرت انشتین (۱۹۵۵ - ۱۸۷۹م). ابر ریاضی دان یهودی تزاد آلمانی‌الاصل امریکائی شده، با اظهار نظریه علمی نسبیت در تبیین قانون جاذبه و بعد چهارم قرار دادن زمان و فضاء، مفهوم و کیفیت شمول نیروی جاذبه نیوتن را ناکافی و ناقص شمرد، و به تکمیل آن پرداخت و دیدگاه و شناخت فیزیک شناسان را در باره قانون جاذبه نیوتون تغییر داد. بیان نظریه علمی نسبیت انشتین، نه کار من است و نه قابل توضیح در این مقاله محدود. در اینجا همین اندازه به گفته او اشاره می‌شود که گفته است: "... چون میدان جاذبه از چگونگی توزیع اجرام معلوم می‌گردد، و هنگامی که توزیع اجرام تغییر کند میدان جاذبه نیز تغییر می‌نماید... و طبق این نظریه، فضای را بصورت مطلق نمی‌توان فرض کرد، بلکه تشکل آن تحت نفوذ عوامل فیزیکی است... و معلوم شد که، جاذبه عمومی از تشکل فضا سرچشمه می‌گیرد؛ اما علاوه بر میدان جاذبه، میدان الکترومغناطیسی در معادلات اساسی میدان جاذبه باید دخالت داده شود... ما مجبوریم عقیده‌مند شویم که، هر دو میدان منبعث از تشکل فضا هستند".<sup>(۹)</sup>

علمی و در عین حال به علوم طبیعی و ریاضی و ستاره‌شناسی علاقه و توجهی خاص داشت. کانت برای اولین بار نظریه علمی و جدیدی در توجه پیدایش منظومه‌های شمسی اظهار کرد، مبنی بر اینکه: عوامل فیزیکی درونی و بیرونی خورشیدها سبب جدایی سیارات از خورشید خود شده است - نه تصادم یا جزر و مده؛ او این نظریه خود را چنین توجیه کرد: خورشید - و همه‌ی خورشیدها - در آغاز توده‌ی بزرگی از ابرمانند و گازهای داخل کهکشانها تشکیل شده بودند، که قسمتهایی از آن سیارات را تشکیل دادند. چنانکه قسمت مرکزی که همان خورشید را تشکیل داد، به دور محورش می‌چرخد، تکه‌های پراخمن آن نیز دور آن و برگرد محورشان چرخیدند. به عبارت دیگر، رفته - رفته جرم خورشید اولیه به آرامی به دور محورش می‌چرخد، منقبض می‌شد و سرعت چرخشش به گرد خود بیشتر می‌گردد، و در نتیجه، هم حرارت سطح آن بر اثر تشعشع به فضای اطراف پراکنده می‌شد و هم به تدریج جرم آن فشرده‌تر و منقبض‌تر می‌گردد. این افزایش سرعت دورانی و حرکت وضعی خورشید سبب شد که، نیروی گریز از مرکز گازهای قشری آن افزاون شود و در نتیجه، اندکی فرو رفتگی در دو قطب آن پدید آید، و در منطقه استوائی آن بر جستگی هائی بهم بر سد، و منجر به پدید آمدن و جدا شدن توده‌هایی از آن شود و مایه تکون و بوجود آمدن سیارات اطراف آن گردد.<sup>(۸)</sup>

این توجیه جدید و نسبتاً درست تکون مکانیسم آسمان توسط کانت را، اکنون نیز با اصلاح و تجدید نظر مورد قبول قرار داده‌اند. به هر حال پس از کانت نخستین کسی از ریاضی دانان که با محاسبات ریاضی نظریه کانت را ثابت کرد، لاپلاس فرانسوی (۱۸۲۷ - ۱۷۴۹م)، بود؛ از این رو این نظریه بیشتر به نام «نظریه لاپلاس» معروف است. او در کتابهایش موسوم به «نمایش دستگاه جهان» و «منظمه عالم» اساس نظرات کانت را توضیح علمی داد و در معرض مطالعه و تحقیق علمای ستاره‌شناس قرار داد. لاپلاس در بیان این نظریه در کتاب «منظمه عالم» چنین گفت: منظمه خورشیدی - و هر نظام خورشیدی دیگر - در آغاز عبارت از توده عظیمی از ماده ریقت ابرمانند (سحابی) فوق العاده گرمی بوده و حالت گازی داشته است. سپس، رفته - رفته، برای تشعشع از حرارت آن کاسته می‌شد و انتقامی در آن پدید می‌آمد؛ اما بر سرعت آن بر محورش افزوده می‌شد و در نتیجه آن افزایش سرعت، توده‌ها و حلقه‌هایی از منطقه استوائی خورشید جدا شده سیارات را بوجود آورد.

این نظریه در قرن ۱۹، ۲۰ میلادی چنانکه گفتیم مورد قبول همه‌ی

ستاره‌شناسان قرار داشت، که در نیمه قرن پیشتر اختراع تلسکوپهای نیرومند و پیشرفت و تکامل علوم فیزیک و ستاره‌شناسی مبتنی بر کیهان نورده و پیدا شدند. دیدگاههای جدید در علوم، نظریه کانت - لاپلاس تکمیل شد و موضوع توجیه مکانیسم کل جهان هستی و فضای شناخته شده مورد بحث و مطالعه واقع شد، و نظریه نسبیت انتین آن را توسعه داده مجددًا تبین علمی نمود.

در همین نیمه قرن پیشتر بعضی ستاره‌شناسان روسی، مثل اتواشیت و فسکف در توجیه نظریه کانت - لاپلاس اظهار کردند که: سیارات خورشید با خود خورشید در آغاز از یک توده عظیم ابر و گازها بوجود نیامده‌اند، بلکه خورشید اولیه از میان یک توده سحابی عبور کرده و قسمتهایی از آن را اسیر خود نموده و از آنها سیارات بوجود آمدند. در صفحات پائین به عقیده آنها از جهتی اشاره خواهم کرد.

۷- انتین و کشیبات جدید در قرن پیشتر در توجیه مکانیسم جهان همه‌ی این توجیهات فوق قبل از انتین برآسان قانون جاذبه نیوتین تبین می‌شد، که خالی از اشکال نبود. اما در نیمه اول قرن پیشتر میلادی، که آن قانون توسط انتین ویراسته شده از محدودیت پیرون آمده تکمیل گردید، آن توجیهات هم در بیان مکانیسم جهان و حرکات کرات کامل شد.

آلبرت انتین (۱۸۷۹ - ۱۹۵۵) ابر ریاضی دان یهودی نژاد آلمانی‌الاصل امریکائی شده، با اظهار نظریه علمی نسبیت در تبین قانون جاذبه و بعد چهارم قرار دادن زمان و فضاء، مفهوم و کیفیت شمول نیروی جاذبه نیوتون را ناکافی و ناقص شمرد، و به تکمیل آن پرداخت و دیدگاه و شناخت فیزیک شناسان را در باره قانون جاذبه نیوتون تغییر داد. بیان نظریه علمی نسبیت انتین، نه کار من است و نه قابل توضیح در این مقاله محدود. در اینجا همین اندازه به گفته او اشاره می‌شود که گفته است: «... چون میدان جاذبه از چگونگی توزیع اجرام معلوم می‌گردد، و هنگامی که توزیع اجرام تغییر کند میدان جاذبه نیز تغییر می‌نماید ... و طبق این نظریه، فضای بصورت مطلق نمی‌توان فرض کرد، بلکه تشکل آن تحت نفوذ عوامل فیزیکی است... و معلوم شد که، میدان عمومی از تشکل فضا سرچشمه می‌گیرد؛ اما علاوه بر میدان جاذبه، میدان الکترومغناطیسی در معادلات اساسی میدان جاذبه باید دخالت داده شود... ما مجبوریم عقیده‌مند شویم که، هر دو میدان منبعی از تشکل فضا هستند».<sup>(۶)</sup>

علمی و در عین حال به علوم طبیعی و ریاضی و ستاره‌شناسی علاقه و توجهی خاص داشت. کانت برای اولین بار نظریه علمی و جدیدی در توجیه پیدایش منظومه‌های شمسی اظهار کرد، مبنی بر اینکه: عوامل فیزیکی درونی و بیرونی خورشیدها سبب جدایی سیارات از خورشید خود شده است - نه تصادم یا جزر و مد؛ او این نظریه خود را چنانی توجیه کرد: خورشید - و همه‌ی خورشیدها - در آغاز توده‌ی بزرگی از ابرمانند و گازهای داخل کهکشانها تشکیل شده بودند، که قسمتهایی از آن سیارات را تشکیل دادند. چنانکه قسمت مرکزی که همان خورشید را تشکیل داد، به دور محورش می‌چرخید، تکه‌های پیرامون آن نیز دور آن و بر گرد محورشان چرخیدند. به عبارت دیگر، رفته - رفته جرم خورشید اولیه به آرامی به دور محورش می‌چرخید، منقبض می‌شد و سرعت چرخشش به گرد خود بیشتر می‌گردید، و در نتیجه، هم حرارت سطح آن بر اثر تشعشع به فضای اطراف پراکنده می‌شد و هم به تدریج جرم آن فشرده‌تر و منقبض تر می‌گردید. این افزایش سرعت دورانی و حرکت وضعی خورشید سبب شد که، نیروی گریز از مرکز گازهای قشری آن افزون شود و در نتیجه، اندکی فرو رفگی در دو قطب آن پدید آید، و در منطقه استوائی آن بر جستگی‌هایی بهم بر سد، و منجر به بدید آمدن و جدا شدن توده‌هایی از آن شود و مایه تکون و به وجود آمدن سیارات اطراف آن گردد.<sup>(۸)</sup>

این توجیه جدید و نسبتاً درست تکون مکانیسم آسمان توسط کانت را، اکنون نیز با اصلاح و تجدید نظر مورد قبول قرار داده‌اند. به هر حال پس از کانت نخستین کسی از ریاضی دانان که با محاسبات ریاضی نظریه کانت را ثابت کرد، لاپلاس فرانسوی (۱۷۴۹ - ۱۸۲۷)، بود؛ از این رو این نظریه بیشتر به نام «نظریه لاپلاس» معروف است. او در کتابهایش موسوم به «نمایش دستگاه جهان» و «منظمه عالم» اساس نظرات کانت را توضیح علمی داد و در معرض مطالعه و تحقیق علمای ستاره‌شناس قرار داد. لاپلاس در بیان این نظریه در کتاب «منظمه عالم» چنین گفت: منظمه خورشیدی - و هر نظام خورشیدی دیگر - در آغاز عبارت از توده عظیمی از ماده ریق ابرمانند (سحابی) فوق العاده گرمی بوده و حالت گازی داشته است. سپس، رفته - رفته، بر اثر تشعشع از حرارت آن کاسته می‌شد و انقباضی در آن پدید می‌آمد؛ اما بر سرعت آن بر محورش افزوده می‌شد و در نتیجه آن افزایش سرعت، توده‌ها و حلقه‌هایی از منطقه استوائی خورشید جدا شده سیارات را بوجود آورد. این نظریه در قرن ۱۹، ۲۰ میلادی چنانکه گفتم مورد قبول همه‌ی

بنابراین، با تبیین جدید انشتین از جاذبه و مطابق قوانین هندسه جدید فضائی غیراقلیدسی در همین قرن، و با کشفیات علمی جدید، نظریات مختلفی در توجه مکانیسم جهان و بیان وسیع تر آن پدید آمده و در حال تکامل است.

#### ۸- تکاهی کوتاه به وضعیت کهکشانها

آنچه که اکنون توسط فیزیک - ستاره‌شناسان با وسائل علمی و مشاهدات فیزیکی، یعنی طیف‌شناصی و تلسکوپهای عظیم، معلوم شده‌این است که: جهان شناخته شده تقریباً به ساعت حدود ۱۲ میلیارد سال نوری اطراف زمین از کهکشانهای پرشمار تشکیل شده است، که می‌توان اجزاء تشکیل دهنده بک کهکشان را - مانند کهکشان راه شیری خودمان که منظمه خورشیدی و زمین جزء آن است - از اجرام کوچک تا بزرگ چنین تقسیم کرد: منظمه شمسی (سیستم خورشیدی) است که کوچکترین واحد منظم سماوی را تشکیل می‌دهد، که در مرکز آن خورشیدی قرار دارد، به عنوان «مادر سیارات» و چند کره کوچک سرد و خاموش، به عنوان «سیارات» به گرد مادرشان در مدارهای معین می‌چرخد و به وسیله نور و گرمای خورشیدی که بر گرد آن می‌چرخند، زندگی می‌کنند: از آن نور و گرما ارتقاق می‌کنند. در اطراف هر یک از سیارات، مانند زمین، نیز چند کره سرد و مرده کوچکتر به نام ماه (قمر) می‌چرخد، که بدون آب و هوا می‌باشد. و در میان زمین و مریخ در منظمه شمسی ما، خرد سیارات و سنتگهای آسمانی به نام «شهاب سنگها» بدور خورشید می‌چرخد، که مرتب روی سطح زمین و ماه و مریخ سقوط می‌کنند. علاوه بر این اجرام، در این منظمه شمسی چند تاسیاره دنباله‌دار کوچک و بزرگ در مدارهای بیضی طویل به دور خورشید در گردشند؛ و همه اینها در حوزه خورشید تحت تأثیر جاذبه یکدیگر قرار دارند. مجموعه این کرات و دنباله دارها و شهاب سنگها به علاوه خود خورشید را، که یک نظام کوچک را در کهکشان تشکیل می‌دهند، منظمه شمسی یا نظام خورشیدی نامیده‌اند.

چندین هزار میلیون منظمه خورشیدی، که از یک نظام وسیعتر و بزرگتر تبعیت می‌کنند، و مجموعه‌ی عظیمی را تشکیل می‌دهند «kehکشان» نامیده می‌شود، مثل کهکشان راه شیری ما، که در آن نزدیک صد تا صد و پنجاه میلیارد خورشید (منظمه خورشیدی) وجود دارد. اگر در اطراف هر خورشید آن، به طور متوسط، پنج سیاره مثل زمین و مریخ باشد، تعداد اجرام و کرات آن بسیار خواهد بود. علاوه بر این

خورشیدها، در هر کهکشان، در لابلای منظمه‌ها، ابوه توده‌های از گاز و گردوغبار ابرمانند (صحابی‌های عظیم) وجود دارد، که در شرایط مناسب به منظمه‌های خورشیدی تبدیل می‌شوند (چنانکه بعضی خورشیدها در میان آن کهکشانها عمرشان تمام می‌شود و به گردوغبار تبدیل می‌شوند). بدین ترتیب در اندرون کهکشانها - از جمله همین کهکشان خودمان راه شیری - به تدریج، از آن صحابی‌های سرگردان میان کهکشان، خورشیدها و منظمه‌های شمسی در حال تشکیل و تولد و تکون می‌باشند، و یا بر عکس آن - یعنی خورشیدها پس از طی دوران عمر خود، متلاشی می‌شوند و به صحابیها می‌پونند. این است معنای «پیدایش و مرگ خورشیدها».

فاصله بین خورشیدها در کهکشان متفاوت است: هرچه به طرف مرکز کهکشانها نزدیک شویم، تمرکز و تراکم خورشیدهای آن زیاد و فاصله آنها از یکدیگر کم است. اما بر عکس، هرچه به طرف کناره‌های آن، که دور از مرکز باشد، نزدیک شویم فاصله بین آنها زیاد می‌شود و تراکم، کم. کهکشان ما، که یکی از صدھا هزار کهکشان شناخته شده است، چنانکه اشاره شد از صد، تا صد و پنجاه میلیارد خورشید و منظمه شمسی تشکیل شده است. قطر این کهکشان هشتاد هزار، تا صدهزار سال نوری است. هر سال نوری، در اصطلاح ستاره‌شناسان، فاصله‌ای است که نور در یک سال می‌پماید، که حدود ۱۵ هزار میلیارد کیلومتر می‌شود - سرعت نور در هر ثانیه سیصد هزار کیلومتر است. منظمه خورشیدی که کره زمین ماجزء آن است، از مرکز این کهکشان نسبتاً دور و به حاشیه آن نزدیک است - یعنی در فاصله ۳۶ تا ۳۶ هزار سال نوری از مرکز کهکشان قرار دارد.

هر کهکشان، از حرکات، یک حرکت مکانی و انتقالی دارد، که دور می‌شود، و یک حرکت وضعی به دور محورش دارد. یعنی همه خورشیدها با سیارات و ضمایمانشان به دور مرکز کهکشان می‌چرخند؛ هر دور و چرخش خورشید ما به دور مرکز کهکشان، یک سال کهکشانی نسبت به ما شمرده می‌شود. مدت آن ۲۵۰ میلیون سال است. طبق محاسبات نجومی ستاره‌شناسان، خورشید ما از آغاز تاکنون پانزده یا شانزده بار به دور مرکز کهکشان چرخیده است، که به این حساب، عمر خورشید ما با سیاراتش، مثل زمین، چهار میلیارد سال می‌شود.<sup>(۱۰)</sup>

در همین کهکشان، نزدیکترین خورشید نسبت به ما - یعنی همسایه نزدیک و دیوار به دیوار ما - ستاره - (خورشید) آلفادوسانتو (القطورس) است، که به فاصله چهار سال نوری از مقرار دارد. بدین ترتیب که اگر ما با سفینه‌های کیهان نورده کنونی

کیهانی امز در کالیفرنیا وجود تعداد صد و پنجاه هزار سیاره شبیه زمین در آن کوهکشان را صدر صد حتمی دانسته، که میانگین ده هزار تا یک میلیون سیاره باشد. او گفته است: «از این گونه سیاره‌های مانند زمین بین ده هزار، تا یک میلیون در کوهکشان ما وجود دارد. گرچه این عدد بزرگ می‌نماید، ولی گویای آن است که یک صدم در صد، تا یک ده هزار در صد ستاره‌های (خورشیدهای) کوهکشان ما دارای سیاره‌ای صاحب موجودات دارای تمدن پیشرفته‌اند. بنابراین، عده سیاره‌هایی که تمدن پیشرفته‌تر از ما دارند، بسیار زیاد خواهد بود»<sup>(۱۱)</sup> طبق قرائن و شواهد باستان‌شناسی و مشاهدات کثیری صاحبان آن سیاره‌ها با زمین تعامل دارند.

از آنچه گفته شد، بطور خلاصه نتیجه می‌گیریم که: جهان شناخته شده، مجموعه‌ای از کرات و اجرام ریز و درشت است، که کوچکترین واحد آنها از منظمه خورشیدی و بزرگترین واحد آن از خوشی سماوی تشکیل شده از کوهکشانهای نزدیک بهم می‌باشد، و مصالح تشکیل دهنده آنها، ماده‌ی متحرک دارای بعد زمانی و مکانی است. مفهوم زمان و مکان از نظر فیزیک - فلسفه صفت حرکت ماده و اجسام مادی است؛ یعنی لازمه موجودیت ماده در فضا است. ماده به هر شکلی که باشد، متحرک است؛ این حرکت ماده نسبی است و اگر محسوس و ظاهر باشد ظرفیت آن را «زمان» و اگر نامحسوس باشد، آن را «مکان» نامند. به هر حال، زمان و مکان اولاً نسبی و ثانیاً در رابطه با حرکت اجسام مادی است؛ از این رو، ارسṭو و ارسطوگرایان قدیم زمان را «مقدار حرکت» می‌دانستند. ماده را هم می‌توان دو گونه شمرد. ماده‌ی تشکیل شده از اتمها و مولکولها، و ماده‌ی تشکیل شده از میدانهای انرژی و ذرات زیر اتمی - یعنی ذرات صغار مثل فوتون، الکترون، مزون و گراویتون وغیره. به هر حال زمان و مکان بطور نسبی از صفات لازم ماده متحرک هستند، که بدون درنظر گرفتن آندو، تصور ماده در حال حرکت ناممکن است.

#### ۹- تکاهی به مفهوم نظریه انفجار بزرگ در توجیه مکانیسم جهان

جدیدترین توجه مکانیسم آسمان و تینی حرکت ستاره‌ها و پیدا شکوهکشانها و زمان و مکان، همان نظریه «انفجار بزرگ» یا «بیگ‌بنگ» (Big Bang) است که با موازین فیزیکی تطبیق می‌کند و با معیارهای هندسه پویای فضائی، مبتنی بر منحنی بودن فضا و حرکات، انتقالی دارد. اگرچه بعضی ستاره‌شناسان روسی، چنانکه اشاره خواهد شد، با این نظریه موافق نیستند.

که بشر برای سفر به کرات آماده کرده، که حد اکثر سرعت آنها در حدود هفتاد هزار کیلومتر در ساعت است، به خورشید همسایه نامبرده، که احتمال قوی می‌رود که سیاره سکون و تمدنی مثل زمین داشته باشد، سفر کنیم، دویست سال طول می‌کشد. البته این مدت مطابق نسبت اشتبه نسبت به زمین است، ای سایر انسان آن سفینه کمتر از آن مدت باشد!

چنانکه بالاتر اشاره شد، تاکنون به شعاع دوازده میلیارد سال نوری از روی زمین توسط تلسکوپهای قوی از جهان اطراف ستاره‌شناسان عکس برداری کرده و از راه طیف‌شناسی (تجزیه نورهای رسیده از خورشیدها و کوهکشانها و ...) کیفیت فیزیکی آنها را تا حدودی کلی شناخته و معلوم کرده‌اند که، به قول معروف: «تو هر کجا که روی آسمان همین رنگ است» یعنی فضای شناخته شده از کوهکشانهای پرشماری تشکیل شده و خواص فیزیکی همه آنها همان است که، در هر گوشه‌ای از فضا، چند کوهکشان (از پازدده تا چهل) تقریباً نزدیک به هم قرار دارند و مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که، به آنها «خوشدهای سماوی» گفته می‌شود. میان کوهکشانهای یک خوشة سماوی حداقل حدود ۲۰۰ میلیون سال نوری فاصله وجود دارد! اما میان دو خوشة سماوی کشف شده است، که همه در حال دورشدن از یکدیگرند، و حرکات همه‌ی آنها منحنی و مستدير است؛ زیرا چون اصلاً فضا منحنی و مستدير است، هیچ حرکتی مستقیم نیست. در اینجا مناسب است که به این موضوع نیز اشاره کنیم که، هم چنانکه قبل نیز به آن اشاره شده، هر یک از خورشیدهای کوهکشانها معمولاً دارای یک سیاره است، که از نظر نزدیکی و دوری مدار آن نسبت به خورشیدش، و اندازه حرکت و برودت و شرایط دیگر آن، شبیه به کره زمین است. بنابراین، به عقیده غالب ستاره‌شناسان معاصر در هر یک از صد و پنجاه میلیارد خورشید کوهکشان راه شیری ما، سیاره‌ای مانند زمین ما باید باشد که در آن، شرایط زیستی از آب و هوا و حرارت و برودت مساعد برای تکون و رشد و تکامل حیات و تمدن وجود داشته باشد. بدین ترتیب، در همین کوهکشان در حدود صد و پنجاه میلیارد سیاره شبیه به زمین دارای شرایط زندگی و تمدن موجود است.

بعضی ستاره‌شناسان دقیق و محظوظ و علمی اندیش معاصر، صد و پنجاه میلیارد شبیه زمین در این کوهکشان را، به صد و پنجاه میلیون تقلیل و برخی با احتیاط بسیار آن را به صد و پنجاه هزار کاهش داده‌اند. دکتر ریچارد اس. یانگ رئیس بخش زیست‌شناسی

از این جهت بسیار فشرده و سنگین خواهد بود، مثلاً وزن و حجم مقدار کمی از آن، به اندازه هندوانه گرد متوسط، با یک ستاره بزرگی مساوی می شود. این انقباضها و انبساطها و انفجارها در هستی همیشه بوده و خواهد بود، بنابراین، جهان هستی همیشه بوده و خواهد بود؛ یا در حال انقباض و یا درحال انبساط، یعنی همیشه در تغیر و دگرگونی است؛ بی آغاز و بی انجام است. اما یچو قوت ثابت و ساکن و بی حرکت نیست - هیچ چاره‌ای هم نیست، همین است که هست!

بعضی ستاره‌شناسان روسی - یعنی گروه فسینکف و اتواشمیت و همفکران آنان مثل آ. ماسویچ - با نظریه «انفجار بزرگ» موافق نیستند، چنانکه آ. ماسویچ در کتاب خود «ساختمان خورشید» ترجمه روح الله عباسی، نظر مخالف این گروه مخالف را بیان کرده است.<sup>(۱۲)</sup> در مقابل، ژرژ گاموف در کتاب خود موسوم به «انفجار بزرگ» که به فارسی هم ترجمه شده، آن نظریه را تبیین کرده است.

#### منابع مهم این مقاله به ترتیب شماره‌های متن آن

- 1- تورات فارسی، سفر پیدایش (کتاب آفرینش) باب اول، آیات ۵ تا ۲۸-۲- محمدعلی فروغی: سیر حکمت در اروپا، چاپ تهران ۱۳۴۴، ج ۱، ص ۴۳-۳- برتراندراسل: تاریخ فلسفه غرب، ترجمه نجف دریابندری، چاپ پنجم تهران ۱۳۵۱، ج ۱، ص ۴۳-۴- همان منبع، ص ۴۶-۵- خال الفاخوری: تاریخ فلسفه در جهان اسلامی، ترجمه عبدالمحمد آیینی، چاپ سوم تهران ۱۳۶۷، ص ۴۱۷-۶- سیر حکمت در اروپا، همان، ج ۱، ص ۱۶-۷- همان منبع، ص ۱۳۳-۸- دکتر یوسف فضائی: پیدایش انسان و آغاز شهرنشینی، چاپ دوم تهران ۱۳۵۶، ص ۹-۲۰- سکسی کامبیز و رابرت آن. لذکات: فلسفه علمی، چاپ تهران ۱۳۵۲، ترجمه جمعی از دانشمندان، ج ۲، ص ۴۲۷-۹-۱۵- اوپارین و فنسکوف: پیدایش و انتشارات حیات در عالم، چاپ تهران، ترجمه دکتر نورالدین فرهیخته، ص ۱۱-۱۱- ریچارد. اس. یانگ: حیات در آسمانها، چاپ دوم تهران ۱۳۶۸، ترجمه محمود بهزاد و حمیده غروی، ص ۱۳۴-۱۲- مجله پیام (ماه‌نامه علمی یونسکو)، شماره ۱۹۴ آذرماه ۶۶-۱۳، تحت عنوان «سرگذشت زمین» ص ۱۳-۴- آ. ماسویچ: ساختمان خورشید، ترجمه روح الله عباسی، چاپ تهران ۱۳۴۳، ص ۱۸۵.

در شماره آذرماه ۱۳۶۶ «نشریه پیام» که یک نشریه بین‌المللی علمی یونسکو است و در سطح جهان در ۲۶ زبان زنده دنیا منتشر می شود، و در هر شماره یک موضوع علمی و اجتماعی را مورد بحث قرار می دهد، آقای پروفسور جان گری بین، اختر فیزیکدان انگلیسی استاد دانشگاه ساسکسی انگلستان، آخرین توجیه «نظریه انفجار بزرگ» را بطور بسیار خلاصه چنین بیان کرده است:

«در آغاز هیچ نبود. در حدود ۱۵ میلیارد سال پیش، در انفجار یک گوی بسیار فشرده سنگین آتشین، که انفجار بزرگ (بیگ بنگ) نامیده می شود، فضا، زمان و ماده‌ی جهانی، که در آن زندگی می کنیم، با هم پدید آمدند. پس از انفجار آن گوی فشرده، جهان شروع به گسترش یافتن کرد و همانطور که گسترش می یافت، سرعتی شد و ماده بصورت رقیتری پراکنده می گشت. تا اینکه پس از گذشت میلیونها سال، ابرهای عظیمی از گاز هیدروژن برهم انبوه شدن و سپس، به تدریج با پاره‌پاره شدن و انقباض آن، کهکشانها و ستاره‌ها (خورشیدها) بوجود آمدند. بدین ترتیب، حدود ۱۵ میلیارد سال پیش، کهکشانهای بسیاری مانند راه شیری خودمان، که هر یک از چند میلیارد خورشید تشکیل می شدند، به عنوان واحدهای اساسی جهان، پدید آمدند. در درون هر کهکشان (علی الدوام) ستاره‌ها زاده می شوند (تکون می یابند)، زندگی می کنند و می میرند؛ و همواره آن ستاره‌ها (منظومه‌های خورشیدی) بر مدارهای طولانی خود بر گرد مرکز کهکشان می چرخدند، در حالی که با گسترش پیوسته جهان، کهکشانها خود نیز در حال دور شدن از یکدیگرند...»<sup>(۱۲)</sup>

این گسترش پیوسته جهان و دور شدن کهکشانها از یکدیگر، نتیجه همان نیروی پرتاب اولیه انفجار بزرگ است؛ اما اولاً از سرعت آن به تدریج کم می شود و ثانیاً حرکت آنها مستقیم نیست، بلکه بطور منحنی و مستدير است؛ چنانکه حرکت خورشیدها و همه اجرام آسمانی در فضا منحنی است بنابراین، بطور کلی فضا یعنی قلمرو ماده، منحنی است، یکی از علل آن شاید این باشد که تأثیر نیروی جاذبه کرات در یکدیگر حرکات همه‌ی آنها منحنی گردیده است در چنین شرایطی، گسترش کهکشانها هم منحنی خواهد بود. چون این گسترش و حرکت فرار از مرکز انفجار منحنی است، نهاية این جهان گستردۀ دوباره به همان مرکز انفجار باز خواهد گشت و دوباره پس از انبساط انقباض پیش خواهد آمد، و تبدیل به همان گوی فشرده سنگین قبل از انفجار خواهد شد. در آن گوی اولیه، همه چیز به حالت ارزی خالص است، که فقط از هسته‌اتمها، بدون داشتن فضای خالی میان پروتون و الکترونها، تشکیل می شود

راستی که از نقطه وسط دو قاعده می‌گذرد، ذوزنقه را به دو ذوزنقه برابر و در نتیجه، متشابه تقسیم می‌کند. ولی اگر ذوزنقه متساوی الساقین نباشد، نمی‌توان خط راستی پیدا کرد که با قطع دو قاعده ذوزنقه، آن را به دو چهارضلعی متشابه تقسیم کند (چرا؟).

ج) فرض می‌کنیم پاره خط راست  $NM$ ، ساق‌های ذوزنقه را طوری قطع کرده باشد که داشته باشیم:

$$DN\hat{M} = M\hat{B}A, CM\hat{N} = B\hat{N}A$$

(شکل ۱) که، در صورت متساوی الساقین نبودن ذوزنقه  $ABCD$ ، پاره خط راست  $MN$  با قاعده‌های ذوزنقه غیرموازی است. ثابت می‌کنیم، به شرط

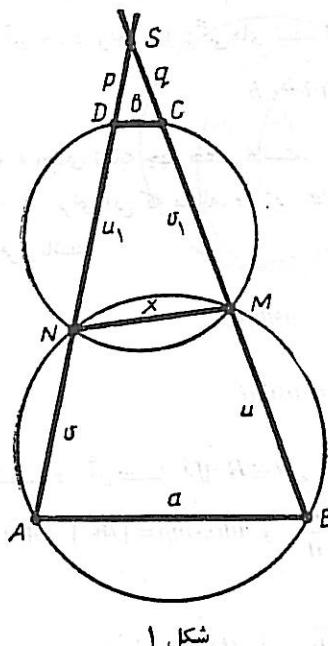
$$|NM| = x = \sqrt{ab}, \text{ چهارضلعی‌های حاصل، متشابه‌اند (}a\text{ و }b\text{ طول‌های دو قاعده ذوزنقه‌اند).}$$

هر یک از چهارضلعی‌های  $NMCD$  و  $ABMN$  قابل محاط در یک دایره‌اند (چرا؟). اگر نقطه برخورد خط‌های راست  $BC$  و  $AD$  را  $S$  و  $T$  نامند،  $|AN| = v$ ،  $|BM| = u$ ،  $|MC| = v_1$ ،  $|ND| = u_1$ ،  $|MS| = p$  و  $|NT| = q$  باشند. همچنین تشابه مثلث‌های  $ABS$  و  $CDS$  نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{x} = \frac{u+v_1+q}{p+u_1} = \frac{v+u_1+p}{q+v_1},$$

$$\frac{x}{b} = \frac{v_1+q}{p} = \frac{u_1+p}{q}$$

$$\text{ولی } \frac{a}{x} = \frac{x}{b}, \text{ بنابراین}$$



شکل ۱

## حل مساله‌ها

مساله‌هایی برای حل (صفحه ۲۵۲ را ببینید)  
۱.۰ الف) قاطع  $g$  را موازی با قاعده‌های  $AB$  و  $CD$  از ذوزنقه  $ABCD$  رسم می‌کنیم. اگر خط راست  $\ell$  ساق‌های  $BC$  و  $DA$  را به ترتیب، در  $M$  و  $N$  قطع کند، آن وقت فرض می‌کنیم:

$$|AB| = a, |CD| = b, |MN| = x$$

روشن است که، در این حالت، برای متشابه بودن دو چهارضلعی  $ABMN$  و  $NMCD$  (که هر دو، به نوبه خود، ذوزنقه‌اند)، باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

ثابت می‌کنیم که این، نه تنها شرط لازم، بلکه در ضمن شرط کافی، برای تشابه دو ذوزنقه‌ای است که از تقسیم ذوزنقه اصلی به دست آمده‌اند. در واقع داریم:

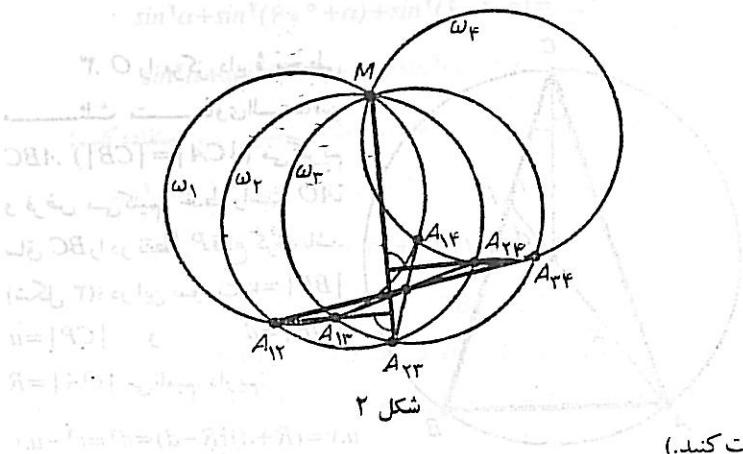
$$|AN| : |ND| = (a, x) : (x, b)$$

(چرا؟)، که اگر  $x = \sqrt{ab}$  بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{|AN|}{|ND|} = \frac{a - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab} - b} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{x}$$

$$\frac{|AN|}{|ND|} = \frac{|AB|}{|NM|} = \frac{|BM|}{|MC|} = \frac{|NM|}{|CD|} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

و این، به معنای متشابه بودن دو چهارضلعی حاصل است.  
ب) اگر ذوزنقه، متساوی الساقین باشد، آن وقت، محور تقارن آن (خط



ثابت کنید).

از این قضیه نتیجه می شود (شکل ۲):

$$MA_{23} \perp A_{12}A_{13} \text{ و } MA_{24} \perp A_{24}A_{34}$$

(برای مثلث های  $A_{21}A_{23}A_{24}$  و  $A_{12}A_{23}A_{24}$ . یعنی، پاره خط های راست  $A_{24}A_{23}$  و  $A_{24}A_{12}$  هم راست استند. به همین ترتیب داریم:

$$MA_{14} \perp A_{12}A_{24} \text{ و } MA_{14} \perp A_{12}A_{34}$$

که از آن جا، هم راستی پاره خط های راست  $A_{24}A_{12}$  و  $A_{34}A_{12}$  نتیجه می شود. بنابراین، چهارضلعی  $A_{12}A_{13}A_{24}A_{23}$  متساوی الاضلاع است و پاره خط های راست  $A_{12}A_{24}$  و  $A_{12}A_{34}$  یکدیگر را نصف می کنند.

به همین ترتیب ثابت می شود که پاره خط های راست  $A_{23}A_{14}$  و  $A_{23}A_{12}$  هم، یکدیگر را نصف می کنند و این، به معنای آن است که سه پاره خط راست  $A_{24}A_{12}A_{13}A_{23}$  از یک نقطه می گذرند و یکدیگر را نصف می کنند. یادآوری که، همه نقطه های  $A_{ik}$  نمی توانند روی یک خط راست باشند، زیرا سه نقطه واقع بر یک خط راست، نمی توانند روی محیط یک دایره قرار گیرند. با وجود این، چهار نقطه و مثلاً نقطه های  $A_{12}A_{23}A_{24}A_{34}$  ممکن است روی یک خط راست باشند. از خواسته می خواهیم، چهار دایره برابر  $w$  را طوری رسم کنند که همه آنها از نقطه  $M$  بگذرند و چهار نقطه مذکور بالا، روی یک خط راست واقع باشند.

$$\frac{u+v_1+q}{p+u_1} = \frac{v+u_1+p}{q+v_1} = \frac{v_1+q}{p} = \frac{u_1+p}{q} = \frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

از آن جا، با توجه به ویژگی های نسبت های برابر به دست می آید:

$$u:u_1 = v:v_1 = ax:x:b$$

که به معنای تشابه چهارضلعی هاست.

برای این که مساله، در این حالت جواب داشته باشد، باید نابرابری های زیر

برقرار باشند:

$$bs\sin\beta < xs\sin\alpha < as\sin\beta$$

$$bs\sin\alpha < xs\sin\beta < as\sin\alpha$$

که در آن ها  $\beta = \hat{ABC}$ ،  $\alpha = \hat{BAD}$ . که اگر به برابری های

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\beta \sin\alpha} = \frac{|BC|}{|AD|}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{|BC|}{|AD|} < \sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{|AD|}{|BC|} < \sqrt{\frac{a}{b}}$$

اگر فرض کنیم  $a < b$  و  $\alpha > \beta$  آن وقت  $|BC| > |AD|$  و از نابرابری های دوم به دست می آید:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{|AD|}{|BC|} < 1$$

که شرط وجود جواب در این حالت است. پاره خط راست  $NM$  را با روش جبری و انتقال موازی می توان ساخت.

۲. از این قضیه استفاده می کنیم:

اگر سه دایره برابر، نقطه مشترک داشته باشند و اگر، دو به دو، یکدیگر را در سه نقطه دیگر قطع کند، آن وقت سه نقطه اخیر، راس های مثلثی را تشکیل می دهند که، نقطه مشترک سه دایره، نقطه برخورد ارتفاع های آن است. (خودتان، این قضیه را

$$\sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha) = \frac{3}{4};$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha) = \frac{9}{8}$$

و برای این منظور، کافی است، از اتحادهای مثلثاتی مشهور زیر استفاده کنیم:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$$

$$\cos \varphi + \cos(120^\circ + \varphi) + \cos(120^\circ - \varphi) = 0$$

۵. ارتفاعهای  $AA'$  و  $BB'$  از مثلث  $ABC$  را رسم کنید؛ روشن است که دایره به قطر  $AB$ ، از نقطه‌های  $A'$  و  $B'$  می‌گذرد. مثلث  $BA'B$  در دایره ای به قطر برابر  $|AB| = c$  محاط شده است، بنابراین، طبق رابطه سینوس‌ها

$$\frac{|AB|}{\sin \hat{B} \hat{B} \hat{A}} = c \Leftrightarrow z = c |\cos \hat{C}|$$

(در واقع  $\hat{B} \hat{B} \hat{A} + \hat{C} = 90^\circ$ ،  $|AB| = z$ )

$$x = a |\cos \hat{A}|, y = b |\cos \hat{B}|$$

به این ترتیب، باید ثابت کنیم:

$$\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} \geq \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} \leq \frac{9}{4}$$

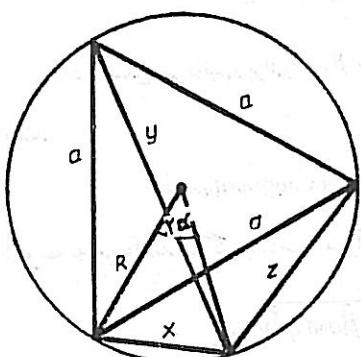
که با توجه به رابطه سینوس‌ها، به نابرابری

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} \leq \frac{9}{4}$$

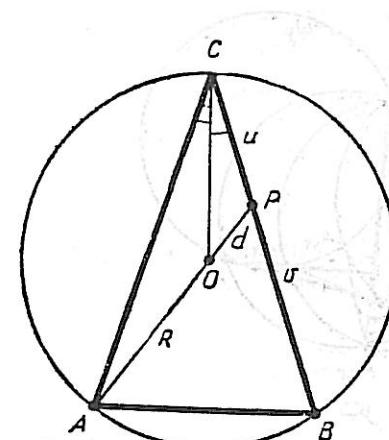
تبديل می‌شود که می‌توان آن را، این طور نوشت:

$$9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$$

و این نابرابری روشن است، زیرا



شکل ۴



شکل ۳

۳.  $O$  را مرکز دایره محیطی مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  فرض می‌کنیم، خط راست  $AO$  ساق  $BC$  را در نقطه  $P$  قطع کرده باشد ( $BP = v$ ). در این صورت  $|OP| = d$  و  $|CP| = u$  می‌نامیم. داریم:  $|OA| = R$

$$u \cdot v = (R+d)(R-d) \Leftrightarrow d^2 = R^2 - u \cdot v$$

از طرف دیگر دو مثلث

$APC$  و  $OPC$  متشابه‌اند (چرا؟) و داریم:

$$(u+v):u = R:d$$

که اگر بین این دو برابری،  $d$  را حذف کنیم، به دست می‌آید:

$$R^2 = \frac{u(u+v)^2}{2u+v}$$

چون پاره‌خطهای راست  $u$  و  $v$  داده شده‌اند، می‌توان پاره خط راست به طول  $R$  را ساخت.

با معلوم بودن شعاع دایره محیطی و مثلث و طول هر یک از ساق‌های آن ( $u+v$ )، رسم مثلث به سادگی انجام می‌گیرد (با شرط  $2R > u+v$ ). مسئله به ازای  $u > v$ ،  $2u > v$ ، یک جواب منحصر دارد.

۴. شعاع دایره محیطی مثلث را  $R$  و زاویه مرکزی روبه روی وتر به طول  $2r$  می‌گیریم (شکل ۴). این برابری‌ها، به سادگی به دست می‌آیند:

$$x = 2Rs \in \alpha, y = 2R s \in (60^\circ + \alpha), z = 2R s \in (60^\circ - \alpha)$$

فرض کرد (ایم). چون  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ، مسئله به اینجا منجر می‌شود که درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنیم:

$$\lg^n \alpha + \lg^n \beta + \lg^n \gamma \geq 3 \sqrt[n]{(\lg \alpha \lg \beta \lg \gamma)^n} \geq 3 (\sqrt[3]{3})^n (1 + \frac{1}{2})^n \geq 3 + \frac{3n}{2}$$

علامت برابری، تنها به ازای  $n = 0$  پیش می‌آید.

۱۷. اگر فاصله بین مرکز دایره محاطی مثلث را  $d$  بنامیم، آن وقت، بنابر قضیه

معروف داریم:

$$d^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}$$

که از آن‌ها، با توجه به غیر منفی بودن  $d^2$  به دست می‌آید:

$$R^2 + r^2 \geq r\sqrt{4R^2 + r^2}$$

اگر دو طرف این نابرابری را مجدد کنیم، سرانجام به نابرابری  $R^2 \geq 2R^2r^2$  و، بالاخره  $R \geq R\sqrt{2r^2}$  می‌رسیم.

۸. عبارت سمت چپ معادله را، به این ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^6 - 5x^3 + 5x - 1 &= (x^3 - 1) - 5(x^3 - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1) = \\ &= \frac{1}{4}(x - 1)((4x^4 + 4x^3 + x^2) - 6(2x^2 + x) + 9 - 5(x^4 + 2x + 1)) = \\ &= \frac{1}{4}(x - 1)((2x^4 + x^2 - 5(x^4 + 2x + 1))^2) \end{aligned}$$

پاسخ. ریشه‌های معادله چنین اند (۵ ریشه):

$$x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}),$$

$$x_{4,5} = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{30 - 6\sqrt{5}})$$

۹. ثابت می‌کنیم، چهار تفاضل برابر، حتی برای تفاضل‌های  $a_i - a_{i+1}$  هم وجود دارد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم، حداقل تعداد تفاضل‌های مساوی، برابر ۳ باشد. ۱۰. تفاضل می‌توان تشکیل داد:

$$a_2 - a_1, a_{19} - a_{18}, \dots, a_{2k} - a_1$$

$$\frac{a}{x} = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = |OH|^2$$

که در آن،  $O$  مرکز دایره محیطی و  $H$  نقطه برخورد ارتفاع‌های مثلث است. علامت برابری، برای وقتی است که  $O$  و  $H$  هم منطبق باشند، یعنی برای مثلث متساوی‌الاضلاع.

یادداشت. اگر از نابرابری معلوم  $\cos A \cos B \cos C < \frac{1}{8}$  استفاده کنیم،

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} \text{را هم پیدا کنیم. در واقع}$$

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} >$$

$$\geq \frac{3}{\sqrt{(C \hat{A} \cos B \cos C)}} \geq \frac{3}{\sqrt{\frac{1}{8}}} = 12$$

علامت برابری، برای  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = 2$ ، یعنی برای مثلث متساوی‌الاضلاع پیش می‌آید.

۱۱. اگر  $p, q$  و  $r$  را عددهایی غیر منفی و  $n$  را عددی طبیعی فرض کنیم، بنابر

رابطه بین واسطه‌ها داریم:

$$\sqrt[3]{pqr} \leq \frac{p+q+r}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{p^n+q^n+r^n}{3}}$$

در ضمن می‌دانیم، برای  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  زاویه‌های یک مثلث، این اتحاد برقرار

است:

$$\cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha = 1$$

با توجه به این‌ها، به سادگی به دست می‌آید:

$$\sqrt{\cot \alpha \cot \beta \cot \gamma} \leq \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\lg \alpha \lg \beta \lg \gamma} \geq \sqrt{3}$$

و یا

از طرف دیگر داریم:

از ترازو استفاده کنیم تا سکه تقلیب شناخته شود.  
 $N$  سکه را به سه بخش تقسیم می کنیم، به نحوی که در دو بخش برابر به تعداد  $3^{k-1}$  (یا کمتر) سکه و در بخش سوم، حداقل  $3^{k-1}$  سکه وجود داشته باشد.  
 با قرار دادن دو بخش برابر سکه ها، در دو کفه ترازو، معلوم می شود که جای سکه تقلیبی در بخش سوم است و اگر هم وزن نباشد، در بخشی است که سنگین تر شده است). بخش شامل سکه تقلیبی، حداقل  $3^{k-1}$  سکه دارد و، بنابر فرض استقرای با  $k-1$  بار استفاده از ترازو، می توان سکه تقلیبی را شناخت. استدلال استقرایی کامل شد.  
 ۱۲. راه حل اول. (استفاده از استقرای ریاضی). ابتدا ثابت می کنیم، حکم مساله، برای  $n=2$  درست است، یعنی داریم:

$$D(m(a_1, a_2), l) = m(D(a_1, l), D(a_2, l))$$

فرض می کنیم:

$$D(a_1, a_2) = \alpha, D(l, l \frac{a_1}{\alpha}, l \frac{a_2}{\alpha}) = \beta$$

و

$$D(l \frac{a_1}{\alpha}, l) = \gamma, D(l \frac{a_2}{\alpha}, l) = \delta$$

روشن است که

$$D(\beta, \gamma) = D(\beta, \delta) = D(\gamma, \delta) = 1$$

بنابراین

$$a_1 \beta = \alpha \gamma \lambda; a_2 = \alpha \beta \delta \mu, l = \alpha \beta \delta \xi$$

که در آنها،  $\lambda, \mu, \xi$  عدهایی درست و، دو به دو، نسبت به هم اولاند.

به این ترتیب داریم:

$$D(m(a_1, a_2), l) = D((\alpha \beta \gamma \lambda \delta \mu), l \gamma) = \alpha \delta,$$

و

$$m(D(a_1, l), D(a_2, l)) = m(\alpha \gamma, \alpha \delta) = \alpha \gamma \delta$$

حداقل این تفاضل ها برابر واحد است (زیرا  $a_i$ ها عدهای درست و مثبتاند). با توجه به فرض ما، از این  $1^9$  تفاضل، سه تفاضل برابر  $1$ ، سه تفاضل برابر  $2$ ،  $\dots$ ، سه تفاضل، برابر  $6$  و یک تفاضل برابر  $7$  می تواند باشد. در ضمن،  $1 \leq a_1 \leq 3^{k-1}$  بنابراین

$$\begin{aligned} a_{2^0} &= (a_{2^0} - a_{1^9}) + (a_{1^9} - a_{1^8}) + \dots + (a_{1^1} - a_1) + 1 \geq \\ &\geq 1 + 3(1 + 2 + \dots + 6) + 7 = 71 \end{aligned}$$

و این نتیجه، فرض مساله را، مبنی بر این که  $a_1 \leq 3^{k-1}$  کوچکتر است، نقض می کند.  
 ۱۰. می دانیم:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(چرا؟)، یعنی

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

اکنون به سادگی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \sum_{k=1}^n k(n-k+1) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k(k+1) = \\ &= n \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n (k-1)k - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k(k+1) = \\ &= n \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3} - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 0. \end{aligned}$$

یعنی  $S_1 = S_2$ .

۱۱. اثبات را با روش استقرای ریاضی می دهیم.

(۱) برای  $n=1$  حکم مساله درست است، زیرا وقتی  $N=3$  باشد، می توانیم دو سکه را در دو کفه ترازو قرار دهیم، اگر هم وزن نباشد، سکه سوم تقلیبی است و اگر هم وزن نباشد، آن که سنگین تر است، تقلیبی است.

(۲) اکنون فرض می کنیم، حکم مساله، برای  $N_{k-1} \leq 3^{k-2}$  درست باشد، یعنی اگر داشته باشیم:  $N_{k-1} \leq 3^{k-2}$ ، بتوان با  $1$ -بار استفاده از ترازو، سکه تقلیبی را پیدا کرد و، ثابت می کنیم، در این صورت، برای  $N_k$  سکه ( $N_k \leq 3^k$ )، کافی است  $k$  بار

۱۳. دو طرف معادله را، بر  $\frac{1+a^2}{2a}$  تقسیم می کنیم، به معادله زیر، که هم ارز معادله اصلی است، می رسیم:

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x = 1$$

$$\text{اگر فرض کنیم } \frac{1-a^2}{1+a^2} = \sin z, \frac{2a}{1+a^2} = \cos z, \text{ معادله اخیر به صورت} \\ (\sin z)^x + (\cos z)^x = 1$$

در می آید. چون  $\frac{\pi}{2} < z < \pi$  (که با توجه به شرط  $a > 0$  به دست می آید)، نتیجه می گیریم که تابع واقع در سمت چپ معادله اخیر، تابعی یکنوا و نزولی است و، بنابراین، هر مقداری را حداقل یکبار می تواند قبول کند. ولی به ازای  $z=2\pi$  این تابع برابر واحد می شود، یعنی  $2\pi$  تنها ریشه معادله است.

۱۴. این معادله، هم ارز است با معادله زیر (از درجه  $n-1$ ):

$$f(x) = A_1(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) + \dots + A_n(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1}) = 0$$

بدون این که به کلی بودن راه حل لطمہ ای وارد آید، می توان فرض کرد:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

به سادگی می توان تحقیق کرد که  $f(a_i)$  علامت های متفاوتی دارند و، بنابراین، در هر بازه  $(a_i, a_{i+1})$ ، برای  $i=1, 2, \dots, n-1$ ، یکی از ریشه های معادله واقع است. اگر حتی در یکی از بازه ها، بیش از یک ریشه وجود داشته باشد، آن وقت تعداد ریشه های معادله مفروض، از  $n-1$  تجاوز می کند که ممکن نیست. به این ترتیب، معادله مفروض، دارای  $n-1$  ریشه حقیقی است.

۱۵. (الف) اگر از نابرابری اتحادی

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

درباره عبارت  $\sqrt{a^2 + b^2}$  استفاده کنیم، بدست می آید:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-m)^2 + n^2 - m^2} + \sqrt{(p-x)^2 + q^2 - p^2} \geq \\ & \geq \sqrt{(x-m+p-x)^2} + (\sqrt{n^2 - m^2} + \sqrt{q^2 - p^2}) \end{aligned}$$

و حکم مساله، برای  $n=2$  درست است.

اگرون فرض می کنیم، حکم مساله، برای  $n=k$  درست باشد، یعنی داشته باشیم:

$$D(m(a_1, a_2, \dots, a_k), l) D(a_1, l), \dots, D(a_k, l)$$

و ثابت می کنیم که، در این صورت، برای  $n=k+1$  هم درست است، در واقع، با توجه به ویژگی های  $D$  و  $m$  داریم:

$$\begin{aligned} D(m(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}), l) &= D(m(m(a_1, a_2, \dots, a_k), l), a_{k+1}), l) = \\ &= m(D(m(a_1, a_2, \dots, a_k), l), D(a_{k+1}, l)) = m(m(D(a_1, l), D(a_2, l), \dots, D(a_k, l)), \\ &\quad D(a_{k+1}, l)) = m(D(a_1, l), \dots, D(a_{k+1}, l)) \end{aligned}$$

درستی حکم مساله، برای هر  $n$  ثابت باشد.

راه حل دوم، هر عدد درست  $n$  را می توان به صورت

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$$

نوشت که در آن،  $p_i$  عددی اول و  $\alpha_i$  عددی طبیعی است. به هر عدد  $N \geq 2$ ، مجموعه  $\bar{N}$  را متناظر می کنیم که، عضوهای آن، عبارتند از اعدادهای اول  $p_i$  که  $\alpha_i$  مرتبه انتخاب شده باشند. عبور از مجموعه  $\bar{N}$  به عدد  $N$  را بانماد نشان می دهیم، یعنی فرض می کنیم:  $f(\bar{N}) = N$  روش است که

$$f(\bar{A} + \bar{B}) = m(A, B) ; f(\bar{A} \cdot \bar{B}) = D(A, B)$$

که در آن ها، منظور  $\bar{A} + \bar{B}$  اجتماع و منظور  $\bar{A} \cdot \bar{B}$  اشتراک دو مجموعه  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  است. از آن جا که، برای مجموعه های  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  داریم:

$$(\sum_{i=1}^n \bar{a}_i) \cdot \bar{l} = \sum_{i=1}^n (\bar{a}_i \cdot \bar{l})$$

$$f\left\{ \left( \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \right) \cdot \bar{l} \right\} = f\left\{ \sum_{i=1}^n (\bar{a}_i \cdot \bar{l}) \right\}$$

$$D(m(a_1, a_2, \dots, a_n), l) = m(D(a_1, l), D(a_2, l), \dots, D(a_n, l))$$

زوج، فرد، فرد، فرد

در مرحله اول عمل به دست می آید:

## فرد، فرد، زوج، زوج

در مرحله دوم:

فرد، زوج، فرد، زوج

در مرحله سوم:

فرد، فرد، فرد

و در مرحله چهارم:

## زوج، زوج، زوج، زوج

برای همه حالت‌های ممکن دیگر هم، می‌توان به همین ترتیب قائم شد. به این ترتیب، برای مرحله‌ای مثل  $N_i \geq M_i$ ، در آن  $N_i$  عدد درستی است. اگر همین استدلال را ادامه دهیم، به ترتیب، به دست می‌آید:

$$M_9 \geq 2^m N_{i_1}, M_9 \geq 2^m N_{i_2}, \dots$$

اگر  $-5$  را بخش درست عدد  $M$  بگیریم، آن وقت  $M > 2^5$  و از نابرابری  $M \geq 2^5 N_{i_5}$  نتیجه می شود:  $N_{i_5} = 0$ ،  $a_{i_5} = b_{i_5} = c_{i_5} = d_{i_5} = 0$  یعنی  $i_5$  عددی که محدود، کاما باشد، تنها تواند به  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  ختم ۱۷

شود. در ضمن روشن است که مجازور یک عدد بر ۴ بخش پذیر است و در تقسیم مجازور یک عدد فرد بر ۴، به باقی ماندهای برابر واحد می‌رسیم. چون عده‌های ۱۱، ۵۵، ۶۶، ۹۹، در تقسیم بر ۴، به ترتیب، باقی ماندهای برابر ۳، ۲، ۳ و ۳ به دست می‌آید، بنابراین عدد مجهول  $N^2$  تنها می‌تواند به صورت  $4k+1$  باشد. به این ترتیب  $N$  عدد زوج است:  $N=2M$ ، یعنی  $11=M^2=25k+1$  برابری اخیر را می‌توان این طور نوشت:

$$(M-\varepsilon)(M+\varepsilon) = \mathbb{1}_D(s_{-1})$$

چون عدهای  $M+6$  و  $M-6$  که تفاضلی برابر ۱۲ دارند، نمی‌توانند هم زمان بر ۵ بخش پذیر باشند، بنابراین یا  $M-6$  بر ۲۵ بخش پذیر است و یا  $M+6$  یعنی

$$M = 2\Delta t \pm \varepsilon, \quad (t \in \mathbb{Z})$$

١٦١

$$y_{min} = \sqrt{(p-m)^2 + (\sqrt{-n^2 - m^2} + \sqrt{q^2 - p^2})^2}$$

و لاإ وقتی به این مقدار می نیم می رسد که هر ریشه معادله زیر باشد:

$$\frac{x-m}{p-x} = \frac{\sqrt{n^r - m^r}}{\sqrt{q^r - p^r}}$$

ب) در اینجا، از این برابری اتحادی استفاده می‌کیم:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_r^2 + b_r^2} \leq \sqrt{(a_1 - a_r)^2 + (b_1 - b_r)^2}$$

که در این صورت خواهیم داشت:

$$\sqrt{(x+m)^r + n^r - m^r} - \sqrt{(x-p)^r + q^r - p^r} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x+m+p-x)^r} + (\sqrt{n^r - m^r} - \sqrt{q^r - p^r})^r$$

$$y_{max} = \sqrt{(m+p)^r + (\sqrt{n^r - m^r} - \sqrt{q^r - p^r})^r}$$

لاوقتی به حد اکثر مقدار خود می‌رسد که نهاد رئیسه‌ای بن معادله باشد:

$$\frac{x+m}{x-p} = \frac{\sqrt{n^r - m^r}}{\sqrt{q^r - p^r}}$$

در این حالت، می‌توان شرط را محدود به  $|m| > |n| > |p| > |q|$  کرد.  
 ۱۶. بدون این که به کلی بودن مساله لطمehای وارد شود، می‌توان این عددhارا،  
 غیرمنفی فرض کرد. بین عددhار  $a_i, b_i, c_i, d_i$ ، آن را که از هر یک از بقیه کوچکتر  
 نیست،  $M_1$  نامیم. روش است که

$$M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \dots$$

اگر همه عدهای مفروض زوج باشند، آن وقت  $M = 2N$  که، در آن،  $N$  عددی درست است. اگر هم، در بین عدهای مفروض، عدد یا عدهای فرد وجود داشته باشد، اگر عملی را که در صورت مساله گفته شده است، چند بار انجام دهیم، سرانجام به چهار عدد زوج می‌رسیم. در واقع، فرض کنید، مثلاً در بین چهار عدد مفروض، سه عدد فرد و یک عدد زوج وجود داشته باشد، به این ردیف:

Reconciliation With Mathematics  
 Editor: Parviz Shahryari  
 Address: Tehran, Firdaus  
 Vol XV, No. 3, Serial No. 69, 1992

\*

All correspondence to the editor  
 from outside Iran can be  
 addressed to:

Shahriar Shahriari,  
 Department of Mathematics,  
 Pomona College,  
 Claremont, CA 91711,  
 USA

و عدد مورد نظر به صورت زیر در می‌آید:

$$N^2 = (501 \pm 12)^2, \quad (i \in \mathbb{Z})$$

با آزمایش هم معلوم می‌شود که عدد  $N^2$ ، به ازای هر عدد درست با شرط‌های مساله سازگار است.

۱۸. معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$2(\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x}) = (p+x) - (p-x)$$

با توجه به شرط  $0 < x \leq p$  ریشه معادله نیست و، دو طرف معادله را، می‌توانیم بر تقسیم کنیم که، در نتیجه، به دست می‌آید:

$$\sqrt{p+x} - \sqrt{p-x} = 2$$

اگر دو طرف این معادله را مجذور کنیم، بعد از عملهای ساده، سرانجام ریشه معادله چنین می‌شود:

$$x = 2\sqrt{p-1}, \quad (p \geq 1)$$

معادله، به ازای  $x > p$  جواب ندارد. چون تبدیل‌ها، هم ارزی نبود، باید جواب را در معادله آزمایش کنیم. جواب حاصل را به جای  $x$  در سمت چپ معادله اصلی می‌گذاریم، به دست می‌آید:

$$\sqrt{p+2\sqrt{p-1}} + \sqrt{p-2\sqrt{p-1}} = |\sqrt{p-1} + 1| + |\sqrt{p-1} - 1| = \begin{cases} 2 & (x < 2) \\ 2\sqrt{p-1} & (x \geq 2) \end{cases}$$

پاسخ. معادله به ازای  $x > p$  جواب ندارد و، به ازای  $x \geq 2$  داریم:

$$x = 2\sqrt{p-1}$$