

آشنا با ریاضیات

۱۹



شهریور ۱۳۶۰

آشنا با ریاضیات

سندباد: پرویز شهریاری

مدیر داخلی: محمدحسن احمدی

ویرانی: همت تعریر

از انتشارات جانبی گروه ادبیات و علوم انسانی

صفحه‌ارایی، تصحیح، چاپ و مراجعت: مرکز تولید انتشارات گروه ادبیات و علوم انسانی
نشانی: تهران - خیابان کریم خان زند - اول آیان شمالی - گروه ادبیات و علوم انسانی

سال پنجم - شماره ۳ (۱۹)

فهرست مطالب

ریاضیات مرز سودمند بودن را معین می‌کند	ن. ورویت پرویز شهریاری	۱
علم و صنعت در پلاتیورس	مارتن گاردنر همز شهریاری	۱۵
تحقیق در باره تعداد عددی‌های اول در	غلامرضا حاتمی	۲۷
- حوزه‌های مختلف عددی		
رمز و راز عددی‌ها و شکل‌ها		
دانش جدید شکل می‌گیرد		
تلاش برای تنظیم فرهنگ ریاضی		
کاربرد هندسه در علم چهارفایا		
ریاضی کردن فیزیک		
پیشگامان		
۵۵	—	
۵۸	—	
۷۲	—	
۷۹	—	
۹۶	—	
۱۱۸	—	

۵۰ ریال

آشتی با ریاضیات

سردیبر: پرویز شهریاری

مدیر داخلی: محمدحسین احمدی

زیرنظر هشت تحریر به

از انتشارات جانبی گروه ادبیات و علوم انسانی

صفحه آرایی، تصحیح، چاپ و صحافی: مرکز تولید انتشارات گروه ادبیات و علوم انسانی

نشانی: تهران - خیابان کریم خان زند - اول آبان شمالی - گروه ادبیات و علوم انسانی

ن. ورویف

ترجمه پرویز شهریاری

ریاضیات

مرز سودمند بودن را معین می کند

ورود به مطلب

همه ما ارزش توصیف‌های ریاضی را، ولو از زبان دیگران، می‌دانیم. هندسه دیبرستانی، حتی از ساده‌ترین چیزها، مثل مثلث و دائره، چنان شبکه به هم بافته‌ای از قضیه‌ها ایجاد می‌کند که به سختی می‌توانید از آن خلاص شوید، و این بیشتر به خاطر آن است که شما بدانید با چه موضوعی سروکار دارید: این را فایده آن می‌دانند. و چقدر تصور این «فایده»، مبهم و تاریک است. «فایده» واژه‌ای است، چیزی است یا کسی است؟ درباره «فایده» خیلی حرف‌ها می‌توان زد. مثلاً می‌توان گفت که فلان چیز فایده‌ای دارد، در حالی که بهمان چیز این فایده را ندارد. ولی واقعاً درباره «سودمند بودن» به طور کلی، و خارج از زمان و مکان و موقعیت، چه می‌توان گفت: «سودمند بودن»، به مفهوم انتزاعی آن؟ و من قصد دارم همین مفهوم انتزاعی را، به کمک رابطه‌هایی از ریاضیات، آرایش بدهم.

در واقع هم، «سودمندی»، مفهومی کاملاً انتزاعی است. در اینجا بیش از همه با احساس‌های انسانی سروکار داریم، و اگر درست تر بگوییم، نه همه احساس‌ها، بلکه با رفتارهای احساسی همچون احتیاط، شیدایی، یاس، رشك، عدالت و امثال آن مربوط می‌شود. ضمناً روش می‌شود که هر رفتار احساسی،

سال پنجم - شماره ۳ (۱۹)

فهرست مطالب

ریاضیات مرز سودمند بودن را معین می کند	ن. ورویف	پرویز شهریاری	۱
علم و صنعت در پلاتیورس	مارتن گاردن	هرمز شهریاری	۱۵
تحقيق در باره تعداد عددهای اول در	غلامرضا حاتمی	—	۳۷
- حوزه‌های مختلف عددی	—	—	—
رمز و راز عددها و شکل‌ها	—	—	—
دانش جدید شکل می گیرد.	—	—	—
تلاشی برای تنظیم فرهنگ ریاضی	ل. س. فریمان	پرویز شهریاری	۵۸
کاربرد هندسه در علم جغرافیا	شهریاری	—	۷۲
ریاضی کردن فیزیک	مجید همراه	—	۷۹
پیشگامان	فرهاد قابوسی	—	۹۶
	—	—	۱۱۸

مستقیماً بینیم یا به طور کلی احساس کنیم. اگر با استفاده از صنعت پیش رفته امروزی، با دقیقی فوق العاده، مکعبی را از ماده‌ای سخت و محکم آماده کنیم، باز هم وجه‌های آن ناموازی و نابرابر و زاویه‌های آن متفاوت از آب در خواهد آمد. کافی است ساختمان ملکولی ماده‌ای را به یاد بیاوریم که چگونه این مکعب کوچک درخشنان، در برابر دید ذهنی ما، به چیزی پرزمخ، که یک تکه سنگ پا را به خاطر می‌آورد، تبدیل می‌شود. خط راستی که مارسم می‌کنیم، چیزی جز یک نوار پریچ و خم نیست، همان گونه که نقطه‌ای که بر صفحه می‌گذاریم، تنها یک لکه بی‌شک است. ولی با همه این‌ها هندسه وجود دارد، و نه تنها به عنوان یک نظریه ریاضی، بلکه به خاطر کاربردهای فراوان خود، سودمند است (و همه می‌دانند که «هندسه» نام خود را از کجا گرفته است). به جز این، هندسه، به عنوان دستگاه دقیق، مرتب و آماده‌ای از مفهوم‌ها، می‌تواند تعبیرهای تازه و غالباً نامنتظری را ارائه دهد و درباره چیزهایی به زبان هندسی صحبت کند که هیچ ربطی به تصورهای فضایی مستقیم نداشته باشد. مثلاً، در نظریه امروزی «دیدرنگی» از فضای رنگ‌ها صحبت می‌شود که فضایی سه بعدی از آب درآمده است (دستگاه مختصاتی که محورهای آن عبارت اند از «تارنجی قرمز»، «سبز» و «آبی»).

موقوفیت‌های هندسه را باید مرهون این وضع دانست که هندسه، از میان جموعه عظیم ویژگی‌ها و خاصیت‌های چیزها، تنها بعضی را انتخاب کرده است، یعنی آن ویژگی‌هایی که از نظر شکل چیزها، اساسی ترین هستند، و سپس با تنظیم دقیق و جزء به جزء این ویژگی‌ها، تعداد بسیار زیادی نتیجه‌گیری‌های منطقی را به دست آورده است. لزومی ندارد، به نظریه‌های دیگری از ریاضیات پردازیم. همین اندازه کفایت می‌کند.

*

معرف رابطه‌ای است بین ارزیابی عینی آن چه که انسان انجام می‌دهد، به دست می‌آورد یا تحمل می‌کند، و سودمندی ذهنی برای او از آن چه که انجام شدنی، به دست آمدنی یا تحمل شدنی است.

کار دانش‌های گوناگون، مطالعه احساس‌ها و کار شکل‌های گوناگون هنر، توصیف آن‌هاست. به یاد بیاوریم که پوشکین چگونه خست بارون و نامیدی گرمان را مجسم کرده است (در این جا قید و شرطی وجود ندارد؛ پوشکین تنها به توصیف خود این افراد نمی‌پردازد، بلکه به صورت حیرت‌آوری، به درستی رفتار احساسی آن‌ها را نسبت به پول نشان می‌دهد؛ رفتاری کاملاً مشابه هم و در عین حال به کلی متفاوت). و دلیری پر مخاطره سرباز در نقاشی «بگذر وارد شوند!» اثر ورشچاگین. و مگر قهرمان واقعی رمان هر برتر ولز به نام «مواظب باشید»، چیز کوچکی است و مگر به صورتی بسیار جالب، احساس احتیاط فوق العاده‌ای را که در خود دارد، ظاهر نمی‌کند؟

جامعه‌شناس، تاثیر رفتار احساسی را بر عملی که از آن ناشی می‌شود و از نظر سودمندی و یا خطری که برای اجتماع دارد (یا ختنی بودن آن از لحاظ اجتماعی) مورد بررسی قرار می‌دهد. روان‌شناس، می‌تواند بستگی بین برخی احساس‌ها را با احساس‌های دیگر برقرار و سرچشمه آن‌ها را روشن کند. مربی به تربیت احساس‌ها علاقمند است. قاضی می‌تواند سخن رانی‌هایی درباره عدالت ترتیب دهد و ضمناً ثابت کند که رفتار او باش و پیامدهای بعدی کارهای او، به کلی با آن چه مربوط به دارد است، فرق دارد.

در این اواخر، ریاضیات هم به موضوع احساس پرداخته است و این، همان مطلبی است که ما می‌خواهیم در این مقاله به آن پردازیم.

برای این که سوءتفاهمی پیش نیاید، از همین آغاز یادآوری می‌کنیم که ریاضیات خود چیزها یا پدیده‌ها را، به همان صورتی که در دنیای خارج وجود دارند یا اتفاق می‌افتد، مورد بررسی قرار نمی‌دهد، بلکه به «مدل‌ها» و طرح‌های آن‌ها، و به صورتی ایده‌آلیزه شده و انتزاعی می‌پردازد. حتی شکل‌های کذاشی هندسی هم، در واقع، موجب نمی‌شوند که بتوانیم چیزی را

سودمندی

برای این که بتوانیم به رشک و از خودگذشتگی، خودخواهی و شیدایی بپردازیم، باید، همچون مورد هندسه که نقطه‌ها و خط‌های خود را در نظر می‌گیرد، کلی ترین و اساسی ترین جنبه‌های این احساس‌ها را تشخیص دهیم و آن چه که آن‌ها را از یکدیگر و حتی از دیگر چیزها (و مثلاً از پدیده‌های الکترومغناطیسی در خلاء و یا رقص‌های تشریفاتی و سنتی افريقيایی) جدا می‌کند، تعیین نمائیم. برای همه این‌ها، به مفهوم انتزاعی سودمندی نیاز داریم.

بسیاری از رفتارهای آدمی، سمت‌دار و هدف‌مند است (احتمالاً توان درباره نوعی هدف‌مندی برای همه کارهای آدمی سخن گفت، ولی برای این که در این جا به تجزیه و تحلیل‌ها و درجه‌بندی‌های سردرگم دچار نشویم، خود را به محتاطانه ترین فرمول بندی محدود می‌کنیم). گاهی این هدف‌ها دارای خصلت فیزیکی و کمیتی هستند و می‌توان آن‌ها را با واحدهای مختلفی اندازه‌گیری کرد.

نتیجه پرش طول یا پرش ارتفاع، با سانتیمتر اندازه گرفته می‌شود.
نتیجه چاره‌اندیشی در صرفه‌جویی مصرف برق، با کیلو وات ساعت اندازه‌گیری می‌شود.

نتیجه سرقت با واحد پول، و نتیجه جریان دادرسی در مورد او، با سال، اندازه گرفته می‌شود.

نتیجه مراجعة شاگرد اول را به کافه، می‌توان با تعداد نان شیرینی‌هایی که مصرف شده است اندازه گرفت و....
تنها با اندکی تخیل، می‌توان این سیاهه رنگارنگ را، تا هرجا که بخواهیم ادامه دهیم.

با وجود این، درباره وضع مهم زیر دقت کنیم: عددهایی را که به عنوان نتیجه عمل‌های مذکور در نظر می‌گیریم، به خودی خود، هدف‌های این عمل‌ها را معین نمی‌کنند. مثلاً همین موضوع پرش را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که او در یک مسابقه بزرگ شرکت کرده و تصمیم داشته باشد که رکورد

جهانی پرش طول را بشکند. هدف او تنها همین است و به جز آن به چیز دیگری، و مثلاً آزمایش نیروی بدنی خود را برابر مقاومت‌ها، علاقه‌ای ندارد. رکورد جهانی پرش طول، مثلاً ۸۳۲ سانتیمتر است. اگر ورزشکار ۸۳۳ سانتیمتر پیرد، رکورد را شکسته است و در نتیجه به هدف خود کاملاً دست یافته است. چیزهای دیگری هم ممکن است دخالت کند: اگر او ۸۳۴ یا ۸۳۵ سانتیمتر پیرد، اگر طول پرش، مثلاً ۸۵۰ سانتیمتر باشد و او به خاطر پرش خود، تنها عنوان « فوق العاده » را دریافت کند، ولی اساساً موفقیت را به دست نیاورد. مگر ورزشکار ما به چنین چیزهایی می‌اندیشید. بر عکس، اگر ورزشکار ما موفق نشود... خواهش می‌کنم، عدم موفقیت را تعریف کنید. ۸۳۰ سانتیمتر؟ در همان تلاش اول سکندری بخورد و از دور مسابقه خارج شود؟ از نظر هدفی که ورزشکار ما دنبال می‌کند (و ما هدف را در این جا برقراری رکورد تازه‌ای می‌دانیم)، همه این عدم موفقیت‌ها کاملاً هم ارز هستند و سودمندی هر کدام از نتیجه‌ها برابر است با صفر (شکل ۱).

در مورد مراجعة کننده جوان به کافه، کمتر به میزان کالری حرارتی که از طریق شیرینی به او می‌رسد، به قیمت آن‌ها و یا تعداد آن‌ها، توجه می‌کنند (مثلاً پدر به قول خودش در مورد فرستادن او به کافه وفا کرده است تا هر قدر که مایل است شیرینی بخورد). در این حالت، سودمندی، از

شکل ۱

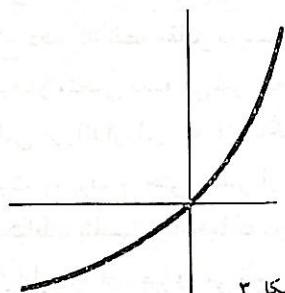
راه تعیین لذتی که از خوردن می‌برد، معین می‌شود. پشت میز می‌نشیند و در عالم خیال، شیرینی‌های فراوان را مزمزه می‌کند. ولی چه پیش می‌آید؟ (پیش آمد را روی شکل ۲ دنبال می‌کنیم). دو شیرینی اول، با احساسی هیجان آمیز خورده می‌شود. از شیرینی سوم، لذت کمتری دست می‌دهد. چهارمی تقریباً چیزی به لذت او نمی‌افزاید. و اما پنجمی... او در واقع میلی به پنجمی ندارد. از شیرینی پنجم، چیزی به مجموع لذت او اضافه نمی‌شود. در این حالت،

است این وضع پیش آید که اگر صرفه جویی زیاد باشد، بتوانیم، نه تنها در پرداخت پول خود انرژی، بلکه در وسیله‌های کار و سیم کشی‌های اضافی هم، صرفه جویی کنیم. از طرف دیگر، این بیم هم وجود دارد که سقوط شدید بار الکتریکی، به کار مرکز برق، با پایین آمدن «کسینوس فی» آن، لطمہ بزند.

به این ترتیب، «سودمندی» خصلت و خاصیتی از پدیده است، که برای کسی که این پدیده را تحقق می‌بخشد و یا ضمن تحقیق آن، راه حلی را می‌پذیرد، کشش به سمت حداکثر رضایت را به وجود آورد.

سودمندی یک نتیجه گیری، اگرچه با به اصطلاح خصلت «فیزیکی» بستگی مستقیم دارد، ولی ناچار نیست با آن یکی باشد. بستگی سودمندی را با این خصلت، می‌توان با یک منحنی توضیح داد، که گاهی هم بسیار پیچیده می‌شود. این منحنی، رفتار نسبت به نتیجه عمل را نشان می‌دهد. بر عکس، از روی خود این رفتار هم، می‌توان درباره شکل منحنی که باید رسم شود، قضاویت کرد.

مثالاً، منحنی را در نظر می‌گیریم که تحدب آن به طرف پایین باشد (شکل



۳). در این منحنی، برد بیشتر (قسمت راست منحنی) متاظر با سودمندی بیشتر است، و با رشد برد، رشد سریع‌تری برای سودمندی به دست می‌آید. بر عکس در شاخه باخت (قسمت چپ منحنی)، خیلی کندر پایین می‌آید. یعنی، این منحنی، رفتاری را شرح می‌دهد که معرف حساسیت

۱. خط اصلی نظریه کلی «سودمندی» عبارت است از بررسی پدیده‌هایی که در آن‌ها، نتیجه‌هایی که مورد علاقه ماست، به پیش آمد و تصادف مربوط باشد. در نظریه «سودمندی» این گونه پدیده‌ها را «شانس» یا «لاتاری» می‌نامند. به جز مفهوم مرسمون واژه «لاتاری»، همه اثواب کارهای مربوط به پیعم، سرکت در قمار، در نظر گرفتن پدیده‌های خودبه‌خودی و غیره راه باید مربوط به آن دانست. بررسی این موضوع‌ها، که مربوط به پدیده‌های تصادفی است، با همه اهمیتی که برای نظریه کلی «سودمندی» دارند، از چارچوب این مقاله خارج است.

سودمندی شیرینی پنجم، برابر است با صفر.

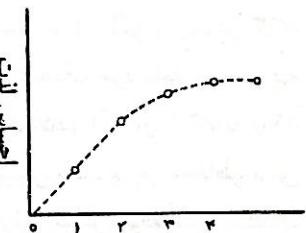
به این ترتیب، اگر شاگرد اول ما مایل باشد احساس خود را تجزیه و تحلیل کند و بهترین جواب را به دست آورد، می‌تواند تصمیم بگیرد (و یا می‌توان به او توصیه کرد) که دفعه‌بعد پول شیرینی را از پدرش بگیرد، تا

ناچار نشود که در یک نشست چهار عدد از آن‌ها را یکباره بخورد و بتواند احساس لذت خودرا در دوبار پیدا کند.

البته، تا این جا، هنوز روشی وجود ندارد که بتوان سودمندی (یعنی احساس لذت) این نوجوان را از دریافت شیرینی‌ها، با دقت اندازه گیری کرد.

با وجود این، استدلالی که داده شد، کاملاً نزدیک به حقیقت به نظر می‌رسد، زیرا مقایسه سودمندی، به هر مفهومی که باشد، غالباً موقفيت آمیز است. به طور کلی، هرگز نباید از بررسی ویژگی‌های کمیتی تها به این بهانه که قادر به اندازه گیری به اندازه کافی دقیق نیستیم، صرف نظر کرد. ضمن این که در طول زمان، اگر نیازی به این دقت باشد، توانایی انجام آن هم، پیدا می‌شود. از هم اکنون روشن است که با کمک سوزن‌های مویی آینده، می‌توان عمق خواب را از نظر کمیتی اندازه گیری کرد. و زمانی، در حدود چهارصد سال پیش (قبل از گالیله)، تصور امکان اندازه گیری درجه حرارت بی معنی بود، حتی خود مفهوم درجه حرارت هم پیدا نشده بود و تنها احساس سردی و گرمی وجود داشت.

به نظر می‌رسد که وضع باید در حالت صرفه جویی برق خیلی ساده‌تر باشد. در نگاه اول، به نظر می‌رسد که «سودمندی» این چاره‌اندیشی را، همیشه می‌توان با مقدار انرژی صرفه جوئی شده و با مبلغی که طبق تعریفه به آن تعلق می‌گیرد، اندازه گرفت. ولی در این جا هم، وضع کاملاً روبرو به راه نیست. ممکن



شکل ۲

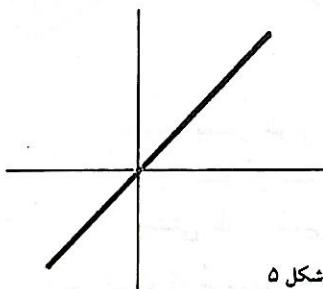
بالا، ادامه می‌دهیم. روشن است که منحنی، به تندی به طرف پایین سرازیر می‌شود. آبا این وضع، با رفتار واقعی جوان در برخورد با «مقادیر منفی شیرینی»، یعنی موقعی که نه تنها شیرینی به او نمی‌دهند، بلکه او را از آن چه هم که حق عادی او بود محروم می‌کنند، تطبیق می‌کند؟ ظاهراً بله. قبل‌ا، محروم کردن بجهه از شیرینی بعد از نهار، تبیه‌ی معمول بود (ما در اینجا به موضوع دیگری می‌پردازیم وارد در بحث درستی یا نادرستی این تبیه از نظر روان‌شناسی نمی‌شویم). بنابراین، طبیعی است که احساس بجهه نسبت به تعداد شیرینی‌هایی که باید بخورد، محتاطانه باشد. این شکل سخن گفتن ما و واژه‌هایی که به کار می‌بریم، با آن چندان عادی نیست، نباید ما را بیشتر از اصطلاح «فضای رنگ‌ها» که قبل از آن صحبت کردیم، ناراحت کند.

ساده‌ترین نمایش رفتار، خط راست است (شکل ۵). باز هم به باد

می‌آوریم که تصور درباره عادی بودن این رفتار، فریب دهنده است. در واقع، این نمایش، متناظر با خون سردی مطلق است و این که برای ارزیابی نتیجه‌هایی که به دست می‌آید—«از نظر کاملاً فنی»—امکان کمی وجود دارد. به عنوان نمونه‌ای از این وضع، می‌توان از بازی با تاس نام برد.

حالا می‌توان مساله عکس آن را در برابر خود قرار داد: چه احساسی یا چه رفتاری، با این یا آن شکل منحنی، متناظر است؟ مثلاً، رفتار کسی که در مسابقه جهانی پرش، برای تعیین رکورد شرکت می‌کند، چگونه است؟ ظاهراً، مناسب‌ترین اصطلاح در اینجا «دلیری» است (نه به معنای نامیدی و یاس، بلکه به معنای تمايل به این که، هر طور شده به هدف خود برسد). همین احساس است که در کلام نایلشون خطاب به لوریسون، در ترازدی «فلدمارشال کوتوزف» اثر و سولوویف، وجود دارد.

ارتش خسته است.

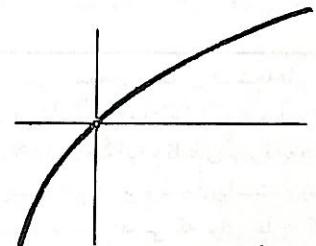


شکل ۵

زیاد نسبت به برد بزرگ و حساسیت نسبتاً کم نسبت به باخت بزرگ است. چنین رفتاری نسبت به بردرا، به طور طبیعی «قماری» یا «ریسک» گویند (تاكید می‌کنیم که ما در اینجا، حتی یک کلمه هم از قمار حرف نزدیم، با وجود این که قمار می‌تواند مثال روشن کننده‌ای در این باره باشد، صحبت ما از «رفتار همراه باریسک» و «رفتار قماری» است که در ورزش، در کار و در زندگی روزانه هم ظاهر می‌شود). حالا تعریف خود را وارونه می‌کنیم و به جای این که رفتار قمار مانند منحنی شکل ۳ را شرح دهیم، بر عکس، رفتاری از نتیجه عمل را قمار مانند می‌نامیم که بتواند به وسیله یک منحنی از این نوع شرح داده شود. به این ترتیب، به تعریف رفتار قماری و به تعریف احساس ریسک می‌رسیم. این تعریف خالص ریسک به طور کلی است، بدون این که به موارد مشخص ظهور و یا علت آن کار داشته باشیم. چگونه می‌توان «ریسک» را به نحو دیگری تعریف کرد؟

حالا، منحنی دیگری را بررسی می‌کنیم، که رفتارش به مفهوم معینی، مخالف قبلی است (شکل ۴)، یعنی منحنی که تحدب آن به طرف بالاست. روشن است که تمایل این منحنی در این است که چنان احساس رفتاری را شرح دهد که نقطه مقابل «ریسک» قرار دارد. این رفتار را تجزیه و تحلیل کنیم. از رفتار منحنی دیده می‌شود که حساسیت زیادی نسبت به باخت وجود دارد، هراس بی اندازه‌ای که از باخت‌های کلان دیده می‌شود، ضمن بی تفاوتی نسبت به برد، و حتی بیشتر از آن است. و طبیعی است که چنین رفتاری را «احتیاط» بنامیم. از آن‌جا که در اینجا، خط اصلی احتیاط را می‌بینیم، رفتار احتیاطی را آن چیزی می‌نامیم که روی شکل ۴ نشان داده شده است.

حالا جوان دوستدار شیرینی را به خاطر می‌آوریم. برای مقدار مثبت شیرینی‌ها، شکل نمایشی هندسی، همان منحنی رفتار احتیاطی را به خاطر می‌آورد. وضع را به طور ذهنی به طرف چپ و با حفظ تحدب منحنی به طرف

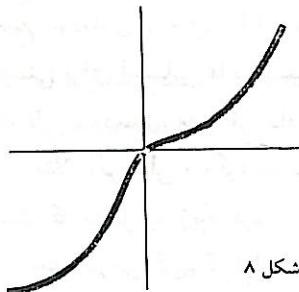


شکل ۴

نحو دیگری خواهد بود. رفتار «تهی دست» را، می‌توان با منحنی شکل ۷ شرح داد.

بسیاری از افراد و در بسیاری موارد، نسبت به کم، «خودباخته» و نسبت به زیاد «محاط» هستند. این احساس را می‌توان با منحنی شکل ۸ نشان داد.

تا اینجا از رفتار شخص نسبت به برد و باختی که دارد، یعنی از احساس‌های فردی صحبت کردیم. (در اینجا، البته، تنها تا جائی از فردگرانی صحبت می‌شود که شخص به کارهای شخصی خودش توجه داشته باشد؛ بی تفاوتی کامل نسبت به منافع خودهم - چیزی که به بی‌طعمی هم می‌تواند تعبیر شود - در طرح ما وجود دارد؛ بی‌طعمی متاظر است با یک خط راست افقی). ولی می‌توان از احساس‌های بغرنج‌تر آدمی، یعنی از روحیه و رفتار او نسبت به منافع دیگران و نسبت به موفقیت‌های گروهی و اجتماعی هم، صحبت کرد.



شکل ۷

چند رابطه

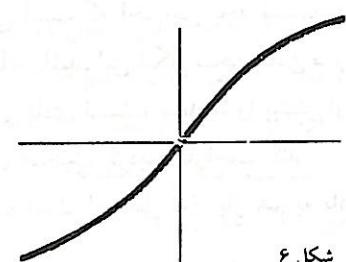
روشن است که چند رابطه رفتار هم زمان را، نسبت به دستگاهی که از چند برد (یا باخت) تشکیل شده است، تنها به کمک تابعی می‌توان شرح داد که به چند متغیر بستگی داشته باشد. تصور هندسی چنین تابع‌هایی دشوار، و در هر حال تا حد زیادی مبهم و ناروشن است. به همین مناسبت، ناچاریم به طرح رابطه‌هایی هم بپردازیم.

برای مشخص بودن وضع، فرض کنید با نمایندگان سه کشور سر و کار داشته باشیم که هر کدام از آن‌ها، علاقه‌هایی خاص خودشان داشته باشند. می‌توان نماینده هر کشور را یک فرد یا یک گروه در نظر گرفت. همچنین می‌توان فرد را با علاقه‌هایی، و گروهی را که به آن تعلق دارد، با علاقه‌های

لشکرکشی با نقل و انتقال بسیار همراه بود.
صلح... صلح به هر قیمتی که شده!

از همه چیز بگذرید، تنها شرافت را نجات دهید!

این هم یک زوج منحنی است که نسبت به هم، قرینه یکدیگرند (شکل‌های ۶ و ۷). منحنی اول متاظر است با احساس خوشی، در موردی که بردی کوچک (یا باختی کوچک) به طور جدی برروجیه اثر می‌گذارد، ولی این تاثیر با بزرگ شدن این برد (یا باخت) کندر می‌شود.



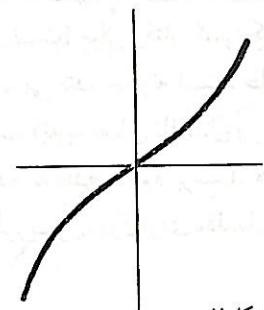
شکل ۸

این منحنی، پاسخ‌گوی روان‌شناسی انسان «غنى» است (روشن است که غنى نسبت به چیزهایی که «سودمندی» آن‌ها، مورد نظر است). شوالیه خسیس

چه می‌گوید؟

روز بسیار خوبی است! امروز می‌توان در صندوق ششم (صندوقی که هنوز پر نشده است) مشتی طلای ذخیره را ببریم.

روشن است که خوشحالی این بارون غنى، به «قدرت خرید» یک مشت طلا مربوط نمی‌شود، زیرا این «قدرت خرید» نسبت به صندوق پنجم و نسبت به دیگر صندوق‌ها، ناچیز است. می‌بینیم که این منحنی، خیلی خوب می‌تواند روحیه این مرد ثروتمند را نشان دهد. البته، وقتی که از بی احساسی مرد ثروتمند در موقع ضررهای عمدۀ صحبت می‌کنیم، باید در نظر داشته باشیم که از جایی به بعد، این ضرر می‌تواند او را ورشکست کند، که در این صورت روان‌شناسی رفتار او، به



شکل ۹

را به حداقل برساند. و طبیعی است که تمایل اولی به این هدف را هم باید به عنوان تعریف حسداو نسبت به دومی قبول کرد.
خود خواهی را، به عنوان تمایلی می‌پذیریم که شخص نمی‌خواهد بدتر از دیگران باشد، شکل «ضعیف‌تر» آن این است که می‌خواهد «آخرین نفر نباشد». و این متناظر است با تابع سودمندی $a_1 - \text{Min}_{a_1, a_2}$.

منظور ما از نشانه $\{ \dots \} \text{Min}$ عبارت است از کوچکترین عدد از بین عدهایی که در داخل ابروها قرار گرفته‌اند.
به همین ترتیب، جاه طلبی (به صورت «شدید» آن)، یعنی تمایل به این که «از همه بهتر باشد». بنابراین، جاه طلبی اولی را می‌توان به صورت به حداقل رساندن تفاصل

$$a_1 - \text{Max}_{\{a_1, a_2\}}$$

نشان داد، که در آن منظور از نشانه $\{ \dots \} \text{Max}$ ، بزرگترین عدد از عدهای داخل ابروهاست.

روشن است که بین «ضعیف‌ترین» خودخواهی و «شدیدترین» جاه طلبی - که با رابطه‌های $(*)$ و $(**)$ شرح داده شده‌اند - مجموعه‌ای نامتناهی از انواع «احساس‌های مربوط ارزش‌های شخصی» وجود دارد که متناظر با تابع‌های بینایی‌ستند.

این هم یک احساس دیگر: «مثل همه بودن»، که رابطه متناظر آن را می‌توان به صورت حداقل کردن این رابطه نوشت:

$$\text{Max} | a_1 - a_2 |$$

انصف یعنی چه؟ انصف به این معناست که از تمایل شدید به بردهای شخصی و از برد متوسط، دوری گزینیم، یعنی حداقل کردن این ماکریم:

$$\text{Max} \left\{ \left| a_1 - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right|, \left| a_1 - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right|, \left| a_2 - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right| \right\}$$

و یا رابطه‌ای شبیه آن، اگر چه در این شکل معتقدم الخط، انصف خیلی به

دیگری در نظر گرفت. ما در اینجا، نمایندگان این کشورها را اولی، دومی و سومی می‌نامیم.

حالا فرض کنید، هر کدام از این کشورها، در نتیجه کارهای خود (که می‌توانند یکی باشند یا با هم فرق داشته باشند)، بردی به دست آورده باشند. این برد را با a_1 , a_2 و a_3 نشان می‌دهیم.

به رفتارهای احساسی اولی می‌پردازیم. این رفتار، به معنای آن است که «تابع سودمندی»، به این یا آن صورت است. و چون تا حالا تعریف‌های کاملاً روشنی برای احساس‌ها در دست نداریم، آن‌ها را به عنوان رابطه‌هایی که در یک تابع سودمندی مفروض داده شده است، معین می‌کنیم.
مثلاً، اگر اولی فردگرای باشد، تابع سودمندی او، به طور ساده، همان برد a_1 است که تمایل به زیاد کردن آن دارد.

حالا فرض کنیم که اولی، دوستی فداکار برای دومی باشد، این به معنای آن است که سودمندی اولی a_2 است.

به زبان دیگر، تمام نیروی اولی در جهت حداقل برد دومی صرف می‌شود و خودش را به کلی فراموش می‌کند.

اگر اولی هم به فکر دومی و هم به فکر سومی باشد، ولی کمی بیش از آن ها هم درباره خودش بیندیشد، طبیعی است که تابع سودمندی او، به صورت

$$a_1 + a_2 + a_3$$

در خواهد آمد، که در آن باید K را بزرگتر از واحد به حساب آورد.
ممکن است اولی، به «بی تفاوتی کاملی» علاقمند باشد، یعنی بدون هیچ علاقه مادی شخصی، به بقیه لطمہ بزند (مثل روحیه او باش). طبیعی است که در این حالت، تابع سودمندی به این صورت درمی‌آید:
 $(a_1 + a_2)$

چگونه می‌توان حسادت اولی را نسبت به دومی نشان داد؟ روشن است که تمایل اولی در این است که دومی، در هر حال بهتر از خود او نباشد. بنابراین، هدف اولی این است که اختلاف $a_1 - a_2$

نوشته: مارتین گاردنر
ترجمه: هرمز شهریاری

علم و صنعت در پلانیورس*

از ویزگی‌های دنیای ما این است که دارای سه بعد فضائی و یک بعد زمانی می‌باشد. ما در اینجا بعد زمان را - که دارای کیفیات دیگری است - کنار گذاشته و توجه و بحث خودرا، تهرا روی بعدهای فضائی - و یا مکانی - قرار داده‌ایم. کم و بیش همه قبول داریم که تنها جهان هستی نیز، همین دنیای سه بعدی است که ما در آن زندگی می‌کنیم. با وجود این نویسنده‌گان افسانه‌پردازی هم پیدا شدند که درباره فضاهای چهار بعدی داستان‌ها نوشته‌ند و یا دانشمندانی که به تحقیق درباره چنین فضاهایی پرداختند. تجسم چنین جهان‌هایی نه دور از ذهن است و نه قابل انکار مطلق. حتی وجود حیات ذی شعور نیز - بخصوص در فضای چهار بعدی - چندان غیر عقلانی به نظر نمی‌رسد. و اما درباره فضای کمتر از سه بعد، کار به همین سادگی‌ها خاتمه نمی‌پذیرد، در این فضاهای - و مثلاً فضای دو بعدی - چنان محدودیت‌هایی وجود دارد که تصور حیات و امکان فعالیت را غیر ممکن می‌نمایاند. مدت‌ها پذیرفته شده بود که فرض هر گونه حیات با شعور دو بعدی را باید از جمله امور غیر ممکن دانست. ولی این فکرها و دشواری‌های کار، دلیل براین نشد که نویسنده‌گان مبتکر و دانشمندان علاقمند، موضوع را به فراموشی بسپارند و از تلاش و بررسی - در این مقوله - دست بکشند. کوشیدند و فکر کردند تا کم و بیش به چیزهایی دست یافتدند و تا اندازه‌ای به موقوفیت هم رسیدند، تا آن‌جا که توانستند تجسمی از موجودات دو بعدی و زندگی آنها را هم نمایان سازند.

در حدود صد سال پیش، در سال ۱۸۸۴ کشیشی انگلیسی، به نام ادوین آبوت

«برابر خواهی» شباهت پیدا می‌کند. ولی «برابر خواهی» هم به خودی خود چیز بدی نیست، بلکه همه مطلب بر سراین است که با چه کسی و در چه شرایطی بخواهد عملی شود.

نایاب گمان کرد که ما توانسته‌ایم در این‌جا، یک نظریه ریاضی و یا دست کم مبانی آن را شرح دهیم. ما تنها بعضی مفهوم‌های زندگی را، به زبان ریاضی شرح دادیم. طبیعی است که توضیح‌هایی به این گونه، موجب می‌شود که همه چیز تا حدی نامتنظر به نظر آید. ولی مگر حتی گوته نتوشته است: وقتی شما با ریاضی دانان صحبت کنید، سخن شمارا به زبان خودشان ترجمه می‌کنند و آن وقت شما با چیزی به کلی متفاوت با حرف‌های خودتان مواجه می‌شوید. رسیدن به مناسب‌ترین راه حل‌ها و حداکثر سودمندی، از چیزهایی است که ریاضی دانان به آن توجه دارند. نظریه بازی، به طور جدی به این مساله‌ها پرداخته است، ولی این نظریه، مبحثی جدی و پیچیده است و با دو کلمه نمی‌توان هیچ مطلبی درباره آن گفت.



مساله

مطلوب است تابع متصل f ، که در مجموعه R معین است و در اتحاد زیر صدق می‌کند:

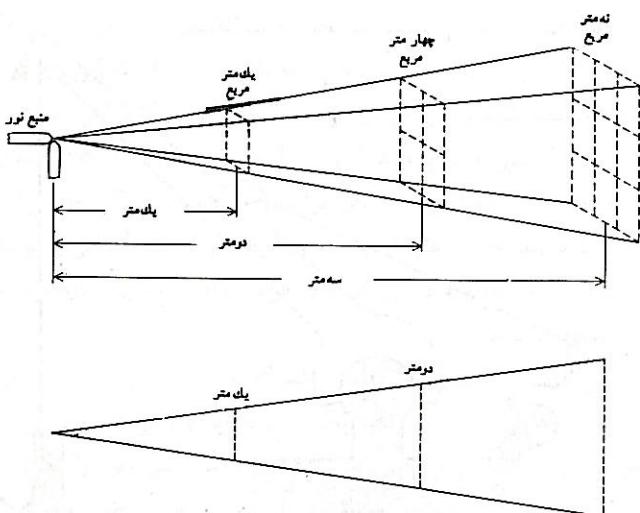
$$f(x^t) + f(x) = x^t + x$$

حل در صفحه ۳۵

* Planiverse به معنای جهان دو بعدی و یا دنیای مسطحه است. این واژه مترادف با Universe که به معنای کائنات و یا جهان سه بعدی خودمان می‌باشد، به کار گرفته شده است.

و جنوب برای آنها وجود نخواهد داشت. محور آستریا هم نقطه‌ای است در مرکز همین سیاره دور. البته تصور چنین سیاره‌ای مسطح، و متحرک در فضائی دو بعدی، چندان دشوار نیست، معهداً برای سهولت در تجسم، می‌شود آن را با اندک ضخامت ناچیزی در نظر گرفت که بین دو صفحه بدون اصطکاک درحال حرکت باشد.

شبیه دنیای ما، نیروی جاذبه در دنیای دو بعدی، نیرویی است که بین اجسام اعمال می‌شود. این نیرو به طور مستقیم به جرم اجسام بستگی، و با فاصله نسبت معکوس دارد (متغیر با دنیای ما که با محدود فاصله نسبت معکوس دارد). با فرض این که نیروهایی مثل ثقل و نور در دنیای دو بعدی هم به خط مستقیم حرکت می‌کنند به سادگی می‌توان دریافت که شدت چنین نیروهایی به نسبت معکوس فاصله تغییر خواهد کرد. در کتابهایی که به آنها آشنایی داریم نشان داده است که شدت نور در دنیای ما به نسبت عکس محدود فاصله تغییر می‌کند و تصویر بالای شکل ۱ نمایانگر چنین ادعائی است. و اما در دنیای دو بعدی این شدت به نسبت عکس خود فاصله (و نه محدود آن) تغییر خواهد کرد و تصویر پائین شکل ۱ این موضوع را نشان می‌دهد. در حقیقت از نظر قیاس، هر دو تصویر یکی است با این تفاوت که تصویر بالا مربوط به دنیای سه بعدی و تصویر پائین مربوط به دنیای دو بعدی است.



شکل ۱. مقایسه قانون عکس محدود در دنیای خردمن (تصویر بالا) با عکس نسی در دنیای مسطحه (تصویر پائین)

آبوت (Edwin Abbott Abbott) داستانی طنزآمیز به نام «سرزمین هموار» منتشر کرد. متأسفانه این داستان هیچگونه اطلاعی درباره قانون‌های فیزیکی این سرزمین، و میزان توسعه صنعت در بین ساکنین آن به دست نمی‌داد و ذهن خواننده را در تاریکی مطلق رها می‌کرد، ولی در سال ۱۹۰۷، وقتی که کتاب «پیش آمدی در سرزمین هموار» منتشر شد، گوشه‌هایی از این تاریکی‌ها روشن تر شد. کتاب اخیر را چارلز هینتون (Charles Howard Hinton) نوشتند بود که در آن اولین بررسی درباره امکان‌های علم و صنعت در جهان دو بعدی انجام گرفته بود. متأسفانه چون مدت‌هast است که از چاپ این کتاب خارق العاده گذشته است، نسخه آن را نمی‌توان پیدا کرد ولی در بخش «سرزمین‌های هموار» از کتاب «تفريحات ریاضی» (نوشته من - مارتین گاردنر) می‌توان نقل و قول‌هایی از آن داستان را پیدا کرد.

در «سرزمین هموار» تذکر داده‌ام که «دست کم از لحاظ سرگرمی و تفریح هم که باشد، ارزش این را دارد تا ویژگی‌ها و سرشت دنیای دو بعدی مورد مطالعه قرار گیرد و ابزار و وسائل مکانیکی ساده‌ای که ممکن است در چنین دنیائی به کار گرفته شود مورد بررسی قرار گیرد». همین تذکر انگیزه‌ای شد تا الكساندر دودنی (Alexander W. Ontario) دانشمند کامپیوتر دانشگاه انتاریو غربی (Keewatin Dewdney) دنیال چنین فکری را بگیرد. دو دنی در سال ۱۹۷۸ بخشی از افکار و اندیشه‌های خود را در یکی از گزارش‌های دانشگاهی بیان داشت و سپس کامل‌تر آنرا در سال ۱۹۷۹ تحت عنوان «کشف پلانیورس» در مجله «ریاضیات تفریحی» به چاپ رساند. اندک زمانی بعد در همان سال ۱۹۷۹ شاهکار ۹۷ صفحه‌ای خود را به نام «علم و صنعت دو بعدی» چاپ و منتشر کرد. باور کردنی نیست، ولی حقیقت دارد که دو دنی عملأ ثابت کرد که دنیای دو بعدی هم می‌تواند وجود داشته باشد، دنیائی که با تمام قانون‌های شبیه، فیزیک، نجوم و زیست‌شناسی مربوط به خودش بدون اندک تناقضی - کاملاً با دنیای سه بعدی ما قابل قیاس باشد. باید این را هم اضافه کرد که این کار پر شمر دو دنی باعث فراهم نمودن سرگرمی‌های جالبی برای یکی از ریاضی دانان شد که حاصل آن اشغال حدود ۳۰ صفحه از صفحات مجله‌های صنعتی بود.

پلانیورس و یا دنیای دو بعدی سرزمینی است که (مانند هینتون) اسم آنرا آستریا (Astria) گذاشته است. آستریا سیاره دیسک مانندی است که در فضائی مسطح می‌چرخد. حرکت ساکنین آستریا روی انتهای لبه سیاره انجام می‌گیرد و آن‌ها می‌توانند جهت شرق و غرب و بالا و پایین را تشخیص بدهند ولی طبیعتاً دیگر شمال

سطح، (فلزات دو بعدی) به مراتب آسان تر از همتای خودشان (فلزات سه بعدی مشابهشان) گسیخته می شوند، مهندس طراح مجبور شد قطر بازوها را کفت تر بگیرد. بعد از آن، شیمی دانی با استفاده دقیق از اصول تشابه و تبدیل به این نتیجه رسید که نیروهای ملکولی دو بعدی خیلی بیش از آن است که انتظار می رفت. باز مهندس با استفاده از نتیجه گیری شیمی دان، کلفتی بازوهای بالابر را کاهش داد.

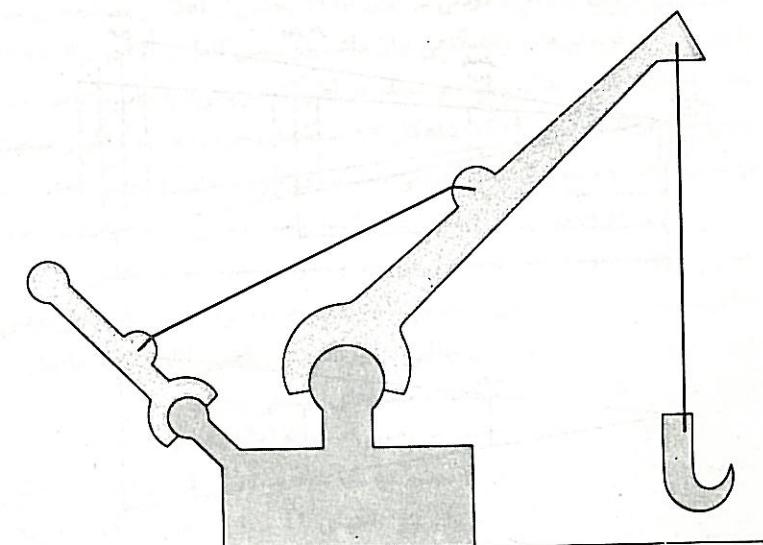
دودنی با تکیه به اصل تشابه، به نکات زیر بی برد که: ۱- پلانیورس هم، یک توالی سه بعدی از «زمان و مکان» است. ۲- ماده پلانیورس متشکل از ملکول ها، اتم ها و ذرات بنیادی است. ۳- انتقال انرژی در آن به صورت موجی و ذره ای است. ۴- دارای نور و با تمام طول موج هایش می باشد که در نتیجه به وسیله عدسمی های مستطحه (دو بعدی) منكسر می شود. استفاده از عدسمی، وجود چشم های پلانیورسی، تلسکوپ های پلانیورسی و میکروسکوپ های پلانیورسی را امکان پذیر می سازد. ۵- بعضی از قوانین اساسی پلانیورسی با همتای آن ها در دنیای سه بعدی، مطابقت کامل دارند مثل: قانون علت و معلول، قوانین اول و دوم ترمودینامیک و قوانین مربوط به اینرسی، کاز اصطکاک، مقناظلیس، الاستیستیته.

دودنی فرض را براین گذاشت که پلانیورس نیز با یک انفجار به وجود آمده و دائمآ رو به انبساط و واکنشی است. یک محاسبه سرانگشتی، بر مبنای قانون عکس فاصله جاذبه نشان می دهد که - بدون بستگی به مقدار جرم - سرانجام این واکنش باید در پلانیورس متوقف شود و پس از آن نوبت انتقام با هم کشی فرا رسد.

آسمان شب ساکنین آستریا مسلماً قوسی از دایره خواهد بود که در طول آن ستارگانی به صورت نقطه هایی درخشان پراکنده خواهد بود. اگر بعضی از این ستارگان متحرک باشند، حرکت هایشان باعث می شود که به نوبت یکدیگر را پوشانند. و یا اگر آستریا دارای سیاره مزدوجی باشد، در هر دوره ای از زمان، سیاره مزدوج نیز ستاره ها را خواهد پوشاند.

آستریا می تواند خورشیدی هم داشته باشد که ضمن گردش به دور آن، در اثر چرخش به دور خودش، شب و روز هم ایجاد کند. در این بررسی ها دودنی بی برد که دایره کامل می تواند تنها مدار پایداری باشد که دائمآ مسیر خود را تکرار کند. مدارهای شبه بیضی هم پایدار به حساب می آیند ولی محور بیضی همیشه اندک چرخشی خواهد داشت که در نتیجه هیچ وقت مدار خود را کاملاً نخواهد بست. ممکن است جاذبه پلانیورسی اجازه دهد که آستریا قمری بامداری ثابت به دور خود داشته

دودنی برای این که طرح شکفت انگیزش به صورت خیال و یا اندیشه ای بی پایه جلوه بکند دو اصل را پایه کار قرار می دهد، اول «اصل تشابه» که بیان می کند، دنیای دو بعدی - تا آنجا که امکان دارد - با دنیای سه بعدی شباهت دارد. مثلاً هر حرکت تا زمانی که نیروی خارجی روی آن اعمال نشود به خط مستقیم ادامه می یابد. و یا از لحظه قیاس: همتای کره، در دنیای دو بعدی دایره می باشد وغیره. دوم «اصل تعديل» که می گوید وقتی که با وجود رعایت اصل تشابه، به چند فرض متضاد برخورد شود - تنها اساسی ترین فرض می تواند مورد قبول قرار گیرد. و یا واضح تراین که: اگر دو یا چند فرض در نظر بگیریم که تشابه هریک از آن ها (در مقام قیاس) با یک نظریه از دنیای سه بعدی برقرار بوده ولی بین خود فرض ها تضاد مشاهده شود، باید اساسی ترین فرض را انتخاب کرد و بقیه فرض ها را بر حسب آن تعديل و اصلاح کرد. دودنی برای پیدا کردن اساسی ترین فرض هم برسی سلسله مراتب علم تکیه می کند و می گوید فیزیک اساسی تر از شیمی و شیمی اساسی تر از ریست شناسی می باشد. دودنی کاربرد دو اصل فوق را به طور نمونه در طرح بالابر نشان می دهد. او می گوید مهندسی که بالابر پلانیورس را طرح ریزی کرده بود، در اول بازو های آن را نازکتر از شکل ۲ در نظر گرفته بود، ولی پس از آن که یک فلزشناس نظر داد که مواد



شکل ۲. بالا بر پلانیورسی

بالاخره دو عنصر آخر از نام‌های هارولد و لورا دو دلباخته جوان داستان هیتون گرفته شده است.

در دنیای مسطحه، ملکول طبیعتاً از به هم پیوندی چند اتم به وجود می‌آید و مسلماً تها آن پیوندی امکان دارد که بتواند با گرافی مسطح نمایش داده شود (دلیل این موضوع این است که اگر قیاس با دنیای خودمان را از یاد نبریم، می‌دانیم که در شیمی ما پیوندهای متقطع وجود ندارد). در حالی که در دنیای ما، ساختمان کریستالی ملکول‌ها، ۲۳۰ گروه متمایز را تشکیل می‌دهند، در پلانیورس بیش از ۱۷ گروه را تشکیل نمی‌دهند.

در اینجا به خاطر کوتاه شدن سخن، از موضوع‌های بسیاری که دودنی به شرح آن‌ها پرداخته است چشم پوشی می‌کنیم، چه در آن‌ها از شکستن اتم، قوانین الکترومناتیس، معادله‌های ماکسول و خیلی چیزهای دیگر گفتگو به میان آورده است.

و اما راجع به زیست‌شناسی، دودنی فرض می‌کند ساختمان حیوانات آستریا هم ترکیبی است از سلول‌های مختلف که استخوان و گوشت و بست و سایر اندام‌های موجودات را تشکیل داده باشند. البته با این فرض در چگونگی پیوند استخوان‌ها و عضله‌ها و اندام‌ها، مساله‌های دشواری بروز خواهد کرد به این معنی که باید فهمید،

ترتیب	ساختن مدارها						عنصر	نام	شاره انس
	T _P	T _S	T _d	T _P	T _S	T _d			
۱							H	هیدروژن	۱
۲							He	هیلیوم	۲
۱							Li	لیترن	۳
۲							Bx	بروکسین	۴
۲							Fl	فلورن	۵
۴							Ne	نیکلیورن	۶
۱							Sa	سدالیوم	۷
۲							Mc	ماگنیکوم	۸
۲							AP	آلپرورس	۹
۲							SP	سیلیکوم	۱۰
۵							CP	چلورورس	۱۱
۶							Ar	آرگون	۱۲
۱							Hn	هین‌تیونیوم	۱۳
۱							Ab	آبورن	۱۴
۲							Wa	هارولدیوم	۱۵
۴							La	لورانیوم	۱۶

شکل ۲. جدول تناوبی اولین ۱۶ عنصر پلانیورسی

باشد ولی مطالعه‌ای روی این موضوع انجام نگرفته و بررسی آن خالی از اشکال هم نیست، چه باید جاذبه خورشید را نیز در یاقن مدار قمر در نظر گرفت.

دودنی آب و هوای آستریا را نیز از نظر دور نداشته و در مقام قیاس با دنیای ما، فصل‌ها، بادها، ابرها، باران‌ها و سایر جزئیات آنرا به شرح زیر توضیح داده است. رودخانه‌ها و دریاچه‌های آستریا از یکدیگر تمیز داده نمی‌شوند جز این که رودخانه‌ها از سرعت نسبتاً بیشتری برخوردارند. از ویژگی‌های آستریا یکی این است که آب نمی‌تواند صخره و یا تپه‌ای را دور بزند - در حالی که در کره زمین اگر آب به صخره و یا سنگی برخورد کرد، می‌تواند به راحتی از بغل آن راه باز کند - در نتیجه آب باران در شبیه‌های آستریا، پشت صخره و یا قله‌ای جمع شده و با فشاری که به پشت صخره وارد می‌آورد، سعی می‌کند که آن را به پائین تپه بغلطاند. هرچه شب ملایمتر باشد آب بیشتری جمع می‌شود و فشار زیادتری اعمال می‌کند. دودنی مذکور می‌شود که باران‌های متناب، رویه آستریا را هموار و یک شکل می‌کند. این موضوع از لحاظ زمین‌شناسی و بررسی زمین آستریا اهمیت زیادی خواهد داشت. عدم توانانی آب در باز کردن راه خود اثر نامطلوب دیگری هم دارد و آن این است که آب به صورت ابخار در داخل خاک جمع شده و سپس سبب ریزش‌های خطرناك در حفره‌ها و فروکش کردن خاک در منطقه وسیعی از سطح سیاره می‌شود که بی‌شباهت به تله‌های مرگ در ریگزارهای مانمی‌باشد. ولی دودنی می‌گوید در آستریا باران زیاد نخواهد بارید و همین عامل مقداری از نگرانی‌ها را کاهش خواهد داد. اثرات باد روی آستریا خیلی جدی تر از روی زمین است. یکی از خطرات جدی باد این است که آن هم نمی‌تواند اشیاء را دور بزند.

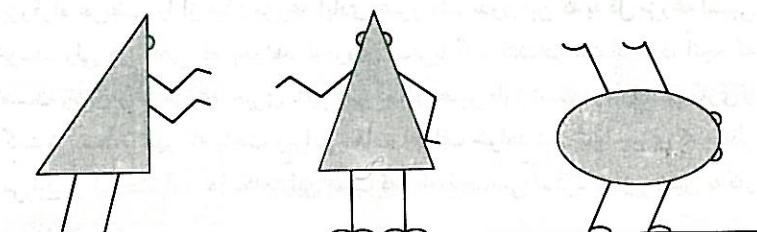
دودنی صفحه‌های بسیاری را به شیمی اختصاص داده است و کوشیده است تا حدامکان، همتای مواد و عناصر و همچنین قوانین فیزیک کوانتم را به صورت مقبولی ارائه دهد. شکل ۳ جدول تناوبی و اولین ۱۶ عنصر پلانیورسی را نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول دیده می‌شود، چون دو عنصر اول پلانیورسی درست با دو عنصر اول دنیای ما مطابقت دارد، دودنی آن‌ها را به همان اسمی هیدروژن و هیلیوم نامگذاری کرده است. اسمی ده عنصر بعدی را ترکیبی از اسمی چند عنصر دنیای خودمان گرفته است و آن به این علت است که هر یک از آن‌ها با چند عنصر دنیای ما شباهت دارند. مثلاً لیترن کیفیت هم لیتیوم و هم نیتروژن را در خود جمع کرده است. دو عنصر بعد از آن‌ها را به افتخار نام هیتون و آبوت، هیتونیوم و آبوت نام نهاده است.

دشواری کار، در جهان سه بعدی هم کمتر از جهان مسطحه نخواهد بود. در این صورت سلول‌های عصبی، بهمان شیوه‌ای که در جهان ما عمل می‌کنند، می‌توانند در جهان مسطحه نیز، با ایجاد شبکه‌های پیچیده‌ای بر این دشواری غلبه کنند. با این تفاوت که چون تحریک‌ها ضمن عبور از چنین شبکه‌های پیچ دریچی با انقطاع‌های بیشتری مواجه می‌شوند، از سرعت انتقال‌شان کاسته خواهد شد و در نتیجه، مفهای پل‌انیورسی خیلی کنتر از مفهای دیگر خواهد کرد. (همین موضوع برای ماشین‌های محاسبه و مفهای الکترونیکی پل‌انیورسی نیز صادق است).

دودنی ساختمان ماده ماهی آستریاتی را نیز با همه چیزی‌اش تشریح کرده است و می‌گوید تخم‌های بارور نشده ماهی داخل یک کیسه و بین دو عضله دم‌قرار می‌گیرند. ماهی دارای اسکلتی خارجی می‌باشد. غذا با پیمودن مدارهای داخلی عمل تغذیه را انجام می‌دهد و اگر در بدن ماهی سلول آزادی یافت شود، غذا از راه عشاری سلول وارد آن می‌شود - که در این صورت غشاء نمی‌تواند بیش از یک منفذ داشته باشد، ولی اگر سلول‌ها - مثل نسج - با یکدیگر در تعاس باشند می‌توانند در آن واحد چندین منفذ هم داشته باشند، چون در این حالت سلول‌های اطراف از بهم پاشیدگی یکدیگر جلوگیری خواهند کرد.

موضوع جالب این که، همان‌طور که موجودات چهاربعدی قادر به دیدن کلیه اندام‌های داخلی ما هستند، ما هم می‌توانیم ارگانهای داخلی ماهی و یا هر حیوان دو بعدی دیگر را به خوبی بینیم.

مردم آستریا از نظر هیتنون به‌شکل مثلثی هستند که صورشان همیشه به‌یک جهت متوجه بوده و دارای دو دست در جلو و یک چشم در نزدیکی رأس مثلث و دو پا در زیر قاعده مثلث می‌باشند، صورت مردها همیشه رویه شرق و زن‌ها رویه غرب قرار گرفته است (تصویر سمت چپ شکل ۴). ولی آستریاتی‌های دودنی ضمن این



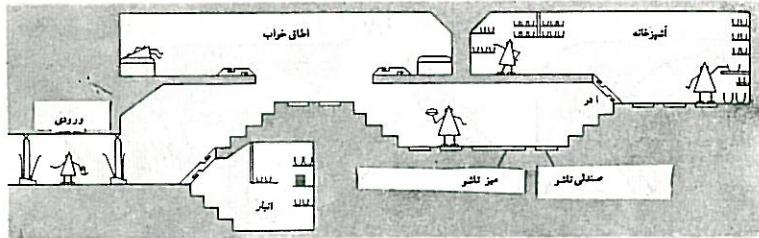
شکل ۴. آستریاتی چشم سراسی (راست)، آستریاتی دودنی (وسط) و آستریاتی هیتنون (چپ)

این پیوندها باید چگونه ساختاری داشته باشند تا بتوانند حیوانات را در خزیدن، راه رفتن، پرواز، شنا و غیره کمک کنند. در واقع بعضی از این حرکت‌ها در پل‌انیورس راحت‌تر از دنیای ما انجام خواهد گرفت. مثلاً حیوان سه بعدی در موقع راه رفتن به‌روی دوری، برای حفظ تعادل خود، کم‌وپیش دچار اشکال می‌شود در حالی که حیوان پل‌انیورسی پس از آنکه هر دو پای خود را روی زمین گذاشت، دیگر امکانی برای افتادنش نخواهد بود. موجودات پرنده هم در حالی که نمی‌توانند بال داشته باشند - که احتیاجی هم به آن ندارند - کافی است که بدنه آن‌وی‌ها میکی داشته و از همان بدنه به‌جای بال هم استفاده کنند. چون هوا فقط در سطح و به دور حیوان حرکت می‌کند در این صورت پرنده می‌تواند با حرکت دادن دم، خود را به‌جلو براند. یک محاسبه جزئی نشان می‌دهد که میزان ساخت و ساز بدنه حیوانات آستریاتی باید کمتر از حیوانات زمینی باشد چون، هم حرارت پیرامون بدن‌شان به نسبت کمتری دفع خواهد شد و هم به‌علت وزن کمتر، استخوان‌هایشان می‌توانند نازک‌تر از استخوان‌های حیوانات زمینی باشد. نکته جالب این که هیچ حیوان آستریاتی نمی‌تواند دارای سوراخی باز باشد چه در این صورت آن را به‌دو نیمه خواهد کرد و نتیجه آن که نمی‌تواند مثل زمینی‌ها دارای سوراخی باشد که از دهان شروع شود و سپس به‌مری و معده و روده و غیره ادامه پیدا کند.

در کتاب «ساختمان و تکامل جهان» که به سال ۱۹۵۹ به وسیله ویترا (G. whitrow) نوشته شده است، امکان رشد و تکامل شور در فضای دو بعدی انکار شده و دلیل آن، قطع اجباری عصبهای در نقطه‌های برخورد رشته‌های عصبی با یکدیگر ذکر شده است و آن را مانع جدی در راه انتقال تحریک‌های عصبی به شمار آورده است.

ویترا می‌نویسد: «خیلی پیش می‌آید که سلول‌های عصبی به صورت گروهی و یا دو تا دو تا به هم برخورد کنند. در جهان سه بعدی و یا بیشتر، این برخورددها اشکالی تولید نخواهند کرد و عصب‌ها می‌توانند به راحتی از روی یکدیگر عبور کنند، بدون این که مجبور به قطع یکدیگر شوند، در حالی که در جهان دو بعدی امکان عبور از روی یکدیگر وجود ندارد و تشکیل شبکه اعصاب بدون انقطاع، تنها برای چهار سلول میسر خواهد بود.».

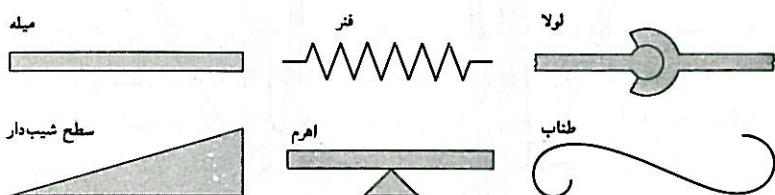
دودنی به‌سهولت این استدلال را رد می‌کند و مذکور می‌شود که اگر قبول داشته باشیم که نقطه‌های اتصال و برخورد هم باعث تخلیه تحریک‌های عصبی می‌شود،



۱۶

شکل ۵. یک واحد از خانه‌های زیرزمینی آستریانی

شیمن، دو اطاق خواب و انبار پیش بینی شده است، میز و صندلی‌های تاشو که قابلیت خوابانده شدن روی کف را دارند، عبور و مرور را راحت‌تر می‌کنند. عناصر مکانیکی آستریانی که تشابه آشکاری با عناصر زمینی دارند عبارتند از: میله، فنر، لولا، سطح شبیدار، اهرم، کابل و طناب (شکل ۶)، چرخ را هم می‌توان روی زمین آستریا غلط‌گردانی محور نمی‌شود برای آن به کار برد. فکر ساختن پیچ را هم اصلاً نباید کرد. طناب را نمی‌توان گره زد و بنابراین دو طناب را هم نمی‌شود بهم گیر داد. لوله باید در فواصل مختلف دیواره‌هایی داشته باشد تا جدار لوله را در جای خود ثابت نگه دارد، ولی این دیواره‌ها باید باز شو باشند تا چیزی بتواند از لوله عبور کند. اما همه دیواره‌ها هم نباید با هم باز شوند. با وجود همه این دشواری‌ها خیلی جالب است که دیده می‌شود در این دنیای دو بعدی، وسائل و ابزار مکانیکی بسیاری می‌توان ساخت که دارای کاری عالی و نتیجه‌ای رضایت‌بخشن باشند. در شکل ۷ شیرآلاتی نشان داده شده است که به وسیله دودنی طراحی شده است. با بلند کردن دسته شیر، فر جمع شده و راه عبور آب باز می‌شود. رها کردن دسته، باعث بسته شدن شیر می‌شود.



شکل ۶. عناصر مکانیکی عمده پلاتیورسی

۲۵

که به پیروی از هینتون، مثلثی شکل هستند، متقارن نیز می‌باشند به طوریکه دارای دو چشم، دو دست و دو پا در هر طرف بدنه خود می‌باشند. (تصویر سمت وسط شکل ۴) در نتیجه، آستریانی‌ها، مثل پرنده‌گان و یا اسب‌های ما، در یک زمان می‌توانند دو جهت را بینند. طبیعتاً آستریانی‌ها برای عبور از یکدیگر یک راه بیشتر ندارند و آن خزینه و یا پریدن از روی یکدیگر است. خود من هم (نویسنده - مارتین گاردنر) درباره شکل آستریانی‌ها نظری دارم که در تصویر سمت راست شکل ۴ نشان داده شده و تقریباً -

و به خصوص چشم‌های آن - شبیه ساس می‌باشد. در این موجود، دو چشم در جلو، دو چفت زائده در بالا و دو چفت در پائین مشاهده می‌شود. این زائده‌ها جفت جفت می‌توانند گاهی به صورت دست و یا گاهی به صورت پا عمل کنند. یعنی این موجود بر حسب این که بخواهد به کدام سمت نگاه کند جای دست‌ها و پاهای خود را عوض خواهد کرد. داشتن دو چشم هم به خصوص به او امکان می‌دهد تا دارای دیدی دو بعدی باشد، در حالی که آستریانی‌های یک چشم جهان خود را به صورت یک بعدی خواهند دید و از حقایق آن درک کاملاً محدود و باریکی خواهند داشت. در آستریا نیز مثل زمین، رنگ‌ها عاملی هستند که کمک می‌کنند تا اجزاء مختلف یک شیءی از یکدیگر تمیز داده شوند و چشم هم با تطبیق عدسی خود بر روی مناظر، احساس عمق را به وجود می‌آورد.

خانه‌سازی و یا ایجاد مزرعه در آستریا خیلی راحت‌تر و کم کارت‌تر از زمین می‌باشد چه در آن جا، چنین کارهایی، احتیاج به مصالح کمتری دارد ولی به جهاتی دیگر مساله‌های بس دشواری را در بر دارد. به این دشواری‌ها دو دنی چنین فکر می‌کند: «فرض کیم که سطح سیاره تنها برای زندگی گیاه و حیوان اختصاص یافته باشد. حال بینیم چه اتفاقی رخ خواهد داد، واضح است که در اثر یک خرابی جزئی، اختلال‌های کلی در رشته حیاتی گیاهان به وجود خواهد آمد. در کره زمین می‌توان بزرگراه عربی را از میان مزرعه آبادی عبور داد، بدون این که به کل مزرعه اسیبی برسد. ولی هر راهی که بخواهد از روی آستریا گذر کند، در امتداد خود، آنچه که هست ویران و از مزرعه چیزی باقی نمی‌گذارد. همین طور است درباره شهرسازی و گسترش سطح شهر که باعث ویرانی دهات اطراف خواهد شد. تنها چیزی که به نظر می‌آید از این دشواری‌ها بکاهد این است که جامعه صنعتی آستریا در زیر زمین به کار پردازد.»

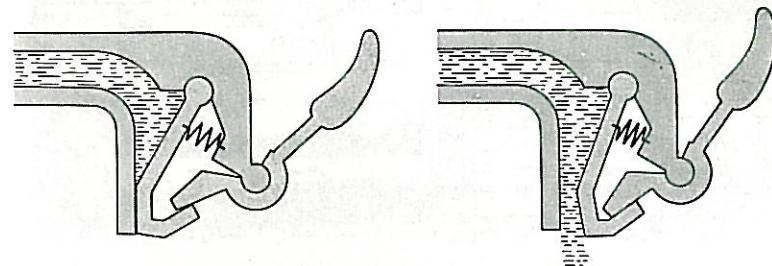
در شکل ۵ نمونه‌ای از این خانه‌های زیرزمینی طرح شده است که در آن اطاق

۳۴

می شود و راه را برای عبور باز می کند. لولای بالای درب در اینجا نقش بزرگی را به عهده دارد. همچنین اگر بخواهیم درب را از طرف چپ باز کنیم، با فشار دادن اهرم چپ به بالا، همان اعمال قبلی انجام می گیرد یعنی گوه آزاد و در نتیجه درب آماده برای باز شدن و راه دادن می شود. بستن درب نیز از هر دو طرف امکان دارد و با حرکت دادن اهرم ها در جهت مناسب، گوه به جای خود رانده شده و درب یا دیوار در جای خود استوار می شود. لولای مخصوص پلائیورسی در اغلب جاها مورد مصرف زیاد دارد همان طور که دیده می شود هم در شیرآلات و هم در ساختمان درب و ابزار آن به کار گرفته شده است. این لولا عبارت از دکمه ای است مدور که ضمن این که می تواند در داخل سوراخی به راحتی بچرخد، کاملاً با آن سوراخ هم درگیر است.

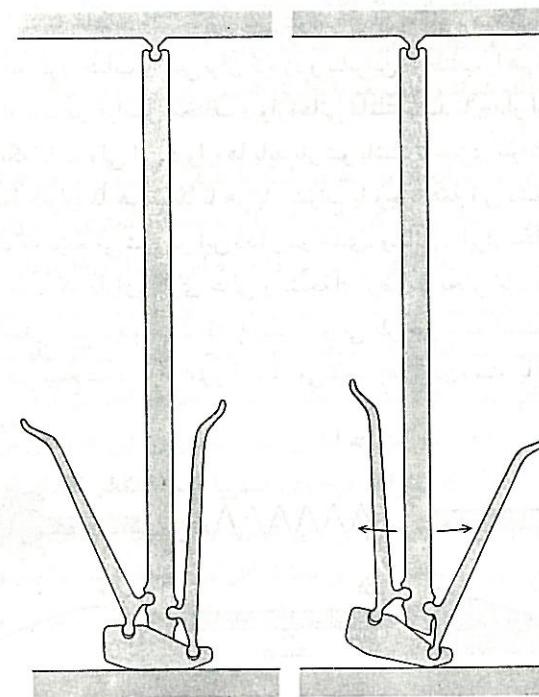
شکل ۹ طرح ماشین بخار پلائیورسی را نشان می دهد که کار آن از هر جهت کاملاً شبیه ماشین بخار دنیای ماست. بخار تحت فشار، از دیگ بخار وارد سیلندر می شود و پیستون را حرکت می دهد. تصویر بالای شکل نشان می دهد که بین دیگ و سیلندر کشوئی در نظر گرفته شده که ورود بخار را فرمان می دهد و در ضمن یکی از جدارهای سیلندر هم به حساب می آید. بخار پیستون را به سمت راست می راند تا آنجا که راه فراش به طرف منبع ذخیره (بالای پیستون) باز شود در همین لحظه، کشوئی راه ورود بخار را می بندد. در این زمان در اثر کاسته شدن فشار بخار، فنر پیستون باز شده و پیستون را به سمت چپ برمی گرداند. (تصویر پائین شکل ۹) زمانی که پیستون به انتهای سمت چپ رسید، کشو هم با کمک بازوی کشو و فشار فرش به سمت راست کشیده شده و راه بخار را باز می کند و به همین ترتیب عمل تکرار می شود.

دومنی برای قفل و کلید درب نیز طرحی داده است که در شکل ۱۰ نشان داده شده است. قفل پلائیورسی شامل سه تیغه لفزنده به نام کلون می باشد (تصویر a) که با فرو بردن کلید به داخل آن (تصویر b) به سمت بالا می لفزنند و با فشار دادن کلید، نیمه پائین کلون ها از نیمه بالا جدا می شوند (تصویر c)، همین فشار کلید از راه بازوی اهرم به چفت اصلی منتقل گشته و سبب پائین بردن چفت فرعی می شود تا جانی که درگیری درب برطرف و برای باز شدن به سمت راست آماده می شود (تصویر d) زائد بازوی اهرم و لبه برآمده چفت فرعی از قسمت های مهم قفل به حساب می آیند و نمی گذارند قفل جز با کلید خودش باز شود. وقتی که در باز شد و کلید از قفل خارج شد، تمام قطعه های قفل، به جز بازوی اهرم با کمک فنرها به جای اول خود بر می گردند، ولی در موقع بستن درب، در اثر ضربه ای که به زائد بازوی اهرم وارد



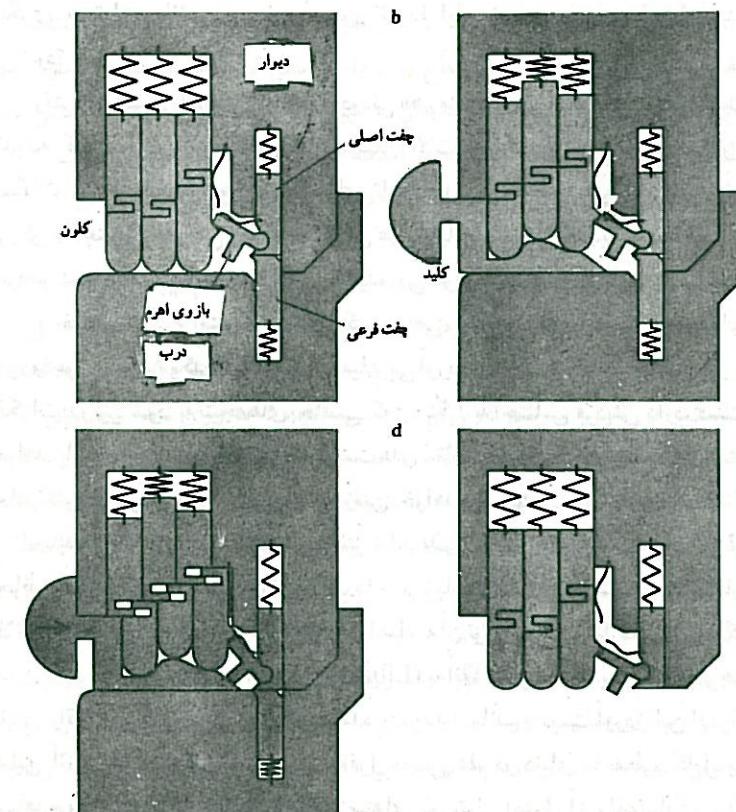
شکل ۷. شیرآلات آستریانی

ابزار آلات شکل ۸ برای باز و بسته کردن در (و یا دیوار) به کار گرفته می شود. در تصویر سمت چپ دیده می شود که اگر اهرم طرف راست را به پائین بکشیم، گوه زیر آن به سمت چپ رانده می شود و حالت تصویر سمت راست را به خود می گیرد. اگر همین اهرم را بیشتر بکشیم درب به انضمام گوه و ابزار آلات، به طرف بالا رانده

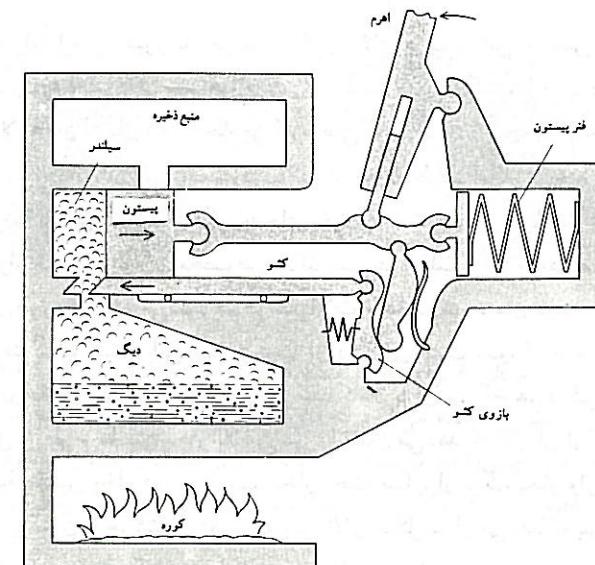


شکل ۸. درب آستریانی و چفت و دستگیره های آن

می شود، قطعه به جای اول خود برگشت خواهد کرد.
اگر دقت شود، دیده می شود که ساختمان این قفل چقدر ساده و مطمئن است و
جالب این که در دنیای سه بعدی خودمان هم می شود آن را به کار برد، حسن آن این
است که فقط با فشار کلید (بدون چرخاندن) باز خواهد شد. خود دو دنی هم به این
نکته توجه داشته است و می گوید «جای آن دارد تا از این طرح ها درس های جدیدی
بیاموزیم، چه اکثر آن ها در دنیای سه بعدی هم قابل اجرا می باشند. دنیای پلاتیورسی،
دید تازه ای در جلو ما می گشاید، با چنین دیدی و ادار و تهییج می شویم که
به مکانیزم های بدیع و بهتری اندیشه کنیم و راه حل های نوی برای دشواری ها و
مساله ها پیدا کنیم. بر پایه تفکرات و ایده های پلاتیورسی می توانیم مبنای طرح ها و



شکل ۱۰. قفل و کلید پلاتیورسی



شکل ۹. ماشین بخار پلاتیورسی

تنها می‌توانیم به تجربه‌های عقلانی و فکری تکیه کنیم و به گفته دودنی اینجا دگر جائی است که «طرفداران تجربه باید عقب بنشینند و به تماشای پیروزی‌های طرفداران نظریه پیردازند».

به کسانی که می‌خواهند از این بحث شیرین اطلاعات بیشتری به دست آورند، توصیه می‌شود که رساله دودنی را به دست آورده و مطالعه کنند. در زمان حاضر دودنی آماده برای فرستادن رساله اش و یا دریافت نامه‌ها و انتقادات است. او در نظر دارد که اگر مکاتبات زیاد شدو طرح‌های چشمگیری درباره پلانيورس به او رسید، آن‌ها رادر یک سال نامه به چاپ برساند.

از کارکرد نمونه‌های ماشین‌های پلانيورسی هم می‌شود نمایشگاهی ترتیب داد، ماشین‌هایی که آن‌ها را از مقوا و یا ورق فلزی ساخته و برای ایجاد نقلی متناسب با نقل پلانيورس، آن‌ها را روی سطح شبیه دار مناسی قرار داد. همچنین می‌شود روی یک مقوا، مناظر و شهرها و خانه‌های پلانيورسی را به نمایش گذشت. دودنی باب بازی جدیدی را باز کرده است که هم احاطه بر علم رامی طبلد و هم ریاضیات را. این باب کشف دنیای فانتزی وسیعی است که در زمان حاضر، تقریباً همه چیز آن ناشناخته است.

به فکر من (مارتین گاردنر) رسید که آستریانی‌ها هم می‌توانند به بازی‌های مختلف و از جمله تخته نرد پیردازند. بعضی از این بازی‌ها همان طور که برای ما زمینی‌ها جالب نیست، برای دو بعدی‌ها هم چندان لطافت فکری در بر نخواهد داشت، ولی تصور می‌کنم که بازی‌ها و شیوه آنچه که ما روی تخته شطرنجی ۸۵۸ خانه انجام می‌دهیم خالی از لطف نباشد. البته حرکت‌ها و بازی‌ها با آن چه که ما انجام می‌دهیم تفاوت‌هایی خواهد داشت تا بتواند مناسب و درخور دو بعدی‌ها باشد.

چند نمونه از این بازی‌ها در شکل ۱۱ نشان داده شده است که روی به اصطلاح خط‌های هشت خانه‌ای بازی می‌شود. نمونه ۱ بازی چکرز (بازی جنگ نادر) را نشان می‌دهد که دو طرف بازی، با در نظر گرفتن این که پرش از روی مهره‌ها هم اجباری است، بدست یکدیگر پیش روی می‌کنند. قوانین این بازی دو بعدی (و یا خطی) معادل همان چکرز معمولی است، با این تفاوت که بازی، به حرکت روی قطر اصلی تخته محدود می‌شود. به سهولت می‌توان فهمید که اگر بازی از روی فکر انجام گیرد، برد با نفر دوم خواهد بود و اگر آوانسی داده شود، نفر اول برندۀ خواهد بود.

نمونه ۲ شکل ۱۱ بازی شطرنج آستریانی است که روی یک تخته طولی انجام

مساله‌ها را به کلی دگرگون کنیم و به نتایج راحت‌تر و مطمئن‌تری دست بیاییم. کمترین فایده‌ای که طرح‌ها و وسائل جدید - با دید پلانيورسی - نصیب ما خواهد کرد، اشغال فضایی کمتر با بهره‌ای بیشتر خواهد بود.

اگر بحث را ادامه دهیم، به هزاران مسأله و پرسش برخورد خواهیم کرد: آیا می‌شود موتور دو بعدی ساخت و راهی برای انتقال نیرو به وسیله تسمه انتقال و یا چرخ دنده وجود دارد؟ (که البته دودنی منکر پیدا شدن چنین راهی است). نتیجه بخش ترین طرح، برای ساعت پلانيورسی چیست؟ چه طرح‌هایی برای تلفن، کتاب، ماشین تحریر، اتومبیل آسانسور و ماشین حساب می‌توان داد؟ آیا چرخ و محور برای بعضی ماشین‌ها حتی و ضروری است و اگر چنین ضرورتی حس می‌شود چه چیز دیگری می‌توان جانشین چرخ و محور نمود؟ آیا به نیروی برق هم احتیاج پیدا می‌شود؟

وقتی که انسان به دنیائی که به قول دودنی «هم مشابه و هم جداً مغایر دنیای ماست اندیشه کند و برای اختراع و ابداع ماشین آلات به تفکر پیردازد، چنان محصور خیالات خواهد شد که هر لحظه دنیای تازه‌تری را جلو خود خواهد دید. دودنی می‌گوید «چنین به نظر می‌آید که در مقابل هر یک یا چند فرض، چندین پدیده خودنما خواهد شد، و کم کم انسان به جانی کشیده می‌شود که از همین دنیای دو بعدی هم منتزع خواهد شد. و متوجه می‌شود که خواهی نخواهی دارد از پلانيورس‌های جورواجر و مغایر یکدیگر صحبت به میان می‌آورد. زیرا کسی که جداً با این کار و تفکرات درگیر شود به نتیجه‌های خاصی که بستگی به احساس فردیش دارد، دست خواهد یافت. این نتیجه‌ها، شبیه برداشت‌های خاصی است که هر جهانگرد، بسته به ادراکش از برخورد به مناظر یک سرزمین خواهد داشت».

جنبه‌های فلسفی این اکتشاف را نیز نباید بدون توجه رها ساخت. هر دنیائی از لحاظ منطقی لازم است که دارای بافت‌ها و ترکیبات نامتاقض باشد. در ساختمان پلانيورس هم موضوعی که فکر انسان بلا فاصله به آن توجه پیدامی کند همین است که بدون تکیه بر اصول چند که لا بینیتس (Libnis) به آنها «همزیست پذیری» عناصر هر دنیای واقعی می‌گوید، نمی‌تواند پدید آمده و پایدار بماند. بدست اوردن این اصول به این آسانی‌ها هم میسر نیست، چه به قول دودنی علم در دنیای ما به طور کامل بر مشاهده و تجربه متکی است و در هر زمینه‌ای نمی‌توان اصول آن را به سادگی پیدا کرد، چه رسد به این که از دنیای پلانيورسی چیزی حتی برای مشاهده هم نداریم و

اما بازی که در زیر به شرح آن می‌پردازیم، ده سال پیش توسط جیمز مارستون هتل (James Marston Honlle) ریاضی دانی که اکنون در کالج اسمیت (smith college) به کار مشغول است. ابداع شد و به نام اینچ هتل نامیده شد و این هم لازم به تذکر است که برای اولین بار است در این جا چاپ می‌شود.

در بازی پینچ دو نفر بازی کن به ترتیب مهره‌های سفید و سیاه در خانه‌های جدول قرار می‌دهند (خانه‌های جدول به اصطلاح، فاصله‌هایی است که به طور متواലی در امتداد یک خط راست روی یک صفحه کشیده شده‌اند). هر زمان که مهره‌های بازیکنی به وسیله مهره‌های طرف مقابل، به محاصره در آمد، کشته به حساب آمده و از جدول بر چیده می‌شوند. مثلاً هر دو گروه مهره‌های سفید، که در نمونه ۵ شکل ۱۱ کشیده شده است در محاصره قرار دارند.

در بازی پینچ، دو قانون زیر باید رعایت شود

قانون ۱- در هر خانه‌ای که محاصره است، هیچ مهره‌ای نباید گذاشته شود مگر این که این عمل باعث به محاصره در آوردن مهره‌های دشمن شود. طبق این قانون و با توجه به نمونه ۱ از شکل ۱۱، سفید اجازه ندارد در خانه‌های ۱ و ۳ و ۸ بازی کند، ولی می‌تواند در خانه ۶ به بازی پردازد، چون حرکت اخیر، محاصره خانه ۵ را باعث می‌شود.

قانون ۲- در خانه‌ای که از آن مهره برداشت شده، نمی‌توان بلا فاصله مهره‌ای- به قصد محاصره چیزی - گذاشت، ولی پس از یک دور بازی چنین حرکتی مجاز شمرده می‌شود. مثلاً در نمونه ۶ شکل، اگر فرض کنیم، که سیاه در خانه ۳ بازی کند تا سفید را در خانه‌های ۴ و ۵ بکشد، سفید نمی‌تواند بلا فاصله در خانه ۴ (به قصد محاصره خانه ۳) بازی کند، ولی این حرکت را می‌تواند در نوبت‌های بعد انجام دهد. معهداً می‌تواند در خانه ۵ به بازی پردازد، زیرا با وجود این که این خانه کشته داده است، ولی حرکت باعث محاصره چیزی نشده است. این قانون بخصوص برای این است که از کشтарها و مات‌های بی‌دربی جلوگیری شود.

اگر تعداد خانه‌های جدول، ۲ خانه فرض شود، بازی بی‌مزه و همیشه برد با بازیکن دوم خواهد بود. جدول‌های ۳ خانه‌ای و ۴ خانه‌ای هم همیشه بردا نصیب نفر اول می‌کند، به شرط این که نفر اول، خانه وسط را در جدول ۳ خانه‌ای و یکی از دو خانه وسط را در ۴ خانه‌ای، در اول بازی به تصرف در آورد. به همین نحو، در جدول ۵ خانه‌ای نفر دوم و در جدول ۶ و ۷ خانه‌ای نفر اول برندۀ خواهد شد. اگر خانه‌های

۳۳

می‌گیرد. در بازی شطرنج روی چنین تخته‌ای، حرکت فیل غیر ممکن است و حرکت وزیر شبیه رخ خواهد بود. پس وجود فیل و وزیر بی‌معناست و مهره‌ها منحصر می‌شوند به رخ و اسب و شاه. تغییری هم که در قانون بازی باید انجام گیرد، حرکت اسب است که می‌تواند دو خانه جلو و یا عقب برود، ضمن اینکه حرکت پرش از روی سایر مهره‌ها نیز برایش آزاد است.

حال بینیم در چنین بازی، برد با کی است. تصور عمومی بر این است که برد نصیب کسی می‌شود که بهتر بازی کند، ولی برای اطمینان، بهتر اینست که بازی را مورد بررسی قرار دهیم.

سفید می‌تواند با یکی از چهار حالت زیر بازی را شروع کند. حالت اول: اگر R×R (رخ سفید، رخ سیاه را بزند)، سیاه هیچ حرکتی برایش مقدور نیست و بازی پات می‌شود. حالت دوم: R-5 (رخ سفید به خانه پنجم برود) سیاه با رخ او را می‌زند (R) و حرکت دوم سفید اجرای N-4 (حرکت اسب به خانه چهار) می‌باشد که با حرکت N×R سیاه (زدن رخ سیاه اسب سفید را) سفید مات می‌شود. حالت سوم: اگر بازی سفید با ۴ R شروع شود، سیاه می‌تواند با حرکت ۵ N سفید را در حرکت دوم یا سوم مات کند. حالت چهارم: شروع بازی سفید با ۴ N، تنها حرکتی می‌تواند باشد که برد را نصیب سفید می‌کند. در این حالت سیاه می‌تواند با یکی از سه حرکت زیر جواب سفید را بدهد: ۱- R×N، بر این حالت سفید می‌تواند با R×R سیاه را در دو حرکت مات کند. ۲- R-5، سفید با حرکت ۲ k (بردن شاه به خانه دوم) برندۀ می‌شود. به این ترتیب که اگر سیاه R-6 بازی کند، سفید با R×N مات می‌کند و اگر سیاه اسب سفید را بزند سفید رخ را می‌زند و سیاه اجرای حرکت ۵ N را انجام می‌دهد که سفید با زدن اسب سیاه مات می‌کند. ۳- N-5، این حرکت به سیاه امکان می‌دهد که مدت طولانی تری بدفاع پردازد، ولی در هر صورت سفید می‌تواند برندۀ شود و برای پیروزی باید با حرکت R×N به سیاه کیش بدهد و شاه سیاه را واکار کند تا به خانه ۷ برود و سپس سفید رخ خود را به ۴ می‌برد. اگر بازی سیاه K×N باشد، شاه سفید به ۲ می‌رود و سیاه مجبور است بازی ۷ K را انجام دهد و سرانجام سفید با حرکت R×N برندۀ می‌شود. اگر سیاه با عمل ۳ N کیش بدهد سفید شاه را به ۲ برد و سیاه می‌تواند تنها اسبش را حرکت دهد، اگر به ۱ N رفت سفید شاه را به ۸ N مات می‌کند و اگر سیاه به ۵ N رفت سفید با ۸ N سیاه را مجبور می‌کند که به بازی K×N پردازد و سپس سفید با N×N مات می‌کند.

۳۴

حل مساله صفحه ۱۴

$x - g(x)$ را به $(x)g$ نشان می‌دهیم، در این صورت، اتحاد مفروض
چنین می‌شود:

$$g(x') = -g(x) \quad (1)$$

از آنجا، به ازای $x = 0$ و $x = 1$ به دست می‌آید:

$$g(0) = g(1) = 0$$

حالا توجه می‌کنیم که برای $x > 0$ داریم:

$$\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n} \ln x} \quad \text{و چون}$$

$$= e^{\frac{1}{n} \ln \sqrt[n]{x}} = e^{\frac{1}{n} \ln \sqrt[n]{x}} = 1$$

$$g(x) = -g(\sqrt[n]{x}) = g(\sqrt[n]{x}) = -g(\sqrt[n]{x}) = \dots = g(\sqrt[n]{x})$$

بنابراین به علت متصل بودن g داریم:

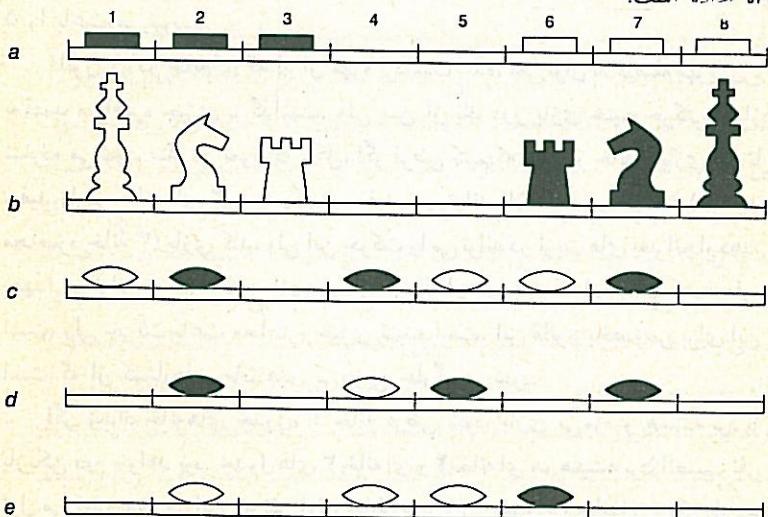
$$g(x) = g(\sqrt[n]{x}) = g(\sqrt[n]{x}) = g(1) = 0$$

از تساوی (۱)، همچنین نتیجه می‌شود که g تابعی زوج است، به نحوی
که به ازای مقادیر منفی x هم برابر صفر می‌شود. به این ترتیب، تنها تابعی
که با شرایط مساله می‌سازد، چنین است:

$$f(x) = x$$

جدول به تعداد ۸ گرفته شود، پیش‌بینی برنده تا حدی دشوار و محاسبه آن پیچیده
می‌شود و همین باعث می‌شود که بازی در جدول هشت خانه‌ای شیرین و بسیار مهیج
باشد. اغلب شانس بازیکن‌ها به سرعت جایجا می‌شود و در اکثر مواقع تنها یک
حرکت برای برنده شدن موجود خواهد بود، با این حال اگر طرفین حرکت‌های بازی را
با دقت و هوشیاری انجام دهند، برد نفر اول حتمی خواهد بود و این هم در صورتی
است که سفید بازی را از دوین خانه راست یا چپ شروع کند (خانه دوم یا هفتم) و
بقیه حرکاتش را مثل بازی‌های پنج خانه‌ای و هفت خانه‌ای ادامه دهد. فرض کنید
سفید بازی را از خانه ۲ شروع کند. اگر سیاه در هر کدام از خانه‌های ۳، ۵، ۶، ۷
و ۸ به بازی پردازد، سفید باید به ترتیب در یکی از خانه‌های ۴، ۵، ۷، ۷، ۷، ۵ و ۶
بازی کند. از این به بعد بازی ساده و با اندکی دقت دیده می‌شود که برد با سفید خواهد
بود. بازی افتتاحیه سفید به صورت بالا، تنها حرکتی است که او را (نفر اول - سفید)
برنده می‌کند و تاکنون هم راه دیگری ارائه نشده است.

جیمز هنل مبتکر بازی پینچ می‌گوید که در جدول ۹ خانه‌ای نفر برنده، بازی کن
دوم خواهد بود و اما درباره جدول‌های پیش از ۹ خانه زحمت بررسی آنها را به خود
راه نداده است.



شکل ۱۱. چکرز خطی (a) و شطرنج خطی (b) و پینچ خطی (c, d, e)

(ژاک هادامار) و (دولالله پواسن) در سال ۱۸۹۶ به فرمول زیر رسیدند و توانستند آنرا ثابت کنند:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{N} = 1$$

$$N = \frac{x}{\log_e x} \quad (I)$$

اگر داشته باشیم

(X) تعداد واقعی عددهای اول تا عدد X و N تعداد عددهای اول محاسبه شده در محدوده حوزه می‌باشد. (تمام لگاریتم‌هایی که در این مقاله ذکر می‌شوند، لگاریتم در مبنای طبیعی، یعنی لگاریتم نپرین می‌باشند) رابطه فوق رابطه دقیقی نیست، بلکه بطور تقریب تعداد عددهای اول از یک تا X را نشان می‌دهد در جدول زیر، تعداد واقعی عددهای اول و تعدادی که با کمک فرمول فوق به دست آمده درج گردیده است. قبل از درج جدول، خطای مطلق و خطای نسبی را تعریف می‌کنیم.

— تعداد واقعی عددهای اول $\Delta N = \text{خطای مطلق}$

$$\pi(X) - N = \text{تعداد محاسبه شده عددهای اول}$$

— نسبت تعداد واقعی عددهای اول به عدد موردنظر $= \text{خطای نسبی}$

$$\frac{\pi(x)}{x} - \frac{N}{x} = \text{نسبت تعداد عددهای اول محاسبه شده به عدد موردنظر}$$

و طبیعی است که خطای مطلق اولاً استگی به فرمولی دارد که محاسبه با کمک آن انجام شده و ثانیاً استگی به عددی دارد که تعداد عددهای اول تا آن محاسبه قرار گرفته (X).

دیده می‌شود، در حالی که خطای نسبی دائمًا به صفر نزدیک می‌شود، اما خطای مطلق در حال زیاد شدن است، چون خطای مطلق برابر است با خطای نسبی ضرب در عددی که تعداد اول تا آن مورد محاسبه قرار گرفته، و چون X را عدد بزرگی اختیار کنیم، خطای مطلق نیز مقدار قابل ملاحظه‌ای خواهد شد. هدف اصلی من در این مقاله بهبود بخشیدن فرمول (هادامار-پواسن) می‌باشد، تا توان خطای مطلق را تا حد ممکن، کم کرد و تعداد عددهای اول پیش‌بینی شده را به واقعیت نزدیک گردانید.

برای این منظور، باید مخرج کسر $\left(\frac{1}{\log_e x} \right)$ را کوچک‌تر کرد (به جدول

۲ دقت کنید) به این جهت بجای کسر فوق، کسر زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

تحقیق درباره تعداد عددهای اول در حوزه‌های مختلف عددی

عددهای اول و مسائل مربوط به آن از پیچیده‌ترین و در عین حال از زیباترین مقولات در رشته نظریه عددها می‌باشد. یکی از این مسائل که در مقاله زیر مطرح می‌گردد، تعیین تعداد عددهای اول در فاصله‌های عددی معین می‌باشد. تا حال فرمول دقیقی که توان از روی آن تعداد دقیق عددهای اول را در حوزه‌های مختلف عدها به دست آورد پیدا نشده و جدول‌هایی که در این مورد تنظیم شده فقط با کمک شمارش تک‌تک عددهای اول به دست آمده، طبیعی است که عمل فوق، عملی است بسیار شاق و تا به حال فقط تا عدد یک میلیارد (10^9). این جدول تنظیم گردیده، که در زیر درج می‌گردد.

(X) تعداد واقعی و شمرده شده عددهای اول بین یک تا X را نشان می‌دهد.

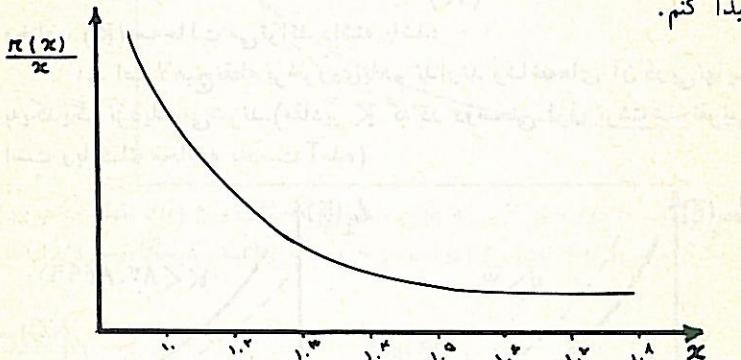
X	$\pi(x)$	X	$\pi(x)$
۱۰	۴	۳۰۰۰	۴۳۰
۱۰۰	۲۵	۴۰۰۰	۵۵۰
۲۰۰	۴۶	۵۰۰۰	۶۶۹
۳۰۰	۶۲	۶۰۰۰	۷۸۳
۴۰۰	۷۸	۷۰۰۰	۹۰۰
۵۰۰	۹۵	۸۰۰۰	۱۰۰۷
۶۰۰	۱۰۹	۹۰۰۰	۱۱۱۷
۷۰۰	۱۲۵	۱۰۰۰۰	۱۲۲۹
۸۰۰	۱۳۹	۱۰۵	۹۵۹۲
۹۰۰	۱۵۴	۱۰۶	۷۸۴۹۸
۱۰۰۰	۱۶۸	۱۰۷	۶۶۴۵۷۹
۲۰۰۰	۳۰۳	۱۰۸	۵۷۶۱۴۵۵
		۱۰۹	۵۰۸۴۷۴۷۸

جدول ۱

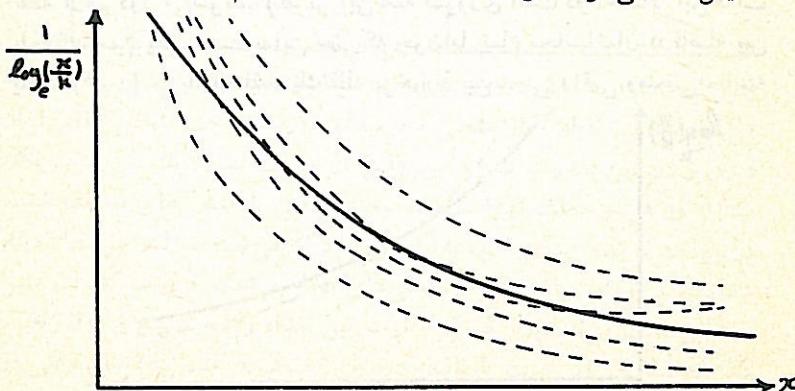
$$\text{عبارت} \frac{1}{\log_e\left(\frac{x}{K}\right)}$$

می‌دهد. این منحنی‌ها باهم نقطه برخوردی ندارند.
منحنی زیر، نسبت تعداد واقعی عددهای اول تا x ، تقسیم بر x را بحسب x نشان می‌دهد. و به طریق نقطه‌یابی رسم گردیده، یعنی اگر در نظر بگیریم $\frac{\pi(x)}{x}$ مقدار دقیق $\varphi(x)$ را به حال پیدا نشده و من سعی دارم با

تفیراتی که بضریب K می‌دهم، در بعضی از نقاط، منحنی زیر را با کمک محاسبه پیدا کنم.



ذکر این نکته ضروری است که در دو شکل فوق و بقیه شکل‌ها که بعداً رسم خواهد شد، محور طول‌ها که نشان دهنده رشته طبیعی عددها می‌باشد، لگاریتمی در نظر گرفته شده، به این ترتیب حوزه بزرگ‌تری از عددها، در صفحه کاغذ نمایش داده می‌شود. حال دو دستگاه فوق را بر روی هم منطبق می‌کنیم.



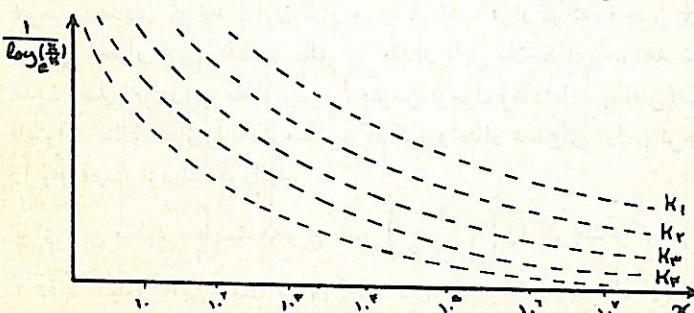
x	$\pi(x)$	تعداد واقعی اعداد x تا $\pi(x)$	نسبت تعداد واقعی اعداد اول تا x به $\frac{\pi(x)}{x}$	نسبت محاسبه شده $\frac{1}{\log_e x}$	خطای مطلق ΔN
10^0	4	0/4	0/434294481	0	
10^1	25	0/25	0/217147221	+3	
10^2	168	0/168	0/144764827	+23	
10^3	1229	0/1229	0/1085736205	+143	
10^4	9592	0/9592	0/868588196	+906	
10^5	78498	0/78498	0/7243824136	+6116	
10^6	664579	0/664579	0/620420688	+44159	
10^7	5761455	0/5761455	0/542868102	+322774	
10^8	50847478	0/50847478	0/482549442	+2592536	

جدول ۲

$$\frac{1}{\log_e\left(\frac{x}{K}\right)} = \frac{1}{\log_e x - \log_e K} \quad (\text{II})$$

$$N = \frac{x}{\log_e x - \log_e K} \quad (\text{III})$$

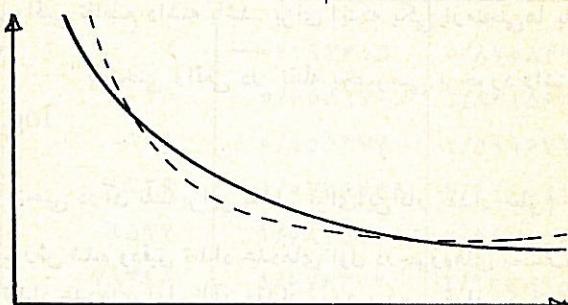
در آن صورت داریم: N تعداد عددهای اول تا x و K ضریبی است که در مورد آن صحبت خواهد شد.



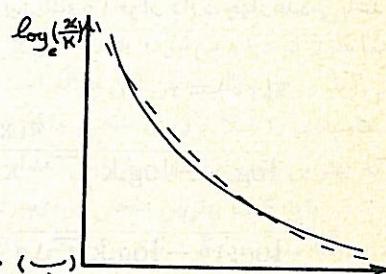
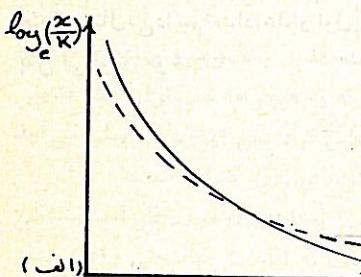
شده را می توانیم بینیم و اگر میدان بررسی را بزرگتر کنیم، تمام منحنی های محاسبه شده ای که دارای یک نقطه برخورد با منحنی واقعی می باشند، نقطه تقاطع دومی هم پیدا می کنند. دلایلی بر له این مسئله در جدول هایی که بعد آورده خواهد شد، به چشم می خورد.

- ۳- دونقطه برخورد باهم دارند و بعد از نقاط برخورد از هم دور می شوند و درینهاست دوباره بهم نزدیک می گردند.

$$\log_e\left(\frac{x}{K}\right)$$



تبصره: دومنحنی زیر که یکی مربوط به حالت دوم (یک نقطه برخورد) و دیگری مربوط به حالت سوم (دو نقطه برخورد) می باشند، هیچگاه وجود ندارند.



چون در آنصورت باید $5/82084991 < K$ باشد (این مقدار بعد از محاسبه می گردد) زیرا نقطه آغاز منحنی محاسبه شده درست چپ منحنی واقعی قرار دارد. و در این صورت به وضعیت (ب) از حالت شماره یک می رسیم. نکته مشترک در هر سه حالت این است که منحنی واقعی با منحنی های محاسبه شده، درینهاست و بصورت مجانب به یکدیگر نزدیک می شوند. البته سرعت نزدیک شدن منحنی واقعی با هر یک از منحنی های محاسبه شده، فرق می کند، و این مسئله ای است بسیار مهم، چرا که تفاوت بین تعداد واقعی عددهای اول و تعداد محاسبه شده، برابر است با فاصله دومنحنی ضرب در عدد (x) حال وقتی دو

استبطاط کلی من این است که منحنی واقعی با هیچ منحنی محاسبه شده

$$\frac{1}{\log_e\left(\frac{x}{K}\right)}$$

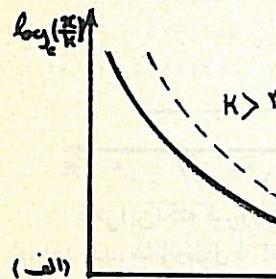
های فوق موازی نمی باشد (این مسئله در جدول هایی که در آخر مقاله ذکر شده به خوبی دیده می شود). حال وضعیت های موجود را بررسی می کنیم.

$$\frac{1}{\log_e\left(\frac{x}{K}\right)}$$

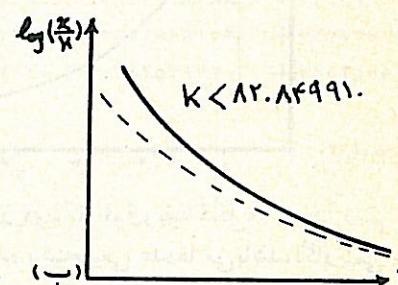
محальнی (K) سه حالت می تواند داشته باشد:

- ۱- اصولا هیچ نقطه برخوردی باهم ندارند و شاخه های آن در بی نهایت به یکدیگر نزدیک می شوند. (مقادیر K که در دومنحنی فوق نوشته شده تقریبی است و با کمک محاسبه به دست آمده)

$$\log_e\left(\frac{x}{K}\right)$$

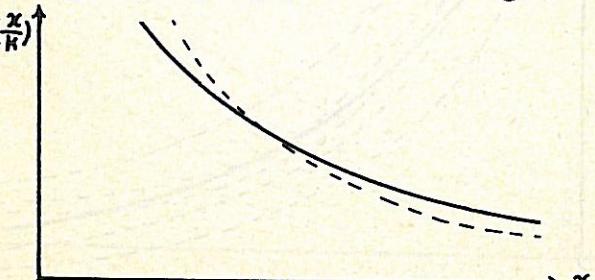


$$\log_e\left(\frac{x}{K}\right)$$



- ۲- در حوزه بررسی مافقط یک نقطه برخورد باهم دارند و بعد از این نقطه از هم دور می شوند. (تذکر این نکته ضروری است که احتمالا این حالت باحالات سوم یکی است با این معنی که چون ما تمام محاسباتمان در فاصله بین یک تا (10^9) می باشد؛ فقط یک نقطه برخورد بین منحنی واقعی و منحنی محاسبه

$$\log_e\left(\frac{x}{K}\right)$$



چند میلیونی را شمرد و یا از فرمول های زیر استفاده کرد)

$$\log_e k = \frac{-x + \pi(x) \log_e x}{\pi(x)} \quad (\text{IV})$$

جدول ۲

x	$\pi(x)$	$\log_e k$	k
10^1	4	-0/1977415	0/820849910
10^2	25	0/60517	1/831563548
10^3	168	0/955037741	2/599642927
10^4	1229	1/07364235	2/926021060
10^5	9592	1/087571	2/967058328
10^6	78498	1/076332	2/933898251
10^7	664579	1/070975	2/918222381
10^8	5761455	1/0639540	2/8978063
10^9	50847478	1/0566070	2/8765942

همانطور که دیده می شود، بازاء هر $\log_e k$ یک مقدار بخصوصی برای k بدست می آید و این مطلب میین این مسئله است که به چیزی که نمی توان یک منحنی محاسبه ای را کاملا بر روی منحنی واقعی منطبق کرد پس این سوال پیش می آید که بهترین منحنی برای پیش یابی تعداد عده های اول کدام است.

باید گفت بهترین منحنی برای بررسی به عددي که مورد نظر است بستگی دارد، به عبارت دیگر، بهترین منحنی آن است که تقاطعش با منحنی واقعی بسیار نزدیک به عدد $\log_e k$ باشد، در این صورت نه تنها خطای مطلق نیز کاهش فراوان می یابد.

بعنوان مثال اگر تعداد عده های اول محصور بین یک و ۳۵۴۲۱۴۱ را بخواهیم محاسبه کنیم بهتر است از $k = 2/9339$ در فرمول پیشنهادی استفاده کنیم (فرمول III) چون این مقدار k مشخص کننده منحنی ای است که در $x = 10^9$ با منحنی واقعی برخورد دارد و این نزدیک ترین محل برخورد یک منحنی محاسبه ای و منحنی واقعی با نقطه موردنظر ($x = 3542141$) می باشد. (با در نظر گرفتن اطلاعاتی که در جدول شماره ۳ در اختیار داریم) ذکر این

منحنی در فاصله بسیار دور بهم نزدیک شوند، اگرچه خطای نسبی که فاصله بین این دو منحنی است، بسیار کوچک می شود، ولی خطای مطلق که برابر است با فاصله مذکور ضرب در (x) که در چنان موقعی بسیار بزرگ است، تفاوتی را ایجاد می کند، که از نظر قدر مطلق بسیار بزرگ و قابل توجه است و هدف عمدی من کم کردن این تفاوت می باشد. بنا بر این در هر نقطه باید منحنی را پیدا کرد که نزدیک ترین فاصله را با منحنی واقعی داشته باشد، ویا به عبارت دیگر در همان نقطه با منحنی واقعی تقاطع داشته باشد. برای اینکه یکی از منحنی ها با فرمول

$$\frac{1}{\log_e \left(\frac{x}{K} \right)}$$

باید مقدار دو منحنی در آن نقطه برابر باشد. برای این کار مقدار معلوم $\frac{\pi(x)}{x}$

را (مقادیر شمارش شده و دقیق تعداد عده های اول در حوزه های مختلف، تقسیم بر عددي که تعداد عده های اول تا آن مقدار مورد بررسی قرار گرفته) برابر

$$\frac{1}{\log_e \left(\frac{x}{K} \right)}$$

بعنوان مثال می دانیم تعداد اعداد اول که بین یک و ۱۰ قرار دارد، چهار عدد می باشد. پس می توان نوشت:

$$\pi(10) = 4$$

$$\frac{1}{\log_e x - \log_e k} = \frac{\pi(x)}{x}$$

$$\frac{1}{\log_e 10 - \log_e k} = \frac{4}{10}$$

$$\log_e k = -0/1977415$$

مقداری که برای k بدست آمده نشان دهنده منحنی است که در نقطه $x = 10$ با منحنی واقعی تقاطع دارد.

حال این محاسبه را برای توان های مختلف ۱۰ انجام می دهیم و نتیجدها در جدول زیر می نویسیم.

$\pi(x)$ یعنی تعداد اعداد اول شمارش شده و دقیق، تا 10^9 در دست است که درستون دوم درج گردیده است. (البته این تعداد تا عده های درست و بخصوص در دست است و در مورد عده های غیر مشخص یا باید دانه بدانه عده های جدول

دیده می شود که بزرگترین k متعلق به منحنی ای می باشد که در حدود $x = 10^5$ با منحنی واقعی مماس می باشد مقدار تقریبی این ضریب برابر است با $\approx 2/968$ ، مقدار دقیق آن و همچنین محل دقیق مماس شدن آن با منحنی واقعی را فقط با کمک کامپیوتر می توان بدست آورد. ولبته این نه بخاطر مشکل بودن محاسبات، بلکه بخاطر متعدد بودن آن می باشد.

و حالا جدولی که در هر کدام یکی از ضرایب درج شده در جدول ۳ بکار رفته است می نویسیم. جدول اول و دوم را کامل می نویسیم، تا طریق محاسبه را نمایش داده باشیم و از جدول سوم به بعد، فقط ستون هایی که مورد نیاز می باشند درج می گردد.

$$K = 5/820849910$$

$$\log_k = -0/197415$$

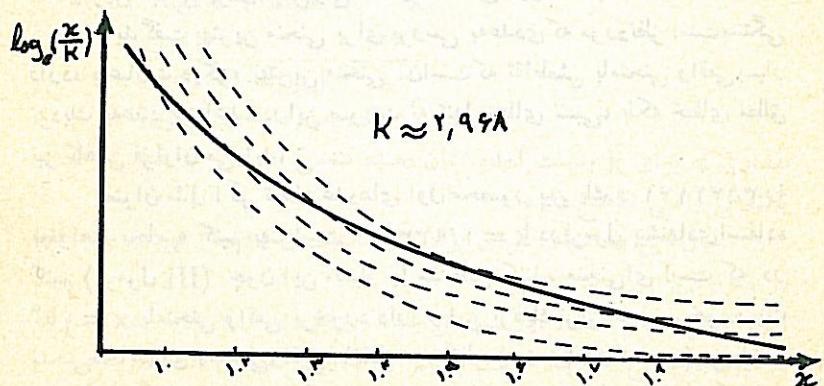
جدول ۴

x	$\pi(x)$	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	$\frac{x}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^1	4	$0/4$	4	0 نقطه برخورد در منحنی
10^2	25	$0/2082211$	21	+4
10^3	168	$0/1407425$	141	+27
10^4	1229	$0/1062952$	1063	+166
10^5	9592	$0/0853046$	8539	+1053
10^6	78498	$0/0713626$	71363	+7135
10^7	664579	$0/0612913$	612913	+51666
10^8	5761455	$0/0537111$	5371110	+390340
10^9	508477478	$0/04779950$	47799500	+3047900

نکتہ را لازم می دانم کہ اگر بعنوان مثال، تعداد دقیق عددهای اول تاسه میلیون را داشتیم، از فرمول شماره (IV) می توانستیم k جدیدی بدست یافته و این ضریب جدید مسلماً نتیجه بهتری از ضریب مربوط به نقطه $x = 10^6$ بدست می داد. همچنین اگر تعداد دقیق عددهای اول تاسه میلیون و پانصد هزار را داشتیم، ضریبی که با کمک فرمول (V) بدست می آمد تعداد عددهای اول تا $(3542141 = x)$ را بسیار دقیق تر از حالت قبلی بدست می داد.

بنابراین دیده می شود که جدول ۳ از روی اطلاعات داده شده در جدول ۱ تهیه گردیده و طبیعتاً هرچقدر این اطلاعات کامل تر باشد ضریب های بدست آمده از فرمول (IV) بیشتر بوده و در محدوده ۱ تا 10^9 که حوزه بررسی ما می باشد با تقریب بهتری می توان تعداد اعداد اول لازم را در یک حوزه عددی مشخصی به دست آورد.

البته همانطور که بعداً با کمک جدول ها نمایش داده خواهد شد، همین ضریب کمک بسیار زیادی در بهبود بخشیدن به فرمول (هادامار - پوان) می نماید و با استفاده از آنها، حداقل خطای مطلق در مورد $x > 10^8$ حدود ۲۰۰۰ می باشد. (در این مقاله چندین ضریب دیگر نیز به دست داده شده که خطای مطلق اخیر یعنی ۲۰۰۰ را کوچک تر خواهد کرد) و این اصلاً قابل مقایسه با خطای مطلق به دست آمده از فرمول (هادامار - پوان) که در جدول ۲ درج گردیده نیست. با کمک فرمول (هادامار - پوان) خطای مطلق در مورد $n = 10^8$ برابر 332774 و در مورد $n = 10^9$ برابر 2592536 می باشد. با کمک جدول ۳ می توان شکل کلی منحنی های محاسبه شده و ارتباط آنها را با منحنی واقعی به صورت زیر رسم کرد.



$$K = 2/926021060$$

$$\log_e k = 1/0736435$$

جدول ٧

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/8137083	-4
10^1	0/2831636	-3
10^2	0/1714057	-3
10^3	0/1229	نقطة بخورد دومنخى 0
10^4	0/095792	+13
10^5	0/0784814	+17
10^6	0/0664696	-117
10^7	0/0576467	-3220
10^8	0/0508915	-4100

$$K = 2/967058328$$

$$\log_e k = 1/087571$$

جدول ٨

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/8230357	-4
10^1	0/2842848	-3
10^2	0/1718158	-4
10^3	0/1231107	-2
10^4	0/09592	نقطة بخورد دومنخى 0
10^5	0/0785673	نزيك هم نقطة بخورد دومنخى -69
10^6	0/0665312	-733
10^7	0/057693	-7850
10^8	0/0509276	-80200

$$K = 1/831563548$$

$$\log_e k = 0/80517$$

جدول ٥

x	$\pi(x)$	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	$\frac{x}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	4	0/5891311	6	-2
10^1	25	0/25	25	نقطة بخورد دومنخى 0
10^2	168	0/158665	169	+9
10^3	1229	0/1162092	1162	+67
10^4	9592	0/0916778	9168	+424
10^5	78498	0/0756982	75698	+2800
10^6	664579	0/0644623	644623	+19956
10^7	5761405	0/0561308	5613080	+148370
10^8	50847478	0/0497064	49706400	+1141000

جدول ٦

$$K = 2/599642927$$

$$\log_e k = 0/9553741$$

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/7422742	-3
10^1	0/2739879	-2
10^2	0/168	نقطة بخورد دومنخى 0
10^3	0/1211392	+18
10^4	0/0937189	+120
10^5	0/0777596	+738
10^6	0/0659512	+5067
10^7	0/0572563	+35820
10^8	0/050287	+260400

$$K = 2/89780630$$

$$\log_e k = 1/0639540$$

جدول ١١

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/8073331	-4
10^1	0/2822876	-3
10^2	0/171121	-3
10^3	0/12227535	+1 نقطة بخورد دومنحنى
10^4	0/095703	+22
10^5	0/0784217	+76
10^6	0/0664268	+310
10^7	0/0576145	0 نقطة بخورد دومنحنى
10^8	0/0508664	-19000

$$K = 2/933898251$$

$$\log_e k = 1/0763324$$

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/8154923	-4
10^1	0/2833794	-3
10^2	0/1714847	-3
10^3	0/1229406	0 نقطة بخورد دومنحنى
10^4	0/0958167	+10
10^5	0/078498	0 نقطة بخورد دومنحنى
10^6	0/0664815	-236
10^7	0/0576556	-4110
10^8	0/0508985	-51100

$$k = 2/87659420$$

$$k \log_e g = 1/0566070$$

جدول ١٢

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/802563	-4
10^1	0/2818018	-3
10^2	0/1709057	-3
10^3	0/1226427	+3 نقطة بخورد دومنحنى
10^4	0/0956356	+28
10^5	0/0783764	+121
10^6	0/0663942	+634
10^7	0/05759	+2440
10^8	0/0508474	0 نقطة بخورد دومنحنى

$$K = 2/918222381$$

$$\log_e k = 1/070975$$

جدول ١٣

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/8119453	-4
10^1	0/2829498	-3
10^2	0/1713273	-3
10^3	0/1228597	0 نقطة بخورد دومنحنى
10^4	0/0957675	+15
10^5	0/078465	+33
10^6	0/0664579	0 نقطة بخورد دومنحنى
10^7	0/0576378	-2330
10^8	0/0508846	-37200

پس راه پیشنهادی من این است:

برای اینکه بتوانیم تعداد عددهای اول را با کمترین خطای ممکن به دست آوریم، باید تعداد عددهای اول شمارش شده تا عددی نزدیک به عدد مورد نظر را داشته باشیم، در آن صورت از روی تعداد معلوم، ضریب k را با کمک فرمول (IV) به دست آورده و آنگاه با داشتن این ضریب تعداد عددهای اول تا عدد مورد نظر خود را از فرمول (III) و با تقریب مناسب به دست می‌آوریم. در حالت کلی که تعداد عددهای اول شمارش شده و دقیق را تا عددی نزدیک به عدد مورد نظر، نداشته باشیم، از جدول ۳ کمک گرفته و نزدیک ترین عدد به عدد مورد نظر را پیدا می‌کنیم و از ضریبی که مقابل آن نوشته شده استفاده می‌کنیم.

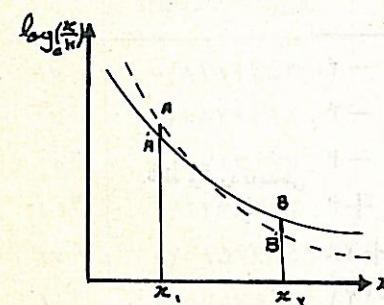
برای استفاده بهتر از جداول های فوق دو نکته را باید متد کر گردد:

۱- همانطور که قبلاً ذکر شد، در حوزه بررسی ما، منحنی واقعی با نقطه محاسبه شده یا یک نقطه برخورد و یا دونقطه برخورد دارد، اگر یک نقطه برخورد وجود داشته باشد ΔN یک بار تغییر علامت می‌دهد و اگر دونقطه برخورد وجود داشته باشد ΔN دو بار تغییر علامت می‌دهد.

همانطور که گفته شد ΔN برابر است با

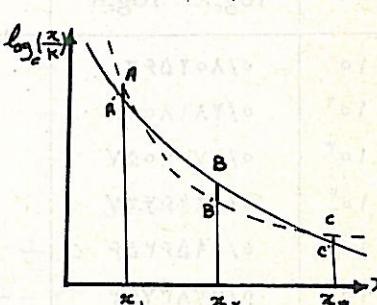
$\pi(x) - N = \text{تعداد محاسبه شده اعداد اول تا } x - \text{تعداد واقعی اعداد اول تا } x = \Delta N = \text{خطای مطلق}$

حال اگر منحنی واقعی و یکی از منحنی های محاسبه شده را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، تغییر علامت ΔN را بهوضوح خواهیم دید



$$\Delta P_1 = AA' \times x_1 < 0$$

$$\Delta P_2 = BB' \times x_2 > 0$$



$$\Delta P_1 = AA' \times x_1 < 0$$

$$\Delta P_2 = BB' \times x_2 > 0$$

$$\Delta P_3 = CC' \times x_3 < 0$$

۲- با در نظر گرفتن خطاهای مطلق که در جلوی عددهای مورد محاسبه نوشته شده، می‌توان خطاهای عددهای را که قصد محاسبه در مورد آنها وجود دارد، حدس زد و جواب به دست آمده را تصحیح کرد، به عنوان مثال اگر قصد داریم تعداد عددهای اول از یک تا ۵۰۰۰۰ را به دست آوریم، چنین عمل می‌کنیم:

عدد ۵۰۰۰۰ بین ۱۵۴ و ۱۵۵ می‌باشد، پس باید از جدول ۷ و یا جدول ۸ استفاده کرد.

در ضمن جدول ۹ نیز مناسب است، چون در جدول اخیر دونقطه برخورد یکی در ۱۵۴ و یکی در ۱۵۶ بین دو منحنی واقعی و محاسبه ای وجود دارد. حال در این سه جدول به مقادیر ΔN در روبروی عدد مورد نظر یعنی ۵۰۰۰۰ توجه می‌کنیم، چون عدد اخیر در جدول وجود ندارد، پس به عددهای بالا و پائین آن در جدول یعنی ۱۵۴ و ۱۵۵ دقت خواهیم کرد. در جدول ۷ اعداد نوشته شده در ستون ΔN به ترتیب برابر صفر و $+_{\pm}^{+}$ می‌باشد، در جدول ۸ مقادیر ۲- و صفر و در جدول ۹ مقادیر صفر و $+_{\pm}^{+}$ نوشته شده، پس معلوم می‌شود که بهتر است از جدول ۸ استفاده کنیم، چون تغییرات ΔN در آن کمتر از سایر جدول ها است، بنابراین خواهیم داشت:

$$N = \frac{x}{\log x - \log k} = \frac{50000}{\log 50000 - \log 2/9676} = 5138$$

و حال برای تصحیح جواب اخیر مقدار ΔN که جلوی ۵۰۰۰۰ نوشته شده، باید جواب به دست آمده جمع گردد، ولی می‌بینیم که عدد ۵۰۰۰۰ در جدول وجود ندارد، اما چون این عدد بین ۱۵۴ و ۱۵۶ قرار دارد، و خطای مطلق ۱۵۴- و خطای مطلق ۱۵۶ برابر صفر می‌باشد، پس خطای مطلق متعلق به ۵۰۰۰۰ را برابر ۱- فرض می‌کنیم. پس می‌توان نوشت:

$$N = 5138 - 1 = 5137$$

و آخرین نکته در این مورد: اگر مثلاً بخواهیم برای به دست آوردن تعداد عددهای اول بین یک و عددی نزدیک به ۱۵۷ بدست $(10^6 \times 10^4)$ از جدول ۱۰ استفاده کنیم، خطای مطلق عدد مورد نظر $(10^6 \times 10^4)$ را نباید چیزی بین $+_{\pm}^{+} 32$ و صفر در نظر گرفت، چون ممکن است خطای مطلق در این بین بهما کمی بیش از $+_{\pm}^{+} 23$ رسیده، آنگاه به صفر نزدیک شود. به همین جهت در اینگونه موارد، جواب را به چند طریق معین کرده و بعد معدل بگیریم بهتر است.

در زیر چهار جدول دیگر را می‌آوریم که نقطه برخورد منحنی واقعی با منحنی

$$k = e + e^{-1/8} = 2/8869187$$

$$\log_e k = 1/06022$$

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/8049164	-4
10^1	0/2820914	-3
10^2	0/1710122	-3
10^3	0/1226975	+2
10^4	0/0956669	+25
10^5	0/0783988	+99
10^6	0/0664104	+475
10^7	0/0576021	+1240
10^8	0/0508568	-9400

نقطه برخورد دو منحنی

$$K = e + e^{-1/80} = 2/8755145$$

$$\log_e k = 1/0562285$$

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/8023386	-4
10^1	0/2817741	-3
10^2	0/1708955	-3
10^3	0/1226375	+3
10^4	0/0956324	+29
10^5	0/0783743	+124
10^6	0/0664928	+651
10^7	0/0575889	+2560
10^8	0/0508464	+1000

نقطه برخورد دو منحنی

جدول ۱۴

محاسبه شده، در آن جدول نقطه مشخصی نیست، و این جدول‌ها برای استفاده از خطاهای مطلق مندرج در آن ممکن است مورد استفاده قرار بگیرد، همچنین مورد استفاده دیگر آن به دست آوردن تعداد عددهای اول مورد نظر از چند جدول و بعد معدل گیری آنها برای نتیجه بهتر می‌باشد.

قبل از پایان این مقاله بدبختی اشاره‌ای بکم به یک مسئله مهم، و آن اینکه مقادیر k و $\log_e k$ (که در جدول ۳ تعدادی از آنها آمده است) به احتمال بسیار زیاد می‌تواند به صورت تابعی از x نوشته شود، یعنی:

$$k = f(x) \quad 0/820849910 > f(x) > 3$$

$$\log_e k = g(x) \quad -0/197415 > g(x) > 1/09861$$

(حدود $f(x)$ و $g(x)$ بطور تقریبی تعیین گردید). من در این مقاله، مقادیر بسیار محدودی از k را محاسبه کرده‌ام، اگر بتوان k (یا $f(x)$ یا $g(x)$) را به دست آورد، در آن صورت دیگر به محاسبه جداگانه k احتیاجی نیست و تعداد عددهای اول بین یک تا هر عدد دلخواه (تا بینهایت) از فرمول‌های زیر و با بهترین تقریب ممکن ($\Delta x = 0$) بدست می‌آیند.

$$N = \frac{x}{\log_e x - \log_e[f(x)]} \quad N = \frac{x}{\log_e x - g(x)}$$

$$k = e + \frac{1}{e^{1/8}} = 2/9413964$$

$$\log_e k = 1/078885$$

جدول ۱۵

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/8171703	-4
10^1	0/2835817	-3
10^2	0/1715588	-4
10^3	0/1229786	-1
10^4	0/0958398	+8
10^5	0/0785135	-16
10^6	0/0664926	-347
10^7	0/057664	-4950
10^8	0/050905	-57600

نقطه برخورد دو منحنی

نقطه برخورد دو منحنی

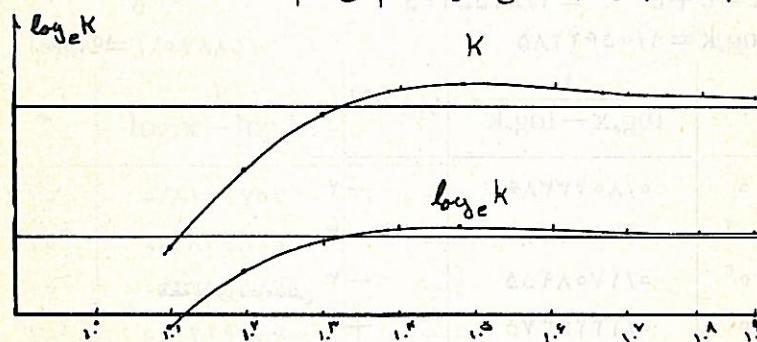
$$k = e + e^{-1/9} = 2/86788502$$

$$\log_e k = 1/05356757$$

نقطه برخورد دو منحنی

x	$\frac{1}{\log_e x - \log_e k}$	ΔN
10^0	0/8006292	-4
10^1	0/281563	-3
10^2	0/1708178	-3
10^3	0/1225975	+3
10^4	0/0956081	+21
10^5	0/0783579	+140
10^6	0/0663811	+768
10^7	0/05758	+3450
10^8	0/0508396	+7800

با کمک جدول ۳، منحنی زیر را رسم می کنیم



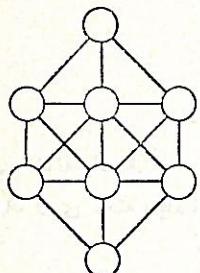
همانطور که در این منحنی دیده می شود، حد k و قطبی x بسمت بینهایت میل می کند برابر e می باشد و حد $\log_e k$ و قطبی x بسمت بینهایت میل می کند برابر واحد می باشد. پس در بینهایت فرمول پیشنهادی من به صورت زیر در می آید:

$$N = \frac{x}{\log_e x - 1}$$



رمز و راز عدد ها و شکل ها

۱. در دایره های این شکل، عدد های از ۱ تا ۸ را طوری قرار دهید که اختلاف هر دو عدد واقع در دو دایره مجاور، که به وسیله خط راستی به هم وصل شده اند، از ۲ کمتر نباشد. مثلا اگر در دایره بالا، عدد ۴ را قرار دادیم، نمی توانیم در هیچ کدام از سه دایره مجاور آن، یکی از دو عدد ۲ یا ۴ را قرار دهیم.



۲. یک نه شلیعی محدب رسم کنید و تمام قطرهای آن را بکشید. این قطرها در چند نقطه یکدیگر را قطع می کنند؟ فرض را بر این بگیرید که از نقطه برخورد هر دو قطر، هیچ کدام از قطرهای دیگر عبور نمی کند.

۳. در مجموع ... + ۳ + ۴ + ... + ۱ چند جمله انتخاب کنیم تا حاصل آن یک عدد سه رقمی با رقم های برابر بشود؟

$$4. \text{ کدام کسر بزرگتر است, } \frac{1}{10^{1968}} + 1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{10^{1967}} + 1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{10^{1969}} + 1$$

۵. موشک از ارتفاع H ، تحت تاثیر جاذبه ماه، با شتاب a (بر ثانیه ثانیه) و سرعت اولیه v متر (بر ثانیه) به طور قائم بر سطح ماه فرود می آید. موشک، به کمک موتور ترمز کننده، حرکت کند شونده متشابه التغییری پیدا می کند، به نحوی که در هر ثانیه a متر (بر ثانیه)، سرعت خود را از دست می دهد در چه لحظه ای از آغاز سقوط، باید موتور ترمز کننده را به کار انداخت تا موشک در لحظه برخورد به سطح ماه، سرعت صفر داشته باشد (جزی که به آن، فرود آرام موشک بر سطح ماه بگویند)؟

$$\log_2 x \leq \sqrt{\log_2 x}$$

۱۳. همه زوج عدهای x و y را ، که در تابع $\sin(x+y)$ صدق می کنند،

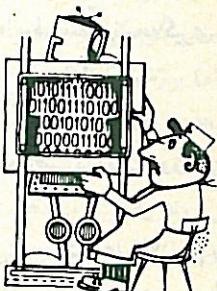
به دست آورید :

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + 2 \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y = 3 + \sin^2(x+y)$$

۱۴. آیا همیشه می توان n نقطه دلخواه واقع بر یک صفحه را طوری به وسیله یک خط شکسته بسته ، به هم وصل کرد ، بدون اینکه پاره خطها ، به جز در نقطه های مفروض ، یکدیگر را قطع کرده باشند؟

۱۵. در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، رأس A را به وسط ضلع های BC و CD وصل کرده ایم . این خطها ، قطر BD از متوازی الاضلاع را به چه نسبت تقسیم می کنند؟

پاسخ در صفحه ۶۴



۶. دو پاده ، یکی از نقطه A و دیگری از نقطه B ، با سرعت های v و v' به طرف چهار راه O در یک زمان حرکت کردند. بعد از زمانی مثل t فاصله بین آنها ، برابر S شد که کمترین فاصله ممکن بین دو پاده بود. این فاصله را پیدا کنید ، به شرطی که بدانیم جاده های AO و BO برهم عمودند و طول AO با BO متفاوت است.

۷. می خواهیم یک قطعه زمین را از سه طرف حصار بکشیم (طرف چهارم را کانال گرفته است و نیازی به حصار ندارد). قطعه زمین باید مستطیلی شکل و طول حصار آن 75 متر باشد. طول ضلع های این قطعه زمین را چقدر بگیریم تا مساحت آن حداقل 1000 متر مربع باشد.

۸. در این جمع ، رقم ها را پیدا کنید

A

$A \quad B$

A	B	C
B	C	B

هر حرف نشانه یک رقم و حرف های یکسان نشانه رقم های یکسان هستند.

۹. روی تخته سیاه ، این عددها نوشته شده است :

۱۰، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰

دو تا از عددها را به دلخواه پاک می کنیم و به جای آنها ، تفاضلشان را می نویسیم . آیا می توان با تکرار این عمل ، روی تخته سیاه ، تنها صفر باقی بماند؟

۱۰. عددی داریم سه رقمی که دو رقم سمت راست و سمت چپ آن با هم فرق دارند. این عدد را مقلوب می کنیم (مقلوب عدد abc یعنی عدد cba) از دو عددی که در دست داریم ، کوچکتر را از بزرگتر کم می کنیم و سپس تفاضل حاصل را با مقلوب خودش جمع می کنیم. نتیجه جمع ، چه عددی است؟

۱۱. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، بایال های جانبی AA_1 ، BB_1 ، CC_1 ، DD_1 مفروض است . روی ادامه یال های AB ، AD و AA_1 به ترتیب پاره خط های BP ، DR و A_1Q را به طول $1/5 AB$ (اجمایی کنیم) گذرانیم. این صفحه ، حجم مکعب را به چه نسبتی تقسیم می کند؟

۱۲. این نامعادله را حل کنید:

نیوتون انگلیسی در مقام نخست قرار دارد، نیوتون هم، مثل همه بزرگان آن عصر، تنها در رشته علمی خودش، متخصص نبود. او تاثیر عمیقی در پیشبرد ریاضیات، مکانیک، فیزیک نور و نجوم، یعنی همه علوم دقیقه‌ای داشت که تا آن زمان، هنوز از «پدر علم»، یعنی فلسفه طبیعت جدا نشده بود.

نیوتون، با ذهن برقدرتی که داشت، توانست در سال‌های دانشجویی (۱۶۶۱-۱۶۶۵) همه ریاضیاتی را که وجود داشت و تا آن زمان به دست آمده بود، فرا گیرد. او علاوه بر آثار مؤلفان باستان و سده‌های میانه، «هندسه» دکارت، نتیجه‌گیری‌های فرما، دست‌آوردهای ریاضی دانان ایتالیایی (کاوالیری، توریچلی) و انگلیسی (ولیس، باروی) و بسیاری دیگر را آموخت. او در طول دو سال اقامت اجباری در ده (۱۶۶۵-۱۶۶۷)، مبانی ریاضیات عالی، فیزیک نور و مکانیک آسمانی را پی‌ریخت. برای نیوتون، ریاضیات مولودی انتزاعی از عقل انسانی نبود. بعد از تردیدهایی، به این دیدگاه رسید که شکل هندسی (خط، سطح، حجم) را به عنوان نتیجه‌ای از حرکت نقطه، خط یا سطح در نظر بگیرد؛ حرکت در زمان انجام می‌گیرد و هر چه زمان را کوچکتر بگیریم، نقطه (یا خط یا سطح) هم راه کمتری را خواهد پیمود. همین راه کوچک، به نمو کوچکی از خط یا چیزی دیگر منجر می‌شود، و نسبت این نمو کوچک خط (راه) بر زمان کوچکی که این مسیر کوتاه ضمن آن طی شده است، سرعت را به ما می‌دهد. برای این که سرعت لحظه‌ای را پیدا کنیم، باید حد این نسبت را محاسبه کنیم، یعنی «نسبت نهائی» را به دست آوریم. نیوتون در جریان زمان، تفسیر محتوی فیزیکی این روند را تغییر می‌دهد، ولی این موضوع مانع از آن نمی‌شود که دستگاه صوری لازم را تدارک بینند. به این ترتیب، نیوتون به ضرورت جستجوی «نسبت نهائی» می‌رسد، یعنی، بنا به اصطلاح‌های امروزی، به جستجوی نسبت نمو تابع به نمو زمان. روشی است که در صورت لزوم، می‌توان نسبت نمو تابعی از زمان را به نمو تابع دیگری به دست آورد، یعنی مشتق تابع را نسبت به متغیر آن محاسبه کرد. نیوتون، با استفاده گسترده و آزاد، از قضیه توریچلی - باروی درباره بستگی متقابل دیفرانسیل گیری و انتگرال گیری و به کار بردن تابع‌های دلخواه فراوان به سادگی مساحت بسیاری از منحنی‌ها را پیدا کرد. هر جا که نمی‌شد انتگرال مفروض را محاسبه کرد، نیوتون، تابع زیر انتگرال را به یک رشته توانی تبدیل می‌کرد و از جمله‌های آن انتگرال می‌گرفت. خود هنر بسط تابع به صورت یک رشتة، از ابتکارهای نیوتون است. نیوتون برای بسط دادن از روش‌های مختلفی استفاده می‌کرد که از میان

دانش جدید، شکل می‌گیرد

به این ترتیب، در سال ۸۰ سده هفدهم، مساله‌های مربوط به محاسبه مساحت، حجم، مختصات مرکز تقلیل و غیره، تا حد معینی به موفقیت نزدیک شده بود. گرچه هنوز روش تازه‌ای برای محاسبه پیدا نشده بود؛ نتیجه گیری‌های وجود داشت که به خاطر کلیت خود و به خاطر نتیجه‌های دیگری که خود به خود از آنها ناشی می‌شد، جزوی از محاسبه‌ای بودند که هنوز شناخته نشده بود. مثلاً، نتیجه گیری

$$\int_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

چنان مهم و اساسی بود که به وسیله چند ریاضی دان، و بدون این که با هم رابطه‌ای داشته باشند، به دست آمد.

در مورد مساله‌های مربوط به مماس و جستجوی ماقزبم و می‌نیعم هم، توجه کمتری وجود نداشت. در اینجا هنوز روشی برای محاسبه نبود، ولی روش‌هایی وجود داشت که به اندازه کافی استوار و عمومی بودند. به خصوص، بیان $\frac{f(x+e) - f(x)}{e}$ برای این گونه مساله‌ها، اهمیتی جدی داشت.

سرانجام، لحظه‌ای فرا رسید که بستگی متقابل بین دو عمل مهم، پیدا شد: محاسبه مساحت شکل‌های منحنی الخط و رسم مماس بر نقطه مفروضی از منحنی. این باقی مانده بود که از تمامی این نتیجه گیری‌ها، یک قاعدة کلی، یک الگوریتم، به دست آید که بتواند مجموعه موضوع‌های این شاخه ریاضی را در برگیرد. و حل این مساله، در پانزده سال آخر سده هفدهم و در جریان سده هیجدهم، انجام گرفت. در میان کسانی که رسالت حل این مساله تاریخی را به عهده گرفتند، ایساک

به عنوان مؤلفان محاسبه دیفرانسیلی، کمتر از خودش نمی‌داند. ضمن مقایسه روش فلوکسیون نیوتون و محاسبه دیفرانسیلی، معلوم می‌شود که درواقع، اختلافی باهم ندارند، جز این که دو مولف، از راه‌های متفاوتی به آن رسیده‌اند. لایپ نیتس طرح خود را به صورت خالص هندسی مطرح کرده است. برای این که مشتق تابعی را بدست ضربی زاویه مماس بر منحنی نمایش این تابع. برای این که مشتق تابعی را بدست آوریم، باید، بنابر قاعده لایپ نیتس، نمو کوچکی به متغیر بدھیم، نمو متاتاظر تابع را بدست آوریم، دومی را بر اولی تقسیم کنیم و سپس همه جمله‌هایی را که در آن‌ها نمو تابع باقی مانده است از هر درجه‌ای که باشند حذف کنیم. درباره طبیعت نمو، اعتقاد واحدی در اردوی لایپ نیتس نبود؛ همچنین تعریف دقیقی هم برای بی‌نهایت کوچک وجود نداشت (و این نشانه آن بود که در این مورد مفهوم روشی وجود نداشت). لایپ نیتس گرفتارتر از آن بود که تمامی وقت خود را صرف ریاضیات کند، اگرچه از چاپ و انتشار مقاله‌های مهم خود، دست برنامی داشت. سنگینی اصلی بار تهیه دستگاه صوری را، برنولی‌ها، به خصوص یوهان، به عهده گرفتند. وقتی که یوهان در سال‌های ۱۶۹۲-۱۶۹۱ با هویتال در پاریس آشنا شد، نه تنها روش محاسبه عمل‌های دیفرانسیلی را تکامل داده بود، بلکه سیاهه بزرگی از مقاله‌های قابل حل را هم تهیه کرده بود. او خیلی ساده پیشنهاد هویتال را پذیرفت و دوره مفصلی از حساب دیفرانسیل و انگرال را برای او درس داد. درواقع، درس محاسبه دیفرانسیلی او بود که اساس کتاب هویتال، نخستین کتاب درسی ریاضیات «جدید» یا ریاضیات عالی بود. همراه با مقاله‌های لایپ نیتس و برادران برنولی، این شاگرد توانست گروه وسیعی از ریاضی دانان را به طرف این ریاضیات جدید، جلب کند. پیشرفت طوفانی آن آغاز و مرحله‌های مختلف آن روشن شد؛ مقاله‌هایی که تنها در توان ریاضی دانان بزرگی همچون دکارت، فرما، روپرال به حساب می‌آمد، حالا بعد از کارهای نیوتون در انگلیس و لایپ و برادران برنولی در قاره، درسترس هرکسی که جدیت داشت و اندکی وقت صرف می‌کرد، قرار گرفت.

در همان دهه‌های نخست سده هیجدهم، بسیاری پیدا شدند که به دنبال راه تازه، کارهای نیوتون و لایپ نیتس را ادامه دادند. در انگلستان، تیلور (۱۶۸۵-۱۷۳۱)، در سال‌های ۱۷۱۲ تا ۱۷۱۵، روش تازه بسط تابع‌ها به رشته توانی را پیدا کرد؛ ماکلورن (۱۶۹۸-۱۷۶۴) از کتاب عالی «رساله‌ای درباره فلوکسیون‌ها» آغاز کرد (۱۷۴۲)؛ در قاره اروپا، گروه بزرگی از ریاضی دانان درخشان و جوان پیدا شدند، که یاشاگرد

آن‌ها، در درجه اول، باید از کاربرد رابطه دو جمله‌ای نام برد، ولی ضمناً باید از عمل‌های مثل تقسیم از نوع ^۱، ریشه گرفتن و غیر آن هم یاد کرد. وقتی که نیوتون «مقدمات» را می‌نوشت، کاملاً آماده و مسلط بود؛ او هم دیفرانسیل گیری (به قول خود او، جستجوی فلوکسیون)، هم انگرال گیری (تعیین فلوتنت از روی فلوکسیون) و هم حل معادله‌های دیفرانسیلی، هم فرمول‌های انگرال گیری، و به طور خلاصه، همه آن چه را از خود به ارت گذاشته است، در اختیار داشت. متأسفانه، قسمت عده‌ای از همه این‌ها، یا به کلی ناشناخته باقی ماند و یا تنها تعداد کمی از آشنايان زندیک نیوتون از آن آگاه بودند. در همین زمان، یعنی در سال ۱۶۸۴، مقاله لایپ نیتس، با طرح محاسبه جدید دیفرانسیلی، منتشر شد. در واقع، این مقاله، بسیار فشرده نوشته شده بود، به نحوی که درک مطالب تازه‌ای که در آن بود، بهخصوص راه کاربرد آن، فوق العاده دشوار می‌نمود. ولی، این مقاله، با همه کوتاهی خود، تقریباً تمامی درس محاسبه دیفرانسیلی (اصطلاح محاسبه دیفرانسیلی از لایپ نیتس است) و کاربرد آن در آنالیز را در برمی‌گرفت. نشانه‌ها و نمادهایی که لایپ نیتس به کاربرده بود، چنان خوب بود که تقریباً همه آن‌ها تا به امروز، بدون تغییر، باقی مانده است.

بعضی از ریاضی دانان، از جمله ج. کرگ اسکاتلندي (مرگ در سال ۱۷۹۱)، هوپیتال فرانسوی (۱۶۶۱-۱۷۰۴) تلاش‌هایی برای درک مقاله لایپ نیتس کردند، ولی توفیق خاصی به دست نیاوردنده؛ نه مقاله‌هایی را که لایپ نیتس طرح کرده بود، حل کردند و نه به قول خود، که راه حل‌های دیگر برای این مقاله‌ها ارائه خواهند داد، وفا کردند. در سال ۱۶۸۷، برادران برنولی (زاکوب و یوهان) (۱۶۵۴-۱۷۰۵) و (۱۶۶۷-۱۷۸۴) با مقاله لایپ نیتس آشنا شدند. این‌ها ریاضی دانانی با مقیاسی دیگر بودند. زاکوب درباره مشکلات طرح لایپ نیتس، در سال ۱۶۸۷ نامه‌ای برای او نوشت. ولی لایپ نیتس در این سال‌ها در مسافرت بود و نامه زاکوب، تنها در سال ۱۶۹۰ به دست او رسید. برادران برنولی در انتظار نامه، دست روی دست نگذاشتند. آن‌ها، که پاسخی از مولف مقاله دریافت نکرده بودند، خودشان نه تنها محتوى مقاله را به طور کامل روشن کردند، بلکه راهی را که لایپ نیتس باز کرده بود ادامه دادند و نتیجه‌های تازه‌ای به دست آوردند. زاکوب در سال ۱۶۹۰ مقاله‌ای چاپ کرد و در آن، مقاله‌ای را که لایپ نیتس درباره هم‌زمانی طرح کرده بود با همان روش‌های دیفرانسیلی حل کرد، به نحوی که لایپ نیتس دیگر هرگونه توضیحی را برای آن‌ها، زیادی دانست. سرآخ، لایپ نیتس ضمن نامه‌ای به دوبرادر نوشت که او آن‌ها را

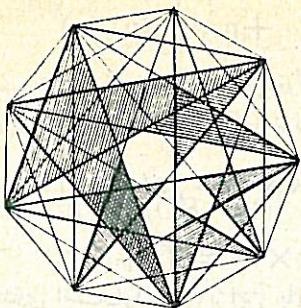
یوهان برنولی بودند (اولرو بعضی از برنولی‌ها) و یا شاگرد شاگردان او، همراه با پیشرفت آنالیز جدید و عمومی شدن و ساده شدن آن، گروه مخالفان هم خود را آشکارتر کردند. البته، بیشتر کسانی را که از آنالیز جدید رنجیده خاطر بودند، هواداران منطق تشکیل می‌دادند، و این به خاطر آن بود که نه تنها در بین ریاضی‌دانان مختلف هوادار آنالیز جدید، بلکه حتی اکثرًا در بیان هر کدام از آن‌ها هم، ابهام‌ها و تناقض گونی‌هایی دیده می‌شد.

هنوز لایپ نیتس زنده بود که م. روال (۱۶۵۲-۱۷۱۹)، محاسبه دیفرانسیلی را به باد انتقاد گرفت. ضربه اصلی انتقاد، بتنسبت ^۰ بود، که از لحاظ منطق صوری، نامفهوم و بی معنی می‌نمود. لایپ نیتس، توضیح قانون کننده‌ای ارائه داد، ولی ظاهراً مقاله‌ای خیلی زود فراموش شد (عموماً کسانی که قصد فهمیدن ندارند، حافظه بدی دارند): و در سال ۱۷۳۴، دوباره اثر پرانتقادی از ج. برکلی، فیلسوف مشهور (۱۶۸۴-۱۷۵۳)، منتشر شد. ولی، محاسبه جدید به اندازه کافی استوار شده بود و کبودی برای مدافعان آن، از لحاظ مبانی خود، نداشت. روپنس (۱۷۰۷-۱۷۵۱) در سال ۱۷۳۵، و بعد ماکلورن در سال ۱۷۵۲، آثاری چنان قانون کننده عرضه کردند که دیگر انتقاد به روش فلوکسیون و محاسبه دیفرانسیلی، توجه کسی را جلب نکرد. این درست همان سال‌هایی است که، به قول انگلیس، محاسبه دیفرانسیلی ذهن ریاضی‌دانان را تسخیر کرده بود و خود بالمنازع بر ریاضیات حکومت می‌کرد. در همین زمان بود که لئونارداولر هم، معاصران خود را به شگفتی واداشت. در بدوارم ممکن است وارد کردن اولر به سیاهه آفریننده‌های محاسبه تازه، عجیب و نامفهوم باشد، ولی اگر وضع آنالیزرا در آغاز فعالیت اولر، با وضعی که بعداً پیدا کرد، مقایسه کیم، آن وقت متوجه می‌شویم که نمی‌توان او را به عنوان یکی از بنیان‌گذاران ریاضیات عالی به حساب نیاورد. اگر تنها سیاهه ساده‌ای از آن چه که او به ریاضیات عالی داده است، تنظیم کنیم، تشن خواهد داد که ارثیه او، این حق را کاملاً به او می‌دهد که در هر حال در ردیف برادران برنولی قرار گیرد. هیچ کس دیگری، مثل یوهان برنولی نتوانست اولر را در همان سال‌های ۴۰ سده هیجدهم بشناسد، وقتی که اولر هنوز ریاضی‌دان نسبتاً جوانی بود. و تازه، بعد از آن، اولر چهل سال دیگر کار کرد. اگر، در آن زمان که یوهان برنولی ارزش اولر را فهمید، در سخن خود محق بود که: اولر ریاضیات را به دانشی «بالغ» تبدیل کرده است، بدون تردید در پایان فعالیت او، این ارزش به مرتب بیشتر می‌شود: در سال‌های ۸۰ سده هیجدهم، آن چه امروز به عنوان آنالیز کلاسیک مشهور است، به صورت دانشی پخته درآمده بود. اولر در همه

زمینه‌های آنالیز کار کرد و نتیجه‌هایی به دست آورد. در مبانی، محاسبه دیفرانسیلی، محاسبه انتگرالی و در حل معادله‌های عادی دیفرانسیلی. اولر، به جز این‌ها، صورت نهایی دستگاه صوری آنالیز را طرح کرد و راه کاربرد آنالیز را در مساله‌های نجوم، مکانیک، هیدرودینامیک، فیزیک و بسیاری از دیگر رشته‌های دانش، نشان داد.

می‌دانیم در ابتدای سال‌های ۹۰ سده نوزدهم، این اعتقاد همه‌گیر شده بود که گویا همه آن چه که تا کنون در فیزیک انجام شده است و یا باید انجام شود، چیزی جز «کندوکاو در خورده ریزها»، از نوع تعیین مقادیر عددی ضریب‌های مختلف، نیست. همچنین فراموش نکرده ایم که هواخراهان دو آتشه دستگاه بعلمیوسی هم، در زمان کویرنیک، تصور می‌کردند که در نجوم، چیزی جز بعضی اصلاح‌های ناچیز، نه انجام شده است و نه انجام خواهد شد. در مورد ریاضیات هم، همین روحیه در بین ریاضی‌دانان سده هیجدهم حاکم بود. این سخن لاگرانژ است که در نامه‌ای به دالامبر می‌نویسد: «ایا به نظر شما نمی‌رسد که هندسه عالی تا حدی به سقوط نزدیک می‌شود، تنها شما و اولر هستید که آن را نگاه داشته‌اید». این نامه ۱۸ سال پیش از انتشار «مکانیک تحلیلی» او - که محرکی نیرومند برای ریاضیات بود - و ۲۵ سال پیش از کارگوس - که عصر تازه‌ای را در ریاضیات آغاز کرد - نوشته شده است. لاگرانژ، دست کم از بعضی جهت‌ها، کاملاً حق داشت. در واقع هم، با اولر، ریاضیات به پایان خود رسید، ولی نه ریاضیات به طور کلی، بلکه ریاضیات سده هیجدهم، ریاضیاتی که کارش همچون کاشفانم بود که در برابر سرزمینی گستردۀ، ناشناخته و بکر، ایستاده‌اند. نیروی پرسور و شوق و نامتعارفی که روش‌های تازه به وجود آورده بود، صرفه‌جویی در وقت و سهولت فوق العاده‌ای که در حل مساله‌ها پیدا شده بود، نمی‌توانست ریاضی‌دانان سده هیجدهم را، به خاطر غم‌خواری نسبت به بعضی از نارسایی‌های منطقی، از به کاربردن این روش‌ها بازدارد. سده هیجدهم، با مساله‌های خاص خودش، عرصه کاربرد آنالیز را گسترش داد. جالب است که ریاضیات سده هیجدهم، درست صد سال طول می‌کشد، و باید آغاز آن را از انتشار مقاله لایپ نیتس در سال ۱۶۸۴ و پایان آن را، مرگ اولر در سال ۱۷۸۳ دانست. سده هیجدهم، روش‌های گستردۀ و عام است. پایه‌گذاری ریاضیات برزمینه واقع‌علمی، تدارک دستگاه خاص منطقی برای آن، آزاد شدن از تاثیر اندیشه‌های شهردی و اصل موضوعی کردن آن، کاری است که به سده بعدی مربوط می‌شود.

○ در شماره بعد: ایساک نیوتون



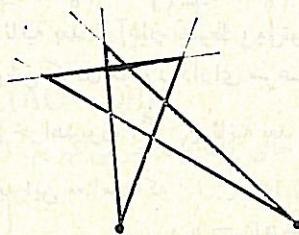
منتظم هم می‌توان به همین ترتیب عمل کرد.

$$C_{2000}^4 = \frac{1997 \times 1998 \times 1999 \times 2000}{4!}$$

و در حالت کلی، برای n ضلعی:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

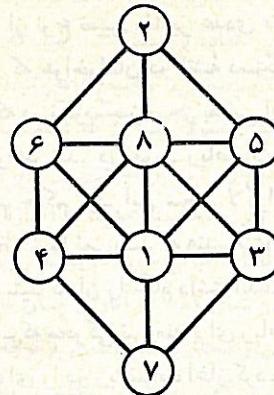
حالا بینید که آیا می‌توانید محاسبه کنید: به وسیله قطرهای یک نهضلی، چند ستاره پنج پر به دست می‌آید؟ بازهم، مثل مسئله قبل، فرض براین است



که هیچ قطری از محل برخورد دو قطر دیگر نمی‌گذرد. تنها شرط این است که این ستاره‌های پنج پر که هر کدام از آنها شامل پنج خط راست (ونه خط شکسته) هستند – از دو زوج «نیم خط» متقابل متقاطع و خط راستی که آنها را بریده است، درست شده باشند.

۳. این رابطه (مجموع n جمله متولی از یک تصاعد حسابی ساده)، روشن است:

۱. در اینجا، یکی از جوابها داده شده است.



۲. طبیعی است که برای تعیین تعداد نقطه‌های برخورد قطرهای یک نهضلی، می‌توان آنها را دروی شکل شمرد. برای این کار، تنها به شبکیائی و دقیق نیاز داریم. به همین مناسبت، طرح چنین مسائلهایی، می‌تواند برای تقویت این دو خصلت آدمی، که بسیار هم برای او مفید و لازم است، به کار گرفته شود. ولی اگر مثلاً به خواننده پیشنهاد کنیم که تعداد نقطه‌های برخورد یک ضلعی محدب را، به طریق تجربی، پیدا کند، مسلماً به شوخی پیشتر شباht خواهد داشت. بنابراین، چاره‌ای نیست، جزاین که به دنبال یک راه حل کلی ریاضی برویم.

استدلال بسیار ساده است. می‌دانیم که در یک چهار ضلعی، قطرها، تنها در یک نقطه به هم می‌رسند. بنابراین کافی است حساب کنیم که از یک نهضلی به چند طریق می‌توان یک چهار ضلعی به دست آورد. یعنی باید ترکیب ۹ چیز را ۴ به ۴ حساب کنیم:

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! 5!} = 126$$

وطبیعی است که مثلاً برای محاسبه تعداد نقطه‌های برخورد قطرهای یک ۲۰۰۰ ضلعی

$$t_1 = \frac{1}{a} \left(\sqrt{\frac{1}{4} v^2 + aH} - v \right)$$

به ازای $H > 2aH$ ، فرود آرام ، ممکن نیست.

۶. بعد از گذشت زمان t ، فاصله پیاده‌ها از چهار راه ، به ترتیب برابر است با $(AO - vt)$ و $(OB - vt)$. بنابراین ، فاصله بین دو پیاده در این لحظه ، چنین است:

$$S = \sqrt{(AO - vt)^2 + (OB - vt)^2}$$

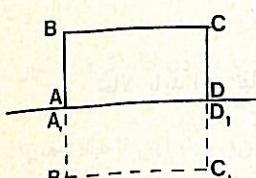
باید ، زیرا دیگر را ، تغییراتی بدھیم . پرانترا را به توانی رسانیم. جمله‌های مشابه را جمع می‌کنیم ، به عبارتی که به دست می‌آید ، مقدار $\frac{1}{2}(AO + OB)^2 - 2vt(AO + OB) + 2(vt)^2$ را یکبار اضافه و یکبار کم می‌کنیم ، در نتیجه ، به جای عبارت زیر را دیگر خواهیم داشت:

$$2\left(vt - \frac{AO+OB}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(AO - OB)$$

حالا باید شرطی را پیدا کنیم ، که به ازای آن ، این عبارت حداقل شود. در چه حالتی این مقدار می‌شود؟ جمله دوم عبارت اخیر را نمی‌توان تغییر داد ، بنابراین باید حداقل جمله اول را جستجو کرد . حداقل جمله اول برابر است با صفر ، یعنی در لحظه $t = \frac{AO+OB}{2v}$ ، فاصله دو پیاده به حداقل مقدار ممکن می‌رسد و این فاصله چنین است:

$$S = \sqrt{\frac{1}{4}(AO - OB)}$$

۷. خط راستی را به جای کانال در نظر می‌گیریم . $ABCD$ را قطعه‌ای



که باید حصار کرد و A, B, C, D را قرینه آن نسبت به خط کانال می‌گیریم. در این صورت محیط مستطیل $BCC'B_1$ برابر 140 متر می‌شود. محیط برابر دارند ، مساحت حداً کثر متعلق به مربع است . در نتیجه باید ضلع‌های مستطیل $BCC'B_1$ هر کدام برابر 35 متر باشد . در مورد حصار مورد نظر ما ، یعنی قطعه $ABCD$ داریم: $AB = CD = 17/5$ و $BC = 35$. مسأله‌ای از این قبیل را می‌توانید در کتاب «سرگرمی‌های جبر ، تأثیف

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

ولی ، هر عدد سه رقمی با رقم‌های مساوی رامی توان به صورت $3k \times 37 = 111 \times k$ نوشت. بنابراین ، باید داشته باشیم :

$$3k \times 37 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

و با

$$6k \times 37 = n(n+1)$$

چون 37 عددی است اول ، بنابراین باید n با $n+1$ بر 37 بخش پذیر باشد. ضمناً ، چون $1000 < \frac{1}{2}n(n+1) < 500$.

دیگر به سادگی معلوم می‌شود که $36 \leq n \leq 6$. یعنی باید 36 جمله از تصاعد را انتخاب کرد تا مجموع آنها برابر 666 بشود . ۴. اگر دو کسر را به یک مخرج تبدیل کنیم ، به سادگی می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{10^{1967} + 1}{10^{1968} + 1} = \frac{10^{1968} + 10^{1967} + 10^{1968} + 10^{1967} + 1}{(10^{1968} + 1) \cdot (10^{1969} + 1)} >$$

$$> \frac{10^{1968} + 10^{1968} + 2 \times 10^{1968} + 1}{10^{1969} + 1} = \frac{10^{1968} + 1}{10^{1969} + 1}$$

۵. اگر t_1 ثانیه بعد از آغاز سقوط ، موتور ترمز کننده را روشن کنیم ، موشک در لحظه روشن کردن موتور دارای سرعت $v_1 = v + at_1$ و ارتفاع $H_1 = vt_1 + \frac{at_1^2}{2}$ خواهد بود ، اگر t_2 ثانیه بعد از روشن کردن موتور ، فرود آرام انجام شود ، به این معناست که

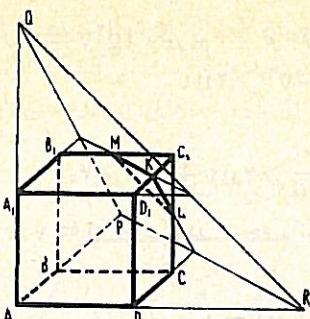
$$v_2 = v + at_1 - at_2 = 0 ,$$

$$H_2 = H - H_1 - \left(v_1 t_2 - \frac{at_2^2}{2} \right)$$

مقادیر v_1 ، H_1 و t_2 را از معادله‌های قبلی بحسب t_1 ، در این معادله قرار می‌دهیم ، بعد از ساده کردن به دست می‌آید :

$$H = at_1^2 + 2vt_1 + \frac{v^2}{2a}$$

و از آن جا



یکی از راس‌های آن بر رأس C_1 از مکعب و سه راس دیگر آن بروسط بالهایی از مکعب که از راس C_1 گذشته‌اند، قراردادارد. از این جا می‌توان به سادگی، حجم این هرم را، که برابر $\frac{1}{48}a^3$ (یعنی $\frac{1}{2}a^3$) می‌شود، به دست آورد. در نتیجه، نسبت حجم دو قسمت مکعب برابر $47 : 1$ می‌شود.
۱۳. اگر فرض کنیم $y = \log_x^z$ (توجه کنیم که داریم: $y \neq 0$) بدست می‌آید:

$$\begin{cases} 1+y \leqslant \sqrt[3]{z+y} \\ y \neq 0 \end{cases}$$

در حالتی که سمت چپ نامساوی اول منفی باشد (یعنی $-1 < y < 0$)، و با شرط حقیقی بودن سمت راست (یعنی $-3 \geqslant y \geqslant -1$)، نامعادله برقرار است. این جواب به دست می‌آید:

اگر $0 > y \geqslant -1$ ، دو طرف نامساوی مثبت می‌شود و می‌توان آن را مجدور کرد، که در نتیجه، به نامعادله زیر می‌رسیم:

$$y^2 + y - 2 \leqslant 0$$

که ضمن حل آن باید شرط‌های $y \neq 0$ و $-1 \geqslant y \geqslant 0$ را در نظر گرفت. در نتیجه به دست می‌آید: $0 < y \leqslant -1$ و $0 \leqslant y < 0$.

به یاد بیاوریم که داشتیم $y = \log_x^z$. بنابراین، باید این نامعادله‌ها را حل کنیم:

$$-3 \leqslant \log_x^z \leqslant 1$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \leqslant x \leqslant 2$$

۱۴. روشن است که سمت راست تساوی نمی‌تواند بزرگتر از ۴ باشد.

یا. ای. پر لحان، ترجمه پرویز شهریاری پیدا کنید.]

۸. این معادله به سادگی به دست می‌آید:

$$A+C=10, A+B+1=10+C, A+1=B$$

که از آنجا خواهیم داشت:

$$A=6, B=7, C=4$$

و جمع مورد نظر ما، چنین است:

$$6+7$$

$$674$$

$$747$$

۹. یادآوری می‌کنیم که اگر مجموع دو عدد زوج باشد (یعنی دو عدد زوج یا هردو عدد فرد باشند)، تفاضل آن‌ها هم عددی زوج می‌شود. همچنین اگر مجموع دو عدد فرد باشد (یعنی از دو عدد، یکی زوج و دیگری فرد باشد)، تفاضل آن‌ها هم عددی فرد می‌شود.

مجموع همه عدهایی که روی تخته سیاه نوشته شده برابر است با ۵۵. این مجموع، عددی است فرد، و بنابراین، اگر به جای دو عدد، تفاضل آن را بنویسیم، در فرد بودن مجموع کل، تغییری حاصل نمی‌شود. در نتیجه، هر گز به نتیجه صفر (که عددی است زوج) نمی‌رسیم.

۱۰. عدد سه رقمی $a>b>c$ فرض می‌کنیم. تفاضل این عدد از مقلوب خودش، چنین است:

$$\begin{array}{r} a b c - \\ c b a \\ \hline \end{array}$$

$$(a-c-1)(10+c-a)$$

حالا باید این تفاضل را با مقلوب خودش جمع کنیم:

$$\begin{array}{r} (a-c-1)(10+c-a) + \\ (10+c-a)(a-c-1) \\ \hline \end{array}$$

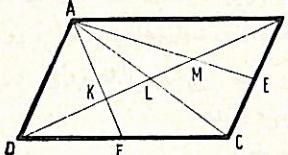
$$10 \quad 8 \quad 9$$

بنابراین، مجموع حاصل، همیشه برابر ۱۰۸۹ می‌شود.

۱۱. دشواری اصلی در رسم شکل و شان دادن مقطع است؛ این شکل در اینجا رسم شده است. از مکعب، هرم مثلث القاعده‌ای جدا می‌شود، که

را قطع کرده است). همان طورکه از شکل دیده می شود، اگر این عمل را ادامه دهیم، یک خط شکسته بسته به دست می آید که از تمام Π نقطه عبور کرده است و ضمناً هیچ کدام از پاره خطوطهای آن در جای دیگری هم، به یکدیگر برخورد نمایند.

۱۵. قطرهای متوازی‌الاضلاع، یکدیگر را نصف می‌کنند، پس



الاضلاع را به سه قسم مساوی، تقسیم می کنند.
 این ترتیب میانه های مثلث های ABC و ACD است. AE و AF هم میانه های همین دو مثلث اند.
 می دانیم که میانه های یک مثلث همدیگر را در نقطه یکدیگر خود قطع می کنند. یعنی
 $DL = LC$ و $AL = LB$. در نتیجه: $DK = 2KL$ و $BM = 2LM$
 $DL = LB$ و $DK = KM = MB$ (زیرا $DK = KM$ بمسادگی معلوم می شود) که:
 و از آن جا $KL = LM$. به این ترتیب دو خط مورد نظر، قطر متوازی -



حالاً، اگر $\tan y = v$ و $\tan x = u$ با توجه به نامساوی روش $u^2 + v^2 \geq 2uv$

داریم :

$$u^r + v^r + \frac{r}{uv} \geq ruv + \frac{r}{uv} \geq r$$

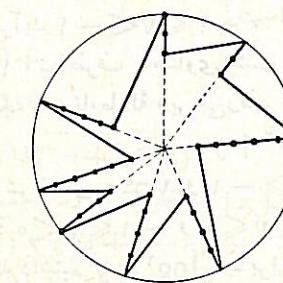
(حالت تساوی مربوط به $v = u$ است). در نتیجه، تساوی تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \sin'(x+y) = \\ \operatorname{tg}' x = \operatorname{tg}' y = \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = k\pi - \frac{\pi}{\varphi} \\ y = k_1\pi - \frac{\pi}{\varphi} \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} x = k\pi + \frac{\pi}{\varphi} \\ y = k_1\pi + \frac{\pi}{\varphi} \end{array} \right.$$

جواب:

۱۴ از آن جا که تعداد نقطه‌ها محدود است، همیشه می‌توان چنان دایره‌ای رسم کرد که مرکز آن بر هیچ یک از این نقطه‌ها منطبق نباشد و ضمناً همه n نقطه در داخل دایره قرار گیرند. شعاع‌هایی از دایره را که از هر کدام از این نقطه‌ها می‌گذرد، رسم می‌کنیم (روشن است که روی بعضی از این شعاع‌ها، ممکن است چند تا از نقطه‌های ما قرار گیرد). روی یکی از شعاع‌ها،



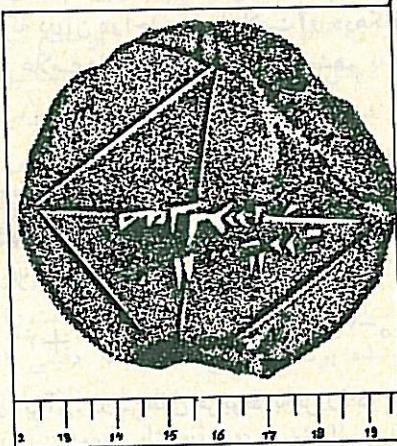
نژدیک ترین نقطه به مرکز دایره را در نظر می‌گیریم و از آن به انتهای شعاع
وصل «ی کنیم، سپس از این انتهای شعاع به نزدیک ترین نقطه به مرکز دایره
در روی شعاع مجاور پاره خطی می‌کشیم و بعد، روی همین شعاع دوم تا
نهایی آن جلو می‌رویم، حرکت را هم در جهت عکس حرکت عقر بهای
ساعت انتخاب می‌کنیم (منظور از انتهای شعاع، جایی است که شعاع دایره

تلاشی برای تنظیم فرهنگ ریاضی (۴)

۱۹۲۷ به وسیلهٔ و.و.سترووه، مصربشناسان روسی، بررسی و در سال ۱۹۳۰ به طور کامل به زبان آلمانی ترجمه شد. در این پاپروس، ۲۵ مقاله، تقریباً شبیه همان مقاله‌های پاپروس ریند، حل شده است، که جالب ترین آنها، مقاله دهم و چهاردهم است. در مقاله چهاردهم، رابطه دقیق محاسبه حجم هرم ناقص (با قاعده‌های مربعی) داده شده است. در مقاله دهم، سطح جانبی نیم استوانه‌ای که ارتفاع آن برابر قطر باشد (ویا، احتمالاً مساحت نیم کره) محاسبه شده است. و این نخستین نمونه تعیین مساحت سطح‌های منحنی، در ادبیات ریاضی است. مطالعه پاپروس مسکو، موجب می‌شود تا تصویر درباره دانش ریاضی در مصر باستان برای ما بوجود آید.

۳. متن‌های ریاضی میخی

متن‌های ریاضی با بلی‌ها و آشوری‌های باستان، که مربوط به دوره‌ای



در این متن ریاضی میخی، مربعی با قطرهای آن نشان داده شده است. ضلع این مربع برابر است با ۳۰ (عدد)، روی ضلع سمت چپ و بالا، نوشته شده است). روی قطر، این عدد نوشته شده است.

$$10 + 51 + 24 = 85$$

$$\text{یعنی } \sqrt{2} \approx \sqrt{85} = \sqrt{141417} = 1 + \frac{1}{\sqrt{602}} + \frac{1}{\sqrt{602^2}}$$

یک می‌کند. زیرا قطر، طول آن گذاشته شده است:

$$42 + 25 + 36$$

$$42 + \frac{36}{602}$$

یعنی

یادگارهای ریاضی دانش مصر باستان، مربوط به دوره سلطنت میانه (از حدود ۲۱ تا حدود ۱۸ سده پیش از میلاد). مشهورترین آنها، پاپروس ریند و پاپروس مسکو است که اولی در رومزئیریتانيا (لندن) و دومی در رومزه هنرهای تجسمی پوشکین (مسکو) نگهداری می‌شود.

پاپروس ریند [به نام مالک آن ریند (A. H. Rhind)]، مصربشناس انگلیسی] برای نخستین بار در سال ۱۸۷۷ ، و به وسیله آهایزن لومر، مورد بررسی قرار گرفت و به زبان آلمانی ترجمه شد [این پاپروس را پاپروس آ خمس‌هم می‌نامند: آ خمس (حدود ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد) نویسنده و مولف این پاپروس است]. در این پاپروس، مجموعه‌ای از ۸۶ مقاله و حل آنها داده شده است. این مقاله‌ها، به ریاضیات کاربرتی مربوط می‌شوند و در آنها از عمل باکسرها، تعیین مساحت مستطیل، مثلث، ذوزنقه و دایره (مساحت

دایره را برابر مساحت مربعی گرفته است که ضلع آن مساوی $\frac{8}{9}$ قطر دایره باشد) و حجم مکعب مستطیل و استوانه صحبت شده است؛ در آن، مقاله‌های هم درباره تناسب، تعیین نسبت بین مقدار غله و نان یا آب جو حاصل از آن و غیره، وجود دارد؛ حل یکی از مقاله‌های (مقاله شماره ۷۹) منجر به محاسبه مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی می‌شود. ولی برای حل این مقاله، هیچگر نه قاعدة کلی داده نشده و هیچ صحبتی از تعیین نظری به میان نیامده است.

پاپروس مسکو، در سال ۱۹۱۷ به وسیله ب. آ. تورایف، و در سال

نامیدند. ولی، بعدها، مجھول را به صورت انتزاعی تری در نظر می گرفتند، به نحوی که می توان گفت آگاهی های نخستین مربوط به جرخاصل، برای با بلی ها بوجود آمده بود.

۳. ستون (Stevin)، سیمون (۱۵۴۸-۱۶۲۰). دانشمند و مهندس هلندی. از ۱۵۸۳، در دانشگاه لیدن درس می داد. در سال ۱۵۹۲ به مقام مهندسی رسید. در سال ۱۶۰۰ رشته مهندسی را در دانشگاه لیدن سازمان داد و در آنجا، سخنرانی هایی درباره ریاضیات می کرد. ستون در اثر خود (De Thiende) (۱۵۸۵)، به بحث درباره دستگاه دهدی اندازه ها و کسر های دهدی برداخت و برای نخستین بار (در اروپا) آن هارا به کار برداشت. اگرچه قبل از غیاث افگین جمشید کاشانی در کتاب «مفتاح الحساب» خود از عده های دهدی استفاده کرده است، ولی ظاهرآ کارهای ستون مستقل از او بوده است.

در مکانیک، ستون، قانون تعادل جسم را بر سطح شیبدار و بر اساس ناممکن بودن حرکت ابدی، ثابت کرد و قاعدة تعادل سه نیرو را، که یک میثاق بسته را به وجود آورند، تنظیم کرد. ستون، همچنین در زمینه های گوناگونی مثل هیدروستاتیک، دریانوردی و موضوع های فنی و مهندسی نظامی، کار کرده است.

۴. پورباخ یا پویرباخ، گنورک (۱۴۶۱-۱۴۲۳)، ریاضی دان، و اخترشناس اتریشی. حدود ۱۴۵۰، استاد دانشگاه وین شد. او مولف کتابی است به نام «نظریه تازه سیاره ها» که مدت ها به عنوان دستور العمل هایی درباره اخترشناسی پذیرفته شده بود. پورباخ، به ترجمه دقیقی از آثار بطليوس پرداخت، جدول های تجویی را بهبود بخشید. این تلاشهای پورباخ بدوسیله شاگردش رگیومونتان دنبال شد و درواقع کتاب «شرح کوتاهی برالمجسطی بطليوس» را باید متعلق به هردوی آنها دانست (این کتاب در سال ۱۵۴۳ چاپ شد). بررسی های پورباخ در مثلاً و تنظیم جدول های بزرگ سینوسها، به عنوان زمینه ای برگیومونتان کمک کرد تا اثر مهم خود را در این زمینه به وجود آورد.

۵. اورسم (Oresme)، نیکلا (حدود ۱۳۸۲-۱۳۲۳) ریاضی دان، فیزیکدان و اقتصاددان فرانسوی. یکی از نخستین کسانی بود که برای ساختن دستگاه مخصوصات قائم تلاش کرد، او همچنین مفهوم های شتاب و سرعت متوسط را برای حرکت متشابه التغییر، در مکانیک وارد کرد. در سال ۱۳۶۸، مفهوم توان بانمای کسری را طرح کرد. کتابی که او به نام «رساله ای درباره کره»

است که از دوهزار سال پیش از میلاد آغاز و به ابتدای سال های میلادی، پایان می پذیرد. متن های ریاضی میخی را روی صفحه های گلی می نوشند (شکل را ببینید). بین این متن ها، می توان به جدول های ریاضی (جدول ضرب، جدول مقادیر معکوس که برای تبدیل عمل تقسیم به عمل ضرب به کار می رفت، جدول مربعا و مکعبها و غیره) و متن های اختصاصی ریاضی که شامل مسائل های همراه با حل آن هاست، برخورد می کنیم. بیشتر این متن های اختصاصی (که بیش از صد تای آنها شناخته شده است) مربوط به هزاره دوم پیش از میلاد است. ۵ تاء متن از هزاره نخست پیش از میلاد، و یک متن از دوره آشوری پیدا شده است. متن های ریاضی میخی، در تاریخ ریاضیات، اهمیت زیادی دارند: در این متن ها، برای نخستین بار، به دستگاه عددنویسی موضعی و به معادله های درجه دوم برخورد می کنیم. ریاضیدانهای با بلی، از دستگاه شصت شصتی شمار استفاده می کردند، که در آن «واحد» را باعلامت \square و «دهگان» را باعلامت \triangle نشان می دادند، همین علامت ها را برای مرتبه های بعدهم به کار می برند، مثلا عدد:

$$153 = 2 \times 60 + 33 \\ 222 = 60 \times 3 + 22$$

را به این ترتیب نشان می دادند.

از ویژگیهای دستگاه عددنویسی با بلی ها این بود که مقدار عدد، به روشنی معلوم نمی شد. مثلا، عددی را که در بالا نام بردهم، می شد برای عدد $33 = 60 \times 2 + 33$ یا عدد $60 = 2 \times 33 + 6$ در نظر گرفت، علاوه بر آن، در متن های مربوط به هزاره دوم پیش از میلاد، علامتی که متناظر با صفر امروز باشد، وجود ندارد. در متن های ریاضی میخی، محاسبه های بینایی وجود ندارد و این وضع مارا به این نتیجه می رساند که آن ها عمل های بینایی را روی تخته محاسبه (شیوه چرتکه های ما) انجام می دادند. نبودن علامتی برای صفر راهم، با همین فرض می توان توجیه کرد، زیرا روی چرتکه، وجود صفر لازم نیست (ستونی که متناظر با عدد صفر است، خالی می ماند). همچنین می توان گمان برداشت که به وجود آمدن دستگاه عددنویسی موضعی، ناشی از همین محاسبه با تخته حساب باشد.

معادله های درجه دوم، به خاطر نیازهایی که در کارهای کشاورزی داشتند، برای با بلی ها مطرح شد، این بستگی را از روی اصطلاح هایی هم که به کار می برند، می توان فهمید: آنها، مجھول را «طول» و «عرض» می-

نام تارتا گلیا، همراه با نام کاردان، بروش حل معادله‌های درجه سوم هم مربوط می‌شود.

۹. کاردان (Cardano)، چهاردهم (۱۵۰۱) و به روایتی ۱۵۷۶-۱۵۰۶)، فیلسوف، طبیب و ریاضیدان ایتالیایی. او دستگاه کیهانی را مورد بررسی قرارداد (درباره ظرافت ماده «،» درباره تغییر پذیری ماده «،») ۱۵۵۰). کارهای او در این مورد، به کارهای دیگر فیلسوفان طبیعت‌گرای دوره تجدید حیات (رنسانس) (مثل ب. هنلهزیو و چیوودانوبیونو و دیگران) نزدیک بود. در اندیشه‌های او، گرایش‌های نوافلاطونی دیده می‌شود. بنابر اعتقاد کاردان، جهان از سه عنصر ساخته شده است. خاک، آب و هوا؛ ماده دو خاصیت دارد: گرم و رطب؛ آتش، تنها شکلی از حرارت آسمانی است که در همه جا حاضر است و به همه چیز نفوذ می‌کند. طبیعت گرایی کاردان، باعث شد که او در هرجهت علمی مثل اخترشناسی و شیمی، پزشکی و فیزیک، ریاضیات و مهندسی، روان‌شناسی و غیر آن، فعالیت کند. کارهای کاردان، در پیشرفت جبر نظری اساسی داشته است. او یکی از نخستین دانشمندان اروپایی است که ریشه منفی معادله‌ها را می‌پذیرد. رابطه مربوط به حل معادله ناقص درجه سوم به نام اوست کاردان در زمینه مسئله مربوط به دستگاه انتقال حرکت، نظریه اهرم‌ها و غیره هم کار کرده است.

رابطه کاردان، مربوط به پیدا کردن ریشه معادله درجه سومی است که به این صورت باشد:

$$x^3 + px + q = 0$$

(هر معادله درجه سومی را می‌توان، به این معادله تبدیل کرد). رابطه کاردان چنین است:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ریشه سوم هر عدد حقیقی، سه جواب دارد که تنها یکی از آنها، عددی حقیقی است. مقادیر ریشه‌های سوم را در رابطه کاردان باید چنان انتخاب کرد که حاصل ضرب آنها برابر $\frac{p}{3}$ شود، همین مقادیر هستند که از جمع کردن آنها، ریشه معادله به دست می‌آید. از این راهی توان هر سه ریشه معادله را پیدا کرد. درحالی که $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ ، مقداری مثبت باشد، معادله درجه سوم دارای

به زبان فرانسوی نوشته، در شکل دادن به اصطلاح‌های علمی (اخترشناسی و جغرافیا) در زبان فرانسوی، نقشی اساسی داشته است.

۶. ویت (Viete) فرانسوی (۱۵۴۰-۱۶۰۳)، ریاضی‌دان فرانسوی. پیش از قضاوت بود. در سال ۱۵۹۱، علامت‌های حرفی را، علاوه بر مقادیر مجهول، برای ضریب‌های معادله، به کار برد؛ همین موضوع، امکان داد تابتوان ویژگی‌های معادله و ریشه‌های آن را، به صورت رابطه‌های کلی نشان داد. اوروش واحدی برای حل معادله‌ای درجه دوم، سوم و چهارم پیدا کرد. بین کشف‌های ویت بیش از همه، پیدا کردن رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادله، ارزش فوق العاده‌ای دارد. برای محاسبه تقریبی ریشه‌های معادله با ضریب‌های عددی، روشی آورد که شباهت به روشی دارد که بددها نیوتن پیدا کرد. در مثالات، ویت، مسأله مربوط به پیدا کردن اجزاء مثلث مسطوح و کروی را، وقی که سه جزء آن داده شده است، بطور کامل حل کرد و بسط $\sin nx$ و $\cos nx$ را بر حسب توان‌های x و \cos بدست آورد. ویت، برای نخستین بار، ضریب‌های نامتناهی را مورد بررسی قرار داد. ویت آثار خود را بازبان دشواری نوشته است و به همین مناسبت، شهرت آنها، خیلی کمتر از شایستگی آن است.

۷. رگیو مو نتان (Regio montanus)، بانام مستعار یوهان مولر (۱۴۳۶-۱۴۷۶)، ریاضی‌دان و اخترشناس آلمانی. شاگرد پودباخ بود و در سال‌های ۱۴۶۱ تا ۱۴۷۱، در ایتالیا زندگی می‌کرد و در همانجا با آثار ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی آشنا شد. در سال‌های ۱۴۶۸ تا ۱۴۷۱، استاد دانشگاه ونیز بود. در سال ۱۴۷۱ به نورنبرگ فرستاده شد که در آنجا رصدخانه‌ای برای او ساخته بودند. در سال ۱۴۷۵، بنا به دعوت پاپ و برای شرکت در کار تنظیم تقویم، به رم رفت.

۸. تارتا گلیا (Tartaglia)، نیکولو (۱۴۹۹-۱۵۵۷)، ریاضی‌دان ایتالیائی. او در زمینه‌های متفاوتی مثل ریاضیات، مکانیک، بالاستیک، مساحی، استحکامات و غیره کار کرده است. او در کتاب خود به نام «دانش جدید» («...Nova scientia» ۱۵۳۷، «...» ۱۵۳۷) ثابت کرده است مسیر پرواز گلوله توپ یک منحنی است (سهمی) و بیشترین برد پرواز گلوله توپ، مربوط به زاویه ۴۵ درجه است. اثر مهم دیگر او «رساله‌ای عمومی درباره عدد در جهان» (۱۵۵۶) است که شامل موضوع‌های کلی درباره حساب، جبر و هندسه است

کار برد هندسه در علم جغرافیا

مقدمه

ریاضی علمی است تجربی که در مقایسه با سایر علوم از قطعیت تابعی برخوردار است. ریاضی فی نفسه جنبه انتزاعی دارد و آنچه که باعت می‌گردد در عمل، نقش خود را نشان دهد، همان کار برد آن در سایر علوم است. در حقیقت ریاضی را می‌توان بایه واساس و یا به عبارت دیگر استخوان بندی سایر علوم دانست بطوریکه اگر ریاضی را از دانش‌های نظری فیزیک و شیمی حذف نماییم جز مشتمی توصیف و تعاریف، حیزی از آن باقی نخواهد ماند. هر قدر ریاضی در تبیین قوانین یک علم نقش فرازینده تری داشته باشد قطعیت آن بیشتر خواهد شد. تا آنجا که فیلسوفان معتقدند که تدریجاً کلیه موضوعات علوم مختلف، حتی روان‌شناسی، بصورت روابط ریاضی تبیین خواهد شد.

در علوم مربوط به تهیه نقشه، ساخته‌ای از ریاضی یعنی هندسه، همیشه مورد نظر بوده و اصولاً موضوع علم نقشه برداری «اندازه گیری» است که در واقع می‌توان آن را «کار برد هندسه» دانست مساله کرویت زمین از موضوعات جالبی است که قرن‌ها فکراندیشمندان را بخود مشغول ساخته است. از زمانیکه کروی بودن زمین مبرهن گردید و فکر تهیه نقشه از زمین نضیج گرفت، بررسی هندسه زمین و انتقال سطح کروی بر روی صفحه کاغذ مورد توجه ریاضیدانان واقع شد.

این مقاله که به چگونگی انتقال سطح کروی به سطح صاف میردادز حاصل نتایج تفکرات و کوشش‌های دانشمندان دوره‌های مختلف است که کار برد هندسه در علم جغرافیا را ترسیم می‌نماید.

انسان به خاطر محدودیت قوه بنایی برای دیدن اجسام خیلی کوچک و خیلی بزرگ احتیاج به یک نوع وسیله کمکی دارد. با استفاده از دستگاه‌های بزرگ کننده نوری یا الکترونیکی او قادر خواهد بود که اشیاء بسیار بزرگ و کوچک را مشاهده

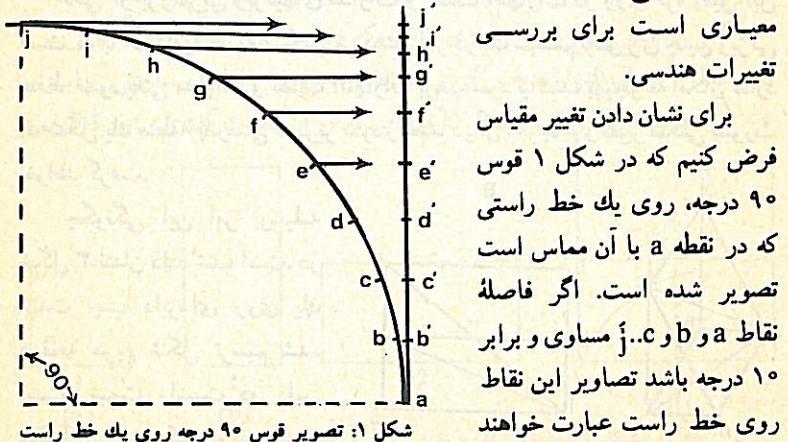
سه‌ریشه متمایز است که یکی از آنها حقیقی و دو تای دیگر مختلط و مزدوج یکدیگرند. در حالتی که $\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}$ منفی باشد، معادله درجه‌سوم، سه‌ریشه

متماز حقیقی دارد و بالاخره در حالتی که $\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}$ برابر صفر باشد، معادله درجه سوم، سه‌ریشه حقیقی دارد که دوتای آنها باهم برابر است. رابطه کارдан برای نخستین بار در سال ۱۵۴۵ میلادی به وسیله خود او منتشر شد. ولی این بحث وجود دارد که آیا واقعاً این رابطه، متعلق به خود کاردان است یا از روی کارهای تارتاگlia و یا حتی از روی راه حل فهرو (۱۵۱۵) برداشته شده است.



برای بررسی تغییراتی که از تصویر کردن حاصل می‌گردد، یکسری نقاط متساوی الفاصله در روی سطح کروی در نظر می‌گیریم و تصاویر مشابه آن را روی سطح مستوی بدست می‌آوریم. چون دو سطح کروی و صاف قابل انطباق نیستند از اینجهت روابط طولی بین آنها دستخوش تغییراتی خواهد شد و چون زاویه و مساحت تابعی از فاصله می‌باشند در نتیجه روابط هندسی حاکم بین آنها نیز تغییر خواهد کرد. از این توضیحات می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه دو سطح قابل انطباق نباشند شکلی که در روی یکی از دو سطح ترسیم شود با تصویر آن روی سطح دیگر کاملاً یکسان نخواهد شد و تغییراتی در فاصله، زاویه و مساحت که اجزاء اصلی تشکیل دهنده یک شکل هندسی است ریخ می‌دهد.

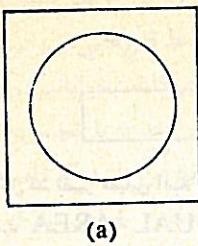
وقتیکه کره ای جغرافیایی از یک کره اسمنای تهیه می‌نماییم چون کلیه اندازه‌ها به یک نسبت کوچک می‌گردد در نتیجه تغییر مقیاس یا اصطلاحاً «ضریب مقیاس» ثابت خواهد بود. ولیکن اگر بخواهیم همین کره جغرافیایی را بر روی سطح صاف کاغذ تصویر نماییم از آنجاییکه دو سطح فوق قابل انطباق نیستند ضریب مقیاس برای هر قسمت از نقشه متفاوت خواهد بود. عدم انطباق سطح کروی و سطح صاف را می‌توان با مثالی روشن نمود. اگر پوست پرتقالی داشته باشیم و بخواهیم آن را کاملاً روی سطح میز هموار کنیم چنین کاری میسر نخواهد بود مگر اینکه پارگی‌هایی در پوست ایجاد نماییم و یا اینکه به وسیله کشش پوست پرتقال را هموار کنیم. ضریب مقیاس در تصویر، از اهمیت خاصی برخوردار است باین معنی که تغییر مقیاس حاصل از تصویر دو سطح غیر قابل انطباق



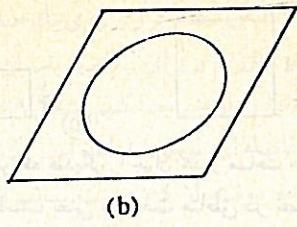
کند. در علم تهیه نقشه برای مشاهده گذاشتن کره زمین و سایر کرات آسمانی که دارای حجم بسیار بزرگی می‌باشند بجای بزرگنمایی از کوچک کردن استفاده می‌شود که با این کار می‌توان قسمتی یا تمامی کره را رؤیت نمود. از آنجاییکه غالب اجرام آسمانی اصولاً شکل کروی دارند یکی از راه‌های رؤیت کامل آنها تهیه نقشه کروی (کره جغرافیایی) از آن‌هاست که کلیه اندازه‌ها یک نسبت کوچک می‌شوند و لیکن روابط هندسی نظر زاویه، مساحت و نسبت فواصل ثابت باقی می‌مانند. با این حساب چنین کره‌ای را می‌توان نقشه‌ای دقیق و واقعی از آن جرم آسمانی دانست. کره جغرافیایی که به این ترتیب تهیه می‌شود دارای معایبی خواهد بود. بعنوان مثال از آنجاییکه کره یک جسم مدور سه بعدی است قادر نخواهیم بود که در یک وله از مشاهده، تمامی آن را رؤیت نماییم و فقط نصف آن یعنی نیمکره قابل مشاهده می‌شود. بعلاوه، حمل و نگهداری آن مشکل خواهد بود. اندازه گیری فواصل روی سطح سه بعدی کار آسانی نیست و بالاخره از لحاظ مالی تهیه آن مقرر به صرفه نمی‌باشد.

با انتقال سطح کروی روی یک سطح مستوی و تهیه نقشه مسطح، کلیه معایبی که در مورد کره جغرافیایی ذکر شد برطرف می‌گردد یعنی اینکه می‌توان روی یک برگ نقشه تمامی سطح کروی را مشاهده نمود، به راحتی فواصل را اندازه گیری کرد و تهیه آن به مراد ارزان‌تر و به آسانی قابل حمل و نقل می‌باشد. عمل انتقال سطح کروی را روی سطح مستوی و صاف اصطلاحاً «تصویر» می‌نامند که یک پدیده هندسی است و این انتقال از تصویر کردن نقاط کره روی سطح صاف یا سطح قابل گسترش حاصل می‌شود.

به طرق مختلف می‌توان کره را روی سطح مستوی تصویر نمود برای اینکه بتوانیم تغییر روابط هندسی حاصل از تصویر را مورد بررسی قرار دهیم، تصویر شبکه جغرافیایی زمین را که مدارات و نصف النهارات باشد در روی نقشه مطالعه می‌نماییم و از روی آن به روابط هندسی و ریاضی تصویر مورد نظر می‌بردازیم. اگر به صفحات مختلف یک اطلس جغرافیایی دقیق شویم خواهیم دید که در هر کدام از آنها مدارات و نصف النهارات شکل متفاوتی دارند. در بعضی از آنها مدارات به صورت خطوط مستقيمه و در بعضی دیگر به صورت دواير متعدد المركز ظاهر می‌شوند. این تغییر شکل شبکه جغرافیایی ناشی از نوع تصویر سطح کروی روی سطح صاف است که موضوع بحث این مقاله است.



(a)

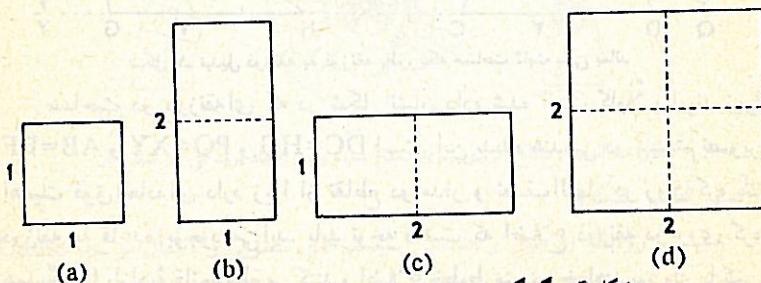


(b)

شکل ۳: تبدیل دایره به بیضی

به طوریکه صفحه مربع تبدیل به لوزی و ناچاراً دایره تبدیل به بیضی گشته است. اگر اضلاع این صفحه مربع شکل را مدارات و نصف النهارات و دایره را حدود یک منطقه روی کره فرض نماییم خواهیم دید که با تغییر موقعیت تصویری مدارات و نصف النهارات (برهم عمود نبودن) در شکل منطقه، دگرگونی حاصل خواهد شد. شکل ۴a اندازه اصلی یک منطقه کوچک را که ابعادش 1×1 میباشد روی کره نشان می‌دهد. اگر در تصویر، مقیاس در راستای نصف النهار دو برابر و در راستای مدار ثابت بماند طبق شکل (b) مربع از طرف شمال و جنوب کشیده می‌شود و تبدیل به مستطیل با ابعاد 2×1 می‌گردد و در نتیجه مساحت آن دو برابر می‌شود. بهمین ترتیب اگر مقیاس در راستای مدار دو برابر شود و در راستای نصف النهار ثابت بماند تبدیل به مستطیل شرقی - غربی می‌شود که باز مساحت آن ۲ برابر می‌گردد شکل (c). اما اگر طبق شکل (d) مقیاس در راستای مدار و نصف النهار دو برابر شود و حالت قائم آنها حفظ شود مربع تبدیل به یک مربع بزرگتر با ابعاد 2×2 می‌گردد. باید توجه داشت که با وجودیکه شکل منطقه حفظ گردیده است، مساحت چهار برابر شده است.

اگر تصویر مربع اولیه طوری باشد که مقیاس در راستای مدار دو برابر و در راستای نصف النهار نصف گردد مستطیل حاصل دارای مساحتی برابر با $\frac{1}{2} \times 2$ طبق قسمت راست شکل ۵ خواهد شد. در اینصورت گفته می‌شود که تصویر



شکل ۴: چگونگی تغییر مقیاس برای اینکه شکل منطقه خط خود

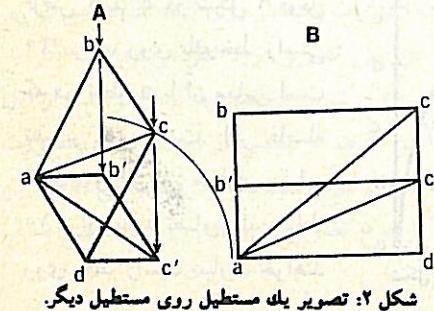
شد از a و b...j. در نتیجه خط a نمایانگر خط aj می‌باشد. اگر از نقطه a روی خط راست، بطرف نقطه j حرکت کنیم فواصل نقاط کوچکتر می‌شود. از آنجائیکه این تغییرات فاصله‌ای پیوسته میباشد هر نقطه روی aj دارای ضریب مقیاس متفاوتی خواهد بود.

تغییر مقیاس ممکن است در جهت مختلف یک نقطه متفاوت باشد در شکل ۲ سمت چپ (A)، فرض کنیم که تصویر مستطیل abcd از دوران آن حول محور ad بوجود آمده باشد بطوریکه ad یک ضلع تصویر را تشکیل دهد. در اینصورت تصویر مستطیل abcd خواهد شد.

شکل ۲ سمت راست (B)، از دوران ad حول abcd و انبساط آن در صفحه abcd بدست می‌آید. بطوریکه در شکل دیده می‌شود چون ضلع ad در هر دو مستطیل مشترک بوده، تغییر مقیاسی در آنجهت صورت نگرفته است. ab تقریباً نصف a است. پس در این جهت مقیاس تغییر کرده است. ac تصویر قطر ac می‌باشد. تغییر مقیاس a' از نسبت طول a' به طول ac بدست می‌آید و به طوریکه می‌بینیم این نسبت برابر با ۱ و نه برابر با $\frac{1}{2}$ می‌باشد و چیزی است بین این دو. هر خطی دیگری که از a به یکی از نقاط خط bc وصل شود خط a'c را در جایی قطع می‌کند که نسبت طول خط حاصل روی دو مستطیل تغییر مقیاس را معلوم می‌کند که مقدار آن برای هر خط متفاوت خواهد بود و در نتیجه مقیاس در جهت ac تغییر می‌کند. با تعیین دادن این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که مقیاس در جهت مختلف نقطه a در مستطیل abcd متفاوت است.

یکی از بزرگترین ویژگیهای مدارات و نصف النهارات در روی کره زمین این است که با هم زاویه قائمه تشکیل می‌دهند. اگر در یک سیستم تصویری چنین ویژگی حفظ نشود یعنی مدارات و نصف النهارات برهم عمود نباشند، بهیچوجه امکان ندارد که شکل یک منطقه بدروستی تصویر شود و حتاً در آن اعوجاج و تغییر شکلی صورت خواهد گرفت.

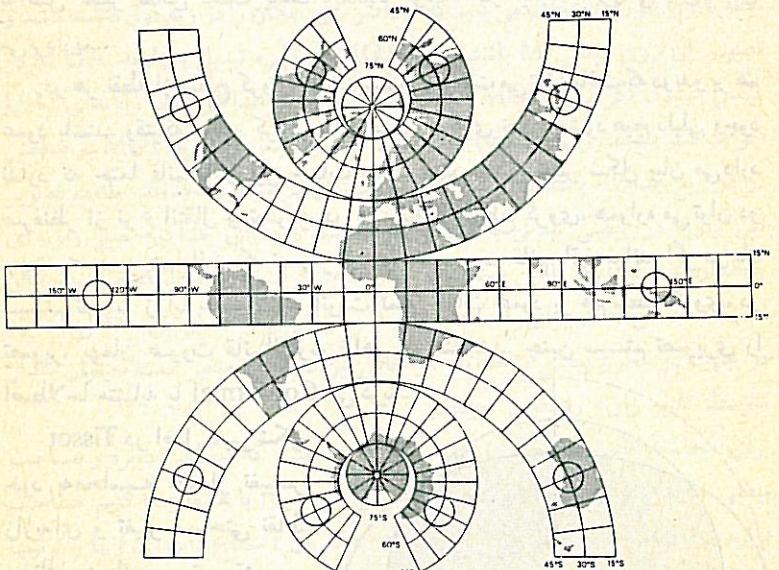
چگونگی این امر بوسیله شکل ۳ نشان داده شده است. در سمت چپ دایره‌ای روی یک صفحه مربع شکل ترسیم شده است. سمت راست دو راس متقابل این مربع کشیده شده است



شکل ۵: تصویر یک مستطیل روی مستطیل دیگر.

حال بیینیم که در تصویر کره زمین روی یک برگ نقشه چگونه تغییر شکل خشکی ها و آب ها بوجود می آید و به چه طریق می توان آن را از لحاظ ریاضی تبیین نمود. فرض کنیم که برای انطباق سطح کروی روی یک صفحه کاغذ قاج هایی در راستای مدارات روی کره بوجود آوریم و برای اینکه بتوانیم آن را روی کاغذ بخوابانیم در راستای یک نصف النهار آنها را از هم جدا کنیم. شکل ۸ نشان می دهد که با انجام این کار ناچاراً بین مدارات فاصله ای بوجود خواهد آمد. اگر مقصود این باشد که فاصله ها از بین برود و یک نقشه پیوسته از کره درست نمائیم آنوقت مجبور خواهیم بود که هر کدام از قاج ها را در جهت نصف النهارات بکشیم تا مدارات مشابه بهم منطبق شوند باین ترتیب شکل ۹ بدست می آید. با مطالعه شکل اخیر می بینیم که اعوجاج و تغییر شکل هایی در پراکندگی آب ها و خشکی ها صورت گرفته است. جهت ازدیاد تغییر شکل بطرف کثاره های نقشه می باشد.

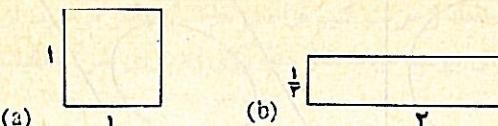
نکته جالبی که به آن برخورد می کنیم این است که دایره واقع در شکل ۸ تبدیل به یک بیضی در روی شکل ۹ شده است.



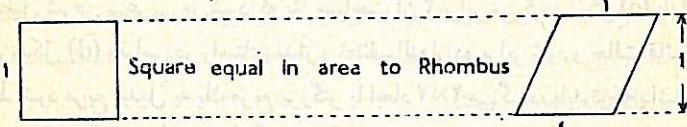
شکل ۸. انطباق سطح کروی روی سطح مستوی با ایجاد بریدگی در سطح آن.

اصل تغییر شکل

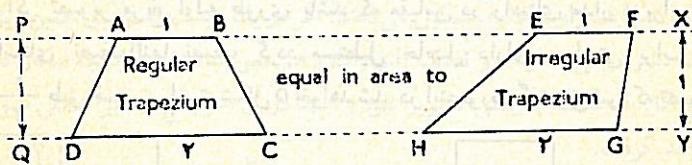
بیشتر روابط ریاضی و هندسی سیستم های تصویر و انتقال توسط Gauss ریاضیدان معروف آلمانی در اوایل قرن نوزدهم مورد بررسی قرار گرفت. بعد از او



شکل ۹. تغییر مقیاس اضلاع بدون یکه همیگر را جبران کند و مساحت حفظ شود هم مساحت EQUAL - AREA است یعنی مساحت مناطق در تصویر به درستی نشان داده می شود. باید یادآور شد که در این نوع تصویر، تغییر مقیاس در راستای مدار بوسیله تغییر مقیاس در راستای نصف النهار جبران می شود بطوریکه حاصل ضرب آنها ثابت باقی می ماند این امکان وجود دارد که در تصویر مساحت مناطق حفظ گردد ولیکن مدارات و نصف النهارات بر هم عمود نباشند. نمونه بارز آن در شکل ۶ دیده می شود. تصویر مربع بصورت متوازی الاضلاع در آمده است که دو ضلع روبروی آن برابر با واحد است و در نتیجه مساحت آن هم ۱ واحد مربع می شود به شرطیکه فاصله بین دو ضلع روبرو هم برابر با ۱ یا واحد باشد. مدارات و نصف النهارات معمولاً در بیشتر سیستم های تصویر همیگر را بصورت ذوزنقه قطع می کنند. مساحت ذوزنقه برابر است با نصف مجموع دو قاعده ضربدر ارتفاع آن یعنی طبق شکل ۷ خواهیم داشت:



شکل ۶. تبدیل مربع به متوازی الاضلاع بطوریکه مساحت ثابت باقی بماند



شکل ۷. تبدیل فوزنقه به ذوزنقه بطوریکه مساحت ثابت باقی بماند مساحت دو ذوزنقه ای که در شکل نشان داده شده است کاملاً برابرند زیرا $AB=EF$ و $PQ=XY$ و $DC=HG$ است. این پدیده هندسی در سیستم تصویر اهمیت فوق العاده ای دارد زیرا از تقاطع دو مدار و نصف النهار در روی کره یک ذوزنقه با قاعده بوجود می آید. باید توجه داشت که اضلاع ذوزنقه در روی کره همیگر را بازاویه قائم قطع می کنند و اضلاع خطوط منحنی خواهند بود ولی با کمی دقیق خواهیم دید که این امر باعث نقض اصل فوق الذکر نمی گردد.

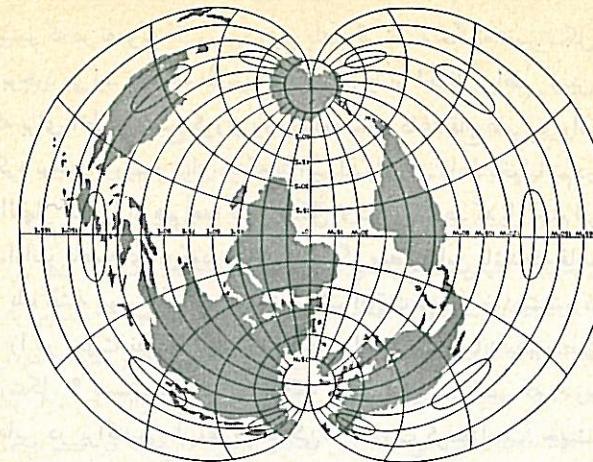
شکل ۱۰ دایره‌ای به شعاع $r = OM = 1$ نشان داده شده است که مرکز آن O می‌باشد. این دایره در حقیقت نمایانگر یک نقطه در روی کره است. دو جهت OA و OB جهاتی است که در تصویر به صورت عمود بر هم باقی می‌مانند. در شکل $a = OA$ و $b = OB$ در نتیجه $OA = OB = 1$ است.

حال به بررسی تغییر زاویه می‌پردازیم: اگر این دایره تغییر شکل دهد و به بیضی تبدیل شود تصویر نقطه A و B و M به ترتیب \bar{A} و \bar{B} و \bar{M} خواهد شد. نقطه A در راستای خط OA به نقطه \bar{A} و نقطه B در راستای خط OB به \bar{B} منتقل شده است. بطوریکه می‌بینیم هیچگونه تغییر زاویه در این دو مسیر حادث نشده است و می‌توان نوشت $\angle BOA = \angle \bar{BO}\bar{A}$. اگر سایر نقاط محیط دایره را که بین A و B قرار گرفته‌اند روی بیضی تصویر کنیم می‌بینیم که تصویرشان نسبت به مرکز دایره تغییر مکان می‌یابد.

نقطه M را طوری انتخاب می‌کنیم که حداکثر تغییر مکان را در ربع اول داشته باشد و تصویر آن روی بیضی M باشد زاویه MOA در دایره تبدیل به زاویه $M'OA'$ در U بیضی مشود. اگر U و U' باشد حداکثر تغییر زاویه ای $U-U'$ خواهد شد که بصورت (۱) نشان داده می‌شود. چنانچه زاویه MOP در ضلعش در دو ربع جداگانه باشد و تغییر مکان تصویرشان در موقعیت حداکثر باشد، تصویر این زاویه در بیضی تبدیل به $M'OP'$ خواهد شد و دارای حداکثر تغییر زاویه ای به مقدار (۲) خواهد بود. با این حساب می‌توان نتیجه گرفت که (۱) حداکثر تغییر زاویه ای است که ممکن است برای یک نقطه پیش آید. از آنجاییکه مقدار بین حداقل ۵ درجه در جهت دو محور بیضی و حداکثر در جایی بین دو محور متغیر است نمیتوان مقدار متوسط تغییر زاویه را تعیین نمود.

برای محاسبه تغییر مساحت در دو سطح کافی است که مساحت دایره و مساحت بیضی حاصل از آن را حساب نماییم و سپس این دو را با هم مقایسه کنیم. مساحت دایره πr^2 و مساحت بیضی $ab\pi$ می‌باشد که در آن π شعاع دایره، a و b به ترتیب نصف قطر کوچک و بزرگ بیضی هستند. چون عدد ثابتی است و π هم واحد فرض شده است در نتیجه مقدار ab نمایانگر تغییر مساحت خواهد بود که بصورت S نشان داده می‌شود.

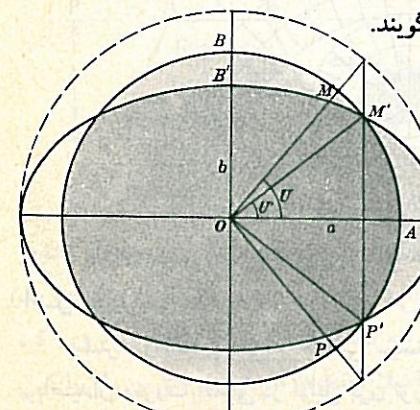
برای مقایسه تصویرها و تبیین تغییر زاویه‌ای و مساحتی کافی است که در هر تصویر S و (۱) را مورد بررسی قرار دهیم.



شکل ۹ نقشه پیوسته از شکل ۸

مهم ترین کسی که به تئوری های ریاضی سیستم های تصویر پرداخت و در سال ۱۸۵۱ بدائل تغییر شکل دست یافت Tissot بود که در اینجا به بررسی این اصل می‌پردازیم.

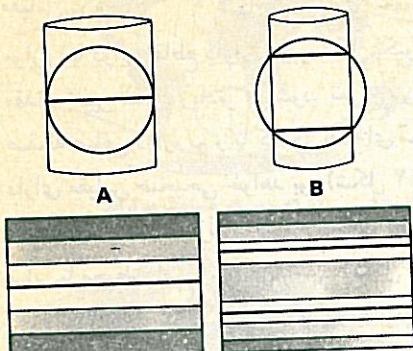
در هر نقطه از سطح کروی تعداد بیشماری جهت می‌توان یافت که دوبدو بر هم عمود باشند. وقتیکه سطح کروی روی سطح دیگری تصویر شود هیچ دلیلی وجود ندارد که حتماً قائم بودن این جهات حفظ گردد. اصل تغییر شکل بیان می‌دارد صرفنظر از نوع انتقال و تصویر، در هر نقطه از سطح کروی، همواره می‌توان دو جهت عمود بر هم یافت که تصویر آن عیناً به صورت قائم باقی بماند. اگر در یک سیستم تصویر زوایا حفظ شوند آنوقت تمام جهات عمود بر هم سطح کروی، در تصویر، بهمان صورت قائم الزاویه ظاهر خواهند شد. چنین سیستم تصویری را اصطلاحاً مشابه یا Conformal می‌گویند.



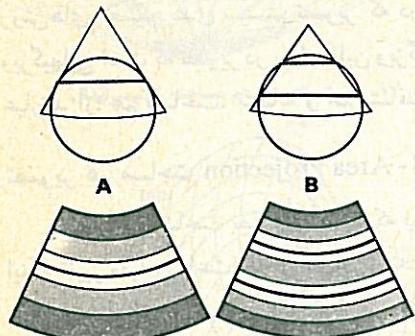
در اصل تغییر شکل Tissot خود به محاسبه مقدار تغییر زاویه‌ای و تغییر مساحتی نقاط مختلف در یک سیستم تصویر می‌پردازد. او هر نقطه سطح کره را بتصویر دایره‌ای با شعاع واحد (۱) در نظر می‌گیرد و تصویر آن را مورد بررسی قرار می‌دهد. در

أنواع سیستم تصویر:

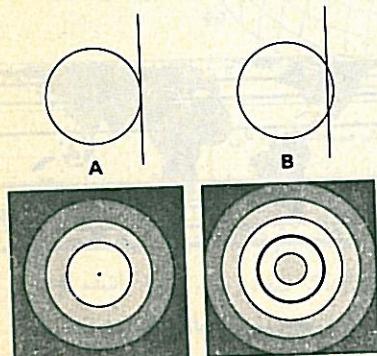
تقسیم‌بندی سیستم تصویر معمولاً بر حسب خصوصیات هندسی آنها انجام می‌گیرد. سطح کروی روی سطوح قابل گسترشی که به آسانی تبدیل به سطح صاف می‌گردند تصویر می‌شوند. این سطوح عبارتنداز: استوانه، مخروط و صفحه صاف. نامگذاری تصویر هم بر اساس همین سطوح انجام می‌گیرد به این معنی که کلیه تصویرهایی که در آن کره زمین روی سطح استوانه‌ای تصویر شود «تصویر استوانه» روی سطح مخروط «تصویر مخروطی»، روی صفحه صاف «تصویر صفحه‌ای» نامیده می‌شود. شکل ۱۱ سه نوع تصویر یاد شده را نشان می‌دهد.



شکل ۱۲- تصویر استوانه‌ای



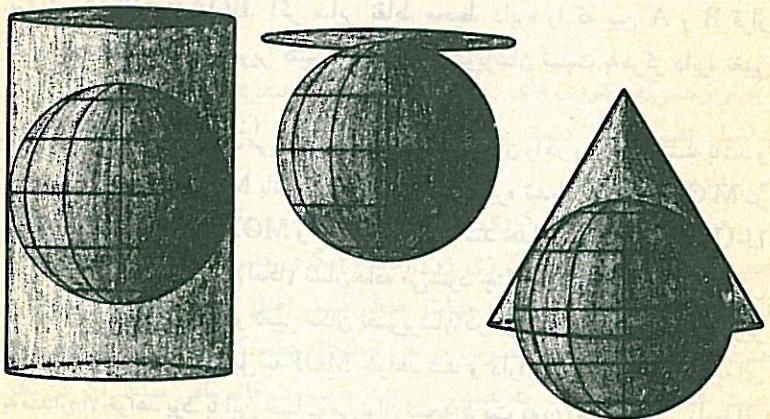
شکل ۱۳- تصویر مخروطی



شکل ۱۴- تصویر صفحه‌ای

استوانه ترسیم نموده‌ایم. حالت دیگر این است که استوانه کره را در طول دو دایره قطع کند (شکل ۱۲ سمت راست) با مراجعت به هندسه استوانه بدراحتی می‌توان نتیجه گرفت که چون شعاع دایره استوانه ثابت است شعاع دو دایره‌ای که استوانه را قطع می‌کند برابر با شعاع استوانه خواهد بود. همچنین مقیاس در طول دو دایره تماس صحیح خواهد بود. در هر دو حالت خطوطی که موازی یا خطوط تماس یا تقاطع باشند دارای تغییر شکل یکنواختی خواهد بود و هر قدر از خطوط تماس یا تقاطع دور شویم مقدار تغییر شکل زیاد خواهد شد.

نمونه دوم این است که کاغذ را بشکل مخروط درآوریم و بر روی کره قرار دهیم. در اینصورت مخروط در طول دایره‌ای با کره مماس خواهد شد. باز هم خواهیم دید که مقیاس در راستای این دایره در روی مخروط به درستی حفظ می‌شود. شکل ۱۳ چگونگی تماس و تقاطع مخروط و کره را نشان می‌دهد. تقاطع مخروط و کره در سمت راست شکل دیده

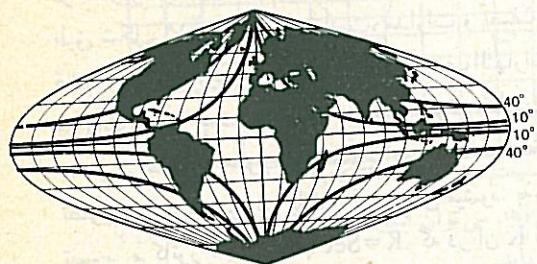


شکل ۱۱- اصول تصویر استوانه‌ای مخروطی و صفحه‌ای

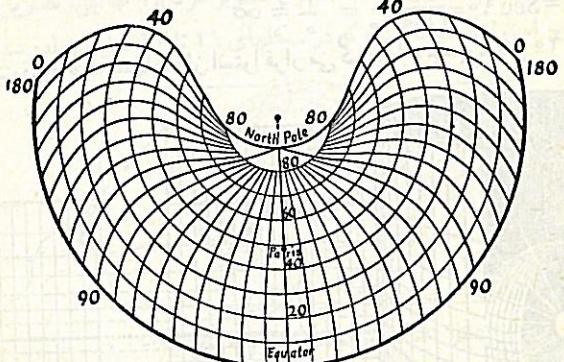
بطوریکه قبل‌ا در بحث مقیاس صحبت شد سیستم تصویری نمی‌توان یافت که مقیاس در کلیه قسمت‌های آن کاملاً صحیح باشد. ولی باید توجه داشت که این امکان وجود دارد که درستی مقیاس را در طول بعضی از خطوط و نقاط نقشه رعایت نمود. اگر سیستم تصویری چنین ویژگی داشته باشد در آنصورت گفته می‌شود که تغییر مقیاس در طول آن خطوط یا نقاط صفر است. برای اینکه بهفهمیم چطور می‌توان مقیاس را در طول خطوط یا نقاط ثابت نگه داشت به ذکر چند نمونه ساده می‌پردازیم. اگر کاغذی را بیچانیم و به صورت استوانه در آوریم و در روی کره قرار دهیم این استوانه طبق شکل ۱۲ سمت چپ، با کره در دایره عظیمه‌ای مماس خواهد شد. با علامت زدن این دایره روی استوانه و باز کردن آن خواهیم دید که طول محیط دایره عظیمه در روی کره کاملاً برابر با تصویر آن یعنی خط مماس است که در روی



شکل ۱۶- سیستم تصویر هم مساحت مولاید



شکل ۱۷- سیستم تصویر هم مساحت سینوسوئیدال



شکل ۱۸- سیستم تصویر هم مساحت مخروطی بن

تصویر متشابه

در تصویر متشابه با توجه به اصل تغییر شکل، رابطه $a=b$ باید برای تمام نقاط نقشه برقرار باشد. به این معنی که اگر شرایط ذکر شده وجود داشته باشد، تصویر دایره بینهایت کوچکی که در روی سطح کره قرار دارد، دایره باقی خواهد ماند و در نتیجه $a=b$ به عبارت دیگر تغییر زاویه صفر است. یعنی اینکه در تصاویر متشابه

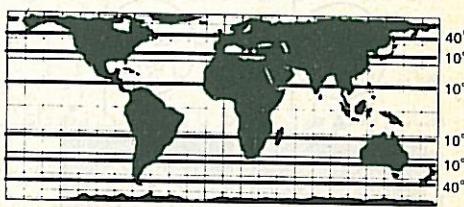
پوشش گیاهی، جمعیت، نشان دادن محصولات کشاورزی و نقشه های مختلف آماری. معروف ترین تصویرهای هم مساحت که در بیشتر اطلس ها از آنها استفاده می شود عبارتند از: سیستم تصویر مخروطی آبر، سیستم تصویر مخروطی بن، سیستم تصویر صفحه ای هم مساحت لامبر، سیستم تصویر سینوسوئیدال و سیستم تصویر مولاید که در شکل های ۱۵ تا ۱۸ نونهایی از آن دیده می شود.

می شود. باید توجه داشت که دو دایره تقاطع دارای شعاع مختلفی هستند که مقیاس، سر روی آنها به درستی حفظ شده است. در این تصویر هم خطوط موازی با دوایر تقاطع دارای تغییر شکل یکنواخت هست و هر قدر از آنها دور شویم مقدار تغییر شکل زیادتر می شود. نمونه سوم این است که ورق کاغذ را بصورت صفحه صافی درآوریم و با کره در نقطه ای مماس نمائیم که در اینصورت نقطه تماس دارای مقیاس صحیحی خواهد بود (شکل ۱۴ سمت چپ). اگر همین صفحه را قطع نماید فصل مشترک یک دایره خواهد بود که محیط این دایره روی صفحه کاملاً برابر با محیط دایره روی کره است (شکل ۱۴- سمت راست). در تصویر هر قدر از دایره تقاطع دور شویم تغییر شکل رو به ازدیاد می رود و در روی دوایر هم مرکز تغییر شکل یکنواخت خواهد بود.

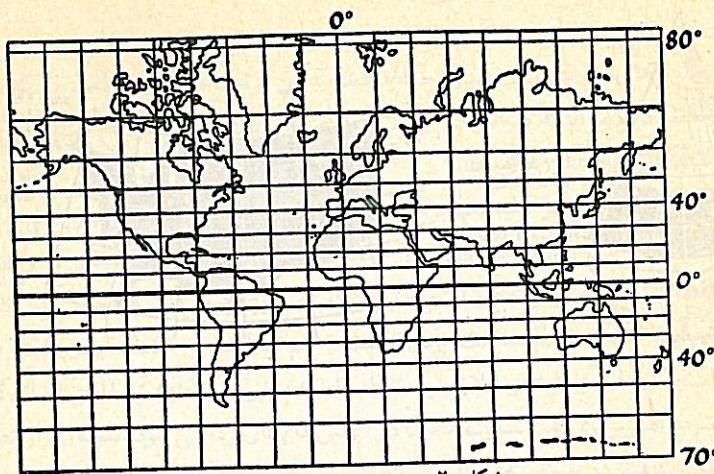
در شکل های ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ تغییرات سایه روش نشان دهنده روند تغییر شکل است. روش های تقسیم بندی سیستم تصویر که در اینجا به آن اشاره می کیم برحسب ویژگی هایی است که تصویر در بردارد. این ویژگی ها که قبل ام درباره آنها صحبت شد عبارتند از: هم مساحت، مشابه و هم مسافت.

Equal - Area Projection

تصویر هم مساحت تصویری است که در آن رابطه $a \times b = 1$ برقرار باشد یعنی اینکه تغییر مقیاس باعث جبران هم می شوند به طوری که همواره مساحت ثابت باشد. چون a و b متغیر است در نتیجه مقدار $\pi/2$ بزرگتر از صفر خواهد شد به این معنی که کلیه تصویرهای هم مساحت دارای تغییر زاویه ای خواهند بود. لازم به توضیح است که در یک تصویر نمی توان هم زاویه و هم مساحت را حفظ نمود زیرا طبق اصل تغییر شکل حفظ درستی مساحت مستلزم از دست دادن شکل یا ابعاد منطقه می باشد سیستم تصویرهای هم مساحت برای نقشه هایی که هدف نشان دادن پراکندگی زمین است بکار برده می شوند نظر نشانه های

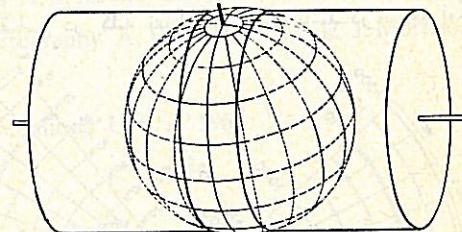


شکل ۱۵- سیستم تصویر هم مساحت استوانه ای

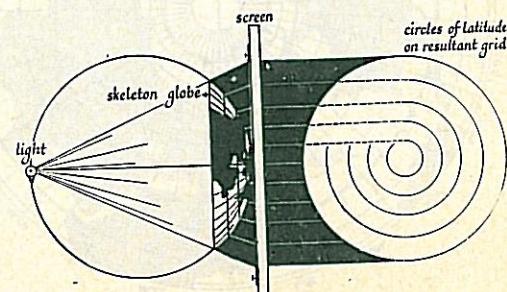


شکل ۲۰- سیستم تصویر مشابه مرکاتور

زمین را در تصویر مرکاتور نشان می دهد می توان نتیجه گرفت که ضریب مقیاس با ازدیاد عرض جغرافیایی افزایش می یابد. از انواع دیگر سیستم تصویر مشابه معمول تصویر مرکاتور جانبی، تصویر مخروطی لامبر و تصویر استونوگرافیک است که در شکل‌های ۲۱ تا ۲۳ نمایش داده شده است.

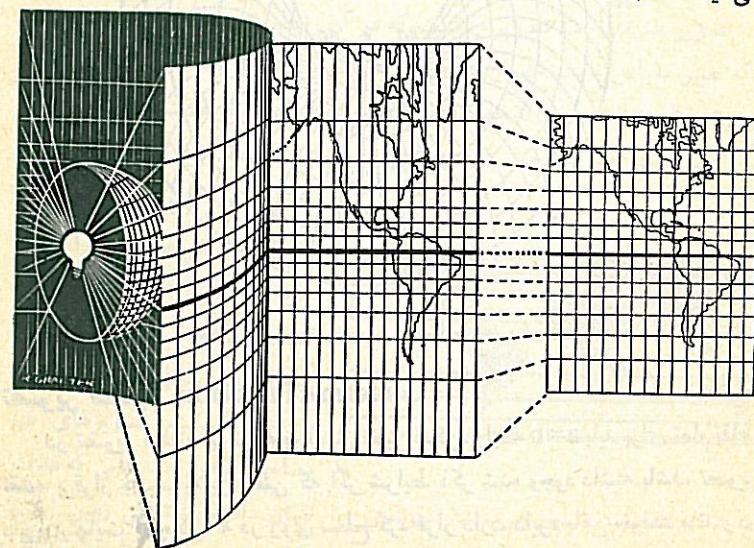


شکل ۲۱- سیستم تصویر مشابه مرکاتور، جانبی.



شکل ۲۲- سیستم تصویر مشابه استونوگرافیک

زوايا بدرستی حفظ می گردد. در نقشه‌های ناوبری و نظامی لازم است که زوايا اندازه گیری شود از اینجهت این نوع سیستم برای مقاصد ذکر شده بکار می رود. سیستم تصویر مرکاتور یکی از معروف‌ترین و معمول‌ترین سیستم تصویرها است که جزو تصویر مشابه بحساب می آید. این تصویر موارد استعمال زیادی در ناوبری دریایی دارد زیرا خط دریانوردی در این تصویر بصورت خط مستقیم نشان داده می شود که کمتر سیستم تصویری میتوان پیدا کرد که چنین خاصیتی داشته باشد. در تصویر مرکاتور استوانه در طول خط استوا با زمین مماس می شود و مرکز زمین طبق شکل ۱۹ مرکز تصویر است. مدارات و نصف النهارات به صورت شبکه‌های قائم‌الزاویه تصویر می شوند. فواصل نصف النهارات مساوی و لیکن فاصله بین مدارات متغیر است بطوریکه هر قدر بطرف قطبین نزدیک شویم فواصل مدارات بیشتر می شود. از عیوب این تصویر در این است که قادر نخواهیم بود که قطبین را تصویر کنیم. دلیلش هم با فرمولی روشن میشود. به راحتی می توان رابطه زیر را در تصویر مرکاتور ثابت کرد که در آن $K = \sec \varphi$. که در آن K فاصله مدار از استوا و φ عرض جغرافیایی است. بطور مثال فاصله مدار 90° درجه یعنی قطب از استوا عبارت خواهد شد از $K = \sec 90^\circ = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \infty$. یعنی اینکه قطب در فاصله بینهایت از استوا قرار می گیرد. با توجه به شکل ۲۰ که کره



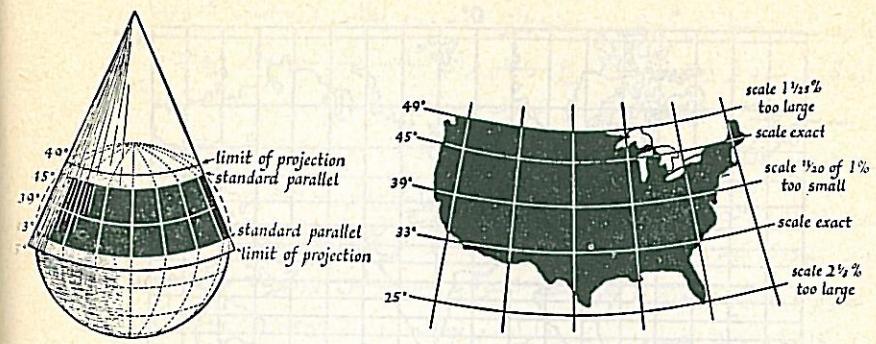
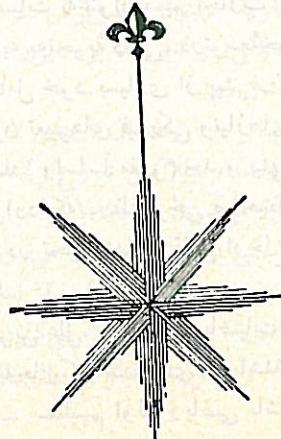
شکل ۱۹- چگونگی تصویر کردن زمین بر روی سطح استوانه

تصویرهای هم مسافت محدود خواهد شد. به این ترتیب که مقیاس فقط در یک جهت حفظ گردد یا اینکه مقیاس در جهات مختلف یک یا دو نقطه صحیح باشد ولی از یک نقطه به نقطه دیگر فرق کند.

به طور کلی در کلیه تصویرهایی که هم مساحت و متشابه نباشند روابط $a=b$ و $a \times b = 1$ برقرار نخواهد بود و در نتیجه در چنین تصویرهایی مقادیر S و 2π از نقطه‌ای به نقطه دیگر متفاوت خواهد بود که تصاویر هم مسافت هم جزو آنها بحسب می‌آید. خاصیت هم مسافت بودن نسبت به هم مساحت و متشابه بودن کمتر موارد استعمال دارد زیرا عموماً لازم نیست که فاصله مسیر در یک جهت خاص اندازه‌گیری شود. تصویرهای هم مسافت عموماً در اطلس‌ها بکار برده می‌شود. نمونه‌ای از تصویر هم مسافت در شکل ۲۴ دیده می‌شود.

منابع

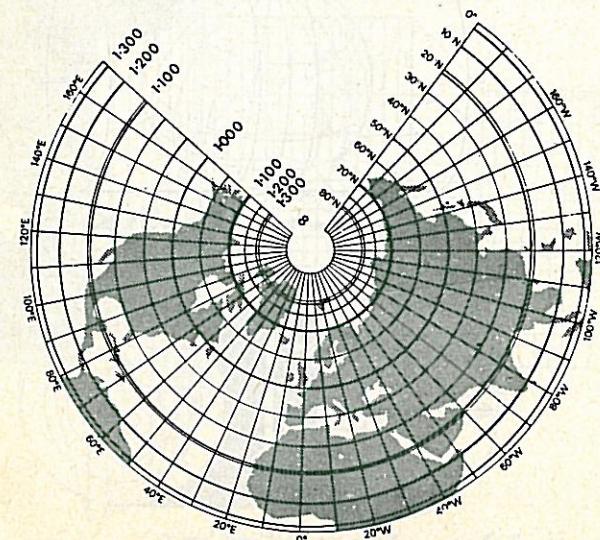
- 1- Coordinate Systems and Map Projections, D. H. Maling, London' 1973.
- 2- Map Projections, J. A. Steers, London, 1970.
- 3- Map Projections' H. S. Roblin' Britain' 1971.
- 4- Elements of Cartography' A. Robinson' R. Sale' J. Morrison' U. S. A' 1978
- 5- Mapping' D. Greenhood' U. S. A' 1964



شکل ۲۳- سیستم تصویر متشابه مخروطی لامبر

Equidistant Projection

سومین ویژگی ریاضی که می‌توان در یک سیستم تصویر رعایت کرد حفظ مسافت در یک جهت است. باید یاد آوری نمود که حفظ فواصل یا مسافت به این معنی است که مقیاس در طول خطی که دو نقطه را بهم وصل می‌کند صحیح باشد و چون تصویری نمی‌توان یافت که مقیاس در کلیه نقاط آن ثابت باشد در نتیجه امکان ساختن



شکل ۲۴- سیستم تصویر هم مسافت مخروطی

(اشیاء متشابه) بوده است، یعنی تکثر فیزیکی ضروری می‌داشته که عواملی (قابل تعمیم) به عنوان نماینده تعداد زیادی عناصر تجربی اختیار شود. و به این اعتبار سمبول جبری بیان ریاضی اسم عام دستوری^۷ به شمار می‌رود.

بعد از این مقدمه در تحلیل رابطه وجودی تجربه— ریاضیات— فیزیک، ریاضی کردن فیزیک به صورت انکاس درونی، یا هم چنانکه گفته شد، تصویر کردن داخلی در می‌آید که امری بدینه و ضرورتاً ناشی از تجدیدنظر در بنیان علمی دانش فیزیک می‌بوده است.

به لحاظ توضیح مشخص یک تقسیم بندی صوری در جریان ریاضی کردن فیزیک لازم می‌آید که در آن سه دوره را تشخیص بدهیم:

۱- دوره کلاسیک و به عنوان مرحله اصلی آن نظریه میدان (مکانیک و الکترودینامیک کلاسیک)

۲- دوره نسبیتی (میدان تاسوری)

۳- دوره کوانتومی

با این توضیح که اصولاً دوره نسبیتی را نیز به عنوان مرحله‌ای از میدانی کردن فیزیک می‌توان در نظر گرفت. اساسی ترین مسئله در مورد ریاضی کردن فیزیک، این است که در همهٔ مراحل تشخیص داده شده و به خصوص بدطور کلی در توسعه علم فیزیک در قرن معاصر، که ریاضی کردن به صورت اساسی و گسترده‌ای عمل شده است، همواره ریاضی کردن فیزیک به جهت تجربه‌های دقیق تری که مفروضات^۸ قبلی را نامعتبر می‌ساخته، ضرورت یافته است. یعنی در این میان تفاوت تجربه عینی و ذهنی در این است که تجربه‌ذهنی— به عنوان تکرار ذهنی تجربه عینی که با اشیاء سروکار دارد— با تصویر ذهنی اشیاء عمل می‌کند. به این ترتیب است که ریاضیات به عنوان تعمیم تجارب اولیه توسعه یافته و به عنوان ماحصل روئندگی از تجربه ذهنی، در توسعه خود از تجربه عینی جدا شده است. لکن در مسیر تکامل خود بسیاری از پیشرفت‌های اساسی خویش را ضرورتاً و بدروستی می‌یون تعبیرهای فیزیکی و نیازهای حاصله از آن بوده است:

نظیر حساب جامعه و فاضله^۹ و اساساً مفهوم حد و بینهایت کوچک و ... نظریه توزیع.^{۱۰} حتی بعضی موارد که به نظر برخی صاحب‌نظران نموداری از تجربید ریاضی به شمار می‌آید، در تحلیل نهائی قابل ارجاع به زمینهٔ تجربی خویش — بد ظاهر نهان — می‌باشد.

یکی از اساسی ترین علل پیشرفت ریاضیات اختیار مفهوم سمبول^{۱۱} و کمیات سمبولیک جبری، به جای کمیات عددی می‌باشد. در این مورد به نظر راقم اگرچه دور پروازاند. سمبولیسم اولیهٔ ریاضی ناشی از تکثر متشابه فیزیکی

ریاضی کردن^۱ فیزیک

(اشیاء متشابه) بوده است، یعنی تکثر فیزیکی ضروری می‌داشته که عواملی (قابل تعمیم) به عنوان نماینده تعداد زیادی عناصر تجربی اختیار شود. و به این اعتبار سمبول جری یا ان ریاضی اسم عام دستوری^۷ به شمار می‌رود.

بعد از این مقدمه در تحلیل رابطه وجودی تجریبه ریاضیات، فیزیک، ریاضی کردن فیزیک به صورت انعکاس درونی، یا هم‌چنانکه گفته شد، تصویر کردن داخلی درمی‌آید که امری بدیهی و ضرورتاً ناشی از تجدیدنظر در بنیان علمی دانش فیزیک می‌بوده است.

به لحاظ توضیح مشخص یک تقسیم بندی صوری در جریان ریاضی کردن فیزیک لازم می‌آید که در آن سه دوره را تشخیص بدهیم:

۱- دوره کلاسیک و به عنوان مرحله اصلی آن نظریه میدان (مکانیک و الکترودینامیک کلاسیک)

۲- دوره نسبیتی (میدان تانسوری)

۳- دوره کوانتومی

با این توضیح که اصولاً دوره نسبیتی رانیز به عنوان مرحله‌ای از میدانی کردن فیزیک می‌توان در نظر گرفت. اساسی ترین مسئله در مورد ریاضی کردن فیزیک، این است که در همهٔ مرحلهٔ تراشیک داده شده و به خصوص به طور کلی در توسعهٔ علم فیزیک در قرن معاصر، که ریاضی کردن به صورت اساسی و گسترده‌ای عمل شده است، همواره ریاضی کردن فیزیک به بجهت تجریبه‌های دقیق تری که مفروضات^۸ قبلی را نامعتبر می‌ساخته، ضرورت یافته است. یعنی در واقع نتایج تجربی دقیق، ضروری داشته‌اند که فرمول بندی ریاضی تری از فیزیک صورت بگیرد. و این با تعبیری که را قم در مقدمه ارائه داد ضرورتی بدیهی به شمار می‌رود، چرا که تجریبهٔ دقیق تر تصویرش در ریاضیات، فرمول بندی دقیق تر و به تعبیر ریاضی، منطقی تری خواهد بود این را، را قم سعی خواهد کرد در مرحلهٔ دقیقاً تحلیل و نشان دهد.

در دوره کلاسیک مهمترین مرحله از کارهای لاگرانژ^۹ و هامیلتون^{۱۰} و مکانیک کلاسیک بنیانگذاری شده و سیله‌آنان شروع و بعد در نظریه میدان الکترو-منقطیسی ماکسول^{۱۱}، متبلور می‌شود. مکانیک لاگرانژ - هامیلتون و بسط بعدی آن و سیله یا کوبی^{۱۲}، مکانیکی ریاضی به شمار می‌رود تا فیزیکی، چرا که در این مکانیک اصولاً از متغیرهای تعمیم داده شده^{۱۳} استفاده و حرکت سیستم در دستگاه مختصات چند بعدی^{۱۴} در نظر گرفته می‌شود. و همین ریاضی بودن معادلات لاگرانژ - اویلر^{۱۵} و اصل حد عمل هامیلتون^{۱۶} است، که آنرا قابل

ریاضی کردن^۱ فیزیک

همهٔ جریان (ریاضی کردن فیزیک) با تعامی تنوع و مسیر طولانی آن، تصویر کردن همسانی، درون مجموعهٔ تعمیم نتایج تجربی به شمار می‌رود. به این ترتیب که فیزیک فعلی به عنوان آزمایش منطقی^۲، تصویری^۳ مادی از ریاضیات به شمار می‌رود که خود وی (ریاضیات) همچون تصویری- تعمیمی از تجریبه برآمده و تکامل یافته است.

در بارهٔ جریان تکامل ریاضیات، نظر را قم این است که مفاهیم اولیه ریاضی را تجریبه عینی به ماتلقین کرده و سپس تجریبهٔ ذهنی آنها را پرداخته و توسعه داده است. در این میان تفاوت تجریبه عینی و ذهنی در این است که تجریبهٔ ذهنی - به عنوان تکرار ذهنی تجریبه عینی که با اشیاء سروکار دارد - با تصویر ذهنی اشیاء عمل می‌کند. به این ترتیب است که ریاضیات به عنوان تعمیم تجارب اولیه توسعه یافته و به عنوان ماحصل روند عبور از تجریبهٔ ذهنی، در توسعهٔ خود از تجریبهٔ عینی جدا شده است. لکن در مسیر تکامل خود بسیاری از پیشرفت‌های اساسی خویش را ضرورتاً و به درستی مدیون تعبیرهای فیزیکی و نیازهای حاصله از آن بوده است: نظیر حساب جامعه و فاضله^۴ و اساساً مفهوم حد و بینهایت کوچک و ... نظریه توزیع^۵. حتی بعضی موارد که به نظر برخی صاحب‌نظران نموداری از تجرید ریاضی به شمار می‌آید، در تحلیل نهائی قابل ارجاع به زمینهٔ تجربی خویش - به ظاهر نهان - می‌باشد.

یکی از اساسی ترین علل پیشرفت ریاضیات اختیار مفهوم سمبول^۶ و کمیات سمبولیک جبری، به جای کمیات عددی می‌باشد. در این مورد به نظر را قم - اگرچه دور پروازاند - سمبولیسم اولیه ریاضی ناشی از تکثر متشابه فیزیکی

کاربرد در فیزیک جدید کرده است. مبانای منطقی شده‌ی مکانیک کلاسیک بر اصل حد عمل استوار است، در این روش ما از امتداد مسیر مطلع نیستیم و تنها از حدود آن وجهت آن – به لحاظ وضع نسبی حدود انتگراسیون – اطلاع داریم. آنچه که زیر انتگرال قرار دارد (لاگرانژین)^{۱۷} یا ان هیچ کمیت مستقیم فیزیکی به شمار نمی‌رود و تنها مقداری ریاضی است که متناسب موضوع مورد بحث اختیار شده است. اکسترم^{۱۸} بودن انتگرال عمل (اکسیون)، معادلات حرکت سیستم را در فضای کنفیگوراسیون^{۱۹} به دست می‌دهد. و بدیهی است که کاربرد اصل مذکور در مورد یک سیستم درجهان اقلیدسی (سه بعد مکان و یک بعد منفصل زمان) همان معادلات نیوتون^{۲۰} را به دست خواهد داد. اگر که ضعف مکانیک نیوتونی را در عینی (مرعی) بودن آن تلقی کنیم، بدروستی قدرت مکانیک کلاسیک در غیر عینی بودن آن خواهد بود. وهم‌چنانکه ابعاد دستگاه مختصات غیر عینی هستند، فضای تغییر سیستم و اصولاً کمیات مشکله سیستم نیز ریاضی وغیر عینی به شمار می‌روند.

اینجا می‌توان به جای اصطلاح عینی، کامه صوری یا ظاهری را نیز به کار برد، واگر قصد مقایسه باعلم امروز به عنوان تجربه منطقی باشد، شاید به تعبیری بتوانیم به جای مکانیک عینی (نیوتون) اصطلاح مکانیک غیر منطقی – به لحاظ بستگی اساسی بین منطق و ریاضیات – را استعمال کنیم.

درست است که ریاضیات زیر بنای تجربی داشته و از طبیعت سرچشمه می‌گیرد، لکن باید دانست که آنچه ما از تجربه حاصل می‌کنیم^{۲۱} – به لحاظ علمی – صرفاً کمیاتی مرتبط هستند. و کلا نیز حتی اگر مورد مشاهده نیز عینی (مرعی) بوده باشد، خود روند تجربه، عینی نیست. باید به مفهوم دقیق تجربه دقت کرد و دانست که لازمه طبیعی و فیزیکی بودن یک امر، عینی بودن آن امر نیست، بلکه وجود مؤثر آن امر در طبیعت است. از این‌رو ریاضی شدن تجربه فیزیکی یا نظریه‌سازی آن تجربه، اساساً به آثار فیزیکی مربوط می‌شود و اصولاً غیر عینی خواهد بود.

به این ترتیب مکانیک کلاسیک، بخش اساسی فیزیک یعنی تحلیل تغییرات را که حرکت چهار بعدی نوعی از آن به شمار می‌رود، ریاضی و در واقع غیر عینی و ناموعی ساخت. و همین عدم عینیت مکانیک کلاسیک بود که کاربرد آن را در سیستم‌های اتمی (غیر عینی) میسر نمود. هم‌چنانکه در مکانیک کلاسیک به عنوان روش تحلیل، در سیستم اتمی (به عنوان سیستم مورد تحلیل) نیز ما نه از شکل و نه از مسیر تغییرات سیستم

مطلع نیستیم، بلکه تنها آثار این تغییرات را می‌توانیم اندازه‌گیری کنیم.^{۲۲} این عدم اطلاع از مسیر تغییرات اتمی به لحاظ ریاضی، بر می‌گردد به عدم اطلاع از مسیر انتگراسیون در اصل هایلیتون و اصولاً غیر عینی بودن سیستم اتمی که مستلزم به کارگر قرن مکانیکی غیر عینی در مرور آن می‌باشد. در اینجا ارتباطی منطقی بین سیستم مورد تحلیل و روش تحلیل به چشم می‌خورد که به نظر راقم اصل تناظر^{۲۳} بوهر^{۲۴} ناشی از آن و نماینده آن به شمار می‌رود. یعنی برخلاف نظر بوهر که رابطه بین مکانیک کلاسیک و کوانتیک را صرفاً بر طبق اصل تناظر در حد $h \rightarrow 0$ ^{۲۵} (یا $1 \rightarrow 0$)^{۲۶} قرار می‌دهد. به نظر راقم رابطه بین این دو اساساً ناشی از غیر عینی بودن مسیر تغییرات یا حرکت سیستم مورد نظر، و همین امر در مرور روش تحلیل ریاضی آن سیستم (هر دو مکانیک باد شده)، نهفته است. و تصور می‌کنم که این نظر موافق تعبیر کپنه‌گی نظریه کوانتوم^{۲۷} و تحلیل سینتیکی^{۲۸} های زیرگ^{۲۹} از مکانیک کوانتیک نیز باشد، که تعبیر مذکور در واقع جمع بندی منطقی – تجربی نظریه کوانتوم به شمار می‌رود.

در صورتی که شرط میل h به سمت صفر، صرفاً بیان این امر است که با سیستم ما کرسکیپکسرو و کار داریم. در حالی که مواد متعددی از جمله در نظریه سینتیک عمومی داریم که اگرچه ما کرسکیپک است لکن تغییرات وی به واقع غیر عینی هستند، که در آنچه نیز ضرورتاً از مکانیک کلاسیک استفاده باید کرد. این موارد دلیلی است بر انکه رابطه بین مکانیک کلاسیک و کوانتیک صرفاً بر اصل تناظر به مفهوم تهارابطه جهان ما کرسکیپک و میکرسکیپک متکی نبوده، بلکه اساساً از عدم عینیت مسیر تغییرات سیستم مورد مطالعه ناشی می‌شود. نتیجه نهایی از نظر راقم در بحث مورد نظر این است که کاربرد مکانیک کلاسیک ذره سیستم با تغییرات غیر عینی ضرورتی منطقی به شمار می‌رود، چرا که مسیر تغییرات در مکانیک کلاسیک نیز غیر عینی در نظر گرفته شده است.

در مکانیک نیوتونی فرمول بندی حرکت متکی بر فیزیکی بودن «نیرو» است. در حالی که نیرو در واقع امری فیزیکی نبوده و خود نیز تنها با واسطه واژه‌ای مفاهیم ریاضی بی نظر شتاب و سرعت قابل بیان می‌باشد. از این‌رو در فرمول بندی نیوتون یک طرف معادله نیرو، بر حسب تغییرات دیفرانسیلی نسبی بیان می‌شود، یعنی با بیانی ریاضی $\frac{d^2r}{dt^2}$

بیان ریاضی ندارد: $F = m \frac{d^2r}{dt^2}$. حال ریاضی شدن فیزیک در مکانیک

کلاسیک را به طور خلاصه و تقریباً می‌توان چنین نشان داد که در مکانیک کلاسیک

در مفهوم «جوهر میانی»^{۳۴} باید جستجو کرد، که البته در این میان پیش از فاراده نیز برای مفهوم اثر نوعی مادی و صورتی مکانیکی تصور می‌شد. و همین اثر در تعبیر دکارتی^{۳۵} واسطه بین ستارگان و مدیوم انتقال نور در نظریه (هویگنس)^{۳۶} و (فرتل)^{۳۷} به شمار می‌رفت.

با ارائه معادلات میدان الکترومغناطیس^{۳۸} و سیله (ماکسول)^{۳۹} بر اساس مطالعات فاراده^{۴۰}، مفهوم میدان توانست جای تعبیر نقطه مادی را بگیرد، که نیوتن از طریق تعیین مکانیک اجسام برای نور قائل شده بود و بعد به عنوان مبدأ الکتریسیته تعیین داده بودند. امروز به خوبی می‌دانیم که تصور نقطه مادی نیوتن برای نور بزرگترین خطای او بوده است. و این خطای که در واقع به جهت انتساب شکلی عینی به چیزی که اساساً قابل تعیین نیست و فقط با واسطه قابل مشاهده است پیش آمده بود، در مرور انتساب شکل نقطه (مادی) ای با لکتریسیته و مغناطیس حتی آن تصور مرمغی با واسطه در مرور نور نیز دیگر موجود نمی‌باشد. به همین جهت نیز جانشینی مفهوم میدان به جای نقطه مادی از الکتریسیته و مغناطیس آغاز شد. در حالی که تبدیل این دو به یکدیگر به تقریب از همان ابهای تجارب بر قاطیسی روشن بود: مغناطیس از حرکت دادن اجسام الکتریسیته دار^{۴۱} تولید می‌شود. حرکت یعنی تغییر مکان در زمان - به این ترتیب می‌باشی مشخصاتی از میدان‌های نماینده الکتریسیته و مغناطیس وجود باشند که تغییرات مکانی و زمانی آنها به تغییرات مکانی و زمانی آن دیگری منجر شود.

بيان حرکت و تغییرات (مکانی و زمانی) حداقل از دوره گالیله^{۴۲} به صورت کسور نسبی از مکان و زمان که نسبت نزدیکی با مفهوم دیفرانسیل مکان - زمانی دارند، معمول بود. بدگذریم از اینکه شکل غیرهندسی^{۴۳} دیفرانسیل و یا شکل جبری - حسابی آن در محاسبات فرم^{۴۴} به صورت ابتدائی مشهود بوده است.

به این ترتیب بیان ریاضی این تبدیل بین تغییرات زمان - مکانی سهل‌های میدان الکتریسیته و مغناطیس به صورت دیفرانسیل‌های جزئی، توانست معادلات دقیق میدان الکترومغناطیس را به دست دهد، که اساسی‌ترین مرحله ریاضی کردن فیزیک به شمار می‌رود.

تذکر این مسئله حتی مکرراً نیز ضروری به نظر می‌رسد که همه مواد مشخص در سیر ریاضی کردن فیزیک ناشی از ضرورت‌های تجربی بوده است. و این در بیان فلسفی یعنی که: واقع گرایی سبب ریاضی ترشدن فیزیک بوده است.

تمامی معادله حرکت دارای بیان ریاضی شده است، و برای این کار نیرو را به عنوان مشتق مکانی کمیتی ریاضی به نام «پتانسیل» در نظر می‌گیرند:

$$F = -\frac{dU}{dr} = m \frac{d^2r}{dt^2}$$

$$P = m \frac{dr}{dt}, \quad -\frac{dU}{dr} = \frac{dP}{dt} \quad (\text{معادله حرکت})$$

صورت رسمی این فرمول بندی در مکانیک کلاسیک فی الواقع چنین خواهد شد:

$$S = \int L \cdot dt$$

$$\delta S = \delta \int L \cdot dt = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dr}{dt} \right)} \right] - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - U \quad (\text{حالت خاص})$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)} \right] = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \frac{dU}{dr} = m \frac{d^2r}{dt^2}$$

اکسیون

لاگرانژین

انرژی سینتیک سیستم

انرژی پتانسیل سیستم

به این ترتیب در مکانیک کلاسیک سوای تعاویر اساساً (یا ضی اکسیون، لاگرانژین هامیلتونین^{۴۵} و اکسترمن^{۴۶} بودن، حرکت نقطه مادی نیز کاملاً به صورتی ریاضی یعنی از طریق کسور جزئی دیفرانسیلی بیان می‌گردد. اگرچه می‌توان مکانیک کلاسیک را به عنوان تعیینی از قانون دوم نیوتن تقریباً تغیر کرد^{۴۷} و یا به عکس مکانیک نیوتنی را همچون حالت خاصی از معادلات اویلر - لاگرانژ بدست آورده، لکن سیمای ریاضی مکانیک کلاسیک چنان اساسی و استوار است که غیر از چنین تشابهات صوری با واسطه‌ای، دیگر محلی از اعراب برای نظریه نقاط مادی نیوتن، نمی‌توان در مکانیک کلاسیک یافت. واضح نیز وقتی مورد مطالعه شیئی نامراعی خواهد بود، آن‌چیز نامراعی که مسیر تغییرات پایه حرکتش نیز غیر عینی می‌بود، از دوره فاراده و ماکسول با اسم میدان مصطلح شده بود. سابقه تاریخی مفهوم میدان^{۴۸} را در اصطلاح «اثر»^{۴۹} و از آن اثر را

به واسطه الکتریستیه و مغناطیس را همان میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی گویند که توامًا میدان الکترومغناطیس را تشکیل می‌دهند.

میدان الکترومغناطیسی ماکسول، جایگزین کردن مفهوم میدان به جای نقطه مادی باردار — قاعده تا متحرك — می‌باشد که وسیله معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه دوم بیان می‌شوند، مهمترین خاصیت معادلات ماکسول بقای آنها نسبت به پارتیه ($x \rightarrow x$) و انکاس زمان ($dt \rightarrow -dt$) و انکاس بار الکتریکی ($q \rightarrow q$) می‌باشد که آنها را توأم به صورت بقای ($P \perp C$) می‌نویسن، درحالی که باید تذکر داد عالم واقعی نسبت به انکاس زمان و تقارن بار الکتریکی، اینواریات 47 نیست. از سوی دیگر اینواریات بودن معادلات ماکسول نسبت به ترانسفورماتیون لورنتز 48 تنها در خلاء معکن است، که البته در نوشتار تانسوری بهتر نمایان است [۶] علامت مشتق جزئی است:

$$(\text{در حضور منبع الکتریکی}) \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (\text{در خلام}) \quad \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\nu} = 0 \quad (\text{رابطه پیوستگی})$$

$$F^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

$$A^\mu = (A_x, A_y, A_z, \varphi) \quad (\text{پتانسیل چهار بعدی})$$

$$F^{\mu\nu} = \text{Tansor میدان الکترومagnetیک}$$

این شکل تانسوری معادلات ماکسول بود که معادلات کواریانت میدان الکترومagnetیک نام دارند. صورت دیفرانسیل جزئی این معادلات را در هر کتاب الکترومغناطیسی یا الکترودینامیکی می‌توان یافت. لکن معادلات مذکور در شکل جزئی خود دیگر اینواریات نمی‌باشد. در هر حال وسیله معادلات ماکسول می‌توانیم اثر الکتریکی و مغناطیسی را در هر محیطی بادقت موافق با اندازه گیری تحلیل کنیم. به این ترتیب وقتی ملاک درستی در مورد یک تئوری علمی توافق آن با مقادیر تجربی (اندازه گیری) باشد و از طرفی با عالم به اینکه آنچه ما از الکتریستیه و مغناطیس اندازه گیری می‌کنیم، تنها آثار ناشی از این دو خاصیت در جسمی — روی اجسام دیگر است 49 ، پس نظریه مادرمورد این دو خاصیت باید بیان تعیین یافته آثار مذکور باشد. بعداز اختیار تعیین موج الکترومagnetیک برای نور، دیده شد که معادلات ماکسول با تئوری موجی نور که وسیله هویگنس و فرنل ارائه شده بود توافق کامل دارد. چراکه در

بسیاری در این متفق‌اند که فیزیک علم الاثار است. حال وضع چنین است که آثار فیزیکی اندازه گیری شده را با وسائل ریاضی بهتر و دقیق‌تر می‌توان محاسبه و تحلیل کرد. در این میان هستند موارد متعددی که ما از خود شیوه در ابتدا بی خبر بوده ایم تا اینکه اثر آن را اندازه گیری کرده‌ایم. و در واقع به وجود شیوه از روی آثار آن می‌توانیم اطلاع حاصل کنیم. این اطلاع بوجود شیوه از روی آثار آن یک امر عمومی در طبیعت به شمار می‌رود. چراکه حتی در مورد اشیائی که آنها را به واسطه انکاس پرتو نورانی — که بر آنها تابیده شده — درک می‌کنیم و به همین طریق اطلاع ما از هر شبیه به لحاظ درکی است که از اثر آن شبیه به واسطه یکی از حواس خود، حاصل می‌کنیم. همچنین است که از دیدن لکه‌ای نورانی در اطاق ابر 45 که ناشی از یونیزه شده ملکول بخار آب است، به وجود الکترون در مسیر حاصل از مجاورت این نقاط نورانی بی‌برده می‌شود. در اینجا تذکر این نویضی فلسفی ضروری است که با یاد محتوی منطقی دقیق جمله (اطلاع ما به وجود شبیه از روی آثار آن) با بیان مستعمل محاوره‌ای جمله مذکور تخلیط نشود. وجود شبیه در عالم طبیعی مستقل بوده و منوط به وجود انسان و درک وی از آثار آن شبیه نمی‌باشد. بلکه تنها اطلاع انسان از وجود اشیاه منوط به ارتباط با آن اشیاء است. اشاره کنم که همین موضوع است که به نظر راقم پایه نظریه فانیمن 46 در بسط مکانیک کوانتیک قرار گرفته است.

در مورد مبحث میدان الکترومغناطیس: شکی نیست که میدان الکتریکی موردنظر از جسمی که دارای خاصیت مشخصی — به اصطلاح بار الکتریکی — می‌باشد، تولید می‌گردد. لکن در عین حال این تجربه نیز عمل شده است که بعداز فقدان جسم مذکور باز میدان الکتریکی — منسوب به وی — در همان حوزه برقرار می‌ماند، چراکه اثر میدان هنوز قبل از اندازه گیری است. تجربه عملی در مواردی نظری (مالش جسم باردار) یا (اثر مغناطیس — طبیعی) ساده‌تر قابل مشاهده است.

وقتی اثر یک جسم الکتریکی را در فاصله‌ای از وی، روی جسم دیگری ررسی کنیم، اگر که نخواهیم به سفسطه‌های قدما در مورد انتقال اثر متصل شویم، باید تصور کنیم که جسم الکتریکی در حوزه اطراف خود تأثیر کرده و محیط را چنان تغییر داده است که وقتی جسم نرمایی را به نزدیکی او ببریم (مالش) دارای بار الکتریکی شده و یا اگر جسم دوم خود الکتریستیه دار باشد نیروی بروی و مقابلا از وی بر جسم اول اثر خواهد کرد. این محیط متغیر

نداریم، درواقع نیز این جز اسمی قراردادی برای آثاری معنی چیزی دیگر نمی‌باشد. آنچه که هست آثار قبل اندازه‌گیری این میدان است. اساسی ترین اثر میدان جاذبه ایجاد شتاب است. از طرفی در مطالعه میدان جاذبه یکنواخت رجعت (که مثلاً از توزیع یکنواخت کروی جرم تولید شدنی است) باشتاب یکنواخت سروکار داریم، پس آنچه ما در وضعیت فیزیکی مورد بحث اندازه می‌گیریم، شتابی یکنواخت درحر کت جسم مورد آزمایش است. حال همین شتاب یکنواخت می‌تواند درحر کت جبری نیز ایجاد شود. پس آنچه به لحاظ ریاضی - فیزیکی باید مورد توجه باشد، صورت بندی متريک^{۵۴} در میدان جاذبه یکنواخت معادل متريک دریک سیستم شتابدار یکنواخت است. چراکه با روشن شدن وضع متريک یعنی

$$ds^4 = \alpha c dt^2 + \beta dr^2 + \gamma r dr . dr \quad (\text{متريک کلی})$$

می‌توان از روی معادلات مختلفی مثلاً معادلات هامیلتون یا کوبی^{۵۵} وضع حرکت جسم را در میدان جاذبه مورد نظر بررسی کرد.

دو یا سه مسئله مهم که می‌بایستی در بسط نسبت خاص به صورت حاوی میدان‌های گرانشی یا نسبت عمومی، در نظر گرفته می‌شوند عبارت بودند از: یافتن فرمول بندی‌ای که بیان ریاضی اصل نسبت عام (اصل همارزی قوانین فیزیکی در همه دستگاههای مختصات در هرجای عالم طبیعی) را قانع کند، دوم وضعیت واقعی متريک انتخاب شده و سوم میدانی کردن جاذبه (به طور کلی).

مورد اول که منجر به تائیوری کردن معادلات میدان شد، اساساً فورما لیسم ریاضی به شمار می‌رفت. در مورد دوم وقتي وضع حرکت ناشی از شتاب جاذبه متجانس، همان وضع ناشی از شتاب یکنواخت بود (اصل همارزی) و از سوی دیگر با اطلاع به اینکه در صورت حذف شتاب، سیستم به صورت سیستم اینرسی بر می‌گشت، و متريک مستعمل درحر کت‌های یکنواخت (در سیستم اینرسی) متريک فضای عادی اقلیدسی^{۵۶} بود، معلوم شد که متريک میدان جاذبه متجانس معادل متريک سیستم باشتاب یکنواخت باید با حذف میدان جاذبه به متريک اقلیدسی برگردد.

مسئله سوم یعنی میدانی کردن جاذبه از لحاظ فیزیکی - ریاضی منوط به انتخاب صحیح تابع اکسیون می‌گشت، که باید اصل هامیلتون را قانع می‌کرد. با در نظر گرفتن اینکه معادله حرکت ناشی از اکسترم شدن انتگرال هامیلتون - یعنی بیان ریاضی قانون جاذبه - باید اصل همارزی در همه دستگاههای مختصات را قانع می‌کرد. می‌بایستی بیان ریاضی مذکور به شکلی می‌بود که صورت خود را در هر تبدیلی حفظ کند. از اینجا ارتباط دو مسئله اول

اصطلاح ریاضی معادله موج نیز یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم می‌باشد. برای توضیح این مشابهت کافی است با استفاده از صورت جزئی معادلات ماسکول همگنی معادلات میدان را در مورد یکی از میدان‌های الکتریکی و یا مغناطیسی یا پتانسیل (برداری و اسکالر) مولد این دو میدان بنویسیم و بدیک معنی دیگر رفتار عمومی میدان را در حالت خاصی از آن ملاحظه کنیم:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (\text{پتانسیل چهار بعدی، } C \text{ سرعت نور})$$

و یا

$$\Delta A = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (\Delta \text{ لاپلاسین})$$

$$\square A = 0 \quad (\square \text{ دالامبرسین})$$

می‌بینیم که معادله مذکور همان معادله موج است، پس می‌توان به میدان الکترومغناطیس انقال موجی نسبت داد، لکن همواره باید دقت کرد که موج تنها شکل انتقال بوده و به شکل جسم منتقل شونده مربوط نیست. با این قدم مهم در ریاضی کردن یا میدانی کردن فیزیک (نور: الکترومغناطیس) و توافق دقیق آن با مقادیر اندازه گیری شده مسیر جدید میدانی کردن فیزیک گشوده شد که مرحله بعدی آن میدانی کردن جاذبه بود.

درباره تئوری نسبتی و هندسه ریمانی^{۵۰} و^{۵۱}

همچنانکه با کنار گذاشتن مفهوم نقطه مادی در مورد نور و نقطه مادی باردار در مورد الکتریسیته، مفهوم ریاضی میدان الکترومغناطیس کار آن هارا گرفت، در مورد جاذبه نیز می‌بایستی به جای مفهوم مکانیکی نقطه مادی (جرم دار) مولد نیروی جاذبه، مفهوم ریاضی میدان جاذبه در کار می‌آمد.

به لحاظ اعتبار علم فیزیک بداندازه گیری و اعتبار اندازه گیری به آثار مادی، شتاب حاصل از جاذبه معادل شتاب دریک میدان اینرسی است، چراکه اثر حاصل از هر دو یکسان بوده و کمیات مشابهی به دست می‌دهند (در اندازه گیری). اگر بخواهیم مسئله را به سیستم‌های مختصات رجوع دهیم، یک سیستم غیر اینرسی^{۵۲} معادل میدان جاذبه همگن و رجعت است.^{۵۳} به بیان دیگر حرکت اجسام دریک میدان جاذبه متجانس مشابه حرکت آنها در قدردان میدان مذکور، نسبت به سیستم مختصاتی با حرکت شتابدار یکنواخت خواهد بود.

به لحاظ فیزیکی ما به نفس آنچه که میدان جاذبه اش نام نهاده ایم کاری

من با توضیح یک مسئله مهم که معمولاً به عنوان تعریف نسبت عمومی (جادبه) اینشتین صرفاً بیان می‌شود، سعی می‌کنم تمامی آنچه را که در مرور داین نظریه ذکر کردم خلاصه کنم. گفته می‌شود که اینشتین جاذبه را به انحنای هندسی فضای تحويل کرد.

گفتم که جاذبه را در تجربه با شتاب جاذبه می‌شناسیم و شتاب جاذبه یکنواخت معادل شتاب جبری یکنواخت است. نماینده ریاضی شتاب جبری یکنواخت یا تفاوت حالتی که چنین شتابی موجود باشد با حالتی که موجود نباشد، اینست ده فاصله چهار بعدی (جایگاهی) برای حالت شتابدار و بدون شتاب متفاوت است. برای تصور این امر بطور تقریبی کافی است که تصور کنیم چگونه طی فاصله فضائی، برای جسم شتابدار با جسم بدون شتاب فرق می‌کند. از طرفی در اصطلاح ریاضی عنصر جزئی فاصله را با متريک به صورت مقابله بیان می‌کنند:

$$(I) \text{ در حالت کلی } ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$(II) \text{ فضای اقلیدسی } ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2$$

$$dx^\mu = dx^\nu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$$

پس وجود جاذبه به واسطه شتاب را که معادل شتاب جبری است، وسیلهٔ شکلی که رابطهٔ کلی این عنصر فاصله در مرور جسم یا سیستم مختصات شتابدار دارد، می‌شود نمایاند. یعنی شکل رابطه (I) که در آن $g_{\mu\nu}$ به صورت ماتریسی چهار سطر و سوتونی است، می‌تواند وجود یا عدم جاذبه را شناساند. از سوی دیگر انحنای فضای وسیلهٔ تansور انحنای ریمان بیان می‌شود که مقدار آن از روی مضاربی از مشتقات جزئی $g_{\mu\nu}$ ها محاسبه می‌شود. پس انحنای هندسی فضای مقدارش به مقادیر $g_{\mu\nu}$ (کلاه ۱۶ مقدار) بستگی دارد. قبل از نتیجه گرفتیم که بیان ریاضی جاذبه از طریق مقادیر $g_{\mu\nu}$ موجود در رابطه (I) انجام می‌گیرد. به این طریق است که جاذبه وسیلهٔ مقادیر $g_{\mu\nu}$ ای که تعیین می‌کند (برای متريک I) انحنای فضای بیان شده وسیلهٔ تansور ریمان را قابل محاسبه می‌سازد. و از این رو وجود جاذبه از طریق محاسبه تansور انحنای قابل بررسی است. $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$: متريک سیستم شتابدار یکنواخت \rightarrow شتاب جبری یکنواخت: شتاب جاذبه یکنواخت \rightarrow جاذبه یکنواخت

(تansور انحنای ریمان)

$$dr/dx^\mu = R^\mu_\nu \rightarrow R^\mu_\nu \rightarrow g_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma^\mu_\nu \rightarrow R^\mu_\nu$$

در اینجا R^μ_ν ها ممیل کریستوف Γ^μ_ν و R^μ_ν تansور انحنای می‌باشد. و این تansور انحنای شکل عمومی تری از همان تansوری است که در معادله اینشتین برای میدان جاذبه به کار رفته‌اند. به این ترتیب است که می‌توان جاذبه را به

و سوم می‌آمد که یافتن عواملی ریاضی به صورتی است که وقتی فرمولی بر حسب آنان بیان شد، شکل رابطه بعداز هر تبدیل بدستگاه مختصات دیگری به همان شکل اولیه باقی ماند. بیان کامل فیزیکی اصل عمومی نسبت را چنین می‌توان اراده کرد که: فرمول بنده قوانین فیزیکی در دستگاه‌های باسرعت و با شتاب یکنواخت همواره یکسان باقی می‌ماند. از طرفی می‌دانیم که در تبدیل یک فرمول از یک دستگاه مختصات اینترسی به یک دستگاه شتابدار (یکنواخت) تبدیل غیرخطی از مختصات پیش می‌آید. پس مسئله اول منجر به یافتن عواملی ریاضی است که به عنوان توابع از مختصات بعداز تبدیلات غیرخطی مختصات شکل خود را حفظ کنند. چنین عواملی از پیش شناخته شده و در اصطلاح ریاضی تansور $g_{\mu\nu}$ نامیده می‌شوند.

و چون شکل معادلات تansوری در همه دستگاه‌های مختصات — بعد از هر تبدیلی — یکسان است، از اینرو هر اثر و خاصیت فیزیکی که به صورت فرمول یا رابطه‌ای بین تansورها بیان شده باشد، در هر دستگاه مختصات دیگر نیز به همان صورت بیان شده و بیان همان خاصیت وجود همان اثر را خواهد رساند. در واقع نیز یک حادثهٔ فیزیکی ربطی به دستگاه مختصاتی که از طرف ما انتخاب شده و صرفاً با بت شهیل فهم و قوع آن حادثه — بدون ارتباط ذاتی با حادثه — اندیشه می‌شود، ندارد.

مطا العذر ریاضی در این تansور بر می‌گردد به کارهای اساسی ریمان در ایجاد هندسه غیر اقلیدسی $g_{\mu\nu}$ و دیگران در ایجاد دیفرانسیل مطلق $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$. من در حاشیه مفهوم تansور را توضیح داده‌ام و تبدیل پیچیدگی اساسی آن اینجا صرفاً به اشاره‌ای بسنده می‌کنم که تansور عمومی ترین تابع مختصات به شمار می‌رود که عدد و بردار و ماتریس حالت‌های خاص آن هستند.

مسئله سوم یعنی میدانی کردن جاذبه را اینشتین با انتخاب مضربی از اسکالرهای ریمان (R) و تansور اصلی متريک (g) به عنوان زیر انگرال اصل هامیلتون حل کرد. و معادله معروف وی را برای میدان جاذبه چنین به دست آورد:

$$K_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho} g_{\nu\rho} - R g_{\mu\nu}$$

به این ترتیب نیروی جاذبه که بعد از چیزی بیشتری در فیزیک نیوتونی وارد شده بود، بجهت عدم توافق با مقادیر تجربی نظری تبدیل $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ ادار عطارد $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ و اساساً بدليل انتکای وجودی آن به پذیرش اجرای مقاهم غیر تجربی و غیر منطقی بی نظیر (فضا و زمان مطلق و نیرو) جای خود را به مفهوم انحنای فضای فیزیکی داد، که جنبه‌ای کاملاً ریاضی داشت.^{۶۱}

انحنای فضا تحویل کرد.

بعداز میدانی کردن جاذبه، اینشتین کوشید که میدان واحدی برای هرسه میدان‌های جاذبه و الکتریسیته و مغناطیس در قالب نظریه نسبیت عمومی ارائه دهد. لکن بهجهت عدم ارتباط اساسی بین این سه در فرمول بندی اولیه او از نظریه مذکور با اصطلاح نظریه «موقت»^{۴۳} یادمی شود. اولین کوشش تاحدودی موفق درایجاد میدان همچا یا به اصطلاح نظریه حوزه یکی شده^{۶۴} و سیله هرمان^{۶۵} انجام گرفت، که بعداً وسیله ادینگتن^{۶۶} به صورت میدان واحد مقترانی^{۶۷} ادامه یافت. به عنوان توضیحی که شاید از جمله دیگری نیازهایی داشته باشد به نظریه فضاهای وايل اشاره می کنم، همچنانکه در مورد معادلات میدان جاذبه مفهوم «انحنای برداری»^{۶۹} دل اساسی را بازی می کند، در حالی که طول بردار در میدان جاذبه رجعت باقی می ماند. برای رساندن اثر میدان الکترومagnetیک تیک در جوار میدان جاذبه (وايل) مفهوم «انحنای طول»^{۷۰} را تحت تأثیر میدان الکترومagnetیک پیش کشید. به این ترتیب در نظریه وايل انحنای بردار رسانده اثر میدان جاذبه و انحنای طول رسانده اثر میدان الکترومغناطیس می باشد. و با ارائه يك فرمول کلی می توان هرسه میدان را به طور واحد (تواماً) مطالعه کرد. لکن امروزه با پیدائی مفهوم میدان کوانتیزه برنامه وحدت میدانی ناتمام و شاید غیر عملی به نظر می رسد. مسلماً ضروری بود که در ادامه به مکانیک کوانتیک پردازم. لکن بهجهت تفصیل مطلب و پیچیدگی ضروری ریاضی کردن در شوری کوانتم، از آن می گذریدم تا شاید بعد فرصت دیگری پیش آید.

ذیرنویس‌ها

(۳) اینجا تصویر را می توان انعکاس نیز تعییر کرد، و یا اصولاً با تغییر ریاضی تصویر بهطور کلی و با تغییر هندسی و برداری آن یکسان تلقی کرد، نظیر تصویر یک بردار روی یک امتداد که مولفه بردار مذکور در آن امتداد را به دست می دهد. هرگاه انسان و ذهن اورا به درستی جزوی از طبیعت تلقی کنیم، متقابلاً ریاضیات و فیزیک را نیز توأم یک مجموعه محصول شناخت می توان تلقی کرد که ریاضیات تصویر فیزیک و فیزیک ریاضی شده تصویری از هر دو به شمار می رود.

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS SYMBOLS

(۴) نماد عالم در دستور زبان نظیر کلمه (اسب) در واقع نماد دو نشانه ای برای ترکیبی از مفاهیم به شمار می رود که تداعی تصور اسب را در ذهن ایجاد می کند.

(۵) بیشتر آنچه که به عنوان نظریه های قدیمی تلقی می شوند اصولاً فرضیه به شمار می رفته اند.

(۶) لاگرانژ (L. L. LAGRANGE) ریاضی دان برجسته فرانسوی که در ریاضیات و مکانیک آسمانی کارهای اساسی انعام داده است، معادلات حرکت در مکانیک کلاسیک به نام اوست (۱۸۱۳-۱۷۳۶).

(۷) هامیلتون (W. R. HAMILTON) ریاضی دان بزرگ ایرلندی، در فیزیک ریاضی نیز کارکرد و اصل هامیلتون را در مکانیک کلاسیک ابداع نمود، از کارهای دیگر وی اختراع حساب کواترینیون (چهار مقداری) است (۱۸۰۵-۱۸۶۵).

(۸) ماکسول (J. C. MAXWELL) فیزیکدان انگلیسی در الکترومغناطیس و نظریه سینتیک گازها کارهای اساسی کرده است به نظر برخی بعداز نیوتون برجسته ترین عالم انگلیسی به شمار می رود. (۱۸۷۹-۱۸۱۳).

(۹) جاکوبی (K. G. J. JAKOBI) ریاضی دان برجسته آلمانی که مکانیک کلاسیک را بسط داد و معادلات اساسی حرکت به اس معادلات هامیلتون-یاکوبی را از آنها بدست آورد (۱۸۵۴-۱۸۰۵).

GENERALIZED COORDINATES

(۱۰) عموماً در مکانیک کلاسیک دستگاه مختصات با n درجه آزادی یا n بعدی در بطری گرفته می شود، هرگاه $n=3$ باشد، در این صورت مکانیک تعمیم یافته نیوتون حاصل خواهد شد.

(۱۱) اuler (L. EULER) ریاضی دان سویسی که سلطان ریاضیات نامیده می شد، در بسیاری از زمینه های ریاضی و فیزیکی کارکرد. درباره اپتیک و نظریه موجی نور مقالات متعددی انتشار داده است (۱۷۸۳-۱۷۰۷). از معادلات اویلر.

MATHEMATIZATION

(۱) منظور تحریج بهایست که در ترتیب و استنتاج آن تعییرهای منطقی ملاحظه شده باشد، مثال بارز وکلی این آزمایش ها همه تجارب آزمایشگاهی است که با توجه به اصل عدم تغییر انجام می شوند و یا تجرب ذهنی است که به نام آزمایش فکری یا اصطلاح معمول آن (GEDANKEN EXPERIMENT) مشهور است.

آورد. نظریه قدیم کوانتموں به کارهای وی و «زومرفلد» فیزیکدان آلمانی متکی است. یکی از چهار فیزیکدان درجه اول جهان به شماره‌ی رود. مفهوم ترکیب بین صور ذره‌ای و موجی ذرات اتمی ازاو بوده در ۱۹۲۲ جایزه‌نوبل را به دست آورد (۱۹۶۲-۱۸۸۵).

(۲۵) n رجعت پلانگ به افتخار هاکس‌پلانگ فیزیکدان بر جسته آلمانی است، اصطلاحاً کوانتموں انرژی در زمان نیز نامیده می‌شود مقدارش برابر $\frac{e}{6\pi \times 10^5}$ می‌باشد. بر طبق فرضیه کوانتموں پلانگ کمترین مقدار انرژی متبادله در طبیعت معادل این مقدار است و کمتر از این ممکن نیست، از این‌رو انرژی به صورت مضاربی از این واحد منتقل می‌شود و به همین سبب انتقال انرژی نداشته باشد بلکه جزء جزء یا کوانتموی و خلاصه منفصل است.

(۲۶) این حالت n بزرگتر از یک ناظر به مردمدارهای اتمی بوهر است که وقتی الکترون در مدارهای بسیار دور از هسته قرار داشت وضعیت وی بر طبق روابط مکانیک کلاسیک در مکانیک کوانتیک قابل محاسبه است. که البته یک حالت حدی خاص به شمار می‌رود.

DIE KOPENHAGENE DEUTUNG DER QUNTEN (۲۷)

THEORI مفهوم کپنه‌اگی نظریه کوانتموں در طول اقامت هایزنبرگ در کپنه‌اگ در انتیتوی بلگداد مسوی نزد بوهر، وسیله هایزنبرگ و بوهر ایجاد شد، این مفهوم بر اساس اصل عدم قطعیت اصل تناظر و اصل ترکیب (پند-یوش هردو تغییر موجی و ذره‌ای) استوار است.

(۲۸) منظور من ناطر بر مقاله معروف هایزنبرگ به نام «درباره محتوى عيني سینماتیک و مکانیک کوانتیکی که در (۱۹۲۷) در نشریه فیزیک به زبان آلمانی انتشار داد.

(۲۹) ورنر هایزنبرگ W. HESENBERG واضح مکانیک کوانتیک، اصل عدم تعیین، ساختمن ترکیبی هسته، مکانیک پر اش، یکی از چهار فیزیکدان درجه اول تاریخ، در فلسفه نیز تأثیرگذشت بر نده جایزه نوبل ۱۹۰۱ (۱۹۷۶). مفهوم کپنه‌اگی و اصولاً نظریه کوانتموی بر اساس نظرات وی استوار است. اصل عدم قطعیت او در نظریه علوم نیز دگرگونی اساسی ایجاد کرد.

(۳۰) HAMILTONIAN کمیتی است مساوی مجموع انرژی‌های سینتیک و پتانسیل سیستم هوردن نظر و به لحاظ ریاضی مشتق مکانی وی معادل نیرو و مشتق وی بر حسب اندازه حرکت، سرعت را می‌دهد. حاصل همین مقادیر به نام معادلات کانونیک هامیلتون معروفند. هرگاه «T» انرژی سینتیک و «U» انرژی پتانسیل و «H» هامیلتونین باشد، داریم $H = T + U$ ، کمیتا H مساوی انرژی کلی سیستم نیز هست.

(۳۱) همچنان‌که در متن نشان‌داده شده‌رگاه $\frac{d^2r}{dt^2} m$ را مساوی مشتق زمانی اندازه

لایک اثر بعداً در متن به تفصیل بحث شده است.

(۱۶) این اصل در ادبیات علوم فارسی با اصطلاح اصل حداقل عمل معروف است. در حالی که مفهوم اکسترم در اصطلاح لاتین آن نیز می‌تواند می‌نیم (حداقل) یا ماکریم (حداکثر) معنی دهد. از سوی دیگر به طور ریاضی نیز (مویر توئی) نشان‌داده که بعضی موارد رفتار فیزیکی با حداقل عمل توام است (Principle of Least Action)

(۱۷) لایک اثرین عبارت از تفاضل انرژی‌های سینتیک و پتانسیل سیستم است و مفهومی ریاضی می‌باشد.

(۱۸) در ریاضیات مفهوم توام می‌نیم و ماکریم را دارد.

(۱۹) فضای عموماً مشکل که n بعده بوده و مختصات تعیین داده شده (q_n, ..., q_۲) در این فضای بر روی n محور مختصات قرار دارند. یکی از ساده‌ترین صور این فضای عمومی وقتی است که زاویه و یا سرعت نیز در کنار مختصات جسم در نظر گرفته شوند.

(۲۰) معادلات نیوتون را می‌شود دو معادله کلی مرکب از معادله حرکت

$F = m \frac{d^2r}{dt^2}$ و معادله نیروی جاذبه بین دو جسم $F = \pm K \frac{m-m'}{r^2}$ دانست که در آنها

m و m' نماینده جرم و d نماینده دیفرانسیل، r نماینده فاصله مکانی و t نماینده فاصله زمانی، K رجعت جاذبه و F پیرو معنی می‌دهد.

(۲۱) حاصل تجربه به عنوان ضبط اثر حاده مادی بر طبق معیارهای فیزیکی، بعداز مقایسه با مقایس‌های اندازه‌گیری به صورتی کمیتی یادهای واحد در حواهند آمد.

(۲۲) تنها چیزهایی که ها از سیستم اتمی می‌توانیم اندازه بگیریم آنهم در حالت تحریک اتم فرکانس اشعه (انرژی صادره) و شدت اشعه مذکور است. البته می‌توان بدعاکس در موادی همین کمیت را در دروغ جذب اشعه مذکور و سیله اتم نامبرده اندازه گرفت. از روی شدت اشعه می‌توان بر طبق تئوری دامنه موج متشعشع را حساب کرد.

(۲۳) بر طبق اصل تناظر (CORRESPONDENCE PRINCIPLE) فرمول بندی مکانیک کوانتیک باید در حالت $h \rightarrow 0$ به سمت مکانیک کلاسیک میل کرده و بدآن صورت در باید. با استفاده از این اصل می‌توان بسیاری از داده‌های کلاسیکی را در حد اصل مذکور در مکانیک کوانتیک به کار گرفت. مثلاً می‌شود معادله شرودینگر را از معادله هامیلتون-یاکوبی نتیجه گرفت.

(۲۴) نیلز بوهر (NIELS BOHR) دانشمند بر جسته دانمارکی، بار اتر فورد کارکرد و نظریه‌های او لیه را عرضه داشت که برایش جایزه نوبل را ارمنان

از او بود و سهمی اساسی در نظریه الکترومagnetیک دارد (۱۸۶۷-۱۸۹۱).
 (۴۱) چرا که گفته می شد مغناطیس در فلز یا دقیق تر اکسید آنها نیز به طور طبیعی وجود دارد، البته گفتگی است که مغناطیس طبیعی نیز در واقع بعد از تحلیل مغناطیس الکترونی و هسته ای به نظریه عمومی الکترومغناطیسی مر جو ع است.
 (۴۲) GALILEI G. دانشمند بر جسته ایتالیائی که در فیزیک مکانیک و نجوم کارهای اساسی انجام داد. یکی از بنیانگذاران اساس تجزیی علوم، نظریه مکانیکی نیوتن در واقع بکارهای وی متک است (۱۸۴۲-۱۸۶۴).

(۴۳) بطورکلی در نمایش مفهوم انتگرال و دیفرانسیل از تقسیم سطح زین هشتگنی حاصل از معادله هورددیفرانسیل یا انتگراسیون بطرزی هندسی استفاده می‌کنند. فرمایوشی حسابی جیری را برای اولین بار برای محاسبه ماتریس و می‌نیعم که در جبن وسیله مشتق‌گیری تعیین می‌شود، به دست آوردند.

(۴۴) FERMAT . P هنفکر و ریاضیدان فرانسوی، که بعضی از آثارش در دسترس نیست. در نظریه اعداد کارهای ارزنهای دارد و اصل حداقل زمان در همین بور را ابداع کرد که پایه‌ای برای اصل حداقل عمل و علم اپتیک می‌تواند بدشمار رود (۱۶۴۵-۱۶۸۰).

(۴۵) CLOUD CHAMBER را اولین بار فیزیکدان انگلیسی ویلسون اختراط کرد، در حالت عمومی خود ممکن است از گاز یا پراز ذرات بخار آب است که وقتی ذرهای باردار (الکتریکی) در این محفظه عبور کند، ذرات بخار آب سده راه خود را بعداز برخورد، یونیزه کرده و آنها در نتیجه یونیزه شدن برق کوتاهی می‌زند که می‌شود از این برق عکس گرفت و در نتیجه بهمسین ذرات یا تشبع آنها پی برد. (توضیح تقریبی).

۴۶) R. P. FEYNMAN فیزیکدان امریکائی، روش سومی بعداز مکانیک ماتریسی (هایزنبرگ) و مکانیک هوجی (دیناک - شرودینگر) برای مکانیک کوانتیک پیشنهاد و به این وسیله الکترو دینامیک کوانتیک را توسعه داد (متولد ۱۹۱۸) حاصل نمود.

۴۷) INVARIANT یعنی غیرمتغیر یا پایدار. پایداری قانون فیزیکی در مقابل هر تبدیل، بیان بعض قوانین مقام است.

(۴۸) LORENTZ-TRANSFORM ترانسفورماتیون یا تبدیل بین دو دستگاه مختصات اینترسیال که از اساس نظریه نسبیت خصوصی به شمار می‌رود. لورنتز واضح نظریه الکترونی، الکتر و مغناطیس بوده برندۀ جایزه نوبل (۱۹۰۲) بوده و سالهای است زمامت فیزیکدانان را داشت (۱۹۲۸-۱۹۴۳).

۴۹ در اینجا منظور رابطه و تجربه کولمب است که نیروی الکتریکی یک جسم الکتریکی را روی جسم همگارش به طور تجربی تعیین و فرموله می‌کند

محیط تجربه و F فاصله دبار و F نیروی کولمبی است.

$$F = -\frac{dv}{dt} \quad \text{و} \quad m \frac{d^2t}{dt^2} = \frac{d}{dt}(P)$$

حرکت بکریم یعنی (P) را می‌توان

$$F = m \frac{d^2r}{dt^2} \quad \text{و} \quad P = \frac{dL}{dv}$$

می‌تواند تلقی شود. و (سرعت) پس رابطه

به صورت $-\frac{du}{dr} = F = m \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}(P)$ نوشته و بعد به صورت

$$-\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{dv}\right)$$

درآورد. اگر همه را به یک طرف بیاوریم و $\frac{dr}{dt} = v$ بنویسیم. معادله اویلر لآخرانی حاصل خواهد شد.

^{۳۲}) همان «FLELD» انگلیسی و یا «DASFELD» آلمانی است.

۳۳) **ETHER** یک جوهر قراردادی فرضی که تمامی فضا، خلاء یا حجم ماده را پر می‌کرد. تصور مکانیکی برایش از اینجا پیش می‌آمد که تصور کردندهم چنانکه صوت احتیاج بهنگلی مادی دارد، اشعة نورانی یا الکترومagnetیک نیز- که در خلاعه منتشر می‌شد- در واقع بوساطه وجود وی است که منتقل می- شود، آزهایش مایکلسن- هورلی نشان داد که چنین عامل فرضی هیچ اثری در سرعت نور نداشته، در نتیجه تأثیری در تجارب فیزیکی نمی‌تواند داشته باشد. از اینرو اینشیان بالاتکاء به اصل اساسی تجربی (ماخ) برای نظریه علمی، وجود فرضی، وی را کنار گذاشت.

(۳۴) در اصطلاح قدیماً این جوهر هیان همه اجسام را پرکرده و واسطه انتقال همه آثار مادی به شمار می رفت.

۳۵) رنه دکارت (R. DESCARTES) فلسفه فرانسوی، ریاضیدان و فیلسوف

(٣٦) Ch. HUYGENS فيزيكادان هلندي، واضح نظرية موجي نور و نظرية حرکت بادول (١٦٩٥-١٧٤٢).

۳۷) FRESNEL . A ، فیزیکدان فرانسوی در بسط نظریه موجی نور و نظریه امواج طولی کارکرد (۱۸۲۷-۱۷۸۸) .

ELECTROMAGNETIC FIELD (٣٨) میدانی که خواص الکتریکی و مغناطیسی توامان در آن قابل تجلیل اند.

۳۹) ماکسول نظریه میدان الکتر و مغناطیس را براساس نظریه فاراده درمورد ارتباط بین خواص میدان الکتریکی و مغناطیسی ارائه کرد. فاراده در سال ۱۸۲۱ اثاء الکتر و مغناطیس را کشف کرده و اثر مغناطیس روی نور را مطالعه نموده بود.

M. FARADY (۴۰) ، فیزیک-شیمی دان انگلیسی، مفهوم میدان نیروی فیزیکی

- همچنانکه می‌بینیم در تبدیل تانسورها قیافه‌خود تابع باقی‌مانده تنها در مضری دیفرانسیل ضرب می‌شود. ظرفیت تانسور را با تعداد اندیس‌های بالا (ناهمگرد) و بائین (همگرد) آن تعریف می‌کنند.
- (۵۸) هندسه ریمانی از این‌رو پایه ریاضی نسبیت عمومی قرار گرفته خاصیت‌مهم فضای عینی اختناء در تقاطع مختلف آن فرق نمی‌کرد و این می‌توانست به توجیه وجود میدان جاذبه متجانس از طریق اختناء کمک‌کند.
- (۵۹) در مرور انتقال یک بردار در فضای منحنی و دیفرانسیل‌گیری در مختصات منحنی الخط تعیین مفهوم عادی دیفرانسیل ضروری می‌آید.
- (۶۰) دوران مدار عطارد به اندازه $34^{\circ} 46'$ (مانیه (مثلثاتی) در هر قرن و سیله نسبیت عمومی به طور نظری قبل تحلیل است، همچنین انتقال طیف‌ستارگان به سمت قرمن را نیز در شکل نسبیتی جاذبه می‌توان دقیقاً تحلیل کرد در حالی که قبل تحلیل این امر امکان نداشت.
- (۶۱) مفهوم اختنای فضای از روی تانسور اختنای قابل درک است که این خودکمیتی ریاضی به شمار می‌رود.
- (۶۲) سیله یا نمادگری‌ستوفل عبارت از ترکیب مشتقات تانسور اصلی متربیک ریمانی یعنی η^μ_{ν} است.

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^\mu_{\eta\eta} \left(\frac{\partial g_{\eta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\eta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\eta} \right)$$

- (۶۳) «PROVISORISCHE» به نظریه کلی نسبیت عمومی این‌شیوه اطلاق می‌شود که در آن به جای طرف دوم معادله جاذبه این‌شیوه که تنسور انحرافی-اندازه حرکت می‌باشد، تاظریه میان انحرافی و پتانسیل و اندازه حرکت ماده و تانسور نماینده میدان الکترومagnetیک استعمال شده است. بدليل جدایی اساسی دو میدان جاذبه والکترو-مغناطیس در این فرمول بدی در اصل این میدان واحد به شمار نمی‌رود.

- (۶۴) «DIE EINHEITLICHE FELDTHEORI» ریاضی‌دان بزرگ آلمانی در اصطلاح اصلی آلمانی است.
- (۶۵) H. WEYL ریاضی‌کارهای اساسی‌کرده و هم‌وارد کننده نظریه گروه در مکانیک کوانتیک به شمار می‌رود.

- (۶۶) A. EDDINGTON ریاضی-فیزیکدان انگلیسی در نسبیت و توسعه ریاضی آن‌کارکرد و آثار متعددی در فلسفه علمی منتشر کرده است.
- (۶۷) میدان متقارن به میدانی گفته می‌شد که در آن هر دو میدان جاذبه والکترو-مغناطیس ارزش و وضعیت یکسانی در بیان میدان واحد داشته باشد.
- (۶۸) استادم‌هر حومه پر و فوره‌شتر و در زمینه فضاهای وايل کارکرده بود، گفتم شاید داشتن این‌که فضای وايل چه‌چیزی است برای علاوه‌نمودان استاد-همچنانکه برای من-جالب باشد.

(۵۰) راقم بحث در نظریه نسبیت خصوصی را انجام‌نداده است، از این‌رو که در واقع نسبیت خصوصی در نظریه نسبیت عمومی مستقر است. لکن به اشاره اساس آن را ذکر می‌کنم که (رجعت و حد بودن سرعت نور در عالم طبیعی) و (اصل همارزی دستگاه‌های مختصات جبری این‌سیال نسبت به بیان هر قانون فیزیکی) و (ترانسفورماسیون اورنتر) می‌باشند.

- (۵۱) B. RIEMAN ریاضی‌دان در جسته آلمانی، یکی از چهار دیفرانسیلان بزرگ تاریخ کارهای اساسی در هندسه و آنالیز انجام داد، هندسه ریمانی (غیر اقلیدسی) را با اختیار اصل متعارفی (از یک نقطه خارج خطی مستقیم، نمی-توان هیچ خط مستقیمی موازی آن‌کشید) به جای اصل پنجم اقلیدس، ایجاد کرد شاگرد و همکار (گاؤس) به شمار می‌رفت (۱۸۶۶-۱۸۲۶).
- (۵۲) سیستم یادستگاه مختصات این‌سیال به دستگاه مختصاتی گویند که جسمی که نیروی بروی وارد نشود در این دستگاه مختصات سرعت ثابتی خواهد داشت. دستگاه مختصات غیر این‌سیال (غیر این‌سی) طبعاً باشتات یعنی سرعت غیر رجعت سر و کار خواهد داشت.

- (۵۳) این نوع میدان جاذبه را به تعبیر دیگری میدان جاذبه غیر واقعی نیز گویند. این بیان الیه در بررسی میدان در ناحیه محدودی از فضای می‌تواند تحت شرایطی بدوي اطلاق شود. از لحاظ ریاضی چنین میدانی می‌توان وسیله تبدیل به سیستم مختصات مناسبی حذف کرد. در حالی که میدان جاذبه واقعی قابل حذف وسیله هیچ‌گونه تبدیل مختصاتی نیست.

- (۵۴) DIEMETRIK، فاصله دیفرانسیل چهار بعدی (جایگاهی) بین دونقطه بسیار نزدیک در فضای چهار بعدی را گویند. این فاصله برای اشعه نورانی صفر می‌شود چرا که وی با سرعت نور حرکت می‌کند. ساده‌ترین صورت آن $ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2$ است که S ، فاصله و C سرعت نور است.
- (۵۵) معادلات هامیلتون-یاکوبی در صورت چهار بعدی آن برای ذره‌ای به‌جرم m و اکسیون S به صورت زیر است.

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - m^2 c^2 = 0$$

- (۵۶) فضای عادی بدون اختنا را گویند. متربیک آن دارای ضرایب واحد است $g^{\mu\nu}$ برای فضای اقلیدسی به شکل ماتریسی چهار بعدی و قطری است که یعنی صرفاً عناصری در قطر داشته و در آن:

$$(برای هر \mu, \nu) g^{\mu\nu} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, g_{44} = -1$$

- (۵۷) تنسور تابعی از مختصات است که تبدیل آن وسیله مضارب معینی از مشتقات مختصات تبدیل شده نسبت به هم بیان می‌گردد. یک تانسور ناهمگرد با اظريفی یک به صورت $(..., x^i, x^j) A^i$ در تبدیل به صورت زیر درمی‌آید

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} A^j$$

او می‌گوید: برنامه شوروی در بسیاری موارد جلوتر از نظام آموزشی است و ریاضی دانان و مریبان بر جسته مرتبآ آن را مورد انتقاد قرار می‌دهند. موضوع بحث وسعت برنامه نیست (مثلاً گجاندن ریاضیات عالی که مورد تحسین جهانیان قرار گرفته) بلکه برخورد و تجسس‌های جدید است که مقرر شده.

ویرسوب تردید ندارد، اگر چه عدم توافق‌ها بی‌شك وجود خواهد داشت، با این همه شوروی خواهد توانست برنامه آموزش ریاضی را در سطح فوق العاده عالی نگاه دارد و این امر تأثیر فراوانی در نیرومندی علمی، صنعتی و نظامی شوروی در سال‌های آینده دارد. او می‌گوید: «به عقیده من تسهیلات اخیر شوروی در زمینه آموزش و پژوهش، هرچند مانند پرتتاب اسپوتنیک چشمگیر نیست، خطیزی مهم برای امنیت ملی امریکا به شمار می‌رود، خطیزی که تهدیدآمیزتر از همه خطرهای پیشین است و مقابله با آن دشوارتر.»

یک سال پیش، ویرسوب یافته‌های خود را در بنیاد ملی علوم مطرح ساخت و این گزارش یکی از عواملی بود که کارتر خواستار تجدیدنظر در برنامه آموزش علوم و تکنولوژی در ایالات متحده شد. همچنین، یافته‌های ویرسوب در مطبوعات امریکا انعکاس وسیعی یافت و تحت عنوان‌هایی از این قبیل مطرح گردید: «بر罕 در کلاس درس علوم» و «شکاف معنوی».

فوکوس (نشریه انجمن ریاضی امریکا)،
شماره اول، سال اول، مارس ۱۹۸۱.

انقلاب در آموزش ریاضی

«... اتحاد جماهیر شوروی در دهه گذشته در زمینه آموزش ریاضیات و علوم پیش از دانشگاهی به سطح بی‌سابقه‌ای رسیده است این تغییرات که شوروی‌ها آن را انقلاب آموزشی می‌نامند در حکم تسهیل آموزش برای همه جمعیت است.»

این نتایجی است که پرسفسور ایزاک ویرسوب در دانشگاه شیکاگو پس از مطالعات جدی نظام آموزش و پژوهش شوروی بدان رسیده است. او تفاوت فاحش میان کیمی و کیفیت آموزش پیش از دانشگاهی در شوروی و امریکارا بیان کرده و اظهار داشته است این تفاوت چنان عظیم است که امکان هر مقایسه‌ای را بی‌معنی می‌سازد.

پژوهش‌های دیرسوب او را متقادع کرده که برنامه آموزش عمومی ده ساله در شوروی خیلی غنی‌تر از آموزش دوازده ساله ایالات متحده است و ۹۸٪ جمعیت لازم التعلیم، ریاضیات را تا حد حساب انتگرال و دیفرانسیل فرا می‌گیرند. دانش‌آموzan شوروی ۵ سال فیزیک، ۴ سال شیمی، ۵/۵ سال زیست‌شناسی، ۵ سال جغرافیا و یک سال اخترشناسی می‌خوانند.

DIE VEKTOR KRUMMUNG ۱۶۹ DIE LANGEN KRUMMUNG ۷۰

۷۱) از فرمول وايل، هم نظریه جاذبه الکترومنگناطیس یعنی معادلات ماکسول-انیشتین تحصیل می‌شود و هم روابط کیهان شناختی را می‌توان به دست آورد. شکل ریاضی آن بسیار بیچیده و احتیاج به توضیح قسمت به قسمت مفصلی است که از حوصله این مقال خارج است.

سرطان نمودند و نیز در روز سه شنبه که سه شب مانده بود از جمادی الآخری ۳۷۸ هجری موافق ۱۸ ایولو ۱۲۹۶ اسکندری و مصادف ۱۱ شهریور ماه ۳۵۷ یزدگردی نیز چنین مجمعی از علماء و منجمین و مهندسین در بغداد تشکیل شد که تصدیق به صحت رصد وی در حلول شمس براس میزان کردند خلاصه رصدا و متفق القول گردید و صحت آن واضح شد.

صورت تصدیق علماء بر صحت رصدا بوسهل کوهی

بطوریکه در شرح حال ویزن ابن رستم کوهی ذکر شد دو مرتبه علماء بغداد شهادت به صحت رصدا بین رستم دادند یکی در حلول شمس باول سلطان و دیگری باول میزان سال ۳۷۸ هجری و هر دو تصدیق‌نامه در تاریخ الحکماء ابن قسطی ضبط است که یکی از آنها دارای امضاء علماء آن عصر است و دیگری بدون امضاء است که به عقیده نویسنده آنهم دارای امضاء همین شهود بوده چه فاصله میان آن دو سه ماه شعusi بوده است. اینک صورت تصدیق‌نامه رصد را که دارای امضاء علماء و داشمندان معاصر شرف‌الدوله دیلمی است و ترجمه آن در نامه دانشوران جلد دوم ضبط است می‌آوریم.

بسم الله الرحمن الرحيم

در این وقت اجتماع نمودند جماعتی که خطوط ایشان در ذیل این کتاب ثبت است از قضات و وجوده اهل علم و کتاب و منجمین و مهندسین در موضوع رصد شرقی مبارک اعظم الله برکته و سعادته دولتخانه ملک سیداجل منصور ولی التعم شاهنشاه شرف‌الدوله و وزیر‌المله اطال الله بقائه و ادام عزه و سلطانه و تاییده و تمکینه در طرف شرقی مدینه السلام (بغداد) در روز شنبه که دو شب مانده بود از صفر المظفر سال ۳۷۸ هجری مطابق با ۱۶ از خریان سال ۱۲۹۹ اسکندری در روز ائیران از خرداد ماه سال ۳۵۷ یزدگردی پس قرار یافت امر به حسب آنچه مشاهده کردند از آن الات و ادواتی که خبر داد بوسهل و یعن بن رستم کوهی بر آنکه دلالت کرد بر صحبت دخول شمس براس سلطان بعد از گذشتن یک ساعت معتدل سوae که روزش روز مذکور در صدر این کتاب بود و اتفاق کردند جمیعاً برآنچه جمله را یقین بران حاصل شد و ثوق اعتماد به صحت حکم مذکور ایشان را حاصل است. بعد از آنکه قبول کردند و مسلم داشتند جمیع حاضرین از مهندسین و منجمین و غیرایشان از آنان

این رستم کوهی ابوسهل ویزن بن رستم کوهی از متجمین مانه جهارم هجری است که اهل طبرستان بوده و در زمان عضد‌الدوله دیلمی می‌زیسته و س از یحیی بن ابی منصور و این اعلم، در اسلام وی موفق به رصد کواكب گشت و در مدت سی سال کار را به انجام رسانید و رصدی که یحیی بن ابی منصور به حکم مامون عباسی نموده بود ناتمام ماند ولی رصدا بوسهل که مصدق علماء فن گردیده به انجام رسید تا آخر عمر در بغداد ماند.

اما محرك وی به امر رصده‌مان اشرف‌الدوله بسر عضد‌الدوله بود که چون پدرش در سال ۳۷۲ هجری درگذشت و وی پس از کشمکش با برادر پادشاه، مستقل گردید در بغداد ابوسهل را وادر به امر رصد نمود و همان کاری را که مامون به یحیی بن ابی منصور ارجاع نموده بود وی دستور داد و ابوسهل رصد خانه در بغداد بنا کرد و آلات و ادوات جمع نمود. شرف‌الدوله پس از دو سال در گذشت ولی کار رصد تعطیل شد و سلاطین آل بویه ابوسهل را تقویت نمودند تا کار رصد تمام شد.

وفات ابوسهل در حدود سنّه ۴۰۵ هجری واقع شده از مؤلفاتش ۱- کتاب مراکز الامر، ۲- کتاب الاصول در هندسه از کتاب اقلیدس اقتباس گردیده، ۳- کتاب پرگار تمام در دو مقاله، ۴- کتاب صنعت اسٹرالاب با براهین در دو مقاله، ۵- کتاب احداث نقطه‌ها بر خط‌ها از طریق تحلیل نه ترکیب، ۶- کتاب در استخراج ضلع مسیع در دایره، ۷- کتاب دوازه متماسه وغیره است.

و در روز شنبه دو شب مانده به آخر صفر ۳۷۸ هجری موافق ۱۶ خریان ۱۲۹۶ اسکندری و مصادف روز ائیران خرداد ماه ۳۵۷ یزدگردی، اجتماعی از علماء عصر در مجتمعی حاضر شدند و تصدیق به صحت رصدا بوسهل در دخول شمس براس

که ایشان را تعلقی به این صناعت و چیزی از آن حرفت باشد تسلیم و قبولی که میانه ایشان خلافی در آن نبود که این آلت جلیل الخطر و بدیع آلتی است در نهایت استحکام صنعت آن و دقت دروی افزونست برجمعی آلاتی که در این کار معروف و معهود اند و آنکه مستعمل این آلت است بنهایت. آنچه ممکن از امر مرصودو غرض مقصود به وسیله این آلات و ادوات می‌تواند شد رسید و مودی شد آن رصدی که یاد کرده شد به آنکه بعد سمت الراس از مدار راس السرطان هفت درجه و پنجاه دقیقه بود و میل اعظم که آن نهایت بعد منطقه فلك البر و جست از دایره معدل النهار بیست و سه درجه و پنجاه و یک ثانیه باشد و عرض آن موضع که ذکر آن از آن پیش گذشت و رصد در آن واقع، آنچنان که نگاشته شد و آن ارتفاع قطب معدل النهار است از افق آن موضع حسبنا الله و نعم الوکیل.

تصدیقنامه دوم

بسم الله الرحمن الرحيم - دیگر باره مجتمع شدند در روز سه شنبه که سه شب مانده بود از جمادی الآخره سال ۳۷۸ هجری یازدهم شهریور ماه ۳۵۷ یزدجردی و ۱۸ از ایول سال ۱۲۹۹ اسکندری - جماعتی که خطوط ایشان در این صفحه ثبت است از قضات و مشاهیر منجمین و مهندسین و دیگران از اهالی علم هیئت و هندسه مجتمع بودند، در وقت مذکور بر آنکه رصد نمایند به استعمال آلاتی که ذکر شد در این صفحه گذشت. در آمدن شمس براس میزان و آن بعد از گذشتن ۴ ساعت از روز مذکور بود که سه شنبه باشد و نوشته هر یک از حاضرین به خط خود به صحت آنچه حاضر بود و مشاهده نمود از آنچه مذکور شد در تاریخ مذکور حسبنا الله و نعم الوکیل.

(جای امضاهای چندی که هر یک به خط خود نوشته اند)

قاضی ابویکر بن ضبه - قاضی ابوالحسن خوزی - ابواسحق ابراهیم بن هلال صابی - ابوسعید یونس نصرانی شیرازی - ابوالوفاء محمد بن محمدالحاسب - ابوحامد احمد بن محمد الصاغانی صاحب اسطلاب - ابوالحسن محمد بن محمدالسامری - ابوالحسن مغربی و یحیی بن رستم صاحب رصد

ترجمه فوق را خوب ننموده اند و فارسی سلیس نیست و ماعین آنرا برای آنکه یک مرتبه ترجمه شده بود بدون تصرف آوردهیم.

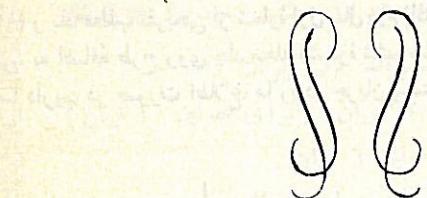
خلاصه آنکه ابوسهل ویژن آلتی ساخته بوده برای رصد شمس که دقیق بوده است و با محاسبه، دخول آفتاب را براس سرطان و میزان استخراج نموده و در آن دو

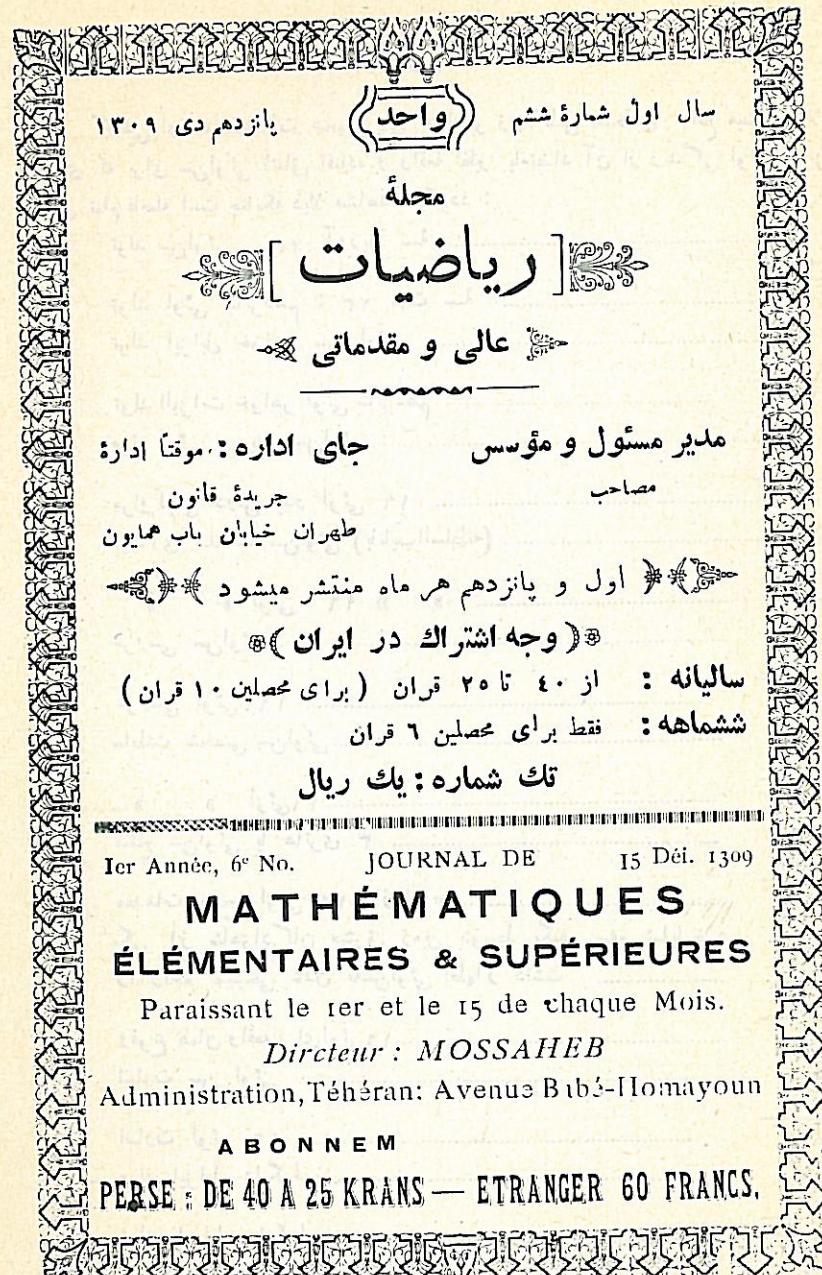
روز علماء را خواسته تا با آن اسباب بعد سمت الراسی شمس را گرفته در ساعت محسوب مرصود را یکی یابندور صدش با حساب موافق آمده و تصدیق براین موضوع علماء نموده اند.

در بعضی نسخ ابویکر بن ضبه را ابویکر بن صبر و ابوالحسن خوزی را ابوالحسین خوزی و ابوسعید یونس نصرانی شیرازی را ابوسعده فضل بن یونس نصرانی شیرازی آورده اند.

از گاهنامه ۱۳۱۰

تألیف سید جلال الدین تهرانی

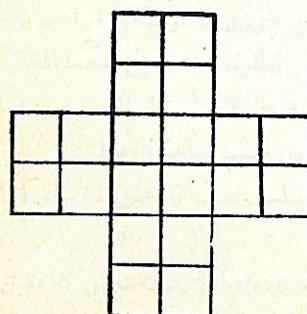




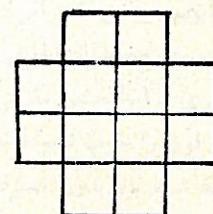
چند شماره از «مجله ریاضیات - عالی و مقدماتی» در اختیار ماست، دقیق‌تر بگوییم: شماره‌های ۵، ۶، ۹ و ۱۰ - ۱۱ سال اول و شماره اول سال دوم، این مجله به مدیریت مستول «صاحب» و از سال ۱۳۰۹ شمسی آغاز به انتشار کرده است. مجله‌های سال اول به صورت کلیشه‌ای و دست نویس و مجله سال دوم با حروف چینی چاپ شده است. مطالب این مجله به طور عمده، شامل حل مساله‌هایی از ریاضیات، فیزیک و مکانیک، در بخش‌های متفاوتی، برای داش آموزان سال‌های متوسطه و برای دانشجویان علاقمند به ریاضیات عالی، بوده است، ولی در عین حال، همیشه مقاله‌هایی در زمینه تاریخ ریاضی، معماهای ریاضی و بعضی جنبه‌های نظری هم، در آن چاپ می‌شده است.

در اینجا، یک مساله معماهی کوچک درباره حرکت اسب، از شماره ۹ سال اول (اول اسفند ۱۳۰۹) و یک مطلب تغزیحی از شماره اول سال دوم (آذر ۱۳۱۴) عیناً با همان خط و حروف اصلی، به اضافه طرح روی جلد مجله (شماره ششم سال اول) را آورده‌ایم و از خوانندگان تقاضا داریم، در صورت اطلاع، ما را در جریان بیشتر سرنوشت این مجله قرار دهند.
«اشتی با ریاضیات»

صلیب‌های اول



در هر یک انشکال دل باید این
اذ بکی اذ خانه ها حرکت نموده
دو غام خانه فقط می‌باشد و آن



شده بخانه اولیه مراجعت کند

مسائل داجع
به اسب
شطرنج

تصادفات

گاهی اوقات تصادفات عجیبی بین اعداد و زندگانی اشخاص واقع میشود مثلاً بیز واقعه‌ای که برای سن‌لوئی اتفاق افتاده و واقعه نظر یامضاد آن از زندگی لوئی شانزده ه سال تمام فاصله است جنانکه ذیلاً مشاهده میگردد:

- ۱ - تولد سن‌لوئی ۲۳ آوریل سنه
۱۲۱۰
۰۳۹
- تولد لوئی شانزدهم : ۲۳ اوت سنه
۱۷۵۴
۱۲۲۰
۰۳۹
- تولد ایزاپل خواهر سن‌لوئی
۱۷۶۴
۱۲۲۶
۰۳۹
- مرک اولی ۸ پدر سن‌لوئی
۱۷۶۰
۱۲۲۶
۰۳۹
- مرک اولی دوفن پدر لوئی ۱۶
۱۰۶۰
۱۲۳۱
۰۳۹
- ابدای سلطنت سن‌لوئی (بانایب السلطنه)
۱۷۷۰
۱۲۳۵
۰۳۹
- « « لوئی ۱۶ » »
۱۷۷۴
۱۲۴۳
۰۳۹
- عروسي سن‌لوئی
۱۷۸۲
یکی از شاهزادگان مشرق زمین بتوسط یکنفر سفیر تمایل خود را راجم بمسیحی شدن به سن‌لوئی اظهار داشت
۱۲۴۹
۰۳۹
- مقدمات صلاح لوئی ۱۶ بازرو ۳
۱۷۸۸
۱۲۵۰
۰۳۹
- اسارت سن‌لوئی
۱۷۸۹
۱۲۵۰
۰۳۹
- اسارت لوئی ۱۶
۱۸۷۹
و غیره
- مرک ایزاپل دانگولم
تولد ایزاپل دانگولم
۱۲۴

Reconciliation With Mathematics

Editor: Parviz Shahryari

Under the supervision of the editorial board

A supplementary Publication of the Free University of Iran

Address: *The Free University of Iran*

P. O, Box 11 - 1962

Aban Shomali St. Karim-Khan Zand

Boulevard Tehran - 15 Iran

Vol. V , No. 3, 1981