

# آشنایی با ریاضیات

جلد بیستم

شهریور ماه ۱۳۶۷



۲۰۱۰

آشنایی با ریاضیات (جلد بیستم)

سردیز : پرویز شهریاری

امور فنی : حسن نیکبخت

ناشر : انتشارات فردوس

تیراژ : ۲۰۰۰ نسخه

چاپ اول، شهریور ماه ۱۳۶۷

حرر و فیضیشی : مجهودی

چاپ و صاپاگی : رامین

## فهرست جلد بیستم

۱۲۹	پرویز شهریاری	نهایت و بی‌نهایت
۱۴۶	ترجمه پرویز شهریاری	دکارت و «هندسه» او
۱۵۵	—	مسئله‌های مسابقه‌ای
۱۶۰	ترجمه و تنظیم محمدعلی شیخان	شگفتی‌های هندسه
۱۷۷	—	استفاده از پردازها
۱۸۹	ترجمه ابراهیم عادل	شكل‌بندی مسئله پروانه
۲۱۴	—	بازسازی مسئله
۲۲۲	—	رمز و راز عددها
۲۲۴	شهریار شهریاری	تکه‌ای از زمامه یک استاد ریاضی
۲۲۶	محسن نیکبخت	هندسه و روکش
۲۳۱	علیرضا امیرموز	مکعب سحری
۲۳۴	—	حل مسائلهای

## نهايت و بي نهايت

«جهان کتابي است پن از فلسفه، اين کتاب در براین چشمان ما گشوده است. ولی تنها زمانی می توان آن را درک کرد که با زبان و نشانه های آن آشنا باشيم. اين زبان، رياضيات و اين نشانه ها مثلث ها، دايره ها و سایر شكل هاي هندسي اند» گاليله

«... استنباطي که بعضی عقاید انحرافی نسبت به علم داشتند، آن را از صفحه اذهان خارج ساخت و همچنان آن اعتقاد به موهومات نشست...» ابن خلدون

بي کرانی و گستردگی دشت ها، بي انتهایی دریا، بي پایانی آسمان (آسمانی که به قول پاسکال، همچون حقیقت، وسعتی بي کران دارد، مرکزش هیچ جا و کرانه اش همه جاست) و انبویی ستارگان، حتی بشر نخستین را که دستش برای هر گونه آزمایش و جستجویی بسته بود - به اندیشه و امنی داشت که البته، اغلب همراه با هراسی هول انگیز بود. این «بي مرزها» هم منشاء خیر و برکت بودند و هم سرچشمۀ شروع بدیختی؛ هم می ساختند و می آراستند و هم هوجوب ویرانی و نابودی می شدند. و چنین بود که افسانه های بي شمار درباره باد و باران و طوفان و... به وجود آمد و انسان جاهل را گرفتار جادو گرانی کرد که مدعی بودند با «خدایان» رابطه دارند و می توانند با هدیه و قربانی و وردهای خود، خشم آنان را فرو نشانند و انسان و دام و کشتزار را در پناه خود بگیرند.

و هم ناشی از عدم درک «نامتناهی» است که گاه، انسان «عاقل» راهم، به فرار از حقیقت و ای دارد و به تخیل و حتی هدیان می کشاند. و شگفتانه که بسیاری از همین تخیل ها وهدیان ها، به تدریج رنگ حقیقت به خود گرفته است و، در دوره های طولانی، تعبد را بر عقل و خرد آدمی مسلط کرده و به صورت باورهای یقینی، همچون زنجیرهای گران، انسان را در طول سده های متواتی، از حرکت به جلو و جست و جوی حقیقت محروم کرده است.

آشنایی با ریاضیات (جلد بیستم)

سردیبر : پرویز شهریاری

امور فنی: حسن نیک بخت

ناشر: انتشارات فردوس

تیرماه ۲۰۰۰ نسخه

چاپ اول، شهریور ماه ۱۳۹۷

حروفچینی : مهندی

چاپ و صحافی : رامین

## فهرست جلد بیستم

۱۲۹	پرویز شهریاری	نهايت و بي نهايت
۱۴۶	ترجمه پرویز شهریاری	دكارت و «هندسه» او
۱۵۵	—	مسأله های مسابقه ای
۱۶۰	ترجمه و تنظیم محمدعلی شیخان	شگفتی های هندسه
۱۷۷	—	استفاده از پردازها
۱۸۹	ترجمه ابراهیم عادل	شكل بندی مسأله پردازه
۲۱۳	—	بازسازی مسأله
۲۲۲	—	رمز و راز عدهها
۲۲۴	شهریار شهریاری	تکه ای از نامه یک استاد ریاضی
۲۲۶	محسن نیک بخت	هندسه و روکش
۲۳۱	علیرضا امیرموز	مکعب سحری
۲۳۲	—	حل مسأله ها

از کنار آن می‌گذشتند؛ به بی‌نهایت، همچون موجودی ترسناک که همه «قانون‌های» عقل را در هم می‌ریزد، می‌نگریستند. تا جایی که حتی اسسطو که کوشیده است به تجزیه و تحلیل هر مقوله‌ای پردازد - با تکیه بر این حقیقت «که تعداد چیزهای جهان، در عمل، نمی‌تواند بی‌شمار باشد، از طرح مفهوم «بی‌نهایت» صرف نظر می‌کند؛ و جالب این است که کانت، با همه قدرت ذهنی خود، سدها بعد از اسسطو، از همین اندیشه پیروی می‌کند و معتقد است که، اگرچه بی‌نهایت بالقوه وجود دارد، ولی هرگز با بی‌نهایت بالفعل سروکار نداریم، چرا که خط راست رامی‌توان به اندازه دلخواه‌دامه داد و یا عدد را می‌توان به هر اندازه بزرگ کرد، ولی هم خط راست و هم عدد، در هر حال در عمل، محدود باقی‌می‌مانند. هم اسسطو و هم کانت معتقد بودند که قبول «بی‌نهایت» به معنای «جمع اضداد» است.

در این جا تنها یادآوری می‌کنیم که مکتب شهودگرایی در ریاضیات که پرآنود را می‌توان یکی از نام‌دارترین نماینده‌گان آن دانست، در تحلیل آخر، دنباله رو اسسطو و کانت است. شهودگرایان معتقدند تنها باید قانون‌هایی از ریاضیات را پذیرفت که بتوان با آن‌ها عمل کرد، و چون دسترسی به بی‌نهایت ممکن نیست، بنابراین نمی‌توان درباره قانون‌های مربوط به آن صحبت کرد. یک شهودگرا، حتی این قضیه را که، بنابر آن، «هر معادله درجه  $n$  دارای  $n$  ریشه است» فیول ندارد، زیرا همیشه نمی‌توان این  $n$  ریشه را بدست آورد.

شاید برخی حادثه‌ها، به هراس یونانی‌ها از بی‌نهایت و فرار از آن، کمک کرده باشد. به دو نمونه از این حادثه‌ها اشاره می‌کنیم. مکتب فیشاغورثی، عدد و نسبت‌های عددی را سرچشم شناخت می‌دانست. به این سخنان فیلولاً نوس فیشاغوری، که اهل کروتن بود، گوش کنید:

هر چیز که می‌توان شناخت، عددی دارد، زیرا ناممکن است که بی‌عدد، چیزی در اندیشه، ادرالشود و یا شناخته شود. عدد دارای دو صورت مخصوص است: جفت و طاق و، همچنین، یک صورت جفت - طاق که آمیخته از این دو عدد

از آن جمله «دوران سیاه قرون وسطی را می‌توان نوعی رستاخیز ماقبل منطق دانست. پرورش ناچیز علم، آن چنان با افکار کاذب علمی درآمیخته بود که می‌توان وظیفه تاریخ‌نویس کنونی را، که با آن دوران سروکار دارد، با وظیفه کسی که بخواهد مواد اولیه یک ظرف املت را از هم جدا کند، مقایسه کرد» [توبیاس دانزیگ در کتاب «میراث یونان» به ترجمه عباس گرمان]. و این بدان علت است که به قول کندورس «عادت به تفکر نادرست نیز، همچون استدلال درست، تمایل به رشد و افزایش دارد». و چنین بود که چون انجلیل، عدد  $\pi$  را برابر  $3$  دانسته بود، کشیشان بسیاری، هم خود را بر سر این امید بیهوده گذاشتند که ثابت کنند عدد  $\pi$  درست برابراست با  $3$ .

یونانی‌ها، که از سده‌های کم و بیش دور پیش از میلاد تاسده‌های اول بعد از میلاد، دوران شکوفائی دانش و هنر خود را می‌گذراندند، با نظام بردگی دست به گریبان بودند. «دموکراسی» تنها برای آزادها بود و شامل بردگان نمی‌شد. کارها به دو بخش «حقیر» و «شریف» تقسیم شده بود. هر کار عملی و «حقیر» متعلق به بردگان و کارهای «ذهنی» و «معنوی» در اختیار آزادها بود. شاید به همین دلیل باشد که دانش‌هایی همچون حساب و جبر، یا اصلاً به وجود نیامد و یا در مرحله‌های نخستین خود متوقف شد. آزادها بیشتر به بحث‌های فلسفی و به دانش‌های مجرد علاقه‌مند بودند، دانش‌هایی که، نه در خدمت کارهای «حقیر» عملی، بلکه راه‌گشای بغيرنجی‌های حل-نشده کابینات باشند. در یونان، حتی عددنویسی موضعی به وجود نیامد، در حالی که سده‌ها پیش از آن‌ها، مردم بابل، و کمی بعدتر مردم هند، از عدد-نویسی موضعی استفاده می‌کردند. در واقع، حساب، دانشی «حقیر» بود، چرا که مورد استفاده عملی داشت، درحالی که مثلاً هننسه، علمی «شریف» به شمار می‌آمد، چرا که گمان می‌رفت کاربردی در مسایل روزمره و نیازهای زندگی ندارد.

با همه این‌ها، دانشمندان یونانی از واژه «بی‌نهایت» فرار می‌کردند و

دارند و می‌دانند که با آن حساب، همه به‌طور مساوی مالک خواهند شد. این حساب، قانون عمومی است و مانع نادرستان است و آن‌ها باید را که می‌توانند درست حساب کنند، و امی دارد که جلو نادرستان در آیند، زیرا برای آن‌ها روشن می‌کند که، اگر از آن حساب تخلف کنند، پنهان نمی‌ماند و به آن‌ها باید که نمی‌توانند حساب کنند، نشان می‌دهند که نادرستی آن‌ها از همین‌جاست و، به این ترتیب، آن‌ها را از نادرستی بازمی‌دارد...»، [همان‌جا، صفحه ۱۳۵].

و اذلاطون، که خود از هواداران مکتب فیثاغوری است؛ در کتاب «جمهور» خود، بخشی طولانی را به خاصیت‌های عدد اختصاص داده و همه گرفتاری‌ها و ناهم آهنگی‌هارا، ناشی از بی‌اطلاعی رهبران جامعه، ازویژگی‌ها و توانائی‌های عدد می‌داند.

وقتی که یک فیثاغوری از عدد صحیحت می‌کند، منظورش عدد درست و یا نسبت دو عدد درست است؛ یعنی به زبان ریاضی، باحوزه عده‌های گویا سروکار دارد. و این، به هیچ وجه عجیب نیست. حتی امروزهم که عده‌های گنگ را به‌خوبی می‌شناسیم و با آن‌ها کار می‌کنیم، در عمل تنها از عده‌ها و نسبت‌های گویا استفاده می‌کنیم. مثالی بیاوریم.

اگر از شما پرسند، از بین همه استوانه‌هایی که سطح کل آن‌ها برابر ۶ متر مربع است، حجم کدام یک از همه بیشتر است؛ بعد از حل مساله، می‌توانید پاسخ بدیده: استوانه‌ای که شعاع قاعده آن برابر  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  مترو یا

ارتفاع آن برابر  $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$  متر باشد. ولی روشن است که، این عده‌ها، نمی‌توانند

هیچ گونه تصور ذهنی درستی درباره استوانه به‌ما بدهند؛ و اگر شما سخاوهاید به یک کارگاه سفارش بدیده‌ید تا چنین استوانه‌ای، برای یک منبع، برای شما بسازد، به فرض آن که کارگر مربوط، عدد  $\pi$  را هم بشناسد، نمی‌تواند با دقت کامل، دست به کار ساختن منبع مورد نظر شما بشود. ولی اگر به او بگویید که می‌خواهم منبع استوانه‌ای چنان باشد که ارتفاع آن با قطر قاعده‌اش برابر شود (یعنی مقطع محوری استوانه، به صورت یک مربع دور آید)،

است. هریک از این دو صورت دارای اشکال زیاد است و هر کدام از این اشکال، اشاره به یک چیز است... «یک» اصل همه است... ذات عدد و تأثیرات آن را باید از نیروئی قیاس کرد که در عدد ده است، زیرا بزرگ است، تمام کننده همه است و اصل و راهنمای زندگی خدائی، آسمانی و انسانی است... بدون عدد ده، همه‌چیز بی‌حد و ناروشن و مبهم می‌بود. زیرا طبیعت عدد، شناسائی‌پیش، راهنمای آموزنده است و اگر عدد ذات عدد در کار نبودند، هیچ‌چیز از اشیاء، به هیچ وجه واضح نمی‌شد، نه در نسبت آن‌ها با خود و نه در نسبت آن‌ها با یکدیگر. ولی عدد، همه اشیاء را در روان، با احساس، هماهنگ می‌کند و بدین‌سان آن‌ها را شناختنی و مطابق با یکدیگر می‌کند، به اشیاء وجود جسمانی می‌بخشد و نسبت هر یک از آن‌ها را مجزا می‌کند، هم اشیاء بی‌حد و هم اشیاء با حد. موثر بودن طبیعت عدد و نیروی آن را می‌توان، نه تنها در چیزهای ایزدی و خدائی، بلکه در همه کارها و ساختان انسانی دید و، همچنین در حوزه کارهای صنعتی و همچنین در موسیقی. طبیعت عدد و همچنین هم‌آهنگی، به هیچ وجه دروغ را در خود نگاه نمی‌دارد، زیرا دروغ برای عدد بی‌گانه است. دروغ و حسد، خاص طبیعت چیزهای بی‌حد و چیزهای نامعنوی و چیزهای بی‌خرد است. ولی دروغ، به هیچ راهی، در عدد داخل نمی‌شود، زیرا دروغ، چون چیزی دشمن و آشتی ناپذیر، با طبیعت عدد روبرو است. ولی حقیقت، خاص نوع عدد و هم‌نهاد آن است». [تاریخ فلسفه، کتاب اول، صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷، دکتر محمود‌هون].

فیثاغوریان، حتی راه حل بفرنج‌ترین مسائل زندگی اجتماعی بشر را، در ویژگی‌های «شناسائی پیش» عدد جست و جو می‌کنند. بینید آرکیتاپ فیثاغوری، که خود حکمران تارانت بود، چقدر خوش باور است که به این ایده‌آلیسم ناب پناه می‌برد:

«اگر حساب صحیحی پیدا شود، شورش آرام می‌شود و صلح و سلامت افزایش می‌یابد... زیرا به کمک این حساب، ما وظایف خود را نسبت به یکدیگر مشخص می‌کنیم و، به اعتبار آن، بینوایان از توانگران می‌گیرند و ثروتمندان به نیازمندان می‌دهند، زیرا هردو به آن (به آن حساب) اعتماد

کند و با آغاز از  $A$  به  $B$  برسد. استدلال او چنین بود: برای این که متحرک مورد نظر ما به  $B$  برسد، ابتدا باید از نقطه  $C$  وسط پاره خط  $AB$  عبور کند؛ ولی برای رسیدن به  $C$  اول باید از نقطه  $D$  وسط پاره خط  $AC$  بگذرد و همین طور تا آخر. یعنی متحرک مجبور، برای رسیدن به  $B$  باید از بی نهایت فاصله عبور کند و، برای عبور از بی نهایت فاصله، بی نهایت زمان لازم است و این، به معنای آن است که هر گز به  $B$  نمی‌رسد. بنابراین، اگر در عمل می‌بینیم که هر متحرکی وقتی از  $A$  روی پاره خط  $AB$  به طرف  $B$  حرکت کند بالاخره به  $B$  می‌رسد، در واقع اشتباه حس ماست و پدیده‌ای را می‌بینیم که در واقع امر وجود ندارد.

و طبیعی است که، این گونه حادثه‌ها، بیش از پیش، موجب هراس اندیشمندان از طرح مفهوم «نامتناهی» می‌شد.  
از این‌ها گذشته، ذهن کم‌تجربه و ساده‌اندیش انسان بیست قرن پیش، دو مفهوم «بی‌نهایت» و «ابدیت» را به هم گره می‌زد و تنها راه نجات خود را، فرار از هردوی آن‌ها می‌دانست.

انسان، به‌جز در موردهایی استثنائی، نمی‌تواند از تاثیر نظرها و اعتقادهای زمان خود، مصون بماند: بینید، یوهان کپلر دانشمندی‌تر گ نیمه دوم سده شانزدهم و نیمه اول سده هفدهم، کسی که سرانجام «راز کیهان» را گشود، در رساله‌ای با همین نام «راز کیهان» چه موضوع‌های نابخداهای را مطرح می‌کند:

«... قبل از خالت عالم، عددی به جز تثیل و وجود نداشت که خود خداوند است... زیرا خط و صفحه، هیچ کدام متضمن عددها نیستند: در آن جا بی‌نهایت حاکم است. بنابراین بگذارید درباره احجام گفت و گو کیم. در آغاز باید حجم‌های غیر منظم را حذف کنیم، زیرا مورد نظر ما در این جا، خلقت بر پایه نظم است. باقی می‌ماند شش جسم، کره با آسمان بیرونی مطابق است، زیرا جهان از دو لایه ساخته شده، متحرک و ساکن. لایه ساکن تصویری از ذات خداوند است، در حالی که لایه متحرک چیزی جز انعکاس

هم سخن شما را به خوبی می‌فهمد و هم می‌تواند دستور شما را، با دقت کامل انجام دهد.

فیشاغوریان که معتقد بودند هر پدیده و هر روندی را، اعم از مادی یا معنوی، می‌توان با نسبت دو عدد رست لشان داد، بعد از کشف قضیه‌ای که به نام فیثاغورث شهرت دارد، به مشکلی بزرگ برخوردن. می‌دانیم، اگر مربعی به ضلع واحد را در نظر بگیریم، طول قطر آن برابر  $\sqrt{2}$  می‌شود. ولی یونانی‌ها، عده‌های گنگ را نمی‌شناختند و، در نتیجه، همه تلاش‌های فیشاغوریان برای بیان قطر این مربع به وسیله یک عدد (یعنی یک عدد گویا) با شکست مواجه شد. هر عدد گویائی را، هر قدر نزدیک به  $\sqrt{2}$  در نظر می‌گرفتند باز هم می‌شد عدد گویای دیگری پیدا کرد که، نسبت به اولی، به  $\sqrt{2}$  نزدیک‌تر باشد و این رشتہ، نه سری دراز، بلکه سری نامتناهی داشت. با رشتہ‌ای نامتناهی از عده‌ها، سروکار پیدا کردن که مرتبًا به  $\sqrt{2}$  نزدیک‌تر می‌شد ولی هر گز به خود آن نمی‌رسید. شاید به همین سبب باشد که طول قطر این مربع، و طول‌های نظیر آن را، «غیر قابل بیان»، «اصم» و «گنگ» نامیدند همین حادثه کوچک موجی برای فروپاشیدن فلسفه فیشاغوری شد، که عدد را (یعنی عدد گویا را) «حاکم بر کائنات» می‌دانستند. همین حادثه، مسأله رشتہ‌های نامتناهی را مطرح کرد و، همراه با آن، به وحشت نسبت به مفهوم «بی‌نهایت» افزود.

hadثه دوم، به چهار استدلال مشهور ذنوں ایلیائی مربوط می‌شود. ذنوں شاگرد پادشاهیس بود. استاد او، به یک پارچگی و پیوستگی جهان اعتقاد داشت و، از همین راه، استدلال می‌کرد که همه چیز بی‌تغییر و ثابت است و در چنین طبیعت یک پارچه و به هم پیوسته‌ای، هیچ گونه حرکتی نمی‌تواند وجود داشته باشد. شاگرد او، برای تایید نظر استاد خود، چهار مسأله مطرح کرد که همه آن‌ها با مفهوم بی‌نهایت (هم بی‌نهایت بزرگ و هم بی‌نهایت کوچک) مربوط‌اند و، به کمک آن‌ها، ثابت کرد که هیچ گونه حرکتی، در جهان، قابل تصور و امکان نیست. یکی از استدلال‌های او، به این نتیجه منجر می‌شد که هیچ متحرکی نمی‌تواند فاصله بین دو نقطه  $A$  و  $B$  را طی

نوشته‌هایی است که به هندسه مربوط می‌شود و، در واقع، به مسأله‌های مکانیک و محاسبه بستگی دارند. ارشمیدس در این نوشهای، به خصوص از روشی استفاده می‌کند که می‌توان آن را روش «افنا» نامید و این، همان روشی است که، دوهزار سال بعد، منجر به کشف محاسبه انگرالی شد.

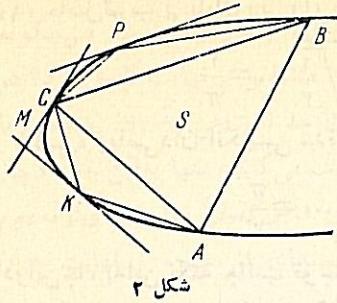
ساده‌ترین کاربرد روش «افنا» را در رساله «درباره اندازه‌گیری دایره» ارشمیدس می‌بینیم. ارشمیدس، در این رساله، برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات، مسأله اندازه‌گیری طول محیط دایره و تعیین مقدار تقریبی عدد  $\pi$  را مطرح می‌کند و، در ضمن، میزان خطای موجود را، در هر مرحله از این محاسبه، به دست می‌دهد. ارشمیدس، با محاسبه محیط چند ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی، از دو طرف، به محیط دایره نزدیک می‌شود! و از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع محاطی و محیطی آغاز می‌کند و، سپس، با دوبرابر کردن های متواالی تعداد ضلع‌ها، خود را به  $96$  ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی می‌رساند. او قطر دایره را برابر واحد می‌گیرد و ثابت می‌کند که، در این حالت، محیط  $96$  ضلعی محاطی بیشتر از  $\frac{15}{3}$  و محیط  $96$  ضلعی محیطی کمتر از  $\frac{71}{7}$

$\frac{1}{3}$  است. و، به این ترتیب، عدد  $\frac{22}{7}$  را، به عنوان تقریب خوبی برای عدد  $\pi$  پذیرد.

ارشمیدس، که در رساله «درباره اندازه‌گیری دایره» به محاسبه محیط و مساحت دایره پرداخته است، در رساله دیگر خود به نام «درباره کره و استوانه»، به حالت فضایی، یعنی محاسبه سطح و حجم کره توجه می‌کند و با استفاده از همان روش «افنا» ثابت می‌کند که: سطح کره برابر است با چهار برابر سطح دایره عظیمه، و حجم کره برابر است با چهار برابر حجم مخروطی که قاعده آن، دایره عظیمه‌ای از این کره و ارتفاع آن، شعاعی از آن باشد. ارشمیدس در همین رساله، نتیجه‌های مهم و جالب دیگری هم به دست آورده است. مثلاً، ثابت می‌کند که اگر در یک استوانه متساوی الساقین (استوانه‌ای که ارتفاع با قطر قاعده آن برابر باشد)، کره‌ای محاط کنیم، سطح کل و حجم استوانه، برابر با  $\frac{3}{2}$  سطح و حجم کره می‌شود.

خداآند خالق نیست و، بنابراین، از مرتبه پایین‌تر است. در ماهیت خود مدور با خداوند و مسطح با خلقت او مطابقت دارد. در واقع، کره دارای سه لایه است: سطح، مرکز، حجم؛ همین طور است دنیای ساکن: آسمان، خورشید و اثیر؛ و چنین است خداوند: اب، این، روح القدس. از طرف دیگر، دنیای متحرک به وسیله اجرام با وجوده مسطح مشخص می‌شوند. از این اجرام، پنج نوع موجودند؛ با این حال، وقتی از محدوده خارج بگردید، این تعداد پنج مشخص کننده شش جسم مستقل است؛ از این جا شش سیاره‌ای که به دور خورشید می‌گردند و، همچنین، دلیل آن که فقط شش سیاره وجود دارد، روشن می‌شود. و چون خورشید در مرکز خلقت است، و باز از آن جا که این جرم در حال سکون، منبع همه جنبش‌های است، تصویری است واقعی از خداوند خالق زیرا ارتباط خداوند با خلقت، همان است که خورشید با حرکت و جنبش دارد. ... من باز بیشتر نشان خواهم داد که اجسام صلب منتظم، بدروگوه تقسیم می‌شوند: سه عدد در یک گروه و دو تا در گروه دیگر. در وهله اول، مکعب، هرم و بالاخره دوازده وجهی به گروه بزرگتر متعلق‌اند. به گروه دوم، اول هشت‌وجهی و، پس از آن، بیست وجهی وابسته است. به این دلیل است که بزرگترین قسمت کائنات، یعنی زمین، که در آن تصویری از خداوندگار دیده می‌شود، دو گروه از یکدیگر جدا می‌سازد. زیرا همان طور که قبل<sup>۱</sup> ثابت کرده‌ام، اجرام گروه اول باید در طرف بیرون مدار زمین قرار گرفته باشند و دسته دوم، در داخل مدار زمین... بنابراین، من به این نتیجه رسیدم که مکعب را به زحل، چهار وجهی را به مشتری، دوازده وجهی را به مریخ، بیست وجهی را به زهره و هشت وجهی را به عطارد تخصیص دهم...». [خوبی‌ماں دانتزیک. «میراث یونان»]. و شگفت‌تر این که، گالیله و تیکو یراهه، این مطالب را تایید کردند و مورد ستایش قرار دادند.

و چقدر شگفت‌انگیز است که ارشمیدس بزرگ، علی‌رقم روح‌زمان، «نامتناهی» را به مبارزه طلبید و سربلند و پیروز از صحنۀ نبرد بیرون آمد. متن بسیاری از نوشهای ارشمیدس باقی مانده است. درین آن‌ها،



می‌سازیم. شکل مجاھطی  $AKCPB$  به دست می‌آید. این روند را، پیشتر و پیشتر ادامه می‌دهیم. چند ضلعی مجاھطی، همراه با مساحت آن، مرتبًا بزرگتر و مرتبًا به مساحت قطعه سهمی نزدیکتر می‌شود. (اشمیدس ثابت کرد که مساحت مثلث  $ACB$  چیزی برابر مجموع مساحت‌های دو مثلث  $AKC$  و  $CPB$  است و چون همین وضع، برای مثلث‌های بعدی پیش می‌آید، با توجه به این که مجموع مساحت‌های همه این مثلث‌ها، به مساحت قطعه سهمی نزدیک است، اگر مساحت مثلث  $ACB$  را  $S$  بگیریم، مساحت قطعه سهمی چنین می‌شود:

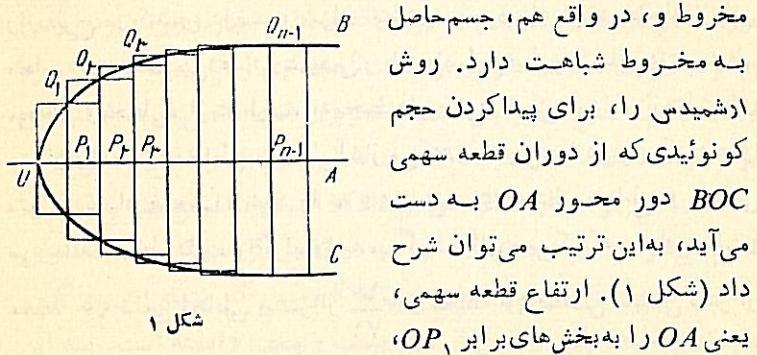
$$S + \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{8}S + \dots = \frac{4}{3}S$$

(اشمیدس، از «روح زمان» پیروی نکرد، سنت‌ها را در هم شکست و راه درست بررسی را در محاسبه رشتہ‌های نامتناهی نشان داد. در واقع اشمیدس، در کارهای علمی خود، از همان رهنمودی استفاده می‌کرد که، سده‌ها بعد، به وسیله دکارت تنظیم شد:

«وقتی می‌خواهیم موضوعی را بررسی کیم، نباید در جست و جوی چیزی باشیم که دیگران می‌اندیشند و یا در گمان خودمان وجود دارد. باید چیزی را جست و جو کنیم که یا آشکارا و به روشنی دیده می‌شود و یا با استدلال قیاسی قابل اثبات است، چراکه دانش، از راه دیگری به دست نمی‌آید». و نزدیک به دوهزار سال طول کشید شا ریاضی دانان توانستند راه اشمیدس را دنبال کنند، «بی‌نهایت» را به رسمیت بشناسند و، به جای فرار از آن، آن را به خدمت دانش بگیرند. فرانسوا ویت، ریاضی دان فرانسوی سده

موازی با وتر  $AB$  بر سهمی رسم و نقطه تماس  $C$  را به نقطه‌های  $A$  و  $B$  وصل می‌کنیم. مساحت مثلث  $ACB$  از نصف مساحت قطعه  $AMB$  بیشتر است. در نقطه‌های جدید  $K$  و  $P$ ، شبیه آنچه در مورد قطعه  $AMB$  انجام دادیم، عمل می‌کنیم، یعنی مثلث‌های  $AKC$  و  $CPB$  را

اشمیدس در رساله «درباره کونوئیدها و سفرهای از روی کمالاً» نزدیک به روش انتگرال‌گیری امروزی استفاده می‌کند. او به جسم‌های کونوئید می‌گفت که از دوران یک قطعه سهمی یا هذلولی دور محور خود به دست آیند، یعنی همان چیزی که امروز سهمی (پارابولئید) و هذلولی (هیپربولولئید) نامیده می‌شود. باید گفت که نام گذاری اشمیدس، بهتر از نام گذاری ماست، «زیرا مثلاً «پارابولولئید» یعنی شبیه سهمی، در حالی یک حجم را نمی‌توان شبیه یک شکل مسطح دانست، ولی «کونوئید» یعنی شبیه



شکل ۱

مخروط و، در واقع هم، جسم حاصل به مخروط شباخت دارد. روش اشمیدس را، برای پیدا کردن حجم کونوئیدی که از دوران قطعه سهمی دور محور  $OA$  به دست  $BOC$  می‌آید، به این ترتیب می‌توان شرح داد (شکل ۱). ارتفاع قطعه سهمی، یعنی  $OA$  را به بخش‌های برابر  $OP_1, OP_2, \dots, P_{n-1}, A$  تقسیم می‌کنیم. از نقطه‌های تقسیم، که تعداد آنها  $n$  است، عمودهای  $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_{n-1}, Q_{n-1}$  را  $P_{n-1}, Q_{n-1}, P_n, Q_n, \dots, P_1, Q_1$  می‌کنیم و مطابق شکل، مستطیل‌های مجاھطی و محیطی را می‌سازیم. اگر این شکل را دور  $OA$  دوران دهیم، دو جسم پله‌ای به دست می‌آید که از استوانه‌های مجاھط در کونوئید و محیط برآن به دست آمده‌اند. حجم جسم پیروزی بیشتر از حجم کونوئید و حجم جسم درونی کمتر از حجم کونوئید است. اشمیدس، با آغاز از محاسبه حجم این دو جسم، حجم کونوئید را به دست می‌آورد و ثابت می‌کند که این حجم، برابر است با نصف حجم استوانه‌ای که ارتفاع آن  $OA$  و شعاع قاعده‌اش  $AB$  باشد.

اشمیدس، در رساله «تریبع سهمی» هم از روش «افنا» استفاده می‌کند. این رساله، به محاسبه مساحت قطعه سهمی اختصاص دارد. فرض کنید بخواهیم مساحت قطعه سهمی  $AMB$  را، که به وسیله وتر  $AB$  از سهمی جدا شده است، محاسبه کنیم (شکل ۲). استدلال اشمیدس چنین است. مماسی

۱۶، حاصل ضرب بی پایان زیر را، برای محاسبه عدد  $\pi$ ، پیشنهاد کرد:

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \dots}} = \frac{2}{\pi}}$$

و والیس، ریاضی دان انگلیسی سده ۱۷، این ضرب بی پایان را:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots} = \dots$$

(در اینجا، به این نکته جالب توجه کنید که از ضرب عددهای گویا، عددی گنگ و حتی غیرجبری به دست آمده است، حادثه‌ای که در مورد ضربهای با تعداد محدود عامل‌ها، هرگز پیش نمی‌آید).

وسرانجام، نیوتون و لاپلایس، با کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال و به خدمت گرفتن «بی‌نهایت کوچک‌ها» و «بی‌نهایت بزرگ‌ها»، تحولی عظیم در تکامل ریاضیات و، به تبع آن، در همه دانش‌ها، به وجود آوردند. این را هم نگفته نگذاریم که هگل، برای نخستین بار، مفهوم فلسفی «بی‌نهایت» را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد و آن را با ویژگی روند تکامل مربوط کرد و، به این ترتیب، بستگی ذاتی «بی‌نهایت» را با «نهایت» و «نامحدود» را با «محدود» نشان داد.

«بی‌نهایت» یکی از ویژگی‌های فضا و زمان است و می‌توان آن را بدگمک ریاضیات و کیهان‌شناسی مورد مطالعه قرار داد. تا آن‌جا که دانش امروز نشان می‌دهد، جهان مادی، که به عنوان پراکنده‌گی جرم در فضا و زمان شناخته می‌شود، نامحدود است. البته، بسته به دستگاهی که برای محاسبه انتخاب می‌شود، می‌توان فضای زمان را، متناهی یا نامتناهی در نظر گرفت. در کتاب «آناتی دورینگ» می‌خوانیم: «بی‌نهایت از واقعیت اقتباس شده است و، بنابراین، تنها به کمک واقعیت می‌تواند روشن شود و نه از راه انتزاع‌های ریاضی».

مفهوم «بی‌نهایت» ریاضی، تنها وقتی قابل درک است که آن را در وحدت منطقی با «نهایت» مورد بررسی قرار دهیم. به همین مناسبت، بی‌نهایت در ذات خود، متناهی است و به قول همان کتاب: «ازین بردن این تضاد، به معنای پایان بی‌نهایت است». ولی ما می‌دانیم، در هر نظریه ریاضی،

بی‌تناقضی در رابطه‌های صوری مربوط به آن، از ضروریات است. پس چگونه می‌توان ضرورت بی‌تناقضی را با خصلت متناقض بی‌نهایت تلفیق کرد؟ در واقع باید گفت، وقتی مثلاً در نظریه حد از حد نامتناهی ( $\infty = a$ ) و یا در نظریه مجموعه‌ها از توان بی‌نهایت صحبت می‌کنیم، تنها بداین علت دچار تناقض نمی‌شویم که، این‌ها، تنها صورت‌های خاص کاملاً ساده‌شده‌ای از مفهوم بی‌نهایت‌اند و تنها طرحی، تصویری و جنبه‌ای از مفهوم بی‌نهایت جهان واقعی را منعکس می‌کنند.

بی‌نهایت، یعنی بزرگتر از هر عدد دلخواه و، بنابراین، در همان حال که با مفهوم «کمیت» و «عدد» بستگی دارد، نمی‌توان آن را یک عدد مشخص به حساب آورد. از همین جاست که قانون‌های مربوط به عمل‌ها، در حالتی که با مجموع یا حاصل ضرب بی‌نهایت جمله سروکار داریم، کاملاً وهمیشه، با قانون عمل در مورد جمع و ضرب عادی، تطبیق نمی‌کند. قانون‌های مربوط به عمل، در قلمرو بی‌نهایتها، در همان حال که با استدلال‌های قیاسی به دست می‌آیند، باید با تجربه و تطبیق هم سازگار باشند. به این دو مثال توجه کنید.

دومتحرک  $A$  و  $B$  را در نظر می‌گیریم که به فاصله  $a$  متر از یکدیگر قرار دارند و هر دو در یک لحظه به طرف هم حرکت می‌کنند:  $A$  با سرعت ۳ متر در ثانیه و  $B$  با سرعت ۱ متر در ثانیه. هر بار که  $A$  و  $B$  به هم رسند، متحرک  $A$  بالا فاصله به طرف مبدأ حرکت خود برمی‌گردد و با رسیدن به آن، دوباره به طرف  $B$  می‌رود. این نوع حرکت  $A$  آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا  $B$  تمامی فاصله  $a$  متر را طی کند. می‌خواهیم بدانیم  $A$  چند متر راه رفته است!

راه حل بسیار ساده است. سرعت  $A$  سه برابر سرعت  $B$  است و، بنابراین، اگر در تمام مدت حرکت  $B$ ، در راه باشد، باید مسافتی به اندازه سه برابر  $B$  طی کند. متحرک  $B$  به اندازه  $a$  متر رفته است، بنابراین مسافتی که  $A$  طی کرده است، برابر  $3a$  متر می‌شود.

ولی اگر مساله را مرحله به مرحله حل کنیم و بینیم متحرک  $A$ ، در هر رفت یا برگشت، چند متر پیموده است و از مجموع آن‌ها، مسافت پیموده شده به وسیله  $A$  را پیدا کنیم، به مجموع بی‌پایان زیر می‌رسیم:

خود خالی می‌کنید و همراه با بطری خالی قبلی (که اکنون روی هم ۴ بطری خالی شده‌اند)، قرض خود را به فروشگاه می‌پردازید (ارزش ۴ بطری خالی با ارزش یک بطری پر برابر است). بداین ترتیب، شما به اندازه

$$12 + 3 + 1 = 16$$

بطر شیر در اختیار دارید. و این، همان جواب قبلی است.

اقلیدس در «مقدمات» مشهور خود، این اصل را به عنوان حکمی مسلم و بدیهی پذیرفته است: کل از هر جزء خود بزرگتر است. در منطق ارسطوئی، که هنوز هم برمنطق کلاسیک حکومت می‌کند، کل و جزء را این طور تعریف می‌کنند:

«کل آن است که شامل همه جزء‌های خود باشد».

«جزء آن است که یک قسمت از کل را شامل شود».

و می‌بینید که در خود تعریف کل و جزء، اصل اقلیدس نهفته است. ولی ڈڑکانتود، مبتکن نظریه مجموعه‌ها، روشن کرد که، این اصل، در قلمرو بی‌نهایت‌ها، همیشه و همه‌جا حاکم نیست. به عنوان نمونه، عددهای طبیعی را در نظر می‌گیریم. روشن است که مجموعه عددهای فرد (مثبت)، بخشی (یا بذبان مجموعه‌ها؛ زیرمجموعه‌ای) از مجموعه عددهای طبیعی است. ولی آیا تعداد عددهای فرد (مثبت)، از تعداد عددهای طبیعی کمتر است؟ عددهای فرد را در یک سطر و عددهای طبیعی را به ردیف در زیر آنها می‌نویسیم:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & 11 & \dots & 2n+1 & \dots \\ & & & & & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ & & & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & & n+1 & \dots & n & \dots \end{array}$$

در برابر هر عدد فرد، یک عدد طبیعی و، در برابر هر عدد طبیعی یک عدد فرد وجود دارد و به اصطلاح کانتو، تناظر یک به یک برقرار است. مثلاً عدد فرد ۱۳۹۱ متناظر با عدد طبیعی ۶۹۶ و یا عدد طبیعی ۳۰۰۰ متناظر با عدد فرد ۵۹۹۹ است. بداین ترتیب، تعداد عددهای فرد نه کمتر از تعداد عیدهای طبیعی است و نه بیشتر از آن. کل با جزء خود برابر شد.

می‌بینیم، وقتی گام به قلمرو بی‌نهایت‌ها می‌گذاریم، ممکن است «یک

$$\begin{aligned} & \frac{3a}{4} + \frac{3a}{4} + \frac{3a}{8} + \frac{3a}{8} + \frac{3a}{16} + \frac{3a}{16} + \dots = \\ & = 2 \left( \frac{3a}{4} + \frac{3a}{8} + \frac{3a}{16} + \dots \right) = \frac{3a}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \\ & = \frac{3a}{2} \times 2 = 3a \end{aligned}$$

و این، همان جوابی است که در ابتدا و به سادگی به دست آورده بودیم. واقعیت و عمل، درستی حد مجموع جمله‌های تصاعد هندسی نزولی بی‌پایان را تأیید می‌کند:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

مثال دوم. قیمت هر ۴ بطری خالی شیر را برابر با قیمت یک بطری پر از شیر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم، با پولی که برای ۱۲ بطری شیر (بابت شیر و بطری‌ها) می‌دهید، چقدر شیر (بدون بطری) می‌توانید داشته باشید! شما ۱۲ بطری شیر را در ظرفی خالی می‌کنید، شیشه‌های آن را به فروشگاه می‌دهید و ۳ بطری پر می‌گیرید. اگر ۳ بطری خالی را پس بدهید باید  $\frac{3}{4}$  بطری پر به شما بدهند (فرض را بعملی بودن این داد و ستد می‌گیریم). با پس دادن  $\frac{3}{4}$  بطری خالی،  $\frac{3}{16}$  بطری پر می‌گیرید وغیره. اگر واحد اندازه‌گیری مقدار شیری که در اختیار شماست، یک بطری بگیریم، مقدار آن چنین خواهد شد:

$$\begin{aligned} & 12 + 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \dots = \\ & = 15 + 2 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots \right) = \\ & = 15 + 2 \times \frac{1}{3} = 15 + 1 = 16 \end{aligned}$$

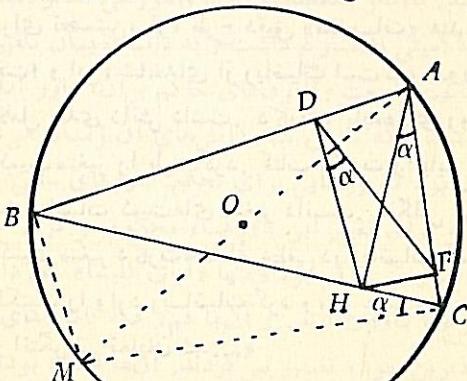
ولی شما می‌توانستید، به ترتیب زیر معامله کنید که، البته، عملی تر است: در مرحله اول ۱۲ بطری خالی را با ۳ بطری پر عوض می‌کنید. در مرحله دوم، یک بطری پرشیر از فروشگاه به امانت می‌گیرید، آن را در ظرف

که از آن جا به دست می‌آید:  $S = \frac{1}{\rho}$  (شگفتا! از جمع عددهای درست، عددی کسری به دست آمد).

در این مقاله کوتاه تلاش کردیم، برخی از ساده‌ترین جنبه‌های مربوط به «بی‌نهایت» را، در مزدوج از مقدماتی ترین روش‌های ریاضی خارج نشویم، فهرست‌وار، موربد بررسی قرار دهیم. والا، بحث مربوط به «بی‌نهایت»، همچون خود بی‌نهایت، پایانی ندارد.

#### از گذشته‌ها

مثلث  $ABC$  محاط در دایره  $O$  به شعاع  $R$  مفروض است. ارتفاع  $AH$  از مثلث و قطر  $MA$  از دایره را رسم و، سپس، از نقطه  $H$  خط‌های  $HF$  و  $HD$  را بر ضلع‌های  $AB$  و  $AC$  عمود می‌کنیم.



۱. ثابت کنید مثلث  $AHF$  با مثلث  $ABM$  متشابه است و  $MB \cdot HD = MC \cdot HF$

۲. ثابت کنید چهار ضلعی  $BCFD$  قابل محاط در دایره و قطر  $AM$  بر عمود است.

۳. به شرطی که مثلث  $ABC$  متساوی الاضلاع باشد، طول ضلع‌ها و قطرهای چهار ضلعی  $BCFD$  را بر حسب  $R$  محاسبه کنید.

امتحان نهائی هندسه پنجم دبیرستان

خرداد سال ۱۳۵۰

حل در صفحه ۴

اصل بدیهی» هم، قدرت قانونی خود را از دست بدهد. شاید بتوان، این اصل را به صورت زیر تصحیح کرد: «کل محدود از هر جزء خود بزرگ‌تر است» و البته، وقتی با کل نامحدود سروکار داشته باشیم، ممکن است از جزء خود بزرگ‌تر نباشد.

در جمع عددهای گویا، به شرطی که هم جمله‌های جمع وهم مجموع آن‌ها را کسرهایی ساده نشدنی در نظر بگیریم، در مخرج کسر حاصل جمع، نمی‌تواند عاملی تازه، غیر از عامل‌هایی که در مخرج جمله‌های جمع وجود دارد، ظاهر شود. مثلاً از جمع  $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots = \frac{1}{4}$  نمی‌توان به کسری ساده‌نشدنی رسید که در مخرج آن، عاملی به جز ۳ و ۵ وجود داشته باشد. ولی به این مجموع بی‌پایان توجه کنید:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots = \frac{1}{4}$$

در مخرج‌های جمله‌های جمع، جز عامل ۵ وجود ندارد، در حالی که در مخرج کسر حاصل جمع، عامل ۲ ظاهر شده است.

در مجموع‌های محدود، با تغییر جای جمله‌های جمع، تغییری در حاصل جمع پذید نمی‌آید، در حالی که در مجموع‌های بی‌پایان، ممکن است جابه‌جا کردن جای جمله‌های جمع و یا تغییر گروه‌بندی جمله‌ها، منجر به تغییر مقدار مجموع شود. مجموع

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

را در ریاضیات نامعین می‌دانند (به اصطلاح ریاضی، رشته‌ای است متباعد، یعنی مجموع جمله‌های آن به سمت هیچ عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود). ولی اگر از قانون‌های عادی استفاده کنیم، می‌توانیم این‌طور بنویسیم:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

و یا این‌طور

$$S = 1 - (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 1$$

و یا بالآخره

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S$$

## دکارت و «هندسه» او

درآمد.

رنه دکارت، دریک خانواده اشرافی، و نهضندهان غنی، متولد شد و طبق سنت خانواده‌های اشرافی، در مدرسه‌ای که زیرنظر راهبان یسوعی (ژوزئیت) اداره می‌شد، تعایم دید. بعدها، درباره سال‌های تحصیل خود، در این مدرسه نوشت: «در آن‌جا، چیزهایی یاد گرفتم که به دیگران هم درس داده می‌شد. ولی به دانش‌هایی که برای ما تدریس می‌کردند، قناعت نکردم، بلکه از بین همه کتاب‌ها و رساله‌های علمی که در دسترسم بود، آن‌هایی را که جالب‌تر و نادرتر تشخیص می‌دادم، مطالعه کردم...»

ولی، این تلاش پیگیر، در بسیاری موردها، دکارت را دلسُرده می‌کرد و به تدریج، درباره درست و مستند بودن همه آن‌چه از معلمان خود یاد گرفته بود، دچار شک شد. تا آغاز سده‌های دهم، شیوه‌آموزشی اسکولاستیک بر تمامی اروپای غربی، حاکمیتی بالمنازع داشت و به دانشجویان تلقین می‌کرد که به هیچ وجه، بدشناخت طبیعت و قانون‌های حاکم بر آن، باور نداشته باشند. در فلسفه اسکولاستیک (که شامل همه دانش‌های آن زمان می‌شد)، تمامی تلاش در این جهت بود که راه‌هایی برای تحکیم باورهای سنتی پیدا شود و هر گونه تلاشی را، برای تغییر این باورها، محکوم می‌کرد. جمود فکری بر همه زمینه‌های آموزشی حاکم بود و تها «آبای کلیسا» حق داشتند درباره چند و چون موضوع‌ها داوری کنند. و آن‌ها هم، همه قانون‌های طبیعت را، بر پایه باورهای دیرین خود، تفسیر می‌کردند. آن‌ها معتقد بودند که فلسفه (یعنی مجموعه دانش‌ها) نمی‌تواند در رازهای طبیعت نفوذ کند و آن‌ها را بشناسد، تنها کاری که بشر می‌تواند انجام دهد، تحکیم باورهای قدیمی خود و استفاده از فلسفه، برای اثبات این باورهایست.

همین بی‌اعتقادی به عقل انسانی و به‌اخلاق والای انسانی بود که موجب پیدایش انواع جادوگری‌ها و، در سطح بالای خود، انواع «عرفان»-های نوع غربی خود شده بود. و بهمین دلیل بود که بسیاری از دانشمندان، به راه‌های غیرعلمی «عرفان عددی»، «پیش‌گوئی از روی ستارگان»، «کیمیاگری و کشف راز تبدیل مس به طلا» وغیر آن افتاده بودند. دکارت، که ذهنی هوشمند و اندیشه‌ای پویا داشت، نمی‌توانست

بیش از ۳۵۰ سال از چاپ کتاب مشهور «هندسه» دکارت می‌گذرد. انتشار این کتاب را می‌توان آغاز مرحله تازه‌ای از تکامل ریاضیات دانست. رنه دکارت، برای نخستین بار، طرح دقیق «مقدمات» هندسه تحلیلی را در این کتاب ریخت؛ و این، شاخه‌ای از ریاضیات است که، بدون آن، نمی‌توان تصوری در تکامل بعدی دانش داشت. دکارت، پایه‌های روش مختصاتی و اندیشه کای کمیت متغیر را طرح کرد. کتاب دکارت را باید نخستین گام، در به وجود آمدن ریاضیات کمیت‌های متغیر دانست. انگلیس درباره این حادثه می‌نویسد: «کمیت متغیر دکارت، نقطه عطفی در ریاضیات است. این اندیشه، حرکت و دیالکتیک را وارد ریاضیات کرد و، از همین‌جا، ضرورت حساب دیفرانسیلی و انتگرالی نمایان شد...»

رنه دکارت (۱۵۹۶-۱۶۵۰)، یکی از مشهورترین دانشمندان فرانسوی است: او ریاضی دان، فیزیکدان و فیلسوف بود و به اخترشناسی، شیمی، پژوهشی و حقوق هم علاقه داشت. کتاب بزرگ او، اول بار، در سال ۱۶۲۷ و به زبان فرانسوی منتشر شد. عنوان این کتاب چنین بود: «بحث در باره روش‌های درست راه بردن عتل و جست و جوی حقیقت در دانش همه‌راه با...» هندسه به عنوان شیوه‌ای از این روش». بخش اخیر این کتاب، شامل مبانی هندسه تحلیلی است. در سال ۱۶۴۹، کتاب «هندسه» به طور مستقل و به زبان لاتینی تجدید چاپ شد. خیلی زود، سه چاپ دیگر این کتاب هم منتشر شد، به نحوی که در نیمة دوم سده هفدهم، به صورت کتاب بالینی همه ریاضی دانان

داد. در سال ۱۶۴۹، در جست وجوی پناهگاه آرامی که برای کارهای علمی خود لازم داشت، به استکهلم رفت. در سوئد، سرما خورد و از ذات الریه در گذشت.

بعد از مرگ دکارت، نوشههای او از طرف کلیسای کاتولیک، ممنوع اعلام شد. با وجود این، اندیشههای او در فلسفه، ریاضی و فیزیک، به سرعت و در سراسر اروپا پخش شد.

دکارت، طبیعت را همچون سازوکار عظیمی می‌دید که همه بخش‌های آن کار می‌کنند و تابع قانون‌های مکانیک هستند؛ او، پدیده‌های طبیعت را، ناشی از حرکت‌های هندسی ذره‌های ماده می‌دانست. در سده هفدهم، اغلب؛ جهان‌هستی را با ساعت مقایسه می‌کردند. جهان‌بینی دکارت هم، نوعی خصلت مکانیکی داشت. او با تکیه بر قانون‌های مکانیک، روند گردش خون را شرح می‌داد و رفتار جانوران را، با مقایسه آن‌ها با ماشین‌ها، روشن می‌کرد. او به خصوص، نخستین تصویرها را درباره «بازتاب» به وجود آورد. براساس قانون‌های مکانیک، نه تنها می‌کوشید ساختمان کنونی جهان را بفهمد، بلکه می‌خواست پیدایش خورشید و سیاره‌ها را هم به کمک حرکت گردبادی ذره‌ها توضیح دهد.

اگر جهان، یک مکانیسم است، بنابراین، مهم‌ترین دانش‌ها مکانیک است که، البته، بدون ریاضیات نمی‌توان به آن پرداخت. دانش واقعی درباره طبیعت، باید برپایه ریاضیات باشد، زیرا تنها در این صورت است که می‌توان به آن اعتماد کرد. این اندیشه که متعلق به گالیله در ابتدای سده هفدهم بود، دکارت را پیش برد. او در ۱۱ اکتبر سال ۱۶۳۸ به مرسن نوشت: گالیله «می‌کوشید تا موضوع‌های فیزیکی را به کمک استدلال‌های ریاضی مورد بررسی قرار دهد... من کاملاً با او موافقم و تصویر می‌کنم که هیچ وسیله دیگری، برای کشف حقیقت وجود ندارد».

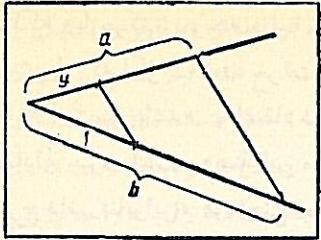
دکارت درجهت ساختن واحدی کار می‌کرد که جبر و هندسه را به هم پیوند دهد. طرح «ریاضیات واحد»، کاملاً متناظر با تصویر او درباره جهان، به عنوان مکانیسم واحدی بود که با قانون‌های ریاضی اداره می‌شود. او، این طرح را، در کتاب «هندسه» خود، عملی کرد. کتاب شامل

آموزش اسکولاستیکی و عارضه‌های ناشی از آن را پیزیرد، مهمه آن‌ها را برخلاف عقل می‌دانست، به همین مناسبت، از آن‌ها سر باز زد.

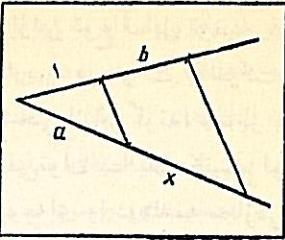
دکارت، با به خاطر آوردن زمان پایان تحصیل خود، می‌نویسد: «همین که سنم اجازه داد تا از اطاعت مریبان خود خارج شوم، به طور قطع تضمیم گرفتم، آموزش دانش زمان را کنار بگذارم و در جست وجوی دانشی بروم که بتوانم، به کمک آن، خودم یا کتاب عظیم طبیعت را بشناسم».

دکارت، بعد از پایان مدرسه، بله مسافت پرداخت، چند سالی را در خدمت‌های نظامی گذراند و در سال ۱۶۲۸ به هلند رفت و ۵۰ سال در همان جا ماند. رفتن دکارت به هلند، در همان سالی بود که «لاروشل»، آخرین پشتیبان پروستان‌ها، در فرانسه سقوط کرد. کار دینال «ریشل» - که در آن سال‌ها، فرمانروای مطلق فرانسه بود - همه جریان‌های مخالف خود را به سختی و با بی‌رحمی سرکوب کرد. ولی او، به مدعايان فتووال خود، به آشوب‌های دهقانی و به معترضان مذهبی اکتفا نکرد و به جان فیلسوفان آزاداندیش هم افتاد. هرجا هم که با نیروی نظامی کاری از دستش بر نمی‌آمد، دست به دامان دسیسه و توطنه می‌شد... در همین زمان، هلند یکی از آزادترین کشورهای اروپایی بود و همه پروستان‌ها، کاتولیک‌های آزاد اندیش و همه کسانی که در کشور خود تحت فشار و تعقیب قرار گرفته بودند، به آن‌جا مهاجرت می‌کردند. دکارت، تنها و ناآشنا به هلند رفت و در آن‌جا، متنزه و دور از مردم زندگی می‌کرد، به نحوی که کسی او را نمی‌شناخت. هدف او این بود که در خلوت، به تفکر پوشیند. آزمایش‌های زیادی انجام داد، ابزارهای علمی ساخت و به کمک دوست ریاضی‌دانش، م. مرسن، با همه جریان‌های علمی اروپا در تماس بود. مرسن، که همیشه با دکارت رفت و آمد داشت، جای او را از دیگران پنهان می‌کرد تا آسیبی به دکارت نرسد، و خود رابطه‌ای بین دکارت و سایر دانشمندان زمان بود. به این ترتیب، با آگاهی‌هایی که مرسن می‌داد، دکارت در جریان بحث‌های دانشمندان وارد شد.

هرچه بیشتر دکارت را می‌شناخند و نوشههای او در مدارس و دانشگاه‌های هلند بیشتر منتشر می‌شد، موقعیت دانشمند سخت‌تر می‌شد. دیدگاه‌های دکارت، به ناچار او را رو در روی هواداران اسکولاستیک قرار



شکل ۲



شکل ۱

دھیم». او، کمیت‌های معلوم را با حروف‌های  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ، ... و کمیت‌های مجهول را با حروف‌های  $x$ ،  $y$ ،  $z$  نشان داد. و به‌این ترتیب، هندسه، با جبر هم، بستگی پیدا کرد.

دکارت، نوآوری‌های دیگری هم دارد. او (همراه با پیر فرما) محور عددی را، برای مشخص کردن هر پاره خطی با هر طول دلخواه، در نظر گرفت (طول‌های منفی را، بعدها، والیس در روی محور عددی وارد کرد. محور دوم مختصات هم به برکت کارهای نیوتون وارد ریاضی شد).

دکارت، با در نظر گرفتن معادله دومجهولی  $0 = (y - x)^f$ ، ثابت کرد که، با تغییر مقدار  $x$ ، می‌توان مقدارهای متناظر  $y$  را پیدا کرد و نقطه‌ای برصغیره به دست آورد. مجموعه این نقطه‌ها، یک منحنی بوده و می‌آورند. به جز این، ثابت کرد که هر معادله جبری  $0 = (y - x)^f$ ، متناظر با منحنی مشخصی در صفحه است که، مختصات نقطه‌های واقع بر آن، در این معادله صدق می‌کنند و به‌این ترتیب، دکارت توانست روش تازه‌ای برای شکل‌های هندسی به کمک معادله‌های جبری پیدا کند.

دکارت، برای روشن کردن روش خود، در بخش اول کتاب «هندسه»، مسئله‌هایی از هندسه را مورد بررسی قرار می‌دهد که می‌توان آن‌ها را به کمک پرگار و خط‌کش حل کرد و یادآوری می‌کند که همه این مسئله‌ها، منجر به بررسی معادله‌های درجه دوم می‌شوند.

دکارت، در بخش دوم «هندسه»، با عنوان «درباره طبیعت خط‌های منحنی»، به‌این پرسش پاسخ می‌دهد که، هندسه، چه منحنی‌هایی را باید مورد بررسی قرار دهد. او معتقد است که باید منحنی‌هایی را مورد بررسی قرار

سه بخش است. در بخش اول، با عنوان «درباره مسئله‌هایی که می‌توان آن‌ها را، تنها به کمک دایره‌ها و خط‌های راست حل کرد»، ساده‌ترین مفهوم‌های هندسه تحلیلی، مطرح شده است.

دکارت، قبل از هرچیز، به محاسبه پاره خط‌ها می‌پردازد. قبل از او، بنابر سنتی که از یونان باستان به ارث رسیده بود، ریاضی‌دانان اصل «همگونی» را رعایت می‌کردند. طبق این اصل، سه نوع کمیت وجود داشت: پاره خط‌ها، مساحت‌ها و حجم‌ها. مجموع دو پاره خط به طول‌های  $a$  و  $b$ ، پاره خطی به طول  $a + b$  به حساب می‌آمد، ولی حاصل ضرب این دو پاره خط، به عنوان مستطیلی تعبیر می‌شد که ضلع‌های آن برابر  $a$  و  $b$  باشند. طبیعی است که، به این ترتیب، مجموع یک پاره خط با یک مربع یا یک مکعب بی معنا بود و، بنابراین، انجام عمل‌هایی روی پاره خط، از نوعی که ما امروز به صورت  $a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$  نویسیم، مجاز نبود. به این ترتیب، اصل همگونی، راه را برای بررسی چند جمله‌ای‌هایی که شامل جمله‌هایی با توان‌های مختلف بودند، می‌بست. به همین مناسبت، پیش از دکارت، این گونه چندجمله‌ای‌ها، مورد تحقیق قرار نگرفته بود.

دکارت، اصل همگونی را، به طور کامل کتاب گذاشت و تفسیر تازه‌ای برای عمل‌های جمع و ضرب پاره خط‌ها آورد. او پاره خط دلخواهی را به عنوان واحد در نظر گرفت و به کمک آن، هر پاره خطی را اندازه گرفت، «این شیوه، رابطه تنگتر و راحت‌تری با عددها دارد». حاصل ضرب پاره خط‌های به طول‌های  $a$ ،  $b$  را، پاره خط به طول  $x$  نامید، به نحوی که بتوان آن را، با برقراری برابری  $\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$  ساخت (شکل ۱). و سپس، به سادگی، پاره خط  $y$  را، برابر  $b$ :  $a$  به دست آورد (شکل ۲). دکارت، به‌این ترتیب، حوزه پاره خط‌ها را، همسان حوزه عددهای حقیقی قرار داد. و به‌این ترتیب، رابطه‌ای عمیق بین حساب و هندسه برقرار کرد.

دکارت، گام اساسی دیگری هم برداشت: نشانه‌های ساده جبری را وارد در هندسه کرد. او تأکید کرد که برای عمل با پاره خط‌ها «ازومی ندارد این خط‌ها را روی کاغذ رسم کنیم، بلکه کافی است آن‌ها را با حروف نشان

نخستین بار به وسیله آلبرت زیرار (پروتستان فرانسوی که از ترس تعقیب از فرانسه به هلتند فرار کرده بود) در سال ۱۶۲۹ مطرح شد. ولی معلوم نیست که دکارت از کارهای او اطلاع داشته است یا نه! دکارت استدلال می کند که اگر  $a$ ، یکی از ریشه های معادله درجه  $n$ ،  $= f(x)$  باشد، با تقسیم  $(x)^n$  بر دو جمله ای  $-a$ ، می توان درجه معادله را یک واحد پایین آورد؛ و اگر چنین تقسیمی ممکن نباشد، به معنای آن است که  $a$ ، ریشه معادله نیست.

مفهومیت های دیگری را هم می توان، در زمینه جبر، در کتاب «هندسه» دکارت پیدا کرد. ولی اهمیت این کتاب، در این است که، با ایجاد بستگی بین هندسه و جبر، راه تازه ای را برای تکامل ریاضیات گشود. روش مختصاتی، که در این کتاب مطرح شده است، امکان می دهد تا مسائل های هندسی را به کمک رابطه ها و معادله های جبری حل کنیم.

پیر فرما، ریاضی دان مشهور فرانسوی هم، در پایه گذاری هندسه تحلیلی نقش داشته است. فرما هم، با روش مختصاتی، خط های راست و منحنی های درجه دوم را مورد بررسی قرار داده است. ولی کار فرما، با همه دقت ونظمی که داشت، نتوانست بداندازه کتاب دکارت، تأثیر انقلابی داشته باشد. فرما اندیشه تازه ای را مطرح کرد، ولی نتوانست خود را از قید سنت های هندسه یونانی آزاد کند و در کار خود، همچنان، به اصل همگونی پای بند ماند.

دکارت و فرما، به این نکته هم توجه کرده بودند که معادله سه مجهولی، نماینده یک سطح در فضاست، ولی بررسی هندسه تحلیلی در فضای به طور جدی، در سده هیجدهم و به وسیله آ کلرو انجام گرفت. دنباله کار را در مورد هندسه تحلیلی در صفحه و در فضای سه بعدی، لئونارد اوول در سال ۱۷۴۸ و در کتاب خود «متقدمه ای بر آنالیز بی نهایتها» گرفت.

در سده نوزدهم، با طرح فضاهای چند بعدی، هندسه توانست گام تازه ای به جلو بردارد. اندیشه طرح فضاهای چند بعدی، تقریباً شبیه اندیشه دکارت در «هندسه» به وجود آمد. نقطه ای که در صفحه واقع باشد، با زوج عدد  $(x, y)$  مشخص می شود. در فضای سه بعدی، نقطه را با سه عدد

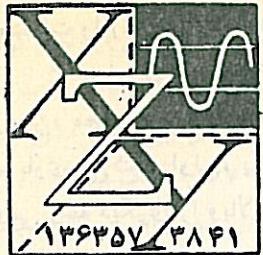
داد که «با حرکتی پیوسته و یا چند حرکت از این نوع قابل توضیح باشند، به شرطی که اگر با چند حرکت سروکار داریم، هر حرکت به حرکت قبلی کاملاً متصصل باشد». به اعتقاد دکارت، هر منحنی از این گونه، متناظر با یک معادله جبری است، و همه این منحنی ها را می توان با یک مکانیسم لولائی شرح داد. بنابراین، هر منحنی جبری از هر درجه ای را دو هندسه مجاز می داند و منحنی های غیر جبری را از آن ها کنار می گذارد. علاوه بر این، او یکی از قضیه های مهم سینماتیک را مطرح ساخت که تنها در سال ۱۸۷۶، به وسیله آ. کمپه، ثابت شد. این قضیه چنین است: به کمک مکانیسم های مسطح لولائی، که در آن ها، حرکت حلقه های اول صفحه، حرکت بقیه را معین می کند، می توان مسیر هر منحنی جبری را رسم کرد، در حالی که هیچ یک از منحنی های غیر جبری را نمی توان به کمک آن، رسم کرد.

دکارت با کثار گذاشتن منحنی های جبری، قبول کرد که، در زمان او، راهی کلی برای مطالعه آن ها وجود ندارد، ولی در انتهای سده هفدهم، ریاضیات گام بزرگی به جلو برداشته بود. آنالیز ریاضی پدیدار شده بود که هرتابع دلخواهی را، جبری یا غیر جبری، مورد بررسی قرار می داد. وسیله بررسی این تابع ها، رشته های نامتناهی توانی بود.

نقش دکارت، در پیشرفت آنالیز ریاضی هم زیاد است، زیرا روش جبری را برای جست وجوی مماس ها و قائم های برمنحنی در اختیار ریاضی دانان گذاشته بود. او این مسئله را در اپتیک، ضمن بررسی شکل عدسی و انعکاس و شکست نور، حل کرد.

بخش سوم «هندسه»، به نظریه کلی معادله های جبری اختصاص دارد. آنچه در این بخش طرح شده است، نتیجه ای است از موقوعیت هایی که در سده قبل به وسیله د. بومبلی (با وارد کردن عددهای مختلط) و ف. ویت (با بررسی معادله های به کمک حروف) به دست آمده بود.

دکارت پیشنهاد کرد، معادله را به صورت  $f(x)$  بنویسند، یعنی سمت راست معادله برابر صفر باشد. تنظیم این قضیه از اوست: هر معادله درجه  $n$  با ضریب های حقیقی، همیشه دارای  $n$  ریشه است. مثبت (راست)، منفی (دروغ) یا مختلط (خیالی). این قضیه، که قضیه اصلی جبر نام دارد، برای



## مسائلهای مسابقه‌ای

در این شماره، مسائلهایی را می‌آوریم که در شانزدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی، در آوریل ۱۹۸۲، بین دانش آموزان کلاس‌های هشتم، نهم و دهم برگزار شد. باید توجه داشت که دوره دیبرستانی در اتحاد جماهیر شوروی، در سال دهم تمام می‌شود. بنابراین، کلاس‌های هشتم، نهم و دهم، سه سال آخر دیبرستان را تشکیل می‌دهند.

اهمیت این المپیاد از این جهت است که به مناسبت شصتمین سال تشکیل دولت شوروی برگزار شده بود. المپیاد در اواسط، در سر زمین اول کراین، و با شرکت ۱۵۶ دانش آموز از هر ۱۵ جمهوری اتحاد شوروی با ریاست افتخاری آ. ن. کولموگروف، ریاضی دان معروف شوروی، و سرپرستی ب. و. گهندکو، عضو آکادمی علوم اول کراین، برگزار شد.

در اینجا، صورت مسائلهای را، برای هر کلاس، آورده‌ایم و شما می‌توانید، در صورت لزوم، برای کنترل حل خود، به صفحه‌های پایانی مجله مراجعه کنید.

### کلاس هشتم

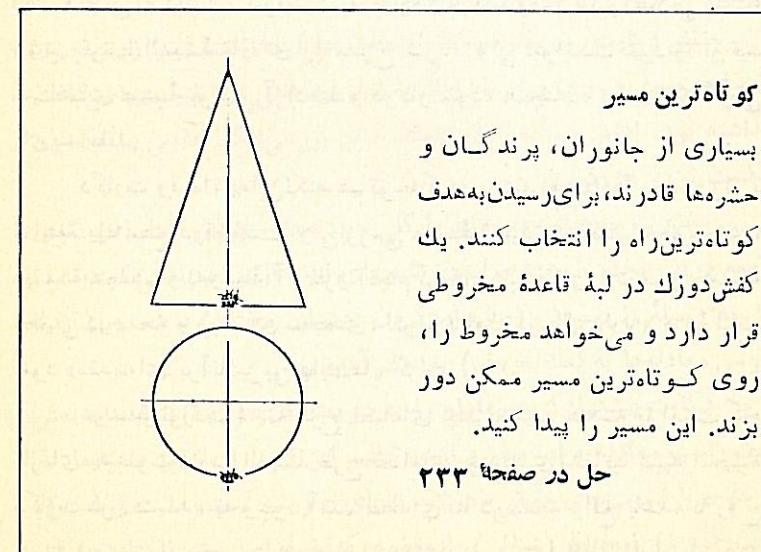
۱. در دنباله‌های عددی  $(a_n)$  و  $(b_n)$ ، از جمله سوم به بعد، هر جمله برابر است با مجموع دو جمله قبل از آن. در ضمن  $a_1 = 1$ ،  $a_2 = 2$  و  $b_1 = 1$ ،  $b_2 = 2$ . چند عدد وجود دارد که در هر دو دنباله مشترک‌اند؟ (پاسخ: ۳).

۲. نمودار تابع  $y = x^2$  را، روی صفحه مختصات  $Oxy$  رسم کرده‌ایم. سپس، محورها را حذف کرده‌ایم به نحوی که تنها نمودار سه‌می روی صفحه باقی بماند. به چه ترتیب می‌توان، به کمک پرگار و خطکش، محورهای

$(z, y, x)$  نشان می‌دهند. در نظریه تازه، نقطه فضای چهار بعدی به صورت عدد چهار گانه  $(z, y, x)$  است. دکارت، معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  را معادله سطح محدود می‌حيط‌دایر و در صفحه معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  را معادله سطح کره در فضای دانست؛ در نظریه جدید، معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  عبارت است از معادله سطح کره، در فضای چهار بعدی. به همین ترتیب، در یک فضای  $n$  بعدی، معادله صفحه وسطی، فاصله بین دو نقطه و زاویه بین خط‌های راست و غیره مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

فضاهای  $n$  بعدی، در پایان سده نوزدهم، کاملاً وارد ریاضیات شده بودند، و در ابتدای سده بیستم، با پیدایش نظریه نسبیت (که زمان را به عنوان بعد چهارم به سه بعد فضا، اضافه کرده بود) کاربرد عملی پیدا کرد. به این ترتیب، اندیشه دکارت در «هنلسه»، که به همت دانشمندان نسل‌های بعد از دکارت تکامل یافت، پایه و تکیه‌گاهی برای دانش‌های جدید است.

\*



۸. حداقل، چند عدد باشد از بین عدهای از ۱ تا ۱۹۸۲ جدا کرد، به نحوی که، در میان عدهای باقیمانده، هیچ عددی برابر با حاصل ضرب دو عدد دیگر (از همان عدهای باقیمانده) نباشد؟ به چه ترتیبی، باید عمل کرد؟ پاسخ: ۴۳ عدد. می‌توان عدهای از ۲ تا ۴۴ را حذف کرد.

۹. سه دانشآموز در کتابخانه عمومی محل خود به هم رسیدند. یکی از آنها گفت: «من، یک روز در میان به کتابخانه می‌آیم». دویی یادآوری کرد که او، دو روز در میان به کتابخانه می‌رود؛ و سومی گفت: «من وقتی را طوری تنظیم کرده‌ام که سه روز در میان به کتابخانه بیایم». کتابدار که گفت و گوی آنها را می‌شنید، تذکر داد که چهارشنبه‌ها، کتابخانه تعطیل است. دانشآموزان توضیح دادند که اگر روز مراجعت آنها، با تعطیل مصادف شود، روز بعد به کتابخانه خواهد آمد و حساب رفتن به کتابخانه را از همان روز بعد از تعطیل، درنظرمی‌گیرند. دانشآموزان، به عنین ترتیب عمل کردند و دریک روز دوشنبه، دوباره هرسه نفر یکدیگر را در کتابخانه ملاقات کردند. گفت و گوی بالا، در چه روزی از هفته انجام گرفته است. (پاسخ: شنبه).

۱۰. روی محیط دایره‌ای،  $3k$  نقطه در نظر گرفته‌ایم، در نتیجه به تعداد  $3k$  کمان روی محیط دایره، به دست آمده است. می‌دانیم  $k$  کمان طولی برابر  $1$ ،  $k$  کمان طولی برابر  $2$  و بقیه  $k$  کمان طولی برابر  $3$  دارند. ثابت کنید، درین این نقطه‌ها، دو نقطه پیدا می‌شود که دوسر یک قطر از دایره‌اند.

#### کلاس دهم

۱۱. عدهای  $a$ ,  $b$  و  $c$  در بازه  $\left( \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right)$  قرار دارند و می‌دانیم:

$$\cos a = a; \quad \sin(\cos b) = b; \quad \cos(\sin c) = c$$

این سه عدد را به ترتیب صعودی منظم کنید.

پاسخ:  $a < b < c$ .

۱۲. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی  $n$  و هر عدد حقیقی  $a$ ، نابرابری زیر برقرار است:

مختصات رارسم کرد و واحد اندازه گیری روی محورها را به دست آورد؟ ۳. هر رأس مکعب را متناظر با عددی حقیقی و غیرمنفی قرار داده‌ایم؛ در ضمن، مجموع همه این عدها، برابر است با  $1$ . دونفر به ترتیب زیر، با هم بازی می‌کنند. اولی، یکی از وجههای مکعب را انتخاب می‌کند، بعد، دومی وجه دیگری را وبالآخره، اولی وجه سوم را. در ضمن، وجه انتخابی نمی‌تواند موازی با وجههایی باشد که قبل انتخاب شده‌اند. ثابت کنید، نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که، عدد متعلق به رأس مشترک سه وجه انتخابی، از  $\frac{1}{6}$  تجاوز نکند.

۴. خانه‌های یک جدول مربعی  $n \times n$  را با عدهای درست پر کرده‌ایم. در ضمن، هر دو عددی که در خانه‌ای جدول ضلع مشترکی دارند، بیش از ۱ واحد با هم اختلاف ندارد. ثابت کنید، در جدول، دست کم یک عدد پیدا می‌شود که:

(الف) کمتر از  $\left[ \frac{n}{2} \right]$  بار تکرار نشده باشد.

(ب) کمتر از  $n$  بار تکرار نشده باشد.

#### کلاس نهم

۵. ثابت کنید، برای هر متدار مثبت  $x$ ، نابرابری زیر برقرار است:

$$\sqrt[4]{x^2 + 2\sqrt{x}} \geq \sqrt[6]{x^3}$$

۶. در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$ ، که در آن  $|AB| \neq |BC|$ ، نسبت طول‌های دو قطر داده شده است:  $|AC| : |BD| = k$ . نیم خط  $AM$  را قرینه نیم خط  $AD$ ، نسبت به خطراست  $AC$ ، و نیم خط  $BM$  را قرینه نیم خط  $BC$  نسبت به خط راست  $BD$ ؛ و  $M$  را محل برخورد دو نیم خط  $AM$  و  $BM$  می‌گیریم. نسبت  $|AM| : |BM|$  را پیدا کنید (پاسخ:  $k^2$ ).

۷. نقطه  $M$  را، در درون چهاروجهی منتظم، درنظرمی‌گیریم. ثابت کنید، دست کم می‌توان یکی از یال‌های چهاروجهی را پیدا کرد که از نقطه  $M$  به زاویه‌ای با کسینوس برابر یا کوچکتر از  $\left( \frac{1}{3} \right)$  دیده شود.

داشته باشند.

۳۰. به چند طریق می‌توان با رقم‌های از ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی طوری درست کرد که مجموع آن‌ها، حداکثر مقدار ممکن باشد؟ (از هر رقم، تنها یک بار می‌توان استفاده کرد).

۳۱. با رقم‌های از ۱ تا ۹، به چند طریق می‌توان سه عدد سه رقمی درست کرد، به نحوی که مجموع بزرگترین و کوچکترین عدد (ازین این سه عدد)، حداکثر مقدار ممکن باشد؟ (برای ساختن عدها، از هر رقم، یک بار می‌توان استفاده کرد).

۳۲. کوچکترین عدد طبیعی  $m$  را طوری پیداکنید، که برای آن، داشته باشیم:

$$0/1^3 < \sqrt{m} < 0/1^3$$

$$0/1^3 = p - [p]$$

۳۳.  $S(n)$  را مجموع رقم‌های عدد طبیعی  $n$  می‌گیریم و دنباله  $(a_n)$  را به این ترتیب، تعریف می‌کنیم:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = S(S(a_n) + a_n)$$

مطلوب است  $a_{1367}$ .

۳۴. همه مقدارهای  $\alpha$  را طوری پیداکنید که چندجمله‌ای

$$12x^3 + 12ax^2 - 8ax - 3$$

دست کم یک ریشه در بازه  $(1, 5)$  داشته باشد.

۳۵. از نقطه‌های  $M$  و  $N$ ، وسط یال‌های  $AA_1$  و  $CC_1$  از مکعب به ضلع واحد  $ABCD, B_1C_1D_1$ ، خط راست  $/$  را گذرانده‌ایم. اگر این مکعب را بداندازه ۹۰ درجه دور محور  $/$  دوران دهیم، مکعب جدیدی به دست می‌آید. صفحه  $\alpha$  را عمود بر محور  $/$  در نظر می‌گیریم. مطلوب است، مساحت  $\alpha$ ، مقطع صفحه  $\alpha$  با شکلی که از دو مکعب به دست می‌آید، به شرطی که فاصله صفحه  $\alpha$  تا صفحه  $BDD_1B_1$  برابر  $x$  باشد.

۳۶. ثابت کنید، با شرط

$$f(x) = \sqrt[n]{(x+1)(x-2)(x+3) \dots (x+n)}$$

با فرض فرد بودن عدد طبیعی  $n$ ، داریم:  $\frac{|f'(0)|}{55} > |f'(0)|$

حل این مسئله را در صفحه ۲۳۴ بیین نمایید.

$$|a| \cdot |a-1| \dots |a-n| \geqslant \langle a \rangle \cdot \frac{n!}{2^n}$$

که در آن،  $\langle a \rangle$ ، به معنای فاصله از عدد  $a$  تا نزدیک‌ترین عدد درست به آن است.

۳۷. (الف) آیا می‌توان چندجمله‌ای‌های  $P = P(x, y, z)$  و  $Q = Q(x, y, z)$  و  $R = R(x, y, z)$  از سه متغیر  $x$  و  $y$  و  $z$  را طوری پیدا کرد که انجاد زیر برقار باشد:

$$(x-y+1)^3 \cdot P + (y-z-1)^3 \cdot Q + (z-x+1)^3 \cdot R = 1$$

(ب) همین پرسش، برای اتحاد

$$(x-y+1)^3 \cdot P + (y-z-1)^3 \cdot Q + (z-x+1)^3 \cdot R = 1$$

پاسخ: (الف) وجود ندارد. (ب) وجود دارد.

۳۸. رأس‌های چهاروجهی  $KLMN$ ، در داخل، روی وجهها و یا روی یال‌های چهاروجهی  $ABCD$  قرار دارند. ثابت کنید، مجموع طول‌های همه یال‌های چهاروجهی  $KLMN$ ، از  $\frac{4}{3}$  مجموع طول‌های همه یال‌های چهاروجهی  $ABCD$  کمتر است.

۳۹. آیا می‌توان عددی طبیعی پیدا کرد، به نحوی که بر  $\underbrace{111 \dots m}_m$  بخش پذیر باشد و، در ضمن، مجموع رقم‌های آن، کمتر از  $m$  باشد؟

پاسخ: وجود ندارد.

۴۰. در جدول مربعی  $n \times n$ ،  $(1-n)$  خانه را علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید که می‌توان، تبدیل سطرها را با هم و تبدیل ستون‌ها را با هم، طوری انجام داد که همه خانه‌های علامت گذاری شده، زیر قطری از جدول قرار گیرند که از رأس بالا و سمت چپ جدول به رأس پایین و سمت راست آن رسم شده است.

چند مسئله گوناگون

۴۱. همه عددهای طبیعی را پیدا کنید که در تقسیم بر  $\overline{ab}$ ،  $(a \neq b)$ ، خارج قسمتی برابر  $\overline{cd}$  و در تقسیم بر عدد  $\overline{ba}$ ، خارج قسمتی برابر  $\overline{dc}$

## شگفتی‌های هندسی

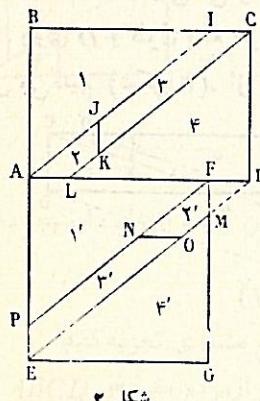
ترجمه و تنظیم: محمدعلی شیخان

مناسب دیگری مربع  $AE'F'G'$  نتیجه می‌شود. حال با انتقال این قطعات روی مربع  $AEFG$ ، بر عکس می‌توان مستطیل  $ABCD$  مشکل از سه مربع مساوی مطلوب را ساخت. (در شکل بالا اجزاء مساوی با شماره‌های مساوی مشخص شده‌اند).

۳- راه حل: م. پریگال (۱۸۷۵) M. Perigal

سؤالی که پریگال درباره آن به بحث می‌بردازد. با اندک دخل و تصوفی به مسئله زیر که کمی پیشتر هم دیدیم مربوط می‌شود. یا می‌توان آن را به تجزیه و ترکیب مربعات برگرداند.

مسئله با تجزیه یک مستطیل به اجزاء‌ای کوچک‌تر و ترکیب مجدد این اجزاء به گونه‌ای دیگر مربعی معادل آن بازیزد.



شکل ۲

اگر  $ABCD$  مستطیل به اضلاع  $a < b$  و  $BC = b$  و  $AB = a$  مربع معادل آن به ضلع  $AEGF$  باشد؛ آنها را طوری کنار هم قرار می‌دهیم که در رأس  $A$  مشترک بوده، ضلع  $AF$  و  $AD$  آنها بر یک خط راست قرار گیرند (شکل ۲). را وصل نموده  $CL$  را موازی با آن می‌کشیم.

بر حسب آنکه  $L$  روی  $AF$  یا  $FD$  باشد دو حالت تشخیص می‌دهیم. حالت اول  $L$  در  $AF$  است-  $AI$  و  $FP$  را موازی  $DE$  می‌کشیم.

با رسم خط دلخواه  $JK$  موازی  $AB$  متوازی‌الاضلاع  $AICL$  را به دو ذوزنقه تقسیم می‌نماییم؛ روی  $FP$  طول  $FN = AJ$  را جدا نموده  $EG$  موازی  $EG$  می‌کشیم. واضح است که هر یک از مستطیل و مربع داده شده به ۴ جزء قابل انطباق تجزیه شده‌اند. زیرا از تشابه مثلث‌های  $EAD$  و

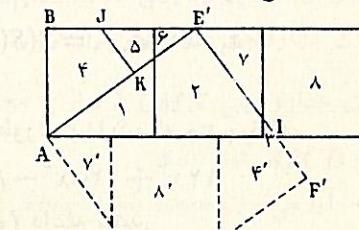
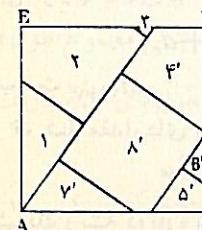
$$\frac{c^2}{b} = a = AB = \frac{c}{AP} = \frac{b}{c} \text{ از آنجا } PAF \text{ داریم}$$

در شماره‌های گذشته اشاره شده با تجزیه یک مستطیل هندسی به اجزایی چند و آن گاه ترکیب مناسبی از این اجزاء چگونه می‌توان شکلی معادل شکل مفروضی ساخت. اینک ادامه آن:

مساله- مربعی به ضلع  $C$  را به  $n$  مربع متساوی تجزیه کنید. روشن است که اگر  $c$  را طول ضلع یکی از مربعات مطلوب فرض کنیم

باید  $\frac{C}{\sqrt{n}} = c$  باشد. پس می‌توان مستطیلی مرکب از  $n$  مربع متساوی تشکیل

داده که معادل مربع مفروض باشد؛ آن گاه راه حل گذشته را به کار برد.



شکل ۱

به عنوان مثال فرض می‌کنیم مربع  $AEGF$  داده شده است می‌خواهیم آن را به سه مربع متساوی تجزیه کنیم. به کمک رسم یا با محاسبه طول ضلع، مربع مطلوب را که برابر  $\frac{AE}{\sqrt{3}}$  است، تعیین می‌کنیم. این طول برابر ارتفاع  $ABCD$  است معادل مربع مفروض. (در شکل ۱ این مستطیل  $ABCD$  نامیده شده است).

مثل حالت قبل  $AE'F$  و  $JK$  را در مستطیل  $ABCD$  مشخص می‌کنیم؛ هشت قطعه از آن بدست می‌آید که با چیدن آنها کنار هم به طریق

است در نظر بگیرید که دارای یک قاعده و یک ارتفاع برابر بوده و زوایای متناظر برابر دارند.

تصریه- راه حلی که هم اکنون بیان کردیم- نسبت به راهی که مونتوکلا اشاره کرده - سهل‌تر است و ساختن شکل را سریع‌تر ممکن می‌سازد؛ به علاوه

در این حالت برای ساختن شکل شرط  $b > 4a$  را داشتیم در حالی که برای راه حل مونتوکلا در حالت اول  $b < 2a$  بود.

مود استعمال - از ترکیب سه مربع مساوی، یک مربع بسازید. در اینجا فقط قاعده مربوط به حالت اول را به کار می‌بریم. شکل ۴ به قدر کافی برای تشریح و تفسیر روشن است. معنداً توجه کنیم که در متوازی‌الاضلاع  $AICL$  خط تقسیم از  $I$  رسم شده تا کمترین تعداد اجزاء را نتیجه دهد.

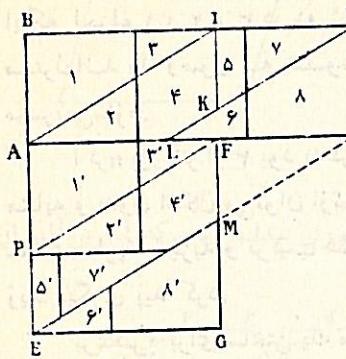
#### ۴- راه حل از M. de Coatpont (۱۸۷۷)

مسئله- مربعی به ضلع  $C$  را به  $n$  مربع مساوی تجزیه کنید.

اگر  $n = 3$  فرض شود روى ضلع  $BC$  از مربع مفروض  $ABCD$  طول

$(c = \frac{C}{\sqrt{3}})$  را برابر ضلع مربع مطلوب (یعنی  $BK$  جدا می‌کنیم. دایره‌ای به مرکز، مرکز مربع مفروض و به قطر  $c$  رسم می‌کنیم و مماس‌های زیر را بر این دایره می‌کشیم:  $IP$  را از  $I$  وسط  $CK$ ،  $RS$  و  $TU$  را عمود بر  $IP$  و  $NV$  را موازی  $IP$ .

حال  $NR'$  را برابر  $IC$  جدا نموده، عمود  $KL$  و  $QR'$  را به ترتیب بر  $AD$  و  $BC$  اخراج می‌کنیم. به این طریق مربع مفروض به اجزاء کوچکتری تقسیم می‌شود که چون به گونه‌ای دیگر آنها را چفت و جور کنیم به مستطیل  $EFGH$  که از سه مربع مساوی تشکیل شده، دست خواهیم یافت؛ مربع

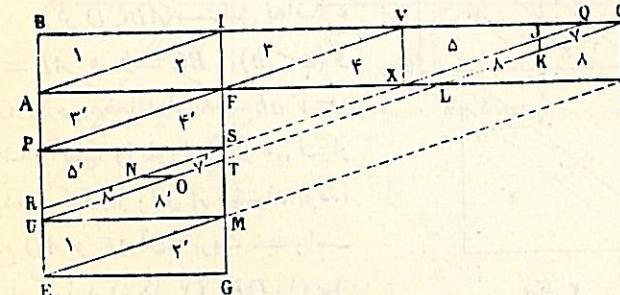


شکل ۴

$MG = a = CD$  ولذا مثلث‌های قائم‌الزاویه  $1$  و  $1'$ ،  $4$  و  $4'$  باهم برابرند.

به آسانی می‌توان برابری ذوزنقه‌های  $2$  و  $2'$  را باهم و  $3$  و  $3'$  را نیز بررسی کرد. مساله دارای جواب‌های زیادی است زیرا موقع خط  $JK$  اختیاری است. ضمناً در این حالت از شکل  $a < b$  است، زیرا چون  $L$  روی  $AF$  است باید  $AL + AF < 2AF$  باشد، از طرفی  $AL + AF < 2AF$  پس  $AF = EG = LD$  حالت دوم  $L$  دوی  $FD$  است- در این حالت داریم  $b < 4a$ . چون نمی‌توان  $JK$  را بین دو موازی  $LC$  و  $AI$  رسم کرد، لذا ساختمان قبلی در اینجا به کار نمی‌آید. پریگال این فرض را در نظر نگرفته بود به قسمی که حل مساله ناتمام ماند. ولی می‌توان آن را به صورت زیر کامل کرد.

روی  $FD$  طول ضلع مربع یعنی  $AF$  را آنقدر دفعه که از  $L$  بگذرد، منتقل می‌کیم (شکل ۳). از نقاط  $A$  و  $F$  و  $X$  و ...  $L$  خطوطی موازی



شکل ۳

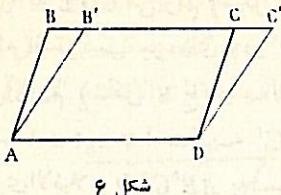
$DE$  محدود به اضلاع مستطیل  $ABCD$  و مربع  $EAFG$  رسم می‌کیم، از  $X$  و ... نیز موازی  $AB$  رسم نموده با رسم خط دلخواه  $JK$  موازی  $AB$  متوازی‌الاضلاع  $XLCQ$  را به دو ذوزنقه تقسیم می‌نمائیم،  $SN = CK$  و موازی  $EG$  را هم مشخص می‌کنیم.

پیداست در این حالت مستطیل  $ABCD$  و مربع  $EAFG$  هر یک به شش مثلث قائم‌الزاویه برابر هم و دو ذوزنقه تقسیم می‌شوند. بررسی تساوی مثلث‌های قائم‌الزاویه باهم با توجه به شکل به سهولت میسر است.

در مورد تساوی ذوزنقه‌های متناظر؛ مثلذوزنقه‌های  $7$  و  $7'$  کافی

اگر  $AB'C'D$  و  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع‌های مذکور باشند، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

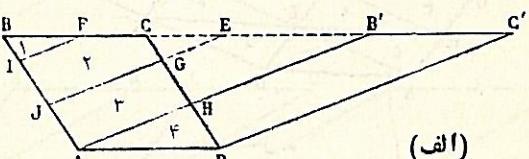
حالت اول -  $B'C'$  روی  $BC$  به‌وضع شکل ۶ قرار دارد؛ که می‌توان به‌آسانی از انتقال مثلث  $ABB'$  به محل مثلث  $DCC'$  از متوازی‌الاضلاع اولی، دومی را ساخت.



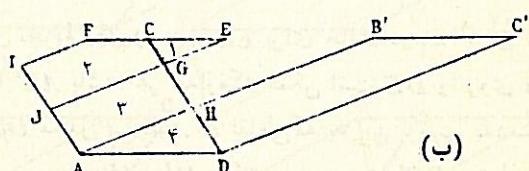
حالت دوم -  $B'C'$  روی امتداد

$BC$  و در خارج آن قرار دارد (شکل ۷-الف). طول‌های  $B'E$  و  $EF$  و ...

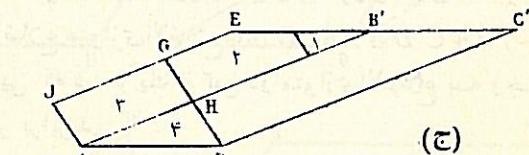
را متواالیاً برابر  $B'C'$  روی امتداد آن طوری جدا می‌کنیم که آخرین آنها از



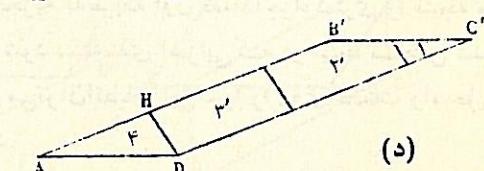
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۷

مرکزی  $RTUS$  اولین آنهاست (شکل ۵)، توجه به تساوی مثلث‌های (۴ و ۴') و (۵ و ۵') و ذوزنقه‌های (۶ و ۶') و (۷ و ۷') نظیر به نظیر و اینکه اجزاء ۱ و ۲ و ۳ در دو شکل مشترک‌اند راه وصول به مقصود را میسر می‌سازد.

اگر  $n$  بزرگتر از ۳ بود به طریق مشابه و بدون اشکال می‌توان از تجزیه مربع مفروض مستطیل  $EFGH$  را ساخت. طریقه تجزیه و ترکیب شکل نشان می‌دهد که می‌توان جوابهای زیاد دیگری پیدا کرد.

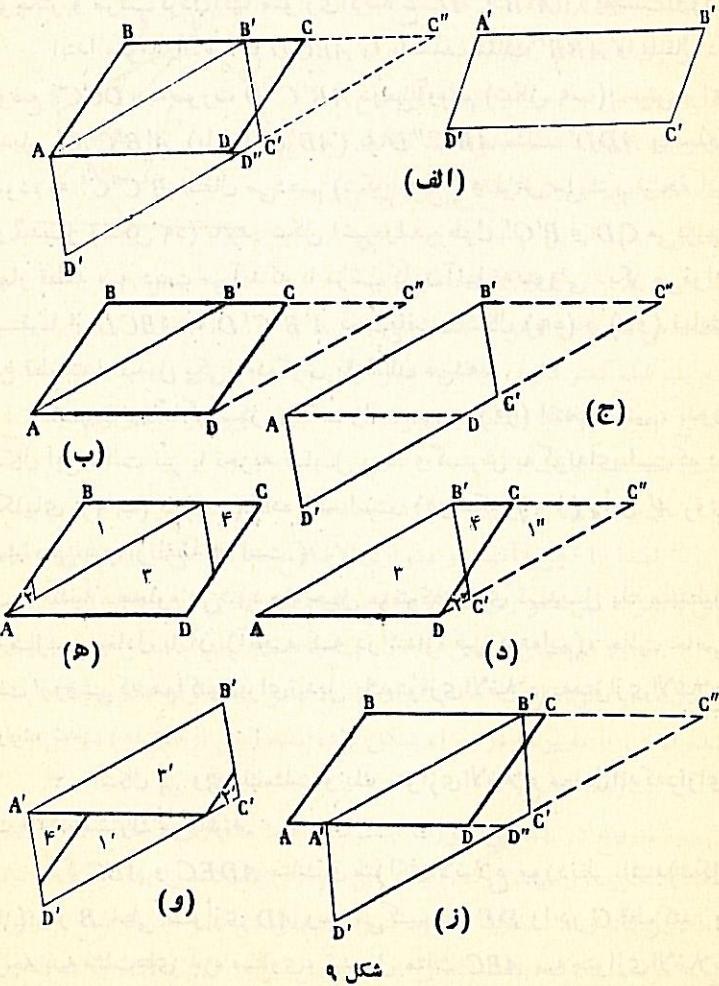
بر عکس: برای ساختن یک مربع، با  $n$  مربع متساوی به ضلع  $c$ . ابتدا ضلع مربع مطلوب را که برابر  $c\sqrt{n}$  است به دست می‌آوریم، آنگاه عمل تجزیه و ترکیب را به صورتی انجام می‌دهیم که در مسأله قبل دیدیم.

### تجزیه چند ضلعی‌های معادل به اجزاء قابل انطباق

موضوع سؤال به قرار زیر است: دو چند ضلعی‌های معادل  $A$  و  $B$  داده شده‌اند؛ باید یکی از آنها مثلاً  $B$  را طوری تجزیه کنیم که از جفت و جور کردن اجزاء حاصل به گونه‌ای دیگر چند ضلعی  $B$  را بسازیم. از جمله اظهارنظرهایی که از سوی دانشمندان مختلف بین سالهای ۱۸۹۶ تا ۱۸۹۲ درباره این تجزیه صورت گرفته، مؤلف در عمل فقط طریقه «M. Guitel» گیتیل را بهترین آنها دانسته و آن را به تفصیل دنبال نموده است که در زیر آورده شد؛ و نیز به روش تجزیه یکی دیگر به نام *M. Elling Holst* اشاره‌ای دارد که خواهیم دید.

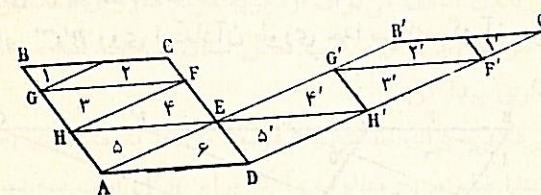
۱ اشکال معادل  $A$  و  $B$  متوازی‌الاضلاع‌هایی هستند که یک قاعده مشترک دارند.

اگر  $ABCD$  و  $A'B'C'D'$  متوازی‌الاضلاع‌های مفروض باشند، بدیهی است بزرگترین ضلع دومی درینجا  $A'B'$  از کوچکترین ارتفاع اولی (دراین شکل ارتفاع نظیر  $AD$ ) بزرگ‌تر است و می‌توان  $A'B'$  را در وضع جدید به صورت  $A'B'$  بین دو ضلع  $AB$  و  $BC$  و  $AD$  مهاطکرد. پس فرض می‌کنیم  $AB'C'D'$  وضع  $AB'C'D'$  و  $A'B'C'D'$  و  $C''D''$  به ترتیب محل تلاقی  $AB$  و  $BC$  و  $AD$  باشد، به آسانی می‌توان دیدمتوازی‌الاضلاع  $AB'C''D''$  باشد،



شکل ۹

متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  به قطعاتی تجزیه می‌شود که با آنها مجدداً می‌توان متوازی‌الاضلاع  $AB'C'D'$  را ساخت؛ بهاین ترتیب که: جزء ۱ از شکل ۷ ب الف را به  $CGE$  می‌بریم (شکل ۷ ب)؛ سپس ذوزنقه  $JIFE$  از شکل ۷ ب را (که از ترکیب جزء‌های ۱ و ۲ حاصل شده است) به صورت  $GEB'H$  درمی‌آوریم (شکل ۷ ج) و بالاخره ذوزنقه  $AJEB'$  را (که ترکیبی از اجزاء ۱ و ۲ و ۳ است) به  $DHB'C'$  منتقل می‌کنیم (شکل ۷ د)، متوازی‌الاضلاع  $AB'C'D'$  به دست می‌آید.

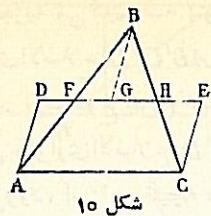


شکل ۸

روش تجزیه Elling Holst برای حالت دوم - اگر  $E$  محل تلاقی ضلع  $AB'$  با  $DC$  باشد؛ هر اندازه که مسکن است  $AE$  و  $AB$  را روی  $DE$  را روی  $DC'$  منتقل می‌کنیم. از نقاطی که به این ترتیب به دست می‌آیند  $H$  و  $G$  و ... روی  $AB$ ،  $F$  و  $H'$  و ... روی  $DC'$  - خطوطی متناظر آنها می‌باشند. اینها را به  $GEB'H$  منتقل می‌کنیم، اینها را به  $DHB'C'$  منتقل می‌کنیم، چندضلعی‌هایی که در هر یک از این دو متوازی‌الاضلاع به وجود می‌آیند تجزیه به نظیر برابرند.

با آنکه تجزیه به طریقہ اول تعداداً جزاء‌کمتری را نتیجه می‌دهد، ولی به جاست توجه شود دسته‌بندی اجزائی که در اینجا مشخص شده مناسب‌تر است و بدساندگی می‌توان انطباق این اجزا را روی قطعات راه حل قبلی مورد مطالعه قرار داد.

۲. اشکال  $A$  و  $B$  دو متوازی‌الاضلاع معادل با موضع غیر مشخصی هستند.



شکل ۱۵

ساده است.

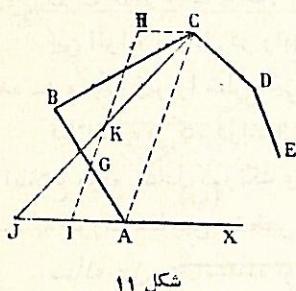
۴. اشکال معادل  $A$  و  $B$  را یک چندضلعی غیر مشخص و یک متوازی الاضلاع تشکیل می‌دهند. اگر  $ABCD \dots X$  چندضلعی غیر مشخص باشد. قطر  $AC$  را رسم می‌کنیم و مثلث  $ABC$  را مثلث حالت قبل<sup>۱</sup> به متوازی الاضلاع  $AIHC$  معادل با آن تبدیل می‌نماییم طوری که یک ضلع  $AJC$  آن روی  $AX$  باشد. سپس مثلث  $C$  را معادل این متوازی الاضلاع می‌سازیم (شکل ۱۱). از این تبدیلات چندضلعی جدید  $X \dots AJCDE$  معادل با چندضلعی مفروض اولی به دست می‌آید

که یک ضلع کمتر دارد؛ چنانچه عمل را به همین طریق مرتب ادامه دهیم مثلثی نتیجه خواهد داد که با تجزیه آن به اجزاء کوچکتر به متوازی الاضلاع  $B$  دست خواهیم یافت.

۵. اشکال معادل  $A$  و  $B$  دو چندضلعی غیر مشخص اند.

ابتدا با تجزیه آنها دو متوازی الاضلاع معادل می‌سازیم؛ بقیه راه حل حل با تجزیه این متوازی الاضلاع‌ها برای دست یافتن از  $A$  به  $B$  روشن است. هواد استعمال—گیتيل با اتكاء به قاعده پیشین چندین رشته بازی با اشکال مطرح کرده است که می‌توان آن را چنین بیان کرد: یک چندضلعی داده شده است، با تغییر جا در اجزاء شکل داده شده (پس از تجزیه) مربعی معادل با آن بسازید.

شروع کار به این صورت است که ابتدا متوازی الاضلاع  $ABCD$  را معادل شکل مفروض بسازیم؛ آنگاه این متوازی الاضلاع را به متوازی الاضلاع معادل دیگری مانند  $AB'C''D$  طوری تبدیل می‌کنیم که یک ضلع آن برابر ضلع مربع مطلوب باشد (شکل ۱۲). سپس مربع  $AB'C'D'$  را به قطعاتی



شکل ۱۱

معادل متوازی الاضلاع  $A'B'C'D'$  و در نتیجه معادل متوازی الاضلاع  $ABCD$  است و از آنجا نظر به تساوی ارتقایات متوازی الاضلاع‌های  $ABCD$  و  $AB'C''D''$  (نظیر قاعده‌های  $AD$  و  $AD''$ )، نتیجه می‌شود  $AD = AD''$  یعنی  $D' \in AD$  (شکل ۹ الف). (روی شکل وضع اخیر به طور کامل نشان داده نشده است).

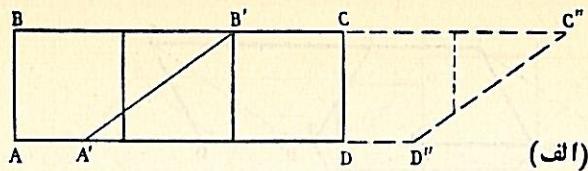
حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با تجزیه  $ABCD$  به اجزاء کوچکتر و مرتب کردن آنها متوازی الاضلاع  $A'B'C'D'$  را به دست آورد. ابتدا متوازی الاضلاع  $ABCD$  را با حذف مثلث  $'ABB'$  و انتقال در موضع  $DCC''$ ، به صورت  $AB'C''D'$  درمی‌آوریم (شکل ۹ ب)؛ سپس برای تبدیل  $AB'C''D'$  به  $A'B'C'D'$  (یا  $AB'C'D$ ) مثلاً  $ADD'$  را حذف نموده به  $B'C''C'$  انتقال می‌دهیم (شکل ۹ ج) و فرض می‌کنیم نتیجه این دو تبدیل (شکل ۹ د) باشد. شکل اخیر را در طول  $'B'C'$  و  $CD$  می‌بریم، چهار قطعه به دست می‌آید که با مرتب کردن آنها به صورتی دیگر می‌توان مستقیماً از  $ABCD$  به  $A'B'C'D'$  دست یافت. اشکال (۹) و (۹و) نمایش این قطعات و تبدیل یکی بدیدگری را نشان می‌دهد.

تصویره—اولاً<sup>۱۰</sup> اگر شکل ۹ الف را به صورت (۹ز) انتخاب کنیم، بدون اشکال این حالت نیز با تجزیه قابل بسط و گسترش به گونه‌ای است که در شکلهای (۹ ب) تا (۹ و) داده شده است. (در شکل (۹ ز) رأس  $A'$  روی  $AD$  ولی غیر از نقطه  $A$  است).

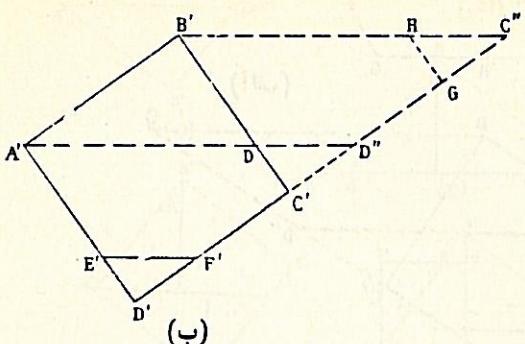
ثانیاً—معلوم می‌شود راه حل موتوكلا برای تبدیل یک مستطیل به مربعی معادل با آن (آنچه که در شماره قبل دیده‌ایم)، حالت خاصی است از ووشی که هم اکنون برای تبدیل یک متوازی الاضلاع به متوازی الاضلاع آورده شد.

۳—اشکال  $A$  و  $B$  یک مثلث و یک متوازی الاضلاع معادل اندکه دارای یک قاعده مشترک می‌باشد.

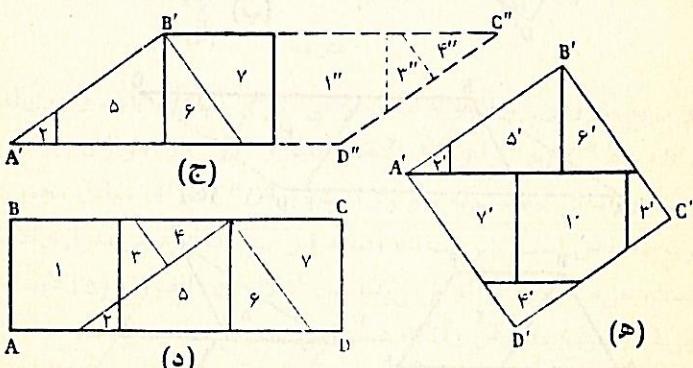
اگر  $ABC$  و  $ADEC$  مثلث و متوازی الاضلاع موردنظر باشند (شکل ۱۰)، از  $B$  خطی موازی  $AD$  رسم می‌کنیم تا  $DE$  را در  $G$  قطع کند، با توجه به مثلث‌های جزء مساوی، تبدیل مثلث  $ABC$  به متوازی الاضلاع



(الف)



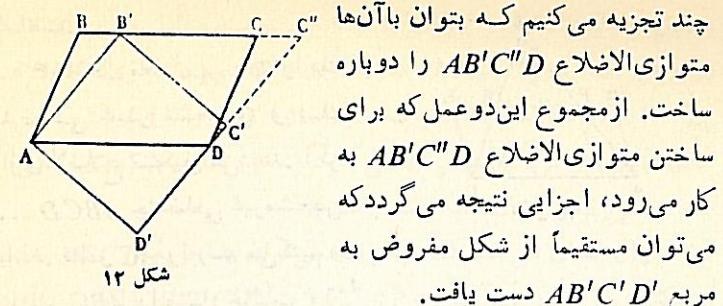
(ب)



شكل ۱۳

و (۱۳) نشان داده شده است.

مسئله ده - یک شش ضلعی منتظم را به یک مربع تبدیل کنید.  
شش ضلعی مفروض  $ABEFGH$  را با رسم قطر  $AF$  به دو ذوزنقه متساوی الساقین تبدیل نموده سپس آنها را طوری کنار هم قرار می دهیم که تشکیل متوازی الاضلاع  $ABCD$  دهند (شکل ۱۴ الف) آنگاه مانند مسئله قبل عمل می کنیم. اشکال زیر به قدر کافی خرد شده و مشخص اند تشریح و تفسیر لازم به نظر نمی رسد.



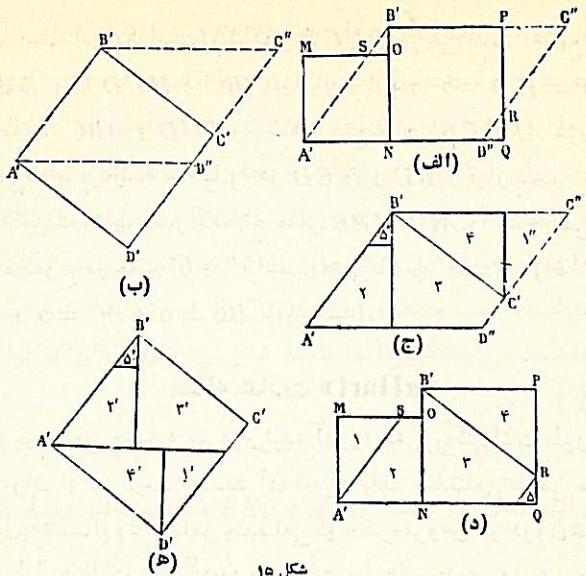
شکل ۱۲

چند تجزیه می کنیم که بتوان با آنها متوازی الاضلاع  $AB'C'D''$  را دوباره ساخت. از مجموع این دو عمل که برای ساختن متوازی الاضلاع  $AB'C'D$  به کار می رود، اجزایی نتیجه می گردد که می توان مستقیماً از شکل مفروض به مربع  $AB'C'D$  دست یافت.

بین انواع مسائل در رابطه با کاربرد قاعده قبلی که توسط گیتیان انتخاب شده سه مسئله زیر را مطرح می کنیم.

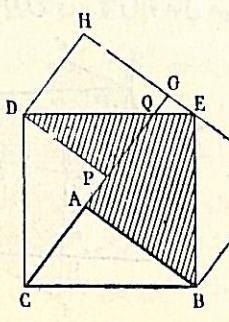
قبل اشاره می کنم در اشکال بعدی اضلاع چندضلعی های مفروض پررنگ و اضلاع مربع معادل کم رنگ و آنچه که مربوط به متوازی الاضلاع واسطه است به صورت خطچین مشخص می شود.

مسئله اول - با استفاده از سه مربع مساوی یک مربع بسازید.  
سه مربع مفروض را طوری کنار هم قرار می دهیم که تشکیل مستطیل  $ABCD$  دهد (شکل ۱۳ الف). آنگاه  $A'B'C'D'$  ضلع مربع معادل را طوری در آن میحاط می کنیم که  $B'$  بر رأس بالایی سمت راست دو مین مربع منطبق گردد.  
این عمل عموماً اجزا کمتری را در تجزیه نتیجه می دهد. سپس با تغییر مکان جزء  $ABB'A'$  به محل  $DCC'D''$ ، متوازی الاضلاع  $A'B'C''C''$  را معادل مستطیل می سازیم. حال مربع  $A'B'C'D'$  را با تجزیه به صورت متوازی الاضلاع اخیر درمی آوریم (شکل ۱۳ ب). (ترتیب کار چنان است که در شماره ۱ حالت دوم دیدیم) فقط اشاره می کنم که در شکل ۱۳ ب،  $E'E'D' = C''D''$  و  $D''F' = C'D$  است. از رویهم قرار دادن این دو ترکیب که متوازی الاضلاع  $A'B'C'D''$  را نتیجه داد هفت جزء بددست می آید (شکل ۱۳ ج) که امکان تبدیل مستقیم  $ABCD$  را به مربع  $A'B'C'D'$  فراهم می سازد. (اگر  $A'$  روی  $A$  قرار گیرد در تجزیه به جای ۷ جزء، ۸ جزء خواهیم داشت. رامحل هونتوكلا را در رابطه با این سؤال بینیابید). ترتیب مناسبی که باید به این اجزا داده شود تا از مستطیل  $ABCD$  به مربع  $A'B'C'D'$  رسید در شکل های (۱۳ د)



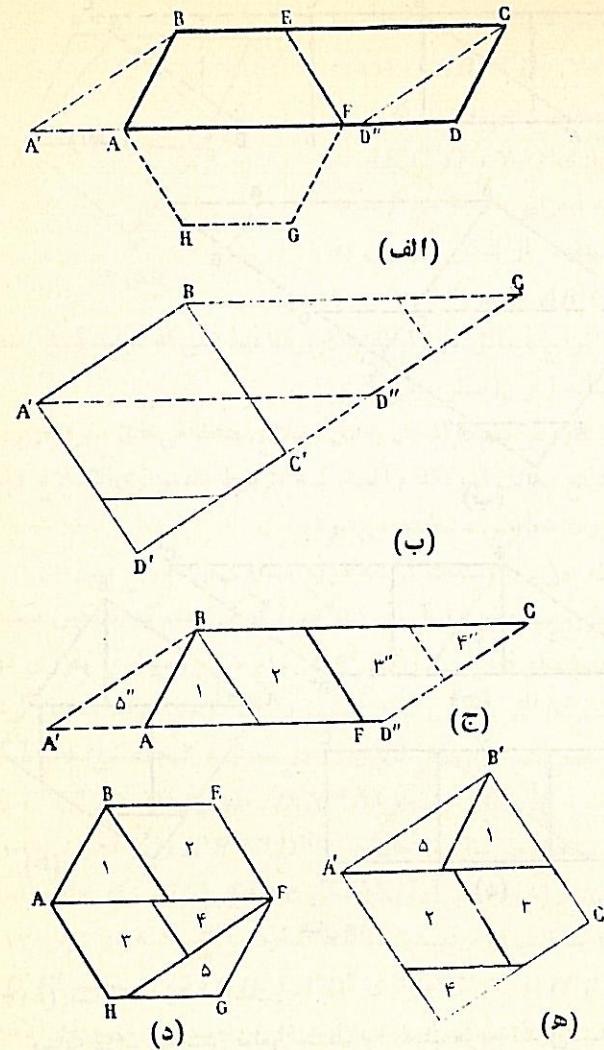
شکل ۱۵

دو مربع مفروض. چنانچه  $S$  محل تلاقی  $A'B'$  با  $MO$  باشد و روی امتداد  $B'A'$  خط  $PC''$  را برای  $MS$  انتخاب کنیم و  $C''D''$  را موازی  $B'A'$  رسم نمائیم به آسانی پیداست که متوازی الاضلاع  $A'B'C'D''$  معادل مجموع دو مربع مفروض است. پس مانند مسئله قبل به کمک همین متوازی الاضلاع واسطه حل مسئله را به انجام می‌رسانیم. اشکال (۱۵الف) تا (۱۵ه) نمایانگر تجزیه دو مربع مفروض و آنگاه دست یابی به مربع مطلوب است. قبضه دو شکل (۱۵د) و (۱۵ه) با اندکی اختلاف به راه اثبات قضیه فیثاغورث زهمنون می‌شود که در زیر می‌بینیم.



شکل ۱۶

مربع  $CE$  و  $AF$  را رؤی و تر  $CB$  و ضلع  $AB$  از مثلث قائم الزاویه  $ABC$  می‌سازیم. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که  $E$  روی  $GF$  قرار دارد.  $GF$  و  $DH$  را به ترتیب موازی  $AG$  و  $DP$  رسم می‌کنیم (ه) محل تلاقی



شکل ۱۷

مسئله سوم- از دو مربع نامساوی که کنار هم قرار داده شده اند یک مربع بسازید. اگر  $NB'PQ$  و  $A'MON$  دو مربع مفروض باشند (شکل ۱۵الف)، می‌دانیم بر طبق قضیه فیثاغورث  $A'B'$  ضلع مربعی است معادل با مجموع

چهارضلعی های متشابه متناظر مثل  $A'E'OH'$  و  $AEOH$  - طولهای  $Gd = Hd' = q$  و  $Fc = Gc' = p$  و  $Eb = Fb' = n$  و  $Ea' = Ha = m$  و ... را جدامی کیم! مثلث های نظیر  $AHa'$  و  $BEB'$  باهم و نیز  $AEa'$  و  $BFB'$  باشند و ... برابرند، نتیجه می شود که مجموع مساحت های چهارضلعی های  $BFB'$  و  $AEa'$  با مساحت چندضلعی ...  $ABCD$  باشد. ثابت می کیم از چندن این چهارضلعی ها کتارهم طوری که در شکل (۱۷ج) نشان داده شده است چندضلعی ...  $A,B,C,D$  متشابه با چندضلعی های مفروض به دست می آید که بین آنها ناحیه خالی ...  $A''B''C''D''$  برابر با ...  $A'B'C'D'$  است.

چون اولاً  $A,E,B$  یک خط راست است و  $B,F,C$  نیز و ... زیرا در شکل الف مثلاً دو مثلث  $BEb$  و  $AEa'$  متشابهند (زاویه  $E$  در دو

مثلث برابر و اضلاع نظیر این زاویه متناسب اند)  $\frac{AE}{m} = \frac{EB}{n}$  (نتیجه می شود که زوایای  $a'$  و  $b$  مکمل یکدیگر باشند. پس در شکل (۱۷ج) و  $A,E,B$  روی یک خط راست قرار دارند. ثانیاً چندضلعی حاصل متشابه با  $\hat{B}_1 = \hat{B}$  و  $\hat{A}_1 = \hat{A}$  چندضلعی های مفروض است زیرا به آسانی دیده می شود  $\frac{Aa' + Bb}{AB} = \frac{Bb' + Cc}{BC} = \dots = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \dots$

و بالاخره ...  $A''B''C''D''$  برابر ...  $A'B'C'D'$  است. به طور مثال اشاره می کنم که  $\hat{A} = \hat{A}''$  (این زوایا مکمل یک زاویه، در شکل (۱۷ج) یا  $\widehat{BOH}$  در شکل (۱۷الف) می باشند). و می بینیم  $A''B''$  از شکل (۱۷ج) برابر است با  $A'B'$  در دو شکل دیگر. چندضلعی ...  $A,B,C,D$  نیز قابل محیط بر یک دایره است و نقاط  $E$  و  $F$  و ... نقاط تمساس اضلاع با دایره محیطی می باشند (تحقیق باتوجه به شکل ساده است). ساختن چندضلعی مطلوب با اجزاء داده شده فقط و قی ممکن است که در چندضلعی ...  $A'B'C'D'$  بزرگترین پاره خط واصل بین یک رأس و نقطه تمساس اضلاع نظیر این رأس بادایره محیطی (در اینجا یعنی  $m = A'E' = A'H'$ )

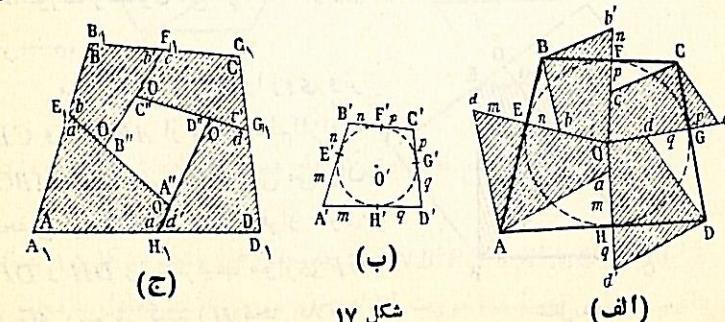
با امتداد  $FG$  است)؛ شکل  $DHGP$  مربعی است به ضلع  $b$ ، زیرا مثلث های  $ABC$  و  $HED$  برابرند و آنها  $DP = HD = b$  حال اگر دو مثلث  $PCD$  و  $ABC$  را که با پنج ضلعی  $APDEB$  مربع  $a^2$  را تشکیل می دهند برداشته و آنها را در  $FBE$  و  $HED$  قرار دهیم پنج ضلعی مذکور با این دو مثلث، کثیر الأضلاع متعار  $APDHFB$  را نتیجه می دهد که برابر مجموع مربعات  $b^2$  و  $c^2$  است یعنی  $a^2 = b^2 + c^2$  (اضلاع مثلث  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$  نامیده شد).

### مسئله هارت (Hart)

دو چندضلعی متشابه مفروض اند، آن را که بزرگتر است طوری تجزیه کنید تا بتوان از ترکیب مجدد آن اجزاء باعث چندضلعی سومی متشابه با دو تای اول به دست آورد که شامل چندضلعی کوچکتر مفروض در درون خود باشد.

مسئله فوق در سال ۱۸۷۷ میلادی وسیله «هاری هارت» وضع شده و فقط در حالت خاصی که چندضلعی های محيطی یا مجامعتی باشند حل شده است.

حل - اولاً چندضلعی ها قابل محیط بر دایره اند: اگر ...  $ABCD$  (شکل (۱۷الف)) و ...  $A'B'C'D'$  (شکل (۱۷ب)) چندضلعی های متشابه مفروض و نقاط  $(E, F, G, H, O, P, Q, R)$  و ... به ترتیب فاصله رأسهای  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  و  $D'$  و ... از نقاط تمسas اضلاع مربوط به چندضلعی ها با دایره محیطی و  $m$  و  $n$  و  $p$  و  $q$  و ... به ترتیب فاصله  $OE$  و  $OF$  و  $OG$  و ... را وصل می کیم روی آنها و امتدادشان - با در نظر گرفتن



شکل ۱۷

## استفاده از بردارها

برای

### محاسبه فاصله‌ها و زاویه‌ها در مسئله‌های هندسی

در مسئله‌هایی از هندسه، به خصوص وقتی که بخواهیم طول یا زاویه‌ای را محاسبه کنیم، استفاده از بردارها، بر محاسبه‌های جبری و مثلثاتی، که اغلب مستلزم ساختمان‌های تازه‌ای در شکل است، ترجیح دارد.

برای حل مسئله‌های هندسی به کمک بردار، نه تنها باید با قانون‌های جبر برداری آشنا باشیم و در ترجمه مفهوم‌های هندسی به زبان برداری توانایی داشت، بلکه در ضمن باشد، برای حل مسئله، برنامه مناسبی طرح ریخت.

به چند نکته اشاره می‌کنیم:

۱. اگر هدف، محاسبه یک فاصله یا یک زاویه باشد، باید از حاصل ضرب عددی (اسکالر) بردارها استفاده کرد.

۲. برای وارد کردن بردارها، بهدو طریق می‌توان عمل کرد:  
 (الف) نقطه‌ای را در نظر گرفت، که بردارهای معلومی از آن خارج می‌شوند؛

(ب) بردارها را به صورت پاره خط‌های جهت‌دار در نظر گرفت (وقتی که در شکل، نتوان این پاره خط‌ها را، به نقطه‌ای مربوط کرد).

۳. وقتی مسئله، به هندسه مسطحه مربوط باشد، بهتر است دو بردار ناهم‌راستا را، به عنوان بردارهای پایه انتخاب و بقیه بردارها را بر حسب آن‌ها بیان کرد. در حالتی هم که با یک مسئله فضایی سروکار داریم، سه بردار غیر واقع بریک صفحه را به عنوان بردارهای پایه انتخاب می‌کنیم. در ضمن، انتخاب مبداء، اجباری نیست.

۴. در بعضی مواردها، و مثلاً ضمن حل مسئله‌های مربوط به گنج، با انتخاب بردارهای واحد، که از راس کنج آغاز می‌شوند، می‌توان کار محاسبه را ساده‌تر کرد.

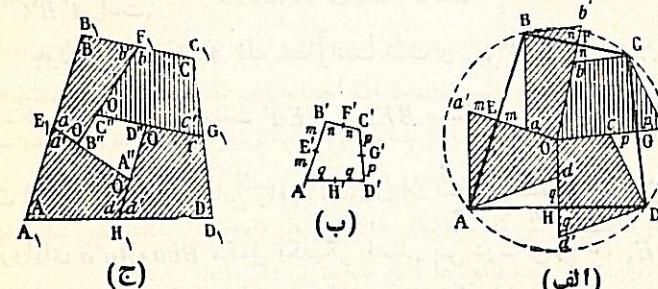
۵. برای آمادگی بیشتر در کاربرد بردارها، خوب است بعضی از برابری‌های برداری را به خاطر بیاوریم:

کوچکتر از شعاع دایره محاطی چندضلعی ...  $ABCD$  باشد.

(O) و  $O'$  مرکز دوایر محاطی چندضلعی‌های مفروض می‌باشند.

ثانیاً چندضلعی‌ها قابل محاط در دایره‌اند:

اگر ...  $ABCD$  ...  $A'B'C'D'$  چندضلعی‌های مفروض و نقاط (E)، (F)، (G) ... (H)، (E')، (F')، (G') ... (H') اوساط اضلاع چندضلعی‌ها و O مرکز دایره محيطی چندضلعی بزرگتر باشند. [به شکل‌های ۱۸ (الف)، (ج) و (ب) توجه کنید] روی خطوط  $OE$  و  $OF$  و ... که می‌دانیم متاظر آبراضلاع چندضلعی ...  $ABCD$  عمودند، در طرفین E و F و ... طولهای



شکل ۱۸

$A'B' = Fb' = Ea' = Ea$  و  $B'C' = ...$  را به ترتیب مساوی با نصف اضلاع  $A'B'$  و  $B'C'$  و ... جدا می‌کنیم. مثلث‌های قائم الزاویه  $BEa'$  و  $AEa'$  باهم و  $Cfb'$  و  $BFB'$  نیز باهم و ... برابرند. چهارضلعی‌های هاشور خورده در شکل ۱۸ الف را کنارهم به گونه‌ای که در شکل ۱۸ ج نشان داده شده می‌چنیم، چندضلعی ...  $A''B''C''D''$  تشکیل می‌شود متشابه با چندضلعی‌های مفروض که در درون آن ناحیه خالی ...  $A''B''C''D''$  برابر با چندضلعی ...  $A'B'C'D'$  می‌باشد.

چندضلعی حاصل قابل محاط در یک دایره است و  $E_1$  و  $F_1$  و ... اوساط اضلاع آن می‌باشند. اثبات در تمام حالات مشابه آن چیزی است که در قسمت اول گفته شد.

ساختن شکل اخیر نیز میسر نیست مگر آنکه فاصله O از اضلاع چندضلعی ...  $ABCD$  نظیر به نظری از نصف اضلاع چندضلعی ...  $A'B'C'D'$  بزرگتر باشد.

دست کم دو تا از سه بردار  $\vec{OB} - \vec{OC}$ ,  $\vec{OC} - \vec{OA}$ ,  $\vec{OB} - \vec{OA}$  بسر یک راستا نیستند، بنابراین:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OH}$$

بردار صفر است، یعنی  

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

به چند مساله می پردازیم.

مساله ۱)  $H$  (ا) محل برخورد اتفاقعهای مثلث  $ABC$  و  $M$  (ا) محل برخورد میانهای مثلث  $AHB$  هی کیم. مطلوب است محاسبه  $d$ , فاصله  $a$  و  $b$  و  $c$  تا نقطه  $M$ . حل. داریم:

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OH}),$$

$$\vec{CM} = \vec{OM} - \vec{OC}, \quad \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC},$$

از آن جا  $\vec{CM} = \frac{2}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC})$  و بنابراین

$$d^2 = \frac{4}{9}(\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC})^2 = \frac{4}{9}(3R^2 + 2R^2 -$$

$$-c^2 - 2R^2 + a^2 - 2R^2 + b^2) = \frac{4}{9}(R^2 + a^2 + b^2 - c^2)$$

روشن است که  $R^2 + a^2 + b^2 \geq c^2$ . در ضمن علامت برابری، وقتی و تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

یعنی

$$R^2 = R^2 + R^2 - c^2 \Rightarrow c = R\sqrt{2}$$

الف)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{4}$

ب)  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ ، که در آن،  $O$ ، مرکز دایرة محیطی مثلث  $ABC$  و  $H$ ، نقطه برخورد اتفاقعهای آن است؟

ج)  $\vec{MI} = \frac{1}{2p} (a \cdot \vec{MA} + b \cdot \vec{MB} + c \cdot \vec{MC})$  (ج)

دایرة محاطی مثلث  $ABC$ ،  $M$ ، نقطه دلخواهی از فضای  $p$ ، محیط مثلث  $a$  و  $b$  و  $c$ ، طول ضلعهای  $BC$  و  $CA$  و  $AB$  است؛

د)  $\vec{MN} = \frac{\vec{AB} + k\vec{CD}}{1+k}$  (د)

پاره خطهای  $AC$  و  $BD$  را، به نسبت  $k$  تقسیم کرده اند.  
سعی کنید، خودتان، این برابری ها را به دست آورید. در اینجا،  
به عنوان نمونه، رابطه ب) را ثابت می کنیم.

اگر  $O$ ، مرکز دایرة محیطی مثلث  $ABC$  و  $H$ ، محل برخورد اتفاقعهای آن باشد، آن وقت، از برابری های

$$\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0 \quad |OA|^2 = |OB|^2$$

نتیجه می شود:

$$\begin{cases} (\vec{OC} - \vec{OH}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = 0, \\ (\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = 0. \end{cases}$$

از مجموع این دو رابطه، به دست می آید:

$$(\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OH}) = 0$$

به همین ترتیب، می توان به دست آورد:

$$(\vec{OC} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OH}) = 0$$

$$(\vec{OB} - \vec{OC}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OH}) = 0$$

$$\begin{aligned} 4|MN|^2 &= 4l^2 = (\vec{OB} + \vec{OD} - \vec{OA} - \vec{OC})^2 = \\ &= (\vec{OB} - \vec{OA})^2 + (\vec{OD} - \vec{OC})^2 + 2(\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OD} - \\ &\quad - \vec{OC}) = a^2 + c^2 + 2(\vec{OB} \cdot \vec{OD} - \vec{OC} \cdot \vec{OB} - \\ &\quad - \vec{OA} \cdot \vec{OD} + \vec{OA} \cdot \vec{OC}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$l^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2)$$

روشن است که در هر چهارضلعی  $ABCD$  داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2 \geq 0$$

در ضمن، علامت برابری، تنهایی متوالی الاضلاع برقرار است، یعنی وقتی  $M$  و  $N$  بهم منطبق باشند در این حالت داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2$$

یادداشت. اگر به جای نقطه دلخواه  $O$ ، نقطه  $D$  را در نظر می‌گرفتیم،

حل مساله، کوتاه‌تر می‌شد. در این حالت  $\vec{OD} = 0$

$$2\vec{MN} = \vec{DB} - \vec{DA} - \vec{DC}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} 4\vec{MN}^2 &= 4l^2 = d^2 + c^2 + n^2 - (n^2 + d^2 + a^2) - \\ &\quad - (n^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + c^2 - m^2) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2 \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم که، برای حل مساله، نیازی به انتخاب بردار پایه نداشتیم، بنابراین، می‌توان بلا فاصله، این مساله فضایی را هم حل کرد؛ اگر طول همه یال‌های یک چهاروجهی معلوم باشد، فاصله بین نقطه‌های وسط

و این، به معنای آن است که:  $\widehat{ACB} = 120^\circ$   
سپس

$$(\vec{OC} - \vec{OA})^2 = \vec{OB}^2,$$

$$2R^2 - 2R^2 \cos(AOC) = R^2, \cos(AOC) = \frac{1}{2}$$

و از آن جا:  $\widehat{AOC} = 60^\circ$ . بنابراین

$$\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 30^\circ$$

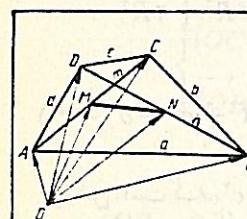
به این ترتیب، برای  $c^2 = a^2 + b^2 + R^2$ ، در مثلث  $ABC$  خواهیم داشت:

$$\widehat{ACB} = 120^\circ, \widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 30^\circ$$

مساله ۳۰ با معلوم بودن طول ضلع‌ها و قطرهای یک چهارضلعی، مطلوب است فاصله  $/$  بین نقطه‌های وسط دو قطر.  
حل. چهارضلعی  $ABCD$  را در نظر می‌گیریم (شکل ۱) و فرض می‌کنیم:

$$|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d,$$

$$|AC| = m, |BD| = n$$



شکل ۱

اگر  $M$  و  $N$  را، به ترتیب، وسط قطرهای  $AD$  و  $BC$ ، و  $O$  را نقطه دلخواهی از فضا بگیریم، داریم:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OC},$$

$$\vec{ON} = \vec{OB} + \vec{OD}$$

از آن جا

$$2\vec{MN} = 2(\vec{ON} - \vec{OM}) = \vec{DB} + \vec{OD} - \vec{OA} - \vec{OB}$$

و بنابراین

می‌آید:  $\delta = 0$ ; یعنی در مورد مستطیل، برای هر نقطه  $M$  از فضای داریم:

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$$

مساله ۴. طول یال‌های یک چهاروجهی داده شده است. مطلوب است، فاصله یک راس چهاروجهی تا نقطه برخورد میانه‌های وجه مقابله به آن راس.

حل. نقطه برخورد میانه‌های وجه  $ABC$  از چهاروجهی  $ABCD$  را می‌گیریم. در این صورت  $M$

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

از اینجا

$$\begin{aligned} |DM|^2 &= \frac{1}{9}(|DA|^2 + |DB|^2 + |DC|^2 + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \\ &\quad + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{9}(|DA|^2 + |DB|^2 + \\ &\quad + |DC|^2 + |DA|^2 + |DB|^2 - |AB|^2 + |DB|^2 + |DC|^2 - \\ &\quad - |BC|^2 + |DA|^2 + |DC|^2 - |AC|^2) \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} |DM|^2 &= \frac{1}{9}(|DA|^2 + |DB|^2 + |DC|^2) - \\ &\quad - \frac{1}{9}(|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2) \end{aligned} \quad (1)$$

در این مساله هم، از بردار پایه استفاده نکرده‌ایم، بنابراین، رابطه (۱)، برای حالت مسطحه هم درست است: اگر طول ضلع‌ها و قطرهای یک چهارضلعی معلوم باشد، فاصله بین یکی از راس‌های چهارضلعی (ا) تا نقطه برخورد میانه‌های مثلثی که از سه راس دیگر چهارضلعی درست شده، است، پیدا کنید.

دو یال مقابله (ا) پیدا کنید.

مساله ۳. متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  مفروض است. ثابت کنید، برای هر نقطه دلخواه  $M$  از فضای تفاضل

$$(|MA|^2 + |MC|^2) - (|MB|^2 + |MD|^2)$$

برابر مقدار ثابتی هشل  $\delta$  است.  $\delta$  را پیدا کنید.

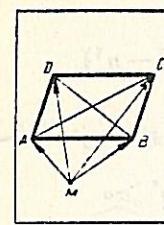
حل. چون  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع است (شکل ۲)، بنابراین

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

از آن‌جا

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$$

و بنابراین



شکل ۲

$$\begin{aligned} \delta &= |MA|^2 + |MC|^2 - |MB|^2 - |MD|^2 = \\ &= |MA|^2 + |MC|^2 - |MB|^2 - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})^2 = \\ &= |MA|^2 + |MC|^2 - |MB|^2 - |MA|^2 - |MC|^2 - |MB|^2 - \\ &\quad - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} = -2|MB|^2 - \\ &\quad - |MA|^2 - |MC|^2 + |MA|^2 + |AC|^2 + |MB|^2 - |AB|^2 + \\ &\quad + |MC|^2 + |MB|^2 - |BC|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 - |BC|^2 \end{aligned}$$

ولی

$$|AB|^2 + |BC|^2 = \frac{1}{2}(|AC|^2 + |BD|^2)$$

بنابراین

$$\delta = |AC|^2 - \frac{1}{2}(|AC|^2 + |BD|^2) = \frac{1}{2}(|AC|^2 - |BD|^2)$$

در حالت خاصی که متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل باشد، به دست

$$\cos\varphi = \frac{1}{4a^2} |a^2 + c^2 - b^2 - a^2 - b^2 + c^2|$$

$$\cos\varphi = \frac{|c^2 - b^2|}{a^2}$$

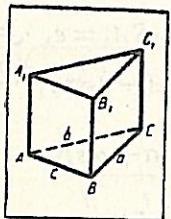
و سرانجام

دو زاویه دیگر را هم، می‌توان به همین ترتیب به دست آورد.  
مساوه ۶. در منشود قائم و مثلث القاعده،  $ABCA, B, C$  دادیم (شکل ۳):

$$|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c, |AA_1| = h$$

مطلوب است محاسبه: ۱) کسینوس زاویه بین قطرهای  $AB$  و  $BC$ ، ۲)  $BC$  و  $C$  قطر.

کسینوس زاویه بین ضلع  $AB$  و قطر  $BC$  در این حل. ۱) زاویه بین دو قطر  $AB$  و  $BC$  را  $\varphi$  می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت:



شکل ۳

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$$

از طرف دیگر، داریم (شکل ۳ را بینندید):

$$\overrightarrow{AB}_1 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BC}_1 = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}_1 \cdot \overrightarrow{BC}_1 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}) =$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - c^2 + h^2 = \frac{1}{4}(c^2 + b^2 - a^2) - c^2 + h^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(b^2 - a^2 - c^2 + 2h^2)$$

به این ترتیب

برابری (۱) را، می‌توان این طور نوشت:

$$|AD|^2 + |DB|^2 + |DC|^2 = 3|DM|^2 + \frac{1}{4}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2)$$

از این برابری، می‌توان نتیجه گرفت که: اگر  $D$  را نقطه‌ای از فضای  $ABC$  در نظر بگیریم و مجموع مجذورهای فاصله‌های این نقطه را تا سه راس مثلث  $ABC$  برابر  $\delta$  فرض کنیم، حداقل مقدار  $\delta$  وقتی به دست می‌آید که  $D$  بر نقطه برخورد میانه‌های مثلث  $ABC$  منطبق باشد (یعنی در حالت  $D = M$ ). در این حالت داریم:

$$\delta = \frac{1}{3}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2)$$

مساوه ۵. از چهاروجهی  $ABCD$  می‌دانیم:

$$|AB| = |CD| = a, |CA| = |BD| = b, |AD| = |BC| = c$$

کسینوس زاویه بین هر دو یال دو به دو (۱ پیدا کنید).

حل. زاویه بین دو یال روبروی  $AB$  و  $CD$  را  $\varphi$  می‌نامیم. در این صورت، داریم:

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})|}{a^2} = \\ = \frac{1}{a^2} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|$$

از طرف دیگر داریم:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(|AB|^2 + |AD|^2 - |BD|^2),$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2)$$

که از آن جا، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} k + l \cos \gamma = \cos \beta \\ k \cos \gamma + l = \cos \alpha \end{cases}$$

حل این دستگاه، مقادرهای  $k$  و  $l$  را به دست می‌دهد:

$$k = \frac{\cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha}{1 - \cos^2 \gamma}; \quad l = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{1 - \cos^2 \gamma}$$

و بنابراین

$$\vec{SC}_\gamma = \frac{1}{\sin \gamma} [(\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma) \vec{e}_1 + (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma) \vec{e}_2];$$

و در نتیجه

$$\cos \varphi_\gamma = |\vec{SC}_\gamma| = \frac{1}{\sin \gamma} \times$$

$$\times \sqrt{[(\cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha) \vec{e}_1 + (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma) \vec{e}_2]^2}$$

و سرانجام، بعد از ساده کردن، به دست می‌آید:

$$\cos \varphi_\gamma = \frac{1}{\sin \gamma} \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

مسأله ۸. فاصله بین مرکز دایره محیطی تا مرکز دایره محاطی مثلث

(۱) بر حسب  $R$  و  $r$ ، شعاع‌های این دو دایره، محاسبه کنید.

حل. می‌دانیم:

$$\vec{OM} = \frac{1}{4p} (\vec{aOA} + \vec{bOB} + \vec{cOC})$$

که در آن،  $M$ ، مرکز دایره محاطی مثلث و  $O$ ، نقطه دلخواهی از فضاست (در اینجا،  $O$  را مرکز دایره محیطی مثلث می‌گیریم). بنابراین، داریم:

$$d^2 = \frac{1}{4p^2} [(a^2 + b^2 + c^2)R^2 + ab(2R^2 - c^2) +$$

$$\cos \varphi = \frac{|b^2 - a^2 - c^2 + 2h^2|}{2\sqrt{c^2 + h^2} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}}$$

(۲) اگر زاویه بین ضلع  $AB$  و قطر  $BC$  را  $\theta$  فرض کنیم، شبیه بالا، به دست می‌آید:

$$\cos \theta = \frac{|b^2 - a^2 - c^2|}{2c\sqrt{a^2 + h^2}}$$

مسأله ۷. زاویه‌های مسطحه کج  $SABC$  معلوم‌اند:

$$\widehat{BSC} = \alpha, \quad \widehat{CSA} = \beta, \quad \widehat{ASB} = \gamma$$

مطلوب است محاسبه (۱) سینوس زاویه بین پل  $SC$  و نیمساز زاویه (۲) اکسینوس زاویه بین نیمسازهای دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  (۳) کسینوس زاویه بین پل  $SC$  و تصویر قائم آن بر صفحه وجه (وبه روز).

حل.  $\vec{SC}_\gamma = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$  و  $\vec{SB}_1 = \vec{e}_2$ ،  $\vec{SA}_1 = \vec{e}_1$  بردارهای یکه می‌گیریم، که به ترتیب، درجهت نیم خطهای  $SB$ ،  $SA$  و  $SC$  قرار گرفته‌اند.

$$(1) \cos \varphi_1 = \frac{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_1 + \vec{e}_2|} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2 \cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$(2) \cos \varphi_2 = \frac{(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_2 + \vec{e}_1)}{|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| \cdot |\vec{e}_2 + \vec{e}_1|} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$$

(۳) تصویر نقطه  $C$  بر صفحه وجه  $ASB$  را  $C_2$  می‌نامیم. در این صورت، داریم:

$$\vec{SC}_\gamma = \vec{k}\vec{e}_1 + \vec{l}\vec{e}_2; \quad \vec{C}_1\vec{C}_2 = \vec{k}\vec{e}_1 + \vec{l}\vec{e}_2 - \vec{e}_2$$

$$\text{و چون } \vec{C}_1\vec{C}_2 \cdot \vec{e}_2 = 0 \text{ و } \vec{C}_1\vec{C}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0, \text{ بنابراین}$$

$$(\vec{k}\vec{e}_1 + \vec{l}\vec{e}_2 - \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 = 0, \quad (\vec{k}\vec{e}_1 + \vec{l}\vec{e}_2 - \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 = 0$$

## شكل بندی مسئله پروانه<sup>۱</sup>

ترجمه ابراهیم عادل

یادداشت ویراستار: این مقاله، روش‌های هندسی مختلف را که می‌توانند در بررسی یک مسئله تنها بکار گرفته شوند را بیان می‌کند. مؤلف مقاله وقتی که به تالیفی از برهانهای مختلف مسئله پروانه توسط کیدی‌تان (Kaidy Tan) از دانشگاه معلمین فوکین (Fukien Teacher's University, fochow-Fukien China) چین (Fukien Teacher's University, fochow-Fukien China) برخورد کرد، به تدوین یادداشت‌های تاریخی فراوان خود که راجع به موضوع بود تشویق شد. تمام این برهان‌ها در مقاله‌ها یا کتاب‌های دیگر چاپ شده بودند، این مقاله بیشتر آن‌ها را با بررسی زمینه‌های تاریخی‌شان خلاصه می‌کند.

یکی از مشکلات جاودانه هندسه اقلیدسی مسئله‌ای است که نام پروانه بر روی آن گذاشته شده است، چرا که ریاضی‌دان شاعر مسلک گمنامی در روایی خود موجودی به صورت حشره کوچک بالدار را در شکل یک مسئله ریاضی ترسیم کرده است. این وجه تسمیه (نام) اول بار به عنوان تیتر مسائل منتشره در مجله ریاضی (American Mathematical Monthly) در فوریه سال ۱۹۴۴ [۱]، ظاهر شد. و بتدریج جا افتاد و احتمالاً قسمتی از مقبولیت عامه مسئله مربوط به آن است. عشق من به پروانه در حدود سی سال پیش با طرح مسئله به صورتی که در زیر آمده در مجله «علم و ریاضی در مدرسه» شروع شد. من شیفتۀ مسئله شده و با تقارن غیرمنتظره‌ای که در یک ساختمان (شکل) آشکارا نامنظم خودنمایی می‌کرد تحریک شدم. با جستجو در کتابخانه غنی خود دو رامحل برای آن در نشریه Gentelman's Diary (این نشریه در قرون ۱۸ و ۱۹ در انگلستان

۱. ترجمه از مجله Mathematics Magazine شماره ۴، اکتبر سال ۱۹۸۷.

$$+bc(2R^2 - a^2) + ac(2R^2 - b^2)]$$

که، بعد از انجام عمل‌های لازم، به دست می‌آید:

$$d^2 = \frac{R^2(a^2 + b^2 + c^2)}{4p^2} + \frac{2R^2}{4p^2}(ab + bc + ac) -$$

$$-\frac{1}{4p^2}abc \cdot 2p = R^2 - \frac{abc}{2p},$$

و یا

$$d^2 = R^2 - \frac{4R \cdot S_{ABC}}{2p}$$

ولی  $S_{ABC} = pr$ ، بنابراین

$$d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

ثمر بخشی استفاده از بردارها، برای حل این مسئله، تردیدنا پذیراست.

X	X	X	
★	★		
★	★		
			X

تقسیم مربع

این مربع را به ۴ بخش با شکل‌های یکسان و اندازه‌های برابر، طوری تقسیم کنید که در هر یکی از یک ستاره و یک X قرار گیرد.

حل در صفحه ۲۵۴

می‌کند. با استفاده از هندسه دیبرستانی ثابت کنید:  $PN = MP$ .

### حل مسئله با روش‌های هندسی مقدماتی

ممکن است تصور شود که ساده‌ترین راه حل مسئله پروانه از ریاضیات دیبرستانی نشأة می‌گیرد. درست است که هر تازه وارد هندسه اقلیدسی بسادگی می‌تواند راه حل مقدماتی را درک و دنبال کند، ولی همان‌طور که بعداً نشان داده خواهد شد، روش‌های خیلی پیشرفته هندسه تصویری راه حل‌های بسیار (دلپسند) و میان‌بری را برای مسئله اعمال می‌کنند. بنا به گفته روجرجانسون (Roger Johnson) مؤلف کتاب هندسه مدرن «اثبات‌اتین قضیه ساده به‌طور شگفت‌انگیز مشکل است» هووارد - ایوز (Howard Eves) در کتاب اصول هندسه، [۶]، ضمن پذیرش این نظر می‌گوید «محدود کردن حل مسئله به استفاده از هندسه دیبرستانی حکمی بسیار دقیق و گیج‌کننده است» بهرحال اینکه با بررسی‌های فوق، موافق یا مخالف باشد، شروع با معیارهای اقلیدسی به دلایل آموزشی بهترین راه به نظر می‌رسد.

۹. راه حل ارائه شده در نشریه علم و ریاضیات در مدرسه (School Sci, and Math) چاپ شده در فوریه سال ۱۹۵۵ [۳]، (شکل ۱ را نگاه کنید) با رسم وتر  $RL$  به موازات  $AB$  و با وصل کردن پاره خط‌های  $LP$  و  $LN$  به‌طوری که در شکل نشان داده شده شروع می‌شود.

سپس با توجه به شکل خواهیم داشت:

$$\widehat{RPM} = \widehat{LPN} \quad \text{و} \quad \widehat{PRL} = \widehat{RLP} \quad \text{و} \quad RP = PL$$

علاوه بر این زاویه‌های  $LRS$  و  $LTS$  در چهارضلعی محاطی  $RLTS$  مکمل هم‌دیگرند و چون زاویه‌های  $LRS$ ،  $LTS$  و  $RLP$  برابرند، پس  $PNTL$  یک چهارضلعی محاطی است. از این‌رو زاویه‌های  $PLN$ ،  $PTN$ ،  $VTS$ ،  $PTN$ ،  $VRS$  و  $MRP$  باهم برابرند، درنتیجه مثلث‌های  $MPR$  و  $PNL$  هم نهشت (قابل انطباق)‌اند، خواهیم داشت  $MP = PN$ .

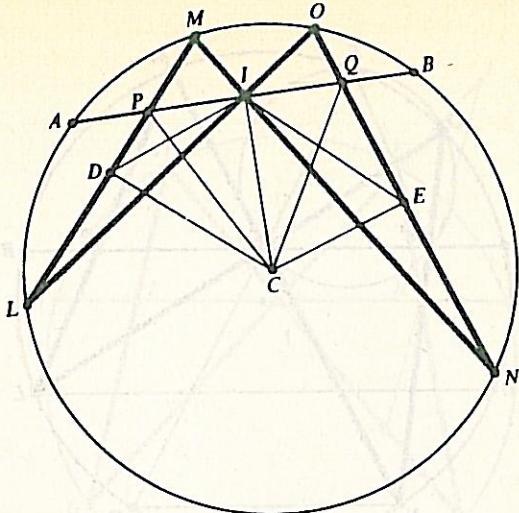
اگر شکل با وتر کمان  $AR$  کوچک‌تر از کمان  $TB$  رسم می‌شد، راه حل مطابق راه حل بالا عیناً ارائه می‌گردید فقط کلمه «مساوی» با کلمه «مکمل»

چاپ می‌شد، و در توسعه و می‌جوبیت ریاضیات در نزد مردم نقش مهمی داشت) پیدا کرد. مرجع [۲]، از این‌که یکی از راه حل‌ها متعلق به و. جی. هورنر (W.G. Horner) (روش هورنر مشهور است) بودشگفت‌زده شد. پاسخ او را خلاصه کرده و همراه با راه حل خودم به  $SSM$  سپردهم، مرجع [۴]، در بخشی راجع به مسئله که بادوست و مربی و معلم خودم چارلز (Charles) (داشتم، بدست آوردن مرجع‌های دیگری از (SSM) و (A.M.A) که در بالا ذکر شد، و همان‌طور راه حل دیگر در کتاب خندسه جدید جانسون (Johnson)، [۴]، آمده بود، خوشحالی من به‌اوج رسید. از یافتن تعداد متنوعی راه‌های زیبا و رویائی که در این مأخذ گیر آورده بودم متوجه شدم. بعضی از آن‌ها با استفاده از قضیه دزارگ (Desargus)، و بعضی از آن‌ها با استفاده از نسبت‌های متقاطع، و بقیه از قضیه مnelaues (Menelaues)، هندسه تحلیلی، مثلثات، هندسه اقلیدسی پیش‌رفته و روش‌های دیگر نشأه گرفته بودند که بعداً در دنباله مطلب به‌تمام این راه حل‌ها برخورد خواهد شد. در اینجا می‌خواهم نمونه‌هایی از نحوه برخوردم به مسئله پروانه را ارائه داده و راه خودم را با برگشت به تاریخ، توسعه‌ها و تغییراتی که تا حال یافته است دنبال بگنم و امیدوارم برخورد جامع به موضوع را که توسط (Leo Sa'uve') (ویراستار Leo Sa'uve' - Crux) که (Mathematicorum - Crux) خوانده می‌شد و در سال ۱۹۷۶ منتشر شده را باز هم توسعه دهم.

تحقیقات هر چند اندک من تماماً به‌دلیل بی‌نام بودن مسئله تا سال ۱۹۴۴ با شکل روبرو بود. به جای کوشش در جمع آوری منظم، آن‌ها را به ترتیب زمانی کشف‌شان ارائه خواهیم کرد، چنانی برخورد آزادانه و داستانی خواننده را قادر خواهد کرد که در طول راه به جای شگفت‌زدگی منفعل به شهودی پویا رهنمون شود.

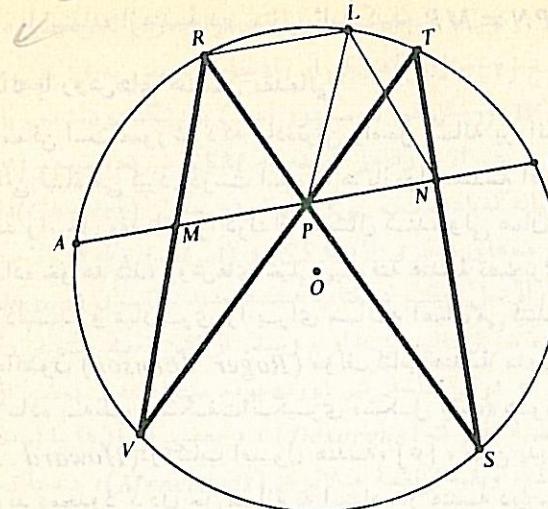
### صورت مسئله پروانه

در دایره  $(O)$ ، وسط وتر  $AB$  است. وترهای  $RS$  و  $TV$  از نقطه  $P$  می‌گذرند.  $AP$ ،  $RV$ ،  $ST$  را در نقطه  $M$ ، و  $PB$  را در نقطه  $N$  قطع



شکل ۲

۳. راه حل دوم در نشریه (Gentelman's Diary) توسط ریچارد تایلر (Richard Taylor) ارائه شده، و این را محل بر مبنای شکل شماره ۳ نشان داده شده است. دایره‌ای که بر سه نقطه  $I, O, Q$  قطع می‌گزند، دایره اصلی (صورت مسئله) را در نقطه  $O$  و  $S$  قطع می‌کند، امتداد  $SQ$  دایره بزرگتر را در نقطه  $D$  قطع می‌کند. چون زاویه‌های  $\widehat{QIO}$  و  $\widehat{SOD}$  برابرند پس  $\widehat{DL}$  با  $\widehat{AB}$  موازی است. چون زاویه‌های  $\widehat{BDO}$  و  $\widehat{OSD}$  برابرند پس  $\widehat{DF}$  با  $\widehat{NL}$  هم با  $\widehat{DL}$  و هم با  $\widehat{AB}$  موازی است. از آن جایی که  $I$  بر عمود منصف  $NF$  واقع است، نتیجه می‌گردد  $\widehat{SIN} = \widehat{MIF}$  و  $\widehat{SNM} = \widehat{SFN}$ . پس با  $\widehat{IN} = \widehat{IF}$ ، مثلث‌های  $ISN$  و  $MFI$  هم نهشت (قابل انطباق) اند، در نتیجه  $IS = IM$  و  $SI = MI$ . و سرانجام، در مثلث‌های هم نهشت (قابل انطباق)  $IPM$  و  $ISQ$ ،  $IP = IS$ ،  $IQ = IQ$  از این رو هم نهشت (قابل انطباق)  $APB$  و  $QAQ$ . و حل کننده مسئله در پایان این یادداشت را آورده که هر گاه  $P$  و  $Q$  در بیرون دایره واقع بشوند، حل او باز درمورد مسئله قابل اجراست. تفسیر مسئله در نشریه (Educational Times)

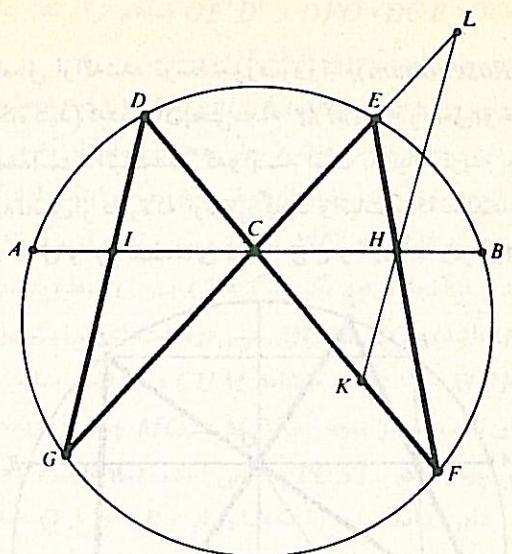


شکل ۱

جا یگرین می‌شد در هرجای مسئله که آمده است. به علاوه یک برخورداری دیگر اینکه  $RT$  و  $VS$  و تر  $AB$  را در نقطه‌های به فاصله‌های برابر از  $P$  قطع می‌کنند.

۴. نشریه (Gentelman's Diary)، چاپ سال ۱۹۱۵، صفحه ۳۹ شامل دو راه حل است. راه حل اول توسط هورنر (Horner) که در شکل شماره ۲ نشان داده شده، نام‌گذاری نقطه‌های روی شکل عیناً مطابق راه حل ارائه شده در نشریه فوق است.

فرض کنید  $D$  و  $E$  به ترتیب وسطهای  $ON$  و  $ML$  باشند. چون  $DI$  و  $IE$  میانه‌های نظیر دو مثلث متشابه  $CIN$  و  $MLI$  هستند، زاویه‌های  $ICEQ$  و  $PDI$  باهم برابرند. حال چهارضلعی‌های  $ICQ$  و  $DCIP$  هر کدام معاطی اند، و بنابراین زاویه  $\widehat{QEI}$  برابر با زاویه  $ICQ$  است، و زاویه  $PDI$  با زاویه  $PCI$  برابر است. از این رو زاویه‌های  $\widehat{ICQ}$  و  $\widehat{PCI}$  برابرند، و در نتیجه مثلث‌های قائم الزاویه  $ICP$  و  $ICQ$  دوم مثلث هم نهشت (قابل انطباق) اند، پس  $IP = IQ$ .



شکل ۴

$$\frac{KH}{HC} = \frac{DI}{IC} \quad \text{و} \quad \frac{LH}{HC} = \frac{GI}{IC}$$

$$\frac{KH \cdot LH}{HC^2} = \frac{DI \cdot IC}{IC^2}$$

پس

$$DI \cdot IC = AC^2 - IC^2 \quad \text{و} \quad KH \cdot LH = AC^2 - HC^2$$

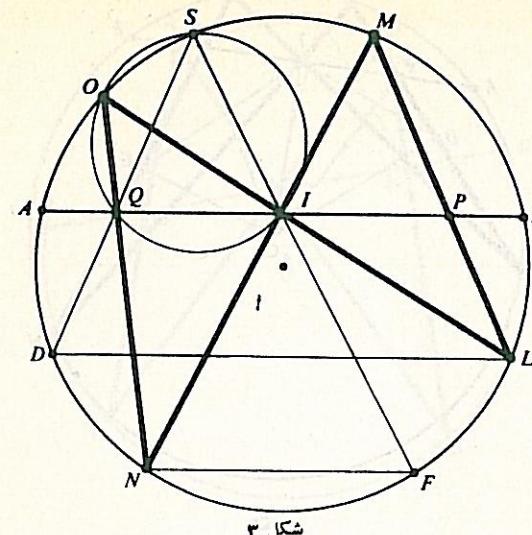
اما :

$$\frac{AC^2}{HC^2} = \frac{AC^2}{IC^2}$$

است. بنابراین:

$$HC^2 = IC^2 \Rightarrow HC = IC$$

به غیر از تغییرهای ناچیزی در نماد گذاری نقطه‌های روی شکل، راه حل مشابه بالا توسط و. ای بوخر (W. E. Baker) راه حل شماره ۲ برای مسئله ۵۷۱ در مجله (American Mathematical Monthly) در فوریه سال ۱۹۶۴ [۱]، آمده است. و همین طور راه حل مشابهی توسط



شکل ۵

مسئله ۱۵۴۹، ۷ و ۸ آمده است.

۴. یکی دیگر از حل‌های قدیمی مسئله پروانه در کتاب کمیاب مسئله‌های هندسی (Miles Bland) (Geometrical Problems) توسط میلز بلند (Miles Bland) [۹]، آمده است. در شکل شماره ۴، وسط AB است I و H به ترتیب نقطه‌های تلاقی GD و EF با KHL آنده AB به موازات DG رسم شده، و HFK را در K و امتداد GE را در L قطع می‌کند. چون زاویه‌های، DF و HLF و CGI با هم برابرند، پس مثلثهای HKF و LEH و CGI دارای زاویه‌های برابرند، و

$$\frac{LH}{HE} = \frac{HF}{HK}$$

بنابراین

$$HE \cdot HF = LH \cdot HK = AH \cdot HB = (AC + CH)(AC - CH)$$

و به همین استدلال، مثلثهای CHK و CID دارای زاویه‌های برابر و مثلثهای CHL و CIG نیز دارای زاویه‌های برابرند، پس:

واز اینجا نتیجه می‌شود که  $O$ ،  $C$  و  $G$  و  $F'$  هم دایره‌اند و زاویه‌های  $OF'D$ ،  $DCE$ ،  $OCG$ ،  $OF'G$  واقع است و این تصویر نقطه  $H$  می‌باشد.

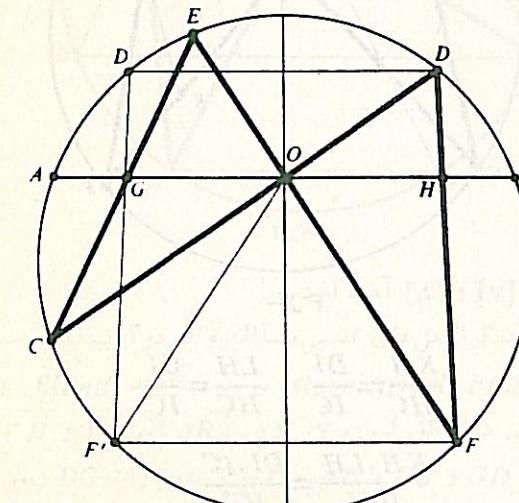
۶. مانیس چاروش (*Mnisi Charosh*) [۱۱]، راه حل بسیار جالبی را بر مبنای قدری پیش‌رفت تر هندسه یعنی محور اصلی از آن می‌دهد. با مراجعت به شکل بی‌نیاز از توضیح ۶، ما درابتدا باید  $C'$  را محاسبه کنیم، به طوری که  $MC' = MD$  باشد، و سپس ثابت کنیم که  $PS$  از نقطه  $C'$  عبور می‌کند و از آنجا نتیجه بگیریم که  $C'$  بر  $C$  منطبق است. فرض کنید  $MU = MQ$  و  $MT = MR$  باشد، و  $MU = MQ$ . سپس در مثلث‌های هم نهشت (قابل انطباق)  $MQR$  و  $TUM$ ، مثلث‌های متشابه  $CUM$  و  $DQM$  با هم، هم نهشت (قابل انطباق) است، که در نتیجه آن  $MC = MD$  چون زاویه‌های  $Q$  و  $U$  برابرند، پس چهار ضلعی  $PUST$  محاطی است. که دایره محیطی آنرا  $O'$  می‌نامیم. در دایره داده شده، نقطه‌های  $A$ ،  $R$ ،  $B$ ،  $R$  و  $Q$  هم‌دایره‌اند. از این رو نقطه‌های  $ARBQ$ ، قرینه  $ARBU$  نسبت به مرکز تقارن  $M$  است، و چهار نقطه هم دایره‌اند. این دایره را  $O''$  بنامید حال محورهای اصلی  $AB$ ،  $UT$  و  $PS$  سه دایره ( $O$ ) و ( $O'$ ) و ( $O''$ ) می‌دانیم که متقابل‌ند. سرانجام، چون  $UT$  و  $AB$  از نقطه  $C$  می‌گذرند،  $PS$  نیز باید از نقطه  $C$  پگذرد. از این رو  $CM = MD$ .

راه حلی مشابه با راه حل چاروش (*Charosh*)، که در برگیرنده نقطه تلاقی سه محور اصلی دایره‌های دارد [۱۲] چاپ شده است. وقت گذارنی؛ با انواع بیشمار دلیل‌های اقلیدسی کسل‌کننده و بی‌حاصل است و به عنوان یک مثال اضافی کافی است که اصل اساسی حل مسئله را توضیح دهیم، که کراراً در فهرست مراجع مربوطه یافت می‌گردد.

۷. راه حل توسط ایل برگ (Eilberg) در *SSM*، ژانویه سال ۱۹۵۵ [۱۳]، با رسم وتر  $Ty$  به موازات  $AB$  شروع می‌گردد (شکل ۷). زاویه  $PYR$  (که برابر با مجموع زاویه‌های  $PYT$  و  $TYR$ ) است، اندازه‌ای برابر با  $\frac{\widehat{AV} + \widehat{BT} + \widehat{TP}}{2}$  دارد. و همچنین زاویه  $PMR$  نیز اندازه‌ای

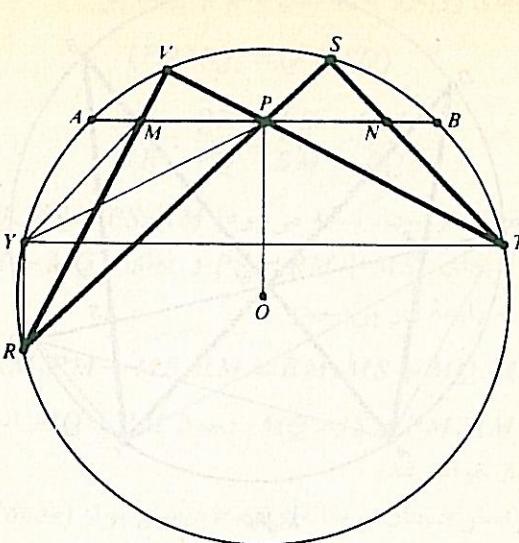
ککستر (Coxter) و گریتزر (Gritzer)، در کتاب بازنگاری هندسه آمده است [۱۰].

۵. راه حل ارائه شده توسط جوزف روزنbaum (Joseph Rosenbaum) (Buker) (شکل ۵) نگاه کنید که در همان بخش مجله *AMM* که راه حل بوخر (Buker) در مثال بالا آمده است، اثبات شده که اثبات قرینه بودن  $D'F'$  و  $DF$  نسبت به قطری از دایره که از  $O$  می‌گذرد و اثبات اینکه نقاطهای  $OGCF$  هم دایره‌اند، که  $G$  و  $H$  نقطه‌های تلاقی  $CE$  و  $DF$  با وتر  $AB$  است.



شکل ۵

روزنbaum (Rosenbaum) این ادعا را با استفاده از کاربرد «زاویه‌های جهت‌دار» ثابت کرد، که توسط جانسون (Johnson) در صفحه ۱۵ - ۱۱ [۴]، آمده است. و این بسیار مفید است، و با مفهومی گمراه کننده، شاید برای درک مشکل باشد. به منظور سادگی مطلب، اینجا یک روش توضیحی ارائه می‌گردد که به تنهائی توسط هر کس آشنا باشد کتاب مقدماتی اقلیدس قابل درک است. با توجه به زاویه‌های متقابل به رأس و تقارن، زاویه‌های  $BOF'$  و  $FOA$ ،  $EOB$  و  $AOF$  برابرند. حال به آسانی دیده می‌شود که زاویه‌های  $\widehat{GOF}' = \widehat{ECF}' = \widehat{BOF}'$  و  $EOB$  و  $EFF'$ ،  $ECF'$  برابرند، از این رو  $\widehat{GOF}' = \widehat{ECF}' = \widehat{BOF}'$  برای دایره که از  $O$  می‌گذرد.



شکل ۷

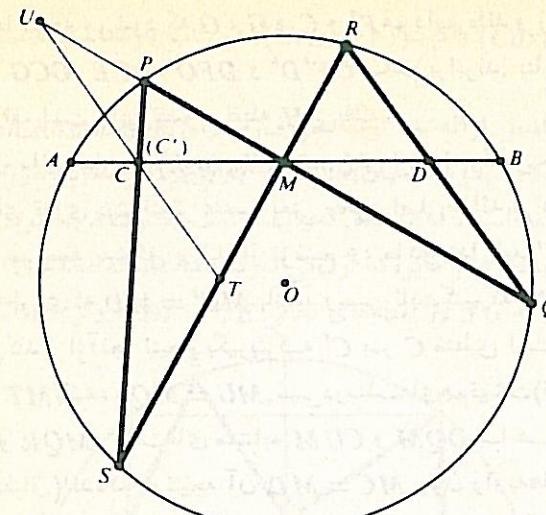
مجموعه‌متنوعی راجع به مسئله پروانه را می‌توان در منابع قابل دسترس [۲۱]، [۲۲]، [۲۳]، [۲۴]، [۲۵] و [۲۶] یافت.

#### حل با استفاده از مثلثات

این روش اثبات مسئله در کتاب عینسه دانشگاهی توسط میلر (*Miller's College Geometry*)، [۲۷]، با ترکیبی از مثلثات واستفاده از نسبت‌های متقاطع که به صورت، نسبت‌های توافقی، نسبت‌های ناهمساز و یا نسبت‌های مضاعف شناخته شده‌اند، ارائه شده است. در شکل شماره ۸، نسبت متقاطع دستگاه توافقی تعریف شده ( $PRMQ$ )، به صورت:

$$\frac{PM}{MR} = \frac{PQ}{QR}$$

اما:



شکل ۸

برابر با ترکیبی از همین کمان‌ها را دارد. بنابراین زاویه‌های  $PYR$  و  $PMR$  باهم برابرند و چهارضلعی  $MPRY$  قابل محاط شدن در یک دایره است. بنابراین:

$$\widehat{NTP} = \widehat{MRP} = \widehat{MYP}$$

پس مثلث‌های  $PTN$  و  $PYM$  هم نهشت (قابل انطباق)‌اند، چون  $\widehat{APY} = \widehat{NPT}$  و  $PY = PT$  خواهد شد.

هر کسی که یک حل جدید برای مسئله را جستجو می‌کند، از این دنباله جالب و اساسی که بررسی شده می‌تواند، با تصویر بعضی از قسمت‌های شکل اصلی، چهار ضلعی محاطی بدردیخوری را مشخص کند، سپس از دو مثلث هم نهشت (قابل انطباق) برقراری، برای بودن دو ضلع خواسته شده را بررسی کند. مرجع‌هایی که شامل راه حل‌های مشابه‌اند، تماماً از نمونه‌های اصلی جدا شده‌اند عبارتند از: [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]، [۱۷]، [۱۸]، [۱۹] و [۲۰].

چون زاویه‌های رو به رو به یک کمان باهم برابرند، پس:

$$(PRMQ) = (PMSQ)$$

$$\frac{PM}{MR} \cdot \frac{QR}{PQ} = \frac{PS}{SM} \cdot \frac{QM}{PQ}$$

و

چون  $PM = MQ$  است، نتیجه می‌شود:  $RQ \cdot MS = PS \cdot RM$ . و چون  $RQ = RM + MQ$  در رابطه بالا بجای  $PS = PM + MS$  و بجای: قرار دهیم، به رابطه زیر می‌رسیم:

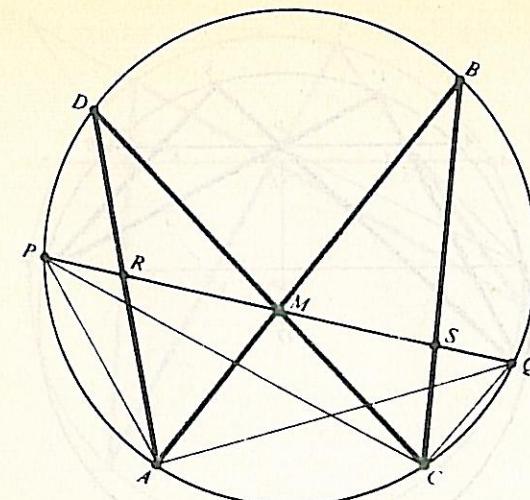
$$RM \cdot PM + MS \cdot RM = RM \cdot MS + MQ \cdot MS$$

یا اینکه:  $MQ = PM$ ، و چون  $MQ \cdot MS = PM \cdot RM$  است درنتیجه  $MS = RM$  خواهد شد.

این راه حل همچنان در مقاله‌ای توسط دیکسن جونز (Dixon Jones) تحت عنوان «قضیه مضاعف پروانه» در [۲۵] آمده است.

حل با استفاده از هندسه تحلیلی  
یک روش بد استفاده کردن از هندسه تحلیلی قدرتمند دکارت (Descarte's)، در نظر گرفتن دستگاه محورهای مختصات قائم، به طوری که وتر  $AB$  منطبق بر محور  $y$ ها و محور  $x$ ها، منطبق بر قطری از دایره که از وسط این وتر می‌گذرد، می‌باشد. در این صورت می‌توان معادله دایره را نوشت، و سپس مختصات نقطه‌های تلاقی، و تراهنی که از مرکز مختصات می‌گذرند را با دایره پیدا کرد، بدین ترتیب مختصات نقطه‌های  $D$ ،  $E$ ،  $C$ ،  $F$  و  $Q$  مشخص می‌شوند، که معادله‌های پاره خط‌های  $DE$  و  $FC$  با معلوم بودن مختصات دو نقطه از این پاره خط‌ها مشخص می‌شود، که اگر طول از مبدأ این خطها یعنی  $DE$  و  $FC$  را مشخص کنیم، طولهای نقطه‌های  $P$  و  $Q$  به دست می‌آید.

بعد از انجام دادن تعدادی عمل‌های با مهارت در ساده کردن عبارت‌ها، ثابت می‌شود که  $P$  و  $Q$  از نقطه  $M$  به یک فاصله‌اند.  
(روش بالا تاحدودی یک راه مطرود است، فقط به ریاضی دانان توصیه



شکل ۸

$$\frac{PM}{MR} = \frac{\frac{PM}{AM}}{\frac{MR}{AM}} = \frac{\frac{\sin \widehat{PAM}}{\sin \widehat{MPA}}}{\frac{\sin \widehat{RAM}}{\sin \widehat{MRA}}}$$

نسبت مشابهی را برای  $\frac{PQ}{QR}$  پیدا کنیم، خواهیم داشت:

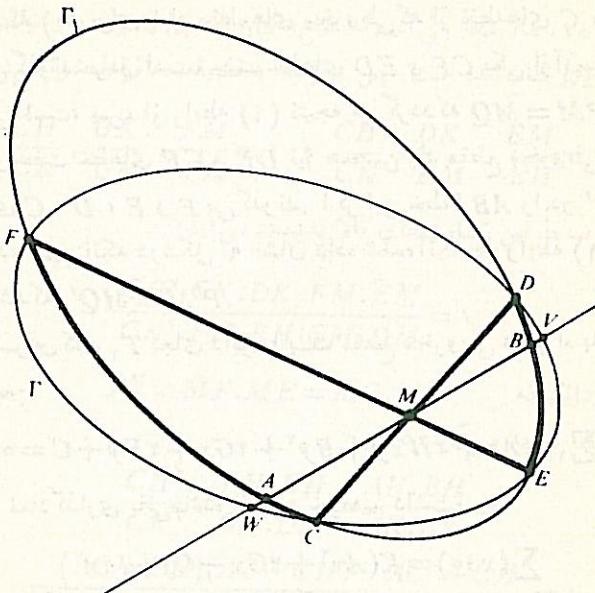
$$(PRMQ) = \frac{\frac{\sin \widehat{PAB}}{\sin \widehat{BAD}}}{\frac{\sin \widehat{PAQ}}{\sin \widehat{QAD}}}$$

با روش مشابه بالا، نتیجه می‌شود که:

$$(PMSQ) = \frac{\frac{\sin \widehat{PCB}}{\sin \widehat{BCD}}}{\frac{\sin \widehat{PCQ}}{\sin \widehat{QCD}}}$$

معادله دایره به صورت:  $\Sigma_1 \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$  خواهد بود. چون خطهای  $EF$  و  $CD$  از مبدأ مختصات می‌گذرند، مقطع مخروطی تجزیه شده و همگن  $T_2$  را به وجود می‌آورند، که معادله آن به فرم زیر است:

$$\Sigma_2 \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

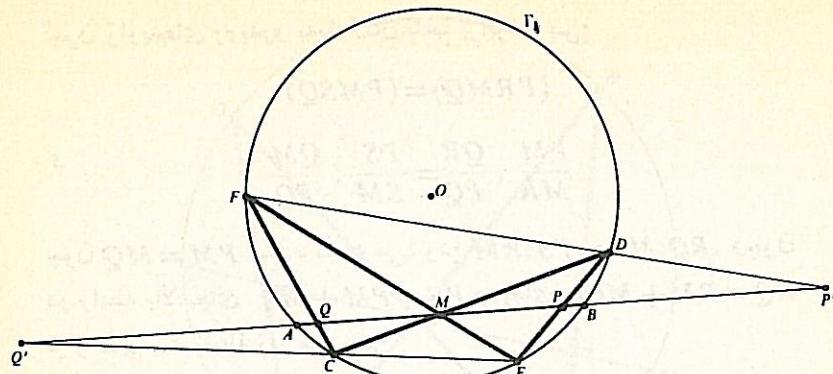


شکل ۹ ب

حال برای هر  $k$  و  $l$  دلخواه، معادله:  $\Sigma \equiv k\Sigma_1 + l\Sigma_2 = 0$  نشان دهنده یک مقطع مخروطی است که از نقطه های مشترک  $T_1$  و  $T_2$ ، یعنی از نقطه های  $C$  و  $F$  می‌گذرد، و هر مقطع مخروطی که براین چهار نقطه یعنی  $C$  و  $E$ ،  $D$  و  $F$  بگذرد نمایشی به فرم بالا دارد.  
فرض کنید مقطع مخروطی  $\Sigma \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  را در نقطه های  $V$  و  $W$  قطع کند. معادله وتر  $AB$  برابر است با  $y = 0$ ؛

$$\Sigma_2(x_{\infty}) = x^2 + d^2 - r^2 = 0$$

از این رو طول های، نقطه های  $V$  و  $W$  ریشه های معادله  $\Sigma \equiv (x_{\infty})^2 + d^2 - r^2 = 0$  اند،



شکل ۹ c

می‌شود که با علاقه ولذت و عشق به ریاضی به مسأله توجه دارند). دلیل منطقی تر برای کاربرد هندسه تحلیلی را می‌توان در «ایثات ساده قضیه پروانه» توسط ک. ساتی یانارایانا (K. Satyanarayana) در [۲۸] پیدا کرد. مؤلف روش حل خود را در ابتدا در وضعیت روش گفته شده در پاراگراف بالا در نظر می‌گیرد، و بعداً تصور (ایده) خود را در مقطع های مخروطی دیگر مطرح می‌کند، و ثابت می‌کند قضیه پروانه نه فقط در مورد دایره، بلکه تعمیم قضیه در مورد مقطع های مخروطی دیگر صادق است. روش او در (Crux Mathematicorum) چاپ شده است، و چون مقاله‌ای است بسیار جامع و مختصر، احتیاجی به اینکه مقاله مورد نظر به اختصار بیان شود نیست، و در اینجا استدلال او جمله به جمله نقل می‌گردد.

#### قضیه پروانه

از نقطه  $M$  وسط وتر  $AB$  از دایره ای مفروض، دو وتر  $EF$  و  $CD$  را به ترتیب در نقطه های  $P$  و  $Q$  قطع می‌کنند. ثابت کنید:  $PM = MQ$ .

ایثات: فرض کنید  $T_1$  دایره داده شده باشد. دستگاه مختصات قائم را، به مبدأ  $M$ ، محور  $x$ ها منطبق بر  $AB$  و محور  $y$ ها منطبق بر  $M$  در نظر می‌گیریم، که  $(d, 0)$  مرکز دایره است. اگرشعاع دایره برابر با  $r$  باشد،

در بخش ۶ از کتاب هوارد ایوز (*Howard Eves*) [۳۶]، آمده است.

### حل با استفاده از تئوری خطهای متقاطع

در سال ۱۹۱۹، در نشریه علم در مدرسه و ریاضیات راه حلی بر مبنای کاربرد قضیه منلائوس (*Menelaus*) [۲۹]، ارائه شده است. با جریان به شکل ۱، ملاحظه می‌کنیم که ضلعهای مثلث  $HMK$ ، بدوسیله خطهای  $DE$  و  $FG$  قطع شده است. پس با توجه به قضیه منلائوس خواهیم داشت:

$$\frac{CH}{CK} \cdot \frac{GK}{GM} \cdot \frac{FM}{FH} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{CH}{CK} \cdot \frac{DK}{DM} \cdot \frac{EM}{EH} = 1$$

و از ضرب طرفین تساوی‌های بالا بدست می‌آید:

$$\frac{CH^2 \cdot GK \cdot DK \cdot FM \cdot EM}{CK^2 \cdot FH \cdot EH \cdot GM \cdot DM} = 1$$

ولی می‌دانیم که  
و از اینجا نتیجه می‌گردد که:

$$\begin{aligned} \frac{CH^2}{CK^2} &= \frac{FH \cdot EH}{GK \cdot DK} = \frac{AH \cdot BH}{AK \cdot BK} = \\ &= \frac{(AC + CH)(AC - CH)}{(AC + CK)(AC - CK)} = \frac{AC^2 - CH^2}{AC^2 - CK^2} = 1 \end{aligned}$$

واز این رابطه به آسانی نتیجه می‌شود که:  $CH = CK$ .  
این را حل عیناً مطابق با راه حلی است که در متن کتاب فرانسه زبان تمرینات هندسه (*Exercices de Géométrie*) چاپ سال ۱۹۰۷ آمده است.

### حل مسئله با استفاده از تقسیم توافقی

جان کیسی (*John Casey*) در کتاب همراه با اقلیدس چاپ ششم، تجدیدنظر شده، سال ۱۸۹۲ [۳۳]، شامل حالت بسیار جالبی از مسئله پروانه به صورت زیر است.  
اگر از نقطه  $O$  وسط هر وتری مانند  $AB$  از یک دایره، دو وتر دیگر  $DF$  و  $CE$  رسم شده باشند، و اگر خطهای  $ED$  و  $CF$  که انتهای های دو وتر

که معادله به صورت:  $K(x^2 + d^2 - r^2) + lax^2 = 0$  در می‌آید.

چون معادله بالا جمله درجه اول نسبت به  $x$  را ندارد، بنابراین مجموع دو ریشه معادله برابر با صفر است، بنابراین:  $\overline{MV} + \overline{MW} = 0$

$$VM = MW \quad (1)$$

حال رابطه (۱) برای تمام مقطع‌های مخروطی که از نقاطهای  $C$ ،  $D$  و  $F$  می‌گذرند صادق است، جفت خطهای  $ED$  و  $CF$  یکی از آن مقطع‌های مخروطی است، پس، از رابطه (۱) نتیجه می‌گردد که

$PM = MQ$  و جفت خطهای  $DF$  و  $CE$  نیز همچنین یک مقطع مخروطی اند که از نقاطهای  $C$ ،  $D$  و  $F$  می‌گذرند. اگر این خطها را در  $P'$  و  $Q'$  قطع کنند، همچنانکه در شکل ۹ نشان داده شده، آنگاه از رابطه (۱) نتیجه خواهد شد که  $P'M = MQ'$ .

فرض کنید  $T$  بجای دایره، یک مقطع مخروطی دلخواه به معادله زیر باشد:

$$\sum_1 \equiv Ax + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$$

با همان نمادگذاری باقی مانده از قبل، خواهیم داشت:

$$\sum(x\omega) = K(Ax^2 + 2Gx - C) + lax^2$$

اگر مختصهای  $A$  و  $B$  بترتیب بصورت،  $(\omega\omega) - (\omega\omega)$  باشند، آنگاه

$$\sum(-\alpha\omega) = \sum(\alpha\omega) = 0$$

دلالت بر این دارد که  $G = 0$  است، بنابراین معادله  $\sum(x\omega) = 0$  جمله درجه اول ندارد، و بقیه اثبات مسئله عیناً قبلی است که ما اثبات کردیم.

### تعمیم قضیه مسئله

از نقطه  $M$  وسط وتر  $AB$  از مقطع مخروطی  $T$ ، دو وتر دیگر  $CD$  و  $EF$  رسم شده‌اند. مقطع  $T$  که بر نقاطهای  $C$ ،  $D$ ،  $E$  و  $F$  می‌گذرد وتر  $AB$  را در نقاطهای  $V$  و  $W$  قطع می‌کند. ثابت کنید  $VM = MW$ . این مسئله در شکل ۹ الف نشان داده شده. اثبات این قضیه با کمک هندسه تصوری

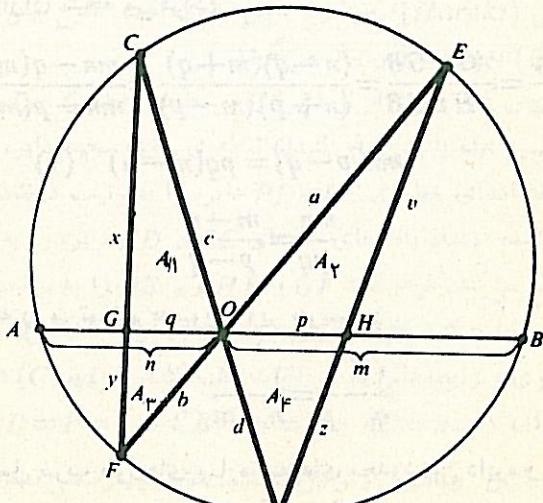
از پرانتز قرار داد. و به صورت  $F(ADCH)$  نوشته.

وقتی که اساس نسبت‌های توافقی درک شده است، لازم نیست که به هنگام کار برداشان در مسئله‌ها آن‌هارا ثابت کنیم، یعنی درست مانند قضیه فیثاغورث که به هنگام نیاز در مسائل، اثبات آن را نمی‌آوریم، در نتیجه خلاصه‌ای از نسبت‌های توافقی را در دست داریم که در موارد بی‌شمار از آن استفاده می‌کنیم.

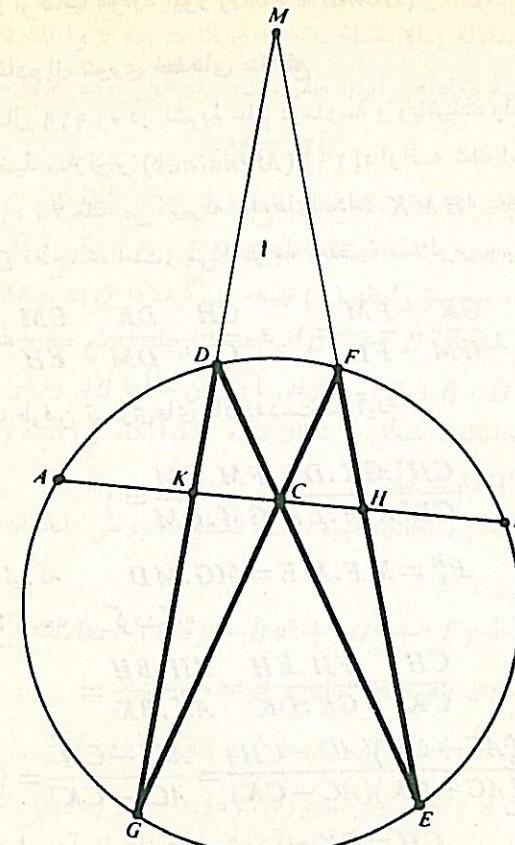
#### یک قضیه جالب توجه

در پاورقی کتاب هندسه مدرن، راجر جانسون (Roger Johnson)، راجرجانسون (A. Cady) که در کتاب [۴]، یک گفтар جالب توجه توسط آن‌که (Annals of Mathematics)، چاپ سال ۱۸۹۶ [۳۴]، نیز آمده است. به دلیل در دسترس همه نبودن، این گفтар جالب، مطالب مربوط به منظور اصلی یعنی قضیه پروانه در اینجا داده شده است، که برای ساده‌تر بودن فهم مسئله، توضیح می‌دهیم.

نقطه  $O$  در هر جای وتر  $AB$  بدلخواه انتخاب شده و وترهای  $CD$  و



شکل ۱۱



شکل ۱۰

را بهم وصل کرده‌اند و تر  $AB$  را در نقطه‌های  $G$  و  $H$  قطع کنند، آنگاه  $OG = OH$ .

حل: دستگاه‌های توافقی،  $(F.ADCH) = (E.ADCB)$  است. بنابراین نسبت توافقی نقطه‌های  $A$ ،  $O$ ،  $G$  و  $B$  با نقطه‌های  $E$ ،  $O$  و  $H$  برابرند. و چون  $AO = OB$ ، در نتیجه  $OG = OH$ . راه حل بالا عیناً گفته‌های بدون کم و کاست جان‌کیسی است. و توجه داریم که در نمادگزاری دیگر رأس دستگاه توافقی را می‌توان بیرون

بیان قضیه کنده (Candy) نقطه  $O$  در هر جای و تر  $AB$  در نظر گرفته می‌شود. در حالت خاص که  $O$  وسط  $AB$  باشد،  $m-n=0$ ، و از رابطه (۱) بدست می‌آید،  $mn(p-q)=0$ . بنابراین  $p-q=0$  و در نتیجه  $p=q$  خواهد شد.

از مقاله کنده (Candy)، حالت‌های دیگری نیز نتیجه می‌گردد، که به مقاله ما مربوط نمی‌باشند. حل ارائه شده، در اینجا برای قضیه خاص کلاسیک پروانه، در [۳۵]، تجدید چاپ شده در [۵]، آمده است، نتیجه داده شده در رابطه (۲) به ویژه بسیار مفید است. برای حل مسئله «پروانه سه بال»، ارائه شده در مجله (Mathematics Magazin)، در ماه مارس سال ۱۹۸۴، توسط ار. اس. لوتار (R. S. Luthar)، که با دو راه حل در مقاله مارس ۱۹۸۵، در [۳۶]، چاپ شده.

راه حل ارائه شده توسط جردی دو (Jordi Dau) با استفاده از نسبت‌های توافقی (توصیف شده در قبل) از (Casey's Sequalto Euclid) راه حل دوم، توسط تیبریو (Tiberio)، با استفاده از قضیه هاروکی (Haruki)، جزئی از مقاله هانزبرگر (Hansberger) در [۱۴]، قضیه هاروکی (Haruki)، موضوع بخش بعدی است. طرح پیش‌نهادی لوتار (Luthar) به صورت زیر بیان می‌گردد.

فرض کنید وتر  $AB$  از دایره  $O$  توسط دو نقطه  $C$  و  $D$  به سه قسمت برابر تقسیم شده باشد. فرض کنید  $O$  نقطه‌ای روی محیط دایره (جزء  $BG$  و  $F$ ) باشد. امتدادهای خطهای  $PC$  و  $PD$  دایره را به ترتیب در نقطه‌های  $E$  و  $F$  قطع می‌کنند، امتداد یافته‌های خطهای  $EC$  و  $FD$  دایره را به ترتیب در  $G$  و  $H$  قطع می‌کند. فرض کنید  $GF$  و  $HE$  و تر  $AB$  را به ترتیب در  $L$  و  $M$  قطع کنند. ثابت کنید  $AL = BM$  (شکل ۱۲ را نگاه کنید). با استفاده از نمادگذاری و رابطه‌هایی که در اثبات قضیه کنده (Candy) داشتیم، فرض می‌کنیم که،  $AC = n = 1$ ،  $CB = m = 2$ ،  $CD = P = 1$ ،  $DB = q = \frac{2}{3}$ . و با همین روش کار برد نسبت‌ها در چهارضلعی قطع شده  $PFHE$ ،

نتیجه می‌دهد که  $DM = \frac{2}{3}AC = DB$ . از اینجا چون  $AC = DB$  است نتیجه می‌شود

که از نقطه  $O$  می‌گذرند رسم شده‌اند، و ترها  $CF$  و  $ED$  و تر  $AB$  را به ترتیب در نقطه‌های  $G$  و  $H$  قطع می‌کنند (شکل ۱۱).

فرض کنید،  $A_1, A_2, A_3, A_4$  دلالت بر مساحت‌های مثلث‌های، به ترتیب،  $ODH$ ،  $GOF$ ،  $EOH$  و  $CGO$  می‌کند.

فرض می‌کنیم:  $OB = m$ ،  $OA = n$ ،  $OH = p$  و  $OG = q$

$OE = a$  و  $OF = b$  و  $OC = c$  و  $OD = d$  و  $CG = x$

$GF = y$  و  $EH = v$  و  $HD = z$

پس، چون  $\hat{F} = \hat{D}$  و  $\hat{C} = \hat{E}$  و به همین ترتیب:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{cx}{av} \text{ و } \frac{A_1}{A_4} = \frac{Cq}{dp} \text{ و } \frac{A_2}{A_4} = \frac{dq}{ap}$$

و از اینجا نتیجه می‌گردد که:

$$\frac{A_1 A_2}{A_2 A_4} = \frac{bcq^2}{adp^2} = \frac{bcxy}{advz}$$

که در نتیجه از آن نتیجه می‌گردد:

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{xy}{vz} = \frac{AG \cdot GB}{AH \cdot HB} = \frac{(n-q)(m+q)}{(n+p)(m-p)} = \frac{mn - q(m-n) - q^2}{mn - p(m-n) - p^2}$$

و از اینجا: (۱)

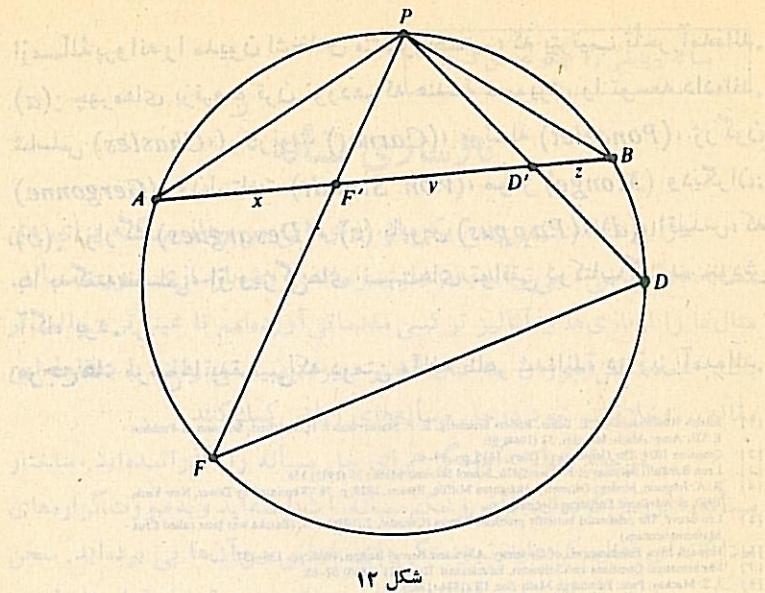
$$\frac{mn}{pq} = \frac{m-n}{p-q}$$

که این رابطه را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$(2) \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

بنابراین حاصل ضرب طول‌های پاره خط‌های محدود بین دایره و دو وتر، متناسب است. با تفاضل (یا مجموع) آن طول‌ها.

قضیه پروانه نتیجه بسیار ساده از این قضیه کلی و زیباست، چون در



شکل ۱۲

از همین رو، نسبت‌های توافقی متناظر با دستگاه‌های توافقی  $P'(AF'D'B)$  یا  $P(AF'D'B)$  نیز ثابت می‌مانند. پس خواهیم داشت:

$$\frac{F'A}{F'D} = \frac{BA}{BD'} = \frac{xz}{ym}$$

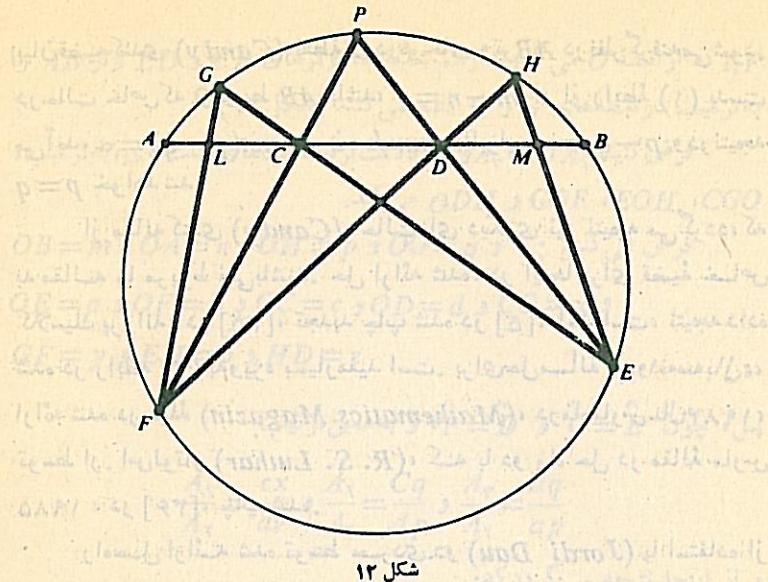
یا به طور کلی:  $\frac{x'z'}{y'm'}$

بنابراین قضیه هاروکی، جوهر همان قضیه شاسلس (Chasles) است، که:

اگر  $A, C, B$  و  $D$  چهار نقطه ثابت از یک مقطع مخروطی باشند، و اگر  $P$  نقطه‌ای متغیر از مقطع باشد، آنگاه نسبت توافقی دستگاه  $P(ABCD)$  مستقل از موقعیت نقطه  $P$  روی مقطع مخروطی است.

[۳۷]، را نگاه کنید. کاربرد قضیه شاسلس و یا لم هاروکی، در مسئله پروانه بدیهی است.

بعضی از توصیه‌های ارزشمند از سردبیر مجله *Mathematics Magazin* در پایان مسئله «پروانه‌سه بال» در [۳۶]، آمده است و مالذت خود



شکل ۱۳

که:  $AL = MB$  (Haruki's Lemma).  
لم هاروکی، ارائه شده در [۱۴]، بیان می‌کند که: اگر  $AB$  و  $FD$  وترهای نامتناطع از یک دایره باشند، و اگر  $P$  نقطه متغیری روی کمان  $AB$  خارج از  $F$  و  $D$  باشد، آنگاه برای هر موقعیت نقطه  $P$ ، خط‌های  $PF$  و  $PD$  و تر  $AB$  را در سه پاره خط بطولهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  قطع می‌کنند، که  $\frac{xz}{y}$  مقداری است ثابت. (شکل ۱۳ را نگاه کنید). اثبات هاروکی مختصر و

شرح کوتاهی دارد.  
اثباتات متناظر با استفاده از نسبت‌های توافقی نسبتاً آسان است. فرض می‌کنیم  $AB = m$  و  $PB = n$  و  $PA = p$ . فرض می‌کنیم  $AB$  خط  $PD$  را در نقطه  $D'$  قطع کند. چون زاویه‌های  $FPD$ ،  $APF$  و  $DPB$  وقی که نقطه  $P$  طول قوس  $AB$  را می‌پیماید ثابت می‌مانند، (و برای هر نقطه  $P'$  نیز به همین ترتیب عمل می‌شود) پس نسبت توافقی دستگاه توافقی  $P(ABFD)$  ثابت می‌ماند.

بازسازی مسائله

در این مقاله به بررسی یکی از روش‌هایی می‌پردازیم. که برای حل مساله‌های ریاضی، می‌تواند به‌ما باری برساند: روش بازسازی صورت‌مسئله. مثال‌ها را از بازی‌ها و آنالیز ترکیبی مقدماتی آورده‌ایم تا عینی‌تر و جالب‌تر باشد. همه دانش‌آموزان سه سال آخر دیبرستان، می‌توانند با مطالعه این مقاله، به خلاصه خود در حل مسئله‌های ریاضی، کمک کنند.

... مرحله منطقی آمادگی برای حل مسئله را گذرانده اید. شاختار مسئله را بررسی کرده اید. فرض و حکم مسئله را شناخته اید و به صورت گزاره های جدا گانه ای تنظیم کرده اید. به بستگی های پنهانی بین آنها بپردازید. سخن کوتاه، صورت مسئله را به اندازه کافی مورد تجزیه و تحلیل قرار داده اید و آماده شده اید تا مسئله را حل کنید. ولی چگونه؟ از کجا آغاز کنید؟ مسیر راه حل، خود را از چشم و ذهن شما پنهان کرده است. چطور می شود گرد و غیار ابهام را پاک کرد؟ در نسیماری از موردها، به کمک بازنایی، مسئله

بازسازی مسئله، یکی از عالم‌ترین روش‌هایی است که، ضمن حل مسئله‌های ریاضی، قابل استفاده است. گاه، در هر گامی که برمی‌دارید، ناچار می‌شوید به‌این روش تکیه کنید؛ زبان مسئله را عوض کنید، طرح آن را به صورت دیگری درآورید، با جست و جوی اصطلاح‌های تازه‌ای، مسئله را به‌یافتن دیگری درآورید... اگر، ضمن حفظ مضمون اصلی مسئله، بیان تازه‌ای از آن را پیدا کنید، مثل این است که از سمت دیگری به آن نگاه کرده‌اید و جنبه‌دیگری از آن را بد ملا ساخته‌اید.

هدف بازارسازی چیست؟ چه ارزشی دارد؟ چگونه ایجاد می‌شود؟  
بهترین شیوه‌های عمل به آن کدام است؟ تلاش می‌کنیم، به این پرسش‌ها، پاسخ بدهیم.

تقریباً هر کسی که به حل مسئله ریاضی مشغول است، خود به خود از ساده‌ترین شیوه‌های بازسازی استفاده می‌کند. مثلاً، وقتی که دانش‌آموز، بیان

از مسأله پروانه را مدیون اشخاص مشهور هستیم، که بترتیب تاخر آمده‌اند.  
 (a): چهره‌های پر فروغ قرن نوزدهم که هنرمند تصویری را توسعه داده‌اند.  
 شناسلس (Chasles)، کارنو (Carnot)، پونسله (Poncelet)، ژرگون (Gergonne)  
 ون استادت (Von Staudt)، مونژ (Monge)، دیگران.  
 (b): دزارگ (Desargues)، (c) پاپوس (Pappus)، (d)، اقلیدس، که  
 بنا به گفته شناسلس، از ویژگی‌های نسبت‌های توافقی در کتاب گمشده خودش  
 آگاه بود.

مراجع‌ها: مراجع‌ها به ترتیبی که در متن مقاله ظاهر شده‌اند، در زیر آمده‌اند.

- [1] Joseph Rosenbaum, W. E. Baker, Robert Steinberg, E. P. Starke, and J. H. Butchart, Solution of Problem E 571, Amer. Math. Monthly, 51 (1944) 91.

[2] Question 1029, The Gentleman's Diary, 1815, pp. 39–40.

[3] Leon Bankoff, Solution of Problem 2426, School Sci. and Math., 55 (1955) 156.

[4] R. A. Johnson, Modern Geometry, Houghton Mifflin, Boston, 1929, p. 78. (Reprinted by Dover, New York, 1960, as Advanced Euclidean Geometry.)

[5] Léon Sauve, The celebrated butterfly problem, *Eureka* (Canada), 2 (1976) 3–5. (*Eureka* was later called *Crux Mathematicorum*)

[6] Howard Eves, Fundamentals of Geometry, Allyn and Bacon, Boston, 1964, pp. 136–137.

[7] Mathematical Questions and Solutions, Educational Times, 11 (1865) 67–68.

[8] J. S. Mackay, Proc. Edinburgh Math. Soc. III (1884–1885) 38.

[9] Miles Bland, Geometrical Problems, Cambridge, 1819, pp. 228–229; also 3rd ed., 1827, p. 228.

[10] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, Geometry Revisited, MAA, 1967, pp. 45–47.

[11] Mannis Chorosh, Solution of Problem 1713, School Sci. and Math., 41 (1941) 684–685.

[12] \_\_\_\_\_, Assoc. of Teachers of Math., N.Y.C., 1 (1945) 11.

[13] Arthur Elsberg, Solution of Problem 2419, School Sci. and Math., 55 (1955) 70–71.

[14] Ross Honsberger, The butterfly problem and other delicacies, Part I, *The Two-Year College Math. J.*, 14 (1983) 2–5.

[15] Charles F. Puszka, Problem Solving and Some Problems, Enrichment Mathematics for High School, 28th Yearbook, NCTM, 1963, pp. 179–184, problem 14.

[16] Jack Cole, Solution of problem #23, Ontario Secondary School Math. Bull., 3 (1982) 15–16.

[17] Rita Winterle, Solution of problem #2, Ontario Secondary School Math. Bull., 1 (1968) 33; also solution by W. Lovsin, pp. 34, 17.

[18] Paul Erdős, Solution of problem 75-5, Ontario Secondary School Math. Bull., 2 (1975) 23–24.

[19] M. F. MacGregor, Solution of problem 1265, School Sci. and Math., 33 (1933) 902.

[20] Isadore Chertoff, Solution of problem 1455, School Sci. and Math., 36 (1936) 1027–1028.

[21] Donald Bateman, Solution of problem 949, this MAGAZINE, 49 (1976) 217–218.

[22] M. S. Klamkin, An extension of the butterfly problem, this MAGAZINE, 38 (1965) 206–209.

[23] G. D. Chakravarti, G. T. Sallee, M. S. Klamkin, On the butterfly property, this MAGAZINE, 42 (1969) 21–23.

[24] W. L. Jacobson, The butterfly problem—extentions, generalizations, this MAGAZINE, 42 (1969) 17–21.

[25] Dixon Jones, A double butterfly theorem, this MAGAZINE, 49 (1976) 86–87.

[26] Dan Sokolowsky, Another proof of the butterfly theorem, *Eureka* (Canada), 2 (1976) 188–190.

[27] L. H. Miller, College Geometry, Appleton-Century-Crofts, New York, 1957, pp. 124–125.

[28] Kresaraj Satyanarayana, A simple proof of the butterfly problem, *Crux Mathematicorum*, 7 (1981) 292.

[29] Philomath, Solution of problem 590, School Sci. and Math., 19 (1919) 279.

[30] Exercices de Géométrie, par F.G.-M. 4th ed., Maison A Mame & Fils, 1907, Tours, p. 535.

[31] Julian Coolidge, A History of Geometrical Methods, Dover Publications, 1963, p. 90.

[32] Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathématique, Desclée de Brouwer et Cie, Paris 1933. (Two volumes, translated by Paul Ver Eecke.) Also: Pappi Alexandri, Mathematicae Collectiones, Commandino Edition, 1660.

[33] John Casey, A Sequel to Euclid, 6th ed., revised, 1892, p. 129.

[34] A. L. Candy, A general theorem relating to transversals and its consequences, Annals of Math., (1896) 175–176.

[35] S. R. Conrad, Another simple solution of the butterfly problem, this MAGAZINE, 46 (1973) 278–280.

[36] Ronald S. Tiberio, Solution 1, and Jordi Dou, Solution II of problem #1187, A Three-Winged Butterfly Problem, this MAGAZINE, 58 (1985) p. 115.

[37] Hazel Perfect, Topics in Geometry, Macmillan, N.Y., 1965, p. 113.

[38] Howard Eves, A Survey of Geometry, v. 1, Allyn and Bacon, Boston, 1963, Chapters 3 and 6.

[39] H. S. M. Coxeter, The Real Projective Plane, 2nd ed., Cambridge University Press, 1961, Chapter 7.

[40] \_\_\_\_\_, Projective Geometry, Blaisdell Publishing Co., N.Y., 1964, p. 87.

[41] C. V. Durell, Projective Geometry, Macmillan, London, 1952, p. 184.

[42] O. Veblen and C. Young, Projective Geometry, v. I, p. 127, p. 222.

[43] Heinrich Dorrie, 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover, 1965, pp. 265–272.

[44] R. M. Winger, Projective Geometry, Dover, 1962, pp. 169–171.

[45] Exercices de Géométrie, par F.G.-M., 4th ed., Maison A Mame & Fils, Tours, 1907, pp. 523–525.

[46] The William Lowell Putnam Mathematical Competition, Problems and Solutions: 1938–1964, A. M. Gleason, R. E. Greenwood, and L. M. Kelly, MAA, 1980, pp. 575–577.

[47] John Wesley Russell, An Elementary Treatise on Pure Geometry, Oxford University Press, London, 1905, pp. 226–229.

بامسیری است که اسب هادر مسئله ۲، برای اشغال خانه آزاد، به نوبت می پیمایند. در چنین موردهایی می گویند، بین عناصرهای دو مسئله، تناظر متقابل یک به دیگر برقرار است. بدزبان دیگر، این دو مسئله، هم ارزند. هر دوی آن، یک مضمون و درنتیجه، یک جواب دارند، ریاضی دانان، به این گونه مسئله‌ها، مسئله‌های همسان (ایزو موورفیک) می گویند.

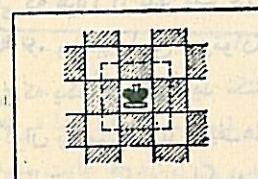
بدون شک خواننده متوجه این نکته شده است که در دو مسئله ۱ و ۲، بخش‌های فرض و حکم، به مفهومی، بامتناق خود عوض شده‌اند. این روش را، انکاس گویند این روش، با همه سادگی خود، بی اندازه ثمر بخش است و گاهی، به نتیجه‌ای باور نکردنی و نامتنظر منجر می‌شود.

مهم‌ترین هدف بازسازی، آن است که مسئله را ملموس‌تر و مفهوم‌تر کنند، به نحوی که با سادگی بیشتری بتوان مضمون آن را درک کرد. در برخی موردها، این بازسازی، می‌تواند بالافاصله راه رسیدن به جواب را هم نشان دهد، به این مثال توجه کنید.

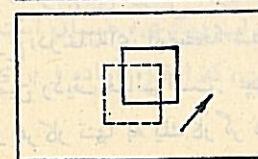
**مسئله ۳.** حداقل چند شاه می‌توانند در خانه‌های صفحه شطرنجی بی کناره  $11 \times 11$  قرار داد، به نحوی که «ودروی هم نباشند؟ صفحه بی کناره، به صفحه‌ای شطرنجی گویند که دیف‌های افقی بالا و پایین، همچنین دیف‌های قائم سمت چپ و سمت راست آن را، کنار گذاشته باشیم. شاه می‌توانند به هریک از ۸ خانه هجاورد خود بروند (شکل ۱).

توجه کنیم: شرط اصلی مسئله، که میزهای شاه را از رو در روی هم

شکل ۲



شکل ۳



شکل ۱

شفاهی صورت مسئله را، بدزبان یک یا چند رابطه جبری در می‌آورد، به بازسازی دست زده است [در صورت مسئله، گفته شده است: بـ عددی غیرمنفی است، و دانش آموز می‌نویسد:  $\geq 0$ ] همین نوع بازسازی، یعنی عبور از زبان عادی بدزبان جبری است، که در بسیاری موردها، کار حل مسئله را به دیگر معادله جبری منجر می‌کند.

شیوه دیگری که در بازسازی، کم و بیش معمول است، وقتی است که دانش آموز از خود می‌پرسد: کدام راه بهتر و ساده‌تر است: جبری یا هندسی؟ از رابطه‌های مثلثاتی کمک بگیرم یا شکل را وارد در دستگاه محورهای مختصات کنم؟.. از طریق همین پرسش‌هاست که می‌توان کوتاه‌ترین یا عینی‌ترین راه حل مسئله را پیدا کرد.

توانائی پرداختن به مسئله از جنبه‌های مختلف، قدرت کشف مفهوم‌های پنهانی موجود در مسئله و طرح مسئله در دستگاه‌های گوناگون ریاضی و بالاخره، پیدا کردن روش‌ترین و زیباترین راه حل مسئله را می‌تواند گواه باشد.

خود امکان طرح یک مسئله ریاضی، بدزبان‌ها و از دیدگاه‌های مختلف، یکی از جالب‌ترین ویژگی‌های هر مسئله ریاضی است. به خصوص مسئله‌های مربوط به آنالیز ترکیبی مقدماتی، از این بابت جای خاصی دارند، چرا که خیلی از آن‌ها را، تنها از همین راه بازسازی است که می‌توان حل کرد و به نتیجه رساند.

آشنایی با روش بازسازی را، با مسئله‌ای مربوط به حرکت اسب در روی صفحه شطرنج، آغاز می‌کنیم.

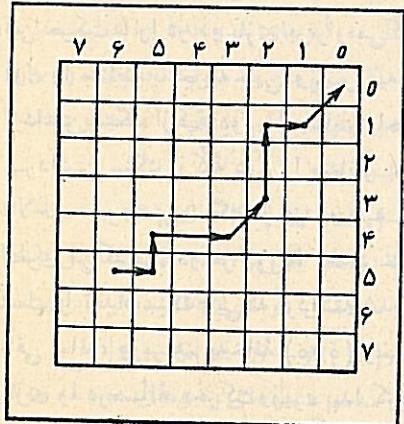
**مسئله ۱.** آیا اسب می‌تواند در همه خانه‌های صفحه شطرنج حضور یابد، به نحوی که از هرخانه، تنها یک بار گذشته باشد؟

مسئله را به صورت دیگری در می‌آوریم:

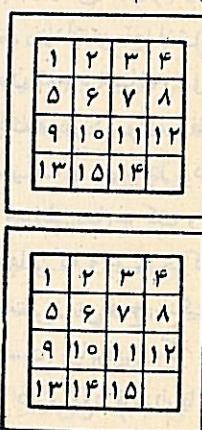
**مسئله ۲.** همه خانه‌های صفحه شطرنج (۱)، به جز یک خانه، با اسب پر کرده‌ایم. آیا می‌توان پشت سوهم، با هر اسب، درست یک حرکت انجام داد؟ روش است که خانه‌های آزاد صفحه شطرنج در مسئله ۱، متناظرند با خانه‌های اشغال شده در مسئله ۲؛ و مسیر حرکت اسب در مسئله ۱، متناظر

یکدیگر را تهدید نمی‌کنند. به این ترتیب، مسئله کوتاه و، از نظر موضوع، فقیر مربوط به نامزد کردن  $n$  کارگر برای  $n$  کار، به مسئله‌ای عادی، ولی پر موضوع‌تر بازی شطرنج بازسازی شد.

مسئله ۱۰. یکی از بازی‌هایی را که، در گذشته نزدیک، خیلی معمول بود، بازی «پانزده» می‌نامیدند. قانون این بازی، چنین بود: در یک صفحه  $4 \times 4$ ، ۱۵ مربع قرار دارد که با عدد های از ۱ تا ۱۵، شماره گذاری شده‌اند (یکی از انواع ممکن قرار گرفتن این مربع‌ها، در شکل ۴، داده شده است). بدون این‌که مربع‌های شماره‌دار را از صفحه جدا کنیم، باید آن‌ها را طوری مرتب کنیم که شماره‌ها به ردیف صعودی قرار گیرند (شکل ۵). با توجه به این‌که، مربع‌های کوچک، با حرکت رخ جابه‌جا می‌شوند، این بازی را، باصطلاح‌های بازی شطرنج تنظیم کنید.



شکل ۶



شکل ۵

گاهی، ضرورت بازسازی مسئله، ضمن حل آن پیدا می‌شود. در این حالت، برقراری همسانی بین دو مسئله، می‌تواند به غایت مفید باشد. اگر معلوم شود که جواب موردنظر، با جواب دیگری، همسان است، آن وقت، می‌توان به سراغ جواب یا راه حلی رفت، که از قبل آماده و برای ما شناخته شده است. به نمونه‌ای توجه کنیم.

مسئله ۱۱. دو گپه خوده‌سنگ وجود دارد. دو نفر باهم بازی می‌کنند قانون

منع می‌کند، به معنای محدود کردن «میدان اثر» هر یک از مهره‌ها، در یک مریع  $2 \times 2$  است (شکل ۲). راس‌های این مریع  $2 \times 2$ ، در مرکز خانه‌های صفحه شطرنج قرار دارند. برای سادگی کار، می‌توان این مریع را، به اندازه نیم خانه به بالا و نیم خانه به سمت حرکت داد تا ضلع‌های مریع بر امتداد ضلع‌های خانه‌های صفحه شطرنج واقع شوند (شکل ۳). اکنون، مسئله ۳ را می‌توان به صورت زیر بازسازی کرد:

مسئله ۱۲. حداقل، چند مریع  $2 \times 2$  می‌توان در صفحه شطرنجی بی‌کناده

$n \times n$  قرار داد، به نحوی که با هم همچاoux بشنند؟ و این، مسئله‌ای بسیار ساده است، این سادگی صورت مسئله از اینجا به دست آمد که با دقت در مسئله، کوشش کردیم آن را از «حشو و زوایدی» که ربطی به ماهیت مسئله نداشت، پاک کنیم و خود را از شر شاه و صفحه شطرنج، نجات دهیم. دیگر لازم نیست به نوع حرکت شاه و یا خانه‌های سیاه و سفید صفحه شطرنج، توجه کنیم. دنباله حل مسئله دشوار نیست.

بازسازی موفق و پیدا کردن زبان مناسب طرح مسئله، موجب می‌شود از گروه موضوع‌هایی که در مسئله وجود دارد کم (و یا گاهی گسترده‌تر) شود. حالت اخیر، یعنی گسترده‌تر شدن موضوع‌های مورد بحث مسئله، وقتی پیش می‌آید که زبان فقیر صورت مسئله را غنی‌تر کنیم و نکته‌های پنهانی را آشکار سازیم. به این دو مسئله توجه کنید.

مسئله ۱۳. کارگر ۱ را به چند طریق می‌توان برای  $n$  کار مختلف نامزد کرد، به شرطی که هر کار را تنها یک کارگر انجام دهد؟

مسئله ۱۴. به چند طریق می‌توان  $n$  رخ را در صفحه شطرنج  $n \times n$  قرار داد، به نحوی که یکدیگر را قیدید نکند؟

کارگران را متناظر با ردیف‌های افقی و کارها را متناظر با ردیف‌های قائم صفحه شطرنج می‌گیریم. اگر به نامین کارگر، زامین کار را داده باشیم، آن وقت، رخ، درخانه‌ای از صفحه شطرنج می‌نشیند که متناظر با نامین ردیف افقی و زامین ردیف قائم است. چون هر کارگر تنها برای یک کار نامزد می‌شود، و هر کار تنها به یک کارگر داده می‌شود، بنابراین در هر ردیف افقی و هر ردیف قائم صفحه شطرنج، تنها یک رخ نشسته است، یعنی رخ‌ها،

مسأله ۱۵. آیا می توان یالهای یک هشت وجهی (۱ با عدهای ۱۲، ۱۰، ۸، ۶، ۴، ۲) طوری شماره گذاری کرد که، برای هر وجه، مجموع عدهای یالهای متناظر با آن، مقدار ثابتی باشد؟

مسأله ۱۶. به چند طریق می توان وجههای یک هشت وجهی (۱، با عدهای ۸، ۶، ۴، ۲) شماره گذاری کرد، به نحوی که، برای هر (أس، مجموع متناظر با وجههای آن، مقدار ثابتی باشد؟

مسأله ۱۷. آیا می توان یالهای مکعب (۱، با عدهای از ۱ تا ۱۲) طوری شماره گذاری کرد که، برای هر (اس، مجموع عدهای متناظر یالهایی که در آن بهم رسیده‌اند، مقداری ثابت باشد؟

برای حل مسأله ۹، فرض می کنیم آن را حل کرده‌ایم، در این صورت، شماره گذاری رأس‌های مکعب، دارای این ویژگی‌هاستند:

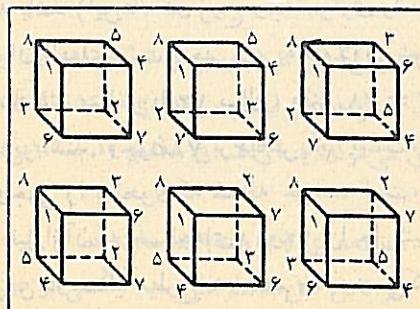
- (الف) مجموع عدهای متناظر به رأس‌های هروجه، برابر است با ۱۸.
- (ب) اگر دو یالی را در نظر بگیریم، که به صورت قطري، رو به روی یکدیگر باشند، مجموع عدهای دو انتهای یکی از آنها، با مجموع عدهای دو انتهای دیگری، برابر است (شکل ۷):

$$A+B=G+H; \quad E+F=C+D; \dots$$

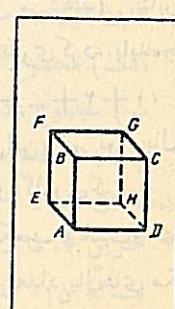
پ) اگر قطراهای مکعب را در نظر بگیریم، قدر مطلق تفاضل عدهای دو رأس هر قطر، با قدر مطلق تفاضل عدهای دو انتهای قطري دیگر، برابر است:

$$|A-G|=|B-H|=|D-F|=|E-C|$$

ویژگی (الف) ناشی از برابری مجموع عدهای رأس‌های دووجه موازی



شکل ۸



شکل ۷

بازی چنین است: هر نفر به نوبت می تواند تعدادی سنگ بوداد، در ضمن، هرباد می توان به هر تعداد سنگ از یک کپه (فرق نمی کند، کدام کپه) و یا از هر دو کپه به تعدادی مساوی؛ خرده سنگ بوداشت. کسی بازی (۱ می برد که آخرین سنگ را برداشته باشد. قانون بدون باخت بازی را پیدا کنید.

مسأله ۸. بریک صفحه شطرنج مربعی بی انتهای، یک وزیر نشسته است. دو بازی کن، به نوبت وزیر (۱ به سمت خانه گوششای (وه) می رانند. در ضمن، در هر حرکت، می توان وزیر (۱ به هر تعداد خانه، به راست یا به بالا و یا به صورت قطر به طرف بالا، جلو برد. کسی بازی (۱ می برد که وزیر (۱ به خانه (وه) (سانده باشد. قانون بازی بدون باخت را پیدا کنید.

فرض کنید در یک کپه به تعداد  $a$  و در کپه دیگر، به تعداد  $b$  سنگ وجود داشته باشد. وزیر را در خانه ( $ab$ ) قرار می دهیم (شکل ۶) و تمازیر بین حرکت‌ها را در دو بازی برقرار می کنیم. برداشتن تعدادی سنگ از کپه اول را متناظر با جای وزیر، به همان تعداد خانه، درستون قائم، برداشتن سنگ از کپه دوم را متناظر با حرکت وزیر در ردیف افقی وبالآخره، برداشتن سنگ از هر دو کپه را متناظر با حرکت وزیر در مسیر قطري می گیریم. در هر مورد، تعداد خانه‌هایی که وزیر حرکت کرده برابر است با تعداد سنگ‌هایی که برداشته شده است. وقتی هیچ سنگی در دو کپه باقی نماند، وزیر هم به خانه (وه) رسیده است. بنابراین اگر بتوانیم قانون بازی را در مسأله «حرکت وزیر» پیدا کنیم، در واقع، قانون بازی «کپه‌های سنگ» را هم پیدا کرده‌ایم.

یکی از سرچشم‌های مسأله‌های همسان وجود ویژگی هندسی جالبی به نام «همزاد» یا «دو قلوب» بودن است. این ویژگی را شرح خواهیم داد، ولی قبل از آن، به این چند مسأله توجه کنید:

مسأله ۹. به چند طریق می توان (أس‌های یک مکعب (۱ با عدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶) شماره گذاری کرد، به نحوی که مجموع عدهای (أس‌های هر وجه، مقدار ثابتی باشد؟ [در شماره گذاری رأس‌ها را وقتی مختلف به حساب می آوریم که با دوران مکعب دور مدور خود، نتوان آنها را بر هم منطبق کرد.]

است با تعداد وشهای دیگری و برعکس، به این ترتیب بین عنصرهای این دو جسم، نوعی تناظر وجود دارد. این گونه چندوجهی‌ها را «دولو» می‌نامند. حالا دیگر، همسانی دو مسئله ۹، ۱۱ و همچنین. همسانی دو مسئله ۱۲ و ۱۵ روشن می‌شود. به جز این، برای هر گونه شماره گذاری در مورد مکعب، می‌توان مسئله همسانی برای همزاد آن، یعنی هشت وجهی پیدا کرد. به این ترتیب، شکل‌های «همزاد» یا «دولوی‌هندسی» سرچشم‌پايان ناپذیری برای پیدا کردن مسئله‌های همسان هستند. در واقع، مکعب و هشت وجهی، همزادهای منحصر به‌فرد نیستند. مثلاً، بیست وجهی، همزاد دوازده وجهی و چهار وجهی همزاد خودش است.

ولی، تنظیم مسئله‌های همسان، خود هدف نیست. در اینجا می‌توان گفت که، مثلاً، حل مسئله ۱۵، ساده‌تر از حل مسئله همسان آن، ۱۲، به نظر می‌رسد.

حل دو مسئله زیر را به‌عهده خواننده می‌گذاریم، چرا که برای حل آن‌ها، تقریباً همان استدلال‌های قبلی را باید تکرار کرد.  
مسئله ۱۳. ثابت کنید، رأس‌های یک هشت وجهی (ا) نمی‌توان با عدددهای از ۱ تا ۶، طوری شماره گذاری کرد که مجموع عدددهای واقع بر رأس‌های هر وجه مقدار ثابتی باشد.

مسئله ۱۴. یال‌های یک مکعب را با عدددهای از ۱ تا ۱۲ طوری شماره گذاری کرده‌ایم که، برای هر وجه، مجموع عدددهای یال‌ها، مقدار ثابتی است. ثابت کنید:

(الف) مجموع عدددهای یال‌های هر وجه، برابر است با ۲۶؛  
ب) مجموع عدددهای دوسر هر قطر مکعب، مقداری است ثابت؛  
پ) به چند طریق می‌توان یال‌های مکعب را به این طریق شماره گذاری کردا

تمرين ۳. ثابت کنید مسئله‌های ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ همسان‌اند.

مسئله ۱۵، مدت‌ها غیر قابل حل به نظر می‌رسید و کسی از عهده حل آن پر نمی‌آمد:

←

است. چون مجموع عدددهای از ۱ تا ۸ برابر است با ۳۶، بنابراین، مجموع عدددهای واقع بر راس‌های هر وجه (از دو وجه موازی) برابر ۳۶: ۲ یعنی ۱۸ می‌شود.

ویژگی (ب) از این جا ناشی می‌شود که مجموع عدددهای چهار راس هر وجه، با مجموع عدددهای چهار رأس وجه مجاور آن (که در یک یال مشترک‌اند)، برابر است.

ویژگی (پ)، نتیجه‌ای از ویژگی (ب) است و از بررسی دو زوج یالی که دو بدو به صورت قطری رو به روی هم هستند، ثابت می‌شود (مثلاً زوج AB و GH با AE و CG).

اگر از همین ویژگی سوم آغاز کیم، می‌توانیم ۴ زوج رأس را، که روی قطرهای مکعب واقع‌اند، بسازیم. سه حالت وجود دارد که در آن‌ها، قدرتلک تناقض این رأس‌ها، برابر ۱، ۲ یا ۴ می‌شود. این زوج‌ها چنین‌اند:

۲ ۴ ۶ ۸	۳ ۴ ۷ ۸
۵ ۶ ۷ ۸	

۱ ۲ ۳ ۴	۱ ۲ ۵ ۶
	۱ ۳ ۵ ۷

اختلاف این حالت‌ها، در شکل ۸ نشان داده شده است. از همین جا معلوم می‌شود که تنها نوع شماره گذاری مختلف وجود دارد. از این‌شش حالت، سه حالت اصلی است و سه حالت دیگر، قرینه‌های سه حالت اصلی هستند (که می‌توان آن‌ها را، سه زوج «دولو» دانست).

اندیشه حل مسئله ۱۵ هم ساده است. به سادگی می‌توان ۴ وجه از ۸ وجه هشت وجهی را مشخص کرد که مجاور نباشند، یعنی یال مشترکی نداشته باشد (این‌ها، دو زوج وجه موازی را تشکیل می‌دهند). بنابراین، اگر بتوان یال‌های هشت وجهی را، به نحو لازم، شماره گذاری کرد، باید مجموع همه عدددهای متناظر با ۱۲ یال، یعنی  $78 = 12 + 2 + \dots + 12$ ، بر ۴ بخش پذیر باشند. و چون ۷۸ بر ۴ بخش پذیر نیست، بنابراین، نمی‌توان یال‌های هشت وجهی را به‌نحوی که مسئله خواسته است، شماره گذاری کرد.

قبل از آن که مسئله‌های ۱۴ و ۱۵ را حل کنیم، مکعب و هشت وجهی را که در این دو مسئله مطرح‌اند، باهم مقایسه می‌کنیم. تعداد یال‌های مکعب با تعداد یال‌های هشت وجهی، یکی است؛ تعداد رأس‌های یکی از آن‌ها برابر

## رمز و راز عددی‌ها



به این اتحادهای عددی توجه کنید:

$$\sqrt{84681} = 846 \times \frac{1}{3} + \sqrt{81} = 300 - 9 ;$$

$$\sqrt{95481} = 954 \times \frac{1}{3} - \sqrt{81} = 300 + 9 ;$$

از این اتحادهای عددی هرچه بخواهید، می‌توان نوشت. آیا می‌توانید قانونی کلی برای به دست آوردن آن‌ها پیدا کنید؟ در واقع، همه این اتحادهای به این صورتند:

$$\sqrt{100a+b^2} = a \cdot \frac{1}{k} + b \quad (1)$$

اگر این معادله را، نسبت به  $a$  حل کنیم، به دست می‌آید:

$$a = 100k^2 - 2kb \quad (2)$$

که اگر در سمت راست برابری (1) به جای  $a$  قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\sqrt{100a+b^2} = a \cdot \frac{1}{k} + b = 100k - b \quad (3)$$

که اساس تشکیل اتحادهای عددی فوق است. مثلاً، اگر در برابری (2) فرض کنیم:  $k = 3$  و  $b = -7$ ؛ آن‌وقت خواهیم داشت  $a = 942$  و بنابر (3):

$$\sqrt{94249} = 942 \times \frac{1}{3} - \sqrt{49} = 300 + 7$$

و به ازای  $k = 2$  و  $b = 13$ ، به دست می‌آید:  $a = 348$  و درنتیجه

$$\sqrt{348 \times 100 + 13^2} = 348 \times \frac{1}{2} + 13 = 200 - 13$$

و به ازای  $k = 1$  و  $b = 5$ ، به دست می‌آید:  $a = 90$  و

$$\sqrt{9025} = 90 + \sqrt{25} = 100 - 5$$

$$\sqrt{43681} = 436 \times \frac{1}{3} - \sqrt{81} = 200 + 9 ;$$

→

مساله ۱۵. آیا مربع وجود دارد که بتوان آن را بدون دخنه یا برش خود به چند مربع کوچکتر تقسیم کرد، به نحوی که هیچ دو مربعی برابر نباشد؟ و این، مساله‌ای از آنالیز ترکیبی است که به «تریبع مربع» مربوط می‌شود. نخستین مربع «قابل تریبع»، در سال ۱۹۳۹ و به وسیله د. شیراگ هندسه‌دان آلمانی ساخته شد. کوچکترین مربع «تریبع پذیر» در سال ۱۹۷۸ ساخته شد. نکته جالب این است که موفقیت در حل نهائی مساله، وقتی حاصل شد که مساله را، از زبان شکل‌های مسطوحه هندسی، به زبان مدار الکترونیکی تعبیر کردند. طرح الکترونیکی، جانشین دیاگرام تقسیم مربع شد. در این طرح هر مربع جزئی، در تناظر بایک مدار الکترونیکی قرار گرفت، که دو نقطه را به هم وصل می‌کند. مقدار نیروی برقی که در این مدار جریان دارد، برابر با طول ضلع مربع متناظر آن است. تعبیر الکترونیکی مساله، به این جهت موفقیت آمیز بود که می‌شد، در آن، از قانون‌های معروف کیرشیف استفاده کرد و مقدار مجموع جریان‌ها را در گره‌های شبکه الکترونیکی و، همچنین، مجموع سقوط ولتاژ را در مدار بسته الکترونیکی به دست آورد و همین وضع ادامه حل مساله را ساده می‌کند.

## تکه‌ای از نامهٔ یک استاد ریاضی

پیشینه‌های درس، عموم دانشجویان با موفقیت بسیار، با این مطالب برخورد می‌کنند. حتی بعضی دانشجویانم که خود را در ریاضی بسیار بد می‌دانند، گاهی استدلال‌هایی به واقع زیبا ارائه می‌دهند. من همچنین، تکیه زیادی بر در گیر کردن خود بچه‌ها می‌گذارم و به ندرت خودم سخنرانی می‌کنم از آن جا که محدودیت زمانی خاصی وجود ندارد، خیلی وقت‌ها، با توجه به علاقه و سوال‌های دانشجویان، کلاس را می‌گردانم. یکی از کارهای موفق چنین بوده است: روزی را از خیلی قبل تعیین می‌کنم. در آن روز، هر دانشجو، باید مطلب و یا مساله‌ای جالب را برای بقیه کلاس بیاورد. این مطلب، اگر خیلی جالب باشد، حتی می‌تواند ربطی به ریاضی نداشته باشد. اکثر معماها و سرگرمی‌های مختلف ریاضی پیدا می‌کنند. بعد همه کلاس به تلاش می‌افتد تا مساله را حل کند. اتفاق افتاده است که بعضی دانشجویان، جواب بعضی مساله‌ها را، سریع‌تر از من به دست آورده‌اند. خود این مساله‌ها و معماها، نقطه‌آغازی برای مطالب بعدی منی شوند در ضمن، بعضی وقت‌ها، دانشجویان می‌توانند با چشمان خود ببینند که، یک ریاضی‌دان، چگونه شروع به حل مساله‌ای می‌کند و چگونه از روش‌هایی که پولیا در کتاب «خلاقیت ریاضی» طرح کرده است، استفاده می‌کنند... من الان در هواپیما به قصد لندن در پرواز هستم. برای شرکت در کنفرانسی، برای یک هفته به منچستر می‌روم. کنفرانس در رابطه با نظریه گروه‌ها و نمایش‌های گروه‌های... وقتی لندن رسیدم، باید دنبال تمبر و پاکت بگردم...

شهریار شهریاری

### محاسبه یک مجموع

این مجموع را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$$

که در آن،  $[\sqrt{k-1}]$ ، عبارت است از بخش درست عدد  $\sqrt{k-1}$ .

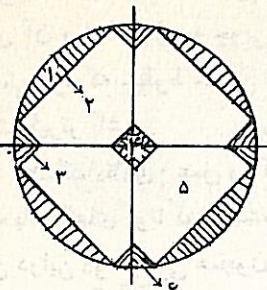
حل در صفحه ۲۵۶

... خودم بد نیستم. در دانشگاه مشغول تدریس و در کنار تدریس کمی تحقیق، تدریس، بیشترین وقت را می‌گیرم. در فاصله بین ترم‌ها و تابستان، می‌کوشم وقت بیشتری روی تحقیق بگذارم. البته، از تدریس خیلی خوش می‌آید و، به همین مناسبت، وقت زیادی روی آن صرف می‌کنم. می‌کوشم، هر ترم، حداقل یک درس جدید بزرگ‌تر که خودم هم چیزی یاد بگیرم. یک کلاس هم، برای دانشجویان رشته‌های غیر علمی دارم که خیلی جالب است. این دانشجویان اکثر آز ریاضی بدشان می‌آید و معمولاً، تجربه‌ای که از ریاضی و معلمان ریاضی داشته‌اند، چندان جالب نبوده است. هدف کلاس، آشنا کردن این دانشجویان با ریاضیات است. من روش‌های متفاوتی نسبت به سایر استادان اتخاذ کرده‌ام و تا حال، نتایج آن، خیلی خوب بوده است. انتخاب مطلب خیلی مهم است. بیشتر این دانشجویان، جبر و هندسه و حتی حساب بسیار ضعیفی دارند. مثلاً جمع سه یا چهار کسر، برایشان بسیار ناراحت کننده است. بسیاری از استادان معتقدند که تادانشجو، حداقل مقداری از جبر، هندسه و حساب بلد نباشد، چیز دیگری هم نمی‌توان بیاو یاد داد. لذا می‌کوشند، همان مطالبی را که دانشجو در ذیروستان یاد نگرفته، تکرار کنند. و روشن است که نتیجه کار، خستگی و بی‌حوالگی دانشجویان است. من قبل از هر چیز می‌کوشم به آن‌ها ثابت کنم که ریاضیات، جالب است و سرگرم کننده. در ضمن، هیچ مطلبی را هم که احتیاج به دانستن مقدمات قبلی داشته باشد، انتخاب نمی‌کنم. در نتیجه، از یک طرف روی مسائلی از نوع سرگرمی‌های ریاضی کار می‌کنیم و، از طرف دیگر، به مطالبی مثل تقارن و گروه‌ها، حساب احتمالات، دستگاه‌های عددشماری در طول تاریخ، ماتریس‌ها، بی‌نهایت و از این قبیل می‌پردازم. بیشتر استادان می‌گویند، دانشجویی که نمی‌تواند حاصل  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$  را راحت پیدا کند، چطور می‌تواند جدول ضرب گروه را یاد بگیرد؟ ولی اتفاقاً، به خاطر تازگی مطلب و عدم تکیه آن بر

## هندسه و روکش

محسن نیک بخت

شده‌ای را خط کشی می‌کنند به طوری که هم حداقل استفاده از تنہ شده باشد و هم بتوان به چند طریق روکش تهیه نمود که در هر طریق روکش نقش و زیبائی خاصی را دارا خواهد بود.



شکل ۱

حال با توجه به شکل ۱ می‌توان اهمیت ریاضیات را در تهیه روکش از گرده بنیه‌های قطر و پارازش را دانست.  
۱- در این قسمت، لایه‌ها حذف می‌شود.

۲- اگر برای روکش گیری از نقطه شماره ۲ استفاده کنیم روکشی با نقشه مماسی به دست می‌آید.

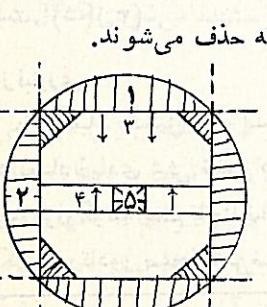
۳- اگر برای روکش گیری از نقطه شروع کنیم، روکش شعاعی و نیمه‌شعاعی به دست می‌آید.

۴- شماره ۴ مغز گرده بنیه است که مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

۵- این قسمت آماده تبدیل می‌باشد.

۶- چون این قسمت، محدوده کمی را دارد، بنابراین آنرا به تخته‌های باریک تبدیل می‌کنند.

استفاده از خطوط برای تهیه روکش در گرده بنیه‌های کم قطر و معمولی (شکل ۲).



شکل ۲

۱- قسمتهايی هستند که از گرده بينه حذف می‌شوند.

۲- اگر از این قسمت روکش گیری را شروع کنیم، روکشی با نقشه مماس به دست می‌آید.

۳- از این قسمت، اگر روکش گیری آغاز شود، روکش شعاعی و نیمه شعاعی به دست می‌آید.

۴- مغز گرده بینه که زیاد مورد استفاده نیست.

درود گران از روکش، به دو طریق عمدۀ استفاده می‌کنند.

چوب، این ماده گرانبها، که به سرمایه و کار طبیعت در کارگاه جنگل ساخته و پرداخته می‌شود یکی از مهم‌ترین مصالح ساختمان تمدن انسان به شمار می‌رود که از گذشته‌های بسیار دور به طور رایگان در دسترس بشر بوده و انسان را در راه ناهموار سیر تکامل دستگیری نموده است.

باید دانست که تنها نوع بشر به سابقه هوش و فراتست خویش، پایه تمدن خود را بر روی چوب استوار نساخته است، بلکه شمار بسیاری از جانوران روی زمین نیز به حکم غریزه از این ماده بهره‌مند شده‌اند و امروزه هم زندگی تعدادی از مخلوقات کره خاکی بستگی کامل به چوب دارد.

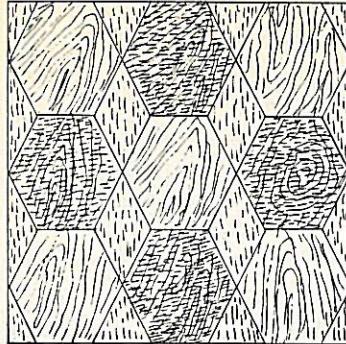
در دنیای امروز، در اثر افزایش جمعیت، ترقی سطح زندگی افراد و بالاخره توسعه عجیب صنایع، چوب مقام مهمی را در اقتصاد دنیا بدست آورده است و از همین جهت افزایش تولید چوب و مصرف آن روز به روز مشهودتر می‌شود.

در ضمن کارخانجات بزرگ روکش‌سازی چوبهای خوش نقش را بهورقه‌های نازکی به نام روکش تبدیل کرده و با استفاده از آن، قفسه‌ها، بدنه‌های کمد و هزاران هزار اشیای زیبای دیگر ساخته و به دوستداران کارهای چوبی عرضه می‌کنند.

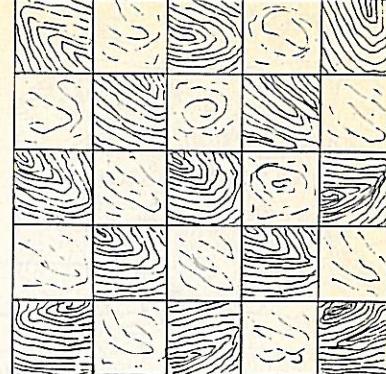
مسلماً بر کسی پوشیده نیست که ریاضیات خصوصاً هندسه در تمام صنایع و کارهای نقش مهم و سازنده‌ای را بر عهده داشته و خواهد داشت به خصوص که هم حالت فیزیکی و هم حالت زیبائی موردنظر باشد، در این صورت کمک گرفتن از ریاضیات و هندسه امری بس ضروری و مهم است.

برای اینکه هنگام تهیه روکش از گرده بینه‌ها روکشها، نقش، مقاومت و زیبائی خاصی را دارا باشند ابتدا بر روی تنه گرده بینه تقسیمات حساب

۱. (به کسر اول) تنۀ درختی که هنوز هیچ کاری روی آن انجام نشده باشد.



شکل ۴



شکل ۳

مربع یا مستطیل کند (شکل ۴).  
گلباد کاری از این اشکال ساده اما متنوع شروع می شود تا به ستاره می رسد.

#### گلباد ستاره

این نوع گلباد، که بسیار زیبا و مشکل است و تشکیل شده از ۴ ذوزنقه که اطراف صفحه را مسدود کرده، ۴ مثلث متساوی الاضلاع که در چهار رأس زاویه مربع یا مستطیل قرار گرفته، هشت لوزی که هر کدام از آنها یکی از اضلاعش به رأس مثلث متساوی الاضلاع متصل است، همچنین درین هر دو لوزی مربعی قرار گرفته که نهایتاً ستاره ای هشت پر در وسط کادر تشکیل می دهد، که در نگاه اول چشم، خیره ستاره درخشانده می شود. (شکل ۵).

#### ستاره دنباله دار

این گلباد، معروف ترین و زیباترین در ضمن مشکل ترین گلباد می باشد که اکثر آن روی صفحه های تخته نرد، میز های گران قیمت و درهای معابد زده می شود. گلبادی که آن را ستاره دنباله دار می گوئیم با نامهای متفاوت می شناسند (مثلثی، مرکبی، هشت جزئی و ...) که نام فوق با مسماترین اسم برای آن می باشد، در ضمن انواع مختلفی از آن موجود است که شکل ۶ یکی از آنهاست.

این گلباد از هشت لوزی که ستاره ای هشت پر تشکیل می دهد آغاز

۱- دوکش کاری: چون نتوپانها شکل زیبایی تدارند، سعی می شود از ورقه های نازک روکش برای پوشاندن روی آنها استفاده شود، تا زیبائی خاصی به آن ببخشد. مهمترین عاملی که در این نوع روکش کاری مؤثر است نقش آن و اینکه از چه چوبی گرفته شده است، می باشد. برای این منظور سعی می شود که خطوط منحنی هنگام درزا شدن، به طور قرینه قرار بگیرد تا چشمگیرتر باشد.

۲- گلباد کاری: عمل روکش کاری ای که در آن اشکال متنوع هندسی همراه با رنگهای گونا گون استفاده شده باشد گلباد کاری می گوئیم. برای تزئین در این کار عواملی همچون نقشه، رنگهای اشکال، به دست آوردن صحیح چند ضلعیها و ... بسیار حائز اهمیت می باشد.

نقشه های گلباد بسیار متنوع است و همین امر باعث شده که نام مشخصی نداشته باشد. هر هنرمندی بنا به ذوق و علاقه، و همچنین با توجه به اشکال استفاده شده، آنرا نام گذاری می کند. مثلثی، شطرنجی، مکعبی، لانه زنبوری، ستاره، مختلف الاضلاع، ستونی، ستاره دنباله دار و ...

#### شطرنجی

در این کار، که ساده ترین نوع روکش کاری است باید توجه داشت که رنگ دو روکش مورد استفاده ابلق<sup>۲</sup> باشد. بایستی دو روکش را به صورت مربعه ای یک اندازه درآورده، و یکی در میان رنگ را عوض کرد و کنار هم گذاشت. (شکل ۳)

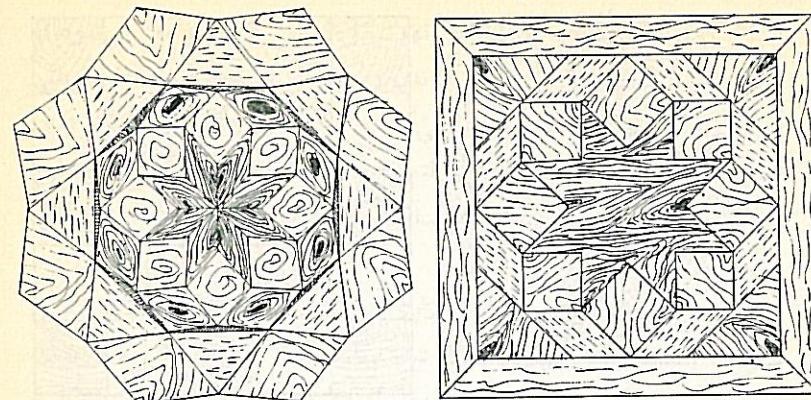
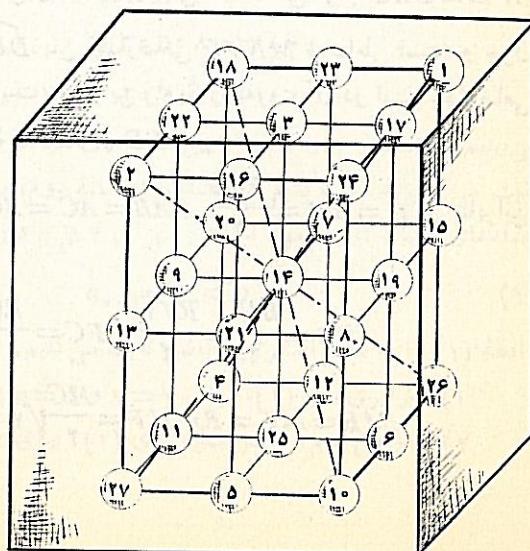
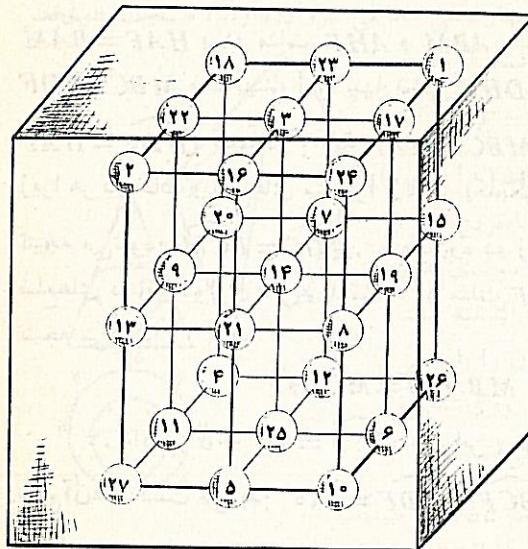
#### لانه زنبوری

این گلباد تشکیل شده است از ۳ نوع روکش غیر همنگ. در این گلباد تعداد زیادی شش ضلعی دو رنگ جای می گیرد و مابین آنها لوزیهای دیگری قرار گرفته است تا چند ضلعیها را از یکدیگر جدا کند. در ضمن مثلثهای کوچکی دور تدور صفحه شش ضلعی را در برمی گیرد تا شکل را محدود بدهیک

۱. کنار هم گذاشتن و چسباندن قطعات چوب یا روکش.
۲. دو رنگ مخالف همدیگر مثل سفید و سیاه (در روکش کاری، کرم = افرا؛ قهوه ای = گرد و).

## مکعب سحری

هر دو شکل مربوط به یک مکعب‌اند، در تکی سطوح و ستون‌ها و در دیگری قطر‌ها تنظیم شده است.



شکل ۴

شکل ۵

می‌شود و سپس هشت لوزی دیگر دور آن را احاطه کرده، هشت لوزی بزرگ دور تا دور لوزی‌های قبل را مسدود می‌کند. پس از آن هشت مثلث کم ارتفاع روی آنجا را گرفته و بعد از آن هشت مثلث با حرکتی عکس مثلثهای زیرین شروع شده و بالاخره هشت چهار ضلعی مختلف اضلاع دور تا دور آن را پر می‌کند، هر اندازه که این اعمال را توسط لوزیها، مثلثها، چهارضلعی‌ها و مختلف اضلاعها تکرار کنیم شکل ما به مربع کامل ختم نمی‌شود، شاید به همین دلیل آن را ستاره دنباله‌دار می‌نامند.

در مورد گلبداسازی بیش از این می‌توان بحث و بررسی نمود چرا که دامنه گسترش آن بسیار وسیع می‌باشد و با کمی تبحر می‌توان کلیه شکل‌های موجود در طبیعت را توسط روکش کاری (گلبداسازی) به تصویر کشید.

### دو مساله از مفهومتابع

۱. تابعی پیدا کنید که، برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ، مشتق دوم آن،

برای  $|x|$  باشد.

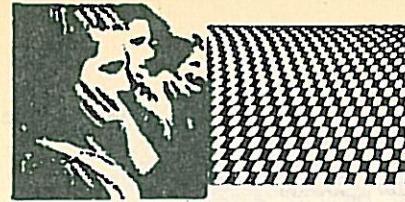
۲. تابع  $f(x)$  را طوری پیدا کنید که معادله تابعی زیر

برقرار باشد:

$$f(a+x) - f(a-x) = 4ax \quad (a \in \mathbb{R})$$

حل در صفحه ۲۵۵

## حل مسائلهای



از گذشته‌ها (صفحه ۱۴۵ را ببینید)

$$\widehat{ACH} = \widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

و چون  $\widehat{ABM} = \widehat{AFH}$  بنا بر این  $\widehat{HAF} = \widehat{BAM}$  و دو مثلث  $ABM$  و  $AHF$  متشابه می‌شوند. دو مثلث  $MBC$  و  $HDF$  متشابه‌اند، زیرا چهارضلعی  $ADHF$  محاطی است و داریم:  $\widehat{HDF} = \widehat{HAF}$ ؛ ضمناً دو زاویه  $HAF$  و  $MBC$  هم با یکدیگر برابرند، زیرا هر دو حاده و ضلع‌های متناظر آن‌ها بر یکدیگر عمود است؛ از این جا نتیجه می‌شود:  $\widehat{HDF} = \widehat{BCM}$ . بعلاوه دو زاویه  $DHF$  و  $BMC$  متناظر موازی دارند. از تشابه دو مثلث  $HDF$  و  $BCM$  با لافاصله نتیجه می‌شود:

$$MB \cdot HD = MC \cdot HF$$

$$2. \text{ داریم: } \widehat{BCF} = 90^\circ - \alpha, \text{ بنا بر این } \widehat{BDF} = 90^\circ + \alpha \text{ که از}$$

جمع آن‌ها بدست می‌آید:  $\widehat{BCF} + \widehat{BDF} = 180^\circ$  و چهارضلعی  $BCFD$  محاطی است. از محاطی بودن چهارضلعی نتیجه می‌شود:  $\widehat{AFD} = \widehat{DBC} = \widehat{AMC}$  و چون  $\widehat{DBC} = \widehat{AMC}$  پس چهارضلعی  $MNFC$  محاطی است؛ و چون زاویه  $FCM$  قائم است، بنا بر این زاویه زو به روی آن در این چهارضلعی محاطی، قائم می‌شود و  $FD$  بر  $AM$  عمود است.

$$3. \text{ داریم: } CH = BH = \frac{R\sqrt{3}}{2} \text{ و } AB = AC = BC = R\sqrt{3}$$

به ترتیب داریم:

$$BD = \frac{BH}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{4}, \quad FC = \frac{R\sqrt{3}}{4},$$

$$MB = MC = R, \quad HF = \frac{HC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{و از رابطه } \frac{DF}{BC} = \frac{HF}{MC} = \frac{3}{4} \text{ به دست می‌آید:}$$

$$DF = \frac{3}{4} BC = \frac{3}{4} R\sqrt{3}$$

چهارضلعی مفروض متساوی الساقین است و بنابراین دو قطر آن باهم متساوی است و چون با چهارضلعی محاطی سروکار داریم، می‌توان طول قطر را از رابطه بسطمیوس بدست آورد:

$$BF = CD = R\sqrt{3}$$

کوتاه‌ترین مسیر (صفحه ۱۵۴ را ببینید) برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر، سطح مخروطی را، روی مولدی که از محل استقرار کشش دوزک گذشته است باز و سپس، دو انتهای آن را با خطی راست به هم وصل می‌کنیم. روی شکل، همه چیز به روشنی دیده می‌شود.

مسائلهای مسابقه‌ای (صفحه ۱۵۵ را ببینید)

۱. چند جمله اول دنباله‌های  $(a_n)$  و  $(b_n)$  را می‌نویسیم:

$$(a_n): \dots, 13, 8, 5, 2, 1, 0, \dots$$

$$(b_n): \dots, 11, 7, 4, 1, 0, \dots$$

می‌بینیم، عده‌های ۱ و ۲ و ۳، بین جمله‌های هر دو دنباله وجود دارد. ثابت می‌کنیم که، هیچ کدام از جمله‌های دنباله دوم، با آغاز از  $b_4$ ، در بین جمله‌های دنباله اول وجود ندارد و، برای  $n \geq 4$  داریم:

$$a_{n-1} < b_n < a_n \quad (1)$$

رابطه (۱) را به کمک استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم.

(۱) نابرابری‌های (۱)، برای  $n = 4$  و  $n = 5$  برقرارند.

(۲) فرض می‌کنیم، نابرابری‌های (۱)، برای  $n = k$  و  $n = k+1$

برقرار باشند، یعنی داشته باشیم:

$$a_{k-1} < b_k < a_k \quad \text{و} \quad a_k < b_{k+1} < a_{k+1}$$

در این صورت باز مجموع آنها به دست می‌آید:

$$a_{k+1} < b_{k+2} < a_{k+2}$$

یعنی، نابرابری‌های (۱)، برای هر مقدار  $n \geqslant 4$  برقرارند.

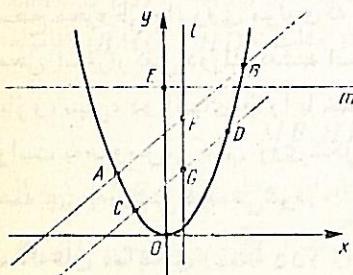
۲. دو خط راست موازی رسم می‌کنیم، محل برخوردیکی را باشه می  $A$  و  $B$  و محل برخورد دیگری را با سه می  $C$  و  $D$  می‌گیریم (شکل ۱). اگر وسط دو پارهخط  $AB$  و  $CD$  را بهم وصل کنیم و از دو طرف امتداد

دھیم، خط راست  $l$ ، که به این ترتیب به دست می‌آید، موازی با محور  $Oy$

است. درواقع، اگر معادله خط راست  $y = ax + b$   $AB$  را فرض کنیم، طول نقطه‌های  $A$  و  $B$  از معادله  $x^2 = ax = b$  به دست می‌آید. طول وسط دو نقطه  $A$  و  $B$ ، برابر است با نصف مجموع دو ریشه این معادله،

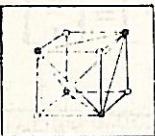
یعنی  $\frac{a}{2}$ . به همین ترتیب، طول وسط

دو نقطه  $C$  و  $D$  هم برابر  $\frac{a}{2}$  می‌شود. بنابراین،  $l$  موازی  $y$  است. برای این که محور  $y$  را به دست آوریم، خط راستی عمود بر  $l$  رسم می‌کنیم تا نمودار را در دو نقطه قطع کند. اکنون اگر از نقطه  $E$ ، وسط پارهخطی از عمودکه به نمودار محدود است، موازی با  $l$  رسم کنیم، محور  $y$  به دست می‌آید. محل برخورد  $y$  با نمودار، مبداء مختصات است، اگر از  $O$  مبدأ مختصات، عمودی بر  $OE$  اخراج کنیم، محور  $Ox$  به دست می‌آید. برای پیدا کردن واحد طول، کافی است نیمساز زاویه  $yOx$  را رسم کنیم. این نیمساز، نمودار را در نقطه (۱) قطع می‌کند.



شکل ۱

۳. برای سادگی کار، عدهای را که از  $\frac{1}{2}$  تجاوز نمی‌کنند، «عددهای خوب» می‌نامیم. بین هشت عدد غیرمنفی با مجموع ۱، دست کم سه تا «عدد خوب»‌اند، زیرا در غیر این صورت، مجموع عدها، از واحد بیشتر می‌شود. از بین این سه «عدد خوب»، دو عدد، در دو انتهای قطر یکبی از وجهها هستند. در واقع، قطرهای وجههای مکعب، همراه هشت راس آن، به دو چهار وجهی تقسیم می‌شوند که، راسهای آنها را، در شکل ۲ مشخص کرده‌ایم. از سه راس خوب، دست کم دوتا، راسهای یکی از این چهار وجهی‌ها هستند.



شکل ۲

### اکنون روش شروع بازی نفر

اول روش می‌شود: او، در حرکت اول خود، وجهی از مکعب را انتخاب می‌کند که یکی از قطرهایش، دو راس خوب را بهم وصل کرده باشد. نفر دوم، هر وجهی را انتخاب کند (او حق ندارد)، وجه موازی با وجه انتخابی نفر اول را در نظر بگیرد، دو وجه انتخابی دریالی مشترک خواهد بود که شامل یکی از راسهای خوب است. آن وقت، نفر اول، از دو وجه ممکن، آن را انتخاب می‌کند که از این راس خوب گذشته باشد. حکم ثابت شد.

۴. ابتدا یک گزاره کمکی را ثابت می‌کنیم. دو خانه جدول را در نظر می‌گیریم، که در یکی از آنها، عدد  $a$  و در دیگری عدد  $b$  قرار گرفته باشد. این دو خانه را به وسیله مسیری بهم وصل می‌کنیم، بهزیوی که هر دو خانه مجاور هم، در این مسیر، دارای ضلع مشترکی باشند. ثابت می‌کنیم، هر عدد درستی که بین  $a$  و  $b$  واقع باشد، در یکی از خانه‌های مسیر پیدا می‌شود. در واقع، اگر چنین نباشد، شرط مساله، مبنی بر این که تفاوت عدهای دو خانه مجاور نمی‌تواند از ۱ بیشتر باشد، نقض می‌شود. به جز این، اگر تعداد خانه‌های مسیر را، همراه با دو خانه اول و آخر،  $p$  فرض کنیم، داریم:

$$|a - b| \leqslant p - 1$$

(الف)  $M$  و  $m$  را به ترتیب، بزرگترین و کوچکترین عدد جدول

عددات،  $n$  بار تکرار شده باشد، مثل جدول زیر، برای  $n=4$ .

	۱	۲	۳	۴
۲		۳	۴	۵
۳		۴	۵	۶
۴		۵	۶	۷

۵. در مورد دو جمله سمت چپ برابری، از نابرابری واسطه‌ها

استفاده می‌کنیم ( $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ). به دست می‌آید:

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{x} \quad (1)$$

از طرف دیگر، با توجه به همان نابرابری واسطه‌ها، داریم:

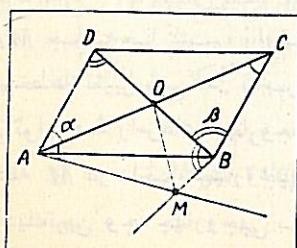
$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{x} \quad (2)$$

اکنون، با توجه به نابرابری‌های (۱) و (۲)، می‌توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

۶. در اینجا، از دو حالت  $|AB| < |AD|$  و  $|AB| > |AD|$  می‌گیریم. به حالت اول می‌پردازیم (شکل ۳) و حالت دوم را به عهده خواهند می‌گذاریم.  $M$  را به نقطه  $O$  درمی‌کنیم، موکب متوازی الاخلاق وصل می‌کنیم. ثابت می‌کنیم دو مثلث  $AOM$  و  $AOD$  و همچنین دو مثلث  $BOM$  و  $BDC$  متشابه‌اند.

با توجه به فرض، روشن است که:  $\widehat{MBO} = \widehat{CBO}$  و  $\widehat{MAO} = \widehat{DAO}$ .



شکل ۳

$\widehat{CBO} = \beta$  و  $\widehat{DAO} = \alpha$  می‌گیریم، در این صورت.

$$\widehat{ADO} = \beta, \widehat{AOB} = \alpha + \beta,$$

$$\widehat{AMB} = 2\pi - \widehat{MAO} - \widehat{MBO} -$$

$$-\widehat{AOB} = 2\pi - 2\alpha - 2\beta$$

به این ترتیب، نقطه  $O$  از  $AM$  و  $AD$  بین  $A$  و  $M$  قرار دارد.

می‌گیریم چون هر دو خانه جدول را، می‌توان با مسیری بهم وصل کرد که بیش از  $(1-2n)$  خانه نداشته باشد، بنابراین از نابرابری بالا نتیجه می‌شود:  $|M-m| \leq 2n-2$ . از اینجا نتیجه می‌شود که در جدول، بیش از  $(1-2n)$  عدد مختلف وجود ندارد. یعنی، در جدول، عددی پیدا می‌شود

$$\text{که دست کم، } \left[ \frac{n^2}{2n-1} \right] \text{ بار تکرار شده است. ولی}$$

$$\left[ \frac{n^2}{2n-1} \right] = \left[ \frac{n}{2} + \frac{n}{2(2n-1)} \right] = \left[ \frac{n}{2} \right]$$

در واقع  $\frac{n}{2}$ ، همیشه از  $\frac{1}{2}$  کوچکتر است ( $n$  عددی طبیعی و بزرگ‌تر از واحد طبیعی است) و چون حداقل مقدار کسری  $\frac{n}{2}$  برای  $\frac{1}{2}$  است، بنابراین، بخش درست عدد  $\frac{n^2}{2n-1}$  برابر بخش درست عدد  $\frac{n}{2}$  می‌شود.

ب) بزرگ‌ترین و کوچکترین عدد ستون  $k$  را، به ترتیب،  $m_k$  و  $M_k$  می‌گیریم. اگر عدد  $x$  طوری باشد که در شرط  $m_k \leq x \leq M_k$ ، بهزای همه مقدارهای  $k$  (از  $1$  تا  $n$ ) صدق کند، بنابر آن چه در بخش (الف) گفتیم، باید عدد  $x$  در همه ستون‌ها وجود داشته باشد، یعنی دست کم  $n$  بار نوشته شده است. ولی، اگرچنان عددی برای  $x$  وجود نداشته باشد، آن وقت، برای شماره‌هایی مثل  $k$  و  $p$  داریم:

$$M_k \geq m_k \geq M_p \geq m_p$$

یعنی، همه عددهای ستون  $k$  از همه عددهای ستون  $p$  بزرگ‌ترند. اگر همین استدلال را در مورد عدد  $y$ ، با شرط  $m_k \geq y \geq M_p$ ، با توجه به مسیر افقی بین ستون  $k$  و ستون  $p$ ، به کار بینیم، به این نتیجه می‌رسیم که باید  $y$  در همه سطرها وجود داشته باشد، یعنی دست کم  $n$  بار تکرار شود. حکم (ب) هم ثابت شد.

یادداشت. جدول‌هایی می‌توان درست کرد که در آن‌ها، تنها یکی از

از نقطه  $M$ ، خط راستی عمود بر صفحه  $ABC$  رسم می‌کنیم و نقطه  $D_1$  را روی این خط راست طوری انتخاب می‌کنیم که  $|MD_1| = 1$  و، در ضمن، نیم خط  $MD_1$ ، صفحه  $ABC$  را قطع نکند (شکل ۴). اگر  $|AD_1| > |BD_1| > |CD_1|$ ، آن وقت  $|AD_1| > |BD_1| > |CD_1|$ . این نابرابری‌ها، روش می‌کنند که هر چهار راس چهاروجهی در یک طرف صفحه  $\pi$  – که از وسط پاره خط  $DD_1$ ، عمود بر این پاره خط گذشته است – قرار دارند. به تناقض بر می‌خوریم، زیرا نقطه  $M$  روی صفحه  $\pi$  و در درون چهاروجهی بود. بنابراین  $|AD_1| \leqslant |AD|$ . چون

$$|AD_1| = |BD_1| = |CD_1|$$

همه یال‌های چهاروجهی  $ABCD_1$ ، از نقطه  $M$ ، با زاویه‌هایی دیده می‌شوند که کسینوس آن‌ها، از  $\frac{1}{3}$  – بزرگتر است.

چون  $ABC$ ، نزدیکترین وجه چهاروجهی  $ABCD$  به نقطه  $M$  است، بنابراین، اگر از نقطه  $M$  عمودی بر وجه  $ABC$  رسم کنیم، هیچ کدام از وجه‌های دیگر را (غیر از  $ABC$ ) قطع نمی‌کند. در نتیجه، تصویر نقطه  $M$  بر صفحه  $ABC$ ، که مرکز دایره محیطی مثلث  $ABC$  است، در داخل این مثلث قرار می‌گیرد یعنی مثلث  $ABC$ ، زاویه‌هایی حاده دارد.

$$\widehat{AMB} = \alpha \text{ می‌گیریم. در این صورت } \cos \alpha = \frac{1}{3} \text{ – و بنابراین}$$

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}}$ . به سادگی می‌توان تحقیق کرد که شعاع دایره محیطی مثلث  $ABC$  برابر است با  $\sin \alpha$ . در بین ضلع‌های مثلث  $ABC$ ، ضلع  $AB$  را بزرگتر از دو ضلع دیگر فرض می‌کنیم. به دست می‌آید  $\frac{\pi}{3} < C < \frac{\pi}{2}$  و بنابراین

$$|AB| = 2 \sin \alpha \sin C > \sqrt{3} \sin \alpha > \sqrt{\frac{8}{3}}$$

از طرف دیگر  $\cos(AMB) > -\frac{1}{3}$ . بنابراین، بنابر قضیه کسینوس‌ها

همچنین از  $BC$  و  $BM$  و بالآخره از  $AD$  و  $BM$  به یک فاصله است. در نتیجه، نقطه  $O$  از دو خط راست  $AM$  و  $BM$  به یک فاصله می‌شود، یعنی خط راست  $MO$ ، نیمساز زاویه  $AMB$  است و

$$\widehat{AMO} = \frac{1}{2} \widehat{AMB} = \pi - \alpha - \beta = \widehat{AOD}$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$\widehat{BMD} = \widehat{BOC}$$

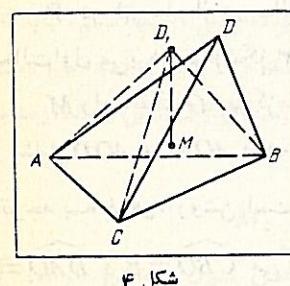
به این ترتیب، تشابه مثلث‌های موردنظر ثابت می‌شود و از آن جا

$$\frac{|AM|}{|AO|} = \frac{|AO|}{|AD|} \text{ و } \frac{|BM|}{|BO|} = \frac{|BO|}{|BC|}$$

و از آن جا

$$\frac{|AM|}{|BM|} \text{ و } \frac{|AO|}{|BO|} = k^2$$

۷. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، همه یال‌های چهاروجهی  $ABCD$ ، از نقطه  $M$  با زاویه‌هایی دیده شوند که، کسینوس آن‌ها، بزرگتر از  $\frac{1}{3}$  – باشد.

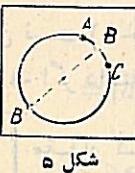


شکل ۴

اگر راس‌های  $A$ ،  $C$ ،  $B$ ،  $D$  را روی نیم خط‌های  $MA$ ،  $MB$ ،  $MC$ ،  $MD$  جابه‌جا کنیم، زاویه بین نیم خط‌ها تغییر نمی‌کند. بنابراین، می‌توان همه راس‌های چهاروجهی را به فاصله واحد از  $M$  گرفت؛ در ضمن نقطه  $M$  در داخل چهاروجهی  $ABCD$  واقع باشد فرض می‌کنیم، نزدیکترین وجه چهاروجهی به نقطه  $M$  و در بین یال‌های  $AD$  و  $BD$ ؛ طول یال  $AD$  از دیگران بزرگتر باشد.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
II	-	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-	+	
III	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	
I				+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	

۱۰. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، در بین این  $3k$  نقطه، نتوان دو نقطه پیدا کرد که با وصل آن‌ها به‌یکدیگر، قطرب از دائرة پیدا شود. این نقطه‌ها را با دائرة سیاه و نقطه‌های متناظر آن‌ها را با دائرة توخالی نشان می‌دهیم (شکل ۵ و شکل ۶). از شرط مساله پیداست که طول محیط دائیره، برابر با  $4k$  می‌شود.

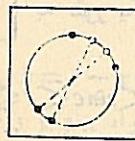


شکل ۵

بنابراین طول کمان نیم دائیره، یعنی کمانی که بین دو سر یک قطر قرار دارد، برابر  $3k$ ، یعنی عددی درست است. از این جا نتیجه می‌شود که طول کمان بین هر نقطه سیاه و هر نقطه سفید، عددی است درست. و این، به معنای آن است که طول کمان بین هر دو نقطه از  $4k$  نقطه سیاه و سفید، با عددی درست

بیان می‌شود و، بنابراین،  $4k$  نقطه سیاه و سفید محیط دائیره را به  $4k$  بخش به طول واحد تقسیم می‌کنند.

کمانی به طول  $2$ ، بین دو نقطه سیاه را در نظر می‌گیریم، مثل کمان  $AC$  روی شکل ۵. در وسط این دو نقطه، نقطه سفید  $B$  قرار دارد، که نقطه متناظر آن،  $B$ ، یک نقطه سیاه است. تعداد



شکل ۶

$$|AB|^2 = 2 - 2\cos(AMB) < \frac{8}{3}$$

و این، یک تناقض است.

۸. اگر  $43$  عدد از  $2$  تا  $44$  را از بین عددها کنار بگذاریم، شرط مساله با عددهای باقی‌مانده سازگار است، زیرا اگر به عدد  $1$  در بین عددهای باقی‌مانده توجه نکنیم، حاصل ضرب هر دو عدد دلخواه از عددهای باقی‌مانده،

$$45^2 = 2025 \geq 1980 > 42^2 = 1936$$

اکنون ثابت می‌کنیم، اگر فقط  $42$  عدد را حذف کنیم، در بین عددهای باقی‌مانده، می‌توان سه عدد پیدا کرد که حاصل ضرب دو تا از آن‌ها، برابر با عدد سوم باشد. این عددهای سه‌تایی را در نظر می‌گیریم:

$$(44 \times 45, 44 \times 46, \dots); (3 \times 86, 3 \times 87, 2 \times 87); (20, 87)$$

چون تابع  $(x-89-x)$  در بازه  $x \leq 44 \leq x \leq 2$  صعودی است، بنابراین، همه عددهایی که نوشته‌ایم، باهم فرق دارند و، در ضمن، از  $45 \times 44$ ، یعنی  $1980$  تجاوز نمی‌کنند ( $1980 < 1982$ ). تعداد این سه‌تایی‌ها، برابر است با  $43$ . بنابراین، اگر کمتر از  $43$  عدد حذف کنیم، دست کم یکی از این سه‌تایی‌ها باقی می‌ماند و شرط مساله بهم می‌خورد.

۹. برای سادگی کار، دانش‌آموزان را  $I$ ,  $II$  و  $III$  می‌نامیم، یادآوری می‌کنیم که، دانش‌آموز  $II$ ، که روز دوشنبه در کتابخانه بوده است، قبل از آن، می‌توانست روزهای جمعه، سه شنبه و شنبه به کتابخانه رفته باشد (جدول را ببینید). دانش‌آموز  $III$ ، سه روز در میان به کتابخانه می‌رود. قبل از دوشنبه می‌توانست پنجشنبه در کتابخانه باشد، که  $II$  در آن جا نبود. قبل از پنجشنبه،  $III$ ، یا یکشنبه در کتابخانه بوده است که در آن موقع،  $II$  در آن جا نبود، و یا دوشنبه، که  $II$  هم حضور داشت. باید ببینیم که آیا دانش‌آموز  $I$ ، می‌توانست در این شنبه (که  $II$  و  $III$  در کتابخانه اند) حضور داشته باشد. خیلی ساده، می‌توان این امکان را تحقیق کرد (جدول را ببینید). مساله حل شد: سه دانش‌آموز در روز شنبه با هم گفت و گو می‌کرده‌اند.

۱۲. عددهای مجموعه  $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  را  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  می نامیم، به نحوی که این نابرابری‌ها برقرار باشند:

$$|a - a_0| \leq |a - a_1| \leq \dots \leq |a - a_n|$$

برای هر عدد طبیعی  $k$ ، در بازه  $|x - a| < \frac{k}{2}$ ، بیش از  $k$  عدد از مجموعه ما وجود ندارد. بنابراین، برای مقدارهای  $k$ ، از ۱ تا  $n$ ، این نابرابری، برقرار است:

$$|a - a_k| \geq \frac{k}{2} \quad (1)$$

اکنون، با توجه به (۱) و با توجه به نابرابری  $\langle a \rangle$ ، به دست می آید:

$$\begin{aligned} |a| \cdot |a - 1| \cdots |a - n| &= \\ = |a - a_0| \cdot |a - a_1| \cdots |a - a_n| &\geq \\ \geq \langle a \rangle \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdots \frac{n}{2} &= \langle a \rangle \cdot \frac{n!}{2^n} \end{aligned}$$

۱۳. الف) سه عدد  $(1, 2, z) = (x, y, z)$  در معادله‌های

$$x - y + 1 = 0, y - z - 1 = 0, z - 2x + 1 = 0$$

صدق می‌کنند. اگر چندجمله‌ای‌های  $P, Q$  و  $R$  وجود داشته باشند، باید اتحاد موردنظر، به ازای این مقدارهای  $x$  و  $y$  و  $z$  برقرار باشند، در حالی که، با قرار دادن این مقدارها، به تساوی  $1 = 0$  می‌رسیم. در این حالت، مساله جواب ندارد.

ب)  $f = x - y + 1, g = y - z - 1, h = z - x + 1$  و  $m = h = z - x + 1$  می‌گیریم. روش است که  $f + g + h = 1$  (برای هر مقدار  $x, y$  و  $z$ ). اگر دو طرف این اتحاد را به توان ۷ برسانیم، معلوم می‌شود که عدد ۱، به عنوان مجموع جمله‌های به صورت  $f^k g^l h^m$  در می‌آید که در آن،  $0 \leq k, l, m \leq 1$ . دست کم، یکی از سه عدد  $k, l$  و  $m$ ، از ۳ کمتر

کمان‌هایی از کمان  $AB$  را (کمان کوچک‌تر  $AB$  روی محیط دایره)، که بین دو نقطه سیاه قرار دارند و طول‌هایی برابر ۱، ۲ و ۳ داشته باشند، به ترتیب، برابر  $n_1, n_2$  و  $n_3$  می‌گیریم چون طول این کمان برابر  $(1 - 3k)$  است، بنابراین

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 3k - 1 \quad (1)$$

اکنون توجه می‌کنیم که هر کمان به طول ۱، با دو انتهای سیاه، متناظر است با کمانی به طول ۳ با دو انتهای سیاه (شکل ۶). بنابراین، هر یک از  $k - n_1, k - n_2$  و  $k - n_3$  کمان به طول ۱ (با دو انتهای سیاه) واقع بر کمان کوچک‌تر  $BC$ ، متناظر است. با کمانی به طول ۳ واقع بر  $AB$ : یعنی  $k - n_1 = n_2 = k - n_3 = k - n_2$ ، و برابری (۱) به این صورت در می‌آید:

$$n_1 + 2n_2 + 3k - 3n_1 = 3k - 1 \Rightarrow 1(n_2 - n_1) = -1$$

که ممکن نیست (۱ - ۱ بخش پذیر نیست). حکم ثابت شد.

۱۴. اگر داشته باشیم:  $b \geq a$ ، آن وقت، با توجه به این که در بازه

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  مقدار کسینوس، نزولی یکنواست و با توجه به نابرابری

$\langle \cos b \rangle < \langle \cos a \rangle$ ، به دست می‌آید:

$$b = \sin(\cos b) < \cos b \leq \cos a = a$$

که با فرض  $b \geq a$  متناقض است. یعنی  $a < b$ .

اکنون فرض می‌کنیم  $a \leq c$ . با توجه به این مقدار کسینوس در بازه

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  به طور یکنوا نزولی است و با توجه به نابرابری‌های

$\langle \sin c \rangle < \langle \sin a \rangle \leq a$ ، به دست می‌آید:

$$c = \cos(\sin c) > \cos a \geq \cos a = a$$

که با فرض  $a \leq c$  متناقض است. یعنی  $c > a$ . به این ترتیب داریم:  $b < a < c$

جمع کنیم، به دست می آید:

$$P(E, F, G, H) \leq \lambda P(E, F, G, H_1) + (1 - \lambda) P(E, F, G, H_2)$$

باتوجه به این که  $H_1 < H_2$ ، می توان از نابرابری اخیر، یکی از دو نابرابری (۱) یا (۲) را نتیجه گرفت.

حالا، به اثبات نابرابری (۱) می پردازیم. اگر پاره خطی را در نظر بگیریم که از نقطه  $N$  بگذرد و دو انتهای آن،  $N_1$  و  $N_2$ ، روی وجههای چهار و جهی  $ABCD$  باشد، آن وقت، یکی از دو نابرابری  $P(K, L, M, N_1) \geq P(K, L, M, N_2)$  یا  $P(K, L, M, N_2) \geq P(K, L, M, N_1)$

را خواهیم داشت. بنابراین، برای اثبات حکم مساانه، کافی است آن را برای نقطه هایی از  $K, L$  و  $M$  تحقیق کنیم که، در آنها، نقطه  $N$  بریکی از وجههای چهار و جهی  $ABCD$  واقع باشد. ولی، در این صورت، اگر از نقطه  $N$ ، پاره خطی با دو انتهای  $N_1$  و  $N_2$  واقع بریال های چهار و جهی  $ABCD$  بگذرانیم، به این نتیجه می رسیم که، برای اثبات نابرابری (۱)، کافی است آن را برای نقطه هایی از  $K, L, M$  و  $N$  تحقیق کنیم، که در آنها،  $N$  بریکی از یال های چهار و جهی  $ABCD$  واقع باشد. اگر به همین ترتیب، برای نقطه  $N$  و دو انتهای یالی که  $N$  بر آن واقع است، استدلال کنیم، سرانجام به این نتیجه می رسیم که، کافی است نابرابری (۱) را در مورد چهار نقطه ای مثل  $M, L, K$  و  $N$  تحقیق کنیم که، در آنها،  $N$  بریکی از رأس های چهار و جهی  $ABCD$  منطبق باشد.

اگر چنین استدلالی را در مورد رأس های  $K$  و  $L$  و  $M$  هم به کار بیم، به این نتیجه نهائی می رسیم که، برای اثبات نابرابری (۱)، کافی است آن را برای چهار نقطه ای مثل  $K, L, M$  و  $N$ ، رأس های مختلفی از چهار و جهی  $ABCD$  منطبق باشند.

به این ترتیب، کافی است، تنها حالات های زیر را مورد بررسی قرار دهیم:

الف)  $K, L, M, N$ ، رأس های مختلفی از چهار و جهی  $ABCD$  هستند.

در این صورت

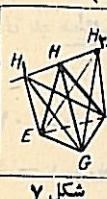
نیست. بنابراین، هر جمله یا  $\overrightarrow{f^3}$  یا  $\overrightarrow{g^3}$  و یا  $\overrightarrow{h^3}$  بخش پذیر است. همه جمله هایی را که  $\overrightarrow{f^3}$  بخش پذیر نند، در یک گروه قرار می دهیم.  $P, Q$  به دست می آید. از بین بقیه جمله ها، آن هایی را که  $\overrightarrow{g^3}$  بخش پذیر نند، در گروه دوم  $\overrightarrow{h^3}$  قرار می دهیم.  $R$  به دست می آید. مجموع بقیه جمله ها، به صورت  $\overrightarrow{P(E, F, G, H)}$  خواهد بود. بنابراین، می توان اتحادی به صورت مورد نظر مسأله، درست کرد. می گیریم، که از وصل دو به دوی نقطه های  $E, F, G$  و  $H$  به دست آمده اند. بنابراین، باید ثابت کنیم:

$$P(K, L, M, N) < \frac{4}{3} P(A, B, C, D) \quad (1)$$

ابتدا، یک پیش قضیه را ثابت می کنیم: اگر سه نقطه مختلف  $H_1, H_2$  و  $H_3$ ، واقع بر یک خط راست، چنان باشند که  $H$  بین  $H_1$  و  $H_2$  قرار گیرد، آن وقت، یکی از دو نابرابری زیر برقرار است. (شکل ۷):

$$P(F, F, G, H) \leq P(E, F, G, H_1) \quad (2)$$

$$P(E, F, G, H) \leq P(E, F, G, H_2) \quad (3)$$



شکل ۷

نسبت  $|H_1 H| : |H_2 H|$  را  
برابر  $\lambda$  می گیریم، در این صورت

$$\begin{aligned} \vec{EH} &= \vec{EH}_1 + \lambda \vec{H}_1 H_2 = \\ &= \lambda \vec{EH}_2 + (1 - \lambda) \vec{EH}_1 \end{aligned}$$

$|\vec{EH}| \leq \lambda |\vec{EH}_2| + (1 - \lambda) |\vec{EH}_1|$   
به همین ترتیب

$$|\vec{FH}| \leq \lambda |\vec{FH}_2| + (1 - \lambda) |\vec{FH}_1|,$$

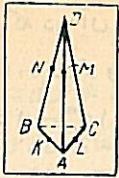
$$|\vec{GH}| \leq \lambda |\vec{GH}_2| + (1 - \lambda) |\vec{GH}_1|$$

اگر سه نابرابری اخیر را با برابری های واضح

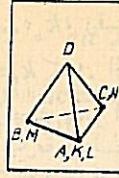
$$|\vec{EF}| = \lambda |\vec{EF}| + (1 - \lambda) |\vec{EF}|,$$

$$|\vec{FG}| = \lambda |\vec{FG}| + (1 - \lambda) |\vec{FG}|,$$

$$|\vec{EG}| = \lambda |\vec{EG}| + (1 - \lambda) |\vec{EG}|$$



شکل ۱۱



شکل ۱۵

این که در این مورد قانع شویم، هر ممنظم  $ABCD$  را طوری در نظر می‌گیریم داشته باشیم:

$$|AB|=|BC|=|CA|=1 \text{ و } |AD|=|BD|=|CD|>2$$

(شکل ۱۱) و  $L$  را وسط پالهای  $AB$  و  $BD$  بگیرید؛ در ضمن، به نحوی که داشته باشیم:

$$|DM|=|DN|=1$$

اگر ارتفاعی از هرم  $ABCD$  که از رأس  $D$  گذشته است، به سمت پایه  $AC$  میل کند، آن وقت، نسبت

$$P(K,L,M,N) : P(A,B,C,D)$$

به سمت  $\frac{4}{3}$  میل می‌کند.

۱۵ از برهان خلف استفاده می‌کنیم. بین همه عددهای طبیعی بخش پذیر بر  $1 = \underbrace{11 \dots}_{m} A$  که مجموع رقم‌هایی کمتر از  $m$  داشته باشند، کوچکترین را در نظر می‌گیریم و آن را  $B$  می‌نامیم. از آنجا که در همه عددهای  $A, 2A, 3A, \dots, 9A$ ، مجموع رقم‌ها کمتر از  $m$  نیست، بنابراین

$$B \geqslant 10A = 10 \times \frac{10^m - 1}{9} \geqslant 10^m \quad (1)$$

فرض کنید:

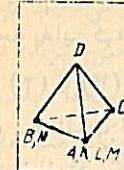
$$B = k_r \cdot 10^r + \dots + k_1 \cdot 10 + k_0$$

به این ترتیب، نابرابری موردنظر مسأله، به طور کامل ثابت شد.

یادداشت. ضریب  $\frac{4}{3}$  در صورت

مسأله را نمی‌توان کوچکتر کرد. برای این که در این مورد قانع شویم، هر ممنظم  $ABCD$  را طوری در نظر می‌گیریم داشته باشیم:

$$P(K,L,M,N) = P(A,B,C,D) \leqslant \frac{4}{3} P(A,B,C,D)$$



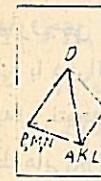
شکل ۸

ب) سه نقطه  $K, M, L$ ، مثلاً بر منطبق‌اند و نقطه  $N$  بر  $B$  قرار دارد (شکل ۸). در این صورت، با استفاده از نابرابری‌های

$$|AB| < |BD| + |AD|, |AB| < |BC| + |AC|$$

به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(K,L,M,N) &= 3|AB| < |AB| + |BD| + |AD| + |BC| + \\ &\quad + |AC| = P(A,B,C,D) \end{aligned}$$



شکل ۹

پ) دونقطه  $K$  و  $L$ ، مثلاً بر رأس  $A$ ، و نقطه‌های  $M$  و  $N$  بر رأس  $B$  منطبق باشند (شکل ۹). در این حالت

$$P(K,L,M,N) = 4|AB| = \frac{4}{3} \cdot 3|AB| < \frac{4}{3} P(A,B,C,D)$$

(حالات ب) را بهینه‌نمود.

ت) نقطه‌های  $K$  و  $L$  بر رأس  $A$  و نقطه‌های  $M$  و  $N$ ، به ترتیب، بر رأس‌های  $B$  و  $C$  منطبق‌اند (شکل ۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} P(K,L,M,N) &= 2|AB| + 2|AC| + |BC| < \\ &< \frac{4}{3}(|AB| + |AC| + |BC|) + \frac{2}{3}|AB| + \frac{2}{3}|AC| < \\ &< \frac{4}{3}(|AB| + |AC| + |BC|) + \frac{2}{3}(|BD| + |AD|) + \\ &\quad + \frac{2}{3}(|AD| + |CD|) < \frac{4}{3} P(A,B,C,D) \end{aligned}$$

$$\overline{ad} \cdot \overline{cb} = \overline{da} \cdot \overline{bc}$$

اگر  $a=c$  باشد، آن‌ها را برابر می‌کنیم. اگر  $a \neq c$  باشد،  $b=c$  صدق می‌کند و عدد  $k$  به صورت حاصل ضرب عددهای  $\overline{ba}$  و  $\overline{ab}$  در می‌آید. اگر برای مشخص بودن وضع  $b < a$  بگیریم، عدد از این گونه برای  $k$  به دست می‌آید: عدد به ازای  $a=1$  عدد برای  $a=2$  وغیره،  $a \neq d$  می‌گیریم. از جدول ضرب دیده می‌شود که هر یک از عددهای زیر را، به دو طریق می‌توان به صورت ضرب دو عدد یک رقمی نوشت:

$$46, 68, 90, 120, 160, 180, 240, 360$$

از برابری‌های

$$1 \times 4 = 2 \times 2, 1 \times 9 = 3 \times 3, 2 \times 8 = 4 \times 4, 4 \times 9 = 6 \times 6$$

به ۴ ضرب می‌رسیم:

$$12 \times 42 = 21 \times 24, 13 \times 93 = 21 \times 39,$$

$$24 \times 84 = 42 \times 48, 46 \times 96 = 64 \times 69$$

و از هر یک از بقیهٔ عددها، ضرب‌هایی با عامل‌های مختلف به دست می‌آید:

$$1 \times 6 = 2 \times 3, 1 \times 8 = 2 \times 4, 2 \times 6 = 3 \times 4,$$

$$2 \times 9 = 3 \times 6, 4 \times 6 = 3 \times 8$$

و بنابراین، هر یک از آن‌ها، متناظر با دو ضرب است:

$$12 \times 63 = 21 \times 48, 12 \times 84 = 21 \times 48, 13 \times 62 = 31 \times 26, 12 \times 84 = 31 \times 26, 13 \times 36 = 21 \times 36,$$

$$14 \times 82 = 41 \times 28, 23 \times 64 = 32 \times 46, 24 \times 63 = 42 \times 36,$$

$$23 \times 96 = 32 \times 69, 26 \times 93 = 62 \times 39, 43 \times 68 = 34 \times 86,$$

$$36 \times 84 = 63 \times 48$$

اگر همهٔ عددهای حاصل را کنترل کنیم، معلوم می‌شود که عدد ۱۰۰۸

دوبار به دست آمده است:

$$1008 = 12 \times 84 = 24 \times 42$$

که در آن  $k_1, k_2, \dots, k_n$ ، رقم‌های عدد  $B$  هستند،  $9 \leq k_j \leq 9$  برای  $1 \leq j \leq n$ . از (۱) نتیجه می‌شود که  $r \geq m$ .  $A = 10^m - 1$  بر  $A$  بخش‌پذیر است، بنابراین عدد

$$B_1 = B - (10^r - 10^{r-m}) = B - 10^{r-m}(10^m - 1)$$

هم، بر  $A$  بخش‌پذیر می‌شود. در ضمن  $B_1$  از  $B$  کوچکتر است. مجموع رقم‌های عدد  $B_1$ ، از مجموع رقم‌های عدد  $B$  برابر مجموع رقم‌های عدد  $B$  می‌شود. اگر  $m = 9$ ،  $k_{r-m}$  مجموع رقم‌های  $B_1$ ، از مجموع رقم‌های  $B$  کمتر می‌شود. بنابراین، فرض ابتدای کار، نادرست است.

۱۶. از آنجا که تنها  $n$

خانهٔ علامت گذاری شده است، در یکی از  $n$  ستون، خانهٔ علامت گذاری شده،

وجود ندارد آن را با ستون انتهایی

سمت راست عوض می‌کنیم. اگر  $n$

به سطرهای جدول می‌پردازیم در همه‌این

سطرهای، خانهٔ سمت راست، بدون علامت است، ولی بعضی از سطرهای، در خانه

یا خانه‌های دیگر خود، علامت دارند. یکی از این سطرهای گذاری شده سطر پایین،

پایین عوض می‌کنیم. در این صورت، خانه‌های علامت گذاری شده سطر پایین،

در زیر قطر قرار می‌گیرند. اگر از ستون سمت راست و سطر پایین

صرف نظر کنیم، مربعی  $(n-1) \times (n-1)$  در مقابل ما خواهد بود که

می‌توان، همان فرایند قبلی را در مورد آن تکرار کرد، سپس دربارهٔ مربع

$(n-2) \times (n-2)$  وغیره، تا زمانی که همهٔ خانه‌های علامت گذاری شده،

زیر قطر مورد نظر قرار گیرند.

چند مسئلهٔ گوناگون (صفحهٔ ۱۵۸ را ببینید)

۹. همهٔ عددهای  $k$ ، که با شرط‌های جواب سازگاری داشته باشند،

باید به صورت  $\overline{cd} \cdot \overline{ab}$  و هم به صورت  $\overline{dc} \cdot \overline{ba}$  باشند. بنابراین

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ba} \cdot \overline{dc}$$

از اینجا، نتیجه می‌شود  $ac = bd$  و در این صورت

به این ترتیب، هریک از زوچهای  $(e, f)$ ,  $(b, h)$  و  $(c, k)$  را می‌توان به دو طریق انتخاب کرد و در نتیجه، برای انتخاب این عددهای سه رقمی، ۸ طریق ممکن وجود دارد.

$$\sqrt{m} = k + a \quad \text{می‌گیریم، که در آن، } k \in \mathbb{Z} \text{ و } 1 < a < 0.$$

در این صورت، بنابر شرط مسئله، باید داشته باشیم:

$$\frac{3}{10} < a < \frac{1}{3}$$

و از آن جا

$$k + \frac{3}{10} < \sqrt{m} < k + \frac{1}{3},$$

$$k^2 + \frac{3}{5}k + \frac{9}{100} < m < k^2 + \frac{2}{3}k + \frac{1}{9}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، این نابرابری‌ها، در حالت‌های  $k=3, k=1$ ، برای هیچ عدد طبیعی  $m$  برقرار نیستند، در حالات  $k=3$ ،  $k=1$  بودست می‌آید:  $m=11$ . عدد محبوب، برابر است با ۱۱.

۵. به طور مستقیم، می‌توان بودست آورد:  $a_7 = a_7$ . در این صورت، خواهیم داشت:  $a_8 = a_2$ ،  $a_9 = a_2$  و به طور کلی  $a_{k+6} = a_k$ .  
به این ترتیب  $a_5 = a_{1367}$  و به سادگی محاسبه می‌شود:

$$a_5 = 7 ; a_{1367} = 7$$

۶. چند جمله را  $(x)f$  می‌نامیم. توجه می‌کنیم که  $\langle \langle \langle \langle \langle \langle$ ؛ اگر  $f(x)$  ریشه‌ای در بازه  $(1, 5)$  نداشته باشد، به دلیل پیوسته بودن تابع، باید در این بازه تغییر علامت ندهد، یعنی، برای هر  $x \in (1, 5)$  داشته باشیم:  $\langle \langle \langle \langle \langle \langle$ . در این صورت باید انتگرال  $\int_a^x f(x) dx$  منفی باشد، ولی

$$\int_a^x f(x) dx = 3x^4 + 4ax^3 - 4ax^2 - 3x = 0$$

بنابراین، چندجمله‌ای  $(x)f$ ، به ازای هر مقدار دلخواه  $a \in R$ ، دست کم یک ریشه در بازه  $(1, 5)$  دارد.

پاسخ: روی هم ۴۹ عدد برای  $k$  بودست می‌آید.

۰۲  $\overline{abc} < \overline{def} < \overline{ghk}$  را سه عددی می‌گیریم که با شرط‌های مسئله سازگار باشند مجموع این عددها، چنین است:

$$100(a+d+g) + 10(b+e+h) + (c+f+k)$$

روشن است که هر جمله از پرانتز اول، بزرگتر است از هر جمله از پرانتز دوم، و هر جمله از پرانتز دوم، بزرگتر است از هر جمله پرانتز سوم، زیرا درغیر این صورت، می‌توان با جا به جا کردن جای رقم‌ها، مجموع سه عدد را افزایش داد. به زبان دیگر

$$a, d, g \in \{7, 8, 9\}; b, e, h \in \{4, 5, 6\}; c, f, k \in \{1, 2, 3\}$$

از آن جا که ردیف عددها اهمیتی ندارد، می‌توان فرض کرد:

$$a=9, d=8, g=7$$

رقم  $b$  را به سه طریق می‌توان انتخاب کرد و سپس، رقم  $e$  را به دو طریق یعنی رقم دوم این عددها به شش طریق قابل انتخاب است. به همین ترتیب، شش طریق ممکن، برای انتخاب رقم سوم وجود دارد. به این ترتیب، به ۳۶ طریق مختلف می‌توان این سه عدد را انتخاب کرد.

۳. فرض کنید  $\overline{abc} < \overline{def} < \overline{ghk}$ ، سه عددی باشند که با شرط مسئله سازگارند، در این صورت، مجموع موردنظر، برابر است با

$$100(a+g) + 10(b+h) + (c+k)$$

چون این مجموع، بزرگترین مقدار ممکن است، باید هر جمله از پرانتز اول بزرگتر از هر جمله پرانتز دوم و هر جمله پرانتز دوم بزرگتر از هر جمله پرانتز سوم باشد.

ولی  $a < d < g$ ، بنابراین  $a=7, d=8, g=9$ ؛ علاوه بر این، چون رقم‌های  $e$  و  $f$ ، در مجموع موردنظر دخالتی ندارند، باید آن‌ها را، حداقل مقدار ممکن در نظر گرفت، یعنی  $\{1, 2\} \in \{e, f\}$ . در این صورت

$$b, h \in \{5, 6\} ; c, k \in \{3, 4\}$$

$$\times [(x+1)(x-2)\dots(x+n)]'$$

در نتیجه، با توجه به فرد بودن  $n$ ، بدست می‌آید:

$$|f'(0)| = \frac{1}{n} (n!)^{\frac{1}{n}-1} \left| -\frac{n!}{1} + \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3} + \dots + \frac{n!}{n} \right| = \\ = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \left( 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \dots + \frac{1}{n} \right)$$

ولی می‌دانیم

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \dots = \ln n$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} > \ln 2$$

بنابراین به این ترتیب، کافی است، این دو نایابری را ثابت کنیم:

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{n}{e} \quad \text{و} \quad \frac{\ln 2}{e} > \frac{12}{55}$$

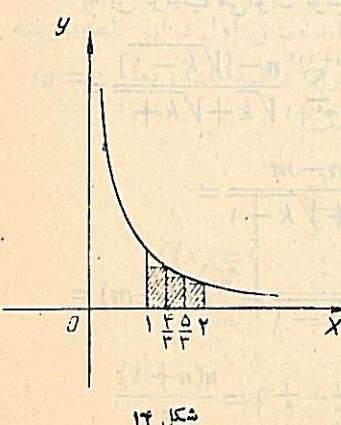
نایابری اول را، به سادگی و به کمک روش استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد. برای اثبات نایابری دوم، از تعییر هندسی انتگرال معین استفاده می‌کنیم. روی شکل ۱۴ دیده می‌شود:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx >$$

$$> \frac{1}{5} \left( \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{37}{60} > \frac{3}{5}$$

وبنا براین

$$\frac{\ln 2}{e} > \frac{3}{5 \times 2 \times 75} = \frac{12}{55}$$

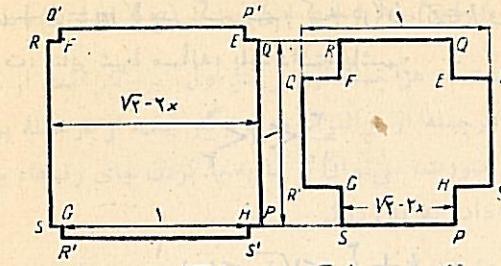


شکل ۱۴

۷. صفحه  $\alpha$ ، که در صورت مسئله، از آن صحبت شده است، مکعب

منفروض را در مستطیل  $PQRS$  قطع می‌کند که، در آن (شکل ۱۳):

$$|PQ| = |RS| = 1, |PS| = |QR| = \sqrt{2} - 2x$$



شکل ۱۳

اگر مستطیل  $'S'P'Q'R'S$ ، از دوران مستطیل  $PQRS$  دور محور  $= I$  و به اندازه  $90$  درجه، به دست آمده باشد، آن وقت، به شرط

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad |EF| = 1 \quad \text{و} \quad \text{به شرط} \quad \frac{\sqrt{2}-1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

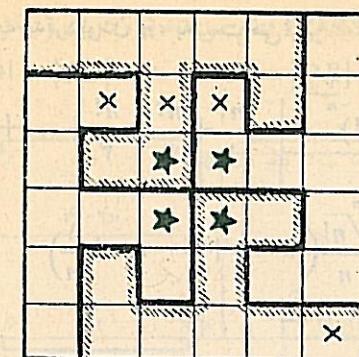
$$\text{داریم: } |EF| = \sqrt{2} - 2x$$

از اینجا به دست می‌آید:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2} - 1 - 4x & (0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}) \\ -4x^2 + 4(\sqrt{2}-1)x + 2(\sqrt{2}-1) & (\frac{\sqrt{2}-1}{2} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ 0 & (x > \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{cases}$$

۸. داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{n} [(x+1)(x-2)\dots(x+n)]^{\frac{1}{n}-1} \times$$



محاسبه یک مجموع (صفحه ۲۲۵ را بینید)

روشن است که اگر داشته باشیم:  $(1) \leq k \leq (m+1)$ ,  $m^{\text{v}} + 1$ , خواهیم داشت:  $\sqrt{k-1} = m$ .

$$\sum_{k=m^{\text{v}}+1}^{(m+1)^{\text{v}}} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sum_{k=m^{\text{v}}+1}^{(m+1)^{\text{v}}} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \\ = (\sqrt{m^{\text{v}}+1} - m) + (\sqrt{m^{\text{v}}+2} - \sqrt{m^{\text{v}}+1}) + \dots \\ \dots + ((m+1) - \sqrt{(m+1)^{\text{v}}-1}) = 1$$

به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m^{\text{v}}+1}^{(m+1)^{\text{v}}} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \\ = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m^{\text{v}}+1}^{(m+1)^{\text{v}}} \frac{n-m}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \\ = \sum_{m=0}^{n-1} (n-m) \sum_{k=m^{\text{v}}+1}^{(m+1)^{\text{v}}} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sum_{m=0}^{n-1} (n-m) = \\ = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

دو مساله از مفهوم تابع (صفحه ۲۳۶ را بینید)

۱.  $f$  را تابع مجھول می‌گیریم؛ این صورت، مشتق دوم آن در بازه

$\frac{x^{\text{v}}}{2} + a, +\infty$ ) برابر  $x$  می‌شود و، بنابراین، مشتق اول آن به صورت  $a$

خواهد بود. در نتیجه، در بازه  $(+\infty, +\infty)$  خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{x^{\text{v}}}{\mu} + ax + b \quad (1)$$

که در آن،  $a$  و  $b$ ، عددهای حقیقی دلخواهی هستند. به همین ترتیب، برای بازه  $(-\infty, 0)$  بدست می‌آید:

$$f(x) = -\frac{x^{\text{v}}}{\mu} + cx + d \quad (c, d \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

چون تابع  $f$  باید در نقطه  $0$  پیوسته باشد، بنابراین رابطه‌های (1) و

(2) باید در نقطه  $x=0$ ، مقدارهایی برابر داشته باشند و از آن جا به دست می‌آید:  $d=b$ . سپس، مشتق اول تابع  $f$  در بازه‌های  $(0, +\infty)$  و  $(-\infty, 0)$ ، به ترتیب چنین است:

$$f'(x) = \frac{x^{\text{v}}}{\mu} + a, \quad f'(x) = -\frac{x^{\text{v}}}{\mu} + c$$

برای وجود مشتق دوم در نقطه  $x=0$ ، باید مشتق اول در این نقطه پیوسته و، بنابراین، به ازای  $x=0$ ، مقدارهایی برابر داشته باشد، یعنی  $a=c$ ، به این ترتیب، تابع مجھول چنین است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\text{v}}}{\mu} + ax + b & (x \geq 0) \\ -\frac{x^{\text{v}}}{\mu} + ax + b & (x < 0) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{\mu} x^{\text{v}} |x| + ax + b$$

و یا

۴. اتحاد

$$(a+x)^2 - (a-x)^2 = 4ax$$

نشان می دهد که، یکی از جواب های معادله، عبارت است از تابع  $x \mapsto f(x) - x^2$ . اگر  $f$  را جواب دلخواهی از معادله مفروض بگیریم و فرض کنیم  $g(x) = f(x) - x^2$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(a+x) - g(a-x) &= f(a+x) - (a+x)^2 - f(a-x) + \\ &\quad + (a-x)^2 = 4ax - 4ax = 0 \end{aligned}$$

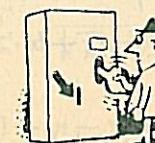
یعنی  $(x, g(a+x)) = g(a-x)$ . از اینجا نتیجه می شود که تابع  $h : x \rightarrow g(x+a)$

تابعی است زوج و، بنابراین، هر جواب  $f$  از معادله مفروض، به این صورت است:

$$x \mapsto f(x) = x^2 + h(x-a) \quad (1)$$

که در آن  $h$  یک تابع زوج است. مثلاً تابع  $f(x) = x^2 + \cos(x-a)$  یکی از جواب های معادله است.

بر عکس می توان ثابت کرد که هر تابع به صورت (1)، باشرط زوج بودن تابع  $h$ ، در معادله صورت مساله صدق می کند و، بنابراین، تابع (1)، صورت کلی جواب معادله مفروض را به ما می دهد.



Reconciliation With Mathematics  
Editor: Parviz Shahryari  
Address: Tehran, Firdaus  
Vol. XI, No. 2, Serial No. 52, 1988

\*

All correspondence to the editor from outside Iran can be addressed to:  
Shahriar Shahriari,  
Department of Mathematics,  
California State University,  
Northridge, CA 91330,  
USA