آشنایی با ریاضیات (جلد سی و ششم)
ویراستار: پرویز شهریاری
امورفنی: حسن نیک‌بخت
ناشر: نشر توسعه
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
چاپ اول: تابستان ۱۳۷۱
حروفچینی: مهدی
چاپ و صحافی: رامین

فهرست جلد سی و ششم

ابونصر فارابی	پرویز شهریاری	۱۲۹
مساله‌های مسابقه‌ای	—	۱۴۳
جزیی از یك پاره خط ...	—	۱۴۶
معادله‌های خطی، نابرابری‌ها و نامعادله‌ها	—	۱۴۷
تبدیل بعضی رادیکالهای مرکب	—	۱۸۱
از مجله‌های ریاضی خودمان	—	۱۸۶
محاسبهٔ یك حد	محمدرضا هاشمی موسوی	۱۹۵
هیچ‌چیز و همه‌چیز	ترجمهٔ هرمز شهریاری	۱۹۷
اسقاط اضافه	غلامرضا یاسی‌پور	۲۱۲
تجلی نقوش هندسی در سفال میبد	جابر عناصری	۲۱۸
حل مساله‌ها	—	۲۲۳

۶۰۰ ریال

جلد

سی و ششم

آشنائی با ریاضیات

شهریورماه ۱۳۷۱

آشنایی با ریاضیات (جلد سی و ششم)
ویراستار: پرویز شهریاری
امورفنی: حسن نیک‌بخت
ناشر: نشر توسعه
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
حروفچینی: مهدی
چاپ اول: تابستان ۱۳۷۱
چاپ و صحافی: رامین

فهرست جلد سی و ششم

ابونصر فارابی	پرویز شهریاری	۱۲۹
مسأله‌های مسابقه‌ای	—	۱۴۳
جزیی از یك پاره خط ...	—	۱۴۶
معادله‌های خطی، نابرابری‌ها و نامعادله‌ها	—	۱۴۷
تبدیل بعضی رادیکالهای مرکب	—	۱۸۱
از مجله‌های ریاضی خودمان	—	۱۸۶
محاسبهٔ یك حد	محمدرضا هاشمی موسوی	۱۹۵
هیچ‌چیز و همه‌چیز	ترجمهٔ هرمز شهریاری	۱۹۷
اسقاط اضافه	غلامرضا یاسی‌پور	۲۱۲
تجلی نقوش هندسی در سفال میبد	جابر عناصری	۲۱۸
حل مسأله‌ها	—	۲۲۳

۶۰۰ ریال

ابونصر فارابی

فیلسوف، دانشمند، مربی و روش‌شناس

(۲۵۹-۳۳۹ هجری قمری؛ ۸۷۰-۹۵۰ میلادی)

۱- زمان فارابی

۱. اروپای غربی

اروپای غربی پایان سدهٔ نهم و تمامی سدهٔ دهم میلادی، دوران پراکندگی سیاسی، تجزیهٔ حکومت‌های بزرگ، پیدایش واحدهای خودمختار فئودالی و دوران جنگ و ستیزهای مستمر و طولانی است. امپراطوری فرانک (شارلمانی) از هم می‌پاشید و فرانسه (یعنی، قدرتمندترین حکومت زمان)، به واحدهای جداگانهٔ کنت‌نشین و دوک‌نشین تقسیم می‌شد که، هرکدام، در منطقهٔ محدودی از قلمرو خود با «واسال‌ها» و «شوالیه‌ها» و نیروی نظامی خاص خود، با محدوده‌های فئودال‌نشین مجاور خود، در جنگ و دفاع دائمی به‌سر می‌برد. نظام ارباب و رعیتی (فئودالیسم)، به معنای کلاسیک خود، شکل می‌گرفت و، به‌تدریج، دهقانان آزاد به «سرف»ها، یعنی دهقانان وابسته به زمین، تبدیل می‌شدند، به‌نحوی که اختیار کار، زندگی و خانوادهٔ آن‌ها، در دست واسال‌ها و، از طریق آن‌ها، در دست کُنت بزرگ (یعنی بزرگترین فئودال منطقه) قرار داشت. در اقتصاد بسته و محدود فئودالی، مردم هر کُنت‌نشین، به سه گروه تقسیم می‌شدند: آنان که می‌جنگند (واسال‌ها و شوالیه‌های آن‌ها و، در صورت لزوم، دهقانان که به زور و برای حفظ منافع اربابان، به میدان جنگ کشانده می‌شدند)، آنان که دعا می‌کنند (اسقف‌ها، کشیش‌ها و خادمان کلیسا) و آنان که تولید می‌کنند (سرف‌ها: دهقانان و پیشه‌وران، که هیچ حقی، حتی نسبت به زندگی خود و خانوادهٔ خود نداشتند).

از طرف دیگر، تمامی اروپای مرکزی، غربی و جنوب غربی، درگیر حمله‌های

دائمی عرب‌ها، مجارها و نُرمان‌ها بود. به‌خصوص نُرمان‌ها (یعنی مردم شمال) و اغلب به سرکردگی وایکینگ‌ها (یعنی پادشاهان دریا)، بسیار ویران‌گر و خونریز بودند، همه جا را غارت و ویران می‌کردند و مردان و زنان را به اسارت می‌گرفتند و، در بسیاری موردها، از حمایت سرف‌های محلی، یعنی فقیرترین و بی‌حق قشر به جان آمدهٔ جامعه، برخوردار بودند. و طبیعی است که در چنین شرایطی، مجالی برای پرداختن به دانش، وجود نداشت.

تنها در انگلستان و اسپانیا، نسبت به سایر جاها، اندک تفاوتی دیده می‌شد. انگلستان، به یاری «آلفرد» و جانشینانش، وحدت خود را بازیافت و دانش، با تشویق و یاری «آلفرد»، و البته نه چندان چشم‌گیر، مورد توجه قرار گرفت. در اسپانیا هم، با روی کارآمدن عبدالرحمان سوم، خلیفه هشتم اُموی، مرکز علمی قرطبه حرکتی پیدا کرد و مقدمهٔ شکوفائی بعدی فراهم شد.

درواقع، از ابتدای سدهٔ پنجم میلادی تا آغاز سدهٔ هفدهم، تقریباً هیچ مطلب اساسی به‌دانش و ازجمله دانش ریاضی اروپا، اضافه نشد، حتی ارثیهٔ گرانبهای علمی یونان و اسکندریه هم از یادها رفت. از زمانی که «هیپاتی» (۳۷۰- ۴۱۵ میلادی)، دختر ریاضی‌دان «تئون» اسکندرانی، با تکفیر «اسقف کیریل» (که به خاطر قدرت بیان علمی و فلسفی هیپاتی و علاقهٔ مردم به کلاس‌های او، او را جادوگر خوانده بود)، در بهار سال ۴۱۵ میلادی، در یکی از خیابان‌های اسکندریه و وقتی که از کلاس درس بازمی‌گشت، به دست مردم نادان تکه‌تکه و جسدش سوزانده شد، آخرین جرقه‌های دانش غرب خاموش شد. تنها در سدهٔ چهاردهم میلادی و در سال ۱۳۸۸ بود که، در پاریس، آموزش هندسهٔ اقلیدسی، آن هم به صورتی محدود، از طرف کلیسا مجاز دانسته شد. ولی حتی در پایان سدهٔ شانزدهم میلادی، هنوز دستگاه‌های تفتیش عقاید، سرنوشت مردم و، از آن جمله، دانشمندان را تعیین می‌کردند. فرانسوا ویت (۱۵۴۰ - ۱۶۰۳)، ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی را، که در پیشرفت جبر سهم زیادی دارد می‌شناسیم. او با ذهن هوشیار خود، توانسته بود نامهٔ فرماندهی سپاه اسپانیا را (در جنگی که اسپانیا و فرانسه، درگیر آن بودند) کشف رمز کند. محکمهٔ تفتیش عقاید ـ که همیشه از ویت متنفر بود ـ به این بهانه که او جادوگر است و با احضار شیطان توانسته است رمز نامه را پیدا کند، او را محکوم به مرگ کرد، و ویت، تنها به این دلیل از مرگ نجات یافت که او را تحویل جلادان ندادند.

کوتاه سخن: در سده‌های نهم و دهم میلادی (سوم و چهارم هجری قمری)، در

غرب، هیچ خبری از دانشمند و فیلسوف نبود و، دانش و فلسفه، دوران رکود کامل خود را می‌گذراند.

۲. آسیای شرقی و جنوبی

از سه مرکز تمدن آسیا ـ ژاپن، چین و هند ـ ژاپن و هند در سده‌های نهم و دهم، در دوران فترت علمی به‌سر می‌بردند و تنها در چین بود که اندک حرکتی ـ آن هم بیشتر در زمینهٔ تکنیکی ـ دیده می‌شد.

امپراطوری «تانک»، که در سال ۶۱۸ میلادی به دست «کائوتسو» بنیان گذاشته شده بود، تا سدهٔ دهم میلادی به حیات خود ادامه داد (در آن زمان، خود چین را، «امپراطوری تانک» می‌نامیدند)؛ ولی سرانجام، در اثر قیام‌های بزرگ دهقانی، قدرت خود را از دست داد و مضمحل شد: قیامی به سرکردگی «هوانک چائو» که دهقانان بسیاری را دربرگرفت، و حتی موفق شد پای تخت را تسخیر کند، امپراطور را فراری دهد، تمام امکان‌های شهر را بین بی‌چیزان تقسیم کند و، حکومت آن‌جا را، دو سال و نیم در دست داشته باشد. با متلاشی‌شدن امپراطوری تانک، نوبت به امپراطوری «سونک» رسید (۹۶۰ میلادی) که، به نوبهٔ خود، به‌طور دائم، با قبیله‌های کوچ‌نشین شمالی در جنگ و ستیز بود.

چین، از گذشته‌ای دور، مرکز دانش و هنر بوده است. باروت، قطب‌نما، کاغذ و چاپ را، چینی‌ها اختراع کردند (صنعت چاپ، چند سده بعد، دوباره در اروپا اختراع شد). در سدهٔ هشتم میلادی، به دستور امپراطور تانک، نخستین روزنامهٔ جهان، به نام «پیک پای‌تخت» چاپ می‌شد که انتشار آن، تا نزدیک به هزار سال بعد ادامه داشت و، در آن، فرمان‌های امپراطور و برخی خبرهای دیگر را چاپ می‌کردند. در زمان امپراطوری تانک، «فرهنگستان خاقانی» تأسیس شد که تا همین اواخر پابرجا بود. مدرسه‌ها و دانشگاه‌ها و کتاب‌خانه‌های بزرگ تأسیس شد و حتی مرکزهایی برای «تعلیم روش‌های کشاورزی» پدید آمد.

چینی‌ها، علاوه بر صنعت، در زمینه‌های مختلف هنر (نقاشی، پیکرتراشی، معماری، موسیقی و تئاتر) هم، بسیار پیش رفته بودند. نخستین کلاس‌های تربیت هنرپیشه، جنب دربار امپراطوری تانک تشکیل شد. دو شاعر معروف و بزرگ چینی ـ «کی ـ پو» و «تو ـ فو» ـ در همین عهد زندگی می‌کرده‌اند و...

به این ترتیب، اگر از خاورمیانه و نزدیک بگذریم، در سده‌های نهم و دهم

میلادی، چین سرآمد جهان آن روز در زمینهٔ دانش (به‌ویژه صنعت) و هنر بود.

۳. ایران

شاید اگر عنوان این بند را «خاورمیانه و نزدیک» می‌گذاشتیم، منطقی‌تر به‌نظر می‌آمد. ولی، از آن جا که مرکز ثقل فرهنگ، تمدن و دانش آن زمان، ایران بود و بزرگترین دانشمندان و صاحبان فرهنگ آن زمان، از سرزمین‌هایی برخاسته‌اند که زیرنفوذ تمدن و فرهنگ ایران بوده‌اند، عنوان «ایران» را مناسب‌تر دیدیم. البته، دانشمندان این زمان ـ از هر قوم و ملیتی ـ اغلب به زبان عربی، که زبان علمی زمان بود، می‌نوشتند؛ کتاب‌هایی که به زبان عربی نوشته می‌شد، حتی در اروپای غربی خریدار داشت، چراکه اعتماد همگان به نوشته‌های علمی عربی‌زبان جلب شده بود.

سده‌های نهم و دهم میلادی، در این منطقه از جهان، با دو ویژگی همراه بود، خردگرائی و تلاش برای کسب استقلال ملی و فرهنگی.

اندیشه‌های فلسفی و به‌ویژه عقل‌گرائی معتزله، حتی در بین اندیشمندان یهودی هم نفوذ کرده و موجب پدید آمدن «قرائیه» شده بود. در بین نمایندگان این مکتب، می‌توان از داوود پسر مروان ـ که به پدر فلسفه یهود مشهور است ـ قرقسانی ـ که در استفاده از روش‌های علمی برای بحث‌های دینی اصرار داشت و معتقد بود که «ایمان باید بر دانش متکی باشد» ـ و سعدیا فرزند یوسف ـ که در جهت آشتی دادن علم و دین تلاش می‌کرد ـ نام برد که، البته، بیشتر کتاب‌های خود را به زبان عربی، و نه عبری، می‌نوشتند.

به‌خصوص در ایران، تلاش‌هایی که در سده‌های دوم و سوم هجری قمری در جهت استقلال ملی و فرهنگی انجام گرفته بود، به ثمر می‌نشست. به جز بخشی از ایران که زیر سلطهٔ غزنویان بود، در دیگر سرزمین‌های ایرانی، سامانیان، آل‌بویه و آل‌زیار حکومت می‌کردند که خود ایرانی بودند و هوادار فرهنگ و سنت‌های ایرانی. حتی غزنویان هم، تحت تاثیر شرایط زمان، تا حد زیادی مبلغ فرهنگ ایرانی بودند.

تعصب‌ها، به جز در قلمرو غزنویان، فروکش کرده بود و به همین مناسبت، زمینه‌های لازم برای رشد و شکوفائی دانش و فلسفه فراهم می‌آمد. کتاب خانه‌های بزرگ در ری و بخارا و شیراز و جاهای دیگر بنیان می‌گرفت. کتاب فروشی‌ها در هر بازار و بازارچه‌ای وجود داشتند. کتاب فروش را وراق و کتاب فروشان را وراقان

می‌گفتند. محل کسب کتاب‌فروشان، مرکزی برای اجتماع و دیدار اهل علم و فلسفه شده بود؛ صاحبان فرهنگ در کتاب فروشی‌ها جمع می‌شدند، با هم بحث می‌کردند و با دیدگاه‌های یکدیگر آشنا می‌شدند. در واقع، هر کتاب فروشی، نقش یک «مکتب» و یک «کلاس» را به عهده داشت. نسخه‌برداری از کتاب‌ها و آماده‌کردن آن‌ها برای فروش، به صورت حرفه‌ای درآمده بود.

زبان فارسی احیا می‌شد و دوران، دوران شاعران پارسی گوی بزرگی چون رودکی، شهید بلخی و ابوشکور بلخی بود و تا ظهور دقیقی و فردوسی سال‌های زیادی نمانده بود. اگر زمانی «کلیله و دمنه»، به وسیلهٔ دادبه پارسی از پهلوی به عربی ترجمه شده بود، اکنون با بیان شیرین رودکی به شعر فارسی در می‌آمد که

هر که نامخت از گذشت روزگار
نیز ناموزد ز هیچ آموزگار

دریغ که از کلیله و دمنه منظوم رودکی، جز چند بیتی به ما نرسیده است.

سده‌های نهم و دهم میلادی، دوران طبری مورخ، مسعودی جهان‌گرد، جغرافی‌دان ومورخ (که یک معتزلی معتقد بود) و احمد سهل بلخی صاحب «صورالاقالیم» است و در واقع، هر اطلاعی که امروز از جغرافیا و احوال مردم آن زمان داریم، در اساس از مسعودی و بلخی و طبری است.

سده‌های نهم و دهم میلادی، دوران دانشمندان و فیلسوفان بزرگی چون زکریای رازی، فارابی، بیرونی، ابن‌سینا، ابوالوفا، بهمنیار، ابونصر عراق و فعالیت «اخوان‌الصفا» است.

۲ ـ فارابی

۱. زندگی، فعالیت‌ها و دیدگاه‌های فارابی

از زندگی خصوصی فارابی، چیز زیادی نمی‌دانیم جز این که: در فاراب ماوراءالنهر (دقیق‌تر، در قریه، «وسیج» فاراب در کنار رود سیحون و واقع در جنوب جمهوری قزاقستان)، در سال ۲۵۹ یا ۲۶۰ هجری قمری، در خانوادهٔ یکی از سرداران سپاه سامانی به دنیا آمد؛ در همان جا درس خواند و به احتمالی، نزد یوحنا فرزند حیلان مسیحی ـ که در مرو زندگی می‌کرد و با فلسفه نوافلاطونی فیلسوفان اسکندرانی آشنا بود ـ با فلسفهٔ نوافلاطونی، آشنا شد؛ سپس، برای تکمیل تحصیل خود

به بغداد رفت و در آن جا ضمن فراگیری زبان عربی، نزد همان استاد قبلی خود یوحنا (که او هم، از مرو به بغداد آمده بود) و استاد مسیحی دیگری به نام مستی فرزند یونس (مترجم برخی کتاب‌های یونانی به عربی)، درس خود را ادامه داد، به حلب (در سوریه) و مصر سفر کرد؛ بیشتر کتاب‌های خود را در بغداد نوشت و، سرانجام، در سال ۳۳۹ هجری قمری، در دمشق درگذشت.

سفر او به حلب، به دعوت سیف‌الدوله حمدانی (۳۰۱ - ۳۵۶ هجری قمری) بود. سیف‌الدوله، برای نخستین بار، حکومتی مستقل در حلب (که شامل خود حلب و بسیاری از سرزمین‌های دور و برآن می‌شد) تشکیل داده بود؛ او حاکمی مستبد و خون‌ریز، ولی شجاع بود و در عین حال، به دانش و ادبیات علاقمند بود و تلاش می‌کرد، دانشمندان را در دربار خود جمع کند. او همان کسی است که، ابوالفرج اصفهانی، کتاب «اغانی» خود را به او پیشکش کرده است.

علی فرزند حمدان و معروف به ابوالحسن، وقتی در ۳۳۰ هجری قمری، ابن رائق، امیرالامرای سابق خلافت بغداد را، با همکاری برادرش، کُشت، از طرف متقی، خلیفه عباسی، لقب «سیف‌الدوله» را گرفت. دوران زندگی فارابی، دوران ضعف و آغاز فروپاشی کامل خلافت عباسی بود. سراسر سرزمین‌های خلافت بغداد را، کشمکش‌ها، جنگ‌ها و نافرمانی‌ها فراگرفته بود. هر امیری، در هر ناحیه‌ای، خروج می‌کرد و دعوی استقلال داشت. حکومت بغداد، که از درون پوسیده بود، قادر به حفظ خود و نگهداری سرزمین‌های قلمرو خود نبود. یکسره، در جنگ و خون‌ریزی با رقیبان و مدعیان، به سر می‌برد. بغداد و سرزمین‌های اطراف، دائما" به دست سپاهیان خلیفه و یا مدعیان او غارت می‌شد و...

چه بسا، همین ناامنی‌ها و بی‌عدالتی‌ها، که زمینه‌ای ویران‌گر برای هرگونه کار علمی است، فارابی را قانع کرده بود که، با پذیرش دعوت سیف‌الدوله، بغداد را ترک کند و به دربار او برود.

آن چه مسلم است، فارابی هرگز به خدمت امیر یا خلیفه‌ای در نیامد و با آن که در «سیاست» صاحب‌نظر بود، خود را از هرگونه کار دولتی و دیوانی، کنار نگه داشت. به‌دلیل اعتقادهای عرفانی خود، بسیار ساده زندگی می‌کرد و مثل صوفی‌ها لباس می‌پوشید. اگر ابن‌سینا، اصطلاح‌های عرفانی و صوفی‌گری را، به عنوان تتمه و ضمیمه‌ای بر فلسفهٔ خود می‌آورد، فارابی، از این اصطلاح‌ها، در متن کتاب‌های خود و به عنوان اصطلاح‌های فلسفی، استفاده می‌کند.

فارابی دیدگاه‌های سیاسی و فلسفی خود را، در رساله‌های متعددی شرح داده است که از آن جمله می‌توان از «فصوص‌الحکم»، «فصول‌المدنی»، «سیاست‌المدینه» و «آراء اهل المدینه‌الفاضله» نام برد. بخصوص «مدینه‌فاضله» یا «آرمان شهر» فارابی، می‌تواند معرف نظریه‌های سیاسی و گاه فلسفی او باشد. شک نیست که فارابی، «آرمان شهر» خود را با تقلید از افلاطون و تحت تاثیر او ـ که خود تحت تاثیر شیوهٔ تفکر ایرانی بوده ـ نوشته است. او جامعه‌های انسانی را، به سه گروه تقسیم می‌کند: جامعه‌های کوچک (خانواده، کوی، روستا و شهر)، جامعه‌های میانه (یک کشور یا یک قلمرو حکومتی) و جامعهٔ بزرگ (شامل تمامی مردم روی زمین) و سپس، هر جامعه را به یک انسان تشبیه می‌کند: در انسان، قلب، رئیس و فرماندهٔ تمامی بدن است، بعد از قلب اندام‌هایی وجود دارند که از قلب فرمان می‌برند و، به نوبهٔ خود، بر اندام‌های دیگری فرمان می‌رانند و، این سلسله مراتب، خود را به اندام‌هایی می‌رساند که تنها فرمان می‌برند و خود، برجایی فرمان نمی‌رانند. بنابراین (فارابی نتیجه می‌گیرد)، در هر جامعه و هم در جامعهٔ بزرگ انسانی، باید، همچون «سلسله مراتب» اندام‌های آدمی، حکومتی هرمی شکل وجود داشته باشد که در راس آن فرمانده و رئیس جامعه، و در سطح قاعدهٔ هرم، مردم عادی فرمانبر قرار دارند. افراد بینابینی، که در سلسله مراتب بین راس و قاعده واقع‌اند، از رئیس خود فرمان می‌برند و به زیردستان خود فرمان می‌دهند و با واسطهٔ رئیس خود، مطیع و فرمانبر رئیس جامعه‌اند، تنها مردم عادی هستند که هیچ خدمت‌گذاری ندارند، فقط باید کار کنند و فرمان ببرند. البته، در «آرمان‌شهر» فارابی، برخی دیدگاههای مثبت وجود دارد: برای رئیس شرط‌هایی می‌گذارد، او باید فیلسوفی آگاه، عدالت‌خواه، هوادار مظلومان، صلح طلب و بری از فساد و دزدی و مال‌اندوزی باشد؛ او تعاون، هم فکری و کار گروهی را شرط سلامت جامعه می‌داند و جامعه‌ای را که در پی جنگ و توسعه طلبی است و می‌خواهد سنت‌ها و اعتقادهای خود را بر مردم سرزمین‌های دیگر تحمیل کند، در مقابل «آرمان‌شهر» خود قرار می‌دهد و آن را نفی می‌کند و ... با وجود این، فارابی نمی‌تواند چهرهٔ دلپذیری از شهر آرمانی خود نشان دهد که، در آن، مردمی آزاد با امکان‌های برابر و امنیت فکری و مالی زندگی کنند و کسی قدرت زورگوئی و ستم و یا تحمیل اعتقاد خود را بر دیگران نداشته باشد. فارابی، تحت تاثیر شرایط زمان و تحت تاثیر نوشته‌های افلاطون، حکومت از بالا به پایین را توصیه می‌کند و به امکان‌های بالقوه‌ای که می‌تواند یک جامعه آزاد و برابر حقوق را پیش ببرد، توجه

نمی‌کند و، بنابراین، نمی‌تواند برای زمان ما، به جز ارزش یک اثر تاریخی، ارزش دیگری داشته باشد.

فارابی، که به اعتقاد جرج سارتون (مورخ بزرگ دانش)، بزرگترین فیلسوف عصر بود، از نخستین مبلغان و مفسران فلسفهٔ ارسطوئی در شرق بود و، به همین مناسبت، او را «معلم ثانی» نامیدند («معلم اول» خود ارسطو است).

در واقع، در سرزمین‌های خاور، به هر دو فیلسوف یونانی، افلاطون و ارسطو، اعتقاد داشتند، به هر دوی آن‌ها احترام می‌گذاشتند. ولی در واقع بسیاری از دیدگاه‌های فلسفی این دو، متناقض یکدیگرند و کمتر اشتراکی با هم دارند. فارابی بسیار کوشیده است که نظرهای افلاطون و ارسطو را به هم نزدیک کند و، در این مورد، تحت تاثیر فیلسوفان و مفسران نوافلاطونی اسکندریه بود که نوشته‌های ارسطو و افلاطون، و به‌خصوص افلاطون را، به میل خود ـ و نه به صورتی که در واقع وجود داشت ـ تفسیر می‌کردند. ولی به هرحال، فارابی را باید پایه‌گذار فلسفه ارسطوئی در شرق دانست که در دیدگاه‌های بسیاری از فیلسوفان و اندیشمندان بعد از خود، تاثیری جدی داشت.

فارابی فلسفه و ایمان را مغایر هم نمی‌داند و معتقد است که هر دو، به یک هدف خدمت می‌کنند، ولی فلسفه را برتر می‌داند، چراکه بر برهان عقلی و استدلال منطقی تکیه دارد. شاید بتوان گفت که فلسفهٔ فارابی، برآیندی از فلسفهٔ افلاطون و ارسطو (و به خصوص ارسطو) از یک طرف و تصوف و عرفان از طرف دیگر است.

فارابی را، که پانصد سال پیش از گالیله و بیکون زندگی می‌کرد، می‌توان پایه‌گذار روش «مشاهده‌ای ـ تجربی» دانست که البته، بیشتر در بحث‌های روش شناختی و آموزشی او مطرح می‌شود (بند بعدی را ببینید) او همچنین در بحث‌های فلسفی خود، روش قیاسی و استدلالی را توصیه می‌کند و، از این جهت، در مقابل زکریای رازی قرار می‌گیرد که بر استقرا و تمثیل تکیه می‌کرد.

با وجودی که فارابی ـ بعد از کندی و در تکمیل کارهای او ـ در جهت آشتی علم و ایمان تلاش کرده است و با وجودی که بیشتر فیلسوفان بعد از او، نظر او را پذیرفته‌اند وزیر تاثیر اندیشه‌های او بوده‌اند، مورد انتقاد کسانی همچون ابن‌رشد (در «تهافت التهافت») و ابن‌طفیل قرار گرفته است؛ با وجود این، فارابی را باید بزرگترین و با نفوذترین فیلسوف زمان خود دانست.

فارابی به ساده‌نویسی و تفسیر متن‌های دشوار معروف است. این داستان مشهور

است که ابن‌سینا، با آن که بارها «متافیزیک» ارسطو را خوانده بود، تنها وقتی توانست مضمون اصلی کتاب را بفهمد که با شرح فارابی در بارهٔ آن، آشنا شد. همچنین، به احتمال زیاد، بیرونی، کتاب «التفهیم» خود را تحت تاثیر ساده‌نویسی فارابی، به زبانی ساده و قابل فهم همگان، تنظیم کرده است.

۲. دیدگاه‌های آموزشی، روش شناختی و علمی فارابی

کارهای فارابی در زمینهٔ ریاضیات، جالب و فراوان است. او به طور جدی در بارهٔ موضوع‌های مهم مربوط به روش شناسی ریاضیات کار کرد؛ نمونه‌های عالی از کاربرد روش‌ها و نظریه‌های ریاضی را در حل مساله‌های گوناگون دانش‌های طبیعی و صنعت (اخترشناسی، نظریهٔ موسیقی، نور، معماری،...) ارائه داد و بررسی‌های کاملا" تازه‌ای را در ریاضیات نظری دنبال کرد. فارابی به هر سه جنبه ریاضیات (روش شناسی و آموزش، کاربرد علمی، جنبهٔ نظری) که از دیدگاه تاریخی، همیشه در پیوند با هم پیش رفته‌اند، توجه داشت.

جالب‌ترین جنبه‌ها، از نظر تاریخ ریاضیات نظری، بررسی‌های فارابی در مثلثات و هندسه است. فارابی در کتاب خود «شرح المجسطی» (که در آن به شرح و تفسر کتاب بزرگ بطلمیوس پرداخته است)، یکی از نخستین کسانی است که «تانژانت» و «کتانژانت» را در دایرهٔ مثلثاتی وارد کرد و قضیه سینوس‌ها و تانژانت‌ها را برای مثلث قائم‌الزاویه کروی ثابت کرد. فارابی در کتابی که دربارهٔ هندسه نوشته است («کتاب‌الحیل‌الروحانیه و الاسرارالطبیعیه فی دقایق الاشکال الهندسه»؛ کتابی که، به احتمال زیاد، الهام‌بخش ابوالوفای بوزجانی در تنظیم کتاب معروف خود «کتاب فی مایحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسه» ـ کتابی در عمل‌های هندسی که برای صنعت‌کاران لازم است ـ بوده است)، برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات، به صورتی منظم، مساله‌های مربوط به ساختمان‌های هندسی را مطرح می‌کند که، از میان آن‌ها، به ویژه، مساله‌های مربوط به رسم به کمک پرگار ثابت (پرگاری که شعاع آن تغییر نمی‌کند)، رسم سهمی، رسم چند ضلعی‌های منتظم و همچنین ترسیم‌های روی کره، جالب است.

فارابی در نوشته‌های خود، به بنیان‌های ریاضیات و به روش طرح مفهوم‌های اصلی و پایه‌ای ریاضیات، اهمیت زیادی می‌دهد و یکی از نخستین کسانی است که اثر معروف اقلیدس به نام «مقدمات» را مورد بررسی انتقادی قرار داده است (در کتاب

«شرح‌المستغلق من مصادرات المقاله الاولی والخامسه من اقلیدس» که در آن، به بحث در بارهٔ دو فصل اول و پنجم از کتاب «مقدمات» اقلیدس پرداخته است: فصل اول کتاب اقلیدس که شامل ۴۸ گزاره است، در بارهٔ مثلث‌ها، خط‌های راست عمود برهم و موازی با هم، متوازی‌الاضلاع، مساحت شکل‌ها، قضیهٔ فیثاغورث و عکس آن است، فصل پنجم «مقدمات» که یکی از اساسی‌ترین فصل‌های کتاب است، به «نظریه نسبت‌ها» اختصاص دارد.

فارابی در دو اثر مشهور خود، «احصاءالعلوم» و «مراتب‌العلوم»، دانش‌ها را برحسب جنبه‌های آموزشی آن‌ها، تقسیم‌بندی می‌کند و ریاضیات را شامل هفت شاخه می‌داند: حساب، هندسه، نور، اخترشناسی، موسیقی، مکانیک و سرانجام، علم استادی و مهارت در کارها. می‌بینیم که فارابی، وقتی از ریاضیات صحبت می‌کند، به درستی، دو جنبهٔ نظری و کاربردی آن را باهم و در پیوند با یکدیگر در نظر می‌گیرد (فارابی، در دوره‌ای از تاریخ ریاضیات قرار دارد که، ضمن بستگی کامل نظریه و کاربرد با یکدیگر، ریاضیات، سمت‌گیری کاربردی داشته است).

اقلیدس، در «مقدمات» خود، از «روش ترکیبی» استفاده می‌کند واز مفهوم‌های ساده‌تر، خود را به تعریف مفهوم‌های پیچیده‌تر می‌رساند. فارابی از این روش اقلیدس، که به «روش ترکیبی» بیش از اندازه اهمیت می‌دهد، انتقاد می‌کند و برای رسیدن به نتیجه مطلوب، روش تجزیه، را هم توصیه می‌کند. از زبان خود فارابی بشنویم:

... پایه‌های هندسه و حساب، با دو روش آموخته می‌شود: روش تجزیه و روش ترکیب. ریاضی‌دانان قدیم، در نوشته‌های خود، این دو روش را توام می‌کردند، ولی اقلیدس کتاب خود را تنها با روش ترکیبی نوشت...

فارابی در تالیف کتاب عظیم خود «کتاب‌الموسیقی الکبیر» (که در دو جلد تنظیم شده بود و، دریغ، که تها جلد اول آن به ما رسیده است) توانست با موفقیت، این دو روش را با هم به کار گیرد. این موضوع را می‌توان از جمله‌های زیر، که از مقدمهٔ این کتاب آورده‌ایم، به خوبی فهمید:

... تا این جا از تجزیه استفاده کرده‌ایم. برای این که هنر موسیقی را بیاموزیم، ترکیب را هم به کار می‌بریم. تجزیه به این دلیل برای ما لازم است که عنصرها را، به ردیف شناخته شده، منظم کنیم، یعنی به همان ردیفی که این عنصرها مورد شناسائی ما قرار گرفته‌اند.

برعکس، ترکیب، این عنصرها را، به همان ردیفی که در واقع وجود دارند، تنظیم می‌کند...

فارابی، طرح مفهوم‌های بنیانی هندسه و اصل‌های هندسی را در همان کتاب «بررسی دشواری‌های مقالهٔ اول و مقالهٔ پنجم اقلیدس» در هندسه، داده است. در این جا، او با اندیشهٔ فلسفی عمیقی در بارهٔ سرچشمه به وجود آمدن مفهوم‌های بنیانی هندسه، از راه انتزاع تدریجی و گام به گام آن‌ها از دنیای واقع، گفت‌وگو می‌کند. مثلا" فارابی، با اشاره به تعریف‌هایی که از اقلیدس در فصل اول «مقدمات» آورده است، مسیر جداشدن مفهوم‌ها را از واقعیت عینی، تجزیه و تحلیل می‌کند.

فارابی دو حالت را بررسی می‌کند: نخست این که، چیزی را که نزدیک‌تر به احساس مستقیم است، مقدم بدانیم؛ دوم این که، چیزی را که نزدیک‌تر به عقل است، در جای اول قرار دهیم. باز هم از زبان خود او بشنویم:

... جسم از همه به احساس نزدیک‌تر است، سپس سطح، بعد خط و سرانجام دورتر از همهٔ این‌ها، نقطه. ولی به عقل، چیزی نزدیک‌تر است که ازبخش‌های کمتری نسبت به دیگر چیزهای مشخص، تشکیل شده باشد؛ هر چیزی که ساده‌تر باشد، به عقل نزدیک‌تر است. و به این ترتیب، به آن جا می‌رسیم که در بارهٔ چیزی بیندیشیم که، برای وجود آن، هیچ جزئی دخالت نداشته باشد. بنابراین، از لحاظ عقلی، در ردیفی که به دست می‌آید، نقطه، در جای نخست قرار گرفته است، سپس خط، بعد سطح و در جای آخر جسم. با وجود این، وقتی که با یک شاگرد سروکار داریم، از آن جا که در سال‌های نخست یادگیری، بیشتر به جانبی که محسوس باشد، گرایش دارد، ما ردیفی را انتخاب می‌کنیم که متناظر با احساس است، ولی در تالیف یک اثر علمی، از ردیفی که عقلانی‌تر است، استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، آموزش از جسم محسوس و قابل لمس آغاز می‌شود، سپس این جسم، از همهٔ آن چه که آن را محسوس می‌کند، جدا و منتزع می‌شود، بعد به سطح و خط و سرآخر، به نقطه پرداخته می‌شود. به این ترتیب، بهتر این است ، کار خود را از «محسوس» و در مسیر تجزیه آغاز کنیم تا به «نقطه» برسیم و، سپس، دوباره به ردیفی بپردازیم که متناظر با عقل است، یعنی به

می‌بینیم که فارابی، در بررسی انتقادی خود از «مقدمات» اقلیدس، تاکید می‌کند که ضمن طرح مفهوم‌های بنیانی هندسه، باید فلسفهٔ پیدایش آن‌ها را در مسیر جدا شدن آن‌ها از جسم فیزیکی و دنیای واقع، در نظر بگیریم. اقلیدس در «مقدمات» خود از تعریف «انتزاعی‌ترین» مفهوم‌ها آغاز می‌کند و سپس به تدریج به تعریف‌هایی می‌پردازد که در درجهٔ کمتری از انتزاع قرار دارند. فارابی، با تجزیه و تحلیل انتقادی روش اقلیدس، طرح محسوس و مادی سرچشمه‌های پیدایش مفهوم‌های ریاضی را، ارائه می‌دهد. باید به این توصیهٔ فارابی، در مورد رعایت عینی‌بودن نظام آموزش، در نخستین گام‌ها، توجه کرد، زیرا دانش‌آموز در نخستین سال‌های آموزش «بیشتر به سمتی کشش دارد که محسوس است». ابوریحان بیرونی، زیر تاثیر مستقیم نوشته‌های فارابی، در کتاب «التفهیم» خود، برخلاف اقلیدس، مفهوم‌های اساسی هندسه را، به ترتیب انتزاعی بودن آن‌ها (از محسوس به طرف تجرید) تعریف می‌کند.

فارابی، در نوشته‌های خود، اندیشه‌های درست و کاملی در بارهٔ مساله‌های نظری (و از آن جمله، ریاضیات) به صورت قابل فهم و در عین حال، علمی و دقیق، ارائه می‌دهد. کتاب «موسیقی» فارابی را باید نخستین کتاب علمی دربارهٔ موسیقی نظری دانست که به کلی با آموزش‌های فیثاغورث و افلاطون در بارهٔ موسیقی ـ که پر از ابهام و در مسیر بحث‌های «ماوراءالطبیعه» است ـ فرق دارد. با پیروی از فارابی بود که، بعد از او، دانشمندان دیگری مثل ابن‌سینا، جرجانی و قطب‌الدین شیرازی به بررسی علمی موسیقی پرداختند. کتاب «موسیقی» فارابی، مجموعه‌ای است از بحث‌های دقیق و جالب دربارهٔ ریاضیات، فیزیک و موسیقی. به یاد داشته باشیم که فارابی، با گونه‌های اندکی از سازها (که در زمان او معمول بود)، مثل نی، تنبور و عود سروکار داشت (تنبور ۲ سیم، عود ۴ یا ۵ سیم دارد)، با وجود این، توانسته است از عهدهٔ بررسی علمی موسیقی برآید. او روی پرده‌ها (صداها) و گام‌های مختلف بحث کرد و انواع آن‌ها را، در میان قوم‌های مختلف با هم مقایسه کرد. به موجی و ارتعاشی بودن صوت، و به احتمال قریب به یقین برای نخستین بار، پی برد. برای جمع و تفریق فاصله‌های صوتی، طول تارهای مولد آن‌ها را درهم ضرب و برهم تقسیم می‌کرد، یعنی به طور ضمنی از این قانون که، جمع و تفریق فاصله‌های صوتی از قانون‌های لگاریتم پیروی می‌کنند (بدون این که مفهوم «لگاریتم» را بشناسد) اطلاع داشت. او نوعی الفبای موسیقی را به کار می‌برد و «نت‌ها» را با «عدد» مشخص می‌کرد. او

می‌گفت، برای شناختن موسیقی، باید به سرچشمهٔ آن، یعنی طبیعت روآورد. فارابی معتقد بود که در موسیقی نمی‌توان مبداء را تغییر داد و به دلخواه انتخاب کرد (آن‌طور که مثلاً، در گرماسنج و برای تعیین درجهٔ حرارت ممکن است) و برای پیدا کردن مبداء موسیقی، باید به سراغ طبیعت رفت. هم نوائی و هم‌آهنگی، که بعدها و از سدهٔ هیجدهم میلادی مورد توجه قرار گرفته است، در بحث‌ها و بررسی‌های فارابی وجود دارد.

روش‌شناسی فارابی، بسیار جالب و آموزنده است. او در مقدمهٔ کتاب «موسیقی» می‌نویسد:

> ... برای این که اندیشمند خوبی در تنظیم نظریه‌ها باشیم، بدون توجه به این که مربوط به کدام دانش است، باید سه شرط را داشته باشیم: ۱) همهٔ قاعده‌ها را به خوبی بدانیم: ۲) توانائی نتیجه‌گیری‌های لازم را، از این قاعده‌ها و داده‌هایی که در این دانش وجود دارد، داشته باشیم؛ ۳) توانائی پاسخ‌گوئی به نظریه‌های نادرست را داشته باشیم و بتوانیم، اندیشه‌ها و عقیده‌های دیگران را تجزیه و تحلیل کنیم، درست را از نادرست جدا و اشتباه‌ها را، اصلاح کنیم....

فارابی، توصیه‌های مربوط به روش شناسی علمی خود را، در کتاب‌ها و رساله‌های فراوانی که در زمینه‌های گوناگون دانش نوشته است، به کار بسته و بهترین نمونه‌های مربوط به بررسی بنیان‌های دانش زمان خودش را، در بررسی‌های انتقادی که از نوشته‌های نویسندگان قبل از خود کرده، ارائه داده است. در این میان، بررسی انتقادی او از «المجسطی» بطلمیوس، جای نمایانی دارد. فارابی، در مقدمهٔ این بررسی، یادآوری می‌کند که

> ... تلاش کرده‌ام، مضمون این نوشته را تا حدی که ممکن است، قابل فهم کنم...

بطلمیوس در «المجسطی» همه جا می‌کوشد، به بررسی‌های مربوط به پدیده‌های اخترشناسی، جنبهٔ محاسبه‌ای بدهد. او سعی می‌کند از روش‌های خالص ریاضی، در مورد داده‌های عددی که از راه تجربه به دست آمده‌اند، استفاده کند. او از شرط‌های هندسی معینی آغاز می‌کند و سپس، از آنها، به نتیجه‌های عددی می‌رسد.

در بررسی‌های فارابی، یا اصلاً داده‌های عددی وجود ندارد و یا به عنوان

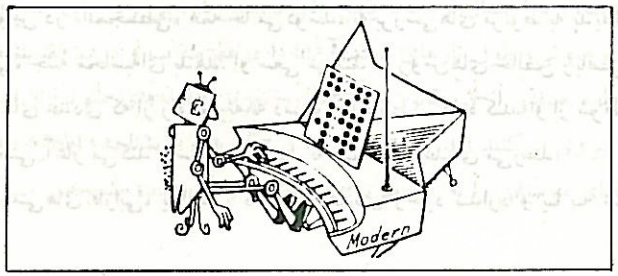
بازماندهٔ نادری از روش «المجسطی» پیدا می‌شود. او با به کار گرفتن قالب‌های خطی مثلثاتی و گسترش مفهوم عدد تا عدد حقیقی مثبت، تا مرز روش‌های جبری پیش می‌رود. به برکت این روش دقیق نظری، نه تنها حجم نوشتهٔ فارابی، نسبت به «المجسطی»، کوچک‌تر، بلکه مهم‌تر از آن، برای خواننده، ساده‌تر و قابل فهم‌تر می‌شود.

۳. نتیجه

به این ترتیب می‌بینیم که اگر دیدگاه‌های فارابی در بارهٔ سیاست، جامعه‌شناسی و فلسفه (فلسفه به معنای خاص خود، یعنی پرداختن به کون و فساد و لاهوت و ناسوت) تنها از نظر تاریخی اهمیت دارد، کارهای علمی فارابی، در چنان درجه‌ای از اهمیت است که بسیاری از آن‌ها، حتی امروز هم می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به‌خصوص بررسی و مطالعهٔ کتاب‌های «موسیقی»، «هندسه»، «شرح مجسطی»، «احصاءالعلوم» و «مراتب‌العلوم» فارابی، که با کمال تاسف بسیار کم به آن‌ها پرداخته شده است، از نظر روش‌شناسی علمی، اهمیت بسیار دارد. کتاب «موسیقی» فارابی، نمونهٔ بسیار ارزنده‌ای برای دانشمندان است که، چگونه می‌توان مساله‌های دشوار دانش‌های طبیعی را، به کمک ریاضیات حل کرد!

دیدگاه‌های فارابی در زمینهٔ روان‌شناسی آموزشی و روش‌شناسی علمی، مثل بسیاری از دیدگاه‌های دیگر او، تقریبا" ناشناخته مانده است و نیاز به بررسی‌های خاص و مجدّانه‌ای دارد.

کتاب‌های فارابی، با همه اهمیّتی که دارند، هنوز به زبان فارسی درنیامده‌اند و مشتاقان ایرانی، از مطالعهٔ مستقیم نوشته‌های این اندیشمند بزرگ محروم‌اند. وزارت‌خانه‌های «ارشاد»، «آموزش عالی» و «آموزش و پرورش» و، همچنین، دانشگاه‌ها، باید ترجمه و چاپ کتاب‌های اندیشمندان ایرانی را، از وظیفه‌های درجهٔ اول خود بدانند. بدون تکیه بر گذشتهٔ علمی خود و بدون تجزیه و تحلیل راه گذشته، نمی‌توان مسیر پیشرفت آینده را پیدا کرد.



مساله‌های مسابقه‌ای

مساله‌هایی از المپیادهای داخلی جمهوری روسیه

که درسال ۱۹۸۲ برای چهارسال آخر دبیرستان (به‌طور جداگانه) برگزار شد و برخی مساله‌های دیگر

۱. مقدار این‌عبارت‌را پیدا کنید و ثابت کنید، این مقدار برابر عددی درست است:

$$\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}+\sqrt[3]{26}}$$

۲. آیا ممکن است مجموع دو ارتفاع یك مثلث، از مجموع دوضلعی که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها فرود آمده‌اند، بیشتر باشد؟

۳. N عددی‌است طبیعی و بزرگتر از ۹، به‌نحوی که همهٔ‌رقم‌های آن، عددهایی فردند. آیا ممکن است N، مجذور یك عدد طبیعی باشد؟

۴. در دایره‌ای که مساحت آن‌برابر واحداست، ۱۳۷۱ نقطه به‌دلخواه درنظر گرفته‌ایم. ثابت کنید، دست کم یك‌مثلث می‌توان پیدا کرد که راس‌های آن در سه نقطه از این ۱۳۷۱ نقطه باشد و مساحتی‌کمتر از ۰/۰۰۱۵ داشته باشد.

۵. برای عددهای a_1، a_2، b_1، b_2 می‌دانیم

$$a_1^2+b_1^2=1,\ a_2^2+b_2^2=1,\ a_1a_2+b_1b_2=0$$

ثابت کنید، دراین‌صورت داریم:

$$a_1^2+a_2^2=1,\ b_1^2+b_2^2=1,\ a_1b_1+a_2b_2=0$$

۶. ضریب x^{100} را در چند جمله‌ای زیر به‌دست آورید:

$$(1+x+x^2+\dots+x^{100})^3$$

۷. وی یکی از ضلع‌های زاویه‌ای به‌راس O، نقطه‌های A، B و C را پشت‌سرهم، طوری قرار داده‌ایم که داشته باشیم:

$$|OA|:|AB|:|BC|=1:2:3$$

روی ضلع دیگر زاویه هم، نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 را، به‌همین ردیف، قرار داده‌ایم، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$|OA_1|:|A_1B_1|:|B_1C|=3:3:2$$

ثابت کنید، خط‌های راست AA_1 و BB_1 و CC_1 از یك نقطه می‌گذرند.

۸. در مثلث ABC، ارتفاع‌های AA_1، BB_1 و CC_1 را رسم کرده‌ایم و می‌دانیم:

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=0$$

ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۹. معادلهٔ $\sin x = x-\frac{x^3}{6}$ را حل کنید.

۱۰. هر ضلع از مثلث قاعدهٔ منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$، برابر است با a. راس‌های M و N از چهاروجهی منتظم $MNPQ$ بر خط راست C_1B و راس‌های P و Q بر خط راست A_1C قرار دارند. مطلوب است طول ارتفاع منشور و فاصلهٔ بین نقطه‌های وسط دو یال غیر متقاطع چهار وجهی

۱۱. به‌ازای کدام عددهای طبیعی m و n، این معادله جواب دارد:

$$n+\cos x=(n+\sin x)m?$$

۱۲. نیمسازهای داخلی AA_1، BB_1 و CC_1 را در مثلث ABC رسم کرده‌ایم. می‌دانیم:

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=0$$

ثبت کنید، مثلث ABC متساوی‌اضلاع است.

۱۳. عددهای a_n و b_n با رابطه‌های برگشتی زیر مشخص شده‌اند:

$$\begin{cases} a_1=b_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+3b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n,\ n\geqslant 1 \end{cases}$$

ثابت کنید، دنبالهٔ $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ دارای حدی است. این حد را پیدا کنید.

۱۴. همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که طول ضلع‌های آن‌ها، عددهایی درست و عدد مساحت هریك با عدد محیط آن برابر باشد.

۱۵. این دستگاه را، درمجموعهٔ عددهای طبیعی حل کنید:

$$\begin{cases} 2x^2+30y^2+3z^2+12xy+12yz=308 \\ 2x^2+6y^2-3z^2+12xy-12yz=92 \end{cases}$$

۱۶. در درون زاویهٔ AOB، نقطهٔ M داده شده است که تصویرهای آن را برضلع‌های OA و OB، به‌ترتیب، M_1 و M_2 می‌گیریم. ثابت کنید:

$$S_{OM_1MM_2}\leqslant\frac{1}{2}|OM|^2\cdot\sin\widehat{AOB}$$

۱۷. M را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC فرض می‌کنیم. ثابت کنید، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMB، بر نیمساز زاویهٔ ACB واقع است.

۱۸. a، b و c عددهایی مختلف و مثبت‌اند. چند جمله‌ای درجهٔ ششم $f(x)$ بااین شرط‌ها سازگار است:

$$f(a)=f(-a),\ f(b)=f(-b),\ f(c)=f(-c)$$

ثابت کنید، $f(x)$ تابعی زوج است، یعنی برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم: $f(x)=f(-x)$.

۱۹. F را مجموعه‌ای از عددهای حقیقی a می‌گیریم، به‌نحوی که برای هرکدام از آن‌ها، معادلهٔ $a(xy+1)=x+y$، معرف y به‌عنوان تابعی از x باشد؛ G را هم، مجموعه‌ای از مقدارهای x فرض می‌کنیم که، در آن، هر تابعی که با این معادله داده شده است، پیوسته باشد. مطلوب است اشتراك $F\cap G$.

۲۰. روی ضلع بزرگتر AB از مثلث ABC، نقطه‌های M و N را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

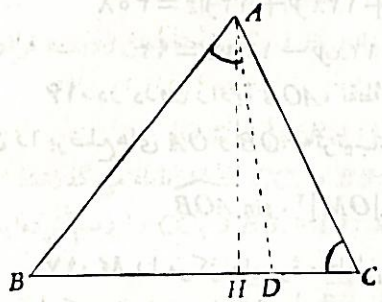
$$|AM|=|AC| \text{ و } |BN|=|BC|$$

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث MNC را برحسب ضلع‌های مثلث ABC به‌دست آورید.

حل این مساله‌ها را درصفحهٔ ۲۲۳ ببینید

اشتباه را پیدا کنید و برای ما بفرستید

جزئی از یك پاره‌خط با تمام آن برابر است؟



مثلثی مانند ABC را که زاویهٔ B از آن حاده و زاویهٔ A بزرگتر از زاویهٔ C است رسم می‌کنیم، از راس A خط AD را چنان در داخل مثلث رسم می‌کنیم که $\widehat{BAD}=\widehat{C}$ باشد، عمود AH را بر BC فرود می‌آوریم. چون زاویه‌هایی در مثلث ABC و ABD دو به‌دو متساویند، لذا دو مثلث متشابهند و اگر S و S' به‌ترتیب مساحت مثلث ABC و مساحت مثلث ABD باشد، داریم $\frac{S}{S'}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2}$. از طرف دیگر، چون این دو مثلث دارای ارتفاع مشترك هستند پس $\frac{S}{S'}=\frac{BC}{BD}$. از مقایسهٔ دو رابطه نتیجه می‌شود $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{BC}{BD}$ و یا $\frac{\overline{AC}^2}{BC}=\frac{\overline{AD}^2}{BD}$ (۱). در مثلث ABC می‌توان نوشت: $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC\cdot BH$ و در مثلث ABD: $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2BD\cdot BH$، دو مقدار اخیر را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم

$$\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC\cdot BH}{BC}=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+2BD\cdot BH}{BD}\Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AB}^2}{BC}+BC-2BH=\frac{\overline{AB}^2}{BD}+BD-2BH\Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AB}^2}{BC}-BD=\frac{\overline{AB}^2}{BD}-BC\Rightarrow\frac{\overline{AB}^2-BC\cdot BD}{BC}=\frac{\overline{AB}^2-BC\cdot BQ}{BD}$$

و در نتیجه $BC=BD$.

معادله‌های خطی، نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

مقاله‌ای برای دانش‌آموزان از سال سوم راهنمائی تا سال چهارم دبیرستان (ریاضی یا تجربی)

§ ۱. معادله و اتحاد

وقتی دو عدد یا دو عبارت جبری، با نشانهٔ برابری (=) به‌هم مربوط شوند، یك برابری را تشکیل می‌دهند. هر برابری شامل دو بخش است: بخش سمت چپ (یا طرف اول) و بخش سمت راست (یا طرف دوم). در برابری $a+3=b$، عبارت $a+3$ سمت چپ (یا طرف اول) برابری است و b، سمت راست یا طرف دوم آن. وقتی یك برابری، تنها شامل عددها باشد، می‌تواند یك برابری درست یا یك برابری نادرست باشد. مثلا: برابری $1/5\times 2=3$ درست و برابری $2-=3$ نادرست است. اگر یك برابری، به‌جز عدد، شامل حرف یا حرف‌هایی هم باشد، آن‌وقت ممکن‌است، برای بعضی مقدارهای این‌حرف‌ها، درست و، برای برخی‌دیگر ازمقدارهای این‌حرف‌ها، نادرست از آب درآید. مثلا برابری $a^2=16$، برای $a=4$ و $a=-4$ درست و، برای‌بقیهٔ مقدارهای a، نادرست‌است. این دو برابری را در نظر بگیرید:

$$a^2-1=(a+1)(a-1),$$

$$\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{(a+1)(a-1)}$$

در برابری اول، سمت چپ و سمت راست برابری، برای هر مقدار دلخواه a معنا دارند، ولی در برابری دوم، عبارت‌های سمت چپ و سمت راست برابری، تنها برای مقدارهایی از a معنا دارندکه برابر ۱ یا ۱− نباشند.

مقدارهایی که، به‌ازای آن‌ها (یعنی‌وقتی این‌مقدارهارا به‌جای‌حرف‌ها می‌گذاریم)، هر دو طرف برابری معنا داشته باشند، مقدارهای قابل قبول این حرف‌ها و یا، به طور خلاصه، دامنهٔ برابری نامیده می‌شود. مثلاً، مقدارهای قابل قبول برای حرف a، در برابری اول، عبارت است از همهٔ

عددها و، در برابری دوم، همهٔ عددها، به‌جز ۱ و ۱− (یا: دامنهٔ برابری اول همهٔ عددهای حقیقی (مجموعهٔ R) و دامنهٔ برابری دوم، همهٔ عددهای حقیقی، به‌جز دو عدد ۱ و ۱− است).

هر برابری که شامل کمیت مجهول a باشد، معادله نسبت به کمیت a، نامیده می‌شود. مثلاً، این برابری‌ها، معادله‌اند:

$$a+۴=۵ \qquad (۱)$$

$$a^۲+۱=-۳ \qquad (۲)$$

$$a^۲-۱=(a-۱)(a+۱) \qquad (۳)$$

$$\frac{۱}{a^۲-۱}=\frac{۱}{(a-۱)(a+۱)} \qquad (۴)$$

مقداری از مجهول که، به ازای آن، برای سمت چپ و سمت راست معادله، دو عدد برابر به‌دست آید، ریشهٔ معادله نامیده می‌شود، مثلاً $a=۱$، ریشهٔ معادلهٔ (۱) است. به‌ازای این مقدار a، هردو طرف معادله، برابر ۵ می‌شود. معادله ممکن است ریشه‌ای نداشته باشد. $a^۲+۱$ به‌ازای هر عدد حقیقی a، برابر باعددی مثبت می‌شود و، بنابراین، معادلهٔ $a^۲+۱=-۳$، ریشه‌ای ندارد.

معادله‌هایی که در آن‌ها، هر مقدار دلخواه مجهول، به شرطی که از مقدارهای قابل قبول مجهول انتخاب شده باشد، در معادله صدق کند، یعنی هر مقدار دلخواه از دامنهٔ تعریف معادله، ریشهٔ آن باشد، اهمیت زیادی در ریاضیات دارند. مثلا معادله‌های (۳) و (۴) از این گونه‌اند. درمعادلهٔ (۳)، هر عددی می‌تواند ریشهٔ آن باشد، ولی در بارهٔ معادلهٔ (۴) نمی‌توان گفت که هر عددی، ریشهٔ آن است: به‌ازای $a=۱$ و $a=-۱$، هم طرف اول و هم طرف دوم معادله، بی‌معنا می‌شود و، بنابراین، به‌ازای این دو عدد، نمی‌توان دربارهٔ برابری دوطرف معادله صحبت کرد. با وجود این، می‌توان گفت که: هرمقدار قابل قبول برای a (یعنی هرمقدار از دامنهٔ تعریف معادله)، ریشه‌ای از معادله است.

معادله‌ای که، برای آن، هر مقدار قابل قبول مجهول، ریشه‌ای از معادله باشد، اتحاد نامیده می‌شود. به‌زبان دیگر، اتحاد یعنی یك برابری که به‌ازای هر مقدار قابل قبول برای حرف‌ها، برقرار باشد.

وقتی که بخواهند بر اتحاد بودن یك برابری تاکید کنند، به‌جای نشانهٔ $=$، از نشانهٔ $\equiv$ استفاده می‌کنند و، مثلا، می‌نویسند:

$$a^۲-۱\equiv(a+۱)(a-۱)$$

یادآوری می‌کنیم (اگرچه چندان مهم نیست) که درمعادله‌های اتحادی، ازحرف‌های اول الفبای لاتینی (a، b، c، ...) و درمعادله‌های غیراتحادی، از حرف‌های آخر الفبای لاتینی (x، y، z، ...) استفاده می‌کنند.

تمرین

۱. درهریك از این معادله‌ها، دامنهٔ تعریف معادله را پیدا کنید، یعنی بگویید، حرف‌های وارد در معادله، چه مقدارهایی را می‌توانند قبول کنند:

الف) $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{a+۱}=\frac{۱+۲a}{a(a+۱)}$; ب) $\frac{۱}{a^۲-a}=۳$;

ج) $\sqrt{a}=۴+a$; د) $\sqrt{a}=\frac{۱}{\sqrt{a}}$;

ه) $\frac{۱}{x^۲+۲}=\frac{۱}{x^۲-۹}$; و) $\frac{\sqrt{x}}{x-۱}=۳$;

ز) $\frac{۱}{a^۲+۱}=b$; ح) $\frac{۱}{a^۲+b^۲}=ab$

۲. آیا در برابری‌های

الف) $\frac{۱}{a^۳-b^۳}=\frac{۱}{(a-b)(a^۲+ab+b^۲)}$;

ب) $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$;

ج) $\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}=\frac{x+۱}{\sqrt{x}}$

می‌توان گفت، به‌ازای هر مقدار دلخواه مجهول‌ها، برقرارند؟ آیا این برابری‌ها، اتحادند؟

§ ۲. تابع‌های خطی و نمودارهای آن‌ها

این برابری را در نظر می‌گیریم:

$$y=2x+1 \qquad (1)$$

در این برابری، هر مقدار x، متناظر است با مقدار مشخصی از y. مثلاً اگر $x=0$، آن‌وقت $y=1$؛ اگر $x=10$، آن‌وقت $y=21$؛ اگر $x=-\frac{1}{2}$، آن‌وقت $y=0$ و غیره، اکنون به‌این برابری توجه می‌کنیم:

$$y=x^2 \qquad (2)$$

در این برابری‌هم، مثل برابری (۱)، هرمقدار x متناظر است با مقدار کاملاً معینی از y: اگر $x=2$، آن‌وقت $y=4$؛ اگر $x=-3$ آن‌وقت $y=9$ و غیره. (وقتی می‌گوییم، هر مقدار x، متناظر با مقدار کاملا معینی از y است، یعنی به ازای هر مقدار از مجهول x، یك مقدار، و تنها یك مقدار، برای y به‌دست می‌آید.)

اگر هر مقدار x، متناظر با مقدار کاملاً معینی از y باشد، می‌گویند y تابعی است از x و مقدار x را، آوند، (یاآرگومان) y گویند. به‌این‌ترتیب، دستورهای (۱) و (۲)، دو تابع مختلف از آوند x را معرفی می‌کنند.

تابع آوند x، وقتی به‌صورت

$$y=ax+b \qquad (3)$$

باشد که، در آن، a و b دو عدد مفروض‌اند، تابع خطی نامیده می‌شود. مثلاً هر یك از تابع‌های زیر خطی‌اند:

$$y=x+2(a=1, b=2);$$

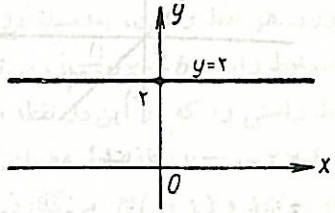
$$y=-10(a=0, b-10);$$

$$y=-3x(a=-3, b=0);$$

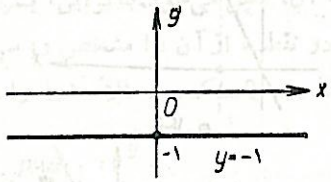
$$y=0(a=0, b=0)$$

می‌دانیم، نمودار تابع $y=ax+b$، یك خط راست است و به‌همین مناسبت است که، این تابع را، خطی نامیده‌اند. به‌یاد بیاوریم که، نمودار تابع $y=ax+b$ را، چگونه رسم می‌کنیم!

۱. نمودار تابع $y=b$. تابع خطی $y=ax+b$، به‌ازای $a=0$، به‌صورت $y=b$ درمی‌آید. دراین‌حالت، نمودار آن، خط راستی است موازی با محور x و به‌فاصلهٔ $|b|$ از آن. درشکل ۱، نمودار تابع $y=2(b>0)$ و در شکل ۲، نمودار تابع $y=-1(b<0)$ را می‌بینید.



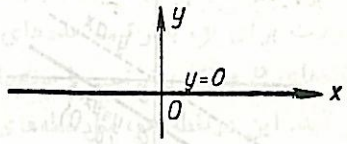
شکل ۱



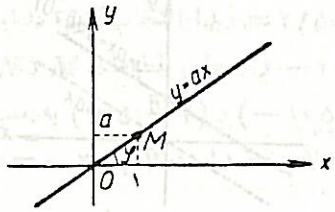
شکل ۲

درحالتی که، علاوه بر a، مقدار b هم برابر صفر باشد، تابع خطی به‌صورت $y=0$ درمی‌آید ونمودار آن، برمحور x منطبق می‌شود (شکل ۳).

۲. نمودار تابع $y=ax$. تابع خطی $y=ax+b$، به‌ازای $b=0$، به‌صورت $y=ax$ در می‌آید. به‌شرط $a\neq 0$، نمودار این‌تابع خط راستی است که‌ازمبداء مختصات می‌گذرد و با محور x زاویه‌ای برابر φ می‌سازد، که، تانژانت آن، برابر a است (شکل ۴). برای رسم‌دقیق خط‌راست $y=ax$ کافی است، تنها یك نقطه ازآن‌را، غیر از مبداء مختصات، پیداکنیم. اگر

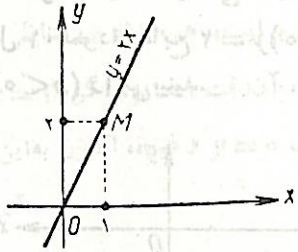


شکل ۳

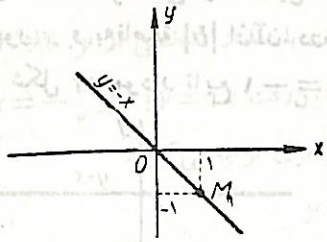


شکل ۴

در برابری $y=ax$، فرض کنیم $x=1$، به‌دست می‌آید $y=a$؛ بنابراین نقطهٔ M با مختصات $(1, a)$ متعلق به‌این خط راست است. اکنون اگر خط راستی از مبداء مختصات و نقطهٔ M بگذرانیم، نمودار $y=ax$ به دست می‌آید. به‌عنوان‌نمونه، درشکل۵، خط‌راست $y=2x$ $(a>0)$ ودرشکل ۶، خط راست $y=-x$ $(a<0)$ را رسم کرده‌ایم.

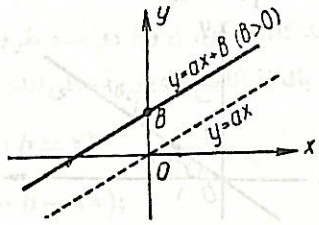


شکل ۵

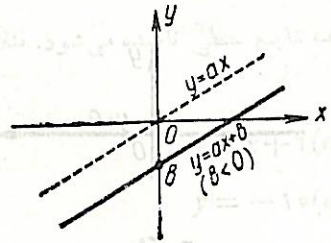


شکل ۶

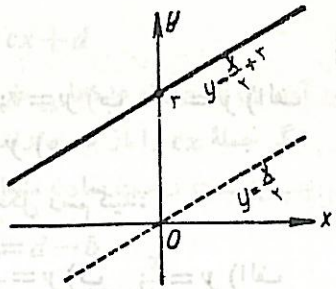
۳. نمودار تابع $y=ax+b$. فرض می‌کنیم $b>0$ در این‌صورت، خط راست $y=ax+b$، با حرکت دادن خط راست $y=ax$ به موازات خود و به‌اندازهٔ b واحد، به‌طرف بالا، به‌دست می‌آید (شکل۷). اگر $b<0$، آن‌وقت خط راست $y=ax+b$، از انتقال موازی خط راست $y=ax$ به‌اندازهٔ $|b|$ واحد، به‌طرف پایین به‌دست خواهد آمد (شکل ۸). به‌عنوان مثال، در شکل ۹، نمودار خط راست $y=\frac{x}{2}+3$ و درشکل ۱۰، نمودار خط راست $y=\frac{x}{2}-3$ داده شده است.



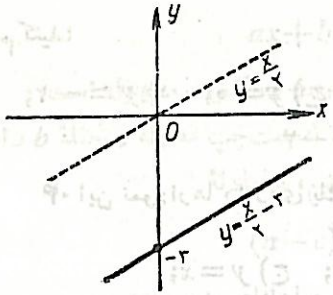
شکل ۷



شکل ۸

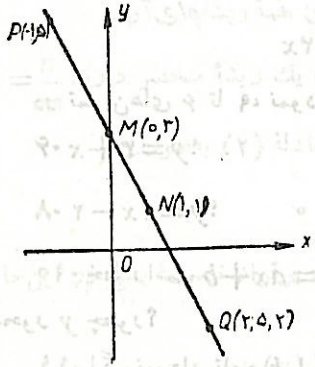


شکل ۹



شکل ۱۰

نمودارخط‌راست $y=ax+b$ را به‌طریق دیگری‌هم می‌توان به‌دست آورد. هر خط راست، به‌وسیلهٔ دو نقطهٔ آن، معین می‌شود. بنابراین، برای رسم‌خط راست $y=ax+b$، می‌توان دو نقطه از آن را مشخص و، سپس خط راستی را که از این‌دو نقطه می‌گذرد، رسم کرد، مثلاً، خط راست $y=-2x+3$، از نقطه‌های $M(0, 3)$ و $N(1, 1)$ می‌گذرد. اگر این دو نقطه را، روی صفحهٔ مختصاتی علامت بگذاریم، خط راستی‌که از آن‌ها می‌گذرد، نمودار $y=-2x+3$ خواهدبود (شکل ۱۱). البته، به جای نقطه‌های M و N، می‌توان هر دو نقطهٔ دیگری را در نظر گرفت. مثلاً، به‌جای این‌که عددهای ۰ و ۱ را برای x در نظر بگیریم، می‌توانیم مقدارهای $x=-1$ و $x=2/5$ را انتخاب کنیم، دراین صورت برای y، به‌ترتیب عددهای ۵ و ۲− و به‌جای نقطه‌های M و N، نقطه‌های P و Q، به‌ترتیب با مختصات $(-1, 5)$ و $(2/5, -2)$ به‌دست می‌آید. این دونقطه هم، مثل نقطه‌های M و N، خط راست $y=-2x+3$ را مشخص می‌کنند.



شکل ۱۱

تمرین ۳. نمودار این‌تابع‌ها را، روی یک‌دستگاه محورهای‌مختصات

رسم کنید:

الف) $y=1$; ب) $y=3$; ج) $y=0$; د) $y=-2$;
ه) $y=-4$

۴. این نمودارها را روی یك شکل رسم کنید:

الف) $y=\frac{x}{4}$; ب) $y=\frac{1}{2}x$; ج) $y=x$;

د) $y=2x$; ه) $y=4x$

۵. نمودار این تابع‌ها را روی یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید:

الف) $y=-\frac{x}{4}$; ب) $y=-\frac{1}{2}x$; ج) $y=-x$;

د) $y=-2x$; ه) $y=-4x$

در تمرین‌های ۶ تا ۹، نمودار تابع متناظر را رسم کنید:

۶. $y=3+x$; ۷. $y=-4-x$;

۸. $y=2x-2$; ۹. $y=\frac{1}{2}(1-3x)$.

۱۰. خط راست $y=ax+b$، چند نقطهٔ برخورد با محور x دارد؟ با محور y چطور؟

۱۱. اگر نمودار تابع $y=ax+b$ معلوم باشد، چگونه می‌توان به‌کمك آن، نمودار تابع $y=-(ax+b)$ را رسم کرد؟

§۳. معادله‌های خطی

معادله را وقتی خطی گویندکه، در سمت چپ و راست آن، تابع‌هایی خطی نسبت به‌مجهول وجود داشته باشد. مثلاً، معادله‌های زیر، خطی‌اند:

$$2x-1=3x-5;\ 4x=6-7x;\ 8x-9=0$$

صورت کلی یك معادلهٔ خطی چنین است:

$$ax+b=cx+d \qquad (1)$$

که در آن، a، b، c و d عددهایی مفروض و x، کمیت مجهول است.

اگر جملهٔ cx را از سمت راست به‌سمت‌چپ معادله و جملهٔ b را از سمت چپ به‌سمت راست معادله منتقل کنیم، به‌معادلهٔ

$$(a-c)x=d-b$$

می‌رسیم، یعنی حل هرمعادلهٔ خطی، به‌حل معادله‌ای به صورت

$$mx=n \qquad (2)$$

منجر می‌شودکه، در آن، m و n، عددهایی مفروض‌اند. دراین بند، هرجا از معادلهٔ خطی صحبت کنیم، منظورمان معادله‌ای به‌صورت (۲) است.

حل معادله، یعنی روشن کردن این موضوع که: آیا معادلهٔ ریشه دارد یا نه؛ و در حالت داشتن ریشه، پیدا کردن همهٔ ریشه‌های آن.

اگر $m\neq 0$، آن‌وقت معادلهٔ (۲) یك ریشهٔ منحصر دارد: $x=\frac{n}{m}$.

اگر $m=0$ و $n\neq 0$، آن‌وقت معادلهٔ (۲) به‌صورت

$$0\cdot x=n$$

در می‌آیدکه، به‌ازای هیچ‌مقداری از x، برقرار نیست؛ یعنی در این‌حالت، معادلهٔ (۲) ریشه ندارد.

اگر $m=n=0$، آن‌وقت، معادلهٔ (۲) به‌صورت

$$0\cdot x=0$$

درمی‌آیدکه، به ازای هرمقدار دلخواهی از x، برقرار است: در این‌حالت، معادلهٔ (۲) بی‌نهایت ریشه دارد و هرعدد حقیقی دلخواهی، ریشهٔ آن است.

مثال. معادلهٔ $ax-1=x+2$ را، به نسبت مجهول x، حل کنید.

بعد از جابه‌جائی‌های لازم، معادلهٔ مفروض، به‌صورت

$$(a-1)x=3$$

رسم کنید:

الف) $y=1$; ب) $y=3$; ج) $y=0$; د) $y=-2$;
ه) $y=-4$

۴. این نمودارها را روی یك شکل رسم کنید:

الف) $y=\frac{x}{4}$; ب) $y=\frac{1}{2}x$; ج) $y=x$;
د) $y=2x$; ه) $y=4x$

۵. نمودار این تابع‌ها را روی یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید:

الف) $y=-\frac{x}{4}$; ب) $y=-\frac{1}{2}x$; ج) $y=-x$;
د) $y=-2x$; ه) $y=-4x$

در تمرین‌های ۶ تا ۹، نمودار تابع متناظر را رسم کنید:

۶. $y=3+x$; ۷. $y=-4-x$;

۸. $y=2x-2$; ۹. $y=\frac{1}{2}(1-3x)$.

۱۰. خط راست $y=ax+b$، چند نقطهٔ برخورد با محور x دارد؟ با محور y چطور؟

۱۱. اگر نمودار تابع $y=ax+b$ معلوم باشد، چگونه می‌توان به‌کمك آن، نمودار تابع $y=-(ax+b)$ را رسم کرد؟

§۳. معادله‌های خطی

معادله را وقتی خطی گویندکه، در سمت چپ و راست آن، تابع‌هایی خطی نسبت به‌مجهول وجود داشته باشد. مثلاً، معادله‌های زیر، خطی‌اند:

$$2x-1=3x-5;\ 4x=6-7x;\ 8x-9=0$$

صورت کلی یك معادلهٔ خطی چنین است:

$$ax+b=cx+d \qquad (1)$$

که در آن، a، b، c و d عددهایی مفروض و x، کمیت مجهول است.

اگر جملهٔ cx را از سمت راست به‌سمت‌چپ معادله و جملهٔ b را از سمت چپ به‌سمت راست معادله منتقل کنیم، به‌معادلهٔ

$$(a-c)x=d-b$$

می‌رسیم، یعنی حل هرمعادلهٔ خطی، به‌حل معادله‌ای به‌صورت

$$mx=n \qquad (2)$$

منجر می‌شودکه، درآن، m و n، عددهایی مفروض‌اند. دراین بند، هرجا از معادلهٔ خطی صحبت کنیم، منظورمان معادله‌ای به‌صورت (۲) است.

حل معادله، یعنی روشن کردن این موضوع که: آیا معادلهٔ ریشه دارد یا نه؛ و در حالت داشتن ریشه، پیدا کردن همهٔ ریشه‌های آن.

اگر $m\neq 0$، آن‌وقت معادلهٔ (۲) یك ریشهٔ منحصر دارد: $x=\frac{n}{m}$.

اگر $m=0$ و $n\neq 0$، آن‌وقت معادلهٔ (۲) به‌صورت

$$0\cdot x=n$$

در می‌آیدکه، به‌ازای هیچ‌مقداری از x، برقرار نیست؛ یعنی در این‌حالت، معادلهٔ (۲) ریشه ندارد.

اگر $m=n=0$، آن‌وقت، معادلهٔ (۲) به‌صورت

$$0\cdot x=0$$

درمی‌آیدکه، به ازای هرمقدار دلخواهی از x، برقرار است: در این‌حالت، معادلهٔ (۲) بی‌نهایت ریشه دارد و هرعدد حقیقی دلخواهی، ریشهٔ آن است.

مثال. معادلهٔ $ax-1=x+2$ را، به نسبت مجهول x، حل کنید.

بعد از جابه‌جائی‌های لازم، معادلهٔ مفروض، به‌صورت

$$(a-1)x=3$$

درمی‌آید. این معادله، درحالت $a\neq 1$، یك ریشه دارد: $x=\frac{3}{a-1}$. ولی اگر داشته باشیم $a=1$، آن‌وقت، معادلهٔ مفروض، به‌صورت $0\cdot x=3$ درمی‌آید که ریشه ندارد.

پاسخ. معادله، به‌ازای $a=1$ ریشه ندارد و، به‌ازای $a\neq 1$، یك ریشهٔ منحصر دارد: $x=\frac{3}{a-1}$.

تمرین. این معادله‌ها را، نسبت به‌مجهول x، حل کنید:

۱۲. $3x+1=a$ ۱۳. $3-x=ax$

۱۴. $4=ax$ ۱۵. $x=a^2x$

۱۶. $ax-a^2=4-2x$ ۱۷. $a+x=a^2x-1$

۱۸. $ax-b=1+x$ ۱۹. $x=b-a^2x$

۲۰. $ax-b^2=7$ ۲۱. $3-a^2x=x-b$

۲۲. $\frac{ax-b}{a+c}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

۲۳. آیا معادلهٔ $mx=n$ می‌تواند: الف) ریشه نداشته‌باشد؛ ب) یك ریشه‌داشته‌باشد؛ ج) دو ریشهٔ مختلف‌داشته‌باشد؛ د) ۱۰۰۰۰۰ ریشهٔ مختلف داشته باشد؟

۲۴. آیا معادلهٔ $ax=1+b^2$ می‌تواند بی‌نهایت ریشهٔ‌مختلف داشته باشد؟

۲۵. پدر ۴۵ ساله و پسرش ۱۵ ساله است. الف) بعد از چند سال، سن پدر دو برابر سن پسرش می‌شود؛ ب) بعد از چند سال، پدرچهار برابر پسرش سن‌دارد؟ ریشهٔ منفی معادله را، که ضمن‌حل‌حالت ب) به‌دست‌می‌آید، چگونه می‌توان تفسیر کرد؟

۲۶. دونوع آلیاژ داریم، اولی‌شامل p درصد و دومی شامل q درصد نیکل. از هر نوع آلیاژ، چه مقداری انتخاب کنیم تا از آن‌ها بتوان آلیاژی

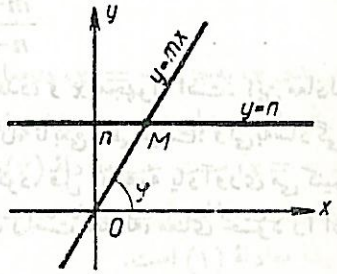
که شامل r درصد نیکل است، به‌دست‌آوریم؟

§۴. تعبیر هندسی از ریشهٔ معادلهٔ $mx=n$

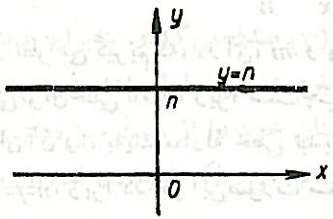
معادلهٔ $mx=n$ را، که هر معادلهٔ خطی منجر به‌آن می‌شود، می‌توان به‌سادگی و به‌کمك نمودارها حل کرد.

نمودار دو تابع $y=mx$، $y=n$ را روی یك دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم؛ اگر این دو نمودار، نقطهٔ برخورد داشته باشند، آن وقت طول نقطهٔ برخورد، همان ریشهٔ معادلهٔ $mx=n$ است. سه حالت را بررسی می‌کنیم.

۱. $m\neq 0$. در این‌حالت، نمودار تابع $y=mx$، خط راستی است که از مبداء مختصات می‌گذرد و با محور x، زاویه‌ای مثل φ می‌سازد (شکل ۱۲). نمودار تابع $y=n$، خط راستی است موازی با محور x. چنین خط‌های راستی، همیشه در یك نقطه، و تنها در یك نقطه، یکدیگر را قطع می‌کنند (روی شکل ۱۲، نقطهٔ M). طول همین نقطهٔ برخورد، ریشهٔ معادلهٔ $mx=n$ است.



شکل ۱۲

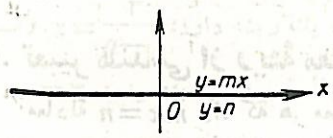


شکل ۱۳

۲. $m=0$، $n\neq 0$. در این حالت، خط راست $y=mx$، بر محور x منطبق وخط راست $y=n$، موازی محور x می‌شود (شکل۱۳). خط‌های راست $y=mx$ و $y=n$ باهم موازی درمی‌آیند و نقطهٔ برخوردی ندارند؛ یعنی معادلهٔ $mx=n$، ریشه ندارد.

۳. $m=n=0$. در این حالت، هردو خط راست $y=mx$، $y=n$

بر محور x منطبق می‌شوند (شکل ۱۴)، یعنی هر نقطه از محور x را، می‌توان نقطهٔ برخورد آن‌ها به حساب آورد: در این‌حالت، هرعدد حقیقی دلخواهی، ریشهٔ معادلهٔ $mx=n$ است.



شکل ۱۴

تمرین. حل نموداری این معادله‌ها را بدهید.

۲۷. $2x=4$ ۲۸. $3x=0$

۲۹. $4x=-4$ ۳۰. $0/5x=1/5$

۳۱. $-0/8x=0$ ۳۲. $-2x=-7$

۳۳. $3-x=3x-1$ ۳۴. $x=2x+6$

§۵. معادله‌های قابل تبدیل به‌معادلهٔ خطی

حل برخی از معادله‌های غیر خطی، به حل معادله‌های خطی منجر می‌شود. مثلاً، معادلهٔ

$$\frac{m+x}{n+x}=\frac{m}{n} \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم که، در آن، m و n عدد، و x مجهول است. این معادله را نمی‌توان خطی نامید، زیرا سمت‌چپ آن، تابعی خطی نیست؛ ولی به‌سادگی می‌توان آن را، به‌یك معادلهٔ خطی تبدیل کرد. قبل از همه یادآوری می‌کنیم که $n\neq 0$، زیرا درغیر این‌صورت سمت راست معادله، معنای خود را از دست می‌دهد.

اکنون، با استفاده از ویژگی تناسب که اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌وقت $ad=bc$، برابری (۱) چنین می‌شود:

$$(m+x)n=(n+x)m$$

از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$(n-m)x=0$$

به‌این‌ترتیب، از معادلهٔ غیرخطی (۱)، به‌معادلهٔ خطی (۲) رسیدیم.

اگر $m\neq n$، آن‌وقت $x=0$ و اگر $m=n$، آن‌وقت x برابر است با هرعدد دلخواه.

دربارهٔ پاسخی که به‌دست آورده‌ایم، عجله نکنیم. برای رسیدن از معادلهٔ (۱) به‌معادلهٔ (۲)، در واقع، دوطرف معادله را در $n(n+x)$ ضرب کرده‌ایم. ولی در این‌صورت، ممکن است ریشه‌های بیرونی وارد در معادله شده باشد. بنابراین، باید آزمایش کنیم.

ابتدا ریشهٔ $x=0$ را، که ازمعادلهٔ (۲) با شرط $m\neq n$ به‌دست آمد، آزمایش می‌کنیم. اگردرمعادلهٔ (۱)، به‌جای x، عددصفررا قرار دهیم، به‌دست می‌آید $\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$ بنابراین، $x=0$، با شرطهای $m\neq n$ و $n\neq 0$، در واقع هم، ریشهٔ معادلهٔ (۱) است. اکنون ببینیم، آیا با شرط $m=n\neq 0$، هرعددی می‌تواند ریشهٔ معادلهٔ (۱) باشد؟ معادلهٔ (۱)، برای $m=n$، به‌این‌صورت در می‌آید:

$$\frac{n+x}{n+x}=1 \qquad (3)$$

هرعدد x_0، به‌جز $x_0=-n$، درمعادلهٔ (۳) صدق می‌کند و، بنابراین، ریشه‌ای از آن است. ولی $x_0=-n$ نمی‌تواند ریشهٔ این معادله باشد، زیرا به‌ازای $x=-n$، سمت چپ معادلهٔ (۳)، معنای خود را از دست می‌دهد. به‌این ترتیب، درحالت $m=n$، نه هرعدد دلخواهی، بلکه هرعددی غیر از $-n$، ریشهٔ معادلهٔ (۱) است.

اکنون می‌توان پاسخ را داد: اگر $n\neq 0$ و $m\neq n$، آن‌وقت معادلهٔ (۱) یك ریشهٔ منحصر دارد: $x=0$؛ اگر $m=n\neq 0$، آن‌وقت هر عددی، به‌جز $-n$، ریشهٔ معادله است.

تمرین. این معادله‌ها را حل کنید:

۳۵. $\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x-3}$؛ ۳۶. $\frac{2}{x-3}=\frac{x+5}{x^2-9}$؛

۳۷. $\frac{x-5}{x+7}=\frac{a-x}{x+7}$؛ ۳۸. $\frac{a}{x-2}=\frac{x+1}{x^2-4}$؛

۳۹. $\frac{3x^2-4a}{ax-a-3x+3}=\frac{3x}{a-3}-\frac{x}{x-1}$؛

۴۰. $\frac{a}{1-bx}=\frac{b}{1-ax}$؛

۴۱. $\frac{a+b}{x-a}+\frac{a-b}{x-b}=\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}$؛

۴۲. $\frac{m}{x-m}-\frac{n}{x-n}=\frac{m-n}{x-p}$.

§۶. معادله‌های شامل علامت قدرمطلق

قدرمطلق عدد x (که به‌صورت $|x|$ نشان داده می‌شود)، به‌این‌ترتیب تعریف می‌شود:

$$|x|=\begin{cases} x & (x>0) \\ -x & (x<0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

مثلاً: $|10|=10$، $\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$، $|-100|=100$ و غیره.

در برخی معادله‌ها، عبارت‌هایی شامل مجهول، با علامت قدرمطلق داده شده‌اند. مثل

$$|x-1|=2, \quad |6-2x|=3x+1$$

اساس حل این گونه معادله‌ها، با توجه به‌این نکته است که، اگر قدرمطلق عددی مثل x برابر عدد مثبت a باشد، آن‌وقت خود x یا برابر a است و یا برابر $-a$. مثلاً، اگر $|x|=10$، آن‌وقت $x=10$ یا $x=-10$.

به‌چند مثال توجه کنید. برای معادلهٔ $|x-1|=2$ داریم: $x-1=2$

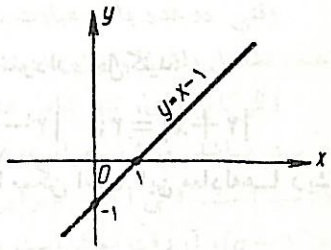
یعنی $x=3$ یا $x-1=-2$ یا $x=-1$. آزمایش نشان می‌دهد که، هر دو عدد در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند. به این‌ترتیب، معادلهٔ $|x-1|=2$ دو ریشه دارد: $x_1=3$ و $x_2=-1$.

اکنون معادلهٔ $|6-2x|=3x+1$ را حل می‌کنیم. داریم:

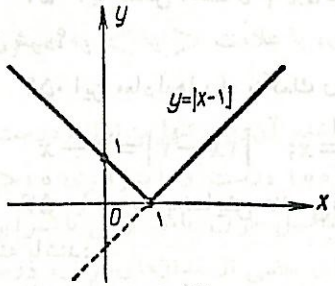
$$6-2x=3x+1 \text{ یا } 6-2x=-(3x+1)$$

که در حالت اول $x=1$ و درحالت دوم $x=-7$ به‌دست می‌آید، ضمن آزمایش معلوم می‌شود که $x=1$ در معادله صدق می‌کند، ولی $x=-7$، منجر به‌برابری نادرست $20=-20$ می‌شود. این معادله، تنها یك جواب دارد: $x=1$.

این گونه معادله‌ها را، به‌یاری نمودار هم می‌توان حل کرد. مثلاً معادله $|x-1|=2$ را، به‌کمك نمودار حل می‌کنیم. برای این‌منظور، باید نمودار $y=|x-1|$ را رسم کنیم. ابتدا نمودار تابع $y=x-1$ را رسم می‌کنیم (شکل ۱۵). آن بخش از نمودار را که در بالای محور x قرار دارد، بدون



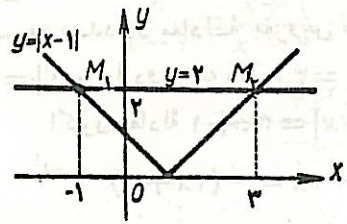
شکل ۱۵



شکل ۱۶

تغییر نگه می‌داریم؛ برای این بخش داریم $x-1>0$ و، بنابراین $|x-1|=x-1$. ولی بخشی از نمودار را که در زیر محور x قرار دارد، به‌قرینهٔ خود نسبت به‌این محور، تبدیل می‌کنیم؛ در واقع برای این بخش $x-1<0$ و، بنابراین، $|x-1|=-(x-1)$. به‌این‌ترتیب، نمودار تابع $y=|x-1|$ به‌دست می‌آید (شکل ۱۶). این نمودار، خط راست $y=2$ را در دو نقطه قطع می‌کند: نقطهٔ M_1 به طول -1 و نقطهٔ M_2 به طول ۳

(شکل ۱۷)؛ یعنی معادلهٔ $|x-1|=2$ دو ریشه دارد: $x_1=-1$ و $x_2=3$.



شکل ۱۷

تمرین. این معادله‌ها را حل کنید:

۴۳. $1-|x|=\frac{1}{2}$؛

۴۴. $1+|x|=a$؛

۴۵. $|1-x|=\frac{1}{2}$؛

۴۶. $|1-x|=a$؛

۴۷. $|x+3|=3+2x$؛

۴۸. $|7x-1|=21-9x$؛

۴۹. $|5-x|=|x+4|$؛

۵۰. $|1-3x|=|2-3x|$.

۵۱. نمودار تابع $x=|ax+b|$ را، از روی نمودار تابع $y=ax+b$، چگونه می‌توان رسم کرد؟

۵۲. آیا ممکن است $y=ax+b$، بر نمودار تابع $y=|ax+b|$ منطبق شود؟

۵۳. این معادله‌ها را، به‌کمک رسم نمودار، حل کنید:

$$|2+x|=3;\quad |2-x|=x;\quad |2x-3|=3-x$$

۵۴. با توجه به‌نمایش هندسی، آیا ممکن است این معادله‌ها ریشه نداشته باشند:

الف) $x=|ax+b|$؛ ب) $|2x+b|=3$؛ ج) $|x+b|=c$؛ د) $|ax+b|=|cx+d|$ $(a\neq 0, c\neq 0)$.

۵۵. اگر نمودار تابع $y=ax+b$ دراختیار باشد، چگونه می‌توان، به‌کمک آن، نمودار تابع $y=a|x|+b$ را رسم کرد؟

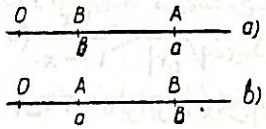
§۷. نابرابری

عدد a را وقتی بزرگتر از عدد b می‌نامیم که: تفاضل $a-b$، عددی مثبت باشد. در حالتی که $a-b$ عددی منفی باشد، گویند a از b کوچکتر

است. مثلاً، عدد ۵ از عدد ۳ بزرگتر است، زیرا $5-3=2$ عددی مثبت است، ولی -7 از -6 کوچکتر است، زیرا $-7-(-6)=-1$ عددی منفی است.

برای این‌که بگوییم عدد a از عدد b بزرگتر است، از علامت $>$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم: $a>b$؛ درحالتی که عدد a ازعدد b کوچکتر باشد، علامت $<$ به کار می‌رود و می‌نویسند: $a<b$. مثلا $-1<0$، $a^2+\frac{1}{2}>a^2$ و غیره.

نابرابری، تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. عددها را به‌وسیلهٔ نقطه‌های واقع بر محور عددی نشان می‌دهیم. فرض کنید، عدد a متناظر با نقطهٔ A وعدد b متناظر با نقطهٔ B باشد، دراین‌صورت، اگر $a>b$، آن‌وقت نقطهٔ A در سمت راست نقطهٔ B قرار می‌گیرد (شکل ۱۸-الف) و اگر $a<b$، آن‌وقت نقطهٔ A در سمت‌چپ نقطهٔ B واقع است (شکل ۱۸-ب).



شکل ۱۸

وقتی دو عدد یا دو عبارت جبری، با علامت $<$ یا $>$ به هم مربوط باشند، تشکیل یك نابرابری داده‌اند.

اگر نابرابری، تنها شامل عدد باشد، آن‌وقت تنها می‌تواند درست یا نادرست باشد. مثلاً، نابرابری $100>7$ درست و نابرابری $1>10$ نادرست است، ولی اگر نابرابری شامل حرف باشد (مثل نابرابری $a-1>2$)، آن‌وقت ممکن است به‌ازای بعضی ازمقدارهای حرف، درست وبه‌ازای بقیهٔ مقدارهای آن نادرست باشد. مثلاً، نابرابری $a-1>2$، برای $a=10$ درست وبرای $a=1$ نادرست است. درچنین حالتی نابرابری را، نامعادله هم می‌نامند. ممکن است به‌ازای بعضی مقدارهای حرف یا حرف‌ها، سمت‌چپ یاسمت‌راست نابرابری، یا هردوطرف آن، معنای خود را از دست بدهد. مثلاً سمت‌چپ نابرابری $\frac{a-1}{a^2}<1$، به ازای $a=0$، معنا ندارد. مقدارهایی ازحرف‌ها که، به‌ازای آن‌ها، هردو طرف نابرابری معنا داشته باشد، مقدارهای قابل‌قبول این حرف‌ها و یا دامنهٔ تعریف نابرابری نامیده می‌شود.

مثلاً، در نابرابری $\sqrt{a}>b$، برای a هرعددغیرمنفی و برای b هرعددحقیقی قابل قبول است.

وقتی یك نابرابری، به‌ازای همهٔ مقدارهای قابل قبول حرف‌ها برقرار باشد، نابرابری اتحادی نامیده می‌شود. مثلاً، نابرابری‌های $a-1<a$ و $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{a^2+1}$ از این گونه‌اند.

تمرین.

۵۶. دامنهٔ تعریف را، برای هریك از این نابرابری‌ها پیدا کنید:

الف) $\frac{\sqrt{a}}{b}>5$؛ ب) $\sqrt{x}>1-x$؛ ج) $\frac{1}{\sqrt{a}}<a$؛

د) $\frac{1}{\sqrt{|x|}}<\frac{3x}{1-x}$؛ ه) $\frac{1}{a^2+b^2}>\frac{1}{a^2+b^2+1}$

۵۷. آیا نابرابری $|x|>x$، یك نابرابری اتحادی است؟

§۸. ویژگی‌های اصلی نابرابری‌های عددی

۱. اگر $a>b$، آن‌وقت $b<a$ و، برعکس اگر $b>a$، آن‌وقت $a<b$.

اثبات. فرض کنید $a>b$. بنابر تعریف، این نابرابری به معنای آن است که عدد $(a-b)$ مثبت و قرینهٔ آن $-(a-b)$ منفی است؛ یعنی $-(a-b)<0$ یا $b-a<0$ و این (بازهم بنا به‌تعریف نابرابری) به‌معنای آن است که $b<a$.

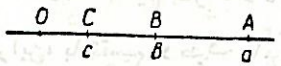
خواننده خود می‌تواند، عکس حکم را، با همین روش ثابت کند.

اثبات این ویژگی به طریق هندسی، خیلی ساده و روشن است: اگر روی محور عددی، نقطهٔ A در سمت راست نقطهٔ B باشد، آن‌وقت نقطهٔ B در سمت چپ نقطهٔ A قرار دارد و برعکس (شکل ۱۸ـ الف را ببینید).

۲. اگر $a>b$ و $b>c$، آن وقت $a>c$.

اثبات هندسی این ویژگی روشن است. فرض کنید، نقطهٔ A (متناظر با عدد a) در سمت راست نقطهٔ B (متناظر با عدد b)، و نقطهٔ B در سمت

راست نقطهٔ C (متناظر با عدد c) باشد. در این‌صورت نقطهٔ A، سمت راست نقطهٔ C خواهدبود (شکل ۱۹).



شکل ۱۹

اکنون به اثبات جبری این ویژگی نابرابری‌ها می‌پردازیم.

فرض کنید $a>b$ و $b>c$؛ یعنی $(a-b)$ و $(b-c)$ عددهایی مثبت‌اند. بنابراین $(a-b)+(b-c)$، یعنی $(a-c)$ هم‌عددی مثبت می‌شود و این، به‌معنای آن است که $a>c$.

۳. اگر $a>b$، آن وقت برای هر عدد c داریم: $a+c>b+c$، به زبان دیگر، اگر به هر دو طرف یك نابرابری عددی، عددی را اضافه کنیم، درستی (یا نادرستی) نابرابری به‌هم نمی‌خورد.

اثبات. فرض کنید $a>b$. بنابراین عدد $(a-b)$ مثبت‌است. از طرف دیگر

$$(a-b)=(a+c)-(b+c)$$

پس $(a+c)-(b+c)>0$، یعنی $a+c>b+c$.

نتیجه. هر جمله را می‌توان از یك طرف به طرف دیگر نابرابری منتقل کرد، به‌شرطی که علامت‌آن را عوض کنیم.

مثلاً نابرابری $a+b>c$، به‌معنای $a>c-b$ است، زیرا اگر به دوطرف نابرابری اول، عدد $-b$ را اضافه‌کنیم، به‌نابرابری دوم می‌رسیم.

۴. فرض‌کنید $a>b$. در این صورت، اگر $c>0$، آن‌وقت $ac>bc$، و اگر $c<0$، آن وقت $ac<bc$.

به زبان دیگر، با ضرب دو طرف نابرابری در عددی مثبت، جهت نابرابری تغییر نمی‌کند، ولی باضرب دو طرف نابرابری در عدد منفی، جهت آن تغییر می‌کند.

اثبات. فرض کنید $a>b$؛ یعنی $(a-b)$ عددی مثبت‌است. روشن‌است که حاصل‌ضرب دو عدد مثبت $(a-b)$ و c، باز هم عددی مثبت می‌شود، یعنی $c(a-b)>0$ یا $ca-cb>0$ و، بنابراین $ca>cb$. برای حالت

منفی بودن c هم، به‌همین ترتیب ثابت می‌شود.

نتیجه. تقسیم بر عدد $c\neq 0$، هم‌ارز است با ضرب در عدد $\frac{1}{c}$.

بنابراین، با تقسیم دو طرف نابرابری بر عدد مثبت c، جهت نابرابری تغییر نمی‌کند، ولی با تقسیم دو طرف نابرابری بر عدد منفی c؛ جهت آن تغییر می‌کند.

تمرین.

۵۸. دو طرف نابرابری $2>1$ را: الف) در a^2+1؛ ب) در a؛ ج) در $|a|$؛ د) در a^2+2a-1 ضرب کنید.

۵۹. آیا همیشه $5a$ از $4a$ بزرگتر است؟

۶۰. می‌دانیم $(-x)$ از ۷ بزرگتر است. دربارهٔ عدد x چه می‌توان گفت؟

۶۱. این‌عددها را به‌ترتیب صعودی (از کوچکتر به بزرگتر) بنویسید:
الف) a^2، $5a^2$، $2a^2$؛ ب) a، $5a$، $2a$.

۶۲. عددهای $a-b$، $a-2b$ و $a-3b$ را، به ترتیب نزولی بنویسید.

۶۳. ویژگی سوم نابرابری را، با تعبیر هندسی روشن کنید.

§۹. جمع و تفریق نابرابری‌ها

دو نابرابری را که علامت نابرابری یکسانی داشته باشند (هر دو $>$ یا هردو $<$) هم‌جهت و دو نابرابری را که علامت نابرابری یکسانی نداشته باشند (یکی $>$ و دیگری $<$) با جهت‌های مخالف گویند: دو نابرابری $a>b$ و $3>2$ هم‌جهت‌اند، درحالی که نابرابری‌های $16>0$ و $a>5$ درجهت‌ها مختلف‌اند.

قضیهٔ ۱. اگر $a>b$ و $c>d$، آن وقت $a+c>b+d$؛ به زبان دیگر، دو نابرابری هم‌جهت را می‌توان با هم جمع کرد.

اثبات. چون $a>b$ و $c>d$، پس عددهای $(a-b)$ و $(c-d)$ مثبت‌اند، یعنی مجموع آن‌ها $(a-b)+(c-d)$ مثبت است، ولی

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$$

بنابراین، عدد $(a+c)-(b+d)$ مثبت است و داریم:

$$a+c>b+d$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که، اگر $a<b$ و $c<d$، آن‌وقت

$$a+c<b+d$$

قضیهٔ ۲. دو نابرابری را که با جهت‌های مختلف باشند، می‌توان از هم کم‌کرد، به‌شرطی که نابرابری حاصل را، درجهت نابرابری مفروق (آن که دیگری را از آن کم کرده‌ایم) قرار دهیم.

مثال:

$$-\begin{cases}15>10\\ 2>3\end{cases}\qquad -\begin{cases}2>0\\ -6<-3\end{cases}$$
$$\overline{13>7}\qquad \overline{-6>5}$$

اثبات. $a>b$ و $c<d$ می‌گیریم. ثابت می‌کنیم

$$a-c>b-d \qquad (*)$$

اگر دو طرف نابرابری $c<d$ را در -1 ضرب کنیم، به‌دست می‌آید: $-c>-d$. اکنون می‌توانیم دو نابرابری $a>b$ و $-c>-d$ را با هم جمع کنیم که، از آن‌جا، به‌همان نابرابری $(*)$ می‌رسیم. برای حالت $a<b$ و $c>d$ هم می‌توان به‌همین ترتیب عمل کرد.

یادداشت. دو نابرابری هم‌جهت را، درحالت کلی، نمی‌توان ازهم کم کرد. مثلاً اگر از نابرابری $2>0$، نابرابری $-5>0$ را کم کنیم، به‌نابرابری نادرست $2>5$ می‌رسیم.

تمرین

درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۶۴. $\sqrt{5}+\sqrt{10}>5$؛

۶۵. $\sqrt{6}+\sqrt{21}>\sqrt{20}+\sqrt{5}$؛

۶۶. $\sqrt{7}+\sqrt{15}<7$؟

۶۷. $\sqrt{37}-\sqrt{14}>6-\sqrt{15}$؟

۶۸. $\sqrt{101}-\sqrt{35}>4$؟

۶۹. $\sqrt{17}-\sqrt{390}<-16$.

§۱۰. ضرب نابرابری‌ها در یکدیگر

قضیه. دو نابرابری هم‌جهت را، به‌شرطی که هر دو طرف هر یک از نابرابری‌ها مثبت باشند، می‌توان در هم ضرب کرد.

اثبات. a، b، c و d را عددهایی مثبت می‌گیریم و فرض می‌کنیم $a>b$ و $c>d$. ثابت می‌کنیم $ac>bd$.

اگر دوطرف نابرابری $a>b$ را درعدد مثبت c ضرب کنیم، به‌دست می‌آید $ac>bc$. همچنین، با ضرب دوطرف نابرابری $c>d$ درعدد مثبت b به دست می‌آید $bc>bd$. به این ترتیب، $ac>bc$ و $bc>bd$، یعنی $ac>bd$.

حالت $a<b$ و $c<d$ (با فرض مثبت بودن جمله‌ها) هم، به‌همین ترتیب ثابت می‌شود.

نتیجهٔ ۱. اگر a و b عددهایی مثبت و $a>b$، آن‌وقت، برای هرعدد طبیعی n

$$a^n>b^n$$

در واقع، اگر نابرابری $a>b$ را درخودش ضرب کنیم، به‌نابرابری $a^2>b^2$ می‌رسیم که با ضرب دوبارهٔ آن در $a>b$، نابرابری $a^3>b^3$ به‌دست می‌آید وغیره، به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که، باشرط $0<a<b$ داریم $a^n<b^n$.

نتیجهٔ ۲. اگر a و b عددهایی مثبت و $a^n>b^n$، آن وقت $a>b$.

در واقع، اگر $a=b$ آن‌وقت $a^n=b^n$ و اگر $a<b$ آن‌وقت، بنابرنتیجهٔ ۱، $a^n<b^n$ و، در هر دوحالت، شرط $a^n>b^n$ نقض می‌شود. پس $a>b$:

به‌همین ترتیب ثابت‌می‌شود: اگر a و b مثبت و $a^n<b^n$ آن‌وقت $a<b$.

مثال. کدام بزرگترند: $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ یا $\sqrt{3}+\sqrt{8}$؟

هر دو عدد را مجذور می‌کنیم:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=5+2\sqrt{30}+6=11+2\sqrt{30},$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2=11+2\sqrt{24}$$

مجذورعدد اول، از مجذورعدد دوم بزرگتر است وچون این عددهامثبت‌اند، بنابر نتیجهٔ ۲

$$\sqrt{5}+\sqrt{6}>\sqrt{3}+\sqrt{8}$$

تمرین

۷۰. آیا هردو نابرابری هم‌جهت‌را می‌توان درهم ضرب کرد؟ (به‌دو نابرابری $-10<3$ و $-7<-2$ توجه کنید.)

۷۱. آیا همیشه از $a>b$ نتیجه می‌شود $a^n>b^n$؟ در هر صورت مثال‌هایی پیدا کنید.

۷۲. آیا همیشه از $a^n<b^n$ می‌توان $a<b$ را نتیجه گرفت؟ مثال‌های متناظر را پیدا کنید.

۷۳. کدام بزرگترند:

الف) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ یا $\sqrt{7}$؛

ب) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ یا $\sqrt{6}+\sqrt{2}$؛

ج) $\sqrt{11}-\sqrt{2}$ یا $\sqrt{5}+1$؛

د) $\sqrt{8-\sqrt{15}}$ یا $\frac{1}{2}(\sqrt{30}-\sqrt{2})$؛

ه) $\frac{5\sqrt{2}+3\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ یا ۶؛

و) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$ یا $\sqrt[3]{26}$؛

ز) $(1+\sqrt{5})^{100}$ یا 3^{100}؛

ح) $(\sqrt{2}+\sqrt{7})^9$ یا 4^9؛

ط) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{51}$ یا $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^{51}$؟

§۱۱. نابرابری‌های دوگانه

نابرابری‌های به‌صورت $a'<a<a''$ را، نابرابری‌های دوگانه می‌نامیم که در واقع، دو نابرابری $a'<a$ و $a<a''$ را به‌هم پیوند داده است. همهٔ ویژگی‌های نابرابری‌های ساده (که در §۸ دربارهٔ آن‌ها صحبت کردیم)، دربارهٔ نابرابری‌های دوگانه هم درست است. مثلاً به‌هر بخش از نابرابری دوگانه می‌توان عدد دلخواه k را اضافه کرد:

$$a'+k<a+k<a''+k \qquad (۱)$$

یا هر بخش از نابرابری دوگانه را می‌توان در عددی مثبت ضرب کرد:

$$ka'<ka<ka'',\ k>0 \qquad (۲)$$

یا اگر همهٔ بخش‌های نابرابری دوگانه را، در عدد منفی l ضرب کنیم، جهت نابرابری‌ها عوض می‌شود:

$$la'>la>la'',\ l<0 \qquad (۳)$$

مثال.

۷۴. عدد a بین چه عددهایی قرار دارد، اگر

الف) $-1/2<3a<6$؛ ب) $-1/2<-3a<6$؟

۷۵. اگر بدانیم $1/1<a<1/2$ و $5/5<b<5/6$؛ مجموع $a+b$ بین چه عددهایی واقع است؟

۷۶. اگر $0/1<a<0/2$ و $-0/2<b<-0/1$، آن‌وقت عدد $a-b$ بین چه عددهایی قرار دارد؟

۷۷. $2a+3b$ بین چه عددهایی واقع است، به‌شرطی که بدانیم $0/55<b<0/56$ و $1/98<a<1/99$؟

۷۸. عدد ab بین کدام عددهاست، اگر

الف) $0/6<a<0/7$ و $2/3<b<2/4$؛

ب) $\frac{1}{5}<a<\frac{1}{6}$ و $3\frac{1}{8}<b<3\frac{1}{7}$؟

§۱۲. نابرابری‌های اکید و غیراکید

وقتی بخواهند نشان‌دهند، عدد a از عدد b کوچکتر نیست (به زبان دیگر، a بزرگتر از b یا برابر با آن)، از علامت $\geqslant$ استفاده می‌کنند و می‌نویسند: $a\geqslant b$. مثلاً $a^2+1\geqslant 1$، $|x|\geqslant 0$ و غیره.

به‌همین‌ترتیب، برای این‌که نشان‌دهند، عدد a ازعدد b بزرگتر نیست (یعنی عدد a یا کوچکتر است از عدد b و یا برابر است با آن)، از علامت $\leqslant$ استفاده می‌کنند و می‌نویسند: $a\leqslant b$. مثلاً $|x|\leqslant 0$. رابطه‌های $a\geqslant b$ و $a\leqslant b$ هم، مثل رابطه‌های $a>b$ و $a<b$، نابرابری نامیده می‌شوند.

نابرابری‌های با علامت $>$ یا $<$ را اکید و نابرابری‌های با علامت $\geqslant$ یا $\leqslant$ را غیراکید گویند. مثلاً نابرابری‌های $\pi<4$ و $2\pi>6$ اکید، و نابرابری‌های $17\geqslant 17$ و $3\leqslant 4$ غیراکیدند.

همهٔ ویژگی‌های مربوط به نابرابری‌های اکید (§۷ تا §۹)، دربارهٔ نابرابری‌های غیراکید هم برقرارند. مثلاً اگر $a\geqslant b$، آن‌وقت $b\leqslant a$؛ اگر $a\geqslant b$، آن‌رقت $a+c\geqslant b+c$ و غیره.

تمرین

۷۹. آیا نابرابری‌های $3\geqslant 3$، $30\geqslant 50$، $a^2+1\geqslant a^2$ درست‌اند؟

۸۰. آیا ممکن است، به‌طور هم‌زمان برقرار باشند:

الف) $a>b$ و $a<b$، ب) $a\geqslant b$ و $a\leqslant b$؟

۸۱. می‌دانیم $a\geqslant b$. آیا می‌توان گفت:

الف) $a>b$، ب) $a=b$؛ ج) یا $a>b$ یا $a=b$؟

۸۲. ثابت کنید، اگر $a>b$ و $c\leqslant d$، آب وقت

$$a-c>b-d$$

§۱۳. برخی روش‌ها، برای اثبات نابرابری‌ها

روش‌های زیادی برای اثبات درستی نابرابری‌ها وجود دارد. برخی از این روش‌ها را، روی مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱. ثابت کنید، برای هرعدد دلخواه و مثبت a و b، همیشه داریم، $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$؛ در ضمن، علامت برابری تنها برای $a=b$ پیش می‌آید.

روش اول. این تفاضل را درنظر می‌گیریم:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \qquad (1)$$

که می‌توان آن را به‌این‌ترتیب، تبدیل کرد:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

اگر $a \neq b$، آن‌وقت $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$، از آن‌جا

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>0 \quad \text{و} \quad \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

و روشن است که، علامت برابری وقتی، و تنها وقتی مصداق پیدا می‌کند که داشته باشیم:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0 \quad \text{و} \quad a=b$$

روش دوم. فرض می‌کنیم، این نابرابری درست باشد. دراین‌صورت، با ضرب دوطرف آن در ۲، به‌دست می‌آید:

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

$2\sqrt{ab}$ را به‌سمت چپ نابرابری می‌آوریم:

$$a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0$$

که سرانجام، می‌توان آن را این‌طور نوشت:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \qquad (2)$$

و روشن است که، این نابرابری، برای هر دو عدد دلخواه و مثبت a و b درست است؛ درضمن، علامت برابری، تنها برای‌حالت $a=b$ است. به‌این ترتیب، توانستیم نابرابری موردنظر را، به یك نابرابری واضح منجرکنیم. اکنون اگر همهٔ استدلال‌ها را درجهت عکس انجام دهیم، اثبات نابرابری مفروض به‌دست می‌آید.

برای هردو عدد مثبت a و b داریم:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0$$

درضمن، علامت برابری، تنها برای $a=b$. جملهٔ $-2\sqrt{ab}$ را به‌سمت‌راست برابری منتقل و، سپس، دو طرف را بر عدد مثبت ۲ تقسیم می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

بدون مقدمه‌دشوار است متوجه‌شویم که، برای اثبات درستی‌نابرابری (۱)، باید ازنابرابری واضح(۲) آغاز کنیم. به‌این‌علت بود که نابرابری(۱) را، درست انگاشتیم و با انجام عمل‌های ساده‌ای، خود را به نابرابری (۲) رساندیم.

مثال ۲. ثابت کنید، اگر حاصل‌ضرب دو عدد مثبت x و y برابر واحد باشد، داریم: $(1+x)(1+y) \geqslant 4$.

اثبات. در نابرابری (۱)، که هم‌اکنون درستی آن را ثابت کردیم، فرض می‌کنیم: $a=1$ و $b=x$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1+x}{2} \geqslant \sqrt{x} \quad \text{یا} \quad 1+x \geqslant 2\sqrt{x}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد: $1+y \geqslant 2\sqrt{y}$. از ضرب این دو نابرابری در یکدیگر، نتیجه می‌شود:

$$(1+x)(1+y)\geqslant 4\sqrt{xy}$$

ولی، بنابرفرض $xy=1$؛ بنابراین

$$(1+x)(1+y)\geqslant 4$$

تمرین. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۸۳. $(x+y)^2\geqslant 4xy$.

۸۴. $x^3+y^3\geqslant x^2y+xy^2$ $(x>0,\ y>0)$.

۸۵. $(a+b+c)^2\geqslant a(b+c-a)+$
$+b(a+c-b)+c(a+b-c)$

۸۶. $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $(a>0,\ b>0)$.

۸۷. $\frac{2a}{1+a^2}\leqslant 1$.

۸۸. $a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant 2$.

۸۹. هواپیما از تهران به‌کرمان می‌رود و، سپس، برمی‌گردد. در چه هوائی، هواپیما، تمامی این مسیر را سریع‌تر می‌رود: وقتی که هیچ بادی نباشد، یا وقتی که بادی با سرعت ثابت و از تهران به‌طرف کرمان، وجود داشته باشد؟

۹۰. ثابت کنید، نصف محیط مثلث، ازطول هرضلع آن بزرگتراست.

۹۱. ثابت کنید، نصف محیط مثلث، ازطول هرمیانهٔ آن بزرگتر است.

۹۲. ثابت کنید، درهر مثلث، میانه‌ای بزرگتر است که به‌ضلع کوچکتر وارد شده باشد.

§۱۴. قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌های حسابی و هندسی

واسطهٔ حسابی n عدد a_1، a_2، ...، a_n به‌عدد

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

و واسطهٔ هندسی n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n، به‌عدد

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

گفته می‌شود. مثلاً، برای دوعدد ۲ و ۸، واسطهٔ حسابی برابر $\frac{2+8}{2}$، یعنی ۵، و واسطهٔ هندسی برابر $\sqrt{2\times 8}$، یعنی ۴ می‌باشد. همچنین، واسطهٔ حسابی عددهای ۱۰ و ۱۰ و ۸۰ برابر است با

$$\frac{10+10+80}{3}=33\frac{1}{3}$$

و واسطهٔ هندسی آن‌ها:

$$\sqrt[3]{10\times 10\times 80}=\sqrt[3]{8000}=20$$

برای سه عدد ۵، ۵ و ۵، واسطهٔ حسابی برابر $\frac{5+5+5}{3}$ یعنی ۵؛ وواسطهٔ هندسی برابر $\sqrt[3]{5\times 5\times 5}$ یعنی ۵ است. توجه کنیم، در هرسه‌حالت، واسطهٔ حسابی از واسطهٔ هندسی کمتر نیست و تنها در حالت سوم، این دو واسطه، با هم برابر شدند، وقتی که‌عددها با یکدیگر برابرند. و این، امری تصادفی نیست، زیرا قضیهٔ زیر درست است.

قضیه. واسطهٔ حسابی n عدد مثبت، از واسطهٔ هندسی آن‌ها، کمتر نیست:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

و علامت برابری، تنها برای وقتی است که هر n عدد a_1، a_2، ...، a_n با هم برابر باشند.

دربند قبل، این قضیه‌را، برای حالتی که با دوعدد مثبت a و b سروکار داشته باشیم، ثابت کردیم:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

درضمن، دیدیم، علامت برابری، برای $a=b$، پیش می‌آید. اثبات این قضیه،

درحالت کلی n عدد، اندکی مفصل است و، به‌همین مناسبت، دراین‌جا به‌آن نمی‌پردازیم.

مثال ۱. ثابت کنید، برای هر سه عدد مثبت a، b و c داریم:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant ۳$$

در واقع، بنابر قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌های حسابی و هندسی داریم:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}$$

که از آن‌جا، نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

مثال ۲. ثابت کنید، برای هرعدد مثبت a، همیشه داریم:

$$۹۹a+۱\geqslant ۱۰۰\sqrt[۱۰۰]{a^{۹۹}}$$

علامت برابری، تنها برای $a=۱$ درست است.

اگر قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌های حسابی و هندسی را دربارهٔ ۱۰۰ عدد

$$\underbrace{a, a, \dots, a}_{۹۹\text{ مرتبه}}, ۱$$

به‌کار بریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۹۹a+۱}{۱۰۰}\geqslant\sqrt[۱۰۰]{a^{۹۹}}$$

که از آن‌جا، نابرابری موردنظر نتیجه می‌شود. علامت برابری وقتی برقرار است که، هر ۱۰۰ عدد، باهم برابر باشند، یعنی وقتی که داشته‌باشیم $a=۱$.

از قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌های حسابی و هندسی، این‌نتیجهٔ مهم به‌دست می‌آید:

نتیجه. اگر حاصل‌ضرب n عدد مثبت، برابر واحد باشد، آن‌وقت مجموع آن‌ها، از n کوچکتر نیست. به زبان دیگر، اگر برای n عدد مثبت $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n داشته باشیم:

$$a_۱\cdot a_۲\cdots a_n=۱$$

آن‌وقت داریم:

$$a_۱+a_۲+\dots+a_n\geqslant n \qquad (۱)$$

در عمل، دستور (۱)، اغلب برای حالت $n=۲$ مورد استفاده دارد: مجموع یك عدد مثبت با عدد عکس‌آن، از ۲ کوچکتر نیست:

$$a+\frac{۱}{a}\geqslant ۲, \quad a>۰$$

تمرین

۹۳. آیا برای هر n عدد دلخواه: الف) واسطهٔ حسابی؛ ب) واسطهٔ هندسی، وجود دارد؟

این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۹۴. $(a+b)\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\right)\geqslant ۴$ $(a>۰, b>۰)$

۹۵. $۱\sqrt{(a+\alpha)(b+\beta)}\leqslant\frac{۱}{۲}(a+b)+\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)$

$(a>۰, b>۰, \alpha>۰, \beta>۰)$

۹۶. $\sqrt[n+۱]{ab^n}\geqslant\frac{abn}{n+۱}$.

۹۷. $۲a^۲+b^۲+c^۲\geqslant ۲a(b+c)$.

۹۸. $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant ۸abc$ $(a>۰, b>۰, c>۰)$.

۹۹. $(a+۱)(b+۱)(a+c)(b+c)\geqslant ۱۶abc$ (برای عددهای مثبت a، b و c).

۱۰۰. $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$ (a، b و c، عددهایی مثبت‌اند).

۱۰۱. $\sqrt{ab}\geqslant\frac{۲ab}{a+b}$ $(a>۰$ و $b>۰)$.

۱۰۲. $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$.

۱۰۳. ثابت کنید، اگر مجموع دو عدد مثبت a و b برابر واحد باشد، آن‌وقت $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$.

§۱۵. قضیهٔ مربوط به‌مجموع ثابت و حاصل‌ضرب ثابت

از قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌های حسابی و هندسی، می‌توان قضیهٔ مهم زیر را نتیجه گرفت که در مساله‌های عملی، کاربرد بسیار دارد.

قضیهٔ مربوط به‌مجموع ثابت. اگر دو کمیت مثبت، مجموع ثابتی داشته باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی، و تنها وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد که، این دو کمیت، باهم برابر باشند.

مثلاً، اگر بدانیم، مجموع دو مقدار مثبت a و b برابر است با ۱۰، ممکن است یکی از حالت‌های $\begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases}$، $\begin{cases} a=2 \\ b=8 \end{cases}$، $\begin{cases} a=3/5 \\ b=6/5 \end{cases}$، $\begin{cases} a=4/1 \\ b=5/9 \end{cases}$، $\begin{cases} a=5 \\ b=5 \end{cases}$ و غیره وجود داشته باشد. در مورد این حالت‌ها، برای ab، به ترتیب، مقدارهای ۹، ۱۶، ۲۲/۲۵، ۲۴/۱۹، ۲۵ به‌دست می‌آید. می‌بینیم، حداکثر مقدار ab (یعنی ۲۵)، برای وقتی است که داشته باشیم: $a=b=5$.

اثبات قضیه. فرض کنید، مجموع دو مقدار مثبت a و b، برابر c باشد. در این صورت، بنابر قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌های حسابی و هندسی داریم:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} = \frac{c}{2}$$

یعنی $ab \leqslant \frac{c^2}{4}$. درحالت $a \neq b$ داریم: $ab < \frac{c^2}{4}$ و درحالت $a=b$ داریم: $ab = \frac{c^2}{4}$؛ یعنی حاصل‌ضرب ab، تنها درحالت $a=b$، به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد.

مساله. درحصاری به‌طول l، چه‌قطعهٔ مستطیلی‌شکل را می‌توان محصور

کرد که حداکثر مساحت ممکن را داشته باشد؟

حل. طول قطعه زمین را x و عرض آن را y می‌گیریم. بنابراین داریم: $x+y=\frac{l}{2}$. مساحت این قطعه زمین، برابر است با xy و، حداکثر این حاصل‌ضرب (با ثابت بودن مجموع دو عامل آن) وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم: $x=y=\frac{l}{4}$ و، دراین‌صورت، مساحت آن برابر $\frac{l^2}{16}$ می‌شود. $\frac{l^2}{16}$ حداکثر مساحت زمینی است که می‌توان با حصاری به‌طول l محصور کرد.

قضیهٔ مربوط به‌حاصل ضرب ثابت. اگر حاصل‌ضرب دو مقدار مثبت، ثابت باشد، مجموع آن‌ها وقتی، و تنها وقتی به‌حداقل خود می‌رسد که، این دو مقدار، با هم برابر باشند.

مثلاً، اگر حاصل‌ضرب دو مقدار مثبت a و b برابر ۱۶ باشد، می‌توان حالت‌های $\begin{cases} a=1 \\ b=16 \end{cases}$، $\begin{cases} a=2 \\ b=8 \end{cases}$، $\begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$، $\begin{cases} a=5 \\ b=\frac{16}{5} \end{cases}$ وغیره را درنظر گرفت که، در این‌صورت، مجموع $a+b$، به‌ترتیب برابر ۱۷، ۱۰، ۸، $8\frac{1}{5}$ وغیره می‌شود. حداقل مجموع (یعنی ۸) وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم: $a=b=4$.

اثبات این قضیه هم، کاملاً شبیه اثبات قضیهٔ مربوط به مجموع ثابت انجام می‌گیرد و، آن را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مساله. می‌خواهیم دور قطعه زمینی به مساحت S، حصاری بکشیم. در چه حالتی، طول حصار، حداقل مقدار ممکن است؟

حل، طول قطعه زمین مستطیلی‌شکل را x و عرض آن را y می‌گیریم. در این‌صورت، طول حصار، برابر $2(x+y)$ و مساحت زمین $S=xy$ می‌شود، چون حاصل‌ضرب xy مقداری است ثابت. بنابراین مجموع $x+y$، وقتی به‌حداقل مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم: $x=y=\sqrt{S}$ که، در این‌صورت، طول کل حصار، برابر $4\sqrt{S}$ خواهد شد. و این حداقل طول

حصاری است که می‌توان دور قطعه زمین با مساحت S کشید.

تمرین

۱۰۴. به‌ازای چه مقداری از a، این عبارت‌ها، به‌حداکثر مقدار خود می‌رسند:

الف) $a(8-a)$؛ ب) $(1+2a)(3-2a)$؛ ج) $a\sqrt{10-a^2}$ (عبارت $(a\sqrt{10-a^2})^2$ را درنظر بگیرید)؟

۱۰۵. مقدار مثبت x را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن این عبارت‌ها، به‌حداقل مقدار خود برسند:

الف) $x+\frac{1}{x}$؛ ب) $2x+\frac{8}{x}$؛ ج) $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

۱۰۶. در دایره‌ای به شعاع R، مستطیلی با مساحت حداکثر محاط کنید.

۱۰۷. از یك تیر چوبی به‌قطر d، می‌خواهیم تیری با مقطع مستطیلی شکل، طوری درآوریم که حداقل چوب تلف شده باشد. مساحت این مقطع را پیدا کنید.

۱۰۸. پنجره به‌شکل مستطیل است، طول و عرض پنجره چقدر باشد تا، با محیط برابر $2p$، حداکثر روشنائی را از خود عبور دهد؟

۱۰۹. این معادله‌ها را حل کنید:

الف) $x+\frac{1}{x}=2$؛ ب) $x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$؛ ج) $x+\frac{1}{x}=-2$.

۱۱۰. با استفاده از قضیهٔ مربوط به مجموع ثابت، ریشه‌های مثبت معادله را پیدا کنید:

الف) $x(2-x)=1$؛ ب) $(x+1)(5-x)=1$.

۱۱۱. گروه اول درهرماه ۲٪ تولید را بالا می‌برد؛ گروه دوم در نیم سال اول، میزان تولید را ۱٪ و در نیم‌سال‌دوم ۳٪ بالا می‌برد. کدام‌یك از این دوگروه، میزان تولید را، درطول تمامی سال، بالا برده‌اند؟

در شمارهٔ بعد ادامه می‌دهیم.

تبدیل بعضی رادیکالهای مرکب

ازصورت: $\sqrt[3]{P\pm Q\sqrt{r}}$ به‌عبارت $a\pm b\sqrt{r}$

مقدمه: چنانکه درحل معادله درجه سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ آمده است با انتخاب مجهول معادل $x=X-\frac{b}{3a}$ می‌توان معادله را به صورت معادلهٔ درجه سوم ناقص $X^3+pX+q=0$ درآورد و در حالتی که مبین این‌معادله یعنی $4p^3+27q^2$ بزرگتر ازصفر باشد، معادله فقط یك ریشه درحوزهٔ عددهای حقیقی دارد ومقدار این ریشه از دستور:

$$X=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

که به‌دستور کاردان معروف است به‌دست می‌آید.

مثال ۱: معادله درجه سوم $X^3-6X-40=0$ را حل کنید.

$$p=-6,\ q=-40 \quad \text{و} \quad 4p^3+27q^2=4(-6)^3+$$
$$+27(-40)^2=4\times 27(-8+400)>0$$

معادله فقط یك ریشه در حوزهٔ عددهای حقیقی دارد و با استفادهٔ از دستور کاردان می‌توان نوشت:

$$X=\sqrt[3]{20+\sqrt{\frac{(-6)^3}{27}+\frac{(-40)^2}{4}}}+$$
$$+\sqrt[3]{20-\sqrt{\frac{(-6)^3}{27}+\frac{(-40)^2}{4}}}$$

$$X=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

حال اگر بتوان عبارت $20\pm14\sqrt{2}$ را به‌صورت توان سوم یك دوجمله‌ای $a\pm b\sqrt{2}$ نوشت، مقدار جواب معادله به‌صورت ساده‌تر به‌دست می‌آید:

$$20+14\sqrt{2}=(a+b\sqrt{2})^3 \Rightarrow 20+14\sqrt{2}=$$
$$=a^3+3a^2b\sqrt{2}+6ab^2+2b^3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a^3+6ab^2=20 \\ 3a^2b+2b^3=14 \end{cases}$$

حل این دستگاه به‌حل یك معادله درجهٔ سوم کامل (برحسب یکی‌از حرفهای a یا b) منجر می‌شود که همان روش حل معادلهٔ درجه سوم درمورد آن باید تکرارشود. اگر a و b عددهای درست فرض‌شوند، برای به‌دست‌آوردن آنها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a(a^2+6b^2)=20=1\times20=2\times10=4\times5 \\ b(3a^2+2b^2)=14=1\times14=2\times7 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه نتیجه می‌شود که اگر $b=1$ باشد داریم:

$$b=1 \Rightarrow 3a^2+2=14 \Rightarrow a=\pm2$$

در معادله اول دستگاه $b=1$ و فقط $a=2$ صدق می‌کند و لذا:

$$20\pm14\sqrt{2}=(2\pm\sqrt{2})^3$$

و درنتیجه:

$$X=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$$

مثال ۲: معادلهٔ $X^3-9X-80=0$ را حل کنید.

$$4p^3+27q^2=4(-9)^3+27(-80)^2=$$
$$=4\times27(-27+1600)>0$$

$$X=\sqrt[3]{40+\sqrt{\frac{(-9)^3}{27}+\frac{(-80)^2}{4}}}+$$
$$+\sqrt[3]{40-\sqrt{\frac{(-9)^3}{27}+\frac{(-80)^2}{4}}}$$

$$X=\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}}+\sqrt[3]{40-\sqrt{1573}}=$$
$$\sqrt[3]{40+11\sqrt{13}}+\sqrt[3]{40-11\sqrt{13}}$$

$$40+11\sqrt{13}=(a+b\sqrt{13})^3=a^3+3\sqrt{13}a^2b+$$
$$+39ab^2+13\sqrt{13}b^3$$

$$\begin{cases} a^3+39ab^2=40 \\ 3a^2b+13b^3=11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(a^2+39b^2)=1\times40=2\times20=4\times10+5\times8 \\ b(3a^2+13b^2)=1\times11 \end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول دستگاه نتیجه می‌شود که $a=1$ و $b=1$ باید باشد، ولی این جوابها در معادلهٔ دوم دستگاه صدق نمی‌کند و از معادله دوم نتیجه می‌شود که a و b عددهای درست نمی‌توانند باشند. حال اگر روش جست‌وجو را برای یافتن جوابها ادامه‌دهیم، درصورتیکه $b=\frac{1}{2}$ باشد $\frac{1}{2}\left(3a^2+\frac{13}{4}\right)=11$ وازاین معادله $a=\pm\frac{5}{2}$ به‌دست می‌آید که در معادلهٔ اول دستگاه $b=\frac{1}{2}$ و فقط $a=\frac{5}{2}$ صدق می‌کند و لذا:

$$40\pm11\sqrt{13}=\left(\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)^3$$

و بنابراین:

$$X=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}=5$$

مثال ۳: عبارت: $\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ را ساده کنید.

$$10-6\sqrt{3}=(a-b\sqrt{3})^3 \Rightarrow 10-6\sqrt{3}=a^3-3\sqrt{3}a^2b+$$
$$+9ab^2-3\sqrt{3}b^3$$

$$\begin{cases} a^3+9ab^2=10 \Rightarrow a(a^2+9b^2)=1\times 10=2\times 5 \\ 3a^2b+3b^3=6 \Rightarrow b(a^2+b^2)=2=1\times 2 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه نتیجه می‌شود که $b=1$ و $a=1$ می‌باشد و این جوابها در معادلهٔ اول دستگاه صدق می‌کند ولذا

$$10-6\sqrt{3}=(1-\sqrt{3})^3 \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=$$
$$=\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3}=1-\sqrt{3}$$

مثال ۴. معادله $X^3-30X-36=0$ را حل کنید.

$$4p^3+27q^2=4(-30)^3+27(-36)^2=-4\times 27000+$$
$$+27\times 1296<0$$

در این حالت معادلهٔ درجهٔ سوم سه ریشه متمایز دارد که با روش مثلثاتی ریشه‌ها به‌دست می‌آیند. حال اگر دستور کاردان را به‌کار بریم:

$$X=\sqrt[3]{18+\sqrt{\frac{(-30)^3}{27}+\frac{(-36)^2}{4}}}+$$
$$+\sqrt[3]{18-\sqrt{\frac{(-30)^3}{27}+\frac{(-36)^2}{4}}}$$

$$X=\sqrt[3]{18+\sqrt{-676}}+\sqrt[3]{18-\sqrt{-676}}=$$
$$=\sqrt[3]{18+26\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{18-26\sqrt{-1}}$$

$$18+26\sqrt{-1}=(a+b\sqrt{-1})^3=a^3+3a^2b\sqrt{-1}+$$
$$+3ab^2(-1)-b^3\sqrt{-1}$$

$$\begin{cases} a^3-3ab^2=18 \\ 3a^2b-b^3=26 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a(a^2-3b^2)=1\times 18=2\times 9=3\times 6 \\ b(3a^2-b^2)=1\times 26=2\times 13 \end{matrix}$$

از معادله‌دوم دستگاه نتیجه می‌شود $b=1$ و $a=\pm 3$، درمعادلهٔ اول دستگاه فقط $b=1$ و $a=3$ صدق می‌کند ولذا:

$$18+26\sqrt{-1}=(3+\sqrt{-1})^3$$

و از آنجا:

$$X=\sqrt[3]{(3+\sqrt{-1})^3}+\sqrt[3]{(3-\sqrt{-1})^3}=3+\sqrt{-1}+$$
$$+3-\sqrt{-1}=6$$

یکی از ریشه‌های معادله ۶ می‌باشد و برای تعیین دو ریشهٔ دیگر:

$$X^3-30X-36=(X-6)(X^2+6X+6)$$

$$X^3-30X-36=0 \Rightarrow (X-6)(X^2+6X+6)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=6 \quad \text{و} \quad X=-3\pm\sqrt{3}$$

باحل این‌مسأله تصور عددهای موهومی Imaginaise حاصل‌می‌شود که در آن $i^2=-1$ و $i=\sqrt{-1}$ می‌باشد.

مقاله‌ای راکه دراین‌جا می‌خواندید، یکی ازخوانندگان ما فرستاده است، ولی و احتمالاً به‌دلیل مخلوط شدن‌پاکت‌ها، نام نویسندهٔ آن را پیدا نکردیم. در بالا یا زیر مقاله هم، نامی‌را نیافتیم. امیدواریم، با اشارهٔ‌نویسندهٔ محترم، این‌کمبود را در شمارهٔ آیندهٔ مجله، جبران‌کنیم.

آشنایی با ریاضیات

از مجله‌های ریاضی خودمان

از مقالهٔ تربیع دایره، شهریار مختاری شرقی

امروزه در دنیای ریاضیات کمتر کسی پیدا می‌شود که در مورد مسألهٔ کلاسیك تربیع دایره چیزی نشنیده باشد. در این مسأله رسم مربعی هم‌مساحت با دایرهٔ مفروضی به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار خواسته شده است. پروندهٔ این مسأله مدتها پیش با اثبات غیر جبری بودن عدد π بسته شد. مسألهٔ تربیع دایرهٔ تارسکی «Alfred Tarski» اگر چه عنوانی مشابه دارد سرانجامی کاملا متفاوت با مسألهٔ قبلی یافته است.

مسألهٔ تربیع دایره (تارسکی، ۱۹۲۵). آیا ممکن است مرز و درون دایره را به‌تعدادی متناهی قسمت تقسیم کرد به طوری که با دوباره کنار هم چیدن آنها (به‌کار بردن ایزومتری) یك مربع به‌دست آید؟ به‌طور خلاصه آیا ممکن است یك دایرهٔ قطعه قطعه شده با یك مربع هم‌نهشت باشد؟

از مقالهٔ تحدب در هندسه، حسام حمیدی‌تهرانی

تحدب موضوعی قدیمی است و حداقل در زمان ارشمیدس نامی از آن دیده می‌شود؛ اغلب موردتوجه بوده است واکنون پشتوانهٔ محکمی دارد. یکی از علتهای این امر، به‌وجودآمدن برنامه‌ریزی خطی با کامپیوتر است که از دههٔ ۱۹۶۰ آغاز شد. همچنین روشهای هندسی درآنالیز نتایج‌مهیجی در برداشته و به‌ویژه نتایج جالبی دربارهٔ اجسام محدب به‌دست‌آمده است.

تحدب درعین‌حال مفهومی بسیار ساده و طبیعی، و به‌خودی خودجالب است. اماهمیشه مسائلی در ریاضیات وجوددارند که بسیارساده بیان‌می‌شوند (مثل نظریهٔ اعداد) ولی هنوز حل نشده‌اند یا اخیراً حل شده‌اند وحل آنها با استفاده از روشهای مشکل یا به‌کارگیری سایر شاخه‌های ریاضی بوده است.

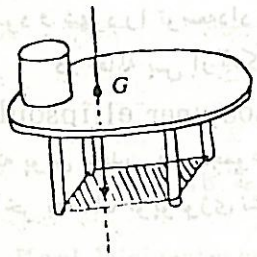
درهنر (بالاخص مجسمه‌سازی) وآناتومی کلمات مقعر و محدب بسیار

به‌کار می‌روند، این دو کلمه آنقدر نزدیك به‌ذهن هستند که در هیچ‌یك از کتابهای هنر و آناتومی تعریف نشده‌اند!

ارشمیدس (حدود ۲۵۰ سال ق. م.) اظهار داشت که خم داخلی‌شکل زیر مشروط براین‌که محدب باشد از خم بیرونی کوتاهتر است. به‌وضوح اگر خم داخلی محدب نباشد این موضوع درست نیست.

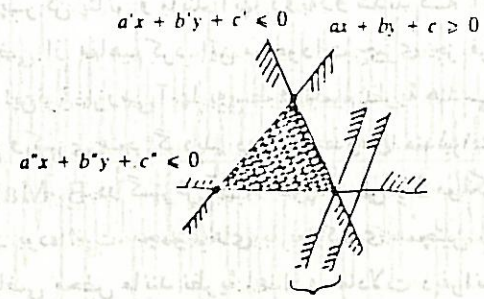
شکل ۱

پوانسو «poinsot» (حدود سال ۱۸۰۰) درمطالعهٔ استاتیك به‌تحدب توجه نمود، و اعلام کرد که مثلا برای اطمینان از پایداری میز شکل ۲، کافی است که خط قائمی که از مرکزجرم میز می‌گذردصفحه‌ای را که‌میزروی‌آن قرار دارد در داخل «پوش محدب» مجموعهٔ ایجاد شده به‌وسیلهٔ پایه‌های میز قطع کند.



شکل ۲

فوریه نیز درهمان زمان مشغول مطالعهٔ استاتیك بود و به‌طرف مطالعهٔ نامساویهای خطی همزمان کشیده شد. مانند



غیر لازم شکل ۳

او آنقدر باهوش بود که نیاز به مشخص کردن نامساویهای لازم را

درك كند. این منشاء برنامه‌ریزی خطی بود که از دهۀ ۱۹۶۰، توسعۀ آن آغاز شد. مثلا یك نمونه از مسائلی که در برنامه‌ریزی خطی مطرح می‌شود چنین است:

بیشترین مقدار $y = x_1 - x_2 + 2x_3$ را پیدا کنید اگر

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 5 \\ x_1 + x_3 - 4x_4 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

برای حل این گونه مسائل برنامه‌های کامپیوتری فراوانی وجود دارد. علت توجه به این برنامه‌ها این است که می‌توان به کمك آنها با تعداد زیادی نامساوی و متغیر کار کرد. لذا با آنها می‌توان در فضاهای با بعد بالا مطالعه نمود و شهود را توسعه‌داد (که به‌هیچ‌وجه برای ریاضیدانان راحت نیست.)

در مقاله پس از آنکه به بیضی گونها پرداخته، بیضی گون جان - لونر «John-Loewner ellipsoid» را موردبحث قرارداده، از پلی‌توپ‌ها، که پوش محدب زیرمجموعه‌های متناهی R^d اند، سخن به میان آورده، و در آخر به کمك توپولوژی نشان‌داده که شهود خطرناك است.

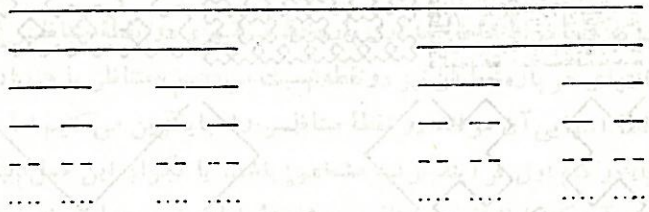
از مقالۀ هندسۀ فرکتال، مانی رضائی

در قرن نوزدهم وقتی ریاضیدانان در کار مطالعۀ ریاضی دقت خود را بیشتر کردند باپدیده‌های نادری مانند مجموعۀ کانتور، تابع وایراشتراس، منحنی صفحه پر کن پئانو و مانند آنها روبه‌رو شدند که آنها را وادار به‌بازنگری بعضی از مفاهیم کرد. این موجودات چیزی جز فرکتالها نبودند که درابتدای این‌قرن بررسی آنها به‌بسط و تعمیم نظریۀ هندسی مجموعه‌های با بعد صحیح و کسری منجر گردید. در این‌خصوص مندلبرات - «Benoit B. Mandelbrot» در گسترش آن به علوم طبیعی، از مولکولها تا اجرام سماوی، پیشرو بوده است. مجموعه‌های با بعدکسری همچنین در شاخه‌های متنوعی از ریاضی محض مانند نظریۀ اعداد و معادلات دیفرانسیل غیر خطی نیز ظاهر می‌شود.

کلمۀ فرکتال «fractal» - از ریشۀ لاتینی «fractus» (به معنی

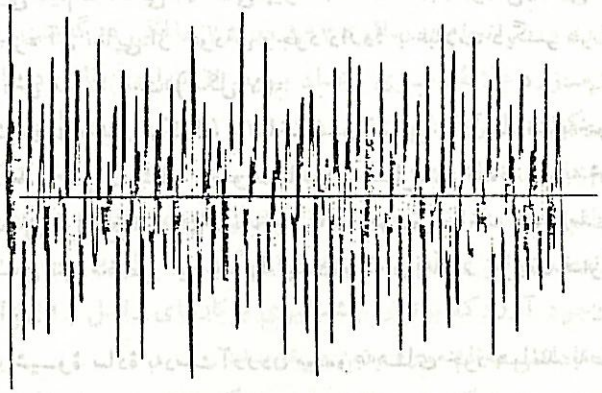
شکسته) - را اولین بار مندلبرات (۱۹۷۵) به‌کار برده است. وی همچنین یك «بعد تجربی» به‌فرکتالها نسبت داد و عبارت «بعد هاوسدرف آن اکیداً از بعد توپولوژیك آن بزرگتر باشد» را به‌عنوان تعریف اولیۀ فرکتالها بیان داشته‌است. اما با تعریف فوق در به‌دست آوردن بعد مجموعه‌های بسیار نامنظم، که جزو طبیعت فرکتالهاست، مشکلاتی پدید خواهد آمد.

گئورك کانتور (سال ۱۸۷۰) با حذف یك‌سوم وسط یك بازه و تکرار این‌عمل روی هر بازۀ باقیمانده، مجموعه‌ای ساخت که به‌نام وی مشهوراست. این مجموعه را به‌عنوان‌اولین مثال از فرکتالها نشان می‌دهیم. (شکل ۴)



شکل ۴. چند مرحله از ساخت مجموعۀ کانتور

در سال ۱۸۷۴ نیز کارل وایراشتراس «Karl Weierstrass» توابعی را مطرح کرد که همه‌جا پیوسته بوده، هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیستند. وی در این عمل از سریهای مثلثاتی استفاده نمود. برای مثال می‌توان فرمول

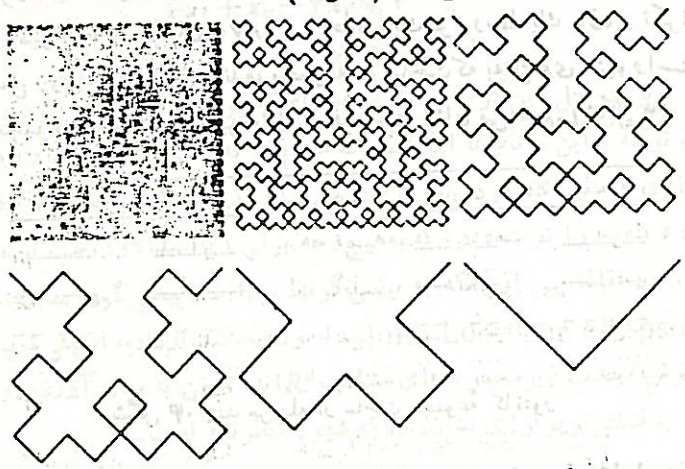


شکل ۵. تابع وایراشتراس

زیر را درنظر گرفت (شکل ۵):

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-n/2}\sin\left(\frac{2}{3}\right)^{n}t$$

منحنی صفحه پر کن پئانو «Giuseppe Peano» (۱۸۹۰) نیز مثال دیگری از فرکتالهاست. این خم نگاشتی از بازهٔ واحد [۰، ۱] به‌توی‌مربع واحد [۰، ۱] × [۰، ۱] می‌باشد (شکل ۶).

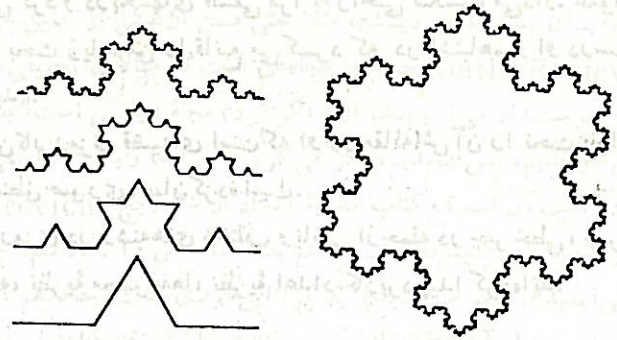


شکل ۶. چند مرحلهٔ ایجاد منحنی صفحه پر کن

به عنوان مثال دیگری از فرکتالها برفدانهٔ کخ «H. von Koch» را مطرح می‌کنیم که مثالی از خمی پیوسته است که با خودش تلاقی نداشته و در هر جزء آن نمایی از خودش وجود دارد؛ به‌عبارت دیگر هر قسمت آن با خودش مشابه است (شکل ۷).

اکثرمجموعه‌های فرکتال، با ساخته‌شدن قسمتی از آنها، مشابه‌خودشان پدید می‌آیند. برای مثال، مجموعهٔ کانتور اجتماع دو نسخهٔ مشابه خودش است و منحنی فون‌کخ از چهار نسخهٔ مشابه خودش ساخته شده است. این خود همانندی تنها مختص این مثالها نیست بلکه واقعاً در تعریف فرکتالها به‌کار می‌آید.

یك شیوهٔ سادهٔ به‌دست‌آوردن مجموعه‌های خود همانند به‌صورت هندسی است، بدین‌ترتیب که درحالت خاص یك مولد برای یك‌منحنی تعریف



شکل ۷. آ) برفدانهٔ کخ ب) منحنی فون‌کخ و چند مرحلهٔ ساخت آن

می‌کنیم که این مولد شامل تعدادی پاره‌خط مستقیم و دو نقطهٔ متناظر است. حال به‌انتهای هر پاره‌خط آن نیز دونقطه نسبت می‌دهیم ومتناظر با هر پاره‌خط و دو نقطهٔ انتهایی آن مولد، دو نقطهٔ متناظر را جایگزین می‌کنیم اما جهت آن باید در گام اول فرآیند تولید مشخص باشد. با تکرار این عمل‌دنباله‌ای به‌دست‌می‌آید که با یك‌تقریب مناسب مجموعهٔ پایای خود همانند خواهد شد.

از مقالهٔ اعداد رمزی، سعیداکبری فیض‌آبادی، علی‌اصغر خانبان

فرانك‌پلامپتن رمزی«Frank Plumpton Ramsey»ریاضیدان برجسته‌ای بود. وی درکمبریج انگلستان زاده شد و تقریباً تمام عمرش را درآنجا به‌سر برد. با هوشیاری تمام در چندین زمینه کارکرد ونتایج مهمی به‌دست‌آورد و سرانجام در سال ۱۹۳۰ در ۲۸ سالگی درگذشت. یکی از رشته‌های مورد علاقهٔ رمزی اقتصاد بود. او تنها دو مقاله در این‌زمینه چاپ‌کرد یکی «نظریهٔ مالیات» درسال ۱۹۲۷ و دیگری «نظریهٔ ریاضی پس‌اندازها» در سال ۱۹۲۸. امروزه کارهای رمزی در بخش وسیعی از اقتصاد ریاضی به‌کارگرفته می‌شود. علاقهٔ اصلی رمزی به‌فلسفه و منطق‌ریاضی بود. وی تحت‌تأثیر راسل و وایتهد قرار گرفت و نظریه‌ای به‌نام نظریهٔ انواع به‌وجود آوردکه برتری چشمگیری برکارهای راسل و وایتهد دارد. یکی از استادانش به‌نام موره چنین می‌نویسد:

«چیزی را که من به‌او تدریس می‌کردم همیشه بهتر از خود من

درك می‌کرد و در بحثهای فلسفی مرا به راحتی شکست می‌داد. عموماً بعد از بحث زیاد، من را قانع می‌کرد که در اشتباهم و او درست می‌گوید».

مهمترین کار رمزی قضیه‌ای است که او در مقاله‌اش آن را تحت‌عنوان «قضیه‌ای از منطق صوری» بیان کرده است.

اعداد رمزی در رشته‌های مختلف ریاضی ازجمله در جبر خطی، جبر، آنالیز، هندسه، نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ اعداد کاربرد پیدا کرده‌اند.

از مقالهٔ گفتگو، دیدار با دکتر امیدعلی کرمزاده

به‌خاطر نیازی که از نظر خانوادگی داشتیم از کلاس پنجم‌دبستان در جریان تدریس ریاضی افتاده‌بودم و تابستانها به‌بچه‌های همسایه درس می‌دادم و خوب، ریاضی از همهٔ درسها برای تدریس ساده‌تر بود.

شخصی بود به‌اسم گیتی‌زاده، ایشان معلم ما بود تا پایان دبیرستان. چون از آن موقع یك مقدار متوجه علاقهٔ من شد واحساس کرد که ما یك‌مقدار هم از لحاظ مالی در تنگنا هستیم، ایشان مخصوصاً مسأله‌هایی را عنوان می‌کرد، بعد برایش پول جایزه می‌گذاشت و من همیشه برنامه‌ام این بود که بالاخره این پول را از ایشان بگیرم.

موقعی که ما دیپلممان را گرفتیم، دانشکدهٔ فنی خیلی طرفدار داشت، مثل الآن که پزشکی این‌طور است، ولی ما حتی حاضر نبودیم در کنکور فنی شرکت کنیم، فکر می‌کردیم که توهین کرده‌ایم به‌ریاضی اگر فنی امتحان بدهیم.

در کلاس (دانشکدهٔ) ما خیلی افراد بودند که آدمهای برجسته‌ای بودند ولی متأسفانه در مسائل سیاسی هم بودند و حدود هفت‌تایشان اعدام شدند.

آن‌زمان چیزی که می‌خواندند، همه‌اش ریاضی‌عمومی ۱ و ۲ و ۳ بود و بیخودی کلی مکانیك می‌خواندند. ریاضیاتی که الآن شما می‌خوانید و در دانشگاهها مطرح است در آنجا مطرح نبود. در هیچ دانشگاهی در ایران ریاضیات خوبی تدریس نمی‌شد. خوب، مملکت استاد نداشت. وضع ما از نظر منابع فارسی واقعاً خیلی بد بود. نمی‌دانستیم مجلات را چگونه مشترك شویم، هیچ کس نبود ما را راهنمایی کند. مجلات را در تکفروشیها که در

خیابان بودند می‌دیدم، مثلا حتی من از یکی از همین خیابانها یك Math. Review خریدم. مجله‌ای است که مقالات تحقیقی سایر مجلات را فهرست‌وار می‌نویسد. اول فکر کردم مجلهٔ ریاضی است، بعد می‌نشستیم می‌خواندیم، نمی‌فهمیدیم، فکر می‌کردیم چرا ما ریاضی را نمی‌فهمیم. مثلا یادم است آن موقع کتاب نظریهٔ اعداد از شفرویچ «Shafarevich» را خریدیم. باور کنید فقط توانستم یك صفحه‌اش را نگاه کنم، چیزی از آن نمی‌فهمیدم. زجر می‌کشیدم که چرا این‌طوری است. حالا هم اگر بخوانم نمی‌فهمم، ولی آن موقع ناراحت می‌شدم، ما آن‌موقع راهنمایی نداشتیم که به‌ما بگوید چه‌کتابهایی بخوانیم و کتابها را از کجا شروع کنیم به‌خواندن.

دکتر هشترودی معلم ما بود. به ما درس کلاسیك نمی‌داد، هیچ درس نمی‌داد، ولی خیلی انگیزه ایجاد می‌کرد، می‌آمد سر کلاس هرچه می‌خواست می‌گفت.

(در خارج) حقیقتش باید اقرار کنم که ما روی دانشگاهها شناخت نداشتیم، مثلا من در دانشگاه اکستر نظریهٔ حلقه خواندم، اگر رفته‌بودم آنجا و مثلا کامپیوتر داشت، کامپیوتر خوانده بودم؛ آنالیز داشت، آنالیز خوانده بودم؛ توپولوژی داشت، توپولوژی خوانده بودم. یعنی اصلاً با هدف خاصی نرفتیم که رشته‌ای را بخوانیم و برای هرچیزی آماده بودیم.

انگلیس، سیستم Course-اش خیلی کم است، برای اینکه استادانش خیلی کمند و سیستم تعلیم و تربیتش طوریست که یك دانشجوی خوب لیسانس، می‌تواند بلافاصله وارد تحقیق شود، یعنی اصلا احتیاجی به گذراندن دورهٔ فوق لیسانس ندارد. انگلیسیها یك سیستم خاص خودشان‌را دارند. البته من واقعاً ازسیستمشان خیلی‌خوشم نمی‌آید چون خیلی تخصصی است. مثلا آنجا شما یك آدم خیلی برجسته‌ای را در ریاضی می‌بینید که راجع به شاخه‌های اطراف هیچ‌چیز نمی‌داند.

استاد راهنمایم دکتر ریس «David Rees» به‌من استقلال داد و آزادی عمل که در هر زمینه‌ای که می‌خواهم کار کنم. اصولا وقتی یك استاد راهنما به‌تو مسأله بدهد تو محدود می‌شوی، درست است که مسأله را حل کردی همان می‌شود رسالهٔ دکتریت و نگرانی نداری که وقتی مسأله را حل

کردی قبل از آن حلش جایی درآمده باشد ــ چون استاد راهنما قبلاً آن‌را کنترل کرده ــ ولی آنوقت آدمی می‌شوی وابسته؛ یعنی یك آدمی می‌شوی که آن استقلال را دیگر نداری، اطلاعات ومنابع‌را دیگر نداری، طبق تجربه‌ای که من دارم شاید اصلاً این نوع تحقیق چیز بهتری باشد. مثلاً، الآن در ایران، شما نگاه نکنید که سالی یك بار در کنفرانس ۲۰۰ـ۳۰۰ نفر آدم جمع می‌شوند. دراین‌جمع به‌ندرت دونفر آدم پیدا می‌شوند که‌بتوانند واقعاً با هم حرف ریاضی بزنند.

الآن اگر دانشجویی از مملکت ما بیاید پیش من و بگوید می‌خواهم فلان قسمت‌را بخوانم، من می‌توانم به‌او بگویم برو فلان‌جای دنیا و با کی بخوان و چکار بکن، بدون اینکه وقتش تلف شود. ولی آن موقع کسی نبود که از ما بپرسد چه می‌خواهی بخوانی وکجا برو بخوان.

اگر کسی هندسهٔ اقلیدسی را در زمان بچگیش یاد نگرفت و با آن ابتکارها و شگردها آشنایی پیدا نکرد، این آدم ممکن است هندسهٔ جبری‌دان خوبی‌بشود ولی کوچکترین ابتکار و ایده‌ای درموردهندسهٔ اقلیدسی نخواهد داشت واگر شما به‌او بگویید یك سال یا دوسال وقت به‌تو می‌دهیم، بنشین و بخوان، دیگر نمی‌تواند. اصلاً ریاضیات این طوری است که هر قسمتش یك سن خاصی را می‌طلبد. تحقیق در ریاضی هم، با تجربه‌ای که هست همه می‌گویند تا سی‌سالگی می‌توان انجام‌داد. هرکس تا سن سی‌سال کاری کرد که کرد، اگر نکرد بعد ازآن دیگر تجربه است، تجربهٔ گذشته به‌آدم یك چیزهایی می‌دهد.

در رشتهٔ ریاضی لزومی ندارد شما مثل دانشجوهای المپیاد ریاضی باشید، می‌توانید خیلی‌خیلی کمتر هم بدانید و باز هم در رشتهٔ ریاضی موفق شوید، ولی به‌شرطی که آن‌چیزی‌را که‌از ریاضی‌یاد گرفته‌اید صحیح‌یاد گرفته باشید که چطور بایدریاضی بخوانید، یعنی وقتی آدم‌متوسط یا زیرمتوسط هم باشید ولی آن چیزهایی راکه خوانده‌باشید صحیح خوانده باشید می‌توانید در رشتهٔ ریاضی آدم موفقی هم باشید، حالا آدم برجسته‌ای نشوید ولی آدم موفقی بشوید.

(سید محمدرضا هاشمی موسوی)

محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^n x}-\frac{1}{x^n}\right)$

با قراردادن صفر حالت مبهم $(\infty-\infty)$ درمی‌آید. اگر مخرج مشترك بگیریم، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^n-\sin^n x}{x^n\sin^n x}\right)$$

اینك با قراردادن صفر حالت مبهم $(\frac{0}{0})$ پیش‌می‌آید که برای رفع ابهام کافی است از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم. اما قبل از این عمل بهتر است ازرابطهٔ هم‌ارزی استفاده کنیم و به‌جای مخرج کسر عبارت $x^n\sin^n x\approx x^{2n}$ را قرار دهیم زیرا وقتی $x\to 0$ داریم: $\sin^n x\approx x^n$. بنابراین‌دراینجا پس‌ازجایگزینی x^{2n} به‌جای مخرج کسر قاعدهٔ هوپیتال را اجرا می‌کنیم. یعنی:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^n-\sin^n x}{x^n\sin^n x}\right)\ \underline{\text{هم‌ارزی}}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^n-\sin^n x}{x^{2n}}\right)\ \underline{\underline{\text{هوپیتال}}}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{nx^{n-1}-n\sin^{n-1}x\cos x}{2nx^{2n-1}}\right)$$

پس از ساده کردن کسر فوق به n کافی است یك بار دیگر قاعدهٔ هوپیتال را اجرا کنیم. بنابراین داریم:

$$\underline{\underline{\text{هوپیتال}}}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{(n-1)x^{n-2}-(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x+\sin^n x}{2(2n-1)x^{2n-2}}\right)=$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{حد}} \left(\frac{(n-1)x^{n-2}-(n-1)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)+\sin^n x}{2(2n-1)x^{2n-2}} \right)$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \underset{x\to 0}{\text{حد}} \left(\frac{(n-1)x^{n-2}-(n-1)x^{n-2}(1-x^2)+x^n}{2(2n-1)x^{2n-2}} \right) =$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{حد}} \left(\frac{nx^n}{2(2n-1)x^{2n-2}} \right)$$

بدازای هر n بالاخره محاسبهٔ حد چنین می‌شود:

$$= \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \left(\frac{n}{2(2n-1)x_x^{n-2}} \right) = \begin{cases} 0 & n<2 \\ \frac{1}{3} & n=2 \\ +\infty & n>2 \end{cases}$$

در صورتی که $2n-1=0$ یعنی $n=\frac{1}{2}$ باشد عبارت اخیر مهم می‌شود که در این حالت مستقلاً مقدار حد را حساب می‌کنیم:

$$n=\frac{1}{2}: \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x\sin x}} \right)$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \underset{x\to 0}{\text{حد}} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x^2}} \right) = \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{x} \right)$$

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=} \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{1} \right)$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} \right) = \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \left(\frac{1-\cos x}{2\sqrt{x}} \right) = \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \left(\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \frac{x^2}{4\sqrt{x}} = \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \frac{x\sqrt{x}}{4} \Longrightarrow \underset{x\to 0^+}{\text{حد}} \frac{x\sqrt{x}}{4} = 0$$

مارتین گاردنر
ترجمهٔ هرمز شهریاری

هیچ چیز و همه چیز

۲ـ همه چیز

اگر چیزی از «هیچ چیز» در نیافتیم، آیا چیزی از «همه‌چیز» دستگیرمان می‌شود؟ ببینیم!

«همه چیز» همان عالم هستی است که هر چیزی از مادی، معنوی، تصوری، تفکری، ذهنی، خیالی، متافیزیک و فیزیک را دربر می‌گیرد.

ویلاردوان کوین (Willard Van Orman Quine) در پاسخ این که «هستی چیست؟» می‌گوید: خیلی ساده و روشن: «همه‌چیز». لابد اگر سؤال می‌شد: «همه چیز چیست؟» در جواب می‌گفت خیلی ساده و روشن. «هستی».

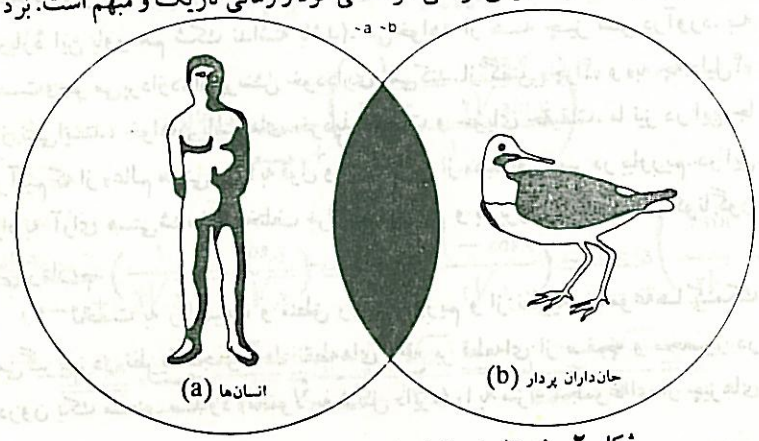
پاسکال هم به سؤال «ماهیت بشر چیست؟» پاسخ می‌دهد: «هیچ در برابر بی‌نهایت، همه‌چیز در برابر هیچ، میانگینی از همه و هیچ».

شایسته است به این نکته توجه کنیم که اصولاً انسان موجودی است شکاک و کنجکاو، بر این باور است که از شک می‌تواند به یقین برسد. (تازه معلوم نیست که دربارهٔ این باور هم شک نداشته باشد). می‌خواهد از همه چیز سر درآورد. به جست‌وجو می‌پردازد، از پرسش خودداری نمی‌کند. از گفتن «چرا؟» و «به چه دلیل؟» باز نمی‌ایستد، خواهان پاسخ‌های خردپذیر است و جویای حقیقت. ما نیز در این جا برآنیم که از «عالم هستی» و یا به قول ویلارد کوین از «همه‌چیز» سر در بیاوریم. در این راه به آرای هستی‌شناسان مختلف مراجعه می‌کنیم و به بررسی نظریه‌های گوناگون می‌پردازیم.

نخست به ریاضیات و منطق رو می‌آوریم و از نظریهٔ مجموعه‌ها کمک می‌گیریم. در نظریهٔ مجموعه‌ها، نقطه‌های واقع بر قطعه‌ای از صفحه و محصور در درون یک منحنی مسدود (معمولاً به شکل دایره) را به منزلهٔ مجموعه‌ای از چیزهای

موردنظر فرض می‌کنند. به عبارت دیگر، یک دایره و نقطه‌های محاط در آن را ـ که به دایرهٔ وِن (Venn) مشهور شده ـ نموداری از یک مجموعه می‌گیرند. با استفاده از دایره‌های ون، کارهای روی مجموعه‌ها را به آسانی می‌توان انجام داد. به همین سبب، ما نیز در این‌جا از آن‌ها استفاده کرده‌ایم. دایرهٔ a و نقطه‌های درون آن را نمودار انسان‌ها، و دایرهٔ b را نمودارجانداران پَردار درنظر گرفته‌ایم. روشن است که اشتراک این دو مجموعه ـ آن‌جا که دو دایره روی هم افتاده‌اند ـ «هیچ» است، یعنی چیزی که بتواند هم انسان باشد و هم جاندار پَردار پیدا نخواهیم کرد. ما نیز این ناحیهٔ مشترک را به رنگ تیره گرفته‌ایم تا نشان دهیم که اشتراک این دو مجموعه، یعنی مجموعهٔ مشترک این دو، هیچ عضوی ندارد. این مجموعه بدون عضو همان مجموعهٔ تهی است که با آن آشنائی داریم.

دیگر نقطه‌های صفحه که خارج از دایره‌ها قرار گرفته‌اند، بی‌گمان نمودار چیزهائی هستند که نه a خوانده می‌شوند و نه b . نه انسان هستند و نه جاندار پَردار. آن‌ها همه‌چیز می‌توانند باشند، جز a و b. البته این گمانی درست است، ولی همه‌چیز به چه معنی است و شامل چه چیزهائی می‌تواند باشد؟ اصولاً یک مجموعهٔ همه چیز چه مفهوم‌هائی را دربر می‌گیرد، حدومرز آن تاکجاست؟ آگوست دومرگان برای یافتن پاسخی به این پرسش‌ها، اصطلاح «عالم‌سخن» را ابتکار کرد و محدودهٔ «مجموعهٔ همه‌چیز» را محدودهٔ عالم سخن نامید. حدّ ومرز عالم سخن بسته به آن است که از چه چیزهائی سخن می‌رانیم و چه چیزهائی موردنظر ماست. عالم سخن بُرد همه متغیرهائی است که ما به آن‌ها وابسته‌ایم. عالم‌سخن همیشه مشخص نیست، گاهی به روشنی تعریف می‌شود، گاهی مفهومی فرضی گرفته می‌شود و زمانی تاریک و مبهم است. بُرد

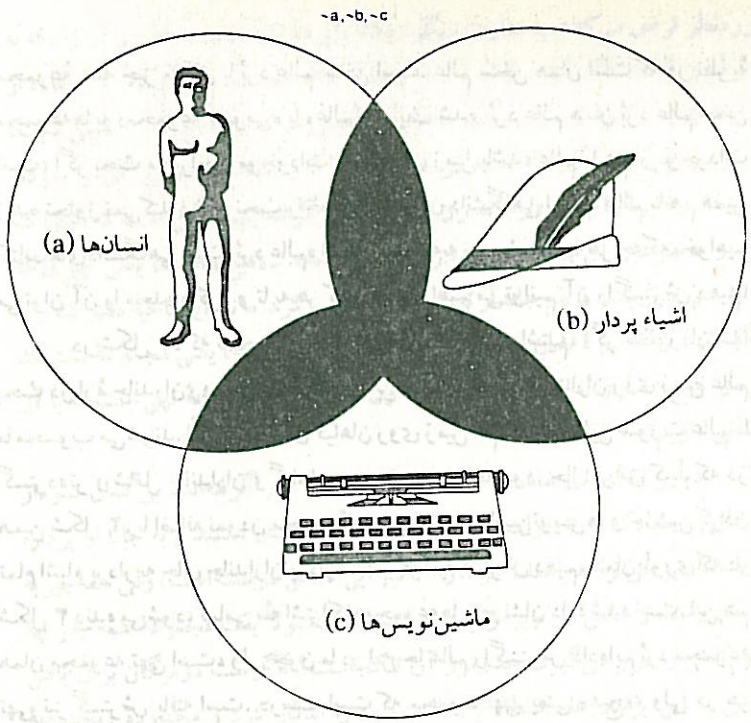


شکل ۲ ـ نمودار وِن از این که انسان پَردار وجود ندارد

مجموعهٔ همه چیز منطبق با بُرد عالم سخن است. عالم سخن همان است که در نظریهٔ مجموعه‌ها به «مجموعهٔ عمومی» یا «عالم» تعریف شده. بُرد عالم همان بُرد عالم سخن است، اگر بحث ما پیرامون موجودات زندهٔ روی زمین باشد، عالم ما هم از موجودات زنده تجاوز نمی‌کند و اگر بحث راجع به کتاب‌های دانشگاهی است، عالم ما هم همین کتاب‌های دانشگاهی است. بُرد عالم، انتخابی و بسته‌به میل ماست، به هر چه که بخواهیم می‌توان آن را محدود کرد و تا به هر کجا که بخواهیم می‌توانیم آن را گسترش دهیم.

در شکل ۲، که صحبت از انسان و جان‌دار پردار داشتیم، اگر منظورمان تنها بحث دربارهٔ جاندران روی زمین باشد، در این صورت همین جانداران روی زمین عالم ما محسوب می‌شوند. اگر منظورمان گیاهان روی زمین هم باشد، در این صورت عالم ما گسترده‌تر و شامل جانداران و گیاهان روی زمین خواهد بود. حال فرض کنید که در همین شکل ۲، با اضافه نمودن مجموعهٔ سومی از تمام ماشین‌نویس‌ها و جانشین کردن تمام اشیاء پردار به جای جانداران پردار، عالم خود را گسترش دهیم. همان‌طوری که در شکل ۳ دیده می‌شود، تمامی سه اشتراک مجموعه‌ها پوچ نشان داده شده است. این هم همان مجموعه تهی است، ولی چون ما در این جا عالم را گسترش داده‌ایم بُرد مجموعه تهی نیز گسترش یافته است. درست است که مجموعه‌تهی یعنی «هیچ»، ولی در هر صورت جزو عالم خود به حساب می‌آید، هیچی است که به عالم مربوط به خود وابسته است. می‌دانیم که متمم مجموعه‌ای مثل K عبارت است از همهٔ عنصرهای مجموعهٔ عمومی که در K نباشند. از این جا معلوم می‌شود که عالم و مجموعهٔ تهی متمم یکدیگرند. یعنی هر مجموعهٔ تهی بستگی به عالم خود دارد. مجموعه‌های تهی عالم‌های متفاوت، متفاوتند.

حال ببینیم، بدون‌این که از منطق دور شویم، تاکجا می‌توانیم عالم سخن را گسترش دهیم. این گسترش بسته به وابستگی‌های ماست، بسته به میدان دید و مسأله‌هائی است که با آن‌ها سروکار داریم، اگر عالم شکل ۲ را گسترش دهیم تا همهٔ مفهوم‌ها را شامل شود، آن‌گاه مجموعهٔ اشتراک تهی نخواهد بود. می‌توانیم انسانی را فرض کنیم که روی بدن او پر روئیده باشد و این فرض نامفهومی نخواهد بود. این‌گونه استدلال‌ها را تا آن جا که عالم سخن بتواند نقطه‌های یک سطح اقلیدسی و یا فضای سه بعدی را بپوشاند، می‌توانیم دنبال کنیم. وقتی که داریم صحبت از یک دوجین تخم‌مرغ می‌کنیم که می‌تواند بطور تساوی تنها میان یک، دو، سه، چهار،



شکل ۳ ـ نمودار ون از سه مجموعه

شش و یا دوازده نفر تقسیم شود، در حقیقت داریم از یک مجموعه عمومی صحبت می‌کنیم که عددهای صحیح، بُرد آن است. گسترش می‌تواند به هر چیز منطقی کشانده شود. ژان ون (کسی که نمودار ون را ابتکار کرد) عالم سخن را به میدان دید تشبیه می‌کند؛ او می‌گوید عالم سخن همان چیزهائی است که ما به آن‌ها نظر داریم، چیزهائی که جلو دید ما نیست، نادیده گرفته می‌شوند.

ما می‌توانیم عالم سخن را تا حدّ شگفت‌آوری گسترش دهیم. می‌توانیم عالم سخن را دربردارندهٔ مجرداتی مثل عدد ۲، π، عددهای مختلط و یا شکل‌های کامل هندسی بگیریم. حتی می‌توانیم چیزهائی که به تجسم نمی‌آیند، مثل فرامکعب‌ها و یا فضاهای نااقلیدسی را مشمول آن بدانیم. می‌توانیم کلیاتی مانند سرخی و ترس را مشمول کنیم. همهٔ این‌ها چیزهای نامفهومی نیستند. می‌توانیم عالم سخن را شامل چیزهائی حقیقی یا مجازی و یا چیزهائی از گذشته یا آینده بدانیم و همیشه هم

می‌توانیم دربارهٔ آن‌ها، به صورتی مؤثر دلیل بیاوریم. می‌توانیم دلیل بیاوریم که هر دایناسوری مادری داشته، که اگر هفتهٔ آینده باران ببارد، پشت بام چکه خواهد کرد، در صورتی که کوهنورد سقوط کرده باشد، حتماً کشته شده است.

حال فرض کنید که عالم را آن‌قدر گسترش بدهیم، تا هر چیزی را که می‌تواند بدون تناقض منطقی تعریف شود، شامل گردد. می‌دانیم هر گزاره‌ای، اگر تناقض نداشته باشد. درست است و اگر تناقض داشته باشد، نادرست، این هم به این دلیل ساده است که هر تناقضی نفی حکم می‌کند، بنابراین عالم می‌تواند هر گزاره درستی را شامل شود. وقتی که فیلسوفی مانند لایب‌نیتس از «دنیاهای ممکن» صحبت می‌کند، مقصودش دنیاهائی است که می‌توانند مورد بحث قرار گیرند. شما می‌توانید از دنیائی حرف بزنید که انسان‌ها و ماشین‌نویس‌هایش پر داشته باشند ولی نمی‌توانید حرفی درست و حسابی دربارهٔ مثلث چهارپهلو و یا عدد فردی که مضربی از ۲ باشد بیان کنید.

اکنون می‌خواهیم عالم سخن را تا حد نهائیش گسترش دهیم، تا آن‌جا که به مجموعه‌ای از همهٔ مجموعه‌های ممکن برسیم. آیا این شدنی است؟ نه، این همان جائی است که دیگر نمی‌توانیم بدون تناقض گوئی آن را مورد بحث قرار دهیم. ژرژ کانتور ثابت کرد که عدد اصلی هر مجموعه‌ای (شمارهٔ عضوهایش) همیشه کمتر است از عدد اصلی مجموعه‌ای از همهٔ زیرمجموعه‌هایش. این قضیه دربارهٔ مجموعه‌های متناهی بدیهی است (اگر دارای n عضو باشد دارای 2^n زیرمجموعه است). اما کانتور توانست نشان دهد که، این حکم، دربارهٔ مجموعه‌های نامتناهی نیز صادق است. هنگامی که، بخواهیم این قضیه را در بارهٔ همه‌چیز به کار بریم، در هرصورت دچار گرفتاری بزرگی می‌شویم. چه عدد اصلی مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها باید بزرگترین الف (عدد نامتناهی) باشد تا بتواند شامل همه‌چیز بشود وگرنه همه‌چیز نخواهد بود. از سوی دیگر نمی‌تواند بزرگترین الف باشد، زیرا که عدد اصلی زیرمجموعه‌هایش از آن بزرگترند.

بد نیست این را هم بدانید. نخستین‌باری که برتراندراسل به استدلال کانتور برخورد کرد، نتوانست آن را باور کند. کانتور گفته بود که بزرگترین الف وجود ندارد از این رو «مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها» نیز وجود ندارد. راسل در ۱۹۰۱ نوشت که کانتور «به سفسطه بسیار ظریفی دست زده است که امیدوارم در آینده به توضیح بیشتری دربارهٔ آن بپردازم». این «بدیهی» است که بزرگترین الف باید باشد، زیرا که «اگر همه چیز درنظر گرفته شود دیگر چیزی باقی نمی‌ماند که به آن افزوده شود.» ۱۶

سال بعد، هنگامی که این مقاله در مجلهٔ «عرفان و منطق» تجدید چاپ شد، راسل به عنوان عذرخواهی از اشتباهش این زیرنویس را به آن افزود. (بدیهی است که به کار بردن «بدیهی» دربارهٔ همه چیز کلمهٔ خطرناکی است). همین توجه به اشتباه بود که راسل را به کشف پارادوکس مشهورش رهنمون گشت. راسل دریافت که مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها نمی‌تواند عضو خودش باشد.

وقتی که ریاضی‌دان دربارهٔ مجموعه‌ای از همهٔ مجموعه‌ها فکر می‌کند، مجموعه‌ای را درنظر می‌گیرد که همهٔ مجموعه‌ها در آن گرد آمده باشند و هیچ مجموعهٔ دیگری یافت نشود که در آن نباشد. بنابراین خود آن مجموعه هم باید در این گردهم‌آئی شریک باشد (خودش هم عضو خودش باشد). در صورت چنین فرضی، همین مجموعهٔ فرضی هم ناگزیر باید در خودش ـ که شامل «همه‌چیز» در نظر گرفته شده ـ وجود داشته باشد. او از این دور تسلسل به جائی نمی‌رسد. به‌طور کلی هنگامی که می‌کوشد آخرین خیز را برای دست‌یابی به «همه‌چیز» بردارد، درمی‌یابد که همچو کاری ناممکن است. «همه چیز» مغایر خودش است، در «همه‌چیز» همه چیز هست غیر از خودش. بنابراین «همه چیز» نمی‌تواند وجود داشته باشد.

این که مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها در نظریه مجموعه‌ها نمی‌تواند تعریف شود، مانع این نمی‌شود که حکما و فیلسوفان در این باره به بحث نپرداخته باشند. بحث دربارهٔ همه‌چیز ـ گرچه به شکل و یا کلمهٔ دیگری ـ همیشه بازاری گرم داشته و دارد. کلمه‌هائی مثل: هستی، موجودیت، مطلق، حقیقت، تا او، برهمن، دهار ماکایا و جز این‌ها، همه مترادفند با همه چیز. هر چیزی در گذشته و حال و آینده، هر چیزی که به تصور آید و یا از تصور خارج باشد، هرچیز خیالی و یا به‌طور کلی ماوراء درک انسانی و حتی هیچ چیز، از جملهٔ همه‌چیز به‌شمار می‌آیند. هنگامی که عالم از این چنین گستردگی برخوردار است، به دشواری می‌توان پذیرفت، وقتی که فکرمان متوجه چیز با معنائی (نه متناقض) می‌شود، آن چیز بنا به پاره‌ای تعبیرات وجود نداشته باشد. ریموند سمولیان از منطقیون مشهور در یکی از صدها رسالهٔ منتشر نشده‌اش، حادثه‌ای را از کتاب اوسکار مندل به نام چی‌پو و جادوگر ـ داستانی از چین برای کودکان و اندیشمندان ـ نقل می‌کند و آن جاکه بوفوی جادوگر دارد به چی‌پو درس نقاشی می‌دهد چنین می‌آورد: «نه، نه! تو فقط چیزی که هست نقاشی کرده‌ای، هر کسی می‌تواند چیزی که هست نقاشی کند. راز کار در کشیدن چیزی است که وجود ندارد». چی‌پو حیرت زده در پاسخ می‌گوید: «ولی جائی که چیزی نیست، چه چیزی می‌تواند باشد؟».

اینک جای آن است که از آن بلندی‌ها پائین بیائیم و نظری هم به عالم کوچک‌تر و منظم‌تری بیاندازیم، عالم کیهان‌شناسی معاصر.

کیهان‌شناسی نوین از زمان ارائهٔ جهان مسدود ولی بی‌کرانهٔ مدل انشتین آغاز به بالیدن کرد. این دانش اکنون معلوم کرده است که اگر در کیهان به حد کافی جرم وجود داشته باشد، خمیدگی‌های سه بُعدی فضای ما (جهان ما) روی خودش برمی‌گردند (شبیه خمیدگی‌های دو بعدی سطح کره، که روی کره برمی‌گردند). در این صورت (با فرض وجود جرم کافی) فضای ما در حقیقت فراکره‌ای خواهد بود چهار بعدی که بوسیلهٔ فراسطحی روی خود بسته شده است.

می‌دانیم که جهان در پی انفجار گوی آتشین نخستین، به انبساط درآمده است، ولی به‌نظر نمی‌رسد که دارای آن‌قدر جرمی بوده که آن را روی خودش بسته باشد. بنابراین به احتمال قوی همچنان در حال انبساط است.

نظریه جهان پایدار دیگر نمی‌تواند مورد تأیید دانشمندان باشد، گرچه بحث‌ها و کارهای علمی با ارزشی روی فرضیهٔ پایدار انجام گرفته، ولی در مقابل کشفیّات تازه، دیگر اعتبار خود را از دست داده است. کشفیاتی همچون پرتوفشانی‌های کیهانی که جز پرتوهای باقی مانده از گوی آتشین نخستین یا «انفجار بزرگ» (big bang) نمی‌تواند باشد.

نظریه پردازان را عقیده براین است که خواه و ناخواه جهان در جائی (در سیاه‌چاله‌ها) آن‌قدر جرم نهفته دارد تا بتواند جلو انبساط را بگیرد و زمانی جهان را به انقباض وادارد. اگر تقدیر براین باشد، انقباضی که رخ می‌دهد به صورت یک فروریزی خواهد بود. نظریه‌پردازان نیز هنوز راه دیگری جز چنین رخ‌دادی به نظرشان نرسیده است که جهان در سیاه‌چاله‌ای فروکش خواهد کرد و در جائی (در نقطهٔ مرکزی سیاه چاله) درهم فشرده خواهد شد که در آن‌جا از هستی ماده خبری نیست و هیچ قانون فیزیکی برآن شناخته نشده است. دراین صورت آیا جهان مانند آن مرغ افسانه‌ای ناپدید خواهد شد؟ (مرغی که روی دایره‌ای که همواره کوچک و کوچک‌تر می‌شود، عقب عقب پرواز می‌کند، تا سرانجام با فرو شدن در دُم خود محو می‌گردد). یا این که همه چیز در سیاه چاله فرو خواهد رفت تا در بخش دیگری از «جا ـ گاه» (فضا ـ زمان) دنیای ما، یا جا ـ گاه دنیای کاملاً متفاوت دیگری، از سفید چاله‌ای سر درآورد؟ و یا نه این و نه آن، ممکن است ترتیبی باشد که از سقوط به مرکز سیاه چاله جلوگیری شود و جهان باز به صورت گوی آتشین دیگری ظاهر گردد. اگر انقباض جهان را چنین

حالتی باشد، جهان ما از آن مدل‌های تپنده‌ای خواهد بود که به نوبت منفجر می‌شود، انبساط می‌یابد، متراکم می‌گردد، بازهم منفجرمی‌شود و همین دوره را بازهم تکرار می‌کند.

از میان فیزیک‌دانانی که مدل‌هائی از عالم ارائه داده‌اند، جان ویلر (John Archibald Wheeler) از دانشگاه پرینستون، پارا در شناساندن دنیای همه‌چیز، از همه فراتر نهاده است. از دید ویلر دنیای ما یکی از بی‌نهایت فضاهائی است که می‌شود گفت در شکم فضای عجیبی بنام فضای مادر یا سوپر فضا جاگرفته است. در درون فضای مادر، هرفضائی بدون برخورد با فضاهای دیگر برای خود عالمی دارد. سوپرفضا شامل بی‌نهایت دنیاهای تودر تو می‌باشد.

برای این که با سوپر فضای ویلر آشنا شویم، اول از سوپر فضائی به صورت یک پاره‌خط راست شروع می‌کنیم. دو ذره (یکی سیاه و دیگری خاکستری را در نظر می‌گیریم که در امتداد یک پاره خط، می‌توانند حرکت کنند (شکل ۴). این دو ذره دخالتی در حرکت یکدیگر ندارند، به‌طوری که یکی می‌تواند از میان دیگری عبور کند. هریک از این ذرّه‌ها بدون وابستگی به دیگری، در این دنیای پاره‌خطی، به چپ و راست در حرکت است. از حرکت آن‌ها، زمان تجسم پیدا می‌کند. فضای حرکت آن‌ها خطی است،. ولی بُعد دیگری به نام زمان نیز براین فضا حکم فرماست. دنیای این دو ذره جا-گاهی دو بُعدی (یک بعد مکان و یک بعد زمان). تا این جا دو دنیای تو در تو می‌تواند برای ما مجسم شود.

حال اگر به جای پاره‌خط، فضائی دو بُعدی در نظر بگیریم، به‌طوری که حرکت ذرّه‌ها به آزادی روی یک سطح امکان‌پذیر باشد (و از میان یکدیگر هم بتوانند بگذرند) در این صورت دنیاهائی دوبعدی تو در تو و یا جا-گاهائی سه بعدی تو در تو خواهیم داشت.

اگر دنیای هریک از ذرات سه بعدی باشد و هریک از ذرات بتوانند در یک حجم حرکت کنند بدون این که حرکت یکی در دیگری اثری داشته باشد و یا یکی مانع حرکت دیگری شود، ولو این که بخواهد از میان دیگری گذر کند، در این صورت هریک از این فضاها جا-گاهی خواهند بود چهار بعدی و هریک از ذرات، برای حرکت خود، فضائی دارند اختصاصی ولی تو در توی یکدیگر. اجتماع همه این فضاها نیز همان سوپرفضا را به وجود می‌آورد.

تغییرات حرکت ذرّه‌ها را می‌شود به صورت گراف در دستگاه‌های مختصات

نشان داد و سرنوشت آن‌ها را ثبت کرد. ولی باید توجه داشت که این کار در همه جا امکان‌پذیر نیست. چه ترسیم گراف در دستگاه‌های مختصات چندین محوری (چندین بعدی) دشواری‌هائی دربر دارد. با وجود این، برای سیستم دو ذره‌ای این دشواری وجود ندارد.

به راه‌های گوناگونی می‌شود تاریخ سرگذشت دو ذره را ترسیم کرد. یکی این است که آن‌ها را با یک گراف دو بعدی جا-گاه (یک محور مکان و یک محور زمان) به صورت منحنی‌های متموجی نمایش دهیم. این منحنی‌ها در نظریه نسبیت خط‌های جهانی نامیده می‌شوند. شکل ۵ یک چنین گرافی را نمایش می‌دهد، که در واقع نموداری است از مکان ذره‌ها در زمان‌های مختلف، نموداری است از جا-گاه ذره‌ها، هرگاه بخواهیم جای مثلاً ذرهٔ سیاه را در زمان K بدانیم. از نقطهٔ K (روی محور زمان) به طور افقی به سوی خط جهانی ذرهٔ سیاه حرکت می‌کنیم. پس از برخورد با خط جهانی، به‌طور عمودی به سوی پائین می‌آئیم تا به محور مکان برسیم، عددی که در این جا روی محور مکان است، محل ذرّه را به ما می‌دهد.

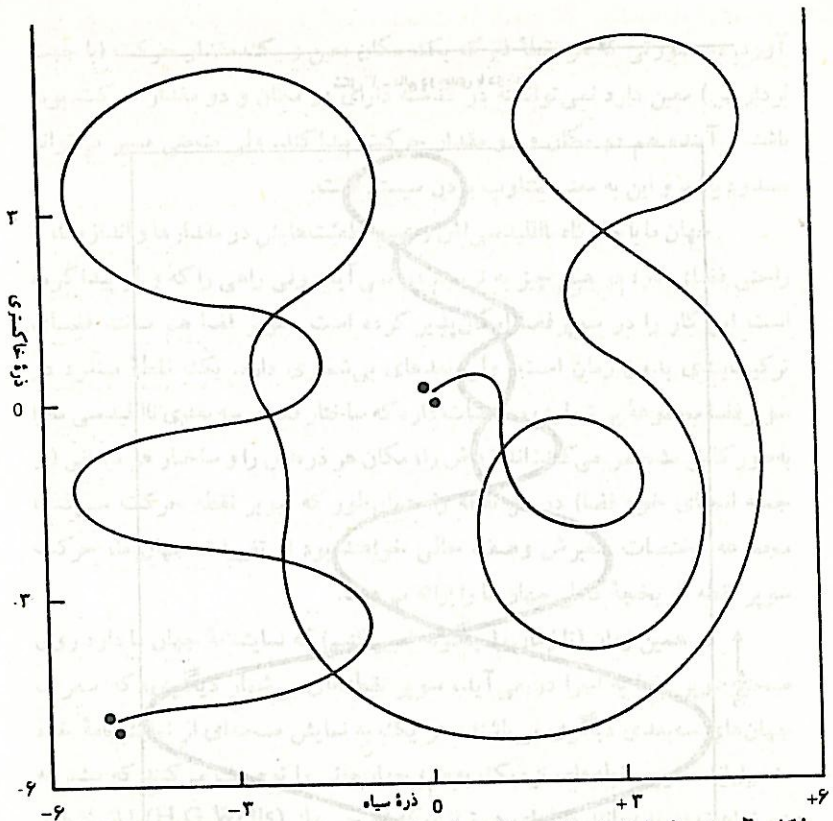
برای این‌که ببینیم این دو خط جهانی تاریخچهٔ جهان خطی ما را با چه زیبائی ثبت می‌کند، روی برگه‌ای مقوا، شکافی به درازای پاره‌خط و کلفتی ذره در بیاورید، مقوا را روی نمودار و در پائین آن بگذارید. که بتوانید جهان (دو ذره‌ای) را از شکاف آن ببینید. مقوا را به آهستگی روی نمودار به بالا بلغزانید. از شکاف، نمایشی از حرکت دو ذره خواهید دید. ذره‌ها در مرکز فضایشان (روی محور مکان) متولد می‌شوند، به راست و به چپ موج می‌زنند، از مرکز دور می‌شوند تا به محدودهٔ انبساطشان می‌رسند، سپس باز هم موج زنان رو به مرکز فضایشان برگشت می‌کنند تا سرانجام در سیاه چاله‌ای ناپدید می‌شوند.

در جنبش شناسی (علم‌الحرکات) گاهی نمودار تغییرات حرکت ذرات را به صورت حرکت نقطه‌ای منفرد در یک دستگاه مختصات چند بعدی (در فضای با درجهٔ بالاتری) به نام فضای ترکیب‌بندی نمایش می‌دهند. اگر بخواهیم ما هم می‌توانیم این روش را برای نمایش این دو ذره به کار بندیم در این صورت ببینیم چگونه این کار با دو ذره انجام می‌گیرد. در این جا فضای ترکیب‌بندی باز هم دو بعدی است، ولی هر دو محور مختصات بعد مکان را نشان می‌دهند، بدین معنی که هر دو محور فضای (ویا بهتر است بگوئیم مکان) ذره‌ها را مشخص می‌کند، یکی از محورها، مکان ذرهٔ سیاه و دیگری مکان ذرهٔ خاکستری را (شکل ۶). در چنین گرافی مکان هر دو ذره تنها با یک نقطهٔ منفرد به نام نقطهٔ ترکیب‌بندی مشخص می‌شود. همراه حرکت نقطه، مختصاتش

نیز روی هر دو محور تغییر می‌کند. مختصات هر نقطه‌ای از این نمودار، روی محور افقی مکان ذرهٔ سیاه و روی محور قائم مکان ذرهٔ خاکستری را تعیین می‌کند. اثری که از حرکت نقطه روی صفحه به جا می‌ماند، نموداری است از تغییرات سیستم ذره‌ها، چون این فضای ترکیب‌بندی یک منحنی منحصر به فرد می‌باشد، بنابراین سرگذشت و تاریخچهٔ تغییرات سیستم ذره‌ها نیز منحصر به فرد خواهد بود. به همین علت است که این منحنی هیچ وقت دارای شاخه‌های جداگانه نمی‌تواند باشد، زیرا که برای هر ذره دو مکان به‌دست می‌آید و چنین چیزی به معنی دو پاره بودن هرذره خواهد بود. ولی ممکن است منحنی در نقطه‌هائی خودش را قطع کند. اگر تغییرات سیستم دوره‌ای و متناوب باشد، خط سیر نقطهٔ ترکیب بندی یک منحنی مسدود خواهد بود. چنین گرافی، زمان‌را تعیین‌نمی‌کند و فضای ترکیب‌بندی را نباید نمودار فضا ـ زمان (جا ـ گاه) دانست. اگر بخواهیم گراف را به یک نمودار فضا ـ زمانی تبدیل کنیم. می‌توانیم یک محور زمان به آن اضافه کنیم. در این صورت نقطهٔ ترکیب‌بندی، منحنی مسیر خود را در سه بعد خواهد پیمود.

این شیوه برای یک سیستم N ذره‌ای و در فضاهای چندین بعدی نیز عمومیت دارد. فرض کنید که در همان جهان یک بعدی (خطی) به جای دو ذره ۱۰۰ ذره داشته باشیم. بنابراین نقطهٔ ترکیب‌بندی باید در دستگاه مختصاتی ۱۰۰ محوری حرکت کند. حال اگر به جای جهان خطی، جهانی مسطحه در نظر بگیریم. در این حالت هر ذره دو درجه آزادی در روی سطحش خواهد داشت و اگر N ذره هم داشته باشد در این صورت فضای ترکیب‌بندی باید یک فرافضای ۲N بعدی باشد. در جهانی از درجهٔ سوم (مانند حجم و سه بُعدی) چون هر ذره سه درجه آزادی دارد، بنابراین فضای ترکیب‌بندی آن هم باید ۳N بعد داشته باشد. به‌طور کلی فضای ترکیب‌بندی N ذره در جهانی n بعدی، دارای nN بعد خواهد بود، ولی درجه فضای ترکیب بندی را با درجه جهان نباید اشتباه گرفت، درجه جهان همان n بعدی یعنی برابر با مجموع آزادی‌های سیستم خواهد بود. اگر محور دیگری برای زمان به این دستگاه مختصات اضافه کنیم، یک نمودار فضا ـ زمانی، یعنی گرافی از جا ـ گاه خواهیم داشت.

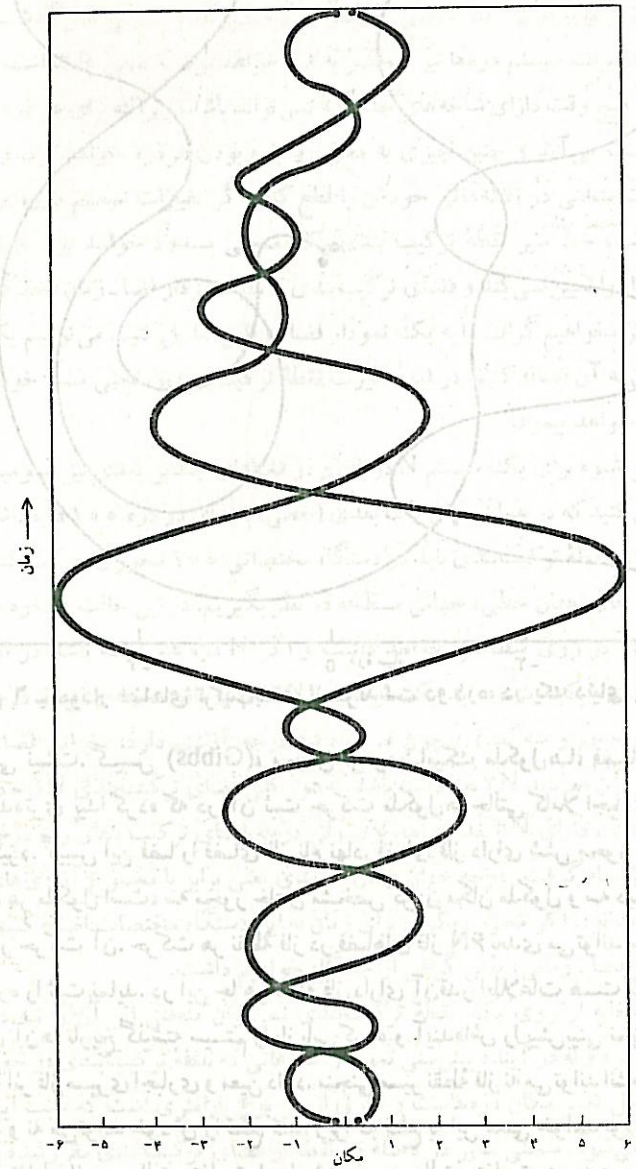
متأسفانه از روی یک نقطهٔ ترکیب‌بندی نمی‌توان منحنی اثر آن را نه در گذشته پیداکرد و نه در آینده پیش‌بینی نمود. و اطلاعاتی که نقطهٔ ترکیب‌بندی در خود دارد تنها شامل تغییر مکان ذره‌هاست و عاری از هر نوع پارامتری است که سبب این تغییر مکان می‌شود. منحنی مسیر در فاصلهٔ دو نقطه از فضای ترکیب‌بندی مقررشده و



شکل ٦ ـ نمودار فضاهای ترکیب‌بندی از سرگذشت دو ذره، در یک دنیای یک بعدی

جرمی نیست. گیبس (Gibbs)، محقق ترمودینامیک ملکول‌ها، فضای تقریباً پیچیده‌تری پیداکرده که در آن ثبت حرکت ملکول‌ها حالتی کاملاً اجباری به خود می‌گیرد. گیبس این فضا را فضای فاز نام نهاد. فضای فاز دارای شش محور مختصات برای هر ملکول است، سه محور خاص مشخص کردن مکان ملکول و سه دیگر خاص مقدار حرکت آن. حرکت هر نقطهٔ فاز در فضاهای فاز 6N بعدی می‌تواند سرگذشت N ذره را ثبت نماید. در این جا هر نقطهٔ فاز دارای آن‌قدر اطلاعات هست که بتوان از روی آن‌ها تاریخ گذشته سیستم را بازیابی کرده و آینده‌اش را پیش‌بینی نمود. منحنی نقطهٔ اثر فاز مسیری اجباری و معین دارد. منحنی مسیر نقطهٔ فاز نه می‌تواند انشعاب داشته باشد و نه می‌تواند خودش را قطع کند. زیرا که قطع به این معنی خواهد بود که حالت نقطهٔ تقاطع از دو حالت متفاوت ایجاد شده و دو حالت متفاوت هم به وجود خواهد

شکل ۴ ـ عالم دو بعدی با دو ذره



شکل ۵ ـ نمودار مکان ـ زمان جهان دو ذره‌ای، از تولد تا مرگ

آورد. در صورتی که هر نقطهٔ فاز که یک مکان معین و یک مقدار حرکت (با جهت بُرداریش) معین دارد نمی‌توانسته در گذشته دارای دو مکان و دو مقدار حرکت بوده باشد و آینده هم دو مکان و دو مقدار حرکت پیدا کند. ولی منحنی مسیر می‌تواند مسدود باشد و این به معنی متناوب بودن سیستم است.

جهان ما با جا ـ گاه نااقلیدسی‌اش و عدم قطعیّت‌هایش در مقدارها و اندازه‌ها، به راحتی فضای فاز، در هیچ چیز به ترسیم در نمی‌آید، ولی راهی را که ویلر پیدا کرده است این کار را در سوپرفضا امکان‌پذیر کرده است. سوپر فضا هم مانند فضای ترکیب‌بندی بدون زمان است، ولی بعدهای بی‌شماری دارد. یک نقطهٔ منفرد در سوپرفضا مجموعهٔ بی‌شماری مختصات دارد که ساختار فضای سه بعدی نااقلیدسی ما را به‌طور کامل مشخص می‌کند: اندازه‌اش را، مکان هر ذره‌اش را و ساختار هر میدانی (از جمله انحنای خود فضا) در هر نقطه را. همان‌طور که سوپر نقطه حرکت می‌کند، مجموعه مختصات متغیرش وصف حالی خواهند بود از تغییرات جهان ما، حرکت سوپر نقطه تاریخچهٔ کامل جهان ما را ارائه می‌دهد.

در همین زمان (تا زمان را چگونه تعبیر کنیم) که نمایشنامهٔ جهان ما دارد روی صحنهٔ سوپر فضا به اجرا در می‌آید، سوپر نقطه‌های بی‌شمار دیگری، که معرف جهان‌های سه‌بعدی دیگری می‌باشند، هر یک به نمایش صحنه‌ای از نمایش‌نامهٔ خود مشغول‌اند. سوپر نقطه‌های نزدیک به‌هم، جهان‌هائی را توصیف می‌کنند که بیشتر به هم شباهت دارند، مانند دنیاهای هم‌ترازی که اچ جی ولز (H.G.Wells) با انسان‌های افسانه‌ای‌اش وارد داستان علمی تخیلی کرد. این دنیاهای هم‌تراز، جدا از هم (چون بخش‌های متفاوتی از سوپرفضاها را اشغال کرده‌اند) همواره در حال گذراندن دوره‌های خود هستند، مکرّر در مکرّر: از بی‌مکانی و بی‌زمانی بیرون می‌آیند، در جا ـ گاهی می‌شکوفند، لحظاتی چند در زمان بی‌کرانه رشد می‌یابند، سپس پژمرده می‌شوند، در خود فرو می‌روند، ناپدید می‌شوند و برمی‌گردند به بی مکانی و بی زمانی.

هربار که چنین دنیائی می‌شکوفد و رو به هستی می‌گذارد، عامل‌های تصادفی، ترکیب خاصی از ذرّات متوافق (و به قول لایب نیتس، سازگار) را، پایاها را و قانون‌ها را به وجود می‌آورند. ساختار حاصله باید فوق‌العاده ظریف تنظیم شده باشد تا حیات را در آن امکان‌پذیر نماید. یک تغییر جزئی در پایای ساختار ظریف، ایجاد خورشیدی مانند خورشید ما را ناممکن خواهد کرد. چرا ما این جا هستیم؟ چون

عامل‌های تصادفی، کیهان ما را با چنان ساختاری به وجود آورده‌اند که امکان رشد و نمو ما را در آن فراهم نموده‌اند. دنیاهای بی‌شماری دیگر که چنین تنظیم ظریفی ندارند، به وجود می‌آیند، از میان می‌روند، بدون وجود کسی در آن‌ها، که از توان مشاهدهٔ برآن‌ها برخوردار باشد.

این دنیاهائی که هیچ مشاهده‌گری با آن‌ها همباز نیست «بی‌معنی» و حتی مورد تردید می‌باشند ولی چون بودنشان منطقاً ناممکن نیست، به‌ظن ضعیف شاید وجود داشته باشند. اسقف برکلی (Berkeley) گفت که وجود داشتن یعنی درک شدن و چارلز پیرس (Charles Sanders Peirce) بیان داشت که هستی امری اعتباری است. ویلر با تکیه بر کلام این دو فیلسوف، استدلال می‌کند که تنها، آن دنیائی که با مشاهده‌گرانش خوب جوش خورده است و به گونه‌ای، قائم بذّات می‌باشد، به ظن قوی وجود دارد. و سرانجام برکلی چنین اظهار می‌دارد که: «تمام نواگران آسمانی و زینت‌های زمینی بدون یک عقل اصالت ندارند».

تا آن جا که من می‌توانم بگویم، ویلر این آخرین کلام برکلی را خوب درنیافته است. منظور برکلی براین است که اساس اصالت ماده در ادراک خداوند است. این که یک درخت، حتی وقتی که هیچ کس به آن نمی‌نگرد، به نظر می‌رسد به ظن قوی وجود دارد، در واقع رهنمود برکلی برای اثبات خداوند می‌شود.

و حالا این سؤال پیش می‌آید که آیا امکان دنیاهائی می‌رود که روی مشاهده‌گران دیگری، کاملاً متفاوت با ما، تنظیم شده باشند؟ و یا چرا فضای یک دنیا باید منحصراً سه بعدی باشد؟ و چه می‌شود اگر درجهٔ فضا، عددی گنگ و یا مختلط باشد؟

ادگار آلن‌پو (Edgar Allan Poe) اندکی پیش از درگذشت، کتاب کوچکی به نام «کشف من» (Eureka) نوشت که به طور عجیبی با نظر ویلر تطبیق می‌کند. پو می‌نویسد: از آن هنگام که خداوند «ذرهٔ نخستین» را از هیچ می‌آفریند، جهانی آغاز می‌شود، از آن ذرهٔ نخستین، ماده به صورت «انبوه زیادی (ولی نه بی‌نهایت، بلکه به تعدادی محدود) ذرات اتم» به شکل حبابی گوی‌مانند به هر سو «شعاع می‌کشد». در حالی که جهان انبساط پیدا می‌کند، جاذبه، به آرامی نیروی بیشتری کسب می‌کند و ماده برای تشکیل ستاره‌ها و سیاره‌ها به هم جمع می‌شود. دست آخر نیروی جاذبه جلو انبساط را می‌گیرد و از آن پس انقباض جهان شروع می‌شود تا آن جا که دوباره به هیچی برگشت می‌کند. آخرین «حُباب حُباب‌ها در یک آن ناپدید خواهد شد

(لابد به کام آن‌چه که ما سیاه‌چاله می‌نامیم، فرو خواهد رفت) و باز هم غیر از خدا هیچ کس نخواهد بود».

در اساطیر هندوها آمده است که پشت سر برهما، نگاه برهمن متوجه اوست. برهمن پاک، و منزه از جهان مادی آن‌چنان که گمان‌ها و اندیشه‌ها را به آن راهی نیست. ولی آیا سوپر سوپر سوپر چشمی هم هست که برهمن را بنگرد؟ و آیا می‌توان آخرین درجهٔ سوپر فضا را با آخرین چشم تثبیت کرد؟ یا باید این را به سبب تناقض در مفهوم بزرگترین الف، نامحتمل شمرد؟

اکنون متوجه می‌شویم که «همه‌چیز» یعنی چه. تا این جا گمان می‌رود که به حول و حوش آن نزدیک شده باشیم و شاید هنوز هم خیلی از آن دور باشیم. به هرحال بگذارید این آخرین کلام را از زبان سی‌اس لوئیز (C.S. Louis) (نقل از بخش دوم «بررسی کلمه‌ها») برای شما بیاورم: «همه چیز موضوعی است که زیاد گفتنی ندارد.»

سولخان صبا اوربه‌لیانی (حدود سده‌های ۱۷ و ۱۸ میلادی) نویسنده و متفکر گرجی، کتابی دارد به نام «حکمت تخیل». این کتاب، شامل افسانه‌ها و داستان‌هایی است که مساله‌هایی هم (با حل) در آن‌ها گنجانده شده است. مثلاً، مسأله معروف عبور سه زوج زن و شوهر از رودخانه، با شرایط معین در این کتاب آمده است (در سدهٔ چهاردهم، در اغلب از مساله‌ها، صحبت بر سر شوالیه‌ها و همسران آن بوده است). این مساله هم در کتاب آمده است: سه برادر می‌خواهند ۳۰ مرغ و ۶۰ گوسفند را بین خود تقسیم کنند. گوسفندها، قیمتی یکسان دارد، ولی بین مرغ‌ها، ۱۰ مرغ به اندازهٔ یک گوسفند، ۱۰ مرغ دوم به اندازهٔ دو گوسفند و ۱۰ مرغ آخر به‌اندازهٔ ۳ گوسفند می‌ارزند. تقسیم چگونه باید انجام شود که اولاً سهم هر برادر با برادر دیگر یکی باشد، ثانیاً نه مرغی باقی بماند و نه گوسفندی.

غلامرضا یاسی‌پور

اسقاط اضافه

نشانی داده‌اند اهل خرابات[1]
که التوحید اسقاط الاضافات[1]
«گلشن راز»

غایت جهد بشر رسیدن از کثرت به وحدت، و، اگر این مقصد عالی[2] دست ندهد، رسیدن به حداقل است. مثلاً در هندسه، کوشش مهندس[3] براین است که حداقل با چند جزء از اجزاء اصلی یا فرعی مثلث، می‌توان آن را رسم کرد و در این کوشش به آنجا می‌رسد که، مثلاً با معلوم بودن سه ضلع یا دو ضلع و زاویهٔ بین یا دو زاویهٔ و ضلع بین، مثلث به کفایت رسم می‌شود و برای رسم آن به اجزاء دیگر نیاز نیست، و به عبارت دیگر، معلوم بودن، مثلاً، سه ضلع از یک مثلث برای رسم آن **کافی** است. مرد متفکر، انسان کافی را آن می‌داند که به **کفایت** عمل کند یعنی سررشته را نگهدارد،[4] نه چنان سست بگیرد که زمام امور از دستش به در رود و نه چنان سخت، که آن را بگسلد، به عبارت دیگر شرایط لازم و کافی را در هر امر به جا آورد و در هر کار پا از گلیم خویش به در نکند. این روش، عموماً در علوم و خصوصاً در ریاضیات و بالاخص در منطق به کار می‌رود. کار منطقی نیز، چونان ریاضیدان، روی به رسیدن به وحدت دارد و مثلاً در این اندیشه است که چگونه می‌تواند با کمترین تعداد رابطها، تمام ترکیبات گزاره‌ها را بیان کند.

می‌دانیم که رابط،[5] همان است که توسط آن گزاره‌های ساده[6] را به هم گره می‌زنند و از آن‌ها گزاره‌های مرکب[7] می‌سازند و همین بلا را سر گزاره‌های مرکب هم می‌آورند، یعنی از آن‌ها هم، باز گزاره‌های مرکب‌تر درست می‌کنند.

رابطهای معروف[8] عبارتند از: $\sim$، $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$، که داستان هر یک را می‌توان در کتب مربوطه خواند. منطقی هنگامی که به این رابطها می‌رسد مانند هر متفکر دیگر این سئوال را مطرح می‌کند که آیا برای بیان جمیع پنج ترکیب حاصل از پنج رابط فوق، نیاز به هر پنج آن‌هاست یا با کمتر از آن‌ها هم می‌توان این مهم را انجام داد و اگر می‌توان، این حداقل چند است و آیا می‌شود تنها با یک رابط، جمیع این

رابطها را بیان کرد؟

برای پاسخ به پرسش‌های فوق به چند تعریف و قضیه نیاز داریم.

تعریف ۱: تعریف رابط $\leftrightarrow$:

اگر p و q متغیرهایی گزاره‌ای[10] باشند، در این صورت ترکیب دو شرطی p و q عبارت است از:

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

با همین تعریف، یکی از رابطهای فوق، یعنی $\leftrightarrow$، را از گردونه خارج می‌کنیم و به این ترتیب چهار رابط باقی می‌گذاریم.

قضیه ۱: قضیهٔ دو مورگان[11]: اگر p و q دو متغیر گزاره‌ای باشند دراین صورت:

$$(p \wedge q) = \sim(\sim p \vee \sim q)$$
$$(p \vee p) = \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

اثبات ۱: با رسم جدول ارزش به سادگی انجام می‌گیرد.

با قضیهٔ فوق یکی دیگر از رابطها ($\wedge$ یا $\vee$) را کنار می‌گذاریم.

قضیهٔ ۲: اگر p و q دو متغیر گزاره‌ای باشند در این صورت:

$$(p \rightarrow q) = \sim p \vee q$$

اثبات ۲: با استفاده از جدول ارزش به سادگی انجام می‌گیرد.

قضیهٔ فرعی ۱: با توجه به قضایای ۱ و ۲ داریم.

$$(p \rightarrow q) = \sim(p \wedge \sim q)$$

اثبات. قضیهٔ ۲: $(p \rightarrow q) = \sim p \vee q$

قضیهٔ ۱: $\sim p \vee q = \sim(\sim\sim p \wedge \sim q)$

نقیض نقیض $\sim\sim p = p$

در نتیجه: $(p \rightarrow q) = \sim(p \wedge \sim q)$

با توجه به مطالب فوق یکی دیگر از رابطها از بین می‌رود.

تعریف ۲: مجموعهٔ بسند[12] رابطها، مجموعه‌ای است که هر ترکیب را بتوان تنها با رابطهای آن نشان داد.

قضیهٔ فرعی ۲: $\{\sim, \wedge\}$، $\{\sim, \vee\}$، و $\{\sim, \rightarrow\}$ مجموعهٔ بسند رابطهایند.

اثبات: نتیجهٔ فوق با توجه به قضایای قبل به سادگی به دست می‌آید.

مثال ۱: $(((\sim p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3)$ را تنها با $\sim$، $\vee$، $\sim$، $\wedge$، و $\rightarrow$

بیان کنید:

حل:۱ : $(\sim((\sim p_1) \vee p_2) \vee p_3)$

۲ : $\sim(\sim(p_1 \wedge (\sim p_2)) \wedge (\sim p_3))$

۳ : $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3)$

ملاحظه کردیم که هر سه مجموعهٔ بسند رابط‌هایی که به‌دست آوردیم شامل ~ بودند. اکنون پرسش زیر مطرح می‌شود:

پرسش ۱ : آیا ترکیبی که همواره ارزش «ن»[۱۳] می‌گیرد[۱۴] می‌تواند با مجموعهٔ بسندی که از ~ در آن خبری نیست بیان شود؟

پاسخ: خیر. زیرا چون به تمام متغیرهای گزاره‌ای واقع در ترکیب مزبور «د» بدهیم حاصل «د» می‌شود و بنابراین ارزش «ن» را نمی‌دهد.

قضیهٔ فرعی ۳ : مجموعه‌ای که از میان رابط‌های $\wedge$ ، $\vee$ ، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$ تشکیل شده باشد نمی‌تواند مجموعهٔ بسندی را بدهد.

اثبات : زیرابنابه پاسخ پرسش ۱، حالتی که همهٔ متغیرهای گزاره‌ای واقع در ترکیبی که همواره ارزش «ن» می‌گیرد، «د» باشند، نمی‌تواند به آن ترکیب، ارزش «ن» بدهد.

تمرین ۱ : ثابت کنید که $\{\leftrightarrow , \sim\}$ نیز مجموعه‌ای بسند نیست.

اکنون به سراغ پاسخ‌دادن به سؤال اصلی، یعنی این که، آیا تنها با یک رابط می‌توان تمام ترکیب‌ها را بیان کرد یا خیر، می‌رویم، و برای این کار تعریف‌ها و قضیه‌های زیر را می‌آوریم:

تعریف ۳. رابط نه ـ یا[۱۵] : علامت این رابط $\downarrow$ و جدول ارزش آن چنین است:

p	q	$(p \downarrow q)$
د	د	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

قضیهٔ ۳ : مجموعهٔ $\{\downarrow\}$ مجموعهٔ بسند رابط‌هاست.

اثبات : با توجه به این که $\{\wedge , \sim\}$ و $\{\vee , \sim\}$ مجموعهٔ بسندند، کافی است که ثابت کنیم که $\sim$ و $\wedge$ ، یا $\sim$ ، $\vee$ بر حسب $\downarrow$ قابل بیانند. اما

$(\sim p)$ معادل منطقی $(p \downarrow p)$ است، و $(p \wedge q)$ معادل منطقی $(q \downarrow q) \downarrow (p \downarrow p)$ است. اثبات این دو با استفاده از جداول ارزش به سادگی انجام می‌گیرد و مثلاً در مورد اولی به صورت زیر است:

p	$\sim p$	$p \downarrow p$
د	ن	ن
ن	د	د

همانطور که از جدول ملاحظه می‌شود ستون‌های مربوط به $\sim p$ و $p \downarrow p$ یک‌سانند و این، بدان معنی است که $\sim p$ و $(p \downarrow p)$ منطقاً معادلند. در مورد تعادل منطقی دوم نیز وضع به همین منوال است زیرا:

p	q	$p \wedge q$	$p \downarrow p$	$q \downarrow q$	$((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	ن

با توجه به این که $\vee$ را می‌توان بر حسب $\wedge$ بیان کرد نتیجه می‌گیریم که هر دو مجموعهٔ بسند $\{\wedge , \sim\}$ و $\{\vee , \sim\}$ قابل تحویل به مجموعهٔ بسند تک عضوی $\{\downarrow\}$ اند.

تعریف ۴ ، رابط نه ـ و[۱۶] : علامت این رابط $|$ و جدول ارزش آن چنین است:

p	q	$p \mid q$
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	د

قضیهٔ ۴ : مجموعهٔ $\{\mid\}$ مجموعهٔ بسند رابط‌هاست.

اثبات : مانند مورد اثبات قضیهٔ ۳، کافی است که ثابت کنیم که $\sim$ ، $\wedge$ یا $\sim$، $\vee$ برحسب $\mid$ قابل بیانند. اما $(\sim p)$ معادل منطقی $(p \mid p)$ است، و $(p \vee q)$ معادل منطقی $((p \mid p) \mid (q \mid q))$ است، و اثبات این هر دو با رسم جدول ارزش به سادگی میسر می‌شود، و $\wedge$ هم که قابل بیان با $\vee$ است پس اثبات[1] قضیه تمام است.

به این ترتیب، همانطور که ملاحظه شد تنها با یک رابط می‌توان جمیع ترکیبات گزاره‌ها را بیان کرد و این مطلب، علاوه بر آن که ما را به وحدت رهنمون است موارد استعمال مهمی در ماشین‌های کامپیوتری دارد، اما در عمل، حرکت با یک رابط، چنان که در مثال زیر خواهیم دید، کار را به درازا می‌کشاند، و بنابراین برای مقاصد متعارف همان بهتر که از پنج رابط معروف و به همان عادت مألوف[17] استفاده کنیم.

مثال ۲ : با استفاده از مجموعهٔ بسند $\{\downarrow\}$، ترکیبی منطقاً معادل با $(p \to q)$ بیاورید.

حل : $p \to q$ منطقاً معادل است با :

$$\sim (p \wedge (\sim q))$$

و معادل :

$$\sim (p \wedge (q \downarrow q))$$

و معادل :

$$\sim ((p \downarrow p) \downarrow [q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)])$$

و معادل :

$$\{(p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]\} \downarrow \{(p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]\}$$

* * *

یادداشتها

۱ـ توحید، انداختن و حذف زیادی‌هاست.

۲ـ تعبیر از حافظ است: ما بدان مقصد عالی نتوانیم رسید ـ هم مگر پیش نهد لطف شما گامی چند.

۳ـ هندسه‌دان.

۴ـ تعبیر از حافظ است: گرت هواست که معشوقه نگسلد پیوند ـ نگاه‌دار سررشته تا نگهدارد.

۵ـ connective ، که با اندکی تسامح، همان حرف ربط دستور زبان است.

۶ـ simple statements ، گزاره‌هایی که از یک موضوع و یک محمول تشکیل شده‌اند.

۷ـ compound statements، گزاره‌هایی که توسط رابط‌ها از گزاره‌های ساده یا مرکب ساخته می‌شوند.

۸ـ معروف از این لحاظ که جمیع استدلال‌های در زبان طبیعی را می‌توان با آن‌ها بیان کرد و رابط‌های دیگر به ترادف با آن‌ها قابل بیانند.

۹ـ این رابط‌ها به ترتیب: نقیض "negation" یک گزاره، و ترکیب عطفی "conjunction"، ترکیب فصلی "disjunction"، ترکیب شرطی "conditional" و ترکیب دوشرطی "biconditional"، دو گزاره را مشخص می‌کنند. ترکیبات مذکور تابع ارزش "truth function" در نظر گرفته می‌شوند و قاعده‌هاشان توسط جداولی به نام جداول ارزش "Truth Tables"، معین می‌شود. راجع به تابع ارزش در مقالهٔ دیگری سخن خواهیم گفت.

۱۰ـ statement variables، که در واقع جای گزاره‌ها را نگه می‌دارند و جا نگهدارند.

۱۱ـ این صورت بسیار ساده و ابتدایی قضیهٔ دومورگان است. حالت کلی آن را در مقاله‌ای دیگر بررسی خواهیم کرد.

۱۲ـ adequate set for connectives ، یا مجموعهٔ کافی رابط‌ها.

۱۳ـ «ن» مختصر «نادرست» در مقابل «درست» است و به غلط به جای «راست» "true" و «دروغ» "false" نشسته، و باب شده است.

۱۴ـ مثلاً این ترکیب $p \wedge \sim p$ ، که همواره ارزش «ن» می‌گیرد و کاذب "contradiction" ، نامیده می‌شود.

۱۵ـ Nor که مخفف No or یا نقیض یا است.

۱۶ـ Nand که مخفف No and یا نقیض و است.

۱۷ـ روش آشنا، تعبیر از سعدی است.

جابر عناصری

● تجلّی نقوشِ هندسی

در سُفال میبد

بررّسی نقش و نگارهای عامیانه و کنکاش در قلمرو نقوش «تزیینی ـ هندسی» در حیطهٔ صنایع دستی و هنرهای سنّتی ـ موجب شناخت جهان‌بینی مردم عادی و نحوهٔ ارتباط آنان با طبیعت و ماوراءطبیعت می‌گردد. هرنقشی از نقوش تزیینی ـ هندسی، در حُکم زبانی است برای بازگویی عواطف و احساسات مردم و به منزلهٔ وسیله‌ای است جهت بازنمایی دیده‌ها و شنیده‌های آنان از کیهان خاکی و عاملی است در نمایش تجربهٔ قومی و قراردادی است میان انسان‌ها که تمثیل و تمثال‌ها را به قاعده به‌کار می‌گیرند و نقوش نمادین را در قالب صُوَر رمزی فرو می‌ریزند و از پس پار و پیرار، نقش و نگارهای اسطوره‌ای، آیینی، تاریخی، مذهبی و ... را باز می‌شناسند و فقط به صورت دل نمی‌بندند و به مصداق:

بشنو اکنون صورت افسانه را لیک از کَه تو جدا کن دانه را

و همچنین:

هست اندر باطن هر قصّه‌ای خُرده بنیان را ز معنی حصّه‌ای

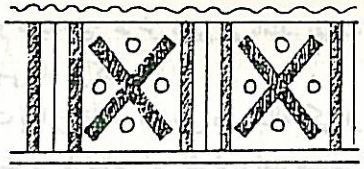
پی‌گیر معنای نقشند و مضامین مندرج در چهارچوب اشکال و نقش و نگارها را در مدّنظر قرار می‌دهند تا به علائم قرار دادی و نقوش کنایی و استعاره‌های منطوی در بطن این نقش‌ها دست یابند.

فی‌المثل نقش ماهی را نشانی از طراوت و استمرار زندگی می‌دانند و خورشید را نماد زندگی و شادابی و نورانیّت و میل به حیات و عشق به پایداری می‌شناسند و

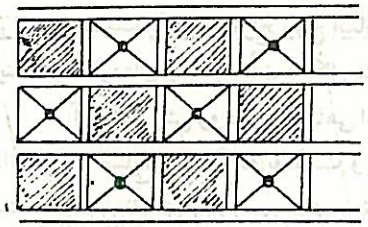
پرنده را علامت پاکی و معراج روح انسان و مسندنشین عرش برین می‌نامند. نهایت اینکه از نگاره‌های زیبا در هیأت اشکال هندسی یاد می‌کنند.

آنچه در پیش رو داریم، نگاهی است به این نقوش هندسی در رسالهٔ یکی از دانشجویان صنایع دستی* که به همّت و دقّت در بازنمایی این نقوش، بُعد هندسی منتسب به این نقوش را بررّسی کرده و تعدّد نقوش و تنوّع اشکال هندسی را در نگارگری سفال از دیده به دور نداشته است.این نقش و نگارها مربوط به صنعت و هنر سفال در منطقه‌ای موسوم به: «میبد» است.میبد در پنجاه کیلومتری شمال غربی یزد و در کنار راه تهران ـ بندرعبّاس قرار دارد. سفالگری از جمله صنایع دستی بومی میبد است و مورد علاقهٔ خاصّ مردم این منطقه محسوب می‌گردد. صرف نظر از نکات فنّی و شیوهٔ ساخت سفالینه‌ها و گزینش رنگ برای نقاشی روی ظروف و لعاب زدن آنها، پژوهش در قلمرو نقش و نگارهای ویژهٔ این سفالینه‌ها ـ ما را به کرانهٔ ذوق و اشتیاق مردم میبد در نقش‌اندازی هدایت می‌نماید. از میان این نقش‌ها، می‌توان از نقش خورشید خانم، ماهی، سیمرغ، هُدهُد، طاووس و بسیاری دیگر از حیوانات اسطوره‌ای خیالی و واقعی نام بُرد. ضمن اینکه ابزار و وسایل مورد استفادهٔ روزمرّهٔ میبدی‌ها نیز جایگاهی بر روی سفالینه‌ها می‌یابند و نام و نشان می‌گیرند. برخی از این نقوش که به صورت نگاره‌های هندسی مُجسم می‌گردند،به صورت حاشیه و پُر کنندهٔ فضاهای خالی مربوط به نگارگری روی سفال میبد می‌باشد. این نقوش عبارتند از:

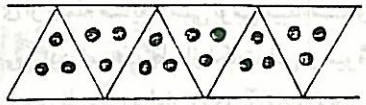
۱ـ حاشیه زنجیری
۲ـ کلّه قوچی
۳ـ حاشیه مشهدی
۴ـ سوزنی
۵ـ خانی
۶ـ تاجی (تاج درویشی)
۷ـ چرخ چاهی
۸ـ چادرشو
۹ـ قندک
۱۰ـ لوزی
و...



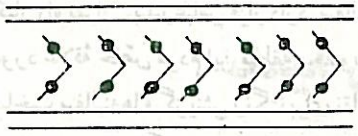
(طرح شماره ۱) نقش: چرخ چاهی



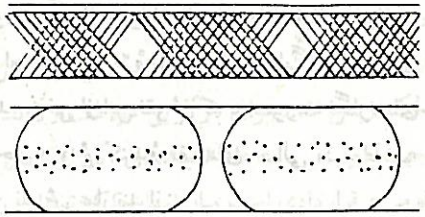
(طرح شماره ۲) نقش: چادرشو



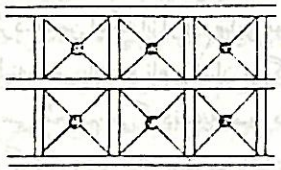
(طرح شماره ۳) نقش: کلّه قوچی



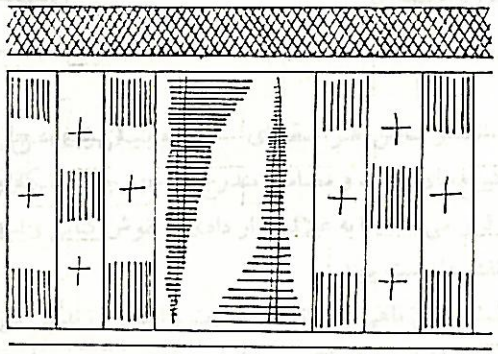
(طرح شماره ۴) نقش: مشهدی



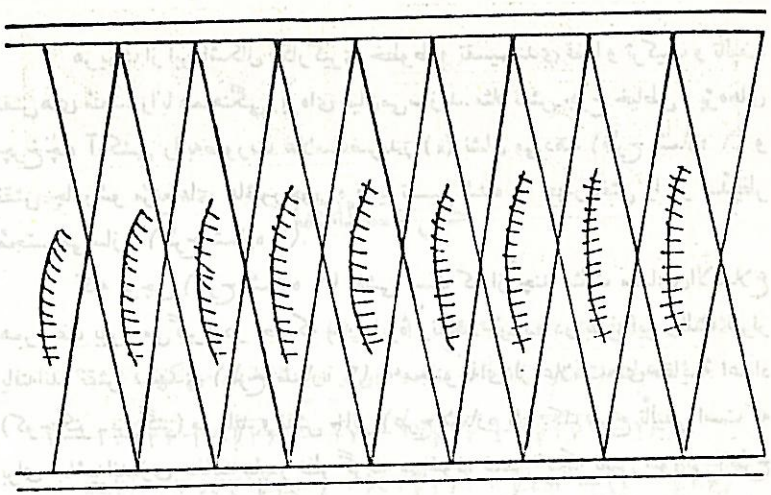
(طرح شماره ۵) نقش: خانی



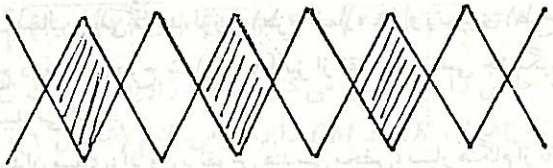
(طرح شماره ۶) نقش: سوزنی



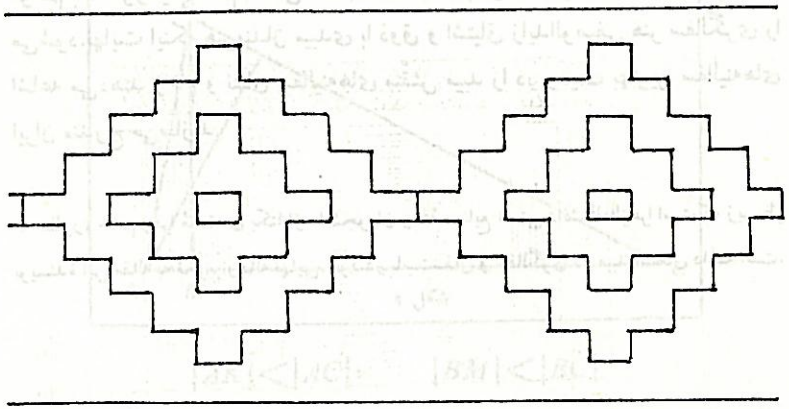
(طرح شماره ۷) نقش: قندک



(طرح شماره ۸) نقش: لوزی



(طرح شماره ۹) نقش: زنجیری



(طرح شماره ۱۰) نقش: تاجی

هریک از این اشکال بکارگیری خطوط و تقسیم‌بندی فضا و ترکیب و تألیف نقش‌های مُتعدّد را با هماهنگی‌ویژه‌ای عیان‌می‌سازند. مثلاً نقش چرخ خیاطی و پرّه‌های چرخ‌چاه آبکشی را به‌صورت علامت‌ضربدر (×) نشان می‌دهد (طرح شماره ۱) و نقش چادرشو مرّبع‌های هاشورخورده و یا تقسیم شده بر چهاربخش را در مدّنظر مُجسّم می‌سازد. (طرح شماره ۲).

کلّه قوچی (طرح شماره ۳) نقشی است که از چند مثلث متساوی‌الاضلاع همردیف بهره می‌گیرد در حالیکه سه دایرهٔ رنگ خورده در بطن این مثلث قرار یافته‌اند. نقش مشهدی (طرح شماره ۴) به مجموعه‌ای از علامت‌های مقایسهٔ اعداد (کوچکتر ـ بزرگتر) می‌ماند و نقش خانی (طرح شماره ۵) یک طرح تألیفی است که برای حاشیه‌اندازی سفالینه‌ها در نظر گرفته می‌شود. ضمن اینکه نقش سوزنی (طرح شماره ٦) مربع‌های منقسم به چهاربخش را عرضه می‌نماید. نقش قندک (طرح شماره ۷) از علامت بعلاوه (+) نشانی‌ها دارد و خطوط هاشوری را در خدمت نقش‌اندازی در حاشیهٔ ظروف سفالین برمی‌گزیند. لوزی (طرح شماره ۸) و زنجیری (طرح شماره ۹) و تاجی یا تاج درویشی (طرح شماره ۱۰) نیز از نقوش هندسی چشمگیر مربوط به سفالینه‌های میبد می‌باشند.

هنرمندان میبدی، افزون برنقوش هندسی محض، بسیار هنگام از نقوش تألیفی به صورت تزیینی ـ هندسی نیز استفاده می‌نمایند. در این بخش، از نقش ونگارهای موسم به: خورشید خانم، ماهی، گنجشک و ... بعنوان نقش‌های اصلی نام برده می‌شود. نهایت اینکه هنرمندان میبدی با ذوق و اشتیاق زایدالوصفی هنر سفالگری را اشاعه می‌دهند و نام و نشان سفالینه‌های منقّش میبد را در ردیف بهترین سفالینه‌های ایران مندرج می‌سازند.

* منظور، خانم زهرا مُحمّدی یکتا از دانشجویان رشتهٔ صنایع دستی دانشگاه‌الزهرا است که زیر نظر نویسندهٔ این مقاله به تحریر رسالهٔ نهایی خود در باب: سفال و سفالگری در میبد اشتغال داشته است.

حل مسأله‌ها

مسأله‌های مسابقه‌ای (صفحهٔ **۱۴۳** را ببینید)

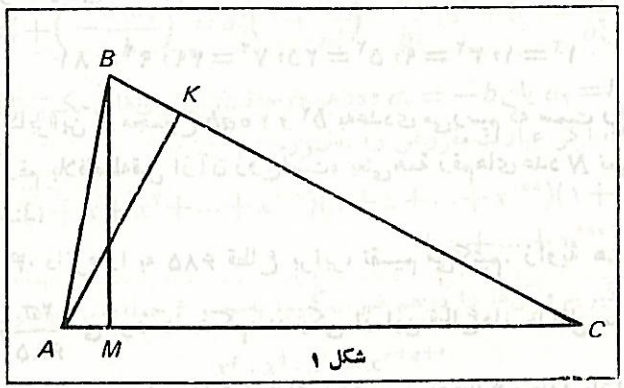
۱. عبارت زیر رادیکال را، به‌این‌ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$۱-۲۷\sqrt{۲۶}+۹\sqrt{۲۶^۲}=۲۷-۲۷\sqrt{۲۶}+۹\sqrt{۲۶^۲}-۲۶=$$
$$=۳^۳-۳\times۳^۲\sqrt{۲۶}+۳\times۳\sqrt{۲۶^۲}-\sqrt{۲۶^۳}=(۳-\sqrt{۲۶})^۳$$

بنابراین، عدد مفروض، برابر است با

$$\sqrt[۳]{(۳-\sqrt{۲۶})^۳}+\sqrt{۲۶}=۳-\sqrt{۲۶}+\sqrt{۲۶}=۳$$

۲. حالتی را در نظر می‌گیریم که، زاویه‌های مثلث ABC، حاده باشند. ارتفاع‌های AK و BM را رسم می‌کنیم (شکل ۱)، درستی این نابرابری‌ها روشن است:



شکل ۱

$$|AK|<|AC|,\qquad |BM|<|BC|$$

از مجموع نابرابری‌ها به‌دست می‌آید:

$$|AK|+|BM|<|AC|+|BC|$$

در دو حالت مثلث‌های با زاویهٔ منفرجه یا قائمه هم، به‌همین‌ترتیب عمل می‌شود. درضمن، در حالت مثلث قائم‌الزاویهٔ به‌وتر AB، ارتفاع‌های وارد از راس‌های A و B، بر ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه AC و BC، منطبق می‌شوند؛ در این‌حالت، و تنها در همین‌حالت، مجموع طول‌های دو ارتفاع‌مثلث، بامجموع طول‌های دوضلعی که ارتفاع‌ها بر آن‌ها فرودآمده‌اند، برابر می‌شود. به‌این‌ترتیب، در هر مثلث، مجموع طول‌های دو ارتفاع از مجموع طول‌های دو قاعده، کوچکتر (یا با آن برابر) است.

۳. با توجه به‌فرض مساله، N عددی فرد است. فرض می‌کنیم، N مجذور یك عدد فرد باشد. این عدد را $10a+b$ می‌گیریم که، در آن، a و b عددهایی‌طبیعی‌اند و $b\leqslant 9$ عددی‌است‌فرد. دراین‌صورت، بایدداشته‌باشیم:

$$N=(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$$

می‌فهمیم که دو رقم متوالی (سمت‌راست) عدد N، از مجموع $20ab+b^2$ معین می‌شود، دراین‌مجموع، عدد $20ab$ به‌صفر ختم شده است و، بنابراین، عددی زوج است. جملهٔ دوم b^2، مجذور یك عدد فرد یك‌رقمی و برابر با یکی از عددهای

$$1^2=1,\ 3^2=9,\ 5^2=25,\ 7^2=49,\ 9^2=81$$

است. بنابراین از مجموع $20ab$ و b^2 به‌عددی می‌رسیم که سمت راست آن فرد و رقم بلافاصله‌قبل از آن زوج‌است، یعنی همهٔ رقم‌های عدد N نمی‌توانند فرد باشند.

۴. دایره را به ۶۸۵ قطاع برابر، تقسیم می‌کنیم. زاویهٔ هر قطاع برابر $\frac{2\pi}{685}$ می‌شود. دست‌کم، در یکی از این قطاع‌ها، حداقل سه نقطه از ۱۳۷۱ نقطه وجود دارد (اگر نقطه‌ای روی مرز دوقطاع مجاور باشد، آن‌را متعلق به‌یکی از قطاع‌ها می‌گیریم)؛ زیرا اگر در هیچ‌یك از قطاع‌ها، بیش از ۲ نقطه وجود نداشته باشد، تعدادکل نقطه‌ها، از 2×685، یعنی ۱۳۷۰

تجاوز نمی‌کند.

قطاعی را در نظر می‌گیریم که شامل دست‌کم سه‌نقطه باشد و به مثلثی توجه می‌کنیم که راس‌های آن، دراین‌سه‌نقطه‌قرار گرفته باشد. روشن‌است که مساحت این مثلث، از مساحت قطاع کوچکتر است. مساحت قطاع برابر $\frac{1}{685}$ است، یعنی

$$\text{مساحت مثلث}<\frac{1}{685}<0/0015$$

۵. ابتدا فرض می‌کنیم $b_1=0$. دراین‌صورت، سه برابری فرض چنین می‌شوند:

$$a_1^2=1,\ a_2^2+b_2^2=1,\ a_1a_2=0$$

از این‌جا نتیجه می‌شود: $a_2=0$ و $b_2^2=1$ و، بنابراین، رابطه‌های حکم برقرارند.

اگر $b_1\neq 0$، آن‌وقت، از برابری سوم فرض به‌دست می‌آید: $b_2=-\frac{a_1a_2}{b_1}$، که اگر آن‌را در برابری دوم فرض قرار دهیم:

$$a_2^2+\left(-\frac{a_1a_2}{b_1}\right)^2=a_2^2\left(1+\frac{a_1^2}{b_1^2}\right)=\frac{a_2^2}{b_1^2}(a_1^2+b_1^2)=\frac{a_2^2}{b_1^2}=1$$

یعنی‌یا $a_2=b_1$ یا $a_2=-b_1$ ودرهر دوحالت، برابری‌های‌حکم‌برقرارند.

۶. اگر عبارت مفروض را به‌صورت

$$(1+x+x^2+\dots+x^{100})(1+x+\dots+x^{100})(1+x+\dots+x^{100})$$

درنظر بگیریم و آن‌ها را درهم ضرب کنیم، به‌مجموع جمله‌هایی به‌صورت

$$x^p\cdot x^q\cdot x^r=x^{p+q+r}$$

می‌رسیم که، در آن

$$0\leqslant p\leqslant 100,\ 0\leqslant q\leqslant 100,\ 0\leqslant r\leqslant 100 \qquad (1)$$

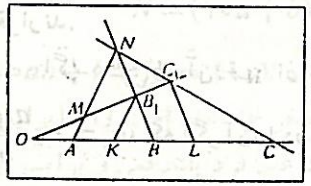
وما به‌جمله‌هایی علاقه‌مندیم که، برای آن‌ها، داشته‌باشیم: $p+q+r=100$.
روشن است که، تعداد این جمله‌ها، برابر است با تعداد جواب‌های درست (p, q, r) در معادلهٔ $p+q+r=100$ که با نابرابری‌های (۱) سازگار باشند.

تعداد این جواب‌ها را محاسبه می‌کنیم. اگر $p=0$، آن وقت $q+r=100$ که، ۱۰۱ جواب برای (q, r) دارد: $(0, 100)$، $(1, 99)$، $(2, 98)$، ...، $(100, 0)$. اگر $p=1$، آن‌وقت $q+r=99$ که، برای (q, r)، ۱۰۰ جواب دارد: $(0, 99)$، $(1, 98)$، $(2, 97)$، ...، $(99, 0)$ و غیره. تعداد کل جواب‌های موردنظر ما، برابر است با

$$101+100+99+\dots+2+1=\frac{1+101}{2}\times 101=5151$$

و همین عدد ۵۱۵۱، ضریب x^{100} است.

۷. راه حل اول. روی ضلع‌های زاویه، جای نقطه‌های A، B، C، B_1 و C_1 را معین می‌کنیم (فعلا نقطهٔ A_1 را کنار می‌گذاریم).



شکل ۲

بنابر فرض داریم:

$$|OB_1|:|B_1C_1|=3:1,\ |OB|:|BC|=1:1$$

بنابراین خط‌های راست BB_1 و CC_1 موازی نیستند؛ نقطهٔ برخورد آن‌ها را، N می‌نامیم. روی پاره‌خط راست OC، نقطه‌های K و L را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم (شکل ۲):

$$|OA|=|AK|=|KB|=|BL|$$

از تشابه مثلث‌های OBB_1 و OLC_1 نتیجه می‌شود:

$$|LC_1|=\frac{4}{3}|BB_1| \text{ و } [LC_1]\|[BN]$$

می‌بینیم که مثلث‌های CLC_1 و CBN متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{|BN|}{|LC_1|}=\frac{|BC|}{|LC|}=\frac{3}{2},\ |BN|=\frac{3}{2}|LC_1|=2|BB_1|$$

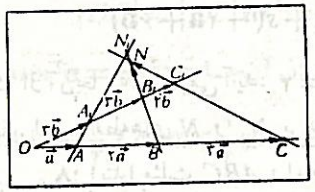
یعنی، نقطهٔ B_1، وسط پاره‌خط راست BN است.

فرض کنیم، خط راست NA، پاره‌خط راست OB_1 را در نقطهٔ M قطع کند. پاره‌خط راست B_1K، وسط دو ضلع مثلث BAN را به‌هم وصل کرده‌است، بنابراین دو پاره خط راست B_1K و AN موازی‌اند. ولی نقطهٔ A، وسط پاره‌خط راست OK است. درنتیجه پاره خط راست AM وسط دو ضلع مثلث KOB_1 را به هم وصل می‌کند، یعنی $|OM|=|MB|$. بنابر شرط $|OA_1|=|A_1B_1|$، بنابراین، نقطه‌های M و A_1 برهم‌منطبق‌اند و، درنتیجه، خط راست AA_1 از نقطهٔ Nـ نقطهٔ برخورد خط‌های راست BB_1 و CC_1ـ می‌گذرد.

(راه‌حل دوم. بردارهای ناهم‌راستای

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{OA},\ \mathbf{b}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1}$$

را درنظر می‌گیریم (شکل ۳). نقطهٔ



شکل ۳

برخورد خط‌های راست BB_1 و CC_1 را N می‌نامیم. دراین‌صورت

$$\overrightarrow{BN}=x\overrightarrow{BB_1}=x(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OB_1})=x(-3\mathbf{a}+6\mathbf{b});$$
$$\overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CC_1}=y(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC_1})=y(-6\mathbf{a}+8\mathbf{b})$$

که در آن‌ها، x و y، عددهایی حقیقی‌اند. ولی چون

$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\Longrightarrow x(-3\mathbf{a}+6\mathbf{b})=$$
$$=3\mathbf{a}+y(-6\mathbf{a}+8\mathbf{b})$$

یعنی

$$(-3x+6y-3)\mathbf{a}+(6x-8y)\mathbf{b}=0$$

چون بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا نیستند، از این برابری برداری به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} -3x+6y-3=0 \\ 6x-8y=0 \end{cases}$$

که با حل آن نتیجه می‌شود: $x=2$، $y=\frac{3}{2}$؛ یعنی $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BB_1}$.

N_1 را نقطهٔ برخورد خط‌های راست AA_1 و BB_1 می‌گیریم. اگر شبیه بالا استدلال کنیم، به‌دست می‌آید:

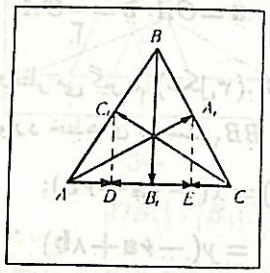
$$\overrightarrow{AN_1}=t\overrightarrow{AA_1}=t(-\mathbf{a}+3\mathbf{b});$$

$$\overrightarrow{BN_1}=s\overrightarrow{BB_1}=s(-3\mathbf{a}+6\mathbf{b});$$

$$\overrightarrow{AN_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN_1};\ \overrightarrow{AB}=2\mathbf{a};$$

$$t(-\mathbf{a}+3\mathbf{b})=2\mathbf{a}+s(-2\mathbf{a}+6\mathbf{b})$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $t=4$، $s=2$. بنابراین $\overrightarrow{BN_1}=2\overrightarrow{BB_1}$ و، بنابراین، نقطه‌های N و N_1 برهم منطبق‌اند.



شکل ۴

۸. ابتدا مثلث ABC را، با زاویه‌های حاده می‌گیریم. هریک از بردارهای $\overrightarrow{AA_1}$، $\overrightarrow{BB_1}$ و $\overrightarrow{CC_1}$ را روی ضلع AC تصویر می‌کنیم. چون تصویر مجموع بردارها، برابر است با مجموع تصویرهای بردارها، بنابراین $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CD}=0$،

$$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CE} \text{ و } \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=0 \text{ ، } (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})+(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED})=0$$

(شکل ۴). $\widehat{ACB}=\gamma$ و $\widehat{BAC}=\alpha$ می‌گیریم. دراین‌صورت

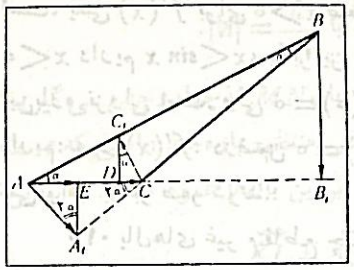
$$|CE|=|CA_1|\cos\gamma=|AC|\cos^2\gamma;$$

$$|AD|=|AC_1|\cos\alpha=|AC|\cos^2\alpha;$$

و چون $|AD|=|CE|$، پس $\cos^2\alpha=\cos^2\gamma$ و $\alpha=\gamma$.

به‌همین‌ترتیب، ثابت می‌شود: $\widehat{BAC}=\widehat{ABC}$؛ یعنی مثلث ABC

متساوی‌الاضلاع است.



شکل ۵

اکنون مثلث ABC را با یک زاویهٔ منفرجه در نظر می‌گیریم (روی شکل ۵؛ $\widehat{ACB}>90^\circ$). بردارهای $\overrightarrow{AA_1}$، $\overrightarrow{BB_1}$ و $\overrightarrow{CC_1}$ را روی‌خط راست AB تصویر می‌کنیم و، با استدلالی شبیه قبل، ثابت می‌کنیم $ABC=BAC=\alpha$. اگر همین بردارها را روی (AC) تصویر کنیم، به‌دست می‌آید: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DC}$. به‌سادگی دیده می‌شود (شکل ۵):

$$|DC|=|AC|\sin^2\alpha,\ |AE|=|AC|=\sin^2 2\alpha$$

در بالا ثابت کردیم: $|AE|=|DC|$؛ از آن‌جا $\sin^2\alpha=\sin^2 2\alpha$، یعنی $\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$. زاویهٔ $\widehat{BAC}$ حاده است، بنابراین $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ و $\alpha=\frac{\pi}{3}$. ولی در این‌صورت زاویهٔ $\widehat{ACB}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ می‌شود که فرض منفرجه‌بودن این زاویه را نقض می‌کند.

به‌همین‌ترتیب، می‌توان ثابت کرد که زاویه $\widehat{ACB}$ نمی‌تواند قائمه باشد: مثلث ABC، زاویه‌هایی حاده دارد و، درضمن، متساوی‌الاضلاع است.

۹. روشن است که $x=0$، ریشهٔ این معادله است. ثابت می‌کنیم، معادله ریشهٔ دیگری ندارد. این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$$

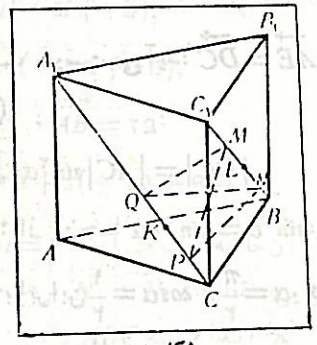
که مشتق‌های اول و دوم آن، چنین است:

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},\ f''(x)=-\sin x+x$$

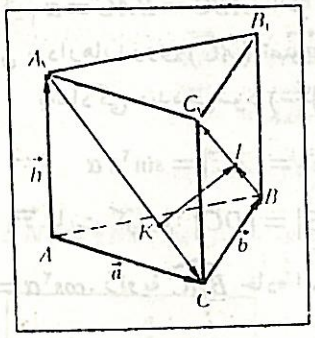
چون برای $x>0$ داریم $x>\sin x$، بنابراین $f''(x)$ به‌ازای $x>0$ مثبت

است، یعنی $f'(x)$ برای $x>0$ صعودی‌است. به‌همین‌ترتیب، چون به‌ازای $x<0$ داریم $x<\sin x$، بنابراین $f''(x)$ برای $x<0$ منفی و $f'(x)$ در این‌بازه نزولی است. ولی $f'(0)=0$، پس به‌ازای همهٔ مقدارهای $x\neq 0$ داریم: $f'(x)>0$. درضمن $f(0)=0$؛ بنابراین $f(x)$، به‌ازای $x\neq 0$، نمی‌تواند برابر صفر شوند.

۱۰. یال‌های غیر متقاطع چهاروجهی منتظم بر هم عمودند. بنابراین قطرهای BC_1 و A_1C از منشور هم بر هم عمودند (شکل ۶). بردارهای



شکل ۶



شکل ۷

$\mathbf{a}=\overrightarrow{AC}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ و $\mathbf{h}=\overrightarrow{AA_1}$ را درنظر می‌گیریم (شکل ۷). بنابر فرض، این برابری‌ها را داریم:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{h}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{h}=0$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=a^2 \qquad (*)$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-\frac{a^2}{2}$$

چون بردارهای $\overrightarrow{A_1C}=\mathbf{a}-\mathbf{h}$ و $BC_1=\mathbf{h}-\mathbf{b}$ برهم عمودند، بنابراین

$$(\mathbf{a}-\mathbf{h})(\mathbf{h}-\mathbf{b})=0$$

با استفاده از برابری‌های (*) به‌دست می‌آید:

$$-\mathbf{h}^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0,\ |\mathbf{h}|^2=\frac{a^2}{2}$$

بنابراین طول ارتفاع منشور برابر است با $|\mathbf{h}|=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

K را وسط یال PQ و L را وسط یال MN ازچهاروجهی می‌گیریم (شکل‌های ۶ و ۷ را ببینید). در چهاروجهی منتظم، پاره‌خط راستی که وسط دو یال غیرمتقاطع را به‌هم وصل می‌کند، براین یال‌ها عمود است. بنابراین

$$\overrightarrow{KL}\perp\overrightarrow{A_1C},\ \overrightarrow{KL}\perp\overrightarrow{BC_1}$$

چون بردارهای KC و BL، به‌ترتیب، با بردارهای $\overrightarrow{A_1C}$ و $\overrightarrow{BC_1}$ هم‌راستا هستند، بنابراین عددهای حقیقی x و y وجود دارند، به‌نحوی که

$$\overrightarrow{KC}=x\cdot\overrightarrow{A_1C}=x(\mathbf{a}-\mathbf{h});$$

و در نتیجه

$$\overrightarrow{BL}=y\overrightarrow{BC_1}=y(\mathbf{h}-\mathbf{b})$$

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BL}=x(\mathbf{a}-\mathbf{h})+\mathbf{b}+y(\mathbf{h}-\mathbf{b})=$$

$$=x\mathbf{a}+(1-y)\mathbf{b}+(y-x)\mathbf{h}$$

داریم: $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0$ و $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$. دراین برابری‌ها، عبارت‌های مربوط به‌بردارهای $\overrightarrow{KL}$، $\overrightarrow{A_1C}$ و $\overrightarrow{BC_1}$ را، برحسب بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{h}$ قرار می‌دهیم، به‌دستگاهی از معادله‌ها، برای تعیین x و y می‌رسیم. حل این دستگاه، به‌ما می‌دهد: $x=\frac{1}{3}$ و $y=\frac{2}{3}$. بنابراین

$$\overrightarrow{KL}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{h}}{3}$$

درنتیجه، فاصلهٔ مجهول برابر است با

$$|KL|=\frac{1}{3}|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{h}|=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

۱۱. معادله را، به‌ترتیب، به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$\cos x-m\sin x=n(m-1);$$

$$\sqrt{1+m^2}\cos(x+\varphi)=n(m-1);$$

$$\cos(x+\varphi)=\frac{n(m-1)}{\sqrt{1+m^2}}$$

که در آن، φ با این برابری‌ها معین می‌شود:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\ \sin\varphi=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض، تنها وقتی جواب دارد که داشته باشیم:

$$\frac{n(m-1)}{\sqrt{1+m^2}}<1 \qquad (*)$$

به‌ازای $m=1$، این نابرابری، برای هر مقدار حقیقی n برقرار است.
به‌ازای $m\geqslant 2$، نامعادلهٔ $(*)$، هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$n\leqslant\frac{\sqrt{1+m^2}}{m-1}\iff n^2\leqslant 1+\frac{2m}{(m-1)^2}$$

و از آن معلوم می‌شود که، به‌ازای هر $m\geqslant 2$، می‌توان $n=1$ گرفت. ثابت می‌کنیم، به ازای $m\geqslant 3$، نابرابری اخیر، تنها برای $n=1$ برقرار است. این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{2x}{(x-1)^2}$$

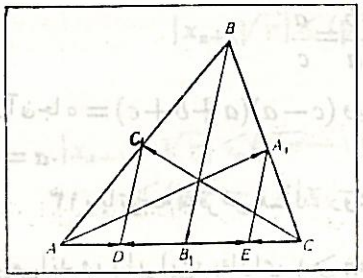
این تابع، به‌ازای $x>1$، قابل مشتق‌گیری است و، درضمن، داریم:

$$f'(x)=-\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}$$

که برای $x>1$، منفی است و، بنابراین، به‌ازای $m\geqslant 3$، سمت راست نابرابری موردنظر، از $1+f(3)$، یعنی $\frac{5}{2}$ تجاوز نمی‌کند؛ در حالی که مقدار سمت چپ نابرابری، به‌ازای $n\geqslant 2$، از ۴ کمتر نیست. به‌این‌ترتیب،

به‌ازای $m\geqslant 3$، تنها یك جواب برای n قابل قبول است: $n=1$.

۱۲. بردارهای $\overrightarrow{AA_1}$ و $\overrightarrow{CC_1}$ را، به‌موازات خط راست BB_1، برخط راست AC تصویر می‌کنیم. چون مجموع تصویرها، برابر است با تصویر مجموع، بنابراین (شکل ۸):



شکل ۸

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CD}=0\iff(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})+$$
$$+(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED})=0;$$

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=0;\ \overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CE}$$

$|BC|=a$، $|AC|=b$، $|AB|=c$ می‌گیریم. چون نیمساز، قاعده را به‌پاره‌خط‌های راستی تقسیم می‌کند، که نسبت طول‌های آن‌ها، برابر است با نسبت طول‌های دو ضلع دیگر مثلث، بنابراین

$$|BA_1|=kc,\ |A_1C|=kb,\ |BC_1|=na,\ |C_1A|=nb$$

که در آن‌ها، k و n، ضریب‌های نسبت‌اند. با توجه به‌قضیهٔ تالس، داریم:

$$\frac{|B_1E|}{|EC|}=\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\iff\frac{|B_1E|}{|EC|}=\frac{c}{b}$$

بنابراین: $|B_1E|=lc$، $|EC|=lb$. به‌همین‌ترتیب

$$\frac{|AD|}{|BB_1|}=\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{b}{a};\ |AD|=mb,\ |DB_1|=ma$$

در بالا ثابت کردیم: $|AD|=|EC|$، در این‌صورت $mb=lb$ و $m=l$، $|DB_1|=la$.

دوباره از ویژگی تقسیم ضلع‌ها، به‌وسیلهٔ نیمساز استفاده می‌کنیم:

$$\frac{|B_1C|}{|AB_1|}=\frac{|BC|}{|AB|};\ \frac{|B_1E|+|EC|}{|AD|+|DB_1|}=\frac{|BC|}{|AB|}$$

که اگر در برابری دوم، مقدارهای $|B_1E|$، $|EC|$، $|AD|$، $|DB|$ را قرار دهیم، به‌دست می‌آید.

$$\frac{c+b}{b+a}=\frac{a}{c}$$

از آن‌جا $(c-a)(a+b+c)=0$ و یا $a=c$. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود: $a=b$.

۱۳. با توجه به‌فرض مساله، روشن می‌شود که، همهٔ عددهای a_n و b_n، طبیعی‌اند و، بنابراین، به‌ازای $n\geqslant 1$، نسبت $x_n=\frac{a_n}{b_n}$ معین است و، درضمن، $x_1=1$. با توجه به‌رابطه‌های برگشتی فرض، داریم:

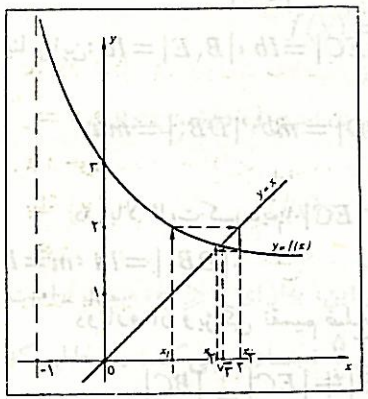
$$x_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{a_n+3b_n}{a_n+b_n}=\frac{x_n+3}{x_n+1},\ n\geqslant 1 \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ وجود داشته باشد: دراین‌صورت، روشن است که: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=x$ و درنتیجه، می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=x=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+3}{x_n+1}=\frac{x+3}{x+1}$$

از این‌جا به‌دست می‌آید: $x^2=3$ و $x=\pm\sqrt{3}$؛ ولی چون حد دنباله، عددی غیرمنفی است، بنابراین $x=\sqrt{3}$.

حد دنباله را با این شرط به‌دست آوردیم که چنین حدی وجود داشته باشد. اکنون ثابت می‌کنیم، دنبالهٔ x_n دارای حد است (برابر $\sqrt{3}$).



شکل ۹

از رابطهٔ (۱) استفاده می‌کنیم:

$$x_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{x_n+3}{x_n+1}-\sqrt{3}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{x_n+1}(\sqrt{3}-x_n),\ x\geqslant 1 \qquad (2)$$

چون برای $x\geqslant 1$، داریم: $\frac{1}{x_n+1}\leqslant 1$، پس از برابری (۲) نتیجه می‌شود:

$$|x_{n+1}\sqrt{3}|\leqslant(\sqrt{3}-1)|x_n-\sqrt{3}|$$

و بنابراین

$$|x_{n+1}-\sqrt{3}|\leqslant(\sqrt{3}-1)^2|x_{n-1}-\sqrt{3}|\leqslant\cdots\leqslant$$
$$\leqslant(\sqrt{3}-1)^n|x_1-\sqrt{3}|=(\sqrt{3}-1)^{n+1}$$

چون $0<\sqrt{3}-1<1$، بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3}-1)^{n+1}=0$$

و به‌این ترتیب

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-\sqrt{3})=0$$

که از این‌جا، درضمن، نتیجه می‌شود: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}$.

یادداشت. باروش هندسی، مطلب را روشن می‌کنیم. تابع $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع، یک هذلولی است (شکل ۹). رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت

$$x_{n+1}=f(x_n),\ n\geqslant 1$$

نوشت. در شکل ۹، روند محاسبهٔ x_n به‌کمک نمودارهای تابع‌های $y=f(x)$ و $y=x$، با خط‌چین نشان‌داده شده است معلوم است که چرا حد x_n وجود دارد: $x_{2k+1}<\sqrt{3}$، $x_{2k}>\sqrt{3}$. درستی این نابرابری‌ها، از رابطهٔ (۲) هم به‌دست می‌آید.

۱۴. x و y را طول ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث می‌گیریم؛ باید داشته باشیم:

$$xy=2(x+y+\sqrt{x^2+y^2});$$

و یا

$$-2\sqrt{x^2+y^2}=2(x+y)-xy$$

که از آن‌جا، بعد از مجذور کردن دوطرف، به‌این معادله می‌رسیم:

$$(x-4)y=4x-8=4(x-4)+8$$

و این، به‌معنای آن است که عدد ۸، باید بر $x-4$ بخش‌پذیر باشد، یعنی $x-4$ برابر یکی از عددهای زیر است:

$$(x-4)\in\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8\};$$

$$x\in\{5 \text{ و } 6 \text{ و } 8 \text{ و } 12 \text{ و } 3 \text{ و } 2\}$$

از این مقدارهای x، تنها ۴ عدد اول به‌درد می‌خورد؛ درضمن از بین چهار مثلثی هم که با چهار عدد اول مجموعه به‌دست می‌آید، دو مثلث، با دومثلث دیگر برابرند.

پاسخ: مثلث با ضلع‌های ۵، ۱۲، ۱۳ یا ۶، ۸، ۱۰.

۱۵. اگر دو معادله را با هم جمع کنیم، بعد از ساده‌کردن، به‌دست می‌آید:

$$x^2+9y^2+6xy=100$$

از آن‌جا، چون x و y عددهایی طبیعی‌اند:

$$x+3y=10$$

به‌همین‌ترتیب، اگر دو معادله را از هم کم کنیم، سرانجام به‌این‌معادله می‌رسیم:

$$2y+z=6$$

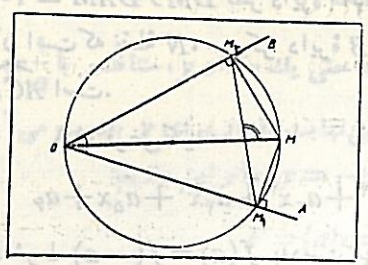
معادلهٔ اخیر، در مجموعهٔ عددهای طبیعی، جواب‌های (۴، ۱) و (۲، ۲) را برای (y, z) دارد و از آن‌جا، با توجه به‌معادلهٔ $x+3y=10$، مقدارهای x هم به‌دست می‌آید.

پاسخ: (۴، ۱، ۷) و (۲، ۲، ۴).

۱۶. این برابری، برای مساحت چهارضلعی، روشن است:

$$S_{OM_1MM_2}=\frac{1}{2}|OM|\times$$

$$\times|M_1M_2|\sin(\widehat{OM, M_1M_2})$$



شکل ۱۰

برچهارضلعی OM_1MM_2 می‌توان دایره‌ای به‌قطر OM محیط کرد، پس

$$|M_1M_2|=|OM|\sin\widehat{AOB};$$

$$S_{OM_1MM_2}=$$

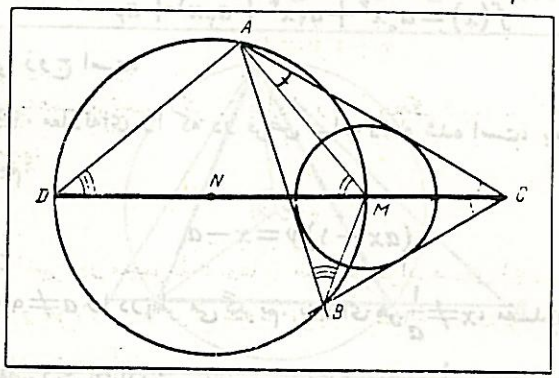
$$=\frac{1}{2}|OM|^2\sin\widehat{AOB}\times$$

$$\times\sin(\widehat{OM, M_1M_2})\leqslant\frac{1}{2}|OM|^2\cdot\sin\widehat{AOB}$$

علامت برابری، وقتی درست است که پاره خط‌های راست OM و M_1M_2 برهم عمود باشند.

۱۷. مثلث AMD را در نظر می‌گیریم که، در آن، D نقطهٔ برخورد دوم نیمساز زاویهٔ ACB بامحیط دایرهٔ محیطی مثلث AMB است (شکل ۱۱). توجه می‌کنیم که

$$\widehat{AMD}=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{C}),\ \widehat{ADM}=\widehat{ABM}=\frac{1}{2}\hat{B}$$



شکل ۱۱

از آن‌جا: $\widehat{AMD}+ADM=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})=90^\circ$. بنابراین، $\widehat{DAM}=90^\circ$ و DM قطر دایرهٔ محیطی‌مثلث AMB است؛ و این، به‌معنای آن است که نقطهٔ N، مرکز دایرهٔ AMB، متعلق به نیمساز CD از زاویهٔ $\widehat{ACB}$ است.

۱۸. فرض کنید:

$$f(x)=a_0x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6$$

از شرط $f(a)=f(-a)$ به‌دست می‌آید:

$$a_1a^5+a_3a^3+a_5a=0 \iff a_1a^4+a_3a^2+a_5=0$$

(زیرا $a\neq 0$). به‌همین‌ترتیب، داریم:

$$a_1b^4+a_3b^2+a_5=0,\ a_1c^4+a_3c^2+a_5=0$$

اگر برابری دوم را از برابری اول و برابری سوم‌را از برابری‌دوم کم کنیم، با توجه به‌این‌که، عددهای a^2، b^2 و c^2 با هم فرق دارند، به‌دست می‌آید:

$$a_1(a^2+b^2)+a_3=0,\ a_1(b^2+c^2)+a_3=0$$

که با کم‌کردن این دو برابری از یکدیگر، به‌دست می‌آید: $a_1=0$ و از آن‌جا $a_3=0$ و $a_5=0$. درنتیجه

$$f(x)=a_0x^6+a_2x^4+a_4x^2+a_6$$

که تابعی زوج است.

۱۹. معادله‌ای را که در فرض مساله داده شده است، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(ax-1)y=x-a$$

و حالت $a\neq 0$ را درنظر می‌گیریم. به‌ازای هر $x\neq\frac{1}{a}$، مقدار y از این معادله، به‌صورت یک‌ارزشی به‌دست می‌آید؛ به‌ازای $x=\frac{1}{a}$، معادله به‌صورت

$y=\frac{1}{a}-a$. 0 در می‌آید. بنابراین، به‌ازای مقدارهایی از a که برای آن‌ها $\frac{1}{a}-a\neq 0$، یعنی $a\neq\pm 1$، حتی یک مقدار y، متناظر با $x=\frac{1}{a}$، وجود ندارد و، به‌ازای $a=\pm 1$، بی‌نهایت مقدار برای y به‌دست می‌آید.

چون به‌ازای $a=0$ داریم $y=-x$، بنابراین داریم:

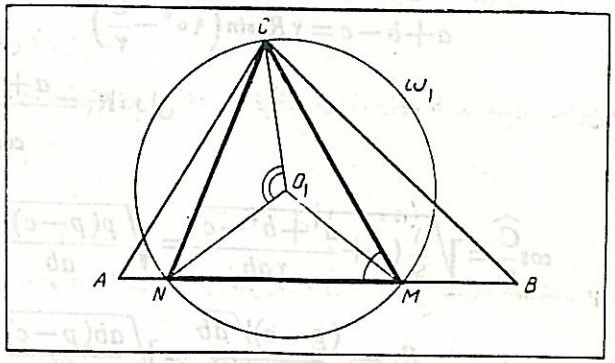
$$F=\{a|a\neq\pm 1\}$$

برای پیدا کردن مجموعهٔ G، توجه می‌کنیم که، در هر نقطهٔ $x_0\notin\{0, 1, -1\}$، تعریف نشده است و، بنابراین، تابع

$$y=\frac{x-\frac{1}{x_0}}{\frac{x}{x_0}-1}$$

پیوسته نیست، به‌نحوی که $x_0\notin G$. بنابراین، نقطهٔ مشترک پیوستگی همهٔ تابع‌هایی که با معادلهٔ مفروض اصلی داده شده‌اند، تنها می‌تواند نقطهٔ $x_0\in\{0, 1, -1\}$ باشد. در نتیجه $G=\{0, 1, -1\}$ و $F\cap G=\{0\}$.

۲۰. راه‌حل اول. فرض‌می‌کنیم: $|BC|=a$، $|AC|=b$، $|AB|=c$ (شکل ۱۲) و R را شعاع دایرهٔ محیطی‌مثلث ABC می‌گیریم. دراین‌صورت



شکل ۱۲

Reconciliation With Mathematics
Editor: Parviz Shahryari
Address: Tehran, Firdaus
Vol XV, No. 2, *Serial No. 68, 1992*

*

All correspondence to the editor
from outside Iran can be
addressed to:

Shahriar Shahriari,
Department of Mathematics,
Pomona College,
Claremont, CA 91711,
USA

$$S_{CMN}=S_{ACM}+S_{BCN}-S_{ABC}=\frac{1}{2}b^2\sin\widehat{A}+\frac{1}{2}a^2\sin\widehat{B}-\frac{abc}{4R}$$

چون $a=2R\sin\widehat{A}$ و $b=2R\sin\widehat{B}$، پس

$$S_{CMN}=\frac{1}{4R}ab(a+b-c)$$

$\omega_1(O_1, R_1)$ را دایرهٔ محیطی مثلث MCN می گیریم و توجه می کنیم که

$$\widehat{CMN}=90^\circ-\frac{\widehat{A}}{2},\ \widehat{CNM}=90^\circ-\frac{\widehat{B}}{2},\ \widehat{MCN}=90^\circ-\frac{\widehat{C}}{2}$$

دراین‌صورت

$$S_{CMN}=\frac{R_1^2}{2}[\sin(180^\circ-\widehat{A})+\sin(180^\circ-\widehat{B})+\sin(180^\circ-\widehat{C})]=$$

$$=\frac{R_1^2}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2R}$$

درنتیجه

$$ab(a+b-c)=R_1^2(a+b+c)\Longleftrightarrow R_1=\sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}$$

راه‌حل دوم. با توجه به $|MN|=a+b-c$ و $\widehat{MCN}=90^\circ-\frac{\widehat{C}}{2}$، به‌دست می آید:

$$a+b-c=2R_1\sin\left(90^\circ-\frac{\widehat{C}}{2}\right)$$

یا $R_1=\dfrac{a+b-c}{\cos\frac{\widehat{C}}{2}}$، ولی

$$\cos\frac{\widehat{C}}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

بنابراین

$$R_1=\frac{(p-c)\sqrt{ab}}{\sqrt{p(p-c)}}=\sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}$$