یکان

۲

مجلّه ریاضیات

فهرست مندرجات

پیام استاد	دکتر عیسی صدیق	۳
جمشید کاشانی	احمد بیرشک	۵
دربارهٔ اصول هندسی	پرویز شهریاری	۷
زنان ریاضیدان	ترجمه - تجلی پور	۹
هواشناسی و ریاضیات	غلامرضا مجیدی	۱۳
چرا معلم ریاضی شدم	«	۱۵
مربعهای وفقی	-	۱۶
کهنه و نو	-	۱۸
پایه منفی در اعداد	احمد قلیه	۲۰
دربارهٔ ریاضیات متوسطه	رزاقی خمسی - شهریاری - یحیوی	۲۱-۲۳-۳۴
حل مسائل شمارهٔ اول	-	۲۵
معرفی کتاب	-	۳۳
راهنمای ریاضیات متوسطه	-	۳۹
مسائل برای حل	-	۳۷-۴۲
مسائل مکانیک	دکتر قلمسیاه	۴۴
چهل مسأله از استاد دکتر هشترودی		۴۷
مسأله مسابقه	-	۵۰
سرگرمی	-	۵۲
نامه ریاضیدان معتوق عبدالحسین مسعودی		۵۴
تاریخچه استعمال علامات		۵۶

شماره دوم سال یکم

اسفند ماه ۱۳۴۲

هر شماره بهتر از شمارهٔ پیش

استقبالی که از انتشار نخستین شمارهٔ ماهنامهٔ یکان بعمل آمد، بیش ازحدی بود که انتظارداشتیم. وهنگامی که یك هفته بعداز انتشار مجله، نسخه های آن نا یاب شد و باتوجه به تقاضاهای رسیده، تجدیدچاپ آن لازم گردید، دانستیم؛ کاری را که آغاز نموده‌ایم مورد توجه عمومی است و برای ما فریضه ایست که سعی کنیم هرشمارهٔ مجله بهتر از شمارهٔ قبل باشد.

برای اولین بار براهی ناشناخته قدم گذاشته بودیم واطمینان کامل داشتیم که این‌راه رابامو فقیت ادامه‌خواهیم دادزیرا بوجود راهنمایانی حقیقت شمار، اعتقاد داشتیم. اکنون هم که راه را آغاز نموده‌ایم اعتقاد ما بوجود این رهبران صد چندان شده و با قطع و یقین مطمئن هستیم که برای ادامه موفقیت آمیز راه انتخابی، توانائی گذشتن از همهٔ موانع و مشکلات را خواهیم داشت.

شمارهٔ اول مجلهٔ یکان نه‌تنها مورداستقبال بی‌سابقهٔ دانش آموزان واقع شد بلکه بجز آنان، دبیران گرامی واستادان ارجمند علوم ریاضی آنرا تأیید نمودند و دانشمندانی که هم و وقت خود را صرف اشاعه وعلوم وتوسعه فرهنگ این مرز وبوم میدارند آنرا مورد توجه کامل قرار دارند.

با علم باینکه مؤثر ترین وسیلهٔ پیشرفت کار، رفع نقایص و عیوب موجود در آن میباشد و لازمهٔ آنهم تشخیص این نقایص است با تقدیم شمارهٔ اول مجله بحضور دانش دوستان، ازایشان خواستیم ما را بر اشتباهاتی که ندانسته درانجام کار رخ داده است آگاه سازند وخوشبختانه آنان که به پیشرفت علمی کشور علاقه دارند مسئول‌مارا اجابت نموده با یادآوری لغزشهای موجود. کمال‌مساعدت خود را نسبت به پیشرفت مجله مبذول داشتند. باعث افتخار است که شخصیتی چون **استاد دکتر هشترودی** همهٔ مسائل مجله را مورد توجه قرار دهد و آنهارا که موردایراد است یادآوری نماید: یا اینکه محققی همچون **احمد آرام**، دانشمندانش پرور، جزئیات مندرجات‌مجله را مورد مطالعه قرار داده با تذکر اشتباهات چاپی یا دستوری، بدین وسیله علاقهٔ خود را به وجود مجله، و بهتر بودن آن اعلام بدارد. هر چند، کوشش شد که در چاپ دوم شمارهٔ اول. وچاپ این‌شماره لغزشهائی که بعمل آمده بود مرتفع گرد اما بعلت توأم شدن چاپ دو شماره، آنطور که بایست و آنطور که پسند نکته سنجان باشد، کار انجام نگرفت اما برای شماره‌های بعد عملا ثابت خواهد شد که هر شماره مجله بهتر از شمارهٔ قبل میباشد.

☆☆☆

پیش‌ازانتشار اولین شمارهٔ یکان، با نامه‌هائی که چه مستقیماً و چه بوسیلهٔ دبیرستانها، حضور دبیران محترم ریاضیات ارسال گردید. اعلام شد که **صفحات‌ماهنامهٔ یکان دراختیار همهٔ علاقمندانی است که مایل باشند در تنظیم و تهیه مطالب آن اشتراك مساعی داشته باشند**. و اکنون نیز باستحضار همهٔ همکاران گرامی و سایرخوانندگان میرساند که تهیهٔ‌مطالب شماره‌های مجله در انحصاراشخاص معین نیست و همهٔ علاقمندانی که مایل باشند میتوانند با ارسال مقالات سودمند، موجباب رشد مجله را فراهم داشته باشند. هدف ما آنست که دانش‌آموزان ما بجای آنکه در ریاضیات، بیك ماشین حل

بقیه در صفحهٔ ماقبل آخر

شاد باش نوروزی

بمناسبت جشن ملی نوروز وحلول سال نوین، بهترین شادباش های خود را بحضور همهٔ خوانندگان گرامی بویژه دبیران گرامی علوم ریاضی ودانش آموزان عزیز تقدیم میدارد

مدیر مجله

پیـــــــام استاد

سناتور دکتر عیسی صدیق (صدیق اعلم) که پیام ایشان زینت بخش این شماره ازمجله است درسال ۱۲۷۳ خورشیدی در تهران متولدشده‌اند .

تحصیلات ابتدائی ومتوسطه را در مدرسه **ادب وکمالیه** و **دارالفنون تهران** بانجام رسانده اند .

در ۱۲۹۰ عازم فرانسه شده وتا ۱۲۹۷ دوره دانشسرای **ورسای** را باتمام رسانده واز **دانشگاه پاریس** دانشنامه لیسانس

طلوع مجلهٔ ریاضیات را در آسمان دانش ومطبوعات ایران بآقای عبدالحسین مصحفی مؤسس مجله و بعموم ریاضی‌دانان این مرز وبوم تبریک میگویم و ازخداوند جل شأنه توفیق ایشانرا در خدمتی که آغاز کرده‌اند صمیمانه مسئلت دارم.

هنگامی که در **ورسای** و **پاریس** بتحصیل اشتغال داشتم ومجلهٔ تربیت ریاضی L'Education Mathématique را مطالعه میکردم آرزویم براین بود که روزی برسد که ما نیز نظیر آنرا درایران داشته‌باشیم واکنون که پنجاه‌سال ازآن تاریخ میگذرد خوشبختانه این آرزو بدست یکی از هموطنان دانشمند وباهمت ما به تحقق پیوسته است.

با پیشینه‌ای که مملکت‌ما درخدمت بفرهنگ‌جهان داشته بسیار طبیعی است که در ایـن عصر فرخنده چنین مجله‌ای بوجود آید زیرا علوم ریاضی در ایران همواره در طول تاریخ مورد توجه بوده وطبق اسنادی که در دست است کشور ما از صدر اسلام دانشمندان بـزرگ در علوم ریاضی در دامان خود پرورده کـه میتوان نام چند تن از آنانرا برای مثال‌دراینجاذکر نمود مانند **محمدبن‌موسی شاکرخوارزمی** که نخستین کتاب جبر ومقابله را در دنیا تألیف کـرد یـا **ابوالوفا بوزجانی** که نخستین جدول مثلثاتی را در جهان تدوین نمود یا **ابوریحان بیرونی** که شیب مدارخورشید را اندازه گرفت و طرز محاسبه حاصل جمع تصاعد هندسی را پیدا کرد یا **عمرخیام** کـه معادله درجه سوم را حل کرد وضرائب بسط دو جمله‌ای را (که بنام نیوتن معروف‌است) بدست آورد و تقویم جلالی را با دقت فوق‌العاده و محاسبه نزدیك بحقیقت تنظیم نمود یا **خواجه نصیرالدین طوسی** که نخستین کتاب مثلثات کروی را در جهان نوشت یا **جمشید غیاث‌الدین کاشی** که اولین باردردنیا کسر اعشاررا بکاربرد ...

علوم ریاضی طرز تفکر را منظم و منطقی میکند . اندازه وعدد انسانرا نسبت به حقایق امور روشن و دقیق میسازد و در دنیای امروز که کلیهٔ فنون مبتنی بر ریاضی روبتوسعه وتکامل است جادارد که ما نیز جوانان خود را باین‌رشته ازدانش بیشترمتوجه کنیم‌وخوشبختانه این مجله یکی از وسایل تسهیل و توجه دادن جوانان بعلوم ریاضی است .

امیدوارم استادان محترم و دبیران دانشمند ریاضی درپیشرفت مجلهٔ ریاضیات ازهیچ کمکی دریغ نفرمایند و موجبات قدردانی وتشویق مؤسس و کارکنان آنرا همواره ازهرحیث فراهم فرمایند .

د. ریاضی را بدست آورده و بعد چندی **دردانشگاه کمبریج** بمطالعه وتدریس پرداخته‌اند.

در۱۲۹۷ بایران مراجعت کرده وتا ۱۳۰۹ مشاغل ذیل را برعهده داشته‌اند:

بازرسی مدارس متوسطه وعالیه ـ ریاست فرهنگ گیلان ـ ریاست تعلیمات عالیه ـ معلمی دارالفنون ودارالمعلمین مرکزی و مدرسهٔ حقوق ـ نماینده مجلس مؤسسان (۱۳۰۴) ـ ریاست تعلیمات عمومی کشور.

در۱۳۰۹ بدعوت **دانشگاه کلمبیا** برای مطالعه فرهنگ آمریکا به‌نیویورک رفته وازدانشگاه‌مذکوردرجهٔ دکتری درفلسفه اخذ کرده و از طرف دولت ایران مأمور تهیه طرح دانشگاه تهران گشته‌اند. در مراجعت بایران مأمور تأسیس دانشگاه تهران شده و تا ۱۳۱۹ ریاست و استادی دانشسرای عالی و دانشکده ادبیات ودانشکده علوم را عهده‌دار بوده‌اند.

از۱۳۲۰تا۱۳۴۰ شش‌مرتبه‌بوزیری فرهنگ انتخاب‌شده ودرمرتبهٔ اول ریاست دانشگاه وتا بامروز استادی دانشگاه را هم بر عهده داشته‌اند.

در ۱۳۲۸ بنمایندگی مجلس مؤسسان سپس بنمایندگی دوره اول مجلس سنا ازطرف اهالی تهران انتخاب گردیده‌اند.

در۱۳۳۲ و ۱۳۴۲ مجدداً از تهران بنمایندگی دورهٔ دوم و سوم و چهارم مجلس سنا برگزیده شده و تا این تاریخ علاوه برسمت مذکور کرسی تاریخ فرهنگ را در دانشگاه تهران عهده‌دارمیباشند.

***

شرح خدمات **استاددکترصدیق** بفرهنگ ایران خود کتابی مفصل خواهد بود و ازگنجایش این مقاله‌خارج است و فهرست‌مختصری‌ازآن ازقرار زیراست:

تأسیس نخستین مدارس جدید گیلان ـ تجدید سازمان و برنامه‌های مدارس مملکت ـ وارد کردن روشهای جدید تعلیم دردانشسرای عالی وتربیت هزارنفردبیر ـ اقدامات اولیه‌برای تأسیس دانشگاه تهران ـ تأسیس دانشگاه تبریز ـ تأسیس دوهزارمدرسه درتمام کشور.

***

استاد دارای ۱۶ جلد تألیف کتاب های علمی و تربیتی میباشندکه مهمترین‌آنها بقرارزیراست:

ایران‌نوین‌وفرهنگ‌آن‌بانگلیسی(چاپ نیویورک)

یکسال در آمریکا

روش‌نوین‌درتعلیم وتربیت که چهارده بار باتجدید نظر بطبع رسیده است.

سیر فرهنگ درایران ومغرب زمین (جزو سلسله انتشارات دانشگاه تهران).

دورهٔ مختصر تاریخ فرهنگ ایران(شش‌چاپ)

تاریخ‌فرهنگ‌ایران (جزو سلسله انتشارات دانشگاه تهران) سه‌چاپ

تاریخ‌فرهنگ‌اروپا(جزو سلسله انتشارات دانشگاه تهران) دوچاپ

یادگارعمر(خاطراتی از سرگذشت مؤلف که از لحاظ تربیت سودمند تواند بود). دوچاپ.

***

سناتوردکترعیسی‌صدیق درتمام‌مشاغلی که عهده‌داربوده‌اند چه درپست وزارت فرهنگ و چه در مقام نمایندگی مجلسین همواره مدافع منافع فرهنگ‌کشور و حامی فرهنگیان بوده‌اند وبحق بیش ازهمه وزرای فرهنگ محبوب عموم معلمین ایران میباشند.

آرزومندیم وجود گرامی ایشان سلامت بوده و افتخار آنرا داشته باشیم که آثار علمی ایشان زیب صفحات ماهنامه یکان باشد.

متأخرین از ریاضی‌دانان ایران

از جمله مطالبی که برای درج در ماهنامهٔ یکان منظورشده است. معرفی‌ریاضیدانان معروف‌وشرح‌کارهائی است که هریك ازآنان نسبت بتوسعه علوم ریاضی انجام داده‌اند. برای این‌کار دسته بندی‌زیرملحوظ شده‌است:

متقدمین، متأخرین ومعاصرین ایران و کشورهای دیگر و برنامه کارآنست که در هرشمارهٔ مجله شرح حال فردی از هریك ازدسته‌های فوق مندرج باشد.

دربارهٔ شرح‌حال‌متقدمین،ومتأخرین‌ریاضیدانهای‌خارجی منابع‌وکتب زیاد موجوداست و بخصوص ابراز مساعدت دانشمندان ومطلعین‌در این رشته، انجام‌کاررا میسورساخته است. اما در بارهٔ شرح حال متأخرین از ریاضیدانهای ایران بدینوسیله از بازماندگان آنها وهمه خوانندگان تقاضای مساعدت میشود و بویژه انتظار داریم آنها که‌خود از محضر درس این افراد برخوردار بوده اند خاطراتی ازآنان دارند دراختیارما بگذارند.

خدماتی که این دانشمندان (امثال **حاج‌نجم‌الدوله، میرزارضاخان مهندس، مهندس السلطان، مهندس ـ الممالك‌غفاری، علیخان‌ناظم‌العلوم،محمودمحمودی اسدالله خان آلو، غلامحسین رهنما، محمد وحید** که بعضی فارغ التحصیل **پلی‌تکنیك** فرانسه بوده‌اند) چه از راه تدریس وچه بوسیلهٔ تألیف کتب، نسبت به پیشرفت فرهنگ و توسعهٔ ریاضیات جدید در ایران‌انجام داده‌اند ایجاب می کند که بپاس حق‌شناسی‌هم که باشد خاطرات آنها را گرامی ومحفوظ بداریم.

درانتظارپاسخ مساعد مطلعین‌هستیم.

احمد بیرشك

غیاث‌الدین جمشید کاشانی

غیاث‌الدین جمشید بن مسعود بن محمود کاشانی که نزد اروپائیان معروف به **«الکاشی»** است از نوادر دانشمندان ایران و از نوابغ قرن نهم هجری بشمار می‌آید. تاریخ تولد او مجهول است اما سال وفاتش در حدود ۸۱٤ هجری شمسی (۸٤۰ هجری قمری) بوده است.

غیاث‌الدین جمشید در رشتهٔ پزشکی نیز کار کرده، اما اهمیت او در ریاضیات و نجوم بوده است. وی بدعوت **میرزا الغ بیك**، پادشاه گورکانی ایران، که مردی دانشمند و دانش‌پرور بود، با چند تن دیگر از جمله **موسی بن محمد قاضی زاده رومی** و **علاءالدین علی بن محمد** معروف به **ملاعلی قوشچی** در کار بنای رصد خانه و تنظیم زیج الغ بیگی همکاری کرد و در پیشرفت این کار تأثیر شایان داشت.

از کاشانی کتابهای مهمی باقی مانده است مانند **مفتاح الحساب، نزهت‌الحدائق، مسلم‌السماء و رسالة المحیطیه**. این آثار که در اصل بزبان عربی نگاشته شده مورد توجه اروپائیان قرار گرفته و ترجمه شده‌است. یکی از تازه‌ترین ترجمه‌ها ترجمهٔ مفتاح الحساب و رسالة المحیطیه‌است که هشت‌سال پیش بوسیله **بوریس روزنفیلد** بروسی ترجمه شده در **مسکو** با عکس‌برداری متن اصلی بچاپ رسیده است. کتاب مفتاح‌الحساب دارای یك مقدمه و پنج مقاله است و در آن از قوانین حساب و جبر وغیره بحث گردیده است. نزهة الحدائق شرح اسبابی است نجومی که بوسیلهٔ خود مؤلف اختراع گردیده است و «طبق‌المناطق» نام دارد. در مسلم السماء که مشتمل بر پنج مقاله است از مساحت زمین و ابعاد ماه و خورشید و سیارات سفلی (عطارد و زهره) و سیارات علوی (مریخ و مشتری و زحل) و ابعاد فلك و اجرام کواکب بحث شده است. در رسالهٔ محیطیه نسبت محیط دایره بقطر آن که در ریاضیات با حرف π نشان می‌دهند حساب شده و این محاسبه تا ۱٦ رقم اعشاری پیش رفته‌است و چنین دقتی در محاسبه π تا دو قرن بعد از زمان کاشانی در اروپا بدست نیامده است.

از کارهای مهم کاشانی اختراع کسرهای اعشاری است که تأثیر آن در سهولت محاسبه محتاج به تفصیل نیست. اروپائیان اختراع کسرهای اعشاری را به **فرانسوا ویت** (Francois Viete) فرانسوی و **سیمون استه‌ون** (Simon Stevin) بلژیکی نسبت می‌دهند. این دو دانشمند یکصد و پنجاه سال بعد از غیاث‌الدین جمشید، و بدون اطلاع از سابقه و کار او، کسرهای اعشاری را وضع کردند. بسال ۱۹٤۸ (۱٦ سال پیش) دانشمند خاورشناس آلمان **پاول لوکی** (Paul Luckey) حق تقدم کاشانی را در ابداع این کسرها تصدیق و اعلام کرد.

کاشانی در مفتاح الحساب برای ضرب و تقسیم عددها بجای قواعد پیچیده و مشکل معمول آنزمان قواعدی بکار برده است که مقدمه روشهای کنونی این اعمال میباشد و ما در اینجا دو قاعده را از مقالهٔ شماره هشتم سال ۱۳۳۳ مجلهٔ سخن، که بوسیله آقای **ابوالقاسم قربانی** از کتاب مفتاح الحساب اقتباس و تهیه گردیده است، با مختصر تصرفی که موجب آسان شدن فهم مطلب شود، نقل می‌کنیم:

قاعدهٔ اول ـ اگر بخواهیم عدد ٦۲٤ را در ۳۵۸ ضرب کنیم ۳۵۸ را زیر ٦۲٤ می‌نویسیم و زیر آن خط می‌کشیم:

٦٢٤

٣٥٨

رقم سمت راست عدد پائین را دریکایك ارقام عدد بالا ضرب کرده حاصل ضربها را باین‌صورت می‌نویسیم :

٣٢

١٦

٤٨

(رقم یکان هر حاصل ضرب را زیر رقم دهگان حاصل ضرب پیش از آن می نویسیم و اگر رقم دهگان وجودنداشت بجای آن صفرمی گذاریم)

سپس رقم دوم ازطرف راست عددپائین را دریکایك ارقام عدد بالا ضرب کرده حاصل ضربهای جزء را مانند آنچه گفته شد می‌نویسیم اما دقت می کنیم که رقم یکان اولین‌حاصل ضرب (دراین‌مثال حاصل‌ضرب ٤×٥) بالای رقم دهگان اولین حاصل ضرب عمل قبلی (یعنی عدد٣٢) قرار گیرد . (برای‌روشن‌شدن مطلب حاصل‌ضربهای جزء عمل دوم را با ارقام لاتین می‌نویسیم) نتیجه باین صورت درمی‌آید :

20

1032

3016

٤٨

آنگاه رقم سوم از طرف راست عدد پائین را در همه ارقام عدد بالا ضرب می کنیم و حاصل ضربهای جزء را شبیه بآنچه درعمل دوم گفتیم می‌نویسیم (برای روشن شدن مطلب حاصل ضربهای جزء عمل سوم را با ارقام فارسی سیاه می‌نویسیم) :

١٢

٠٦20

١٨1032

3016

٤٨

سپس زیر این اعداد خط کشیده جمع می کنیم : می شود

٢٢٣٣٩٢

قاعدهٔ دوم- یکی‌ازدوعدد را نوشته عدد دوم رازیر آن می‌نویسیم . مراتب فرد وزوج ارقام عدد بالائی را با حروف «ف» و«ز» بالای آنها یادداشت می کنیم :

ف ز ف ز

٢ ٧ ٨ ٣

٤ ٥ ٦

سپس اولین رقم سمت‌راست‌عدد پائین‌را درارقام ف ضرب کرده حاصلها را پهلوی هم می نویسیم (اگررقم دهگان وجود پیدانکند بجای‌آن صفر می گذاریم) :

٤٢١٨

بعد همان اولین رقم را درارقام ز ضرب کرده حاصلها را زیرعددی که قبلا بدست آمده بود می نویسیم بقسمی که اولین رقم سمت راستش زیر دومین رقم سمت راست عدد قبلی قرار گیرد

٤٢١٨

١٢٤٨

زیر این دو عدد خطی کشیده دومین رقم‌سمت راست عدد پائین را نخست درارقام ف وبعد درارقام ز عدد بالاضرب کرده حاصلها را بنحوی که برای اولین رقم گفته شد زیرخط می‌نویسیم و مراقبت می کنیم که اولین رقم سمت راست اولین عددی که بدست می‌آید زیر اولین رقم عدد بالای آن واقع‌شود .

٤٢١٨

١٢٤٨

٣٥١٥

١٠٤٠

زیر این عدد خط می کشیم و برای رقم سوم از طرف راست عدد پائینی بهمین‌ترتیب‌عمل می کنیم:

٤٢١٨

١٢٤٨

٣٥١٥

١٠٤٠

٢٨١٢

٠٨٣٢

خطی‌می کشیم وجمع‌می کنیم‌تا عدد١٢٦٩٠٤٨ بدست آید.

پرویز شهریاری

دربارهٔ اصول هندسی

(مانده ازشماره قبل)

قبل از همه تعریف اشکال اساسی هندسه یعنی نقطه، خط و سطح رامطرح میکنیم:

متذکر میشویم که تعریف یك مفهوم یعنی بیان آن مفهوم به کمك آنچه که قبلا قبول شده است. اگر منظور تعریف ساده‌ترین مفاهیم باشد، ناچار این تعریف تنها منجر به تغییر موضوع میشود؛ یعنی تعریف مورد نظر با کمك مفهوم دیگری تعریف میشود که خود احتیاج به تعریف دارد. چنانکه اقلیدس مفهوم خط را با کمك مفهوم «امتداد» و یا «حد» تعریف میکرد که هیچیك ازدو مفهوم اخیر نیز تعریف نشده است.

بنابراین در ابتدای کار ساده‌ترین مفاهیم هندسی را تعریف نمیکنند و آنها را بعنوان مفاهیم سادهٔ ابتدائی که نمیتوان مفاهیم ساده‌تری برای تعریف آنها پیدا کرد، قبول میکنند.

«نقطه»، «خط» و «سطح» از همین قبیل تعاریف ابتدائی هستند که بعنوان مفاهیم تعریف نشدهٔ هندسی قبول میشوند و به کمك آنها تمام سیستم «اصول» یعنی احکامی که بدون استدلال و با کمك مفاهیم ابتدائی قبول میشوند. تنظیم میگردد. با داشتن این اصول، مفاهیم مجرد و انتزاعی ازروابط فضائی جهان مادی در اختیار خواهیم داشت.

ما در اینجا سیستم اصولی را که هیلبرت ریاضی‌دان آلمانی طرح کرده است میآوریم در این سیستم تمام اصول هندسی به پنج گروه تقسیم میشوند:

گروه اول: اصول ارتباطیـ اصول این گروه از چنین روابطی بین مفاهیم نقطه، خط و سطح صحبت میکنند که معمولا با جملات زیر بیان میشوند: «خط از نقطه عبور میکند»، «نقطه بر خط یا صفحه واقع است» وغیره. این گروه از اصول زیر تشکیل شده است:

۱ـ دو نقطه تنها یك خط مستقیم راکه از آنها عبور میکند معین مینمایند.

۲ـ روی هر خط لااقل دو نقطه قرار گرفته است، حداقل باید سه نقطه وجود داشته باشد تا بریك خط مستقیم قرار نگرفته باشند.

۳ـ از هر سه نقطهٔ غیرواقع بر خط راست تنها یك صفحه عبور میکند. برهر صفحه لااقل یك نقطه قرار گرفته است.

۴ـ اگر دو نقطه از خط راستی بر یك صفحه واقع باشد، تمام نقاط این خط برصفحه واقع خواهد بود.

۵ـ اگر دو صفحه دارای یك نقطه مشترك باشند، در آنصورت لااقل یك نقطهٔ مشترك دیگر هم خواهند داشت.

۶ـ لااقل بایستی ۴ نقطه باشد تا روی یك صفحه قرار نگرفته باشند.

در نظر اول چنین استنباط میشود که بعضی از این اصول را میتوان ثابت کرد و یا بعضی از آنها کافی نیستند و یا بکلی غیرلازمند. مثلا اصل ۲ با تصور معمولی ما در بارهٔ خط مستقیم متناقض است، زیرا میبینیم که روی هر خط بینهایت نقطه وجود دارد. ولی نباید فراموش کرد که ما وجود نقاط و خطوط مستقیم را بعنوان مفاهیم ابتدائی قبول کردیم بدون اینکه یکی بدیگری ارتباط داشته باشد، آنها تنها میتوانند جدا از هم وجود داشته باشند. بنابراین وقتی که میگوئیم نقطهٔ روی خط واقع است و یا خط از نقطه عبور کرده است، نقطه و خط را دارای این قابلیت میدانیم که میتوانند روابطی با یکدیگر داشته باشند. روشن است که وقتی نقاط، خطوط و سطوح را مجزا از هم تصور میکنیم و وقتی بین آنها روابطی درنظر میگیریم؛ آنها را همچون موضوعهای فیزیکی مشخصی بتصور میآوریم. نقاط را بصورت نخودهائی تصور میکنیم که اندازهٔ معینی هم دارند، این نخود ها را بشکل کره هائی درنظر میگیریم که باندازهٔ کافی نرم‌اند (ومثلا ازآب پرشده‌اند) بطوریکه میتوان با کمك سوزنهای باریکی آنها را سوراخ کرده وباجزاء کوچکی تبدیل کرد. خطوط مستقیم را بصورت سوزنهای خیلی باریك و محکم وسطوح را بصورت صفحات نازك و محکمی تصور میکنیم. ابتدا، این صفحات، سوزنها و نخودها بدون ارتباط با هم وحتی هر کدام درجای جداگانه‌ای تصور میشوند. ولی ما با کمك اصول آنها را تحت شرایطی قرار میدهیم و بهم مربوط میکنیم. گوئیم که نقطه برخط قرار گرفته است وقتی که سوزن نخود را سوراخ کند و یا ولو در قسمتی هم شده ازآن عبور نماید. گوئیم که نقطه برصفحه واقع است بشرطی که صفحهٔ نازك، نخود را بدوقسمت مساوی تقسیم کند و یا فقط نخود را ببرد و ازآن عبور نماید. بالاخره وقتی که میگوئیم خط بر صفحه قرار گرفته است چنین تصور میکنیم سوزن باریك درکنارهٔ صفحه واقع شده است، یعنی وقتیکه سوزن روی تمام امتداد خود درکنارهٔ صفحه قرار گرفته باشد بطوریکه ازهیچ طرفی برآمدگی و یا فرورفتگی نداشته باشد اصول در مورد این شرایط چه معنائی دارند؛ بوسیلهٔ این اصول قبول میکنیم که این نخودها، سوزنها و صفحات در فضا چنان مستقر شده‌اند که: هردو نخود بوسیله دو سر یك سوزن سوراخ شده اند (اصل ۱). هر سوزن لااقل دو نخود را سوراخ کرده است (اصل ۲). هرسه نخود بوسیلهٔ یك صفحه بریده شده و هرصفحه لااقل یك نخود را بریده است (اصل ۳). اگر دو نخودی که روی یك سوزن هستند بوسیلهٔ صفحه‌ای بریده شوند، درآنصورت همهٔ نخودهای دیگری که احتمالا روی این سوزن قرار دارد بوسیلهٔ همین صفحه بریده میشود (اصل ۴) اگر دو صفحه باهم یك نخود را بریده

باشند، لااقل یك نخود دیگر را هم خواهند برید (اصل ۵). لااقل باید ٤ نخود داشته باشیم تا بوسیلهٔ یك صفحه بریده نشده باشند (اصل ٦). این شرایط باید وضع نخودها، سوزنها و صفحات را معین کنند و باین ترتیب این انبوه نخودها، سوزنها و صفحات در ساختمان یکدیگر شرکت میکنند درحقیقت از بستهٔ صفحات چهارصفحه جدا میکنیم، آنها را چنان میبریم که هریك از آنها بشکل مثلث متساوی ـ الاضلاعی باندازه‌های مساوی درآیند. از دستهٔ سوزنها ٦ عدد انتخاب کرده و انتهای آنها را چنان میشکنیم که طول هریك برابر با ضلع صفحات مثلثی شکل بشود. بالاخره ٤ نخود انتخاب میکنیم و شکل زیررا میسازیم: از ٤ صفحه‌ای که داریم یك چهار وجهی منتظم میسازیم، در حد فاصل هردو صفحه یك سوزن قرار میدهیم و در هر رأس چهاروجهی یکی ازنخودها را چنان قرار میدهیم که بوسیلهٔ صفحات بریده‌شده‌وسوزنها ازوسط آنها عبور کرده باشند. برای چنین مجموعه‌ای ازنخودها سوزنها و صفحات تمام آنچه که قبلا گفتیم یعنی همهٔ اصول ما صادق‌هستند.

از این مثال دیده میشود که مجموعهٔ نقاط، خطوط و صفحاتی که در اصول گروه اول صدق میکنند، میتوانند وجود داشته‌باشند در اینجا ما تنها ٤ نقطه، ٦ خط و ٤ صفحه داشتیم.

گروه دوم: اصول ترتیبی ـ این اصول از موارد واضحی صحبت میکنند که ما ضمن بیان استقرار نقاط برخطوط ویاصفحات برآنها تکیه‌میکنیم.

اساسی‌ترین موارد در این زمینه مفهوم قرارگرفتن یك نقطه روی پاره خط و بین دونقطه دیگر است. مضمون منطقی این مفهوم هم در همین گروه اصول وجود دارد. اصول این دسته عبارتند از:

۱ـ اگر B بین A و C قرارگرفته باشد در اینصورت A، B و C نقاط مختلف یك خط هستند و B بین C و A هم قرارگرفته است.

۲ـ اگر دونقطهٔ A و B برخطی مفروض باشند، لااقل یك نقطهٔ C وجود دارد بطوریکه B بین A و C قرار گرفته باشد.

۳ـ از سه نقطهٔ واقع بر یك خط تنها یکی بین دونقطهٔ دیگر قرارگرفته است.

٤ـ اگر در صفحهٔ مفروضی مثلث ABC و خط α را در نظر بگیریم بطوریکه α از هیچ رأس مثلث عبور نکرده باشد، در اینصورت اگر α پاره‌خط AB را قطع کند یا پاره خط AC و یا پاره خط BC را نیز قطع خواهد کرد.

این اصول بوضع نقاط، خطوط و صفحات ما قدرت بیشتری میبخشند، مجموعهٔ وجوه، اضلاع و رئوس چهار وجهی که شامل شرایط اصول گروه اول هستند هنوز اصول گروه دوم را در بر ندارند. درحقیقت روی هرسوزن چهار وجهی تنها دو نخود وجود دارد، در حالیکه طبق اصول گروه دوم بایستی لااقل سه نقطه روی هرخط مستقیم وجود داشته باشد. علاوه برآن میتوان با استدلال منطقی ثابت کرد که در این صورت روی هرپاره خط بینهایت نقطه وجود دارد و باین ترتیب مجموعهٔ اصول گروه اول و دوم میتوانند برای بینهایت نقطه، خط و صفحه قانع کننده باشند.

گروه سوم: اصول همسازی «Congruens» ـ این اصول مربوط به بیان تساوی پاره خطها و زوایا است، این گروه از اصول زیر تشکیل شده است:

۱ـ از نقطهٔ دلخواهی واقع برخط مفروض میتوان پاره خطی مساوی با پاره‌خط داده شده روی خط رسم نمود.

۲ـ دوخط مساوی با خط سوم با هم مساوی‌اند.

۳ـ فرض کنید A و B و C نقاطی واقع بریك خط مستقیم باشند و A_1 و B_1 و C_1 هم نقاطی واقع برخط دیگر بطوریکه $AB = A_1B_1$ و $BC = B_1C_1$ اگر پاره خطهای AB و BC وهمچنین A_1B_1 و B_1C_1 نقاط مشترکی نداشته باشند $AC = A_1C_1$ خواهد بود.

٤ـ از هر نقطه واقع بریك خط راست میتوان تنها یك زاویه در جهت مفروض و مساوی با زاویه مفروض ساخت، هرزاویه با خودش برابراست.

۵ـ اگر در دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ اضلاع $AB = A_1B_1$ و $AC = A_1C_1$ و $\widehat{BAC} = \widehat{B_1A_1C_1}$ باشد. دراینصورت $\widehat{ABC} = \widehat{A_1B_1C_1}$ خواهد بود.

آخرین اصل‌را مورد توجه قرار دهیم:

درکتابهای درسی‌این اصل بعنوان دومین حالت‌تساوی مثلثها اثبات‌میشود اما این اثبات تساوی باکمك انطباق انجام میگیرد و انطباق هم مستلزم انتقال‌یك شکل است تا بردیگری‌قرار گیرد وتازمانیکه مفهوم حرکت‌تعریف نشده باشد نمیتوان از انتقال و انطباق صحبت کرد. باین مبنا مبحث تساوی چنین مثلثهائی را بعنوان اصل قبول میکنیم. استفاده از این اصل مارا از انتقال و حرکت بی‌نیاز میکند.

گروه چهارم تنها از یك اصل ـ **اصل توازی ـ** تشکیل شده است. امکان وجود خطوط موازی را میتوان بدون استفاده از اصول جدید اثبات کرد بنابراین این اصل تنها مربوط بواحد بودن خط موازی است: از یك نقطهٔ واقع در خارج یك خط تنها یك خط میتوان موازی باآن رسم کرد نه بیش. و ما در بارهٔ آن قبلا صحبت کرده‌ایم.

بالاخره **گروه پنجم (اصول ـ پیوستگی)** ازدواصل تشکیل‌شده‌است:

۱ـ اصل ارشمیدس ـ اگردو خط دلخواه AB و CD مفروض باشند میتوان روی خط AB نقاط A_1 و A_2 و A_3 و ..... A_n را بترتیب چنان درنظر گرفت که،

$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A^n = CD$ باشد ونقطهٔ B بین A_{n-1} و A_n واقع باشد (شکل ۳)

((زنان ریاضی دان))

عدهٔ زنانیکه تاکنون دانشمند درعلوم ریاضی شناخته شده‌اند بسیار کم است.

شاید جنس لطیف قدرتی را که برای کارهای مداوم و یکنواخت لازم است نداشته باشد؛ یا تاامروزامکان ظهور و پرورش چنین استعدادی فراهم نشده باشد. ولی با وجودی که عدهٔ زیادی از زنها بفرا گرفتن موسیقی پرداخته‌اند، هیچکدام آنها بپای موسیقی دانان بزرگی که مردهستند نمیرسند.

اکنون که آموزش و پرورش برای مردان وزنان یکسان است، آینده میتواند وجود یافقدان چنین استعدادی را در آنها نشان دهد.

بهرحال آنچه تاکنون میدانیم، تاریخ علوم ریاضی جز عدهٔ معدودی از زنان را معرفی نکرده است. واین عده هم هیچگاه قابل مقایسه با ریاضی دانان بزرگ مرد نیستند.

☆ ☆ ☆

اولین چهره را درقرن ۱۸ می‌بینیم:

«گابریل امیلی لوتونلیه دوبرتوی»

«Gabrielle Emilie Le Tonnelier de Berteuil»

دارای عنوان مارکی ایالت **«شاتله Châtelet»** درهفدهم دسامبر ۱۷۰۶ در **پاریس** متولد شده ودردهم سپتامبر ۱۷۴۹ در **«لونه‌ویل Lunéville»** درگذشته است.

شهرت او بیشتر ازاین جهت است که با **ولتر** ارتباط اجتماعی داشته و شاگرد استادانی چون **موپرتیوس «Maupertius»** و **کلرو «Clairaut»** بوده است. زیرا تحقیقاً میتوان گفت اوشخصاً اثرعمیقی درباره ریاضی بجانگذاشته است.

ش ۳

۲ـ اصل تمامیت خط ـ نقاط یك خط مستقیم از چنان دستگاه نقاطی شده است که میتوان نقاط جدیدی در نظر گرفت که روی پاره خط واقع باشند واصول مذکور درفوق راهم نقض نکنند.[1]

اصول اول این گروه امکان می دهد که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ دلخواه ازیك پاره خط را اندازه بگیریم و بهمین مناسبت این اصل گاهی **اصل اندازگیری** نامیده میشود. حالا بشرح اصل دوم می‌پردازیم:

هردانش آموزی بخوبی میداند که اگر روی یك محور همهٔ نقاطی را که طول منطق (گویا) دارند معلوم کنیم تمام نقاط خط را شامل نخواهند شد، یعنی خط باکمك این نقاط کاملا پوشیده نمیشود. اکنون اگرریشه های اعداد منطق و ریشه های معادلات جبری با ضرایب صحیح را باین نقاط اضافه کنیم، روی خط نقاط جدیدی خواهیم داشت که عبارتند از نقاط با طول های گنگ.

ولی روی خط هنوز جاهای خالی وجود داردکه باید مربوط به نقاط جدیدی باشد. این نقاط دارای طول های مساوی π، $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{3}$، $\sqrt{\pi^2}$ و غیرهستند که هنوز جای آنها روی محور معین نشده‌است. محور تنهاموقعی کاملا پوشیده خواهد شدکه تمام اعداد حقیقی را روی آن جا داده باشیم، دراینصورت دیگر نمیتوان نقطهٔ جدیدی روی پاره خط جا داد، زیرا دیگرجای خالی روی آن باقی نخواهد ماند: اصل دوم بخصوص این خاصیت را در بارهٔ خط هندسی بیان میکند یعنی روی یك خط هندسی جای خالی وجودندارد که بتوان نقطهٔ جدیدی در آن جای داد.

قبول این اصل باین معناست که هرعدد حقیقی با نقطه‌ای واقع بریك خط مطابق است وبرعکس هر نقطه واقع بریك خط نمایندهٔ یك عددحقیقی معین است.

اینهاست اصولی که امروزه هندسهٔ اقلیدسی را برآنها بنا نهاده‌اند.

اکنون اگربه دورهٔ هندسهٔ مقدماتی مراجعه کنیم با تحلیل دقیق مطالب آن خواهیم دیدکه همهٔ قضایارا میتوان بر پایهٔ اصول مذکور و قضایای قبلی با دقت وبدون استعانت ازشکل اثبات کرد.

این را هم باید بخاطر داشت که میتوان با دقت اثبات کردکهٔ اصول مذکورشرایط لازم وکافی برای ساختن هندسهٔ اقلیدسی هستند[2].

پایان

۱ـ دو اصل اول ارتباطی، اصول ترتیبی اصل اول همسازی واصل ارشمیدس

۲ـ برای توضیح بیشتردر بارهٔ اصول هندسهٔ اقلیدسی و اطلاع از هندسه‌های غیر اقلیدسی به‌کتاب «هندسهٔ غیراقلیدسی» ترجمهٔ نویسندهٔ این مقاله مراجعه شود.

شاید ترجمه کتاب نیوتون [1] بنام اصول ریاضی فلسفه طبیعی نیوتون بیشتر سبب شناساندن او درعلوم ریاضی شده است.

اگرچه این عمل اوحائز اهمیت فراوان است ولی نمیتوان گفت کار بکری است.

درترجمه این کتاب نظریاتی عنوان کرده که معاصرین او بدگمان شدند وعقیده داشتند باهمکاری کلر و آنها را تنظیم کرده است. تازه آن نظریات هم مطلب فوق العاده ای نبوده است.

✿ ✿ ✿

اززنانیکه واقعاً ریاضیدان بودند میتوان ماری آگنزی «Marie Agnesi» را نام برد. که در شانزدهم مارس ۱۷۱۸ در میلان بدنیا آمد و چهارم اوت ۱۷۹۹ درگذشته است.

پدرش در گسترش وتربیت استعداد استثنائی اوهمت گماشت.

مثل بیشتر نوابغ موقعیکه آگنزی کوچك بود با زود رسی تعجب آورخود وجودش را اعلام کرد. دهساله بود با زبان لاتین مطالب علمی آنروز را باهمه تنوع مورد بحث قرار می داد.

درسن ۱۳ سالگی بآسانی زبان یونانی رابلاتین برمی گرداند بالاخره بپرداختن بریاضیات استعدادش قوت گرفت.

اواول تحقیق را درهندسه شروع کرد، این مطالعات را از مکعب به منحنی ها کشاند و منحنی های آگنزی معروف است.

اولین زنی است که بتدریس ریاضی پرداخت وزا طرف پاپ بنوا « Benoit » چهاردهمین کرسی استادی ریاضیات دانشگاه بولونی «Bologne» رااحراز کرد. از کتابهای او که بزبان فرانسه ترجمه شده یکی بنام «اساس انالیز» که درآن باروش نمایشی وبطریق ترسیمی بحث شده و فریزی Frisi دررساله ای بعالیترین وجهی اورا ستایش کرده است. بطور یقین آگنزی یکی از مؤلفین مقاطع مخروطی است بااینهمه فضل بسیارفروتن بود. همیشه می‌خواست برتری دیگران رابرخود ثابت کند.

از پیروزیهای علمی خود هرگزمغرور نشد بعد از مرگ پدرش خود را ازمیدان علمی بیرون کشید که این موضوع ضایعه غم انگیزی محسوب میشود.

درحجاب مذهب قرار گرفت جزء گروه خواهران تارك دنیا درآمد و درآنجا نیزدیندار بزرگی باقی ماند.

✿ ✿ ✿

اهمیت کارهای سوفی ژرمن Sophie Germain انکار ناپذیر است. با سوفی کوا لوسکا - Sophie kowalewska که شرح حالش بعداً گفته خواهد شد دوریاضیدانی هستند که اهمیت فوق العاده دارند.

سوفی ژرمن روز اول آوریل سال ۱۷۷۶ در شهر پاریس بدنیا آمد و درهفدهم ژوئن ۱۸۳۱ درگذشت. عشق مفرطی ازهمان اوان زندگی بریاضی داشت بیش ازهمه این دانش را پیش خود آموخت بزودی در اثبات مسائلی که گوس مطرح کرده بود به نتایج بسیارجالبی رسید وآنهارا بانام مستعار لوبلانك «leblanc» شاگرد مدرسه پلی تکنیك منتشر ساخت (از ذکر نام خود میترسید زیرا مسخره می‌دانست اگر بعنوان یك زن دانشمند او را بشناسند).

تواضع واقعی او نه تنها موجب شد که بعنوان یك عالم هندسه درآلمان شناخته شود بلکه اورا دروضع خاصی قرارداد.

گروه‌های فرانسوی بدستورژنرال پرنتی Pernety دوستدار بزرگ خاندان ژرمن مشغول شناسائی شهر گوتینگن بودند.

دخترجوان که ازپایان غم انگیز کار ارشمیدس در سیراکیوز با اطلاع بود بژنرال نامه ای نوشت و ازاو

۱- غیرازاین کتاب وپایه گذاری فیزیك وجواب بنامه هران «Mairan» دربارهٔ مسئله قوس ویو وبحثی درباره طبیعت وانتشارنور وبالاخره چند اثرفلسفی نیز بجاگذاشته است.

خواست گوس راتحت حمایت خود بگیرد. ژنرال بجای قبول این پیشنهاد عین نامه دختررا منتشر کرد اینموضوع باعث شد که ارزش دختررياضيدان بمراتب بالاتراز آنچه بودبرود. سوفی ژرمن که شاگرد لاگرانژ«Lagrange» بود ازطرفی تحقیقات خودرا روی حاملها وازطرف دیگر روی تئوری اعداد انجام داد درمطالعه سطحهای الاستیکی توانست ازفرهنگستان علوم درسال ۱۸۱۶ بزرگترین جایزه علوم ریاضی را دریافت کند.

این اولین باری بود که یك زن توانسته بود درعلوم ریاضی چنین شخصیتی رابدست آورد.

درتئوری عمومی مربوط به سطوح مفهوم انحناء متوسط راوارد کرد که بعدازاو وارد دربرنامه درسی شد.

☆ ☆ ☆

ماری سومرویل «Marie Sommerville» درسال ۱۷۸۰ درژدبورگ «Jedburgh» بدنیا آمد و در سال ۱۸۷۲ دربیست ونهم نوامبر درناپل چشم ازدنیا فروبست

دختردریاسالارفرفاکس «Fairfax» بودازابتدای بچگی عشق غریبی به ریاضی داشت با علاقه وشدت هرچه تمامترعلیرغم میل پدرش بفراگرفتن این دانش پرداخت (نقطه مقابل ماری آگنزی) ماری سومرویل همان کاری را درانگلستان کرد که مارکیزشاتله MarquiseChatelet (امیلی) در فرانسه نمود. او برای لاپلاس در کشورش کتاب مکانیك سماوی راترجمه کرد و امیلی Emilie در کشورفرانسه کتاب ریاضی نیوتون را ترجمه کرد بغیر ازاین کتاب یك سری ازمکاتبات رامیتوان نام برد که بین خانم سومر ویل و گیلوساك «Gay-Lussac» ، لاپلاس «Laplace» ، آراگو«Arago» ، همبولد «Humbold» انجام گرفته وتعدادی ازتذکارهای مختلف فیزیك و فلسفه علمی ازاو بجا مانده است . یکی ازمزایای این خانم این بوده که معلم عالیقدر و مشهوری بوده و شاگردان زیادی تربیت کرده است که بوجودش افتخار میکنند .

در سن پیری ماری سومرویل به ایتالیا رفت و در ناپل مسکن نمود ودر آنجا زندگی خوش وبی غمی گذراند در پانسیونی بسرمیبرد که بخرج و دستور ملکه ویکتوریا تأمین شده بود

☆ ☆ ☆

وضع این شاگرد ماری سومرویل که اکنون اشاره بآن خواهیم کرد عجیب است. کسی اورا بعنوان دانشمند نشناخت مگرمدتها بعدازمرگش .

باباژ «Babbage» مخترع ماشین حساب هیچ ـ گونه شهرتی روی اختراع خود فراهم نکرد. موقعی که سروان مهندس سارد بنام مه نابره آ[1] Menabrea از دانشمند انگلیسی اطلاعات مختصری روی ماشین حساب بدست آورد وتوانست با شرح مجملی که بدست آورده بود بوسیله کتابخانه دانشگاه ژنو چاپ و منتشر کند باباژ از این شرح بسیار خوشحال شد کسی پیدا کرد تا نوشته سروان را بانگلیسی برگرداند و بآن متمم جالبی درباره جمع وموردواستعمال ماشین حساب و گسترش اعداد بیفزاید .

مترجم درپایان رساله حرف اول اسم خودرا بصورت A.L نوشت.

لازمه این اختراع داشتن قریحه خاصی برای آنالیز میباشد .

علامت اختصاری پای رساله توسط مد نابره آ تکذیب نشد.

در سال ۱۸۸٤ این علامت اختصاری با افشاء شدن اسم حقیقی باباژ معلوم شد. صاحب حقیقی آن :

آبا بایرون کنتس لوولاس

«Aba. Byron, Contesse. Lovelace»

دختر یگانه شاعرمعروف لوولاس بود. متولددهم دسامبر ۱۸۱۵. وفات ۱۸۵۲

☆ ☆ ☆

ازنظرتاریخ آخرین (جدیدترین) ریاضیدان زن که

۱ـ(بزودی ژنرال شد. سپس سفیرایتالیا درپاریس وعضواکادمی علوم گردید.)

همراه سوفی ژرمن از مشهورترین آنها هستند بنام :
سوفی کووالوسکا «Sophei Kowalewska»
دخترژنرال توپخانه روس :
کورون کروکوسکا «Corvin- Crukowska»
از اعقاب مستقیم **ماسیا کورون «Mathia Corvin»** پادشاه هنگری میباشد.

درسال ۱۸۵۰در **مسکو** بدنیا آمد.

دختربچه همانطوریکه بزرگ میشد بسمت ریاضیات کشیده میشد . اول با کتابهای پدرش آشنا شد همان کتابهائیکه در دوره دبیرستان نظام میخواند سپس از یادداشتهای دوران دانشگاه توپخانه‌اش استفاده کرد . برای تعقیب این مطالعه خود متحمل زحمات زیادی شد.

دراین وقت با دانشجوئی بنام **کووالوسکی «kowlewski»** ازدواج کرد .

همراه شوهرش عازم **برلن** شدند در آنجا با هم مطالعاتشانرا تعقیب کردند.

یکی زمین شناسی و دیگری ریاضی را تحت نظر **ویرشتراس «weierstrass»** میخواند.

خانم **سوفیا** در آنجا طرحهای عجیبی تنظیم کرد که استادان پیرپیرواین شاگرد شده‌بودند ووسائل پیشرفت‌او را فراهم میکردند .

کارهای مقدماتی **سوفیا کووالوسکا** معادلات بامشتقات جزئی، انتگرال‌ها بود که‌امروزارزش آنها ازنظردور نیست.

سوفیا کووالوسکی سر انجام برای آشنا شدن با استادان بزرگ بپاریس آمد درمدت اقامت خود در پاریس بکشفی نائل آمد که فرهنگستان علوم عالیترین مقام علمی را باواعطانمود **«Leprin Bordin»** این کشف تازه‌ای که **سوفیا** شناخت .

عبارت‌ازمعادله حرکت جسم منحنی‌اطراف یك‌نقطه ثابت بود.

این‌نتیجه امروزه درتمام مدارس تدریس میشود.

بالاخره‌بهمت **میتاژلفلر «Mittage- Lefflerر»** که بوسیله **ویرشتراس Weierstrass** اورا شناخته بود درسال ۱۸۸۳ در دانشگاه **استکهلم** استاد کرسی ریاضی شد وتاپایان عمردراین سمت باقی‌ماند.

سوفیا کووالوسکا در اطلاعات ادبی کمتر از ریاضی نبود. آثارادبی زیادی‌ازخود بیادگار گذاشته‌است جالبتراز همه «خاطرات کودکی» است که در **پاریس** درسال۱۸۹۵ چاپ و منتشرشد. این اثر بتنهائی برای‌نشاندادن شخصیت ادبی‌او کافیست .

دردهم فوریه۱۸۹۱دراستکهلم درگذشت

ترجمه ـ مهدی تجلی پور

دانشجویان دخترسال اول دانشکده فنی

بمناسبت مقاله زنان ریاضیدان لازم دانستیم‌ازدودانشجوی دختردانشکده فنی‌نام ببریم. این دودانشجوتنها دخترانی‌هستند که سال گذشته دردوکنکورعمومی وخصوصی دانشکده فنی موفق شدند وهردو هم سال ششم ریاضی را در **دبیرستان مرجان (گروه فرهنگی خوارزمی)** طی کرده‌اند . این هم طبیعی است واز کادر دبیران ریاضی گروه فرهنگی خوارزمی همین انتظارمیرودکه بتوانند دانش‌آموزان موفقی بجامعه‌تحویل دهند

***

خانم فاطمه جودی در سال ۱۳۲٤ در **بابلسر** متولد شده تحصیلات ابتدائی را دو سال در **آبادان** وچهارسال در دبستانهای **شاه عباس کبیر و همام‌تهران** طی کرده، سیکل اول متوسطه را در دبیرستان **انوشیروان دادگر**، کلاسهای چهارم وپنجم رادر **دبیرستان هدف** وسال ششم ریاضی‌را در **دبیرستان مرجان** گذرانده است

خانم جودی هم اکنون درسال اول رشته راه وساختمان دانشکده فنی‌تحصیل میکند وعلاوه‌برریاضی بموسیقی هم علاقمند است وتصمیم دارد پس‌ازخاتمه تحصیلات دانشگاهی‌ایران برای ادامه تحصیل به‌آمریکا برود.

***

خانم عذرا توسلیان در سال۱۳۲۳ در **قزوین** متولد شده، تحصیلات ابتدائی را در دبستانهای **شاه‌عباس کبیر و شایسته تهران** طی کرده تحصیلات متوسطه‌را دردبیرستان های **شهرزاد ونوباوگان ـ ضرابی** وسال‌ششم ریاضی رادردبیرستان‌مرجان گذرانده‌است.

خانم توسلیان اکنون در سال اول رشته شیمی دانشکده فنی تحصیل میکند و علاوه بر رشته تحصیلی خود به ورزش هم علاقمند است. هدف اواینست که‌بتواند دررشته شیمی به‌اخذدرجه دکترا نائل شود .

غلامرضا مسجدی

ریاضیات و مسئله هواشناسی

گفت انوری که در اثر بادهای تند
در روز و عداو نوزیده است هیچ باد

ویران شود سراچه و کاخ سکندری
یا مرسل الریاح تو دانی و انوری

اخبار از آینده پیشگوئی نامیده میشود چنانچه‌میدانیم، پیشگوئی از عهده کسی بر نمی‌آید لیکن در حدود علوم و بر طبق قوانین علمی میتوان‌در مسائل مخصوصی ازآینده خبر داد این موضوع را پیش بینی علمی مینامیم . وقتیکه قوانین فیزیکی بوسیله فرمولهای ریاضی بیان‌میشوند انسان دسترسی‌به آینده پیدامیکند ، روزنامه‌ها هرروز طلوع وغروب آفتاب ویا توپ سحروافطاررا درماه رمضان قبلادراختیارعموم‌قرار میدهند همچنین‌منجمین‌سالانه موقع کسوف‌آفتاب‌وخسوف ماه‌را پیش‌بینی میکنند وپیشگوئی آنها بی‌کم‌وکاست انجام میشود و نیز اگر سنگی را از محل مرتفعی مثلا بالای برج ایفل بزمین رها کنیم میتوانیم بدون تردید بدانیم پس‌ازچند ثانیه بزمین خواهد رسید و یا گلوله توپ پس از تیراندازی درچه زمان و مکان بزمین اصابت خواهدکرد لیکن پیش‌بینی در بعضی مسائل مثلا ارتفاع آب درمسئله جذر ومد ویا وضع هوا از لحاظ کیفیت و کمیت کاملا دقیق‌وقابل اعتماد نیست. موضوع بحث ما فعلا در یك مسئله مخصوصی بنام هواشناسی است دربادی نظرعلت اینکه گاهی بعضی از پیش بینی‌های هواشناسی کاملا دقیق نیست برای غالب اشخاص تولید اشکال میکند ازخود میپرسند مسائل‌مربوط بهواازلحاظ درجه‌حرارت‌و فشار ودرجه رطوبت ونظائرهمچنین موضوع جذرو مددریاها مانند مکانیك سماوی وحرکات‌کرات آسمانی درهیئت ونجوم ریشه فیزیکی وریاضی دارد پس چرا ریاضیات در حرکات‌کرات آسمانی باآن فواصل بعیدکافی و رسا ودر مقابل هوای جو زمین این چنین ضعیف ونارسا است و چه بسا اعتراض باداره هواشناسی میکند ویاتصورمیکنند وسائل و ابزار کارکهنه و خراب است!

لیکن با اندك توجه معلوم میشود تمام اندازه‌گیری‌هادر لابراتوار وعملیاتی‌که بوسیله ماشین بعمل‌میآید دارای دقت‌کافی هستند وفرمولهای ریاضی‌و محاسبات مربوط بآن در این کار مانند کارهای دیگربوده و اشتباه نمیکند منتها خود مسئله‌تعین وضع هوا مشکل و پیچیده‌است:

اگر بگوئیم اثرکرات سماوی‌و بخصوص منظومه‌شمسی‌و بالاخص خود آفتاب درکرهٔ زمین و جو آن بمراتب بیشتر از تأثیر زمین در آنها است حرف اغراق‌نگفته‌ایم دستگاه منظومه شمسی تأثیر فراوان درزندگی بشرو آتمسفر زمین از هرلحاظ دارامیباشد تحقیق‌شده است اگر لکه‌های خورشید‌مقابل‌زمین قرار بگیرد گاز اوزون (O^3) در سطح‌وجوزمین افزایش‌یافته تحرك و فعالیت موجودات زنده و فعل و انفعالات دیگر بیشتر میگردد بطوریکه بعضی ازدانشمندان انقلابات‌تاریخی‌وجنگهای بزرگ و ظهور نوابغ رادرکرهٔ زمین با مقابل بودن لکه‌های خورشید قرین و همزمان و مرتبط دانسته‌اند قطع نظراز تأثیر اشعهٔ‌کیهانی‌جوزمین اقیانوس عظیمی‌ازهوااست که‌نیروی‌جاذبه‌در آن حکومت میکند تقریباً دوازده گاز مختلف‌ومهم‌در آن‌وجود دارد از جمله بخار آب‌که نفوذ آن همه جا چه مایع‌باشد و چه جامد معلوم است داخل این مخلوط اشعهٔ خورشید بانفوذ تمام میتابد قسمتی از این‌اشعه باعث افزایش‌گرما درقسمت خشکی‌و آبها و هوا میگردد قسمتی دیگر بوسیلهٔ برگ درختان وسطح آبها و یا خود ابرها منعکس شده ودوباره‌گرمای خودرا بخود جو منتقل میسازد بنابراین تغییر انرژی و ماهیت هوا نه تنها تابع فصل‌و زمان‌و مکان و ساعات مختلف روز است بلکه با جنس آتمسفرمحل و وضع قرار گرفتن آب و خشکی نسبت به یکدیگر ناحیه‌بناحیه فرق میکند بطور خلاصه درجو زمین هر جزء روی جزء دیگرعمل وعکس‌العمل دارددرداخل‌چنین‌ترکیب نا منظم وغیر موزون عجیب نیست‌که پیش بینی‌ها گاهی دقیقاً مصداق پیدا نکند.

میتوان گفت هواشناسی را عوض اینکه با علم هیئت و یا نجوم مقایسه‌کنیم بهتر وخیلی جالب است‌که آنرا باعلم اقتصاد تشبیه کنیم، بهمان ترتیب‌که تقسیم‌ثروت بین‌افرادانسان درعلم اقتصاد معضلی بوجود میآورد مسئله تقسیم انرژی‌مثلا خورشید نیزدرآتمسفرچنین وضع‌پیچیده‌ای دارد.

اگر در مسئله جذر و مد تناوب را دخالت داده و در پیش‌بینی از آن استفاده‌کنیم لیکن چنین توسانی در مسئله هوا وجود ندارد امروز اکثر هواشناسان تناوب ودامنهٔ‌آنراعلیرغم

یعنی از گذشتگان کنار گذاشته‌اند با تمام این تفصیل تلاش عادی در مسئله هوا شناسی اینست که هریك از خصوصیات جو را بطور مجزی مطالعه ومعادلات ریاضی را با طرق مصنوعی تلفیق کرده ونتایجی بدست بیاوریم درصورتیکه این نتایج را با حقیقت موجود مقایسه کنیم قدم اول برای تحقیقات بعدی آغاز خواهد شد .

***

جو آرام را میتوان باقیانوس ساکن لایتناهی افقی تشبیه کرد در این وضعیت فشار P و وزن مخصوص ρ و درجه حرارت مطلق T هر نقطهٔ آن با ارتفاع Z تغییر میکند . فشارجو که بوسیله بارومتر اندازه گرفته میشود بطور ساده عبارت است از وزن ستون هوا در واحد مقطع قائم بالای بارومتر و اگر ضخامت با ارتفاع بی‌نهایت کوچك را δz بنامیم دیفرانسیل فشار چنین نوشته خواهد شد .

$$\delta P = -g\rho\delta z$$

و یا

$$\frac{\delta P}{\delta z} = -g\rho$$

این معادله معروف بنام **هیدرواستاتیك** است که درآن g شتاب ثقل است وزن مخصوص مستقیماً حساب نمی‌شود بلکه با استفاده از گاز مخصوصی آنرا تعیین میکنندو رابطه‌ای بصورت $P = R\rho T$ ایجادمیشود که درآن R ضریبی است مربوط بگاز نامبرده. معادله هیدرواستاتیك دراین‌صورت برحسب فشارودرجه حرارت نوشته خواهد شد :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT}dz$$

یا پس از انتگراسیون

$$\int\frac{dP}{P} = -\int\frac{gdz}{TR}$$

بالاخره

$$P = P_{\circ}\, e^{\frac{-gz}{RTm}}$$

بفرض اینکه در ارتفاع z : $T = T_m$ و در ارتفاع $z = \circ$: $P = P_{\circ}$ باشد .

موضوع دیگر که باید درنظر گرفته شود جریان هوا توأم با عناصر مربوطهٔ آن میباشد . قوانین دینامیك جو شبیه مایعات است و با تئوری جذر ومد بستگی دارد . اگر U و V و W مؤلفه‌های تندی ویاسرعت (Velocité) روی محورهای مختصات و مقدار λ مربوط بغلظت ویا چسبندگی (Viscosité) ملاء و ρ وزن مخصوص و P فشارآن فرض شود تحقیق شده است که معادله دیفرانسیل جریان چنین نوشته میشود :

$$\rho\left(\frac{\sigma u}{\sigma t} + u\frac{\sigma u}{\sigma x} + V\frac{\sigma u}{\sigma y} + W\frac{\sigma u}{\sigma z}\right) = \lambda\left(\frac{\sigma^2 u}{\sigma x^2} + \frac{\sigma^2 u}{\sigma y^2} + \frac{\sigma^2 u}{\sigma z^2}\right) - \frac{\sigma P}{\sigma x} + X$$

که در آن X مربوطبه نیروی خارجی از جمله نیروی جاذبه ونیروی حاصل از دوران زمین است که برمحور طول تصویر شده است بدیهی است دوفرمول نظیر این فرمول نسبت به V و W نیزوجود دارد .

جز در نقاط کوهستانی ومرتفع مؤلفه قائم تندی یعنی W بسیار کوچکتر ازمولفه‌های آن روی دومحور طول و عرض یعنی u و v است بطوریکه‌می‌توانیم معمولا $W = \circ$ فرض کرده جریان ویاباد راافقی فرض کنیم بااین فرض انتگراسیون معادله دیفرانسیل آسان میشود .

خوانندگان محترم شاید نقشه‌های عمومی هواشناسی را دیده باشند این نقشه‌ها که مبنای پیش‌بینی قرارمیگیرند دارای منحنی‌ها و یا خطوط اصلی هستند بنام خطوط فشار یکنواخت (isobares) هریك ازاین خطوط از نقاطی میگذرد که در زمان کوتاه تجربه دارای فشار مساوی باشند بادها بوسیله سهم نشان داده میشوند که جهت آنها بطرف مرکز است منحنی‌های فشار یکنواخت شبیه منحنی‌های تراز نقشه‌برداری هستند قاعده معرف جهت جریان باین‌ترتیب است که اگر ناظری درنیمکره شمالی طوری بایستد که پشتش بطرف باد باشد فشار بطرف‌دست راست‌او خواهدپیچید ودر نیمکره جنوبی‌قاعده برعکس نیمکره شمالی است . چنین نقشه‌ای مقطعی از میدان فشار در لحظهٔ تجربه را نشان میدهد از طرف فشارقوی بطرف فشار ضعیف جریان ایجاد میشود بطور خلاصه در هرنقطه از منحنی فشار یکنواخت سه‌نیرو بوجود میاید :

الف- نیروی اول ازطرف فشارقوی بطرف‌فشار ضعیف‌در جهت عمود برمنحنی ایزوبار .

ب- نیروی کوریولیس (Coriolis) که‌در علم‌الحرکات معروف است متوجه سمت راست در نیمکره شمالی وعمود بر جهت جریان .

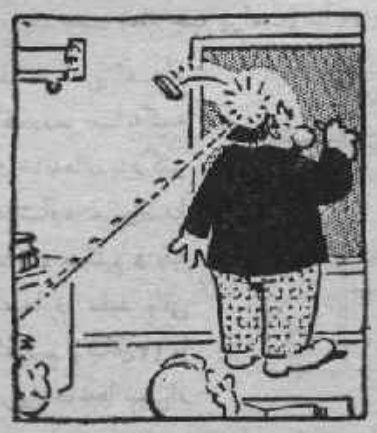
ج- نیرو وشتاب مایل بمرکز درجهت عمود بر جریان که تولید شتاب نوع متناطیسی مینماید . با این مقدمات برای اینکه قیافه‌ای از پیش‌بینی هوا راکه امروزمتداول است‌ترسیم کنیم قبلامتذکرمیشویم که‌اساس آن‌مربوط بکار مداوم‌ایستگاههای هواشناسی است‌که در شهرهای متمدن وجزیره‌ها و صحراهای مرتفع مرتباً مشغول فعالیت هستند شاید قدری جالب باشد که بدانیم در حال حاضر هواشناس از بالای جو اطلاعات بهتری دارد تا نزدیکی سطح زمین اطلاعات خود را در حوزهٔ نسبتاً بزرگی مثلا غرب اروپا و نزدیك دریا روی نقشه میآورد اقدام اولیهٔ او رسم خطوط ایزوبار روی نقشه است سپس اطلاعات جدید خود راکه بوسیله امواج بی‌سیم ورادیو از ایستگاههای زمینی‌وهوائی ودریائی میگیرد روی نقشه منتقل میکند .

برای‌این منظوربالنهائی بفضا می‌فرستندکه بطوراتوماتیك وضع هوا را ازلحاظ فشاروحرارت ورطوبت گزارش میکند غیر از این اقدام هواشناس بتجربهٔ دیگری‌بنام تجزیه‌جرم‌هواموسوم است می پردازد باین وسیله بعضی ازخواص حرارتی وبرودتی هوا مشخص‌میگرددو اگر آنها را روی‌نقشه ببرد خطوط‌منفصل بنام خطوط جبههٔ فشار سرد ویاجبههٔ فشارگرم پیدامیشودکه با خطوط ایزوبار متقاطع هستند .

معمولا پیش‌بینی‌های کوتاه درفواصل ۶و۱۲و یا ۲۴ساعت بعمل‌میآید مبنای این پیش بینی تغیر میدان فشار و استفاده از تجارب گذشته و استدلال‌فیزیکی است. پیش‌بینی هوادرحال‌حاضر بیشتر جنبهٔ هنری و عملی دارد تا جنبهٔ تئوری و قواعد کاملا علمی ومحاسبات دقیق ریاضی درآن کم‌است. دوهواشناس‌ممکن است‌طرز استدلال و عمل یکنواخت نداشته باشند با وجود این رسم نقشه‌و تعیین خطوط ایزوبار و تعیین جبهه‌ها علمی است‌که تقریباً همه‌هواشناس‌ها آنرا معمول‌میدارندکارهواشناس نسبت به پیش بینی‌آینده تقریباً شبیه تعمیم مسئله در ریاضیات ویا نتیجه‌گیری از استقراء ناقص‌است. مهارت‌هواشناس درکار خود شبیه مهارت طبیب‌درمعالجه بیمار میباشد حتی پیش‌بینی‌های کوتاه‌هوا شناسی توأم بایقین نیست وعلم‌و تجربه‌در این‌کار مشکل همواره با احتمال همراه است هدف ریاضیات‌در این‌کار این نیست‌که تمام جزئیات‌را پیش‌گوئی کند بلکه هدف آن عبارت ازاین‌است که ازروی‌میدان فشار فعلی میدان آتیه‌را محاسبه‌نماید.

درخاتمه بایدمتذکرشدکه مسئله هواشناسی در زندگی امروزی دارای اهمیت‌فوق‌العاده است وتمدن فعلی بشر بدون آن بادامهٔ حیات خود توانائی‌ندارد. هرروز هزاران مسافر همه جا و در اقصی‌نقاط‌کره زمین‌از راههای‌زمینی‌ودریائی و هوائی مسافرت میکنند جان و مال آنان درگرو تشخیص هواشناسان است باین دلیل ودلائل دیگرهوا شناسی درمسائل‌اجتماعی تاثیرعمیق‌دارد ودر صلح‌وجنگ ازآن استفاده میشودولذا کشورهای متمدن‌در توسعه شبکه‌بندی هواشناسی خود اهتمام کامل دارند امیدواریم هواشناسان متخصص وطن مادرکار پر ارزش خود توفیق یابند و همگان ازنتایج کوشش آنان برخوردار گردیم.

پایان



بدون شرح

دنباله در صفحهٔ ۱۷

غلامرضا عسجدی -۲-

چرا معلم ریاضی شدم

شاید خواننده این سطور تصور نماید که نگارنده دارای روح ارتجاعی است ویا می‌خواهد رسوم گذشته را بستاید در صورتیکه قصدمن یادآوری خاطراتی است که مرا بخدمت فرهنگ ومعلمی کشیده است وبرای اینکه این نوشته جنبهٔ شخصی پیدا نکند ازذکرنام خویشاوندان خود مطلقا خود داری خواهم کرد.

ایام طفولیت دو خاطره دارم که هردودلیل تشکیل ایمان و شوق باطنی من بعالم معلمی است یکی اینکه در کلاس سوم دبستان بودم که روزی رئیس فرهنگ ایالت آذربایجان **مرحوم دکتراحمد محسنی** که بعد ها بکفالت وزارت فرهنگ رسید بکلاس ما آمد وازدانش‌آموزان سئوالاتی کرد گویا من بین آنان بسئوالات‌ایشان بهتر پاسخ دادم ضمناً پرسیده بود کدام شغل رادوست‌دارید که درآتیه ازآن راه بجامعه خدمت کنید و من بی سابقه جواب دادم که معلمی‌را دوست دارم ضمنا فرمایش‌حضرت علی را که فرموده هر کس حرفی بمن بیاموزد مرا بندهٔ خود ساخته است با زبان کودکی بایشان توضیح دادم‌آن فقید سعید باداره بـر گشت و بفاصله دو ساعت یك قطعه نقشهٔ‌ایران بعنوان جایزه برای من فرستاد ومدیردبستان ما **مرحوم فخری** رحمت اله علیه با اینکه فرزند خود او همکـلاس من بـود زنگ مخصوصی نواخت و تمام دانش‌آموزان را سرصف احضارنمود وضمن تشویق بسیار آن نقشه را بمن اعطاء کرد. اکنون هم خاطره آنروز مانند نقطه‌روشنی درضمیرمن‌می‌درخشد آنروزحس میکردم که گویا باندازه یك گردن ازبچه‌ها بلندتر شده‌ام از آن تاریخ نه بطورصوری وبچگانه بلکه بطورعمیق وریشه‌دار محبت لایزال تعلیم وتربیت افراد وطن در روح من پرتو افکنده است.

بودم آنروز من از طایفهٔ دردکشان
که نه‌ازتاك‌نشان بودونه‌ازتاك‌نشان

آری این چنین است اثر تشویق صحیح و بموقع واثر مأیوس کردن افراد را نیزهمگان دانند.

مربعها و اشکال وفقی

تاریخچه . طریقهٔ تشکیل . انواع مختلف

۲

طریقه تشکیل (پر کردن) مربعهای وفقی

اعداد واقع درخانه های یك مربع وفقی تصاعد حسابی تشکیل میدهند. از جمله خواص تصاعد حسابی آنست که مجموع هر دو جمله از تصاعد که از طرفین بیك فاصله واقع شده باشند مقداریست ثابت و درحالیکه تعداد جمله ها فرد باشد مساویست با دو برابر جمله وسط.

چنانچه درتصاعد ۱.۲.۳.۴و۵.۶.۷.۸.۹ ÷

ملاحظه میشود که :

۱+۹=۲+۸=۳+۷=۴+۶=۵×۲

وهمچنین درتصاعد ۱۲.۳۴.۷۸.۹۱۰۱۵.۱۶ ÷

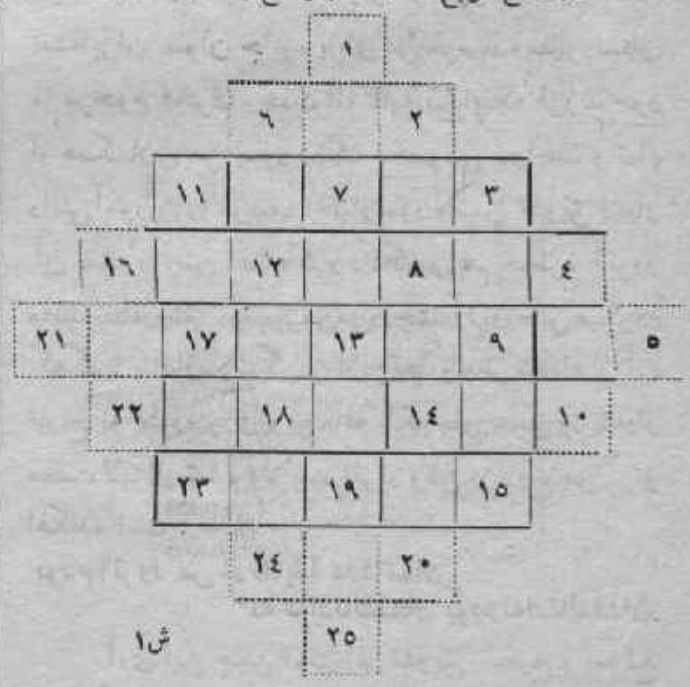
می بینیم که : ۱+۱۶=۲+۱۵=...=۸+۹

دریك تصاعد حسابی اگرچند جمله از یك طرف وجمله های متقارن آنها را از طرف دیگر انتخاب کرده حاصل جمع آنها را تعیین کنیم این حاصل جمع نیز مقداری ثابت خواهد بود هرگاه جمله های دیگری را بهمین نحو اختیارنمائیم.

با توجه بآنچه گفته شد درتشکیل مربعهای وفقی دوحالت باید در نظر گرفت یك حالت که رتبه مربع فرد باشد و حالت دیگرمربع دارای رتبه زوج باشد.

حالت اول ـ در تشکیل مربع وفقی با رتبه فرد راه‌های مختلفی وجود دارد اما از همه ساده تر طریقه زیر است (منسوب به باشه دومربزیریاك):

درخارج مربع و مجاور بهرضلع یك ردیف دیگر اضافه



ش۱

میکنیم که از هرطرف باندازه یك خانه از ضلع مربع کوتاهتر باشد و در خارج این ردیف‌هم ردیف دیگری میسازیم که ازهر طرف از ردیف اولی باندازه یك خانه کوتاهتر باشد وعمل را ادامه میدهیم تا وقتیکه آخرین ردیف شامل یك خانه باشد مربع جدیدی حاصل میشود. در این مربع جدید از یك گوشه شروع کرده سلسله طبیعی اعداد را از ۱ تا آخرین عددی که در مربع میتوان نوشت بترتیب و بطور مورب یادداشت مینمائیم (شکل۱).

۱۱	۲۴	۷	۲۰	۳
۴	۱۲	۲۵	۸	۱۶
۱۷	۵	۱۳	۲۱	۹
۱۰	۱۸	۱	۱۴	۲۲
۲۳	۶	۱۹	۲	۱۵

ش۲

آنگاه‌هریك ازعددهای واقع درخانه‌های واقع درخارج را درستون یا سطرمربوطه و درجهت بطرف داخل‌مربع به تعداد خانه‌هائی برابر با رتبه مربع انتقال میدهیم مربع مطلوب بدست خواهد آمد (شکل۲)

حالت دوم ـ در تشکیل مربعهائی که رتبه‌اش‌زوج‌باشد.

الف ـ رتبه مربع زوج زوج (توانی‌از۲) باشد دراینحال طریقه‌ای بنام دلانی و لوسین بشرح زیرمیباشد.

هرچهارخانه از مربع را یك خانه فرض میکنیم ومربع را باین خانه‌های بزرگ چنان تقسیم میکنیم که یکی ازآنها مرکزمربع اصلی واقع شود وبقیه در امتداد قطر های مربع قرارگیرند و بعد از یك‌گوشه مربع در یك امتداد مثلا افقی و در یك جهت (مثلا چپ براست) خانه‌های مربع را بترتیب سلسله طبیعی اعداد شمرده درهرخانه که جزو خانه‌های بزرگتر باشد شماره مربوط را یادداشت میکنیم و بقیه خانه ها را سفید باقی میگذاریم (شکل۳) تا آخرین خانه‌ها سپس‌از آخر شروع نموده در جهت معکوس خانه ها را ابتدا از یك

۱			۴
	۶	۷	
	۱۰	۱۱	
۱۳			۱۶

ش۳

وبترتیب سلسله اعداد میشماریم و در هرخانه که سفید بود عدد مربوطه را یادداشت مینمائیم. مربع تکمیل خواهد شد (شکل ۵)

	۱۵	۱۴	
۱۲			۹
۸			۵
	۳	۲	

ش ٤

ب ـ رتبه مربع زوج فرد باشد (توانی از ۲ نباشد) مثلا مربع ٦×٦ را در نظر می گیریم بزرگترین مربع رتبه زوج ماقبل مربع رتبه ٦ مربع رتبه ٤ که دارای ١٦ خانه است میباشد در سلسله طبیعی اعداد از یك تا ٣٦، ١٦ جمله وسطرا انتخاب کنیم اعداد ١١ تا ٢٦ بدست میاید مربع وفقی ٤×٤ را طبق آنچه که گفته شد با این اعداد میسازیم.

١	١٥	١٤	٤
١٢	٦	٧	٩
٨	١٠	١١	٥
١٣	٣	٢	١٦

ش ٥

١	٣٥	٣٤	٣٠	٥	٦
٢٣	١١	٢٥	٢٤	١٤	٤
٨	٢٢	١٦	١٧	١٩	٢٩
٢٨	١٨	٢٠	٢١	١٥	٩
١٠	٢٣	١٣	١٢	٢٦	٢٧
٣١	٢	٣	٧	٣٢	٣٦

ش ٦

آنگاه هرضلع این مربع را ازهرطرف باندازه یك خانه امتداد میدهیم مربع ٦×٦ حاصل میشود و ازبقیه اعداد از ١ تا ٣٦ یعنی اعداد از ١ تا ١٠ و از ٢٧ تا ٣٦ را در خانه های جدید طوری قرار میدهیم که مجموع هر دو عدد که در امتداد یك سطر یا یك ستون یا قطر واقع میشود برابر با ٣٧ باشد و باین ترتیب مربع تکمیل خواهد شد (شکل ٦).

***

مربعهای وفقی حاصلضربی ـ مجموع دو یا چندتوان با پایه های مساوی توانی است با همان پایه که نمای آن برابر است با مجموع نماهای هریك ازآن توانها

مثلا $۲^۱ \times ۲^۲ \times ۲^۳ \times ۲^٤ = ۲^{۱۰}$

$a^۱ \times a^۲ \times a^۳ \times \dots \times a^۹ = a^{۱+۲+\dots+۹} = a^{٤٥}$

٢	٩	٤
٧	٥	٣
٦	١	٨

ش ٧

بعبارت ساده تر عمل ضرب بین توانها با پایه های مساوی تبدیل میشود به عمل جمع بین نماها. مربع وفقی ٣×٣ را که از اعداد ١ تا ٩ تشکیل شده و وفق آن ١٥ است در نظر می گیریم (شکل ٧) حال عدد دلخواهی مثلا a را اختیار کرده در هر خانه مربع بجای عدد مربوط توان آن عدد از a را قرار میدهیم (شکل ٨) مربعی بدست خواهد آمد که حاصلضرب اعداد هرسطر و هرستون و هر قطر آن برابر مقدار ثابت بود و مساویست با $a^{۱۵}$

$a^۲$	$a^۹$	$a^٤$
$a^۷$	$a^٥$	$a^۳$
$a^٦$	$a^۱$	$a^۸$

ش ٨

برای مثال اگر a را برابر با ٢ اختیار نمائیم (شکل ٩) مربعی وفقی خواهیم داشت که اعداد ٢ و ٤ و ٨ و ١٦ و ٣٢ و ٦٤ و ٢٥٦ و ٥١٢ تشکیل شده و حاصلضرب اعداد واقع در هر ستون و هر سطر و هر قطر آن برابر است با $۲^{۱۵}$ یعنی ٣٢٧٦٨ (شکل ١٠)

$۲^۲$	$۲^۹$	$۲^٤$
$۲^۷$	$۲^٥$	$۲^۳$
$۲^٦$	$۲^۱$	$۲^۸$

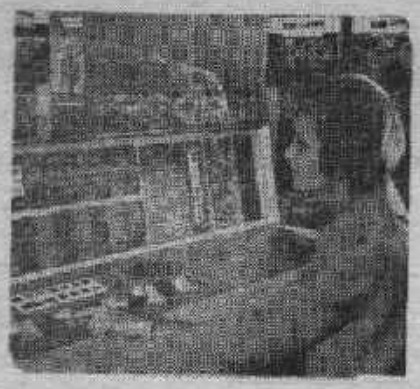
ش ٩

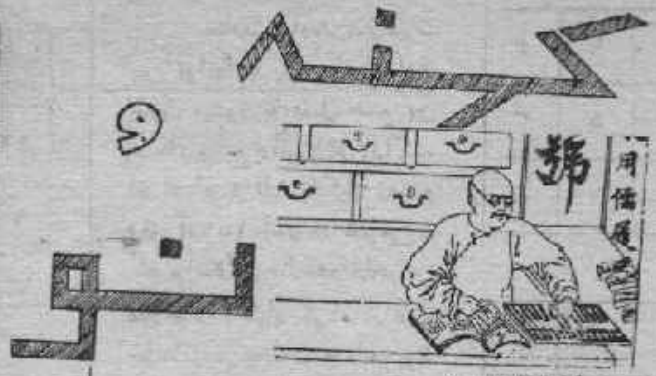
٤	٥١٢	١٦
١٢٨	٣٢	٨
٦٤	٢	٢٥٦

ش ١٠

حال اگر بجای پایه ٢ عدد ٣ را پایه بگیریم مربع وفقی حاصلضربی جدیدی از اعداد ٣ و ٩ و ٢٧ و ... با وفق حاصلضربی $۳^{۱۵} = ۱٤۳٤۸۹۰۷$ بدست خواهد آمد و بهمین ترتیب میتوان از هر مربع وفقی حاصل جمعی بتعداد نامحدود مربعهای وفقی حاصلضربی تشکیل داد.

دنباله درصفحهٔ ٤٣



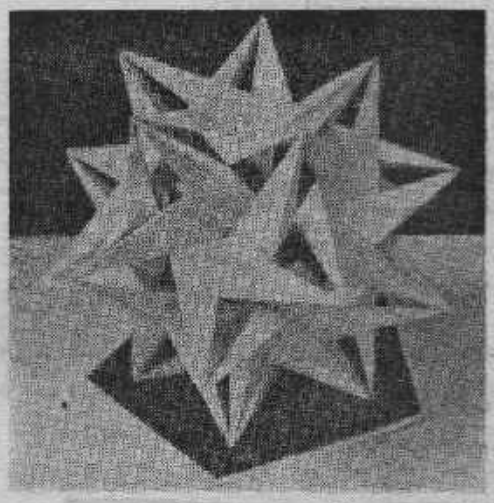


از کتاب (مشکلات العلوم)

ملامحمد مهدی نراقی

تضعیف مکعب

شمس الدین سهرودی در تاریخ الحکماء و غیر او نیز نقل کرده‌اند که درزمان افلاطون وبائی پیدا شد و مردم را مذبحی بود بشکل مکعب ووحی رسید بیکی از انبیاء آن عصر که تضعیف آن مذبح کنند تاوبا رفع شود ایشان در پهلوی آن مذبح مثل آن بساختند . وبا زیاده‌شد . صورت به‌آن نبی عرض کردند . وحی آمد که ایشان‌مثل آن مذبح بساخته‌اند واین نه‌تضعیف مکعب‌است پس استعانت‌از افلاطون کردند گفت چون شما را تعرب‌ازهندسه بود حق تعالی شما را باین‌صورت تنبیه نمود .



چند وجهی کوکبی

از کتاب (اختیارات)

ملامحمد باقرمجلسی

دربیان احکام غالب و مغلوب است

که حکیم ارسطالیس وزیر ذی القرنین برای او وضع کرده وچون اسکندرلشکر به محاربهٔ دشمن میفرستاد و یا با کسی منازعه وداوری داشت اسم اورا حساب میکرد با خصم و غلبه وظفررا از آن مشخص می کرد . پس هرگاه محاربه مابین دوقوم یا دونفریا دولشکرباشد یاباکسی منازعه وجدال داشته‌باشد یا خواهدنزد حکام‌برود بایدکه اسم هریك از خصم را جداگانه به‌ابجد حساب‌کند و نه‌نه طرح کند وآنچه از اسم طرفین بماند بدایرهٔ شعری که بعد تحریرمیشود نظرنمایدحکم غالب ومغلوب خود وخصم را ازآنجا استنباط نماید... ودلیل براین قصه داود وجالوت است ازداود ٦وازجالوت ٨و٦غالب است بر ٨ ـ ازموسی ٩ وازفرعون ١و٦بر ١غالب است ـ از هلاکوخان ٢میماند وازالمعتصم ٤و٢ غالب‌است بر٤واین‌حساب را وضع نموده‌اند الابراصول قدیم از خواص و طبایع که اول آن منسوب به‌فیثاغورس حکیم‌است‌واصول‌این علم‌آسمانی است..

وتمام احکام‌آن در این بیت مندرج است :

درفرد زوج نصرت ازاعداد کمتراست
ور مختلف شوند ظفر زان کمتر است
مطلوب‌غالب است اگرزوج‌مستوی است
درفرد مستوی است چه‌طالب مظفراست

مقدار تقریبی $\sqrt{2}$

توابع زیر را در نظربگیرید :

$$y=\frac{x+2}{x+1} \text{ و } Z=\frac{y+2}{y+1} \text{ و } u=\frac{z+2}{z+1} \text{ و } t=\frac{u+2}{u+1} \text{ و } \ldots$$

در ازاء $x=1$ مقدار هریك از این توابع برابرخواهد شد با مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ بطوریکه هرچه تعداد توابع را بیشتر بگیرید مقدار $\sqrt{2}$ با تقریب کمتری بدست میآید .

باین نکته هم توجه کنیدکه مقادیربدست‌آمده بترتیب (اضافی ، نقصانی ، اضافی، نقصانی ...) مقدارتقریبی $\sqrt{2}$ رابدست میدهد .

از ترکیب توابع فوق کسر مسلسل زیرحاصل میشود .

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ldots}}}}}$$

دو نقطهٔ اعتدال و دو نقطهٔ انقلاب کدامند

دایرهٔ بزرگ با دایرهٔ بزرگ نزدیکی همی کند تا اورا بردو نقطه ببرد که سرقطر کرده اند وزاونیزدوری کند بدو نقطه همچنان برابر یکدیگر. ومنطقة البروج چون معدل النهار را بر دو نقطهٔ برابر یکدیگر همی برد، بدو نقطهٔ دیگر برابر یك بدیگر نیزدور ازوی همی‌شود. ودو نقطه تقاطع به اعتدال معروفاند، زیرا که آفتاب چون بایشان رسد روز باشب خویش راست شود بهمه جای اندرروی زمین، ویکی بردیگر نفزاید. ویکی را نقطه **اعتدال بهاری** خوانند، واین آنست که چون آفتاب از وی بگذرد بنیمه شمالی ازمنطقة البروج شود. ودیگررا نقطه **اعتدال تیرماهی** خوانند. واین آنست که چون آفتاب ازوی بگذرد بنیمه جنوبی افتد. واعتدال رانیزاستوا خوانند. واما آن هردو نقطه که غایت دوری بود اندرآن ازمعدل النهار نقطهٔ انقلاب خوانند و منقلب نیز. وآن انقلاب که بنیمه شمالی است اورا **انقلاب تابستانی** خوانند. وآنك بنیمهٔ جنوبی است او را **انقلاب زمستانی** خوانند....

برج چیست

چون منطقة البروج را بدوازده بخش راست قسمت کنی وابتدا ازنقطه اعتدال بهاری داری و بر جایگاههای بخشش دایره های بزرگ بگذاری، این شش دایره یکدیگر را ببرند وجمله شوند برهردو قطب منطقة البروج وکره بدوازده پاره شود همچون خربوزه دوازده پهلو. وهر پهلوی ازآن برجی باشد. ودرازای برج آن بودکه اندرین پهلوافتد ازمنطقة البروج. وآن سی‌درجه باشد. وپهنای اوآنچ میان منطقه‌است و میان هریکی ازقطب شمالی وجنوبی او وآن چهار یك دایره بود یعنی نودجزو پهنای اوست بشمال ونزد جزو پهنای اوست بجنوب.

پس سال طبیعی وجز طبیعی کدامند

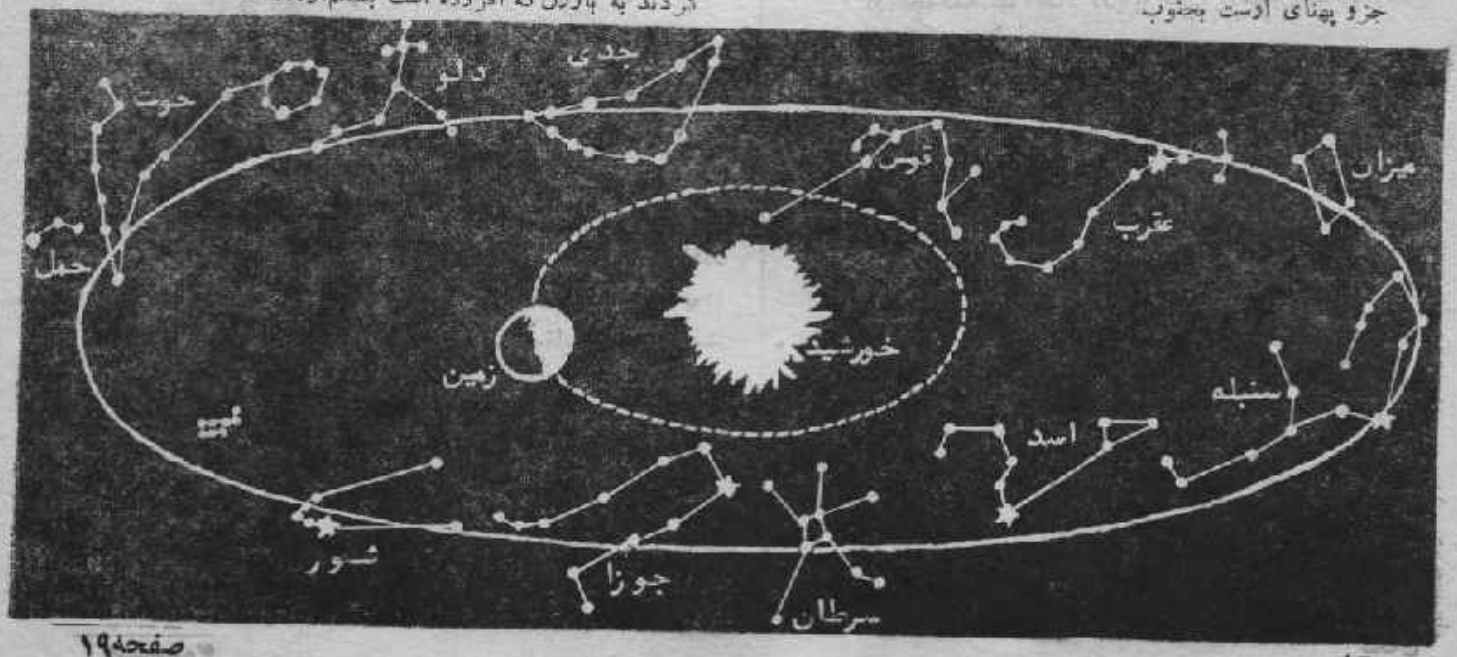
سال طبیعی عبارت است ازآنمدت که اندراو یکبار گردش گرما وسرماو کشت و زه بتمامی بود. و آغاز این مدت از بودن آفتابست بنقطه یی از فلك البروج تابدوباز آید. وزینجهت بآفتاب منسوب کرده‌اند این سال. واندازهٔ اوسیصدوشصت‌وپنج روز است وکسری ازچهاریك روز کمترچنانك ماهمی یابیم، وزچهاریك روز بیشترچنانك پیشینگان همی یافتند. وچون سال طبیعی این است که گفتیم ماه‌اوکه نیم شش یك است ازوی، ماه اصطلاحی است نه طبیعی.

واما سال اصطلاحی آنست بنهاد مردمان که دوازده بارچند ماه طبیعی است. واندازه وی سیصدوپنجاه‌وچهارروزاست وپنجیك روز وشش یك اوجمله کرده. واین یازده تیر بود اگرشباروزی سی‌تیربود. واین سال‌را سال قمری خوانند.

پس این کسرها چگونه بکار برند ازسالها

بسال آفتاب چهاریك روزیله کنند، تا ازوی بچهارسال روزی حاصل آید. و آنکه اورا بر روزهای سال بیفزایند تا جمله سیصدوشصت وشش روزشوند. و این فعل یونانیان ورومیان وسریانیان ونیزآن قبطیان مصربود از زمانهٔ **اغسطس** قیصر ملك روم باز. واین سال را بیونانی **اولمفیاس** خوانند وبسریانی **کبیستا**. وچون بتازی گردانی **کبیسه** بود ای انباشته، که چهاریکهای روز اندرو انباشته همی آید روزی تمام. و پارسیانرا ازجهت کیش گیرکی نشایست که سال را بیکی روز کبیسه کنند. پس این چهار روزرایله همی کردند تاازوی ماهی تمام گردآمدی بهصدوبیست سال. وآنگاه این ماه‌را برماههای سال زیادت کردندی تاسیزده ماه‌شدی ونام یکی ماه‌اندرو دوبار گفته‌آمدی. وآنسال را **بهیزك** خواندندی. وپس نیست شدن ملك وکیش ایشان این بهیزك کرده نیامده‌است باتفاق....

وجهودان‌را اندرتوریة فرموده آمده‌است که سال وماه‌هردو طبیعی‌دارند. پس ناچاره سال راکبس بایست کردن کردن بماهی که‌ازآنروزها گره آید که میان سال قمری وسال شمسی‌اند. وآن سال‌را که کبس کنند بزبان عبری **عیور** نام کردند ومعنیش آبستن بود. زیراکه آن ماه سیزدهم را که برسال زیادت شد تشبیه کردند به بارزن که افزوده است بشکم او....



استفاده از پایهٔ منفی برای نمایش اعداد

(کار با پایه منفی بشررا برای کشفیات تازه‌ای درباره اعداد راهنمائی میکند)

یکی از دانش‌آموزان میگفت: ما همیشه باری را تحمل میکنیم که بی‌نتیجه است. ولی آیا او راست میگوید و همیشه همین طور است ؟. نه.

جدول زیررا ملاحظه کنید :

۰+۰=۰
۰+۱=۱
۱+۰=۱
۱+۱=۱۱۰

حالا این مسئله را حل کنید:

۱۱۱+۱=؟
یا
۱۱+۱۱=؟

اگر راه‌حل شما با عمل زیر تطبیق کرد شما روش صحیحی را پیش گرفته‌اید.

۱۱۱+
۱

۰۰۰۰۰۱۰۰

طریقه عمل: ۱را زیر رقم اول ۱۱۱ مینویسیم طبق جدول بالا ۱۱۰=۱+۱ که صفر آنرا میگذاریم زیر خط و ۱۱را یک رقم بطرف چپ (بصورت نقطه‌چین نمایش داده شده) روی ۱۱۱ میگذاریم همین عمل را تکرار میکنیم عدد حاصل ۱۰۰ میشود که در سمت چپ آن صفرها تا بینهایت ادامه دارند که درهر حال درجواب ما تأثیری ندارند این فقط یکی از نتایج جالبی است که از اعداد در پایه منفی حاصل میشود مسأله‌ای که ذکر شد در پایه منفی دو بود. در این طریقه عددنویسی هر عددی میتواند درمقابل عددی از سیستم اعشاری قرار گیرد، در اینصورت خیلی ساده‌تر است که سیستم پایه ده مثبت را بعنوان مأخذ انتخاب کنیم تا عدد اعشاری را به عددی در پایه منفی تبدیل کنیم برای این منظور ارزش مکانی P را می‌نویسیم که $P-1$ (پایه) بنابراین در پایه دومنفی (منفی دو) ارزش مکانی چنین است.

اولی	دومی	سومی	چهارمی	پنجمی	ششمی	P ام	مکانی
$(-2)^0$	$(-2)^1$	$(-2)^2$	$(-2)^3$	$(-2)^4$	$(-2)^5$	$(-2)^{P-1}$	ارزش
۱	−۲	۴	−۸	۱۶	−۳۲		

همین عمل برای پایه (−۱۰) چنین میشود.

اولی	دومی	سومی	چهارمی	پنجمی	ششمی	P ام	مکانی
$(-10)^0$	$(-10)^1$	$(-10)^2$	$(-10)^3$	$(-10)^4$	$(-10)^5$	$(-10)^{P-1}$	ارزش
۱	−۱۰	۱۰۰	−۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰۰		

ازمقایسه دوجدول فوق نتیجه ذیل حاصل میشود.

۰=۱
−۲=۱
۴=۱۰۰
−۸=۱۰۰۰

که ما با کمك ۱۰=۲− وطریقه جمع که قبلا ذکر شد میتوانیم جدول ذیل‌را ترتیب دهیم.

−۱=−۲+۱−۱۰+۱=۱۱
−۲=۱۰
−۳=−۲+(−۱)=۱۰+۱۱=۱۱۰۱

ازآنچه گفته شد اعداد درپایه دورا درمقابل مساویش در پایه ده مینویسیم :

۱	۱	−۱	۱۱
۲	۱۱۰	−۲	۱۰
۳	۱۱۱	−۳	۱۱۰۱
۴	۱۰۰	−۴	۱۱۰۰
۵	۱۰۱	−۵	۱۱۱۱
۶	۱۱۰۱۰	−۶	۱۱۱۰
۷	۱۱۰۱۱	−۷	۱۰۰۱
۸	۱۱۰۰۰	−۸	۱۰۰۰
۹	۱۱۰۰۱	−۹	۱۰۱۱
۱۰	۱۱۱۱۰	−۱۰	۱۰۱۰

ازجدول فوق نتایج ذیل حاصل میشود:

دنباله در صفحه ۲۲

درباره ریاضیات متوسطه

۱

مطالبی چند در بارهٔ هذلولی و مجانبهای آن

از: محمد حسن رزاقی خمسی

یکی از خواص بسیار ممتاز هذلولی خاصیتی است که در مجانب های آن موجود است بطوریکه میتوان این خاصیت بسیارجالب را با تعریف اولیهٔ مکان‌هندسی‌منحنی معادل پنداشت عادتاً میگوئیم : هذلولی مکان هندسی نقاطی است از صفحه که تفاضل فواصلشان از دو نقطه ثابت F و F' مقداریست ثابت (دو نقطه ثابت F و F' راکانونهای هذلولی می‌نامیم) حال اگر در این تعریف بجای دو نقطه ثابت F و F' دوخط‌متقاطع Δ و Δ' و بجای تفاضل فواصل حاصل ضرب آنها را منظور بداریم تعریف جدید را میتوانیم بصورت زیر بیان کنیم .

هذلولی مکان هندسی نقاطی است از صفحه که حاصل ضرب فواصلشان از دو خط متقاطع Δ و Δ' مقداریست ثابت (دو خط متقاطع Δ و Δ' را مجانب های هذلولی می‌نامیم) باین نکته نیز توجه داشته باشیم وقتیکه نقطه در روی منحنی در فواصل بسیار دور قرار میگیرد یکی از دو عامل متغیر ضرب بسمت صفرمیل کرده وعامل دیگر الی غیرالنهایه بزرگ میشود ولی حاصل‌ضرب صفر در بینهایت همچنان ثابت‌میماند .

حال قبل از اینکه معادل بودن این دو تعریف را ثابت کنیم به نکته‌ای که در کتاب درسی هندسه و مخروطات شکل ریاضی که امسال از طرف وزارت فرهنگ بطور رسمی انتخاب شده اشاره میکنیم : در صفحهٔ ۱۹۶ و ۱۹۷ کتاب مزبور پس‌از یك رشته محاسبات بطریق تحلیلی معادلهٔ هذلولی متساوی ـ المحورین نسبت بمجانب های‌آن بصورت زیر پیدا شده است.

$$xy=\frac{a^2}{2}$$

و پس از خاتمهٔ محاسبه پاراگراف جدیدی باز شده و مطالبی در آنجا ذکر میشود که بالاخص مورد توجه وبررسی ما قرار میگیرد و عیناً با حفظ عبارات وکلمات دراینجا نقل میشود : نقل ازصفحه ۱۹۷ کتاب درسی رسمی و همگانی.

« ۹-۳۲- چون قدر مطلق فواصل نقطه $M(x,y)$ از مجانب های ox و oy بترتیب $|x|$ و $|y|$ است از معادله فوق نتیجه میگیریم که در هذلولی متساوی‌المحورین حاصل ضرب فواصل هر نقطهٔ منحنی از مجانب های آن ثابت‌ومساوی $\frac{a^2}{2}$ است »

بطوری که ملاحظه میفرمائید از فحوای کلام کتاب درسی اینطور استنباط میشود که گویا آقایان مؤلفین محترم خیال کرده‌اند که خاصیت ثابت بودن حاصلضرب فواصل منحصراً باید در هذلولی متساوی‌المحورین باشد درصورتیکه این خاصیت از خواص بسیار ممتاز هذلولی بوده و همانطور که گفته شد کاملا شایستهٔ تحقیق و بررسی است.

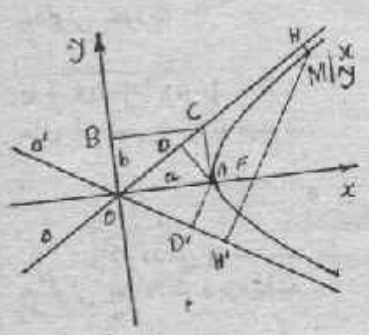
اینك برای عطف توجه دانش آموزان عزیز و همکاران گرامی موضوع را بطریق تحلیلی بنحو بسیار ساده و مختصر اثبات میکنیم :

میخواهیم ثابت کنیم که مکان هندسی نقاطی که حاصلضرب فواصلشان از دو خط متقاطع Δ و Δ' مساوی مقدار ثابت K باشد یك هذلولی است.

ـ نیمساز های Δ و Δ' را ox وoy اختیار کرده و فرض میکنیم $\frac{b}{a}$ ضریب زاویه یکی از این دوخط باشد ضریب زاویه خط دیگر $-\frac{b}{a}$ و معادلات آنها بصورت زیر خواهد بود:

$$bx-ay=0$$

$$bx+ay=0$$



حال اگر $M(x,y)$ یکی از نقاط صفحهٔ xoy بوده وMH و MH' فواصل این نقطه از خطوط Δ و Δ' برابر d و d' فرض شود خواهیم‌داشت:

$$d'=\frac{bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\ d=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ویا

$$dd'=\frac{b^2x^2-a^2y^2}{a^2+b^2}=K$$

که پس از حذف مخرج و تقسیم طرفین معادله بر a^2b^2 نتیجه میشود :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{K(a^2+b^2)}{a^2b^2}$$

و ازآنجا :

$$K=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

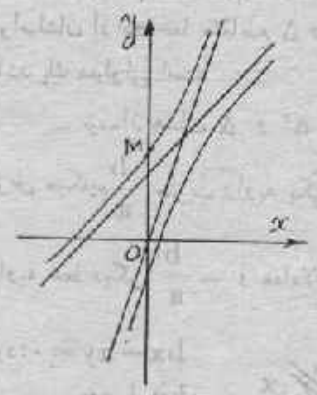
این مقدار ثابت K را قبل از محاسبهٔ بالا میتوانستیم پیش بینی نمائیم بدینطریق که چون نقطه A (رأس هذلولی) یکی از نقاط هذلولی است فاصله‌اش از خط مجانب از مثلث قائم‌الزاویه oAC بدست آمده و خواهیم داشت :

$$AD = \frac{oA \times AC}{oC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

و چون فاصله رأس A از مجانب دیگر Δ' نیز بعلت تقارن مساوی همین مقدار است پس عدد ثابت K قبلا محاسبه میشودو در مورد هذلولی متساوی‌المحورین باید در عبارت K قرار دهیم $a=b$ و در نتیجه خواهیم داشت :

$$K = dd' = \frac{a^2}{2}$$

مثال ـ درهذلولی $y = 2x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ حاصل ضرب فواصل یك نقطه از منحنی را از دو مجانب آن پیدا کنید .



در حیر ثابت شده که اگر معادلهٔ یك هذلولی بصورت :

$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}$ باشد معادلات مجانب ـ های آن چنین نوشته میشود :

$$y = \alpha x + \beta = (x + \frac{b}{2a})\sqrt{a}$$

(که درآن a عددیست مثبت) در این مسئله مجانب های هذلولی بمعادلات زیرمیباشد .

$$3x - y - 0$$

$$x - y + 2 = 0$$

حاصل ضرب فواصل یك نقطه $M(x,y)$ هذلولی از دو مجانب نوشته میشود :

$$K = dd' = \frac{3x - y}{\sqrt{9+1}} \times \frac{x - y + 2}{\sqrt{1+1}}$$

و یا

$$K = dd' = \frac{3x^2 - 4xy + y^2 + 6x - 2y}{2\sqrt{5}}$$

حال اگرمعادلهٔ هذلولی را از صورت کسر خارج کرده و بصورت گویا درآوریم پس از اختصار خواهیم داشت :

$$3x^2 - 4xy + y^2 + 6x - 2y = 1$$

وازآنجا :

$$K = dd' = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

و برای تحقیق دردرستی این‌عدد نقطه $M(0, 1+\sqrt{2})$ از هذلولی را در نظر گرفته d و d' را حساب میکنیم:

$$d' = \frac{-(1+\sqrt{2})}{\sqrt{10}} \quad \text{و} \quad d = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$K = dd' = -\frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

دنبالهٔ استفاده از پایهٔ منفی

۱ـ هرعددازپایه دوکه درمقابل عددمثبتی‌ازپایه۱۰قرار دارد تعدادارقام‌آن فرد است.

مثلا ۱۱۱ = ۳ ارقام‌آن سه‌تا است.

۱۱۰۱۰ = ۶ ارقام‌آن پنج‌تا است.

۲ـ هرعددی‌که درمقابل عددمنفی قراردارد تعداد ارقام آن زوج است.

۳ـ هرعددی‌که درمقابل یك‌عددمثبت یامنفی، فرد (مثل ۱۱۰۱ = ۳ـ و ۱۱۱ = ۳) قراردارد به ختم میشود

۴ـ هر عددی‌که در مقابل یك عدد مثبت یامنفی ، زوج (۱۱۰ = ۲ و ۱۰ = ۲ـ) قراردارد به‌صفرختم میشود

۵ـ درپایه دواگرمجموع ارقام برسه قابل‌قسمت باشدآن عددبرسه قابل قسمت است مثلا ۱۱۰۱۰ = ۶ که دارای سه‌تا ۱ است پس‌مجموع آن‌سه میشود که‌برسه قابل‌قسمت‌است پس ۱۱۰۱۰ برسه قابل‌قسمت است.

۶ـ ازجمع دوعدد باارقام زوج درپایه منفی یك مجموع باارقام زوج حاصل میشود.

۷ـ ازضرب دوعدد باارقام زوج درپایه منفی یك‌حاصل باارقام فرد نتیجه میشود.

مطالعه عمیق درباره این موضوع ممکن است روزی باب تازه‌ای بروی ریاضیات بگشاید این اعداد درپیشرفت ماشینهای حساب نیزکه مدتهااست نظردانشمندان ومهندسین رابخودجلب کرده سهم بسزائی دارد وخواهد داشت.

برای ماشینهای حساب اعداد منفی مفهومی‌ندارد وماشین قادر به‌بکاربردن آنها نیست وی استفاده‌ازاین مبدها وپیشرفتهای آینده‌آن ممکن‌است این مشکل‌را ازمیان بردارد.

(البته بایدمتذکرشدکه‌بیشترماشینهای حساب که‌کارآنها رمایتبخش بوده درپایه دوکارمیکند یعنی‌فقط سرکاران با ۰ و ۱ میباشد).

احمد نقیه

بازی اعداد

$$۲۵ = ۵^۲$$

$$۱۲۲۵ = ۳۵^۲$$

$$۱۱۲۲۲۵ = ۲۳۵^۲$$

$$\underbrace{۴۴۰۰۰۰۴}_{n \text{ مرتبه}} \quad \underbrace{۸۸۰۰۰۰۸۹}_{n-1} = (\underbrace{۶۶۰۰۰۶۷}_{n})^۲$$

فرستنده ـ آقای‌حافظی

دبیرریاضی‌دبیرستان درخشانی ـ شبستر

درباره ریاضیات متوسطه

حل هندسی دو اتحاد مثلثی

از : پرویز شهریاری

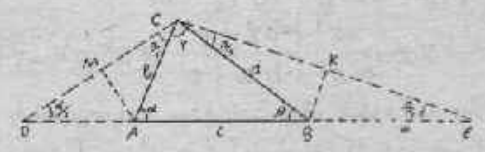
بشرطی که $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ باشد ثابت کنید :

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \qquad \text{-I}$$

در امتداد ضلع ضلع AB از مثلث ABC (شکل ۱) قطعات $AD=AC$ و $BE=BC$ را جدا میکنیم و D و E را به C وصل مینمائیم . داریم :

$$\widehat{CDA}=\widehat{DCA}=\frac{\alpha}{2}$$

$$\widehat{BCE}=\widehat{BEC}=\frac{\beta}{2}$$



شکل ۱

AM را عمود بر CD و BK را عمود بر CE رسم میکنیم داریم :

$$DC=2b\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{و} \quad CE=2a\cos\frac{\beta}{2}$$

همچنین باتوجه به روابط سینوسها درمثلث ABC داریم:

$$DA=2R\sin\beta \quad \text{و} \quad AB=2R\sin\gamma$$

$$BE=2R\sin\alpha$$

و از آنجا :

$$DE=2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

و از طرف دیگر میتوان نوشت :

$$\frac{DE}{EC}=\frac{\sin ECD}{\sin EDC}$$

و یا با توجه به روابط قبلی :

$$\frac{2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{2a\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

اما داریم :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma+\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$$

و بنابر این :

$$\frac{2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\alpha)}{2a\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

یعنی :

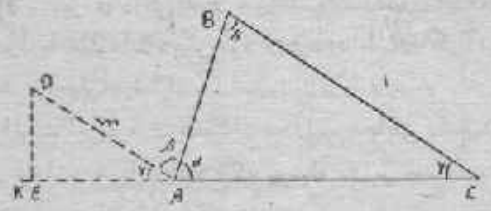
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{\alpha}{2R}\times\frac{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

وبا توجه به رابطهٔ $\frac{a}{2R}=\sin\alpha$ خواهیم داشت :

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\alpha\times\frac{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

و در نتیجه : $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma \qquad \text{-II}$$
$$(\alpha+\beta+\gamma=\pi)$$



شکل ۲

AD را موازی BC رسم می کنیم خواهیم داشت :

$$\widehat{ABD}=\beta \quad \text{و} \quad \widehat{DAK}=\gamma$$

اکنون از نقطه دلخواهی مانند D عمودی برامتداد CA فرودآورده وطول AD را مساوی m فرض میکنیم ، داریم :

$$AE=m\cos\gamma \quad \text{و} \quad AE=m\cos[180^\circ-(\alpha+\beta)]$$

$$DE=m\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)] \quad \text{و} \quad DE=m\sin\gamma$$

از طرف دیگر داریم :

$$S_{ADE}=\frac{m\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]\cdot m\cos\gamma}{2}$$

یا : $S_{AED}=\frac{m\cos[180^\circ-(\alpha+\beta)\cdot m\sin\gamma}{2}$

از آنجا بدست میآوریم :

$$\frac{m\sin(\alpha+\beta)m\cos\gamma}{2}=\frac{-m\cos(\alpha+\beta)m\sin\gamma}{2}$$

$$(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cdot\cos\gamma=$$
$$=-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\cdot m\gamma\cdot$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma=$$
$$=-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdot$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

و اگر طرفین این رابطه بر $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ تقسیم کنیم داریم :

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma$$

دربارهٔ ریاضیات دبیرستان

۳

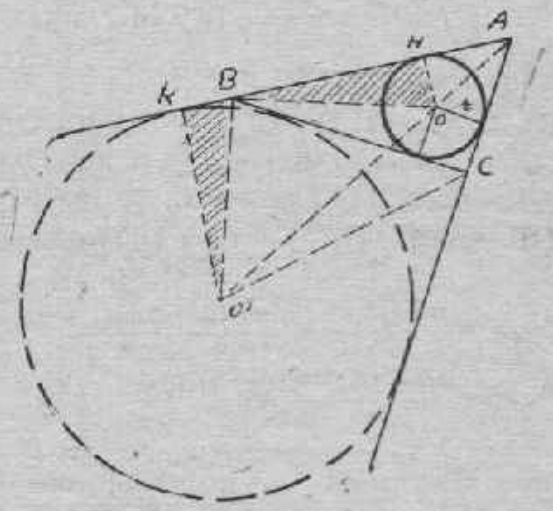
انتخاب روش سهلتر در اثبات و بررسی بعضی مباحث ریاضی

(از : یحیی یحیوی)

بعضی از قضایا و مباحث ریاضی با روشی که معمولاً فهم آن برای دانش‌آموز و بیان آن برای معلم دشوار است در کتب درسی بچشم میخورد و با اینکه در اصلاح بعضی آنها کوشیده‌اند ولی اغلب توجهی نکرده و همان روشهای قدیمی را تقلید کرده یا احیاناً روشهای مشکلتری بعنوان ابتکار تازه بکار برده‌اند. اینك چند نمونه ذکر میشود :

۱ـ اثبات فرمول مساحت مثلث از روی اضلاع آن و از روی قضایای فیثاغورس منجر بعملیات طولانی میشود که اولا دانش آموز را سردرگم میکند و ثانیاً پس از اثبات ، اندازه‌های p و $p-a$ و ... برای دانش‌آموز مبهم است لذا بدون اینکه فرمول مساحت را با معلومات دیگر خود ربط دهد ناچار اگر آنرا حفظ کند بعد فراموش مینماید .

اثبات این فرمول بکمك اشعه دوایر محاطی داخل و خارج مثلث و اندازه قطعات اضلاع که بوسیله دوایر جدا میشوند آسانتر و مفیدتر بنظر میرسد :



اگر قطعاتی را که دایره محاطی داخل بر اضلاع مثلث جدا میکند به α و β و γ نصف‌محیط را به p نقطه تماس دایره‌های محاطی داخل و خارج واقع در زاویه A را با ضلع AB بترتیب H و K بنامیم داریم :

$\alpha+\beta+\gamma=p$ و $\alpha=p-a$ و $\beta=p-b$

$\gamma=p-c$ و $AK=p$ و $BK=p-c$

از تشابه دو مثلث OHB و O'KB نتیجه میشود :

$$\frac{OH}{BK}=\frac{BK}{O'K} \text{ یا } \frac{p}{p-c}=\frac{p-b}{r'} \text{ و}$$

$$rr'=(p-b)(p-c)$$

میدانیم که $S=pr$ و $S=(p-a)r'$

از ضرب طرفین این دو رابطه در یکدیگر :

$$S^2=rr'p(p-a)=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۲ـ تابع کسری $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ که در کتب درسی یا بهمین‌صورت مورد بحث واقع میشود که بعلت کثرت ضرائب بحث آن برای دانش‌آموزان مشکل و دیرفهم است و یا اینکه با مثالهای عددی ، انواع آن و خواص هر یك را بررسی میکنند ، طریقه اخیر گو اینکه آسان و قابل فهم است ولی بواسطه کثرت امثله ، دیگر جائی برای بحث در خواص کلی آن باقی نمیماند .

اگر محورهای مختصات را انتقال دهیم در روابط $(x=X+\alpha \text{ و } y=Y+\beta)$ میتوان α و β را بطریقی انتخاب کرد که پس از ساده کردن تابع فوق بصورت کلی

$Y=\frac{AX+B}{X^2+C}$ درآید که چون شماره پارامترها از شش به سه تقلیل پیدا کرده بحث درخواص آن بآسانی صورت میگیرد :

مشتق تابع عبارت میشود از $Y'=\frac{-A(X^2+\frac{2B}{A}-C)}{(X^2+C)^2}$

اولا $C>0$ باشد تابع در ازاء جمیع مقادیر x اتصالی و مشتق تابع دارای دو ریشه حقیقی است و تابع دارای یك ماکزیمم و یك می‌نیمم است و منحنی نمایش آن بآسانی رسم میشود .

ثانیاً اگر $C<0$ باشد تابع در ازاء دو مقدار از X منفصل بوده دارای دو مجانب قائم میباشد و برحسب اینکه مشتق دارای جواب باشد و یا ریشه نداشته باشد شکل منحنی مشخص میشود.

ثالثاً اگر $C=0$ باشد دو مجانب قائم منحنی بر محور Y ها منطبق شده و مشتق تابع هم در اینحال فقط یك جواب دارد .

رابعاً اگر $A=0$ باشد محور Y ها محور تقارن منحنی است و اگر $B=0$ باشد مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی خواهد بود .

خامساً تساویر نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع و تساویر نقاط تقاطع منحنی با خط $Y=K$ روی محور $X'X$ تقسیم توافقی تشکیل میدهند که با استفاده از روابط سور توافقی بآسانی اثبات میشود.

حل مسائل شماره اول

I. کلاسهای چهارم طبیعی و ریاضی

حل مسأله ۹ـ مطلوبست تعیین مقدار $\frac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}}$

در ازاء $x=2\pm\sqrt{3}$ ابتدا $x=2+\sqrt{3}$ را در نظر گرفته و خواهیم داشت :

$$\left[\frac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right]_{x=2+\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2-(2+\sqrt{3})+1}}$$

$$=\left[\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}\right]=\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{\frac{12+6\sqrt{3}}{2}}}=$$

$$\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{\frac{9+3+2\times3\times\sqrt{3}}{2}}}=\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+3)^2}{2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+3}{\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

و در ازاء $x=2-\sqrt{3}$ با محاسبات متشابه وباتوجه باینکه $\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}=|\sqrt{3}-3|=3-\sqrt{3}$ مقدار عبارت فوق برابر با $(-\sqrt{2})$ بدست خواهدآمد .

حل مسأله ۱۰ـ میدانیم جذر (وبطورکلی ریشه زوج) هرعدمثبت دو عدد قرینه میباشد مثلا جذر ٤ عبارت خواهد بود از ±2 و جذر x^2 برابرخواهد بود با $\pm x$ اما بنا بر قرار داد مقدار رادیکالی که فرجه‌اش عدد زوج باشد فقط مثبت میباشد مثلا مقدار $\sqrt{4}$ مساویست با $+2$ از اینجهت تساوی $\sqrt{x^2}=x$ فقط در ازاء مقادیر مثبت x صحیح است و در ازاء مقادیرمنفی x رابطه‌ایست نا درست و در حالت‌کلی چنین باید نوشت :

$$\boxed{\sqrt{x^2}=|x|}$$

وهمچنین دو رابطه دیگربصورت زیرباید نوشته شود

$$\sqrt{a^2-2a+1}=\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|$$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$$

حل مسئله ۱۴ـ تعداد تخم مرغهائی راکه تخم مرغ فروش داشته است به x مینماییم فروش اول وی برابر است با $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ و ماندهٔ دفعه‌اول برابرخواهد شد با : $x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x-1}{2}$. فروش‌دفعه‌دوم عبارتست‌از:

$$\frac{\frac{x-1}{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4}$$

و مانده دفعه دوم برابراست با :

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-3}{4}$$

فروش دفعه سوم مساوی خواهد بود با :

$$\frac{\frac{x-3}{4}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$$

و مانده دفعه سوم مساوی میشود با :

$$\frac{x-3}{4}-\frac{x+1}{8}=\frac{x-7}{8}$$

و چون بعد از فروش سوم دیگر تخم مرغی نداشته است پس $\frac{x-7}{8}=0$ بوده و در نتیجه $\boxed{x=7}$ میباشد

تمرین ـ مسأله را بدون استفاده از جبر وبااستدلال حل کنید.

II. چهارم ریاضی

حل مسأله ٦ـ داریم:

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2^{\frac{3}{3}}$$

$$\sqrt[7]{32}\times\sqrt{2}=\sqrt[7]{2^5}\times\sqrt{2}=2^{\frac{5}{7}}\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{17}{14}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[5]{2}}=2^{\frac{4}{3}}:2^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{17}{15}}$$

وکافیست سه کسر $\frac{3}{4}$ و $\frac{17}{14}$ و $\frac{17}{15}$ را بـا یکدیگر

حل مسأله ۷ـ رادیکالها را بصورت توان با نمای

کسری مینویسیم :

$$\frac{(\sqrt[5]{9})^3\times\sqrt[15]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt{12}}{(\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}})^2\times\sqrt[5]{27}\times\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{(3^{\frac{2}{5}})^3\,3^{\frac{1}{15}}\times3^{\frac{2}{3}}\times2\times3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{15}}\times3^{\frac{3}{5}}\times3^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{3^{\frac{6}{5}}\times3^{\frac{1}{15}}\times3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{2}}\times2}{3^{\frac{2}{15}}\times3^{\frac{3}{5}}\times3^{\frac{1}{2}}}=\frac{3^{\frac{73}{30}}\times2}{3^{\frac{37}{30}}}=$$

$$=2\times3^{\frac{36}{30}}=2\times3^{\frac{6}{5}}=2\times2\times3^{\frac{1}{5}}=6\sqrt[5]{3}$$

حل مسأله ۸ ـ برای گویا کردن مخرج کسر

$\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}$ از اتحاد

$(a+b)(a^2-ab+b)=a^3+b^3$ استفاده کرده صورت و مخرج را در $(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})$ ضرب مینمائیم .

$$\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}=\frac{(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})}{7+2=9}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{7^3}-\sqrt[3]{98}+\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{98}+\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{2^3}}{9}$$

$$=\frac{7-2\sqrt[3]{98}+2\sqrt[3]{28}-2}{9}=\frac{5-2\sqrt[3]{98}+2\sqrt[3]{28}}{9}$$

حل مسأله ۱۱ـ مطلوبست حل و بحث معادله‌های

a) $\frac{m}{x-2}=\frac{3m-1}{x+1}$

b) $\frac{x-a}{a-b}-\frac{x+a}{a+b}=\frac{2ax}{x^2-b^2}$

a) حل و بحث معادله اول : هر یك از عبارتهای $x-2$ و $x+1$ باید مخالف صفر باشد یعنی باید $x\neq2$ و $x\neq-1$ با این شرط مخرجها را حذف مینمائیم :

$$3mx-6m-x+2=mx+m$$

$$2mx-x=7m-2$$

$$x(2m-1)=7m-2$$

اولا اگر $2m-1=0$ یا $m=\frac{1}{2}$ باشد معادله بصورت متمنع $\frac{3}{2}=0$ درمیآید .

ثانیاً بفرض $m\neq\frac{1}{2}$ معادله ممکن بوده و :

$$x=\frac{7m-2}{2m-1}$$

اما این جواب وقتی قابل قبول است که مخالف با ۲ و ۱ـ باشد ؛

$m=0$ و $7m-2=4m-2$ یا $\frac{7m-2}{2m-1}=2$

$m=\frac{1}{3}$ و $7m-2=-2m+1$ یا $\frac{7m-2}{2m-1}=-1$

بنابراین جواب فوق وقتی قابل است که $m\neq0$ و $m\neq\frac{1}{3}$ باشد .

b) در معادله دوم باید $a-b\neq0$ و $a+b\neq0$ یعنی $a\neq\pm b$ باشد چنانچه مخرج را حذف نمائیم :

$$ax-a^2+bx-ab-ax-a+2bx+ab=2ax$$

یا

$$2ax-2bx=-2a^2$$

$$(b-a)x=a^2$$

و چون $b-a\neq0$ است پس معادله ممکن بوده و $x=\frac{a^2}{b-a}$ میباشد .

حل مسأله ۱۵ ـ میدانیم $\frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{a+c}$ و $\frac{1}{b+c}$ تساعد حسابی تشکیل میدهند میخواهیم ثابت کنیم a^2 و b^2 و c^2 نیز تساعد حسابی تشکیل میدهند، داریم :

$$\frac{2}{a+c}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}$$

پس از حذف مخرج و اختصار خواهیم داشت .

$$2b^2=a^2+c^2$$

یعنی a^2 و b^2 و c^2 سه جمله یك تساعد حسابی میباشند .

حل مسأله ۱۸ـ

$$\log(a^2-1)+\log(b^2-1)$$

$$-\log[(ab+1)^2-(a+b)^2]$$

$$=\log\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{(ab+1)^2-(a+b^2)}$$

$$=\log\frac{(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)}{(ab+1+a+b)(ab+1-a-b)}$$

$$=\log\frac{(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)}{(a+1)(b+1)(1-a)(1-b)}=\log1=0$$

حل مسأله ۱۹ـ

$$\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{2})+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})+$$

$$\frac{1}{2}\log(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$$

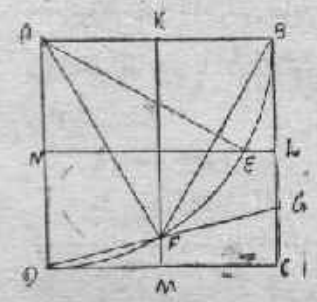
$$=\frac{1}{2}\log 2(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$$

$$=\frac{1}{2}\log 2(2+\sqrt{2})(4-2-\sqrt{2})=$$

$$\frac{1}{2}\log 2(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{2}\log 2(4-2)=\frac{1}{2}\log 4=\log\sqrt{4}=\log 2$$

حل مسأله ۲۲ـ درمربع ABCD بمرکز A و بشعاع AB ربع دایره‌ای رسم کرده‌ایم که خط NL و KM را در E و F قطع میکند.



۱ـ میخواهیم ثابت کنیم AE و AF زاویه A را به سه جزء متساوی تقسیم مینماید، KM عمود منصف AB است پس AF=BF و چون AB نیز مساوی با AF است پس مثلث ABF متساوی‌الاضلاع بوده و زاویه ABF برابر ۶۰° میباشد و اندازه زاویه DAF مساوی با ۳۰° میباشد و بهمین ترتیب ثابت میشود که مثلث ADE متساوی‌الاضلاع و زاویه BAE برابر با ۳۰° است در نتیجه اندازه هر یك از زاویه‌های BAE و EAF و FAD برابر با ۳۰° یا ثلث تمام زاویه A میباشد.

۲ـ از نقطه G مماس GB و قاطع GDF نسبت به ربع دایره رسم شده است پس $BG^2=GF\cdot GD$ و چون $DG=2FG$ پس $\overline{DG}^2=2\overline{BG}^2$ یا $\overline{BG}^2=\frac{1}{2}DG\cdot DG$

۳ـ درمثلث متساوی‌الاضلاع ABF بضلع a طول ارتفاع KF را حساب میکنیم:

$$\overline{KF}^2=\overline{AF}^2-\overline{AK}^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$$

$$KF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$FM=KM-KF=a-\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$$

در ذوزنقه ADGB خط KF که اوساط دوساق را بهم وصل کرده است مساویست با نصف مجموع دوقاعده.

$$KF=\frac{AD+BG}{2} \text{ یا } 2KF-AD=BG$$

$$BG=a\sqrt{3}-a=a(\sqrt{3}-1)$$

$$\overline{DG}^2=2\overline{BG}^2 \text{ یا } \overline{DG}^2=2a^2(\sqrt{3}-1)^2$$

$$DG=a(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}\quad DF=\frac{1}{2}DG=$$

$$\frac{1}{2}a(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}$$

۴ـ فرض میکنیم $\widehat{CDG}=\alpha$

$$\sin\alpha=\frac{MF}{OF}=\frac{\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})}{\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}=\dots=3\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

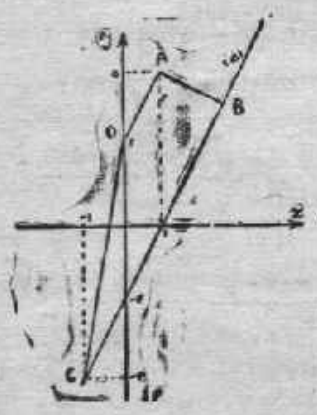
$$\cos\alpha=\frac{DM}{DF}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}=\dots=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\log\alpha=\frac{MF}{DM}=\dots=2-\sqrt{3}$$

$$\cot g\,\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

III ـ پنجم طبیعی و ریاضی

حل مسأله ۳۶ـ نقطه A (۱و۰) و خط Δ بمعادله $y=2x-2$ مفروض است.



۱ـ برای رسم خط داریم $x=0$ و $y=-2$ و $x=2$ و $y=0$

۲ـ از A خط AB عمود بر Δ رسم‌شده است ضریب زاویه خط AB عکس قرینه‌ضریب زاویه خط Δ است؛

$$m_\Delta=2 \text{ و } m_{\overline{AB}}=-\frac{1}{2}$$

معادله خط AB را با معلوم بودن مختصات یك نقطه و ضریب زاویه میفویسیم:

$$y-y_1=m(x-x_1) \text{ یا } y-0=-\frac{1}{2}(x-1)$$

$$(AB):\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$$

برای تعیین مختصات نقطه B معادلات دو خط Δ و AB را با هم حل مینمائیم:

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad 2x-2=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$$

$$B(x=3 \text{ و } y=4)$$

۳) خط AD بموازات خط Δ رسم‌شده است پس:

$$m_{AD}=m_\Delta=2$$

$(AD): y-5=2(x-1) \quad y=2x+3$

$D(x=0 \text{ و } y=3)$

۴) در معادله Δ مقدار x را برابر ۱ − اختیار نموده عرض نقطه C بدست میآید $C(x=-1 \text{ و } y=-4)$

معادله خط CD با معلوم بودن مختصات دو نقطه تعیین میشود

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{یا} \quad \frac{x+4}{x+1}=\frac{3+4}{0+1}=7$$

$(CD): y=7x+3$

۵) تعیین مساحت ذوزنقه $ABCD$

$$S=\frac{(BC+AD)AB}{2}$$

$$BC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

$AD=\sqrt{5}$ و $AB=\sqrt{5}$

$$S=\frac{1}{2}(4\sqrt{5}+\sqrt{5})\sqrt{5}=\frac{25}{2}$$ واحد سطح

حل مسأله ۳۷ ـ اثبات رابطه

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$$

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10-\sqrt{3}\sin 10}{\sin 10\cos 10}=$$

$$=\frac{\cos 10-tg 60\sin 10}{\sin 10\cos 10}=\frac{\cos 10-\frac{\sin 60}{\cos 60}\sin 10}{\sin 10\cos 10}=$$

$$=\frac{\cos 60^\circ\cos 10-\sin 60\sin 10}{\cos 60(\sin 10\cos 10)}=$$

$$=\frac{\cos(60+10)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 20\right)}=\frac{\cos 70}{\frac{1}{4}\sin 20}$$

وچون دو زاویه 70° و 20° متمم یکدیگرند پس :

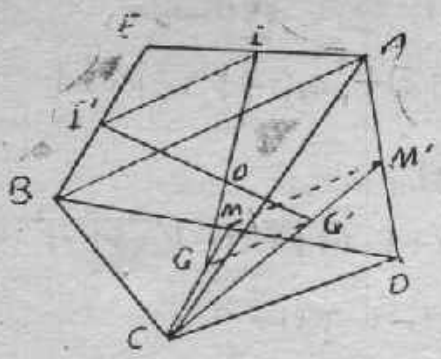
$\cos 70^\circ=\sin 20^\circ$ و

$$\frac{\cos 70}{\frac{1}{4}\sin 20}=\frac{4\cos 70}{\cos 70}=4$$

IV- پنجم ریاضی

حل مسأله ۴۱ـ پنج نقطه A و B و C و D و E غیر واقع در یك صفحه مفروض است وسط قطعه خطی که دو نقطه از این پنج نقطه را بیکدیگر وصل میکند به I و نقطه تلاقی میانه‌های مثلثی را که از سه نقطه دیگر تشکیل میشود به G نمایش میدهیم. چنانچه کلیه ترتیبهائی را که ممکن است اختیار نمائیم:

۱) چند خط امثال خطوط IG وجود دارد؟ در ازاء هر قطعه خطی که دو نقطه از پنج نقطه را بیکدیگر وصل میکند یك نقطه I (وسط همین قطعه خط) و یك نقطه G (مرکز ثقل میانهٔ حاصل از سه نقطه دیگر) وجود دارد بنابراین عده خطوط امثال IG برابر خواهد بود با تعداد قطعه خطهائی که نقاط را دو بدو بهم وصل میکند. از هر نقطه



ش۱

چهار قطعه خط به نقاط دیگر وصل میشود پس مجموعاً میشود 4×5 قطعه خط اما چون در این محاسبه هر قطعه خط دوبار حساب میشود (مثلاً AB یك بار مرسوم از A و یك بار مرسوم از B بحساب میآید) بنابراین قطعه خطهای واصل بین دو بدوی نقاط برابر خواهد بود با $\frac{4\times 5}{2}$ و در نتیجه تعداد خطهای امثال IG مساویست با ۱۰

۲) همه خطوط امثال IG از یك نقطه ثابت میگذرند؛ دو خط IG و IG' از امثال این خطوط را در نظر می گیریم برحسب اینکه دو قطعه خط شامل نقاط I و I' در یك نقطه مشترك باشند یا اصلا نقطه مشترکی نداشته باشند دو حالت در نظر میگیریم:

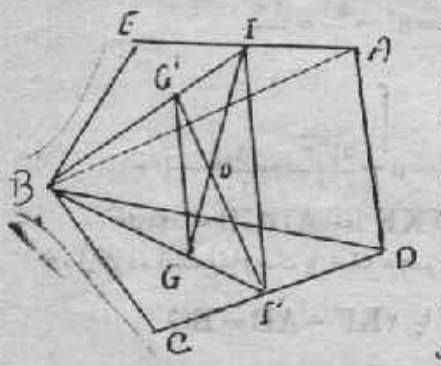
الف ـ I وسط AE و I' وسط CD باشد (دو قطعه خطی که نقطه مشترك ندارند ـ ش۱) در اینصورت G نقطه تلاقی میانه های مثلث BCD بوده از جمله متعلق بمیانه BI' میباشد و G' نقطه تلاقی میانه‌های مثلث ABE بوده متعلق بمیانه BI نیز میباشد و در مثلث BII' میتوانیم بنویسیم

$$\frac{BG}{BI'}=\frac{BG'}{BI}=\frac{2}{3}$$ و نتیجه خواهد شد که GG' با II' موازی و نسبت $\frac{GG'}{II'}$ نیز برابر با $\frac{2}{3}$ میباشد و از تشابه دو مثلث OGG' و OII' نتیجه خواهد شد که

$$\frac{OG}{OI}=\frac{OG'}{OI'}=\frac{2}{3}$$

و O بین نقاط I و G و همچنین I' و G' واقعست

ب ـ I و I' بترتیب اوساط AE و BE باشند (دو قطعه خطی که در یك نقطه مشترکند ش۲) در این صورت G مرکز ثقل مثلث BCD و متعلق بمیانه CM از این مثلث و G' مرکز ثقل مثلث ACD و متعلق بمیانه CM' این مثلث خواهد بود .



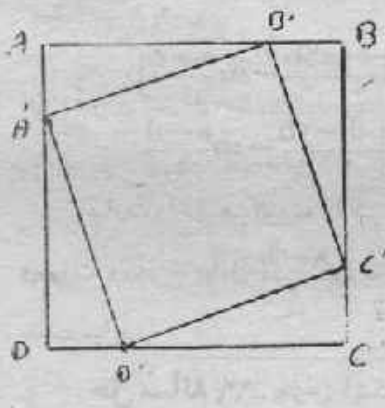
ش۲

در مثلث ABE قطعه خط II' موازی AB ومساوی با نصف آنست، از تشابه دو مثلث CGG' و CMM' نتیجه خواهد شد GG' با MM' موازی بوده و باندازه $\frac{2}{3}$ آن میباشد. در مثلث DBA قطعه خط MM' موازی AB و برابر با نصف آن میباشد و بالاخره نتیجه خواهد شد که G با II' موازی بوده و $\frac{GG'}{II'}=\frac{2}{3}$ و از تشابه دو مثلث OGG' و OII' بدست خواهد آمد:

$$\frac{OG}{OI}=\frac{OG'}{OI'}=\frac{2}{3}$$

و O بین دو نقطه I و G و نیز بین دو نقطه I' و G' واقعست بنابراین درهمه حالات خطوط امثال IG از نقطه ثابت O که آنها را به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم میکند میگذرند یا بعبارت دیگر ده قطعه خط امثال IG در یك نقطه متقاربند.

حل مسأله ۳۰ـ



در مربع بضلع a بتعداد نامحدود میتوانیم مربع محاط کنیم کدامیك از این مربعهای محاطی مساحتش می‌نیمم است.

فرض میکنیم: $AA'=x$ دراینصورت $AB'=a-x$ وخواهیم داشت:

$$x=A'B'=\sqrt{\overline{AA'}^2+\overline{AB'}^2}=\sqrt{x^2+(a-x)^2}$$

مساحت مربع A'B'C'D' وقتی می‌نیمم خواهد بود که طول ضلع آن یعنی مقدار y می‌نیمم باشد

$$y'=\frac{2x-a}{\sqrt{x^2+(a-x)^2}}$$

چون y' در ازاء $x=\frac{a}{2}$ صفرشده و از منفی به مثبت تغییر علامت میدهد و y تابعی است همواره معین و اتصالی لذا درازاء $x=\frac{a}{2}$ می‌نیمم میباشد پس ازبین مربعهائی که دریك مربع میتوان محاط نمود آنکه رأسهایش اوساط اضلاع مربع باشد مساحتش می‌نیمم خواهد بود.

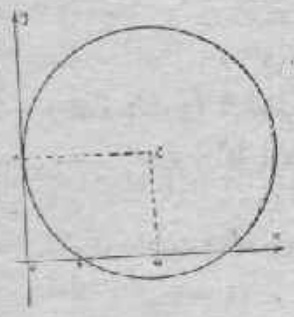
حل مسأله ۳۲ـ از بین مستطیلهای با مساحت معین (۶۴ آر) باید آنرا تعیین کنیم که اندازه محیطش می‌نیمم باشد. یك ضلع مستطیل را به x مینامیم ضلع دیگر آن عبارت خواهد شد از $\frac{64}{x}$ وچنانچه محیط مستطیل را به y بنامیم $y=2x+\frac{128}{x}$ و

$$y'=2-\frac{128}{x^2}=\frac{2(x^2-64)}{x^2}$$

مشتق تابع در ازاء $x=\pm 8$ تغییر علامت میدهد و چون x مثبت است و مشتق در ازاء $x=8$ از منفی به مثبت تغییر علامت میدهد لذا تابع در ازاء $x=8$ می‌نیمم باشد باین معنی که از بین مستطیلهای بامساحت ثابت آنکه دو بعدش بایکدیگر مساویست (مربع) دارای محیط می‌نیمم میباشد.

۷ـ کلاس ششم طبیعی

حل مسأله ۵۳ـ مطلوبست تعیین دایره‌ای که محور x'x را در نقطه بطول ۲ قطع کرده و در نقطه بعرض ۴ برمحور y'y مماس باشد.



اگر C(α و β) مرکز و R شعاع دایره باشد داریم:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

چون دایره در نقطه بطول ۲ محور x'x را قطع میکند بنابراین مختصات (۲ و ۰) در معادله دایره صدق خواهد کرد.

$$(2-\alpha)^2+\beta^2=R^2 \qquad (1)$$

دایره در نقطه بعرض ۴ برمحور y'y مماس است پس اولا مختصات نقطه (۴ و ۰) در معادله دایره صدق میکند.

$$\alpha^2+(4-\beta)^2=K^2 \qquad (2)$$

و ثانیاً شعاع نقطه تماس که بر y'y عمود است دارای معادله بصورت $y=4$ بوده و $\beta=4 \qquad (3)$

ازحل معادلات (۱) و (۲) و (۳) مقادیر $\alpha=5$ و $\beta=4$ و $R=5$ حاصل شده معادله دایره بصورت:

$$(x-5)^2+(y-4)^2=25 \qquad \text{یا}$$

$x^2+y^2-10x-8y+16=0$ حاصل میشود

VI ـ کلاس ششم ریاضی

حل مسأله ۶۱ـ تعیین معادله مماسهای مشترك منحنی‌های با معادله‌های:

$$x^2+y^2-6x+5=0 \quad \text{و} \quad x^2+y^2+1$$

اولاـ معلوم میکنیم که آیا دومنحنی نقطه مشترك دارند یا نه و آیا در نقطه مشترك بایکدیگر مماسند؟

از حل دستگاه:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-6x+5=0 \end{cases}$$

معلوم میشود که دو منحنی در نقطه ($x=1$ و $y=0$) مشترکند ومقدارمشتق هریك از دوتابع در ازاء $x=1$ برابر است با $\pm\infty$ بنابراین دومنحنی در نقطه مشترك با یکدیگر مماس بوده و خط بمعادله $x=1$ یك مماس مشترك آن ها می باشد.

ثانیاً اگرمعادله خطمماس‌مشترك‌را $y=ax+b$ فرض کنیم بایدهریك از دودستگاه

$$\mathrm{I}\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y=ax+b\end{cases}\qquad \mathrm{II}\begin{cases}x^2+y^2-6x+5=0\\ y=ax+b\end{cases}$$

دارای ریشه‌مضاعف باشد و ازدستگاه I نتیجه میشود

$$(a^2+1)x^2+2abx+b^2-1=0$$

$$\Delta'=a^2-b^2+1=0 \quad (1)$$

و از دستگاه II نتیجه میشود

$$(a^2+1)x^2+2(ab-3)x+b^2+5=0$$

$$\Delta'=5a^2+b^2+6ab-4=0$$

اکنون معادلات (۱)و (۲) را بایکدیگر حل مینمائیم

$$\begin{cases}a^2-b^2+1=0\\ 5a^2+b^2+6ab-4=0\end{cases}$$

از جمع طرفین دومعادله حاصل میشود

$$6a^2+6ab-3=0$$

$$2a(a+b)=1 \qquad (3)$$

و معادله (۱) رابصورت $(a+b)(a-b)=-1$ نوشته بین این معادله‌ومعادله (۳) مقدار $(a+b)$ را حذف میکنیم نتیجه خواهدشد $b=3a$ که چون‌دریکی‌ازمعادلات (۱) یا (۲)قرار دهیم‌جوابهای $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ و $b=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$ بدست میاید.

بنابراین دومنحنی توابع فوق‌دارای‌سه مماس‌مشترك‌بامعادله‌های

$$x=1 \text{ و } y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ و } y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

می‌باشند.

تبصره- تابع $x^2+y^2=1$ معادله‌دایره‌ایست‌بمرکز مبداء مختصات‌وبشعاع $R=1$وتابع $x^2+y^2-6x+5=0$ معادله دایره ایست‌بمرکز $C(3,0)$ وبشعاع $R'=2$ وباتوجه باینکه مماسهای مشترك دو دایره از مرکزهای تجانس مستقیم و معکوس‌آنها میگذرد میتوان معادله‌های مماس‌های مشترك را بدست آورد.

حل مساله ۶۵ - تعیین حد تابع زیر وقتیکه $a\to b$

$$y=\frac{\sin(a-b)+\sin(b-c)+\sin(c-a)}{\sin(a-b)+\sin(b-d)+\sin(d-a)}$$

در ازاء $a=b$ مقدار تابع‌عبارت خواهد شد از:

$$y=\frac{\sin(b-c)+\sin(c-b)}{\sin(b-d)+\sin(d-b)}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام با استفاده از دستور هوپیتال داریم

$$y_{a=b}=\left[\frac{a'\cos(a-b)-a'\cos(c-a)}{a'\cos(a-b)-a'\cos(d-a)}\right]_{a=b}=$$

$$=\frac{1-\cos(b-c)}{1-\cos(b-d)}$$

وچنانچه خواسته باشیم‌ازراه تجزیه وساده‌کردن رفع‌ابهام‌نمائیم

$$\sin(a-b)+\sin(c-a)=2\sin\frac{c-b}{3}\cos\frac{2a-b-c}{2}$$

$$\sin(b-c)=-\sin(c-b)=-2\sin\frac{c-b}{2}\cos\frac{c-b}{2}$$

$$\sin(a-b)+\sin(d-a)=2\sin\frac{d-b}{2}\cos\frac{2a-b-d}{2}$$

$$\sin(b-d)=-\sin(d-b)=-2\cos\frac{d-b}{2}\cos\frac{d-b}{2}$$

$$y=-\frac{\sin\frac{a-c}{2}\left[\cos\frac{a+c-2b}{2}-\cos\frac{a-c}{2}\right]}{\sin\frac{a-d}{2}\left[\cos\frac{a+d-2b}{2}-\cos\frac{a-d}{2}\right]}$$

عبارت داخل هر کروشه را نیز بحاصلضرب تبدیل‌مینمائیم وصورت ومخرج بعامل $\sin\frac{a-b}{2}$ ساده شده مقدار واقعی کسر بدست میاید

حل مسأله ۶۶- بفرض اینکه A وB وC زاویه‌های‌یك مثلث هستند ثابت کنیم که سه‌عبارت

$\sin^2A+\sin B\sin C\cos A$ و $\sin^2B+\sin C\sin A\cos B$

و $\sin^2A+\sin B\sin C\cos A$ متساویند

ثابت میکنیم که تفاضل هر دو عبارت ازسه عبارت فوق مساویست با صفر

$$d=\sin^2A+\sin B\sin C\cos A-\sin^2B+\sin C\sin A\cos B$$

$$=\sin^2A-\sin^2B+\sin C(\sin B\cos A-\sin A\cos B)$$

$$\sin^2A-\sin^2B=(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)=$$

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=$$

$$=\sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$=\sin C\sin(A-B)=-\sin C\sin(B-A) \quad \text{و}$$

$$\sin C(\sin B\cos A-\sin A\cos B)=\sin C\sin(B-A)$$

در نتیجه $d=0$ و بهمین‌ترتیب ثابت‌میشود که‌عبارت‌سوم هم با هریك از این دو عبارت مساویست.

حل مساله ۶۸ - اثبات اینکه معادله

$$\sin^2x-(2m+1)\sin x\cos x+m=0$$

عموماً دارای چهارجواب x_1 و x_2 و x_3 x_4 درفاصله (۰ و 2π) بوده ومقدار m را معلوم کنیم که داشته باشیم

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{3\pi}{2}+\mathrm{Arc}\,cotg\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

اولا معادله‌را برحسب $tg\,x$ مینویسیم.

$$(m+1)tg^2x-(2\sin+1)tg\,x+m=0$$

$$\Delta=(2m+1)^2-4m(m+1)=1$$

مبین معادله بستگی به m نداشته همواره مثبت است و بنابراین معادله همواره دارای دوجواب برای $tg\,x$ میباشد و برای x دودسته جواب بصورتهای $x=K\pi+x_1$ و $x=K'\pi+x_3$ وجود دارد ودر فاصله صفرو 2π چهارکمان x_1 و $x_1+\pi=x_3$ و x_2 و $x_2+\pi=x_4$ جوابهای معادله خواهند بود.

ثانیاً میتوانیم بنویسیم.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2x_1+2x_2+2\pi=$$

$$=\frac{3\pi}{2}+\mathrm{Arc}\,cotg\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$tg(2x_1+2x_2+2\pi)=tg(\frac{3\pi}{2}+\mathrm{Arc}\,cotg\frac{3-\sqrt{3}}{2})$$

$$tg(2x_1+2x_2+2\pi)=tg(2x_1+2x_2)=tg\,2(x_1+x_2)$$

$$tg(x_1+x_2)=\frac{tg\,x_1+tg\,x_2}{1-tg\,x_1\,tg\,x_2}=\frac{\frac{2m+1}{m+1}}{1-\frac{m}{m+1}}$$

$$tg(x_1+x_2)=2m+1\,(m\neq-1)$$

$$tg\,2(x_1+x_2)=\frac{2tg(x_1+x_2)}{1-tg^2(x_1+x_2)}=\frac{4m+2}{-4m^2-4m-2}$$

$$tg(\frac{3\pi}{2}+\mathrm{Arc}\,cotg\frac{3-\sqrt{3}}{2})=-cotg\,\mathrm{Arc}\,cotg=$$

$$-\frac{3-\sqrt{3}}{2}=-\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

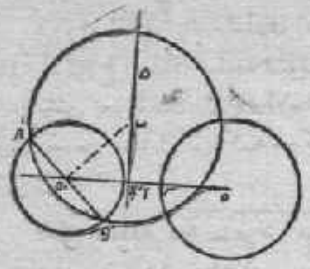
$$\frac{4m+2}{-4m^2-4m-2}=-\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

و از این رابطه مقدار m بدست خواهدآمد.

حل مسأله ۷۶ـ دو دایره (c) و (c') مفروض است مکان هندسی مراکز دوایری تعیین شود که بر دایره (c) عمود وبردایره (c') شبه عمود باشند.

مرکز دایره (c)را o و شعاع آنرا R و مرکز و شعاع دایره (c') را o' و R' و طول خط المرکزین oo' را a انتخاب میکنیم. فرض میکنیم دایره (γ) یکی از دوایری باشد که بر دایر (c) عمود و بردایره (c') شبه عمود باشد

چنانچه مرکز این دایره ω و شعاع آن r و K تصویر ω بر oo' و I وسط oo' باشد. قوت نقطه o' نسبت بدایره (γ) مساویست با $-R'^2$ و مساویست با $\overline{\omega o'}^2-r^2$. قوت نقطه o نسبت بدایره



(γ) مساویست با R^2 ومساویست با $\overline{\omega o}^2-r^2$ وخواهیم داشت:

$$\overline{\omega o'}^2-r^2=-R'^2 \text{ و } r^2=-\overline{\omega o'}^2+R'^2$$

$$\overline{\omega o}^2-r^2=R^2 \text{ و } r^2=\overline{\omega o}^2-R^2$$

$$\overline{\omega o}^2-R^2=\overline{\omega o'}^2+R'^2 \text{ و } \overline{\omega o}^2-\overline{\omega o'}^2=R'^2+R^2$$

و در مثلث $\omega oo'$ داریم $\overline{\omega o}^2-\overline{\omega o'}^2=\overline{2oo'}\times\overline{IK}$

$$\overline{2oo'}\times\overline{IK}=R^2+R'^2 \text{ و } \overline{IK}=\frac{R^2+R'^2}{2a}$$

نتیجه میشود K نقطه ثابت از oo' بوده وω بر خطی ثابت مانند Δ و عمود بر oo' قراردارد وبرعکس بآسانی ثابت میشود هردایره که مرکزش بر Δ واقع بوده بر دایره (c)عمود باشد بر دایره (c') شبه عمود خواهد بود. لذا خط Δ مکان هندسی مراکز دوایر امثال (γ) خواهد بود.

حل مسأله ۷۷ـ شکل حل مسأله ۷۶ را درنظرمیگیریم قوت نقطه o نسبت بهردایره مثل (γ) که بر دایره (c) عمود باشد برابر با R^2 و قوت نقطه o' نسبت بدوایر امثال (γ) برابر $-R'^2$ است پس خط oo' محور اصلی هر دو دایره امثال (γ) واین دوایریك دستگاه بامحور اصلی مشترك oo' تشکیل میدهند وچون نقطه o' داخل هر دایره مثل (γ) واقع میشود (چرا؟) لذا هر دایره مثل (γ) خط oo' را قطع می کند و میدانیم که اگر یکی از دوایر یك دستگاه دوایر محور اصلی دستگاه را درنقطه‌ای قطع کند همه دوایرآن دستگاه ازآن نقطه خواهند گذشت.

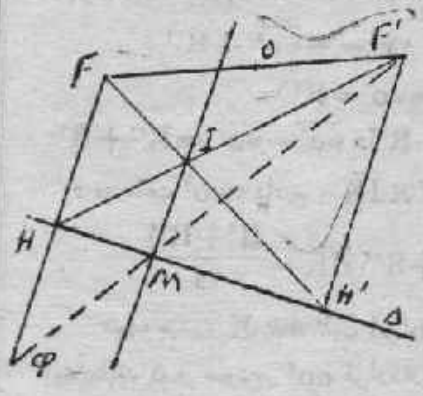
ترتیب مشابه ثابت خواهدشد همه دوایری که بردودایره شبه عمود باشند دستگاه دوایر تشکیل داده خط المرکزین دو دایره ثابت را در دو نقطه ثابت (خارج oo') قطع مینمایند.

حل مسأله ۷۹ـ اگردر یك دایره مثلثی را چنان محاط کنیم که مرکز ثقل آن بر مرکز دایره منطبق باشد این مثلث متساوی الاضلاع خواهد بود (چرا؟) تصویر دایره بر صفحه‌ای که با صفحه آن زاویه حاده بسازد. بیضی میباشد و اگر در دایره مثلث متساوی الاضلاعی محاط نموده باشیم تصویر آن مثلثی خواهد شد محاط در بیضی تصویر دایره که مرکز ثقل مثلث برمرکز بیضی منطبق است (تصویرمرکزثقل هر مثلث

مرکز ثقل مثلث تصویر آن مثلث خواهد بود)

وچون تصویر یك متساوی الاضلاع بریك صفحه وقتی مثلث متساوی‌الاضلاع است که صفحه تصویر با صفحهٔ مثلث موازی باشد لذا در بیضی بجز مثلث متساوی‌الاضلاع مثلثهای نوع دیگر را میتوان بقسمی محاط کرد که مرکز ثقل آنها بر مرکز بیضی منطبق باشد.

حل مسأله ۸۰ ـ فرض میکنیم F و F' کانونها و M یك نقطه از بیضی و Δ خط‌مماس بر بیضی دراین نقطه و H و H' تصویرهای F و F' بر Δ و I نقطه تلاقی FH' و F'H باشد باید ثابت کنیم IM قائم بر بیضی است.



F'M را رسم میکنیم امتداد FH را در نقطه‌ای مانند φ قطع میکند بنا بر خاصیت بیضی φ بر دایره هادی کانون F' واقع بوده وقرینه F نسبت به‌مماس Δ میباشد ازتشابه‌دومثلث MHφ و MH'F' نتیجه می‌شود:

$$\frac{MH}{MH'}=\frac{H\varphi}{H'F'} \qquad (1)$$

واز تشابه دو مثلث IFH و IF'H' نتیجه میشود:

$$\frac{IH}{IF'}=\frac{HF}{H'F'} \qquad (2)$$

از مقایسه تناسب‌های (۱) و (۲) و با توجه باین که $H\varphi=HF$ حاصل میشود:

$$\frac{IH}{IF'}=\frac{MH}{MH'}$$

و درنتیجه IM با H'F' موازی بوده بر Δ عمود و قائم بر بیضی میباشد.

VII ـ مسائل مختلف ریاضیات متوسطه

حل مسأله ۹۷ ـ تعیین مقدار عبارت

$$\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}$$

داریم $\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|$ و $\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|$

حالت اول ـ چنانچه $a>1$ باشد درینصورت $a-1>0$ و $a+1>0$ بود وداریم.

$$|a+1|=a+1 \quad و \quad |a-1|=a-1$$

$$\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}=a+1+a-1=2a$$

حالت دوم ـ اگر $a<-1$ باشد درینصورت $a+1<0$ و $a-1<0$ بوده و

$$|a+1|=-(a+1) \quad و \quad |a-1|=-(a-1)$$

$$\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}=-a-1-a+1=-2a$$

حالت سوم ـ اگر $-1<a<1$ باشد درینصورت $a-1<0$ و $a+1>0$ بود داریم:

$$|a+1|=a+1 \quad و \quad |a-1|=-(a-1)$$

$$\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}=a+1-a+1=2$$

حل مسأله ۱۰۳ ـ حل وبحث معادله:

$$\sqrt{x+\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{x-1}}=a \quad (1)$$

اولا حل معادله ـ طرفین معادله را بتوان ۲ برسانیم.

$$x+\sqrt{x-1}+x-\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-x+1}=a^2$$

$$2\sqrt{x^2-x+1}=a^2-2x \quad (2)$$

طرفین این معادله را نیزبتوان ۲ برسانیم.

$$4x^2-4x+4=a^4-4a^2x+4x^2$$

$$4(a-1)x=a^4-4 \quad و \quad x=\frac{a^4-4}{4(a^2-1)}$$

ثانیاً بحث معادله ـ رابطه (۱) وقتی ممکن است که نامساویهای زیر برقرار باشد.

$$x=1\geqslant 0 \ (3) \quad x+\sqrt{x-1}\geqslant 0 \ (4) \quad x-\sqrt{x-1}\geqslant 0$$

$$(5) \quad a\geqslant 0 \ (6)$$

برای اینکه رابطه (۲) برقرار باشد باید:

$$x^2-x-1\geqslant 0 \ (7) \quad و \quad a^2-2x\geqslant 0 \ (8)$$

اگر نامساوی (۳) برقرارباشد یعنی $x\geqslant 1$ نامساویهای (۴) و(۵) برقرارخواهد بود ونامساوی (۷) نیزدر ازاء جمیع مقادیر x برقرار است بنا براین شرایط قابل قبول بودن جواب عبارت میشود از:

$$\begin{cases} a\geqslant 0 \ (6) \\ x\geqslant 1 \ (3) \\ a^2-2x\geqslant 0 \ (8) \end{cases}$$

جوابی راکه از حل معادله برای x بدست آوردیم در نامعادله‌های اخیر قرار میدهیم:

$$\begin{cases} a\geqslant 0 \\ \dfrac{a^4-4}{4(a^2-1)}\geqslant 1 \\ a^2-\dfrac{a^4-4}{2(a^2-1)}\geqslant 0 \end{cases}$$

پس از ساده کردن نامعادله‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a\geqslant 0 \\ \dfrac{a^2(a^2-4)}{4(a^2-1)}\geqslant 0 \\ \dfrac{a^4-2a^2+4}{(a^2-1)}\geqslant 0 \end{cases}$$

سه جمله‌ای a^4-2a^2+4 در ازاء جمیع مقادیر a مثبت است بنابراین شرط برقراری نامعادله سوم از دستگاه

آنست که $a^2-1>0$ باشد و با این شرط ، شرط برقراری نامعادله دوم دستگاه عبارت خواهد شد از $a^2-4>0$ و لذا شرط کلی عبارت میشود از :

$$\begin{cases} a>0 \\ a^2-4> \end{cases}$$

ازنامعادله دوم معلوم میشود که $a>2$ یا $a<-2$ وچون $a>0$ است پس معادله (۱) وقتی دارای جواب قابل قبول خواهد خواهد بود که $\boxed{a>2}$

حل مسأله ۱۰۴ ـ تعیین مقادیر A و B و C برای اینکه :

$$\frac{1}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}=\frac{A}{\sin x}+\frac{B}{\cos x}+\frac{C}{\sin x+\cos x}$$

طرف دوم را تحویل بیك مخرج مینمائیم برابر خواهدشد با:

$$\frac{A\cos x(\sin x+\cos x)+B\sin x(\sin x+\cos x)+C\sin x\cos x}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}$$

و چون در طرفین اتحاد مخرجها مساویند پس باید صورتها متحدباشند و درضمن صورت کسر طرف دوم را بصورت زیرساده مینمائیم .

$$(A+B+C)\sin x\cos x+B\sin)x=A\cos^2 x=1$$

از تقسیم طرفین بر $\cos^2 x\neq 0$ و پس از اختصار نتیجه خواهد شد .

$$(B-1)tg^2 x+(A+B+C)tg x+(A-1)=0$$

و این اتحاد وقتی برقرار بود که :

$$\begin{cases} B-1=0 \\ A+B+C=0 \\ A-1=0 \end{cases}$$

در نتیجه $\boxed{c=-2 \text{ و } B=1 \text{ و } A=1}$

حل مسأله ۱۰۵ ـ تعیین تصاعد عددی که مجموع n جمله اولیه آن در ازاء جمیع مقادیر n برابر باشد با an^2+bn جمله اول این تصاعد را α و قدر نسبت آن را d فرض میکنیم مجموع n جمله از تصاعد برابر خواهدبود با :

$$\frac{n}{2}[2\alpha+(n-1)d] \text{ پس :}$$

$$\frac{n}{2}[2\alpha+(n-1)d]=an^2+bn$$

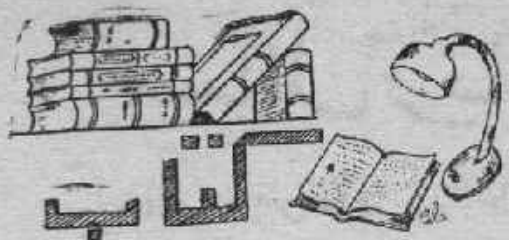
رابطه را نسبت به n مرتب مینمائیم :

$$(2a-d)n^2+(2b+d-2\alpha)n=0$$

باید داشته باشیم

$$\begin{cases} 2a-d=0 \\ 2b+d-2\alpha=0 \end{cases}$$

و نتیجه خواهد شد $d=2a$ و $d=a+b$



قابل توجه ناشران ومؤلفینـ کتابهای علمی ودریاضی که به کتابخانهٔ ماهنامهٔیکان واصل شود درمجله معرفی میگردد

معرفی کتابهای این ماه

***حل المسائل حساب استدلالی امتحانات نهائی**

شامل خلاصهٔ حساب ومسائل متفرقه

تألیف : ضیاء الدین جزایری

چاپ دوم ـ شامل مسائل امتحانات نهائی تا آخر شهریور ۱۳۴۲

کتابفروشی محمد حسن علمی

۲۰۰صفحه قطع جیبی ـ بهاء ۴۵ ریال

***حل المسائل جبر**ـ شامل :

۱ـ حل مسائل مختلف سال ششم ریاضی

۲ـ حل مسائل امتحانات نهائی سال ششم ریاضی

۳ـ حل مسائل کنکورها

تألیف : حسین بحرانی ـ محمد تقی زاوشی ـ مسعود محمدی

کتابفروشی زوار

۳۲۲ صفحه قطع وزیری ـ بهاء ۱۰۰ریال

از تألیفات آقایان : محمد باقر ازگمی ـ باقر امامی غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری

(مؤسسه چاپ وانتشارات امیر کبیر)

***حل مسائل جبر**ـ برای سال ششم ریاضی دبیرستانها

۵۱۲ صفحه قطع وزیری ـ بهاء ۱۵۰ریال

***حل مسائل حساب استدلالی**ـ برای: سال ششم ریاضی ـ دانشسرای مقدماتی ـ داوطلبان کنکور

۲۳۱صفحه قطع وزیری ـ بهاء ۷۰ ریال

***حل مسائل جبر**ـ برای سال چهارم دبیرستانها

۲۳۷ صفحه قطع وزیری ـ بهاء ۷۰ ریال

***حل مسائل هندسه**ـ برای سال چهارم ریاضی

۱۸۰صفحه قطع وزیری ـ بهاء ۵۵ ریال

***حل مسائل متمم حساب** ـ برای سال چهارم ریاضی دبیرستانها

۱۴۳صفحه قطع وزیری ـ بهاء ۴۵ریال

***حل مسائل حساب** ـ برای سال سوم دبیرستانها

۷۰صفحه قطع وزیری ـ بهاء ۲۵ریال

مسائل ریاضی برای حل

برای دانش آموزان دورهٔ دوم دبیرستان

(مهلت قبول حل این مسائل تا بیستم فروردین ۱۳۴۳ است)

I- چهارم طبیعی

۳۶۷- صحت تساوی زیر را ثابت کنید .

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1$$

طرح از آقای حبیب‌الله عبداللهی
(دبیر دبیرستانهای تهران)

۳۶۸- دستگاه دو معادله دومجهولی زیر مفروض است .

$$\begin{cases}(2m-1)x-(2m+1)y=0\\ x-y=\dfrac{2}{m-2}\end{cases}$$

۱) جوابهای x و y آنرا تعیین کنید .

۲) حدود m را تعیین کنید برای اینکه هردو جواب x و y مثبت باشند .

۳) بازاء چه مقادیر m هردو جواب x و y منفی هستند .

۴) بازاء چه مقادیر از m خواهیم داشت $x>y$

۳۶۹- دایره (O) بمرکز O و بشعاع R مفروض است و AB قطری از آن میباشد .

۱) دایره (O') بمرکز O' و بشعاع 2R را چنان رسم کنید که بر نقاط A و B بگذرد .

۲) طول OO' را برحسب R حساب کنید .

۳- امتداد OO' دایره (O') در دو نقطه C و D قطع میکند اگر C داخل دایره (O) واقع باشد :

الف - اندازه هریك از زاویه‌های ACD و ADC را تعیین کنید .

ب- نسبتهای مثلثاتی زاویه ADC را بدست آورید .

II- چهارم ریاضی

۳۷۰- تساوی زیر را ثابت کنید .

$$(5-3\sqrt{2})\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=7$$

حبیب‌الله عبداللهی

۳۷۱ - مطلوبست تعیین حاصلضرب زیر .

$$P=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

فرستنده علی‌اصغر شیعه بیگی
(دانشجوی دانشکده فنی)

۳۷۲- مطلوبست محاسبه $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ درازاء $x=\dfrac{4t}{t^2+4}$

۳۷۳- اولا مطلوبست حل و بحث دستگاه زیر :

$$\begin{cases}(m+1)x-2my=2m+4\\ (m-1)x-4my=2m+2\end{cases}$$

ثانیاً حدود m را چنان معلوم کنید که x و y جوابهای دستگاه در نامساوی زیر صدق کند .

$$\frac{x+y}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}>0$$

۳۷۴- خط d و دایره (O) ونقطه M مفروض است از نقطه M خطی رسم کنید که دایره (O) را در A و خط d را در B قطع کند بطوریکه $\frac{AM}{MB}=K$ باشد (بحث) .

محمد ولی شاه‌لو
(دبیر دبیرستان هدف ۱)

۳۷۵- اولا چهارضلعی ABCD را رسم کنید که در آن $\hat{D}=90^\circ$ و $\hat{C}=30^\circ$ و $AD=BC$ و طولهای AB و CD معلوم باشد .

ثانیاً - بفرض اینکه چهارضلعی رسم شده باشد . عمود منصفهای اضلاع AB و CD یکدیگر را در نقطه O قطع میکنند O را به A و B و C و D وصل میکنیم و اوساط اضلاع AB و CD را بترتیب K و H مینامیم .

۱) ثابت کنید دو زاویه KOB و DOH با یکدیگر برابرند .

۲) ثابت کنید هریك از دومثلث DOC و AOB متساوی‌الاضلاع میباشد .

۳) اگر $AB=2a$ و $CD=2b$ باشد مطلوبست محاسبهٔ مساحت چهار ضلعی برحسب a و b

محمد نعمت‌اللهی
(دانشجوی سال اول ریاضی)

۳۷۶- معادله زیر را حل کنید (تعداد جمله‌ها نامحدود است)

$$\log_8 x+(\log_8 x)^2+(\log_8 x)^3+\cdots\cdots=\frac{1}{2}$$

فرستنده محمدرضا قیمی
(سال چهارم ریاضی دبیرستان دارالفنون)

۳۷۷ـ مطلوبست حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log(x+3)+\operatorname{colog}\sqrt{y-3}=0{,}3103 \\ x-y=\log_2 64 \end{cases}$$

محمد ولی‌شاملو
(دبیر دبیرستان هدف)

۳۸۷ـ دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2^{y-1}=16^{x-1} \\ 3^{\frac{1}{x}}=9^{\frac{1}{z}} \\ \sqrt[x]{2^{y-3}}=\sqrt[2x]{8^{z-2}} \end{cases}$$

علی ملاحسینی
(دبیر دبیرستان خسروی خوی)

III ـ پنجم طبیعی

۳۷۹ـ صحت رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin 67{,}5^\circ+(\sqrt{2}-1)\cos 67{,}5^\circ}{\cos 67{,}5^\circ+(\sqrt{2}+1)\sin 67{,}5^\circ}=\sqrt{2}-1$$

فرستنده ـ علی ناهیاز صالحی
(سال پنجم ریاضی دبیرستان هدف۱)

۳۸۰ـ اولا معادله خطی را بنویسید که عرض از مبداء آن برابر با ٤ بوده برخط بمعادله $x+2y=1$ عمود باشد.

ثانیاً ـ معادله مماس بر منحنی (c) نمایش تابع $y=\frac{1}{2}x^2+2x+4$ را در نقطه برخورد آن با محور $y'y$ بنویسید.

ثالثاً ـ منحنی (c) وخط بمعادله $y=2x+4$ را در یکدستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

IV ـ پنجم ریاضی

۳۸۱ـ بفرض اینکه a و b و c ریشه‌های معادله درجه سوم $f(x)=0$ باشد ثابت کنید.

$$\frac{a}{f'(a)}+\frac{a}{f'(b)}+\frac{c}{f'(c)}=0$$

۳۸۲ـ ثابت کنید بین مشتق اول ومشتق دوم (y'' مشتق مشتق) وتابع:

$$y=\frac{\sin x+\sin nx+\sin(2n-1)x}{\cos x+\cos nx+\cos(2n-1)x}$$

رابطه $y''-2nyy'=0$ برقرار است.

محمد مخروق سعلوی
(دانشجوی سال اول دانشکده فنی)

۳۸۳ـ اولا تابع درجه دومی چنان تعیین کنید که منحنی (c) نمایش هندسی تابع $y=x^2+x$ را در نقطه بطول ۱ـ قطع کرده ودر مبداء مختصات با آن زاویه قائمه بسازد.

ثانیاً ـ منحنی‌های (c) و (c') نمایش هندسی دو تابع $y=x^2+x$ و $y=-x^2-x$ را در یکدستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

ثالثاً ـ برنیم محور ox نقطه p راچنان تعیین کنید که اگر از p مماسی باضریب زاویه کوچکتر از یك برمنحنی (c) و مماسی با ضریب زاویه بزرگتر از (۱ـ) برمنحنی (c') رسم کنیم تانژانت زاویه بین دومماس برابر باشد با $\frac{3}{4}$

۳۸۴ـ عبارت زیر را خلاصه کنید.

$$\frac{x^3}{2\sin^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{x}{y}\right)}+\frac{y^3}{2\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)}$$

فرستنده ـ علی شیعه بیگی
(دانشجوی سال اول دانشکده فنی)

۳۸۵ـ رابطه زیر را ثابت کنید

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cdots\cos\frac{7\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

فرستنده ـ علی ناهیاز صالحی
(سال پنجم ریاضی دبیرستان هدف۱)

۳۸۶ـ مکعب $ABCDA'B'C'D'$ که طول یال آن برابر $2a$ میباشد مفروض است اوساط یالهای AA' و $A'B'$ و $A'D'$ را بترتیب M و K و F مینامیم ثابت کنید:

۱ـ قطر $A'C$ برصفحه MKF عمود است.

۲ـ حجم و سطح کل هرمهای $A'MKF$ و $CMKF$ را برحسب a حساب کنید.

محمد ولی‌شاملو
(دبیر دبیرستان هدف)

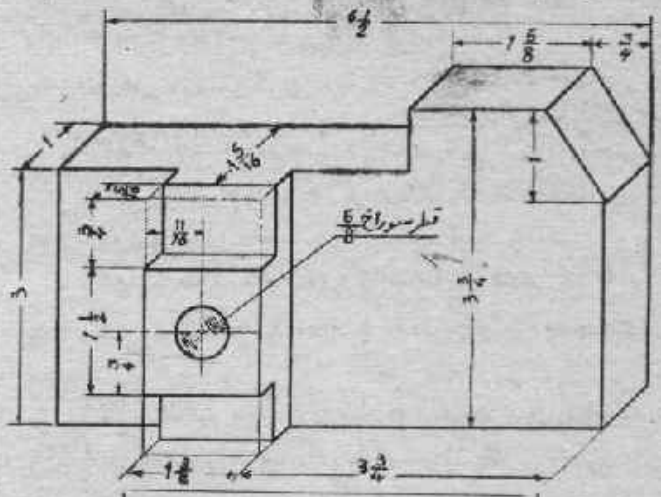
۳۸۷ طول قطر مکعبی برابر مقدار معلوم l است مکعب را رسم کنید.

شاملو

۳۸۸ـ روی دو خط متنافر (Δ) و (Δ') دو قطعه خط بطولهای ثابت $AB=l$ و $CD=l'$ می‌لغزند ثابت کنید حجم چهار وجهی‌های ABCD ثابت میباشد.

محمد علی شیخان
(دبیر دبیرستان دارالفنون)

۳۸۹- رسم‌فنی- مطلوبست رسم تصاویر (قائم-افقی و نیمرخ چپ) شکل زیر (واحد: اینچ = ۲۴ میلیمتر-مقیاس $\frac{1}{1}$)



V- ششم طبیعی

۳۹۰- مقدار m را چنان معلوم کنید که معادله:

$$(m-1)x^2+(2m-3)y^2-x+2my+m=0$$

معادله یك دایره باشد و پس از تعیین m مختصات مرکز و شعاع دایره را تعیین کرده آنرا رسم کنید.

۳۹۱- اولا معادله هذلولی را بنویسید که مجانب هایش یکدیگر را روی نیمساز ربع دوم قطع کرده یك رأسش (۱و۱) A و ضریب زاویه مجانب های آن $\pm\frac{3}{2}$ باشد ثانیاً هذلولی بمعادله $9x^2-4y^2+18x+8y-31=0$ را رسم کنید و مختصات کانونها و معادله مجانبهای آنرا تعیین نمائید.

۳۹۲- اولا در تابع $y=a\sin\pi x+b\cos\pi x+c$ ضرائب a و b و c را چنان معلوم کنید که در ازاء $x=\frac{1}{4}$ تابع دارای ماکزیمم یا مینیمی برابر با $\sqrt{2}$ بوده و منحنی نمایش تابع محور y'y را در نقطه بعرض ۱ قطع کند.

ثانیاً منحنی نمایش تابع $y=\sin\pi x+\cos\pi x$ را رسم کنید

VI- ششم ریاضی

۳۹۳- (جبر) - تابع $y=\frac{x^2-ax}{x+a}$ که در آن $a\neq 0$ نمایش پارامتری است مفروض است.

۱) بدون استفاده از مشتق ثابت کنید که تابع همواره دارای یك ماکسیمم و یك مینیمم است.

۲) اگر M' و M'' نقاط نظیر ماکسیمم و مینیمم تابع باشد تحقیق کنید که قطعه‌خط M'M'' همواره از مبداء مختصات بزاویه قائمه دیده میشود.

۳) مقدار a را بطریقی تعیین کنید که مرکز تقارن منحنی نظیر آن برخط بمعادله $y=x-2$ واقع شود.

۴)- منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-x}{x+1}$ را رسم نمائید.

۵)- مکان هندسی نقاطی از صفحه محورهای مختصات را تعیین کنید که از آنها بتوان دو مماس متعامد بر منحنی (C) رسم کرد.

طرح از: م. ا. کینی‌زاده
(ایمانسیه ریاضی- دبیر فرهنگ مسجدسلیمان)

۳۹۴- (جبر)- اولا تحقیق کنید که بازاء جمیع مقادیر m منحنی (C) نمایش هندسی تابع

$$y=\frac{-x-1}{(\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x+5})^m}$$

همواره از دو نقطه ثابت A و B که مختصات آنها را تعیین می کنید میگذرد. ثانیاً - ثابت کنید که خط AB بازاء جمیع مقادیر n بر منحنی (C') نمایش هندسی تابع $y=n^2x^2+(2m-1)x$ مماس شده و اگر مختصات نقطه تماس را (α و β) بنامیم n را چنان معلوم کنید که ۲ و β و α تشکیل یك تصاعد حسابی بدهند.

علی تاهباز صالحی
(سال پنجم ریاضی دبیرستان هدف)

۳۹۵- (مثلثات)- مطلوبست حل دستگاه زیر

$$\begin{cases}\frac{tgx}{cotgy}+\frac{tgy}{cotgx}+\sqrt{\frac{tgx}{cotgy}}+\sqrt{\frac{tgy}{cotgx}}=4\\ \sin x+\sin y=\sqrt{2}\end{cases}$$

سیدجعفر وفابخش
(ششم ریاضی دبیرستان علمیه تهران)

۳۹۶- (مثلثات)- صحت رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\frac{1}{8}$$

از کتاب Belvé فرستنده - محمد محروق علوی
(دانشجوی سال اول فنی)

۳۹۷- (حساب)- در قسمتی از خیابان بطول ۸۰ متر تعدادی اتومبیل جیپ و کامیون پارك کرده‌اند اگر فاصله دو اتومبیل ۰/۵ متر و طول یك جیپ ۲ متر و طول یك کامیون ۳ متر فرض شود تعداد جیپ‌ها و کامیون‌ها چه اعدادی میتواند باشد.

طرح از: علی ملاحسینی
(دبیر دبیرستان خسروقد خوی)

۳۹۸- (حساب)- عددی سه رقمی در مبنای ده بصورت $\overline{aaa}$ چنان تعیین کنید که ارقامش در مبنای ۷ سه عدد صحیح متوالی باشد.

طرح: علی ملاحسینی-خوی

۳۹۹- (حساب)- مجموع عددی با مقلوبش که در مبنای ۸ با سه رقم نوشته شده برابر همان عدد است که در مبنای اعشاری با همان ارقام نوشته میشود:

این عددرا پیدا کنید $(\overline{abc})_8+(\overline{cba})_8=(\overline{abc})_{10}$.

طرح از م. ا. گیتی‌زاده
(دبیر فرهنگ مسجد سلیمان)

۴۰۰ـ (هندسه)ـ در دایره $C(O,R)$ دو قطر عمود بر هم AB و IJ را رسم میکنیم از I خطی رسم میکنیم که AB را در M و دایره (C) را در N قطع میکند ثابت کنید جمیع دوایری که بر M و N میگذرند بر دایره بمرکز I و شبه‌عمود بر دایره (C) عمود میباشند. (M.B.)

۴۰۱ـ (هندسه)ـ خط Δ و نقطه A واقع درخارج آن مفروض است دو نقطه دلخواه P و Q بر Δ انتخاب میکنیم و عمودهای Px و Qy را بر Δ اخراج مینمائیم اگر O تصویر A بر Δ و I وسط AO باشد خط PI خطوط AQ و Qy را بترتیب در M' و N' و خط QI خطوط AP و Px را بترتیب در نقاط M و N قطع می‌کند:

۱) ثابت کنید که تقسیم های (N' و I و M' و P) و (N و I و M و Q) توافقی است.

۲) ثابت کنید که نقاط N و A و N' بر یك استقامت واقعند

۳) ثابت کنید که MM' همواره از نقطه ثابتی میگذرد؛ (M.B.)

۴۰۲ـ (مخروطات)ـ سهمی با کانون F و خط هادی (D) مفروض است خط متغیر Δ از F گذشته و سهمی را درنقاط M و M' قطع میکند ثابت کنید مکان هندسی نقطه J وسط MM' یك سهمی است. (M.B.)

۴۰۳ـ (هندسه رقومی)ـ خط a,b را که $ab=6$ میباشد در نظر می‌گیریم:

۱) مثلث abc واقع در یك صفحه قائم را با فرض $\hat{C}=90^\circ$ وضلع $aC=3$ رسم ورقوم رأس C را تا ۰/۱ تقریب تعیین نمائید.

۲) مثلث مزبور قاعده منشور قائمی است که طول یال جانبی آن ۳ میباشد ملخص منشور را رسم کنید.

۳) صفحه قائم فوق‌الذکر را حول خط ab باندازه 90° در یکجهت دوران میدهیم وضع جدید مثلث و منشور را مشخص نمائید.

طرح از: م. ا. گیتی‌زاده لیسانسیه ریاضی
(دبیر دبیرستانهای مسجدسلیمان)

۴۰۴ـ (رقومی) نقطه S_0 را درفاصله ۶ سانتیمتری صفحه قائم (V) انتخاب کنید تصویر رقومی چهاروجهی منتظم $S.ABC$ را طوری رسم کنید که مثلث ABC درروی صفحه قائم (V) قرار گیرد وشیب AB برابر $\frac{1}{2}$ باشد

مسعود محمدی
(دبیر دبیرستانهای تهران)

۴۰۵ـ (رقومی)ـ منبای شیب صفحه P را که باصفحه مقایسه زاویه 60° تشکیل میدهد سمت چپ وکنار کاغذ طوری رسم کنید که افقیه رقوم صفر آن منطبق برمحور اقصر کاغذ بوده و ترقی رقوم از بالا بپائین باشد. نقطه s_0 در روی محور اطول کاغذ بعرض ٤ قرار گرفته است. مطلوبست رسم تصویر رقومی هرم منتظم $S.ABC$ که در رأس s_0 کنج سه قائمه داشته و شیب AB برابر $\frac{1}{3}$ و مثلث ABC درصفحه P واقع باشد.

مسعود محمدی
(دبیر دبیرستانهای تهران)

۴۰۶ـ (ترسیمی)ـ ملخص خط DD' و صفحه $P\alpha Q'$ را با معلومات زیر رسم کنید:

DD' در نقطه معین oo' با خط زمین متقاطع است. تصویر افقی خط D معلوم است خط oo' درنقطه‌ای مانند H بر صفحه $P\alpha Q'$ عمود بوده فاصله H تا خط زمین معلوم است.

چند مسأله از کتاب

حل المسائل الجبریه

تألیف ـ محمدرضای مهندس

چاپ ۱۳۴۲ قمری ـ تهران

۴۰۷ـ تازی خرگوشی را عقب کرد درصورتیکه خرگوش ۵۰ خیز جلو بود. تازی ۵ خیز برمیداشت در زمانیکه خرگوش ٦ خیز ولکن ۲ خیز تازی برابر بود با ۷ خیز خرگوش. پس معلوم کنید که خرگوش چند خیز برخواهد داشت تا وقتیکه اسیر چنگال تازی شود.

۴۰۸ـ تاج هیرون سلطان سیراکوز بوزن ۲۰ لیور فرانسه بود. ارشمیدس مهندس معلوم کرد که $1\frac{1}{4}$ ازوزنش درآب کم میشود و چنان حدس زد که زرگر قدری نقره ترکیب آن کرده. وزن مخصوص طلا این است: ۱۹/٦٤ ونقره: ۱۰/۵ معلوم کنید که چه قدر طلا ونقره درآن تاج ترکیب بود.

۴۰۹ـ دونفر دهقانی، دوسبد تخم مرغ ببازار بردند. هر دو روبهم ۱٤۰ عدد تخم مرغ داشتند و هردو یك قیمت فروختند. اولی بدومی گفت که هرگاه من بقدر تخم مرغهای تورا داشتم و بقیمت مال خودم میفروختم ۳۰ شاهی عایدم میشد. دومی گفت بلی اگرمن نیز تخم مرغهای تورا داشتم و بقیمت مال خودم میفروختم مبلغ ۵۳ شاهی و ٤ دینار بیشتر مداخل می کردم پس هریك از این دونفر چند عدد تخم مرغ داشتند.

۴۱۰ـ مطلوبست اصلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که مساحتش برحسب عدد برابر باشد با محیطش.

۴۱۱ـ مطلوبست تعیین دوعدد که تفاضلشان برابر باشد با تفاضل دو مکعب آنها.

۴۱۲ـ شخصی چندعدد نارنج را بمبلغ ۱٦٤/٦٤ فرانك خرید وآنها را در چند عدد سبد ریخت که در هریك ازآنها بقدر عدد سبدها نارنج بود و قیمت هر نارنجی بقدر دوبرابر عدد سبدها بسانتیم (یکصدم فرانك) بود پس معلوم کنید عدد سبدها و نارنجها چقدر بوده است.

۴۱۳ـ چهار عدد معلوم کنید که مجموعشان a باشد و مجموع مربعاتشان b و مجموع مکعباتشان c و مجموع قوای چهارمشان d.

۴۱۴ـ مطلوبست عدد صحیح N که مساوی باشد بامجموع مقسوم‌علیهایش.

۴۱۵ـ دوعدد صحیح مطلوبست که معکوساً برابر باشند با مجموع مقسوم‌علیهایشان (این دوعدد را متحابه خوانند).

ریاضیات متوسطه

برای فارغ التحصیلان دبیرستان و داوطلبان ورود بدانشگاه

(قابل استفاده برای دانش آموزان دبیرستانها)

عبارت جبری متحد با صفر ـ دو عبارت جبری متحد ـ موارد استعمال در حل مسائل

اگر عبارت جبری $f(x)$ بازاء جمیع مقادیر x برابر با صفر گردد میگوئیم $f(x)$ متحدباصفر بوده و چنین مینویسیم:

$$f(x)\equiv 0$$

فرض کنیم $f(x)$ چند جمله‌ای صحیح نسبت به x باشد (یا اینکه بتوان آنرا بصورت چندجمله‌ای صحیح درآورد) :

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+l$$

اگرضرائب چند جمله‌ای همه مساوی باصفرباشند (l را ضریب جمله درجه صفرمیگیریم) یعنی :

$$a=b=\dots=l=0$$

مسلم است که $f(x)$ بازاء جمیع مقادیر x برابر باصفر خواهد بود برعکس اگر $f(x)$ در ازاء همه مقادیر x مساوی باصفرباشد بازاء $x=0$ هم مساوی با صفر بوده وخواهیم داشت

$$ax^n+bx^{n-1}+\dots+kx=0 \quad \text{و} \quad l=0$$

یا

$$ax^{n-1}+bx^{n-2}+\dots+k=0$$

و این چند جمله‌ای هم بازاء جمیع مقادیر x منجمله $x=0$ برابربا صفربوده ودر نتیجه $k=0$. وبهمین ترتیب نتیجه میشودکه : $a=b=\dots=k=l=0$

پس :

شرط لازم وکافی برای آنکه یك چند جمله‌ای متحدبا صفر باشدآنست که جمیع ضرائب آن مساوی با صفر باشند .

در عمل برای اینکه ثابت کنیم یك چندجمله‌ای متحد با صفر است ضرائب آنرا مساوی با صفرقرار میدهیم لازم است که دستگاه معادلات حاصل ممکن باشد و چنانچه ضرائب پارامتری باشند از حل این دستگاه پارامترها را معلوم میکنیم

مثال ۱ـ عبارت :

$$(p-2q+3)x^2-(2p+q-14)x+q-4$$

بازاء $p=5$ و $q=4$ متحدبا صفراست زیرا درازاء این مقادیر p و q ضرائب مساوی با صفرمیباشند .

مثال ۲ـ بازاءچه مقادیری از a و b و c چندجمله‌ای زیر بازاء جمیع مقادیر m مساوی با صفر میگردد :

$$m^2(m-2)a+(m^3-m^2+1)b+(m^3+m+2)c+m^2+m+1$$

ابتدا چند جمله‌ایرا نسبت به m مرتب میکنیم :

$$(a+b+c)m^3-(2a+b-1)m^2+(c+1)m+b+2c+1$$

وباید داشته باشیم :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b-1=0 \\ c+1=0 \\ b+2c+1=0 \end{cases}$$

از سه معادله اول دستگاه نتیجه میشود .

$$a=0 \quad \text{و} \quad b=1 \quad \text{و} \quad c=-1$$

وچون این مقادیر درمعادله سوم هم صدق میکنند پس بازاء آنها چند جمله‌ای متحد باصفر میباشد .

یادآوری ـ میگوئیم دستگاه چهار معادله سه مجهولی بالا متوافق (ممکن) است .

مثال ۳ ـ برای x و y مقادیری نمیتوان یافت که بازاء آنها داشته باشیم :

$$(x-y)a^2+2ax-x+2y-1\equiv 0$$

چون اگرضرائبرا مساوی صفرقراردهیم :

$$\begin{cases} x-y=0 \\ +2x=0 \\ -2x+2y-1=0 \end{cases}$$

از دومعادله اول ودوم نتیجه میشود $x=y=0$ اما این مقادیردرمعادله سوم صدق نمیکند پس دستگاه سه معادله دومجهولی بالاممکن نبوده (متوافق نبوده) واتحاد مفروض برقرارنیست .

دو عبارت جبری متحد

۲ ـ میگوئیم عبارت جبری $f(x)$ باعبارت جبری $g(x)$ متحداست $[f(x)\equiv g(x)]$ وقتی که تساوی $f(x)=g(x)$ بازاء جمیع مقادیر x برقرارباشد (دراینحالت هریك از دوعبارت $f(x)$ و $g(x)$ رامیتوان ازیکدیگر بدست آورد) .

اگر دوعبارت فوق دوچند جمله‌ای صحیح باشند (یا بتوان آنها را بصورت دوچند جمله‌ای صحیح درآورد) ومتحد باشند :

$$ax^n+bx^{n-1}+\cdots+l\equiv a'x^n+b'x^{n-1}+\cdots+l'$$

میتوانیم بنویسیم :

$$(a-a')x^n+(b-b')x^{n-1}+\cdots+(l-l')=0$$

و این اتحاد وقتی برقرار است که :

$$a-a'=b-b'=\cdots=l-l'=0$$

یا $\boxed{a=a' \text{ و } b=b' \text{ و } \cdots \text{ و } l=l'}$

پس : شرط لازم وکافی برای آنکه دو چند جمله‌ای صحیح (نسبت بیکحرف) با یکدیگر متحد باشند آنست که ضرائب جمله‌های همدرجه دوچند جمله‌ای نظیر بنظیر با یکدیگر مساوی باشند .

مثال ـ بازاء چه مقادیری از α و β تساوی زیر نسبت به x یك اتحاد است .

$$(\alpha+\beta)x^3+(\alpha-2\beta)x^2+(3\alpha+1)x-7\alpha=3x^3+7x-14$$

باید داشته باشیم :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha-2\beta=0\\ 3\alpha+1=7\\ -7\alpha=-14\end{cases}$$

دستگاه چهارمعادله ممکن بوده ونتیجه میشود :

$$\alpha=2 \text{ و } \beta=1$$

نمونه‌هائی از موارد استعمال در حل مسائل

۴۱۶ـ بازاء چه مقادیری از a و b عبارت ax^3+bx^2+3x+9 بر x^2+3 بخش پذیراست .

برای اینکه عبارتی مانند $f(x)$ برعبارت دیگری مانند $g(x)$ قابل قسمت باشد :

یا: لازم وکافیست که عبارت دیگری مانند $q(x)$ بیابیم که $f(x)=g(x)\cdot q(x)$

و یا : باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ که آنرا $R(x)$ مینامیم متحد باصفر باشد $R\equiv 0$ پس مسئله را از دو راه میتوانیم عمل کنیم .

راه اول ـ مقسوم از درجه سوم ومقسوم علیه از درجه دوم است پس خارج قسمت بناچار ازدرجه اول بوده و آنرا بصورت $mx+n$ فرض میکنیم وباید داشته باشیم :

$$ax^3+bx^2+3x+9=(x^2+3)(mx+n)$$

یا

$$ax^3+bx^2+3x+9=mx^3+nx^2+3mx+3n$$

و شرط لازم وکافی عبارتست از :

$$\begin{cases}a=m\\ b=n\\ 3=3m\\ 9=3n\end{cases}$$

و نتیجه میشود $a=1$ و $b=3$

ودر ضمن خارج قسمت هم برابر با $x+3$ بدست میآید.

راه دوم ـ چون ax^3+bx^2+3x+9 را بر x^2+3 تقسیم کنیم باقیمانده تقسیم میشود

$$R(x)=(3-3a)x-3b+9$$

و این عبارت وقتی متحد باصفر است که :

$$\begin{cases}3-3a=0\\ -3b+9=0\end{cases}$$

ویا $a=1$ $b=3$

۴۱۷ـ بفرض اینکه مجموع دوجواب از معادله :

$$3x^4-10x^3-6x^2+11x+6=0 \quad (1)$$

برابر با ۳ باشد معادله را حل نمائید .

حل ـ اگر دوجواب معادله‌را به x_1 و x_2 نمایش دهیم عبارت معادله (۱) بر $x-x_1$ و $x-x_2$ و در نتیجه بر $(x-x_1)(x-x_2)$ بخش‌پذیر خواهدبود چنانچه $x_1x_2=q$ اختیار نمائیم با توجه باینکه $x+x_2=3$ داریم .

$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-3x+q$ (۲) و مسأله مربوط میشود باینکه‌مقدار q را چنان معلوم کنیم که عبارت معادله(۱) بر سه‌جمله‌ای (۲) قابل‌قسمت باشد و مانند مساله قبل‌عمل‌نموده $q=-2$ بدست میآید ودر نتیجه .

$$3x^4-10x^3-6x^2+11x+6=$$
$$(x^2-3x-2)(3x^2-x-3)=0$$

و $x=\frac{1\pm\sqrt{27}}{6}$ و $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

۴۱۸ـ کسر $\frac{4x}{x^2-1}$ را بکسرهای ساده تجزیه کنید .

(مقصود از تجزیه کسر ، بدست‌آوردن چندکسر ساده‌تر است که چون بین آنها مخرج‌مشترك بگیریم کسر اول حاصل‌شود. مبحث تجزیه کسر منفصل بوده وقواعد معینی دارد در اینجا فقط یك‌مثال ساده‌آن برای نمونه حل میشود) .

مخرج کسررا بحاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه میکنیم $x^2-1=(x+1)(x-1)$ ومیتوانیم کسررا بصورت‌مجموع دوکسر بصورت زیر بنویسیم .

$$\frac{x4}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

طرف دوم را تحول بیك‌مخرج مینمائیم .

$$\frac{4x}{x^2-1}=\frac{(A+B)x-A+B}{x^2-1}$$

این تساوی باید نسبت به x اتحاد باشد وچون مخرج‌ها مساویند پس :

$$4x=(A+B)x-A+B$$

وباید داشته باشیم

$$\begin{cases}A+B=4\\-A+B=0\end{cases}$$

ویا $A=B=2$ و درنتیجه :

$$\frac{4x}{x^2-1}=\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}$$

۴۱۹ـ درصورتیکه معادله $ax^3+bx^2+cx+d=0$ دارای سه جواب x_1 و x_2 و x_3 باشد روابط بین ریشه‌ها و ضرایب را تعیین کنید .

وقتیکه معادلهٔ فوق‌دارای سه ریشه باشد میتوانیم بنویسیم

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

طرف دوم را بصورت چند جمله‌ای مینویسیم

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+$$
$$a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-ax_1x_2x_3$$

و این تساوی نسبت به x یك اتحاد است پس:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}\\x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

تبصرهـ بهمین ترتیب میتوان روابط بین ریشه ها و هرمعادله را بدست آورد مثلا در معادله :

$$ax^n+bx^{n-1}+\dots+l=0$$

حاصلضرب ریشه‌ها برابراست با: $\pm\dfrac{l}{a}$

۴۲۰ـ مقادیر m و p را معلوم کنید برای اینکه کسر $\dfrac{4x^2+mx+p}{2x^2+3x+6}$ بازاء جمیع مقادیر x مساوی مقدار ثابتی باشد .

راه اولـ صورت و مخرج همدرجه هستند بنابراین کافیست که صورت برمخرج کسر قابل قسمت باشد و مانند مسئله (۴۱۶) عمل میکنیم.

راه دومـ فرض میکنیم که مقدار ثابت مساوی با K باشد باید که :

$$\frac{4x^2+mx+p}{2x^2+3x+6}=K$$

و یا: $4x^2+mx+p=2Kx^2+3Kx+6K$

وباید داشته باشیم:

$$\begin{cases}4=2K\\m=3K\\P=6K\end{cases}$$

و نتیجه میشود $m=6$ و $P=12$ و در ضمن $K=2$

تبصرهـ بطورکلی برای اینکه کسر :

$$\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots+l}{a'x^n+b'x^{n-1}+\dots+l'}$$

بازاء جمیع مقادیر x برابر مقدارثابت باشد باید که:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\dots\dots=\frac{l}{l'}$$

و همین شرط باید برقرار باشد برای اینکه دو معادله $ax^n+bx^{n-1}+\dots+l=0$ و $a'x^n+b'x^{n-1}+\dots+l'=0$ در همهٔ ریشه‌ها مشترك باشند.

راه‌سومـ فرض‌میکنیم $y=\dfrac{4x^2+mx+p}{2x^2+3x+6}$ ، این تابع وقتی همواره برابربا مقدار ثابت است که مشتق آن متحد با صفر باشد،

$$y'=\frac{2(6-m)x^2-4(p-12)x+6m-3p}{(2x'+3x+6)^2}=0$$

وباید که:

$$\begin{cases}6-m=0\\p-12=0\\6m-3p=0\end{cases}$$

دستگاه ممکن بوده ونتیجه میشود $p=12$ و $m=6$

۴۲۱ـ λ را برحسب m معلوم کنید که حاصلضرب دو ریشه‌معادله $(m-y)x^2-(2-my)x+\lambda-my=0$ بستگی به مقدار y نداشته باشد .

$$x'x''=\frac{\lambda-my}{m-y}$$

این کسر وقتی بمقدار y بستگی ندارد که مساوی مقدار ثابتی (مستقل از y) باشد و مانند مسئله قبل حل میشود و نتیجه خواهد شد $(\lambda=m^2)$

تبصرهـ برای اینکه کسر فوق بستگی به y نداشته باشد کافی است که ریشه مخرج (نسبت به y) درصورت صدق نماید، ریشه مخرج $y=m$ است ووقتی درصورت صدق میکند که $\lambda=m^2$ باشد .

۴۲۲ـ بازاء چه‌مقادیر a نمایش هندسی تابع $y=\dfrac{x^2-ax+2}{x-2}$ خط مستقیم است :

راه اول ـ معادله خط مستقیم از درجه اول است وچون در این تابع اختلاف درجه صورت ومخرج یك است اگرصورت برمخرج قابل قسمت باشد تابع خطی خواهد بود و مانندمسئله (۴۱۶) عمل میکنیم:

تبصره ـ میدانیم که $f(x)=x^2-ax+2$ وقتی بر $x-2$ بخش پذیر است که $R=f(2)=0$ باشد.

$$f(2)=4-2a+2=0 \text{ و } a=3$$

راه دوم ـ اگرمعادله خط مستقیم رابصورت : $y=mx+h$ بنویسیم باید بتوانیم a و m و h را چنان

معلوم کنیم که $\frac{x^2-ax+2}{x-2}=mx+h$

یا $x^2-ax+2=mx^2+(h-2m)x-2h$

و باید که
$$\begin{cases} m=1 \\ h-2m=-a \\ -2h=2 \end{cases}$$

نتیجه خواهدشد $a=3$ و $m=1$ و $h=-1$ ودرضمن معادله خط مستقیم مطلوب هم بدست‌آمد $y=x-1$

راه سوم- برای اینکه تابع درجه اول باشد باید مشتق آن مساوی مقدار ثابت باشد:

ثابت $=y'=\frac{x^2-4x+2a-2}{(x-2)^2}$ ورجوع میشود به‌مسئله (۴۲۰)

۴۲۳- تحقیق کنید که منحنی‌های نمایش توابع $y=\frac{x^2-mx+1}{2x-m}$ بازاء جمیع مقادیر m از دو نقطه ثابت که مختصات آنها را معلوم خواهید کرد میگذرند.

تابع را نسبت به m مرتب میکنیم

$$m(x-y)-x^2+2xy-1=0$$

مختصات نقاط ثابت باید بازاء جمیع مقادیر m در این معادله صدق کنند پس این تساوی باید نسبت به m اتحاد باشد

پس:
$$\begin{cases} x-x=0 \\ -x^2+2xy-1=0 \end{cases}$$

و درنتیجه $x=\pm 1$ و $y=\pm 1$ یعنی منحنی همواره از دونقطه $A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.$ میگذرد.

۴۲۴- ثابت کنید که منحنی‌های نمایش

$y=\frac{ax^2+(4-2a)x+a-2}{x^2+1}$ بازاء جمیع مقادیر a از نقطه ثابتی گذشته و در این نقطه برخط ثابتی مماس است.

ابتدا مانند مسئله (۴۲۳) عمل نموده مختصات نقطه ثابت را تعیین میکنیم:

$$a(x^2-2x+1)-x^2y-y+4x-2=0$$
$$\begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ -x^2y-y+4x-2=0 \end{cases}$$

از این دستگاه یك جواب $x=1$ و $y=1$ بدست‌میآید یعنی منحنی همواره ازنقطه $A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$ میگذرد مشتق تابع عبارت

میشود از $y'=\frac{2(a-2)x^2+4x+4-2a}{(x^2+1)^2}$

که بازاء $x=1$ مقدارآن برابرمقدار ثابت شده بستگی به a ندارد.

معادله مماس ثابت برمنحنی در A عبارت میشود از $y=x$

۴۲۵- ثابت کنید که منحنی‌های نمایش توابع

$y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m}$ همواره با دو خط ثابت مماس هستند

(باستثنای $m=0$)

اگر معادله خط را بصورت $y=ax+b$ فرض کنیم باید ثابت کنیم که a و b را میتوان تعیین کرد برای اینکه دستگاه

$$\begin{cases} y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m} \\ y=ax+b \end{cases}$$

یا معادله $\frac{2x^2+m^2}{x-2m}=ax+b$ بازاء جمیع مقادیر m ریشه مضاعف داشته باشد چون معادله را مرتب کنیم

$$(a-2)x^2-(2am-b)x-m^2-2bm=0$$

این معادله وقتی در ازاء همه مقادیر m ریشه مضاعف دارد که مبین آن در ازاء همه مقادیر m مساوی با صفر باشد یعنی نسبت به m متحد با صفر باشد:

$$\Delta=(2am-b)^2+4(a-2)(m^2+2bm)$$

یا $\Delta=4m^2(a^2+a-2)+4m(ab-4b)+b^2\equiv 0$

باید که
$$\begin{cases} a^2+a-2=0 \\ ab-4b=0 \\ b^2=0 \end{cases}$$

در نتیجه: $(a=1 \text{ و } b=0)$ و $(a=-2 \text{ و } b=0)$

ومعادله خطوط‌مماس عبارت‌میشود: $y=x$ و $y=-2x$

۴۲۶- تابع $y=\frac{x^3-ax^2-a^2x+5a^3}{x^2-2ax+a^2}$ مفروض است ثابت کنید که تابعی مانند $z=\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x}{x-a}$ میتوان یافت که مشتق آن نسبت به x مساوی تابع y شود ودراینصورت α و β و γ را پیدا کنید.

$$z'=\frac{2\alpha x^3-(3a\alpha-\beta)x^2-2a\beta x-a\gamma}{x^2-2ax+a^2}$$

و باید: $2\alpha x^3-(3a\alpha-\beta)x^2-2a\beta x-a\gamma$
$$\equiv x^3-ax^2-a^2x+5a^3$$

پس:
$$\begin{cases} 2\alpha=1 \\ 3a\alpha-\beta=a \\ -2a\beta=-a^2 \\ -a\gamma=5a^3 \end{cases}$$

و $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=\frac{a}{2}$ و $\gamma=-5a^2$

مسائل ریاضیات متوسطه

برای داوطلبان ورود بدانشگاه ـ قابل استفادهٔ دانش آموزان دبیرستانها

مطلوبست رسم نمایش هندسی هریك از توابع زیر :

۴۲۷ـ $y=\sqrt{(x-1)^2}$

$y=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}$

۴۲۸ـ $y=|x^2-1|$

۴۲۹ـ $y=\frac{|x-1|}{x+1}$

۴۳۰ـ $y=x-[x]$

($[x]$ مقادیر صحیح x را مشخص میکند چنانچه وقتی x مثلا درفاصله (۱و۰) تغییر کند $[x]$ برابر با ۱ خواهد بود و وقتی x در فاصله (۲و۱) تغییر نماید . $[x]$ فقط برابر با ۲ خواهد بود . در بعضی کتابها $[x]$ را بصورت $E(x)$ نمایش میدهند)

***

دومسأله از مسائل ارسالی آقای علی شیعه بیگی

(دانشجوی سال اول دانشکده فنی)

۴۳۱ـ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ پنجم بصورت $f(x)$ چنان تعیین کنید که $f(x)+1$ بر x^2+1 و $f(x)-1$ بر x^2+1 بخش پذیر باشد . درحالتی که ضریب جمله بزرگترین درجه x یك فرض شود $f(x)$ را برحسب قوای نزولی $(x+1)$ بنویسید .

۴۳۲ـ مطلوبست محاسبه حد مجموع زیر .

$$S_n=tg^2\frac{x}{2}tg\,x+2tg\frac{2x}{2^2}tg\frac{x}{2}+\dots+2^{n-1}tg^2\frac{x}{2^n}tg\frac{x}{2^{n-1}}$$

***

یك مسأله ازمسائل ارسالی آقای محمد محروق‌علوی

(دانشجوی سال اول دانشکده فنی)

۴۳۳ـ ثابت کنید که بین y' و y'' مشتقات اول ودوم تابع

$$y=a(x+\sqrt{x^2-1})^n+b(x-\sqrt{x^2-1})^n$$

رابطه $(x^2-1)y''+xy'-n^2y$ برقرار است .

(ازکتاب Reivé)

***

دومسأله از مسائل ارسالی آقای علی تاهبازصالحی

(دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان هدف۱)

۴۳۴ـ مقادیر a و b را چنان معلوم کنید که حد تابع $y=\frac{x+b}{x^2+2ax+b}$ وقتیکه $x\to 1$ برابر باشد با ∞ ویا $-\infty$ و این حد را معین کنید .

۴۳۵ـ مقادیر a و b و c را چنان تعیین کنید که حد تابع زیر وقتیکه $x\to\pm\infty$ برابر با صفرباشد .

$$y=\sqrt{ax^3+bx^2+x+1}+x-c$$

***

مسألهٔ هندسه ارسالی آقای علی ملاحسینی

(دبیردبیرستان خسروی ـ خوی)

۴۳۶ـ مثلث ABC و نقطه متغیر P را روی ضلع AB از آن درنظر می‌گیریم دو دایره بمراکز O و O' که از P میگذرند و اولی در A بر AC و دومی در B بر BC مماس باشند رسم میکنیم مطلوبست تعیین نقطه P :

۱) دو دایره O و O' از نقطه C بیك‌زاویه رؤیت شوند

۲) دو دایره $O'O$ مساوی باشند .

۳) خط OO' موازی AB باشد.

***

یك مسألهٔ هندسه از آقای یحیی یحیوی

(دبیر دبیرستانهای تهران)

۴۳۷ـ از مثلثی $BC=a$ و $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ و خط Δ که رأس‌مثلث‌روی آن قراردارد مفروض است . مثلث را رسم کنید .

***

مسألهٔ هندسه ازآقای محمدعلی شیخان

(دبیر دبیرستانهای تهران)

۴۳۸ـ مثلث ABC مفروض است . AD نیمساز زاویه A را رسم میکنیم و از رأسهای B و C بیك نقطه O واقع بر AD وصل کرده امتداد میدهیم تا اضلاع AB و AC را بترتیب در B' و C' قطع کنند . چنانچه نقطه تلاقی DB' و DC' را با CC' و BB' بترتیب K و L بنامیم ثابت کنید AO نیمساز زاویه KAL است .

***

چهار مسأله از آقای مسعود محمدی

(دبیر دبیرستانهای تهران)

۴۳۹ـ در روی یك سفحه دو نقطه ثابت B و C و نقطه متغیر A طوری قرار گرفته‌اند که $BC=a$ و $AB+AC=l$ میباشد. خطوط AM و AH و AD را که بترتیب میانه و ارتفاع دارد بر ضلع BC و نیمساز زاویه A میباشند رسم کرده حد نسبت $\frac{HM}{DM}$ را بدست آورید وقتیکه دائر تغییر مکان نقطه A مثلث ABC متساوی‌الساقین شود $(AB=AC)$

۴۴۰ـ (ترسیمی) در روی خط نیمرخی نقطه‌ای چنان بدست آورید که مجموع چهار برابر مربع بعد و نه برابر مربع ارتفاع آن مساوی ۳۶ شود.

۴۴۱ـ (حساب استدلالی) ـ عدد $N=a\overline{bba}$ را طوری تعیین کنید که داشته باشیم.

$$N=a\overline{bba}=a^{\overline{du}}+b^{\overline{du}}+\overline{me}^{2}$$

۴۴۲ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات هر یك از توابع زیر را رسم کنید.

$$1)\ y=x+\sqrt{x^3-3x}$$

$$2)\ y=\sqrt[5]{x^2(x-1)^2(x+2)}$$

$$3)\ x^6-y^2x^2+4y^2=0$$

$$4)\ y=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$$

***

نه مساله از آقای حبیب‌الله عبداللهی

(دبیر دبیرستانهای تهران)

۴۴۳ـ معادله زیر را حل کنید.

$$\log_x 2\log_{2x} 2=\log_{4x} 2$$

۴۴۴ـ مطلوبست حل معادله زیر.

$$6\times 4^{-\frac{1}{x}}-13\times 6^{-\frac{1}{x}}+6\times 9^{-\frac{1}{x}}=0$$

۴۴۵ـ مطلوبست حل معادله زیر

$$x^{3\log_x 2-\frac{2}{3}\log x}=100\sqrt{10}$$

۴۴۶ـ صحت تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{a^3-3a+(a^2-1)\sqrt{a^2-4}-2}{a^3-4a+(a^2-1)\sqrt{a^2-4}+2}\times\sqrt{\frac{a^3-3a+2}{a^3-3a-2}}=1$$

۴۴۷ـ هرگاه a و b و c بترتیب جملات مرتبهٔ m ام و n ام و p ام متسلق یك تصاعد حسابی باشند صحت تساوی زیر را ثابت کنید.

$$a(n-p)+b(p-m)+c(m-n)=0$$

و چنانچه متسلق یك تصاعد هندسی باشند:

$$a^{n-p}.b^{p-m}.c^{m-n}=1$$

۴۴۸ـ اعداد E و E' که $E=N^4+4$ و $E'=N'^4+4$ مفروضند اولا هرگاه تفاضل دو عدد صحیح N و N' دو واحد باشد ثابت کنید که E و E' نمیتوانند نسبت بهم اول باشند.

ثانیاً هرگاه N عدد صحیح فرد باشد مطلوبست تعیین دو عدد که کوچکترین مضرب مشترك آنها N^2+4 باشد.

۴۴۹ـ از روابط

$$\begin{cases} x^3+mx^2+n=0 \\ y^3+my^2+n=0 \\ R^3+mR^2-n=0 \end{cases}$$

نتیجه بگیرید که $x^2+y^2=R^2$

۴۵۰ـ هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} x^3+ma^4x^2+na^3=0 \\ y^3+mb^4y^2+nb^3=0 \\ m-n+1=0 \end{cases}$$

نتیجه بگیرید که: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

۴۵۱ـ اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^2x^3+max+n=0 \\ b^2y^3+mby+n=0 \\ c^3+mc+n=0 \end{cases}$$

خواهیم داشت: $ax+by+c=0$

بقیه در صفحهٔ ۴۶

مکانیک

برای دانش آموزان سال ششم ریاضی و داوطلبان ورود بدانشگاه

توسط ـ دکتر ابوالقاسم قلم سیاه

I ـ مسائل حل شده

۴۵۳ـ چنانچه یک دستگاه مادی انرژی خود را باندازهٔ ΔE از دست بدهد جرمش باندازهٔ Δm کاسته میشود بین ΔE و Δm رابطه اساسی زیر بنام رابطهٔ **اینشتین** برقرار است:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{C^2}$$

C سرعت سیر نور درخلاء است.

از طرف دیگر سوختن کامل یک اتم گرم کربن (۱۲ گرم کربن) تقریباً ۹۵ کیلوکالری حرارت تولید میکند. بکمک رابطهٔ اینشتین کاهش جرم سیستم $C+O^2$ را وقتیکه به CO^2 تبدیل شود حساب کنید آیا این تغییر جرم را میتوان با ترازوهای خیلی حساس سنجید؟ دربارهٔ ارزش قانون لاووازیه چه نتیجه‌ای میتوان گرفت؟ سرعت سیر نور در خلاء $C=3\times10^8 m/s$ و هر کالری معادل ۴/۱۸ ژول است.

حل: هرملکول گرم کربن که بسوزد یک ملکول گرم گاز CO^2 و ۹۵ کیلوکالری حرارت تولید میشود:

$$C+O^2 \rightarrow CO^2 + 95 K.Cal.$$

بنابراین انرژی از دست رفته برحسب ژول برابر است با: $\Delta E = 95000 \times 4/18 = 3/97 \times 10^5$ ژول

کاهش جرمیکه از این اتلاف انرژی حاصل میشود از رابطه اینشتین بدست میآید:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{C^2}$$

$$\Delta m = \frac{3/97\times10^5}{9\times10^{16}} Kg = 4/41\times10^{-11} Kg$$

$$\Delta m = 4/41\times10^{-9} \text{ گرم}$$

چون جرم هر ملکول گرم گاز کربنیک ۴۴ گرم است کاهش نسبی جرم سیستم برابر خواهد بود با:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{4/41\times10^{-9}}{44} \approx 10^{-10}$$

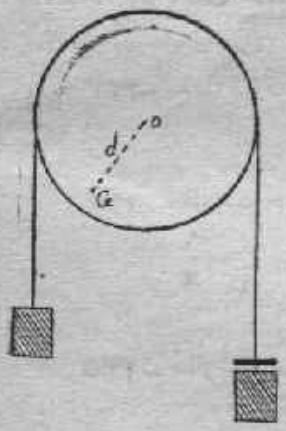
دقت بهترین ترازوهای امروزی در حدود 10^{-7} است. بنابراین تغییرات نسبی جرم کوچکتر از آنست که بتوان با ترازو آنرا تخمین نمود.

نتایجی که از کاهش جرم در تمام فعل و انفعالات شیمی حاصل میشود در همین حدود است بنابراین نتایج تجربی نشان میدهد که در تمام فعل و انفعالات شیمی، جرم کلی ثابت میماند بعبارت دیگر، تجربه هیچگاه نمیتواند عدم صحت قانون لاووازیه را نشان دهد.

برای حل:

۴۵۵ـ از یک فعل و انفعال هسته‌ای بین پروتونها و نوترونها یک اتم گرم هلیوم (یعنی ۴ گرم هلیوم) تولید شده و این فعل و انفعال با اتلاف جرمی معادل ۰/۰۳ گرم همراه بوده است. انرژی مربوط باین کاهش جرم را بکمک رابطه اینشتین حساب کنید. با این انرژی چه وزنی را میتوان فرضاً تا ارتفاع یک کیلومتر بالابرد. چه اندازه کربن لازم است تا در اثر احتراق کامل، انرژی معادل انرژی حاصل از سنتز ۴ گرم هلیوم تولید کند.

۴۵۴ـ قرقره بقطر ۲۰ سانتیمتر حول محور افقی که از مرکز دایره محیطی شیار آن میگذرد بدون اصطکاک حرکت میکند و مرکز ثقل آن بفاصله d از محور قرقره واقع شده است.



از روی این قرقره نخی میگذرد و بدو سر این نخ دو وزنه مساوی که جرم هریک ۲۰۰ گرم است بسته شده است.

اولا وضع تعادل پایدار دستگاه را مشخص کنید.

اگر سربار یک گرمی روی یکی از وزنه‌ها قرار دهیم دستگاه منحرف شده و این وزنه ۷/۸۵ سانتیمتر پائین‌تر میآید و مجدداً تعادل برقرار میشود. چنانچه جرم قرقره ۱۴/۱۴ گرم باشد از این آزمایش d، فاصله مرکز ثقل را از محور قرقره حساب کنید.

ثانیاً ـ سربار مرکزیمی که میتوان روی یکی از وزنه‌ها

قرار داد بدون اینکه قرقره دوران دائمی پیدا کند چه اندازه است.

ثالثاً ـ در حالتیکه بدو انتهای نخ فقط وزنه‌های ۲۰۰ گرمی آویخته‌شده است دستگاه‌را کمی‌ازوضع تعادل‌منحرف کرده رها میسازیم دستگاه‌شروع بنوسان میکند نوع‌حرکت دستگاه را مشخص کرده‌و معادلات‌حرکت وسرعت‌وشتاب یکی ازوزنه‌ها را بنویسید وپرید حرکت آنرا حساب کنید . دامنه نوسانات را خیلی کوچك درنظر بگیرید و ازاینرسی قرقره سرفنظر کنید.

$$g = ۹۸۱ \frac{Cm}{s^۲}$$

حل ـ دستگاه وقتی‌درحال تعادل‌است که‌مرکز ثقل‌قرقره در سطح قائم مار برمحور آن واقع شده وزیر محور باشد چون سربار یك‌گرمی بیکی ازوزنه‌ها اضافه شود این وزنه ۷/۸۵ سانتیمتر پائین میآید ونقطه ازمحیط‌قرقره نیز قوسی‌معادل‌همین مقدار میپیماید در نتیجه قرقره باندازه زاویه

$\frac{x}{R} = \frac{۷/۸۵}{۱۰} = ۰/۷۸۵$ رادیان میچرخد که برحسب درجه برابر است با:

$$۰/۷۸۵ \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ٤٥^\circ$$

برای اینکه‌مجدداً تعادل برقرار شود باید گشتاورنیروی وزن سربار (یك‌گرم نیرو) نسبت بمحور دوران قرقره مساوی گشتاور وزن قرقره نسبت بهمین محور باشد (دو وزنه ۲۰۰ گرمی دارای‌گشتاورهای مساوی ومختلف الجهت هستند.) پس اگر شعاع چرخ را به R و جرم قرقره را به m نمایش دهیم داریم:

$$۱ \times R = md \sin ٤٥$$

$$۱۰ = ۱٤/۱٤ \times d \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\boxed{d = ۱\ Cm}$$

۲ـ اگر جرم سربار ماکزیممی که میتوانیم روی‌یکی از وزنه‌ها بگذاریم به μ نمایش‌دهیم در اثر این‌سربار قرقره باید باندازه ۹۰ درجه بچرخد زیرا اگر زاویه چرخش قرقره از ۹۰ درجه بیشتر شودگشتاور وزن قرقره نسبت بمحور دوران کوچکترمیشود وسربار چرخ را بطوردائم میچرخاند. درتعادل خواهیم داشت:

$$\mu R = md \sin ۹۰^\circ = md$$

$$\mu = \frac{md}{R} = \frac{۱٤/۱٤ \times ۱}{۱۰} = ۱/٤۱٤\ g.$$

$$\boxed{\mu = ۱/٤۱٤ \text{ گرم}}$$

۳ـ فرض‌میکنیم که یکی‌وزنه‌هارا باندازه‌طول a از وضع تعادل خودودور کرده‌ایم و در نتیجه قرقره باندازه زاویه α چرخیده است چون دستگاه بحال خود رها شودشروع بحرکت میکند. اگر بعد یکی ازوزنه‌ها دریك‌لحظه غیرمشخص از وضع تعادل‌خود x و بعد‌زاویه‌ئی قرقره در این لحظه Θ باشد طبق قضیه فرس ویو سرعت هریك از وزنه‌ها دراین‌لحظه (چنانچه از انرژی سینتیك قرقره سرفنظر شود) از رابطه‌زیرحساب‌میشود:

$$\frac{۱}{۲} \cdot ۲Mv^۲ = mgd\,(\cos\Theta - \cos\alpha)$$

از طرفین این رابطه‌نسبت بزمان‌مشتق میگیریم

$$۲Mv\frac{dv}{dt} = -\,mgd \sin\Theta \frac{d\Theta}{dt}$$

چون $\Theta = \frac{x}{R}$ پس $\frac{d\Theta}{dt} = \frac{۱}{R}\ \frac{dx}{dt} = \frac{V}{R}$

واز آنجا: $۲Mv\frac{dv}{dt} = -mgd \sin\Theta \cdot \frac{v}{R}$

یا: $\frac{dv}{dt} = \frac{-mgd \sin\Theta}{۲MR}$

چون Θ کوچك است

$$\sin\Theta \neq \Theta = \frac{x}{R}$$

ازطرف‌دیگر $\frac{dv}{dt} = \gamma$ بنابراین:

$$(۱) \quad \gamma = \frac{-mgd}{۲MR} \times \frac{x}{R} = -\frac{Mg\,d}{۲MR^۲}x.$$

بطوریکه ملاحظه میشود شتاب درلحظهٔ داده شده‌متناسب با بعد حرکت‌است بنابراین‌حرکت جیبی است‌و معادله حرکت هریك از جرمهای M بصورت:

$$x = a \cdot \sin ۲\pi \frac{t}{T}$$

سرعت لحظه‌ای مشتق معادله مسیر است:

$$v = \frac{dx}{dt} = a \cdot \frac{۲\pi}{T} \cos ۲\pi \frac{t}{T}$$

و شتاب مشتق سرعت:

$$(۲) \quad \gamma = \frac{dv}{dt} = \gamma = -a \cdot \frac{٤\pi^۲}{T^۲} \sin ۲\pi \frac{t}{T} = -\frac{٤\pi^۲}{T^۲}x$$

چون دو مقدار ۲ راکه‌ازروابط (۱) و(۲) بدست‌آمده‌اند مساوی قراردهیم پریدحرکت حساب میشود.

$$\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{mgd}{2MR^2}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{mgd}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2\times200\times100}{14/14\times981}}=10/7S$$

$$\boxed{T=10/7S}$$

II ـ مسائل حل کردنی

۴۵۵ـ وزن چرخ طیار ماشینی ۱۹۶۰ کیلوگرم و شعاع استوانه آن ۶۰ سانتیمتر است.

اولاـ بفرض اینکه تمام‌جرم چرخ بطور یکنواخت روی محیط‌استوانه‌توزیع‌شده‌باشد گشتاورجبری آنرا نسبت‌بمحوردوران دردستگاه .M.K.S حساب کنید.

ثانیاـ چنانچه چرخ درهر دقیقه ۳۰۰ دور بزند انرژی آنرا برحسب‌کیلو ژول حساب کنید.

ثالثاً ـ اگردر مدت ٤ ثانیه عده دورهای چرخ به ۲۷۰ دور دردقیقه تقلیل یابد چه‌انرژی چرخ‌بامحیط خارج مبادله کرده است توان متوسط‌چرخ طیار در این‌مدت چه‌اندازه است

$$g=9/8\frac{m}{S^2}$$

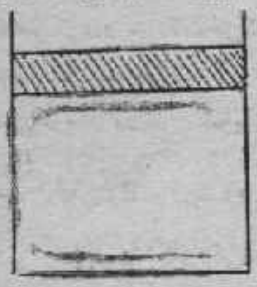
۴۵۶ـ پاندولی تشکیل شده است از یك‌گلوله کوچك و سنگین بجرم ۵۰۰ گرم‌که بانتهای نخ بی وزنی بطول ۱/۲۵ متر بنقطه O آویخته شده است.

۱ـ پاندول‌را باندازه ۶۰ درجه از وضع تعادل منحرف کرده وبدون‌سرعت اولیه رهامیکنیم. باچه‌سرعتی ازوضع‌تعادل میگذرد و اندازه‌کشش نخ دراین لحظه چقدر است؟ این‌کشش هنگامیکه پاندول‌بانتهای مسیر خودمیرسد چه‌خواهد بود. فرض میکنیم‌که دامنه‌نوسان پاندول مستهلك نمیشود.

۲ـ چنانچه‌حرکت پاندول مستهلك شده و پس از زمان کوتاهی دامنه حرکت به ۳۰ درجه تقلیل یابد درمدتیکه دامنه حرکت‌از۶۰درجه به۳۰درجه رسیده‌است چه مقدارحرارت در اثر اصطکاك پاندول تولید شده است. معادل مکانیکی کالری $J=4/2$ ژول‌وکشش نخ را برحسب نیوتن وکیلوگرام حساب کنید.

۴۵۷ـ در استوانه‌ایکه عایق حرارت است مقداری گاز خشك‌صفر درجه زیر پیستونی محبوس است. فشاریکه از طرف هوا و پیستون برگاز وارد میشود جمعاً معادل ۷۶ سانتی متر جیوه است.

گازرا بمدت نیم‌ساعت توسط جریان‌الکتریکی که‌ازسیمی واقع‌در استوانه میگذرد گرم میکنیم. مقاومت سیم ثابت و برابر ۲ اهم‌و شدت جریان نیم آمپر است. چنانچه گرمای ویژه‌گاز با فشار ثابت $\frac{1}{4}$ کالری باشدمطلوبست



اولا: کاریکه‌گاز در این مدت بمحیط خارج داده است.

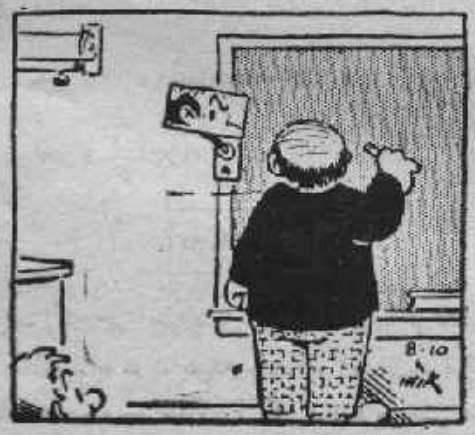
ثانیا: گرمای ویژه گاز باحجم ثابت.

ضریب انبساط گازها:

$$g=981\frac{Cm}{S^2}\quad و\quad \alpha=\frac{1}{273}$$

نکته!

اگر اتم را با پست میفرستادند و رویش کلمهٔ «شکستنی» را مینوشتند شاید خیلی زودتر میتوانستند آن را بشکنند.



پایان

چهل مسأله از استاد دکتر محسن هشترودی

۴۵۸ـ رأس زاویهٔ قائمه‌ای برروی خط ثابت Δ حرکت می‌کند و یك ضلع آن بر نقطه ثابت F مرور کند ثابت کنید که ضلع دوم همواره برسهمی ثابتی مماس است .

۴۵۹ـ رأس زاویهٔ قائمه‌ای برروی دائرهٔ ثابت o حرکت می‌کند و یك ضلع آن بر نقطه ثابت F مرور می‌کند ثابت کنید که ضلع دوم بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس است .

تبصره ـ این دو مسئله عکس دو قضیه معلوم از مخروطات است. ولی باید مسائل را مستقیماً ثابت کرد . نه بعنوان عکس قضایای دیده شده .

۴۶۰ـ در دو مسئله فوق اگر بجای زاویهٔ قائمه زاویه ثابت دلخواه α انتخاب شود حکم قضایا بصحت خود باقی میماند فقط سهمیها یا بیضی‌ها یا هذلولیها عوض میشوند . این منحنی‌های جدید را از روی منحنیهای مسائل فوق مشخص کنید .

۴۶۱ـ حاصل‌ضرب فواصل خطی متغیر از دو نقطه ثابت F و F' مقداری ثابت است . معلوم کنید که اوضاع مختلف این خطوط بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس است **(عکس قضیه‌ای معلوم از مخروطات که باید مستقیماً محقق شود)**

۴۶۲ـ مجموع مربعات فواصل دو نقطه ثابت A و B از خطوط متغیری ثابت میماند . معلوم کنید که اوضاع مختلف این خطوط همواره بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس باقی میماند .

۴۶۳ـ اختلاف مربعات فواصل خطی متغیر از دو نقطه ثابت مقداری ثابت است . معلوم کنید که اوضاع مختلف این خطوط بر سهمی ثابتی مماس است .

۴۶۴ـ دو نقطهٔ ثابت A و B و دو عدد ثابت α و β (که ممکن است مثبت یا منفی باشند) مفروض‌اند خطوطی درنظر می‌گیریم که اگر فاصلهٔ آنها از A و B مرتباً d و d' باشد رابطه زیر محقق باشد $\alpha d^2+\beta d'^2=l^2$ (l طولی است ثابت) محقق کنید که اوضاع مختلف این خطوط بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس است (مگر اینکه $\alpha+\beta=0$ باشد در اینصورت مسئله قبل بدست می‌آید) .

۴۶۵ـ نیمدایره‌ای بقطر AB برابر 2R مفروض است ثابت کنید که نیمسازهای زوایائی که یك ضلع آنها AB بوده و ضلع دیگر آنها بر نیمدایره مماس است همواره برسهمی ثابتی مماس‌اند .

۴۶۶ـ دایره بشعاع ثابت R و نقطه ثابت S برروی آن در دست است . نقطه متغیر M را برروی دائره انتخاب کرده و SM را بطول SN امتداد می‌دهیم بقسمی که $\overline{SN}^2-\overline{SM}^2=a^2$ (a طولی است ثابت) باشد ثابت کنید که خطی که از نقطه N بر SN عمود میشود همواره بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس است.

۴۶۸ـ دو نقطه A و B برروی قطر ثابتی از دائره O بشعاع R مفروض‌اند ($OA=a$ و $OB=b$ درشکل نقاط A و B را برای اجتناب از اشتباه علامت در یك سمت مرکز O انتخاب کنید که a و b هردو مثبت باشند) نقطه‌ای متغیر مانند M بر دائره انتخاب کرده و MA و MB را امتداد می‌دهیم تا دائره را در نقاط P و Q قطع کنند وتر PQ را رسم می‌کنیم .

۴۶۸ـ اولا از نقاط P و Q دو عمود بر PQ اخراج می‌کنیم تا قطر ثابت حامل AB را در نقاط H و K قطع کنند . ثابت کنید که با تغییر نقطه M برروی دائره طولهای OH و OK (که با هم برابرند) تغییر نمی‌کنند .

ثانیاً نتیجه بگیرید که اوضاع مختلف وتر PQ همواره بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس است (تمیز حالات بیضی و هذلولی)

ثالثاً اگر نقاط A و B نسبت بدایره مزدوج باشند احکام فوق معنی ندارند . احکام جدیدی که مناسب است ذکر کنید .

۴۶۹ـ دو نقطه A و B ثابت برروی قطر معینی از دائرهٔ O بشعاع R واقعند قطر متغیری مانند MN رسم می‌کنیم خطوط AM و AN و BM و BN با تقاطع با یکدیگر دو نقطه P و Q بدست میدهند . مکان هندسی این دو نقطه را پیدا کنید .

ـ دائره‌ای بمرکز O و بشعاع R و نقطه A در درون دائره بفاصله $OA=a<R$ در دست است . دو وتر عمود برهم در نقطهٔ A دائره را در نقاط B و C و B' و C' قطع میکنند (BB' و CC' دو وتر مفروض‌اند) .

۱) ثابت کنید که میانگین مثلث ABC ارتفاع مثلث AB'C' و برعکس ارتفاع آن میانه این یك است .

۲ـ مکان هندسی پایه H ارتفاع مثلث ABC و نقطه M وسط ضلع BC را درصورتیکه اوتار BB' و CC' حول نقطهٔ A دوران کند پیدا کنید .

۳) ثابت کنید که اضلاع چهارضلعی BCB'C' درجمیع اوضاع بر بیضی ثابتی مماس است .

۴) از نقاط B و B' و C و C' مماسهائی بر دائرهٔ O رسم می‌کنیم تا با تقاطع یکدیگر چهارضلعی MNPQ را تشکیل دهند ثابت کنید که این چهارضلعی در جمیع اوضاع اوتار BB' و CC' در دائره‌ای محاط است یعنی چهار ضلعی هم محیطی است و هم محاطی .

۴۷۰ـ نقطه A درسطح دائره O ثابت است اوتار BC بطول ثابت برروی دائره O میلغزند . خطوط AB و AC مرتباً دایره را در نقاط B' و C' قطع می‌کنند ثابت کنید که :

۱) دائرهٔ محیطی مثلث AB'C' بر دائرهٔ ثابتی مماس است . اگر وتر BC بقطر بدل شود این دوائر محیطی بر نقطه ثابتی میگذرند .

۲) مکان هندسی مراکز دوائر محیطی مثلثهای $AB'C'$ را تعیین کنید (گاهی بیضی وگاهی هذلولی و اگر BC قطر شود خط مستقیم . حالات بیضی و هذلولی را تفکیک کنید) .

۳) مکان هندسی مراکز دوائر محیطی مثلثهای ABC را تعیین کنید (اگر BC قطر شود این مکان خطی است مستقیم).

٤) ثابت کنید که اگر BC بقطر بدل شود اوضاع مختلف $B'C'$ بر نقطه ثابتی میگذرند والا این اوضاع مختلف بر بیضی ثابتی مماس اند .

۴۷۱ـ ازمثلثی میانه m_a و حاصلضرب اضلاع b و c ($bc=k^2$) معلوم است مثلث را با یکی از معلومات زیر رسم کنید .

اول) زاویه A دوم) ضلع a سوم) منصف الزاویه V_A چهارم) ارتفاع h_a پنجم) شعاع دائره محیطی R .

ششم) اختلاف زوایای $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$. هفتم) اختلاف زوایای میانه m_a بادوضلع مجاور هشتم) زاویه m_a باضلع a

۴۷۲ـ ازمثلثی میانه m_a و V_A (نیمساز) و $\hat{B}-c=\alpha$ معلوم است آنرا رسم کنید.

۴۷۳ـ ازمثلثی میانه m_a و نیمساز V_A واختلاف زوایای m_a با اضلاع مجاور در دست است آنرا رسم کنید.

۴۷۴ـ از مثلثی a و m_a و $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ معلوم است آن را رسم کنید.

۴۷۵ـ بامعلوم بودن شعاع دائرهٔ محاطی خارج مثلث در زاویه A و دانستن زاویه A وضلع a مثلث را رسم کنید.

۴۷۶ـ نیمدایره‌ای بقطر $AB=2R$ و نقطه P برروی این قطر بفاصله $OP=a$ مفروض است. وتر MN را بموازات قطر AB رسم می کنیم. مطلوبست تعیین این وتر بقسمی که زاویه $\widehat{MPN}$ مقدارمعلوم A گردد (رسم هندسی مسئله). سطح مثلث MNP را از روی زاویه A بدست آورید و ماکزیمم یامی نیمم این سطح را پیدا کنید. بیان هندسی جواب ماکزیمم چیست ؟

۴۷۷ـ در مثلثی بین زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ رابطه $\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{2}$ محقق است ثابت کنید که بین اضلاع مثلث رابطه : $2a^2=(b+c)^2+(b-c)^2$ برقرارمی باشد یکی از دو مقدار ± 1 را دارا می باشد.

۴۷۸ـ در مثلثی مقادیر اضلاع باروابط زیردردست است:

$$a=(\alpha^2-\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2 \quad \text{و} \quad b=\alpha^4-\beta^4$$

$$C=2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$$

(در دو عبارت اول مراد قدرمطلق طرف ثانی منظور شده است بقسمی که a و b مثبت باشند) بدیهی است اگر α و β اعداد صحیح باشند اضلاع اعداد صحیح خواهند بود:

۱) ثابت کنید که مقادیر خطوط مثلثاتی زوایای مثلث همواره اعداد منطق (گویا) می باشند و بعلاوه اختلاف زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یك قائمه است (بحسب قدر مطلق) و امتداد نیمساززاویهٔ A امتداد ثابتی است.

۲) سطح مثلث عددی صحیح است و بنابراین اندازه‌های ارتفاعات مثلث اعدادمنطق می باشند.

۳) اگر B' قرینه B نسبت بارتفاع راس A باشد مثلث $AB'C$ در زاویه A قائمه می باشد و وتر CB' این مثلث برابر قطردائرهٔ محیطی مثلث ABC می باشد. یعنی دوائرمحیطی مثلثهای $AB'C$ و ABC باهم مساوی می باشند و بنابراین شعاع دائرهٔ محیطی مثلث ABC عدد منطق است.

٤) شعاعهای دوائرمحاطی داخل وخارج مثلث ABC را حساب کنید.

۴۷۹ـ تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$ (۱) مفروض است اگر $x+\frac{1}{x}=X$ و $y+\frac{1}{y}=Y$ فرض کنیم تابع $Y=F(X)$ بدست خواهدآمد. مقصود بدست آوردن این تابع است بدون محاسبه مستقیم با اثبات نکات زیر:

۱) اگر عبارت $\frac{Y+2}{Y-2}$ را درنظر بگیریم تابعی کسری از X خواهد بود (کسری منطق) اولا بدون محاسبه ثابت کنید که صورت این کسر مجذورکامل است و ریشه های مخرج این کسرمقادیری ثابت میباشند و به a و b و c مربوط نیستند . ثانیاً با ملاحظه اینکه اگر $a=c$ باشد y همواره برابرواحد است کسر $\frac{Y+2}{Y-2}$ را از روی X کاملا تعیین کنید.

۲) تابع (۱) اگردارای ماکزیمم و می نیمم نباشد در اینصورت لازم است که یکی از مقادیر ∓ 1 بین ریشه های $ax^2+bx+c=0$ قرارگیرد و دیگری خارج این ریشه‌ها و الا تابع دارای ماکزیمم و می نیمم خواهد بود اشکال مختلف منحنی نمایش تغییرات این تابع را بحث کنید.

۳) باهمان استدلال شماره (۱) برای تابع $y=\frac{ax+b}{bx+a}$ نیز نتیجه بگیرید که اگر $x+\frac{1}{x}=X$ و $y+\frac{1}{y}=Y$ باشد کسر $\frac{Y+2}{Y-2}$ با کسر $\frac{X+2}{X-2}$ متناسب است و ضریب تناسب را پیدا کنید (بدون محاسبه مستقیم ازروی تابع y).

ـ ثابت کنید که عبارت :

$4(x^2+xy+y^2)^3-27x^2y^2(x+y)^2$ مجذورکامل است وآنرا بعوامل درجه اول تجزیه کنید.

۴۸۱ـ معادله :

$$(x-a)^4+(x-b)^4=\lambda^2[(x-a)^2+(x-b)^2]$$

را حل و بحث کنید.

۴۸۲ـ عبارت :

$$S^k(x)=1+2^kx+3^kx^2+4^kx^3\ldots\ldots n^kx^{n-1}$$

را بصورت تابعی از x بدست آورید. اگر $x<1$ باشد و n بسمت بی‌نهایت میل کند حد این عبارت را پیدا کنید.

۴۸۳ـ حد مقدار

$$\lim_{k\to\infty}\Big[2^k\sqrt{\underbrace{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}}}_{k\ \text{مرتبه}}}\Big]$$

وقتی k بسمت بی‌نهایت میل می‌کند پیدا کنید. درصورتیکه $\alpha=\frac{\pi}{n}$ باشد با تعبیر هندسی حد عبارت فوق را پیدا کنید.

۴۸۴ـ حد حاصلضرب بی‌نهایت زیر:

$$(2\cos\alpha-1)(2\cos\frac{\alpha}{2}-1)(2\cos\frac{\alpha}{4}-1)\ldots(2\cos\frac{\alpha}{2^n}-1)\ldots$$

وقتی n بسمت بینهایت میل میکند پیدا کنید.

۴۸۵ـ تابع $f(x)$ را چنان تعیین کنید که : $f(xy)=[f(x)]^y$ باشد.

۴۸۶ـ اگر $\lambda^2-\lambda\sqrt{m^2+4}+1<0$ بطریق اولی $\lambda^2-m\lambda-1$ منفی خواهد بود.

و همچنین ثابت کنید که اگر α بین β و $\frac{1}{\beta}$ باشد در اینصورت $\frac{1}{\alpha}$ نیز بین β و $\frac{1}{\beta}$ است و بعلاوه $\alpha+\frac{1}{\alpha}<\beta+\frac{1}{\beta}$

۴۸۷ـ کانونهای بیضی برروی دائره معلومی قراردارد . مماس مشترك این دومنحنی را رسم کنید.

۴۸۸ـ درسطح مثلثی (که هریك از زوایای آن از 120° کمتر است) نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع فواصل آن از رؤس مثلث می‌نیمم باشد تعیین این نقطه بوسیله ترسیم قضیه‌ای بدست می‌دهد. حکم این قضیه را ذکر کنید.

۴۸۹ـ نقطه‌ای درسطح مثلث تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن ازرؤس مثلث می‌نیمم باشد.

۴۹۰ـ بفرض اینکه $\frac{1}{3}<\lambda<3$ است عبارت:

$$\frac{3\lambda^2-2\lambda+3}{8\lambda}$$

همواره ازواحد کمتر است و چون λ مثبت است همواره مثبت می‌باشد پس اگر فرض کنیم $\cos A=\frac{3\lambda^2-2\lambda+3}{8\lambda}$ زاویهٔ A حاده خواهد بود اگر مثلثی بزاویهٔ A بنا کنیم بقسمی که نسبت دوضلع دیگر آن جزء a بهم برابر λ باشد ضلع a واسطه عددی بین دوضلع دیگر است. وشرط مذکور برای λ کافی است.

۴۹۱ـ اگر در مثلثی $a^2=bc$ باشد مثلث با مثلثی که با ارتفاعات تشکیل میشود متشابه است و برای این تشابه حالت دیگری وجود ندارد وهمچنین اگر $b^2+c^2=2a^2$ باشد مثلث با مثلثی که با میانه‌های آن ساخته میشود متشابه است وبرای این تشابه نیز حالت دیگری وجود ندارد. آیا برای نیمسازها تشابه مثلث با مثلث نیمسازها بیشتر است یا خیر؟

۴۹۲ـ خط ثابت Δ ونقطه ثابت S درخارج آن مفروض‌اند. خطی متغیر از S مرور داده و دو نقطه M و M' در طرفین S برروی این خط انتخاب می‌کنیم بقسمی که :

$$\frac{1}{SM}+\frac{1}{SM'}=\frac{2}{SI}$$

$$SM+SM'=MH+M'H'$$

باشد. H و H' تساویر M و M' و I تصویر S برروی خط Δ می‌باشد . ثابت کنید که مکان هندسی نقاط M و M' یا دائرهٔ بمرکز S و مماس بر Δ می‌باشد ویا سهمی است که کانون آن S و خط هادی آن خط Δ است.

(این مسئله نمونهٔ خاصی از مکانهای هندسی است که نقطهٔ موردنظر منحصر بفرد نیست وبلکه دوگانه است و یك مکان احداث می‌کند مسئله درحدود چهارده سال قبل برای دانشجویان دانشسرایعالی برای بحث طرح شده بود و یکی از مستمعین همان سال تحصیلی آقای حسین غیور که اکنون دستیار فنی بنگاه تربیت معلم و قبلا دبیر دانشسرایعالی بود بطرز بسیار زیبائی این مسئله را حل کرده است که در شماره های بعد ممکن است خود ایشان حل مسئله را مطرح سازند) .

۴۹۳ـ معادله $x^3+x^2-2x-1=0$ را با تبدیل $x=y^2-2$ تغییر دهید معادله جدید ریشه‌های معادله اول را نیز دارا خواهد بود (یادرواقع معادله محفوظ میماند) تبدیل‌های دیگر نیز وجود دارد که معادله را عوض نمی‌کند آنها را با کمك تبدیل قبل پیدا کنید . بنابراین رابطه یا روابطی مانند $x_k=f(x_h)$ وجود دارد که ریشه‌های معادله مفروض را بهم مربوط میسازد بقسمی که اگر این ریشه‌ها را x_1 و x_2 و x_3 بنامیم x_1 از روی x_2 و x_2 از روی x_3 و x_3 از روی x_1 بوسیله یك رابطه تعیین میشود . تعبیر این روابط ؟

۴۹۴ـ خط Δ خارج کره بمرکز O وبشعاع R دردست است بر این خط n صفحه مرور دهید بقسمی که با تقاطع کره سطح کره را به n قسمت متساوی تقسیم کنند. مسئله دارای حل ترسیم هندسی است ولی نظیر آن در صفحه برای دایره حل هندسی ندارد

۴۹۵ـ معادله درجه n ام :

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+hx^2+kx+l=0$$

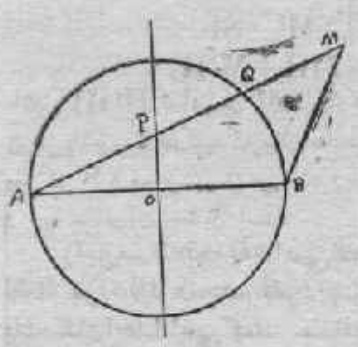
مفروض است و میدانیم که ریشه‌های آن تصاعد عددی تشکیل می‌دهند (در این صورت بین ضرائب a و b و c و ... و h و k و l ، $n-2$ رابطه وجود دارد که فرض می‌کنیم درمعادله صادق‌اند) ثابت کنید که دوریشه طرف (بزرگترین و کوچکترین ریشه) ریشه های معادله درجه دوم :

$$n^2(n+1)a^2x^2+2n(n+1)abx+6n(n-1)\times ac-(n-1)(3n-1)b^2=0$$

میباشد . (اگر معادله اصلی ازدرجه دوم باشد چون دوریشه بیشتر ندارد قطعاً تصاعد عددی تشکیل می‌دهند و معادله $ax^2+bx+c=0$ می‌باشد حال اگر در معادله دوم که در مسئله داده شده $n=2$ گردد مشاهده میشود که همان معادله $ax^2+bx+c=0$ بدست می‌آید واگر معادله ازدرجه اول باشد $ax+b=0$ باذاء $n=2$ معادله دوم بصورت

$(ax+b)^2=0$ نوشته میشود) وبنابراین جمیع ریشه‌های معادله را میتوان تعیین کرد.

۴۹۶ـ دایره O بشعاع a وقطر ثابت AB از آن مفروض است خطی متغیر از نقطه A رسم می‌کنیم تا دایره وقطر قائم (قطر عمود بر AB) آنرا مرتباً در نقاط P و Q قطع کند بر روی خط APQ نقطه M را چنان تعیین می کنیم که :



$$\overline{AM}\times PQ=2a^2$$

باشد ثابت کنید که در مثلث MAB اختلاف زوایای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ برابر یك قائمه است و اگر خط AP حول نقطه A دوران کند مکان نقطه M هذلولی متساوی الساقینی است که رؤس آن نقاط A و B میباشد . ثابت کنید که امتداد نیمساز زاویه M ثابت است و بادوران خط AP تغییر نمی کند

۴۹۷ـ اگر مجموع دو زاویه مثلث مقدار ثابتی بماند و قاعده تغییر نکند نیمساز زاویه سوم بر نقطهٔ ثابتی مرور کند واگر اختلاف زوایای قاعده ثابت بماند و قاعده تغییر نکند امتداد نیمساز زاویه سوم امتداد ثابتی است و همچنین دراین مثلثها روابط زیر صادق است :

$$\hat{B}+\hat{C}=\alpha$$

$$2a^2=(b+c)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{و} \quad =\pm 1$$

در مثلث ۱ = + مکان رؤس سوم دائره‌ایست که بر B و C می گذرد ودر مثلث ۱ − = مکان رؤس سوم هذلولی متساوی‌ـ الساقینی است که بر B و C میگذرد (B و C رؤس این هذلولی نیستند مگر اینکه $\alpha=90^\circ$ باشد) .

مسألهٔ مسابقه

۴۹۷ـ x و y دوعدد دلخواه مخالف صفر میباشد . صحت رابطه زیر را ثابت کنید :

$$\frac{|xy|}{xy}+\frac{|x-y|}{x-y}\left[\frac{|x|}{x}-\frac{|y|}{y}\right]=1$$

(مهلت قبول پاسخ ـ بیستم فروردین ۱۳۴۳)

توضیح ـ مهلت قبول پاسخ مسأله‌های مسابقهٔ شمارهٔ اول که درچاپ اول تا بیستم اسفند تعیین شده بود درچاپ دوم شمارهٔ اول تمدید شده وتا بیستم فروردین ۱۳۴۳ اعلام گردید . خوانندگان محترم میتوانند پاسخ مسابقه‌های شماره اول ومسابقه شماره دوم را تا بیستم فروردین ارسال دارند . حل این مسائل و نام اشخاصی که حل صحیح آنها را فرستاده باشند در شمارهٔ سوم چاپ خواهد شد .

پاسخهائی که تاکنون (۲۰ اسفند) برای مسائل مسابقه شمارهٔ اول رسیده است :

مسألهٔ مسابقه چهارم ریاضی ـ اسمعیل احمدیان ازدبیرستان پهلوی ساری ـ اصغر جمالی‌فرد ازدبیرستان سعیدالعلماء تهران ـ بهروز توفیق از دبیرستان دارالفنون تهران .

مسأله مسابقهٔ پنجم ریاضی ـ محمد روزبه ، دبیرستان رهنما تهران ـ فرشید سیروس ، دبیرستان هدف ۳ تهران ـ فرامرز رهبر ، دبیرستان شرف تهران ـ مهدی ساجدی ، دبیرستان پهلوی ساری ـ مسعود دیده‌ور ، دبیرستان ادیب تهران ـ فرخ پور حسن ، دبیرستان ادیب تهران .

مسأله مسابقهٔ ششم ریاضی ـ مهدی ساجدی ، دبیرستان پهلوی ساری ـ عصمت قراگزلو ، دبیرستان نو باوگان ضرابی تهران ـ فاطمه ارجمند ساوجی دبیرستان نو باوگان ضرابی تهران ـ محمد قلی چراغعلی ، دبیرستان امیرکبیر تویسرکان ـ پریچهر میرزا پور ، دبیرستان نوباوگان ضرابی تهران مهدی حکمی دبیرستان رازی آبادان ـ یکی از محصلین دبیرستان بوعلی سینا تهران .

مساله مسابقهٔ فارغ التحصیلان : مسعود دیده‌ور ، دبیرستان ادیب تهران ـ فرخ پورحسن . دبیرستان ادیب تهران

مساله اول مسابقهٔ ممتاز : مسعود دیده‌ور ، دبیرستان ادیب تهران ـ فرخ پورحسن ، دبیرستان ادیب تهران

مساله دوم مسابقهٔ ممتاز (الحسن) : سید حجت ذاکری ، دبیر دبیرستان پسرانه شهرآرا ـ محمد داوری ، دبیر دبیرستانهای اردکان ـ محمود میرزائی ـ احمد ترابی ـ بهروز اسلامی دانشجوی سال سوم فنی ـ بیوك میر فتاحی .

مسائل امتحانات مواد ریاضی
دورهٔ دوم دبیرستانها

(از رؤسای محترم دبیرستانهای سراسر کشور وهمچنین دبیران گرامی وخبرنگاران خود تقاضا داریم سئوالهای امتحانات مواد ریاضی دوره دوم ثلث دوم را ارسال دارند)

دبیرستان شاهپور . شیراز

فرستنده مسائل- مسعود امین‌زاده

جبر ششم ریاضی- ثلث اول

۴۹۹- مطلوبست تعیین معادلات مماس وقائم برمنحنی

$$x^2+y^2-2xy-x=0$$

درنقاطی ازمنحنی بطول ۱

۵۰۰- ثابت کنید هذلولی بمعادلهٔ $x^2-y^2=5$ و بیضی بمعادلهٔ $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ یکدیگررا بزاویه قائمه قطع می‌کنند

۵۰۱- تابع $y=\frac{-(x-1)^2}{x^2+x+a}+b$ مفروض است

b و a راطوری تعیین کنید که یکی ازریشه‌های مشتق برابر (۱-) وماکزیمم ومی‌نیمم تابع مختلف العلامه باشند ثانیاً جدول ومنحنی نمایش تابع $\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}$ را رسم کنید

۵۰۲- تابع $y=\frac{ax^2+bx+a}{ax+a+b}$ مفروض است b و a مختصات نقطه‌ای مانند M در صفحه محورهای مختصات میباشد مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ M بطریقیکه نمایش هندسی تابع یك خط راست باشد . ثانیاً M درچه ناحیه از صفحه درمحور واقع باشد تا تابع دریك جهت تغییر کند

۵۰۳- تحقیق کنید بین y' و y'' مشتقات اول ودوم تابع $y=(x+\sqrt{x^2-1})^n$ رابطه زیر برقرار است

$$(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$$

دبیر- آقای همت

مثلثات ششم ریاضی- ثلث اول

۵۰۴- معادله $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4m^2}{\cos 2x}$ را حل کنید و معلوم کنید بازاء چه مقدار m داریم

$$-\frac{\pi}{8}<x<\frac{\pi}{8}$$

۵۰۵- دستگاه زیر را حل کنید وبازاء $m=-1$ جوابهای عمومی را پیدا کنید .

$$\begin{cases}\sqrt{8}\sin x\sin y=2+m\\ \sqrt{6}\,tg x\cos y=m\end{cases}$$

۵۰۶- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A=90^\circ$) نسبت $\frac{AC+BC}{AB}=m$ معلوم است مطلوبست محاسبه $tg\frac{B}{2}$ و از روی آن خطوط مثلثاتی زاویه B را حساب کنید و تعیین کنید درچه صورت B کوچکترین زاویه مثلث است .

۵۰۷- عبارت زیررا قابل محاسبه بالگاریتم نمائید .

$$1-\cos^2 x-\cos^2 y-\cos^2 z+2\cos x\cos y\cos z$$

دبیر- آقای همت

دبیرستان دکتر فاطمه سیاح- تهران

متمم حساب چهارم ریاضی- ثلث دوم

۵۰۸- مطلوبست مقدار عددی عبارت زیر

$$A=(450.28)^{10}\sqrt[11]{\frac{(15)^{12}}{0.0023}}$$

۵۰۹- تساعدی عددی را بنویسید که جمله پانزدهم آن (۲۵) وجمله بیست ونهم آن (۴۶) باشد

۵۱۰- تعیین کنید تعداد ضربه‌های ساعت دیواری را که در مدت ۲۴ ساعت باضربه‌های خود وقت را اعلام میدارد .

۵۱۱- دریك تساعد مجموع صدویك جمله آن صفر ومجموع پنجاه ویك جمله آن (۶۳۷۵) می‌باشد جمله اول وقدرنسبت آنرا تعیین کنید .

۵۱۲- مجموع سه جملهٔ یك تساعد حسابی (۹) وتفاضل مربع اولین جمله ازمربع سومین جمله (۱۲۰) میباشد آن سه جمله را تعیین کنید.

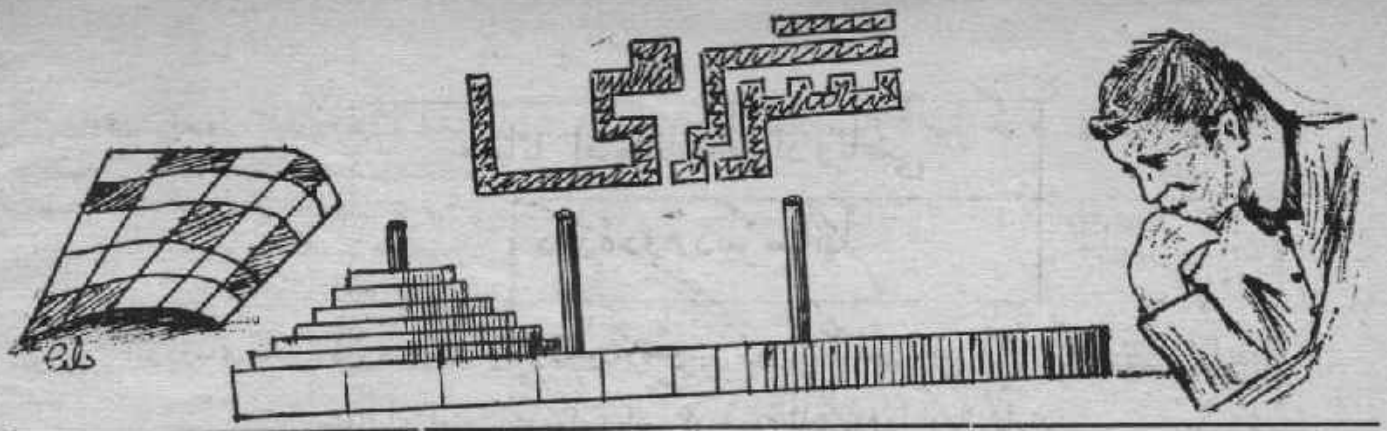
۵۱۳- معادله زیررا حل کنید .

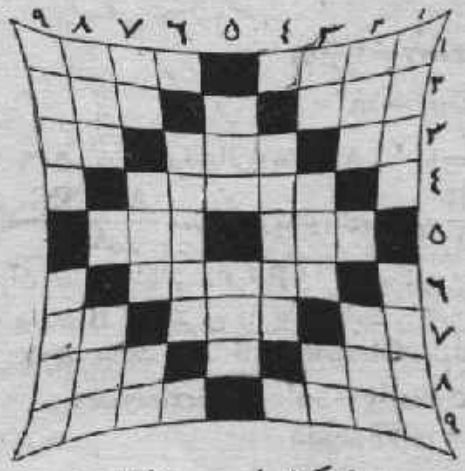
$$\log 2x-\log\sqrt{x}-\log 3=\log\sqrt{x}-\log x^2-\log\frac{2}{3}$$

۵۱۴- دستگاه دومعادله دومجهولی زیررا حل کنید

$$\begin{cases}x-y=2xy\\ \log(3y+x)-\log y=1+\log x\end{cases}$$

دبیر- آقای مرادمند





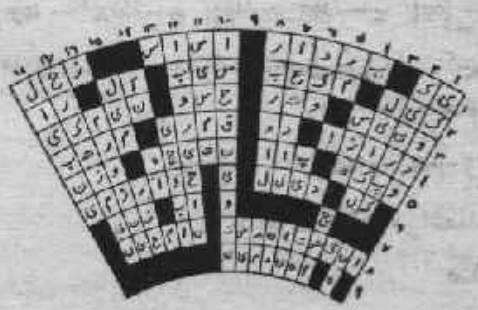
جدول کلمات متقاطع

افقی :

۱- بنا بگفته «گوس» ریاضیات سلطان علوم است و... سلطان ریاضیات - ساختن دایره‌ای معادل با آن از مسائل لاینحل ریاضی است. ۲- نقطه تلاقی دو ضلع از چند ضلعی - ریاضیات جدید قضایا را در اینحالت مطرح میکند. ۳- بزرگتر از جزء - زاویه کوچکتر از قائمه - چون با خودش جمع گردد مجذور شود. ۴- امسال هم از این نوع بود. ۵- برجی از منطقة البروج که هم ردیف مرداد بحساب میآید - تکلیفی که سه قسمت از پنج قسمت آن انجام گرفته است. ۶- علامت ریشه گرفتن. ۷- تنها عددی که مجموع خود و معکوسش از ۲ بزرگتر نیست - وارونه آنچه که با بدیهی است ویا بدون اثبات قبول میشود - ضلع. ۸- واحد زمان - قراردادن متلاجند واسطه عددی یا هندسی بین دو عدد. ۹- اگر با نسای صفر باشد برابر با یك خواهد بود - اصطلاح پارسی خمسه مسرقه.

عمودی :

۱- تغییر فاصلهٔ نقطه ثابت بیك مبداء - عددی که در کنور ما برای دانش‌آموزان مقدس است. ۲- نوری آن واحد فاصله در نجوم میباشد- محدب نیست. ۳- معمولا مساحت وهمچنین سطح را با آن نمایش میدهند - قسمتی از قسمتهای یك واحد - ۳۱ بحساب ابجد. ۴- انواع آن تغییر مکان، انتقال، دوران و تجانس میباشد. ۵- دانشکده‌ای که زبدهٔ فارغ التحصیلان رشته ریاضی را می پذیرد - سومریها آنرا مبنای عددنویسی قرارداده بودند. ۶- سیستم بی انتها. ۷- راهی که ثلث آن باقی‌مانده است - معکوس واحد فرهنگستانی- ۴ و ۵۰ بحساب ابجد. ۸- فضای اینشتین چهار تای آنرا دارد - نام قسمتهای دوازده گانه منطقة البروج. ۹- وضع دوخط که با یکدیگر زاویه‌های مجاور مساوی میسازند- واحد گمان.



حل جدول شمارهٔ اول

بازی برای تعطیلات نوروزی

در مجلسی با عده‌ای از دوستان نشسته اید، پیشنهاد کنید که یکی از آنها حلقه‌ای را بیکی از بندهای انگشتی از یك دستش بنماید (بدون اینکه شما به‌بینید) وادعا نمائید که خواهید گفت حلقه در بند چندم چه انگشتی از کدام دست کدامیك از دوستان میباشند. باین ترتیب عمل کنید: اولا برای هریك از دوستان بترتیب سلسله اعداد شماره‌ای قراردهید. ثانیاً- ازیکی از دوستان بخواهید اعمال زیررا بدون آنکه نتیجه‌اش را بشما بگوید انجام دهد.

۱- شماره دوستی راکه انگشتر نزد اوست دوبرابر نموده بحاصل عدد پنج را بیافزاید.

۲- حاصل راپنج برابر نموده وبحاصل عدد ده را اضافه نماید.

۳- اگر انگشتر دردست راست است یك واحد واگردر دست چپ است دو واحد بحاصل فوق افزوده و مجموع را ده برابر کند.

٤- به این حاصل شماره انگشت را اضافه نموده حاصل را ده برابر کند (شماره انگشتان بترتیب زیراختیارشود: یك برای شست، ۲ برای انگشت دوم، سه برای وسطی و.. بالاخره، ۵ برای انگشت کوچکتر).

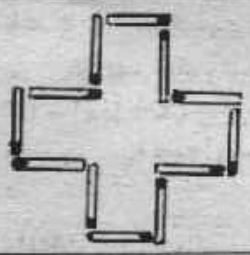
۵- بحاصل شماره بندی‌راکه انگشتری درآنست اضافه نماید(یك برای بندی که به ناخن متصل است دوبرای بنددوم و..)

٦- عددی‌راکه باین ترتیب بدست‌میآید بشما بگوید.

۷- ازاین عدد ۳۵۰۰ واحد کم کنید ارقام تفاضل بترتیب از سمت چپ شمارهٔ شخص، شماره دست شماره انگشت وبالاخره شماره بند انگشت مربوط را معین می کند

علوم تفریحی- مصاحب

بازی با چوب کبریت



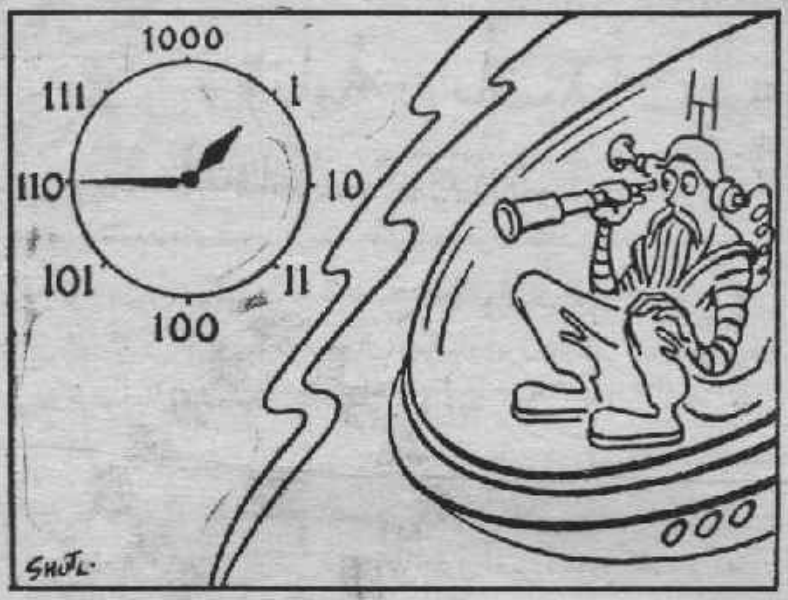
شکل بعلاوه که ملاحظه می کنید از ۱۲ چوب کبریت ساخته شده است و مساحت آن ۵ واحد (باواحد چوب کبریت) میباشد باجابجا کردن چوب کبریتها شکلی بسازید که مساحت آن ٤ واحد (باواحد چوب کبریت) باشد.

چند حرکت لازم است؟

ل	ل	ل	ل	ل		ن	ن	ن	ن	ن

مطابق شکل بالا مربع مستطیلی شامل ۱۱ قسمت رسم کنید در پنج خانهٔ سمت راست هرخانه یك دانهٔ نخود و درپنج خانهٔ سمت چپ هر خانه یك دانه لوبیا بگذارید و خانهٔ وسط خالی باشد حال باشرایط زیر نخودها را بسمت چپ ولوبیا ها را بسمت راست انتقال دهید و اولا هردفعه یکدانه جابجا شود. ثانیاً هردانه فقط درخانه‌ای که خالی است واقع شود. ثالثاً هردانه را فقط میتوان از روی یك دانه ازنوع غیرازخودش حرکت داد (نخودرا ازروی لوبیا ولوبیا را ازروی نخود) رابعاً هیچ حرکت بعقب انجام نگیرد.

ساعت اسرارآمیز کرهٔ زهره



آقای پروفسور دگات نوویتز، باسفینهٔ فضائی کره زهره را دور میزد و با دوربین خویش درجستجوی محل مناسب برای فرود آمدن دراین سیاره بود. ناگاه برج بلندی‌را مشاهده کرد که بر بالای آن ساعتی با صفحهٔ بزرك و ارقام اسرارآمیز نصب بود (مطابق شکل). پروفسور خیلی زود به رمز ساعت و ارقام آن پی‌برد وبا توجه باینکه مدت حرکت وضعی سیارهٔ زهره مانند زمین و در حدود ۲۴ ساعت است و بهنگام نیمه شب و نیمروز عقربه های ساعت بریکدیگر منطبقند ودرآن موقع، درآن قسمت اززهره شب بود توانست بفهمد چه مدت بعدازنیمه‌شب میباشد. چگونه؟ خوانندهٔ گرامی پاسخ خواهد داد که اولا رمز اعداد روی ساعت چیست و ثانیاً ساعت روی شکل چه‌وقتی را نشان میدهد.

(اقتباس از Math. Pie)

جواب معماهای شماره اول

ازشعرفرانسه چه می‌فهمید ؟

تعداد حروف کلمات شعرمقدارعدد π را تا ۳۰رقم اعشار مشخص میکند :

π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹

معمای عدد

عدد مطلوب صفرمیباشد زیرا اگر ازآن ۶ کم‌شود ۹۴ بدست میآید و۹۴ بحساب ابجد برابراست باصد (ص = ۹۰ ود = ۴) - اگر برعدد مطلوب ۶ بیفزائیم بترتیب زیر بازهم صفرحاصل میشود :

۶+ص+۵-۶+۹۰+۴-۱۰۰

پاسخ مسألهٔ پایان جهان

برای‌جابجاکردن قرصها ازمیلهٔ‌اول ، میله‌ای‌که برآن قرار دارند حرکات زیرلازم است برای قرص اول فقط یك حرکت‌لازم‌است ، برای قرص دوم دوحرکت لازم‌میآید یك‌دفعه قرص اول‌را ازمیله دوم برداشته به قرص سوم قرار داد وبعد قرص دوم را ازمیله اول برمیله دوم‌گذاشت و بالاخره قرص اول را مجدداً برمیله دوم وبالای قرص دوم قرارداد و بهمین ترتیب برای جابجاکردن هریك از قرصها تعداد حرکت های لازم دو برابر تعداد حرکاتی است‌که برای جابجا کردن‌قرص قبلی لازم بوده است وباین طریق مجموع حرکات لازم برای جابجا کردن تمام قرصها برابر میشود با مجموع اعداد یك تصاعد هندسی با جمله اول ۱ وقدر نسبت ۲ که تعداد تمام جمله ها نیز ۶۴ میباشد وبرابر میشود با

۱۸۰٫۴۴۶٫۷۴۴٫۰۷۳٫۷۰۹٫۵۵۱٫۶۱۵

وچنانچه مدت زمان لازم برای هریك حرکت یك‌ثانیه فرض‌شود مدت‌زمان‌لازم برای تمام حرکات‌کمی بیشتراز پنجاه وهفت هزارمیلیارد سال خواهدبود.

جدول اعداد

برای اطلاع برتشکیل جدول رجوع شود بمقالهٔ مربعهای وفقی این شماره

چگونه ؟

چگونه ازعدد ۱۹ یك‌واحد کم کنیم تا باقیمانده برابر با ۲۰ گردد ؟ طبق ارقام رومی I نمایش یك و XIX نمایش ۱۹ است چنانچه رقم I را از این عدد حذف نمائیم XX بدست میآید که نمایش ۲۰ میباشد.

جواب معمای گوشواره

حل آنرا بشنو از من از سر صدق ویقین
ایکه هستی در میان اهل دانش یادگار
گوشواریرا که وصف آن بیان فرموده‌اند
قیمت و وزنش بـا تـو گویم گوش دار
هست وزن لعل تلث و ثمن مثقالی تمام
در کم و بیشش نباشد هیچکس را اختیار
هست وزنش اینچنین و قیمتش گویم بتو
چارده دینار کـم ربعست نـزد هوشیار
هست مروارید دانگ وثمن مثقالی ولیك
قیمت او پنج دینار است و ربعی را بنار
وزن زرربعی ز دینار است نه بیش ونه‌کم
قیمت آن هست یك دینار زر با اعتبار
سکه پرذر میزند هرکس که از روی کرم
نقد هستی را بـرای دوستان سازد نثار

بازی اعداد

$$۴۹ = ۷^۲$$
$$۴۴۸۹ = ۶۷^۲$$
$$۴۴۴۸۸۹ = ۶۶۷^۲$$
$$\underbrace{۴۴۰۰۰۰۴}_{m\text{ مرتبه}}\ \underbrace{۸۸۰۰۰۰۸۹}_{m-۱\text{ مرتبه}} = (\underbrace{۶۶۰۰۰۶۷}_{m-۱\text{ مرتبه}})^۲$$

فرستنده - آقای حافظی
دبیر ریاضی دبیرستان درخشانی - شبستر

نوشته: عبدالحسین مسعودی

دانش‌آموزسال ششم ریاضی‌دبیرستان شاهپورشیراز

(نامهٔ ریاضیدان بمعشوق)

عزیزجفاکار، به‌بطلمیوس سوگند که نیروی عشقت کسرعمرم رامعکوس نموده وبخرمن هستیم آتش زده‌است. انگارعمرمن تابع وفای‌تست. قامت رعنایم‌ازهجرت منحنی شده وتیرعشقت همچوبرداری که موازی آرزوهایم تغییرمکان داده باشد شلجمی‌قلبم راناقص ساخته‌است. شبهای فراق که باحرکتی‌تناوبی‌تکرارمیشوند چنان نحیفم ساخته که‌هرگاه بمزدوج خویش درآئینه مینگرم خیال میکنم‌اززیررادیکال بیرونم‌آورده‌اند. دردایره عشقت اسیرم ومرکزی نمی‌یابم که‌آنی‌فارغ ازخیال تومعادله n مجهولی زندگیم راحل کنم....

دوش فیثاغورث رابخواب دیدم که از وجود سرگشته‌ام مشتق میگرفت خدا خدا میکردم که ریشه‌ای نیابد تا همیشه سیری صعودی بسوی تو پیدا کنم. ناگهان خیال کردم که تابع‌نیستم وچون این سخن باوی درمیان نهادم فرجه لبهایش به‌مسطحه °۹۰درجه ازهم بخنده‌ای جنون‌آمیز گشوده گشت و گفت:

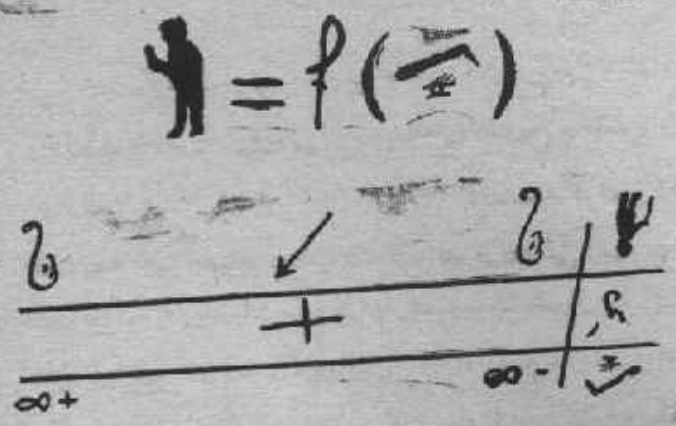
– ای حیران وادی سینوس عشق مگرندانی که پرانتزوجودت بستگی مستقیم به‌تغییرات دل‌معشوق دارد؟...

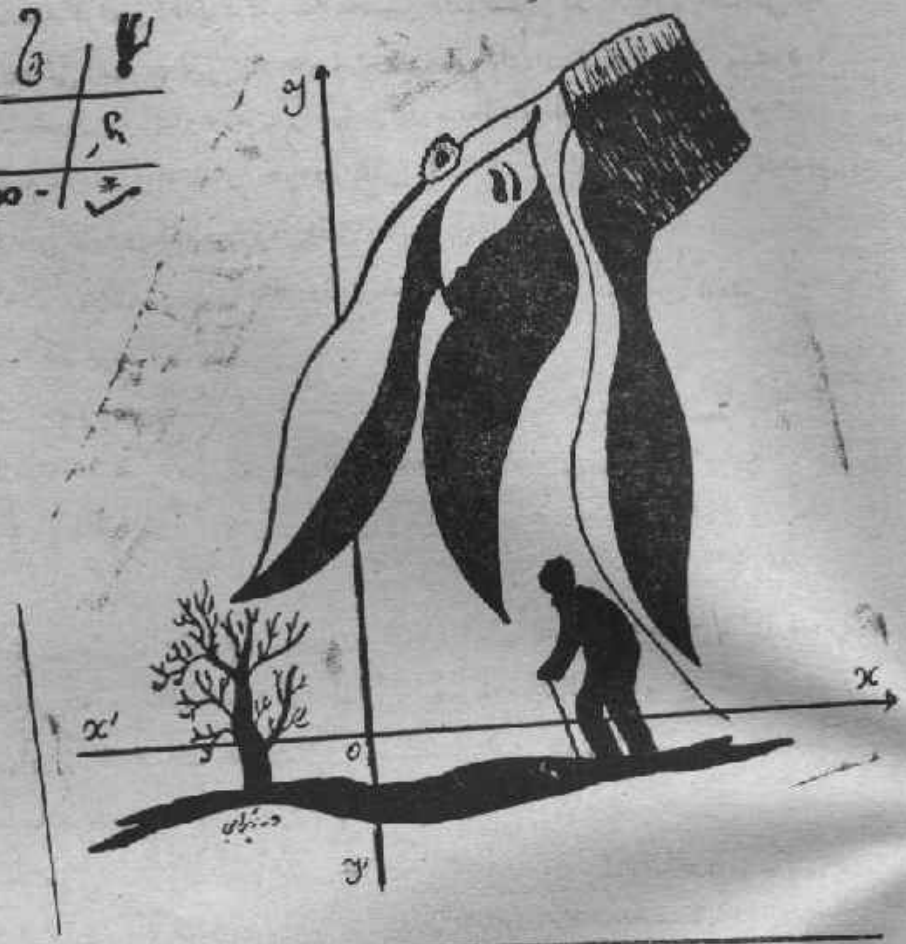
از بی‌خبری خویش معذرت خواسته ازحضرتش بخشایش طلبیدم. هرشب چون برسطح مستوی بستر پلکهایم بهم مماس میشوند وحدی به‌بینهایت می‌یابم ترامی‌بینم که‌با (زیبائی ونوس) بقوه n بسویم میل‌داری وزمانی که شکل بعلاوه پیدا میکنم ودستهایم را برای درآغوش کشیدنت ازهم میگشایم درمی‌یابم که منحنی‌های آرزوی من ووصال تونقطه برخوردی ندارند. آنگاه که برمحورتاتزانت‌ناامیدی‌سرگردانم‌حامل‌عشقت برایم‌مبداء امیداست‌وزمانیکه‌از کسینوسهای بیوفائیت فاکترمیگیرم‌از گوشه کروشه رخسارت چشمکی دلفریب به‌وفائی‌مجهول‌ومتمنع نویدم‌میدهد. اوه!. دلداربیوفا،زمانی که اپسیلن‌های‌وعده‌های‌تورا دربینهایت‌های‌امیدهای‌خودم ضرب میکنم واز بیوفائی‌ها وجفاهای بتعدادنامحدودت انتگرال میگیرم بازهم‌خوشحال‌هستم چون‌حدی‌دارد وجهت باقیمانده هنوزمثبت‌است. بنابراین بخودحق‌میدهم‌این‌امید را داشته باشم که روزی‌فرامیرسد که من بافشاری برابر P کیلو گرم‌درآغوشت بفشارم وبوسه‌ای بشدت H گوس‌ازسطح شیب‌دار رخسارت برگیرم. لابد ازمرورمجموع این‌آرزوها بیضی‌چهره‌ات با خنده‌ای تمسخرآمیز بدایره میگراید و میگوئی:

– تصورتحقق این‌آرزوها همچون تصور وجود بینهایت برای سینوس است وشب چنین خیالی را صبحی‌از امید انتظارنمیکشد.... ولی‌اگرمیدانستی که من دریائی‌ازاشك بحدودآسمانها وبعمق دریاها برای دوران فراقت مهیا کرده‌ام چنین خیالی‌نمیکردی.... آخ! دلدارم... زمانی که درمی‌یابم صورت کسروصالت صفرشده وامید من برابرهیچ خواهد بود. قطره‌های اشك باتصاعدی هندسی برانحنای گونه‌ام نزول میکند وعقربه آمپرسنج قلبم برای گذشتن از درجه صد بنوسان درمی‌آید اما امیدوارم که جدول جفایت غلط باشد چه‌پارامتردل هوسبازت همیشه ثابت نیست اماافسوس‌حتی با حساب احتمالات هم امید وصلت ازمحالات است و درافق اندیشه‌هایت اصلا اثری‌ازوفا وجود ندارد.... راستی اگراین حرفها بابطبعت نیست‌ودر کسرعلاقات صدق‌نمیکنداجازه بده سخن‌ازچیزهای‌دیگر بزبان‌آورم. ولی‌اینراهم‌بدان که‌در هرحال جفاکاری!... چه‌زمانی که قدرت خیالم باهزار بدبختی بین‌مقادیرامید و وصال‌علامت مساوی یاحداقل تقریب میزند باعشوه‌ای عاشق کش مخالفش میسازی..

اوه! نکند مهرت را دردل من به‌تنزیل گذاشته‌ای وخود هرلحظه بحساب بهره‌هایش میرسی. اگراین فکررا داری بهتراست بدانی که قلب من سرمایه‌ای‌ازمهرومحبت بحجم میلیونها کیلومترمکعب برایت تهیه دیده وتمام دلم‌بدون

منحنی قامتم تابع ابروی توست
خط مجانب بر آن طرهٔ گیسوی تو است





نقاشی اثر :
و ـ زهرایی
دانش آموز دبیرستان
دکترمحمودشیمی ـ تهران

حتی یك اپسیلون بیش و کم در اختیار تست.

هر زمان که دستم برای رقم زدن سینوس بجنبش درمی‌آید آرزو میکنم که بجای I سینوس U بگذارم و درخشندگی خورشید بامداد امیدهایم را دروجود آن سه حرف پیدا کنم. (۱)

عزیزم، بیاو بیش ازاین بانوك گونیای هجر بدنیای وجودم آسیب نرسان، ازدایرهٔ سرگردانی به‌هذلولی امیدی انتقالم ده که اقلامجانبی بنجات داشته باشم. شاید ندانی هرقدر که زاویهٔ جفایت گشوده‌تر گردد کسینوس شادی من نیز سیری نزولی بسوی صفر پیدامیکند.

دیگر بیش از این بفرمول وجودت دست نمیبرم ولی امیدوارم که طالس بزرگ دل سنگت را نسبت بمن نرم نماید و بیش ازاین محتاجم نسازد که درلگاریتم اندیشه بدنبال اندازه تقریبی وفایت بگردم. درانتظارطلوع صبح امید و آرزوها خداحافظ....

(۱) sin (علامت اختصاری سینوس) و sun (خورشید) تنهادرحرف وسط اختلاف دارند...

تاریخچهٔ استعمال حروف وعلامات در ریاضیات

در بارهٔ چگونی پیدایش علامت های ریاضی و استعمال حروف در این علم ، در اغلب کتابهای تاریخ ریاضیات اشاره‌ای شده است ویکی از ضمیمه‌های «تاریخ مختصر ریاضیات ، تألیف موریس دوکانی» که مورد استفاده ما است مربوط به تاریخ وضع علامات میباشد . **دانشمند گرامی آقای دکتر غلامحسین مصاحب نیز در تاریخ ریاضیاتی که بضمیمه جبر خیام بچاپ رسانده‌اند صفحاتی بشرح این تاریخچه اختصاص داده‌اند که ذیلا نقل میشود :**

کسانی که با ریاضیات سروکار دارند اهمیت استعمال حروف وعلامات را دراین علم میدانند وبطوریقین یك عمدهٔ ترقیات علوم ریاضی در دست اروپائیان از راه وضع علامات و استعمال حروف بعمل آمده است . لذا بی مناسبت ندیدیم مختصری راجع بتاریخ علامات مستعمله در این علوم وبکار بردن حروف در اینجا ایراد کنیم

علامات اولیه ـ اولین نسخه ای که در آن علامتی برای نشان دادن عملی بکار رفته **پا پیروس آهمس** است که برای جمع و تفریق علامات مخصوصی بکار برده است

ذیو فنطس نیز برای تفریق علامت بخصوصی استعمال کرده است . **هندیان** قبل از قرن دوازده برای نمایش دادن اعداد منفی صلیبی پهلوی آنها میگذاشتند وخط کسری را برای عمل تقسیم بکار میبردند **بهاسکارا** (قرن دوازدهم) برای تمیز دادن اعداد منفی بالای آنها نقطه یا دایرهٔ کوچکی قرار میداده و گاهی نیز عدد منفی را داخل دایره‌ای میگذاشته است .

علامات فعلی ـ ۱ ـ **جمع و تفریق** ـ قبل از اختراع فن طبع درفرانسه و ایتالیا حروف P و M برای نمایش جمع وتفریق بکار میرفته است . در نسخه‌ای که در سال ۱٤٥٦ در آلمان تالیف شده لفظ et برای نمایش جمع استعمال شده و سبك تحریر این لفظ در آن رساله شباهت بعلامت + نیست . از این جهت احتمال میرود مبداء علامت جمع همان لفظ et باشد ولی بعضیها مبداء آنرا همان حرف P میدانند .

اصل علامت تفریق مورد اختلاف است . در بعضی از آثار قرون ۱۵ و ۱٦ علامات $\overline{M}$ و M برای نمایش اینعمل بکار میرفته و شاید علامت تفریق از این علامات مشتق شده باشد باید دانست که علامات جمع و تفریق بدواً در جبر و مقابله استعمال میشده‌اند و برای اولین دفعه در سال ۱٤۸۹ در حساب بکار رفته‌اند و استعمال آنها توسط **شیتفل** Stiefel (۱٤۸٦ یا ۱٤۸۷ ـ ۱٥٦۷) مخصوصا در آلمان رواج یافته و بعد در سایر نقاط شایع شده است .

بالاخره صورت فعلی این علامات از قرن هیجده ببعد استعمال شده است .

۲ ـ **ضرب** صورت ab برای نشاندادن عمل ضرب اول دفعه در کتاب حساب **شیتفل** (۱٥٤٤) و علامت × در کتاب ریاضیات **اوترد** Oughtred (۱٥۷٤ ـ ۱٦٦۰) دیده میشود . بالاخره نقطه را **لایب نیتز** در نیمه دوم قرن هفدهم برای نمایش عمل ضرب بکاربرده است .

۳ ـ **تقسیم** ـ علامت (ـ) را **فیبناکسی** Fibonacci (۱۱۷۰ ـ ۱۲٥۰) برای عمل تقسیم بکار برده‌است علامت (÷) که برای نمایش عمل تقسیم بکار میرود مدتها در اروپا علامت عمل تفریق بوده و در جبر **رنیوس** Rhonius که درسال ۱٦٥۹ در **زوریخ** چاپ شده علامت تقسیم قرارداده شده‌است وازوقتی که **پل** Pell (۱٦۱۱ ـ ۱٦۸٥) کتاب رنیوس را بانگلیسی ترجمه کرد استعمال آن نزد انگلیسی‌ها رایج شد . علامت (:) اول دفعه

در آثار قرن هفدهم دیده میشود و انگلیسی‌ها واضع آن هستند و **لایب‌نیتز** که در سال ۱۶۸٤ این علامت را استعمال کرده ظاهراً ازمنابع انگلیسی اخذ کرده است .

٤ – **ریشه** – درقرون وسطی علامت R که خطی بدنباله آن اضافه میشده برای نمایش ریشه بکار میرفته و این علامت بیش از یك قرن در آثار مطبوعه رایج بوده است . استعمال علامت $\sqrt{}$ بدون نماینده از **رودلف** Rudolff است (تولد ۱۵۰۰) وبزعم بعضی منشاء آن حرف r میباشد .

این علامت بمرور زمان اشکال مختلفی اختیار کرد ، مثلا **شیتفل** علامت مزبور را با اضافه کردن دندانه‌هائی بفرجهٔ آن ، برای علامات جذر و کعب و ریشهٔ چهارم بکار برده است

وولاك Vlacq از ریاضی دانان قرن ۱۷ جذر و کعب و ریشهٔ چهارم را با این علامات نمایش‌میداده است: ($\sqrt{}$ و $\sqrt{}(3)$ و $\sqrt{\sqrt{}}$) واز این قرن ببعد متدرجاً علامات کنونی وضع و استعمال شده است .

٥ – **قوه** – نمایش کنونی قوای صحیح از **اریگن** Herigone ریاضی‌دان فرانسوی قرن۱۷ **ودکارت** میباشد .

مبنای استعمال قوای منفی و کسری درآثار **شتیفل** و **والیس** Wallis (۱۶۱۶–۱۷۰۳) وغیره دیده میشود ولی شیوع استعمال آنها از زمان **نیوتون** Newton (۱۶٤۲–۱۷۳۷) است .

٦ – **علامات روابط** – علامت (=) را اول بار **ریکرد** Recorde (۱۵۱۰–۱۵۵۸) درسال ۱۵۵۲ در محاسبات وارد کرده است ولی‌صدسال بعد استعمال آن رواج یافته‌است . علامات $<$ و $>$ از **هاری** Harriot (۱۵۶۰–۱۶۵۱) و مبداء علامات $\geq$ و $\leq$ درآثار **بوگر** Bouguer دیده میشود .

۷ – **علامات دیگر** پرانتز را اول دفعه **ژیرار** Girard (۱۵۹۵–۱۶۳۲) در سال ۱۶۲۹ استعمال کرده است . علامت ∞ ابتداء درآثار **والیس** دیده میشود و استعمال آن برای این است که علامت مزبور نزدرومیها برای‌نمایش هزار ونزد یونانیان برای علامت ده هزار بکار میرفته است .

۸ – **استعمال حروف** – «درقرن دوازدهم **لئونار دیپز** مبانی جبر را باروپائیان آموخت و پایهٔ اطلاعات‌اوهمان کارهای‌علمای اسلامی بود که ازدرجهٔ دوم تجاوز نمیکرد . بعلاوه طرقی که‌آنان بکار میبردند مبنی بملاحظات هندسی بود . مقادیر را بوسیله خطوطی نمایش میدادند ومعلومات مسائل را همیشه عدد اختیار کرده ودرمحاسبات فقط مقدار مجهول را بوسیله علامتی نمایش میدادند این بود وضعیت جبر و مقابله در موقعی که **ویت** Viete (۱۵٤۰–۱۶۰۳) بمطالعهٔ آن پرداخت »(از کتاب تاریخ ریاضیات بوایه) . ویت از بزرگترین ریاضی‌دانهای فرانسوی قرن ۱۶ است و با وجود اشتغالات رسمی خدمات مهمی بترقی علام ریاضی کرده و اگرچه بیشتر آثارش درجبر ومقابله است . درهندسه و نجوم و رشته‌های دیگر ریاضیات نیز مطالعاتی دارد .

بزرگترین خدمت ویت بعلوم ریاضی استعمال حروف است .

ویت مقادیر معلوم را نیزمانند مجهولات بحروف نشان میداده و برای اینکه اشتباهی پیش نیاید حروف صدادار A ، E ، I و U و Y را برای نمایش معلومات وحروف بیصدا را برای نشان دادن مجهولات بکار میبرد وقوای آنهارا باهمان حرف بانضمام یکی‌از اندیس‌های q و C وترکیبات آنها نمایش میداده است .

چنانکه دیده میشود رویهٔ **ویت** برای نمایش دادن مقادیر با آنچه امروزه بکار برده میشود خیلی فرق‌دارد ولی او بانی جبر ومقابله کنونی است .

بقیه درصفحهٔ ماقبل‌آخر

توضیحاتی دربارهٔ مطالب شماره اول

✿ **استاد دکتر محسن هشترودی** ضمن یاد داشتی ایراد فرموده‌اند که ، مسأله شمارهٔ ۱۰۱ صفحهٔ ۴۲ بصورتی که بیان شده‌است دارای بینهایت جواب است. باید منظوراز مسأله تعیین جوابهای منطق معادله باشد که درآنصورت بیش‌از یکرشته جواب نخواهد داشت.

✿ **دانشمند معظم جناب آقای احمد آرام** نسخهٔ مجله‌ای راکه حضورشان تقدیم‌شده‌بود بادقت مورد توجه قرار داده ضمن یادداشت اشتباه‌های چاپی واظهارنظر پیرامون بعض مندرجات ، آنرا عودت داده‌اند وخواسته‌اند که شماره های بعد این مجله عاری از چنین لغزشهائی باشد. وبعلاوه نوید داده‌اند که مقاله‌ای برای درج درمجله‌ارسال خواهند داشت.

ازجمله توصیه‌های ایشان آنکه: «دراینصورت»،«آنستکه» «اینعلم»،«یکنقطه»،«صرفنظر» وامثال آن بصورتی که نوشته شده است غلط بوده وصحیح آن بترتیب زیراست : «دراین صورت» «آنست که»،«این علم»،«یك نقطه»،«صرف نظر».

آقای آرام. مسأله‌دوم ازمسائل شیخ بهائی رابصورت زیر تصحیح فرموده‌اند:

« مجذورا اذا زدنا علیه عشرة ، کان للمجتمع جذر . اونقصنا ها منه کان للباقی جذر»

$$x^2+10=\sqrt{a} \quad و \quad x^2-10=\sqrt{b}$$

باعث افتخاراست که ، دانشمندان نکته سنجی امثال **جناب آقای دکترهشترودی ، آقای احمد آرام** تااین حد، مجلهٔ یکان را مورد توجه قرارداده ونسبت به بهبودآن ابراز علاقه بنمایند. آرزومندیم، باتوجهاتی این‌چنین، مجله شماره ـ بشماره، بهتروسودمندتر باشد. ایکاش، برای املاء فارسی هم، مانند ریاضیات ، قواعد مسلمی وجود داشت و همه‌کس ملزم به رعایت آن میبود

✿دانشمند گرامی **آقای رزاقی‌خمسی** توضیح داده‌اند که درمقالهٔ بقلم‌ایشان، درصفحهٔ ۴۰ روی شکل وهمچنین روابط سطرسوم‌وششم‌ازپائین صفحه، بجای‌حرف K بایدحرف d نوشته‌شود

مقاله‌های ناتمام

عده‌ای ازخوانندگان گرامی تذکرداده‌اند که شایستهٔ یك مجله ماهانه نیست که درهرشماره چند مقالهٔ ناتمام داشته‌باشد و خواسته‌اند که سعی شود مقاله‌هائی که دریك شماره درج میگردد درهمان شماره بپایان برسد.

تاآنجا که مقدور باشد وصفحات محدود مجله اجازه دهد توصیهٔ این علاقمندان بکارخواهد رفت.

مسائل شطرنج

چندنفرازخوانندگان توصیه نموده‌اند که درهرشمارهٔ مجله یکی‌دومسأله ازمسائل‌شطرنج طرح ویاتفسیرشود. امیداست‌امکان انجام‌این توصیهٔ خوانندگان فراهم‌آید.

ریاضیات عالی

عده‌ای‌از دانشجویان خواسته‌اند صفحاتی از مجله بدرج مسائل‌ومباحث مربوط به‌ریاضیات‌عالی‌اختصاص یابد. بخوانندگان مژده میدهیم بااعلام همکاری چندنفرازاستادان، شماره‌های بعد مجله دارای این چنین صفحاتی خواهدبود.

نمایندگان و خبرنگاران یکان

آقای سید یحیی حجازی
نماینده‌وخبرنگارفعال‌ماهنامهٔ یکان در دبیرستانهای قلهك

آقای مسعود امین زاده
نماینده‌وخبرنگارفعال دبیرستانهای شهرستان شیراز

✿ ✿ ✿

آقای حسین شفیعی نماینده و خبرنگار دبیرستان میرافضلی ـ تهران

✿ ✿ ✿

آقای اسمعیل جلالی نماینده وخبرنگاردبیرستانهای سمنان .

حل مسائل

تاکنون از دانش آموزان زیرحل‌مسائل‌مجله ، واصل‌شده‌است:: فرخ پورحسن. دبیرستان ادیب ، تهران ـ داروژان ـ گاوافیان . دبیرستان کوشش ، تهران ـ جواد استوارزاده . دبیرستان خرداد، تهران ـ سیداشرف امجدی. دبیرستان رهنما، تهران ـ سیدمهدی میرسجادی. دبیرستان ادیب، تهران ـ محمد رضا قسیمی. دبیرستان دارالفنون، تهران ـ ابوالفضل بابپوردی. دبیرستان اسد آبادی ـ مرتضی کاوسی. دبیرستان دکترمحمود شبمی ، تهران ـ سید ضیاءالدین مولانا. دبیرستان امیر کبیر، تویسرگان .

محل فروش مجله یکان درتهران

علاوه بر فروشندگان جراید ، کتابفروشیهای زیر مجلهٔ یکان رادراختیارخواستاران قرارخواهندداد:

کتابفروشی ایران ـ خیابان سعدی ـ چهارراه سیدعلی

انتشارات نیل ـ میدان مخبرالدوله

کتابفروشی اندیشه ـ خیابان شاه‌آباد

بقیهٔ تاریخ استعمال علامات

تبصره ـ مسلمین مقدار مجهول وقوای متوالی آنرا بترتیب شیئی ومال و کعب ومال ومال ومال و کعب و کعب و کعب وغیره میخواندند واین الفاظ نزد آنها بترتیب x و x^2 و x^3 و x^4 و x^5 و x^6 وغیره بوده است . بالاخره مقدار معلوم را عدد مینامیدند .

تبصره ۲ـ بی‌مناسب نیست قسمتی‌ازمقالهٔ دانشمند محترم **آقای اقبال** را ذکر کنیم:

« مسلمین در کتب جبرومقابله خود بجای مجهول درجه‌اول همه وقت درمعادلات کلمه شئی را که دراین مورد بمعنی چیز نامعلوم است بکارمیبردند.

درموقعی که عیسویان اروپا درقرون جدید کتب ریاضی مسلمین را ازعربی بالسنهٔ خود ترجمه میکردند کلمه شئی راهم با اندك تحریفی درلغات خود داخل کردند وچون اینکار اول بار ازطرف عیسویان اسپانیا بعمل آمد. ایشان لغت شیئی عربی را xoi تلفظ و بهمین شکل نیز اختیار کردند واول دفعه اینکار را یکی‌از ریاضی دان اسپانیائی بنام **پدرو** Pedro ازمردم شهر **القلعه** alcala کرد. بعدازآنکه نوشتن معادلات بصورت دستورهای ساده جبری معمول شد اروپائیان حرف‌اول کلمه xoi محرف شئی‌را که x است بجای‌مجهول درجه‌اول اختیار کردند وبرای مجهولات درجات بالاترقوای آنرا گرفتند .»

بقیهٔ از صفحه دوم

مسأله تبدیل شده باشند . مفهوم کلی ریاضیات را درك کرده باشند و آرزوی ما آنست ، همچنانکه در گذشته ریاضیدانهای بزرگی داشته ایم ، در آینده نیز اینچنین ریاضیدانها داشته باشیم که نه‌تنها افتخار کشور بلکه افتخار بشریت باشند . دانش آموزان کنونی هستند که باید دانشمندان آینده باشند .

ماهنامهٔ یکان برای دانش آموزان تهیه میشود و متعلق به آنها است و افتخار خواهیم داشت که آثار علمی ایشان‌را برای چاپ در مجله دریافت داریم . انتظارداریم نظریه های دانش‌آموزان دربارهٔ‌چگونگی مندرجات مجله واصل شود تا بتوانیم برنامه‌کار خود را آنطور که باید تنظیم و عمل‌بنمائیم

مسائل رسیده

دانش‌آموزان : (مرتضی کاوسی. دبیرستان دکتر محمود شیمی ، تهران ـ معصوم گلشائی. دبیرستان امیرکبیر، شاهپورآذربایجان ـ محمد شریف‌زاده دبیرستان بهبهانی‌تهران ـ سید جعفروفابخش. دبیرستان علمیه، تهران ـ مهرداد عابدی . دبیرستان البرز، تهران ـ عبدالله نورانی حسینی . دبیرستان علمیه، تهران ـ محمدرضا قسیمی دبیرستان دارالفنون ، تهران محمود میرزائی ـ علی‌تاهبازصالحی. دبیرستان هدف۱، تهران فیروز بابرامی . دبیرستان ادیب ، تهران ـ مهدی مساجدی ، دبیرستان پهلوی، ساری ـ هاشم پسران. دبیرستان نمازی، شیراز ابوالفضل بابیوردی دبیرستان اسدآبادی) مسأله یامطلب ارسال داشته‌اند .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

شمارهٔ دوم ـ سال اول

هرماه یك بار منتشر میشود

صاحب امتیاز مدیر و سردبیر

عبدالحسین مصحفی

جای ادارهٔ موقت ـ تهران خیابان سرباز شماره ۳۵۳

(۶ تا ۸ بعد ازظهر)

نشانی پستی ـ صندوق پستی ۲۴۹۳

تلفن ۷۵۸۵۷۰

اشتراك سالانه (۱۲ شماره) ۲۰۰ ریال

مقاله‌های وارده مسترد نمیشود

طبع و نشر مندرجات و مقالات اختصاصی این مجله

بی اجازه ممنوع است

چاپخانه محمد علی علمی

انتشارات نیل را بخوانید و ذهن خود را از گنجینهٔ دانش امروز غنی سازید

نیل ناشر بزرگترین شاهکارهای ادبیات جهان است:

ده رمان بزرگ ۱۰ جلد
بابا گوریو، سرخ وسیاه، دن کیشوت، ژان کریستف، آرزوهای بزرگ، دن آرام .....

بیوگرافی و خاطرات ۵ جلد
زندگی میکل آنژ، زندگی هلن کلر، خاطرات چرچیل، خاطرات نهرو، خاطرات یك دیپلمات انگلیسی در انقلاب اکتبر .....

تحقیق و فلسفی ۵ جلد
مکتب‌های ادبی، رئالیسم وضد رئالیسم درادبیات، سیاست ارسطو .....

داستانهای ایرانی ۹ جلد
یکلیا وتنهائی او، دختر رعیت، نقش پرند، داستانهای دل‌انگیز ادبیات فارسی .....

مجموعهٔ اشعار ۱۲ جلد
حافظ شیراز، زمین، هوای تازه، ترانه‌های خیام و باباطاهر وابوسعید، باغ آینه ....

نمایشنامه ۴ جلد
مکبث، سفر دور ودراز بوطن، چیترا، آنتیگن .....

نیل ناشر معتبرترین کتابهای علمی است:

مجموعهٔ دنیای علوم ۹ جلد
پیدایش و مرگ خورشید، یك دو سه بینهایت، سرگذشت زمین، از جهانهای دور، سفر بجهانهای دور دست، داروئیسم .....

مجموعهٔ دانستنیهای جهان علم ۲۱ جلد
رادیوتلویزیون، آتشفشان و زلزله، قمرهای مصنوعی، دنیای ستارگان، جهان گلها، جهان جانوران، نیروی برق، شگفتیهای شیمی، آب وهوا و .....

نیل ناشر مناسب‌ترین کتابها برای جوانان است:

مجموعهٔ گردونه تاریخ ۵۴ جلد
اسکندر کبیر، چنگیزخان، لئونارد داوینچی، ویلیام شکسپیر، هانژلان، گاریبالدی، آلبرت شوایتزر، ناپلئون، گزنفون، مارتین لوتر، ژاندارك، سونیات سن، سیمون رو بلیوار، ....

آثار ادبی خواندنی ۲۷ جلد
دزیره، خشم و هیاهو، سپید دندان، دختر گرجی، کوکائین، جمیله، خانهٔ ییلاقی، بهار کشنده، اعتراف نیمه شب و ....

داستانهای ایرانی مصور ۹ جلد
خاله سوسکه وآقاموشه، نارنج و ترنج، موش دم بریده، اتل‌متل توتوله، یکی بود ویکی نبود و دویدم و دویدم .....

«نیل» درانتخاب بهترین کتابها، بهترین ترجمه‌ها و زیباترین چاپها رقابت ناپذیر است

محمدالدوله ــ انتشارات نیل ــ تلفن ۳۰۴۱۲۸

بها ۲۰ ریال