کوانتوم

شماره ۱ پائیز ۷۲

۹۰۰ ریال

نشر علوم پایه

مجلهٔ ریاضی و علوم

کوانتوم

سال اول، شمارهٔ ۱، پاییز ۱۳۷۲

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: محمد رجبی طرخورانی
سردبیر: غلامرضا یاسی‌پور

نشانی: تهران. صندوق پستی ۱۱۳۳ ـ ۱۳۱۴۵

فهرست

کوانتوم، از صاحبنظران، نویسندگان و مترجمان، دعوت می‌کند تا با توجه به‌سبک مقالات مجله، مقالاتی در زمینه‌های تعلیم و تربیت و تدریس ریاضی و فیزیک، نقد کتب ریاضی و فیزیک، منطق و فلسفهٔ ریاضی، گذشته و آیندهٔ ریاضی و فیزیک، کاربرد ریاضی، ریاضیدانها و فیزیکدانان ایرانی، شرح حال ریاضیدانها یا فیزیکدانهای معاصر ایرانی، مدل‌بندیهای ریاضی، معماها و مسائل ریاضی و فیزیک ... را برای درج در مجله ارسال دارند. لطفاً در فرستادن مقالات به نکات زیر توجه فرمایید:

□ مقالات خوانا، بر روی یک صفحه و خط در میان نوشته شده باشند.
□ شکلهای مقالات، دقیقاً رسم و مشخص شده باشند.
□ مراجع، به‌طور کامل ذکر شده باشند.
□ مقالات ارسالی، قبلاً در مطبوعات فارسی به‌چاپ نرسیده باشند.
□ ویرایش مقالات طبق ضوابط مجله انجام می‌گیرد.
□ همراه ترجمه‌های فارسی، متن اصلی هم ارسال گردد.
□ حل کامل مسائل و معماها، همراه صورت آنها ارائه گردد.
□ فهرست معادل اصطلاحات موجود در مقاله، به‌زبان اصلی آورده شود.
□ هیئت تحریریه در رد یا قبول و حک و اصلاح مقالات رسیده آزاد است.
□ مقالات رسیده به‌هیچ وجه مسترد نمی‌شوند.

سرمقاله

یکی است ترکی و تازی در این معامله حافظ
حدیث عشق بیان کن بدان زبان که تو دانی

در اواخر دهۀ ۱۹۶۰ شش تن از اعضای برجستۀ فرهنگستان علوم شوروی، از جمله کاپیتسا و کولموگوروف طی نامه‌ای به عالیترین مرجع ادارۀ کشور، پیشنهاد نشر ماهنامۀ ریاضی ـ فیزیک کوانت را مطرح کردند. پیشنهاد از جانب بزرگان فن بود و مورد تأیید قرارگرفت، و بدین ترتیب نخستین‌شمارۀمجلۀ کوانت در آغاز سال ۱۹۷۰ منتشرشد.

سردبیری نخستین شماره‌های مجله را دو تن از مهمترین اعضای این فرهنگستان: آندره نیکلایه‌ویچ کولموگوروف و ایساک کنستانتی نوویچ کی کواین، به‌عهده داشتند، و هر دو تا آخرین روزهای زندگی خود به این کار ادامه دادند.

هدف ازانتشار ماهنامۀ ریاضی ـ فیزیک کوانت یافتن استعدادهای جوان و شکوفا کردن و پرورش دادن این استعدادها بود.

مجلۀ کوانت به سرعت جای خود را در میان مجلات ریاضی ـ فیزیک، آن چنان، بازکرد که از طرف یونسکو مورد تأیید قرارگرفت و مقاله‌های آن به زبانهای فرانسوی، ژاپنی، آلمانی، یونانی، بلغاری، نیز زبانهای دیگر ترجمه شد.

چاپ نسخۀ انگلیسی این مجله، به سال ۱۹۹۰ و تحت نام «کوانتوم، مجلۀ دانش آموزی ریاضی و علوم» و به عنوان نشریه‌ای از انجمن ملی معلمان علوم و دایرۀ کوانتوم فرهنگستان علوم شوروی و در رابطه با انجمن معلمان فیزیک آمریکا و شورای ملی معلمان ریاضی، در آمریکا آغاز شد.

مؤسسان این نشریه یوری اوسیپیان، قائم مقام فرهنگستان علوم شوروی، شلدون لی گلاشو دارندۀ جایزۀ نوبل (فیزیک) از دانشگاه هاروارد، و ویلیام پی. ثرستون، دارندۀ مدال فیلدز (ریاضی) از دانشگاه کالیفرنیا، برکلی، اند که همه از برجسته‌ترین دانشمندان علوم در رشتۀ تخصصی خود به‌شمار می‌روند.

در تقریظی که پروفسور ریچارد ای. اسکی استاد ریاضیات دانشگاه ویسکانسین مدیسن در یکی از مجلات ریاضی، بر این مجله نوشته چنین آمده است که:

> بعضی از دانش آموزان در می‌یابند که ریاضیات و علوم شیرین‌اند، اما اغلب نه. در این صورت چگونه می‌توانیم این دانش را با آنان که نمی‌دانند کشف مطالب تا چه حد فرح‌انگیز است قسمت کنیم؟ اکنون طریقی شوق‌آفرین در دسترس داریم و آن مجلۀ جدید کوانتوم است. مجله‌ای که بر مبنای کوانت روسی، که به مدت بیست سال به دانش‌آموزان علاقه‌مند و بی‌نصیب، با مقالات جاذب و مسائل جالبش بهره رسانده، بنا شده است. تیراژ مجلۀ اصلی، یعنی کوانت، بالای ۲۰۰۰۰۰ است و بنابراین تنها برای آن تعداد اندک که روی رسیدن به دکترای علوم یا ریاضیات را دارند نیست.
>
> اغلب مقالات کوانتوم برای دانشجویان دورۀ لیسانس نیز جالب است و بنابراین نه تنها دبیرستانها، بلکه کالجها و دانشگاهها نیز بدان نیاز دارند.
>
> از اهداف آموزش، آموختن این مطلب به دانش‌آموزان است که ریاضیات فرح‌بار است و کار سخت نتیجه‌دار، و کوانتوم در رسیدن به این هدف کمک بسیار می‌کند.
>
> غالب مقالات شمارۀ اول کوانتوم از شماره‌های قبلی کوانت‌اند، اما بعضی از آنان نیز در آمریکا نوشته شده‌اند. سردبیران آمریکایی مجله، ثرستون از دانشگاه پرینستون در قسمت ریاضیات و گلاشو در بخش فیزیک‌اند، و امید می‌رود که نسخۀ آمریکایی مجله کمتر از نسخۀ اصلی آن نباشد.

و اما نسخۀ فارسی این مجله، یعنی همین نسخه‌ای که پیش رو دارید و قرار است به یاری خداوند به‌صورت فصلنامه منتشر شود، از دو بخش اصلی تشکیل شده است. بخش اول آن، شامل مقالات جالب و مفید مجلۀ کوانتوم آمریکایی است که عیناً به زبان فارسی درآمده و گهگاه مقاله‌ای از کوانت روسی نیز به‌همراه دارد و بخش دوم آن، شامل مطالب و مواردی است خاص دانش‌آموزان و دانشجویان خودمان. از ویژگیهای بخش دوم پرداختن به مسائل متناسب با برنامۀ دبیرستانهای ایران و تهیۀ شرح احوال و آثار ریاضیدانان و فیزیکدانان ایرانی و مسلمان و مطالب مربوط به تعلیم و تربیت ریاضی و فیزیک در این گوشه از جهان است. بخصوص در مورد این بخش به یاری و مساعدت صاحبنظران نیاز مبرم داریم و در همین جا از آنان دعوت می‌کنیم که به یاریمان برخیزند و از کمکمان دریغ نورزند.

دست‌اندرکاران مجلۀ فارسی کوانتوم با این امید بدین کار خطیر پرداخته‌اند که رندان تشنه لب را آبی دهند و جانهای خسته‌دل را مرهمی نهند. نشر آن را اگر به زمین ننشینند به ضمان ایستاده‌اند، استمداد همت از رفیقان ره می‌دارند و مسئلت توفیق از خداوند آگه. باشد که به یاری هم اینان و هم او، این راه را بسپرند و این عهد را به سر برند.

از بین رفتن مقاومت

«علم همیشه اشتباه می‌کند: هربار که مشکلی را حل می‌کند، ده مشکل به‌وجود می‌آورد». جُرج برناردشاو

نوشتهٔ الکساندر بوزدین و آندره وارلاموف

بی‌تردید در سالهای اخیر بزرگترین رخداد در علم فیزیک کشف ابررساناهای دما ـ بالا است، که مقاومتشان در دماهای بالاتر از ۱۰۰K به‌صفر می‌رسد. می‌توان اهمیت عملی این کشف را با اهمیت القای مغناطیسی در آغاز قرن نوزدهم برابر دانست. در این قرن اهمیت این کشف با کشف شکافت اورانیم، اختراع لیزر و خواص غیرعادی نیمرساناها برابری می‌کند.

این مرحلهٔ جدید هیجان‌انگیز در پیشرفت ابررسانایی با پژوهش ک. ا. مولر و ت. جی. بِدنورز در آزمایشگاه آی. بی. ام در سوییس آغاز شد. آنها در زمستان ۸۶ – ۱۹۸۵ ترکیبی از باریم، لانتانوم، مس و اکسیژن ـ به‌اصطلاح سرامیکِ اکسیدِ فلزی La – Ba – Cu – O ـ را به‌وجود آوردند. این ترکیب در دمای رکورد آن زمان یعنی ۳۵K (که حتی تا این اواخر هم دمای رکورد باقی ماند) خواص ابررسانایی داشت. مقالهٔ آنها باعنوان محتاطانهٔ «امکان ابررسانایی دما ـ بالا در سیستم La – Ba – Cu – O» به‌وسیلهٔ مجلهٔ پیشرو آمریکایی *فیزیکال ریویولترز* منعکس شد. انجمن علمی آمریکا که طی بیست سال گذشته گزارشهای پرهیجانی دربارهٔ کشف ابررساناهای دما ـ بالا دریافت کرده بود و همگی دروغ از آب درآمده بودند، از این وضع خسته شده بود؛ پس تصمیم گرفت به‌بررسی این مقاله نپردازد. مولر و بدنورز این مقاله را به‌مجلهٔ آلمانی *سایتشریفت فور فیزیک* فرستادند. بعد از آنکه اخبار مربوط به‌ابررسانایی به‌شکل تازهٔ آن پخش شد و پژوهش دربارهٔ ابررساناهای دما ـ بالا در صدها آزمایشگاه انجام شد همهٔ مقاله‌های مربوط به‌وارسی این پدیدهٔ جدید با اشاره به‌این مقاله آغاز می‌شدند. اما در پاییز ۱۹۸۶ این مقاله عملاً به فراموشی سپرده شد[1].

تنها یک گروه ژاپنی این نتیجه را وارسی و آن را تأیید کرد. کمی بعد فیزیکدانان ایالات متحده، چین و اتحاد شوروی پدیدهٔ ابررسانایی با دمای بالا را تأیید کردند. در آغاز ۱۹۸۷ تمام دنیا در تب جستجوی ابررساناهای جدید و بررسی خواص ابررساناهای کشف شده بود. دمای بحرانی T_c به‌سرعت افزایش یافت: برای La – Sr – Cu – O، T_c به۴۵K و برای La – Ba – Cu – O (تحت فشار) به۵۲K رسید. در فوریهٔ ۱۹۸۷ دمای بحرانی ترکیب $YBa_2Cu_3O_7$ طلسم «سد نیتروژن» را شکست و به۹۳K رسید[2]. اکنون ترکیبهایی با $T_c > 100K$ می‌شناسیم ـ مثلاً دمای بحرانی $Tl_2Ca_2Ba_2Cu_3O_x$، ۱۲۵K

۱ـ در ۱۹۸۷ جایزهٔ فیزیک نوبل به مولر و بدنورز داده شد. این واقعیت که فاصلهٔ زمانی میان انتشار این مقالهٔ مهم و این جایزه تنها کمی بیش از یک سال بوده است، اهمیت این کشف را نشان می‌دهد.

۲ـ با استفاده از نیتروژن مایع، که بسیار ارزانتر از روشهایی بود که تا آن زمان به‌کار گرفته می‌شد، می‌توان به‌این دما رسید. (دربارهٔ استفاده از هلیم مایع و هیدروژن مایع در سرد کردن ترکیبهای ابررسانا به‌دنبالهٔ همین مطلب مراجعه کنید.)

است.

محققان تنها و بودجه‌های کم

کشف ابررسانایی دما ـ بالا در فیزیک مدرن بی‌نظیر است. این کشف تنها با دو دانشمند و وسایل بسیار معمولی انجام شد. این کشف چه تباینی با اکتشافات سایر زمینه‌های فیزیک ـ مثلاً فیزیک ذرات پرانرژی ـ دارد؟ در فیزیک ذرات پرانرژی، گروه بزرگی از دانشمندان (فهرست نویسندگان مقاله، یک صفحهٔ کامل مجله را اشغال می‌کند) تحقیقات را راهبری می‌کنند و تجهیزات این کار میلیونها دلار ارزش دارد. کشف ابررساناهای دما ـ بالا مایهٔ امیدواری است: دوران تحقیقهای انفرادی هنوز به‌سر نیامده است.

همچنین به‌لحاظ اینکه این ترکیبها شامل عناصری هستند که به‌راحتی به‌دست می‌آیند این کشف بسیار اهمیت دارد. در حقیقت این ابررساناها را می‌توان یک روزه در آزمایشگاهی دبیرستانی به‌دست آورد. هرچند ۷۵ سال بود که در انتظار این کشف بودند، بازهم همه را متعجب کرد. نظریه پردازان تنها شانه‌ها را بالا انداختند و وقتی دمای بحرانی افزایش یافت شانه‌ها را بیشتر بالا انداختند.

پس آیا کشف بدنورز و مولر تصادفی یا اجتناب ناپذیر بوده است؟ آیا ممکن بود این ترکیب کشف شده، با خواص یگانه‌اش، قبلاً به‌دست آید؟ پاسخ به‌این سؤال چقدر مشکل است! از دیرباز به‌این حقیقت خوگرفته بودیم که هر چیز جدیدی در مرز غیرممکن بودن با استفاده از تجهیزاتی منحصر به‌فرد، میدانهای بسیار قوی، دماهای بسیار پایین، انرژیهای بسیار زیاد ... به‌دست آید. در مورد این کشف چنین نیست. «به دست آوردن» ابررسانای با دمای بالا چندان دشوار نیست ـ کیمیاگر ماهر قرون وسطی هم می‌توانست به‌آن دست یابد.

لازم به‌یادآوری است که حدود ده سال پیش بسیاری از آزمایشگاههای جهان ترکیب ابررسانای غیرمعمولی Hg_3AsF_6 را سخت وارسی می‌کردند. این ماده به‌سبب درخشش زرد و چگالی زیاد، که آن را به‌فلز نجیب [طلا] شبیه می‌ساخت، «طلای کیمیاگری» نامیده می‌شد. کیمیاگران قرون وسطی این ترکیب را می‌ساختند و آن را به‌جای طلای واقعی جا می‌زدند، و کار خود را نتیجهٔ استفادهٔ موفقیت‌آمیز از «سنگ فلاسفه» می‌دانستند. طلای کیمیاگری ترکیب پیچیده‌ای دارد و کسی چه می‌داند، شاید اگر ابررسانای دما ـ بالا درخششی چون طلا داشت در قرون وسطی به‌دست آمده بود.

اکنون که تمام جهان با تمام قوا خواص ابررساناهای دما ـ بالا را وارسی می‌کنند و ابزارهای دقیق متکی بر آنها طراحی می‌شود، جنبه‌های گوناگون تاریخچهٔ ابررسانایی به طور عمیقتر بررسی می‌شود.

کشف بازدارنده

ابررسانایی یکی از جالبترین و غیرعادیترین پدیده‌های فیزیک حالت جامد، ابتدا در ۲۸ آوریل ۱۹۱۱، درگردهمایی فرهنگستان سلطنتی علوم در آمستردام معرفی شد؛ در آنجا هیک کامرلینگ اونس، فیزیکدان آلمانی، اثر به‌تازگی کشف شده‌ای را گزارش کرد: از بین رفتن کامل مقاومت الکتریکی جیوه‌ای که به‌کمک هلیم تا ۴٫۱۵K سرد شده باشد. هیچکس انتظار چنین کشفی را نداشت و این کشف با نظریهٔ الکترونی کلاسیک فلزات در آن روزگار در تناقض بود. اما اینکه کامرلینگ اونس این پدیده را کشف کرد، تصادفی نبود. حقیقت آن است که او اولین دانشمندی بود که پیچیده‌ترین مشکل علمی و فنی آن زمان را حل کرد: دستیابی به‌هلیم مایع (که در ۴٫۱۵K به‌جوش می‌آید). او با این کار برای دانشمندان روزنه‌ای به‌دنیای ناشناختهٔ دماهای نزدیک به‌صفر مطلق گشود.

باید تأکید کنیم که مقاومت یک نمونه در حالت ابررسانایی، نه به‌صورت تقریبی بلکه دقیقاً صفر است. به‌همین خاطر جریان الکتریکی می‌تواند در مداری بسته تا زمانی که بخواهید بدون میرایی بچرخد. طولانی‌ترین مدت جریان ابررسانایی نامیرا، که حدود دو سال بود، در انگلستان ثبت شد. (این جریان می‌توانست تا حال حاضر نیز در حلقه‌ای بچرخد اما به‌سبب وقفه در رساندن هلیم مایع به‌آزمایشگاه، در نتیجهٔ اعتصاب کارگران حمل و نقل، چنین نشد.) حتی بعد از دو سال جریان میرایی پیدا نکرد.

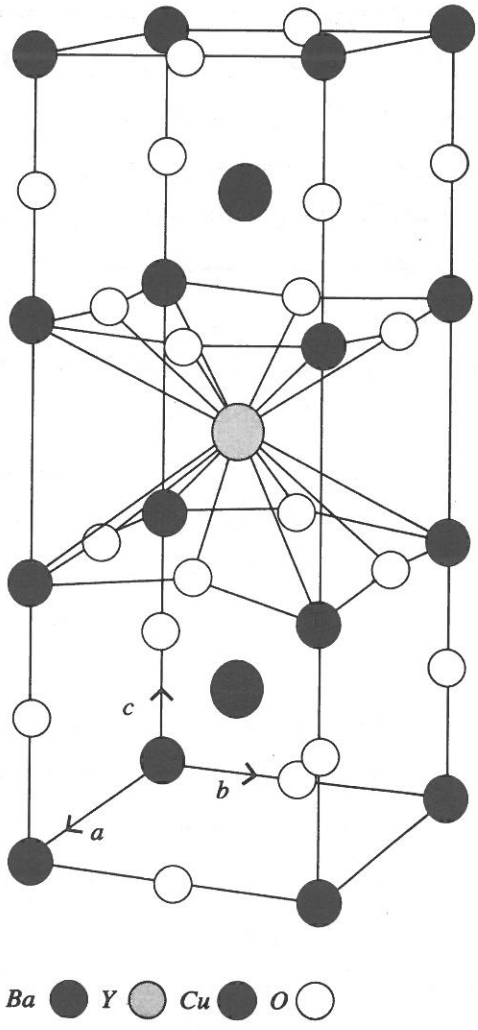
کمی بعد ابررسانایی نه تنها در جیوه بلکه در فلزات دیگر نیز کشف شد. چشم‌انداز کاربردهای عملی پدیدهٔ کشف شده نامحدود به‌نظر می‌رسید: انتقال انرژی در خطوط قدرت به‌صورتی بدون اتلاف، آهنرباهای بسیار پرقدرت، موتورهای الکتریکی، انواع جدید ترانسفورماتورها و .... اما دو مانع وجود داشت. مانع اول دماهای بسیار پایینی که حالت ابررسانایی در آن دماها در مواد کشف شده ظاهر می‌شد: برای سرد کردن ابررساناها و رساندن آنها به‌این دماها، از هلیم نادر استفاده می‌شود (که ذخایر آن محدود است و تولید آن بسیار پرهزینه) این امر سبب می‌شود که بسیاری از طرحهای به‌کارگیری ابررسانایی مقرون به‌صرفه نباشد. مانع دوم که کامرلینگ اونس بدان پی‌برد مربوط به‌این حقیقت است که دیده شد ابررسانایی به میدانهای مغناطیسی (ونیز به‌مقدار ماکسیمم جریان) نسبتاً حساس است. در حقیقت این پدیده در میدانهای قوی از بین می‌رود.

درک ماهیت این پدیدهٔ جالب و به‌وجود آوردن نظریه‌ای منسجم تقریباً نیم‌قرن به‌طول انجامید. این دوره را می‌توان اولین مرحلهٔ تحقیق دربارهٔ ابررسانایی دانست: مرحلهٔ جمع‌آوری اطلاعات دربارهٔ این اثر پیچیده.

خاصیت بنیادی دیگر حالت ابررسانایی، که در ۱۹۳۳ کشف شد، اثر مایسنر ـ اوشفلد بود: طرد کامل میدان مغناطیسی از حجم ابررسانا [و معلق شدن ابررسانا در مقابل میدان مغناطیسی (ابررسانا به‌صورت یک مغناطیس کامل درمی‌آید)]. اما بار دیگر به‌سبب نیاز به‌کارکردن با هلیم مایع نادر ـ که قبل از جنگ جهانی دوم در دنیا تقریباً در ده آزمایشگاه تولید می‌شد ـ تحقیقات عملی پیچیده شد.

رقص عجیب زوجهای کوپر

دههٔ ۱۹۵۰ را می‌توان آغاز دومین مرحلهٔ تحقیق دربارهٔ ابررسانایی دانست. تا آن زمان در فهم ماهیت این پدیده پیشرفتی کیفی صورت گرفته بود. در ۱۹۵۰ جینزبرگ و لاندا (از اتحاد شوروی) به‌کمک داده‌های تجربی و ایده‌های نظری فیزیک حالت جامد، که بر مکانیک کوانتم و فیزیک آماری استوار بود، نظریهٔ پدیده شناختی‌ای را ارائه دادند. به‌دنبال آنها در ۱۹۵۷ جان باردین، لئون کوپر و جی. روبرت شریفر (از ایالات متحده) نظریهٔ میکروسکوپی سازگاری در مورد ابررسانایی ارائه کردند. دیده شد که خاصیت ابررسانایی به‌پدید آمدن ربایش خاصی از الکترونها در فلزات مربوط می‌شود. این پدیده مشخصه‌های کوانتمی شدید از خود نشان می‌دهد.



ساختار ابررسانای $YBa_2Cu_3O_7$.

در اینجا با دوگوی که روی تختهٔ پلاستیکی قرار دارند تشابهی می‌بینیم. اگر دوگوی از یکدیگر دور باشند، هریک از آنها تختهٔ پلاستیکی را تغییر شکل می‌دهند و در آن «گودی» کوچکی ایجاد می‌کنند. اما اگر یکی از گویها را روی تختهٔ پلاستیکی قرار دهیم و دیگری را نزدیک اولی بگذاریم، حفرهٔ آنها یکی می‌شود و گویها

به‌ته گودی مشترکشان می‌غلطند . اگر دما به‌اندازهٔ کافی پایین باشد ، بعضی از الکترونها زوجهایی ، به‌نام «زوج کوپر» ، تشکیل می‌دهند . اندازهٔ این زوجها در مقیاس اتمی حقیقتاً بسیار بزرگ است و به‌صدها و هزاران برابر فاصله‌های بین اتمی می‌رسد . بنا به مقایسهٔ جالبی که شریفر پیشنهاد کرد ، این زوج را نباید دو الکترونی دانست که چون ستاره‌ای مزدوج به‌یکدیگر متصل‌اند بلکه باید دو رقاص در سالن رقص دانست که به‌هم می‌رسند ولی ممکن است در دو گوشهٔ مختلف سالن برقصند و دهها رقصندهٔ دیگر آنها را ازهم جدا کنند . الکترونهایی که به‌صورت زوج کوپر به‌یکدیگر پیوند می‌یابند ، انرژی بستگی معینی برابر 2Δ دارند . این مقدار ، انرژی لازم برای شکستن این زوج به‌دو ذرهٔ جدا شده است . مقدار آن در $T = 0$ مقدار دمای بحرانی را تعیین می‌کند .

مطابق قوانین دنیای کوانتم ، رفتار زوجهای کوپر کاملاً با رفتار الکترونها متفاوت است . دریافته‌اند که آنها در پایین‌ترین انرژی مشترک ـ «حالت زمین» ـ قرار دارند . هرچه در این حالت ذره‌های بیشتری وجود داشته باشند ، جذب اعضای جدید راحت‌تر است و برای زوج جدا از هم ترک این حالت دشوارتر . این مجموعه «چگالیدهٔ بوز» نامیده می‌شود . غلظت زوجهای کوپر در چگالیدهٔ بوز به‌دما بستگی دارد . ظهور آنها نشانهٔ گذار فلز به‌حالت ابررسانایی است (که در دمای بحرانی رخ می‌دهد) . اگر دما باز هم کمتر شود ، تعداد زوجهای کوپر افزایش می‌یابد و در دمای صفر مطلق در سیستم هیچ ذرهٔ آزادی وجود ندارد .

بنابر این در دماهای کمتر از دمای بحرانی دو نوع حامل ، در انتقال بار شرکت دارند : الکترونهای آزاد و زوجهای کوپر . اما حامل اول [الکترون آزاد] ممکن است با تمام خطرهای متداول زندگی در فلز ، مانند ناخالصیها و پراکندگی شبکه و غیره ، روبه‌رو شود . (این فرایندها در فلزهای معمولی تعیین کنندهٔ مقدار مقاومت هستند) . از طرف دیگر زوجهای کوپر ، که در حالت زمین می‌مانند ، می‌توانند بدون اندرکنش با ناخالصیها یا هر نقص دیگر ، بار را انتقال دهند . اندرکنش که سبب تغییر انرژی می‌شود (و عامل به‌وجود آورندهٔ مقاومت است) به‌معنی تغییر انرژی زوجهای کوپر است و این عمل تنها در بالای آستانهٔ 2Δ امکان‌پذیر است . به‌بیانی الکترونهای آزاد «بیکار» می‌مانند و بنابر این می‌توان گفت خدمات زوجهای کوپر در انتقال بار کمتر هزینه برمی‌دارد . بنابر این در ابررسانا به‌سبب چگالیده بودن زوجهای کوپر ، بدون به‌وجود آمدن گرما ، جریانهای نسبتاً شدیدی عبور می‌کند . ابررسانایی نتیجهٔ حاکمیت قوانین دنیای کوانتم در مقیاس ماکروسکپی است . ابررسانایی «پدیدهٔ کوانتمی ماکروسکپی» است .

جستجو برای یافتن مواد جدید

پیدایش نظریهٔ ابررسانایی محرکی قوی برای تحقیق جدی دربارهٔ آن بود . بدون اغراق می‌توان گفت در سالهای بعد در ایجاد مواد ابررسانا پیشرفت عظیمی صورت گرفته است. کشف دانشمند روسی ، ا . ا . آبریکُسُف ، دربارهٔ حالت ابررسانایی غیر معمول در میدان مغناطیسی نقش مهمی در این پیشرفت داشته است . قبل از این کشف تصور می‌کردند میدان مغناطیسی ، توانایی نفوذ به‌مرحلهٔ ابررسانایی را ندارد و در نتیجه نمی‌تواند آن را از بین ببرد (که حقیقتاً در مورد بیشتر فلزات خالص چنین است) . آبریکسف به‌طور نظری ثابت‌کرد امکان دیگری وجود دارد : میدان مغناطیسی می‌تواند در شرایط معین به صورت گردابهای جریان در ابررسانا نفوذ کند که هستهٔ ابررسانا را به‌حالت عادی برمی‌گرداند ولی پیرامون آن ابررسانا باقی می‌ماند ! ابررساناها براساس رفتارشان در میدان مغناطیسی به‌دو گروه تقسیم می‌شوند : ابررساناهای نوع اول (قدیمی) و نوع دوم (که آبریکسف کشف کرد) . این امر اهمیت دارد که اگر ابررسانای نوع اول را با اضافه کردن ناخالصیها یا سایر نقصها «خراب» کنیم می‌توانیم آن را به‌یکی از ابررساناهای نوع دوم تبدیل کنیم .

دانشمندان در میان ابررساناهای نوع دوم ترکیبهایی را یافتند که توانایی هدایت جریانهای شدید و تحمل میدانهای مغناطیسی عظیم را داشتند . قبل از آنکه این ابررساناها کاربرد عملی بیابند باید مسائل زیادی حل می‌شد . (این ترکیبات شکننده بودند ، جریانهای زیاد ناپایدار بودند) اما این حقیقت به‌قوت خود باقی ماند : یکی از دو مانع اصلی استفادهٔ گستردهٔ ابررساناها در

صنعت برطرف شد.

اما مشکل افزایش دمای بحرانی باقی ماند. اگر میدانهای مغناطیسی هزاران برابر میدانهای مغناطیسی آزمایشهای اولیهٔ کامرلینگ اونس می‌شد، تغییر در دمای بحرانی دلگرم کننده نبود: تنها توانستند این دما را به ۲۰K برسانند. بنابر این برای کار معمولی ابزارهای ابررسانا هنوز هلیم مایع گران‌قیمت لازم بود. این امر به‌شدت آزاردهنده بود زیرا به‌تازگی اثر کوانتمی اساساً جدیدی به‌نام «اثر ژوزفسون» کشف شده بود. این اثر استفادهٔ وسیع از ابررساناها را در میکروالکترونیک، پزشکی، ابزار دقیق و کامپیوتر ممکن می‌ساخت.

مسئلهٔ افزایش دمای بحرانی به‌شدت حاد بود. ارزیابیهای نظری نقطهٔ اوج دمای بحرانی نشان می‌داد که در محدودهٔ مرزهای ابررسانایی فونون[1] طبیعی (یعنی نوعی ابررسانایی که با ربایش الکترونیِ حاصل از اندرکنش شبکهٔ بلور تعیین می‌شود) این دما نمی‌تواند از ۴۰K تجاوز کند. اما کشف ابررسانایی با چنین دمای بحرانی دستاورد بزرگی خواهد بود. زیرا این ابررسانا را می‌توان با هیدروژن مایع نسبتاً ارزان و در دسترس (که در ۲۰K به‌جوش می‌آید) به‌دست آورد. این ابررسانا عصر «ابررسانایی با دمای متوسط» را می‌گشاید و محرک پژوهش برای اصلاح ابررساناهای موجود و پدید آوردن ابررساناهای جدید می‌شود. اما رؤیای غایی پدید آوردن ابررسانایی با دمای بحرانی ۱۰۰K (یا حتی از آن‌هم بهتر، با دمای بالاتر از دمای اتاق) است که می‌توان آن را با نیتروژن مایع ارزان و متداول سرد کرد.

بهترین نتیجهٔ این پژوهش ترکیب Nb_3Ge با دمای بحرانی ۲۳٫۲K بود. این دمای رکورد در ۱۹۷۳ به‌دست آمد و ۱۳ سال پایدار ماند. تا ۱۹۸۶ دمای بحرانی حتی یک درجه هم افزایش نیافت. به‌نظر می‌رسید تواناییهای سازوکار فونونِ ابررسانایی به‌انتها رسیده است.

به این دلیل در ۱۹۶۴ دانشمندی آمریکایی به‌نام لیتل و دانشمندی روسی، و. ل. جینز برگ چنین نظری را پیشنهاد کردند: اگر امکان افزایش دمای بحرانی به‌واسطهٔ ماهیت سازوکار فونونیِ ابررسانایی محدود شود، باید به‌جای این سازوکار ربایش الکترونی سازوکار دیگری قرار داد ـ یعنی الکترونها باید به‌کمک سازوکاری جز ربایش فونونی زوجهای کوپر را تشکیل دهند.

طی بیست سال گذشته نظریه‌های بسیاری ارائه شده‌اند. دهها یا صدها ماده از هزاران مادهٔ جدید به‌تفصیل وارسی شده‌اند. در حین کار توجه لیتل به‌ترکیبهای شبه تک بعدی ـ زنجیرهای مولکولی رسانای بلند با شاخه‌های جانبی ـ جلب شد. مطابق ارزیابیهای نظری انتظار می‌رفت دمای بحرانی آنها افزایش چشمگیری یابد. علی‌رغم تلاش در بسیاری از آزمایشگاههای جهان چنین ابررساناهایی به‌دست نیامدند. اما در این فرایند فیزیکدانان و شیمیدانان مسائل جالب بسیاری کشف کردند: آنها به‌فلزات آلی دست یافتند و در ۱۹۸۰ بلورهای ابررساناهای آلی را ترکیب کردند (رکورد فعلی برای دمای بحرانی ابررسانای آلی بیشتر از ۱۰K است). آنها موفق شدند «ساندویچهای» دو بعدی فلز-نیمرسانا به‌دست آورند-یعنی ابررسانا و مغناطیس به‌صورت لایه به‌لایه و سرانجام در آنها ابررسانایی و مغناطیس به‌همزیستی‌ای مسالمت‌آمیز دست یافته‌اند. اما دورنمای جدیدی برای ابررسانای دما ـ بالا وجود نداشت. در این زمان گسترهٔ کاربرد ابررساناها افزایش یافته بود، اما نقطهٔ ضعفشان نیاز به‌هلیمِ مایع برای سرد شدن بود.

کیمیاگران جدید

به کشف مولر و بدنورز برمی‌گردیم. در اواسط دههٔ ۱۹۷۰ ترکیبهای سرامیکی عجیبی برای ابررسانایی دما ـ بالا انتخاب شدند. آنها از نظر خواص الکتریکی در دمای اتاق «فلزات ضعیفی» هستند اما در دمای نه چندان بالاتر از صفر مطلق ابررسانا می‌شوند. واژهٔ «نه چندان بالاتر» به‌معنی ۱۰ درجه پایین‌تر از مقدار رکورد آن زمان است. اما این ترکیب جدید را نمی‌توانستند فلز بنامند. مطابق مطالب نظری، مقدار به‌دست آمده برای دمای بحرانی پایین نبود بلکه در واقع برای چنین موادی بسیار بالا بود.

باید صادقانه بگوییم برای فعالیت تجربی در زمینهٔ این ترکیبها هیچ پشتوانهٔ جدی وجود نداشت. تا ۱۹۸۳ مولر و بدنورز مانند کیمیاگران با صدها اکسید مختلف کار می‌کردند. ترکیب، نسبتها

۱ـ فونون، کوانتمی از انرژی ارتعاشی است.

و شرایط ترکیب را تغییر می‌دادند. در این مسیر پر رنج آنها محرمانه به‌ترکیبی از باریم، لانتانم، مس و اکسیژن دست یافتند که در دمای ۳۵K خاصیت ابررسانایی از خود نشان می‌داد. این امر در اواخر ۱۹۸۵ رخ داد.

یافتن منطق کشف در علم جدید مواد آسان نیست. تاکنون فراست، تجربه، پشتکار و البته شانس محض نقش اساسی را داشته است. بد نیست مثالی از دانشمند روسی ا. بُرُویک رومانف بیاوریم: «مدتها فیزیکدانها نمی‌توانستند فرانسیم و ژرمانیوم را تفجوشی[1] کنند. تا اینکه فیزیکدان آلمانی، ه. کازیمیر، رنین را به‌عنوان لایه‌ای میانی پیشنهاد کرد. دلیل انتخاب او این بود که فرانسه و آلمان باعنصری طبیعی ـ رودخانهٔ راین ـ به‌هم پیوند خورده‌اند. نتایج کار فراتر از حد تصور بود.»

در اینجا بد نیست نتیجهٔ مهمی بگیریم: ثابت شده است که روال جستجو برای یافتن ابررساناهای کارآمد در تکنولوژی بسیار غیرعادی بوده است. دانشمندان از فلزات خالص آغاز کردند، به‌سوی آلیاژهای «کثیف» حرکت کردند و با اکسیدهای فلزی، پایان دادند که ابداً شباهتی به‌فلز ندارند و در حقیقت نوعی خاک رسی هستند. عموماً مسائل از سادگی به‌سوی پیچیدگی رفته است. گاهی مطالب نظری عقب‌تر از عمل بود، و محرکی قوی برای تحقیقهای بیشتر. امروزه بار دیگر مطالب نظری در گرو تجربه است: دانشمندان با «حس کردن مسیرشان» ابررساناهای دما ـ بالای جدیدی به‌وجود آورده‌اند و باید برای این اکتشافها توجیه نظری قابل قبولی یافت. بسیاری از مشخصه‌های این ابررساناها را نمی‌توان در چهارچوب رهیافتهای سنتی توجیه کرد.

این امر مطمئناً بدین معنی نیست که نظریه پردازان بیکار بوده‌اند: می‌توان به جرأت ۵۰ نظریهٔ جدید نام برد که در چند سال اخیر برای ابررسانایی با دمای بالا پیشنهاد شده‌اند. ولی ما نه به‌پنجاه نظریه، بلکه به‌یک نظریه احتیاج داریم و هنوز به‌آن نظریهٔ واقعی دست نیافته‌ایم.

روشن کردن ماهیت ابررسانایی دما ـ بالا مهمترین مشکل و مانع درکشف آن است.

دورنمای خیره‌کننده

بد نیست چند کلمه‌ای دربارهٔ کاربردهای عملی متکی بر ابررسانایی کشف شده بگوییم. دورنما حقیقتاً جالب است. بسیاری از پروژه‌های جهانی که قبلاً پیشنهاد شده بودند، به‌این امید که ابررساناهای دما ـ بالا تحقق آنها را از نظر اقتصادی ممکن سازند، در دستور کار قرار گرفته‌اند. مثلاً در حال حاضر ۲۰ تا ۳۰٪ انرژی الکتریکی تولید شده، در خطوط انتقال قدرت هدر می‌رود. استفاده از ابررساناهای دما ـ بالا برای انتقال انرژی این اتلاف را از میان می‌برد. دانشمندان توانسته‌اند پوسته‌های ابررسانای دما ـ بالایی را تفجوشی کنند که قادرند جریانهای با چگالی $106A/cm^2$ را در دمای نیتروژن مایع انتقال دهند.

تمام پروژه‌های مربوط به‌ساخت گرما ـ هسته‌ای مستلزم استفاده از آهنرباهای ابررسانای بسیار عظیمی است که بتوانند پلاسمای[2] با دمای بالا را از دیواره‌های اتاقک دور نگه‌دارند. برای نگهداشتن حالت ابررسانایی به‌نهرهایی، اگر نگوییم رودخانه‌هایی، از هلیم مایع نیاز داریم. نیتروژن می‌تواند جایگزین هلیم شود و در نتیجه درهزینهٔ بسیار صرفه‌جویی شود.

سیم‌پیچهای عظیم ابررسانا می‌توانند به‌صورت انباره‌های قدرت الکتریکی عمل کنند که در مواقع اوج بار وارد شبکه می‌شوند.

تجهیزات فوق‌العاده حساس برای تهیهٔ نوار قلب و یا نوار مغزی به‌طریق مغناطیسی، که بر استفاده از عناصر ژوزفسون ابررسانا متکی هستند، در همهٔ بیمارستانها به‌کار خواهند رفت.

نسل جدیدی از ابرکامپیوترها که بر عناصر ابررسانا متکی هستند و با نیتروژن مایع خنک می‌شوند به‌وجود می‌آید.

تصور نکنید که در زمینهٔ ابررسانایی دچار آشفتگی شده‌ایم. از زمان شروع کشف آن تاکنون اشتیاق بسیاری از محققین به‌طرز چشمگیری فروکش کرده است. همین اتفاق هنگامی رخ می‌دهد که یک رکورد المپیک سالها دست نیافتنی می‌ماند. اما

۱ـ «تفجوشی» به‌معنی ایجاد توده‌ای همدوس از عناصر به‌کمک حرارت دادن و بدون ذوب کردن آنها است. ترکیبهای ابررسانا به‌کمک فشار دادن و تفجوشی اکسیدهای بسیار ریز شده در دمای بالا ساخته می‌شدند.

۲ـ پلاسما، حالتی از ماده به‌شکل گاز بسیار یونیده شده است.

رکورد تعیین شده است و اکنون مانند یک نشان عمل می‌کند. ممکن بودن تولید موادی با مشخصه‌های منحصر به‌فرد لازم تأیید شده است. مسلماً برای تولید ابررساناهای دما ـ بالایی که در تکنولوژی به‌کار آیند، باید مشکلات جدی بسیاری را حل کرد. ملاحظات اقتصادی بر چگونگی دست یافتن به‌پروژه‌های پیشگفته اثر می‌گذارند. اما مهم آن است که امروزه می‌دانیم *غیرممکن*، *به‌دسترس آمده است* و این امر در مبنای نگرش ما به‌ابررسانایی تغییر برگشت ناپذیری ایجاد کرده است.

ترجمهٔ مهندس هالهٔ واحدی

...

... بله، عمیقاً معتقدم که [پیشرفت علم، حاصل ارتباط و روابط آدمهاست]. پیشرفت علم به عبارتی یعنی اینکه شما هم آجری را طوری روی آجرهایی که قبلاً در ساختار درست و محکمی روی هم چیده شده‌اند، بگذارید که برای نگه‌داشتن آجرهای بعدی مناسب باشد، و الی آخر. اگر ارتباطی میان آجر چیدن شما با کار بقیه نباشد، یا باشد ولی ضعیف باشد، آن وقت ممکن است آجر شما برای چنین دیواری که قرار است، روز به روز بالاتر برود مناسب نباشد. اگر آجر شما زیادی بلند باشد ممکن است، دیوار را آوار کند و اگر زیادی کوتاه باشد هم که لابد جای مهمی، در این دیوار نخواهد داشت. پیدا کردن جای درست راهش این است که با همکارانتان ارتباط دقیق داشته باشید. بدون ارتباط مستمر با کسانی که در همان زمینه کار می‌کنند، ممکن است به‌موقع نفهمید که کاری که دارید می‌کنید، قبلاً انجام شده است، یا اصلاً ارزش انجام‌شدن ندارد.

... آدم وقتی عضو یک جامعهٔ علمی باشد، به‌تدریج حس می‌کند که عضو یک جور خانواده است. وقتی متخصصان یک رشته درکنفرانسها دور هم جمع می‌شوند، نظراتشان را با هم در میان می‌گذارند و از هم چیز یاد می‌گیرند. ... ما فرصتهای طلایی داریم که به توکیو، مسکو، یا هر جای دیگری سفر کنیم و هر بار که به چنین سفرهایی می‌رویم، کمی خودمان را با همکارانمان مرتبط‌تر احساس می‌کنیم. لذت علم در همین چیز است و موقعیت علمی هم از همین طریق حاصل می‌شود.

گفتگو با رابرت شریفر (برندهٔ جایزهٔ نوبل (۱۹۷۲) به اتفاق جان باردین و **لئون کوپر**، به‌خاطر تدوین نظریهٔ میکروسکوپیک ابررسانایی) نقل از *مجلهٔ فیزیک*. سال ۱۰، شمارهٔ ۲.

...

«تاریخ نشان می‌دهد که هر رئیس کشوری که ریاضیات یعنی منبع مشترک تمام علوم مثبت را احترام گذاشت و ریاضیدانان را تشویق کرد دوران سلطنت او درخشانتر و افتخارات او طولانیتر بوده است». حقیقت این است که فقط حکومتهای فهیم به تشویق تجسسات ریاضی می‌پردازند. زیرا این دانش عظیم در مدتی طویل، اما به‌طور اساسی، نتایج علمی و تجربی به‌بار می‌آورد و به همین دلیل است که به عقیدهٔ ما درجهٔ تمدن هر جامعه‌ای را می‌توان از روی ملاحظهٔ عقاید مردم آن نسبت به ریاضیات معلوم کرد.

شال

به نقل از کتاب *تاریخ علوم*. پی‌یر روسو. حسن صفاری

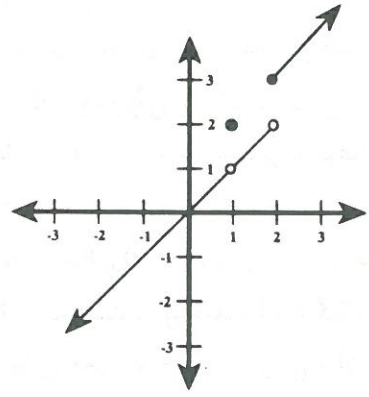
شکافهای نمودارها

تأملی بر ناپیوستگی

نوشتهٔ میشل ه. بریل و میشل استیوبن

شکافتگی نمودارها به طرز غافلگیرکننده‌ای مغایر با حدس و شهود است و توابعی با خصوصیات حیرت‌زا می‌آفریند. هرکسی می‌داند که تابع $g(x) = x$ تابعی است پیوسته، و تابع:

$$h(x) = \begin{cases} x + ۱ & ; \ x > ۲ \\ ۲ & ; \ x = ۱ \\ x & ; \ \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

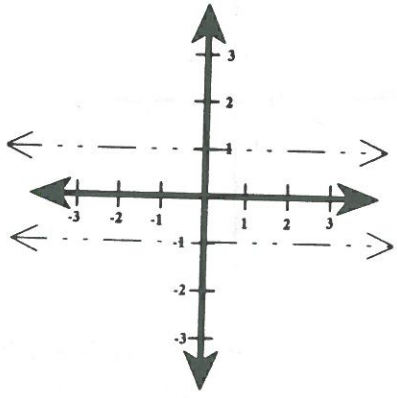


شکل۱

ناپیوسته است.

از دید فنی، h را تابعی «تقریباً همه جا پیوسته» توصیف می‌کنیم، زیرا تنها در تعداد معینی از نقاط ناپیوسته است. این نقاط را «شکاف» های منحنی می‌خوانیم. بسیار جالبتر از آن تابعی است که همه جا دارای شکاف است:

$$j(x) = \begin{cases} +۱ & ; \ x \ \text{های گویا} \\ -۱ & ; \ x \ \text{های گنگ} \end{cases}$$



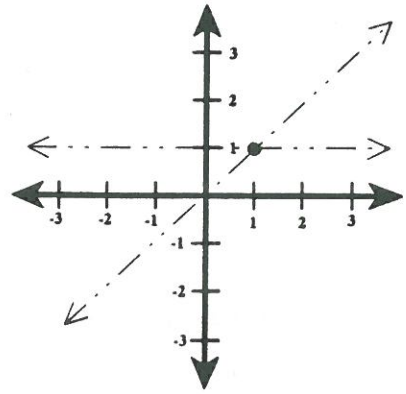
شکل۲

توجه کنید که قدرمطلق تابع j هیچ شکافی ندارد.

اغلب می‌انگارند که تابع پیوسته، در نقاط یک فاصله پیوسته است. ولی یک تابع می‌تواند، تنها در نقطه‌ای منفرد پیوسته باشد. برای مثال،

$$p(x) = \begin{cases} x & ; \ x \ \text{های گویا} \\ ۱ & ; \ x \ \text{های گنگ} \end{cases}$$

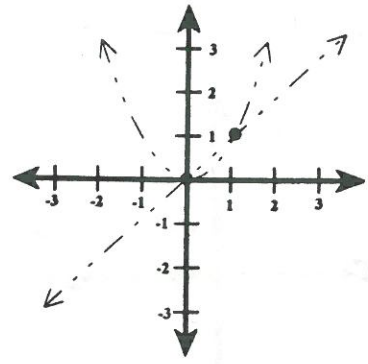
تنها در یک نقطه پیوسته است.



شکل۳

تغییری مختصر تابع دیگری به‌دست می‌دهد که دقیقاً در دو نقطه پیوسته است:

$$q(x) = \begin{cases} x & ; \text{ x های گویا} \\ x^2 & ; \text{ x های گنگ} \end{cases}$$



شکل۴

آیا امکان پیوستگی در همه جا، به جز در نقاط صحیح، برای تابعی حقیقی وجود دارد؟ آری، ممکن است.

مسئلهٔ ۱. با الهام از مثالهای پیشین، توانایی خود را در ساختن تابع (یا تابعهایی) که در همه جا ـ به جز نقاط صحیح ـ پیوسته‌اند، بیازمایید.

تابع $k(x) = \frac{x^2}{x}$ روی اعداد مثبت و منفی تعریف شده است. آیا تابعی پیوسته است؟ پیوستگی k بر دامنه‌اش[1] و ناپیوستگی آن روی تمام مجموعهٔ اعداد حقیقی روشن است، چرا که در صفر تعریف نشده است. عبارت «تابع پیوسته» بدون ارجاع آن به یک مجموعه، مبهم است. در برخی از کتابهای درسی، به تابع k، تابعی با «ناپیوستگی رفع شدنی» گفته می‌شود؛ در سایر کتابها، پیوسته محسوب می‌شود. در این مقال، تعبیر دوم را به کار می‌بندیم: یک تابع حقیقی پیوسته است، اگر و تنها اگر روی دامنه‌اش پیوسته باشد.

تعریف. (۱) *تابع f در نقطهٔ c متعلق به دامنه‌اش پیوسته است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر عدد مثبت ϵ، عدد مثبت σ یی موجود باشد چنان که، با شروط تعلق x به دامنهٔ f و* $|x - c| < \sigma$، $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.

(۲) *تابع حقیقی f پیوسته است، اگر و تنها اگر در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد.*

حال که پیوستگی را تعریف کردیم، دو پرسش مطرح می‌شود:

(۱) آیا نمودار یک تابع پیوسته، می‌تواند نمودار تابعی ناپیوسته نیز باشد؟

(۲) آیا ممکن است وارون یک تابع ناپیوسته، پیوسته باشد؟

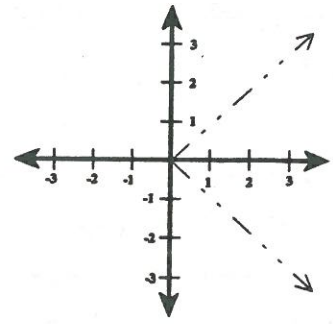
حس می‌کنیم که چنین نیست و پاسخ می‌دهیم: «نه» و «نه»! اما در حقیقت پاسخ هردو پرسش مثبت است. به ساختن چنین توابعی بیندیشید.

تابع جبری ساده‌ای را پیشنهاد می‌کنیم (چیزی از جبر دبیرستان) که هردو ویژگی را داراست. تابعی که در ذهن داریم، بخش مثبت محور x ها را بر همهٔ زیر مجموعه‌ای از محور y ها می‌نگارد.

ساده‌ترین مثالی که می‌شناسیم، نگارندهٔ اعداد گویای مثبت بر همهٔ قسمت مثبت محور y ها و اعداد گنگ مثبت روی همهٔ قسمت منفی محور y هاست. برخی، آن را، تابع «فلفل نمکی» خوانده‌اند:

$$F(x) = \begin{cases} +x & ; \text{ x های گویا} \\ -x & ; \text{ x های گنگ} \end{cases}$$

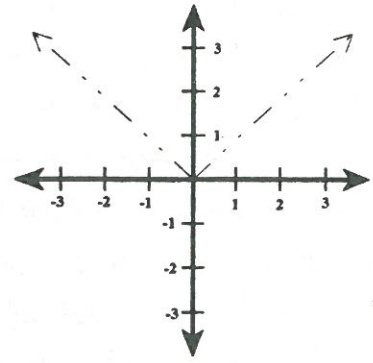
۱ـ گاهی یک تابع، قانونی است با عملکردی بر مجموعهٔ اعداد حقیقی. بزرگترین زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی که این قانون در حیطهٔ آن کارگر می‌افتد «دامنه» ی تابع مزبور است.



شکل۵

وارون F را می‌توان چنین نمایش داد

$$F^{-1}(x) = |x|$$



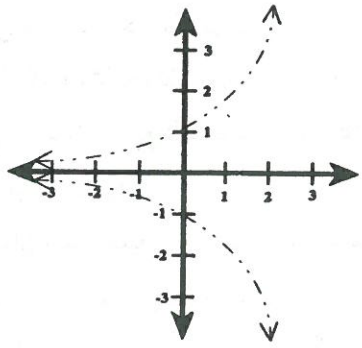
شکل۶

هرگاه x گویا باشد، بالاجبار مثبت خواهد بود و هرگاه گنگ باشد، به ناچار منفی. روشن است که باوجود ناپیوستگی F، F^{-1} تابعی است پیوسته. اما، نمودارهای F^{-1} و F یکی هستند، با این تفاوت که نسبت به خط $x = y$ قرینهٔ یکدیگرند. تقارن نباید، پیوستگی را مخدوش سازد. پس این طور به‌نظر می‌رسد که بسته به دیدگاه شما، F پیوسته یا ناپیوسته است.

چگونه ممکن است که‌تابعی هم پیوسته و هم ناپیوسته باشد؟ پاسخ این است که دامنهٔ F^{-1} (اعداد گویای غیرمنفی و اعداد گنگ منفی) با دامنهٔ F (اعداد حقیقی غیرمنفی) متفاوت است. بنابراین F^{-1} روی دامنه‌ای ضعیف پیوسته است، حال آنکه F بر دامنه‌ای قوی ناپیوسته. نکتهٔ قابل توجه این است که هرگونه تعریفی از تابع باید شامل دامنهٔ آن نیز باشد. با تغییر دامنهٔ تابع خصوصیات آن نیز عوض خواهد شد.

توابع ناپیوسته با وارون پیوسته را توابع ثرستن[1] می‌نامیم. اکنون تابع ثرستنی را معرفی می‌کنیم که تمام اعداد حقیقی را بر زیر مجموعه‌ای از آنها می‌نگارد:

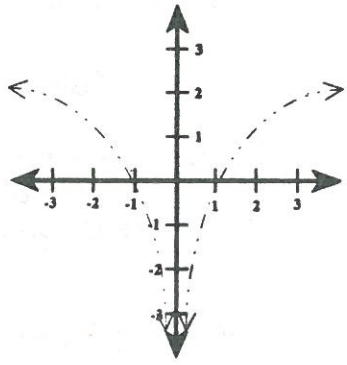
$$T(x) = \begin{cases} +2^x & ; \text{x های گویا} \\ -2^x & ; \text{x های گنگ} \end{cases}$$



شکل۷

این تابعی است ناپیوسته. وارون پیوستهٔ آن دو مجموعهٔ مجزا را روی خط اعداد حقیقی جای می‌دهد:

$$T^{-1}(x) = \log_2 |x|$$



شکل۸

با گویا بودن $\log_2 |x|$، x ناچار مثبت است و با گنگ بودن آن، x حتماً منفی است. (پرسش: آیا تابع ثرستنی وجود دارد که همهٔ محور xها را بر تمام محور y ها بنگارد؟ شرط می‌بندیم که نه!)

۱ـ Hugh Thurston می‌نویسد: «یک تابع می‌تواند پیوسته باشد هرچند دامنه‌ای پرشکاف داشته باشد. شهود برای توابعی بدون این ویژگیها، چون توابعی با دامنه‌های فشرده به‌میدان می‌آید.»
ثرستون از پیوستگی دامنه‌ای سخن می‌گوید، نه پیوستگی خطی.
(*American Mathematical Monthly* Vol.96(1989), P 814)

دربارهٔ آشنایی با چیزهای غریبی چون تابع ثرستن، فلیکس کلین گفته است: «عموماً براین باورند که می‌دانند منحنی چیست؛ اما تنها تا آن زمانی، که آنقدر ریاضی نیاموخته باشند که بیقاعدگیهای بیشمار ریاضی، گیجشان کند. ایدهٔ اصلی آن است که منحنی را به عنوان حد یک چند ضلعی محاط در آن بدانیم.»

به همین صورت همگی فکر می‌کنیم که خواص تابع پیوسته را می‌دانیم تا اینکه به مثالهای نقض «انحراف‌آمیزی» برمی‌خوریم. ایدهٔ اصلی آن است که تابع دامنه ـ پیوسته را به‌عنوان یک تابع و نه یک نمودار در نظر بگیریم.

آیا می‌توان تابعی حقیقی روی تمام محور x ها تعریف کرد، به طوری که بر اعداد گویا پیوسته و بر اعداد گنگ ناپیوسته باشد؟ خیر، اما جالب اینجاست که عکس آن ممکن است: می‌توان روی تمام محور x ها، تابعی تعریف کرد که روی اعداد گنگ پیوسته و بر اعداد گویا ناپیوسته باشد.

مثال زیر از این مورد که بسیار استادانه طراحی شده است، اغلب تابع دیریکله خوانده می‌شود:

$$D(x) = \begin{cases} 0 \ ; & x = 0 \text{ یا } x \text{ های گنگ} \\ 1/Q \ ; & \text{که در آن } x = P/Q \text{ و } P/Q \text{ تحویل شده است} \\ & (\text{یعنی ب.م.م. } (P,Q) = 1) \end{cases}$$

اثبات پیوستگی تابع فوق بر اعداد گنگ، پیچیده نیست. به‌عنوان مثال، نشان می‌دهیم که $D(x)$ در عدد گنگ π ناپیوسته است. چون $D(\pi) = 0$، بازه‌ای در همسایگی ۰ انتخاب می‌کنیم، مثلاً بازهٔ $(-0/1, 0/1)$. آیا می‌توان بازه‌ای حول π روی محور x ها، چنان برگزید که تمام نقاط داخل آن بر بازهٔ روی محور y ها نگاشته شود؟ بله: کافی است تمام کسرهای تحویل شدهٔ با مخرج Q را با شرط $|Q| \leqslant 10$، اختیار کنیم، سپس بازه‌ای کوچک پیرامون π روی محور x در نظر بگیریم که شامل هیچ یک از این نقاط نباشد. تمام نقاط این بازه باید به گونه‌ای روی محور y ها نگاشته شوند که داخل فاصلهٔ $(-0/1, 0/1)$ قرار گیرند. بدین شرح تابع دیریکله در نقطهٔ π پیوسته خواهد بود.

صورت غریب دیگری از پیوستگی در گرو به‌کارگیری محورهایی است با خصوصیات متفاوت. کلمهٔ همرونا[1] چون برای محورهای xy به‌کار رود، بدان معناست که محور x ها و محور y ها ویژگیهای همسانی دارند. اما، فرض کنید که تمایز در استاندارد متری محور x ها را (که تعریف فاصله روی محور است) با استاندارد متری محور y ها مجاز شماریم: تابع یک‌به‌یک و دلخواه f و دستگاه مختصات ناهمروند xy که در آن فاصلهٔ بین نقاط a و b بر محور x ها مطابق معمول، برابر $|a-b|$ است، ولی فاصلهٔ بین نقاط $f(a)$ و $f(b)$ بر محور y ها، به‌جای آنکه $|f(a)-f(b)|$ باشد، همچنان $|a-b|$ است. این بدان معناست که همهٔ توابع یک به‌یک باید بدون توجه به اینکه دامنه با چه شدتی شکافته شده است، پیوسته باشند. باوجودی که به‌ندرت متذکر شده‌اند، پیوستگی یک تابع به‌همان میزان که به تابع بستگی دارد، به استاندارد فاصله(ها) نیز مرتبط است.

فهم بسیاری از توابعی که شرحشان آمد، ساده است، ولی به لحاظ ذهنی یافتن آنها مشکل است. مثال پایانی ما، نمونهٔ برجسته‌ای از این دشواری است. باور بکنید یا نه، چنانچه اعداد گویا را از محور اعداد حقیقی خارج کنید، اعداد گنگ باقیمانده را می‌توان از نو، به گونه‌ای مرتب کرد که بدون ایجاد هیچ شکاف جدیدی، همهٔ شکافها را بپوشانند. به‌عبارت دیگر، نگاشتی یک به‌یک و پوشا از مجموعهٔ اعداد گنگ بر مجموعهٔ اعداد حقیقی وجود دارد. برای دانستن شگرد به‌کار رفته، نخست تابعی را که بازهٔ نیم باز $[0, +1)$ را روی بازهٔ بستهٔ $[0, +1]$ به صورت یک به یک و پوشا می‌نگارد، در نظر می‌گیریم. هر نقطه‌ای روی خودش نگاشته می‌شود، جز $f(\frac{1}{2}) = 1$، $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$، $f(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4}$ و به‌طور کلی، $f(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^{n-1}}$؛

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ ; & x = \pm\frac{1}{2^n} \\ x \ ; & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

۱ـ isotropic از ریشهٔ یونانی isos (برابری) و tropikos (تبدیل یا تغییر).

این تابع ظریف توسط دیوید روزِن از دانشگاه – Carnegie Mellon طرح شده است. این ایده تا چه اندازه هوشمندانه و ظریف است؟ از اولین متخصص جبری که می‌بینید بخواهید که آن را یک روزه بیابد.

مسئلهٔ ۲. ایدهٔ روزِن را با یافتن تابعی یک به‌یک و «پوشا» از اعداد حقیقی گنگ بر مجموعهٔ اعداد حقیقی تعمیم دهید.

در این باره، روشهای متعددی موجود است و ممکن است شما بتوانید پاسخ ما را اثبات کرده، تعمیم دهید.

تصور ما این است که چنانچه روی مسائل طرح شده کار کنید، در باب زیبایی خاص توابع انحراف‌آمیز با ما هم‌عقیده خواهید شد.

ترجمهٔ محمد رجبی طرخورانی

...

ما سرانجام به این عقیده می‌رسیم که قوانین طبیعت که در نظریهٔ کوانتوم به‌صورت ریاضی فرمولبندی می‌کنیم، دیگر با خود ذرات سروکار ندارند، بلکه با دانش ما از ذرات بنیادی سروکار دارند. پس مسئلهٔ اینکه ذرات خودشان در فضا و زمان وجود دارند دیگر به این صورت قابل طرح نیست... بدین ترتیب ایدهٔ واقعیت عینی ذرات بنیادی، به‌نحو عجیبی تبخیر شده است، آن هم نه در تیرگی یک مفهوم جدید مبهم یا هنوز ناشناخته، بلکه در روشنی واضح ریاضیاتی که دیگر رفتار ذرات بنیادی را نشان نمی‌دهد، بلکه نمایشگر دانش ما از این رفتار است... قوانین نظریهٔ کوانتوم، که به‌صورت ریاضی تدوین شده‌اند، به‌طور واضح نشان می‌دهند که مفاهیم شهودی معمولی را نمی‌توان بدون ابهام در مورد کوچکترین ذرات به‌کار برد. تمامی لغات یا مفاهیمی که ما برای توصیف اشیای معمولی به‌کار می‌بریم ـ نظیر موضع، سرعت، رنگ، اندازه و غیره ـ نامعین و مسئله‌زا می‌شوند، اگر بخواهیم آنها را در مورد ذرات بنیادی به‌کار بریم... مهم این است که دریابیم، در حالی که رفتار کوچکترین ذرات را نمی‌توان بی‌ابهام برحسب زبان معمولی توصیف کرد، زبان ریاضیات هنوز برای یک توصیف بدون ابهام آنچه می‌گذرد، کافی است... [درحقیقت] خیلی مشکل است که زبانمان را طوری اصلاح کنیم که قادر به توصیف فرایندهای اتمی باشد، زیرا لغات تنها می‌توانند چیزهایی را توصیف کنند که ما بتوانیم تصاویر ذهنی از آنها بسازیم و این توانایی نیز ناشی از تجارب روزمره است. خوشبختانه ریاضیات این محدودیت را ندارد و این امکان به‌دست آمده است که یک طرح ریاضی ـ نظریهٔ کوانتوم ـ ابداع کنیم.

ورنر هایزنبرگ

به نقل از کتاب: *تحلیلی از دیدگاههای فلسفی فیزیکدانان معاصر*.

دکتر مهدی گلشنی

...

در جوانی امیدوار بودم که به سرانجام رساندن این تحقیقات در نجوم برایم مقدور باشد، اینک، در عهد کهولت، آن امید را از دست نهاده‌ام، چه موانعی در راهم پدیدار شده است. ولی آنچه دربارهٔ آن می‌گویم شاید توجه محققان آینده را برانگیزد. علم نجوم زمان ما چیزی عرضه نمی‌کند که بتوان از آن معنی و واقعیت محصلی بیرون کشید. مدلی که در زمانهٔ ما پیش نهاده‌اند، فقط با محاسبات موافق است، نه با موجودیت واقعی.

ابن رشد (۱۱۲۶ – ۱۱۹۸ میلادی)

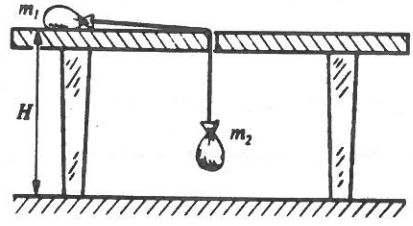
به نقل از کتاب *زندگینامهٔ علمی دانشمندان اسلامی*. ویراستهٔ حسین معصومی همدانی.

چالش با فیزیک و ریاضی

فیزیک

ف . ۱

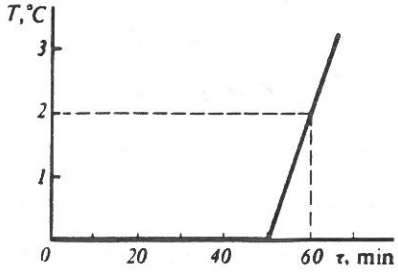
دو کیسه . کیسه‌ای به‌جرم m_1 روی سطح افقی میزی می‌لغزد . این کیسه توسط نخ بدون جرمی به‌کیسهٔ دیگری به‌جرم m_2 متصل است . این نخ از سوراخ کوچکی در میان میز می‌گذرد (شکل ۱) . طول نخ L و ارتفاع میز H است و $H < L$. اگر در ابتدا تمام طول نخ روی میز باشد و کیسه‌ها از حالت سکون حرکت کنند ، کیسهٔ دوم پس از تماس با کف زمین چقدر بالا می‌رود ؟ (اثر اصطکاک را نادیده بگیرید.) (ج . کوتکین)



شکل۱

ف . ۲

سطل یخ . سطلی حاوی مخلوطی از آب و یخ به‌جرم $m = ۱۰kg$ است . این سطل به اتاق آورده می‌شود و بلافاصله پس ازآن دمای مخلوط اندازه گرفته می‌شود . نمودار $T_{(\tau)}$ در شکل ۲ رسم شده است . گرمای ویژهٔ آب $c_w = ۴/۲J/(kg \cdot K)$ و گرمای نهان ذوب یخ $\lambda = ۳۴۰kJ/kg$ است . با چشمپوشی از ظرفیت گرمایی سطل ، m_i جرم یخ موجود در سطل را در لحظهٔ ورود آن به‌اتاق تعیین کنید . (ا . بوزدین)



شکل۲

ف . ۳

مولکول مرتعش . ظرفی مکعبی به‌حجم $V = ۱$ لیتر حاوی $m = ۰/۰۱g$ هلیم در دمای $T = ۳۰۰K$ است . با بررسی حرکت یک مولکول تعیین کنید که طی مدت $t = ۱$ دقیقه چند بار به‌سطح ظرف برخورد می‌کند ؟ (ا . زیلبرمَن)

ف . ۴

گسیل آلفایی . یک منبع نقطه‌ای از ذرات آلفا به‌طور یکنواخت در همهٔ جهتها ذراتی گسیل می‌کند . یک صفحهٔ عکاسی $۲۰cm \times ۲۰cm$ که در فاصلهٔ $۱۰cm$ از منبع قرار دارد ، پس از ۱۰ ثانیه قرارگرفتن در معرض ذرات ، ۲۰۰ اثر از ذرات آلفا نشان می‌دهد . منبع در هر ساعت چند ذره گسیل می‌کند ؟ (و . وُلکوف)

ریاضی

ر. ۱

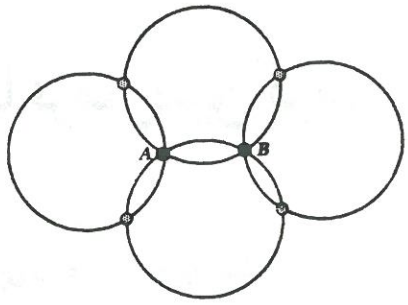
بیشترین کمترها و کمترین بیشترها. مقداری مرکب بر صفحهٔ کاغذی ریخت. به‌ازای هر نقطهٔ لکهٔ حاصل، کمترین و بیشترین فاصله از پیرامون لکه را اندازه گرفته‌ایم. فرض می‌کنیم r بیشترین کمترین فاصله‌ها و R کمترین بیشترین فاصله‌ها باشد، در صورتی که $r = R$ باشد، لکه به‌چه شکلی است؟ (ا. بلاخ)

ر. ۲

بخشپذیری اجتناب‌ناپذیر. مجموعهٔ تمام اعداد صحیح و مثبت ۱، ۲، ... را به‌چند دنبالهٔ حسابی افراز کرده‌ایم. ثابت کنید که اولین جملهٔ حداقل یکی از این دنباله‌ها، بر قدرنسبتش بخشپذیر است. (ا. کلارف)

ر. ۳

چهار دایرهٔ متقاطع. دو دایرهٔ همنهشت در نقاط A و B متقاطع‌اند. دو دایرهٔ دیگر با همان شعاع را، یکی از A، دیگری از B، رسم کرده‌ایم (شکل ۳). ثابت کنید که چهار نقطهٔ تقاطع دوبه‌دوی دایره‌ها (البته به‌جز A و B) رأسهای یک متوازی‌الاضلاع‌اند. (وی. و آی. کاپوویچ)



شکل ۳

ر. ۴

جمعهای نقاط وسط. اعداد صحیح و مثبت را، طبق قاعدهٔ زیر، بر نقاط یک پاره‌خط نوشته‌ایم: در مرحلهٔ اول دو ۱ در دوسر پاره‌خط گذاشته‌ایم، در مرحلهٔ دوم مجموعشان، یعنی ۲، را در وسط پاره‌خط قرار داده‌ایم؛ در مراحل بعد مجموع هر جفت عدد همسایه (ی حاصل از مراحل قبلی) را روی پاره‌خط در بین آنها نوشته‌ایم، و به‌این ترتیب در مرحلهٔ nام، $n - ۱$ عدد اضافه کرده‌ایم. بعد از ۱۹۹۱ امین مرحله چند ۱۹۹۱ می‌نویسیم؟ (ج. گالپرین)

ر. ۵

شیر خشمگین. شیری بر حلقهٔ دایره شکل سیرکی به‌شعاع ۱۰ متر حمله می‌برد، و ۳۰ کیلومتر در امتداد خط شکسته‌ای می‌دود. ثابت کنید که مجموع زوایای تمام برگشتهای واقع در مسیرش بزرگتر از ۲/۹۹۸ رادیان است. (آی. برنشتین)

(پاسخها در صفحهٔ ۴۹)

...

فکرهای بکر و رهیافتهای نو، به‌ندرت زاییدهٔ تخیلات بوالهوسانه است. اغلب این‌گونه بدعت‌گذاریهای ناگهانی و بنیادی، واکنش طبیعی در مقابل موفقیتها یا شکستهای علمی و تحولات تکنیکی است.

به نقل از مجلهٔ *فیزیک*

...

دنیا را فقط از طریق کشف و شهود نمی‌توان شناخت و درک کرد، ولی بدون آن هم هیچ چیز ممکن نیست. کشف و شهود در بهترین حالت، جز وسیله‌ای برای نزدیک شدن به حقیقت نبوده است و هرگز هم خود حقیقت نیست.

جستجوی ناتمام

کارل پوپر. ایرج علی‌ابادی

آیا فرما چنین کرد؟

سیری در عرصهٔ تجزیهٔ اعداد

نوشتهٔ ب.ا.کوردِمسکی

نام پیرفرما (۱۶۰۱ – ۱۶۶۵)، ریاضیدان نامدار فرانسوی با اسرار بسیاری همراه است. یک بار نامه‌ای به این مضمون به‌دستش رسید: «آیا عدد ۱۰۰۸۹۵۵۹۸۱۶۹ اول است؟». فرما بیدرنگ پاسخ داد که عدد دوازده رقمی مزبور حاصلضرب دو عدد اول ۸۹۸۴۲۳ و ۱۱۲۳۰۳ است.

او چیزی در این باره که چگونه به این نتیجه رسیده است، نگفت.

یافتن عوامل اول یک عدد طبیعی را «تجزیه به عوامل» گویند. حتی به کمک کامپیوترهای مدرن نیز، تجزیهٔ عددی بزرگ به‌گونه‌ای استثنایی طاقت‌فرساست؛ چه رسد به «روش دستی». آزمودن تعدادی از اعداد اول کوچک چون ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ... به عنوان عوامل احتمالی عدد مورد نظر کاری ساده است ـ برای بخشپذیری براین اعداد، نشانه‌های معروفی در اختیار است. (تمرین ۱ را در انتهای همین مقاله ببینید.) شناخت این نشانه‌های راوی، محاسبات را تاحد زیادی ساده می‌کند.

به‌علاوه، واضح است که برای یافتن عوامل احتمالی هر عدد مفروض N، کافی است اعداد اول کوچکتر از $\sqrt{N}$ را بیازماییم. در واقع اگر عدد مفروض N، عامل m ی با شرط $m > \sqrt{N}$ داشته باشد، آنگاه عاملی کوچکتر از $\sqrt{N}$ نیز خواهد داشت، که از تقسیم N بر m به‌دست می‌آید.

یکی از راههای پیدا کردن عوامل اول N عبارت است از محاسبهٔ بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) عدد N و عدد دیگری که عوامل آن معلوم‌اند. انجام این امر، با بکارگیری الگوریتم مشهور اقلیدس ممکن است.

در مقالهٔ «ابزارهای تقسیم» در این شماره اساس الگوریتم اقلیدسی و نمونه‌هایی از چگونگی بکارگیری آن ارائه شده است. در اینجا، چکیده‌ای از شیوهٔ عملکرد آن را یادآور می‌شویم. ابتدا، با تقسیم عدد بزرگتر بر دیگری، باقیماندهٔ r_1 را به‌دست می‌آوریم؛ سپس r_2 را از تقسیم مقسوم علیه پیشین بر r_1 به‌دست می‌آوریم، و به همین ترتیب r_3 از تقسیم r_1 بر r_2 به‌دست می‌آید، تا آخر. آخرین باقیماندهٔ ناصفر (چنین عددی، مسلماً موجود است، زیرا هریک از اعداد متوالی r_i کوچکتر از عدد پیشین است.) بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد مفروض است. (چنانچه این عدد برابر ۱ باشد، دو عدد مزبور را نسبت به هم اول می‌گویند.)

برای مثال، این الگوریتم را برای اعداد ۱۰۴ و ۳۹ به‌کار می‌بریم:

۱۰۴ ÷ ۳۹ = ۲ (باقیمانده۲۶)

۳۹ ÷ ۲۶ = ۱ (باقیمانده۱۳)

۲۶ ÷ ۱۳ = ۲ (باقیمانده۰)

پاسخ: ب.م.م (۱۰۴,۳۹) = ۱۳ .

چگونه می‌توان، الگوریتم اقلیدسی را در تجزیه به‌کار برد؟

برای یافتن عوامل اول عدد N، عدد دیگری می‌سازیم چون P. این عدد برابر حاصلضرب کلیهٔ اعداد اول متوالی است، از کوچکترین عوامل «احتمالی» N تا بزرگترین عدد اول کوچکتر از $\sqrt{N}$. N و P اعدادی هستند که در الگوریتم اقلیدسی به‌کار گرفته می‌شوند.

برای نمونه، N = ۸۵۱ را در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که $\sqrt{N} < ۳۱$. با بررسی نشانه‌های بخشپذیری درمی‌یابیم که N بر اعداد ۳، ۷، ۱۱ یا ۱۳ بخشپذیر نیست. همچنین واضح است که از تقسیم ۸۵۱ بر ۱۷ باقیمانده‌ای برابر واحد به‌دست می‌آید (۱۷ × ۵ = ۸۵) . بنابراین تنها باید بخشپذیری N را بر ۱۹، ۲۳ یا ۲۹ بررسی کرد. برای عددی به کوچکی ۸۵۱، این کار به سادگی با یک محاسبهٔ مستقیم قابل انجام است. کافی است ۸۵۱ را بر هریک از عوامل احتمالی آن تقسیم کنیم. اما برای درک بهتر نحوهٔ عملکرد، راهی را پیش می‌گیریم که پاسخگوی اعداد بزرگتر نیز باشد.

عدد P = ۱۹ × ۲۳ × ۲۹ = ۱۲۶۷۳ را ساخته، الگوریتم اقلیدسی را به‌کار می‌گیریم:

۱۲۶۷۳ ÷ ۸۵۱ = ۱۴ (باقیمانده۷۵۹)

۸۵۱ ÷ ۷۵۹ = ۱ (باقیمانده۹۲)

۷۵۹ ÷ ۹۲ = ۸ (باقیمانده۲۳)

۹۲ ÷ ۲۳ = ۴ (باقیمانده۰)

بنابراین ۲۳ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک N و P و در نتیجه یکی از عوامل ۸۵۱ است. از تقسیم ۸۵۱ بر ۲۳ عدد ۳۷ به‌دست می‌آید، که خود عددی اول است.

بدین ترتیب تجزیهٔ ۸۵۱ کامل می‌شود: ۳۷ × ۲۳ = ۸۵۱ . محاسباتی از این دست، دربارهٔ عددی که از فرما پرسیده شده بود، بیشتر به طول می‌انجامد. (خود شما امتحان کنید!) بی‌شک، فرما به شیوهٔ دیگر عمل کرده است. ولی آن شیوه کدام است؟

در آستانهٔ کشف؟

در یک کتاب جدید ریاضی چنین نوشته شده است: «ریاضیدانان سرشناس قرن هفدهم که تلاشهای خود را تاحد زیادی، بر گسترش نظریهٔ اعداد معطوف ساخته بودند، روشهایی برای تشخیص اعداد اول دراختیار داشتند که ما از آنها بی‌اطلاعیم.» اما از آنجایی که، این جادوگران عرصهٔ محاسبات، اسرار روشهای تجزیهٔ خود را، بر اخلافشان آشکار نساختند، برخی از روشهایی که بعدها اختراع شد، محتملاً چیزی جز تکرار اکتشافات آنها نبوده است.

فرما، یکی از پدیدآورندگان نظریهٔ اعداد، در محاسبات خویش از بسیاری از ویژگیهای اعداد استفاده می‌کرده است. بخصوص، وی، حتماً می‌دانسته که هر عدد فرد (و نیز هر عدد زوج بخشپذیر بر ۴) را می‌توان به صورت تفاضل مربعات دو عدد صحیح x و y نمایش داد:

$$\begin{aligned} N &= a.b \\ &= \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{a-b}{۲}\right)^۲ \\ &= x^۲ - y^۲ \end{aligned}$$

که در آن a و b (a > b) دو عامل فرد دلخواه برای عدد فرد N هستند (در این صورت a + b و a − b زوج و x و y اعداد صحیح خواهند بود).

اگر N عددی اول باشد، آنگاه a = N ، b = ۱ و تجزیهٔ $x^۲ - y^۲ = (x+y)(x-y)$ یکتاست و هیچ عامل دیگری جز N و ۱ به‌دست نمی‌دهد. اما، اگر N عدد مرکبی باشد، آنگاه تجزیه‌ای خواهد داشت به صورت (x + y)(x − y) که دست‌کم یک جفت عامل متمایز با N و ۱ می‌دهد. برای نمونه، عدد اول ۱۷ تنها یک نمایش به صورت تفاضل مربعات دارد: ۱ × ۱۷ = ۹² − ۸² = ۱۷ ؛ عدد مرکب ۲۰۳ را می‌توان به دو صورت نمایش داد:

۲۰۳ = ۱۰۲² − ۱۰۱² = ۲۰۳ × ۱

و

$$۲۰۳ = ۱۸^۲ - ۱۱^۲ = ۲۹ \times ۷$$

بنابراین، تاکنون، «آزمایشگاه تجزیه» به ابزار دیگری مجهز شده است، که آن را «تجزیه به کمک تفاضل مربعات» می‌نامیم. برای انتخاب مربعات مناسب $x^۲$ و $y^۲$ می‌توان از این الگوریتم استفاده کرد: (۱) کوچکترین مربع کامل $x^۲$ ای را که از عدد مفروض N بزرگتر است، بیابید. (برای مثال، از یک جدول مربعات استفاده کنید، یا ریشهٔ دوم N را با تقریب اضافی به‌دست آورید) (۲) N را از $x^۲$ کم کنید.

اگر این تفاضل مربع کامل باشد (به‌عبارت دیگر اگر $x^۲ - N = y^۲$)، روند انتخاب به پایان می‌رسد:

$$N = x^۲ - y^۲ = (x + y)(x - y)$$

در غیر این صورت مراحل را ادامه می‌دهیم: N را از مربع بعدی کم کرده، این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به تفاضلی دست یابیم که مربع کامل است.

حال با جستجوی عاملهای یک جفت عدد، مثلاً: $N_۱ = ۱۵۳۵۸۳$ و $N_۲ = ۶۸۹$، چگونگی عملکرد الگوریتم را بررسی می‌کنیم.

برای $N_۱$ داریم: $\sqrt{۱۵۳۵۸۳} \cong ۳۹۲$؛ $۳۹۲^۲ = ۱۵۳۶۶۴$؛ $۱۵۳۶۶۴ - ۱۵۳۵۸۳ = ۸۱ = ۹^۲$. بنابراین $۱۵۳۵۸۳ = ۳۸۳ \times ۴۰۱ = ۳۹۲^۲ - ۹^۲$ و هردو عامل اعداد اول‌اند. توجه داشته باشید که آنها به‌یکدیگر و در نتیجه به $\sqrt{N}$ بسیار نزدیک‌اند و هم از این روست که به‌سرعت پاسخ را یافتیم.

برای $N_۲ = ۶۸۹$، نزدیکترین مربع کامل دردسترس عبارت است از $۲۷^۲ = ۲۷۹$. بنابراین:

$$۲۷^۲ - N_۲ = ۷۲۹ - ۶۸۹ = ۴۰$$

$$۲۸^۲ - N_۲ = ۷۸۴ - ۶۸۹ = ۹۵$$

$$۲۹^۲ - N_۲ = ۸۴۱ - ۶۸۹ = ۱۵۲$$

.....

$$۳۳^۲ - N_۲ = ۱۰۸۹ - ۶۸۹ = ۴۰۰ = ۲۰^۲$$

در نتیجه

$$۶۸۹ = ۳۳^۲ - ۲۰^۲ = ۵۳ \times ۱۳$$

برای رسیدن به این نتیجه، هفت بار کوشیده‌ایم! با مقایسهٔ عاملهای ۶۸۹، اختلاف بین آنها را بسیار زیاد می‌یابیم. که همین، دلیل به طول انجامیدن محاسبات است.

شگردی هوشمندانه

هنگامی که به تجزیهٔ عدد مرکب N می‌پردازیم، البته از پیش دربارهٔ نزدیک بودن عوامل آن به یکدیگر هیچ نمی‌دانیم. اما اگر عددی در طی مراحل متوالی الگوریتم، مربع کامل مورد نظر را تولید نکند، واضح است که عوامل مورد نظر، اختلاف زیادی با $\sqrt{N}$ دارند.

شگردی به‌کار می‌بندیم: پس از ضرب عدد مفروض N در یک عدد، مثلاً ۳ (برای اطمینان از فرد ماندن آن)، روش خود را یکبار دیگر به‌طور کامل به‌کار می‌گیریم. این امر، سبب می‌شود تا یکی از دو عامل N که کوچکتر است، سه برابر شود و عاملهای ۳N به یکدیگر و در نتیجه به $\sqrt{۳N}$ نزدیکتر گردند.

اگر دلیلی بر فرض وجود فاصله‌ای بیشتر بین عاملهای N دردست باشد، می‌توان N را از همان ابتدا در ۵، ۷ یا ۸ ضرب کرد (در حالت اخیر به عددی زوج می‌رسیم، ولی این عدد به‌گونه‌ای هست که بتوان، آن را به صورت تفاضل مربعات اعداد صحیح نمایش داد). ضرب N در ۲ در هیچ حالتی فایده‌ای ندارد و ضرب آن در ۴ نیز به جایی نمی‌رسد. (شما خود می‌توانید، این را ثابت کنید.)

خوب است، دوباره به سراغ $N_۲ = ۶۸۹$ برویم و شگرد خود را دربارهٔ آن به‌کار بندیم. $N_۲$ را در ۵ ضرب می‌کنیم که به‌دست می‌دهد $۵N_۲ = ۳۴۴۵$؛ $\sqrt{۳۴۴۵} \cong ۵۹$؛ $۵۹^۲ = ۳۴۸۱$؛ $۳۴۸۱ - ۳۴۴۵ = ۳۶ = ۶^۲$. بنابراین به دست می‌آوریم:

$$۳۴۴۵ = ۵۹^۲ - ۶^۲ = ۶۵ \times ۵۳; ۵N_۲ = ۶۵ \times ۵۳$$

$$N_۲ = ۵۳ \times ۱۳$$

با اولین تلاش به نتیجه رسیدیم ـ حال آنکه بار پیش هفت

بار کوشیده بودیم!

شاید، این کاری است که فرما کرد

باز می‌خواهیم از روش تجزیه به کمک تفاضل مربعات دربارهٔ عدد $N = ۱۰۰۸۹۵۵۹۸۱۶۹$ استفاده کنیم، و اکنون به افزودن عاملی تازه، اطمینان داریم. فرض کنید که عامل ۸ را مناسب حدس بزنیم. (در این مورد تنها می‌گوییم که دورنمای کوششمان با عواملی کوچکتر چندان امیدبخش نمی‌نماید.)

خواهیم داشت: $۸N = ۸۰۷۱۶۴۷۸۵۳۵۲$. حال کوچکترین عددی را که مربع آن از ۸N بزرگتر است، می‌یابیم:

$$\sqrt{۸۰۷۱۶۴۷۸۵۳۵۲} = ۸۹۸۴۲۴ \text{ (با تقریب اضافی)}$$

بدین ترتیب: $۸۹۸۴۲۴^۲ - ۸N = ۸۹۸۴۲۴$. اگرچه تفاضل به دست آمده مربع کاملی نیست، استفاده از الگوریتم دیگر لزومی ندارد: پاداش شجاعت ما موفقیتی غیرمنتظره بود ـ مقسوم‌علیه مشترک، همان ۸۹۸۴۲۴ است! حال تجزیهٔ ۸N به کمک محاسبه‌ای ساده میسر شده است:

$$۸N = ۸۹۸۴۲۴ \times (۸۹۸۴۲۴ - ۱)$$

$$= ۸ \times ۱۱۲۳۰۳ \times ۸۹۸۴۲۳$$

و سرانجام: $N = ۱۱۲۳۰۳ \times ۸۹۸۴۲۳$

نمی‌دانیم آیا این دقیقاً همان چیزی است که در «آزمایشگاه» فرما روی داده است یا نه، نشانه‌ای دردست نیست. در هرحال، امیدواریم از این سیر ذهنی در روزگاران گذشته، کمابیش لذت برده باشید.

تمرین

۱. فرض کنید $\overline{a_n a_{n-۱} \cdots a_۱ a_۰}$ نمایش اعشاری (دهدهی) عدد N باشد. ثابت کنید باقیمانده‌های عدد N در تقسیم بر ۷، ۱۱ یا ۱۳ درست همان باقیمانده‌های تقسیم عدد $\overline{a_۲ a_۱ a_۰} - \overline{a_۵ a_۴ a_۳} + \overline{a_۸ a_۷ a_۶} - \cdots$ بر سه‌عدد مزبور است (با همان ترتیب). در حالت خاص، اگر N بیش از سه رقم نداشته باشد، $N = \overline{a_۲ a_۱ a_۰}$، سه باقیماندهٔ مزبور متناظراً برابر باقیمانده‌های اعداد $۲a_۲ + ۳a_۱ + a_۰$، $a_۲ - a_۱ + a_۰$ و $-۴a_۲ - ۳a_۱ + a_۰$ اند.

۲. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ۸۰۸۸۷ و ۴۰۰۹۱ را تعیین کنید.

۳. ثابت کنید عدد $N = ۵۵۶۳۷$ تنها یک عامل اول کوچکتر از ۳۰ دارد (از P کمک بگیرید: $P = ۱۷ \times ۱۹ \times ۲۳ \times ۲۹ = ۲۱۵۴۴۱$) و همهٔ عوامل دیگر N را بیابید.

۴. با استفاده از تجزیه به‌کمک تفاضل مربعات، عدد ۱۳۱۲۸۹ را به صورت حاصلضرب عوامل اول بنویسید.

۵. عدد ۵۰۰۲۰۷ را به کمک تفاضل مربعات تجزیه کنید. (از «شگرد» ضرب عدد در ۳ استفاده کنید.)

۶. با استفاده از تجزیه به کمک تفاضل مربعات دربارهٔ عدد $N = ۲۰۰۹۹$ مستقیماً نشان دهید:

$$۲۰۰۹۹ = ۱۹۹ \times ۱۰۱$$

این کار چند مرحله دارد؟ پس از آگاهی از نتیجه، توضیح دهید چرا بهترین عامل برای کاهش مراحل، عدد ۸ است. چند مرحله، در تجزیهٔ ۸N لازم است؟ (پاسخها در صفحهٔ ۴۹)

ترجمهٔ سیدحسین موسوی

پرسیدم: «آیا این تصاویر کمکی به فهم ما نمی‌کنند؟»

گفت: «چرا. ولی باید به دانشجویان هشدار بدهیم که این تصاویر نمایشگر نهاد فضای واقعی نیستند. ما واقعاً اطلاعی دربارهٔ چگونگی ساختار فضایی در سطح مولکولی نداریم. این اشکال چیزی نیستند جز چند شکل، مانند یک منحنی افزایش جمعیت ... همه می‌دانیم که این منحنی استعاره‌ای بیش نیست. جمعیت به معنای فضایی زیاد نمی‌شوند. تصاویر مولکولی نیز باید به این مفهوم فهمیده شوند. هیچکس نمی‌داند واقعاً مولکولها چه نوع ساختار فضایی دارند.»

مقدمه‌ای بر فلسفهٔ علم

مارتین گاردنر. یوسف عفیفی

معماها

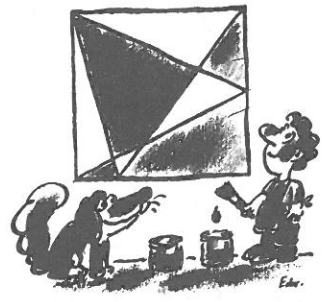
م.۱

ثابت کنید که حداقل یکی از هر ۱۸ عدد سه رقمی متوالی، بر مجموع ارقامش بخشپذیر است. (س. یلیسیف)

شکل۱

م.۲

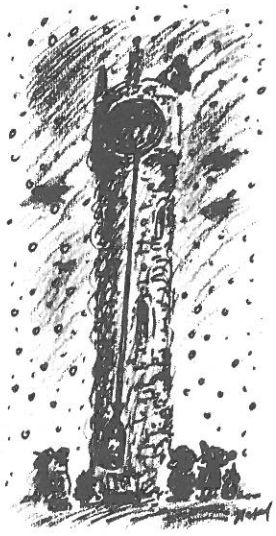
کدام قسمت از مربع شکل ۲ سطح بیشتری دارد: قسمت ▭ یا قسمت ▭ ؟ (و. پریزولوف)



شکل۲

م.۳

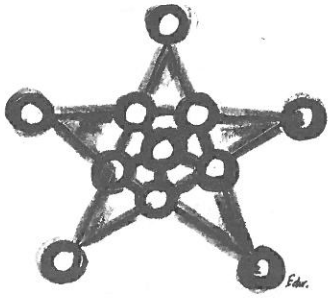
در بعضی از ساعتهای عتیقه‌ای که برای کار در هوای آزاد در نظر گرفته شده بودند، پاندول ساعت، لوله‌ای بلند با ظرفی از جیوه در انتهای آن بود. مقصود از این طرح چه بوده است؟ (ا. بوزدین)



شکل۳

م.۴

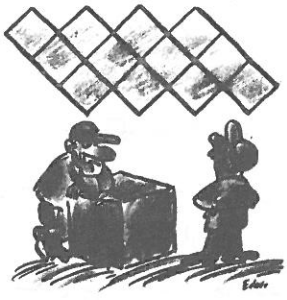
اعداد ۱ تا ۱۱ را در دوایر شکل ۴ چنان بنویسید که مجموع چهار عدد واقع در رئوس هریک از پنج قطاع ستاره برابر ۲۵ باشد. (ن. آویلوف)



شکل۴

م.۵

آیا می‌توان مکعبی را با تکه کاغذ پلکان مانند آمده در شکل ۵، چنان پیچید که تمام رویهٔ آن بدون روی هم افتادن لبه‌های کاغذ پوشانده شود؟ (ن. دولبیلین)



شکل۵

قدرت تشابه

بُرد تمثیل

نوشتهٔ س.ر.فیلوونویچ

کلمهٔ« تشابه» خیلی زیاد به‌کار می‌رود و چنان به‌آن عادت کرده‌ایم که گاهی توجه زیادی به‌معنای آن نمی‌کنیم. یکی از معانی این کلمه در فرهنگ دانشگاهی جدید وبستر چنین است: «مانند هم بودن بعضی مشخصه‌های چیزهایی که به‌لحاظهای دیگر متفاوت‌اند». با استفاده از تشابه می‌توانیم با بررسی یک شئ، اطلاعاتی در مورد شیء متفاوت دیگری به‌دست آوریم.

تشابه نقش مهمی در فیزیک دارد. به‌کمک تشابه می‌توان بدون محاسبه‌های صریح و پرزحمت به‌نتایج مهمی دست یافت. مثلاً تشابه صوت و نور در پی‌ریزی نظریهٔ موجی نور در اوایل قرن بیستم نقش مهمی داشت. در دههٔ ۱۹۲۰ یک تشابه نورشناختی ـ مکانیکی تاحد زیادی به‌پیدایش نظریهٔ کوانتم کمک کرد.

تشابه در فیزیک دبیرستانی نیز به‌شما کمک می‌کند. اما هر تشابه ضعف خاص خود را دارد: اگر تشابه را بیش از اندازه گسترش دهیم، به‌نتایج نادرست می‌رسیم. بینشی که در حل مسئله‌های فیزیک به‌دست می‌آوریم به‌ما کمک می‌کند که از تشابه به صورت ابزار کارآمدی استفاده کنیم. در این مقاله نگاهی داریم به‌برخی مثالها که در درک چگونگی استفاده از تشابه فیزیکی کمکمان می‌کنند.

مسئله‌ای برای بچه‌ها

در کتابهای درسی دبیرستان به‌مسئله‌هایی دربارهٔ تصادم گویها برمی‌خورید. این مسئله‌ها متداول‌اند، زیرا به‌صورت نسبتاً ساده‌ای، قوانین بنیادی پایستاری (بقای) انرژی و اندازه حرکت را مطرح می‌کنند.

بررسی برخوردها تاحدود معینی ریشه در سنت دارد. این مسئله در کانون توجه دکارت و هویگنس در قرن هفده قرار داشت، و در قرن نوزدهم گوستاو ـ گاسپار کوریولیس، فیزیکدان فرانسوی، اثر خود به‌نام *نظریهٔ ریاضی بازی بیلیارد* را منتشر کرد که به‌اثری کلاسیک تبدیل شد. اما امروزه نباید تصور کنیم که مسئلهٔ برخوردگویها تنها برای تشریح قوانین فیزیکی به‌کار می‌رود. مدل برخورد ارتباط نزدیکی با مسئله‌های فیزیک جدید دارد. برای دیدن چگونگی این رابطه، مثال ساده‌ای می‌زنیم.

مسئله. گویی به‌جرم m_1 که با سرعت v_0 حرکت می‌کند به‌گوی ساکنی به جرم m_2 برخورد می‌کند. بعد از برخورد کشسان (اِلاستیک) گویها از هم جدا می‌شوند. تغییر نسبی انرژی جنبشی گوی m_2 را پس از برخورد، با صرف‌نظر کردن از گردش گویها به‌دست آورید.

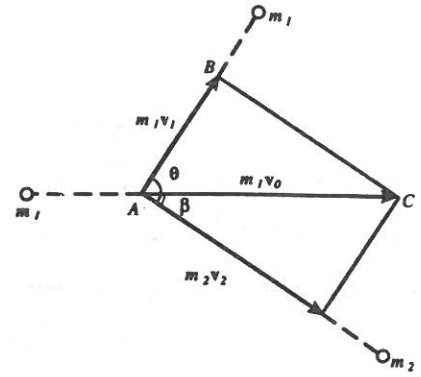
حل. حالت کلی برخوردهای ناهم مرکز را در نظر می‌گیریم چنان‌که بعد از برخورد سرعت گویها با راستای اصلی v_0 زاویه‌های

θ و β را بسازند. شکل ۱ قانون پایستاری اندازه حرکت خطی را برای حالت برخورد کشسانی که موردنظر ماست، تشریح می‌کند. از این شکل نتیجه می‌گیریم که

$$(m_2v_2)^2 = (m_1v_1)^2 + (m_1v_0)^2 - 2m_1^2v_1v_0\cos\theta \qquad (1)$$

قانون پایستاری انرژی (به خاطر کشسان بودن برخورد) نتیجه می‌دهد

$$\frac{m_1v_0^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \qquad (2)$$



شکل۱ .نمودار اندازه حرکت در برخورد ناهم مرکز دو گوی.

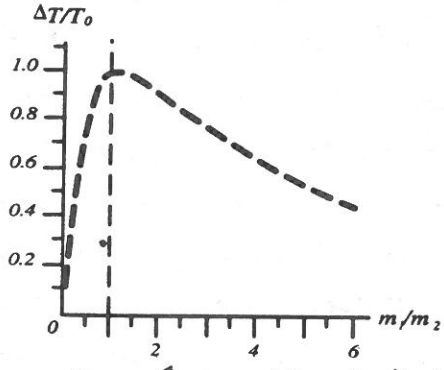
به‌کمک معادله‌های ۱ و ۲ می‌توان v_1 را به‌ازای هر زاویهٔ پراکندگی ثابت θ به‌دست آورد. ما عبارت کلی جواب را به‌دست نمی‌آوریم (خود شما می‌توانید این کار را انجام دهید). اینک جواب را برای حالت خاص برخورد سر به‌سر می‌نویسیم، به‌نحوی که بعد از برخورد، گویها در امتداد خط AC حرکت کنند

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0$$

برای این حالت تغییر نسبی انرژی جنبشی گوی نزدیک‌شوندهٔ m_1 را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{v_0^2 - v_1^2}{v_0^2} = \frac{4(m_1/m_2)}{(1 + m_1/m_2)^2} \qquad (3)$$

در این عبارت نکتهٔ تعجب‌آوری وجود ندارد. (شاید خودتان هم این عبارت را پیدا کرده باشید)، اما جزئیات این عبارت را بررسی می‌کنیم. (این بررسی را می‌توان اثبات راه‌حل از طریق «عقل متعارف» دانست.) وقتی $m_1 \ll m_2$، $\Delta T/\Delta T_0 \to 0$؛ یعنی گوی m_1 به m_2، در جهت مخالف سرعت v_0، بی تغییری در قدرمطلق این سرعت، ضربه می‌زند. وقتی $m_1 \gg m_2$، آنگاه بازهم $\Delta T/\Delta T_0 \to 0$، زیرا برخورد با گوی خیلی سبک m_2، حرکت گوی m_1 را تغییر نمی‌دهد. روشن است که در مقادیر میانی، m_1/m_2 تغییر نسبی انرژی جنبشی مخالف صفر است ($\Delta T/T_0 \neq 0$). می‌توان به‌آسانی دید که ماکسیمم $\Delta T/T_0$ مربوط به $m_1/m_2 = 1$ است (شکل ۲). با استفاده از اصطلاحات دقیق علمی می‌توان گفت که گوی متحرک وقتی به گوی ساکنی با همان جرم برخورد می‌کند، انرژی خود را به‌نحو مؤثرتری می‌پراکند. چون ازگردش گویها و ساختمان داخلی آنها در راه حل خود صرف‌نظر کرده‌ایم، می‌توانیم این نتیجه‌گیری را در مورد پدیده‌هایی در حوزه‌های دیگر فیزیک به‌کار بریم.



شکل۲ . تغییر نسبی انرژی جنبشی گوی متحرک در برخورد کشسان سربه‌سر برحسب نسبت جرم.

تلفات مفید

فیزیکدانان برای بازگشت به‌مسئلهٔ برخورد گویها در دههٔ ۱۹۴۰ هنگام بررسی واکنش زنجیری شکافت هسته‌ای دلیل داشتند. ما می‌توانیم جان کلام مسئله را در اینجا توصیف کنیم.

وقتی هستهٔ اورانیم نوترونی جذب می‌کند، به‌دو قسمت تقریباً مساوی شکافته می‌شود و مقدار خیلی زیادی انرژی آزاد می‌شود. نوترونهای جدیدی هم آزاد می‌شوند. تعداد متوسط این نوترونهای جدید بیش از یکی است. بنابراین نوترونها «چند برابر می‌شوند». ممکن است که نوترونهای ایجاد شده در واکنش شکافت توسط هسته‌های اورانیم جذب شوند و واکنشهای شکافت جدیدی انجام شود و کار به‌همین صورت ادامه یابد. تعداد نوترونها افزایش می‌یابد و هسته‌های بیشتر و بیشتری شکافته

می‌شوند. این فرایند واکنش زنجیری نام دارد و می‌توان از انرژی حاصل از آن استفاده کرد.

متأسفانه این توصیف ساده در عمل درست درنمی‌آید. در حالت طبیعی دو نوع اورانیم وجود دارد، که ایزوتوپ یکدیگرند و عدد جرمی آنها متفاوت است: $_{۹۲}U^{۲۳۵}$ و $_{۹۲}U^{۲۳۸}$. هسته‌های هردو ایزوتوپ قابل شکافتن هستند، اما برای واکنش شکافت $_{۹۲}U^{۲۳۸}$ انرژی جنبشی نوترون جذب شده باید بیش از یک مگا الکترون ولت (MeV) باشد. اگر انرژی کمتر باشد، امانه خیلی کم، هستهٔ $_{۹۲}U^{۲۳۸}$ نوترون را جذب می‌کند ولی شکافته نمی‌شود. از طرف دیگر هسته‌های $_{۹۲}U^{۲۳۵}$ تنها نوترونهای کند با انرژی خیلی کمتر از ۱MeV را جذب می‌کنند (از ۷۰ تا ۲۰۰eV). اما بعد از شکافت هستهٔ اورانیم، انرژی نوترونهای آزاد شده کمتر از ۱MeV و خیلی بیش از ۲۰۰eV است. در نتیجه این نوترونها نمی‌توانند سبب شکافت هسته‌های $_{۹۲}U^{۲۳۸}$ شوند. در اورانیم طبیعی نسبت هسته‌های $_{۹۲}U^{۲۳۸}$ به $_{۹۲}U^{۲۳۵}$ حدود ۱۴۰ به ۱ است، یعنی در مخلوط طبیعی ایزوتوپهای اورانیم هرگز واکنش زنجیری رخ نمی‌دهد: بعد از چند مورد نادر شکافت هسته، احتمالاً نوترونها توسط هسته‌های $_{۹۲}U^{۲۳۸}$ جذب می‌شوند و شکافتی رخ نمی‌دهد!

برای غلبه بر این مشکل راهی وجود دارد. نخست می‌توانیم تعداد هسته‌های $_{۹۲}U^{۲۳۵}$ را در مخلوط ایزوتوپها افزایش دهیم. اما در عین حال می‌توان حرکت نوترونها را کندتر کرد، یعنی انرژی آنها را به‌قدری کم کرد که $_{۹۲}U^{۲۳۸}$ آنها را جذب نکند و آنها تنها توسط $_{۹۲}U^{۲۳۵}$ جذب شوند و در نتیجه در عین اینکه بخشی از انرژی جنبشی نوترونها تلف می‌شود، مقدار زیادی انرژی نهفته در هستهٔ اورانیم را به‌دست می‌آوریم. در واقع این تلف، پرثمر است!

اما چگونه می‌توان حرکت نوترونها را کُند کرد؟ برخورد نوترون با یک هسته را (که لزوماً هستهٔ اورانیم نیست) به‌صورت برخورد دو گوی در نظر می‌گیریم که جرمهای آنها برابر جرمهای نوترون و هسته باشند. این تشابه در صورتی درست است که حین برخورد هیچ واکنش هسته‌ای رخ ندهد. یعنی نوترون و هسته با سرعتهای تغییریافته از یکدیگر جدا شوند. در این صورت فوراً می‌توان گفت که چه موقع تلف انرژی نوترون بیشترین مقدار است: وقتی که جرم هسته و نوترون برابر باشند. چون جرم پروتون تقریباً برابر جرم نوترون است، مؤثرترین برخورد، برخورد نوترون با هستهٔ ساکن اتم هیدروژن است. در این برخورد، نوترون تمام انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد. اما در عمل نمی‌توان از هیدروژن معمولی برای کند کردن حرکت نوترونها استفاده کرد؟

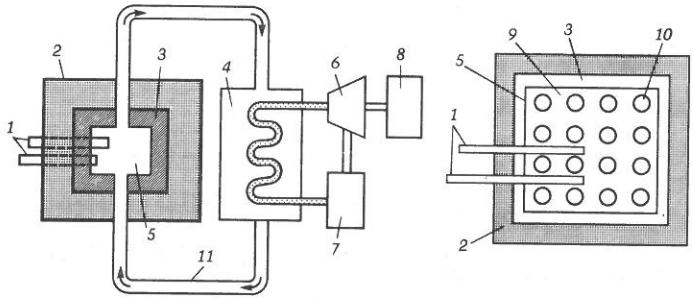
فیزیکدانها برای این کار از مواد دیگری (به نام کندکننده) نظیر آب سنگین یا گرافیت (کربن خالص) استفاده می‌کنند (شکل ۳).

آب سنگین ماده‌ای شیمیایی مانند آب معمولی است اما به‌جای هیدروژن معمولی (که هسته‌اش یک پروتون دارد)، دوتریوم دارد. دوتریوم ایزوتوپ هیدروژن است که هستهٔ آن شامل یک پروتون و یک نوترون است و بنابراین سنگینی آن دوبرابر هیدروژن معمولی است.

در برخورد نوترون با هستهٔ دوتریوم، نوترون ۸/۹ انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد. این مطلب را می‌توان از معادلهٔ (۳) دریافت. بنابراین پس از یک برخورد تنها (۸/۹ − ۱) انرژی اولیهٔ خود را حفظ می‌کند و بعد از دو برخورد ^{۲}(۸/۹ − ۱) انرژی‌اش را و به‌همین ترتیب. برای رساندن انرژی نوترون از $T_i = ۱MeV$ به $T_f = ۱۰۰eV$ باید n برخورد بین نوترون و هستهٔ دوتریم انجام شود، مقدار n از رابطهٔ $T_f = T_i(۱ - ۸/۹)^n$ به‌دست می‌آید. با محاسبه داریم $n \cong ۴$. وقتی نوترون در برخورد با هستهٔ ساکن کربن $_{۶}C^{۱۲}$، انرژی خود را می‌پراکند، ۱/۲ ≈ ۲۴/۴۹ انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد. بنابراین می‌توان تعداد برخوردهای لازم برای به‌دست آوردن نوترون کند را حساب کرد: $n \cong ۱۳$. برای مقایسه می‌توان گفت که n تعداد برخوردهای لازم نوترون با هستهٔ سنگینی با عدد جرمی $A = ۹۰$ برابر $n \cong ۲۱۰$ است.

۱ـ برای ساده شدن مطلب، فرایندی که سبب از بین رفتن نوترونها می‌شود را ذکر نکرده‌ایم. در ساختن واکنشگر (رآکتور) هسته‌ای باید این اثرها را هم به‌حساب آورد.

۲ـ هیدروژن آب معمولی را نمی‌توان برای این منظور به‌کار برد زیرا واکنش مولکول آب با نوترون فرایندهای خاصی ایجاد می‌کند که در آن نوترون از بین می‌رود و برای واکنش زنجیری باقی نمی‌ماند.



شکل۳ . نمای یک واکنشگر هسته‌ای با کندکنندهٔ گرافیت : (۱) میله‌های کنترل ، (۲) محافظ ، (۳) بازتابنده ، (۴) مبادله‌کن گرما ، (۵) نقطهٔ فعال ، (۶) توربین ، (۷) چگالنده ، (۸) مولد ، (۹) کندکننده ، (۱۰) سوخت ، (۱۱) سردکننده .

دلیل اینکه فیزیکدانان سعی می‌کنند تعداد n را کم کنند آن است که در فاصلهٔ بین برخوردهای «خوب» (یعنی خوب برای کاهش سرعت نوترون) ممکن است هستهٔ اتم ناخالصی بعضی نوترونها را جذب کند و تعداد نوترونهای لازم برای واکنش زنجیری را کم کند . اگر n تعداد برخوردها بیش از اندازه بزرگ باشد ، ممکن است نوترون ، منطقهٔ واکنش را ترک کند و بار دیگر از دست برود .

بنابراین تشابه ساده‌ای بین برخورد گویها و پراکندگی نوترون توسط حلقه‌های اتم، به درک ایدهٔ اساسی واکنشگر مهار شده و انجام محاسبات کمک کرد . اما باید به‌یاد داشته باشیم که این تشابه تنها هنگامی معتبر است که در برخورد نوترون با مهارگر واکنشی رخ ندهد . اگر این واکنش رخ دهد دیگر تشابه معنی ندارد ، حال به مثال دیگری می‌پردازیم .

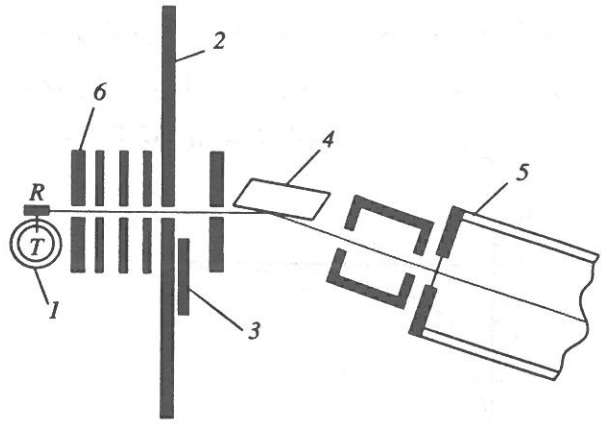
اثر کمپتون

در دهه‌های اول قرن بیستم فیزیکدانان در سراسر جهان در مورد این مسئله بحث می‌کردند : نور چیست ؟ موج یا ذره ؟ اینشتین کبیر ابتدا نشان داد که نور نه تنها به صورت بسته‌هایی منتشر می‌شود بلکه این بسته‌های تابش (کوانتم‌ها) حین انتشار نور فردیّت خود را حفظ می‌کنند . در آغاز این قرن ، این نظر از جانب بسیاری از فیزیکدانان با سردی روبه‌رو شد . بعد از ۱۹۱۴ تردید نسبت به‌این نظر هنوز وجود داشت . در این سال دانشمند آمریکایی رابرت ا. میلیکان معادلهٔ اینشتین را به طریق تجربی برای اثر فتوالکتریک ثابت کرد . بنابه این معادله انرژی یک کوانتوم نور (یا فوتون) توسط فرکانس (بسامد) آن ν تعیین می‌شود و برابر $E_{ph} = h\nu$ است (که h، ثابت پلانک برابر $۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴} J.s$ است) . در ۱۹۱۶ اینشتین اظهار داشت که فوتون علاوه بر انرژی اندازه حرکت نیز دارد $P_{ph} = h\nu/c$ (که c سرعت نور است) . اما مقدار اندازه حرکت فوتون در گسترهٔ مرئی خیلی کم است و تا مدتها هیچ شاهد تجربی بر اندازه حرکت داشتن فوتون دردست نبود . در سال ۱۹۲۳ فیزیکدان جوان آمریکایی آرتور هالی کمپتون چنین شاهدی را یافت . این اثر اکنون اثر کمپتون نامیده می‌شود .

کمپتون پراکندگی پرتوهای X را مطابق شکل ۴ بررسی کرد . باریکهٔ پرتو X که از لامپ T می‌آمد توسط شیء R پراکنده می‌شد و بعد از گذشتن از چند شیار در طیف سنج (اتاقک بلوری و یونیزاسیون) بررسی می‌شد .

بنابه نظریهٔ کلاسیک فرایند پراکندگی پرتو X به‌صورت زیر است . الکترونهای ماده در اثر وجود میدان الکتریکی متناوب موج الکترومغناطیسی ، نوسان می‌کنند (می‌دانیم که پرتو X نوعی تابش الکترومغناطیس است) . فرکانس این نوسانات برابر فرکانس موج است . با شتاب گرفتن الکترونهای در حال نوسان ، آنها منبع تابش می‌شوند . بنابراین الکترونهای ماده منبع موجهای ثانوی‌ای می‌شوند که راستای آنها منطبق بر راستای موجهای محرک اولیه نیست . پراکندگی به‌این صورت به‌وجود می‌آید .

مشخصهٔ مهم نظریهٔ کلاسیک پراکندگی ، برابر بودن فرکانس (طول موج) پرتو تابش و پرتو پراکنده شده ، به‌ازای تمام زاویه‌هایی است که راستاهای موجهای اولیه و ثانویه باهم می‌سازند . تنها به‌نظر می‌رسید که شدت پرتو پراکنده شده به‌زاویهٔ پراکندگی بستگی دارد . اما کمپتون دریافت که در پرتو پراکنده شده مؤلفه‌ای با طول



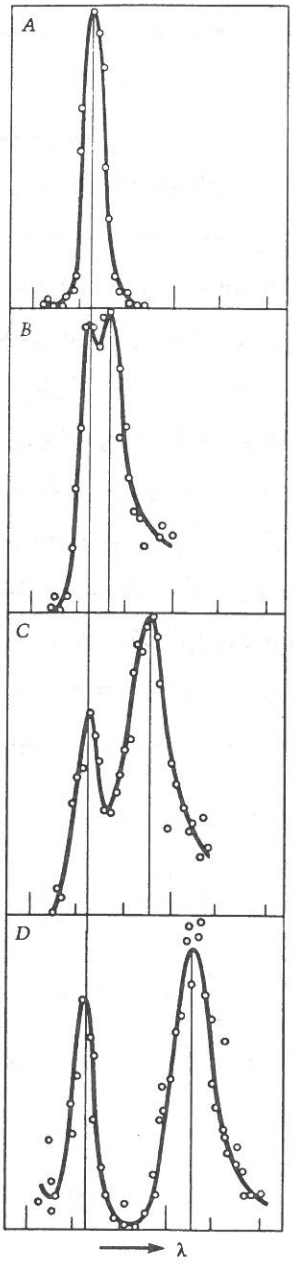
شکل۴ . نمای دستگاه کمپتون . زاویهٔ پراکندگی، زاویهٔ بین دو قطعه از باریکهٔ پرتو X در نقطهٔ R است . این نما مربوط به $\theta = ۹۰^\circ$ است : (۱) لامپ پرتو X، (۲) جعبهٔ سربی ، (۳) شاتر، (۴) بلور، (۵) اتاقک یونیزاسیون .

موج λ' (متفاوت با λ ، طول موج پرتو اولیه) وجود دارد و $\lambda' > \lambda$ (شکل ۵ را ببینید) . این تفاوت طول موجها $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ (که جابه‌جایی کمپتون نام دارد) به‌زاویهٔ پراکندگی بستگی دارد و با این زاویه زیاد می‌شود .

نکتهٔ جالب این است که کمپتون ، که یک فیزیکدان تجربی بود ، نه‌تنها توانست این اثر را به‌صورت کمی تبیین کند بلکه نظریهٔ مقدماتی آن را هم ارائه داد . او فرض کرد که پرتوهای X باریکه‌ای ازکوانتمها با انرژی $h\nu$ی زیاد و اندازه حرکت نسبتاً زیاد $h\nu/c$ اند . در مادهٔ پراکنده شونده ، کوانتمها با الکترونهای آزاد «ساکن» اندرکنش می‌یابند . کمپتون این اندرکنش را به‌برخورد غیر هم مرکز دو ذره مربوط ساخت . تفاوت این مورد با مسئلهٔ دو گوی ما تنها در این است که فوتون ذره‌ای است که با سرعت نور حرکت می‌کند و در نوشتن معادله‌های قوانین پایستاری باید از فرمول نسبیتی انرژی و اندازه حرکت الکترون استفاده کنیم . در حالت کلی نمودار اندازه حرکتها فرق نمی‌کند : به‌جای $|m_1 v_0|$ باید بنویسیم $h\nu/c$ ، به‌جای $|m_1 v_1|$ بنویسیم $h\nu'/c$ و به‌جای $|m_2 v_2|$ بنویسیم p_e (که ν و ν' فرکانسهای پرتوتابش و پراکنده شده و p_e اندازه حرکت یک الکترون است) .

دستگاه معادله‌های حاصل را در اینجا نمی‌نویسیم اما خیلی پیچیده نیست . پاسخ این دستگاه چنین است

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \qquad (۴)$$



شکل۵ . بستگی جابه‌جایی کمپتون به‌زاویهٔ پراکندگی . A طیف پرتو تابش ، B، C و D طیفهای پرتو پراکنده شده در $\theta = ۴۵^\circ$ ، ۹۰° و ۱۳۵° است .

جالب بودن این فرمول در آن است که جابه‌جایی کمپتون به λ بستگی ندارد و تنها به θ و ثابتهای بنیادی m و c و h وابسته است[1] .

۱ـ اکنون ، روشن است که چرا اثر کمپتون تقریباً در برد نوری آشکار نمی‌شود . اگر ماکسیمم نسبت $(\Delta\lambda/\lambda)$ برای پرتوهای X، برابر چندین درصد باشد (برای $\lambda = ۱۰^{-۱۰}m$ ، $(\Delta\lambda/\lambda)_{max} = ۲٫۴ \times ۱۰^{-۲}$، برای نور مرئی $(\lambda \cong ۵ \times ۱۰^{-۷}m)$ ، $(\Delta\lambda/\lambda)_{max} = ۴٫۸ \times ۱۰^{-۶}$ است ، که بسیار کوچک است .

این واقعیت که مقدار تجربی $\Delta\lambda$ به‌ماهیت مادهٔ پراکنده شونده بستگی ندارد، چون الکترونها همه جا یکی هستند، درستی نتیجهٔ فوق را تأیید می‌کند.

در عین حال معادلهٔ (۴) نتیجه‌ای را که کمپتون در مورد وابستگی $\Delta\lambda$ به θ به‌دست آورد، به‌خوبی توصیف می‌کند: وقتی θ از ۰ تا π تغییر کند، $\Delta\lambda$ از ۰ تا $2h/mc$ افزایش می‌یابد.

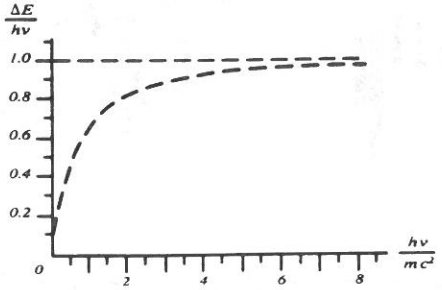
بنابراین تشابه بین فوتون پراکنده شده در برخورد با الکترونها و برخورد گویها بسیار ثمربخش بود. اما آیا این تشابه مطلق است؟ وقتی فوتون با الکترون اندرکنش می‌یابد، الکترون اندازه حرکت و انرژی جنبشی پس‌زنی به‌دست می‌آورد، اما فوتون انرژی از دست می‌دهد و طول موج آن افزایش می‌یابد. هرچند مشخصه‌های مشترک وجود دارند، اما تفاوتهای مهمی نیز وجود دارند. برای اثبات این مطلب مقدار انرژیی که فوتون هنگام پراکنده شدن به‌سمت عقب ($\theta = \pi$) از دست می‌دهد را به‌صورت تابعی از انرژی اولیهٔ آن به‌دست می‌آوریم

$$\Delta E = h\nu - h\nu'$$
$$= \frac{ch}{\lambda} - \frac{ch}{\lambda + \Delta\lambda}$$
$$= \frac{2c^2v^2}{mc^2 + 2h\nu'}$$

چون در $\theta = \pi$ داریم $\Delta\lambda = 2h/mc$، افت نسبی انرژی برابر است با

$$\frac{\Delta E}{h\nu} = \frac{2h\nu}{mc^2 + 2h\nu}$$

شکل ۶ این تابع را نشان می‌دهد. می‌توان دید که این شکل با شکل ۲ تفاوت زیادی دارد. این شکل اصلاً اوج ندارد. یعنی با افزایش انرژی فوتون، قسمت اعظم انرژی آن به‌الکترون انتقال می‌یابد. این منحنی تنها به‌ازای $h\nu \to \infty$ به سمت مقدار حدی میل می‌کند. بنابراین فوتون نمی‌تواند تمام انرژی خود را به الکترون بدهد و تفاوت این حالت با برخورد گویها در اینجا روشن می‌شود. دلیل این تفاوت چیست؟ پاسخ خیلی ساده است: جرم فوتون برابر صفر است. فوتون در حالت سکون وجود ندارد، در نتیجه نمی‌تواند مثل گوی به‌حالت سکون برسد. این یکی از محدودیتهایی است که مانع مطلق شدن تشابه می‌شود. ما مسئلهٔ برخورد گویها را برمبنای مکانیک کلاسیک بررسی کردیم اما ماهیت اثر کمپتون نسبیتی است.



شکل۶ . وابستگی اتلاف نسبی انرژی فوتون به‌انرژی اولیه در اثر کمپتون.

مسئله‌ای دیگر، تشابهی دیگر

ما دو مثال را بررسی کردیم که از یک سو شبیه برخورد گویها هستند و از سوی دیگر با آن تفاوت دارند. آیا می‌توان گفت که تشابه پایان یافته است؟ نه ابداً. ما تنها برخوردهای کشسان را در نظر گرفتیم. آیا می‌توان چیزی در فیزیک جدید یافت که مشابه برخورد غیرکشسان گویها باشد؟ بله. چنین تشابهی وجود دارد و مربوط به‌فیزیک مقدماتی ذرات است. بعد از بررسی این مسئلهٔ خیلی ساده درک این تشابه برای شما ساده‌تر خواهد بود.

مسئله .تعیین کنید که در برخورد مطلقاً غیرکشسان[1] گوی متحرکی به‌جرم m با گوی ساکنی به‌همان جرم، چه نسبتی از انرژی جنبشی گوی متحرک به‌گرما تبدیل می‌شود؟

حل . فرض می‌کنیم گلولهٔ اول با سرعت v_0 حرکت کند. انرژی جنبشی آن $T_0 = mv_0^2/2$ است. وقتی برخورد غیرکشسان است، نمی‌توانیم از قانون پایستاری انرژی مکانیکی استفاده کنیم. اما قانون پایستاری اندازه حرکت هنوز معتبر است

$$mv_0 = 2mv'$$

v' سرعت جسم $2m$ حاصل از برخورد است. بنابراین انرژی

۱ـ بعد از برخورد غیرکشسان دو گوی، آنها به‌صورت یک جسم باهم حرکت می‌کنند.

جنبشی بعد از برخورد برابر است با

$$T' = \frac{۲mv'^۲}{۲} = \frac{T_۰}{۲}$$

یعنی نصف انرژی جنبشی گوی متحرک به‌گرما تبدیل شده است.

حال مسئله را اندکی تغییر می‌دهیم. دو گوی با جرم مساوی که با یک سرعت در جهت مخالف حرکت می‌کنند، برخوردی غیرکشسان بایکدیگر پیدا می‌کنند. در این حالت اندازه حرکت سیستم، قبل از برخورد صفر است. بعد از برخورد گویها متوقف می‌شوند بنابراین تمام انرژی جنبشی به‌گرما تبدیل می‌شود.

این دو مسئلهٔ خیلی ساده با فیزیک مقدماتی ذرات ارتباط نزدیکی دارند. متداولترین روش در بررسیهای تجربی در این زمینه روش برخورد است. در برخورد ذره‌ای سریع با هدف ساکن، درصدی از انرژی جنبشی ذره صرف تشکیل شدن ذره‌های جدید می‌شود. این درصد را می‌توان کمیتی مشابه مقدار گرما در برخورد گویها دانست. تمام انرژی جنبشی نمی‌تواند صرف به‌وجود آوردن ذره‌های جدید شود زیرا اندازه حرکت سیستم، قبل از اندرکنش صفر نبود. در نتیجه اندازه حرکت و انرژی جنبشی محصولات واکنش باید غیرصفر باشد. یعنی وقتی هدف ساکن به‌کار می‌رود، درصدی از انرژی جنبشی داده شده به‌ذره در شتابدهنده هدر می‌رود. اگر روند تشابه را ادامه دهیم، می‌توان نتیجه گرفت که وقتی ذرات یکسان باهم برخورد می‌کنند (وقتی یکی از آنها متحرک و دیگری ساکن است) همیشه نیمی از انرژی جنبشی تلف می‌شود. آیا دانشمندان می‌توانند شتابدهنده‌های قوی با هدفهای ساکن بسازند و بپذیرند که «بازده» ۵۰٪ باشد؟ پاسخ نه است. چرا؟ برای اینکه این تشابه نادرست است. در واقع این تشابه نمی‌تواند کمک کند که دریابیم چه نسبتی از انرژی صرف تشکیل شدن ذره‌های جدید شده است؟ برخورد ذره‌های مقدماتی یک فرایند نسبیتی است بنابراین در بررسی آن باید از فرمولهای نظریهٔ نسبیت استفاده کنیم. فیزیکدانان به‌کمک این فرمولها دریافته‌اند که با افزایش انرژی جنبشی ذرهٔ متحرک، درصد انرژی «مفید» کاهش می‌یابد. بنابراین شتابدهنده‌های دارای هدف ثابت کارایی کمتری می‌یابند. پس چه باید کرد؟ تشابه می‌تواند پاسخی به‌ما بدهد.

به یاد دارید که در گویها چگونه تمام انرژی جنبشی به‌گرما تبدیل می‌شد؟ برای ذرات نیز همان ایده مطرح می‌شود. شتاب‌دهندهٔ جدیدی به‌نام «کولایدر» براین ایده مبتنی است. ذره‌ها (پروتونها)یی که با سرعت یکسان در جهتهای مخالف حرکت می‌کنند بایکدیگر برخورد می‌کنند. اکنون امید فیزیکدانان ذره‌ای به‌این نوع شتابدهنده است. تشابه با مسئله‌ای کلاسیک و بسیار ساده به‌ما کمک کرد که بفهمیم چرا دانشمندان به وسایل عظیمی نظیر شتابدهنده نیاز دارند که میلیاردها دلار می‌ارزد.

تا اینجا احتمالاً به‌این نظر رسیده‌اید که تشابه در پژوهش علمی و نیز در مطالعهٔ فیزیک به‌عنوان یک موضوع آکادمیک مفید است. با کشف مشخصه‌های مشترک پدیده‌های فیزیکی و روشن کردن اختلافهای آنها درک بهتری از قوانین فیزیکی به‌دست می‌آوریم.

ترجمهٔ مهندس مجید ملکان

نظریهٔ نسبیت اینشتاین تعبیر رضایت بخش‌تری را دربارهٔ گوی گازی آغازین عرضه می‌دارد. به نظر اینشتاین جهان نامتناهی نیست، بلکه یک فضای ریمانی بسته از نوع کروی است. این بدین معنی نیست که جهان در داخل نوعی پوستهٔ کروی قرار گرفته است که به نوبهٔ خویش در یک فضای نامتناهی محاط باشد؛ بل بدین معنی است که کل فضا متناهی است، بدون اینکه دارای مرزی باشد. ما در هر کجا که باشیم، همواره فضایی در تمام جهات محیط بر ما است و هیچ‌گونه نقطهٔ پایانی را نمی‌توان دید. اما هرگاه در امتداد یک خط راست حرکت کنیم، روزی از جهت دیگر به نقطهٔ عزیمت خود برخواهیم گشت.

پیدایش فلسفهٔ علمی

هانس رایشنباخ. موسی اکرمی

حلزونی که همانند نور حرکت می‌کند

«اثر آن مشاهده شده ولی دلیل آن معلوم نیست. Ovid, Metamorphoses»

نوشتهٔ آرتور ایشن‌کرافت و لاری. د. کرک‌پاتریک

بسیاری از خوانندگان کوانتوم می‌دانند که نور بازتابیده از یک آینه مسیری را می‌پیماید که برای توصیف آن می‌توان گفت: «زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتابش برابر است». مسیر نور از هوا به‌درون آب مطمئناً پیچیده‌تر است. در این حالت، نور در مرز بین دو محیط خم می‌شود (می‌شکند). میزان خم شدن، خاصیتی از آب و رنگ نور است. نور وارد شونده به‌اجسام شفاف دیگری نظیر کوارتز و الماس به‌میزان متفاوتی شکسته می‌شود. ویلبُرد اِسنِل در سال ۱۶۲۱ تبیین ریاضی رفتار نور را به‌دست داد که امروزه به قانون اسنل معروف است:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

که n_1 و n_2 ضریب شکست دو محیط‌اند. اگر نور از هوا ($n = 1/00$) با زاویهٔ ۳۰° وارد آب ($n = 1/33$) شود، زاویهٔ درون آب ۲۲° خواهد بود:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

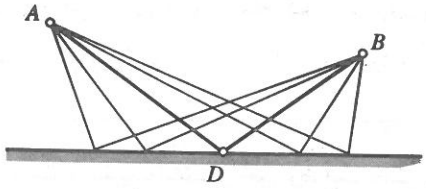
$$1/00 \sin 30^\circ = 1/33 \sin\theta_2$$

$$\theta_2 = 22^\circ$$

اندازه‌گیری زاویهٔ شکست، یک راه فهمیدن این موضوع است که در حلقه‌ای که خریده‌اید شیشه به‌کار رفته یا الماس.

آنچه اغلب مردم را شیفتهٔ آموختن فیزیک می‌کند روشهای گوناگون توجیه پدیده‌هاست. پیر دوفرما ریاضیدان بزرگ (در ۱۶۵۷) دریافت که، مسیر نور مسیری است که کمترین زمان را ببَرد[1]. با بررسی کلیهٔ مسیرهای ممکن از منبع نور A به‌آینه و برگشت آن به‌جسم B، درمی‌یابید که کوتاهترین راه و از این‌رو سریعترین راه، مسیر گذرنده از نقطهٔ D است (شکل ۱) که در آن زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتابش باهم برابرند.

شما هم با رسم مسیرهای مختلف و اندازه‌گیری آنها به‌این مطلب پی‌می‌برید. همچنین می‌توانید از راه هندسی به‌سادگی آن را ثابت کنید یا از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیرید.

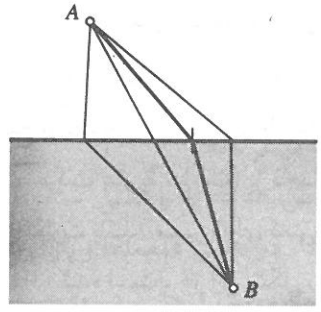


شکل ۱

قضیهٔ فرما در شکست نور نیز معتبر است: مسیری که نور پس از عبور از هوا و آب طی می‌کند باید حداقل زمان را داشته باشد. در این حالت، زمان حداقل با مسافت حداقل متناظر نیست، زیرا نور در آب با سرعت کمتری نسبت به‌هوا حرکت می‌کند. سرعت نور در هر ماده از تقسیم سرعت نور در خلأ بر ضریب شکست n آن ماده به‌دست می‌آید.

۱ـ مسیر اکسترمم

اثبات اینکه مسیر نور، سریعترین مسیر است نیاز به‌مهارت دارد. شما می‌توانید مسیرهای زیادی برای نور از A در هوا، به B، درون آب،رسم کنید (شکل ۲) و سپس طول خطوط را در هوا و آب اندازه بگیرید. اما بنابه قضیهٔ فرما مسیری مورد نظر است که کمترین *زمان* را داشته باشد نه کمترین مسافت را. می‌توان مسافت طی شده در آب را در عدد ۱٫۳۳ ضرب کرد زیرا نور، به‌این نسبت، زمان بیشتری را در آب طی می‌کند. سپس این مسافت را با مسافت طی شده در هوا جمع کرد. مسیری که این حاصل جمع را مینیمم کند، مسیری است که نور طی می‌کند و در کمال تعجب همان مسیری است که قانون اسنل بیان می‌دارد! افرادی که اطلاعی از حساب دیفرانسیل و انتگرال دارند می‌توانند آن را به‌طریق ریاضی نیز ثابت کنند.



شکل۲

حال با گذشتن از نور برای حل مسئلهٔ مسابقه، به حرکت آهستهٔ نرم‌تنان می‌پردازیم. حلزونی می‌خواهد در حداقل زمان از گوشهٔ اطاقی (به ابعاد ۵m × ۱۰m × ۱۵m) به گوشهٔ مقابل اطاق، قطری برود. این حلزون فقط می‌تواند روی چهار دیوار اطاق حرکت کند و مجاز به‌حرکت روی کف و سقف اطاق نیست، حلزون چه مسیری را باید طی کند؟ قسمت (ب) مسابقه برای خوانندگان پیشرفته‌تر طرح می‌شود: ۱۵ متر از مسیری که حلزون باید طی کند چسبنده است و حلزون با کسری از سرعت معمولی خود می‌تواند حرکت کند. اگر حلزون در قسمت چسبنده با $\frac{1}{3}$ سرعت معمولی خود حرکت کند، چه مسیری برای حلزون حداقل زمان را می‌برد؟ سرانجام قسمت (ج) که برای باتجربه‌ترین خوانندگان ما طرح می‌شود: چه اتفاقی رخ خواهد داد اگر حلزون دریابد که چسبندگی اولین دیوار ثابت نیست و به‌صورت خطی در یک بعد افزایش می‌یابد، به طوری که سرعت حلزون در ابتدای دیوار، سرعت معمولی و در انتهای آن $\frac{1}{3}$ سرعت معمولی خود باشد؟ چه مسیری کمترین زمان را می‌برد؟ شاید برای حل قسمتهای (ب) و (ج) به‌روشهای ترسیمی یا کامپیوتری نیاز پیدا کنید.

به دانش آموزان خیلی خوبمان توصیه می‌کنیم که ببینند آیا می‌توانند اثباتی کلی برای اطاقی به ابعاد $l \times w \times h$ و ضریب چسبندگی s بیابند. ما مطمئن نیستیم که چنین راه حل کلی وجود داشته باشد.

لطفاً در صورت یافتن پاسخ، آن را همراه سن و شرح پایهٔ فیزیک خود برای ما ارسال دارید.

ترجمهٔ سعید مجذوبی

گشت زدن در دایره‌ها

ترکیبهایی از شکلها، اندازه‌گیریها و مسیرهای دایره‌ای

نوشتهٔ جرج برزنسی

در مسئلهٔ ۵ از دور دوم ـ سال دوم ـ آزمون استعداد ریاضی در آمریکا (USAMTS) از شرکت کنندگان در آزمون خواسته شد عدد n را چنان تعیین کنند که به ازای آن بتوان n مثلث را از طریق رأسهایشان چنان به‌هم مربوط کرد که در هر رأس، دقیقاً سه مثلث با یکدیگر تلاقی کنند. از میان بیش از ۲۰۰ شرکت کننده، خیلیها توانستند نشان بدهند که چنین ترکیبی از مثلثها را به‌ازای هر $n \geqslant ۷$ می‌توان تشکیل داد. لزوم وجود شرط $n \geqslant ۷$ به‌آسانی ثابت می‌شود و کفایت آن از اینجا معلوم می‌شود که اگر $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n، n نقطه (در فضا) و در وضعیت دلخواه باشند، آنگاه مثلثها را می‌توان به‌صورت زیر انتخاب کرد:

$$T_۱ = \{A_۱, A_۲, A_۴\}$$

$$T_۲ = \{A_۲, A_۳, A_۵\}$$

$$\cdots$$

$$T_{n-۳} = \{A_{n-۳}, A_{n-۲}, A_n\}$$

$$T_{n-۲} = \{A_{n-۲}, A_{n-۱}, A_۱\}$$

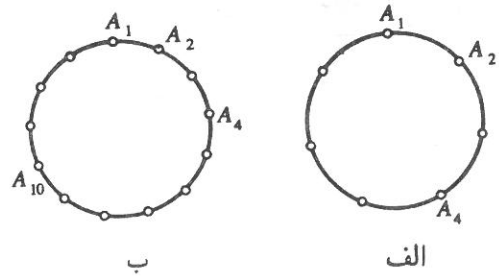
$$T_{n-۱} = \{A_{n-۱}, A_n, A_۲\}$$

$$T_n = \{A_n, A_۱, A_۳\}$$

من در حل «رسمی» مسئله با توجه به‌ترتیب دوری بالا، اشاره کردم که این مسئله تقریباً معادل با تعیین محل سه نشانه روی مسیری دایره‌ای با طول صحیح است، به طوری که نشانه‌ها به‌فاصلهٔ صحیح از یکدیگر قرارگیرند، و فاصلهٔ بین هر جفت از آنها (در جهت حرکت عقربهٔ ساعت) با فاصلهٔ بین هر یک از جفتهای دیگر متفاوت باشد. مسیر دارای کمترین طول در شکل ۱ الف نشان داده شده است. در این شکل، نقاط $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_۷$ به فاصلهٔ واحد از یکدیگر واقع‌اند. قرار دادن نشانه‌ها در $A_۱$، $A_۲$ و $A_۴$ متناظر است با ساختن $T_۱$؛ انتقال نشانه‌ها به A_k، $A_{k+۱}$، $A_{k+۳}$ (اندیسها به‌پیمانهٔ ۷ تحویل می‌شوند) متناظر است با ساختن مثلث T_k؛ و چون فاصله‌های ساعتگرد $(A_۱, A_۲)$، $(A_۱, A_۴)$، $(A_۲, A_۴)$، $(A_۲, A_۱)$، $(A_۴, A_۱)$ و $(A_۴, A_۲)$ همگی با هم متفاوت‌اند، مسلماً هر جفت از مثلثها با یکدیگر حداکثر در یک نقطه تلاقی می‌کنند.

همچنین خاطرنشان کردم که چنین ترکیبهایی را با استفاده از n متوازی‌الاضلاع، $n \geq ۱۳$، که چهارتا از آنها در هر رأس

هدف این بخش، جلب توجه خوانندگان *کوانتوم* به‌مسائل جالبی است که در فن سزاوار تعمیم هستند و ممکن است بررسی آنها به‌تحقیقی مستقل یا به‌پروژه‌های علمی در ریاضیات، و یا به‌هر دو بینجامد.

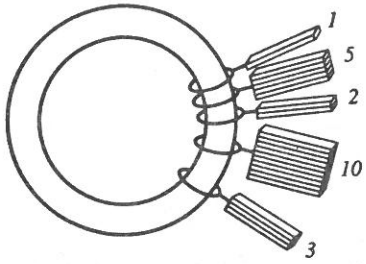


شکل۱

یکدیگر را قطع می‌کنند نیز، می‌توان ساخت. مسیری دایره‌ای به‌طول ۱۳ با ۴ نشانه روی آن، در شکل ۱ ب نشان داده شده است. علاوه‌بر اینها، از دانشجویان خواستم همین کار را در مورد پنج ضلعیهایی که در هر رأس، پنج‌تاشان یکدیگر را قطع می‌کنند، انجام دهند.

هدف این بخش، تعمیم این نتایج از طریق جستجوی کمترین مقدار $n(k, m)$ است که به‌ازای آن ساختن ترکیبی از چند ضلعیهای با k رأس، که m تا از آنها در هر رأس با یکدیگر تلاقی کنند، قطعاً میسر باشد.

حالت خاص $k = m$ را سی سال قبل اوبیرن "T.H.O'Bierne" در بخش «معماها و پارادوکسها» یش در مجلهٔ *نیوساینتیست* بررسی و حل کرد. وی مسئله را (به ازای $k = m = ۶$) به‌یک ساختار متناهی جالب هندسی ارتباط داد و نیز متذکر شد که با استفاده از فاصله‌های بین A_i ها می‌شود پیمانه‌هایی ساخت که به‌ترتیبی روی حلقه‌ای قرارگیرند که بتوان ضخامتهای مختلف را با آنها اندازه گرفت. مثلاً اگر اندازه‌گیریهایی به‌ضخامت ۱، ۵، ۲، ۱۰ و ۳ روی حلقه‌ای به آن ترتیب قرارگیرند (شکل ۲)، آنگاه بتوان ضخامتهای ۱، ۲، ...، ۲۱ واحد را با آنها اندازه گرفت.



شکل۲.

همچنین کینگ "L.R.King" و رایتر "Harold B.Reiter" مسائلی را در همین زمینه در مقالهٔ «نمودارهای زیبا و خط‌کشهایی با نشانه‌های اندک» در شماره مه ۱۹۹۱ *کالج متمتیکس جورنال* بررسی کردند.

ترجمهٔ سیامک کاظمی

...

کسی که حرف آخر را زده باشد، وجود ندارد و همهٔ ما دائماً مرتکب اشتباه می‌شویم. البته ما موظفیم هرچه از دستمان برمی‌آید انجام دهیم تا کمتر اشتباه کنیم، ولی ضمناً همهٔ ما ـ طبیب، مهندس، معمار، برنامه‌ریز، و سیاستمدار ـ دائماً مشغول اشتباه‌کاریهای عظیم هستیم. اشعار به این امر که ما باید همهٔ قدرت خود را برای اجتناب از خطا به‌کار ببریم، اما با این همه از خطا برکنار نخواهیم بود، از نقطه‌نظر اخلاقی، اساسی و مهم است ... قصد من از اینکه می‌گویم «ما هیچ نمی‌دانیم» این است که حتی وقتی حقیقت هم می‌گوییم باز مطمئن نیستیم؛ چراکه لغزش‌پذیریم. اگر لغزش‌پذیری را حذف کنیم، حقیقت را هم حذف کرده‌ایم ... تصور یک حقیقت مطلق با تصور اینکه «ما هیچ نمی‌دانیم» به‌هم مربوطند. اگر یک حقیقت مطلق وجود نداشته باشد، پس آنچه من می‌گویم حقیقت است. تنها در برخورد با یک حقیقت مطلق است که ما به جهل خودآگاهی پیدا می‌کنیم. تصور یک حقیقت از آن جهت لازم است که هیچگاه لغزش‌پذیریمان از یاد نرود.

جستجوی ناتمام

کارل پوپر. ایرج علی‌آبادی.

ابزارهای تقسیم

از الگوریتم اقلیدس تا قضیهٔ اساسی حساب

نوشتهٔ وی . ن . واگوتن

همه می‌دانند که هر عدد طبیعی ـ یعنی عدد صحیح مثبت ـ قابل تجزیه به حاصلضربی از عوامل اول است . مثلاً

$$۴۰۰ = ۲^۴ \times ۵^۲$$

$$۱۰۰۱ = ۷ \times ۱۱ \times ۱۳$$

$$۲۹۰۹۸۱ = ۴۳ \times ۶۷ \times ۱۰۱$$

چرا چنین «تجزیه» ای یکتاست ؟ واقعیتی ساده‌تر را در نظر بگیرید : اگر حاصلضرب mn بر ۴۳ بخشپذیر باشد ، آنگاه لااقل یکی از اعداد m یا n بر ۴۳ بخشپذیر است . چگونه می‌توان این را ثابت کرد ؟

این واقعیات کاملاً بدیهی به‌نظر می‌رسند ، اما اثبات آنها چندان ساده نیست . اثبات آنها در پایان خواهد آمد . با ساده‌ترین گزاره‌ها دربارهٔ بخشپذیری اعداد صحیح شروع می‌کنیم ؛ چگونه می‌توان بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م.) دو عدد را بدون تجزیهٔ آنها به‌عوامل اول به‌دست آورد ؟ امیدوارم شما از حل مسائلی که در راه به آنها برمی‌خوریم لذت ببرید .

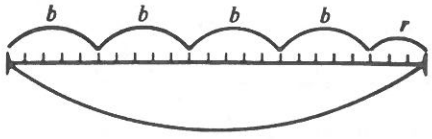
در سراسر مقاله حروف a ، b ، c ، ... نشاندهندهٔ اعداد صحیح‌اند .

تقسیم با مانده

روش مشهوری وجود دارد که عددی چون a را بر عددی چون b تقسیم می‌کند . برای مثال ، دو عدد a = ۱۹۹۱ و b = ۳۱ را در نظر بگیرید :

```
        ۶۴
  ۳۱) ۱۹۹۱
    - ۱۸۶
      ۱۳۱
    - ۱۲۴
        ۷
```

عملیات تقسیم تا زمانی که باقیمانده کوچکتر از مقسوم علیه شود ادامه می‌یابد . در این مثال ، باقیمانده ۷ است . این بدان معناست که ۷ + ۶۴ × ۳۱ = ۱۹۹۱ . که با توجه به‌آن ، می‌توان گزارهٔ زیر را تنظیم کرد (شکل ۱ را ببینید) :



شکل۱

اگر a و b اعداد صحیحی باشند و b از صفر بزرگتر باشد، آنگاه عددی چون q وجود دارد به‌طوری که $a = bq + r$، «باقیمانده»(ی) r عدد صحیحی است که در نامساوی $0 \leqslant r < b$ صدق می‌کند.

مسئلهٔ ۱. باقیماندهٔ تقسیم ۱۹۹۱ بر اعداد (الف) ۱۰۰؛ (ب) ۳؛ (ج) ۷؛ (د) ۱۱ را بیابید.

مسئلهٔ ۲. در یک مجتمع مسکونی ۸ طبقهٔ آپارتمانی، پلکانهایی وجود دارد. در یکی از طبقات منشعب از این پلکانها، آپارتمانها از ۹۷ تا ۱۰۲ شماره‌گذاری شده‌اند. آپارتمان شمارهٔ ۲۱۱، در چه طبقه‌ای و در چه ساختمانی از این مجتمع واقع شده است؟ (تعداد آپارتمانها در هر طبقه مساوی و طرح معماری تمامی پلکانها یکسان است.)

مسئلهٔ ۳. ۵ ورقهٔ کاغذ در نظر بگیرید. برخی از آنها ۵ پاره شده‌اند و برخی از این تکه‌ها، دوباره ۵ پاره و این عمل چندین بار تکرار شده است. آیا ممکن است در آخر، ۱۹۹۱ پاره کاغذ داشته باشیم؟

مسئلهٔ ۴. کوچکترین عدد شش رقمی را بیابید که بر ۳، ۷ و ۱۳ بخشپذیر باشد.

مسئلهٔ ۵. باقیماندهٔ تقسیم ۹۸۷۶۵۴۳۲۱۲۳۴۵۶۷۸۹ بر اعداد (الف) ۴؛ (ب) ۸؛ (ج) ۹ چیست؟

بزرگترین مقسوم علیه مشترک

فرض کنید a و b اعداد صحیح غیرصفری باشند. تمام مقسوم علیه‌های مشترک a و b را در نظر بگیرید و بزرگترین آنها را انتخاب کنید. این «بزرگترین مقسوم علیه مشترک» را با «ب.م.م. (a, b)» نمایش می‌دهیم. برای مثال؛ ب.م.م. (۴, ۱۲) = ۴؛ ب.م.م. (۲۱, ۹۱) = ۷؛ ب.م.م. (۱۵, ۲۸) = ۱.

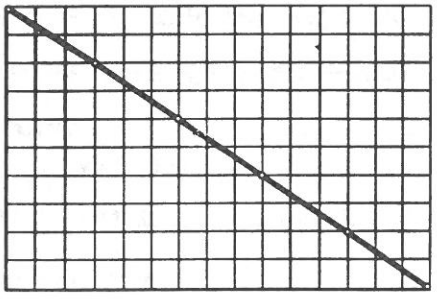
اگر ب.م.م. (a, b) = ۱، اعداد a و b را نسبت به‌هم اول می‌گویند.

مسئلهٔ ۶. ثابت کنید اگر d = ب.م.م. (a, b)، $a = kd$، $b = ld$، آنگاه ب.م.م. (k, l) = ۱.

مسئلهٔ ۷. حاصلضرب دو عدد برابر ۶۰۰ است. حداکثر ب.م.م. آنها چقدر می‌تواند باشد؟

مسئلهٔ ۸. بزرگترین تعداد دسته گلهای یکسانی که از میان ۲۶۴ گل لالهٔ سفید و ۱۹۲ گل لالهٔ قرمز می‌توان تهیه کرد چقدر است؟ (بدون اینکه هیچ گلی باقی بماند.)

مسئلهٔ ۹. (الف) یک مستطیل ۱۵ × ۱۰ روی یک کاغذ رسم، کشیده شده است (شکل ۲). ۶ گره از شبکه بر قطر آن قرار گرفته است. مستطیل $m \times n$ ی را در نظر بگیرید که اضلاعش خطوطی از شبکه را احاطه کرده باشند. چه تعداد از رئوس شبکه (گرهها) بر قطر این مستطیل قرار می‌گیرند؟ (ب) مطلوب است تعداد پاسخهای طبیعی y, x که در معادلهٔ $mx + ny = mn$ صدق می‌کنند؛ m و n اعداد طبیعی معینی هستند. (تذکر: اعداد صحیح مثبت اعداد طبیعی نامیده می‌شوند.)



شکل۲

الگوریتم اقلیدس

البته برای یافتن ب.م.م. دو عدد می‌توانید تمامی مقسوم علیه‌های هریک از اعداد را بنویسید، همهٔ مقسوم علیه‌های مشترک را انتخاب کنید و آنگاه بزرگترین آنها را تعیین کنید. این کار وقتی که بتوانید هر دو عدد را به‌عوامل اول تجزیه کنید ساده‌تر انجام می‌گیرد ـ برای مثال $۶۰۰ = ۲^۳ \times ۳ \times ۵^۲$، $۲۸۸ = ۲^۵ \times ۳^۲$، بنابراین ب.م.م. (۶۰۰, ۲۸۸) = $۲^۳ \times ۳$ = ۲۴. (برخی روشهای تجزیه به‌عوامل اول در مقالهٔ «آیا فرما چنین کرد؟» همین شماره شرح داده شده است). اما رهیافت متفاوتی به‌این مسئله وجود دارد که دیگر به‌اینکه مقسوم علیه‌های هریک از اعداد را جداگانه پیدا کنید نیازی نیست.

اینک لم مهم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنیم $a = bq + r$. آنگاه ب.م.م. (a, b) = ب.م.م. (b, r).

کافی است نشان دهیم که زوج اعداد (a, b) همان مجموعهٔ مقسوم علیه‌هایی را دارند که زوج اعداد (b, r): این بدان معناست که ب.م.م. این زوجها نیز یکی است. بنابراین باید ثابت

کنیم هر مقسوم علیه مشترک a و b یک مقسوم علیه مشترک r است و برعکس، هر مقسوم علیه مشترک b و r یک مقسوم علیه a نیز هست.

با اثبات اولین حکم شروع می‌کنیم. فرض کنیم a و b بر k بخشپذیر باشند. آنگاه bq بر k بخشپذیر است، و $r = a - bq$ نیز بر k بخشپذیر خواهد بود.

حال برای دومین حکم، اگر b و r بر m بخشپذیر باشند آنگاه bq بر m بخشپذیر خواهد بود، و $a = bq + r$ نیز بر m بخشپذیر خواهد بود. این لم راهی سریع و آسان برای یافتن ب.م.م. دو عدد به‌دست می‌دهد. حال ببینیم این کار چگونه صورت می‌پذیرد.

مثال. ب.م.م. (۹۴۳, ۴۳۷) را بیابید.

حل. ۹۴۳ را بر ۴۳۷ تقسیم می‌کنیم و باقیماندهٔ ۶۹ را به‌دست می‌آوریم، که می‌نویسیم

$$۹۴۳ = ۴۳۷ \times ۲ + ۶۹$$

براساس لم، ب.م.م. (۹۴۳, ۴۳۷) = ب.م.م. (۴۳۷, ۶۹).

حال باید ب.م.م. (۴۳۷, ۶۹) را بیابیم. ۴۳۷ را بر ۶۹ تقسیم می‌کنیم:

$$۴۳۷ = ۶۹ \times ۶ + ۲۳$$

دوباره از لم استفاده کرده، می‌بینیم که

ب.م.م. (۴۳۷, ۶۹) = ب.م.م. (۶۹, ۲۳). اما ۶۹ بر ۲۳ بخشپذیر و بدون باقیمانده است:

$$۶۹ = ۲۳ \times ۳$$

بنابراین ب.م.م. (۶۹, ۲۳) = ۲۳ و در نتیجه

$$۲۳ = \text{ب.م.م.}(۶۹, ۲۳)$$

$$= \text{ب.م.م.}(۴۳۷, ۶۹)$$

$$= \text{ب.م.م.}(۹۴۳, ۴۳۷)$$

جواب: ب.م.م. (۹۴۳, ۴۳۷) = ۲۳.

روش یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک، از طریق به‌کار بردن متوالی لم ۱ به الگوریتم اقلیدس موسوم است. حال خودتان آزمایش کنید! یک زوج از اعداد طبیعی را، به هراندازه بزرگ که دلتان می‌خواهد، انتخاب و ب.م.م. آنها را از این طریق بیابید. احتمال اینکه زوج انتخابی شما نسبت به‌هم اول باشند، مقداری کاملاً غیرمنتظره دارد: این احتمال برابر $\frac{۶}{\pi^۲}$ است که π محیط دایره‌ای به‌قطر ۱ است و به نظر می‌رسد که هیچ وجه مشترکی با ب.م.م. ندارد!

مسئلهٔ ۱۰. بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد زیر را بیابید: (الف) ۹۸۷۶۵۴۳۲۱ و ۱۲۳۴۵۶۷۸۹؛ (ب) ۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷ و ۷۷۷۷۷۷.

مسئلهٔ ۱۱. از یک مستطیل ۱۴۱cm × ۳۲۴cm مربعهایی به‌اضلاع ۱۴۱cm بریده شده‌اند و مستطیلی با ضلعی کمتر از ۱۴۱cm باقی مانده است. سپس مربعهایی با اضلاعی مساوی عرض این مستطیل دوم، تا جاییکه امکان دارد ـ بریده شده است (شکل ۳) و همین طور الی آخر. مستطیل اصلی برحسب چه نوع مربعهایی بریده می‌شود؟ (اندازه و کمیت آنها را معین کنید.)

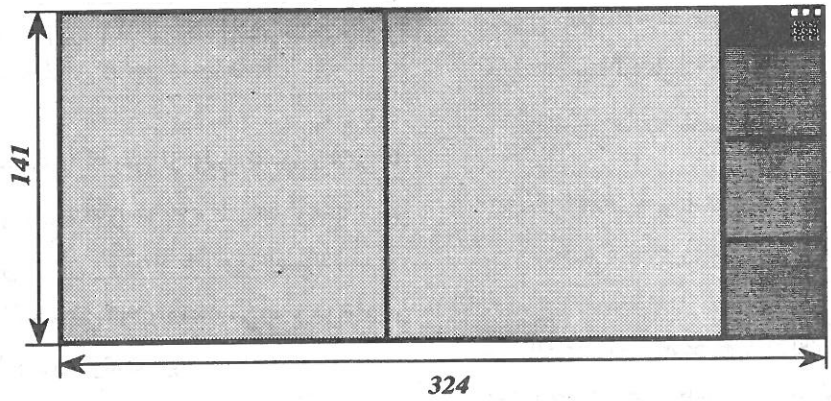
الگوریتم اقلیدس روشی ساده برای یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد به‌دست می‌دهد. دو عدد a و b داده شده‌اند، به‌طوری که $a > b > ۰$. ابتدا a را بر b تقسیم می‌کنیم و باقیماندهٔ $r_۱$ را به‌دست می‌آوریم، که کوچکتر از b است. آنگاه b را بر $r_۱$ تقسیم می‌کنیم و باقیماندهٔ $r_۲$ را به‌دست می‌آوریم که کوچکتر از $r_۱$ است. حال $r_۱$ را بر $r_۲$ تقسیم کرده، باقیماندهٔ $r_۳$ را به‌دست می‌آوریم که کوچکتر از $r_۲$ است و همین طور ادامه می‌دهیم تا باقیماندهٔ $r_{n-۱}$ بر باقیماندهٔ r_n بخشپذیر شود و باقیمانده‌ای به‌دست نیاید (یعنی $r_{n+۱} = ۰$).

روشن است که این فرایند دیر یا زود باید خاتمه یابد، زیرا هر باقیماندهٔ بعدی، کوچکتر از قبلی است و تمامی باقیمانده‌ها غیرمنفی‌اند. آخرین باقیماندهٔ r_n در واقع ب.م.م. a و b است:

$$r_n = \text{ب.م.م.}(r_n, r_{n-۱})$$

$$= \text{ب.م.م.}(r_{n-۱}, r_{n-۲})$$

$$= \cdots$$



شکل۳

$= \text{ب.م.م.}(r_2, r_1)$

$= \text{ب.م.م.}(r_1, b)$

$= \text{ب.م.م.}(a, b)$

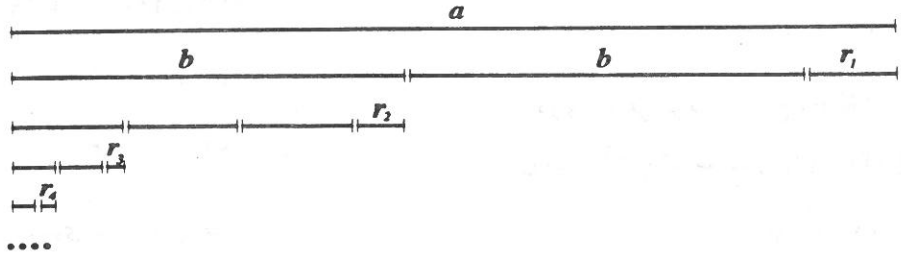
مسئلهٔ ۱۲ . ثابت کنید تعداد مراحل الگوریتم اقلیدس برای یافتن ب.م.م. هر زوج دلخواه (a, b) ، $0 < a < b < 1000$ بزرگتر از تعداد آن برای زوج $(610,987)$ نیست . این عدد کدام است ؟

در مسئلهٔ ۱۱ توصیفی هندسی از الگوریتم اقلیدس ارائه شده است . زابطهٔ شناخته‌شده‌تر و به‌لحاظ هندسی مهمتر الگوریتم اقلیدس ، الگوریتم یافتن بزرگترین واحد اندازه‌گیری مشترک دو پاره‌خط است (شکل ۴) .

مسئلهٔ ۱۳ . بزرگترین عدد α را چنان بیابید که $15/28\alpha$ و $6/35\alpha$ اعدادی صحیح باشند . به‌عبارت دیگر طول بازهٔ α را که بزرگترین واحد اندازه‌گیری مشترک برای فاصله‌هایی به‌طول ۱۵/۲۸ و ۶/۳۵ باشد ، بیابید .

معادلات خطی

یافتن ب.م.م. یکی از مسائلی است که می‌توان به‌وسیلهٔ الگوریتم اقلیدس حل کرد . اثبات خاصیت مهم زیر از بزرگترین مقسوم علیه مشترک ، دربارهٔ اعدادی است که در هر مرحله از الگوریتم ظاهر می‌شوند .



شکل۴ . فرض می‌کنیم a و b دو پاره‌خط باشند . $a > b$. تا جایی که ممکن است پاره‌خطهایی به‌اندازهٔ b روی a جدا می‌کنیم ؛ پاره‌خط باقیمانده را با r_1 نمایش می‌دهیم ، حال تا جایی که امکان دارد پاره‌خطهایی به‌اندازهٔ r روی b جدا می‌کنیم و باقیمانده را با r_2 نمایش می‌دهیم . همین فرایند را برای r_2 و r_1 ادامه می‌دهیم تا باقیماندهٔ r_3 را به‌دست آوریم و همین‌طور تا آخر .

در گنجانیدن یک پاره‌خط r_n در r_{n-1} ، اگر در مرحله‌ای ، باقیمانده‌ای به‌دست نیاوریم (یعنی اگر ، $r_{n+1} = 0$) آنگاه قطعه خط r_n بزرگترین واحد اندازه‌گیری مشترک برای پاره‌خطهای a و b است . اگر طولهای a و b اعدادی صحیح باشند ، آنگاه تمامی باقیمانده‌های r_1 ، r_2 ، ... نیز اعدادی صحیح‌اند . فرایند فوق خاتمه یافته و آخرین r_n غیرصفر ب.م.م. a و b است . اگر فرایند خاتمه نیابد ، بازه‌ها غیرقابل تجزیه نامیده می‌شوند (و کسر a/b عددی گنگ خواهد بود) .

لم ۲ . *اگر ب.م.م.* $d = (a, b)$ *آنگاه اعداد صحیح* x *و* y*ی وجود دارند به‌طوری که* $d = ax + by$.

در واقع باقیماندهٔ r_1 را که پس از اولین تقسیم ، a بر b، به‌دست می‌آید ، می‌توان به‌صورت $ax_1 + by_1$ نوشت ، زیرا $r_1 = a - bq_1$ (یعنی $x_1 = 1$ و $y_1 = -q_1$) . باقیماندهٔ بعدی ، r_2 وقتی که b بر r_1 تقسیم می‌شود به‌دست می‌آید و می‌توان آن را نیز به‌صورت $ax_2 + by_2$ نوشت زیرا

$$r_2 = b - r_1 q_2 = b - (ax_1 + by_1)q_2$$

$$= a(-x_1 q_2) + b(1 - y_1 q_2)$$

$$= ax_2 + by_2$$

همین استدلال ، برای تمام باقیمانده‌های بعدی نیز ، تا وقتی که نهایتاً به‌تساوی $r_n = ax + by$ برسیم ، به‌روشنی قابل کاربست است . اما $r_n =$ ب.م.م. (a, b) . به‌این ترتیب لم ۲ اثبات شد .

به مثال قبلی ، که در آن ب.م.م. $(943, 437)$ را محاسبه کردیم برمی‌گردیم و سعی می‌کنیم اعداد x و y را بیابیم ، به‌طوری که

$$23 = 943x + 437y \qquad (1)$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک از سلسلهٔ تساویهای

$$943 = 437 \times 2 + 69$$

$$437 = 69 \times 6 + 23$$

$$69 = 23 \times 3$$

به‌دست آمد . اولین تساوی نتیجه می‌دهد

$$69 = 943 - 437 \times 2$$

از دومین تساوی داریم

$$23 = 437 - 69 \times 6 = 437 - (943 - 437 \times 2) \times 6$$

$$= -943 \times 6 + 437 \times 13$$

بنابراین اعداد $x = -6$ و $y = 13$ را که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند ، پیدا کرده‌ایم .

گزارهٔ زیر حالت خاص مهمی از لم ۲ است .

اگر اعداد a *و* b *نسبت به‌هم اول باشند ، آنگاه اعداد صحیح* x *و* y *ی وجود دارند به‌طوری که* $ax + by = 1$.

باید متذکر شویم که لم ۲ از این گزاره نتیجه می‌شود . برای مثال ، به‌جای حل معادلهٔ (۱) ، می‌توانیم ۲۳ را به‌یکباره حذف کنیم و معادله‌ای هم ارز آن، یعنی

$$41x + 19y = 1 \qquad (2)$$

را به‌دست آوریم . اعداد ۴۱ و ۱۹ نسبت به‌هم اول‌اند .

جوابهای $x = -6$ و $y = 13$ هردو در معادلات (۱) و (۲) صدق می‌کنند .

یک تذکر دیگر . ما راهی برای یافتن فقط یک جواب معادله پیدا کرده‌ایم . در واقع اگر لااقل یک جواب وجود داشته باشد ، بینهایت از آنها وجود دارد . برای مثال ، اعداد

$$x = -6 + 19t$$

$$y = 13 - 41t \qquad (3)$$

(t عددی است صحیح و اختیاری) نیز جوابهای معادلهٔ (۲) هستند :

$$41(-6 + 19t) + 19(13 - 41t) = 1$$

در واقع ، هر جواب صحیح معادلهٔ (۲) به‌شکل (۳) است . برای اثبات آن ، یک جواب (x, y) از (۲) را در نظر می‌گیریم :

$$41x + 19y = 1$$

از این معادله تساوی

$$41 \times (-6) + 19 \times 13 = 1$$

را کم می‌کنیم و معادلهٔ

$$41(x + 6) + 19(y - 3) = 0$$

یا

$$۴۱(x+۶) = ۱۹(۱۳-y)$$

را به‌دست می‌آوریم.

چون سمت چپ آخرین تساوی بر ۱۹ بخشپذیر است و اعداد ۴۱ و ۱۹ نسبت به هم اول‌اند، عدد $x+۶$ باید بر ۱۹ بخشپذیر باشد: $x+۶ = ۱۹t$ که t عددی صحیح است. پس $y = ۱۳ - ۴۱t$. بنابراین ما توانستیم نحوهٔ یافتن جوابهای صحیح هر معادلهٔ خطی به‌شکل $ax+by=c$ را پیدا کنیم. در حالت کلی نتیجه را به‌صورت زیر می‌توان نوشت.

> *شرط لازم و کافی برای اینکه معادلهٔ $ax+by=c$ جوابهای صحیح (x,y) داشته باشد، این است که، c بر ب.م.م. $d=(a,b)$ بخشپذیر باشد. اگر این شرط صادق و $(x_۰,y_۰)$ یکی از جوابهای این معادله باشد، آنگاه تمامی جوابهای معادله به‌وسیلهٔ فرمولهای*
>
> $$x = x_۰ - b_۱t \quad , \quad y = y_۰ - a_۱t$$
>
> *تعیین می‌شوند، که*
>
> $$a_۱ = \frac{a}{d} \quad , \quad b_۱ = \frac{b}{d}$$

این فرمولها تعبیر هندسی ساده‌ای دارند: یک خط مستقیم به‌طور متناوب از نقاط صحیح عبور می‌کند (شکل ۲ را ببینید).

مسئلهٔ ۱۴. اعداد صحیح x و y را بیابید به‌طوری که $۸۵x+۲۰۴y = ۱۷$.

مسئلهٔ ۱۵. آیا معادلات زیر جواب صحیح دارند؟

(الف) $۱۰۵x + ۵۶y = ۴۲$

(ب) $۱۰۴x + ۶۵y = ۴۳$

مسئلهٔ ۱۶. (الف) آیا می‌توان باطری با ولتاژ ۲۲۰ ولت را، از طریق به‌هم بستن متوالی باطریهایی از نوع ۶ ولتی و ۱۶ ولتی ساخت؟ اگر بلی، چه تعداد باطری از هر نوع باید استفاده کرد؟

(ب) همین سؤال را، با باطریهای ۶ ولتی و ۱۵ ولتی پاسخ دهید.

قضیهٔ اساسی حساب

قبل از اینکه قضیهٔ اساسی حساب را ثابت کنیم، یک گام فراتر می‌رویم و لم زیر را ثابت کنیم.

> **لم ۳.** *اگر حاصلضرب ab بر c بخشپذیر باشد و اعداد b و c نسبت به‌هم اول باشند آنگاه a بر c بخشپذیر است.*

در واقع، چون ب.م.م. $(b,c) = ۱$، آنگاه براساس لم ۲، اعداد صحیح x و y وجود دارند به‌طوری که $bx+cy = ۱$. طرفین معادله را در a ضرب کرده تا $a = abx + acy$ را به‌دست آوریم. بنابر فرض ab بر c بخشپذیر است، بنابراین هم abx و البته هم acy بر c بخشپذیرند، که این به‌معنای این است که a، مجموع آنها، نیز بر c بخشپذیر است.

از لم ۳ اغلب در حل مسائل مختلف استفاده می‌شود. اگرچه این استفاده گاهی به‌خوبی آشکار نیست. برای مثال در بخش قبلی وقتی که فرمولهایی که تمام جوابهای معادلهٔ $۴۱x + ۱۹y = ۱$ را معین می‌کنند، پیدا می‌کردیم، از آن استفاده بردیم. (عبارت متناظر، آنجا به‌ایتالیک آمده است.)

مسئلهٔ ۱۷. ثابت کنید که اگر عدد a بر هردو عدد نسبت به‌هم اول b و c بخشپذیر باشد، آنگاه بر bc نیز بخشپذیر است.

مسئلهٔ ۱۸. کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح‌اند:

(الف) اگر ab بر ۱۵ بخشپذیر باشد، آنگاه لااقل یکی از عوامل آن بر ۱۵ بخشپذیر است.

(ب) اگر ab بر ۱۷ بخشپذیر باشد، آنگاه لااقل یکی از عوامل آن بر ۱۷ بخشپذیر است.

(ج) اگر a بر ۶ و b بر ۱۰ بخشپذیر باشد، آنگاه ab بر ۱۵ بخشپذیر است.

اگر ab بر ۶۰ بخشپذیر باشد و b و ۱۰ نسبت به‌هم اول باشند، آنگاه a بر ۲۰ بخشپذیر است.

در اینجا یادآوری می‌کنم که عدد *طبیعی* p *اول نامیده می‌شود هرگاه دقیقاً دو مقسوم علیه ۱ و p داشته باشد.*

هرگاه p عددی اول باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح a یکی از دو گزارهٔ زیر درست است: یا a بر p بخشپذیر است یا a و p نسبت به‌هم اول‌اند (زیرا ب.م.م. (a,p) تنها می‌تواند برابر p

یا ۱ باشد). اکنون می‌توان یک حالت خاص لم ۳ را به‌صورت زیر تنظیم کرد.

اگر حاصلضرب ab بر عدد اول p ای بخشپذیر باشد، آنگاه لااقل یکی از اعداد a و b بر p بخشپذیر است.

قضیهٔ اساسی حساب نتیجهٔ بلافصل این گزاره است.

هر عدد طبیعی به‌طور یکتایی به‌صورت حاصلضربی از عوامل اول تجزیه می‌شود.

در واقع فرض کنید عددی به‌چندین عامل تجزیه شود، به‌طوری که لااقل یکی از آنها عدد اول نباشد. آنگاه این عامل، خود قابل تجزیه شدن است؛ اگر هر کدام از این عوامل اول نباشند، آنگاه می‌توانیم دوباره آن را تجزیه کنیم؛ و الی آخر. چون هر یک از عوامل هر عدد، از آن عدد کوچکتر است، این روند نمی‌تواند چندان ادامه یابد ـ بالاخره در مرحله‌ای تجزیهٔ آن عدد به عوامل اول را به‌دست می‌آوریم.

حال ثابت می‌کنیم که برای یک عدد، نمی‌تواند دو تجزیهٔ مختلف به‌عوامل اول وجود داشته باشد.

فرض کنیم برای یک عدد a دو تجزیه وجود دارد: $a=p_1p_2\cdots p_r=q_1q_2\cdots q_k (r\leqslant k)$، که p_i و q_1 اعدادی اول‌اند. چون سمت چپ تساوی فوق بر p_1 بخشپذیر است، سمت راست معادله نیز باید بر p_1 بخشپذیر باشد، بنابراین یکی از اعداد q_1 باید بر p_1 بخشپذیر باشد. اما q_1 اول است پس $p_1 = q_1$. عوامل مشترک $p_1 = q_1$ را کنار گذاشته، با p_2 شروع و به‌همین ترتیب تا به‌آخر استدلال می‌کنیم. در پایان تمامی عوامل حذف خواهند شد و سمت چپ برابر ۱ می‌شود. چون q_1 ها اعدادی مثبت هستند، در سمت راست نیز تنها ۱ باقی می‌ماند. بنابراین در هر دو تجزیه، عوامل یکی هستند (اگرچه ممکن است ترتیبشان متفاوت باشد)، و این بدان معناست که تجزیه به‌عوامل اول یکتاست.

مسئلهٔ ۱۹. اعداد ۱۹۹۰، ۱۹۹۱ و ۱۹۹۲ را به‌عوامل اول تجزیه کنید.

مسئلهٔ ۲۰. (الف) اگر m و n نسبت به‌هم اول باشند و $am = bn$، ثابت کنید عدد صحیح k یی وجود دارد به‌طوری که $a = kn$ و $b = km$. (ب) اگر m و n نسبت به هم اول باشند و $x^m = y^n$، ثابت کنید عدد صحیح z ی وجود دارد به‌طوری که، در صورت صادق بودن $y = z^m$، $x = z^n$. **(پاسخ مسائل در صفحهٔ ۴۹)**

ترجمهٔ حسن حقیقی

...

در شهر نانسی در حدود ۱۸۵۴، دو برادر به نام لئون و آنتوان پوآنکاره می‌زیستند. لئون یک پسر و یک دختر و آنتوان دو پسر داشت. دو پسر ارشد ایشان شهرت بسیار یافتند. پسر لئون ریاضیدان بی‌مانندی شد و پسر آنتوان رئیس جمهور گردید. هانری پوآنکاره در ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ متولد گردید و در مدرسهٔ متوسطهٔ شهر نانسی با همکار آینده‌اش **پل آبل** همشاگردی بود. در این مدرسه مطالعات جالبی کرد و بدون شک شهرت او به‌عنوان ریاضیدان بزرگ آینده تا پاریس نیز رسید، زیرا هنگامی که خود را برای امتحان مسابقهٔ مدرسهٔ پلی‌تکنیک معرفی کرد (۱۸۷۳) یکی از ممتحنین جلسهٔ امتحان را مدت سه ربع ساعت متوقف ساخت تا برای او معماها و مسائل مشکل جدید بتراشد. داوطلب مزبور نه‌تنها آن معماها را حل کرد، بلکه راه جدیدی نیز برای آن کشف نمود. گذشته از آن امتحان مسابقهٔ او مشکل بزرگی از لحاظ وجدان برای هیئت ممتحنه تولید کرد؛ زیرا این جوان که می‌بایست با رتبهٔ اول در امتحانات پذیرفته شود در امتحان رسم نمرهٔ صفر داشت و در ورزش عدم لیاقت عجیبی از خود نشان داده بود.

تاریخ علوم

پی‌یر روسو. حسن صفاری.

معمای اتروریایی‌ها

میراث شایستهٔ قومی از میان رفته

نوشتهٔ ا.س. الکساندروف

اتروریایی‌ها، قومی مرموز که باستانشناسان و مورخان هنوز هم با شکیبایی اطلاعات پراکنده دربارهٔ آنها را گردآوری می‌کنند، در شمال ایتالیای مرکزی می‌زیستند. در میانهٔ نخستین هزارهٔ پیش از میلاد، تمدن آنها به‌شکوفایی فرهنگی و اقتصادی رسیده بود. شهرهای آنها از قدرت نظامی مخوفی برخوردار بود، و دودمان تارکوئین در رُم حکمرانی می‌کرد. اما پس از آنکه در سال ۵۱۰ پیش از میلاد پادشاهان اتروریا از این شهر رانده شدند، اتروریایی‌ها با رقیبان خطرناکی در ایتالیا روبه‌رو شدند که همانا رومیان بودند. جنگهایی طولانی که چندین قرن به‌درازا کشید به انقیاد کامل اتروریایی‌ها انجامید. با آغاز عصر مسیحیت، این قوم به‌تمام و کمال در اقوام گوناگون امپراتوری روم مستحیل شد. تمام آنچه از آنان به‌جا مانده است در چند کتیبه به‌زبانی که هنوز کاملاً کشف رمز نشده، چند نمونه از کارهای دستی و هنری با کیفیت عالی، و اشاره‌های مختصر نویسندگان رومی به‌آنها، خلاصه می‌شود.

باستانشناسان به‌هنگام حفاری در شهرهای اتروریایی‌ها، اشیای گوناگونی را یافتند که از پیشرفت شگرف این تمدن زوال یافته حکایت می‌کرد. جواهرات اتروریایی‌ها، به‌ویژه تزیین دانه‌ای آنها را همگان ستوده‌اند. این شاهکارها که استادان گمنام آنها را خلق کرده‌اند، صفحه‌هایی مسین با نقش و نگارهایی پرکارند که از هزاران گوی کوچک زرین (به قطر حدود ۰/۲ میلیمتر) ساخته شده‌اند. هیچ قوم دیگری به‌این درجه از کمال در تزیین دانه‌ای دست نیافته است.

با پایان گرفتن هزارهٔ اول میلادی، این هنر کاملاً به‌دست فراموشی سپرده شد. تنها در قرن نوزدهم بود که دانشمندان کوشیدند اسرار فنی تزیین دانه‌ای را از نو کشف کنند، اما توفیق نیافتند: تا مدتها هیچ کس نمی‌توانست بگوید که چگونه می‌توان گویی زرین را، بدون آنکه ذوب شود، به‌صفحه‌ای مسین چسباند. اگر گوی ذوب شود، به صورت قطره‌ای از طلای مذاب بر سطح مس پخش

می‌شود. البته به‌هنگام سرد شدن قطرهٔ پخش شده به‌مس جوش می‌خورد اما جلوهٔ کار از دست می‌رود.

سرانجام این راز در سال ۱۹۳۳ کشف شد. معلوم شد که روشی زیرکانه در کار است که برای درک آن باید پدیدهٔ پخش را مرور کنیم.

پخش فرایندی است که براثر آن اتمها یا مولکولهای یک ماده در ماده‌ای دیگر نفوذ می‌کنند. مشاهدهٔ این فرایند در مایعات آسان است. اگر قطره‌ای جوهر را در لیوانی آب بچکانیم، تا مدتی طرح مشخص خود را حفظ می‌کند، اما با گذشت زمان این طرح محو می‌شود، دو مایع با هم مخلوط می‌شوند، و قطره نیز ناپدید می‌شود. چرا چنین است؟

پیش از پاسخ دادن، آزمایشی بسیار معروف را به‌یاد می‌آوریم. در سال ۱۸۲۷ رابرت براون، گیاهشناس انگلیسی حرکت آشوبی دانه‌های گرده در آب را مطالعه کرد. دانه‌های گرده بسیار ریز بودند (عموماً قطر آنها در حدود ۰/۰۰۵ میلیمتر بود). بنابراین براون برای مشاهدهٔ آنها از میکروسکوپ استفاده می‌کرد. او دریافت که «مسیرها» ی آنها هیچ نظمی ندارد. و نخست این حرکت را به‌اشتباه شکلی خاص از حیات پنداشت.

نیم قرن بعد، نظریه‌ای پی‌ریزی شد که این پدیده را، که اکنون حرکت براونی نامیده می‌شود، تبیین کرد. نکته در اینجاست که دانهٔ گرده در مقایسه با مولکول آب بسیار بزرگ است، اما آن قدر کوچک هست که برخورد یک مولکول آب را حس کند. مولکولهای آب پیوسته حرکتی آشوبی دارند و دانهٔ گرده را از جهتهای گوناگون، به گونه‌ای نابرابر «بمباران» می‌کنند و آن را وا می‌دارند تا به‌شیوه‌ای تصادفی حرکت کند. بنابراین حرکت براونی را می‌توان گواه مشهود حرکت مولکولی گرفت که حتی زیر میکروسکوپ نیز دیده نمی‌شود[1].

اکنون دوباره به‌سراغ قطرهٔ جوهر در لیوان آب می‌رویم. مولکولهای آب در جوهر، هردو حرکت آشوبی دارند، بعضی از مولکولهای آب به‌درون جوهر، و بعضی از مولکولهای جوهر به‌داخل آب نفوذ می‌کنند. هردو مایع پخش می‌شوند و قطرهٔ جوهر محو می‌شود.

پخش در گازها پدیده‌ای متداول است، که به‌هنگام استشمام بوی مواد از دور، با آن روبه‌رو می‌شویم. فرایندهای پخش در جامدها نیز رخ می‌دهند، اما در دمای محیط چنان کُند انجام می‌شوند که نمی‌توان آنها را مشاهده کرد. در دماهای بیشتر، حرکت مولکولها یا اتمها شدیدتر می‌شود. مثلاً قطرهٔ جوهر در آب گرم زودتر از آب سرد محو می‌شود. اگر اجسام جامد را به‌مدتی طولانی در دمای زیاد نگه داریم، می‌توانیم نشان دهیم که در آنها نیز پخش رخ می‌دهد.

فلزشناس انگلیسی ویلیام چاندلر رابرتس ـ آستن در سال ۱۸۹۶ برای نخستین بار پخش در جامدها را مشاهده کرد. او دیسکی از طلا و استوانه‌ای از سرب را به‌هم فشرد و آنها را به‌مدت ۱۰ روز در کوره‌ای با دمای ۲۰۰ درجهٔ سلسیوس گذاشت. هنگامی که در کوره را باز کرد، نتوانست دیسک و استوانه را از هم جدا کند: طلا و سرب در نتیجهٔ پخش به‌راستی «درهم فرو رفته بودند». اکنون از این روش برای متصل کردن قطعات به‌هم استفاده می‌شود و آن را جوشکاری پخشی می‌نامند. آیا اتروریایی‌ها هم گویهای طلا را به‌همین شیوه به‌صفحهٔ مسی متصل می‌کردند؟

پاسخ این پرسش یقیناً منفی است. نخست به‌این دلیل که فرایند جوشکاری پخشی را باید در خلأ انجام داد، وگرنه اکسیژن هوا مس را اکسید می‌کند و سطح آن را با لایهٔ سیاهی از اکسید می‌پوشاند؛ دوم اینکه در فرایند جوشکاری پخشی باید فلزها را مدتی طولانی در دمای بالا نگه داشت[2]. اتروریایی‌ها نمی‌توانستند این شرایط را فراهم آورند.

گونهٔ محتملتر تکنولوژی اتروریایی‌ها چنین است: نخست

۱ـ در نتیجهٔ پژوهشهای تازه، این فکر مطرح شده است که شاید رابرت براون حرکتی را که اکنون نام او را بر خود دارد ندیده باشد. دانیل اچ. دویچ شیمیدان، در مقاله‌ای که در اجلاس *انجمن فیزیک امریکا* ارائه شد می‌گوید که تکان خوردن میکروسکوپ براون و تبخیر آب، و نیز عواملی دیگر، سبب شده است او چیزی را ببیند که «در حقیقت، تخته‌پاره‌هایی بر سطح اقیانوس بوده‌اند، اقیانوسی که امواج آن تخته‌پاره‌ها را به‌هر سو می‌رانند.»

۲ـ بخت یار رابرتس ـ آستن بود، که برای آزمایش خود طلا و سرب را به‌کار گرفت. این زوج فلز از لحاظ زمان پخش «رکورددار» هستند. در دمای پایینی مانند ۲۰۰ درجهٔ سلسیوس، جوشکاری پخشی سایر فلزها بیش از یک ماه به‌طول می‌انجامد.

گویهای زرین را مطابق طرح مورد نظر با چسب بر ورقی از پاپیروس می‌چسباندند؛ سپس پاپیروس را روی صفحهٔ مسی می‌نهادند. به‌ترتیبی که گویها زیر پاپیروس قرار گیرند. آن گاه این «ساندویچ» گرانبها را به‌تدریج گرم می‌کردند. در حین گرم کردن، مقدار اندکی از طلا در مس، و مقدار اندکی از مس در طلا، پخش می‌شد. در نتیجه در سطح تماس گوی و صفحه، لایه‌ای بسیار نازک از آلیاژ مس ـ طلا تشکیل می‌شد.

دمای ذوب طلا ۱۰۶۳ درجهٔ سلسیوس، و دمای ذوب مس خالص ۱۰۸۳ درجهٔ سلسیوس است. اما آلیاژهای مس ـ طلا در دماهای کمتری ذوب می‌شوند. مثلاً آلیاژی که نیمی از آن مس و نیمی دیگر طلا باشد در ۹۱۰ درجهٔ سلسیوس ذوب می‌شود. این کلید حل معمای گوهرگران اتروریا است. آنها دما را تا جایی افزایش می‌دادند که آلیاژ مس ـ طلای حاصل از پخش ذوب شود، اما طلا و مس جامد بمانند. پس از آن مجموعه را سرد می‌کردند و آلیاژ منجمد می‌شد؛ گویی که هنوز گرد می‌نمود، به‌صفحهٔ مسی جوش می‌خورد. این فرایند همزمان در همهٔ گویها رخ می‌داد، به‌طوری که طرح ایجاد شده با گویهای طلا روی پاپیروس، به‌صفحهٔ مسی منتقل می‌شد. در چنین دمای بالایی پاپیروس می‌سوخت و کار به‌انجام می‌رسید. مس فرصتی برای اکسید شدن پیدا نمی‌کرد زیرا فرایند به‌سرعت انجام می‌شد و بخش عمدهٔ اکسیژن به‌مصرف سوزانیدن پاپیروس می‌رسید.

اما هنوز همهٔ اسرار این گوهرگران باستانی را نشان نداده‌ایم. مثلاً معلوم نیست که چگونه اتروریایی‌ها می‌توانستند چنین گویهای زرین خرد و گردی بسازند. اما از همه اعجاب‌آورتر آن است که چگونه صنعتگران باستانی چنین تکنولوژی زیرکانه‌ای را ابداع کرده‌اند. کدام تلفیق شگفت‌انگیز بخت، تجربه و بصیرت اتروریایی‌ها را به‌این کشف رهنمون شد؟ شاید روزی پاسخ این پرسشها را بیابیم، اما فعلاً تنها می‌توانیم این قوم پیروز و از میان رفته را بستاییم و سخنان سالوست مورخ رومی (قرن یکم پیش از میلاد) را تکرار کنیم: «دستاوردهای هر قوم، در کشت زمین، ذوب فلزات و برپا داشتن ساختمانها، به‌قدرت معنوی آن قوم بستگی دارد.»

ترجمهٔ مهندس محمدرضا افضلی

...

برای ما ممکن نیست خود را از این احساس برکنار بداریم که: دستورهای ریاضی دارای موجودیتی مستقل و عقل و کیاستی خاص خویش هستند، که عقل و کیاست آنها، بیش از مال ماست و حتی بیش از آن ریاضیدانانی است که کاشف این دستورها بوده‌اند و خلاصه اینکه با به‌کار بردن آنها همواره چیزی بیش از آن به‌دست می‌آید که به مصرف رسیده است.

هاینریش هرتز

به نقل از کتاب: *ریاضیدانان نامی*. اریک تمپل بل.

حسن صفاری.

...

جوانها معمولاً به این علت به‌طرف علم کشیده می‌شوند که طالب دانش تحقیقی، دقیق، و قادر به پیش‌بینی‌اند. اما علم معمولاً به‌خودی خود هیچیک از این چیزها نیست؛ اگرچه بعد از کشف واقعیت می‌شود آن را به چنین صفاتی مزیّن کرد.

گفتگو با رابرت شریفر (برندهٔ جایزهٔ نوبل (۱۹۷۲) به اتفاق جان باردین و لئون کوپر، به‌خاطر تدوین نظریهٔ میکروسکوپیک ابررسانایی) نقل از *مجلهٔ فیزیک*. سال ۱۰، شمارهٔ ۲.

هندسهٔ جزایی یا پیروی از اصول

نمایشنامهٔ روش‌شناسی در یک پرده

نوشتهٔ د.و.فومین

صحنه تاریک است. آهنگی آرام و شیرین به‌گوش می‌رسد (تصویر را ملاحظه کنید.) چراغها روشن می‌شوند. سالن پذیرایی در ۲۲۱B، بیکراستریت[1]. شرلوک هلمز[2] در حال نگریستن به‌روزنامهٔ عصر نشسته است. واتسون[3] وارد می‌شود.

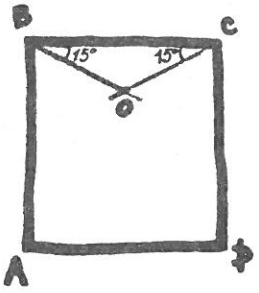
هلمز: عصر به‌خیر، رفیق عزیز، به‌نظر می‌رسد که قصد داری مدتی به‌جای طبابت به‌هندسه بپردازی.

واتسون: چطور فهمیدی؟

هلمز: روزنامهٔ دیلی جوک دیروز، با مسابقهٔ هندسه‌اش، از جیبت بیرون زده است. معلوم است که وقت زیادی برای حل حداقل یکی از مسائل آن صرف کرده‌ای.

واتسون: اما از کجا فهمیدی که هیچ یک از آنها را حل نکرده‌ام؟ راستش را بخواهی، صددرصد حق به‌جانب تست ... (*می‌نشیند*).

هلمز: واتسون عزیز، ناراحت نشو. توجه داشته باش که تمام مسئله‌ها عملاً از یک طریق حل می‌شوند ـ البته، اگر راه صحیح رسیدن به‌آنها را پیدا کنیم. راستش، هنوز مسائل مسابقه‌ای مورد بحث را ندیده‌ام، اما، ... خوب، اجازه بده نگاهی به‌آنها بکنیم. *مسئلهٔ ۱*. نقطهٔ O داخل مربع ABCD مفروض است. زاویه‌های OCB و OBC هردو ۱۵ درجه‌اند. ثابت کنید که مثلث OAD متساوی‌الاضلاع است. (شکل ۱).



شکل۱

واتسون: (*با وحشت دستهایش را به‌طرف جلو حرکت می‌دهد*). رازآمیزی این مسئله مرا به‌یاد شاه ربوده شده می‌اندازد. راستی آن را به‌خاطر داری؟

هلمز: رفیق عزیز، راجع به‌چه صحبت می‌کنی؟ من، هم الان پاسخ مسئله را می‌دهم. دراین مورد از «اصل آغاز از انتها» استفاده می‌کنیم. امیدوارم از حل مسئله متوجه بشوی که اصل مزبور چیست؟ نقطهٔ X ی را، که رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاعی است که دو رأس دیگرش A و D اند، در نظر می‌گیریم.

واتسون: اما دو نقطه از چنین نقاطی موجودند.

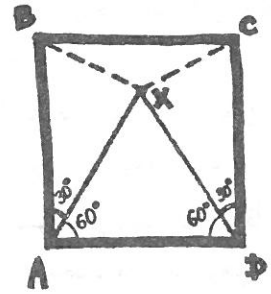
هلمز: البته. ولی ما آن را که داخل مربع است اختیار می‌کنیم (شکل ۲). حالا، زاویه‌های XBC و XCB را پیدا می‌کنیم. خوب، واتسون، باتوجه به‌پیوستگی علوم دقیقه، رابطه‌ها را در

۱ـ خیابانی که منزل شرلوک هلمز در آن بوده است.

۲ـ کارآگاه معروف داستانهای شرلوک هلمز

۳ـ دکتر واتسون دوست شرلوک هلمز

این مورد می‌دانی . انجام دادی ؟



شکل۲

واتسون : یک لحظه ... باید از این حقیقت که BAX و XCD مثلثهایی متساوی‌الساقین‌اند استفاده کنیم . اوه ! هریک از آنها ۱۵ درجه است . هوم ! بعد چه ؟

هلمز : این بدان معنی است که نقاط O و X منطبق اند . اما دوست عزیز، این مطلب، مطلبی مقدماتی است .

واتسون : عالیه ! اما ... این اصلِ شما کمکی به‌حل مسئلهٔ دوم نمی‌کند .

هلمز : خوب ، در این صورت از اصل دیگری استفاده می‌کنیم . و بنابراین ،

مسئلهٔ ۲ . طولهای اضلاع چهار ضلعی محدب ABCD (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) برابر a، b، c، d اند . ثابت کنید که مساحت ABCD بزرگتر از

$$\frac{1}{4}(a+b)(c+d)$$

نیست .

بله ، این مسئله ، مسئله‌ای کاملاً متفاوت است ... نابرابری .

واتسون ، این مسئله ناگهان مرا به‌یاد معمای پروفسور موریارتی انداخت .

واتسون (*رؤیایی*) : بله ، کلکی در این موضوع نهفته بود . او ، درصورتی که بخواهیم حق مطلب را ادا کنیم ، ریاضیدانی برجسته بود ... اما هلمز، مثل این که از موضوع منحرف شدی .

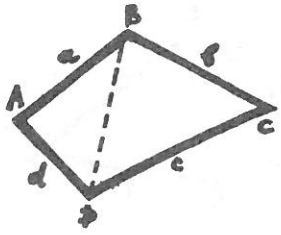
هلمز : این تویی که از مطلب پرت افتاده‌ای واتسون . در ضمن من مسئله را حل کردم . ابتدا پرانتزها را برمی‌داریم :

$$\frac{1}{4}(a+b)(c+d)$$

$$=\frac{1}{4}(ad+bc)+\frac{1}{4}(ac+bd)$$

واتسون «اصل تسهیل» را به‌خاطر بسپار : ابتدا ساده‌ترین و طبیعی‌ترین طریق حل مسئله را بررسی کن .

واتسون : بسیار خوب ، اثبات این موضوع را که مجموع $ad+bc$ کمتر از دو برابر مساحت چهار ضلعی مورد بحث نیست ، می‌توانم خودم انجام دهم : ad کمتر از دو برابر مساحت مثلث ABD (شکل ۳) و bc کمتر از دو برابر مساحت مثلث BCD نیست ـ این که هیچ . اما با عبارت $ac+bd$ چه کار می‌توان کرد ؟



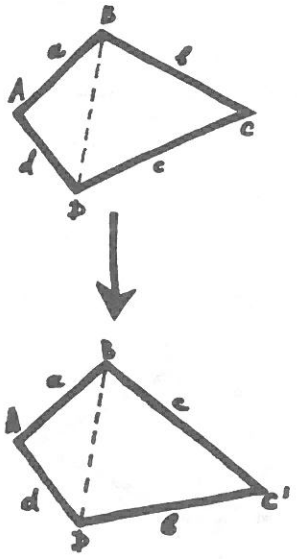
شکل۳

هلمز : در این جا «اصل تمثیل» به‌کارمان می‌آید . دوست عزیز، تمام چیزی که در این مورد لازم داریم تفکر سازگار و منطقی است ـ این کار در ریاضیات ، به‌همان اندازهٔ جرم شناسی ، اساسی است . موفقیت در محاسبهٔ قبلی مرهون چه موردی بود ؟ از این حقیقت کمک گرفتی که اضلاع a و d پهلوی یکدیگر قرار گرفته‌اند ، همینطور اضلاع b و c، درسته ؟ بنابراین باید کاری کنی که a را پهلوی c بیاوری .

واتسون : در مورد b و d چی ؟

هلمز : خوب فکر کن واتسون : اگر a پهلوی c باشد ، در این صورت b نیز پهلوی d خواهد بود . همواره شرایط نالازم را بررسی کن ! اما این کار در درجهٔ دوم اهمیت است و بنابراین : برای این که مساحت چهارضلعیمان ، هنگامی که ضلع a پهلوی c قرار می‌گیرد ، یکسان باقی بماند ، با آن چه می‌کنیم ؟ ... دوست عزیز، موضوع چیه ؟ ... چاقوی جراحیت را همراه نیاورده‌ای ؟

واتسون (متوجه نمی‌شود) : نه ، نیاورده‌ام . چرا این سؤال را ... ؟ (*به‌شکل نگاه می‌کند و ناگهان متوجه می‌شود*) . عالیه ! صرفاً ABCD را در امتداد قطر BD قطع می‌کنیم و ... و یکی از تکه‌ها را برمی‌گردانیم . (شکل ۴) و بعد ، البته ، با استدلالی شبیه قبل ، مشخص می‌کنیم که $ac+bd$ کمتر از دو برابر مساحت چهارضلعی مورد بحث نیست . با ترکیب آن با نامساوی پیشین ، آنچه را به‌دنبال ثباتش بودیم برقرار می‌کنیم . عالیه !



شکل۴

هلمز: توجه داشته باش که در اینجا هنگام حل مسئله، زمانی که مفروضاتمان را تغییر دادیم، از «اصل پویایی» نیز استفاده کردیم. این اصل، که اصلی کاملاً چشمگیر است، به‌صورت زیر است: در مسئله، هر چیزی را که مایل به‌تغییردادنش هستیم ـ تنظیمش، مفروضاتش، احکامش ـ به شرطی که راه حل مسئلهٔ جدید راه حل مسئلهٔ قدیم را به‌دستمان دهد ـ تغییر می‌دهیم. اصل مزبور، بخصوص براین است که: مفروضات مسئله را به‌عنوان مطالبی غیرقابل تغییر در نظر نگیریم. به‌عنوان مثال، اگر به‌دنبال دستگیرکردن جنایتکاری هستیم، نباید فراموش کنیم که او موجودی زنده است و می‌تواند آزادانه با «عملکرد» مان تغییر موضع دهد.

واتسون: در این مورد مطلبی است که هنوز خوب متوجه آن نشده‌ام...

هلمز: اجازه بده نگاهی به‌سومین مسئلهٔ مسابقه بیندازیم، واتسون.

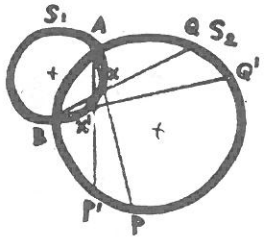
واتسون: هلمز، خواهش می‌کنم نه تنها راه حل، بلکه جمیع مراحل استدلال را بلافاصله برایم توضیح بدهی. تا همین جا هم از حیرت فرسوده شده‌ام. (*از جایش برمی‌خیزد و به‌طرف هلمز حرکت می‌کند.*)

هلمز: سعیم را می‌کنم، دوست عزیز. و بنابراین،

مسئلهٔ ۳. دو دایرهٔ S_1 و S_2 در نقاط A و B برهم عمودند. نقطهٔ X واقع بر دایرهٔ اول، اما داخل دایرهٔ دوم است. شعاعهای AX و BX دایرهٔ S_2 را در نقاط P و Q تلاقی می‌کنند. ثابت کنید که قطعه خط PQ قطر دایرهٔ S_2 است.

واتسون: من اصلاً صورت این مسئله را نمی‌فهمم. یعنی چه «دایره‌ها برهم عمودند»؟ مهمل است.

هلمز: ابداً، واتسون. این عبارت صرفاً به‌این معنی‌است که خطوط مماس در نقاط تقاطع دوایر برهم عمودند. اکنون، دقت کن که اصل پویایی چگونه در این مورد به‌کار می‌رود. نقطهٔ X را در امتداد کمان AB از دایرهٔ S_1 حرکت می‌دهیم ـ این نقطه X' می‌شود، و شعاعهای AX' و BX'، دایرهٔ S_2 را در نقاط P' و Q' قطع می‌کنند ـ نگاه کن، آن را روی این تکه کاغذ رسم می‌کنم (شکل ۵).



شکل۵

روشن است که زوایای $X'AX$ و $X'BX$ مساوی‌اند. به همین علت است که اندازه‌های زاویه‌ای کمانهای PP' و QQ' برابرند. اما این بدان معنی است که اندازهٔ زاویه‌ای کمان $P'Q'$ مساوی اندازهٔ زاویه‌ای کمان PQ است.

واتسون (*در حالی که سخن هلمز را قطع می‌کند.*): ولی هلمز، از کجا فکر اثبات آن را به‌دست آوردی؟

هلمز: دوست عزیز، خودت راجع به‌آن فکر کن: اگر قطعه خط PQ به‌ازای هر موقع نقطهٔ X واقع بر کمان AB، قطری از دایره باشد، در این صورت اندازهٔ زاویه‌ای کمان PQ، هرچه نقطهٔ X را حرکت دهیم، تغییر نخواهد کرد. اگر چیزی که حکم مسئله است، راست باشد، در این صورت این مطلب نیز به‌وضوح باید راست باشد. و بار دیگر اصل آغاز از انتها.

و حالا، واتسون، نقطهٔ X مان را به‌طرف نقطهٔ B حرکت می‌دهیم. چه چیزی به‌دست می‌آوریم؟ در این حالت، اندازهٔ زاویه‌ای کمان PQ دقیقاً ۱۸۰ درجه خواهد شد.

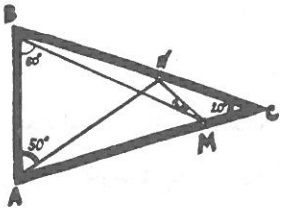
واتسون : آخر چرا این اصل ؟ اوه . بله ... از این حقیقت که دوایر مورد بحث در زوایای قائمه تقاطع کرده‌اند استفاده می‌کنیم . ضمناً ، هلمز ، اصل دیگری نیز در این مورد موجود است : تمام مفروضات مسئله را به‌کار برید و به خاطر داشته باشید که آنها باید به‌طریقی مورد استفاده قرار گیرند ! این اصل را چه بنامیم ؟

هلمز (*با متانت*) : آن را «اصل تکمیل راه‌حل» می‌نامم .

واتسون : باید بگویم بسیار خوب ! اما آدم فکر می‌کند تو در هر جیبت یک اصل داری !

هلمز: نه ، دوست عزیزم ، من آنها را در سرم دارم . اما باید تذکر بدهم که گاهی ، اصلی که هم اکنون برایت مطرح شد ، در زندگی واقعی کاربردناپذیر است . بعضی از حقایق در نگاه اول مشکوک یا صریحاً متهم‌کننده به نظر می‌رسند ، اما بعداً مشخص می‌شود که تصادف محض یا تاکتیکهایی انحرافی از جانب مقصر اصلی بوده‌اند . مورد نیمتاج یاقوت نشان را به‌خاطر داری ؟ ... بسیار خوب ، به‌هر تقدیر ، این هم آخرین مسئله است .

مسئلهٔ ۴ . مثلث ABC متساوی الساقین ، و C زاویهٔ رأس آن ۲۰ درجه است . نقاط M و N بر ساقهای AC و BC ی آن چنان در نظر گرفته شده‌اند که زاویهٔ NAB برابر ۵۰ درجه و زاویهٔ MBA برابر ۶۰ درجه است . ثابت کنید زاویهٔ NMB برابر ۳۰ درجه است (شکل ۶) .



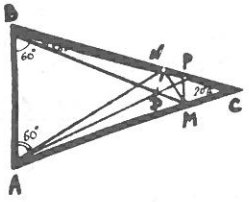
شکل۶

واتسون : من سعی داشتم این زاویه را با استفاده از مثلثات حساب کنم ....

هلمز: دوست عزیز ، خواهش می‌کنم نیروهایت را ذخیره کن ! شاید بتوانی ، هنگامی که من چند دقیقه‌ای را صرف این مسئله می‌کنم ، روزنامه‌ات را بخوانی .

طی پنج یا شش دقیقهٔ بعد ، واتسون هنگامی که هلمز شکل زیر را به‌دقت مطالعه می‌کند ، روزنامه‌اش را می‌خواند . موسیقی آرامی نواخته می‌شود .

هلمز: خوب ، واتسون . این مسئله در واقع کمی پوست کلفت است . بگذار به نقطهٔ P واقع بر ضلع BC ، چنان که زاویهٔ PAB برابر ۶۰ درجه باشد ، نگاهی بیندازیم . روشن است که خط PM موازی AB است ، و مثلث PDM متساوی‌الاضلاع می‌شود (D نقطه‌ای است که قطعات PA و BM در آن تقاطع می‌کنند) . (شکل ۷) چون مثلث BNA متساوی‌الساقین است ، طولهای قطعه خطهای BN ، BA ، و BD برابرند و زوایای BND و BDN ، هر دو ، ۸۰درجه‌اند . از این مطلب به‌سادگی نتیجه می‌شود که زاویهٔ NDP برابر ۴۰ درجه است . لذا ، مثلث NDP متساوی‌الساقین است ، و در نتیجه ، MN نیمساز زاویهٔ BMP . بنابراین ، زاویهٔ NMB نصف زاویهٔ DMP و برابر ۳۰ درجه است . و به‌این ترتیب اثباتمان به‌اتمام می‌رسد .



شکل۷

واتسون (مبهوت) : ولی ... ولی ... چطور؟ چطور به یک چنین راه حل ماهرانه‌ای رسیدی ؟

هلمز : واتسون عزیز ، فکر می‌کنم بتوانم داستان مهیجی در مورد چگونگی پیدا کردن راه حل مورد بحث ، به‌کمک یک دوجین اصلِ با مهارت انتخاب شده ، برایت تعریف کنم ... چرا می‌خندی ، واتسون ؟ البته ، بعضی اصلها سهل الوصول‌اند . فی‌المثل ، «اصل هدف» قابل توجه است : همواره به‌خاطر داشته باشید که برای رسیدن به‌هدفتان چه کارهایی برای انجام دادن باقی مانده است . و محققاً ، معدودی مطالب کوچک در گوشه و کنار ... به‌هر تقدیر ، دوست من ، برای حل یک مسئله ، به‌مطالبی بیش از تنها یک مجموعه قواعد استاندارد تفکر نیاز داریم . به‌چیزهایی چون تجربه و شهود احتیاج است . تصور می‌کنی که کارها این قدر ساده‌اند که برای انجام دادنشان ، تنها چیزی که لازم داریم به‌خاطر سپردن تعدادی «اصول» و آموختن به‌کاربردن آنها به‌ترتیبی خاص باشد ؟ خوشبختانه ، برهان بشری به‌گونهٔ اندازه‌ناپذیری وسیعتر از اینهاست ... گرچه ، البته این اصول ، که در اساس چیزی بیش از کلیشه‌های فکری نیستند ،

نیز می‌توانند کاربردهایی داشته باشند. واتسون، آدمی نباید از چیزی که عقلایی است تغافل کند!

واتسون (*با خستگی روی صندلیش می‌نشیند، و روزنامه‌اش را برمی‌دارد.*): هی! به‌این گوش کن هلمز: «شب گذشته، تبهکاران ناشناسی، پس از داخل شدن به‌دفتر روزنامهٔ *دیلی جوک*، صندوق سردبیر روزنامه را شکسته، جایزهٔ مسابقهٔ سالانهٔ هندسه را دزدیدند. این جایزه، نوار موبیوس طلایی[1] به‌اندازهٔ واقعی و به‌قیمت...» مطلب جالب دیگری ندارد... اوه، گوش کن! «کارآگاه رابینسون اعلام کرد که پلیس سرنخی در این مورد به‌دست نیاورده است. سردبیر *دیلی جوک* به‌خبرنگاران گفت، روزنامه، برای افزایش تعداد مشترکین و اصلاح وضع مادیش، در یکی از شماره‌های آینده مسابقهٔ حل مسئلهٔ مخصوصی را مطرح خواهد کرد...»

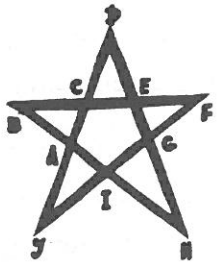
دوست عزیز، پس‌از تمام چیزهایی که امروز شنیده‌ام، باید این تبهکاران را دستگیر کنی، چه بالاخره، این مورد نیز از موارد پیروی از اصول است!

هنگامی که این آخرین کلمات گفته می‌شود، صحنه تاریک می‌شود و آخرین ضربه‌های آهنگِ همراه صحنه، در تاریکی، شنیده می‌شود.

موارد زیر مسائلی از مسابقهٔ مخصوص اعلام شده در روزنامه است. به‌خاطر داشته باشید که هریک از آنها شگردی مخصوص خود دارد که آن را می‌توان با استفاده از اصول مطرح شده توسط کارآگاه بزرگ، آسانتر یافت.

۱. ثابت کنید که یک ستارهٔ پنج رأسی را نمی‌توان چنان رسم کرد که طولهای قطعات AB، BC، CD، DE، EF، FG، GH، HI، IJ، JA (شکل را ملاحظه کنید) به‌ترتیب برابر ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹ باشند. (شکل ۸)

۲. نقطهٔ B داخل زاویهٔ قائمه‌ای به‌رأس O قرار دارد، نقاط A و C بر دو ضلع آن واقع‌اند. ثابت کنید که محیط مثلث



شکل۸

ABC کمتر از دو برابر طول قطعه خط OB نیست.

۳. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است و طول قطعه خط AD برابر مجموع طولهای قطعات AB و CD است. ثابت کنید که نیمسازهای زوایای B و C بر ضلع AD تقاطع می‌کنند.

۴. دزد بی‌دستی می‌خواهد سکه‌ای را از میز پول خردکنی با هول دادن سکه با استفاده از بینی‌اش بر میز، بدون برخورد دادن آن با هیچ یک از سکه‌های میز بدزدد. آیا موفق می‌شود؟ سکه‌ها گردند، (امکاناً) به‌اندازه‌های متفاوت‌اند، و با یکدیگر تماس ندارند.

۵. مربعی به‌چند مستطیل تقسیم شده است. نسبت ضلع کوچکتر به‌ضلع بزرگتر هریک از این مستطیلها را می‌توان محاسبه کرد. ثابت کنید که مجموع این نسبتها کمتر از ۱ نیست. (پاسخها در صفحهٔ ۴۹)

ترجمهٔ غلامرضا یاسی پور

نظر ما تغییر یافته است و باز هم تغییر می‌یابد و تکامل پیدا می‌کند. بر کلام دکارت: «فضا و حرکت را به من بدهید و من دنیایی به شما خواهم داد» اینشتاین امروز چنین جواب می‌دهد: «آنچه خواسته شده است، به‌واقع زیاد است و حقیقت آن است که اصولاً تقاضای دکارت فاقد مفهوم است: بدون وجود «دنیا» (یعنی بدون وجود ماده) نه «فضایی» وجود دارد و نه «حرکتی» موجود است.»

ریاضیدانان نامی

اریک تمپل بل. حسن صفاری.

۱ـ نواری که از پیچ دادن یک نوار معمولی و وصل کردن دو سر آن به‌هم حاصل می‌شود و یک رویه دارد.

دوک و دستگاه جوجه‌کشی او

فرازونشیب گرماپژوهیِ فلورانسی و کاربردهای آن

نوشتهٔ الکساندر بوزدین

داغ، گرم، سرد، یخ ... اینها لغاتی هستند که روزانه برای توصیف میزان گرمایی اجسام مختلف به‌کار می‌بریم. معیار مقدار گرمای اجسام، البته دما است ـ هرچه دما بالاتر باشد، جسم گرمتر است.

می‌توان تنها با لمس کردن، جسم داغ را از جسم سرد تمیز داد اما علم وقتی شروع می‌شود که مقادیری اندازه‌گیری شوند. امروزه هر بچه‌ای می‌داند که برای اندازه‌گیری دما به دماسنج نیاز داریم. با اختراع دماسنج مطالعه و بررسی پدیدهٔ گرما آغاز شد.

بیشتر دماسنجها از انبساط اجسام هنگام گرم شدن (و انقباض آنها هنگام سرد شدن) بهره می‌گیرند. در اوّلین دماسنج، که در اوایل قرن هفدهم توسط گالیله اختراع شد، از آب استفاده می‌شد. طبیعی است که این دماسنج برای اندازه‌گیری دماهای زیر نقطهٔ انجماد آب، و بالای نقطهٔ جوش آن بی‌فایده بود. بعد از آن، دماسنج جیوه‌ای خیلی متداول شد. اما این دماسنج نیز در مواقع خیلی سرد نمی‌تواند مقدار دقیقی را بخواند زیرا جیوه در ۳۸٫۸°C− منجمد می‌شود. در پایین تر از این نقطه می‌توان از دماسنج الکلی استفاده کرد که گسترهٔ کار آن تا ۹۷°C− (نقطهٔ انجماد الکل) می‌رسد.

اختراع دماسنج الکلی را باید به‌پای دوک فردیناند دوّم نوشت که در اواسط قرن هفدهم حکمران فلورانس بود. دوک علاوه بر وظایف سلطنتی خویش، بیشتر وقت خود را صرف علوم طبیعی می‌کرد. وی که شاگرد گالیله بود در پی‌ریزی ابزارهای اندازه‌گیری دما سهم زیادی داشت. قبل از فراگیر شدن کاربرد دماسنج، دما با ترموسکوپ نشان داده می‌شد. ترموسکوپ وسیله‌ای است که نشان می‌دهد آیا دما از مقدار معیّن و مشخصی بالاتر یا پایین تر است، اما نمی‌تواند آن را اندازه‌گیری کند. فردیناند در ساختن ترموسکوپ با طرحهای مختلف بسیار ماهر بود. او یکی از ترموسکوپهای ساخت خود را برای آتاناسیوس کرشر، یسوعی آلمانی که به‌دلیل علاقه‌اش به‌علوم مشهور بود، فرستاد. این دستگاه تشکیل شده بود از یک لولهٔ شیشه‌ای در باز که تقریباً پر از آب بود، همچنین تعدادی ظرف کوچک گلابی شکل که از طرف پایین باز بودند. داخل هریک از این ظرفها حباب هوایی قرار داشت و حجم آن چنان انتخاب شده بود تا در دمای خاصی ظرفها در آب شناور شوند. وقتی دما افزایش می‌یافت هوای داخل لوله منبسط می‌شد و آب را به‌بیرون می‌راند. در نتیجهٔ افزایش نیروی بالابر، ظرفها به‌طرف بالا شناور می‌شدند. بنابه توصیف فردیناند ظرفها در دمای ۱۵°C در لولهٔ اصلی به‌حالت تعلیق درمی‌آمدند. وقتی دما زیر ۱۵°C برسد، حجم حبابهای هوا کاهش یافته، آب وارد ظرفها می‌شود و آنها به سمت پایین

می‌روند.

فردیناند همراه با این دستگاه و جزئیات دستور کار آن، ترموسکوپ دیگری برای کرشر ارسال کرد. فرق آن با دستگاه قبلی این بود که کاملاً با آب پر شده، سپس درزگیری شده بود. اما این ترموسکوپ برخلاف دستگاه قبلی کار می‌کرد، یعنی وقتی دما در ظرفها بالا می‌رفت، به‌سمت پایین حرکت می‌کردند و هنگامی که دما پایین می‌آمد، به‌سمت بالا می‌رفتند. فردیناند علّت این امر را از کرشر جویا شد. ما نمی‌دانیم که آیا کرشر موفق به‌جواب دادن به‌سؤال فردیناند شد یا نه، امّا بدون شک، اینک خوانندگان دقیق ما بدون هیچ مشکلی به‌این مسئله پاسخ می‌دهند (می‌توانید جواب را در صفحهٔ ۴۹ ببینید و با جواب خودتان مقایسه کنید).

فردیناند چند نوع دماسنج نیز ابداع کرد که نتایج نظری وی را در عمل به‌کار می‌گرفتند. یکی از آنها مربوط به‌دستگاه جوجه‌کشی است. او یکی از اولین ماشینهای جوجه‌کشی را ساخت و در آن از دماسنج ساخت خودش برای نشان دادن دما استفاده کرد. در آن زمان نیز عملی ساختن نتایج علمی آسان نبود، و به‌همین علت از ۱۵۰ تخم فقط سه عدد جوجه بیرون آمد. اما چرا این قدرکم؟ شاید کارگر مسئول ماشین مقادیر خوانده شده توسط دماسنج را جدی نمی‌گرفت و در عوض از حس لامسهٔ خود برای تشخیص گرمی و سردی استفاده می‌کرد. شاید هم خود فردیناند، اطلاعات کاملی از زیست‌شناسی نداشت. به‌هرحال ما فقط می‌توانیم دلیل شکست این آزمایش را حدس بزنیم.

فردیناند در نشان دادن وضعیت هوا به‌وسیلهٔ دماسنج موفق‌تر بود. او مشاهدات هواشناسانهٔ مهمی داشت و در فصلهای مختلف سال، دما را در چاههای عمیق و حفره‌های زیرزمینی بررسی می‌کرد. او به‌این نتیجه رسید که تغییرات فصلها در داخل زمین نسبت به‌سطح دیرتر صورت می‌گیرد (زیرا برای گرم شدن یا سرد شدن زمین زمان لازم است).

ترجمهٔ مهندس مهناز نبویان پور

...

تاریخ فلسفهٔ علمی سرگذشت تکامل مسائل است. مسائل نه به‌وسیلهٔ کلی‌بافیهای مبهم یا توصیفهای بدیع و زیبا برای ارتباط میان انسان و جهان، بلکه به‌وسیلهٔ کار فنی حل می‌شوند. چنین کاری در علم صورت می‌گیرد. و در واقع باید اثر تکامل مسائل را در تاریخ علوم ویژه دنبال کرد. دستگاههای فلسفی، در بهترین صورت، بازتاب مرحلهٔ شناخت علمی عصر خود بوده‌اند؛ اما آنها به تکامل علم کمکی نکرده‌اند. تکامل منطقی مسائل نتیجهٔ کار دانشمند است. تحلیل فنی وی، هر چند غالباً متوجه جزئیات کوچک بوده است، فهم مسائل را بیشتر کرده است، تا اینکه سرانجام شناخت فنی تا بدان حد کامل گردید که پاسخگویی به پرسشهای فلسفی را نیز میسر ساخت.

کار علمی کار گروهی است. سهم افراد خاص در حل یک مسئله ممکن است کمتر یا بیشتر باشد، اما همواره نسبت به کاری که از سوی گروه در رابطه با مسئله انجام می‌گیرد، اندک خواهد بود. ریاضیدانان، فیزیکدانان و زیست‌شناسان بزرگی وجود دارند، اما حتی بزرگترین آنان، بدون فراهم ساختن مقدمات از سوی نسلهای پیشین، یا کمک معاصرانشان، قادر به انجام کار خود نبوده‌اند. مقدار کار فنی لازم برای حل یک مسئله از توانشهای یک دانشمند خاص بیرون است. این امر نه‌تنها در مورد کار دشوار پژوهش مشاهده‌ای و آزمایشی، بلکه همچنین در مورد بنای منطقی و ریاضی یک نظریه صادق است... کمکهای افراد خردمند بسیار، نوعی خرد گروهی فوقِ شخصی است که قادر به یافتن پاسخهایی است که فرد تنها، هرگز نمی‌تواند بیابد.

پیدایش فلسفهٔ علمی

هانس رایشنباخ. موسی اکرمی

پاسخها، اشارات و راه‌حلها

فیزیک

ف . ۱

v سرعت کیسه‌ها را در لحظه‌ای که کیسهٔ دوم با سطح زمین تماس می‌یابد، می‌توان از قانون بقای انرژی به‌دست آورد:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = m_2 gH$$

پس از آن، کیسهٔ اول روی میز حرکت می‌کند تا نخ کاملاً کشیده شود. در این لحظه، کیسهٔ دوم با یک تکان شتاب می‌گیرد، در نتیجه سرعت کیسه‌ها برابر می‌شود.

تغییر سرعت کیسه‌ها برابر مقداری است که اگر کیسهٔ دوم روی میز (و نه بر سطح زمین) می‌بود وجود داشت. زیرا کیسه‌ها به‌وسیلهٔ نخ به‌هم متصل‌اند و نیروی وارد بر کیسهٔ دوم برابر مقداری است که اگر این کیسه روی زمین بود، بر آن وارد می‌شد (هرچند راستای آن یکسان نیست). بنابراین u سرعت مشترک بعد از تکان، با توجه به قانون بقای اندازه حرکت برابر است با:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)u$$

پس از تعیین حرکت کیسه‌ها به‌کمک قانون بقای انرژی و بالاترین نقطه‌ای که کیسهٔ دوم به آن می‌رسد، از رابطهٔ زیر

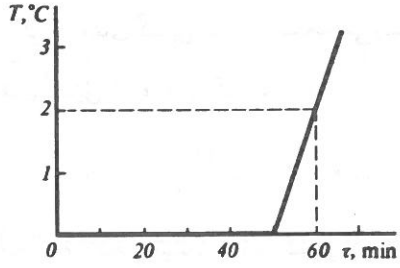
$$m_2 gH = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$

با حل دستگاه معادله‌های به‌دست آمده داریم

$$h = [\frac{m_1}{m_1 + m_2}]^2 H$$

ف . ۲

با توجه به‌نمودار (شکل ۱) درمی‌یابیم که طی ۵۰ دقیقهٔ اول دمای مخلوط تغییر نمی‌کند و برابر $0^\circ C$ است. مقدار گرمایی که مخلوط از محیط اتاق طی این مدت می‌گیرد برای ذوب یخ مصرف می‌شود. در ۵۰ دقیقه، تمام یخ ذوب می‌شود و دمای آب شروع به‌افزایش می‌کند. در ۱۰ دقیقه (از $\tau_1 = 50\ min$ تا $\tau_2 = 60\ min$)، دما به‌اندازهٔ $\Delta T = 2^\circ C$ افزایش می‌یابد. گرمای داده شده طی این مدت از جانب اتاق به‌آب برابر است با $q = c_w m_w \cdot \Delta T = 84 kJ$. بنابراین مقدار گرمایی که مخلوط طی ۵۰ دقیقهٔ اول می‌گیرد برابر است با $Q = 5q = 420 kJ$. این مقدار گرما برای ذوب یخ به‌جرم m_i صرف شد: $Q = \lambda m_i$. بنابراین جرم یخ سطل برابر است با $m_i = \frac{Q}{\lambda} \cong 1.2 kg$.



شکل۱

ف . ۳

گاز چنان رقیق می‌شود که هر مولکول آن طی این یک دقیقه از همهٔ قسمتهای ظرف می‌گذرد. (برای اثبات این مطلب می‌توانید در شرایط داده شده، میانگین مسیر آزاد متوسط مولکول را محاسبه کنید، پس درمی‌یابید که این مقدار خیلی بزرگتر از هر ضلع ظرف است.) فشار وارد بر یک طرف ظرف به‌کمک ضربهٔ مولکولها تعیین می‌شود؛ اگر m جرم مولکول (برای هلیم

$(m \cong ۷ \times ۱۰^{-۲۴} g)$ و v_x سرعت میانگین ضربهٔ مولکول باشد داریم

$$P = \frac{۲mv_xN_b}{S\Delta t} \quad , \quad N_b = \frac{PS\Delta t}{۲mv_x}$$

که N_b تعداد ضربه‌های تمام مولکولها به‌وجهی به‌سطح S در مدت زمان Δt است؛ بنابراین هر مولکول تقریباً N_b/N بار به‌سطح ظرف برخورد می‌کند که N تعداد کل مولکولهاست. v_x چنین به‌دست می‌آید:

$$v_x \cong \sqrt{kT/m}$$

در نتیجه داریم

$$N_\bullet = \frac{N_b}{N} = \frac{PS\Delta t}{۲mNv_x}$$

$$= \frac{\sqrt{kT/m}}{۲a} \cong ۲/۵ \times ۱۰^۵$$

که از قانون گازها $PV = NkT$ استفاده شده است.

$(V = a^۳, a = ۱۰cm)$

ف. ۴

اگر صفحهٔ عکاسی را یک وجه مکعبی در نظر بگیریم که منبع ذرات در آن قرار گرفته، آنگاه منبع در مرکز مکعب خواهد بود. بنابراین $\frac{۱}{۶}$ کل ذره‌های گسیل شده به‌صفحه می‌رسند، و تعداد تمام ذره‌های گسیل شده طی یک ساعت برابر است با

$$N = ۶ \times ۲۰۰ \times \frac{۳۶۰۰}{۱۰} = ۴ \times ۱۰^۵$$

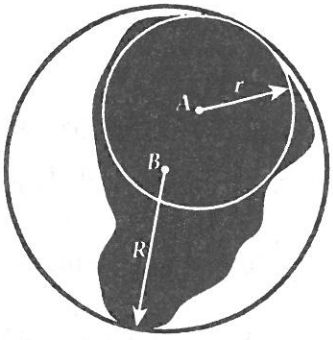
نیازی به‌محاسبهٔ دقیقتر نیست، زیرا گسیل ذره‌ها یک فرایند تصادفی است و تعداد اثرهای شمرده شده (یعنی ۲۰۰) خیلی زیاد نیست.

ریاضی

ر. ۱

لکه دایره‌ای به‌شعاع $r = R$ است.

فرض می‌کنیم A نقطه‌ای از لکه باشد که کمترین فاصله‌اش از پیرامون آن r است. در این صورت لکهٔ مورد بحث شامل دایره‌ای به‌مرکز A و شعاع r است، زیرا جمیع نقاط پیرامون لکه خارج این دایره قرار می‌گیرند (شکل ۲). به‌همین ترتیب، اگر B نقطه‌ای از لکه باشد که بیشترین فاصله‌اش از پیرامون آن R است، دایرهٔ به‌مرکز B و شعاع R، پیرامون، و بنابراین خود لکه را در برمی‌گیرد. از آنجا که دایرهٔ B شامل لکه، و لکه، خود، شامل دایرهٔ A به‌همان شعاع است، باید دوایر مورد بحث منطبق برهم باشند، و بنابراین لکه نیز براین هردو منطبق است.



شکل۲

ر. ۲

فرض می‌کنیم $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n جمله‌های اول دنباله‌های مورد بحث، و $d_۱$، $d_۲$، ...، d_n قدرنسبتهای مربوطه‌شان باشند. چون حاصلضرب تمام قدرنسبتها به‌یکی از دنباله‌ها تعلق دارد، تساوی

$$d_۱d_۲ \ldots d_n = a_i + kd_i$$

به‌ازای i ای، $۱ \leqslant i \leqslant n$ و عدد صحیح k یی برقرار است. نتیجه می‌شود که

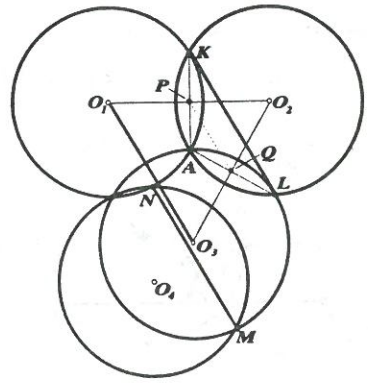
$$a_i = d_i(d_۱ \ldots d_{i-۱}\, d_{i+۱} \ldots d_{n-k})$$

بر d_i بخش پذیر است.

ر. ۳

راه حل زیر یکی از راه‌حلهای متعدد این مسئله است.

مراکز دوایر مفروض را با $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$، $O_۴$ و تقاطعات دوبه‌دوی آنها را با K، L، M، N نمایش می‌دهیم (شکل ۳). پاره‌خط $O_۱O_۲$، AK، وتر مشترک دوایر $O_۱$ و $O_۲$، را در P، نقطهٔ وسط آن قطع می‌کند، و چون دوایر مزبور همنهشت‌اند، P



شکل۳

نقطهٔ وسط O_1O_2 نیز هست. به‌همین ترتیب، پاره‌خط O_2O_3 و AL، وتر مشترک دوایر O_2 و O_3، نقطهٔ وسط یکسان Q را دارند. نتیجه می‌شود که PQ خط وسط دو مثلث (خطی که اوساط دو ضلع مثلث را به‌هم وصل می‌کند) $O_1O_2O_3$ و AKL است، و بنابراین $\overrightarrow{O_1O_3} = ۲\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{KL}$. در استدلال مورد بحث، با قراردادن O_4 به‌جای O_2، تساوی $\overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{NM}$ را به‌دست می‌آوریم. به‌این ترتیب، KL = NM، یعنی KLMN متوازی الاضلاع است.

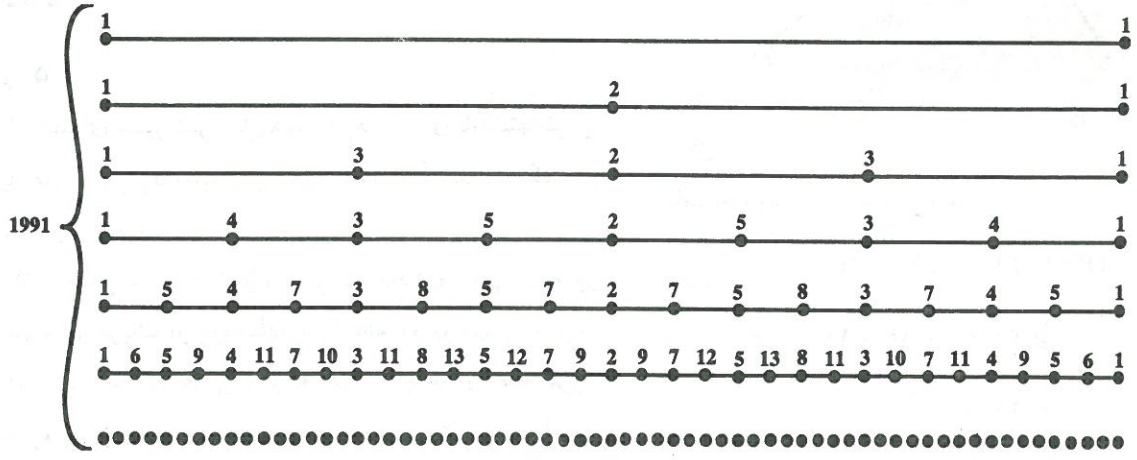
ر. ۴

پاسخ ۱۸۰۰ است. مسئله را برای n دلخواه حل می‌کنیم و سپس n را برابر ۱۹۹۱ قرار می‌دهیم.

با نوشتن خطوط اعداد حاصل از مراحل متوالی فرایندمان، جدول نشان داده شده در شکل ۴ را به‌دست می‌آوریم. واضح است که جمیع اعداد جدیدی که در خط kام جدول مزبور ـ یعنی، در مرحلهٔ kام فرایند مورد بحث ـ ظاهر می‌شوند از اعدادی که در مرحلهٔ (k − ۱)ام ظهور می‌یابند، بزرگترند، و اعداد اخیر نیز به‌نوبت خود از اعداد جدید حاصل از مرحلهٔ (k − ۲)ام بزرگترند، و همین طور الی اول. بنابراین، جمیع اعداد نوشته شده در مرحلهٔ kام کمتر از k نیستند، و این بدان معنی است که خط nام جدولمان شامل جمیع اعداد n ی است که تاکنون در دورهٔ فرایندمان براین پاره‌خط ظاهر شده‌اند. اکنون سعی در یافتن این می‌کنیم که چند عدد از این n ها موجودند؟

هربارکه عدد n ی را، طبق قاعده‌مان، بین اعداد مجاور a و n − a می‌نویسیم، یک جفت عدد متوالی a و n، با a < n، را در آن خط جدول ایجاد می‌کنیم. برعکس، اگر جفت (a, n)، a < n، در جدولمان رخ دهد ـ یعنی، n بلافاصله سمت راست a در خطی قرار گیرد ـ در این صورت عدد n از این زوج (و نه a) برای اولین بار در خط مزبور پدیدار می‌شود. بنابراین تعداد nها در خط nام برابر تعداد جفتهای (a, n)، a < n، ی است که در جدولمان رخ می‌دهند. اندکی بعد به اثبات این مطلب می‌پردازیم که هر جفت (a, b) از اعداد متباین a و b دقیقاً یک بار در جدول مورد بحث رخ می‌دهند، در حالی که هریک از جفتهای دیگر اصلاً پدیدار نمی‌شوند.

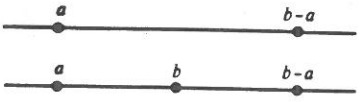
بنابراین، تعداد جفتهای (a, n)، a < n، برابر است با $\varphi(n)$، تعداد اعداد a < n ی که با n متباین‌اند. به‌ازای



شکل۴

$n = ۱۹۹۱ = ۱۱ \times ۱۸۱$ ، جمیع اعداد کمتر از n ی که مقسوم علیه‌های مشترک (غیر از ۱) ی با n دارند به‌صورت $۱۸۱k$ ، $۱ \leqslant k \leqslant ۱۰$ ، یا $۱۱m$ ، $۱ \leqslant m \leqslant ۱۸۰$ اند. از چنین اعدادی $۱۰ + ۱۸۰ = ۱۹۰$ عدد موجودند، بنابراین $\varphi(۱۹۹۱) = ۱۹۹۰ - ۱۹۰ = ۱۸۰۰$ ، و این پاسخ مسئله است.

اکنون آنچه که باقی مانده، اثبات گزارهٔ فوق است. این کار را با استقرای بر $s = a + b$ انجام می‌دهیم. گزاره، به‌ازای $s = ۲$ ، واضحاً راست است ـ تنها جفت ممکن با $s = ۲$ ، $(۱, ۱)$ است. اکنون فرض می‌کنیم که به‌ازای جمیع جفتهای (a, b) ، $a + b < s$ راست باشد، و جفت (a, b) ، $a + b = s$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. می‌توان فرض کرد که $a \leqslant b$ ، زیرا جدول نسبت به‌خط وسط قائمش متقارن است. جفت (a, b) در جدول رخ می‌دهد، اگر و تنها اگر جفت $(a, b - a)$ در خط ماقبل رخ دهد (شکل ۵). اما $a + (b - a) = b < s$ ، بنابراین، گزاره‌مان، بنابه فرض استقرا، به‌ازای $(a, b - a)$ راست است، و مقسوم علیه‌های مشترک اعداد a و $b - a$ چون a و b اند. در این صورت، گزارهٔ مورد بحث به‌ازای (a, b) نیز راست است، و کارمان انجام گرفته.

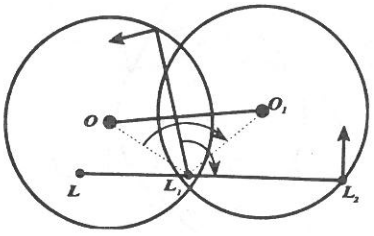


شکل۵

ر. ۵

پاره‌خطهای مسیر شیر را با $x_۱, \ldots, x_k$ و زوایای بازگشتهایش را با $\alpha_۱, \ldots, \alpha_{k-۱}$ نمایش می‌دهیم (تعداد بازگشتها یکی کمتر از تعداد پاره‌خطهاست).

اکنون مسیر مورد بحث را، با گردش دادن متوالی آن به‌دور انتهاهای هریک از پاره‌خطهای x_i به‌اندازهٔ زوایای α_i ، برای هم امتداد ساختن هر $x_{i+۱}$ و x_i ای، و چرخاندن حلقهٔ مزبور همراه با پاره‌خطهای مورد بحث، به‌خط مستقیم درمی‌آوریم (شکل ۶). در این صورت به‌جای یک خط شکسته پاره‌خط مستقیم LL' ، به‌درازای ۳۰۰۰۰ متر، شامل پاره‌خطهای کوچکتر



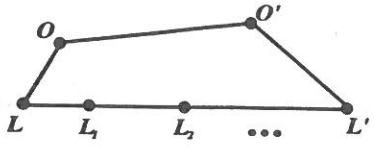
شکل۶

$LL_۱ = x_۱$ ، $L_۱L_۲ = x_۲$ ، ... ، $L_{k-۱}L' = x_k$ را به‌دست می‌آوریم. اکنون مسیر O، یعنی، مرکز حلقه، را طی دورانهای متوالیمان دنبال می‌کنیم. اولین دوران حول $L_۱$ ، O را به‌نقطهٔ $O_۱$ ، به‌طوری که $L_۱O_۱ = L_۱O \leqslant ۱۰$ (شیر مورد بحث همواره داخل حلقه می‌ماند!) و زاویهٔ $OL_۱O_۱ = \alpha_۱$ ، می‌برد. بنابراین، $OO_۱ < ۱۰\alpha_۱$. به‌همین ترتیب، فاصلهٔ $O_۱$ از موقع بعدی مرکز، یعنی $O_۲$ ، کمتر از $۱۰\alpha_۲$ است، و همین طور الی آخر. نتیجه می‌شود که فاصلهٔ بین مواقع اول و آخر نقطهٔ O را می‌توان به‌صورت

$$OO' < ۱۰(\alpha_۱ + \ldots + \alpha_{k-۱})$$

برآورد کرد. از طرف دیگر، نامساوی (شکل ۷)

$$LL' \leqslant LO + OO' + O'L'$$



شکل۷

نامساوی زیر را به‌دست می‌دهد

$$OO' \geqslant LL' - LO - O'L'$$

$$\geqslant ۳۰۰۰۰ - ۱۰ - ۱۰$$

$$= ۲۹۹۸۰$$

بنابراین

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1} > 2998 \text{ rad}$$

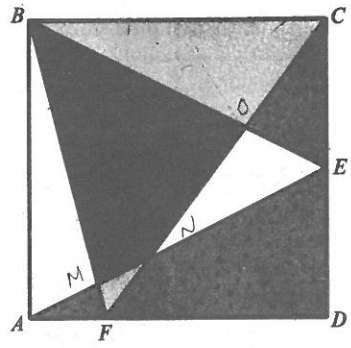
معماها

م . ۱

یکی از ۱۸ عدد متوالی بر ۱۸ بخشپذیر است ؛ بنابراین مجموع ارقام S بر ۹ بخشپذیر است ، و آخرین رقمش زوج است . از آنجا که عدد مورد بحث دارای ۳ رقم است ، S بزرگتر از $26 = 8 + 9 + 9$ نیست ؛ بنابراین $S = 9$ یا $S = 18$. در هر دو حالت S عدد انتخاب شدهٔ مورد بحث را می‌شمرد .

م . ۲

با افزودن سطح مثلثهای MNF و BOC به‌سطح ▭ (شکل ۸) ، مساحت مثلث BFC به‌دست می‌آید که برابر نصف مساحت مربع است . با افزودن سطح همین مثلثها به‌سطح ▭ ، مساحت مربع منهای مساحت BEA به‌دست می‌آید که آن هم نصف مساحت مربع است . پس دو قسمت مساحت مساوی دارند .



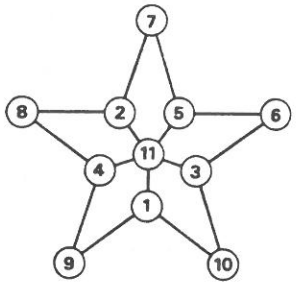
شکل۸

م . ۳

باافزایش دما ، طول آونگ نیز افزایش می‌یابد ، اما جیوه ، به‌علت افزایش حجم ، از لوله بالا می‌رود . با انتخاب صحیح حجم جیوه و قطر لوله می‌توان فاصلهٔ نقطهٔ آویز آونگ از مرکز ثقل آن را ثابت نگه داشت . در نتیجهٔ این طرح دورهٔ نوسان آونگ به‌دما وابسته نمی‌شود و دقت ساعت مورد بحث افزایش می‌یابد .

م . ۴

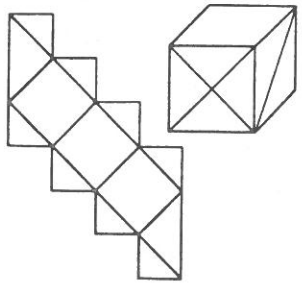
شکل ۹ را ببینید .



شکل۹

م . ۵

شکل ۱۰ را ببینید (هریک از دو وجه روبروی مکعب با چهار مثلث کوچک پوشانده می‌شود ؛ وجه سوم با دو مثلث بزرگتر پوشانده می‌شود ؛ سه وجه باقیمانده را با قسمتهای مربع شکل کاغذ داده شده می‌پوشانیم) .

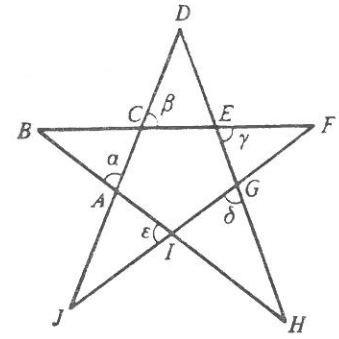


شکل۱۰

هندسهٔ جزایی

۱. از آنجا که AB باید کوتاهتر از BC باشد ، زاویهٔ BAC باید کوچکتر از زاویهٔ BCA ، برابر زاویهٔ DCE باشد ، یا طبق نماد شکل صفحهٔ بعد ، $\alpha < \beta$. به‌همین ترتیب ، $\beta < \gamma < \sigma < \epsilon < \alpha$ ، که به‌تناقض $\alpha < \alpha$ منجر می‌شود (شکل ۱۱) .

۲. B_1 و B_2 قرینه‌های نقطهٔ B نسبت به‌اضلاع زاویهٔ مفروض

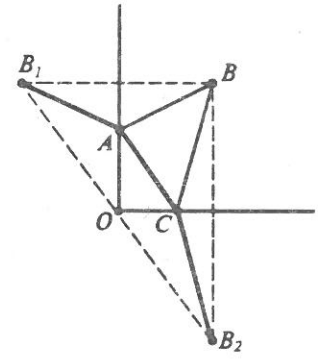


شکل۱۱

(شکل ۱۲) قرینهٔ یکدیگر نسبت به O، رأس زاویهٔ مفروضند. نتیجه می‌شود که

$$BA + AC + AB = B_1A + AC + AB_2$$

$$> B_1B_2 = 2B_1O = 2OB$$



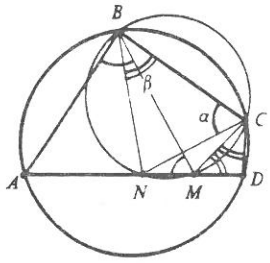
شکل۱۲

(زیرا طول خط شکسته بزرگتر از فاصلهٔ بین دو سر آن است).

۳. نقطهٔ M از ضلع AD را چنان اختیار می‌کنیم که $AM = AB$ (و، بنابراین، $MD = CD$ ـ شکل ۱۳) و N، نقطهٔ تلاقی دایرهٔ محیطی مثلث BCM با AD را در نظر می‌گیریم. کافی است ثابت کنیم که BN و CN نیمسازهای زوایای ABC و BCD اند. اگر زاویهٔ $\alpha = AMB$، در این صورت زاویهٔ $\alpha = ABM$ (مثلث ABM متساوی الساقین است)، زاویهٔ BAD برابر $180^\circ - 2\alpha$، زاویهٔ BCD برابر $\angle BAD = 180^\circ - 2\alpha$ است. از طرف دیگر، زاویهٔ محاطی BCN روبه‌رو به‌همان کمان زاویهٔ محاطی BMN از دایرهٔ BCMN است، بنابراین برابر α مساوی ۱/۲ زاویهٔ BCD است. به‌این ترتیب، CN نیمساز BCD است. به‌همین ترتیب، اگر زاویهٔ $\beta = CMD$، در این صورت

$$\angle MDC = 180^\circ - 2\beta, \angle ABC = 2\beta$$

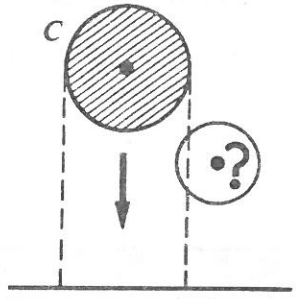
$$\angle NBC = 180^\circ - \angle NMC = \beta$$



شکل۱۳

بنابراین BN نیمساز زاویهٔ متناظر آن نیز است.

۴. بله، موفق می‌شود. باید سکه‌ای را، که مرکزش از مراکز سکه‌های دیگر به‌لبهٔ میز نزدیکتر است، انتخاب کند (فرض می‌کنیم که میز مستطیل شکل باشد) و آن را در امتداد کوتاهترین مسیر به‌سوی لبهٔ میز حرکت دهد (شکل ۱۴). اگر سکهٔ مورد بحث در مسیرش به‌سکهٔ دیگری برخورد کند، در این صورت مرکز آن سکه به‌لبهٔ میز نزدیکتر از مرکز سکهٔ انتخاب شده است، که انتخاب سکهٔ اولیه را نقض می‌کند.



شکل۱۴

۵. فرض می‌کنیم که ضلع مربع مورد بحث به‌طول واحد باشد. در این صورت هر یک از نسبتهای a/b مورد بحث، از حاصلضرب ab بزرگتر است، زیرا $b < 1$. بنابراین، مجموع جمیع نسبتهای مزبور بزرگتر از مجموع حاصلضربهای متناظر آنها ـ یعنی، مجموع مساحات جمیع مستطیلها ـ است. اما مجموع اخیر مساحت مربع و بنابراین مساوی ۱ است.

ابزارهای تقسیم

۱. (الف) ۱۰۰؛ (ب) ۲؛ (ج) ۳؛ (د) ۰.

۲. در یکی از طبقات، ۶ آپارتمان (از ۹۷ تا ۱۰۲) موجود

است و چون در هریک از طبقات ساختمان همین تعداد آپارتمان وجود دارد ، به‌این ترتیب در هر ساختمان ۴۸ = ۶ × ۸ آپارتمان وجود دارد و چون ۱ + ۳ × ۶ + ۴ × ۴۸ = ۱۹ + ۴ × ۴۸ = ۲۱۱ ، آپارتمان ۲۱۱ در پنجمین ساختمان مجتمع (۱ + ۴ = ۵) و در طبقهٔ چهارم (۱ + ۳ = ۴) واقع است .

۳. هنگامی که یک قطعه به۵ قسمت تقسیم می‌شود ، تعداد قطعات به‌اندازهٔ ۴ افزایش می‌یابند . بنابراین تعداد قطعات همیشه به‌صورت ۱ + ۴k است ، یا به‌عبارت دیگر باقیماندهٔ آن در تقسیم بر ۴ برابر یک است . چون ۳ + ۴۹۷ × ۴ = ۱۹۹۱ جواب منفی است .

۴. عدد شش رقمی مزبور باید بر ۲۷۳ = ۱۳ × ۷ × ۳ بخشپذیر باشد و ۸۲ + ۲۷۳ × ۳۶۶ = ۱۰۰۰۰۰ . با اضافه کردن ۱۹۱ نتیجهٔ ۲۷۳ × ۳۶۷ = ۱۰۰۱۹۱ را به‌دست خواهیم آورد .

۵. (الف) ۱ ؛ (ب) ۵ ؛ (ج) ۸ .

۶. اگر ب.م.م. $n = (k,l)$ آنگاه a و b دارای مقسوم علیه‌مشترک $nd \geqslant d$ هستند . اما d بزرگتر از هر مقسوم علیه مشترک دیگر a و b است . بنابراین ، $n = ۱$.

۷. فرض کنید a و b اعداد معینی باشند و ب.م.م. $d = (a,b)$. آنگاه $a = kd$ ، $b = md$ ، که k و m هیچ مقسوم علیه مشترک بزرگتر از ۱ ی ندارند (یعنی ، k و m نسبت به‌هم اول‌اند) و $kmd^۲ = ab = ۶۰۰$. اما بزرگترین عدد مربع کاملی که ۶۰۰ را می‌شمارد برابر ۱۰۰ است ، بنابراین بزرگترین مقدار d برابر ۱۰ خواهد بود . مثال : $a = ۶۰$ ، $b = ۱۰$.

۸. ب.م.م. (۲۶۴, ۱۹۲) = ۲۴ ، بنابراین جواب ۲۴ دسته خواهد بود .

۹. (الف) ب.م.م. $(m,n) + ۱$ ؛ (ب) ب.م.م. $(m,n) - ۱$

۱۰. (الف) ۹ + ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ × ۸ = ۹۸۷۶۵۴۳۲۱ ؛ ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ بر ۹ بخشپذیر است و

ب.م.م. (۹۸۷۶۵۴۳۲۱, ۱۲۳۴۵۶۷۸۹) = ۹ ؛ (ب) ۷۷ .

۱۱. دو مربع ۱۴۱cm × ۱۴۱cm ، سه مربع ۴۲cm × ۴۲cm ، دو مربع ۱۵cm × ۱۵cm ، یک مربع ۱۲cm × ۱۲cm و چهار مربع ۳cm × ۳cm . ب.م.م. (۳۲۴, ۱۴۱) = ۳ به‌این ترتیب مربع کوچکتری وجود ندارد .

۱۲. تعداد باقیمانده‌های متوالی حاصل از الگوریتم اقلیدس ، برای تعیین ب.م.م. (a, b) ، با احتساب آخرین باقیمانده (که برابر ب.م.م. دو عدد a و b است) کمتر از اعداد موسوم به‌فیبوناتچی ، یعنی ۱۵۹۷, ۹۸۷, ۶۱۰, ...,۳ + ۵ = ۸, ۳ + ۲ = ۵, ۲, ۱, ۱ نخواهد بود .

۱۳. $\alpha = ۳/۱۴۰$.

۱۴. پس از تقسیم بر ب.م.م. (۸۵, ۲۰۴) = ۱۷ ، $۵x + ۱۲y = ۱$ را به‌دست خواهیم آورد . اما ۲ + ۵ × ۲ = ۱۲ و ۱ + ۲ × ۲ = ۵ ؛ بنابراین

$۱ = ۵ - ۲ \times ۲ = ۵ - ۲(۱۲ - ۲ \times ۵) = ۵ \times ۵ - ۲ \times ۱۲$. یکی از جوابها $x = ۵$ و $y = -۲$ می‌باشد . جواب کلی برابر $x = ۵ + ۱۲t$ و $y = -۲ - ۵t$ خواهد بود که t هر عدد صحیحی می‌تواند باشد .

۱۵. (الف) بله ؛ (ب) خیر .

۱۶. (الف) اعداد x و y را باید چنان بیابیم که تساوی $۶x + ۱۶y = ۲۲۰$ یا $۳x + ۸y = ۱۱۰$ برقرار باشد . یکی از جوابهای ممکن $x_۱ = ۳۳۰$ و $y_۱ = -۱۱۰$ است . حال جواب کلی را به‌صورت

$$x = ۳۳۰ - ۸t$$

$$y = -۱۱۰ + ۳t \qquad (۱)$$

که t عددی صحیح است ، می‌توان نوشت . اکنون ، طبیعی است که t را چنان انتخاب کنیم که x و y نامنفی باشند . (البته می‌توانیم باطریها را به‌صورتی مقابل هم ـ مثبت به‌مثبت ـ به یکدیگر وصل کنیم اما سعی می‌کنیم از چنین وضعیتی بپرهیزیم) . با در نظرگرفتن این شرط خواهیم داشت

$$۳۳۰ - ۸t \geqslant ۰$$

یعنی

$$t \leqslant \frac{۳۳۰}{۸} = ۴۱\frac{۱}{۴}$$

و

$$-۱۱۰ + ۳t \leqslant ۰$$

یعنی

$$t \geqslant \frac{۱۱۰}{۳} = ۳۶\frac{۲}{۳}$$

با جانشین کردن $t = ۳۷, ۳۸, ۳۹, ۴۰, ۴۱$ در معادلهٔ (۱) پنج جواب

باطریهای ۶ ولتی	۳۴	۲۶	۱۸	۱۰	۲
باطریهای ۱۶ ولتی	۱	۴	۷	۱۰	۱۳

را به‌دست خواهیم آورد.

(ب) در این حالت باید معادلهٔ $۶x + ۱۵y = ۲۲۰$ را حل کنیم. اما ب.م.م. $(۶, ۱۵) = ۳$ و ۲۲۰ بر ۳ بخشپذیر نیست. بنابراین معادله هیچ جوابی ندارد.

۱۷. چون $a = bd$ بر c بخشپذیر است و ب.م.م. $(b, c) = ۱$ آنگاه بنابر لم ۳، d بر c بخشپذیر است.

۱۸. گزاره‌های (ب)، (ج) و (د) درست‌اند؛ (الف) نادرست است.

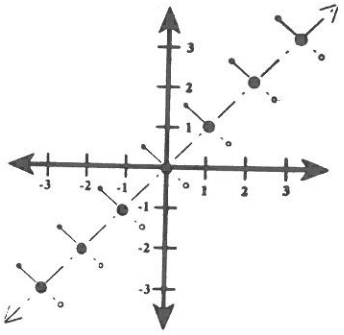
۱۹. $۱۹۹۰ = ۲ \times ۵ \times ۱۹۹$ ؛ $۱۹۹۱ = ۱۱ \times ۱۸۱$ ؛ $۱۹۹۲ = ۲^۳ \times ۳ \times ۸۳$.

۲۰. (الف) اگر am بر n بخشپذیر باشد و ب.م.م. $(m, n) = ۱$ آنگاه $a = kn$ و بنابراین $b = km$. (ب) فرض کنیم تجزیهٔ x به‌عوامل اول شامل توان a ام عدد اول p و تجزیهٔ y به عوامل اول شامل توان b ام عدد اول p باشد. آنگاه بنابر قضیهٔ یکتایی تجزیه، $am = bn$، در حالی که در قسمت (الف) داریم $a = kn$ و $b = km$. p^k را به عنوان عاملی در تجزیهٔ z به‌عوامل اول در نظر بگیرید و روش فوق را برای تمام مضارب اول x و y تکرار کنید. مقدار نهایی z جواب مورد نظر خواهد بود.

شکافهای نمودارها

۱. نخست تابع گرد کردن را که همگی در مدرسه آموخته‌ایم، در نظر می‌گیریم: $R(۲/۱) = ۲$، $R(۲/۵) = ۳$، $R(۲/۷) = ۳$ و به‌همین ترتیب. در این صورت تابع زیر تنها برای اعداد صحیح پیوسته است:

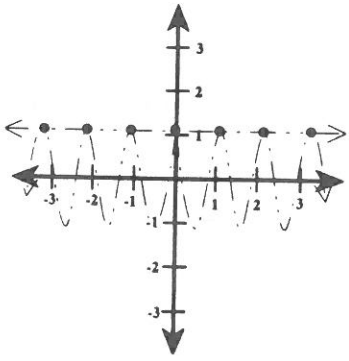
$$f(x) = \begin{cases} x & ; \text{x های گویا} \\ ۲R(x) - x & ; \text{x های گنگ} \end{cases}$$



شکل ۱۵.

امکان دیگر عبارت از یک تابع متناوب است:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ; \text{x های گویا} \\ \cos(۲\pi x) & ; \text{x های گنگ} \end{cases}$$



شکل ۱۶.

۲. فرض کنید $r \neq ۰$ عددی گویاست. در این صورت، به‌ازای هر عدد صحیح N، $\pi^N r$ یک عدد گنگ است، و تعداد شمارشپذیر بی‌پایانی از این نوع اعداد وجود دارند. این اعداد را به‌اندازهٔ یک گام به‌جلو انتقال می‌دهیم، تا شکافهای گویا را پر کنند. به‌عبارت دیگر، برای هر عدد گویای $r \neq ۰$، πr را به r؛ $\pi^۲ r$ را به πr؛ $\pi^۳ r$ را به $\pi^۲ r$؛ و ... می‌نگاریم. به‌این ترتیب، همهٔ اعداد گویا، جز صفر، پوشانده می‌شوند. پس e را به‌صفر، $e^۲$ را به e، $e^۳$ را به $e^۲$ و غیره می‌نگاریم. تابع حاصل عبارت

است از

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & ; \quad x = \pi^N r \text{ با } r \text{ گویای نامنفی و } N \text{ صحیح} \geqslant ۱ \\ ۰ & ; \quad x = e \\ \frac{x}{e} & ; \quad x = e^N \\ x & ; \quad \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

به‌علاوه ، سوألهایی هست ، که ما پاسخشان نگفتیم : (۱) آیا روشی برای ساده‌تر کردن پاسخها می‌توان داشت ؟ (۲) آیا فضای $R^۳$ را می‌توان با نقاط گنگ واقع بر یک پاره‌خط پر کرد ؟ آیا می‌توان این کار را با ظرافت انجام داد ؟

دوک

در دماسنج دوم ، انبساط گرمایی آب ، نقش اساسی را ایفا می‌کند . از آنجا که دماسنج پر از آب است و کاملاً درزگیری شده ، آب تنها می‌تواند تا پر کردن نسبتی از فضایی که هوای درون ظرفها ، اشغال کرده‌اند ، انبساط یابد . هوا قادر به‌مقاومت در برابر آب نیست ، زیرا مقاومت هوا در مقابل فشردگی چندین برابر کمتر از آب است ؛ که سبب کاهش شناوری ظرفها و فرو رفتن آنها می‌شود .

با شکفتگی مکانیک کوانتایی اغلب فیزیکدانهای نسل جدید قانع شدند که این نظریه ، برخلاف نظریهٔ مکانیک آماری ، نظریه‌ای مربوط به مجموعه‌ها نیست ، بلکه دربارهٔ ذرات بنیادین و منفرد بحث می‌کند . از طرف دیگر ، همهٔ این فیزیکدانها معتقد بودند که مکانیک کوانتایی هم مانند مکانیک آماری نظریه‌ای احتمالاتی است . مکانیک کوانتایی به‌عنوان مکانیک ذرات بنیادی ، وجهی عینی داشت و از این جهت که نظریه‌ای احتمالاتی بود ، وجهی ذهنی به‌خود می‌گرفت و اگر هم جز این بود آنها چنین تصور می‌کردند . به‌نظر اینشتین ، نظریه‌های احتمالاتی نظیر مکانیک آماری بسیار مهم ، جالب ، و برجسته بود . اما عقیده داشت که اینها ، دیگر نظریهٔ بنیادی فیزیکی و نظریه‌های عینی نیستند . بلکه نظریه‌هایی ذهنی هستند که ما هم باید صرفاً به سبب *خصلت کلی* و *نقص دانش* خود به‌کارشان ببریم . نتیجه آنکه ، نظریهٔ کوانتایی علی‌رغم عالی بودن آن ، یک نظریهٔ پایه‌ای نیست ، بلکه ناقص است (زیرا خصلت آماری آن نشان می‌دهد که با شناخت ناقص عمل می‌کند) و آن نظریهٔ کامل و عینی که به دنبالش هستیم ، نباید نظریه‌ای احتمالاتی ، بلکه باید نظریه‌ای جبری و قطعی باشد . . . هر دو[ی این نظرات] قبول دارند که در یک نظریهٔ آماری یا احتمالاتی ، به‌نحوی از شناخت ذهنی یا از فقر شناخت ما استفاده می‌شود .

جستجوی ناتمام

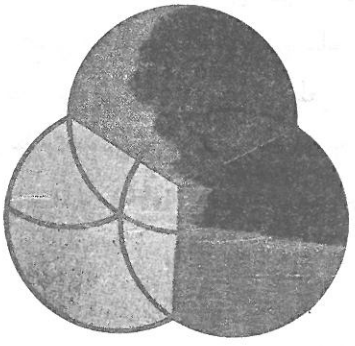
کارل پوپر . ایرج علی‌آبادی .

مکعب شگفت‌انگیز روبیک

مراقب «تونلها» و «بن‌بستهای» این بازیچهٔ قدیمی باشید.

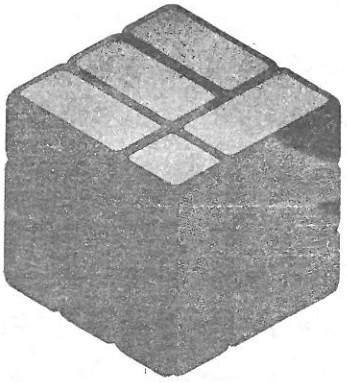
نوشتهٔ ولادیمیر دابروفسکی

مکعب روبیکتان را بردارید (باید یکی میان اسباب‌بازیهای قدیمیتان داشته باشید!) و نیز یک بسته نوار چسب سلوفنی: در دو دقیقه می‌توانید معمایی کاملاً تازه و مهیج بسازید. این وسیلهٔ بازی برای اولین بار، به صورتی اندک متفاوت، توسط مخترع فرانسوی رائول رابا ساخته شد. شکل ۱ «تاکوئین اسکوپ» رابا را نشان می‌دهد. وسیلهٔ مورد بحث شبیه سه دایرهٔ متقاطع است که در ۱۰ مثلث منحنی‌الخط چنان تقاطع کرده‌اند که چرخیدنشان امکان‌پذیر باشد. مثلثها از پس چند چرخش در هم می‌شوند و (درست مانند مکعب) باید در برگرداندن حالت



شکل۱

منظم نخستین کوشش به‌کار برد. اما چه رابطه‌ای بین تاکوئین اسکوپ مسطح و دایره‌وار با مکعب سه بعدی و قائم مزبور موجود است؟ برای ملاحظهٔ این مطلب، به‌شکل ۲، که در آن مکعب روبیک تغییریافته‌ای، موسوم به «دو مکعبی» را نشان داده‌ایم، نگاهی می‌افکنیم. دو مکعبی مزبور از مکعبی معمولی، با وصل دوبه‌دوی ۱۸ «مکعبچه»ی کوچک از سه وجه مجاور مکعب روبیک، تشکیل شده است. (به همین علت است که به‌نوار سلوفنی نیاز دارید) برای این که تکه‌های مضاعف را از تکه‌های واحد آسان‌تر تشخیص دهیم، می‌توانیم روی مکعبچه‌های مجاوری که تکهٔ مضاعفی می‌سازند را با کاغذ رنگی بپوشانیم. مکعبچه‌های سمت دیگر مکعب مورد بحث را، که در شکل ۲ دیده نمی‌شوند، همچنان دست نخورده رها می‌کنیم. با مقایسهٔ اشکال ۱ و ۲، بلافاصله تناظر بین عناصر



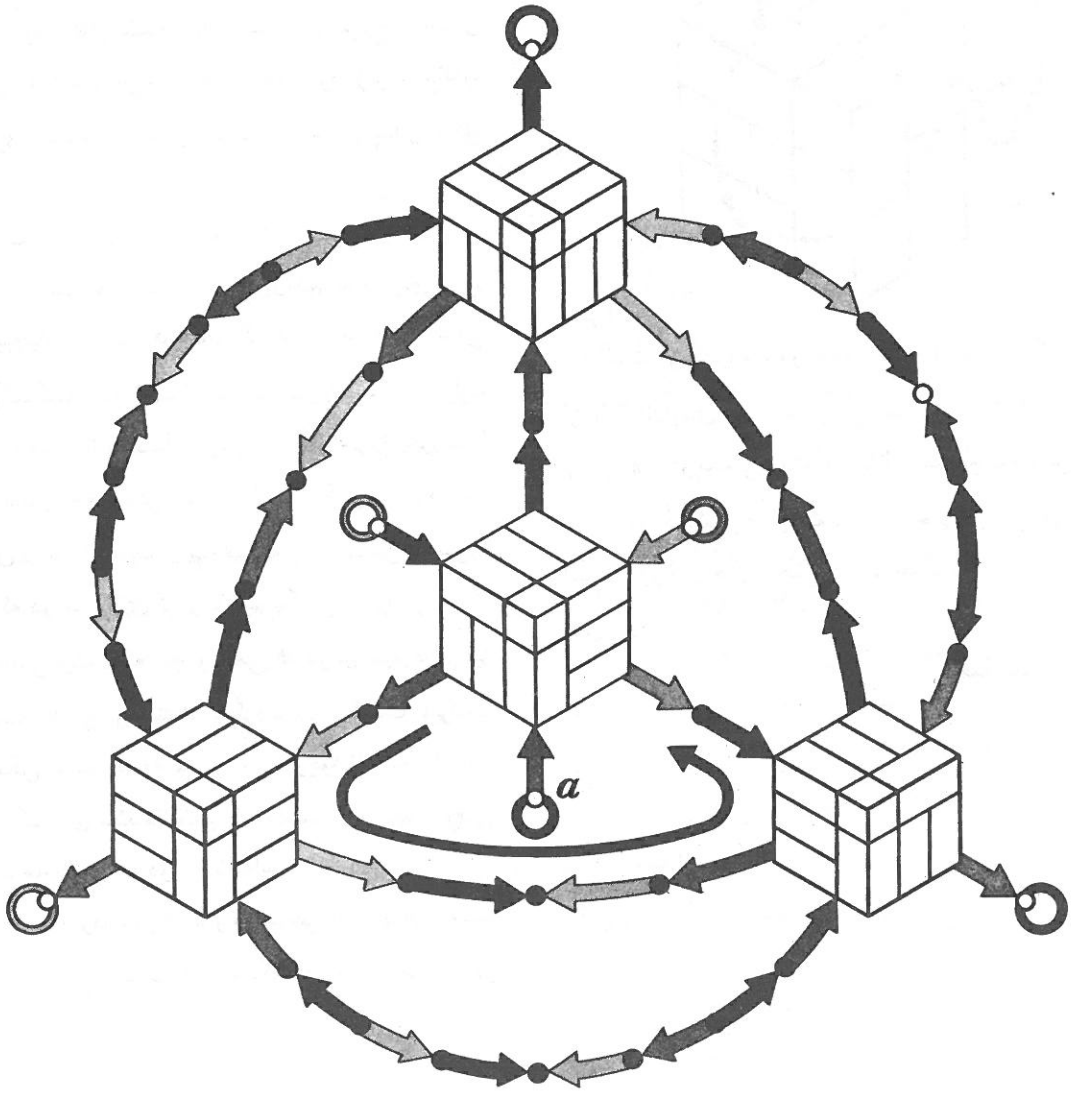
شکل۲

«مرئی» دو مکعبی و تکه‌های تاکوئین اسکوپ را ملاحظه خواهیم کرد. تشابه مورد بحث، تنها تشابهی ظاهری نیست: هر تبدیل تاکوئین اسکوپ، توسط یک سری چرخش دایره‌هایش حاصل می‌شود، متناظر با تبدیلی از دومکعبی که از چرخشهای مربوطهٔ

سه وجه «مرئی» مورد بحث نتیجه شده‌اند. بدین ترتیب آشکار می‌شود که دو معمای مزبور مطلقاً هم‌ارزند. در اینجا به بررسی صورت سه وجهی دو مکعبی می‌پردازیم.

طرح تازهٔ مکعب روبیک، به‌گونه‌ای مهیج و ناگهانی خواص، نیز حل آن را تغییر می‌دهد. در این مورد، بلافاصله می‌توان ملاحظه کرد که هر تکهٔ مضاعف، یکی از وجوه را سد می‌کند، و به‌این ترتیب وجه مزبور نمی‌تواند بگردد. این که کدام وجه چرخش پذیر است به ترکیب دو مکعبی ـ یعنی، به‌ترتیب تکه‌ها بی‌توجه به‌رنگشان، بستگی دارد. در تقابل با این وضعیت، مکعب روبیک معمولی تنها یک ترکیب دارد، و همواره می‌توانیم هریک از شش وجه آن را بگردانیم. بنابراین، الگوریتمهای معمول در حل این مکعب در مورد دومکعبی کارا نیستند، زیرا دنباله‌های متعارف گردشهای وجهی به‌کار رفته در آنها، در مورد غالب ترکیبات دو مکعبی غیرعملی‌اند. بنابراین، ابتدا به‌بررسی جمیع ترکیبات ممکن و اتصالاتشان می‌پردازیم.

غالب ترکیبات مزبور تنها یک وجه سد نشده دارند. آنها را از این جهت *تونل* می‌نامیم که، زمانی که یکی از آنها را بعد از چرخشی پنهان کنیم، نمی‌توانیم «جهت مسیر را تغییر دهیم»: تمام کاری که می‌توانیم انجام دهیم بازگشت (چرخش همان وجه به‌عقب) یا حرکت به‌جلو (تکرار چرخش قبلی همان وجه) است. تمام ترکیبات دیگر را به صورت گرههای گراف نموده شده در شکل ۳ نشان داده‌ایم. پیکان رنگی واصل دو گره از گراف مورد بحث، به مفهوم ربع چرخش در جهت حرکت عقربه‌های ساعتِ وجهِ از همان رنگِ در شکل ۲ است (یعنی، پیکانهای ▭ متناظر با چرخشهای وجهی بالایی‌اند، و غیره). البته، حرکت در خلاف یک پیکان به‌معنی ربع چرخش در عکس

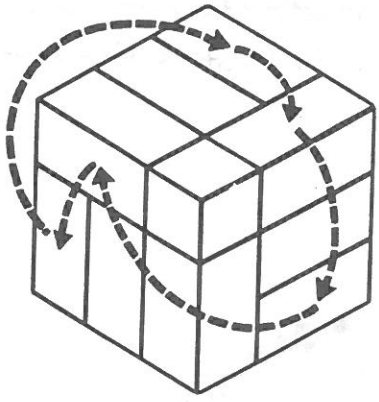


شکل ۳

جهت حرکت عقربه‌های ساعت وجه مربوطه است . در این مورد تنها چهار *اتصال* (ترکیب با سه وجه آزاد) موجودند ، و نمودارهاشان مستقیماً در گرافمان درج شده‌اند . یکی از آنها ، آنکه در مرکز است ، (ترکیب وضعیت اولیهٔ دومکعبی) *اصلی* است . هریک از ترکیبات دیگر نموده شده درگرافمان ، دو وجه سد نشده دارند ، اما اینها از دو نوع‌اند . آنهایی را که با دوایر سفید و طوقه نمایش داده شده‌اند ، می‌توان *بن‌بست* نامید : به‌عنوان مثال ، طوقهٔ ▭ واقع در گرهٔ a ی زیرِ ترکیب اصلی به‌این معنی است که گردش وجه ▭ واقع در ترکیب بن‌بست مناظر آن ، به‌یک سری تونل منجر به a دلالت می‌کند . دوایر سیاه ، *سوئیچ‌ها* (ترکیباتی که مجازمان می‌کنند که ، با تغییر وجه گردش یافته ، به‌ترکیب بی‌تونل دیگری برسیم) را نمایش می‌دهند . گراف مورد بحث نشان می‌دهد که با آغاز از یک سوئیچ ، درگرداندن هریک از دو وجه قفل نشده ، برای رسیدن به‌سوئیچ یا اتصال بعدی ، تنها یک طریق داریم . با چرخاندن وجوه مزبور ، به‌اندازهٔ زوایای دیگری ، به‌تونلهایی می‌رسیم که برای شلوغ نشدن شکل نشان داده نشده‌اند .

به‌این ترتیب ، بازی با دو مکعبی شبیه سرگردان شدن در نوعی مارپیچ است . و از شکل ۳ می‌توان دید که مارپیچ مزبور خیلی هم پیچیده نیست . قاعده‌ای که همواره به‌ترکیب اصلی دلالت می‌کند کاملاً ساده است : با اجتناب از تونلها ، به‌حرکت به‌جلو ادامه دهید ، تا به‌اتصالی برسید ؛ آنگاه آخرین حرکت را تکرارکنید (همان وجه را بگردانید) و حرکت دیگری انجام دهید . حرکت بعدی در هر بار به‌گونه‌ای منحصر به‌فرد مشخص می‌شود . اما مکعبی که در حال بازی کردن با آنیم مکعبی سحرآمیز است ، بنابراین ، عجبی نیست که پیچ و خمی که در آن سرگردانیم نیز سحرآمیز باشد : پس از چندبار سرگردانی و بازگشت به‌ترکیب اصلی ، ممکن است متوجه شویم که ، با وجود این که ترکیبمان ابقا شده ، رنگ‌بندی مکعبمان تغییرکرده است . و این بدان معنی است که تکه‌هامان ترتیب دوباره یافته‌اند .

در این مرحله توقف می‌کنیم و موضوعی را برای حل به‌شما وامی‌گذاریم : جمیع ترتیبات دوبارهٔ تکه‌های مورد بحث را در مورد ترکیبی مفروض ـ مثلاً ، ترکیب اصلی ـ بیابید . در این مورد یکی دو نکته را خاطرنشان می‌کنیم . اگر از ترکیب اصلی آغاز و در امتداد پیکان سیاه واقع برگراف حرکت کرده ، وجوه متناظر را بگردانید ، در این صورت زمانی که بازگردید پنج تکهٔ مضاعف مرتب شده در ترتیب دوری نموده در شکل ۴ ، خواهید داشت . دو ترتیب پنج ـ دوری دیگر ، در حرکت در امتداد دو مسیر بستهٔ مشابه دیگر گراف به‌دست خواهید آورد . جمیع ترتیبات جدید ممکن می‌توانند با تکرار این سه ، در ترتیبی متفاوت و تعداد دفعاتی متفاوت ، به‌دست آیند و آخرین راز را نیز فاش می‌کنیم : تنها ۶۰ ترتیب تازه موجودند ، گرچه شخص انتظار ۱۲ برابر آن را دارد ، زیرا تعداد کل جایگشتهای شش تکه ۷۲۰ = !۶ است .



شکل۴

اثبات این گزاره‌ها ، در صورت عدم استفاده از کامپیوتر (که آن را تا اندازه‌ای کسالت بار می‌کند) نسبتاً مشکل است . اما بررسی «ابر دو مکعبی» ، که به‌استثنای اینکه جمیع شش وجهش می‌توانند بگردند ، همان معماست ، حتی از این هم صعب‌تر است . در این حال ، حتی ما نیز تعداد ترتیبات تازهٔ ممکن را نمی‌دانیم .

ترجمهٔ نغمه شریک‌زاده

علی بن احمد نسوی

نوشتهٔ غلامرضا یاسی‌پور

در دنیای اسلام و بخصوص در ایران ریاضیدانان بنام و برجسته‌ای برخاسته‌اند که هر یک در نوع خود، اگر نه بی‌نظیر، کم نظیرند و از آن جمله‌اند حکیم عمر خیام، ابونصر عراق، خوارزمی، بوزجانی، کمال‌الدین فارسی، کوشیار گیلانی، کوهی، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، نصیرالدین طوسی، و نسوی؛ که بعضی از آنان چون خوارزمی و خیام مشهورترند و بعضی چون جمشید کاشانی از شهرتی متوسط برخوردارند و برخی چون نسوی، جز در خاطر اهل علم و متخصصان نمی‌آیند و عامهٔ مردم و بخصوص جوانان را از آنان خبری نیست، و تازه خیام را نیز از رباعیاتش می‌شناسند نه از کتاب معروفش به‌نام فی شرح ما اشکَل مِن مصادرات کتاب اقلیدس.

شاید جوان ایرانی از اینکه، فی‌المثل، بداند که آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی از اهمیتی جهانی برخوردارند و مثلاً بزرگانی چون رُزنفلد روسی و لوکی آلمانی (اولی در ۱۹۵۶ و دومی در ۱۹۴۶ شرحی بر آثار او، بخصوص مفتاح‌الحساب و رسالهٔ محیطیّه، به‌چاپ رسانده‌اند) مطالبی مفصل در مورد آنها نوشته‌اند، برخود ببالد و از داشتن فرهنگی چنین پرمایه احساس توانمندی کند.

سخن از غیاث‌الدین را به‌مقاله‌ای دیگر وامی‌گذاریم و در این مقاله به‌ریاضیدان گمنام‌تری به‌نام علی بن احمد نسوی می‌پردازیم، اما پیش از آن، به‌این گفتهٔ ابوریحان بیرونی که وضع نابسامان علوم عصر خویش را چنین بازگو می‌کند: «**آنچه از علوم دردست ماست جز بقایای ناچیز اعصار خوب گذشته نیست**» گوش فرا می‌دهیم و به‌آن، اوضاع نابسامان‌تر حاصل از فتنهٔ مغول را اضافه می‌کنیم و می‌گوییم احتمال بسیار می‌رود که آنچه راکه هم اکنون نیز دردست داریم جز بقایای حتی ناچیزتری از اعصار خوبتر گذشته نباشد. به‌نسوی بپردازیم.

ابوالحسن علی بن احمد نسوی ریاضیدان و منجم و متخصص هندسه، به‌سال ۳۹۳ هجری در شهر ری تولد یافت و بیشتر عمر خود را در این شهر گذراند. نسوی منسوب به نساست و آن شهری است از شهرهای خراسان قدیم که در نزدیکی عشق‌آباد ترکمنستان کنونی واقع است. خواجه نصیرالدین طوسی که خود استاد بزرگ هندسه است او را استاد مختص می‌نامد. شاگرد کوشیار گیلانی بوده و به‌گفتهٔ بیهقی عمرش نزدیک به صدسال رسیده و تا پایان عمر قوای در حد اعتدال داشته است.

طرفدار تخصص در علوم بوده، چنان که به‌هر که در محضر وی برای استفاده حضور می‌یافته چنین می‌گفته: «*بکوش تا در صناعت خویش کامل شوی و متذوّق مباش، چه متذوّق را سیری نیست*»، و همان گونه که قبلاً گفته شد خود این سفارش را به‌کار می‌برده است.

کتابی به‌نام بازنامه دارد، که دربارهٔ اشکره داری و صیدافکنی

است و آن را در سن ۷۹ سالگی نوشته و هم در این کتاب است که شرح حالی از خود آورده و حکایتِ پرداختن به‌بازان را چنین بیان کرده:

«ولادت من در شهر ری بود ... و از آغاز عمر من هشت سال تمام که گذشت، مرا آرزوی اشکره‌داری پدید آمد، و دل اندر آن بستم. و مدت شصت سال به این شغل اشتغال نمودم و سپاهیگری و خدمت پادشاهان به‌این سبب اختیار کردم. و آنچه خدای عزّوجلّ مرا روزی کرد از درمی چهار دانگ در این شغل خرج کردم. و دانایان متفق‌اند که ایزد تعالی آدمی را بی‌عشق نیافریده و هر کسی را شوق به‌چیزی بود ناچار، پسندیده یا نکوهیده.»

از کارهای عشقی نسوی می‌گذریم و به‌آثار عقلی او می‌پردازیم. نسوی سه کتاب مهم در ریاضیات دارد یکی: *المقنع فی‌الحساب الهندی*، دیگری: *کتاب الاشباع فی شرح الشکل القطّاع*، و سومی: *تفسیر کتاب مأخوذات ارشمیدس*.

کتاب المقنع در ابتدا به‌زبان فارسی تألیف و بعد به‌زبان عربی ترجمه شده است. متن فارسی از بین رفته و از متن عربی تنها یک نسخه، آن هم در کتابخانهٔ لیدن، موجود است. کتاب در ریاضیات عملی و به‌اصطلاح امروزه، کاربردی یا کاربسته است. خود مؤلف در این باب چنین می‌گوید:

«کتاب را به‌وجهی مرتب ساختم که مردم در معاملات مختلف خود و منجمان در صناعت خود از آن بهره‌ور گردند.»

مقالات کتاب به‌ترتیب در مورد اعمال مربوط به‌اعداد صحیح، اعمال مربوط به‌کسرها، اعمال مربوط به‌اعداد صحیح کسردار، و به‌کاربردن کسرهای ستّینی یا شصتگانی است.

در کتاب از اعمال متعدد، من جمله دو عمل تنصیف (نصف کردن) و تضعیف (دوبرابر کردن) که امروزه در ماشینهای حساب الکترونیکی به‌کار می‌رود، سخن به‌میان آمده است.

از استخراج جذر و کعب صحبت کرده، و به‌بیان امتحان عمل ضرب و کعب نیز پرداخته است.

دومین کتاب مهم نسوی کتاب *الاشباع* است که در آن همان گونه که در مقدمهٔ آن آمده، ریاضیات مورد نیاز نجوم (مخصوصاً کتاب *مجسطی بطلمیوس*) آورده شده است.

یکی از مسائل مهم این کتاب، مسئلهٔ معروف *تثلیث زاویه* (به سه قسمت مساوی تقسیم کردن یک زاویهٔ معلوم) و به‌دست دادن راه‌حلی تقریبی برای آن است.

سومین کتاب مهم نسوی، کتاب *مأخوذات* اوست. مأخوذات به‌مفهوم گرفته شده‌ها، قضایایی هستند که برای اثبات یک قضیه، ابتدا به‌اثبات آنها می‌پردازند و امروزه به‌عنوان *لم* معروف‌اند.

خواجه نصیرالدین طوسی در آغاز «*تحریر تفسیر مأخوذات*» از قول نسوی چنین می‌نویسد:

«استاد مختص، گفته است که این مقاله منسوب به‌ارشمیدس است و مشتمل بر اشکال (= قضایای) زیبایی است در اصول هندسه، که عدهٔ آنها کم ولی فواید آنها بسیار است. این قضایا در کمال نیکویی و لطافت‌اند و متأخران، این مقاله را بر جملهٔ متوسّطات افزوده‌اند، و متوسّطات کتابهایی هستند که خواندن آنها در بین کتب «اصول اقلیدس» و «مجسطی» لازم است.

من برای مواضع مشکل این مقاله شرحی بر سبیل تعلیق حواشی نوشتم و دربارهٔ قضایایی که او (یعنی ارشمیدس) به‌آنها اشاره کرده بود آنچه به‌خاطرم رسید بیان کردم.»

اصل کتاب «مأخوذات» به‌زبان یونانی بوده است و در اثر حادثات زمانه از میان رفته است و تنها ترجمهٔ عربی آن باقیمانده که بعدها به‌زبانهای دیگر ترجمه شده است.

کتاب، پانزده شکل یا قضیه دارد که از میان آنها قضیهٔ هشتم از حیث رابطه‌ای که با مسئلهٔ تثلیث زاویه دارد مهم است.

منابع

زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، ابوالقاسم قربانی.
نسوی نامه، ابوالقاسم قربانی.
تاریخ ریاضیات، دیوید اسمیت، ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
فرهنگ ایران زمین، به‌کوشش ایرج افشار.
منابع تاریخ علوم، جلد سوم، سیدحسین نصر.

فضای متری

نوشتهٔ ن. واسی لی‌یِف

همان‌طور که در سرمقاله نیز اشاره شد، برای آشنایی بیشتر خوانندگان مجلهٔ کوانتوم با مقالات قبلی آن، مطالب زیر را از بین مقاله‌های سال اول انتشار آن انتخاب کرده‌ایم.

□ مجلهٔ «کوانت»، چاپ مسکو، شمارهٔ ۱۰ سال ۱۹۷۰

این مقاله، دربارهٔ مفهوم «فاصله» صحبت می‌کند، که اغلب در ریاضیات امروزی، چه در نظریهٔ کلی این مفهوم و چه در حل مسئله‌های عملی، کاربرد فراوان دارد.

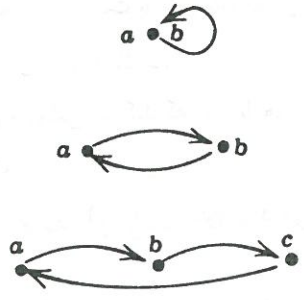
دفتر راهنمای راه‌آهن، فاصلهٔ از «نووسیبرسک» تا «دوشنبه» را، برابر ۳۸۹۵ کیلومتر ذکر کرده است؛ ولی اگر فاصلهٔ بین این دو شهر را روی نقشه (یا دفتر راهنمای مرکز هواپیمایی) جستجو کنیم، به‌عدد دیگری می‌رسیم: ۲۱۰۰ کیلومتر. البته، این اختلاف، موجب شگفتی نمی‌شود: قطار نمی‌تواند روی خط مستقیم، مثل هواپیما، حرکت کند و بنابراین، رانندهٔ قطار و خلبان، مسیرهای متفاوتی را طی می‌کنند.

ساکنان یک شهر بزرگ، به‌ندرت فاصله‌های داخل شهر را، با کیلومتر بیان می‌کنند. مثلاً، اگر از کسی بپرسید: «آیا از دانشگاه کوههای لینز تا «پِسکودنی کوف»[1] راه درازی است؟»، به‌احتمال زیاد پاسخ می‌دهد: «یک ساعت و نیم»؛ و این، پاسخ مفیدتری است تا اینکه گفته شود: «۲۸ کیلومتر». مثلاً، فاصلهٔ همین دانشگاه، تا ایستگاه متروی «شکولسکایا» برحسب کیلومتر بیشتر است، ولی برحسب زمان کمتر: این فاصله را می‌توان با مترو، در زمانی که از یک ساعت تجاوز نمی‌کند، پیمود.

«فاصله»، که در اینجا دربارهٔ آن صحبت می‌کنیم، و معمولاً مربوط به‌فاصلهٔ دو نقطه بر روی صفحه یا در فضاست، برخی ویژگیهای عام دارد. تعداد این ویژگیهای اصلی، چندان زیاد نیستند، ولی قبول آنها، به‌عنوان اصل موضوع و ساختن نظریه، مفید و پرمضمون است. در اینجا، بحث خود را به‌مفهوم اولیه و مثالهای اساسی، محدود می‌کنیم.

اصل موضوعها و مثالهای اولیه

مجموعه‌ای مثل X را در نظر می‌گیریم. گوییم، در این مجموعه، فاصله تعریف شده است، وقتی که، هر دو عضو a و b از مجموعهٔ X، متناظر با عدد غیرمنفی $\rho(a, b)$ ـ فاصلهٔ از a تا b ـ باشد؛ در ضمن، این سه شرط برقرار باشند (شکل ۱، الف، ب، ج):

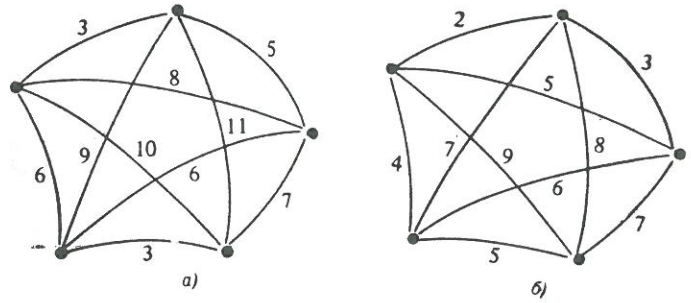


شکل۱

۱. $\rho(a, b) = 0$، وقتی و تنها وقتی که $a = b$.

۲. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ برای هردو عضو a و b از مجموعهٔ X («اصل موضوع تقارن»).

۱ـ ناحیه‌ای در شمال مسکو



شکل۲

۳°. $\rho(a,c) \leqslant \rho(a,b) + \rho(b,c)$ برای هر سه عضو a، b و c از مجموعهٔ X («اصل موضوع مثلث»).

مجموعه‌ای را که، در آن، فاصله تعریف شده باشد، **فضای متری** می‌نامند. در ضمن، خود عضوهای X را، معمولاً، *نقطه‌های فضای متری* می‌نامند. در شکل ۲ الف، فضای متری شامل ۵ نقطه، نشان داده شده است و در شکل ۲ ب، «اصل موضوع مثلث» برقرار نیست (آزمایش کنید!).

چند مثال دیگر از فاصله‌های ریاضی می‌آوریم.

مثال ۱. X را محور عددی، یعنی مجموعهٔ **R** شامل همهٔ عددهای حقیقی می‌گیریم. فاصلهٔ ρ را با این دستور تعریف می‌کنیم:

$$\rho(x,y) = |x-y| \qquad (۱)$$

یادآوری می‌کنیم که، در حالت $a \geqslant b$ داریم: $|a-b| = a-b$ و در حالت $b \geqslant a$ داریم: $|a-b| = b-a$؛ به‌نحوی که در هر حالت، $\rho(a,b)$ برابر است با طول پاره‌خط راستی از محور عددی که دو انتهای آن، a و b باشند.

آزمایش، روشن می‌کند که ρ، با هر سه شرط ۱° تا ۳° سازگار است.

به‌ویژه، نابرابری ۳°، به‌این صورت درمی‌آید:

$$|a-c| \leqslant |a-b| + |b-c| \qquad (۲)$$

(اگر b، بین a و c باشد، این نابرابری، به‌برابری تبدیل می‌شود).

مثال ۲. («متریک هدمینگ»). X را مجموعهٔ واژه‌هایی می‌گیریم که تعداد حرفهای آنها، یکی باشد[۱]! فاصلهٔ ρ، بین واژه‌های a و b، عبارت است از تعداد حرفهایی از دو واژه، که با هم اختلاف دارند. (به‌شرطی که یکی را زیر دیگری بنویسیم) مثلاً

ρ (هواشناس، هواپیما) = ۴

ρ (محمود، مسعود) = ۲

ρ (جهانگیر، جوانمرد) = ۴

ρ (تابستانی، تخت جمشید) = ۷

شبیه فاصلهٔ بین واژه‌ها، در زیست‌شناسی مولکولی هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. درشت مولکولهای DNA و RNA با واژه‌هایی شامل چهار نوع «حرف» شیمیایی (نوکلئوتیدها)، و آلبومینها با واژه‌هایی شامل بیست «حرف» (اسیدهای آمینه)، داده می‌شوند. زیست‌شناسان، با مقایسهٔ قطعه‌های مشابه این «واژه‌ها»، سرعت و مسیر تکامل را معین می‌کنند. در ضمن، زیست شناسان، نه تنها از «متریک هدمینگ»، بلکه از دستورهای بغرنجتری هم، برای فاصله استفاده می‌کنند که به‌آنها امکان می‌دهند «پس رفت» یا «پیش رفت» حرفهای جداگانه و، همچنین، درجهٔ شباهت حرفهای جداگانه را به‌حساب آورند..

مثال ۳. دربارهٔ این مثال، در بالا هم، اندکی صحبت کرده‌ایم. فرض می‌کنیم، نقشهٔ مسکو را دراختیار داریم که در آن، همهٔ ایستگاهها، برای هر نوع وسیلهٔ نقلیه و زمانی که برای پیمودن فاصلهٔ بین هر دو ایستگاه (با اتوبوس، تراموای، مترو یا

۱ـ مثل مجموعهٔ واژه‌های سه حرفی، یا مجموعهٔ واژه‌های پنج حرفی و غیره.

ترولیبوس) لازم است، مشخص شده باشد. به‌یاری این نقشه، برای هر دو ایستگاه a و b، می‌توان مقدار $t(a, b)$ ـ حداقل زمانی که برای رسیدن از a به b لازم است ـ را پیدا کرد (در «مُدل» خود، زمانی را که برای تعویض یک وسیله با وسیلهٔ دیگر و یا برای انتظار رسیدن وسیله لازم است، به‌حساب نمی‌آوریم). ببینیم آیا شرطهای ۱° تا ۳° در تابع t صدق می‌کنند؟ به‌زبان دیگر، آیا مجموعهٔ X از همهٔ ایستگاهها با فاصلهٔ t، یک فضای متری است؟ ویژگی ۱°، مثل همیشه، روشن است؛ ویژگی ۳° هم، تردیدی ایجاد نمی‌کند: روشن است که می‌توان از a به c از طریق b رفت، بنابراین زمان حداقل $t(a, c)$، از $t(a, b) + t(b, c)$ تجاوز نمی‌کند. ولی ویژگی ۲°، وقتی که بسیاری از خیابانهای مسکو یک طرفه‌اند، ممکن است به‌هم بخورد. ولی امتحان کنید؛ برای تابع

$$t'(a, b) = \frac{t(a, b) + t(b, a)}{۲}$$

همهٔ ویژگیهای از ۱° تا ۳°، صدق می‌کنند.

مثال ۴. X را مجموعهٔ عددهای طبیعی و p را عدد اول و ثابتی فرض می‌کنیم. برای هر $a > b$ از X قرار می‌گذاریم

$$\rho(a, b) = p^{-n} \qquad (۳)$$

که در آن $n \geqslant ۰$، عبارت است از بزرگترین توان p، که عدد $a - b$ بر آن بخشپذیر باشد. این به‌اصطلاح «متریک جمعی p» در نظریهٔ عددها، کاربردهای جالبی دارد.

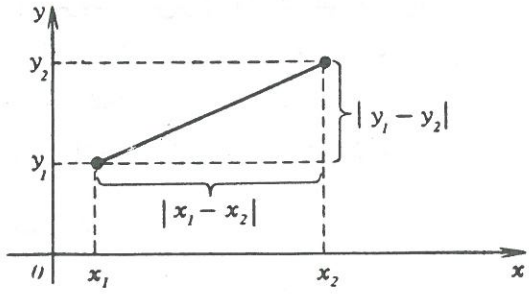
متریکهای صفحه

با آوردن چند مثال غیرعادی، از طبیعی‌ترین و عادی‌ترین مثال دور شدیم.

مثال ۵. X را مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر صفحه و ρ را به‌معنای فاصلهٔ عادی بین دو نقطه می‌گیریم (فاصله، به‌معنایی که در هندسهٔ دبیرستانی، با آن سروکار داریم)؛ یعنی $\rho(A, B)$ عبارت است از طول پاره‌خط راستی که دو نقطهٔ A و B را به‌هم وصل می‌کند. ویژگیهای ۱° و ۲°، در اینجا و در همهٔ مثالهای بعدی، با روشنی کامل برقرارند و ما دربارهٔ آنها، صحبتی نداریم. ویژگی ۳° هم، چیزی جز این نیست که «در هر مثلث، طول هر ضلع، از مجموع طولهای دو ضلع دیگر، بزرگتر نیست».

در ساختمان معمولی هندسه، این حکم، به قضیه‌ای ساده مربوط می‌شود. به‌احتمال زیاد می‌دانید، در دستگاه محورهای مختصات قائم Oxy واقع بر صفحه، فاصلهٔ $\rho(M_۱, M_۲)$، بین دو نقطهٔ $M_۱(x_۱, y_۱)$ و $M_۲(x_۲, y_۲)$، با این دستور بیان می‌شود (شکل ۳):

$$\rho\left((x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲)\right) = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲} \qquad (۴)$$



شکل ۳

به‌این ترتیب، می‌توان همین متریک فضا را، بدون تکیه بر هندسه، بیان کرد: اگر X، مجموعهٔ زوجهای مرتب (x, y) از عددهای حقیقی باشد، آن وقت فاصلهٔ بین دو زوج $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$، با دستور (۴) داده می‌شود[1]. در ضمن، برای تحقیق برقراری ویژگی ۳°، باید درستی این نابرابری را ثابت کنیم:

$$\sqrt{(x_۱ - x_۳)^۲ + (y_۱ - y_۳)^۲} \leqslant \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲} + \sqrt{(x_۲ - x_۳)^۲ + (y_۲ - y_۳)^۲}$$

(خودتان، درستی این نابرابری را ثابت کنید!)

به‌طورکلی، هر قضیهٔ هندسی را، می‌توان روی صفحهٔ عددی، با روش خالص جبری ثابت کرد و، به‌این ترتیب، ساختمان کامل هندسه را، به‌صورت جبری، بیان کرد. ولی، همان طور که می‌بینیم، اثبات قضیه‌ها با این روش، همیشه

۱ـ مجموعهٔ زوجهای (x, y) از عددهای حقیقی را با نماد $\mathbf{R}^۲$ نشان می‌دهند و آن را، صفحهٔ عددی می‌نامند.

ساده نیست: به‌جای «نابرابری مثلث»، باید یک نابرابری جبری را ثابت کنیم، که به‌اندکی ظرافت و حیله نیاز دارد.

در یک مجموعه، می‌توان فاصله را، به‌صورتهای مختلفی تعریف کرد. در اینجا، دو تعریف دیگر از متریک صفحهٔ عددی $\mathbf{R}^2$ می‌آوریم.

مثال ۵′

$$\rho'(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \qquad (۵)$$

یعنی $\rho'(M_1, M_2)$ برابر است با مجموع طولهای تصویرهای M_1M_2 روی محورهای Ox و Oy.

این متریک را می‌توان «متریک شهر قائم‌الزاویه» نامید: اگر همهٔ خیابانها در نقشهٔ شهر، با محورهای Ox و Oy موازی باشند، آن وقت، کوتاهترین مسیر از یک نقطهٔ (x_1, y_1) تا نقطهٔ دیگر (x_2, y_2)، از طریق خیابانها، با دستور (۵) داده می‌شود.

مثال ۵″

$$\rho''(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \qquad (۶)$$

(نماد $\max\{a, b\}$، یعنی بزرگترین عدد از بین دو عدد a و b) یعنی $\rho''(M_1, M_2)$ عبارت است از بزرگترین طول از بین تصویرهای M_1M_2 بر محورهای Ox و Oy.

نابرابری مثلث، در دو مثال اخیر، به‌سادگی و به‌یاری نابرابری (۲) ثابت می‌شود. مثلاً برای ρ'':

$$|x_1 - x_3| \leqslant |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \leqslant$$
$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}$$

و

$$|y_1 - y_3| \leqslant |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \leqslant$$
$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}$$

بنابراین بزرگترین عدد از بین دو عدد $|x_1 - x_3|$ و $|y_1 - y_3|$، از مقدار $\rho''(M_1, M_2) + \rho''(M_2, M_3)$ تجاوز نمی‌کند.

به همین ترتیب، در مجموعهٔ $\mathbf{R}^3$، برای هر انتخاب (x, y, z) از سه عدد حقیقی، فاصلهٔ بین (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) را می‌توان با یکی از سه دستور زیر بیان کرد:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$$

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

در حالت اول، با فضای عادی سه بُعدی سروکار داریم که در هندسهٔ فضایی دبیرستانی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و انتزاع ساده‌ای از فضایی است که در آن زندگی می‌کنیم. به‌همین ترتیب، می‌توان در فضای n بُعدی صحبت کرد، و در آن، نظریهٔ تابعهای با n متغیر را ساخت. در ضمن، گاهی این و گاهی آن دستور فاصله، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فاصلهٔ بین تابعها

مفهوم فاصله را، نه تنها برای عددها و نقطه‌ها، بلکه برای بسیاری از عنصرهای دیگر ریاضی، می‌توان تعریف کرد. نمونه‌ای از هندسه می‌آوریم. *فاصلهٔ بین دو چند ضلعی محدب مُسطحهٔ* M_1 و M_2 را می‌توان به‌این ترتیب تعریف کرد: برای هر رأس از چند ضلعیهای M_1 و M_2، فاصله[1] تا نزدیکترین رأس از چند ضلعی دیگر را پیدا می‌کنیم و، از بین عددهایی که به‌دست می‌آیند، بزرگترین آنها را در نظر می‌گیریم (بنابراین، در فاصله‌ای از چند ضلعی مفروض M_0، که بزرگتر از r' نیست، چند ضلعی M قرار دارد که، در آن، همهٔ رأسها، در دایره‌هایی به‌شعاع r و به‌مرکز رأسهای M_0 واقع‌اند؛ در ضمن در هر دایره، دست کم یکی از رأسهای M قرار دارد). می‌توان تحقیق کرد که، مجموعهٔ چند ضلعیهای محدب واقع بر یک صفحه، با این تعریف برای فاصله، یک فضای متری است. تعداد این گونه مثالها را، تا هر جا که بخواهیم، می‌توان افزایش داد.

ولی مهمترین کاربردی که می‌تواند موجب تکامل نظریهٔ

۱ـ منظور، فاصلهٔ عادی (۴) است.

فضاهای متری باشد، نه به هندسه، که به‌آنالیز و نظریهٔ تابعها مربوط می‌شود.

اغلب، برای بررسی یک تابع و حتی، به‌طور ساده، برای محاسبهٔ مقدارهای آن، لازم است آن را، با تابع دیگری که ساده‌تر و مثلاً به‌صورت یک چند جمله‌ای است، عوض کنیم.

می‌دانید که، برای مقدارهای نزدیک به‌صفر x، مقدار $\sin x$ به تقریب برابر x است (در اینجا $\sin x$، به‌معنای سینوس عدد x است، یعنی وقتی که زاویهٔ x برحسب رادیان بیان شود). و رابطهٔ دقیقتر از آن: $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$. مثلاً فرض کنید x، در بازهٔ $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ تغییر کند. چگونه می‌توان ارزیابی کرد که تابع $f_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$ تا چه حد به‌تابع $f_2(x) = \sin x$ نزدیک است؛ حداکثر «فاصلهٔ» بین این دوتابع چقدر است؟

یکی از طبیعی‌ترین و ساده‌ترین تعریفها، برای فاصله، چنین است: به‌ازای هر مقدار x، تفاضل $f_1(x) - f_2(x)$ را پیدا می‌کنیم و $x = x_0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن، این تفاضل حداکثر مقدار ممکن (از لحاظ قدرمطلق) باشد و فرض می‌کنیم:

$$\rho(f_1, f_2) = |f_1(x_0) - f_2(x_0)|$$

برای مثال مشخص ما، به‌دست می‌آید:

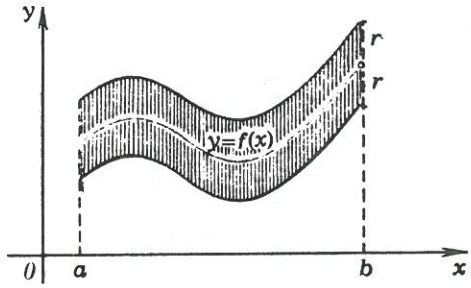
$$\rho(f_1, f_2) = |\sin\frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{384})| \approx 0/0025$$

(می‌توان ثابت کرد، به‌ازای $x = \frac{\pi}{4}$، به‌حداکثر می‌رسیم).

به‌همین ترتیب، در حالت کلی، فاصلهٔ بین دو تابع f_1 و f_2 را، که در بازهٔ $[a, b]$ معین است، برابر با مقدار زیر می‌گیرند:

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_1(x) - f_2(x)| \qquad (7)$$

(تحقیق کنید، اصل موضوعهای ۱° تا ۳° در اینجا برقرارند!) در ضمن، در فاصله‌ای از تابع مفروض، که بزرگتر از r نیست، تابعهایی قرار دارند که، نمودارهای آنها، در نواری به‌پهنای 2r دور نمودار تابع f قرار دارند (شکل ۴).

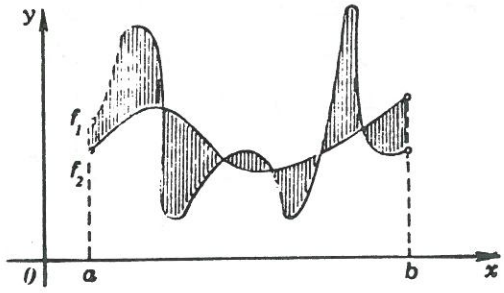


شکل۴

اغلب، این فاصله را در نظر می‌گیرند:

$$\rho(f_1, f_2) = s(f_1, f_2) \qquad (8)$$

که در آن، s عبارت است از مقدار مساحت بین نمودارهای f_1 و f_2 (شکل ۵)؛



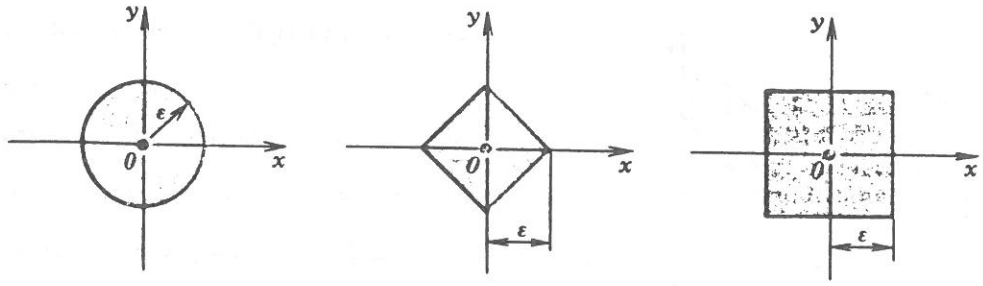
شکل۵

و یا بخصوص

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{s(f_1, f_2)} \qquad (9)$$

که در آن، $s(f_1, f_2)$ عبارت است از مقدار مساحت بین نمودار تابع $y = (f_1(x) - f_2(x))^2$ و محور Ox.

فاصلهٔ (۷)، وقتی که مقدار تابعهای f_1 و f_2 برای همهٔ مقدارهای متغیر به‌هم نزدیک باشند، کوچک است؛ و فاصله‌های (۸) و (۹) نشان می‌دهند، که تابعهای f_1 و f_2 «به‌طور متوسط» تا چه حد به‌هم نزدیک‌اند (ممکن است در بازه‌های کوچکی، خیلی از هم دور شده باشند). مثلاً، فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$، پتانسیل دو نقطهٔ معین از مسیر جریان برق در لحظهٔ زمانی t باشند؛ در این صورت، توان قطعه‌ای از مدار که بین این دو نقطه قرار دارد، در فاصلهٔ زمانی $a \leqslant t \leqslant b$، متناسب با $s(f_1, f_2)$ است (اگر مقاومت ثابت باشد، توان متناسب با $(f_1(t) - f_2(t))^2$ است). ولی اگر برای ما، این مطلب مهم باشد که ولتاژ $f_1(t) - f_2(t)$،



شکل۶

همیشه، از مقداری مثل V تجاوز نکند، آن وقت باید فاصله را با دستور (۷) ارزیابی کنیم: باید

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_1(t) - f_2(t)| \leqslant V$$

یادآوری می‌کنیم که ما، در اینجا، نه تعریف دقیق «مساحت بین دو منحنی» را داده‌ایم و نه وارد این بحث شده‌ایم که، فاصله‌های (۷) تا (۹)، برای چه تابعهایی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند! اینها، بخش بزرگی از کتابهای مربوط به‌آنالیز ریاضی و آنالیز تابعی را تشکیل می‌دهند.

چند تعریف از آنالیز

در اینجا چند مفهوم از آنالیز ریاضی را، که می‌توان در هر فضای متری X تعریف کرد، می‌آوریم.

تعریف ۱. ϵ را عددی مثبت می‌گیریم. گوی به‌شعاع ϵ و به‌مرکز نقطهٔ C از X، مجموعهٔ نقطه‌های M نامیده می‌شود که، برای آنها، $\rho(M, C) \leqslant \epsilon$. این مجموعه را، $\epsilon-$ همسایگی برای نقطهٔ C هم می‌گویند.

روی شکل ۶، الف، ب، ج، $\epsilon-$ همسایگی نقطهٔ $O(0, 0)$، برای فاصله‌های (۴)، (۵) و (۶) در صفحه نشان داده شده است. (برای نقطه‌های دیگر C، می‌توان این همسایگی را با انتقال موازی و بردن O به C پیدا کرد.)

تعریف ۲. نقطهٔ A را حد دنبالهٔ M_1، M_2، M_3، ... گوییم، وقتی که برای هر عدد مثبت ϵ، شمارهٔ ردیف n (وابسته به ϵ) وجود داشته باشد، به‌نحوی که همهٔ جمله‌های دنباله، با آغاز از X_n، در $\epsilon-$ همسایگی نقطهٔ A باشند (در اینجا M_1، M_2، M_3، ...، A، نقطه‌هایی از فضای متری X اند).

تأکید می‌کنیم که، این تعریف، برای هر فضای متری، به‌درد می‌خورد؛ یعنی این، تعریفی است از حد، هم برای عددهای واقع بر خط راست، هم برای نقطه‌های روی صفحه و هم برای تابعهایی که در بازهٔ بسته‌ای تعیین‌اند.

مثلاً، می‌توان ثابت کرد، تابع $f(x) = \sin x$، $(a \leqslant x \leqslant b)$، عبارت است از حد دنبالهٔ تابعهای f_1، f_2، f_3، ...، که در آن

$$f_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

بدون ارتباط به‌اینکه، کدام فاصلهٔ (۷)، (۸) یا (۹) را مورد استفاده قرار دهیم و چه عددهایی در نقش a و b انتخاب کنیم!

تعریف ۳. X و Y را دو فضای متری و F را نگاشت مجموعهٔ X در مجموعهٔ Y، و x_0 را نقطه‌ای در X می‌گیریم. در این صورت، F را در نقطهٔ x_0 پیوسته گویند، وقتی که برای هر عدد مثبت ϵ، بتوان δ را (وابسته به ϵ) پیدا کرد، به‌نحوی که همهٔ نقطه‌های $\delta-$ همسایگی برای x_0، در $\epsilon-$ همسایگی نقطه‌های $y_0 = F(x_0)$ نگاشته شوند.

مثلاً، هر تابع «دبیرستانی»، که عبارت از نگاشت دامنهٔ E ی خود در محور عددی باشد، در هر نقطهٔ E پیوسته است. این نمونه‌ای است از نگاشت پیوستهٔ مجموعهٔ چند ضلعیهای محدب (قبلاً گفته‌ایم که چگونه می‌توان آن را به‌فضای متری تبدیل کرد)، در محور عددی: هرچند ضلعی در تناظر با مساحت خود قرار می‌گیرد.

تعریفهایی که در زیر می‌آوریم، به‌ما کمک می‌کنند تا بتوانیم هر مجموعهٔ فضای متری را به‌صورتی طبیعی تکمیل کنیم، همان طور که مجموعهٔ عددی گویا (یا کسرهای اعشاری محدود)، تا مجموعهٔ R همهٔ عددهای حقیقی تکمیل می‌شود:

تعریف ۴. دنبالهٔ M_1، M_2، ... نقطه‌های X بنیادی (یا

اساسی) نامیده می‌شود، وقتی که برای هر $\epsilon > 0$، شمارهٔ ردیف n وجود داشته باشد، به‌نحوی که، برای هر $k \geqslant l \geqslant n$ داشته باشیم: $\rho(M_k, M_l) < \epsilon$. فضای X وقتی **کامل** نامیده می‌شود که، در آن، هر دنبالهٔ بنیادی، دارای حد باشد.

تعریف ۵. دو دنبالهٔ M'_1، M'_2، ...، و M''_1، M''_2، ... را هم ارز گویند، وقتی که برای هر $\epsilon > 0$، شمارهٔ ردیف n وجود داشته باشد، به‌نحوی که برای هر $k \geqslant l \geqslant n$ داشته باشیم: $\rho(M'_k, M''_l) < \epsilon$.

اگر کلاس دنباله‌های هم ارز را، به‌عنوان نقطه‌ها در نظر بگیریم، می‌توان فضای تازه‌ای به‌دست آورد که فضایی کامل است. جالب است که تکمیل فضای تابعهای ساده‌ای، مثل چند جمله‌ایها، به‌وسیلهٔ متریکهای (۷)، (۸) و (۹)، منجر به فضای کامل می‌شود.

نظریهٔ فضاهای متری، در آغاز سدهٔ بیستم و در کارهای فره‌شه ریاضیدان فرانسوی و هااوس دورف ریاضیدان آلمانی پدید آمد و امروزه در کتابهای درسی، با عنوانهایی شبیه «عنصرهای آنالیز تابعی»، «مبانی آنالیز معاصر»، «ورودی به نظریهٔ مجموعه‌ها و تابعها» از آن صحبت می‌شود.

مفهوم کلی «فاصله»، کاربردهای زیادی دارد. مثلاً «فاصلهٔ بین واژه‌ها» که در مثال ۲ از آن صحبت کردیم، وسیلهٔ سودمندی در بسیاری از دانشهای رو به تکامل، مثل نظریهٔ کُدها، تصحیح اشتباهها، زیست‌شناسی مولکولی و غیره است.

مسئله‌ها

۱. ثابت کنید، برای چهار نقطهٔ A، B، C و D از فضای متری داریم:

$$\rho(A, C) + \rho(B, D) \leqslant$$

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) + \rho(C, D) + \rho(D, A)$$

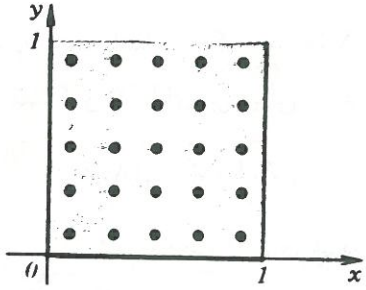
۲. ثابت کنید، برای هر n نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_n $(n \geqslant 3)$ داریم:

$$\rho(A_1, A_2) + \rho(A_2, A_3) + \cdots +$$

$$+\rho(A_{n-1}, A_n) \geqslant \rho(A_1, A_n)$$

۳. مجموعهٔ E شامل نقطه‌های فضای متری X را، شبکهٔ ϵ می‌نامند، وقتی که ϵ- همسایگی نقطه‌های مجموعهٔ E (همه‌باهم) به‌طور کامل مجموعهٔ X را بپوشانند، به‌زبان دیگر وقتی که برای هر نقطهٔ x از X، دست کم یکی از نقطه‌های مجموعهٔ E وجود داشته باشد که از x، فاصله‌ای بیش از ϵ نداشته باشد (در اینجا، ϵ عددی مثبت است).

مثلاً مجموعهٔ نقطه‌های سیاه در شکل ۷، شبکهٔ ϵ، برای مربع $0 \leqslant x \leqslant 1$ و $0 \leqslant y \leqslant 1$ در صفحهٔ Oxy، با فاصلهٔ به‌مفهوم (۶) برای $\epsilon > \frac{1}{10}$ است.



شکل۷

برای چه مقداری از ϵ، همین مجموعه، شبکهٔ ϵ، به‌مفهوم فاصله‌های (۴) و (۵) در همین مربع است؟

۴. $N(\epsilon)$ را حداقل تعداد نقطه‌ها در شبکهٔ ϵ از فضای X، و $M(\epsilon)$ را حداکثر تعداد نقطه‌هایی از X می‌گیریم که فاصلهٔ بین هردو تا از آنها، کمتر از ϵ نباشد. ثابت کنید:

$$M(2\epsilon) \leqslant N(\epsilon) \leqslant M(\epsilon)$$

۵. C را مجموعهٔ تابعهایی می‌گیریم که در بازهٔ $[0, 1]$ معین باشند و مقدارهایی را در همین بازه قبول کنند؛ در ضمن نمودارهای آنها، خطهایی شکسته باشند.

ثابت کنید، می‌توان بی‌نهایت تابع از C انتخاب کرد که همهٔ فاصله‌های دوبه‌دوی بین آنها، برابر واحد باشد. (مفهوم «فاصله» را در C، با دستور (۷) در نظر گرفته‌ایم.) از اینجا نتیجه بگیرید، در C نمی‌توان شبکهٔ ϵ محدودی، به‌ازای $\epsilon < \frac{1}{2}$، انتخاب کرد.

۶. آیا یک فضای متری می‌تواند به‌صورتی باشد که، در آن،

همسایگی ۳ نقطهٔ A، به‌طور کامل در همسایگی دو نقطهٔ دیگر B قرار گیرد و به‌طور کامل آن را نپوشاند؟ اگر به‌جای ۳ و ۲، عددهای دیگری در نظر بگیریم، پاسخ چگونه است؟

۷. ثابت کنید، بین عددهای n رقمی که تنها با دو رقم ۱ و ۲ درست شده‌اند، نمی‌توان بیش از $\frac{2^n}{n+1}$ عدد پیدا کرد، به‌نحوی که، هر دو عدد دلخواه، دست‌کم در رقمهای سه مرتبهٔ خود، با هم اختلاف داشته باشند.

۸. مثالی از دنبالهٔ تابعها پیدا کنید که در بازهٔ $[0, 1]$ معین باشد و اگر از فاصلهٔ (۸) استفاده کنیم، به‌سمت حد f_0 میل کند، ولی اگر از فاصلهٔ (۷) استفاده کنیم، به‌سمت حد f_0 میل نکند.

۹. ρ_1، ρ_2 را دو فاصله در یک مجموعهٔ X می‌گیریم که، برای هر دو نقطهٔ A و B، دارای این ویژگی باشند:

$$\rho_1(A, B) \leqslant k\rho_2(A, B)$$

k عددی است مثبت و مقدار آن برای هر دو نقطهٔ دلخواه A و B، تفاوت نمی‌کند.

ثابت کنید، اگر P حد دنبالهٔ M_1، M_2، M_3، ... به‌مفهوم فاصلهٔ ρ_2 باشد، آن وقت، همین P، حد دنباله به‌مفهوم فاصلهٔ ρ_1 هم خواهد بود.

با استفاده از این مسئله، ثابت کنید، گزارهٔ «حد دنبالهٔ M_1، M_2، M_3، ... عبارت است از نقطهٔ P»، در صفحه، بدون توجه به‌اینکه از مفهوم (۴) یا (۵) یا (۶) برای فاصله استفاده کنیم، معنا دارد.

۱۰. (الف) فاصله‌ای مثل ρ، برای مجموعهٔ همهٔ پاره‌خطهای راست واقع بر صفحه، در نظر بگیرید؛ فرض کنید، فاصلهٔ ρ، دارای این ویژگی باشد: اگر دو دنبالهٔ نقطه‌های A_1، A_2، A_3، ... و B_1، B_2، B_3، ... دارای دو حد مختلف در نقطه‌های A و B باشند، آن وقت، دنبالهٔ خطهای راست A_1B_1، A_2B_2، A_3B_3، ... (به مفهوم فاصلهٔ ρ) دارای حدی در خط راست AB خواهد بود.

(ب) ثابت کنید، فاصلهٔ ρ را نمی‌توان طوری در نظر گرفت که، فاصلهٔ بین هر دو خط راست متقاطع، تنها به‌زاویهٔ بین آنها بستگی داشته باشد.

ترجمهٔ پرویز شهریاری

...

وقتی به حل مسئلهٔ مشکلی می‌پردازیم، در مراحل اول، درک ما از مسئله معمولاً آنقدر غیردقیق است که هر نوع مدلسازی ریاضی‌ای می‌تواند مطلب را طور دیگری جلوه‌گر کند و موجب شود، از واقعیت اصلی به دور بیفتیم. زبان ریاضی دقیقتر از آن است که بشود برای چیزی که درک دقیقی از آن نداریم، به‌کارش گرفت. فایدهٔ واقعی ریاضیات در فراهم کردن ساختار منطقی برای مسائلی است که از قبل به‌طور شهودی درک درستی از آنها داشته باشیم... معمولاً مسئلهٔ واقعی پیچیده‌تر از آن است که مستقیماً قابل حل باشد. پس ناچاریم شهود فیزیکیمان را به‌کار بگیریم و مدلهای ساده‌ای بسازیم و البته سعی کنیم که این مدلها دست‌کم «لُبّ مطلبِ» فیزیکِ مسئله را دربر بگیرند. چه بهتر که مدل ما به روشهای ریاضی راه بدهد...

گفتگو با **رابرت شریفر** (برندهٔ جایزهٔ نوبل (۱۹۷۲) به اتفاق جان باردین و لئون کوپر به‌خاطر تدوین نظریهٔ میکروسکوپیک ابررسانایی) نقل از *مجلهٔ فیزیک*. سال ۱۰، شمارهٔ ۲.

مسائل برای حل

مسائل زیر را خاص دانش‌آموزان ریاضی ـ فیزیک دبیرستان در نظر گرفته‌ایم و در آن سعی بر این بوده که سطحی فراتر از سطح متوسط عنوان شود تا به کار دانش‌آموزان داوطلب مسابقات ریاضی نیز بیاید. نیز برآنیم که مسائل حتی‌المقدور تکراری نباشند. از کسانی که درصدد فرستادن مسائلی از این دست‌اند تقاضا داریم صورت مسئله را همراه حل کامل آن و با ذکر مأخذ ارسال دارند تا در صورت انتخاب به‌نام خودشان چاپ شود.

ریاضی

۱. فرض می‌کنیم x_1، x_2، x_3، ... دنباله‌ای از اعداد حقیقی ناصفر صادق در

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}\ ,\ n = 3, 4, 5, \cdots$$

باشد. شرایط لازم و کافی x_1 و x_2 را برای اینکه x_n به‌ازای مقادیر نامتناهی n، عددی صحیح باشد، مشخص کنید.

۲. بر دایره‌ای n نقطه اختیار و وترهایی را که آنها را دوبه‌دو به‌هم وصل می‌کنند، رسم کرده‌ایم. با فرض اینکه هیچ سه وتری (جز در نقاط انتهاییشان) همرس نباشند، چند نقطهٔ تقاطع موجود است؟

۳. با مفروض بودن عدد صحیح و مثبت n، تعداد چهارتاییهای صحیح (a, b, c, d) را، چنانچه $0 \le a \le b \le c \le d \le n$، بیابید.

۴. مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABK، BCL، CDM، DAK داخل مربع ABCD رسم شده‌اند. ثابت کنید که اوساط چهار پاره‌خط KL، LM، MN، NK و اوساط هشت پاره‌خط AK، BK، BL، CL، CM، DM، DN، AN دوازده رأس یک دوازده ضلعی منتظم‌اند.

۵. در مثلث ABC از رأسهای B و C به‌نقطهٔ M، وسط میانهٔ AA' از این مثلث، وصل می‌کنیم تا خطوط CM و BM، اضلاع AB و AC را به‌ترتیب در نقاط E و F قطع کنند. ثابت کنید که $EF \parallel BC$ و نسبت $\frac{EF}{BC}$ را به‌دست آورید.

۶. ثابت کنید که مساحت مثلث شبکه‌ای مساوی $I + \frac{1}{2}B - 1$ است، که در آن I و B، به‌ترتیب، تعداد نقاط شبکه‌ای داخلی و مرزی مثلث‌اند. (مثلث شبکه‌ای مثلثی واقع در صفحه با نقاط شبکه‌ای به‌عنوان رئوس است.)

۷. قضیه‌ای معروف بر این است که هر عدد اول $P > 2$ را می‌توان به‌صورت مجموع دو مربع کامل نوشت اگر و تنها اگر P یک واحد بیشتر از مضربی از ۴ باشد. با فرض این نتیجه، نشان دهید که:

(الف) هر عدد اول، یک واحد بیشتر از مضربی از ۸ را، می‌توان به‌صورت $x^2 + 16y^2$، x و y صحیح، نوشت.

(ب) هر عدد اول، پنج واحد بیشتر از مضربی از ۸ را، می‌توان به‌صورت $(2x + y)^2 + 4y^2$ نوشت که در آن x و y صحیح هستند.

۸. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به‌طوری که $a, b, c, d > 0$. ثابت کنید:

(الف) مقادیر ویژهٔ A حقیقی و متمایزند.

(ب) A حداقل یک مقدار ویژهٔ مثبت دارد.

۹. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، یک تابع است که به‌ازای هر x:

$$f(2x - f(x)) = x$$

و فرض کنید r عدد حقیقی ثابتی است.

(الف) ثابت کنید اگر $f(x) = x + r$، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$f(x - nr) = (x - nr) + r$$

(ب) ثابت کنید اگر f تابعی یک به‌یک باشد ـ یعنی از $f(x) = f(y)$ نتیجه شود $x = y$ ـ آنگاه خاصیت (الف) برای هر عدد صحیح صادق است.

۱۰. ثابت کنید که در دنبالهٔ بی‌پایان زیر، هیچ‌یک از اعداد اول نیستند:

$$10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$$

فیزیک

۱. دمای اولیهٔ m گرم از مایع A، 2m گرم از مایع B و 3m گرم از مایع C به ترتیب $30^\circ C$، $20^\circ C$ و $10^\circ C$ است. اگر مایعهای A و B را مخلوط کنیم، دمای تعادل $25^\circ C$ می‌شود؛ اگر مایعهای B و C را مخلوط کنیم، دمای تعادل $14.5^\circ C$ می‌شود. چنانچه مایعهای A و C مخلوط شوند دمای تعادل چند درجهٔ سانتی‌گراد می‌شود؟

۲. درون استوانه‌ای یک مولکول گرم گاز، زیر پیستونی قرار دارد. اگر گاز را یک درجه گرم کنیم، معین کنید این گاز چه مقدار کار انجام می‌دهد؟ پیستون بدون اصطکاک است، به‌آسانی حرکت می‌کند و فشار درون آن همواره ثابت است.

۳. دو گلولهٔ مشابه که جرم هر یک ۰/۲ گرم است از یک نقطه توسط دو نخ که طول هر یک ۵۰cm است آویخته شده‌اند. اگر این دو گلوله را به‌طور مساوی دارای بار الکتریکی هم علامت کنیم، از یکدیگر دور می‌شوند و در فاصلهٔ ۲۰cm از هم قرار می‌گیرند، بار الکتریکی هر گلوله را حساب کنید.

۴. قایقی می‌تواند با سرعت ۱۰m/s بر آب رودخانه‌ای حرکت کند. اگر عرض رودخانه ۱۸۰m و سرعت جریان آب ۵m/s باشد، حداقل زمان لازم برای آنکه قایق عرض رودخانه را طی کند چقدر است؟ در این صورت قایق برای عبور از رودخانه چند متر طی می‌کند و سرعت آن نسبت به‌ساحل چند متر برثانیه خواهد بود؟

۵. در یک لولهٔ u شکل به‌طول ۳۰ سانتیمتر آب ریخته‌ایم. ثابت کنید که اگر در یک طرف لوله کمی بدمیم به‌طوری که آب درون شاخه کمی پایین رفته، بازگردد، حرکت آب در لوله نوسانی است. دورهٔ تناوب آن را نیز حساب کنید.

حل این مسائل را در شمارهٔ بعد خواهید دید.

QUANTUM

THE STUDENT MAGAZINE OF MATH AND SCIENCE

A publication of the National Science Teachers Association (NSTA)
& Quantum Bureau of the USSR Academy of Sciences
in conjunction with
the American Association of Physics Teachers (AAPT)
& the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

دنیای فیزیک وسیع‌تر از آن است که تصور می‌کنید. می‌دانید که اگر سه بعد فضایی را، به علاوهٔ بعد زمان در نظر بگیرید، به همین سادگی، چهار بعد حاصل کرده‌اید. اما اگر خیلی دور بروید، چه می‌یابید؟ آیا اشیای چهار بعدی را پیدا می‌کنید؟ این موضوع می‌تواند به همین سادگی واقعیت فیزیکی داشته باشد. در این صورت با واقعیت فیزیکی‌تان در کجا متوقف می‌شوید؟ اصلاً ما در چه نوع دنیایی زیست می‌کنیم؟ آیا این دنیا منحنی است؟ اختاپوسی است؟ این کار فیزیکدان است که دریابد که کدام فضا با چه نوع معیاری است. این به عهدهٔ فیزیکدان است که بین مدلهای مختلفی که توسط ریاضیدانها کشف شده‌اند، یکی را برگزیند، یا مدلهای تازه‌ای را که مناسب‌ترند، بنا کند. معمولاً، اشخاصی تصور می‌کنند که فضای ما متجانس است، شاید چنین نباشد.

نقطه‌ای گردان چو گردی در فضا را در نظر بگیرید، غیر از مختصات فضائیش، مختص زمانی موجود است، اما سرعت، شتاب، و انحنا، که پارامترهای دیگر، اعداد دیگر، ابعاد دیگر را به دست می‌دهند نیز وجود دارند. الکترونی که در فضا در حرکت است، در آن واحد هم می‌چرخد، هم می‌لرزد، و این دو نیز ابعاد دیگری به دست می‌دهند. مدلی برای الکترون دادن، یا حتی دانستن اینکه مفهوم الکترون معنی دارد یا نه، کاری صعب است .... فیزیک در هیچ مکان خاصی توقف نمی‌کند! آن تنها فیزیک ترسیماتی که می‌توانم در اینجا و بر این تختهٔ سیاه انجام دهم، نیست، و در مورد پدیده‌های فیزیکی دیگر، ممکن است به مدلهای دیگری نیازمند باشم که امروز به نظر شما بس مجرد بیایند. بنابراین، فیزیکدان شایسته کسی است که از مدلهای پیچیده نمی‌هراسد، شتردل نیست و مدلهای خود را در میان آنچه که مهندسان بس مجرد می‌یابند، می‌جوید. چنین است که فیزیکدان مدلی معتبر می‌یابد و پیروز می‌شود ... زیرا خود را از فشارهای روشنفکرانهٔ همکارانش آزاد کرده و آنچه را که دیگران بس مجرد یافته‌اند، واقعی ساخته است. به عبارت دیگر، محدودیتی موجود نیست، تنها محدودیتهای هر فرد، محدودیتهای ذهنی، خلقی، ذوقی ... اوست.

سرژلانگ

از هنر ریاضی ورزیدن. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور