

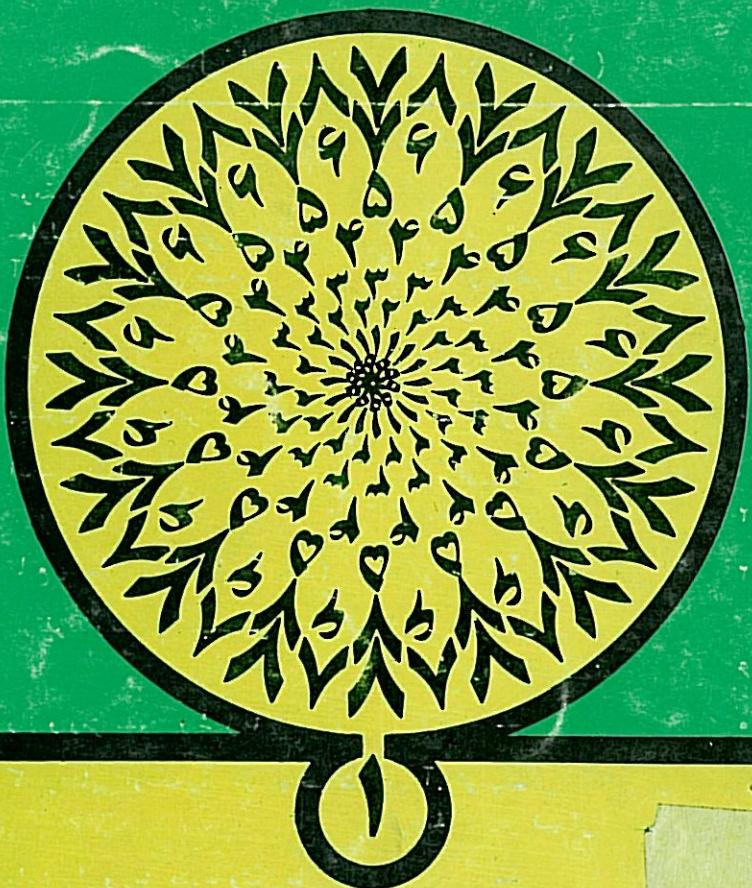
آشتی باریاضیات

سردبیر : پرویز شهریاری

نشریه دو ماهه، هر سال ۶ شماره منتشر
می شود. بهای اشتراک سالیانه ۷۲۰ ریال

نشانی پستی : تهران - صندوق پستی ۴۶-۵۴

آشتی باریاضیات



فروردین ۱۳۶۱

۱۷۱

۳۲-۳۱

دوفنگ دوم

سال ششم - شماره ۱ (شماره ردیف ۲۱)

فهرست مطالب

- | | | |
|-----|----------------------|---|
| ۱ | — | سرمقاله |
| | | معادله های دیفرانسیلی و اهمیت |
| | | آنها در دانش های طبیعی |
| ۲ | م. آ. دوبروختوا | |
| | | آ. ن. سافونوف |
| | | ترجمه پرویز شهریاری |
| ۳۰ | علیرضا امیر معز | بیضوی کاسینی و برنولی |
| | | انحنای فضا |
| ۴۲ | پ. لوکوربیده | |
| | | ترجمه محمد باقری |
| | | تابع یاعمل و کردار (fonction) |
| ۵۲ | دکتر اسد الله آلبویه | گوتفرید ویلهلم لایپنیتس |
| | | ل. س. فریمان |
| ۵۶ | ترجمه پرویز شهریاری | راز و رمز عدد ها و شکل ها |
| | | کاربردهایی از مکانیک در ریاضیات و. آ. اوپنیکی |
| ۸۰ | — | ترجمه کورس ضیائی |
| ۸۱ | — | پاسخ راز و رمز عدد ها و شکل ها |
| ۱۲۵ | — | پول اشتراک و گمک های خود را به حساب |

۱۲۰ ریال

با ذکر تجارت (بازرگانی سابق) تهران - چهارراه
ولی عصر، به قام سردبیر بفرستید و فتوکپی رسید
آن را همراه با نشانی کامل خود برایها بفرستید.

آشتی باریاضیات

سرویز شهریاری

نشریه دو ماهه، هر سال ۶ شماره منتشر
می‌شود. بهای اشتراک سالیانه ۷۲۰ ریال

نشانی پستی: تهران - صندوق پستی ۳۴-۵۴۱

بارب تو مرا دو عشق لیلی
هر روزه بده زیاده میلی

داستان عشق سورانگیز لیلی و مجنون در منظومه معروف
نظامی تبلوری پرشکوه یافته است. بنابر روایت نظامی، هنگامی که
مجنون سودازده عشق لیلی سربه بیابان می‌نهد، پدرش او را به
زیارت کعبه می‌فرستد، تامگر خداوند بر احوالش رحمت آورد و
این عشق نافرجام را از داش بدرکند. اما مجنون عاشق، هنگامی
که دست بر در کعبه می‌نهد، از خدای خویش فزونی و جاودانگی
عشقم را طلب می‌کند.

کارما نیز کار عشق است، نه هوای نفس - «عشقبازی دگر
ونفس پرستی دگر است». ماعاشق میهن و مردم خویشیم، عاشق دانش
و آگاهی و راستی و انسانیتیم؛ آرزومندیم فرزندانمان به دانش و
بینش مسلح باشند و در میهن آزاد از استعمار، استشمار و استبداد
زندگی کنند.

ریاضیات کلید دانشهاست. حال که ناشر پیشین آشتی
باریاضیات از ادامه انتشار آن چشم پوشیده است، ما قصد داریم
بهیاری شما، نگذاریم این یگانه نشریه عمومی ریاضیات به زبان
فارسی تعطیل شود. از این رو انتشار آن را با همان سبک و شیوه
پیشین، اما ناگزیر با بهایی گران‌تر دنبال می‌کنیم.

سال ششم - شماره ۱ (شماره ردیف ۲۱)

فهرست مطالب

| | | |
|-----|-------------------------------------|--|
| ۱ | — | سرمهای دیفرانسیلی و اهمیت آنها در دانش‌های طبیعی |
| ۲ | م. آ. دوبروخوتوا آ. ن. سافونوف | ترجمه پرویز شهریاری |
| ۳۰ | علیرضا امیر معز | پیضوی کاسیئنی و برنولی انحنای فضا |
| ۳۲ | پ. لوکوربیده ترجمه محمد باقری | تابع یاعمل و کردار (فونکسیون) |
| ۵۲ | دکتر اسدالله آل بویه | گونفرید ویلهام لایب نیتس |
| ۵۶ | ل. س. فریمان ترجمه پرویز شهریاری | راز و رمز عددها و شکل‌ها |
| ۸۰ | — | کاربردهایی از مکانیک در ریاضیات و. آ. اوسبن‌سکی |
| ۸۱ | ترجمه کورس فیزیائی | پاسخ راز و رمز عددها و شکل‌ها |
| ۱۳۵ | — | پول اشتراک و کمک‌های خود را به حساب ۱۷۶۵ با ذکر تجارت (بازرگانی ساقی) تهران - چهارراه والی عصر، به نام سردبیر بفرستید و فتوکپی رسید آن را هفراه با نشانی کامل خود برایما بفرستید. |

۱۲۰ ریال

پول اشتراک و کمک‌های خود را به حساب ۱۷۶۵
با ذکر تجارت (بازرگانی ساقی) تهران - چهارراه
والی عصر، به نام سردبیر بفرستید و فتوکپی رسید
آن را هفراه با نشانی کامل خود برایما بفرستید.

م. آ. دو بروخوتورا
آ. ن. ساقونوف

ترجمه پرویز شهرپاری

معادله های دیفرانسیلی و اهمیت آنها در دانش های طبیعی

طبیعت واحد، در « شباهت حیرت اندیز »
معادله های دیفرانسیلی مربوط به زمینه های
گو ناگون پدیده ها، تجلی می کند.

و ای. ل

۱. ورود به مطلب

در این مقاله، ساده ترین نوع های معادله دیفرانسیلی خطی، مورد بررسی.
قرار گرفته است: معادله های رشد نمائی و نوسان های همساز.

بررسی بسیاری از روندها و مسئله های فیزیکی، مثل بررسی پایداری
هوای پما در پرواز، تعیین مسیر و سمت حرکت گالوله، محاسبه دستگاه های رادیو.
تکنیک، مطامه جریان عکس العمل های شیمیائی وغیره، منجر به تشکیل معادله هایی
می شوند که رابطه بین مقادیر متغیر مستقل را با مقادیر تابع و مشتق های آن، نشان
می دهند. چنین معادله هایی را معادله های، دیفرانسیلی گویند.
تابع هایی که بتوانند معادله دیفرانسیلی را، به یک تساوی درست تبدیل

آشتی باریاضیات جزوء درسی یا کمک درسی نیست، بلکه
نشریه ای است برای معرفی و توضیح جنبه های مختلف ریاضیات
و نمایش زیبایی ها و دلفریبی های آن برای همه کسانی که ریاضیات
را در حد دیبرستان بدانند و بخواهند مطالعه آن را همچنان دنبال
کنند. بنابراین، نه تنها دانش آموزان سالهای آخر دیبرستان و
دانشجویان رشته های علمی مختلف از مطالعه بسیاری مقالات آشتی
باریاضیات سود می برند، بلکه دانشجویان و دیران ریاضی هم در
آن آموختنی های بسیار می بایند. در عین حال، کسانی هم که پیش
از این چندان عنایتی به ریاضیات نداشته اند، فرصتی پیدا می کنند
تا از دریچه ای تازه به ریاضیات بنگرن.

ششمین سال انتشار آشتی با ریاضیات با فرا رسیدن نوروز
همراه است. نوروز خجسته و بهار خرمی بخش را به خوانندگان
تبیک می گوییم و در سال نو برای میهن و انتلامان پیروزی های
تازه آرزومندیم.

کنند، جواب‌های معادله نامیده می‌شوند. مثلًا، برای معادله دیفرانسیل

$$[e^{-kx} \cdot y(x)]' = 0$$

که از آن جا به دست می‌آید: $y(x) = C \cdot e^{-kx}$ ، یا

$$y(x) = Ce^{kx} \quad (3)$$

که در آن، C ، عددی ثابت و دلخواه است.

بنابراین، تنها تابع‌هایی به صورت (3)، می‌توانند جواب معادله رشد نمائی (1) باشند. با آزمایش مستقیم، یعنی قراردادن تابع (3) در معادله (1)، روشن می‌شود که به ازای هر مقدار دلخواه C ، تابع (3) در معادله (1) صدق می‌کند. به این ترتیب، رابطه (3) معرف مجموعه جواب‌های معادله (1) است. برای این که از مجموعه جواب‌های (3)، جواب مشخصی را جدا کنیم، باید مقدار ثابت C را بدانیم. برای این منظور به شرط‌های اضافی دیگری— به اصطلاح شرط‌های آغازین— نیازداریم؛ در اینجا، کافی است مقدار تابع مورد نظر را به ازای مقداری از آوند بدانیم.

$$y(x_0) = y_0. \quad (4)$$

در واقع، اگر شرط آغازین (4) را در جواب (3) قراردهیم، به دست می‌آید:

$$y_0 = C \cdot e^{kx_0} \Rightarrow C = y_0 \cdot e^{-kx_0}.$$

با قراردادن این مقدار در رابطه (3)، سوابی از معادله رشد نمائی، که با شرط آغازین سازگار است، به دست می‌آید:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{(x-x_0)} \quad (5)$$

می‌بینیم که با شرط آغازین (4)، تنها یک جواب برای مقدار ثابت C به دست می‌آید؛ به همین مناسبت جواب (5)، که با شرط آغازین می‌سازد، جوابی

$$y'(x) - 2y(x) = 0$$

تابع‌های e^{2x} ، $y = -2e^{2x}$ و $y = -3e^{2x+5}$ ، جواب‌هستند.

معادله‌های دیفرانسیل، یکی از نیرومندترین و اساسی‌ترین ابزارها، برای بررسی دانش‌های طبیعی هستند. به این معادله‌ها می‌توان روندهای گوناگون طبیعت‌آلی و معدنی را مورد مطالعه قرار داد.

II. معادله رشد نمائی

معادله دیفرانسیل به صورت

$$y'(x) = k y(x) \quad (1)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن، k ، مقداری ثابت و $y(x)$ ، تابع مورد جستجو است.

معادله (1) را، معادله رشد نمائی گویند. مفهوم این معادله، این است: برای هر مقدار آوند (آرگومان)، سرعت تغییر تابع، با مقدار این تابع متناسب است.

برای این که جواب‌های معادله (1) را پیدا کنیم، می‌توان به این ترتیب عمل کرد. فرض کنیم $y(x) = y_0$ از معادله باشد، یعنی تساوی $y'(x) - ky(x) = 0$ درست باشد. دوطرف معادله را در عامل غیر صفر e^{-kx} ضرب می‌کنیم، به تساوی درست زیر می‌رسیم:

$$e^{-kx} y'(x) - e^{-kx} ky(x) = 0 \quad (2)$$

از آنجا که داریم:

$$[e^{-kx} y(x)]' = e^{-kx} y'(x) - ke^{-kx} y(x)$$

بنابراین، تساوی (2) را می‌توان به این ترتیب نوشت:

استفاده کرد، که در آن $(t)^{/u}$ و \vec{F} ، به ترتیب عبارتند از تصویر بردارهای (\vec{v}) و \vec{F} براین محور. معادله (۷) هم، حرکت مستقیم الخط جسم را شرح می‌دهد. چنین حرکتی را، می‌توان به صورت حرکت نقطه مادی در نظر گرفت که در مرکز جرم جسم و تحت تأثیر نیرویی که بر مرکز جرم واقع می‌شود، قرار دارد.

مسئله. قایق موتوری، روی آب ساکن، با سرعت ۵ متر در ثانیه حرکت می‌کند. در سرعت کامل آن، موتور را خاموش کردند؛ بعد از ۴ ثانیه، سرعت آن به ۱ متر در ثانیه رسید. اگر نیروی مقاومت آب، متناسب با سرعت حرکت قایق باشد، معلوم کنید چه مدت بعداز خاموش کردن موتور، سرعت قایق، به ۴ سانتیمتر در ثانیه می‌رسد؟

حل. حرکت قایق را مستقیم الخط می‌گیریم. محور OX را در امتداد حرکت قایق فرض می‌کنیم. سرعت قایق را در لحظه t بعد از خاموش کردن موتور، $(t)^{/u}$ می‌نامیم. در لحظه خاموش کردن موتور $(t)=0$ ، بنا بر فرض، سرعت قایق برابر است با ۵ متر در ثانیه، یعنی

$$v(0) = 5 \quad (8)$$

و این، همان شرط آغازین مسئله است. حالا، معادله دیفرانسیلی را تشکیل می‌دهیم. فرض کنید وزن قایق برابر m باشد. بنا بر فرض، قایق تحت تأثیر نیروی $F = -k(t)v$ است، که در آن $k > 0$ (علامت منفی، به معنای آن است که نیروی مقاومت آب، در جهت عکس سرعت حرکت قایق عمل می‌کند). اگر این مقدار F را در معادله (۷) قرار دهیم و $k = \frac{k_1}{m}$ فرض کنیم، معادله دیفرانسیلی به دست می‌آید:

$$v'(t) = -k \cdot v(t), \quad k > 0$$

که شیوه معادله (۱) است. با توجه به شرط آغازین (۸) جواب آن را، طبق

منحصر به فرد است.

مثال: معادله $(x) = 3y(x) \cdot y'(0) + 2$ باشرط $y(0) = 0$ حل کنید.
دراینجا $x = 3$ ، $y = 2$ است؛ جواب را می‌توان با توجه به رابطه (۵) نوشت: $y(x) = 2e^{3x}$. این، تنها جواب معادله است که در شرط آغازین مفروض صدق می‌کند.

چند کاربرد معادله (۱) را بررسی می‌کنیم. برای حل مسئله، باید ابتدا معادله دیفرانسیلی را تشکیل داد، شرط آغازین را (که از صورت مسئله می‌توان نتیجه گرفت) مشخص کرد، و سپس به حل معادله پرداخت. برای تشکیل معادله، معمولاً باید از قانون‌هایی استفاده کرد که در درس‌های فیزیک و شیمی وجود دارند.

۱. سرعت حرکت مستقیم الخط

بنابر قانون دوم نیوتون داریم:

$$\vec{ma} = \vec{F} \quad (6)$$

که در آن، \vec{a} عبارت است از شتاب حرکت نقطه مادی به جرم m ، و \vec{F} -نتیجه همه نیروهایی که بر نقطه مادی اثر می‌کنند. سرعت $(t)^{/u}$ و شتاب $(t)^{\vec{a}}$ از حرکت، تابع‌هایی از زمان t هستند، ضمناً می‌دانیم که $(t)^{\vec{v}} = \vec{v}(t)$ یادآوری می‌کنیم که عمل روی بردارها را-که در امتداد یک خط راست‌اند وجهت مثبتی روی آنها انتخاب شده است - می‌توان به عمل روی تصویر آنها بر این خط راست، یعنی به مقادیر عددی (اسکالر) تبدیل کرد. به این ترتیب، در حالت حرکت نقطه مادی در طول محور OX ، می‌توان به جای تساوی (۶)، از تساوی

$$m \cdot v'(t) = F \quad (7)$$

رابطه (۵) به دست می آوریم:

$$v(t) = \Delta e^{-kt} = \Delta e^{-\frac{1}{M}t}$$

با استفاده از شرط اضافی $v(0) = 0$ ، پیدا می کنیم:

$$e^{-kt} = \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{t}}$$

و با براین: $\Delta = \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{t}}$. و این قانون تغییر سرعت حرکت قایق بعد از توقف موتور است. برای پیدا کردن پاسخ مسئله، باید معادله $M = \Delta e^{-kt}$ را، نسبت به مجهول t ، حل کرد. با حل این معادله، $t = 12$ (ثانیه) به دست می آید.

۳. تجزیه رادیوآکتیو

در فیزیک روش شده است که مقدار اتم های ماده رادیوآکتیو، که در واحد زمان تجزیه می شود، جزء ثابتی از مقدار اتم های تجزیه نشده را تشکیل می دهد. برای هر نوع ماده رادیوآکتیو، این جزء ثابت خاص خود آن ماده است. و آن را «تجزیه ثابت» یا «تابهی ثابت» می نامند و با λ نشان می دهند. به زبان دیگر، تابهی اتم های ماده رادیوآکتیو، با مقدار موجود اتم های تجزیه نشده، متناسب است یعنی:

$$M'(t) = -\lambda M(t), \quad \lambda > 0 \quad (9)$$

که در آن، $M(t)$ عبارت است از تعداد اتم های رادیوآکتیو تجزیه نشده در لحظه t و $M'(t)$ سرعت تابهی آنها. از آن جای که مقدار اتم های تجزیه نشده در جریان زمان، کاهش می یابد، مشتق $M'(t)$ منفی می شود. معادله (۹)، یک معادله دیفرانسیلی است، شبیه معادله دیفرانسیلی رشد نمائی (۱). با به حساب آوردن بستگی بین عدد هسته ها و جرم ماده رادیوآکتیو، می توانیم درباره تجزیه

یا تابهی ماده رادیوآکتیو صحبت کنیم.

مسئله ماده رادیوآکتیو M_0 مفروض است. اگر در جریان ۳۰ سال در صد آن تجزیه شود، بعد از چند سال ۲۵ درصد مقدار اولیه این ماده باقی می ماند؟ حل. مقدار ماده رادیوآکتیو را در لحظه t ، برابر $M(t)$ می گیریم.

$$M(0) = M_0 \quad (10)$$

این، شرط آغازین مسئله است. اگر معادله (۹) را، با توجه به شرط آغازین (۱۰) وطبق رابطه (۵) حل کنیم، به دست می آید:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (11)$$

توجه می کنیم که $M(30) = \frac{M_0}{2}$; درنتیجه، از رابطه (۱۱) داریم:

$$e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}}$$

که با عمل های مقدماتی، می توان پاسخ مسئله را به دست آورد: ۶ سال.

۳. جذب نور

وقتی که نور از آب (یا شیشه) عبور می کند، قسمتی از آن جذب می شود. فرض کنید که نور به طور عمودی، بر سطح آب، باشد A فرود آید، شدت نور را در عمق x با $A(x)$ نشان می دهیم. مشتق $(A'(x))$ ، معرف سرعت جذب نور در عمق x است. در اپتیک روش نشده است که در محیط هایی مثل آب یا شیشه، سرعت جذب نور در عمق x ، باشد نور در همین عمق، متناسب است یعنی

$$A'(x) = -k A(x), \quad k > 0 \quad (12)$$

۴. غلظت محلول

مسأله. ظرفی به گنجایش a لیتر، پر از محلول آب نمک داریم. آب، با سرعت b لیتر در دقیقه وارد ظرف می‌شود، با محلول داخل آن مخلوط می‌شود و محلول بدست آمده (و با غلظت یکواخت)، با همان سرعت از ظرف خارج می‌شود. در لحظه $t=0$ ، چه مقدار نمک در محلول ظرف باقی مانده است، به شرطی که در ابتدا ($t=0$)، مقدار آن در محلول A_0 کیلوگرم بوده است؟ جواب ($t=1$ در حالت $a = 100$ لیتر)، $A_0 = 10$ کیلوگرم، $b = 3$ (لیتر در دقیقه) و $t = 1$ (ساعت) بدست آورید.

حل. مقدار نمک موجود در محلول را، در لحظه t ، برابر $A(t)$ می‌گیریم.

غلظت محلول در این لحظه برابر است با $\frac{A(t)}{a}$. تغییر مقدار نمک محلول در واحد زمان، برابر است با تفاضل بین مقدار نمکی که به ظرف وارد، و مقدار نمکی که از آن خارج می‌شود. ولی نمک به ظرف وارد نمی‌شود. بلکه تنها، در واحد زمان، به اندازه $\frac{b \cdot A(t)}{a}$ از آن خارج می‌شود. به این ترتیب، سرعت $(A'(t))$ تغییر مقدار نمک در محلول برابر است با

$$A'(t) = -\frac{b}{a}A(t) \quad (14)$$

علامت منفی، به معنای کم شدن مقدار نمک در محلول است، به معادله دیفرانسیلی اذنوع (۱)، با شرط آغازین (۱)، باشتر ط آغازین

$$A(0) = A_0 \quad (15)$$

می‌رسیم. اگر معادله (۱۴) را طبق رابطه (۵) و با توجه به شرط آغازین (۱۵) حل کنیم، به دست می‌آید: $A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{b}{a}t}$; که اگر مقادیر عددی مسئله را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$A(60) \approx 1/654 \text{ (کیلوگرم).}$$

III. معادله دیفرانسیلی خطی مرتبه اول

همان طور که در جبر، با مفهوم درجه یک معادله سروکارداریم، در آنالیز

چون شدت نور(x), با افزایش عمق x , کم می‌شود، مشتق(x) A' هم منفی به دست می‌آید. معادله (۱۲)، معادله‌ای است دیفرانسیلی اذنوع (۱)، نسبت به تابع (x) .

مسأله. قشر ده متری آب، 45 درصد نوری را که بر سطح آن تاییده است، بخود جذب می‌کند. درجه عمقی از آب، نورخوردشید، به درونشی نور ماه در سطح آب، می‌شود؟ به شرطی که بدانیم درخشش نور ماه، به اندازه $10 \times \frac{4}{3}$ درخشش نورخوردشید است.

حل. شرط آغازین مساوی، چنین است:

$$A(0) = A_0 \quad (16)$$

اگر حل معادله (۱۲) را با توجه به شرط آغازین (۱۶) و بنابر رابطه (۵)، بنویسیم، به دست می‌آید: $A(x) = A_0 \cdot e^{-kx}$; از اینجا، و با توجه به شرط اضافی $A(10) = 0/6 A_0$ ، خواهیم داشت:

$$e^{-k} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{10}}$$

قانون جذب نور، به این صورت در می‌آید:

$$A(x) = A_0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{x}{10}}$$

برای پیدا کردن عمق مورد نظر x در مسئله، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{A_0}{3} \times 10^{-5} = A_0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{x}{10}}$$

که از آن برای x به تقریب 247 متر به دست می‌آید.

هم، مفهوم مرتبه، برای معادلهای دیفرانسیلی، وجود دارد.

اگر معادله دیفرانسیلی، تنها شامل مشتق اول تابع مجھول باشد، معادله دیفرانسیلی مرتبه اول نامیده می شود. یکی از نوعهای معادله دیفرانسیلی مرتبه اول، که از نظر کاربرد خود، اهمیت زیادی دارد، معادله دیفرانسیلی به صورت زیر است:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \quad (16)$$

که در آن، $p(x)$ و $q(x)$ ، تابعهای دلخواهی هستند، که در حالت خاص، می توانند برابر مقدار ثابتی هم باشند. و این، معادلهای خطی نسبت به تابع مجھول و مشتق آن است. به چنین معادلهایی، معادلهای دیفرانسیلی خطی گویند. به ازای $q = 0$ ، معادله (16)، به این صورت در می آید:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0 \quad (17)$$

که معادله متجانس خطی نامیده می شود؛ وقتی که $q \neq 0$ باشد، با معادله خطی نامتجانس سروکار داریم.

معادله متجانس خطی (17) را حل می کنیم. فرض می کنیم $y(x)$ ، جواب آن باشد، یعنی تساوی برقرار باشد.

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0 \quad (18)$$

یکی از تابعهای اولیه $y(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx}$ را به (18) نشان می دهیم و دو طرف تساوی (18) را در عامل $e^{\int p(x) dx}$ - که مخالف صفر است - ضرب می کنیم. توجه می کنیم که $(y(x) \cdot e^{\int p(x) dx})' = p(x) \cdot y(x) + y'(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$ ؛ در نتیجه، به تساوی $0 = p(x) \cdot y(x) + y'(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$ می رسیم. بنابراین

$$y(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = c \Rightarrow y(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx} \quad (19)$$

(c)، مقدار ثابت دلخواه است).

به این ترتیب، اگر $y(x)$ جواب معادله (17) باشد، به صورت (19) در می آید. بر عکس، اگر تابع (19) را مستقیماً در معادله (17) قرار دهیم، معلوم می شود که به ازای هر مقدار دلخواه ثابت c ، در آن صدق می کند. بنابراین، رابطه (19) مجموعه همه جوابهای معادله (17) را به دست می دهد. وقتی که شرط آغازین (4) موجود باشد، جواب مشخصی پیدا می شود.

معادله دیفرانسیلی نامتجانس خطی (16) را می توان به معادله متجانس تبدیل کرد. مثلاً اگر تابعهای $p(x)$ و $q(x)$ ، مقادیر ثابتی باشند، یعنی $p(x) = k$ و $q(x) = a$ (که $k \neq 0$)، معادله

$$y'(x) + ky(x) = a \quad (20)$$

را می توان به صورت معادله متجانس زیرنوشت:

$$\left(y(x) - \frac{a}{k} \right)' + k \left(y(x) - \frac{a}{k} \right) = 0$$

از اینجا نتیجه می شود که مجموعه همه جوابهای $y(x)$ این معادله، از رابطه زیر معین می شود:

$$y(x) = c \cdot e^{-kx} + \frac{a}{k}$$

وجواب معادله (20)، که با شرط آغازین (4) بسازد، از این رابطه به دست می آید:

$$y(x) = \left(y_0 - \frac{a}{k} \right) e^{-k(x-x_0)} + \frac{a}{k} \quad (21)$$

به حل چند مسأله من بوط به کاربرد معادله دیفرانسیلی خطی می بردازیم.

۱. سرد کردن جسم

اگر جسم گرمی را، در محیطی با درجه حرارت پایین تر فرو ببریم، سرد می شود، ضمناً سرعت سرد شدن، در جریان زمان، کاهش می یابد. معامون شده است که سرعت سرد شدن سطح جسم، در هر نقطه آن، با اختلاف درجه حرارت سطح جسم و محیطی که آن را فرا گرفته است، متناسب است.^۱

مسئله. یک ذکه فلزی که تا 5°C درجه سانتی گراد گرم شده است، در هوای با درجه حرارت 20°C درجه سانتی گراد، سرد می شود. ۱۰ دقیقه بعداز آغاز سرد شدن، درجه حرارت سطح فلز به 15°C درجه سانتی گراد رسید. بعداز 20 دقیقه، سطح فلز چه درجه حرارتی خواهد داشت؟

حل. درجه حرارت سطح قطعه فلز را، در لحظه t ، بعداز آغاز سرد شدن، با $U(t)$ نشان می دهیم. طبق شرط مسئله داریم:

$$U(0) = 500 \quad (22)$$

این، شرط آغازین مسئله است. سرعت سرد شدن سطح فلز در لحظه t ، برابر است با $U'(t)$. اگر درجه حرارت هوا را ثابت فرض کنیم، بددست می آید:

$$U(t) = -k(t)U' + C \quad (23)$$

از آنجا که درجه حرارت در سطح فلز پایین می آید، علامت مشتق، منفی است. به این ترتیب، برای $U(t)$ ، معادله دیفرانسیل خطی، شبیه معادله (۲۰) بددست می آید:

$$U(t) = U(0) + k(t)$$

که اگر آن را طبق رابطه (۲۱)، با توجه به شرط آغازین (۲۲)، حل کنیم،

۱. گاهی به تقریب، با همین فرضها، درباره سرد شدن تمامی جسم و نه فقط سطح آن – صحبت می کنند.

پیدا می شود:

$$U(t) = 480e^{-kt} + 20$$

با استفاده از شرط اضافی $U(0) = 100$ ، بددست می آید:

$$e^{-kt} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{10}}$$

و بنابراین

$$U(t) = 480\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{t}{10}} + 20$$

که درنتیجه، به ازای $t = 10$ ، بددست می آید:

$$U(10) = 32 \frac{1}{3}$$

۲. ساده ترین مدارهای الکتریکی

اگر در مدار بسته الکتریکی، پشت سرهم، جریانی با نیروی الکتروموتوری E ولت وارد شود، مقاومت حقیقی برابر R اهم، پیچک باقابیت القایی L هانری و خازن با ظرفیت C فاراد باشد، همان‌طور که از دانش مربوط به الکتریسیته می‌دانیم، بین نیروی الکتروموتور و فشار الکتریکی وارد بر مقاومت حقیقی، پیچک القا و خازن در هر لحظه زمانی t ، این رابطه وجود دارد:

$$E = U_R + U_C + U_L \quad (23)$$

در اینجا $U_R = RI$ ، ولتاژ روی مقاومت واقعی، $U_C = \frac{q(t)}{C}$ ، ولتاژ روی خازن $U_L = LI'$ ، ولتاژ روی پیچک اندوکتیویته است؛ $I(t)$ ، شدت جریان در مدار در لحظه t ، با آمپر و $q(t)$ ، بارخازن در لحظه t ، با کولمب اندازه گیری می شوند.

با استفاده از رابطه (۲۳)، و با توجه به این که $I(t) = q'(t)$ ، می‌توان شدت جریان را در مدار، نسبت به نیروی الکتروموتور منبع جریان، به دست

آورد.

وقتی که نیروی الکتروموتور منبع جریان، ثابت باشد، جریانی که در چنین مداری تولیدمی شود، به اند وکیویته «توجه نمی کند» و از قانون اهم برای مدار بسته جریان ثابت، پیروی می کند.

حالت b. وقتی که نیروی الکتروموتور با تغییرسینوسی باشد:

$$E(t) = E_0 \sin \omega t$$

صورت می نویسیم:

$$I'(t) + k \cdot I(t) = \alpha \cdot \sin \omega t \quad (27)$$

$$\text{که در آن } E = \frac{E_0}{L} \text{ و } k = \frac{R}{L}, \alpha = \omega$$

برای پیدا کردن جواب معادله (27)، دوطرف آن را در عامل مخالف صفر e^{kt} ضرب می کنیم. در این صورت، می توان آن را با این صورت نوشت:

$$(I(t) \cdot e^{kt})' = \alpha \left(\frac{e^{kt}}{\omega + k} (k \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \right)'$$

که از آن جا به دست می آید:

$$I(t)C \cdot e^{-kt} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \left(\frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \sin \omega t - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \cos \omega t \right)$$

C، مقدار ثابت دلخواهی است. با در نظر گرفتن شرط آغازین (25) و با فرض

$$\frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \cos \beta, \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \sin \beta$$

جواب معادله (27)، که با شرط آغازین (25) هم می سازد، به این صورت، به دست می آید:

$$I(t) = \frac{\alpha \omega}{\omega^2 + k^2} e^{-kt} + \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \sin(\omega t - \beta) \quad (28)$$

مسئله. نیروی الکتروموتوری منبع جریان، E ولت، پیچک با قابلیت القای L هانری ($L \neq 0$) و مقاومت حقیقی R اهم مفروض است. مطلوب است قانون تغییر شدت جریان در مدار، به شرطی که در لحظه آغاز ($t = 0$)، این شدت برا برحسب باشد. دو حالت را بررسی کنید: a) نیروی الکتروموتوری ثابت؛ $E(t) = E$ (b) نیروی الکتروموتوری با تغییرسینوسی: $E(t) = E_0 \sin \omega t$ که در آن E_0 و ω ، مقادیری ثابت هستند.

حل. با استفاده از رابطه (23)، بعد از تبدیل های لازم، به دست می آید:

$$I(t) \cdot R + I'(t) \cdot L = E(t)$$

که برای مقادیر معلوم R، L و $E(t)$ ، می تواند همچون یک معادله دیفرانسیل خطی در نظر گرفته شود:

$$I'(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{E(t)}{L} \quad (24)$$

با شرط آغازین

$$I(0) = 0 \quad (25)$$

حالت a. وقتی $E(t) = E$ ، مقداری ثابت باشد، معادله (24) همراه با شرط آغازین (25)، شبیه معادله (20) با شرط آغازین (4) می شود. اگر طبق رابطه (21) آن را حل کنیم، به دست می آید:

$$I(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L} t}, \quad (26)$$

از (26) پیداست که با رشد زمان t، شدت جریان (I)، به سمت مقدار ثابت $\frac{E}{R}$ می کند. بنابراین، در دستگاهی که نیروی الکتروموتور منبع جریان ثابت باشد، شدت جریان مقداری ثابت و برابر $\frac{E}{R}$ می شود. به زبان دیگر،

۲۱) طبق رابطه (۲۱)، پاسخ آن را می نویسیم:

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

از این رابطه دیده می شود که با گذشت زمان t ، سرعت سقوط $v(t)$ ، به مقدار $\frac{mg}{k}$ نزدیک می شود. ضمناً در حالت $\frac{mg}{k} < v(t) < v_0$ ، سرعت $v(t)$ ، ضمن صعودی بودن خود، به $\frac{mg}{k}$ نزدیک می شود و در حالت $\frac{mg}{k} > v(t) > v_0$ ، این سرعت نزولی است و بداین مقدار ثابت نزدیک می شود. مثلاً وقتی که چتر باز خود را به طرف زمین پرتاب می کند، بعد از آن که چتر خود را باز کند، سرعت او، سیری نزولی پیدا می کند و به مقدار $\frac{mg}{k}$ نزدیک می شود. مقدار k ، به قطر نیم کره چترستگی دارد. همین موضوع، امکان می دهد که (بامعلوم بودن مقدار mg)، محاسبه را طوری انجام دهیم که سرعت چتر باز، در لحظه برخورد او با زمین، خطی برای او نداشته باشد. چنین سرعتی، معمولاً، بین ۵ تا ۷ متر در ثانیه است.

مسئله . مطلوب است سرعت (t) حرکت جسمی که درخلاء به طرف زمین سقوط می کند؛ سرعت اولیه حرکت را برابر 0 می گیریم.

حل . در این حالت، مقاومت هوا وجود ندارد و معادله (۲۹) بداین صورت در می آید:

$$v'(t) = g \quad (۳۰)$$

که با حل آن، به مجموعه جواب های $v(t) = gt + C$ می رسیم . اگر شرط آغازین $v_0 = v(0) = 0$ را در نظر بگیریم، به جواب مشخص $v(t) = gt$ می رسیم که با آن، از درس فیزیک دیفرانسیلی، آشنا هستیم.

IV. معادله فوسان همساز

اگر معادله دیفرانسیلی، شامل مشتق مرتبه دوم تابع مجهول باشد، شامل

از رابطه (۲۸) دیده می شود که اگر در حالت الکتروموتور سینوسی منبع جریان، دستگاه به کار خود ادامه دهد، یعنی وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، شدت جریان هم سینوسی است و به صورت $A \cdot \sin(\omega t - \beta)$ در می آید، که در آن، A و β مقادیری ثابت هستند.

۳. سقوط جسم

حرکت سقوطی جسم، درخلاء مستقیم الخط و تحت تأثیر نیروی جاذبه است. وقتی که جسم در هوا سقوط می کند، باز هم می توان حرکت آن را مستقیم الخط به حساب آورد، که تحت تأثیر نیروی نقل و نیروی مقاومت هوا که از بایین به بالا اعمال می شود – انجام می گیرد .

مسئله . مطلوب است سرعت (t) حرکت جسمی که در هوا به طرف زمین سقوط می کند؛ به شرطی که نیروی مقاومت هوا با سرعت حرکت جسم نسبت مستقیم داشته باشد و سرعت اولیه جسم هم برابر 0 متر در ثانیه باشد.

حل . محور Oy را قائم و به طرف پایین در جهت مسیر سقوط جسم می گیریم. بر جسم دونیرو واژر می کند: نیروی نقل و نیروی مقاومت هوا. تصویر نیروی نقل بر محور Oy ، برابر با mg (م) جرم جسم است؛ و تصویر نیروی مقاومت هوا بر همین محور، بنا بر فرض مسئله، برابر $-kv(t)$ می باشد (k ، ضریب تناسب است). تصویر شتاب حرکت جسم، بر همین محور Oy . برابر است با مشتق (t) . بنابر قانون دوم نیوتون داریم: $mg - kv'(t) = mg - k(v(t))$ ، یا

$$v'(t) + kv(t) = g \quad (۲۹)$$

که در آن $\frac{k}{m} = k_1$ است.

معادله (۲۹)، معادله دیفرانسیلی خطی است از نوع (۲۰) با شرط آغازین

$$y'(x) = a\sqrt{A^2 - y^2(x)} \quad (32)$$

$$y'(x) = -a\sqrt{A^2 - y^2(x)} \quad (33)$$

معادله (32) را به صورت

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{A^2 - y^2(x)}} - a = 0$$

می نویسیم، که به نوبه خود، چنین می شود:

$$\left(\arcsin \frac{y(x)}{A} - ax \right)' = 0$$

واز آن جا، به سادگی به دست می آید:

$$\arcsin \frac{y(x)}{A} - ax = \varphi$$

که در آن، φ عبارت است از ثابت تازه‌ای. از اینجا داریم:

$$y(x) = A \sin(ax + \varphi) \quad (34)$$

به سادگی می توان تحقیق کرد که تابع (34)، جواب معادله (31) است. بنابراین، رابطه (34)، مجموعه همه جواب‌های معادله دیفرانسیلی نوسان‌های همساز (31) را به ما می دهد. برای این که از مجموعه جواب‌های (34)، جواب مشخصی را جدا کنیم، باید مقادیر ثابت A و φ را معین کنیم. برای این منظور، کافی است مقدار تابع مجهول و مشتق آن را، به ازای مقداری مثل x از آوند داشته باشیم: $y(x) = y_0$ و $y'(x) = y'_0$. این‌ها، شرط‌های آغازین را تشکیل می‌دهند، که با قراردادن آن‌ها در (34) و در تساوی

۱. جواب معادله (33) را می توان از رابطه (34)، با تغییر علامت a ، به دست آورد.

مشتق‌های مرتبه بالاتر نباشد، معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم نامیده می شود. شبیه معادله‌های مرتبه اول، در اینجا هم، معادله‌های خطی دیفرانسیلی مرتبه دوم، از نظر کاربرد خود، اهمیت پیشتری دارند. این‌ها، معادله‌هایی هستند که در آن‌ها، بین تابع و مشتق‌های مرتبه اول و دوم آن، رابطه‌ای خطی وجود دارد. حالت خاص این گونه معادله‌ها، معادله نوسان‌های همساز است که می توان آن را به این صورت نوشت:

$$y''(x) + a^2 \cdot y(x) = 0 \quad (31)$$

که در آن $a > 0$ ، مقداری ثابت است. بینیم چنین معادله‌هایی چگونه حل می شوند. $y(x)$ را جوابی از معادله (31) می گیریم، یعنی:
 $y''(x) + a^2 \cdot y(x) = 0$ یک تساوی درست باشد. دو طرف این تساوی را در $y'(x)^2$ ضرب می کنیم، به دست می آید:

$$2y'(x)y''(x) + 2a^2 y(x)y'(x) = 0$$

که می توان آن را به این صورت نوشت:

$$(y''(x) + a^2 y(x))' = 0$$

واز آن جا، به سادگی، نتیجه می شود:

$$y''(x) + a^2 y(x) = C$$

C ، مقدار ثابت دلخواهی است. چون C مثبت است (برابر است، با مجموع دو مجدد کامل)، می توان فرض کرد: $C = a^2 A^2$ (A ، مقدار ثابت جدیدی است).

به این ترتیب، $y(x)$ ، در معادله دیفرانسیلی مرتبه اول $(y''(x) + a^2(A^2 - y^2(x)) = 0)$ صدق می کند، که به نوبه خود، متناظر با دو معادله دیفرانسیلی زیر است:

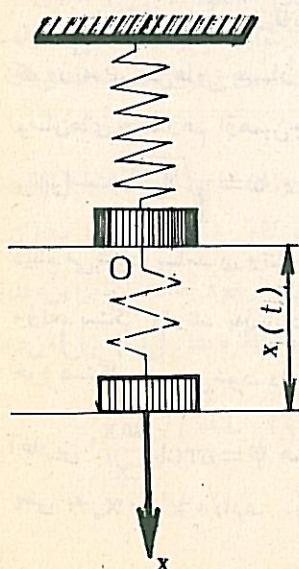
۱. نوسان‌های ناشی از نیروی کشسان فنر

مسئله. در انتهای فرقائی، وزنه‌ای به جرم m گرم آویزان کردند. وزنه از حالت تعادل خارج و پس به حالت اول بر می‌گردد. مطلوب است قانون حرکت وزنه، به شرطی که از جرم فنر مقاومت هوا، صرف نظر کنیم.

حل. محور Ox را به طرف پایین و در امتداد خطراست قائمی که از نقطه تعیق وزنه در حالت تعادل – که به عنوان مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم – می‌گذرد، به حساب می‌آوریم (شکل را بینید). انحراف وزنه را از حالت تعادل، در لحظه t ، برابر $x(t)$ می‌گیریم. فرض کنید که در لحظه آغازین ($t=0$)، این انحراف برابر x_0 و سرعت حرکت برابر x'_0 باشد، یعنی

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0. \quad (37)$$

این، شرط‌های آغازین است.



تصویر F و انحراف $x(t)$ علامت‌های یکسانی ندارند. بنابراین، معادله

$$y'(x) = aA \cos(ax + \varphi)$$

(این رابطه با دیفرانسیل گرفتن از رابطه (۳۴) بدست می‌آید)، به یک دستگاه دو معادله دو مجهولی نسبت به A و φ می‌رسیم:

$$\begin{cases} y_0 = A \sin(ax_0 + \varphi) \\ y'_0 = aA \cos(ax_0 + \varphi) \end{cases}$$

که با حل آن، A و φ به دست می‌آید (A را مثبت و φ را سازگار با شرط $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ در نظر می‌گیریم). مثلاً، بازای x_0 داریم:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{y'^2_0}{a^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{ay_0}{y'_0}.$$

به این ترتیب، جواب معادله (۳۱)، با توجه به شرط‌های آغازین

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \quad (35)$$

به این صورت در می‌آید:

$$y(x) = \sqrt{y_0^2 + \frac{y'^2_0}{a^2}} \cdot \sin\left(ax + \arctg \frac{ay_0}{y'_0}\right) \quad (36)$$

یادآوری می‌کنیم که این، جواب منحصر به فرد معادله (۳۱)، بازای شرط‌های آغازین (۳۵) است، زیرا برای مقادیر ثابت A و φ ، با توجه به این شرط‌ها، تنها یک جواب به دست می‌آید.

معادله دیفرانسیل نوسان‌های همساز، ضمن بررسی انواع فرایندهای نوسانی، بدست می‌آید: نوسان‌های پاندول، آنتن، فنر، تکان‌های کشتی و غیره. چند نمونه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

حرکت وزنه، به صورت

$$m \cdot a_x = -k \cdot x(t)$$

درمی آید، که در آن، \ddot{x} عبارت است از تصویر شتاب \vec{a} بر محور Ox . نسبت $\frac{k}{m}$ را به ω^2 نشان می دهیم، که در این صورت، و با توجه به تساوی $(t) = x''$ و شرط های آغازین (۳۷)، به معادله دیفرانسیلی زیر می رسمیم:

$$x''(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0 \quad (38)$$

که معادله حرکت وزنه، با شرط های آغازین (۳۷) است. این معادله، شبیه معادله (۳۱) با شرط های آغازین (۳۵) است. جواب آن را، با توجه به رابطه (۳۶) می نویسیم:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0^2}{\omega^4}} \cdot \sin\left(\omega t + \arctg \frac{\omega x_0}{x_0}\right) \quad (39)$$

رابطه (۳۹)، معرف قانون حرکت وزنه است. از این رابطه دیده می شود که وزنه، نوسان هایی همساز نسبت به وضع تعادل خود دارد (نام گذاری معادله نوسان های همسازهم از همینجا آمده است). بسامد و تناوب نوسان، به ترتیب برابر است با $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ یا $T = \frac{2\pi}{\omega}$ همان طور که دیده می شود، بسامد ν و تناوب نوسان T ، تنها به درجه سختی فراز به جرم وزنه، بستگی دارند. بهزبان دیگر، تناوب نوسان و بسامد، از روی ویژگی های خود دستگاه معین می شود. دامنه همین نوسان، یعنی $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0^2}{\omega^2}}$ و مرحله آغازین $\varphi = \arctg \frac{\omega x_0}{x_0}$ هم بستگی به حالت اولیه دستگاه نوسان کنند، یعنی به x_0 و ω دارد.

۳. مدار نوسانی

مدار نوسانی به مداری الکتریکی گفته می شود که از خازن و پیچکی که به

جوشن های خازن متصل است، تشکیل شده باشد.

اگر خازن را به باتری وصل کنند، صفحه خازن، باری به دست می آورد و درجوشن های آن، اختلاف پتانسیل به وجود می آید. وقتی که خازن را که به این ترتیب باردار شده است، به پیچک وصل کنیم، آغاز به تخلیه شدن می کند و در مدار، جریان برق ظاهر می شود. ولی، شدت جریان، به خاطر پدیده خود القایی، به تدریج افزایش می یابد و وقتی به حد اکثر مقدار خود می رسد، که خازن به طور کامل تخلیه شود. ضمناً به خاطر وجود پدیده خود القایی، جریان یکباره از بین نمی رود. کم شدن تدریجی جریان، موجب پرشدن دوباره جوشن های خازن می شود. وقتی که جریان از بین می رود، جوشن های خازن دوباره پر می شوند، و دستگاه به حالت اول بر می گردد و روند درجهت مخالف جریان می یابد؛ نوسان های الکتریکی به وجود می آید.

مسئله خازنی با ظرفیت C فراداده و پیچکی با خود القایی I هابزی ω وصل شده اند. در لحظه آغازین ($t = 0$)، بار خازن برابر است با q_0 کولمب، و از راه پیچک، I_0 آمپر جریان دارد. مطلوب است قانون تغییر شد جریان در مدار (از مقاومت حرف نظر نمی کنیم).

حل. بار خازن را با $(t) = q$ و شدت جریان را در لحظه t با $(t) = I$ نشان می دهیم. چون $(t) = I = I_0$ ، برای حل مسئله، کافی است $(t) = q$ را پیدا کیم. در مدار نوسانی، مقاومت حقیقی R و منبع جریان وجود ندارد. بنابراین، در بین (۲۳) داریم: $0 = E(t) = R = I(t) = E = I_0 + I_c + I_R$ می رسمیم،

$$\text{که در آن، } \frac{q(t)}{C} = I_c \text{ و } I'(t) = L \cdot q''(t) \text{ و } I''(t) = L \cdot q(t).$$

به این ترتیب، به معادله دیفرانسیلی مرتبه دو م

$$q''(t) + \frac{q(t)}{L \cdot C} = 0 \quad (40)$$

با شرط های آغازین $q(0) = q_0$ و $q'(0) = I_0$ می رسمیم که شبیه معادله

روش مدل‌سازی ریاضی. معادله دیفرانسیلی، که در جریان مطالعه بعضی از مسائلهای فنی به وجود آمده است، موجب شده است که مثلاً یک وسیله الکتریکی ساخته شود که کار آن، درست همان چیزی را شرح می‌دهد که از معادله دیفرانسیلی به دست می‌آمد. با مشاهده کار این وسیله الکتریکی، می‌توانیم درباره رفتار تابع مججهول داوری کنیم. مثلاً فرض کنید یک دستگاه مکانیکی تشکیل شده باشد از خلطکی که از راه فنوفلکه، که در مایع غلیظی فرو رفته و گردش را به خلطک دیگری که به فلکه محکم چسبیده است، منتقل کند. برای مطالعه کار این دستگاه، دستگاه دیگری ساخته می‌شود. دستگاه جدیداً الکتریکی است و شامل الکتروموتوری است که از راه پیچک القایی، خازن و مقاومت حقیقی، به ماشین حسابی با انرژی الکتریکی وصل شده است؛ ضمناً می‌توان مقادیر اندوکتیویتی، ظرفیت و مقاومت را طوری انتخاب کرد که به صورت معینی باسختی فر، اینرسی فلکه و اصطکاک مایع، متناظر باشند. در صورت چنین تناظری، هر دو دستگاه را می‌توان بوسیله یک معادله دیفرانسیلی شرح داد. در نتیجه، با اندازه گیری شدت جریان و فشار الکتریکی، می‌توان درباره کار دستگاه مکانیکی نخست، داوری کرد.

چند مسئله:

۱. این معادله‌ها را حل کنید:

- a) $y' - 2y = 0$, $y(1) = 12$;
- b) $y' + 2y = 6$, $y(0) = -1$;
- c) $y' = ax + by$;
- d) $y' + xy = 0$;
- e) $y' + xy = x$, $y(0) = 2$;

$$y = -4e^{-2x} + 3 \quad (b) \quad y = 12e^{2(x-1)} \quad (a)$$

(۳۱) است. بنابراین، جواب آن را، از رابطه (۳۶) پیدا می‌کنیم:

$$q(t) = \sqrt{q_0^2 + I_0^2 \cdot L \cdot C} \times \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L \cdot C}} + \arctan \frac{q_0}{I_0 \sqrt{L \cdot C}}\right) \quad (41)$$

بادیفرانسیل گرفتن از رابطه (۴۱) نسبت به t ، شدت جریان را در مدار به دست می‌آوریم:

$$I(t) = \sqrt{\frac{q_0^2}{L \cdot C} + I_0^2} \times \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L \cdot C}} + \arctan \frac{q_0}{I_0 \sqrt{L \cdot C}}\right)$$

از این رابطه دیده می‌شود که $I(t)$ به طور متناوب تغییر می‌کند، یعنی در مدار نوسان‌های الکتریکی باسالمد $\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ و تناوب $T = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$ ، پیش می‌آید. یادآوری می‌کنیم که با سامدو تناوب نوسان، به شرط‌های آغازین، بستگی ندارند و با عامل‌های مدار الکتریکی معین می‌شوند: قابلیت القایی پیچک و ظرفیت خازن.

ما مسائلهای فیزیکی گوناگونی را مورد بحث قراردادیم، که ضمن بررسی آنها، به معادله‌های دیفرانسیلی مرتبه اول و مرتبه دوم مشابهی برخورد کردیم. این بررسی، هم از لحاظ فلسفی – که بریگانگی طبیعت تأکیدی کند – هم از نظر آگاهی‌های مربوط به دانش طبیعی و هم، و به خصوص، از نظر تأکید بر نیروی ریاضیات در دانش‌های طبیعی، اهمیت بسیار دارد. این بررسی از لحاظ عملی هم، ارزش زیادی دارد. شباهت معادله‌های دیفرانسیلی، که ضمن مطالعه پدیده‌های گوناگون مربوط به زندگی به دست می‌آیند، منجر به روش بسیار مهمی برای حل مسائلهای عملی شده است:

به شرطی که مقدار اولیه آن، ۱ کیلوگرم باشد؟

$$\text{جواب. } (گرم) ۱۳۶ \approx (کیلوگرم)^2 \cdot A(20) = e^{-2}$$

۷. درجه حرارت محیط بیرون، صفر درجه سانتی گراد است. حرارت

اولیه یک جسم گرم چه بوده است، به شرطی که بدانیم یک ساعت بعد از آغاز سردشدن، درجه حرارت آن به $\frac{1}{3}$ درجه حرارت اولیه و بعد از دو ساعت به ۱ درجه سانتی گراد رسیده باشد؟

$$\text{جواب. } ۳۶ \text{ درجه سانتی گراد.}$$

۸. درجه حرارت نانی که از تنور بیرون می‌آید، در جریان ۲۰ دقیقه

اول از ۱۵۵ درجه به ۴۰ درجه سقوط می‌کند. درجه حرارت هوا برابر ۲۵ درجه است. درجه حرارت نان، بعد از ۴ دقیقه چقدر است؟

$$\text{جواب. تقریباً } ۴۱/۳ \text{ درجه سانتی گراد.}$$

۹. راهی را که یک جسم در حرکت مستقیم الخط خود در زمان t طی

می‌کند، پیدا کنید، به شرطی که سرعت آن باراهی که طی کرده است متناسب باشد و ضمناً بدانیم که در ۲۵ ثانية اول ۴۰۰ متر و در ۵ ثانیه بعد ۲۸۰۰ متر طی کرده است.

$$\text{جواب. (متر)} \frac{1}{2} t^2 = 25 \times 25$$

$$; y = ce^{-\frac{x}{2}} \quad (d) ; y = ce^{bx} - \frac{a}{b}x - \frac{a}{b} (c)$$

$$; y = 1 + e^{-\frac{x}{2}} \quad (e)$$

۱۰. دوره نیم عمر یک ماده را دیوآکسیو، برابر است با ۱۰۰۰ سال. بعد از

۲۰۰۰ سال چقدر از این ماده باقی می‌ماند؟ به شرطی که مقدار اولیه آن M باشد، بعد از ۵۰۰ سال چطور؟

$$\text{جواب. } M(500) = M_0 \sqrt[4]{2}, \quad M(2000) = \frac{M(0)}{4}$$

۱۱. ضمن تخمیر، سرعت دشد خمیر مایه عمل کننده، با مقدار موجود آن، متناسب است. قانون تشکیل خمیر مایه را پیدا کنید، به شرطی که به ازای t ، مقدار آن برابر y کیلوگرم باشد.

$$\text{جواب. } k > 0, \quad y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$$

۱۲. مقدار اولیه خمیر مایه را پیدا کنید به شرطی که بدانیم ۳ ساعت بعد از آغاز تخمیر، برابر $5/4$ کیلوگرم و ۷ ساعت بعد از آغاز تخمیر، برابر ۲ کیلوگرم شده است.

$$\text{جواب. } \frac{1}{2} t^5 = 2 \frac{5}{4} \quad y(t) = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} (کیلوگرم)$$

۱۳. شیشه به ضخامت ۱ متر، می‌تواند $\frac{1}{4}$ مقدار نوری را که از آن عبور می‌کند، به خود جذب کند. نور از شیشه‌ای با کدام ضخامت عبور کند تا ۱٪ آن جذب شیشه بشود؟

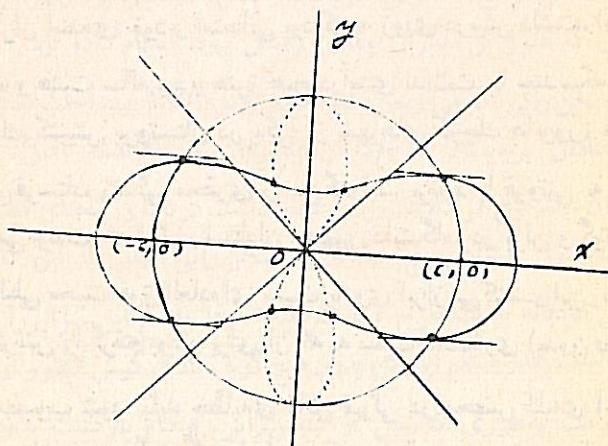
$$\text{جواب. (متر)} 5/035 \approx$$

۱۴. از ظرفی به گنجایش ۱۰ لیتروپراز محلول آب نمک، آب با سرعت ۱ لیتر در دقیقه جریان دارد. بعد از ۲۵ دقیقه، چقدر نمک در ظرف باقی می‌ماند،

می توان بهره ور شد و جزئیات مسئله را بررسی کرد.

بررسی منحنی :

هرگاه ضریب زاویه مماس بر منحنی را بررسی کنیم، ملاحظه می شود که مماس بر منحنی در نقاط تقاطع آن با دایره $x^2 + y^2 = c^2$ و با خط $x = 0$ با خطي AB موازی است (شکل ۲). البته حالات مختلف را باید بحث کرد.



شکل ۲

هرگاه انحنای منحنی را بررسی کنیم، نتیجه می گیریم که تابع منحنی در نقاط تقاطع آن بالمنیسکات (inflection) منحنی در نقاط تقاطع آن بالمنیسکات

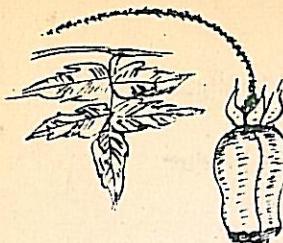
$$r^2 = -c^2 \cos 2\theta$$

قرار دارد. بدلاوه از بحث در وجود این نقاط نتیجده می گیریم که نقاط موجودند فقط و فقط وقتی که داشته باشیم:

$$c^2 \leq k \leq 2c^2$$

مراجعه :

Smith, David Eugene, History of Mathematics Volume II, Ginn and Company, (1925).



بیضوی کاسینی و برنولی

علیرضا امیرمعز

دو نقطه ثابت A و B را در نظر می گیریم. نقطه P چنان تغییر می کند که $|PA| \cdot |PB| = k^2$ مقداری است ثابت. مکان هندسی P را بیضوی کاسینی می گویند. خواص این منحنی بسیار جالب است؛ به خصوص شرط این که منحنی محدب باشد اهمیت کاربردی دارد.

بیضوی ها :

هرگاه در دستگاه قطبی $A = (c, 0)$ و $B = (c, \pi)$ بگیریم، نقطه P در معادله زیر صدق می کند.

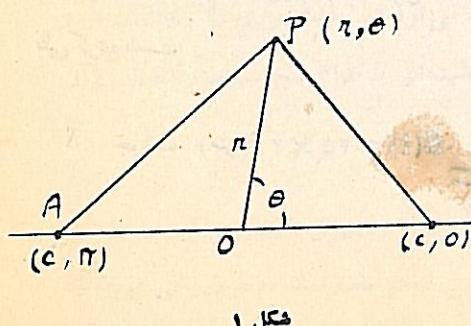
$$r^2 = c^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{k^2 - c^2} \sin^2 2\theta \quad (1)$$

این معادله با در نظر گرفتن رابطه کسینوس ها به دست می آید (شکل ۱). رابطه (۱)، در دستگاه قائم، به معادله زیر بدل می شود.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2) + k^2 - c^4 \quad (2)$$

کاسینی (Giovanni Domenico Cassini) در سال ۱۶۸۵ این منحنی را بررسی کرده است.

حالات خاص آن را که $k = c$ است برنولی (Jacques Bernoulli) در سال ۱۶۹۴ بررسی کرده است و آنرا لمنیسکات (Lemniscate) نامیده است.



شکل ۱

دو خاصیت بسیار جالب این منحنی زیبائی خاصی دارد. بدون برهان این خواص را بررسی می کنیم. البته اثبات این خواص بسیار ساده است و از خواص مشتقات

انحنای فضا

ربانی فاصله‌ی چندانی نداشت. (این برداشت، امروزه نیز در گوتینگن عمومیت دارد.) عنوان موضوعی که گوس برای سخن رانی، ریمن جوان برگزید، عبارت بود از: «فرض‌هایی که پایه‌ی هندسه را تشکیل می‌دهند.» گوس در مورد این عنوان چیزی جز چند بررسی مبهم انتشار نداده بود، با این حال، این موضوع را بر دو موضوع دیگری که ریمن پیشنهاد کرده بود ترجیح داد، زیرا کنجکاو بود بیند این مرد جوان در مورد چنین موضوع ژرف و غریبی چه خواهد گفت؛ موضوعی که گوس خود بسیار بدان اندیشه‌ید بود و پیرامون آن، کار زیادی که هنوز بر دیگران چندان روش نبود، انجام داده بود.

روز سخن رانی عمومی ریمن، شنبه دهم ژوئن ۱۸۵۴ بود. اغلب مستمعین او را استادان برجسته، تاریخ‌دانان، فیلسوفان و خلاصه افراد غیر ریاضی دان، تشکیل می‌دادند. ریمن قصد داشت درباره‌ی انحنای فضاهای ۲۰- بعدی، بدون نوشتن هیچ معادله‌ای، سخن رانی کند. آیا این کار یک خودخواهی مذبانه یا یک طرح فرصت طلبانه بود؟ پاسخ این سؤال را هرگز نخواهیم دانست. قدر مسلم این که، بدون هیچ گونه معادله، گوس منظور اورا به خوبی دریافت به طوری که پس از سخن رانی، هنگام بازگشت به خانه با حرارت فوق العاده‌ای در مورد احساس ستایش شگرف خود نسبت به نظراتی، که توسط ریمن عرضه شده بود، با همکارش ویلهلم ویز سخن گفت.

اشتیاق گوس به جا بود. برنارد جوان به قلمرو آن چنان نویی از اندیشه دست یافته بود که در آن روزگار، کمتر دانشمندی می‌توانست کار او را دنبال کند. افکار انتزاعی او، نیم قرن بعد در کارهای آلتز اینشتین با واقعیت تجربی درآمیخت. اینشتین متوجه شد که اندیشه‌های ریمن را می‌توان مستقیماً در مسئله اندرکش نور و گرانش به کار گرفت و این اندیشه‌ها را مبنای نظریه نسبیت عمومی خود - که امروزه برداشت ما از جهان حاکم است - قرار داد.

در بهار سال ۱۸۵۴، یک ریاضی دان جوان آلمانی به نام برنارد ریمن^۲ به شدت نگران آینده‌ی خود و امتحانی بود که به زودی دریش داشت. او در آن ایام بیست و هشت ساله بود و هنوز هیچ درآمدی نداشت. با چند سکه‌ای که پدرش (یک کشیش پروستان در یکی از شهرهای کوچک هانوور) هر ماه برایش می‌فرستاد، زندگی محقری را می‌گذراند. برنارد با فروتنی به پدر و برادرش می‌نوشت که اغلب استادان مشهور دانشگاه، در برلن و گوتینگن، بی هیچ دلیلی محبت فوق العاده‌ای نسبت به وی ابراز می‌کنند. در این زمان، او مدرک دکتریش را گرفته بود و برای آن که به سمت دانشیاری (بدون دریافت حقوق) منصوب شود، باید خطابه‌ی قابل قبولی در محضر کلیه‌ی اعضای دانشکده‌ی فلسفه در گوتینگن، ایراد می‌کرد. برنارد سه موضوع را پیشنهاد کرده بود. در آن روزها به برادرش نوشت: «دو موضوع اول را به خوبی تهیه کرده بودم، اما گوس موضوع سوم را انتخاب کرد و حالا به زحمت افتاده‌ام.» کارل فردریک گوس^۳، سرکرده‌ی ریاضی دانان آلمان و مایه‌ی مبارفات دانشکده‌ی خود بود. در تصور برنارد از عرش اعلا، مبل کار گوس از بارگاه

1. P. Lecorbeiller

2. Bernhard Riemann

3. Hanover

4. Karl Friedrich Gauss

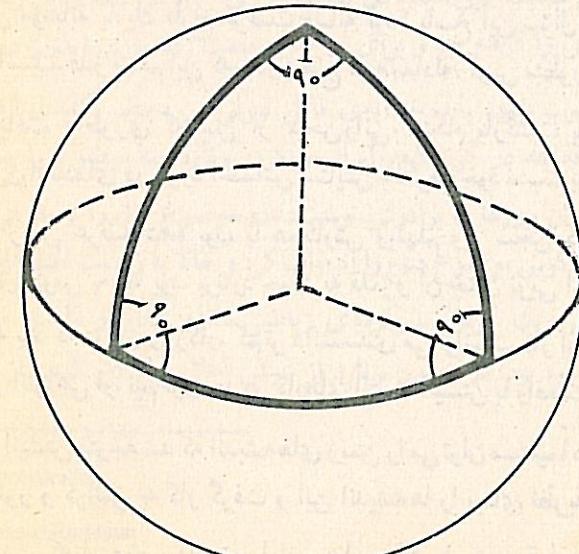
و قطب جنوب باهم تلاقی می کنند. اگر قطعاتی از سه دایره‌ی عظیمه (مثلاً یک‌چهارم خط استوای زمین و نیمه‌های شمالی دو نصف‌النهار) یکدیگر را قطع کنند و بدین ترتیب یک «مثلث کروی» ایجاد کنند، مجموع سه زاویه‌ی آن (در این مثال) برابر 270° درجه یا سه قائمه خواهد بود. تفاوت بین این مثلث و مثلث مسطحه از این جا ناشی می‌شود که مثلث کروی به جای سطح صاف، روی سطح انحنادار رسم شده است.

حال، چگونه در می‌باییم که سطح یک میز صاف، و سطح زمین کروی است. در همه‌ی تمدن‌های اولیه چنین تصور می‌شد که زمین به شکل صفحه‌ی مدوری است که کوه‌ها سطح آن را - هم چون غذا بر میز شاهان - برآمده کرده‌اند. پیش از آن که انسان بتواند از جو زمین خارج شود و از دور دست بدان بنگرد، مشاهده‌ی شکل حقیقی زمین برایش ناممکن است؛ پس اخترشناسان یونانی چگونه به این نتیجه دست یافتند که زمین گرد است؟ آنان مشاهده کرده بودند که ستاره‌ی قطبی در یونان نسبت به مصر ذر ارتفاع بیش تری از آسمان قرار دارد. پس معلوم می‌شود که برای پی بردن به گرد بودن یک کره، یاباید از فاصله‌ی دور به آن نگاه کنیم و یا آن که روی آن بایستیم و اجسامی را که در دور دست واقع‌اند، مورد مشاهده قرار دهیم.

علاوه براین، انسان از دو روش کاملاً متفاوت دیگر نیز توانست به گرد بودن زمین پی ببرد. یکی از این دوراه دریانوری در قلمرو رُمین بود. انسان دریافت که اگرچه زمین هیچ «له» و هیچ مرزی ندارد، مساحت آن محدود است. این حقیقت قابل توجهی است: سطح زمین بدون داشتن هیچ کرانه‌ای، محدود است. بی‌شک، این وضع امکان مسطح بودن زمین را منتفی می‌سازد. سطح یک صفحه، بی‌کرانه و در عین حال نامحدود است. (در گفت‌وگوی روزمره‌ی، دعوازه‌ی «بی‌کرانه» و «نامحدود» مترادف محسوب می‌شود و این نشان می‌دهد که کرویت زمین هنوز به طور واقعی در ضمیر ما جای گزین نشده است.)

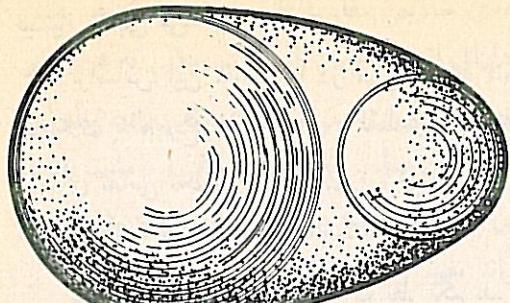
حال به سال ۱۸۵۴ برمی‌گردیم تا بینیم ریمن در آن روز از ماه ژوئن چه نظراتی را در سخن‌رانی خود ابراز کرد. پیش از پرداختن به نظرات ریمن، لازم است زمینه‌ای نسبتاً ابتدایی در این مورد داشته باشیم:

خواننده بی‌شک با عناصر هندسه‌ی مسطحه آشناست. خط راست کوتاه‌ترین مسیر بین دونقطه است؛ خطوط موازی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ مجموع سه زاویه‌ی مثلث برابر دو قائمه یا 180° درجه است و احکام دیگری از این قبیل: هم‌چنین می‌دانیم که در هندسه‌ی اشکالی که روی سطح کره ترسیم می‌شوند، قوانین دیگری حاکم است. کوتاه‌ترین مسیر بین دونقطه روی سطح کره، منطبق بر یک «دایره عظیمه» است؛ این منحنی در اثر تقاطع کره با صفحه‌ای که از دونقطه‌ی مذبور و مرکز کره می‌گذرد و کره را به دونیمه مساوی تقسیم می‌کند، به دست می‌آید. دو دایره‌ی عظیمه همیشه یکدیگر را در دونقطه قطع می‌کنند؛ مثلاً هر دو نصف‌النهار از زمین، همیشه در قطب شمال



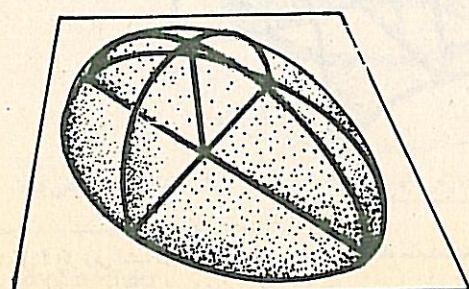
شکل ۱ مثلث‌های که روی صفحه و روی کره رسم می‌شوند، از قوانین متفاوتی تعیت می‌کنند. روی صفحه، همیشه مجموع زوایای مثلث 180° درجه است. تقاطع سه دایره‌ی عظیمه روی سطح کره، سه زاویه می‌سازد که مجموعشان (مثلاً) 270° درجه می‌شود.

حال، اگر تکه‌ای از پوسته‌ی تخم مرغ را که به ناحیه‌ی میانی آن تعلق دارد، به ما بدهند، آیا می‌توانیم انحنای آن را تعریف کیم؟ این کار قدری



شکل ۲ تخم مرغ دارای منحنی است.
چنان که گویی سر بزرگش بخشی از یک کره‌ی
یک کره و سر کوچکش از یک کره‌ی
کوچک‌تر است. بخش میانی دارای
انحنای متفاوتی است.

دشوار است زیرا چنین تکه‌ای را نمی‌توان با بخشی از یک کره‌ی ساده یکسان دانست. مسأله به صورت زیر حل می‌شود. فرض کنید که این تکه را که کم و بیش شکل یک سطح بیضوی در امتداد طولی را دارد، روی میز قرار می‌دهیم و بدین ترتیب شکل یک گبید کم ارتفاع را به خود می‌گیرد. هر مقطع قائم از این گبید، یک منحنی کاو (مقعر) به طرف پایین خواهد بود. هم‌چنین، هر یک از این مقاطع قائم شبیه بخشی از یک دایره خواهد بود، اما همه‌ی این دایره‌ها دارای شعاع برابر نخواهند بود. مقطعی که از کم عرض ترین قسمت قاعده می‌گذرد، کوچک‌ترین شعاع و مقطعی که در جهت طولی داده شود، بزرگ‌ترین شعاع را خواهد داشت. شعاع اول را R_1 و شعاع دوم را R_2 می‌نامیم. هندسه‌دانان در این مورد به نوعی، میانگین می‌گیرند و انحنای آن بخش کوچک از پوسته‌ی

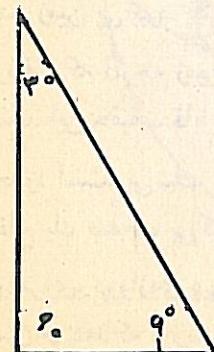


شکل ۲ اگر نیمه‌ی تخم مرغی روی میز قرار گیرد و با مقاطع قائم برش داده شود، این مقاطع به صورت منحنی‌هایی با تقریب رو به پایین، و به شکل بخش‌هایی از دایره‌های دارای شعاع‌های متفاوت خواهد بود.

بنابراین، حتی اگر ابرهای غلیظی همواره کره‌ی زمین را می‌پوشانندند، انسان به گرد بودن زمین آگاهی می‌یافتد. حال فرض کنید که به طریقی از پیموده شدن سراسر زمین توسط بشر، جلوگیری می‌شد. در این صورت، هنوز راه دیگری وجود داشت که انسان دریابد که بروی یک کره زندگی می‌کند؛ این راه، استفاده از هندسه‌ی کروی است که به بحث فعلی ما مربوط است. اگر مثلث کوچکی - مثلاً به اضلاع حدود ۱۰ متر - را روی سطح زمین در نظر بگیریم، تشخیص آن از مثلث مسطح، امکان‌پذیر نیست؛ فزوونی مجموع زوایای آن، نسبت به ۱۸۰ درجه، آنقدر اندک است که قابل اندازه‌گیری نیست. هرچه مثلث‌های بزرگ‌تر و بزرگ‌تری را روی سطح کروی زمین در نظر بگیریم، انحنای آن‌ها بیش تر و بیش تر اهمیت می‌یابد و در فزوونی مجموع زوایای آن‌ها نسبت به ۱۸۰ درجه، نمودار می‌گردد. بنابراین با گسترش هرچه بیش تر شیوه‌های اکتشاف و نقشه‌برداری، انسان سرانجام می‌توانست کرویت زمین را ثابت کند و به کمک اندازه‌گیری‌های مربوطه، شعاع کره زمین را به دست آورد. بدینیست قدری مشروح تر به این موضوع پردازم.

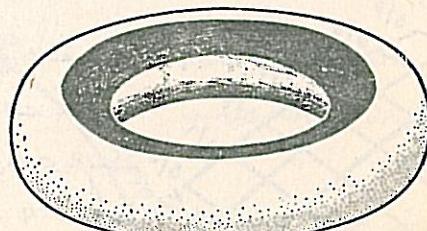
گذشته از صفحه و کره، انواع پرشماری از سطوح وجود دارد. تخم مرغ را در نظر بگیرید، که دارای یک سر بزرگ و یک سر کوچک است. یک تکه مدور از سر بزرگ تر پوسته تخم مرغ، شبیه بخشی از یک کره به نظر می‌رسد و یک تکه مدور از سر کوچک تر پوسته تخم مرغ، شبیه بخشی از یک کره است

که شعاعش کوچک‌تر از کره‌ی اول باشد. تکه‌ای که به انتهای کوچک‌تر تعلق دارد، خمیده‌تر از تکه‌ی متعلق به سر بزرگ تر، به نظر می‌رسد. هندسه‌دانان، انحنای کره را به صورت عکس مجذور شعاع آن، تعریف می‌کنند. بنابراین هرچه شعاع کوچک‌تر باشد، انحنای بیش تر است، و بر عکس.



در اینجا به موضوع دیگری نیز باید توجه داشت. تویی یک لاستیک اتوموبیل را در نظر بگیرید. اگر نیمه‌ی داخلی آن را (که مقابل فضای خالی وسط لاستیک است) با نیمه‌ی خارجی مقایسه کنیم، می‌بینیم که هر بخش کوچکی از نیمه‌ی خارجی دارای انحنای مثبت است، در حالی که هر بخش کوچک از نیمه‌ی داخلی - مانند سطح زین اسپی - انحنای منفی دارد. بنابراین نباید تصور کرد که در تمام نقاط یک سطح، انحنا باید یا منفی و یا مثبت باشد؛ وقتی روی سطح، از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر می‌رویم، انحنا نه تنها می‌تواند کم و زیاد شود، بلکه می‌تواند تغییر علامت هم بدهد.

به یاد داشته باشید که آن چه در اینجا آورده شد، نگاهی گنرا به مطالب بود که تا پیش از زمان ریمن، درباره‌ی انحنای سطوح می‌دانستند. مطالب مذکور در قرن هیجدهم بر ثنوارداولر، ریاضی دان سووسی که قدرت تخیل و بازده کاری چشمگیری داشت - آشکار گشته بود و توسط گروهی از هندسه‌دانان فرانسوی در مدرسه‌ی «پلی‌تکنیک» نوبنیاد این کشور، گسترش یافت. سپس در سال ۱۸۲۷ گوس، ممتحن ارشد ریمن، تعمیم و دقت بیشتری به موضوع بخشید. وی یادداشت‌هایی درباره‌ی سطوح منحنی منتشر کرد که آن چنان درخشنan و کامل بود که حتی امروز نیز می‌توان از آن در درس‌های دانشگاهی سود جست.

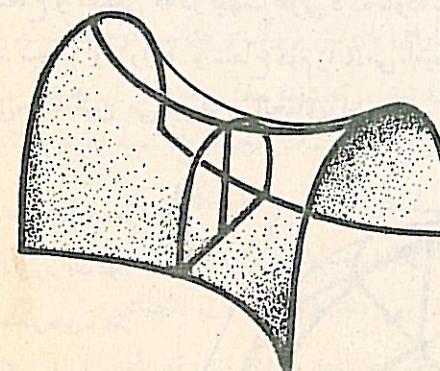


شکل ۵ تویی لاستیک اتوموبیل، در نیمه‌ی خارجی، انحنای مثبت و در نیمه‌ی داخلی (سیاه) انحنای منفی دارد.

تخم مرغ را به صورت عکس حاصل ضرب R, R تعریف می‌کنند. می‌بینید که اگر پوسته تخم مرغ به شکل کره‌ی کامل بود، این راه دوباره به همان تعریف پیشین منتهی می‌شد.

براساس این تعریف‌ها در می‌باییم که انحنای یک تکه‌ی کوچک از پوسته‌ی تخم مرغ، از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر می‌کند. سخن گفتن از انحنای تمامی تخم مرغ نیز معنایی نخواهد داشت و تنها می‌توانیم در مورد انحنای یک تکه‌ی کوچک، صحبت کنیم.

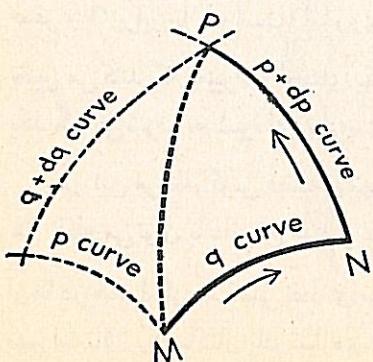
حال، سطح یک زین اسب را در نظر بگیرید. مقطع قائم عرضی در آن، یک منحنی با تقریب به سمت پایین و مقطع قائم طولی، یک منحنی با تقریب روبرو بالا، پدید می‌آورد. این امر حتی یک تکه‌ی کوچک از سطح زین اسب را از یک تکه‌ی کوچک از پوسته‌ی تخم مرغ، متمایز می‌سازد. به گفته‌ی هندسه‌دانان، پوسته‌ی تخم مرغ همه جا دارای انحنای مثبت و زین اسب همه جا دارای انحنای منفی است. انحنای یک تکه‌ی کوچک از سطح زین اسپی رامی توان دوباره به صورت عکس حاصل ضرب R, R تعریف کرد، این بار باید علامت منفی برای آن قائل شد.



شکل ۶ اگر زین اسب درجهت طولی برش داده شود، مقاطع حاصله، منحنی‌های رو به بالا خواهد بود و مقاطع عرضی، منحنی‌های رو به پایین با شعاع‌های متفاوت خواهد بود. سطح زین اسپی بنا به تعریف، دارای انحنای منفی است.

اولاً، منحنی های p و منحنی های q همه جا یکدیگر را در زاویه‌ی قائم قطع نمی‌کنند و این امر موجب افزایش جمله‌ی سومی به مجموع دو مجذور در معادله فیثاغورث ($a^2+b^2=c^2$), می‌شود. ثانیاً، اگر دو دسته منحنی های مذکور را به صورت نوعی تور ماهیگیری که به طور محکم روی تمامی سطح کشیده شده، در نظر آوریم، هنگام رفتن از یک حوزه‌ی سطح به حوزه‌ای دیگر که انحنایش متفاوت است، زوايا و اضلاع خانه‌های کوچک، اندکی تغییر خواهد کرد.

گوس استدلال خود را به صورت یک معادله‌ی مشهور ریاضی بیان کرد. یک منحنی P و یک منحنی q از نقطه مفروض M روی یک سطح منحنی، می‌گذرند. «شبه طول» p و «شبه عرض» q متعلق به نقطه‌ی M دارای مقادیر عددی معین هستند. می‌خواهیم از نقطه‌ی M به نقطه‌ی p در همسایگی آن، روی سطح برویم. ابتدا مقدار p را اندکی افزایش می‌دهیم، در حالی که مقدار q ثابت بماند. گوس نماد dp را برای اندک افزایش p به کار برد. بدین ترتیب به نقطه N ، با طول $p+dp$ و عرض q می‌رسیم. سپس q را به مقدار اندک dq افزایش می‌دهیم، به طوری که $p+dp$ ثابت بماند. حال به نقطه‌ی p ، دارای طول $p+dp$ رسیده ایم. می‌خواهیم فاصله نقطه M تا نقطه p را به دست آوریم. چون این فاصله بسیار کوچک است، آن را با نماد ds نشان می‌دهیم. گوس مربع

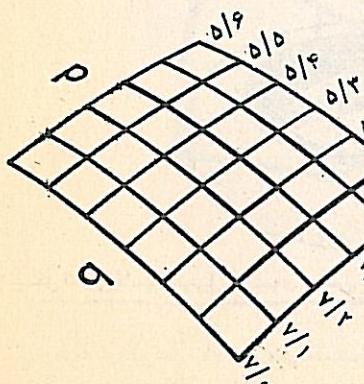


شکل ۷ روی سطحی که انحنای دارد، فاصله‌ی نقطه‌ی p از نقطه‌ی M را نمی‌توان از قانون فیثاغورث بدست آورد.

گوس آن را به صورت تابعی از مختصات متقاطع مربوط به آن نقاط و انحنای سطح که از نقطه‌ای به نقطه‌ی p دیگر تغییر می‌کند، تعریف کرد.

گوس از اینجا آغاز کرد که جغرافی دانان موقعیت هر شهر را در روی کره‌ی زمین با دادن طول و عرض جغرافیایی مشخص می‌کنند. آنها نصف النهارهای مربوط به طول جغرافیایی (مثلًاً نصف النهاری که همه‌ی نقاط واقع در طول ۸۵ درجه در غرب دایره‌ی عظیمه‌ی شمالی-جنوبی گذرنده از گرینویچ را متصل می‌کند) و همچنین مدارهای عرضی موازی را رسم می‌کنند. در اینجا می‌توان از «دسته‌ی» نصف النهارها و «دسته‌ی» مدارها سخن گفت. گوس چنین اندیشید که برای مشخص کردن موقعیت نقطه‌ای روی هر سطحی که از نظر ریاضی معین است، روی آن سطح دو دسته منحنی به نام منحنی های p و منحنی های q رسم می‌کیم. ضمناً ملاحظاتی به عمل می‌آوریم که با داشتن مختصات p و q متعلق به هر نقطه، جای آن دقیقاً مشخص شود.

بصیرت عظیم گوس در همینجا تجلی یافت. اگر روی یک سطح کاملاً صاف، سه کیلومتر در یک جهت حرکت کنیم، سپس به سمت چپ بیچیم و چهار کیلومتر در جهت عمود بر مسیر اخیر پیش برویم، با توجه به قضیه‌ی فیثاغورث می‌دانیم که فاصله‌ی نهایی ما از مبدأ حرکت، پنج کیلومتر خواهد بود. اما گوس چنین استدلال کرد که روی یک سطح منحنی-مثلًاً سطح بیضوی یا زین اسپی یا هر چیز دیگر- فاصله‌ی نهایی برابر مقدار اخیر نخواهد شد.



شکل ۶ موقعیت هر نقطه روی سطحی که از نظر ریاضی مشخص است، با داشتن یک مختصه از دسته‌ی منحنی های p و یک مختصه از دسته‌ی منحنی های q که بایکدیگر متقاطعند، معین می‌شود. تنها روی سطح کروی، این منحنی ها بر یکدیگر عمودند.

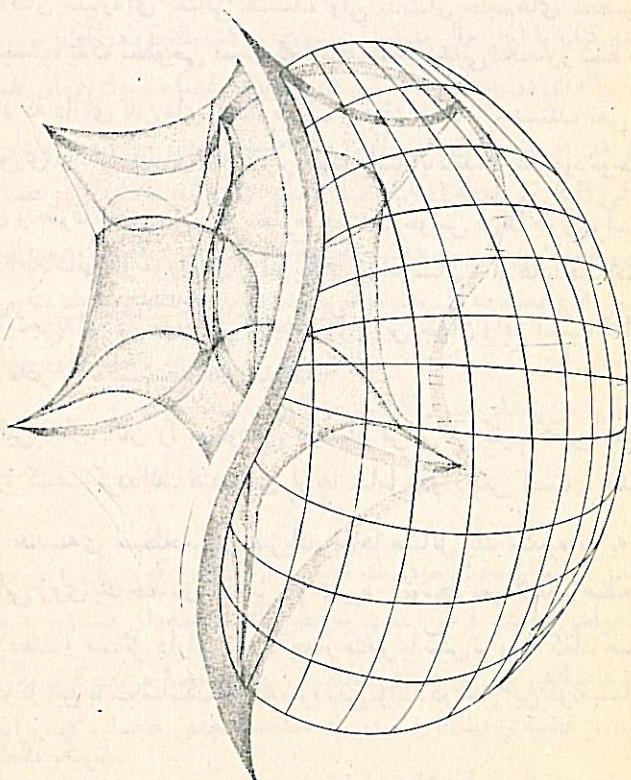
فاصله‌ی ds را به صورت مجموع سه جمله بیان کرد:

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

این معادله یکی از نقاط اوج تمامی ریاضیات و فیزیک است؛ قله‌ای که از فراز آن باید در برابر نبوغ گوس، سر تعظیم فرود آورد. اکنون دیگر برای رسیدن از معادله‌ی گوس به یهندی نسبیت عمومی بیش از دو گام دیگر باقی نمانده بود؛ یکی از این دو گام را رین و گام دیگر را اینشتین پیمود.

در هر نقطه‌ی M روی سطح مفروض، این معادله با قضیه‌ی اقلیدسی در مورد ضلع سوم هر مثلث، ds ، و دو ضلع دیگر آن، dp و dq تفاوتی ندارد. اما نکته‌ی تازه در این جاست که گوس توابع E ، F و G را مطرح ساخت که مقادیر عددی‌شان از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر روی سطح، به طور پیوسته تغییر می‌کند. گوس مشاهده کرد که هر یک از کمیت‌های E ، F و G - تابعی از دو کمیت فرضی P و q - شبه طول و شبه عرض نقطه‌ی M - می‌باشد. روی یک صفحه می‌توانیم با ترسیم خطوط p و خطوط q ، آن صفحه را به مربع‌های کوچک برابر- مانند صفحه‌ی شطرنج- تقسیم کنیم؛ در این صورت خواهیم داشت: $ds^2 = dp^2 + dq^2$ ، به طوری که همیشه در سراسر سطح، E برابر با یک، F برابر با صفر و G برابر با یک است. اما روی یک سطح منحنی، E ، F و G به طریقی تغییر می‌کنند که تغییرات انحنای سطح را که موجب تمایز نقاط مختلف از یکدیگر می‌شود، به شیوه‌ای تجربی ولی دقیق، نشان دهند.

در این مرحله، گوس قضیه‌ی مهم زیر را ثابت کرد که: انحنای سطح را در هر نقطه می‌توان با دانستن مقادیر E ، F و G در آن نقطه، و نحوه‌ی تغییرات آن‌ها در همسایگی بالاصل نقطه‌ی مذبور، به دست آورد. چرا این قضیه بسیار مهم است؟ زیرا ساکنان یک سیاره‌ی خیالی که سراسر پوشیده از ابر است و



تجسم کنیم، اما مسائل فیزیکی با سه متغیر x, y و z را حل می کنیم. پس چرا نتوانیم از فضای سه بعدی سخن بگوییم؟ حتی اگر نمی توانیم نقطه ها، خط ها و سطوح واقع در این فضا را تجسم کنیم، شاید مفید باشد که قادر به بحث درباره ای آنها باشیم. شاید از این میان، سودی حاصل شود. در هر صورت،

امتحاش ضرری ندارد.» و بدین ترتیب آن را امتحان کردند.

نیازی نیست که داستان را بیش از این ادامه دهیم؛ معنای آن به قدر کافی روشن است. ما درست مثل همین موجودات هستیم، فقط بدن ما سه بعدی است و در فضای سه بعدی حرکت می کنیم. هیچ یک از ما نمی تواند بعد چهارم را تجسم کند، با این حال مسائلی در مورد حرکت یک ذره در فضا حل می کنیم و این مسئله ای در چهار بعد است: x, y, z برای فضا و t برای زمان. هم چنین، مسائلی در مورد میدان های الکترومغناطیسی حل می کنیم. بردار میدان الکتریکی E در هر نقطه (x, y, z) ، سه تصویر E_x, E_y, E_z دارد و در فضا و زمان متغیر می کند، بدین ترتیب، هفت متغیر به میان می آید. سه متغیر هم برای میدان مغناطیسی B وابسته به آن، مطرح می شود، پس روی هم رفته ده متغیر داریم. درست مثل این است که دانشمند ریاضی - فیزیک، با فضاهای چهار یا ده بعدی یا با هر تعداد بعد دیگر سر و کار داشته باشد.

ریمن در آغاز بحث خود، یک فضای n بعدی را که در آن n می تواند هر عدد دلخواهی باشد، فرض نمود. به نظر یک هندسه دان مبتدی، به سادگی می توان فاصله ای بین دو نقطه ای مجاور را در این فضا تعریف کرد. مگر نه این که براساس قضیه ای فیتاگورث، در یک صفحه، مجنور فاصله، dx ، برابر است با مجموع دو مجنور $dy^2 + dx^2$ ؛ پس به همین ترتیب، در یک فضای n بعدی، ds^2 باید مجموع n مجنور، یعنی مجموع همه جملات نظیر dx که موجودند، باشد. معمولا برای نشان دادن «مجموع جملات نظیر»، حرف یونانی

ممکن است تصور کنید که پرداختن دانشمندان به چنین مطلبی یکسره بیهوده است. چرا باید ریاضی دانان توجه خود را به این مسئله موهومی در مورد ساکنان سیاره ای خیالی معطوف کنند؟ این سؤال پاسخ بسیار خوبی دارد: این ساکنان، خود ما هستیم. برای روشن شدن موضوع، قدری توضیح لازم است.

تکه های کوچکی از کاغذ به اشكال نامنظم گوناگون را روی کره ای بزرگ و هموار، در نظر بگیرید. این تکه های کاغذ، زنده اند و حرکت می کنند. آن ها ساکنان سیاره ای خیالی هستند، ولی بدنشان حجم های محصور در سطوح نیست، بلکه سطوحی است که توسط منحنی هایی محصور شده است. این افراد که دارای بدن های کاملاً صاف و فاقد ضخامت هستند، نمی توانند هیچ تصوری درباره فضای بالا یا زیر خود، داشته باشند. آن ها خود موجوداتی دو بعدی و صرفاً بخش هایی از سطوح هستند. حواس آن ها طوری است که می تواند اطلاعاتی در مورد جهان دو بعدی پیرامونشان به آن ها بدهد. اما آن ها هیچ گونه تجربه ای در مورد هر آن چه بیرون این جهان واقع است، ندارند و بنابراین قادر به تجسم بعد سوم نیستند.

با این حال، آنان را موجوداتی هوشیار فرض می کنیم که ریاضیات و فیزیک را کشف کرده اند. هندسه ای آن ها شامل دو بخش است - هندسه ای خطی و هندسه ای مسطحه. در فیزیک، آن ها مسائل یک متغیره را به کمک نمودارهایی روی یک خط، و مسایل دو متغیره را توسط نمودارهای صفحه ای، نشان می دهند و مسائل دارای سه یا چهار متغیر یا بیش تر را به کمک جبر حل می کنند و از این بابت متأسف اند که چرا نمی توانند در حل این گونه مسائل از نمودار کمک بگیرند.

در نیمه ای اول قرن نوزدهم (به حساب تقویم آن ها) در بسیاری از آنان اندیشه ای تازه ای پدیدار می شود. آن ها می گویند: «ما نمی توانیم بعد سوم را

حذف کرد، این موضوع کاملاً به گوس برخورده بود). پس شکل صحیح برای فراسطحی با سه بعد، به صورت فوق است و ضرایب شش گانه روی فراسطح، از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کنند.
 همان‌طور که گفتیم، ریمن در آغاز وجود n متغیر - و نه سه یا چهار متغیر - را فرض نمود. وی نیاز داشت که برای موجودات هندسی که با آن‌ها سروکار دارد، نام‌هایی بیابد. او دو چیز را در نظر گرفت. اولاً، هر ذره (به طور نظری) می‌تواند آزادانه و به طور یکتاخت و پیوسته، روی یک خط یا یک منحنی، از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر برود؛ ثانیاً، هنگامی که به مطالعه‌ی هندسه‌ی مسطحه می‌پردازیم، به چیزی جز اشکال واقع در صفحه نمی‌اندیشیم؛ به قول اهل منطق، در این حالت، صفحه‌ی مزبور «جهان مورد بحث» ما را تشکیل می‌دهد. اما در مراحل بعد، زمانی که هندسه‌ی فضایی را مطالعه می‌کنیم، با صفاتی در جهات مختلف فضا سروکار داریم. هر یک از این صفحه‌ها می‌تواند صفحه هندسه مسطحه‌ای باشد که قبلاً موضوع مطالعه‌ی ما بود. در هندسه‌ی مسطحه، به هیچ وجه مطرح نیست که این صفحه به طور مجزا وجود داشته باشد یا جزئی از یک فضای سه بعدی باشد.
 ریمن با توجه به مجموعه‌ی این نکات، برای موجودات هندسی با هر بعد دلخواه که هر نقطه می‌تواند به طور پیوسته در آن حرکت کند، نام «پیوستار» را برگزید. مثلاً، خط راست یک پیوستار یک بعدی است و ضمناً در هندسه‌ی نقاط و پاره خط‌های این خط، به هیچ روی مطرح نیست که این پیوستار یک بعدی، مستقل‌اً وجود دارد، یا جزئی از یک صفحه، یا فضای سه بعدی یا فضای با ابعاد بیشتر است. سطح کره یا زین اسب، همان‌طور که دیدیم، یک پیوستار دو بعدی است و در این جایز فرقی نمی‌کند که آن‌ها را به طور مجرد یا جزئی از یک فضای سه بعدی در نظر بگیریم.

Σ (زیگما) به کار می‌رود. براین اساس، هندسه‌دان ساده اندیش خواهد نوشت:
 $ds^2 = \sum dx^i dx^i$.اما بینش ریمن ژرف‌تر از این بود. او درباره‌ی یادداشت‌های سال ۱۸۲۷ استادش بسیار اندیشیده بود. وی چنین استدلال کرد که اگر بپذیریم $ds^2 = \sum dx^i dx^i$ ، سنگ اول بنا را کج نهاده ایم، زیرا قضیه‌ی فیناگورس تنها روی صفحه صادق است که می‌توان آن را مثل صفحه‌ی شترنج به مربع‌های کوچک برابر، تقسیم کرد. در واقع آن چه باید تعیین یابد، معادله‌ی گوس است که در مورد همه‌ی سطوح منحنی و از جمله صفحه - به عنوان یک حالت بسیار اختصاصی - صدق می‌کند. گوس دو چیز به فرمول فیثاغورث اضافه کرد: ۱) به مربعات dp و dq حاصل ضرب این دو مقدار، یعنی $dpdq$ را افزود؛ ۲) برای هر یک از سه جمله، ضریبی در نظر گرفت و فرض کرد که این ضرایب F, E و G روی سطح، از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کنند.
 اکنون همین کار را برای یک «فراسطح» سه بعدی - بدون در نظر گرفتن ماهیت آن - انجام می‌دهیم. روی این فراسطح، سه دسته سطوح p و q و r - یا بنابه شیوه‌ی رایج، به نام‌های x_1, x_2 و x_3 - می‌کشیم. مربع فاصله‌ی بین دو نقطه مجاور، ds ، علاوه بر مجذورات dx_1 و dx_2 و dx_3 ، از روی حاصل ضرب‌های دو به دوی آن‌ها که به شکل سه جمله داریم، $dx_1 dx_2$ و $dx_2 dx_3$ و $dx_1 dx_3$ هستند، به دست می‌آید. در اینجا، شش جمله داریم، پس شش تا هم ضریب خواهیم داشت. این ضرایب را به g نشان می‌دهیم و اندیس‌های مناسبی به آن اضافه می‌کنیم. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$ds^2 = g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{13} dx^1 dx^3 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33} dx^3 dx^3$$

(ضریب ۲ غیر قابل چشم پوشی نیست و فقط از دیدگاه جبر به ظرافت معادله می‌افزاید. یک بار که یکی از استادان برلن بدون ملاحظه ضریب ۲ را

گوس، این ساکنان دو بعدی در جهان دو بعدیشان، اگر به اندازه‌ی کافی ریاضیات بدانند، می‌توانند انحنای هر ناحیه‌ی کوچکی از جهان خود را به دست آورند. آن‌ها چگونه می‌توانند سطح منحنی را تجسم کنند، در حالی که قادر به درک فضای سه بعدی نیستند؟ پاسخ ما، در واقع چیزی جز یادآوری قدرت شگفت‌انگیز ریاضیات نیست. این موجودات، لابد با مفهوم جاده‌ی منحنی - در مقابل جاده‌ی «مستقیم» که کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو نقطه است آشنا هستند. اگر در میان آنان نیز ریمن پیدا شود که این مفهوم را، به شیوه‌ای کاملاً جبری، به صورت نظریه‌ی انحنای پیوستارⁱⁱ بعدی تعیین دهد، نقشه برداران آن‌ها می‌توان به کمک فرمولی که ریمن در اختیار آن‌ها قرار می‌دهد عددی را محاسبه کنند - که براساس مشاهدات شان - از کشوری به کشور دیگر، اندکی تغییر می‌کند. از این راه، آن‌ها می‌توانند انحنای جهان دو بعدیشان را اندازه کنند، بدون این که قادر به تجسم معنی آن باشند.

بی‌شك، وضعیت ما نیز نسبت به انحنای جهان خودمان، به همین متوال است و برای درک این که ریمن چگونه به تعریف آن نایل آمد، ناگزیریم به آثار وی مراجعه کنیم.

ریمن اظهار نظر کرد که اگر همه‌ی اعدادی که انحنای یک فضای \mathbb{E}^n -بعدی را تعیین می‌کنند، صفر باشند، این فضارا صاف می‌نامیم زیرا برای سطحی که انحنایش صفر است، این واژه به کار می‌رود. حال اگر فضای سه بعدی را به مکعب‌های کوچک برابر تقسیم کنیم - همان طور که صفحه‌ی شطرنج به مربع‌های کوچک برابر تقسیم می‌شود - در این صورتⁱⁱⁱ به سادگی برابر است با مجموع $dx^1 + dy^1 + dz^1$ که در آن dx^1, dy^1 و dz^1 نشان‌دهنده‌ی سه ضلع هر یک از مکعب‌های کوچک است. این فضا، یک فضای «صاف» است، هم چنان که صفحه، یک سطح صاف است. به عبارت دیگر، آن چه بهنهن ما خطوط می‌کند این است که فضای مزبور - به معنای ریمنی کلمه - صاف است. آیا واقعاً چنین است؟ تنها چیزی که می‌توان انتظار داشت، این است که

فضایی که در آن به سر می‌بریم، یک پیوستار سه بعدی است. در این جا نیز باشد ذکر کنیم که از نظر هندسه فضای ما هیچ فرقی ندارد که این فضا مستقل‌در نظر گرفته شود یا جزئی از یک فضای چهار، یا پنج یا هر چند بعدی، به حساب آید. تجسم مفهوم این گفته برای ما مقدور نیست. با این وجود، این مسیر را دنبال می‌کنیم تا بینیم منطق ما را به کجا می‌برد.

افکار ریمن جوان در حوالی سال ۱۸۵۰ باید چنین بوده باشد. اکنون باید مختصرأ شرح دهیم که او از این جا تا چه حد پیش رفت و محتوای عمدی بحث او در سال ۱۸۵۴ چه بود.

در نخستین دور خواندن، چنین به نظر می‌رسد که نتیجه‌ی برجسته‌ی کوشش‌های ریمن، موققت در تعریف انحنای یک پیوستار دارای بیش از دو بعد، بوده است. پیوستار دو بعدی، صفحه است و دیدیم که انحنای آن برای حوزه‌ی کوچکی حول هر نقطه از سطح، توسط یک عدد بیان می‌شود (که برای سطح بیضوی مثبت و برای سطح زین اسپی منفی است). اگر انحنا در همه‌ی نقاط صفر باشد، آن سطح صفحه است و بر عکس. ریمن ثابت کرد که مفهوم انحنا را می‌توان در مورد پیوستارⁱⁱ بعدی نیز تعیین داد. اما در این حالت، دیگر یک عدد به تنهایی کافی نیست؛ برای بیان انحنای پیوستار سه بعدی، یک مجموعه‌ی سه عددی و برای پیوستار چهار بعدی، مجموعه‌ای از شش عدد لازم است و این موضوع به همین ترتیب ادامه می‌یابد. ریمن تنها به بیان این نتایج پرداخت و معقول بودن آن‌ها را از نظر ریاضی نشان داد؛ اثبات این مطالب و پرداختن مسروخ به آن‌ها، مستلزم یاد داشت‌های طولانی یا سخن رانی‌های چند هفته‌ای بود.

اکنون دوباره به سر وقت همان موجودات کاملاً سطحی که روی یک سطح بسیار بزرگ زندگی می‌کنند، می‌روم. براساس «قضیه‌ی برجسته»

به عقب نگاه کنیم، می بینیم که یافتن آن آزمایش‌ها بسیار دشوار بود. ممکن است تصور شود که این آزمایش‌ها در حوزه‌ی اخترشناسی کلاسیک قرار دارد و به اندازه‌ی گیری زوایای بین ستارگان مربوط می‌شود، اما این تصویر چندان صائب نیست. اینشتین ثابت کرد که پیوند عظیمی میان گرانش و ماده وجود دارد و فرض موقتی ریمن مبنی بر ثابت بودن انحنای فضا باید جای خود را به تغییرات موضعی بدهد (یعنی انحنا در همسایگی خورشید یا شعراً یمانی بیش تر از فضای تهی بین ستارگان است). وی هم‌چنین نشان داد که زمان هم باید به میان آورده شود؛ به عبارت دیگر، یک فضا - زمان چهار بعدی است که باید مورد آزمایش قرار گیرد. در سه آزمون تجربی هم که در سال ۱۹۲۰ از نظریه‌ی اینشتین به عمل آمد، دیده شد که فضا، زمان و گرانش به طور پایداری با یکدیگر در امیخته‌اند.

ادعای ریمن مبنی بر این که هندسه‌ی جهان صرفاً بخشی از فیزیک است که باید مثل هر بخش دیگر، از راه همکاری نزدیک نظریه و تجربه، پیش برد شود، بدین ترتیب کاملاً تحقق یافت. هم‌چنین است ایمانی که ریمن به استاد خود، گوس، داشت. هر چه بیش به دژهای عظیم اندیشه‌ی ریمن و اینشتین دقیق می‌شود، با تحسین بیش تری پی می‌بریم که در آن فرمول کوچک و ناپذیرفتنی که گوس در سال ۱۸۲۷ بیان کرد، چه حقایق نادیدنی عظیمی نهفته بود.



[a] را به معنای قسمت صحیح عدد a و $\{a\}$ را به معنای قسمت دهدی عدد a می‌گیریم، مثلاً

$$[\frac{2}{4}] = \frac{0}{4}, [\frac{2}{4}] = \frac{1}{4}$$

حالا این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1/1 \\ y + [z] + \{x\} = 2/2 \\ z + [x] + \{y\} = 3/3 \end{cases}$$

حل در صفحه ۷۹

بخش کوچکی از فضا که در حوالی ما قرار دارد صاف است. امکان هم دارد که فضا واقعاً نه تنها در نزدیکی ما بلکه حتی تا قلمرو دورترین سحابی‌های آسمان، صاف باشد. از سوی دیگر، به همین میزان احتمال دارد که فضا قدری انجنا داشته باشد. چگونه می‌توان به این مطلب پی برد؟ در پاسخ این سؤال ریمن چنین گفت: از راه تجربه. این همان پیام انقلابی است که او آرام ولی بسیار استوار، به جهان علم به ارمغان آورد.

اقلیدس و کانت به طور ناخود آگاه مفهوم ذهنی صاف بودن فضا را پذیرفته بودند. ریمن اعلام کرد که این قضیه را نمی‌توان بدون اثبات و به عنوان امری بدیهی، بیان نمود، بلکه تنها به صورت فرضیه‌ای است که باید از طریق تجربه، به اثبات برسد. در آغاز سه فرض را در مورد فضای اطراف خود می‌پذیریم، بدین عنوان که فضا دارای انحنای مثبت یکنواخت یا انحنای منفی یکنواخت است و یا آن که هیچ انحنایی ندارد (یعنی صاف)، یا به اصطلاح مرسوم، اقلیدسی است). تحقیق این که کدام یک از این فرض‌ها درست است، بر عهده‌ی اختر شناسان و فیزیک دانان است. این خلاصه‌ای بود از مفهوم مقاله‌ی پرابهام ریمن، تحت عنوان «فرض‌هایی که پایه‌ی هندسه را تشکیل می‌دهند». این مقاله، کاملاً به حق، کنجکاوی گوس را برانگیخت.

در بحث ریمن، بسیار چیزهای مهم دیگر نیز وجود دارد، مثلاً ارزیابی بسیار روش در مورد احتمال این که سرانجام نظریه‌ی کوانتمی فضا را پذیریم؛ چیزی که در حال حاضر، فیزیک دانان محتاطانه به بررسی آن مشغولند. اما نکته‌ای که در اینجا مطرح شد - یعنی توسل به تجربه برای کشف انحنای احتمالی فضا - به نظر ما مهم‌تر از همه است.

ریمن عاقلانه از پیشنهاد هر گونه آزمایش خاصی در این مورد، خودداری کرد. اگر از موضع مساعد فعلی که از دانش بعد از اینشتین برخورداریم،

تابع یا عامل و کودار (فونکسیون)

دکتر اسدالله آلبویه

نیست، هرچیزی می‌شود و چون از این‌که درشدن است به وجود می‌آید، پس آن‌چه را که متنافی با اوست همراه دارد. یعنی هرچیز خود و ضد خود است و قانون‌شدن همان قانون اتحاد اضداد است که در اثر کشاکش تعادل وهم آهنگی می‌یابند ...

گفتار هراکلیتوس پس از قرن‌ها دونتیجه قابل توجه داد.
یکی دیالکتیک، که در آن برای درک مفاهیم و سیر موجودات هر-
چیز (نز) را با ضد و مقابل آن (آن‌تی نز) همراه می‌کنند تا ترکیب و تحلیل دست دهد و مرکب (سن نز) صورت پذیرد.

این همان راهی است که هگل در فلسفه خود پیش می‌گیرد و همان سلاحی است که مارکس و انگلیس روش فکر در مبارزه طبقاتی ماخرانه به کار می‌برند.

دیگر مفهوم کردار یا عامل (فونکسیون)، که همان قانون‌شدن است و به گفته گوته «وجود را در فعالیت می‌نماید». از این‌رو با این مفهوم استاتیک به دینامیک تبدیل می‌شود.

فونکسیون میان چیزهای متغیر، بی‌توجه به علیت، بستگی و رابطه برقرار می‌کند.

در ریاضیات این چیزهای متغیر همان اعداد هستند و فونکسیون از یک یا چند متغیر عمل یا کرداری است که به موجب آن یک یا چند متغیر تبدیل به متغیر دیگر می‌شود.

به‌همین اعتبار متغیر اخیراً که همان فونکسیون یا (کردار) آن از روی یک یا چند متغیر است، تابع یک یا چند متغیر نیز می‌گویند.
مثلًاً می‌دانیم که منفعت پول معینی که به مرابحه داده می‌شود

در حدود قرن پنجم پیش از میلاد از (اقزوس) یونان فیلسوفی برخاست بدنام هراکلیتوس که به‌هیچ معنی روشنفکر نبود، زیرا او هم مخالف دموکراسی بود و هم افکاری بسیار مبهم و تاریک داشت. افکار او مبهم می‌شود شاید از جهت این‌که به صورت گفتارهای بریده و با ایما و اشاره بیان شده بود تا دسترسی به آن‌ها فقط به کوشش و آن‌هم برای کسانی که شایستگی داشته باشند حاصل شود و شاید هم از جهت آن‌که این افکار زائیده محیط یونان نبود و نمی‌توانست در آنجا نشو و نما کند. به‌هرحال چون مردم از سخنان هراکلیتوس درست سرد نمی‌آوردند و آن‌چه هم می‌فهمیدند حکایتی از ناپایداری جهان و در نتیجه موجب پأس و ناامیدی بود، اورا فیلسوف تاریک و گاهی فیلسوف گریان خواندند.

هراکلیتوس می‌گفت:

آن‌چه هست در حرکت و در جریان دائم قرار گرفته و گذران است.
ثبت و بقای وجود ندارد. خمیری که با آن اشیاء را سرشه‌اند هر لحظه به‌شكلی دیگر درمی‌آید.

همه چیز در معرض تبدیل قرار گرفته، همه چیز می‌گردد. هیچ چیز

روشی که برای این عمل هست، به وسیله نیوتون ولاپنیتس
براساس مفهوم تابع و حد آن کشف شد و محاسبات جامعه و فاضله
(انتگرال و دیفرانسیل) نامیده می شود و امروز بدون دانستن آن چنان که
(کلاین) گوید هیچکس قادر نیست حوادث عالم و قایع طبیعت را
بیان کند.

تابع ممکن است از انواع مختلف باشد:

می شود تابع ازیک یا چند متغیر باشد و اگر تابع ازیک متغیر را
بگیریم، می شود که به ازای هر مقدار متغیریک یا چند مقدار برای آن تابع
حاصل شود.
می شود تابع پیوسته یا گسسته (دارای نمودار پیوسته یا گسسته)
باشد.

می شود تابع منطق باشد، در این حال به صورت خارج قسمت
دو کثیرالجمله از متغیر است. می شود تابع اصم باشد، در این حال یا جبری
است یعنی به ازای هر مقدار از متغیر مقداری می یابد که ریشه‌ای از یک
معادله جبری معین است و یا ترانساندانست است مانند تابع لگاریتمی و
تابع مثلثاتی و اکسپونانسیل...

به هر صورت مفهوم تابع به ریاضیات صورت زنده‌ای بخشید و آن
را از حال رکود بیرون آورد، حرکت داد و موجب پیشرفت گشت و در
نتیجه پیشرفت ریاضیات علم ترقی یافت و از فایده آن در عمل برای
ما تمام وسائل راحت و آسایش تمدن کنونی فراهم گردید.

بستگی بدنرخ و زمان دارد. چگونگی ارتباط نرخ و زمان پول داده شده
به منفعت، تابع منفعت را بر حسب دو متغیر نرخ و زمان مشخص می کند.
(فرگه) در منطق ذات هر مفهوم را با تابع بیان می کند و (اشپینگلر)
تابع را عدد باختری می نامد و آن را مشخص فرهنگ مغرب زمین می داند.
ریاضیات با مفهوم تابع پیشرفت بسیاری پیدا کرد و وسیله خوبی
برای بیان تغییرات عالم واقع گردید. مثلاً در بیان حرکت می توان
گفت حرکت و سکون دو چیز متفاوت نیستند و حرکت از سکون های پیاپی
پدید آمده است، یعنی وقتی شیء در حرکت است که میان موضع آن
ولحظات یک بستگی وجود داشته باشد. به عبارت دیگر وقتی که موضع
جسم تابع زمان باشد، چون موضع هر نقطه را می توان بایک یا چند عدد
معین کرد، بر حسب آن که نقطه در فضای یک بعدی یا چند بعدی قرار گرفته
باشد (مختصات نقطه)، پس حرکت هر نقطه بایک یا چند تابع از متغیر زمان
بیان می شود و هنگامی که این توابع در دست باشند، تمام خواص حرکت:
مسیر - سرعت یا درجه تغییر مکان (نسبت تغییر مکان بی نهایت کوچک
به تغییر زمان بی نهایت کوچک مربوط، یا حد نسبت تغییر مکان به تغییر
زمان وقتی که این تغییر صفر شود).

و شتاب با درجه تغییر سرعت معین می شود. چون هر جسم را
می توان از نقاط پدید آمده دانست. پس مطالعه حرکت آن نیز از همین
راه مقدور می شود.

درجه تغییر یک تابع هم تابعی است از همان متغیر که مشتق تابع
اول نامیده می شود و بالعکس با معلوم بودن مشتق می توان به تابع اولیه
رسید.

ل. س. فریمان
ترجمه پرویز شهریاری

نویسنده‌گان لاتینی و یونانی مربوط می‌شد که برای پرسنجه‌ای با امکان‌های عادی، مانعی بزرگ به شمار می‌رفت. ولی گوتفرید لاپ نیتس این گونه نبود. او، زبان لاتینی را، مثل یک بازی، یاد گرفت. به گفته خودش، چاپ مصور «تیتالیویا» را در اختیار داشت. ابتدا، تقریباً چیزی نمی‌فهمید. ولی با خواندن نوشته‌های زیر عکس‌ها، مقایسه‌ی آن‌ها با محتوی تصویرها و تکرار مدام متن کتاب، سر آخر، این زبان را یاد گرفت و بعد از مدتی، نه تنها می‌توانست به زبان لاتینی، به راحتی حرف بزند و بنویسد، بلکه حتی شعر لاتینی هم می‌سرود. او حتی خودش را شاعر خوبی به حساب می‌آورد. او، بعد از زبان لاتینی، بدون این که نیروی زیادی صرف کند، زبان یونانی را هم یاد گرفت. وقتی که لاپ نیتس چهارده ساله بود، در دبیرستانی که تحصیل می‌کرد، مجلس جشنی برپا بود، ولی داشن آموزی که خود را برای خواندن شعر آماده کرده بود، بیمار شد. از لاپ نیتس خواستند که جای او را بگیرد و او در طول همان روز، سی سطر شعر شش وزنی لاتینی سرود.

استعداد لاپ نیتس، در یادگیری زبان استثنایی بود. بعضی از زندگی.-
نامه‌نویس‌ها، این استعداد او را مربوط به این می‌دانند که اجداد دور لاپ نیتس، اسلام‌هایی از اهالی لهستان یا بوهم بوده‌اند. خود نام فامیل لاپ نیتس، شکل آلمانی شده‌ی «لوبه‌نتس»، اسلامی است.

لاپ نیتس در سال ۱۶۶۱، دبیرستان را تمام کرد و به دانشگاه شهرزادگاه خود وارد شد. در آن زمان، تقریباً تنها موضوع‌های فلسفی، نظر او را به خود جلب کرده بود. او حتی در کودکی، در کتابخانه‌ی پدرش، با نوشته‌های ارسطو و هوداران او، و از آن جمله مدرسان سده‌های میانه آشنا شده بود (لاپ نیتس بعدها، درباره‌ی آن‌ها گفته است که او ناچار بود در میان انبوهی از این آشغال‌ها به دنبال طلا باشد). در دانشگاه، یاکوب تومازی، استاد فلسفه، او را با فیلسوفان جدید، و قبل از همه با دکارت، آشنا کرد. دانشجوی پانزده ساله، بسیاری از روزها را در اطراف زیبای شهر لاپزیک قدم می‌زد و ارزش

آفرینندگان ریاضیات عالی (۱۱)

گوتفرید ویلهلم لاپ نیتس

آلمان در نیمه‌های سده هفدهم، از لحاظ علمی، در انزوا به سر می‌برد. در دوره‌ای که در ایتالیا، فرانسه و انگلستان، پایه‌های دانش‌های طبیعی استوار می‌شد (گالیله، توریچلی، فرما، دکارت، والیس، بویل و دیگران)، آلمان، تنها یک نابغه به جهان داد: یوهان کلر. آلمان در چند ده سال بعد از مرگ کلر خاموش بود، تا این که ستاره درخشانی را به جهان عرضه کرد که توانست تکان نیرومندی به داشن اروپایی بدهد: لاپ نیتس.

گوتفرید ویلهلم لاپ نیتس، اول ژوئیه سال ۱۶۴۶، در لاپزیک متولد شد. پدر او، فردریک لاپ نیتس، استاد اخلاق و مشاور حقوقی در دانشگاه لاپزیک و مادر او، خانم کاترین شموکه، دختر یکی از استادان همین دانشگاه بود. پسرک، پدر خود را در سال هفتم زندگیش، از دست داد. او، که به حال خود گذاشته شده بود، چنان به مطالعه علاقه‌مند شده بود که موجب نگرانی مادرش می‌شد. یکی از نزدیکان خانواده، بالاپ نیتس جوان درباره‌ی شیوه‌ی مطالعه صحبت کرد. نتیجه‌ی گفتگو این بود که بنا به توصیه این آشنا، تنظیم کتابخانه‌ی لاپ نیتس مرحوم را، که تا آن موقع، از ا دور نگه داشته شده بود، به پسر هشت ساله‌ی او واگذاشتند. قسمت عمده‌ای از کتابخانه به اثرهای از

همراه با اعطای درجه‌ی دکترا، او را دعوت به استادی کردند، ولی لایب نیتس، این پیشنهاد دلپذیر را پذیرفت و به نورنبرگ رفت. بودن در نورنبرگ، تنها حادثه‌ی کوتاهی از زندگی پر بر لایب نیتس به شمار می‌رسد. ولی همین حادثه، تأثیر زیادی بر سرنوشت بعدی فیلسوف داشت. معلوم نیست که چرا لایب نیتس می‌خواست به جامعه‌ی برادری «روزن کری تسر»^۱‌ها، که در نورنبرگ زیاد بودند، وارد شود. این جمعیت نیمه عرفانی و نیمه منهنجی، همچون وارثان فکری خود درسده‌ی هیجدهم، یعنی ماسون‌ها، خود را موظف به رعایت پنهان کاری می‌دانست و تمایلی به قبول عضوهای تازه نداشت و به خصوص در مورد کسانی که معرفی نامه‌ی معتبری نداشتند، سخت‌گیری بیشتری می‌شد. لایب نیتس چاره‌ای اندیشید: تبدیل فلزها به یکدیگر را جست‌وجو می‌کردند، تعدادی از اصطلاح‌های ناماآنس و رمزگونه را از آن‌ها بیرون کشید و با استفاده‌ی از آن‌ها، رساله‌ای تنظیم کرد که به کلی نامفهوم بود. این رساله با چنان زبان دشواری نوشته شده بود که خود او هم چیزی از آن سر در نمی‌آورد، ولی برخلاف انتظار او، روزن کری تسرها، آن را «فهمیدند» و چنان به فضل نویسنده‌ی آن ارج گذاشتند که با کمال احترام، پست دیپری جمعیت را به او پیشنهاد کردند. لایب نیتس کار تنظیم صورت جلسه‌های آزمایش‌های شیمیایی را آغاز کرد. یک روز، هنگام نهار در رستوران، با ناشناسی صحبت می‌کرد. ظاهراً یک سیاست‌مدار بود، آدمی هوشمند با تجربه‌ای فراوان. نام فامیل او «بوی نه بورگ» بود. لایب نیتس جوان، اثر بسیار خوبی در او گذاشت. آن‌ها، بیشتر با هم آشنا شدند. به زودی، بوی نه بورگ به لایب نیتس پیشنهاد کرد که به «ماین» و به دربار دولک برود، و در همین زمینه، توصیه نامه‌ای برای او نوشت.

1. Rosenkreuzer

«اشکال هیولای» و سایر موزاسکولاستیکی را، با دستگاه مکانیکی جهان (که به وسیله‌ی دکارت طرح شده بود)، مقایسه می‌کرد. سرانجام، فلسفه‌ی دکارتی پیروز شد و لایب نیتس تصمیم گرفت، به طور جدی ریاضیات را بیاموزد. دانشگاه لایپزیک نمی‌توانست در این زمینه او را ارضاء کند و در نتیجه، لایب نیتس به «ین» رفت که ویگل، ریاضی‌دان با استعداد و مشهور، در دانشگاه آن تدریس می‌کرد.

درس‌های ویگل بی‌اثر نبود. بعد از آن که لایب نیتس با مقدمات ترکیب‌ها آشنا شد، به این فکر افتاده شاخه‌ای از ریاضیات را به وجود آورد که به یاری آن بتوان، تجزیه و تحلیل منطقی مفهوم‌ها را، به تجزیه و تحلیل ریاضی آن‌ها، تبدیل کرد. او، این فکر خود را در «هنر ترکیب» خود، طرح کرده است. جالب است که لایب نیتس، در نخستین کارهای مستقل فلسفی خود، اندیشه‌هایی را طرح کرده است که، بعدها، در نوشه‌های اصلی فلسفی و ریاضی خود، به آن‌ها پشت پا می‌زند. یکی از موضوع‌هایی که لایب نیتس در تمامی عمر خود برای تکمیل آن می‌کوشید، کامل کردن دستگاه نمادها برای به ریاضی در آوردن فلسفه بود. او برای نخستین بار در اثر مربوط به «ترکیب‌ها»ی خود، از این موضوع صحبت می‌کند.

لایب نیتس، بعد از یک سال از «ین» به لایپزیک برگشت و تنها به مطالعه‌ی حقوق پرداخت، تا آن‌طور که گمان می‌کرد، خود را برای حرفة‌ی قضایت آماده کند. در سال ۱۶۶۴ به درجه‌ی ماجیستری (فوق لیسانس) در فلسفه رسید و در سال ۱۶۶۵، دیلم حقوق را گرفت. لایب نیتس، سال بعد را به آماده کردن خود، برای گرفتن درجه‌ی دکترای حقوق، گذراند. ولی در دانشگاه زادگاهش، نتوانست به هدف خود برسد. دلیل این مطلب، کاملاً روش نیست، همین قدر معلوم است که از لایپزیک رنجید و آن را برای همیشه ترک کرد. لایب نیتس توانست در سال ۱۶۶۶ در شهر کوچک دانشگاهی آلتدورف، نزدیک نورنبرگ، از رساله‌ی خود «موارد وحشت در حقوق» دفاع کند. دفاع چنان درخشنan بود که

به لندن برود و مستقیماً با پیشرفت‌های ریاضی داشمندان انگلیسی آشنا شود. لایب نیتس دو ماه در لندن بود؛ او با بول فیزیک‌دان، اولدن بورگ ریاضی‌دان و دیگران آشنا شد. احتمال دارد - اگرچه دلیل مستقیمی وجود ندارد - که اولدن بورگ، لایب نیتس را از نامه‌ای که نیوتون در سال ۱۶۷۲، درباره‌ی طرح روش فلوكسیون‌ها به او نوشته بود، آگاه کرده باشد. ظاهراً لایب نیتس تأثیری مثبت در لندن به جا گذاشت، زیرا خیلی زود به عنوان عضو انجمن سلطنتی انگلستان انتخاب شد. لایب نیتس، با برگشتن به پارس، با نیروی بیشتری به ریاضیات پرداخت. او بررسی زمینه‌ی تازه‌ای از ریاضیات را، که به روی او گشوده شده بود، آغاز کرد (البته، تازه برای او، زیرا نیوتون از همه‌ی این‌ها آگاه بود). اخرين بررسی لایب نیتس از رساله‌ی خود، به ما اجازه می‌دهد که تاریخ واقعی کشف دانش جدید را اعلام کنیم. اکتبر و نوامبر سال ۱۶۷۵. او با حرارت حیرت انگیزی، خود را وقف کار در این زمینه‌ی تازه کرد. شوق کشف مجهول‌ها، به صورتی غیر ارادی، سرپایی وجود او را فرا گرفته بود. در رساله‌ی او می‌خوانیم: «ورود به نوع جدید محاسبه، چه زیبایی حیرت انگیزی دارد. این نوع محاسبه، به اندازه‌ی فاصله‌ی آسمان تازمین، با نوع محاسبه‌ی ویت، تفاوت دارد.» این مطلب را در روزهایی نوشته است که روی مجموع بی‌نهایت کوچک‌ها کار می‌کرد.

با وجود این، نباید گمان کرد که لایب نیتس، تمامی نیروی خود را، صرف ریاضیات و تنها ریاضیات، می‌کرد. او مأموریت سیاسی را، که از طرف رئیشش به او محل شده بود، انجام می‌داد: علاقه‌های فلسفی و الهی او را می‌توان، از تمایلی که به بحث با «آرنو» رهبر هواداران ژان سن، داشت، احساس کرد. مقداری از وقت خود را به گفتگو در زمینه‌های حکومتی با کولبروزیر می‌گذراند؛ او مکاتبه‌هایی هم دارد که، اگرچه قبل از رفتن او به هانوور خیلی زیاد نبود، به هرحال جای نمایانی را در فعالیت‌های او به خود اختصاص داده است.

لایب نیتس در ماین به کار قضاوت خود ادامه داد، «مجموعه‌ی قوانین» خود را تنظیم کرد و در عین حال به مطالعه‌ی خود در زمینه فلسفه ادامه داد. او در آن جا، چند رساله‌ی حقوقی و فلسفی نوشت که از میان آن‌ها، «نظریه‌ی حرکت مطلق» را برای فرهنگستان پارس و «نظریه‌ی حرکت مشخص» را برای انجمن سلطنتی لندن فرستاد.

لایب نیتس، پنج سال در ماین بود. در سال ۱۶۷۲، به عنوان مربي پسر بوی نه بورگ و همراه با یک مأموریت سیاسی برای لوی چهاردهم، به پارس رفت. در پارس با «هویگنس» آشنا شد و تحت تأثیر او، با شوق و ذوق به ریاضیات پرداخت. آگاهی لایب نیتس از ریاضیات زیاد نبود. همه‌ی داشت ریاضی او مربوط به درس‌هایی می‌شد که در دانشگاه لایپزیک و سپس در «ین» از پروفسور ویگل شنیده بود. برای استعدادی همچون لایب نیتس درس‌های لایپزیک نمی‌توانست چیز با ارزشی باشد، زیرا کونیوس، که به لایب نیتس درس می‌داد، در برابر پرسش دانشجویان، همیشه به یک پاسخ قالبی اکتفا می‌کرد: «قاعده همین است». تحصیل در «ین» هم، بیش از یک سال، طول نکشید. هویگنس، کتاب خود، «ساعت‌های یاندولی»، را به لایب نیتس هدیه کرد. لایب نیتس، برای درک مطالب این کتاب، غرق در آثاری شد که مربوط به ریاضیات جدید بود. او با دقت تمام، نوشته‌های فروآ، والیس و دکارت («هندرسون») را مطالعه کرد. نیوگ ریاضی لایب نیتس، یکباره و با نیرویی حیرت انگیز، زبانه کشید.

به خصوص، آشنایی او با نوشته‌های پاسکال، تأثیر فوق العاده‌ای در خلاقیت او داشت. «مثلث‌های مفسر» نقش نورافکنی را داشت که بلا فاصله، روش کلی رسم‌مumas را روشن می‌کرد، به نحوی که لایب نیتس بعداً نوشت: این موضوع برای او قابل فهم نیست که پاسکال چگونه می‌توانست، این نتیجه‌گیری بزرگ و پربار را در کشف خود نمیند. در سال ۱۶۷۳، نتیجه‌گیری‌های شخصی لایب نیتس، چنان زیاد شده بود که او تصمیم گرفت

جهانی یگانه نباید، و در نتیجه، باید روش یگانه‌ای هم برای شناخت آن وجود داشته باشد. و لایپ نیتس، نمونه و سرمشق کامل این روش را، در ریاضیات می‌دید. البته، روش ریاضی، به خودی خود روشی عام نیست و نمی‌تواند باشد، زیرا تنها حوزه‌ی کمیت‌ها را در بر می‌گیرد. ولی، روش ریاضی نمونه‌ای است که با سرمشق قرار دادن آن می‌توان چنان الگوریتمی ساخت (واژه «الگوریتم» را برای نخستین بار، لایپ نیتس به کار برده است)، که بتواند همه مفهوم‌ها را در بر بگیرد، همان‌طور که ریاضیات، کمیت‌ها را در بر گرفته است. از نخستین اثر دوران جوانی لایپ نیتس، یعنی «هنر ترکیب» تا آخرین نوشته‌های او، همه جا با اندیشه‌ی الگوریتم مفهوم‌های منطقی، برخورد می‌کنیم. در تنظیم و تجزیه و تحلیل این الگوریتم، نقش اصلی به عهده‌ی نمادها و نشانه‌ها بود. به همین دلیل است که لایپ نیتس، با دقیقت و توجه فوق العاده‌ای، این جنبه‌ی کار را در محاسبه‌ی جدید رعایت کرده است. لایپ نیتس در یکی از نامه‌های خود در سال ۱۶۹۳، در این باره صحبت می‌کند: «راز آنالیز در نوع معرفی آن نهفته است، یعنی در این که هنر به کار بردن علامت‌ها را خوب بدانیم... ویت و دکارت، نتوانسته بودند این راز را دریابند.»

شباهتی بین دو اندیشمند بزرگ سده‌ی هفدهم به چشم می‌خورد. دکارت، روش خود را، که در «بحثی در روش» طرح کرده است، و دیجه‌ای مهم در گنجینه‌ی داشن انسانی می‌دانست؛ برای او، «هندرسه» تنها یک تجربه بود تا به یاری ان بتواند نیروی روش خودش را نشان دهد. لایپ نیتس هم، هدف عمدۀ را در اماده کردن یک روش عام، یا به گفته‌ی خود او، یک الگوریتم عام می‌دید؛ از نظر او، فراهم آمدن الگوریتم بی‌نهایت کوچک‌ها، تنها نخستین گام است؛ آزمایشی است که پس از آن باید به آماده کردن «الگوریتم واقعی» پرداخت، یعنی الگوریتمی که بتواند به نیازهای فلسفی ما پاسخ بدهد. مانشین حسابی هم که لایپ نیتس در سال ۱۶۷۴ روی آن کار می‌کرد، باز هم گامی در همین جهت بود؛ در این جا هم منتظر همان نتیجه‌ای بود که در آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها

در سال ۱۶۷۶، لایپ نیتس تصمیم می‌گیرد که از پاریس برود. هانور را به او توصیه کرده بودند. نامه‌های بین او و دوک بوهان فردیل ردویدل شد و او پست کتابداری و مشاوری را پذیرفت. با ترک پاریس، از لندن و آمستردام دیدن کرد. در انگلستان، آشنایی خود را با ریاضی‌دانان، استوارتر کرد؛ در هلند با اسپینوزا آشنا شد و وقت زیادی را در مصاحبت و گفتگوی با او گذراند. ولی دستگاه فلسفی خود لایپ نیتس، چنان پیش رفته بود که حتی فیلسوفی همچون اسپینوزا هم نمی‌توانست تأثیر چندانی بر او داشته باشد.

سال‌های ۱۶۷۵ و ۱۶۷۶ را باید سال‌های کار شدید و پر هیجان درباره‌ی مبانی حساب دیفرانسیلی و انتگرالی دانست. برای خود لایپ نیتس، نقش اساسی بی‌نهایت کوچک‌ها در محاسبه‌ی جدید، کاملاً روشن بود. همچنین معلوم بود که انتگرال را (خود اصطلاح انتگرال هنوز وضع نشده بود)، باید همچون مجموعی از بی‌نهایت کوچک‌ها، در نظر گرفت. و بالآخره روشن بود که محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، دو عمل عکس یکدیگر هستند. مسأله‌های اصلی آنالیز، یعنی جست‌وجوی اکسترموم، نقطه‌ی عطف، مساحت‌ها و حجم‌ها وغیره. هم به صورت کلی خود و هم در مورد بسیاری از مسأله‌های جالب، حل شده بود. بالآخره، به بعضی از ظریف‌ترین پرسش‌ها هم پاسخ داده شد، مثلاً شرط کافی برای تابع‌های قابل انتگرال گیری، به دست آمد.

در اینجا، باید به این نکته اشاره کنیم که هر قدر که کشف‌های لایپ نیتس در ریاضیات، بزرگ باشد، برای خود او، همه‌ی آن‌ها، تنها جزئی از مسأله فلسفی مورد نظرش را تشکیل می‌داد، مسأله‌ای که حل آن، تمامی زندگی لایپ نیتس را پر کرده، و همچون خط سرخی، از میان تمامی کارهای او عبور می‌کند. برای این که بتوانیم ماهیت این مسأله را روشن کنیم، باید به یاد بیاوریم که در فلسفه‌ی لایپ نیتس، نقش عمدۀ، به عهده‌ی هم آهنگی و توازن عمومی است. جهانی که بر آن یک نظام هم آهنگ حکومت می‌کند، نمی‌تواند

داشته‌اند. ولی فعالیت همه جانبه‌ی لایپ نیتس، این امکان را به او نمی‌داد که نتیجه‌گیری‌های خود را منظم و بهشکلی که برای چاپ مناسب باشد، آماده کند. تنها در سال ۱۶۸۲، مقاله‌ای درباره‌ی جست و جوی ماکزیمم و می‌تیمم به چاپ داد. این مقاله، در نخستین شماره‌ی مجله‌ی «آثار دانشمندان» (*Acta eruditorum*) در لایپزیک چاپ شد. این مجله را «اوتومنکه» به کمک لایپ نیتس بنیاد گذاشته بود. این مجله، اهمیت زیادی دارد. زیرا کارهای لایپ نیتس و مکتب او، بهخصوص آثار برادران برنولی را، چاپ می‌کرد.

اگر سال‌های ۱۶۶۵ (مرخصی «طاعون» نیتون) و ۱۶۷۵ (کشف محاسبه‌ی دیفرانسیلی لایپ نیتس)، در تاریخ ریاضیات، از لحاظ اهمیت در یک سطح قرار دارند، سال ۱۶۸۴ را نمی‌توان با آن‌ها هم طراز دانست. در این سال، نخستین مقاله لایپ نیتس درباره‌ی طرح مبانی محاسبه‌ی جدید، چاپ شد. عنوان کامل مقاله چنین بود: «روش تازه‌ی ماکزیمم‌ها و می‌نیمم‌ها و همچنین رسم مماس‌ها، که برای آن، نه مقادیر کسری و نه مقادیر گنگ مانع به شمار نمی‌رود». لایپ نیتس لازم دانسته است که در عنوان مقاله، خاصیتی از محاسبه‌ی جدید را نام ببرد که نه مقادیر کسری و نه مقادیر گنگ، مانع در سر راه ان بهشمار نمی‌رود. در واقع ارزش و برتری روشی که لایپ نیتس اورده بود، در همین ویژگی آن بود. روش‌های جست و جورا دکارت و فرماداده بودند. در این روش‌ها، متأسفانه، باید از عبارت‌های گنگ و کسری صرف نظر کرد، و بهزبان دیگر، این روش‌ها راتتها می‌توان در مورد منحنی‌های جبری مستقیماً به کار برد. البته لایپ نیتس آز برتری محاسبه‌خودش، به خوبی آگاه بود. او، با طرح محاسبه‌ی دیفرانسیلی، می‌گوید: «... می‌توان ماکزیمم و می‌نیمم، و همچنین مماس را پیدا کرد، بدون این که ناچار باشیم عبارت‌های کسری یا گنگ و یا دیگر عبارت‌های بفرنج را، آن‌طور که در مورد روش‌های گذشته و منتشر شده وجود دارد، کثار بگذاریم». کمی بعدتر، دوباره به‌همین مطلب بر می‌گردد: «چه‌همه این کارها و در بسیاری از حالت‌های پیچیده تر

جست وجو می‌کرد، نتیجه‌ای که برای فلسفه کوچک و برای ریاضیات، بزرگ بود. در این جا، این نکته را یادآوری می‌کنیم که ماشین پاسکال، جمع و تفرقی را انجام می‌داد، در حالی که ماشین لایپ نیتس - که ۲۷ سال جوان‌تر از ماشین پاسکال بود - چهار عمل اصلی حساب را انجام می‌داد، به‌توان می‌رساند و جذر می‌گرفت.

در هانوور، فعالیت لایپ نیتس، به صورتی غیرعادی، شدت گرفت و متنوع شد. ریاضیات را ادامه می‌داد، آثار فلسفی می‌نوشت و مأموریت‌های دوک را انجام می‌داد (که از آن جمله می‌توان مأموریت‌های مهمی، مثل بهتر کردن کار معدن را نام برد). لایپ نیتس به اتحاد همه‌ی کلیساها مسیحی و یا دست کم، کلیساها می‌پرتوست، علاقمند بود. او در این زمینه توفیقی به دست نیاورد و نمی‌توانست به دست بیاورد، ولی وقت زیادی از لایپ نیتس را گرفت و او مجبور شد به صورتی عمیق، به بررسی مسائلهای الهی پردازد.

او برای زبان‌شناسی، تاریخ و مکاتبه‌ی با آشناییان اروپایی خود هم، وقت پیدا می‌کرد. با همه‌ی این‌ها، او قبل از هر چیز، خودش را فیلسوف می‌دانست، آن‌هم یک فیلسوف ریاضی دان. او معتقد بود که فلسفه نیاز دارد تا الگوریتم خودش را کشف کند، و مكتب الگوریتم‌ها هم، جایی جز ریاضیات نیست. بعيد هم نیست که انگیزه‌های واقعی، به نحو دیگری باشد: استعداد ریاضی و نیروی غیر قابل دفع آن، در مقام اول بود، و سپس عقل، با تفسیر فلسفی، بر موقعیت برتر ریاضیات، در این سیل نیرومند خلاقیت، صحه می‌گذشت.

در سال ۱۶۷۶، سال مسافرت به هانوور، لایپ نیتس درباره‌ی بسط $\sin x$ و $\arcsin x$ بدرشت، نامه‌ای به اولدن بورگ به‌لنلن نوشت. در همان سال، نیتون پاسخ مفصلی از طریق اولدن بورگ به‌او داد. در این نامه، اطلاع داده شده بود که نیتون از بسط $\sin x$ و $\arcsin x$ آگاه است: می‌تواند دو جمله‌ای را بسط بدهد، و به خصوص سطح سیکلوئید و بعضی از سطح‌های دیگر را به‌دست آورده است. این نامه‌های جوابیه هم، اهمیت زیادی در تکامل بعدی روش لایپ نیتس

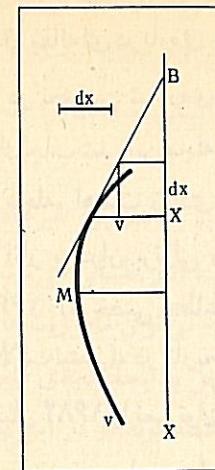
روش من با سادگی حیرت انگیز و بی مانندی به کار می رود.»

محاسبه، به ترتیب زیر خواهد بود.» و تعدادی از قاعده‌های دیفرانسیل گیری را
نام برد:

$$\begin{aligned} dc &= 0; & d(ax) &= adx; \\ d(z-y+w+x) &= dz-dy+dw+dx; \\ d(vx) &= vdx+xdv; \dots \end{aligned}$$

همه‌ی این قاعده‌ها، بدون اثبات داده شده است. اثبات این‌ها، برای نخستین بار در کتاب معروف درسی هوپیتال - «آنالیز بی نهایت کوچک‌ها» - داده شد. لایب‌نیتس، توجه خواننده را به نقطه M جلب می‌کند. او می‌گوید که در اینجا، منحنی نه صعودی است و نه نزولی. در این نقطه داریم $dv=0$ و مماس موازی محور (طول) است. اگر در نقطه‌ای داشته باشیم: $\frac{dv}{dx} = \infty$ ، مماس در آن، برمحور طول عمود است. بعد، به علامت لازم برای نقطه‌ی عطف، قاعده‌ی دیفرانسیل گیری از توان، رشد و غیره، برخورد می‌کیم. سخن کوتاه، همان‌طور که قبل‌اهم گنیم، مقاله‌ی لایب‌نیتس عبارت است از مجلملی از محاسبه‌ی دیفرانسیلی و کار برد آن در آنالیز. جالب این است که این مقاله به زبانی نوشته شده است که با زبان امروزی کتاب‌های درسی، تقریباً تفاوتی ندارد. اصطلاح «محاسبه‌ی دیفرانسیلی»، که برای هر تحصیل کرده‌ی زمان ما اصطلاحی آشناست، برای نخستین بار، در همین مقاله به کار رفته است. لایب‌نیتس، به کمک مثال ثابت می‌کند که بعد از دیفرانسیل گیری معادله‌ای به دست می‌آید که به dx و dy خطی است، و از همین جاست که نتیجه می‌گیرد به «سادگی بی مانندی» رسیده است.

بعد از آن، لایب‌نیتس می‌خواهد قدرت محاسبه‌ی جدید خود را به اثبات برساند. برای این منظور، مساله‌ی «ده بون» را، که امروز برای همه آشناست، انتخاب می‌کند. در سال‌های ۳۰، مساله‌ی محاسبه‌ی مساحت مربوط به یک



شکل ۱

قسمتی از شکل لایب‌نیتس
(از مقاله‌ی سال ۱۶۸۴ او)

مقاله‌ای که درباره‌ی آن صحبت می‌کیم، به صورتی بسیار فشرده نوشته شده است. تنها در شش صفحه، مفهوم‌های اساسی قانون دیفرانسیل گیری، جست وجوی اکستره موم‌ها، نقطه‌ی عطف و غیر آن، مطرح شده است. توان کاملاً با یوهان برنولی موافق بود که این مقاله «بیشتر معما است تا توضیح». لایب‌نیتس، شکلی را پیشنهاد می‌کند که قسمتی از آن در شکل ۱ داده شده است. دیفرانسل متغیر مستقل، به وسیله‌ی پاره خط dx ، به طول دل‌خواه، داده شده است. از شکل، بلافضل، نسبت به دست می‌آید (فراموش نکنیم که dx ، عبارت است از نمودار عرض مماس، و نه منحنی):

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{Bx}$$

سپس لایب‌نیتس می‌گوید: «وقتی که این نسبت را برقرار کردم، قاعده

لایب نیتس را به صورت $\frac{dw}{w} = c dx$ می نویسند، که از آن جا بالا فاصله نتیجه می شود: $w = De^x$ ، ولی لایب نیتس، امکان این استدلال را نداشت، به همین مناسبت، چنین می گوید: اگر w متناسب با x باشد، در آن صورت، w یک تصادع هندسی تشکیل می دهد، وقتی که x حسابی باشد، در آن صورت، x لگاریتم w می شود. بنابراین w ، یک منحنی لگاریتمی است. مساله حل شد.

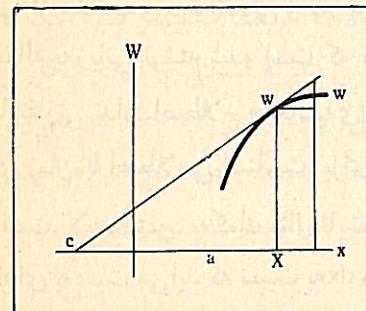
اگر کسی زحمت مطالعه و درک محتوای نامه دکارت به ده بون (۲۰) فوریه ای سال ۱۶۳۹ را به خود بدهد و بیند که چگونه، دکارت بعد از استدلال های نامتعارف و پیچیده، که چند صفحه را می گیرد، به این نتیجه می رسد که روش های او و فرما، برای حل چنین مسأله ای مناسب نیست، آن وقت (تکرار می کنیم، با مقایسه ای برآه حل های دکارت و لایب نیتس)، می تواند به ارزش گام عظیمی که این محاسبه ای جدید برای ریاضیات برداشته است، پی برد!

همه محاسبه قبلی، به صورت محاسبه دیفرانسیلی و کاربرد آن در آمد. سال ۱۶۸۶ بود که لایب نیتس، مقاله مربوط به این محاسبه را، در مجله «Acta eruditerum» چاپ کرد. و این، نخستین کار چاپی درباره محاسبه ای انتگرالی. لایب نیتس بود. مسأله ای که او در این اثر حل می کند، بسیار ساده است، با وجود این، برای روش های کهنه، یا آنطور که لایب نیتس می نامد، برای روش هایی که تا آن روز منتشر شده بود، خارج از قدرت بود. آن را می توان به این ترتیب تنظیم کرد: تحت قائم یک منحنی به صورت تابعی از متغیر مستقل داده شده است؛ این منحنی را پیدا کنید. لایب نیتس، مسأله را به این صورت حل می کند. دو مثلث در نظر می گیرد: یکی تشکیل شده است از تحت قائم^۱؛

۱. نباید این مطلب را فراموش کیم که همه این ها را، سال های بود که نیوتون می داشت، ولی داشن نیوتون تنها به خود و تعداد محدودی از ریاضی دانان انگلیسی خدمت می کرد، در حالی که لایب نیتس، کشف خود را در اختیار تمامی جهان قرار داد.

منحنی مفروض، به همان اندازه می توانست قابل حل باشد، که مسأله ای رسم مماس بر منحنی جبری. «ده بون»، نوع تازه ای از این مسأله، ابتکار و طرح کرد. مسأله «ده بون» به صورت کلی خود، چنین است: یک منحنی پیدا کنید که تحت مماس آن، تابع مفروضی باشد. به زبان امروزی ما، این مسأله، چیز دیگری جز این نیست که باید یک معادله دیفرانسیلی مرتبه ای اول، به صورت $f(x,y,y')=0$ را، انتگره کنیم. در سده هی هفدهم، این نوع مسأله ها را، عکس مسأله های مربوط به مماس می نامیدند. «ده بون» این مسأله را به دکارت پیشنهاد کرد، ولی او نتوانست روشی کلی برای حل این گونه مسأله ها بدهد. درست به همین دلیل بود که لایب نیتس، این مسأله را به عنوان مثالی برای کاربرد روش تازه خودش انتخاب کرد.

مسأله. «می خواهیم منحنی w را پیدا کنیم، که طبیعت آن، این است که اگر w مماس مرسوم از محور باشد، مقدار x همیشه برابر مقدار ثابت a شود». حل لایب نیتس. روی شکل دیده می شود که $\frac{dw}{dx} = \frac{w}{a}$ ، با فرض $b = a$ ،



شکل ۲
مریبوط به حل مسأله ای عکس
مسأله مماس

یعنی مقدار ثابت (لایب نیتس و شاگردانش، دیفرانسیل متغیر مستقل را، مقداری ثابت می گرفتند)، داریم: $w = \frac{a}{b} dx$: در زمان ما، معادله

باشد.» به زبان دیگر، برای پیدا کردن انتگرال ازتابع مفروض $(x)^f$ ، باید تابع مثل $F(x)$ به دست آورد، به نحوی که شبیه آن، یعنی $F'(x) = f(x)$ باشد. وارد کردن مقدار ثابت هم به لایب نیتس تعلق دارد، همچنین او بود که انتگرال نامعین را، از کوادراتورها - که از زمان ارشمیدس تا باروی، تنها به عنوان انتگرال معین در نظر گرفته می شد - جدا کند. لایب نیتس، در یکی از مقاله های خود در سال ۱۶۹۴، چند عبارت را انتگرله می کند و نتیجه را همراه با $(+b)$ می نویسد و توضیح می دهد که 'تا' عدد ثابت دلخواهی است. او، ضمن توضیح دلیل وجودی (b) می نویسد: «می خواهم این مطلب را یادآوری کنم، چرا که برای کلی بودن جواب، فوق العاده اهمیت دارد.» به این ترتیب، مفهوم و اهمیت این مقدار ثابت، کاملاً برای لایب نیتس روشن بوده است. ایا لایب نیتس، لزوم این مقدار ثابت را به این مناسبت پذیرفته بود که منحنی های انتگرالی باید معرف خانواده ای از منحنی ها باشند، یا به این مناسبت که داریم:

$$d[f(x)+C] = d[f(x)]$$

متأسفانه، این مطلب برای ما روشن نیست.

همان طور که دیده می شود، سال های ۸۰ و ۹۰ سده ای هفدهم را باید دوران پرباری برای مبانی آنالیز دانست. در این دوران، لایب نیتس تنها نبود. برادران برنولی، با قدرت روی دستگاه محاسبه ای جدید کار می کردند؛ کار آن ها به قدری تازه و پر ارزش بود که لایب نیتس آن راهم ارز کار خودش می دانست. او در یکی از نامه های خود به برادران برنولی، در همین سال ها می نویسد: «محاسبه ای تازه ای شما، هیچ دست کمی از مال من ندارد.» هوپیتال - اگر چه از لحاظ نیروی استعداد با برنولی ها برابری نمی کرد - در گسترش محاسبه ای لایب نیتسی سهم به سزا داشت. او با لایب نیتس مکاتبه داشت و در عین حال با یوهان برنولی، رابطه ای دوستانه ای داشت و به همین مناسبت، در جریان آخرین پیشرفت های آنالیز قرار می گرفت. این وضع، به او امکان می داد که با حرارت، به تبلیغ آموزش جدید پردازد، آموزشی که از همان

عرض و قائم؛ دومی تشکیل شده است از دیفرانسیل های dy ، dx و ds . از تشابه دو مثلث تساوی $pdx = ydy$ به دست می آید. لایب نیتس سپس می گوید: ... و اگر معادله دیفرانسیل را جمع بندی کنیم، خواهیم داشت:

$$\int pdx = \int ydy$$

در اینجا، برای نخستین بار و به صورتی روشن و کاملاً مشخص، رابطه ای بین محاسبه های دیفرانسیلی و انتگرالی، برقرار شده است. ولی، در واقع، برای پی بردن به این موضوع، که برای معاصران ما، امری کاملاً طبیعی و معقول به نظر می رسد، در آن روزگار، به استعدادی عظیم و خلاقه نیاز داشت.

روشی که لایب نیتس برای به دست آوردن نتیجه ای قطعی به کار می برد، به دقت و توجه زیادی نیازمند است. مؤلف، درباره ای $\int ydy$ می گوید: چون داریم: $y = \int y dy$ ، بنابراین خواهیم داشت: $\int y dy = \frac{y^2}{2}$ زیرا «برای ما مجموع و اختلاف یا \int و \int عکس یکدیگرند، درست مثل توان و رشته، در محاسبه های معمولی.» به این ترتیب، رابطه ای معکوس دونوع محاسبه، برقرار شد. خواننده به یاددارد که قضیه مربوط به این رابطه معکوس، به صورت کلی خود، حتی به وسیله ای باروی هم طرح شده بود؛ نیوتون هم از این قضیه استفاده می کرد: با همه این ها، نخستین مقاله ای لایب نیتس، که از این رابطه ای معکوس صحبت می کند، اهمیت خاصی در تاریخ ریاضیات دارد، زیرا در آن جا، به نحوی موضوع طرح شده است که در طول سده های متوالی، به همان صورت باقی ماند.

نباید گمان کرد که لایب نیتس، این رابطه ای معکوس را، تنها در مرزها می دید، «چون ... = \int ». او طرح کاملاً کلی تری دارد که البته، خیلی دیرتر و در سال ۱۶۹۳ بیان می کند. لایب نیتس، روند انتگرال گیری را، به این صورت روشن می کند: «مسئله ای کلی کوادراتورها [محاسبه مساحت ها و حجم ها]، منجر به جست و جوی منحنی می شود که دارای قانون معین

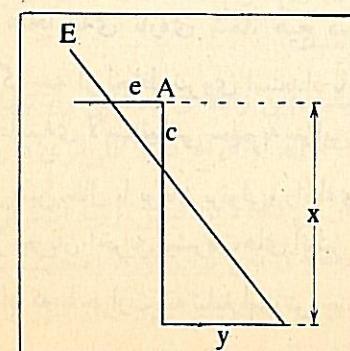
شکل ۳، شکلی است که لایب نیتس کشیده است. او فرض می کند، خط E، که وتر مثلث های متشابه روی آن قرار دارد، به موازات خود و به طرف نقطه ای A جا به جا شود. با وجودی که، ضمن این انتقال، مقدار y زیاد می شود، نسبت $\frac{x}{y}$ ، همواره مساوی نسبت $\frac{c}{e}$ باقی می ماند. وقتی که خط راست E، از نقطه ای A می گذرد، چه اتفاقی می افتد؟ البته، ضلع های مجاور به زاویه ای قائم، یعنی c و e ، به سمت صفر میل می کنند. در این، تردیدی نیست، ولی چگونه از این صفرها، سردرآوریم؟ لایب نیتس می گوید: «اگر c و e را، صفرهایی به مفهوم مطلق خود بگیریم، از آن جا که صفرها با یکدیگر برابرند، به دست می آید: $1 = \frac{x}{y} = \frac{c}{e}$ ، یعنی $x=y$ ، که نتیجه ای ابلهانه است». لایب نیتس، راه نجات از این موقعیت را نشان می دهد: c و e را تهبا در مقایسه با مقادیر معمولی (و در این مساله) x و y می توان صفر به حساب آورد، یعنی، این ها به طور نسبی صفرند نه به صورت مطلق، و بنابراین، نسبت آن ها برابر است با همان نسبت آن ها در زمانی که مقادیری معمولی و مخالف صفر بوده اند.

لایب نیتس متذکر می شود که این روش - انتقال خاصیت کمیت های متغیر، به حالت حدی - کاربرد زیادی در ریاضیات دارد. مثلاً، ویژگی های چند ضلعی منظم، به حالت حدی آن، یعنی دائیره، منتقل می شود. در فیزیک هم، از این نمونه ها، بسیار است. خاصیت کمیت ها، ضمن تغییر آن ها، بنابر قانون پیوستگی، باقی می ماند. لایب نیتس، برای این قانون، اهمیت عام فلسفی به عنوان نشانه ای از انتظام عمومی، قابل بود. ولی آن را به طور جداگانه برای ریاضیات تنظیم می کند، جایی که بنابه اعتقاد او، وجود این قانون «ضرورت مطلق» دارد. نظری که لایب نیتس پیشنهاد می کند چنین است: «اگر بین پدیده های مفروض یا مورد نظر، اختلاف بین دو پدیده می تواند از هر مقدار دلخواهی کوچک تر باشد، باید این وضع در مورد پدیده های مجھولی هم که ناشی از پدیده های مفروض است، برقرار باشد.» لایب نیتس، به صورت

آغاز سال های ۹۰، هواخواه جدی آن شده بود. لایب نیتس می توانست اسوده خاطر باشد؛ زیرا می دید که تلاش های او بی ثمر نمانده است. ولی، هر قدر آموزش لایب نیتس، گسترش بیش تری پیدا می کرد، مخالفان آن هم، روبه افزایش می گذاشت.

و این، امری طبیعی و عادی برای تاریخ است. به یاد داریم که وقتی کلر روش های تازه ای خود را در ریاضیات عرضه کرد، چگونه مورد حمله ای پاسداران ریاضیات سنتی قرار گرفت؛ همین پاسداران نظام کهنگی داشت، علیه آن چه کاوالیری هم عرضه کرده بود، برخاستند؛ حال نوبت لایب نیتس بود؛ او در وارد کردن مفهوم های تازه به ریاضیات، بی احتیاط بود و بنابراین، می بايستی، به قول فردريك انگلس، مورد انتقاد «سفلگان» قرار گیرد. مخالفان، آنانالیز بی نهایت کوچک ها را، مفهومی مهمل می دانستند، زیرا بسیاری از زمینه های مربوط به آن را، نمی توان با قاعده های منطق صوری تطبیق داد. یکی از این زمینه ها، حد نسبت دو مقدار بی نهایت کوچک است. هر دوی آن ها، در حد، برابر صفرند، و بنابراین نسبتی برای آن ها وجود ندارد. لایب نیتس هم استدلال می کرد که حد این نسبت، مقدار کاملاً معینی است.

البته، باید یادآوری کنیم که خود لایب نیتس هم در درک طبیعت بی نهایت کوچک ها، تزلزل هایی داشت، ولی با نیروی شهود پر قدرت ریاضی خودش، توانسته بود تا حد زیادی به حقیقت نزدیک شود. نمونه ای از دفاع او را در این مورد که مربوط به سال ۱۷۵۲ است، می آوریم.



شکل ۳

تصویری که لایب نیتس برای روشن کردن $\frac{c}{e}$ کیده است

گستردۀ تر و خارج از مرز ریاضیات هم، نظر خود را مطرح می کند: «اگر در مفروضات نظری وجود دارد، در مجهولات هم این نظم وجود خواهد داشت.» به این ترتیب، انتقادهایی که بر اندیشه‌های تازه‌ی ریاضی می شد، لایپنیتس را واداشت تا پایه‌های فکری خود را دقیق تر و عمیق تر کند و استدلال‌های خود را هم در ریاضیات و هم فلسفه گسترش دهد و به کمک هر کدام دیگری را غنی تر کند.

لایپنیتس، همچون سابق، به فلسفه، سیاست، آموزش دیگران، کارهای کلیسا و بسیاری کارهای دیگر هم، مشغول بود. دوک ارنست اوگوست، از لایپنیتس خواست تا تاریخ خانواده‌ی او را بنویسد (یوهان فردریک، در سال ۱۶۷۰ م رد). بدون شک، آن‌چه را که واقعی نگاران درباری، از پیش آمدھای مبتذل و بی معنی ثبت کرده بودند، به عنوان مدرک، در اختیار لایپنیتس گذاشتند. از بدختی لایپنیتس (و او خوشبختی داش) او نمی‌توانست بدکار کند. او کوهی از مدرک‌ها را، که در بایگانی‌ها و کتابخانه‌ها پراکنده بود، جمع‌آوری کرد و سر آخر، تصمیم به یک مسافت اختصاصی گرفت. او می‌خواست از قلعه‌ها و دره‌های جنوب آلمان و ایتالیا، بازدید کند. این مسافت، سه سال طول کشید (۱۶۸۷ - ۱۶۹۰). در ایتالیا، با آخرین شاگرد گالیله، یعنی ویویانی، آشنا شد. لایپنیتس «مسئله‌ی ویویانی» را، که مشهور است، در یک روز حل کرد.

این مسافت، برای تاریخ ریاضیات هم، بی‌اثر نبود و ما، در بخشی که به برادران برنولی اختصاص دارد، از آن صحبت خواهیم کرد.

حالا موقع آن رسیده است که به یک حقیقت تأسف بار تاریخی پیردادیم، یعنی به مبالغه‌ای که بین هواداران نیوتون با هواداران لایپنیتس، برسر حق تقدم این یا آن، در کشف محاسبه‌ی جدید، جریان داشت. در واقع، در باره‌ی حق تقدم، به معنای دقیق آن، نمی‌توان صحبت کرد، زیرا عنصرهای جداگانه‌ی محاسبه‌ی دیفرانسلی و انتگرالی و کاربرد آن‌ها، در نوشتۀ‌های تعداد زیادی از

دانشمندان پیش از نیوتون و لایپنیتس وجود دارد. نیوتون، در بسیاری موارد از «هندرسۀ‌ی» کاوالیری استفاده کرده و خیلی چیزها را هم، مستقیماً از معلم خودش باروی برداشته است؛ لایپنیتس هم خودش می‌نویسد که کار او، ادامه‌ای از کارهای پاسکال است. اگر به خواهیم، می‌توانیم از این گونه بستگی‌ها، مجموعه‌ی بزرگی را ارائه دهیم. این را هم می‌دانیم که وقتی لایپنیتس، در سال‌های ۱۶۷۳ و ۱۶۷۶، ریاضی‌دانان انگلیسی را از موضوع‌های مربوط به ریاضیات جدید آگاه کرد، انگلیسی‌ها می‌دانستند که این چیزها، هیچ‌گونه تازگی برای نیوتون ندارد. در دسامبر سال ۱۶۹۷، نخستین تیر شلیک شد: ف. دودونی لیه، ریاضی‌دان اهل ژنو که در لندن زندگی می‌کرد، در نامه‌ی خود به هویگنس نوشت که لایپنیتس از دستگاه نیوتون، استفاده کرده است. این اشاره، و همچنین چاپ بعدی نظر دودونی لیه، دنباله‌ای نداشت، زیرا لایپنیتس، دون‌شأن خود می‌دانست که به چنین تهمت‌هایی اعتنا کند. در سال ۱۷۰۴، مقاله‌ای درباره‌ی کارهای نیوتون که به تازگی منتشر شده بود - در مجله‌ی «Acta eruditorum» چاپ شد، که چندان ستایش‌آمیز نبود. آن وقت، یکی از شاگردان نیوتون به نام کیل (۱۶۷۴ - ۱۷۲۱)، در مجله‌ی انجمن سلطنتی لندن، مستقیماً به مقابله‌ی لایپنیتس پرداخت و او را متهم کرد که تمامی روش‌خود را از نیوتون گرفته و تنها نام گذاری‌ها را تغییر داده است. کیل از پس گرفتن اتهام خود سر باز زد و لایپنیتس، برای اعادۀ حیثیت به انجمن سلطنتی لندن مراجعه کرد. انجمن، گروهی را مأمور رسیدگی کرد، که گزارش آن‌ها در سال ۱۷۱۲، همراه با مجموعه‌ی سندهای مربوط به آن، چاپ شد. تصمیم انجمن به نفع لایپنیتس نبود. همه‌ی این‌ها، اثر تلحی بر لایپنیتس داشت. بررسی‌هایی که بعداً روی دست نویس‌های لایپنیتس انجام گرفت، به صورتی انکار ناپذیر ثابت کردند که این اتهام به کلی بی‌پایه است؛ تمامی جریان کشف‌ها، به تفصیل در این سندها دیده می‌شود. با دنبال کردن این بررسی‌ها، معلوم شد که روند کار

جامع الاطراف در تمامی تاریخ تمدن دانست. در عین حال، باید قدرت و استعداد او را در کار، در حدی دانست که فوق طاقت انسان است. چند نمونه را یادآوری می‌کنیم.

تعداد نامه‌هایی که لایب نیتس از خود برجاگذاشته است، خود مجموعه‌ای عظیم را تشکیل می‌دهد: ۱۵۰۰۰ نامه. آن هم چه نامه‌هایی! تقریباً در همه‌ی آن‌ها می‌توان اندیشه‌ای تازه و پر بار پیدا کرد. لایب نیتس، اصولاً نامه‌ای بی معنی و بی محتوی نمی‌نوشت. انگلس از پیش آمد جالبی یاد می‌کند. از لایب نیتس پرسیدند که با چه روشی می‌توان حرکت جلو و عقب رونده‌ی پیستون ماشین بخار را، به حرکت چرخشی بازوی کار ماشین، تبدیل کرد. و به قول انگلس، لایب نیتس «به برکت نبوغ خاص خودش» سازوکار شاتونی میل لنگی را پیشنهاد می‌کند. باز هم یک نمونه. کورفورست، که بعدها پادشاه پروس شد، از لایب نیتس خواست تا نقشه‌ی فرهنگستان را آماده کند و او هم، این کار را به انجام رسانید. همچنین، لایب نیتس با علاقه‌ای که به شخصیت پطر اول پیدا کرده بود، طرح کاملی برای گسترش آموزش و داشت در روسیه، برای او تهیه کرد.

لایب نیتس از خیلی قبل، به روسیه علاوه‌مند شده بود. حتی در سال ۱۶۹۵، چیزهایی، کم و بیش مبهم، درباره‌ی سلطان جوان، از مسکو دور دست به گوش او رسیده بود. لایب نیتس و پطر، برای نخستین بار در ژوئیه سال ۱۶۷۹ در هانوفر با هم ملاقات کردند. پطر اول، آدم زیرک و با هوشی بود و در همین ب Roxورد، به ارزش لایب نیتس بی برد. لایب نیتس هم، درباره‌ی پطر، به عنوان یک اصلاح طلب مشهور دولتی، اظهار نظر کرده است. در سده هجدهم هنوز افسانه‌ی مربوط به «سلطان روشنفکر» بر ذهن‌ها حکومت می‌کرد. لایب نیتس هم، این افسانه را باور داشت و توجهش به طرف پطر اول جلب شد. آیا این همان شاه مستبدی نیست که اراده‌ی او می‌تواند، آرزوهای لایب نیتس را درباره‌ی «سلطان روشنفکر» برآورد؟ به همین دلیل، با دقت

لایب نیتس، مسیری را طی کرده است، که هیچ وجه مشترکی با مسیر اندیشه‌های نیوتون نداشته است. بخشی که فرما و دکارت بسر جست و جوی ماکریم و می‌نیم داشتند، و یا بحث برادران برنولی به غنای ریاضیات کمک کرد. ولی، جدالی که بین هواداران نیوتون و لایب نیتس در گرفته بود، هیچ ارزشی برای دانش نداشت، جز این که پژوهندگان را واداشت تا در دست

نوش‌های ریاضی لایب نیتس،
به کندوکاو پیشتری پردازند.

این جدال بی معنی تنها این موضوع را ثابت کرد که چگونه خودخواهی، مینهنه -

پرستی دروغین و احساس نادرست، می‌تواند محیط پاک دانش را، آلوه و لکه‌دار کند بدون هیچ مبالغه‌ای می‌توان

گفت که در ابتدای سال‌های سده‌ی هیجدهم، شهرت لایب نیتس، تمامی اروپا را فرا گرفته بود. دانشمند و یا سلطانی نبود که به خاطر

مکاتبه، یا حتی گفتگوی با

گوتفرید ویلهلم لایب نیتس
(۱۷۱۶ – ۱۶۴۶)

لایب نیتس، به خود نبالد. گوناگونی و تنوع علاوه‌های او، واقعاً حیرت انگیز بود. اگر بخواهیم از همه دانش‌ها، همه‌ی پیچ و خم‌های فعالیت سیاسی، همه‌ی شاخه‌های صنعت، همه‌ی بحث و جدل‌های مغلق کلیساپی و بسیاری زمینه‌های دیگری که در حیطه‌ی کار لایب نیتس بوده است، نام بیریم کار آسانی نیست. به راستی، می‌توان لایب نیتس را، یکی از پرنبوغ‌ترین دانشمندان



آخر زندگی خود را، در تنهایی گذراند. بیماری نقرس، او را به صندلی خودش میخ کوب کرده بود. هانور، آن طور که در زمان شکوفایی نیرو و استعدادهای لایب نیتس بود، دیگر مرکز بزرگ سیاسی و علمی به شمار نمی‌رفت. پشتیبانان فیلسوف، از دنیارفته بودند و مکاتبه‌ها به تدریج کم و کم تر می‌شد. چگونگی مرگ لایب نیتس، خالی از بعضی ابهام‌ها نیست. صبح ۱۴ نوامبر ۱۷۱۶، احساس می‌کند حالت خوب نیست. دوست یسوعی او، یک «داروی خانگی»، که خودش تهیه کرده بود، پیشنهاد می‌کند. لایب نیتس، ترکیبی را که این دوست تجویز کرده بود می‌نوشد و بلا فاصله، دردی و حشتناک در شکم خود احساس می‌کند. ساعتی بعد از خوردن «دارو»، و قبل از آن که پیشک برسد، لایب نیتس مرد. تابوت این افتخار بزرگ داشت را، تنها یک نفر مشایعت کرد: منشی او. از سه فرهنگستانی که لایب نیتس عضو آن‌ها بود - فرهنگستان علوم برلین و پاریس و انجمن سلطنتی لندن - تنها فرهنگستان پاریس، نسبت به او ادائی احترام کرد. در ۱۳ نوامبر سال ۱۷۱۷، برنارد فونتنال (Fontenelle) (۱۷۵۷-۱۶۰۷)، نویسنده، دانشمند و عضو فرهنگستان فرانسه، درباره‌ی او سخن رانی کرد.

*

حل دستگاه صفحه ۵۱

با توجه به اتحاد $a = a + \{a\}$ ، اگر سه معادله دستگاه را جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$(1) \quad x + y + z = \frac{3}{3}$$

مجموع دو معادله اول و دوم را از معادله (۱) کم می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$[y] + \{x\} = 0$$

از آن‌جا به سادگی نتیجه می‌شود که x عددی درست است و $1 < y < 0$.

به این ترتیب معادله اول دستگاه به این صورت در می‌آید:

$$x + \{z\} = \frac{1}{1}$$

از آن‌جا $1 = x + 0 = \{z\}$ می‌شود و معادله دوم دستگاه به صورت

$$\frac{1}{2}y + [z] = \frac{2}{2}$$

جواب دستگاه چنین است:

کارهای پطر را در روسیه دنبال می‌کرد و هیچ امکانی را برای دیدن او از دست نمی‌داد. در سال‌های ۱۷۱۱ و ۱۷۱۲، مدت زیادی رادر کارلس باد، تفلیس و در زدن با هم گذراندند. گفتگوها بی شر نبود و حاصل آن سندها، طرح‌ها و گزارش‌های توضیحی است که لایب نیتس به دستور پطر تهیه کرده که تا امروز هم برای ما باقی مانده است. باید به این نکته هم اشاره کرد که آن‌چه لایب نیتس در این مورد انجام داده است، کوچک نیست. تنها یکی از سندهایی که به خط خود لایب نیتس نوشته شده است، شامل ۲۴۴ واحد است که ۳۶۹ صفحهٔ چاپی را با حروف ریز گرفته است. در این جا به مهم‌ترین آثار او اکتفا می‌کنیم. در دسامبر سال ۱۷۰۸، گزارشی درباره‌ی اجرای اموزش تحصیلی در روسیه تهیه کرد. لایب نیتس می‌گوید که: «هدف واقعی دانش، خوشبخت کردن انسان است.» او اعتقاد دارد که بهترین وسیله برای رسیدن به این هدف، «خوب تربیت کردن جوانان»، و یا به زبان امروزی تعلیمات عمومی است. و لایب نیتس برای تحقیق چنین کار عظیمی در کشور بزرگی مثل روسیه، تأسیس مرحله‌های مختلفی از آموزشگاه‌های درسی و علمی را پیشنهاد می‌کند. او می‌نویسد، ابتدا باید دانش را به روسیه منتقل کرد و بعد منتظر ماند تا در میهن تازه‌ی خود شکوفا شود. اورگزارش خود، به اختصار، از موسسه‌هایی نام می‌برد که وجود آن‌ها در اولویت قرار دارند: کتابخانه‌ها، موزه‌ها، باغ و حشنه‌ها، رصدخانه‌ها وغیره. اگر گزارش لایب نیتس با ترکیب اولیه‌ی فرهنگستان علوم در روسیه، مقایسه شود، معلوم می‌شود که طرح لایب نیتس مبنای برای تشکیل مؤسسه‌های علمی تازه بوده است. همان طور که می‌دانیم، پطر در زمان افتتاح فرهنگستان زنده نبود. طرح لایب نیتس درباره‌ی اجرای تعلیمات عمومی هم، نمی‌توانست عملی شود. ارزوی لایب نیتس درباره‌ی روسیه‌ی باسواند، زیر حاکمیت «سلطان روشنفکر» عملی نشد و نمی‌توانست عملی شود. ولی فرهنگستان علوم، که خاطره‌ی عزیزی از این انسان بزرگ دانشمند است، توانست در جهت پیشرفت دانش در روسیه، سهم به سزاگی داشته باشد. لایب نیتس، سال‌های

کاربردهایی از مکانیک در ریاضیات

بخش ۱ - مسئله مماس بر دایره

چنانکه می‌دانیم، مماس بر دایره، خط مستقیمی را گویند که بادایره تنها یک نقطه مشترک دارد (که آن را نقطه تماس می‌نامند). در کتب درسی هندسه اثبات شده است که خط مماس، برشعاعی که از مرکز دایره به نقطه تماس کشیده می‌شود، عمود است. آنچه از این پس می‌آید، اثبات قضیه مزبور، براساس مفاهیم مکانیکی است.

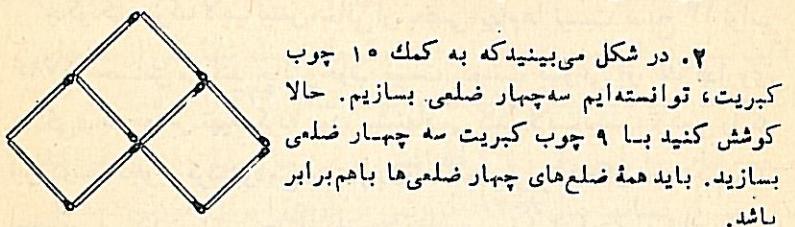
دست به آزمایشی خیالی می‌زنیم. وزنه‌ای را به نقطه M ، انتهای ریسمان می‌آویزیم و سر دیگر ریسمان را به نقطه O می‌بندیم.

(الف) وزنه در بالین ترین نقطه‌ای که می‌تواند از ریسمان آویخته شود، خواهد بود.

این واقعیت که برای مشاهدات ما اهمیتی حیاتی دارد، بدیهی می‌نماید، ولی آموزنده خواهد بود اگر در نظر بگیریم که خود، صورت خاصی از اصلی‌تر (به نام اصل حداقل انرژی پتانسیل) است و ما در بخش ۴، در شرایطی بیچیده‌تر، بدان خواهیم پرداخت. به سخن درست‌تر، به کمک همین اصل حداقل انرژی پتانسیل، می‌توان عبارت (الف) را از نکته آشکار (ب) که در زیر مطرح می‌شود بددست آورد:

راز و رمز عدد ها و شکل ها

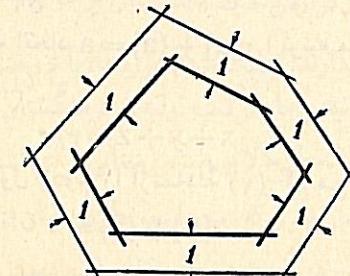
۱. در مثلث ABC ، دو ارتفاع h_C و h_B از ضلع‌هایی که بر آنها وارد شده‌اند کوچکتر نیستند (یعنی هر کدام از این دو ارتفاع، بزرگ‌تر یا مساوی ضلعی است که بر آن عمود شده است). درباره این مثلث چه می‌گویند؟



۲. در شکل می‌بینید که به کمک ۱۵ چوب کبریت، توانسته‌ایم سه چهارضلعی بسازیم. حالا کوشش کنید با ۹ چوب کبریت سه چهارضلعی بسازید. باید همه ضلع‌های چهارضلعی‌ها باهم برابر باشد.

۳. دو دانش‌آموز برای خرید کتابی به یک کتاب فروشی رفتند. معلوم شد که دانش‌آموز اول برای خرید این کتاب ۳۰ ریال کم دارد. اگر دانش‌آموز دوم هم خواست خودش کتاب را بخرد، ۱ ریال کم داشت. وقتی که «پول»‌های خود را روی هم ریختند، باز هم به اندازه قیمت کتاب نشد. قیمت کتاب را پیدا کنید.

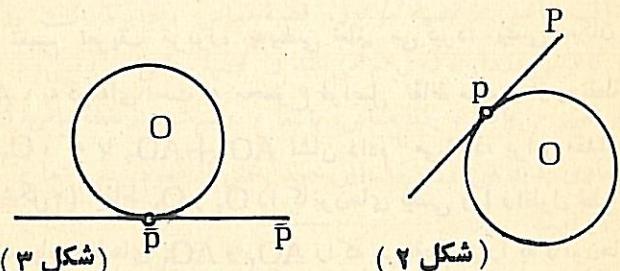
۴. در هند باستان، معمولاً به جای بیان اثبات یک قضیه یا یک مساله، شکلی می‌کشیدند و در کنار آن می‌نوشتند «ببینید». آن‌ها معتقد بودند، کسی که به ریاضیات می‌پردازد، باید خود جست و جو کنند و استدلال لازم را بددست آورد. شما هم «ببینید» به کمک شکل‌چگونه می‌توان این مساله را حل کرد:



یک چندضلعی محدب داریم که محیط آن برابر ۱۲ سانتیمتر است. چندضلعی محدب دیگری در بیرون آن قرار گرفته است، به نحوی که فاصله هر ضلع آن با ضلع نظیرش از چندضلعی داخلی، برابر یک سانتیمتر است. ثابت کنید تفاوت مساحت دو چندضلعی، بیش از ۱۵ سانتیمتر مربع است.

(۵) فاصله بین وزنه و نقطه آویز O ، معادل طول ریسمان MO می باشد (و این به معنی کشیده بودن ریسمان است).

بعنوان جمله معتبره می توان یادآور شد که ظاهراً نکات (ه) و (ج)، از آنچه این دورا برما مکشوف می کند، کمتر بدیهی نیست.
اینک برای اثبات قضیه خود پیشتر می رویم. فرض می کنیم که طبق شکل ۲، نقطه O ، مرکز یک دایره است و خط مستقیم p ، در نقطه P ، بر آن دایره مماس شده است. باید ثابت کنیم که $OP \perp p$. تصویر مزبور را بر دیواری عمودی می کشیم، به نحوی که خط p به صورت افقی درآید و دایره به تمامی بالای آن قرار بگیرد. (اگر این کتاب را به صورت قائم نگاه داریم، شکل ۳ نیازما را برخواهد آورد) به یاد داشته باشیم که در این حالت نقطه P ، پایین ترین نقطه دایره خواهد بود. سپس ریسمانی درست به طول شعاع دایره بر می داریم و یک سر آن را در نقطه O ، مرکز دایره محکم می کنیم. به سر دیگر ریسمان که با M مشخص شده است، وزنهای می بندیم و ریسمان را آویزان می کنیم. باید نشان دهیم که نقطه M بر روی نقطه P ، منطبق خواهد شد.



(شکل ۲)

در حقیقت، به موجب عبارت (ه)، ابتدا معلوم می شود که M حتماً روی محیط دایره واقع خواهد شد و سپس به موجب عبارت (الف)، این نقطه بر پایین ترین نقطه محیط دایره، یعنی P ، منطبق خواهد گشت. پس ریسمان نیز بر شعاع OP منطبق خواهد شد. بنابراین با توجه به عبارت (ج)، شعاع مزبور بر خط p عمود خواهد بود که این خود در حکم اثبات قضیه می باشد.

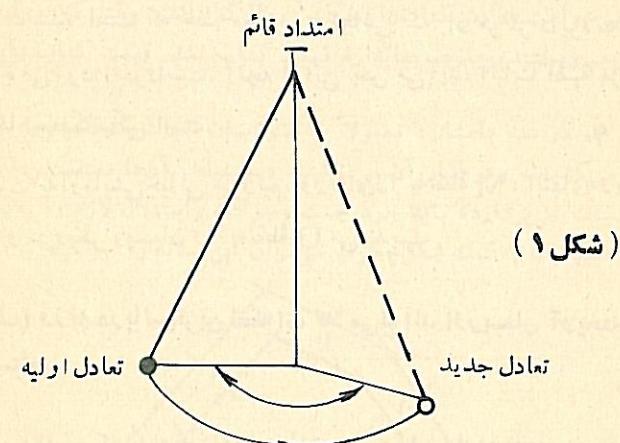
البته مثال فوق چندان جالب به نظر نمی رسد، چرا که اثبات قضیه نسبتاً

(ب) برای وزنه، تنها یک نقطه تعادل وجود دارد.

به عبارت دیگر، مکان وزنه در حالت تعادل، از روی طول ریسمان و محل نقطه O کاملاً قابل پیش‌بینی خواهد بود.
بنابراین نکته (ب)، به نکته دیگری پی می‌بریم:

(ج) وزنه بر روی خطی قرار دارد که از نقطه آویز به صورت قائم رسم شود.

در واقع، اگر وزنه روی این خط قرار نمی گرفت، آنگاه هر حالت جدیدی که با چرخاندن ریسمان حول خط مزبور به دست می آمد، برای وزنه، به منزله حالت تعادل تازه‌ای، تلقی می شد (شکل ۱).



(شکل ۱)

استدلال فوق، بر اساس امر مسلمی است که در عمل به دست آمده است، یعنی:

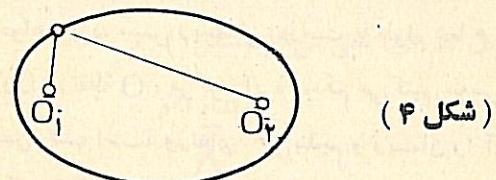
(۵) اگر جسم یا مجموعه اجسام تحت تعادلی، حول محور قائم به گردش درآید، هر حالت جدید، خود حالت تعادل جدیدی خواهد بود.

از عبارت‌های (الف) و (ج)، چنین نتیجه می شود:

ساده‌ای را در بردارد. اما این روش، برای اثبات قضایای جدید، به کار گرفته خواهد شد. در این راه، از روش «مکانیکی» اثبات قضیه مماس بر دایره، استفاده خواهیم کرد. در بخش ذیرین، به تعیین قضیه مذبور، تحت عنوان قضیه مماس بریضی دست خواهیم زد.

بخش ۴- مسئله مماس بر بیضی

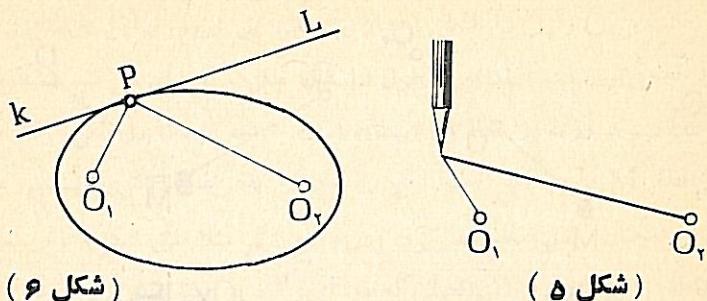
بر طبق تعریف، دایره مکان هندسی نقاط A ، به گونه‌ای است که فاصله نقاط مذبور از نقطه مشخص O ، که با AO نمایش داده می‌شود، مساوی مقدار معلوم l باشد.



(شکل ۴)

تعیین تعریف مذبور، به بیضی تعلق می‌گیرد. بیضی مکان هندسی نقاط A ، به گونه‌ای است که مجموع فواصل نقاط مذبور از دونقطه مشخص O_1 و O_2 ، که با $AO_1 + AO_2$ نشان داده می‌شود، برابر مقدار معلوم l باشد (شکل ۴). نقاط O_1 و O_2 را کانون‌های بیضی و l را طول قطر اطول آن می‌نامند. پاره خط‌های AO_1 و AO_2 را که هر نقطه A را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنند، شعاع‌های کانونی نقطه A می‌نامند. دایره حالت خاصی از بیضی است که در آن کانون‌های O_1 و O_2 برهم منطبق گشته است. در آن صورت شعاع‌های کانونی نیز برهم انطباق یافته، شعاع دایره را تشکیل می‌دهند. هر کس می‌تواند ریسمانی بردارد و دوسر آن را روی کاغذ بر دونقطه مشخص O_1 و O_2 محکم سازد، به شرط آن که طول پاره خط O_1O_2 از طول ریسمان کوچکتر باشد، و نوک مدادی را در ریسمان ازدایز و باکشیدن ریسمان

و حرکت‌دادن نوک مداد، یک بیضی ترسیم کنند (شکل ۵).
مماس بر بیضی نیز، چون دایره، بخط مستقیمی اطلاق می‌شود که یک نقطه مشترک با آن داشته باشد (شکل ۶).



(شکل ۵)

قضیه مماس بر بیضی بدانگوئه که در زیر می‌آید معتبر است. زوایای بین خط مماس بر بیضی و شعاع‌های کانونی نقطه تماس، با یکدیگر برابرند.
(در شکل ۶ زوایای مذبور را با LPO_1 و KPO_2 نشان داده ایم).

حالت خاصی از قضیه مذبور، قضیه مماس بر دایره است. در واقع شعاع‌های کانونی در دایره روی l می‌افتد و قضیه مماس بر بیضی، در مورد دایره پنهان تغییر می‌یابد که خط مماس، با شعاع رسم شده از نقطه تماس، زوایای مجاور متساوی پدید می‌آورد که این خود بهمنزله عمود بردن شعاع مذبور بر خط مماس است.

اینک اثبات قضیه مماس بر بیضی را، همانند به قضیه مماس بر دایره، پیش می‌کشیم. به خواننده توصیه می‌کنیم که پیش از آنکه به خواندن کتاب ادامه دهد، خود از طریق مکانیکی، شیوه‌ای برای اثبات قضیه بیا بد.

مانند بخش پیشین، قبل از ارائه دلای، دست به آزمایش مکانیکی می‌زنیم. دونقطه O_1 و O_2 را در ارتفاع یکسانی بر روی دیواری قائم انتخاب می‌کنیم. ریسمانی بلندتر از فاصله O_1O_2 به دوست می‌آوریم و دوسر آن را در نقاط O_1 و O_2 مهکم می‌کنیم. وزنهای را چنان بدریسمان می‌آویزیم که بتواند در امتداد آن بلغزد (مثل ریسمان را از درون حلقة‌ای که برای این منظور در

$M O_2$ پدید می‌آورد، انطباق خواهد یافت. بنابراین، زوایای مزبور باهم برابرند.

اینک از این فرض که نقاط آویز در ارتفاع یکسانی قرار دارد، صرف نظر می‌کنیم و O_1 و O_2 را نقاطی اختیاری در نظر می‌گیریم. از این دو نقطه وزنای را که می‌توانست آزادانه در طول ریسمان بلغزد، آویزان می‌کنیم (شکل ۸). فرض کنیم که وزنه در نقطه M استاده است. توجه کنید که در حالی که وزنه در نقطه M می‌حرکت است، اگر ریسمان را بهتر نقطه دیگری بیندیم، مکان وزنه همچنان تغییر خواهد کرد. (در واقع اگر مثلاً طبق شکل ۸، ریسمان را به نقطه \bar{O}_2 بیندیم عکس العملی که در آویزگاه O_2 پدیدار می‌شود کشش موجود در بخش \bar{O}_2 از ریسمان را خشی می‌کند). واقعیت فوق بهما اجازه می‌دهد که تعمیمی در مورد حالت نابرابری ارتفاع نقاط آویز، بدست آوریم. در واقع کافی است که سر دیگر ریسمان را به نقطه O_2 که هم ارتفاع O_1 است، بیندیم (شکل ۸) در این صورت محل تعادل وزنه، تفاوتی با قبل خواهد داشت. با اراده دادن $O_1 = O_2$ به حالت قبل می‌رسیم که در آن، نقاط آویز O_1 و O_2 هم ارتفاع بودند. بنابراین از عبارات (ج ۱) و (ج ۲)، بلافاصله به عبارات (ج ۳) (که به خودی خود بدیهی است) و (ج ۴) دست می‌یابیم.

(ج ۳) صفحه $O_2 O_1 M$ قائم است.

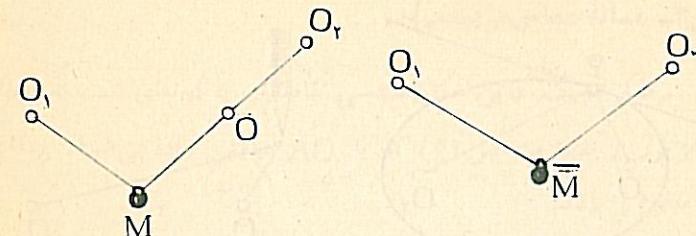
(ج ۴) زوایای بین پاره خط‌های MO_1 و MO_2 و خط‌افقی گذرنده از نقطه M در صفحه $O_2 O_1 M$ متساوی است.

بالاخره، دو عبارت آشکار زیر اعتبار می‌یابد:

(الف) در حالت تعادل، وزنه آویخته به ریسمان، در پایین قرین نقطه ممکن قرار خواهد گرفت. (با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل که در

۱. در این شکل، نقطه O_2 بالاتر از O_1 کشیده شده است، در صورت بالاتر بودن O_1 از O_2 نیز به شیوه مشابهی عمل می‌شود.

وزنه تعییه شده، طبق شکل ۷، عبور می‌دهیم). اینک اگر وزنه را آزادانه در طول ریسمان رها کنیم، عاقبت در نقطه‌ای چون M ، بی‌حرکت خواهد ایستاد. دونکته بدیهی زیرین قابل توجه است:



(شکل ۸)

(ج ۱) صفحه $O_1 O_2 M$ قائم است (یعنی از صفحه قائمی می‌گذرد).

(ج ۲) در صفحه $O_1 O_2 M$ ، زوایای که پاره خط‌های $O_1 M$ و $O_2 M$ با صفحه‌ای افقی که از نقطه M می‌گذرد، می‌سازند، باید دیگر مساوی است. توجه داشته باشید که نکات (ج ۱) و (ج ۲) را می‌توان از خاصیت یکانگی محن تعادل وزنه، بدست آورد. برای این منظور، عمود منصف پاره خط $O_1 O_2$ را رسم کنید و ریسمان را به همراه وزنه، ۱۸۰ درجه حول این خط بچرخانید. در حالت جدید، نقطه O_1 ریسمان روی نقطه O_2 و نقطه O_2 ریسمان روی نقطه O_1 قرار خواهد گرفت. بر طبق عبارت (د) که در بخش قبلی عنوان شد، حالت تعادل جدیدی بدست خواهد آمد، و از آن رو به موجب فرضیه یکانگی این حالت، ریسمان (به همراه مثلث $M O_1 O_2$) بر حالت پیشین خود مطابق شده است، می‌توان نتیجه گرفت که محور گردش در صفحه مثلث واقع است. از طرفی، صفحه $M O_1 O_2$ از خطی قائم می‌گذرد، پس خود قائم است. به علاوه، برای چرخش، خط‌افقی که از M می‌گذرد و در صفحه $M O_1 O_2$ واقع است، دوباره بر خود مطابق خواهد شد و زاویدای که خط افقی مزبور با پاره خط $M O_1$ می‌سازد، بر زاویدای آنکه این خط با پاره خط

شرط معلوم بودن کانون‌های یپسی، بر هر نقطه مشخصی از آن، خطی مماس رسم کنیم. برای این‌منظور کافی است که از نقطه تماس P خطوطی به کانون‌های O_1 و O_2 ، طبق شکل ۹ رسم کرده، نیمساز زاویه SPO_1 (بازاویه TPO_1) را بدست آوریم. این نیمساز، همان خط مماس مطلوب خواهد بود.

قضیه مماس بر یپسی تعبیر بصری جالی دارد: فرضی کیم که یپسی یک آینه است، یعنی شعاع‌های نورانی که در صفحه یپسی می‌گذرد، در آن منعکس می‌شود. در این صورت اگر در یک کانون آن نقطه‌ای نورانی قراردهیم، شعاع‌های ساطع از آن، در کانون دیگر گرد خواهد آمد (شکل ۱۰).

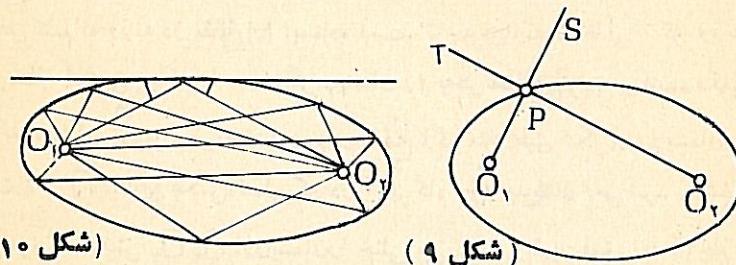
در حقیقت زاویه‌ای که هر شعاع نورانی اختیاری با یپسی می‌سازد، بد موجب قوانین فیزیک نور، با زاویه بین شعاع نورانی منعکس شده و یپسی برابر است. زاویه ایجاد شده بین یک خطراست و منحنی (در مثال ما، زاویه شعاع نورانی و یپسی) را معادل زاویه بین خطراست مزبور و خط مماس مرسوم بر منحنی در محل برخورد درنظر می‌گیرند. از آنجا که شعاع نورانی اختیاری در امتداد شعاع کانونی حرکت می‌کند، شعاع نورانی منعکس شده، به موجب قضیه‌ای که در فوق اثبات گشت، در امتداد شعاع کانونی دیگر به حرکت درمی‌آید.

بخش ۳- مسأله مماس بر سهمی و هذلولی

سهمی مکان‌هندسی نقاط P ، بهزوحی است که از نقطه مشخص F (که کانون سهمی نامیده می‌شود) و خط مستقیم و معلوم $[A]$ (نه بهدادی سهمی مرسوم است) بدیک فاصله قرارداشته باشد (شکل ۱۱). سهمی صفحه را بهدو بخش تقسیم می‌کند: در یک بخش خط‌هادی واقع است و در بخش دیگر (که در شکل ۱۲ هاشورخورده است)، کانون سهمی جای دارد. خط مستقیمی که تنها یک نقطه مشترک با سهمی دارد و در یکی از بخش‌هایی که یپسی در روی صفحه پدید آورده واقع شده است، مماس بر سهمی نامیده می‌شود. در شکل ۱۳، خطراست p بر سهمی مماس است ولی خط مستقیم q ، هرچند که فقط در یک نقطه با سهمی تلاقی کرده است، بر آن مماس نیست.

بخش ۱ مورد بحث قرار گرفت، عبارت مذبور از یگانگی حالت تعادل نتیجه می‌شود.)

(ب) در حالات تعادل، رسماً کشیده است (بدان معنی که بخش‌های $O_2O_1MO_1$ مستقیم است و در نتیجه مجموع فواصل نقطه M از O_1 و O_2 برابر با طول رسماً است).

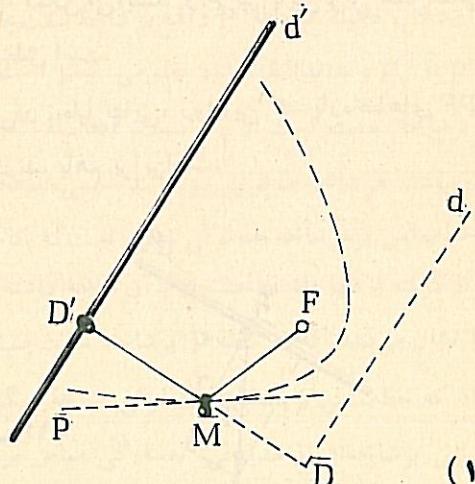


(شکل ۹)

حال به اثبات قضیه مماس باز گردیم. بیضی شکل ۶ را به حاطر بیاوردیم که کانون‌های آن O_1 و O_2 و طول قطر اطول آن مساوی $[I]$ است و خط مستقیم KL در نقطه P بر آن مماس می‌باشد. باید اثبات کنیم که $\angle O_1PK = \angle O_1PL$. برای اثبات، شکل را چنان بگردانید که صفحه تصویر قائم شود و خط مستقیم KL به صورت افقی قرار گیرد و یپسی بر فراز خط مستقیم KL واقع گردد. (در این صورت، نقطه P پایین ترین نقطه یپسی خواهد بود). اینک رسماً نی بخطول اختیار می‌کنیم و وزنه‌ای بدان می‌آویزیم، دوسر آن را در نقاط O_1 و O_2 می‌بندیم، و وزنه را در طول آن آزاد می‌گذاریم. وزنه در نقطه M خواهد ایستاد. آنکه به موجب عبارت (ج ۳) نقطه M نیز در صفحه مشخص M خواهد بود. به موجب عبارت (ب)، نقطه مزبور روی یپسی خواهد قصویر واقع خواهد شد. به موجب عبارت (الف) بر نقطه P منطبق خواهد گشت. افتاد و علاوه بر آن، بر حسب عبارت (الف) بر نقطه P انتطبق خواهد گشت. پس رسماً خود بر پاره خط‌های PO_1 و PO_2 انتبطاق خواهد یافت. به موجب عبارت (ج ۴)، زوایای ایجاد شده از برخورد خطوط مزبور و خط مستقیم KL ، متساوی خواهد بود. این خاصیت که مماس بر یپسی با شعاع‌های کانونی زوایای متساوی پذیده‌ی آورد، مارا قادر می‌سازد که با استفاده از یک پرگار و یک خط کش.

قضیه مماس بر سهمی بدان شکل که در زیر می‌آید معتبر است:

اگر از هر نقطه دلخواه P به کانون سهمی پاره خط PF و عمود بر هادی آن، پاره خط PD را رسم کنیم، زوایای بین این دو پاره خط و خط مماس بر سهمی در نقطه P باهم برابرند (یعنی در شکل ۱۴، $\angle DPK = \angle KPF$). این قضیه را بر اساس ملاحظات مکانیکی به همان گونه که در دو بخش پیش دیده شد، می‌توان اثبات کرد. ما چنین اثباتی را به صورت خلاصه شرح می‌دهیم.



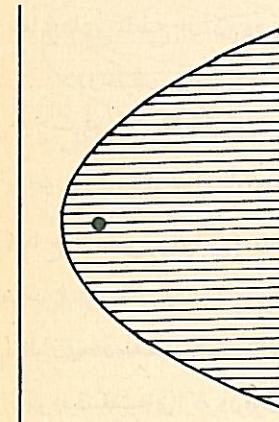
(شکل ۱۵)

وزنای چنان می‌آویزیم که بتواند در طول آن حرکت کند. فرض کنیم وزنه به هنگام تعادل در M و حلقه در D' قرار گیرد. ریسمان به حالت کشیده است، پس پاره خطهای MD' و MF مستقیم و راست می‌باشند. بیش از همه، توجه داشته باشید که:

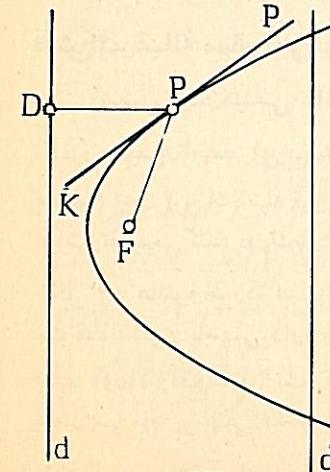
$$MD' \perp d' \quad (3-1)$$

(در عیر این صورت. همانطور که در شکل ۱۶ مشاهده می‌شود مؤلفه T_1 ، از نیروی T ، یعنی نیروی کشش ریسمان در طول میله صفر نخواهد بود و ریسمان از محل تعادل خود خارج خواهد شد). سپس، به دلیلی که در بخش قبل ذکر شد، نخست درمی‌بایم زوایای پدیدار شده بین پاره خطهای MD' و MF و خط مستقیم p برابر است و سپس این که

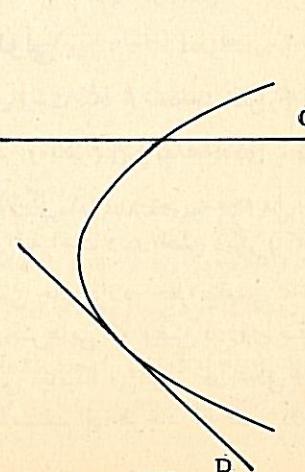
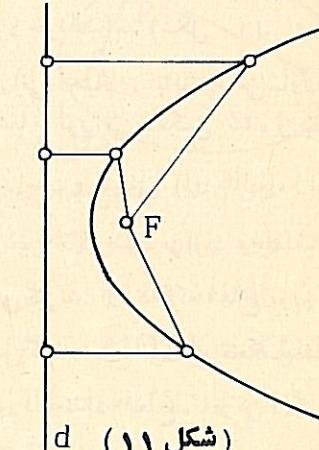
$$MD' + MF = 1 \quad (3-2)$$



(شکل ۱۲)

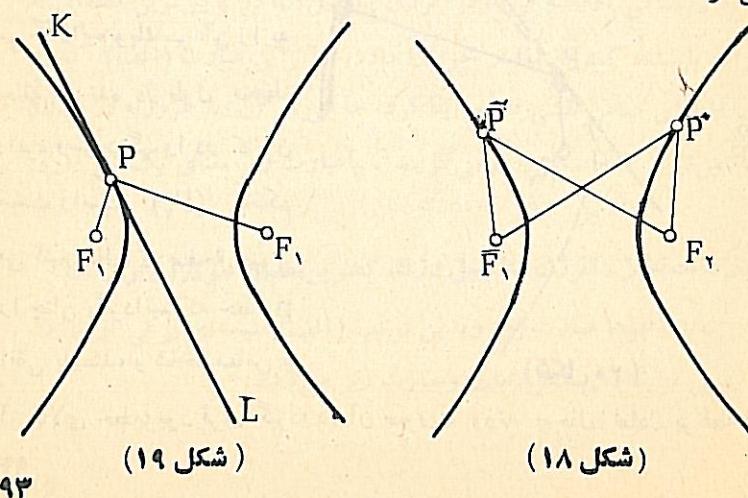


شکل ۱۳



که بهمنظور انتشار پرتوهای (نورانی یا گرمایی) در جهتی خاص به کار می‌رود، بازکرده است، بدین ترتیب که سطح آینه همه آنها را از طریق گرداندن یک سهمی، حول خطی که از کانون آن برخط هادی عمود شده است، می‌سازند.

هذلولی مکان هندسی نقاطی است که فواصل هر یک از آنها از دو نقطه ثابت F_1 و F_2 (که کانون‌های هذلولی نامیده می‌شود) اختلاف ثابتی دارد. همانطور که در شکل ۱۸ مشاهده می‌شود، هر هذلولی از دو شاخه تشکیل شده است. در آن‌شکل، فاصله هر نقطه P' واقع بر شاخه سمت‌چپ از نقطه F_1 نسبت به فاصله P' از F_2 ، به اندازه مقدار معلومی کمتر است، نیز فاصله هر نقطه P'' واقع بر شاخه سمت‌راست از F_2 نسبت به فاصله P'' از F_1 بهمان اندازه کمتر می‌باشد. هر شاخه هذلولی نیز مانند سهمی، صفحه را به دو بخش تقسیم می‌کند. خط مماس بر هر شاخه هذلولی خطی است که کاملاً در یکی از این دو بخش قرار گرفته و تنها یک نقطه مشترک با آن شاخه داشته باشد. شکل ۱۹ خط مستقیمی را نشان می‌دهد که در نقطه P بر شاخه سمت‌چپ مماس است. می‌توان نشان داد که خط مماس بر یک شاخه هذلولی، شاخه دیگر را قطع نمی‌کند. هر خط مماس بر شاخه‌ای از هذلولی، به سادگی مماس بر هذلولی نامیده می‌شود.



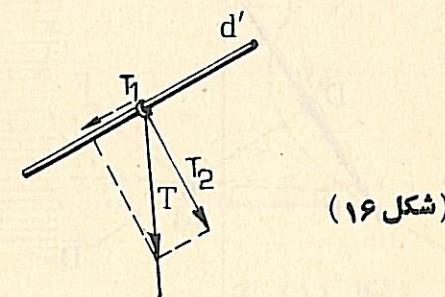
۹۳

حال $d \perp MD$ را رسم می‌کنیم. از آنجا که فاصله بین d و d' برابر ۱ است از رابطه (۳-۱) و (۳-۲) نتیجه می‌شود که

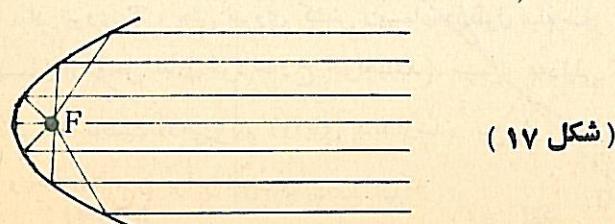
$$MD = MF \quad (۳-۳)$$

این به معنای آن است که نقطه M بر روی سهمی قرار دارد. اما از آنجا که M در پایین ترین نقطه ممکن می‌ایستد و P نیز پایین‌ترین نقطه ممکن سهمی است، پس M بر P منطبق است.

بنا بر این در تحلیل‌نهایی، زوایایی که پاره‌خط‌های PF و PD با خط مستقیم p می‌سازند، باهم برابر است.



تعییر بصری قضیه اثبات شده فوق چنین است: پرتوهای نورانی تابند از کانون سهمی، پس از انعکاس در آن، به صورت شعاع‌های متوازی عمود بر خط هادی منتشر می‌شود (شکل ۲۱). این واقعیت جای پای سهمی را در ساخت وسایلی از قبیل نورافکن‌ها، نوربر گردان‌ها (reflectors)، و آلات دیگری



۹۴

منطق خواهد شد. با توجه به این حقیقت، با توصل به دلایلی که در فوق آورده‌یم می‌توانیم قضیه را اثبات کنیم.

به‌خاطر داشته باشید که اگر خط بر شاخه سمت چپ مماس باشد، طریقه فوق را به کمک دایره به مرکز کانون سمت راست می‌توان تکرار کرد. البته در آن صورت می‌توان با دایره‌ای به مرکز کانون سمت چپ نیز مسأله را حل کرد، ولی شعاع آن در حالت جدید باید مساوی $a + b$ اختیار شود. قضیه مماس بر هذلولی، مانند سایر قضایای مماس که قبلاً ذکر شد، راهی برای رسم این منحنی به دست می‌دهد.

بخش ۴۵- اصل حداقل انرژی پتانسیل

وزنه‌ای که تا ارتفاع معینی بالا برده شده، در صورت افتادن می‌تواند کار انجام دهد. به عبارت دیگر، دارای انرژی پتانسیل است. همان‌طور که از دوره فیزیک دیرستان می‌دانیم، انرژی پتانسیل وزنه q که تا ارتفاع h بالا برده شده، از حاصل ضرب qh به دست می‌آید. بدینه است هرچه ارتفاع کمتر باشد، انرژی پتانسیل کمتر است. تمايل وزنه به قرار گرفتن در پایین‌ترین سطح با تمايل انرژی پتانسیل به‌حراب کمترین مقدار، در ارتباط است. وقتی وزنه به ریسمانی آویخته می‌شود، انرژی پتانسیل آن، در پایین‌ترین نقطه‌ای که می‌تواند بایستد، کمترین مقدار خود را دارد. بنابراین عبارت (الف)، که در اثبات قضایای مماس نقشی قاطع ایفا کرد، حاکی از آن‌که هر وزنه در هنگام تعادل پایین‌ترین نقطه ممکن را بر می‌گزیند، با عبارت زیر معنای یکسانی دارد:

(و) در حالت تعادل، انرژی پتانسیل وزنه، کمترین مقدار خود را دارد.

به نوبه خود، عبارت (و) و بدین ترتیب (الف) نتیجه‌ای فرعی از عبارت

(ب)، مبنی بر یگانگی محل تعادل و عبارت زیر می‌باشد:

پاره خط‌هایی که نقطه‌ای از هذلولی را به کانون‌های آن متصل می-

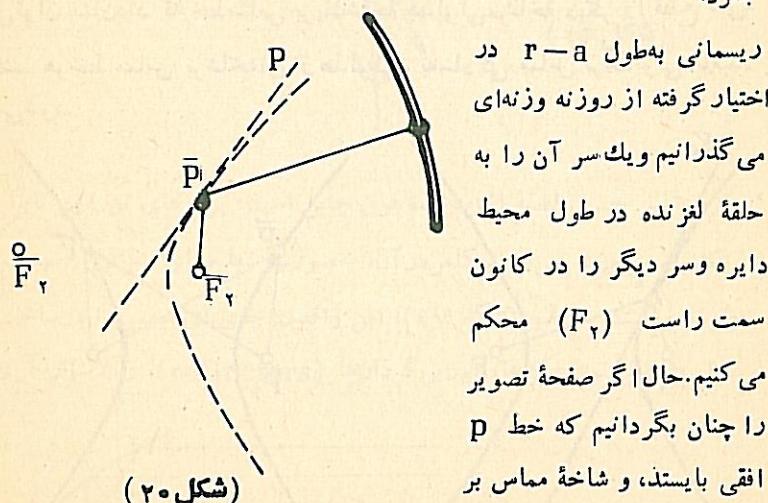
سازند، مانند بیضی، شعاع‌های کانونی نامیده می‌شوند.

قضیه مماس بر هذلولی: خط مماس بر هذلولی با شعاع‌های کانونی مرسوم از نقطه تماس ذوایای برابر تشکیل می‌دهد. (پس در شکل ۱۹،

$$\angle F_1 P L = \angle L P F_2$$

ما قضیه را اثبات نمی‌کنیم و این کار را به‌خواننده و امی گذاریم، ولی صرفاً اساس مکانیکی این امر را روشن می‌کنیم. بنا به تعریف هذلولی، تفاوت طول شعاع‌های کانونی، مقداری ثابت است، ما این مقدار را با a نمایش می‌دهیم.

فرض می‌کنیم که نقطه تماس P روی شاخه سمت راست واقع است (شکل ۲۰). از کانون سمت چپ، نقطه F_1 ، دایره‌ای به شعاع a چنان رسم می‌کنیم. که اولاً $\angle P F_1 = a$ و ثانیاً نقطه P درون دایره مزبور قرار گیرد. محیط این دایره را حلقه‌ای باریک فرض می‌کنیم که حلقه کوچکتری در طول آن می‌تواند بلغزد.



آن بالای خط مزبور قرار گیرد، در آن صورت وزنه به حال تعادل بر نقطه P

است. با این همه، هنگامی که نه بایک وزنه متفاوت، بلکه با تعدادی وزنه که به یکدیگر بسته شده است، سروکار داریم، این دعوی که در حالت تعادل همه آن وزنه‌ها در پایین‌ترین نقطه ممکن قرار می‌گیرد، نادرست است. در اینجا مکان همه وزنه‌هارا چنان باید یافت که اصل مربوط به انرژی پتانسیل در آن رعایت شود.

در زیر مثالی می‌زنیم:

در کتاب مشهور «شکار لحظه‌های ریاضی» [نشریات دانشگاه آکسفورد ۱۹۶۰] به قلم ه. استاین‌هاوس H. Steinhaus مقاله ۳۹) مسئله زیر مطرح شده است:

«قرار است برای سه روستا، مدرسه‌ای بسازند. در روستای اول ۵۵، دومی ۷۵ و سومی ۹۰ کودک به سر می‌برند. مدرسه‌ها در چه مکانی باید ساخت تا کودکان برای رسیدن به آن، در مجموع کمترین مدت ممکن را صرف کنند؟ برای حل این مسئله کافی است طبق شکل ۲۲ نقشه منطقه را روی میزی افقي بگسترانیم و سپس میز را در محل سه روستا سوراخ کنیم و سه ریسمان از سوراخ‌ها عبور داده، انتهای بالای آن‌ها را در یک نقطه بهم گره بینیم و به انتهای زیرین آن‌ها به ترتیب وزنه‌های ۵۵، ۷۵، ۹۰ واحدی (مثلاً ۵۰۰، ۷۰۰ و ۹۰۰ گرمی) بیاوزیم، محل اتصال سه ریسمان در روی نقشه هر جا قرار گیرد، مدرسه را همان جا باید بنادرد. (چرا؟)؟»

برای پاسخ‌دادن به این چرا باید انرژی پتانسیل دستگاه مزبور را که شامل سه وزنه است، محاسبه کرد. وزنه‌ها را به ترتیب q_1 ، q_2 و q_3 می‌نامیم. اگر ارتفاع آن‌ها به ترتیب h_1 ، h_2 و h_3 باشد، انرژی پتانسیل دستگاه،

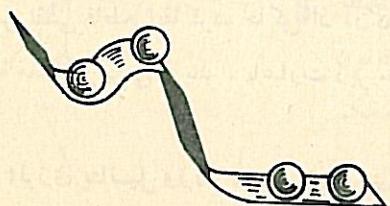
(ز) اگر در نقطه‌ای مشخص، انرژی پتانسیل یک وزنه دارای کمترین مقدار باشد، آن نقطه، محل تعادل است.

برای استنتاج (ز) از این عبارت، کافی است گوشزد کنیم که اگر انرژی پتانسیل حداقل مقدار خود را نداشته باشد، پس به موجب (ز) باید نقطه دیگری در ارتباط با کمترین مقدار انرژی پتانسیل وجود داشته باشد، ولی این امر با عبارت (ب) متناقض است.

عبارت (ز) صورتی خاص از یک اصل مکانیکی عام است که به نام اصل حداقل انرژی پتانسیل، یا اصل دیریشت (Dirichlet Principle) شناخته می‌شود. طبق این اصل:

هر دستگاهی که در آن انرژی پتانسیل حداقل مقدار دارد، در حال تعادل به سر می‌برد.
اگر محل تعادل منحصر بفرد باشد، اصل دیریشت نتیجه‌ای فرعی به دست می‌دهد:

در حال تعادل، انرژی پتانسیل هر دستگاهی به کمترین مقدار می‌رسد.
اشتقاق این قضیه جانبی، معادل استنتاج عبارت (و) است.
بنابراین، ماتنها حالاتی را در نظر می‌گیریم که محل تعادل یگانه باشد (حالات دیگری نیز وجود دارد، همان‌طور که در شکل ۲۱ نشان داده شده، برای یک گوی چهار حالت تعادل موجود است).



(شکل ۲۱)

البته برای حل مسائل مماس، لزومی به مراجعه به اصل حداقل انرژی پتانسیل نیست. زیرا این نکته که وزن در پایین‌ترین نقطه ممکن می‌ایستد، امری بدیهی

به موجب اصل حداقل انرژی پتانسیل، اگر E کمترین مقدار را داشته باشد، دستگاه در حال تعادل است. پس به فرض یگانگی حالت تعادل، نتیجه می شود که در حالت تعادل، E حداقل مقدار خود را دارد. ولی اگر E حداقل باشد در آن صورت طبق رابطه زیر:

$$T = q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 = E - C$$

کمیت T نیز حداقل خواهد بود. ولی کمیت T خود دقیقاً مجموع زمان لازمی است که کودکان برای رسیدن از روستاهای خود، به مدرسه که در محل گره قرار دارد، نیاز دارند. بنابراین با قرار گرفتن گره در مکانی که دستگاه به حالت تعادل می رسد، مجموع زمان لازم نیز عملاً کمترین مقدار خود را می یابد.

بخش ۵- ذرات و گرانیگاه

تا اینجا هیچ گاه خودرا با بعد وزنهایی که از زیمان می آویختیم مشغول نساختیم. از مشاهدات مزبور برواضح است که از طرفی وزنهای را بسیار کوچک در نظر می گرفتیم (چنان کوچک که موقعیت هر یک را بتوان با نقطه ای مشخص کرد) و از طرف دیگر، به هر یک وزن، و در نتیجه جرم مشخص اختصاص می دادیم.

مشاهدات فوق، مارا به یکی از اساسی ترین مفاهیم مکانیک-مفهوم ذرہ- راهبری می کند. در مکانیک، ذره (یا نقطه مادی*) پیکری چنان کوچک است که از ابعاد آن می توان صرف نظر کرد. ذره را می توان نقطه ای هندسی دانست که جرم مشخصی به آن اختصاص یافته است. از آنجا که ذرہ دارای جرم معینی است، پس وزن معینی نیز دارد. سیستمی از ذرات را در نظر بگیریم که متناسب با جرم ذرات، تحت تأثیر نیروی جاذبه واقع شده است. برآیند همه این نیروهای موازی در نقطه مشخصی از سیستم ذرات، به نام گرانیگاه (مرکز ثقل) وارد

* mass Point

مجموع انرژی پتانسیل هر یک از وزنهای است:

$$E = q_1 h_1 + q_2 h_2 + q_3 h_3 \quad (4-1)$$

اگر دو اتصال گره (محل اتصال سه زیمان) از دهکده ها را به ترتیب r_1 ، r_2 و r_3 و طول زیمان ها را به ترتیب l_1 ، l_2 و l_3 و ارتفاع سطح میز را h در نظر می گیریم. مسلمان گره هر کجا که قرار گیرد و h_1 ، h_2 و h_3 هر مقدار که باشد، این رابطه برقرار خواهد بود:

$$r_1 + (h - h_1) = l_1 \quad , \quad r_2 + (h - h_2) = l_2 \quad , \quad r_3 + (h - h_3) = l_3$$

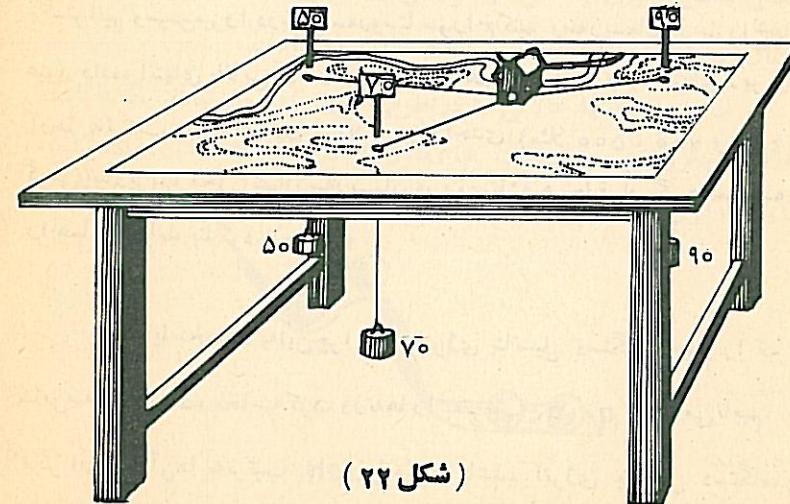
$$h_1 = r_1 + h - l_1 \quad , \quad h_2 = r_2 + h - l_2 \quad , \quad h_3 = r_3 + h - l_3$$

رباطه (4-1) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$E = q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 + C \quad \text{که در آن}$$

$$C = (q_1 + q_2 + q_3)h - q_1 l_1 - q_2 l_2 - q_3 l_3$$

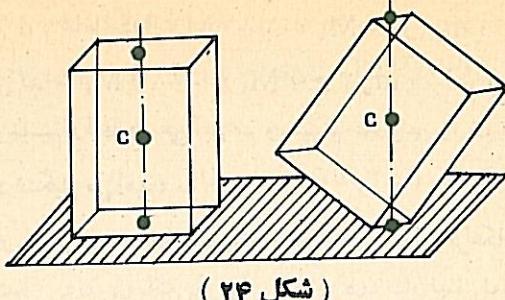
مقداری ثابت و مستقل از مکان وزنهای است.



(شکل ۲۲)

۱. در واقع انرژی پتانسیل از روی کاری که می تواند انجام گیرد محاسبه می شود. اگر زیمان را ببریم، هر وزن معادل انرژی پتانسیل خود، کار انجام خواهد داد و کار کل مجموعه، برابر با مجموع هر یک از این کارهای جداگانه است.

صفحه یا لبه تیز می‌گذرد.



(شکل ۲۳)

عبارات مزبور (که در تعیین تجربی گرانیگاه اجسام می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد) بهخصوص موضوع زیر را روشن می‌سازد: اگر جای دو جسم را که یک شکل و یک گرانیگاه دارند، باهم عوض کنیم، تغییری در حالت تعادل پدید نخواهد آمد. با این‌همه، در پاره‌ای از موارد نه تنها موقعیت گرانیگاه، بلکه جرم کل جسم (یا به عبارت دیگر برآیند جرم کل ذراتی که جسم را تشکیل می‌دهند) نیز باید در نظر گرفته شود. به عنوان مثال، اگر نه تمام جسم، بلکه فقط بخشی از آن را پیکری به همان شکل و دارای گرانیگاهی با همان موقعیت عوض کنیم، در صورتی که جرم آن با جرم بخش پیشین متفاوت باشد، مکان گرانیگاه کل جسم نیز تغییر خواهد کرد. به جز صورت، دانستن جرم کل و گرانیگاه اجسام، برای پرداختن به مسائل زیادی، منجمله آن‌هایی که بعداً مورد مطالعه قرار می‌دهیم، کافی است. بنابراین طبیعی است که تعریف زیر را از همارزی دو سیستم ذرات بدست دهیم.

دو سیستم ذرات بایکدیگر هم ارز هستند، به شرط آن که: (۱) گرانیگاه سیستم‌ها بر یکدیگر منطبق باشد و (۲) جرم کل همه ذرات موجود در سیستم‌ها باهم مساوی باشد.

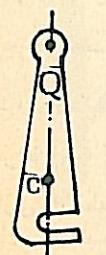
مفهوم همارزی سیستم‌ها که در فوق بیان شد، موقعی به کار می‌آید که بخواهیم بخشی از یک سیستم را با سیستم جدیدی چنان عوض کنیم که سیستم کل به دست آمده، با سیستم اولیه معادل باشد. برای این عبارت، بیان آشکار-

می‌آید. مکان این گرانیگاه به موقعیت ذرات سیستم و جرم آن‌ها وابسته است. در مکانیک، هر جسم را مجموعهٔ تعداد زیادی از ذرات می‌دانند. به طور کلی، این ذرات جرم‌های گوناگونی دارند، به طوری که جرم به طور نامنظم در جسم توزیع شده است و در برخی از قسمت‌های جسم جرم بیشتر و در بعضی کمتر، می‌توان یافت. ما فرض می‌کنیم که در قسمت‌هایی از جسم هیچ جرمی نیست و بنابراین آن قسمت‌ها «بی‌وزن» است. بر حسب تعریف، گرانیگاه سیستمی از ذراتی که جسمی را تشکیل می‌دهند، گرانیگاه آن جسم است. اگر جرم جسم در تعداد محدودی از ذراتی خاص متumer کر باشد، پر واضح است که گرانیگاه آن جسم بر گرانیگاه سیستمی مشتمل بر آن ذرات خاص منطبق است. (ما در ادامه این بحث، با چنین حالتی رو برو خواهیم شد، مثلاً با میله بدون وزنی که وزنهایی نقطه‌وار بر آن قرار گرفته‌اند.)

بسیاری از ویژگی‌های یک جسم منحصر آ به موقعیت گرانیگاه آن بستگی دارد. همان‌طور که از فیزیک مقدماتی به‌یاد داریم، تعادل یک جسم به‌موقع نسی گرانیگاه آن جسم و نقاطی چند که جسم به آن‌ها متصل می‌شود، وابسته است. بنابراین، عبارات زیر صادق است:

عبارت ۱— اگر جسمی که به یک نقطه متصل است، در حال سکون باشد حتماً نقطه اتصال و گرانیگاه آن جسم روی محوری عمودی قرار دارند.

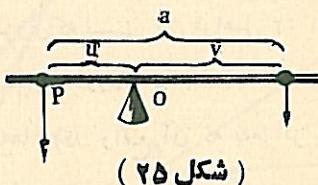
عبارت ۲— اگر جسمی که توسط صفحه‌ای صاف یا لبه تیز روی تکیه گاهی ایستاده است، در حال سکون باشد، خط قائمی که از گرانیگاه آن جسم ترسیم می‌شود، از (شکل ۲۴) (شکل ۲۴)



نیروهای جاذبه مربوط به سیستم β و Q مربوط به سیستم β می‌باشد. از آن جا که α و β بایکدیگر هم ارز هستند، نیروهای P و Q برهم منطبق می‌شود. به همین ترتیب نیروهای P و Q روی هم می‌افتد. بنا بر این، برآیند این نیروها یعنی P و Q نیز برهم منطبق می‌گردد. به خصوص، نقطه اثر این نیروها نیز که در حقیقت مرکز نقل (گرانیگاه) سیستم‌های α و β است، روی هم می‌افتد. به خاطر داشته باشید که برای هر سیستم ذرات، می‌توان سیستم معادلی پیدا کرد که شامل تنها یک ذره باشد. برای این‌منظور، کافی است ذره‌ای را در نظر بگیریم که در محل گرانیگاه سیستم مزبور قرار دارد و جرم آن برابر با کل جرم سیستم است. این ذره، خود سیستمی معادل با سیستم اصلی محاسبه می‌شود. ذره‌ای که در محل گرانیگاه سیستمی واقع شده و جرمی برابر با جرم کل آن سیستم دارد، مرکز مادی^۱ سیستم مزبور خوانده می‌شود. ما می‌توانیم سیستم‌های معادل را به عنوان سیستم‌هایی که مرکز مادی آن‌ها برهم منطبق است، تعریف کنیم.

بخش ۶- گرانیگاه یا کسیستم دو ذره‌ای

دو وزنه P و Q را به فاصله L از یکدیگر، روی میله بدون وزنی متصل می‌کنیم. می‌خواهیم گرانیگاه این مجموعه را پیدا کنیم. به موجب عبارت



۱، از بخش پیشین، سؤال ما چنین خواهد بود: در کدام نقطه O می‌توان میله را تکیه داد که در حال تعادل باقی بماند؟ فاصله نقطه موردنظر O از وزنهای P و Q را با u و v نشان می‌دهیم. تعادل موقتی بر قرار می‌شود که حاصل ضرب

1. material center

تری ارائه می‌دهیم:

سیستم α ، شامل ذرات M_1, M_2, \dots, m_n به جرم $M_1 + M_2 + \dots + m_n$ و سیستم α شامل ذرات M_1, M_2, \dots, m_n به جرم $M_1 + M_2 + \dots + m_n$ در دست است. این دو سیستم را در هم می‌آمیزیم و سیستم عادی α را که به روش زیر معرفی می‌شود تشکیل می‌دهیم:

۱- در سیستم α ، مکان هیچ یک از ذرات سیستم α بر مکان نقاط سیستم α منطبق نیست.

۲- در سیستم α ، موقعیت هیچ یک از ذرات سیستم α بر مکان نقاط سیستم α انطباق ندارد.

۳- اگر موقعیت ذره مشخصی از سیستم α ، چون M_i ، بر مکان ذره مشخص M_i از سیستم α منطبق شود، در سیستم α ذره جدیدی تشکیل خواهد شد که مکان آن بر مکان ذرات $M_1 + M_2 + \dots + m_i + M_i$ و جرم آن برابر با $m_i + M_i$ باشد. در این صورت، عبارت زیر معتبر است.

عبارت ۳. اگر سیستم α نتیجه در هم آمیختن سیستم‌های α و β و سیستم β حاصل اختلاط سیستم‌های β و β باشد و نیز بدانیم که سیستم‌های α و β هر یک معادل سیستم‌های نظیر α و β هستند، در آن صورت می‌توانیم سیستم α را هم ارز β معرفی کنیم.

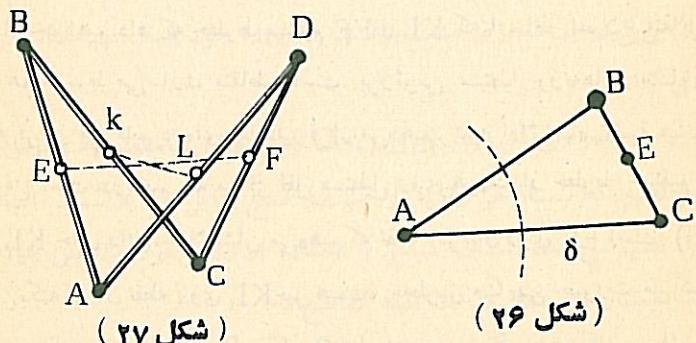
اثبات عبارت ۳. واضح است که جرم‌های کلی سیستم‌های α و β برهم منطبق می‌شود. اینک نشان می‌دهیم که گرانیگاه دو سیستم نیز روی هم قرار می‌گیرد. برآیند نیروهای جاذبه که بر ذرات سیستم α وارد می‌شود، به طریق زیر بدست می‌آید: ابتدا برآیند نیروهای جاذبه مربوط به α ، یعنی نیروی P و سپس برآیند نیروهای مربوط به β ، یعنی P را پیدا می‌کنیم و سپس نیروی P یعنی برآیند این دو برآیند را مشخص می‌سازیم. به طریق مشابهی برآیند نیروی جاذبه که بر β اعمال می‌شود، یعنی نیروی Q بدست می‌آید که خود نتیجه دو نیروی P و Q است، به این ترتیب که Q برآیند

بهویژه، مرکز نقل، فاصله بین دوزده را تنها موقعی به فواصل متساوی تقسیم می‌کند که آن دو ذره هم وزن باشند. مرکز نقل تنها زمانی فاصله بین دوزده را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند که یکی از آن‌ها دو برابر دیگری سنگینی داشته باشد، که البته مرکز نقل به ذره سنگین‌تر نزدیک تر خواهد بود.

بخش ۷- قضایایی پیرامون تقاطع خطوط راست.

سیستم ذرات α را که از اتحاد دو سیستم ν و σ تشکیل شده، در نظر بگیرید. M و N به ترتیب معرف مرکز مادی سیستم‌های ν و σ است. به موجب عبارت ۳ از بخش ۵، سیستم ذرات M و N ، هم ارز سیستم α می‌باشد، بنابراین مرکز مادی سیستم α بر مرکز مادی سیستم‌های M و N منطبق است و در نتیجه روی خطراستی که این دو ذره را بهم مربوط می‌سازد قرار دارد. از آنجا که مرکز مادی هر سیستم، بر مرکز نقل آن منطبق است، می‌توانیم بعبارت زیر دست یابیم.

مرکز نقل یک سیستم ذرات که مشتمل بر اتحاد دو سیستم ν و σ است بروی خطراستی که مرکز نقل دو سیستم هر دو را بهم می‌پیوندد جای دارد.



(شکل ۲۶)

اینک برای این قضیه، سه کاربرد هندسی نشان می‌دهیم.

میانه‌های مثلث، در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. برئوس یک مثلث، سه وزنه نقطه‌ای متساوی که هر یک به نام رأس نظیر خود A ، B و یا C نامیده می‌شود وصل می‌کنیم (شکل ۲۶). سیستم ذرات حاصل را به دو بخش ν و σ

نیروی P در فاصله u با حاصل ضرب نیروی Q در فاصله v برابر باشد، یعنی:

$$P u = Q v \quad (۶-۱)$$

با مقایسه رابطه (۶-۱) و رابطه زیر

$$p = \nu + \sigma \quad (۶-۲)$$

خواهیم داشت:

$$u = \frac{Q}{P+Q} d, \quad v = \frac{P}{P+Q} d$$

توجه کنید که $\frac{u}{v} = \frac{Q}{P}$ وزنه‌ها از گرانیگاه متناسب پس نتیجه می‌گیریم که فاصله بامعکوس جرم وزنه‌ها است.

به خصوص اگر جرم دوزنه باهم برابر باشد، واضح است که مرکز نقل درست در وسط آن دو قرار می‌گیرد، به عکس اگر بدانیم مرکز نقل دوزنه در وسط آن دو است، نتیجه می‌گیریم که جرم وزنه‌ها برابر است.

اگر یکی از وزنه‌ها دو برابر دیگری باشد، گرانیگاه به وزنه سنگین‌تر نزدیک تر خواهد بود، به طوری که نسبت بین فاصله بین دوزنه ۲:۱ باشد. بر عکس اگر بدانیم که مرکز نقل فاصله بین دوزنه را به نسبت ۲:۱ تقسیم کرده، نتیجه می‌گیریم که یکی از وزنه‌ها (در واقع آن که به مرکز نقل نزدیک تر است) دو برابر وزنه دیگر جرم دارد.

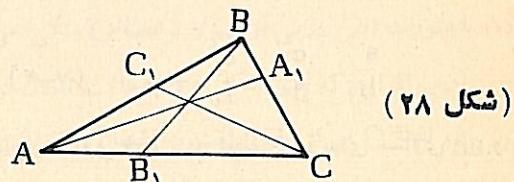
از آنجا که مرکز نقل میله، که جرم آن در دونقطه M و N متقر کرده بر گرانیگاه دوزده M و N (با جرم‌های متناسب) منطبق است، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

گرانیگاه یک سیستم دوزده‌ای، برخط راستی که آن دوزده را به هم مرتبط می‌سازد، واقع است. فاصله گرانیگاه از دوزده، با وزن و بنابراین با جرم آن دو، نسبت، عکس دارد.

نکته را که محل برخورد پاره خط‌های EF و KL دروسط آن دو قرار دارد،
بخواند و اگذار می‌کنیم.

قضیه سوا (Ceva's theorem). این قضیه که میانه‌های یک مستطیل در
یک نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند، خود صورتی خاص از مسئله زیر که به
نام قضیه سوا شهرت دارد، محسوب می‌شود:
فرض کنید در مثلث ABC (شکل ۲۸) نقاط A_1, B_1, C_1 و سه نقطه بر روی اضلاع
 CA, BC و AB هستند. شرط لازم و کافی برای آن که سه پاره خط مستقیم
 CC_1, BB_1 و AA_1 در یک نقطه بر خورد داشته باشند آن است که رابطه
زیر صادق باشد:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \quad (7-1)$$



قضیه می‌کنیم بخواند صحت رابطه (7-1) را خود عملاً در حالات زیر
بررسی کنند:

۱- در صورتی که CC_1, BB_1 و AA_1 نیمسازهای یک مثلث باشند. (توجه:
از این قضیه که نیمساز هر زاویه در مثلث، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع
مجاوز تقسیم می‌کند، استفاده کنید). با استفاده از رابطه فوق مشخص خواهد
شد که نیمسازهای مثلث در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲- در صورتی که CC_1, BB_1 و AA_1 ارتفاعهای یک مثلث باشند. (توجه:
از رابطه‌ای استفاده کنید که طول پاره خط‌هایی را که توسط ارتفاع روی
ضلع مقابل پیدید می‌آید، مشخص می‌سازد). با استفاده از رابطه (7-1) معلوم
خواهد شد که ارتفاعهای یک مثلث تیز گوش (حاداً زاویه)، در یک نقطه برخورد

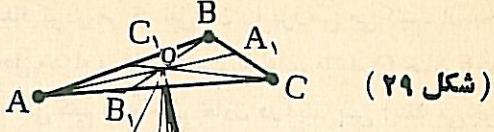
تقسیم می‌کنیم به طوری که A در سیستم σ ، B و C در سیستم τ قرار گیرد.
گرانیگاه سیستم τ در A و گرانیگاه سیستم σ همان‌طور که از بخش گذشته
نتیجه شد در نقطه E ، که وسط ضلع BC است، جای خواهد گرفت. همان‌
گونه که از قضیه ابتدای این بخش بر می‌آید، مرکز ثقل سیستم A, B, C ،
که O نام دارد، روی میانه AE واقع است. بهروشی مشابه می‌توان دریافت
که O روی دومینه دیگر نیز قرار دارد. پس هر سه میانه به ناچار از یک نقطه
عبور می‌کنند.

از آنجاکه M ، مرکز مادی سیستم σ (که بر E منطبق است)، وزنی
دو برابر وزن مرکز مادی سیستم τ (که در A قرار گرفته) دارد، مرکز ثقل
سیستم $\{M, A\}$ ، پاره خط EA را به نسبت $1:2$ چنان تقسیم می‌کند که
خود به نقطه E نزدیکتر باشد. اما این مرکز ثقل از طرفی متعلق به سیستم
 A, B, C ، یعنی مرکز برخورد معمولی میانه‌های مثلث است. پس به قضیه
مشهوری دست می‌یابیم که می‌گوید محل برخورد میانه‌های مثلث، یک سوم
طول هر میانه را از طرف ضلع نظیر جدا می‌کند.
مستطیل فضایی. در شکل ۲۷، مستطیل فضایی $ABCD$ رسم شده است.

نشان خواهیم داد که خطوط مستقیم EF و KL که اوساط اضلاع مقابل را
به هم مربوط می‌سازد، متقاطع است. بر اساس مستطیل وزنه‌های متساوی را
که فرض می‌کنیم درهای هستند، قرار می‌دهیم. شبیه «ایثات» قضیه میانه‌ها،
کافی است دریابیم که مرکز ثقل مستطیل روی هر یک از خطوط مستقیم EF
و KL جای دارد. مثلاً نشان می‌دهیم که نقطه مزبور روی EF است (ایثات
این نکته که آن نقطه روی KL نیز هست، به طرق مثابهی صورت می‌گیرد).
بدین منظور سیستم A, B, C, D را به دو بخش تقسیم می‌کنیم، یک سیستم
شامل A و B و دیگری مشتمل بر C و D . گرانیگاه بخش اول نقطه E و
گرانیگاه بخش دوم نقطه F است. به موجب قضیه‌ای که در ابتدای این بخش
مطرح شد، گرانیگاه کل سیستم بر روی خطراست EF جای دارد. تحقیق این

می‌کنند.

بنابراین $x = f$ و $y = e$. در نتیجه گرانیگاه سیستم $\{A, B\}$ بر نقطه C_1 منطبق است. باید گوشزد کنیم که بهموجب قضیه ابتدای این بخش، مرکز نقل تمامی مثلث روی هر یک از خطوط مستقیم AA_1 , BB_1 و CC_1 قرار می‌گیرد.



(شکل ۲۹)

بر عکس، چنین فرض کنیم که خطوط مستقیم CC_1 , BB_1 و AA_1 در نقطه منفرد O یکدیگر را قطع کنند، در این صورت صحت رابطه (۷-۱) را اثبات خواهیم کرد. برای این منظور، مثلث خود را صفحه‌ای بی‌وزن تصور کرده، به صورت افقی ذمی آوریم و بر نقطه O متکی می‌کنیم و آنقدر وزنه بر رئوس آن می‌افزاییم که طبق شکل ۲۹ به حالت تعادل درآید. طبق رابطه ۱ از بخش ۵، نقطه O مرکز نقل مثلث به انضمام وزنهایی است که بر رئوس آن اضافه شده است و بنابراین مرکز نقل کل سیستم محسوب می‌شود. از آن جا که نقطه O باید روی خطی قرار داشته باشد که از A به مرکز نقل سیستم $\{B, C\}$ رسم می‌شود، پس در نتیجه A_1 مرکز نقل سیستم $\{B, C\}$ است. به همین ترتیب، B_1 و C_1 مرکز نقل سیستم های $\{A, C\}$ و $\{A, B\}$ می‌باشند. اگر جرم ذرهای A , B و C را با p , q و r نشان دهیم از بخش گذشته خواهیم داشت:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{r}{p} \quad , \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{q}{r} \quad , \quad \frac{BC_1}{C_1P} = \frac{p}{q}$$

از ضرب عوامل فرعی، رابطه دلخواه (۷-۱) را به دست می‌آوریم.

فرض کنیم:

اکنون بحث خود را برای اثبات قضیه سوا دنبال می‌کنیم. فرض کنیم رابطه (۷-۱) صادق باشد، پس نشان می‌دهیم که پاره خط‌های مستقیم AA_1 , BB_1 و CC_1 هم‌دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. اثبات مطلب به همان روش دو مورد پیشین صورت می‌گیرد. نشان خواهیم داد که با نهادن وزنهای مناسب بر روی رئوس، مرکز نقل سیستم روی هر یک از خطوط مستقیم CC_1 , BB_1 و AA_1 قرار خواهد گرفت. با استفاده از مقیاسی مشخص،

$$AB_1 = a, \quad B_1C = b$$

$$CA_1 = c, \quad A_1B = d$$

$$BC_1 = e, \quad C_1A = f$$

بنا بر این

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1 \quad (7-2)$$

در نقطه A وزنهای مساوی bd ، در نقطه B وزنهای مساوی ac و در نقطه C وزنهای برابر با ad قرار می‌دهیم. مرکز نقل سیستم $\{A, C\}$ در نقطه‌ای بین A و C چنان واقع شده که فاصله آن از رئوس A و C متناسب با عکس وزنهای موجود در آن دوران باشد. اما خود از طرفی چنان نقطه‌ای است. به همین ترتیب، مرکز نقل سیستم $\{B, C\}$ در نقطه A_1 و مرکز نقل سیستم $\{A, B\}$ در نقطه‌ای قرار دارد که اگر فواصل آن را از A و B برابر x و y بگیریم، نسبت x و y نسبت معکوس باوزنهای bd و ac دارد، یعنی

$$\frac{x}{y} = \frac{ac}{bd} \quad , \quad x + y = f + c$$

اما از رابطه (۷-۲) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\frac{ac}{bd} = \frac{f}{e}$$

$$(P_1 + \dots + P_k + P_{k+1} + \dots + P_n)x = P_1 a_1 + \dots + \\ + P_k a_k + P_{k+1} a_{k+1} + \dots + P_n a_n$$

بنابراین

$$x = \frac{P_1 a_1 + \dots + P_n a_n}{P_1 + \dots + P_n}$$

مثال ۱. فرض کنیم $a_1 = 1$ و $P_1 = n$ ، $a_2 = 2$ و $P_2 = 1$ ، \dots ، $a_n = n$ و $P_n = 2$

$$a_n = n , a_2 = 2$$

در این صورت از فرمول بالا چنین نتیجه می گیریم

$$x = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n}$$

برای حل رابطه فوق تساوی های زیر را می نویسیم :

$$1^2 = (1+0)^2 = 1^2$$

$$2^2 = (1+1)^2 = 1^2 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$3^2 = (2+1)^2 = 2^2 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$(n+1)^2 = (n+1)^2 = n^2 + 2 \times n^2 + 3 \times n + 1$$

با جمع تساوی ها خواهیم داشت:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = 1 + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) +$$

$$+ 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \dots + n(n^2)$$

یا

$$(n+1)^2 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + n$$

یا

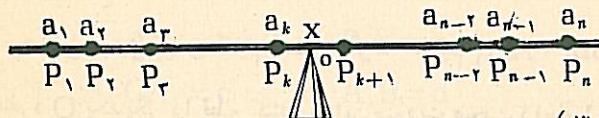
$$3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = (n+1)(n^2 + 2n) - \\ - 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

بخش ۸ - گرانیکاه میله‌ای با وزنه‌ها

ملاحظات خوبیش را از بخش ۶ خلاصه کنیم.

میله‌ای وزنی را همراه وزنه‌های P_1, P_2, \dots, P_n در نظر بگیریم

(شکل ۳۰) و مسئله پیدا کردن مرکز نقل آن را بررسی می کنیم. از بخش ۶ نتیجه گرفتیم که برای حل مسئله، کافی است نقطه‌ای مانند O چنان یافته شود که اگر میله را، بر آن متکی کنیم، به حال تعادل درآید. پس اینک می خواهیم عرض چنین تکیه گاهی که آن را با x نشان می دهیم، پیدا کنیم.



(شکل ۳۰)

فرض کنیم عرض وزن P_1 برابر P_2 برابر a_1 و بالآخره عرض P_n برابر a_n باشد. طبق شکل ۳۰، در نظر می گیریم که تکیه گاه O بین وزنه های P_k و P_{k+1} باشد (حالی را که یکی از وزنه ها درست روی نقطه O قرار دارد مستثنی نمی کنیم). پس بازوی نیروهای P_1, P_2, \dots, P_k به ترتیب عبارت خواهد بود از $x - a_1, \dots, x - a_k$ و بازوی نیروهای P_{k+1}, \dots, P_n به ترتیب عبارت خواهد بود از $a_{k+1} - x, \dots, a_n - x$ از آن جا که میله در حال تعادل است، گشناور نیروهایی که آن را درجهت عقربه های ساعت عمل می کنند برابر با گشناور نیروهایی که در خلاف جهت عقربه های ساعت عمل می کنند برابر است، به عبارت دیگر:

$$P_1(x - a_1) + \dots + P_k(x - a_k) = P_{k+1}(a_{k+1} - x) + \dots + \\ + P_n(a_n - x)$$

همه عبارات شامل x را به سمت چپ آورده، بقیه عبارات را در سمت راست

۱. از این به بعد عبارت عرض در نقطه از میله را به معنای فاصله آن نقطه از انتهای سمت چپ میله، به کار می بینیم.

دو طرف را به عبارت $(1+2+\dots+n)$ تقسیم کرده، به دست می‌آوریم:

$$\frac{1+2+\dots+n}{1+2+\dots+n} = \frac{(n+1)(n+2n)}{3(1+2+\dots+n)} - 1$$

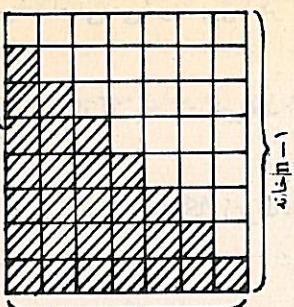
حاصل جمع $n+1+2+\dots+1$ ، برابر مجموع خانه‌های مربع شکل هاشور زده در شکل ۳۱ است که هر کدام معادل یک واحد فرض می‌شود. اما تعداد خانه‌های هاشور زده با خانه‌های سفید، یعنی نصف کل خانه‌های مربع شکل مستطیل مزبور برابر است و مساوی $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1+2+\dots+n}{1+2+\dots+n} = \frac{(n+1)(n+2n)}{3(1+2+\dots+n)} - 1 = \\ &= \frac{(n+1)(n+2n)}{\frac{3n(n+1)}{2}} - 1 = \frac{2n+1}{3} \end{aligned}$$

ضمیر از میان همه مطالب دیگر این رابطه را بیرون می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{2n+1}{3} (1+2+\dots+n) = \\ &= \frac{(2n+1)n}{3} - \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

مثال ۲. فرض می‌کنیم همان وزنهای مثال ۱، یعنی با وزن $n, \dots, 1, 2, 1$ در نقاطی به عرض $n^2, \dots, 1^2, 2^2, \dots, n^2$ جای گرفته باشند. ثابت کنید که عرض گرانیگاه از رابطه $\frac{n(n+1)}{2}$ به دست می‌آید. (توجه: از نتایج مثال ۱، حاصل جمع مکعبات $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ را به دست آورید).



(شکل ۳۱)

مثال ۳. فرض می‌کنیم همان وزنهای مثال ۱، این بار با وزن $n^2, \dots, 1^2, 2^2, \dots, n^2$ در نقاطی به عرض $n, \dots, 2, \dots, 1$ قرار گرفته است.

ثابت کنید که عرض مرکز نقل از رابطه $\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$ نتیجه می‌شود.

بخش ۹- یک مسئله از تئوری اعداد (تعیین فرمول)

روشن است که ملاحظات مکانیکی نه تنها در مورد مسائل هندسی، بلکه به هنگام لزوم پیرامون مسائل مربوط به حساب نیز مفید واقع می‌شود. یکی از نمونه‌های نسبتاً غیرمنتظره اذ این نوع را تحت بررسی قرار می‌دهیم.
ردیفی از اعداد مثبت P_1, P_2, \dots, P_n را انتخاب می‌کنیم. برای کوتاه‌تر کردن ردیف اعداد، از دو عدد ابتدایی و انتهایی P_1 و P_n ، عدد کوچکتر را P نامیده آن را از دو عدد مزبور کم می‌کنیم. آنگاه این عدد P را به ماعداد میانی می‌افزاییم.^۱ (اگر تنها یک عدد میانی داشته باشیم، عدد P دوبار با آن جمع می‌شود). در آن صورت (تنها به شرط آن که $n > 2$ باشد) یک یا هر دو عدد کناری حذف خواهد شد، و بنابراین، ردیف حاصل کوتاه‌تر

۱. منظور یک یا دو عددی است (سته به فرد یا زوج بودن تعداد اعداد) که در وسط ردیف قرار گرفته‌اند.

اعداد تغییری نمی‌کند. بنابراین حاصل جمع اعداد مفسر، با مجموع ردیف اصلی برابر است. و در صورتی که مفسر تنها از یک عدد تشکیل شده باشد، مقدار آن یک عدد با مجموع همه اعداد ردیف اصلی مساوی است. اگر مفسر از دو عضو ترکیب یافته باشد، می‌آموزیم که بدون محاسبه مشتقات میانی، حاصل جمع اعداد آن را به دست آوریم.

اکنون سؤال زیر را مطرح می‌سازیم که مفسر یک ردیف چه موقع یک و چه موقع دو عضو دارد. ابتدا سؤال خود را از طریق «تجربه‌ای ریاضی» واضح تر کنیم. برای این منظور، مفسر ردیف‌های چندی از رده $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ را محاسبه می‌کنیم. مشتقات حاصله را زیرهم می‌نویسیم و زیر اعضای میانی خط می‌کشیم.

$$\begin{array}{cccccc} & & \alpha & 1 & 2 & 3 \\ & & \alpha' & & 4 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & \alpha & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & \alpha' & & 3 & 4 & 3 \\ & & \alpha'' & & & 10 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & \alpha & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & \alpha' & & 2 & 5 & 4 & 4 \\ & & \alpha'' & & & 7 & 6 & 2 \\ & & \alpha''' & & & & 5 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & \alpha & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & \alpha' & & 2 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ & & \alpha'' & & & 4 & 9 & 5 & 3 \\ & & \alpha''' & & & & 1 & 12 & 8 \\ & & \alpha'''' & & & & & 14 & 7 \end{array}$$

از ردیف اصلی می‌شود. پس اگر ردیف اصلی مثلاً چنین باشد:

$$10, 4, 3$$

*گر ردیف اصلی به شکل زیر ظاهر گردد:

$$6, 2, 6$$

ردیفی شامل تنها یک عدد به دست خواهیم آورد که چنین است:

$$14$$

ردیف کوتاه‌تر را مشتق ردیف قبلی می‌نامیم. بنابراین ردیف ۳، ۴، ۱۰

مشتق ردیف ۶، ۴، ۱۰ و ردیف ۱۴ مشتق ردیف ۶، ۲، ۶ محسوب می‌گردد. توجه داشته باشید که مشتق ردیفی محتوی دو عدد، شبیه خود همان ردیف خواهد بود.

اینکه هر ردیفی را با α نشان داده، به صورت زیر عمل می‌کنیم. مشتق آن ردیف را پیدا کرده، آن را با α' نشان می‌دهیم. سپس مشتق ردیف α' را به دست می‌آوریم. این ردیف را با α'' نشان داده، به نام مشتق دوم ردیف α می‌خوانیم. مشتق α'' ، مشتق سوم ردیف α نام دارد و با α''' مشخص می‌شود. عموماً مشتق $(\alpha - 1)$ این مشتق را به نام مشتق α خوانده با $\dots \alpha''''$ نشان می‌دهیم. از آنجا که طول هر ردیف مشتق به اندازه یک یا دو واحد کوتاه‌تر از ردیف ماقبل خود است، با محاسبه مشتق‌های ردیف α یکی پس ازدیگری، بالاخره به ردیفی با یک یا دو عدد می‌رسیم، که این ردیف را مشتق آخر یا مفسر^۱ ردیف α می‌نامیم. بنابراین مفسر ردیف ۴، ۱۰، ۹، ۳، ۱، ردیف ۷، ۱۵ است.

توجه داشته باشید که با رسیدن از یک ردیف به مشتق آن ردیف، مجموع

مفسر ردیف n ، $\dots, 2, 3, \dots, 1$ در صورتی که $n = 3k + 1$ باشد،
دارای یک عضو و در صورتی که $n = 3k$ یا $n = 3k + 2$ باشد، دارای دو
عضو خواهد بود. در حالت اخیر یکی از دو عضو (در $n = 3k$ ، اولی و در
 $n = 3k + 2$ ، دومی) دوبرابر عضو دیگر خواهد بود. این قضیه را در بخش
آینده اثبات خواهیم کرد. در مقام اجرای این کار، از این پرسش عام تر که،
مفسر چه ردیف‌هایی دارای یک عضو و چه ردیف‌هایی دارای دو عضو است،
چشم پوشی نخواهیم کرد. (چگونه واقعیت مزبور را از روی اعداد
 P_1, P_2, \dots, P_n بی آن که محتاج به محاسبه همه ردیف‌های مشتق شویم،
روشن می‌سازیم).

بخش ۱۵- یک مسئله از نظریه اعداد (حل)

برای مسئله خود، تعبیر مکانیکی جدیدی ارائه می‌دهیم. به جای انتخاب
ردیفی از اعداد P_1, P_2, \dots, P_n ، میله‌ای را در نظرمی‌گیریم که در نقاط
 A_1, A_2, \dots, A_n طبق شکل ۳۲ الف، وزنه‌های P_1, P_2, \dots, P_n را
چنان بدان متصل شده است که $(A_1, A_2) = A_2, A_3 = \dots = A_{n-1}, A_n$. آنگاه
سیستم جدیدی از وزنهای را به عنوان ردیف مشتق سیستم بالا به دست می‌آوریم.
نشان می‌دهیم که مرکز مادی سیستم وزنهای مشتق، بر مرکز مادی سیستم
اولیه منطبق است. در ذهن خود وزنهای کناری P_1 و P_n را به دو وزنه
 تقسیم می‌کنیم.

$$P_1 = P + (P_1 - P) \quad \text{و} \quad P_n = P + (P_n - P)$$

که در آن P از میان دو وزنه P_1 و P_n ، مساوی کوچکترین وزنه است (به
طوری که در هر صورت همواره یکی از وزنهای $P_1 - P$ یا $P_n - P$ برابر
صفر می‌گردد). پس سیستم وزنهای α را می‌توان از اتحاد دو سیستم مشکل
دانست. یک سیستم β (که در شکل ۳۲ ب زیر میله نشان داده است) شامل
از آنها دو برابر دیگری است. بنابراین قضیه شکفت‌آوری مطرح می‌شود:

| | α | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ |
|---------------|----------|---|---|---|---|----|----|---|
| α' | | | ۲ | ۳ | ۶ | ۵ | ۶ | ۶ |
| α'' | | | | ۳ | ۸ | ۷ | ۶ | ۴ |
| α''' | | | | | ۸ | ۱۳ | ۶ | ۱ |
| α'''' | | | | | | ۷ | ۱۴ | ۷ |
| α''''' | | | | | | | ۲۸ | |

| | α | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ |
|----------------|----------|---|---|---|---|----|----|----|----|
| α' | | | ۲ | ۳ | ۵ | ۶ | ۶ | ۷ | ۷ |
| α'' | | | | ۳ | ۵ | ۱۰ | ۶ | ۷ | ۵ |
| α''' | | | | | ۵ | ۱۲ | ۹ | ۷ | ۲ |
| α'''' | | | | | | ۳ | ۱۲ | ۱۳ | ۷ |
| α''''' | | | | | | | ۱۶ | ۱۶ | ۴ |
| α'''''' | | | | | | | | ۱۲ | ۲۴ |

| | α | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ |
|-----------------|----------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| α' | | | ۲ | ۳ | ۴ | ۷ | ۶ | ۷ | ۸ | ۸ |
| α'' | | | | ۳ | ۴ | ۹ | ۸ | ۷ | ۸ | ۶ |
| α''' | | | | | ۴ | ۹ | ۱۴ | ۷ | ۸ | ۳ |
| α'''' | | | | | | ۱ | ۹ | ۱۷ | ۱۰ | ۸ |
| α''''' | | | | | | | ۹ | ۱۹ | ۱۰ | ۷ |
| α'''''' | | | | | | | | ۲ | ۲۶ | ۱۷ |
| α''''''' | | | | | | | | | ۳۰ | ۱۵ |

مثال بالا نشان می‌دهد که مفسر ردیفی که شامل بخشی از سری اعداد
طبیعی است، می‌تواند یک یا دو عضو داشته باشد. به قاعدة زیر اشاره می‌کنیم:
اگر $n = 3k + 1$ باشد، مفسر یک، و در غیر این صورت دو عضو دارد. در
اینجا موضوع جالبی رخ می‌نماید: اگر مفسری دو عضو داشته باشد، یکی
از آنها دو برابر دیگری است. بنابراین قضیه شکفت‌آوری مطرح می‌شود:

صورتی که مرکز ثقل مفسر (یا مرکز ثقل سیستم اصلی) بر یکی از نقاط A_1, A_2, \dots, A_n منطبق باشد، می‌توان گفت که مفسر دارای یک وزنه است.
طبق مفاد بخش ۸، عرض مرکز ثقل سیستم اصلی از رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_n a_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

که در آن a_1, \dots, a_n عرض نقاط A_1, \dots, A_n است. با قرار دادن $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$ عرض مرکز ثقل را به صورت فرمول در می‌آوریم.

$$\frac{P_1 \times 1 + P_2 \times 2 + \dots + P_n \times n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

برای انطباق مرکز ثقل بر یکی از نقاط دارای عرض صحیح A_1, A_2, \dots, A_n لازم و کافی است که عرض آن بر حسب عدد کاملی بیان شود. بنابراین، نتیجه نهایی چنین می‌شود که مفسر ردیف P_1, P_2, \dots, P_n ، شامل یک عضو است.

$$\frac{P_1 \times 1 + P_2 \times 2 + \dots + P_n \times n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} \text{ عددی صحیح}$$

فقط و فقط اگر عدد باشد.

به ویژه اگر $n = 1, P_1 = 2, \dots, P_n = n$ باشد، همان‌گونه

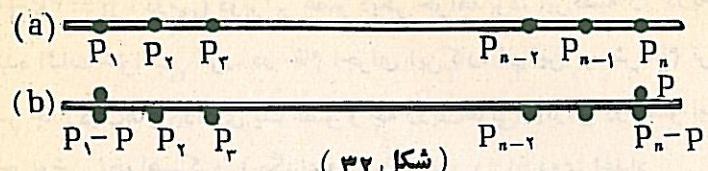
$$\frac{P_1 \times 1 + P_2 \times 2 + \dots + P_n \times n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

که درمثال ۳ از بخش ۸ دیدیم، عدد

برابر با $\frac{3n(n+1)}{2(n+1)}$ خواهد بود. این مقدار هرگز نمی‌تواند عددی صحیح باشد مگر برای حالت عادی $n = 1$. در حقیقت اگر عدد مزبور عددی صحیح باشد، پس

$\frac{3n(n+1)}{2(n+1)}$ نیز عددی صحیح می‌شود و در آن صورت، حاصل

وزنه‌های $P - P, P_1 - P, P_2 - P, \dots, P_{n-1} - P_n$ و دیگر سیستم α که شامل دو وزنه، هریک به بزرگی P است (و در شکل ۳۲ ب بالای میله نشان داده شده است).



در اثر انتقال کل سیستم به سیستم وزنه مشتق، وزنه‌های سیستم α برسر جای خود باقی ماند، درحالی که وزنه‌های سیستم α هریک مساوی متساوی طی کرده به هم نزدیکتر می‌شود (تا به وزنه‌های میانی افزوده گردد)، به عبارت دیگر، سیستم مشتق α' از اتحاد دو سیستم α و $\bar{\alpha}'$ تشکیل می‌شود، که سیستم α' بر سیستم α منطبق است و دستگاه $\bar{\alpha}'$ با نزدیک کردن وزنه‌های سیستم α به اندازه‌های برابر، از آن دستگاه ناشی می‌گردد. به سبب آن که سیستم‌های α' و $\bar{\alpha}'$ به وضوح معادل یکدیگر هستند، سیستم‌های α و α' نیز به موجب عبارت ۳ از بخش ۵ با یکدیگر هم ارز می‌باشند. و مرکز مادی سیستم‌های معادل برهم منطبق است.

پس در اثر انتقال سیستمی از وزنه‌ها به سیستم مشتق آن، مرکز مادی سیستم (و در نتیجه مرکز ثقل آن نیز) تغییر نمی‌پذیرد. بنابراین در انتقال سیستم به مفسر آن نیز، مرکز مادی تغییر ناپذیر بر جای می‌ماند.

پس مفسر عبارت از یک یا دو وزنه است که مرکز ثقل مشابهی با مرکز ثقل سیستم وزنه اصلی دارد. از آن گذشته، باید به خاطر سپرد که مکان وزنه‌های نقطه‌ای که مفسر را تشکیل می‌دهند، ترمیحل وزنه‌های مشخص سیستم اصلی منطبق است، یعنی بر برخی از نقاط A_1, A_2, \dots, A_{n+1} انطباق می‌یابد. اگر مفسر شامل دو وزنه باشد، آن دو را باید بر نقاط مجاور A_j و A_{j+1} یافت، به طوری که مرکز ثقل مفسر در بین آنها قرار گرفته باشد. بنابراین، فقط در

به نقطه A_{2k+1} وزن دارد. بدین طریق درمی‌باییم که وقتی $k = n$ ، نخستین عضو مفسر دو برابر دومین عضو آن می‌باشد. اینک اگر $n = 2k + 2$. عرض مرکز ثقل برابر $\frac{2}{3} + (1 + 2k + 1)$ می‌گردد. این بار مرکز ثقل بین دو نقطه A_{2k+2} و A_{2k+1} به نحوی قرار می‌گیرد که به دومین نقطه دو برابر نزدیک‌تر باشد. بنابراین از وزنهای مفسر، آن که در نقطه دوم قرار گرفته، دو برابر وزنه نقطه اول وزن دارد. به کلام دیگر، دومین عضو مفسر، دو برابر عضو نخستین است. پس بدین ترتیب قضیه بخش ۹، به تمامی اثبات می‌گردد.

حاصل جمع اعضا مفسر ردیف $n = 1, 2, \dots, 2k + 1$ ، برای حاصل جمع اعداد خود ردیف مذبور است، یعنی طبق مثال ۱ بخش ۸ برابر است با

$$\frac{n(n+1)}{2} + \dots + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

دیگری است، می‌توانیم آن اعضا را به خوبی محاسبه کنیم. مقادیر زیر را برای آنها به دست می‌آوریم: $\frac{n(n+1)}{6}$ (به عنوان عضو کوچکتر) و $\frac{n(n+1)}{3}$ (برای عضو بزرگتر).

پس مفسر ردیف $n = 1, 2, \dots, 2k + 1$ به صورت‌های زیر ظاهر می‌شود:

$$\text{اگر } n = 3k \quad \text{باشد} \quad \frac{n(n+1)}{3}, \quad \frac{n(n+1)}{6}$$

$$\text{اگر } n = 2k + 1 \quad \text{باشد} \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{اگر } n = 2k + 2 \quad \text{باشد} \quad \frac{n(n+1)}{3}, \quad \frac{n(n+1)}{6}$$

اگر به طور کلی بخواهیم مفسر ردیف P_1, \dots, P_n را محاسبه کنیم، می‌توانیم به طریق زیر عمل نماییم. پیش از همه، عدد زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)} - (2n+1) = \frac{n-1}{2n+1}$$

لیز عدد صحیح از کار درمی‌آید. اما عدد $\frac{n-1}{2n+1}$ تنها وقتی عدد صحیح است که $n = 1$ باشد. پس به ازای $n > 1$ مفسر ردیف P_1, P_2, \dots, P_n همواره دو عضو دارد.

اگر $n = 1, P_1 = 1, P_2 = 2, \dots, P_n = n$ ، طبق مثال ۱ از بخش ۸،

$$\text{مقدار عبارت } \frac{P_1 \times 1 + \dots + P_n \times n}{P_1 + \dots + P_n} \text{ برابر عدد } \frac{2n+1}{3} \text{ می‌شود. اگر}$$

$n = 3k + 1$ باشد خواهیم داشت $\frac{2n+1}{3} = 2k + 1$ و مقدار آن عددی صحیح است و مفسر از یک عضو تشکیل می‌شود. در صورتی $n = 2k$ باشد

$$\text{پس } \frac{1}{3} = 2k + 2 \text{ و اگر } \frac{2n+1}{3} = 2k + 1 \text{ در آن صورت}$$

$$\frac{2n+1}{3} = (2k+1) + \frac{2}{3}, \text{ که در این دو حالت اخیر عبارت } \frac{2n+1}{3}$$

عددی صحیح نیست و مفسر از دو عضو تشکیل می‌گردد. آنچه در بالا گفته شد، اثبات قسمت نخست قضیه‌ای است که در بخش اخیر مطرح گردید. اگر $n = 2k$ در نظر گرفته شود، همان‌گونه که در بالا نشان داده شد،

مرکز ثقل سیستم وزنهای P_1, P_2, \dots, P_n برای $\frac{2k+1}{3}$ دارد و بین نقاط

A_{2k+1} و A_{2k+2} قرار گرفته است. پس درست در همین نقاط است که وزنهایی که مفسر سیستم اصلی را تشکیل می‌دهند، قرار دارند. از آنجا که به نظر می‌رسد مرکز ثقل به نقطه A_{2k} دو برابر نزدیک‌تر است تا به نقطه A_{2k+1} ، از دو وزنه مفسر، آن یکی که در نقطه A_{2k} قرار دارد، دو برابر وزنه مربوط

$$x = \frac{3n(n-1)}{2(2n+1)} = \frac{3(4k+r)(4k+r+1)}{2[2(4k+r)+1]} = 3k +$$

$$+ \frac{3}{2} \times \frac{4k+4kr+r+r^2}{8k+2r+1}$$

$$x = 3k + \frac{3}{2} \frac{4k}{8k+1} = 3k + \frac{3k}{8k+1} \quad \text{اگر } r=0 \text{ در آن صورت}$$

$$v = 3k \quad \text{که در آن } Z = \frac{3k}{8k+1} = \frac{v}{2n+1} \quad \text{بنابراین}$$

اگر $r=1$ در آن صورت

$$x = 3k + \frac{3}{2} \frac{6k+2}{8k+3} = 3k + 1 + \frac{k}{8k+2}$$

$$v = k \quad \text{که در آن } Z = \frac{k}{8k+2} = \frac{v}{2n+1} \quad \text{بنابراین}$$

اگر $r=2$ در آن صورت

$$x = rk + \frac{3}{2} \frac{10k+6}{8k+5} = rk + 1 + \frac{7k+4}{8k+5}$$

$$v = 7k+4 \quad \text{که در آن } Z = \frac{7k+4}{8k+5} = \frac{v}{2n+1} \quad \text{بنابراین}$$

اگر $r=3$ در آن صورت

$$x = rk + \frac{3}{2} \frac{14k+12}{8k+7} = rk + 2 + \frac{5k+4}{8k+7}$$

$$v = 5k+4 \quad \text{که در آن } Z = \frac{5k+4}{8k+7} = \frac{v}{2n+1} \quad \text{بنابراین}$$

$$x = \frac{P_1 \times 1 + P_2 \times 2 + \dots + P_n \times n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

اگر x عددی صحیح باشد، مفسر از یک عضو که برابر حاصل جمع $P_1 + P_2 + \dots + P_n$ است تشکیل شده است. اگر x عدد صحیحی نباشد، آن را باید به شکل زیر نوشت:

$$x = y + z$$

که y عددی صحیح و $z < 0$ است. در این صورت مفسر از دو عضو Q_1 و Q_2 تشکیل می‌شود، به طوری که

$$Q_1 + Q_2 = P_1 + P_2 + \dots + P_n \quad (10-1)$$

از آن جا که می‌توان Q_1 و Q_2 را وزنهایی در نقاطی به عرض $y+1$ و z دارای مرکز ثقلی به عرض x در نظر گرفت، طبق بخش ۵ خواهیم داشت:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1-Z}{Z} \quad (10-2)$$

با حل کردن روابط (10-1) و (10-2) بایکدیگر، Q_1 و Q_2 را به شرح زیر به دست می‌آوریم:

$$Q_1 = \frac{1-Z}{Z} Q_2, \quad \frac{1}{Z} Q_2 = \frac{1-Z}{Z} Q_1 + Q_2 = Q_1 + Q_2 = P_1 + \dots + P_n$$

$$Q_2 = (P_1 + \dots + P_n)Z \quad \text{و} \quad Q_1 = (P_1 + \dots + P_n)(1-Z) \quad (10-3)$$

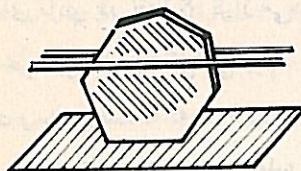
بر طبق مثال اخیر، مفسر ردیف $n^2, n^3, n^4, \dots, 1$ را به شرط

$$n > 1 \quad \text{به دست می‌آوریم. تاکنون در یافته‌ایم} \quad x = \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$$

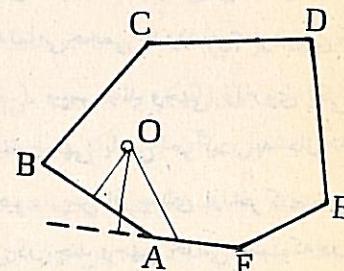
مفسر از دو عضو تشکیل گشته است. برای تعیین اعضای مفسر ابتدا باید Z را پیدا کنیم. بدین منظور $n = 4k+r$ در نظر گفته می‌شود که در آن

بخش ۱۱- ماشین کاردا بهم غیرممکن است.

یک چندضلعی محدب را با نقطه O در میان آن، در نظر می‌گیریم. از نقطه O بر پهلوهای چندضلعی خطوط عمود رسم می‌کنیم. پای خطوط عمود ممکن است روی خود ضلع قرار گیرد (مثلاً مانند خط عمود بر AB در شکل ۳۴) و یا امکان دارد که بر امتداد آن واقع گردد (مثل خطوط عمود بر اضلاع FA و FE در همان شکل). البته حالتی نیز وجود دارد که پای همه خطوط عمود، در محدوده اضلاع قرار می‌گیرد (بطور مثال، اگر نقطه O را مرکز یک کثیرالاضلاع منتظم در نظر آوریم، حالت مزبور اتفاق می‌افتد). اکنون سؤال این است: آیا امکان دارد که پای همه خطوط عمود، نه بر خود اضلاع، بلکه بر امتداد آنها بیافتد؟



(شکل ۳۴)



(شکل ۳۴)

ثابت خواهیم کرد که پاسخ سؤال فوق منفی است، یعنی حداقل یکی از اضلاعها خلیع نظیر خود را، نه در امتداد آن، بلکه در روی خودش قطع نمی‌کند. برای ثابت این مطلب، از اصلی استفاده می‌کنیم که در عنوان این بخش بیان شده است. فرض می‌کنیم چندضلعی ما صفحه‌ای نازک است که مرکز نقل آن در نقطه O قرار دارد (مثلاً توان چندضلعی را صفحه بدون وزنی در نظر گرفت که یک وزنه نقطه‌ای، در نقطه O آن واقع شده است). چندضلعی را روی یکی از پهلوهایش بسطحی افقی می‌گذاریم. اگر آن را دقیقاً عمودی قرار دهیم نخواهد افتاد. حتی در صورت لزوم می‌توان فرض کرد که صفحه از دوسو با میله‌هایی طبق شکل ۳۴، حمایت می‌شود. چندضلعی یا بی حرکت می‌ایستد

طبق مثال ۱ بخش ۸، حاصل جمع اعضای مفسر چنین به دست می‌آید.

$$n(n+1)(2n+1) = n^3 + \dots + 1^3. \text{ اعضای مفسر از رابطه}$$

(۱۰-۳) نتیجه می‌شود:

$$Q_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}(1-Z) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{2n+1-\nu}{2n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)-\nu}{6}$$

$$Q_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} Z = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{\nu}{2n+1} = \frac{n(n+1)\nu}{6}$$

با در نظر گرفتن مقادیر $1, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ و $4k+4$ به جای n با وارد کردن مقادیر ν بر حسب k ، می‌توان مفسر دیف $\frac{1}{3}, \dots, \frac{9}{3}, \dots, \frac{4}{1}$ را محاسبه کرد:

$$1k(4k+1)(5k+1), 2k(4k+1)(6k+1) \quad (n=4k+1)$$

$$(n=4k+1)$$

$$(2k+1)(4k+1)(7k+2), k(1k+1)(4k+1) \quad (n=4k+2)$$

$$(n=4k+2)$$

$$(k+1)(2k+1)(4k+2), (2k+1)(4k+2)(7k+2) \quad (n=4k+3)$$

$$(n=4k+3)$$

$$2(k+1)^2(4k+2), 2(k+1)(4k+2)(5k+2) \quad (n=4k+4)$$

حتی ارشمیدس برای یافتن مساحت اشکال منحنی از ملاحظات تعادل استفاده کرد، بدین ترتیب که برای تعیین سطح قطعه‌ای شلجمی (یعنی شکلی که از تقاطع قوسی سهمی و وتری مستقیم به دست می‌آید)، وی قطعه را از بازوی اهرمی آویزان کرد. مفاهیم مکانیکی و فیزیکی، اگرهم نه به صورت براهین مستقیم، به شکل دلایلی راهنمایی کننده، برایجاد نتایج ریاضی همواره اثر قابل ملاحظه‌ای داشته و هنوز هم دارد.

استفاده از قوانین مکانیک در ریاضیات، تنها بخش ویژه‌ای از روشی عام است، که شامل استفاده معکوس از ارتباط پدیده‌های طبیعت با بیان ریاضی آن‌ها می‌باشد. تشریح ریاضی یک پدیده، به معنای یافتن فرمولی است که محاسبه مشخصه‌های فیزیکی پدیده مذکور (مانند سرعت، دما، مسافت وغیره) را امکان‌پذیر می‌سازد، و یا به دست آوردن معادلاتی که حل آن‌ها محاسبه مشخصه‌های فوق الذکر را موجب می‌گردد. استفاده مستقیم از بیان ریاضی یک پدیده، مشتمل بر آن است که ما بتوانیم مقادیر عددی مشخصه‌های آن پدیده را بدون مشاهده خود پدیده، و بلکه تنها از راه محاسبه فرمول‌های مربوطه و یا حل معادلات پیرامون آن به دست آوریم. مزیت این روش زمانی آشکار می‌شود که پدیده خود بغيرنج است، ولی بیان ریاضی ساده‌ای دارد. با وجود این، امکان دارد که برخی وارونه عمل کنند: به جای حل معادلات، پدیده را به شکل تجربی تحت نظر درآورند و مشخصه‌های مطلوب را انداره بگیرند و از این طریق مقادیر عددی آن‌ها را مشخص سازند. هنگامی که با فرمول‌های پیچیده یا معادلاتی که حل آنها آمیخته با دشواری‌هایی است، سروکار پیدا می‌کنیم، روش مزبور مذبرانه است و از عهده تشریح پدیده در حد درکی نسبتاً آسان برمی‌آید.

این اصل پایه‌ای برای قالب سازی (modelling)، یعنی بررسی روندهای فیزیکی از طریق قالب‌ها است که از طرح زیرپروری می‌کنند: بررسی روند (که با یک قالب سازی شود)، بیان روند مزبور به وسیله فرمول‌ها و معادلات

و یا می‌غلند. اگر بغلند، پس از چندی توقف خواهد کرد، زیرا در غیر این صورت کار ماشین دائم خواهد بود. روی هر ضلعی که صفحه توقف کند، خط قائمی که از مرکز نقل رسم شود، ضلع مزبور را روی خودش قطع خواهد کرد (به موجب عبارت ۲ از بخش ۵). به این ترتیب، در یک چند ضلعی می‌توان ضلعی را یافت که پای عمود از نقطه ۰ برخود آن ضلع واقع گردد. برای چند وجهی نیز قضیه همانندی وجود دارد. به این منظور یک چند وجهی محدب در نظر می‌گیریم و نقطه ۸ را درون آن فرض می‌کنیم. از آن نقطه بر همه وجوه چند وجهی عمود می‌کنیم. در این صورت پای حداقل یکی از این خطوط عمود، بروجه نظری خود، و نه براحتداد آن قرار خواهد گرفت. برای اثبات این قضیه، چند وجهی را به صورت جرمی با گرانیگاه ۸ در نظر می‌گیریم. (مثلاً چند وجهی را به تمامی حجمی بدون جرم فرض می‌کنیم و نقطه‌ای مادی در نقطه ۸ قرار می‌دهیم.) سپس چند وجهی را روی یکی از وجوه خود بروسطحی افقی می‌نیم. چند وجهی یا بی حرکت به حال تعادل می‌ماند و یا می‌غلند. که در صورت اخیر، پس از چندی از حرکت خواهد افتاد و به حال تعادل درخواهد آمد. پس در چند وجهی حالتی است که در آن حالت بی حرکت روی سطح قرار می‌گیرد. وجهی را که تکیه گاه چند وجهی است، در نظر آورید. به موجب عبارت ۲ از بخش ۵، خط عمودی که از ۸ بر آن وجه رسم شود، نقطه تلاقیش روی خود آن وجه خواهد بود. پس وجهی که نیاز قضیه مزبور را برآورده می‌سازد، مشخص می‌گردد.

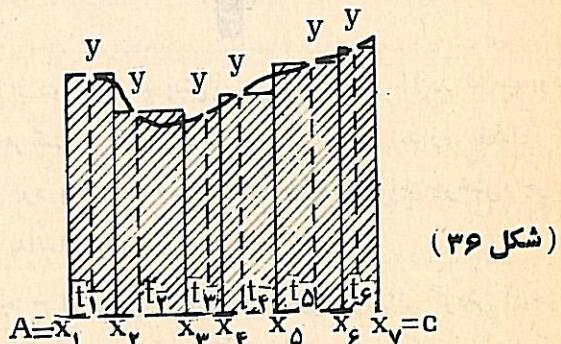
نتیجه

همه مسائلی را که تا کنون مورد بررسی قراردادیم، می‌توان به خوبی با روش خالص ریاضی حل کرد. به هر حال، شاید کسانی توجه نداشته باشند که به کار گرفتن ملاحظات مکانیکی در اثبات مسائل ریاضی، تنها به منظور تمرین دادن ذهن است. این گونه روش‌ها از اهمیتی تاریخی و عملی برخوردار هستند.

خط مستقیم P و منحنی L را که در یک سمت خط P قرار گرفته، در نظر آورید، (شکل ۳۵)، به طوری که هر خط عمود بر P منحنی L را در یک نقطه قطع می‌کند. ما دو تا از این خطوط عمود، یعنی AB و CD را انتخاب می‌کنیم و مساحت چهارپهلوی منحنی $ABCD$ را که S می‌نامیم، بدست می‌آوریم. با این نظر قطعه مزبور را به وسیله نقاط زیر

$$x_1 = A, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1} = C$$

به اجزای کوچکتر تقسیم می‌کنیم. (در شکل ۳۶: $n=6$). در هر یک از قطعه‌های $x_i x_{i+1}$ نقطه T را در نظر گرفته، از آن عمودی رسم می‌کنیم تا منحنی L را در نقطه y_i قطع کند. از هر یک از نقاط y_i خطوطی مستقیم به موازات P رسم می‌کنیم تا با خطوط عمودی که از x_i کشیده شده، برخورد کند. مساحت سطح شکل هاشورزده پلکانی در شکل ۳۶، تقریباً با سطح چهار

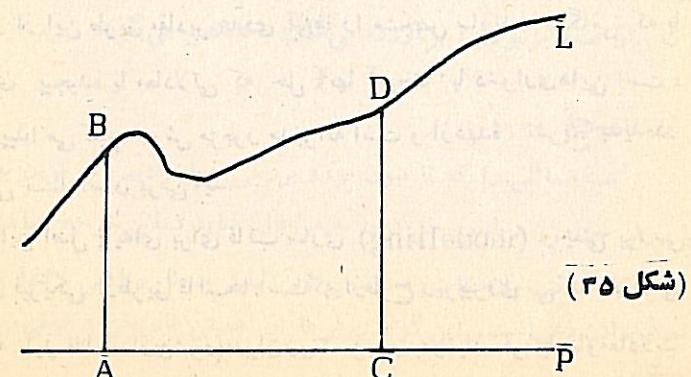


پهلوی منحنی S مساوی است. و هر چه پاره خط‌های $x_i x_{i+1}$ که خط AC را بدان تقسیم کرده‌ایم کوچکتر باشد، این تقریب مناسب‌تر است. طول پاره خط‌های $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ را به ترتیب $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ فرض می‌کنیم و طول پاره خط‌های $T_i y_i, T_{i+1} y_{i+1}, \dots, T_n y_n$ را مساوی y_1, y_2, \dots, y_n می‌گیریم، پس مساحت S' خواهد بود:

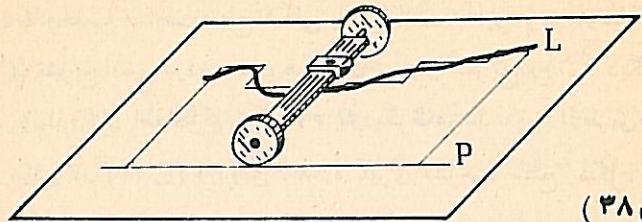
E ، همزمان با آن استفاده از E به عنوان یافان روند A (که برای قالب‌سازی به کار می‌رود) که تحت شرایط آزمایشگاهی قرار می‌گیرد، تحقق روند A و تخمین حل معادله E به وسیله این روش‌ها، و بنابراین، محاسبه خواص مطلوب روند A . در اینجا می‌گوییم روند A (و همچنین فرمول‌ها و معادلات E) را به وسیله روند A قالب‌سازی کرده‌ایم. به علاوه اگر دو روند به وسیله فرمول‌ها و معادلات یکسانی تشریح شده باشد، می‌گوییم آن دو روند همانند یکدیگر است.

حل مسئله استاینهاوس در بخش ۴، مثالی ابتدایی از دروش قالب‌سازی است. رفتن کودکان به مدرسه، پدیده A است که باید قالب آن ساخته شود، و مشخصه مورد نظر، زمان لازم است. این زمان ارزشی است که از فرمول مشخصی نتیجه می‌شود. پدیده قالب‌سازی A (آویختن وزنه‌ها از ریسمان) را چنان می‌یابیم که در آن، انرژی پتانسیل ارزش همان فرمول محسوب شود. پدیده اخیر به طرزی تجربی انجام می‌پذیرد.

روش مدل‌سازی در عمل از اهمیت بسیاری برخوردار است (زیرا برای بار اول روش مزبور را در روندهای هیدرودینامیکی والکتریکی به کار گرفتند). به ویژه، این روش پایه بسیاری از انواع ماشین‌های انگرال گیری را تشکیل می‌دهد؛ که در زیر، اساس عملکرد ساده‌ترین آن‌ها را که ماشین انگرال گیری با چرخ اصطکاکی است، شرح می‌دهیم.



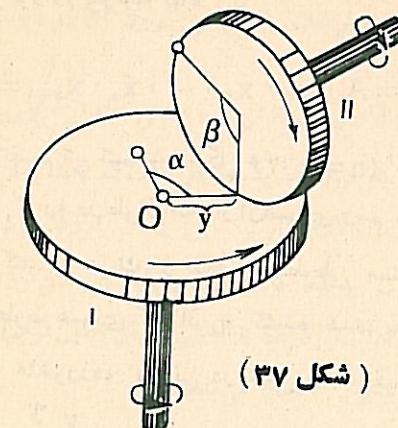
اندازه α به گردش درمی آوریم. در نتیجه مقدار عددی مجموع زوایای گردش چرخ از رابطه $(1.C)$ بدست می آید. به عبارت دیگر، این مقدار مساوی S' ، مساحت سطح هاشور خورده پلکانی شکل 36 است.



(شکل ۳۸)

طبق شکل 38 ، خط مستقیم P و منحنی L را روی کاغذی رسم می کنیم. سپس سازوکار (mekanism) زیر را در نظر می گیریم. میله ای بردو چرخ کوچک که یکی از آنها به نحوی در امتداد خط P می گذارد که همواره میله بر آن خط عود باشد، نصب شده است. شاخص لغزنده ای روی میله نصب شده و می تواند در طول آن حرکت کند. در مرکز شاخص سوزی متصل شده که انتهایش بر سطح کاغذ تماس دارد. فرض می کنیم میله به طریق زیر بادیسک I و چرخ II در ارتباط است: چرخ II کوچک واقع بر میله باعث می شود که دیسک I نیز به همان اندازه بگردد، فاصله چرخ II از مرکز δ دیسک در هر حال بر این فاصله مرکز شاخص از ابتدای میله است. چنین می پنداریم که شعاع میله مساوی واحد است. محیط شکل پلکانی در شکل 38 را با سوزن به نحوی می پیماییم که میله در امتداد خط P بغلطف و شاخص در طول میله حرکت کند. نتیجه ای که حاصل می شود این است که زاویه ای که به وسیله چرخ II گردیده می شود، از لحاظ عددی برابر مساحت S' می باشد. هرچه بخش های جزئی پاره خط کوچکتر باشد، منحنی L که جانشین محیط شکل پلکانی می شود، با تقریب بهتری برابر خط شکسته می گردد و در نتیجه S به جای S' می نشیند.

اینک سیستمی را در نظر می گیریم که از دیسک I و چرخ II که دوره آن بر دیسک I تکیه دارد، تشکیل شده است (شکل 37). چرخ II می تواند حول محور خویش بچرخد. فاصله چرخ II از O ، مرکز دیسک I را در هر لحظه برابر y فرض می کنیم. دیسک را به اندازه زاویه α (بر حسب زادیان)



(شکل ۳۷)

می گردد. نقطه ای از دیسک I که پیش از چرخش با چرخ II در تماس بود، به اندازه قوس ay حرکت خواهد کرد، و درست به همان اندازه، نقطه ای که روی دوره چرخ II بود به حرکت در خواهد آمد. در اثر این چرخش، چرخ II حول محور خود به اندازه زاویه β دوران خواهد کرد.

اگر شعاع چرخ II را برابر β در نظر بگیریم. در اثر گردش آن حول محور خود به اندازه زاویه β ، نقاط دوزه آن مساوی βr حرکت خواهند کرد و بنابراین خواهیم داشت: $\beta r = \alpha y$. حالا r را مساوی 1 قرار می دهیم، در این صورت $\beta = \alpha y$. اینک ابتدا چرخ II را به فاصله y از مرکز δ قرار می دهیم و دیسک را برابر زاویه α می گردانیم، بعد چرخ را در فاصله y از مرکز δ می گذاریم و دیسک را برابر α می چرخانیم، و به همین ترتیب ادامه داده بالاخره چرخ II را در فاصله y از مرکز δ می نهیم و دیسک را به

وزنه است.

ازین قبیل نظرات انتقادی بسیار می‌توان اظهار کرد. به طوری که هم استدلال فوق را دربر بگیرد وهم به ملاحظاتی که زیر بنای همه برخوردها به مسائل بود، مربوط گردد. با این همه، نباید تصور کرد که ملاحظات مزبور قادر ارزش آموزنده هستند. ما این ملاحظات را کمتر از براهین هندسی مقاعد کننده نمی‌دانیم. نکته این است که همه قضایای مربوط به ریسمان، وزنه وغیره تنها دارای خصیصه تقریبی هستند و هر چه خصوصیات وسائل برگزیده (ریسمان، وزنه وغیره) به کمال مطلوب نزدیک‌تر باشد، قضایا معتبرتر است. در این مرور، عبارات مشخصی از قبیل «ریسمان خطی مستقیم است»، هرچه طناب انتخاب شده نازک‌تر باشد، به واقعیت نزدیک‌تر است، و در این صورت می‌توان گفت که قضایای مربوط برای ریسمان‌هایی باضمامت بی‌نهاست کم، صادق است. شرط‌های دیگری مانند این که «طول ریسمان با وزنه، مساوی درازای ریسمان بدون وزنه است»، هنگامی به واقعیت نزدیک‌تر می‌گردد که ریسمان کمتر کش باید، پس در این صورت می‌توان گفت قضیه مزبور برای ریسمان‌هایی که مطلقاً انبساطناً پذیر است، صدق می‌کند. واضح است که ریسمان بی‌نهاست نازک یا مطلقاً انبساط ناپذیر در طبیعت یافت نمی‌شود. این به همان اندازه مبتنی بر کمال مطلوبی خیالی است، که مثلاً نقطه اثرنیرو را چنان نقطه‌ای بدانیم که در فیزیک مقدماتی به ما آموخته‌اند، چرا که هرچه سطح عکس العمل اجسام در مقابل نیرو کوچک‌تر باشد، نتایج حاصله محاسبات مربوط به نیرو بر نقاط آن جسم، به واقعیت نزدیک‌تر است. مفهوم ذره نیز به همان اندازه مبتنی بر خیال پروری است، چرا که ویژگی‌های مختص درات، بیشتر هنگامی در مورد اجسام واقعی صدق می‌کند که ابعاد آن اجسام کوچک‌تر باشد.

در اینجا بهتر است تأکید کنیم که همه مفاهیم و قوانین مکانیک (و بهمان‌گونه فیزیک به‌طور عام) در آمیخته با کمال مطلوب گرایی در مورد پذیده‌های طبیعی است. بنا بر این حتی یک دانش آموز ممکن است ناخودآگاه و نه به ندرت،

بنابراین اگر مانه محیط خط‌شکسته بلکه خود منحنی را با سوزن بینمایم، چرخ II زاویه‌ای مساوی مساحت S را خواهد گردید. نتیجه را می‌توان بر مقیاس ویژه‌ای ثبت کرد.

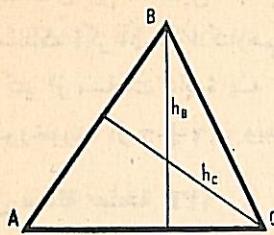
در اینجا روندمدل‌سازی تبدیل اندازه‌گیری مساحت سطح چهارپهلوی منحنی، به محاسبه مساحت سطح شکل پاکانی است. این روند به وسیله فرمول (۱.۱) تشریح می‌شود. همان فرمول برای تشریح رونمای دیگری در ارتباط با سازوکار اصطکاکی شکل ۳۷ بار دیگر ظاهر شد. پس از طریق نمایش فرمول سازوکار (۱.۱) و روش اندازه گیری مساحت سطح شکل، امکان قالب‌سازی پدید می‌آید.

چنین روشنی قیاس مکانیکی مارا به ساختن وسیله‌ای برای محاسبه مساحت سطوح منحنی (درست‌تر بگوئیم، اشکال خاصی، - چهارپهلوهای منحنی) هدایت کرده است.^۱

در نتیجه از خصیصه‌ای اصلی، یک مشاهده به عمل می‌آوریم. ممکن است استدلاای آنکه بر پایه ملاحظات مکانیکی بناشده است، خواندن مشکل پسند را به حد کفاایت دقیق به نظر نماید. حتی ساده‌ترین مثال نخستین که در بخش اول بدان برخورد کردیم، جای اعتراض دارد. ریسمان دقیقاً خط راست نیست (زیرا ضخامت محدودی دارد و اگر از میان ریز سنج بدان نگریسته شود، شکل نامنظم آن به چشم می‌خورد)، بنا بر این عبارت «ریسمان خط مستقیمی است» مفهوم صحیحی در بر ندارد. از آن گذشته، به سخن دقیق‌تر، انتهای ریسمان را نمی‌توان یک نقطه در نظر گرفت (به علاوه، خود این عبارت که وزنه در نقطه‌ای معین به ریسمان آویخته شده است، بی‌نقص نیست). عاقبت، هر ریسمان واقعی کش می‌آید و بنا بر این طول ریسمان همراه با وزنه، بلندتر از طول آن بدون

۱. آلتی را که برای اندازه گیری مساحت سطوح اشکال منحنی به کار می‌رود، مساحت سنج (پلانی متر) می‌نامند.

پاسخ راز و رمز عدد ها و شکل ها (صفحه ۸۰ را ببینید)



۱. فرض می کنیم بین دو ارتفاع،
برگتر یا مساوی h_C
در این صورت داریم:

$$h_C \geq h_B \geq AC \quad (1)$$

ولی h_C بر AB عمود، در حالی که
 AC نسبت به AB مایل است و

بنابراین AC نمی تواند از h_C کوچکتر باشد، یعنی $AC = h_C$. این، به معنای آن است که AC و h_C برهمنطبقاند. در این صورت، مثلث در رأس A قائم می شود و ارتفاع h_B هم بر پل AB منطبق می شود و رابطه (۱) به این صورت در می آید:

$$h_C = h_B = AC = AB$$

مثلث مورد نظر، قائم الزاویه متساوی الساقین است.

۲. به کمک ۹ چوب کبریت نمی توان ۳ مربع ساخت. ولی در حکم مسئله، ازما مربع نخواسته اند، بلکه چهار ضلعی هایی با ضلع های برابر مورد نظر است. در شکل می بینید که از این چهار ضلعی ها، یکی مربع دو تای دیگر لوزی هستند.

۳. نفر دوم برای خرید کتاب تنها یک ریال کم داشت؛ وقتی «پول» های خود را روی هم ریختند باز هم نتوانستند کتاب را بخرند. بنابراین روشن است که نفر اول اصلاً «پول» نداشته است و قیمت کتاب هم، همان ۳ ریال است.

۴. روی شکل دیده می شود که تفاوت دو مساحت برابر با قسمت هاشور خورده است. این قسمت، از مستطیل هایی تشکیل شده است (که روی ضلع های

خود را در ورطة چنین کمال مطلوب هایی بیافکند. به عنوان مثال، یکی از اساسی ترین مفاهیم مکانیک، یعنی حرکت یکنواخت را در نظر بگیرید. حرکت یکنواخت مطلقاً در طبیعت وجود ندارد (اندازه گیری های دقیق مشخص کرده است که حتی عقرهای ساعت نیز به طور غیر یکنواخت حرکت می کنند).

در بعضی از موارد محدود، این غیر یکنواختی چنان اندک است که می توان از آن چشم پوشی کرد. بدین طریق است که مفهوم حرکت یکنواخت گسترش می یابد. همچنین است در مورد قانون اول نیوتون، زیرا هیچ جسمی که تحت تأثیر اجسام دیگر نباشد وجود ندارد. از این گونه مثال ها بی شمار می توان زد، چه دامنه ایها تمام فیزیک را دربر می گیرد.

بنابراین در می یابیم که در واقع مکانیک نه با اجسام و روندهای واقعی، بلکه با موارد تصور گرایانه، سروکار دارد؛ از قبیل «جسمی که تحت تأثیر هیچ جسم دیگری نیست»، «حرکت خطی یکنواخت»، وغیره. در این صورت ما به این موارد تصور گرایانه، به چشم واقعی می نگریم، یعنی فرض می کنیم که دارای وجود واقعی هستند.

در پایان توجہ داشته باشید که انتزاعات مکانیکی (مانند ذره، رسماں بدون وزن بی نهایت باریک و مطلقاً انبساط ناپذیر وغیره) در طبیعت خود به همان اندازه مناسب است که در هندسه سراغ داریم (مانند نقطه، خط مستقیم، صفحه وغیره). نقاط، خطوط مستقیم و صفحات در ذندگی حقیقی به مثابه اجسام و موارد واقعی به چشم نمی خورند و باراتی که پیرامون آنها به گفتگویی بردازد، هر چه اجسام واقعی خواص ویژگی هایی نزدیک تر به نقطه، خط مستقیم، صفحه وغیره از خود نشان بدهند، معنای صحیح تری بدخود خواهد گرفت.

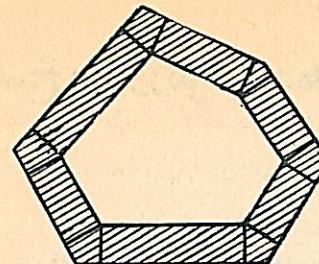
*

چند عدد از عضوهای مجموعه زیر بر ۷ بخشیدهند:

$$A = \overbrace{1111111}^{11100} \dots \overbrace{1111111}^{11100}$$

۱۳۶۱

Reconciliation With Mathematics
 Editor: Parviz Shahryari
 Address: Tehran, P. O. Box 34 - 541
 Vol. VI, No 1, 1982



چند ضلعی درونی به وجود آمده اند)
 که مساحت مجموع آنها برابر ۱۲ است.
 سانجامتر مرربع است. علاوه بر این
 مستطیل‌ها، چهار ضلعی‌هایی در
 گوش‌های بین مستطیل‌ها باقی

می‌ماند که اگر آن‌ها را کنارهم قرار دهیم، شکلی به دست می‌آید که مساحتی
 بزرگتر از مساحت دایره به شعاع واحد دارد. بنابراین، مساحت قسمت
 هاشورخورده از $12 + \pi$ ، و به طور بدیهی از ۱۵، بیشتر است.

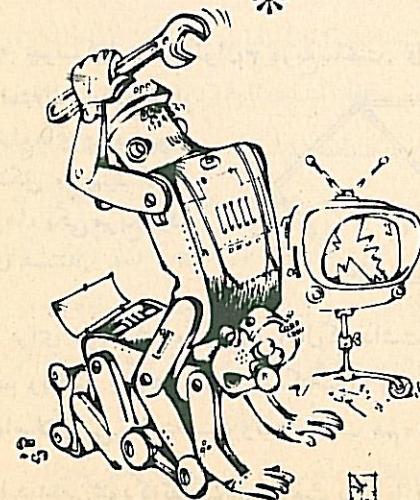
حل مساله صفحه ۱۳۴

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که عدد ۱۱۱۱۱۱۱۱ بخش پذیر است و ضمناً
 هیچ کدام از عضوهای قبل از آن در مجموعه، بخش پذیر برق ۷ نیستند.
 بنابراین عضوهایی از مجموعه بر ۷ بخش پذیر نند که تعداد رقم‌های هر کدام
 از آن‌ها، مضربی از ۶ باشد. چون داریم:

$$1361 = 226 \times 6 + 5$$

بنابراین، ۲۲۶ عضو این مجموعه بر ۷ بخش پذیر است.

*



چه وقت یاد می‌گیری به تکنولوژی جدید احترام بگذاری؟

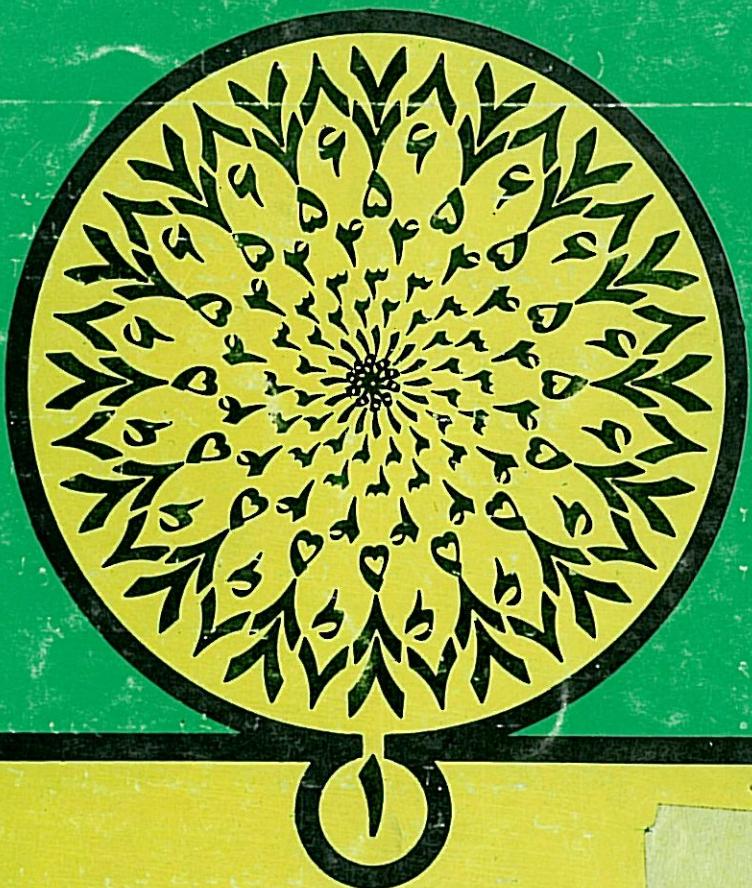
آشتی باریاضیات

سردبیر : پرویز شهریاری

نشریه دو ماهه، هر سال ۶ شماره منتشر
می شود. بهای اشتراک سالیانه ۷۲۰ ریال

نشانی پستی : تهران - صندوق پستی ۴۶-۵۴

آشتی باریاضیات



فروردین ۱۳۶۱

۳۲-۵۱

۱۷

دوفنگ دوم

سال ششم - شماره ۱ (شماره ردیف ۲۱)

فهرست مطالب

- | | | |
|-----|---|-------------------------------|
| ۱ | — | سرمقاله |
| | | معادله های دیفرانسیلی و اهمیت |
| | | آنها در دانش های طبیعی |
| ۲ | م. آ. دوبروختوا | |
| | | آ. ن. سافونوف |
| | | ترجمه پرویز شهریاری |
| ۳۰ | علیرضا امیر معز | |
| | | بیضوی کاسینی و برنولی |
| | | انحنای فضا |
| ۴۲ | پ. لوکوربیده | |
| | | ترجمه محمد باقری |
| | | تابع یاعمل و کردار (fonction) |
| ۵۲ | دکتر اسد الله آلبویه | |
| | | گوتفرید ویلهلم لایبنیتس |
| ۵۶ | ل. س. فریمان | |
| | | ترجمه پرویز شهریاری |
| ۸۰ | — | |
| | | راز و رمز عددها و شکل ها |
| ۸۱ | کاربردهایی از مکانیک در ریاضیات و. آ. اوپنسکی | |
| | | ترجمه کورس ضیائی |
| ۱۲۵ | — | |
| | | پاسخ راز و رمز عددها و شکل ها |

۱۲۰ ریال

پول اشتراک و گمک های خود را به حساب
با ذکر تجارت (بازرگانی سابق) تهران - چهارراه
ولی عصر، به قام سردبیر بفرستید و فتوکپی رسید
آن را همراه با نشانی کامل خود برایها بفرستید.

آشتی باریاضیات

سرویز شهریاری

نشریه دو ماهه، هر سال ۶ شماره منتشر
می‌شود. بهای اشتراک سالیانه ۷۲۰ ریال

نشانی پستی: تهران - صندوق پستی ۳۴-۵۴۱

بارب تو مرا دو عشق لیلی
هر روزه بده زیاده میلی

داستان عشق سورانگیز لیلی و مجنون در منظومه معروف
نظامی تبلوری پرشکوه یافته است. بنابر روایت نظامی، هنگامی که
مجنون سودازده عشق لیلی سربه بیابان می‌نهد، پدرش او را به
زیارت کعبه می‌فرستد، تامگر خداوند بر احوالش رحمت آورد و
این عشق نافرجام را از داش بدرکند. اما مجنون عاشق، هنگامی
که دست بر در کعبه می‌نهد، از خدای خویش فزونی و جاودانگی
عشقم را طلب می‌کند.

کارما نیز کار عشق است، نه هوای نفس - «عشقبازی دگر
ونفس پرستی دگر است». ماعاشق میهن و مردم خویشیم، عاشق دانش
و آگاهی و راستی و انسانیتیم؛ آرزومندیم فرزندانمان به دانش و
بینش مسلح باشند و در میهن آزاد از استعمار، استشمار و استبداد
زندگی کنند.

ریاضیات کلید دانشهاست. حال که ناشر پیشین آشتی
باریاضیات از ادامه انتشار آن چشم پوشیده است، ما قصد داریم
بهیاری شما، نگذاریم این یگانه نشریه عمومی ریاضیات به زبان
فارسی تعطیل شود. از این رو انتشار آن را با همان سبک و شیوه
پیشین، اما ناگزیر با بهایی گران‌تر دنبال می‌کنیم.

سال ششم - شماره ۱ (شماره ردیف ۲۱)

فهرست مطالب

| | | |
|---|-----------------------------------|--|
| ۱ | — | سرمهای دیفارانسلی و اهمیت آنها در دانش‌های طبیعی |
| ۲ | م. آ. دوبروخوتوا آ. ن. سافونوف | ترجمه پرویز شهریاری |
| ۳ | علیرضا امیر معز | پیضوی کاسیئنی و برنولی انحنای فضا |
| ۴ | پ. لوکوربیده ترجمه محمد باقری | تابع یاعمل و کردار (فونکسیون) گونفرید ویلهام لایب نیتس |
| ۵ | دکتر اسدالله آل بویه | راز و رمز عددها و شکل‌ها |
| ۶ | ل. س. فریمان | کاربردهایی از مکانیک در ریاضیات و. آ. اوسبن‌سکی |
| ۷ | ترجمه پرویز شهریاری | ترجمه کورس فیزیائی پاسخ راز و رمز عددها و شکل‌ها |
| ۸ | — | پول اشتراک و گمک‌های خود را به حساب ۱۷۶۵ با ذکر تجارت (بازرگانی ساقی) تهران - چهارراه والی عصر، به نام سردبیر بفرستید و فتوکپی رسید آن را هفراه با نشانی کامل خود برایما بفرستید. |

۱۲۰ ریال

م. آ. دو بروخوتورا
آ. ن. ساقونوف

ترجمه پرویز شهرپاری

معادله های دیفرانسیلی و اهمیت آنها در دانش های طبیعی

طبیعت واحد، در « شباهت حیرت اندیز »
معادله های دیفرانسیلی مربوط به زمینه های
گو ناگون پدیده ها، تجلی می کند.

و ای. ل

۱. ورود به مطلب

در این مقاله، ساده ترین نوع های معادله دیفرانسیلی خطی، مورد بررسی.
قرار گرفته است: معادله های رشد نمائی و نوسان های همساز.

بررسی بسیاری از روندها و مسئله های فیزیکی، مثل بررسی پایداری
هوای پما در پرواز، تعیین مسیر و سمت حرکت گالوله، محاسبه دستگاه های رادیو.
تکنیک، مطامه جریان عکس العمل های شیمیائی وغیره، منجر به تشکیل معادله هایی
می شوند که رابطه بین مقادیر متغیر مستقل را با مقادیر تابع و مشتق های آن، نشان
می دهند. چنین معادله هایی را معادله های، دیفرانسیلی گویند.
تابع هایی که بتوانند معادله دیفرانسیلی را، به یک تساوی درست تبدیل

آشتی باریاضیات جزوء درسی یا کمک درسی نیست، بلکه
نشریه ای است برای معرفی و توضیح جنبه های مختلف ریاضیات
و نمایش زیبایی ها و دلفریبی های آن برای همه کسانی که ریاضیات
را در حد دیبرستان بدانند و بخواهند مطالعه آن را همچنان دنبال
کنند. بنابراین، نه تنها دانش آموزان سالهای آخر دیبرستان و
دانشجویان رشته های علمی مختلف از مطالعه بسیاری مقالات آشتی
باریاضیات سود می برند، بلکه دانشجویان و دیران ریاضی هم در
آن آموختنی های بسیار می بایند. در عین حال، کسانی هم که پیش
از این چندان عنایتی به ریاضیات نداشته اند، فرصتی پیدا می کنند
تا از دریچه ای تازه به ریاضیات بنگرن.

ششمین سال انتشار آشتی با ریاضیات با فرا رسیدن نوروز
همراه است. نوروز خجسته و بهار خرمی بخش را به خوانندگان
تبیک می گوییم و در سال نو برای میهن و انتلامان پیروزی های
تازه آرزومندیم.

کنند، جواب‌های معادله نامیده می‌شوند. مثلًا، برای معادله دیفرانسیل

$$[e^{-kx} \cdot y(x)]' = 0$$

که از آن جا به دست می‌آید: $y(x) = C \cdot e^{-kx}$ ، یا

$$y(x) = Ce^{kx} \quad (3)$$

که در آن، C ، عددی ثابت و دلخواه است.

بنابراین، تنها تابع‌هایی به صورت (3)، می‌توانند جواب معادله رشد نمائی (1) باشند. با آزمایش مستقیم، یعنی قراردادن تابع (3) در معادله (1)، روشن می‌شود که به ازای هر مقدار دلخواه C ، تابع (3) در معادله (1) صدق می‌کند. به این ترتیب، رابطه (3) معرف مجموعه جواب‌های معادله (1) است. برای این که از مجموعه جواب‌های (3)، جواب مشخصی را جدا کنیم، باید مقدار ثابت C را بدانیم. برای این منظور به شرط‌های اضافی دیگری— به اصطلاح شرط‌های آغازین— نیازداریم؛ در اینجا، کافی است مقدار تابع مورد نظر را به ازای مقداری از آوند بدانیم.

$$y(x_0) = y_0. \quad (4)$$

در واقع، اگر شرط آغازین (4) را در جواب (3) قراردهیم، به دست می‌آید:

$$y_0 = C \cdot e^{kx_0} \Rightarrow C = y_0 \cdot e^{-kx_0}.$$

با قراردادن این مقدار در رابطه (3)، سوابی از معادله رشد نمائی، که با شرط آغازین سازگار است، به دست می‌آید:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{(x-x_0)} \quad (5)$$

می‌بینیم که با شرط آغازین (4)، تنها یک جواب برای مقدار ثابت C به دست می‌آید؛ به همین مناسبت جواب (5)، که با شرط آغازین می‌سازد، جوابی

$$y'(x) - 2y(x) = 0$$

تابع‌های e^{2x} ، $y = -2e^{2x}$ و $y = -3e^{2x+5}$ ، جواب‌هستند.

معادله‌های دیفرانسیل، یکی از نیرومندترین و اساسی‌ترین ابزارها، برای بررسی دانش‌های طبیعی هستند. به این معادله‌ها می‌توان روندهای گوناگون طبیعت‌آلی و معدنی را مورد مطالعه قرار داد.

II. معادله رشد نمائی

معادله دیفرانسیل به صورت

$$y'(x) = k y(x) \quad (1)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن، k ، مقداری ثابت و $y(x)$ ، تابع مورد جستجو است.

معادله (1) را، معادله رشد نمائی گویند. مفهوم این معادله، این است: برای هر مقدار آوند (آرگومان)، سرعت تغییر تابع، با مقدار این تابع متناسب است.

برای این که جواب‌های معادله (1) را پیدا کنیم، می‌توان به این ترتیب عمل کرد. فرض کنیم $y(x) = y_0$ از معادله باشد، یعنی تساوی $y'(x) - ky(x) = 0$ درست باشد. دوطرف معادله را در عامل غیر صفر e^{-kx} ضرب می‌کنیم، به تساوی درست زیر می‌رسیم:

$$e^{-kx} y'(x) - e^{-kx} ky(x) = 0 \quad (2)$$

از آنجا که داریم:

$$[e^{-kx} y(x)]' = e^{-kx} y'(x) - ke^{-kx} y(x)$$

بنابراین، تساوی (2) را می‌توان به این ترتیب نوشت:

استفاده کرد، که در آن $(t)^{/u}$ و \vec{F} ، به ترتیب عبارتند از تصویر بردارهای (\vec{v}) و \vec{F} براین محور. معادله (۷) هم، حرکت مستقیم الخط جسم را شرح می‌دهد. چنین حرکتی را، می‌توان به صورت حرکت نقطه مادی در نظر گرفت که در مرکز جرم جسم و تحت تأثیر نیرویی که بر مرکز جرم واقع می‌شود، قرار دارد.

مسئله. قایق موتوری، روی آب ساکن، با سرعت ۵ متر در ثانیه حرکت می‌کند. در سرعت کامل آن، موتور را خاموش کردند؛ بعد از ۴ ثانیه، سرعت آن به ۱ متر در ثانیه رسید. اگر نیروی مقاومت آب، متناسب با سرعت حرکت قایق باشد، معلوم کنید چه مدت بعداز خاموش کردن موتور، سرعت قایق، به ۴ سانتیمتر در ثانیه می‌رسد؟

حل. حرکت قایق را مستقیم الخط می‌گیریم. محور OX را در امتداد حرکت قایق فرض می‌کنیم. سرعت قایق را در لحظه $t = 0$ بعد از خاموش کردن موتور، $(t)^{/u}$ می‌نامیم. در لحظه خاموش کردن موتور $(t) = 0$ ، بنا بر فرض، سرعت قایق برابر است با ۵ متر در ثانیه، یعنی

$$v(0) = 5 \quad (8)$$

و این، همان شرط آغازین مسئله است. حالا، معادله دیفرانسیلی را تشکیل می‌دهیم. فرض کنید وزن قایق برابر m باشد. بنا بر فرض، قایق تحت تأثیر نیروی $F = -k(v(t))^{/u}$ است، که در آن $k > 0$ (علامت منفی، به معنای آن است که نیروی مقاومت آب، در جهت عکس سرعت حرکت قایق عمل می‌کند). اگر این مقدار F را در معادله (۷) قرار دهیم و $k = \frac{k_1}{m}$ فرض کنیم، معادله دیفرانسیلی به دست می‌آید:

$$v'(t) = -k \cdot v(t), \quad k > 0$$

که شیوه معادله (۱) است. با توجه به شرط آغازین (۸) جواب آن را، طبق

منحصر به فرد است.

مثال: معادله $(x) = 3y(x)^{/u} + 2$ باشرط $y(0) = 0$ حل کنید.
دراینجا $x = 0, y = 0$ است؛ جواب را می‌توان با توجه به رابطه (۵) نوشت: $y(x) = 2e^{3x}$. این، تنها جواب معادله است که در شرط آغازین مفروض صدق می‌کند.

چند کاربرد معادله (۱) را بررسی می‌کنیم. برای حل مسئله، باید ابتدا معادله دیفرانسیلی را تشکیل داد، شرط آغازین را (که از صورت مسئله می‌توان نتیجه گرفت) مشخص کرد، و سپس به حل معادله پرداخت. برای تشکیل معادله، معمولاً باید از قانون‌هایی استفاده کرد که در درس‌های فیزیک و شیمی وجود دارند.

۱. سرعت حرکت مستقیم الخط

بنابر قانون دوم نیوتون داریم:

$$\vec{ma} = \vec{F} \quad (6)$$

که در آن، \vec{a} عبارت است از شتاب حرکت نقطه مادی به جرم m ، و \vec{F} -نتیجه همه نیروهایی که بر نقطه مادی اثر می‌کنند. سرعت $(t)^{/u}$ و شتاب $(t)^{/\vec{a}}$ از حرکت، تابع‌هایی از زمان t هستند، ضمناً می‌دانیم که $v(t) = \vec{a}(t) = \vec{v}(t)$. یادآوری می‌کنیم که عمل روی بردارها را- که در امتداد یک خط راست‌اند وجهت مثبتی روی آنها انتخاب شده است - می‌توان به عمل روی تصویر آنها بر این خط راست، یعنی به مقادیر عددی (اسکالر) تبدیل کرد. به این ترتیب، در حالت حرکت نقطه مادی در طول محور OX، می‌توان به جای تساوی (۶)، از تساوی

$$m \cdot v'(t) = F \quad (7)$$

رابطه (۵) به دست می آوریم:

$$v(t) = \Delta e^{-kt} = \Delta e^{-\frac{1}{M}t}$$

با استفاده از شرط اضافی $v(0) = 0$ ، پیدا می کنیم:

$$e^{-kt} = \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{t}}$$

و با براین: $\Delta = \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{t}}$. و این قانون تغییر سرعت حرکت قایق بعد از توقف موتور است. برای پیدا کردن پاسخ مسئله، باید معادله $M = \Delta e^{-kt}$ را، نسبت به مجهول t ، حل کرد. با حل این معادله، $t = 12$ (ثانیه) به دست می آید.

۳. تجزیه رادیوآکتیو

در فیزیک روش شده است که مقدار اتم های ماده رادیوآکتیو، که در واحد زمان تجزیه می شود، جزء ثابتی از مقدار اتم های تجزیه نشده را تشکیل می دهد. برای هر نوع ماده رادیوآکتیو، این جزء ثابت خاص خود آن ماده است. و آن را «تجزیه ثابت» یا «تابه تجزیه» می نامند و با λ نشان می دهند. به زبان دیگر، تابه ای اتم های ماده رادیوآکتیو، با مقدار موجود اتم های تجزیه نشده، متناسب است یعنی:

$$M'(t) = -\lambda M(t), \quad \lambda > 0 \quad (9)$$

که در آن، $M(t)$ عبارت است از تعداد اتم های رادیوآکتیو تجزیه نشده در لحظه t و $M'(t)$ سرعت تابه آنها. از آن جای که مقدار اتم های تجزیه نشده در جریان زمان، کاهش می یابد، مشتق $M'(t)$ منفی می شود. معادله (۹)، یک معادله دیفرانسیلی است، شبیه معادله دیفرانسیلی رشد نمائی (۱). با به حساب آوردن بستگی بین عدد هسته ها و جرم ماده رادیوآکتیو، می توانیم درباره تجزیه

یا تابه ماده رادیوآکتیو صحبت کنیم.

مسئله ماده رادیوآکتیو M_0 مفروض است. اگر در جریان ۳۰ سال در صد آن تجزیه شود، بعد از چند سال ۲۵ درصد مقدار اولیه این ماده باقی می ماند؟ حل. مقدار ماده رادیوآکتیو را در لحظه t ، برابر $M(t)$ می گیریم.

$$M(0) = M_0 \quad (10)$$

این، شرط آغازین مسئله است. اگر معادله (۹) را، با توجه به شرط آغازین (۱۰) وطبق رابطه (۵) حل کنیم، به دست می آید:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (11)$$

توجه می کنیم که $M(30) = \frac{M_0}{2}$; درنتیجه، از رابطه (۱۱) داریم:

$$e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}}$$

که با عمل های مقدماتی، می توان پاسخ مسئله را به دست آورد: ۶ سال.

۳. جذب نور

وقتی که نور از آب (یا شیشه) عبور می کند، قسمتی از آن جذب می شود. فرض کنید که نور به طور عمودی، بر سطح آب، باشد A فرود آید، شدت نور را در عمق x با $A(x)$ نشان می دهیم. مشتق $(A'(x))$ ، معرف سرعت جذب نور در عمق x است. در اپتیک روش نشده است که در محیط هایی مثل آب یا شیشه، سرعت جذب نور در عمق x ، باشد نور در همین عمق، متناسب است یعنی

$$A'(x) = -k A(x), \quad k > 0 \quad (12)$$

۴. غلظت محلول

مسأله. ظرفی به گنجایش a لیتر، پر از محلول آب نمک داریم. آب، با سرعت b لیتر در دقیقه وارد ظرف می‌شود، با محلول داخل آن مخلوط می‌شود و محلول بدست آمده (و با غلظت یکواخت)، با همان سرعت از ظرف خارج می‌شود. در لحظه $t=0$ ، چه مقدار نمک در محلول ظرف باقی مانده است، به شرطی که در ابتدا ($t=0$)، مقدار آن در محلول A_0 کیلوگرم بوده است؟ جواب ($t=1$ در حالت $a = 100$ لیتر)، $A_0 = 10$ کیلوگرم، $b = 3$ (لیتر در دقیقه) و $t = 1$ (ساعت) بدست آوردید.

حل. مقدار نمک موجود در محلول را، در لحظه t ، برابر $A(t)$ می‌گیریم.

غلظت محلول در این لحظه برابر است با $\frac{A(t)}{a}$. تغییر مقدار نمک محلول در واحد زمان، برابر است با تفاضل بین مقدار نمکی که به ظرف وارد، و مقدار نمکی که از آن خارج می‌شود. ولی نمک به ظرف وارد نمی‌شود. بلکه تنها، در واحد زمان، به اندازه $\frac{b \cdot A(t)}{a}$ از آن خارج می‌شود. به این ترتیب، سرعت $(A'(t))$ تغییر مقدار نمک در محلول برابر است با

$$A'(t) = -\frac{b}{a}A(t) \quad (14)$$

علامت منفی، به معنای کم شدن مقدار نمک در محلول است، به معادله دیفرانسیلی اذنوع (۱)، با شرط آغازین (۱)، باشتر آغازین

$$A(0) = A_0. \quad (15)$$

می‌رسیم. اگر معادله (۱۴) را طبق رابطه (۵) و با توجه به شرط آغازین (۱۵) حل کنیم، به دست می‌آید: $A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{bt}{a}}$; که اگر مقادیر عددی مسئله را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$A(60) \approx 1/654 \text{ (کیلوگرم).}$$

III. معادله دیفرانسیلی خطی مرتبه اول

همان طور که در جبر، با مفهوم درجه یک معادله سروکارداریم، در آنالیز

چون شدت نور(x), با افزایش عمق x , کم می‌شود، مشتق(x) A' هم منفی به دست می‌آید. معادله (۱۲)، معادله‌ای است دیفرانسیلی اذنوع (۱)، نسبت به تابع (x) .

مسأله. قشر ده متری آب، 45 درصد نوری را که بر سطح آن تاییده است، بخود جذب می‌کند. درجه عمقی از آب، نورخوارشید، به درونشی نور ماه در سطح آب، می‌شود؟ به شرطی که بدانیم درخشش نورماه، به اندازه $10 \times \frac{3}{4}$ درخشش نورخوارشید است.

حل. شرط آغازین مساوی، چنین است:

$$A(0) = A_0. \quad (16)$$

اگر حل معادله (۱۲) را با توجه به شرط آغازین (۱۶) و بنابر رابطه (۵)، بنویسیم، به دست می‌آید: $A(x) = A_0 \cdot e^{-kx}$; از اینجا، و با توجه به شرط اضافی $A(10) = 0/6 A_0$ ، خواهیم داشت:

$$e^{-k} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{10}}$$

قانون جذب نور، به این صورت در می‌آید:

$$A(x) = A_0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{x}{10}}$$

برای پیدا کردن عمق مورد نظر x در مسئله، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{A_0}{3} \times 10^{-5} = A_0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{x}{10}}$$

که از آن برای x به تقریب 247 متر به دست می‌آید.

هم، مفهوم مرتبه، برای معادلهای دیفرانسیلی، وجود دارد.

اگر معادله دیفرانسیلی، تنها شامل مشتق اول تابع مجھول باشد، معادله دیفرانسیلی مرتبه اول نامیده می شود. یکی از نوعهای معادله دیفرانسیلی مرتبه اول، که از نظر کاربرد خود، اهمیت زیادی دارد، معادله دیفرانسیلی به صورت زیر است:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \quad (16)$$

که در آن، $p(x)$ و $q(x)$ ، تابعهای دلخواهی هستند، که در حالت خاص، می توانند برابر مقدار ثابتی هم باشند. و این، معادلهای خطی نسبت به تابع مجھول و مشتق آن است. به چنین معادلهایی، معادلهای دیفرانسیلی خطی گویند. به ازای $q = 0$ ، معادله (16)، به این صورت در می آید:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0 \quad (17)$$

که معادله متجانس خطی نامیده می شود؛ وقتی که $q \neq 0$ باشد، با معادله خطی نامتجانس سروکار داریم.

معادله متجانس خطی (17) را حل می کنیم. فرض می کنیم $y(x)$ ، جواب آن باشد، یعنی تساوی برقرار باشد.

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0 \quad (18)$$

یکی از تابعهای اولیه $y(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx}$ را به (18) نشان می دهیم و دو طرف تساوی (18) را در عامل $e^{\int p(x) dx}$ - که مخالف صفر است - ضرب می کنیم. توجه می کنیم که $(y(x) \cdot e^{\int p(x) dx})' = p(x) \cdot y(x) + y'(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = p(x) \cdot y(x) + y'(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = 0$ ؛ در نتیجه، به تساوی $0 = 0$ می رسیم. بنابراین

$$y(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = c \Rightarrow y(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx} \quad (19)$$

(c)، مقدار ثابت دلخواه است).

به این ترتیب، اگر $y(x)$ جواب معادله (17) باشد، به صورت (19) در می آید. بر عکس، اگر تابع (19) را مستقیماً در معادله (17) قرار دهیم، معلوم می شود که به ازای هر مقدار دلخواه ثابت c ، در آن صدق می کند. بنابراین، رابطه (19) مجموعه همه جوابهای معادله (17) را به دست می دهد. وقتی که شرط آغازین (4) موجود باشد، جواب مشخصی پیدا می شود.

معادله دیفرانسیلی نامتجانس خطی (16) را می توان به معادله متجانس تبدیل کرد. مثلاً اگر تابعهای $p(x)$ و $q(x)$ ، مقادیر ثابتی باشند، یعنی $p(x) = k$ و $q(x) = a$ (که $k \neq 0$)، معادله

$$y'(x) + ky(x) = a \quad (20)$$

را می توان به صورت معادله متجانس زیرنوشت:

$$\left(y(x) - \frac{a}{k} \right)' + k \left(y(x) - \frac{a}{k} \right) = 0$$

از اینجا نتیجه می شود که مجموعه همه جوابهای $y(x)$ این معادله، از رابطه زیر معین می شود:

$$y(x) = c \cdot e^{-kx} + \frac{a}{k}$$

وجواب معادله (20)، که با شرط آغازین (4) بسازد، از این رابطه به دست می آید:

$$y(x) = \left(y_0 - \frac{a}{k} \right) e^{-k(x-x_0)} + \frac{a}{k} \quad (21)$$

به حل چند مسأله من بوط به کاربرد معادله دیفرانسیلی خطی می بردازیم.

۱. سرد کردن جسم

اگر جسم گرمی را، در محیطی با درجه حرارت پایین تر فرو ببریم، سرد می شود، ضمناً سرعت سرد شدن، در جریان زمان، کاهش می یابد. معامون شده است که سرعت سرد شدن سطح جسم، در هر نقطه آن، با اختلاف درجه حرارت سطح جسم و محیطی که آن را فرا گرفته است، متناسب است.^۱

مسئله. یک ذکه فلزی که تا 5°C درجه سانتی گراد گرم شده است، در هوای با درجه حرارت 20°C درجه سانتی گراد، سرد می شود. ۱۰ دقیقه بعداز آغاز سرد شدن، درجه حرارت سطح فلز به 15°C درجه سانتی گراد رسید. بعداز 20 دقیقه، سطح فلز چه درجه حرارتی خواهد داشت؟

حل. درجه حرارت سطح قطعه فلز را، در لحظه t ، بعداز آغاز سرد شدن، با $U(t)$ نشان می دهیم. طبق شرط مسئله داریم:

$$U(0) = 500 \quad (22)$$

این، شرط آغازین مسئله است. سرعت سرد شدن سطح فلز در لحظه t ، برابر است با $U'(t)$. اگر درجه حرارت هوا را ثابت فرض کنیم، بددست می آید:

$$U(t) = -k(t)U' + C \quad (23)$$

از آنجا که درجه حرارت در سطح فلز پایین می آید، علامت مشتق، منفی است. به این ترتیب، برای $U(t)$ ، معادله دیفرانسیل خطی، شبیه معادله (۲۰) بددست می آید:

$$U(t) = U(0) + k(t)$$

که اگر آن را طبق رابطه (۲۱)، با توجه به شرط آغازین (۲۲)، حل کنیم،

۱. گاهی به تقریب، با همین فرضها، درباره سرد شدن تمامی جسم و نه فقط سطح آن – صحبت می کنند.

پیدا می شود:

$$U(t) = 480e^{-kt} + 20$$

با استفاده از شرط اضافی $U(0) = 100$ ، بددست می آید:

$$e^{-kt} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{10}}$$

و بنابراین

$$U(t) = 480\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{t}{10}} + 20$$

که درنتیجه، به ازای $t = 10$ ، بددست می آید:

$$U(10) = 32 \frac{1}{3}$$

۲. ساده ترین مدارهای الکتریکی

اگر در مدار بسته الکتریکی، پشت سرهم، جریانی با نیروی الکتروموتوری E ولت وارد شود، مقاومت حقیقی برابر R اهم، پیچک باقابیت القایی L هانری و خازن با ظرفیت C فاراد باشد، همان‌طور که از دانش مربوط به الکتریسیته می‌دانیم، بین نیروی الکتروموتور و فشار الکتریکی وارد بر مقاومت حقیقی، پیچک القا و خازن در هر لحظه زمانی t ، این رابطه وجود دارد:

$$E = U_R + U_C + U_L \quad (23)$$

در اینجا $U_R = RI$ ، ولتاژ روی مقاومت واقعی، $U_C = \frac{q(t)}{C}$ ، ولتاژ روی خازن $U_L = LI'$ ، ولتاژ روی پیچک اندوکتیویته است؛ $I(t)$ ، شدت جریان در مدار در لحظه t ، با آمپر و $q(t)$ ، بار خازن در لحظه t ، با کولمب اندازه گیری می شوند.

با استفاده از رابطه (۲۳)، و با توجه به این که $I(t) = q'(t)$ ، می‌توان شدت جریان را در مدار، نسبت به نیروی الکتروموتور منبع جریان، به دست

آورد.

وقتی که نیروی الکتروموتور منبع جریان، ثابت باشد، جریانی که در چنین مداری تولیدمی شود، به اند وکیویته «توجه نمی کند» و از قانون اهم برای مدار بسته جریان ثابت، پیروی می کند.

حالت b. وقتی که نیروی الکتروموتور با تغییرسینوسی باشد:

$$E(t) = E_0 \sin \omega t$$

صورت می نویسیم:

$$I'(t) + k \cdot I(t) = \alpha \cdot \sin \omega t \quad (27)$$

$$\text{که در آن } E = \frac{E_0}{L} \text{ و } \alpha = \frac{R}{L}, \text{ و } k = \frac{R}{L}$$

برای پیدا کردن جواب معادله (27)، دوطرف آن را در عامل مخالف صفر e^{kt} ضرب می کنیم. در این صورت، می توان آن را با این صورت نوشت:

$$(I(t) \cdot e^{kt})' = \alpha \left(\frac{e^{kt}}{\omega + k} (k \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \right)'$$

که از آن جا به دست می آید:

$$I(t)C \cdot e^{-kt} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \left(\frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \sin \omega t - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \cos \omega t \right)$$

C، مقدار ثابت دلخواهی است. با در نظر گرفتن شرط آغازین (25) و با فرض

$$\frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \cos \beta, \quad \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \sin \beta$$

جواب معادله (27)، که با شرط آغازین (25) هم می سازد، به این صورت، به دست می آید:

$$I(t) = \frac{\alpha \omega}{\omega^2 + k^2} e^{-kt} + \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \sin(\omega t - \beta) \quad (28)$$

مسئله. نیروی الکتروموتوری منبع جریان، E ولت، پیچک با قابلیت القای L هانری ($L \neq 0$) و مقاومت حقیقی R اهم مفروض است. مطلوب است قانون تغییر شدت جریان در مدار، به شرطی که در لحظه آغاز ($t = 0$)، این شدت برا برحسب باشد. دو حالت را بررسی کنید: a) نیروی الکتروموتوری ثابت؛ $E(t) = E_0 \cdot \sin \omega t$ b) نیروی الکتروموتوری با تغییرسینوسی: $E(t) = E_0 \cdot \sin \omega t$ که در آن E_0 و ω ، مقادیری ثابت هستند.

حل. با استفاده از رابطه (23)، بعد از تبدیل های لازم، به دست می آید:

$$I(t) \cdot R + I'(t) \cdot L = E(t)$$

که برای مقادیر معلوم R، L و $E(t)$ ، می تواند همچون یک معادله دیفرانسیل خطی در نظر گرفته شود:

$$I'(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{E(t)}{L} \quad (24)$$

با شرط آغازین

$$I(0) = 0 \quad (25)$$

حالت a. وقتی $E(t) = E_0 \sin \omega t$ ، مقداری ثابت باشد، معادله (24) همراه با شرط آغازین (25)، شبیه معادله (20) با شرط آغازین (4) می شود. اگر طبق رابطه (21) آن را حل کنیم، به دست می آید:

$$I(t) = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R} e^{-\frac{R}{L} t}, \quad (26)$$

از (26) پیداست که با رشد زمان t، شدت جریان ($I(t)$ ، به سمت مقدار ثابت $\frac{E_0}{R}$ می کند. بنابراین، در دستگاهی که نیروی الکتروموتور منبع جریان ثابت باشد، شدت جریان مقداری ثابت و برابر $\frac{E_0}{R}$ می شود. به زبان دیگر،

۲۱) طبق رابطه (۲۱)، پاسخ آن را می نویسیم:

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

از این رابطه دیده می شود که با گذشت زمان t ، سرعت سقوط $v(t)$ ، به مقدار $\frac{mg}{k}$ نزدیک می شود. ضمناً در حالت $\frac{mg}{k} < v(t) < v_0$ ، سرعت $v(t)$ ، ضمن صعودی بودن خود، به $\frac{mg}{k}$ نزدیک می شود و در حالت $\frac{mg}{k} > v(t) > v_0$ ، این سرعت نزولی است و بداین مقدار ثابت نزدیک می شود. مثلاً وقتی که چتر باز خود را به طرف زمین پرتاب می کند، بعد از آن که چتر خود را باز کند، سرعت او، سیری نزولی پیدا می کند و به مقدار $\frac{mg}{k}$ نزدیک می شود. مقدار k ، به قطر نیم کره چترستگی دارد. همین موضوع، امکان می دهد که (بامعلوم بودن مقدار mg)، محاسبه را طوری انجام دهیم که سرعت چتر باز، در لحظه برخورد او با زمین، خطی برای او نداشته باشد. چنین سرعتی، معمولاً، بین ۵ تا ۷ متر در ثانیه است.

مسئله . مطلوب است سرعت (t) حرکت جسمی که درخلاء به طرف زمین سقوط می کند؛ سرعت اولیه حرکت را برابر 0 می گیریم.

حل . در این حالت، مقاومت هوا وجود ندارد و معادله (۲۹) بداین صورت در می آید:

$$v'(t) = g \quad (۳۰)$$

که با حل آن، به مجموعه جواب های $v(t) = gt + C$ می رسیم . اگر شرط آغازین $v_0 = v(0) = 0$ را در نظر بگیریم، به جواب مشخص $v(t) = gt$ می رسیم که با آن، از درس فیزیک دیفرانسیلی، آشنا هستیم.

IV . معادله فوسان همساز

اگر معادله دیفرانسیلی، شامل مشتق مرتبه دوم تابع مجهول باشد، شامل

از رابطه (۲۸) دیده می شود که اگر در حالت الکتروموتور سینوسی منبع جریان، دستگاه به کار خود ادامه دهد، یعنی وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، شدت جریان هم سینوسی است و به صورت $A \cdot \sin(\omega t - \beta)$ در می آید، که در آن، A و β مقادیری ثابت هستند.

۳. سقوط جسم

حرکت سقوطی جسم، درخلاء مستقیم الخط و تحت تأثیر نیروی جاذبه است. وقتی که جسم در هوا سقوط می کند، باز هم می توان حرکت آن را مستقیم الخط به حساب آورد، که تحت تأثیر نیروی نقل و نیروی مقاومت هوا که از بایین به بالا اعمال می شود – انجام می گیرد .

مسئله . مطلوب است سرعت (t) حرکت جسمی که در هوا به طرف زمین سقوط می کند؛ به شرطی که نیروی مقاومت هوا با سرعت حرکت جسم نسبت مستقیم داشته باشد و سرعت اولیه جسم هم برابر 0 متر در ثانیه باشد.

حل . محور Oy را قائم و به طرف پایین در جهت مسیر سقوط جسم می گیریم. بر جسم دونیرو واژر می کند: نیروی نقل و نیروی مقاومت هوا. تصویر نیروی نقل بر محور Oy ، برابر با mg (م) جرم جسم است؛ و تصویر نیروی مقاومت هوا بر همین محور، بنا بر فرض مسئله، برابر $-kv(t)$ می باشد (k ، ضریب تناسب است). تصویر شتاب حرکت جسم، بر همین محور Oy . برابر است با مشتق (t) . بنابر قانون دوم نیوتون داریم: $mg - kv'(t) = mg - k(v(t))$ ، یا

$$v'(t) + kv(t) = g \quad (۲۹)$$

که در آن $\frac{k}{m} = k_1$ است.

معادله (۲۹)، معادله دیفرانسیلی خطی است از نوع (۲۰) با شرط آغازین

$$y'(x) = a\sqrt{A^2 - y^2(x)} \quad (32)$$

$$y'(x) = -a\sqrt{A^2 - y^2(x)} \quad (33)$$

معادله (32) را به صورت

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{A^2 - y^2(x)}} - a = 0$$

می نویسیم، که به نوبه خود، چنین می شود:

$$\left(\arcsin \frac{y(x)}{A} - ax \right)' = 0$$

واز آن جا، به سادگی به دست می آید:

$$\arcsin \frac{y(x)}{A} - ax = \varphi$$

که در آن، φ عبارت است از ثابت تازه‌ای. از اینجا داریم:

$$y(x) = A \sin(ax + \varphi) \quad (34)$$

به سادگی می توان تحقیق کرد که تابع (34)، جواب معادله (31) است. بنابراین، رابطه (34)، مجموعه همه جواب‌های معادله دیفرانسیلی نوسان‌های همساز (31) را به ما می دهد. برای این که از مجموعه جواب‌های (34)، جواب مشخصی را جدا کنیم، باید مقادیر ثابت A و φ را معین کنیم. برای این منظور، کافی است مقدار تابع مجهول و مشتق آن را، به ازای مقداری مثل x از آوند داشته باشیم: $y(x) = y_0$ و $y'(x) = y'_0$. این‌ها، شرط‌های آغازین را تشکیل می‌دهند، که با قراردادن آن‌ها در (34) و در تساوی

۱. جواب معادله (33) را می توان از رابطه (34)، با تغییر علامت a ، به دست آورد.

مشتق‌های مرتبه بالاتر نباشد، معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم نامیده می شود. شبیه معادله‌های مرتبه اول، در اینجا هم، معادله‌های خطی دیفرانسیلی مرتبه دوم، از نظر کاربرد خود، اهمیت پیشتری دارند. این‌ها، معادله‌هایی هستند که در آن‌ها، بین تابع و مشتق‌های مرتبه اول و دوم آن، رابطه‌ای خطی وجود دارد. حالت خاص این گونه معادله‌ها، معادله نوسان‌های همساز است که می توان آن را به این صورت نوشت:

$$y''(x) + a^2 \cdot y(x) = 0 \quad (31)$$

که در آن $a > 0$ ، مقداری ثابت است. بینیم چنین معادله‌هایی چگونه حل می شوند. $y(x)$ را جوابی از معادله (31) می گیریم، یعنی:
 $y''(x) + a^2 \cdot y(x) = 0$ یک تساوی درست باشد. دو طرف این تساوی را در $y'(x)^2$ ضرب می کنیم، به دست می آید:

$$2y'(x)y''(x) + 2a^2 y(x)y'(x) = 0$$

که می توان آن را به این صورت نوشت:

$$(y''(x) + a^2 y(x))' = 0$$

واز آن جا، به سادگی، نتیجه می شود:

$$y''(x) + a^2 y(x) = C$$

C ، مقدار ثابت دلخواهی است. چون C مثبت است (برابر است، با مجموع دو مجدد کامل)، می توان فرض کرد: $C = a^2 A^2$ (A ، مقدار ثابت جدیدی است).

به این ترتیب، $y(x)$ ، در معادله دیفرانسیلی مرتبه اول $(y''(x) + a^2(A^2 - y^2(x)) = 0)$ صدق می کند، که به نوبه خود، متناظر با دو معادله دیفرانسیلی زیر است:

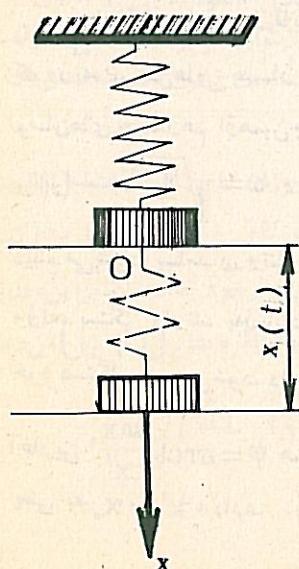
۱. نوسان‌های ناشی از نیروی کشسان فنر

مسئله. در انتهای فرقائی، وزنه‌ای به جرم m گرم آویزان کردند. وزنه از حالت تعادل خارج و پس به حالت اول بر می‌گردد. مطلوب است قانون حرکت وزنه، به شرطی که از جرم فنر مقاومت هوا، صرف نظر کنیم.

حل. محور Ox را به طرف پایین و در امتداد خطراست قائمی که از نقطه تعیق وزنه در حالت تعادل – که به عنوان مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم – می‌گذرد، به حساب می‌آوریم (شکل را بینید). انحراف وزنه را از حالت تعادل، در لحظه t ، برابر $x(t)$ می‌گیریم. فرض کنید که در لحظه آغازین ($t=0$)، این انحراف برابر x_0 و سرعت حرکت برابر x'_0 باشد، یعنی

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0. \quad (37)$$

این، شرط‌های آغازین است.



تصویر x و انحراف $x(t)$ علامت‌های یکسانی ندارند. بنابراین، معادله

$$y'(x) = aA \cos(ax + \varphi)$$

(این رابطه با دیفرانسیل گرفتن از رابطه (۳۴) بدست می‌آید)، به یک دستگاه دو معادله دو مجهولی نسبت به A و φ می‌رسیم:

$$\begin{cases} y_0 = A \sin(ax_0 + \varphi) \\ y'_0 = aA \cos(ax_0 + \varphi) \end{cases}$$

که با حل آن، A و φ به دست می‌آید (A را مثبت و φ را سازگار با شرط $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ در نظر می‌گیریم). مثلا، بازای x_0 داریم:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{y'^2_0}{a^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{ay_0}{y'_0}.$$

به این ترتیب، جواب معادله (۳۱)، با توجه به شرط‌های آغازین

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \quad (35)$$

به این صورت در می‌آید:

$$y(x) = \sqrt{y_0^2 + \frac{y'^2_0}{a^2}} \cdot \sin\left(ax + \arctg \frac{ay_0}{y'_0}\right) \quad (36)$$

یادآوری می‌کنیم که این، جواب منحصر به فرد معادله (۳۱)، بازای شرط‌های آغازین (۳۵) است، زیرا برای مقادیر ثابت A و φ ، با توجه به این شرط‌ها، تنها یک جواب به دست می‌آید.

معادله دیفرانسیل نوسان‌های همساز، ضمن بررسی انواع فرایندهای نوسانی، بدست می‌آید: نوسان‌های پاندول، آنتن، فنر، تکان‌های کشتی و غیره. چند نمونه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

حرکت وزنه، به صورت

$$m \cdot a_x = -k \cdot x(t)$$

درمی آید، که در آن، \ddot{x} عبارت است از تصویر شتاب \vec{a} بر محور Ox . نسبت $\frac{k}{m}$ را به ω^2 نشان می دهیم، که در این صورت، و با توجه به تساوی $(t) = x''$ و شرط های آغازین (۳۷)، به معادله دیفرانسیلی زیر می رسمیم:

$$x''(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0 \quad (38)$$

که معادله حرکت وزنه، با شرط های آغازین (۳۷) است. این معادله، شبیه معادله (۳۱) با شرط های آغازین (۳۵) است. جواب آن را، با توجه به رابطه (۳۶) می نویسیم:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0^2}{\omega^4}} \cdot \sin\left(\omega t + \arctg \frac{\omega x_0}{x_0}\right) \quad (39)$$

رابطه (۳۹)، معرف قانون حرکت وزنه است. از این رابطه دیده می شود که وزنه، نوسان هایی همساز نسبت به وضع تعادل خود دارد (نام گذاری معادله نوسان های همسازهم از همینجا آمده است). بسامد و تناوب نوسان، به ترتیب برابر است با $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ یا $T = \frac{2\pi}{\omega}$ همان طور که دیده می شود، بسامد ν و تناوب نوسان T ، تنها به درجه سختی فراز به جرم وزنه، بستگی دارند. بهزبان دیگر، تناوب نوسان و بسامد، از روی ویژگی های خود دستگاه معین می شود. دامنه همین نوسان، یعنی $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0^2}{\omega^2}}$ و مرحله آغازین $\varphi = \arctg \frac{\omega x_0}{x_0}$ هم بستگی به حالت اولیه دستگاه نوسان کنند، یعنی به x_0 و ω دارد.

۳. مدار نوسانی

مدار نوسانی به مداری الکتریکی گفته می شود که از خازن و پیچکی که به

جوشن های خازن متصل است، تشکیل شده باشد.

اگر خازن را به باتری وصل کنند، صفحه خازن، باری به دست می آورد و درجوشن های آن، اختلاف پتانسیل به وجود می آید. وقتی که خازن را که به این ترتیب باردار شده است، به پیچک وصل کنیم، آغاز به تخلیه شدن می کند و در مدار، جریان برق ظاهر می شود. ولی، شدت جریان، به خاطر پدیده خود القایی، به تدریج افزایش می یابد و وقتی به حد اکثر مقدار خود می رسد، که خازن به طور کامل تخلیه شود. ضمناً به خاطر وجود پدیده خود القایی، جریان یکباره از بین نمی رود. کم شدن تدریجی جریان، موجب پرشدن دوباره جوشن های خازن می شود. وقتی که جریان از بین می رود، جوشن های خازن دوباره پر می شوند، و دستگاه به حالت اول بر می گردد و روند درجهت مخالف جریان می یابد؛ نوسان های الکتریکی به وجود می آید.

مسئله خازنی با ظرفیت C فراداده و پیچکی با خود القایی I هابزی ω وصل شده اند. در لحظه آغازین ($t = 0$)، بار خازن برابر است با q_0 کولمب، و از راه پیچک، I_0 آمپر جریان دارد. مطلوب است قانون تغییر شد جریان در مدار (از مقاومت حرف نظر نمی کنیم).

حل. بار خازن را با $(t) = q$ و شدت جریان را در لحظه t با $(t) = I$ نشان می دهیم. چون $(t) = I = I_0$ ، برای حل مسئله، کافی است $(t) = q$ را پیدا کیم. در مدار نوسانی، مقاومت حقیقی R و منبع جریان وجود ندارد. بنابراین، در بین (۲۳) داریم: $0 = E(t) = R = I(t) = E = I_0 + I_c + I_R$ می رسمیم،

$$\text{که در آن، } \frac{q(t)}{C} = I_c \text{ و } I'(t) = L \cdot q''(t) \text{ و } I''(t) = L \cdot q(t).$$

به این ترتیب، به معادله دیفرانسیلی مرتبه دو م

$$q''(t) + \frac{q(t)}{L \cdot C} = 0 \quad (40)$$

با شرط های آغازین $q(0) = q_0$ و $q'(0) = I_0$ می رسمیم که شبیه معادله

روش مدل‌سازی ریاضی. معادله دیفرانسیلی، که در جریان مطالعه بعضی از مسائلهای فنی به وجود آمده است، موجب شده است که مثلاً یک وسیله الکتریکی ساخته شود که کار آن، درست همان چیزی را شرح می‌دهد که از معادله دیفرانسیلی به دست می‌آمد. با مشاهده کار این وسیله الکتریکی، می‌توانیم درباره رفتار تابع مججهول داوری کنیم. مثلاً فرض کنید یک دستگاه مکانیکی تشکیل شده باشد از خلطکی که از راه فنوفلکه، که در مایع غلیظی فرو رفته و گردش را به خلطک دیگری که به فلکه محکم چسبیده است، منتقل کند. برای مطالعه کار این دستگاه، دستگاه دیگری ساخته می‌شود. دستگاه جدیداً الکتریکی است و شامل الکتروموتوری است که از راه پیچک القایی، خازن و مقاومت حقیقی، به ماشین حسابی با انرژی الکتریکی وصل شده است؛ ضمناً می‌توان مقادیر اندوکتیویته، ظرفیت و مقاومت را طوری انتخاب کرد که به صورت معینی باسختی فر، اینرسی فلکه و اصطکاک مایع، متناظر باشند. در صورت چنین تناظری، هر دو دستگاه را می‌توان بوسیله یک معادله دیفرانسیلی شرح داد. در نتیجه، با اندازه گیری شدت جریان و فشار الکتریکی، می‌توان درباره کار دستگاه مکانیکی نخست، داوری کرد.

چند مسئله:

۱. این معادله‌ها را حل کنید:

- a) $y' - 2y = 0$, $y(1) = 12$;
- b) $y' + 2y = 6$, $y(0) = -1$;
- c) $y' = ax + by$;
- d) $y' + xy = 0$;
- e) $y' + xy = x$, $y(0) = 2$;

$$y = -4e^{-2x} + 3 \quad (b) \quad y = 12e^{2(x-1)} \quad (a)$$

(۳۱) است. بنابراین، جواب آن را، از رابطه (۳۶) پیدا می‌کنیم:

$$q(t) = \sqrt{q_0^2 + I_0^2 \cdot L \cdot C} \times \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L \cdot C}} + \arctan \frac{q_0}{I_0 \sqrt{L \cdot C}}\right) \quad (41)$$

بادیفرانسیل گرفتن از رابطه (۴۱) نسبت به t ، شدت جریان را در مدار به دست می‌آوریم:

$$I(t) = \sqrt{\frac{q_0^2}{L \cdot C} + I_0^2} \times \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L \cdot C}} + \arctan \frac{q_0}{I_0 \sqrt{L \cdot C}}\right)$$

از این رابطه دیده می‌شود که $I(t)$ به طور متناوب تغییر می‌کند، یعنی در مدار نوسان‌های الکتریکی باسالمد $\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ و تناوب $T = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$ ، پیش می‌آید. یادآوری می‌کنیم که با سامدو تناوب نوسان، به شرط‌های آغازین، بستگی ندارند و با عامل‌های مدار الکتریکی معین می‌شوند: قابلیت القایی پیچک و ظرفیت خازن.

ما مسائلهای فیزیکی گوناگونی را مورد بحث قراردادیم، که ضمن بررسی آنها، به معادله‌های دیفرانسیلی مرتبه اول و مرتبه دوم مشابهی برخورد کردیم. این بررسی، هم از لحاظ فلسفی – که بریگانگی طبیعت تأکیدی کند – هم از نظر آگاهی‌های مربوط به دانش طبیعی و هم، و به خصوص، از نظر تأکید بر نیروی ریاضیات در دانش‌های طبیعی، اهمیت بسیار دارد. این بررسی از لحاظ عملی هم، ارزش زیادی دارد. شباهت معادله‌های دیفرانسیلی، که ضمن مطالعه پدیده‌های گوناگون مربوط به زندگی به دست می‌آیند، منجر به روش بسیار مهمی برای حل مسائلهای عملی شده است:

به شرطی که مقدار اولیه آن، ۱ کیلوگرم باشد؟

$$\text{جواب. } (گرم) ۱۳۶ \approx (کیلوگرم)^2 \cdot A(20) = e^{-2}$$

۷. درجه حرارت محیط بیرون، صفر درجه سانتی گراد است. حرارت

اولیه یک جسم گرم چه بوده است، به شرطی که بدانیم یک ساعت بعد از آغاز سردشدن، درجه حرارت آن به $\frac{1}{3}$ درجه حرارت اولیه و بعد از دو ساعت به ۱ درجه سانتی گراد رسیده باشد؟

$$\text{جواب. } ۳۶ \text{ درجه سانتی گراد.}$$

۸. درجه حرارت نانی که از تنور بیرون می‌آید، در جریان ۲۰ دقیقه

اول از ۱۵۵ درجه به ۴۰ درجه سقوط می‌کند. درجه حرارت هوا برابر ۲۵ درجه است. درجه حرارت نان، بعد از ۴ دقیقه چقدر است؟

$$\text{جواب. تقریباً } ۴۱/۳ \text{ درجه سانتی گراد.}$$

۹. راهی را که یک جسم در حرکت مستقیم الخط خود در زمان t طی

می‌کند، پیدا کنید، به شرطی که سرعت آن باراهی که طی کرده است متناسب باشد و ضمناً بدانیم که در ۲۵ ثانية اول ۴۰۰ متر و در ۵ ثانیه بعد ۲۸۰۰ متر طی کرده است.

$$\text{جواب. (متر)} \frac{1}{2} t^2 = 25 \times 25$$

$$; y = ce^{-\frac{x}{2}} \quad (d) ; y = ce^{bx} - \frac{a}{b}x - \frac{a}{b^2} (c)$$

$$; y = 1 + e^{-\frac{x}{2}} \quad (e)$$

۱۰. دوره نیم عمر یک ماده را دیوآکتیو، برابر است با ۱۰۰۰ سال. بعد از

۲۰۰۰ سال چقدر از این ماده باقی می‌ماند؟ به شرطی که مقدار اولیه آن M باشد، بعد از ۵۰۰ سال چطور؟

$$\text{جواب. } M(500) = M_0 \sqrt[4]{2}, \quad M(2000) = \frac{M(0)}{4}$$

۱۱. ضمن تخمیر، سرعت دشد خمیر مایه عمل کننده، با مقدار موجود آن، متناسب است. قانون تشکیل خمیر مایه را پیدا کنید، به شرطی که به ازای t ، مقدار آن برابر y کیلوگرم باشد.

$$\text{جواب. } k > 0, \quad y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$$

۱۲. مقدار اولیه خمیر مایه را پیدا کنید به شرطی که بدانیم ۳ ساعت بعد از آغاز تخمیر، برابر $5/4$ کیلوگرم و ۷ ساعت بعد از آغاز تخمیر، برابر ۲ کیلوگرم شده است.

$$\text{جواب. } \frac{1}{2} t^5 = 2 \frac{5}{4} \quad y(t) = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} (کیلوگرم)$$

۱۳. شیشه به ضخامت ۱ متر، می‌تواند $\frac{1}{4}$ مقدار نوری را که از آن عبور می‌کند، به خود جذب کند. نور از شیشه‌ای با کدام ضخامت عبور کند تا ۱٪ آن جذب شیشه بشود؟

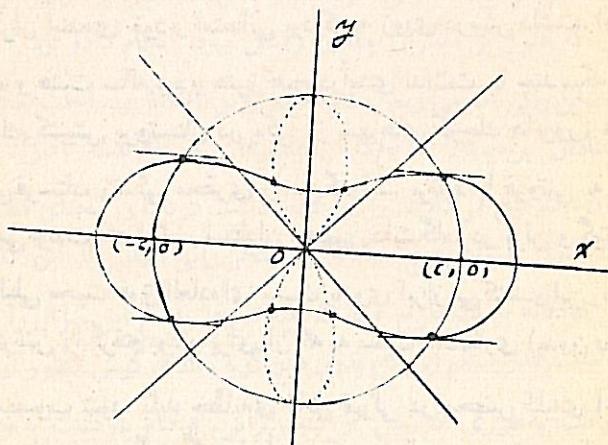
$$\text{جواب. (متر)} 5/035 \approx$$

۱۴. از ظرفی به گنجایش ۱۰ لیتروپر از محلول آبنمک، آب با سرعت ۱ لیتر در دقیقه جریان دارد. بعد از ۲۵ دقیقه، چقدر نمک در ظرف باقی می‌ماند،

می توان بهره ور شد و جزئیات مسئله را بررسی کرد.

بررسی منحنی :

هرگاه ضریب زاویه مماس بر منحنی را بررسی کنیم، ملاحظه می شود که مماس بر منحنی در نقاط تقاطع آن با دایره $x^2 + y^2 = c^2$ و با خط $x = 0$ با خطي AB موازی است (شکل ۲). البته حالات مختلف را باید بحث کرد.



شکل ۲

هرگاه انحنای منحنی را بررسی کنیم، نتیجه می گیریم که تابع منحنی در نقاط تقاطع آن بالمنیسکات (inflection) منحنی در نقاط تقاطع آن بالمنیسکات

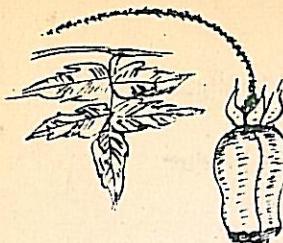
$$r^2 = -c^2 \cos 2\theta$$

قرار دارد. بدلاوه از بحث در وجود این نقاط نتیجده می گیریم که نقاط موجودند فقط و فقط وقتی که داشته باشیم:

$$c^2 \leq k \leq 2c^2$$

مراجعه :

Smith, David Eugene, History of Mathematics Volume II, Ginn and Company, (1925).



بیضوی کاسینی و برنولی

علیرضا امیرمعز

دو نقطه ثابت A و B را در نظر می گیریم. نقطه P چنان تغییر می کند که $|PA| \cdot |PB| = k^2$ مقداری است ثابت. مکان هندسی P را بیضوی کاسینی می گویند. خواص این منحنی بسیار جالب است؛ به خصوص شرط این که منحنی محدب باشد اهمیت کاربردی دارد.

بیضوی ها :

هرگاه در دستگاه قطبی $A = (c, 0)$ و $B = (c, \pi)$ بگیریم، نقطه P در معادله زیر صدق می کند.

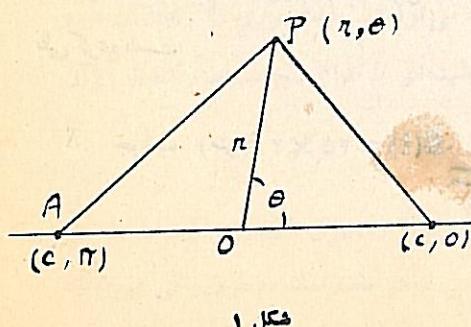
$$r^2 = c^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{k^2 - c^2} \sin^2 2\theta \quad (1)$$

این معادله با در نظر گرفتن رابطه کسینوس ها به دست می آید (شکل ۱). رابطه (۱)، در دستگاه قائم، به معادله زیر بدل می شود.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2) + k^2 - c^4 \quad (2)$$

کاسینی (Giovanni Domenico Cassini) در سال ۱۶۸۵ این منحنی را بررسی کرده است.

حالات خاص آن را که $k = c$ است برنولی (Jacques Bernoulli) در سال ۱۶۹۴ بررسی کرده است و آنرا لمنیسکات (Lemniscate) نامیده است.



شکل ۱

دو خاصیت بسیار جالب این منحنی زیبائی خاصی دارد. بدون برهان این خواص را بررسی می کنیم. البته اثبات این خواص بسیار ساده است و از خواص مشتقات

انحنای فضا

ربانی فاصله‌ی چندانی نداشت. (این برداشت، امروزه نیز در گوتینگن عمومیت دارد.) عنوان موضوعی که گوس برای سخن رانی، ریمن جوان برگزید، عبارت بود از: «فرض‌هایی که پایه‌ی هندسه را تشکیل می‌دهند.» گوس در مورد این عنوان چیزی جز چند بررسی مبهم انتشار نداده بود، با این حال، این موضوع را بر دو موضوع دیگری که ریمن پیشنهاد کرده بود ترجیح داد، زیرا کنجکاو بود بیند این مرد جوان در مورد چنین موضوع ژرف و غریبی چه خواهد گفت؛ موضوعی که گوس خود بسیار بدان اندیشه‌ید بود و پیرامون آن، کار زیادی که هنوز بر دیگران چندان روش نبود، انجام داده بود.

روز سخن رانی عمومی ریمن، شنبه دهم ژوئن ۱۸۵۴ بود. اغلب مستمعین او را استادان برجسته، تاریخ‌دانان، فیلسوفان و خلاصه افراد غیر ریاضی دان، تشکیل می‌دادند. ریمن قصد داشت درباره‌ی انحنای فضاهای ۲۰- بعدی، بدون نوشتن هیچ معادله‌ای، سخن رانی کند. آیا این کار یک خودخواهی مذبانه یا یک طرح فرصت طلبانه بود؟ پاسخ این سؤال را هرگز نخواهیم دانست. قدر مسلم این که، بدون هیچ گونه معادله، گوس منظور اورا به خوبی دریافت به طوری که پس از سخن رانی، هنگام بازگشت به خانه با حرارت فوق العاده‌ای در مورد احساس ستایش شگرف خود نسبت به نظراتی، که توسط ریمن عرضه شده بود، با همکارش ویلهلم ویز سخن گفت.

اشتیاق گوس به جا بود. برنارد جوان به قلمرو آن چنان نویی از اندیشه دست یافته بود که در آن روزگار، کمتر دانشمندی می‌توانست کار او را دنبال کند. افکار انتزاعی او، نیم قرن بعد در کارهای آلتز اینشتین با واقعیت تجربی درآمیخت. اینشتین متوجه شد که اندیشه‌های ریمن را می‌توان مستقیماً در مسئله اندرکش نور و گرانش به کار گرفت و این اندیشه‌ها را مبنای نظریه نسبیت عمومی خود - که امروزه برداشت ما از جهان حاکم است - قرار داد.

در بهار سال ۱۸۵۴، یک ریاضی دان جوان آلمانی به نام برنارد ریمن^۲ به شدت نگران آینده‌ی خود و امتحانی بود که به زودی دریش داشت. او در آن ایام بیست و هشت ساله بود و هنوز هیچ درآمدی نداشت. با چند سکه‌ای که پدرش (یک کشیش پروستان در یکی از شهرهای کوچک هانوور) هر ماه برایش می‌فرستاد، زندگی محقری را می‌گذراند. برنارد با فروتنی به پدر و برادرش می‌نوشت که اغلب استادان مشهور دانشگاه، در برلن و گوتینگن، بی هیچ دلیلی محبت فوق العاده‌ای نسبت به وی ابراز می‌کنند. در این زمان، او مدرک دکتریش را گرفته بود و برای آن که به سمت دانشیاری (بدون دریافت حقوق) منصوب شود، باید خطابه‌ی قابل قبولی در محضر کلیه‌ی اعضای دانشکده‌ی فلسفه در گوتینگن، ایراد می‌کرد. برنارد سه موضوع را پیشنهاد کرده بود. در آن روزها به برادرش نوشت: «دو موضوع اول را به خوبی تهیه کرده بودم، اما گوس موضوع سوم را انتخاب کرد و حالا به زحمت افتاده‌ام.»

کارل فردریک گوس^۳، سرکرده‌ی ریاضی دانان آلمان و مایه‌ی مبارفات دانشکده‌ی خود بود. در تصور برنارد از عرش اعلا، مبل کار گوس از بارگاه

1. P. Lecorbeiller

2. Bernhard Riemann

3. Hanover

4. Karl Friedrich Gauss

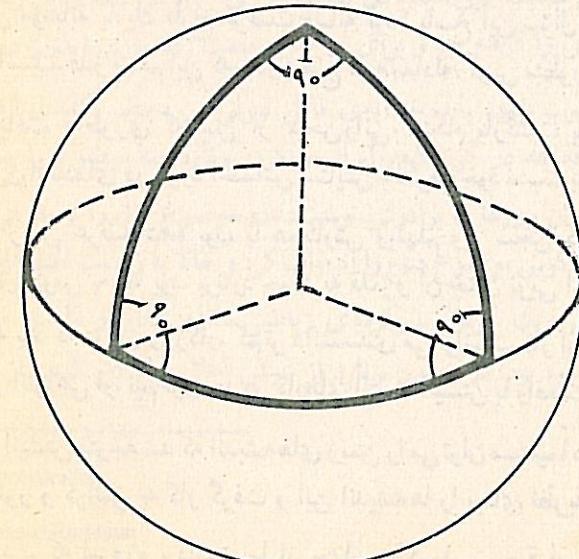
و قطب جنوب باهم تلاقی می کنند. اگر قطعاتی از سه دایره‌ی عظیمه (مثلاً یک‌چهارم خط استوای زمین و نیمه‌های شمالی دو نصف‌النهار) یکدیگر را قطع کنند و بدین ترتیب یک «مثلث کروی» ایجاد کنند، مجموع سه زاویه‌ی آن (در این مثال) برابر 270° درجه یا سه قائمه خواهد بود. تفاوت بین این مثلث و مثلث مسطحه از این جا ناشی می‌شود که مثلث کروی به جای سطح صاف، روی سطح انحنادار رسم شده است.

حال، چگونه در می‌باییم که سطح یک میز صاف، و سطح زمین کروی است. در همه‌ی تمدن‌های اولیه چنین تصور می‌شد که زمین به شکل صفحه‌ی مدوری است که کوه‌ها سطح آن را - هم چون غذا بر میز شاهان - برآمده کرده‌اند. پیش از آن که انسان بتواند از جو زمین خارج شود و از دور دست بدان بنگرد، مشاهده‌ی شکل حقیقی زمین برایش ناممکن است؛ پس اخترشناسان یونانی چگونه به این نتیجه دست یافتند که زمین گرد است؟ آنان مشاهده کرده بودند که ستاره‌ی قطبی در یونان نسبت به مصر ذر ارتفاع بیش تری از آسمان قرار دارد. پس معلوم می‌شود که برای پی بردن به گرد بودن یک کره، یاباید از فاصله‌ی دور به آن نگاه کنیم و یا آن که روی آن بایستیم و اجسامی را که در دور دست واقع‌اند، مورد مشاهده قرار دهیم.

علاوه براین، انسان از دو روش کاملاً متفاوت دیگر نیز توانست به گرد بودن زمین پی ببرد. یکی از این دوراه دریانوری در قلمرو رُمین بود. انسان دریافت که اگرچه زمین هیچ «له» و هیچ مرزی ندارد، مساحت آن محدود است. این حقیقت قابل توجهی است: سطح زمین بدون داشتن هیچ کرانه‌ای، محدود است. بی‌شک، این وضع امکان مسطح بودن زمین را منتفی می‌سازد. سطح یک صفحه، بی‌کرانه و در عین حال نامحدود است. (در گفت‌وگوی روزمره‌ی، دعوازه‌ی «بی‌کرانه» و «نامحدود» مترادف محسوب می‌شود و این نشان می‌دهد که کرویت زمین هنوز به طور واقعی در ضمیر ما جای گزین نشده است.)

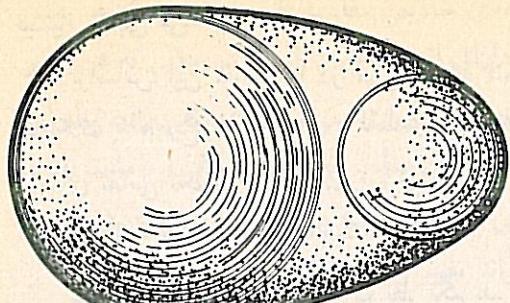
حال به سال ۱۸۵۴ برمی‌گردیم تا بینیم ریمن در آن روز از ماه ژوئن چه نظراتی را در سخن‌رانی خود ابراز کرد. پیش از پرداختن به نظرات ریمن، لازم است زمینه‌ای نسبتاً ابتدایی در این مورد داشته باشیم:

خواننده بی‌شک با عناصر هندسه‌ی مسطحه آشناست. خط راست کوتاه‌ترین مسیر بین دونقطه است؛ خطوط موازی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ مجموع سه زاویه‌ی مثلث برابر دو قائمه یا 180° درجه است و احکام دیگری از این قبیل: هم‌چنین می‌دانیم که در هندسه‌ی اشکالی که روی سطح کره ترسیم می‌شوند، قوانین دیگری حاکم است. کوتاه‌ترین مسیر بین دونقطه روی سطح کره، منطبق بر یک «دایره عظیمه» است؛ این منحنی در اثر تقاطع کره با صفحه‌ای که از دونقطه‌ی مذبور و مرکز کره می‌گذرد و کره را به دونیمه مساوی تقسیم می‌کند، به دست می‌آید. دو دایره‌ی عظیمه همیشه یکدیگر را در دونقطه قطع می‌کنند؛ مثلاً هر دو نصف‌النهار از زمین، همیشه در قطب شمال



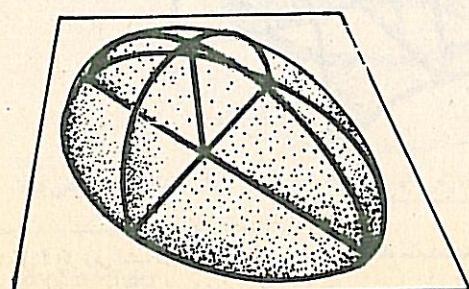
شکل ۱ مثلث‌های که روی صفحه و روی کره رسم می‌شوند، از قوانین متفاوتی تعیت می‌کنند. روی صفحه، همیشه مجموع زوایای مثلث 180° درجه است. تقاطع سه دایره‌ی عظیمه روی سطح کره، سه زاویه می‌سازد که مجموعشان (مثلاً) 270° درجه می‌شود.

حال، اگر تکه‌ای از پوسته‌ی تخم مرغ را که به ناحیه‌ی میانی آن تعلق دارد، به ما بدهند، آیا می‌توانیم انحنای آن را تعریف کیم؟ این کار قدری



شکل ۲ تخم مرغ دارای منحنی است.
چنان که گویی سر بزرگش بخشی از یک کره‌ی
یک کره و سر کوچکش از یک کره‌ی
کوچک‌تر است. بخش میانی دارای
انحنای متفاوتی است.

دشوار است زیرا چنین تکه‌ای را نمی‌توان با بخشی از یک کره‌ی ساده یکسان دانست. مسأله به صورت زیر حل می‌شود. فرض کنید که این تکه را که کم و بیش شکل یک سطح بیضوی در امتداد طولی را دارد، روی میز قرار می‌دهیم و بدین ترتیب شکل یک گرد کم ارتفاع را به خود می‌گیرد. هر مقطع قائم از این گرد، یک منحنی کاو (مقعر) به طرف پایین خواهد بود. هم‌چنین، هر یک از این مقاطع قائم شبیه بخشی از یک دایره خواهد بود، اما همه‌ی این دایره‌ها دارای شعاع برابر نخواهند بود. مقطعی که از کم عرض ترین قسمت قاعده می‌گذرد، کوچک‌ترین شعاع و مقطعی که در جهت طولی داده شود، بزرگ‌ترین شعاع را خواهد داشت. شعاع اول را R_1 و شعاع دوم را R_2 می‌نامیم. هندسه‌دانان در این مورد به نوعی، میانگین می‌گیرند و انحنای آن بخش کوچک از پوسته‌ی

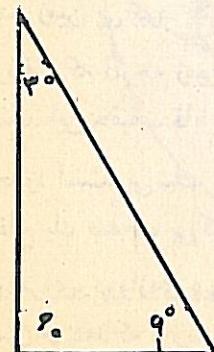


شکل ۲ اگر نیمه‌ی تخم مرغی روی میز قرار گیرد و با مقاطع قائم برش داده شود، این مقاطع به صورت منحنی‌هایی با تقریب رو به پایین، و به شکل بخش‌هایی از دایره‌های دارای شعاع‌های متفاوت خواهد بود.

بنابراین، حتی اگر ابرهای غلیظی همواره کره‌ی زمین را می‌پوشانندند، انسان به گرد بودن زمین آگاهی می‌یافتد. حال فرض کنید که به طریقی از پیموده شدن سراسر زمین توسط بشر، جلوگیری می‌شد. در این صورت، هنوز راه دیگری وجود داشت که انسان دریابد که بروی یک کره زندگی می‌کند؛ این راه، استفاده از هندسه‌ی کروی است که به بحث فعلی ما مربوط است. اگر مثلث کوچکی - مثلاً به اضلاع حدود ۱۰ متر - را روی سطح زمین در نظر بگیریم، تشخیص آن از مثلث مسطح، امکان‌پذیر نیست؛ فزوونی مجموع زوایای آن، نسبت به ۱۸۰ درجه، آنقدر اندک است که قابل اندازه‌گیری نیست. هرچه مثلث‌های بزرگ‌تر و بزرگ‌تری را روی سطح کروی زمین در نظر بگیریم، انحنای آن‌ها بیش تر و بیش تر اهمیت می‌یابد و در فزوونی مجموع زوایای آن‌ها نسبت به ۱۸۰ درجه، نمودار می‌گردد. بنابراین با گسترش هرچه بیش تر شیوه‌های اکتشاف و نقشه‌برداری، انسان سرانجام می‌توانست کرویت زمین را ثابت کند و به کمک اندازه‌گیری‌های مربوطه، شعاع کره زمین را به دست آورد. بدینیست قدری مشروح تر به این موضوع پردازم.

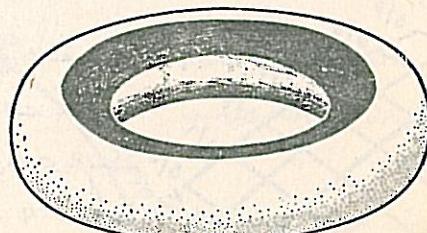
گذشته از صفحه و کره، انواع پرشماری از سطوح وجود دارد. تخم مرغ را در نظر بگیرید، که دارای یک سر بزرگ و یک سر کوچک است. یک تکه مدور از سر بزرگ تر پوسته تخم مرغ، شبیه بخشی از یک کره به نظر می‌رسد و یک تکه مدور از سر کوچک تر پوسته تخم مرغ، شبیه بخشی از یک کره است

که شعاعش کوچک‌تر از کره‌ی اول باشد. تکه‌ای که به انتهای کوچک‌تر تعلق دارد، خمیده‌تر از تکه‌ی متعلق به سر بزرگ تر، به نظر می‌رسد. هندسه‌دانان، انحنای کره را به صورت عکس مجذور شعاع آن، تعریف می‌کنند. بنابراین هرچه شعاع کوچک‌تر باشد، انحنای بیش تر است، و بر عکس.



در اینجا به موضوع دیگری نیز باید توجه داشت. تویی یک لاستیک اتوموبیل را در نظر بگیرید. اگر نیمه‌ی داخلی آن را (که مقابل فضای خالی وسط لاستیک است) با نیمه‌ی خارجی مقایسه کنیم، می‌بینیم که هر بخش کوچکی از نیمه‌ی خارجی دارای انحنای مثبت است، در حالی که هر بخش کوچک از نیمه‌ی داخلی - مانند سطح زین اسپی - انحنای منفی دارد. بنابراین نباید تصور کرد که در تمام نقاط یک سطح، انحنا باید یا منفی و یا مثبت باشد؛ وقتی روی سطح، از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر می‌رویم، انحنا نه تنها می‌تواند کم و زیاد شود، بلکه می‌تواند تغییر علامت هم بدهد.

به یاد داشته باشید که آن چه در اینجا آورده شد، نگاهی گنرا به مطالب بود که تا پیش از زمان ریمن، درباره‌ی انحنای سطوح می‌دانستند. مطالب مذکور در قرن هیجدهم بر ثنوارداولر، ریاضی دان سووسی که قدرت تخیل و بازده کاری چشمگیری داشت - آشکار گشته بود و توسط گروهی از هندسه‌دانان فرانسوی در مدرسه‌ی «پلی‌تکنیک» نوبنیاد این کشور، گسترش یافت. سپس در سال ۱۸۲۷ گوس، ممتحن ارشد ریمن، تعمیم و دقت بیشتری به موضوع بخشید. وی یادداشت‌هایی درباره‌ی سطوح منحنی منتشر کرد که آن چنان درخشنan و کامل بود که حتی امروز نیز می‌توان از آن در درس‌های دانشگاهی سود جست.



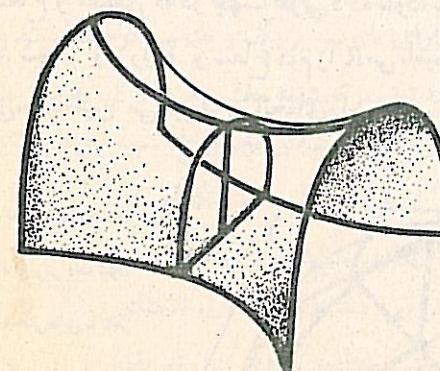
شکل ۵ تویی لاستیک اتوموبیل، در نیمه‌ی خارجی، انحنای مثبت و در نیمه‌ی داخلی (سیاه) انحنای منفی دارد.

6. Leonhard Euler

تخم مرغ را به صورت عکس حاصل ضرب R, R تعریف می‌کنند. می‌بینید که اگر پوسته تخم مرغ به شکل کره‌ی کامل بود، این راه دوباره به همان تعریف پیشین منتهی می‌شد.

براساس این تعریف‌ها در می‌باییم که انحنای یک تکه‌ی کوچک از پوسته‌ی تخم مرغ، از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر می‌کند. سخن گفتن از انحنای تمامی تخم مرغ نیز معنایی نخواهد داشت و تنها می‌توانیم در مورد انحنای یک تکه‌ی کوچک، صحبت کنیم.

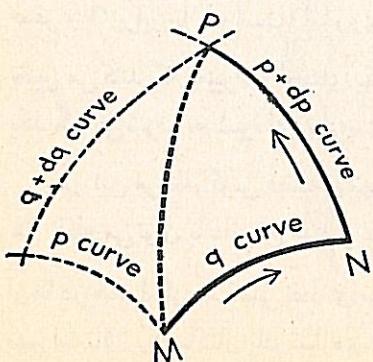
حال، سطح یک زین اسب را در نظر بگیرید. مقطع قائم عرضی در آن، یک منحنی با تقریب به سمت پایین و مقطع قائم طولی، یک منحنی با تقریب روبرو بالا، پدید می‌آورد. این امر حتی یک تکه‌ی کوچک از سطح زین اسب را از یک تکه‌ی کوچک از پوسته‌ی تخم مرغ، متمایز می‌سازد. به گفته‌ی هندسه‌دانان، پوسته‌ی تخم مرغ همه جا دارای انحنای مثبت و زین اسب همه جا دارای انحنای منفی است. انحنای یک تکه‌ی کوچک از سطح زین اسپی رامی توان دوباره به صورت عکس حاصل ضرب R, R تعریف کرد، این بار باید علامت منفی برای آن قائل شد.



شکل ۶ اگر زین اسب درجهت طولی برش داده شود، مقطع‌های منحنی‌های رو به بالا خواهد بود و مقطع‌های عرضی، منحنی‌های رو به پایین با شعاع‌های متفاوت خواهد بود. سطح زین اسپی بنا به تعریف، دارای انحنای منفی است.

اولاً، منحنی های p و منحنی های q همه جا یکدیگر را در زاویه‌ی قائم قطع نمی‌کنند و این امر موجب افزایش جمله‌ی سومی به مجموع دو مجذور در معادله فیثاغورث ($a^2+b^2=c^2$)، می‌شود. ثانیاً، اگر دو دسته منحنی های مذکور را به صورت نوعی تور ماهیگیری که به طور محکم روی تمامی سطح کشیده شده، در نظر آوریم، هنگام رفتن از یک حوزه‌ی سطح به حوزه‌ای دیگر که انحنایش متفاوت است، زوايا و اضلاع خانه‌های کوچک، اندکی تغییر خواهد کرد.

گوس استدلال خود را به صورت یک معادله‌ی مشهور ریاضی بیان کرد. یک منحنی P و یک منحنی q از نقطه مفروض M روی یک سطح منحنی، می‌گذرند. «شبه طول» p و «شبه عرض» q متعلق به نقطه‌ی M دارای مقادیر عددی معین هستند. می‌خواهیم از نقطه‌ی M به نقطه‌ی p در همسایگی آن، روی سطح برویم. ابتدا مقدار p را اندکی افزایش می‌دهیم، در حالی که مقدار q ثابت بماند. گوس نماد dp را برای اندک افزایش p به کار برد. بدین ترتیب به نقطه N ، با طول $p+dp$ و عرض q می‌رسیم. سپس q را به مقدار اندک dq افزایش می‌دهیم، به طوری که $p+dp$ ثابت بماند. حال به نقطه‌ی p ، دارای طول $p+dp$ رسیده ایم. می‌خواهیم فاصله نقطه M تا نقطه p را به دست آوریم. چون این فاصله بسیار کوچک است، آن را با نماد ds نشان می‌دهیم. گوس مربع

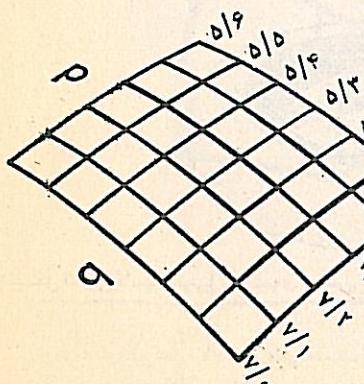


شکل ۷ روی سطحی که انحنای دارد، فاصله‌ی نقطه‌ی p از نقطه‌ی M را نمی‌توان از قانون فیثاغورث بدست آورد.

گوس آن را به صورت تابعی از مختصات متقاطع مربوط به آن نقاط و انحنای سطح که از نقطه‌ای به نقطه‌ی p دیگر تغییر می‌کند، تعریف کرد.

گوس از اینجا آغاز کرد که جغرافی دانان موقعیت هر شهر را در روی کره‌ی زمین با دادن طول و عرض جغرافیایی مشخص می‌کنند. آنها نصف النهارهای مربوط به طول جغرافیایی (مثلًاً نصف النهاری که همه‌ی نقاط واقع در طول ۸۵ درجه در غرب دایره‌ی عظیمه‌ی شمالی-جنوبی گذرنده از گرینویچ را متصل می‌کند) و همچنین مدارهای عرضی موازی را رسم می‌کنند. در اینجا می‌توان از «دسته‌ی» نصف النهارها و «دسته‌ی» مدارها سخن گفت. گوس چنین اندیشید که برای مشخص کردن موقعیت نقطه‌ای روی هر سطحی که از نظر ریاضی معین است، روی آن سطح دو دسته منحنی به نام منحنی های p و منحنی های q رسم می‌کیم. ضمناً ملاحظاتی به عمل می‌آوریم که با داشتن مختصات p و q متعلق به هر نقطه، جای آن دقیقاً مشخص شود.

بصیرت عظیم گوس در همینجا تجلی یافت. اگر روی یک سطح کاملاً صاف، سه کیلومتر در یک جهت حرکت کنیم، سپس به سمت چپ بیچیم و چهار کیلومتر در جهت عمود بر مسیر اخیر پیش برویم، با توجه به قضیه‌ی فیثاغورث می‌دانیم که فاصله‌ی نهایی ما از مبدأ حرکت، پنج کیلومتر خواهد بود. اما گوس چنین استدلال کرد که روی یک سطح منحنی-مثلًاً سطح بیضوی یا زین اسپی یا هر چیز دیگر- فاصله‌ی نهایی برابر مقدار اخیر نخواهد شد.



شکل ۶ موقعیت هر نقطه روی سطحی که از نظر ریاضی مشخص است، با داشتن یک مختصه از دسته‌ی منحنی های p و یک مختصه از دسته‌ی منحنی های q که بایکدیگر متقاطعند، معین می‌شود. تنها روی سطح کروی، این منحنی ها بر یکدیگر عمودند.

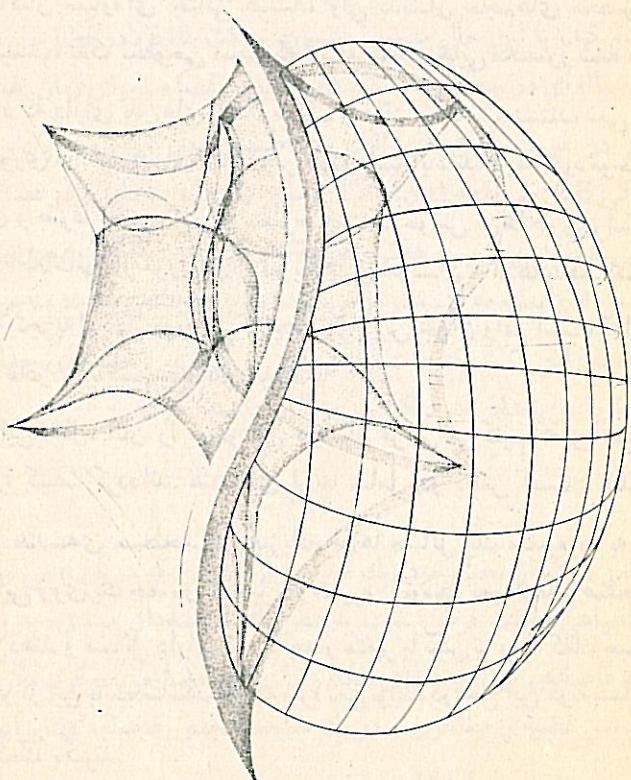
فاصله‌ی ds را به صورت مجموع سه جمله بیان کرد:

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

این معادله یکی از نقاط اوج تمامی ریاضیات و فیزیک است؛ قله‌ای که از فراز آن باید در برابر نبوغ گوس، سر تعظیم فرود آورد. اکنون دیگر برای رسیدن از معادله‌ی گوس به یهندی نسبیت عمومی بیش از دو گام دیگر باقی نمانده بود؛ یکی از این دو گام را رین و گام دیگر را اینشتین پیمود.

در هر نقطه‌ی M روی سطح مفروض، این معادله با قضیه‌ی اقلیدسی در مورد ضلع سوم هر مثلث، ds ، و دو ضلع دیگر آن، dp و dq تفاوتی ندارد. اما نکته‌ی تازه در این جاست که گوس توابع E ، F و G را مطرح ساخت که مقادیر عددی‌شان از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر روی سطح، به طور پیوسته تغییر می‌کند. گوس مشاهده کرد که هر یک از کمیت‌های E ، F و G - تابعی از دو کمیت فرضی P و q - شبه طول و شبه عرض نقطه‌ی M - می‌باشد. روی یک صفحه می‌توانیم با ترسیم خطوط p و خطوط q ، آن صفحه را به مربع‌های کوچک برابر- مانند صفحه‌ی شطرنج- تقسیم کنیم؛ در این صورت خواهیم داشت: $ds^2 = dp^2 + dq^2$ ، به طوری که همیشه در سراسر سطح، E برابر با یک، F برابر با صفر و G برابر با یک است. اما روی یک سطح منحنی، E ، F و G به طریقی تغییر می‌کنند که تغییرات انحنای سطح را که موجب تمایز نقاط مختلف از یکدیگر می‌شود، به شیوه‌ای تجربی ولی دقیق، نشان دهند.

در این مرحله، گوس قضیه‌ی مهم زیر را ثابت کرد که: انحنای سطح را در هر نقطه می‌توان با دانستن مقادیر E ، F و G در آن نقطه، و نحوه‌ی تغییرات آن‌ها در همسایگی بلافصل نقطه‌ی مزبور، به دست آورد. چرا این قضیه بسیار مهم است؟ زیرا ساکنان یک سیاره‌ی خیالی که سراسر پوشیده از ابر است و



تجسم کنیم، اما مسائل فیزیکی با سه متغیر x, y و z را حل می کنیم. پس چرا نتوانیم از فضای سه بعدی سخن بگوییم؟ حتی اگر نمی توانیم نقطه ها، خط ها و سطوح واقع در این فضا را تجسم کنیم، شاید مفید باشد که قادر به بحث درباره ای آنها باشیم. شاید از این میان، سودی حاصل شود. در هر صورت،

امتحاش ضرری ندارد.» و بدین ترتیب آن را امتحان کردند.

نیازی نیست که داستان را بیش از این ادامه دهیم؛ معنای آن به قدر کافی روشن است. ما درست مثل همین موجودات هستیم، فقط بدن ما سه بعدی است و در فضای سه بعدی حرکت می کنیم. هیچ یک از ما نمی تواند بعد چهارم را تجسم کند، با این حال مسائلی در مورد حرکت یک ذره در فضا حل می کنیم و این مسئله ای در چهار بعد است: x, y, z برای فضا و t برای زمان. هم چنین، مسائلی در مورد میدان های الکترومغناطیسی حل می کنیم. بردار میدان الکتریکی E در هر نقطه (x, y, z) ، سه تصویر E_x, E_y, E_z دارد و در فضا و زمان متغیر می کند، بدین ترتیب، هفت متغیر به میان می آید. سه متغیر هم برای میدان مغناطیسی B وابسته به آن، مطرح می شود، پس روی هم رفته ده متغیر داریم. درست مثل این است که دانشمند ریاضی - فیزیک، با فضاهای چهار یا ده بعدی یا با هر تعداد بعد دیگر سر و کار داشته باشد.

ریمن در آغاز بحث خود، یک فضای n بعدی را که در آن n می تواند هر عدد دلخواهی باشد، فرض نمود. به نظر یک هندسه دان مبتدی، به سادگی می توان فاصله ای بین دو نقطه ای مجاور را در این فضا تعریف کرد. مگر نه این که براساس قضیه ای فیتاگورث، در یک صفحه، مجنور فاصله، dx ، برابر است با مجموع دو مجنور $dy^2 + dx^2$ ؛ پس به همین ترتیب، در یک فضای n بعدی، ds^2 باید مجموع n مجنور، یعنی مجموع همه جملات نظیر dx که موجودند، باشد. معمولا برای نشان دادن «مجموع جملات نظیر»، حرف یونانی

ممکن است تصور کنید که پرداختن دانشمندان به چنین مطلبی یکسره بیهوده است. چرا باید ریاضی دانان توجه خود را به این مسئله موهومی در مورد ساکنان سیاره ای خیالی معطوف کنند؟ این سؤال پاسخ بسیار خوبی دارد: این ساکنان، خود ما هستیم. برای روشن شدن موضوع، قدری توضیح لازم است.

تکه های کوچکی از کاغذ به اشكال نامنظم گوناگون را روی کره ای بزرگ و هموار، در نظر بگیرید. این تکه های کاغذ، زنده اند و حرکت می کنند. آن ها ساکنان سیاره ای خیالی هستند، ولی بدنشان حجم های محصور در سطوح نیست، بلکه سطوحی است که توسط منحنی هایی محصور شده است. این افراد که دارای بدن های کاملاً صاف و فاقد ضخامت هستند، نمی توانند هیچ تصوری درباره فضای بالا یا زیر خود، داشته باشند. آن ها خود موجوداتی دو بعدی و صرفاً بخش هایی از سطوح هستند. حواس آن ها طوری است که می تواند اطلاعاتی در مورد جهان دو بعدی پیرامونشان به آن ها بدهد. اما آن ها هیچ گونه تجربه ای در مورد هر آن چه بیرون این جهان واقع است، ندارند و بنابراین قادر به تجسم بعد سوم نیستند.

با این حال، آنان را موجوداتی هوشیار فرض می کنیم که ریاضیات و فیزیک را کشف کرده اند. هندسه ای آن ها شامل دو بخش است - هندسه ای خطی و هندسه ای مسطحه. در فیزیک، آن ها مسائل یک متغیره را به کمک نمودارهایی روی یک خط، و مسایل دو متغیره را توسط نمودارهای صفحه ای، نشان می دهند و مسائل دارای سه یا چهار متغیر یا بیش تر را به کمک جبر حل می کنند و از این بابت متأسف اند که چرا نمی توانند در حل این گونه مسائل از نمودار کمک بگیرند.

در نیمه ای اول قرن نوزدهم (به حساب تقویم آن ها) در بسیاری از آنان اندیشه ای تازه ای پدیدار می شود. آن ها می گویند: «ما نمی توانیم بعد سوم را

حذف کرد، این موضوع کاملاً به گوس برخورده بود). پس شکل صحیح برای فراسطحی با سه بعد، به صورت فوق است و ضرایب شش گانه روی فراسطح، از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کنند.
 همان‌طور که گفتیم، ریمن در آغاز وجود n متغیر - و نه سه یا چهار متغیر - را فرض نمود. وی نیاز داشت که برای موجودات هندسی که با آن‌ها سروکار دارد، نام‌هایی بیابد. او دو چیز را در نظر گرفت. اولاً، هر ذره (به طور نظری) می‌تواند آزادانه و به طور یکنواخت و پیوسته، روی یک خط یا یک منحنی، از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر برود؛ ثانیاً، هنگامی که به مطالعه‌ی هندسه‌ی مسطحه می‌پردازیم، به چیزی جز اشکال واقع در صفحه نمی‌اندیشیم؛ به قول اهل منطق، در این حالت، صفحه‌ی مذبور «جهان مورد بحث» ما را تشکیل می‌دهد. اما در مراحل بعد، زمانی که هندسه‌ی فضایی را مطالعه می‌کنیم، با صفاتی در جهات مختلف فضا سروکار داریم. هر یک از این صفحه‌ها می‌تواند صفحه هندسه مسطحه‌ای باشد که قبلاً موضوع مطالعه‌ی ما بود. در هندسه‌ی مسطحه، به هیچ وجه مطرح نیست که این صفحه به طور مجزا وجود داشته باشد یا جزئی از یک فضای سه بعدی باشد.
 ریمن با توجه به مجموعه‌ی این نکات، برای موجودات هندسی با هر بعد دلخواه که هر نقطه می‌تواند به طور پیوسته در آن حرکت کند، نام «پیوستار» را برگزید. مثلاً، خط راست یک پیوستار یک بعدی است و ضمناً در هندسه‌ی نقاط و پاره خط‌های این خط، به هیچ روی مطرح نیست که این پیوستار یک بعدی، مستقل‌اً وجود دارد، یا جزئی از یک صفحه، یا فضای سه بعدی یا فضای با ابعاد بیشتر است. سطح کره یا زین اسب، همان‌طور که دیدیم، یک پیوستار دو بعدی است و در این جایز فرقی نمی‌کند که آن‌ها را به طور مجرد یا جزئی از یک فضای سه بعدی در نظر بگیریم.

Σ (زیگما) به کار می‌رود. براین اساس، هندسه‌دان ساده اندیش خواهد نوشت:
 $ds^2 = \sum dx^i dx^i$.اما بینش ریمن ژرف‌تر از این بود. او درباره‌ی یادداشت‌های سال ۱۸۲۷ استادش بسیار اندیشیده بود. وی چنین استدلال کرد که اگر بپذیریم $ds^2 = \sum dx^i dx^i$ ، سنگ اول بنا را کج نهاده ایم، زیرا قضیه‌ی فیناگورس تنها روی صفحه صادق است که می‌توان آن را مثل صفحه‌ی شترنج به مربع‌های کوچک برابر، تقسیم کرد. در واقع آن چه باید تعیین یابد، معادله‌ی گوس است که در مورد همه‌ی سطوح منحنی و از جمله صفحه - به عنوان یک حالت بسیار اختصاصی - صدق می‌کند. گوس دو چیز به فرمول فیثاغورث اضافه کرد: ۱) به مربعات dp و dq حاصل ضرب این دو مقدار، یعنی $dpdq$ را افزود؛ ۲) برای هر یک از سه جمله، ضریبی در نظر گرفت و فرض کرد که این ضرایب F, E و G روی سطح، از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کنند.
 اکنون همین کار را برای یک «فراسطح» سه بعدی - بدون در نظر گرفتن ماهیت آن - انجام می‌دهیم. روی این فراسطح، سه دسته سطوح p و q و r - یا بنابه شیوه‌ی رایج، به نام‌های x_1, x_2 و x_3 - می‌کشیم. مربع فاصله‌ی بین دو نقطه مجاور، ds ، علاوه بر مجذورات dx_1 و dx_2 و dx_3 ، از روی حاصل ضرب‌های دو به دوی آن‌ها که به شکل سه جمله داریم، $dx_1 dx_2$ و $dx_2 dx_3$ و $dx_1 dx_3$ هستند، به دست می‌آید. در اینجا، شش جمله داریم، پس شش تا هم ضریب خواهیم داشت. این ضرایب را به g نشان می‌دهیم و اندیس‌های مناسبی به آن اضافه می‌کنیم. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$ds^2 = g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{13} dx^1 dx^3 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33} dx^3 dx^3$$

(ضریب ۲ غیر قابل چشم پوشی نیست و فقط از دیدگاه جبر به ظرافت معادله می‌افزاید. یک بار که یکی از استادان برلن بدون ملاحظه ضریب ۲ را

گوس، این ساکنان دو بعدی در جهان دو بعدیشان، اگر به اندازه‌ی کافی ریاضیات بدانند، می‌توانند انحنای هر ناحیه‌ی کوچکی از جهان خود را به دست آورند. آن‌ها چگونه می‌توانند سطح منحنی را تجسم کنند، در حالی که قادر به درک فضای سه بعدی نیستند؟ پاسخ ما، در واقع چیزی جز یادآوری قدرت شگفت‌انگیز ریاضیات نیست. این موجودات، لابد با مفهوم جاده‌ی منحنی - در مقابل جاده‌ی «مستقیم» که کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو نقطه است آشنا هستند. اگر در میان آنان نیز ریمن پیدا شود که این مفهوم را، به شیوه‌ای کاملاً جبری، به صورت نظریه‌ی انحنای پیوستارⁱⁱ بعدی تعیین دهد، نقشه برداران آن‌ها می‌توان به کمک فرمولی که ریمن در اختیار آن‌ها قرار می‌دهد عددی را محاسبه کنند - که براساس مشاهدات شان - از کشوری به کشور دیگر، اندکی تغییر می‌کند. از این راه، آن‌ها می‌توانند انحنای جهان دو بعدیشان را اندازه کنند، بدون این که قادر به تجسم معنی آن باشند.

بی‌شك، وضعیت ما نیز نسبت به انحنای جهان خودمان، به همین متوال است و برای درک این که ریمن چگونه به تعریف آن نایل آمد، ناگزیریم به آثار وی مراجعه کنیم.

ریمن اظهار نظر کرد که اگر همه‌ی اعدادی که انحنای یک فضای \mathbb{E}^n -بعدی را تعیین می‌کنند، صفر باشند، این فضارا صاف می‌نامیم زیرا برای سطحی که انحنایش صفر است، این واژه به کار می‌رود. حال اگر فضای سه بعدی را به مکعب‌های کوچک برابر تقسیم کنیم - همان طور که صفحه‌ی شطرنج به مربع‌های کوچک برابر تقسیم می‌شود - در این صورتⁱⁱⁱ به سادگی برابر است با مجموع $dx^1 + dy^1 + dz^1$ که در آن dx^1, dy^1 و dz^1 نشان‌دهنده‌ی سه ضلع هر یک از مکعب‌های کوچک است. این فضا، یک فضای «صاف» است، هم چنان که صفحه، یک سطح صاف است. به عبارت دیگر، آن چه بهنهن ما خطوط می‌کند این است که فضای مزبور - به معنای ریمنی کلمه - صاف است. آیا واقعاً چنین است؟ تنها چیزی که می‌توان انتظار داشت، این است که

فضایی که در آن به سر می‌بریم، یک پیوستار سه بعدی است. در این جا نیز باشد ذکر کنیم که از نظر هندسه فضای ما هیچ فرقی ندارد که این فضا مستقل‌در نظر گرفته شود یا جزئی از یک فضای چهار، یا پنج یا هر چند بعدی، به حساب آید. تجسم مفهوم این گفته برای ما مقدور نیست. با این وجود، این مسیر را دنبال می‌کنیم تا بینیم منطق ما را به کجا می‌برد.

افکار ریمن جوان در حوالی سال ۱۸۵۰ باید چنین بوده باشد. اکنون باید مختصرأ شرح دهیم که او از این جا تا چه حد پیش رفت و محتوای عمدی بحث او در سال ۱۸۵۴ چه بود.

در نخستین دور خواندن، چنین به نظر می‌رسد که نتیجه‌ی برجسته‌ی کوشش‌های ریمن، موققت در تعریف انحنای یک پیوستار دارای بیش از دو بعد، بوده است. پیوستار دو بعدی، صفحه است و دیدیم که انحنای آن برای حوزه‌ی کوچکی حول هر نقطه از سطح، توسط یک عدد بیان می‌شود (که برای سطح بیضوی مثبت و برای سطح زین اسپی منفی است). اگر انحنا در همه‌ی نقاط صفر باشد، آن سطح صفحه است و بر عکس. ریمن ثابت کرد که مفهوم انحنا را می‌توان در مورد پیوستارⁱⁱ بعدی نیز تعیین داد. اما در این حالت، دیگر یک عدد به تنهایی کافی نیست؛ برای بیان انحنای پیوستار سه بعدی، یک مجموعه‌ی سه عددی و برای پیوستار چهار بعدی، مجموعه‌ای از شش عدد لازم است و این موضوع به همین ترتیب ادامه می‌یابد. ریمن تنها به بیان این نتایج پرداخت و معقول بودن آن‌ها را از نظر ریاضی نشان داد؛ اثبات این مطالب و پرداختن مسروخ به آن‌ها، مستلزم یاد داشت‌های طولانی یا سخن رانی‌های چند هفته‌ای بود.

اکنون دوباره به سر وقت همان موجودات کاملاً سطحی که روی یک سطح بسیار بزرگ زندگی می‌کنند، می‌روم. براساس «قضیه‌ی برجسته»

به عقب نگاه کنیم، می بینیم که یافتن آن آزمایش‌ها بسیار دشوار بود. ممکن است تصور شود که این آزمایش‌ها در حوزه‌ی اخترشناسی کلاسیک قرار دارد و به اندازه‌ی گیری زوایای بین ستارگان مربوط می‌شود، اما این تصویر چندان صائب نیست. اینشتین ثابت کرد که پیوند عظیمی میان گرانش و ماده وجود دارد و فرض موقتی ریمن مبنی بر ثابت بودن انحنای فضا باید جای خود را به تغییرات موضعی بدهد (یعنی انحنا در همسایگی خورشید یا شعراً یمانی بیش تر از فضای تهی بین ستارگان است). وی هم‌چنین نشان داد که زمان هم باید به میان آورده شود؛ به عبارت دیگر، یک فضا - زمان چهار بعدی است که باید مورد آزمایش قرار گیرد. در سه آزمون تجربی هم که در سال ۱۹۲۰ از نظریه‌ی اینشتین به عمل آمد، دیده شد که فضا، زمان و گرانش به طور پایداری با یکدیگر در امیخته‌اند.

ادعای ریمن مبنی بر این که هندسه‌ی جهان صرفاً بخشی از فیزیک است که باید مثل هر بخش دیگر، از راه همکاری نزدیک نظریه و تجربه، پیش برد شود، بدین ترتیب کاملاً تحقق یافت. هم‌چنین است ایمانی که ریمن به استاد خود، گوس، داشت. هر چه بیش به دژهای عظیم اندیشه‌ی ریمن و اینشتین دقیق می‌شود، با تحسین بیش تری پی می‌بریم که در آن فرمول کوچک و ناپذیرفتنی که گوس در سال ۱۸۲۷ بیان کرد، چه حقایق نادیدنی عظیمی نهفته بود.



[a] را به معنای قسمت صحیح عدد a و $\{a\}$ را به معنای قسمت دهدی عدد a می‌گیریم، مثلاً

$$[\frac{2}{4}] = \frac{0}{4}, [\frac{2}{4}] = \frac{1}{4}$$

حالا این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1/1 \\ y + [z] + \{x\} = 2/2 \\ z + [x] + \{y\} = 3/3 \end{cases}$$

حل در صفحه ۷۹

بخش کوچکی از فضا که در حوالی ما قرار دارد صاف است. امکان هم دارد که فضا واقعاً نه تنها در نزدیکی ما بلکه حتی تا قلمرو دورترین سحابی‌های آسمان، صاف باشد. از سوی دیگر، به همین میزان احتمال دارد که فضا قدری انجنا داشته باشد. چگونه می‌توان به این مطلب پی برد؟ در پاسخ این سؤال ریمن چنین گفت: از راه تجربه. این همان پیام انقلابی است که او آرام ولی بسیار استوار، به جهان علم به ارمغان آورد.

اقلیدس و کانت به طور ناخود آگاه مفهوم ذهنی صاف بودن فضا را پذیرفته بودند. ریمن اعلام کرد که این قضیه را نمی‌توان بدون اثبات و به عنوان امری بدیهی، بیان نمود، بلکه تنها به صورت فرضیه‌ای است که باید از طریق تجربه، به اثبات برسد. در آغاز سه فرض را در مورد فضای اطراف خود می‌پذیریم، بدین عنوان که فضا دارای انحنای مثبت یکنواخت یا انحنای منفی یکنواخت است و یا آن که هیچ انحنایی ندارد (یعنی صاف)، یا به اصطلاح مرسوم، اقلیدسی است). تحقیق این که کدام یک از این فرض‌ها درست است، بر عهده‌ی اختر شناسان و فیزیک دانان است. این خلاصه‌ای بود از مفهوم مقاله‌ی پرابهام ریمن، تحت عنوان «فرض‌هایی که پایه‌ی هندسه را تشکیل می‌دهند». این مقاله، کاملاً به حق، کنجکاوی گوس را برانگیخت.

در بحث ریمن، بسیار چیزهای مهم دیگر نیز وجود دارد، مثلاً ارزیابی بسیار روش در مورد احتمال این که سرانجام نظریه‌ی کوانتمی فضا را پذیریم؛ چیزی که در حال حاضر، فیزیک دانان محتاطانه به بررسی آن مشغولند. اما نکته‌ای که در اینجا مطرح شد - یعنی توسل به تجربه برای کشف انحنای احتمالی فضا - به نظر ما مهم‌تر از همه است.

ریمن عاقلانه از پیشنهاد هر گونه آزمایش خاصی در این مورد، خودداری کرد. اگر از موضع مساعد فعلی که از دانش بعد از اینشتین برخورداریم،

تابع یا عامل و کودار (فونکسیون)

دکتر اسدالله آلبویه

نیست، هرچیزی می‌شود و چون از این‌که درشدن است به وجود می‌آید، پس آن‌چه را که متنافی با اوست همراه دارد. یعنی هرچیز خود و ضد خود است و قانون‌شدن همان قانون اتحاد اضداد است که در اثر کشاکش تعادل وهم آهنگی می‌یابند ...

گفتار هراکلیتوس پس از قرن‌ها دونتیجه قابل توجه داد.
یکی دیالکتیک، که در آن برای درک مفاهیم و سیر موجودات هر-
چیز (نز) را با ضد و مقابل آن (آن‌تی نز) همراه می‌کنند تا ترکیب و تحلیل دست دهد و مرکب (سن نز) صورت پذیرد.

این همان راهی است که هگل در فلسفه خود پیش می‌گیرد و همان سلاحی است که مارکس و انگلیس روش فکر در مبارزه طبقاتی ماخرانه به کار می‌برند.

دیگر مفهوم کردار یا عامل (فونکسیون)، که همان قانون‌شدن است و به گفته گوته «وجود را در فعالیت می‌نماید». از این‌رو با این مفهوم استاتیک به دینامیک تبدیل می‌شود.

فونکسیون میان چیزهای متغیر، بی‌توجه به علیت، بستگی و رابطه برقرار می‌کند.

در ریاضیات این چیزهای متغیر همان اعداد هستند و فونکسیون از یک یا چند متغیر عمل یا کرداری است که به موجب آن یک یا چند متغیر تبدیل به متغیر دیگر می‌شود.

به‌همین اعتبار متغیر اخیراً که همان فونکسیون یا (کردار) آن از روی یک یا چند متغیر است، تابع یک یا چند متغیر نیز می‌گویند.
مثلًاً می‌دانیم که منفعت پول معینی که به مرابحه داده می‌شود

در حدود قرن پنجم پیش از میلاد از (اقزوس) یونان فیلسوفی برخاست بدنام هراکلیتوس که به‌هیچ معنی روشنفکر نبود، زیرا او هم مخالف دموکراسی بود و هم افکاری بسیار مبهم و تاریک داشت. افکار او مبهم می‌شود شاید از جهت این‌که به صورت گفتارهای بریده و با ایما و اشاره بیان شده بود تا دسترسی به آن‌ها فقط به کوشش و آن‌هم برای کسانی که شایستگی داشته باشند حاصل شود و شاید هم از جهت آن‌که این افکار زائیده محیط یونان نبود و نمی‌توانست در آنجا نشو و نما کند. به‌هرحال چون مردم از سخنان هراکلیتوس درست سرد نمی‌آوردند و آن‌چه هم می‌فهمیدند حکایتی از ناپایداری جهان و در نتیجه موجب پأس و ناامیدی بود، اورا فیلسوف تاریک و گاهی فیلسوف گریان خواندند.

هراکلیتوس می‌گفت:

آن‌چه هست در حرکت و در جریان دائم قرار گرفته و گذران است.
ثبت و بقای وجود ندارد. خمیری که با آن اشیاء را سرشه‌اند هر لحظه به‌شكلی دیگر درمی‌آید.

همه چیز در معرض تبدیل قرار گرفته، همه چیز می‌گردد. هیچ چیز

روشی که برای این عمل هست، به وسیله نیوتون ولاپنیتس
براساس مفهوم تابع و حد آن کشف شد و محاسبات جامعه و فاضله
(انتگرال و دیفرانسیل) نامیده می شود و امروز بدون دانستن آن چنان که
(کلاین) گوید هیچکس قادر نیست حوادث عالم و قایع طبیعت را
بیان کند.

تابع ممکن است از انواع مختلف باشد:

می شود تابع ازیک یا چند متغیر باشد و اگر تابع ازیک متغیر را
بگیریم، می شود که به ازای هر مقدار متغیریک یا چند مقدار برای آن تابع
حاصل شود.
می شود تابع پیوسته یا گسسته (دارای نمودار پیوسته یا گسسته)
باشد.

می شود تابع منطق باشد، در این حال به صورت خارج قسمت
دو کثیرالجمله از متغیر است. می شود تابع اصم باشد، در این حال یا جبری
است یعنی به ازای هر مقدار از متغیر مقداری می یابد که ریشه‌ای از یک
معادله جبری معین است و یا ترانساندانست است مانند تابع لگاریتمی و
تابع مثلثاتی و اکسپونانسیل...

به هر صورت مفهوم تابع به ریاضیات صورت زنده‌ای بخشید و آن
را از حال رکود بیرون آورد، حرکت داد و موجب پیشرفت گشت و در
نتیجه پیشرفت ریاضیات علم ترقی یافت و از فایده آن در عمل برای
ما تمام وسایل راحت و آسایش تمدن کنونی فراهم گردید.

بستگی بذرخ و زمان دارد. چگونگی ارتباط نرخ و زمان پول داده شده
به منفعت، تابع منفعت را بر حسب دو متغیر نرخ و زمان مشخص می کند.
(فرگه) در منطق ذات هر مفهوم را با تابع بیان می کند و (اشپینگلر)
تابع را عدد باختری می نامد و آن را مشخص فرهنگ مغرب زمین می داند.
ریاضیات با مفهوم تابع پیشرفت بسیاری پیدا کرد و وسیله خوبی
برای بیان تغییرات عالم واقع گردید. مثلاً در بیان حرکت می توان
گفت حرکت و سکون دو چیز متفاوت نیستند و حرکت از سکون های پیاپی
پدید آمده است، یعنی وقتی شیء در حرکت است که میان موضع آن
ولحظات یک بستگی وجود داشته باشد. به عبارت دیگر وقتی که موضع
جسم تابع زمان باشد، چون موضع هر نقطه را می توان بایک یا چند عدد
معین کرد، بر حسب آن که نقطه در فضای یک بعدی یا چند بعدی قرار گرفته
باشد (مختصات نقطه)، پس حرکت هر نقطه بایک یا چند تابع از متغیر زمان
بیان می شود و هنگامی که این توابع در دست باشند، تمام خواص حرکت:
مسیر - سرعت یا درجه تغییر مکان (نسبت تغییر مکان بی نهایت کوچک
به تغییر زمان بی نهایت کوچک مربوط، یا حد نسبت تغییر مکان به تغییر
زمان وقتی که این تغییر صفر شود).

و شتاب با درجه تغییر سرعت معین می شود. چون هر جسم را
می توان از نقاط پدید آمده دانست. پس مطالعه حرکت آن نیز از همین
راه مقدور می شود.

درجه تغییر یک تابع هم تابعی است از همان متغیر که مشتق تابع
اول نامیده می شود و بالعکس با معلوم بودن مشتق می توان به تابع اولیه
رسید.

ل. س. فریمان
ترجمه پرویز شهریاری

نویسنده‌گان لاتینی و یونانی مربوط می‌شد که برای پرسنجه‌ای با امکان‌های عادی، مانعی بزرگ به شمار می‌رفت. ولی گوتفرید لاپ نیتس این گونه نبود. او، زبان لاتینی را، مثل یک بازی، یاد گرفت. به گفته خودش، چاپ مصور «تیتالیویا» را در اختیار داشت. ابتدا، تقریباً چیزی نمی‌فهمید. ولی با خواندن نوشته‌های زیر عکس‌ها، مقایسه‌ی آن‌ها با محتوی تصویرها و تکرار مدام متن کتاب، سر آخر، این زبان را یاد گرفت و بعد از مدتی، نه تنها می‌توانست به زبان لاتینی، به راحتی حرف بزند و بنویسد، بلکه حتی شعر لاتینی هم می‌سرود. او حتی خودش را شاعر خوبی به حساب می‌آورد. او، بعد از زبان لاتینی، بدون این که نیروی زیادی صرف کند، زبان یونانی را هم یاد گرفت. وقتی که لاپ نیتس چهارده ساله بود، در دبیرستانی که تحصیل می‌کرد، مجلس جشنی برپا بود، ولی داشن آموزی که خود را برای خواندن شعر آماده کرده بود، بیمار شد. از لاپ نیتس خواستند که جای او را بگیرد و او در طول همان روز، سی سطر شعر شش وزنی لاتینی سرود.

استعداد لاپ نیتس، در یادگیری زبان استثنایی بود. بعضی از زندگی.-
نامه‌نویس‌ها، این استعداد او را مربوط به این می‌دانند که اجداد دور لاپ نیتس، اسلام‌هایی از اهالی لهستان یا بوهم بوده‌اند. خود نام فامیل لاپ نیتس، شکل آلمانی شده‌ی «لوبه‌نتس»، اسلامی است.

لاپ نیتس در سال ۱۶۶۱، دبیرستان را تمام کرد و به دانشگاه شهرزادگاه خود وارد شد. در آن زمان، تقریباً تنها موضوع‌های فلسفی، نظر او را به خود جلب کرده بود. او حتی در کودکی، در کتابخانه‌ی پدرش، با نوشته‌های ارسطو و هوداران او، و از آن جمله مدرسان سده‌های میانه آشنا شده بود (لاپ نیتس بعدها، درباره‌ی آن‌ها گفته است که او ناچار بود در میان انبوهی از این آشغال‌ها به دنبال طلا باشد). در دانشگاه، یاکوب تومازی، استاد فلسفه، او را با فیلسوفان جدید، و قبل از همه با دکارت، آشنا کرد. دانشجوی پانزده ساله، بسیاری از روزها را در اطراف زیبای شهر لاپزیک قدم می‌زد و ارزش

آفرینندگان ریاضیات عالی (۱۱)

گوتفرید ویلهلم لاپ نیتس

آلمان در نیمه‌های سده هفدهم، از لحاظ علمی، در انزوا به سر می‌برد. در دوره‌ای که در ایتالیا، فرانسه و انگلستان، پایه‌های داشن‌های طبیعی استوار می‌شد (گالیله، توریچلی، فرما، دکارت، والیس، بویل و دیگران)، آلمان، تنها یک نابغه به جهان داد: یوهان کلر. آلمان در چند ده سال بعد از مرگ کلر خاموش بود، تا این که ستاره درخشانی را به جهان عرضه کرد که توانست تکان نیرومندی به داشن اروپایی بدهد: لاپ نیتس.

گوتفرید ویلهلم لاپ نیتس، اول ژوئیه سال ۱۶۴۶، در لاپزیک متولد شد. پدر او، فردریک لاپ نیتس، استاد اخلاق و مشاور حقوقی در دانشگاه لاپزیک و مادر او، خانم کاترین شموکه، دختر یکی از استادان همین دانشگاه بود. پسرک، پدر خود را در سال هفتم زندگیش، از دست داد. او، که به حال خود گذاشته شده بود، چنان به مطالعه علاقه‌مند شده بود که موجب نگرانی مادرش می‌شد. یکی از نزدیکان خانواده، بالاپ نیتس جوان درباره‌ی شیوه‌ی مطالعه صحبت کرد. نتیجه‌ی گفتگو این بود که بنا به توصیه این آشنا، تنظیم کتابخانه‌ی لاپ نیتس مرحوم را، که تا آن موقع، از ا دور نگه داشته شده بود، به پسر هشت ساله‌ی او واگذاشتند. قسمت عمده‌ای از کتابخانه به اثرهای از

همراه با اعطای درجه‌ی دکترا، او را دعوت به استادی کردند، ولی لایب نیتس، این پیشنهاد دلپذیر را پذیرفت و به نورنبرگ رفت. بودن در نورنبرگ، تنها حادثه‌ی کوتاهی از زندگی پر بر لایب نیتس به شمار می‌رسد. ولی همین حادثه، تأثیر زیادی بر سرنوشت بعدی فیلسوف داشت. معلوم نیست که چرا لایب نیتس می‌خواست به جامعه‌ی برادری «روزن کری تسر»^۱‌ها، که در نورنبرگ زیاد بودند، وارد شود. این جمعیت نیمه عرفانی و نیمه منهنجی، همچون وارثان فکری خود درسده‌ی هیجدهم، یعنی ماسون‌ها، خود را موظف به رعایت پنهان کاری می‌دانست و تمایلی به قبول عضوهای تازه نداشت و به خصوص در مورد کسانی که معرفی نامه‌ی معتبری نداشتند، سخت‌گیری بیشتری می‌شد. لایب نیتس چاره‌ای اندیشید: تبدیل فلزها به یکدیگر را جست‌وجو می‌کردند، تعدادی از اصطلاح‌های ناماآنس و رمزگونه را از آن‌ها بیرون کشید و با استفاده‌ی از آن‌ها، رساله‌ای تنظیم کرد که به کلی نامفهوم بود. این رساله با چنان زبان دشواری نوشته شده بود که خود او هم چیزی از آن سر در نمی‌آورد، ولی برخلاف انتظار او، روزن کری تسرها، آن را «فهمیدند» و چنان به فضل نویسنده‌ی آن ارج گذاشتند که با کمال احترام، پست دیپری جمعیت را به او پیشنهاد کردند. لایب نیتس کار تنظیم صورت جلسه‌های آزمایش‌های شیمیایی را آغاز کرد. یک روز، هنگام نهار در رستوران، با ناشناسی صحبت می‌کرد. ظاهراً یک سیاست‌مدار بود، آدمی هوشمند با تجربه‌ای فراوان. نام فامیل او «بوی نه بورگ» بود. لایب نیتس جوان، اثر بسیار خوبی در او گذاشت. آن‌ها، بیشتر با هم آشنا شدند. به زودی، بوی نه بورگ به لایب نیتس پیشنهاد کرد که به «ماین» و به دربار دولک برود، و در همین زمینه، توصیه نامه‌ای برای او نوشت.

1. Rosenkreuzer

«اشکال هیولای» و سایر موزاسکولاستیکی را، با دستگاه مکانیکی جهان (که به وسیله‌ی دکارت طرح شده بود)، مقایسه می‌کرد. سرانجام، فلسفه‌ی دکارتی پیروز شد و لایب نیتس تصمیم گرفت، به طور جدی ریاضیات را بیاموزد. دانشگاه لایپزیک نمی‌توانست در این زمینه او را ارضاء کند و در نتیجه، لایب نیتس به «ین» رفت که ویگل، ریاضی‌دان با استعداد و مشهور، در دانشگاه آن تدریس می‌کرد.

درس‌های ویگل بی‌اثر نبود. بعد از آن که لایب نیتس با مقدمات ترکیب‌ها آشنا شد، به این فکر افتاده شاخه‌ای از ریاضیات را به وجود آورد که به یاری آن بتوان، تجزیه و تحلیل منطقی مفهوم‌ها را، به تجزیه و تحلیل ریاضی آن‌ها، تبدیل کرد. او، این فکر خود را در «هنر ترکیب» خود، طرح کرده است. جالب است که لایب نیتس، در نخستین کارهای مستقل فلسفی خود، اندیشه‌هایی را طرح کرده است که، بعدها، در نوشه‌های اصلی فلسفی و ریاضی خود، به آن‌ها پشت پا می‌زند. یکی از موضوع‌هایی که لایب نیتس در تمامی عمر خود برای تکمیل آن می‌کوشید، کامل کردن دستگاه نمادها برای به ریاضی در آوردن فلسفه بود. او برای نخستین بار در اثر مربوط به «ترکیب‌ها»ی خود، از این موضوع صحبت می‌کند.

لایب نیتس، بعد از یک سال از «ین» به لایپزیک برگشت و تنها به مطالعه‌ی حقوق پرداخت، تا آن‌طور که گمان می‌کرد، خود را برای حرفة‌ی قضایت آماده کند. در سال ۱۶۶۴ به درجه‌ی ماجیستری (فوق لیسانس) در فلسفه رسید و در سال ۱۶۶۵، دیلم حقوق را گرفت. لایب نیتس، سال بعد را به آماده کردن خود، برای گرفتن درجه‌ی دکترای حقوق، گذراند. ولی در دانشگاه زادگاهش، نتوانست به هدف خود برسد. دلیل این مطلب، کاملاً روش نیست، همین قدر معلوم است که از لایپزیک رنجید و آن را برای همیشه ترک کرد. لایب نیتس توانست در سال ۱۶۶۶ در شهر کوچک دانشگاهی آلتدورف، نزدیک نورنبرگ، از رساله‌ی خود «موارد وحشت در حقوق» دفاع کند. دفاع چنان درخشنan بود که

به لندن برود و مستقیماً با پیشرفت‌های ریاضی داشمندان انگلیسی آشنا شود. لایب نیتس دو ماه در لندن بود؛ او با بول فیزیک‌دان، اولدن بورگ ریاضی‌دان و دیگران آشنا شد. احتمال دارد - اگرچه دلیل مستقیمی وجود ندارد - که اولدن بورگ، لایب نیتس را از نامه‌ای که نیوتون در سال ۱۶۷۲، درباره‌ی طرح روش فلوكسیون‌ها به او نوشته بود، آگاه کرده باشد. ظاهراً لایب نیتس تأثیری مثبت در لندن به جا گذاشت، زیرا خیلی زود به عنوان عضو انجمن سلطنتی انگلستان انتخاب شد. لایب نیتس، با برگشتن به پارس، با نیروی بیشتری به ریاضیات پرداخت. او بررسی زمینه‌ی تازه‌ای از ریاضیات را، که به روی او گشوده شده بود، آغاز کرد (البته، تازه برای او، زیرا نیوتون از همه‌ی این‌ها آگاه بود). اخرين بررسی لایب نیتس از رساله‌ی خود، به ما اجازه می‌دهد که تاریخ واقعی کشف دانش جدید را اعلام کنیم. اکتبر و نوامبر سال ۱۶۷۵. او با حرارت حیرت انگیزی، خود را وقف کار در این زمینه‌ی تازه کرد. شوق کشف مجهول‌ها، به صورتی غیر ارادی، سرپایی وجود او را فرا گرفته بود. در رساله‌ی او می‌خوانیم: «ورود به نوع جدید محاسبه، چه زیبایی حیرت انگیزی دارد. این نوع محاسبه، به اندازه‌ی فاصله‌ی آسمان تازمین، با نوع محاسبه‌ی ویت، تفاوت دارد.» این مطلب را در روزهایی نوشته است که روی مجموع بی‌نهایت کوچک‌ها کار می‌کرد.

با وجود این، نباید گمان کرد که لایب نیتس، تمامی نیروی خود را، صرف ریاضیات و تنها ریاضیات، می‌کرد. او مأموریت سیاسی را، که از طرف رئیشش به او محل شده بود، انجام می‌داد: علاقه‌های فلسفی و الهی او را می‌توان، از تمایلی که به بحث با «آرنو» رهبر هواداران ژان سن، داشت، احساس کرد. مقداری از وقت خود را به گفتگو در زمینه‌های حکومتی با کولبروزیر می‌گذراند؛ او مکاتبه‌هایی هم دارد که، اگرچه قبل از رفتن او به هانوور خیلی زیاد نبود، به هرحال جای نمایانی را در فعالیت‌های او به خود اختصاص داده است.

لایب نیتس در ماین به کار قضاوت خود ادامه داد، «مجموعه‌ی قوانین» خود را تنظیم کرد و در عین حال به مطالعه‌ی خود در زمینه فلسفه ادامه داد. او در آن جا، چند رساله‌ی حقوقی و فلسفی نوشت که از میان آن‌ها، «نظریه‌ی حرکت مطلق» را برای فرهنگستان پارس و «نظریه‌ی حرکت مشخص» را برای انجمن سلطنتی لندن فرستاد.

لایب نیتس، پنج سال در ماین بود. در سال ۱۶۷۲، به عنوان مربي پسر بوی نه بورگ و همراه با یک مأموریت سیاسی برای لوی چهاردهم، به پارس رفت. در پارس با «هویگنس» آشنا شد و تحت تأثیر او، با شوق و ذوق به ریاضیات پرداخت. آگاهی لایب نیتس از ریاضیات زیاد نبود. همه‌ی داشت ریاضی او مربوط به درس‌هایی می‌شد که در دانشگاه لایپزیک و سپس در «ین» از پروفسور ویگل شنیده بود. برای استعدادی همچون لایب نیتس درس‌های لایپزیک نمی‌توانست چیز با ارزشی باشد، زیرا کونیوس، که به لایب نیتس درس می‌داد، در برابر پرسش دانشجویان، همیشه به یک پاسخ قالبی اکتفا می‌کرد: «قاعده همین است». تحصیل در «ین» هم، بیش از یک سال، طول نکشید. هویگنس، کتاب خود، «ساعت‌های یاندولی»، را به لایب نیتس هدیه کرد. لایب نیتس، برای درک مطالب این کتاب، غرق در آثاری شد که مربوط به ریاضیات جدید بود. او با دقت تمام، نوشته‌های فروآ، والیس و دکارت («هندرسون») را مطالعه کرد. نیوگ ریاضی لایب نیتس، یکباره و با نیرویی حیرت انگیز، زبانه کشید.

به خصوص، آشنایی او با نوشته‌های پاسکال، تأثیر فوق العاده‌ای در خلاقیت او داشت. «مثلث‌های مفسر» نقش نورافکنی را داشت که بلا فاصله، روش کلی رسم‌مumas را روشن می‌کرد، به نحوی که لایب نیتس بعداً نوشت: این موضوع برای او قابل فهم نیست که پاسکال چگونه می‌توانست، این نتیجه‌گیری بزرگ و پربار را در کشف خود نمیند. در سال ۱۶۷۳، نتیجه‌گیری‌های شخصی لایب نیتس، چنان زیاد شده بود که او تصمیم گرفت

جهانی یگانه نباید، و در نتیجه، باید روش یگانه‌ای هم برای شناخت آن وجود داشته باشد. و لایپ نیتس، نمونه و سرمشق کامل این روش را، در ریاضیات می‌دید. البته، روش ریاضی، به خودی خود روشی عام نیست و نمی‌تواند باشد، زیرا تنها حوزه‌ی کمیت‌ها را در بر می‌گیرد. ولی، روش ریاضی نمونه‌ای است که با سرمشق قرار دادن آن می‌توان چنان الگوریتمی ساخت (واژه «الگوریتم» را برای نخستین بار، لایپ نیتس به کار برده است)، که بتواند همه مفهوم‌ها را در بر بگیرد، همان‌طور که ریاضیات، کمیت‌ها را در بر گرفته است. از نخستین اثر دوران جوانی لایپ نیتس، یعنی «هنر ترکیب» تا آخرین نوشته‌های او، همه جا با اندیشه‌ی الگوریتم مفهوم‌های منطقی، برخورد می‌کنیم. در تنظیم و تجزیه و تحلیل این الگوریتم، نقش اصلی به عهده‌ی نمادها و نشانه‌ها بود. به همین دلیل است که لایپ نیتس، با دقیقت و توجه فوق العاده‌ای، این جنبه‌ی کار را در محاسبه‌ی جدید رعایت کرده است. لایپ نیتس در یکی از نامه‌های خود در سال ۱۶۹۳، در این باره صحبت می‌کند: «راز آنالیز در نوع معرفی آن نهفته است، یعنی در این که هنر به کار بردن علامت‌ها را خوب بدانیم... ویت و دکارت، نتوانسته بودند این راز را دریابند.»

شباهتی بین دو اندیشمند بزرگ سده‌ی هفدهم به چشم می‌خورد. دکارت، روش خود را، که در «بحثی در روش» طرح کرده است، و دیجه‌ای مهم در گنجینه‌ی داشن انسانی می‌دانست؛ برای او، «هندرسه» تنها یک تجربه بود تا به یاری ان بتواند نیروی روش خودش را نشان دهد. لایپ نیتس هم، هدف عمدۀ را در اماده کردن یک روش عام، یا به گفته‌ی خود او، یک الگوریتم عام می‌دید؛ از نظر او، فراهم آمدن الگوریتم بی‌نهایت کوچک‌ها، تنها نخستین گام است؛ آزمایشی است که پس از آن باید به آماده کردن «الگوریتم واقعی» پرداخت، یعنی الگوریتمی که بتواند به نیازهای فلسفی ما پاسخ بدهد. مانشین حسابی هم که لایپ نیتس در سال ۱۶۷۴ روی آن کار می‌کرد، باز هم گامی در همین جهت بود؛ در این جا هم منتظر همان نتیجه‌ای بود که در آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها

در سال ۱۶۷۶، لایپ نیتس تصمیم می‌گیرد که از پاریس برود. هانور را به او توصیه کرده بودند. نامه‌های بین او و دوک بوهان فردریک رو دیدل شد و او پست کتابداری و مشاوری را پذیرفت. با ترک پاریس، از لندن و آمستردام دیدن کرد. در انگلستان، آشنایی خود را با ریاضی‌دانان، استوارتر کرد؛ در هلند با اسپینوزا آشنا شد و وقت زیادی را در مصاحبت و گفتگوی با او گذراند. ولی دستگاه فلسفی خود لایپ نیتس، چنان پیش رفته بود که حتی فیلسوفی همچون اسپینوزا هم نمی‌توانست تأثیر چندانی بر او داشته باشد.

سال‌های ۱۶۷۵ و ۱۶۷۶ را باید سال‌های کار شدید و پر هیجان در باره‌ی مبانی حساب دیفرانسیلی و انتگرالی دانست. برای خود لایپ نیتس، نقش اساسی بی‌نهایت کوچک‌ها در محاسبه‌ی جدید، کاملاً روشن بود. همچنین معلوم بود که انتگرال را (خود اصطلاح انتگرال هنوز وضع نشده بود)، باید همچون مجموعی از بی‌نهایت کوچک‌ها، در نظر گرفت. و بالآخره روشن بود که محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، دو عمل عکس یکدیگر هستند. مسأله‌های اصلی آنالیز، یعنی جست‌وجوی اکسترموم، نقطه‌ی عطف، مساحت‌ها و حجم‌ها وغیره. هم به صورت کلی خود و هم در مورد بسیاری از مسأله‌های جالب، حل شده بود. بالآخره، به بعضی از ظریف‌ترین پرسش‌ها هم پاسخ داده شد، مثلاً شرط کافی برای تابع‌های قابل انتگرال گیری، به دست آمد.

در اینجا، باید به این نکته اشاره کنیم که هر قدر که کشف‌های لایپ نیتس در ریاضیات، بزرگ باشد، برای خود او، همه‌ی آن‌ها، تنها جزئی از مسأله فلسفی مورد نظرش را تشکیل می‌داد، مسأله‌ای که حل آن، تمامی زندگی لایپ نیتس را پر کرده، و همچون خط سرخی، از میان تمامی کارهای او عبور می‌کند. برای این که بتوانیم ماهیت این مسأله را روشن کنیم، باید به یاد بیاوریم که در فلسفه‌ی لایپ نیتس، نقش عمدۀ، به عهده‌ی هم آهنگی و توازن عمومی است. جهانی که بر آن یک نظام هم آهنگ حکومت می‌کند، نمی‌تواند

داشته‌اند. ولی فعالیت‌های جانبه‌ی لایپ نیتس، این امکان را به او نمی‌داد که نتیجه‌گیری‌های خود را منظم و بهشکلی که برای چاپ مناسب باشد، آماده کند. تنها در سال ۱۶۸۲، مقاله‌ای درباره‌ی جست و جوی ماکزیمم و می‌تیم به چاپ داد. این مقاله، در نخستین شماره‌ی مجله‌ی «آثار دانشمندان» (*Acta eruditorum*) در لایپزیک چاپ شد. این مجله را «اوتومنکه» به کمک لایپ نیتس بنیاد گذاشته بود. این مجله، اهمیت زیادی دارد. زیرا کارهای لایپ نیتس و مکتب او، بهخصوص آثار برادران برنولی را، چاپ می‌کرد.

اگر سال‌های ۱۶۶۵ (مرخصی «طاعون» نیتون) و ۱۶۷۵ (کشف محاسبه‌ی دیفرانسیلی لایپ نیتس)، در تاریخ ریاضیات، از لحاظ اهمیت در یک سطح قرار دارند، سال ۱۶۸۴ را نمی‌توان با آن‌ها هم طراز دانست. در این سال، نخستین مقاله لایپ نیتس درباره‌ی طرح مبانی محاسبه‌ی جدید، چاپ شد. عنوان کامل مقاله چنین بود: «روش تازه‌ی ماکزیمم‌ها و می‌نیمم‌ها و همچنین رسم مماس‌ها، که برای آن، نه مقادیر کسری و نه مقادیر گنگ مانع به شمار نمی‌رود». لایپ نیتس لازم دانسته است که در عنوان مقاله، خاصیتی از محاسبه‌ی جدید را نام ببرد که نه مقادیر کسری و نه مقادیر گنگ، مانع در سر راه ان به شمار نمی‌رود. در واقع ارزش و برتری روشی که لایپ نیتس اورده بود، در همین ویژگی آن بود. روش‌های جست و جو را دکارت و فرماداده بودند. در این روش‌ها، متأسفانه، باید از عبارت‌های گنگ و کسری صرف نظر کرد، و به زبان دیگر، این روش‌ها را تهیه می‌توان در مورد منحنی‌های جبری مستقیماً به کار برد. البته لایپ نیتس آز برتری محاسبه‌خودش، به خوبی آگاه بود. او، با طرح محاسبه‌ی دیفرانسیلی، می‌گوید: «... می‌توان ماکزیمم و می‌نیمم، و همچنین مماس را پیدا کرد، بدون این که ناچار باشیم عبارت‌های کسری یا گنگ و یا دیگر عبارت‌های بفرنج را، آن‌طور که در مورد روش‌های گذشته و منتشر شده وجود دارد، کثار بگذاریم». کمی بعدتر، دوباره به همین مطلب بر می‌گردد: «چه همه این کارها و در بسیاری از حالت‌های پیچیده تر

جست وجو می‌کرد، نتیجه‌ای که برای فلسفه کوچک و برای ریاضیات، بزرگ بود. در این جا، این نکته را یادآوری می‌کنیم که ماشین پاسکال، جمع و تفرقی را انجام می‌داد، در حالی که ماشین لایپ نیتس - که ۲۷ سال جوان‌تر از ماشین پاسکال بود - چهار عمل اصلی حساب را انجام می‌داد، به توان می‌رساند و جذر می‌گرفت.

در هانوور، فعالیت لایپ نیتس، به صورتی غیرعادی، شدت گرفت و متنوع شد. ریاضیات را ادامه می‌داد، آثار فلسفی می‌نوشت و مأموریت‌های دوک را انجام می‌داد (که از آن جمله می‌توان مأموریت‌های مهمی، مثل بهتر کردن کار معدن را نام برد). لایپ نیتس به اتحاد همه‌ی کلیساها مسیحی و یا دست کم، کلیساها می‌پرستان، علاقمند بود. او در این زمینه توفیقی به دست نیاورد و نمی‌توانست به دست بیاورد، ولی وقت زیادی از لایپ نیتس را گرفت و او مجبور شد به صورتی عمیق، به بررسی مسائلهای الهی پردازد.

او برای زبان‌شناسی، تاریخ و مکاتبه‌ی با آشناییان اروپایی خود هم، وقت پیدا می‌کرد. با همه‌ی این‌ها، او قبل از هر چیز، خودش را فیلسوف می‌دانست، آن‌هم یک فیلسوف ریاضی دان. او معتقد بود که فلسفه نیاز دارد تا الگوریتم خودش را کشف کند، و مكتب الگوریتم‌ها هم، جایی جز ریاضیات نیست. بعيد هم نیست که انگیزه‌های واقعی، به نحو دیگری باشد: استعداد ریاضی و نیروی غیر قابل دفع آن، در مقام اول بود، و سپس عقل، با تفسیر فلسفی، بر موقعیت برتر ریاضیات، در این سیل نیرومند خلاقیت، صحه می‌گذشت.

در سال ۱۶۷۶، سال مسافرت به هانوور، لایپ نیتس درباره‌ی بسط $\sin x$ و $\arcsin x$ بدرشت، نامه‌ای به اولدن بورگ به لندن نوشت. در همان سال، نیتون پاسخ مفصلی از طریق اولدن بورگ به او داد. در این نامه، اطلاع داده شده بود که نیتون از بسط $\sin x$ و $\arcsin x$ آگاه است: می‌تواند دو جمله‌ای را بسط بدهد، و به خصوص سطح سیکلوئید و بعضی از سطوح‌های دیگر را به دست آورده است. این نامه‌های جوابیه هم، اهمیت زیادی در تکامل بعدی روش لایپ نیتس

روش من با سادگی حیرت انگیز و بی مانندی به کار می رود.»

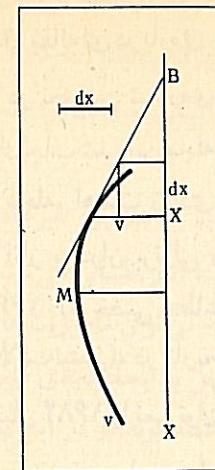
نام برد:

محاسبه، به ترتیب زیر خواهد بود.» و تعدادی از قاعده‌های دیفرانسیل گیری را

$$\begin{aligned} dc &= 0; & d(ax) &= adx; \\ d(z-y+w+x) &= dz - dy + dw + dx; \\ d(vx) &= vdx + xdv; \dots \end{aligned}$$

همه‌ی این قاعده‌های بدون اثبات داده شده است. اثبات این‌ها، برای نخستین بار در کتاب معروف درسی هوپیتال - «آنالیز بی نهایت کوچک‌ها» - داده شد. لایب‌نیتس، توجه خواننده را به نقطه M جلب می‌کند. او می‌گوید که در اینجا، منحنی نه صعودی است و نه نزولی. در این نقطه داریم $dv=0$ و مماس موازی محور (طول) است. اگر در نقطه‌ای داشته باشیم: $\frac{dv}{dx} = \infty$ ، مماس در آن، برمحور طول عمود است. بعد، به علامت لازم برای نقطه‌ی عطف، قاعده‌ی دیفرانسیل گیری از توان، رشد و غیره، برخورد می‌کیم. سخن کوتاه، همان‌طور که قبل‌اهم گنیم، مقاله‌ی لایب‌نیتس عبارت است از مجلملی از محاسبه‌ی دیفرانسیلی و کار برد آن در آنالیز. جالب این است که این مقاله به زبانی نوشته شده است که با زبان امروزی کتاب‌های درسی، تقریباً تفاوتی ندارد. اصطلاح «محاسبه‌ی دیفرانسیلی»، که برای هر تحصیل کرده‌ی زمان ما اصطلاحی آشناست، برای نخستین بار، در همین مقاله به کار رفته است. لایب‌نیتس، به کمک مثال ثابت می‌کند که بعد از دیفرانسیل گیری معادله‌ای به دست می‌آید که به dx و dy خطی است، و از همین جاست که نتیجه می‌گیرد به «سادگی بی مانندی» رسیده است.

بعد از آن، لایب‌نیتس می‌خواهد قدرت محاسبه‌ی جدید خود را به اثبات برساند. برای این منظور، مساله‌ی «ده بون» را، که امروز برای همه آشناست، انتخاب می‌کند. در سال‌های ۳۰، مساله‌ی محاسبه‌ی مساحت مربوط به یک



شکل ۱

قسمتی از شکل لایب‌نیتس
(از مقاله‌ی سال ۱۶۸۴ او)

مقاله‌ای که درباره‌ی آن صحبت می‌کیم، به صورتی بسیار فشرده نوشته شده است. تنها در شش صفحه، مفهوم‌های اساسی قانون دیفرانسیل گیری، جست وجوی اکسترمه موم‌ها، نقطه‌ی عطف و غیر آن، مطرح شده است. توان کاملاً با یوهان برنولی موافق بود که این مقاله «بیشتر معما است تا توضیح». لایب‌نیتس، شکلی را پیشنهاد می‌کند که قسمتی از آن در شکل ۱ داده شده است. دیفرانسل متغیر مستقل، به وسیله‌ی پاره خط dx ، به طول دل‌خواه، داده شده است. از شکل، بلافضل، نسبت به دست می‌آید (فراموش نکنیم که dx ، عبارت است از نمودار عرض مماس، و نه منحنی):

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{Bx}$$

سپس لایب‌نیتس می‌گوید: «وقتی که این نسبت را برقرار کردم، قاعده

لایب نیتس را به صورت $\frac{dw}{w} = c dx$ می نویسند، که از آن جا بالا فاصله نتیجه می شود: $w = De^x$ ، ولی لایب نیتس، امکان این استدلال را نداشت، به همین مناسبت، چنین می گوید: اگر w متناسب با x باشد، در آن صورت، w یک تصادع هندسی تشکیل می دهد، وقتی که x حسابی باشد، در آن صورت، x لگاریتم w می شود. بنابراین w ، یک منحنی لگاریتمی است. مساله حل شد.

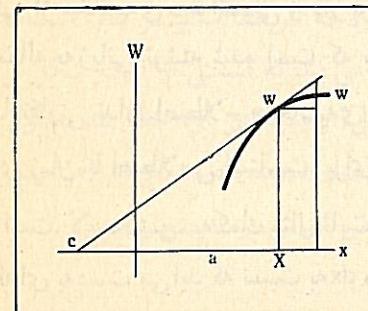
اگر کسی زحمت مطالعه و درک محتوای نامه دکارت به ده بون (۲۰) فوریه ای سال ۱۶۳۹ را به خود بدهد و بیند که چگونه، دکارت بعد از استدلال های نامتعارف و پیچیده، که چند صفحه را می گیرد، به این نتیجه می رسد که روش های او و فرما، برای حل چنین مسأله ای مناسب نیست، آن وقت (تکرار می کنیم، با مقایسه ای برآه حل های دکارت و لایب نیتس)، می تواند به ارزش گام عظیمی که این محاسبه ای جدید برای ریاضیات برداشته است، پی برد!

همه محاسبه قبلی، به صورت محاسبه دیفرانسیلی و کاربرد آن در آمد. سال ۱۶۸۶ بود که لایب نیتس، مقاله مربوط به این محاسبه را، در مجله «Acta eruditerum» چاپ کرد. و این، نخستین کار چاپی درباره محاسبه ای انتگرالی. لایب نیتس بود. مسأله ای که او در این اثر حل می کند، بسیار ساده است، با وجود این، برای روش های کهنه، یا آنطور که لایب نیتس می نامد، برای روش هایی که تا آن روز منتشر شده بود، خارج از قدرت بود. آن را می توان به این ترتیب تنظیم کرد: تحت قائم یک منحنی به صورت تابعی از متغیر مستقل داده شده است؛ این منحنی را پیدا کنید. لایب نیتس، مسأله را به این صورت حل می کند. دو مثلث در نظر می گیرد: یکی تشکیل شده است از تحت قائم^۱؛

۱. نباید این مطلب را فراموش کیم که همه این ها را، سال های بود که نیوتون می داشت، ولی داشت نیوتون تنها به خود و تعداد محدودی از ریاضی دانان انگلیسی خدمت می کرد، در حالی که لایب نیتس، کشف خود را در اختیار تمامی جهان قرار داد.

منحنی مفروض، به همان اندازه می توانست قابل حل باشد، که مسأله ای رسم مماس بر منحنی جبری. «ده بون»، نوع تازه ای از این مسأله، ابتکار و طرح کرد. مسأله «ده بون» به صورت کلی خود، چنین است: یک منحنی پیدا کنید که تحت مماس آن، تابع مفروضی باشد. به زبان امروزی ما، این مسأله، چیز دیگری جز این نیست که باید یک معادله دیفرانسیلی مرتبه ای اول، به صورت $f(x,y,y')=0$ را، انتگره کنیم. در سده هی هفدهم، این نوع مسأله ها را، عکس مسأله های مربوط به مماس می نامیدند. «ده بون» این مسأله را به دکارت پیشنهاد کرد، ولی او نتوانست روشی کلی برای حل این گونه مسأله ها بدهد. درست به همین دلیل بود که لایب نیتس، این مسأله را به عنوان مثالی برای کاربرد روش تازه خودش انتخاب کرد.

مسأله. «می خواهیم منحنی w را پیدا کنیم، که طبیعت آن، این است که اگر w مماس مرسوم از محور باشد، مقدار x همیشه برابر مقدار ثابت a شود». حل لایب نیتس. روی شکل دیده می شود که $\frac{dw}{dx} = \frac{w}{a}$ ، با فرض $b = a$ ،



شکل ۲
مریبوط به حل مسأله ای عکس
مسأله مماس

یعنی مقدار ثابت (لایب نیتس و شاگردانش، دیفرانسیل متغیر مستقل را، مقداری ثابت می گرفتند)، داریم: $w = \frac{a}{b} dx$: در زمان ما، معادله

باشد.» به زبان دیگر، برای پیدا کردن انتگرال ازتابع مفروض $(x)^f$ ، باید تابع مثل $F(x)$ به دست آورد، به نحوی که شبیه آن، یعنی $F'(x) = f(x)$ باشد. وارد کردن مقدار ثابت هم به لایب نیتس تعلق دارد، همچنین او بود که انتگرال نامعین را، از کوادراتورها - که از زمان ارشمیدس تا باروی، تنها به عنوان انتگرال معین در نظر گرفته می شد - جدا کند. لایب نیتس، در یکی از مقاله های خود در سال ۱۶۹۴، چند عبارت را انتگرله می کند و نتیجه را همراه با « $+b$ » می نویسد و توضیح می دهد که 'تا'، عدد ثابت دلخواهی است. او، ضمن توضیح دلیل وجودی « b » می نویسد: «می خواهم این مطلب را یادآوری کنم، چرا که برای کلی بودن جواب، فوق العاده اهمیت دارد.» به این ترتیب، مفهوم و اهمیت این مقدار ثابت، کاملاً برای لایب نیتس روشن بوده است. ایا لایب نیتس، لزوم این مقدار ثابت را به این مناسبت پذیرفته بود که منحنی های انتگرالی باید معرف خانواده ای از منحنی ها باشند، یا به این مناسبت که داریم:

$$d[f(x)+C] = d[f(x)]$$

متأسفاً، این مطلب برای ما روشن نیست.

همان طور که دیده می شود، سال های ۸۰ و ۹۰ سده ای هفدهم را باید دوران پرباری برای مبانی آنالیز دانست. در این دوران، لایب نیتس تنها نبود. برادران برنولی، با قدرت روی دستگاه محاسبه ای جدید کار می کردند؛ کار آن ها به قدری تازه و پر ارزش بود که لایب نیتس آن راهم ارز کار خودش می دانست. او در یکی از نامه های خود به برادران برنولی، در همین سال ها می نویسد: «محاسبه ای تازه ای شما، هیچ دست کمی از مال من ندارد.» هوپیتال - اگر چه از لحاظ نیروی استعداد با برنولی ها برابری نمی کرد - در گسترش محاسبه ای لایب نیتسی سهم به سزا داشت. او با لایب نیتس مکاتبه داشت و در عین حال با یوهان برنولی، رابطه ای دوستانه ای داشت و به همین مناسبت، در جریان آخرین پیشرفت های آنالیز قرار می گرفت. این وضع، به او امکان می داد که با حرارت، به تبلیغ آموزش جدید پردازد، آموزشی که از همان

عرض و قائم؛ دومی تشکیل شده است از دیفرانسیل های dy ، dx و ds . از تشابه دو مثلث تساوی $pdx = ydy$ به دست می آید. لایب نیتس سپس می گوید: ... و اگر معادله دیفرانسیل را جمع بندی کنیم، خواهیم داشت:

$$\int pdx = \int ydy$$

در اینجا، برای نخستین بار و به صورتی روشن و کاملاً مشخص، رابطه ای بین محاسبه های دیفرانسیلی و انتگرالی، برقرار شده است. ولی، در واقع، برای پی بردن به این موضوع، که برای معاصران ما، امری کاملاً طبیعی و معقول به نظر می رسد، در آن روزگار، به استعدادی عظیم و خلاقه نیاز داشت.

روشی که لایب نیتس برای به دست آوردن نتیجه ای قطعی به کار می برد، به دقت و توجه زیادی نیازمند است. مؤلف، درباره ای $\int ydy$ می گوید: چون داریم: $y = \int y dy$ ، بنابراین خواهیم داشت: $\int y dy = \frac{y^2}{2}$ ، زیرا «برای ما مجموع و اختلاف یا \int و \int عکس یکدیگرند، درست مثل توان و رشته، در محاسبه های معمولی.» به این ترتیب، رابطه ای معکوس دونوع محاسبه، برقرار شد. خواننده به یاددارد که قضیه مربوط به این رابطه معکوس، به صورت کلی خود، حتی به وسیله ای باروی هم طرح شده بود؛ نیوتون هم از این قضیه استفاده می کرد: با همه این ها، نخستین مقاله ای لایب نیتس، که از این رابطه ای معکوس صحبت می کند، اهمیت خاصی در تاریخ ریاضیات دارد، زیرا در آن جا، به نحوی موضوع طرح شده است که در طول سده های متوالی، به همان صورت باقی ماند.

نباید گمان کرد که لایب نیتس، این رابطه ای معکوس را، تنها در مرزها می دید، «چون ... = \int ». او طرح کاملاً کلی تری دارد که البته، خیلی دیرتر و در سال ۱۶۹۳ بیان می کند. لایب نیتس، روند انتگرال گیری را، به این صورت روشن می کند: «مسئله ای کلی کوادراتورها [محاسبه مساحت ها و حجم ها]، منجر به جست و جوی منحنی می شود که دارای قانون معین

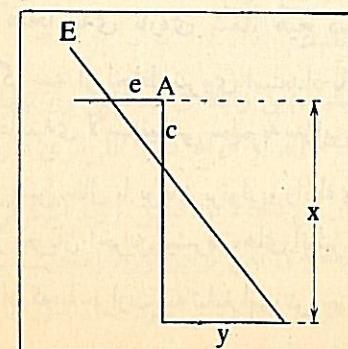
شکل ۳، شکلی است که لایب نیتس کشیده است. او فرض می کند، خط E، که وتر مثلث های متشابه روی آن قرار دارد، به موازات خود و به طرف نقطه ای A جا به جا شود. با وجودی که، ضمن این انتقال، مقدار y زیاد می شود، نسبت $\frac{x}{y}$ ، همواره مساوی نسبت $\frac{c}{e}$ باقی می ماند. وقتی که خط راست E، از نقطه ای A می گذرد، چه اتفاقی می افتد؟ البته، ضلع های مجاور به زاویه ای قائم، یعنی c و e ، به سمت صفر میل می کنند. در این، تردیدی نیست، ولی چگونه از این صفرها، سردرآوریم؟ لایب نیتس می گوید: «اگر c و e را، صفرهایی به مفهوم مطلق خود بگیریم، از آن جا که صفرها با یکدیگر برابرند، به دست می آید: $1 = \frac{x}{y} = \frac{c}{e}$ ، یعنی $x=y$ ، که نتیجه ای ابلهانه است». لایب نیتس، راه نجات از این موقعیت را نشان می دهد: c و e را تهبا در مقایسه با مقادیر معمولی (و در این مساله) x و y می توان صفر به حساب آورد، یعنی، این ها به طور نسبی صفرند نه به صورت مطلق، و بنابراین، نسبت آن ها برابر است با همان نسبت آن ها در زمانی که مقادیری معمولی و مخالف صفر بوده اند.

لایب نیتس متذکر می شود که این روش - انتقال خاصیت کمیت های متغیر، به حالت حدی - کاربرد زیادی در ریاضیات دارد. مثلاً، ویژگی های چند ضلعی منظم، به حالت حدی آن، یعنی دائیره، منتقل می شود. در فیزیک هم، از این نمونه ها، بسیار است. خاصیت کمیت ها، ضمن تغییر آن ها، بنابر قانون پیوستگی، باقی می ماند. لایب نیتس، برای این قانون، اهمیت عام فلسفی به عنوان نشانه ای از انتظام عمومی، قابل بود. ولی آن را به طور جداگانه برای ریاضیات تنظیم می کند، جایی که بنابه اعتقاد او، وجود این قانون «ضرورت مطلق» دارد. نظری که لایب نیتس پیشنهاد می کند چنین است: «اگر بین پدیده های مفروض یا مورد نظر، اختلاف بین دو پدیده می تواند از هر مقدار دلخواهی کوچک تر باشد، باید این وضع در مورد پدیده های مجھولی هم که ناشی از پدیده های مفروض است، برقرار باشد.» لایب نیتس، به صورت

آغاز سال های ۹۰، هواخواه جدی آن شده بود. لایب نیتس می توانست اسوده خاطر باشد؛ زیرا می دید که تلاش های او بی ثمر نمانده است. ولی، هر قدر آموزش لایب نیتس، گسترش بیش تری پیدا می کرد، مخالفان آن هم، روبه افزایش می گذاشت.

و این، امری طبیعی و عادی برای تاریخ است. به یاد داریم که وقتی کلر روش های تازه ای خود را در ریاضیات عرضه کرد، چگونه مورد حمله ای پاسداران ریاضیات سنتی قرار گرفت؛ همین پاسداران نظام کهنگی داشت، علیه آن چه کاوالیری هم عرضه کرده بود، برخاستند؛ حال نوبت لایب نیتس بود؛ او در وارد کردن مفهوم های تازه به ریاضیات، بی احتیاط بود و بنابراین، می بایستی، به قول فردريك انگلس، مورد انتقاد «سفلگان» قرار گیرد. مخالفان، آنانالیز بی نهایت کوچک ها را، مفهومی مهمل می دانستند، زیرا بسیاری از زمینه های مربوط به آن را، نمی توان با قاعده های منطق صوری تطبیق داد. یکی از این زمینه ها، حد نسبت دو مقدار بی نهایت کوچک است. هر دوی آن ها، در حد، برابر صفرند، و بنابراین نسبتی برای آن ها وجود ندارد. لایب نیتس هم استدلال می کرد که حد این نسبت، مقدار کاملاً معینی است.

البته، باید یادآوری کنیم که خود لایب نیتس هم در درک طبیعت بی نهایت کوچک ها، تزلزل هایی داشت، ولی با نیروی شهود پر قدرت ریاضی خودش، توانسته بود تا حد زیادی به حقیقت نزدیک شود. نمونه ای از دفاع او را در این مورد که مربوط به سال ۱۷۵۲ است، می آوریم.



شکل ۳

تصویری که لایب نیتس برای روشن کردن $\frac{c}{e}$ کیده است

گستردۀ تر و خارج از مرز ریاضیات هم، نظر خود را مطرح می کند: «اگر در مفروضات نظری وجود دارد، در مجهولات هم این نظم وجود خواهد داشت.» به این ترتیب، انتقادهایی که بر اندیشه‌های تازه‌ی ریاضی می شد، لایپنیتس را واداشت تا پایه‌های فکری خود را دقیق تر و عمیق تر کند و استدلال‌های خود را هم در ریاضیات و هم فلسفه گسترش دهد و به کمک هر کدام دیگری را غنی تر کند.

لایپنیتس، همچون سابق، به فلسفه، سیاست، آموزش دیگران، کارهای کلیسا و بسیاری کارهای دیگر هم، مشغول بود. دوک ارنست اوگوست، از لایپنیتس خواست تا تاریخ خانواده‌ی او را بنویسد (یوهان فردریک، در سال ۱۶۷۰ م رد). بدون شک، آن‌چه را که واقعی نگاران درباری، از پیش آمدھای مبتذل و بی معنی ثبت کرده بودند، به عنوان مدرک، در اختیار لایپنیتس گذاشتند. از بدختی لایپنیتس (و او خوشبختی داش) او نمی‌توانست بدکار کند. او کوهی از مدرک‌ها را، که در بایگانی‌ها و کتابخانه‌ها پراکنده بود، جمع‌آوری کرد و سر آخر، تصمیم به یک مسافت اختصاصی گرفت. او می‌خواست از قلعه‌ها و دره‌های جنوب آلمان و ایتالیا، بازدید کند. این مسافت، سه سال طول کشید (۱۶۸۷ - ۱۶۹۰). در ایتالیا، با آخرین شاگرد گالیله، یعنی ویویانی، آشنا شد. لایپنیتس «مسئله‌ی ویویانی» را، که مشهور است، در یک روز حل کرد.

این مسافت، برای تاریخ ریاضیات هم، بی‌اثر نبود و ما، در بخشی که به برادران برنولی اختصاص دارد، از آن صحبت خواهیم کرد.

حالا موقع آن رسیده است که به یک حقیقت تأسف بار تاریخی پیردادیم، یعنی به مبالغه‌ای که بین هواداران نیوتون با هواداران لایپنیتس، برسر حق تقدم این یا آن، در کشف محاسبه‌ی جدید، جریان داشت. در واقع، در باره‌ی حق تقدم، به معنای دقیق آن، نمی‌توان صحبت کرد، زیرا عنصرهای جداگانه‌ی محاسبه‌ی دیفرانسلی و انتگرالی و کاربرد آن‌ها، در نوشتۀ‌های تعداد زیادی از

دانشمندان پیش از نیوتون و لایپنیتس وجود دارد. نیوتون، در بسیاری موارد از «هندرسۀ‌ی» کاوالیری استفاده کرده و خیلی چیزها را هم، مستقیماً از معلم خودش باروی برداشته است؛ لایپنیتس هم خودش می‌نویسد که کار او، ادامه‌ای از کارهای پاسکال است. اگر به خواهیم، می‌توانیم از این گونه بستگی‌ها، مجموعه‌ی بزرگی را ارائه دهیم. این را هم می‌دانیم که وقتی لایپنیتس، در سال‌های ۱۶۷۳ و ۱۶۷۶، ریاضی‌دانان انگلیسی را از موضوع‌های مربوط به ریاضیات جدید آگاه کرد، انگلیسی‌ها می‌دانستند که این چیزها، هیچ‌گونه تازگی برای نیوتون ندارد. در دسامبر سال ۱۶۹۷، نخستین تیر شلیک شد: ف. دودونی لیه، ریاضی‌دان اهل ژنو که در لندن زندگی می‌کرد، در نامه‌ی خود به هویگنس نوشت که لایپنیتس از دستگاه نیوتون، استفاده کرده است. این اشاره، و همچنین چاپ بعدی نظر دودونی لیه، دنباله‌ای نداشت، زیرا لایپنیتس، دون‌شأن خود می‌دانست که به چنین تهمت‌هایی اعتنا کند. در سال ۱۷۰۴، مقاله‌ای درباره‌ی کارهای نیوتون که به تازگی منتشر شده بود - در مجله‌ی «Acta eruditorum» چاپ شد، که چندان ستایش‌آمیز نبود. آن وقت، یکی از شاگردان نیوتون به نام کیل (۱۶۷۴ - ۱۷۲۱)، در مجله‌ی انجمن سلطنتی لندن، مستقیماً به مقابله‌ی لایپنیتس پرداخت و او را متهم کرد که تمامی روش‌خود را از نیوتون گرفته و تنها نام گذاری‌ها را تغییر داده است. کیل از پس گرفتن اتهام خود سر باز زد و لایپنیتس، برای اعادۀ حیثیت به انجمن سلطنتی لندن مراجعه کرد. انجمن، گروهی را مأمور رسیدگی کرد، که گزارش آن‌ها در سال ۱۷۱۲، همراه با مجموعه‌ی سندهای مربوط به آن، چاپ شد. تصمیم انجمن به نفع لایپنیتس نبود. همه‌ی این‌ها، اثر تلحی بر لایپنیتس داشت. بررسی‌هایی که بعداً روی دست نویس‌های لایپنیتس انجام گرفت، به صورتی انکار ناپذیر ثابت کردند که این اتهام به کلی بی‌پایه است؛ تمامی جریان کشف‌ها، به تفصیل در این سندها دیده می‌شود. با دنبال کردن این بررسی‌ها، معلوم شد که روند کار

جامع الاطراف در تمامی تاریخ تمدن دانست. در عین حال، باید قدرت و استعداد او را در کار، در حدی دانست که فوق طاقت انسان است. چند نمونه را یادآوری می‌کنیم.

تعداد نامه‌هایی که لایب نیتس از خود برجاگذاشته است، خود مجموعه‌ای عظیم را تشکیل می‌دهد: ۱۵۰۰۰ نامه. آن هم چه نامه‌هایی! تقریباً در همه‌ی آن‌ها می‌توان اندیشه‌ای تازه و پر بار پیدا کرد. لایب نیتس، اصولاً نامه‌ای بی معنی و بی محتوی نمی‌نوشت. انگلس از پیش آمد جالبی یاد می‌کند. از لایب نیتس پرسیدند که با چه روشی می‌توان حرکت جلو و عقب رونده‌ی پیستون ماشین بخار را، به حرکت چرخشی بازوی کار ماشین، تبدیل کرد. و به قول انگلس، لایب نیتس «به برکت نبوغ خاص خودش» سازوکار شاتونی میل لنگی را پیشنهاد می‌کند. باز هم یک نمونه. کورفورست، که بعدها پادشاه پروس شد، از لایب نیتس خواست تا نقشه‌ی فرهنگستان را آماده کند و او هم، این کار را به انجام رسانید. همچنین، لایب نیتس با علاقه‌ای که به شخصیت پطر اول پیدا کرده بود، طرح کاملی برای گسترش آموزش و داشت در روسیه، برای او تهیه کرد.

لایب نیتس از خیلی قبل، به روسیه علاوه‌مند شده بود. حتی در سال ۱۶۹۵، چیزهایی، کم و بیش مبهم، درباره‌ی سلطان جوان، از مسکو دور دست به گوش او رسیده بود. لایب نیتس و پطر، برای نخستین بار در ژوئیه سال ۱۶۷۹ در هانوفر با هم ملاقات کردند. پطر اول، آدم زیرک و با هوشی بود و در همین ب Roxورد، به ارزش لایب نیتس بی برد. لایب نیتس هم، درباره‌ی پطر، به عنوان یک اصلاح طلب مشهور دولتی، اظهار نظر کرده است. در سده هجدهم هنوز افسانه‌ی مربوط به «سلطان روشنفکر» بر ذهن‌ها حکومت می‌کرد. لایب نیتس هم، این افسانه را باور داشت و توجهش به طرف پطر اول جلب شد. آیا این همان شاه مستبدی نیست که اراده‌ی او می‌تواند، آرزوهای لایب نیتس را درباره‌ی «سلطان روشنفکر» برآورد؟ به همین دلیل، با دقت

لایب نیتس، مسیری را طی کرده است، که هیچ وجه مشترکی با مسیر اندیشه‌های نیوتون نداشته است. بخشی که فرما و دکارت بسر جست و جوی ماکریم و می‌نیم داشتند، و یا بحث برادران برنولی به غنای ریاضیات کمک کرد. ولی، جدالی که بین هواداران نیوتون و لایب نیتس در گرفته بود، هیچ ارزشی برای دانش نداشت، جز این که پژوهندگان را واداشت تا در دست

نوش‌های ریاضی لایب نیتس،
به کندوکاو پیشتری پردازند.

این جدال بی معنی تنها این موضوع را ثابت کرد که چگونه خودخواهی، میهنه -

پرستی دروغین و احساس نادرست، می‌تواند محیط پاک دانش را، آلوهه و لکه‌دار کند بدون هیچ مبالغه‌ای می‌توان

گفت که در ابتدای سال‌های سده‌ی هیجدهم، شهرت لایب نیتس، تمامی اروپا را فرا گرفته بود. دانشمند و یا سلطانی نبود که به خاطر

مکاتبه، یا حتی گفتگوی با لایب نیتس، به خود نبالد. گوناگونی و تنوع علاوه‌های او، واقعاً حیرت انگیز بود. اگر بخواهیم از همه دانش‌ها، همه‌ی پیچ و خم‌های فعالیت سیاسی، همه‌ی شاخه‌های صنعت، همه‌ی بحث و جدل‌های مغلق کلیساپی و بسیاری زمینه‌های دیگری که در حیطه‌ی کار لایب نیتس بوده است، نام بیریم کار آسانی نیست. به راستی، می‌توان لایب نیتس را، یکی از پرنبوغ‌ترین دانشمندان



گوتفرید ویلهلم لایب نیتس

(۱۶۴۶ – ۱۷۱۶)

مکاتبه، یا حتی گفتگوی با

لایب نیتس، به خود نبالد. گوناگونی و تنوع علاوه‌های او، واقعاً حیرت انگیز بود. اگر بخواهیم از همه دانش‌ها، همه‌ی پیچ و خم‌های فعالیت سیاسی، همه‌ی شاخه‌های صنعت، همه‌ی بحث و جدل‌های مغلق کلیساپی و بسیاری زمینه‌های دیگری که در حیطه‌ی کار لایب نیتس بوده است، نام بیریم کار آسانی نیست. به راستی، می‌توان لایب نیتس را، یکی از پرنبوغ‌ترین دانشمندان

آخر زندگی خود را، در تنهایی گذراند. بیماری نقرس، او را به صندلی خودش میخ کوب کرده بود. هانور، آن طور که در زمان شکوفایی نیرو و استعدادهای لایب نیتس بود، دیگر مرکز بزرگ سیاسی و علمی به شمار نمی‌رفت. پشتیبانان فیلسوف، از دنیارفته بودند و مکاتبه‌ها به تدریج کم و کم تر می‌شد. چگونگی مرگ لایب نیتس، خالی از بعضی ابهام‌ها نیست. صبح ۱۴ نوامبر ۱۷۱۶، احساس می‌کند حالت خوب نیست. دوست یسوعی او، یک «داروی خانگی»، که خودش تهیه کرده بود، پیشنهاد می‌کند. لایب نیتس، ترکیبی را که این دوست تجویز کرده بود می‌نوشد و بلا فاصله، دردی و حشتناک در شکم خود احساس می‌کند. ساعتی بعد از خوردن «دارو»، و قبل از آن که پیشک برسد، لایب نیتس مرد. تابوت این افتخار بزرگ داشت را، تنها یک نفر مشایعت کرد: منشی او. از سه فرهنگستانی که لایب نیتس عضو آن‌ها بود - فرهنگستان علوم برلین و پاریس و انجمن سلطنتی لندن - تنها فرهنگستان پاریس، نسبت به او ادائی احترام کرد. در ۱۳ نوامبر سال ۱۷۱۷، برنارد فونتنال (Fontenelle) (۱۷۵۷-۱۶۰۷)، نویسنده، دانشمند و عضو فرهنگستان فرانسه، درباره‌ی او سخن رانی کرد.

*

حل دستگاه صفحه ۵۱

با توجه به اتحاد $a = a + \{a\}$ ، اگر سه معادله دستگاه را جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$(1) \quad x + y + z = \frac{3}{3}$$

مجموع دو معادله اول و دوم را از معادله (۱) کم می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$[y] + \{x\} = 0$$

از آن‌جا به سادگی نتیجه می‌شود که x عددی درست است و $1 < y < 0$.

به این ترتیب معادله اول دستگاه به این صورت در می‌آید:

$$x + \{z\} = \frac{1}{1}$$

از آن‌جا $1 = x + 0 = \{z\}$ می‌شود و معادله دوم دستگاه به صورت

$$\frac{1}{2}y + [z] = \frac{2}{2}$$

جواب دستگاه چنین است:

کارهای پطر را در روسیه دنبال می‌کرد و هیچ امکانی را برای دیدن او از دست نمی‌داد. در سال‌های ۱۷۱۱ و ۱۷۱۲، مدت زیادی رادر کارلس باد، تفلیس و در زدن با هم گذراندند. گفتوگوها بی شر نبود و حاصل آن سندها، طرح‌ها و گزارش‌های توضیحی است که لایب نیتس به دستور پطر تهیه کرده که تا امروز هم برای ما باقی مانده است. باید به این نکته هم اشاره کرد که آن‌چه لایب نیتس در این مورد انجام داده است، کوچک نیست. تنها یکی از سندهایی که به خط خود لایب نیتس نوشته شده است، شامل ۲۴۴ واحد است که ۳۶۹ صفحهٔ چاپی را با حروف ریز گرفته است. در این جا به مهم‌ترین آثار او اکتفا می‌کنیم. در دسامبر سال ۱۷۰۸، گزارشی درباره‌ی اجرای اموزش تحصیلی در روسیه تهیه کرد. لایب نیتس می‌گوید که: «هدف واقعی دانش، خوشبخت کردن انسان است.» او اعتقاد دارد که بهترین وسیله برای رسیدن به این هدف، «خوب تربیت کردن جوانان»، و یا به زبان امروزی تعلیمات عمومی است. و لایب نیتس برای تحقیق چنین کار عظیمی در کشور بزرگی مثل روسیه، تأسیس مرحله‌های مختلفی از آموزشگاه‌های درسی و علمی را پیشنهاد می‌کند. او می‌نویسد، ابتدا باید دانش را به روسیه منتقل کرد و بعد منتظر ماند تا در میهن تازه‌ی خود شکوفا شود. اورگزارش خود، به اختصار، از موسسه‌هایی نام می‌برد که وجود آن‌ها در اولویت قرار دارند: کتابخانه‌ها، موزه‌ها، باغ و حشنه‌ها، رصدخانه‌ها و غیره. اگر گزارش لایب نیتس با ترکیب اولیه‌ی فرهنگستان علوم در روسیه، مقایسه شود، معلوم می‌شود که طرح لایب نیتس مبنای برای تشکیل موسسه‌های علمی تازه بوده است. همان طور که می‌دانیم، پطر در زمان افتتاح فرهنگستان زنده نبود. طرح لایب نیتس درباره‌ی اجرای تعلیمات عمومی هم، نمی‌توانست عملی شود. ارزوی لایب نیتس درباره‌ی روسیه‌ی باسواند، زیر حاکمیت «سلطان روشنفکر» عملی نشد و نمی‌توانست عملی شود. ولی فرهنگستان علوم، که خاطره‌ی عزیزی از این انسان بزرگ دانشمند است، توانست در جهت پیشرفت دانش در روسیه، سهم به سزاگی داشته باشد. لایب نیتس، سال‌های

کاربردهایی از مکانیک در ریاضیات

بخش ۱ - مسئله مماس بر دایره

چنانکه می‌دانیم، مماس بر دایره، خط مستقیمی را گویند که بادایره تنها یک نقطه مشترک دارد (که آن را نقطه تماس می‌نامند). در کتب درسی هندسه اثبات شده است که خط مماس، برشعاعی که از مرکز دایره به نقطه تماس کشیده می‌شود، عمود است. آنچه از این پس می‌آید، اثبات قضیه مزبور، براساس مفاهیم مکانیکی است.

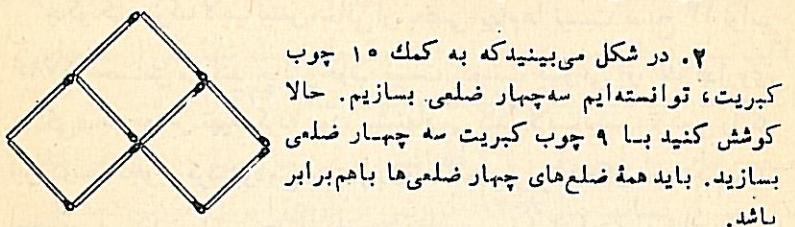
دست به آزمایشی خیالی می‌زنیم. وزنه‌ای را به نقطه M ، انتهای ریسمان می‌آویزیم و سر دیگر ریسمان را به نقطه O می‌بندیم.

(الف) وزنه در بالین ترین نقطه‌ای که می‌تواند از ریسمان آویخته شود، خواهد بود.

این واقعیت که برای مشاهدات ما اهمیتی حیاتی دارد، بدیهی می‌نماید، ولی آموزنده خواهد بود اگر در نظر بگیریم که خود، صورت خاصی از اصلی‌تر (به نام اصل حداقل انرژی پتانسیل) است و ما در بخش ۴، در شرایطی بیچیده‌تر، بدان خواهیم پرداخت. به سخن درست‌تر، به کمک همین اصل حداقل انرژی پتانسیل، می‌توان عبارت (الف) را از نکته آشکار (ب) که در زیر مطرح می‌شود بددست آورد:

راز و رمز عدد ها و شکل ها

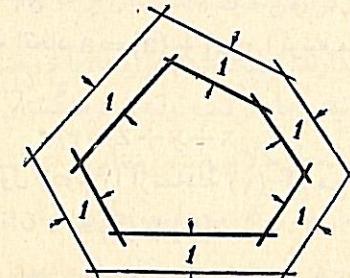
۱. در مثلث ABC ، دو ارتفاع h_C و h_B از ضلع‌هایی که بر آنها وارد شده‌اند کوچکتر نیستند (یعنی هر کدام از این دو ارتفاع، بزرگ‌تر یا مساوی ضلعی است که بر آن عمود شده است). درباره این مثلث چه می‌گویند؟



۲. در شکل می‌بینید که به کمک ۱۵ چوب کبریت، توانسته‌ایم سه چهارضلعی بسازیم. حالا کوشش کنید با ۹ چوب کبریت سه چهارضلعی بسازید. باید همه ضلع‌های چهارضلعی‌ها باهم برابر باشد.

۳. دو دانش‌آموز برای خرید کتابی به یک کتاب فروشی رفتند. معلوم شد که دانش‌آموز اول برای خرید این کتاب ۳۰ ریال کم دارد. اگر دانش‌آموز دوم هم خواست خودش کتاب را بخرد، ۱ ریال کم داشت. وقتی که «پول»‌های خود را روی هم ریختند، باز هم به اندازه قیمت کتاب نشد. قیمت کتاب را پیدا کنید.

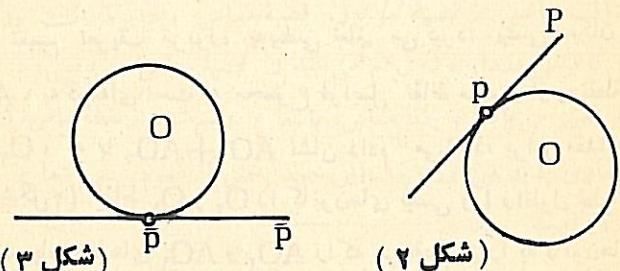
۴. در هند باستان، معمولاً به جای بیان اثبات یک قضیه یا یک مساله، شکلی می‌کشیدند و در کنار آن می‌نوشتند «ببینید». آن‌ها معتقد بودند، کسی که به ریاضیات می‌پردازد، باید خود جست و جو کنند و استدلال لازم را بددست آورد. شما هم «ببینید» به کمک شکل‌چگونه می‌توان این مساله را حل کرد:



یک چندضلعی محدب داریم که محیط آن برابر ۱۲ سانتیمتر است. چندضلعی محدب دیگری در بیرون آن قرار گرفته است، به نحوی که فاصله هر ضلع آن با ضلع نظیرش از چندضلعی داخلی، برابر یک سانتیمتر است. ثابت کنید تفاوت مساحت دو چندضلعی، بیش از ۱۵ سانتیمتر مربع است.

(۵) فاصله بین وزنه و نقطه آویز O ، معادل طول ریسمان MO می باشد (و این به معنی کشیده بودن ریسمان است).

بعنوان جمله معتبره می توان یادآور شد که ظاهراً نکات (ه) و (ج)، از آنچه این دورا برما مکشوف می کند، کمتر بدیهی نیست.
اینک برای اثبات قضیه خود پیشتر می رویم. فرض می کنیم که طبق شکل ۲، نقطه O ، مرکز یک دایره است و خط مستقیم p ، در نقطه P ، بر آن دایره مماس شده است. باید ثابت کنیم که $OP \perp p$. تصویر مزبور را بر دیواری عمودی می کشیم، به نحوی که خط p به صورت افقی درآید و دایره به تمامی بالای آن قرار بگیرد. (اگر این کتاب را به صورت قائم نگاه داریم، شکل ۳ نیازما را برخواهد آورد) به یاد داشته باشیم که در این حالت نقطه P ، پایین ترین نقطه دایره خواهد بود. سپس ریسمانی درست به طول شعاع دایره بر می داریم و یک سر آن را در نقطه O ، مرکز دایره محکم می کنیم. به سر دیگر ریسمان که با M مشخص شده است، وزنهای می بندیم و ریسمان را آویزان می کنیم. باید نشان دهیم که نقطه M بر روی نقطه P ، منطبق خواهد شد.



(شکل ۲)

در حقیقت، به موجب عبارت (ه)، ابتدا معلوم می شود که M حتماً روی محیط دایره واقع خواهد شد و سپس به موجب عبارت (الف)، این نقطه بر پایین ترین نقطه محیط دایره، یعنی P ، منطبق خواهد گشت. پس ریسمان نیز بر شعاع OP منطبق خواهد شد. بنابراین با توجه به عبارت (ج)، شعاع مزبور بر خط p عمود خواهد بود که این خود در حکم اثبات قضیه می باشد.

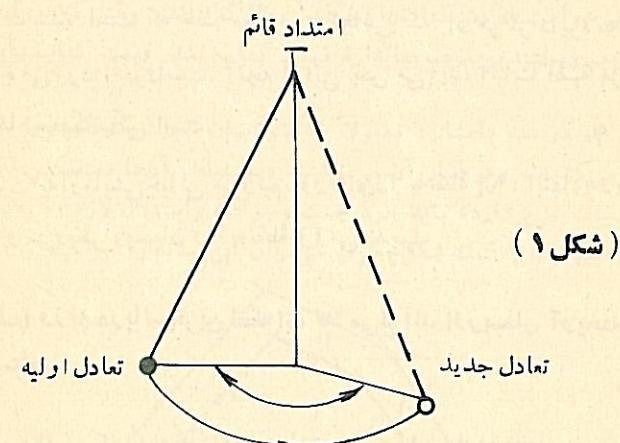
البته مثال فوق چندان جالب به نظر نمی رسد، چرا که اثبات قضیه نسبتاً

(ب) برای وزنه، تنها یک نقطه تعادل وجود دارد.

به عبارت دیگر، مکان وزنه در حالت تعادل، از روی طول ریسمان و محل نقطه O کاملاً قابل پیش‌بینی خواهد بود.
بنابرایانگی حالت تعادل [از روی نکته (ب)]، به نکته دیگری پی می‌بریم:

(ج) وزنه بر روی خطی قرار دارد که از نقطه آویز به صورت قائم رسم شود.

در واقع، اگر وزنه روی این خط قرار نمی گرفت، آنگاه هر حالت جدیدی که با چرخاندن ریسمان حول خط مزبور به دست می آمد، برای وزنه، به منزله حالت تعادل تازه‌ای، تلقی می شد (شکل ۱).



(شکل ۱)

استدلال فوق، بر اساس امر مسلمی است که در عمل به دست آمده است، یعنی:

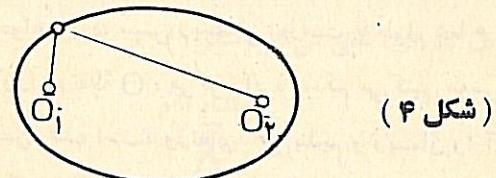
(۵) اگر جسم یا مجموعه اجسام تحت تعادلی، حول محور قائم به گردش درآید، هر حالت جدید، خود حالت تعادل جدیدی خواهد بود.

از عبارت‌های (الف) و (ج)، چنین نتیجه می شود:

ساده‌ای را در بردارد. اما این روش، برای اثبات قضایای جدید، به کار گرفته خواهد شد. در این راه، از روش «مکانیکی» اثبات قضیه مماس بر دایره، استفاده خواهیم کرد. در بخش ذیرین، به تعیین قضیه مذبور، تحت عنوان قضیه مماس بریضی دست خواهیم زد.

بخش ۴- مسئله مماس بر بیضی

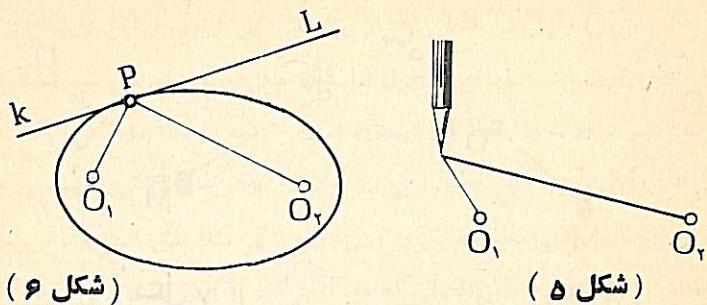
بر طبق تعریف، دایره مکان هندسی نقاط A ، به گونه‌ای است که فاصله نقاط مذبور از نقطه مشخص O ، که با AO نمایش داده می‌شود، مساوی مقدار معلوم l باشد.



(شکل ۴)

تعیین تعریف مذبور، به بیضی تعلق می‌گیرد. بیضی مکان هندسی نقاط A ، به گونه‌ای است که مجموع فواصل نقاط مذبور از دونقطه مشخص O_1 و O_2 ، که با $AO_1 + AO_2$ نشان داده می‌شود، برابر مقدار معلوم l باشد (شکل ۴). نقاط O_1 و O_2 را کانون‌های بیضی و l را طول قطر اطول آن می‌نامند. پاره خط‌های AO_1 و AO_2 را که هر نقطه A را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنند، شعاع‌های کانونی نقطه A می‌نامند. دایره حالت خاصی از بیضی است که در آن کانون‌های O_1 و O_2 برهم منطبق گشته است. در آن صورت شعاع‌های کانونی نیز برهم انطباق یافته، شعاع دایره را تشکیل می‌دهند. هر کس می‌تواند ریسمانی بردارد و دوسر آن را روی کاغذ بر دونقطه مشخص O_1 و O_2 محکم سازد، به شرط آن که طول پاره خط O_1O_2 از طول ریسمان کوچکتر باشد، و نوک مدادی را در ریسمان ازدایز و باکشیدن ریسمان

و حرکت‌دادن نوک مداد، یک بیضی ترسیم کنند (شکل ۵).
مماس بر بیضی نیز، چون دایره، بخط مستقیمی اطلاق می‌شود که یک نقطه مشترک با آن داشته باشد (شکل ۶).



(شکل ۵)

قضیه مماس بر بیضی بدانگوئه که در زیر می‌آید معتبر است. زوایای بین خط مماس بر بیضی و شعاع‌های کانونی نقطه تماس، با یکدیگر برابرند.
(در شکل ۶ زوایای مذبور را با LPO_1 و KPO_2 نشان داده ایم).

حالت خاصی از قضیه مذبور، قضیه مماس بر دایره است. در واقع، شعاع‌های کانونی در دایره روی l می‌افتد و قضیه مماس بر بیضی، در مورد دایره پنهان تغییر می‌یابد که خط مماس، با شعاع رسم شده از نقطه تماس، زوایای مجاور متساوی پدید می‌آورد که این خود بهمنزله عمود بردن شعاع مذبور بر خط مماس است.

اینک اثبات قضیه مماس بر بیضی را، همانند به قضیه مماس بر دایره، پیش می‌کشیم. به خواننده توصیه می‌کنیم که پیش از آنکه به خواندن کتاب ادامه دهد، خود از طریق مکانیکی، شیوه‌ای برای اثبات قضیه بیا بد.

مانند بخش پیشین، قبل از ارائه دلای، دست به آزمایش مکانیکی می‌زنیم. دونقطه O_1 و O_2 را در ارتفاع یکسانی بر روی دیواری قائم انتخاب می‌کنیم. ریسمانی بلندتر از فاصله O_1O_2 به دوست می‌آوریم و دوسر آن را در نقاط O_1 و O_2 مهکم می‌کنیم. وزنهای را چنان بدریسمان می‌آویزیم که بتواند در امتداد آن بلغزد (مثل ریسمان را از درون حلقة‌ای که برای این منظور در

$M O_2$ پدید می‌آورد، انطباق خواهد یافت. بنابراین، زوایای مزبور باهم برابرند.

اینک از این فرض که نقاط آویز در ارتفاع یکسانی قرار دارد، صرف نظر می‌کنیم و O_1 و O_2 را نقاطی اختیاری در نظر می‌گیریم. از این دو نقطه وزنای را که می‌توانست آزادانه در طول ریسمان بلغزد، آویزان می‌کنیم (شکل ۸). فرض کنیم که وزنه در نقطه M استاده است. توجه کنید که در حالی که وزنه در نقطه M می‌حرکت است، اگر ریسمان را بهتر نقطه دیگری بیندیم، مکان وزنه همچنان تغییر خواهد کرد. (در واقع اگر مثلاً طبق شکل ۸، ریسمان را به نقطه \bar{O}_2 بیندیم عکس العملی که در آویزگاه O_2 پدیدار می‌شود کشش موجود در بخش \bar{O}_2 از ریسمان را خشی می‌کند). واقعیت فوق بهما اجازه می‌دهد که تعمیمی در مورد حالت نابرابری ارتفاع نقاط آویز، بدست آوریم. در واقع کافی است که سر دیگر ریسمان را به نقطه O_2 که هم ارتفاع O_1 است، بیندیم (شکل ۸) در این صورت محل تعادل وزنه، تفاوتی با قبل خواهد داشت. با اراده دادن $O_1 = O_2$ به حالت قبل می‌رسیم که در آن، نقاط آویز O_1 و O_2 هم ارتفاع بودند. بنابراین از عبارات (ج ۱) و (ج ۲)، بلافاصله به عبارات (ج ۳) (که به خودی خود بدیهی است) و (ج ۴) دست می‌یابیم.

(ج ۳) صفحه $O_2 O_1 M$ قائم است.

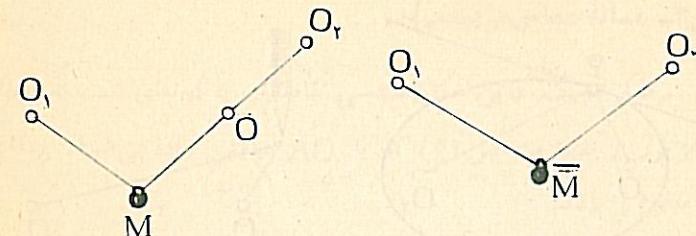
(ج ۴) زوایای بین پاره خط‌های MO_1 و MO_2 و خط‌افقی گذرنده از نقطه M در صفحه $O_2 O_1 M$ متساوی است.

بالاخره، دو عبارت آشکار زیر اعتبار می‌یابد:

(الف) در حالت تعادل، وزن آویخته به ریسمان، در پایین قرین نقطه ممکن قرار خواهد گرفت. (با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل که در

۱. در این شکل، نقطه O_2 بالاتر از O_1 کشیده شده است، در صورت بالاتر بودن O_1 از O_2 نیز به شیوه مشابهی عمل می‌شود.

وزنه تعییه شده، طبق شکل ۷، عبور می‌دهیم). اینک اگر وزنه را آزادانه در طول ریسمان رها کنیم، عاقبت در نقطه‌ای چون M ، بی‌حرکت خواهد ایستاد. دونکته بدیهی زیرین قابل توجه است:



(شکل ۸)

(ج ۱) صفحه $O_1 O_2 M$ قائم است (یعنی از صفحه قائمی می‌گذرد).

(ج ۲) در صفحه $O_1 O_2 M$ ، زوایای که پاره خط‌های MO_1 و MO_2 با صفحه‌ای افقی که از نقطه M می‌گذرد، می‌سازند، باید دیگر مساوی است. توجه داشته باشید که نکات (ج ۱) و (ج ۲) را می‌توان از خاصیت یکانگی محن تعادل وزنه، بدست آورد. برای این منظور، عمود منصف پاره خط $O_1 O_2$ را رسم کنید و ریسمان را به همراه وزنه، ۱۸۰ درجه حول این خط بچرخانید. در حالت جدید، نقطه O_1 ریسمان روی نقطه O_2 و نقطه O_2 ریسمان روی نقطه O_1 قرار خواهد گرفت. بر طبق عبارت (د) که در بخش قبلی عنوان شد، حالت تعادل جدیدی بدست خواهد آمد، و از آن رو به موجب فرضیه یکانگی این حالت، ریسمان (به همراه مثلث $M O_1 O_2$) بر حالت پیشین خود مطابق شده است، می‌توان نتیجه گرفت که محور گردش در صفحه مثلث واقع است. از طرفی، صفحه $M O_1 O_2$ از خطی قائم می‌گذرد، پس خود قائم است. به علاوه، برای چرخش، خط‌افقی که از M می‌گذرد و در صفحه $M O_1 O_2$ واقع است، دوباره بر خود مطابق خواهد شد و زاویدای که خط افقی مزبور با پاره خط $M O_1$ می‌سازد، بر زاویدای آنکه این خط با پاره خط

شرط معلوم بودن کانون‌های یپسی، بر هر نقطه مشخصی از آن، خطی مماس رسم کنیم. برای این‌منظور کافی است که از نقطه تماس P خطوطی به کانون‌های O_1 و O_2 ، طبق شکل ۹ رسم کرده، نیمساز زاویه SPO_1 (بازاویه TPO_1) را بدست آوریم. این نیمساز، همان خط مماس مطلوب خواهد بود.

قضیه مماس بر یپسی تعبیر بصری جالی دارد: فرضی کیم که یپسی یک آینه است، یعنی شعاع‌های نورانی که در صفحه یپسی می‌گذرد، در آن منعکس می‌شود. در این صورت اگر در یک کانون آن نقطه‌ای نورانی قراردهیم، شعاع‌های ساطع از آن، در کانون دیگر گرد خواهد آمد (شکل ۱۰).

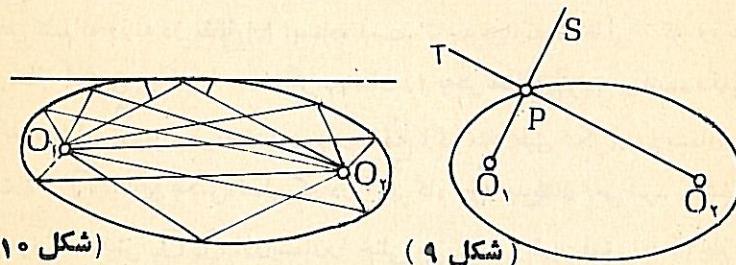
در حقیقت زاویه‌ای که هر شعاع نورانی اختیاری با یپسی می‌سازد، بد موجب قوانین فیزیک نور، با زاویه بین شعاع نورانی منعکس شده و یپسی برابر است. زاویه ایجاد شده بین یک خطراست و منحنی (در مثال ما، زاویه شعاع نورانی و یپسی) را معادل زاویه بین خطراست مزبور و خط مماس مرسوم بر منحنی در محل برخورد درنظر می‌گیرند. از آنجا که شعاع نورانی اختیاری در امتداد شعاع کانونی حرکت می‌کند، شعاع نورانی منعکس شده، به موجب قضیه‌ای که در فوق اثبات گشت، در امتداد شعاع کانونی دیگر به حرکت درمی‌آید.

بخش ۳- مسأله مماس بر سهمی و هذلولی

سهمی مکان‌هندسی نقاط P ، بهزوحی است که از نقطه مشخص F (که کانون سهمی نامیده می‌شود) و خط مستقیم و معلوم $[A]$ (نه بهدادی سهمی مرسوم است) بدیک فاصله قرارداشته باشد (شکل ۱۱). سهمی صفحه را بهدو بخش تقسیم می‌کند: در یک بخش خط‌هادی واقع است و در بخش دیگر (که در شکل ۱۲ هاشورخورده است)، کانون سهمی جای دارد. خط مستقیم که تنها یک نقطه مشترک با سهمی دارد و در یکی از بخش‌هایی که یپسی در روی صفحه پدید آورده واقع شده است، مماس بر سهمی نامیده می‌شود. در شکل ۱۳، خطراست p بر سهمی مماس است ولی خط مستقیم q ، هرچند که فقط در یک نقطه با سهمی تلاقی کرده است، بر آن مماس نیست.

بخش ۱ مورد بحث قرار گرفت، عبارت مذبور از یگانگی حالت تعادل نتیجه می‌شود.)

(ب) در حالات تعادل، رسمنان کشیده است (بدان معنی که بخش‌های $O_2O_1MO_1$ مستقیم است و در نتیجه مجموع فواصل نقطه M از O_1 و O_2 برابر با طول رسمنان است).

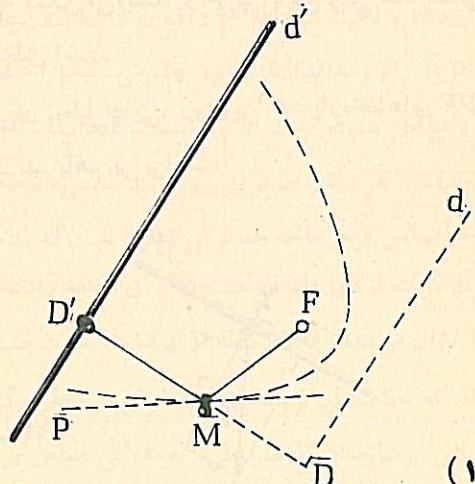


(شکل ۹)

حال به اثبات قضیه مماس باز گردیم. بیضی شکل ۶ را به حاطر بیاوردیم که کانون‌های آن O_1 و O_2 و طول قطر اطول آن مساوی $[I]$ است و خط مستقیم KL در نقطه P بر آن مماس می‌باشد. باید اثبات کنیم که $\angle O_1PK = \angle O_1PL$. برای اثبات، شکل را چنان بگردانید که صفحه تصویر قائم شود و خط مستقیم KL به صورت افقی قرار گیرد و یپسی بر فراز خط مستقیم KL واقع گردد. (در این صورت، نقطه P پایین ترین نقطه یپسی خواهد بود). اینک رسمنانی بدطول $[I]$ اختیار می‌کنیم و وزنه‌ای بدان می‌آویزیم، دوسر آن را در نقاط O_1 و O_2 می‌بندیم، و وزنه را در طول آن آزاد می‌گذاریم. وزنه در نقطه M خواهد ایستاد. آنکه به موجب عبارت (ج ۳) نقطه M نیز در صفحه مشخص M خواهد بود. به موجب عبارت (ج) نقطه M نیز در صفحه قصویر واقع خواهد شد. به موجب عبارت (ب)، نقطه مزبور روی یپسی خواهد افتاد و علاوه بر آن، بر حسب عبارت (الف) بر نقطه P منطبق خواهد گشت. پس رسمنان خود بر پاره خط‌های PO_1 و PO_2 انتبطاق خواهد یافت. به موجب عبارت (ج ۴)، زوایای ایجاد شده از برخورد خطوط مزبور و خط مستقیم KL ، متساوی خواهد بود. این خاصیت که مماس بر یپسی با شعاع‌های کانونی زوایای متساوی پذیده‌ی آورد، مارا قادر می‌سازد که با استفاده از یک پرگار و یک خط کش.

قضیه مماس بر سهمی بدان شکل که در زیر می‌آید معتبر است:

اگر از هر نقطه دلخواه P به کانون سهمی پاره خط PF و عمود بر هادی آن، پاره خط PD را رسم کنیم، زوایای بین این دو پاره خط و خط مماس بر سهمی در نقطه P باهم برابرند (یعنی در شکل ۱۴، $\angle DPK = \angle KPF$). این قضیه را بر اساس ملاحظات مکانیکی به همان گونه که در دو بخش پیش دیده شد، می‌توان اثبات کرد. ما چنین اثباتی را به صورت خلاصه شرح می‌دهیم.



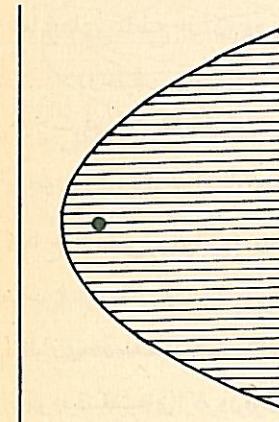
(شکل ۱۵)

وزنای چنان می‌آویزیم که بتواند در طول آن حرکت کند. فرض کنیم وزنه به هنگام تعادل در M و حلقه در D' قرار گیرد. ریسمان به حالت کشیده است، پس پاره خطهای MD' و MF مستقیم و راست می‌باشند. بیش از همه، توجه داشته باشید که:

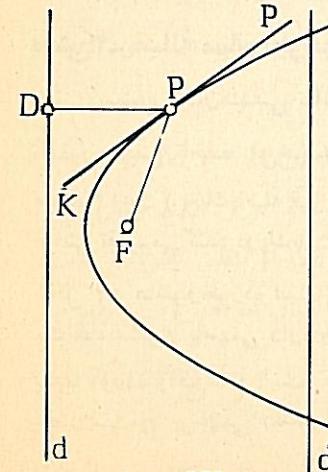
$$MD' \perp d' \quad (3-1)$$

(در عیر این صورت. همانطور که در شکل ۱۶ مشاهده می‌شود مؤلفه T_1 ، از نیروی T ، یعنی نیروی کشش ریسمان در طول میله صفر نخواهد بود و ریسمان از محل تعادل خود خارج خواهد شد). سپس، به دلیلی که در بخش قبل ذکر شد، نخست درمی‌بایم زوایای پدیدار شده بین پاره خطهای MD' و MF و خط مستقیم p برابر است و سپس این که

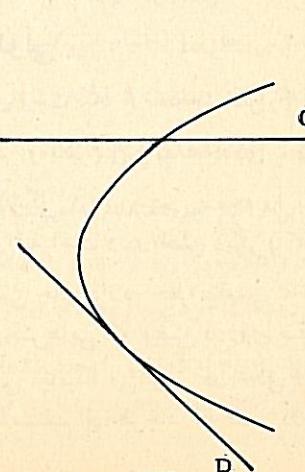
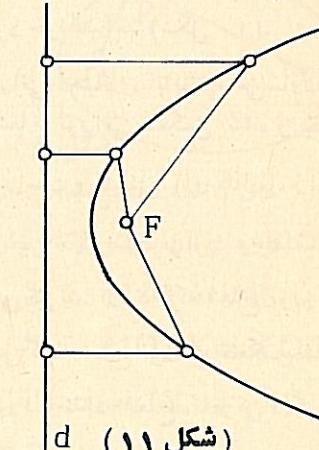
$$MD' + MF = 1 \quad (3-2)$$



(شکل ۱۲)



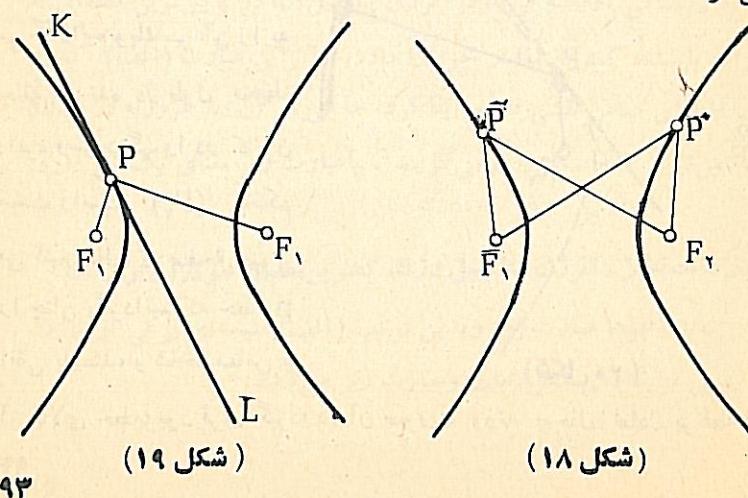
شکل ۱۳



شکل ۱۴

که بهمنظور انتشار پرتوهای (نورانی یا گرمایی) در جهتی خاص به کار می‌رود، بازکرده است، بدین ترتیب که سطح آینه همه آنها را از طریق گرداندن یک سهمی، حول خطی که از کانون آن برخط هادی عمود شده است، می‌سازند.

هذلولی مکان هندسی نقاطی است که فواصل هر یک از آنها از دو نقطه ثابت F_1 و F_2 (که کانون‌های هذلولی نامیده می‌شود) اختلاف ثابتی دارد. همانطور که در شکل ۱۸ مشاهده می‌شود، هر هذلولی از دو شاخه تشکیل شده است. در آن‌شکل، فاصله هر نقطه P' واقع بر شاخه سمت‌چپ از نقطه F_1 نسبت به فاصله P' از F_2 ، به اندازه مقدار معلومی کمتر است، نیز فاصله هر نقطه P'' واقع بر شاخه سمت‌راست از F_2 نسبت به فاصله P'' از F_1 بهمان اندازه کمتر می‌باشد. هر شاخه هذلولی نیز مانند سهمی، صفحه را به دو بخش تقسیم می‌کند. خط مماس بر هر شاخه هذلولی خطی است که کاملاً در یکی از این دو بخش قرار گرفته و تنها یک نقطه مشترک با آن شاخه داشته باشد. شکل ۱۹ خط مستقیمی را نشان می‌دهد که در نقطه P بر شاخه سمت‌چپ مماس است. می‌توان نشان داد که خط مماس بر یک شاخه هذلولی، شاخه دیگر را قطع نمی‌کند. هر خط مماس بر شاخه‌ای از هذلولی، به سادگی مماس بر هذلولی نامیده می‌شود.



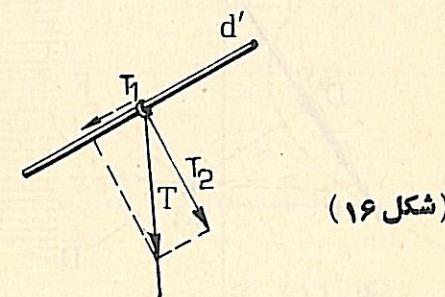
۹۳

حال $d \perp MD$ را رسم می‌کنیم. از آنجا که فاصله بین d و d' برابر ۱ است از رابطه (۳-۱) و (۳-۲) نتیجه می‌شود که

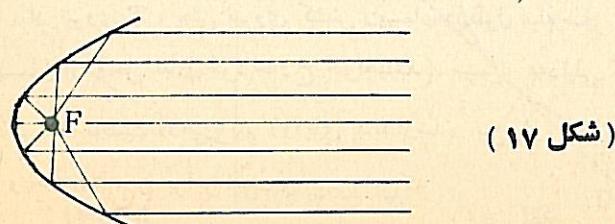
$$MD = MF \quad (۳-۳)$$

این به معنای آن است که نقطه M بر روی سهمی قرار دارد. اما از آنجا که M در پایین ترین نقطه ممکن می‌ایستد و P نیز پایین‌ترین نقطه ممکن سهمی است، پس M بر P منطبق است.

بنا بر این در تحلیل‌نهایی، زوایایی که پاره‌خط‌های PF و PD با خط مستقیم p می‌سازند، باهم برابر است.



تعییر بصیری قضیه اثبات شده فوق چنین است: پرتوهای نورانی تابند از کانون سهمی، پس از انعکاس در آن، به صورت شعاع‌های متوازی عمود بر خط هادی منتشر می‌شود (شکل ۲۱). این واقعیت جای پای سهمی را در ساخت وسایلی از قبیل نورافکن‌ها، نوربر گردان‌ها (reflectors)، و آلات دیگری



۹۴

منطق خواهد شد. با توجه به این حقیقت، با توصل به دلایلی که در فوق آورده‌یم می‌توانیم قضیه را اثبات کنیم.

به‌خاطر داشته باشید که اگر خط بر شاخه سمت چپ مماس باشد، طریقه فوق را به کمک دایره به مرکز کانون سمت راست می‌توان تکرار کرد. البته در آن صورت می‌توان با دایره‌ای به مرکز کانون سمت چپ نیز مسأله را حل کرد، ولی شعاع آن در حالت جدید باید مساوی $a + b$ اختیار شود. قضیه مماس بر هذلولی، مانند سایر قضایای مماس که قبلاً ذکر شد، راهی برای رسم این منحنی به دست می‌دهد.

بخش ۴۵- اصل حداقل انرژی پتانسیل

وزنه‌ای که تا ارتفاع معینی بالا برده شده، در صورت افتادن می‌تواند کار انجام دهد. به عبارت دیگر، دارای انرژی پتانسیل است. همان‌طور که از دوره فیزیک دیرستان می‌دانیم، انرژی پتانسیل وزنه q که تا ارتفاع h بالا برده شده، از حاصل ضرب qh به دست می‌آید. بدینه است هرچه ارتفاع کمتر باشد، انرژی پتانسیل کمتر است. تمايل وزنه به قرار گرفتن در پایین‌ترین سطح با تمايل انرژی پتانسیل به‌حراب کمترین مقدار، در ارتباط است. وقتی وزنه به ریسمانی آویخته می‌شود، انرژی پتانسیل آن، در پایین‌ترین نقطه‌ای که می‌تواند بایستد، کمترین مقدار خود را دارد. بنابراین عبارت (الف)، که در اثبات قضایای مماس نقشی قاطع ایفا کرد، حاکی از آن‌که هر وزنه در هنگام تعادل پایین‌ترین نقطه ممکن را بر می‌گزیند، با عبارت زیر معنای یکسانی دارد:

(و) در حالت تعادل، انرژی پتانسیل وزنه، کمترین مقدار خود را دارد.

به نوبه خود، عبارت (و) و بدین ترتیب (الف) نتیجه‌ای فرعی از عبارت

(ب)، مبنی بر یگانگی محل تعادل و عبارت زیر می‌باشد:

پاره خط‌هایی که نقطه‌ای از هذلولی را به کانون‌های آن متصل می-

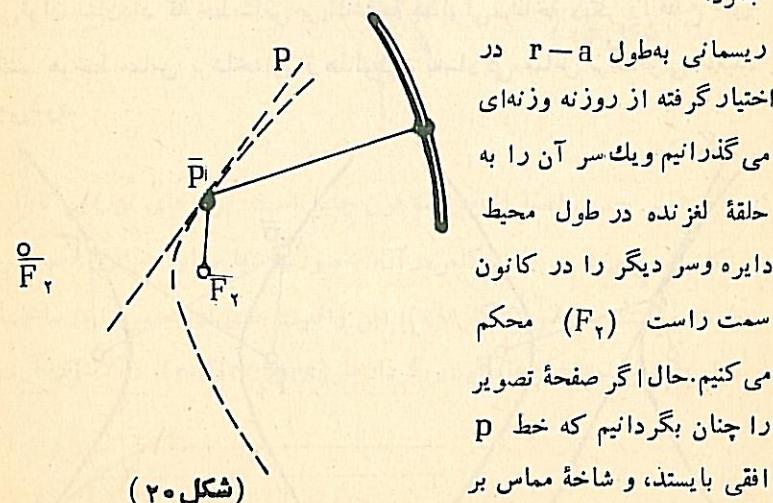
سازند، مانند بیضی، شعاع‌های کانونی نامیده می‌شوند.

قضیه مماس بر هذلولی: خط مماس بر هذلولی با شعاع‌های کانونی مرسوم از نقطه تماس ذوایای برابر تشکیل می‌دهد. (پس در شکل ۱۹،

$$\angle F_1 P L = \angle L P F_2$$

ما قضیه را اثبات نمی‌کنیم و این کار را به‌خواننده و امی گذاریم، ولی صرفاً اساس مکانیکی این امر را روشن می‌کنیم. بنا به تعریف هذلولی، تفاوت طول شعاع‌های کانونی، مقداری ثابت است، ما این مقدار را با a نمایش می‌دهیم.

فرض می‌کنیم که نقطه تماس P روی شاخه سمت راست واقع است (شکل ۲۰). از کانون سمت چپ، نقطه F_1 ، دایره‌ای به شعاع a چنان رسم می‌کنیم. که اولاً $\angle F_1 P a$ و ثانیاً نقطه P درون دایره مزبور قرار گیرد. محیط این دایره را حلقه‌ای باریک فرض می‌کنیم که حلقه کوچکتری در طول آن می‌تواند بلغزد.



آن بالای خط مزبور قرار گیرد، در آن صورت وزنه به حال تعادل بر نقطه P

است. با این همه، هنگامی که نه بایک وزنه متفاوت، بلکه با تعدادی وزنه که به یکدیگر بسته شده است، سروکار داریم، این دعوی که در حالت تعادل همه آن وزنه‌ها در پایین‌ترین نقطه ممکن قرار می‌گیرد، نادرست است. در اینجا مکان همه وزنه‌هارا چنان باید یافت که اصل مربوط به انرژی پتانسیل در آن رعایت شود.

در زیر مثالی می‌زنیم:

در کتاب مشهور «شکار لحظه‌های ریاضی» [نشریات دانشگاه آکسفورد ۱۹۶۰] به قلم ه. استاین‌هاوس H. Steinhaus مقاله ۳۹) مسئله زیر مطرح شده است:

«قرار است برای سه روستا، مدرسه‌ای بسازند. در روستای اول ۵۵، دومی ۷۵ و سومی ۹۰ کودک به سر می‌برند. مدرسه‌ها در چه مکانی باید ساخت تا کودکان برای رسیدن به آن، در مجموع کمترین مدت ممکن را صرف کنند؟ برای حل این مسئله کافی است طبق شکل ۲۲ نقشه منطقه را روی میزی افقي بگسترانیم و سپس میز را در محل سه روستا سوراخ کنیم و سه ریسمان از سوراخ‌ها عبور داده، انتهای بالای آن‌ها را در یک نقطه بهم گره بینیم و به انتهای زیرین آن‌ها به ترتیب وزنه‌های ۵۵، ۷۵، ۹۰ واحدی (مثلاً ۵۰۰، ۷۰۰ و ۹۰۰ گرمی) بیاوزیم، محل اتصال سه ریسمان در روی نقشه هر جا قرار گیرد، مدرسه را همان جا باید بنادرد. (چرا؟)»

برای پاسخ‌دادن به این چرا باید انرژی پتانسیل دستگاه مزبور را که شامل سه وزنه است، محاسبه کرد. وزنه‌ها را به ترتیب q_1 ، q_2 و q_3 می‌نامیم. اگر ارتفاع آن‌ها به ترتیب h_1 ، h_2 و h_3 باشد، انرژی پتانسیل دستگاه،

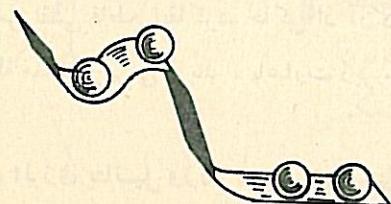
(ز) اگر در نقطه‌ای مشخص، انرژی پتانسیل یک وزنه دارای کمترین مقدار باشد، آن نقطه، محل تعادل است.

برای استنتاج (ز) از این عبارت، کافی است گوشزد کنیم که اگر انرژی پتانسیل حداقل مقدار خود را نداشته باشد، پس به موجب (ز) باید نقطه دیگری در ارتباط با کمترین مقدار انرژی پتانسیل وجود داشته باشد، ولی این امر با عبارت (ب) متناقض است.

عبارت (ز) صورتی خاص از یک اصل مکانیکی عام است که به نام اصل حداقل انرژی پتانسیل، یا اصل دیریشت (Dirichlet Principle) شناخته می‌شود. طبق این اصل:

هر دستگاهی که در آن انرژی پتانسیل حداقل مقدار دارد، در حال تعادل به سر می‌برد.
اگر محل تعادل منحصر بفرد باشد، اصل دیریشت نتیجه‌ای فرعی به دست می‌دهد:

در حال تعادل، انرژی پتانسیل هر دستگاهی به کمترین مقدار می‌رسد.
اشتقاق این قضیه جانبی، معادل استنتاج عبارت (و) است.
بنابراین، ماتنها حالاتی را در نظر می‌گیریم که محل تعادل یگانه باشد (حالات دیگری نیز وجود دارد، همان‌طور که در شکل ۲۱ نشان داده شده، برای یک گوی چهار حالت تعادل موجود است).



(شکل ۲۱)

البته برای حل مسائل مماس، لزومی به مراجعه به اصل حداقل انرژی پتانسیل نیست. زیرا این نکته که وزن در پایین‌ترین نقطه ممکن می‌ایستد، امری بدیهی

به موجب اصل حداقل انرژی پتانسیل، اگر E کمترین مقدار را داشته باشد، دستگاه در حال تعادل است. پس به فرض یگانگی حالت تعادل، نتیجه می شود که در حالت تعادل، E حداقل مقدار خود را دارد. ولی اگر E حداقل باشد در آن صورت طبق رابطه زیر:

$$T = q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 = E - C$$

کمیت T نیز حداقل خواهد بود. ولی کمیت T خود دقیقاً مجموع زمان لازمی است که کودکان برای رسیدن از روستاهای خود، به مدرسه که در محل گره قرار دارد، نیاز دارند. بنابراین با قرار گرفتن گره در مکانی که دستگاه به حالت تعادل می رسد، مجموع زمان لازم نیز عملاً کمترین مقدار خود را می یابد.

بخش ۵- ذرات و گرانیگاه

تا اینجا هیچ گاه خودرا با بعد وزنهایی که از زیمان می آویختیم مشغول نساختیم. از مشاهدات مزبور برواضح است که از طرفی وزنهای را بسیار کوچک در نظر می گرفتیم (چنان کوچک که موقعیت هر یک را بتوان با نقطه ای مشخص کرد) و از طرف دیگر، به هر یک وزن، و در نتیجه جرم مشخص اختصاص می دادیم.

مشاهدات فوق، مارا به یکی از اساسی ترین مفاهیم مکانیک-مفهوم ذرہ- راهبری می کند. در مکانیک، ذره (یا نقطه مادی*) پیکری چنان کوچک است که از ابعاد آن می توان صرف نظر کرد. ذره را می توان نقطه ای هندسی دانست که جرم مشخصی به آن اختصاص یافته است. از آنجا که ذرہ دارای جرم معینی است، پس وزن معینی نیز دارد. سیستمی از ذرات را در نظر بگیریم که متناسب با جرم ذرات، تحت تأثیر نیروی جاذبه واقع شده است. برآیند همه این نیروهای موازی در نقطه مشخصی از سیستم ذرات، به نام گرانیگاه (مرکز ثقل) وارد

* mass Point

مجموع انرژی پتانسیل هر یک از وزنهای است:

$$E = q_1 h_1 + q_2 h_2 + q_3 h_3 \quad (4-1)$$

اگر دو اتصال گره (محل اتصال سه زیمان) از دهکده ها را به ترتیب r_1 ، r_2 و r_3 و طول زیمان ها را به ترتیب l_1 ، l_2 و l_3 و ارتفاع سطح میز را h در نظر می گیریم. مسلمان گره هر کجا که قرار گیرد و h_1 ، h_2 و h_3 هر مقدار که باشد، این رابطه برقرار خواهد بود:

$$r_1 + (h - h_1) = l_1 \quad , \quad r_2 + (h - h_2) = l_2 \quad , \quad r_3 + (h - h_3) = l_3$$

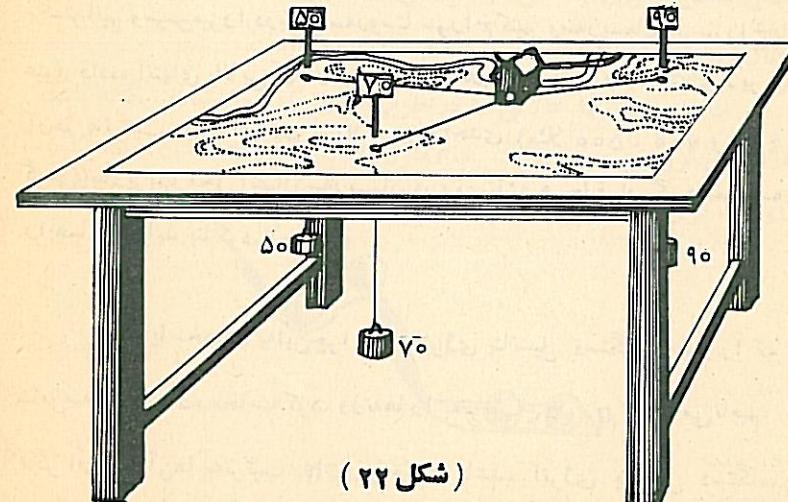
$$h_1 = r_1 + h - l_1 \quad , \quad h_2 = r_2 + h - l_2 \quad , \quad h_3 = r_3 + h - l_3$$

رباطه (4-1) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$E = q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 + C \quad \text{که در آن}$$

$$C = (q_1 + q_2 + q_3)h - q_1 l_1 - q_2 l_2 - q_3 l_3$$

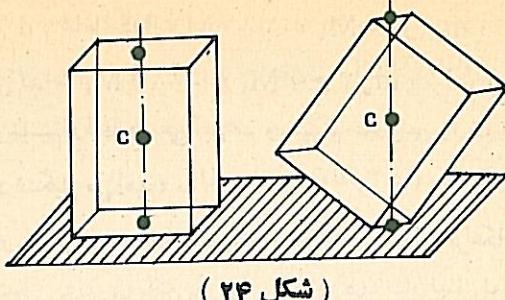
مقداری ثابت و مستقل از مکان وزنهای است.



(شکل ۲۲)

۱. در واقع انرژی پتانسیل از روی کاری که می تواند انجام گیرد محاسبه می شود. اگر زیمان را ببریم، هر وزن معادل انرژی پتانسیل خود، کار انجام خواهد داد و کار کل مجموعه، برابر با مجموع هر یک از این کارهای جداگانه است.

صفحه يالبه تيز مي گذرد.



(شکل ۲۳)

عبارات مزبور (که در تعیین تجربی گرانینگاه اجسام می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد) بهخصوص موضوع زیر را روشن می‌سازد: اگر جای دو جسم را که یک شکل و یک گرانینگاه دارند، باهم عوض کنیم، تغییری در حالت تعادل پدید نخواهد آمد. با این‌همه، در پاره‌ای از موارد نه تنها موقعیت گرانینگاه، بلکه جرم کل جسم (یا به عبارت دیگر برآیند جرم کل ذراتی که جسم را تشکیل می‌دهند) نیز باید در نظر گرفته شود. به عنوان مثال، اگر نه تمام جسم، بلکه فقط بخشی از آن را پیکری به همان شکل و دارای گرانینگاهی با همان موقعیت عوض کنیم، در صورتی که جرم آن با جرم بخش پیشین متفاوت باشد، مکان گرانینگاه کل جسم نیز تغییر خواهد کرد. به جز صورت، دانستن جرم کل و گرانینگاه اجسام، برای پرداختن به مسائل زیادی، منجمله آن‌هایی که بعداً مورد مطالعه قرار می‌دهیم، کافی است. بنابراین طبیعی است که تعریف زیر را از همارزی دو سیستم ذرات بدست دهیم.

دو سیستم ذرات بایکدیگر هم ارز هستند، به شرط آن که: (۱) گرانینگاه سیستم‌ها بر یکدیگر منطبق باشد و (۲) جرم کل همه ذرات موجود در سیستم‌ها باهم مساوی باشد.

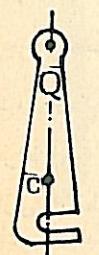
مفهوم همارزی سیستم‌ها که در فوق بیان شد، موقعی به کار می‌آید که بخواهیم بخشی از یک سیستم را با سیستم جدیدی چنان عوض کنیم که سیستم کل به دست آمده، با سیستم اولیه معادل باشد. برای این عبارت، بیان آشکار-

می‌آید. مکان این گرانینگاه به موقعیت ذرات سیستم و جرم آن‌ها وابسته است. در مکانیک، هر جسم را مجموعه تعداد زیادی از ذرات می‌دانند. به طور کلی، این ذرات جرم‌های گوناگونی دارند، به طوری که جرم به طور نامنظم در جسم توزیع شده است و در برخی از قسمت‌های جسم جرم بیشتر و در بعضی کمتر، می‌توان یافت. ما فرض می‌کنیم که در قسمت‌هایی از جسم هیچ جرمی نیست و بنابراین آن قسمت‌ها «بی‌وزن» است. بر حسب تعریف، گرانینگاه سیستمی از ذراتی که جسمی را تشکیل می‌دهند، گرانینگاه آن جسم است. اگر جرم جسم در تعداد محدودی از ذراتی خاص متتمرکز باشد، پر واضح است که گرانینگاه آن جسم بر گرانینگاه سیستمی مشتمل بر آن ذرات خاص منطبق است. (ما در ادامه این بحث، با چنین حالتی رو برو خواهیم شد، مثلاً با میله بدون وزنی که وزنهایی نقطه‌وار بر آن قرار گرفته‌اند.)

بسیاری از ویژگی‌های یک جسم منحصر آ به موقعیت گرانینگاه آن بستگی دارد. همان طور که از فیزیک مقدماتی به‌یاد داریم، تعادل یک جسم به‌موقع نسی گرانینگاه آن جسم و نقاطی چند که جسم به آن‌ها متصل می‌شود، وابسته است. بنابراین، عبارات زیر صادق است:

عبارت ۱— اگر جسمی که به یک نقطه متصل است، در حال سکون باشد حتماً نقطه اتصال و گرانینگاه آن جسم روی محوری عمودی قرار دارند.

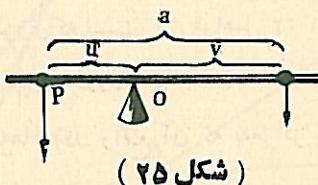
عبارت ۲— اگر جسمی که تو سطح صفحه‌ای صاف يالبه تیز روی تکیه گاهی ایستاده است، در حال سکون باشد، خط قائمی که از گرانینگاه آن جسم ترسیم می‌شود، از (شکل ۲۴) (شکل ۲۴)



نیروهای جاذبه مربوط به سیستم β و Q مربوط به سیستم β می‌باشد. از آن جا که α و β بایکدیگر هم ارز هستند، نیروهای P و Q برهم منطبق می‌شود. به همین ترتیب نیروهای P و Q روی هم می‌افتد. بنا بر این، برآیند این نیروها یعنی P و Q نیز برهم منطبق می‌گردد. به خصوص، نقطه اثر این نیروها نیز که در حقیقت مرکز نقل (گرانیگاه) سیستم‌های α و β است، روی هم می‌افتد. به‌خاطر داشته باشید که برای هر سیستم ذرات، می‌توان سیستم معادلی پیدا کرد که شامل تنها یک ذره باشد. برای این‌منظور، کافی است ذره‌ای را در نظر بگیریم که در محل گرانیگاه سیستم مزبور قرار دارد و جرم آن برابر با کل جرم سیستم است. این ذره، خود سیستمی معادل با سیستم اصلی محاسبه می‌شود. ذره‌ای که در محل گرانیگاه سیستمی واقع شده و جرمی برابر با جرم کل آن سیستم دارد، مرکز مادی^۱ سیستم مزبور خوانده می‌شود. ما می‌توانیم سیستم‌های معادل را به عنوان سیستم‌هایی که مرکز مادی آن‌ها برهم منطبق است، تعریف کنیم.

بخش ۶- گرانیگاه یا کسیستم دو ذره‌ای

دو وزنه P و Q را به فاصله L از یکدیگر، روی میله بدون وزنی متصل می‌کنیم. می‌خواهیم گرانیگاه این مجموعه را پیدا کنیم. به موجب عبارت



۱، از بخش پیشین، سؤال ما چنین خواهد بود: در کدام نقطه O می‌توان میله را تکیه داد که در حال تعادل باقی بماند؟ فاصله نقطه موردنظر O از وزنهای P و Q را با L و a نشان می‌دهیم. تعادل موقتی بر قرار می‌شود که حاصل ضرب

1. material center

تری ارائه می‌دهیم:

سیستم α ، شامل ذرات M_1, M_2, \dots, m_n به جرم $M_1 + M_2 + \dots + m_n$ و سیستم α شامل ذرات M_1, M_2, \dots, m_n به جرم $M_1 + M_2 + \dots + m_n$ در دست است. این دو سیستم را در هم می‌آمیزیم و سیستم عادی α را که به روش زیر معرفی می‌شود تشکیل می‌دهیم:

۱- در سیستم α ، مکان هیچ یک از ذرات سیستم α بر مکان نقاط سیستم α منطبق نیست.

۲- در سیستم α ، موقعیت هیچ یک از ذرات سیستم α بر مکان نقاط سیستم α انطباق ندارد.

۳- اگر موقعیت ذره مشخصی از سیستم α ، چون M_i ، بر مکان ذره مشخص M_i از سیستم α منطبق شود، در سیستم α ذره جدیدی تشکیل خواهد شد که مکان آن بر مکان ذرات $M_1 + M_2 + \dots + m_i + m_{i+1} + \dots + m_n$ باشد. در این صورت، عبارت زیر معتبر است.

عبارت ۳. اگر سیستم α نتیجه در هم آمیختن سیستم‌های α و β و سیستم β حاصل اختلاط سیستم‌های β و β باشد و نیز بدانیم که سیستم‌های α و β هر یک معادل سیستم‌های نظیر α و β هستند، در آن صورت می‌توانیم سیستم α را هم ارز β معرفی کنیم.

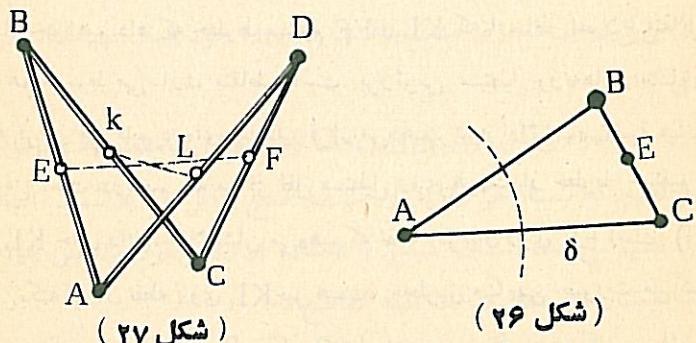
اثبات عبارت ۳. واضح است که جرم‌های کلی سیستم‌های α و β برهم منطبق می‌شود. اینک نشان می‌دهیم که گرانیگاه دو سیستم نیز روی هم قرار می‌گیرد. برآیند نیروهای جاذبه که بر ذرات سیستم α وارد می‌شود، به طریق زیر بدست می‌آید: ابتدا برآیند نیروهای جاذبه مربوط به α ، یعنی نیروی P و سپس برآیند نیروهای مربوط به β ، یعنی P را پیدا می‌کنیم و سپس نیروی P یعنی برآیند این دو برآیند را مشخص می‌سازیم. به طریق مشابهی برآیند نیروی جاذبه که بر β اعمال می‌شود، یعنی نیروی Q بدست می‌آید که خود نتیجه دو نیروی P و Q است، به این ترتیب که Q برآیند

بهویژه، مرکز نقل، فاصله بین دوزده را تنها موقعی به فواصل متساوی تقسیم می‌کند که آن دو ذره هم وزن باشند. مرکز نقل تنها زمانی فاصله بین دوزده را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند که یکی از آن‌ها دو برابر دیگری سنگینی داشته باشد، که البته مرکز نقل به ذره سنگین‌تر نزدیک تر خواهد بود.

بخش ۷- قضایایی پیرامون تقاطع خطوط راست.

سیستم ذرات α را که از اتحاد دو سیستم ν و σ تشکیل شده، در نظر بگیرید. M و N به ترتیب معرف مرکز مادی سیستم‌های ν و σ است. به موجب عبارت ۳ از بخش ۵، سیستم ذرات M و N ، هم ارز سیستم α می‌باشد، بنابراین مرکز مادی سیستم α بر مرکز مادی سیستم‌های M و N منطبق است و در نتیجه روی خطراستی که این دو ذره را بهم مربوط می‌سازد قرار دارد. از آنجا که مرکز مادی هر سیستم، بر مرکز نقل آن منطبق است، می‌توانیم بعبارت زیر دست یابیم.

مرکز نقل یک سیستم ذرات که مشتمل بر اتحاد دو سیستم ν و σ است بروی خطراستی که مرکز نقل دو سیستم هر دو را بهم می‌پیوندد جای دارد.



(شکل ۲۶)

اینک برای این قضیه، سه کاربرد هندسی نشان می‌دهیم.

میانه‌های مثلث، در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. برئوس یک مثلث، سه وزنه نقطه‌ای متساوی که هر یک به نام رأس نظیر خود A ، B و یا C نامیده می‌شود وصل می‌کنیم (شکل ۲۶). سیستم ذرات حاصل را به دو بخش ν و σ

نیروی P در فاصله u با حاصل ضرب نیروی Q در فاصله v برابر باشد، یعنی:

$$P u = Q v \quad (۶-۱)$$

با مقایسه رابطه (۶-۱) و رابطه زیر

$$p = \nu + \sigma \quad (۶-۲)$$

خواهیم داشت:

$$u = \frac{Q}{P+Q} d, \quad v = \frac{P}{P+Q} d$$

توجه کنید که $\frac{u}{v} = \frac{Q}{P}$ وزنه‌ها از گرانیگاه متناسب پس نتیجه می‌گیریم که فاصله بامعکوس جرم وزنه‌ها است.

به خصوص اگر جرم دوزنه باهم برابر باشد، واضح است که مرکز نقل درست در وسط آن دو قرار می‌گیرد، به عکس اگر بدانیم مرکز نقل دوزنه در وسط آن دو است، نتیجه می‌گیریم که جرم وزنه‌ها برابر است.

اگر یکی از وزنه‌ها دو برابر دیگری باشد، گرانیگاه به وزنه سنگین‌تر نزدیک تر خواهد بود، به طوری که نسبت بین فاصله بین دوزنه ۲:۱ باشد. بر عکس اگر بدانیم که مرکز نقل فاصله بین دوزنه را به نسبت ۲:۱ تقسیم کرده، نتیجه می‌گیریم که یکی از وزنه‌ها (در واقع آن که به مرکز نقل نزدیک تر است) دو برابر وزنه دیگر جرم دارد.

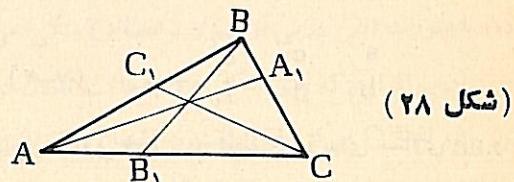
از آنجا که مرکز نقل میله، که جرم آن در دونقطه M و N متقر کرده بر گرانیگاه دوزده M و N (با جرم‌های متناسب) منطبق است، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

گرانیگاه یک سیستم دوزده‌ای، برخط راستی که آن دوزده را به هم مرتبط می‌سازد، واقع است. فاصله گرانیگاه از دوزده، با وزن و بنابراین با جرم آن دو، نسبت، عکس دارد.

نکته را که محل برخورد پاره خط‌های EF و KL دروسط آن دو قرار دارد،
بخواند و اگذار می‌کنیم.

قضیه سوا (Ceva's theorem). این قضیه که میانه‌های یک مستطیل در
یک نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند، خود صورتی خاص از مسئله زیر که به
نام قضیه سوا شهرت دارد، محسوب می‌شود:
فرض کنید در مثلث ABC (شکل ۲۸) نقاط A_1, B_1, C_1 و سه نقطه بر روی اضلاع
 CA ، BC و AB هستند. شرط لازم و کافی برای آن که سه پاره خط مستقیم
 CC_1 ، BB_1 ، AA_1 در یک نقطه بر خورد داشته باشند آن است که رابطه
زیر صادق باشد:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \quad (2-1)$$



قضیه می‌کنیم بخواند صحت رابطه (۲-۱) را خود عملاً در حالات زیر
بررسی کنند:

۱- در صورتی که CC_1, BB_1 و AA_1 نیمسازهای یک مثلث باشند. (توجه:
از این قضیه که نیمساز هر زاویه در مثلث، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع
مجاوز تقسیم می‌کند، استفاده کنید). با استفاده از رابطه فوق مشخص خواهد
شد که نیمسازهای مثلث در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲- در صورتی که CC_1, BB_1 و AA_1 ارتفاعهای یک مثلث باشند. (توجه:
از رابطه‌ای استفاده کنید که طول پاره خط‌هایی را که توسط ارتفاع روی
ضلع مقابل پیدید می‌آید، مشخص می‌سازد). با استفاده از رابطه (۲-۱) معلوم
خواهد شد که ارتفاعهای یک مثلث تیز گوش (hadal-e-zawiye)، در یک نقطه برخورد

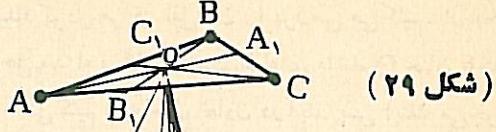
تقسیم می‌کنیم به طوری که A در سیستم σ ، B و C در سیستم τ قرار گیرد.
گرانیگاه سیستم τ در A و گرانیگاه سیستم σ همان‌طور که از بخش گذشته
نتیجه شد در نقطه E ، که وسط ضلع BC است، جای خواهد گرفت. همان‌
گونه که از قضیه ابتدای این بخش برمی‌آید، مرکز ثقل سیستم A, B, C ،
که O نام دارد، روی میانه AE واقع است. بهروشی مشابه می‌توان دریافت
که O روی دومیانه دیگر نیز قرار دارد. پس هر سه میانه به ناچار از یک نقطه
عبور می‌کنند.

از آنجاکه M ، مرکز مادی سیستم σ (که بر E منطبق است)، وزنی
دو برابر وزن مرکز مادی سیستم τ (که در A قرار گرفته) دارد، مرکز ثقل
سیستم $\{M, A\}$ ، پاره خط EA را به نسبت $1:2$ چنان تقسیم می‌کند که
خود به نقطه E نزدیکتر باشد. اما این مرکز ثقل از طرفی متعلق به سیستم
 A, B, C ، یعنی مرکز برخورد معمولی میانه‌های مثلث است. پس به قضیه
مشهوری دست می‌یابیم که می‌گوید محل برخورد میانه‌های مثلث، یک سوم
طول هر میانه را از طرف ضلع نظیر جدا می‌کند.
مستطیل فضایی. در شکل ۲۷، مستطیل فضایی $ABCD$ رسم شده است.

نشان خواهیم داد که خطوط مستقیم EF و KL که اوساط اضلاع مقابل را
به هم مربوط می‌سازد، متقاطع است. بر اساس مستطیل وزنهای متساوی را
که فرض می‌کنیم درهای هستند، قرار می‌دهیم. شبیه «ایثات» قضیه میانه‌ها،
کافی است دریابیم که مرکز ثقل مستطیل روی هر یک از خطوط مستقیم EF
و KL جای دارد. مثلاً نشان می‌دهیم که نقطه مزبور روی EF است (ایثات
این نکته که آن نقطه روی KL نیز هست، به طرق مثابه صورت می‌گیرد).
بدین منظور سیستم A, B, C, D را به دو بخش تقسیم می‌کنیم، یک سیستم
شامل A و B و دیگری مشتمل بر C و D . گرانیگاه بخش اول نقطه E و
گرانیگاه بخش دوم نقطه F است. به موجب قضیه‌ای که در ابتدای این بخش
مطرح شد، گرانیگاه کل سیستم بر روی خطراست EF جای دارد. تحقیق این

می‌کنند.

بنابراین $x = f$ و $y = e$. در نتیجه گرانیگاه سیستم $\{A, B\}$ بر نقطه C_1 منطبق است. باید گوشزد کنیم که بهموجب قضیه ابتدای این بخش، مرکز نقل تمامی مثلث روی هر یک از خطوط مستقیم AA_1 , BB_1 و CC_1 قرار می‌گیرد.



(شکل ۲۹)

بر عکس، چنین فرض کنیم که خطوط مستقیم CC_1 , BB_1 و AA_1 در نقطه منفرد O یکدیگر را قطع کنند، در این صورت صحت رابطه (۷-۱) را اثبات خواهیم کرد. برای این منظور، مثلث خود را صفحه‌ای بی‌وزن تصور کرده، به صورت افقی ذمی آوریم و بر نقطه O متکی می‌کنیم و آنقدر وزنه بر رئوس آن می‌افزاییم که طبق شکل ۲۹ به حالت تعادل درآید. طبق رابطه ۱ از بخش ۵، نقطه O مرکز نقل مثلث به انضمام وزنهایی است که بر رئوس آن اضافه شده است و بنابراین مرکز نقل کل سیستم محسوب می‌شود. از آن جا که نقطه O باید روی خطی قرار داشته باشد که از A به مرکز نقل سیستم $\{B, C\}$ رسم می‌شود، پس در نتیجه A_1 مرکز نقل سیستم $\{B, C\}$ است. به همین ترتیب، B_1 و C_1 مرکز نقل سیستم های $\{A, C\}$ و $\{A, B\}$ می‌باشند. اگر جرم ذرهای A , B و C را با p , q و r نشان دهیم از بخش گذشته خواهیم داشت:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{r}{p} \quad , \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{q}{r} \quad , \quad \frac{BC_1}{C_1P} = \frac{p}{q}$$

از ضرب عوامل فرعی، رابطه دلخواه (۷-۱) را به دست می‌آوریم.

فرض کنیم:

اکنون بحث خود را برای اثبات قضیه سوا دنبال می‌کنیم. فرض کنیم رابطه (۷-۱) صادق باشد، پس نشان می‌دهیم که پاره خط‌های مستقیم AA_1 , BB_1 و CC_1 هم‌دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. اثبات مطلب به همان روش دو مورد پیشین صورت می‌گیرد. نشان خواهیم داد که با نهادن وزنهای مناسب بر روی رئوس، مرکز نقل سیستم روی هر یک از خطوط مستقیم CC_1 , BB_1 و AA_1 قرار خواهد گرفت. با استفاده از مقیاسی مشخص،

$$AB_1 = a, \quad B_1C = b$$

$$CA_1 = c, \quad A_1B = d$$

$$BC_1 = e, \quad C_1A = f$$

بنا بر این

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1 \quad (7-2)$$

در نقطه A وزنهای مساوی bd ، در نقطه B وزنهای مساوی ac و در نقطه C وزنهای برابر با ad قرار می‌دهیم. مرکز نقل سیستم $\{A, C\}$ در نقطه‌ای بین A و C چنان واقع شده که فاصله آن از رئوس A و C متناسب با عکس وزنهای موجود در آن دوران باشد. اما خود از طرفی چنان نقطه‌ای است. به همین ترتیب، مرکز نقل سیستم $\{B, C\}$ در نقطه A_1 و مرکز نقل سیستم $\{A, B\}$ در نقطه‌ای قرار دارد که اگر فواصل آن را از A و B برابر x و y بگیریم، نسبت x و y نسبت معکوس باوزنهای bd و ac دارد، یعنی

$$\frac{x}{y} = \frac{ac}{bd} \quad , \quad x + y = f + c$$

اما از رابطه (۷-۲) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\frac{ac}{bd} = \frac{f}{e}$$

$$(P_1 + \dots + P_k + P_{k+1} + \dots + P_n)x = P_1 a_1 + \dots + \\ + P_k a_k + P_{k+1} a_{k+1} + \dots + P_n a_n$$

بنابراین

$$x = \frac{P_1 a_1 + \dots + P_n a_n}{P_1 + \dots + P_n}$$

مثال ۱. فرض کنیم $a_1 = 1$ و $P_1 = n$ ، $a_2 = 2$ و $P_2 = 1$ ، \dots ، $a_n = n$ و $P_n = 2$

$$a_n = n , a_2 = 2$$

در این صورت از فرمول بالا چنین نتیجه می گیریم

$$x = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n}$$

برای حل رابطه فوق تساوی های زیر را می نویسیم :

$$1^2 = (1+0)^2 = 1^2$$

$$2^2 = (1+1)^2 = 1^2 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$3^2 = (2+1)^2 = 2^2 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$(n+1)^2 = (n+1)^2 = n^2 + 2 \times n^2 + 3 \times n + 1$$

با جمع تساوی ها خواهیم داشت:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = 1 + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) +$$

$$+ 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \dots + n(n^2)$$

یا

$$(n+1)^2 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + n$$

یا

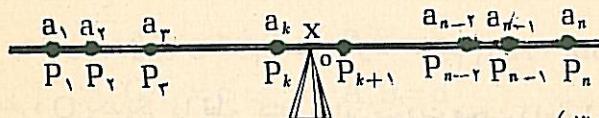
$$3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = (n+1)(n^2 + 2n) - \\ - 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

بخش ۸ - گرانیکاه میله‌ای با وزنه‌ها

ملاحظات خوبیش را از بخش ۶ خلاصه کنیم.

میله‌ای وزنی را همراه وزنه‌های P_1, P_2, \dots, P_n در نظر بگیریم

(شکل ۳۰) و مسئله پیدا کردن مرکز نقل آن را بررسی می کنیم. از بخش ۶ نتیجه گرفتیم که برای حل مسئله، کافی است نقطه‌ای مانند O چنان یافته شود که اگر میله را، بر آن متکی کنیم، به حال تعادل درآید. پس اینک می خواهیم عرض چنین تکیه گاهی که آن را با x نشان می دهیم، پیدا کنیم.



(شکل ۳۰)

فرض کنیم عرض وزن P_1 برابر P_2 برابر a_1 و بالآخره عرض P_n برابر a_n باشد. طبق شکل ۳۰، در نظر می گیریم که تکیه گاه O بین وزنه های P_k و P_{k+1} باشد (حالی را که یکی از وزنه ها درست روی نقطه O قرار دارد مستثنی نمی کنیم). پس بازوی نیروهای P_1, P_2, \dots, P_k به ترتیب عبارت خواهد بود از $x - a_1, \dots, x - a_k$ و بازوی نیروهای P_{k+1}, \dots, P_n عبارت خواهد بود از $a_{k+1} - x, \dots, a_n - x$ از آن جا که میله در حال تعادل است، گشناور نیروهایی که آن را درجهت عقربه های ساعت عمل می کنند برابر با گشناور نیروهایی که در خلاف جهت عقربه های ساعت عمل می کنند برابر است، به عبارت دیگر:

$$P_1(x - a_1) + \dots + P_k(x - a_k) = P_{k+1}(a_{k+1} - x) + \dots + \\ + P_n(a_n - x)$$

همه عبارات شامل x را به سمت چپ آورده، بقیه عبارات را در سمت راست

۱. از این به بعد عبارت عرض در نقطه از میله را به معنای فاصله آن نقطه از انتهای سمت چپ میله، به کار می بینیم.

دو طرف را به عبارت $(1+2+\dots+n)$ تقسیم کرده، به دست می‌آوریم:

$$\frac{1+2+\dots+n}{1+2+\dots+n} = \frac{(n+1)(n+2n)}{3(1+2+\dots+n)} - 1$$

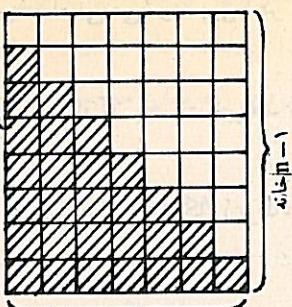
حاصل جمع $n+1+2+\dots+1$ ، برابر مجموع خانه‌های مربع شکل هاشور زده در شکل ۳۱ است که هر کدام معادل یک واحد فرض می‌شود. اما تعداد خانه‌های هاشور زده با خانه‌های سفید، یعنی نصف کل خانه‌های مربع شکل مستطیل مزبور برابر است و مساوی $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1+2+\dots+n}{1+2+\dots+n} = \frac{(n+1)(n+2n)}{3(1+2+\dots+n)} - 1 = \\ &= \frac{(n+1)(n+2n)}{\frac{3n(n+1)}{2}} - 1 = \frac{2n+1}{3} \end{aligned}$$

ضمیر از میان همه مطالب دیگر این رابطه را بیرون می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{2n+1}{3} (1+2+\dots+n) = \\ &= \frac{(2n+1)n}{3} - \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

مثال ۲. فرض می‌کنیم همان وزنهای مثال ۱، یعنی با وزن $n, \dots, 1, 2, 1$ در نقاطی به عرض $n^2, \dots, 1^2, 2^2, \dots, n^2$ جای گرفته باشند. ثابت کنید که عرض گرانیگاه از رابطه $\frac{n(n+1)}{2}$ به دست می‌آید. (توجه: از نتایج مثال ۱، حاصل جمع مکعبات $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ را به دست آورید).



(شکل ۳۱)

مثال ۳. فرض می‌کنیم همان وزنهای مثال ۱، این بار با وزن $n^2, \dots, 1^2, 2^2, \dots, n^2$ در نقاطی به عرض $n, \dots, 2, \dots, 1$ قرار گرفته است.

ثابت کنید که عرض مرکز نقل از رابطه $\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$ نتیجه می‌شود.

بخش ۹- یک مسئله از تئوری اعداد (تعیین فرمول)

روشن است که ملاحظات مکانیکی نه تنها در مورد مسائل هندسی، بلکه به هنگام لزوم پیرامون مسائل مربوط به حساب نیز مفید واقع می‌شود. یکی از نمونه‌های نسبتاً غیرمنتظره اذ این نوع را تحت بررسی قرار می‌دهیم.
ردیفی از اعداد مثبت P_1, P_2, \dots, P_n را انتخاب می‌کنیم. برای کوتاه‌تر کردن ردیف اعداد، از دو عدد ابتدایی و انتهایی P_1 و P_n ، عدد کوچکتر را P نامیده آن را از دو عدد مزبور کم می‌کنیم. آنگاه این عدد P را به ماعداد میانی می‌افزاییم.^۱ (اگر تنها یک عدد میانی داشته باشیم، عدد P دوبار با آن جمع می‌شود). در آن صورت (تنها به شرط آن که $n > 2$ باشد) یک یا هر دو عدد کناری حذف خواهد شد، و بنابراین، ردیف حاصل کوتاه‌تر

۱. منظور یک یا دو عددی است (سته به فرد یا زوج بودن تعداد اعداد) که در وسط ردیف قرار گرفته‌اند.

اعداد تغییری نمی‌کند. بنابراین حاصل جمع اعداد مفسر، با مجموع ردیف اصلی برابر است. و در صورتی که مفسر تنها از یک عدد تشکیل شده باشد، مقدار آن یک عدد با مجموع همه اعداد ردیف اصلی مساوی است. اگر مفسر از دو عضو ترکیب یافته باشد، می‌آموزیم که بدون محاسبه مشتقات میانی، حاصل جمع اعداد آن را به دست آوریم.

اکنون سؤال زیر را مطرح می‌سازیم که مفسر یک ردیف چه موقع یک و چه موقع دو عضو دارد. ابتدا سؤال خود را از طریق «تجربه‌ای ریاضی» واضح تر کنیم. برای این منظور، مفسر ردیف‌های چندی از رده $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ را محاسبه می‌کنیم. مشتقات حاصله را زیرهم می‌نویسیم و زیر اعضای میانی خط می‌کشیم.

$$\begin{array}{cccccc} & & \alpha & 1 & 2 & 3 \\ & & \alpha' & & 4 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & \alpha & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & \alpha' & & 3 & 4 & 3 \\ & & \alpha'' & & & 10 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & \alpha & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & \alpha' & & 2 & 5 & 4 & 4 \\ & & \alpha'' & & & 7 & 6 & 2 \\ & & \alpha''' & & & & 5 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & \alpha & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & \alpha' & & 2 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ & & \alpha'' & & & 4 & 9 & 5 & 3 \\ & & \alpha''' & & & & 1 & 12 & 8 \\ & & \alpha'''' & & & & & 14 & 7 \end{array}$$

از ردیف اصلی می‌شود. پس اگر ردیف اصلی مثلاً چنین باشد:

$$10, 4, 3$$

*گر ردیف اصلی به شکل زیر ظاهر گردد:

$$6, 2, 6$$

ردیفی شامل تنها یک عدد به دست خواهیم آورد که چنین است:

$$14$$

ردیف کوتاه‌تر را مشتق ردیف قبلی می‌نامیم. بنابراین ردیف ۳، ۴، ۱۰

مشتق ردیف ۶، ۴، ۱۰ و ردیف ۱۴ مشتق ردیف ۶، ۲، ۶ محسوب می‌گردد. توجه داشته باشید که مشتق ردیفی محتوی دو عدد، شبیه خود همان ردیف خواهد بود.

اینکه هر ردیفی را با α نشان داده، به صورت زیر عمل می‌کنیم. مشتق آن ردیف را پیدا کرده، آن را با α' نشان می‌دهیم. سپس مشتق ردیف α' را به دست می‌آوریم. این ردیف را با α'' نشان داده، به نام مشتق دوم ردیف α می‌خوانیم. مشتق α'' ، مشتق سوم ردیف α نام دارد و با α''' مشخص می‌شود. عموماً مشتق $(\alpha - 1)$ این مشتق را به نام مشتق α خوانده با $\dots \alpha''''$ نشان می‌دهیم. از آنجا که طول هر ردیف مشتق به اندازه یک یا دو واحد کوتاه‌تر از ردیف ماقبل خود است، با محاسبه مشتق‌های ردیف α یکی پس ازدیگری، بالاخره به ردیفی با یک یا دو عدد می‌رسیم، که این ردیف را مشتق آخر یا مفسر^۱ ردیف α می‌نامیم. بنابراین مفسر ردیف ۴، ۱۰، ۹، ۳، ۱، ردیف ۷، ۱۵ است.

توجه داشته باشید که با رسیدن از یک ردیف به مشتق آن ردیف، مجموع

مفسر ردیف n ، $\dots, 2, 3, \dots, 1$ در صورتی که $n = 3k + 1$ باشد،
دارای یک عضو و در صورتی که $n = 3k$ یا $n = 3k + 2$ باشد، دارای دو
عضو خواهد بود. در حالت اخیر یکی از دو عضو (در $n = 3k$ ، اولی و در
 $n = 3k + 2$ ، دومی) دوبرابر عضو دیگر خواهد بود. این قضیه را در بخش
آینده اثبات خواهیم کرد. در مقام اجرای این کار، از این پرسش عام تر که،
مفسر چه ردیف‌هایی دارای یک عضو و چه ردیف‌هایی دارای دو عضو است،
چشم پوشی نخواهیم کرد. (چگونه واقعیت مزبور را از روی اعداد
 P_1, P_2, \dots, P_n بی آن که محتاج به محاسبه همه ردیف‌های مشتق شویم،
روشن می‌سازیم).

بخش ۱۵- یک مسئله از نظریه اعداد (حل)

برای مسئله خود، تعبیر مکانیکی جدیدی ارائه می‌دهیم. به جای انتخاب
ردیفی از اعداد P_1, P_2, \dots, P_n ، میله‌ای را در نظرمی‌گیریم که در نقاط
 A_1, A_2, \dots, A_n طبق شکل ۳۲ الف، وزنه‌های P_1, P_2, \dots, P_n را
چنان بدان متصل شده است که $(A_1, A_2) = A_2, A_3 = \dots = A_{n-1}, A_n$. آنگاه
سیستم جدیدی از وزنهای را به عنوان ردیف مشتق سیستم بالا به دست می‌آوریم.
نشان می‌دهیم که مرکز مادی سیستم وزنهای مشتق، بر مرکز مادی سیستم
اولیه منطبق است. در ذهن خود وزنهای کناری P_1 و P_n را به دو وزنه
 تقسیم می‌کنیم.

$$P_1 = P + (P_1 - P) \quad \text{و} \quad P_n = P + (P_n - P)$$

که در آن P از میان دو وزنه P_1 و P_n ، مساوی کوچکترین وزنه است (به
طوری که در هر صورت همواره یکی از وزنهای $P_1 - P$ یا $P_n - P$ برابر
صفر می‌گردد). پس سیستم وزنهای α را می‌توان از اتحاد دو سیستم مشکل
دانست. یک سیستم β (که در شکل ۳۲ ب زیر میله نشان داده است) شامل
از آنها دو برابر دیگری است. بنابراین قضیه شکفت‌آوری مطرح می‌شود:

| | α | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ |
|---------------|----------|---|---|---|---|----|----|---|
| α' | | | ۲ | ۳ | ۶ | ۵ | ۶ | ۶ |
| α'' | | | | ۳ | ۸ | ۷ | ۶ | ۴ |
| α''' | | | | | ۸ | ۱۳ | ۶ | ۱ |
| α'''' | | | | | | ۷ | ۱۴ | ۷ |
| α''''' | | | | | | | ۲۸ | |

| | α | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ |
|----------------|----------|---|---|---|---|----|----|----|----|
| α' | | | ۲ | ۳ | ۵ | ۶ | ۶ | ۷ | ۷ |
| α'' | | | | ۳ | ۵ | ۱۰ | ۶ | ۷ | ۵ |
| α''' | | | | | ۵ | ۱۲ | ۹ | ۷ | ۲ |
| α'''' | | | | | | ۳ | ۱۲ | ۱۳ | ۷ |
| α''''' | | | | | | | ۱۶ | ۱۶ | ۴ |
| α'''''' | | | | | | | | ۱۲ | ۲۴ |

| | α | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ |
|-----------------|----------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| α' | | | ۲ | ۳ | ۴ | ۷ | ۶ | ۷ | ۸ | ۸ |
| α'' | | | | ۳ | ۴ | ۹ | ۸ | ۷ | ۸ | ۶ |
| α''' | | | | | ۴ | ۹ | ۱۴ | ۷ | ۸ | ۳ |
| α'''' | | | | | | ۱ | ۹ | ۱۷ | ۱۰ | ۸ |
| α''''' | | | | | | | ۹ | ۱۹ | ۱۰ | ۷ |
| α'''''' | | | | | | | | ۲ | ۲۶ | ۱۷ |
| α''''''' | | | | | | | | | ۳۰ | ۱۵ |

مثال بالا نشان می‌دهد که مفسر ردیفی که شامل بخشی از سری اعداد
طبیعی است، می‌تواند یک یا دو عضو داشته باشد. به قاعدة زیر اشاره می‌کنیم:
اگر $n = 3k + 1$ باشد، مفسر یک، و در غیر این صورت دو عضو دارد. در
اینجا موضوع جالبی رخ می‌نماید: اگر مفسری دو عضو داشته باشد، یکی
از آنها دو برابر دیگری است. بنابراین قضیه شکفت‌آوری مطرح می‌شود:

صورتی که مرکز ثقل مفسر (یا مرکز ثقل سیستم اصلی) بر یکی از نقاط A_1, A_2, \dots, A_n منطبق باشد، می‌توان گفت که مفسر دارای یک وزنه است.
طبق مفاد بخش ۸، عرض مرکز ثقل سیستم اصلی از رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_n a_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

که در آن a_1, \dots, a_n عرض نقاط A_1, \dots, A_n است. با قرار دادن $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$ عرض مرکز ثقل را به صورت فرمول در می‌آوریم.

$$\frac{P_1 \times 1 + P_2 \times 2 + \dots + P_n \times n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

برای انطباق مرکز ثقل بر یکی از نقاط دارای عرض صحیح A_1, A_2, \dots, A_n لازم و کافی است که عرض آن بر حسب عدد کاملی بیان شود. بنابراین، نتیجه نهایی چنین می‌شود که مفسر ردیف P_1, P_2, \dots, P_n ، شامل یک عضو است.

$$\frac{P_1 \times 1 + P_2 \times 2 + \dots + P_n \times n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} \text{ عددی صحیح}$$

فقط و فقط اگر عدد باشد.

به ویژه اگر $n = 1, P_1 = 2, \dots, P_n = n$ باشد، همان‌گونه

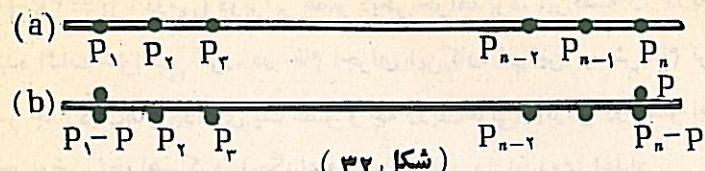
$$\frac{P_1 \times 1 + P_2 \times 2 + \dots + P_n \times n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

که درمثال ۳ از بخش ۸ دیدیم، عدد

برابر با $\frac{3n(n+1)}{2(n+1)}$ خواهد بود. این مقدار هرگز نمی‌تواند عددی صحیح باشد مگر برای حالت عادی $n = 1$. در حقیقت اگر عدد مزبور عددی صحیح باشد، پس

$\frac{3n(n+1)}{2(n+1)}$ نیز عددی صحیح می‌شود و در آن صورت، حاصل

وزنه‌های $P - P, P_1 - P, P_2 - P, \dots, P_{n-1} - P_n$ و دیگر سیستم α که شامل دو وزنه، هریک به بزرگی P است (و در شکل ۳۲ ب بالای میله نشان داده شده است).



در اثر انتقال کل سیستم به سیستم وزنه مشتق، وزنه‌های سیستم α برسر جای خود باقی ماند، درحالی که وزنه‌های سیستم α' هریک مساوی متوازنی کرده به هم نزدیکتر می‌شود (تا به وزنه‌های میانی افزوده گردد)، به عبارت دیگر، سیستم مشتق α' از اتحاد دو سیستم α و $\bar{\alpha}$ تشکیل می‌شود، که سیستم α' بر سیستم α منطبق است و دستگاه $\bar{\alpha}$ با نزدیک کردن وزنه‌های سیستم α به اندازه‌های برابر، از آن دستگاه ناشی می‌گردد. به سبب آن که سیستم‌های α و $\bar{\alpha}$ به وضوح معادل یکدیگر هستند، سیستم‌های α و α' نیز به موجب عبارت ۳ از بخش ۵ با یکدیگر هم ارز می‌باشند. و مرکز مادی سیستم‌های معادل برهم منطبق است.

پس در اثر انتقال سیستمی از وزنه‌ها به سیستم مشتق آن، مرکز مادی سیستم (و در نتیجه مرکز ثقل آن نیز) تغییر نمی‌پذیرد. بنابراین در انتقال سیستم به مفسر آن نیز، مرکز مادی تغییر ناپذیر بر جای می‌ماند.

پس مفسر عبارت از یک یا دو وزنه است که مرکز ثقل مشابهی با مرکز ثقل سیستم وزنه اصلی دارد. از آن گذشته، باید به خاطر سپرد که مکان وزنه‌های نقطه‌ای که مفسر را تشکیل می‌دهند، ترمیحل وزنه‌های مشخص سیستم اصلی منطبق است، یعنی بر برخی از نقاط A_1, A_2, \dots, A_{n+1} انطباق می‌یابد. اگر مفسر شامل دو وزنه باشد، آن دو را باید بر نقاط مجاور A_j و A_{j+1} یافت، به طوری که مرکز ثقل مفسر در بین آنها قرار گرفته باشد. بنابراین، فقط در

به نقطه A_{2k+1} وزن دارد. بدین طریق درمی‌باییم که وقتی $k = n$ ، نخستین عضو مفسر دو برابر دومین عضو آن می‌باشد. اینک اگر $n = 2k + 2$. عرض مرکز ثقل برابر $\frac{2}{3} + (1 + 2k + 1)$ می‌گردد. این بار مرکز ثقل بین دو نقطه A_{2k+2} و A_{2k+1} به نحوی قرار می‌گیرد که به دومین نقطه دو برابر نزدیک‌تر باشد. بنابراین از وزنهای مفسر، آن که در نقطه دوم قرار گرفته، دو برابر وزنه نقطه اول وزن دارد. به کلام دیگر، دومین عضو مفسر، دو برابر عضو نخستین است. پس بدین ترتیب قضیه بخش ۹، به تمامی اثبات می‌گردد.

حاصل جمع اعضا مفسر ردیف $n = 1, 2, \dots, 2k + 1$ ، برای حاصل جمع اعداد خود ردیف مذبور است، یعنی طبق مثال ۱ بخش ۸ برابر است با

$$\frac{n(n+1)}{2} + \dots + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

دیگری است، می‌توانیم آن اعضا را به خوبی محاسبه کنیم. مقادیر زیر را برای آنها به دست می‌آوریم: $\frac{n(n+1)}{6}$ (به عنوان عضو کوچکتر) و $\frac{n(n+1)}{3}$ (برای عضو بزرگتر).

پس مفسر ردیف $n = 1, 2, \dots, 2k + 1$ به صورت‌های زیر ظاهر می‌شود:

$$\text{اگر } n = 3k \quad \text{باشد} \quad \frac{n(n+1)}{3}, \quad \frac{n(n+1)}{6}$$

$$\text{اگر } n = 2k + 1 \quad \text{باشد} \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{اگر } n = 2k + 2 \quad \text{باشد} \quad \frac{n(n+1)}{3}, \quad \frac{n(n+1)}{6}$$

اگر به طور کلی بخواهیم مفسر ردیف P_1, \dots, P_n را محاسبه کنیم، می‌توانیم به طریق زیر عمل نماییم. پیش از همه، عدد زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)} - (2n+1) = \frac{n-1}{2n+1}$$

لیز عدد صحیح از کار درمی‌آید. اما عدد $\frac{n-1}{2n+1}$ تنها وقتی عدد صحیح است که $n = 1$ باشد. پس به ازای $n > 1$ مفسر ردیف P_1, P_2, \dots, P_n همواره دو عضو دارد.

اگر $n = 1, P_1 = 1, P_2 = 2, \dots, P_n = n$ ، طبق مثال ۱ از بخش ۸،

$$\text{مقدار عبارت } \frac{P_1 \times 1 + \dots + P_n \times n}{P_1 + \dots + P_n} \text{ برابر عدد } \frac{2n+1}{3} \text{ می‌شود. اگر}$$

$n = 3k + 1$ باشد خواهیم داشت $\frac{2n+1}{3} = 2k + 1$ و مقدار آن عددی صحیح است و مفسر از یک عضو تشکیل می‌شود. در صورتی $n = 2k$ باشد

$$\text{پس } \frac{1}{3} = 2k + 2 \text{ و اگر } \frac{2n+1}{3} = 2k + 1 \text{ در آن صورت}$$

$$\frac{2n+1}{3} = (2k+1) + \frac{2}{3}, \text{ که در این دو حالت اخیر عبارت } \frac{2n+1}{3}$$

عددی صحیح نیست و مفسر از دو عضو تشکیل می‌گردد. آنچه در بالا گفته شد، اثبات قسمت نخست قضیه‌ای است که در بخش اخیر مطرح گردید. اگر $n = 2k$ در نظر گرفته شود، همان‌گونه که در بالا نشان داده شد،

مرکز ثقل سیستم وزنهای P_1, P_2, \dots, P_n برای $\frac{2k+1}{3}$ دارد و بین نقاط

A_{2k+1} و A_{2k+2} قرار گرفته است. پس درست در همین نقاط است که وزنهایی که مفسر سیستم اصلی را تشکیل می‌دهند، قرار دارند. از آنجا که به نظر می‌رسد مرکز ثقل به نقطه A_{2k} دو برابر نزدیک‌تر است تا به نقطه A_{2k+1} ، از دو وزنه مفسر، آن یکی که در نقطه A_{2k} قرار دارد، دو برابر وزنه مربوط

$$x = \frac{3n(n-1)}{2(2n+1)} = \frac{3(4k+r)(4k+r+1)}{2[2(4k+r)+1]} = 3k +$$

$$+ \frac{3}{2} \times \frac{4k+4kr+r+r^2}{8k+2r+1}$$

$$x = 3k + \frac{3}{2} \frac{4k}{8k+1} = 3k + \frac{3k}{8k+1} \quad \text{اگر } r=0 \text{ در آن صورت}$$

$$v = 3k \quad \text{که در آن } Z = \frac{3k}{8k+1} = \frac{v}{2n+1} \quad \text{بنابراین}$$

اگر $r=1$ در آن صورت

$$x = 3k + \frac{3}{2} \frac{6k+2}{8k+3} = 3k + 1 + \frac{k}{8k+2}$$

$$v = k \quad \text{که در آن } Z = \frac{k}{8k+2} = \frac{v}{2n+1} \quad \text{بنابراین}$$

اگر $r=2$ در آن صورت

$$x = rk + \frac{3}{2} \frac{10k+6}{8k+5} = rk + 1 + \frac{7k+4}{8k+5}$$

$$v = 7k+4 \quad \text{که در آن } Z = \frac{7k+4}{8k+5} = \frac{v}{2n+1} \quad \text{بنابراین}$$

اگر $r=3$ در آن صورت

$$x = rk + \frac{3}{2} \frac{14k+12}{8k+7} = rk + 2 + \frac{5k+4}{8k+7}$$

$$v = 5k+4 \quad \text{که در آن } Z = \frac{5k+4}{8k+7} = \frac{v}{2n+1} \quad \text{بنابراین}$$

$$x = \frac{P_1 \times 1 + P_2 \times 2 + \dots + P_n \times n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

اگر x عددی صحیح باشد، مفسر از یک عضو که برابر حاصل جمع $P_1 + P_2 + \dots + P_n$ است تشکیل شده است. اگر x عدد صحیحی نباشد، آن را باید به شکل زیر نوشت:

$$x = y + z$$

که y عددی صحیح و $z < 0$ است. در این صورت مفسر از دو عضو Q_1 و Q_2 تشکیل می‌شود، به طوری که

$$Q_1 + Q_2 = P_1 + P_2 + \dots + P_n \quad (10-1)$$

از آن جا که می‌توان Q_1 و Q_2 را وزنهایی در نقاطی به عرض $y+1$ و z دارای مرکز ثقلی به عرض x در نظر گرفت، طبق بخش ۵ خواهیم داشت:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1-Z}{Z} \quad (10-2)$$

با حل کردن روابط (10-1) و (10-2) بایکدیگر، Q_1 و Q_2 را به شرح زیر به دست می‌آوریم:

$$Q_1 = \frac{1-Z}{Z} Q_2, \quad \frac{1}{Z} Q_2 = \frac{1-Z}{Z} Q_1 + Q_2 = Q_1 + Q_2 = P_1 + \dots + P_n$$

$$Q_2 = (P_1 + \dots + P_n)Z \quad \text{و} \quad Q_1 = (P_1 + \dots + P_n)(1-Z) \quad (10-3)$$

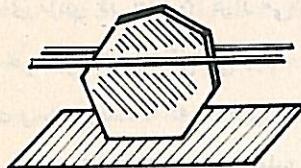
بر طبق مثال اخیر، مفسر ردیف $n^2, n^3, n^4, \dots, 1$ را به شرط

$$n > 1 \quad \text{به دست می‌آوریم. تاکنون در یافته‌ایم} \quad x = \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$$

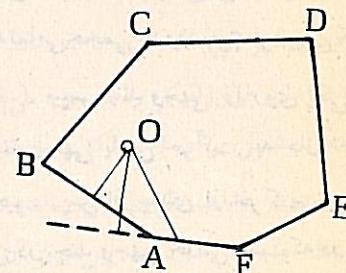
مفسر از دو عضو تشکیل گشته است. برای تعیین اعضای مفسر ابتدا باید Z را پیدا کنیم. بدین منظور $n = 4k+r$ در نظر گفته می‌شود که در آن

بخش ۱۱- ماشین کاردا بهم غیرممکن است.

یک چندضلعی محدب را با نقطه O در میان آن، در نظر می‌گیریم. از نقطه O بر پهلوهای چندضلعی خطوط عمود رسم می‌کنیم. پای خطوط عمود ممکن است روی خود ضلع قرار گیرد (مثلاً مانند خط عمود بر AB در شکل ۳۴) و یا امکان دارد که بر امتداد آن واقع گردد (مثل خطوط عمود بر اضلاع FA و FE در همان شکل). البته حالتی نیز وجود دارد که پای همه خطوط عمود، در محدوده اضلاع قرار می‌گیرد (به طور مثال، اگر نقطه O را مرکز یک کثیرالاضلاع منتظم در نظر آوریم، حالت مزبور اتفاق می‌افتد). اکنون سؤال این است: آیا امکان دارد که پای همه خطوط عمود، نه بر خود اضلاع، بلکه بر امتداد آنها بیافتد؟



(شکل ۳۴)



(شکل ۳۴)

ثابت خواهیم کرد که پاسخ سؤال فوق منفی است، یعنی حداقل یکی از اتفاقات خلیع نظیر خود را، نه در امتداد آن، بلکه در روی خودش قطع می‌کند. برای ثابت این مطلب، از اصلی استفاده می‌کنیم که در عنوان این بخش بیان شده است. فرض می‌کنیم چندضلعی ما صفحه‌ای نازک است که مرکز نقل آن در نقطه O قرار دارد (مثلاً توان چندضلعی را صفحه بدون وزنی در نظر گرفت که یک وزنه نقطه‌ای، در نقطه O آن واقع شده است). چندضلعی را روی یکی از پهلوهایش بسطحی افقی می‌گذاریم. اگر آن را دقیقاً عمودی قرار دهیم نخواهد افتاد. حتی در صورت لزوم می‌توان فرض کرد که صفحه از دوسو با میله‌هایی طبق شکل ۳۴، حمایت می‌شود. چندضلعی یا بی حرکت می‌ایستد

طبق مثال ۱ بخش ۸، حاصل جمع اعضای مفسرچنین به دست می‌آید.

$$n(n+1)(2n+1) = n^3 + \dots + 1^3. \text{ اعضای مفسر از رابطه}$$

(۱۰-۳) نتیجه می‌شود:

$$Q_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}(1-Z) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{2n+1-\nu}{2n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)-\nu}{6}$$

$$Q_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} Z = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{\nu}{2n+1} = \frac{n(n+1)\nu}{6}$$

با در نظر گرفتن مقادیر $1, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ و $4k+4$ به جای n با وارد کردن مقادیر ν بر حسب k ، می‌توان مفسر دیف $\frac{1}{3}, \dots, 9, 4, 1$ را محاسبه کرد:

$$1k(4k+1)(5k+1) \quad (n=4k) \quad (1) \quad (n=4k+1)$$

$$(n=4k+2)$$

$$(2k+1)(4k+1)(7k+2) \quad , \quad k(1k+1)(4k+1) \quad (n=4k+3)$$

$$(n=4k+4)$$

$$(k+1)(2k+1)(4k+2) \quad , \quad (2k+1)(4k+2)(7k+2) \quad (n=4k+5)$$

$$(n=4k+6)$$

$$2(k+1)^2(4k+2) \quad , \quad 2(k+1)(4k+2)(5k+2) \quad (n=4k+7)$$

حتی ارشمیدس برای یافتن مساحت اشکال منحنی از ملاحظات تعادل استفاده کرد، بدین ترتیب که برای تعیین سطح قطعه‌ای شلجمی (یعنی شکلی که از تقاطع قوسی سهمی و وتری مستقیم به دست می‌آید)، وی قطعه را از بازوی اهرمی آویزان کرد. مفاهیم مکانیکی و فیزیکی، اگرهم نه به صورت براهین مستقیم، به شکل دلایلی راهنمایی کننده، برایجاد نتایج ریاضی همواره اثر قابل ملاحظه‌ای داشته و هنوز هم دارد.

استفاده از قوانین مکانیک در ریاضیات، تنها بخش ویژه‌ای از روشی عام است، که شامل استفاده معکوس از ارتباط پدیده‌های طبیعت با بیان ریاضی آن‌ها می‌باشد. تشریح ریاضی یک پدیده، به معنای یافتن فرمولی است که محاسبه مشخصه‌های فیزیکی پدیده مذکور (مانند سرعت، دما، مسافت وغیره) را امکان‌پذیر می‌سازد، و یا به دست آوردن معادلاتی که حل آن‌ها محاسبه مشخصه‌های فوق الذکر را موجب می‌گردد. استفاده مستقیم از بیان ریاضی یک پدیده، مشتمل بر آن است که ما بتوانیم مقادیر عددی مشخصه‌های آن پدیده را بدون مشاهده خود پدیده، و بلکه تنها از راه محاسبه فرمول‌های مربوطه و یا حل معادلات پیرامون آن به دست آوریم. مزیت این روش زمانی آشکار می‌شود که پدیده خود بغيرنج است، ولی بیان ریاضی ساده‌ای دارد. با وجود این، امکان دارد که برخی وارونه عمل کنند: به جای حل معادلات، پدیده را به شکل تجربی تحت نظر درآورند و مشخصه‌های مطلوب را انداره بگیرند و از این طریق مقادیر عددی آن‌ها را مشخص سازند. هنگامی که با فرمول‌های پیچیده یا معادلاتی که حل آنها آمیخته با دشواری‌هایی است، سروکار پیدا می‌کنیم، روش مزبور مذبرانه است و از عهده تشریح پدیده در حد درکی نسبتاً آسان برمی‌آید.

این اصل پایه‌ای برای قالب سازی (modelling)، یعنی بررسی روندهای فیزیکی از طریق قالب‌ها است که از طرح زیرپروری می‌کنند: بررسی روند (که با یک قالب سازی شود)، بیان روند مزبور به وسیله فرمول‌ها و معادلات

و یا می‌غلند. اگر بغلند، پس از چندی توقف خواهد کرد، زیرا در غیر این صورت کار ماشین دائم خواهد بود. روی هر ضلعی که صفحه توقف کند، خط قائمی که از مرکز نقل رسم شود، ضلع مزبور را روی خودش قطع خواهد کرد (به موجب عبارت ۲ از بخش ۵). به این ترتیب، در یک چند ضلعی می‌توان ضلعی را یافت که پای عمود از نقطه ۰ برخود آن ضلع واقع گردد. برای چند وجهی نیز قضیه همانندی وجود دارد. به این منظور یک چند وجهی محدب در نظر می‌گیریم و نقطه ۸ را درون آن فرض می‌کنیم. از آن نقطه بر همه وجوه چند وجهی عمود می‌کنیم. در این صورت پای حداقل یکی از این خطوط عمود، بروجه نظری خود، و نه براحتداد آن قرار خواهد گرفت. برای اثبات این قضیه، چند وجهی را به صورت جرمی با گرانیگاه ۸ در نظر می‌گیریم. (مثلاً چند وجهی را به تمامی حجمی بدون جرم فرض می‌کنیم و نقطه‌ای مادی در نقطه ۸ قرار می‌دهیم.) سپس چند وجهی را روی یکی از وجوه خود بروسطحی افقی می‌نیم. چند وجهی یا بی حرکت به حال تعادل می‌ماند و یا می‌غلند. که در صورت اخیر، پس از چندی از حرکت خواهد افتاد و به حال تعادل درخواهد آمد. پس در چند وجهی حالتی است که در آن حالت بی حرکت روی سطح قرار می‌گیرد. وجهی را که تکیه گاه چند وجهی است، در نظر آورید. به موجب عبارت ۲ از بخش ۵، خط عمودی که از ۸ بر آن وجه رسم شود، نقطه تلاقیش روی خود آن وجه خواهد بود. پس وجهی که نیاز قضیه مزبور را برآورده می‌سازد، مشخص می‌گردد.

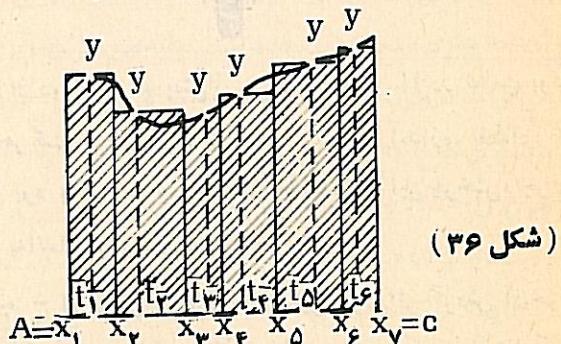
نتیجه

همه مسائلی را که تا کنون مورد بررسی قراردادیم، می‌توان به خوبی با روش خالص ریاضی حل کرد. به هر حال، شاید کسانی توجه نداشته باشند که به کار گرفتن ملاحظات مکانیکی در اثبات مسائل ریاضی، تنها به منظور تمرین دادن ذهن است. این گونه روش‌ها از اهمیتی تاریخی و عملی برخوردار هستند.

خط مستقیم P و منحنی L را که در یک سمت خط P قرار گرفته، در نظر آورید، (شکل ۳۵)، به طوری که هر خط عمود بر P منحنی L را در یک نقطه قطع می‌کند. ما دو تا از این خطوط عمود، یعنی AB و CD را انتخاب می‌کنیم و مساحت چهارپهلوی منحنی $ABCD$ را که S می‌نامیم، بدست می‌آوریم. با این نظر قطعه مزبور را به وسیله نقاط زیر

$$x_1 = A, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1} = C$$

به اجزای کوچکتر تقسیم می‌کنیم. (در شکل ۳۶: $n=6$). در هر یک از قطعه‌های $x_i x_{i+1}$ نقطه T را در نظر گرفته، از آن عمودی رسم می‌کنیم تا منحنی L را در نقطه y_i قطع کند. از هر یک از نقاط y_i خطوطی مستقیم به موازات P رسم می‌کنیم تا با خطوط عمودی که از x_i کشیده شده، برخورد کند. مساحت سطح شکل هاشورزده پلکانی در شکل ۳۶، تقریباً با سطح چهار

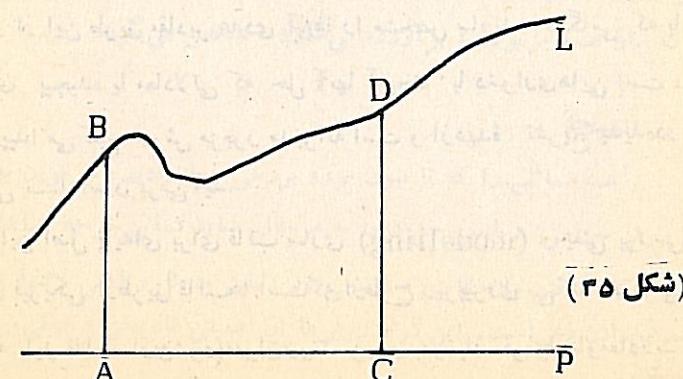


پهلوی منحنی S مساوی است. و هر چه پاره خط‌های $x_i x_{i+1}$ که خط AC را بدان تقسیم کرده‌ایم کوچکتر باشد، این تقریب مناسب‌تر است. طول پاره خط‌های $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ را به ترتیب $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ فرض می‌کنیم و طول پاره خط‌های $T_i y_i, T_{i+1} y_{i+1}, \dots, T_n y_n$ را مساوی y_1, y_2, \dots, y_n می‌گیریم، پس مساحت S' خواهد بود:

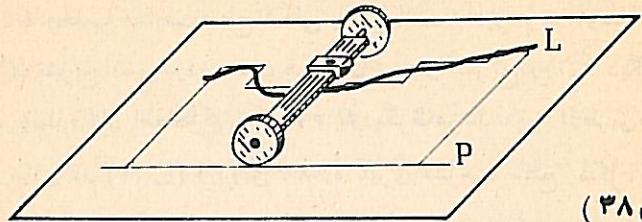
E ، همزمان با آن استفاده از E به عنوان یافان روند A (که برای قالب‌سازی به کار می‌رود) که تحت شرایط آزمایشگاهی قرار می‌گیرد، تحقق روند A و تخمین حل معادله E به وسیله این روش‌ها، و بنابراین، محاسبه خواص مطلوب روند A . در اینجا می‌گوییم روند A (و همچنین فرمول‌ها و معادلات E) را به وسیله روند A قالب‌سازی کرده‌ایم. به علاوه اگر دو روند به وسیله فرمول‌ها و معادلات یکسانی تشریح شده باشد، می‌گوییم آن دو روند همانند یکدیگر است.

حل مسئله استاینهاوس در بخش ۴، مثالی ابتدایی از دروش قالب‌سازی است. رفتن کودکان به مدرسه، پدیده A است که باید قالب آن ساخته شود، و مشخصه مورد نظر، زمان لازم است. این زمان ارزشی است که از فرمول مشخصی نتیجه می‌شود. پدیده قالب‌سازی A (آویختن وزنه‌ها از رسماً) را چنان می‌یابیم که در آن، انرژی پتانسیل ارزش همان فرمول محسوب شود. پدیده اخیر به طرزی تجربی انجام می‌پذیرد.

روش مدل‌سازی در عمل از اهمیت بسیاری برخوردار است (زیرا برای بار اول روش مزبور را در روندهای هیدرودینامیکی والکتریکی به کار گرفتند). به ویژه، این روش پایه بسیاری از انواع ماشین‌های انگرال گیری را تشکیل می‌دهد؛ که در زیر، اساس عملکرد ساده‌ترین آن‌ها را که ماشین انگرال گیری با چرخ اصطکاکی است، شرح می‌دهیم.



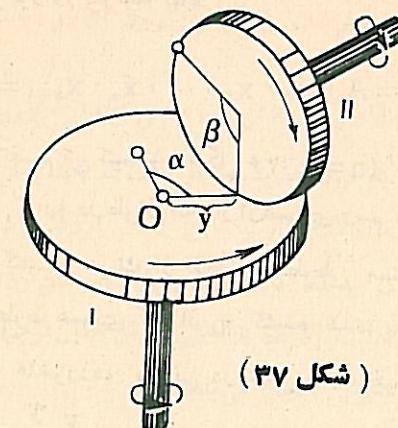
اندازه α به گردش درمی آوریم. در نتیجه مقدار عددی مجموع زوایای گردش چرخ از رابطه $(1.C)$ بدست می آید. به عبارت دیگر، این مقدار مساوی S' ، مساحت سطح هاشور خورده پلکانی شکل 36 است.



(شکل ۳۸)

طبق شکل 38 ، خط مستقیم P و منحنی I را روی کاغذی رسم می کنیم. سپس سازوکار (mekanism) زیر را در نظر می گیریم. میله ای بردو چرخ کوچک که یکی از آنها به نحوی در امتداد خط P می گذارد که همواره میله بر آن خط عود باشد، نصب شده است. شاخص لغزنده ای روی میله نصب شده و می تواند در طول آن حرکت کند. در مرکز شاخص سوزی متصل شده که انتهایش بر سطح کاغذ تماس دارد. فرض می کنیم میله به طریق زیر بادیسک I و چرخ II در ارتباط است: چرخ II کوچک واقع بر میله باعث می شود که دیسک I نیز به همان اندازه بگردد، فاصله چرخ II از مرکز δ دیسک در هر حال بر این فاصله مرکز شاخص از ابتدای میله است. چنین می پنداریم که شعاع میله مساوی واحد است. محیط شکل پلکانی در شکل 38 را با سوزن به نحوی می پیماییم که میله در امتداد خط P بغلطف و شاخص در طول میله حرکت کند. نتیجه ای که حاصل می شود این است که زاویه ای که به وسیله چرخ II گردیده می شود، از لحاظ عددی برابر مساحت S' می باشد. هرچه بخش های جزئی پاره خط کوچکتر باشد، منحنی I که جانشین محیط شکل پلکانی می شود، با تقریب بهتری برابر خط شکسته می گردد و در نتیجه S به جای S' می نشیند.

اینک سیستمی را در نظر می گیریم که از دیسک I و چرخ II که دوره آن بر دیسک I تکیه دارد، تشکیل شده است (شکل 37). چرخ II می تواند حول محور خویش بچرخد. فاصله چرخ II از O ، مرکز دیسک I را در هر لحظه برابر y فرض می کنیم. دیسک را به اندازه زاویه α (بر حسب زادیان)



(شکل ۳۷)

می گردد. نقطه ای از دیسک I که پیش از چرخش با چرخ II در تماس بود، به اندازه قوس αy حرکت خواهد کرد، و درست به همان اندازه، نقطه ای که روی دوره چرخ II بود به حرکت در خواهد آمد. در اثر این چرخش، چرخ II حول محور خود به اندازه زاویه β دوران خواهد کرد.

اگر شعاع چرخ II را برابر γ در نظر بگیریم. در اثر گردش آن حول محور خود به اندازه زاویه β ، نقاط دوزه آن مساوی $\beta \gamma$ حرکت خواهند کرد و بنابراین خواهیم داشت: $\beta \gamma = \alpha y$. حالا γ را مساوی 1 قرار می دهیم، در این صورت $\beta = \alpha y$. اینک ابتدا چرخ II را به فاصله y از مرکز δ قرار می دهیم و دیسک را برابر زاویه α می گردانیم، بعد چرخ را در فاصله y از مرکز δ می گذاریم و دیسک را برابر α می چرخانیم، و به همین ترتیب ادامه داده بالاخره چرخ II را در فاصله y از مرکز δ می نهیم و دیسک را به

وزنه است.

ازین قبیل نظرات انتقادی بسیار می‌توان اظهار کرد. به طوری که هم استدلال فوق را دربر بگیرد وهم به ملاحظاتی که زیر بنای همه برخوردها به مسائل بود، مربوط گردد. با این همه، نباید تصور کرد که ملاحظات مزبور قادر ارزش آموزنده هستند. ما این ملاحظات را کمتر از براهین هندسی مقاعد کننده نمی‌دانیم. نکته این است که همه قضایای مربوط به ریسمان، وزنه وغیره تنها دارای خصیصه تقریبی هستند و هر چه خصوصیات وسائل برگزیده (ریسمان، وزنه وغیره) به کمال مطلوب نزدیک‌تر باشد، قضایا معتبرتر است. در این مرور، عبارات مشخصی از قبیل «ریسمان خطی مستقیم است»، هرچه طناب انتخاب شده نازک‌تر باشد، به واقعیت نزدیک‌تر است، و در این صورت می‌توان گفت که قضایای مربوط برای ریسمان‌هایی باضمامت بی‌نهاست کم، صادق است. شرط‌های دیگری مانند این که «طول ریسمان با وزنه، مساوی درازای ریسمان بدون وزنه است»، هنگامی به واقعیت نزدیک‌تر می‌گردد که ریسمان کمتر کش باید، پس در این صورت می‌توان گفت قضیه مزبور برای ریسمان‌هایی که مطلقاً انبساطناً پذیر است، صدق می‌کند. واضح است که ریسمان بی‌نهاست نازک یا مطلقاً انبساط ناپذیر در طبیعت یافت نمی‌شود. این به همان اندازه مبتنی بر کمال مطلوبی خیالی است، که مثلاً نقطه اثرنیرو را چنان نقطه‌ای بدانیم که در فیزیک مقدماتی به ما آموخته‌اند، چرا که هرچه سطح عکس العمل اجسام در مقابل نیرو کوچک‌تر باشد، نتایج حاصله محاسبات مربوط به نیرو بر نقاط آن جسم، به واقعیت نزدیک‌تر است. مفهوم ذره نیز به همان اندازه مبتنی بر خیال پروری است، چرا که ویژگی‌های مختص درات، بیشتر هنگامی در مورد اجسام واقعی صدق می‌کند که ابعاد آن اجسام کوچک‌تر باشد.

در اینجا بهتر است تأکید کنیم که همه مفاهیم و قوانین مکانیک (و بهمان‌گونه فیزیک به‌طور عام) در آمیخته با کمال مطلوب گرایی در مورد پذیده‌های طبیعی است. بنا بر این حتی یک دانش آموز ممکن است ناخودآگاه و نه به ندرت،

بنابراین اگر مانه محیط خط‌شکسته بلکه خود منحنی را با سوزن بینمایم، چرخ II زاویه‌ای مساوی مساحت S را خواهد گردید. نتیجه را می‌توان بر مقیاس ویژه‌ای ثبت کرد.

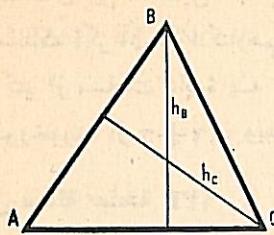
در اینجا روندمدل‌سازی تبدیل اندازه‌گیری مساحت سطح چهارپهلوی منحنی، به محاسبه مساحت سطح شکل پاکانی است. این روند به وسیله فرمول (۱.۱) تشریح می‌شود. همان فرمول برای تشریح رونمای دیگری در ارتباط با سازوکار اصطکاکی شکل ۳۷ بار دیگر ظاهر شد. پس از طریق نمایش فرمول سازوکار (۱.۱) و روش اندازه گیری مساحت سطح شکل، امکان قالب‌سازی پدید می‌آید.

چنین روشنی قیاس مکانیکی مارا به ساختن وسیله‌ای برای محاسبه مساحت سطوح منحنی (درست‌تر بگوئیم، اشکال خاصی، - چهارپهلوهای منحنی) هدایت کرده است.^۱

در نتیجه از خصیصه‌ای اصلی، یک مشاهده به عمل می‌آوریم. ممکن است استدلاای آنکه بر پایه ملاحظات مکانیکی بناده است، خواندن مشکل پسند را به حد کفاایت دقیق به نظر نماید. حتی ساده‌ترین مثال نخستین که در بخش اول بدان برخورد کردیم، جای اعتراض دارد. ریسمان دقیقاً خط راست نیست (زیرا ضخامت محدودی دارد و اگر از میان ریز سنج بدان نگریسته شود، شکل نامنظم آن به چشم می‌خورد)، بنا بر این عبارت «ریسمان خط مستقیمی است» مفهوم صحیحی در بر ندارد. از آن گذشته، به سخن دقیق‌تر، انتهای ریسمان را نمی‌توان یک نقطه در نظر گرفت (به علاوه، خود این عبارت که وزنه در نقطه‌ای معین به ریسمان آویخته شده است، بی‌نقص نیست). عاقبت، هر ریسمان واقعی کش می‌آید و بنا بر این طول ریسمان همراه با وزنه، بلندتر از طول آن بدون

۱. آلتی را که برای اندازه گیری مساحت سطوح اشکال منحنی به کار می‌رود، مساحت سنج (پلانی متر) می‌نامند.

پاسخ راز و رمز عدد ها و شکل ها (صفحه ۸۰ را ببینید)



۱. فرض می کنیم بین دو ارتفاع،
برگتر یا مساوی h_C
در این صورت داریم:

$$h_C \geq h_B \geq AC \quad (1)$$

ولی h_C بر AB عمود، در حالی که
 AC نسبت به AB مایل است و

بنابراین AC نمی تواند از h_C کوچکتر باشد، یعنی $AC = h_C$. این، به معنای آن است که AC و h_C برهمنطبقاند. در این صورت، مثلث در رأس A قائم می شود و ارتفاع h_B هم بر پل AB منطبق می شود و رابطه (۱) به این صورت در می آید:

$$h_C = h_B = AC = AB$$

مثلث مورد نظر، قائم الزاویه متساوی الساقین است.

۲. به کمک ۹ چوب کبریت نمی توان ۳ مربع ساخت. ولی در حکم مسئله، ازما مربع نخواسته اند، بلکه چهار ضلعی هایی با ضلع های برابر مورد نظر است. در شکل می بینید که از این چهار ضلعی ها، یکی مربع دو تای دیگر لوزی هستند.

۳. نفر دوم برای خرید کتاب تنها یک ریال کم داشت؛ وقتی «پول» های خود را روی هم ریختند باز هم نتوانستند کتاب را بخرند. بنابراین روشن است که نفر اول اصلاً «پول» نداشته است و قیمت کتاب هم، همان ۳ ریال است.

۴. روی شکل دیده می شود که تفاوت دو مساحت برابر با قسمت هاشور خورده است. این قسمت، از مستطیل هایی تشکیل شده است (که روی ضلع های

خود را در ورطة چنین کمال مطلوب هایی بیافکند. به عنوان مثال، یکی از اساسی ترین مفاهیم مکانیک، یعنی حرکت یکنواخت را در نظر بگیرید. حرکت یکنواخت مطلقاً در طبیعت وجود ندارد (اندازه گیری های دقیق مشخص کرده است که حتی عقرهای ساعت نیز به طور غیر یکنواخت حرکت می کنند).

در بعضی از موارد محدود، این غیر یکنواختی چنان اندک است که می توان از آن چشم پوشی کرد. بدین طریق است که مفهوم حرکت یکنواخت گسترش می یابد. همچنین است در مورد قانون اول نیوتون، زیرا هیچ جسمی که تحت تأثیر اجسام دیگر نباشد وجود ندارد. از این گونه مثال ها بی شمار می توان زد، چه دامنه ایها تمام فیزیک را دربر می گیرد.

بنابراین در می یابیم که در واقع مکانیک نه با اجسام و روندهای واقعی، بلکه با موارد تصور گرایانه، سروکار دارد؛ از قبیل «جسمی که تحت تأثیر هیچ جسم دیگری نیست»، «حرکت خطی یکنواخت»، وغیره. در این صورت ما به این موارد تصور گرایانه، به چشم واقعی می نگریم، یعنی فرض می کنیم که دارای وجود واقعی هستند.

در پایان توجہ داشته باشید که انتزاعات مکانیکی (مانند ذره، رسماں بدون وزن بی نهایت باریک و مطلقاً انبساط ناپذیر وغیره) در طبیعت خود به همان اندازه مناسب است که در هندسه سراغ داریم (مانند نقطه، خط مستقیم، صفحه وغیره). نقاط، خطوط مستقیم و صفحات در ذندگی حقیقی به مثابه اجسام و موارد واقعی به چشم نمی خورند و باراتی که پیرامون آنها به گفتگویی بردازد، هر چه اجسام واقعی خواص ویژگی هایی نزدیک تر به نقطه، خط مستقیم، صفحه وغیره از خود نشان بدهند، معنای صحیح تری بدخود خواهد گرفت.

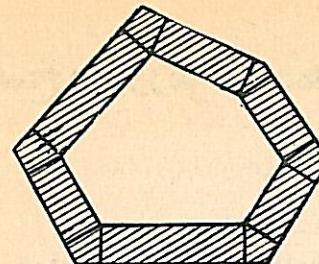
*

چند عدد از عضوهای مجموعه زیر بر ۷ بخشیدهند:

$$A = \overbrace{11111111000011}^{1111000011}$$

۱۳۶۱

Reconciliation With Mathematics
 Editor: Parviz Shahryari
 Address: Tehran, P. O. Box 34 - 541
 Vol. VI, No 1, 1982



چند ضلعی درونی به وجود آمده اند)
 که مساحت مجموع آنها برابر ۱۲ است.
 سانجامتر مرربع است. علاوه بر این
 مستطیل‌ها، چهار ضلعی‌هایی در
 گوش‌های بین مستطیل‌ها باقی

می‌ماند که اگر آن‌ها را کنارهم قرار دهیم، شکلی به دست می‌آید که مساحتی
 بزرگتر از مساحت دایره به شعاع واحد دارد. بنابراین، مساحت قسمت
 هاشورخورده از $12 + \pi$ ، و به طور بدیهی از ۱۵، بیشتر است.

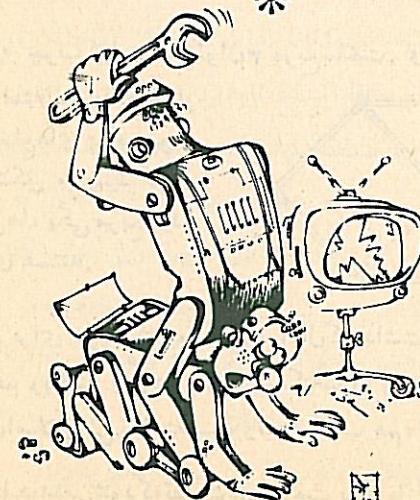
حل مساله صفحه ۱۳۴

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که عدد ۱۱۱۱۱۱۱۱ بخش پذیر است و ضمناً
 هیچ کدام از عضوهای قبل از آن در مجموعه، بخش پذیر برق ۷ نیستند.
 بنابراین عضوهایی از مجموعه بر ۷ بخش پذیر نند که تعداد رقم‌های هر کدام
 از آن‌ها، مضربی از ۶ باشد. چون داریم:

$$1361 = 226 \times 6 + 5$$

بنابراین، ۲۲۶ عضو این مجموعه بر ۷ بخش پذیر است.

*



چه وقت یاد می‌گیری به تکنولوژی جدید احترام بگذاری؟