

آشنایی با ریاضیات (جلد سی ام)

ویراستار: هرویز شهریاری

امورفی: حسن نیک بخت

ناشر: نشر بردار

تیرماه ۲۰۰۰ نسخه

چاپ اول: زمستان ۱۳۶۹

حروفچینی: مهدی

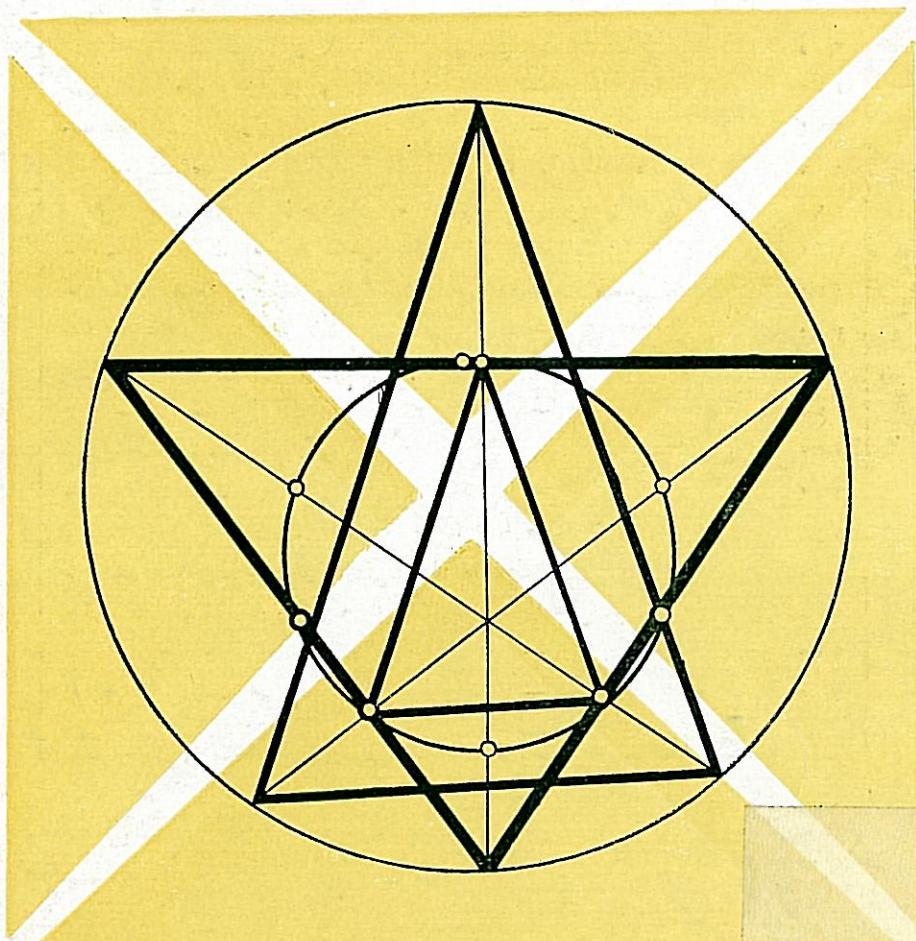
چاپ و صحافی: رامین

فهرست جلد سی ام

۴۸۵	پرویز شهریاری	دریافتیات جدیده در برتراندهای
۴۹۲	—	دبیرستانی
۴۱۱	—	حوزه مقدارهای قابل قبول و ...
۴۱۷	ترجمه ابراهیم عادل	مسائلهای مسابقه‌ای
۴۲۱	ترجمه ژوف فوریه پرویز شهریاری	مسایله یک حد
۴۳۱	—	ریاضی دانان بزرگ - ژوف فوریه
۴۳۲	سید محمد رضا هاشمی موسوی	خاصیتی از مثلث، طول فصلن سوم مثلث
۴۴۰	—	حل معادله درجه ۱۱ام ...
۴۴۵	—	موقعیت هندسی یک شکل و ...
۴۴۶	—	راهی برای حل معادله درجه چهارم،
۴۵۲	—	جدائل مقدار
۴۵۳	ترجمه هرمز شهریاری	نایابی فینسلر و هادویگر
۴۷۴	جاپر عناصری	یک ویژگی مثلث
۴۷۸	ترجمه مصطفی عزیزی	تقسیم مربع به سه برابر های کوچکتر
۴۸۰	—	طرحهای هندسی در طاقیهای ایرانی
۴۹۰	—	برندگان جایزه فیلدس ۱۹۹۰
۴۹۰	—	حل مسائلهای
۴۹۰	—	فهرست سال سیزدهم

آشنایی با ریاضیات

جلد سی ام



ویراستار: پرویز شهریاری

امورفنی: حسن نیک بخت

ناشر: نشر بردار

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

چاپ اول: زمستان ۱۳۶۹

حروفچینی: مهدی

چاپ و صحافی: رامین

«ریاضیات جدید» در برنامه‌های دبیرستانی نظریه مجموعه‌ها و منطق ریاضی

ظاهرآ کتاب‌های درسی دبیرستانی، بازسازی و احتمالاً با برنامه تسازه‌ای، دوباره تنظیم می‌شوند. این، از نظر اصولی، کاری درست است و همیشه و هر چند سال یکبار، باید براساس شرایط علمی روز و نیازهای جامعه، در برنامه‌ها تجدیدنظر شود، با بررسی دقیقی که از طرف افراد صاحب صلاحیت و آشنا به دانش و نیازهای روز به عمل می‌آید، برنامه‌ای کارآمدتر و زنده‌تر تنظیم کرد.

قبل از این که به اصل مطلب پردازیم، باید به این نکته اشاره کنیم که، در جهان امروز، دیگر نمی‌توان کسی را که خواندن و نوشتن می‌داند، «با سواد» به حساب آورد. کسی را که در زمان ما، تنها دوره دبستان و یا کلاس‌های سوادآموزی را تمام کرده است، نمی‌توان جزو باسوادان دانست. تمدن امروزی بشر، حداقل فرهنگ و آموزش را برای افراد جامعه طلب می‌کند و، این حداقل، خیلی بالاتر از آموزش دوره دبستان است. به نظر من، تقسیم دوره‌های دبیرستانی، بدرشته‌های مختلف، بانیازهای امروزی سازگار نیست. انسانی که می‌خواهد در جهان امروز زندگی کند، به فرهنگی عمومی نیاز دارد که نمی‌تواند کمتر از آموزش دوره دبیرستانی پاشد.

شاید بتوان طرحی و برنامه‌ای را پیاده کرد که، همه افراد، ضمن گذراندن دوره عمومی دبیرستان، خود را برای تحصیل و یا حرفة آینده خود آماده کنند. مثلاً، می‌توان دوره عمومی دبیرستانی را برای ساعت‌های قبل از نیمروز در نظر گرفت و، در آن، همه آنچه را که «فرهنگ عمومی» می‌نامیم در اختیار دانش‌آموزان گذاشت؛ در این صورت کلاس‌های بعداز نیمروز

فهرست جلد سی ام

۳۸۵	پرویز شهریاری	«ریاضیات جدید» در برنامه‌های دبیرستانی
۳۹۴	—	حوزه مقدارهای قابل قبول و ...
۴۱۱	—	مسئله‌های مسابقه‌ای
۴۱۷	ترجمه ابراهیم مادر	محاسبه یک حد
۴۲۱	ترجمه پرویز شهریاری	ریاضی دانان بزرگ - ژوزف فوریه
۴۲۱	—	خاصیتی از مثلث، طول ضلع سوم مثلث
۴۲۲	سید محمد رضا هاشمی موضوعی	حل معادله درجه ۱۱...
۴۴۰	—	موقعیت هندسی یک شکل و ...
۴۴۵	—	راهی برای حل معادله درجه چهارم، حداقل مقدار
۴۴۶	—	نایابی ابری فینسلر و هادویگر
۴۵۲	—	یک ویژگی مثلث
۴۵۳	ترجمه هرمز شهریاری	تقسیم مربع به مربع‌های کوچکتر
۴۷۴	جابر عناسی	طرح‌های هندسی در طاقهای ایرانی
۴۷۸	ترجمه مصطفی عزیزی	برندگان جایزه فیلدس ۱۹۹۰
۴۸۰	—	حل مسئله‌ها
۵۱۰	—	فهرست سال سیزدهم

«ریاضیات سنتی»—آن طور که در کتاب‌های درسی دوره دبیرستان‌های ایران معمول است—کاری نادرست است و دانش آموز را دچار ابهام و سرگردانی می‌کند. او نمی‌تواند به دلیل ومنطق این موضوع پی ببرد که چرا باید در جای به گونه‌ای و درجای دیگر، به گونه‌ای دیگر کار کند و، در واقع، چنین دلیل و منطقی، اصلاً وجود ندارد. ریاضیات باید به صورتی یگانه و یک پارچه مطرح شود تا، برای استفاده از شیوه‌ها و روش‌های مختلف، ابهام و سرگردانی به وجود نیاورد.

هنوز هم در محافل بین‌المللی، این بحث به پایان نرسیده است که، نظریه مجموعه‌ها و منطق ریاضی، چه مقامی را باید در «ریاضیات همگانی دبیرستانی» داشته باشند نظر ریاضی دانان و مریبان صاحب صلاحیت در این مورد، بسیار مختلف و دوراز یکدیگر است. بعضی معتقدند که باید، به این شاخه‌های ریاضیات، جای نمایانی در ریاضیات دبیرستانی داد، در حالی که گروهی دیگر، وارد کردن این مفهوم‌ها را در ریاضیات دبیرستانی، اضافی و حتی زیان‌مند می‌دانند. بین این دو دیدگاه افراطی، نظرهای بین‌ینی دیگری هم وجود دارد. تعداد مخالفان بسیار زیادند و، درین آن‌ها، دانشمندانی بزرگ وجود دارند. اغلب این‌ها، با بازسازی برنامه‌های ریاضی دبیرستانی مخالف نیستند، ولی استفاده از نظریه مجموعه‌ها و نمادهای منطق ریاضی را بی فایده می‌دانند. نویسنده این مقاله، به روشنی معتقد دارد و، با اعتراف به این که نمی‌توان موضوعی با این درجه از اهمیت را در یک مقاله مورد تجزیه و تحلیل کامل قرارداد و با تأکید بر این مطلب که باید بررسی دقیق‌تر و جامع‌تری، آن‌هم نه تنها از طرف یک نفر، انجام شود، کوتاه‌شده‌ای از استدلال‌های خود را ارائه می‌دهد، به‌امید این‌که راه را برای بحث و بررسی برنامه‌ریزان بگشاید.

اعتراض‌های کسانی را که مخالف با وارد کردن مفهوم‌ها و روش‌های منطق ریاضی و نظریه مجموعه‌ها، در برنامه دبیرستانی هستند، می‌توان به‌این صورت جمع‌بندی کرد.

می‌توانند بسته به ذوق و استعداد دانش آموزان، به شاخه‌های تخصصی تقسیم شوند. در کلاس‌های بعداز نیمروزی توan برنامه‌های نظری (مثل ریاضیات، فیزیک، زیست‌شناسی، ...) و برنامه‌های عملی (آشنائی با کارهای فنی، کشاورزی، آزمایشگاهی، ...) و یا برنامه‌های هنری (موسیقی، تئاتر، نقاشی، مجسمه‌سازی، ...) را پیاده کرد و دانش آموز را، با درنظر گرفتن استعدادهای او، آزاد گذاشت تا در هر یک از این کلاس‌ها کدماً بایل باشد، شرکت کند. می‌توان شرط ادامه تحصیل را در گذراندن «کلاس‌های عمومی» و «گذراندن یکی از کلاس‌های بعداز نیمروز» در جریان دوره دبیرستان قرارداد که، در این صورت، هر دانش آموزی از همان سال‌های اول دبیرستان، به تقریب، رشته دانشگاهی خود را هم انتخاب کرده است.

آن‌چه در اینجا مورد بحث ماست، مربوط به «دوره عمومی دبیرستان» می‌شود، یعنی آن‌چه که به اعتقادمن، باید در «فرهنگ عمومی» هر انسان امروزی وجود داشته باشد. بحث من، تنها بر سر رشته ریاضی یا رشته‌های نظری نیست؛ در جامعه پیشرفتی پایان سده بیستم، نمی‌توان بدون این «فرهنگ عمومی»، خود را شایسته نام «عضو جامعه انسانی» دانست.

این «فرهنگ عمومی» بحث و بررسی گسترده‌ای را می‌طلبد که در این مقاله به آن نمی‌پردازیم. در واقع، چنین بحثی خارج از قدرت یک فرد است؛ با بد خبر گان دانش جمع شوند و، با درنظر گرفتن نیازهای روز چه در رابطه با جهان امروز و چه در رابطه با کشور ما، جنبه‌های مختلف موضوع را بشکافند و برنامه‌ای آزمایشی را تدارک بینند. در این مقاله، به امکان‌های موجود آموزشی هم نمی‌پردازیم، چرا که، حل این موضوع، به عهده مسئولان و دست‌اندرکاران است. در این مقاله، حتی به برنامه ریاضی لازم برای این «فرهنگ عمومی»^{۵۴} نمی‌پردازیم و تنها جنبه خاصی از آن، یعنی، «جای نظریه مجموعه‌ها و منطق ریاضی» را در این «فرهنگ عمومی» نشان می‌دهیم و می‌بینید که، این بحث، حتی تمامی جنبه‌های «ریاضیات جدید» را هم در بر نمی‌گیرد.

به نکته دیگری هم اشاره کنیم. جدا کردن «ریاضیات جدید» از

گد. گذ. ذی قن، مورخ ریاضیات، به مناسبت پیدایش جبر حرفی و هندسه تحلیلی در کارهای ویت، فرما و دکارت در سده هفدهم، زمانی نوشت: «با پیدایش روش‌های کلی، که به کمک آن‌ها می‌توان همه کارهای ریاضی، ویا دست کم بخش عمده‌ای از آن را، به طور مکانیکی انجام داد، قبل از همه، فرهنگ عمومی ریاضیات رشد کرده است. از این به بعد، ریاضیات می‌تواند در دسترس همه کسانی قرار گیرد که بهیاری آن نیاز دارد، اگرچه استعداد و قابلیت درخشنایی در ریاضیات نداشته باشدن.»

به احتمال زیاد، داوری‌های مشابهی درباره محاسبه دیفرانسیلی و انتگرالی هم (که به وسیله نیوتون و لایپنیتس کشف شد) شده باشد. وارد کردن نمادها در ریاضیات، امری بیرونی و تصادفی نیست، بلکه اگر درست انتخاب شده باشد، خود جزئی از ریاضیات اند. روش‌های کلی و توأم‌ساختن آن‌ها با نمادهای ریاضی، حل بسیاری از مسئله‌های ریاضی را، که تنها از عهده ریاضی دانان نابغه بر می‌آمد، در دسترس همه کسانی گذاشت که استعدادی عادی دارند. البته، ما می‌توانیم و باید، در برابر کسانی همچون ارشمیدس، که مساحت دایره و مساحت شکل محدود به سه‌می‌رایپیدا کرد، سرتعظیم فرود آوریم. ولی امروز این مسئله‌ها (وهم مسئله‌های بسیار دشوارتر) را، صدها هزار دانشجوی سال‌های اول دانشکده و حتی میلیون‌ها دانش‌آموختگان آخر دبیرستان، در سراسر جهان، بدون هیچ زحمتی حل می‌کنند. و این، به معنای دموکراتیزه شدن دانش ریاضی است، چراکه دیگر در ک آن، نه تنها مخصوص متخصصان و نابغه‌ها، بلکه به همه مردم تعلق دارد. روش‌های کلی را که در سده‌های اخیر در ریاضیات پیدا شده است. باید هدیه‌ای از جانب دانشمندان دانست که دانش ریاضی را در خدمت همه انسان‌ها قرارداده است. نظریه مجموعه‌ها و منطق ریاضی هم، با وارد کردن نمادها و اصطلاح‌های تازه، به همین هدف خدمت می‌کند و، به همین مناسبت، باید امکان آشنازی دانش‌آموختگان را، با این اندیشه‌ها، در برنامه عمومی دبیرستانی فراهم آورد. اگر برنامه به صورتی پخته و سنجیده تنظیم شود، طرح مقدمات این شاخه‌های ریاضی، نه تنها باری اضافی بر دوش دانش‌آموختگان نیست، بلکه موجب

آنچه در این شاخه‌های ریاضی، برای دانش‌آموختگان قابل فهم است، منجر به گزاره‌ها و حقیقت‌هایی می‌شود که، به خاطر بدینهای بودن و روشنی آن‌ها، کم و بیش «مبتدل» به نظر می‌رسند، مثل گزاره‌های «کارون به خلیج فارس می‌ریزد» یا «چوب را که برداری، گر به دزده حساب کار خود را می‌کند». بسیاری از دانشمندان (ریاضی دانان، فیزیکدانان، زیست‌شناسان، پزشکان، ...) به خوبی از عهده کار خود برمی‌آیند، بدون این‌که اصطلاح‌هایی همچون «ترکیب فصلی»، «ترکیب عطفی»، «استلزم»، «سور عمومی»، «سور وجودی»، ... به گوششان خورده باشد و از این بی‌اطلاعی خود، هیچ زیانی در فعالیت‌ها و کارهای علمی خود نمی‌برند. چرا باید بار درسی جوانان را - که بدون این‌هم به اندازه کافی سنگین است - زیادتر کنیم و مشتی اصطلاح را، که در کار برداشته واقعی آن‌ها تردید داریم، به خورد آن‌ها بدھیم؟ اگر فرستی در سال‌های دبیرستانی وجود دارد، آیا بهتر نیست، به وسیله دانش‌های زنده، فعال و جالب امروزی استفاده شود؟ و مگر از این گونه موضوع‌های جالب، در خود ریاضیات کم است؟ اگر هم هوای خواهان و متخصصان نظریه مجموعه‌ها و منطق ریاضی، می‌خواهند جوانان دانش‌آموختگ را به این شاخه‌های ریاضی جلب کنند، کسی مانع تبلیغ آن‌ها نمی‌شود و می‌توانند با انتشار کتاب‌های جنب درسی جالب و تبلیغ نظر خود در نشریه‌ها و مجله‌های علمی، جوانان را با دیدگاه‌های خود آشنا کنند. البته ممکن است، برخی از عناصر این نظریه‌ها، برای بعضی از متخصصان (و مثلاً برنامه‌ریزان کامپیوتر) لازم باشد، در این صورت، می‌توان این عناصر را در برنامه دوره‌های تخصصی وارد کرد. ولی آنچه به عام دانش‌آموختگان مربوط می‌شود، به هیچ وجه لازم نیست ذهن آن‌ها را با این‌بوهی از اصطلاح‌های کاملاً انتزاعی پر کنیم. از این گذشته، هنوز برنامه‌های دبیرستانی، از نظر مواد لازم و عملی، که برای کار و فعالیت آینده دانش‌آموختگ اهمیت جدی دارد، دچار کمبودهای فراوان است. این استدلال‌ها، در نظر اول، منطقی و قانع کننده‌اند و به نظر می‌رسد، وجود موضوع‌هایی از نوع مفهوم‌های اصلی منطق ریاضی و نظریه مجموعه‌ها در برنامه‌های دبیرستانی، هدف اصلی آموزش عمومی را نقض می‌کند.

کرد که ضمن تجزیه و تحلیل مساله‌های مشخص به دست می‌آیند، به استگی بین شاخه‌های مختلف ریاضیات توجه داشت و در باره نزدیکی و خویشاوندی مساله‌هایی اندیشید که به ظاهر نسبت بهم بیگانه‌اند، ولی با این تعمیم در یک گروه جامی گیرند؛ و بالاخره (واحتمالاً مهم تراز همه)، تکیه را بر استدلال‌های منطقی و نتیجه‌گیری یک گزاره از گزاره‌های دیگر گذاشت. همه این‌ها باید ضمن حل مساله‌ها روشن شوند و در ضمن، برای همه دانش‌آموzan قابل فهم باشند. البته، در این‌جا، نمی‌توان به طور مکانیکی از دستورها و قاعده‌ها استفاده کرد و، برای رسیدن به مقصد، باید از تفکر واستدلال استفاده کرد. و باید گفت که، برای ایجاد فرهنگ عمومی، تنها همین راه دوم درست است. بسیاری از دستورها، قضیه‌ها و قانون‌های مشخص ریاضی، که در برنامه‌های دیبرستانی و کتاب‌های درسی وجود دارند، هر گز در زندگی و عمل، به درد دانش‌آموز نمی‌خورد و طبیعی است، آن‌چه در عمل به کار نمی‌آید، خیلی زود فراموش می‌شود، چه‌چیزی باقی می‌ماند؟ اگر از راه اول برویم، تقریباً هیچ، و اگر راه دوم را انتخاب کنیم، خیلی چیز‌ها. درک تکامل تفکر انسانی، و به خصوص در ریاضیات (که روشی بیشتری دارد)، تجربه داوری‌های منطقی، تجربه تجزیه و تحلیل موقعیت‌های دشوار و راه بروز رفت از آن‌ها و، بالاخره، تجربه مربوط به تعمیم دادن موضوع‌ها؛ این‌ها، چیز‌هایی است که در ذهن همه باقی می‌ماند. و همه این‌ها، بدون ارتباط با حرفه‌ای که شخص در آینده انتخاب می‌کند، هم از نظر آموزشی و هم از نظر کاربردی، اهمیت و ارزش بی‌اندازه دارند. البته بین اندیشه‌های مشخص ریاضی و روش‌ها و اقلاب‌های آن‌ها هم، نمونه‌های ذیادی وجود دارد که، اگر به موقع خود رضایت دانش‌آموز را جلب کرده باشند، می‌توانند نقش خود را در ذهن او برای همیشه باقی بگذارند، به خصوص که ریاضیات در زمان ما، چنان در همه شئون زندگی رخنه کرده است و چنان نقش تعیین کننده‌ای دارد که، به دلیل کاربردهای فراوان خود، نمی‌تواند به فراموشی سپرده شود.

و طبیعی است که اگر راه دوم را، برای آموزش ریاضیات بر گزیده باشیم، چاره‌ای جز استفاده سنجیده و منظم از نظریه مجموعه‌ها و منطق

سبک‌تر شدن بار ریاضیات دیبرستانی هم می‌شود و، مهم تراز آن، به درک بهتر بسیاری از درس‌های سنتی ریاضیات (مثل «تابع‌ها و نمودارها»، «حل دستگاه معادله‌ها و نامعادله‌ها»، «هندسه تحلیلی» و «آنالیز ترکیبی»)، کمک می‌کند. در ریاضیات مقدماتی، مفهوم‌هایی مثل «تعريف»، «اصل موضوع» و «قضیه» وجود دارد که درک درست آن‌ها، برای مجموعه «فرهنگ ریاضی» دانش‌آموز اهمیت جدی دارد. و باید گفت که، ریاضیات سنتی، ساختمان قیاسی نظریه‌های ریاضی را، تنها روی هندسه اقلیدسی می‌آموزد و در شاخه‌های دیگر ریاضی، خبری از این ساختمان نیست. از طرف دیگر، در هندسه اقلیدسی هم، اغلب به صورتی سطحی و گذرا از آن یاد می‌شود و ممولاً، ضمن درس‌های بعدی هندسه، مورد استناد قرار نمی‌گیرد. استادان سال‌های اول دانشکده، و حتی دیبران سال‌های آخر دیبرستان، به خوبی می‌دانند که، دانشجویان و دانش‌آموزان، در درک مفهوم «استدلال» و «اثبات»، تا چه حد ضعیف‌اند و حتی، در برخی مرحله‌ها، درباره لزوم آن، تردید می‌کنند. و این، مربوط به جوانانی است که گمان می‌کنند، بر ریاضیات دیبرستانی تسلط دارند. برای بسیاری از کسانی که دیبرستان را، حتی در رشته ریاضی-فیزیک تمام کرده‌اند، هنوز خصلت قیاسی ریاضیات، نامفهوم مانده است.

تاکید می‌کنم که، به هیچ وجه معتقد نیستم که، نظریه مجموعه‌ها و منطق ریاضی، به عنوان بخش مستقلی، در برنامه ریاضی دیبرستانی جاده‌شود. به اعتقاد من، عناصر اصلی این شاخه‌ها در تمامی زمینه‌های ریاضی نفوذ کرده است و نمی‌توان از آن صرف نظر کرد، ولی باید در جای خود و همانجا که مورد تیاز است، مورد استفاده قرار گیرد، نه به صورت جداگانه و به عنوان درسی انتزاعی، جدا از مجموعه ریاضیات.

ریاضیات را به دو طریقی می‌توان یاد گرفت. می‌توان به ماهیت اندیشه‌ای مفهوم‌ها، کمتر تکیه کرد و تکیه کار را بر تسلط در عمل‌های محاسبه‌ای گذاشت و کوشش کرد تا دانش‌آموز هرچه بیشتر با آگاهی‌ها آشنا شود و راه کاربرد آن‌هارا، بدون اینکه به مضمون و ماهیت آن‌ها کار داشته باشد، یاد بگیرد. می‌توان، بر عکس، تمامی دقت دانش‌آموزان را روی اندیشه‌های کلی متمرکز

می‌کند، قدرت استدلال و نیروی اثبات منطقی است. واین، چیزی است که، قبل از هرچیز، باید به آن توجه شود. اگر دانش‌آموزی روی چند مساله کار کند و، ضمن استدلال‌های منطقی خود، نتواند راهی برای حل آن‌ها پیدا کند، برای او بسیار مفیدتر از آن است که صدها مساله را با استفاده از دستورها و قاعده‌های حاضر و آماده حل کند ویا، بدتر از آن، برای اثبات‌های منطقی سرگردان باشد و به بی‌راهه برود. دانش‌آموزی که راه استدلال منطقی را نشناخته باشد و از تجزیه و تحلیل منطقی موقعیتی که برایش پیش‌آمده عاجز باشد، ولو این‌که چندین راهنمای و معلم خصوصی داشته باشد، نمی‌تواند بهماهیت اثبات‌ها بی‌بیرد و به‌خصوص، ضمن کار مستقل خود، درمیان انبوهی از راه حل‌ها واستدلال‌های گوناگون (که برای موردهای مختلف پیش‌می‌آید)، گیج و سرگردان می‌شود. در این‌مورد است که معلم می‌تواند به او کمک کند و، تجربه نشان داده است که برای این منظور، می‌توان از نامادهای منطق ریاضی و جدول‌هایی که گزاره‌های درست را از گزاره‌های نادرست جدا می‌کنند، پاری گرفت. تجربه نشان داده است که، نوجوانان ۱۴-۱۵ ساله خیلی زود می‌توانند با اصطلاح‌ها و نامادهای منطق ریاضی خوب‌گیرند. وقتی استدلالی را به کمک نامادهای منطقی دنبال کنیم و، سپس، نتیجه را مورد تجزیه و تحلیل منطقی قرار دهیم، به‌خودی خود دانش‌آموز به طرف آن جلب می‌شود و، از این راه، به استدلال‌های منطقی هم علاقه پیدا می‌کند.

اگر فرصتی پیش‌آید، بازهم در این باره صحبت می‌کنیم.



همه براین امر آگاهند که، دانش‌آموزان، به سختی می‌توانند برمفهوم‌های مهم منطقی، از نوع «شرط لازم»، «شرط کافی»، «نتیجه گیری»، «هم ارزی» وغیر آن مسلط شوند. در ذهن و عمل آن‌ها، اغلب مفهوم «قضیه عکس» با «گزاره نقيض» درهم می‌آمیزد. درین‌کسانی که دیبرستان را تمام کرده‌اند، به‌ندرت می‌توان به‌کسانی برخورده که بتوانند منطق «برهان خلف» را توضیح دهند. واین، به معنای آن است که وقتی معلم استدلال‌های خود را دنبال می‌کرده است، در بسیاری موردها، یا دانش‌آموز آن‌هارا نفهمیده و یا زیادی و بی‌معنی دانسته است و، بنا بر این، یا بی‌تفاوت از کنار آن‌ها گذشته است و یا، در بهترین صورت و تنها برای بدست آوردن نمره، بدون درک مفهوم واقعی آن‌ها، تنها از حافظه خود یاری طلبیده و «جمله‌هایی قالبی» را حفظ کرده است. به همین‌جهت است که، بسیاری از دانش‌آموزان، درس ریاضیات را دشوار و کسل کننده می‌دانند.

کسان زیادی پیدا می‌شوند که دوست دارند، برای دانش‌آموزان، مرتب‌آ تکرار کنند که «برای یاد گرفتن باشد زحمت کشید و دودچرا غ خورد»، و چقدر این جمله آزاردهنده و تاحدز یادی بی‌معنی، در باره درس‌های ریاضی به کار می‌رود؟ ولی «زحمت آن باشد که جنس نافهی حاصل کنند». چگونه باشد زحمت کشید. از کجا باید شروع کرد و به چه ترتیب باید ادامه داد؟ در این باره، کسی چیزی نمی‌گوید. همه نصیحت می‌کنند که «باید کار کنید و تریبی بدھید که مطالب را بفهمید. ولی این که چگونه باید کار کرد، چه تریبی مناسب‌تر است و، به‌خصوص، برنامه و کتاب و معلم، در این زمینه چه نقشی دارند، کسی آدم را راهنمائی نمی‌کند.

برای این‌که «زحمت» ثمر بخش باشد، باید «محصولی مفید» داشته باشد و باید رضایت کسی را که زحمت می‌کشد، فراهم کند. ریاضیات را نمی‌توان، به صورتی پراکنده و با دست اندازی به مساله‌های مختلف (و به ظاهر دورازهم) دنبال کرد، چراکه در این‌صورت، هر مساله‌ای یک معماست و برای حل هر مساله باید در جست و جوی راهی مخصوص آن بود. آن‌چه راه را هموار

حوزه مقدارهای قابل قبول

و رفع برخی اشتباهها

بحث مر بوط به حوزه تعریف تابع یا تعیین دامنه یک تابع، یکی از مفهوم‌های اصلی در ریاضیات است؛ ولی ما در این مقاله نمی‌خواهیم به بررسی این مفهوم، بدطور همه جانبه پردازیم. در این مقاله، تنها به موضوع کاربرد این مفهوم در حل معادله‌ها (و به خصوص معادله‌های گنگ) می‌پردازیم و روی برخی اشتباه‌ها و گمراهی‌هایی که در اصطلاح «حوزه مقدارهای قابل قبول معادله» وجود دارد، تکیه می‌کنیم. این بررسی اهمیت جدی دارد، چرا که بسیار دیده شده است که با به کار بردن مفهوم «حوزه مقدارهای قابل قبول» به صورتی نادرست یا مقداری که جواب معادله نیست، به عنوان جواب به حساب آمده و یا، حل معادله، به بن‌بست رسیده است.^۱

گمراهی اول. گاهی تصویری شودکه، تعیین حوزه مقدارهای قابل قبول، شرط لازم برای حل یک معادله گنگ، یک معادله لگاریتمی وغیران است و گمان می‌رود، در اختیار نداشتند این حوزه، به معنای آن است که نمی‌توانیم معادله را حل کنیم.

گمراهی دوم. گاهی گمان داریم می‌گذارند که اگر، جواب حاصل از حل معادله، متعلق به حوزه مقدارهای قابل قبول باشد، به معنای این است که در معادله صدق می‌کند و نیاز به هیچ‌گونه آزمایشی ندارد. مثال‌های زیر نشان می‌دهند که، این دو تصور را باید گمراهی به حساب آورد.

مثال ۱. معادله $3 = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}$ را حل کنید.

۱. اصطلاح «حوزه مقدارهای قابل قبول معادله»، معمولاً به معنای اشتراک حوزه‌های تعریف تابع‌هایی در نظر گرفته می‌شود، که درست چپ و سمت راست معادله قرار دارند.

اگر جمله دوم سمت چپ برابری را به سمت راست منتقل و، سپس، دوطرف برابری را مجذور کنیم، بعد از ساده کردن، به معادله $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x-2}$ می‌رسیم که، از آن، بامجذور کردن دوباره دوطرف برابری، سرانجام به دست می‌آید $x = 2$. در این جا، دوبار، از مجذور کردن معادله استفاده کردیم که می‌تواند منجر به جواب خارجی بشود. ولی آزمایش نشان می‌دهد که $x = 2$ ، ریشه معادله مفروض است. $x = 2$ ، تنها ریشه معادله است.

در حل معادله، نه تنها حوزه مقدارهای قابل قبول را پیدا نکردیم، حتی آن را به یاد نیاوردیم. روش است که بی ارزش‌دانستن این راه حل (با این دلیل که، حوزه مقدارهای قابل قبول معادله را مشخص نکرده ایم)، تصوری نادرست است. بر عکس، اگر دانش آموختی به تعیین حوزه مقدارهای قابل قبول معادله پردازد و سر آخر توضیح دهد که: «این ریشه، در حوزه مقدارهای قابل قبول قرار دارد»، کاری اضافی و حتی نادرست انجام داده است، زیرا این توضیح، موضوع‌ها را بهم می‌آمیزد و شوندۀ را چهار این ابهام می‌کند که، برای حل معادله، چه کارهایی لازم است و چه کارهایی لازم نیست! مثال ۰۳ این معادله را حل کنید:

$$(1) \quad 0 = (\sqrt{9-8x})^2 - (\sqrt{9-8x}) - 4(\sqrt{9-8x}) + 2$$

اگر سمت چپ برابر را، که تفاضل دو مجذور کامل است، تجزیه کنیم، معلوم می‌شود که معادله (۱)، هم ارز است با مجموعه معادله‌های

$$(2) \quad \begin{cases} 3 - \sqrt{9-8x} = 2\sqrt{9-8x} \\ 3 - \sqrt{9-8x} = -2\sqrt{9-8x} \end{cases}$$

اگر در هر یک از معادله‌های مجموعه (۲)، جمله‌هایی متشابه را جمع کنیم، $\sqrt{9-8x}$ را در یک طرف و بقیه جمله‌های در طرف دیگر برابر نگهداشیم و، سپس، آن‌ها را مجذور کنیم، به این مجموعه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases} 12x = 12\sqrt{x} \\ 76x + 12\sqrt{x} - 72 = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{9 - 8x_3} = \frac{3}{19}\sqrt{(6 + \sqrt{17})^2} = \frac{3}{19}(6 + \sqrt{17})$$

علاوه بر این (برابری ۳) را بینید:

$$\sqrt{x_3} = -\frac{3}{38} + \frac{9}{38}\sqrt{17}$$

و اگر این مقدارها را در معادله (۱) قرار دهیم، قانون می‌شویم که x_3 ، ریشهٔ معادلهٔ مفروض است.

مثال ۴. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{x^3 + x^2 - 32x + 4} = 2 - x\sqrt{x} \quad (4)$$

بعداز مجدور کردن دو طرف برابری، به این معادله می‌رسیم:

$$x^2 - 32x = 4x\sqrt{x} - 4$$

که با مجموعهٔ معادله‌های زیر هم ارز است:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + 4\sqrt{x} - 32 = 0 \end{cases}$$

که در آن، معادلهٔ اول یک ریشهٔ $0 = x$ و معادلهٔ دوم (که نسبت به \sqrt{x} از درجهٔ دوم است)، یک ریشهٔ $16 = x$ را دارد.

پیدا کردن حوزهٔ مقدارهای قابل قبول در این معادله، منجر به حل یک معادلهٔ درجهٔ سوم کامل می‌شود که، در اساس، موضوعی بفرنج تراز حل خود معادلهٔ مفروض است. ۱. اگر معادله

۱. گاهی گمان می‌رود که لزومی به پیدا کردن بازهٔ می‌بتوط به حوزهٔ مقدارهای قابل قبول نیست و، به جای آن می‌توان این حوزه را به کمک نابرابری‌ها نشان داد. برای معادله (۴)، این نابرابری‌ها عبارتند از

$$x^3 + x^2 - 32x + 4 \geq 0$$

ولی این تغییر روش «حوزهٔ مقدارهای قابل قبول»، منجر به روش دستگاه‌های مختلف (شامل برابری‌ها و نابرابری‌ها) می‌شود که درباره آن، کمی بعد، صحبت خواهیم کرد.

معادلهٔ اول مجموعه، دوریشه دارد: $0 = x_1, x_2 = 1$ ، از معادلهٔ دوم، که نسبت به \sqrt{x} از درجهٔ دوم است، به دست می‌آید:

$$\sqrt{x} = -\frac{3}{38} + \frac{9}{38}\sqrt{17} \quad (3)$$

از این دو مقدار، تنها باید آن را انتخاب کرد که متناظر با علامت $+$ است (زیرا $\sqrt{x} \geq 0$ ، که اگر آن را مجدور کنیم، نتیجهٔ می‌شود):

$$x_3 = \frac{9}{722}(77 - 3\sqrt{17})$$

از آن جا که در جربان حل معادله، از مجدور کردن دو طرف برابری استفاده کرده‌ایم، ممکن است بین x_1, x_2 و x_3 ، ریشهٔ خارجی وجود داشته باشد. ولی قبل از آن که آن‌ها را به آزمایش بکشانیم، به حوزهٔ تعریف مقدارهای قابل قبول مراجعه می‌کنیم. در اینجا، حوزهٔ مقدارهای قابل قبول، شامل مقدارهایی از x است که، به ازای آن‌ها، عبارت زیر هر یک از رادیکال‌ها غیرمنفی باشد، یعنی بازهٔ $\left[\frac{9}{8}, 0\right]$. بلا فاصلهٔ می‌توان متوجه شد که،

هر سه مقدار x_1, x_2 و x_3 متعلق به این بازه‌اند. آیا از این‌جا باید به این نتیجه رسید که، بین x_1, x_2 و x_3 ، ریشهٔ خارجی وجود ندارد و هر سه مقدار قابل قبول‌اند؟

در واقع، خیلی زود (و با آزمایش مستقیم) معلوم می‌شود که x_1 و x_2 در معادله (۱) صدق نمی‌کنند، یعنی ریشه‌های این معادله نیستند. می‌بینیم که استفادهٔ نسخه‌یde از حوزهٔ مقدارهای قابل قبول، منجر به اشتباه می‌شود. در حقیقت، خیلی ساده باید گفت که، حوزهٔ مقدارهای قابل قبول، در حل معادله (۱) هیچ نقشی ندارد.

آزمایش ریشهٔ x_3 را، مثلاً می‌توان به این ترتیب انجام داد. قبل از همه پیدا می‌کنیم:

$$9 - 8x_3 = \frac{9}{361}(6 + \sqrt{17})^2 - 12\sqrt{17} = \frac{9}{361}(53 + 12\sqrt{17})$$

$$x^3 + x^2 - 32x + 4 = 0$$

را، ولو به تقریب، حل کنیم، به جواب‌های $x = 5/11$ و $x = 5/13$ می‌رسیم (معادله، ریشه دیگری هم دارد که منفی است و، بنابراین، به درد ما نمی‌خورد، زیرا مقدارهای x جزو حوزه مقدارهای قابل قبول معادله نیستند).

به این ترتیب، حوزه مقدارهای قابل قبول معادله مفروض عبارت است از اجتماع دو بازه $[5/11, 5/13]$ و $[0, 5/16]$ ، به نحوی که هردو عدد $x_1 = 5/16$ و $x_2 = 5/11$ به آن تعلق دارند. اگر از حوزه مقدارهای قابل قبول، به صورتی نسبجیده استفاده کنیم، ممکن است گمان کنیم که، هردو عدد $x_1 = 5/16$ و $x_2 = 5/11$ ، ریشه‌های معادله‌اند. ولی در واقع، تعلق $x_1 = 5/16$ و $x_2 = 5/11$ به حوزه مقدارهای قابل قبول، به هیچ وجه این مطلب را تضمین نمی‌کند که، آن‌ها، ریشه‌های این معادله باشند؛ یعنی استفاده از «حوزه مقدارهای قابل قبول» هیچ سودی را در بر ندارد.

واقعیت امر چگونه است؟ اگر مقدارهای به دست آمده را در معادله مفروض قراردهیم، معلوم می‌شود که x_1 در معادله صدق می‌کند، در حالی که x_2 در آن صدق نمی‌کند. به ازای $x_2 = 5/16$ ، سمت راست برابر (4) منفی می‌شود، درحالی که سمت چپ معادله به ازای هر مقدار دلخواهی از حوزه مقدارهای قابل قبول آن، غیرمنفی است. به این ترتیب، معادله (4) تنها یک ریشه دارد: $x = 5/16$.

مثال ۴. مطلوب است حل معادله

$$(5) \quad x^3 - 4x^2 - 22x^3 + 9 + 7\sqrt{144x^2 - 22x^3} = 0$$

اگر دو طرف برابر را مجذور کنیم، به معادله‌ای می‌رسیم که تنها شامل یک رادیکال است که، اگر برای بار دوم، از مجذور کردن استفاده کنیم، سرانجام به ریشه‌های $x_1 = 2$ و $x_2 = 5/16$ می‌رسیم. آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که $x = 5/16$ در معادله (5) صدق می‌کند، درحالی که $x = 2$ ریشه خارجی آن است، زیرا سمت راست برابر (5) ، به ازای $x = 2$ ، مقداری منفی می‌شود.

یاد آوری می‌کنیم که، در این جاهم، $x = 2$ به حوزه مقدارهای قابل قبول معادله تعلق دارد. یعنی در این حالت هم، این حوزه، نقشی در مرور جدایی از جواب‌ها، ندارد.

می‌توانیم تا آن‌جا که لازم باشد، مثال‌هایی از این گونه پیدا کنیم، مثلاً هایی که، حوزه مقدارهای قابل قبول، نمی‌تواند در حل آن‌ها (و یا دقیق‌تر: در جدایی از جواب‌های معادله از جواب‌های خارجی)، نقشی به عهده بگیرد. به این ترتیب، روشن است که: ضروری دانستن تعیین حوزه مقدارهای قابل قبول برای حل معادله‌ها، دست کم نامعقول است. همچنین، اگر گمان را برای بگذاریم که با دردست داشتن «حوزه مقدارهای قابل قبول» می‌توانیم از آزمایش مستقیم جواب‌های حاصل معاف شویم، دچار تصوری نادرست شده‌ایم و دیدیم که، در این صورت، به گمراحتی می‌افتیم.

به کار بردن حوزه مقدارهای قابل قبول، عواقب زیان‌بار دیگری هم دارد. اصطلاح «حوزه مقدارهای قابل قبول»، در جای دیگری جز در ریاضیات دیبرستانی، کاربرد ندارد: نه در ریاضیات عالی و نه در مهندسی و یا عمل‌های محاسبه‌ای. به جای آن، از مفهوم «حوزه تعریف تابع‌ها» استفاده می‌شود. بنابراین، اصطلاح «حوزه مقدارهای قابل قبول» نه تنها در بسیاری موردها، مشکلی را حل نمی‌کند، بلکه با مفهوم‌ها و اصطلاح‌های ریاضیات جدید‌هم متناقض است و دانش‌آموز را، از «زبان» مجموعه‌ها و تابع‌ها دور می‌کند. علاوه بر این، در کنار اصطلاح «حوزه مقدارهای قابل قبول معادله» باید اصطلاح «حوزه مقدارهای قابل قبول تابع» را هم (به جای اصطلاح حوزه تعریف تابع یا دامنه تابع) مورد استفاده قراردهیم. و بیندیشید، چقدر بی‌معنی است که، دامنه تعریف، یعنی حوزه مقدارهای قابل قبول برای متغیر را، «حوزه مقدارهای قابل قبول تابع» بنامیم؟!

ممکن است خواننده اعتراض کند که، حوزه مقدارهای قابل قبول، به هر حال در برخی موردها، به پاسخ درست می‌انجامد. بله، چنین موردهایی وجود دارد. ولی اولاً تازمانی که نتوان به طور دقیق مشخص کرد که چه زمانی استفاده از «حوزه مقدارهای قابل قبول» عاقلانه و چه زمانی نامعقول است،

ولی برای حل معادله‌ها، معمولاً^۱ نیازی به پیدا کردن حوزه تعریف نیست. به جای آن، باید بتوان به این برشش‌ها باسنخ داد: «آیا عدد مفروض x ، به حوزه تعریف تابع $(x)^f$ تعلق دارد؟ مقدار تابع $(x)^f$ در نقطه مفروض x برقرار است؟ x چقدر است؟ آیا نابرابری \geqslant در نقطه مفروض x برقرار است؟ وغیره». مثلاً، برای این که بدانیم، $x = 3$ ، به حوزه تعریف تابع (۷) تعلق دارد یا نه، کافی است بینیم مقدار عددی جلو علامت لگاریتم، بدانایی $x = 3$ ، عددی است مشبّت غیراز واحد: $\frac{1}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{2}{3}$; و این، خیلی ساده‌تر از

آن است که تمامی حوزه تعریف تابع را پیدا کنیم. بهمین ترتیب، هیچ لزومی ندارد که حوزه تعریف تابعی را که درسمت چپ معادله (۵) قرارداد، پیدا کنیم، بگوییم که، در هر نقطه x ، مقدار این تابع (اگر معین باشد) غیرمنفی است.

عدد x را ریشه معادله (۶) گوییم وقتی که اولاً در حوزه تعریف تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ واقع باشد و، ثانیاً، برای عددی x $f(x) = g(x)$ باشد. حل معادله، یعنی پیدا کردن همه ریشه‌های آن. برقرار باشد. حل معادله، یعنی پیدا کردن همه ریشه‌های آن. فرض کنید، چند معادله داده شده باشد:

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ \dots \\ f_m(x) = g_m(x) \end{cases} \quad (8)$$

عدد x را ریشه مجموعه معادله‌های (۸) گویند، وقتی که ریشه دست کم یکی از این معادله‌ها باشد؛ حل مجموعه معادله‌ها، یعنی پیدا کردن همه ریشه‌های آن. علامت «کروشه» که درسمت چپ معادله‌ها گذاشته شده است، بهمین‌ای این است که باید مجموعه معادله‌ها سروکار داریم (درحالی که مثلاً، علامت «آکولاد» به معنای دستگاهی از معادله‌هاست).

مجموعه معادله‌های (۸) را نتیجه معادله (۶) گویند، وقتی که، هر یک از ریشه‌های معادله (۶)، ریشه‌ای از مجموعه معادله‌های (۸) باشد، یعنی باعبور از معادله (۶) به مجموعه (۸)، هیچ ریشه‌ای از دست نرود.

کاربرد آن را در پرده ابهام می‌گذارد و ثانیاً، چرا از اصطلاح درست و عام‌تر «حوزه تعریف تابع» یا «دامنه تابع» استفاده نکنیم؟

در دنباله مقاله، نظریه حل معادله‌های یک مجهولی را می‌آوریم و روش جدا کردن ریشه‌های خارجی را روشن می‌کنیم.
هر معادله یک مجهولی، با مجهول x ، به این صورت است:

$$f(x) = g(x) \quad (6)$$

هر یک از تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ ، دارای حوزه تعریفی است، یعنی مجموعه همه مقدارهای x ، که برای آنها، این تابع معین است. (حوزه تعریف یک تابع را، به طور ساده، دامنه تابع هم می‌گویند). در ضمن، معادله‌ها بی‌هم مورد بررسی قرار می‌گیرند که در آنها، سمت راست یا سمت چپ برابر، برابر صفر است، مثلاً معادله $0 = f(x)$.

اغلب، تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ را با دستوری می‌دهند که شامل حرف x ، عددها و علامت‌های عمل است (چهار عمل اصلی حساب، توان، ریشه، لگاریتم و تابع‌های مثلثاتی). در چنین حالت‌هایی، دامنه یا حوزه تعریف تابع، به مجموعه‌ای از مقدارهای x گفته می‌شود که، به ازای آنها، همه عمل‌های موجود معنا داشته باشد (یعنی بتوان این عمل را انجام داد). مثلاً حوزه تعریف تابع

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{\lg(x - \frac{1}{x})} \quad (7)$$

عبارت است از اجتماع چهار بازه

$$\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0 \right), \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$$

(برای این نقطه‌ها، مخرج، معین و مخالف صفر است). پیدا کردن حوزه تعریف، می‌تواند به مساله‌ای کاملاً دشوار منجر شود.

$\forall x$ ریشه‌ای از معادله اصلی باشد، لازم و کافی است که: اولاً همه عمل‌ها قابل انجام باشند و ثانیاً، در دو طرف برابری، عددهایی برابر بودست آید.
از این روش در مثال‌های ۱ و ۲ و همچنین، برای ریشه $\pm x$ در مثال‌های ۳ و ۴ استفاده کردیم.

II. اثبات هم‌ارزی. مجموعه $\{x\}$ را، که نتیجه‌ای از $\{x\}$ است، هم‌ارز با معادله $\{x\}$ گویند، وقتی که، در ضمن، هریک از ریشه‌های مجموعه $\{x\}$ ، ریشه معادله $\{x\}$ باشد (یعنی، وقتی که ریشه‌های خارجی وجود نداشته باشند).
بنابراین، اگر به طریقی، هم‌ارزی معادله $\{x\}$ با مجموعه $\{x\}$ ثابت شود، آن وقت، به هیچ آزمایشی نیاز نداریم: هریک از ریشه‌های x_1, x_2, \dots, x_m ، که ضمن حل مجموعه $\{x\}$ به دست آورده‌ایم، ریشه‌ای از معادله اصلی است.
مثال ۵. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 2} + \sqrt{x^2 - 6x - 1} = 3$$

$x - 2$ می‌گیریم؛ نسبت به مجهول x به این معادله می‌رسیم:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3$$

که دارای ریشه منحصر به فرد $x = 2$ است (مثال ۱ را بینید). در نتیجه، معادله $x^2 - 6x = 2$ به دست می‌آید که دارای دوریشه است: $x_1 = 3 + \sqrt{11}$ و $x_2 = 3 - \sqrt{11}$. از آن جا که روش وارد کردن مجهول کمکی، همیشه منجر به معادله‌ای (یا مجموعه‌ای از معادله‌های) هم‌ارز می‌شود، بنابراین، بدون هرگونه آزمایش، می‌توانیم بگوییم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله اصلی‌اند.

III. آزمایش در حوزه تعریف تابع‌های سمت چپ و سمت داشت.
گزاره زیر، نتیجه مستقیم تعریف ریشه معادله است: برای این که x (یکی از ریشه‌های مجموعه $\{x\}$)، ریشه معادله اصلی باشد، لازم است که x ، به حوزه تعریف هریک از تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ تعلق داشته باشد. بدز باز دیگر، لازم است که x متعلق به اشتراک حوزه‌های تعریف تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ باشد.

مجموعه معادله‌های $\{x\}$ را، نتیجه معادله $\{x\}$ فرض می‌کنیم. عدد x را دیش خارجی حاصل از این عبور (عبور از معادله $\{x\}$ به مجموعه $\{x\}$) نامیم، وقتی که x ریشه مجموعه $\{x\}$ باشد، ولی ریشه معادله $\{x\}$ نباشد.
فرض کنید، با معادله‌ای مثل $\{x\}$ سروکار داشته باشیم. برای حل معادله $\{x\}$ ، باید تلاش کنیم چنان مجموعه‌ای از معادله‌ها را به دست آوریم مثل مجموعه $\{x\}$ که نتیجه‌ای از $\{x\}$ باشد و، در ضمن، هریک از معادله‌های $\{x\}$ را، بتوانیم با روش‌هایی که می‌شناسیم، حل کنیم. فرض کنید، به چنین نتیجه‌ای رسیده باشیم و فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_m

مجموعه همه ریشه‌های $\{x\}$ باشد. چون $\{x\}$ نتیجه‌ای از $\{x\}$ است، بنابراین می‌توان ضمانت کرد که هیچ ریشه‌ای، درین راه، از دست نرفته است، یعنی همه ریشه‌های معادله $\{x\}$ را باید درین عده‌های x_1, x_2, \dots, x_m جست و جو کرد. ولی بین x_1, x_2, \dots, x_m ، ممکن است ریشه‌های خارجی وجود داشته باشد. اگر بتوانیم ریشه‌های خارجی را جدا کنیم، آن وقت ریشه‌های معادله $\{x\}$ به دست می‌آید و، به این ترتیب، حل معادله $\{x\}$ به پایان می‌رسد.

درباره مرحله اخیر، یعنی جدا کردن ریشه‌های خارجی، باید بیشتر صحبت کنیم. در این مرحله، باید برای هریک از عده‌های x_1, x_2, \dots, x_m به این پرسش پاسخ داد که آیا، این عدد، ریشه خارجی است یا ریشه معادله $\{x\}$! برای این پاسخ، می‌توان از روش‌های مختلف استفاده کرد. برای این که بینیم x ریشه خارجی است یا نه، می‌توانیم از روشی استفاده کنیم، در حالی که برای x روش دیگری را در پیش بگیریم. معمول ترین روش‌ها را در اینجا می‌آوریم.

I. آزمایش مستقیم در معادله اصلی. یکی از ریشه‌های x_1, x_2, \dots, x_m از مجموعه $\{x\}$ ، و مثلاً x_1 را، در نظر می‌گیریم. این روش، به معنای آن است که x_1 را به جای x در معادله $\{x\}$ قرار دهیم. طبق تعریف ریشه، برای این که

۱. روشن است که، مجموعه $\{x\}$ ، ممکن است نهایا شامل یک معادله باشد ($m=1$)؛
با چنین حالتی، در مثال‌های ۱ و ۴ برخورد داشتیم.

آن)، تنها مقدارهای غیرمنفی را قبول کند. در این صورت، برای این که x_k ریشه‌ای از معادله (۶) باشد، لازم است که $(x_k)g$ مقداری غیرمنفی شود؛ بدزبان دیگر، اگر $\langle g(x_k), \infty \rangle$ ، آن وقت x_k یک ریشه خارجی است.

از این روش، در مثال‌های ۳ و ۴، برای جدا کردن ریشه خارجی x_2 استفاده کردیم.

این روش را می‌توان به سادگی تعمیم داد. مثلاً اگر بتوانیم تابع $(x)g$ را طوری پیدا کنیم که برای همه مقدارهای حقیقی x معین باشد و در ضمن، نا برابری $(x)f \geqslant g(x)$ در تمامی حوزه تعریف تابع $(x)f$ قرار باشد، آن وقت نا برابری $\langle g(x_k), \infty \rangle$ به معنای خارجی بودن ریشه x_k است.

V. عبود به مجموعه معادله‌ها. از معادله

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x) = 0$$

می‌توان مجموعه معادله‌های زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \dots \\ f_m(x) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

برای این که x را که از مجموعه معادله‌های (۹) بدست آمده است، در معادله اصلی صدق کند، لازم و کافی است که عدد x ، به حوزه تعریف همه تابع‌های واقع در سمت چپ معادله اصلی، تعلق داشته باشد (یعنی x ، متعلق به حوزه تعریف هر یک از تابع‌های f_1, f_2, \dots, f_m باشد).

برای این که دور روش دیگر را، برای جدا کردن ریشه‌های خارجی، توضیح دهیم، به جدول ابتدای صفحه بعد توجه کنید.

در هر سطر جدول، به ترتیب، این گزاره‌ها وجود دارد: معادله اصلی (در ستون اول)، نتیجه آن (در ستون دوم) و بالاخره، در ستون سوم، شرط لازم و کافی برای این که x ، که ریشه معادله ستون دوم است، ریشه معادله

باشد؛ و این اشتراک، همان «حوزه مقدارهای قابل قبول معادله (۶)» است. این روش را تنها به ترتیب زیر می‌توان مورد استفاده قرارداد: اگر x ، دست کم به یکی از حوزه‌های تعریف تابع‌های $(x)f$ و $(x)g$ تعلق نداشته باشد، آن وقت x ، یک ریشه خارجی است. در ضمن، برای این منظور، به هیچ وجه لازم نیست حوزه‌های تعریف تابع‌های $(x)f$ و $(x)g$ را پیدا کنیم، تنها باید آزمایش کنیم، آیا به ازای x ، می‌توان همه عمل‌های را انجام داد یا نه. یکبار دیگر تا کم می‌کنیم که، این شوطی لازم است، ولی هنوز کافی نیست: اگر x متعلق به حوزه‌های تعریف دست کم یکی از تابع‌های $(x)f$ و $(x)g$ نباشد، به معنای آن است که x ریشه معادله (۶) نیست، و ولی اگر x به هر دو حوزه تعریف تابع‌های $(x)f$ و $(x)g$ متعلق باشد، نمی‌توان اطمینان داشت که x ریشه‌ای از معادله (۶) است (و این، تنها به معنای آن است که از این روش نمی‌توان برای x استفاده کرد).

مثال ۶. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{7-12x+6x^2} = 1$$

اگر دو طرف برابر را مجدوثر کنیم، تبدیل‌های لازم را انجام دهیم و یکبار دیگر از مجدوثر کردن دو طرف برابر استفاده کنیم، سه جواب به دست می‌آوریم: $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ ، $x_3 = 3$. آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که x_1 ، ریشه معادله است. ولی x_2 و x_3 به حوزه تعریف تابع سمت راست برابری تعلق ندارند (مقدار زیر را دیگر، منفی می‌شود) و، بنا بر این، ریشه‌های خارجی آند.

در اینجا، برتری روش استفاده از «حوزه تعریف تابع‌ها»، بر روش «حوزه مقدارهای قابل قبول» به خوبی دیده می‌شود: کافی است قانون شویم که x متعلق به حوزه تعریف یکی از تابع‌های $(x)f$ یا $(x)g$ نیست تا بتوانیم داوری کنیم که x ، یک ریشه خارجی است (ولو این که نتوانیم از حوزه تعریف تابع دیگر، سردر بیاوریم).

IV. استفاده از مجموعه مقدارهای تابع. فرض می‌کنیم تابع $(x)f$ که در سمت چپ معادله قرار دارد، به ازای همه مقدارهای x (از حوزه تعریف

جدول

۱) $f(x) = g(x)$	$(f(x))^2 = (g(x))^2$	$f(x_k)g(x_k) \geq 0$
۲) $f(x) + \varphi(x) = 0$	$f(x) = g(x)$	x_k ، متعلق به حوزه
	$\varphi(x) = -f(x)$	تعریف تابع‌های
۳) $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\varphi(x)}{h(x)} = 0$	$f(x)h(x) - g(x)\varphi(x) = 0$	واقع در سمت چپ
۴) $(\sqrt{f(x)})^2 = g(x)$	$f(x) = g(x)$	معادله اصلی است
۵) $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = h(x)$	$\sqrt{f(x)g(x)} = h(x)$	
	$= h(x)$	

اصلی باشد. این جدول را می‌توان ادامه داد (مثلاً، در این جدول، معادله‌های لگاریتمی و مثلثاتی وجود ندارد). یادآوری می‌کنیم که، در جدول، از تبدیل‌هایی که، همیشه، منجر به معادله‌ای هم ارز با معادله اصلی می‌شوند، سخنی نرفته است (مثل انتقال جمله‌ای از یک طرف به طرف دیگر معادله یا استفاده از دستورهای مربوط به ساده کردن ضرب‌ها وغیره).

VII. تحقیق درجهت عکس. کاربرد این روش را روی یک مثال نشان می‌دهیم:

مثال ۷. این معادله را حل کنید:

$$(10) \quad \sqrt{1-x} - \sqrt{x} = 0/8$$

برای حل این معادله، ابتدا از سطر اول جدول استفاده می‌کنیم، سپس دستور مجدد تفاضل دو جمله را، به کار می‌بریم و بالاخره، به ترتیب، از سطر چهارم، دوم، پنجم، اول و چهارم استفاده می‌کنیم؛ مرتبًا به معادله‌های ساده‌تر می‌رسیم:

$$(11) \quad (\sqrt{1-x} - \sqrt{x})^2 = 0/64$$

$$(\sqrt{1-x})^2 - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 = 0/64$$

$$1-x - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x} + x = 0/64$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x} &= 0/18, \\ \sqrt{(1-x)x} &= 0/18, \\ (\sqrt{(1-x)x})^2 &= 0/0324, \quad (12) \\ (1-x)x &= 0/0324 \quad (13) \end{aligned}$$

معادله درجه دوم (۱۳) را حل و ریشه‌های آن را پیدا می‌کنیم:

$$x_1 = 0/5 + \sqrt{0/2176}, \quad x_2 = 0/5 - \sqrt{0/2176} \quad (14)$$

عمل‌ها را، از آخر به اول، از معادله (۱۳) به طرف معادله (۱۵)، دنبال

می‌کنیم؛ آیا درجایی ریشه خارجی وارد شده است؟

هر دو ریشه x_1 و x_2 به بازه (۱، ۵) تعلق دارند، بنابراین مقدار زیر را دیگال در معادله (۱۲) مثبت است. بنابراین شرط لازم و کافی (مربوط به سطر چهارم جدول) برقرار است؛ یعنی هر دو عدد x_1 و x_2 ، ریشه‌های

معادله (۱۲) هم هستند.

به همین ترتیب، اگر عمل‌هارا درجهت عکس تعقیب کنیم، قانون می‌شویم که عدهای x_1 و x_2 ، ریشه‌های معادله (۱۱) هستند.

سرانجام توجه می‌کنیم که $x_2 < \frac{1}{x_1}$. بنابراین، عبارت داخل پرانتز در معادله (۱۱)، به ازای $x_1 = x$ منفی، و به ازای $x_2 = x$ مثبت است؛ یعنی برای $x_1 = x$ ، شرط لازم و کافی (مربوط به سطر اول جدول) برقرار نیست، در حالی که برای $x_2 = x$ برقرار است. بین ترتیب، x_2 ریشه خارجی و x_1 ریشه معادله اصلی است.

VII. تحقیق درجهت مستقیم (دوش دستگاه‌های مختلف). ماهیت این روش در این است که، در جریان تبدیل‌ها، نابر ابری‌هایی به آن اضافه کنیم، به نحوی که هر بار، دستگاهی شامل معادله‌ها و نامعادله‌ها به دست آید که هم ارز با معادله اصلی باشد و، بین ترتیب، از ورود ریشه‌های خارجی، در جریان تبدیل‌ها، جلوگیری کرد. کاربرد این روش را، روی همان معادله (۱۵) توضیح می‌دهیم.

سطر اول جدول نشان می‌دهد که معادله (۱۵)، هم ارز است با دستگاه

۱۴) تنها این می‌ماند که ریشه‌های معادله درجه دوم را پیدا کنیم (۱۴) را بینید) و قانون شویم که x با شرط $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ سازگار نیست، ولی x با همه رابطه‌های دستگاه (۱۵) سازگار است. ۱۵) تنها ریشه معادله اصلی است و برای آن، هیچ گونه آزمایشی لازم نیست، زیرا دستگاه (۱۵) با معادله اصلی هم ارز است.

این روش، با وجود عام بودن آن، معمولاً منجر به عمل‌های طولانی و خسته‌کننده می‌شود و بهمین‌مانسبت، در درس‌های دیفرانسیل، کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. مثلاً اگر تصمیم بگیریم، برای حل معادله (۵)، از این روش استفاده کنیم، سرآخراً با این دستگاه، که شامل چهار معادله است، می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2x^3 = x^4 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^4 - 8x^3 + 9 + 2\sqrt{144x^2 - 22x^3} \geq 0 \\ 11x^2 - 12x \geq 0 \\ 144x^2 - 22x^3 \geq 0 \end{cases}$$

ولی از بین این نامعادلهای، تنها $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ لازم می‌شود (که ریشه $x = 2$ را، به عنوان ریشه خارجی جدا می‌کند) و بقیه، معیارهای غیر لازمی هستند. راه حلی که در مثال ۴، برای این معادله دادیم، بسیار ساده‌تر و عملی‌تر است.

VIII. توجه به پیوستگی‌ها. در مثال ۷ دیدیم که معادله (۱۳) نتیجه‌ای از معادله (۱۰) و، بنابراین، تنها عده‌های (۱۴) ممکن است ریشه‌های معادله (۱۰) باشند. ریشه x خارجی است، یعنی تنها عدد x می‌تواند ریشه معادله اصلی (۱۰) باشد.

از طرف دیگر، شمت چپ معادله (۱۰)، در بازه $[1, 5]$ ، تابعی است معین و پیوسته. این تابع، به ازای $x = 1$ برابر ۱ و به ازای $x = 5$ برابر ۱ می‌شود. بنابراین، با توجه به پیوستگی تابع، نقطه‌ای مثل x در بازه

$$\begin{cases} (\sqrt{1-x} - \sqrt{x})^2 = 0 / ۶۴ \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$$

با استفاده از مجدد تفاضل دوجمله و تبدیل $(\sqrt{1-x})^2$ و $(\sqrt{x})^2$ به $1-x$ و x (سطر چهارم جدول را بینید)، ما را به این دستگاه می‌رساند:

$$\begin{cases} 1 - x - 2\sqrt{1-x}\sqrt{x} + x = 0 / ۶۴ \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{x} \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

معادله اول این دستگاه را می‌توانیم به صورت (۱۳) بنویسیم؛ در ضمن چون نامعادلهای $0 \leq x \leq 1$ در دستگاه وجود دارند، بنابراین به محدودیت‌های تازه‌ای نیاز نخواهیم داشت:

$$\begin{cases} (1-x)x = 0 / ۰۳۲۴ \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{x} \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

رابطه دوم این دستگاه را می‌توان به صورت $\sqrt{1-x} \geq \sqrt{x}$ و یا $x - 1 \geq \sqrt{x}$ نوشت که از آن به دست می‌آید $\frac{1}{2} \leq x$. به این ترتیب، دیگر به نامعادله $0 \leq x \leq 1$ نیازی نیست.

برانجام معلوم می‌شود که، معادله (۱۰). هم ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} x^2 - x + 0 / ۰۳۲۴ = 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

مساله‌های مسابقه‌ای

نیوزدهمین المپیاد سراسری ریاضیات در اتحاد شوروی، از ششم تا سیزدهم آوریل ۱۹۸۵ برگزار شد. در این المپیاد ۱۶۲ دانش‌آموز شرکت داشتند: ۴۶ نفر از کلاس هشتم، ۵۹ نفر از کلاس نهم و ۵۹ نفر از کلاس دهم. آزمایش در دو روز انجام شد و هر روز ۴ مساله به دانش‌آموزان داده شد. اینک صورت مساله‌ها.

کلاس هشتم

۱. مثلى با زاويه‌های حاده داده شده است. از وسط هر ضلع مثلث، عمودهایی بر دو ضلع دیگر رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت شش ضلعی محدود با این عمودها، برابر است با نصف مساحت مثلث.

۲. آیا عدد طبیعی ۲۲، با این ویژگی‌ها وجود دارد: مجموع رقم‌های عدد ۲۲ (در عدد تویی دهدی) برابر ۱۰۰۰ و مجموع رقم‌های عدد ۲۲ برابر ۱۰۰۰ باشد؟

۳. حداقل چند مهره دامکا می‌توان روی صفحه ۸×۸ خانه‌ای قرارداد، به نحوی که هر مهره، دست کم به وسیله یکی از مهره‌های دیگر زده شود؟

۴. می‌خواهیم هر ضلع و هر قطبیک (ضلعی منتظم را بهرنگی در آوریم که، هر دو پاره خط راست متقطع، دارای رنگ‌های متفاوتی باشند. حداقل چند رنگ برای این مظلوم لازم است؟ (پاره خط‌های راست را، همراه با دوانهای آن‌ها در نظر بگیرید).

۵. یک مکعب و یک جعبه مکعبی با همان اندازه و شش رنگ مختلف در اختیار داریم؛ جعبه مکعبی دارای سرپوش است. با هر رنگ، یکی از وجههای مکعب و یکی از وجههای جعبه را رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، مکعب را می‌توان طوری در جعبه قرارداد که هر وجه مکعب مجاور وجهی از جعبه باشد که رنگ دیگری دارد.

[۱۵] وجود دارد که، به ازای آن، تابع برابر $5/8$ (که بین ۱ - ۱ قرار دارد) شود. به زبان دیگر، دست کم یک ریشه معادله (۱۱) وجود دارد. در این صورت روش است که باید \sqrt{x} ریشه معادله (۱۵) باشد.

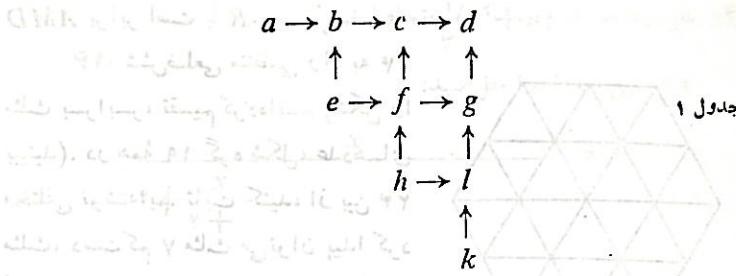
پیوستگی تابع را، که در حل این مساله مورد استفاده قراردادیم، می‌توان بارسم نمودار مورد تاکید قرارداد؛ مثلاً معادله (۱۵) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\sqrt{1-x} = 5/8 + \sqrt{x}$$

و سپس قانع شد که نمودار تابع‌های واقع در سمت چپ و سمت راست برابر، متقطع‌اند (یعنی، ریشه وجود دارد).

راه‌های دیگری هم، به جز آن‌چه در اینجا آورده‌یم، وجود دارند که اختصاصی ترند و می‌توان از آن‌ها، برای جدا کردن ریشه‌های خارجی استفاده کرد و یا قانع شد که ریشه حاصل، در معادله اصلی صدق می‌کند.

نتیجه روش است: استفاده از «حوزه مقدارهای قابل قبول»، تنها یکی از روش‌هایی است که به کمک آن می‌توان ریشه‌های خارجی معادله را جدا کرد و، بنابراین، تصور این که این روش تنها قابلی است که به کمک آن باید معادله‌ها را حل کرد، تصوری نادرست است. در ضمن، بهتر است از اصطلاح معمول، ولی عامیانه «حوزه مقدارهای قابل قبول» صرف نظر کنیم و، به جای آن، اصطلاح‌های دقیق‌تر ریاضی را که در نظریه تابع‌ها وجود دارند، به کار ببریم. ازین روش‌هایی که در اینجا آورده‌یم، روش‌های I تا V از همه مهم‌ترند؛ در ضمن باید دقت کرد و هر روش را در جای خود به کار برد. اگر دانش آموخته‌تواند، مسأله خود را تا پایان کار حل کند و در میانه راه دچار اشکال شود، بهتر از آن است که مساله را با استدلال نادرست به آخر برساند و مثلاً «دچار گمراهی‌های مر بوط به «حوزه مقدارهای قابل قبول»» بشود.



می‌دانیم، هر عددی از این جدول، که دو پیکان به آن رسیده، برابر است با مجموع دو عدد آغاز این پیکان‌ها. حداقل مقدار d در این جدول، چقدر می‌تواند باشد؟

۱۳. عدهای مثبت a_1, a_2, \dots ، دنبالهای اکیداً صعودی تشکیل داده‌اند. ثابت کنید:

(الف) اندیس k وجود دارد، به نحوی که بزرای $a_k \geq k$ داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1$$

(ب) برای هر اندیس بداندازه کافی بزرگ k ، داریم:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1985$$

۱۴. با مکعب‌های مساوی یکدیگر، مکعب مستطیلی ساخته‌ایم. سوجه مکعب مستطیل را که راس مشترکی دارند، رنگ زده‌ایم. معلوم شد که در نیمی از همه مکعب‌ها، دست کم یکی از وجه‌ها رنگ خورده است. چند مکعب، وجه‌ای رنگ خورده دارند؟

۱۵. یکی از دو دایره به شعاع R از راس‌های A و B و دیگری از

راس‌های C و D از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ گذاشته‌اند. M را نقطه برخورد دوم این دو دایره می‌گیریم. ثابت کنید، شعاع دایره محیطی مثلث

۶. قطر $A_5 A_6$ ، دایره به مرکز O را، به دو نیم دایره‌ها تقسیم کرده است.

کمان یکی از نیم دایره‌ها را، به پنج کمان برابر، $A_7 A_8, A_8 A_9, A_9 A_1, A_1 A_2, A_2 A_3$ تقسیم کرده‌ایم. خط راست $A_3 A_4$ ، پاره خط‌های راست OA_2 و OA_3 را، به ترتیب، در نقطه‌های M و N قطع کرده است. ثابت کنید: مجموع طول‌های پاره خط‌های راست MN و $A_2 A_3$ برابر است با شعاع دایره.

۷. دانش آموzan انجمن ریاضی، ماشین حسابی ساخته‌اند، با فشاردادن شستی آن، عدهای چهارگانه (d, c, b, a) را به عدهای چهارگانه $(a - b, b - c, c - d, d - a)$ تبدیل می‌کنند. ثابت کنید، اگر چهار عدد نخستین، همه باهم برابر نباشند، بعد از چندبار فشاردادن شستی، دست کم یکی از عدها از ۱۹۸۵ بزرگتر می‌شود.

۸. عدهای $1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n$ را به دو گروه، و در هر گروه n عدد، تقسیم کرده‌ایم. فرض کنید، عدهای گروه اول

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1}$$

را به ترتیب صعودی و عدهای گروه دوم

$$b_1 > b_2 > b_3 > \dots > b_{n-1}$$

را به ترتیب نزولی نوشته باشیم. ثابت کنید:

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = n^2$$

کلاس نهم

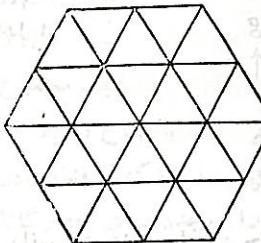
۹. خط راست ℓ ، نقطه O غیر واقع بر خط راست ℓ و نقطه A روی یک صفحه، داده شده‌اند. ثابت کنید، تنها به کمک تقارن نسبت به خط راست ℓ و دوران به مرکز O ، می‌توان نقطه O را به نقطه A منجر کرد.

۱۰. در سه‌جمله‌ای $ax^3 + bx^2 + cx + d$ می‌دانیم، اگر x را عددی درست فرض کنیم، حداکثر بهزای چند مقدار x ، حاصل این سه‌جمله‌ای، از لحاظ قدر مطلق، از 50 تجاوز نمی‌کند؟

۱۱. عدهای a, b, \dots, k به صورت جدول ۱ نوشته شده‌اند:

AMD برابر است با R .

۱۶. شش ضلعی منتظمی را، به ۲۴ مثلث برابر، تقسیم کرده‌ایم (شکل را ببینید). در همه ۱۹ گره شکل، عدد‌های مختلفی نوشته‌ایم. ثابت کنید، از بین ۲۴ مثلث، دست کم ۷ مثلث می‌توان پیدا کرد که، عدد‌های واقع در راس هر یک از آن‌ها، به ردیف صعودی در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت واقع‌اند.



کلاس دهم

۱۷. این نامعادله را حل کنید:

$$|\sin x - \sin y| + \sin x \sin y \leq 0$$

۱۸. پنج ضلعی محدب $ABCDE$ روی صفحه رسم شده است. A_1 را قرینه نقطه A نسبت به B ، B_1 را قرینه B نسبت به C ، ..., E_1 را قرینه E نسبت به A می‌گیریم و، سپس، پنج ضلعی $ABCDE$ را پاک می‌کنیم. ثابت کنید، با دردستداشتن نقطه‌های A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 و به کمک پرگار و خط‌کش، می‌توان پنج ضلعی $ABCDE$ را بازسازی کرد.

۱۹. برای دنباله a_1, a_2, a_3, \dots می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \text{به ازای } n \geq 1 : a_{2n} = a_n & \quad a_{2n} = a_n : n \geq 1 \\ \text{به ازای } n \geq 0 : a_{4n+1} = 1 & \quad a_{4n+1} = 1 : n \geq 0 \end{aligned}$$

ثابت کنید، این دنباله متناوب نیست.

۲۰. n خط راست ($n \geq 2$)، روی صفحه‌ای رسم کرده‌ایم که صفحه را، به چند بخش تقسیم کرده‌اند. بعضی از این بخش‌ها را رنگ زده‌ایم، در ضمن هیچ دو بخش رنگ خوددهای، مجاور هم نیستند (دو بخش را مجاور گوییم، وقتی که در مرزی مشترک باشند؛ بخش‌هایی را که تنها در یک نقطه مشترک‌اند، مجاور به حساب نمی‌آوریم). ثابت کنید، تعداد بخش‌هایی که

رنگ خوددهاند، از $(n^2 + n) \frac{1}{3}$ تجاوز نمی‌کند.

۲۱. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} = 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{1+x}}$$

(درسمت چپ برابری، به تعداد ۱۹۸۵ عدد ۲ وجود دارد.)

۲۲. از پنج ضلعی منتظم به ضلع یک سانتی‌متر، نقطه‌هایی را که از همه راس‌های پنج ضلعی، فاصله‌ای کمتر از یک سانتی‌متر دارند، کنار گذاشته‌ایم. مساحت بخش باقی‌مانده پنج ضلعی را پیدا کنید.

۲۳. در یک صفحه شطرنجی نامتناهی، که طول ضلع هر خانه آن برابر واحد است، می‌توانیم تنها روی خطوط‌ای راست شبکه، برش بدهیم. ثابت کنید، به ازای هر $12m > m \in \mathbb{N}$ ، می‌توان مستطیلی با مساحت بیشتر از m جدا کرد، به نحوی که از مستطیل اخیر نتوان مستطیلی با مساحت برابر m برید.

۲۴. طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر واحد است. دو دایره را در نظر می‌گیریم: دایرة محاط در قاعده $ABCD$ و دایرة‌ای که از سه نقطه A, C, B_1 و C_1 عبور کرده است. کمترین فاصله بین نقطه‌های محیط‌های این دو دایره را پیدا کنید.

چند مسأله محاسبه‌ای (هر جا لازم است، از ماشین حساب استفاده کنید)

۱. حاصل هر یک از این دو عبارت عددی را پیدا کنید:

$$(الف) \quad A = 4\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{52 + 40\sqrt{2}}$$

$$(ب) \quad B = \sqrt{200 + 126\sqrt{2} + \frac{54}{1 + \sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{18}{1 + \sqrt{2}} - 6\sqrt{2}}$$

محاسبه یک حد

در اغلب کتاب‌های درسی انتگرال‌و دیفرانسیل این مسئله دیده می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

یا به عنوان یک تمرین و یا به عنوان مثالی که حل آن با استفاده از دستور هوپیتال انجام می‌شود. برخی از کتاب‌ها شامل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

به عنوان یک تمرین اند، که سبب می‌شود دانشجویان در مواردی که محاسبات جبری مشکل بوده، با استفاده مکرر از دستور هوپیتال مسئله را حل کنند. حتی برخی از کتاب‌ها شامل این مسئله‌اند:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3}$$

هدف این نوشته، نشان‌دادن یک محاسبه «بازگشتی» جالب برای مسئله:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^4 x} - \frac{1}{x^4}$$

با ازای تمام مقدارهای حقیقی \neq است، که فقط با دوبار استفاده از قاعده هوپیتال بدست می‌آید.

برای ساده‌تر کردن استدلال تابع‌های معین از x و حدّهایی که با آن‌ها مواجه می‌شویم را نام‌گذاری می‌کیم. در ابتدا قرار می‌دهیم:

$$F_1(x) = \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)^{\text{حد}} \quad L_1 = 0; \quad (1)$$

توجه داریم، که به طور مسلم:

۳. یک ماشین حساب می‌تواند عمل‌های حسابی را تنها روی عدهای انجام دهد که بیش از دو رقم نداشته باشد. با این ماشین حساب، چگونه می‌توان یک عدد ۱۵ رقمی را در عدد ۱۵ رقمی دیگر ضرب کرد؟

۴. (الف) یک ماشین حساب، تنها می‌تواند دو عمل انجام دهد: جمع و تفریق. می‌دانیم، $f(x)$ یک تابع خطی است و $f(1) = 15/16$. $f(2) = 15/16 - f(1)$. چگونه می‌توان $f(1375)$ را محاسبه کرد؟ مقدار آن چقدر است؟

۵. همان ماشین حساب را (که تنها عمل‌های جمع و تفریق را انجام می‌دهد) در اختیار داریم. $f(x)$ تابعی است درجه دوم و می‌دانیم:

$f(1) = 5/699$, $f(2) = 5/404$, $f(3) = 5/127$. با این ماشین حساب، چگونه می‌توان $f(1985)$ را محاسبه کرد؟ چند عددی به دست می‌آید؟

۶. (الف) عدد 2^{1370} چند رقم دارد؟ استدلال کنید. (ب) عدد

چند رقم دارد؟

۷. (الف) برای محاسبه مقدار عبارت $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، که در آن a, b, c, d و x ، عدهایی مفروض اند، چند عمل حسابی باید انجام داد؟

(ب) بهمین پرسش در مورد عبارت $\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{Ax^3 + Bx + C}$ پاسخ بدهید. A, B, C, a, b, c و d ، عدهایی مفروض اند).

۸. (الف) شش ضلعی م一封عر $ABCDEF$ را از تخته سه لایی متوجهانسی بریده‌ایم و می‌دانیم:

$$AB \parallel EF \parallel DC \quad BC \parallel ED \parallel AF$$

تنها به کمک خط کش، مرکز نقل این شش ضلعی را پیدا کنید.

(ب) به کمک خط کش و پرگار، مرکز نقل چهار ضلعی محدودی را که از تخته سدلایی متوجهانس ساخته شده است، پیدا کنید.

۹. تحقیق کنید: $\pi^4 + \pi^5 > e^6$. بزرگترین عدد طبیعی n را پیدا کنید که در نا ابری $n < 10^{-10}$ صدق کند. عدهای e و π با ۱۵ رقم بعد از ممیز داده شده‌اند:

$$e = 2.718281828459045\dots$$

حل در صفحه ۴۸۵

$$\pi = 3.141592653589793\dots$$

$$\frac{N'_t(x)}{D'_t(x)} = F_{t-1}(x) \cdot G(x) + \frac{G(x)}{x^{t-1}} \quad (2)$$

قرار می‌دهیم:

$$M_t = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{N'_t(x)}{D'_t(x)}$$

البته ما می‌خواهیم M_t را پیدا کنیم، که بنایه قاعده هوپتیال برابر است با L_t . در مرحله اول نیاز داریم، که رابطه‌های زیر را بدانیم، درستی آنها به سادگی تحقیق می‌شود:

$$F_t(x) > 0 \quad t > 0 \quad 0 < x < \pi \quad (3)$$

$$G(x) > 0 \quad 0 < x < \pi \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G(x)}{x^{t-1}} = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ \frac{1}{3} & t = 2 \\ +\infty & t > 2 \end{cases} \quad (5)$$

برای اثبات درستی (5)، ابتدا حالت $t=2$ را ثابت می‌کنیم، اول قانون هوپتیال را به کار برده و سپس از نتیجه به دست آمده در حالت زیر استفاده می‌کنیم. حالت خاص (5) به ازای $t=1$ به دست می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0 \quad (6)$$

حال حاضریم که به صورت «بازگشته» پیش برویم: به ازای $1 < t \leqslant 2$ ، داریم $0 < t-1 < 1 - t$ ، بنابر (1) و (2) و (5) و (6) به دست می‌آید؛

$$L_t = M_t = 0 \quad (0 < t \leqslant 1) \quad (7)$$

به ازای $2 < t < 1$ ، داریم $1 < t-1 < 0$ ، بنابر (2)، (5)، (6) و (7) خواهیم داشت:

درستی حد (1) واضح است، با استفاده از آن به ازای $0 \leqslant t \leqslant 1$ ، حد L_t را به ازای $1 \leqslant t \leqslant 2$ پیدا خواهیم کرد.

حال فرض کنید $0 < t$ ، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F_t(x) = \frac{N_t(x)}{D_t(x)}$$

که در آن جا:

$$N_t(x) = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^t - 1 \quad D_t(x) = x^t$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} N_t(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} D_t(x) = 0$ پس:

$$L_t = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{N_t(x)}{D_t(x)}$$

میهم است،
حال:

$$\begin{aligned} \frac{N'_t(x)}{D'_t(x)} &= \frac{t \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{t-1} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}\right)}{t-1} = \\ &= \frac{\left\{ \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{t-1} - 1 + 1 \right\} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}\right)}{x^{t-1}} = \\ &= \frac{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{t-1} - 1}{x^{t-1}} \times \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x - x \cos x}{x^{t-1} \sin^2 x}, \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم:

$$G(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^{t-1} \sin^2 x}$$

خواهیم داشت:



ریاضی دانان بزرگ

آ. پ. یوشکه ویج، س. س. ۵۵می‌دوف

ژوژف فوریه Joseph Fourier

(به مناسبت یکصد و هشتاد و سه سال خاموشی او)

ژان باقیست ژوژف فودیه، یکی از نمایندگان نامدار مکتب فیزیک ریاضی «پلی‌تکنیک» است؛ و این، یک مؤسسه عالی آموزشی بود که بسیاری از دانشمندان را، به هم مر بوط کرده بود. این مکتب علمی، که اوج فعالیت‌های آن در دهه‌های نخست سده نوزدهم بود، تأثیر عمیقی بر پیشرفت‌های بعدی ریاضیات، مکانیک، فیزیک و ستاره‌شناسی داشت. لاگرانژ، هوئی، لاپلاس، لژاند، ہی‌بی، آپر، پوواسون، پونسله، کوشی، کوکولیس و بسیاری دیگر، به این مکتب تعلق داشتند که نام آن‌ها روی روش‌ها، قضیه‌ها و قانون‌های علمی گوناگونی باقی مانده است. دانشمندان مکتب پلی‌تکنیک، ارثیه پر باری در زمینه کاربرد روش‌های ریاضی در دانش‌های طبیعی و صنعت را، به آیندگان خود سپردند و، همچنین، به بررسی رابطه نزدیک کارهای علمی با مسائل آموزشی پرداختند.

مکتب پلی‌تکنیک را باید یکی از ثمرهای انقلاب کبیر فرانسه دانست، اگرچه پیشرفت‌های علمی و مهندسی پیش از آن، زمینه لازم را، برای وجود آمدن آن، فراهم کرده بودند. پیش آمد های طوفانی آن زمان، در سرنوشت کسانی که بدان مکتب وابسته بودند، تأثیری جدی داشت: پیروزی انقلاب بورژوازی ۱۷۸۹ و سقوط نظام سلطنتی، تعرض متقابل نیروهای ارتجاعی که از سال ۱۷۹۴ آغاز شد، به قدرت رسیدن ناپلئون بناپارت در سال ۱۷۹۹ و امپراتور خواندن خود در سال ۱۸۱۴، فروریختن امپراتوری (بعد از شکست و ناکامی در لشکر کشی بهروسیه) و به قدرت رسیدن دوباره

$$L_i = M_i = 0 \quad (1 < i < 2)$$

به ازای $i = 2$ ، داریم $i = 1 - i$ ، بنابر (۲)، (۵)، (۶) و (۷) نتیجه می‌شود:

$$L_2 = M_2 = \frac{1}{3}$$

به ازای $i = 2$ ، داریم $i = 1 - i$ ، بنابر (۳) و (۴) به ازای $x < \pi$ خواهیم داشت:

$$(7) \quad F_{i-1}(x) \cdot G(x) + \frac{G(x)}{x^{i-1}} > \frac{G(x)}{x^i}$$

از این نابرابری و (۲) و (۵)، به دست می‌آید:

$$L_i = M_i = +\infty \quad (i > 2)$$

به طور خلاصه:

$$\begin{cases} 0 & i < 2 \\ \frac{1}{3} & i = 2 \\ +\infty & i > 2 \end{cases}$$

و مشاهده می‌کنیم، که سه مقدار به دست آمده برای L_i ، وقتی که $i = 1, 2, 3$ باشد را نشان می‌دهند.

ترجمه ابراهیم عادل

The College Mathematics Journal 1990,

Vol 21 - No. 3

خانواده بودند که توانست تا ۱۵ سال دوام کند و، سپس، انقلاب تازه ۱۸۳۰. وهمه این‌ها، بزندگی فودیه تأثیر گذاشت.

میل بسیاری از دانشمندان مکتب «پلی تکنیک»، فودیه هم متعلق به «طبقه سوم» جامعه بود. او در ۲۱ مارس سال ۱۷۶۸، درخانواده یک خیاط فقیر، در شهر آوسر (Auxerre) ۱۷۰ کیلومتری جنوب خاوری پاریس) به دنیا آمد. در نسل‌گی زندگی خود، هم پدر و هم مادر خود را ازدست داد. یتیم را به مدرسه نظامی فرستادند که راهبان «فرقه بندیکت» آن را اداره می‌کردند. علاقه و استعداد غیرعادی کودک برياضيات نمایان شد و آرزوی او این بود که مهندس نظامی بشود. لزاند که بازرس مدرسه بود، تلاش کرد تا به این جوان مستعد کمک کند، ولی وزیر، لزاند را برای آموختش در آموزشگاه توپخانه نظامی در نظر گرفت. فودیه پولی نداشت، هیچ گونه انتخاری هم از جانب دربار نصیب خانواده انشده بود؛ تنها راه او این بود که به خدمت کلیسا درآید و، احتمالاً، معلم بشود.

ولی انقلاب، راه دیگری را در بر ای فودیه گشود. در سال ۱۷۸۹ به پاریس رفت و کار خود را در زمینه حل عددی معادله‌های جبری (بادجه‌ای دلخواه) به فرنگستان علوم تقدیم کرد که، البته، در جریان پیش‌آمده‌ای سهمگین آن زمان، گم شد. فودیه به «اوسر» بازگشت و در همان مدرسه‌ای که درس خوانده بود، معلمی را آغاز کرد. در همین زمان بود که فودیه به یکی از فعالان سیاسی تبدیل شده بود. فودیه نسبت به راکوبین‌ها موضعی معتدل داشت و، به همین خاطر، بازداشت شد. با سقوط «وبسپیر در ژوئیه سال ۱۷۹۴»، اورا از زندان آزاد کردند. او به «اکول نرمال» وارد شد که، در آن زمان، هدف تربیت معلم را دنبال می‌کرد، چراکه دستگاه آموزش مردمی، از نظر معلم کمبود بسیار داشت. برای آموختش برنامه‌ای که سطح علمی بالایی داشت، از بهترین دانشمندان دعوت کرده بودند.

عمر «اکول نرمال» چندان دوامی نداشت (البته، بعدها دوباره آغاز به کار کرد)، ولی فودیه توانست، در همان مدت کوتاه، نظر هویت، لاگرانژ و لاپلاس را به خود جلب کند. وقتی که در سال ۱۷۹۵، مدرسه پلی تکنیک برای آماده کردن مهندسان، و به خصوص مهندسان نظامی، آغاز به کار کرد، از فودیه

به عنوان دستیار لاگرانژ و هویت دعوت به کار گردند. او در ضمن، در مینیارهای ریاضی که، برای تحصیلن بار، در این جا تشکیل می‌شد شرکتی فعال داشت. فودیه، برای بار دوم، به مدت کوتاهی بازداشت شد، ولی این بار، به خاطر حمایت گذشته او از ژاکوبین‌ها. ریاضی دانان نامی و با نفوذ، به یاری او شناختند و اورا نجات دادند. چندی بعد، در سال ۱۷۹۸، هویت که به ناپلئون نزدیک بود، فودیه را به شرکت در اردوکشی به مصر تشویق کرد. ناپلئون تصمیم گرفت، مدتی طولانی در مصر بماند. انتیتوی مصر، طبق نمونه فرانسوی آن، در قاهره، تأسیس شد که، کار اصلی آن، بررسی همه جانبه کشور بود: ذخیره‌های طبیعی، آمار جمعیت، گذشته تاریخی، یادگارهای هنری وغیره. هویت در راس انتیتو و فودیه دیر آن بود. انتیتوی مصر، قریب چهار سال دایر بود و، در همین مدت، کارهای بسیاری انجام داد و چند جلد کتاب منتشر ویا برای چاپ آماده کرد. فودیه، به صورتی فعال، در پژوهش‌های علمی مختلف — که گاه به کلی از ریاضیات دور بودند — شرکت داشت. مثلاً، بعدها در سال ۱۸۰۹، مقدمه تاریخی مفصلی، بر کتاب «توصیف مصر» که به زبان فرانسه منتشر شد، نوشت. به جز این‌ها، فودیه خود را همچون یک مدیر لایق نشان داد و، در کنار کارهای علمی، وظیفه‌های سیاسی خود را هم، با مهارت انجام می‌داد. واین، در سرنوشت آینده او مؤثر بود.

می‌دانیم که ماجراهی ناپلئون مواجه با ناکامی و شکست شد. خود او در سال ۱۷۹۹ مخفیانه مصر را ترک کرد و ارتش فرانسه‌هم، در تاستان ۱۸۰۱، ناچار به تخلیه مصر شد؛ فودیه هم، همراه با ارتش، به فرانسه بازگشت. او می‌خواست به کار در مدرسه پلی تکنیک برگردد، ولی در ژانویه سال ۱۸۰۲، ناپلئون اورا، به عنوان والی «ایزر» (Isère)، که مرکز آن در «گرنوبل» بود، برگزید. فودیه، ۱۲ سال تمام، در این پست خدمت کرد. در آن زمان، کم نبودند ریاضی دانانی که در فرانسه، مقام‌های بالای دولتی را اشغال کرده بودند. با آن که فودیه را، برخلاف میل خودش، به این مأموریت فرستاده بودند، در کارهای خود جدی و با وجودان بود، زمینه‌ای گسترش با تلاقی را خشک می‌کرد، بر ساختن راه‌ها نظارت داشت، با گروه‌های بانفوذ محلی صحبت می‌کرد و آن‌ها را با هم آشتنی می‌داد... در ساعت‌هایی که فراغت

می یافت، پژوهش‌های علمی در زمینه جبر را دنبال و روی نظریه گرما—که نظریه تازه‌ای بود—به طور جدی کار می‌کرد، نتیجه گیری‌های اصلی خود را درباره نظریه ریاضی رسانایی گرما، در سال ۱۸۵۷ به دست آورد، ولی، همان‌طور که خواهیم دید، برای چاپ آن‌ها، سال‌های درازی را انتظار کشید.

سیاست توسعه‌طلبی ناپلئون، فرانسرا، به تدریج، از دوران موقیعت‌های نسبی، به شکست کامل نظامی کشاند. بعداز شکست در جنگ با روسیه، ناچار شد از تخت سلطنت صرف نظر کند و، در نتیجه، لوئی هیجدهم، از خانواده بوربون‌ها، جای اورا گرفت. در این‌ضمن، فودیه، شغل دولتی خود را حفظ کرد. ناپلئون در تلاش خود برای رسیدن دوباره به حکومت، و در جنوب فرانسه پیاده شد و به سرعت به طرف پاریس بدرآه افتاد که، در ضمن، مسیر او از گرونوبل می‌گذشت. فوریه کوشید، همراه با اطرافیان خود، خود را از بازی‌های سیاسی کنار بکشد. گرونوبل را ترک کرد و به طرف لیون رفت. در آن‌جا، فرمانی از طرف برادر شاه گرفاده تو (که بعد‌ها، به عنوان شارل دهم، شاه شد) به او رسید که باید بلا فاصله به گرونوبل بر گردد. گروهی از ارش ناپلئون اورا در راه مستگیر کردند و به ستاد ناپلئون بردنند. ناپلئون، به صورتی قاطع ازاو خواست که خدمت خود را ادامه دهد و اداره لیون را به او داد. فوریه ناچار به تسلیم شد، اگرچه مبارزه با اتحاد اتریش، انگلیس و روسیه را هم اجتناب ناپذیر می‌دانست. ولی در اول ماه مه، یک‌ماه و نیم پیش از آن که کار ناپلئون در شکست واترلو یکسره شود و حکومت «صدر روزه» او به پایان برسد، فوریه به علت عدم فعالیت جدی خود، از کار بر کنار شد. این پیش‌آمد، تاحدی زندگی آینده اورا، آرام‌تر کرد، اگرچه بعداز تجدید دوباره سلطنت بوربون‌ها، دچار ناراحتی‌هایی شد.

فودیه به پاریس رفت و با همان حقوق بازنشستگی خود، زندگی کامل اساده‌ای را آغاز کرد. سپس، مدیر دفتر آمار مرکز «سن» شد. تجریه‌های که در مصر به دست آورده بود، در کار آمار، به او کمک کرد و او را بالا برد. در سال ۱۸۱۶، فرهنگستان علوم پاریس، فودیه را به عضویت خود انتخاب کرد. لوئی هیجدهم، حکم را لغو کرد؛ ولی بعداز چندی، خشم او فرونشست. گذشته سیاسی اورا بخشیدند و حتی عنوان بارونی را، که ناپلئون به او داده

بود، دوباره به او باز گرداندند. در ۱۲ مه ۱۸۱۷، یکبار دیگر، فودیه را به عضویت فرهنگستان علوم انتخاب کردند که، این‌بار، مورد تایید قرار گرفت او خیلی زود، به یکی از افراد با نفوذ و پراحتبار فرهنگستان تبدیل و در نوامبر سال ۱۸۲۲، به عنوان دبیر مادام‌العمر فرهنگستان انتخاب شد. در همین سال، کتاب «نظریه تحلیلی گرما» که سال‌ها پیش تهیه کرده بود، منتشر شد و نویسنده آن را در سراسر جهان معروف کرد.

عنوان دبیری مادام‌العمر فرهنگستان را، برای مدت کوتاهی، از او پس گرفتند، ولی فودیه، کارهای علمی خود را در زمینه ریاضیات و فیزیک، همچنان ادامه داد. از جمله، کار بزرگ وسنجنی را درباره جبر، برای چاپ آماده کرد که بعداز مرگ او و در سال ۱۸۳۱ با عنوان «آنالیز معادله‌های معین — بخش اول» منتشر شد. فودیه، خیلی از کارهای خود را نتوانست تمام کند؛ در بایگانی فرهنگستان علوم پاریس، دست نویس‌های فراوانی از او نگه‌داری می‌شود که تقریباً همه آن‌ها ناتمام مانده‌اند؛ نظریه نابرابری‌ها، نظریه احتمال، نظریه توازنی، برخی از درس‌هایی که در مدرسه پلی‌تکنیک داده شده است وغیره.

دلیل ناتمام ماندن کارهای فوریه، تنها به خاطر مسئولیت سنگین دبیری فرهنگستان بود؛ فودیه ازیماری‌هایی رنج می‌برد که از همان سال‌های اقامت در مصر، گرفتار آن‌ها بود. به توصیه‌های پزشک عمل نمی‌کرد، در ساختمانی خفه و فقیرانه زندگی می‌کرد و، به خاطر ترس از روماتیسم، همیشه لباس گرم می‌پوشید. به حالت خنگی خود، که روز به روز شدت می‌گرفت، توجهی نداشت. چهارم ماه مه سال ۱۸۳۵، ضمن پایین آمدن از پلکان، زمین خورد، در شانزدهم مه، حالت بهم خورد و در همان روز از دنیا رفت.

خلاصت کار بردهی پژوهش‌های فودیه، در هر دو زمینه کارهای او—جبر و نظریه گرما—نمایان است. همان‌طور که قبل از گفتیم، از جوانی به‌جزیره و به خصوص حل عددی معادله‌ها و جدا کردن ریشه‌ها، علاقه‌مند بود، دکارت و نیوتن هم، درباره تعیین تعداد ریشه‌های مثبت و منفی یک معادله و، همچنین، ریشه‌های مختلف آن، کار کرده بودند. هنوز هم، در دوره عمومی جبر، قضیه

و دیگران دنبال شد. ساختن نظریه ریاضی، هدف ایده‌آلی، برای بررسی پدیده‌های فیزیکی بود. طرح چنین نظریه‌ای را، در مکانیک، لزاندر در کتاب «مکانیک تحلیلی» خود ریخت که به گفته خودش «مکانیک را به صورت بخشی از آنالیز» درمی‌آورد.

یکی از مساله‌های اصلی فیزیک آغاز سده نوزدهم، مسأله بررسی ریاضی روند انتقال گرما بود. مطالعه موضوع‌های مختلف مربوط به گرما، در جریان سده‌های هفدهم و هیجدهم، علاقه روزافزون داشتماندان را، بیش از همه در رابطه با کاربرد ارزی گرمایی در صنعت، جلب می‌کرد. داشتمان زیادی، مثل ای. نیوتون، د. بونولی و. ۹. د. لومونوفوف، طبیعت گرمای را مورد بررسی قراردادند. ضمن آزمایش‌های بسیار، نظریه‌های مختلفی عرضه شده بود. در سال‌های ۱۷۶۲، اولر، به این اعتقاد رسید که، مسأله مربوط به تغییر متوالی درجه حرارت دستگاهی که جسم‌ها را بهم مربوط می‌کند، مورد بحث قرارداد. در سال ۱۷۶۴، اولر، به این اعتقاد رسید که، این مسأله را، می‌توان به کمک معادله‌های با مشتق‌های جزئی حل کرد. ولی ۱۵ سال طول کشید تا، همراه با موفقیت خود فیزیک، فودیه توانست نظریه ریاضی رسانائی گرمای را بازسازد. بعدها، در مقدمه‌ای که بر «نظریه تحلیلی گرمای» نوشت، گفت: «اصول این نظریه را روی نمونه مکانیک واژ تعداد اندکی حقیقت‌های اصلی بیرون آوردم که، ریاضی دانان، علت‌های آن‌هارا جست‌وجو نکرده بودند، اگرچه در مشاهده‌های عادی و آزمایش‌های مکرر، با آن‌ها برخورد داشتند».

فودیه، قبل از هر چیز، معادله انتشار گرمای را در جسم سخت یکنواخت به دست آورد (که اساس نظریه اورا تشکیل می‌داد):

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

که در آن (x, y, z, t) درجه حرارت در نقطه (z, y, x) و در لحظه t ؛ و a^2 عددی ثابت است. به این ترتیب، مسأله فیزیکی، منجر به انتگرال گیری این معادله شد، البته، با توجه به شرط‌های مرزی (شرط‌های حرارتی در سطح

دکارت درباره تعداد ریشه‌های مثبت و ریشه‌های منفی، با توجه به تغییر یا عدم تغییر علامت ضریب‌های معادله مفروض، وجود دارد. فودیه، در درس‌های خود در سال ۱۷۹۵، قضیه‌ای را درباره تعداد ریشه‌های حقیقی در یک بازه مفروض، ثابت کرد. همین قضیه را ف. بودان، پژشک فرانسوی هم، بدون اطلاع از کار فودیه، ثابت کرد و، به همین جهت، اغلب این قضیه را، به نام هردوی آن‌ها می‌نامند. ولی، بدون هیچ‌شکی، حق تقدیم با فودیه است، زیرا بودان، آن را در سال ۱۸۵۷ پیدا کرد. قضیه کلی تر مر بوط به جدا کردن ریشه‌های یک معادله جبری را مش. ستود (که معمولاً اورا، به غلط، شورم می‌نامند)، ریاضی دان سویسی مقیم پاریس، در سال ۱۸۲۹ به دست آورد.

از بین نتیجه گیری‌های دیگر فودیه، در زمینه ریاضیات محاسبه‌ای، به یکی دیگر اشاره می‌کنیم. روشی که نیوتون برای محاسبه تقریبی ریشه‌های معادله پیشنهاد کرده بود، همیشه منجر به دنباله‌ای از تقریب‌ها نمی‌شد که به سمت ریشه حقیقی موردنظر، میل کند. فودیه شرطی را پیدا کرد که، به ازای آن، می‌تسوی با روش نیوتون به نتیجه رسید. کتاب «آنالیز معادله‌های معین» فودیه، در زمان خود، بسیار مشهور بود. مثلاً، همین کتاب، ملاکی بود که بسیاری از ریاضی دانان روسیه، مثل ن. ای. لباقوسکی، و. ۹. اوستروگرادسکی، ۱. ای. سوموف و دیگران، مورد استفاده قراردادند. پ. ل. چهبیشف در نخستین کار ریاضی خود، زیر عنوان «محاسبه ریشه‌های معادله» در سال ۱۸۴۱ (او تازه دانشگاه مسکو را تمام کرده بود)، می‌نویسد: «بهترین روشی که در زمان ما، برای محاسبه ریشه‌ها وجود دارد، روش تقریب خطی است، که به وسیله نیوتون ابداع و به وسیله فودیه تصحیح شد». سپس، چهبیشف، روش ابتکاری خودش را، با روش نیوتون - فودیه مقایسه می‌کند و بد توضیح برتری‌های روش خودش می‌پردازد.

موفقیت ریاضی عمده فودیه، به معادله‌های فیزیک، ریاضی و به معادله‌های دیفرانسیلی با مشتق‌های جزئی مربوط می‌شود. آغاز این شاخه مهم آنالیز ریاضی را، باید در بررسی‌های مربوط به آنژرو دینامیک و هیدرودینامیک و همچنین، نظریه نوسان سیم دانست که به وسیله دالاهیر در سال‌های ۱۷۶۰-۱۷۶۱ هیجدهم آغاز شد و با کارهای ل. اولر، د. بونولی، ڈ. لاگرانژ، پ. م. لاپلاس

انتشار این کتاب، بر روند فیزیک ریاضی، اثری جدی داشت. اندیشه‌های او، چه در کارهای ریاضی‌دانان نسل گذشته (مثل لابلاس) و چه در بین چووانان، به سرعت پخش شد و راه تکاملی پیمود: در سال‌های ۲۰ سده نوزدهم، گروهی از با استعدادترین شاگردان، دور فودیه جمیع شده بودند؛ این‌ها عبارت بودند از پ. لهن، دیویکله آلمانی، مش. ستودم سویسی، اوستروگرادسکی روسی و کمی بعد، ڈ. لیوویل، لامه و ڈ. لوآمل فرانسوی.

و. آ. ستکلوف، که خود در تکامل و تعمیم بعدی روش فودیه (به خصوص در نظریه رسانائی گرما) سهم زیادی دارد، در سال ۱۹۵۱ نوشت: «خود فودیه و همچنین پوواسون حالت‌های مربوط به سرد کردن جسم سخت را مطالعه کردن: کره، استوانه، مکعب و مکعب مستطیل. فودیه در همه این حالت‌ها، از یک روش استفاده می‌کرد، روشنی که به نام فودیه مشهور است، ولی در باره تعمیم روش خود، کار زیادی نکرد. دست کم، در پژوهش‌های او، چنین چیزی دیده نمی‌شود و گمان نمی‌کنم اشتباه کنم که، روش فودیه، به صورت کلی و عام خود، به وسیله اوستروگرادسکی و، سپس، در سال ۱۸۲۹، لامه و دوامه‌له مورد بررسی قرار گرفت».

در اینجا، و. آ. ستکلوف به «یادداشتی درباره نظریه گرما» اثر اوستروگرادسکی نظر دارد که در ۵ نوامبر ۱۸۲۸ تهیه و در سال ۱۸۳۱ چاپ شد. چنین بود برخورد نخستین، با روش فودیه که هنوز هم، یکی از روش‌های اساسی فیزیک ریاضی به شمار می‌رود.

تنها فیزیک ریاضی نبود که تحت تأثیر نیر و مند «نظریه تحلیلی گرما» قرار گرفت. در این کتاب، مسائلهایی وجود داشت که به شاخه‌های گوناگون ریاضیات مربوط می‌شد و اساسی‌ترین آن‌ها، یعنی نظریه رشته‌های مثلثاتی، به سرعت به صورت نظامی محکم در ریاضیات درآمد و انگیزه‌ای برای تکامل تمامی آنالیز ریاضی شد.

قبل از همه، لازم بود شرط‌هایی را پیدا کنند که، با رعایت آن‌ها، بتوان «تابع دلخواه» را به رشته‌ای که به سرعت نام (شته فودیه را به خود گرفت،

جسم) و شرط‌های اولیه (انتشار درجه حرارت در جسم، در لحظه اولیه). فودیه، برای حل این مساله، از روش مشهوری استفاده کرد که، بعدها، به زام (وش فودیه معروف شد).

اگر بخواهیم دقیق‌تر گفته باشیم، روش فودیه، یا به اصطلاح روش جدا کردن متغیرهارا، لاپرات آورده، ولی او تنها اندیشه آن را طرح کرده بود. بخش اساسی این روش، به سطح کلاس گسترده‌ای از تابع‌های $(x)^f$ به یک رشته نامتناهی، قبل از همه، به رشته مثلثاتی به صورت زیر است:

$$(2) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

در واقع، د. برونلی هم، امکان بسط «هر تابع دلخواه» را به صورت (۲)، با تکیه بر ملاحظه‌های فیزیکی (در مورد نوسان‌ها)، مطرح کرده بود، ولی نه خود او و نه هم عصران او توانستند راهی برای تعیین ضریب‌های بسط پیدا کنند. گذشته‌این، دالامپ و اولر به امکان بسط «هر تابع دلخواه» اختراض داشتند که همه ریاضی‌دانان آن‌زمان، به جز د. برونلی با آن‌ها هم صدا بودند. ڈ. لگراٹ، تا پایان زندگی خود، بر درستی این اعتراض‌ها، تاکید می‌کرد.

فودیه، به صورتی کاملاً ابتکاری، دستور بسط (۲) را نتیجه گرفت و امکان تبدیل «یک تابع دلخواه» را به رشته مثلثاتی، در عمل نشان داد؛ تنها ایرادی که به فودیه می‌توان گرفت، در این است که اصطلاح «هر تابع دلخواه» را به کاربرده است. او توانست پارادوکس‌هایی راهم، که به اعتقاد مخالفین د. برونلی، در اندیشه اصلی او وجود داشت، حل کند. فودیه، نتیجه گیری‌های خود را، در اثری که در سال ۱۸۰۷ از طرف فرهنگستان علوم پاریس عرضه شد، طرح کرده بود. با وجود موافقت لابلاس، هوژ و لاکردو، این اثر به خاطر مخالفت لگراٹ چاپ نشد. وقتی که در سال ۱۸۱۵، فرهنگستان علوم پاریس مساله رسانائی گرما را به مسابقه گذاشت، فودیه کار خود را که در سال ۱۸۰۷ انجام داده بود عرضه کرد. و با آن که در سال بعد، جایزه را برد، باز هم به چاپ نرسید. بعدها، فودیه دوباره نتیجه گیری‌های خود را، به طور كامل، در «نظریه تحلیلی گرما» طرح کرد (۱۸۲۲).

ای. فردهولم پیدا کرد؛ نظریه کلی این دترمینانها را آ. چوانکاره در سال های ۱۸۸۴-۱۸۸۶ ساخت. این راهم بادآوری کنیم، به برگت همین کتاب بود که نماد انتگرال معین در فاصله a تا b ، به شکل امروزی آن

$$(1) \int_a^b f(x) dx$$

مورد استفاده قرار گرفت، اگرچه این نماد دریکی از مقادلهای فودیه در سال ۱۸۱۷ می‌آمده بود.

«نظریه تحلیلی گرما» اثر فودیه، کتابی کاملاً اختصاصی است و شامل مساله‌های زیادی از فیزیک است. با وجود این، آن را باید از نمونه کتاب‌هایی دانست که در طول قریب دو سده بعداز خود، تأثیر فوق العاده‌ای در تکامل ریاضیات داشته است. این تأثیر، هم بر ریاضیات کاربردی بود و هم بر شاخه‌های گوناگون ریاضیات انتزاعی. در پایان این مقاله، بی‌مناسبت نیست که جمله‌ای از مقدمه کتاب کلاسیک فودیه را بیاوریم: «مطالعه عمیق طبیعت، سرچشمه‌ای روشن است. با رساله (یمان، شکوفائی سریع نظریه رشته‌های مثلثاتی و در رابطه با آن، تمامی نظریه تابع‌های با متغیر حقیقی و، همچنین، نظریه مجموعه‌ها، آغاز شد (بی‌فایده نیست، به این نکته اشاره کنیم که کانتور)، نخستین گام‌ها را در نظریه جدید مجموعه‌ها، در رابطه با مطالعه مساله منحصر بودن بسط تابع به رشته مثلثاتی، برداشت). ریاضی دانان بزرگ پایان سده نوزدهم و سده بیستم، گام‌های جدی در شکل گیری نظریه تابع‌ها برداشتند. در این زمینه، نقش بزرگی به عهده ریاضی دانان روسی و شوروی مکتب مسکو بود که به وسیله د. ف. یه‌گودوف و ن. ن. لوزین بیان گذاشته شد (رساله دکترای لوزین، تحت عنوان «انتگرال و رشته‌های مثلثاتی» تهیه شده بود).

ترجمه پرویز شهریاری

خاصیتی از مثلث

مثلث ABC مفروض است. مجموعه نقطه‌های O از صفحه مثلث را طوری پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$(|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2)^2 = 16(S_{OAB}^2 + S_{OBC}^2 + S_{OCA}^2)$$

طول ضلع سوم مثلث

در مثلث ABC می‌دانیم $AB = 4$ و $BC = 5$ و $AC = 6$. اگر زاویه B از 120° درجه بزرگتر باشد، طول ضلع AC را پیدا کنید.

حل در صفحه ۵۵۵

تبديل کنند. برای این منظور، باید مفهوم کاملاً گسترده‌تر تابع، به عنوان نگاشت، ریشه می‌گرفت. این مفهوم در تو شته‌های او لرهم دیده می‌شود و در واقع، فودیه‌هم از آن استفاده می‌کرد، ولی تنظیم روشن و قطعی آن، به وسیله لباچوسکی (۱۸۳۶) و له‌ژن دیویکله (۱۸۳۷) انجام گرفت. همین دو داشمند قابل بسط به رشته خودیه باشد، پیدا کردند. شرط‌های دیویکله بیشتر مورد استقبال قرار گرفتند و آن‌ها را در هر کتاب آنالیز ریاضی می‌توان دید. بعد، باید از رساله بسیار جالب دکترای ب. (یمان، ۱۸۵۳)، چاپ در سال (۱۸۶۷) نام برد که درباره آن، تنها به یک نکته اشاره می‌کنیم: ضریب‌های رشته فودیه با انتگرال‌های معینی بیان می‌شوند و حجم گروه تابع‌هایی که قابل بسط به رشته فودیه هستند، به تعریف مفهوم انتگرال مربوط می‌شود. برای تابع‌های پیوسته آن، کامل نیست) به وسیله کوشی و در سال ۱۸۲۳ داده شد. (یمان مفهوم گسترده‌تر انتگرال را مطرح کرد که امروز، برای هر داشجوی رشته ریاضی، روش است. با رساله (یمان، شکوفائی سریع نظریه رشته‌های مثلثاتی و در رابطه با آن، تمامی نظریه تابع‌های با متغیر حقیقی و، همچنین، نظریه مجموعه‌ها، آغاز شد (بی‌فایده نیست، به این نکته اشاره کنیم که کانتور)، نخستین گام‌ها را در نظریه جدید مجموعه‌ها، در رابطه با مطالعه مساله منحصر بودن بسط تابع به رشته مثلثاتی، برداشت). ریاضی دانان بزرگ پایان سده نوزدهم و سده بیستم، گام‌های جدی در شکل گیری نظریه تابع‌ها برداشتند. در این زمینه، نقش بزرگی به عهده ریاضی دانان روسی و شوروی مکتب مسکو بود که به وسیله د. ف. یه‌گودوف و ن. ن. لوزین بیان گذاشته شد (رساله دکترای لوزین، تحت عنوان «انتگرال و رشته‌های مثلثاتی» تهیه شده بود).

در «نظریه تحلیلی گرما»، جوانه‌هایی از دیگر نظریه‌های مهم‌هم دیده می‌شود. مثلاً، دریکی از دونتیجه گیری او، برای «خریب‌های فودیه»، مؤلف از دترمینان نامتناهی استفاده می‌کند که، بعد‌ها، کار برد خود را در کارهای ج. او. هیل در اخترشناسی، و در نظریه معادله‌های انتگرالی

$$X^n + pm^{n-1}X + qn = 0$$

در اینجا بدیهی است که برای تبدیل معادله (۱) به معادله منظور باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} p^{n-1}m = -1 \\ qm^n = -A \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt[n-1]{V-p}} \quad , \quad A = \frac{q}{p\sqrt[n-1]{V-p}}$$

اکنون با قراردادن مقادیر A ، m و A در ریشهٔ معادله (۱) (برای توانهای فرد معادله (۱)) چنین است:

$$x = \sqrt[n-1]{\frac{q}{p\sqrt[n-1]{V-p}}} + \sqrt[n]{\frac{q}{p\sqrt[n-1]{V-p}}} + \sqrt[n]{\frac{q}{p\sqrt[n-1]{V-p}}} + \dots$$

لازم به توضیح است که برای توانهای زوج لازم است که $q > 0$ باشد.
مثال) یک ریشهٔ حقیقی معادله $x^5 + px + q = 0$ چنین است.

اگر $p > 0$ باشد:

$$x = -\sqrt[5]{p} \sqrt[5]{\frac{q}{p\sqrt[5]{V-p}}} - \sqrt[5]{\frac{q}{p\sqrt[5]{V-p}}} - \sqrt[5]{\frac{q}{p\sqrt[5]{V-p}}} - \dots$$

اگر $p < 0$ باشد:

$$= x \sqrt[5]{-p} \sqrt[5]{\frac{q}{p\sqrt[5]{-p}}} + \sqrt[5]{\frac{q}{p\sqrt[5]{-p}}} + \sqrt[5]{\frac{q}{p\sqrt[5]{-p}}} + \dots$$

نتیجهٔ بسیار مهم: ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ پنجم $x^5 + px + q = 0$ بوسیلهٔ بی‌نهایت رادیکال قابل بیان است.

۴. به کمک کسرهای متواالی
(وش حل): ابتدا معادله (۱) را تبدیل به معادلهٔ زیر می‌کنیم. (برای

حل معادله درجه n

$$x^n + px + q = 0 \quad (1)$$

۱. باروش رادیکال‌های نامتناهی

بطور کلی یک ریشهٔ جبری (حدی) معادله (۱) در حالت $p > 0$ به شکل زیر می‌باشد. (برای توانهای زوج معادله (۱) لازم است $q > 0$ باشد):

$$x = \sqrt[n-1]{\frac{q}{p\sqrt[n-1]{V-p}}} + \sqrt[n]{\frac{q}{p\sqrt[n-1]{V-p}}} + \sqrt[n]{\frac{q}{p\sqrt[n-1]{V-p}}} + \dots \quad (2)$$

بطور مشابه ثابت می‌شود که یک ریشهٔ جبری (حدی) معادله (۱) در حالت $p < 0$ به شکل زیر می‌باشد (لازم به توضیح است که ریشهٔ زیر برای توانهای فرد معادله (۱) برقرار است. برای توانهای زوج معادله (۱) کافی است $x = A - \sqrt[n-1]{p}$ تبدیل کنیم و داشته باشیم $q > 0$ ، که در اینصورت جواب (۲) ریشهٔ حقیقی معادله (۱) است).

$$x = -\sqrt[n-1]{\frac{q}{p\sqrt[n-1]{V-p}}} - \sqrt[n]{\frac{q}{p\sqrt[n-1]{V-p}}} - \sqrt[n]{\frac{q}{p\sqrt[n-1]{V-p}}} - \dots$$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که $p < 0$ و $A \neq 0$ باشد. بنابراین اگر معادله (۱) را به معادله $X^n = A + X$ تبدیل کنیم یک ریشهٔ معادله (۱) به شکل زیر است، یعنی:

$$X = \sqrt[n]{A + \sqrt[n]{A + \sqrt[n]{A + \dots}}}$$

برای این منظور با فرض $X = m^{-1}X$ معادله (۱) چنین می‌شود:

زیر چنین می شود:

$$\frac{a \times {}^{n-1}(\text{مخرج کسر قبل})}{{}^{n-1}(\text{مخرج کسر قبل} + \text{صورت کسر قبل})}$$

$$\frac{a}{(1+a)^{n-1}} \text{ و } \frac{a(1+a)^{(n-1)^2}}{[a+(1+a)^{n-1}]^{n-1}}$$

$$\dots \text{ و } \frac{a[a+(1+a)^{n-1}]^{(n-1)^2}}{[a(1+a)^{(n-1)^2}+[a+(1+a)^{n-1}]^{n-1}]^{n-1}} \quad (6)$$

اولین کسر رشته (6) یعنی $\frac{a}{(1+a)}$ را کسر مولد می نامیم.

به عنوان مثال دشته کسرهای (6) برای معادلات درجه ۲ و ۳ معادله (1) چنین می باشد.

برای $n=2$:

$$\frac{a}{1+a}, \frac{a(1+a)}{a+(1+a)}, \frac{a(2a+1)}{a+(1+a)^2} \text{ و}$$

$$\frac{a^2+a(1+a)^2}{(1+a)^2+2a(1+a)} \text{ و...}$$

برای $n=3$:

$$\frac{a}{(1+a)^2}, \frac{a(1+a)^4}{[a+(1+a)^2]^2},$$

$$\dots \text{ و } \frac{a[a+(1+a)^2]^4}{[a(1+a)^4+(a+(1+a)^2)^2]^2}$$

مثال: معادله درجه سوم $0 = 1 - 3x + x^3$ را حل کنید.

حل: ابتدا تبدیل $x = \frac{1}{y}$ را انجام می دهیم، که پس از تبدیل به معادله مقابله می رسیم:

رسیدن بمعادله زیر کافی است تبدیل $\frac{q}{py} - x$ را انجام دهیم و فرض

$$\text{کنیم: } a = \frac{(-q)^{n-1}}{p^n}$$

$$y^n - y^{n-1} - a = 0 \quad (2)$$

حال برای حل معادله (2) بdroosh زیر عمل می کنیم:

$$y^n = y^{n-1} + a \Rightarrow y = 1 + \frac{a}{y^{n-1}}$$

طرفین معادله فوق را به توان $(n-1)$ می رسانیم، بنابراین داریم:

$$y^{n-1} = \left(1 + \frac{a}{y^{n-1}}\right)^{n-1} \quad (3)$$

بدیهی است معادله (3) را می توان به شکل سلسله کسرهای مسلسل درونی زیر نوشت:

$$y^{n-1} = \left(1 + \frac{a}{\left(1 + \frac{a}{\left(1 + \frac{a}{\left(1 + \dots\right)^{n-1}}\right)^{n-1}}\right)^{n-1}}\right)^{n-1} \quad (4)$$

حال در اینجا برای بدست آوردن لز کافی است از طرفین معادله (4) ریشه $(n-1)$ ام بگیریم، یعنی:

$$y = 1 + \frac{a}{\left(1 + \frac{a}{\left(1 + \dots\right)^{n-1}}\right)^{n-1}}$$

اینک در اینجا با توجه به رابطه (5) سلسله کسرهای (5) تحويل به رشته کسرهای زیر می شود که برای محاسبه لز کافی است به هر یک از کسرهای رشته زیر که هر کدام از کسر ماقبل خود نتیجه شده است یک واحد اضافه کنیم تا با تقریب مطلوب بدست آید. لازم به توضیح است که هر یک از کسرهای رشته

$$\begin{cases} pm^3 = -1 \\ qm^3 = -A \end{cases} \Rightarrow m = \frac{\pm 1}{\sqrt{-p}} \quad \text{و} \quad A = \frac{\pm q}{p\sqrt{-p}}$$

اگر با قراردادن $m = \frac{1}{\sqrt{-p}}$ و $A = \frac{q}{p\sqrt{-p}}$ ریشه معادله کانونیک

محاسبه می‌گردد یعنی یک ریشه حقیقی آن چنین است.

$$x_1 = \sqrt{-p} \sqrt[3]{\frac{q}{p\sqrt{-p}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{p\sqrt{-p}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{p\sqrt{-p}}} + \dots$$

بدیهی است که دو ریشه دیگر در حالت $\Delta < 0$ حقیقی می‌باشند که دو ریشه حقیقی متمایز از معادله درجه دوم زیر محاسبه می‌شوند.

$$X^3 + x_1 X + (x_1^2 + p) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-x_1 \pm \sqrt{-4p - 3x_1^2}}{2}$$

مثال: یک ریشه حقیقی معادله درجه سوم $0 = 3x^3 - 3x + 1$ با تقریب

$$\frac{1}{100000} \quad \text{بدست آورید.}$$

حل: با توجه به ریشه جدی معادله درجه سوم کانونیک در حالت $\Delta < 0$

نتیجه می‌شود:

$$X = \sqrt[3]{-\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{V}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{V}{9}} + \dots$$

پس از ۱۲ مرتبه ریشگی x با تقریب $0/00001$ چنین می‌شود:
 $-1/87938415 = x$ زیرا با قراردادن آن در معادله نتیجه می‌شود:
 $0 = 1 + 5/63814 + 5/63815 + \dots$ که با تقریب $1/00001$ اضافی
 مقدار x صحیح است، با اضافه کردن مرتبه ریشگی می‌توان معادله را با هر

$$a = \frac{-1}{27} \Leftarrow y^3 - y^2 + \frac{1}{27} = 0$$

رشته مربوط به معادله فوق چنین است: $0 = 5/040 - 5/0399$ با
توجه به عدد دوم رشته، یک چنین است:

$$y = 1 - 0/040 \Rightarrow x = 0/3473$$

مثال: ریشه‌های جبری معادله درجه سوم $0 = px + q = 4p^3 + 27q^2$ ($\Delta = 4p^3 + 27q^2$) ممکن باشد. بطور کلی اگر $p > 0$ یک ریشه معادله کانونیک به شکل زیر می‌باشد.

$$x = \sqrt{-p} \sqrt[3]{\frac{q}{p\sqrt{-p}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{p\sqrt{-p}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{p\sqrt{-p}}} + \dots$$

بطور مشاهده می‌توان ثابت کرد که اگر $p > 0$ باشد یک ریشه معادله کانونیک به شکل زیر می‌باشد.

$$x = -\sqrt{p} \sqrt[3]{\frac{q}{p\sqrt{p}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{p\sqrt{p}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{p\sqrt{p}}} - \dots$$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که $p > 0$ باشد. بنابراین اگر معادله $0 = x^3 + px + q = 0$ را به معادله $X^3 = A + X$ تبدیل کنیم یک ریشه معادله کانونیک به شکل زیر است، یعنی:

$$X = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{A + 1} + \dots$$

برای این منظور با فرض $\frac{X}{m}$ معادله چنین می‌شود:

$$X^3 + pm^3 X + qm^3 = 0$$

حال برای اینکه معادله اخیر به شکل $0 = X^3 - A$ درآید باید
داشته باشیم:

$$x = \sqrt{-p}Z \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{-p} \sqrt{\frac{\pm q}{p\sqrt{-p}} + \sqrt{\frac{\pm q}{p\sqrt{-p}} + \sqrt{\frac{\pm q}{p\sqrt{-p}} + \dots}}} \quad (1)$$

از طرف دیگر به ترتیب داریم:

$$x = \lambda y \Rightarrow \lambda^3 y^3 + p\lambda y + q = 0 \Rightarrow y^3 + \frac{p}{\lambda^3} y + \frac{q}{\lambda^3} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{\lambda^3} = -3 & (\lambda = \pm \sqrt[3]{-\frac{p}{3}}) \\ y = 2 \cos \alpha \Rightarrow 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \frac{\pm 3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \end{cases}$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{\pm 3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \quad (2) \quad X = \pm \sqrt[3]{\frac{-p}{3} \cos \alpha} \quad (3)$$

از رابطه (2) مقدار $\frac{\pm q}{p\sqrt{-p}}$ را محاسبه می کنیم که نتیجه می شود:

$$\frac{\pm q}{p\sqrt{-p}} = \frac{2 \cos^3 \alpha}{3\sqrt{3}}$$

از رابطه (3) مقدار $\frac{x}{\pm \sqrt{p}}$ را محاسبه می کنیم که نتیجه می شود:

$$\frac{x}{\pm \sqrt{p}} = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{3}}$$

با قراردادن مقادیر فوق در رابطه (1) نتیجه می شود:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{9} \cos^3 \alpha + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{9} \cos^3 \alpha + \dots}}$$

تقریب دلخواه حل نمود و x را با دقت کافی محاسبه نمود. توضیح: بدینهی است اگر $p > 0$ میان معادله $\Delta = 0$ باشد که ریشه آن را به شکل حدی نوشته ایم.

محاسبه $\cos^3 \alpha$ بر حسب $\cos \alpha$ از آنجا که $\cos^3 \alpha$ به ازای هر مقدار صحیح α معلوم و معین است برای محاسبه $\cos \alpha$ به ازای $\cos^3 \alpha$ از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{9} \cos^3 \alpha + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{9} \cos^3 \alpha + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{9} \cos^3 \alpha + \dots}}}$$

مقدار صحیح درجه است)

برهان: ابتدا معادله درجه سوم کانونیک: $x^3 + px + q = 0$ را در نظر می گیریم ($p \neq 0$). حال A را طوری تعیین می کنیم که معادله اخیر دارای ریشه (حدی) زیر باشد یعنی:

$$x = \sqrt[3]{A + \sqrt{A + \sqrt{A + \dots}}} \quad (A \neq 0)$$

برای این منظور به ترتیب زیر عمل می کنیم.

$$X^3 = A + \sqrt{A + \sqrt{A + \dots}} \Rightarrow X^3 = A + X$$

$$X^3 - X - A = 0$$

حال معادله درجه سوم کانونیک را به معادله اخیر تبدیل می کنیم:
بنابراین داریم:

$$X = mZ \Rightarrow m^3 Z^3 + pmZ + q = 0 \Rightarrow Z^3 + \frac{p}{m^3} Z + \frac{q}{m^3} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{m^3} = -1 \\ \frac{q}{m^3} = -A \end{cases} \Rightarrow m = \pm \sqrt[3]{-p} \quad , \quad A = \frac{+q}{p\sqrt{-p}}$$

$$\begin{aligned} SB \perp BC : p_4 & \quad SD \perp CD : p_2 \\ SAB \perp ABC : p_6 & \quad SAD \perp ABC : p_5 \\ \triangle SBC = \triangle SDC : p_8 & \quad \triangle SAD = \triangle SAB : p_7 \end{aligned}$$

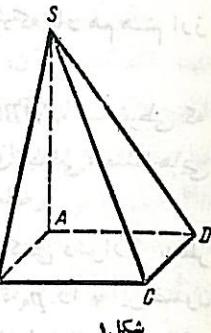
باید توجه کرد که اثبات این نتیجه‌ها، چندان دشواری ایجاد نمی‌کند، آن‌چه مهم است بی‌بردن به این رابطه‌های p_4 و p_2 به کمل قضیه سه عمود؛ p_5 و p_6 با توجه به معیار عمود بودن دو صفحه برهم و سرانجام، p_7 و p_8 با توجه به معیار برابری مثلث‌های قائم‌ألازوجیه ثابت می‌شوند.

این بررسی به داشتن آموز کمل می‌کند که، مثلاً اگر بخواهد از راس S ، عمودهایی بر DC و BC فرود آورد، آن‌ها را به اشتباہ، غیراز SD و SB در نظر نگیرد. بدون این مطالعه قبلی، بسیاری از این گونه اشتباه‌ها، ممکن است برای داشتن آموز پیش‌آید، به همین مناسبت اگر می‌خواهیم مثلاً مساله زیر را، برای داشتن آموزان حل کنیم: مساله ۱. سطح جانبی هر $ABCD$ (اپیدا کنید، به شرطی که قاعده $ABCD$ ، مربعی به ضلع a و بال SA عمود بر صفحه قاعده و به طول b باشد.

ابدا، وقبل از حل مساله، باید موقعیت شکل را مورد بررسی قراردهیم و، سپس، بعداز بدست آوردن نتیجه‌های p_4 تا p_8 به حل مساله پردازیم (که دیگر، به خودی خود بدست می‌آید).

از تجزیه و تحلیل موقعیت شکلی مساله، می‌توان به نتیجه‌های دیگری هم رسید. مثلاً در این باره فکر کنیم که آیا می‌توان جای گزاره‌های فرض را با گزاره‌های حکم عوض کرد؟ اندکی دقت نشان می‌دهد که p_2 را می‌توان از p_5 و p_6 نتیجه گرفت، یعنی فرض p_2 با دو فرض p_5 و p_6 هم ارزاست. دو این صورت، مساله ۱ به این صورت تغییر می‌کند.

مساله ۲. سطح جانبی هر $ABCD$ (اپیدا کنید، به شرطی که بدانیم



موقعیت هندسی یک شکل و نتیجه‌های حاصل از آن

تجزیه و تحلیل اشتباه‌ای که داشت آموزان، ضمن حل مساله‌های هندسه فضائی، در محاسبه حجم و سطح چند وجهی‌ها پیدا می‌کنند، نشان می‌دهد که، بسیاری از دشواری‌ها مر بوط بدآن است که داشت آموز نمی‌تواند موقعیت هندسی شکل را بشناسد و در پیدا کردن رابطه‌هایی که ناشی از این موقعیت است، عاجز می‌ماند.

تجربه نشان داده است که، یکی از راه‌های برطرف کردن این دشواری آن است که مساله‌ای هندسی را با موقعیتی خاص در برآور داشت آموز بگذاریم و از او بخواهیم، هر آن‌چه را که می‌تواند، از این موقعیت نتیجه بگیرد و همه رابطه‌هایی را که بین جزء‌های مختلف شکل وجود دارد، بدست آورد و، سپس، درستی آن‌ها را ثابت کند. با پیشتر مساله‌ها، چه در هندسه مسطحه و چه در هندسه فضائی، می‌توان به این گونه عمل کرد، ولی به خصوص در هندسه فضائی، اهمیت بیشتری دارد. در اینجا، نمونه‌هایی را می‌آوریم، روشن است که، در مرحله‌های اول، معلم باید با راهنمایی‌های خود به داشتن آموز کمل کند.

مثال ۱. هر $ABCD$ مفرد پن ایست و می‌دانیم:

$ABCD : p_1$ مربع است؛

$SA \perp ABC : p_2$

ویژگی‌های این موقعیت هندسی (۱) پیدا کنید. با دادن شرط‌های p_2 ، چه نتیجه‌هایی می‌توان بدست آورد؟ هر نتیجه‌ای (۱) که بدست می‌آوردید، ثابت کنید.

ویژگی‌ها، یا رابطه‌های بین جزء‌های چنین شکلی را، می‌توان به این ترتیب بر شمرد:

عمود است و، به این ترتیب، ثابت می شود که، یکی از یال های جانبی، بر صفحه قاعده عمود است.

۲) $\widehat{SBA} \neq 90^\circ$ و، در این صورت $\widehat{SAB} = 90^\circ$. یعنی $SA \perp AB$ و چون دو صفحه SAB و ABC بر هم عمودند، بنابراین SA بر صفحه ABC عمود می شود.

ممکن است پرسشی پیش آید: آیا ممکن نیست حالت سومی وجود داشته باشد که، در آن، داشته باشیم: $\widehat{ASB} = 90^\circ$. ولی، اگر دریک وجه جانبی، زاویه راس S قائم و بقیه وجهها هم، مثلث هایی قائم الزاویه باشند، آن وقت، هر سه وجه جانبی، باید در راس S قائم به باشند، زیرا اگر تنها یکی از یال های جانبی بر ضلعی از قاعده عمود باشد، آن وقت، بنابه تجزیه و تحلیلی که از شکل کرده ایم، هیچ یک از زاویه های قائم مثلث های جانبی، در راس هرم قرار نمی گیرد. ولی هر چهار زاویه بدراس S نمی توانند قائم به باشند، زیرا در آن صورت، مجموع آنها برای 360° درجه می شود. به این ترتیب ثابت کردیم که از p_1 و p_2 می توان p_3 را نتیجه گرفت، یعنی مساله ۳، همارز است بامساله های ۱ و ۲.

مثال ۳. هر $SABC$ داده شده است و می دانیم:

$p_1 : ABC$ مثلثی قائم الزاویه است ($\widehat{C} = 90^\circ$);
 $p_2 : \text{همه یال های جانبی برا بودند: } SA = SB = SC$.

با در دست داشتن شرط های p_1 و p_2 ، به چه نتیجه هایی می توان (سید):

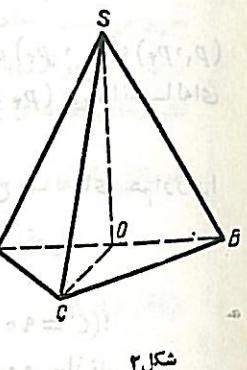
سیاهه نتیجدها را می آوریم (شکل ۲):

$p_3 : \text{تصویر یال های جانبی بر قاعده، طولی}$
 برابر دارند:

$$AO = BO = CO;$$

$p_4 : SO$ ، ارتفاع هرم، از نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC می گذرد؛

$p_5 : \text{ارتفاع هرم، از وسط وتر } AB$
 می گذرد؛



شکل ۲

قاعده $ABCD$ ، مربعی است به ضلع a ، وجه های SAB و SBC قاعده عمودند و ارتفاع هرم برا بود است با.

اگر تجزیه و تحلیل موقعیت شکل را انجام داده باشیم، برای ماروشن می شود که، در اینجا، مساله های ۱ و ۲، دو مساله مختلف نیستند و می توان آنها را، مساله های هم ارز نامید.

مساله را به صورت دیگری هم می توان مطرح کرد که باز هم هم ارز مساله های ۱ و ۲ است:

مساله ۳. مطلوب است سطح جانبی هرم $SABCD$ ، به شرطی که قاعده $ABCD$ ، مربعی است به ضلع a ، همه وجه های جانبی، مثلث هایی قائم الزاویه اند و ارتفاع هرم طولی برا بود b داد.

ظاهرآ، هم ارزی این مساله با دو مساله قبل، اندکی دشوار تر به نظر می رسد، ولی اگر به فهرست گزاره های p_1 تا p_8 ، گزاره p_9 را به این مضمون اضافه کنیم: «همه وجه های جانبی هرم، مثلث هایی قائم الزاویه اند»، آن وقت همه چیز روشن می شود. البته، در مساله اخیر، نتیجه گرفتن از p_9 اندکی دشوار است و معلم باید به یاری دانش آموزان بستا بد. برای برطرف کردن دشواری، ابتدا باید این پرسش ساده را مطرح کرد که: آیا ممکن است دو یال جانبی هرم، بر قاعده عمود باشند. روشن است که پاسخ، منفی است: اگر دو یال جانبی بر صفحه قاعده عمود باشند، آن وقت با هم موازی می شوند، در حالی که یال های هرم، در راس S به هم رسیده اند.

سپس، فرض می کنیم ($\widehat{SBC} = 90^\circ$ طبق فرض، مثلث SBC قائم الزاویه است)، یعنی $SB \perp BC$. به این ترتیب SB بر BC عمود است، یعنی BSC عمود می شود و چون BC بر صفحه ABC واقع است، بنابه معیار عمود بودن دو صفحه بر هم، صفحه SBC بر صفحه ABC عمود می شود.

چون بنابراین، مثلث SAB هم قائم الزاویه است، دو حالت ممکن است:

(۱) $\widehat{SBA} = 90^\circ$ ، به جای $SB \perp BC$ ، بنابراین SB بر صفحه ABC برا بود.

در این موقعیت هندسی، چه نتیجه‌هایی را می‌توان از p_1 و p_2 بدست آورده؟

مثال ۴. منشور $ABCA_1B_1C_1$ با قاعده‌های مثلثی، مفروض است.

می‌دانیم:

p_1 : قاعده، مثلثی متساوی‌الاضلاع است؛

p_2 : تصویر راس A_1 از قاعده بالا، روی مرکز قاعده پایین قرار می‌گیرد.

از p_1 و p_2 ، چه ویژگی‌هایی از منشور بدست می‌آید؟

مثال ۵. متوازی‌السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است.

می‌دانیم:

p_1 : قاعده آن، یک لوزی است؛

p_2 : یال جانبی AA_1 بادو ضلع AB و AD از قاعده، زاویه‌های برابر ساخته است.

از p_1 و p_2 چه ویژگی‌هایی برای متوازی‌السطوح نتیجه می‌شود؟

همین متوازی‌السطوح را، با چه ویژگی‌های دیگری، می‌توان مشخص کرد؟

$\begin{aligned} &\text{راهی برای حل معادله درجه چهارم} \\ &\text{معادله درجه چهارم} \\ &mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0 \end{aligned}$

مفروض است. معادله دو سه‌می قابل انطباق بر هم پیدا کنید که محورهایی موازی با محورهای مختصات داشته باشند و، در ضمن، طول‌های نقطه‌های برخوردار آن‌ها، ریشه‌های معادله مفروض باشند.

(۱) $\frac{1+x^4}{(1+x^2)^2} = y$ را پیدا کنید

حداقل مقدار

(۲) $\frac{1+x^4}{(1+x^2)^2} = y$ را پیدا کنید

(۳) $x \in \mathbb{R}$

حل در صفحه ۵۰۷

p_6 : صفحه ASB بر صفحه ABC عمود است؛

p_7 : مثلث‌های SCO ، SBO ، SAO قائم‌الزاویه‌اند؛

p_8 : مثلث‌های SCO ، SBO بر ابرند؛

p_9 : همه یال‌های جانبی، نسبت به صفحه قاعده، شبیه بر ابدارند؛

$$SAO = SBO = SCO$$

اثبات گزاره‌های p_3 تا p_9 به سادگی انجام می‌شود.

بعداز تجزیه و تحلیل این موقعیت هندسی، دیگر به سادگی می‌توان، مثلاً مسئله زیر را حل کرد:

مساله ۱۹. مطلوب است حجم هرم $SABC$ ، به شرطی که قاعده ABC از آن قائم‌الزاویه با وتر c و زاویه حاده α باشد، در ضمن، هریک از سه یال جانبی طولی برابر b داشته باشد (و یا به جای فرض اخیر: هریک از سه یال جانبی، زاویه‌ای برابر β ساخته باشد).

و خود دانش آموزان می‌توانند مسائله‌های دیگری را هم ارز با مساله ۱ پیدا کنند، مثلاً

مساله ۲۰. مطلوب است محاسبه حجم هرم $SABC$ ، به شرطی که قاعده ABC مثلثی قائم‌الزاویه با وتر c و زاویه حاده $\hat{A} = \alpha$ و، در ضمن، وجه SAB بر صفحه قاعده عمود باشد (یا ارتفاع هرم در صفحه SAB قرار گیرد)، یا ارتفاع از وسط وتر یا از مرکز دایره محیطی مثلث ABC بگذرد وغیره) و طول یال جانبی SA برابر b باشد.

می‌توان مسائله‌های هم ارز را، با پیش فرض‌های (p_1, p_2) ، (p_1, p_4) ، (p_1, p_5) یا (p_1, p_6) پیدا کرد؛ حالت انتخاب (p_6, p_4) می‌تواند مسائله‌ای جالب باشد.

چند مثال‌هم می‌آوریم و نتیجه‌گیری‌ها و طرح مسائله‌های هم ارز را به عینde خواننده می‌گذاریم.

مثال ۳. هرم $SABC$ مفروض است. می‌دانیم:

p_1 : قاعده ABC ، مثلثی قائم‌الزاویه است ($\hat{C} = 90^\circ$)؛

p_2 : وجه‌های جانبی، زاویه‌هایی برابر با قاعده می‌سازند.

نابراابری فینسلر و هادویگر و نتیجه‌های آن

مثلث ABC را با طول ضلع‌های a, b, c و در نظر می‌گیریم و مرکز دایره‌های محاطی خارجی آن را I_a, I_b, I_c می‌نامیم. از I_a عمود AD را بر خط راست رابطه جالبی را برای مثلث $I_a I_b I_c$ می‌توان پیدا کرد.

اگر روی ضلع AB از مثلث ABC و در طرف راس C ، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC_1 را بسازیم، می‌توان CC_1 را محاسبه کرد:

$$CC_1^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta - 60^\circ) =$$

$$= a^2 + c^2 - ac(\cos \beta + \sqrt{3} \sin \beta) =$$

$$= a^2 + c^2 - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3}$$

که از آنجا نتیجه می‌شود:

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 2S\sqrt{3}$$

این نابراابری را به صورت دیگری هم می‌توان بیان کرد. چون داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 4S \cot g A$$

بنابراین

$$(2) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot g A + \cot g B + \cot g C)$$

که با در نظر گرفتن نابراابری (1) بدست می‌آید.

$$(3) \quad \cot g A + \cot g B + \cot g C \geq \sqrt{3}$$

علامت برابری، تنها در مثلث متساوی‌الاضلاع پیش می‌آید.

در سال ۱۹۳۸، دوریاضی دان، فینسلر و هادویگر تو انتدانا برابری (1)

را دقیق‌تر کنند. آن‌ها ثابت کردند:

$$(4) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + Q$$

که در آن

$$Q = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

با به کار بردن نابراابری (1) در مثلث $I_a I_b I_c$ ، که مساحت آن را S' می‌نامیم، نابراابری (4) را ثابت می‌کنیم. از I_a عمود AD را بر خط راست

$$AI_a = \frac{p}{\cos \frac{A}{2}} \quad AD = p \quad (p, \text{نصف } AB \text{ فرود می‌آوریم، در این صورت } p \text{ و } AD \text{ را برابر می‌دانیم})$$

می‌خط مثلث ABC است). سپس

$$I_b I_c = I_b A + AI_c$$

$$I_b A = AI_a \cot g(AI_b C) = AI_a \cot g(90^\circ - \frac{B}{2}) = \frac{p \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$\text{و بهمین ترتیب } I_c A = \frac{p \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$I_b I_c = \frac{p \sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{p \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

و اگر در نظرداشته باشیم که

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

سرانجام بدست می‌آید:

باتوجه به نابرابری (۱) داریم:

$$\lambda R(r_a + r_b + r_c) \geq \frac{\lambda SR\sqrt{r}}{r},$$

$$(r_a + r_b + r_c) \geq S\sqrt{r} \quad (6)$$

$$r(\lambda R + r) \geq S\sqrt{r} \Rightarrow \lambda R + r \geq p\sqrt{r}$$

از (۶) می‌توان دستور فیسلرهای دویگر را به دست آورد. در واقع

$$\begin{aligned} \lambda r(r_a + r_b + r_c) &= \lambda \left[\frac{S^2}{p(p-a)} + \frac{S^2}{p(p-b)} + \frac{S^2}{p(p-c)} \right] = \\ &= \lambda [(p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) + (p-a)(p-b)] = \\ &= [p^2 - p(b+c) + bc + p^2 - p(c+a) + ac + p^2 - p(a+b) + ab] \\ &= \lambda (4p^2 - 4p^2 + ab + bc + ca) = -4p^2 + 4ab + 4bc + 4ca = \\ &= 4ab + 4bc + 4ca - a^2 - b^2 - c^2 - 4ab - 4bc - 4ca = \\ &= 4ab + 4bc + 4ca - a^2 - b^2 - c^2 = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) - [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \end{aligned}$$

و بنابراین

$$a^2 + b^2 + c^2 - [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 4S\sqrt{r} \quad (4)$$

به این ترتیب، در هر مثلث داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{r} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \quad (7)$$

در ضمن، علامت برابری، تنها در مثلث متساوی الأضلاع برقرار است.

عبارت Q را می‌توان تبدیل کرد:

$$Q = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4r(r_a + r_b + r_c) =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 4r(\lambda R + r)$$

$$I_b I_c = \frac{\lambda p \cos \frac{A}{2}}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{\lambda p B \cos \frac{A}{2}}{a + b + c} = \lambda R \cos \frac{A}{2} \quad (5)$$

اگر از این حقیقت استفاده کنیم که دایره محیطی مثلث ABC ، همان دایره نه نقطه برای مثلث $I_a I_b I_c$ است (و بنابراین، شعاعی برابر $2R$ دارد)، آنوقت رابطه (۵) را، با سادگی بیشتری می‌توان بدست آورد؛ زیرا

$$I_b I_c = \lambda R \sin(I_c I_a I_b) = \lambda R \sin(90^\circ - \frac{A}{2}) = \lambda R \cos \frac{A}{2}$$

سپس، پیدا می‌کنیم:

$$S' = \lambda R \cos \frac{A}{2} \cdot \frac{p}{\lambda \cos \frac{A}{2}} = \lambda p R = \frac{\lambda S R}{r};$$

$$r_b + r_c = p \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) = \frac{p \sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{\lambda p \cos^2 \frac{A}{2}}{\lambda \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \lambda R \cos^2 \frac{A}{2}$$

براساس نابرابری (۵) بدست می‌آید:

$$I_b I_c' = \lambda R \cos^2 \frac{A}{2} = \lambda R(r_b + r_c);$$

$$I_a I_b' = \lambda R \cos^2 \frac{C}{2} = \lambda R(r_a + r_b);$$

$$I_c I_a' = \lambda R \cos^2 \frac{B}{2} = \lambda R(r_c + r_a);$$

$$I_a I_b' + I_b I_c' + I_c I_a' = \lambda R(r_a + r_b + r_c)$$

یعنی

$$Q = a^2 + b^2 + c^2 - 16Rr - 4r^2 \quad (8)$$

از نابر ابری (7)، می‌توان بعضی نتیجه‌ها را به دست آورد.
در مثلثی که طول ضلع‌های آن به تضاد حسابی باشد، در نسبت d_1 باشند،
داریم $6d^2 = Q$ و بنا بر این

$$a^2 + b^2 + c^2 - 16Rr - 4r^2 = 6d^2$$

مثلث‌های را که در آن‌ها، مجموع مجذورهای تفاضل‌های دو به دوی ضلع‌ها
یکی باشد، مثلث‌های Q می‌نامیم. بنا بر این، مثلث‌هایی که در هر کدام از
آن‌ها، ضلع‌ها به تضاد حسابی باشند، مثلث‌های Q هستند. برای دو مثلث Q
داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 16Rr - 4r^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 16R_1r_1 - 4r_1^2$$

برای مثلث متساوی الساقین داریم $Q = 2(a-b)^2$. برای این که دو
مثلث متساوی الساقین، مثلث‌های Q باشند، لازم و کافی است که تفاضل بین
قاعده و یکی از ساق‌های مثلث اوی باهمین تفاضل در مثلث دومی برابر
باشد. بنا بر این مثلث‌های متساوی الساقین به ضلع‌های (a, b, b) و (a, a, b) ،
مثلث‌های Q هستند (اگرچنان مثلث‌هایی وجود داشته باشند). برای آن‌ها

$$a^2 + b^2 - 16Rr - 4r^2 = 2a^2 + b^2 - 16R_1r_1 - 4r_1^2;$$

$$b^2 - a^2 = 16(Rr - R_1r_1) + 4(r^2 - r_1^2); \quad (b > a)$$

مثلث ABC را یک مثلث هرونی می‌گیریم که طول ضلع‌های آن به
تضاد حسابی باشند، یعنی $a = 2k - d$ و $b = 2k$ ، $c = 2k + d$ و $R = h$ می‌نامیم. در
آن، k و d عددیابی طبیعی اند. ارتفاع وارد بر ضلع b را r می‌نامیم. در
این صورت $S = kh$. مثلث دیگری با ضلع‌های درست می‌سازیم ($A_1B_1C_1$)
و فرض می‌کنیم $k_1 = 2k + h$ و $d_1 = 3h + 2k$ و $h_1 = 3h + 2h$. به نحوی که ضلع‌های آن
به تضاد حسابی باقدرت نسبت d_1 باشند. ثابت می‌کنیم $d_1 = d$.

برای مثلث ABC داریم:

$$S = \sqrt{3k \cdot k(k+d)(k-d)} = k\sqrt{3(k^2 - d^2)} = kh;$$

$$3(k^2 - d^2) = h^2 \Rightarrow 3d^2 = 3k^2 - h^2$$

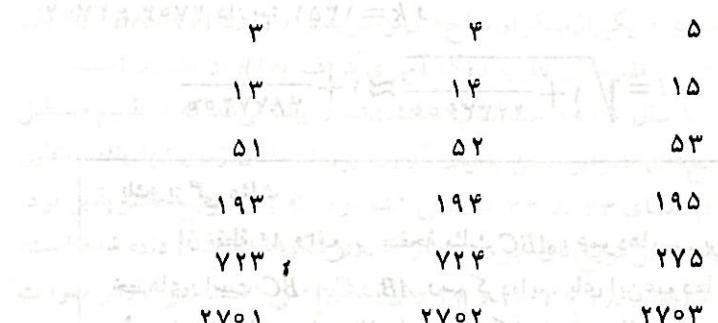
از آنجا، با توجه به انتخاب k_1 و h_1 داریم:

$$3d_1^2 = 12k^2 + 12kh - 3h^2 - 9k^2 - 12hk - 4h^2 = 3k^2 - h^2$$

یعنی $d_1 = d$.

بنا بر این مثلث‌های ABC ، مثلث‌های Q هستند. مثلاً، مثلث ABC با ضلع‌های ۱۷، ۳۹، ۲۸، ارتفاع برابر ۱۵ و مساحت ۲۱۰، و مثلث $A_1B_1C_1$ حاصل از آن، با ضلع‌های ۷۵، ۹۷، ۸۶، ارتفاع ۷۲ و مساحت ۲۰۹۶، مثلث‌های Q هستند. در هر یک از این مثلث‌ها، مقدار Q برابر است با ۷۲۶. اگر این روند را داده‌دیم، می‌توانیم بی‌نهایت مثلث با مفروض بودن Q پیدا کنیم.

حالت خاص ۱ = جالب است. در این حالت، ضلع‌های مثلث هرونی سه عدد طبیعی متواالی اند. شش مثلث اویله از این‌گونه را می‌آوریم:



همه این مثلث‌ها، مثلث‌های Q هستند و در هر کدام از آن‌ها $6 = Q$. بنا بر این

$$a^2 + b^2 + c^2 - 16Rr - 4r^2 = 6$$

در این مثلث‌ها، رابطه جالبی بین R و r وجود دارد. در واقع

تقسیم مربع به مربع‌های گوچکتر

تا چندی پیش، تقسیم مربع به مربع‌های جزء و نابرابر، یکی از مسائلهای حل نشدنی به شمار می‌آمد و از مسائلهای دشواری بود که راه حلی برای آن پیدا نمی‌شد و به هر حال دست آخر به بن‌بست می‌رسید، تا این که به تازگی، تشا بهی بین این مسئله و مسائلهای الکتریسیته پیدا شد و با بهره‌گیری از نظریه مدارهای الکتریکی، راه حلی برای این مسئله دشوار به دست آمد.

ماجرای دسترسی بداین راه حل، خود داستانی است پرکشش و پر از کوشش و نمونه‌ای است از روند یک پژوهش ریاضی که با تلاش و پی‌گیری چهار دانشجوی دانشگاه کمبریج در سال‌های ۱۹۳۶ تا ۱۹۳۸ انجام گرفت. این چهار دانشجوی آن زمان که اکنون ریاضی‌دانانی نام‌آور به شمار می‌آیند عبارتند از: ویلیام توت (William T. Tutte) (دانشیار ریاضیات دانشگاه تورنتو، و اسپیت (C. A. B. Smith) آمارگر دانشگاه لندن و تهیه‌کننده نظریه بازی‌ها و معماهای ستون (A. H. Stone) از پژوهندگان نظریه‌های توپولوژی و یکی از مبتکران سطوح‌های نرم‌پذیر و بروک (R. L. Brooks) که یکی از قضیه‌های نظریه رنگ‌آمیزی گراف به نام او مشهور است.

نا سال ۱۹۳۶ چند کتاب انگشت‌شمار پیدا می‌شد که از تقسیم مستطیل به مربع‌های نابرابر سخن به میان آورده بودند؛ تا آن زمان تنها یک مستطیل به اندازه‌های ۳۳ در ۳۲ شناسائی شده بود که به ۹ مربع پخش‌پذیر بود. ضلع‌های این مربع‌های جزء هم‌چنان که در شکل (۱) نشان داده شده است، در آن سال ستون با برخورد به یکی از معماهای دومنی (مسئله‌ساز چرهدست انگلیسی) به این نتیجه رسید که تقسیم پاره‌ای از مستطیل‌ها به مربع‌های جزء امکان‌پذیر است. ولی تقسیم مربع به مربع‌های جزء هرگز ممکن

$$R = \frac{ac}{4h} = \frac{4k^2 - 1}{4h} = \frac{4(k^2 - 1)}{4h} + \frac{3}{4h} =$$

$$= \frac{2h}{4} + \frac{3}{4h} = 2r + \frac{1}{2r}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که، در هر مثلث هرونی، مقدار R ، شعاع دایره محیطی مثلث، عددی است گویا، ولی یک عدد طبیعی نیست. اگر فاصله بین مرکز دایرة محیطی از مرکز دایرة محاطی را I بنامیم، بنابراین دستور اول داریم:

$$I^2 = R^2 - 2Rr$$

که اگر به جای R ، مقدارش $\frac{1}{2r} + 2r$ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$I^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r) = 1 + \frac{1}{4r^2} = 1 + \frac{3}{4(k^2 - 1)}$$

$$I = \sqrt{1 + \frac{3}{4(k^2 - 1)}}$$

که بازای $k \rightarrow \infty$ داریم: $I = 1$. و در مورد مثلث ششم با ضلع‌های ۲۷۰۱ و ۲۷۰۴ و ۲۷۰۳ داریم: $k = 1351$ و $I = 1352$

$$I = \sqrt{1 + \frac{1}{2433600}} \approx 1 + \frac{1}{4877200}$$

یاکوبیزگی مثلث

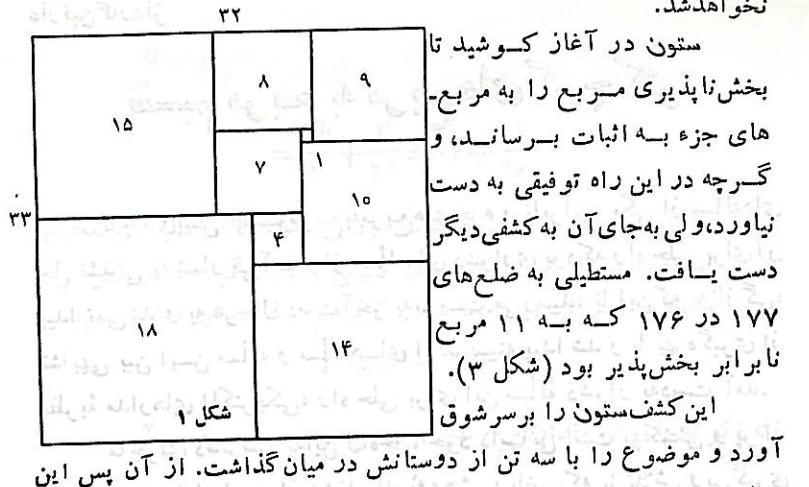
از نقطه M واقع بر صفحه مثلث ABC ، عمودها یعنی بر خط‌های راست BC ، CA و AB رسم کرده‌ایم. پای این عمودها، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل داده‌اند. ثابت کنید:

$$\widehat{AMB} = \widehat{ACB} + 60^\circ, \quad \widehat{BMC} = \widehat{BAC} + 60^\circ, \\ \widehat{CMA} = \widehat{CBA} + 60^\circ$$

حل در صفحه ۵۰۹

نخواهد شد.

ستون در آغاز کوشید تا بخش زاپدیری مربع را به مربع-های جزء به اثبات برساند، و گرچه در این راه توفيقی به دست نیاورده، ولی به جای آن به کشف دیگر دست یافت. مستطیلی به ضلع های ۱۷۶ در ۱۷۷ که ب-۹ ۱۱ مربع نابرابر بخش بدیر بود (شکل ۳). این کشف ستون را بر سر شوق



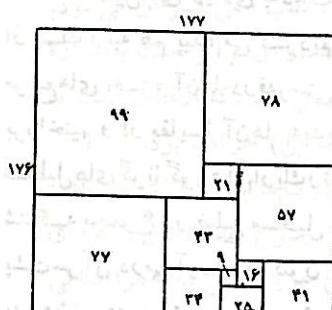
آورد و موضوع را با سه تن از دوستانش در میان گذاشت. از آن پس این چهار دوست بیشتر کارهای خود را کنار گذاشتند و تمام وقت آزاد خود را، روی تجزیه مستطیل به مربع‌ها، کار می‌کردند و خیلی زود در این راه موفق شدند. در آغاز هر مستطیلی را که به مربع‌های نابرابر تقسیم شدنی بود، به نام مستطیل «کامل» در فهرستی وارد می‌کردند. چندی بعد به طور کلی مستطیل‌هایی را که به دو یا چند مربع - خواه برابر، خواه نابرابر - تقسیم شدنی بودند، «مستطیل بخش بدیر» نام نهادند و آن‌ها را هم در فهرستی گردآوردند.

بهتر است که دنباله ماجرا را از زبان خود دیلیام قوت، یکی از همین پژوهندگان سخت کوش بشنویم:

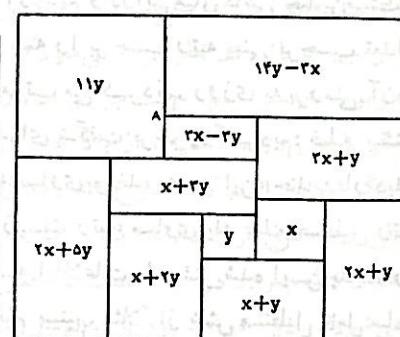
«خیلی زود راه درست کردن مستطیل کامل را پیدا کردیم و معلوم شد که این کار زیاد هم دشوار نیست. روشی که ما برای بدست آوردن مستطیل کامل به کار می‌بریم هم ساده است و هم زود به نتیجه می‌رسد، به این ترتیب که: نخست نقشه‌ای شماتیک از مستطیلی که به چند مستطیل کوچکتر تقسیم شده تهیه می‌کنیم، در این نقشه هیچ مقیاس و اندازه‌ای رعایت نمی‌شود، ولی آن را نموداری از یک مستطیل کامل فرض می‌کنیم، یعنی مستطیل‌های جزء را مربع فرض می‌کنیم و با استفاده از جبر مقدماتی رابطه‌های میان اندازه‌های این مربع‌ها را بدست می‌آوریم و سپس، از روی این رابطه‌ها، اندازه‌های مستطیل و مربع‌ها را حساب می‌کنیم. مثلاً اگر بخواهیم مستطیل کاملی از

مرتبه یازدهم بسازیم یعنی مستطیلی که از ۱۱ مربع جزء درست شده باشد، نخست شکلی مانند شکل ۲ می‌کشیم و اندازه‌های دو مربع کوچکتر و مجاور را x و y می‌گیریم. از آنجا می‌توانیم بگوئیم که ضلع مربع زیر این دو مربع، $y+x$ می‌شود و همچنین اندازه مربع مجاور دست چپ $y+2x$ و مربع مجاور بالای آنها $y+3x$ می‌باشد. اگر به همین ترتیب پیش برویم برای ضلع آخرین مربع، واقع در گوش راست بالای مستطیل، دو رابطه به دست می‌آید. یکی برای ضلع AB آن که برابر است با $(y+3x)+(y-3x)$ یعنی $2y-6x$ و دیگری برای ضلع دست چپ آن که $(y-3x)-(y+3x)$ یعنی $-6x-14y$ می‌شود. با فرض این که همه مربع‌ها باهم چفت و جور می‌باشند، باید هر دو ضلع این آخرین مربع برابر باشند یعنی $2y-6x=6x-14y$ و $y+9x=9y$. این تساوی در صورتی برقرار است که x برابر با ۱۶ و y برابر با ۹ باشد و آن وقت مستطیل کامل شکل ۳ نتیجه می‌شود. این همان مستطیل کاملی است که نخستین بار توسط ستون کشف شد.

با روش بالاگاهی به اندازه‌های منفی برخورد می‌کنیم، در این صورت با یک تغییر در نمودار اصلی، این اشکال بر طرف می‌شود. در پاره‌ای از نمودارهای دشوارتر معلوم شده است که کار را باید از سه مربع و هر یک به ضلع‌های مجھول x و y و z آغاز کنیم، و به این سبب در پایان به حل دو



شکل ۲



شکل ۳

معادله خطی، به جای يك معادله پردازیم. گاهی نیز سرانجام به مستطیلی می‌رسم که نشان می‌دهد تنها بخش‌پذیر است نه کامل، یعنی يك یا چند مربع مساوی در آن دیده می‌شود و هر تلاشی در بهاباثات رساندن کامل بودن آن فاپده‌ای نمی‌دهد. خوشبختانه به این موضوع زیاد برخورد نمی‌شود.

با این روش آسان، هر مستطیل کامل «ساده»‌ای که به دست می‌آوردم در فهرستی ثبت می‌کردیم. مسأله را پیچیده‌تر نمی‌کردیم و از ثبت مستطیل‌های به گونه دیگر - مثلاً آن‌هایی که دارای مستطیل‌های کامل دیگری در درون خود بودند، خودداری می‌کردیم.

در این تجربه دو روش از پژوهش، توانستیم شمار زیادی مستطیل کامل - از رتبه ۹ تا ۲۶ بدست آوردیم، مستطیل‌هایی که به ۹ تا ۱۶ مربع جزء ناابر ت تقسیم شدنی بودند. شکل آن‌ها را به ترتیب رتبه در فهرستی می‌کشیدیم و ضلع هر يك از مربع‌های جزء را به صورت عددی روی مربع مربوطه می‌نوشتیم. اگر در يك مستطیل، بين عددهای روی مربع‌ها، مقسوم‌علیه مشترکی پیدا می‌کردیم، عده‌ها را کوچک می‌کردیم و آن‌ها را به جای عده‌های پیشین می‌گذاشتیم. ناگفته نماند که همه در این اینیا، بودیم که اگر با این روش پیش برویم و از درست کردن مستطیل کامل دست بزناریم، روزی می‌رسد که به «مربع کامل» هم برخورد کنیم، ولی به همان ترتیب که شمار مستطیل‌های کامل روبه‌رونی می‌رفت، این امید روبه‌کاستی می‌گذاشت.

مستطیل‌های زیادی به دست آوردیم و در این میان گاهی چندین مستطیل از يك رتبه هم پیدا می‌کردیم، همه را بر حسب رتبه یعنی بر حسب تعداد مربع‌های جزء آن‌ها در فهرستی مرتب می‌کردیم. روزی به بررسی آن‌ها پرداختیم و از مقایسه آن‌ها به پدیده‌ای شگفت برخورد کردیم: ضلع بیشتر مستطیل‌های گونا گون ولی از يك رتبه، مساوی بودند، به جز این، چندین بار دیده شد که مجموع دو ضلع مستطیل از يك رتبه، مساوی يك ضلع مستطیل رتبه پشت سر آن درمی‌آید. (اکنون که اطلاعات ما بیشتر شده این پدیده را به روزشی در پیشتر جاها می‌توانیم بینیم. مثلاً از شش مستطیل کامل ساده رتبه دهم، چهار تای آن‌ها دارای مجموع طول و عرض ۲۰۹ می‌باشند و

بنج نا از ۲۲ مستطیل کامل ساده رتبه ۱۱ نیز دارای ضلعی به اندازه ۲۰۹ می‌باشد). گفتوگوها و بررسی‌های زیادی درباره يك چنین «رابطه بازگشته مرمز» انجام گرفت، ولی به ترتیجه رضایت‌بخشی نرسید.

از این پس و در این دوره پژوهش، دیگر آن گونه آزمایش‌های خسته‌کننده را کنار گذاشتیم و بیشتر خواستیم از راه نظری به مقصود برسیم. کوشیدیم تا مستطیل‌های بخش‌پذیر را با انواع و اقسام نمودارهای متفاوت به نمایش درآوریم. آخرین نوع این نمودارها که توسط سمیت ارائه شد، گامی بود بس بزرگ به سوی مقصود. همه ما این نمودار را دیاگرام سمیت نام گذاشتیم، ولی خود سمیت با این کار مخالف بود و می‌گفت این نمودار چیز تازه‌ای نیست. مگر اصلاح شده یکی از نمودارهای پیشین.

در هر حال دیاگرام سمیت ناگهان مسئله را از حالت هندسی خود درآورد و آن را به راه شبکه‌های الکتریک کشانید و ما توانستیم با به کار بستن قانون‌های مدارهای الکتریک به حل این مسئله هندسی دسترسی پیدا کنیم.

در شکل ۴، دست چپ، يك مستطیل کامل نشان داده شده و دیاگرام سمیت آن نیز دست راست همان شکل کشیده شده است. هر پاره خط افقی که در مستطیل وجود دارد، در دیاگرام سمیت با يك نقطه و به نام «اتصالی» نموده می‌شود و هر مربع موجود در مستطیل، در دیاگرام سمیت به صورت يك خط و به نام «سیم»، نقطه‌ای که نمودار ضلع افقی بالای مستطیل است، قطب مثبت و نقطه نمودار ضلع پائین مستطیل، قطب منفی فرض می‌شود. برای هر سیم جریانی در نظر گرفته می‌شود که مقدار آن برابر است با اندازه مربع مربوط به همان سیم. جهت جریان هم، روش است که از قطب مثبت به قطب منفی (یعنی روی مستطیل، از بالا به سوی پائین) خواهد بود.

مگر نه این است که مجموع اندازه‌های مربع‌هایی که بالای هر پاره خط افقی در مستطیل قرار دارند، برابر است با مجموع اندازه‌های مربع‌های پائین همان خط. پس در دیاگرام سمیت هم مجموع جریان‌هایی که به هر اتصالی وارد می‌شود، برابر خواهد بود با مجموع جریان‌هایی که از همان اتصال خارج می‌شود. یعنی قانون اول کیوشف به درستی در اینجا حکم فرماست که

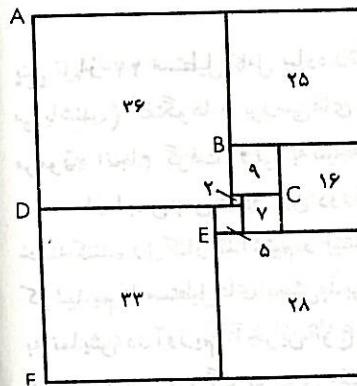
محاسبه کنیم.

چکیده دستورها و راههای تازه‌ای که برای محاسبه به دست می‌آوریم،
چنین است:

از هر شبکه الکتریکی عددی به دست می‌آید که محاسبه آن به مشخص-
بودن موضع و جای قطب‌های شبکه نیازی ندارد و تنها به ساختار شبکه بستگی
دارد. ما این عدد را «بافت شبکه» نام نهادیم. اگر ضلع افقی مستطیل را
مساوی بافت شبکه بگیریم، اندازه مربع‌های جزء آن هم با عده‌های درستی
به دست می‌آیند. ضلع قائم مستطیل نیز برابر می‌شود با بافت شبکه دیگری
که از یکی کردن دو قطب به دست می‌آید. ما عده‌هایی که برای ضلع مستطیل
و ضلع مربع‌های جزء به دست می‌آمد به ترتیب ضلع‌های «جور» و عنصرهای
«جور» نامیدیم. گاهی میان ضلع‌ها و عنصرهای جور یک مستطیل، مقسم‌علیه
مشترک، ضلع‌ها و عنصرها را به یک نسبت «کوچک» می‌کردیم. وهمین ضلع‌ها
و عنصرهای کوچک شده را به حساب می‌آوردیم و سرانجام در فهرست خود
ثبت می‌کردیم.

اگر به همان چکیده دستورها که بیان شد، توجه دنیم نتیجه می‌گیریم
که اگر شبکه‌های دو مستطیل بخش‌پذیر دارای یک ساختار باشند و تنها در
موقع قطب‌ها اختلاف داشته باشند، در آن صورت ضلع‌های جور افقی آن‌ها
برابر خواهند بود. همچنین اگر شبکه‌های دو مستطیل، با یکی شدن دو قطب
هر کدام، هم ساختار شوند، دو ضلع قائم آن‌ها هم برابر خواهند بود. از
این دو نتیجه، تمام موردهایی که به «بازگشتن مرموز» برخورد می‌کردیم،
روشن می‌شود.

کشف دیاگرام سمیت راه به دست آوردن و درجه‌بندی کردن مستطیل‌های
بخش‌پذیر ساده را خیلی آسان تر کرد. ما به راحتی همه شبکه‌های تا یازده
سیمی را فهرست بندی کردیم و تمام مستطیل‌های بخش‌پذیر مربوط به آن‌ها
را محاسبه کردیم و به این نتیجه رسیدیم که: هیچ مستطیل کاملی زیر مرتبه نهم
یافته نمی‌شود، مرتبه نهم هم تنها دو مستطیل کامل دارد که در شکل‌های ۱ و ۲



شکل ۴

می‌گوید جمع جبری جریان‌ها، در هر اتصالی برابر است با صفر (به جز در
دو قطب یعنی دو ضلع افقی بالا و پائین مستطیل). همچنین هر مدار بسته‌ای
از دیاگرام را که در نظر بگیریم وقتی که سیم‌های آن را از یک اتصال به
اتصال دیگر دنبال می‌کنیم تا سرانجام با اتصال اول بررسیم، مثل این است که
در مستطیل، از یک تراز افقی به ترازی دیگر رفته و سرانجام به همان تراز
اول برگشته‌ایم، یعنی جمع جبری مسیرهایی که پیموده‌ایم مساوی صفر بوده
ست و این همان قانون دوم کیوش است که می‌گوید جمع جبری جریان‌های
دیگر مدار از شبکه، برابر است با صفر.

بنابراین، دیاگرام سمیت همانند یک شبکه الکتریکی است و همه
قانون‌های شبکه الکتریکی می‌تواند در آن به کار بسته شود.

جریانی که وارد قطب مثبت هر شبکه الکتریکی می‌شود برابر با جریانی
که از قطب منفی آن خارج می‌شود و در اینجا آشکارا دیده می‌شود که
برابر است با ضلع افقی مستطیل. اختلاف سطح الکتریکی دو قطب هم برابر
است با ضلع قائم مستطیل.

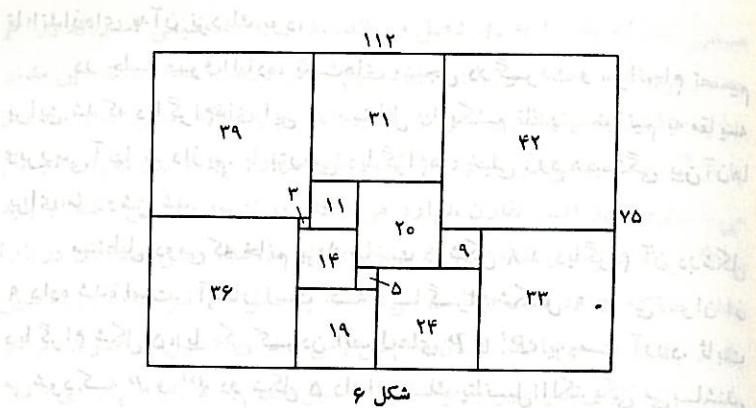
کشف این همانندی و همانندسازی الکتریکی، برای ما بسیار سودمند
افتد، چهدیگر مسئله‌ما با یک نظریه قوی پیوند پیدا کرده بود و مامی توانستیم
از قانون‌های اطمینان بخش آن بهره‌مند شویم، راههای تازه‌ای پیدا کنیم و
جریان‌ها را - که در واقع همان ضلع‌های مربع‌های جزء می‌باشند -

نشان داده شده است. از مرتبه دهم، شش و از مرتبه یازدهم، ۲۲ مستطیل کامل وجود دارد. از مرتبه یازده به بالا، شمار مستطیل‌های پیش‌بازدیر به سرعت روبه فرونتی می‌رفت. در هر صورت ما تا مرتبه سیزدهم، ولی به کنندی، پیش رفیم. از مرتبه دوازدهم ۶۷ مستطیل کامل ساده به دست آوردیم.

ما از این کار لذت می‌بریم، بهویژه در آوردن مستطیل کامل از شبکه‌های متقاضن برای ما سرگرمی خوش‌آیندی بود. یک بار شبکه‌ای مکعب شکل طرح کردیم که رأس‌های آن را اتصال و یال‌هاش را سیم‌گرفتیم، ولی از آن هیچ مستطیل کاملی در نیامد. شبکه را دستکاری کردیم و رأس‌های متقابل یک وجه آن را بهم وصل کردیم (رأس‌های A_2 و A_3 شکل ۵) تا شکل ۵ به دست آمد. از این دیاگرام، مستطیل کاملی در آمد که در شکل ۶ نشان داده شده است. ناگفته نماند که عناصرهای این مستطیل دارای عامل مشترک ۶ بودند که در اینجا کوچک شده آنها را نشان داده‌ایم. یکی از دست آوردهای جالب ما همین مستطیل بود. برای مستطیل کاملی از مرتبه سیزدهم، چنین عنصرهایی، خیلی کوچک به نظر می‌رسید. بروک آن چنان فریفته این مستطیل شد که آن را روی مقوایی رسم کرد و سپس عناصرهایش را از هم برید و از آن یک نوع سرگرمی که به بازیکردن چنین فکری را نشان می‌دهد. سیزده مربعی که در دست داشت از دوستانش می‌خواست تا با جفت و جور کردن آن‌ها، مستطیل کاملی را بسازند.

سرگرمی و بازی که بروک درست کرده بود، خود مایه گشایش دیگری از کار ما شد، بروک این سرگرمی را بهمادر خود نشان داد و در اینجا بود که مادرش ما را به کشفی راهنمایی کرد که کلید همه جانبه پژوهش شد.

دانستان از این قرار بود که مادر بروک کوشش زیادی به کار برد



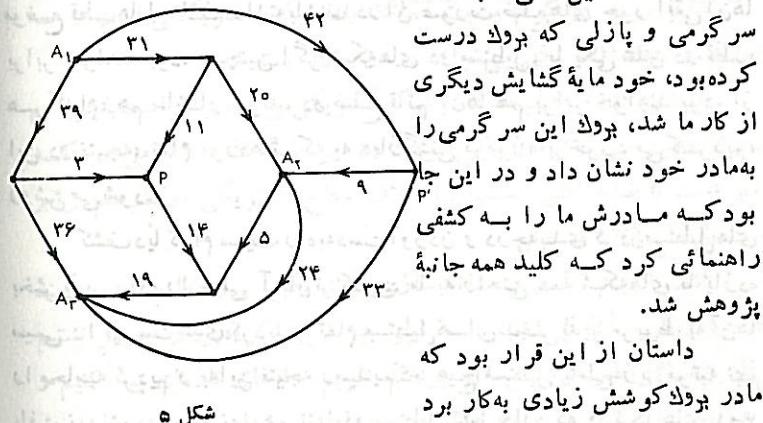
تا پازل پرسش را حل کنند و سرانجام مستطیل را ساخت، ولی نه آن مستطیلی که منظور بروک بود. وقتی که بروک با چنین پیش‌آمدی روبرو شد، چنان هیجانی به او دست داد که بلافصله به سوی کمپریج حرکت کرد و عضوهای اصلی گروه پژوهشی را بدیک گردید آثی فوق العاده فراخواند.

پیش از این هم ما گاهی باین فکر می‌افتدیم که اگر می‌توانیم دو مستطیل کامل متفاوت ولی هم‌شکل بازیم، کلید ساختن مربع کامل را هم به دست می‌آوریم. شکل ۷ عملی کردن چنین فکری را نشان می‌دهد. مستطیل‌های هاشورخورده، دو مستطیل کامل مساوی ولی با عناصرهای متفاوت را نشان می‌دهد. با افزودن دو مربع نابرابر (هاشورخورده) به آن‌ها مربع کامل به دست می‌آید. در هر صورت،

شکل ۷

شکل ۷

ناآن زمان هنوز چنین مستطیل‌هایی در فورست ما وارد نشده بود، ماهم دیگر امید چندانی به آن نداشتیم تا این که کشف خانم بروک دوباره این امید را در ما زنده کرد. گرچه مستطیل‌های خانم بروک دارای عناصرهایی مثل هم بودند و این آن چیزی نبود که ما می‌خواستیم، ولی



تا اندازه‌ای به آن نزدیک بود.

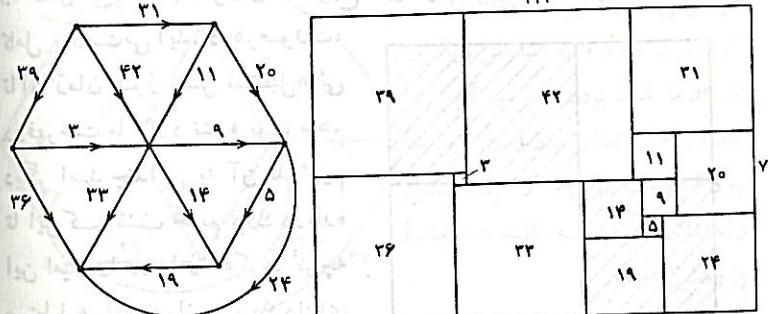
در جلسه فوق العاده، بحث‌های مهیجی در گرفت و سرانجام تصمیم بر این شد که دیاگرام‌های این دو مستطیل را بکشیم تا بهتر بتوانیم به مقایسه و بررسی آنها پردازم. با بررسی دیاگرام‌ها، خیلی زود همبستگی بین آنها برای ما روشن شد.

مستطیل دومی که خانم برولا ساخت در شکل ۸ دیاگرام آن در شکل ۹ داده شده است. آشکار است که دیاگرام شکل ۹ را می‌توان از دیاگرام شکل ۵، با یکی‌کردن اتصال‌های P و P' ، به دست آورد. ثابت می‌شود که P و P' در شکل ۵ دارای یک پتانسیل الکتریکی می‌باشند. بنابراین با یکی کردن آن‌ها هیچ تغییری نه در جریان تک سیم‌ها، نه در جریان کل و نه در اختلاف پتانسیل میان قطب‌ها پدید نخواهد آمد، و این می‌رساند که باید ضلع‌ها و عنصرهای هر دو مستطیل یکسان باشند.

و اما چرا P و P' در شکل ۵ هم پتانسیل‌اند؟ ما پاسخ این پرسش را پیش از نشست فوق العاده نیز پیدا کرده بودیم که چنین بیان می‌شود:

شبکه الکتریک شکل ۵ را می‌توان به سه مدار تجزیه کرد که تنها در قطب‌ها A_1 و A_2 و اتصالی A_3 به هم می‌رسند، یعنی نقطه‌های A_1 و A_2 و A_3 تنها اتصالی‌های مشترک این سه مدارند. یکی از مدارها عبارت از تنها

۱۱۲



شکل ۹

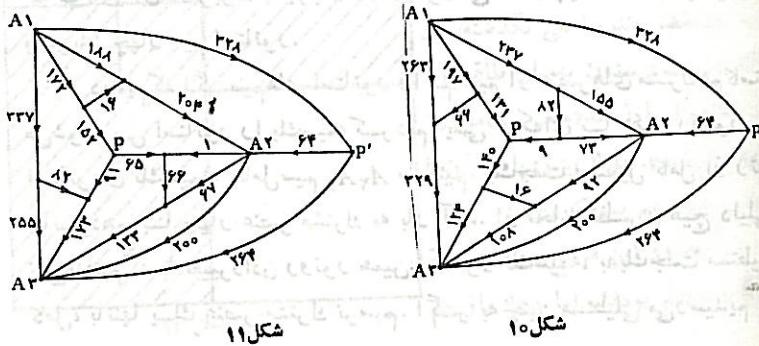
سیمی است که A_2 را به A_3 وصل می‌کند. مدار دوم سه‌سیمی است که در P' به هم می‌رسند. مدار سوم از ۹ عدد سیم دیگر درست شده است. این مدار سوم، مداری است متقارن به مرکز تقارن P ، جریانی که بدان مدار وارد و یا از آن خارج می‌شود، تنها از نقطه‌های متقارن A_1 و A_2 و A_3 انجام می‌پذیرد و در اثر تقارن هم ارز می‌باشد، در نتیجه پتانسیل نقطه P باید میانگین پتانسیل‌های نقطه‌های A_1 و A_2 و A_3 باشد. همین استدلال در باره مدار دوم نیز وارد است و ثابت می‌کند که پتانسیل P' نیز میانگین پتانسیل مدار دوم نیز وارد است. از آن‌جا چنین بر می‌آید که پتانسیل P همواره برابر A_1 و A_2 و A_3 می‌باشد. از ویژه هر گاه A_1 و A_2 را قطب‌های شبکه در نظر بگیریم، مطابق قانون کیفرشوف، پتانسیل A_3 همیشه مقدار ثابتی خواهد بود.

در هر صورت بهره‌ای که از کشف خانم برولا گرفتیم، پی‌بردن به خاصیت ساده شبکه‌های متقارن بود. در این میان به فکر من رسید که با استفاده از این خاصیت، یک یا چند جفت مستطیل کامل دیگر – با عناصر یکسان – به دست آوریم، به دنبال این فکر دست به چندین آزمایش زدیم. من نمی‌توانم بیان کنم که این فکر چگونه مارا به هدف اصلی رهمنون شد. همین اندازه می‌توان بگوییم که ما را به پیدا کردن راههای تازه‌ای امیدوار ساخت، و گرنه نزدیک بود که از ادامه کار پژوهش دست بکشیم.

برای عملی کردن فکر من کافی بود تا مدار متقارن دیگری جانشین مدار سوم شبکه شکل ۵ کنیم ولی انجام این کار به آسانی میسر نشد، به دشواری‌های زیادی برخورده‌کردیم، پیشرفت کار خیلی کند بود، ناچار به پیمودن راههای پر خم و پیچی شدیم که اکنون به شرح آن‌ها می‌پردازم. می‌توان ثابت کرد که دیاگرام هر مستطیل بخش‌گذیر، همیشه مسطح است یعنی می‌شود آن را روی سطحی کشید، بی آن که سیم‌هایش از روی هم عبور کنند و نیز نقشه را به نحوی کشید که هیچ مداری دو قطب را از هم جدا نکند، مقصود این که از حد فاصل دو قطب سیمی رد نشود. عکس این قضیه هم درست است: اگر بتوان یک شبکه الکتریکی با مقاومت یک‌نواخت باشند

دیاگرام‌های شکل ۱۰ و ۱۱ به یک اندازه هستند و عنصرهای هر جفت یکسان‌اند، ولی عنصرهای هر دو جفت کاملاً یکسان نیستند. از لحاظ نظری، دلیل این پدیده را زود پیدا کردیم. چون دیدیم که ساختار هر دو شبکه - بدون رعایت انتخاب قطب‌ها - یکسان می‌باشند، پس گفته‌یم که مستطیل‌ها هم باشد دارای ضلع‌های افقی یکسان باشند. از سوی دیگر چون بایکی شدن قطب‌ها، باز هم شبکه‌ها یکسان باقی می‌مانند پس ضلع‌های قائم آن‌ها هم باید یکسان باشند. ولی چون این دلیل‌ها هیچ ارتباطی با موضوع تقارن پیدا نمی‌کرد، چنین احساس کردیم که به‌جز این دلیل‌ها، باید به جست و جوی دلیل محکم‌تری پردازیم تا علت اصلی به وجود آمدن این پدیده برایمان روشن شود.

در این میان، ناگهان موضوع جالبی توجه ما را به‌خود جلب کرد: موضوع شبکه‌های «ثابت و دور» یعنی شبکه‌ای که بتوان آن را به دو مدار، یکی ثابت و دیگری دور تقسیم کرد به‌شرط این که با دوران دادن مدار دور، در ساختار کلی شبکه تغییری ایجاد نشود. ما این خاصیت را هم از «روتور - استاتور» نام گذاشتیم. توضیح بیشتر این که: هنگامی خاصیت هم ارزی روترور - استار در یک شبکه موجود است که از ویژگی‌های زیر برخوردار باشد: شبکه‌را بتوان به‌دوران یکی «روتور» و دیگری «استاتور» تجزیه کرد، به‌طوری که در اثر دوران روترور، در قطب‌ها و در اتصالی‌های مشترک روترور و استاتور تغییراتی ایجاد نشود، یعنی قطب‌ها همان اتصالی‌های



طريق کشید، در این صورت آن شبکه جز یک دیاگرام از یک مستطیل بخش‌پذیر نخواهد بود. در اینجا نیازی نمی‌بینیم که بر گره‌های کاغذ را با استدلال، این گونه قضیه‌ها پرکنم، آن زمان هم تا همه کارها تمام نشد و یادداشت‌ها بیمان را برای انتشار آماده نکردیم، پای بند به اثبات رساندن این چنین قضیه‌هایی نشدم. ناگفته نماند که من سفارش نمی‌کنم تا همیشه چنین رفتاری داشته باشیم و دقت و موشکافی را کنار بگذاریم.

چنین رفتاری، به ویژه در پژوهش‌های ریاضی، بیش یا کم، فرجامی مصیبت بار خواهد داشت. مثلاً هر گاه در پژوهش مسأله چهار رنگی از روی پاره‌ای از قضیه‌ها به‌طور سرسری بگذردیم، بی‌گمان به‌یاره خواهیم افتاد، ولی در این پژوهش ما روش آزمایش و خط را پیش گرفته بودیم، از راه آزمایش‌های مکرر می‌خواستیم به مستطیل کامل دست یابیم، از این رو زیاد به نظریه و اثبات قضیه، پای بند نبودیم. گفتنی است که این روش در کار ما بسیار سودمند افتاد، چه مستطیل‌هایی که به‌دست می‌آوردیم در مقابله زمانی که صرف کاوش و آزمایش می‌کردیم - حتی هنگامی که هنوز نظریه آن‌ها از کار در نیامده بود - رضایت‌بخش بود.

دوباره بر می‌گردیم به شکل ۵ و مسأله جانشین‌کردن مدار متقابلی بدهم کز P ، به جای مدار سوم شبکه، شبکه تازه‌ای که از این جانشینی به‌دست می‌آید، نه تنها در این حالت باید مسطح باشد، در حالتی که P و P' را یکنیم باز هم باید مسطح بماند.

پس از اندکی تلاش توانستیم دو شبکه با همین شرایط، پیدا کنیم، این دو شبکه در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان داده است. این‌ها در حقیقت دیاگرام دو مستطیل و همان چیزی بودند که ما می‌خواستیم، هر دو دیاگرام شرط‌های یکی شدن P و P' را می‌پذیرفتند و در واقع ما به‌دو جفت مستطیل بخش‌پذیر دست یافته بودیم که عنصرهای کوچک‌شده هر جفت، جدا از دیگری، یکسان بودند، ولی انتظار نداشتیم که ضلع‌های هر دو جفت هم برابر در آیند و این کشف تازه‌ای بود.

به‌طور کلی کشف تازه نشان می‌داد که هر دو جفت مستطیل مربوط به

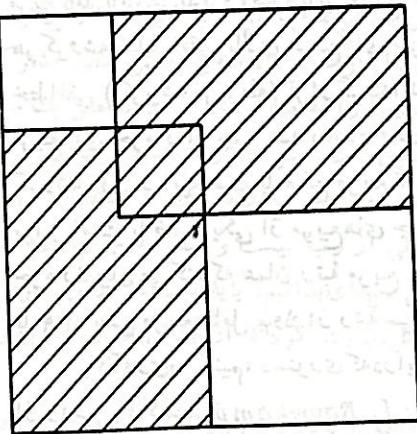
رسیدن به مربع کامل هم راه زیادی نداشیم. چون استاتور تک سیمه این شبکه همواره به صورت عنصری مشترک در گوش مستطیل های مر بوطه اش ظاهر می شد. در این صورت از دو مستطیل کامل با تنها یک عنصر مشترک در گوش، می توانستیم ساختاری مانند شکل ۱۲ بنانیم و یک مربع کامل به دست آوریم. در این شکل ناحیه های هاشودخورده، نایان گر همین دو مستطیل می باشند. مربعی که در ناحیه روی هم افتادگی گوش های دو مستطیل دیده می شود، همان عنصر مشترک مستطیل هاست.

با چنین فکر و چنین امیدی دست به کار شدیم، روی چندین جفت روتور - استاتور به محاسبه پرداختیم، روتورها را هر چه ساده تر می گرفتیم تا هم کارکتری انجام دهیم و هم شاید به مربع کاملی از رتبه های پائین برسیم. هر شبکه ای که طرح می کردیم، عنصرهای مشترکی بین روتورها یشان پیدا می شد، نقشه های کسی پس از دیگری عقیم می ماند. اندک اندک داشتیم مایوس می شدیم، به راه دراز و مانع های نشانخته ای که گمان می رفت هنوز در پیش داریم می اندیشیدیم.

یک روز با این فکر افتادیم که شاید خرابی کار در انتخاب روتورهای خیلی ساده است. اندکی پیچیده تر ممکن است بهتر باشد و دستمن بازتر شود. بدنبال این فکر، سمتی و ستون رفته و نشستند تا یک جفت روتور استاتور پیچیده ای را آزمایش کنند، در

حالی که بروک جدا از آن دو روی طرح دیگری و درجای دیگر سر گرم به کار شد. چند ساعتی نگذشته بود که سمتی و ستون به میان اطاق بروک پریدند و فریاد زدند «ما مربع کامل را پیدا کردیم». بروک نیز در پاسخ آنها گفت «من هم پیدا کردم».

هر دو این مربع ها از رتبه شصت و نهم بودند، اما بروک باز هم



شکل ۱۲

استاتور و اتصالی های مشترک روتور و استاتور هم ارز اتصالی های پس از دوران باقی بمانند. مثلاً در شکل ۱۵ استاتور عبارت است از سه سیمه که P را به A_1 و A_3 و A_4 و سیم چهارمی که A_2 را به A_4 وصل می کند. دیگر سیم ها روتور را می سازند. اگر روتور را حول خط مستقیمی که از مرکز می گذرد، دوران دهیم، شبکه تازه ای به دست می آوریم هم ارز شبکه پیشین، چنان که در اینجا روتور را حول خط PA نیم دور چرخانده ایم تا شکل ۱۱ به دست آمده است. روشن است در حالی که روتور این دو شکل از لحاظ ساختار هم ارز می باشند، از لحاظ عنصر هم، روتور یکی - بارعا پیش شرط جانشینی - جانشین روتور دیگری می باشد.

پس از بررسی چند نمونه از هم ارزی روتور - استاتور، متوجه شدیم که دوران روتور هیچ اختلافی در ضلع های مستطیل و همچنین در جریان سیم های استاتور (یعنی عنصرهای مر بوط به استاتور) ایجاد نمی کند و تنها جهت جریان ممکن است در سیم های روتور تغییر کند.

معلوم شد که مسأله هم ارزی روتور - استاتور رابطه ای چندان نزدیک با پدیده ای که خانم بروک کشف کرده بود ندارد. ولی اهمیت کشف خانم بروک همین بس که فکر ما را به سوی شبکه روتور - استاتور رهنمون گشت.

در اینجا با مسأله دیگری روبرو شدیم که بسیار آزاردهنده بود. می خواستیم دو جفت روتور - استاتور هم ارز گیر بیاوریم که این دو جفت دارای کمترین عنصر مشترک باشند شکل های ۱۵ و ۱۱ هفت عنصر مشترک داشتند که سه تای آنها مر بوط به جریان در روتور می شد و چهار تای دیگر مر بوط به جریان چهار سیم استاتور.

دیدیم که اگر سیم های استاتور را کم کنیم از عنصرهای مشترک هم کاسته می شود. پس استاتور را یک سیمه کردیم، یعنی شبکه ای با همان روتور، و استاتوری تک سیمه، شامل سیم $A_2 A_3$ ساختیم، یک جفت مستطیل کامل از رتبه شانزدهم با چهار عنصر مشترک به بار آمد. از لحاظ نظری هیچ دلیلی نمی یافتیم که با تغییر دادن روتور همین استاتور تک سیمه، به یک جفت مستطیل کامل، با تنها یک عنصر مشترک نرسیم. اگر به چنین مستطیلی می رسیدیم تا

برده است.

چنین بود داستان چگونگی حل مسأله « تقسیم مربع به مربع‌های کوچکتر » و تلاشی که این گروه چهار نفری در این راه به کار برد، ولی کار هنوز به پایان نرسیده بود، درست است که تا رساندن کار به اینجا، زحمت و ناراحتی‌های زیادی کشیدیم، ولی تمام مربع‌های کاملی که با این روش روتور - استاتور به دست آوردیم، دارای خاصیت‌های ویژه‌ای بودند که به نظر ما عیب به شمار می‌رفتند. یکی این که هر مربع کامل محتوی یک مستطیل کامل کوچک‌تر هم بود، یعنی ساده نبود. دیگر این که هر مربع کامل دارای نقطه‌ای بود که گوش‌های چهارتا از مربع‌های جزء آن در آن نقطه بهم می‌رسیدند و یک « + » درست می‌کردند. سوم این که در هر یک از مربع‌های کامل، مربع جزئی بود - نه آن‌هایی که در گوش‌های مربع کامل قرار داشتند - که به وسیله یکی از قطرهای شکل به دونیم می‌شد. با پیشرفت کردن در نظریه روتورها تو استیم مربع‌های کاملی به دست آوریم که عاری از دو عیب اول بودند. سال‌ها بعد با روشی کاملاً جدا از روش تقارن دورانی، من مربع کاملی از رتبهٔ صست و نهم به دست آوردم که از هر سه عیب مبرا بود. بیان روش اخیر در این مختصر نمی‌گنجد و از آن درمی‌گذریم.

گفتنی‌های دیگری که در تاریخچه مربع کامل در خود بیان است، این سه مطلب است. هنگامی که روی مستطیل‌های کامل رتبهٔ سیزدهم کارمی کردیم، یک روز متوجه شدیم که دو مستطیل از آن‌ها، بدون داشتن عنصر مشترکی، هم شکل می‌باشند، این برخورد ما را به طرح شکل ۷ و ساختن یک مربع کامل از رتبهٔ بیست و هشت رهنمون گشت. پس از آن هم مستطیل کاملی از رتبه سیزدهم پیدا کردیم که می‌توانست با یک مربع و با یکی از مستطیل‌های رتبه دوازدهم تر رکیب شود و مربع کاملی از رتبهٔ بیست و ششم بوجود آورد. اگر برتری مربع کامل را از کوچکی رتبه‌ای بدانیم، باید گفت که روش تجربی و فهرست برداری مستطیل‌های کامل، ثابت کرد که از روش نظری و زیبای ما کار آمدتر بود.

بودند پژوهندگان دیگری که از به کار بردن روش تجربی، به نتیجه‌های

آزمایش را دنبال کرد تا به مربيع ساده‌تری از رتبه سی و نهم دست یافت. روتور مربيع دوم بروک در شکل ۱۳ نشان داده شده است. این مربيع و عنصرهایش را می‌توان با فرمول زیر، بطور فشرده بیان کرد:

شکل ۱۲

[۶۵، ۲۳۷۸، ۱۱۶۳، ۱۰۹۸]، [۷۳۷، ۴۹۱]، [۲۴۹، ۲۴۲]،
[۷۱، ۲۳۵]، [۳۷۸، ۲۵۹]، [۲۱۹، ۲۹۶]، [۳۲۴، ۹۴۴]، [۲۱۹، ۲۹۶]
[۱۶۳، ۷۱۲]، [۳۴۱، ۱۷۸]، [۶۲۰]، [۱۰۳۰، ۸۲۹، ۵۱۹، ۶۹۷]،
[۱۵۶۴]، [۱۲۳۱]، [۲۸۳]، [۱۲۶، ۴۰۹]، [۲۰۱، ۴۴۰، ۱۵۷، ۳۱]،
[۹۹۲، ۱۴۵]، [۸۵۲]

در این فرمول، هر یک از کروشهای بیان گر یکی از پاره خط‌های افقی روی مربيع کامل است. ترتیب کروشهای افقی از بالا به پائین است که از ضلع افقی بالای مربيع کامل آغاز می‌شود و تا ضلع افقی پائین مربيع کامل بیان می‌پذیرد (ضلع پائین مربيع اصلی نوشته نمی‌شود). عده‌های داخل هر کروشه ضلع افقی بالای مربيع های جزئی را نشان می‌دهند که روی همان خط افقی (کروشه مربوطه) قرار گرفته‌اند. ترتیب عده‌ها نیز به ترتیب ضلع مربيع های جزء و از چپ به راست است. با این حساب مجموع عده‌های کروشه اول برابر است با ضلع مربيع کامل یعنی ۴۶۳۹، هر یک از شمارهای برابر است با ضلع یکی از مربيع های جزء، تعداد عده‌ها، تعداد مربيع های جزء را بیان می‌کند که همان رتبه مربيع کامل می‌باشد، و در اینجا برابر است با ۳۹، یعنی مربيع کامل بروک از رتبه سی و نهم است.

یادآوری می‌کنیم، دستوری که در اینجا برای بیان مربيع کامل به کار بردهیم، از روش باوکمپ (C. J. Baukamp) گرفتیم. باوکمپ در فهرستی که از مستطیل‌های کامل ساده و تا رتبهٔ سیزدهم فراهم کرده، این روش را به کار

به دنبال سخنان ویلیام توت، بیان این چند نکته نیز ضروری به نظر می‌رسد باوکمپ که ویلیام توت هم در گفتار خود از اوایدکرده است، درسال ۱۹۶۵ فهرستی از تمام مستطیل‌های بخش‌پذیر ساده (مستطیل‌های بخش‌پذیری که دارای مستطیل‌های بخش‌پذیر کوچکتری نیستند) تا رتبه ۱۵ منتشر کرد. باوکمپ و دستیارش باکمل کامپیوتر IBM جدول زیر را به دست آورد:

	رتبه مستطیل						
	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹
ناکامل	۱	۰	۰	۹	۳۴	۱۰۴	۲۸۲
کامل	۲۱۳	۷۴۴	۶۷	۲۲	۶	۴۰۹	۲۱۳

یاد آور می‌شویم که مستطیل بخش‌پذیر ساده ناکامل، مستطیلی است که دارای دست کم دو مربع هم اندازه باشد و کامل آن مستطیلی است که همه مربع‌های جزء آن با اندازه‌های متفاوت باشند، مستطیل بخش‌پذیر ساده هم مستطیلی است که در خود مستطیل بخش‌پذیر کوچکتری نداشته باشد. از جدول باوکمپ دیده می‌شود که مجموع مستطیل‌های بخش‌پذیر ساده (ناکامل و کامل) ۴۰۹۴ عدد می‌باشد. جالب این که هیچ مستطیل بخش‌پذیر ناکاملی در رتبه ۱۰ و ۱۱ وجود ندارد و در رتبه ۹ هم تنها یک مستطیل ناکامل یافت می‌شود که دستور آن چنین است:

(۳)، (۴)، (۵)، (۱)، (۶)، (۳)، (۱)، (۵)، (۶).

و این مستطیلی است زیبا و با تقارنی خوش آیند، که می‌شود بازی عالی از آن درست کرد. این مستطیل را با عنصرهایش روی مقوایی بکشید و سپس مربع‌های جزء را ببرید و از مقوا درآورید، پازلی جالب به دست می‌آورید. هوش بچه‌ها را با جوړ کردن مستطیلی از این مربع‌ها آزمایش کنید. تا جایی که من اطلاع دارم تاکنون از مستطیل‌های بخش‌پذیر، پازلی به بازار نیامده، در حالی که جالب‌ترین و زیباترین پازل‌ها را می‌توان از آن‌ها ساخت.

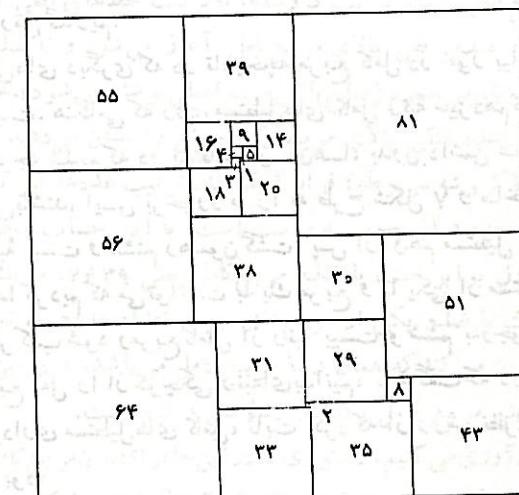
سام لوید آمریکائی و دومنی انگلیسی چندین مستطیل بخش‌پذیر در

بزرگی دست یافتند. شپراگ (R. Sprague) ازیر لین چنان ماهرانه چند مستطیل کامل را بهم جفت کرد که مربع کاملی از رتبه پنجاه و پنجم به دست آورد. این مربع، اولین مربع کاملی بود که در سال ۱۹۳۹ منتشر شد. به تازگی ویلکوکس (T. H. Willcocks) از بریستول هم به گردآوری مستطیل‌های بخش‌پذیر - اعم از کامل و یا ساده - پرداخته بود، اول مربع کاملی از رتبه بیست و چهارم به دست آورد که هنوز امتیاز کمترین رتبه را دارا می‌باشد. این مربع کامل در شکل ۱۴ نشان داده است و فرمول آن نیز چنین است:

۱۸، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۱۴، ۴۰، ۵۶، ۱۶، ۹۰، ۱۴، ۳۹، ۸۱، ۵۵، ۳۸، ۳۳.

برخلاف روش نظری، روش تجربی نتوانسته است هنوز مربع کامل ساده‌ای به دست دهد. چه بسا برخی از خوانندگان بخواهند خودشان روی مستطیل‌های کامل کار کنند، از این رو ما بررسی دو مسئله حل نشده را به عهده آن‌ها واگذار می‌کنیم. نخست، کمترین رتبه مربع‌های کامل را پیدا کنید. دوم مستطیل کامل ساده‌ای پیدا کنید که ضلع افقی آن دو برابر ضلع قائمش باشد.»

ویلیام توت



شکل ۱۴

بخش‌پذیر، عنصری یافت می‌شود که از همه کوچکتر است. این کوچکترین مربع جزء نمی‌تواند با هیچ یک از ضلع‌های این مربع بخش‌پذیر تماس داشته باشد، (چرا؟). بنابراین در محاصره سایر مربع‌های جزء می‌باشد. هر یک از این مربع‌های جزء در واقع وجه زیرین مکعب‌هایی را که با سطح میز تماس دارند تشکیل می‌دهند.

پس مکعبی که روی کوچکترین مربع جزء قرار گرفته، در میان سایر مکعب‌های جزء که با سطح میز تماس دارند، در محاصره است. ما این مکعب جزء کوچک را A می‌نامیم، چون این مکعب کوچک از سایر مکعب‌هایی که با سطح میز تماس دارند کوچکتر است، پس بادیو از همانی بلندتر از خود به حصار کشیده شده است، بنابراین روی این مکعب A می‌تواند تنها یک مکعب دیگر و مساوی خودش قرار گیرد که در این صورت دو مکعب مساوی پیدا می‌شود که پذیرفتش نیست و یا چند مکعب دیگر و کوچکتر از خودش. در این حالت به ناچار سطح بالای مکعب A تیز باشد مرتعی بخش‌پذیر باشد یعنی روی مکعب کوچک A باید مکعب‌های جزء دیگری وجود داشته باشد که در میان آن‌ها مکعبی کوچکتر از هم مثل B موجود باشد. به همین ترتیب روی این مکعب هم باید مکعب‌هایی دیگر و درین آنها یکی از همه کوچکتر مثل C وجود داشته باشد و روی C نیز مکعب کوچکتری مثل D . اگر چنین پیش برویم این مکعب‌ها پایانی نخواهد داشت. با یک سلسله مکعب‌هایی بی‌شمار، هر یک روی دیگری و کوچکتر رو به رو هستیم و عدد درستی از تعداد آن‌ها به دست نخواهیم آورد. این بدین معنی است که هیچ مکعبی نمی‌تواند به تعداد معینی از مکعب‌های کوچکتر و نابرابر تقسیم شود. بنابراین مکعب بخش‌پذیر وجود ندارد.

حال بینیم، چرا کوچکترین عنصر یک مربع بخش‌پذیر هیچ وقت نمی‌تواند با ضلع‌های مربع در تماس باشد. اگر فرض کنیم که یک ضلع کوچکترین عنصر مرتعی با ضلع خود مربع در تماس باشد، دو ضلع دیگر ش با دو عنصر بزرگتر از خودش در تماس خواهد بود و ضلع سومش باید با عنصر یا عنصرهایی مساوی یا کوچکتر از خودش در تماس باشد در صورتی که این عنصر خود، کوچکترین عنصر فرض شده بود.

ترجمه هرمز شهریاری

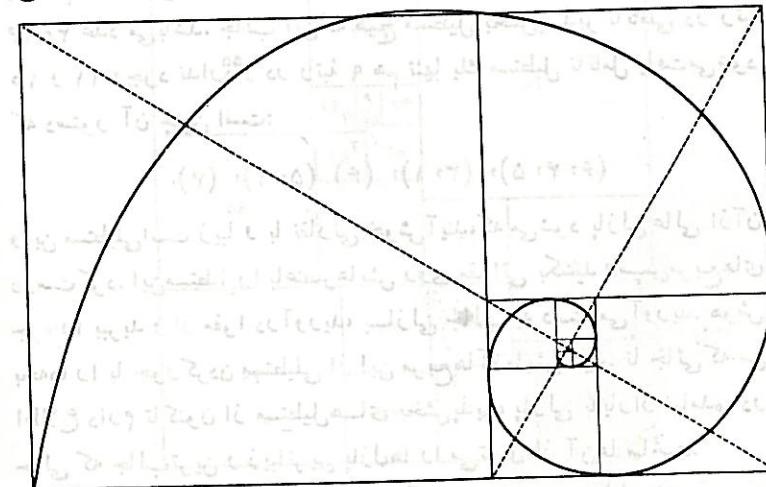
کتاب‌های خود آورده‌اند ولی هیچ یک از آن‌ها، نه ساده‌اند و نه کامل. کوچکترین مرتعی که هم ساده است و هم کامل مرتعی است از رتبه‌سی و هشتم به ضلع ۴۹۲۵ که بروک آن را پیدا کرد. مرتع بروک در سال ۱۹۵۹ به وسیله دیل کوکس به‌وضع بهتری درآمد و به رتبه‌سی و هفتم با ضلع ۱۹۴۷ رسانده شد. به شکل ۱۵ هم توجه کنید که مستطیل بخش‌پذیری است از رتبه‌نامتناهی.

پس از بررسی مربع بخش‌پذیر می‌خواهیم بدانیم مکعب هم می‌تواند بخش‌پذیر باشد. یعنی یک مکعب را می‌توان به مکعب‌های کوچکتر و نابرابر تقسیم کرد؟

بررسی این مسئله به شما خواهدنده بادوق و اگذار می‌شود، باشد که موفق شوید.

با این حال ما در اینجا پاسخ آن را همراه با استدلال می‌آوریم این استدلال توسط یکی از پژوهندگان همان‌گروه چهار نفری به عمل آمده که ذیباترین استدلالی است در این باره.

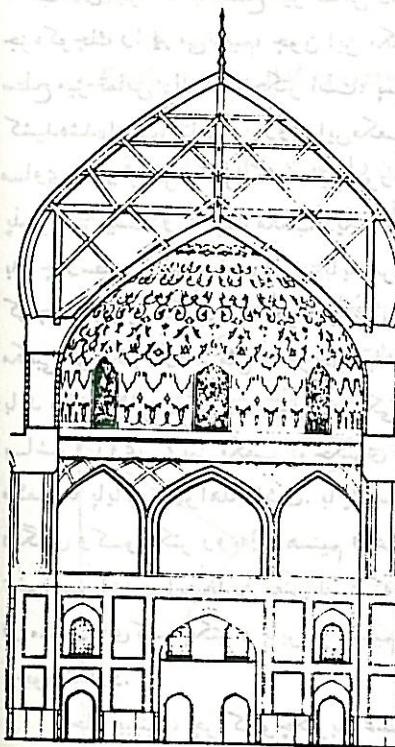
فرض می‌کنیم که مکعب هم می‌تواند بخش‌پذیر باشد و یکی از آن‌ها جلو میز گذاشته شده است. بنابراین وجه زیرین این مکعب که با سطح میز تماس دارد، یک مربع بخش‌پذیر است. درین عنصرهای این مربع



شکل ۱۵

طرح‌های هندسی در طاق‌های ایرانی

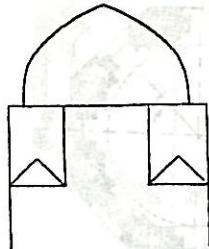
جاپر عناصری



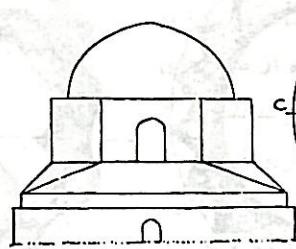
زندگی‌داد آندره گدار (Andre Godard) باستان‌شناسان صاحب‌نام کشور فرانسه که از آغاز سال ۱۳۵۸ شمسی - در ایران - عهده‌دار وظایفی در قلمرو باستان‌شناسی کشور مابود، ضمن اقامت در ایران و انجام مطالعات و تحقیقات چشمگیر - افزون بر تدوین کتاب‌های متعدد در زمینه باستان‌شناسی، کتابی تک - موضوعی به نام: «طاق‌های ایرانی» تألیف و در این کتاب انواع و اقسام قوس‌ها و طاق‌ها و گنبدهای را که از روزگار گذشته تاکنون در بناهای تاریخی ایرانی به کار رفته، مورد بررسی قرار داده است.

آنچه در این اثر برجسته شایان توجه است، مسئله مساحتی و کاربرد مباحثت هندسی و رعایت اصول و قراردادهای محاسباتی مربوط به طاق‌ها و قوس‌هاست.

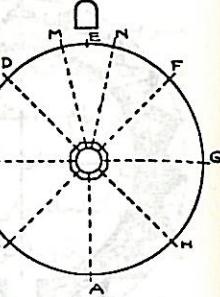
ترجمه چاپ اول این کتاب به سال ۱۳۶۹ و در ۲۰۰۵ نسخه ازسوی انتشارات فرهنگسرای و در ۱۹۴ صفحه انجام یافته و یکی از کتب ارزشمند



طرح شماره ۳



طرح شماره ۲



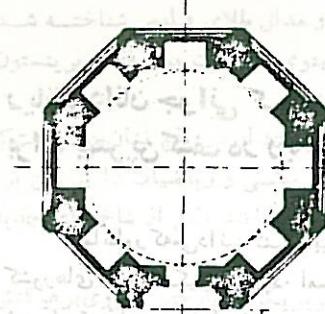
طرح شماره ۱

مربوط به هنر معماری در ایران به شمار می‌رود.

نویسنده کتاب از روزگار ساسانیان تا زمان حال گنبدها و طاق‌ها و قوس‌های بنایی معروف را به اجمال مورد پژوهش قرار داده و به ساختمان آتشکده‌های ساسانی اشاره کرده و بنایی مختلفی را از آن دوران تاکنون در مد نظر داشته است. طاق‌ها و قوس‌های بنایی نظیر کاخ‌ها، امامزاده‌ها، خانقاوهای، قوه خانه‌ها، کاروانسرا و رباطها، حمام‌ها، آب‌انبارها، یخچال‌ها، کبوترخانه‌ها و ... به شیوه مشاهده حضوری در معرض دیده نویسنده بوده و اتفاقات به طرح‌های هندسی - از چشمان تیزین این محقق به دور نمایده است. آندره گدار در این کتاب (طاق‌های ایرانی)، معتقد است که در معماری ایرانی روزگار ساسانی، گنبد را فقط بر روی طاق‌های مربع می‌ساختند. در دوره اسلامی علاوه بر تالارهای مربع، گنبد را بر روی طاق‌های مدور، پنج‌ضلعی، هشت‌ضلعی، ده‌ضلعی، دوازده‌ضلعی و حتی بر روی محوطه مستطیل نیز بنا کرده‌اند.

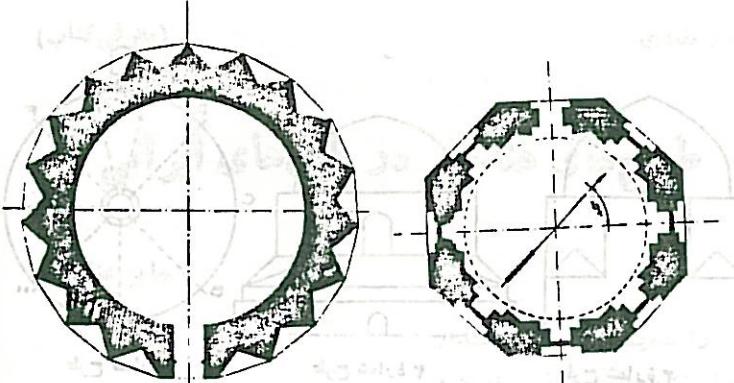
آندره گدار درباره کاربرد طاق در ساختمان یک آب‌انبار و توجه به طرح‌های هندسی می‌نویسد:

«... [این] آب‌انبار بنایی استوانه‌شکل است به قطر نقریباً هفت متر و یک جزر مرکزی به قطر یک متر. پس از اینکه دیوار گرد تا سطح خیزگاه طاق ساخته شده، با کمک یک قالب چوبی یک سلسله قوس‌هایی که یک‌سر آنها روی دیوار و سر دیگر شان روی جزر مرکزی است، ساخته شده است.».



اشکال هندسی نظریه مثلث، ذوزنقه، مربع، مستطیل و ... انجام داده و قوس‌ها و طاق‌های ساختمان را به ظرافت تمام با استفاده از طرح‌های هندسی، احداث کرده‌اند. طرح هندسی گنبدسلجوقی مربوط به مسجد جامع گلپایگان (طرح شماره ۳) نیز به‌وضوح کاربرد دقیق و صحیح محاسبات هندسی را نشان می‌دهد در حالی که طرح گنبد شیخ جنید در استان یزد (طرح شماره ۴) و طرح ساختمان امام زاده اخیر در چزین سمنان (طرح شماره ۵) و همچنین طرح مقبره چلبی اوغلو در سلطانیه (طرح شماره ۶)، از طرح‌های هندسی قابل توجه به‌شمار می‌روند. ضمن اینکه طاق ساختمانی از مبارک‌آباد (روستائی از دماوند) نشان می‌دهد که این طاق براساس طرح هشت‌ضلعی استوار گشته است. یکی از ساختمان‌های موردنظر آندره گدار، ساختمان امام زاده یحیی در تهران بوده است. این بنا مرکب است از یک تالار هشت‌ضلعی که با گنبدی پوشش یافته و بر فراز آن بامی هرمی شکل قرار دارد. کتاب طاق‌های ایرانی – اثر آندره گدار – در نوع خود کتاب بی‌نظری است. ضمن اینکه این کتاب به صورت تخصصی فقط می‌تواند مورد استفاده گروه خاصی از علاقه‌مندان قرار گیرد. به خصوص عدم الماقع واژه‌نامه‌ای به‌منظور آشنائی با اصطلاحات ویژه طاق و طرح‌های هندسی طاق‌ها – کتاب را برای خواننده عادی، متی مشکل جلوه می‌دهد. متأسفانه غلط‌های چاپی کتاب از ارزش زحمت نویسنده (آندره گدار) و مترجم خبره و محترم (فضل ارجمند آقای کرامت... افسر) می‌کاهد. در حالی که اصل موضوع مربوط به شناخت طاق‌ها و بررسی طرح‌های هندسی در این طاق‌ها ما را با گوشه‌ای از کاربرد هندسه در معماری آشنا می‌سازد.

اشکال هندسی نظریه مثلث، ذوزنقه، مربع، مستطیل و ... انجام داده و قوس‌ها و طاق‌های ساختمان را به ظرافت تمام با استفاده از طرح‌های هندسی، احداث کرده‌اند. طرح هندسی گنبدسلجوقی مربوط به مسجد جامع گلپایگان (طرح شماره ۳) نیز به‌وضوح کاربرد دقیق و صحیح محاسبات هندسی را نشان می‌دهد در حالی که طرح گنبد شیخ جنید در استان یزد (طرح شماره ۴) و طرح ساختمان امام زاده اخیر در چزین سمنان (طرح شماره ۵) و همچنین



طراح شماره ۵

در زمینه احداث بنا و رعایت محاسبات هندسی مربوط به این آب‌انبار، آندره گدار اشاره کرده است که برای این منظور محیط مخزن آب‌انبار را به هشت قسم مساوی تقسیم می‌کنند و به این طریق هشت نقطه $ABCDEFGH$ را که فاصله بین آنها مساوی است، مشخص می‌سازند. (طرح شماره ۱) و برای اجتناب از اینکه قوسی درست بالای دهانه ورودی مخزن آب‌انبار قرار نگیرد بعداً فاصله DF را به سه بخش MN و DM و NF تقسیم کرده سپس از نه نقطه $ACDMNFGH$ نه قوس می‌زنند، نیمرخ آنها ترکیب یافته نیخت از یک آجر بر روی قالب و یک آجر دیگر روی آن. سپس دو آجر چسبیده به هر دو طرف آجرهای نخستین استوار می‌سازند. پس از اینکه این کار انجام گرفت، ساختن طاق را آغاز می‌کنند.

التفات به طرح‌های هندسی در احداث طاق‌های ساختمان‌های متعدد نشان می‌دهد که معماران با توجه به محاسبات دقیق و استفاده از اشکال و طرح‌های هندسی، تفکیک بخش‌های مختلف ساختمان را در نظر داشته و افزون بر دقت توأم با وسوس برای در نظر گرفتن استحکام ساختمان، جلوه‌های تزیینی و جنبه‌های زیائی شناختی معماری را نیز هرگز از نظر دور نداشته‌اند. مثلاً طرح هندسی آرامگاهی در خراسان (معروف به ارسلان جاذب – طرح شماره ۲) تقسیم‌بندی نمای ساختمان و محوطه بنا را براساس

کار پعدی که شایسته دریافت جایزه و مدارل طلای فیلدس شناخته شد
من بوط به ادوارد وینن^۲ ساله‌های انتیتیوی مطالعات پیش‌فتنه پرینستون
می‌باشد.

کار وینن هم ارتباط نزدیکی با فیزیک دارد او درواقع نشان داده است که
می‌شود تفاوت‌های موجود بین تئوری‌های فیزیکی و ریاضیات را از بین برد
او مدعی شده است که تئوری ریسمانها سرانجام همانند یکی از شاخه‌های جدید
هندسه عمل خواهد کرد.

تئوری ریسمانها آنچه‌ای که می‌کوشد تا تصویر یگانه‌ای از چهار نیروی برهم کنش
موجود در طبیعت ارائه دهد و بین گرش و مکانیک کوانتمی وحدت ایجاد کند
درینن تئوری‌های فیزیکی موجود نقش مهمی را ایفا می‌کند حال که وینن
می‌خواهد نشان دهد که تئوری ریسمانها چون شاخه‌ای از هندسه عمل می‌کند
می‌توان به اهمیت کشف او واقع شد در واقع وینن برای این کار توپولوژی
کوانتمی را توسعه داده است و اساس هندسه را دگرگون کرده است.
شیگوفومی هوری^۳ از دانشگاه میزان کنکره یعنی دانشگاه کیوتو ژاپن

بنده دیگر مدارل فیلدس در سال ۱۹۹۰ می‌باشد.
موری که ۳۹ سال دارد، قسمت اعظم زندگی پژوهشی خود را وقف توسعه
روشهای دسته‌بندی کردن انواع سطح‌هایی که بوسیله معادلات جبری تعریف می‌شوند
کرده است کار هم موری که او را لایق دریافت جایزه فیلدس کرده است توسعه
معادلات جبری در تئوری کلاسیک به سطح‌های سه بعدی می‌باشد.

جهادمین کسی که در سال ۱۹۹۰ مفتخر به دریافت جایزه فیلدس شد
ولادیمیر ج. درینفلد^۴ ساله‌ای انتیتیوی فیزیک و مهندسی خارکوف در اتحاد
شوری می‌باشد.

درینفلد که در اصل یک مهندس و فیزیکدان می‌باشد و درزمیه درجه
حرارتی پایین به تحقیق و پژوهش می‌پردازد کارهای مهم و مشترکی در
در حوزه هندسی جبری و تئوری اعداد انجام داده است. اثبات چند فرضیه اساسی
در تئوری اعداد و معروفی کردن تعدادی از مفاهیمی که در سایر حوزه‌ها کاربرد
دارد او را موفق به دریافت جایزه فیلدس کرد.

ترجمه مصطفی عزیزی

۲. Edward Witten
۴. Vladimir G. Drinfeld

ریاضی دان جوانی که در سال ۱۹۹۵ برنده مدارل بین‌المللی،
برای بهترین کشف در ریاضیات، به نام «جایزه فیلدس» شدند

همانطور که می‌دانید کنکره بین‌المللی ریاضیات هرچهار سال یکباره دیگر از
کشورهای عضو تشکیل می‌شود. امسال (۱۹۹۵) کنکره بین‌المللی ریاضیات در
شهر کیوتو ژاپن برگزار شد.

از سال ۱۹۳۶ به بعد یکی از موضوعاتی که در دستور کار این کنکره قرار
گرفته است اعطای جایزه فیلدس به ریاضی دانان جوان بر جسته می‌باشد. هر چند
مبلغ این جایزه اندک است و قابل مقایسه با جایزه نوبل نیست اما اعتبار معنوی
این مدارل فوق العاده زیاد است زیرا برنده مدارل طلای فیلدس در واقع به عنوان
بهترین ریاضی دان، در چهار سال گذشته، معروفی خواهد شد.

همانگونه که در بالا اشاره رفت جایزه فیلدس به ریاضی دانان جوان تعلق
می‌گیرد؛ برندگان این جایزه حداکثر می‌توانند ۴۵ سال داشته باشند. دوستان
عالقمندجهت کسب اطلاع پیشتر در مرور جایزه فیلدس و این موضوع که چرا آفراد
نوبل جایزه خویش را برای ریاضی دانان اختصاص نداده است می‌توانند به جلد
پانزدهم آشنائی با ریاضیات که در مردادماه ۱۳۶۶ منتشر شده است رجوع کنند.

□
ویکان اف-ار-جونز^۱ توپولوژیست ساله‌ای از دانشگاه برکلی کالیفرنیا یکی
از چهار نفری است که در سال ۱۹۹۵ به دریافت جایزه فیلدس پخاطر کار درخشنده
در ذهنیه تئوری گره‌ها نایل آمد.

جونز در سال ۱۹۸۴ بطور غیر مترقبه‌ای یک ارتباط و رابطه تنکاتنگ
بین جبر فون نیومن (یک تکنیک ریاضی که نقش مهمی در فیزیک کوانتم ایفا
می‌کند) و تئوری گره‌ها کشف کرد. این رابطه جونز را متوجه فرمول و روش
پیشرفتنه‌ای کرد که برای تشخیص دادن و درک گره‌ها بکار می‌رود.

کشف جونز علاوه بر تأثیر شگرفی کادرمور داشت بهتر تئوری گره‌ها گذارد
بحث داغی هم بین ریاضی دان در رابطه با ارتباط بین تئوری گره‌ها و فیزیک
بوجود آورد.

۱. Vaughan F. R. Jones

$$n = 10^{2999} + 10^{2998} + \dots + 10^2 + 10^0$$

این عدد، تنها شامل رقم‌های ۱ و ۰ است و، در ضمن، ۱۰۰۰ رقم واحد دارد. عدد n برابر مجموعی است شامل ۱۰۰۰ جمله که از همه حاصل ضرب‌های ممکن به صورت زیر تشکیل شده است:

$$10^{2a+2b} \leq a, b \leq 999$$

بینیم، در این مجموع، چه جمله‌هایی باهم برابرند. برای مشخص بودن وضع $a \leq b$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$10^{2a+2b} = 10^{2c+2d}$$

باشرط $c \leq d$ بدست می‌آید:

$$2^a(1+2^{b-a}) = 2^c(1+2^{d-c})$$

بنابراین $c = a$ (نمای عدد اول ۲ در دو طرف برابری) و، سپس $b = d$. در حالات $c > d$ داریم:

$$2^a(1+2^{b-a}) = 2^d(1+2^{c-d})$$

و بلا فاصله به دست می‌آید $b = c$ و $a = d$. بنابراین ترتیب، درین جمله‌های مجموع ما، تنها جمله‌های به صورت 10^{2a+2b} و 10^{2b+2a} می‌توانند باهم برابر باشند، یعنی عدد ۲^۰ شامل ۱۰۰۰ رقم واحد (جمله‌های به صورت $\frac{1000 \times 999}{10^{2a+2b}}$ و $\frac{1000 \times 999}{10^{2b+2a}}$) است؛ در بقیه مرتبه‌های عدد، رقم ۰ قرار گرفته است. یعنی، مجموع رقم‌های عدد n برابر است با

$$1000 + 2 \times \frac{1000 \times 999}{2} = 1000^2$$

(امثل دو). ثابت می‌کنیم، برای هر عدد طبیعی m ، می‌توان عدد طبیعی n را شامل رقم‌های برابر واحد و احتمالاً صفر پیدا کرد، به نحوی که،

حل مسائلهای

مسائلهای مسابقه‌ای (صفحه ۴۱۶ را بینید)

۱. ABC را مثلث مفروض و P, Q, R را به ترتیب وسط ضلع‌های AC, BC, AB می‌گیریم (شکل ۱). مثلث‌های ABC و RQC و PBQ و APR متشابه‌اند، زاویه‌هایی حاده‌دارند و، بنابراین، نقطه‌های L و M و N محل برخورد ارتفاع‌های این مثلث‌ها، در درون آن‌ها قراردادند.

اگر مساحت شش ضلعی $LPMQRN$ را s بنامیم، داریم:

$$\begin{aligned} s &= S_{PQR} + S_{PMQ} + S_{QNR} + S_{RLP} = \\ &= \frac{1}{4}S + S_{PMQ} + S_{QNR} + S_{RLP} \end{aligned}$$

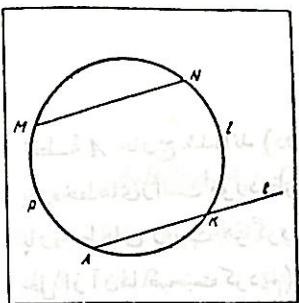
که در آن، S را مساحت مثلث ABC گرفته‌ایم. چون سه مثلث PBQ و RQC باهم برابرند، بنابراین دو مثلث ALR و PMQ باهم و دو مثلث PLA و QNR باهم برابرند. درنتیجه

$$S_{PMQ} + S_{QNR} + S_{RLP} = S_{APR} = \frac{1}{4}S$$

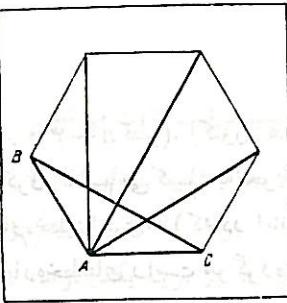
$$\text{وازان} \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}S$$

۲. بله، وجود دارد.

داخل اول، مثلاً می‌توان این عدد را در نظر گرفت:



شکل ۴



شکل ۳

راس دلخواهی، مثل A ، از n ضلعی را در نظر می‌گیریم. ضلع‌های AB و AC در این n ضلعی، از راس A خارج شده‌اند. این دو ضلع، همه قطرهایی که از راس A گذشته‌اند و قطر BC را در نظر می‌گیریم (شکل ۳ را، در حالت شش ضلعی ببینید). تعداد این پاره خط‌های راست، برای n است و، در ضمن، هر دو تا از آن‌ها، دارای نقطه مشترکی هستند. بنابراین، آن‌هارا باید بار نگاهی مختلفی رنگ کرد، یعنی برای این n پاره خط راست دست کم n رنگ لازم است.

اکنون ثابت می‌کنیم که با n رنگ، می‌توان بدرنگ آمیزی مورد نظر رسید. برای این منظور ثابت می‌کنیم، این n پاره خط راست (که در بالا در نظر گرفته بودیم)، دارای ویژگی زیر هستند: هر یک از ضلع‌ها یا قطرهای n ضلعی، بایکی از این پاره خط‌های راست موازی‌اند.

۱) دایرة محیطی n ضلعی را در نظر می‌گیریم و MN را، یکی از ضلع‌ها یا قطرهای n ضلعی فرض می‌کنیم. اگر MN موازی BC باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. درحالی که MN با BC موازی نیست، از راس A ، خط راست ℓ را موازی MN رسم می‌کنیم تا دایره ω را در قطع کند (شکل ۴). درواقع، خط راست ℓ نمی‌تواند بردازه ω مماس باشد، زیرا در این صورت ℓ با BC و، درنتیجه، BC با MN موازی می‌شود.

چون A و M دور اس n ضلعی‌اند، بنابراین، کمان ApM شامل تعداد درستی کمان‌های برابر است که به وسیله راس‌هایی از n ضلعی، روی ω پدید آمده‌اند. چون MN با AK موازی است، بنابراین دو کمان KIN و ApM برای نهاد؛ درنتیجه، کمان KIN هم شامل کمان‌هایی برابر است که به وسیله راس‌هایی از n ضلعی، روی ω پدید آمده‌اند، یعنی K هم یک راس n ضلعی است. بنابراین ترتیب MN موازی بایکی از پاره خط‌های راستی است که از

مجموع رقم‌های عدد n [که با $S(n)$ نشان می‌دهیم] برابر m و مجموع رقم‌های عدد n^2 [یعنی $(S(n))^2$] برابر m^2 باشد. اثبات را با استقراری روی m می‌دهیم.

روشن است که، به ازای $1 = m$ ، عدد مجهول n برابر ۱ است. فرض می‌کنیم، برای مقداری از عدد طبیعی m ، عدد طبیعی n شامل رقم‌های برابر واحد و صفر وجود داشته باشد، به نحوی که $S(n) = m$ و $(S(n))^2 = m^2$. اگر عددی k رقمی باشد، فرض می‌کنیم $1 = 10^{k+2}n + \dots + n$. در این صورت

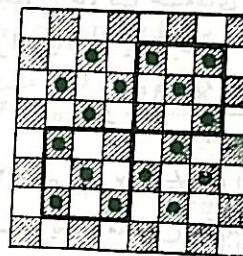
$$n^2 = 10^{2(k+2)} \cdot n^2 + 2n \cdot 10^{k+2} + 1$$

عدد $n^2 = 10^{2(k+2)}$ ، حداقل به $4 \cdot 2k + 4$ رقم برابر صفر ختم می‌شود؛ و عدد $2n \cdot 10^{k+2}$ ، بیش از $(2k+3)$ رقم ندارد (تعداد رقم‌های عدد $2n$ از $1+k$ تجاوز نمی‌کند). بنابراین

$$S(n^2) = S(n^2) + 2S(n) + 1 = (m+1)^2 \quad (1)$$

راه حل دوم، شکل عدد n را به روشنی نشان نمی‌دهد، ولی در عوض، مساله را در حالت کلی خود حل می‌کند.

۲) روش است که، هیچ کدام از مهره‌ها، نمی‌تواند در یکی از خانه‌های مزدی صفحه قرار گیرد. به جزاً این، در مرتعهایی که روی شکل ۲ با ضلع‌های



شکل ۲

کلفت‌تر نشان داده شده‌اند، هر پنج خانهٔ سیاه را، نمی‌توان اشغال کرد (زیرا، اگر

هر پنج خانهٔ سیاه اشغال شده باشند، مهرهٔ خانهٔ مرکزی، از تعرض مصون می‌ماند).

بذاین ترتیب، بیش از ۱۶ خانه جدول را نمی‌توان اشغال کرد. در ضمن، ۱۶ مهرهٔ را، با توجه به شرط‌های مساله، می‌توان قرارداد. آن‌طور که در شکل ۲ دیده می‌شود.

۳) پاسخ: n رنگ.

ابتدا ثابت می‌کنیم، دست کم n رنگ لازم است. برای این منظور،

به همین ترتیب ثابت می شود:

$$A_7B_1 \parallel A_1A_5, OA_7 \parallel B_2A_1, A_5A_6 \parallel A_1A_4 \parallel A_2A_3$$

از آن جا که دونقطه (A_1, B_1) و همچنین دونقطه (A_2, B_2) نسبت به قطر A_5A_6 قرینه یکدیگرند، بنا بر این، پاره خط‌های راست A_2B_1 و A_1B_2 یکدیگر را در نقطه K واقع براین قطر، قطع می‌کنند.

از آن‌چه ثابت کردیم، نتیجه می‌شود که A_5A_6LK و KA_2A_3O متوازی‌الاضلاع‌اند، یعنی $OK = A_7A_2$ و $LA_1 = KA_6$. تنها این مطلب باقی می‌ماند که ثابت کنیم: $LA_1 = MN$.

چهارضلعی‌های $LNOK$ و A_1MOK متوازی‌الاضلاع‌اند، بنا بر این

$$A_1M = KO = LN \Rightarrow LA_1 = NM$$

۰.۷) (t, z, y, x) را چهار عدد نخستین و (t, z, y, x) را چهار عددی می‌گیریم که بعد از یک بار فشاردادن شستی به دست آمده باشد. توجه کنیم، در هر حالت، به جز حالت نخستین، مجموع چهار عدد، برابر صفر است. اگر (a, b, c, d) را چهار عدد به مجموع صفر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + \\ &\quad + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \end{aligned}$$

اکنون چهار عدد (a_1, b_1, c_1, d_1) را در نظر می‌گیریم که از عددهای (a, b, c, d) ، با فشارشستی به دست آمده‌اند. برای آن‌ها داریم:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 = \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2ab - 2bc - 2cd - 2ad = \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2ac + 2bd \end{aligned}$$

و چون $2bd \leqslant b^2 + d^2$ و $2ac \leqslant a^2 + c^2$ ، بنا بر این

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \geqslant 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

از آن‌جا که چهار عدد نخستین (t, z, y, x) ، همه باهم برابر نیستند، در نتیجه

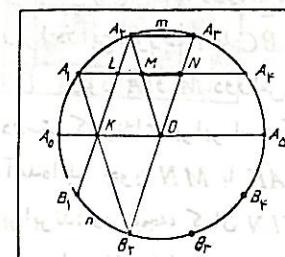
نقطه A خارج شده‌اند (دو ضلع AB و AC و $n-3$ قطر). اکنون، همه پاره خط‌های راست مورد نظر مساله را، به n گروه تقسیم می‌کنیم؛ به نحوی که پاره خط‌های راست هر گروه، با یکی از n پاره خط راست ما (که در ابتدای حل از آن‌ها صحبت کردیم) موازی باشند. پاره خط‌های راست هر گروه را، با یکی از رنگ‌ها، رنگ می‌کنیم؛ روی هم ۱۱ رنگ مصرف خواهد شد.

۵. رنگ قاعده جعبه را، رنگ اول و رنگ سپوش آن را، رنگ دوم می‌نامیم. شش وجه مکعب را، به سه زوج از وجه‌های رو به رو تقسیم و زوجی را انتخاب می‌کنیم که هیچ کدام از رنگ‌های اول و دوم را نداشته باشند. دور رنگ این دووجه رو به رو مکعب را، رنگ‌های سوم و چهارم می‌نامیم. مکعب را طوری در نظر می‌گیریم که رنگ‌های سوم و چهارم، مر بوط بدوجه‌های پایینی و بالای آن باشند. اگر مکعب را، به همین صورت، در جعبه بگذاریم، در مورد قاعده‌های پایین و بالا، شرط مساله برقرار می‌شود. وجه‌های جانبی مکعب، به رنگ‌های ۱، ۲، ۵، ۶ و وجه‌های جعبه به رنگ‌های ۳، ۴، ۵، ۶ هستند. تنها وجه‌های بار رنگ‌های ۵ و ۶، ممکن است بر هم منطبق شوند. اگر قاعده پایین مکعب را عوض نکنیم، آن را به چهار صورت می‌توان در جعبه قرارداد. تنها در یکی از این حالت‌ها دو وجه به رنگ ۵، و تنها در یکی از حالت‌ها، دووجه به رنگ ۶ مجاور هم قرار می‌گیرند. بنا بر این، دست کم دو حالت باقی می‌ماند که، در آن‌ها، وجه‌های هم رنگ، مجاور یکدیگر واقع نمی‌شوند. به این ترتیب، با ثابت نگهداشت قاعده پایین مکعب، دست کم، در دو حالت، شرط مساله برقرار می‌شود.

۶. نقطه‌های B_1, B_2, B_3, B_4 و A_1, A_2, A_3, A_4 و

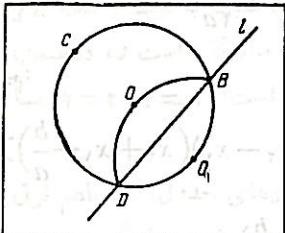
نسبت به قطر A_5A_6 را هم در نظر می‌گیریم. ده ضلعی منتظم $A_0A_1A_2A_3A_4A_5B_4B_3B_2B_1$ به دست می‌آید که در دایره مفروض محاط است (شکل ۵). چون دو کمان B_1nB_2 و A_2mA_3 برابرند، $A_2B_1 \parallel A_3B_2$

شکل ۵



$$= (M_1 + M_2 + \dots + M_n) - (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = \\ = [(n+1) + (n+2) + \dots + (n+n)] - (1+2+\dots+n) = n^2$$

۰.۹ O_1 را قرینه O نسبت به خط راست l می‌گیریم (شکل ۶). با استفاده



شکل ۶

از دوران دور نقطه O ، می‌توان نقطه O_1 را به هر نقطه از محیط دایره به مرکز O و به شعاع OO_1 منجر کرد. بنابراین، به کمک تقارن نسبت به خط راست l و دوران دور نقطه O ، می‌توان نقطه O را به هر نقطه‌ای از کمان DOB ، قرینه DO_1B نسبت به

خط راست l منتقل کرد. دایره دلخواهی را، به مرکز نقطه O و به شعاعی کوچکتر از OO_1 در نظر می‌گیریم. چون محیط این دایره، کمان DOB را قطع می‌کند، بنابراین می‌توانیم هر نقطه از محیط این دایره را به دست آوریم.

با این ترتیب، با انجام پشت‌سرهم تقارن نسبت به خط راست l و دوران دور نقطه O ، دوباره تقارن و دوران، می‌توانیم نقطه O را به هر نقطه از سطح دایره به مرکز O و شعاع OO_1 برسانیم. نقطه C را، واقع بر محیط دایره به مرکز O و به شعاع OO_1 در نظر می‌گیریم، به نحوی که حداقل فاصله ممکن را از خط راست l داشته باشد (شکل ۶ را ببینید). اگر O_1C را قرینه نقطه C نسبت به خط راست l بگیریم، آنوقت با تکرار روند قبلی، می‌توانیم نقطه C و، بنابراین، نقطه O را به هر نقطه از سطح دایره به مرکز O و به شعاع OO_2 منتقل کنیم. روشن است که، با تکرار این روند، می‌توانیم نقطه O را به هر نقطه دلخواهی از صفحه، و منجمله نقطه A ، برسانیم.

۰.۱۰ پاسخ: دو مقدار.

اگر به ازای سه مقدار درست x ، شرط مساله برقرار باشد، به ناچار

$$(y = ax^2 + bx + c) \text{ (راس سهمی)} \quad x = -\frac{b}{2a}$$

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + t_i^2 > 0$$

و با برآنچه ثابت کردیم:

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + t_i^2 > 2^{i-1}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + t_i^2)$$

از اینجا نتیجه می‌شود، اگر n را به اندازه کافی بزرگ بگیریم، می‌توانیم به گروهی از چهار عدد برسیم که، دست کم یکی از آنها، از لحاظ قدر مطلق، از 3×1985 بزرگتر باشد. اگر این عدد منفی باشد، آنوقت در همین گروه چهار عددی، باید عدد مثبتی بزرگتر از 1985 وجود داشته باشد، زیرا مجموع چهار عدد، برابر صفر است.

۰.۱۱ دو عدد a_k و b_k را در نظر می‌گیریم. این دو عدد نمی‌توانند، هردو، از n بزرگتر باشند، زیرا اگر هم a_k و هم b_k از n بزرگتر باشند، باید داشته باشیم:

$$n < a_k < \dots < a_n < b_1 < \dots < b_k < n$$

و به این ترتیب، باید $(n+1)$ عدد $a_{k+1}, a_k, b_k, \dots, b_1, a_n$ ، که همگی از n بزرگترند در اختیار داشته باشیم، در حالی که تعداد عددهای بزرگتر از n ، در مجموعه عددهای از ۱ تا $2n$ ، برابر n است. به همین ترتیب، ممکن نیست به طور هم زمان داشته باشیم: $a_k \leqslant n & b_k \leqslant n$. بنابراین، یکی از دو عدد a_k و b_k از n بزرگتر است (که آن را M_k می‌نامیم) و دیگری از n تجاوز نمی‌کند (و آن را m_k می‌نامیم).

عددهای M_1, M_2, \dots, M_n همه مختلف‌اند و در ضمن، هر کدام از آنها از n بزرگتر است و از $2n$ تجاوز نمی‌کند؛ بنابراین، عددهای M_1, M_2, \dots, M_n عبارتنداز عددهای $1, 2, \dots, n+1, n+2, \dots, n+n = 2n$ که ممکن است به ردیف دیگری قرار گرفته باشند. به همین ترتیب، عددهای m_1, m_2, \dots, m_n عبارتند از همان عددهای $1, 2, \dots, n$ که ممکن است با ردیف دیگری باشند. روشن است که $|a_k - b_k| = M_k - m_k$. داریم:

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = \\ = (M_1 - m_1) + (M_2 - m_2) + \dots + (M_n - m_n) =$$

$$20 > d = 2(e+h) + a + e + h + k \geq$$

$$\geq 2(e+h) + 1 + 2 + 3 + 4$$

یعنی $4 \leq e+h$. بدون این که به کلی بودن مساله اطمینان وارد شود، می‌توان $e < h$ گرفت. در حالت عکس، قرینه جدول را نسبت به خط راست fd در نظر می‌گیریم. جدول جدید، با صورت مساله سازگار است و، در ضمن، $d < 20$ دارای $e < h$ و $d < 20$ است: $e=1, h=3, d=10, a=2$.

در حالت اول $f=4$ و $a+k \leq 7$. عده‌های جدول، همه باهم فرق دارند، بنابراین یا $a=2, k=5$ و یا $a=5, k=2$. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، هر دو حالت، منجر به تکرار برخی عددها در جدول می‌شوند. در حالت دوم $f=3$ و $a+k \leq 10$. بنابراین، باید داشته باشیم: $a \geq 4, k \geq 4$ و $a \neq k$. تنها چهار امکان برای (a, k) وجود دارد: $(4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 4)$.

بنابراین فرض مساله، باید همه عده‌های $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ باهم فرق داشته باشند، ولی هیچ کدام از حالت‌های ممکن (a, k) ، این فرض را تأمین نمی‌کنند.

تناقض حاصل، ثابت می‌کند که، کمترین مقدار d ، برابر است با ۲۰. ۱۲. (الف) از آن‌جا که d برابر باشد، a_1, a_2, \dots, a_m نامتناهی و اکیداً صعودی است، بنابراین می‌توان عده‌های a_m و a_{k+1} را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $a_m < 2a_k$ و $2a_k < a_{m+1}$. در این صورت، چون عده‌های a_i مشت‌اند، به ازای $k \geq m$ داریم:

$$\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) + \left(1 - \frac{a_2}{a_3}\right) + \dots + \left(1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) = \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_2 - a_3}{a_3} + \dots + \frac{a_m - a_{m-1}}{a_m}\right) + \left(\frac{a_{m+1} - a_m}{a_{m+1}} + \frac{a_{m+2} - a_{m+1}}{a_{m+2}} + \dots\right)$$

قرار می‌گیرند. بدون این‌که به کلی بودن مساله، اطمینان وارد شود، می‌توان فرض کرد که این دو نقطه x_1 و x_2 ($x_2 > x_1$) در سمت راست x واقع باشند. در این صورت:

$$x_1 + \frac{b}{2a} \geq 0, \quad x_2 + \frac{b}{2a} \geq 1$$

و داریم:

$$100 \geq |y(x_2) - y(x_1)| = a(x_2 - x_1)\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right) >$$

$$> 100\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right) \geq 100$$

تناقض حاصل به معنای آن است که بیش از دو عدد درست نمی‌توان برای x پیدا کرد که، به ازای آن‌ها، قدر مطلق مقدار سه‌جمله‌ای از ۵ تجاوز نکند.

چند جمله‌ای $100 - 10x^2 - 10x$ به ازای $-1 = x_1$ و $1 = x_2$ برابر واحد می‌شود.

۱۱. جدول‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند که d می‌تواند برابر ۲۰ باشد.

	۴	۶	۲۰	۴	۵	۸	۲۰
	۳	۱۱	۳	۱	۱۲		
	۱	۸	۲	۹			
	۷		۷				
جدول ۲							

ثابت می‌کنیم، عدد d ، نمی‌تواند از ۲۰ کوچکتر باشد. فرض می‌کنیم، جدولی وجود داشته باشد که، در آن $20 < d$. به سادگی دیده می‌شود که

$$d = a + 3(e+h) + k$$

از این برابری نتیجه می‌شود:

۹۳) ضلع هر مکعب را برابر واحد می‌گیریم و فرض می‌کنیم، مکعب مستطیل حاصل، دارای اندازه‌های $m \times n \times k$ باشد ($m \geq n \geq k$). در این صورت، تعداد کل مکعب‌هایی که مکعب مستطیل را تشکیل داده‌اند، برابر mnk ، و تعداد مکعب‌هایی که رنگت نخورده‌اند، برابر $(1 - (1 - (1 - m))(1 - n))$ می‌شود. بنابراین، با توجه به شرط مساله، باید داشته باشیم:

$$mnk = \gamma(m-1)(n-1)(k-1)$$

روشن است که $k > 2$. به جزاین، به ازای $5 \geq k$ ، این برابری به تناقض

برخورد می کند، زیرا $\frac{4}{5}^3 = 0.812$

$$mnk\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{k}\right) \geq$$

$$\geq mnk \left(\frac{4}{5}\right)^r > mnk$$

به ازای $\beta = k$ ، برابری به این صورت درمی‌آید:

$$mn = 4(m-1)(n-1) \Rightarrow (m-4)(n-4) = 12$$

از اینجا به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} (m-4)(n-4) = 12 \\ m \geq n \geq 4 \end{cases}$$

که سه جواب دارد: (۱۶، ۵)، (۱۰، ۶) و (۷، ۸).

دستگاه $k = 4$ ، ازای به

$$\begin{cases} (m-4)(n-4) = 5 \\ m > n > 4 \end{cases}$$

دست می‌آید که دوچه اب دارد: (۹، ۴) و (۸، ۴).

۴۰ دست می آید که دو جواب دارد: (۹، ۴) و (۵، ۶).

$$\dots + \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}}) > \left(1 - \frac{a_1}{a_m}\right) + \left(1 - \frac{a_m}{a_{k+1}}\right) =$$

$$= r - \left(\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_m}{a_{m+1}} \right) > r$$

که از آن جا، نا برابری مطلوب به دست می آید.

ب) با توجه به اثبات بخش الف)، اندیس m را طوری پیدا می کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{a_r} + \frac{a_r}{a_r} + \dots + \frac{a_p}{a_{r+1}} < p-1 \quad (1)$$

اکنون، از گزاره α برای دنباله a_{p+1}, a_{p+2}, \dots استفاده می‌کنیم:
 اندیس p را می‌توان پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\frac{a_{p+1}}{a_{p+\gamma}} + \frac{a_{p+\gamma}}{a_{p+2}} + \dots + \frac{a_q}{a_{q+1}} < (q-p)-1 \quad (1)$$

از مجموع برابری‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$\frac{a_1}{a_r} + \frac{a_r}{a_1} + \dots + \frac{a_q}{a_{q+1}} < q - r \quad (4)$$

گزاره الف را درمورد دنباله a_{q+1}, a_{q+2}, \dots به کار می بینم و ۲ را طوری پیدا می کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\frac{a_{q+1}}{a_{q+r}} + \frac{a_{q+r}}{a_{q+r+1}} + \dots + \frac{a_r}{a_{r+1}} < (r-q) - 1 \quad (4)$$

از مجموع نایرا بری‌های (۳) و (۴) به دست می‌آید:

$$\frac{a_1}{a_r} + \frac{a_r}{a_w} + \dots + \frac{a_r}{a_{r-1}} < r -$$

اگر از همین استدلال، ۱۹۸۲ بار دیگر استفاده کنیم، به نابرابر مطلوب می‌رسیم.

راس‌های آن به ردیف صعودی درجهت حرکت عقربه‌های ساعت باشند، مثلث چپ می‌نامیم. اگر در درون یکی از مثلث‌های تقسیم، دو پیکان وجود داشته باشد، بامثلث راست، و اگر در درون آن یک پیکان وجود داشته باشد، بامثلث چپ سروکار داریم. بنابراین، اگر تعداد مثلث‌های راست را n و تعداد مثلث‌های چپ را m فرض کنیم، باید روی هم $2n+m$ پیکان در درون شش‌ضلعی داشته باشیم. $m+n$ باید در دستگاه زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} 2n+m \geq 31 \\ n+m = 24 \end{cases}$$

که اگر برابری را از نابرابری کم کنیم، بدست می‌آید: $n > 7$.

۱۷. پاسخ: $x = n\pi$, $y = m\pi$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

روشن است که نامعادله، به ازای $\sin x = 0$ و $\sin y = 0$ برقرار است. ثابت می‌کنیم نامعادله، جواب دیگری ندارد. از نامعادله به سادگی دیده می‌شود که $\sin x$ و $\sin y$ نمی‌توانند هم علامت باشند، زیرا در این صورت، حاصل ضرب $\sin x \sin y$ و، درنتیجه، سمت چپ نابرابر مثبت می‌شود. همچنین $\sin x = 0$ و $\sin y = 0$ یا $\sin x \neq 0$ و $\sin y \neq 0$ هم در نامعادله صدق نمی‌کند. دو حالت درنظر می‌گیریم:

(۱) $\sin x > \sin y$. نامعادله به این صورت در می‌آید:

$$\sin x - \sin y + \sin x \sin y \leq 0 \Rightarrow (1 - \sin x)(1 + \sin y) \geq 1$$

گفتیم $\sin x$ و $\sin y$ هم علامت نیستند، بنابراین باید داشته باشیم: $\sin x > 0$ و $\sin y < 0$ ، در این صورت

$$1 + \sin y < 1$$

و حاصل ضرب آن‌ها نمی‌تواند از واحد بزرگتر شود.

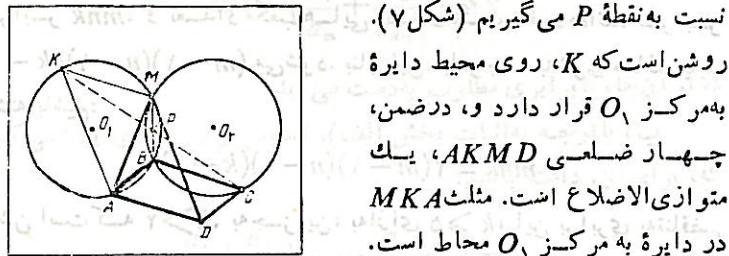
(۲) $\sin x < \sin y$. در این حالت داریم:

$$-\sin x + \sin y + \sin x \sin y \leq 0 \Rightarrow (1 - \sin y)(1 + \sin x) \geq 1$$

این نابرابری هم، با استدلالی شبیه حالت (۱)، نمی‌تواند برقرار باشد.

به این ترتیب، تعداد مکعب‌های رنگ‌خوارده، می‌تواند یکی از اعدادهای ۶۰، ۷۲، ۸۴، ۹۰ یا ۱۲۰ باشد.

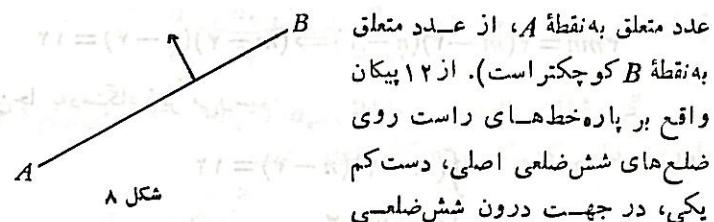
۱۵. P را وسط وتر مشترک دو دایره مفروض و K را قرینه نقطه C نسبت به نقطه P می‌گیریم (شکل ۷).



شکل ۷

برابرند، بنابراین شعاع‌های دایره‌های محیطی آن‌ها می‌باشند، برابرند. به این ترتیب، شعاع دایره محیطی مثلث AMD برابر R می‌شود.

۱۶. روی هر پاره خط راستی که دو گره مجاور را بهم وصل می‌کند، پیکانی رسم می‌کنیم، به نحوی که، اگر روی پاره خط از سمت عدد کوچکتر به سمت عدد بزرگتر برویم، این پیکان در سمت چپ پاره خط واقع باشد (در شکل ۸، فرض براین است که



عدد متعلق به نقطه A ، از عدد متعلق به نقطه B کوچکتر است). از ۱۲ پیکان

واقع بر پاره خط‌های راست روی ضلع‌های شش‌ضلعی اصلی، دست کم یکی، درجهت درون شش‌ضلعی قرار می‌گیرد، زیرا اگر چنین نباشد، آنوقت به نابرابری متناقض قرار می‌گیرد، در این صورت $a_1 < a_2 < \dots < a_{12} < a_1$ می‌رسیم (a_i ها را اعدادهای واقع در نقطه‌های تقسیم ضلع‌های شش‌ضلعی گرفته‌ایم). ۳۰ پیکان مربوط به پاره خط‌های راست درونی هم، بروشنا در داخل شش‌ضلعی قراردارند. به این ترتیب، دست کم ۳۱ پیکان در درون شش‌ضلعی وجود دارد.

مثلثی را که اعدادهای واقع در راس‌های آن، به ردیف صعودی و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشند، مثلث راست، و مثلثی را که اعدادهای

هر بخش، از پاره خطها و نیم خطها راستی تشکیل شده است که به خطهای راست مختلفی تعلق دارند. این پاره خطها و نیم خطها راست را، ضلع های بخش می نامیم. هر بخش، دست کم دو ضلع دارد. تعداد بخش هایی را که رنگ کرده ایم، در حالت دو ضلعی m_2 ، در حالت سه ضلعی m_3 وغیره می نامیم؛ سرانجام، m_k به معنای تعداد بخش هایی رنگ خورده ای است که تعداد ضلع های آن ها، حداقل مقدار ممکن است.

ثابت می کنیم $m_2 \leq n$. مرزهای هر بخشی که دارای دو ضلع باشد، از دو نیم خط تشکیل شده است؛ در ضمن، هر نیم خط تنها می تواند در موز یکی از بخش های رنگ خورده باشد. تعداد کل این نیم خطها راست از $2n$ تجاوز نمی کند (از هر خط راست، حداقل دو نیم خط به دست می آید). بنابراین، تعداد ضلع های مربوط به بخش های دو ضلعی که رنگ خورده اند، از $2n$ تجاوز نمی کند، یعنی $m_2 \leq n$.

هر خط راست، به وسیله بقیه خطهای راست، نمی تواند به بیش از n بخش (پاره خط و نیم خط) تقسیم شود. بنابراین، کل بخش های همه خطهای راست، از $2n$ تجاوز نمی کند. هر بخش از هر خط راست، می تواند تنها به یکی از حوزه های رنگ خورده صفحه مربوط باشد. بنابراین، تعداد کل چنین حوزه هایی (که رنگ خورده اند)، از $2n$ تجاوز نمی کند. یعنی

$$2m_2 + 3m_3 + \dots + km_k \leq n^2 \quad (1)$$

از طرف دیگر، تعداد حوزه های رنگ خورده صفحه، برابر است با

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k$$

بنابراین، با توجه به این که $2 \leq m_2$ و با توجه به بنابراین (1) داریم:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + \dots + m_k &\leq \frac{m_2}{3} + \frac{2m_2 + 3m_3 + \dots + km_k}{3} \\ &\leq \frac{n^2}{3} + \frac{n^2}{3} = \frac{n^2 + n}{3} \end{aligned}$$

۴۹۰. تبدیل های اتحادی زیر، بازای $1 - \geq x$ روشن است:

بنابراین، تنها حالت ممکن این است که داشته باشیم:

$$\sin x = 0 \quad y = m\pi \quad (m, m \in \mathbb{Z})$$

۴۹۱. O را نقطه دلخواهی از صفحه می گیریم و هر نقطه X از صفحه را با $OX = X$ نشان می دهیم. در این صورت

$$E + E_1 = 2A, A + A_1 = 2B, B + B_1 = 2C,$$

$$C + C_1 = 2D, D + D_1 = 2E$$

این دستگاه معادله ها را می توان به سادگی حل کرد و A, B, C, D, E را بدست آورد.

۴۹۲. برای هر عدد طبیعی k داریم: $a_{1,k} = a_{1,1}$. فرض می کنیم، دنباله (a_n) دارای دوره تناوب T باشد. اگر $q = 4m+3, T = 2^p \cdot q$ ، آن وقت، برای مقدارهای به اندازه کافی بزرگ k باید داشته باشیم:

$$a_{1,k} = a_{1,k+T} = a_{1,p(2^k-p+q)} = a_{1,k-p+q} = 0$$

ذیرا به ازای $2^k \geq p+1$ ، باقیمانده تقسیم q بر 2^k-p+q برابر است با 3 . به این ترتیب به تناقض می رسیم.

$$\text{اگر } q = 4m+1, T = 2^p \cdot q, \text{ آن وقت}$$

$$a_{1,k} = a_{1,k+T} = a_{1,p(2^k-p+2q)} = a_{1,k-p+2q} = 0$$

که بازهم یک تناقض است.

۴۹۳. اگر همه خطهای راست باهم موازی باشند، آن وقت صفحه را به $n+1$ بخش تقسیم می کنند در ضمن روشن است که، در این حالت، همه بخش های نمی توانند رنگ بخورند و، بنابراین، تعداد رنگ های از n تجاوز نمی کند. از طرف دیگر داریم:

$$\frac{n^2+n}{3} = n \cdot \frac{n+1}{3} \geq n \cdot \frac{2+1}{3} = n$$

به این ترتیب، در این حالت، حکم مساله درست است.
اگر نون فرض می کنیم، همه خطهای راست، باهم موازی نباشند. مز

۰۴۳. $x > 0$ را طول ضلع‌های مستطیل P می‌گیریم. وقتی مساحت این مستطیل بیشتر از m باشد، به معنای آن است که $x > m$ ؛ در ضمن، اگر داشته باشیم $y < m$ و $(x-1)y < m$ از آن وقت روشن است که نمی‌توان مستطیلی به مساحت m از آن جدا کرد. اگر فرض کنیم $y \leq x$ ، آن وقت $(1-y)x \leq y(1-x)$. اکنون، برای حل مساله، کافی است ثابت کنیم، دستگاه نامعادله‌های

$$\begin{cases} xy > m \\ x(y-1) < m \\ x \leq y \end{cases} \quad (1)$$

برای هر $m > 1$ دارای جواب است.

فرض می‌کنیم $y = k$ و $x = k+1$. در این صورت، به ازای $m = k^2$ ، جواب دستگاه (1) چنین می‌شود:

$$y = k+1, x = k+1 : m = k^2$$

$$y = k+1, x = k+1 : k^2 < m < (k+1)^2$$

$$y = k+1, x = k+1 : m = k(k+1)$$

$$y = k+1, x = k+1 : k(k+1) < m < (k+1)^2$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \text{ پاسخ:}$$

دو دایره روی کره‌هایی قرار دارند که مرکز آنها، نقطه O ، مرکز تقارن مکعب است. شعاع‌های دو کره، برابر با نصف قطر وجه مکعب (یعنی

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$
 و نصف قطر مکعب (یعنی $\frac{\sqrt{3}}{2}$) است (شکل ۱۵). کمترین فاصله ممکن

بین نقطه‌های دو کره، برابر تفاضل شعاع‌ها، یعنی $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ است. بنابراین،

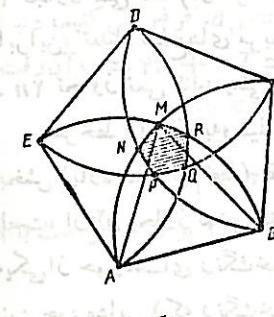
فاصله مجهول، نمی‌تواند از $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ کمتر باشد.

$$\begin{aligned} 2 + \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} &= 2 + \frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{x} = \\ &= 2 + (\sqrt{x+1}-1) = 1 + \sqrt{1+x} \end{aligned}$$

بنابراین، کسر چندطبقة مفروض، به صورت $1 - \sqrt{x+1}$ درمی‌آید و معادله مفروض، همارز است با معادله $1 - \sqrt{x+1} = 1 - 1$ ، یعنی $x = 3$.

$$\frac{5\sqrt{3}}{6} \text{ پاسخ: } \frac{\pi}{4}$$

بخش باقی‌مانده پنج ضلعی از پنج بخش برابر تشکیل شده است. این پنج بخش عبارتند از مثلث‌های



شکل ۹

منحنی‌الضلع DPE, CND, BMC و EQA ؛ ضلع‌های این مثلث‌ها، کمان‌هایی از دایره‌های به شعاع واحد و به مرکز راس‌های پنج‌ضلعی‌اند (شکل ۹). پاره خط‌های BM و AM را درسم می‌کنیم. مساحت مثلث منحنی‌الضلع BMC برابر است با مساحت قطاع BMC ،

منهای مساحت قطعه MBR . در ضمن، مساحت قطعه MBR برابر است با مساحت قطاع $MABR$ ، منهای مساحت مثلث ABM . چون مثلث

متساوی‌الاضلاع است، بنابراین مساحت قطعه MBR ، برابر $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$

می‌شود. مساحت قطاع MBC ، از لحاظ عددی، برابر است با نصف عدد اندازه زاویه MBC بر حسب رادیان، یعنی $= \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{15}$. از اینجا،

مساحت مجهول، چنین می‌شود:

$$\frac{5}{4} \left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{15} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{18}{1+\sqrt{2}} - 6\sqrt{2} = 6(\sqrt{2})^2 - 12\sqrt{2} + 6 = (2 - \sqrt{2})^3$$

با براین، جمله دوم عبارت B برابر $\sqrt{2} - 2$ می شود. بهمین ترتیب، برای جمله اول آن به دست می آید: $\sqrt{2} + 6$. در نتیجه $B = 8$.

۳. عده های مفروض را به صورت چند جمله ای هایی از توان های ۱۰۵ می نویسیم. مثلاً اگر بخواهیم عدد ۱۳۵۷۶۹ را به صورت یک چند جمله ای بر حسب توان های ۱۰۵ بنویسیم، به دست می آید:

$$135769 = 13 \times 100^2 + 57 \times 100 + 69$$

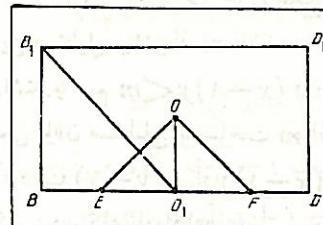
بعد چند جمله ای هارا، طبق قاعده ضرب دو چند جمله ای، در هم ضرب می کنیم.
ضرب هارا می توان با ماشین حساب مورد نظر خود انجام داد.
مطلوب را روی ضرب دو عدد چهار رقمی ۱۷۲۱ و ۲۴۱۵ روش می کنیم:

$$\begin{aligned} & 1721 \times 2415 = (17 \times 100 + 21)(24 \times 100 + 15) \\ & = 17 \times 24 \times 100^2 + (21 \times 24 + 17 \times 15)100 + 21 \times 15 = \\ & = 408 \times 100^2 + (504 + 255)100 + 315 \end{aligned}$$

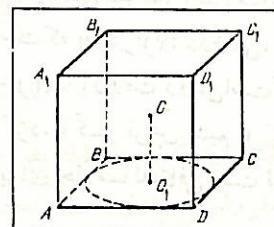
اکنون، عده های حاصل را، با توجه به مرتبه آنها، زیرهم می نویسیم و، سپس، با هم جمع می کنیم:

$$\begin{array}{r} 4080000 \\ 50400 \\ + 25500 \\ + 315 \\ \hline 4156215 \end{array}$$

۴. الف) اگر تابع خطی را $f(x) = ax + b$ بگیریم، روشن است که، به ازای هر مقدار x ، داریم:



شکل ۱۱



شکل ۱۵

ثابت می کنیم روی محیط دو دایره، دو نقطه پیدا می شود که بهمین فاصله از یکدیگر قرار دارند. تجانس به مرکز O و ضریب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ را در نظر می گیریم. ضمن این تجانس، کرۀ کوچکتر به کرۀ بزرگتر تبدیل می شود؛ اگر دایره بزرگتر، مجانس دایره کوچکتر را در نقطه های مثل M قطع کند، آن وقت فاصلۀ بین نقطۀ M از محیط دایره بزرگتر، تانقشه ای از محیط دایره کوچکتر که ضمن تجانس به M تبدیل شده است، برابر $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ می شود.

دایره ها، روی دایره بزرگتر یکدیگر را قطع می کنند. در واقع، نقطه های E و F - محل برخورد محیط دایره محااط در قاعده مکعب با پاره خط راست BD (شکل ۱۱) - در دو طرف صفحۀ AB, C قرار دارند و، ضمن تجانس، از این صفحۀ دور می شوند، زیرا $O, OF = \frac{\pi}{4} > BB, O, O$

چند مسأله محاسبه ای
۱. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad A &= 4\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(5+4\sqrt{2})^2} = \\ &= 4(1+\sqrt{2}) - (5+4\sqrt{2}) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ب)} \quad \frac{18}{1+\sqrt{2}} &= \frac{18[(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + 1]}{(\sqrt{2})^2 + 1} = 6(\sqrt{2})^2 - 6\sqrt{2} + 6; \end{aligned}$$

$$f_{\lambda\gamma} = 2f_{44} - f_1, \quad f_{173} = 2f_{87} - f_1,$$

$$f_{344} = 2f_{173} - f_2, \quad f_{686} = 2f_{244} - f_2,$$

$$f_{1270} = 2f_{686} - f_2$$

از دستور (۱) ۱۱ بار استفاده کردیم، یعنی روی هم ۲۲ عمل (به جای ۱۳۶۹ عمل). خواننده احتمالاً می‌تواند با اندکی فکر، باز هم تعداد عمل‌ها را کاهش دهد.

ب) برای تابع درجه دوم $f(x)$ ، اتحاد زیر، برای هر مقدار x و y برقرار است:

$$f(x+3y) - 3f(x+2y) + 3f(x+y) - f(x) = 0$$

(آزمایش کنید!). از اینجا می‌توان $f(x+3y)$ را، تنها به کملک عمل‌های جمع و تفریق، از روی مقدارهای $f(x+2y)$, $f(x+y)$ و $f(x)$ بدست آورد:

$$\begin{aligned} f(x+3y) &= f(x+2y) + f(x+2y) + f(x+2y) - \\ &\quad - f(x+y) - f(x+y) - f(x+y) + f(x) \end{aligned} \quad (2)$$

برای هر بار استفاده از دستور (۲)، باید ۶ عمل انجام دهیم. ولی این ۶ عمل را می‌توان به ۵ عمل تقلیل داد.

$$\begin{aligned} Q &= f(x+2y) - f(x+y) \quad P = f(x+y) - f(x) \quad \text{و} \\ \text{و، سپس، } S &= Q + R \quad R = Q - P \quad \text{را محاسبه می‌کنیم، در این صورت} \\ f(x+3y) &= f(x+2y) + S \end{aligned}$$

$f(k)$ را به صورت f نشان می‌دهیم ($k \in \mathbb{Z}$) و به جای رابطه (۲)، از نماد ساده زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x), f(x+y), f(x+2y) \rightarrow f(x+3y)$$

عددهای f_1, f_2 و f_3 معلوم‌اند و باید f را محاسبه کنیم. یکی از راههای محاسبه را می‌آوریم:

$$a = f(x+1) - f(x)$$

بنابراین $a = f(2) - f(1) = -1/2$. اکنون می‌نویسیم:

$$f(x+n) = a(x+n) + b = (ax+b) + an =$$

$$= f(x) + \underbrace{a+a+\dots+a}_{n\text{ مرتبه}}$$

که اگر در آن $x = 2$ و $n = 1368$ بگیریم، بدست می‌آید:

$$f(1370) = f(2) + \underbrace{a+a+\dots+a}_{1368\text{ مرتبه}}$$

$$= 15/1 - 1/2 - 1/2 - \dots - 1/2 = -1626/5$$

در اینجا باید ۱۳۶۸ مرتبه، عدد ۱/۲ را کم کنیم و اگر عمل محاسبه را هم به حساب آوریم، روی هم به ۱۳۶۹ عمل نیاز داریم. در زیر روش دیگری می‌آوریم که، تعداد عمل‌های کمتر می‌کند.

برای هر تابع خطی $f(x)$ ، این اتحاد برقرار است:

$$f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x) = 0$$

(برای هر مقدار x و y ؛ امتحان کنید!). اگر $f(y+x) - f(x)$ و $f(x+y) - f(x)$ معلوم باشند، تنها با عمل‌های جمع و تفریق می‌توان $f(y+2x)$ را پیدا کرد:

$$f(x+2y) = f(x+y) + f(x+y) - f(x) \quad (1)$$

در ضمن، هر بار که از برابری (۱) استفاده کنیم، باید دو عمل انجام دهیم. به ازای ۱۳۷۰ ... ۱، ۲، ۳ ... $k = f_k = f(k)$. فرض می‌کنیم $f_k = f$. با

دستور (۱) می‌توان به ترتیب بدست آورد:

$$f_3 = f_2 + f_2 - f_1 = 13/9,$$

$$f_5 = f_4 + f_4 - f_3 = 11/5$$

$$f_7 = 2f_5 - f_4, \quad f_{12} = 2f_7 - f_6,$$

$$f_{23} = 2f_{12} - f_7, \quad f_{44} = 2f_{23} - f_9,$$

عمل ضرب - می توان به دست آورد. طرح این محاسبه را، طرح هودنر، برای محاسبه چندجمله‌ای می نامند و براساس اتحاد زیر است:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = [(a \cdot x + b) \cdot x + c] \cdot x + d$$

ب) برای محاسبه این عبارت، به ۹ عمل حسابی نیاز داریم. طرح محاسبه چنین است:

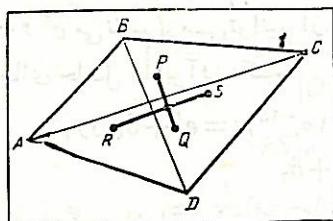
$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{Ax^3 + Bx^2 + C} = [(ax + b) \cdot x + c] : [(Ax + B) \cdot x + C]$$

۶. الف) شش ضلعی در شکل ۱۲ داده شده است. پاره خط‌های راست BC و DE را از طرف نقطه E ادامه می‌دهیم تا پاره خط‌های راست BC و AB را، به ترتیب، در K و M قطع کنند. در این صورت، اگر P ، Q و R مرکزهای ثقل متوازی الأضلاع‌های $EKCD$ ، $ABKF$ ، $MBCD$ ، $AMEF$ و $ABCD$ باشند، آن وقت، مرکز شش ضلعی عبارت است از نقطه برخورد پاره خط‌های راست RS و PQ .

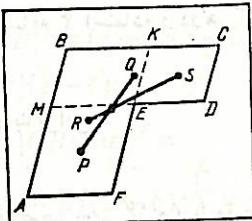
ب) P ، Q ، R و S را مرکزهای ثقل مثلث‌های ABC ، ACD ، ABD و BCD می‌گیریم. در این صورت مرکز ثقل چهارضلعی $ABCD$ ، در نقطه برخورد پاره خط‌های راست PQ و RS قرار دارد (شکل ۱۳). مرکز ثقل مثلث (به شرطی که از ماده متجانسی ساخته شده باشد) نقطه برخورد میانه‌های آن است که به سادگی و به کمک پرگار و خط‌کش بدست می‌آید.

۷. حافظه ماشین‌های معمولی محاسبه می‌تواند تا ۸ رقم عدد ها را نگه دارد، بنابراین، عده‌های π و e را تا ۷ رقم بعد از میز می‌دهد:

$$\pi^* = 3 / 1415926, \quad e^* = 2 / 7182818$$



شکل ۱۲



شکل ۱۳

$f_1, f_2, f_3 \rightarrow f_4; \quad f_3, f_2, f_1 \rightarrow f_5; \quad f_2, f_1, f_0 \rightarrow f_{-1};$
 $f_3, f_2, f_{-1} \rightarrow f_{-2}; \quad f_2, f_1, f_0 \rightarrow f_{-3};$
 $f_{-3}, f_1, f_5 \rightarrow f_6; \quad f_9, f_8, f_7 \rightarrow f_{-15};$
 $f_{-7}, f_1, f_9 \rightarrow f_{17};$
 $f_{17}, f_6, f_{-15} \rightarrow f_{-21}; \quad f_{-15}, f_7, f_{17} \rightarrow f_{23};$
 $f_{-6}, f_{-21} \rightarrow f_{-31};$
 $f_{-31}, f_7, f_{33} \rightarrow f_{65}; \quad f_{65}, f_{129} \rightarrow f_{193};$
 $f_{-65}, f_{65}, f_{193} \rightarrow f_{221}; \quad f_{65}, f_{193}, f_{221} \rightarrow f_{449};$
 $f_{-65}, f_{193}, f_{449} \rightarrow f_{705}; \quad f_{193}, f_{149}, f_{705} \rightarrow f_{961};$
 $f_{-65}, f_{449}, f_{961} \rightarrow f_{1473}; \quad f_{449}, f_{961}, f_{1473} \rightarrow f_{1985};$
 ۲۱ بار از دستور (۲) استفاده کردیم و، بنابراین، باید $5 \times 21 = 105$ عمل انجام دهیم.
 آیا راه کوتاه‌تری وجود دارد؟

۴۰. الف) عدد n رقمی می‌گیریم، بنابراین باید داشته باشیم:

$$10^{n-1} < 1370 \cdot \lg 2 < 10^n$$

بنابراین $1 + [1370 \cdot \lg 2] = n$. (منظور از $[x]$ ، بخش درست عددی است.)
 داریم $10^3 / 30102 \approx 0.030102$ ، یعنی

$$1370 \cdot \lg 2 \approx 412 / 41110 \Rightarrow [1370 \cdot \lg 2] = 412$$

به این ترتیب $n = 413$ ؛ عدد 2^{1370} ، دارای ۴۱۳ رقم است.
 یادداشت. از مقدارهای تقریبی $\lg 2 \approx 0.30102$ و $1370 \cdot \lg 2 \approx 412$ استفاده کردیم و میزان خطای برآورد نکردیم. ولی اگر $\lg 2$ را با تقریب وبرا بر 0.30102 تغییر نمی‌کند و، بنابراین، می‌توانیم به محاسبه خود اطمینان داشته باشیم.
 ب) کاملاً شبیه مساله الف) حل می‌شود. عدد 3^{1370} دارای ۳۶۵۴ رقم است.

۵۰. الف) حاصل این عبارت را، تنها با ۶ عمل - سه عمل جمع و سه

$$e' = 2/718 + 2/818 \times 10^{-4} + 2/845 \times 10^{-8} + \\ + 9/045 \times 10^{-12}$$

به ترتیب بدست می آید:

$$(e')^2 = 7/38905609890605 + \delta_2 \\ (e')^4 = 13; 0 < \delta_2 < 1/6 \times 10^{-14}$$

$$(e')^4 = 54/598150032778 + \delta_4 \\ (e')^6 = 10; 0 < \delta_4 < 3 \times 10^{-12}$$

$$(e')^6 = 403/4287934927 + \delta_6 \\ (e')^8 = 9; 0 < \delta_6 < 10^{-10}$$

بنابراین، مقدار e' ، تا ۹ رقم بعداز ممیز دقیق است.

$$403/428793492$$

به همین ترتیب، مقدار تقریبی $\pi^5 + \pi^4 + \pi^3 + \pi^2 + \pi^1$ تا ۹ رقم بعداز ممیز بدست می آید:

$$403/428775819$$

یعنی $10^{-4} < e^9 - \pi^5 - \pi^4 - \pi^3 - \pi^2 < 0/00002$ و بنابراین $n_{\max} = 4$. برای مقایسه، نتیجه محاسبه را، با ماشین های حساب دقیق تر می آوریم:

$$(e')^9 = 403/4287934927374,$$

$$(\pi')^4 + (\pi')^5 = 403/4287758192835$$

خاصیتی از مثلث (صفحه ۴۳۱ را ببینید)

نقطه های A, B, C و O را با عده های مختلف a, b, c, z نشان می دهیم. داریم:

$$|OA|^2 = (z-a)(\bar{z}-\bar{a}), |OB|^2 = (z-b)(\bar{z}-\bar{b}),$$

$$|OC|^2 = (z-c)(\bar{z}-\bar{c});$$

$$\text{و } S_{OAB}^2 = 4(|OA| \cdot |OB| \sin \alpha)^2 =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2i} [(z-b)(\bar{z}-\bar{a}) - (z-a)(\bar{z}-\bar{b})] \right\}^2 =$$

$$= -[(z-a)^2(\bar{z}-\bar{b})^2 + (z-b)^2(\bar{z}-\bar{a})^2] + 2|OA|^2 \cdot |OB|^2$$

منظور از π^0 و e^0 ، مقدارهای تقریبی نقصانی دو عدد π و e با تقریب 10^{-7} است. (۷ رقم اول بعد از ممیز در دو عدد π و e^0 ، همچنین، در دو عدد e و e^0 برهمنطبق است). با ماشین حساب محاسبه می شود:

$$(\pi^0)^2 = \pi^0 \times \pi^0 = 9/869604, (\pi^0)^4 = (\pi^0)^2 \cdot (\pi^0)^2 = 97/409083, \\ (\pi^0)^5 = (\pi^0)^4 \cdot (\pi^0) = 306/01965, (\pi^0)^6 = 403/42873; \\ (e^0)^2 = e^0 \times e^0 = 7/3890559, (e^0)^4 = (e^0)^2 \cdot (e^0)^2 = 54/598147, \\ (e^0)^6 = (e^0)^2 \cdot (e^0)^4 = 403/42876$$

بنابراین $10^{-4} < (e^0)^8 - (\pi^0)^4 - (\pi^0)^5 < 0/00003$ ، یعنی حد اکثر مقدار e^0 ، برابر ۴ است.

به نظر می رسد که مساله، حل شده است. ولی درواقع این طور نیست؛ با این عمل ها، تنها حدس زده ایم که حد اکثر e^0 ممکن است ۴ باشد. مطلب برسراین است که محاسبه با مقدارهای تقریبی π^0 و e^0 ، می تواند موجب خطای شود که در نتیجه گیری ما تأثیر داشته باشد و، بنابراین، به این نتیجه گیری نمی توان اعتماد داشت. مثلاً، اگر در همین ماشین حساب، به جای عمل های بالا، از عمل توان استفاده می کردیم، دچار خطای بیشتری می شدیم:

$$(\pi^0)^4 = 97/4091, (\pi^0)^5 = 306/02, (e^0)^8 = 403/429, \\ (\pi^0)^6 + (\pi^0)^5 = 403/4291$$

که منجر به نتیجه نادرست $(\pi^0)^4 + (\pi^0)^5 < (e^0)^8$ می شد. این پاسخ نادرست، نتیجه ای از جمع شدن خطاهای محاسبه است. در ضمن، با ماشین محاسبه خود، نمی توانیم از عده هایی که بیش از ۸ رقم دارند، استفاده کنیم. برای این که عده های تقریبی π و e را با ۱۵ رقم بعداز ممیز در نظر بگیریم (و ما آن هارا π' و e' می نامیم)، می توانیم از روش حل مساله ۲ استفاده و در هر گام، خطای حاصل را برآورد کنیم.

$$\text{چون } 10^{-15} < \delta_1 < 10^{-14}, \text{ بنابراین } e = e' + \delta_1, \\ e^9 = (e')^9 + \delta_2$$

و به سادگی می توان تحقیق کرد که $10^{-12} < \delta_2 < 10^{-11}$ ، یعنی $(e')^6$ با دقت تا ۱۲-۱۵ بدست می آید. e' را به این صورت می نویسیم:

بنابراین

$$-\frac{1}{4}(S_{\partial AB}^{\chi} + S_{\partial BC}^{\chi} + S_{\partial CA}^{\chi}) = (z-a)^{\chi}(\bar{z}-\bar{b})^{\chi}(\bar{z}-\bar{a})^{\chi} + \\ (z-b)^{\chi}(\bar{z}-\bar{a})^{\chi} + (z-b)^{\chi}(\bar{z}-\bar{c})^{\chi} + (z-c)^{\chi}(\bar{z}-\bar{b})^{\chi} + \\ (z-c)^{\chi}(\bar{z}-\bar{a})^{\chi} + (z-a)^{\chi}(\bar{z}-\bar{c})^{\chi} - 2(|OA|^{\chi} \cdot |OB|^{\chi} + \\ |OB|^{\chi} \cdot |OC|^{\chi} + |OC|^{\chi} \cdot |OA|^{\chi}) = \sum$$

به این ترتیب، برابری مفروض در مساله، به این صورت درمی آید:

$$(z-a)^{\chi}(\bar{z}-\bar{a})^{\chi} + (z-b)^{\chi}(\bar{z}-\bar{b})^{\chi} + \\ + (z-c)^{\chi}(\bar{z}-\bar{c})^{\chi} + \sum = 0$$

و یا

$$[(z-a)^{\chi} + (z-b)^{\chi} + (z-c)^{\chi}] [(\bar{z}-\bar{a})^{\chi} + \\ + (\bar{z}-\bar{b})^{\chi} + (\bar{z}-\bar{c})^{\chi}] = 0$$

که از آنجا نتیجه می شود:

$$(z-a)^{\chi} + (z-b)^{\chi} + (z-c)^{\chi} = 0$$

(از صفر قراردادن عامل دوم، جواب جدیدی به دست نمی آید).
باشد معادله درجه دوم زیر را حل کنیم:

$$3z^{\chi} - 2(a+b+c)z + a^{\chi} + b^{\chi} + c^{\chi} = 0$$

برای دو جواب z_1, z_2 به دست می آید:

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{a+b+c}{3}$$

به این ترتیب، مجموعه مجھول نقطه ها، از دونقطه تشکیل شده است که، نسبت به محل برخورد میانه های مثلث، قرینه یکدیگرنند. اگر مثلث ABC ، متساوی الاضلاع باشد، دونقطه برهم منطبق اند.

طول ضلع سوم مثلث (صفحه ۴۳۱ را ببینید)

هر چهار زاویه B بزرگتر باشد، طول ضلع AC بزرگتر می شود. در حالت مرزی

که زاویه B برابر 180 درجه شود، طول «ضلع» AC برابر 0 می شود،
بنابراین $\angle AC < 90^\circ$. در حالتی که زاویه B برابر 120 درجه باشد، طول ضلع
 AC ، به سادگی و با رابطه کسینوس ها بدست می آید: $\sqrt{41} < AC < 90^\circ$.

راهی برای حل معادله درجه چهارم (صفحه ۴۴۵ را ببینید)
اگر دو طرف معادله را بر $m \neq 0$ تقسیم کنیم، به معادله ای به صورت

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (*)$$

می دیم. فرض می کنیم $\alpha y = x^2 + \frac{b}{\chi}x$: ($\alpha \neq 0$)، در این صورت

$$x^2 = \alpha y - \frac{b}{\chi}x, \quad \alpha^2 y^2 = x^4 + bx^3 + \frac{b}{\chi}x^2$$

و بنابراین $x^4 + bx^3 = \alpha^2 y^2 - \frac{b^2}{\chi}x^2$. با استفاده از مقدارهای x^2 و
 $x^4 + bx^3$ ، معادله (*) به این صورت درمی آید:

$$\alpha^2 y^2 + \left(c - \frac{b^2}{\chi}\right)\left(\alpha y - \frac{b}{\chi}x\right) + dx + e = 0$$

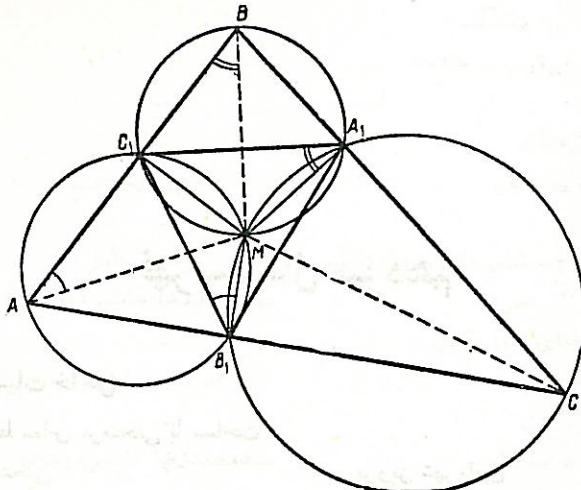
و از آن جا

$$\left(\frac{bc}{2} - \frac{b^3}{\chi} - d\right)x = \alpha^2 y^2 + \alpha\left(c - \frac{b^2}{\chi}\right)y + e \quad (**)$$

معادله $\alpha y = x^2 + \frac{b}{\chi}x$ ، معادله یک سه‌می است که از مبدأ مختصات
می گذرد و محوری موازی محور عرض دارد. معادله (**) هم، معادله یک
سه‌می است که محوری موازی محور طول دارد.
برای این که، این دو سه‌می قابل انطباق برهمن باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{\alpha^2}{\frac{bc}{2} - \frac{b^3}{\chi} - d} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{bc}{2} - \frac{b^3}{\chi} - d$$

یک ویژگی مثلث (صفحة ۴۵۲ را بینید)
را در درون مثلث ABC می‌گیریم (شکل را بینید) و فرض می‌کنیم:
 $[MC_1] \perp [AB], [MA_1] \perp [BC], [MB_1] \perp [AC]$



مثلث $A_1B_1C_1$ متساوی‌الاضلاع است. چهار ضلعی‌های AB_1MC_1 , CA_1MB_1 و BC_1MA_1 محااطی‌اند و قطر دایره‌های محیطی آن‌ها، به ترتیب $[CM]$ و $[BM]$ ، $[AM]$ است. داریم:

$$\widehat{AMB} = 180^\circ - \widehat{ABM} - \widehat{BAM} = 180^\circ - (\widehat{C_1A_1M} + \widehat{C_1B_1M}) =$$

$$= 180^\circ - 120^\circ + (\widehat{MA_1B_1} + \widehat{MB_1A_1}) = 60^\circ + \widehat{ACB}$$

و بهمین ترتیب، برای برابری‌های دیگر.

یادداشت: اگر نقطه M در درون مثلث ABC باشد، آن‌وقت برای زاویه‌های موردنظر، مقدارهای دیگری بدست می‌آید. مثلاً

$$\widehat{AMB} = \widehat{ACB} - 60^\circ, \quad \widehat{BMC} = 60^\circ - \widehat{BAC},$$

$$\widehat{CMA} = 60^\circ - \widehat{CBA}$$

$$\widehat{AMB} = \widehat{BMC} + \widehat{CMA}$$

در این حالت

به این ترتیب، ریشه‌های معادله (۱) را، می‌توان به عنوان طول‌های نقطه‌های برخورد دو سهمی زیر به دست آورد:

$$y = \frac{1}{\alpha^2}x^2 + \frac{b}{2\alpha}x, \quad x = \frac{1}{\alpha^2}y^2 + \frac{c - \frac{b^2}{4}}{\alpha^2}y + \frac{e}{\alpha^2}$$

$$\cdot \alpha^2 = \frac{bc}{2} - \frac{b^2}{4} - d$$

مثلاً ریشه‌های معادله $x^4 + 2x^3 + x^2 - 8x + 4 = 0$ ، عبارتند از طول‌های نقطه‌های برخورد دو سهمی

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad x = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$$

حداصل مقدار (صفحة ۴۴۵ را بینید)

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ می‌گیریم. در این صورت}$$

$$y = \frac{1 + (\tan^2 \varphi)^2}{(1 + \tan^2 \varphi)^2} = \frac{(1 + \tan^2 \varphi)^2 - 2 \tan^2 \varphi}{(1 + \tan^2 \varphi)^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \right)^2 = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi$$

و این مقدار، وقتی به حداصل خود می‌رسد که $\sin^2 2\varphi$ به حداقل خود رسیده باشد، یعنی

$$\sin^2 2\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \tan \varphi = \pm 1$$

تابع $y = \frac{1 + x^2}{(1 + x^2)^2}$ به ازای $x = \pm 1$ به حداصل مقدار خود می‌رسد و این مقدار چنین است:

$$y_{\min} = \frac{1+1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

فهرست سال سیزدهم

۱۴۶	پروین شهریاری	طرحی برای آموزش پیوستگی تابع ها
۱۵۴	-	بخش پذیری
۱۸۰	سید محمد رضا هاشمی موسوی	روش محاسبه انتگرال ها با رابطه برگشتی
۱۸۵	-	مکان هندسی در فضای
۱۸۹	-	معادله مثلثاتی، دستگاه
۱۹۰	-	ماکریم و می نیم در هندسه
۲۱۵	-	اتحاد
۲۲۴	-	یک ویژگی مثلث
۲۶۰	پروین شهریاری	جبر نقطه های سهمی
۲۹۷	-	معادله مکان
۲۹۸	ابراهیم عادل	ویژگی های چندضلعی های درون دایره
۳۰۵	سید محمد رضا هاشمی موسوی	بسط انتگرال به سری
۳۹۴	-	حوزه مقدارهای قابل قبول
۴۱۷	ابراهیم عادل	محاسبه یک حد
۴۳۱	-	دومسانه از مثلث
۴۳۲	سید محمد رضا هاشمی موسوی	حل معادله درجه چهارم ...
۴۴۰	-	هیئت هندسی یک شکل ...
۴۴۵	-	راهی برای حل معادله (درجه چهارم)، حدائق مقدار
۴۴۶	-	نابر ابری فینسلر و هادویگر
۴۵۲	-	یک ویژگی مثلث
II. آموزش ریاضی		
۱	پروین شهریاری	مسئولیت معلمان ریاضی
۵	-	دست کم، تردید ایجاد می کند
۲۵۷	سرگیر	آموزش ریاضی، اهمیت درجه اول دارد
۲۸۵	پروین شهریاری	ریاضیات جدید، در برنامه های دبیرستانی
III. سرگرمی ریاضی		
۵۰	هرمز شهریاری	بازی های فکری منطقی
۷۹	-	این عدهها
۵۱۱		

I. ریاضیات خالص

۶	پروین شهریاری	زیر منحنی
۱۶	ابراهیم عادل	افباتی برای نابر ابری چه بی شف
۱۸	پروین شهریاری	تجزیه و تحلیل مسئله برای
۳۳	-	جستجوی راه حل
۴۱۱، ۲۶۶، ۵۵، ۳۴	-	اثبات بخش پذیری $1 + 2^{25}$ بن ۶۴۱
۴۹	-	مسئله های مسابقه ای
۳۹	-	مسئله ای که در شباهت با مسئله های
۶۲	-	دیگر ساخته شده اند
۶۳	-	یک معادله دیو فانی
۶۹	-	نابر ابری هایی از حاصل ضرب فاکتوریل ها
۶۳	-	منقضی کیهانی
۶۴	-	حدائق و حدائق، معادله سیال، مسئله ای
۶۶	-	از مجموعه ها
۶۷	-	تمرین هایی برای بررسی تابع ها
۶۸	-	مثلث ارتقاییه
۷۰	-	از آزمایش ورودی دانشگاه تاشکند

Reconciliation With Mathematics
 Editor: Parviz Shahryari
 Address: Tehran, Firdaus
 Vol XIII, No. 4, Serial No. 62, 1991

*

All correspondence to the editor
 from outside Iran can be
 addressed to:

Shahriar Shahriari,
 Department of Mathematics,
 California State University,
 Northridge, CA.91330,
 USA

۱۷۸	-	هم سرگرمی و هم حل مسئله
۲۱۶	هرمز شهریاری	ترفندهای ریاضی
۳۲۰	هرمز شهریاری	شکفتی‌های توبولوژی
۴۵۳	هرمز شهریاری	تقسیم مربع به مربع‌های کوچکتر

IV. ریاضیات کاربرسته

۷۳	-	بهیاری هندسه
۲۸۶	پروین شهریاری	گام ساده، ساختمان مقیاس موسیقی

V. تاریخ ریاضیات

۱۲۹	رقصه بهزادی - پروین شهریاری	عدد در اوستا
		ترجمه چینی کتاب احکام نجوم
۱۶۱	محمد باقری	کوشیار گیلانی
۲۰۸	ابراهیم عادل	جرج پولیا مربی بزرگ ریاضیات
۳۱۰	-	وهرامیل لهبدورا
۳۲۹	رقصه بهزادی	عدد در زبان سندی
۴۲۱	پروین شهریاری	ذوزف فوریه

VI. مطالب دیگر

۷۶	جابر عناصری	نقوش هندسی و گره‌چینی
۸۰	دکتر یوسف‌فضائی	روش تحقیق در علوم ریاضی
۲۲۵	جابر عناصری	نقوش هندسی فرش‌های ترکمنی
۳۱۳	محمد باقری	درباره واژه نامه ریاضی جهاد دانشگاهی
۳۲۳	جابر عناصری	صنایع دستی و نقوش هندسی
۴۷۴	جابر عناصری	طرح‌های هندسی در طاق‌های ایرانی
۴۷۸	مصطفی عزیزی	برندگان جایزه فیلدس ۱۹۹۰