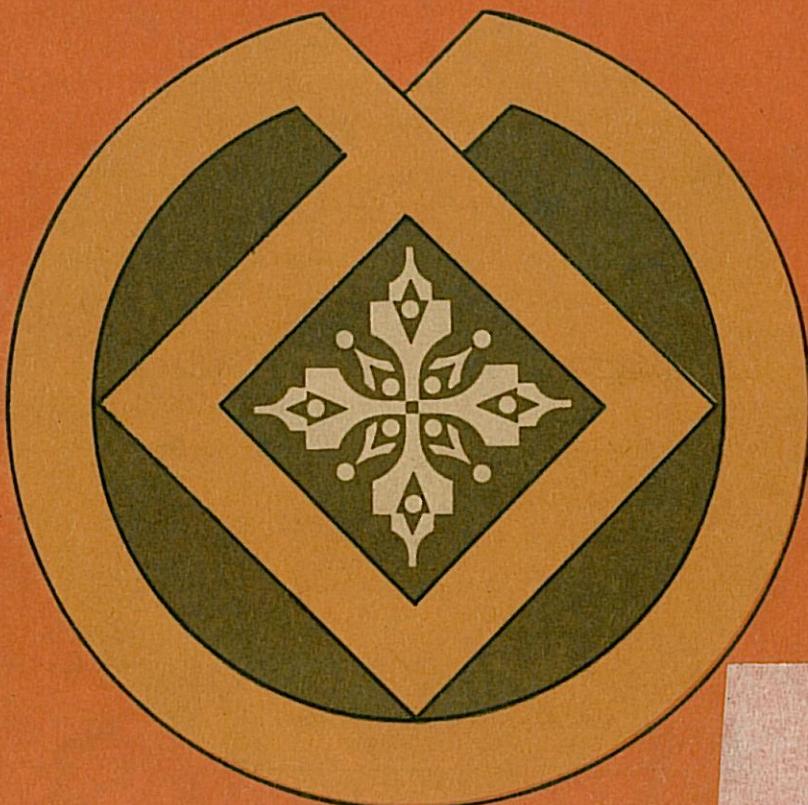


آشتبای ریاضیات

۱۸



تیر ۱۳۶۰

آشتی با ریاضیات

سردبر: پرویز شهریاری

مدیر داخلی: محمد حسین احمدی

زیر نظر هیئت تحریریه

از انتشارات جانبی گروه ادبیات و علوم انسانی

صفحه آرایی، تصحیح، چاپ و صحافی: مرکز تولید انتشارات گروه ادبیات و علوم انسانی
نشانی: تهران - خیابان کریم خان زند - اول آبان شمالی - گروه ادبیات و علوم انسانی

سال پنجم - شماره ۲ (۱۸)

فهرست مطالب

- | | | |
|-----|--|--|
| ۱ | مساله ریاضی را چگونه حل کیم؟ | یو. پوکناتچ |
| ۱۵ | بررسی و شمارش عناصر نخستین در فضای N بعدی محمد باقری | |
| ۲۸ | یخشی در زمینه عدد طبیعی | |
| ۳۲ | محمد حسین احمدی | طلوع ریاضیات جدید |
| ۴۶ | حل چند مساله نامتعارف | |
| ۵۰ | غلامرضا فرزین | نکته‌های درباره عده‌های اول |
| ۵۵ | | رنزوراز عده‌ها |
| ۵۶ | ل. س. فریمان | آثربندگان ریاضیات عالی (۸) |
| ۶۸ | دیوید مرمن | لگاریتم‌ها |
| ۷۸ | واسیلی دمیتریه ویچ چیستیاکوف | مساله‌های چیزی |
| ۱۰۳ | | شگذیشهای عدد |
| ۱۰۸ | پرویز شهریاری | تلاشی برای تنظیم فرهنگ ریاضی |
| ۱۱۶ | | رابطه میان ماده، فضا و زمان از نظر نسبیت عمومی - فاتالیت - |

۵۵ ریال

یو. پوکنچف

ترجمه پرویز شهریاری

مسئله ریاضی را چگونه حل می کنیم؟

بسیاری از کسانی که به ریاضیات علاقه مندند، می خواهند بدانند که آیا می توان روش های کوتاه و روشنی پیدا کرد که حل مساله های ریاضی را ساده تر کند. درباره این موضوع، پژوهش های زیادی انجام شده است؛ و در این مقاله درباره بعضی نتیجه گیری های جالب آنها سخن رفته است. نویسنده این مقاله، سال های زیادی است که در انسیتیوی فیزیک صنعتی مسکو، به تدریس ریاضیات مشغول است.

دانشجویانی که من با آنها در زمینه ریاضیات کار بسته کار خواهم کرد، امروز در نخستین گردهم آثی خود در تالار کنفرانس جمع شدند. امروز، مرحله تازه ای از زندگی آنها آغاز می شود، آنها، مشتاق و هیجان زده، می خواهند با تمامی مسیر زندگی آینده خود آشنا شوند. آنها در شوق کشف های بزرگ آینده خود می سوزند و من باید با نخستین سخنان خود، این راه نه چندان آسان را برای آنها توضیح دهم، راهی که باید به هدف دلخواه آنها منتهی شود.

این راه، از همینجا آغاز می شود، از کلاس درس، همراه با کار عادی و تجزیه و تحلیل های مستمر و روزانه از مثال های عادی و نمونه ای. روان شناسان مدت هاست به این نتیجه رسیده اند که تفکر هر انسانی، خواه داشمندی عالی قدر باشد یاد اشجوی کم تجربه سال اول دانشکده، بنا بر یک قانون مندی مشخص حرکت می کند. و به همین مناسبت است که سیک و روش حل مساله های پیچیده را می توان بر اساس نمونه های کاملاً ساده ای در کردن و یادگرفت. با وجود این، نتیجه گیری های مشخصی که از حل مساله ها بدست می آید، می تواند برای ما مفید باشد: وقتی که به مساله های مشابهی برخوردمی کنیم و به نوع و گروه آن پی می برمیم، می توانیم به سرعت، و به یاری نمونه هایی

آشتی با ریاضیات

سردیر: پرویز شهریاری

مدیر داخلی: محمد حسین احمدی

زیر نظر هیئت تحریریه

از انتشارات گروه ادبیات و علوم انسانی

صفحه آرایی، تصحیح، چاپ و صحافی: مرکز تولید انتشارات گروه ادبیات و علوم انسانی
نشانی: تهران - خیابان کریم خان زند - اول آبان شمالی - گروه ادبیات و علوم انسانی

سال پنجم - شماره ۲ (۱۸)

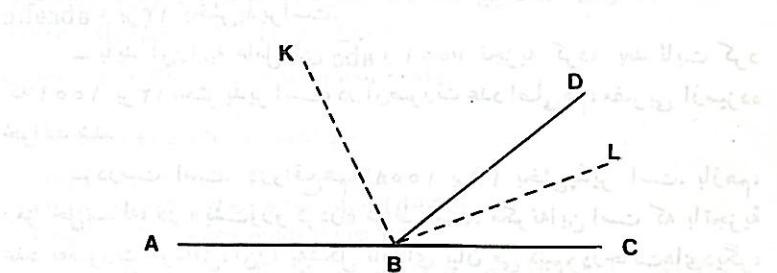
فهرست مطالب

- | | | |
|-----|-----------------------------|--|
| ۱ | یو. پوکنچف | مسئله ریاضی را چگونه حل کیم؟ |
| ۱۵ | | بررسی و شمارش عناصر نخستین در فضای N بعدی محمد باقری |
| ۲۸ | | بعشی در زمینه عدد طبیعی |
| ۳۲ | محمد حسین احمدی | طلوغ ریاضیات جدید |
| ۴۶ | | حل جند مساله نامتعارف |
| ۵۰ | غلامرضا فرزین | نکته هایی درباره عده های اول |
| ۵۵ | | رموز از عده ها |
| ۵۶ | ل. س. فریمان | آفرینشگان ریاضیات عالی (۸) |
| ۶۸ | دیوید مرمن | لگاریتم ها |
| ۷۸ | واسیلی دمیتریه ویچ چیستاکوف | مسئله های چینی |
| ۱۰۴ | | شکننده های عدد |
| ۱۰۸ | پرویز شهریاری | تلائی برای تنظیم فرهنگ ریاضی |
| ۱۱۶ | | رابطه میان ماده، فضا و زمان از نظر نسبیت عمومی - فاتالیف - |

دو زو ج پاره خط - که زاویه های محاطی را تشکیل می دهند - و دایره به دو کمان تقسیم می شود؛ این عنصرها بهم گره می خورند و از ترکیب مناسب آنها (یعنی مقایسه زاویه با کمانی که رو به روی آن است)، قضیه ای ظاهر می شود... چگونه این عنصرهای جزئی و جدا شده، به ذهن حل کننده مساله می رسد، تابتوانند با پیوند با عنصرهای داده شده، نوار محکم و هموار استنتاج منطقی را به وجود آورند؟

پژوهش گرانی که روی موضوع تفکر کار می کنند، کتاب های زیادی درباره سرچشم و روند این پیش آمد نوشته اند. پرداختن به اعتقدهای آنها، وقت زیادی می گیرد. بهتر است که از میان آنها، تنها چند نمونه مشخص را که حاوی اندیشه های آموزنده ای هستند، بیرون بکشیم و کوشش کنیم تا از این اعتقدهای اصل هایی را انتخاب کنیم که به بیان آنها بتوان استدلال ریاضی را تکامل بخشید.

ساده تر است که از مساله ای آغاز کنیم. دو زاویه ADB و BCD ، که در یک ضلع مشترک اند، داده شده است. نیمسازهای این دو زاویه، یعنی BK و BL ، برهم عمودند. ثابت کنید که سه نقطه A ، B و C ، روی یک خط راست.



اند. چه کسی می تواند این مساله را حل کند؟
دانشجویی بعد عوت من پاسخ داد:

- من صورت مساله را کمی تغییر می دهم و آن را به شکل دیگری در می آورم. این حکم که A ، B و C بر یک خط راست واقع اند، با این حکم که $\angle ABC$ برابر با 180° درجه است. هم ارزند. نیمسازهای BK و BL برهم عمودند، این هم، هم ارز است با این که بگوییم $\angle KBL = 90^\circ$. ولی، از آن جا که BK و BL ، زاویه های ABD و DBC را نصف می کنند، خواهیم داشت:

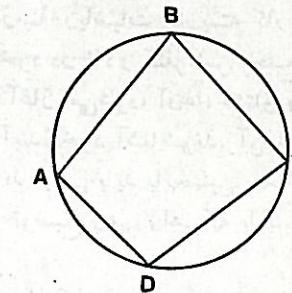
که قبله دیده ایم، آنرا حل کنیم.

این را هم بگوییم که حتی در مثال هایی هم که به نوع و نمونه مشخصی تعلق دارد ممکن است بدشواری برخورد کنید، زیرا در عمل مساله را، بدون ذکر نوعی که به آن تعلق دارد، مطرح می کنید و شما خود باید معلوم کنید که گروه آن کدام است.

و همین جاست که دشواری پیش می آید و شما نمی توانید موفق شوید که مساله مورد نظر خود را با یکی از راه حل های کلی، تطبیق دهید. در چنین مواردی است که ناچارید به تفکر خلاق رو آورید. قانون مندی این تفکر چیست؟ می کوشیم تاویز گی های روند خلاقیت را، به باری محصلوی که از آن به دست می آید، روش کنیم، شرط مساله را در نظر می گیریم (مهم نیست که این شرط، اثبات باشد یا محاسبه یار سم یا کشکل)، و آن را با شرح متوالی راه حل آن، مقایسه می کنیم.

مثلاً، دایره و چهارضلعی دلخواه $ABCD$ محاط در آن داده شده است، و باید ثابت کنیم که مجموع هر دو زاویه روبرو در آن (مثلاً زاویه هایی که در راس های B و D قرار گرفته اند)، برابر 180° درجه است.

اثبات حکم مساله را می توان به این ترتیب داد: بنابر تعریف چهارضلعی محاطی، زاویه های ABC و ADC ، زاویه های محاطی در دایره اند. این دو زاویه، به ترتیب، رو به روی کمان های ABC و ADC قرار گرفته اند. می دانیم که هر دو زاویه محاط در دایره برابر است بانصف کمان رو به روی خود.



بنابراین $\angle ABC$ برابر است با نصف $\angle ADC$ و $\angle ADC$ برابر است با نصف $\angle ABC$. مجموع کمان های ABC و ADC برابر است با 360° درجه. بنابراین، مجموع زاویه های ABC و ADC برابر 180° درجه می شود. ظاهراً در صورت مساله، بین آن چه که داده شده است با آن چه که باید ثابت کنیم، پر تگاه غیر قابل عبوری وجود دارد. بر عکس، شرح راه حل، نواری را به باد می آورد که محکم بهم بافته شده باشد. در طول راه حل، عنصرهای صورت مساله، و در انتهای آن، نتیجه مورد نظر دیده می شود. ولی، در این استدلال، چیزی وجود دارد که در صورت مساله وجود نداشت: چهارضلعی به

دیگر را، بهتر تبیّب، به صورت کسرهای $(1 - \cos 2\beta) / 2$ و $(1 - \cos 2\gamma) / 2$ نوشت. و این، تنها دونوع از تبدیل سینوس است؛ سینوس را بد نوعهای دیگری هم می‌توان تبدیل کرد: $\sin x$ را می‌توان به صورت $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ، $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ و خیلی از شکل‌های دیگری که در مثلثات دیده‌ایم، نوشت.

هنر تبدیل، نه تنها به حل مساله‌های ریاضی، بلکه به حل مساله‌های بسیار متعدد دیگری هم، کمک می‌کند. مثلاً، معماهی را به‌خاطر بیاوریم که در آن می‌خواهد کوتاه‌ترین مسیر بین عنکبوت و مگس را پیدا کند، وقتی که در دو نقطه دلخواه از دودیوار رو بروی یک اطاق قرار گرفته‌اند. به‌احتمال زیاد، شما راه حل را میدانید: باید متوازی‌السطحی را که از دیوارها سقف و کف اطاق تشکیل شده است، بگسترانیم و روی گستره آن دونقطه را باخط مستقیم، بهم وصل کنیم. همان‌طور که می‌بینید، در این جاهم، از استعداد خود در مشاهده شیء به صورت‌های مختلف خود، که نتیجه‌ای از انواع تبدیل‌های

۱. برای اثبات این نامساوی، به ترتیب، تبدیل‌های زیر را انجام‌می‌دهیم،

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= (1 - \cos 2\alpha) + \\ &+ \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\gamma) = 2 - \cos^2 \alpha - \\ &- \frac{1}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\gamma) = 2 - \cos^2 \alpha - \\ &- \cos(\beta + \gamma) \cdot \cos(\beta - \gamma) = 2 - \cos^2 \alpha + \\ &+ \cos \alpha \cdot \cos(\beta - \gamma) = 2 + \cos \alpha [\cos(\beta + \gamma) + \\ &+ \cos(\beta - \gamma)] = 2 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

حال روشن است که اگر α ، β و γ زاویه‌هایی حاده باشند، داریم:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma > 0$$

و از آنجا $2 + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2$

اگر یکی از سه زاویه α ، β یا γ قائمه باشد، داریم:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = 0$$

و از آنجا $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$

و بالآخره، اگر یکی از سه زاویه مغلظه باشند، کسینوس آن زاویه منفی می‌شود و درنتیجه:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma < 0$$

و از آنجا $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma < 2$

$$\widehat{ABC} = \widehat{KBL} = 180^\circ$$

- درست است. بینید، تغییر شکل شرط‌های مساله، و بیان همه آن‌ها به کمک مفهوم «زاویه» چقدر موقیت‌آمیز است؟ با توجه به این که همه جزعهای مساله، خصلت «زاویه‌ای» دارند، و با تنگی‌تر کردن محدوده مورد جستجوی خود، توانستیم، مساله را به سرعت و بدون هیچ زحمتی حل کنیم.

باید یاد بگیریم و عادت کنیم که از این روش مفید استفاده کنیم. وقتی که با مساله‌ای سروکار دارید، بکوشید تا همه شرط‌های آن را در یک دستگاه رابطه‌ها و یا یک نوع اصطلاح بیان کنید، بکوشید تا همه مصالح اولیه، به اصطلاح «خرج مشترکی» پیدا کنند.

روشن است که موقیت در این مورد، بستگی به این دارد که بتوانیم شرط‌ها و عنصرهای موجود در مساله را، به صورت‌های مختلفی بیان کنیم. مثل مساله‌ای که هم‌اکنون در برابر ما بود و توانستیم با «تبدیل بیان» حکم، آن را حل کنیم.

بازم مثال دیگری از این نوع. هر یک از حروف‌های a ، b و c را، به جای یک رقم گرفته‌ایم. می‌خواهیم ثابت کنیم که هر عدد شش رقمی به صورت $abcabc$ ، بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

- باید آن را به عامل‌های \overline{abc} و 1001 تجزیه کرد، بعد ثابت کرد که 1001 بر ۱۳ بخش‌پذیر است، در آن صورت عدد اصلی هم، مضری از سیزده خواهد شد.

- درست است. در واقع هم، 1001 بر ۱۳ بخش‌پذیر است. بازم، رمز حل مساله، در «پشت‌وروکردن» شرط است: مگرنهاین است که با تجزیه عدد به صورت دو عامل، آن را به شکل تازه‌ای بیان می‌کنیم. در حالات‌های دیگر، ممکن است لازم باشد که عدد را، به صورت مجموع یا خارج قسم عددهای دیگری بیان کنیم - در اینجا امکان‌های زیادی در اختیار ماست. به سراغ مساله‌های مثلثاتی می‌رویم و نمونه‌ای، از این نوع، انتخاب می‌کنیم: α ، β و γ را، زاویه‌های یک مثلث غیر حاده الزاویه در نظر می‌گیریم. ثابت کنید:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq 2$$

در این جاهم، اگر تبدیل را، به طور مناسبی انجام دهیم، راه ساده حل به دست می‌آید و رابطه حکم ثابت می‌شود. برای این منظور، باید جمله اول سمت چپ تساوی را به صورت تفاضل $\cos^2 \alpha - 1$ و هر کدام از دو جمله

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{1 - \cos^2 x} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)} \\
 &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \\
 &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots
 \end{aligned}$$

همان طور که می بینید، من به مجموعه بیان هایی که شما برای این تابع مثلاً تای می شناسید، دو بیان تازه اضافه کرده ام که در دوره ریاضیات عالی با آن ها آشنا خواهید شد. وقتی که دست کم با مقدمات این درس آشنا شدیم، آن وقت می توانیم همه این حالت ها را، و همچنین تعریف های مختلفی را که برای این مفهوم وجود دارد، و موارد کاربرد بیان جبری آن را و شکل های گوناگون اثبات آن را توضیح دهیم.

حالا درباره مفید بودن چنین تبدیل هایی، عمیق تر می آندیشیم. درمثال های دستوری ما، این تبدیل موجب شد تا جمله های قابل فهم را بسازیم، و این، تنها وقتی ممکن شد که شکل های دستوری واژه ها بایکدیگر سازگار شدند و حرف های ربط، بستگی بین آن ها را تامین کردند. به همین ترتیب، می توان گفت که تبدیل شکل بیان های ریاضی به اتصال و استحکام حلقه های زنجیر استدلال ریاضی، خدمت می کند. می خواهیم گفتگوی درباره این موضوع را، بامثال ای طنزآمیز و در عین حال، جدی و پرمتعنا، آغاز کنم.

یک روز، دختر بچه ای از مارک تواین پرسید: آیا دوست دارد، به عنوان هدیه روز تولد، کتابی به او بدنهند؟ طنز برداز بزرگ پاسخ داد: «میدانی عزیزم، همه چیز بستگی به این دارد که چه کتابی هدیه کنند. مثلاً اگر شیرازه چرمی داشته باشد، بد درد پاک کردن تیغ صورت تراشی می خورد. اگر کتاب نازک و کم ورقی باشد، می توان زیر پایه میز گذاشت و از تکان خوردن آن جلوگیری کرد. کتاب قدیمی سنگین را، می توان به طرف سکه مزاحم پر کرد، ولی اگر کتاب بزرگی از نوع اطلس های چهار گایی باشد، و صله ای عالی است که می توان به جای شیشه شکسته پنجره به کار برد».

ممکن در آن است، یاری جسته ایم.

ظاهراً در این موارد، یکی از ویژگی های اصلی ذهن و روحیه ما ظاهر می شود. این ویژگی چنان عمیق است که در اکثر موارد، به صورتی نا آگاهانه وارد عمل می شود. حالا سعی کنید، معنای این جمله را در آورید: خوب حالم نیست گر به سیاه، قابل فهم نیست؟ سعی کنید درباره این جمله وکر کنید: می درخشم مشرق، سپیده دم با تازگی.

صدای دوسره نفر با هم شنیده شد:

- مشرق می درخشد، سپیده دمی تازه

- بله، من هم همین معنارا در نظر گرفته بودم. جمله اول را هم می شود این طور تغییر کرد: «حال گر به سیاه خوب نیست».

چه تفاوتی بین این جمله های غیر قابل فهم، وجود دارد؟ تفاوت آنها در این است که در جمله های صحیح، قانون های دستوری رعایت شده است. ولی، شکل صحیح آنها، چگونه داده می شود؟ روش است که شکل صحیح جمله را، از میان انواع ممکن انتخاب، در شکل های مختلفی که می توانند داشته باشد، پیدا می کنیم. زبان شناسان، مجموعه همه انواع شکل های دستوری یک کلمه را، صرف آن کلمه گویند. وقتی که در جریان گفتگو، مغز ما، جایی در اعماق نا آگاه خود، جمله کامل و قطعی را می سازد، از همین «صرف ها»، یعنی شکل های مختلف هر کلمه به عنوان جزء های آماده ای که برای ساختن جمله لازم دارد، استفاده می کند.

یا اتفکر ریاضی هم، روند مشابهی ندارد؟ مثال هایی را که قبل آوردم، به طور طبیعی می توانند پاسخ مثبتی به این پرسش باشند.

با این ترتیب، توانستیم اصل مهمی را، که موجی برای تقویت و تکامل استدلال ریاضی است، تجزیه و تحلیل کنیم. این اصل را می توان، «اصل صرف کردن» نامید.

ممکن است که شما باشگفتی از من پرسید چرا اصل به این مهمی را تا حالا برای ما توضیح نداده بودند؟ علت آن کاملاً روش است: این اصل، چنان طبیعی است که خود به خود و نا آگاهانه درک و به کار برده می شود. به خاطر یاوردید، چطور ساده و طبیعی، مساله هایی را، که من برای نشان دادن این اصل آوردم، حل می کردند.

به موقع است که در مورد مثال مثلاً تای، «صرف های سینوس را بدهیم:

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

پاره خط AC را به عنوان وتر مثلث قائم الزاویه‌ای در نظر گرفتیم، می‌توان به
یاد قضیه فیثاغورث افاد.

حالا می‌کوشیم تا با دیدگلی تری به موضوع نگاه کنیم. این مساله را در
نظر می‌گیریم: چهارضلعی دلخواهی مفروض است؛ وسط ضلع‌های این چهار
ضلعی را، به طور متواالی و به وسیله پاره خط‌های راستی بهم وصل کرده‌ایم.
ثابت کنید، شکلی که به‌این ترتیب به دست می‌آید، یک متوازی‌الاضلاع است.
- اگر قطر AC را رسم کنیم، پاره خط KL ، وسط دو ضلع مثلث ABC
را بهم وصل کرده است، بنابراین اولاً موازی AC ، ثانیاً برابر با نصف
 AC می‌شود. به همین ترتیب، پاره خط NM هم که وسط دو ضلع مثلث ADC
را بهم وصل کرده است، متوازی AC و برابر با نصف آن است. بنابراین،
پاره خط‌های KL و NM ، برابر و موازی یکدیگر می‌شوند. یعنی شکل
 $KLMN$ ، یک متوازی‌الاضلاع است.

- درست است. توجه کنیم: برای هر گامی که به جلو بر می‌داریم، تنها

درست است. توجه کنیم: برای هر گامی که به جلو بر می‌داریم، تنها

درست است. توجه کنیم: برای هر گامی که به جلو بر می‌داریم، تنها

درست است. توجه کنیم: برای هر گامی که به جلو بر می‌داریم، تنها

از یک نیرو استفاده می‌کنیم: سه نقطه A ، B و C ، تصور مثلث را به ما می‌دهد؛

پاره خطی که وسط دو ضلع این مثلث را بهم وصل می‌کند، قضیه مربوط به
خود را دریادما زنده می‌کند؛ تساوی طول پاره خط‌های KL و MN - که

هر کدام نصف AC هستند - یک اصل جبری را به خاطر می‌آورد: اگرداشتہ باشیم
 $b=c$ و $a=b$ ، آن‌گاه $a=c$. همه‌جا از یک روش استفاده می‌کنیم. درست

مثل دیرین‌شناسی که به کمک فقط یک استخوان کشف شده، تمامی اسکلت
حیوان ماقبل تاریخ را بازسازی می‌کند، ما هم به کمک جزوی از یک ساختمان

ریاضی-شکل، قضیه، اصل، رابطه-تمامی ساختمان را به طور کامل، بازسازی
می‌کنیم. واژه‌هایی را است که ساختمان‌های اضافی را روی شکل، در دید

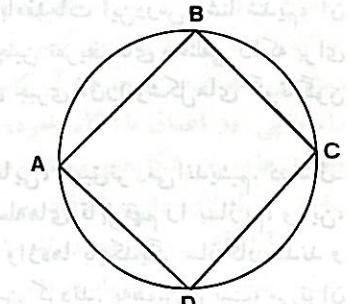
استدلال‌های منطقی وارد می‌کنیم و حلقه‌های تازه‌ای به وجود می‌آوریم.

روان‌شناس می‌گوید که مارک تواین، با پاسخ خود، نمونه‌ای از اندیشه
انحرافی و یاساده‌تر اندیشه قابل انعطاف را به نمایش گذاشته است، اندیشه‌ای
که استعداد دیدن یک چیز را به صورت‌های گوناگون دارد و جنبه‌های غیر عادی
و نامتنظر آن را در بر این ما قرار می‌دهد، استعدادی که قادر است، موقعیت-
های متفاوت را در محوای آن کشف کند.

حالا من از شما می‌خواهم که چنین استعدادی را درباره موضوع‌هایی
که خصلت ریاضی دارند، از خود نشان دهید. توجه کنید: دایره‌ای رسمی-
کنم، چهار نقطه متساوی الفاصله روی آن انتخاب و سپس آن‌ها را با خط‌های
مستقیم بهم وصل می‌کنم. حالا بگویید چه تصویرهایی درباره شکل پاره خط
 AC دارید؟

- قطر دایره. قطر مربع قاعدة مثلث ABC . وتر این مثلث، زیرا این
مثلث قائم الزاویه است. ضلعی از زاویه CAB ، که یک زاویه محاطی در دایره
است. نیمساز زاویه DAB ، عمود منصف پاره خط DB . مجموع پاره خط-
های AO و OC . پاره خطی برابر BD .
- ضلع مشترک دو مثلث ADC و ABC . محور تقارن تمامی شکل.

پاسخ‌ها، در ابتدا، همچون صدای
مسلسل، پشت سرهم به گوش می‌رسد،
بعد جای خود را به سکوتی طولانی می-
دهد، سرانجام دوباره صدایی به گوش
می‌رسد:



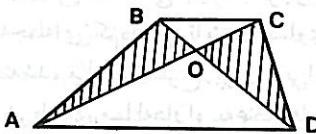
- این، همان قضیه دو خط موازی است که خط سومی آن‌ها را قطع
کرده باشد. در شکل ما، AD و BC ، پاره خط‌های موازی، و AC ، پاره-
خطی است که آن‌ها را قطع کرده است.

- همه این پاسخ‌ها درست است. با وجود این، به نظر من، کامل‌ترین
آن‌ها، همین پاسخ آخری است: این پاسخ امکان درک این مطلب را می‌دهد
که چیزی نه، با از نظر گذاردن جنبه‌های متفاوت قضایات ریاضی، به تکامل بعدی
آن کمک می‌کنیم. همان‌طور که درخت از تخم کوچکی سر بر می‌آورد و
رشد می‌کند، در این‌جاهم، از پاره خط AC ، در پاسخ آخری، قضیه مربوط
به خط‌های موازی «سر بر آورده است». بادقت بیشتری می‌توان دانست که
قضیه‌های دیگری هم می‌تواند از پاسخ‌های دیگر «سر بر آورده»، مثلاً، وقی که

کمیت این اجزاء را افزایش داد؟ بهترین راهنمایی را در این مورد، می‌توان با واژه «تجزیه و تحلیل» ارائه داد. اغلب آن را، به عنوان تامل روی شرط‌های مساله، توضیح می‌دهند، ولی این که به معنای دقیق آن بی‌نیاز است. بادنبال کردن این شعار، سعی کنید شرط‌ها و داده‌های مساله‌ای را که درباره شماست بشکافید و تاحدامکان به عنصرهای کوچکتری تجزیه کنید، این عنصرها را دوباره، و به صورت‌های مختلف، باهم ترکیب کنید و بکوشید تا ساختمانی منطقی، به نحوی که برای حل مساله مفید باشد، برای این ترکیب‌های تازه، پیدا کنید.

آنچه را که گفتیم، به کمک مثال روش می‌کنیم. ذوزنقه‌ای در نظر می‌گیریم، قطرهای آن را رسم می‌کنیم و برای آغاز کار، می‌کوشیم معین کنیم که در این شکل، چند مثلث وجود دارد.

می‌شونم که یکی می‌گوید «چهارتا»، دیگری می‌گوید «هشتتا» از یکی از کسانی که عقیده دوم را دارد می‌خواهم که پای تحته برود و ثابت کنند که مثلث‌های ABO و CDO، که در دو طرف ذوزنقه قرار دارند، هم ارز هستند.



— ابتدا دو مثلث ACD و ABD را در نظر می‌گیریم. این دو مثلث هم ارزند، زیرا قاعده‌ای مشترک و ارتفاعهایی برابر دارند. حالا دیگر هم ارز بودن دو مثلث ABO و CDO روش است، زیرا اگر بهر کدام از آن‌ها، مثلث AOD را اضافه کنیم، دو مثلث هم ارز ABD و ACD بدست می‌آید.

— درست است. روش است، کسی که در این شکل، تنها همان چهار مثلث کاملاً آشکار AOB، BOC، AOD و COD را می‌بیند، نمی‌تواند خود را باین استدلال برساند. ولی اندکی هر ترکیب کردن کافی است تا بتوان از دو مثلث AOD و AOB، مثلث ABD را بوجود آورد، و شیوه آن، مثلث ACD را. مشترک بودن قاعده‌ها، و ادار می‌کند تا آن‌ها را باهم در نظر بگیریم، و هدف مساله (ایثات برابری مساحت‌ها)، موجب تلقین گروهی از مفهوم‌ها می‌شود که توجه به آن‌ها، مارا در نزدیک شدن به آن‌هدف، یاری می-

این قانونمندی به تفصیل در هنر موردمطالعه قرار گرفته است، زیرا پایه و مبنای درک هنری را تشکیل می‌دهد و هنرشناسان، آن را «از جزئی» به کلی» می‌نامند. وقتی که قیافه قهرمان فیلم را از روی صدایی که از پشت صحنه شنیده می‌شود، مجسم می‌کنید، وقتی که هنرپیشه، بازیست خود، حالت روحی خاصی را به شما نشان می‌دهد، وقتی که از روی مجسمه‌ای بی‌حرکت به انرژی و قدرت حرکتی او بی‌می‌برید، دقیقاً به همین قانونمندی سروکار دارید.

ولی، مگر در کتابهایی که، راهنمایی‌هایی برای حل مساله‌های ریاضی داده‌اند، به همین قانونمندی برخورد نمی‌کنیم؟ این راهنمایی‌ها، احتمالاً، از این نوع‌اند: شرط مساله را با دقت تجزیه و تحلیل کنید؛ بیندیشید که از داده‌های مساله به چه نتیجه‌هایی می‌توان رسید و از چه راهی می‌توان نتیجه موردنظر را به دست آورد؛ حل مساله قبل را به خاطر بیاورید که مجهول.

این از همین نوع داشت یا با شرط مشابهی داده شده بود... این راهنمایی‌ها، موجب می‌شود که بتوانیم یک‌تر کیب منطقی، از نوع «اگر A، آن‌گاه B» را بیاید یا وریم، و موقعیت A را در میان داده‌های مساله، و یا موقعیت B را درین آنچه که باید به عنوان نتیجه به دست آوریم، جستجو کنیم.

البته، در چریان استدلال ریاضی، اغلب از ترکیب‌های منطقی پیچیده‌تری استفاده می‌کنیم. و من با نقل یک‌خطاطره، به این موضوع می‌پردازم. یک‌روز زمستانی، من با قطار، به ماموریتی می‌رفتم. زن میان‌سالی هم در کوپه ما بود. او شکایت داشت که از پنجره، بادرستی به درون می‌آید. یکی ازما، در حالی که به طرف پنجره می‌رفت، گفت: الان می‌بیسم، آیا شکافی در پنجره نیست...، سکوتی کرد و اضافه کرد «شکافی نمایان...» و زن بلا فاصله لبخندی زد و این شعر نکراسوف را خواند: «و آیا بیدا نمی‌شود زمینی عربیان» وقتی که هم کوپه ما می‌گفت «آیا شکافی در پنجره نیست»، هنوز چیزی را تلقین نمی‌کرد، ولی به محض این که واژه «نمایان» از زبان او بیرون آمد، شعر نکراسوف هم، که با واژه «عربیان» ختم می‌شد، به خاطر زن رسید.

به ریاضیات برگردیم؛ می‌توان این گونه موارد را به کمک سخن‌چ. پویا، نویسنده کتاب «کشف‌های ریاضی» تفسیر کرد: «مجموعه چند قسمت، خیلی بهتر و ثمر بخش تر از هرجزء جدا گانه، می‌تواند کل را به ماتلقین کند.» روش است، برای این که مجموعه‌ای از اجزاء را بوجود آوریم، باید این اجزاء را به اندازه کافی در اختیار داشته باشیم. چگونه می‌توان

دست یابید، شکلی را که باید رسم کنید به دست آورید و یا کمیتی را که باید محاسبه کنید ظاهر سازید. اگر همه راهها، به بن بست رسید، بهدادهای مساله برگردید و بینید تاچه حد از همه فرض‌های مساله استفاده کرده‌اید؛ آیا فرضی وجود دارد که در ساختمان ترکیبی شما وارد نشده است؟ ساختمان شما تاچه حد می‌تواند به خواست‌های مساله پاسخ بدهد؟ و دوباره جستجوی راه حل را آغاز کنید، حالت‌های تازه‌ای از عنصرها را پیدا کنید، جنبه‌های تازه، ترکیب‌های تازه و امکان تازه ساختمانی آن‌ها را مورد بررسی قرار دهید.

چه بسا که باشندن این توصیه‌ها، اشکالی برایتان پیش‌بیاید؛ در این طرحی که برای روند تفکر ارائه کردیم، جایی برای معرفت‌شهودی و روشن‌بینی – که بدون آن کشیدن وجود ندارد – در نظر گرفته نشده است.

می‌ارزد که به این موضوع‌هم کمی پردازیم. منتهی، برای این که کار ما بی‌پایه نباشد، اجازه بدهید، قبل، مفهوم‌های «معرفت‌شهودی» و «روشن‌بینی» را برای خود روشن کنیم.

بسیاری از روان‌شناسان معتقدند که در آگاهانه و در کشیدن به یک نحو، و بعد عنوان نتیجه‌ای از تسلسل گام‌های منطقی، به وجود می‌آید. منتهی، وقتی این گام‌ها، زیاد نباشند و کند و آشکارا برداشته شوند، نتیجه‌گیری را آگاهانه می‌نامیم، در حالی که اگر رشته‌ای طولانی از این گام‌ها، به سرعت برداشته شود، با احساس شهودی سروکار داریم.

روان‌شناسانی هم هستند که با این نظر موافق‌اند، ولی ضمناً عقیده‌دارند که در کشیدن، همیشه تها به این ترتیب ظاهر نمی‌شود. آن‌ها تا کید می‌کنند که انسان، در رابطه متقابلی که با دنیای واقع دور برخود دارد، تنها تجربه آگاهانه، بلکه ضمناً تجزیه‌گیر آگاهانه‌های پیدا می‌کند. زمانی که، ضمن تفکر روی یک مساله دشوار، چیزی از تجزیه نا‌آگاهانه به دنیای ذهنی ما نفوذ کند، به عنوان روشن‌بینی احساس می‌شود.

هر دو نظر، معرفت شهودی را، به عنوان چیزی ترسیم می‌کنند که نه قابل نظارت است و نه ارادی. ولی چه این نظر را پذیریم و چه نظر دیگر را قبول داشته باشیم، به این نتیجه می‌رسیم که زمینه معرفت شهودی و شرایطی شوند، آن‌ها را بادنگشتن کردن استدلال خود، به دست آورید. به همین ترتیب، و از همین راه، عنصرهای مساله را غنی‌تر کنید و انواع مختلف ترکیب‌های آن‌ها را تجدیدسازمان بدهید، تا جایی که موفق شوید، مسیری را از فرض‌های مساله، به طرف نتیجه‌ای که لازم دارید، هموار کنید؛ به استدلالی که لازم دارید

کنند. واژه‌های «مثلث»، «قاعده» و «مساحت»، این قاعده را به بیان می‌آورند؛ مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن. ارتفاع‌های دو مثلث ABD و ACD، که ضمن استدلال پیدا شدند، برابر در می‌آیند، و این، مارا به همارزی دو مثلث ABD و ACD می‌رساند. دنباله مطلب، روشن است.

ممکن است تصور شود که تجزیه و تحلیل، تاحدیزیادی، مربوط به مساله‌های هندسی است، که شکل آن‌ها را می‌توان، به سادگی، به خطوطها و حتی نقطه‌ها، تجزیه کرد. تجزیه و تحلیل نتیجه‌گیری‌ها، چگونه است؟ در این مرد، زبان منطق علامتی به ما کمک می‌کند، زبانی که جمله‌های آن، حساب شده و دقیق، و برای هر گونه ترکیبی، آماده است.

به این ترتیب، با اصل دیگر آشنا می‌شویم که موجب پیشرفت استدلال ریاضی می‌شود: «از جزوی به کلی»

هر مساله را به اجزاء خود تجزیه می‌کنیم، مجموعه‌ای از اجزاء آن را انتخاب می‌کنیم و آن را، به تکمک اجزاء لازم‌یگر، به صورت مجموعه کاملی در می‌آوریم؛ چه مرحله‌ای بین فرض‌های مساله، و نتیجه‌های که از آن‌ها می‌توان گرفت، وجود دارد؟ چه مقدماتی باید به فرض‌ها اضافه کرد تا به چنین نتیجه‌هایی برسیم؟ چه جمله‌ای کم‌داریم تا بتوان تساوی را برقرار کرد؟

با آن‌چه که گفته شد، می‌توان طرح زیر را، برای حل مساله‌های ریاضی، ارائه داد، داده‌ها و شرط‌های مساله‌هارا، به عنصرهایی تاحدیمکن کوچکتر، تجزیه می‌کنیم. می‌کوشیم تا هر عنصر را در همه حالت‌های ممکن که می‌تواند داشته باشد، مجسم کنیم. با در نظر گرفتن این عنصرها، به طور جداگانه و یا در ترکیب‌های مختلف آن‌ها، می‌کوشیم آن‌ها را به صورت ساختمانی در آوریم، که قبل و ضمن استدلال‌های قبلی با آن‌ها برخورد داشته‌ایم و در آن‌ها، عنصرهایی شبیه عنصرهای مساله می‌باشد، وجود داشته است. اگر می‌بینید که برای ساختمان مورد نظر خود، به داده‌ها و شرط‌هایی نیاز دارید، بکوشید تا با تجزیه و تحلیل عمیق‌تر و دقیق‌تر داده‌های مساله، به آن‌ها دسترسی پیدا کنید. ولی اگر به عنصرهایی نیاز دارید که به نتیجه‌گیری و هدف مساله، مربوط می‌شوند، آن‌ها را بادنگشتن کردن استدلال خود، به دست آورید. به همین ترتیب، و از همین راه، عنصرهای مساله را غنی‌تر کنید و انواع مختلف ترکیب‌های آن‌ها را تجدیدسازمان بدهید، تا جایی که موفق شوید، مسیری را از فرض‌های مساله، به طرف نتیجه‌ای که لازم دارید، هموار کنید؛ به استدلالی که لازم دارید

بررسی و شمارش عناصر نخستین

در فضای \mathbb{R}^n بعدی

مقدمه: در این مقاله می‌خواهیم به کمک مشاهدات عینی، قواعدی بیاییم که ما را با مفهوم

فضای پیشر از سه بعدی، آشنا کند. در این راه سعی می‌کنیم که خصوصیاتی را که با تغییر بعد فضا ثابت می‌مانند به عنوان تکیه‌گاه‌هایی، یافته و از آن برای استقراء ریاضی در مورد فضاهای پیشر از سه بعد استفاده کنیم. بعد از این مقدمات به خصوصیاتی از مکعب \mathbb{R}^n بعدی توجه می‌شود و به شمارش تعداد رنوس، یال‌ها و... در این مکعب پرداخته و مفاهیم جدیدی را که در فضاهای جدید وارد بحث می‌شوند بررسی می‌کنیم. در پایان به کمک مثالی که نشان دهنده کاربرد عملی این مباحث است زیادی است موفق می‌شویم که در بحث اصلی خود دوباره قدمی به جلو برداریم. از آنجایی که این خود جلوه‌ای از تأثیر متقابل ریاضیات خالص و ریاضیات کاربردی است، در نحوه بیان مطالب و تقدم و تاخر طبیعی آنها تغییری داده نشده است تا خواندن مسیر منطقی این گسترش را دریابد و همگام با مقاله حاضر در حین بررسی مطلب مورد نظر به نکاتی جنبی توجه کند که بر روای اصلی بحث به نوبه خود تأثیر می‌گذارند منظور از عبارت «عناصر نخستین» در عنوان مقاله مجموعه‌ای است که در هندسه سه بعدی به صورت: { مکعب، مربع، پاره خط، نقطه } با آن آشنا هستیم و این عناصر خود حالت محدود شده‌ای از عناصر «مجموعه مفاهیم» نخستین هستند که در هندسه 3 بعدی به صورت { حجم، سطح، خط، نقطه } مطرح می‌شود. در متن این نوشته در همین زمینه، مفصل‌تر صحبت خواهد شد و این اشاره فقط محض

می‌تواند مارا به حل مساله نزدیک کند. در واقع، اگر شما به اندازه کافی در پیدا کردن حالت‌های مختلف، در ترکیب عنصرها و در جمع بندی آنکاهی‌های جداگانه، تمرین داشته باشید، به تدریج چنان شبکه محکم و گسترده‌ای به وجود می‌آید، که وقتی به حل مساله‌های بعدی می‌پردازید، اندیشه شما به سرعت و با آزادی از روی آن عبور می‌کند و آن‌چهرا که لازم‌دارد، حتی از تجربه نا‌آگاهانه شما، در خود جمع می‌کند.

بارها پیش می‌آید که وقتی به مساله تازه‌ای در زمینه‌ای دشوار می‌پردازید، دچار یاس و دلتگی می‌شوید، چرا که تقریباً همهٔ حالت‌ها و ترکیب‌هایی که برای حل آن در نظر می‌گیرید، بی‌فاایده از آب درمی‌آید و با وجودی که از جانب‌های بسیار زیادی به آن حمله کرده‌اید، همه‌جا مواجه با بن بست شده‌اید. ولی، اگر حوصله به خرج بدھید و کار خود را باشکیایی دنبال کنید، به تدریج وضع عوض می‌شود: در طول زمان، کارشما روشن‌تر، گویاتر و امیدبخش‌تر می‌شود و کم کم تجربه نا‌آگاهانه‌هم به یاری شمامی‌آید. این، درست مثل آموزش دوچرخه‌سواری است: پیش از آن که حرکت شما به صورت نا‌آگاهانه درآید، نمی‌توانید منتظر این باشید که نسبت به کار خود اعتماد داشته باشید. زمانی می‌رسد که وقتی حل مساله‌ای را آغاز می‌کنید، می‌توانید در همان مرحله اول، به درستی و باطمینان عنصرها و شرط‌های لازم را انتخاب کنید، آن‌ها را به درستی ترکیب نمایید و به راحتی خود را به مسیرهای حل مساله پرسانید: درست مثل این که کسی شمارا در نوع انتخاب یک حالت، از میان انواع ممکن حالت‌ها، کمک می‌کند و همان حالت درست مورد نظر را به شما نشان می‌دهد.

به این ترتیب، همان دو اصلی را که درباره آن‌ها صحبت کردیم، دو اصلی که ممکنی بر فعالیت نا‌آگاهانه شما و ضمناً ممکنی بر دانش شما هستند، یعنی اصل «صرف کردن» و اصل «از جزئی، به کلی»، می‌تواند به شما کمک کند تا در حل مساله‌ها، به حالت عادی، خود کار و نا‌آگاهانه برسید.



در مجموعه IV علاوه بر همه خواص مجموعه III یک کیفیت قابل توجه دیگر وجود دارد و آن وجود قانونی است که براساس آن باداشتن هر عنصر می‌توانیم عناصری را که در صفت «قانون ترتیب پذیر» بعد یا قبل (و حتی چند مرحله بعدتر یا قبل تر) از عنصر مورد نظر هستند مشخص کنیم. به طوری که اگر قرار باشد عنصر دیگری وارد این مجموعه شود و فقط با اعداد صحیح سر و کار داشته باشیم بی‌گمان این عنصر عدد ۸۱ خواهد بود (با توجه به قانون تصاعد هندسی که بین عناصر مجموعه IV وجود دارد).

حال به این سؤال می‌پردازیم که مجموعه «عناصر نخستین» از لحاظ «سازمان یافتنگی» با کدامیک از چهار مجموعه فوق همانند است؟

اگر به قانونی کلی دست یابیم که بین این عناصر حکم‌فرما باشد دیگر لزومی به مقایسه با مجموعه‌های I و II و III نیست و مجموعه «عناصر نخستین» از نظر «سازمان یافتنگی» همانند مجموعه IV است که در میان چهار مجموعه مورد مثال از بالاترین درجه «سازمان یافتنگی» برخوردار است.

برای رسیدن به چنین رابطه‌ای، توجه کنیم که پاره خط از حرکت مستقیم و محدود نقطه حاصل می‌شود و اگر این پاره خط را در جهت عمود بر آن و به اندازه طولش حرکت دهیم مربع بدست می‌آید. همچنین از حرکت دادن مربع به اندازه طول ضلعش و در امتداد عمود بر فضای دو بعدی مربوط به مربع، مکعب بدست می‌آید. بنابراین مشاهده می‌شود که برای رسیدن از هر یک از عناصر نخستین به عنصر بعدی می‌باشد آن عنصر را در امتداد عمود بر فضای موجود حرکت دهیم. این گفته در مورد مجموعه «مفاهیم نخستین» یعنی [نقطه، خط، سطح، حجم] نیز در حالت کلی ترجی صادق است و طبعاً از جامعیت بیشتری نیز برخوردار است. با اینهمه مادر اینجا ساده‌ترین حالت مفاهیم نخستین را که دارای مولفه‌های متعدد و محدود و مساوی هستند یعنی پاره خط و مربع و مکعب را مورد بررسی قرار می‌دهیم زیرا در عین سادگی، از نظر بحث ما کیفیات اختصاصی آنها محدودیتی ایجاد نمی‌کند و از قابلیت تعیین آنها نمی‌کاهد. بخصوص که در موقع شمارش عناصر نخستین (که مورد نظر همین مقاله است) به حالات پیچیده تری از همین اشکال ساده بر می‌خوریم.

حال به بررسی سؤال دوم (ثانیاً) می‌پردازیم. جهان در هندسه اقلیدسی که مطابق با دریافت‌های حسی روزمره و عادی ماست، سه بعدی است. یعنی حرکت در امتداد سه بعد امکان دارد. قانون کلی گذار (عبور) از هر «عنصر نخستین» به عنصر بعدی

آشنایی مقدماتی با عنوان مقاله بود. فضای n بعدی اقلیدسی از نظر ریاضی با فرمول $(ds)^n = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2$ تعریف می‌شود که در آن ds فاصله دیفرانسیلی دو نقطه x_1 و x_n تا محورهای مختصات فضای n بعدی هستند. به ازای $2 \leq n \leq 3$ به ترتیب فرمول فاصله دیفرانسیلی در صفحه (فضای دو بعدی) و در فضای سه بعدی بدست می‌آید. *

نخستین تعریفی که در مدرسه از هندسه برایمان کردند تعریفی بود به این صورت: «هندسه علمی است که از نقطه، خط، سطح و حجم گفتوگو می‌کند». این تعریفی است ساده و درخور فهم کوک و نه به دور از واقعیت. از واقعیت دور نیست اما به تمامی هم درست نیست زیرا حتی در تعریفی موجز می‌باشد جامع و مانع بودن حفظ شود. هندسه نه فقط از نقطه و خط و سطح و حجم بلکه از سیستم‌های حاصل از ترکیب اینها و نیز از روابط فیما بین نقطه و خط و سطح و حجم و از روابط بین این «مفاهیم نخستین» با سیستم‌های ترکیبی حاصل از آنها که (به اشکال هندسی موسومند) گفتوگو می‌کند.

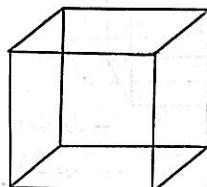
حال بر می‌گردیم به مجموعه مفاهیم نخستین که دستمایه گسترش هندسه است: {نقطه، خط، سطح، حجم}. اولاً: این سوال مطرح می‌شود که چه رابطه‌ای بین عناصر این مجموعه برقرار است یا به عبارت دیگر چه جنبه مشترکی آنان را در یک مجموعه قرار می‌دهد. ثانیاً: اینکه چرا این مجموعه چهار عنصر دارد و آیا کمتر یا بیشتر از چهار هم ممکن است؟

پیش از هر چیز یافتن رشته پنهانی که این مهره‌های چهارگانه را به هم مرتبط نگاه می‌دارد مورد نظر است و بدین منظور چهار مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم:

I- { ریاضیات و سپیدی و هواییما و ۲-
II- { خربزه و نارنگی و انار و سیب -
III- { ۲۸۶ و ۸۵ و ۲ و ۳-
IV- { ۲۷ و ۹ و ۳ و ۱-

در مجموعه I تنها جنبه مشترک بین عناصر «بودن» است. در مجموعه II از این فراتر رفته به وجه مشترک «میوه بودن» می‌رسیم. در مجموعه III علاوه بر «عدد بودن» خاصیت «ترتیب پذیری» نیز وجود دارد یعنی می‌توان عناصر مجموعه را که اعداد هستند بر حسب بزرگی (یا کوچکی) مرتب نمود.

* در بررسی مسائل و قضایای هندسه فضائی چون در عمل ناگزیر به استفاده از صفحه کاغذ هستیم که بیش از دو بعد ندارد به اشکال جدیدی برمی خوریم که هنگام مطالعه هندسه مسطحه ابدآ با آن مواجه نیستیم. این موضوع بخصوص در آغاز آشنایی با هندسه فضائی برای دانش آموزان سردرگمی هایی بوجود می آورد.



شکل ۱

عملآ برای آنکه بتوان مسائل اشکال هندسی سه بعدی را روی کاغذ پیاده کرد براساس روش تصویری «پرسپکتیو» دو بعد را با ابعاد دوگانه کاغذ تأمین می کنند و بعد سوم را که در واقع می باشد عمود بر صفحه کاغذ باشد با امتداد مایل روی صفحه

ترسیم نشان می دهد. همه ما با نمایش مکعب به صورتی که در شکل (۱) نشان داده شده است آشنا هستیم و در حل مسائل هرجا که لازم باشد خطی به موازات بعد سوم رسم شود روی صفحه ترسیم آن را به موازات محور مایل Z می کشیم. با نگاه کردن به تصویر فوق از مکعب می توانیم حالت اصلی آن را که سه بعدی است تجسم کنیم. با استفاده از شکل (۱) موجودات دو بعدی (موجوداتی فرضی که همچون سایه فاقد حجم باشند) در صورت داشتن ذهن ریاضی پرورش یافته می توانند مسائل مربوط به مکعب را در جهان صفحه ای خودشان حل کنند. پس ما هم که موجودات ۳ بعدی هستیم باید بتوانیم با استفاده از چنین تبدیلی مسائل مربوط به مکعب چهار بعدی (که بعداً در موردهش بیشتر صحبت خواهد شد) را در جهان سه بعدی خودمان حل کنیم. همانطور که انسان های چهار بعدی آن مسائل را روی کاغذ های سه بعدی دفتر هندسه شان حل می کنند! برای این کار اول یک مکعب می سازیم که اضلاعش از مفتوح باشد سپس مکعب دیگری همانند مکعب اولیه ساخته و آنرا نسبت به مکعب اولیه در موقعیتی قرار می دهیم که اولاً همه اضلاع نظیرش با مکعب اولیه موازی باشد ثانیاً مرکز این مکعب نسبت به مرکز مکعب اولیه (یا هر راس این مکعب نسبت به راس نظیرش در مکعب اولیه) تغییر مکانی محدود و در امتدادی مایل نسبت به سه بعد اصلی داشته باشد. حال اگر با مفتوح های مستقیم دیگری رئوس نظیر این دو مکعب را بهم وصل کنیم، تصویری از مکعب ۴ بعدی در فضای ۳ بعدی به دست آورده ایم

را F می نامیم. چون در نتیجه هر بار به کار بردن F به شکل هندسی پیچیده تر می رسیم، بهتر است از نقطه شروع کنیم:

پاره خط = (نقطه) F

پاره خط → F نقطه: یا به زبان دیگر

به همین ترتیب می توان به طور کلی نوشت:

مکعب → F مربع → F پاره خط → F نقطه

و می توان تابع f را که F حالت خاصی از آن باشد به صورت زیر تعریف نمود:

F → F سطح → F خط → F نقطه

بدیهی است که در هر بار اعمال F یک بعد اشغال شده است و مجموعه عناصر نخستین که با نقطه شروع می شود علاوه بر نقطه شامل همه حالاتی است که از اعمال F به تعداد دفعات ممکن ناشی می شود. پس غیر از نقطه فقط شامل سه عنصر دیگر می تواند باشد (زیرا در فضای سه بعدی اعمال می شود) که به ترتیب از یک و دو و سه بار اعمال F روی نقطه حاصل می شود. بدین ترتیب روشن می شود که چرا «مجموعه عناصر نخستین» و «مجموعه مفاهیم نخستین» دارای ۴ عنصر می باشد. از استدلال فوق چنین نتیجه می شود که در فضای n بعدی تعداد عناصر «مجموعه عناصر نخستین» و نیز تعداد عناصر مجموعه «مفاهیم نخستین» برابر $n+1$ است.

*
تجسم اشکال هندسی با بعد بیش از ۳ برای ما که موجودات ۳ بعدی هستیم آسان نیست. در این مقاله سعی خواهیم کرد که بعد از توضیحات با تکیه بر هندسه سه بعدی که با آن آشنا هستیم چنگی در فضای ۴. فراتر که از برد درک حسی مان خارج است بیندازیم.

در علوم تجربی هم گذار از امواج مرئی به طیف گسترده امواج الکترومغناطیسی (امواج رادیویی، مادون قرمز، ماوراء بنفش، اشعه X، اشعه گاما، اشعه کیهانی) از همین مقوله است و با روشی همانند آنچه مورد نظر ماست سرانجام پس از تغییراتی، مثلاً امواج رادیویی را که از دیدن آن عاجزیم به طریقی روی صفحه اسیلوسکوپ می بینیم. در همه این موارد شرط اصلی آنست که عناصر مورد مطالعه طی تغییراتی که در آنان صورت می گیرد خصوصیاتی را که مورد نظر ماست رها نکرده باشند. همچنین است گذار از هندسه اقلیدسی به هندسه های ناقلیدسی و زایش مکانیک نسبی از بطن مکانیک کلاسیک.

رسته‌شان نامگذاری می‌کنیم.

در نقطه به جز یک رأس چیز دیگری وجود ندارد. در مکعب یک رسته بالاتر (پاره خط) مفهوم طول و در مکعب رسته بعد (مربع) مفهوم سطح و سر انجام در مکعب رسته ۳ (که همان مکعب معمولی باشد) مفهوم حجم وارد می‌شود. هر بار که به رسته بالاتری می‌رویم «مفهوم» جدیدی نیز وارد می‌شود و مکعب از هر رسته شامل تعدادی از مکعب‌های رسته‌های پایین تر از خود می‌باشد. مثلاً مکعب ۲ بعدی چندین یال (مکعب رسته ۱) و چندین وجه (مکعب رسته ۲) دارد. به همین ترتیب مربع (مکعب رسته ۲ چندین ضلع (مکعب رسته ۱) و چندین رأس (مکعب رسته صفر) دارد. وقتی وارد فضاهای بالاتر از ۳ بعدی شویم دیگر مفاهیم نقطه و خط و سطح و حجم کفايت نمی‌کنند و مفاهیم جدیدی به ترتیب وارد می‌شوند که بعنوان مثال نسبت نخستین شان به «حجم» مثل نسبت مفهوم «حجم» است به «سطح» و برای محاسبه این «فراحجم» در مورد مکعب ۴ بعدی می‌بایست طول ضلع آن را چهار بار در خودش ضرب کنیم.

بدین ترتیب می‌توانیم نقطه و خط و سطح و حجم را چهار پله متواالی از پلکانی بدانیم که بقیه پله‌های آن در تاریکی فرو رفته‌اند و حالا که به یافتن قانون گذار از هر پله به پله بعد نایل شده این می‌توانیم مثلاً در مورد ۷ پله بعد که مفاهیم دور از ذهن ما هستند اطلاعاتی به چنگ آوریم.

*

با دقت و تعمق در تصویر دو بعدی از مکعب ۴ بعدی (شکل ۲) می‌توانیم دریابیم که مکعب ۴ بعدی ۳۲ یال و ۸ مکعب ۳ بعدی دارد. دیگر هنگام آن رسیده است که به سوال‌هایی از این دست پاسخ دهیم که مکعب ۵ بعدی چند ضلع، چند وجه و چند مکعب رسته ۴ دارد؟ همچنین عناصری را که به مفهوم‌های رسته بالاتر مربوط می‌شود در مکعب‌های ۱۱ بعدی بشماریم.

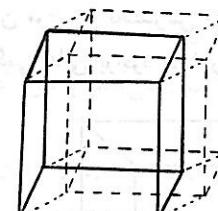
هنگام گذار از نقطه به پاره خط، از پاره خط به مربع و اصولاً از هر مکعب به مکعب رسته بالاتر، تعداد رئوس دو برابر می‌شود. زیرا با انتقال مکعب اولیه تعداد رئوس کلّاً دو برابر می‌شود و طی اتصال رئوس نظری، تغییری در تعداد رئوس حاصل نمی‌گردد بنابراین با شروع از نقطه (مکعب رسته صفر) که یک رأس دارد، تعداد رئوس هر مکعب دو برابر تعداد رئوس مکعب رسته پایین تر است.

حال بینیم در گذار از مربع به مکعب تعداد اضلاع چگونه زیاد می‌شود. اولاً وقتی مربع دیگری از انتقال مربع اولیه ایجاد می‌شود تعداد ضلع‌ها دو برابر می‌گردد در

می‌توانیم مسائل مربوط به مکعب ۴ بعدی را در فضای ۳ بعدی حل کنیم.

تصویر دو بعدی هم می‌توان از مکعب ۴ بعدی رسم کرد که در اینجا ناچار به گنجاندن دو بعد اضافی در صفحه هستیم که به صورت دو امتداد مایل متفاوت ظاهر می‌شود.

این کار را می‌توان روی صفحه برای مکعب‌های ابعاد بالاتر هم ادامه داد ولی شکل حاصل بسیار پیچیده و شلوغ خواهد شد



مکعب دوم ---
خطوط رابط

ممکن است این سؤال پیش آید که بررسی اشکالی که قابل تجسم نیستند و با لطبع در مسائل عملی با آنها سروکار پیدا نمی‌کنیم، چه سودی خواهد داشت؟ باید توجه داشت که گسترش ریاضیات الزاماً تابع نیازهای روزمره نیست بلکه این پهن دشت عرصه تأثیر متقابل دریافت‌های عینی و استثنای‌های ذهنی است هم بدینگونه مثلاً جبر «بول» که نخست یکسره انتزاعی می‌نمود و خود بی شک در تحلیل نهایی حاصل ساخت و پرداخت دریافت‌های عینی بود بعدها نقش خود را در بررسی مدارهای لاجیک که امروزه در جنبه‌های گوناگون صنعتی بخصوص در کامپیوترهای الکترونیکی کاربرد اساسی دارد ایفا کرد. البته ما ضمن بحث در زمینه اصلی به مثال‌هایی از کاربرد نتایج حاصل و یا به عبارت دیگر تعبیر آن نتایج در مسائل عینی و ملموس اشاره خواهیم داشت.

* یکی از خصوصیات عمدۀ ای که در تصویر ۲ بعدی از مکعب محفوظ می‌ماند عده رئوس و اضلاع و وجوده است. این خاصیت در تصویر ۲ بعدی از مکعب ۴ بعدی (شکل ۲) نیز محفوظ مانده است.

از «مفاهیم نخستین» در پاره خط، نقطه و خط (دو رأس و یک ضلع) وجود دارد. در مربع نقطه (رأس) و خط (ضلع) و سطح (وجه) وجود دارد. در مکعب نقطه (رأس) و خط (یال) و سطح (وجه) وجود دارد. حال که قرار است با مکعب‌ها با بعد بیش از ۳ سر و کار داشته باشیم برای سهولت بیان نقطه را مکعب رسته صفر، پاره خط را مکعب رسته یک، مربع را مکعب رسته ۲ می‌نامیم و مکعب‌های با بعد بیش از ۳ را نیز با

این جدول را می‌توان تا حد مورد نظر ادامه داد. از خط چین به بالا به فضای سه بعدی اقلیدسی مربوط می‌شود.

در این جدول (جدول عناصر نخستین) هر عدد از مجموع دو برابر عدد بالایی با عدد سمت چپ عدد بالایی به دست می‌آید. اولین عدد که به سطر اول و ستون اول مربوط می‌شود «یک» است که همان تعداد رأس‌های « نقطه » می‌باشد. ستون اول توان‌های متواالی ۲ است. نتیجه خلاصه را می‌توان به صورت $2^n = 2^{n-1} + 2^{n-2}$ نوشت که در آن n رسته مکعب، e رشته عنصر نخستین و n تعداد عنصر نخستین مورد شمارش است.

((کاربرد «جدول عناصر نخستین»))

در روش‌های شمارش CountingTechnics

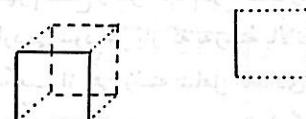
می‌دانیم که در حساب احتمالات، احتمال وقوع یک حادثه از تقسیم عده حالت‌های اولیه متضمن حادثه مورد نظر بر عده کل حالت‌های اولیه به دست می‌آید به شرطی که همه حالت‌های اولیه دارای احتمال وقوع مساوی باشند. به مسائل زیر و حل آن به کمک جدول عناصر نخستین توجه کنید:

۱) - در قفسی باز است و یک موش، یک خرگوش و یک گربه هر کدام می‌توانند از خارج به داخل قفس بروند یا از آن خارج شوند. یک چشم الکترونیکی می‌تواند ورود یا خروج یک موجود را با دو علامت مختلف (برای ورود یا خروج) اعداد کند. این وضعیت را که تنها موش داخل باشد و بعد گربه داخل شود و نیز این وضعیت را که تنها گربه داخل باشد و بعد موش وارد شود وضعیت نامطلوب می‌نامیم (در خارج از قفس گربه نمی‌تواند موش را بگیرد). در یک لحظه چشم الکترونیکی ورود یک موجود را اعلام می‌کند. چقدر احتمال دارد که وضعیت نامطلوب پیش آمده باشد؟ پاسخ مسئله ۱) - وجود هر یک از موجودات: موش، خرگوش و گربه را در قفس به ترتیب با حروف A و B و C نشان می‌دهیم. کل حالاتی که در قفس می‌تواند پیش آید به صورت زیر است:

◦ A B C AB BC AC ABC

تصادفی نیست که تعداد حالت‌ها برابر عده رأس‌های یک مکعب است (رسته مکعب با تعداد موجودات برابر است) زیرا موقعیت هر راس را بطور منحصر بفردی می‌توان

مرحله بعد، هنگام اتصال رأس‌های نظیر، به تعداد رأس‌های مرربع، ضلع‌های جدید حاصل می‌شود. به همین ترتیب در گذار از پاره خط به مربيع تعداد ضلع‌ها در مرحله اول دو برابر شده و بعد هنگام اتصال رأس‌های نظیر، به تعداد رأس‌های پاره خط اولیه، ضلع جدید اضافه می‌شود (شکل ۳). در نتیجه مربيع دارای چهار (تعداد رأس‌های پاره خط + تعداد ضلع‌های پاره خط) $= 2 \times 1 + 2 = 4$



شکل ۲ - شکل اولیه
شکل ۳ - شکل جدید

ضلع خواهد بود مطالب فوق را در جمله زیر خلاصه می‌کنیم:
« تعداد هر یک از عنصرهای نخستین در هر مکعب رسته n دو برابر تعداد همان عنصر در مکعب رسته $1-n$ است به علاوه تعداد عنصر رسته پایین تر در مکعب رسته $1-n$ »

در هر مکعب $n+1$ گونه عنصر نخستین (از رسته صفر تا رسته n) وجود دارد.

طبق نتیجه خلاصه فوق، تعداد وجهه مکعب ۳ بعدی برابر است با دو برابر تعداد وجهه مربيع بعلاوه تعداد ضلع‌های مربيع. با داشتن رابطه مذکور فوق می‌توانیم جدول زیر را تشکیل دهیم:

نام رسته(بعد)	مفهوم	وجهه	مکعب‌ها	وجهه	وجهه	وجهه	وجهه
		نقطه	نقطه	خط	خط	سطح	مکعب
.....	◦	۱	۰	۰	۰	۰
.....	۱	۰	۰	۰	۰	۰
.....	۴	۱	۰	۰	۰	۰
.....	۸	۱۲	۶	۱	۰	۰
.....	۱۶	۴۴	۸	۱	۰	۰
.....	۳۲	۸۰	۸۰	۴۰	۱۰	۱
.....	۶۴	۱۹۲	۲۴۰	۱۶۰	۶۰	۱۲

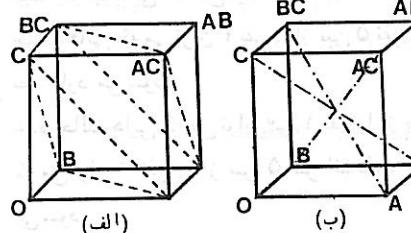
(جدول عناصر نخستین)

ورود آنها E در خانه باشد یا نباشد. پس می‌توان احتمال مورد سؤال را محاسبه نمود:

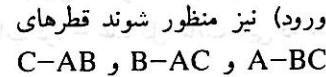
$$P = \frac{2}{211}$$

در اینجا باید توجه داشت که وقتی مثلاً ۳ نفر وارد خانه می‌شوند نه تنها انواع ترکیب‌های ممکنه آنها بلکه تعداد و انواع ترکیب‌های کسانی که در آن لحظه در خانه‌اند مورد نظر قرار گرفته است.

*
اگر در مسئله «یک» می‌خواستیم حالت‌هایی را هم به حساب بیاوریم که به طور همزمان یک موجود وارد قفس شده و موجودی از قفس خارج شود می‌بایست تغییرهایی به صورت $AB \leftrightarrow AC$ را نیز منظور بداریم. این تغییرها در مکعب (برای حالت ۳ عنصری) بصورت قطرهای A-C، A-B، B-C، AB-AC، AB-BC و AC-BC ظاهر می‌شوند (شکل ۵ الف). اگر حالت‌های ۲ ورود همزمان با یک



شکل ۵

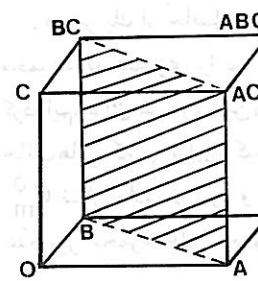


نیز باید شمرده شوند (۵ ب) پس می‌توانیم صورت مسئله یک را کامل تر کنیم (لازم نباید که در هر

تغییر فقط یک ورود یا یک خروج

رخ دهد) و از عده قطرها کمک بگیریم. بعیارت دیگر شمردن تعداد قطرهای مکعب می‌تواند الگوی ریاضی همانند یک پدیده عینی باشد. در ادامه این روش می‌توانیم به امکان‌های تازه‌ای دست بیاییم:

مثلاً متوجه قطرهای وجهی (شکل ۶) و قطرهای حجمی (در بعدهای بالاتر از 3^3) می‌شویم و در صورتی که تعبیری که مور نظرتان باشد برای آنها بیاییم می‌توانیم در جستجوی روشی برای شمارش آنها (قاعده‌تا به کمک جدول عناصر نخستین) باشیم. بی‌شک تعمیم این تکنیک برای ابعاد بالاتر که ترسیم و تصورش برایمان



شکل ۶

برحسب وجود یا عدم هر یک از ابعاد A و C بیان نمود و در عین حال مشاهده

می‌شود که همه حالت‌ها ترکیب A و B و C منظور شده است. ضلع C-AC نشان دهنده حالتی است که فقط C در قفس است و A وard یا خارج می‌شود. در

مسئله‌ای که مطرح شد فرض براین است که چشم الکترونیکی ضمن اعلام عبور یک موجود، معین می‌کند که این موجود «وارد» شده است یا «خارج».

عده حالاتی که طی آن یک موجود وارد قفس می‌شود برابر عده ضلع‌های مکعب است: ۱۲

حالاتی که نامطلوب خوانده می‌شود روی مکعب به صورت ضلع‌های A-AC و C-AC ظاهر شده است. پس احتمال مورد سؤال را می‌توان محاسبه کرد:

$$P = \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

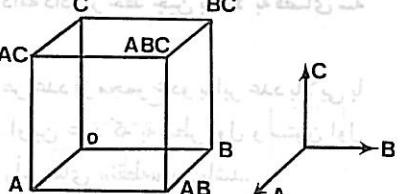
مسئله ۲ - پنج نفر که آنها را به نامهای A و B و C و D و E می‌نامیم در خانه‌ای زندگی می‌کنند. در یک لحظه در باز می‌شود و کسی یا کسانی از ساکنان خانه وارد می‌شوند. چقدر احتمال دارد که واقعه به این صورت باشد که A و B و C و D و E باافق وارد شده‌اند؟

حل مسئله ۲) - ابتدا باید کل حالاتی را که طی آن کسی یا کسانی وارد می‌شوند در نظر بگیریم. ورود می‌تواند بصورت ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ نفری باشد. عده حالاتی که طی آن ۱ نفر وارد می‌شود (طبق استدلالی که در مسئله ۱ عرضه شد) برابر تعداد ضلع‌های مکعب ۵ بعدی است. به همین ترتیب عده حالاتی که طی آن ۲ یا ۳ یا ۴ نفر وارد می‌شوند به ترتیب برابر تعداد وجوده، مکعب‌ها و مکعب‌های ۴ بعدی یک مکعب ۵ بعدی است. عده حالاتی که طی آن ۵ نفر وارد می‌شوند یک است. پس به کمک جدول (ماتریس)، عناصر نخستین، کل حالت‌های ممکن بدین ترتیب محاسبه می‌شود:

$$e=1 \quad e=2 \quad e=3 \quad e=4 \quad e=5$$

$$d=5 \quad N=80+80+40+10+1=211$$

ورود همزمان A و B و C و D بهدو صورت ممکن است باشد بسته به اینکه هنگام



شکل ۷

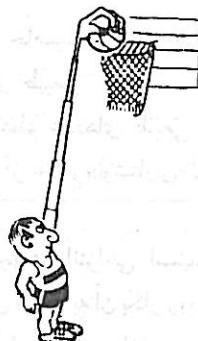
$$N = \frac{5!}{114!} \times 2^4 + \frac{5!}{213!} \times 2^3 + \frac{5!}{312!} \times 2^2 + \frac{5!}{214!} \times 2 + \frac{5!}{0!5!} \times 1 = 80 + 80 + 40 + 10 + 1 = 211$$

از طرفی همچنانکه قبل از آن کفته شد، مثلاً عدد حالت‌هایی که طی آن ۲ نفر از ۵ نفر وارد می‌شوند برابر عدد جووه مکعب ۵ بعدی است. از مقایسه این دو راه حل مختلفی که برای مسأله ۲ ارائه شد می‌توان فرمول زیر را برای محاسبه تعداد عناصر رسته e از مکعب d بعدی بدست آورد و در واقع یکایک عده‌های جدول «عناصر نخستین» را می‌توان از روی آن مستقیماً محاسبه نمود:

$$N_e^d = \frac{d!}{e!(d-e)!} \times 2^{d-e}$$

در محاسبه‌های تقریبی برای مقدارهای زیاد n می‌توان $n!$ را از فرمول استرلینگ Stirling محاسبه نمود.

$$\text{stirling : } n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n(1+u)} \quad u \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$



نامحدود است، ابزار جدیدی برای بررسی اینگونه مسائل بدبست می‌دهد.

* اگر مسئله ۲ را بخواهیم از روش معمولی شمارش حل کنیم به صورت زیر خواهد بود:

مجموع عدد حالت‌هایی که یک یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ نفر وارد می‌شوند = عدد کل حالت‌هایی که کسی یا کسانی وارد می‌شوند.

عدد حالت‌هایی که می‌توان ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ نفر را از بین ۴ نفر انتخاب کرد \times عدد حالت‌هایی که می‌توان ۱ نفر را از بین ۵ نفر انتخاب کرد = عدد کل حالت‌هایی که ۱ نفر وارد می‌شود

عدد حالت‌هایی که می‌توان ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ نفر را از بین ۳ نفر انتخاب کرد \times عدد حالت‌هایی که می‌توان ۲ نفر را از بین ۵ نفر انتخاب کرد = عدد کل حالت‌هایی که ۲ نفر وارد می‌شود.

عدد حالت‌هایی که می‌توان ۰ یا ۱ یا ۲ نفر را از بین ۲ نفر انتخاب کرد \times عدد حالت‌هایی که می‌توان ۳ نفر را از بین ۵ نفر انتخاب کرد = عدد کل حالت‌هایی که ۳ نفر وارد می‌شود.

عدد حالت‌هایی که می‌توان ۰ یا ۱ نفر را از بین ۱ نفر انتخاب کرد \times عدد حالت‌هایی که می‌توان ۴ نفر را از بین ۵ نفر انتخاب کرد = عدد کل حالت‌هایی که ۴ نفر وارد می‌شود.

عدد حالت‌هایی که می‌توان ۰ نفر را از بین ۰ نفر انتخاب کرد \times عدد حالت‌هایی که می‌توان ۵ نفر را از بین ۵ نفر انتخاب کرد = عدد کل حالت‌هایی که ۵ نفر وارد می‌شوند.

در هر یک از حاصل ضرب‌های فوق به تعبیر ریاضی عدد ترکیب‌های m تایی از مجموعه ۵ عنصری را در عدد زیر مجموعه‌های مجموعه $m-m$ عنصری ضرب کرده‌ایم، برای هر دوی این‌ها در حساب احتمالات فرمول مشخص وجود دارد. عدد حالت‌هایی که می‌توان ترکیب‌های m تایی از مجموعه ۵ عنصری مشخص نمود به

C_m^5 نشان داده می‌شود و برابر $\frac{5!}{m!(5-m)!}$ است.

عدد زیر مجموعه‌های مجموعه m عنصری نیز برابر 2^m است. پس:

واضحت اما از (۲) نتیجه می شود که عددهای طبیعی همگی با هم متولد نشده اند.
(۳) نیز واضحست.

به حال هر نظریه ای که راجع به تکوین عددهای طبیعی بیان شود باید قادر به توجیه سه خاصیت بالا باشد.

* * *

با توجه به اینکه قدیمترین متن های ریاضی که برای ما مانده مربوط به دو هزار سال قبل از میلاد - از مصر و بابل - می باشد و با توجه به محتوی این متن ها (ریاضیات، محتوی، روش و اهمیت آن - چاپ اول صفحه ۲۵ و تاریخ جهان باستان - چاپ اول صفحه ۱۶۰) می توان حدس زد که مراحل تکوین سلسله طبیعی عددها قبل از پنج هزار سال پیش به اتمام رسیده است.

به نظر می رسد که سلسله عددهای طبیعی در دو مرحله به وجود آمده:
(۱) پیدایش عددهای منفرد

(۲) پیدایش سلسله طبیعی عددها (*)

پیدایش عددهای منفرد: با توجه به تئوری های عملی ای که در مورد پیدایش انسان ارائه شده، می توان مطمئن بود که ابتدا انسانها هیچ تصوری در مورد عدد ** نداشته اند، به عبارت دیگر عدد را به عنوان خاصیت تفکیک ناپذیر اشیاء درک می کرده اند (تا اوایل تکوین زبان در اجتماعات بشری). در مرحله بعدی عدد خاصیتی است مربوط به این یا آن جنس از اشیاء، به عبارت بهتر در این مرحله گونی انسانها کشف کردند که مثلاً، تفاوتی بین یک سگ و دو سگ وجود دارد و توانسته این تفاوت را بیان کند، در صورتی که در مورد هیزم این تفاوت را کشف نکرده بودند و لاجرم نمی توانسته اند بیان کنند و اگر مثلاً در مورد انسانها هم این تفاوت را کشف کرده بودند و می توانستند بیان کنند، این بیان با بیان مربوط به سگها متفاوت بوده. به عبارت دیگر در این مرحله مثلاً می توانسته بگویند «سه آدم در سه محل به سه سگ غذا دادند» اما سه برای آدمها متمایز از سه برای سگها و این هردو متمایز از سه برای محلها بوده است. به این ترتیب در این مرحله گونی چندین عدد شماری داشته اند.

* وجود شواهدی که از این دست که: تا همین اواخر قبایلی بوده اند که می توانستند حداقل تا ۳ یا ۴ عدد دیگر بشمارند و بیشتر از این تعداد را سادگی زیادی با شمار می نامیده اند، مؤید این امر است.
* - عدد عبارتست از اسم عام برای اشیائی که هر کدام اش اشاره به آن بکار رود وجود ندارد، نتیجه اینکه عددها مجموعه که پس از تعویض عناصر مختلف آن مجموعه با عناصر مختلف دیگر باید از ماند.

بحشی در زمینه عددهای طبیعی

پاسخ این سوال که «عدد طبیعی چیست؟ مانند اینکه «ریاضی چیست؟» مطلبی است غیر ریاضی، لذا به ذم عده ای هیچ ریاضی دانی ملزم به پاسخ دادن به چنین سؤالاتی نیست اما عدم وجود پاسخی روشن، و نه قاطع، برای چنین سؤالاتی از یک طرف و انتزاعی بودن خود ریاضیات از طرف دیگر، منجر به پیدایش نظراتی از این قبیل که «گویا ریاضیات از تفکر خالص بوجود آمده» و یا این طرز فکر عالمانه که «گویا ریاضیات مشکل و دست نیافتنی است» شده است، و نتیجه این وضع اینست که شاخه های مختلف ریاضی، که مانند چشممه های جوشانی تمام رشته های فنون و علوم مختلف را به فراخور حالتان سیراب می کنند، و خود نیز زاده زندگی می باشند، به عنوان موجوداتی ترسناک و وحشت انگیز جلوه گر شده مآل ریاضیات را در هاله ای از ابهام فرو می برد. به این ترتیب، کوششی که در راه بازشناسی تکوین عددهای طبیعی خواهیم داشت، کوششی در راه محو کردن این هاله از پیرامون ریاضیات و نشان دادن جوهر زندگی ریاضی خواهد بود.

* * *

با هر آشنایی می توان سه خاصیت زیر از عددهای طبیعی را ذکر کرد:

(۱) انتزاعی بودن عددهای طبیعی

(۲) بی نام بودن قسمت اعظم عددهای طبیعی

(۳) سهل تر بودن استفاده از علامت «نوشتاری» - نسبت به علامت گفتاری - برای ذکر عددهای طبیعی

اینکه یک عدد طبیعی موجودی انتزاعی است، مطلبی واضحست زیرا هیچ موجود طبیعی که مثلاً (۵۳) برای اشاره به آن بکار رود وجود ندارد، نتیجه اینکه عددها محصول طبیعت نبوده و محصول ذهن می باشند. بی نام بودن قسمت اعظم عددها

تشکیل شده. بدین ترتیب بدون وضع یک اسم (یعنی یک علامت) مفهوم هم نمی‌تواند عینیت پیدا کند. کتابت را نیز می‌توان نوعی زبان در نظر گرفت. راجع به علل پیدایش کتابت به عنوان یک پدیده ضروری اجتماعی بحثی نمی‌کنیم (همچنانکه در مورد پیدایش زبان نکردیم). اما، پس از پیدایش کتابت و انتخاب علامتی برای اعداد منفرد، این علامت نوشتاری به صورت تجسم مادی و در نتیجه ملموس آن مفاهیم انتزاعی در آمدند، با انتخاب علامتی برای عملها روی اعداد منفرد زمینه مساعدی برای جمع انتزاعی عدها به وجود آمد - تا قبل از این مرحله عمل جمع، عدهای منفرد، با یک انگیزه قویاً عینی همراه بود، یعنی تا هنگامی که ضرورت نداشته و یا امکان الزامی مبنی بر رویهم ریختن دو توده شیئی در پیش روی نبود، انجام عمل جمع ضروری حس نمی‌شد - امکان جمع انتزاعی عدها از یکسو و ضرورت عملی جمع عدهای نسبتاً بزرگ - به علت تشکیل دولتها - از سوی دیگر به بشر امکان بالقوه ادامه این جمع و در نتیجه بی‌پایان بودن عدهای طبیعی را فهماند و در این لحظه بود که سلسله طبیعی عدها متولد شد.

لازم به یادآوری است که مفهوم پایه یا مبنا در یک سیستم شمار نسبت به مفهوم عدهای طبیعی در درجه دوم قرار دارد. اما پیدایش مبنا در فاصله زمانی اوج عدهای منفرد و پیدایش سلسله عدهای طبیعی صورت گرفته و ضرورت پیدایش آن عبارتست از تسهیل بیان عدها و تسهیل عملها روی عدها. به این ترتیب خود پیدایش مبنا مرحله‌ای اساسی در تکوین سلسله عدهای طبیعی بوده (گو اینکه به علت ضرورت داخلی پیدا شده). با توجه به مبناهای مختلفی که در طی قرون و اعصار و در نقاط مختلف، برای شمار انتخاب شده (مانند ۱۲-۶۵-۸-۱۰ و غیره) معلوم می‌شود که کشف سلسله عدهای طبیعی را می‌بینیم یک نفر بخصوص، یا یک نسل بخصوص، یا حتی یک تمدن بخصوص نیستیم. بلکه، سلسله عدهای طبیعی نیز میراثی است معنوی و حاصل تلاش و کوشش برای زیستن، نسلهای متعددی از انسانها بوده است.

٥٠٠

تنهای پس از این مرحله بود که سیستمی بکتواخت برای شمارش (البته محدود) به وجود آمد، یعنی، عدهای منفرد به وجود آمدند. به این ترتیب معلوم می‌شود که، منظور از عدد منفرد کلمه‌ایست که خاصیتی از خواص اشیاء عینی را می‌رساند و این خاصیت عبارتست از امکان در تناظر دو سوئی قرار گرفتن دو مجموعه از آنها. این بیان بخودی خود می‌رساند که یکی از دو مجموعه مورد مقایسه بایستی مأнос باشد و چه چیز مأнос‌تر از اعضای بدن انسان و بخصوص انسانستان دست، این محصول کاز در اینجا شباهت صوتی بین پنج و پنجه را در زبان فارسی یادآوری می‌کنم.

باید توجه داشت، همانطور که عدها از اشیاء منزع شدند، عمل روی آنها (جمع و تفرق) هم از عمل واقعی رویهم ریختن توده اشیاء و برداشتن مقداری از یک توده شیئی منزع شد و این حوادث همزمان بوده‌اند. یعنی اینکه عدهای منفرد و اعمال روی آنها با هم به وجود آمدند.

در حقیقت این هردو (یعنی عدهای منفرد و اعمال روی آنها) خدمتگزار ضرورتی ناشی از زندگی (شمارش اشیاء) بوده‌اند. و این خدمتگزاری را گهگاه عدهای منفرد به تهائی و گهگاه توام انجام می‌داده‌اند. به عنوان شاهدی برای امر می‌توان گفت: بعضی از بومیان آمریکا عدد «بیست و شش» را به صورت «من شش را روی دو برابر ده گذاشته‌ام» تلفظ می‌کنند (رياضيات، محنتی، روش و اهمیت آن، چاپ اول، صفحه ۲۰) که، یعنی، برای بیان یک عدد منفرد (بیست و شش) از سه عدد منفرد (شش، دو، ده) و دو بار عمل جمع استفاده شده.

به این ترتیب معلوم می‌شود که عملهای روی عدهای منفرد این عدها را در جهت خدمتگزاری همان ضرورت، زندگی متحرک تر و پربارتر می‌کرده است. و همین دستگاه (عدهای منفرد و عملهای روی آنها) قادر به رفع احتیاجات انسانها بوده است، چرا که انسانها در مرحله‌ای از زندگی بوده‌اند که بایستی بعد از تکوین زبان و قبل از بردۀ داری بوده باشد.

پیدایش سلسله عدهای طبیعی: به این ترتیب هر یک از عدهای منفرد مفهومی انتزاعی بوده و مانند هر مفهوم انتزاعی دیگر که نه می‌توان آنها را نشان داد و نه اینکه مجسم نمود، بلکه درباره آنها فقط می‌توان فکر کرد، و از آنها در تفکرات استفاده کرد، اما تفکر با زبان * (یا بیان) شکل می‌گیرد و هر زبانی ملاً از یک مجموعه اسامی

* منظور از زبان هر دستگاهی است که به وسیله آن تبادل افکار صورت می‌گیرد.

محمد حسین احمدی

طلوع ریاضیات جدید (۲)

در ریاضیات، هیچ ضعفی را نمی توانیم بیان کنم، مگر آنکه خود بشر، بقدر کافی، به کار خواهد پرداخت و اینکه این کار را با دقت و سه دلخواهی انجام داده باشد.

فرانسیس بیکن

سیمون استیون Simon Steven (۱۵۴۸-۱۶۲۰) فلاندری

استیون در زمینه کاربرد مبنای دارد - که امروزه متداول است - تحقیقات و مطالعات عمیقی انجام داد و نتایج کارش را در رساله‌ای به نام «ده یک یا یکدهم» De Thiende (سال ۱۵۸۵) در لی دن Leyden انتشار داد که حاوی مباحثی در ریاضیات، علوم مهندسی و اقتصاد نیز می‌باشد. او در این اثر با ارائه توضیحات مفصل و در عین حال ساده‌ی خود توانست در تفہیم و شناساندن هر چه بهتر دستگاه اعشاری، نقشی بس اساسی داشته باشد. ترجمه‌ی فرانسه این کتاب نیز در همین سال، منتشر شد اما رعایت ساده‌نویسی و به زبان تدوه در آوردن مفاهیم ریاضی و توده پسند کردن آن، سبب شد که بهای زیادی از بابت آن کسب کند و کتابش نیز جای واقعی خود را در توسعه عرصه‌ی ریاضیات نیابد. بهر حال، این کتاب یکی از مهمترین آثار او به شمار می‌رود چرا که استیون در آن، برای نخستین بار به تنظیم و شرح دقیق اصول مربوط به کسرهای اعشاری پرداخته است. ناگفته نماند که او نه مختار کسر اعشاری بود و نه اولین کسی بود که به مطالعه‌ی سیستماتیک آن می‌پرداخت، زیرا چینیان قدیم، اعراب قرون وسطی و نیز اروپاییان دوره رنسانس، گهگاه از کسرهای اعشاری استفاده می‌کردند. اما اهمیت کار استیون - همانطوری که فوقاً اشاره شد - در این است که او با ارائه شرح کامل و مقدماتی از دستگاه اعشاری، آنرا، نه تنها در



سیمون استیون

میان دست اندکاران ریاضی بلکه در بین مردم عادی نیز بطور وسیع و گسترده‌ای متداول ساخت.

استیون ضمناً در زمینه کاربرد دستگاه اعشاری مطالعاتی انجام داد و همیشه اصرار داشت که دستگاه اعشاری باید در امر تعیین «اززان» و «اندازه‌ها» به خدمت گرفته شود او همچنین در نمایش قوه‌ی اعداد و نیز بکارگیری عالمی نظری $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ پیشقدم بوده است.

استیون، احساس می‌کرد که باید در به خدمت گرفتن روش‌های ارشمیدسی - که به آن محتاج نیز بود - تلاش نماید. اما همیشه سعی داشت که از نکات منطقی روش افقار (Exhaustion) پرهیزد. او اولین کسی بود که خواستار تغییراتی در روش‌های بینهایتیک یا بینهایت کوچک «Infinitesimal» قدیم شد. تغییراتی که نهایتاً به تأسیس حساب انتگرال و دیفرانسیل ختم می‌شد.

استیون در اثرش به نام «استاتیک» (۱۵۸۶)، نشان داد که مرکز ثقل هر مثلث، روی میانه‌ی آن قرار دارد. او ضمناً به کاربردهای فیزیکی عناصر بینهایت بار بینهایت کوچک ریاضی، سخت علاقه‌مند بود. و از آن‌ها در تحقیقات و مطالعات رشته‌های فیزیک و مکانیک یاری می‌جست.

با انکاء بر آنچه که فوقاً گذشت و بنا به اهمیت اساسی دستگاه اعشاری - که امروزه بدان واقفیم - نقش مؤثر استیون - این ریاضیدان برجسته‌ی ممالک سفلی در قرن شانزدهم - در تشکیل ریاضیات جدید آشکار می‌گردد.



گالیلئو گالیله

گالیلئو گالیله (Galileo Galilei) (۱۵۶۴-۱۶۴۲) ایتالیانی

گالیله اگرچه یک ریاضیدان نبود ولی دریافتمن کاربرد ریاضیات در فیزیک و نجوم سهم بسزایی دارد. او در سال ۱۵۹۷ موفق شد پرگار تابسی را - که خود پرگار هندسی و نظامی می‌نامید - بسازد. در ۱۶۰۶، رساله‌ای منتشر ساخت که در آن، به شرح طرز کار با پرگار پرداخت. این وسیله که بیش از یک قرن، مورد استفاده قرار گرفته بود تشهیلات زیادی را در امر محاسبات - بدون استفاده از قلم و کاغذ و یا چرتکه - فراهم می‌کرد. و این رساله‌ی گالیله، تنها تز ریاضی او به شمار می‌رود.

با نگاهی گزرا به کارهای گالیله در زمینه‌های نجوم و فیزیک، به آسانی می‌توان دریافت که او با بهره‌گیری فراوان از ریاضیات و استدلال‌های ریاضی به تجزیه و تحلیل موضوعات یاد شده پرداخته و از اینرو در پیشرفت بخشی از ریاضیات که

منتھی به حساب انتگرال و دیفرانسیل می‌شود، شریک و سهیم است.

از مهمترین آثار گالیله می‌توان «دو دستگاه اصلی» (۱۶۳۲) و «دو علم جدید» (۱۶۳۸) را نام برد که البته از آثار ریاضی او به شمار نمی‌رود اما از ریاضیات به ویژه از خواص مربوط به «بینهایت بزرگ» و «بینهایت کوچک»‌ها بطور وسیعی استفاده

13

THIENDE.
HET ANDER DEEL
DER THIENDE VANDE
WERCKINCHE.

I. VOORSTEL VANDE
VERGADERINGHE.

*Wesende ghegeven Thiendetalen te ver-
gaderen: hare Somme te vinden.*

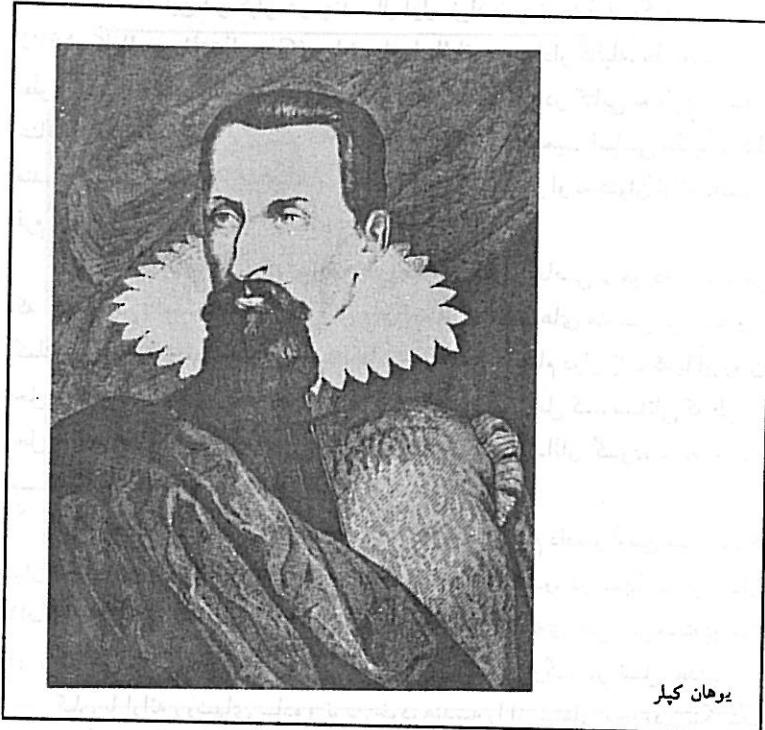
T' GHEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van
Thiendetalen, welcker eerste 27 Ⓛ 8 Ⓛ 4 Ⓛ 3
7 Ⓛ 3, de tweede, 37 Ⓛ 6 Ⓛ 7 Ⓛ 2 Ⓛ 5 Ⓛ 3, de derde,
875 Ⓛ 7 Ⓛ 8 Ⓛ 2 Ⓛ 3, T' BEGHEERDE. Wy
moeten haer Somme vinden. WERCKING.

Men fal de ghegheven ghe-
talen in oirden stellen als
hier neven, die vergaderen-
de naer de ghemeene manie
re der vergaderinghe van
heelegetalen aldus:

(3)	(1)	(2)	(3)
2	7	8	4
3	7	6	7
8	7	5	2
<hr/>			
9	4	1	3
0	4	0	4

Comt in Somme (door het 1. probleme onser
Transcher Arith.) 9 4 1 ; 0 4 dat sijn (tweelck de
teekenen boven de ghetalen staende, anwijzen)
9 4 1 Ⓛ 3 Ⓛ 1 Ⓛ 0 Ⓛ 2 Ⓛ 4 Ⓛ 3. Ick legghe de selve te wesen
de ware begheerde Somme. Bewys. De ghege-
ven 27 Ⓛ 8 Ⓛ 7 Ⓛ 2 Ⓛ 3, doen (door de 3e. hepa-
ven 27 Ⓛ 8 Ⓛ 7 Ⓛ 2 Ⓛ 3, doen (door de 3e. hepa-
ven 27 Ⓛ 8 Ⓛ 7 Ⓛ 2 Ⓛ 3, maeckē tafelen 27 Ⓛ 8 Ⓛ 7 Ⓛ 2 Ⓛ 3,
Ende door de selve reden fullen de 37 Ⓛ 6 Ⓛ 7 Ⓛ 2 Ⓛ 5 Ⓛ 3
5 Ⓛ 3 weerdich sijn 37 Ⓛ 6 Ⓛ 7 Ⓛ 2 Ⓛ 5 Ⓛ 3; Ende de 875 Ⓛ 7 Ⓛ 8 Ⓛ 2 Ⓛ 3
8 Ⓛ 3

صفحه‌ای از کارهای استیون (جان ۱۶۳۴). این صفحه علانمی را که او برای کسرهای اعشاری بکار می‌برد،
نشان می‌دهد.



یوهان کپلر

فی العتل، برای اندازه‌گیری سطح بیضی (در رابطه با قانون دوم نجومی اش) کپلر سطح مذکور را به صورت سطحی مشکل از مثلث‌ها (یا قطاهای) بینهایت کوچک در نظر می‌گرفت. او با این روش، مساحت سطح دایره و بیضی را محاسبه کرده و برای نخستین بار، موفق به محاسبه‌ی مساحت سطح یک قطاع بیضوی شد.

یکی از غنی‌ترین آثار ریاضی کپلر، کتابی است به نام «اندازه‌گیری حجم بشکه‌ها» (سال ۱۶۱۵ - *Stereometria doliorum*). او در این کتاب - که به نام «هندسی جدید بشکه‌های شراب» نیز معروف است - به مباحثی نظری هندسه‌ی اجسام منحنی الشکل منتظم، محاسبه حجم اجسام دوران (برای اولین بار در تاریخ ریاضیات)، محاسبه‌ی حجم اجسام حاصل از دوران قطاع مقاطع مخروطی پرداخته و در رابطه با تعیین حداقل گنجایش بشکه‌ها، مسئله‌ی ریاضی ماگزیم یک تابع را مطرح و از طریق هندسی به حل آن توفیق یافت. بعدها، همین موضوع، فرمایران داشت که به بررسی یکی از بنیادی‌ترین مفاهیم ریاضی یعنی مفهوم تابع پردازد.

کرد. او همچنین ثابت کرد که در هر حرکت پرتابی، مسیر حرکت هر شیئی، با اغماس مقاومت هوا، یک سهمی است.

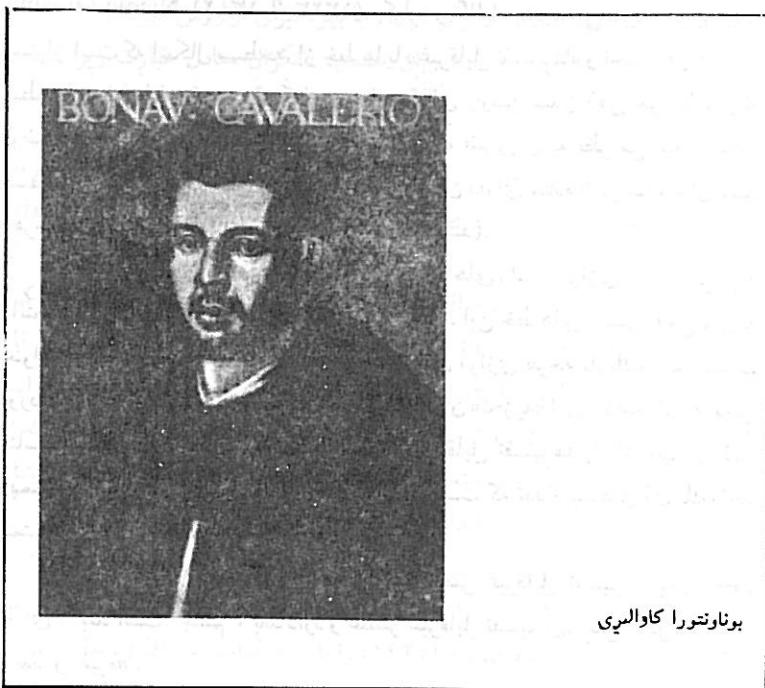
گالیله روی یک منحنی - که بعداً به منحنی سیکلوئید شهرت یافت - مطالعاتی انجام داد و سعی می‌کرد که مساحت سطح محصور بین یک قوس کامل سیکلوئید و محور افقی را حساب کند اما آنچه را که او توانست بیان کند این بود که این مساحت از سه برابر مساحت سطح دایره مولد، قدری کمتر است. (البته خواهیم دید که ریاضیدانان فرانسوی و ایتالیانی ثابت کردند که این مساحت دقیقاً مساوی است با سه برابر مساحت سطح دایره‌ی مولد).

یکی از مهمترین کارهای گالیله در ریاضیات، همانا به خدمت گرفتن ایده‌ی بینهایت کوچک‌های مراتب بالا در اثرش به نام «دو دستگاه اصلی» (۱۶۳۲) است. او ظاهراً، رساله‌ای در زمینه «بینهایت در ریاضیات» نوشته که متأسفانه نسخه دستتوییس آن هنوز پیدا نشده. کوتاه سخن آنکه، گالیله باه کارگیری عناصر «بینهایت بزرگ» و «بینهایت کوچک» ریاضی و نیز روش‌های اتفاقی تزییمال (بینهایت کوچک)، در تسريع پیدایش و بنیان گرفتن حساب انتگرال و دیفرانسیل، سهمی فوق العاده دارد.

یوهان کپلر (Johann Kepler) (۱۵۷۱-۱۶۳۰) آلمانی

یوهان کپلر، اگرچه قسمت اعظم کارهایش در زمینه نجوم بوده، ولی می‌توان او را یکی از بزرگان ریاضیات جدید نامید. کپلر همانند استیون، خود را بی نیاز از روش‌های ارشمیدسی نمی‌دانست. اما او نیز از مراحل منطقی و طولانی روش افقاء احتراز می‌کرد. و همین امر سبب می‌شد که مورد بی‌مهری و شماتت پیروان ارشمیدس قرار گیرد.

یکی از تاکتیک‌های خاص او در حمله به مسائل جدید، همانا بهره‌گیری از روش‌های ساده و نوین بوده تا بدانجا که نسبت به شیوه‌های استدلالی و طولانی قدیم، کاملاً بی‌اعتناء بود. از اینرو در نهضت ساده سازی براهین، سهم فوق العاده ای دارد. در حالیکه سیمون استیون به کاربردهای فیزیکی عناصر بینهایت بار «بینهایت کوچک» ریاضی، علاقه نشان می‌داد کپلر به کاربردهای نجومی این عناصر - در ارتباط با مدارهای بیضوی اش (۱۶۰۹) - می‌اندیشید. و سرانجام نیز به روش سودمند و خوبی در امر به کارگیری عناصر «بینهایت کوچک» در نجوم دست یافت.



آن ضمن شرح مبانی و قوانین مثلثات لگاریتمی، جداول مربوط به سینوس، تانژانت، سکانت و ورس سینوس یعنی $(\cos \theta - 1)$ راهنمای لگاریتم هایشان آورده است. او در همین سال، رساله ای در باب مقاطع مخروطی، در ارتباط با اپتیک هندسی، منتشر ساخت.

از مهمترین آثار کاوالیری، می توان کتاب «هندسی عناصر غیرقابل تقسیم پیوسته» (Geometria indivisibilibus Continuorum) را نام برد. او در این کتاب، نظریات کپلر را به طور سیستماتیک، توسعه داده و به ارائه نظریه ای نوین - که به نظریه عناصر غیرقابل تقسیم معروف است - پرداخته است. این اثر که در ۱۶۳۵ انتشار یافته، یکی از مؤثرترین و با نفوذترین کتابهای ریاضی این عصر به شمار می رود، چرا که این کتاب در زمینه های هندسه تحلیلی و حساب انتگرال و دیفرانسیل - ولوبه صورت خام - غنی و پربار است. نوع استدلال او در باب نظریه جدیدش - که اساساً از کارهای نیکولا اورسم

ناگفته نماند که این اثر کپلر، در چند سال اول، زیاد مورد توجه قرار نگرفته بود اما در ۱۶۳۵، کاوالیری (Cavalieri) ریاضیدان ایتالیائی و هوادار گالیله، نظریات کپلر را بطور اصولی و سیستماتیک گسترش داده و ما حصل آنرا در کتابی به نام «هندسی عناصر غیرقابل پیوسته» انتشار داد. از اینرو می توان به اهمیت اساسی نظریات کپلر مندرج در کتاب «اندازه گیری حجم بشکه ها» بی برد و از او به عنوان ارائه دهنده فرم خام» حساب انتگرال یاد کرد.

کتاب «اندازه گیری حجم بشکه ها» کپلر از اعتبار خاصی برخوردار است چرا که او در این اثر خود، به ارائه روش های جدید استدلال های هندسی پرداخته و به کمک آنها توانست مسائل مربوط به محاسبه حجم اجسام دور را - که تا آن زمان، حل اشان با روش های سنتی، غیرممکن به نظر می رسید - حل کند، مسائلی که طرح و حل آنها به وسیله کپلر، دریچه ای تازه به روی ریاضیدانان گشوده و به حرکت پیشرفت ریاضیات، سرعت فوق العاده ای بخشید.

کپلر همچنین مطالعاتی در باب مقاطع مخروطی انجام داده و اولین کسی بود که بیان داشت: سهمی دارای دو کانون بوده و یکی از آنها، در بینهایت قرار دارد (اصطلاح «کانون» را خود او وضع کرده است). این اندیشه‌ی غنی و برجسته‌ی کپلر در زمینه‌ی «نقاط در بینهایت»، موجب بسط هندسه دزارگ، در نسل بعدی شد. کپلر، با ارائه روش های ساده و نوین خود، هندسه را از بنده های محدود و تنگاتگ روش های سنتی آزاد ساخته و موجب حرکت های جدیدی در عرصه ریاضیات شد از اینرو می توان او را به عنوان یکی از درخشانترین چهره های تاریخ ریاضیات جدید به حساب آورد.

بوناونتورا کاوالیری (Bonaventura Cavalieri) ۱۶۴۷ - ۱۵۹۸ ایتالیائی

کاوالیری تنها ریاضیدان ایتالیائی در قرن شانزدهم است که در تکامل ریاضیات جدید، سهم عمده ای دارد زیرا او مطالعاتی در زمینه های مختلف ریاضیات محض و کار بسته نظریه هندسه، مثلثات، نجوم و اپتیک هندسی انجام داده و نخستین ریاضیدان ایتالیائی است که به اهمیت اساسی مفهوم «لگاریتم» بی برد و بهای زیادی به آن داده است. کاوالیری در سال ۱۶۴۲ به انتشار کتاب «راههای راهنمای اندازه گیری آسمان» (Directorium Universale Uranometricum) مبادرت ورزید که در

۱۶۲۶، موفق شد این روش را گسترش دهد. به علاوه، کاوالیری اهم فکر خود را روی یک قضیه بسیار مهم هندسی متعرکز کرده و با بهره گیری از روش غیرقابل تقسیم‌ها به اثبات آن پرداخت. این قضیه به زبان حساب انتگرال معادل عبارت زیر است:

$$\int_{0}^{a^n+1} x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

چنانکه ملاحظه می‌شود کاوالیری عنصر dx (دیفرانسیل طول) را در ارتباط با روش غیرقابل تقسیم‌ها جبراً به کار می‌گرفت اما او عملاً در سخترانیهایش وجود dx را شدیداً انکار می‌کرد.

سه‌می $y = ax^r$ و مارپیچ $r = a\theta$ ، اگرچه از قدیم شناخته شده بودند ولی کسی توانسته بود رابطه‌ای بین آن‌دو پیدا کند. اما کاوالیری در مقام «مقایسه‌ی غیرقابل تقسیم‌های مستقیم الخط با غیرقابل تقسیم‌های منحنی الخط» رابطه‌ی بین آیندو اورد. از آنجا که پاره خط، ضخامتی ندارد، نمی‌توان «تجزیه» آن را ادامه داد. به همین مناسبت کاوالیری، برای شکل مسطوحه، نام غیرقابل تقسیم‌ها را انتخاب می‌کند. همترین خصلت عنصر غیرقابل تقسیم در این است که تعداد بعدهای آن، یک واحد از علم ریاضی هنوز رسمآ ابداع نشده بود. آسانتر و هموارتر ساخت.

از آثار دیگر کاوالیری می‌توان «صد مسئله‌ی مختلف برای نشان دادن کاربرد لگاریتم در نجوم و غیره» (۱۶۳۹)، «مثلثات مسطوحه و کروی، خطی و لگاریتمی» (۱۶۴۳) و «شش طرح هندسی» (۱۶۴۷) را نام برد. کتاب اخیر‌الذکر، حاوی مطالبی است که اگرچه محتوای آن را ریاضیدانان فرانسوی هم عصر کاوالیری. می‌دانستند ولی او اولین کسی بود که به انتشار قضایای تعمیم یافته و معروفی نظری «نسبت مجموع قوای n ام خطوط یا عناصر غیرقابل تقسیم یک مثلث به مجموع قوای n ام خطوط یا عناصر غیرقابل تقسیم یک متوازی الاضلاع برابر است با $\frac{1}{n+1}$ » پرداخت. این قضیه، راه را برای اغلب الگوریتم‌ها در حساب انتگرال و دیفرانسیل گشود. با توجه به این امر و نیز با توجه به نظریه‌ی تازه عناصر غیرقابل تقسیم کاوالیری، می‌توان به نقش اساسی و خدمات درخشان او در تکامل ریاضیات جدید، بی‌برد.

عصر فرما و دکارت

رنه، دکارت Rene Descartes (۱۵۹۶-۱۶۵۰) فرانسوی

رنه دکارت، یکی از ریاضیدانان مشهور فرانسه، در حساس‌ترین و بحرانی‌ترین لحظات دوران تاریخ ریاضیات، به شمار می‌رود. فلسفه و اندیشه‌ی دکارت بر این

Nicole Oresme (۱۳۸۲-؟ ۱۳۲۳)، کپلر و گالیله نتیجه می‌شود - براین پایه استوار است که اشکال مسطوحه، از خط‌ها یا «غیرقابل تقسیم‌ها» و اجسام فضائی، از سطوح‌های غیرقابل تقسیم، تشکیل شده‌اند. برای روش‌شن ذهن خواننده، ارائه توضیحاتی در باب اصطلاح «غیرقابل تقسیم‌ها» ضروری به نظر می‌رسد: «شکل مسطوحه محدودی را در نظر می‌گیریم که محیط آن دارای ساده‌ترین ساختمان باشد (هر خط راست، محیط آن را در دو نقطه قطع کند).

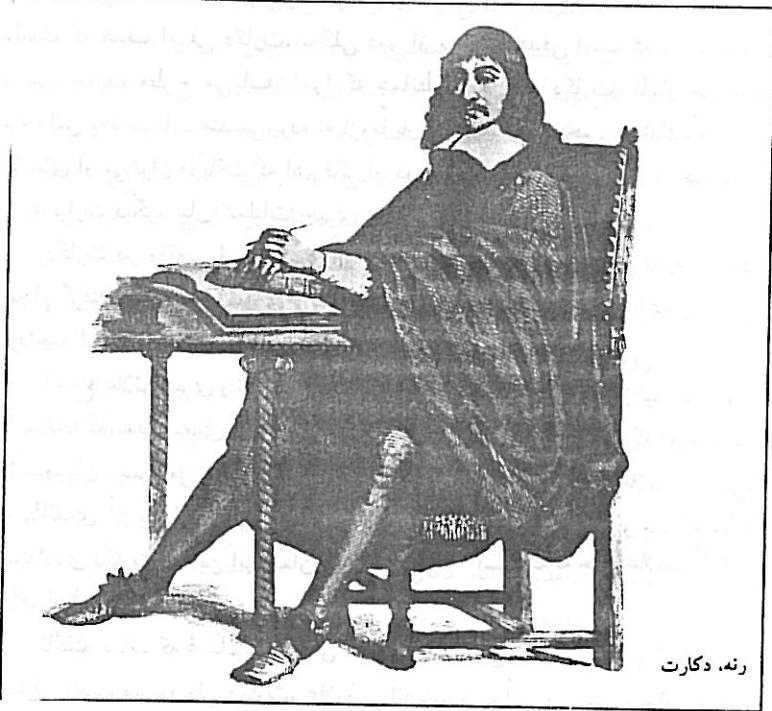
کاوالیری، شکل را به عنوان رشتۀ ای از خط‌های راست موازی در نظر می‌گیرد (انتخاب جهت خط‌های راست، به دلخواه است). این خط‌های راست را می‌توان به عنوان نتیجه حدی تقسیم کردن شکل، به نواهای موازی هرچه باریک‌تر، به حساب آورده. از آنجا که پاره خط، ضخامتی ندارد، نمی‌توان «تجزیه» آن را ادامه داد. به همین مناسبت کاوالیری، برای شکل مسطوحه، نام غیرقابل تقسیم‌ها را انتخاب می‌کند. همترین خصلت عنصر غیرقابل تقسیم در این است که تعداد بعدهای آن، یک واحد کمتر از تعداد بعدهای خود شکل هندسی است.

شکل مسطوحه ۲ بعد دارد، در حالی که عنصر غیرقابل تقسیم آن یعنی خط، دارای ۱ بعد است. جسم ۳ بعد دارد و عنصر غیرقابل تقسیم آن، یعنی شکل مسطوحه، ۲ بعد و غیره!.

کاوالیری با روش ابداعی خود - یعنی روش غیرقابل تقسیم‌ها - توانست مسائل مربوط به تعیین سطح و حجم را حل کند. ناگفته نماند که روش کاوالیری در واقع عکس روش کپلر است زیرا «کپلر ابتدا» محاسبه می‌کند و بعد به سمت مقدار حدی می‌رود (یا بهتر بگوییم، این عبور به نحو ظرفی انجام می‌شود)، در حالی که کاوالیری ابتدا و در جریان «تجزیه» شکل، عبور حدی را انجام می‌دهد و سپس به محاسبه می‌پردازد! در روش کاوالیری نه مرحله‌ای از تقریب پیوسته وجود دارد و نه حذف جمله‌ای، چرا که او از یک تناظر یک بیک بین عناصر دو شکل استفاده کرده و بالنتیجه در هر بعد دلخواه، هیچ جمله‌ای کنار گذاشته نمی‌شود.

در نظریه کاوالیری اگرچه نکات مبهمی وجود دارد، ولی او توانست راه کلی و به ظاهر موجه‌ی «روش غیرقابل تقسیم‌ها» را به وسیله قضیه‌ای - که در اغلب کتب هندسه فضائی به «قضیه‌ی کاوالیری» مشهور است - بخوبی روش‌شن سازد. او در سال

۱ و ۲ - نقل از صفحه‌ی ۵۳ مجله «آشی با ریاضیات» شماره‌ی ۱۳ (سال ۱۳۵۸). - مقاله‌ی «آفرینندگان ریاضیات عالی» نوشته‌ی ل. س. فریمان - ترجمه‌ی پرویز شهریاری



رنه، دکارت

دکارت این رساله را، بطور مستقل به دنیا عرضه نکرد بلکه آنرا به عنوان یکی از ضمیمه‌های کتاب معروف خود به نام *گفتاری در روش Discours de la méthode* در سال ۱۶۳۷، انتشار داده و به اطلاع همگان رسانید. و بدین ترتیب، تولد رسمی «هندسۀ تحلیلی» در تاریخ ریاضیات ثبت گردید. رساله‌ی «هندسۀ» او، مشتمل بر سه مقاله است. در مقاله اول: به تشریح هندسی چهار عمل اصلی حساب پرداخته و حل معادلات جبری درجه‌ی دوم را با روش هندسی - نه به روش جبری بابلی‌های قدیم - ارائه می‌دهد. در مقاله‌ی دوم: به طبقه‌بندی منحنی‌ها و نیز به ارائه روش‌هایی جهت تعیین مماس و قائم بر این منحنی‌ها، می‌پردازد. در مقاله‌ی سوم، روش‌هایی جهت تعیین منحنی‌ها، می‌پردازد. که از آن جمله روشها و قضایائی را در ارتباط با حل معادلات جبری، شرح می‌دهد. که از آن توان، روش دکارت و یا طریقه‌ی علامات در حل معادلات. روش تعیین تعداد ریشه‌های مثبت و منفی معادلات جبری، تعیین حدود ریشه‌ها و تعیین مقادیر تقریبی ریشه‌ها را نام برد.

پایه استوار بود که در تمام زمینه‌های علمی و مباحث فکری، باید انقلاب کرد و از برای آنان، طرحی نو، در انداخت. اما این امر، درباب آثار و اندیشه‌های ریاضی او، صدق نمی‌کند چرا که آثار ریاضی اش، با روشهای سنتهای قدیمی، پیوندی عمیق دارد. من باب مثال، هدف اصلی او در هندسه، ایجاد انقلاب نبود بلکه برآن بود که به توضیح و تبیین شواهد و مفاهیم هندسی پرداخته و به حل معادلات از طریق ترسیمات هندسی، دست یابد.

دکارت به طور کلی، ریاضیات را نمونه‌ی کامل علم می‌دانست و سعی داشت روش ریاضی را در همه‌ی علوم دیگر به خدمت گیرد. از اینرو، تنها هدفش در ریاضیات، همانا تأسیس یک نوع ریاضیات عمومی بود که در آن جبر، هندسه و حساب از اجزای مرتبط و لاینفک آن می‌باشند. او اصولاً بر آن بود که با استفاده از ریاضیات، به تشریح و تبیین آثار و پدیده‌های طبیعت پردازد و یا به عبارت دیگر، برای این پدیده‌ها، مدل‌های ریاضی بیابد.

دکارت با فعالیتهای خستگی ناپذیر و تلاش‌های توفنده خود، مطالعات عمیقی در زمینه‌های هندسه، جبر و حساب انجام داد. او در طول سال ۱۶۱۹، موفق به کشف فرمول چند وجهی‌های ساده شد که امروزه به فرمول اولر "Euler" مشهور است. ($f = e + 2$)، که در آن e به ترتیب تعداد رأس، وجه و یال‌های یک چند وجهی ساده را مشخص می‌کنند. دکارت در سال ۱۶۲۸، قاعده‌ای برای تعیین مقادیر تقریبی ریشه‌های معادلات درجه‌ی سوم و چهارم از طریق ترسیمات هندسی - ارائه داد. که البته این قاعده در اصل، همان روشی بود که مناخموس "Menaechmus" در قرن دوم، برای تضعیف (دوبرابر کردن) مکعب و عمر خیام، در حوالی قرن یازدهم، جهت حل معادلات درجه‌ی سوم به کار می‌گرفت.

دکارت در طول سالهای ۱۶۳۱-۱۶۳۲ به آسانی موفق شد یکی از مسائل مشهور پاپوس "Pappus" را حل کند. این امر، سبب شد که به استحکام و کلیت نقطه نظرهایش پی برد، و به نوشتن رساله‌ای کوچکی در حدود صد صفحه، تحت عنوان هندسۀ "La geometrie" مبادرت ورزد، رساله‌ای که در تاریخ ریاضیات جدید، از اعتبار خاصی برخوردار است. چه، این مقاله، از ایجاد شاخه‌ی جدیدی از ریاضیات به نام «هندسۀ کارتزین» و یا «هندسۀ تحلیلی» حکایت می‌کرد. ناگفته نماند که نام لاتینی دکارت، کارتزیوس "Cartesius" بوده و اصطلاح کارتزین در ریاضیات، از این کلمه، مأخذ است.

داده شده بود بلکه مسئله را بکلی از جنبه‌ی متقابل و متفاوت آن مورد مطالعه قرار داد یعنی بی‌واسطه‌ی تعریف هندسی منحنی‌هایی را که بیش از پیش پیچیده و بنابراین بیش از پیش کلی بوده‌اند، خودبخود به‌وسیله‌ی معادلات آنها تعریف کرد... ما حاصل مستقیم این طرز تفکر، اکتشافات مشخص او و ماحصل غیرمستقیم آن، اکتشافات آینده بود و حتی وقتی که در قرن بعد، روش متقابل مورد استفاده واقع شد می‌توان گفت که مجموعه‌ی روش تفهیم و موضوع علوم ریاضی در معرض انقلاب عظیمی واقع شد.^(۱) در خاتمه باید یادآور شد که اگرچه، دستگاه مختصات اورسم در مقایسه با دستگاه مختصات آپولونیوس و دکارت- به جهاتی به دیدگاهها و نقطه نظرهای امروزی، نزدیکتر است، ولی دکارت با تعمیم و کلیت بخشیدن روش بخدمت گرفتن دستگاه محورهای مختصات توانست هندسه را از بندهای محدود روش‌های یونانی، آزاد و طریقه‌های نوینی را، جهت تفسیر و تعبیر هندسی پیچیده‌ترین معادلات جبری، ارائه دهد و این یکی از درخشانترین و اساسی‌ترین کارهای دکارت به شمار می‌آید. بعدها خواهیم دید که وضع و توسعه‌ی تئوری توابع، در نهایت- به مقدار غیرقابل تصویری- مدیون آثار دکارت می‌باشد. این است نقش اساسی دکارت در تکامل ریاضیات جدید.

امروزه، اگرچه «هندسه کارتزین» مترادف با «هندسه تحلیلی» است اما باید توجه داشت که هدف اصلی دکارت، به کلی دور از برنامه و هدفی است که در کتابهای درسی جدید، مطرح می‌باشد. چرا که همانطور که خود دکارت اظهار می‌کند، توجه اش به ترسیمات هندسی بوده نه لزوماً به تبدیل هندسه به جبر. با اندک تأملی در کارهای او می‌توان دریافت که اهم فکر او، درباره‌یافتن کاربردهای جبر در هندسه و یا به عبارت دیگر، بیان عملیات جبری به زبان هندسه بوده است.

دکارت در واقع- با بهره‌گیری از آنچه را که از زمان خوارزمی تا زمان آتش، انجام گرفته بود به اماده‌سازی و سازماندهی زمینه‌های هندسی برای اعمال جبری پرداخته است.

ابداع علامت جبری و نیز تفسیر هندسی او از جبر، کاملتر و بهتر از نیاکانتش بوده تا بدآنجا که، «هندسه»^۱ دکارت، قدیمترین منبع درسی ریاضی است که امروزه نیز دانشجویان جبر می‌توانند بدون داشتن هیچ مشکلی از نظر علامت ریاضی، به مطالعه‌ی آن بپردازند. البته باید اضافه کرد که تنها علامت قدمی و منسخه مورد استفاده‌ی دکارت در این اثر، همان علامت « \propto » است که به جای علامت «=» برای تساوی، انتخاب کرده بود.

ناگفته نماند که فرمای ریاضیدان همعصر و هموطن دکارت- نیز درباب هندسه تحلیلی اندیشیده بود ولی دکارت، علاوه بر اندیشیدن به آن، به نوشت و چاپ آن نیز، مبادرت ورزید. دکارت مفاهیم طول و عرض یک نقطه و دستگاه مختصات را- که ریاضیون گذشته، نظری آپولونیوس "Apollonius" و اورسم "Oresme" روی آن کار کرده بودند- توسعه داده و نشان داد که هر نقطه واقع در یک صفحه رامی توان به وسیله مختصاتشان در یک دستگاه محورهای مختصات x و y دقيقاً مشخص کرد. و نمودار (x,y) ^f، عبارت از مجموعه‌ی نقاطی است از صفحه، که مختصاتشان در گزاره نمای $= (x,y)$ ^f صدق می‌کند. اما «نکته مهم و اساسی آن است که روش به کاربردن مختصات نقطه را به عنوان طریقه‌ی کلی و عمومی در نظر گرفت و فکر اصلی را که راهنمای آن است- تا جایی که ممکن است- بیش برد. هر ریاضیدان به مفهوم واقعی کلمه، از ارزش چنین کاری آگاه است و این افتخار بزرگ بواقع حق دکارت است که به این طریق... توانست به نتیجه‌ای در هندسه برسد که می‌توان آن را بزرگترین اکتشافات او در این فن دانست: یعنی نه فقط روش بکار بردن دستگاههای مختصات را برای تعیین معادلات منحنی‌هایی بکار برد که تعریف هندسی آنها، قبل

۱. قسمتی از گفته‌ی ژاک هادامار "Jacques Hadamard" (۱۸۶۵-۱۹۶۳) ریاضیدان فرانسوی- نقل از صفحه‌ی ۹۸ کتاب «ریاضی دانان نامی» اثر: اریک تمپل بل "Eric Temple Bell" ترجمه: حسن صفاری

$$a) \quad 0/000002x^2 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$b) \quad x^2 + 8000125x - 2000125 = 0$$

حل. a) اگر جمله اول را، به خاطر کوچکی آن حذف کنیم، به دست می آید:

$$4x_1 - 1 \approx 0 \quad (2)$$

$$\text{و از آن جا} \quad x_1 \approx \frac{1}{4}$$

از طرف دیگر داریم:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{0/000002} = -5 \times 10^5$$

$$x_2 \approx -2 \times 10^6 \quad \text{یعنی}$$

دقت مقدار تقریبی ریشه $\frac{1}{4}$ را پیدا می کنیم. برای این منظور، رابطه (2) را از رابطه (1) کمی کنیم:

$$0/000002x^2 = 4(x_1 - x)$$

به سادگی می توان متوجه شد که ریشه مجهول کمی از $\frac{1}{4}$ کوچکتر است،
بنابراین

$$4|x_1 - x| < 0/000002\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

و از آن جا

$$|x_1 - x| < 2 \times 10^{-6} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{10^6} \times \frac{1}{32} < \frac{1}{10^7}$$

همان طور که می بینیم، درجه دقت بسیار بالاست.

(b) معادله دوم را هم می توان به طریق مشابهی حل کرد.

۳. مقدار تقریبی این عبارت را پیدا کنید:

$$\sqrt{\frac{1}{100001} - 1}$$

حل. محاسبه را به دو روش می توان انجام داد، یا به کمک رابطه

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}$$

و یا به کمک این تبدیل:

حل چند مساله نامتعارف

در اینجا، چند مساله داده شده است که حل آنها، به مختصری توجه کرده ایم، می تواند برشد نیروی محاسبه کمک کند. تعداد این گونه مسائلها زیاد است و طبعاً در اینجا، به محدودی از آنها اشاره می شود.

۱. روش ساده‌ای، برای محاسبه مقادیر تقریبی تابع $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ پیدا کنید. بطوطر شخص، جدولی تشکیل دهید که مقادیر این تابع را به ازای $0/300 \leq x \leq 0/355$ بددهد.

راهنمایی. $x = \sin \alpha$ بگیرید، در این صورت خواهیم داشت: $y = \tan \alpha$. بنابراین، مساله منجر به این می شود که با معلوم بودن سینوس یک زاویه، تائیان آن را بدست آوریم.

x	α	y
0/300	17°30'	0/315
0/305	17°45'	0/320
0/310	18°03'	0/326
0/315	18°22'	0/332
...

۲. جواب‌های تقریبی این معادله را پیدا کنید. دقت تقریب جواب مثبت را معین کنید.

دمنز و راز عدددها

(ادامه مطلب از صفحه ۶۷)

با کمی توجه می‌توانید شرط بخش‌پذیری برعددهایی را هم که به ۳۶ یا ۷ اختتم می‌شوند، پیدا کنید. به خصوص شرط بخش‌پذیری بر ۷، خیلی جالب است.

عدد $a+7b$ وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است که $a-2b$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد. چند مثال می‌آوریم:

$$91 \rightarrow 2 \times 1 - 9 = -7$$

(۹۱) بر ۷ بخش‌پذیر است.

$$119 \rightarrow 2 \times 9 - 11 = 7$$

(۱۱۹) بر ۷ بخش‌پذیر است.

$$42 \rightarrow 2 \times 2 - 4 = 0$$

(۴۲) بر ۷ بخش‌پذیر است.

$$163 \rightarrow 2 \times 3 - 16 = -10$$

(۱۶۳) بر ۷ بخش‌پذیر نیست.



بنابراین

$$0.09 < S < 0.1$$

و درنتیجه با تقریب $\frac{1}{100}$ داریم:

$$S = 0.095$$

$$\sqrt{\frac{1}{100001} - 1} = \frac{0.00001}{0.00001(\sqrt{\frac{1}{100001}} + 1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100001}} + 1} \approx \frac{1}{2} = 0.5$$

۴. ثابت کنید ۵۰ در عدد

صدرقم اول بعد از میز برابر است با صفر.

حل. عدد مفروض را، به این ترتیب تبدیل می‌کنیم:

$$\alpha = (\sqrt{26} + 5)^{101} + (\sqrt{26} - 5)^{101} - (\sqrt{26} + 5)^{101}$$

توجه می‌کنیم حاصل تفاضل دوجمله اول، عددی است درست، که آن را برابر A می‌گیریم. بنابراین

$$\alpha = A + (\sqrt{26} - 5)^{101} = A + \frac{1}{(\sqrt{26} + 5)^{101}} <$$

$$< A + \frac{1}{10^{101}} = \underbrace{A}_{100} \dots \underbrace{0}_{100}$$

۵. مقدار S را، بدون استفاده از جدول، بادقت تا 0.005 پیدا کنید.

$$S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

حل. داریم:

$$S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \dots + \frac{1}{100 \times 101} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{101} > 0.1 - 0.01 = 0.09$$

به همین ترتیب

$$S < \frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{10 \times 11} + \dots + \frac{1}{99 \times 100} =$$

$$= \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{1}{100} < 0.11 - 0.01 = 0.10$$

الف - بررسی عبارت $1 - K$

این عبارت به ازاء برخی اعداد مثل $1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, \dots$ عدد $K = 6, 11, 13, 16, 20, 21, 24, \dots$ است. اول میگردد و به ازاء برخی دیگر اعداد مثل $1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, \dots$ عدد $K = 6, 11, 13, 16, 20, 21, 24, 26, 27, 31, 34, 35, 36, 37, 41, 46, 48, 50, 51, 54, 55, 56, 57, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 71, 73, \dots$ است. از جملات اول هر رشته دارای نظم و ترتیب بوده، جملات اول ردیف های زوج به صورت $(a+1) + 6K$ و جملات اول ردیف های زوج به صورت $a + 6K$ می باشد.

این رشته نامحدود اعداد اول را می توان به دستجات زیر تقسیم نمود (البته ممکن است برخی از اعداد در ۲ یا چند دسته وجود داشته باشند) که البته فقط ۹ دسته در اینجا نوشته شده اند.

- (۱) $6, 11, 16, 21, 26, 31, \dots$
- (۲) $13, 20, 27, 34, 41, 48, \dots$
- (۳) $24, 35, 46, 57, 68, 79, \dots$
- (۴) $37, 50, 63, 76, 89, 102, \dots$
- (۵) $54, 71, 88, 105, 122, 129, \dots$
- (۶) $73, 92, 111, 130, 149, \dots$
- (۷) $96, 119, 142, 165, 188, \dots$
- (۸) $121, 146, 171, 196, \dots$
- (۹) $150, 179, 208, 237, \dots$

هر کدام از این رشته اعداد نامحدود بوده و تعدادشان نیز حدی ندارد و دارای خواص زیر هستند:

- ۱- اعداد هر دسته به صورت تصاعد عددی هستند.
- ۲- قدر مطلق تصاعد عددی دسته اول عدد ۵ و قدر مطلق های بعدی اعداد ۷ و ۱۳، ۱۱ و ۱۷ و ... و به طور کلی قدر مطلق ردیف های اول، سوم، پنجم، (ردیف های فرد) بصورت $(1-6K)$ و قدر مطلق ردیف های زوج بصورت $(a+1) + 6K$ می باشد.
- ۳- جملات اول هر رشته دارای نظم و ترتیب بوده، جملات اول ردیف های فرد به صورت $(a+1) + 6K$ و جملات اول ردیف های زوج به صورت $a + 6K$ می باشد.

نکته هایی در باره عده های اول

مقدمه:

چنانچه بخواهیم از جعبه ای که در آن میوه های مختلف قرار دارد، پر تقال هارا سوا کنیم دو راه انتخاب می کنیم، یا از ابتدا و مستقیماً پر تقال هارا از جعبه در می آوریم و کنار می گذاریم و یا ابتدا میوه های دیگر را از جعبه خارج می کنیم و آنچه در جعبه باقی می ماند میوه پر تقال است. روشی که در زیر ارائه گردیده است روشی است که مانند طریقه دوم کلیه اعداد غیر اول را مشخص می سازد، سپس با ردیف کردن این اعداد، جاهای خالی که متعلق به اعداد اول است یعنی اعداد اول مشخص می گردد. این روش از روی تجربه بدست آمده و هنوز استدلالی در مورد آن انجام نگرفته است ولی نمونه ای که خلاف مطلب را ثابت کند نیز پیدا نشده و تا درجه بسیار زیادی می توان به صحت آن اطمینان داشت.

۱- به طور کلی اعداد فرد را می توان به سه دسته تقسیم نمود:

۱- اعداد فرد اول

۲- اعداد فرد مضرب سه

۳- اعداد فرد غیر اول و غیر مضرب سه

باتوجه به اینکه اعداد فرد مضرب سه به سادگی شناخته میگردد (مجموع ارقام آنها بر سه بخش پذیر است) اگر طریقه ای پیدا شود که اعداد دسته سوم (غیر اول و غیر مضرب سه) مشخص گردد، کلیه اعداد فرد غیر اول مشخص و از روی آن بطریقه بالا اعداد فرد اول پیدا می گردد.

II- هر عدد اول را میتوان بصورت $1 + 6K$ نمایش داد (ولی عدد بصورت

$1 + 6K$ از اماماً عدد اول نیست) و بررسی هر یک از دو عبارت $1 + 6K$ و

۱- $6K + 1$ به اعداد غیر اول و غیر مضرب سه را برای ما میسر می کند.

آنچه که تابه‌حال بدست آمده این است که کلیه اعداد فرد غیر اول با یکی از چهار فرمول $(1 - 6n)$ ، $(6m + 1)$ ، $(6n + 1)$ و $(6m - 1)$ بددست می‌آیند. همانطور که در مقدمه گفته شد برای پیدا کردن اعداد اول باید اعداد فرد غیر اول را به سیله این چهار فرمول پیدا کرده و مرتب نمائیم و درین آنها جای خالی اعداد اول و خود عدد اول را مشخص سازیم. از نظر عملی این راه باعث صرف وقت می‌گردد، لیکن اگر این اعداد توسط ماشین حساب‌های مناسب (کامپیوتر) محاسبه و استخراج گرددند خیلی ساده‌تر اعداد اول پیدا می‌گردند و چنانچه به پارامترهای m و n مقادیر بسیار بزرگ داده شود می‌توان اعداد اول بزرگتر را پیدا کرده و از بزرگرین عدد اول محاسبه شده تابه‌حال بسیار پارا فراتر گذاشته و عمل را بدین صورت ادامه داد و خلاصه اینکه روش بالا یک راه معکن برای دست یابی به اعداد اول می‌باشد.



روز و راز اعداد

بخش پذیری بر ۱۹ و ۲۹

* یک عدد وقتی بر ۱۹ بخش پذیر است که مجموع دو برابر یکان با دهگان آن بر ۱۹ بخش پذیر باشد.

- عدد ۳۸ بر ۱۹ بخش پذیر است، زیرا $19 \times 8 + 2 = 19$
بخش پذیر است.

$$\begin{aligned} \text{- عدد } 418 \text{ بر ۱۹ بخش پذیر است، زیرا} \\ 418 \rightarrow 2 \times 8 + 2 = 52 \rightarrow 2 \times 7 + 5 = 19 \end{aligned}$$

عدد ۹۸۲۳ بر ۱۹ بخش پذیر است، زیرا
 $2 \times 3 + 982 = 988 \rightarrow 2 \times 8 + 98 = 114 \rightarrow 2 \times 4 + 11 = 19$

* یک عدد وقتی بر ۲۹ بخش پذیر است که اگر در آن سه برابر یکان را با دهگان جمع کنیم، حاصل بر ۱۹ بخش پذیر باشد.

$$\begin{aligned} \text{- عدد } 87 \text{ بر ۲۹ بخش پذیر است، زیرا} \\ 87 \rightarrow 3 \times 7 + 8 = 29 \end{aligned}$$

عدد ۳۱۹ بر ۲۹ بخش پذیر است، زیرا
 $319 \rightarrow 3 \times 9 + 21 = 58 \rightarrow 3 \times 8 + 5 = 29$

- عدد ۳۲۷۷ بر ۲۹ بخش پذیر است زیرا
 $3 \times 7 + 347 = 348 \rightarrow 3 \times 8 + 34 = 58 \rightarrow 3 \times 8 + 5 = 29$

صفحه ۶۷ را بینید

مسئله

رقم‌های x ، y ، z و t را هر کدام از حالات‌های زیر پیدا کنید:

- ۱) $\overline{xyz} = x \cdot \overline{yz}$
- ۲) $\overline{xyz} = y \cdot \overline{xz}$
- ۳) $\overline{xy} \cdot \overline{zt} = t \cdot \overline{xyz}$

حل در صفحه ۱۲۵



ژانویه ۱۶۴۹، چارل اول بنا به حکم پارلمان اعدام و در ماه مه، جمهوری اعلام شد. ولی سلطنت طلبان آرام نشستند. آن‌ها به تدریج قشر بالای بورژوازی را به خود نزدیک کردند و در سال ۱۶۶۰، موفق شدند دویاره سلطنت را برقرار کنند. چارل دوم، پسر چارل اول را از مهاجرت برگرداندند و شاه انگلیس کردند. ولی با این حادثه هم، آرامش به کشور بازنگشت. با وجودی که بازگشت چارل دوم مشروط به ضمانت‌های بسیاری در مورد حکومت مشروطه بود، بورژوازی و اشراف تازه، به او اعتماد نداشتند. وضع وقیعی حادر شد که بعد از مرگ چارل دوم در سال ۱۶۸۵، برادر او جیمز دوم به جلو آمد. او حقوق پارلمان را نپذیرفت و این دیگر استبداد آشکار و عریان بود. پارلمان با این وضع مقابله کرد و پنهان از او با ویلیام سوم اهل اورانژ (گیوم دورانز) وارد مذاکره شد. او در سال ۱۶۸۸ به انگلستان فرود آمد. ارتش به جانب او رفت و جیمز دوم فرار کرد. از این زمان بود که برقراری آرامش در کشور، آغاز شد. قریب نیم سده گذشت که کشور در تلاطم و هیجان بود. پوری تان‌ها، با

ایساک باروی

به سرزمین انگلستان، در زمانی پر تشویش می‌رسیم. در ژرفای جامعه فنودالی انگلیس نیروهای تازه بسیاری جمع می‌شد که آن را تهدید به انفجار می‌کرد. به همان اندازه که این نیروها، نیاز بیشتری به عمل احساس می‌کردند، ستم‌گری و ظلم پادشاهی ستوارت‌ها، سنگین‌تر می‌شد. جیمس اول، که از سال ۱۶۰۳ تا سال ۱۶۲۵ پادشاهی کرد، ظاهراً تمامی نیروی خود را صرف کرد تا هر کسی را که در انگلستان می‌توانست بیندیشد و مبارزه کند، علیه خود برانگیراند. جانشین او، چارل اول، همان سیاست را ادامه داد. این سخن انگلیسی‌هاست: «احمق‌های واپس‌گرا، ستوارت‌های اسکاتلندی، براساس یک قانون آسمانی، که بنا به اظهار خودشان، برای امتحان آن‌ها بود، برانگلستان حکومت کردند. ولی همان طور که انتظار می‌رفت، مردم ساده انگلیس، این ادعاهای را نپذیرفتند و علیه این غرور بی‌جا، حماقت و بی‌قابلیتی حکم رانان خود، قیام کردند» خیلی زود، مبارزه رنگ مذهبی به خود گرفت. «پوری تان‌ها»^۱ علیه ستوارت‌ها، قیام کردند. در سال ۱۶۴۲ (سال تولد نیوتون)، جنگ داخلی در گرفت. رهبری ارتش پارلمان، باکر و مول^۲ بود. ولی تنها در سال ۱۶۴۵ بود که توانست شکست جدی به سلطنت طلبان وارد کند. با همه این‌ها سلطنت طلبان تسلیم نشدند. جنگ داخلی دویاره شعله ور شد و تنها در سال ۱۶۴۸، بعد از آن که کرومول ارتش شاهی را در پریستون درهم شکست، به پایان رسید.^{۳۰}

۱. Puritans، از puritas لاتینی به معنای منزه، به پروتستان‌های نیمة دوم سده شانزدهم و نیمة اول سده هفدهم انگلیسی گفته می‌شد که هادار کالوئیسم بودند (م).

۲. اولیور کرومول (Cromwell) (۱۶۴۹-۱۶۵۸)، رجل انقلاب بورژوازی سده هفدهم انگلیس، که بنا به تعریف انگلیس، در انقلاب انگلیس، «... روپسیر و ناپلئون را در چهره خود جمع کرده بود» (م).

بنابراین عیبی ندارد که چند کلمه‌ای درباره این موسسه آموزشی صحبت کیم. دانشگاه کمبریج، از لحاظ قدمت، دومین دانشگاه در انگلیس است. این دانشگاه در سده سیزدهم پایه گذاری شد و شامل کالج‌های جداگانه بود - موسسه‌های آموزشی که غالباً بر اساس اعتبارهای خصوصی اداره می‌شد. در سده هفدهم، تعداد این کالج‌ها ۱۶ بود، و کالج ترینیتی (یعنی کالج ترونسی مقدس)، یکی از آن‌ها بود. در راس کالج «ماستر» بود. کرسی‌ها، بنا به میل کسانی که بودجه کالج را تامین می‌کردند، به وجود می‌آمد. نتیجه این وضع را از این جا می‌توان فهمید که تا سده هفدهم، کرسی ریاضیات در این کالج تأسیس نشده بود. وقتی که با روی به ترکیب کالج ترینیتی وارد شد، در آن جا: ۱ «ماستر»، ۶۰ «فلواو»، ۶۷ «طلبه»، ۴ «کشیش»، ۳ «استاد» برای درس‌های عمومی، ۳۵ «سایزر» و «سب سایزر»، ۴۰ «کمونز» و ۱۴۴ «پانسیونز» وجود داشت.

«فلواو»، یعنی کسی که نخستین درجه علمی، یعنی لیسانس، را گرفته است. «طلبه»، به معنای «دانشجوی واقعی» است. دانشجویان، به «سایزر»‌ها و «سب سایزر»‌ها، «پانسیونز»‌ها و «کمونز»‌ها، تقسیم می‌شدند. بالاترین پول را «کمونزها» می‌پرداختند. آن‌ها، نه تنها حق آموزش را، بلکه حق‌های استثنایی دیگری هم می‌پرداختند که از آن جمله، حق عجیب شرکت نکردن در کلاس‌های درس بود. «پانسیونز»‌ها فقط پول منزل را می‌پرداختند (حق عضویت آن‌ها را pensid می‌نامیدند): به «سایزر»‌ها و «سب سایزر»‌ها، هم جا می‌دادند و هم غذا، ولی پرداخت آن‌ها ساده نبود: آن‌ها در کالج، با خدمت کاران کار می‌کردند. دانشجوی دوره آخر را undergraduate؛ بعد از پایان تحصیل Graduate، نخستین درجه علمی را باکالورئنا(bachelor) - لیسانس یا مهندس، مثلاً لیسانس هنر (BA)، دومین درجه علمی را ماستر(MA) و سومین درجه را دکتر، مثلاً دکتر الهیات(DD) می‌نامیدند.

باروی، به عنوان «پانسیونز» وارد کالج شد. در این زمان، چارل با دربارش به آکسفورد آمده بود. توماس باروی هم بدنبال چارل رفت، و همان‌طور که انتظار می‌رفت، در آن جا همه چیز خود را از دست داد. با وجود این، پسر با پایمردی روى پای خود ایستاد و بدون یاری پدر، خودش را اداره کرد. با وجودی که تمایل‌های سلطنت طلبی داشت، نسبت به کمبریج هم علاقمند شد. در سال ۱۶۴۸، درجه علمی لیسانس هنر را به دست آورد. در سال ۱۶۴۹، عنوان «فلواو»ی کالج را پذیرفت. در سال ۱۶۵۲ در کمبریج، و در سال ۱۶۵۳ در آکسفورد، درجه «ماستر» را کسب کرد. در

سلطنت طلبان می‌جنگیدند ولی در اردوگاه خودشان هم زد و خورد داشتند. از یک طرف، مستقل‌ها با خطر راست، مشایخ کلیسا، مبارزه می‌کردند و از طرف دیگر، به سرکوب شدید بی‌چیزان شهری و روستایی مشغول بودند. در آن زمان، سیاست به طور عمده زیر پوشش مذهب عمل می‌کرد: مذهب همچنین در دانش هم، نقش بزرگی به عهده داشت. به همین مناسبت، بسیاری از کارها و فعالیت‌های باروی و نیوتون را نمی‌توان، بدون توجه به بعضی مسائلهای مذهبی و سیاسی، درک کرد.

ایساک باروی در میانه‌های اکبر سال ۱۶۳۵ در لندن متولد شد. پدر بزرگ او، چهل سال تمام، در کنت نشین کمبریج، قاضی صلح بود. عموی او (به نام ایساک) کشیش بود. پدرش، توماس باروی، پارچه فروش و از هواداران صادق چارل اول بود. وقتی که ایساک چهار سالش بود، مادرش را از دست داد. در نخستین مدرسه‌ای که درس می‌خواند، در چارتراهوس، موقیت ناچیزی به دست آورد، او تنها شهرتی که پیدا کرد، به عنوان آدمی سمعج و دعوایی بود. روی هم رفته بچه سختی به نظر می‌آمد. یک روز پدرش در حالت خشم فریاد زد که اگر خداوند بخواهد یکی از فرزندان او را بگیرد، او حاضر است بدون ایساک زندگی کند. در چارتراهوس، آموزش بچه بیش نرفت و او را به «فلس تید» در «اسکس» فرستادند. در این جا، همه چیز تغییر کرد: به احتمال زیاد، معلم او، مارتین هول بیچ، در این تغییر تاثیری اساسی داشت. باروی، داش آموزی جدی و با پشتکار شد. به جز آن که زبان‌های قدیمی را دوست می‌داشت، مطالعه فلسفه را هم آغاز کرد. در سیزده سالگی به پتراهوس (کالج پترمقدس) در کمبریج وارد شد، جایی که عمویش ایساک هم به عنوان «فلواو» خدمت می‌کرد. البته نزدیکان فکر کرده بودند که ایساک کوچک تحت نظارت عمویش درس بخواند. ولی امیدها برآورده نشد. وقتی که در سال ۱۶۴۴، ایساک جوان به کمبریج آمد، اسقف را از دانشگاه بیرون کرده بودند. موضوع این بود که با روی‌ها سلطنت طلب بودند، در حالی که اکثریت معلمان کالج از پارلمان هواداری می‌کردند. جنگ داخلی، روزهای داغ خود را می‌گذراند.

ایساک از کمبریج خارج شد، ولی به جای پتراهوس، به کالج ترینیتی رفت. بیش امدهای مهمی در زندگی باروی و نیوتون، به دانشگاه کمبریج مربوط می‌شود.

۱. presbyterian، از یونانی presbyteros، به معنای بزرگ و ریس سفید قبیله.

۲. بعضی از اصطلاح‌های مربوط به دانشگاه کمبریج را، کمی بعد شرح داده ایم.

شد. در سال ۱۶۶۳، سر درس باروی، که درباره نور صحبت می‌کرد، با او برخورد کرد و به او نزدیک شد. خیلی زود، نیوتون بیش از آن که داشتجوی باروی باشد، به صورت همکار استاد خود درآمد. باروی در جایه‌جا از کتاب خود به نام «درس‌های درباره نور» یادآوری می‌کند که بعضی از قسمت‌های آن را، دوست جوان او نوشته است. در سال ۱۶۶۹، باروی تصمیم گرفت که خود را به طور کامل وقف الهیات کند؛ او کرسی ریاضیات را رها کرد و آن را به نیوتون واگذشت. تاریخ ریاضیات به حق و به خاطر تیزهوشی فوق العاده، و در عین حال، از خودگذشتگی جوانمردانه این استاد جوان، حق او را ادا کرده است. نباید فراموش کرد که باروی، هیچ نیازی به فروتنی نداشت. او نخستین ریاضی دان انگلیسی بود (تا این زمان، هنوز نیوتون، به عظمت خود نرسیده بود)، و حتی با قبول استعداد فوق العاده شاگرد خودش، می‌توانست کرسی ریاضیات را حفظ کند. از آن به بعد، باروی به انتشار اثرهای علمی خود، اکتفا کرد. چارل دوم در سال ۱۶۷۰، عنوان دکترای الهیات را به باروی داد و او را کشیش مخصوص خود کرد؛ در سال ۱۶۷۲، ماستر کالج ترینیتی شد و باروی تا پایان زندگی خود (چهارم مارس سال ۱۶۷۷) در آن جا بود.

بی‌توقفی و فروتنی جزو عادت‌های باروی بود و حتی به لباس پوشیدن خود هم توجهی نداشت. ظاهری موقر داشت، با قدی نه چندان بلند، لاغر و رنگ پریده. او چنان محجوب بود که حتی حاضر نمی‌شد، برای تصویر خود، در برابر نقاش بایستد. نقاش، تصویر او را پنهانی، و وقتی دوستان موفق شدند توجه باروی را به جای دیگری جلب کنند، کشید. با وجود این در عمق وجود باروی، هرگز خصلت مبارزه جویی، که از کودکی به آن شهرت داشت، خاموش نشد. وقتی که در «سمیرنا» روی دریا بود، دزدان دریابی به کشتی حمله کردند. باروی تنها مسافری بود که همراه با فرماندهی در عرشه باقی ماند و حمله مت加وزان را شکست داد. وقتی که کشیش شاهی بود، ضرورت پیدا کرد که مدتی را با درباریان بگذراند. کشیش فروتن می‌باشد. غرور اشراف را متواضعانه تحمل کند، ولی کشیش ما «از آن‌ها نبود»؛ موضع باروی را می‌توان از گفتگو، یا درست تر بگوییم، از دوئلی که بین او و کنت روشستر انجام گرفته است، تشخیص دهیم:

- دکتر، من شما را در حد کفشه می‌دانم.

۱. نام قدیمی و یونانی از میردر ترکیه (م.).

سال ۱۶۵۴، کرسی زبان یونانی آزاد شد. باروی در مسابقه شرکت کرد، ولی انتخاب نشد. باید توجه داشت که او در آن زمان، فقط ۲۴ سال داشت و ضمناً شهرت او به عنوان ریاضی دان درجه اول هم، تا حدی حیثیت علمی او را تاریک کرده بود. پس چرا او با سرسختی ریاضیات را ادامه می‌داد؟ او، بعد از مقداری تردید، سرانجام به الهیات رو آورده بود. ولی او استدلال می‌کرد که بدون کرونولوژی هم بدون اخترشناسی ممکن نیست، و اخترشناسی را هم بدون ریاضیات نمی‌توان یافهمید. این بود دلیل پشتکار باروی در یادگیری ریاضیات.

او در یکی از سخن‌رانی‌های خود در سال ۱۶۵۴، گذشته (سلطنتی) را بسیار ستود و وضع حاضر (جمهوری) را مورد سرزنش قرار داد. سخن‌رانی، چنان تاثیر تندی داشت، که تصمیم گرفتند ناطق را از عضویت کالج محروم کنند. تنها دفاع سخت ماستر مانع از اجرای این مجازات سنگین شد. موقعیت روشن بود. باروی تصمیم گرفت از آن جا برود. پدر نمی‌توانست کمکی بکند، و باروی کتاب خانه را فروخت. راه را، از طریق پاریس به ایتالیا انتخاب کرد (در پاریس، پدرش را ملاقات کرد و او هم از همان در آمد ناجیز خود به پرسش کمک کرد) و بعد به شرق رفت. او سالی را در قسطنطینیه (اسلامبول امروزی) گذراند و در آن جا قسمت عمده وقت خود را صرف مطالعه متن‌های قدیمی به زبان اصلی و یا ترجمه عربی آن‌ها کرد. در سال ۱۶۵۹ به میهن باز گشت و ضمن راه در ایتالیا، سپس در آلمان و هلند توقف کرد. به محض ورود به انگلستان، مقام کشیشی را پذیرفت. در این زمان، تجدید حیات ستووارت‌ها، در جریان بود. موقعیت باروی، که به نقطه نظرهای سلطنت طلبی شهرت داشت و فرزند یک شاه دوست صادق و وفادار بود، محکم بود. ویدرینگتون که کرسی زبان یونانی را در اختیار داشت، از وظیفه خود سر باز زد و باروی به جای او انتخاب شد. او دوره درس خود را، با «علم بیان» ارسطو آغاز کرد.

در سال ۱۶۶۳، لوکاس نامی، مبلغ مشخصی پول، برای تاسیس کرسی ریاضیات، به دانشگاه کمبریج هدیه کرد. او، ضمناً تمايل جدی خود را به این که این کرسی به باروی واگذار شود، ابراز داشت. به این ترتیب، باروی نخستین استاد کرسی لوکاس شد. علاقه او به این که خود را وقف الهیات کند، روز به روز استوارتر می‌شد. و با وجودی که وجود او در کرسی ریاضیات بی‌ثمر نبود، توانست به هدف اصلی خود برسد. جریان از این قرار بود. در سال ۱۶۶۱، نیوتون ۱۹ ساله، وارد کالج ترینیتی

شد. در سال ۱۶۶۳، سر درس باروی، که درباره نور صحبت می‌کرد، با او برخورد کرد و به او نزدیک شد. خیلی زود، نیوتون بیش از آن که داشتجوی باروی باشد، به صورت همکار استاد خود درآمد. باروی در جایه‌جا از کتاب خود به نام «درس‌های درباره نور» یادآوری می‌کند که بعضی از قسمت‌های آن را، دوست جوان او نوشته است. در سال ۱۶۶۹، باروی تصمیم گرفت که خود را به طور کامل وقف الهیات کند؛ او کرسی ریاضیات را رها کرد و آن را به نیوتون واگذاشت. تاریخ ریاضیات به حق و به خاطر تیزهوشی فوق العاده، و در عین حال، از خودگذشتگی جوانمردانه این استاد جوان، حق او را ادا کرده است. نباید فراموش کرد که باروی، هیچ نیازی به فروتنی نداشت. او نخستین ریاضی دان انگلیسی بود (تا این زمان، هنوز نیوتون، به عظمت خود ترسیده بود)، و حتی با قبول استعداد فوق العاده شاگرد خودش، می‌توانست کرسی ریاضیات را حفظ کند. از آن به بعد، باروی به انتشار اثرهای علمی خود، اکتفا کرد. چارل دوم در سال ۱۶۷۰، عنوان دکترای الهیات را به باروی داد و او را کشیش مخصوص خود کرد؛ در سال ۱۶۷۲، ماستر کالج ترینیتی شد و باروی تا پایان زندگی خود (چهارم مارس سال ۱۶۷۷) در آن جا بود.

بی‌توقفی و فروتنی جزو عادت‌های باروی بود و حتی به لباس پوشیدن خود هم توجهی نداشت. ظاهری موقر داشت، با قدی نه چندان بلند، لاغر و رنگ پریده. او چنان محجوب بود که حتی حاضر نمی‌شد، برای تصویر خود، در برابر نقاش بایستد. نقاش، تصویر او را پنهانی، و وقتی دوستان موفق شدند توجه باروی را به جای دیگری جلب کنند، کشید. با وجود این در عمق وجود باروی، هرگز خصلت مبارزه جویی، که از کودکی به آن شهرت داشت، خاموش نشد. وقتی که در «سمیرنا» روی دریا بود، دزدان دریابی به کشتی حمله کردند. باروی تنها مسافری بود که همراه با فرماندهی در عرضه باقی ماند و حمله مت加وزان را شکست داد. وقتی که کشیش شاهی بود، ضرورت پیدا کرد که مدتی را با دریاریان بگذراند. کشیش فروتن می‌باشد. غرور اشراف را متواضعانه تحمل کند، ولی کشیش ما «از آن‌ها نبود»؛ موضع باروی را می‌توان از گفتگو، یا درست تر بگوییم، از دوئلی که بین او و کنت روشستر انجام گرفته است، تشخیص دهیم:

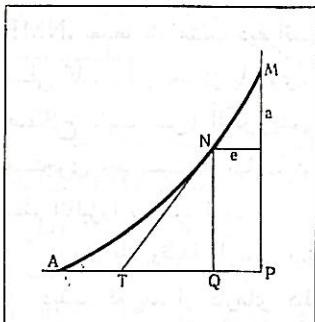
- دکتر، من شما را در حد کفشه می‌دانم.

سال ۱۶۵۴، کرسی زبان یونانی آزاد شد. باروی در مسابقه شرکت کرد، ولی انتخاب نشد. باید توجه داشت که او در آن زمان، فقط ۲۴ سال داشت و ضمناً شهرت او به عنوان ریاضی دان درجه اول هم، تا حدی حیثیت علمی او را تاریک کرده بود. پس چرا او با سرسرختی ریاضیات را ادامه می‌داد؟ او، بعد از مقداری تردید، سرانجام به الهیات رو آورده بود. ولی او استدلال می‌کرد که بدون کرونولوژی هم بدون اختشناصی ممکن نیست، و اختشناصی را هم بدون ریاضیات نمی‌توان یافهمید. این بود دلیل پشتکار باروی در یادگیری ریاضیات.

او در یکی از سخن‌رانی‌های خود در سال ۱۶۵۴، گذشته (سلطنتی) را بسیار ستود و وضع حاضر (جمهوری) را مورد سرزنش قرار داد. سخن‌رانی، چنان تاثیر تندی داشت، که تصمیم گرفتند ناطق را از عضویت کالج محروم کنند. تنها دفاع سخت ماستر مانع از اجرای این مجازات سنگین شد. موقعیت روشن بود. باروی تصمیم گرفت از آن جا برود. پدر نمی‌توانست کمکی بکند، و باروی کتاب خانه را فروخت. راه را، از طریق پاریس به ایتالیا انتخاب کرد (در پاریس، پدرش را ملاقات کرد و او هم از همان در آمد ناجیز خود به پرسش کمک کرد) و بعد به شرق رفت. او سالی را در قسطنطینیه (اسلامبول امروزی) گذراند و در آن جا قسمت عمده وقت خود را صرف مطالعه متن‌های قدیمی به زبان اصلی و یا ترجمة عربی آن‌ها کرد. در سال ۱۶۵۹ به میهن باز گشت و ضمن راه در ایتالیا، سپس در آلمان و هلند توقف کرد. به محض ورود به انگلستان، مقام کشیشی را پذیرفت. در این زمان، تجدید حیات ستووارت‌ها، در جریان بود. موقعیت باروی، که به نقطه نظرهای سلطنت طلبی شهرت داشت و فرزند یک شاه دوست صادق و وفادار بود، محکم بود. ویدرینگتون که کرسی زبان یونانی را در اختیار داشت، از وظیفه خود سر باز زد و باروی به جای او انتخاب شد. او دوره درس خود را، با «علم بیان» ارسطو آغاز کرد.

در سال ۱۶۶۳، لوکاس نامی، مبلغ مشخصی بیول، برای تاسیس کرسی ریاضیات، به دانشگاه کمبریج هدیه کرد. او، ضمناً تمايل جدی خود را به این که این کرسی به باروی واگذار شود، ابراز داشت. به این ترتیب، باروی نخستین استاد کرسی لوکاس شد. علاقه او به این که خود را وقف الهیات کند، روز به روز استوارتر می‌شد. و با وجودی که وجود او در کرسی ریاضیات بی‌ثمر نبود، توانست به هدف اصلی خود برسد. جریان از این قرار بود. در سال ۱۶۶۱، نیوتون ۱۹ ساله، وارد کالج ترینیتی

۱. نام قدیمی و یونانی از میردر ترکیه (م).



رسم معاس (با روش باروی)

شکل ۱.

منحنی ANM را در نظر می‌گیریم، که البته، در همه نقطه‌های خود پیوسته و قابل دیفرانسیل گیری باشد. می‌خواهیم معاسی بر نقطه دلخواه N از آن رسم کنیم. خط معاس را وقتی می‌توانیم رسم کنیم که، علاوه بر نقطه N ، با تعیین طول تحت معاس را وقته می‌توانیم رسم کنیم که، علاوه بر نقطه N ، با تعیین طول تحت معاس QT ، نقطه T را هم در اختیار داشته باشیم. برای پیدا کردن نقطه T ، نمو (Δx) را به ارجام می‌دهیم و نمو a (یعنی Δy) از منحنی (تابع) را محاسبه می‌کنیم. اگر طول تحت معاس TP را به S و طول MP را به m نشان دهیم، و از بی‌نهایت کوچک‌های مرتبه بالا صرفنظر کنیم، می‌توان نوشت:

$$\frac{MP}{TP} = \frac{a}{e} \Rightarrow |S| = |TP| = \frac{MP}{\left(\frac{a}{e}\right)}$$

که بعد از عبور حدی به ازای e ، موضع نقطه T به دست می‌آید. با روى، عبور به حد را هم، با روش فرما انجام می‌دهد: «باید همه جمله‌هایی را که شامل درجه‌های بالاتر از واحد a و e و یا حاصل ضرب آن‌ها هستند، حذف کرد. بعد از برقراری معادله، با ملاک قرار دادن معادله منحنی، جمله‌هایی را که شامل a و e نیستند، «دور می‌اندازیم». حالا اگر a را به MP و e را به s تبدیل کنیم، معادله‌ای که می‌تواند تحت معاس S را به ما بدهد، به دست می‌آید». در رساله‌ای که به فرما منسوب است، روشی مورد بررسی قرار گرفته است که به کمک آن می‌توان اکستره مم تابع را جستجو کرد. حال دیده می‌شود که رسم معاس بر منحنی هم، به همان مساله جستجوی اکستره مم، یعنی به حد نسبت نوها، منجر می‌شود. مثلث با روی - فرما یعنی مثلث

۱. مثلاً اگر معادله منحنی به صورت $C + Bx + Ax^2 = y$ باشد، بعد از وارد کردن نموهای a و e ، مجموع چنین جمله‌هایی چه در سمت راست و چه در سمت چپ تساوی ظاهر می‌شود. آن‌ها را باید حذف کرد.

- کنت، من شما را در حد خاک می‌دانم.
- دکتر، من شمارا در مرکز زمین می‌بینم.
- کنت، من شما را در آن طرف زمین می‌بینم.
- کنت از این عصبانی شد که این «تکه کشیش کپک‌زده» (کنت باروی را این گونه می‌نامید)، جرات کرده است که با او مسابقه بدهد:
- دکتر، من شما را در قعر جهنم می‌بینم.
- باروی روی پاشنه‌هایش چرخید و گفت:
- من شما را در آن جا تنها می‌گذارم.

* بهترین مجموعه اثرهای ریاضی باروی را، ویوول در سال ۱۸۶۰ چاپ کرد. مهم‌ترین آن‌ها را نام می‌بریم:
 «مقدمات اقلیدس»، ۱۶۵۵؛
 «داده‌های اقلیدس»، ۱۶۵۷؛
 «پانزده مقاله از مقدمات اقلیدس با کوتاه شده استدلال‌ها»، ۱۶۵۹؛
 «درس‌هایی از ریاضیات»، ۱۶۶۴-۱۶۶۶؛
 «درس‌هایی درباره پدیده‌های نوری»، ۱۶۶۹؛
 «درس‌هایی از نوروهندسه»، ۱۶۷۰-۱۶۷۰؛
 «کارهای ارشمیدس»؛ «آپولونیوس برغایی»، چهار مقاله درباره مقطع‌های مخروطی؛ «فندوس»، «کره»، «روش تازه‌ای از طرح و اثبات»، ۱۶۷۸؛
 «درس‌هایی از ایساک باروی استاد ریاضیات در دانشگاه کمبریج»، ۱۶۸۴.
 سیاهه کارهای باروی نشان می‌دهد که او توجه زیادی به آثار کلاسیک اقلیدس، ارشمیدس و دیگران داشته است. کارها و نتیجه‌گیری‌های اختصاصی او، بیشتر در «درس‌هایی از نوروهندسه» وجود دارد. مادر این جا، از قسمت‌هایی یاد می‌کنیم که به خصوص در پیشرفت ریاضیات اهمیت داشته است. این‌ها، عبارتند از مساله مربوط به رسم معاس بر یک منحنی دلخواه، و بستگی متقابل بین دو عمل اساسی مربوط به بی‌نهایت کوچک‌ها.

باروی در مساله مربوط به رسم معاس، مستقیماً از روش فرما استفاده می‌کند. تکمیل این روش، که متعلق به اوست، مربوط به این است که همراه با Δx (که در روش فرما هم وجود دارد)، باروی Δy را هم وارد می‌کند (شکل ۱).

منظور می‌باشد یک گام مقدماتی برداشته شود. می‌باشد بستگی معکوس و متقابل انتگرال‌گیری و دیفرانسیل‌گیری روش شود. و این گام را باروی برداشت. بینینم روش او چگونه بود؟

در تصویر (شکل ۲)، که در درس دهم از «درس‌های هندسه» آمده است (ما تنها زاویه α و حرف‌های y و v را به آن اضافه کرده‌ایم)، با روی منحنی ZGEG زاده است که نمایش تابع $(x)^{\alpha}$ است: منحنی VIFI چنان است که هر عرض آن، وقتی که در پاره خط دلخواه R ضرب شود (این پاره خط به این منظور وارد شده است که اندازه‌ها را به میزان مورد نظر درآورد)، مساحت ذوزنقه منحنی الخط متاظر آن به دست آید. مثلاً عرض PI متاظر است با مساحت VZPG، عرض DF متاظر است با مساحت VZED و غیره. فرض می‌کنیم که تساوی $\frac{DF}{DE} = \frac{DT}{R}$ درست باشد. در این صورت، همان‌طور که پایین تر ثابت خواهیم کرد، خط راست TFK، معاس بر نقطه F خواهد بود. با رسم منحنی VIF می‌توان نوشت:

$$(*) \quad R y = S_{VZGED} = \int_0^x v(x) dx$$

حالا از تناسب بالاتریجه می‌شود (طول تحت معاس DT را به S_T نشان داده‌ایم):

$$\frac{y}{v} = \frac{S_T}{R} = > v = \frac{y}{S_T} R$$

$$\text{و } S_T \text{ به نوبه خود، با روش باروی، عبارت است از } \frac{y}{\left(\frac{a}{e}\right)^{\alpha}} \text{، به نحوی که } (***) \quad v = R \frac{dy}{dx} = R \frac{a}{e^{\alpha}}$$

با مقایسه تساوی‌های (*) و (***)، بستگی متقابل و معکوس عمل‌های اصلی آنالیز، برقرار می‌شود.

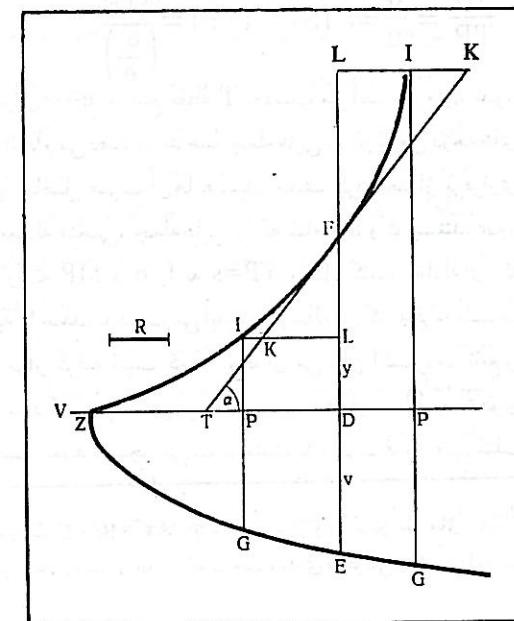
حالا با روی ثابت می‌کند که خط راست TFK، در واقع، معناسی است بر منحنی VIF، که از نقطه F رسم شده است. او تعریفی از معاس را در نظر می‌گیرد که با تعریف امروزی آن در آنالیز، کمی اختلاف دارد. بنا به تعریف با روی، معاس به خط راستی گفته می‌شود که یک نقطه مشترک با منحنی داشته باشد و دارای این خاصیت باشد که همه نقاطهایی از آن، که به اندازه کافی به نقطه تماس نزدیک‌اند، در یک طرف منحنی قرار گرفته باشند.^۱

۱. این تعریف، کلیت تعریف امروزی معاس را ندارد. مثلاً، این تعریف، در مورد معناسی که بر منحنی در نقطه عطف آن رسم می‌شود، صدق نمی‌کند.

NMR، بعده نام مثلث دیفرانسیل را به خود گرفت. دیگر می‌توان گفت که راه اصلی کار، برای بعد از با روی، کاملاً همواره شده بود. تنها این مانده بود که (به اصطلاح لایپنیتس) آنگوریتمی پیدا شود که فارغ از هر مساله خاصی، در جستجوی حد نسبت بی‌نهایت کوچک‌ها باشد و به این ترتیب، دستگاه هم آهنگ و منظم آنالیزرا به وجود آورد.

باروی یک وظیفه تاریخی دیگر را هم انجام داده است.

دیدیم که بعد از کارهای کلر، کاوالیری و دیگر ریاضی‌دانان، هنر محاسبه سطح، حجم و دیگر عمل‌های مربوط به انتگرال‌گیری معین، در سطح بالایی قرار گرفته بود. با وجود این، سمتی را که این ریاضی‌دانان انتخاب کرده بودند، دورنمای گسترده‌ای نداشت. روش انتگرال‌گیری شامل برآوردن حد مجموع‌های انتگرالی بود. روشی است که در اینجا، امکان‌ها محدود بود و البته نمی‌شد انتظار آنگوریتمی را از آن داشت که براساس عمل‌های واحدی بنا نهاده شده باشد. برای این که محاسبه انتگرالی امکان پیشرفت داشته باشد، راهی غیرمستقیم را طلب می‌کرد، می‌باشد جستجوی حد مجموع انتگرالی، با جستجوی شکل اولیه، عوض شود. برای این



قضیه معکوس با روی
شکل ۲.

رمز و راز عدددها

(صفحه ۵۵ را بینید)

این دو نمونه، حالت خاصی از یک قضیه کلی تر هستند که آن را در اینجا می‌آوریم:
قضیه: عدد $10a+b$ بر عدد $10m+1$ (یعنی بر عددی که به ۹ ختم می‌شود)، وقتی و تنها وقتی بخش پذیر است که $mb+a$ بر آن عدد بخش پذیر باشد.

اثبات. این اتحاد روش است:

$$10a+b = 10(mb+a) - b(10m-1)$$

و از این اتحاد روش است که اگر $mb+a$ بر ۱ بخش پذیر باشد، $10a+b$ هم بر آن بخش پذیر خواهد بود و برعکس.
مثالاً در حالت $m=6$ ، یعنی برای بخش پذیری بر 59 :
- عدد 177 بر 59 بخش پذیر است، زیرا

$$177 = 6 \times 29 + 17$$

- عدد 178 بر 59 بخش پذیر نیست، زیرا
 $178 = 6 \times 29 + 2$

شیوه این قضیه را می‌توان برای بخش پذیری بر عدد به صورت $10m+1$ (یعنی عددی که به ۱ ختم می‌شود) می‌توان ثابت کرد.
در واقع داریم:

$$10a+b = b(10m+1) - 10(mb-a)$$

یعنی عدد b وقتی و تنها وقتی بر عدد $10m+1$ بخش پذیر است که $mb-a$ بر آن بخش پذیر باشد.
مثالاً به ازای $m=7$ ، یعنی بخش پذیری بر 71 :
- عدد 355 بر 71 بخش پذیر است، زیرا

$$355 = 5 \times 71 + 0$$

- عدد 852 بر 71 بخش پذیر است، زیرا
 $852 = 2 \times 71 - 85$

- عدد 242 بر 71 بخش پذیر نیست، زیرا
 $242 = 2 \times 71 - 24$

صفحه ۴۹ را بینید

ابتدا نقطه I از منحنی را که قبل از نقطه تماس F قرار گرفته است (یعنی به نقطه V نزدیک‌تر است)، در نظر می‌گیریم. می‌توان نوشت:

$$R.LF = R(DF-DL) = R.DF - R.PT =$$

$$= S_{VZFD} - S_{VZGP} = S_{PGED}$$

نقطه I چنان است که داریم: $\frac{DT}{DF} = \frac{R}{DE}$ از شکل هم دیده می‌شود که:

$$\frac{LK}{LF} = \frac{R}{DE} \text{ ، در نتیجه: } \frac{DT}{DF} = \frac{LK}{LF}$$

$$LK.DE = R.LF = SPGED$$

ولی $SPGED < DP.DE$ ، یعنی $LK.DE < DP.DE$ ، یا $LK < DP$ و یا بالاخره، پاره خط LK از پاره خط LI کوچک‌تر است. از این جا نتیجه می‌شود که نقطه I، که بر منحنی و در سمت چپ نقطه K واقع است، به مماس TFK تعلق دارد.

همین استدلال را می‌توان در مورد نقطه I هم، که بعد از نقطه تماس (در قسمت سمت راست شکل) قرار گرفته است، انجام داد و به این جا رسید که: $SDEGP > DP.DF$ و بنابراین $LK > LI$ ، که از آن نتیجه می‌شود که نقطه I دوباره در سمت چپ نقطه K قرار دارد. به این ترتیب، هر دو نقطه K در سمت راست منحنی واقع اند (پاره خط DP، به اندازه دلخواه کوچک فرض شده است)، و بنابر تعریف ثابت می‌شود که TFK، در واقع مماس است. استدلال باروی، به طور مشهود، از شرایط لازمی که در هر اثبات تحلیلی لازم است، منحرف شده است. قبل‌اهم توضیح دادیم که خود تعریف مماس هم بی‌نقص نیست. به جز این‌ها، در استدلال باروی، نقش اصلی به شکل داده است، بدون این که از یکنوا بودن تابع و یا از قابلیت دیفرانسیل گیری آن و غیره، صحبتی شده باشد. ولی، هیچ کدام از این بی‌دقیقی‌ها، ماهیت کار را نمی‌کند. به هر حال، رابطه معکوس بین انتگرال و دیفرانسیل کشف شده بود. آخرین گام تکمیلی، در آنالیز مقدماتی برداشته شده بود.

اگرچه ممکن است تصادفی باشد، ولی به هر حال این حقیقت وجود دارد که همین باروی، کسی که آخرین گام را در آنالیز مقدماتی برداشت، معلم نیوتون بود. مسابقه دوامدادی است که از یکی به دیگری محول می‌شود.

در شماره بعد: دانش جدید، شکل می‌گیرد.

لگاریتم‌ها

مقدمه: در این مقاله روش‌های مقدماتی و بسیار ساده حسابی برای تخمین و محاسبه نسبتاً دقیق لگاریتم مورد بررسی قرار گرفته است. نویسنده، این مقاله را، با توجه به تجربه‌ای که ضمن درس دادن در کلاس‌های فیزیک به دست آورده است، برای کسانی نوشته است که نه پایه ریاضی قوی دارند و نه خواستار ادامه تحصیل در رشته فیزیک هستند. در چنین کلاسی، که می‌خواهد شاگردان را با فیزیک آشنا کند، لازم است شاگردان آگاهی‌هایی درباره لگاریتم داشته باشند، چرا که این مفهوم به راستی کاربردهای بسیار دارد. حال اگر لازم است که چند ساعت از وقت کلاس را برای تعلم لگاریتم‌ها بگیریم، چه بهتر که ضمن این کار چند هدف دیگر را نیز دنبال کنیم. در این مقاله نشان داده شده است که چگونه در کنار لگاریتم، می‌توانیم هدف‌های زیر را نیز دنبال کنیم:

- ۱- توانها و ریشه‌ها و سایر عملیات حسابی را برای آن‌ها دوره کنیم. شاید

برای شاگردان خسته کننده باشد اگر به آنها یادآور شویم که a^b یعنی ریشه b ام، ولی بعد از چند روز سرو کله زدن با $\log_2 b$ ، آنها این مطلب را با گوشت و پوست خود فراخواهند گرفت. ۲- نمونه‌ای بسیار جالب از روش و قدرت تخمین زدن را به آنها یاد بدھیم. بسیاری برآنند که در تخمین زدن، نشانه‌ای از ضعف وجود دارد، درحالی که یک تخمین خوب بسیار با ارزش و خیلی وقتها نسبتاً مشکل است. برای اینکه به شاگردان‌مان هنر تخمین زدن را بیاموزیم، خوبست که از تخمین مقادیر معلوم شروع کنیم. ۳- آنها را با برخورد علمی با اعداد آشنا سازیم. هر عددی احتیاج به توضیح دارد، و پیدا کردن دلیل

^۱ David Mermin، ترجمه از ماهنامه ریاضی آمریکا

The American Mathematical Monthly. Volume 87, Number 1.

وجودی برای عده‌هایی که از آینجا و آنجا سردرمی آورند خود هنری است. این مقاله البته برای خود اینگونه شاگردان نوشته شده است، بلکه برای معلمان آنها نوشته شده است، ولی می‌تواند برای هر کسی که بخواهد چیزی راجع به تخمین لگاریتمها بداند جالب باشد.

لگاریتم‌ها: اگر به یک جدول لگاریتم اعشاری مراجعه کنیم می‌بینیم که:

$$(1) \quad 0/35102999520 = 0/35102999520$$

قبل از بوجود آمدن ماشین حسابی‌ای کوچک، هر بچه دیسترانی می‌دانست که باداشتن یک جدول لگاریتم می‌شود کار پر زحمت ضرب دو عدد بزرگ را به کار آسان‌تر جمع دو عدد و کمی ورق زدن جدول لگاریتم تبدیل کرد. از آنجایی که بسیاری ازما، تعداد زیادی از بعد از ظهرهای زیبای دوران دیستران را به اینگونه اعمال گذرانده‌ایم، تفریت عمیق نه تنها نسبت به لگاریتم، بلکه نسبت به خواص ابتدائی توانهای مثبت، منفی، و کسری پیدا کرده‌ایم.

برای مقابله با این دشمنی، و در عین حال نشان دادن واستفاده از خواص مقدماتی، پیشنهاد می‌کنم که عوض پرداختن به موارد استفاده تساوی (۱) به پیدا کردن دلیل درستی این تساوی پردازم. از کجا معلوم است که ta^5 رقم اعشار \log_2 برابر با $0/35102999520$ می‌باشد؟

به این سوال مرحله به مرحله پاسخ می‌دهیم. به آسانی معلوم می‌شود که:

$$(2) \quad 1024 = 10^2$$

این عدد به طور اتفاقی، تفاوت بسیار کمی با عدد زیر دارد:

$$(3) \quad 1000 = 10^3$$

پس اگر این تفاوت ناچیز را در نظر بگیریم داریم:

$$(4) \quad 2^{10} \# 10^3 \quad (\text{علامت تقریب} \#)$$

که از آنجا

(5) $2^{10} = 10^3$

پس بنا به تعریف:

(6) $\log_2 \# 10^3$

و چون 2^{10} کمی از 10^3 بیشتر بود، می‌دانیم که \log_2 کمی از 10^3 بیشتر است، پس تساوی (۱) کم کم قابل قبول به نظر می‌آید.

اما واقعاً \log_2 چقدر از 10^3 بیشتر است؟ و برای چه تعداد از دنباله دراز تساوی (۱) می‌شود دلیلی پیدا کرد؟ در آینجا دو راه وجود دارد: اول به

$$\log_7 \# \frac{1}{2} (2 - \log_2) = 0/85 \quad (14)$$

که کمتر از ۱ درصد باتساوی (۸) تفاوت دارد. با توجه به تقریب‌های پیدا شده برای \log_2 و \log_3 و همچنین با استفاده از تصادف عددی زیر:

$$120 = 10 \times 3 \times 2^2 = 121 - 11^2 \quad (15)$$

می‌بینیم که:

$$\log_11 \# \frac{1}{2} [2\log_2 + \log_3 + 1] \# \frac{83}{80} = 1/0375 \quad (16)$$

که با تساوی (۹) فقط $\frac{1}{2}\%$ تفاوت دارد.

برای محاسبات اصلی تازه گرم شده‌ایم، ولی حتماً کسانی که تجربه مدرسه، نفرت از اعداد را به آنها آموخته است، دیگر نمی‌خواهند ادامه‌دهند. اگر کمی بیشتر به عده‌هایی که عاملهای اول آنها فقط توانهای ۲، ۵، ۳، ۲ و ۱۱ می‌باشند، نگاه کنیم، به بعضی تصادفات جالب برمی‌خوریم. با بهترین آنها شروع می‌کنیم:

$$980 = 980 \times 10^2 = 9801 \times 2^2 \times 7^2 \times 11^2 \quad (17)$$

باید اعتراف کنم که من این کشف را با استفاده از جدول عاملهای اول اعداد تا ۱۰۰۰۰ به دست آورده‌ام. این کار وجود نام را عذاب می‌داد، چرا که یکی از اصول این مقاله استفاده از فقط قلم و تکه‌ای کاغذ بوده است. ولی بعد متوجه شدم که این اتفاق را می‌شود بدون استفاده از جدول هم پیدا کرد. ۹۹، ۹۸، ۹۷ و ۱۰۰ سه عدد متولی هستند که عاملهای اول آنها همه مساوی و یا کمتر از ۱۱ می‌باشد، و رابطه (۱۷) چیزی جزیان تساوی $1 - \log_2 98 \times 97 \times 96 = 100$ (چون $1 - a^2 = (a+1)(a-1)$) نیست. پس هرگاه بتوانیم عدد متولی که عاملهای اول آنها کمتر یا مساوی ۱۱ باشند پیدا کنیم، رابطه‌ای از نوع (۱۷) پیدا می‌شود. تقریب $9801 \# \frac{9800}{9801}$ خطای در حدود 5% دارد، و درنتیجه رابطه خطی‌ای که بین لگاریتم‌های $2, 3, 5, 7, 11$ به دست می‌دهد، با تقریب‌ی بسیار بهتر از تساوی‌های قبلی می‌باشد.

از آنجا که ۴ معجول داریم ($\log_2, \log_3, \log_5, \log_7$ و \log_{11})، و تا حال فقط یک معادله بین آنها پیدا کرده‌ایم، احتیاج به پیدا کردن ۳ معادله دیگر باخطایی در حد خطای بالا داریم. من بین اعداد بیشتر از ۱۰۰ دنبال ۳ عدد متولی با عاملهای اول مساوی و یا کمتر از ۱۱ می‌گشتم، ولی تاوقی که خسته شدم، موفق به پیدا کردن چنین اعدادی نشدم. پس بین اعداد کمتر از ۱۰۰

وسیله تجزیه و تحلیل، و دوم با کوشش در پیدا کردن اتفاقات جالب دیگر، از همان نوعی که بدما امکان تقریب نسبتاً خوب \log_2 را داد (واقعاً هم اشتباه تخمین ما حدود $\frac{1}{3}$ یک درصد بود). روش دوم جالب‌تر است، و ما اول به آن می‌پردازیم.

اگر ما خواهان رابطه تقریبی ساده‌ای بین توانهای ۲ و ۱۰ باشیم، و همچنین بخواهیم که این رابطه را بشود با یک قلم و ورقه کاغذ کوچکی حساب کرد. نخواهیم توансست تقریبی بهتر از معادلات (۲) و (۳) به دست آوریم. اما اگرچند عدد صحیح دیگر را هم به بازی بگیریم، آنوقت روابطی بهخوبی (۴) (که حدود $\frac{2}{5}\%$ خطای دارند) به آسانی پیدا می‌شوند. از آنجا که لگاریتم اعداد مرکب برابر با مجموع لگاریتم‌های مقسوم‌علیه‌های اول آن می‌باشد، فقط لازم است که لگاریتم عددهای اول را حساب کنیم. درنتیجه ماتحقیق مان را به لگاریتم عددهای ۲، ۳، ۵ و ۱۱ محدود می‌کنیم. (چون $1 - \log_2 5 = 1 - \log_2 11$ احتیاجی به محاسبه آن نیست). پس ما می‌خواهیم علتی برای روابط زیر پیدا کنیم:

$$(7) \quad \log_3 2 = 0/477 \quad 1212547\dots$$

$$(8) \quad \log_5 2 = 0/845 \quad 0980400\dots$$

$$(9) \quad \log_{11} 2 = 1/041 \quad 392685\dots$$

اجازه دهید که ما اول با استفاده از تساوی‌های تصادفی، از نوعی که بهما $\frac{3}{10} \# \log_2 11$ را داد، کوشش به پیدا کردن این لگاریتم‌ها بکنیم. با استفاده از

قریب اول، یعنی $\frac{3}{10} \# \log_2 11$ ، این کار آسان است:

$$(10) \quad 2^3 = 81 = 80 \times 10^2 + 2^3 \times 10^0$$

پس با خطایی کمی بیشتر از ۱ درصد داریم:

$$(11) \quad 3^4 = 81 = 80 \times 10^2 + 3^4 \times 10^0$$

که یعنی

$$(12) \quad \log_3 \# \frac{1}{4} (3\log_2 + 1) \# \frac{19}{40} = 0/475$$

که خطایش نسبت به تساوی (۷) فقط $1/2\%$ می‌باشد. به همین ترتیب:

$$(13) \quad 7^2 = 49 = 50 \times 10^2 + \frac{1}{2} \times 10^0$$

که با استفاده از $\frac{3}{10} \# \log_2 11$ داریم:

$$\begin{aligned} & \text{به پیدا کردن دو تساوی زیر شدم:} \\ (25) \quad & 2^{53} = 9/00719900 \times 10^{15} \\ (26) \quad & 2 \times 3^{35} = 1/000630900 \times 10^{17} \end{aligned}$$

البته، در اینجا ممکن است با اعتراض شاگردانی حساب استفاده کنیم، چرا از همان اول برای پیدا کردن خود لگاریتمها از آن استفاده نکردیم. اما، به احتمال زیاد بسیاری از شاگردان ما ماشین حساب های را دیده‌اند که ضرب را انجام می‌دهند ولی قادر به محاسبه لگاریتم نمی‌باشند. برای دفاعی بهتر به آنها نشان می‌دهیم که چگونه می‌شود این دو تساوی را بدون ماشین حساب محاسبه کرد. برای مثال:

$$(27) \quad \left(1 + \frac{24}{1000} \right) \times 10^{15} \times 10^{24} = 8 \times 10^{15} \times 2^{53}$$

که از اینجا با استفاده از بسط نیوتون می‌شود معادله (25) را با تقریب لازم به دست آورد. معادله (26) احتیاج به محاسبات بیشتری دارد، ولی آن را هم می‌شود در یک صفحه مرتب محاسبه کرد. با استفاده از آنها دو تساوی تقریبی زیر به دست می‌آید:

$$(28) \quad 2^{53} \# 10^{17} = 2 \times 3^{35} \# 10^{15}$$

که از آنها دو معادله خطی به دست می‌آید و با استفاده از اینها داریم:

$$(29) \quad \log_2 \# \frac{559}{1857} = 0/301023100$$

$$(30) \quad \log_3 \# \frac{886}{1857} = 0/477113600$$

که تا ۵ رقم اعشار درست می‌باشد.

برای اینکه تخمین‌هایمان را بهتر کنیم، باید کمی از تحلیل سیستماتیک استفاده کنیم:

اگر x عددی (مثبت یا منفی) باشد که در مقایسه با یک کوچک است، آنگاه لگاریتم $x+1$ را می‌شود بادقت بسیار از رابطه زیر به دست آورد:

$$(31) \quad \log(1+x) \approx 0/4343x$$

هر چه قدر مطلق x کوچکتر باشد، تخمین بهتری به دست می‌آید. عدد $0/43429$ را که ما به صورت $5/4343$ گرد کرده‌ایم، البته لگاریتم e در مبنای ۱۰ می‌باشد.

اگر بخواهیم به آماتورها بقولانیم، که دلیلی هم برای درستی معادله (31) وجود دارد، کار نسبتاً مشکلی پیش رو داریم. بهترین راه این است که

شروع به کاوش کردم، و به سه تأثیرهای [۴۸، ۴۹، ۵۰]، [۵۴، ۵۵، ۵۶] و [۲۱، ۲۰، ۲۲] بر می‌خوردم، از اینها بدست می‌آید:

$$(18) \quad \frac{1}{2}(10^2 \times 11^2) = 3025, \quad 2^4 \times 3^3 \times 7 = 3044$$

$$(19) \quad 7^4 = 2401, \quad 2^3 \times 3 \times 10^2 = 2400$$

$$(20) \quad 3^2 \times 7^2 = 441, \quad 2^2 \times 10 \times 11 = 440$$

تساویهای (18) و (19)، گوینکه بخوبی تساوی (17) نیستند، ولی با اینحال خطایشان به ترتیب $\% 5/03$ و $\% 0/04$ می‌باشند، که از خطاهای تقریبیهای او لیهمان بسیار کمتر است. خطای معادله (20)، گوینکه از خطاهای تقریبیهای دور اولمان بهتر است، ولی ضعیفترین تساوی ازین سه معادله بالا می‌باشد. اگر می‌توانستیم تساوی تقریبی بهتر و ساده‌تری پیدا کنیم خیلی بهتر می‌بود.

$$\text{فهمیدن اینکه } \frac{7 \times 10^4}{2 \times 3^7} = 4375 \quad \text{یا} \quad 4374, \quad \frac{7 \times 10^4}{2^4} = 1000000$$

فایلهای ندارد، چرا که هر دو اینها را می‌شود از معادلهای (18) و (19) به دست آورد، ولذا برای تشکیل ۴ معادله با ۴ مجهول مناسب نیستند. حال، هر یک از معادلهای (17) - (20) بهما یک تساوی تقریبی می‌دهند، و با حل این ۴ معادله به دست می‌آوریم:

$$(21) \quad \log_2 \# \frac{72}{239} = 0/30125$$

$$(22) \quad \log_3 \# \frac{114}{239} = 0/48698$$

$$(23) \quad \log_7 \# \frac{202}{239} = 0/84518$$

$$(24) \quad \log_{11} \# \frac{249}{239} = 1/04184$$

که به مقادرهای حقیقی بسیار نزدیک‌اند.

در اینجا، تقریباً نصف کلاس به وجود آمده‌اند. نصف دیگر، در هر صورت خسته شده‌اند، پس بهتر آنکه کمی جلوتر برویم و با کمی کوشش بیشتر نتیجه

را بهتر کنیم. اگر بخواهیم خود را محدود بدوشهای آماتوری کنیم، دیگر نمی‌توان

به پیدا کردن تصادفات ادامه داد. اما با یک ماشین حساب الکترونیک من موفق

داشت:

$$(48) \quad A \# \log_{1008}^{2740} \# \log_{10}^{3^3} = 3 \log 3 - 1 \# \frac{17}{425}$$

این تخمین را می‌شود بهتر کرد:

$$(49) \quad A \# \log_{1008}^{2740} \# 3 \log 3 - 1 + \log \left(1 + \frac{4}{270} \right) - \log \left(1 + \frac{8}{1000} \right)$$

حال با توجه به تعریف A (رابطه ۴۴) دوجمله آخر را هم می‌توان با استفاده از A ساده‌تر کرد و خواهیم داشت:

$$(50) \quad A \left(1 + \frac{8}{1000} - \frac{4}{270} \right) \# 3 \log 3 - 1$$

حال باید از مقدار نسبتاً دقیقی برای $\log 3$ استفاده کنیم. البته اگر، از تقریب هائی استفاده کنیم که خود آنها از معادله (۳۱) استفاده کرده باشند، باید به جای $A/4343$ از A استفاده کنیم. لذا روشی که بهما تساویهای (۴۴) و (۳۵) را داد، حالا منجر به روابط زیر می‌شود:

$$(51) \quad 10 \log 2 \# 3 + \frac{24}{1000} A$$

$$(52) \quad 4 \log 3 \# 3 \log 2 + 1 + \frac{1}{A}$$

و درنتیجه:

$$(53) \quad \log 3 \# \frac{19}{40} + \left(\frac{1}{320} + \frac{9}{5000} \right) A$$

حال با استفاده از این و رابطه (۵۳) می‌توانیم $\log 3$ را حذف کرده و بدست آوریم:

$$(54) \quad A \left(1 + \frac{13}{5000} - \frac{3}{320} - \frac{2}{135} \right) \# \frac{7}{40}$$

که با کمی جمع و تفریق خواهیم داشت:

$$(55) \quad A \# 0/43437\dots$$

که بقدر کافی دقیق است.

آوردن آن سдрقم ۹ متوالی در معادله (۴۲) به کار خود پایان دهیم.

ضمیمه

$$\text{در باره معادله } |x| < 1 \text{ ، } |x| \# Ax$$

گفتیم که $|x|$ عددی کوچک است، آن را مساوی $\frac{1}{n}$ ، که در آن n عددی بزرگ است، می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$(45) \quad \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \# \frac{A}{n} \Rightarrow A \# \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

با استفاده از بسط نیوتون و کمی جابجا کردن داریم:

$$(46) \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{4!} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^3 \left(1 - \frac{3}{n} \right) + \dots$$

حال باید شاگردان را مقاعد کرد که وقتی که n عددی بسیار بزرگ باشد، جمله‌های اول تقریباً به n وابسته نیستند، و جمله‌هایی که به n وابسته‌اند به خاطر وجود فاکتوریل‌ها در مخرج، آنقدر کوچک‌اند که باز هم اثری ندارند، لذا می‌شود از n ها صرفنظر کرد و خواهیم داشت:

$$(47) \quad A \# \log \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \right)$$

حال به محاسبه و تخمین A می‌بردازیم. اگر احتیاج به دقت تا ۴ رقم اعشار داشته باشیم، کافی است که تا $\frac{1}{7!}$ را در مجموع داخل لگاریتم به حساب آوریم. وقتی که بقیه جمله‌هارا حذف کنیم و مخرج مشترک بگیریم خواهیم داشت:

$$A \# \log \frac{13700}{5040}$$

حال $\frac{13700}{5040}$ را به صورت $\frac{2740}{1008}$ می‌نویسیم. و در اینجاست که تخمین زن‌های مجرب ماتشیخیس خواهند داد که این کسر با خطای در حدود ۱ درصد $\frac{3}{10}$ می‌باشد. با استفاده از اولین تخمین $\log 3$ (معادله ۱۲) خواهیم

مساله‌های چینی

I. صورت مساله‌ها

مساله‌هایی از رسالت «نه فصل از هنر محاسبه»

۱۰ ۵ گاو و ۲ گوسفند، ۱۱ «تاول» می‌ارزند، ولی ۲ گاو و ۸ گوسفند،
۸ «تاول» قیمت دارند. قیمت هر گاو و هر گوسفند چقدر است؟

۱۱ سه‌زد، از سه بشکه برنج با گنجایش برابر، مقداری برنج دزدیدند.
علوم شد که در بشکه اول ۱ «هو»، در بشکه دوم، ۱ «شینگ» و ۴ «هو» و
در بشکه سوم، ۱ «هو» برنج باقی مانده است. دزدها شهادت دادند: اولی
از بشکه اول و با بیلچه، دومی از بشکه دوم با گفتش چوبی و سومی از بشکه
سوم با کاسه برنج را دزدیده‌اند. بیلچه ۱ «شینگ» و ۹ «هو»، کفش چوبی
۱ «شینگ» و ۷ «هو» و کاسه ۱ «شینگ» و ۲ «هو» گنجایش دارند.

۱۲ می‌خواهیم بدایم که هر دزد، چقدر برنج دزدیده است، به شرطی که
۱۰ «هو» برای ۱ «شینگ»، ۱۰ «شینگ» برای ۱ «تاو» و ۱۰ «تاو» برای
۱ «شی» باشد.

مساله‌ای از رسالت «آغاز هنر محاسبه»

۱۳ اگر مساحت و محیط یک مثلث قائم‌الزاویه معلوم باشد، ضلع‌های
آن را پیدا کنید.

مساله «سون تزی»

۱۴ عددی را پیدا کنید که در تقسیم بر ۳ به باقی مانده ۲، در تقسیم بر
۵ به باقی مانده ۳ و سرانجام در تقسیم بر ۷ به باقی مانده ۲ برسد.

مساله‌هایی از رسالت «ریاضیات در نه کتاب»

۱۵. انباری داریم به عرض ۳ «جزان» و طول ۴ «جزان» و ۵ «جزی».

این انبار را با ۱۰۰۰۵ «هو» نمک پر کرده‌ایم. ارتفاع انبار چقدر است؟

۱۶. خیزانی داریم که از ۹ قسمت تشکیل شده است. حجم ۳ قسمت

پایینی ۴ «شهنا» و حجم ۴ قسمت بالایی ۳ «شهنا» است. می‌خواهیم حجم

دو قسمت دیگر را پیدا کنیم، به شرطی که تفاوت حجم هر دو قسمت متواالی،

مقدار ثابتی باشد.

۱۷. شمش طلا و ۱۱ شمش نقره داریم. وزن شمش‌های طلا برابر

است با وزن شمش‌های نقره. یکی از شمش‌های طلا را، بایکی از شمش‌های

نقره عوض کرده‌ایم، وزن ظرف طلاها ۱۳ «لان» سبکتر شد. وزن هر شمش طلا

و هر شمش نقره چقدر است؟

۱۸. اسبی راهوار و اسبی بی‌زور از «چاتیانی» به طرف شاهزاده نشین

«تسی»، که ۳۰۰۵ «لی» با «چاتیانی» فاصله داشت، حرکت کردند. اسب

راهوار در روز اول ۱۹۳ «لی» و روزهای بعد، هر روز ۱۳ «لی» بیشتر،

دوید. اسب بی‌زور، روز اول ۹۷ «لی» و روزهای بعد، هر روز نیم «لی»

کمتر رفت. اسب راهوار که اول به شاهزاده نشین رسیده بود، بلا فاصله برگشت

و در نقطه‌ای به اسب بی‌زور برخورد کرد. می‌خواهیم بدایم بعد از چند روز

به هم رسیدند و در این مدت، هر کدام چقدر راه رفته‌اند.

۱۹. ۵ گاومیش و ۲ گوسفند ۱۵ «لين» طلا، و ۲ گاومیش و ۵ گوسفند

۸ «لين» می‌ارزند. قیمت هر گاومیش و هر گوسفند چقدر است؟

۲۰. از ۳ خرمن خوب، ۲ خرمن متوسط و ۱ خرمن بد، ۳۹ «دواو».

غله به دست آمده است. از ۲ خرمن خوب، ۳ خرمن متوسط و ۱ خرمن بد،

۳۶ «دواو» و از ۱ خرمن خوب، ۲ خرمن متوسط و ۳ خرمن بد، ۲۶ «دواو»

می‌خواهیم بدایم که از هر نوع خرمن خوب، متوسط و بد محصول، چقدر

غله به دست می‌آید.

۲۱. با ۲ خرمن محصول خوب، ۳ خرمن محصول متوسط و ۴ خرمن

محصول بد، به ترتیب به اندازه ۱ خرمن متوسط، ۱ خرمن بد و یک خرمن

خوب، کمتر از ۱ «دواو» غله به دست می‌آید. از هر نوع خرمن، چقدر غله

می‌توان به دست آورد؟

۲۲. وزن ۲ خرمن A، یک «دان» از وزن خرمن B بیشتر است، وزن

۳ خرمن B، یک «دان» از وزن خرمن C بیشتر است و بالاخره، وزن ۴

درجایی که بادیوار چاه تماس دارد و نقطه‌ای از قطر به فاصله ۴ «تسون» روی یک خط راست است. عمق چاه را پیدا کنید.

۳۰. مخروطی داریم که محیط قاعده آن ۳ «چزان» و ۵ «چی»، وارتفاع آن ۵ «چزان» و ۱ «چی» می‌باشد. حجم مخروط چقدر است؟
۳۱. مخروط ناقص دواری داریم که محیط قاعده پایین آن ۳ «چزان»، محیط قاعده بالای آن ۲ «چزان» و ارتفاع آن ۱ «چزان» است. حجم آن را پیدا کنید.

۳۲. ضلع افقی یک مثلث ۵ «بو» و ضلع قائم آن ۱۲ «بو» است. مطلوب است طول ضلع مربع محاط در این مثلث.

۳۳. ستون در فاصله مجهولی از یک شخص قرار دارد. ۴ سکو داریم که دو به دو به فاصله ۱ «چزان» از یکدیگر قرار دارند. ناظری چنان ایستاده است که دو سکو در سمت چپ او واقع شده است و خودش در کنار سکوی طرف راست و پایین ایستاده است. این ناظر، ستون را در فاصله ۳ «تسون» از سکوی بالا و سمت راست می‌بیند. فاصله شخص را تا ستون پیدا کنید.

۳۴. کوه در غرب ستون قرار دارد و ارتفاع آن مجهول است. فاصله کوه از ستون برابر ۵۳ «لی» است. ارتفاع ستون هم برابر ۹ «چزان» و ۵ «لی» است. شخصی در فاصله ۳ «لی» در شرق ستون ایستاده است و قله کوه را با رأس ستون در یک امتداد می‌بیند. چشم این شخص در ارتفاع ۷ «چی» واقع شده است. ارتفاع کوه را پیدا کنید.

۳۵. بر روی تپه‌ای، درخت کاجی با ارتفاع مجهول رویده است. پایین، در جگه، دو دیرک، هر کدام به ارتفاع ۲۵ پا (a)، طوری قرار دارند که با درخت در یک خط راست و به فاصله ۵۵ گام (b) از یکدیگر واقع شده‌اند. رأس درخت و انتهای دیرک اول، خط راستی تشکیل می‌دهند که در فاصله ۷ گام و ۴ پایی همان دیرک به زمین می‌رسد (c). رأس درخت و انتهای دیرک دوم هم، خط راستی تشکیل می‌دهند که در فاصله ۸ گام و ۵ پایی دیرک (d) به زمین می‌رسد. می‌خواهیم ارتفاع درخت کاج (x) و فاصله دیرک اول را از تپه (y) پیدا کنیم.

خرمن C، یک «دان» از وزن خرمن A بیشتر است. وزن هر کدام از خرمن-های A، B و C چقدر است؟

۱۳. ۲ گامبیش و ۵ گوسفند فروختند، ۱۳ خوک خردند، ۱۰۰۰ «تسیان» باقی ماند. ۳ گامبیش و ۳ خوک فروختند، ۹ گوسفند خردند، چیزی باقی نماند. ۶ گوسفند و ۸ خوک فروختند، ۵ گامبیش خردند، ۶۰۰ «تسیان» کم آوردند. قیمت هر گامبیش، هر گوسفند و هر خوک چقدر است؟

۱۴. ۵ خانواده، یک چاه مشترک دارند. برای این که آب را بالا، به سطح بیاورند، ۲ طناب خانواده A به اندازه ۱ طناب خانواده B کوتاه است، ۳ طناب خانواده B به اندازه ۱ طناب خانواده C کوتاه است، ۴ طناب خانواده C به اندازه ۱ طناب خانواده D کوتاه است، ۵ طناب خانواده D به اندازه ۱ طناب خانواده E کوتاه است، ۶ طناب خانواده E به اندازه ۱ طناب خانواده A کوتاه است. عمق چاه و طول هر طناب از هر خانواده چقدر است؟

۱۵. بر که آبی به ضلع ۱ «چزان» وجود دارد. در مرکز آن یک نی رویده است که درست ۱ «چی» از آب بیرون زده است. اگر نی را به طرف کنار بر که خم کنیم، سر نی درست به کنار بر که می‌رسد. عمق بر که وارتفاع نی را پیدا کنید (هر «چزان» برابر است با ۱۵ «چی»).

۱۶. دو نفر در یک جا ایستاده‌اند. معیار راه رفتن A برابر ۷ و معیار راه رفتن B برابر ۳ می‌باشد. B به طرف مشرق می‌رود. ۱۵ A «بو» به طرف جنوب می‌رود، بعد راه خود را کج می‌کند و به طرف شمال شرقی می‌رود تا B را ملاقات کند. هر کدام از افراد A و B، چقدر راه رفته‌اند؟

۱۷. دری وجود دارد که ارتفاع آن ۶ «چی» و ۸ «تسون» از عرض آن بیشتر است. بزرگترین فاصله بین رأس‌های آن (قطر)، ۱ «چزان» است. عرض وارتفاع در را پیدا کنید.

۱۸. شهری است به شکل مربع با طول ضلع مجهول، وسط هر کدام از ضلع‌های آن، یک دروازه است. در فاصله ۵ «بو» از دروازه شمالی یک ستون قرار دارد. اگر، از دروازه جنوبی به اندازه ۱۴ «بو» به طرف جنوب ۱۷۷۵ «بو» به طرف مغرب برگردیم، می‌توانیم ستون را بینیم. مطلوب است طول ضلع شهر.

۱۹. قطر یک چاه برابر ۵ «چی» و عمق آن مجهول است. در کنار محیط بالای چاه، دیرکی به ارتفاع ۵ «چی» قرار دارد. رأس دیرک با سطح آب

II. یادداشت تاریخی

ریاضیات، زمینه و سابقه‌ای طولانی در فرهنگ چین دارد. بسیاری از کشف‌ها، چهدر زمینه دانش و چه در زمینه صنعت، خیلی قبل از سایر کشورها در چین و به وسیله دانشمندان چینی، انجام گرفته است.

دانشمندان چینی، برای نخستین بار در تاریخ صنعت جهان، قطب‌نما (سدۀ سوم پیش از میلاد)، زاز لهنگار (سدۀ دوم پیش از میلاد) و مرعت‌سنیج را، کشف کردند. مردم چین، خیلی پیش از اروپایی‌ها، طرز تهیه شوره را، برای به دست آوردن باروت، می‌دانستند (سدۀ دهم). استاد کاران چینی، حتی در سده هفتم پیش از میلاد، از راز تهیه ظرف‌های چینی با خبر بودند. وهمه می‌دانند که چین زادگاه ابیریشم و انواع رنگ‌ها و روغن‌های رنگی است. در سده یازدهم، «بی‌شن» آهنگر، وسیله‌ای برای چاپ درست کرد که از آن چه که ما امروز داریم، تفاوت کمی دارد.

اخترشناسی توصیفی، یعنی دانش جسم‌های آسمانی، و تقویم در چین به وجود آمد. دانشمندان چینی، در ژرفای تاریخ، کار مشاهده منظم آسمان را آغاز کردند و به ثبت موقعیت‌ها و حرکت‌های ستاره‌ها پرداختند. «شی‌شن»، اخترشناس چینی، در سده چهارم پیش از میلاد، نخستین سیاهه ستارگان را تنظیم کرد، در آن شرح ۸۰۵ ستاره داده شده است. در اروپا، چینی سیاهه‌ای تنها در سده دوم میلادی تنظیم شد (کاتالوگ هیبارک).

اخترشناسان چینی، برای انجام مشاهده‌های خود، ساختمان‌های مجهزی داشتند، که آن‌ها را رصدخانه می‌نامیدند. بنایی که به نام رصدخانه پکن در حال حاضر وجود دارد، با ابزار قدیمی آن، در سال ۱۲۷۹ میلادی در حومه پکن ساخته شده است.

(مساله‌ها و حل آن‌ها را، که در اینجا آمده است، از رساله‌های چینی برداشته‌ایم، منتهی بیان آن‌ها را با علامت‌های امروزی داده‌ایم).

III. حل مساله‌ها

۱. حل مساله، منجر به بررسی دستگاه معادله‌های زیر می‌شود:

$$\begin{cases} a+b+c=p, \\ a^2+b^2=c^2, \\ ab=rs \end{cases}$$

که با حل آن به دست می‌آید:

$$x = 2, \quad y = \frac{1}{2}$$

بنابراین، هرگا و ۲ «تاول» و هر گوسفند $\frac{1}{2}$ «تاول» می‌ارزد.

رساله چینی ریاضی «نه فصل از هنر مبارزه» (کیوچانگ)، رساله‌ای خیلی قدیمی است. رساله، شامل قانون‌های از ریاضیات و مساله‌های گوناگونی در کاربرد این قانون‌هاست. در آن جا، رساله‌هایی که خصلت عملی دارند و بیشتر مربوط به کشوارزی و محاسبه حجم‌ها هستند، وجود دارد.
۳. این مساله، منجر به معادله‌ای سیال می‌شود که باید جواب‌های صحیح آن را به دست آورد. به زبان ریاضیات امروزی، مساله به این ترتیب حل می‌شود. فرض می‌کنیم، با یکچه x بار، با کفش چوبی y بار و با کاسه z بار برنج از بشکه‌ها برداشته باشند. در این صورت، شرایط مساله، منجر به دستگاه معادله‌های زیر می‌شود:

$$19x + 14 = 12z + 1 = 17y + 1$$

که از آن‌جا، به این معادله سیال می‌رسیم:

$$19x = 12z \Rightarrow x = \frac{12z}{19}$$

چون x ، y و z ، عددهایی درست هستند، می‌توان فرض کرد:

$$z = 19t$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$17y + 13 = 228t$$

کوچکترین عدد درستی که می‌توان برای t انتخاب کرد تا هم عددی درست بشود، برابر است با ۱۴، و از آن خواهیم داشت:

$$x = 168, \quad y = 187, \quad z = 265$$

بنابراین، اولی ۳ «شی»، ۱ «تاول»، ۹ «شینگ» و ۲ «هو»، دومی ۳ «شی»، ۱ «تاول»، ۷ «شینگ» و ۹ «هو»، و سومی ۳ «شی»، ۱ «تاول»، ۹ «شینگ» و ۲ «هو» برنج برداشته‌اند.

۴. مساله منجر به حل دستگاهی از سه معادله سه مجهولی می‌شود:

$$\begin{cases} a+b+c=p, \\ a^2+b^2=c^2, \\ ab=rs \end{cases}$$

و یا

$$3y + 2 = 5z + 3 = 7u + 2$$

و از آن جا

$$3y = 7u \Rightarrow y = \frac{7u}{3}$$

اگر t را عددی درست و $u = 3t$ بگیریم، به دست می آید:

$$y = 7t$$

از آن جا

$$x = 21t + 2$$

و بنابراین

$$21t + 2 = 5z + 3 \Rightarrow 21t - 5z = 1$$

با روش جستجو می توان یکی از جوابهای t و z را در معادله سیال اخیر پیدا کرد: $t = 1$ ، $z = 4$. در این صورت، شکل کلی جوابهای این معادله چنین است:

$$t = 1 + 5q, \quad z = 4 + 21q$$

که در آن $q = 0, 1, 2, \dots$

چون داریم: $x = 21t + 2$ ، خواهیم داشت. $x = 23 + 105q$ ، که در آن q می تواند برابر صفر و یا هر عدد درست مثبت باشد. کوچکترین مقدار x به ازای $q = 0$ پیدا می شود: $x = 23$. اگر $q = 1$ باشد $x = 128$ و اگر $q = 2$ باشد، $x = 233$ و اگر $q = 3$ باشد $x = 338$ می شود وغیره.

۵. خود رساله، مسأله را این طور حل کرده است: «معلوم کنید که ۱۰۰۰۰ هو» نمک چند «چی» می شود، این را مقسوم بگیرید. با ضرب طول و عرض در یکدیگر، مقسوم علیه را پیدا کنید. با در دست داشتن مقسوم و مقسوم علیه، ارتفاع انبار بر حسب «چی» به دست می آید». برای حل مسأله، باید توجه داشت که:

$$1 \text{ «چزان}} = 10 \text{ «چی}} ,$$

$$1 \text{ «هو}} = 51775 \text{ «لیتر}} ,$$

$$27 \text{ «چزان}} = 10000 \text{ «هو}} .$$

۶. تنظیم کننده رساله، برای حل مسأله، به ذکر قاعده اکتفا می کند: ۴ «شهنا» را بر ۳ قسمت پایینی تقسیم می کنیم؛ ۳ «شهنا» را بر ۴ قسمت بالایی

که در آن: $a = b = c$ ضلعها، p محيط و s مساحت مثلث مفروض اند.

از معادلهای دوم و سوم به دست می آید:

$$(a+b)^2 = 4s+c^2$$

$$(p-c)^2 = 4s+c^2$$

و از آن جا

که اگر آن را نسبت به c حل کنیم، به دست می آید:

$$c = \frac{p^2 - 4s}{2p}$$

در نتیجه، با توجه به معادله اول، خواهیم داشت:

$$a+b = \frac{p^2 + 4s}{4p}$$

اگر این معادله را با معادله سوم در نظر بگیریم، به معادله درجه دومی می رسیم که a و b ریشه های آن می شوند:

$$x^2 - \frac{p^2 + 4s}{4p}x + 2s = 0$$

رساله «آغاز هنر محاسبه» در سال ۱۵۹۳ چاپ شد. در این رساله، قاعده های مهمی وجود دارد که، احتمالاً برای این که بهتر به خاطر بماند، به صورت شعر تنظیم شده است. ظاهراً از این کتاب، در زمان خودش، به عنوان یک کتاب درسی، در مدرسه های ریاضیات مقدماتی، استفاده می کرده اند. محتوی این کتاب، طرح خوبی از وضع ریاضیات چین، تا اوخر سده شانزدهم، به دست می دهد.

۴. «سون تزی»، مسأله خود را به این ترتیب حل می کند: «در تقسیم بر ۳ به باقی مانده ۲ رسیده ایم، بنابراین آن را ۱۴۵ بگیرید. در تقسیم بر ۵ به باقی مانده ۳ رسیده ایم، بنابراین آن را ۶۳ بگیرید. در تقسیم بر ۷ به باقی مانده ۲ رسیده ایم، بنابراین آن را ۳۵ بگیرید. از جمع آنها، عدد ۲۳۳ پیدا می شود: از این عدد، ۲۱۵ را کم کنید، جواب به دست می آید». مسأله «سون تزی» را می توان، با روش ساده ای، حل کرد. حل آن، منجر

به دستگاه زیر می شود:

$$x = 3y + 2$$

$$x = 5z + 3,$$

$$x = 7u + 2$$

که در رساله ذکر شده است، جواب را به دست می‌آوریم.
قبلایاد آوری می‌کنیم که

$$\begin{aligned} 1 & \text{ «تسه زین»} = 16 \text{ «لان»}, \\ 1 & \text{ «لان»} = 24 \text{ «چزو»} \end{aligned}$$

وزن شمش طلا را x ، وزن شمش نقره را Z می‌گیریم. مسأله، منجر به حل دستگاه زیر می‌شود:

$$9x = 11z$$

$$13 + 8x + z = 10z + x$$

این دستگاه را با قاعدة «دو فرضی» حل می‌کنیم.
فرض اول $x = 3$ «تسه زین». در این صورت

$$z_1 = \frac{9x_1}{11} = \frac{9 \times 3}{11} = \frac{27}{11} = \frac{5}{11}$$

حالا «کمبود را در سطر راست» پیدا می‌کنیم، آنرا به y_1 نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(\frac{13}{16} + 8 \times 3 + 2 \frac{5}{11} \right) - \left(10 \times 2 \frac{5}{11} + 3 \right) = \\ &= 27 \times \frac{47}{11 \times 16} - 27 \times \frac{96}{11 \times 16} = \frac{49}{11 \times 16} \end{aligned}$$

فرض دوم $x_2 = 2$ «تسه زین». در این حالت، $z_2 = \frac{7}{11}$ «تسه زین» و

«اضافی سطرچپ» برای راست با

$$\begin{aligned} y_2 &= \left(\frac{13}{16} + 1 \frac{7}{11} + 8 \times 2 \right) - \left(10 \times 1 \frac{7}{11} + 2 \right) = \\ &= 18 \times \frac{79}{11 \times 16} - 18 \times \frac{64}{11 \times 16} = \frac{15}{11 \times 16} \end{aligned}$$

حال y_1 و y_2 را، همراه با x_1 و x_2 ، با روش چنی می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

ستون سمت چپ، همان «سطرچپ» و ستون سمت راست، همان «سطر راست» است. از این جدول، بنابر قاعده، به دست می‌آید:

$$-\frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1$$

تقسیم می‌کنیم، عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم می‌کنیم، مقسوم به دست می‌آید. مجموع نصف ۴ قسمت و ۳ قسمت را از کل ۹ قسمت کم می‌کنیم، مقسوم علیه پیدا می‌شود. تقسیم را انجام می‌دهیم، مقدار مجھول پیدامی شود، یعنی معلوم می‌شود که هر قسمت با قسمت مجاور خود چقدر اختلاف دارد.
حد متوسط حجم ۳ قسمت پایینی، همان حجم قسمت دوم است.

بنابراین قاعده، باید این محاسبه‌ها را انجام داد

$$1. \quad \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \text{ این مقسوم.}$$

$$2. \quad \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{11}{4} = \frac{11}{4}, \text{ این هم مقسوم علیه.}$$

بعدی خود اختلاف دارد.
۰.۳ $\frac{11}{2} - \frac{7}{13} = \frac{66}{26} = d$ ، یعنی مقداری که هر قسمت با قسمت

$$4. \text{ حجم قسمت دوم از پایین برابر } \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \text{ «شهنا» است. حالا}$$

دیگر بدون هیچ اشکالی می‌توان حجم هر کدام از هشت قسمت دیگر را پیدا کرد.

۷. نویسنده رساله راهنمایی می‌کند که مسأله را باید به این ترتیب حل کرد: «فرض می‌کنیم وزن هر شمش طلا برابر 3 «تسه زین» باشد، در این صورت وزن هر شمش نقره برابر $\frac{5}{11}$ «تسه زین» می‌شود، کمبود با واقعیت برابر است با 49 ، در سطر راست حالا فرض می‌کنیم که وزن یک شمش طلا برابر 2 «تسه زین» باشد، در این صورت وزن یک شمش نقره، برابر $\frac{1}{11}$ «تسه زین»

می‌شود. با واقعیت، اضافه‌ای به اندازه 15 پیدا می‌شود (سطرچپ). هر مخرج را در مقدار مربوطه خودش در این سطرها ضرب می‌کنیم. اضافی و کمبود را به طور صلیبی در مقابله فرضی ضرب می‌کنیم، حجم آنها، مقسوم را تشکیل می‌دهد. اضافی و کمبود را جمیع می‌کنیم، مقسوم علیه به دست می‌آید. تقسیم را انجام می‌دهیم، وزن شمش طلا به دست می‌آید. مخرج را در مقسوم علیه ضرب می‌کنیم، مقسوم را به آن تقسیم می‌کنیم، وزن شمش نقره به دست می‌آید. ساده کنید، کسر مورد نظر را پیدا می‌کنید».

در رساله، خود جواب داده نشده است. ما با دنبال کردن همین قاعده‌ای

$$-\frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$$

مجموع راهی که دو اسب رفته‌اند، چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} & 193n + 13 \times \frac{n(n-1)}{2} + 9vn - \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{4} = \\ & = 290n + \left(13 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \end{aligned}$$

$$= 290n + \frac{1}{6}(n^2 - n)$$

که باید برابر 6000 «لی» باشد.

برای ادامه حل مسأله، از روش «دو فرضی» استفاده می‌کنیم. اعمده به ازای $n = 15$ ، کمبود برابر است با

$$6000 - \frac{1}{2} \times 337\frac{1}{2} = 5666\frac{1}{2}$$

و به ازای $n = 16$ ، اضافه‌ای خواهیم داشت برابر با

$$140 = 6000 - 6140$$

اگر فاصله زمانی لازم برای رسیدن آن‌ها به هم را برابر x بگیریم و فرض کنیم که در جریان یک روز، سرعت آن‌ها ثابت می‌ماند، داریم:

$$x = \frac{15 \times 140 + 16 \times 327\frac{1}{2}}{140 + 338\frac{1}{2}} = \frac{15 \times 140 + 16 \times 327\frac{1}{2}}{191} = \frac{135}{191}$$

حالا دیگر بدون هیچ اشکالی، می‌توان محاسبه کرد که هر کدام از اسب‌ها،

$$\frac{135}{15} = 15 \text{ روز، } \frac{135}{191} \text{ روز، } \text{قدر راه رفته‌اند.}$$

از حل این مسأله به خوبی معلوم می‌شود که مؤلف رساله، از رابطه مر بوط به محاسبه مجموع جمله‌های تصاعد حسابی

$$\frac{(1+n)n}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

آگاهی داشته است، اگرچه در خود رساله، یادی از آن نکرده است. در رساله، این مسأله به کمک روش «فانچن» حل شده است، که ما

بعدتر با آن آشنا خواهیم شد.

روشن است که حل مسأله، منجر به حل این دستگاه می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \times \frac{49}{11 \times 16} + 3 \times \frac{15}{11 \times 16}}{\frac{49}{11 \times 16} + \frac{15}{11 \times 16}} = \frac{2 \times 49 + 3 \times 15}{49 + 15} \\ &= \frac{143}{64} = \frac{15}{64} \end{aligned}$$

بنابراین مقدار x برابر است با 2 «تسه زین» 3 «لان» و 18 «چزو».

وزن شمش تقره، خیلی ساده بددست می‌آید. برای این منظور، مقسوم 143 را بر حاصل مقسوم علیه 6 و مخرج $\frac{11}{9}$ تقسیم می‌کنیم، بددست می‌آید:

$$z = \frac{x}{11} = \frac{143}{11} = \frac{13 \times 9}{64} = \frac{117}{64} = 1\frac{53}{64}$$

بنابراین، مقدار z برابر است با 1 «تسه زین» 3 «لان» و 6 «چزو».

نویسنده رساله، برای حل مسأله، این قاعده را پیشنهاد می‌کند: «فرض می‌کنیم بعد از 15 روز به هم رسیده باشند، در این صورت، کمبودی برای 337 و نیم «لی» خواهیم داشت. ولی اگر فرض کنیم که بعد از 16 روز به هم رسیده‌اند، در این صورت، اضافه‌ای برابر 140 «لی» به دست می‌آید. اضافه و کمبود را به طور صلیبی در مقادیر فرضی ضرب کن، از جمع آن‌ها مقسوم را پیدا می‌کنی. اضافه و کمبود را با هم جمع کن، مقسوم علیه را خواهی داشت. عمل تقسیم را انجام بده، تعداد روزها را بددست می‌آوری».

راهی که است راهوار در n روز می‌رود، عبارت است از

$$\begin{aligned} & 193 + (193 + 12) + (193 + 2 \times 12) + \dots + \\ & + [193 + (n-1)(12)] = 193n + [12 + (n-1)(12)] = \\ & + (n-1)(12) = 193n + 12[1 + 2 + \dots + (n-1)] = \\ & = 193n + 12 \times \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

راهی که اسب کم زور، در همین مدت می‌رود، چنین است:

$$\begin{aligned} & 97 + \left(97 - \frac{1}{2}\right) + \left(97 - 2 \times \frac{1}{2}\right) + \dots + \left[97 - (n-1)\frac{1}{2}\right] = \\ & = 97n - \frac{1}{2}[1 + 2 + \dots + (n-1)] = 97n - \end{aligned}$$

بنابر قاعده‌ای که در رساله می‌آید، باید این جدول را به این ترتیب تبدیل کرد:

۱) عده‌های ستون را در مقدار محصول خوب در ستون سمت راست ضرب کن و باقی مانده‌ها را تشکیل بده:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 26 \\ 152 \\ 39 \end{matrix}$$

۲) دوباره باقی مانده‌ها را تشکیل بده و این عمل را تا آن‌جا ادامه بده تا چیزی از محصول خوب درستون وسط باقی نماند:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 26 \\ 24 \\ 39 \end{matrix}$$

۳) دوباره باقی مانده‌ها را تشکیل بده تا چیزی جز محصول بد، درستون چپ باقی نماند:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 78 \\ 24 \\ 39 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 39 \\ 24 \\ 39 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 195 \\ 24 \\ 39 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 48 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 171 \\ 24 \\ 39 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 147 \\ 24 \\ 39 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 123 \\ 24 \\ 39 \end{matrix}$$

$$5x + 2y = 10$$

$$2x + 5y = 8$$

۹۰. مسأله را از کتاب هشتم رساله برداشته‌ایم، برای حل آن (در رساله، مسأله حل نشده است)، مؤلف رساله، توصیه می‌کند که از قاعدة «فان‌چن» استفاده شود: «۳ خرمن خوب محصول، ۲ خرمن متوسط محصول، ۱ خرمن بد محصول را با ۳۹ «دواو» در طرف راست قرار بده. در سمت چپ آن، مقدار محصول‌ها و وزن‌آن‌ها را به همان ردیف سمت راست، بگذار و همین طور ستون بعدی را. عده‌های ستون وسط را در مقدار محصول خوب در ستون سمت راست ضرب کن و باقی مانده‌ها را تشکیل بده. دوباره باقی مانده‌ها را تشکیل بده و این عمل را تا آن‌جا ادامه بده تا چیزی از محصول خوب درستون وسط باقی نماند. دوباره باقی مانده‌ها را تشکیل بده تا چیزی جز مقدار محصول بد، درستون سمت چپ باقی نماند. عدد بالا مقسوم‌علیه و عدد پایین مقسوم است، مقسوم برای مقداری از محصول بد. برای این‌که مقسوم را برای محصول متوسط پیدا کنیم، عدد پایین ستون وسط را در مقسوم‌علیه ضرب و مقسوم محصول بد را از آن کم می‌کنیم. باقی مانده را برای مقدار محصول متوسط در نظر می‌گیریم، این می‌شود مقسوم برای محصول خوب. همه مقسوم‌ها را با مقسوم‌علیه عمل پیدا کردن مقسوم محصول خوب، عدد پایین ستون سمت راست را در مقسوم‌علیه ضرب و مقسوم‌های مربوط به محصول بد و محصول متوسط را از آن کم می‌کنیم، باقی مانده را برای مقدار محصول خوب در نظر می‌گیریم، این می‌شود مقسوم برای محصول خوب. همه مقسوم‌ها را با مقسوم‌علیه عمل می‌کنیم، مقادیر مجھول بر حسب «دواو» به دست می‌آید».

مسأله منجر به حل این دستگاه می‌شود:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

در رساله چنین، این دستگاه را به این ترتیب نشان داده است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 26 \\ 34 \\ 39 \end{matrix}$$

کن».

مساله، منجر به حل این دستگاه معادله‌ها می‌شود:

$$2x = 1 - y$$

$$2y = 1 - z$$

$$2z = 1 - x$$

که قابل تبدیل به این صورت است:

$$2x + y = 1$$

$$2y + z = 1$$

$$2z + x = 1$$

و جدول متناظر «فانچن» برای آن چنین می‌شود:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

در همان آغاز جدولی گلو لهایی (جاهای خالی) وجود دارد.
قاعده دوم: «چزن‌فو»، یعنی جمع و تفریق عددهای منفی: «اگر علامت یکی باشد، از هم کم می‌شوند، اگر علامتها یکی نباشد، جمع می‌شوند؛ اگر مثبت، بدون زوج خود باشد، منفی می‌شود، اگر منفی، بدون زوج خود باشد، مثبت می‌شود».

این قاعده را با علامتهای امروزی، می‌توان این طور نوشت:

$$(\pm a) - (\pm b) = \pm(a - b),$$

$$(\pm a) - (\mp b) = \pm(a + b),$$

$$\circ - (+b) = -b,$$

$$\circ - (-b) = +b$$

قاعده جمع، در رساله، این طور شرح داده شده است: اگر با علامتهای مختلف باشند، از هم کم می‌شوند؛ اگر با یک علامت باشند، باهم جمع می‌شوند، اگر عدد مثبت بدون زوج باشد، مثبت می‌شود؛ اگر منفی بدون زوج باشد، منفی می‌شود».

با علامت‌گذاری‌های جبری امروز، این قاعده، چنین می‌شود:

$$(\pm a) + (\mp b) = \pm(a - b),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

۴) عدد بالا (۳۶) مقسوم علیه و عدد پایین (۹۹) مقسوم است، مقسوم برای مقداری از محصول بد.

۵) برای این که مقسوم را بواز محصول متوسط به دست آوریم، عدد پایین ستون وسط را در مقسوم علیه ضرب و مقسوم محصول بد را از آن کم می‌کنیم . باقی مانده را برای مقدار محصول متوسط در نظر می‌گیریم ، این می‌شود مقسوم برای محصول متوسط .

بنابراین «مقسوم» برای y می‌شود:

$$\frac{24 \times 36 - 99}{5} = A$$

۶) برای پیدا کردن مقسوم محصول خوب، عدد پایین ستون سمت راست را در مقسوم علیه ضرب و مقسوم‌های مر بوط به محصول بد و محصول متوسط را از آن کم می‌کنیم، باقی مانده را برای مقدار محصول خوب در نظر می‌گیریم، این می‌شود مقسوم برای محصول خوب .

بنابراین «مقسوم» برای x چنین می‌شود:

$$\frac{39 \times 36 - 99 - 2A}{3} = B$$

۷) همه مقسوم‌ها را با مقسوم علیه عمل می‌کیم، مقادیر مجهول بر حسب «دواو» به دست می‌آید.

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{«دواو»}$$

$$y = \frac{A}{36} = \frac{1}{4} \quad \text{«دواو»}$$

$$x = \frac{B}{36} = \frac{1}{9} \quad \text{«دواو»}$$

۱۱) مؤلف رساله، برای حل مساله، دو قاعده ذکر می‌کند:

قاعده اول: «جدول «فانچن» را تشکیل بده و باروش «چزن‌فو» محاسبه

۱۳. در رساله، این قاعده برای حل مساله داده شده است: «جدول «فان چن» را تشکیل بده. توجه داشته باش که ۲ گاومیش و ۵ گوسفند مثبت، ۱۳ خوک منفی و باقی مانده «تسیان»ها مثبت است. همین طور بعد، ۳ گاومیش مثبت، ۹ گوسفند منفی و ۳ خوک مثبت است. بالاخره، ۵ گاومیش منفی، ۶ گوسفند مثبت، ۸ خوک مثبت و کمبود «تسیان»ها منفی است. بنابر قاعدة «چزن فو» محاسبه کن.».

اگر قیمت گاومیش، گوسفند و خوک را به ترتیب x , y و z بگیریم، حل مساله، منجر به حل دستگاه زیر می شود:

$$2x + 5y = 13z + 1000$$

$$3x + 2z = 9y$$

$$6y + 8z = 5x - 600$$

۱۴. در رساله، برای حل مساله، این راهنمایی داده شده است: «جدول «فان چن» را تشکیل بده و با روش «چزن فو» محاسبه کن. راهنمایی دیگری برای بحث و بررسی مساله، داده نشده است.

به سادگی دیده می شود که این مساله، منجر به دستگاهی خطی از پنج معادله با شش مجهول می شود. این دستگاه را می توان چنین نوشت:

$$2x + y = m$$

$$3y + z = m$$

$$4z + u = m$$

$$5u + v = m$$

$$6u + x = m$$

مجهولها عبارتند از x , y , z , u , v , m . ضمناً جواب m را باید طوری گرفت که برای مقادیر درست و مثبت x , y , z , u , v ، حداقل ممکن باشد.

ماتریس اصلی دستگاه مفروض، چنین است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\pm a) + (\pm b) &= \pm(a+b), \\ 0 + (+b) &= +b, \\ 0 + (-b) &= -b \end{aligned}$$

«چزن فو» از دو واژه ترکیب شده است: «چزن» یعنی قابل جمع، و «فو» یعنی قابل تفریق، این گونه عدها را بارنگاهای مختلف نشان می دادند، «چزن» - قرمز و «فو» - سیاه.

با به کار بردن قاعدة «فان چن» در مورد این مساله، باید از ماتریس مفروض به طرف ماتریسی شامل صفرها، حرکت کرد. در این مساله، عدهای منفی هم ظاهر می شود:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

۱۵. در رساله، این قاعده داده شده است: «جدول «فان چن» را تشکیل بده. توجه کن که چیزهایی که وزن آنها به یک «دان» اختلاف می شود (وزن خرمنهای مفروض)، منفی است. بعد با روش «چزن فو» محاسبه کن.».

مساله منجر به حل دستگاه می شود:

$$2x = 1 + y$$

$$3y = 1 + z$$

$$4z = 1 + x$$

که به این صورت درمی آید:

$$2x - y = 1$$

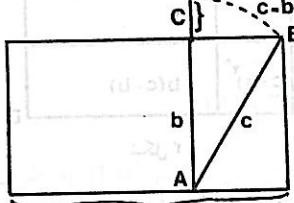
$$3y - z = 1$$

$$4z - x = 1$$

و جدول متناظر آن چنین است:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

در رساله، برای حل مساله، این قاعده داده شده است: «نصف ضلع بر که را در خودش ضرب کن، قسمت بالای آب ۱ «چی» را در خودش ضرب کن، از اولی کم کن، باقی مانده را بردو برابر قسمت روی آب نی تقسیم کن، عمق آب را به دست آور. قسمت بالای آب را به آن اضافه کن، طول نی پیدا می شود».



رساله، خود جواب را نداده است.
ولی با این استدلال، می توان جواب را به سادگی به دست آورد.
طول بر که را $2a$ و ارتفاع نی را b و عمق بر که را b می گیریم (شکل ۱) شکل ۱
جواب باید برای b و c پیدا شود. با استفاده از قاعده چینی، می توان رابطه های زیر را، برای این دو مجهول نوشت:

$$b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)}$$

$$c = b + (c-b) = \frac{a^2 + (c-b)^2}{2(c-b)}$$

در رساله، نتیجه قاعده داده شده است، بنابراین به سختی می توان فهمید که، یاضی دانان چنین باستان، از چه راهی رابطه های اخیر را به دست می آورند. با وجود این، با استدلال های عادی می توان به راحتی، به این رابطه ها رسید. با شروع از شرط های مساله و به کار بردن قاعده «هو او هو» یعنی قضیه فیثاغورث، به این دستگاه می دسیم:

$$b = c - k$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

که در آن، برای سادگی کار، قسمت بالای آب را که برای ما معلوم است، یعنی $c - b$ را، به k نشان داده ایم. با حل این دستگاه به دست می آید:

$$b = \frac{a^2 - k^2}{2k}$$

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} \quad (k = c - b)$$

«لیوهوای»، ضمن بحث درباره «ریاضیات در نه کتاب»، به طور قانع کننده ای روشن می کند که چینی ها قاعده ای به دست آورده بودند که می شد از آن، دو رابطه اخیر را نتیجه گرفت.

و بعد از تبدیل

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 721 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 76m & m & m & m & m \end{array} \right)$$

واز آن جا

$$v = \frac{76}{721}m, \quad u = \frac{1}{721} \times \frac{721m - 76m}{5} = \frac{129}{721}m,$$

$$z = \frac{148}{721}m, \quad y = \frac{191}{721}m, \quad x = \frac{265}{721}m$$

و بنابراین باید m را برابر با 721 گرفت.

۱۵. به سختی می توان زمانی را پیدا کرد که چینی ها، برای تختین بار، از قانون مر بوط به ضلع های مثلث قائم الزاویه، یعنی قضیه فیثاغورث، استفاده کرده اند. ولی آن چه که روشن است این است که آنها از زمان هایی بسیار دور این قضیه را می شناخته اند. آن طور که سندها گواهی می دهند. چینی ها در حدود ۳۴۰۰ سال پیش از میلاد، از قضیه فیثاغورث، در مورد مثلثی که ضلع های آن $4, 3, 5$ باشد، آنگاهی داشتند.

در «ریاضیات در نه کتاب»، از قضیه فیثاغورث، بنام قاعده «هو او هو» نام برد شده است. طبق این قاعده می توان با معلوم بودن وتر یا کل ضلع مجاور به زاویه قائم، ضلع دیگر مثلث قائم الزاویه را به دست آورد، همچنین می توان وتر را، با معلوم بودن دو ضلع مجاور به زاویه قائم، محاسبه کرد.

قاعده «هو او هو» این طور بیان می شود: «هر کدام از ضلع های مجاور به زاویه $\angle A$ در خودش ضرب کن، جمع کن، از این مجموع جذر بگیر، حاصل برابر وتر می شود. به همین ترتیب، ضلع قائم مجاور به زاویه $\angle C$ را در خودش ضرب کن، آنرا از ضرب وتر در خودش کم کن، از باقی مانده جذر بگیر، ضلع افقی مجاور به زاویه $\angle B$ به دست می آید. همچنین ضلع افقی مجاور به زاویه $\angle B$ را در خودش ضرب کن، از حاصل ضرب وتر در خودش کم کن، از باقی مانده جذر بگیر، ضلع قائم مجاور به زاویه $\angle A$ به دست می آید».

قائم الزاویه هستند. ضمناً «هو او» به معنای ضلع های مجاور به زاویه قائم از مثلث و معمولاً بزرگتر، اطلاق می شده است. معنای تحت افظی «هو او» - قلاب و «هو» - دندیه رابط است.

از قاعده «هو او هو» در تمام مساله نه کتاب رساله «ریاضیات در نه کتاب» استفاده شده است و به همین مناسبت خود نه کتاب را «هو او هو» می نامند.

۴) «مقسوم» را پیدا می کنیم:

$$10 \times 21 = 10 \times 29$$

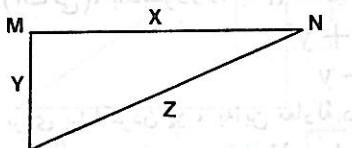
۵) «درجت کج»، این مقدار راه رفته است:

$$\frac{10 \times 29}{20} = \frac{29}{2} = 14\frac{1}{2}$$

۶) به طرف شرق، این مقدار راه رفته است:

$$\frac{10 \times 21}{20} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$$

راه حل عادی این مساله، چنین است: x را راهی می گیریم که B به طرف



شکل ۲

شرق رفته است، y راهی که A به -

طرف جنوب طی کرده است (ضمانتاً بنابر

شرط مساله می دانیم $y = 10$)، و بالاخره

z را مقدار راه «کج» A به طرف شمال

شرقي می گيريم ، که همان وتر مثلث

قائم الزاويه می شود (شکل ۳). در اين

صورت داريم؛

$$x^2 + 10^2 = z^2$$

$$\frac{x}{z+10} = \frac{3}{7}$$

از آن جا

$$z = \frac{7}{3}x - 10$$

سپس

$$x^2 + 10^2 = \left(\frac{7}{3}x - 10\right)^2$$

یا

$$x^2 + 100 = \frac{49}{9}x^2 - \frac{2 \times 7 \times 10}{3}x + 100$$

$$40x^2 - 3 \times 2 \times 7 \times 10x = 0$$

$$2x^2 - 21x = 0$$

$$x(2x - 21) = 0 \quad , \quad x = 10\frac{1}{2}$$

«بو»

او معتقد است که این رابطه ها را، که به طور شفاهی داده شده است، بر اساس تصورهای هندسی به دست آورده اند. ظاهرآ، دانشمندان چن باستان، در این مورد از شکلی شبیه شکل ۲ استفاده کرده اند.

قبل از همه، بنابر قاعدة «هو او هو»

$$\text{داریم: } a^2 = c^2 - b^2$$

سپس از روی شکل معلوم است

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)^2 + 2b(c-b)$$

و از آنجا

$$b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)}$$

۱۶. ریاضی دان چین باستان، برای حل این مساله، قاعدة زیر را در رسالت خود ذکر می کند: «۷ را در خودش ضرب کن، ۳ را راه در خودش ضرب کن، باهم جمع و بعد نصف کن. این را به عنوان معیار A درجهت کج بگیر. از ۷ که در خودش ضرب کرده ای، معیار حرکت درجهت کج را کم کن، باقی مانده همان معیار حرکت به طرف جنوب می شود، ۳ را در ۷ ضرب کن، این معیار حرکت B به طرف شرق است. ۱۰ «بو» حرکت به طرف جنوب را در معیار حرکت A درجهت کج ضرب کن، ۱۰ «بو» را در معیار حرکت B به طرف شرق ضرب کن، هر کدام از اینها مقسوم است. مقسوم را با معیار حرکت به طرف جنوب در نظر بگیر و مقادیر را بدست آور.»

با استفاده از این قاعدة، مساله به این ترتیب حل می شود:

۱) ابتدا معیار حرکت A «درجت کج» را به دست می آوریم:

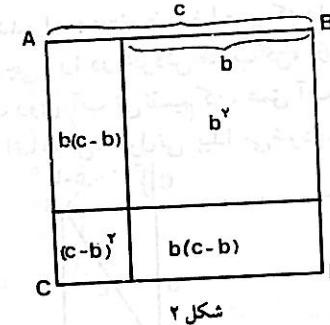
$$\frac{7^2 + 3^2}{2} = 29$$

۲) معیار حرکت A به طرف جنوب را به دست می آوریم:

$$7^2 - \frac{7^2 + 3^2}{2} = 20$$

۳) معیار حرکت به طرف شرق، چنین می شود:

$$7 \times 3 = 21$$



شکل ۲

حال \angle را پیدا می کنیم:

$$\text{«ب»} \frac{1}{2} \times \frac{21}{2} - 10 = \frac{49}{2} - 10 = \frac{29}{2}$$

۱۷. برای این مساله هم، مثل همیشه، قاعده عمل داده شده است: «۱» چزان را در خودش ضرب کن، می شود «شی»، نصف اضافی را در خودش ضرب کن، دو برابر کن و از «شی» کم کن، نصف باقی مانده را بردار، از آن جذر بگیر، از آن چه که بدست آمد. نصف اضافی را کم کن، این عرض درمی شود. و اگر نصف اضافی را با آن جمع کنی، ارتفاع در پیدا می شود».

اگر عرض در را x و طول آن را y بگیریم و فرض کنیم $y - x = m$ (اضافی)، بعد قطر در را به d نشان دهیم، مساله منجر به حل دستگاه زیر می شود:

$$d^2 = x^2 + y^2$$

$$m = x - y$$

برای پیدا کردن x ، به این معادله درجه دوم می رسمیم:

$$2x^2 + 2mx + m^2 - d^2 = 0$$

که با حل آن بدست می آید:

$$x_{1,2} = -\frac{m}{2} \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{m^2 - d^2}{2}} = \\ = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{2d^2 - m^2}{4}} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}}$$

از آنجا که داشمندان چینی به جواب های منفی توجهی نداشتند، برای عرض در، باید نتیجه گرفت:

$$x = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} - \frac{m}{2}$$

و این همان چیزی است که در قاعده رساله، برای تعیین مقدار x آمده است. روش است که با در دست داشتن x ، می توان y را از رابطه زیر پیدا کرد:

$$y = x + m$$

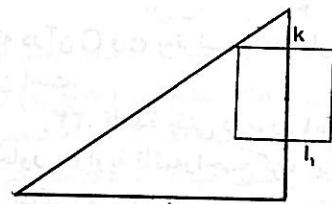
ولی در رساله، برای پیدا کردن مقدار y ، این رابطه داده شده است:

$$y = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} + \frac{m}{2}$$

که ریشه مثبت این معادله است:

$$2y^2 - 4my + m^2 - d^2 = 0$$

۱۸. قاعده چینی برای حل این مساله، می گوید: «مقدار «ب»، فاصله تاروازه شمالی را در دو برابر مقدار «ب» که به غرب می رویم، ضرب کن، این می شود مقسوم. با مقدار «ب» که از دروازه جنوبی رفته ایم، جمع کن، این هم مقسوم علیه مربوطه. جذر بگیر، ضلع مربع را خواهی داشت». این مساله را می توان به کمک شکل روش نمود (شکل ۴). با استفاده از



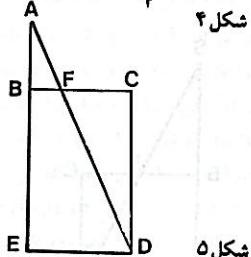
علامت گذاری های شکل، می توان مساله را به حل معادله درجه دوم زیر منجر کرد:

$$x^2 + (k+l)x - 2kl = 0$$

۱۹. باید توجه داشت که

۱۰۰ «تسون» = ۱۰ «چی» = ۱ «چزان» ریاضی دانان چینی، به احتمال زیاد، برای تنظیم قاعده لازم برای حل مساله، از مثلث های متشابه FCD و ABF (شکل ۵)، استفاده کرده اند.

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BF} &= \frac{x}{FC}; x = FC \cdot \frac{AB}{BF}, x = \\ &\frac{AB(BC-BF)}{BF} \end{aligned}$$



شکل ۵

قاعده ای که در رساله داده شده است، بر مبنای همین رابطه آخر است:

«از ۵ «چی»، قطر چاه، ۶ «تسون» را، که از قطر جدا شده است، کم کن. باقی مانده را در ۵ «چی»، ارتفاع دیرک، ضرب کن، این مقسوم است. ۶ «تسون»، قسمت جدا شده قطر، مقسوم علیه است. مقسوم علیه را با هم در نظر بگیر، مقدار مجهول بر حسب «تسون» به دست می آید.

۲۰. در رساله، برای حل این مساله، قاعده داده شده است: «محیط

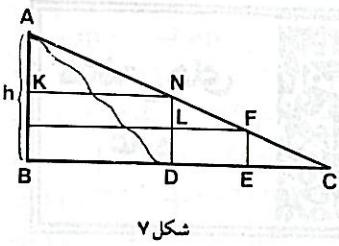
قاعده را در خودش ضرب کن، بعد در ارتفاع ضرب کن، بر ۳۶ تقسیم کن».

به این ترتیب، چینی ها، حجم مخروط را از این رابطه بدست می آورده اند:

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{c}{4\pi}$$

که در آن، c عبارت است از محیط قاعده مخروط. ضمناً چینی ها، عدد π را برابر ۳ می گرفته اند.

۲۱. چینی ها این مساله را با این قاعده حل می کردند: «محیط قاعده -



$$\frac{AK}{KN} = \frac{NL}{LF}$$

ویا

$$\frac{x - ND}{BD} = \frac{ND - FE}{DE}$$

وبنا براین

$$x = ND + \frac{(ND - FE)BD}{DE}$$

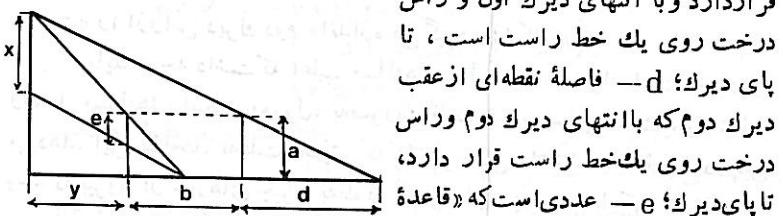
شکل ۷

همین رابطه است که در رساله چینی «ریاضیات درنه کتاب»، به عنوان حل مساله داده شده است: «از ارتفاع ستون، ارتفاع سطح دید (۷ «چی») را کم کن، تفاضل را در ۵۳ «لی» ضرب کن، این می شود مقسوم. فاصله شخص تاستون، یعنی ۳ «لی» مقسوم علیه است. مقسوم و مقسوم علیه را با هم در نظر بگیر. آنچه را که بدست آوردي، با ارتفاع ستون جمع کن، این می شود ارتفاع کوه». ۲۵ «لیوهوئه»، ریاضی دان سدا سوم چینی و مؤلف آثار زیادی در ریاضیات، کارهای بسیاری در زمینه پیش برده هندسه کاربردی دارد. تمامی رساله او به نام «ریاضیات جزیره دریایی»، به کار برده عملی هندسه اختصاص دارد. او این رساله را ابتدا به توان فصل دهم تفسیر خود بر کتاب قدیمی «ریاضیات در نه کتاب» نوشت، ولی بعداً به صورت کتاب مستقلی عرضه شد. خود نام رساله نشان می دهد که در آن، مالکهای گوناگونی در باره تعیین فاصله تاشیاء غیر قابل دسترسی که در جزیره قرار گرفته اند و ناظرهم در خارج آن جزیره واقع است، حل شده است. علاوه بر آن، در این رساله، مساله هایی هم درباره محاسبه ارتفاع های غیر قابل دسترسی داده شده است، که ناظر در همان جزیره وجود دارد.

«لیوهوئه» مساله را با قاعدهای حل می کند که می توان آن را با دورابطه زیر بیان کرد:

$$x = \frac{b \cdot e}{d+c} + e; \quad y = \frac{b \cdot c}{d-c}$$

که در آن x — ارتفاع درخت کاج؛ y — فاصله دیرک اول از تپه، a — ارتفاع هر دیرک؛ b — فاصله بین دیرکها؛ c — فاصله نقطه ای که عقب دیرک قرار دارد و با انتهای دیرک اول و راس درخت روی یک خط راست است، تا پای دیرک؛ d — فاصله نقطه ای از عقب دیرک دوم که با انتهای دیرک دوم و راس درخت روی یک خط راست قرار دارد، تا پای دیرک؛ e — عددی است که «قاعده



شکل ۸

های بالا و پائین را در هم ضرب کن، هر کدام را در خودش ضرب کن، همه این ها را جمع کن و ضرب کن در ارتفاع، بر ۳۶ تقسیم کن».

بنابراین، حجم مخروط ناقص، در چین باستان، از روی این رابطه، پیدا می شد:

$$V = \frac{(C \cdot c + C^2 + c^2)h}{36}$$

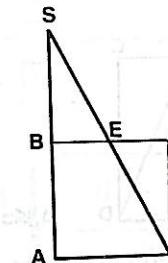
که اگر π را برابر ۳ بگیریم، می توان آن را به این صورت نوشت:

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{C \cdot c + C^2 + c^2}{4\pi}$$

که در آن C و c به ترتیب قاعده های پایین و بالای مخروط ناقص و ارتفاع آن است.

۳۴. قاعده چینی در مورد این مساله چنین است: «صلع های افقی و قائم مجاور بذواجیه قائمه را جمع کن، این می شود مقسوم علیه. همین ضلع هارادرهم ضرب کن، می شود مقسوم. با عمل روی مقسوم و مقسوم علیه، ضلع مربع بر حسب «بو» بدست می آید».

۳۵. مساله را می توان به کمک شکل روشن کرد (شکل ۶). دانشمندان چینی، ظاهراً برای حل این مساله، از تشابه دو مثلث SAD و SAD استفاده کرده اند، که از آن ها می توان نتیجه گرفت:



شکل ۶

$$\frac{AS}{CD} = \frac{AD}{EC}$$

$$x = AS = \frac{AD \cdot DC}{EC}$$

ویا

که با قراردادن مقادیر مفروض، بدست می آید:

$$1 \text{ «چزان»} \times 1 \text{ «چزان»} \\ x = \frac{3 \text{ «تسون»}}{3 \text{ «تسون»}}$$

در رساله باستانی چین، این قاعده برای حل مساله داده شده است: «۱ «چزان» را در خودش ضرب کن، این مقسوم است. ۳ «تسون» مقسوم علیه است، مقسوم و مقسوم علیه را با هم در نظر بگیر».

۳۶. ظاهرآ چینی ها، برای حل این مساله، از تشابه دو مثلث قائم الزاوية NLF و AKN استفاده کرده اند (شکل ۷)، که از آن جا داریم:

$$\underbrace{aa \dots a}_m \times \underbrace{99 \dots 9}_n = (10^{m-1} + 10^{m-2} + \dots + 1)a \times (10^n - 1) = (10^{m+n-1} + 10^{m+n-2} + \dots + 10^m)a + (10^{m-1} + 10^{m-2} + \dots + 10^n)a - (10^{m-1} + 10^{m-2} + \dots + 10^n)a - (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1)a = (10^{m+n-1} + 10^{m+n-2} + \dots + 10^m)a - (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1)a$$

مسئله ۳ . دو عدد n رقمی $a_n \dots a_1 a_0$ و $b_n \dots b_1 b_0$ را طوری پیدا کنید که حاصل ضرب آنها برابر با حاصل ضرب مطلوب همان دو عدد باشد (مقولوب یک عدد، یعنی همان عدد به شرطی که به زدیف عکس رقم‌ها یعنی نوشته

$$206444 \times 38211 = 11203 \times 64604$$

حل . روشی است که باید داشته باشیم :

$$a_1 \cdot b_1 = a_n \cdot b_n$$

از حستجوی عدهای دو رقمی آغاز می‌کنیم. هر عدد طبیعی را، که دارای دو زوج عامل یک رقمی باشد، می‌توان به عنوان سرچشمه رقم‌های یکان و دهگان در نظر گرفت.

مثال: $2 \times 2 = 4$ ، یک زوج عدد دور قمی مورد نظر به مامی دهد: ۴۲ و داریم:

$$42 \times 12 = 21 \times 24$$

عدد $3 \times 1 = 6$ دو زوج عدد دو رقمی مورد نظر، یعنی ۶۲ و ۱۳ یا ۶۳ و ۱۲ را به ما می‌دهد:

$$62 \times 13 = 31 \times 26 ; 63 \times 12 = 21 \times 36$$

و یا از $3 \times 3 = 9$ به دست می آید:

$$93 \times 13 = 31 \times 39$$

روی هم ۱۴ زوج از این عده‌های دو رقمی (با خاصیت مورد نظر) به دست می‌آید که می‌توانند به سادگی همه آن‌ها را پیدا کنند.

حالا به جستجوی عددهای سه رقمی می پردازیم. با انتخاب هرزو جاز



مسئله ۹. ثابت کنید که اگر a رقمی دلخواه و مخالف صفر باشد، برای m و n صحیح و مثبت، همیشه داریم:

$$\underbrace{99 \dots 9}_{\text{ن}} \times \overbrace{aa \dots a}^{\text{ن}} = \overbrace{aa \dots a}^{\text{ن}} \times \underbrace{99 \dots 9}_{\text{ن}}$$

$$999 \times 77 = 777 \times 99$$

حل $m > n$ می‌گیریم (این فرض هیچ لطمehای به کلی بودن مساله نمی‌زند). داریم:

$$\underbrace{99\ldots 9}_{\text{رقم } m} \times \underbrace{aa\ldots a}_{\text{رقم } n} = (10^m - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1)a = (10^{m+n-1} + 10^{m+n-2} + \dots + 10^m)a - (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1)a$$

از طرف دیگر :

از طرف دیگر :

درخت» را از راس دیرک دوم «اندازه می کیرد» (شکل ۸). باید توجه داشت که اغلب مساله های «لیوهوئه» دشوار است. خود او، راه حل مساله ها را، طبق معمول، به صورت قاعده، و بر اساس مثبت های مشابهی دهد. این مساله ها، به علت اهمیتی که از نظر عملی داشتند، بعدها چه در چین چه در بیرون از مرزهای چین، به طور گسترده ای شهرت پیدا کردند.

$$7 = 3 \quad \text{که پنج زوج عدد چهار رقمی به ما می‌دهد، از نوع} \\ 4522 \times 1212 = 2122 \times 2304$$

همچنین، برای پیدا کردن زوج عددهای پنج رقمی، می‌توان با همین شیوه عمل کرد و جواب‌های غیرمنفی و یک رقمی یک دستگاه سه معادله شش مجھولی را به دست آورد.

بازهم چند قانون:

۱. اگریک زوج از عددهای سه رقمی را که دارای خاصیت موردنبحث ماستند؛ در تظریگیریم و رقم وسط هر کدام از آنها را چندبار تکرار کنیم، باز هم بهیک زوج عدد با همان خاصیت می‌رسیم. مثلاً، اگر زوج عدد ۴۶۲ را در تظریگیریم، داریم:

$$46662 \times 13332 = 23331 \times 26664$$

۲. اگر دریک زوج عدد دو رقمی یا سه رقمی، هر عدد را دو یا سه بار (و احتیالاً بیشتر) تکرار کنیم، بازهم به زوجی با خاصیت موردنظر می‌رسیم. مثلاً از $21 \times 12 = 212 \times 12 = 42 \times 12$ به دست می‌آید:

$$42442 \times 12121 = 212121 \times 244424$$

$$\text{و از } 846 \times 846 + 423 = 324 \times 648 + 423 = 324 \times 846846$$

$$648648 \times 423 = 324 \times 324 \times 846846$$

۳. اگرین Π رقم اول و Π رقم آخریک زوج عدد 2Π رقمی با خاصیت موردنبحث، چند صفر قراردهیم، تساوی بهم نمی‌خورد. مثلاً از تساوی

$$42442 \times 12121 = 212121 \times 244424$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$42400242 \times 12100212 = 21200121 \times 24200424$$

۹۵

عددهای دو رقمی - که در بالا به دست آوردم - می‌توان عددهای متناظر سه رقمی را پیدا کرد.

مثلاً عددهای دو رقمی ۴۲ و ۱۲ در نظرمی‌گیریم و عددهای سه رقمی نظیر را $4x^2$ و $1y^2$ می‌گیریم. داریم:

$$\begin{array}{r} 4x^2 \\ 1y^2 \\ \hline 8(2x)^2 \\ (4y)(xy)(2y) \\ 4x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2y \\ 2x^4 \\ \hline 8(4y)^2 \\ (2x)(xy)x \\ 4(2y)^2 \end{array}$$

اگر به ستون دوم در این دو ضرب توجه کنیم، باید داشته باشیم:

$$2x + 2y = 4y + x$$

که از آن جا به دست می‌آید: $x = 2y$. برای x و y ، این امکان‌ها وجود دارد:

$$\begin{array}{r} x \\ y \\ \hline 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

از یک زوج عددهای دو رقمی، پنج زوج عددهای سه رقمی به دست می‌آید، مثل

$$402 \times 102 = 201 \times 204 ;$$

$$422 \times 112 = 211 \times 224 ;$$

$$442 \times 122 = 221 \times 244 ;$$

وغیره.

به همین ترتیب، می‌توان از هر زوج عدد دو رقمی، زوج‌های بسیاری برای عددهای چهار رقمی - با خاصیت موردنظر - به دست آورد. همان دو عدد ۴۲ و ۱۲ را در نظرمی‌گیریم. حاصل ضرب‌های

$$4xy^2 \times 1172 + 27u1 \times 2y^2x^4$$

ما را به دو معادله چهار مجھولی زیر می‌رساند:

$$\begin{cases} 2y + 2v = 4u + x \\ 2x + vy + 2u = 4v + xu + y \end{cases}$$

البته x, y, u, v عددهایی غیرمنفی و یک رقمی هستند، که پیدا کردن آنها دشوار نیست. مثلاً به ازای $x = 0$ و $y = 3$ ، به دست می‌آید:

واسطه عددی a_2 و واسطه هندسی g_2 را پیدا می‌کنیم و غیره . حد مشترک a_n و g_n (که وجود آن ثابت می‌شود) ، واسطه عددی - هندسی دو عدد a و b نامیده می‌شود. این نام را کارل گوس انتخاب کرد.
اگر همه عددهای x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) مثبت باشند، می‌توان برای هر $\alpha \neq 0$ ، واسطه نمایی را پیدا کرد.

$$C_\alpha = C_\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

به جزو واسطه عددی - هندسی ، چهار واسطه معروف دیگر را می‌توان به عنوان حالت‌های خاصی از واسطه نهایی به دست آورد:

$$C_{-1} = h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}};$$

$$C_1 = a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n};$$

$$C_2 = q = \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

همچنین برای واسطه هندسی داریم :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = C_\alpha$$

به تحویل که می‌توان در نظر گرفت:

$$C_\alpha = g$$

اثبات حکم اخیر دشوار نیست. مثلا ، با توجه به قاعده هوپیتال داریم:

$$\begin{aligned} \ln C_\alpha &= \frac{\ln \left(\frac{a_1^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)}{\alpha} = \\ &= \frac{\frac{a_1^\alpha \ln a_1 + a_2^\alpha \ln a_2 + \dots + a_n^\alpha \ln a_n}{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}}{\alpha} = \\ &= \ln \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \end{aligned}$$

همین واسطه‌ها را ، از رابطه زیر هم می‌توان به دست آورد:

$$s = f^{-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right]$$

که در آن $(\eta)^{-1} f$ ، تابع معکوس f ، به ازای انتخاب متضطرر (ξ) ،

تلاشی برای تنظیم فرهنگ ریاضی (۳)

واسطه - مقدار متوسط

واسطه یا مقدار متوسط به ویژگی عددی گروهی از عددها و یا تابع‌ها گویند.

I. تعریف‌ها

واسطه عددهای حقیقی a_1, a_2, \dots, a_n به هر عددی گفته می‌شود که بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آن‌ها قرار گرفته باشد (که البته می‌تواند برابر با یکی از آن عددها هم باشد).

اگر عددهای a_1, a_2, \dots, a_n با هم برابر نباشند ، تعداد واسطه‌ها برای آن‌ها ، بی‌نهایت می‌شود . بین این بی‌نهایت واسطه ، اغلب آن‌ها بی شهرت پیدا کرده‌اند که به کمک قاعده و رابطه‌ای ، از خود عددهای a_1, a_2, \dots, a_n به دست آمده باشند. مهم‌ترین واسطه‌ها ، این‌ها هستند:

$$\text{واسطه عددی : } a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\text{واسطه هندسی : } g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

$$\text{واسطه توافقی : } h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\text{واسطه مربعی : } q = \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

واسطه عددی - هندسی : برای دو عدد مثبت a و b ، واسطه عددی a_1 و واسطه هندسی g_1 را تشکیل می‌دهیم؛ بعد برای دو عدد a_1 و a_2 ، دوباره

d_α هم یکنوا و صعودی است، یعنی با شرط $\alpha < \beta$ ، داریم: $d_\alpha \leq d_\beta$.
ضمناً حالت تساوی، وقتی و تنها وقتی برقار است که داشته باشیم:
 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

رابطه بین d_α و c_α ، به آن چه گفتم، ختم نمی شود به طور کلی باشرط
 $\alpha \leq \beta$ داریم: $d_\alpha \leq c_{\alpha-1} < \alpha < 1$ داریم: $c_\alpha \leq d_\alpha$ و با شرط $1 > \alpha \geq 0$ داریم: $c_\alpha \leq d_\alpha$. ضمناً علامت های تساوی وقتی برقار است که $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ یا $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ باشد.

از این ویژگی نتیجه می شود که همیشه می توان $1 \leq e^x$ را پیدا کرد به نحوی که $d_\beta = c_\beta$ باشد. مثلاً برای $x = 2$ داریم: $d_2 = c_2$ (در حالت کلی، مقدارع بستگی به a_1, a_2, \dots, a_n دارد).

اگر حالت خاص $x = 1$ را در نظر بگیریم و این علامت ها را پذیریم:
 $c(\alpha) = c_\alpha(a, b)$ ، $d(\alpha) = d_\alpha(a, b)$

می توان نتیجه گرفت:

$$d(-1) \leq c(-2) \leq c(-1) = d(0) \leq d\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= c(0) \leq d(1) = c(1) \leq c(2) \leq d(2) \leq d(3)$$

که از آن جا نتیجه می شود:

$$\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} \leq \sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}} \leq \frac{2}{a+1} \leq$$

$$\leq \sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b} \leq \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$$

همچنین داریم:

$$d(\alpha+1) + d(1-\alpha) = a+b,$$

$$d(\alpha+1) \cdot d(-\alpha) = ab,$$

$$c(\alpha) \cdot c(-\alpha) = ab$$

این رابطه هم، گروه دیگری از واسطه ها را می دهد:

$$f_{\alpha, \beta} = \left(\frac{a^\alpha + a_1^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{a_1^\beta + a_2^\beta + \dots + a_n^\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

که در آن $\alpha \neq \beta$ و a_1, a_2, \dots, a_n عددهایی مثبت اند. ثابت می شود که

می باشد. مثلاً واسطه عددی به ازای $\xi = f(\xi)$ ؛ واسطه هندسی به ازای $\xi = \log(f(\xi))$ ؛ واسطه توافقی به ازای $\xi = \frac{1}{f(\xi)}$ و واسطه مربعی به ازای $\xi = f(\xi)$ به دست می آید.

به موازات واسطه نمایی، واسطه سنجشی را هم در نظر می گیرند:

$$S_\alpha = \left(\frac{p_1 x_1^\alpha + p_2 x_2^\alpha + \dots + p_n x_n^\alpha}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

و در حالت خاص، به ازای $\alpha = 1$ ، به این صورت درمی آید:

$$A = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

که به ازای $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ ، به واسطه نمایی معمولی تبدیل می شود.

II. ویژگی ها

ثابت می کنند که با شرط $\alpha < \beta$ داریم: $C_\alpha \leq C_\beta$. ضمناً حالت تساوی، تنها وقتی برقار است که داشته باشیم:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

به این ترتیب C_α یکنوا (مونوتون) و صعودی است و در حالت خاص داریم:

$$h \leq g \leq a \leq p$$

حالا به گروهی دیگر از مقادیر واسطه می بردازیم که به جای خوداهمیت زیادی دارند. این گروه با رابطه زیر مشخص می شوند:

$$d_\alpha = \frac{a^\alpha + a_1^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{a_1^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1} + \dots + a_n^{\alpha-1}}$$

که در آن، a_1, a_2, \dots, a_n عددهایی مثبت و α عددی حقیقی و دلخواه است. به سادگی معلوم می شود:

$$d_0 = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$d_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

یعنی $d_0 = C_0$ و $d_1 = C_1 = C_{-1}$.

$$t = \frac{2}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}}$$

مقدار زمانی را نشان می دهد که دو تراکتور با هم می توانند تمامی مزرعه را شخم کنند.

دو وزنه به وزن های m_1 و m_2 را با نخی که قابلیت کشش ندارد، به هم وصل کرده واز روی قرقه ثابتی گذرانده ایم. نیروی کشش نخ، مثل حالتی است که به دوانتهای آن، وزن هایی برابر با واسطه توافقی m_1 و m_2 آویزان کرده باشیم.

جداری از دو ورقه مجاور هم درست شده است. این دو ورقه از دو جنس مختلف، ولی بایک ضخامت انتخاب شده اند. اگر ضریب هدايت گرما برای این دو ورقه به ترتیب برابر k_1 و k_2 باشد، ضریب هدايت گرما برای تمامی جدار چنین خواهد بود:

$$\frac{2}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

مقدار متوسط در آمار، به ویژگی های نمونه ای و مشترکی گفته می شود که از لحاظ کیفی همگون و از لحاظ کمی باهم اختلاف داشته باشند. مارکس می نویسد: «در هر رشته صنعتی، یک کارگر منفرد، پر یا پاول، کم یا بیش از یک کارگر متوسط دور می شوند. این انحراف های فردی، که در ریاضیات خطای نامیده می شوند، یکدیگر را خنثی می کنند و از بین می برند. به این علت، ما همیشه تعداد عمدۀ کارگران را در نظر می گیریم».

مقدار متوسط به خصوص در اقتصاد اهمیت ویژه ای دارند: در تعیین ارزش، مقدار متوسط کار را در نظر می گیرند؛ در تجزیه و تحلیل سود، متوسط سرمایه گذاری اهمیت دارد؛ در تعیین استهلاک، مدت متوسط کار ایزارها را به حساب می آورند وغیره.

همان طور که گفتیم، مقدار متوسط (یا واسطه ها)، انواع مختلف دارند. در حالتی که نوسان های مقادیر انفرادی، زیاد نباشد، نوع انتخاب مقدار متوسط اهمیت جدی پیدا نمی کند، ولی در حالت نوسان های بزرگ، خود طبیعت موضوع، نوع انتخاب مقدار متوسط را دیگر می کند. مثلاً، برای محاسبۀ مقدار متوسط بهره دهی کار، باید آن را به نسبت مستقیم با مقدار محصول تولیدی، و به نسبت معکوس با زمان کار لازم برای این تولید، در

گروه های C_α و D_α ، حالت های خاصی از μ و f_α هستند. همچنین می توان ثابت کرد که $f_{\alpha, \beta}$ ، هم نسبت به α (با ثابت بودن β) و هم نسبت به β (با ثابت بودن α) یکنوا می باشد.

III. کاربردها

واسطه عددی و واسطه مربعی بیش از همه در نظریه احتمال و آمار ریاضی به کار می روند. واسطه سنجشی برای به ریاضی درآوردن نتیجه هایی که از مشاهده و آزمایش به دست می آید، اهمیت دارد، به خصوص اگر مشاهده ها و آزمایش های مختلف، منجر به دقت های متفاوت (وزن های متفاوت) بشود. واسطه عددی - هندسی در نظریه تابع های پیضوی (الپاتیک) بسیار اهمیت دارد. ما غالباً از مفهوم واسطه و مقدار متوسط، در مواردی مثل «متوسط نمرة درسی»، «متوسط درجه حرارت»، «متوسط حقوق» وغیره صحبت می کنیم. واسطه ها، در ریاضیات، فیزیک و سایر رشته های دانش، تا تازه ترین آن ها، کاربرد دارند.

در اینجا، ابتدا به طور نمونه، از چند کاربرد ساده واسطه توافقی یاد می کنیم و سپس به بحث تفصیلی در زمینه کاربرد مقادیر متوسط در اقتصاد و تولید اقتصادی می پردازیم.

اگر از نقطۀ برخورد قطرهای ذوزنقه ای، خطی به موازات دو قاعدة a و b آن رسم کنیم، پاره خط MN از آن، که محدود به وساق است، در این رابطه صدق می کند:

$$|MN| = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

اگر اتومبیلی فاصلۀ از A تا B را با سرعت ثابت v_1 و فاصلۀ عکس آن، از B تا A را، با سرعت ثابت v_2 طی کند، سرعت متوسط حرکت اتومبیل برابر است با

$$\frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

تراکتور اول می توانند نصف مزرعه را در t_1 ساعت و تراکتور دوم همین نصف مزرعه را در t_2 ساعت شخم بزنند، در این صورت

مهم ترین قضیه مربوط به واسطه ها ، در محاسبه دیفرانسیلی ، قضیه لاگرانژ است (قضیه مربوط به نمودهای محدود) : اگر $f(x)$ در فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته و در فاصله باز (a, b) قابل دیفرانسیل گیری باشد ، می توان نقطه ای مثل c از فاصله باز (a, b) پیدا کرد ، به نحوی که داشته باشیم :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

در محاسبه انتگرالی ، مهم ترین قضیه مربوط به واسطه ها ، چنین است : اگر $f(x)$ در فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته و $\varphi(x)$ دارای علامت ثابتی باشد ، نقطه ای مانند c از فاصله باز (a, b) وجود دارد ، به نحوی که داشته باشیم :

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c) \int_a^b \varphi(x)dx$$

و در حالت خاص $\varphi(x) = 1$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

از این جاست که معمولاً ، واسطه تابع $f(x)$ را در فاصله بسته $[a, b]$ با مقدار

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

نشان می دهند .

به همین ترتیب می توان ، مقدار واسطه را برای تابع های چند متغیره هم در یک میدان معین ، تعریف کرد .

نظر گرفت . بنا بر این ، برای پیدا کردن مقدار متوسط محصول روزانه کارگران ، از واسطه عددی استفاده می کنند ، در حالی که برای به دست آوردن مقدار متوسط زمانی که برای تولید واحد محصول لازم است ، واسطه توافقی را به خدمت می گیرند . برای محاسبه مقدار متوسط آهنگ رشد سالیانه محصول یا جمعیت وغیره ، از اینجا آغاز می کنند که نسبت سطح به دست آمده نهائی بر سطح اولیه ، برابر است با حاصل ضرب مقادیر به صورت $\frac{t}{t+1}$ ، که در آن ، عبارت است از آهنگ رشد برای هرسال جداگانه . بنا بر این ، واسطه هندسی این مقادیر رامین می کنند و سپس عدد ۱ را از حاصل آن کم می کنند ، تا آهنگ رشد متوسط به دست آید .

باید بین مقدار متوسط با متoste های بی پایه ای که به ناحق برای تعیین ویژگی مجموعه ای از واحدهای مختلف به کار می رود ، فرق گذاشت . این تفاوت را برای نخستین بار ولادیمیر ایلیچ اویانوف ، در اثر خود به نام «رشد سرمایه داری در روسیه» (۱۸۹۶-۱۸۹۹) یادآوردی کرد . او ، در مقابل کسانی که بر استفاده غیرعلمی از مقادیر متوسط تکیه می کردند ، نشان داد که توده ناهمگون اقتصاد کشاورزی را نمی توان با ذکر یک مقدار متوسط ، مشخص کرد ، زیرا چنین مقدار متوسطی ، به جای این که ویژگی نمونه ای و مشترک تمامی اقتصاد کشاورزی را نشان دهد ، به نوعی مقدار متوسط بی ارزش و بی اساس ، تبدیل می شود .

به کار بردن مقدار متوسط ، در موارد نابجا و بی معنا ، شبیه این است که اگر پاهای کسی در بخاری و سرشن در آب سرد باشد ، حکم کنیم که به طور متوسط احساس خوبی دارد .

قانون عددی بزرگ (در نظریه احتمال) هم ، بستگی نزدیکی بمقادیر متوسط دارد . به علت وجود عنصر تصادف در موارد انفرادی ، هرچه تعداد کیتی های انفرادی بیشتر باشد ، به مقدار متوسط نزدیک تر می شود .

IV. واسطه تابع

واسطه تابع ، به هر عددی گفته می شود که در فاصله حداقل و حداکثر این تابع قرار گرفته باشد .

در محاسبه های دیفرانسیلی و انتگرالی ، یک رشته قضیه درباره واسطه وجود دارد که وجود چنان نقطه های را ثابت می کند که در آنها ، تابع یا مشتق آن ، این یا آن مقدار واسطه را به دست می دهد .

رابطه میان ماده، فضا و زمان از نظر نسبیت عومی

پس از به وجود آمدن نگرش (تئوری) نسبیت عومی، در میان فلاسفه و دانشمندان تفسیرهای پندارگرایانه گوناگونی از آن به عمل آمد. یکی از این تفسیرها در قلمرو کیهان شناسی است. که مربوط به پدیده‌های فضا و زمان می‌باشد برای این مظور مدل‌هایی کیهان شناسی به وجود آورده‌اند که هدف از آن‌ها این بوده که «ثابت کنند» جهان در فضا و زمان محدود است.

اینشتاین، در سال ۱۹۱۷، نخستین مدل کیهان شناسی جهان محدود، در فضای را پیشنهاد کرد. پس از آن، برای تکامل این تصور، به طرزهای گوناگون، کوشش به عمل آورده‌اند. سازندگان این مدل‌ها، آغاز کار، اتحنا، زنجیره فضا - زمان را که به وسیله نگرش نسبیت عومی به اثبات رسیده بود، در نظر گرفته و سعی کردن‌داد تا ثابت کنند که به علت این اتحنا، در زنجیره فضا - زمان چهار بعدی، فضای سه بعدی بسته و محدود ماست، به وجود آمده است.

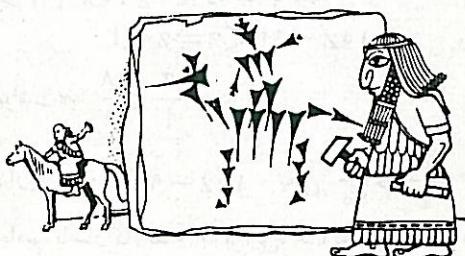
نحویاً ده سال پس از پیدایش مدل نگرش جهان «محدود در فضا»، پدیده شناخته شده‌ای به نام «جایه جایی خط‌های طیف به طرف سرخ»، کشف شد. این پدیده عبارت است از این که، پرتوهای نورانی که از کهکشان‌های دیگر، به طرف ما می‌آیند، با زمان، جایه جایی شوند و به طرف خط‌های سرخ طیف می‌روند. و به دیگر سخن، درازای موج‌های نورانی دریافت شده از این کهکشان‌ها افزایش می‌یابد. این دیر کرد پرتوهای نورانی (خط‌های طیفی) را، می‌توان برای این دور شدن کهکشان‌ها از ما، با سرعتی که تابع فاصله آن‌ها است، توضیح داد. در این جایه جایی نظر پدیده موج‌های صوتی تولید می‌شود، اگر سوت یک لوکوموتیور اهنگامی که بی حرکت است و هنگامی که از ما دور می‌شود، با هم مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که در مورد اخیر، صدا بهتر انتشار می‌یابد. این پدیده برای این است که وقتی لوکوموتیو دور می‌شود،

موج‌های صوتی که از آن به ما می‌رسند، درازتر می‌گردند.
 مدل‌های کیهان شناسی وجود دارند که در آن‌ها کوشش کرده‌اند، تا مفهوم یک جهان محدود در فضا را، با پدیده فرار ابری‌های برونکهکشانی سازش دهند. در این جای خواهیم از نگرش «جهان در حال گسترش» که به طور ریاضی، پیش از این، به وسیله آ. فریدمان^۱، در آغاز سال‌های ۲۵ سده پیشتر، صورت بندی شده و به وسیلهٔ تکامل یافته است و همچنین انواع دیگر این نگرش گفتگو کنیم. برحسب این نگرش، جهان، کره‌ای محدود در فضا بوده که به طور پیوسته شعاع آن افزایش می‌یابد. برایه این فکر، لومتر همچنین کوشید تا ثابت کند که جهان در زمان محدود است. لومتر توضیح داد که اگر جهان، با محدود باقی ماندن در فضا، به طور پیوسته افزایش یابد، این پدیده مجبور است که آغازی در زمان داشته باشد که مربوط به لحظه «ایجاد» جهان می‌شود. او «حتی حساب کرد»، که جهان در ۱۵^۱ سال پیش به وجود آمده است.
 در حقیقت، منظور از این مدل‌های کیهان شناسی، فراهم ساختن پایه‌ای «علمی» برای مفاهیم پندارگرایی مربوط به فضا و زمان و به طور کلی جهان است. مسلم است که مطلقاً این گونه توضیح‌ها، به همان اندازه در قلمرو فلسفی غلط هستند که در قلمرو علمی. آنها به هیچ وجه از نگرش نسبیت عومی ناشی شوند، بلکه پایه آنها بر روی یک سری قضایای اختیاری، که مدعی تکمیل آن هستند، گذاشته شده است.
 در آغاز کار، نگرش نسبیت عومی ثابت کرد که عقاید قدیمی، که برحسب آن‌ها، جز یک هندسه - هندسه اقلیدسی - برای تعریف خواص فضای بیکران، وجود ندارد، غلط می‌باشند. هندسه اقلیدسی، جز برای قلمروهای محدود فضا معتبر نیست. نگرش نسبیت عومی، تکثر خواص فضای معین به وسیله توزیع و حرکت ماده را، نمایان ساخت. چیزی در این نگرش وجود ندارد که بتواند، تایید کند که خواص فضای را که نگرش مزبور آشکار کرده است، دارای ارزشی چنان عومی است که همه گوناگونی کیفی فضای بیکران را شامل شوند. بر عکس نگرش نسبیت عومی، نگرش گرانش^۲ را برای یک قلمرو محدود کنن میدان گرانش و برای مجموعه‌ای معین از جرم‌ها تنظیم می‌کند. این نگرش، نگرشی کلی از خواص فضا و زمان، که برای جهان، در مجموعه خود، ارزشمند باشد، نمی‌دهد.

برونکهکشانی را از یکدیگر جدا می کنند، به طرز دقیقی تعیین نشده اند، و در نتیجه تأیید این حکم که سرعت فرار کهکشان ها متناسب با فاصله ای است که آن ها را از یکدیگر جدا می کند، مشکل است.

دومین پنداشت، عبارت است از اینکه فرار کهکشان ها پدیده ای است مشترک برای همه جهان. باری داده هایی که در اختیار ما هستند، ارتباطی جز به متابالاکسی (و حتی به همه کهکشان هایی که آن را ترکیب کرده اند) ندارند. حتی اگر فرار کهکشان ها در چهار چوب متابالاکسی رخ دهد، هیچ دلیلی برای تصدیق این که این پدیده در بیرون متابالاکسی - همه جهان - ایجاد گردد، یافته نمی شود. همه این ها نشان می دهند، که نگرش نسبی گرایان، در باره جهان محدود در فضا و در باره جهان در حال گسترش، هیچ پایه علمی ندارد و براساس آنها پنداشت هایی را گذاشته اند که کاملاً با دانش و با نتایج مشاهده ستاره شناسی، تناقض دارند.

O



یکی از اولین نوآوران:
«مرا در قرن بیستم درک خواهند کرد»

سپس، در این مدل های کیهانشناسی فرض کردند که فضا، جز تنها به یک منظرة ماده وابسته نیست: جرم های وزین و میدان های گرانشی که به وجود می آیند. آنها به وجود میدان های الکترومغناطیسی و دیگر میدان ها و اشیا مادی، که آن ها را به وجود می اورند و همچنین به خواص معین فضا به وسیله سایر مناظر ماده، توجهی ندارند. خلاصه، این مدل های کیهان شناسی، از این پنداشت، ناشی می شوند که وزن مخصوص جرم های وزین و وزن مخصوص متوسط ماده ستاره ای در جهان، ثابت است و در زمان تغییر نمی کند. با وجود این، مشاهدات بی شمار ستاره شناختی، ناسازگاری کامل این پنداشت را که تقریب غیر دقیق را هم از واقعیت تشکیل نمی دهد، ثابت کردند.

تمامیت^۱ یا اکثربیت^۲ منظمه های ستاره ای قابل مشاهده (kehکشان ها)، و را کهکشان را تشکیل می دهند. مدل های کیهان شناسی جهان محدود و معین، فرض می کنند که متابالاکسی، همه جهان را پر کرده است و این متابالاکسی (ورا کهکشان) همگن می باشد. با وجود این، کهکشان ها در متابالاکسی، در همه جا با یک وزن مخصوص برابر پخش شده اند. قسمت اصلی و مهم متابالاکسی از عده زیادی تراکم کهکشان ها و گروه هایی از کهکشان ها تشکیل شده است. توده کهکشان ها، در این گونه منظمه ها و گروه ها تشکیل یکی از خصلت های ویژه اساسی متابالاکسی را می دهد. بدین ترتیب، توزیع فضایی کهکشان ها، گواه ساختار اساسی ناهمگن متابالاکسی و یک نواخت نبودن تراکم مواد در فضا است. به علاوه، ثابت کرده اند که مراکز تراکم گروه های کهکشان ها، خودشان به طور یک نواخت، در فضا پخش شده اند (منظمه های دوتایی و سه تایی، تشکیل شده به وسیله توده هایی از کهکشان ها وجود دارند). این عدم یک نواختی تراکم ماده در فضا، آنقدر زیاد است که وزن مخصوص آن، حتی در یک عرض کهکشانی، بیش از ۱۰۵ بار، تغییر می کند.

مدل های کیهان شناسی جهان در حال گسترش، هنوز در گیر دو پنداشت است. پنداشت نخست، عبارت از این است که، سرعانی که با آن، دو کهکشان، از یکدیگر دور می شوند، متناسب است با فاصله ای که آن ها را از یکدیگر جدا می کند. این حکم نمی تواند قابل قبول باشد، جز با تخمینی زیاد، زیرا در درون منظمه های کهکشان ها، اختلاف میان سرعت ها بسیار زیاد است. به علاوه، فاصله هایی که جهان های

Reconciliation With Mathematics

Editor: Parviz Shahryari

Under the supervision of the editorial board

A supplementary Publication of the Free University of Iran

Address: The Free University of Iran

P. O. Box 11 - 1962

Aban Shomali St. Karim-Khan Zand
Boulevard Tehran - 15 Iran

Vol. V , No. 2, 1981

دست‌های غدار و جنایت کار امیریالیسم رو به زوال امریکا، بار دیگر جنایتی آفرید که در تاریخ انسانی، اگر نه بی نظر، لااقل کم نظری بود. محلی که عده زیادی از مسئولان مملکتی جمع بودند، مورد هجوم خراب کارانه و تروریستی قرار گرفت و قریب ۷۵ کشته و دهها مجروح به جا گذاشت. دکتر عضدی سربرست مجتمع آموزشی علوم انسانی هم، از قربانیان همین ددمتشی طراحان درمانده سرمایه‌داری جهانی شد.

سرمایه‌داری جهانی، و در راس آن امیریالیسم جنایت کار امریکا، در برابر نیروی روزافزون انسان‌ها - چه آن‌ها که آزاد شده‌اند و چه آن‌ها که در راه آزادی پیکار می‌کنند - کنترل عصبی خود را از دست داده و به هر شیوه‌ای دست می‌زند. تروریسم و خراب کاری، نشانه ضعف و ترس از رویا رویی مستقیم است. امیریالیسم امریکا، با این عمل غدارانه، به حساب خود، قلب جمهوری انقلابی و نویای ما را نشانه گرفت، ولی نمی‌دانست که وظیفه پایداری و استحکام انقلاب بزرگ مردم ایران، بر دوش یک مردم محروم و زحمت کش این سرزمین قرار دارد. نمی‌دانست که مردم از کوره این پیش آمدنا، ابدیده تر بیرون می‌آیند، دوست و دشمن خود را بهتر می‌شناسند، اشتباه‌ها و سهل اندیشه‌های احتمالی خود را تصحیح می‌کنند و همراه با خروش آزادی بخش انسانی که کمر از زیر ستم قرن‌ها بلند می‌کند، تومار ستم و بیداد جامعه طبقاتی را در هم می‌نوردد. یاد دکتر عضدی و همه عزیزان از دست رفته گرامی باد.

(۱) از یک طرف داریم: $xyz > 100x$.

و از طرف دیگر: $xyz \leqslant 99x$.
بنابراین رقم‌هایی که در تساوی مساله صدق کنند، وجود ندارد.

(۲) از یک طرف داریم: $y \cdot \overline{xz} = y(10x+z) < 10xy + 10y$

و از طرف دیگر: $\overline{xyz} \geqslant 100x + 10y$
بنابراین تساوی مفروض، وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$10xy > 100x$
که ناممکن بودن آن واضح است.

بنابراین نمی‌توان رقم‌هایی را پیدا کرد که در تساوی مفروض صدق کنند.

(۳) از تساوی
 $(10x+y)(10z+t) = t(100x+10y+z)$
به دست می‌آید:

$(10z-9t)(10x+y) = zt$
چون داریم $t > y+10x$ ، باید داشته باشیم:

$$10z-9t < z \Rightarrow z < t$$

یعنی می‌توان نوشت: $\frac{z}{t} \leqslant \frac{8}{9}$

از طرف دیگر داریم: $t > 10z-9t$ ، یعنی $\frac{z}{t} > \frac{9}{10}$

این دو نتیجه، باهم ناسازگارند و بنابراین، مساله جواب ندارد.