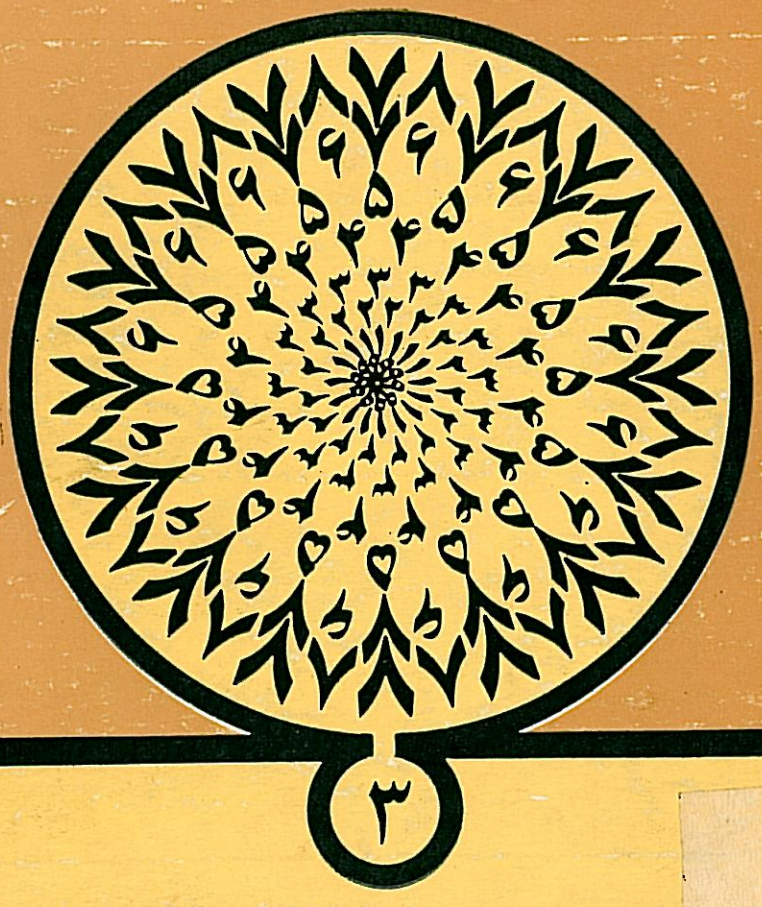
آشتی با ریاضیات



۳

مرداد ۱۳۶۱

دورهٔ دوم

آشتی با ریاضیات

سردبیر : پرویز شهریاری

نشریهٔ دو ماهه. هرسال ۶ شماره منتشر می‌شود. بهای اشتراک سالیانه ۷۲۰ ریال

تیراژ ۴۰۰۰ نسخه ــ چاپخانهٔ رامین

نشانی پستی : تهران ـ صندوق پستی ۵۴۱-۳۴

سال‌ششم ـ شمارهٔ ۳ (شماره ردیف ۲۳)

فهرست مطالب

۱۲۰ ریال

پول اشتراک و کمک‌های خود را به‌حساب ۱۷۶۰ بانک تجارت (بازرگانی سابق) تهران ـ چهارراه ولی‌عصر، جنب بزرگمهر (کد بانکی ۵۵۰۰۴۶) به‌نام سردبیر بفرستید و فتوکپی رسید آن را همراه با نشانی کامل خود برای ما بفرستید.

آشنی با ریاضیات

سردبیر : پرویز شهریاری

نشریهٔ دو ماهه. هرسال ۶ شماره منتشر می‌شود. بهای اشتراك سالیانه ۷۲۰ ریال

تیراژ ۴۰۰۰ نسخه ــ چاپخانهٔ رامین

نشانی پستی : تهران ـ صندوق پستی ۵۴۱-۳۴

سال‌ششم ـ شمارهٔ ۳ (شماره ردیف ۲۳)

فهرست مطالب

پول اشتراك و کمك‌های خود را به‌حساب ۱۷۶۰ بانك تجارت (بازرگانی سابق) تهران ـ چهارراه ولی‌عصر، جنب بزرگمهر (کد بانکی ۵۵۰۰۴۶) به‌نام سردبیر بفرستید و فتوکپی رسید آن را همراه با نشانی کامل خود برای ما بفرستید.

۱۲۰ ریال

مجموعه‌ها

ترجمهٔ پرویز شهریاری

یو. و. پوخناچف

یو. پ. پوپوف

(کوتاه شدهٔ فصل اول کتاب «ریاضیات بدون فرمول»)

ـ خرمائی، باروتی، خال خالی

چوپان، یك یك ماده‌گاوها را صدا می‌کرد و می‌کوشید تا آن‌ها رااز مرتع بیرون بیاورد:

ـ وقت بدی است، ممکن است گم بشوند؛ به خصوص این باروتی، به‌کلی حواسش پرت است! امان ازدست خال خالی، تا شلاق را بلندنکنی ازجایش تکان نمی‌خورد. آن خرمائی‌هم‌که وضعش روشن است: بدابه‌حالت اگر جلو شاخش باشی!

برای چوپان، هرگاوی، جای خودش را دارد و با خصلت‌ها و عادت‌های خودش. ولی‌همین‌گاوها، برای یك رهگذر، ویا حتی ساکن‌محل، به‌طور ساده، یك‌گله را تشکیل داده‌اند، تنها یك‌گله.

این، همان چیزی است که «نقطه نظر» یا «دیدگاه» نامیده می‌شود. یکی، خصلت‌های جداگانه و متمایز با دیگران را در هر جزء می‌بیند، و دیگری، تمامی‌گروه را، همچون یك واحد، در نظر می‌گیرد.

به‌طورکلی، اندیشهٔ انسانی قادر است، دسته‌ای از چیزها را، که به دلیلی نوعی خویشاوندی با هم دارند، به صورت یك موضوع مستقل درك کند.

ویلون اول، ویلون‌دوم، ویلون بزرگ، ویلون سل، کنترباس، نی، فلوت، قره‌نی، شیپور، سنج‌وطبل: وقتی که‌همهٔ‌این‌ها با هم باشند، می‌گوییم: **ارکستر.**

قهوه جوش، ظرف شیر، قنددان، چند فنجان و چند نعلبکی، روی

هم می‌شوند: **سرویس**.

ا، ب، پ، و... با هم، **الفبا** نامیده می‌شوند.

به ۱، ۲، ۳، ۴ و...، وقتی باهم باشند، **رشتهٔ** طبیعی عددها گویند.

تصادفی نیست که هر کدام از این گروه‌ها را با نام واحد و خاصی می‌شناسیم: ارکستر، سرویس، الفبا، رشته. حتی در این گونه موارد جزئی هم، اندیشهٔ پیوند دادن و متحد کردن، وجود دارد.

وقتی که بخواهیم دسته‌ها یا گروه‌هایی را با هم مقایسه کنیم، به‌چنین پیوندهایی نیاز داریم.

فرض کنید که شما به‌خانهٔ نو رفته‌اید. به مغازهٔ مبل‌فروشی می‌روید تا برای آپارتمان خود مبل تهیه کنید، ولی متوجه می‌شوید که این کار، آن قدرها هم ساده نیست. کدام «دست مبل» ترجیح دارد؟ آیا آن را که روشن و پرداخت نشده است انتخاب کنید، یا آن را که از چوب گردو ساخته‌شده است؟ شاید هم آن یکی، که با پارچه مخملی راه راه درست شده است، بهتر باشد؟

هر دست مبل از تکه‌های جداگانه‌ای تشکیل شده است، ولی در تصور شما به‌صورت یك کل واحد مجسم می‌شود.

وقتی که با نمایشگاه کلکسیون‌های تمبر یا مسابقهٔ گروه‌های نمایشی هم روبه‌رو باشید، همین وضع پیش می‌آید... هرجا که با جریان مقایسهٔ دو یا چند اجتماع سروکار داشته باشیم، ناچار می‌شویم تا دربارهٔ تمامی مجموعه، به‌صورت یك کل واحد فکر کنیم.

در سال‌های هفتاد سدهٔ گذشته، وقتی ژرژ کانتور، ریاضی‌دان آلمانی، ضمن بررسی رشته‌های مثلثاتی و دنباله‌های عددی، می‌خواست گروه‌های عددی را، که هر کدام شامل بی‌نهایت عدد بودند، با هم مقایسه کند، به چنین ضرورتی برخورد.

کانتور، برای حل این مسأله بود که مفهوم **مجموعه** را پیش کشید که ماهیت آن، چیزی جز همان درکی که از معنای «گروه»، «دسته»، «کلکسیون»، «اجتماع» و امثال آن‌ها داریم، نیست.

این مفهوم که در دایرهٔ کاملا تنگی از ریاضیات و به‌منظور کاملاً خاصی

طرح شده بود، خیلی زود کاربرد گستردهٔ خود را در سایر زمینه‌های این دانش پیدا کرد. بررسی‌های کانتور، خصلتی مستقل به‌دست آورد و به‌صورت شاخهٔ خاصی از ریاضیات درآمد: نظریهٔ مجموعه‌ها.

نظریهٔ مجموعه‌ها، یکی از اساسی‌ترین و بنیانی‌ترین نظریه‌ها، در ریاضیات معاصر است. نظریهٔ مجموعه‌ها به خاطر شرح رشته‌های سنتی ریاضیات به وجود آمد و، به‌همان اندازه که میدان کاربرد ریاضیات گسترش پیدا کرد، نقش خود را در ساختمان نظریه‌های تازه ریاضی به‌دست آورد.

دلیل همه‌کاره بودن این مفهوم در آن است که زیر نام مجموعه می‌توان هر اجتماعی از چیزها را به‌هم نزدیك کرد. در این‌جا، هرچیزی به درد می‌خورد: نشانه‌ها، عددها، آدم‌ها، نقطه‌ها، ستاره‌ها، بردارها، ماده‌گاوها، تابع‌ها و... حتی خود مجموعه‌ها هم می‌توانند در یك مجموعه به هم بپیوندند: مثلاً، ریاضی‌دانان از مجموعهٔ شکل‌های یك صفحه یا مجموعهٔ جسم‌های فضا صحبت می‌کنند، درحالی که هرشکل یا هرجسم را هم به‌عنوان مجموعه‌ای از نقطه‌ها می‌شناسند.

ثمربخشی «درك مجموعه‌ای» در این است که زرادخانه‌ای غنی و نیرومند از گسترده‌ترین مفهوم‌ها و همه‌جانبه‌ترین روش‌ها را در اختیار ما می‌گذارد. به‌همین مناسبت، نظریهٔ مجموعه‌ها می‌تواند، به‌طور اساسی، در به‌ریاضی درآوردن دانش‌های به‌کلی متفاوتی، همچون اقتصاد، زیست‌شناسی، زبان‌شناسی و غیره، به‌ما کمك کند.

□

مجموعه چیست و چه معنایی دارد؟ چه رازی در این اصطلاح نهفته است که می‌توان، همچون جعبهٔ جادوگران، هم نشانه‌ها، هم عددها و هم ستاره‌ها را، از درون آن درآورد؟ این مفهوم را، در ریاضیات، چگونه تعریف می‌کنند؟

اگر شرافتمندانه بخواهید، باید بگوییم که تعریفی برای این مفهوم نداریم. تعریف، یعنی چه؟ تعریف را، مثلاً، می‌توان به‌این معنا دانست که ابتدا چیزی کلی‌تر از مفهوم مورد نظر خود نام ببریم، سپس در این محدودهٔ کلی، مرزهایی را مشخص کنیم که مفهوم مورد نظر ما را از همهٔ مفهوم‌های

دیگر، جداکند (یعنی، خصلت‌ها و ویژگی‌هایی که این مفهوم را از دیگر مفهوم‌ها متمایز می‌کند، معین کنیم).

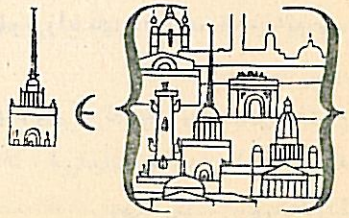
درمورد مفهوم «مجموعه»، هیچ مفهومی را که، نسبت به‌آن، کلی‌تر باشد، نمی‌شناسیم (و باید گفت، همین عام بودن مفهوم مجموعه است که موجب شده است، یکی از بنیانی‌ترین نقش‌ها را در ریاضیات امروزی‌داشته باشد).

وقتی‌که می‌گوئیم، واژهٔ «مجموعه»، همان معنای واژه‌های «دسته»، «گروه»، «اجتماع»، «کلکسیون» وغیره را دارد، تنها ازواژه‌هایی هم‌ارزآن نام برده‌ایم، تا شاید به روشن‌تر شدن این اصطلاح تازه‌کمک‌کرده باشیم، ولی به‌هیچ‌وجه نتوانسته‌ایم تعریف دقیقی از آن ارائه دهیم.

بعد ازآن چه گفتیم، ممکن‌است خواننده دچارشگفتی و دودلی‌بشود: وقتی‌که وضع این‌طور است ونمی‌توانیم تعریفی برای مفهوم مجموعه‌داشته باشیم، چگونه می‌توانیم از مجموعهٔ عددهای طبیعی، مجموعهٔ حرف‌های الفبای فارسی، مجموعهٔ شکل‌های واقع بریك صفحه و غیرآن صحبت‌کنیم؟

آیا در این‌جا، نوعی ناسازگاری وجود ندارد؟

جای هیچ‌گونه ناسازگاری نیست. این درست است‌که مجموعه، به عنوان یك مفهوم‌انتزاعی ریاضی، قابل‌تعریف نیست، ولی برای تعریف‌یك مجموعهٔ مشخص، به‌هیچ دشواری‌برنمی‌خوریم. مثلاً، بدون هیچ ابهامی، می‌توان از مجموعهٔ بناهای تاریخی لنینگراد نام برد، زیرا کافی است در خیابان‌های شهربه‌راه بیفتیم وخانه‌هائی را نشان دهیم‌که یك تابلو چدنی‌بر آن‌هاآویزان وروی‌آن‌ها نوشته شده‌است: «به‌وسیلهٔ دولت‌حفاظت‌می‌شود».



$\in$

A مجموعه — $\in$ علامت تعلق — a عضو مجموعه

شکل ۱

وضع، درمورد هرمجموعه‌ای، چنین است. تعریف هرمجموعه، یعنی امکان پاسخ‌دادن به‌این پرسش‌که‌آیا فلان چیزبه‌این مجموعه تعلق داردیانه.

به‌همین مناسبت است‌که می‌گویند هر مجموعه‌ای یك ارزشی است و عضوهای آن، کاملاً مشخص است.

اگرچه ممکن است خواننده، هنوز هم گله داشته باشدکه اصطلاح «مجموعه» به هرحال، بدون تعریف باقی‌ماند، ولی، در واقع، اساسی‌ترین مفهوم درنظریهٔ مجموعه‌ها، نه‌خود این‌اصطلاح، بلکه واژهٔ «تعلق داشتن» است.

برای این مفهوم اساسی، نمادی به‌کار می‌برندکه ما آن را درشکل ۱ داده‌ایم. درآن‌جا نشان‌داده‌شده است‌که چگونه می‌توان به‌کمك این‌نماد مشخص‌کردکه عضوی مثل a به مجموعه‌ای مثل A تعلق دارد.

□

واژهٔ «مجموعه» ممکن است موجب گمراهی شود، زیرا در پناه این واژه، نوعی وفور و فراوانی مبادر به‌ذهن می‌شود. در واقع، مثال‌هائی هم که تا این‌جا آورده‌ایم، به‌این تـوهم‌کمك می‌کنند. ولی، اصطلاح ریاضی «مجموعه»، مطلقاً چنین معنائی ندارد.

مجموعه ممکن است، تنها از دو عضو تشکیل شده بـاشد (مثلاً، مجموعهٔ قمرهای طبیعی مریخ، تنها دوعضو دارد: فوبـوس و دیموس)؛ یا تنها شامل یك عضو باشد (مثل مجموعهٔ قمرهای طبیعی زمین، که تنهایك عضو دارد: ماه). ریاضی‌دانان، حتی از **مجموعهٔ تهی** هم صحبت می‌کنند، یعنی مجموعه‌ای‌که دارای‌هیچ عضوی نیست؛ مثل مجموعهٔ قمرهای‌طبیعی زهره، یا اگر نمونه‌های جالب‌تری می‌خواهید، مجموعهٔ‌کسانی که دارای موتورهای واقعاً جاودانی‌هستند، مجموعهٔ چرخ‌های مربعی‌شکل، مجموعهٔ کره‌های تیز، مجموعهٔ خطهای راست خمیده،...

ممکن است نمونه‌هایی که برای مجموعهٔ تهی آوریم، یك شوخی جالب ریاضی، به‌نظر خواننده برسد. ولی، در واقع، این‌طور نیست. برای این‌که ضرورت و اهمیت مفهوم مجموعهٔ تهی را نشان دهیم، مثالی‌کاملاً جدی از ریاضیات می‌آوریم.

می‌دانیم که یکی از کارهای سنتی ریاضی‌دانـان، عبارت است از حل معادله‌های جبری و پیداکردن ریشه‌های آن‌ها. معادله‌هایی هستند که تنها یك ریشه دارند، معادله‌هایی هم پیدا می‌شوندکه ده یا بیست ریشه دارند. معادله‌هایی هم وجود دارندکه تاکنون کسی نتوانسته است روشن کندکه آیا ریشه‌ای دارند یا نه. از این نمونه‌ها، می‌توان مثلاً از معادلهٔ بزرگ‌فرما نام بردکه ریاضی‌دانان در طول سه سدهٔ گذشته به‌آن مشغول بوده‌اند. این معادله چنین است: $x^n+y^n=z^n$. آیا می‌توان عددهای درست x، y و z را طوری پیداکردکه درمعادلهٔ بزرگ فرما، به‌ازای مقدار درست وبزرگتر از ۲ برای n، صدق کنند؟آیا مجموعهٔ جواب‌های درست معادلهٔ بزرگ‌فرما، یك مجموعهٔ تهی نیست؟

واین تنها نمونه‌ای نیست که، ضمن بررسی یك مجموعه، نمی‌توان ضمانت کردکه آیا این مجموعه تهی است یـا غیر تهی. بنابـراین، مفهوم مجموعهٔ تهی را نمی‌توان، به عنوان چیزی کم اهمیت در ریاضیات، کنار گذاشت. برای این مفهوم، نماد خاصی هم در نظر گرفته‌اند: ∅

□

آدم وحوا. بنابـه روایت انجیل، مجموعهٔ نخستین آدمیان در روی زمین‌اند. عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل، اورانوس، نپتون و پلوتون. این، مجموعهٔ سیاره‌های منظومهٔ شمسی است.

هرکسی می‌تواندهرکدام از این‌دو مجموعه را، بانشان‌دادن‌عضوهای آن، تعریف‌کند (و اگر بخواهید تاکید کنید که این چیزها، مجموعه‌ای را تشکیل داده‌اند، باید آن‌ها را به‌دنبال هم در یك‌سطر بنویسید، آن‌ها رابا نشانهٔ «ویرگول» از هم جدا کنید وعلامت «ابرو» را در دوطرف آن قرار دهید).

آندره بالکونسکی، پیر بزوخوف، نـاتاشاروستوا، نیکلای روستو، آناتول کوراگین ودیگران، مجموعهٔ‌قهرمانان‌رمان «جنگ وصلح» تولستوی را تشکیل می‌دهند.

یك، دو، سه، چهار، پنج، شش وغیره ـ کـه آن‌ها را به نام رشتهٔ طبیعی عددهـا می‌شناسیم ـ مجموعهٔ عددهای درست و مثبت را بـه وجود

می‌آورند.

دستورالعمل دو مجموعهٔ اخیر، تا حدی، با مجموعه‌های قبلی‌متفاوت است.

در مورد مجموعهٔ قهرمانـان «جنگ وصلح»، اساساً، می‌تـوان مثل نمونه‌های قبلی عمل‌کرد، یعنی می‌توانیم عضوهای‌آن را نام ببریم. البته، برای این منظور، باید چند صفحه از کتاب خود را پرکنیم. ولی، در مورد عددهای‌طبیعی، چنین روشی، اصولاً ممکن نیست، زیرا مجموعهٔ این‌عددها نامتناهی است.

چه بایدکرد؟ در بعضی از این‌گونه موارد، می‌توان با نام‌بردن‌تنها چند عضو مجموعه، این دشواری را برطرف‌کرد. گذاشتن سه‌نقطه، یاجملهٔ «وغیره»، به‌دنبال عضوهایی‌که نام برده‌ایم، تاکیدبراین حقیقت است‌که‌تمام عضوهای مجموعه را مشخص نکرده‌ایم. با وجود این، اگر از این سیاههٔ ناقص، معلوم شودکه چگونه‌بایدآن را ادامه داد و چه چیزهای دیگری‌را می‌توان در ردیف آن‌ها قرار داد، به‌معنای آن است که معیاری در دست داریم و به‌کمك‌آن می‌توانیم مشخص‌کنیم که آیا فلان چیز به‌این مجموعه تعلق دارد یانه. وما می‌دانیم که اگرچنین معیاری در اختیار داشته باشیم، در واقع توانسته‌ایم مجموعه را به‌طورکامل تعریف‌کنیم.

به دستورالعمل تشکیل مجموعه‌ها، با دید دیگری هم می‌توان نگاه کرد، با دیدی که بتوان بین مجموعه‌های متناهی و نامتناهی فرق‌گذاشت.

مجموعه‌هایی را که آوردیم، به‌خاطر بیاوریم: «نخستین انسان‌های روی زمین»، «سیاره‌های منظومهٔ شمسی»، «عددهای طبیعی» و «قهرمانان رمان جنگ و صلح».

چنین بیانی، برای تعریف هر یك از این مجموعه‌ها، کافی است. در چنین مواردی، می‌گویند، مجموعه به کمك خصلت یا مشخصه‌ای تعریف شده است‌که هر عضوآن این خصلت را دارد و هر چیزی که متعلق به آن نیست، این خصلت را ندارد. وقتی‌که می‌خواهیم تعلق یا عدم تعلق چیزی را به این مجموعه روشن‌کنیم، کافی است ببینیم‌که این خصلت یا مشخصه را دارد یانه!

درواقع، از این‌روش‌وقتی بایداستفاده‌کردکه نتوان عضوهای‌مجموعه را در سیاهه‌ای نام برد ویا حتی با جملهٔ «وغیره» مشخص‌کرد.

مثلاً می‌گوییم: مجموعهٔ همهٔ عددهای بین صفر و واحد (با به‌حساب آوردن خود این دوعدد). با این جمله تـوانسته‌ایم خصلت عضوهای این مجموعهٔ عددی را نشان دهیم: هرعضو متعلق به‌این مجموعه، عددی‌است غیر منفی‌کـه از واحدهم تجاوز نمی‌کند. می‌توان بـه‌جای این جمله، یك رابطه نوشت ($0 \leqslant x \leqslant 1$)، که در واقع، همان خصلت را بیان می‌کند.

مثال دیگر: دایره، عبارت است از مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه که از نقطه‌ای واقع در همان‌صفحه (مرکز)، به‌یك فاصله (شعاع دایره) باشند. در این‌جا هم، خصلت عضوهای این مجموعهٔ نقطه‌ها، مشخص شده است.

□

کار به‌جای خود، تفریح هم به‌جای خود. ما هنوز با شما خواننده، خیلی‌کار داریم، ولی فرصتی هم برای چنددقیقه تفریح بدهیم. بـرای این منظور، به یك سرگرمی می‌پردازیم.

بازی ما، بازی با واژه‌هاست. قانون بازی بسیار ساده است: یك‌واژه در نظر بگیرید و به‌کمك حرف‌های آن، واژه‌های تازه‌ای بسازید.

به‌عنوان واژهٔ‌اصلی، «بیلان» را انتخاب‌کرده‌ایم وبعضی ازواژه‌های تازه‌ای را که‌می‌توان به‌کمك‌حرف‌های «ب، ی، ل، ا، ن» ساخت، در زیر آن نوشته‌ایم. (بـه ترتیب از واژه‌های دوحرفی تـا واژه‌های پنج حرفی):

بیلان

لب، آب، یل، نی، بن

بیل، نای، بال، ناب، بلا، نیل، بنا

یلان، لبان

بالین

حالا بازی با حرف‌ها و واژه‌هـا را کنار می‌گذاریم و به کار جدی می‌پردازیم.

هرکدام از واژه‌هایی را که در این‌جا نوشته شده است، می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از حرف‌ها به‌حساب آورد. طبق قاعدهٔ بازی، هرکدام‌از واژه‌های‌تازه، ازهمان حرف‌های‌واژهٔ نخستین درست شده‌اند، به‌زبان‌دیگر،

هرعضو ازیك مجموعهٔ حرفی تازه، به مجموعهٔ‌حرفی نخستین هم تعلق‌دارد.

حرف‌های واژهٔ بیلان «شامل» حرف‌هـای هرکدام از واژه‌های تازه است، یا برعکس، حرف‌های هرکدام از واژه‌های تازه «مشمول» حرف‌های واژهٔ نخستین است. وقتی هرعضو ازیك مجموعه، ضمناً عضوی ازمجموعهٔ دیگر باشد، اولی را **زیر مجموعهٔ** دومی گویند.

{ب، ی، ل، ا، ن}⊂{ل ، ب}

{ب، ی، ل، ا، ن}⊂{ن، ی، ل}

{ب، ی، ل، ا، ن}⊂{ل، ب، ا، ن}

(⊂، علامت زیر مجموعه است)

به این ترتیب، مجموعهٔ حرف‌های واژهٔ «ناب»، زیر مجموعه‌ای (یا جزئی) ازمجموعهٔ‌حرف‌های‌واژهٔ «بیلان»است،همین‌طور، مجموعهٔ‌حرف‌های واژهٔ «آب»، زیر مجموعه‌ای ازمجموعهٔ حرف‌های واژهٔ «بال» است وغیره.

به‌سادگی می‌توان مثال‌های ریاضی مربوط به‌زیر مجموعه را هم‌پیدا کرد. مجموعهٔ عددهای‌طبیعی، شامل عددهای فرد، یا مجموعهٔ مستطیل‌ها، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ متوازی‌الاضلاع‌ها، وخود مجموعهٔ اخیر، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ چهار ضلعی‌ها است.

□

دوباره به واژه‌هایی برگردیم‌که از واژهٔ «بیلان» درست‌کرده بودیم. بزرگترین موفقیت ما، بدون‌تردید، ساختن‌واژه «بالین» است. واژهٔ «بالین» که طبق شرایط بازی درست شده است، درست شامل همهٔ حرف‌های واژهٔ «بیلان» است. به‌زبان دیگر، هرحرف واژهٔ «بالین» در واژهٔ «بیلان» وجود دارد و برعکس.

به‌این ترتیب، هرکدام از این‌دومجموعه را می‌توان زیرمجموعه‌ای از دیگری دانست. دلیل این وضع روشن است: هر دو مجموعهٔ حـرفی از عضوهای یکسانی تشکیل شده‌اند. چنین مجموعه‌هائی را **برابر** گویند. دو مجموعه، وقتی‌برابرندکه هرکدام ازآن‌ها، زیرمجموعه‌ای از دیگری‌باشد، عضوهای تشکیل‌دهندهٔ هر دومجموعه، یکی باشد:

{ب، ی، ل، ا، ن}⊂{ب، ا، ل، ی، ن}

{ب، ا، ل، ی، ن}⊂{ب، ی، ل، ا، ن}

{ب، ی، ل، ا، ن}={ب، ا، ل، ی، ن}

کوشش کنیم، نمونه‌ای از دو مجموعهٔ برابر، در ریاضیات پیدا کنیم. دو مجموعه از شکل‌هـای هندسی در نظر می‌گیریم: مجموع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، و مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الزوایـا. این قضیه را در هندسه داریم: در هر مثلث، زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های برابر، بـا هم برابرند. بنابراین، هرمثلث‌متساوی‌الاضلاع، ضمناً متساوی‌الزوایا هم‌می‌شود، یعنی مجموعهٔ‌اول (مثلث‌های متساوی‌الاضلاع) زیر مجموعه‌ای ازمجموعهٔ دوم (مثلث‌های متساوی‌الزوایا) است. این قضیه‌را هم داریم: در هرمثلث، ضلع‌های روبه‌رو به‌زاویه‌های برابر، باهم برابرند، یعنی هر مثلث‌متساوی‌الزاویا، ضمناً متساوی‌الاضلاع هم می‌شود، و به این ترتیب، مجموعهٔ‌دوم هم، زیر مجموعه‌ای ازمجموعهٔ اول است. یعنی، دومجموعه باهم‌برابرند.

□

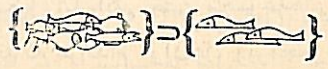
برهمه روشن است که «قزل‌آلا» یك «ماهی» است، ولی هر«ماهی»، «قزل‌آلا» نیست.

روشن است‌که در این‌جا، صحبت ازدو مجموعه است: یکی مجموعهٔ ماهی‌ها به‌طورکلی، و دیگری مجموعهٔ ماهی‌های قزل‌آلا.

چون هر قزل‌آلائی، مـاهی هم هست، بنابراین، مجموعهٔ ماهی‌های قزل‌آلا، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ ماهی‌ها، به‌طورکلی، است.

ولی، هر ماهی، قزل‌آلا نیست. به‌زبان دیگر، در مجموعهٔ ماهی‌ها، دست‌کم یك ماهی‌پیدا می‌شودکه قزل‌آلا نباشد، ومثلاً، کپور یا سوپ‌باشد. در این‌گونه موارد، گاهی به‌جای «زیر مجموعه»، می‌گویند **«زیر مجموعهٔ محض»**.

به‌همین ترتیب، مجموعهٔ پیاده‌ها، زیر مجموعهٔ محضی از مجموعهٔ



شکل ۲

مهره‌های شطرنج است، یا مجموعهٔ عددهای فرد، زیر مجموعه‌ای محض از مجموعهٔ عددهای طبیعی و مجموعهٔ مربع‌ها، زیر مجموعه‌ای محض از مجموعهٔ مستطیل‌ها است.

گاهی، زیرمجموعهٔ محض را، **زیر مجموعهٔ حقیقی** یا **زیر مجموعهٔ خاص** هم می‌گویند. به‌این ترتیب، مجموعهٔ‌قزل‌آلاها، زیر مجموعهٔ حقیقی ازمجموعهٔ ماهی‌ها و مجموعهٔ عددهای فرد، زیر مجموعهٔ حقیقی ازمجموعهٔ عددهای طبیعی است وغیره.

□

حتماً این شوخی را شنیده‌اید: دو پدر و دو پسر، ولی روی هم فقط سه‌نفر. چگونه ممکن است؟

به احتمال زیاد، پاسخ را می‌دانید: در این‌جا یك پسر وجود دارد با پدر و پدر بزرگش. ولی، حتی حالا که پاسخ را می‌دانیم، جای فکرکردن باقی‌می‌ماند: جنبهٔ معمائی این شوخی درکجاست؟

این‌جا، در واقع، بحث بر سرقانون عددها نیست (والا مسأله‌جوابی پیدا نمی‌کرد: دو به‌اضافهٔ دو، هرگز برابر سه نمی‌شود)، این‌جا، با نظریهٔ مجموعه‌ها سروکار داریم.

دومجموعه در نظرمی‌گیریم: مجموعهٔ پدرها (پدر وپدربزرگ‌پسرك) ومجموعهٔ پسرها (پسر وپدرش، که خود پسر پدر بزرگ است). حل معما، به‌معنای این است‌که مجموعهٔ دیگری تشکیل دهیم‌که شامل سه‌عضوباشد.

مشخصهٔ این مجموعهٔ جدید درآن است‌که تنها شامل همهٔ عضوهایی است‌که یا در مجموعهٔ اول ویا درمجموعهٔ دوم وجود دارند، یعنی هرعضو این مجموعهٔ سوم باید یا در مجموعهٔ پدرها وجود داشته بـاشد و یـا در مجموعهٔ پسرها.

وقتی‌که مجموعهٔ تازه‌ای، طبق این قاعده، از مجموعه‌های مفروض ساخته شود، آن را **اجتماع** مجموعه‌های مفروض‌گویند.

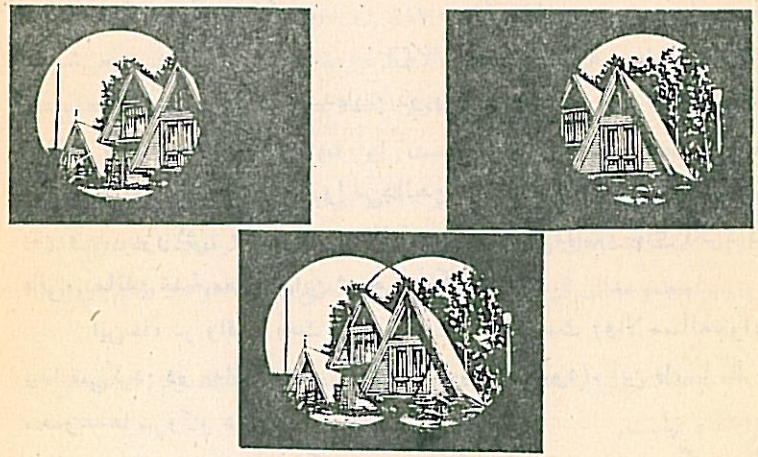
به این تـرتیب، مجموعه‌ای‌که شامل پسر، پدر و پدربزرگ باشد، اجتماع مجموعهٔ پدرها و مجموعهٔ پسرها است.

برای این کـه با مفهوم اجتماع مجموعه‌ها بیشتر آشنا شویم، یك

دوربین انتخاب می‌کنیم.

به‌چشمی چپ‌دوربین نگاه‌کنید وهمهٔ‌آن‌چه را باآن می‌بینید، به‌خاطر بسپارید. بعد با چشمی راست نگاه‌کنید. حالا اگر با هر دوچشمی نگاه‌کنید، چه خواهید دید؟ همهٔ‌آن چه را که با چشمی چپ وچشمی راست می‌دیدید.

علامت∞را در نظربگیرید. این‌علامت‌را می‌توان‌اجتماع‌دومجموعهٔ از نقطه‌ها دانست: اجتماع دو دایره‌ای‌که درکنار هم‌گذاشته شده‌اند.



شکل ۳

بازهم یك‌مثال: مجموعهٔ تمام عددهایی را در نظر بگیریدکه ازلحاظ قدر مطلق، بزرگتر از واحد باشند. همهٔ عضوهای این مجموعه، تشکیل شده‌اند از عددهای مثبتی‌که از واحد بزرگتر و عددهای منفی که از ۱ — کوچکترند. در این‌جا هم، با اجتماع دو مجموعهٔ عددی سروکار داریم: مجموعهٔ عددهای مثبت بزرگتر از واحد و مجموعهٔ عددهای منفی‌کوچکتر از ۱ — .

□

دوباره به‌دوربین برمی‌گردیم و ازجهت دیگری به‌آن دقت می‌کنیم.

آیا توجه‌کرده‌اید که همهٔ آن چه را در دوربین می‌بینید، برجسته و حجم‌دار نیستند؟

موضوع این است‌که تنها وقتی می‌توان چیزی را برجسته وحجم‌دار

دیدکه با هر دوچشم به‌آن نگاه‌کنیم. بی‌جهت نیست‌که زیست‌شناسان، دید حجم‌دار را، دوچشمی می‌گویند (یعنی «دیدن با دوچشم»).

درمیدان‌دیددوربین، آن قسمتی‌را که برجسته دیده می‌شود، مشخص می‌کنیم. روشن است‌که این قسمت، هلالی را تشکیل می‌دهدکه از برخورد دو دایرهٔ میدان دید، در چشمی چپ و چشمی راست، به دست آمده است.

شکل ۴

این نتیجه‌گیری را، به زبـان نظری مجموعه‌ها، بیان می‌کنیم. دو مجموعه انتخاب‌کردیم (میدان‌های‌دید دولولهٔ دوربین) و ازآن‌ها، مجموعهٔ سومی به‌دست آوردیم. مشخصهٔ این مجموعهٔ سوم در این است‌که هرعضو آن، هم به‌مجموعهٔ اول وهم به مجموعهٔ دوم تعلق دارد.

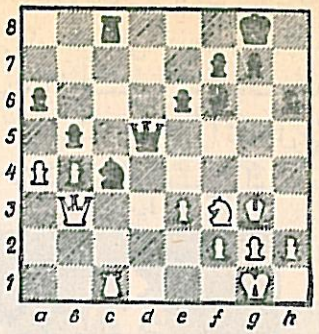
هروقت‌که مجموعه‌ای، با این شرایط، ازچند مجموعهٔ نخستین‌ساخته شود، آن را **اشتراك** مجموعه‌های نخستین می‌نامند.

جالب است‌که دو مجموعهٔ پدرها و پسرها را، از این دیدگاه بررسی کنیم. رمز معما دراین‌جاست‌که پدر، هم عضو مجموعهٔ پدرهاست وهم‌عضو مجموعهٔ‌پسرها. حالامی‌توانیم‌کمی علمی‌تر صحبت‌کنیم: مجموعهٔ یك‌عضوی پدر، اشتراك دو مجموعهٔ پدرها و پسرها را تشکیل می‌دهد.

مجموعهٔ عددهای حقیقی بزرگتراز صفروکوچکتر از واحد رامی‌توان اشتراك دو مجموعه دانست: مجموعهٔ عددهای حقیقی بزرگتر از صفر و مجموعهٔ عددهای‌حقیقی‌کوچکتر ازواحد. همچنین، مجموعهٔ مربع‌ها، عبارت است از اشتراك مجموعهٔ مستطیل‌ها و مجموعهٔ لوزی‌ها.

□

وضع مهره‌ها در بیست وششمین حرکت در دور بیست ویکم مسابقهٔ بزرگ شطرنج، بین کاپابلانکا وآله‌خین ـ در پائیز سال ۱۹۲۷، چنین‌بود:



دنبالهٔ مسابقه، به این ترتیب ادامه یافت:

۲۶: ...	f۶—b۲
۲۷: c۱—e۱	c۸—d۸
۲۸: a۴:b۵	a۶:b۵
۲۹: h۲—h۳	e۶—e۵
۳۰: e۱—b۱	e۵—e۴
۳۱: f۳—d۴	b۲—d۴
۳۲: b۱—d۱	c۴:e۳

سفید تسلیم شد.

امیدواریم دوست‌داران‌شطرنج، لذت‌لازم را ازبازی این زوج‌مشهور ببرند. ولی، واقع این است که ما این‌نمونه را تنها به‌خاطر رضایت شطرنج‌بازان نیاورده‌ایم. در این نمونه، چیزی وجود دارد که بـه گفت و گوی ما دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها مربوط می‌شود.

به مفهوم آن‌چه نوشته‌ایم، با دقت توجه می‌کنیم. همه‌جا بـا یك زوج خاص روبه‌رو هستیم. هرکدام ازاین زوج‌ها از یك حرف لاتینی ویك عدد طبیعی تشکیل‌شده‌اند: f۶، b۲، c۱،...

به صفحهٔ شطرنج نگاه‌کنید: در پایین، از چپ بـه راست، حرف‌های a تا h و در سمت چپ، از پایین بـه بالا، عددهای از ۱ تا ۸ نوشته شده است.

وقتی که به‌زوجی شامل‌یك حرف ویك‌عدد برمی‌خوریم، به‌این‌ترتیب

عمل کـرده‌ایم: ابتدا عضوی از مجموعهٔ حرفی نخست و سپس عضوی از مجموعهٔ عددی دوم انتخاب شده است.

خود واژهٔ **«زوج»**، اصطلاحی از نظریهٔ مجموعه‌هـا است. «زوج»، به دو عضوی گفته می‌شود که با ردیف مشخصی کنار هم قرار گـرفته باشند (و به همین مناسبت، گاهی، به‌آن **«زوج مرتب»** هم می‌گویند).

آیا نمی‌خواهید، همهٔ انواع زوج‌های ممکن را، در مثالی کـه داشتیم، پیدا کنید؟ همهٔ این‌زوج‌های ممکن، مجموعه‌ای را تشکیل‌می‌دهند که به‌آن، **حاصل‌ضرب دکارتی** دو مجموعهٔ مفروض (مجموعهٔ حرف‌هـا و مجموعهٔ عددها) گفته می‌شود.

آشنائی با این مفهوم تازه را، بـا تعریف دقیق‌تر آن تمام می‌کنیم: حاصل‌ضرب دکارتی (یا **حاصل ضرب مستقیم**) یك‌مجموعه درمجموعهٔ‌دیگر، به‌مجموعه‌ای گفته می‌شود که عضوهای آن عبارت بـاشد از همهٔ زوج‌های ممکنی که جزء اول آن متعلق به‌مجموعهٔ اول و جزء دوم آن‌ها، متعلق به مجموعهٔ دوم باشد.

□

می‌توان به‌جای «زوج‌ها» از «سه‌تائی‌ها» صحبت کرد ـ که بازهم‌باید سه‌تائی‌های مرتب نامیده شوند ـ کـه از عضوهای سه مجموعه به دست آمده‌اند. مثلاً، وقتی سرمیز نهار، جلو هر نفر سه‌بشقاب گذاشته‌اند، بایك سه‌تائی‌های مرتب سروکار داریم که جزء اول هرکدام از آن‌ها به‌مجموعهٔ بشقاب‌های اول، جزء دوم آن‌ها به مجموعهٔ بشقاب‌های دوم و جزء سوم آن‌هابه‌مجموعهٔ بشقاب‌های‌سوم، تعلق دارد (برمرتب بودن این سه‌تائی‌ها با نام بشقاب‌ها، تأکید کـرده‌ایم: بشقاب اول، بشقاب دوم، بشقاب سوم). اگرهمهٔ ترکیب‌های‌ممکن این سه‌نوع بشقاب را ـ با توجه به‌ردیف‌آن‌ها ـ پیدا کنیم، حاصل‌ضرب دکارتی سه‌مجموعهٔ بشقاب را به‌دست آورده‌ایم.

البته، سه‌بشقاب، همیشه مرز پذیرائی از مهمان نیست. آیانهاری را که سلطان ترك به افتخار مهمان خود داده بود، بـه یاد دارید؟ بارون‌مان‌هاوزن، مهمان سلطان ترك وکسی که دربارهٔ درستی وپرهیزکاری اوافسانه‌ها وجود دارد، دراین‌باره نقل می‌کند که تعداد بشقاب‌ها، در این نهار، آن‌قدر

زیاد بود که برای توضیح ریاضی چنین نهارخوری‌های مشهور، تنها می‌توان از مفهوم n تائی‌های مرتب استفاده کرد (احتمالاً خواننده اطلاع دارد که در ریاضیات، از حرف n، برای نشان‌دادن عددهای طبیعی استفاده می‌شود ومعمولاً وقتی به‌کار می‌رود که بتوان به‌جای آن، هرعدد طبیعی دل‌خواهی را قرار داد).

در ضرب مجموعه‌ها، عامل‌ها، یکسان هم می‌توانند باشند. مثلاً، امتحان کنید که اگر مجموعهٔ حرف‌های الفبای فارسی را، سه‌مرتبه در خودش ضرب کنیم، چه به‌دست می‌آید. روشن است که ضمن این ضرب، همهٔ واژه‌های سه حرفی ممکن در زبان فارسی به‌دست می‌آید، که البته، بسیاری از آن‌ها معنائی هم ندارند: بیل، نور، آبی، خام، مار،...

یادآوری می کنیم که n تائی‌های مرتب از عضوهای یك مجموعه را، بردارهای n بعدی تعریف شده در این مجموعه، هم می گویند.

عضوهایی که یك n تائی را تشکیل می‌دهند، مولفه‌ها، یا مختصات آن نامیده می‌شوند و با ردیف خود معین می‌شوند: مولفهٔ اول، مولفهٔ دوم و غیره.

یك مسألهٔ ساده، ولی ...

ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ دل‌خواه واقع در داخل مثلث غیرمشخص، از سه رأس آن، کوچکتر است از مجموع دوضلع بزرگتر مثلث؛ یعنی اگر در مثلث ABC داشته باشیم $AC < BC < AB$ و M، نقطه‌ای واقع در داخل مثلث باشد، خواهیم داشت:

$$MA+MB+MC < AB+BC$$

پاسخ را در صفحه‌های بعد پیدا کنید

دربارهٔ رشتهٔ فیبوناچی[1]

ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی

دربارهٔ رشتهٔ فیبوناچی مطلب‌های زیاد نوشته شده و مسئله‌های بسیار نیزمربوط به‌آن طرح وبررسی گردیده است. اما بازهم باب طرح مسئله‌های جدید دربارهٔ آن مفتوح است، وهنوز مسئله‌هایی از آن وجود داردکه حل کامل آن‌ها ارائه نشده است.

می‌دانیم که رشتهٔ فیبوناچی که بانماد (F_n) و $n \in N$ نموده می‌شود چنین تعریف می گردد:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,$$

$$n \geqslant 2 : F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (1)$$

جملهٔ عمومی این رشتهٔ به‌نام «فرمول بینه (Binet)» عبارت است از:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad (2)$$

که در آن α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - x - 1 = 0$ می‌باشند، یعنی:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

و. ای. هاگت (W. E. Hoggatt) بنیانگذار «بنیاد آمریکایی فیبوناچی»، ویژگی‌های عمدهٔ رشتهٔ فیبوناچی را درجزوه‌ای به‌نام «عددهای فیبوناچی و لوکا[2]» گردآوری و درسال ۱۹۶۹ به‌چاپ رسانده است. واقعاً شگفت‌آوراست که رابطهٔ سادهٔ(۱) دارای اینهمه پیامدها باشد. رشتهٔ دوگانهٔ

۱. Fibonacci ریاضی‌دان ایتالیائی.

۲. Lucas ریاضی‌دان فرانسوی که کارهای عمده‌اش مربوط است به نظریهٔ اعداد، ترکیبات و تفریحات ریاضی.

C_n^p که با رابطهٔ برگشتی

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

مشخص می‌شود نیز دارای انواع ویژگی‌ها می‌باشد.

از «رشتهٔ لوکا» می‌توان به عنوان خواهر کوچك رشتهٔ فیبوناچی نام برد. این رشته چنین تعریف می‌شود:

$$L_0 = 2 \text{ و } L_1 = 1,$$

$$n \geqslant 2 : L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

جملهٔ عمومی این رشته نیز به‌نام «فرمول بینه» عبارت است از:

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

از جمله ویژگی‌های این رشته می‌توان دو رابطهٔ زیر را یادآوری کرد:

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$$

★

یکی ازمسئله‌های مربوط به‌رشتهٔ فیبوناچی که هنوز مورد بحث است، مسئلهٔ تعیین مجموع سری زیر می‌باشد:

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{F_n}$$

با توجه به اینکه $|\beta| \simeq 0/618 < 1$ و اینکه β^n (به اندازهٔ کافی سریع) به‌سمت صفر میل می‌کند وبا توجه به رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که‌مجموع A از مجموع زیر دور نخواهد بود:

$$A' = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha - \beta}{\alpha^n} = \sqrt{5} + 1 \simeq 3/236$$

می‌توان ثابت کرد که A' یك مقدار تقریبی‌نقصانی A است که خطای مربوط بیشتر از ۰/۲۲۰ نمی‌باشد. با استفاده از ماشین حساب جیبی نیز می‌توان

مقدار تقریبی A را بدست آورد:

$$A \simeq 3/359886$$

سری زیر نیز به‌رشتهٔ فیبوناچی مربوط است و ثابت خواهیم کرد که‌مجموع آن را می‌توان به‌دست آورد:

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_8} + \frac{1}{F_{16}} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{F_{2^k}}$$

اگر مجموع سری را با S نشان دهیم، با توجه به (۲) داریم:

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha - \beta}{\alpha^{2^k} - \beta^{2^k}}$$

و چون $\alpha\beta = -1$، پس برای $k \geqslant 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\alpha^{2^k} - \beta^{2^k}} = \frac{\beta^{2^k}}{1 - \beta^{2^{k+1}}}$$

بنابراین:

$$S = 1 + (\alpha - \beta) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta^{2^k}}{1 - \beta^{2^{k+1}}}$$

اکنون سری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^2} + \frac{z^2}{1 - z^4} + \frac{z^4}{1 - z^8} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2^k}}{1 - z^{2^{k+1}}}$$

هرگاه مجموع این سری را به‌دست آوریم خواهیم داشت:

$$S = 1 + (\alpha - \beta)\left(f(\beta) - \frac{\beta}{1 - \beta^2}\right)$$

برای تعیین مجموع $f(z)$ به‌این نکته توجه داریم که $\frac{z^{2^k}}{1 - z^{2^{k+1}}}$

را می‌توانیم مجموع بینهایت جمله از یك سری هندسی بدانیم که جملهٔ اول آن z^{2^k} و قدر نسبت آن $z^{2^{k+1}}$ می‌باشد، زیرا داریم :

$$\frac{z}{1-z^2}=z(1+z^2+z^4+z^6+\dots)=z+z^3+z^5+z^7+\dots$$

$$\frac{z^2}{1-z^4}=z^2(1+z^4+z^8+z^{12}+\dots)=$$

$$=z^2+z^6+z^{10}+z^{14}+\dots$$

$$\frac{z^4}{1-z^8}=z^4(1+z^8+z^{16}+z^{24}+\dots)=$$

$$=z^4+z^{12}+z^{20}+z^{28}+\dots$$

و به‌همین ترتیب برای‌دیگر جمله‌های سری. هرگاه طرفین برابری‌های بالا را با هم جمع کنیم، با توجه به‌اینکه در طرف دوم از هرتوان صحیح z یك و فقط یك جمله داریم، بنابراین:

$$\text{اگر } |z|<1 : \quad f(z)=z+z^2+z^3+z^4+\dots=\frac{z}{1-z}$$

همچنین ملاحظه می‌کنیم که :

$\frac{z}{1-z^2}$ برابر است با مجموع z^n هایی که در آن‌ها n عدد فرد است،

$\frac{z^2}{1-z^4}$ برابر است بامجموع z^nهایی‌که درآن‌ها n دوبرابر عددفرداست،

$\frac{z^4}{1-z^8}$ برابراست بامجموع z^n هایی‌که درآن‌ها n چهاربرابرعددفرداست،

و به همین ترتیب تا آخرکه خواهیم داشت :

$$\frac{z^{2^k}}{1-z^{2^{k+1}}}=z^{2^k}\sum_{h=0}^{+\infty}z^{h\cdot 2^{k+1}}=\sum_{h=0}^{+\infty}z^{2^k(2h+1)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{h=0}^{+\infty}z^{2^k(2h+1)}$$

هر عدد طبیعی غیر صفر فقط بـه یك صورت حاصل ضرب یك عدد طبیعی فرد درتوانی نامنفی از ۲ می‌باشد. بنابراین محقق می‌شودکه اگر $|z|<1$ باشد، داریم $f(z)=\frac{z}{1-z}$ و اگر $|z|>1$ باشد، داریم:

$$\frac{z^{2^k}}{1-z^{2^{k+1}}}=\frac{\frac{z^{2^k}}{z^{2^{k+1}}}}{\frac{1}{z^{2^{k+1}}}-1}=\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2^k}}{\left(\frac{1}{z}\right)^{2^{k+1}}-1}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$f(z)=-f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{1-z}$$

اما مطلوب ما عبارت است از تعیین :

$$S=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{F_{2^k}}=1+(\alpha-\beta)\left(f(\beta)-\frac{\beta}{1-\beta^2}\right)$$

که چون $|\beta|<1$ پس مقدار $f(\beta)$ برابر است با $\frac{\beta}{1-\beta}$ ودرنتیجه‌داریم:

$$S=1+(\alpha-\beta)\left(\frac{\beta}{1-\beta}-\frac{\beta}{1-\beta^2}\right)$$

$$S=3+\beta=\frac{7-\sqrt{5}}{2}\simeq 2/381966$$

قضیهٔ باقی‌مانده و بخش‌پذیری

منصور معتمدی

هدف این‌نوشته استفاده ازقضیهٔ معروف باقی‌مانده در استخراج‌قواعد موجود برای یافتن باقی‌ماندهٔ عددی مفروض براعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۸ و ۹ و ۱۱ می‌باشد. در ابتدا، قضیه باقی مانده را به شکلی کـه برای اعداد حقیقی موجود است بیان می‌کنیم.

قضیه باقی‌مانده. هرگاه $f(x)$ یك چند جمله‌ای با ضرائب حقیقی و a نیز یك‌عدد حقیقی‌باشد، آنگاه چند جمله‌ای $h(x)$ وهمچنین عددحقیقی r که یکتا هستند وجود دارد به‌طوری‌که تساوی زیر برقرار باشد:

$$f(x)=h(x)(x-a)+r$$

برای یافتن‌باقی‌ماندهٔ‌عدد $n+1$ رقمی $m=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0}$ که در مبنای ده نوشته شده است، چند جمله‌ای $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ را بامحدودیت اینکه $a_n\neq 0$ و a_{n-1}،...،a_0 یکی ازارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ... ، ۹ باشند در نظرمی‌گیریم. آشکار است که

$$f(10)=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots a_0=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0}=m$$

هر یك از حالت‌های زیر با انتخاب مناسب a از قضیهٔ بـاقی‌مانده و قراردادن $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ قانون مشخصی را برای یافتن باقی‌مانده m براعداد ۲، ۳، ۵، ۴، ۸، ۹ بدست می‌دهد:

الف: برای یافتن‌باقی‌ماندهٔ m بر اعداد ۲ و ۵، a را برابر ۰ اختیار می‌کنیم، بنابراین

$$f(x)=xh(x)+r$$

از اینجا نتیجه می‌شودکه $f(0)=r$، ازطرفی محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که $f(0)=a_0$ و $m=f(10)$ لذا

$$m=f(10)=10h(10)+a_0$$

ازآنجا که $10h(10)$ بر۲ (۵) قابل قسمت است، باقی‌مانده m بر ۲ (۵) همان باقی‌مانده a_0 بر ۲(۵) می‌باشد.

ب: برای یافتن باقی‌ماندهٔ m براعداد ۳ و ۹، a را بـرابر ۱ اختیار می‌کنیم در این‌صورت

$$f(x)=(x-1)h(x)+r$$

از این تساوی، تساوی $f(1)=r$ نتیجه می‌شود و چون $f(1)=a_n+\ldots+a_{n-1}+a_0$ لذا

$$m=f(10)=9h(10)+a_0+a_1+\ldots+a_n$$

اما $a_0+a_1+\ldots+a_n$ مجموع ارقام m است، و چون $9h(10)$ بر ۳(۹) قابل قسمت است، باقی‌ماندهٔ m بر۳ (۹) برابر باقی‌ماندهٔ مجموع ارقام m بر ۳(۹) می‌باشد.

ج: با قراردادن $a=2$ در قضیه باقی‌مانده، باقی‌ماندهٔ m براعداد ۴(۸) را می‌توان پیدا نمود. در این حالت داریم

$$f(x)=(x-2)h(x)+r$$

کـه از آن نتیجه می‌شود $m=f(10)=8h(10)+r$ و $f(2)=r$، از طرف دیگر، اگر $f(2)$ را مستقیماً در $f(x)$ محاسبه‌کنیم چنین نتیجه می‌شود

$$f(2)=2^n a_n+2^{n-1}a_{n-1}+\ldots+8a_3+4a_2+2a_1+a_0$$

چون $2^n a_n+\ldots+8a_3$ بر ۸ و $2^n a_n+\ldots+4a_2$ بر ۴ قابل قسمت هستند، تساوی‌فوق‌نشان می‌دهدکه‌باقی‌ماندهٔ m بر۸ برابرباقی‌مانده $4a_2+2a_1+a_0$ وباقی‌ماندهٔ m بر۴ برابرباقی‌مانده $2a_1+a_0$ بر ۴ می‌باشد.

د: به‌منظوریافتن باقی‌ماندهٔ m برعدد ۱۱، a را برابر ۱− اختیار می‌کنیم، با استفاده از قضیهٔ باقی‌مانده، تساوی زیر بدست می‌آید.

$$f(x)=(x+1)h(x)+r$$

به‌سادگی دیده می‌شودکه

$$m=f(10)=11h(10)+a_n(-1)^n+a_{n-1}(-1)^{n-1}+\ldots+a_0$$

لذاباقی‌ماندهٔmبرعدد۱۱ برابرباقی‌ماندهٔ $a_n(-1)^n+a_{n-1}(-1)^{n-1}+\ldots+a_0$ بر۱۱ می‌باشد واین‌بدان‌معنی است که‌باقی‌مانده m بر۱۱برابر باقی‌ماندهٔ تفاوت مجموع ارقامی است که از سمت راست در مکان فرد قرار دارند ومجموع ارقامی که در مکان زوج هستند.

اصل پنجم اقلیدس و زادهٔ نوین آن[1]

مارتین گاردنر
ترجمهٔ شهریار شهریاری

خط‌هائی که موازیند
در بی‌نهایت به‌هم می‌رسند،
مکرر می‌گفت اقلیدس
و با حرارت
تأکید می‌کرد.
تا روزی که مرد
و به آن حوالی رسید:
و در آنجا
تازه فهمید
که این خط‌های بی‌همه چیز
از هم دور می‌شوند.

پیت‌هاین (گروکس، جلد ششم)

«مقدمات» اقلیدس هم طولانی و خسته کننده است، و هم بسیاری از فرض‌هائی را که برای دستگاه مورد نظر او لازم است، مشخصاً بیان نمی‌کند. مثلا در هیچ جا به وضوح اعلام نمی‌کند که دو دایره می‌توانند همدیگر را قطع کنند، یا یک دایره دارای یک داخل و یک خارج است، و یا مثلث‌ها را می‌شود برگرداند. برتراند راسل با معیارهای کنونی توانست اصل چهارم اقلیدس را «ورق پاره‌ای بی‌معنی» بخواند، و استفاده از «مقدمات» به عنوان کتاب درسی را یک افتضاح بداند.

1. Euclid's parallel postulate and its modern offspring, **Scientific American**, October 1981, pp. 23-33.

ازطرف دیگر، هندسهٔ اقلیدس اولین کوشش جدی در جهت اصل موضوعی کردن این مبحث بود و منصفانه نیست اگر او را به خاطر عدم پیش‌بینی تمام تغییراتی، که داوید هیلبرت و دیگران، ضمن صوری کردن هندسه، به‌وجود آوردند، سرزنش کنیم. همین‌که اقلیدس فهمیده بود که اصل پنجم او یک اصل موضوعه و نه یک قضیه است، نشانهٔ روشنی از نبوغ او است.

نحوهٔ بیان اقلیدس برای اصل پنجم کمی پیچیده است، وخیلی زود می‌توان فهمید که می‌شود آن را به این صورت ساده‌تر عنوان کرد: از یک نقطهٔ روی یک صفحه و خارج یک خط مستقیم، یک خط موازی خط داده شده، می‌توان رسم کرد. از آنجائی که این اصل به وضوح و روشنی اصول دیگر اقلیدس نیست، ریاضی‌دانان، در جریان ۲۰۰۰ سال کوشیدند تا این اصل را بااستفاده از اصول‌دیگر اقلیدس ثابت کنند، و درنتیجه آن را به‌یک قضیه تبدیل کنند. صدها اثبات آزموده شد، تعدادی از مشهورترین ریاضی‌دانان فکر می‌کردند که موفق شده‌اند، ولی همیشه، و بادقت بیشتر، معلوم می‌شد که جائی در اثبات از فرضی استفاده کرده‌اند که یا معادل اصل پنجم است و یا ازاین اصل نتیجه می‌شود.

برای مثال، اگر فرض کنیم که مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر دو قائمه است، به سادگی می‌توانیم اصل پنجم را ثابت کنیم. متأسفانه این فرض را بدون استفاده از اصل پنجم نمی‌توان ثابت کرد. یک اثبات نادرست قدیمی توسط طالس ملطی(۲) داده‌شده‌است، که در آن از وجود مستطیل، یعنی یک چهار ضلعی با چهار زاویهٔ قائمه، استفاده شده است. البته، شما نمی‌توانید بدون اصل‌توازی ثابت کنید که مستطیل‌ها وجود دارند! در قرن ۱۷، جان والیس(۳) ریاضی‌دان قابل انگلیسی گمان می‌برد که این اصل را ثابت کرده است. متأسفانه او نفهمیده بود که فرض خود را براین پایه گذاشته بودکه دومثلث می‌توانند بدون برابر بودن مشابه باشند، حکمی که بدون اصل پنجم قابل اثبات نیست. فهرست‌های بلندی از فرض‌های معادل اصل توازی می‌توان نوشت. این‌ها همه به نظر آنقدر بدیهی می‌آیند که لزومی به‌اثباتشان به‌نظر نمی‌رسد، در حالی که همه معادل اصل توازی هستند، و این به معنای آن است که درستی آن‌ها، تنها درصورت درستی اصل توازی امکان دارد.

در اوایل سدهٔ نوزده، کوشش برای اثبات اصل توازی تقریباً

2. Thales of Miletus
3. John Wallis

به یک بیماری واگیردار تبدیل شده بود. در مجارستان ، فارکاش بایای بیشتر عمر خود را بدین کار پرداخت، و در جوانی مطلب را به دفعات با دوست آلمانی خود ، کارل فردریک گوس درمیان می‌گذاشت. پسر فارکاش، یعنی یانوش چنان درگیر این مسأله شده بود که پدرش در نامه‌ای به او نوشت: «برای رضای خدا، از تو می‌خواهم که دست برداری، از آن کمتر از تمایلات احساسی نترس، چرا که می‌تواند تمام وقتت را بگیرد وسلامت، آرامش خاطر،وخوشی زندگیت را مختل کند».

یانوش دست برنداشت، و بزودی متقاعد شد که نه تنها این اصل مستقل از اصول دیگر است، بلکه می‌توان هندسهٔ منطقاً سازگاری با این فرض، که از نقطهٔ مفروض بی‌نهایت خط به‌موازات خط داده شده می‌توان رسم کرد، ساخت. در سال ۱۸۲۳ مغرورانه‌به پدرش نوشت. «از هیچ، جهانی تازه پدید آورده‌ام».

فارکاش بلافاصله از پسرش اجازه خواست تا ادعاهای جالب پسرش را در ضمیمه‌ای بر کتابی، که داشت برای چاپ آماده‌می‌کرد، منتشر سازد. «اگر تو واقعاً موفق شده‌ای، درستش این‌است که حتی یک لحظه را برای انتشار نظریات خودت هدر ندهی، و این بدودلیل است: اولا، بدین دلیل که افکار به سادگی از یکی به دیگری منتقل می‌شوند و این یکی می‌تواند در چاپ آن‌ها پیش‌دستی کند. ثانیاً این حقیقت را بپذیر ، که بسیاری چیزها دوران خاصی دارند و در زمان واحد در محل‌های مختلف پیدا می‌شوند، همان‌طور که در بهار بنفشه‌ها همه‌جا می‌رویند. همچنین هرمبارزهٔ علمی یک جنگ جدی است، که در آن من نمی‌توانم بگویم چه زمانی صلح فرا می‌رسد . لذا ما باید هرلحظه که می‌توانیم، فتح کنیم، چرا که برتری باکسی است که آغاز می‌کند».

شاهکار کوتاه یانوش در کتاب پدرش منتشر شد، ولی چاپ کتاب تا سال ۱۸۳۲ به تأخیر افتاد. ریاضی‌دان روسی، نیکلای ایوانویچ لوبا چوسکی جزئیات همان هندسهٔ عجیب را (بعدها فلیکس کلاین آن را هندسهٔ هذلولوی خوانده است) در مقاله‌ای در سال ۱۸۲۹ منتشر ساخته بود. و بدتر از این، وقتی که فارکاش آن ضمیمه را برای دوست قدیمش گوس فرستاد، «سلطان» ریاضیات جواب داد که اگر او آن اثر را تمجید کند، درست مانند آن است که خود را تمجید کرده باشد، چرا که او خودش سال‌ها قبل، همین نتیجه‌ها را به‌دست آورده، ولی منتشر نکرده است. در نامه‌های دیگری او دلایلش را برای عدم انتشار این نتایج ذکر کرده است: او

نمی‌خواست که اعتراض «بوئو تانیان‌ها» (۴) را برانگیزد. منظور او از بوئوتانیان‌ها همکاران محافظه‌کارش بود. (در آتن قدیم بوئوتانیان‌ها افرادی بیش‌از اندازه احمق شمرده می‌شدند).

جواب گوس، یانوش را افسرده ساخت، حتی مشکوک شد که شاید پدرش کشف جالب او را برای گوس فاش ساخته است. وقتی که مقالهٔ قدیمی‌تر لوباچوسکی را دید، علاقهٔ به موضوع را از دست داد و دیگر چیزی منتشر نکرد. او بعد از این‌که قبول کرد که امید فراوان او برای به‌دست آوردن افتخار این کشف، به خاطر چاپ دیرتر از موقع اثرش، برباد رفته است نوشت: «البته، حقیقت یکی است، و طبیعت آن در مارکوس واسارهلی (۵) فرقی با طبیعت آن در کامچاتکا (۶)و یا روی ماه ندارد.»

از بعضی جهات داستان به‌نوعی (ژزوئیت) ایتالیائی گیرالامو-ساکری(۷) حتی از زندگی‌نامهٔ بایای تأثرانگیزتر است. در کتابی به نام «اقلیدس منزه از افتراها» در سال ۱۷۳۳، ساکری هردونوع هندسهٔ نااقلیدسی (ما به‌نوع دوم بعداً خواهیم پرداخت) را ساخت، بدون این‌که متوجه شود یا حداقل به‌نظر این‌طورمی‌آید. درهرصورت ساکری عدم تناقض این دو هندسه را باور نداشت. ولی او آن‌قدربه قبول این‌دو هندسه نزدیک شده بود که بعضی از تاریخ نویسان معتقدند که رد آن‌ها توسط او تنها به خاطر گرفتن اجازه چاپ کتابش بود. اریک تمپل‌بل(۸) (در فصلی راجع به‌ساکری در کتاب جادوی اعداد) می‌نویسد: «این ادعا که نظام‌های نااقلیدسی به «درستی» نظام اقلیدس می‌باشند، دعوت احمقانه‌ای به‌فشار واختناق بود. لذا کوپرنیک هندسه تقیه را برمی‌گزیند. پس ساکری کار خودش را رد می‌کند تا بااین افشای پرهیزکارانه، الحاد خود را از دیوار سانسور بگذراند.»

بی‌هیچ مناسبتی دو لطیفه راجع به بایای‌ها را می‌آورم.یانوش افسر سواره نظام بود (ریاضیات همیشه برای او هم، مثل دیگر ریاضی‌دانان، یک تفریح بود) و به خاطر شمشیربازی، مهارتش در نواختن ویولن و خلق وخوی تندش مشهور بود. می‌گویند یک دفعه ۱۳ افسر را به دوئل دعوت کرد، با این شرط که به او اجازه‌می‌دادند

4. Boeotians
5. Marcos Vasarhely
6. Kamchotka
7. Giralamo Saccheri
8. Eric Temple Bell

برای هرکدام از بازندگان قطعه‌ای با ویولن بزنند. بابای پدر را به خواست خودش زیر یک درخت سیب و بدون هیچ بنای یادبودی دفن کردند. او این کار را به خاطر احترام به سه سیب مشهورتاریخ می‌خواست: سیب حوا، سیب زرینی که پاریس(۹) به ونوس (۱۰) به عنوان جایزهٔ مسابقهٔ زیبائی داد، و سیبی که با افتادنش به نیوتن الهام بخشید.

قبل از پایان سدهٔ ۱۹ مسجل شده بود که نه تنها اصل توازی مستقل از اصول دیگر است، بلکه آن را به دوصورت مختلف می‌توان تغییر داد. اگر به‌جای اصل توازی فرض کنیم (همانطور که گوس، بابای و لباچوسکی پیشنهاد کرده بودند) که از نقطه‌ای‌خارج خط مفروض‌بی‌نهایت خط «موازی» می‌توان رسم‌کرد، آنگاه هندسه‌ای جدید به‌دست می‌آید، که به اندازهٔ هندسهٔ اقلیدسی بی‌اشکال و «صحیح» است. تمام پوستولات‌های (اصول) دیگر اقلیدس سرجای خود باقی می‌مانند، خط «راست» هنوز کوتاه‌ترین مسیر بین دونقطه است. دراین فضای هذلولوی (هیپربولیک) مجموع زاویه‌های همهٔ مثلث‌ها کمتر از ۱۸۰ درجه می‌باشد، و هرچه مثلث‌ها بزرگتر شوند، این مجموع کمتر می‌شود. تمام چند ضلعی‌های مشابه برهم قابل انطباقند. محیط هر دایره از π برابر قطر آن بزرگتر است. اندازهٔ انحنای صفحهٔ هذلولوی منفی است (انحنای صفحهٔ اقلیدسی صفر می‌باشد) و در همه‌جا مساوی است. مانند هندسهٔ اقلیدسی، هندسهٔ هذلولوی را هم می‌شود به فضای سه بعدی و فضاهای با بعدهای بیشتر تعمیم داد.

نوع دوم هندسهٔ نااقلیدسی که کلاین به آن نام «بیضوی» داده است، کمی بعدتر، و همزمان، به‌وسیلهٔ ریاضی‌دان آلمانی جورج فردریک برنارد ریمان(۱۱) و ریاضی‌دان سوئیسی لودویگ شلفلی(۱۲) کشف شد. در این هندسه به‌جای اصل توازی، این فرض گذاشته می‌شود که از نقطه‌ای خارج یک خط، هیچ خطی موازی خط مفروض نمی‌توان رسم کرد. در این هندسه مجموع زاویه‌های یک مثلث همیشه بیشتر از ۱۸۰ درجه می‌باشد، و محیط دایره همیشه کمتر از π برابر قطر آن است. خط‌های راست (یعنی‌کوتاه‌ترین مسیر بین نقطه‌ها) محدود و بسته می‌باشند، و هردوتای‌آن‌ها همدیگر را قطع می‌کنند.

---

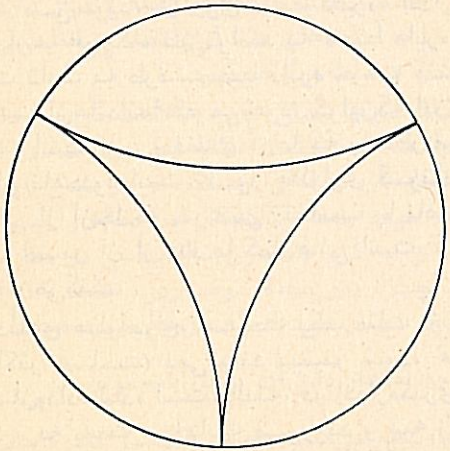
۹ و ۱۰. ازخدایان اساطیری یونان.

11. George Friedrich Bernhard Riemann

12. Ludwig Schläfli

برای نشان دادن عدم تناقض این دو هندسه، مدل‌های اقلیدسی برای هردوی آن‌ها پیدا شده است که نشان می‌دهد که اگر هندسهٔ اقلیدسی نامتناقض است، آنگاه دراین دو هندسه هم تناقضی وجود ندارد. به علاوه ثابت شده است که اگر حساب نامتناقض باشد، آنگاه هندسهٔ اقلیدسی هم نامتناقض است. به خاطر کارهای کورت گودل (۱۳) می‌دانیم که عدم‌تناقض حساب را نمی‌توان در درون‌حساب ثابت کرد. وگو این‌که اثبات‌های مختلفی (برای مثال اثبات مشهور گرهارد گنتسن (۱۴) در سال ۱۹۳۶ برای عدم تناقض حساب وجود دارد، هیچ کدام از این اثبات‌ها کاملا مورد تأیید همه ریاضی‌دان‌ها نیست. شخصی می‌گفت، خدا وجود دارد بدین دلیل که در ریاضیات تناقضی نیست، و شیطان وجود دارد بدین خاطر که ما عدم وجود تناقض در ریاضیات را نمی‌توانیم ثابت کنیم.

اما، همان‌طور که پل روزن بلوم گفته است، فوق اثبات‌های مختلف عدم تناقض حساب، گواین‌که ممکن است شیطان را حذف نکرده باشند، ولی اندازهٔ جهنم را تقریباً به صفر رسانیده‌اند. درهر صورت، امروزه، هیچ ریاضی‌دانی این‌احتمال‌را نمی‌دهد که درحساب (و لذا در هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی) تناقضی پیدا شود. اتفاقاً یکی از آخرین ریاضی‌دانانی که در هندسهٔ نااقلیدسی شک



شکل ۱. بزرگترین مثلث در صفحهٔ هذلولوی

---

13. Kurt Gödel

14. Gerhard Gentzen

داشت لوئینس کارول (نویسندهٔ کتاب آلیس در سرزمین عجایب بود) بود. اچ. اس. ام. کاگستر (۱۵) هندسه‌دان دراین‌مورد نوشته است «معمای عجیبی است. کارول که آفریدهٔ او آلیس در سرزمین عجایب با خوردن کیک کوچکی می‌توانست اندازهٔ خود را تغییر دهد، نمی‌توانست قبول کند که ممکن است ضلع‌های مثلثی به سمت بی‌نهایت بروند، ولی مساحت آن ثابت بماند».

منظور کاگستر را می‌شود به خوبی با مطالعهٔ اثر ام. سی. اچر(۲) به نام دایرهٔ حدی III (شکل ۲) دریافت. این موزائیک کاری (یکی از معدود کارهای اچر با چند رنگ در یک تصویر) که به سال ۱۹۵۹ پدید آمده، برپایهٔ یک مدل اقلیدسی از صفحهٔ هذلولوی می‌باشد که توسط هنری پوآنکاره ساخته شده است. در مدل پرنبوغ پوآنکاره هرنقطهٔ روی صفحهٔ اقلیدسی متناظر بانقطه‌ای داخل (ولی نه روی) محیط دایره می‌باشد. بیرون دایره همان‌طور که اچر می‌گوید: «مطلقاً چیزی نیست.»

فرض کنید که موجودات دوبعدی مسطح روی این مدل زندگی می‌کنند. به نظر ما آنها وقتی که از مرکز دور می‌شوند مرتباً کوچک و کوچکتر می‌شوند، گو این که خود آن‌ها از این تغییر اندازه بی‌اطلاع‌اند، چرا که تمام دستگاه‌های اندازه‌گیری آن‌ها هم به‌همان نسبت کوچک می‌شوند. در روی محیط دایره، اندازهٔ آن‌ها صفر می‌شود، ولی آن‌ها هیچ‌گاه نمی‌توانند به محیط دایره برسند. اگر آن‌ها با سرعت ثابت به طرف محیط دایره حرکت کنند، به نظر ما می‌آید که سرعت آن‌ها دائماً کم می‌شود، گواین‌که این سرعت به‌نظر خود آن‌ها ثابت است. پس، دنیای آن‌ها که به نظر ما محدود است، ازنظر خودشان نامحدود است. نور هذلولوی کوتاه‌ترین مسیر را طی می‌کند، ولی از آن‌جا که سرعتش متناسب با فاصلهٔ آن تا محیط دایره می‌باشد، مسیر آن از دید ما کمان‌هائی است، که محیط را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند.

در این دنیای هذلولوی، مساحت یک مثلث از مقدار خاص محدودی (حداکثر مساحت) نمی‌تواند بیشتر شود، همچون مثلثی‌که در شکل ۱ نشان داده شده است. البته، در اندازه‌گیری هذلولوی، سه ضلع «راستش» به سمت بی‌نهایت می‌روند و سه زاویهٔ آن صفر است. نباید تصور کنید که موزائیک اچر روی کره قرار گرفته‌است. این طرح دایره‌ایست که شامل بی‌نهایت ماهی است و این ماهی‌ها

15. H. S. M. Coxeter

هرقدر به محیط نزدیک باشند کوچکتر می‌شوند. در خود صفحهٔ هذلولوی (که این تصویر مدلی از آن است) تمام ماهی‌ها ازنظراندازه و شکل یکسان‌اند. مهم است که فراموش نکنیم، که شکل موجودات دنیای هذلولوی دراثر حرکت تغییر نمی‌کند. سرعت نور ثابت است، و جهان در تمام جهات بی‌نهایت است.

خط‌های منحنی سفید دراثر اچر، برخلاف تصور عموم، نشان دهندهٔ کوتاه‌ترین مسیرهای هذلولوی نمی‌باشند. به‌این خط‌ها منحنی‌های با فاصلهٔ برابر یا هایپر سیکل گویند. اگر دو انتهای هرکدام از این کمان‌ها را بایک خط مستقیم هذلولوی به هم وصل کنیم، آنگاه فاصلهٔ عمودی (البته فاصلهٔ هذلولوی) خط مستقیم ازاین کمان سفید مقدار ثابتی است. توجه کنید که در مسیر هر منحنی سفید ماهی‌های هم رنگی پشت سر هم حرکت می‌کنند. نقطه‌هایی‌را که درآن‌جا چهار بال به‌هم می‌رسند درنظر بگیرید (یکی‌از این‌نقطه‌ها درست در مرکز دایره قرار دارد). این نقطه‌ها، رأس‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با زاویه‌های ۴۵ درجه هستند که تمام صفحهٔ هذلولوی را به‌طور مرتب می‌پوشانند. نقطه‌هایی که در آنجا سه‌بال چپ به‌هم می‌رسند و یا سه دهن با سه دم تماس پیدا می‌کنند، مرکز این مثلث‌ها می‌باشند. زاویه‌های ۴۵ درجه این امکان را می‌دهند که دور هر رأس، هشت مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارد، در حالی که وقتی صفحه را با مثلث‌های متساوی‌الاضلاع اقلیدسی بپوشانیم دور هر رأس حداکثر ۶ مثلث قرار می‌گیرد.

اچر و کاگستر در سال ۱۹۵۴ ملاقات کرده بودند و از آن‌هنگام باهم مکاتبه‌داشته‌اند. منشأء علاقهٔ اچر به‌پوشاندن صفحهٔ هذلولوی با مثلث‌ها، شکل‌های مقاله‌ای از کاگستر در سال ۱۹۵۷ دربارهٔ‌تقارن در کریستال‌ها بوده است. کاگستر این مقاله را برای او فرستاده بود. در مقاله‌ای به نام «تقارن نااقلیدسی در «دایرهٔ حدی III» تصویری از اچر» (در مجلهٔ لئوناردو، جلد ۱۲، صفحهٔ ۲۵-۱۹، ۱۹۷۹) کاگستر نشان می‌دهد که هرخط سفید محیط را در زاویه‌ای تقریباً ۸۰ درجه (مقدار دقیق‌آن برابر بامجموع $۲^{\frac{۵}{۴}}+۲^{\frac{۷}{۴}}$ ثانیه می‌باشد) قطع می‌کند. به‌نظر کاگستر دایرهٔ حدی III ازنظر ریاضی پیچیده‌ترین نقاشی اچر می‌باشد. حتی در آن نتیجه‌ای مستتر است که کاگستر، ۵ سال بعد از تمام شدن این اثر بدان رسیده است.

کره تقریباً مدلی برای هندسهٔ بیضوی می‌باشد. در اینجا خط‌های مستقیم اقلیدسی تبدیل به دایره‌های عظیمه می‌شوند. واضح

است که هردوتای این‌ها همدیگر را قطع می‌کنند، و همچنین مجموع زاویه‌های مثلثی که ضلع‌هایش کمان‌هائی ازدایره‌های عظیمه باشند، بیشتر از دو قائمه است. به همین ترتیب، سطح زین مانندی که از دوران کشاننده(۱۷) دور مجانبش به‌دست می‌آید، مدلی برای سطح هذلولوی است.

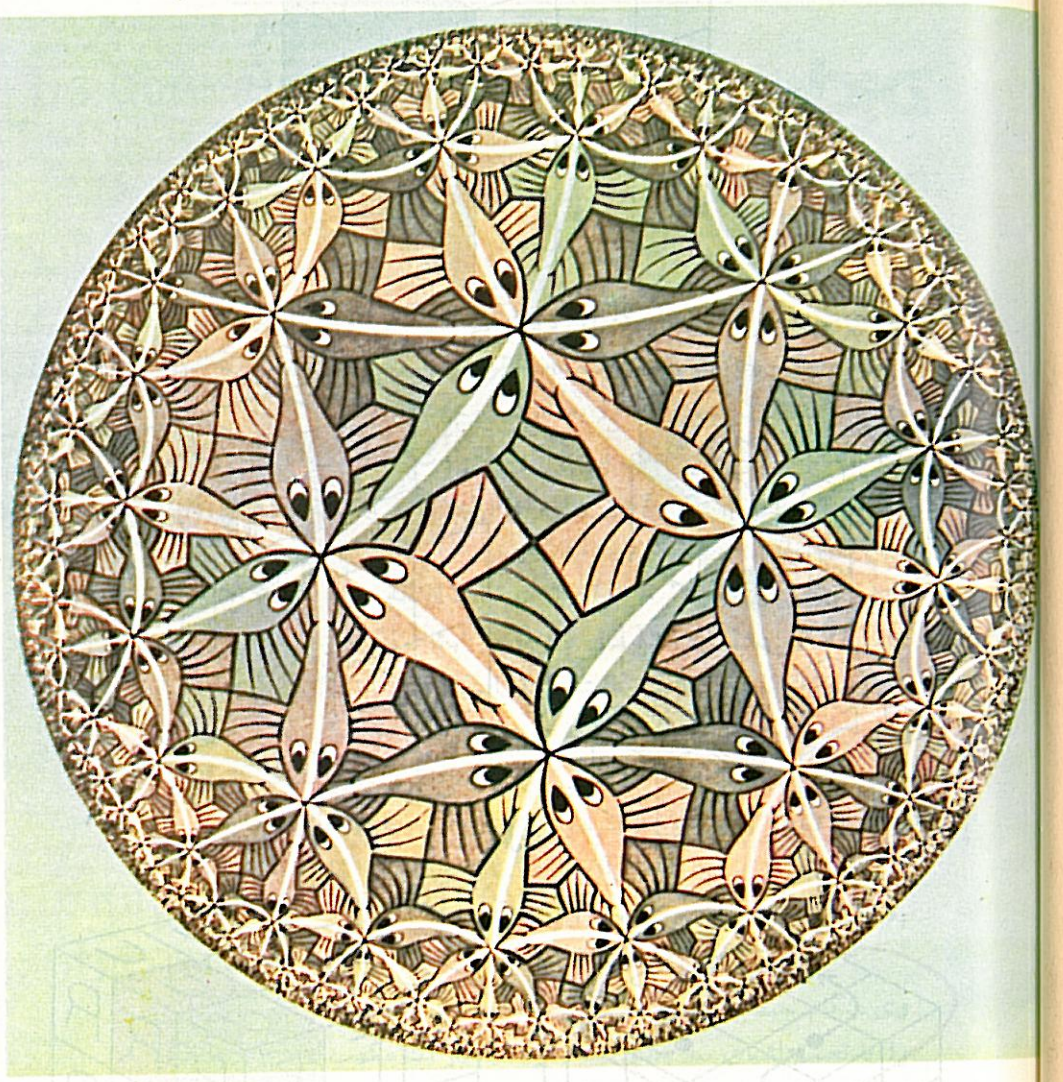
اینشتین از هندسهٔ نااقلیدسی تعمیم یافته‌ای استفاده می‌کرد. در این هندسه که توسط ریمان فرموله شده بود، انحنای فضای فیزیک در نقطه‌های مختلف بستگی به اثر ماده تغییر می‌کند. یکی از انقلاباتی که نظریهٔ نسبیت موجب شد این بود که فرض چنین ساختمان نااقلیدسی برای فضای فیزیکی موجب سادگی بیش‌از حد فیزیک می‌شود.

درحال حاضر، قبول این مطلب که تمام نظام‌های هندسی به‌اندازهٔ هم «حقیقت» دارند، و ساختمان فضای فیزیک باید به وسیلهٔ تجربه تعیین گردد، امری عادی است. خود گوس به‌فکرافتاده بودکه زاویه‌های مثلثی‌را که رأس‌هایش قله‌های سه‌کوه بودند، اندازه بگیرد تا ببیند که آیا مجموع آن‌ها ۱۸۰ درجه است یا نه. می‌گویند او چنین آزمایشی بدون نتایج تعیین کننده انجام داده است. باوجودی‌که آزمایش‌های مختلف می‌توانند ثابت کنند که فضای فیزیکی نااقلیدسی است، جالب است که راهی برای اثبات اقلیدسی بودن فضا وجود ندارد! انحنای صفر یک حالت حدی است، دربین راه بین انحنای بیضوی و هذلولوی. از آنجا که در هراندازه‌گیری امکان خطا است، ممکن است که تفاوت انحنای فضا با انحنای صفر آنقدر کم باشد که آزمایش ما نتواند آن‌را معین کند.

به‌نظر پوآنکاره ، حتی اگر آزمایش‌های نوری نشان دادند که فضا نااقلیدسی است، بهتر است که هندسهٔ اقلیدسی را که بسیار ساده‌تر است نگه داریم، و درعوض فرض کنیم که پرتوهای نور کوتاه‌ترین مسیر را طی نمی‌کنند. بسیاری‌از ریاضی‌دانان وفیزیک‌دانان ازجمله راسل باپوآنکاره هم عقیده بودند . نظریهٔ نسبیت نظرشان را عوض کرد. آلفرد نورت وایت هد(۱۸) از جمله کسانی بود که هرگز تغییر عقیده نداد. اوحتی کتابی راجع به نسبیت نوشت ، که در آن پیشنهاد کرده بود دنیای اقلیدسی (یا حداقل دنیائی با انحنای ثابت) نگه داشته شود و درعوض قوانین فیزیکی تغییرداده شوند.

---

17. Tractrix
18. Alfred North Whitehead



شکل ۲. دایرهٔ حدی III، اثری از اچر؛ مدل اقلیدسی صفحهٔ هذلولوی

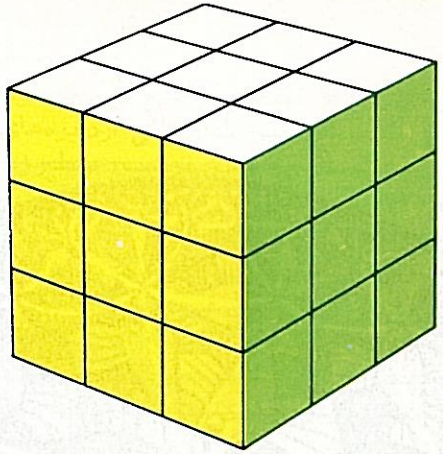
بررسی مکعب روبیك به‌کمك ریاضیات

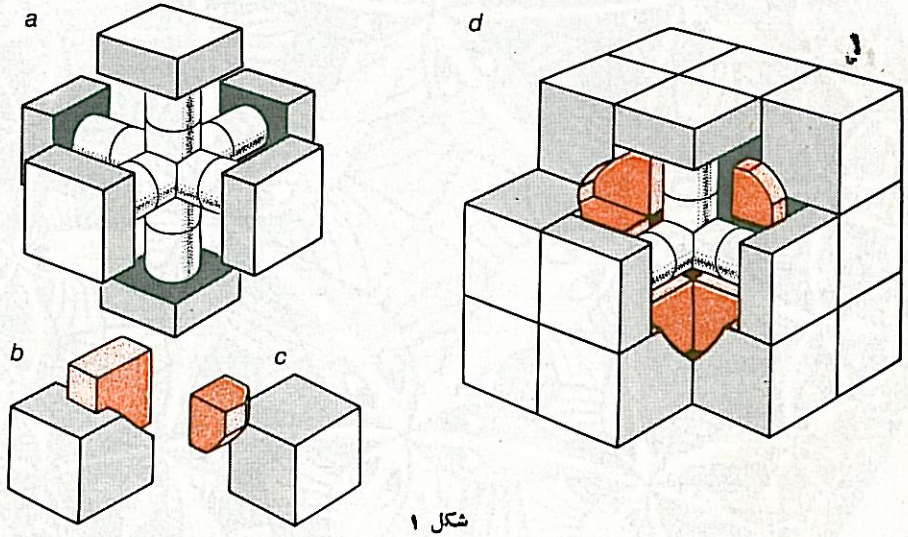
دوگلاس ر. هوفشتاتر
ترجمهٔ محمد باقری

مکعب جادویی‌که مکعب روبیك نیز نامیده‌می‌شود، به‌یکباره سراسر دنیای معما، ریاضیات ومحاسبات کامپیوتری را تسخیر کرده‌است. به‌ندرت معمایی اذهان این‌همه افراد را به خود متوجه ساخته است.

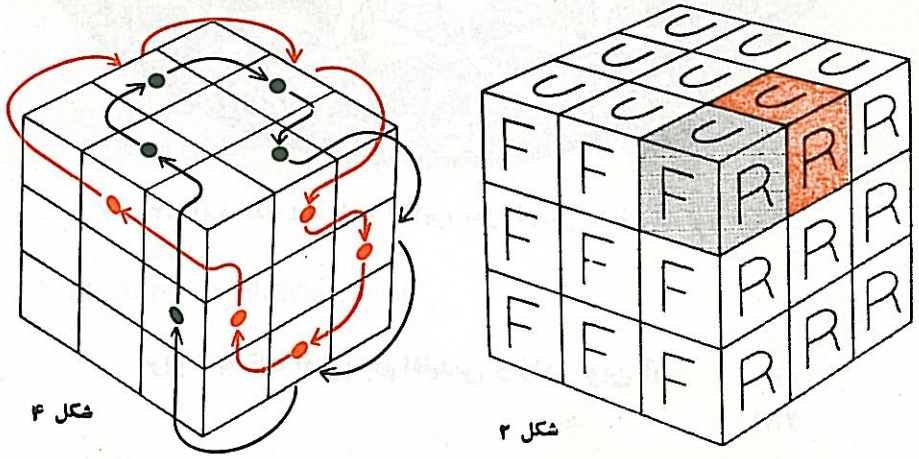
مکعب جادویی چیزی فراتر از یك‌معماست. زمان پیدایش این‌مکعب چندان دور نیست. فکر ساختن چنین ابزاری به‌طور همزمان درمجارستان، ژاپن و احتمالاً جایی دیگر پیدا شد. اخیراً گزارشی از یك‌کارمند فرانسوی پیدا شده است حاکی از خاطرهٔ وی در مورد اینکه چنین مکعبی را که از چوب ساخته شده بود، در سال ۱۹۲۰ در استانبول و سپس دوباره درسال ۱۹۳۵ درمارسی دیده است. البته این‌روایت هنوز تأیید نشده ومورد تردید است. در هر صورت، کار روبیك در سال ۱۹۷۵ تکمیل و ثبت گردید. مستقل از وی، یك مهندس تجربی ژاپنی به‌نام تروتوشی‌ایشیگه که‌صاحب یك کارگاه فلزکاری کوچك درحوالی توکیوست، با فاصلهٔ یك سال پس از روبیك همان طرح را یافت وآن را در سال ۱۹۷۶ در ژاپن به‌ثبت رساند. به هرحال، سهمی از این افتخار نیز از آن ایشیگه است.

ارنو روبیك مدرس آموزشگاه هنرهای حرفه‌ای در بوداپست است. وی هنگام جستجو برای یافتن وسیله‌ای که بتواند به‌کمك آن شاگردانش را با تجسم اشیای سه بعدی‌آشنا سازد، به‌فکر یك مکعب۳×۳×۳ افتاد که هر یك از شش وجه ۳×۳ آن بتوانند حول مرکز خود بچرخند و بااین حال کل مکعب متصل باقی بماند. در آغاز هر وجه به رنگی درآورده می‌شود و چرخش‌های پی در پی وجوه مختلف، رنگ‌ها را مخلوط می‌کند.





شکل ۱



شکل ۲

شکل ۴

آنگاه از شاگردان خواسته می‌شود که مکعب را به وضعیت نخست باز گردانند.

برای کسی که برای نخستین‌بار توصیف چنین مکعبی را می‌شنود، پذیرفتن امکان عملی وجود چنین چیزی دشوار است. به نظر می‌رسد که چنین مکعبی باید به‌صورت مکعب‌های کوچکتری از هم بپاشد. مثلاً یکی از مکعب‌های کوچك را که در کنجی از مکعب جادویی قرار گرفته است، در نظر بگیرید. این مکعب کوچك به‌کجا وصل است؟ با تجسم چرخش هر سه وجهی که این مکعب کوچك را شامل می‌شود، می‌بینیم کـه مکعب کوچك مورد نظر به هیچ‌یك از سه مکعب کوچك میان‌یالی که با آن هم‌جوارند متصل نیست. پس چگونه درجای خود باقی می‌ماند؟ برخی افراد دراین مورد، استفاده از آهن‌ربا یا کش لاستیکی یا مفتول‌های تو در تو را در داخل مکعب مطرح می‌سازند، اما طرح اصلی بسیار ساده است و از این وسایل درآن به‌کار نمی‌رود.

عملاً مکعب جادویی را می‌توان ظرف چند ثانیه از هم باز کرد و ساختمان داخلی‌آن به‌قدری ساده است که به‌راحتی می‌توان به‌طرز کارآن پی برد. در مکعب جادویی سه نوع مکعب کوچك وجود دارد: شش مکعب میان وجهی (میانی)، ۱۲ مکعب میان یالی (یالی) و هشت مکعب کنجی (کنجی). میانی‌ها فقط یك «وجه‌آزاد»، یالی‌ها دو وجه آزاد و کنجی‌ها سه وجه‌آزاد دارند. به‌علاوه، شش مکعب کوچك میانی در واقع مکعب نیستند بلکه وجوهی هستندکه توسط‌سه محور متعامد، که یکدیگر را در وسط قطع می‌کنند، به هم متصلند. بقیهٔ مکعب‌های کوچك، مکعب‌های نسبتاً کاملی هستند، بااین تفاوت‌که هرکدام «پاشنهٔ»کوچکی به‌طرف‌مرکزمکعب‌جادویی و نیز تو رفتگی‌هایی دارند (شکل۱).

راز اصلی دراین است که مکعب‌های کوچك به کمك همین پاشنه‌ها متقابلاً یکدیگر را نگاه می‌دارند، بی‌آنکه هیچ‌کدام به‌دیگری متصل‌باشند. یالی‌ها، کنجی‌ها را نگاه می‌دارند و کنجی‌ها، یالی‌ها را. میانی‌ها، استخوان‌بندی مکعب روبیك را تشکیل می‌دهند. هر لایه، مثلاً لایهٔ بالایی، هنگام چرخش به‌طور افقی، یکپارچه باقی می‌ماند و توسط مکعب میانی خود و

به‌کمك لایهٔ افقی زیرین‌خود، موقعیت عمودی خویش را حفظ می‌کند. لایهٔ وسطی دارای یك حفرهٔ استوانه‌ای در داخل است که براثر تو رفتگی‌های مکعب‌های کوچك ایجاد شده است وحرکت پاشنه‌های لایهٔ بالایی را هدایت می‌کند و باعث یکپارچه ماندن لایهٔ بالایی می‌شود. شاید بتوان گفت که یافتن ساختمان مکانیکی مکعب جادویی به مراتب دشوارتر از حل مسئلهٔ برگرداندن رنگ‌های درهم ریخته به حالت نخست است.

نکتهٔ مهمی‌که اغلب افراد ابتدا بدان توجه نمی‌کنند، این است که بازگرداندن مکعب جادویی درهم‌ریخته به‌وضعیت اولیه (که هر وجه تماماً به‌یك رنگ باشد) به قدری دشوار است‌که حتماً باید از یك روش‌کلی بهره جست. هیچ‌کس نمی‌تواند مکعب جادویی در هم‌ریخته را از روش سعی و خطا، به‌حالت اولیه برگرداند.

اکنون به‌محاسبهٔ تعداد کل‌حالات ممکن مکعب جادویی می‌پردازیم. در هشت‌کنج مکعب جادویی، هشت مکعب کوچك‌کنجی قرار گرفته‌اندکه ضمن حرکات متوالی، با یکدیگر جا عوض می‌کنند. اگر مکعب‌های کنجی را از یك تا هشت شماره‌گذاری کنیم، برای‌کنجی اول هشت امکان، برای کنجی دوم هفت‌امکان، برای سومی شش امکان وجود دارد، الی‌آخر. بنابر‌این، تعداد حالات ممکن قرار گرفتن مکعب‌های‌کنجی $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ = ۸!$ است. هر کنج می‌تواند یکی از سه‌جهت فضایی ممکن را اختیار کند، پس یك ضریب $۳^۸$ نیز افزوده مـی‌شود. در مورد مکعب‌های کوچك میان یالی هم وضع مشابهی وجود دارد. این دوازده مکعب‌یالی به !۱۲ صورت ممکن، در دوازده موضع‌مربوطه جای می‌گیرند. هر یك از مکعب‌های یالی، می‌توانند یکی از دو جهت فضایی ممکن را اختیار کنند. پس ضریب $۲^{۱۲}$ نیز به میان می‌آید. مکعب‌های میان وجهی موضع ثابتی دارند (مگر آنکه‌کل مکعب جادویی چرخانده شود) بنابراین در این شمارش تأثیری ندارند. اگر اعداد فوق را درهم ضرب کنیم، تعداد حالت‌ها برابر ۵۱۹،۰۲۴،۰۳۹،۲۹۳،۸۷۸،۲۷۲،۰۰۰ می‌شودکه حدوداً مساوی ۵×۱۰^{۲۰} است.

اما دراینجا فرض‌کردیم‌که هرمکعب کوچك مستقل ازسایرمکعب‌های

کوچك می‌تواند هریك ازمواضع ممکن‌را باهرجهت فضایی‌ممکن اختیارکند. چنانکه‌خواهیم‌دید، اوضاع کاملاً بدین‌قرارنیست. درموردجهت‌فضایی‌مکعب‌های کنجی‌محدودیتی‌وجود دارد: هرهفت‌مکعب کنجی می‌توانندجهت فضایی دلخواه‌داشته باشند، اماجهت فضایی‌مکعب کنجی‌هشتم‌اجباری است،پس‌یك ضریب ۳ حذف می‌شود. محدودیت مشابهی برای مکعب‌های یالی وجود دارد: از دوازده مکعب یالی، یازده‌تایشان می‌توانند جهت فضایی دلخواه داشته باشند، اماجهت فضایی دوازدهمی خود به‌خود تعیین می‌شود؛ بدین ترتیب یك ضریب ۲ هم حذف می‌گردد. آخرین محدودیت درمورد موضع مکعب‌های کوچك (بدون توجه به‌جهت فضایی‌آن‌ها) است که برطبق‌آن، همهٔ مکعب‌های کوچك، جز دوتایشان، می‌توانند مواضع دلخواه اختیار کنند، اما موضع دو مکعب آخر اجباراً معین می‌شود. این محدودیت هم یك ضریب ۲ را کنار می‌گذارد وکلاً محاسبهٔ فوق با یك‌ضریب ۱۲ کاهش می‌یابد و به ۴۳،۲۵۲،۰۰۳،۲۷۴،۴۸۹،۸۵۶،۰۰۰ که حدوداً برابر ۴×۱۰^{۱۹} حالت مختلف است، تبدیل می‌شود.

از راه دیگری هم می‌توان این ضریب ۱۲ را بیان‌کرد، بدین‌ترتیب که وقتی مکعبی را در وضعیت اولیه به‌دست می‌گیرید، با یکی از دوازده حالت «بدیهی» مواجه هستید، اما اگر مکعب را از هم بازکنید و دوباره قطعات آن را طوری سوار کنید که تفاوتش با مکعب اولیه، چرخش یکی از مکعب‌های کوچك‌کنجی به‌اندازهٔ ۱۲۰ درجه باشد، به‌حالتی دست می‌یابید که در وضعیت قبلی رسیدن به آن ناممکن بود. از این حالت می‌توان به‌گروه حالت جدیدی که تعدادشان کلاً همان حدود ۴×۱۰^{۱۹} است دست یافت. مکعب جادویی دارای ۱۲ گروه از نوع مذکور است‌که هیچ فصل مشترکی با هم ندارند.

چرخش‌های ناممکنی که در اینجا مطرح می‌شود، همانند جالبی در در فیزیك ذره‌ای دارد. هرگز نمی‌توان یك رشته حرکت در مکعب انجام داد به‌طوری‌که در پایان کار فقط یك مکعب کنجی به‌اندازهٔ یك‌سوم دور کامل چرخیده باشد و بقیه در جاهای اولیه‌شان مانده باشند. این موضوع یادآور ذرهٔ بنیادی فرضی مشهوری است که دارای بار $+\frac{۱}{۳}$ است و ضدذرهٔ

مربوط به‌آن، بار $-\frac{۱}{۳}$ دارد. چرخش یك سوم دور درجهت حرکت عقربه‌های ساعت را نظیر کوارك وچرخش یك‌سوم دور درخلاف جهت عقربه‌های ساعت را نظیر ضد کوارك فرض کرده‌اند. معلوم شده است که کوارك‌ها مانند همنام‌های خود درمکعب جادویی غیرقابل دسترسی هستند و بسیاری ازدانشمندان فیزیك‌نظری اکنون برآنندکه وجود یك کوارك (یاضدکوارك) مجزا به‌طور آزاد امکان‌ناپذیر است.

عملاً ارتباط مذکور ژرفتر از این‌هاست. ذرات کوارك نمی‌توانند به‌طور آزاد موجود باشند اما می‌توانند درگروه‌هایی به‌طور پیوسته به‌یك‌دیگر وجودداشته باشند. زوجی از یك کوارك و یك ضد کوارك تشکیل یك مزون می‌دهند و سه کوارك با هم یك باریون پدید می‌آورند که‌بارش عددی صحیح است (مثلاً پروتون‌که بارش ۱+ است). جای شگفتی‌است که در مکعب جادویی نیز می‌توان طوری حرکات را انجام‌داد که تنها دو مکعب کوچك کنجی، هر یك به اندازهٔ یك‌سوم دور چرخش کنند، مشروط به اینکه جهت چرخش آن‌ها مخالف هم باشد (یکی درجهت حرکت عقربه‌های‌ساعت ودیگری خلاف‌آن). همچنین می‌توان سه‌مکعب کوچك‌کنجی را، هر یك به‌اندازهٔ یك سوم دور، چرخش داد به‌شرطی‌که هر سه چرخش جهت یکسان داشته باشند. حالتی را که دو مکعب کنجی در جهت‌های خلاف هم چرخیده‌اند، مزون و حالتی را که سه مکعب کنجی در جهت یکسان چرخیده‌اند، باریون نامیده‌اند. در دنیای ذرات، تنها ترکیباتی از کوارك‌ها که بارشان عددی صحیح باشد، می‌توانند وجود داشته باشند. در جهان مکعب جادویی نیز فقط ترکیباتی از کوارك‌ها که مقدار چرخش آن‌ها عددی صحیح باشد، امکان‌پذیر است. از این طریق نیز می‌توان نشان دادکه جهت هشتمین مکعب کنجی اجباراً توسط هفت مکعب کنجی اولیه تعیین می‌گردد. در دنیای مکعب جادویی، دلیل اساسی وجود این محدودیت برای کوارك‌ها به‌نظریهٔ گروه‌ها مربوط است. شاید برای‌این محدودیت، در ذرات کوارك نیز توضیح مشابهی مبتنی بر نظریهٔ گروه‌ها موجود باشد. این سؤالی است که دیگران باید پاسخ آن‌را بیابند ولی بهر-

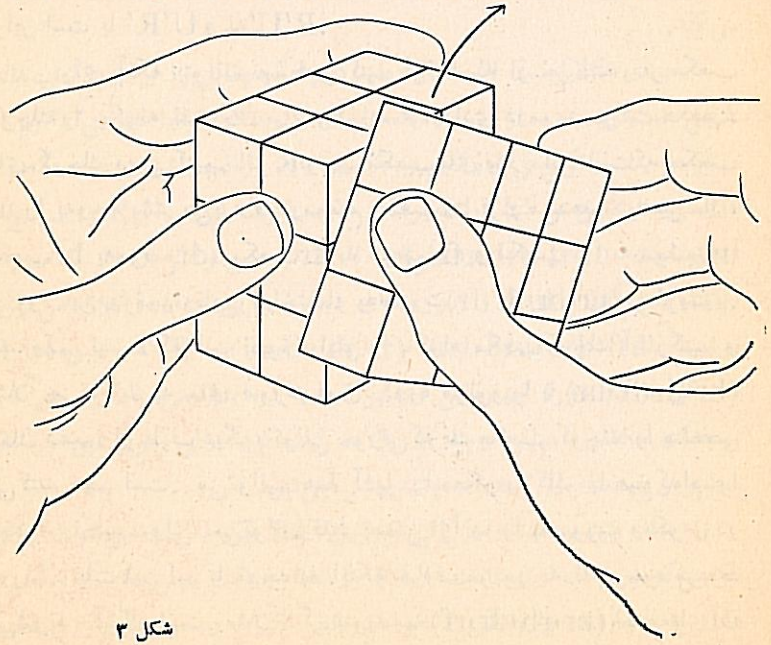
حال وجود چنین تشابهی جالب توجه وکنجکاوی برانگیز است.

اگر مکعب جادویی درحالت اولیه باشد (یعنی هر وجه آن تنها به یك رنگ باشد) کدام سلسله حرکت‌ها می‌تواند یك مزون یا یك باریون تشکیل دهد؟ دراینجا با یکی ازمهم‌ترین موضوع‌ها در بررسی نظری‌مکعب جادویی روبرو هستیم: موضوع سلسله حرکت‌های مشخص‌که وضعیت چند مکعب کوچك مورد نظر را تغییر می‌دهند بی‌آنکه تغییری در وضعیت سایر مکعب‌های کوچك پدید آید (یا به‌قول صاحب‌نظران نظریهٔ گروه‌ها، سایر مکعب‌های کوچك «پایا» باشند) با توجه به همانندی موجود، در بررسی حرکات و وضعیت‌های مکعب‌جادویی، اصطلاحاتی ازنظریهٔ گروه‌ها وعلوم کامپیوتر اخذ می‌گردد.

برای بیان دقیق‌حالات وحرکات، ناگزیر باید به‌قراردادهایی متوسل شویم. ابتدا باید وجوه مکعب‌را نامگذاری‌کنیم. یك راه ممکن‌این‌است‌که هروجه را با توجه به‌رنگ‌آن بنامیم، حتی پس ازآنکه ترتیب مکعب‌های کوچك با رنگ‌های مختلف به‌هم‌بخورد. شاید تصور شود پس از آنکه‌مثلاً رنگ سفید در وجوه‌مختلف پراکنده شد دیگر سخن‌گفتن از وجه سفید بی‌معنی باشد. اما به یاد داشته باشید که وضعیت مکعب‌های کوچك میانی طی حرکت‌های گوناگون، نسبت به‌هم ثابت می‌ماند و دراین‌صورت منظور از وجه سفید (به‌عنوان مثال) وجهی خواهد بود که مکعب میانی آن‌سفید باشد. پس چرا وجوه را براساس رنگ نامگذاری نکنیم؟ مسئله این است‌که موقعیت متقابل رنگ‌ها در مکعب‌های مختلف یکسان نیست. حتی ممکن است دو مکعب، که در یك کارخانه ساخته می‌شوند، حالات شروع ناهمانندی داشته باشند. یك قرارداد کلی‌تر بدین صورت است که وجوه را با نام‌های «چپ» و «راست»، «جلو» و «پشت» و «رو» و «زیر» مشخص کنیم. برای اختصار این وجوه را به ترتیب با حروف L،R،F،B،U و D می‌نامیم‌که حروف اول‌کلمات مزبور در زبان‌انگلیسی هستند. هر مکعب‌کوچك را می‌توانیم با ذکر وجوهی‌که شامل این‌مکعب کوچك‌هستند (با استفاده از حروف‌کوچك الفبای انگلیسی) مشخص‌سازیم. بدین‌ترتیب، ur (یا ru) نشانهٔ مکعب کوچك یالی، واقع درکنارهٔ راست

لایه بالایی و urf نشانهٔ مکعب کوچك کُنجی واقع در جلوی آن است (شکل۲).

ساده‌ترین حرکت روی مکعب این است که وجه راست را در دست راست و با فشار انگشت شست به‌طرف جلو بچرخانیم. اگر از سمت‌راست به‌این حرکت نگاه کنیم، می‌بینیم که وجه R به‌اندازهٔ یك چهارم دور، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخد (شکل۳). این‌حرکت را باحرف R نشان می‌دهیم. قرینهٔ این حرکت، یعنی چرخش وجه L در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت L^{-1} یا باختصار L' نوشته می‌شود. طبعاً چرخش L درجهت حرکت‌عقربه‌های ساعت L خوانده می‌شود. چرخش ۹۰ درجه‌ای هروجه درجهت حرکت عقربه‌های ساعت (از دید ناظری که از مرکز آن وجه، حرکت را می‌بیند) با حرف مربوط به همان وجه نشان داده می‌شود وچرخش معکوس‌آن ـ۹۰ درجه درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌ـ با اضافه کردن علامت پریم (′) یا شاخص فوقانی ۱ ـ، به حرف مربوط



شکل ۳

به‌آن وجه مشخص‌می‌شود. چرخش‌یك چهارم دور را، چرخش q می‌نامیم.

بااین دسته‌بندی اکنون می‌توانیم هرسلسله‌ای از حرکات را، هرقدر هم که پیچیده باشد، ثبت کنیم. یك مثال ساده، چهار R پی درپی است که به‌صورت R^4 نوشته می‌شود. در زبان نظریهٔ گروه‌ها، این حرکت مرکب، که اثری همانند صفر دارد، «عمل همانی» خوانده می‌شود. این موضوع را می‌توان به‌صورت $R^4=I$ بیان کرد. دراینجا عمل I یعنی اینکه هیچ‌تبدیلی صورت نگیرد.

فرض کنید دو وجه مختلف، مثلاً اول R وسپس U، را می‌چرخانیم. این‌کار به‌صورت RU، و نه UR، نوشته می‌شود. پیش از هرچیز، توجه کنیدکه RU و UR اثرات کاملاً متفاوتی دارند. برای تحقیق این‌امر، ابتدا روی مکعبی در وضعیت اولیه، RU را انجام دهید و اثر آن را به یاد بسپارید، سپس‌مکعب را به‌حالت اولیه برگردانید، UR را انجام دهید و تفاوت اثرآن را با دفعهٔ پیش ببینید. کاملاً بدیهی‌است‌که معکوس RU برابر است با $U'R'$ و نه $R'U'$.

برای آنکه بتوانیم مشخص کنیم هر سلسله از حرکات، هر مکعب کوچك را چگونه نقل‌مکان می‌دهد، باید قراردادی درمورد حرکت مکعب‌های کوچك معین کنیم. اثر R روی مکعب‌های یالی این است‌که مکعب ur را به‌وجه پشتی‌می‌برد و درموضع مکعب br قرار می‌دهد. درهمین‌حال، مکعب br به‌موضع dr، مکعب dr به موضع fr و مکعب fr به موضع ur می‌رود. این‌دورهٔ‌چهارتایی‌را باختصار به‌صورت (ur،br،dr،fr) می‌نویسیم. البته‌مهم نیست که این نحوهٔ نمایش را باکدام مکعب‌کوچك آغازکنیم و مثلاً می‌توانیم به جای صورت فوق، دورهٔ مزبور را با (br،dr،fr،ur) نشان دهیم. از طرف دیگر، توالی حروفی‌که یك مکعب کوچك را مشخص می‌کنند مهم است. می‌توانیم همهٔ آنها را معکوس کنیم یا هیچ‌کدام را معکوس نکنیم، ولی نمی‌توانیم فقط بعضی ازآنها را به‌صورت معکوس در آوریم. علت این امر با توجه به اینکه حروف مزبور به نام وجوه مربوط می‌شوند، آشکار است. مثلاً اگر بنویسیم (ur،rb،dr،rf)، به‌معنای‌آن است‌که هر یك ازچهار مکعب کوچك مزبور قبل ازرفتن به‌موضع جدید،

چرخشی‌نیز انجام‌می‌دهد. بی‌شك چنین‌دوره‌ای‌رانمی‌توان تنها با یك‌چرخش q ایجادکرد، بلکه برای‌ایجادآن، سلسله‌ای از چرخش‌های q توسط وجوه مختلف لازم است. حال دورهٔ ۸ تایی (ur،uf،ul،ub،ru،fu،lu،bu) را در نظر بگیرید. این دوره شامل ۸ جمله است ولی تنها چهار مکعب کوچك را دربر می‌گیرد. دراینجا هر مکعب‌کوچك پس‌از دوران‌کامل حول وجه بالایی، به صورت پیچش یافته به‌جای خود باز می‌گردد و پس از دو دور کامل، به حالت اولیه سر جای خود قرار می‌گیرد. در واقع، هر وجه مکعب‌های کوچك مزبور روی یك «نوار موبیوس» حرکت می‌کند. این «دورهٔ چهارتایی پیچیده» را می‌توانیم به صورت +(ur،uf،ul،ub) بنویسیم، که درآن، علامت بعلاوه نشانهٔ پیچش است. البته دراین‌مورد نیز می‌توانیم صورت +(ru،fu،lu،bu) را که معادل صورت قبلی است، به کار بریم. بدین‌ترتیب، استفاده از این قرارداد، علاوه بر جای جدید هر مکعب کوچك، جهت‌آن نسبت به‌سایر مکعب‌های دورهٔ مزبور را نیز بیان می‌کند.

برای تکمیل‌ثبت اثرات R، باید دورهٔ چهارتایی را برای مکعب‌های کنجی هم بنویسیم. مثل مورد مکعب‌های یالی، در اینجا هم می‌توانیم‌کار را از هر یك از کنج‌ها آغازکنیم و باز هم باید مراقب‌باشیم جهت مکعب‌های‌کوچك ضمن حرکت در مسیرشان، درست ثبت شود. اثر R روی کنج‌ها آشکار است: (urf،bru،drb،frd) که می‌توان آن را به صورت (rub،rbd،rdf،rfu) و صورت‌های دیگر نیز نوشت. سرانجام می‌توان نوشت: R=(ur،br،dr،fr) (urf،bru،drb،frd) که برطبق آن، R متشکل از دو دورهٔ چهارتایی متمایز است. در اینجا می‌توان چرخش ۹۰ درجه‌ای مکعب میانی وجه R را هم ثبت کرد، ولی چون این چرخش محسوس نیست، از ثبت آن چشم‌پوشی می‌شود.

حال ببینیم سلسله حرکاتی از قبیل RU چگونه ثبت می‌شود. روی مکعبی‌که درحالت اولیه است، RU را انجام دهید. سپس یکی از مکعب‌های جا به‌جا شده را به‌طور دلخواه در نظر بگیرید و مسیر آن را مشخص کنید. مثلاً ur به موضع br رفته است. br به موضع dr رفته است. به

همین ترتیب، جای‌جدید هرمکعب را به‌طور متوالی دنبال‌کنید تا به‌مکعبی برسید که به موضع قبلی ur رفته باشد. بدین ترتیب، دورهٔ هفت‌تایی (ur،br،dr،fr،uf،ul،ub) ثبت می‌شود (شکل۴).

اکنون موضوع فوق را در مورد مکعب‌های کنجی بررسی می‌کنیم. مکعب urf پس‌ازحرکت RU در جای اولیهٔ خود قرار می‌گیرد، ولی‌طی این‌مسیر پیچشی درآن ایجاد می‌شود و ابتدا به‌صورت rfu وسپس به‌صورت fur درمی‌آید. این‌پیچش درجهت حرکت عقربه‌های ساعت ـ یااین‌کوارك‌ـ را به صورت +(urf) نشان‌می‌دهیم. این«دورهٔ یکتایی پیچیده» بیان‌فشردهٔ دورهٔ سه تایی (urf،rfu،fur) است. این پیچش را می‌توان به‌عنوان جا‌ـ به‌جایی حروف r،u و f در نام مکعب کنجی مزبور در نظر گرفت. اگر دوره به‌صورت ضد کوارك بود آن را با ـ(urf) نشان می‌دادیم و نحوهٔ جابجایی حروف به شکل دیگری پیش می‌آمد.

درمورد هفت مکعب کنجی دیگر چه می‌توان گفت؟ دوتا از آن‌ها ـdbl و dlf ـ در جای خود ثابت می‌مانند و پنج‌تای دیگرتقریباً تشکیل یك‌دورهٔ پنج‌تایی‌به‌شکل (ubr،bdr،dfr،luf،bul) می‌دهند. این‌ترکیب را تقریباًدوره نامیدیم، زیرا دورهٔ بسته‌نیست، bul گرچه درموضع مکعب کنجی اولیه ubr قرار می‌گیرد، ولی نسبت به‌آن پیچش یافته‌است. مکعب مزبور در واقع در وضعیت rub قرار می‌گیرد که نسبت به ubr، پیچشی درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دارد. بنابراین در اینجا با یك دورهٔ ۱۵تایی روبرو هستیم. این دوره را می‌توانیم به صورت یك دورهٔ پنج‌تایی همراه با علامت منها که نشانهٔ‌پیچش درخلاف جهت حرکت‌عقربه‌ـ های ساعت است، نشان دهیم. پس دورهٔ پنج‌تایی پیچیدهٔ مزبور به‌صورت ـ(ubr،bdr،dfr،luf،bul) است و کل تأثیر RU به زبان علامات عبارت است از،

ـ(ubr،bdr،dfr،luf،bul)+(urf)(ur،br،dr،fr،uf،ul،ub).

اگر هر یك از این دوره‌ها را به دوره‌های دوتایی تجزیه کنیم، با استفاده از اصل بقای زوجیت در نظریهٔ گروه‌ها می‌توانیم محدودیت‌هایی را که منجر به پیدایش ضریب‌کاهش ۱۲ در شمارش‌تعداد حالات ممکن مکعب‌شد،

اثبات کنیم.

اکنون می‌توانیم با مشخص کردن علامت قراردادی برای RU به‌صورت نوشتن دوره‌ها، حرکات مکعب را تنها به‌کمك علائم محاسبه‌کنیم وبنویسیم، مثلاً ببینیم اثر $(RU)^5$ چیست. مکعب یالی ur در دورهٔ خود پنج مرحله جلوتر می‌رود و در موضع ul قرار می‌گیرد (این تبدیل را هم‌ـ چنین می‌توان به‌عنوان دومرحله بازگشت به‌عقب در نظر گرفت). به‌همین ترتیب ul به‌fr می‌رود، الی‌آخر. دورهٔ ۷تایی مزبور تبدیل به‌دورهٔ ۷تایی جدیدی به‌صورت (dr،fr،uf،ul،ub،ur،br) درمی‌آید. حال‌دورهٔ پنج‌ـ تایی پیچیده را در نظر می‌گیریم. مکعب کنجی ubr پنج مرحله در دورهٔ جلوتر می‌رود و با یك‌پیچش منفی‌به‌جای اولیهٔ خود می‌رسد، یعنی به‌صورت rub درمی‌آید. همهٔ مکعب‌های کنجی دیگر این دوره نیز با پیچش منفی به موضع اولیهٔ خود می‌رسند. پس یك دورهٔ پنج‌تایی با پیچش منفی حاصل می‌شود که به معنی ۵ ضد کوارك است. اما دراین حال، شرط عدد صحیح بودن اندازهٔ پیچش‌ها چگونه ارضا می‌شود؟ مگر نه اینکه یك کوارك ـ به صورت +(urf) ـ و پنج ضد کوارك داریم‌که مجموعاً معادل۴ ضدکوارك یا پیچشی به میزان $1\frac{1}{3}$ ـ دور می‌شود؟ دراینجا ما به عمد نکته‌ای را از نظر دور داشته‌ایم. آیا شما می‌توانید آن را بیابید؟ برای تسلط به‌استفاده از روش علامت‌گذاری دوره‌ای، می‌توانیدنمایش دوره‌ای توان‌های مختلف RU وUR و معکوس آن‌ها را به‌دست آورید.

*

قبلاً گفتیم که با شروع از هر وضعیت ترکیب مواضع مکعب‌های کوچك، تنها به‌یك دوازدهم‌کل حالات ممکنهٔ مکعب می‌توان دست یافت. همچنین می‌توان اثبات کرد که از حالت شروع مکعب می‌توان به تمامی حالات مربوط به یك دوازدهم‌کل حالات ممکنه رسید (یا بعکس، از هریك از حالات مربوط به‌یك دوازدهم کل حالات می‌توان به‌حالت شروع رسید). با توجه به محدودیت‌هایی که برای جابه‌جایی و پیچش مکعب‌های‌کوچك وجود دارد، انجام ۷ نوع ترکیب مقدور است: (۱) جا به‌جایی دو زوج

مکعب یالی، (۲)جابه‌جایی دو زوج مکعب کنجی، (۳) پیچش دو مکعب یالی درموضع‌خود، (۴)مزون، (۵)دورهٔ سه‌تایی‌مکعب‌های‌یالی، (۶)دورهٔ سه تایی مکعب‌های‌کنجی، (۷) باریون.

حرکات بالا را می‌توان روی مکعب پدید آورد، بدون آنکه سایر اجزای مکعب تغییری بکنند. با استفاده از این ترکیب‌ها می‌توان به همهٔ حالات‌که یك دوازدهم‌کل فضای‌حالات ممکنه است، دست یافت. ترکیب‌های (۵) و (۶) و (۷) را می‌توان با استفاده از چهار ترکیب‌اول، به‌دست آورد. بنابراین، عملاً همان ترکیب‌های (۱) تا (۴) برای منظور ما کافی است.

اکنون نشان می‌دهیم اگر طرز انجام یك نمونه ازهر یك از ترکیب‌های فوق را بدانیم، انجام همان ترکیب برای نمونه‌های دیگر به‌سادگی امکان‌پذیر است. فرض‌کنید روشی‌برای انجام ترکیبی در دستهٔ (۱) یافته‌ایم که مکعب‌های uf و ub را با هم ومکعب‌های ul وur را با هم، جابه‌جا می‌کند، بی‌آنکه تغییر دیگری در مکعب روبیك ایجاد شود. این عمل را H می‌نامیم. اکنون می‌خواهیم دو زوج کاملاً متفاوت را با یکدیگر جابه‌جا کنیم مثلاً rf را با df و rb را با dr. بـرای این کار کافی است بتوانیم این چهار مکعب یالی را درجای مکعب‌های یالی اولیه بنشانیم. اما ممکن‌است بگویید در اثر این‌کار سایر قسمت‌های مکعب تغییر می‌کند. برای حل‌این مشکل راه حل ساده وجالبی موسوم به‌روش «عناصر مزدوج» وجود دارد. فرض کنید برای انتقال این چهار مکعب یالی به‌مواضع چهار مکعب یالی اولیه، عملA لازم باشد. اگر پس از انجام عملA، عملH را انجام دهیم و سپس معکوس عملA را انجام دهیم، به جابه‌جایی‌مطلوب دست یافته‌ایم، بی‌آنکه نهایتاً تغییر دیگری درمکعب ایجاد شود. این‌عمل مرکب را به‌صورت AHA' می‌نویسیم.

بدین‌ترتیب مشاهده‌می‌شودکه به‌کمك مکعب‌جادویی می‌توان‌بسیاری از مباحث و مقولات انتزاعی نظریهٔ گروه‌ها را که در ریاضیات مطرح می‌شود، به طور عینی تجسم کرد. از این لحاظ، ارزش مکعب جادویی در آموزش نظریهٔ مزبور، بی‌نظیر است. مثلاً همین مورد اخیر، نمایش جالبی

از مفهوم «عناصر مزدوج» است که در نظریهٔ گروه‌ها مطرح می‌شود.

گفتهٔ فوق درمورد ترکیب نوع‌اول، برای سایر ترکیب‌های هفت‌گانه‌ای‌که بر شمردیم نیز صادق است. حال این مسئله مطرح می‌شود که چگونه روش نمونه‌ای برای هر یك از این‌ترکیب‌ها بیابیم. دراینجا به‌این سؤال مستقیماً پاسخ نمی‌دهیم اما به بررسی زیر گروه‌هایی می‌پردازیم که می‌تواند خواننده را در این‌کار یاری‌کند. منظور این است‌که خود را عمداً به‌استفاده از انواع خاصی از حرکت‌ها محدود کنید. پنج نمونهٔ جالب از زیر گروه‌هایی را که در اثر محدودیت‌های مختلف ایجاد می‌شود، ذکر می‌کنیم:

۱- گروه حرکت موازی وجوه متقابل. در این گروه، حرکت R با L'، U با D' و F با B' صورت می‌گیرد. برای اختصار می‌توانیم RL' را به‌صورت R_s نشان دهیم و $R'L$ را با R'_s، الی آخر. با این محدودیت، وجوه به طور دلخواه در هم ریخته نمی‌شوند. در این گروه، مکعب‌های کنجی هر وجه طی حرکات متوالی‌همرنگ باقی می‌مانند (با شروع ازحالت اولیهٔ مکعب جادویی).

۲- گروه حرکت موازی نیم دور وجوه متقابل. این گـروه حالت محدودتری از گروه قبل است وفقط انجام مضاعف (دو بار پی در پی) هر یك از حرکت‌های نوع قبل مجاز است و به‌صورت R_s^2 (که همان R^2L^2 است) و F_s^2 (که همان F^2B^2 است) نوشته می‌شود.

۳- گروه‌حرکت موازی مختلف‌الجهت وجوه متقابل. دراینجا وجوه متقابل به‌موازات هم، ولی درجهت خلاف‌یکدیگر، حرکت می‌کنندبه‌طوری که R با L همراه است، F با B و U با D. حرکت‌های این گروه را با زیرنویس a نشان می‌دهیم، مثلاً R_a به معنی RL است. بدیهی است که حالت مضاعف این گروه، هیچ تفاوتی با گروه ۲ ندارد.

۴- گروه دو وجهی. در این‌گروه فقط دو وجه، مثلاً F و R مجاز به حرکت هستند.

۵- گروه حرکت نیم دور دو وجه. در این‌گروه مثل گروه قبل تنها دو وجه می‌توانند حرکت‌کنند، ولی این‌حرکت حتماً باید به صورت چرخش

۱۸۰ درجه‌ای باشد.

اگر توجه خود را به دوگروه اخیر، یعنی گروه دو وجهی و گروه حرکت نیم‌دور دو وجه محدودکنیم، می‌توانیم روش‌هایی برای جا به‌جایی دو زوج مکعب یالی یا کنجی پیدا کنیم. نکتهٔ مهم اینکه تنها با استفاده از این روش‌ها و با توجه به مفهوم عناصر مزدوج که قبلاً گفته شد، حل کامل معمای مکعب روبیك ـ به‌طور نظری ـ امکان‌پذیر است.

ضمناً دستیابی به یك مزون یا به پیچش دو مکعب یالی، از طریق جابه‌جایی دو زوج مکعب یالی یا کنجی مقدور است. مثلاً برای پیچش دو مکعب یالی بدون‌ایجاد تغییری درسایر مکعب‌ها، باید دوبار جابه‌جایی دو زوج مکعب یالی انجام دهیم، ضمن اینکه زوج‌های مورد تبدیل در هر دو مرحله یکی هستند. به عنوان نمونه، uf به ub و df به db می‌رود و سپس عکس این جابه‌جایی طوری صورت می‌گیرد که نسبت به حالت اولیه پیچش مورد نظر حاصل شود. با توجه به مطالبی که قبلاً گفته شد این‌کار را برای هر زوج دیگری ازمکعب‌های یالی نیز می‌توان انجام‌داد. به‌طریق مشابه می‌توان با استفاده از جابه‌جایی مکعب‌های یالی و مفهوم عناصر مزدوج، یك مزون ایجاد کرد. باریون‌ها هم با استفاده از مزون‌ها ساخته می‌شود. باداشتن مزون، باریون، پیچش دو مکعب یالی وجابه‌جایی دو زوج مکعب یالی و جا به‌جایی دو زوج کنجی، ابزار مورد نیاز برای بازگرداندن مکعب روبیك در هم‌ریخته به وضعیت نخستین (مرتب شده) آن فراهم خواهد بود. برای اثبات امکان‌پذیری این کار روش‌هایی کاملاً نظری وجود دارد. همچنین به‌طرق گوناگون می‌توان راه حلی عملی برای حل معمای مکعب روبیك ارائه کرد.

حل‌کنندگان معمای مکعب روبیك از طریق‌ذهنی یا برحسب‌تصادف وگاه به‌کمك دستورالعمل‌های انتشار یافته و ندرتاً ازطریق اصول انتزاعی نظریهٔ گروه‌ها، با یك دسته از تبدیلات در مکعب روبیك آشنا می‌شوند. تقریباً همهٔ کسانی که با مکعب روبیك آشنا می‌شوند و به‌جستجوی روشی برای حل آن برمی‌آیند، به‌طور حسی از مفهوم عناصر مزدوج برای ایجاد جابه‌جایی‌های مورد نظر (بدون ایجاد تغییر در سایر قسمت‌های مکعب)

استفاده می‌کنند.

بسته به‌اینکه انواع مکعب‌های کوچك طی کدام مرحله درجای خود قرار می‌گیرند، راه حل‌های مختلف به دسته‌های گوناگونی تقسیم می‌شوند. روشی که نویسندهٔ این مقاله بدان دست یافته است مکعب‌های کوچك را به‌ترتیب زیر درجای اصلی خود قرار می‌دهد: مکعب‌های یالی لایهٔ بالا، مکعب‌های کنجی لایه‌بالا، مکعب‌های کنجی لایهٔ پایین، مکعب‌های یالی لایهٔ میانی و مکعب‌های یالی لایهٔ پایین. در این روش نزدیك شدن تدریجی به حالت اولیهٔ مکعب محسوس است ولی چنین چیزی برای حل مکعب الزامی نیست. روشی وجود دارد که در آن تا پیش از دو یا سه حرکت آخر هیچگونه تصوری از نزدیك شدن به‌حالت مطلوب ایجاد نمی‌شود.

به‌کمك استدلالی پیچیده بر اساس نظریهٔ گروه‌ها ثابت کرده‌اند که مکعب روبیك هرقدر هم که درهم ریخته باشد می‌تواند با۲۲ یا ۲۳حرکت به وضعیت اولیه برسد (منظور از حرکت در اینجا چرخش ۹۰ درجه‌ای یا ۱۸۰ درجه‌ای یك وجه است).

دو حالت متفاوت از مکعب درهم ریخته را درنظر بگیرید. نزدیك‌ترین راه برای رفتن از یك حالت به‌حالت دیگر کدام‌است؟ هنوز پاسخ این سؤال پیدا نشده است. همچنین هنوز این سؤال باقی است که آیا الگوی خاصی برای این مسیرهای مینی‌مال وجود دارد یانه.

ریاضی‌دانان ایران

ابن‌سینا

ابوالقاسم قربانی

ابوعلی حسین‌بن عبدالله‌بن حسن‌بن علی‌بن‌سینا (فیلسوف وطبیب و ریاضی‌دان و منجم - ۳۷۰ - ۴۲۸ هـ. ق)

زندگی‌نامهٔ وی به‌اختصار[1]

در مشرق زمین ملقب به‌شرف‌الملك و شیخ‌الرئیس و معروف به ابن‌سینا و ابوعلی سینا است ودر مغرب‌زمین اورا اویسن (Avicenne) می‌نامند.

ابوعلی سینا فیلسوف و طبیب و ریاضی‌دان و منجم ایرانی و معروف‌ترین‌دانشمندان اسلام و یکی از بزرگترین دانشمندانی است که تاکنون پابه‌عرصه وجود گذاشته‌اند.

پدرش از اهل بلخ بود و خود او به‌سال ۹۸۰/۳۷۰ در نزدیکی

۱- سرگذشت سی‌سال اول عمر او را به‌وجهی که‌خود حکایت‌کرده است درکتاب «ریاضی‌دانان ایرانی» [م ۱۸] ثبت‌کرده‌ام - این زندگی‌نامهٔ مختصر را از دوکتاب [م ۳ و ۱۲] فراهم آورده‌ام.

بخارا متولد شد و در سال ۱۰۳۷/۴۲۸ در همدان درگذشت وهم‌اکنون آرامگاه وی درآن‌جا دیده می‌شود.

درکودکی شایستگی عجیبی از خود درفراگرفتن علوم نشان داد. در بخارا منطق وطب و ریاضیات را فراگرفت و در هفده سالگی نوح‌بن منصور سامانی[1] را معالجه کرد و این امر باعث شهرت او و راه یافتنش به‌کتابخانهٔ سلطنتی گردید و او از کتاب‌های کمیاب و گران‌بهای آن‌کتابخانه بهره بردوچون‌به‌سن ۱۸ سالگی‌رسید ازتحصیل در علوم‌عصر خود فراغت یافت و از آن پس به‌تفکر وپژوهش واستوار کردن بنیاد معلومات خود پرداخت. نزدیك اواخر عمرش یك‌بار به‌شاگرد مورد توجهش ابوعبید جوزجانی[2] گفته بودکه درمدت عمر خود چیزی بیش از آنچه درهجده سالگی می‌دانسته نیاموخته است.

ابوعلی سینا در زندگی فراز و نشیب بسیار دید و با آنکه روزهای خوش فراوان داشت با ایام سخت و ناراحت نیز روبرو شد. غالباً در خدمت فرمانروایان به‌عنوان پزشك به‌سر می‌برد و زندگی اجتماعی پرفعالیتی داشت و یك‌بار نیز وزارت یافت و چندی هم به زندان افتاد. درپانزده‌سال آخر عمرش در اصفهان نزد علاءالدوله کاکویه[3] بود ودر خدمت آن پادشاه با حرمت بسیار می‌زیست و همواره در سفر

۱- از ۹۷۶/۳۶۶ تا ۹۹۷/۳۸۷ سلطنت کرد.

۲- ابوعبید عبدالواحدبن محمد جوزجانی از سال ۱۰۱۲/۴۰۳ به خدمت ابن‌سینا پیوست. اختصاص او در ریاضیات بود. قسمت ریاضی از دانشنامهٔ علائی را برآن کتاب افزود.

۳- علاءالدوله ابوجعفر محمدبن دشمنزیار متوفی به‌سال ۱۰۴۱/۴۳۳.

وحضر و در جنگ و صلح با اوبود وبه تألیف و تعلیم اشتغال داشت و سرانجام در سفری که با علاءالدوله به‌همدان می‌رفت بیمار شد و در آن شهر درگذشت.

ابوعلی مردی نیرومند وزیبا و ظریف و از حیث قوای جسمانی به‌کمال بود و از اینجاست که وزارت و منادمت سلاطین و تحمل رنج سفر را با تألیف وتصنیف و تعلیم همراه می‌کرد. ازحدت ذهن وذکای او داستان‌های عجیب نقل‌کرده‌اند. نقص عمدهٔ او این بود که از گفتار زشت و سخنان تند نسبت به‌فضلای معاصر خود و حتی نسبت به گذشتگان خودداری نمی‌کرد.

ابن‌سینا در خوارزم با ریاضی‌دانان بزرگ ابونصر عراق و ابوریحان بیرونی ارتباط داشت و هنگامی‌که بیرونی در غزنین و اودر اصفهان بود میان آن‌دو ازطریق سؤال وجواب مشاجراتی وجود داشت.

تألیفات ریاضی ابن‌سینا

شیخ‌الرئیس به‌ریاضیات از جنبهٔ فلسفی توجه داشته ودر اواخر عمر (ظاهراً در همدان) رصد کرده و آلتی شبیه ورنیهٔ‌کنونی برای به‌دست‌آوردن نتایج دقیقتر از آلات رصد اختراع کرده است. مفاهیم عمدهٔ فیزیکی (حرکت و نیرو و خلاء و نور و حرارت و غیره) را به دقت مورد بحث قرار داده است. به‌احکام نجوم اعتقاد نداشته ودراین باره رساله‌ای تألیف کرده است موسوم به «فی‌ابطال احکام النجوم» [م ۲۱ ص ۴۷۳ ش ۱۹۸].

ابوعبید جوزجانی در رساله‌ای که دربارهٔ زندگی‌نامهٔ او فراهم

آورده مطالبی نوشته که از بابت بررسی آثار ریاضی ابن سینا جالب‌توجه است [م ۴]:

«و تتمهٔ کتاب شفا را در اصفهان تصنیف نمود و از منطق و مجسطی فارغ گردید و قبل از این، اختصار نموده بود کتاب اقلیدس و ارثماطیقی و موسیقی را، و ایراد نموده بود در هرکتاب از ریاضیات زیادت‌ها که‌محتاج الیه می‌دانست... و در اقلیدس شبهه‌ای چند ایراد کرد ودر ارثماطیقی خواص حسنه استنباط نمود...»

* * *

مهم‌ترین اثر ریاضی ابن‌سینا همانست که درکتاب «شفا» آورده که‌عبارت است از:

۱- ارثماطیقی = حساب نظری - (فن دوم‌از ریاضیات‌کتاب «شفا»)

این بخش ازکتاب شفا جداگانه درسال ۱۹۷۵ در مصر به چاپ رسیده است[1] و شامل چهار مقاله است (خواص العدد - احوال العدد من‌حیث اضافة الی غیره - احوال العدد من حیث کیفیة تألیفه من‌الوحدانیات - المتوالیات العشر).

همان‌گونه که‌ابوعبید جوزجانی خاطر نشان کرده است دربعض قسمت‌های این کتاب نکات جالبی دیده می‌شودکه البته بعضی ازآن‌ها پیش از وی هم مورد بحث بوده است. چند نکته از آن‌ها را باتوضیح لازم به عنوان مثال ذکر می‌کنم[2]:

۱- ابن‌سینا: الحساب - الشفاء، الفن الثانی فی‌الریاضیات - هیأت مصری کتاب‌سال ۱۹۷۵ م.

۲- در ارجاعات این قسمت‌مقصوداز «الحساب» همان قسمت ارثماطیقی از کتاب شفا است‌که در مصر به‌چاپ رسیده است.

الف ـ دستور تشکیل عددهای مثلث:

عددهای مثلث عددهائی هستندکه ازجمع کردن جمله‌های متوالی رشتهٔ طبیعی عددها به‌دست می‌آیند[1] مانند:

۱ و۲ و۳ و۶ و۱۰ و۱۵ و۲۱ و...

دستور تشکیل این عددها این است: $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$

ابن‌سینا این دستور را باعبارت عربی زیر بیان کرده است: «وکل مثلث فانه نصف مضروب مرتبته فی‌الازید منه بواحد» [الحساب، ص ۵۴].

ب ـ مجموع هرعدد مثلث و عدد مثلث ماقبل آن مساوی است با مربع مرتبه آن یعنی: $T_{n-1}+T_n=n^2$

ابن‌سینا این مطلب را با عبارت عربی زیر بیان کرده است: «فیکون کل مربع من مثلث فی‌درجته و مثلث انقص من‌درجته بواحد» [الحساب: ص ۵۵.]

ج ـ دستور تشکیل عددهای مخمس:

عددهای مخمس عددهائی هستند که از جمع کردن جمله‌های متوالی تصاعد حسابی زیر حاصل می‌شود:

۱ و۴ و۷ و۱۰ و۱۳ و۱۶ و۱۹ و...

عددهای مخمس ابتدا از واحد عبارتند از:

۱ و۵ و۱۲ و ۲۲ و۳۵ و ۵۱ و...

این عددها را از آن جهت مخمس می‌نامند که می‌توان آن‌هارا

۱ـ و رجوع کنید به: «قربانی: بیرونی‌نامه»، ص ۱۵۰.

به‌شکل پنج ضلعی منتظم مرتب کرد. دستور تشکیل دادن این عددها این است:

$$P_n=n^2+T_{n-1}=\frac{(3n-1)n}{2}$$

ابن‌سینا این دستور را با عبارت عربی زیر بیان کرده است: «و قدتنشأمن‌جمیع المربعات کل‌مع‌المثلث‌الذی‌دونه فی‌المرتبه» [الحساب، ص ۵۶]

د ـ به‌کاربردن روش طرح نه نه اعداد برای امتحان عددهای مربع و مکعب که ابن‌سینا آن را تحت‌عنوان‌های زیر بیان‌کرده:

« وامتحان المربعات فی‌الطریق الهندی» [الحساب، ص ۵۶]

«ومع‌خواص المکعبات ان امتحانها الذی عمل‌الحساب الهندی» [الحساب، ص ۶۰].

تبصره ـ کانتور نوشته است که‌علاوه برقسمت ارثماطیقی‌کتاب «شفا»، ابن‌سینا مؤلف‌رسالهٔ دیگری در حساب است‌که ترجمهٔ‌فرانسوی مقدمهٔ آن در دیکسیونر ریاضی تألیف مونت فریه به‌چاپ رسیده‌است[1] [م ۲۰ ص ۷۵۶].

۲ـ اصول الهندسه ـ (فن اول از ریاضیات کتاب شفا)

این قسمت از کتاب شفا نیز جداگانه در سال ۱۹۷۷ م در مصر به‌چاپ رسیده است[2].

1- Dictionnaire des science mathématiques, par A. S. de Montferrier, Vol 1, Paris 1835, pp. 141 - 143.

۲ـ ابن‌سینا: اصول الهندسه ـ الشفاء، الفن‌الاول من‌جمله‌العلم الریاضی- هیأت مصری کتاب سال ۱۹۷۶ م.

«اصول الهندسه» مثل «تحریر اقلیدس» نصیرالدین طوسی در پانزده مقاله است. ظاهراً ابن‌سینا ابتدا این کتاب را با مختصرکردن مطالب سیزده مقالهٔ هندسهٔ اقلیدس و دو مقاله‌ای که بعداً به‌عنوان مقالات چهاردهم و پانزدهم به‌آن اضافه شده فراهم آورده و بعداً آن را درکتاب «شفا» قرار داده است.

ابن‌سینا در مختصرکردن هندسهٔ اقلیدس نه از تعداد مقالات آن کم کرده و نه از عدهٔ اشکال (=قضایا ومسایل) آن، بلکه فقط حکم و استدلال اغلب قضایای اقلیدس را مانند یادداشت‌هائی که شخص از کتابی برای خود برمی‌دارد خلاصه‌کرده و گاهی نیز یك قضیه را به‌دو یاسه قضیهٔ دیگر تجزیه نموده است. این است که تعداد اشکال مختلف «اصول الهندسه» باتعداد اشکال مقالات «تحریر اقلیدس» نصیرالدین طوسی فرق دارد.

این مطلب را هم باید دانست‌که کاری که ابن‌سینا برای خلاصه کردن هندسهٔ اقلیدس انجام داده به هیچوجه با کاری که نصیرالدین طوسی در تحریر کتاب «اصول اقلیدس» انجام داده قابل قیاس نیست و آن اهمیت واصالت را ندارد.

تبصره ـ قسمت هندسی کتاب «شفا» به‌زبان آلمانی موردبررسی قرارگرفته است [م ۱۰ ص ۷۱۲ و م ۱۱].

۳ـ رساله فی‌تحقیق الزاویه

فیلم یك نسخهٔ خطی ازاین رساله باعنوان «رساله فی‌الزاویه الی ابی‌سهل‌المسیحی» دردانشگاه‌تهران موجود است (فیلم شمارهٔ۳/۱۱۹۰) [م ۱۷] ونیز رجوع کنید به [م ۲].

۴ـ رساله فی‌تحقیق مبادی الهندسه

از این رساله دونسخهٔ خطی موجود است [م ۲].

۵ـ مختصر المجسطی

نسخه‌های خطی این رساله نیز موجود است [م ۲].

تبصرهٔ ۱ـ رسالهٔ «معیارالعقول» دربارهٔ جرثقیل به‌ابن‌سینا منسوب است. این رساله‌یك‌بار درهند و یك‌بار درسال ۱۳۳۱ ه. ش درتهران با دیباچه‌ای به‌قلم جلال‌الدین همائی به‌چاپ رسیده است ونسخه‌های‌خطی آن نیز موجود است [م ۱۵ و ۱۶].

تبصرهٔ ۲ـ قسمت ریاضیات «دانشنامهٔ علائی» توسط محمد آشنا وهانری ماسه به‌زبان فرانسوی ترجمه شده و در سال ۱۹۵۸ م درپاریس به‌چاپ رسیده است[1].

منابع

درفهرست‌زیر فقط نام‌کتاب‌هائی را ثبت می‌کنم که یا مستقیماً مورد استفاده‌ام بوده و یابرای اطلاع یافتن ازسایر منابع مربوط به‌ابن‌سینا مفید است.

۱ـ **ایندکس ایسلامیکوس**، سال ۱۹۵۵ ـ ۱۹۰۶ ص ۱۵۸ تا ۱۶۱.

۲ـ بروکلمان G_1، ص ۵۸۹ به‌بعد ـ بروکلمان S_1، ص ۸۱۲ به‌بعد.

۳ـ تاریخ ادبیات دکترصفا، ج ۱ ص ۳۰۳ به‌بعد.

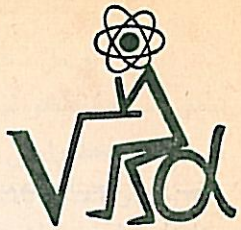
۴ـ ترجمهٔ فارسی تاریخ‌الحکماء، ص ۵۵۵ به‌بعد (متن عربی آن کتاب، ص ۴۱۳ به‌بعد).

۵ـ دانشنامهٔ ایران و اسلام: ابن‌سینا (ترجمه ازدایرةالمعارف‌اسلام).

1- AVICENNE: «Le livre de science» II (Physique, mathématique). Traduit par Mohammad Achena et Henri Massé, Paris, 1958.

۶- دایرةالمعارف ایران و اسلام، چاپ جدید فرانسوی، ج ۳ ص ۹۶۵ به‌بعد.
۷- دایرةالمعارف اونیورسالیس، ج ۲ چاپ ۱۹۶۸ ص ۹۵۰ به‌بعد.
۸- دایرةالمعارف فارسی، ج ۱: ابوعلی‌سینا.
۹- دیکسن H، ج ۱ ص ۳۳۷.
۱۰- سارتن I، ج ۱ ص ۷۰۹ - ۷۱۳.
۱۱- سزگین G_5، ص ۱۰۸ ش ۳۳.
۱۲- سه‌حکیم مسلمان، تألیف دکتر سیدحسین نصر، ترجمهٔ احمد آرام، تهران ۱۳۴۵ ه. ش، ص ۱۳ به‌بعد.
۱۳- سوتر M، ص ۸۶ ش ۱۹۸ - سوتر N، ص ۱۶۹.
۱۴- علم و تمدن دراسلام، ص ۴۳ - ۴۵.
۱۵- فهرست دانشگاه، ج ۳ ص ۹۵۱.
۱۶- فهرست فارسی، ج ۱ ص ۱۹۶.
۱۷- فهرست میکروفیلم‌ها، ج ۱ ص ۵۷۶.
۱۸- قربانی : ریاضی‌دانان ایرانی، ص ۳۱۱ تا ۳۲۲.
۱۹- کارادوو، ج ۲ ص ۱۱۲.
۲۰- کانتور G_1، ص ۷۵۶ و ۷۵۷.
۲۱- کراوزه S، ص ۴۷۳ ش ۱۹۸.
۲۲- لغت‌نامه: ابوعلی سینا.
۲۳- منابع تاریخ علوم اسلامی، تألیف دکتر حسین نصر، ج ۲ ص ۲۸۲ - ۳۰۳.

رمز و راز عددها و شکل‌ها



۱. و. فلیس، دانشمند آلمانی، زمانی «رابطهٔ سحرآمیز» $A=۲۳x+۲۸y$ را کشف کرد، که درآن x و y، عددهایی درست (مثبت یا منفی) هستند. این رابطه چنان است که شما می‌توانید با قراردادن مقادیر مناسبی به‌جای x و y، هر تاریخی را از زندگی یك آدم مشهور پیدا کنید. چه رمزی در «رابطهٔ فلیس» وجود دارد که می‌توان هرعدد دل‌خواه درستی را از آن به‌دست آورد؟

۲. دررمان «آفرین برشویك سرباز»، دیوانه‌ای وجود دارد که مدعی است در داخل کرهٔ زمین، کرهٔ دیگری وجود دارد که به مراتب از کرهٔ زمین بزرگتر است. ولی ما در این‌جا ادعای دیگری می‌کنیم که ظاهراً با ادعای قبلی چندان تفاوتی ندارد، ولی با وجود این، ادعای درستی است. درمکعب می‌توان تونلی به‌وجود آورد که بتوان مکعب بزرگ‌تری را به آن داخل کرد. آیا می‌توانید این تونل را بسازید؟

۳. چهار عدد درست مثبت a، b، c و d به دل‌خواه انتخاب کنید، مثلاً $a=۳$، $b=۸$، $c=۶$ و $d=۱۰$. حالا مقادیر $|a-b|$، $|b-c|$، $|c-d|$ و $|d-a|$ (قدرمطلق تفاضل‌ها) را تشکیل دهید و آن‌چه را به‌دست می‌آورید درسطر دوم، زیر عددهای اصلی، بنویسید. حالا با عددهای جدید دوباره همان عمل را تکرار کنید. می‌بینید که بعد از چند مرحله، هرچهار عدد شما برابر صفر می‌شود. مثلاً درمورد چهار عدد انتخابی ما، به چهار مرحله نیاز داریم:

۳ ۸ ۶ ۱۰

۵	۲	۴	۷
۳	۲	۳	۲
۱	۱	۱	۱
۰	۰	۰	۰

چهار عدد اول‌را هرجور انتخاب کنید، همیشه به‌همین‌نتیجه می‌رسید. این پیش آمد، که در نظر اول شگفت‌انگیز می‌نماید، دلیل بسیار ساده‌ای دارد. آیا شما می‌توانید این دلیل را پیدا کنید؟

۴. ۱۰۰ جهانگرد واردکشوری شدند. ۱۰ نفرآن‌ها نه‌زبان آلمانی می‌دانند نه زبان فرانسوی. ۷۵ نفر بـا زبان آلمانی و ۸۳ نفر بـا زبان فرانسوی آشنا هستند. چند نفر از این جهانگردان هر دو زبان را می‌دانند؟

۵. می‌توان عددهای از ۱ تا ۹ را به‌ردیف وبا انجام بعضی عمل‌ها طوری نوشت که حاصل عمل‌ها برابر ۱۰۰ بشود، مثلاً، به این ترتیب:

$$۱۲۳-۴۵-۶۷+۸۹=۱۰۰$$

حالا شما کوشش کنید، عددها را به‌صورت عکس، یعنی از ۹ تا ۱ بنویسید، به‌نحوی که با انجام عمل‌هائی که تعیین می‌کنید، بازهم حاصلی برابر ۱۰۰ داشته باشد.

۶. هفت سال‌دیگر، مجموع سال‌های سن حمید و بابك ۶۳ می‌شود. ضمناً وقتی حمید به‌سن بابك بود، درست دوبرابر بابك سن داشت. حمید و بابك حالا چند سال دارند؟

۷. رقم‌های عددی پنج‌رقمی را ازجهت عکس نوشته‌ایم، عددحاصل درست چهاربرابر عدد اصلی شده است. آیا می‌توانید این عدد را پیداکنید؟ مسأله تنها یك جواب دارد.

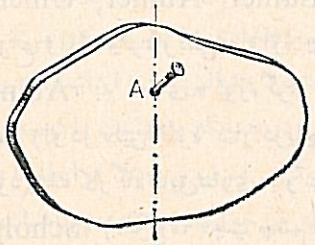
۸. عددی به رقم ۲ ختم شده است. اگـر این رقـم ۲ را از سمت راست عدد به سمت چپ آن منتقل کنیم، عددی به‌دست می‌آید که دو برابر عدد نخستین است. این عدد را پیدا کنید.

۹. در بشکهٔ کوچکی ۱۰ لیترسرکه وجود دارد. چگونه می‌توان بادو سطل ۳ لیتری و ۷ لیتری، ۵ لیتر سرکه را جدا کرد؟

۱۰. به دفتر مجله نامه‌ای رسیده، که درآن آمده است:

«من راه حل ساده‌ای برای یك مسألهٔ مهم وجالب پیدا کرده‌ام... شکل مسطحهٔ دلخواهی داریم که‌نقطهٔ A را درداخل آن انتخاب کرده‌ایم. می‌خواهیم خط راستی از نقطهٔ A رسم کنیم که این شکل را به دو قسمت هم‌ارز (دو قسمت بامساحت‌های مساوی) تقسیم کند... به این ترتیب‌عمل می‌کنیم. از یك مقوا یـا تختهٔ نـازك، شکلی دقیقاً مساوی شکل مفروض می‌بریم. مقوا یا تخته باید یکنواخت باشد، یعنی کلفتی‌آن در تمام نقطه‌ها یکی باشد. در این صورت، وزن جسم، متناسب با مساحت‌آن خواهدبود. سپس در نقطهٔ A سوراخی به‌وجود می‌آوریم و مقوای بریده شدهٔ خود را به‌میخی افقی آویزان می‌کنیم. خط قائمی‌که از نقطهٔ A می‌گذرد، جسم‌را به دو قسمت هم وزن و، در نتیجه، هم مساحت، تقسیم می‌کند. من گمان می‌کنم که این روش ـ که تاکنون معمول نبوده است ـ می‌تواند کاربرد عملی داشته باشد».

شما چه فکر می‌کنید؟



۱۱. چهار رقم متوالی را از چپ به راست پهلوی هم نـوشته‌ایم، سپس جای دو رقم سمت چپ را با هم عوض‌کرده‌ایم، عددی چهار رقمی به دست آمده است که مجذورکامل است. این عدد را پیدا کنید.

پاسخ در صفحه‌های آخر

آفرینندگان ریاضیات عالی (۱۲)

لئونار اولر

لئون سه‌مه‌نوویچ فریمان
ترجمهٔ پرویز شهریاری

لئونار اولر درآوریل سال ۱۷۰۷ در خانوادهٔ پاول اولر روحانی، در شهر بال‌سویس به‌دنیا آمد. خانوادهٔ اولر را می‌توان تا سال ۱۵۹۴، که شخصی به‌نام هانس گئورگ اولر دربال‌ساکن شد، دنبال کرد. ضمناً، نام‌فامیل اورا به‌صورت‌های مختلف نوشته‌اند:

Euler, Eulner, Aulner, Ulner, Ouler

ولی هیچ‌کدام از این‌انواع واژهٔ اولر، ربطی‌به واژهٔ Eule (به‌معنی جغد) ندارند. Ulner یا Aulner، به معنای «کوزه‌گر» است. وقتی‌که هانس گئورگ دربال ساکن شد (او در «لین‌دائو» کنار دریاچهٔ بادن، که سویس‌را ازآلمان جدامی‌کند، بود) یك کارگاه قایق‌سازی بازکرد. بدنیست‌یادآوری کنیم که کنیهٔ او «Scholpin» («لوچ»، «چپ چشم») بود. در نسل‌های بعدی، بعضی از اولرها، مفتون این‌لقب پرطنین بودند وآن را به‌نام‌فامیل خود اضافه‌می‌کردند و، به‌این ترتیب، آن‌ها را اولر ـ شولپین می‌نامیدند. این نام فامیل تا به‌امروز هم باقی‌مانده است. مثلاً، اولر ـ هلپین، شیمی‌دان مشهور سوئدی، که در سال ۱۹۲۹، برندهٔ جایزهٔ نوبل شد.

به‌خط لئونار اولر برگردیم. هانس گئورگ چهار پسر داشت، که‌همهٔ آن‌ها قایق‌سازی می‌کردند. درنسل سوم، به هفت مرد برمی‌خوریم که‌چهار نفر آن‌ها قایق‌ساز وسه‌نفر خادم کلیسا بودند؛ در نسل چهارم، تنها دونفر قایق‌ساز و پنج‌نفر روحانی بودند. از جملهٔ این روحانی‌ها، پاول (۱۶۷۰-

۱۷۴۵)، پدر لئونار بود.

پاول اولر درسال ۱۷۰۶ با کاترین بروکر ازدواج کرد. یك سال‌بعد، وقتی‌که نخستین فرزندش به‌دنیاآمده بود، به‌عنوان‌پیشوای روحانی‌روستای رین در ۵ کیلومتری بال تعین شده بود. خانواده در شرایط بسیار ساده‌ای زندگی‌می‌کرد. اولرها در یك خانهٔ‌کوچك دواطاقی ساکن شدند، ولی، یك اطاق را یکی از پیشینیان بیمار اولر با نه بچهٔ خود اشغال‌کرد؛ خانوادهٔ اولر هم شش نفر بودند.

اولرکوچك، در چنین موقعیتی بزرگ شد. داستانی از زندگی او در این دوران‌باقی‌مانده است. یك‌روز پدر ومادر متوجه شدندکه لئونارچهار-ساله‌گم شده است. بعد از مدتی جست‌وجو، او را درگوشهٔ مرغ‌دانی پیدا کردند، او درآن‌جا ایستاده بود، بی‌آن‌که هیچ تکانی بخورد. او، در برابر پرسش‌های پدر و مادر شگفت‌زدهٔ خود، پاسخ داد: در مرغ‌دانی پنهان شده است تا چند تخم بگذارد و جوجه درآورد.

نخستین معلم لئونار، پدرش بود که طبعاً معتقد بود پسرش باید در سلك یك روحانی درآید. باوجود این، در ردیف مقدمات آموزش عمومی، در زمینهٔ ریاضیات هم، مقداری با پسرش کار می‌کرد. خود پاول هم، از علاقه‌مندان به‌ریاضیات‌بود وشانس این را داشت‌که پیش خود یاکوب‌برنولی درس بخواند. او حتی دربحثی‌که به‌ریاست یاکوب برنولی، درسال ۱۶۸۸، برپا شده بود، شرکت‌کرد. موضوع بحث «رابطه‌ها و نسبت‌های ریاضی» بود. معلوم است‌که او می‌خواست علاقهٔ به‌ریاضیات را، به‌پسرش هم‌منتقل کند. با وجود این، لئونار هیچ استعداد فوق‌العاده‌ای، درکودکی از خود نشان نداد. وقتی پسرك بزرگ شد، او را به دبیرستان سپردند. دبیرستان بال در آن زمان، خیلی‌کم با آموزشگاه‌های ما، که پامیالوسکی[1] خاطرهٔ آن را جاویدان کرده است، تفاوت‌داشت. اغلب پیش می‌آمد که معلم،

۱. نیکلای‌گراسیموویچ پامیالوسکی (۱۸۳۵-۱۸۶۳) نویسندهٔ روس و مؤلف کتاب «شرح آموزشگاه‌ها»، که در آن سیمای واقعی آموزش دوران تزاری را دقیقاً ترسیم‌کرده و به انتقاد کشیده است. (م.)

بی‌رحمانه شاگرد خود را کتك می‌زد؛ البته، این هم بود که پدر خشمگین در برابر چشمان تمامی کلاس، موهای معلم را می‌گرفت و به این طرف و آن‌طرف می‌کشاند. آیا در چنین محیطی می‌شد ریاضیات آموخت، به‌خصوص که تنگ‌نظران بال اصولاً نسبت به‌لزوم یادگرفتن ریاضیات در تردیدبودند، چرا که آن را تنها برای کسانی لازم می‌دانستند که می‌خواستند در آینده دکان‌دار، مامور ثبت اسناد و یا کارمند بانك بشوند؟ اگر دانش‌آموزی علاقه‌مند بود که چیزی یاد بگیرد، معمولاً به دانشجویان دانشگاه محلی مراجعه می‌کرد و ازآن‌ها درس خصوصی می‌گرفت. اولر همین کار راکرد.

اولر در ۲۰ اکتبر سال ۱۷۲۰، در دانشکدهٔ فلسفهٔ دانشگاه، نام‌نویسی کرد. دانشگاه بال، درآن موقع، تصویری غم‌انگیز داشت. این آمار مربوط به‌سال ۱۷۲۰ است: ۱۹ استاد وکمی بیش از صد دانشجو! سال‌ها بعد، در سال ۱۷۵۲، یکی از ناظران نوشت: «تاکنون دانشگاهی، چنین غیر فعال، مثل دانشگاه بال ندیده‌ام. استادی از این عجیب‌تر پیدا نمی‌شود که در جریان پنج سال، حتی یك شاگرد نداشته باشد. آقایان پزشکان هم تنها شش دانشجو دارند». پیرموپرتوئی مشهور و دوست خانوادهٔ برنولی، در سال ۱۷۵۹، می‌گفت: «درجائی‌که دانشگاه وکتاب‌خانهٔ بال قرار دارد، رخوت وسستی عجیبی حاکم است». در این وادی خواب‌آلود، تنها یك‌جا بودکه زندگی درآن‌می‌جوشید وازتمامی گوشه وکناراروپا، نیروهای‌زنده‌و علاقه‌مند را به‌طرف خودمی‌کشید: کرسی ریاضیات. این‌کرسی ازسال۱۶۸۷ در اختیار یاکوب برنولی و، سپس، از سال ۱۷۰۵، در اختیار برادر او یوهان بود. وهمین‌جا بودکه اولر جوان رابه‌سمت خود جلب‌کرد. اولر، با ورود به‌دانشگاه، تصمیم داشت از ارادهٔ پدر پیروی، وخود را برای حرفهٔ روحانی و «چوپانی‌کلیسا» آماده کند. برای این منظور، باید اول دانشکدهٔ فلسفه را تمام می‌کرد تا آمادگی‌کلی پیدا کند، سپس وارد دانشکدهٔ الهیات بشود. ولی، اولر، به‌خاطر استعداد عالی و حافظهٔ بی‌نظیر خود، وقت‌آزاد زیادی داشت و به‌همین مناسبت، تصمیم‌گرفت ازکلاس‌های یوهان‌برنولی هم استفاده کند. درآن‌جا، با یوهان دوم، پسر استاد، آشنا و دوست شد. یوهان برنولی خیلی زود متوجه این جوان شد، استعداد استثنائی او را

تشخیص داد و به او پیشنهادکرد که جدی‌تر به‌کار بپردازد و برای تکمیل بحث‌های مفید، روزهای شنبه را به‌خانهٔ او برود. اولر، بعدها، بااحساسی گرم از این بحث‌ها یاد می‌کند وخاطرنشان می‌کندکه ناچار بودکار زیادی انجام دهد تا بتواند جنبه‌های ناروشن آن‌چه را در طول هفته خوانده‌بود، به حداقل برساند. اولر، ضمن رفت وآمد به‌خانهٔ برنولی، با پسران بزرگتر استاد ـ نیکلای دوم‌ودانیل اول ـ هم‌آشناشد. بین اولر و برادران‌برنولی، دوستی عمیق و روشنی برقرار شدکه برای تمامی زندگی پایدار ماند. این دوستی، نقش بزرگی در سرنوشت اولر داشت.

کار دانشکده به‌خوبی می‌گذشت و اولر، بعد از دوسال، در ۹ژوئن ۱۷۲۲، درجهٔ لیسانس علوم را در اختیار داشت. او دانشکدهٔ فلسفه را در پانزده سالگی تمام‌کرد. جالب است‌که دانشکده او را برای اظهارنظر در‌بارهٔ رساله‌های علمی معین کرد؛ اولر، در جریان سال ۱۷۲۲، دربارهٔ سه رساله اظهار نظر کرد: موضوع دو رساله، منطق و موضوع رسالهٔ سوم، تاریخ دادرسی در روم بود.

اولر در ۲۳ اکتبر سال ۱۷۲۳ در دانشکدهٔ الهیات نام‌نویسی کرد. پسر خوش قلب، بنابه‌میل پدرش رفتار می‌کرد و به‌درس‌هایی پرداخت که برای حرفهٔ آیندهٔ او لازم بود.

اولر، علاوه برعلوم‌الهی، زبان‌های‌قدیمی را هم یادگرفت (یونانی، لاتینی وعبری). او تا دوران پیری، علاقه وعشق خود را نسبت به‌ادبیات کلاسیك حفظ‌کرده بود (ولی‌به‌هم‌عصران خود، و از آن جمله بزرگان ادب فرانسوی، اعتقادی نداشت). حافظهٔ او چنان بودکه نه‌تنها تمامی «انه‌اید»[1] را از برمی‌خواند، بلکه حتی می‌توانست سطر اول و سطر آخر هرصفحه از کتاب درسی «انه‌اید» را از حفظ بگوید.

اولردر ژوئیهٔ سال ۱۷۲۴، در مسیر دانشگاهی خود، یك سخن‌رانی به‌زبان لاتینی دربارهٔفلسفهٔ دکارت ونیوتون ایرادکرد و درجهٔ «ماگیستری» را به‌دست آورد. یوهان دوم، دوست اوهم، در همان سال، این درجه را

۱. Eneid ـ اشعار حماسی ویرژیل (م.)

گرفت، اگرچه سه‌سال جوان‌تر از اولر بود.

دوبرادر ـ یوهان ودانیل برنولی ـ در سال ۱۷۲۵ عازم پترزبورگ شدند ودر نوامبر همان سال درآن‌جا بودند. مکاتبه بین دوستان برقرارشد. برنولی‌ها قبل ازعزیمت از سویس، به‌اولر قول دادندکه اگر درفرهنگستان علوم روسیه، جای مناسبی برای او پیدا کردند، از او هم دعوت کنند. وقتی‌که اولر دانشگاه‌را درسال ۱۷۲۶ تمام‌کرد، نخواست در انتظاررسیدن خبری از پترزبورگ، وقت خود را به‌بطالت بگذراند و تلاش‌کرد تا کرسی فیزیك را، که درآن زمان آزاد بود، به‌دست آورد. طبق قاعده‌ای که در دانشگاه بال وجود داشت، برای این‌که استاد جدیدی بتواند به‌چنین مقامی برسد، می‌بایستی از مرحله‌هایی ـ که به‌اندازهٔ کافی دشوار بود ـ بگذرد. ابتدا، کمیسیونی به همهٔ درخواست‌ها رسیدگی می‌کرد و از میان آن‌ها، سه‌نفر را، که شایسته‌تر از دیگران تشخیص می‌داد، انتخاب می‌کرد. سپس بین این سه نامزد قرعه‌کشی می‌کردند ومقام مورد نظر را به‌کسی که‌شانس بیشتری داشت، می‌دادند. کسی که سرنوشت یارش نبود، می‌توانست تا قرعه‌کشی دفعه بعد صبرکند و بازهم بخت خود را بیازماید. مثلاً یوهان برنولی دوم، دوست اولر، در قرعه‌کشی‌های سال ۱۷۳۱، ۱۷۳۴ و ۱۷۴۶ (برای کرسی حقوق) شرکت‌کرد و در هر سه‌بار شکست‌خورد.

اولر، برای گذراندن درجهٔ علمی خود، «طبیعت صدا و نحوهٔ‌انتشار آن» را برای بررسی پیشنهاد کرد. ولی این جوان نوزده ساله، که مدعی درجهٔ استادی بود، توفیقی پیدا نکرد. او، حتی به عنوان سه‌نفری هم که باید در قرعه‌کشی شرکت‌کنند، انتخاب نشد. در واقع، درآن زمان، کسانی دردانشگاه بال بودندکه سابقهٔ‌زیادی در رشتهٔ فیزیك داشتند،مثل، «یاکوب هرمان» (۱۶۷۸ ـ ۱۷۳۳)، که همان وقت هم دانشمندی مشهور بود، «شته‌خه‌لین»؛ نفر سوم‌شخصی بود به‌نام «بیر». قرعه به‌نام شته‌خه‌لین‌افتاد که خانواده او ـ مثل خانوادهٔ برنولی ـ در طول یك سده با دانشگاه بال مربوط بودند.

درهمین سال، اولر درمسابقهٔ فرهنگستان پاریس شرکت‌کرد ونوشتهٔ خود را، دربارهٔ بررسی بهترین جای دکل درکشتی، به‌آن‌جا فرستاد. وقتی

که اولر این اثر خود را می‌نوشت، نه‌دریا را دیده بود ونه‌کشتی‌های بزرگ را. باوجود این، کار اولرچنان با ارزش بودکه فرهنگستان پاریس، بی‌هیچ تردیدی، جایزه‌را به‌او داد. ذکراین مطلب مفید است‌که فرهنگستان‌پاریس، چهارده بار، به خاطر شرکت اولر در مسابقه‌ها، او را به دریافت جایزه مفتخرکرد (وزوی هم۳۰ هزار لیور به‌او پرداخت). هیچ دانشمند دیگری، این همه جایزه نگرفته است. بعد از اولر، باید از دانیل برنولی اول نام بردکه توانست ده جایزه بگیرد.

نوشته‌ای که‌از آن یادکردیم، نخستین‌اثر ازمجموعهٔ‌بزرگ‌نوشته‌های اولر دربارهٔ کشتی‌سازی، کشتی‌رانی و دیگر مسأله‌های مربوط به دریاست که در بعدها، در سال ۱۷۴۹، در دو جلد وبه‌نام «دانش دریائی» چاپ‌شد.

اولر موفق نشد، کرسی فیزیك را به‌دست آورد. معلوم بودکه امکان دانشگاه بال وحتی تمامی سویس، برای به‌کارگرفتن نیروی دانشمند جوان، بسیار ناچیز بود. اولر به‌فکرافتادکاری در خارج پیدا کند. بیش از هرجای دیگری، به فرهنگستان علوم پترزبورگ علاقه داشت، چرا که دوستانش، برنولی‌ها درآن‌جا بودند. بادانیل، دائماً در این مورد مکاتبه داشت. دانیل برنولی، واقعاً می‌خواست به قول خود، دربارهٔ رفتن اولر به روسیه، وفا کند. او در سپتامبر سال ۱۷۲۶ نوشت:

به آقای ماگیستر اولر، در بال

سرور عزیز

چند ماه از روزی می‌گذرد که طبق دستور رئیسمان، آقای بلومن‌تروست، نامه‌ای به شما نوشتم و به نام او از شما دعوت کردم که مقام دستیاری را در فرهنگستان ما بپذیرید.

با بی‌صبری انتظار شمارا می‌کشیم. تا آن‌جاکه برایتان امکان دارد، زودتر حرکت‌کنید و، اگر ممکن است، همین زمستان راه بیفتید. ولی اگر از حرکت دراین موقع سال بیم دارید، به‌شما توصیه می‌کنم، از وقت‌کمی که برایتان مانده است، برای تمرین در تشریح وبرای مطالعهٔ کتاب‌هایی که فیزیولوژی را براساس اصول هندسه بررسی کرده‌اند، اختصاص دهید.

فرصتی پیدا کنید و در همین نزدیکی‌ها، یکی از بررسی‌های به سبک خودتان رابرای فرهنگستان بفرستید وبه‌آن‌هانشان دهیدکه من نتوانسته‌ام آن‌طورکه شایسته است شمارا معرفی‌کنم؛ که من خیلی ناقص ونارسادربارهٔ شما صحبت‌کرده‌ام...

چاکر و خدمت‌گذار شما

برنولی

دانیل، نامهٔ ۲۱ سپتامبر بلومن‌تروست را هم ضمیمهٔ نامهٔ خودکرد:

«شما چنان عالی، آقای اولر را برای من توصیف‌کرده‌اید، که من‌به این امید دل بسته‌ام‌که او بتواند فایدهٔ زیادی برای فرهنگستان داشته‌باشد. او پنج سال به‌عنوان کارآموز کار می‌کند... و از مقرری ۳۰۰ روبل در سال، استفاده خواهدکرد...

شما، آقای عزیز، به‌اواطلاع دهیدکه بعد ازپنج سال، اگر موفقیت‌های بعدی در دانش داشته باشد، اضافه حقوقی دریافت خواهدکرد».

اولر بلافاصله به‌بلومن‌تروست پاسخ داد. او، تمایل خود را برای‌به کارگرفتن تمامی نیروی خود در خدمت فرهنگستان اعلام‌کرد و اطلاع‌داد که به‌خاطر هوای بارانی زمستان، ناچار است مسافرت خود را تا بهارسال ۱۷۲۷ عقب بیندازد. نامه‌ای هم برای دانیل برنولی ضمیمهٔ آن‌کردکه از نظر محتوی منحصر به‌فرد وشامل بحثی از موضوع‌های علمی است.

اولر به توصیهٔ دانیل عمل‌کرد و به دانشکدهٔ پزشکی رفت تا با فیزیولوژی آشنا شود وخود را برای رفتن به پترزبورگ آماده‌کند. ولی، خیلی زود درس خود را قطع‌کرد و در ۵ آوریل سال ۱۷۲۷ عازم‌پترزبورگ شد. چنین مسافرتی در سدهٔ هجدهم، اقدام چندان ساده‌ای نبود. اولر، این خطسیر را انتخاب‌کرد: از بال به‌ماینس (Mainz) درکنار رین (Rhein) رفت. سپس، به فرانکفورت برگشت و به‌طرف شمال شرقی رفت تا کوتاه‌ترین راه دریائی را انتخاب‌کرده باشد. از طریق هانوور به‌هامبورگ رفت، ولی‌درآن‌جا به‌کشتی ننشست. ترجیح‌داد از راه‌خشکی به‌لوبك (Lübeck) برود تا ناچار نباشد شبه‌جزیرهٔ ژوتلاند را ازطریق دریا دور بزند. ازلوبك

لئونار اولر (۱۷۰۷-۱۷۸۳)

به «تراوه‌موند» رفت تا یك‌کشتی پیدا کند وبه طرف«ره‌ول» (تالین) برود. ۱۸ مه به‌ره‌ول رسید. ۲۱ مه، بدون حادثهٔ خاصی به‌کرونشتات و در۲۴ مه به پترزبورگ رسید، دانیل برنولی ویاکوب هرمان ـ هموطنان او ـ استقبال گرمی از اوکردند. اولر بلافاصله پس از ورود، دستیاری ریاضیات را پذیرفت.

خواننده باید توجه‌کندکه این جوان درچه شرایطی بزرگ شده‌بود. او تربیت خود را در خانواده‌ای پارسا و روحانی پیدا کرده بود و زندگی مستقل خود را درحال وهوای سنتی یك شهرکوچك سویس آغازکرده بود. واژهٔ «پترزبورگ» بی‌اختیار طرحی از یك شهر زیبا را به‌خاطر می‌آوردکه عظمتی پرافتخار دارد و لبریز از شاه‌کارهای معماری است. ولی، وقتی‌که اولر، به پترزبورگ آمد، نه از زیبائی شهر ونه ازشاه‌کارهای معماری، خبری نبود. پوشکین در «خدمت‌گذار پترکبیر» می‌نویسد: «در تمامی‌شهر، هیچ‌چیز باشکوهی به‌چشم‌نمی‌خورد، حتی‌قاب‌های‌سنگی را هم رنگ‌نزده‌اند». ضمناً اولر درهمان سال‌هایی درپترزبورگ بودکه هانیبال از پاریس برگشته

بود وچنین طرحی را دیده بود: «سدهای عریان، کانال‌های بدون ساحل و پل‌های چوبی، همه‌جا گواه برپیروزی نزدیك ارادهٔ انسانی برنیروهای‌قهار طبیعت بود». روز ورود اولر بـه پترزبورگ، کاترین اول مرد. پتر دوم ـ که پسر بچه‌ای بود ـ به‌عنوان تزار اعلام شد. وضع فرهنگستان علوم، به‌کلی‌مبهم‌بود. دسیسه، توطئه‌های متقابل‌ودغل‌کاری، عادی‌ترین وسیله‌ها برای در اختیارگرفتن کارهای درباری و مؤسسه‌های نزدیك به آن، و از آن جمله، فرهنگستان بـود. و طبیعی است، وقتی اختلاف و برخورد بین دانشمندان به‌وجود می‌آمد، فرهنگستان نمی‌توانست به‌کار خود بپردازد.

مبهم بودن‌وضع، براولر هم اثرگذاشت. او که‌دورنمائی برای‌امکان تثبیت وضع‌خود در فرهنگستان نمی‌دید، به‌پیشنهاد دریاسالار سیورس‌متوجه شد. دریاسالار فهمیدکه این مرد جوان، رسالهٔ مهمی دربارهٔ‌کشتی‌ها نوشته است و به‌او پیشنهادکرد، خدمت در نیروی دریائی را با درجهٔ ستوان‌دومی بپذیـرد. در این موقع، تعداد اصلی عضوهای فرهنگستان کـم شده بود. عضوهای خارجی فرهنگستان، پشت‌سرهم پترزبورگ را ترك می‌کردند و به کشورهای خود باز می‌گشتند. در این بین، پتر دوم مرد (ابتدای سال ۱۷۳۰) وآناایوانوونا برتخت نشست. او در ادارهٔ‌کشور هیچ نقشی‌نداشت وهمه تصمیم‌ها را آلمانی‌های دور وبراو ـ که «بـایرون» در رأس آن‌ها بود ـ می‌گرفتند. با همهٔ این‌ها، وضع فرهنگستان بهتر شد، شاید به این مناسبت‌که همه‌چیز فرهنگستان آلمانی بود. ولی، دوعضو سویسی ومشهور فرهنگستان، از آن‌جا رفته‌بودند. جای خالی‌کرسی فیزیك، به اولر پیشنهاد شد، و او به فرهنگستان برگشت. طبق سندی کـه تـاریخ ۳۱ ژوئیه سال ۱۷۳۱ را برخوددارد، مقرری اولر از اول ژانویهٔ سال۱۷۳۱ تا ۳۱دسامبر سال ۱۷۳۳، ۴۰۰ روبل و ازاول ژانویهٔ‌سال ۱۷۳۴، ۶۰۰ روبل درسال، معین شد.

اولر، از همان نخستین روزهایی‌که به پترزبورگ آمده بود، خصلت عمدهٔ طبیعت خود را نشان داد: کارکـردن در هر موقعیت و هر شرایطی. هنرنمائی اولر، در ارتباط با نتیجه‌گیری از کارهـایش، از اوت سال ۱۷۲۷

دانیل برنولی
(۱۷۰۰ - ۱۷۸۲)

آغاز می‌شود[1]. ازهمان سال‌های نخست، افق علاقه‌های او، بسیارگسترده بود. در پهنهٔ گستردهٔ علاقه‌های او، از توتوکـرون‌ها در خلاء و محیط مقاوم تا معادله‌های دیفرانسیلی وجسم‌های قابل ارتجاع و تصاعدها وغیر آن، دیده می‌شد.

دانیل برنولی درسال ۱۷۳۳ از پترزبورگ به سویس رفت. اولربه گروه‌ریاضیات رفت‌وتازمان مسافرت‌او به‌آلمان (۱۷۴۱) درآن‌جاباقی‌ماند.

اولر دردسامبر سال ۱۷۳۳ با کاترین‌گزل دوسان هال، هم‌وطن‌خود، ازدواج‌کرد. همین‌جا، چند کلمه‌ای دربارهٔ خانوادهٔ اولر بگوییم تـا ناچار نباشیم دوباره به آن برگردیم. همسر اولر، کاتـرین (۱۷۰۷ - ۱۷۷۳)، دختر یك نقاش بودکه بنابه دعوت پتر به روسیه آمده بود. این، ازدواجی

۱. چه‌بسا، اولر پیش از اوت سال ۱۷۲۷ هم کارهایی کـرده باشد، ولی ما اطلاعی در این مورد نداریم.

پربرکت بود؛ اولر، سیزده‌بچه داشت، ولی‌تنها پنج‌تای آن‌ها بزرگ‌شدند. پسر بزرگ او، یوهان آلبریخت (۱۷۳۴-۱۸۰۰)، ریاضی‌دان و اخترشناس بود. او، از سال ۱۷۵۴، عضو فرهنگستان علوم برلن و از سال ۱۷۵۸، مدیر رصدخانهٔ آن‌جا بود (بعد از یوهان آلبریخت اولر، مقام مدیریت رصدخانه به یوهان برنولی سوم - پسر دوست بزرگ لئونار اولر، یعنی یوهان دوم - داده شد. یوهان سوم بنابه توصیهٔ اولر، در سن ۱۹ سالگی به فرهنگستان علوم برلین دعوت شده بود). یوهان آلبریخت، از سال ۱۷۶۶، عضو فرهنگستان پترزبورگ شدکه تا سال ۱۸۰۰ - سال مرگ او - این عنوان را حفظ کرد. در سال ۱۷۸۴، فرهنگستان علوم پاریس، او را به‌عنوان عضو خارجی خود، و به‌جای پدرش - که مرده بود - انتخاب کرد. او عضو فرهنگستان علوم سوئد و بسیاری دیگر از انجمن‌های علمی بود. مهم‌ترین خدمت او به دانش این بود که بعضی از کارهای پدرش را - بعدازآن که‌پدرش بینائی خود را ازدست داد - بازنویسی وتصحیح کرد و محاسبه‌های لازم را انجام داد.

کارل (۱۷۴۰ - ۱۷۹۰)، پسر دوم اولر، آموزش پزشکی‌دیده‌بود. وقتی‌که خانوادهٔ‌اولر، دربرلین زندگی می‌کرد، کارل طبیب قسمت‌مهاجر-نشین فرانسوی بود؛ وقتی که اولر دوباره به پترزبورگ برگشت، طبیب دربار شد؛ او ضمناً عضو فرهنگستان هم بود.

پسر سوم، کریستوفور، از نظر حرفه‌ای، متخصص نظامی بود. در سال ۱۷۶۹، درمأموریتی‌که فرهنگستان علوم برای مشاهدهٔ زهره ضمن‌عبور از برابر قرص خورشید در شهر «اورسك» ترتیب داده بود، شرکت داشت (این مأموریت را با عبور زهره در۲۶ مه سال ۱۷۶۱، که ضمن‌آن م. و. لومونوسوف جو زهره را کشف‌کرد، اشتباه نکنید). رئیس کارخانهٔ اسلحه-سازی شهر ستروسك بود. وقتی‌که مرد، درجهٔ ژنرالی داشت.

همسر اولر، بعد از چهل سال زندگی خوشبخت، در سال ۱۷۷۳ مرد. همهٔ فرزندان و فرزندزادگان اولر، بیش از سی‌نفر، با او زندگی می‌کردند. این‌خانوادهٔ بزرگ به‌سرپرستی نیازداشت. اولر درسال ۱۷۷۶، با ناخواهری همسر اول خود، سالومه‌گزل، ازدواج‌کرد.

دوباره، به‌جوانی اولر برگردیم. او تا سال ۱۷۳۳، دست‌کم، ۳۳ اثر نوشته بود (که البته، تنها ۱۱ تای آن‌ها چاپ شده بود).

در این‌سال‌ها، اولر، روی «مکانیك» خود،کار می‌کرد. این، نخستین کتابی بودکه مکانیك را به‌صورتی منظم، به‌زبان آنالیز عالی طرح می‌کرد. نام‌کامل‌کتاب، این بود: «مکانیك، یادانش‌حرکت، با طرح تحلیلی». مؤلف، قسمت اول‌کتاب را درسال ۱۷۳۴ تمام کرد، که در ساله ۱۷۳۶ از چاپ خارج شد. کتاب به‌قطع بزرگ و در هزار صفحه بود.

در سال ۱۷۳۵، حادثهٔ بدی برای اولر پیش آمد: چشم راست خود را از دست داد. مدت‌ها گمان می‌رفت‌که از دست رفتن چشم او، ناشی از کار وخستگی زیاد است. نیکلای فوس حکایت می‌کند که لازم بود جدولی از عبور ستاره‌ها تنظیم شود که بنابه تخمین دیگر عضوهای فرهنگستان، برای محاسبه‌های‌مربوط به‌آن، به‌قریب سه‌ماه وقت‌نیاز داشت. اولر حاضر شد این محاسبه را درسه روز انجام دهد و در همین مدت هم انجام داد. این روایت، درهمهٔ زندگی‌نامه‌های اولر، وجود دارد. ولی، «انشتروم» (سوئد) متخصص بزرگ زندگی وکارهای اولر، این پیش‌آمد را دقیقاً مورد بررسی قرار داده و قانع شده است که اولر، به خاطر انجام این‌کار در سه روز، نیازی به‌کار وخستگی زیاد نداشته است. در واقع، اولر برای انجام این محاسبه، مقدمتاً رابطه‌هایی را پیدا کرده بودکه‌کار محاسبه را، فوق‌العاده ساده می‌کرد، به‌نحوی برای‌تنظیم جدول در سه‌روز، به‌بیش از هشت‌ساعت کار در روز، نیازی نداشت.

اولر تا سال ۱۷۴۱، مثل قبل‌کارمی‌کرد، یعنی باهمان نیرو وهمان باروری‌که تنها می‌توان نام «پدیده‌ای عجیب و اسرارآمیز از طبیعت» را برآن‌گذاشت. در فاصلهٔ سال‌های از ۱۷۳۴ تا ۱۷۴۱، ۷۵ اثر دیگر، به ۳۶ اثر قبلی خود، اضافه‌کردکه درآن زمان، ۴۶ تا از آن‌ها، و ۳۷ تا در «بحث‌های فرهنگستان علوم پترزبورگ»، چاپ شده بود. این را هم‌بگوییم که اگر «بحث‌ها» از همان شمارهٔ اول خود، اعتبار علمی بزرگی به دست آورده بود، بیش از همه، به این دلیل بود که در هر شمارهٔ آن، اثری از اولر چاپ می‌شد.

بی‌جهت نیست که سال ۱۷۴۱ را، سال برآوردکارهای اولر می‌گیرند: اولر در این سال، برای بیست وپنج سال پترزبورگ را ترک کرد و به‌برلین رفت. علت این مسافرت، به هم خوردن رابطهٔ او با فرهنگستان نبود. برعکس، در دورانی که در برلین بود، نه تنها خود را عضو فرهنگستان پترزبورگ می‌دانست، بلکه با حرارت زیاد به‌خاطر فرهنگستان، کار هم می‌کرد: مقاله‌های خود را برای «بحث‌ها» می‌فرستاد، کتاب‌های خود را برای چاپ به فرهنگستان می‌فرستاد و روی سفارش‌هایی که از فرهنگستان به او می‌رسید، کار می‌کرد. علت مسافرت اولر را باید در مجموعهٔ شرایط و اوضاع و احوال سال ۱۷۴۱ جست وجو کرد. امپراتریس آناایوانوونا در سال ۱۷۴۰ مرد. تخت‌سلطنت به‌ایوان ششم (متولد ۱۷۴۰) رسید. دسیسه‌های درباری و مبارزهٔ دار و دسته‌های مختلف، از نوآغاز شد. در ۱۶ دسامبر سال ۱۷۴۱، الیزابت پتروونا، برتخت نشست. همه‌جا، بی‌اعتمادی و بلاتکلیفی حاکم بود. موقعیت فرهنگستان متزلزل شده بود. اولر، که چنین وضعی را درابتدای سال‌های ۳۰ متحمل شده بود، تصمیم به‌مسافرت گرفت. در همین زمان، فردریك دوم، به فکر زنده کردن «جامعهٔ علمی» افتادکه پایهٔ آن را، لایب‌نیتس درسال ۱۷۰۱ گذاشته بود و در سال‌های ۳۰ به‌کلی غیر فعال بود. اولر را با احترام زیادی پذیرفتند. کندورسه از پیش‌آمدی یادمی‌کند که مربوط به‌روزهای اول‌ورود اولر به‌برلین می‌شود. دریکی از مجلس‌های پذیرائی دربار، مادر شاه به‌این نکته توجه می‌کندکه اولر در پاسخ او، تنها به‌ذکر واژه‌های «بله» یا «نه» اکتفا می‌کند. از اولر می‌پرسد: «به‌چه مناسبت مایل نیستید با من صحبت کنید؟» و اولر پاسخ‌داد: «خانم عزیز، من ازکشوری می‌آیم که درآن‌جا هرکس حرف بزند، سرش‌را به‌باد می‌دهد».

پاسخ اولر نشان می‌دهد که از محیط وحشت وترور «بایرونی» چه احساسی‌داشته است و ضمناً، می‌تواند، دست‌کم، یکی از علت‌های مسافرت او را از پترزبورگ، روشن‌کند.

فردریك دوم، که می‌خواست به‌روال شاهان فرانسوی، با پشتیبانی از علم وهنر، نام نیکی ازخود باقی بگذارد، به‌درستی می‌فهمیدکه موفقیت

سازمانی مثل فرهنگستان، بستگی به این داردکه چه‌کسی در رأس آن‌باشد. روشن است که فردریك دوم، نه دانش و نه هنر آلمانی را نمی‌شناخت. او تنها از این بابت آلمانی بودکه درآن‌جا به‌دنیا آمده بود. تربیت او وذوق و سلیقه او، فرانسوی‌بود. او تنها دانشمندان فرانسوی، واگر ناچار باشد، سویسی را، قبول داشت. به این ترتیب، طبیعی بود که رئیس آیندهٔ «فرهنگستان خودش» را (به اصطلاح خود فردریك)، از میان دانشمندان فرانسوی انتخاب‌کند. او شانس آورد وچنین دانشمندی را پیدا کرد.

پیر لوئی‌مورو موپرتوئی (۱۶۹۸-۱۷۵۹)، فیزیك‌دانی برجسته، و یکی از هواخواهان سرسخت‌فیزیك نیوتونی، واز آن جمله، فرضیهٔ نیوتونی جاذبه بود (در نیمهٔ اول سدهٔ هیجدهم، نه‌تنها چیزی به‌نام «نظریهٔ جاذبه» وجود نداشت، بلکه خود فکر مربوط به‌جاذبهٔ عمومی هم، به نظر بسیاری از دانشمندان، غیر قابل قبول بود) و احتمالاً بشود او را با حرارت‌ترین و با استعدادترین مبلغ فیزیك نیوتونی در تمامی قارهٔ اروپا دانست. باید به‌یادآوردکه شرایط موجود، برای تأثیر نظریه‌های نیوتون، بسیار پیچیده بود. فیزیکی‌که مورد دفاع او بود، نه در مواردکوچکی، بلکه به‌طورکامل درمقابل فیزیك دکارت قرارداشت، یعنی دربرابرفیزیکی‌که تقریباً بلامنازع، برتمام عقل‌های نیمهٔ اول سدهٔ هیجدهم مسلط بود. از برخورد دو دیدگاه، مسأله‌ای شکل‌گرفت که همهٔ علاقه‌ها به‌طرف آن جلب شد. آیا آن‌طور که مکانیك نیوتونی می‌گوید، زمین در قطب‌های خود، پهن است یا نه؟ وهمین مسأله، در مرکز بحث موپرتوئی قرار داشت. سرآخر، تصمیم‌گرفته شد، یك‌آزمایش عظیم علمی‌انجام شود: اندازه‌گیری یك درجهٔ نصف‌النهار در استوا و در قطب وکشف حقیقت از راه مقایسهٔ آن‌ها با یکدیگر. از جزئیات، که ما را از هدف خود دور می‌کند، می‌گذریم و به همین اکتفا می‌کنیم‌که موپرتوئی در رأس هیأتی‌به‌قسمت‌های شمالی سوئد رفت، شانزده ماه (۱۷۳۶-۱۷۳۷) درآن‌جا گذراند و به نتیجه‌ای رسید که به‌طور قطع وبدون هیچ بحثی پیش‌بینی نیوتون را تأیید می‌کرد. موپرتوئی، نه‌تنها در محفل‌های‌علمی، بلکه‌حتی درمحفل‌های ادبی واجتماعی پاریس هم، شهرتی گسترده پیداکرد. ولی، رابطهٔ او با فرهنگستان علوم پاریس به‌سرعت‌خراب

شد. در همین زمان بود که فردریك دوم از او دعوت کرد تا مقام ریاست فرهنگستان علوم برلین را قبول کند. موپرتوئی موافقت کرد و ۲۳ آوریل سال ۱۷۴۴ را بایدروز پایه‌گذاری فرهنگستان جدید «علوم و ادبیات‌هنری» به‌حساب آورد.

موپرتوئی، رئیس آکادمی، نظم خاصی را برقرار کرد. عضوهای فرهنگستان را به‌چهار گروه تقسیم کرد. گروه فیزیك یا فلسفهٔ تجربی؛ گروه ریاضی یا فلسفهٔ نظری؛ ادبیات هنری و بالاخره زبان‌شناسی. اولر در رأس گروه ریاضی قرار گرفت. در هر گروه، سه عضو حقوق‌بگیر، سه دانشمند جوان ـ که‌عضوهای «وابسته» نامیده‌می‌شدند وشرکت‌کنندگان‌درنشست‌ها ـ که «خبرگان» نامیده می‌شدند، وجود داشت. به‌همهٔ این‌ها، به‌طور عادی، عضو فرهنگستان می‌گفتند: به‌جزاین‌ها، فرهنگستان، شانزده عضو افتخاری وتعدادی نامعین، عضوهای خارجی داشت. گروه‌ها، هرهفته نشست داشتند و هر سال هم مسابقه برگذار می‌شد.

اولر، علاوه بر رهبری گروه ریاضی، عضو هیأت مدیرهٔ فرهنگستان و عضو کمیسیون‌های کتابخانه و انتشارات هم بود. اولر، خیلی زود، به فرد بانفوذ و دارای اعتباری در فرهنگستان تبدیل شد و، در واقع، بعد از رئیس فرهنگستان ـ که دوستی نزدیکی با اولر پیدا کرده بود ـ دومین شخصیت فرهنگستان به‌شمار می‌رفت. دوستی اولر با موپرتوئی، موجب تنها رفتار نادرست اولر در تمامی زندگی او، شد. می‌دانیم که موپرتوئی به‌عنوان مؤلف «قانون عمومی» شناخته شده است، که بعدها «اصل‌تأثیر حداقل» نامیده شده است. سامول‌که‌نیك، دوست موپرتوئی وعضوخارجی فرهنگستان علوم‌برلین، نامه‌ای نوشت ودرآن‌به‌حق‌تقدم موپرتوئی اعتراض کرد. در نامه‌ای از لایب‌نیتس به‌هرمان، آمده بودکه‌کمیتی‌که موپرتوئی آن‌را «اثر» می‌نامد، همیشه یا حداکثر ویا حداقل‌مقدار است، واین، درست همان محتوی اصل موپرتوئی است. طبعاً، وجود این نامه لازم بود. از خودکه نیك‌کاری برنمی‌آمد، چرا که نه اصل نامه را در اختیار داشت و نه رونوشتی ازآن برداشته بود. موپرتوئی، سخت عصبانی شد و بااستفاده از جو حاکمیت دیکتاتور مآبانه‌ای که برفرهنگستان داشت، فرهنگستان را

واداشت تا تصویب کند (!) که این قسمت از نامهٔ لایب‌نیتس را که‌نیگ جعل‌کرده است، وگویا، به این منظورکه به موپرتوئی لطمه بزند و یا از لایب‌نیتس تملق بگوید. کسی که در این نشست ناشایستهٔ فرهنگستان، گزارش داد، اولر بود.

ولی نه‌چنین پیش‌آمدهایی ونه کارزیاد اداری‌ـعلمی‌او، نمی‌توانست اولر را ازفعالیت اصلی خودش، جداکند. در برلین هم، با همان‌شدت‌اعجاب‌آوری کار می‌کردکه در پترزبورگ. تهیهٔ سیاهه‌ای از فعالیت‌های اولر، یا حتی قسمت ریاضی‌آن، کاری بسیار مشکل است وضمناً به‌بحث ماهم‌مربوط نمی‌شود. به‌همین مناسبت، در این‌جا تنها از چندکتاب اولر، که ارتباطی مستقیم با آنالیز دارد، صحبت می‌کنیم.

اولر، در انتهای سال‌های ۴۰، به‌تکمیل‌طرح عظیم خود پرداخت. او می‌خواست دورهٔ‌کامل آنالیز معاصر را تهیه‌کند. و او، ضمن‌کار، نه‌تنها آن‌چه قبلاً فکر کرده بود انجام داد، بلکه به مراتب از آن پیش‌تر رفت. اولر در نامه‌ای‌که به تاریخ ۴ ژوئیهٔ سال ۱۷۴۴ خود به دوستش کریستیان هولدباخ (مؤلف‌کتاب مشهور«ومسأله‌های‌هولدباخ») می‌نویسد: «من‌متوجه شدم‌که باید مقدمه‌ای برآنالیز بنویسم‌که قسمت عمده‌ای از آن، اختصاصاً به خود این محاسبه مربوط نمی‌شود، ولی شرح آن‌ها را در هیچ جای دیگری هم نمی‌توان پیدا کرد؛ به‌این مناسبت، این تألیف را باید مقدمه‌ای بر حساب بی‌نهایت کوچك‌ها دانست». این نقل قول روشن می‌کند که چرا اولر تصمیم به‌گسترش طرح خودگرفت و قبل از خود آنالیز، «مقدمه‌ای برآنالیز» را نوشت.

به صورتی خیلی کوتاه، کتاب عظیم اولر در زمینهٔ آنالیز را بررسی می‌کنیم:

۱. «مقدمه‌ای برآنالیز بی‌نهایت کوچك‌ها». چاپ اول در لوزان، ۱۷۴۸، دو جلد.

۲. «محاسبهٔ‌دیفرانسیلی». چاپ اول درپترزبورگ، ۱۷۵۵، یك‌جلد.

۳. «محاسبهٔ انتگرالی». چاپ اول در پترزبورگ، جلد اول در سال ۱۷۶۸، جلد دوم در سال ۱۷۶۹ و جلد سوم در سال ۱۷۷۰.

همهٔ این کتاب‌ها (به‌جز جلد دوم «مقدمه‌ای برآنالیز»)، به‌زبان‌روسی چاپ شده‌اند. در این‌جا، شرحی کلی و بسیار کوتاه از مطالب این کتاب‌ها می‌دهیم و توجه بیشتر خود را روی مسأله‌های اساسی متمرکز می‌کنیم.

مقدمه‌ای برآنالیز. اولر در نامهٔ به هولدباخ، هدف و اهمیت این کتاب را روشن می‌کند. در این کتاب، موضوع‌های کلی مربوط به‌تابع‌ها و گروه‌بندی‌های آن‌ها (جبری وغیر جبری، زوج وفرد وغیره) مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ و به خصوص، توجه زیادی به تبدیل تابع‌ها می‌شود، به نحوی‌که برای انتگرال‌گیری، راحت‌تر باشند. به این خاطر، تبدیل کسر را به‌کسرهای ساده‌تر، گویاکردن عبارت‌ها و به خصوص، بسط تابع‌ها به صورت رشته را مورد مطالعه قرار می‌دهد.

کتابی‌که‌به‌آموزش تابع‌اختصاص دارد، با **تعریف تابع** آغازمی‌شود. اولر ازتعریف‌که‌به‌وسیلهٔ یوهان برنولی، معلم‌اولر، داده شده بود، استفاده می‌کند. یوهان برنولی در «یادداشت‌های فرهنگستان‌علوم پاریس»، درسال ۱۷۴۸، این تعریف را داده بود: «تابع یك مقدار متغیر، به کمیتی گفته می‌شودکه به‌طریق دلخواهی ازیك مقدار متغیر و مقادیر ثابت، تشکیل‌شده باشد». با همهٔ تنگی و محدودیت این تعریف، روشن است‌که می‌توان آن را، نسبت به تعریف لایب‌نیتس ـ که مفهوم تابع را به تصور هندسی آن مربوط می‌کرد ـ گام بزرگی به‌جلو برد.

حالا به تعریف اولر می‌پردازیم. در §۴ «مقدمه» می‌خوانیم: «تابع یك‌کمیت متغیر، عبارتی تحلیلی است‌که به‌نحوی از این‌کمیت متغیر وعددها یا کمیت‌های ثابت، تشکیل شده باشد». همان‌طور که می‌بینیم، بین دو تعریف، تفاوت واقعی وجود ندارد. تنها، اولر لازم می‌بیند که در تعریف خود، برطبیعت تحلیلی عبارت، تأکیدکند.

حالا، با بعضی از نتیجه‌گیری‌های خود اولر، که درکتابش آورده است، آشنا شویم.

تبدیل کسرها. این بحث، به‌خودی خود، چیز تازه‌ای نیست. لایب‌نیتس وبرنولی هم، ازتبدیل کسرها وبرای انتگرال‌گیری، استفاده‌می‌کرده‌اند آن‌چه به‌اولر مربوط می‌شود، پیداکردن نظمی در تبدیل کسرها واستدلالی

کردن‌آن است. دراین‌جا، تنها به‌یکی از نتیجه‌گیری‌های اولر می‌پردازیم. اولر، این مسأله را طرح می‌کند: «می‌خواهیم نشان دهیم‌که، با اطلاع‌از عامل سادهٔ مخرج N، به‌چه ترتیب می‌توان کسر سادهٔ متناظر به آن را پیدا کرد».

کسر $\frac{M}{N}$ داده‌شده ومی‌دانیم: $N=(p-qz)S$. می‌خواهیم‌صورت کسر سادهٔ $\frac{A}{p-qz}$ را پیدا کنیم. البته، فرض براین است که S، تابع صحیحی از z است. فرض می‌کنیم: $\frac{M}{N}=\frac{A}{p-qz}+\frac{P}{S}$؛ از آن‌جا به دست می‌آید: $\frac{P}{S}=\frac{M-AS}{(p-qz)S}$. چون P یك تابع صحیح است، به‌ناچار باید $M-AS$ بر $p-qz$ بخش‌پذیر باشد. تساوی، برای هر مقدار z درست است، منجمله برای $z=\frac{p}{q}$، یعنی در حالت $p-qz=0$. ولی $p-qz$، مقسوم‌علیهی از $M-AS$ است، یعنی باید داشته باشیم: $M-AS=0$. از آن‌جا به دست می‌آید: $A=\frac{M}{S}$. باهمین روش‌ساده، امکان تبدیل هم‌ثابت‌می‌شودومقدار مجهول صورت‌کسر ساده‌به‌دست می‌آید.

اولر همه‌جا مواظب است‌که مطالعهٔ «مقدمه»، کارمربوط به‌انتگرال‌گیری را درآینده، ساده کند. او، برای این منظور، «تبدیل‌های اولر» را، که‌کاملاً مشهور است، می‌آورد و می‌دانیم که چه نقش عظیمی در روش محاسبهٔ انتگرال‌های نامعین دارند. اولر، از سه‌نوع «تبدیل» صحبت‌می‌کند ومی‌توان آن‌ها را در هر کتاب مربوط به محاسبهٔ انتگرالی پیدا کرد. ما در این‌جا، تنها به‌یکی از آن‌ها می‌پردازیم. در §۵۱ می‌خوانیم: «فرض‌کنید $y=\sqrt{p+qz+rz^2}$؛ می‌خواهیم‌راحت‌ترین‌تبدیلی را پیدا کنیم، به‌نحوی که عبارت y، عبارتی گویا باشد».

پاسخ چنین است. فرض می‌کنیم

$$y=\sqrt{a^2+bz+cz^2}$$

و

$$\sqrt{a^2+bz+cz^2}=a+xz$$

یعنی

$$b+cz=2ax-x^2z$$

از آن‌جا

$$z=\frac{b-2ax}{x^2-c}$$

و چون $y=a+xz$، داریم:

$$y=\frac{bx-ax^2-ac}{x^2-c}$$

«مقدمه‌ای برآنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها»، از این جهت هم اهمیت دارد که در آن، اصطلاح‌ها و نشانه‌های تازهٔ بسیاری وارد شده است، که خیلی زود جای خود را باز کردند و در هرکتاب دیگری در این زمینه، وارد شدند. مثلاً، اولر، قسمت کسری لگاریتم را **مانتیس** نامیده است. در §۱۱۲ می‌نویسد: «هرلگاریتمی تشکیل‌شده است ازقسمت‌صحیح وقسمت‌کسردهدهی آن؛ قسمت صحیح آن را، معمولاً **مفسر** می‌گویند، قسمت دهدهی آن را هم **مانتیس** می‌نامیم». واژهٔ «مانتیس»، قبلاً هم به‌کار می‌رفت، منتهی برای نام‌گذاری قسمت‌کسری **هر** عددی. اولر هم، همین اصطلاح را برای لگاریتم به‌کار می‌برد.

وضع نشانه‌های π و e هم، به همین استواری به نظر می‌رسد. حرف π (حرف اول واژهٔ یونانی «پری‌فر»، یعنی پیرامون) را قبل از اولر هم، برای‌نسبت محیط دایره بر قطرآن، به‌کاربرده بودند (حتی در سال ۱۷۰۶)، ولی اولر، به‌طور منظم، اول در «مکانیك» خود، یعنی در سال ۱۷۳۶، و سپس در «مقدمهٔ» خود، از آن استفاده کرده است. در §۲۸۳ می‌گوید: «اگر $\frac{1}{\pi}$ را برای‌نسبت قطر برمحیط‌دایره‌بگیریم، داریم: $2AME:d=\pi:1$ و $\frac{AME}{d}=\frac{\pi}{2}$».

نشانهٔ π، در «مقدمه»، خیلی روشن‌تر ظاهر می‌شود. در §۱۲۶ می‌خوانیم: «... محیط این نیم دایره (یعنی به شعاع برابر ۱)، به‌تقریب

برابر می‌شود با ۳/۱۴۰۰۰۴۶».

اولر **صد و بیست وهفت رقم** بعد از ممیز را پیدا می‌کند[1] و ادامه می‌دهد: «به‌جای این عدد، به خاطر سادگی‌کار، می‌نویسیم π، به‌نحوی‌که π عبارت است (به‌ازای $R=1$) ازطول قوس ۱۸۰ درجه». به‌نظرمن، بر خلاف نوع کاربرد π در سال ۱۷۳۶ به وسیلهٔ اولر، این‌بار می‌خواهد π را به‌عنوان نشانهٔ خاصی برای نسبت مفروض به‌کاربرد.

اولر، با نشانهٔ e هم، برای مبنای لگاریتم طبیعی، تقریباً به همین ترتیب، برخورد می‌کند. برای نخستین‌بار، این نشانه را در سال ۱۷۲۸، و سپس، در سال ۱۷۳۶ در «مکانیك» خود، بـه‌کار می‌برد، ولی بازهم در «مقدمه» است‌که از آن به‌طور منظم استفاده می‌کند. در § ۱۲۲ می‌نویسد: «به خاطر سادگی، به جای عدد ۲/۷۱۸۰۰۰ (اولر، بیست وسه رقم بعد از ممیز را می‌دهد)، حرف e را می‌نویسیم، که در واقع، علامت لگاریتم‌های طبیعی یا هذلولوی است».

کاملاً روشن است‌که استعداد یك ریاضی‌دان، در این جهت هم‌بروز می‌کندکه هرچه ممکن است نتیجه‌گیری‌های خود را با روش‌های ساده‌تری به دست آورد. و اولر، در این زمینه، بی‌همتا است. «مقدمه» گواه برآن است‌که اولر چگونه‌توانسته است با روش‌های‌ساده ومقدماتی، به‌نتیجه‌های حیرت آوری برسد. در این‌جا، نمونه‌ای ازاین‌گونه استدلال‌ها رامی‌آوریم.

اگر در a^ω، نما به سمت صفر میل‌کند، در آن صورت: $a^\omega\to 1$:

بنابراین به‌ازای مقادیربسیارکوچك ω می‌توان فرض‌کرد: $a^\omega=1+k\omega$؛ می‌توان ثابت‌کرد که ضریب k برابر است با $\ln a$؛ بنابراین $e^x=1+x$ (به ازای مقادیر کـوچك x)، و از این‌جا، رابطهٔ تقریبی، ولی مهم زیر، به دست می‌آید:

$$\ln(1+x)=\ln e^x=x$$

اولر، با استفاده از رابطهٔ به‌ظاهر ناچیز

---

۱. این مقدار π را «دولانی» در سال ۱۷۱۷ محاسبه‌کرد.

$$a^{\omega}=1+k\omega$$

بدون هیچ محاسبه‌ای، نتیجه‌ای بسیار مهم پیدا می‌کند. روش ساده و مقدماتی او چنین است.

$$a^{\omega i}=(1+k\omega)^{i}$$

$\omega i=z$ می‌گیریم، بنابراین

$$a^{z}=\left(1+\frac{kz}{i}\right)^{i}$$

چون ω، مقداری به اندازهٔ کافی کوچك است، پس i به‌اندازهٔ کافی بزرگ می‌شود.

و اولر، با استفاده از اثبات قبلی خودش، که $k=\ln a$، بلافاصله می‌نویسد:

$$e^{z}=\left(1+\frac{z}{i}\right)^{i}$$

که به خودی خود، رابطه‌ای بسیار جالب است، ولی با قراردادن $z=1$، به یکی از رابطه‌های بنیانی آنالیز می‌رسیم:

$$e=\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}$$

که البته، بیان روشنی از یك مقدار حدی نیست، و این به‌آن مناسبت‌است که در زمان اولر مفهوم‌های مربوط به‌بیان دقیق، تقریباً وجود نداشت.

بسط e به صورت رشته، یا اگر بهتر است، نشان دادن مجموع

$$1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\dots$$

به صورت عدد $e-1$ را، قبلاً، دانیل برنولی، دست‌کم بیست سال قبل از چاپ «مقدمهٔ» اولر، به دست آورده بود، ولی تنها اولر بودکه این‌بسط را ثابت‌کرد، آن هم با روشی ساده وقانع‌کننده.

متأسفانه، این امکان وجود ندارد که به همهٔ مطالب تازه‌ای که در «مقدمه» وجود دارد، و به‌غنای بی‌نظیر آن، بپردازیم. تنها می‌توان از

اساسی‌ترین موارد نام برد، همچون خراب‌کردن سنت هزار ساله‌ای که بنابر آن، کمیت‌های مثلثاتی را به‌صورت **پاره خطها** می‌شناختند وما، هنوزهم، آن‌ها را خطهای مثلثاتی ـ سینوس، کسینوس و غیره ـ می‌نامیم. اولر، نخستین‌کسی بودکه این پاره‌خطها را روی شعاع دایره برد و به‌این‌ترتیب، خود را به **تابع‌های** مثلثاتی رسانید. هم او بود که نمایش امروزی $\sin x$، $\cos x$ و غیره را معمول کرد. او همچنین، رابطهٔ بین این تابع‌ها را با توان‌های موهومی e برقرارکرد.

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x,\quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

ضمن بحث دربارهٔ رشته‌ها، ضرب‌های نامتناهی و غیره، نوشته‌های اولر پر است از نتیجه‌گیری‌های تازه و جالب.

تازگی فکر خود کتاب را هم، باید به وفور اندیشه‌های تازهٔ درون آن، اضافه‌کرد. نه تنها، هرگزکتابی با چنین غنائی از نظر محتوی، منتشر نشده بود، بلکه، طرح، فصل‌بندی، زبان و خلاصه، همه‌چیز آن‌کاملا تازه و بکر بود. این‌کتاب، خیلی زود به صورت کتاب عمومی درسی و معیاری برای تقسیم دوره‌های درس درآمد.

به‌بیان یکی از متخصصان بزرگ آثار اولر «مقدمه، گواهی برآغاز دوران جدید است؛ این کتاب، نمونهٔ مشخصی بود، که هم از نظر محتوی وهم از نظر زبان، راه آیندهٔ پیشرفت ریاضیات را معین می‌کرد».

محاسبهٔ دیفرانسیلی. اولر، به دنبال «مقدمه‌ای بر محاسبهٔ بی‌نهایت کوچك‌ها»، به عنوان راهنمای مطالعهٔ آنالیز عالی، کتاب «محاسبه‌های دیفرانسیلی» را نوشت‌که ـ همان‌طور که قبلاً گفتیم در سال ۱۷۵۵ چاپ شد، ولی‌البته، خیلی زودتر ازآن‌آماده شده بود. اولر، می‌خواست‌فرهنگی از چگونگی این‌قسمت از ریاضیات در زمان خود، تهیه‌کند. خود او، دراین باره، درپایان جلد دوم‌کتاب «محاسبهٔ انتگرالی»، درصفحهٔ ۳۶۶ می‌نویسد: «... به‌نظرمن، این‌کتاب، به‌این‌مناسبت به‌صورت‌فعلی‌تنظیم شده است‌که هم شامل‌کشف‌های احتمالی تازه باشد وهم آن چه‌را تاکنون در این زمینه نشر شده است، در برگیرد». «محاسبهٔ دیفرانسیلی» اولر، تقریباً به‌طورکامل،

شامل همان چیزهایی است که در برنامهٔ محاسبهٔ دیفرانسیلی در زمان ما وجود دارد: قانون‌های دیفرانسیل‌گیری، آنالیز (یعنی تعیین اکستره‌مم‌ها، رفع ابهام)، رشته‌ها وغیره.

هیچ تعجبی ندارد که اولر، مبانی محاسبهٔ دیفرانسیلی را، غیر از آن چه نیوتون، لایب‌نیتس و برنولی‌می‌فهمیدند، درك می‌کرد. زمان، کار خودرا کرده‌بود. ازیك‌طرف، هواداران‌محاسبهٔ تازه (عنوانی‌که درمیانه‌های سدهٔ هجدهم، کم وبیش از مدافتاده بود)، جنبه‌های تازه وقانع‌کننده‌ای به آن داده بودند، و از طرف دیگر، مخالفان آن، که (همچون ج. برکلی، ۱۷۳۴)، ضربه‌های کم وبیش نیرومندی خورده بودند، هواداران آن را وامی‌داشت تا درطبیعت دیفرانسیل وبی‌نهایت‌کوچك، عمیق‌تر شوند. ولی، وقتی‌که‌اولر «محاسبهٔ دیفرانسیلی» خودرا می‌نوشت، درك روشن ویگانه‌ای از مفهوم‌های این محاسبه، مطلقاً وجود نداشت. اولر، در این مورد از مرحلهٔ تکاملی‌بغرنجی‌عبور کرد. شاگردیوهان‌برنولی، طبعاً تحت‌تأثیرآموزش لایب‌نیتس بود و با تغذیه از آفرینش‌های او رشدکرده بود. با وجود این، بعد از فراگیری مبانی محاسبهٔ دیفرانسیلی و مقایسهٔ کارهای نیوتون با کارهای لایب‌نیتس و یوهان برنولی، به‌تدریج از دیدگاه‌های معلمان خود دور وبه‌دیدگاه نیوتون نزدیك شد. او قبول می‌کند که بی‌نهایت کوچك، دقیقاً برابر صفر است؛ §۸۳ «محاسبهٔ دیفرانسیلی» حاکی است: «ولی‌کمیت بی‌نهایت‌کوچك، چیز دیگری نیست جزکمیتی که روبه‌ناپدیدی می‌رود و بنابراین، **این‌کمیت دقیقاً برابر صفر است**... به این ترتیب، اگر کسی بپرسدکه‌کمیت بی‌نهایت‌کوچك در ریاضیات چیست، پاسخ می‌دهیم که دقیقاً برابر صفر است». باید به‌عبارت «دقیقاً برابر صفر است» توجه کرد، زیرا، اولر در §۱۱۴ «مقدمه» برای روشن‌کردن بی‌نهایت کوچك، می‌گوید: «بی‌نهایت‌کوچك، چنان‌کسرکوچکی است‌که **به‌زحمت می‌تواند برابر صفر نباشد**». به این ترتیب، تکامل محسوسی در دیدگاه‌های اولر دیده می‌شود.

این‌دقت اولر هم‌جالب است‌که تأکید می‌کند صحبت برسر بی‌نهایت کوچك **در ریاضیات** است، نه‌کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچك، به‌طورکلی. گمان من این است‌که اولر با این تأکید، می‌خواسته است بین تفسیر خود، با

استدلال لایب‌نیتس از بی‌نهایت کوچك‌ها، فرق بگذارد؛ لایب‌نیتس، درك خود را از مقدار بی‌نهایت‌کوچك، ضمن مقایسه با شن‌ریزه‌های زمین وغیر آن، روشن می‌کند.

هنوزپرسشی‌باقی‌مانده است‌که نمی‌توان، بدون پاسخ، ازآن‌گذاشت. این‌که هر بی‌نهایت‌کوچکی برابر صفر است، آیا به‌معنای آن است که همهٔ بی‌نهایت‌کوچك‌ها باهم برابرند؟ در این مورد، چه عمل‌هائی مجاز است؟ اولر، در §۸۴، جائی‌که به‌مقایسهٔ دوصفر می‌پردازد،پاسخ می‌دهد: $0 - 0$ عملی حسابی و $\frac{0}{0}$ عملی هندسی است. اولی، قابل حذف است، و دومی را باید با حال وهوای لایب‌نیتس روشن‌کرد.

نظری به برخی از مطالب «محاسبهٔ دیفرانسیلی» می‌اندازیم. از تعریف تابع‌آغاز می‌کنیم. دراین‌جا، تکامل چشم‌گیری دیده می‌شود. اولر، در پیش‌گفتار، این‌تعریف را می‌دهد: «وقتی‌کمیت‌هایی، طوری به‌کمیت‌های دیگری مربوط باشند، که باتغییرکمیت‌های اخیر، خودآن‌ها هم دچارتغییر بشوند، کمیت‌های اول را، تابع‌هایی ازکمیت‌های دوم گویند». مفهوم‌رابطهٔ تابعی، به‌مراتب وسعت‌گرفته است وصحبت از این نیست‌که تابع به وسیلهٔ رابطه‌ای برحسب آوندها (آرگومان‌ها) بیان می‌شود. کافی است، تغییریك متغیر در ارتباط باتغییر متغیر دیگری باشد، تا بتوانیم‌حکم‌کنیم‌که بین این متغیرها، یك بستگی‌تابعی‌وجود دارد. دست‌کم، روح این تعریف، به‌تعریفی که بعدها به‌وسیلهٔ لباچوسکی و دیریکله از تابع دادند، خیلی نزدیك است.

سرچشمهٔ آن‌چه در مدرسه‌های عالی امروز معمول است و محاسبهٔ دیفرانسیلی را به عنوان روش جست وجوی مشتق در نظر می‌گیرند، در کارهای اولر است. محتوی محاسبهٔ دیفرانسیلی، از نظر اولر، چنین بود: «محاسبهٔ دیفرانسیلی عبارت است از روش تعیین نموهای ناچیزی‌که برای تابع‌هائی به دست می‌آید، وقتی که کمیت‌هایی که این‌ها تابع‌های آن‌ها هستند، نمو ناچیزی داشته باشند».

از این‌روش،قاعدهٔ زیربه‌وسیلهٔ مؤلف، به‌دست‌می‌آید: «تابع‌مفروض، ابتدا و به نوبت، نسبت به هریك ازجزءهای‌آن دیفرانسیل‌گیری می‌شود، به‌نحوی‌که هربار، تنها یکی‌از جزءها متغیر، ودیگران ثابت به‌حساب‌آیند.

سپس، این دیفرانسیل‌های جداگانه را، که نسبت به‌جزءهای جداگانه وبه طریقی که گفتیم به‌دست آمده‌اند، باید به‌صورت مجموع واحدی درآورد تا دیفرانسیل تابع مفروض به‌دست آید».

بعد، دیفرانسیل‌گیری از تابع‌های مقدماتی را مطرح می‌کند: توان، حاصل ضرب، کسر وغیره. رابطه‌های نهائی‌که پیدا می‌کند، همان است‌که درکتاب‌های درسی وجود دارد، تنها در بعضی موارد، درکاربرد بسط به صورت رشته، اختلاف‌هایی دیده می‌شود. رشته‌های مورد استفادهٔ اولر، همان‌هایی است‌که در «مقدمه» و با روش‌های مقدماتی به‌دست آمده است و، بنابراین، کاربرد آن‌ها در رابطه‌های مربوط به دیفرانسیل‌ها، مشکلی‌به وجود نمی‌آورد. مثلاً، $d(\ln x)$ را به‌کمك رشته می‌دهد. ابتدا به دست می‌آورد.

$$dy=\ln\left(1+\frac{dx}{x}\right)$$

سپس، از رشته‌ای‌که در «مقدمه» به دست آورده است، استفاده می‌کند (فصل هفتم، § ۱۲۳):

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots$$

و به عنوان نتیجه، می‌نویسد:

$$dy=\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{dx}{x}\right)^3-\dots$$

و با حذف جمله‌هایی‌که شامل توان‌های بالا هستند، اولر به همان رابطهٔ معمولی برای دیفرانسیل لگاریتم طبیعی می‌رسد.

جالب است‌که اولر، برای به دست آوردن رابطه‌های دیفرانسیلی، تساوی‌های تقریبی $\sin\alpha=\alpha$ و $\cos\alpha=1$ - به‌ازای مقادیر کوچك α - استفاده می‌کند، که امروز مجاز شمرده می‌شود. این تساوی‌ها، موجب می‌شودکه اولر بتواند بعضی نتیجه‌های بسیار ساده را پیدا کند. مثلاً اگر

$$y=\sin x,\ dy=\sin(x+dx)-\sin x,$$

$$dy=\sin x\cos dx-\cos x\sin dx-\sin x$$

یا

$$dy=1\times\sin x+\cos x\times dx-\sin x=\cos x\,dx$$

از زمانی‌که شرط

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

را شرط اولر - دالامبرمی‌نامند، خیلی‌نمی‌گذرد، قبلاً، آن را، شرط‌کوشی-ریمان می‌گفتند. در واقع، این شرط در «محاسبهٔ دیفرانسیلی» اولر وجود دارد (§۲۳۲). درآن‌جا، تنظیم این‌شرط، به این صورت انجام گرفته است.

اولر ابتدا ثابت می‌کند که مشتق دوم تابع دو متغیره، ارتباطی به ردیف دیفرانسیل‌گیری ندارد. اگر دیفرانسیل تابع v را dv بگیریم

$$dv=Pdx+Qdy$$

او فرض می‌کند

$$dP|_{x=x_0}=Zdy,\ dQ|_{y=y_0}=Zdx$$

زیرا تنها با این شرط‌ها، دیفرانسیل‌های مرتبهٔ دوم

$$\underset{x=\text{ثابت}}{d(Pdx)}=Zdxdy,\ \underset{y=\text{ثابت}}{d(Qdy)}=Zdydx$$

با هم برابر می‌شوند، همان چیزی که قضیهٔ مربوط به بی‌ارتباطی ردیف دیفرانسیل‌گیری می‌خواهد. از این‌جا، بلافاصله، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

(اولر، برای نشان‌دادن‌مشتق جزئی، ازهمان‌علامت معمولی مشتق، منتهی با پرانتز، استفاده می‌کند. نخستین‌کسی‌که علامت ∂ را برای‌مشتق جزئی به‌کاربرد، لژاندربود). به‌این ترتیب، دست‌کم، شرط لازم این‌رابطه را، اولر به دست آورده بود.

قضیهٔ معروف مربوط به تابع‌های متجانس در §۲۲۲ آمده است.

فرض‌کنید v تابعی متجانس از مرتبهٔ n نسبت به x و y باشد. اولر $y=tx$ می‌گیرد، به‌نحوی‌که $v=T(t)x^n$، که در آن $T(t)$ تابعی است فقط از t. فرض‌کنید $dT=\theta dt$، در این صورت

$$dv = x^n\theta dt + nx^{n-1}Tdx$$

از طرف دیگر، $dv = Pdx + Qdy$، یا با توجه به $dy = tdx + xdt$،

$$dv = Pdx + Qtdx + Qxdt$$

اولر، دو عبارتی را که برای dv به دست آورده است، مساوی‌قرار می‌دهد:

$$x^n\theta dt + nx^{n-1}Tdx = Qxdt + (P+Qt)dx$$

از آن‌جا

$$P + Qt = Tnx^{n-1}$$

ولی $Tx^n = v$، یعنی $P + Qt = n\frac{v}{x}$، و چون $t = \frac{y}{x}$، بنابراین

$$P + Q\frac{y}{x} = n\frac{v}{x}$$

که به رابطهٔ نهائی منجر می‌شود:

$$nv = Px + Qy$$

این قضیه را، امروزه دقیق‌تر، و در عین حال کوتاه‌تر و ساده‌تر، اثبات می‌کنند، ولی آن حالت طبیعی که در استدلال اولر دیده می‌شود، در آن‌جا وجود ندارد.

خواننده به‌یادداردکه لایب‌نیتس‌هم، از پیوستگی، به‌عنوان مهم‌ترین خاصیت تابع، یاد می‌کند. لایب‌نیتس، خاصیت پیوستگی را با تصورهای کلی فلسفی مربوط می‌کرد. اولر هم، تأکید برپیوستگی تابع را فراموش نمی‌کند، ولی، البته، در چارچوب آنالیز باقی‌می‌ماند. در §۱۱۸، این سطرها به‌چشم می‌خورد: «اگر در تابع y به جای x، همه‌جا، $x+dx$ را قرار دهیم، وکمیت حاصل را y' بگیریم، در این صورت، دیفرانسیل می‌شود $dy = y' - y''$». ولی اولربه‌تفصیل توضیح می‌دهدکه دیفرانسیل کمیت متغیر، مقداری بی‌نهایت کوچك است[1]، بنابراین $dy \to 0$، وقتی

۱. «به این ترتیب، همراه با لایب‌نیتس، تفاوت‌های **بی‌نهایت کوچك** را دیفرانسیل می‌نامیم...» (فصل چهارم، §۱۱۴).

$dx \to 0$. به‌این ترتیب، نه تنها پیوستگی وارد شده است، بلکه ضمناً، با بیان ریاضی آمده است.

چند کلمه‌ای هم دربارهٔ جست و جوی اکستره مم صحبت می‌کنیم. آن‌چه اولر دربارهٔ این‌مسأله آورده است، با آن‌چه در زمان ما وجوددارد، خیلی متفاوت است. اولر در این‌جا هم از رشته‌ها استفاده می‌کند، و ضمناً باید قبول‌کردکه این روش، تمامی آنالیز را به‌سطح بالاتری ارتقا می‌دهد. در مدرسه‌های عالی امروزه، آنالیز، قبل از رشته‌ها درس داده می‌شود و، بنابراین، نمی‌توان ازبسط اولر استفاده‌کرد. طرحی از نتیجه‌گیری اوبرای به دست آوردن شرط لازم وجود ماکزیمم، چنین است. اگر برای تابعی مثل $y = y(x)$، به جای متغیر قرار دهیم $x \pm \alpha$، تابع را می‌توان به این صورت در نظرگرفت:

$$y \pm \alpha\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{\alpha^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3} + \dots$$

در نقطهٔ ماکزیمم داریم:

$$y > y + \alpha\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \dots$$

همچنین

$$y > y - \alpha\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} - \dots$$

با حذف مقادیرکوچك‌تر از مرتبهٔ بالاتر، داریم

$$y > y + \alpha\frac{dy}{dx} \quad \text{و} \quad y > y - \alpha\frac{dy}{dx}$$

از آن‌جا به دست می‌آید

$$\alpha\frac{dy}{dx} = 0$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

روشن است که بـه کارگرفتن رشته‌ها، راه خاصی برای بررسی همهٔ حالت‌ها، باز می‌کند: وقتی کـه مشتق اول برابر صفر باشد، یا مشتق دوم صفر شود، یا مشتق‌های اول ودوم با هم صفر شوند وغیره. طرح امروزی مطلب در مدرسه‌های عالی، دانشجویان را از این وسیلهٔ نیرومند بررسی، محروم می‌کند.

درمورد رفع‌ابهام، می‌دانیم که برای نخستین‌بار تا سطح‌روش یوهان برنولی مورد بحث قرارگرفت و بـه نام روش هوپیتال مشهور شد. طبیعی است‌که اولرهم در «محاسبهٔ دیفرانسیلی» خود، به این مسأله پرداخته‌است (فصل‌پانزدهم). حالت $\frac{0}{0}$، دقیقاًشبیه امروز حل شده است، با این‌تفاوت، که وجود نقطهٔ ξ را، که در آن‌جا خارج قسمت $\frac{P(\xi)}{Q(\xi)}$ پیدا مـی‌شود، تضمین نمی‌کند. و می‌دانیم که جواب به این پرسش را، بعدهـا، و قضیهٔ کوشی داده است.

«محاسبهٔ دیفرانسیلی» شامل مقدار بسیار زیـادی مطلب جالب و آموزنده است. ما به مناسبت این تألیف فوق‌العاده، تنها به دونکته اشاره می‌کنیم. می‌دانیم که، چه برای نیوتون و چه‌برای لایب‌نیتس (و طبعاً برای برنولی)، محاسبهٔ دیفرانسیلی به‌صورت مستقل طرح نشده بـود. محاسبهٔ دیفرانسیلی، برای نیوتون بـا زمان ـ و از آن راه بـا مکانیك ـ و برای لایب‌نیتس با هندسه، بستگی استواری داشت. اولر، نخستین‌کسی بود که محاسبهٔ دیفرانسیلی را به‌صورت خالص خود طرح‌کرد، به‌صورت بحثی عام که نه به چیزی مربوط است ونه باچیزی ناسازگار. نکتهٔ دوم به‌قدری‌ساده است که واضح بـه نظر می‌رسد. قبل از انتشار کتاب اولر، برای مطالعهٔ محاسبهٔ دیفرانسیلی وکاربردهای آن، راهنمائی وجود نداشت. با این‌کتاب چنین راهنمائی، در اختیار همه قرارگرفت. با این‌حقیقت، اهمیت‌کار اولر، کاملاً ارزیابی می‌شود. ممکن است‌کسی به این مطلب اعتراض‌کند: برای نخستین‌بار، درسال ۱۶۹۶، «دورهٔ آنالیز بی‌نهایت کوچك‌ها» از هوپیتال، وبعد، درست سی‌سال قبل از انتشار «محاسبهٔ دیفرانسیلی» اولر، تألیف‌معلم او، یوهان برنولی، از چاپ خارج شد؛ و بنابراین، این توجه استثنائی به

کتاب اولر، تا حد زیادی مبالغه‌آمیز است. بهترین‌پاسخ را، به‌این‌اعتراض، خود یوهان برنولی داده است. یوهان، مجموعهٔ آثار خود را در چهار جلد برای اولر فرستاد و در نامهٔ ضمیمهٔ آن، یادآور شد که در نوشته‌های او، هیچ‌چیز قابل مقایسه‌ای با اندیشه‌های اولروجود ندارد. «زیرا من‌ریاضیات عالی را در دوران کـودکی آن پرورانده‌ام، در حالی‌که تو آن را در سن بلوغ خود به‌مانشان داده‌ای». همه‌چیز در این‌جملهٔ یوهان گفته شده‌است. پیشینیان اولر، مطالب‌جدا ازهم رامورد بررسی قرار می‌دادند (البته، کتاب درسی هوپیتال به‌این‌جا مربوط نیست)، در حالی‌که اولر، همه‌چیز را مطرح کرده‌است. البته، اگرکتاب اولر، تنهاشامل نتیجه‌گیری‌های دیگران‌می‌شد، ارزش آن بسیار پایین‌تر بود.

ولی، واقع این است‌که اولر توانست (و تنها او بود که توانست) موضوع‌هـا را، و مثلاً محاسبهٔ دیفرانسیلی را، چنان طرح‌کندکـه هم یك جمع‌بندی‌کامل از همهٔ کارهای پیشینیان در این زمینه باشد وهم، ضمناً، یك تألیف اصیل و بکری‌که نتیجه‌ای است ازخلاقیت درخشان خود نویسنده.

تهیه وچاپ اثرفوق‌العاده‌ای، مثل «محاسبهٔ دیفرانسیلی»، به‌هیچ‌وجه به‌معنای آن نیست‌که اولر تنها به آماده‌کردن همین یك اثر، مشغول بود. او اصلانمی‌توانست تمامی نیروی خود را، تنها روی یك موضوع، متمرکز کند. زندگی‌هم، با تمام تلاطم‌ها وتشویش‌های خود، وجود داشت وبعضی از آن‌ها او را خوشحال می‌کرد. مثلا در نامه‌ای که در سال ۱۷۵۶ به موپرتوئی نوشته است، باخوشحالی اطلاع‌می‌دهدکه درجریان محاکمه‌علیه همسایهٔ خود، پیروز شده‌است. جریان «خیلی بغرنج» بود: لازم بودگودال خیابان پرشود. مبلغ مورد اختلاف، عبارت بود ازصد تالر سهم هر طرف، پنج تالر هم هزینهٔ محاکمه بود.

«بازی» سرنوشت‌بسیارپرمعنی‌است. جنگ هفت‌ساله (۱۷۵۶-۱۷۶۳) آغاز شد کـه ضمن آن، نیروهای روسی، در سال ۱۷۶۰، برلین را اشغال کردند. اولر درشارلوتنبورك (حومهٔ برلین) ملك‌کوچکی داشت‌که درجریان جنگ ویران شد. این‌خرابی، به‌اولر ـ که قبل ازآن هم غنی نبود ـ لطمهٔ زیادی زد، ولی‌فرماندهی روس، خسارت اولر را جبران‌کرد وکاترین دوم،

در تاج‌گذاری خود، هزار فلورین برای او فرستاد. احتمالاً کاترین از همان زمان خیال داشت اولر را به‌برگشتن به روسیه قانع کند، زیرا، خیلی زود به‌دستور او گفتگوهای مستقیم با اولر، در این زمینه، آغاز شد.

درسال‌های بین انتشار «محاسبهٔ دیفرانسیلی» و پیش‌آمدهای یادشده، اولر توانست پایه‌های رشتهٔ دیگری از دانش را بریزد که هم اساس و هم ابزارکارآن، ریاضیات بود. این رشته عبارت بود ازنظریهٔ پایداری دستگاه‌های کشسان. در سال ۱۷۵۹، در نشریهٔ فرهنگستان علوم برلین، اثری چاپ شدکه در واقع، باید آن را تولد رشتهٔ تازه‌ای در مکانیك و ریاضیات دانست. عنوان این مقاله «دربارهٔ نیروی ستون» بود. در این مقاله، اولر حالتی را بررسی می‌کندکه یك میلهٔ قائم تحت‌تأثیر یك‌بار اضافی، پایداری طولی خود را از دست می‌دهد وخم می‌شود.

در سال ۱۷۶۱، مادر اولر مرد. قبل از مرگ پدر (۱۷۴۵)، زن و شوهر پیر در مولد خود زندگی می‌کردند؛ بعد از مرگ پدر، مادر تنها شد و اولر پافشاری کردکه نزد او به‌برلین بیاید. اولر، حتی به‌دیدار مادرش در فرانکفورت رفت. او می‌خواست از فرصت استفاده کند و از موطن‌خود، که ربع قرن قبل آن را ترك‌کرده بود، دیداری داشته باشد.

در میان زمینه‌های بسیار زیادی‌که ذهن اولر را مشغول داشته‌بود، زمینهٔ تبدیل‌مکانیك به‌زبان‌آنالیز، یکی ازمقام‌های اول را در اختیارداشت. حتی در سال ۱۷۳۶، در مقدمهٔ کتاب اول خود دربارهٔ مکانیك («مکانیك یا دانش حرکت») خاطرنشان می‌کندکه به دنبال این‌کتاب، کتاب‌های دیگری خواهدنوشت: «با وجود این، هنوز از این‌جا قانون حرکت جزءهای [جسم‌های] جداگانه به‌دست نمی‌آید، به‌این مسأله، اختصاصاً درکتاب‌های بعدی خواهم پرداخت و در آن‌ها حرکت مربوط به جسم‌های محدود را تعریف خواهم‌کرد». ولی تا سال ۱۷۶۵ طول‌کشید که اولر کتاب خود را دربارهٔ مکانیك جسم‌های با اندازه‌های‌محدود، منتشرکرد: «نظریهٔ حرکت‌جسم‌های صلب». این‌کتاب، به عنوان شالودهٔ محکمی بود که، بلافاصله، ساختمان مکانیك‌کلاسیك، برپایهٔ آن، آغاز شد.

در طول سال‌های زیادی (ازسال ۱۷۴۸)؛ اولر یکی از برجسته‌ترین

کسانی بودکه در بحث‌های مربوط به‌حل معادلهٔ موجی، شرکت می‌کرد. بحث، بامفهوم فیزیکی خود، ازاین‌جا آغاز شدکه دانیل برنولی ودالامبر، به‌طور جداگانه و به صورت کاملا متفاوت با یکدیگر، حل معادلهٔ موجی را طرح‌کردند. این بحث، خیلی زود، به‌بحثی درریاضیات خالص‌کشیده شد و روی این مسأله متمرکزگردید: آیا هر تابع دلخواه را می‌توان به‌رشتهٔ مثلثاتی تبدیل‌کرد؟ اولر، به‌صورتی ریشه‌ای با این مسأله برخورد کرد. او فکر می‌کردکه رشته را می‌توان به‌وسیلهٔ دو تابع دالامبر نشان داد، حتی اگر این دو تابع به صورت منحنی دلخواهی معین شده باشند، یعنی، هیچ اجباری نیست‌که بیانی تحلیلی داشته باشند. از همین بحث، راه مستقیمی به‌لاگرانژ وسپس به‌فوریه ودیریکله و تمامی نظریهٔ رشته‌های مثلثاتی‌بازشد.

در جریان ربع قرن، اولر، زینت و افتخار فرهنگستان برلین بود و تمامی بار رهبری‌آن را به‌دوش می‌کشید، به‌جزآن، به‌صادقانه‌ترین‌صورتی، همهٔ دستورهای شاه فردریك را، هرقدر که بی‌اهمیت بودند، انجام می‌داد (مثل بازرسی آب‌رسانی دربار شاهی وغیره)، با همهٔ این‌ها، فردریك دوم به‌خود اجازه داد، نسبت‌به‌دوست خود، رفتاربی‌ادبانه‌ای داشته‌باشد. رابطهٔ بین آن‌ها به‌هم خورد. در همین زمان بودکه و. س. دولگوروکوف، سفیر روسیه، ازمراجعه وگفت وگوی بااولر، برای برگرداندن او به پترزبورگ خسته نمی‌شد. دولگوروکوف، دستوری‌ازکاترین دوم‌داشت‌که باهمهٔ شرایط اولر موافقت‌کند. شرایط اولر، چنین بود: او مقام مدیریت فرهنگستان را با حقوق سه هزار روبل در سال می‌پذیرد؛ بعد از مرگ او، باید مقرری سالی هزار روبل به‌همسرش داده شود؛ سه‌پسر او، موقعیت شایسته‌ای در پترزبورگ داشته باشند و پسر بزرگش به سمت منشی فرهنگستان انتخاب شود. دولگوروکوف، با همهٔ این شرایط موافقت‌کرد.

مشکل‌نامنتظری پیش‌آمد: شاه‌نمی‌خواست اولررا آزادکند. لجاجت شاه، نه به‌خاطر احترام به خدمت اولر در فرهنگستان برلین بود و نه به خاطر نگه داشتن یك دانشمند جهانی در آلمان. در بهترین حالت، باید گمان‌کنیم‌که می‌خواست از حیثیت خودش، به عنوان «مدافع دانش و هنر» دفاع‌کند، ولی معقول‌تر از همه این است‌که کار او را، تنها یك خودکامی ساده بدانیم. بعداز آن‌که اولر، چندباربه‌فردریك مراجعه‌کرد، این‌یادداشت

را به او دادند: «به‌میل من رفتار کنید، این‌قدر دربارهٔ این مسأله پافشاری نکنید و بیش از این دربارهٔ این موضوع برای من ننویسید». اولر لزومی به «رعایت میل شاه» ندید و در ۳۱ آوریل دادخواستی کتبی ارائه داد ودر آن به‌شاه یادآور شدکه با تبعه‌ای ازسویس سروکار دارد. به‌سختی‌می‌توان فهمیدکه چه‌چیزی موجب تغییر در رفتار فردریك شد، ولی به هر حال، در دوم ماه مه، موافقت‌کتبی خود را برای اولر فرستاد: «در پاسخ نامهٔ ۳۰ آوریل امسال شما، به‌شما اجازه‌می‌دهم به‌روسیه بروید». اولر درماه‌ژوئن به راه افتاد. ولی سرآخر، فردریك، زهر طبیعت حقیر خود را ریخت: پسر کوچك‌اولر، کریستوفر، راازخدمت‌نظام‌آزادنکرد(خیلی‌بعدوباخواهش‌شخصی کاترین دوم، با رفتن او موافقت‌کرد) ونامه‌ای به دالامبر نوشت که‌به‌سختی می‌توان گفت چه‌چیزی درآن‌کمتر پیدا می‌شود: خوش‌مزگی یا شرافت. تکه‌ای از این سند «افتخارآمیز» را می‌آوریم: «آقای اولر عاشق خرس بزرگ وخرس‌کوچك (دب‌اکبر و دب‌اصغر) است و به‌شمال نزدیك می‌شود تا آن‌ها را بهتر ببیند. کشتی‌ای‌که او را می‌برد، دچارحادثه می‌شود و همه غرق می‌شوند. موجب نهایت تأسف است، زیرا مواد زیادی به‌کار رفته بود تا شش جلد بزرگ، سراسر پر از عدد و رقم شده بود، و حالا اروپا از لذت خواندن این نوشتهٔ جالب محروم شده است».

دالامبر، پیشنهادمصرانهٔ فردریك رانپذیرفت ولاگرانژ را به‌جای‌خود معرفی کرد. اولر، به مناسبت تعیین لاگرانژ گفته است: «برای من افتخار بزرگی است‌که جای خود را به مشهورترین هندسه‌دان این قرن می‌دهم». باید یادآوری کردکه این «مشهورترین هندسه‌دان» درآن زمان تنها سی‌سال داشت، یعنی درست نصف سن اولر.

اولر، در سال‌هایی که در برلین بود، بیش از ۳۸۰ رساله نوشت، یعنی تقریباً سالی ۱۵ رساله؛ که از آن‌ها ۲۷۵ تا، یعنی سالی ۱۱ تا، چاپ شده بود. اولر بیشترنوشته‌های خود را در «یادداشت‌ها»ی فرهنگستان‌برلین و «تفسیر»های فرهنگستان پترزبورگ چاپ می‌کرد. نیمی از صفحه‌های «یادداشت‌ها»ی برلین، با نوشته‌های اولر پر می‌شد، واین تنها مربوط به سال‌های از ۱۷۴۳ تا ۱۷۶۶ (که اولر در برلین بود) نمی‌شد، بلکه در

طول سال‌های بعد از آن هم ادامه داشت.

همین‌که اولر به پترزبورگ رسید، با وجود تشویشی‌که برای سر و صورت‌دادن خانوادهٔ بزرگ خود (۱۸ نفر) داشت، هر روز، و ساعت‌های متوالی، پشت‌میز می‌نشست و کار می‌کرد. کاترین دوم، برای خرید خانه، ۸ هزار روبل به او هدیه‌کرد و، به این ترتیب، مهمترین مشکل زندگی اورا حل کرد.

درسال‌های ۱۶۶۸-۱۶۷۰، فرهنگستان پترزبورگ، یکی ازعظیم‌ترین (چه از نظر محتوی و چه از نظر حجم) آثار اولر، یعنی سه جلد «محاسبهٔ انتگرالی» را، چاپ‌کرد. این کتاب، شامل محاسبه‌های انتگرالی، به همان صورتی‌که امروزمی‌فهمیم، ومجموعه‌ای‌ازروش‌های‌انتگرال‌گیری‌معادله‌های دیفرانسیلی بود. مطالب این سه جلد، به این ترتیب تنظیم شده بود. جلد اول (حدود ۴۰۰ صفحه) شامل انتگرال‌گیری از تابع‌ها (۲۰۰ صفحه) و انتگرال‌گیری از معادله‌های دیفرانسیلی عادی مرتبهٔ اول است؛ جلد دوم (حدود ۳۶۰ صفحه)، اختصاص به معادله‌های دیفرانسیلی عادی از مرتبهٔ دوم و مرتبه‌های بالاتر دارد؛ و بالاخره، جلد سوم، شامل معادله‌های دیفرانسیلی با مشتق‌های جزئی است. برای این که ارزش این‌کتاب بزرگ را بدانیم، کافی است یادآوری‌کنیم که تقریباً تمامی مطالب این سه جلد، متعلق به‌خود اولر است؛ به جز این، تقریباً تمام جلد دوم وسوم، شامل روش‌ها و نتیجه‌گیری‌های بکری است که مؤلف آن‌ها، تنها خود اولر بوده است.

«محاسبهٔ انتگرالی» با تعریف مفهوم محاسبه، آغاز می‌شود که با تعریف‌یوهان برنولی، اختلاف‌کمی‌دارد. اولر می‌گوید: «محاسبهٔ انتگرالی، روشی است‌که به‌وسیلهٔ آن، از رابطهٔ مفروض بین‌کمیت‌های دیفرانسیلی به رابطهٔ بین خود کمیت‌ها می‌رسیم؛ عملی‌که به‌کمك آن، این منظور حاصل می‌شود، انتگرال‌گیری نامیده‌می‌شود». اگر دراین‌جا، بتوان مختصرتفاوتی با کلامی‌که یوهان برنولی، دورهٔ محاسبهٔ انتگرالی خود را آغاز می‌کند، پیدا کرد، در «تعریف۲» کتاب اولر، عیناً همان سخن برنولی‌تکرار می‌شود: «$\int Xdx$، یعنی مقدار متغیری‌که دیفرانسیل آن برابر Xdx باشد».

این‌که اولر تا چه حد در اثر خود بـه کمال رسیده است، از این‌جا می‌توان‌فهمیدکه بعضی‌ازمطالبی‌که درکتاب‌های درسی امروز طرح‌می‌شود، عیناً به همان صورتی است کـه در کتاب اولر وجود دارد. مثلا در §۴۶ می‌بینیم: «از آن‌جا که دیفرانسیل توان x^m برابر است با $mx^{m-1}dx$، پس، برعکس

$$\int mx^{m-1}dx = m\int x^{m-1}dx = x^m$$

$m=n+1$ می‌گیریم، در این صورت

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad \text{و} \quad a\int x^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$$

بنابراین **انتگرال کامل** [اولر، انتگرال نامعین را، کامل می‌نامد] عبارت دیفرانسیلی $ax^n dx$ برابر است با $\frac{a}{n+1}x^{n+1}+C$». اولـر پیشنهاد می‌کندکه برای اطمینان از درستی نتیجه، از آن دیفرانسیل بگیریم، و به عنوان حالت استثنائی، از مورد $n=-1$ یاد می‌کند. خلاصه کنیم، کسی که «محاسبهٔ انتگرالی» اولر را دراختیار داشته‌باشد، در واقع، با یك‌کتاب کامل درسی در زمینهٔ محاسبهٔ انتگرالی سروکار دارد. البته، بـا مطالعهٔ دقیق‌کتاب، می‌توان متوجه شدکه اولر، در مورد بعضی از حکم‌ها، نیازی به استدلال نمی‌بیند و در مورد بعضی دیگر، استدلال او، کم وبیش، و نه بـه‌طور کامل، قانـع‌کننده است. مثلا، اولـر، این حکـم را بـدیهی می‌پنداردکه ضریب ثابت را می‌توان از زیر انتگرال بیرون آورد، و یا، انتگرال مجموع تعداد محدودی جمله، برابر است با مجموع انتگرال‌های آن‌ها. و اگر قضیه‌ای در این‌باره می‌آورد که هر دیفرانسیلی، دارای تعداد نامعینی انتگرال است، اثبات او، تنها به‌تأکید براین نکته منجر می‌شود که هر مجموعی به‌صورت $P(x)+C$، تنها یك دیفرانسیل دارد: dp.

فصل اول شامل همهٔ رابطه‌های مربوط بـه عبارت‌های گویا است. اولر، با جمع‌بندی این فصل، می‌گوید: «توانستیم این فصل را طوری‌تهیه کنیم، که هیچ موضوعی باقی‌نماند ونیازی به‌جای دیگری نباشد». اوسپس یادآوری می‌کندکه ازهر دیفرانسیل گویائی می‌توان انتگرال گرفت ونشان

می‌دهدکه انتگرال به‌صورت‌کدام تابع‌هـا بیان می‌شود. باگذشت ده‌ها سال از نوشتهٔ اولر دربارهٔ انتگرال‌گیری تابع‌های گویا، هیچ‌چیز اساسی به آن اضافه نشد.

در فصل دوم؛ به انتگرال‌گیری تابع‌های گنگ می‌پردازد و از این تابع آغاز می‌کند:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

درهمین‌جاست‌که اولر، ناگهان، روش‌تبدیلی‌مشهور خود رامی‌آورد. اگراز بعضی‌تکمیل‌ها بگذریم، مؤلفان امروزی، تقریباً هیچ تغییری دراین روش‌ها نداده‌اند.

اولر، بعد از ساده‌ترین نمونه‌های گنگ، به دیفرانسیل دو جمله‌ای می‌پردازد وحالت‌هایی را مشخص‌می‌کندکه دوجمله‌ای قابل‌گویا شدن‌است. از آن‌جاکه اولر، عبارت را به شکل

$$x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

می‌دهد، شرایط‌گویاکردن را به‌این صورت به دست می‌آورد: یا $\frac{m}{n}$ و یا $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ باید عددی صحیح باشد. اولر در این‌جا یـادآوری می‌کند: «به سادگی می‌توان فهمید که تبدیل‌های دیگری، که مناسب این منظور باشد، ممکن نیست». این حکم، که به اثبات آن نپرداخته است، گواهی بر سرچشمهٔ معرفت شهودی اولر است و برای اثبات دقیق آن، باید تا سال ۱۸۵۳ ـ که پ. ل. چبیشف توانست‌آن را ثابت‌کند ـ صبرکنیم.

مطالب بعدی این فصل نسبتاً کوچك، از حالت‌های مختلفی صحبت می‌کندکه به‌نحوی به‌صورت اصلی عبارت‌گنگ، تبدیل می‌شوند.

در فصل چهارم (عبارت‌های لگاریتمی ونمائی)، به‌مناسبت انتگرال‌هایی‌که هنوز به‌نتیجهٔ‌نهائی نرسیده‌اند، بیان اولر، حالت خاص و جالبی به

خود می‌گیرد. او در §۲۱۹ می‌نویسد: «اگر می‌شد $\int \frac{dz}{\ln z}$ را پیدا کرد، برای آنالیز فوق‌العاده مفید بود، ولی به‌هیچ ترتیبی تاکنون نتوانسته‌ایم آن را، نه‌برحسب لگاریتم‌ها ونه برحسب زاویه‌ها، بیان کنیم». همان‌طور که‌دیده‌می‌شود،اولرباحتیاطسخن‌می‌گوید.می‌گوید **«تاکنون‌نتوانسته‌ایم...»** ولی این امکان را برای‌آینده، به‌طور قطع، نفی نمی‌کند. او به دنبال‌جملهٔ فوق، یادآوری جالبی می‌کند: «ظاهراً [چون اولر نمی‌داند که آیا واقعاً «تاکنون نتوانسته‌ایم» یا، درواقع، ممکن نیست]، عبارت $\int \frac{dz}{\ln z}$ باید به‌صورت یك تابع غیرجبری (ترانساندانت) باشد». در این‌جا با این‌اندیشه برخورد می‌کنیم که «این انتگرال پیدا نشده»، تنها یك اشکال فنی ساده و تأسف‌آورنیست، بلکه چیزتازه‌ای است‌که نمی‌تواند به‌کمك روش‌های بستهٔ موجود،به‌صورت یك تابع‌بیان‌شود. اولر، بلافاصله، به‌مطالعهٔ این‌تابع‌جدید می‌پردازد، و برای این منظور، آن را به‌صورت یك رشته بسط می‌دهد. به این ترتیب، دید تازه‌ای نسبت به‌انتگرال نامعین پیدا می‌شود وراهی‌برای بررسی خانوادهٔ تازه‌ای از تابع‌ها به دست می‌آید ـ تابعی‌هایی که نتیجهٔ انتگرال‌های نامعین پیدا نشده هستند.

فصل پنجم، عبارت‌های شامل زاویه‌ها (یعنی عبارت‌های به صورت $\arcsin x$ و غیره) و سینوس‌های زاویه‌ها را، بررسی می‌کند. مطالب این فصل هم، همچون فصل‌های قبل، چه از نظر موضوع و چه از نظر طرح مطلب، تقریباً هیچ‌تفاوتی با کتاب‌های امروزی مربوط به‌محاسبهٔ انتگرالی ندارد.

اندکی هم به‌فصل ششم می‌پردازیم‌که اختصاص به محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌ها دارد.

اولر این مسأله را طرح می‌کند: می‌دانیم $\int X dx$ به ازای $x=a$ برابر b می‌شود، می‌خواهیم انتگرال را به ازای مقداری از x پیدا کنیم. اولر، برای حل مسأله، به مقدار معلوم a، نمو کوچك α را می‌دهد. او تابع X را چنان‌فرض می‌کندکه به‌ازای تغییر کوچك x، تغییر X هم کوچك

باشد. بنابراین، در طول از $x=a$ تا $x=a+\alpha$، تابع X آن‌قدر کم تغییر می‌کند، که می‌توان‌آن را ثابت به‌حساب‌آورد. در این حالت $y=\int X dx$ برابر (مقدار ثابت $+Xx$) می‌شودکه با توجه به $x=a$ و $y=b$ داریم: $b=$مقدار ثابت $+Xa$ و $=b-Xa$ مقدار ثابت؛ در نتیجه

$$y=Xx+b-Xa$$

حالا به‌مقداراولیهٔ $x=a$، نمو کوچکی می‌دهیم، به‌نحوی‌که $x=a+\alpha$؛ در این صورت

$$y=b+X(a+\alpha-a)=b+X\alpha$$

اولر، با تکرار این استدلال، به این دنباله می‌رسد:

$$b'=b+A(a'-a),$$

$$b''=b+A(a'-a)+A'(a''-a'),$$

$$b'''=b+A(a'-a)+A'(a''-a')+A''(a'''-a''),$$

. . . . . .

دراین‌جا، a'، a'' وغیره، عبارتند از مقادیرمتوالی x، که به‌اندازهٔ مقادیر کوچك α'، α''،... با هم تفاوت دارند؛ A'، A''، A''' و غیره، عبارتند ازمقادیر تابع مفروض $X(x)$ به‌ازای $x=a'$، $x=a''$ و غیره. جملهٔ آخر دنبالهٔ b، مقدار تقریبی انتگرال مورد نظر را می‌دهد.

اولر، نه‌دربارهٔ تقارب روندتقریب و نه دربارهٔ حد خطائی که‌حاصل می‌شود، هیچ صحبتی نمی‌کند وتنها به‌یاد می‌آوردکه α بایدکوچك باشد و این روش تنها برای تابع‌هائی مثل $X(x)$ به‌کار می‌رودکه با تغییر کوچك x، تغییرکوچکی برای تابع به‌دست آید.

در مسألهٔ ۳۷ ، راه حل دیگری برای انتگرال‌گیری تقریبی می‌دهد

$$y=b+A(x-a)-\frac{1}{2}\frac{dX}{dx}(x-a)^2+\frac{1}{2\times 3}\frac{d^2X}{dx^2}(x-a)^3-$$

$$-\frac{1}{2\times 3\times 4}\frac{d^3X}{dx^3}(x-a)^4+\dots$$

مثال‌های زیادی برای روشن کردن هر دو روش تقریبی ذکر می‌کند، ولی در بین آن‌ها، روش دوم را ترجیح می‌دهد.

نیمهٔ دوم جلداول، به معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول اختصاص دارد. همان‌طور که‌انتگرال‌گیری تابع‌ها، درکتاب‌اولر، تقریباً شبیه هرکتاب امروزی مربوط به محاسبهٔ انتگرالی، آمده است، در مورد معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول هم، همین حکم را می‌توان‌کرد. اولر، در فصل‌اول قسمت دوم (انتگرال‌گیری معادله‌های دیفرانسیلی)، این مطالب را جاداده است؛ معادله‌های با متغیرهای جدا از هم، معادله‌های متجانس، تبدیل به معادله‌های متجانس، معادله‌های خطی، معادلهٔ برنولی، معادلهٔ ریکاتی. جای معادله‌های با دیفرانسیل‌های‌کامل در این‌جا خالی است، واین، برای اولر وقتی روشن می‌شودکه مطلب را به‌صورت دیگری تنظیم می‌کند.

فصل دوم شامل حل مسألهٔ مربوط به انتگرال‌گیری معادله‌های دیفرانسیلی، به‌کمك عامل‌ها است. نخستین مسأله‌ای‌که در این‌جا حل‌کرده است، عبارت است از انتگرال‌گیری از عبارت

$$Pdx+Qdy=0$$

در حالی‌که، می‌دانیم، دیفرانسیل‌کامل، تابعی از x و y است. فصل‌دوم، شامل حالتی است‌که $Pdx+Qdy$، یا مستقیماً و یا به کمك عامل‌های انتگرال‌گیری، حل‌می‌شوند (به‌یاد بیاوریم‌که فصل اول شامل معادله‌هایی بودکه می‌شد درآن‌ها متغیرها را ازهم جداکرد، به‌نحوی‌که حالت انتگرال‌گیری از دیفرانسیل‌های کامل را، به‌مناسبت شکل ظاهری آن‌ها، نمی‌شد جزو آن‌ها دانست).

روند جست‌وجوی تابع‌های $Z(x,y)=C$ درکتاب اولر، با آن‌چه امروز متداول است، هیچ تفاوتی ندارد؛ اولر، توجه فوق‌العاده‌ای به این حالت نمی‌کند. محتوی اصلی فصل، براین قضیه تکیه دارد:

«برای هر معادله‌ای که مستقیماً قابل انتگرال‌گیری نباشد[1]، همیشه کمیتی وجود دارد که بعد از ضرب معادله در آن، قابل انتگرال‌گیری بشود».

---

۱. یعنی، معادله‌هایی که برای آن‌ها داشته باشیم: $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$.

اولر، این قضیه را، که خود طرح کرده است، اثبات هم می‌کند. اثبات امروزی این قضیه، سرانجام به‌اثبات اولر منجر می‌شود، ولی اثبات خود اولر، طبعاً فاقد دقت و فراگیری لازم است.

جالب است‌که اولر، نه تنها **وجود** عامل‌های انتگرال‌گیر[1]، بلکه منحصر نبودن آن‌ها را هم، ثابت می‌کند (مسألهٔ ۶۰، § ۴۶۳). اولر، به این موضوع هم توجه داشته است که می‌توان عامل‌های انتگرال‌گیر را، به‌صورت مفروض هم، به دست آورد. به‌طورکلی، می‌توان گفت‌که بعد از اولر، خیلی‌کم به‌نظریهٔ عامل‌های انتگرال‌گیر، اضافه شده است.

درقسمت دوم جلد اول، مطالب‌زیادی وجود دارد. ما تنهامی‌توانیم به روش‌مشهور انتگرال‌گیری تقریبی از معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ‌اول، اشاره کنیم. این روش، تفاوت زیادی با محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌های معین ـ که‌قبلاً شرح‌دادیم ـ ندارد. مبدأ همان نقطهٔ **اولیه** است، یعنی‌نقطه‌ای که برای‌آن، به‌ازای $x=a$ داشته باشیم $y=b$. با استدلالی شبیه‌محاسبهٔ انتگرال نامعین، به‌متغیر مستقل $x=a$، نمودلخواه‌کوچك α را می‌دهیم، این نمو متناظر است با تغییرکوچکی از تابع $V(x,y)$ در معادلهٔ مفروض

$$\frac{dy}{dx}=V(x,y)\ ,\ y=b \text{ به ازای } x=a$$

دوباره به این معادله می‌رسیم.

$$y=b+A(x-a)$$

که معادلهٔ مماس برمنحنی انتگرالی مفروض است؛ ضمناً، خط مماس، از نقطهٔ اولیهٔ (a,b) عبور می‌کند. به زبان دیگر، روش مشهور خط‌های شکستهٔ اولر در برابرماست. مثل مورد محاسبهٔ تقریبی انتگرال معین، در این‌جا هم، اولر، نه به تقارب جواب می‌پردازد، نه به ارزیابی خط و نه به شرایطی‌که باید تابع $V(x,y)$ داشته باشد تا بتوان از این روش‌استفاده کرد. اولر دوباره به این یادآوری اکتفا می‌کند که نموهای متغیر مستقل بایدکوچك باشد وضمناً تابع $V(x,y)$ نباید در فاصلهٔ از $x=a$ تا $x=a_n$

---

۱. یوهان برنولی اول هم، از عامل‌های انتگرال‌گیر، استفاده‌کرده است.

به سرعت تغییر کند.

اولر، برای انتگرال‌گیری ازمعادله‌ها هم، روش دوم را، به اصطلاح خودش، «کامل‌تر» می‌داند؛ وآن، همان روش رشته‌ها است.

این امکان وجود ندارد که در این‌جا، مجموعهٔ مسأله‌های جلد اول را مورد بررسی قرار دهیم و ناچار به‌جلد دوم می‌پردازیم. این جلد، به‌معادله‌های دیفرانسیلی عادی بالاتر از مرتبهٔ اول، اختصاص دارد. توجه بیشتر اولر، روی معادله‌های مرتبهٔ دوم است و آن‌ها را با تفصیل بیشتری، نسبت به معادله‌های مرتبهٔ بالاتر مورد مطالعه قرار می‌دهد. در این‌جا، مثلاً، به این قضیه برخورد می‌کنیم:

«اگر معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم

$$d^2y+Pdxdy+Qydx^2=0$$

که درآن، عنصر dx ثابت در نظر گرفته می‌شود، در انتگرال‌های جزئی $y=M$ و $y=N$ صدق کند، به‌نحوی که نسبت $M:N$ ثابت نباشد، در آن صورت، انتگرال کامل این معادله عبارت است از $y=\alpha M+\beta N$».

اثبات اولر، درست همان است که در کتاب‌های امروزی وجود دارد.

در «توضیح» این قضیهٔ اولر متذکر می‌شویم که برای تشکیل انتگرال کامل می‌توان از دو عبارت به‌صورت $A\pm B$ استفاده کرد.

روند پیدا کردن انتگرال کامل معادلهٔ دیفرانسیلی متجانس

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

با راهی که امروزمورد استفاده قرارمی‌گیرد، تفاوتی ندارد. اولر نمی‌تواند براین نکته تأکید نکند که «معادلهٔ مربعی مورد نظر (به‌اصطلاح امروزی ـ معادلهٔ مبین)، یعنی معادلهٔ $\nu^2+A\nu+B=0$، شباهت زیادی با معادلهٔ

$$d^2y+Adydx+Bydx^2=0$$

دارد، زیرا از روی آن و با قراردادن ۱، ν و ν^2 به‌جای y، $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ به‌دست می‌آید». اولر، به‌دلیل طبیعت جدی خود، سه‌حالت ممکن ریشه‌های معادلهٔ مبین را بررسی می‌کند و آن قدر مثال و نمونه می‌آورد و چنان به‌تفصیل به‌شرح آن‌ها می‌پردازد که هیچ‌کدام از کتاب‌های درسی امروز، که

دربارهٔ انتگرال‌گیری معادله‌های دیفرانسیلی نوشته شده‌اند، نمی‌توانند از این بابت با کتاب اولر رقابت کنند.

نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم چنان کامل نوشته شده‌است که گمان نمی‌رود هیچ مؤلف دیگری توانسته باشد از این بابت براولر پیشی بگیرد. البته، به مسأله‌هایی که بعد از او حل شده‌اند، نپرداخته است: قضیه‌های متعدد مربوط به‌وجود ومنحصر به‌فرد بودن، روش تغییرهای جزئی ثابت‌های دلخواه، تقارب جواب‌ها وغیره. در بعضی موارد، اولر به‌قسمت محاسبه‌ای محدود نمی‌شود ومسأله را به‌صورت عمیق‌تری مطالعه می‌کند. به عنوان نمونه، می‌توان از رابطه‌ای که در ابتدای فصل چهارم، بین معادلهٔ دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم ومعادلهٔ ریکاتی وجود دارد، نام ببریم. به‌طورکلی، چه در فصل چهارم و چه بعد از آن، توجه زیادی به نظریهٔ معادله‌ها می‌شود. وما بعضی ازجنبه‌های این نظریه را دراین مقاله دیدیم.

اولر، برای انتگرال‌گیری تقریبی از معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم، همان طرحی را می‌ریزد که برای انتگرال‌گیری تقریبی از معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول، مبنا قرار داده بود. به‌همین مناسبت، مؤلف، برای شرح خود طرح، به‌حداقل قناعت می‌کند. و در عوض، تمام توجه خود را روی دشواری‌های احتمالی، متمرکز می‌کند. مثلاً، حالتی را در نظرمی‌گیرد که مقدار اولیهٔ مشتق اول، خیلی بزرگ یا برابر بی‌نهایت باشد.

دربخش دوم جلددوم، اولربه‌انتگرال‌گیری ازمعادله‌های دیفرانسیلی با مرتبهٔ بالاتر از دوم، می‌پردازد. در این‌جا، از یك‌نظر، روش اولر با روش‌های امروزی، تفاوت اساسی‌دارد. صحبت بر سرمعادله‌های دیفرانسیلی خطی با طرف راست، یا معادله‌های غیر متجانس است. اولر، نه از روش تغییرهای جزئی ثابت‌های دلخواه استفاده می‌کند و نه‌جواب را «به‌صورت سمت راست» در می‌آورد. او از روش خاص خودش استفاده می‌کند. او، با انتخاب عامل به‌صورت e^{kx}، مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیلی را، یك واحد پائین می‌آورد. او از این روش پشت‌سرهم استفاده می‌کند تابه‌معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ اول برسد. از این روش، قبل از همه، برای معادلهٔ مرتبهٔ دوم به

کار می‌برد.

$$X(x)=Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}$$

حالا، این مطلب ـ کـه قبلاً قابل فهم نبود ـ روشن می‌شود که چرا در بخش اول، که اختصاص به معادله‌های مرتبهٔ دوم داشت، معادله‌های غیر متجانس مورد مطالعه قرار نگرفته است. این راهم یادآوری کنیم که اولر، در فصل پنجم بخش دوم، به معادله‌ای می‌پردازد که امروز به نام معادلهٔ دیفرانسیلی اولر مشهور است:

$$X=Ay+\frac{Bxdy}{dx}+\frac{Cx^2d^2y}{dx^2}+\frac{Dx^3d^3y}{dx^3}+\frac{Ex^4d^4y}{dx^4}+\dots$$

و امروز با تفاوت‌هائی، به این صورت داده می‌شود:

$$(ax+b)^ny^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+a_2(ax+b)^{n-2}y^{(n-2)}+\dots+a_ny=r(x)$$

تقریباً همهٔ جلد دوم و، به‌طور کامل، جلد سوم (انتگرال گیری معادله‌های دیفرانسیلی بامشتق‌های جزئی وضمیمه‌ای دربارهٔ محاسبهٔ واریاسیونی) شامل نتیجه‌گیری‌هایی است کـه خود اولر در طول سال‌های متوالی پیدا کرده است. اولر، این نتیجه‌گیری‌ها را، نه تنها درکارهای خالص ریاضی، بلکه ضمناً در بررسی‌های خود درهیدرومکانیك، صداشناسی و غیره، به‌دست آورده است.

قبلاً گفتیم که جلد آخر «محاسبهٔ انتگرالی» در سال ۱۷۷۰ ازچاپ خارج شد. اولر به‌این مناسبت نتوانست این اثر عظیم خود را تمام کندکه دو حادثهٔ ناگوار، پشت سرهم برای او پیش آمد: کوری کامل، دانشمند بزرگ را تهدید می‌کرد وخانهٔ مسکونی اوهم آتش گرفت.

می‌دانیم که چشم راست اولر در جوانی نـابینا شد. و حالا، چشم چپ او هم ازگردونـه خارج می‌شد. بهترین چشم پزشك پترزبورگ چشم او را عمل کرد (برای خارج کـردن آب مروارید). عمل موفقیت‌آمیز بود. همهٔ اهالی منزل خوشحال شده بودند. ولی، باکمال تأسف، اولربه‌اخطار جراح بی‌اعتنائی کرد و بلافاصله غرق درکار شد. چشم تحمل نکرد و بعد از چند

روز، اولربه‌طورکامل و برای همیشه کور شد. در همین سال ۱۷۷۱، آتش‌سوزی بزرگی در پترزبورگ رخ داد، که در آن ۵۵۰ ساختمان، و از آن جمله، خانه‌اولر ازبین رفت. خوشبختانه، توانستند دست‌نویس‌ها را نجات‌دهند. تنها کاری که باقی‌مانده بود، تکمیل مطلبی بودکه اولر به‌خاطراعلام مسابقهٔ فرهنگستان علوم پاریس تهیه‌کرده بود. به‌نظر می‌رسیدکه این‌پیش‌آمدهای ناگوار، به‌اضافه سال‌های پیری، می‌توانست موجبی باشد تاشخص را از پشت کار بازدارد. ولی اولر، چنین نبود. از شدت فعالیت او کاسته نشد. او نمی‌توانست بنویسد، ولی هم پسران وهم‌شاگردان، دور وبر او بودند، و او، کارهای خودرا به‌آن‌ها دیکته می‌کرد. پاول‌فوس، نبیرهٔ‌دانشمند بزرگ حکایت می‌کند کـه اولر، چگونه‌کار می‌کرد. وسط اطاق‌کار او، میز بزرگی قرار داشت‌که باتخته سنگ‌هایی پوشانده شده بود. اولر با گچ‌روی این تخته سنگ‌ها، عبارت‌های اصلی کارتازه را، با حروف درشت می‌نوشت (او این‌حروف‌را به‌طورجداگانه‌تشخیص‌می‌داد، ولی‌نوشته‌ها رانمی‌توانست ببیند). سپس، طرح مقاله را دیکته می‌کرد: نقطه‌های اساسی طرح و مهم‌ترین مطلب‌ها را. بقیهٔ کاررا دستیار او، یعنی‌یکی از پسرها یا شاگردانش، انجام می‌داد. وقتی کـه اولر دیکته می‌کـرد، انگشتانش را روی لبهٔ میز می‌لغزاند و دور میز چرخ می‌زد. به‌همین مناسبت، کنارهٔ میز صیقل خورده بود ومی‌درخشید. ولی، دستیاران، خیلی‌زود، اولر را ترك کردند. هرکدام از آن‌ها برای خودکاری داشتند و اولر هم چنان مؤلفی نبودکه بشود، در بین‌کارهای دیگر وضمن مراجعهٔ گاه به‌گاه، کارهای او را انجام داد.

درسال ۱۷۷۲، اولر نامه‌ای به‌دوست قدیمی خود دانیل برنولی در بال نوشت و از او خواهش‌کردکه جوان مناسبی را برای او پیدا کند وبه پترزبورگ بفرستد.

دانیل به خواهش اولر توجه‌کرد. در سال ۱۷۷۳، نیکلافوس ازبال حرکت‌کرد، که، اگر او را درحد فرشتهٔ رحمت اولر ندانیم، بدون تردید، دست راست اوبه‌شمار می‌رفت نیکلا، ازسال ۱۷۷۳ تا سال ۱۷۸۳، ۳۵۵ اثر اولر را نوشت و منتشر کرد، بـه طور متوسط ۳۵ اثر در سال. کاملاً روشن است‌که این مؤلف استثنائـی، یك منشی استثنائی پیدا کرده بود و،

لئونار اولر (دردوران پیری)

در واقع، همهٔ هواداران نبوغ اولر، از این بابت، صمیمانه ازکار عظیم نیکلا متشکر هستند. در سال ۱۸۰۰، بعد از مرگ یوهان آلبریخت اولر، نیکلافوس دبیرفرهنگستان علوم شد و تا سال مرگ خود - ۱۸۲۵ - دراین سمت کار می‌کرد. ازسال ۱۸۲۵ تا سال۱۸۳۵، پسر او، پاول نیکلایه‌ویچ دبیرفرهنگستان بود (نیکلا بانوهٔ اولر، ازدواج کرده‌بود). پاول‌نیکلایه‌ویچ فوس (۱۷۹۷ - ۱۸۵۵)، برای چاپ ارثیهٔ اولر، خیلی تلاش‌کرد.

دانشمند سالخورده، سال‌های آخر عمر خود را، بدون این که تشویشی از بابت پیش‌آمدها ویا گرفتاری‌های فرهنگستان داشته باشد و بی آن‌که ازگذشتهٔ خود متاسف باشد، می‌گذراند. پیری، هیچ اثری بر ذهن پر توان و استعدادکار او نگذاشته بود. او، با همان بازدهی سابق، کار خود را ادامه می‌داد. گواه این مطلب را می‌توان در این واقعیت دیدکه اولر از سال ۱۷۶۶ تا سال ۱۷۸۳ (سال مرگ او)، ۴۱۶ اثر نوشت، یعنی به طور متوسط سالی ۲۵ رساله. زندگی آرام و، به ظاهر، بدون تنوع او، تا

روز آخر ادامه داشت. در ۷ (۱۸) سپتامبر سال ۱۷۸۳، عصر، بعد ازیك روز کاملاً خوب و وقتی‌که بانوه‌اش بازی می‌کرد، احساس کرد حالش بد است و با گفتن «من دارم می‌میرم»، از هوش رفت. او خیلی زود مرد و یا به بیان کندورسه «زندگی و محاسبه متوقف شد». در ۲۴ سپتامبر، اولر را در مقبرهٔ پروتستان‌های انجیلی‌سمولسك به‌خاك سپردند، ولی چنان ناجور، که خیلی زود مقبرهٔ اوگم شد. دوست و هواخواه او، نیکلافوس، اغلب با پسرش به‌این گورستان‌می‌رفت، ولی‌مقبرهٔ اولر را نتوانست پیداکند. سال‌ها بعد، وقتی‌که عروس اولر را به‌خاك می‌سپردند، به‌طور تصادفی، قطعه‌سنگی را به‌نام اوپیداکردند. همان روز، مقبرهٔ او را هم یافتند. فرهنگستان‌علوم، سنگ‌زیبائی ازگرانیت برقبراوگذاشت. نوشتهٔ روی سنگ، خیلی‌کوتاه‌بود:

Leonardo Eulero Academia Petropolitana[1]

بلافاصله بعد از مرگ اولر، فوس، در نشست فرهنگستان به احترام اولر، سخن‌رانی ایرادکردکه حاوی آگاهی‌های مهم وزیادی دربارهٔ زندگی اولر است.

سیمای‌اولر، برای‌جهان، سیمای یك دانشمند پرنبوغ بود. نمی‌توان دربارهٔ زندگی اولر، بدون توجه بـه‌شیوهٔ کار او، صحبت کرد، چرا که او را، بدون کار، حتی تصور هم نمی‌توان کـرد. آراگو دربارهٔ او می‌گوید: «اولر همان‌طور محاسبه می‌کرد که دیگران نفس می‌کشند». و تیبو حکایت می‌کند: «همان‌طورکه بچه‌ای روی زانـوهایش وگربه‌ای بر پشتش نشسته بود، آثارجاویدان خود را می‌نوشت». در یك‌کلام، اولر بیدار است، یعنی کارمی‌کند ویا چیزی را محاسبه می‌کند. و وقتی در رختخواب درازکشیده است؟ وقتی اولر ازبی‌خوابی رنج می‌برد... بازهم محاسبه می‌کند. اولر، نه تنها ریاضی‌دانی بزرگ بود، بلکه محاسبی مشهور هم به‌حساب می‌آمد و حافظهٔ خارق‌العاده‌ای هم داشت. می‌گویند یك روز که دچار بی‌خوابی شده بود، توان ششم عددهای از یك تا صد را محاسبه‌کرد وجدول حاصل را برای n^6 ($n=1,2,3,\ldots,100$) چندروز بعد، به‌طورکامل، به خاطر

۱. «لئونار اولر، فرهنگستان پترزبورگ».

آورد. یك‌بار دیگر، در طول یك ساعت، ۲۰ رقم اول عدد π را محاسبه کرد تا کارآمد بودن رشته‌ای را که به‌دست آورده بود، آزمایش کند.

طبیعی است اگر چنین تمرکزحواسی دریك زمینه، موجب بی‌اعتنائی نسبت به‌بعضی زمینه‌های دیگر باشد. درواقع، اولر هیچ علاقه‌ای به‌ادبیات زیبای زمان خود نداشت و ضمناً به‌بهترین نوع این ادبیات ـ یعنی ادبیات روشنفکران فرانسوی، و به‌خصوص، بزرگان آن‌ها ـ به‌کلی بی‌اعتنا بود. به‌تئاتر، اصلاً علاقه نداشت. ولی نه؛ فورمی، دبیر فرهنگستان علوم برلین اطلاع می‌دهدکه اولر نمایش‌نامه را نگاه نمی‌کرد «به استثنای مسخره‌ترین صحنه‌های عروسکی، که می‌توانست ساعت‌ها توجه او را به خود جلب کند ونفسش را از خنده‌بندآورد». روشن است که خود ارگانیسم، درجست‌وجوی راهی بودکه بارمغز را ازکارجدی سبك‌کند. در صحبت اولر، همیشه‌آرامش ومحبت دیده می‌شد. وقتی‌که اشتباهی را به او یادآوری می‌کردند، بدون تکبر وافتخار دروغین، آن را اصلاح می‌کرد؛ پیش می‌آمدکه، به‌خصوص، از اعتراض‌دیگران، سرخ شود، ولی خیلی زود آرامش خود را بازمی‌یافت. نسبت به‌ریاضی‌دانان جوان وشاگردان خودش، توجه ومحبت زیادی‌داشت. یکی ازهم‌عصران او می‌نویسد: «اطرافیان، در چهرهٔ او، نه‌تنها یك‌ریاضی‌دان بزرگ، بلکه یك مرد بزرگ را هم می‌دیدند».

غنای فوق‌العادهٔ اندیشه‌ها، روش‌ها ونتیجه‌گیری‌هایی‌که درنوشته‌ها ونامه‌های اولروجود دارد، بارها موجب این‌فکر شده است‌که بایدمجموعهٔ آثار او چاپ شود. ولی عظمت‌چنین اقدامی همه را مرعوب می‌کرد. مثلاً، بعد از آن‌که پاول‌فوس در سال ۱۸۴۴، گنجینهٔ بزرگی از دست‌نویس‌های پدر جد خود را پیدا کرد، به تلاش پرداخت تا این آثار را به کمك دو فرهنگستانی‌که اولر درآن‌ها خدمت‌کرده بود، چاپ‌کند. مرگ نابهنگام‌کارل گوستاو ژاکوبی (۱۸۰۴ - ۱۸۵۱)، امکان اجرای این طرح را از بین‌برد. در سدهٔ نوزدهم، این چاپ حتی آغاز هم نشد. در سال ۱۹۰۷، میهن اولر وتمامی بشریت متمدن، دویستمین سال تولد او را جشن‌گرفتند. در یکی از نشست‌های «انجمن سویسی دانش‌های طبیعی»، ف. رودیو، مورخ مشهور دانش ویکی از ویژه‌کاران آثاراولر، طرح چاپ مجموعهٔ آثار او راپیشنهاد

کرد. طبق برآوردی که شد، مجموعهٔ آثار را می‌شد در ۶۹ جلد چاپ کردکه هرجلد، به‌طورمتوسط، ۶۰۰ صفحه داشته باشد وبرای چاپ آن‌ها، یك ملیون فرانك (با قیمت قبل از جنگ) لازم بود.

مختصری هم به‌کارچاپی‌آثاراولرودشواری‌های ناشی از آن‌بپردازیم. در این مورد بایدگفت که ارثیهٔ اولر، چیزی به‌کلی نامنتظر بود. بعد از مرگ او، فرهنگستان علوم پترزبورگ، کارهای اولر را در طول ۴۳ سال چاپ‌کرد. به‌نظر می‌رسیدکه تمامی آثار اولر، به‌طورکامل، چاپ شده‌است. ناگهان، پاول‌فوس، نبیرهٔ اولر، به‌بیان خودش «گنجینه‌ای از نوشته‌های اولر» راکشف‌کرد. واین‌کشف نوشته‌ها، یادداشت‌ها وسندهای دیگر، بارها وبارها، حتی بعد از فوس هم، تکرار شد. سرانجام، گوستاو انشتروم، در فاصلهٔ سال‌های ۱۹۱۰ - ۱۹۱۳ «صورت‌آثار اولر» را در لایپزیك چاپ‌کرد که تاحد زیادی‌کارپژوهندگانی را که به‌نحوی با آثار اولر سروکارداشتند، آسان‌می‌کرد. همین «صورت» امکان‌چاپ مجموعهٔ آثار اولر را هم به‌وجود آورد. خطهای اصلی‌این طرح را در زیرداده‌ایم. تعداد مقاله‌ها ویادداشت‌های اولر (البته، بدون در نظرگرفتن نامه‌ها و سندهای مختلف دیگر) ۸۶۶ عدد است.

درصد مقاله‌ها، از نظر محتوی و موضوع آن‌ها چنین است:

جبر عالی، آنالیز، نظریه عددها	۴۰ درصد
هندسه	۱۸ درصد
مکانیك و فیزیك	۲۸ درصد
تیراندازی، معماری، علوم دریائی	۲ درصد
اخترشناسی	۱۱ درصد
متفرقه	۱ درصد

از این مقاله‌ها و یادداشت‌ها، تنها ۵۳۰ تا در زمان زندگی مؤلف چاپ شده بود. بعد از مرگ او، تا سال ۱۸۲۶ (سال پایان چاپ آثار اولر به وسیلهٔ فرهنگستان علوم پترزبورگ) تقریباً ۲۴۱ اثر دیگر او هم چاپ شد. چاپ مجموعهٔ آثار اولر، به این ترتیب طرح‌ریزی شد:

سری اول	ریاضیات	
	حساب و جبر	۷ جلد
	آنالیز	۱۸ جلد
	هندسه	۳ جلد
	روی هم	۲۸ جلد
سری دوم	مکانیك و اخترشناسی	
	مکانیك	۱۷ جلد
	اخترشناسی	۱۰ جلد
	روی هم	۲۷ جلد
سری سوم	فیزیك و آثار دیگر	
	فیزیك	۷ جلد
	گوناگون	۳ جلد
	نامه‌ها	۴ جلد
	روی هم	۱۴ جلد

از این ۶۹ جلد تا سال ۱۹۲۷، ۲۳ جلد و تا سال ۱۹۵۶، ۴۰ جلد منتشر شده است.

در شمارهٔ بعد: گیوم فرانسوا هوپیتال

امان از دست این مردم!

پاسخ رمز و راز عددها و شکل‌ها

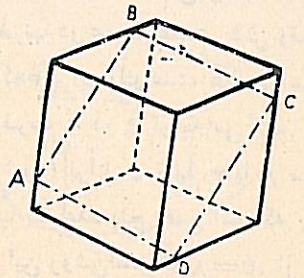
(صفحه ۳۰۷ را ببینید)

۱. تمامی رمز «رابطهٔ فلیس» در تساوی زیر است:

$$۲۳ \times ۱۱ - ۲۸ \times ۹ = ۱$$

بنابراین اگر عدد مورد نظر A را به ترتیب در ۱۱ و ۹ − ضرب کنیم، مقادیر x و y به دست می‌آید.

۲. چهار ضلعی ABCD مربع است، زیرا هم قطرها و هم‌ضلع‌های آن با هم برابرند. نقطه‌های A، B، C و D یال‌های مکعب را به نسبت ۱:۳ تقسیم می‌کنند. اگر ضلع مکعب اصلی را واحد بگیریم، ضلع این مربع، برابر $\frac{۳}{۴}\sqrt{۲}$، یعنی تقریباً ۱/۰۶ می‌شود. درداخل این مربع، می‌توان مربع دیگری ساخت که طول ضلع آن کمتر از AB و بیشتر از طول یال مکعب باشد. وهمین مربع جدید را می‌توان مقطع‌تونل مورد نظر به‌حساب آورد.



۳. عددهای اصلی می‌توانند زوج یافرد باشند (صفر را زوج به‌حساب می‌آوریم). اگر این چهار عدد را به صورت حلقه‌ای در نظر بگیریم، به سادگی معلوم‌می‌شودکه تنهاشش نوع حلقه خواهیم داشت و بقیه حالت‌ها،

به یکی از این شش حلقه تبدیل می‌شوند. این شش حلقه چنین‌اند:

ز	ز	ز
ف ز	ف ز	ف ف
ف	ز	ز
ز	ف	ف
ز ز	ف ف	ز ف
ز	ف	ف

اگر $|b| > |a|$ باشد، خواهیم داشت: $|b| > |b-a|$ و بنابراین چهار عدد مرتباً کوچك وکوچکتر می‌شوند و سرانجام به چهار عدد زوج مساوی می‌رسند (که‌حتماً این عدد زوج توانی از ۲ خواهد بود) ودر مرحلهٔ بعدی، هر چهار عدد برابر صفر می‌شوند.

۴. ۶۸ نفر هر دو زبان آلمانی و فرانسوی را می‌دانند.

۵. در این‌جا، یکی از جواب‌های ممکن را داده‌ایم:

$$۹۸-۷۶+۵۴+۳+۲۱=۱۰۰$$

۶. سن حمید $۲۹\frac{۲}{۵}$ سال و سن بابك $۱۹\frac{۳}{۵}$ سال است.

۷. فرض مسأله را می‌توان چنین نوشت:

$$۴(\overline{abcde})=\overline{edcba}$$

روشن است که عدد مجهول تنها می‌تواند با ۱ یا ۲ شروع شود. در غیر این صورت، ضمن ضرب در ۴، به عددی شش رقمی تبدیل می‌شود. از طرف‌دیگر، روشن است که ۴ برابر یك عدد، عددی است زوج و، بنابراین، $a=۲$. حالا به حاصل ضرب ۴ در e توجه می‌کنیم. برای این که حاصل‌ضرب ۴ در e به ۲ ختم شود؛ برای e تنها ۳ یا ۸ ممکن است. ولی‌توجه کنیم‌که e رقم سمت چپ یك عدد پنج رقمی است‌که باید ۴ برابر عدد پنج رقمی دیگری باشد، بنابراین روشن‌است‌که $e=۸$. از همین‌جا نتیجه‌می‌شود که b نمی‌تواند از ۲ بزرگتر باشد، به جز آن، b نمی‌تواند زوج باشد. بنابراین $b=۱$. حاصل‌ضرب $۴d$ باید به ۸ ختم شود، یعنی $d=۷$ یا $d=۲$. به‌سادگی می‌توان فهمیدکه $d=۷$ و بالاخره $c=۹$. عدد مجهول

چنین است:

۲۱۹۷۸

۸. مسأله بی‌نهایت جواب دارد. این، یکی از آن‌هاست:

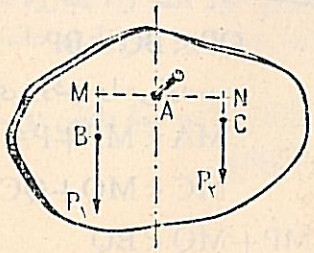
۱۰۵ ۲۶۳ ۱۵۷ ۸۹۴ ۷۳۶ ۸۴۲

۹. با سطل ۳ لیتری دوبار از بشکه برمی‌داریم و در سطل ۷ لیتری می‌ریزیم؛ بار سوم‌سطل‌سه‌لیتری را پرمی‌کنیم و به‌کمك آن سطل ۷ لیتری را مملو ازسرکه می‌کنیم. حالا در بشکه ۱ لیتر، در سطل‌کوچکتر ۲ لیتر و در سطل بزرگتر ۷ لیتر سرکه داریم. سطل ۷ لیتری را در بشکه خالی می‌کنیم و ۲ لیتر موجود در ظرف ۳ لیتری را درآن می‌ریزیم. حالا کافی است، یکبار دیگر ظرف ۳ لیتری را پرکنیم و در سطل ۷ لیتری بریزیم تا ۵ لیتر سرکه داشته باشیم.

۱۰. فرض‌کنید B و C، مرکز ثقل‌های دو قسمت سمت چپ‌وسمت راست شکل و $P_۱$ و $P_۲$، وزن این قسمت‌ها باشد. جسم وقتی به‌حال‌تعادل می‌ایستدکه گشتاور نیرو در $P_۱$ و $P_۲$ نسبت به‌نقطه A برابر باشند، یعنی به شرطی‌که داشته باشیم:

$$P_۱.AM=P_۲.AN$$

این تساوی می‌تواند درحالتی هم‌که $P_۱$ و $P_۲$ مساوی نیستند، برقرارباشد، وبنابراین، دو قسمت سمت چپ و سمت راست نباید ضرورتاً هم‌وزن‌باشند.



۱۱. به سادگی معلوم می‌شودکه عدد موردنظر، یکی ازشش‌عدد زیر است:

۲۱۳۴، ۳۲۴۵، ۴۳۵۶، ۵۴۶۷، ۶۵۷۸، ۷۶۸۹

Reconciliation With Mathematics
Editor: Parviz Shahryari
Address: Tehran, P. O. Box 34 - 541

Vol. VI, No *3, 1982*

در آخرین روزهای چاپ مجلهٔ «آشتی با ریاضیات»، خبری اندوه‌بار و باورنکردنی به‌ما رسید. دکتر مهدی تجلی‌پور، استاد دانشگاه اهواز، انسان بزرگی که سراسر عمر کوتاه خود را به‌مبارزه و تحقیق گذرانده بود، روز یکشنبه ۱۳ر۴ر۶۱ پس از برگشت از سفر سخت چند روزه خود به‌چاه‌بهار (که برای جمع‌آوری نمونه‌های پژوهشی به آن‌جا رفته بود) در منزل شخصی خود در اهواز، در بحبوحهٔ شکفتگی استعداد علمی خود، وفات کرد.

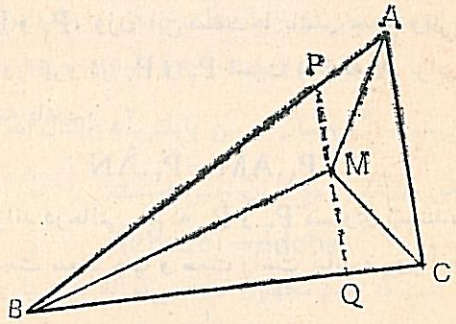
تجلی‌پور، علاوه بر کارهای علمی فراوانی که از خود باقی گذاشته است، انسانی بود که راه مبارزه به‌خاطر بهروزی انسان‌ها را شناخته بود و، بنابراین، دانشمندی مبارز و آگاه بود.

ما این حادثه جانکاه را به همهٔ دانش دوستان و به‌خانواده دغدار او تسلیت می‌گوئیم.

دوعدد اول‌مجذورکامل نیستند، زیرا اولی بر۲ بخش‌پذیر است، ولی بر۴ بخش‌پذیر نیست، دومی هم بر۵ بخش پذیر است ولی بر۲۵ بخش‌پذیر نیست. عدد سوم مجذورکامل است: $۶۶^۲=۴۳۵۶$. عددهای چهارم وپنجم مجذورکامل نیستند، زیرا هیچ مجذورکاملی به ۷ یا ۸ ختم نمی‌شود. عدد ششم هم مجذورکامل نیست، زیرا بر ۳ بخش‌پذیر است ولی بر۹ بخش‌پذیر نیست. به این ترتیب، تنها عدد ۴۳۵۶ با حکم مسأله سازگار است.

پاسخ یك مسئلهٔ ساده، ولی... (صفحهٔ ۲۶۴ را ببینید)

از نقطهٔ M، خطی موازی AC (ضلع کوچکتر مثلث) رسم می‌کنیم تا AB و BC را به ترتیب در نقطه‌های P و Q قطع کند. با توجه به تشابه دو مثلث ABC و PBQ، به سادگی به دست می‌آید:



$$QP < BQ < BP$$

این نامساوی‌های روشن را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} MA < MP + PA \\ MC < MQ + QC \\ MP + MQ < BQ \\ MB < BP \end{cases}$$

اگر این نامساوی‌ها را با هم جمع، و سپس ساده کنیم، به دست می‌آید:

$$MA + MB + MC < AB + BC$$