یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ دهم ، شمارهٔ : ۵ — شمارهٔ مسلسل : ۹۸ — بهمن ۱۳۵۲

دراین شماره:

بها : ۳۰ ریال

تشکر

جناب آقای **امیرعباس هویدا** نخست وزیر و جناب آقای **نصرت‌الله معینیان** ریاست دفتر مخصوص شاهنشاهی سالروز انتشار یکان را تبریک گفته‌اند. از ابراز عنایت جنابان معظم سپاسگزاری می‌شود.

عبدالحسین مصحفی

یکان سال ۱۳۵۲

چاپ یکان سال ۱۳۵۲ آغاز شده است و امید می‌رود که مانند سالهای گذشته در اواخر اسفند ماه در دسترس علاقمندان قرار گیرد.

چون هنوز تعداد صفحات یکان سال ۵۲ مشخص نشده است، بهای آن را نمی‌توان تعیین کرد. اما با توجه به اینکه بهای فعلی کاغذ نزدیک به دو برابر بهای آن در سال گذشته است، بهای تک فروشی یکان سال جاری نسبت به سالهای گذشته افزایش خواهد داشت.

بولتن
انجمن ریاضی ایران

اولین شماره از بولتن انجمن ریاضی ایران که اخیراً نشر یافته به دفتر مجله واصل شده است.

اساسنامهٔ انجمن و گزارشی از اولین مسابقهٔ ریاضی ایران توأم با سؤالهای مسابقه از جمله مندرجات این بولتن است.

پنجمین کنفرانس ریاضی کشور

پنجمین کنفرانس ریاضی کشور از ۸ تا ۱۱ فروردین ۱۳۵۳ در دانشگاه پهلوی شیراز برگزار خواهد شد.

علاقمندان مایل به شرکت در کنفرانس برای کسب اطلاعات به نشانی «دانشگاه پهلوی شیراز، کمیتهٔ برگزاری پنجمین کنفرانس ریاضی» مکاتبه فرمایند.

ساعات کار دفتر مجلهٔ یکان

همه روزه غیر از روزهای تعطیل صبحها ازساعت ۹ تا ساعت ۱۲ عصرها از ساعت ۱۷ تاساعت ۱۹

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ دهم ـ شمارهٔ پنجم ـ شمارهٔ مسلسل :۹۸

بهمن ۱۳۵۲

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملک‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیک شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : **MOS'HAFI Abdolhossein**

Volume X, number 5 . Feb. 1974

subscription : 4$

TEHERAN_P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراک یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفتر مجله اطلاع دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به کتابهایی است که معمولا در پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی در مجله معرفی می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این کتابها از دفتر مجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات کتابهایی که به‌صورت آگهی در مجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

از یادداشتهای سفر بلژیك

(دنباله ازشمارهٔ قبل)

عبدالحسین مصحفی

دیداری از یك کلاس در لوکزامبورك

پنجشنبهٔ یك‌هفته در بلژیك تعطیل رسمی بود. چند روز قبل‌ازآن بهما اطلاع داده بودند که درآن‌روز عده‌ای از معلمان بلژیکی برای بازدید از یك کلاس مخصوص کودکان عقب افتاده به لوکزامبورك می‌روند. ماهم داوطلب شدیم که برویم، زیراهم فال بود و هم تماشا.

در ساعت معهود در ایستگاه راه‌آهن بروکسل راهنمای خودرا ملاقات کردیم و به اتفاق سوار قطار راه‌آهنی شدیم که به مقصد لوکزامبورك از بروکسل مـی گذشت. راهنمای ما با تابلویی که به دست گرفت وباآن تمام کوپه‌های ترن‌را گشت، توانست همهٔاشخاصی‌را که باما هم‌مقصد بودند دریك کوپه‌جمع کند. رویهم هشت‌نفر بودیم، غیراز ماوراهنما یك‌نفر دیگراز بروکسل وبقیه هر کدام‌از شهری دیگر از شهرهای بلژیك‌آمده بودند. به تصورآنکه‌همهٔ آنان‌مانند ما ازبلیط رایگان راه‌آهن استفاده می کنند وعلاوه‌برآن‌فوق‌العاده‌ای هم دریافت می‌دارند، از ایشان راجع به‌میزان این فوق العاده پرسش کردیم.پرسش ما برای آنان، وپاسخ آنان برای ما، تعجب آور بود. ایشان وهمچنین‌راهنمای جمع، نه‌تنها فوق‌العاده‌ای از بابت این سفر دریافت نمی‌داشتند، بلکه بلیط راه‌آهن را هم شخصاً تهیه‌کرده بودند. باتحقیقی که بعداز آن در این مورد کردیم معلوم شد که هر گاه مقامات آموزشی‌بلژیك اطلاع حاصل کنند که‌معلمی از بلژیك یا ازکشورهای دیگـر، در تدریس خود روش جدید بکار می‌برد، مراتب‌را به اطلاع معلمان وعلاقمندان در سراسر بلژیك می‌رسانند و اینان، روی علاقه‌ای که به بهبود کار خود دارند، به هزینهٔ شخصی وبه نحوی کـه کارشان تعطیل نشود می‌روند وازکار آن معلم وروش ابتکاری وی بازدید می کنند.

لوکزامبورك کشورمستقلی است که بین کشورهای‌بلژیك وآلمان‌وفرانسه واقع شده است. تمام وسعت‌آن در حدود وسعت استان تهران وجمعیتش بالغ برسیصدهزار نفر است . از شهر لوکزامبورك به یکی از شهرکهای نزدیك به‌آن و در آنجابه یك مجتمع‌آموزشی راهنمایی شدیم. قبل‌از ظهر دوجلسه درس معلم را که برای دو دسته ازکودکان استثنایی و به زبان‌آلمانی اجرا شد مشاهده کردیم. ناهاررا به‌هزینهٔ جیب مبارك درسلف‌سرویس مدرسه صرف کردیم . بعداز ظهر دوساعت تمام با معلم به گفتگو وبحث نشستیم و از وسایل کمك آموزشی که به‌کار می‌برد وازپرونده‌های‌دانش‌آموزان وی‌که محتوی تمام تکالیف انجام‌شدهٔ آنان بود بازدید کردیم . کودکان عقب افتادهٔ شش ساله‌ای که‌بااین معلم کارکرده بودندمفاهیم‌اعداد وجمع وتفریق آنهارا برمبنای تئوری گراف به خوبی درك کرده بودند.

بحث راجع به عقاید راجرز درآموزش وپرورش

یکی از برنامه‌هایی که در دانشسرای برکاندال ، وابسته به یك‌مجتمع بزرگ آموزشی به‌همین‌نام در بـروکسل، اجرا می‌شد، بحث دور میز گرد راجع به عقاید مختلف علمای‌تعلیم و تربیت بود. این جلسه عصرهای دوشنبه به مدت دوساعت از ۵ تا۷ بعدازظهر تشکیل‌می‌شد ودرآن علاوه بردانشجویان‌دانشسرا، عده‌ای از دبیران دبیرستانها، آموزگاران دبستانها ، استادان دانشگاه وسایر علاقمندان شرکت می‌کردند. درمدتی که ما در بروکسل بودیم، موضوع مورد بحث این میز گرد عقاید**راجرز** آمریکایی مبنی برآزادی دانش‌آموز در کلاس درس بود. یکی ازدانشجویان‌دانشسرا که‌به‌زبان‌انگلیسی‌تسلط داشت کتاب‌راجرز

را که دراین‌زمینه نوشته شده‌بود مطالعه‌وبه زبان فرانسه‌خلاصه نویسی کرده بود. این‌دانشجو خلاصه مندرجات کتاب را باز گو می‌کرد و ضمن‌آن عقاید شخصی خویش را نیز بیان می‌داشت و دیگران دربارهٔ آن‌بحث و گفتگو می‌کردند. بعضی ازدانشجویان دانشسرا که در جلسات شرکت داشتند یادداشت برمی‌داشتند و بعضی دیگر همهٔ گفتگوهارا بوسیلهٔ دستگاههای ضبط‌صوت که باخود آورده بودند ضبط می‌کردند،

درس دانشگاهی پروفسور پاپی

بلژیك دارای‌دانشگاههای‌متعدد است که مهمترین آنها یکی دانشگاه کاتولیکی‌لوون (نزدیك‌بروکسل)ودیگری‌دانشگاه آزاد بروکسل است. دردانشگاه اخیر ، پاپی درسی دارد برای لیسانسیه‌هایی که داوطلب تحصیلات عالیتر می‌باشند ، اما هر شخص‌دیگرهم‌می‌تواند در جلسهٔ این درس شرکت کند. موضوع درس‌وی درسال‌جاری«متدلوژی آنالیزریاضی» بود وما عصرهای جمعه شرکت دراین جلسه واستفاده‌ازآن را فراموش‌نمی‌کردیم. درس دانشگاهی پاپی درچنان سطحی بیان می‌شد که درك آن مستلزم اطلاعات‌کافی در ریاضیات عالی و ریاضیات معاصر بود. عجیب آنکه همین پاپی در اجرای آزمایشی برنامهٔ پیشنهادی خود، تدریس‌ریاضی سال‌اول ابتدایی را گاهی شخصاً به عهده گرفته است.

مبادلهٔ معلم

مبادلهٔ معلم، بویژه معلم زبان ، بین کشورهای اروپایی بسیار متداول است. دربلژیك مدتی بایك‌معلم انگلیسی همخانه بودیم که‌در یك‌دبیرستان‌بروکسل‌انگلیسی درس می‌داد، وخودش هم زبان فرانسه را تکمیل می‌کرد . یك بار هم از یك کلاس ریاضی بازدید کردیم که درآن‌یك‌دبیر انگلیسی به عنوان نمونه درس می‌داد. موضوع درس‌وی مبحث تقارن برای دانش‌آموزان ۱۳- ۱۴ ساله بودکه براساس‌نظریهٔ گراف ایرادشد. غیر ازما عده‌ای از دبیران ریاضی بلژیك نیز به مشاهده آمده بودند . بعداز پایان کلاس طبق‌معمول حدود یك‌ساعت دربارهٔ درس این دبیر بحث رانتقاد شد.

آموزش ریاضیات از طریق تلویزیون

تلویزیون‌آموزشی بلژیك‌درساعات‌معینی ازروزوصبحهای یکشنبه، طبق برنامهٔ معین، دروسی راجع بـه مـواد مختلف آموزشی‌پخش می‌کند. درمدت‌اقامت‌خود دربلژیك چندین‌درس ریاضی‌را از تلویزیون مشاهده کـردیم . دراین درسها به این اکتفانشده بود که معلم کنار تخته‌سیاه‌بایستد ودرس‌دهدودوربین تلویزیون گاهی‌روی چهرهٔ معلم‌وگاهی‌روی تخته‌سیاه متمرکز باشد، بلکه باهمهٔ امکانات فنی و فتوگرافی درسهایی به تمام معنی زنده و جالب تهیه گردیده بـود. درسهای ریاضی که از تلویزیون آموزشی بلژیك پخش می‌شد متنوع و در سطوح ابتدایی و متوسطه بود .

رنگها و ریاضیات

کسانی که کتابهای ریاضی جدید پاپی‌را مشاهده کرده باشند، به‌نقش مؤثر رنگها در بیان مندرجات این کتابهاواقف شده‌اند. نه تنها درکتابهای‌پاپی، بلکه‌درشیوهٔ‌آموزشی پیشنهادی وی، رنگها نقش‌اساسی را به‌عهده دارند. گمان کنم که توجه پاپی به اهمیت رنگها درآموزش ریاضیات، متأثر از روش‌سلف خود **کوئیزنر** باشد. کوئیزنرمعلمی‌بلژیکی‌بودکه درآموزش اعداد از میله‌های رنگین استفاده کرد (حدود ۱۹۵۳). این میله‌های رنگین که دربلژیك

Les reglettes de Cuisenaire

نامیده می‌شوند هنوز هم در بسیاری از کشورها در آموزش اعداد به کودکان‌مورد استفاده‌اند. یکی‌ازبرنامه‌های تلویزیون آموزشی بلژیك زیرعنوان «رنگها واعداد» استفاده از میله‌های کوئیزنر در آموزش اعداد وچهار عمل اصلی‌را شرح می‌داد .

در مینی‌کمپوترپاپی‌نیز از رنگها به‌همان ترتیب‌که مورد انتخاب کوئیزنر بوده استفاده شده است.

رستوران ایرانی

برای ایرانیان‌مقیم خارج ازکشور دسترسی به‌رستورانی که غذاهای ایرانی تهیه کندنعمتی است. دربروکسل رستورانی ایرانی وجود داردکه منحصراًغذاهای ایرانی را عرضه‌می‌کند. درتمام‌مدت اقامت خود دربروکسل از غذاهای خوب‌ومتنوع‌این رستوران بهره‌ور بودیم . در جشنی هم که به مناسبت سالروز تأسیس این رستوران برپاشده بود افتخار ملاقات باسفیرکبیر ایران دربروکسل نصیبمان شد . البته هرگاه که می‌خواستیم می‌توانستیم ایشان را درسفارت ملاقات کنیم . گـردانندگـان رستوران ایرانی در بروکسل‌یك‌دانشجو ویك زوج ایرانی‌مقیم بروکسل می‌باشندو چنددانشجوی ایرانی‌نیزخدمت درآنجارا به عهده گرفته‌اند. علاوه‌برایرانیان‌تاجرقالی‌ودانشجویان‌ایران‌مقیم بروکسل، بسیاری ازبلژیکیهااز مشتریان‌دائمی‌رستوران‌ایرانی بروکسل می‌باشند.

جابر بن حیان

جعفر آقایانی چاوشی

دنباله از شمارهٔ قبل

به گفتهٔ جابر، هرچیز در این جهان از عدد ۱۷ وجود پیدا کرده است که به‌صورت رشتهٔ ۸:۵:۳:۱ تقسیم شده باشد. وی هریك از بیست جزء کیفیت رامتناظر بایکی ازحروف‌الفبای عربی می‌داند، وتقسیم چهاربخش را مبتنی‌به رشتهٔ: ۸:۵:۳:۱ تصور می‌کند. طبایع متقابل‌فلزات برنسبت۳:۱ یا ۸:۵یاعکس آنهاست.

تبدیل عبارت از این است که سیماهای آشکار و نهان فلزرا چنان مرتب کنندکه به‌نسبت کامل موجود درطلا برسند. تبدل به میانجیگری اکسیر حاصل می‌شود ، وآن ماده‌ای است ازمملکت جمادی یانباتی یا حیوانی که به عنوان عامل روحانی حضورآن برای توفیق یافتن درتبدل فلزات‌به‌طلا ضرورت‌دارد. اعدادی که جابرآنها را بکار می‌برد، ارتباط نزدیك با مربعی وفقی داردکه درشکل نمـایش داده‌ایم . و اگرآن را باگونیا (مطابق شکل) تقسیم کنیم، اعداد ۱۷و۲۸ ونیز نسبت۸:۵:۳:۱ بدست می‌آید:

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

این‌مربع سحری (یاوفقی)را نو افلاطونیان درقرن سوم میلادی می‌شناختند ولی‌قطعاً خیلی‌قدیمتر است.این مربع وفقی در رمزحسابی مورد استعمال جابراهمیت اساسی دارد . جابر، درضمن‌بیان رمزی خویش، چندین جدول‌آورده است که درآنها ارزش هریك ازحروف الفبای عربی ، بسته به وضعی که در نام عربی هرفلز دارد، برحسب کمیت هریك از طبایع چهارگانه معین شده ، و هفت حرف از بیست و هشت حرف برای هر فلز اختصاص داده شده‌است. مثلا، سرب در عربی اسرب است که از حروف‌الف و سین و را وبا ترکیب شده‌است. الف که‌قبل ازهمه دراسم سرب می‌آمد، رمزحرارت سرب است . وبه علت وضعی که دراسم دارد، ازدرجهٔ اول‌است . در جدولی که جابر بدست می‌دهد، حرارت در درجهٔ اول مقداری برابربا $1\frac{1}{6}$ درهم‌دارد. سین در درجهٔ دوم می‌آید وکیفیت خشك دارد و مقدار آن یك درهم است .به‌همین ترتیب،جابر مقادیر $1\frac{1}{6}$ درهـم را برای گرمی، ۱ را برای خشکی، $1\frac{1}{4}$ را برای تری و $9\frac{1}{3}$ رابرای سردی بدست می‌دهد. بنابراین قطعه سربی برابر $12\frac{3}{4}$ درهم مشتمل خواهد بـود بر $1\frac{1}{6}$ درهم گرمی، $9\frac{1}{2}$ درهم سردی ، ۱درهم‌خشکی،و $1\frac{1}{4}$ درهم‌تری. بنابراین‌نظرجابر درهرسربی صرف‌نظراز شکل ووزن و سیمای خارجی‌آن ، طبایع به همین نسبت وجود دارد. این‌نسبتها متناظرند باچهرهٔ خارجی سرب، وتنها عواملی هستندکه واقعاً سبب تمایز سرب از هر فلز دیگر می‌شود. اگرنسبتهای سرب راتغییردهیم می‌توانیم‌آن رابه عضو دیگری ازخاندان انواع فلزی تبدیل کنیم.

قبلا بیان گردیدکه جابربین ترکیب خارجی‌وداخلی یك فلزتفاوت قائل‌بود. یکی‌از دلایل این‌تفاوت‌را می‌توان‌درصورتی که ذکرشد دریافت. فلزات مرکبند ازحرارت، سردی، خشکی ورطوبت. لیکن حدی براین مطلب موجود است: طبایع ضد به این نسبتند: ۳:۱ و ۸:۵ یابرعکس. ارقام سرب با این نسبت موافق نیست واگرنقره (=فضه) را به‌این ترتیب تجزیه کنیم

اشکال بیشتراست. فقط نشان می‌دهد که حرارت وبرودت رابه تساوی داراست. جابر ناچارشد یك‌فرض دیگری بر آن‌بیفزاید به‌این معنی که تجزیه فقط تـرکیب خارجی را نشان می‌دهد : بایستی میزان‌را باترکیب داخل درست‌کرد. ازاینرو برای‌نقره مجموع ترکیب داخلی وخارجی‌را روی هم رفته به‌این ترتیب دانست :

حرارت :

۱/۵ دانق + یك متمم۵/۵ دانق = یك درهم وسدس درهم

برودت :

۱/۵دانق+یك متمم ۳وربع درهم=۳/۵ درهم(=۳×$1\frac{1}{6}$)

رطوبت : صفردانق + متمم ۵ وپنج سدس درهم=

=۵ درهم و۵سدس(=۵×$1\frac{1}{6}$)

پیوست :صفر دانق + متمم ۹ درهم و ثلث =

=۹ درهم وثلث (=۸×$1\frac{1}{6}$)

جمع ۱۹ درهم و۵سدس (=۱۷×$1\frac{1}{6}$)

واحد $1\frac{1}{6}$ ظاهراً دراینجا طوری انتخاب شده‌که ازکسوردرهم که بوسیلهٔ دانق یاقیراط نشان‌داده می‌شود اجتناب گردد. تبدیل یك‌فلز به فلزدیگرعبارت خواهد بود از میزان کردن نسبت قوه وفعل ترکیب فلزی اولی‌به فلزدومی واین تبدیل بوسیلهٔ اکسیر اعظم انجام می‌گردد.

طبایع چهارگانه و دو اصل‌نر و ماده‌ای‌که جابر باآنها قلمرو معدنیات رامورد توضیح قرار می‌دهد ، پایهٔ جهانشناختی استادانهٔ اورا نیزتشکیل می‌دهد ، اینها به ضمیمهٔ میزان و نظم اعدادی رمزی را می تـوان اصول همهٔ علوم جابری دانست . کیمیای جابری خود برقرار کردن تعادل است در میان طبایع چهارگانه، به‌وسیلهٔ اکسیری‌که نمایندهٔ حضورآن اصل‌روحانی است‌که انتظام طبایع عنصری را امکان پذیرمی‌سازد. (۹۳)

چهار اصلی که بر روی اجسام متعلق به سه مملکت عمل می‌کنند ودرآنها مؤثر می‌شوند ورنگ آنهارا پدیدمی‌آورند، عبارتند از: آتش، آب، هواوخاك. هیچ‌عمل‌درسه مملکت نیست‌که بااین عناصرپیدا نشده باشد. به‌همین جهت است‌که ما درصنعت (=کیمیا) بااعمالی در [چهار عنصر] متوسل می‌شویم وآن را که درمیان‌آنها ضعیف‌است تقویت می کنیم، وآن راکه‌قوی‌است ضعیف می‌سازیم و به عبارت خلاصه نقایص را اصلاح می کنیم . بنابراین‌آن‌کسی‌که در ورزیدن عناصردرسه مملکت توفیق‌حاصل کند. ازروی همین‌عمل دراکتساب معرفت دربارهٔ همه چیزها و فهم علم‌آفرینش وفن طبیعت نیزموفق خواهدشد. مگذارکه شك تورا ازکار بازدارد، چه طبیعت هراکسیر برخاسته است. واز آنهاترکیب شده‌است. بااکسیراست‌که طبعی‌را واردکارمی‌کنیم تااز جسم طبع زیانبخش موجود درآن‌را بزداید.

مثلا درچیزی‌که فزونی کیفیت مائیت وتری دارد ، آتش راداخل می‌کنند وآن رابه‌اندازه نگاه می‌دارند، تاچنان نباشد که‌آن‌چیز بسوزد وزیانبخشی‌آن‌افزون‌شود، بدین‌ترتیب، جسمی که تحت تأثیر عمل‌آتش قـرار گیرد به تعادل می‌رسد و حالت مطلوب راپیدا می‌کند.(۹۴)

تهیهٔ شنگرف (ترکیبی است ازگوگرد وجیوه به فرمول SHgواصطلاح‌لاتینی‌آنCinabreاست)ازنظرجابربن‌حیان:

«اما تبدیل‌کردن جیوه به‌جسم جامد سرخ‌رنگ : ظرف شیشه‌ای‌گردی بگیر، ودرآن هراندازه مناسب‌باشد جیوه بریز، سپس درظرف سفال سوری (در آن ایام سفالهای سوریه شهرت بسیار داشت) گوگرد مسحـوق زردبریز. آنگاه ظرف شیشه‌ای را برروی‌گوگرد بگذار وآن اندازه برآن‌گوگرد فرو ریزتا لبهٔ‌آن راپوشاند. پس‌از بستن دهانهٔ ظرف سفالی ... مدت یك شب آن‌را برکوره، حرارت ملایم بده حال چون‌آن‌را ازآتش برداری، خواهی دیدکه جیوه به صورت سنگ سختی به رنگ خون درآمده‌است ... همین‌ماده است که‌دانشمندان‌آن‌راشنجرف می‌نامند (۹۵) .

۹۳- Holmyard, E.J. : «Chemia in Islam» Endeavour 14(1955)

۹۴- مختار رسائل صفحات ۴۸۲-۴۸۱- ترجمهٔ‌آقای احمدآرام (← علم وتمدن دراسلام، نوشته دکترسیدحسین نصرترجمهٔ احمدآرام تهران ۱۳۴۷)

۹۵- جابربن حیان: «کتاب الخواص» ترجمهٔ‌آقای احمدآرام (← علم وتمدن دراسلام) همچنین رجوع‌شود به :

Holmyard , E.J. : Chemia Islam»

مجموعهٔ جابری محتوی متنهایی شیمیایی است که به آسانی بروفق شیمی جدید قابل فهم است، محتوی رساله‌هایی جهانشناختی نیرهست که به‌نوع دیگری ازعلم و معرفت تعلق دارد . درآنها درجات مختلف حقیقت کیهانی برحسب اصول مذکر و مؤنث یا گوگرد وجیوه بیان شده است . طرح جهانشناختی وی مبتنی بر رابطهٔ عده‌ای ازحالات وجودنسبت به‌یکدیگراست واین‌رابطه بسته به‌این امراست که حالت پستتر وجود از تأثیر وعمل حالت بالاتری نتیجه می‌شود. واین‌حالت پستتر به نوبهٔ خود به حالتی که درسلسلهٔ وجود درزیر آن قرار دارد، انتقال پیدا می کند . نزول از جهان عقل کلی‌را از طریق نفس، تا جهـان عناصر که چنانکه دیدیم از چهار طبع ترکیب شده‌است توصیف می کند . بنابراین عناصر کیمیا جزئی از وحدت بزرگی را می‌سازند که همان جهان‌است درست بدان گونه که کیمیا شاخه‌ای ازعلم کلیتر جهانشناختی‌را تشکیل می‌دهد.

گفتارجابر دربارهٔ طبیعت وساخته‌شدن موالید به‌دست آن وچیزهایی که بالا وپائین موالیدند :

« طبیعت چیزی است که از تقویت کردن کیفیات توسط حرکت و سکون بوجودآید . ابتدای عمل از زمانی است که با کمیت امتزاج پیدا می کند. جوهر طبیعت در بدو نظر از چهار چیز تشکیل شده است: حرکت ، سکون ، کیفیت و کمیت به‌این واسطه چهارچیز ازطبیعت‌بیرون می‌آید: گرمی وسردی،خشکی وتری که اینها پایه‌های‌اشیاء بسیطاند. پس‌وقتی که کمیت باامهات ترکیب می‌شوند همان زمانی‌است که حرکت وسکون و کیفیت‌به آنها احاطه‌کرده است. بالنتیجه همهٔ موجودات ازآسمان گرفته تاجنسهای سه‌گانه (حیوان ـ نبات ـ جماد) ازآن اصول‌ساخته شده که ازهریك آنها تازهٔ وجود می‌آید زیراآسمانها وبرجها از گریبان عناصر موالید ومواد آنها را برون‌آورده به‌تمامیت آنها اقدام می کنند وکمی و فزونی در آنها ایجاد می‌نمایندکه شرح آن ازاین‌قرار است:

۱ـ ستارگان گرم وقتی که‌در برجهای گرم قدم‌می گذارند وگرمی با خشکی قرین می‌شود این آثار در روی زمین ظاهر می‌گردد: برانگیخته شدن‌آتشها وزیاده وکمی‌مادهٔ آنها، گرمی تابستان ـ خشك شدن درخت و روئیـدنیها، خشك شدن اشیاء و گرم شدن‌آنها ـ هیجان صفرا دربدنها ـ زیادی‌سوزش‌آتش وهر چه شبیه‌آن است ـ سوخته شدن‌رنگها ـ گندم گون شدن‌جنین‌ها وسیاه شدنشان ـ کم‌شدن‌آبها ـ جمودت وخشکی زمین‌ها ـ وزش بادهای بیماری زای سوزان ورنگارنگ چون‌بادسرخ وبادزرد ـ گرم شدن دریا ـ بسته شدن سنگهای باددار چون گوگرد و یاقوت ونظائرآنها .

۲ـ ستارگان گرم وتروقتی که دربرجهای گرم وترداخل شوند این‌چیزها راتولید می کنند: اعتدال هوا و خون ـ برگ دادن درختان ـ باروح شدن عالم وپاکی‌هوا ـ معطرشدن‌ـقوی شدن رنگها ـ بهبودحال چارپایان وزمین‌ها ـ زیادشدن‌حیوان اعتدال بادها ـ اعتدال خوراکیها که این پـدیده ها بواسطهٔ اعتدال دوحرارت ودو رطوبت معتدل می‌باشند و از بی‌اعتدالی آنهاست منحرف شدن و همین وقت است که فصل بهار از قوه به فعل می‌آید.

۳ـ ستارگان سرد وخشك وقتی که در برجهـای سرد و خشك رفتند فصل پاییز بوجودمی‌آید واین‌آثار ظاهرمی گردد: وزیدن بادهای سوداوی ـ غالب‌شدن سودا دربدن حیوان‌ـخشك شدن زمین وسختی‌آن ـ بسته شدن‌آبها وتبدیل‌شدن چهارپایان بزرگ چون‌شتر، فیل‌وگاومیش ونظایرآنها.

۴ـ ستارگان سرد و تر وقتی که در برجهای سرد وتر داخل می شوند زمستان بوجود می‌آید و این چیزها را تولید می کند: سرما ـ وزش بادهای سرد ـ انقلاب دریا بواسطهٔ غلبه بادـزیادشدن‌آب‌ویخ‌بستن‌آن‌ـضعف‌زمین‌هاـثابت‌شدن،حل شدن و تغییرشکل‌دادن‌اشیاء، تااینجاآنچه راکه گفته‌شد همه بواسطهٔ تناسب‌طبایع‌باستارگان‌دربرجهای گرم،سرد،تروخشك‌بوداکنون می گوئیم موقعی که طبیعت ستارگان برضد طبیعت برجها باشد نیزچهار صورت پیدا می‌شود. اگرستارگان گرم وخشك دراول یاوسط یاآخر برجهای‌سرد وتروارد شوند روی زمین‌چیزهایی بوجود می‌آیدکه دارای دو طبیعت متضاد بوده تابع صفت غالب می‌باشند. پس‌اگر طبع ستارگان برطبع برجها غالب‌بود باران فراوان ـ متوسط بودن باد ـ کمی رعدوبرق و صاعقه ـ زلزلهٔ زیاد اتفاق می‌افتادو اگرستارگان وبرجها درطبیعت باهم‌متعادل بودند اعتدال درجهان پیدا شده معجزات درعالم پیدا می‌شود و طبیعت‌ها درکمیت وکیفیت یکدیگررا تعدیل می کنند بنابراین اعتدالی درکیفیت چیزهای گرم وسرد وتر وخشك دست‌می‌دهد. اما اعتدال درکمیت آن است که مقادیر یکدیگررا معتدل ساخته

بطوری که هیچیك بر دیگری غلبه نکنند.(۹۶)

اتفاقات طبیعی و آسمانی از نظر جابربن‌حیان:

اما پیدا شدن رعد، برق، باد، زلزله، باران و مانند اینها نتیجهٔ طبیعتهای چهارگانهٔ دسته دوم است. ابراز تراکم بخار بوجود می‌آید. بخار بردو قسم است تر و خشك. بخارتروگرم وقتی که در طبقات بالا رفت می‌بندد پس اگر رطوبت آن کم و محیط جو سرد باشد سرازیر شده باران می‌گردد ولی همهٔ آن به باران تبدیل نمی‌شود. و اگر رطوبت آن کم و جو سرد باشد باران فشرده می‌شود و نسبت به‌شدت استحالهٔ آن درجووسردی هوا درشت وکوچك می‌باشد. اگر گرمی و تری بخار و جو معتدل بود به صورت ابر متراکم بدون باران در می‌آید این بودکیفیت پیدا شدن ابر و تگرگ. درازی دانهٔ تگرگ در بعضی اوقات از آن است که باد وقتی که زیاد شد تگرگ دراز می‌شود و تغییر شکل آن بستگی به‌تغییر شکل باد داردو گردی آن مربوط است به‌کمی باد این‌بود شرح کمی‌راجع به‌تگرگ.

برق: از بهم خوردن تکه‌های بزرگ ابر می‌باشد پس همانطورکه آتش ازاصطکاك درسنگ جستن می‌کند ازبرخورد دوتکه ابر برق جهش می‌نماید. رعد: از برخورد ابرها به هم پیدا می‌شود زیرا برق وجودش بستگی به وجود رعد دارد و برعکس و هیچیك بدون دیگری نیست ولی گاهی می‌شودکه برق دیده می‌شود. اما صدای رعد شنیده نمی‌شود و برعکس دیده شدن برق بدون رعد به علت دوری مسافت و ضعف صوت است زیرا ظهور برق تابع لطافت جوهر ابر است یعنی‌بخاری که‌ازآن ابر بوجودمی‌آید اگر گرم و قابل احتراق باشد برق آن زیاد است و رعدآن ضعیف می‌باشدکه آنهم بواسطهٔ دوری مسافت شنیده نمی شود ولی علت ظهوررعد بدون برق بواسطهٔ آن است که‌ابرها رویهم‌متراکم‌می‌شود و این تراکم مانع‌رسیدن روشنی به زمین می‌باشد.

در اینجا لازم است که از سقوط ستارگان (تیر شهاب) بحث کنیم وقتی که بخارگرم صعود می کند وبواسطهٔ حرارتی که دارد به مکان دور در فضا می‌رود رطوبتش غلیظ می‌شود و به خاطر غلظت رطوبت به سمت زمین برمی‌گردد در این وقت و بواسطهٔ برخورد به هوا میان کرهٔ حرارت و کرهٔ هوا مشتعل می گردد، این بود سقوط‌ستاره. اعراب بدوی‌محل فرود آمدن این ستارگان را می‌دانند و ما در جای دیگر راجع به این موضوع گفتگو خواهیم‌کرد. عربهای بدوی در محل سقوط‌این ستاره‌ها قطعه‌هایی شبیه به طبا شیر می‌یابندکه از طبا شیر کبود رنگ‌تر است که آن سرمهٔ خوبی است برای ازبین‌بردن سفیدی چشم حیوان و جهت دفع امراض دیگرکه فعلاجای بحث آنها نیست. اکنون باید گفت که این ستارگانی نیستندکه از آسمان فرود آیند و محل خود را خالی بگذارند زیرا در این‌صورت چیزهایی که به آن در زمین بستگی‌دارد خراب وفاسدمی‌شود. گاهی می‌شودکه این گونه بخارات‌زیاد می‌شود وحادثهٔ‌هولناکی را بوجود می‌آورد واگر کسی گویدکه این سخن‌با فلسفه‌نقیض می‌باشد به علت آنکه بخار می‌تواند زیاد و کم شود ایراد او سست و ضعیف است.

طبیعت بادها بستگی دارد به عبورآن ازروی اشیاء روی زمین، چنانکه اگر از روی‌کوهها بوزند و از معادن گوگرد گرم عبورکنند طبیعتشان تفاوت می‌کند. بادهای سرد آن است که حرارت آن مغلوب باشد. بادهای گرم آن است که رطوبت آن مغلوب باشد و دوام و شدت آن بستگی به کثرت مقدار آن دارد. (۹۷)

صاعقه: سوختن مواد دخانی قابل اشتعال توسط نور خورشید در فضا است. برای فهمیدن کیفیت آن باید کیفیت احتراق توسط آئینه‌های مقعررا بدانیم. وقتی که آئینهٔ مقعر را مقابل آفتاب می‌گیریم نورآن به خارج منعکس می‌شود و آن کانونی داردکه اگر جسم قابل احتراق درآن نقطه قرارگیرد فوراً مشتعل می گردد. همچنین نور خورشید وقتی که به قطعات ابرهایی که مانند آئینه‌های مقعرند تابش می کند این‌آئینه‌های ابری هم مسلم است که دارای کانون‌می‌باشندکه اگر کانون‌آنها باستونهای موادخانی‌زمینی برخورد نماید حین تابش‌خورشید مشتعل شده دامنهٔ حریق تا زمین‌کشیده می‌شود و ایجادآتش سوزی می‌نماید. دکدکه: که شکاف در سطح زمین است‌بواسطهٔ اصوات آسمانی تولید می‌شود. گاهی هنگامی که قطعات ابر به هم می‌خورد صداهای هولناکی تولید می گردد این اصوات در زمین‌های سست تأثیرکرده باعث شکاف و خرق شده‌بالنتیجه سنگ و کلوخ به اطراف پرتاب می‌شودگاهی هم بادو رعداین صداها را تقویت وکمك می‌نماید. این بود معنی دکدکه.

حرکت زمین‌مربوط به زلزله می‌باشد ودخلی به‌دکدکه ندارد.

زلزله: وقتی که‌هوا درباطن زمین‌تحت فشار قرارگرفت و منفذی جهت خروج پیدا نکرد زلزله تولید می‌شود. کثرت

۹۶ـ جابربن حیان: «القول فی‌الطبیعه و تکوینها للاجناس و ما فوقها و تحتها» ازکتاب مختاررسائل جابربن حیان، ترجمه به فارسی از مهدی بهاءالدین مجلهٔ نوردانش شمارهٔ ۱۰ سال ۱۳۴۲

۹۷ـ «اتفاقات طبیعی و آسمانی از نظرجابر» ترجمهٔ مهدی بهاء الدین مجلهٔ نور دانش شمارهٔ ۱۱ سال ۱۳۴۲

و دوام زلزله بستگی به زیادی هوای فشرده شده و نیروی فشار آن دارد. وقتی که زلزله زیاد شد و دوام پیدا کرد چاههایی در زمین پیدا می‌شود که خود آنها باعث بیرون آمدن هواهای داخل زمین شده بالنتیجه زلزله قطع می‌شود. فرورفتن زمین (خسف) تابع کنده شدن چیزهایی است که در باطن زمین بوده و بستگی به سبکی و سنگینی مواد زمینی دارد پس اجـزاء سخت زمین وقتی که با اجزاء سست کرهٔ خاك برخورد کرد خسف در زمین بوجود می‌آید.

طبیعت آبها: بستگی به مکانها دارد یعنی مربوط بـه معادن مجاور آنها است.

آبها بر چهار قسم‌اند: ۱ـ آبهایی که طبیعت آنها گرم و خشك است این گونه آبها تلخ وخالی از موجودات زنده‌هستند و اگر حیوانی در آن تولید شود کم است مانند آب دریاهایی که مجاور معادن گوگرد و نمك می‌باشد. ممکن است این نوع آبها تا هزار فرسنگ و بیشتر روی زمین را فراگیرد.

۲ـ آبهایی که طبیعتشان گرم و تـر است مـانند آبهای شیرین فارس وآب کوههای شیرین طبع. این گونه آبها بیماری زا، کشنده، تغییر دهندهٔ کیموس و فاسد کنندهٔ مزاجند.

۳ـ آبهائی که طبیعتشان سرد وتراست مانند آبهای معتدل که مجاری آن دور از آبهای سابق الذکر است مثل آب دجله و آب کوههای سرد مزاجی که آب از بالای آبها به طرف پائین سرازیر می‌شود و بو و مزه آن تغییر نمی‌کند.

۴ـ آبهایی که طبیعتشان سرد و خشك است مثل آب برف که آب طبیعی معمولی نیست این گونه آنها بیشتر در کوهها و نقاطی که هوایش سرد است وجود دارد. (۹۸)

گزیدهٔ منابع و مآخذ

۱ـ ابن خلکان : «وفیات الاعیان وانباء ابناء الزمان» مصر ۱۲۷۵ هجری قمری

۲ـ ابراهیم حسن ، دکتر حسن : «تاریخ الاسلام، السیاسی والدینی و الثقافی والاجتماعی» الجزء الثانی ، العصر العباسی الاول، القاهره ۱۹۵۸ هجری قمری

۳ـ بهاءالدین، مهدی : اتفاقات طبیعی وآسمانی از نظر جابر بن حیان» مجلهٔ نوردانش ازشمارهٔ ۸ تا ۱۳ سال ۱۳۴۲ هجری شمسی

۴ـ جابر بن حیان : «اسرارالکیمیاء» پاریس ۱۸۹۳ میلادی

۵ـ جابر بن حیان : «الکیمیا» باسل ۱۵۷۲ میلادی

۶ـ جابر بن حیان : «کشف الاسرار و هتك الاستار» لیدن ۱۶۸۸ میلادی

۷ ـ جابر بن حیان : «الرسائل فی الجفر» شامل پانصد رساله، استراسبورگ ۱۵۳۵ میلادی

۸ ـ جابر بن حیان : «المکتسب نهایة الطلب» با ترجمه فارسی از جلدکی، بمبئی ۱۳۰۷ هجری قمری

۹ـ جزایری، غیاث الدین : «جابر بن حیان صوفی کاشف اسید نیتریك» مجلهٔ دواسازی عصر حاضر، از شمارهٔ ۶ تا ۱۰ سال ۱۳۱۹ هجری شمسی

۱۰ـ محمدفیاض، محمد: «جابر بن حیان وخلقاوه» القاهره ۱۹۵۰ میلادی

۱۱ـ موسوی، سید علی اکبر : «جابر بن حیان» مجلهٔ نور دانش ازشمارهٔ ۲ تا ۴

۱۲ ـ مظهر ، دکتر اسماعیل : «جـابر بن حیان» المقتطف: المجلد الثامن والستون، الجزء الخامس و السادس ۱۳۴۴ هجری قمری

۱۳ـ نجفی، محمد علی: «جابر بن حیان» مجلهٔ پیام نوین سال دوم شمارهٔ اول ۱۳۳۸ هجری شمسی

۱۴ـ نعمه، عبدالله : «فلاسفه شیعه» ترجمه سیدجعفر غضبان، تبریز ۱۳۴۷ هجری شمسی

۱۵ـ نصر، دکتر سید حسین : «علم و تمدن در اسلام» ترجمهٔ احمد آرام تهران ۱۳۵۰

۱۶ ـ کراوس ، پاول : «مختار رسائل جابر بن حیان» غنی بتصحیحها ونشرها. ب کراوس، القاهره ۱۳۵۴ هجری قمری

۱۷ـ زکی نجیب محمود : «جابر بن حیان» (اعلام العرب ۳، القاهره، المؤسسة المصریه العامـه) ۱۹۶۱ میلادی

۱۸ـ زیگل، دکتر آلفرد : «کتاب السموم و دفـع مضارها» تألیف جابر بن حیان، متن عربی از روی نسخهٔ خطی کتابخانهٔ تیموریه به صورت فاکسیمیله ـ ترجمه و تفسیر بـه زبان آلمانی ازدکتر آلفردزیگل ـ ۱۹۵۸ میلادی (جلد ۱۲ از نشریات شعبه آکادمی علوم وادبیات مانیس ویسادن)

۱۹ـ زریاب خوئی، دکتر عباس : «معرفـی کتاب السموم و دفع مضارها تألیف جابر بن حیـان» مـجلهٔ راهنمای کتاب شمارهٔ چهارم سال اول ۱۳۳۷ هجری شمسی

۲۰ـ الهاشمی، دکتر محمد یحیی : «الامام الصادق ملهم الکیمیاء» منشورات ، المؤسسة السوریة العراقیة، القاهرة حلب، بغداد ۱۹۵۹ م

۲۱ ـ قفطی : «تاریخ الحکما» ترجمهٔ فارسی ازقرن یازدهم به کوشش دکتر بهین دارائی تهران ۱۳۴۷ هجری شمسی

۹۸ ـ «صاعقه و رعدو برق در نظر جابر» ترجمهٔ مهدی بهاء الدین. مجلهٔ نوین دانش شمارهٔ ۱۲ سال ۱۳۴۲

۲۲ـ ظهیرالاسلام زاده دزفولی :«کیمیادراسلام» مجلهٔ ارمغان سال هشتم، شمارهٔ ۲و۳، ۱۳۰۶ هجری شمسی

۲۳ـ صافی گلپایگانی، لطف‌الله : «جابرپدرشیمی» نشریهٔ کتابخانهٔ مسجد اعظم، دورهٔ جدید شمارهٔ دوم سال ۱۳۴۴ هجری شمسی

۲۴ـ عرفان، محمود : جابربن حیان شیمی دادن گمنام ایران» مجله آینده، مجلد دوم شمارهٔ ۱ سال ۱۳۰۵ هجری شمسی

25_ **Bertholet, M.** :«La Chime ou moyan âge» Paris (1898)

26_ **Bertholet, M.** :«La revolution Chimique,» Paris (1890)

27_ **Bertholet, M.** :«Les origine de I' Alcheme» Paris (1885)

28_ **Corbin, H.** :«Le Live du Glorieux du Jàbir ibn Hayyân» (Eranos Jahrbuch, Ascona, 1950)

29_ **Holmyard, E. J.** :«Maker of Chemistry» Oxford (1931)

30_ **Holmyard. E. J.** :«The works of Jabir ibn Hayyan» Paris, Geuthner, Vol I, 1928

31_ **Holmyard, E. J.** :«Chémia in Islam» Endeavour 14 (1955)

32_ **Hoefer, F.** :«Histoire de la Chimie» Tome I, Paris (1942)

33_ **Kraus, P.** :«Dschabir Ibn Hajjan und die Ismailijja Jahresbericht, Berlin 1930

34_ **Kraus, P.** :«Jabir ibn Hayyan» Inistitot Français d'Archeólogie Orientale Le Caire, Vol I (1942) Vol II (1943)

35_ **Ruska, J.** :«Quelques Problemes de literature Alchemiste, Institut Adrien, Gubhard Severine (Suisse) 1931

36_ **Ruska, J.** :«Vorschriften zur Herstellnug Von Scharfen Wasser bei Gabir und Razi» Der Islam, Band 25, Berlin, (1939)

37_ **Ruska, J.** :«Chemie in Iraq und Persien im X. Jahrhundert n. Chr·, Der Islam, Band 17, Berlin (1928)

38_ **Stapleton & Azo—Hussain** :«Chemistry in Iraq and Persia in the third century» Memoires of the Royal Asiatic Society of Bengal Vol III, No. (1927)

اعداد مرسن و فرما

ترجمهٔ : قوام نحوی

۱ـ اعدادمرسن

اعداد مرسن به فرم $N=۲^n-۱$ می‌باشندکه به ازای $n=۱و۲و۳و۴و۵...$ برابر می‌شوند با : ... و ۳۱ و ۱۵ و ۷ و ۳ و ۱ $=N$

اگر این‌اعداد را به مبنای ۲ ببریم می‌شوند:

$N=۱و۱۱و۱۱۱و۱۱۱۱و۱۱۱۱۱و.....$

وبطورکلی

$N=۲^n-۱=(\overbrace{۱۱۱۱۰۰۱}^{n\ \text{رقم}})$

زیرا عدد ۲^n در مبنای ۲ عددی است که از ۱ و n صفر تشکیل شده است $(۱۰۰۰...۰)_۲=۲^n$ واگر یك‌واحد ازآن کم کنیم عددی حاصل‌می‌شودکه همهٔ ارقام آن ۱ بوده‌وتعدادآنها n است.

۲ـ اعدادفرما

این اعداد به فرم $N=۲^{(۲^n)}+۱$ می‌باشند که به ازای $n=۰و۱و۲و۳و۴...$ برابر می‌شوند با:

$N=۳و۵و۱۷و۲۵۷و۶۵۵۳۷و....$

اگر اعداد N را به مبنای ۲ ببریم می‌شوند:

$N=۱۱و۱۰۱و(۱۰۰۰۱)و(۱۰۰۰۰۰۰۰۱)$

اعداد حاصل در مبنای ۲ رقمهای اول و آخر آنها ۱ است و بین آنها تعداد $(۲^n-۱)$ صفر وجود دارد.زیرا عدد $۲^{(۲^n)}$ در مبنای ۲ عددی است که از ۱ و ۲^n صفر تشکیل شده است مثلا

$۲^{(۲^n)}$ و $n=۲$: $۲^۴=(۱۰۰۰۰)_۲$

و چون با ۱ جمع شود بین دو رقم تعداد $۲^n-۱$ صفروجود خواهد داشت که به ازای $n=۴$

$N=۲^{۱۶}+۱=۶۵۵۳۷=(۱۰۰۰۰...۰۱)_۲$

تعداد صفرهای این عدد مساوی $۲^۴-۱=۱۵$ می‌باشد.

مسئلهٔ هم محیطها

نوشتهٔ : G.POLYA

ترجمهٔ :داویدریحان

(دنباله ازشمارهٔ قبل)

VII ـ هدف نزدیك است: نتایجی که موفق به تحقیقشان‌شدیم،قضیهٔ هم‌محیطهارا بسیار پذیرفتنی‌قلمداد کردند. می‌توان حس کرد که این نتایج «ذاتی» هستند و ما «نزدیك به هدف» و در شرف اثبات کلی هستیم.

۱ـ تعداد اضلاع و محیط یك چند ضلعی مفروض‌است در چه صورت مساحت‌آن ماکسیمم می‌شود؟

اگر چنین چند ضلعی وجود داشته باشد، باید **در یك دایره محاط باشد** این موضوع را می‌توانیم از آخرین تذکرهٔ خویش در بخش ۳ـVI نتیجه بگیریم.

حال فرض می‌کنیم که‌مسئله حل شده باشد. فرض‌می‌کنیم که مواضع تمام رأسها بجز یکی مثلا X ، نا معلوم باشد. $n-1$ رأس دیگری یعنی U،...،W،Y و Z ثابتند . چند ضلعی کامل WXYZ....U از دو قسمت تشکیل شده است : چند ضلعی WYZ...U مستقل از X و با $n-1$ رأس ثابت و مثلث WYZ که وابسته به X است . از مثلث WXY قاعدهٔ WY ومجموع‌طولهای‌دوضلع دیگریعنی $WX+XY$ را در دست داریم، $n-2$ ضلع باقی مانده از چند ضلعی‌معلوم است و مجموع طولهای n ضلع‌را در دست داریم. مساحت‌مثلث WXY باید ماکسیمم باشد. ولی به فوریت دیده می‌شود که مساحت مثلث WXY با پیرامون وقاعدهٔ معلوم وقتی‌ماکسیمم است که‌مثلث متساوی الساقین‌باشد(*).در نتیجه $WX=XY$ و دو ضلع مجاور چند ضلعی مطلوب باهم مساویند . در نتیجه (بوسیلهٔ تقارن و با استفاده از طرح تغییرات جزئی) دو ضلع مجاور غیر مشخص باهم مساویند . بنابراین تمام اضلاع با هم مساویند: چند ضلعی مطلوب متساوی الاضلاع است.

بنابراین، چند ضلعی‌مطلوب محاط دردایره، منتظم‌است:

از میان تمام چند ضلعیهاکه تعداد اضلاع و پیرامونشان در دست است، چند ضلعی منتظم دارای بیشترین سطح است.

۲ـ دو چند ضلعی منتظم، یکی‌دارای n ضلع و دیگری دارای $n+1$ ضلع است وپیرامونشان‌باهم برابراست.کدامیك دارای بیشترین مساحت است؟

یطوری‌که در ۱دیدیم، $n+1$ ضلعی منتظم دارای‌سطحی بیشتر از سایر $n+1$ ضلعیهای غیرمنتظم است که پیرامونشان باهم برابراست. ولی n ضلعی منتظم راکه‌طول هرضلعش‌برابر با a است، می‌توان یك $n+1$ ضلعی غیرمنتظم درنظر گرفت: $n-1$ ضلع به طول a و دو ضلع به طول $\frac{a}{2}$ وزاویهٔ 180° (وسط یکی از اضلاع چندضلعی را برحسب معمول ، یك رأس فرض کنید .) نتیجه می‌گیریم که سطح $n+1$ ضلعی منتظم بیش از سطح n ضلعی منتظمی است که باهم، هم‌محیط‌اند.

۳ـ دایره ویك چند ضلعی منتظم دارای یك محیط‌اند مساحت‌کدامیك بیشتراست؟

مفهوم نتیجه‌ای‌راکه‌در ۲ بدست‌آوردیم، بررسی‌می‌کنیم. برای n مقادیر ۳،۴،... را اختیار می‌کنیم و نتیجه رادرهر حالت خاص‌بدست می‌آوریم. باعبور از یك مثلث‌متساوی‌الاضلاع به یك مربع با همان محیط، مساحت بازهم اضافه می‌گردد. به همین ترتیب تابه آخر، با عبور از یك شکل منتظم به بعدی ، از پنج ضلعی به شش ضلعی، از شش ضلعی به هفت ضلعی، از n ضلعی به $n+1$ ضلعی، می‌بینیم که‌باثابت بودن محیط،مساحت افزایش می‌یابد. بالاخره، درحد، به‌دایره می‌رسیم، پیرامونش

(*): در واقع رأس X از مثلث WXY روی یك بیضی واقع است که‌کانونهایش در W وY واقعند: سطح مثلث WXY وقتی ماکسیمم می‌گردد که X در انتهای محور اقصر بیضی قرار گیرد.

همواره همان است ولی مساحتش از هر چند ضلعی منتظمی که متعلق به مجموعه‌ای نامحدود است و دایره عنصر حد آن می‌باشد بیشتر است: مساحت دایره از مساحت هرچند ضلعی منتظمی که باآن دارای محیطهای برابر می‌باشند، بیشتر است.

۴- یك دایره و یك چند ضلعی اختیاری دارای محیطهای برابرند. مساحت کدامیك بیشتر است؟

پاسخ مسئله دایره است. این نتیجه به فوریت از ۱و۳ نتیجه می‌شود.

۵- یك دایره و یك منحنی اختیاری دارای محیطهای برابرند. کدامیك دارای بیشترین سطح است؟

پاسخ دایره است. این نتیجه را می‌توان از ۴ و با در نظر گرفتن اینکه منحنی حد یك چندضلعی است، بدست بیاوریم. قضیهٔ هم محیطها اثبات شده است!

VIII- سه شکل قضیهٔ هم محیطها: درفوق (بخشهای VI و VII) حکم زیررا اثبات کرده‌ایم:

الف- از میان تمام اشکال مسطح با محیطهای مساوی دایره دارای سطح ماکسیمم است.

در بخش II حکم دیگری را مورد مطالعه قرار دادیم.

ب- از میان تمام اشکال مسطح با مساحتهای مساوی، دایره دارای کمترین محیط است.

این دوحکم نه فقط از حیث ظاهر بلکه کاملا باهم متفاوتند. تذکرات متمم مورد نیاز است.

۱- دومنحنی را «هم محیط» خوانیم هرگاه پیرامونشان باهم برابر باشد. «از میان تمام منحنیهای هم محیط، دایره دارای بیشترین سطح است». این عبارت مرسوم حکم الف است و بیان کنندهٔ اثبات «قضیهٔ هم محیطها» است.

۲- عبارات الف وب را می‌توانیم «حکمهای مزدوج» بخوانیم. حال می‌خواهیم ثابت کنیم که این حکمها با هم معادلند و برای این منظور ثابت می‌کنیم که این حکمها باحکم سومی معادلند.

۳- فرض می‌کنیم که L محیط یك منحنی بستهٔ مفروض و A سطح محدود به آن باشد. فرض می‌کنیم که دایرهٔ به‌شعاع r و این منحنی باهم نسبت هم محیطی داشته‌باشند: $L=2\pi r$ اولین صورت (حکم الف) قضیهٔ هم محیطها بوسیلهٔ نامساوی $A\leqslant\pi r^2$ بیان می‌شود.

اگر r را برحسب L در نامساوی مفروض قرار دهیم داریم:

$$\frac{4\pi A}{L^2}\leqslant 1$$

نام این نامساوی را «نا مساوی هم محیطی» و نسبت مفروض را نسبت هم محیطی خوانیم. این نسبت فقط بستگی به شکل منحنی دارد و مستقل از ابعادش می‌باشد. زیرا، اگر بعدهای خطی منحنی را در ۲ ضرب کنیم، محیط $2L$ و مساحت $4A$ می‌شود ولی نسبت $\frac{A}{L^2}$ بدون تغییر باقی می‌ماند، این موضوع برای نسبت $\frac{4\pi A}{L^2}$ و همچنین برای تشابهات غیرمشخص نیزصادق است. برخی از مؤلفین نسبت $\frac{A}{L^2}$ را نسبت هم محیطی نامیده‌اند و ماعامل 4π را مداخله داده‌ایم تانسبت هم محیطی برای دایره برابر با یك گردد. بااین اصطلاحات می‌توانیم بگوئیم که:

ج- از میان تمام اشکال مسطح، نسبت هم محیطی دایره از همه بزرگتر است.

این سومین صورت قضیهٔ هم محیطها است.

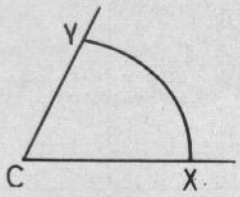
با عزیمت از شکلهای با محیط برابر به سومین صورت قضیهٔ هم محیطها رسیدیم. بااتکاء به حکم ج، به حالت اشکال با مساحتهای مساوی عبور می‌کنیم. فرض می‌کنیم که یك منحنی به مساحت A و به پیرامون L دارای سطحی برابربا سطح دایره‌ای به شعاع r باشد. در این شرایط داریم $A=\pi r^2$. به جای A این مقدار را قرار می‌دهیم و در این صورت نامساوی هم محیطی به صورت $L<2r$ در می‌آید. این به معنای آن است که پیرامون منحنی بزرگتر از دایره‌ایست که مساحتشان باهم برابر است. بدین ترتیب به دومین صورت مزدوج قضیه یعنی به حکم ب رسیدیم.

۵- طبیعتاً، می‌توانستیم همین استدلالها را درجهت عکس انجام داده و با عبور از ج به الف و ب برسیم. بدین ترتیب موفق شدیم که تعادل سه صورت را نشان دهیم.

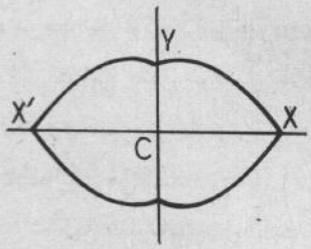
IX- موارد استعمال و مسائل جدید: هرگاه دیدون راه خویش‌را دریك دماغه جستجو می‌نمود، مسئلهٔ طرح شده برای وی، بدون شك، خیلی نزدیکتر از سایر حالاتی بود که در بخش ۱ — V مورد مطالعه قرار دادیم.

زاویه‌ای داده شده است (منظو ما قسمت نا محدود از یك صفحه است که بین دو نیم خط با مبدأ مشترك واقع است) **سطح ماکسیممی راکه یك منحنی باطول مشخص می‌تواند از این زاویه ببرد، بدست آورید.**

در شکل روبرو رأس زاویهٔ داده شده C است (دماغه) منحنی اختیاری واصل بین نقاط X و Y دارای طولی برابر با l است. می‌خواهیم سطح محدود به‌منحنی و کنارهٔ دریا را ماکسیمم سازیم. می‌توانیم دوانتهای X و Y را جابجا کنیم وشکل‌منحنی را تغییر بدهیم ولی مجاز نیستیم که طول l آنرا تغییردهیم.



این مسئله‌به همان‌سادگیها نیست. ولی ازآن نوع‌مسائلی است‌که انتخاب یك حالت ساده از مفروضات حل مسئله را به سادگی میسر می‌کند. اگر زاویهٔ C قائمه باشد، می‌توانیم بوسیلهٔ تقارن نسبت به یك ضلع‌زاویه، سپس نسبت به ضلع‌دیگر به حل مسئله نائل شویم. بدین ترتیب به شکل جدیدی می‌رسیم مانند شکل روبرو ویك مسئلهٔ‌جدیدمطرح‌می گردد. منحنی XY که توسط تقارن‌چهارمرتبه تکرار شده‌است. منحنی‌مسدودی را بدست می‌دهد که طولش‌برابر با $4l$ است.



مساحتی را که باید ماکسیمم کنیم، چهار مرتبه تکرار شده‌است و سطح جدیدی را می‌دهد که منظور تعیین ماکسیمم آن‌است و کاملا توسط منحنی جدید احاطه شده است. برطبق قضیهٔ هم محیطها جواب مسئله دایره است. این دایره دارای دو محور تقارن XX' و YY' است و مرکزش C محل تقاطع این محورهاست. بدین ترتیب جواب مسئلهٔ اولیه (مسئلهٔ دیدون) یك ربع دایره است: یعنی یك چهارم دایره‌ای که مرکزش در رأس زاویهٔ مفروض است.

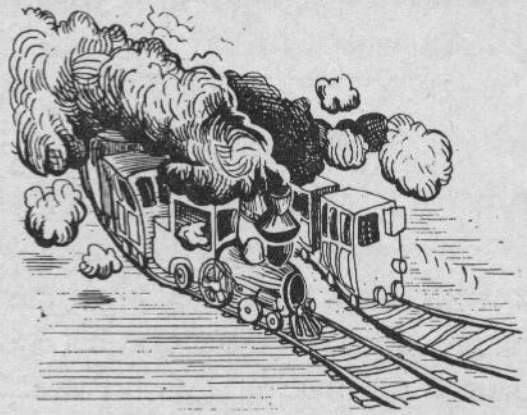
به خاطر داریم که جواب‌قسمت V-۱ براساس ملاحظات‌شکل۲ بود و مشابهت وسیع آنرا با جواب‌کنونی مورد بررسی قرار می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود که بینهایت حالت دیگر وجود دارد که جواب از این نوع برای آن صادق باشد. هرگاه اندازهٔ داده شده در C برابر با $\frac{180^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{2n}$ باشد، می‌توانیم بوسیلهٔ تقارنهای متوالی، منحنی XY به طول مفروض l را تبدیل به منحنی جدید بسته‌ای‌به طول $2nl$ تبدیل کنیم ومسئله را به‌صورت جدیدی در آوریم که جواب آن برطبق قضیهٔ هم محیطها یك دایره است. حالتهای بررسی شدهٔ در بخش V-۱ و در این بخش، تنها دو حالت ازلیهٔ این رشتهٔ بینهایت‌هستند که مربوط به $n=1$ و $n=2$ می‌باشند.

اگر زاویهٔ C از نوع خاصی‌باشد($\frac{180^\circ}{n}$ با n صحیح) جواب مسئله توسط‌کمانی از دایرهٔ به مرکز C داده می‌شود. طبیعی است‌که این نوع جواب باید مستقل‌از زاویه باشد(لااقل تا آنجایی‌که از 180° تجاوز نمی‌کند). این رجوع می‌شود به اینکه فرض کنیم که جواب مسئله‌کمانی از دایرهٔ به مرکزC است، چه‌این زاویه‌برابر $\frac{180^\circ}{n}$ باشد یا نباشد.

این فرضیه، فرضیه‌ای استقرائی است‌که بوسیلهٔ‌تحقیقات بیشماری درحالات‌خاص.... $n=1,2,3,\ldots$ مورد تصدیق قرار است ولی آیا این فرضیه صحیح است؟

کار برد اخیر قضیهٔ هم‌محیطهاو این‌مسئله‌که ازآن‌منشعب شده است می‌توانند به ما اجازه دهند که‌کار بردها و مسائل بیشماری از این قبیل را پیش بینی کنیم. روشی‌راکه برای‌بدست آوردن این قضیه بکاربردیم پرسشهای جدیدی را مطرح‌ساختند قضایای مشابه در هندسهٔ فضائی و فیزیك ریاضی نیزسایرمسائل را عنوان می‌کنند. قضیهٔ هم محیطهاکه ریشه‌های آن تااعماق تجربیات و مقاصد ما نفوذکرده است، از آن جمله قضایائی هستندکه پیش بینی‌آنها ساده‌ولی اثبات آنها مشکل است و یکی از سرچشمه‌های الهام بشمار می‌روند.

سرگرمی ریاضی



بین دو شهر قطارهای راه‌آهن رفت وآمد می‌کنندبقسمی که در هرساعت از هرشهر یك قطار به سمت شهر دیگرحرکت می‌کند. سرعت تمام قطارها ثابت و با یکدیگر برابر است و مسافرت از هرشهر به شهر دیگر با قطار ۵ ساعت‌طول‌می‌کشد.

هر قطار در مدت طی‌فاصلهٔ دو شهراز کنار چندقطاردیگر که از جهت مخالف می‌آیند می‌گذرد؟

دربارهٔ آموزش

«مبانی تئوری نسبیت خاص»

در دبیرستانها

ترجمهٔ : مهندس فتح‌الله زرگری

درآموزش «مبانی تئوری نسبیت خاص» برای دانش‌آموزان بیشتر سؤالها پیرامون سه‌پرسش مهم زیر است:

۱) سرعت سیر نور در خلاء به عنوان حد نهائی سرعت انتشار امواج (مانند امواج صوتی، رادیوئی وغیره).

۲) تابعیت جرم جسم ازسرعت آن.

۳) قانون تبدیل‌جرم به‌انرژی وبرعکس.

آموزش این‌بخش از فیزیك را می‌توان به صورت هفت درس مجزای زیرتقسیم بندی کرد:

۱ـ بیان کلاسیك فضا وزمان، اصل‌نسبیت گالیله.

۲ـ بدست آوردن سیستم اندازه‌گیری ایده‌آل و تجربهٔ مایکلسن(۱).

۳ـ فرضیات تئوری نسبیت، نسبیت همزمانی.

۴ـ فواصل زمانی وطولی‌نسبی.

۵ـ قانون نسبتی ترکیب سرعتها، حل‌مسئله.

۶ـ دینامیك نسبتی. تابعیت جرم از سرعت.

۷ـ رابطهٔ بین‌جرم وانرژی.

درس‌اول: دریك مقدمهٔ کوتاه «تئوری نسبیت‌خاص» را تحت عنوان قسمتی ازفیزیك که حرکت اجسام با سرعتهای بالا را درسیستمهای اندازه‌گیری اینرسیك(۲) بررسی می‌کند، بیان می‌کنیم. به‌دانش‌آموزان متذکر می‌شویم که فقط برای سرعتهای v بین $100km/s < v \leq c$ نسبی بودن سرعت مطرح است.

c سرعت سیر نور وبرابر $c = 300000 km/s$ می‌باشد.

دراین چنین سرعتهایی‌درحالت خاص‌ذرات بنیادی(مانند الکترونها، پروتونها، نوترونها وغیره) حرکت می‌کنند و نور انتشار پیدا می‌کند.

طبق معلومات جدیدثابت شده‌است که اجرام‌فلکی‌باچنین سرعتهایی ازمنظومهٔشمسی ما دور می‌شوند. توجه می‌دهیم که سرعتهایی که درمکانیك باآنها مواجه هستیم بامقایسهٔ باسرعتهای خیلی زیاد حالات خاصی می‌باشند. به همین ترتیب کمیتهای فیزیکی مانند طول،زمان، وجرم نیز مفاهیم جدیدتری به خود می‌گیرند. در این قسمت از درس لازم است اطلاعات تاریخی مختصری دربارهٔ ظهور «تئوری نسبیت خاص» و بنیانگزارش **«آلبرت اینشتین»** بیان کنیم.

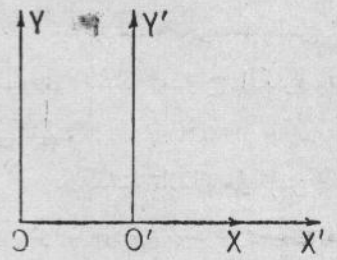
سؤال‌اساسی درس‌اول عبارتست از«مبانی نسبیت‌درمکانیك» محتویات مبانی تئوری نسبیت بر قوانین نیوتن (طبق روابط تغییر مبنای مختصات گالیله) قرارگرفته‌اند:

$$X = X' + vt \text{ و } Y = Y' \text{ و } Z = Z' \text{ و } t = t'$$

روابط ریاضی اخیر نمایشگر تبدیل یك سیستم اندازه گیری اینرسیك به سیستم اندازه‌گیری اینرسیك دیگر است. (انتخاب محور حرکت درصفحه از (شکل‌صفحهٔ بعد) پیداست، در لحظهٔ

۱ـ منظور ازسیستم اندازه‌گیری، سیستم مختصات مقیاس بندی شدهٔ XOY می‌باشد.

۲ـ منظور از یك سیستم اینرسیك، سیستمی است که بدون اعمال نیروی خارجی اگر ساکن است ساکن بماند و اگر متحرك است به‌حرکت خود ادامه دهد.



ابتدا $t=0$ مبدأ های مختصات بر هم منطبق هستند، سیستم $X'O'Y'$ به تدریج در دستگاه XOY درجهت مثبت محور OX با سرعت ثابت v حرکت می کند)

این بدین معنی است که انتقال قوانین دینامیك همانطور که ازیك سیستم به سیستم دیگر تغییری دراصول آنها پیش نمی‌آورد درمورد فرمولهای این قوانین نیز تغییری در مفهوم آنها پیش نمی‌آورد.

ازاینجا، به‌نوبهٔ خود، لازم می‌آید که هرگاه دریك سیستم اینرسیك قرار گرفته وناظریك پدیدهٔ مکانیکی دلخواهی باشیم، نتوانیم بگوئیم که سیستم مزبور متحرك است یاساکن.

فرض کنیم در واگنی قرار گرفته وباسرعت ثابتی نسبت به زمین حرکت می کنیم ، توپی را از حالت سکون به‌طرف پائین رها می کنیم، نسبت به‌سیستم اندازه گیری وابسته به‌واگن حرکت توپ یك سقوط آزاد براثر نیروی جاذبه است و این حرکت از قانون دوم نیوتن پیروی می کند. نسبت به سیستم اندازه گیری وابسته به‌زمین توپ مانند جسمی است وبطورافقی باسرعت اولیهٔ مساوی سرعت حرکت واگن پرتاب می‌شود، حرکت آن روی یك سهمی انجام گرفته وازقانون دوم نیوتن پیروی می کند. به این ترتیب اگرچه حرکت دراین دوسیستم اندازه گیری ازنظر سینماتیك یکسان نیستند، لیکن هر دوی این حرکتها از یك قانون دینامیکی پیروی می کنند.

دراینجا ازنظردینامیك حرکت هیچ فرق نمی کندکه در یکی‌از سیستمهازمین متحرك باشد یا واگن. درحقیقت به‌کمك قوانین سینماتیك می توان حضور حرکت‌نسبی دو سیستم را ثابت کرد.

(درمثال فوق واگن‌وزمین) لیکن اندازه گیری‌سینماتیك جوابگوی سؤالهای مربوط به‌حرکت مطلق یا دستگاه ساکن نمی‌باشد .

بنابرمبانی نسبیت ، نمی‌توان چنان سیستم اندازه گیری ممتاز (ساکن‌مطلق) اینرسیکی‌پیدا کرد که درآن کلیهٔ سیستمهای اندازه گیری اینرسیك دیگر باسرعت (مطلق) معینی درحرکت باشند، وبتوان سرعت سیستم مورد نظری رادراین سیستم ممتاز ازروی پدیده‌های مکانیکی‌تعیین کرد.

درکتابهای درسی‌مطلب فرموله شدهٔ زیر در مورد مبانی نسبیت گالیله نوشته‌شده‌است: «پدیده‌های‌مکانیکی باشرایط‌اولیهٔ یکسان ، در سیستمهای اندازه گیری اینرسیك مختلف یکسان اتفاق می‌افتند» در حالت خاص دو حرکت مکانیکی مورد نظر است (دوحرکتی که دردوسیستم اندازه گیری، بانیروها وشرایط اولیهٔ یکسان انجام می گیرند).

ازنظرما مطلب فرموله شدهٔ فوق مناسبترین نمی‌باشد ، زیرا بابررسی‌صادق بودن فرمول قانون‌دوم نیوتن، $m\vec{a}=\vec{F}$ باهمان حرکاتی‌سروکار خواهیم‌داشت که ازنقطه نظرسیستمهای اندازه گیری دیگرمورد بررسی قرار می گیرند.

به‌این جهت درتجزیه و تحلیل مطلب فرموله شدهٔ اخیر لازم است که مثالهایی رانیز بررسی‌کنیم: دردو سیستم اینرسیك (واگن و«زمین») دوتوپ یکسان ازحالت سکون رهامی‌شوند، حرکت این‌دو درهر دوسیستم یکسان انجام می گیرد.

طرح درس به‌ترتیب زیر می‌تواند باشد.

بعد ازطرح سؤالهای‌لازم ازمکانیك وجواب دادن‌به‌آنها (قوانین اینرسی ، مفهوم سیستم اندازه گیری اینرسیك و روش ترکیب سرعتها) به بررسی وبحث درمورد قوانین مکانیك که در سیستمهای اندازه گیری اینرسیك بکارمی‌آیند می‌پردازیم. برای روشن‌شدن مطلب دو دستگاه اندازه گیری اینرسیك K و K' (شکل‌قبل) رادرنظر می گیریم. فرمول جمع وترکیب سرعتها (درطول محور OX) $u=u+v$ است. قوانین ثابت‌دینامیك بررسی‌شده ومخصوصاً درمورد رفتن از یك سیستم اندازه گیری (مختصات) مانند K به سیستم دیگر K' (درقانون دوم‌نیوتن) توضیح بیشترمی‌دهیم. در مورد غیر ممکن بودن مشخص کردن سیستم اندازه گیری ممتاز (ساکن مطلق) به کمك پدیده های مکانیکی بحث بیشتری می کنیم.

درس دوم : سؤالها را تکرار می کنیم : مفهوم سیستم اندازه گیری اینرسیك، جمع وترکیب‌سرعتها، برقراری‌فرمول قوانین دینامیك دراثررفتن ازیك سیستم اندازه گیری به سیستم اندازه گیری دیگر، مبانی نسبیت در مکانیك.

سپس باادامهٔ به درس در موردیکنواختی سیستمهای(۱)

۱ـ دوسیستم رایکنواخت گوئیم که نسبت به‌هم باسرعتهای یکنواختی حرکت کنند.

-a و b را طوری پیدا کنید که عبارت زیر بر $x^2 - x - 2$ قابل قسمت باشد:

$$(b-a)x^4 + (3a-2b)x^3 - x^2 + (a+b-4)x + a$$

و سپس کسر زیر را ساده کنید:

$$\frac{x^4 - x^3 - x^2 - x - 2}{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1}$$

دبیرستان داریوش شمیران

دبیر: مطهری‌نژاد

-بافرض آنکه $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشد عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن درآورید:

$$\frac{f(x^2) - fff(x)}{f(\frac{1}{x^2}) - f(\frac{1}{x})}$$

- در تقسیمی باقیمانده صفر و مقسوم‌علیه به‌صورت $\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a}$ و خارج قسمت به‌صورت

$$Q(x) =$$
$$= 16x^4 - 8myx^3 + 4m^2y^2x^2 - 2m^3xy^3 + m^4y^4$$

می‌باشد. مقسوم ومقسوم‌علیه را پیدا کنید.

دبیرستان رهنما گرگان

دبیر: سیدین- فرستنده: شیرنگی

-دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1552 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

-اگر a و b و c اضلاع مثلثی باشند، ثابت کنید به‌ازاء جمیع مقادیر n عبارت زیر مثبت است:

$$b^2n^2 + (b^2 + c^2 - a^2)n + c^2$$

دبیرستان شاپور میانه

دبیر: احمدنیا- فرستنده: حسین میانجی

درمعادلهٔ:

$$x^2 - 2ax + a + 1 = 0$$

اولاً a را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه‌های این معادله $a + 1$ باشد. ثانیاً a را چنان بدست آورید که بین ریشه‌های این معادله رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$x'^2 + x''^2 + x'x''^2 + x''x'^2 = 4$$

ثالثاً معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد.

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر: هدانیا- فرستنده: محمد معینی

-مطلوب است حل دستگاه دومجهولی زیر:

$$\begin{cases} (x+y+1)^2 + (x+y) = 19 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

- معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \sqrt{2x'x''} + \sqrt{x' + x''} = 7 \\ 2x'x'' + (x' + x'') - 2\sqrt{2x'x''(x' + x'')} = 1 \end{cases}$$

دبیرستان فارابی کرج

دبیر: سوداگری- فرستنده: مجید مصباح

معادلهٔ اصم زیر را حل کنید:

$$\frac{1}{2 - \sqrt{2 + x}} + \frac{1}{2 + \sqrt{2 + x}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

دبیرستان فردوسی سراب

دبیر: گویا- فرستنده: فریدون داودنژاد

معادلهٔ درجهٔ دوم زیر مفروض است:

$$Px^2 - (P+1)x + 1 = 0$$

اولاً ثابت کنید مابین دو ریشهٔ معادلهٔ فوق رابطه‌ای مستقل از P وجود دارد. ثانیاً P را چنان تعیین کنید که یك ریشهٔ معادله سه‌برابر ریشهٔ دیگر باشد. ثالثاً معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که دو ریشهٔ آن $\frac{x'}{x''^2}$ و $\frac{x''}{x'^2}$ باشد.

دبیرستان فروزی

دبیر: فلاحت- فرستنده: علی‌خسروی

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\sqrt[5]{\frac{x+2}{2}} + \sqrt[5]{\frac{x+2}{3}} =$$
$$= 2(\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{2})\sqrt[5]{\frac{x}{6}}$$

دبیرستان نمازی شیراز

دبیر: محمدتقی دباغ

- معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$|x-1| - |x^2 + 7x + 12| + x - 5 = 0$$

- ثابت کنید عبارت

$$x^{20} + x^{18} + x^{16} + \ldots + x^2 + 1$$

نور از A به D ومراجعت به A مساوی زمان حرکت از A به C ومراجعت به A باشد دودسته نور همزمان دارای یك فاز بوده ویکدیگررا تقویت خواهند کرد ولی چنانچه این دوزمان باهم اختلاف کوچکی پیدا کنند دو دسته اشعهٔ نور کمی باهم اختلاف فازداشته وتداخل ایجاد خواهدشد.

اگر دستگاه در اتر ساکن باشد زمان دودسته نور باهم مساوی خواهد بود ولی اگر دستگاه به‌طرف راست با سرعت v درحرکت باشد اختلاف زمان پیدا خواهدشد و تداخل دودسته نورحتمی‌است. مایکلسن بااینکه آزمایش خویش را در مکانها و زمانهای مختلف انجام‌داد امادرعمل تداخلی مشاهده ننمود واین آزمایش دوموضوع رابیان‌می کرد، یازمین دراترحرکت نمی کند ویااصلا اتری وجود ندارد . وبعدها ثابت شد که اتری وجود نداشته بلکه امواج نوری والکترو مغناطیسی به صورت فوتونها وامواج انرژی‌دار درخلاء انتشار می‌یابند . در حقیقت خلاء مانند هادی است برای امـواج الکترو مغناطیسی همانطور که سیم مسی‌هادی است برای جریان الکتریکی یعنی برای الکترون (باید گفت که نورنیزاز نوع امواج الکترومغناطیسی می‌باشد و مانند امواج رادیوئی انتشار می‌یابد).

درس سوم: درابتدای درس بهتراست به دانش‌آموزان پیشنهاد شودکه به‌سؤالهای زیرپاسخ گویند: درالکترو دینامیك درموردسرعت انتشارنور درخلاء به‌چه نتیجه‌ای می‌رسیم، تجربهٔ مایکلسن برروی‌چه‌ایده‌ای پایه‌گذاری شده‌است؟ این آزمایش به‌چه نتیجه‌ای‌رسید؟ چگونه می‌توان نتیجهٔ منفی‌تجربهٔ‌مایکلسن راتوجیه‌کرد؟ پس‌از پرسش‌به‌بیان فرضیات تئوری‌نسبیت‌می‌رسیم **آلبرت اینشتین** این فرضیات را بر اساس تجزیه و تحلیل معادلات الکترو دینامیك فرموله کرد ، لیکن درعمل آموزش بیشترمتداول است که‌ازطریق‌نتایج آزمایشهای مایکلسن به این فرمولها برسند. دردبیرستان نیز روش اخیرتوصیه می گردد . حالادانش‌آموزان برای‌درك فرضیهٔ‌اول که بیان‌کنندهٔ‌یکنواختی سیستمهای اندازه‌گیری اینرسیك‌می باشد وازطرفی‌به‌نام «قانون نسبیت خاص‌اینشتین» معروف است‌آمادگی دارند.

فرموله کردن قانـون اول از بیان کتابی زیراستنتاج می گردد :

«کلیهٔ تحولات طبیعت دریك‌سیستم اندازه‌گیری‌اینرسیك یکسان انجام‌می گیرند. این‌بدین‌معنی‌است که درکلیهٔ‌سیستمهای اندازه‌گیری‌اینرسیك‌قوانین‌فیزیکی‌دارای‌فرم‌یکسانی‌هستند. که اشاره به‌دومین فرضیهٔ اینشتین در مورد قانون ثابت‌بودن‌سرعت نوردارد ـ بنابراین لازم‌است دراین مورد تأکید بیشتری شود. یکنواختی کلیهٔ سیستمهـای انـدازه‌گیری اینرسیك هنوز این مطلب رانمی‌رساندکه سرعت حرکت یك‌جسم یایك‌نشانه (علامت نوری یاصوتی مانند چراغ چشمکزن وزنگ یابوق) در آنها نیزثابت است. لیکن هرگاه برای سرعت انتشار حد مشترکی موجودباشد دراین‌صورت طبق‌یکنواختی سیستمهای‌اندازه‌گیری این‌سرعت باید برای‌کلیهٔ سیستمها ثابت‌باشد.

به‌این ترتیب قانون ثابت بـودن سرعت نور با شخصیت حدی این‌سرعت وبنابراین بامستقل بودن‌آن ازسرعت حرکت منبع‌نور نسبت به‌ناظر بستگی‌دارد.

اینشتین فرضیهٔ دوم‌خودرابه‌صورت زیر فرموله‌کرد:

«هرشعاع نوری دریك سیستم اندازه‌گیری « ساکن » با سرعت معین v حرکت‌کرده وسرعت‌آن مستقل ازساکن‌بودن‌یا متحرك بودن منبع‌نوری است.»

در سیستم اندازه‌گیری « ساکن » سیستم انـدازه‌گیری اینرسیك دلخواهی درنظر گرفته می‌شود یعنی‌درکلیهٔ سیستمهای اینرسیك و در جهات دلخواه سرعت انتشار نور درخلاء دارای مقادیر یکسان c بوده و به سرعت حـرکت منبع نور بستگی ندارد .

درکتابهای درسی دومین فرضیه به صـورت زیر فرموله شده است :

«سرعت سیرنور در خلاء مستقل از سرعت منبع و جهت اندازه‌گیری است » از اینجا براساس یکنـواختی سیستمهای اندازه‌گیری اینرسیك نتیجهٔ زیربدست می‌آید: سرعت نور در خلاء درتمام سیستمهای اینرسیك یکسان است.

متأسفانه مطلب فرموله‌شدهٔ فوق نارسائی اساسی‌دارد: از سیستم اینرسیکی کـه سرعت نور در آن مستقل از سرعت منبع اندازه‌گیری است حرفی به‌میان نمی‌آید ودربارهٔ خـلاء طوری صحبت می کند که فکرمی کنیم یك‌سیستم اندازه‌گیری مطلق‌لازم است. این‌مطلب بایدباجملهٔ زیراصلاح‌شود: درسیستم‌اندازه‌گیری اینرسیك دلخواه.

قانون ثابت‌بودن سرعت نور لازم‌است که بلافاصله‌به‌دنبال خاصیت حدیش بیان شود. به‌دانش‌آموزان خاصیت پارادوکسی (ضدونقیض‌بودن باقانون‌کلی) قانون‌راکه‌برخلاف جمع‌سرعتها است تذکر می‌دهیم. تـوضیح این پارادوکس (هر پدیده‌ای که

خلاف قانون کلی اتفاق بیفتد یك پارادوکس است) در این‌است که سرعت نور c دارای مقدار خاص است و این بالاترین‌است یعنی سرعت سیر نور بالاترین سرعتها در طبیعت است و این همان شخصیت حدی نور است که تعیین کنندهٔ حد سرعتها است. سرعت حرکت اجسام مادی و ذرات نمی‌توانند از سرعت سیر نورتجاوز کنند. لیکن در صورت رسیدن به این سرعت حدی طبق قانون اول باید مقدارشان در تمام سیستمهای اندازه گیری یکنواخت یکسان باشد.

این سرعت را نمی‌توان به سادگی با سرعتهای دیگر ترکیب کرد، به این معنی که فرمول جمع و ترکیب سرعتها برای این سرعت درست نیست. بالاخره باید گفت که تجربهٔ مایکلسن‌می‌تواند تأییدی برای‌حدی‌بودن سرعت نورباشد.

به‌دانش‌آموزان توجه می‌دهیم که کلیهٔ نتایج تئوری‌نسبیت خاص از فرضیه‌های اینشتین بدست آمده وبه‌عنوان اولین‌نتیجه نسبیت همزمانی بررسی می گردد.

تحت عنوان همزمانی دو حادثه را مثال می‌زنیم که دردو نقطهٔ سیستم در یك لحظه طبق ساعتهای‌همزمان اتفاق می‌افتند. همزمانی ساعتهابه‌کمك علائم نوری به‌ترتیب‌زیرانجام‌می گیرد:

در لحظهٔ ابتدا $t=0$ از مبدأ سیستم اندازه گیری موج کروی الکترو مغناطیسی فرستاده می‌شود. در نقطه‌ای واقع به فاصلهٔ r از مبدأ مختصات در لحظهٔ دریافت موج ارسالی‌ساعتها روی $t=r/c$ قرار دارند. معلوم‌است که این زمانها درسیستم دیگر همین نخواهد بود.

در پایان تأکید می‌شود که مفهوم همزمانی دو حاوثه‌در فیزیك کلاسیك بستگی به دید ناظر دارد و این پدیده تا وقتی درست است که سرعت نور با مقایسهٔ با سرعت جسم بینهایت بزرگ باشد.

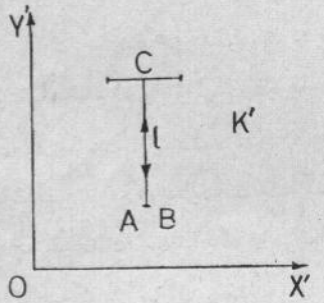
درس چهارم : پس از تکرار فرضیه‌های اینشتین و نسبیت همزمانی به فرضیه سینماتیك که بسیار مهم است می‌رسیم که درزیر آنرا شرح می‌دهیم.

اندازه گیری طول‌یك جسم ساکن‌در سیستم اندازه گیری چنانکه معمول است توسط اتالن یا مقیاسهای طولی دیگر که در این سیستم ساکن هستند اندازه گیری می‌شود.

برای یك جسم متحرك عمل اندازه گیری طول آن در امتداد حرکت‌تا بیان تئوری‌نسبیت معین نبود. درتئوری‌نسبیت خاص برای طول جسم متحرك در امتداد حرکت فاصلهٔ بین دو علامت همزمان راکه از ابتدا و انتهای جسم ساطع می گردند منظور می کنند. طبق خاصیت نسبی مفهوم همزمانی ، علائم دو انتها در سیستمهای اندازه گیری متفاوت در لحظات مختلف ساطع می گردند که در نتیجه به‌دست آمدن طولهای متفاوت(در سیستمهای اندازه گیری‌مختلف) برای یك جسم منجرمی گردد. توجه می‌دهیم که مانند مقایسه با اتالن ، علائم دو انتها نیز وسیله‌ای هستند که به‌کمك دستگاههای فاصلهٔ بین علائم ابتدا و انتها تعیین و از آنجاطول جسم متحرك‌بدست می‌آید،اندازه‌گیری طول جسم متحرك در عرض آن نسبت به امتداد حرکت به همان ترتیب که برای جسم ساکن گفته شد انجام می گیرد و به این جهت عرض جسم متحرك تغییر نمی کند.

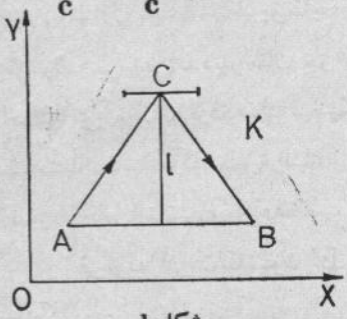
نسبیت در تئوری نسبیت خاص نیز عبارتست از فاصلهٔ زمانی یا طول مدت‌تحول.این موضوع از نسبیت همزمانی‌ناشی می گردد. پس ازبررسی ملاحظات کیفی لازم‌است روابط کمی را نیز برای دانش‌آموزان شرح دهیم. در کتابهای درسی معمولا فرمول رابطهٔ بین طول جسم و سرعتش بدون اثبات‌نوشته‌می‌شود و فرمول فاصلهٔ زمانی ازروی فرمول طول جسم توجیه وبدست می‌آید. پیشنهاد می کنیم که بررسی و تعیین فرمول فاصلهٔزمانی *مستقل از فرضیه‌های اینشتین‌بدست آید و این موضوع ازنظرما خیلی مهم است زیراکه فرمول طول جسم محترك به‌کمك‌فرمول* زمان نتیجه می گردد. پدیدهٔ انعکاس نور درآئینه را از نقطه‌نظر ناظران واقع در سیستمهای K و K′ بررسی می کنیم.

در دستگاه K′ (شکل a) منبع نوری A، آئینهٔ C ودریافت کنندهٔ نور B را ساکن در نظر می گیریم که‌در سیستم K (شکل b) با سرعت v در حرکتند. از (شکل a) پیدا است که در سیستم K′زمان



شکل a

انتشار نور از A تا B یا مدت مشاهدهٔ تحول $t=\frac{2AC}{c}=\frac{2l}{c}$ می‌باشد. در دستگاه K نشانهٔ نوری روی خط شکستهٔ ACB (شکل b)حرکت کرده‌وبعلاوه زمان حرکتش مساوی است‌با:



شکل b

$$t=\frac{2AC}{c}=\frac{2\sqrt{l^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}}{c}$$

وبا درنظر گرفتن $AB=vt$ و $l=\frac{ct'}{2}$ بدست می‌آوریم:

$$t'=t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

مشاهده می‌شود که یك پدیدهٔ معین برای ساعتهای دو سیستم اندازه‌گیری طول‌زمانهای مختلفی‌را بیان می‌کند. ازروی ساعت سیستم K' که تحول در آن انجام می‌گیرد زمان انجام t' کوچکتراز t زمان انجام همین‌عمل درسیستم K می‌باشد. که درسیستم اخیراین نقاط (A وB) باسرعت v درحرکتند.

بااستفاده از فرمول $t_0=t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ که درآن t_0 زمان واقعی است به سادگی می توانیم فرمول تغییر طول جسم متحرك رابدست‌آوریم:

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

فرض‌کنیم درسیستم K درامتداد محور OX قطعه‌ای به طول l قرارگرفته باشد. نقطه‌ای مانند A ازسیستم K' در مدت t از یك انتهای خط به‌انتهای دیگر می‌رود، ازاینجا $v=\frac{l}{t}$. و چون قدرمطلق سرعتهای سیستمهای K' در K و K در K' مساویند بنابراین قطعه درسیستم K' ازکنار نقطهٔ A با سرعت v می‌گذرد و پس از مدت t' داریم $l'=vt'$ لیکن در سیستم K' ازنقطه نظرناظر سیستم K ساعت به‌اندازهٔ $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ کندتر حرکت می‌کند بنابراین:

$$l'=\frac{l}{t}\cdot t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

که در اینجا l_0 طول قطعهٔ ساکن یا طول واقعی است . برای نمایش اثرات مشاهده‌ای مسائل ساده‌ای لازم‌است مطرح‌شود.

مسئلهٔ۱ـ باچه سرعتی‌باید جسم حرکت‌کند برای‌آنکه تحولات سیستم اندازه‌گیری وابسته به‌آن دوبرابر کندترشوند.

حل ـ

$$t_0=\frac{t}{2}\Longrightarrow\frac{1}{2}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Longrightarrow\frac{v}{c}=0/85$$

جواب : سرعت جسم باید ۰/۸۵ سرعت نور باشد .

مسئلهٔ۲ـ تعیین‌کنید قطر زمین در سیستم اندازه‌گیری «خورشید ـ زمین» چه‌کاهشی پیدا می‌کند .

حل ـ بااستفادهٔ از فرمول $l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ که درآن l_0 قطرزمین درسیستم‌زمین و l همین‌قطر درسیستم‌خورشید می‌باشد، اگرطرفین رابطهٔ اخیررا مربع‌کنیم خواهیم‌داشت:

$$l_0^2-l^2=l_0^2\cdot\frac{v^2}{c^2}\Longrightarrow l_0-l=\frac{l_0^2\cdot\frac{v^2}{c^2}}{(l_0+l)}$$

درمخرج قسمت راست رابطهٔ فوق می‌توان ازاختلاف بین l_0 و l صرف نظر کرده ورابطه را به‌صورت زیر بنویسیم:

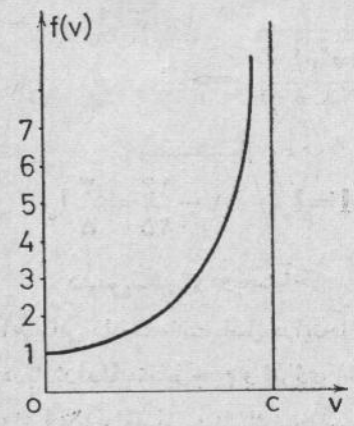
$$l_0-l=\frac{l_0^2\cdot\frac{v^2}{c^2}}{2l_0}=\frac{l_0v^2}{2c^2}$$

باقراردادن مقادیرعددی و ساده‌کردن ، کاهش طول را بدست می‌آوریم :

$$l_0-l\neq 6cm$$

دربحث‌جوابها لازم‌است مرزهای شروع فیزیك نسبیت کلاسیك را با دانش آموزان مورد بررسی و بحث قرار دهیم. برای این‌منظور بهتراست‌منحنی‌تغییرات تابع :

$$f(v)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



رارسم‌کرده (شکل روبرو) وازروی‌آن بحث‌را ادامه دهیم.

درس پنجم : قانون نسبی جمع و ترکیب سرعتها به آشنائی دانش‌آموزان بااصول‌آثار سینماتیك تئوری نسبیت‌خاص برمی‌گردد. دردبیرستان‌کافی‌است جمع سرعتها واقع درامتداد

حرکت سیستمها بررسی گردد (مثلا روی محور OX) . پیدا کردن $U=\frac{U'+v}{1+\frac{U'v}{c^2}}$ لازم نیست.

نتیجه گیری دربارهٔ شخصیت حدی سرعت نور به سادگی حاصل می‌شود. بهتر است این نتیجه بافرضیهٔ دوم اینشتین و نتیجهٔ منفی تجربهٔ مایکلسن مقایسه گردد.

لازم است که فرمول نسبیت با فرمولهای کلاسیك نظیر مقایسه‌شده ودربارهٔ رابطهٔ بین آنها وهمچنین حدود استعمال آنها توضیح بیشتر داده شود.

دراین‌قسمت ازدرس مطالب تئوریك کمتر گفته شود و حل مسائلی‌چند دربارهٔ پدیده‌های سینماتیك بیان گردد.

مسئلهٔ۳ـ دودسته الکترون باسرعت $0/9c$ نسبت به‌زمین به‌طرف یکدیگر تابیده می‌شوند. مطلوبست سرعت هریك از دو دسته الکترون نسبت به‌دیگری.

(جواب $U=0/994$)

مسئلهٔ ۴ ـ دو خطکش با طولهای واقعی l_0 به طرف یکدیگر وبا سرعت $v=\frac{c}{2}$ نسبت به‌زمین درحرکتند . طول هرخطکش برحسب طول واقعی‌خطکش دیگرچقدر است؟

حل ـ

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2_{\text{نسبی}}}{c^2}} \quad \text{و} \quad v_{\text{نسبی}}=\frac{2vc^2}{c^2+v^2}$$

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{4v^2c^2}{(c^2+v^2)^2}} \Longrightarrow$$

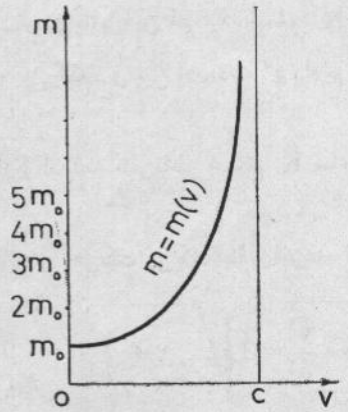
$$l=l_0\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}l_0$$

درس‌ششم : دوبحث آخر درس به‌آموزش دینامیك نسبی اختصاص داده‌شده‌است. اصل دراینجا بررسی تئوری نسبیت خاص دربارهٔ رابطهٔ متقابل‌جرم و انرژی است. فرمول‌رابطهٔ متقابل‌جرم وانرژی‌معادلهٔ‌اساسی‌دینامیك‌نسبی‌است که‌همان‌تعمیم‌داده‌شدهٔ‌معادلهٔ دوم‌قانون‌نیوتن‌است. لیکن‌بررسی‌این‌فرمول‌وکاربردمستقیم‌معادلهٔ نسبی در سطح ابتدایی غیر ممکن است. به این جهت در درس دبیرستان برمبنای آنالیز کیفی عمومیت رابطهٔ جرم و سرعت و فرمول‌انیشتین پایه گذاری می‌شود.

بابررسی قانون دوم نیوتن $m_0\vec{a}=\vec{F}$ مفهوم جرم جسم گوشزد شده وتوضیح‌داده‌می‌شود که m_0 ثابت‌بوده وبه‌مقدارسرعت جسم بستگی ندارد.

متوجه می‌شویم که فرمول رابطهٔ قانون دوم نیوتن در سرعتهای حد تضاد نشان می‌دهد. یعنی‌نیروی ثابت دلخواه‌که به جرم شتاب ثابتی می‌دهد ودرنتیجه بعداز فاصلهٔ زمانی به‌اندازهٔ کافی‌بزرگ جسم می‌تواند سرعتی بالاتر از سرعت نور c پیدا کند. ازاینجابحث شروع می‌شودکه فرمول موردنظر فقط‌برای سرعتهای غیرنسبی صادق است (غیرقابل سنجش ومقایسهٔ‌باسرعت نورc). در حوزهٔ نسبیت این‌رابطه تغییرمی‌کند. هرگاه فرمول کلاسیك ضربه رابرای جسم بنویسیم : $\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}=\vec{F}$ دراین‌رابطه $\vec{P}=m_0\vec{v}$ بوده ودر این‌صورت طبق‌فرمول نسبی برای‌سرعت $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ رابابد دخالت دهیم.

این‌رابطه به‌خوبی درآزمایشهای مربوط به‌مطالعهٔ ذرات باردار سریع قابل‌درك و مشاهده است. ویژگی حرکت جسم با افزایش جرم دراین است‌که نیروی ثابت به‌آن‌شتابی می‌دهد. به‌همان نسبت که‌سرعتش زیاد می‌شود مقدارش کم می گردد . منحنی تغییرات (شکل‌روبرو) $m=m(v)$ برای ساده کردن آموزش وابستگی جرم‌به سرعت مفید است.



با نزدیك شدن سرعت جسم به سرعت c شتاب ازبین‌می‌رود. یعنی حد سرعت به c ختم می گردد.

لازم است تأکید گردد که افزایش جرم جسم با افزایش تعداد ذرات یاهرتغییردیگر درجسم‌به‌همراه نیست. همانطورکه بعداً دردرس بعد توضیح داده خواهد شد این به علت افزایش انرژی سینتیك جسم‌است. وابستگی مورد بررسی بهتر است با چندین مثال ومسئله توضیح داده شود.

مسئلهٔ ۵ـ مطلوبست محاسبهٔ افزایش جرم راکت ، در صورتی که جرم حالت سکون آن $m_0 = 1\ ton$ و سرعتش $v = 12 km/s$ باشد.

(جواب $\Delta m = 8 \times 10^{-4} g$)

مسئلهٔ ۶ ـ در عمل جداکردن در دستگاه شتاب دهندهٔ الکترون ، الکترونها به سرعت $0/85c$ رسانده می‌شوند . مطلوبست جرم یك الکترون در این سرعت در صورتی که جرم الکترون m_0 فرض‌شود .

(جواب $m \neq 2m_0$)

مسئلهٔ ۷ـ دربزرگترین شتاب دهندهٔ الکترون، آنقدر سرعت الکترون رابالا می‌برندکه جرم‌آن ۴۰۰۰۰ برابر (!) می‌گردد. سرعت الکترونها را تعیین کنید.

(جواب: به‌اندازهٔ $9cm/s$ کمترازسرعت‌نور)

درس هفتم : مهمترین نتیجهٔ معادلهٔ حرکت نسبی عبارت ازرابطه‌ای است برای انرژی سینتیك جسم :

$T = mc^2 - m_0c^2$ که از آن فرمول بسیار معروف و مهم اینشتین $E = mc^2$ بدست می‌آید. تعیین فرمول انرژی‌سینتیك درعلوم پایه می‌تواند براساس استفاده ازرابطهٔ بین‌جرم‌وسرعت بدست‌آید. بررسی برمبنای بسط عبارت به ازای مقادیر کوچك $(\frac{v}{c})^2$ پایه گذاری شده و ازآنجاکه دانش آموزان با بسط توابع آشنائی ندارند از طریق زیر یا طرق دیگری استفاده می‌کنیم .

درتکرارتعاریف‌وفرمولهای انرژی سینتیك، برای‌دانش‌آموزان شرح می‌دهیم‌که فرمول $T = \frac{m_0v^2}{2}$ در دینامیك نسبی فقط برای مقادیر سرعتهای‌کم صادق است وبرای مقادیر نسبی سرعت رابطهٔ دیگری باید مورداستفاده قرارگیرد.

فرض‌کنیم جسمی باسرعت v طوری حرکت‌کندکه‌فرمول کلاسیك هنوزبرایش صادق‌باشد. افزایش جرم اگرچه کوچك باشد دراین‌حالت نیزوجود دارد.

هرگاه هردوطرف فرمول وابستگی‌جرم وسرعت رامربع کنیم، بدست می‌آوریم:

$$m^2(1-\frac{v^2}{c^2}) = m_0^2 \Longrightarrow (m^2 - m_0^2)c^2 = m^2v^2$$

$$(m - m_0)c^2 = \frac{m^2v^2}{m + m_0}$$

ازآنجاکه m به m_0 نزدیك‌است(شکل‌صفحهٔقبل) بنابراین‌می‌توان فرض‌کردکه $m + m_0 \neq 2m$ می‌باشد، دراین صورت‌خواهیم داشت :

$$mc^2 - m_0c^2 = \frac{mv^2}{2}$$

یعنی انرژی سینتیك T یك‌جسم متحرك برابراست با تفاضل دو مقدار انرژی سینتیك جسم متحرك $E = mc^2$ و انرژی حالت سکونش $E_0 = m_0c^2$:

$$T = E - E_0$$

سپس توضیح داده می‌شودکه درکلیهٔ حالات انرژی وابسته به جرم یك‌جسم یایك‌گروه جسم از فرمول عمومی اینشتین بدست می‌آید .

برای روشنترشدن بیشتر فرمول اینشتین بهتر است چند مسئله را مورد بررسی قراردهیم .

مسئلهٔ ۸ـ انرژی سینتیك یك‌جسم برابراست با انرژی حالت سکون‌آن . سرعت این جسم چقدر است .

(جواب $v = 0/85c$)

مسئلهٔ ۹ـ شتاب دهنده‌ای به پروتون انرژی سینتیکی برابر 10^{-2} ارگ‌می‌دهد. چندبار جرم‌پروتون‌افزایش‌می‌یابد درصورتی‌که جرم حالت سکون آن $m_0 = 1/67 \times 10^{-24}$ گرم باشد. (جواب: ۷/۷ بار)

مسئلهٔ ۱۰ـ آفتاب در ثانیه انرژی معادل 4×10^{33} ارگ تابش می‌کند. تعیین‌کنید درهرثانیه چه‌مقدار از جرمش کاسته می‌شود .

(جواب: $4/4 \times 10^4$ تن)

مسئلهٔ ۱۱ـ سرعت جسم مقداری است‌که جرم‌آن ۱۰٪ افزایش یافته است. مطلوبست‌انرژی سینتیك جسم و تعیین‌کاهش طول‌جسم درجهت حرکت.

(جواب: $T = 0/1E_0$ وطول جسم‌به‌اندازهٔ ۱/۱ برابر کاهش می‌یابد).

قضایایی درمورد میانه‌های مثلث

تنظیم از : محمد معینی

۱ـ طولهای ضلعهای یك مثلث برحسب طولهای میانه‌های آن .

فرض می‌کنیم a و b و c طول اضلاع ، m_a و m_b ، m_c طول میانه‌های مثلث باشد . داریم:

$$b^2+c^2-\frac{a^2}{2}=2m_a^2 \quad \text{و} \quad a\,،\,b\,،\,c>0$$

$$c^2+a^2-\frac{b^2}{2}=2m_b^2 \quad \text{و} \quad a^2+b^2-\frac{c^2}{2}=2m_c^2$$

$$(b-c)^2<a^2<(b+c)^2$$

ازجمع سه رابطهٔ فوق داریم:

$$\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)=2(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$$

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$$

ازاین رابطه وهریك از رابطه‌های بالا خواهیم داشت:

$$a^2=\frac{4}{9}(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2)$$

$$b^2=\frac{4}{9}(2m_c^2+2m_a^2-m_b^2)$$

$$c^2=\frac{4}{9}(2m_a^2+2m_b^2-m_c^2)$$

برای اینکه مقادیر فوق قابل قبول باشند ، بایددرنامعادلهٔ زیر صدق کنند:

$$[a^2-(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]<0$$

$$a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2<0$$

درنتیجه :

$$m_a^4-2(m_b^2+m_c^2)m_a^2+(m_b^2-m_c^2)^2<0$$

$$(m_b-m_c)^2<m_a^2<(m_b+m_c)^2$$

$$|m_b-m_c|<m_a<m_b+m_c$$

یعنی m_a و m_b ، m_c باید سه‌ضلع یك‌مثلث باشند.

۲ـ هرگاه M نقطه‌ای درصفحهٔ مثلث ABC و G مرکز ثقل آن باشد داریم:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{GM}^2$$

اثبات : اگر AM_1 میانهٔ نظیر ضلع BC و N وسط GA باشد طبق‌قضیهٔ میانه‌ها درمورد مثلثهای MBC ، MNM_1 و GAM می‌نویسیم.

$$\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=2\overline{MM_1}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2 \qquad (1)$$

$$\overline{MM_1}^2+\overline{MN}^2=2\overline{GM}^2+\frac{1}{2}\overline{NM_1}^2 \qquad (2)$$

$$\overline{MA}^2+\overline{GM}^2=2\overline{MN}^2+\frac{1}{2}\overline{GA}^2 \qquad (3)$$

طرفین رابطهٔ (۲) را در ۲ ضرب می کنیم و روابط را با هم جمع می‌کنیم :

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2-3\overline{GM}^2=\frac{1}{2}\overline{BC}^2+\frac{3}{2}\overline{GA}^2$$

همینطور برای میانه‌های BM_2 و CM_3 عمل کرده و دو رابطهٔ حاصل‌را بارابطهٔ فوق جمع می‌کنیم درنتیجه خواهیم‌داشت:

$$3(\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2-3\overline{GM}^2)= \qquad (4)$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2)+\frac{3}{2}(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)$$

اما داریم:

$$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=3(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)$$

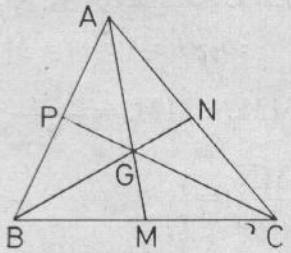
وازآنجا رابطهٔ مطلوب محقق می‌شود.

نتیجهـ هرگاه M بر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث منطبق باشد خواهیم داشت:

$$\overline{GO}^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$$

۳ـ هر مثلث توسط میانه ها به شش معادل تقسیم می‌شود .

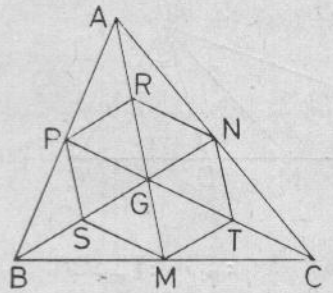
اثبات : دو مثلث GAP و GPB با هم معادلند زیرا قاعده های آنها با هم برابر و ارتفاع آنها مشترك است. همچنین دو مثلث GBM و GMC باهم و دومثلث GCN و GNA نیز باهم معادلند. خط PN باضلع BC موازی است پس دومثلث PBC و NBC با هم معادلند هرگاه ازاین دومثلث، مثلث GBC راحذف کنیم نتیجه می‌شود که دومثلث GPB و GNC باهم معادلند.



باتکرار اثبات بالا برای مثلثهای دیگر، نتیجه می‌شود که شش‌مثلثی که ازتلاقی میانه‌ها با یکدیگر و با ضلعهای مثلث پدیدآمده‌اند بایکدیگر معادلند و مساحت هرکدام ازآنها یك ششم مساحت مثلث مفروض‌است.

نتیجه ـ مساحت مثلث ABC سه برابر مساحت هریك ازچهار ضلعیهای APGN و BMGP و CNGM است .

۴ـ هرگاه G نقطهٔ تلاقی میانه هـای AM و BN و CP از مثلث ABC و R و S و T به‌ترتیب اوساط AG و BG و CG باشد، مساحت‌شش ضلعی MTNRPS نصف مساحت مثلث ABC است.

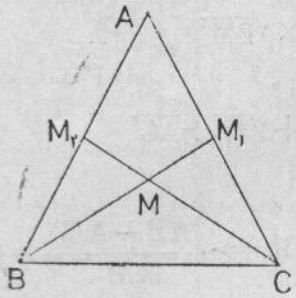


این‌مسئله باتوجه به‌اینکه دو مثلث PAR و PRG و مثلثهای دیگر نظیرآنها باهم معادلند به‌سادگی ثابت می‌شود .

۵ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) هرگاه CM_2 و BM_1 میانه‌های نظیر دوساق باشند داریم:

$$\overline{CM_2}^2=\frac{3}{2}\overline{BC}^2$$

اثبات: دو مثلث متساوی‌الساقین BCM و BM_2C در زاویهٔ C مشترك بوده‌متشابه‌اند پس :



$$\frac{CM}{BC}=\frac{BC}{CM_2}\Longrightarrow$$

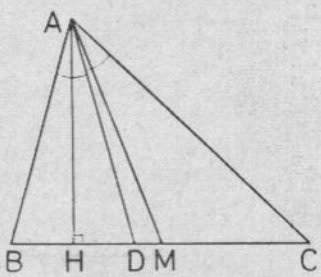
$$\overline{BC}^2=\overline{CM}\times\overline{CM_2}$$

اما $CM=\frac{2}{3}CM_2$ است پس :

$$\overline{BC}^2=\frac{2}{3}\overline{CM_2}^2\Longrightarrow\overline{CM_2}^2=\frac{3}{2}\overline{BC}^2$$

۶ـ هرگاه درمثلثی پای ارتفاع تانیمساز سه‌برابر پای نیمساز تامیانهٔ نظیریك رأس باشد طول‌ضلع روبرو به آن رأس واسطهٔ عددی بین‌طولهای دوضلع دیگراست.

اثبات : می‌دانیم که نیمسازیك رأس بین ارتفاع ومیانهٔ نظیرآن رأس قرار می گیرد .



به‌فرض $b>c$ داریم:

$$b^2-c^2=$$
$$=2a\cdot HM \quad (1)$$

طبق فرض $HD=3MD$ ویا $HM=4MD$ وداریم:

$$BM=\frac{a}{2} \quad و \quad BD=\frac{ac}{b+c}$$

$$MD=BM-BD\Longrightarrow MD=\frac{a}{2}-\frac{ac}{b+c}$$

$$MD=\frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

$$HM=4MD\Longrightarrow HM=\frac{4a(b-c)}{2(b+c)}$$

$$HM=\frac{2a(b-c)}{b+c}$$

مقدار اخیررا دررابطهٔ (۱) منظور می کنیم:

$$b^2-c^2=2a\frac{2a(b-c)}{b+c}\Longrightarrow$$

$$(b+c)^2(b-c)=4a^2(b-c)$$

اماچون $b-c\neq 0$ است پس:

$$(b+c)^2=4a^2\Longrightarrow b+c=2a$$

ازرابطهٔ فوق نتیجه می‌شودکه a واسطهٔ عددی بین b و c است.

۷ـ برای اینکه یك‌مثلث مانند ABC بامثلثی دیگربه اضلاع میانه‌های این مثلث متشابه باشد لازم و کافی است که مربعات اضلاع آنها تشکیل تصاعد عددی بدهند .

اثبات:فرض‌می‌کنیم a،b و c طول‌اضلاع، m_a و m_b و m_c طول میانه‌های مثلث باشد اگر $a\geq b\geq c$ باشد خواهیم داشت:

$$m_a\leq m_b\leq m_c$$

وبرای اینکه مثلث مفروض بامثلثی به‌اضلاع m_a و m_b ، m_c

متشابه باشد لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$\frac{m_a}{c}=\frac{m_b}{b}=\frac{m_c}{a}$$

ویا :

$$\frac{2m_a^2}{c^2}=\frac{2m_b^2}{b^2}=\frac{2m_c^2}{a^2}$$

اما داریم :

$$2m_a^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2}$$

$$2m_b^2=c^2+a^2-\frac{b^2}{2}$$

$$2m_c^2=a^2+b^2-\frac{c^2}{2}$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{b^2+c^2-\frac{a^2}{2}}{c^2}=\frac{c^2+a^2-\frac{b^2}{2}}{b^2}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-\frac{c^2}{2}}{a^2}=\frac{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{2}$$

$$2(b^2+c^2)-a^2=3c^2$$

$$2(c^2+a^2)-b^2=3b^2$$

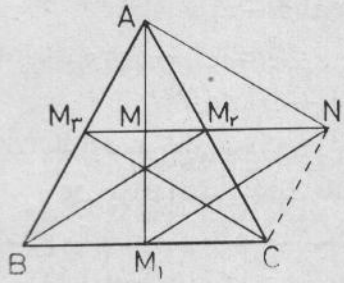
$$2(a^2+b^2)-c^2=3a^2$$

بنابراین :

$$2b^2=a^2+c^2$$

۸ـ هرگاه مساحت مثلث مفروضی را S ومساحت مثلثی را که اضلاعش میانه های مثلث مفروض است به S' نمایش دهیم داریم :

$$S=\frac{3}{4}S'$$



اثبات : اگر AM_1، BM_2 و CM_3 میانه‌های مثلث ABC باشد و M محل برخورد AM_1 با M_2M_3 فرض شود M_2M_3 را ازطرف M_2 به اندازهٔ خودش ادامه می‌دهیم تا نقطهٔ N حاصل شود واضح است که M_2N مساوی وموازی BM_1 است درنتیجه :

$$BM_2=M_1N$$

ونیزچون M_2 وسط AC و M_3N است، چهارضلعی AM_3CN متوازی الاضلاع بوده در نتیجه $CM_2=M_1N$ می‌شود ، پس مثلث AM_1N مثلثی است که اضلاعش میانه‌های مثلث ABC و MN میانه آن است وچون:

$$MN=3MM_2=3MM_3 \text{ و } MM_3=\frac{BC}{4}$$

است پس :

$$MN=\frac{3BC}{4}\Longrightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{3}{4}$$

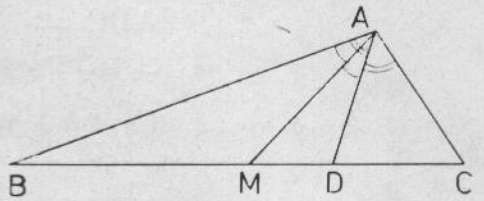
مساحت مثلث AM_1N برابرمساحت دومثلث متعادل AMN و MM_1N است ومجموع ارتفاعات وارد برقاعده MN از دورأس A و M_1 برابر ارتفاع قاعدهٔ BC از مثلث ABC است پس‌داریم:

$$\frac{S}{S'}=\frac{MN}{BC}\Longrightarrow\frac{S}{S'}=\frac{3}{4}\Longrightarrow S=\frac{3}{4}S'$$

۹ـ هرگاه میانهٔ AM ازمثلث ABC با ضلع BC و AD نیمساز زاویهٔ A زوایای متساوی تشکیل‌دهد:

I : $\overline{BM}^2=AB\times AC$

II : $\frac{|AB-AC|}{AM}=\sqrt{2}$



اثبات ـ I: داریم :

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AD}^2+\overline{BD}\times\overline{CD}$$

اما :

$$BD=BM+MD$$

$$CD=MC-MD$$

ونیز $MC=BM$ و $AD=MD$ پس :

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{MD}^2+(\overline{BM}+\overline{MD})(\overline{BM}-\overline{MD})$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BM}^2$$

II : می‌دانیم که :

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2\times 2\overline{BM}^2$$

بنابه رابطهٔ I داریم:

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{AB}+\overline{AC}^2$$

$$(AB-AC)^2=2\overline{AM}^2$$

$$|AB-AC|=\sqrt{2}AM\Longrightarrow\frac{|AB-AC|}{AM}=\sqrt{2}$$

بقیه درصفحهٔ ۲۵۱

با ریاضیات آشتی کنید

(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

تألیف: A.BULLAS استاد آموزش ریاضی در فرانسه

ترجمهٔ : ع. مصحفی

بخش دهم- شماهم پاسکال باشید: همهٔ هندسهٔ مقدماتی را شخصاً کشف کنید

کسب توانایی برای آنکه توجه خود را در مدتی طولانی روی یك موضوع معین ثابت نگاه دارید، دانستن اینکه یك شکل هندسی را چگونه باید بررسی کنید، فقط به این درد شما می‌خورد که عقب ماندگی خود را در ریاضیات جبران کنید و در این زمینه پیشرفت داشته باشید. اما من قصد آن را دارم تا شما را اعجوبهٔ ریاضیات سازم.

می‌دانید که پاسکال بزرگترین متفکر قرن هفدهم تازه شانزده ساله بود که همهٔ قضیه‌های هندسهٔ مقدماتی را شخصاً کشف کرده بود.

دوستان عزیزم، هرگاه این بخش از کتاب را با دقت کامل بخوانید آن توانایی را بدست می‌آورید که کار شگفت پاسکال را شماهم انجام دهید. حفظ کردن درسهای یك سال و اثبات قضیه‌ها به جای خود خیلی خوب است. اما در اینجا نکته‌ای بسیار مهم را می‌خواهم به شما یادآوری کنم: قضیه‌ها را باید خودتان از نو کشف کنید نه اینکه منتظر بمانید تا صورت آنها را به شما بگویند. بیشتر توضیح می‌دهم: به عنوان مثال فرض کنیم که درس مربوط به مثلثهای غیرمشخص را یاد گرفته‌اید و می‌خواهید به درس بعدی بپردازید که موضوع آن مثلث متساوی الساقین است، چه قضیه‌هایی را باید ثابت کنید؟ مسلماً خیلی ساده است که با مراجعهٔ به فهرست یك کتاب هندسه عناوین این قضیه‌ها را معلوم کنید، اما مقصود آن است که خودتان شخصاً صورتهای این قضیه‌ها را فراهم آورید. همچنین در موردسایر قضیه‌های مربوط به چهار ضلعیها وغیره. در این صورت شما دیگر یك شاگرد ساده نیستید که دلتان به این خوش باشد که اعلام کنید توانسته‌اید ثابت کنید که اگر دو ضلع مقابل از یك چهار ضلعی باهم مساوی و موازی باشند آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است، دو قطر متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند ، و غیره‌وغیره،... بلکه شما همانند پاسکال نابغه‌ای خواهید بود که تنها با اتکای به‌هوش خود توانسته‌اید آنچه را کشف کنید که برای فراهم ساختن آن قرنها کوشش بکار رفته است(هندسه در یك روز درست نشده است). آیا چنین چیزی ممکن است ؟ با وجود اطلاعاتی که دارید مسلماً نه، اما هردانش‌آموز کوشایی که مفاهیم مندرج در این بخش را مو به مو بکار ببندد قابلیت آن را خواهد داشت تا به مانند پاسکال آنچه را تحقق ببخشد که هنوز بروی عرضه نشده است.

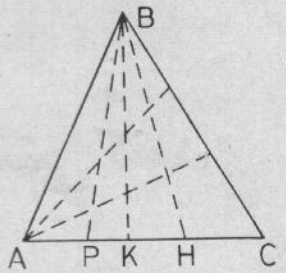
به من گوش دهید؛ بین قضیه‌های مختلف هندسه که اساس درس را تشکیل می‌دهند رابطه‌ای پنهانی وجود دارد، فعلا قصد دارم این رابطه را که تاکنون مخفی بوده است آشکار سازم بقسمی که وقتی شما قضیه‌ای را فراگرفتید بدون آنکه نیازی به بازکردن کتاب یا فهرستی داشته باشید خود به خود به قضیهٔ بعدی پی ببرید.

شناخت قواعد مهم بررسی ریاضیات خود یك رمزموفقیت است.

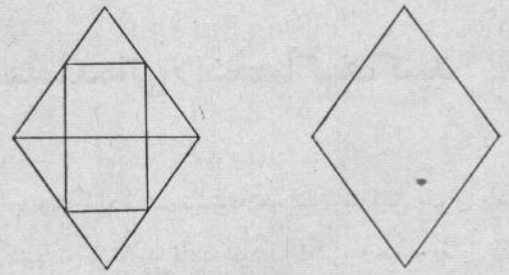
در مورد هندسه، باید خود را عادت دهید تا درهرشکل ساده سه نوع عناصر را تشخیص دهید:

۱) پیرامون. ۲) زاویه‌ها. ۳) خطهای داخلی

به شکل روبرو نگاه کنید، پاره‌خطهای AB ، BC و CA پیرامون آن‌را تشکیل می‌دهند. این شکل شامل سه زاویهٔ A و B و C است و خطوط داخلی آن عبارتند از BP ، BK وغیره...

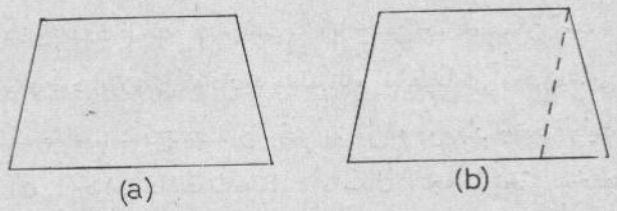


اکنون دو شکل زیر باهم مقایسه کنید. اولی یک لوزی

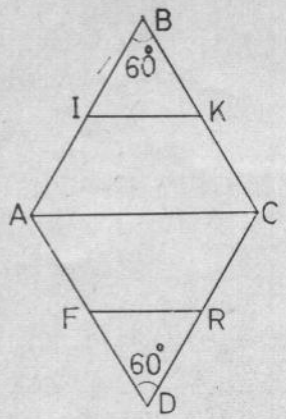


است، دومی نیز یك لوزی است اما علاوه بر آن شکلهای دیگری را نیز نشان می‌دهد: مثلثها، مستطیلها، ذوزنقه‌ها. می گوییم که اولی یك شکل ساده و دومی یك شکل مرکب است .

مثال دیگر: شکل (a) از شکلهای زیر ساده وشکل (b)

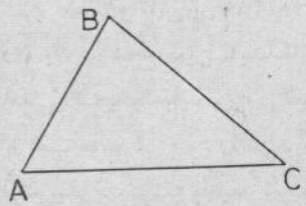


مرکب است. اولی یك ذوزنقه است ، اما دومی ذوزنقه‌ای است که یك مثلث و یك متوازی الاضلاع را نیزدر بردارد. همانطور که می‌بینید هرشکل مرکب از شکلهای ساده تشکیل شده‌است وقتی تمرکز حواس داشته باشید می‌توانید یك شکل مرکب را به سادگی به شکلهای ساده تجزیه کنید. برعکس نیز می‌توان به سادگی از شکلهای ساده‌شکلی مرکب درست کرد. برای مثال لوزی ABCD را در نظر می گیریم که زاویهٔ B ازآن ۶۰ درجه است. از A به C و از I و F وسطهای AB و AD موازی با AC رسم می کنیم تا BC وCD را در K و R قطع کنند. شکل ساده‌ای که داشتیم به شکلی مرکب تبدیل شد که از چهار مثلث متساوی الاضلاع، دو ذوزنقهٔ متساوی الساقین و یك شش ضلعی تشکیل شده است. تبدیل شکل ساده به شکل مرکب نقش مهمی را در حل بعضی از مسائل ایفا می کند. اما این موضوع را در بخش بعد مورد بحث قرار می‌دهیم . برای



شناخت کامل یك شکل باید آن را بررسی می کنید. این بررسی شامل سه مرحله است: نوع هریك از اجزاء شکل، تعداد آنها، رابطه‌های بین آنها.

مثلا اجزاء شکل زیر عبارتند از ضلعها ، زاویه‌ها ، خطهای داخلی. سه ضلع و سه زاویه وجود دارد و خطهای داخلی سه نوعند (میانه‌ها، نیمسازهای زاویه‌ها، ارتفاعها).



[داخل هرشکل می‌توان به تعداد نامحدود خطهایی در نظر گرفت اما در این مثال مقصود خطهای مهم است].

رابطه‌های بین اجزاء یا اندازه‌ای هستند یا وضعی یا نسبی. رابطه‌های اندازه‌ای بین اجزاء از یك نوع وجود دارند. مثلا در مورد ضلعها : ضلع AB کوچکتر از ضلع BC، ضلع AC بزرگتر از ضلع BC، ضلع BC بزرگتر از ضلع AB. در مورد زاویه‌ها: زاویهٔ B بزرگتر از زاویهٔ A ، زاویهٔ A بزرگتر از زاویهٔ C.

در اینجا رابطه‌های نابرابری داشتیم. می‌توان رابطه‌های برابری داشت. مثلا اگر مثلث ABC متساوی الساقین باشد AB=BC، بین دو زاویهٔ C و A نیز رابطهٔ برابری وجود دارد.

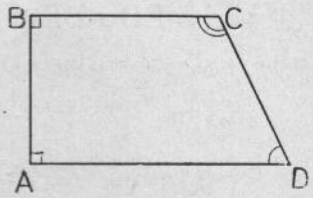
بین اجزاء از نوعهای متفاوت رابطه‌های اندازه‌ای وجود ندارد. مثلا نمی‌توان گفت که زاویهٔ B با ضلع AB برابراست اما بین اجزاء رابطه‌های وضعی وجود دارد: ضلع AC روبرو به زاویهٔ B و مجاور به هریك اززاویه‌های A و C است. ضلع BC روبرو به زاویهٔ A و مجاور به دو زاویهٔ C وB است ،...

بین ضلعهای یك شکل رابطه‌های نسبی نیزوجود دارد . مثلا در مثلث ABC ضلع AC نسبت به ضلع AB مایل است.

ضلع BC نیز نسبت به ضلع AB مایل است. اگر زاویهٔ A از مثلث ABC قائمه باشد ضلعهای AB و AC نسبت به یکدیگر عمودند.

در متواری‌الاضلاع ABCD ضلعهای BC و AD باهم موازیند، ضلعهای AB و CD نیز باهم موازیند.

اکنون می‌خواهیم شکل زیر را که یك ذوزنقهٔ قائم است بررسی کنیم. اجزاء عبارتند از ضلعها، زاویه‌ها نقطه‌ها. تعداد چهار ضلع، چهار زاویه و چهار نقطه وجود دارد.



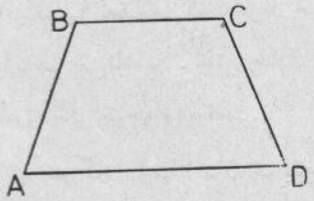
رابطه‌های اندازه‌ای بین ضلعها: چهار ضلع باهم نابرابرند.

رابطه‌های نسبی: AB بر AD و همچنین بر BC عمود است. CD نسبت به BC و همچنین نسبت به AB مایل است. AD با BC موازی است.

رابطه‌های وضعی بین زاویه‌ها: A مقابل به C و B مقابل به D است. A و B مجاورند، B و C مجاورند ... بین ضلعها نیز رابطه‌های وضعی وجود دارد، مثلا AB و BC دو ضلع مجاورند؛ و غیره. بین ضلعها و زاویه‌ها نیز رابطه‌های وضعی وجود دارد، مثلا ضلع AB مجاور به دو زاویهٔ A و B است وغیره.

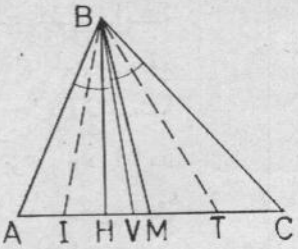
در اینجا یادآوری می‌شود که به هنگام حل یك مسئله لازم نیست که شکل را بطور کامل تجزیه و بررسی کنید. بلکه کافی است که رابطه‌های مهم را از آن بیرون بکشید.

مثال: اثبات اینکه دو زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ ذوزنقهٔ متساوی الساقین باهم برابرند. در اینجا رابطه‌های مهم رابطه‌های اندازه‌ای ($AB=CD$) و نسبی ($AD \| BC$) است.



اکنون به قسمت مهم این بخش رسیده‌ایم.

مثلث ABC را در نظر می‌گیریم که سه ضلع آن باهم نا برابر باشند، این حالت را کلی می‌نامیم. فرض می‌کنیم که نقطهٔ B جابجا شود تا مثلث متساوی الساقین گردد که یك حالت خاص است. وقتی سه ضلع مثلثی باهم برابر باشند باز یك حالت خاص است. در شکل روبرو مثلث ABC غیر مشخص است و خطی از B گذشته ضلع AC را در I قطع می‌کند، این خط را حول B می‌چرخانیم

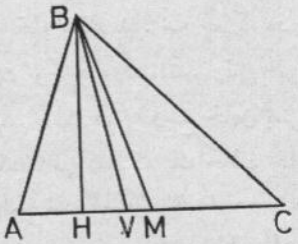


که نقطهٔ I در اوضاع مختلفی از AC مثلا در اوضاع N، M، T و غیره قرار خواهد گرفت. بین نقاطی که I روی AC اشغال می‌کند بعضی از حالتهای خاص قرار دارد. اگر I بر M وسط AC باشد BM میانه نام دارد و خط خاصی است که ضلع AC را به دو پارهٔ برابر تقسیم می‌کند. وضع خاص دیگر وقتی است که خط به وضع BH عمود بر AC باشد که در این حال ارتفاع نام دارد. وضع خاص سوم حالتی است که خط به وضع BV نیمساز زاویهٔ B باشد که این زاویه را به دو پارهٔ برابر بخش می‌کند. پس بین خطهایی که رأس B را به نقطه‌های مختلف ضلع AC وصل می‌کنند سه وضع خاص وجود دارد. BM که روی AC رابطهٔ اندازه‌ای $AM=MC$ را بوجود می‌آورد، BH که با AC در رابطهٔ نسبی (عمود برهم) است، BV که داخل زاویهٔ B رابطهٔ برابری دو زاویهٔ ABV و VBC را پدید می‌آورد.

تشخیص حالتهای خاص بزرگترین مرحله‌ای است که فرمانروائی ما را بر همهٔ هندسه ممکن می‌سازد. هر حالت خاص حالت خاص دیگری را موجب می‌شود.

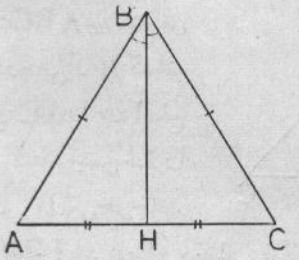
این عبارت که برقلم جاری شد درجای خود گفتار خارق‌العاده‌ای است وامیدوارم که در ذهن شما برای همیشه باقی بماند. در پرتو همین حقیقت است که خواهید توانست هر قضیه‌ای را بعد از قضیهٔ دیگر کشف کنید.

مثلث ABC مفروض است (حالت کلی). ارتفاع BH، نیمساز BV و میانهٔ BM از آن نیز رسم شده است. ضلع AC را



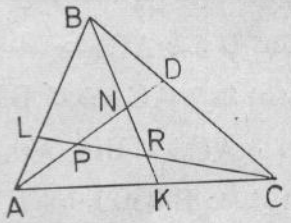
ثابت نگاه می‌داریم اما به جای رأس B نقطهٔ دیگر B′ را انتخاب می‌کنیم بقسمی که مثلث AB′C در رأس B′ متساوی الساقین باشد. اکنون نتایج این تغییر شکل را بررسی می‌کنیم.

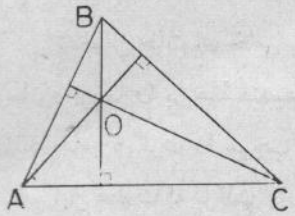
سه پاره خط BH ، BV و BM بر هم منطبق شده‌اند . در حالت کلی رابطهٔ اندازه‌ای بین دو ضلع AB و BC رابطهٔ نابرابری بود اما در حالت خاص رابطهٔ اندازه‌ای بین AB' و $B'C$ رابطهٔ برابری است.



نتیجهٔ مهمی که از تبدیل حالت کلی به حالت خاص بدست می‌آوریم این است که سه خطی که در حالت کلی متمایز از یکدیگر بودند در حالت خاص برهم منطبق شده‌اند. به عبارت دیگر حالت خاص مثلث حالت خاص سه جزء آن را موجب شده است.

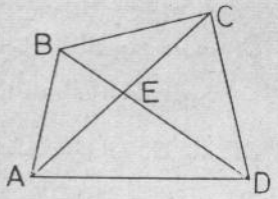
مثال دیگر: مثلث غیرمشخص ABC را در نظر می‌گیریم و از رأسهای A و B و C سه نیم خط در امتدادهای دلخواه رسم می‌کنیم که ضلعهای مقابل را به ترتیب در D و K و L قطع می‌کنند. از تلاقی این سه خط در حالت کلی مثلث NPR بوجود می‌آید. این سه خطرا حول رأسهای نظیر می‌چرخانیم که به‌ترتیب برضلعهای مقابل عمود گردند. در این‌صورت هریك از سه خط رااز حالت کلی به‌حالت خاص تبدیل کرده‌ایم. در این حالت مثلث خاص مثلث NPR به چه وضع در می‌آید؟ این مثلث به یك نقطه تبدیل می‌گردد. زیرا ثابت می‌شود که سه ارتفاع هرمثلث در یك نقطه متقاربند. سه خط که در حالت کلی رسم کرده بودیم یك مثلث بوجود آورده‌اند. وقتی این سه خط به وضع خاص در آیند، مثلث هم به وضع خاص یعنی به نقطه تبدیل می‌شود. بازهم مشاهده می‌کنیم که یك حالت خاص، حالت خاص دیگری را موجب شده است.

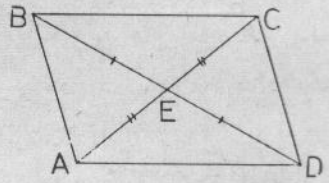




سه خطی راکه داخل مثلث و در حالت کلی از سه رأس گذرانده‌ایم می‌توانیم به صورتهای مختلف به‌حالتهای خاص تبدیل کنیم. مثلا آنهارا به‌صورت سه میانهٔ مثلث یا سه نیمساز مثلث در آوریم. درهریك ازاین حالتهای خاص مثلثی که ازتلاقی دو به دوخطها تشکیل شده است نیز به حالت خاص، به صورت یك نقطه ، در می‌آید. در مورد سه میانه علاوه برآنکه در یك نقطه متقاربند یکدیگر را به نسبت یك و دو نیز قطع می‌کنند. حالت خاص حالت خاص دیگری را موجب می‌شود.

اکنون چهار ضلعی را در نظر می‌گیریم که ضلعهای آن نسبت به یکدیگر در وضع دلخواه می‌باشند: دو قطر AC و BD از این چهار ضلعی در یك نقطهٔ E متقاطع می‌شوند بقسمی که BE و ED در حالت کلی باهم نابرابرند . چهار ضلعی را به جای حالت کلی به حالت خاصی در نظر می‌گیریم



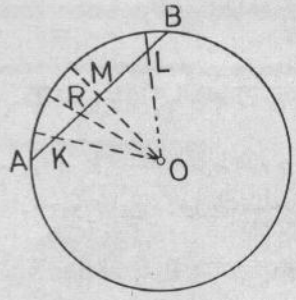


که ضلعهای مقابل آن باهم موازی باشند. در این حالت خاص نقطهٔ E نیز روی BD به وضع خاص در می‌آید که وسط BD واقع می‌شود. این نقطه روی AC نیز به وضع خاص قرار می‌گیرد. وقتی که ضلعهای چهارضلعی نسبت به یکدیگردروضع دلخواه باشند، نقطهٔ تلاقی قطرهای آن روی هریك از دو قطر نیزبه وضع دلخواه است. اما وقتی که ضلعها نسبت به یکدیگر وضع خاص توازی را داشته باشند، نقطهٔ تلاقی قطرها نیزروی هرکدام ازآنها وضع خاص خواهد داشت که دروسط هرکدام ازآنها واقع است. یك حالت خاص ، حالت خاص دیگری را موجب می‌شود.

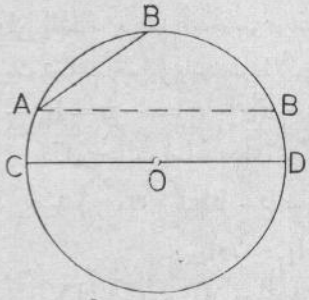
اکنون تبدیل دیگری را در نظرمی‌گیریم ، متوازی‌اضلاع را به‌مستطیل تبدیل‌می‌کنیم(زاویه‌های آن راکه‌اندازه‌های دلخواه داشتند به صورت خاص که هرکدام یك قائمه باشند در نظر می‌گیریم). در این حال دوقطرنه تنها در وضع خاصی که یکدیگر را نصف می‌کنند قرار خواهند داشت بلکه بایکدیگر برابرهم می‌باشند . یعنی حالت خاص دیگری از یك حالت خاص دیگر نتیجه شده است.

هرگاه رابطهٔ اندازه‌ای بین ضلعهارا به صورت خاص در نظربگیریم بقسمی که چهار ضلع باهم برابر باشند ، یعنی چهار ضلعی‌را به‌صورت خاص‌لوزی درنظر بگیریم ، دو قطرآن علاوه برآنکه یکدیگررا نصف می‌کنند بایکدیگر زاویه‌های قائمه‌نیز می‌سازند. بازهم یك بار دیگر محقق می‌شود که هرحالت خاص حالت خاص دیگری را موجب می‌شود.

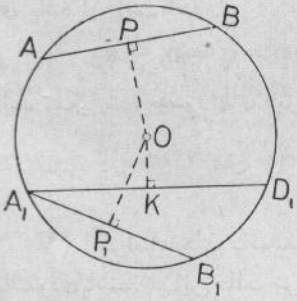
مثال دیگر: دردایرهٔ به مرکز O وتر AB را در نظر می‌گیریم. نیم‌خطی به‌مبدأ O فرض می‌کنیم که حول O بچرخد و AB را درنقطه‌های K، R، M، L قطع کند. ازبین این خطها یکی نسبت به AB عمود است که OM می‌باشد. از بین نیم خطهای به مبدأ O که AB راقطع می‌کنند OM حالتی خاص‌است، پس باید حالتی خاص‌را موجب شود. این‌حالت‌خاص چیست؟ دراین حالت خاص M وسط AB است. حالت خاص (شعاع‌عمود بروتر) حالت خاص (وتر نصف می‌شود) را موجب می‌گردد.



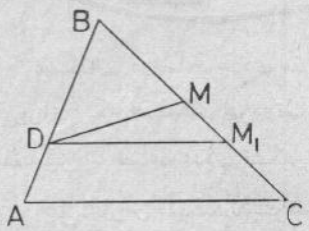
دردایرهٔ به مرکز O وبه قطر CD وتر غیرمشخص AB مفروض است. درحالت‌کلی دو کمان CA و BD نابرابرند. اگر وتر AB حول A بچرخد وبه‌وضع خاص AB_1 که‌موازی‌با CD است در آید، در این حالت خاص دو کمان AC و B_1D با هم برابر می‌باشند (رابطهٔ کلی نابرابری کمانها به‌رابطهٔ خاص برابری آنها تبدیل می‌شود.



دردایرهٔ به‌مرکز O دو وتر AB و A_1D مفروض‌است که طولهای آنها نابرابرند. دراین‌حالت کلی OP و OK فاصله‌های O تا این دو وتر نیز دارای طولهای نابرابرند. اما اگر وتر A_1D_1 تغییر طول دهد بقسمی که به‌وضع خاص وتر A_1B_1 مساوی با AB درآید، رابطهٔ بین طولهای OP و OP_1 رابطهٔ تساوی (حالت خاص‌رابطهٔ نابرابری) خواهد بود. هر حالت خاص، حالت خاص دیگری را موجب می‌شود.



مثلث ABC وخطی‌را درنظر می‌گیریم که ضلعهای AB و BC را در D و M قطع کرده باشد. وقتی DM و AC نسبت به‌هم درحالت‌کلی یعنی‌دروضع غیرمشخص باشند، دومثلث ABC و DBM نیز نسبت به‌هم دروضع غیر مشخص خواهند بود. اما اگر DM حول D بچرخد وبه‌وضع DM_1 موازی با AC قرار گیرد یعنی‌حالت خاص داشته باشد، دومثلث ABC و DBM نیز نسبت به‌هم‌حالت‌خاص خواهند داشت که متشابهند. می‌بینید که همیشه یك حالت خاص حالت خاص دیگری راموجب می‌شود.



گمان‌کنم مثالهایی که آوردم کافی باشد و فعلا شما این حقیقت را به‌خوبی دریافته‌اید که «هرحالت خاص، حالت خاص دیگررا موجب می‌شود».

دنباله‌دارد

قضیه‌هایی دربارهٔ میانه (بقیهٔ‌ازصفحه ۲۴۷)

۱۰ـ هرگاه در مثلث مختلف الاضلاعـی میانهٔ BM از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث بگذرد آن مثلث قائم‌الزاویه‌است.

اثبات: چون میانهٔ BM_1 از O مرکز دایرهٔ محیطی می‌گذرد هرگاه عمود OM رابر AC فرودآوریم، پای عمود باید وسط AC یعنی M_1 باشد چون مثلث مختلف‌الاضلاع‌فرض شده‌است پس‌نمی‌توان گفت میانهٔ BM_1 عمود منصف AC نیز می‌باشد زیرا دراین‌حالت لازم‌است مثلث متساوی الاضلاع شود. تنهاحالت ممکن آن است که M بر M_1 وسط AC منطبق‌شود یعنی AC قطر دایرهٔ محیطی‌مثلث باشد، پس‌مثلث‌قائم‌الزاویه خواهد بود.

حل مسائل نمونه

ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری

مسئله ـ دو تصاعد عددی مفروضند. مطلوبست شرط لازم و کافی برای آنکه جمله‌های هر دو تصاعد که به‌ترتیب صعودی مرتب شده‌اند نیز یك تصاعد عددی تشکیل دهند.

حل: فرض کنیم قدر نسبت تصاعدهای حسابی $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ به‌ترتیب p و q باشد. این تصاعدها می‌توانند محدود و یا نامحدود باشند ولی ما در هر حال فرض می‌کنیم که هریك از آنها حداقل دو جمله داشته باشد. مسئله درموردی که به‌دو جملهٔ متساوی از دو تصاعد داده‌شده (درموقع مرتب کردن صعودی این دو) بر بخوریم غیرمعین می‌نماید. پس باید فرض کنیم که $p \neq 0$ و $q \neq 0$ وهیچ یك ازجمله‌های دو تصاعد باهم برابر نباشد. به‌علاوه فرض می‌کنیم که $a < b$ باشد. بااین مفروضات حالات زیر ممکن است:

I) فرض می‌کنیم $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ تصاعدهای صعودی و محدود باتعداد جمله‌های n و k باشند. برای اینکه سری جدید نیز یك تصاعد عددی باشد شرط لازم و کافی این است که:

$$p=q \text{ و } n=k \text{ یا } p=q=b_1-a_n$$

$$n-1=k \text{ یا } b_1-a_1=\frac{1}{2}p$$

$$b_1-a_1=\frac{1}{2}p \text{ و } p=q \text{ ،}$$

باشد. دراین حالت تصاعد عددی بدست آمده به صورتهای زیر می‌تواند باشد:

$$a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_k \quad (1)$$

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n \quad (2)$$

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_{n-1}, b_{n-1}, a_n \quad (3)$$

کافی بودن شرط واضح است. لازم بودن آن را ثابت می‌کنیم. هرگاه درتصاعد جدید دوجمله ازیك تصاعد پشت سرهم قرار گیرند نتیجه می‌گیریم که تصاعد به‌صورت (۱) بوده و $p=q=b_1-a_n$ می‌باشد.

اگر جمله‌های تصاعد جدید یك درمیان ازجمله‌های تصاعد اول ودوم تشکیل شده باشد $n=k$ یا $n-1=k$ و تصاعد جدید به‌صورت (۲) یا (۳) وازآنجا $p=q$ و $b_1-a_1=\frac{1}{2}p$ خواهدبود. حالات دیگر را مابدون استدلال فقط ذکر می‌کنیم زیرا اثبات آنها مانند حالت اول می‌باشد.

II) فرض کنیم $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ دو تصاعد عددی نزولی باتعداد عناصر n و k باشند. شرط لازم و کافی برای اینکه سری تشکیل شده ازمجموع این دو نیز یك تصاعد عددی باشد این است که:

$$n+1=k \text{ یا } b_1-a_1=-\frac{1}{2}p$$

$$p=q \text{ و } n=k \text{ یا } p=q=-(b_k-a_1)$$

$$b_1-a_1=-\frac{1}{2}p \text{ و } p=q$$

دراین حالت تصاعد عددی تشکیل‌شده به‌صورتهای زیر خواهدبود:

$$a_n \text{ و } b_n \text{ و } a_{n-1} \text{ و} \ldots \text{ و } a_1 \text{ و } b_1$$

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, b_k, b_{k-1}, \ldots b_1$$

$$b_{n+1}, a_n, b_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, b_1$$

III) فرض می‌کنیم $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ تصاعد های محدود با تعدادجمله‌های n و k باشندو به‌علاوه یکی‌ازآنها صعودی‌ودیگری نزولی باشد. برای آنکه سری تشکیل شده از مجموع این دو نیزیك تصاعد حسابی باشد شرط لازم و کافی این است که:

$q=-p=b_1-a_1$ یا $p=-q=b_k-a_n$ باشد.

دراین حالت تصاعدعددی تشکیل‌شده به‌صورتهای زیر است.

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1$$

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, b_1, b_2, \ldots, b_k$$

IV) اگریکی از تصاعدهای داده‌شده محدود و دیگری نامحدود باشد چون $a_1 < b_1$ می‌باشد به‌آسانی مشاهده می‌شود که فقط تصاعد اول $\{a_i\}$ می تواند محدود باشد و تصاعد دوم $\{b_i\}$ بایدصعودی باشد. به‌این‌جهت در این حالت شرط لازم و کافی برای آنکه سری تشکیل شده ازاین دو تصاعد یك تصاعد عددی باشد این است که:

$$q=-p=b_1-a_1 \text{ یا } p=q=b_1-a_n$$

وتصاعد تشکیل‌شده به‌صورتهای زیرمی‌باشد:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots$$

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, b_1, b_2, \ldots$$

V) اگر تصاعدهای داده‌شده نامحدودباشند باید هردوی آنهاصعودی‌باشند. دراین‌حالت شرط‌لازم و کافی برای آنکه‌سری تشکیل‌شده ازاین دوتصاعد تشکیل‌تصاعد عددی‌بدهد این‌است که $p=q$ و $b_1-a_1=\frac{1}{2}p$ باشد وتصاعد عددی‌جدید به صورت زیرخواهدبود

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$$

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۹۷

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۹۷/۱ـ از محمد معینی

اولاـ ثابت کنید که برای هرسه عدد مثبت a و b و c داریم:

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant 9$$

ومعلوم کنید که تساوی درچه حالتی است.

ثانیاـ مقادیر مثبت x و y و z را از دستگاه زیر بدست آورید:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 9xyz=xy+yz+zx \end{cases}$$

[قبل از حل، توجه خواننده را به اشتباهی که در چاپ صورت مسئله در یکان شمارهٔ ۹۷ روی داده است جلب می‌کنیم. دراین شماره صورت مسئلهٔ صحیح درج شده است]

حل ـ اولا: حاصل عمل طرف اول نامساوی برابر است با:

$$3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

اما می‌دانیم که حاصل جمع هرعدد با معکوس آن از ۲ ناکوچکتر است و وقتی با ۲ برابر است که آن عدد برابر با یك باشد، بنابراین مجموع دوجملهٔ داخل هریك از پرانتزهای حاصل عمل بالا از ۲ ناکوچکتر است و خود عبارت از:

$$3+2+2+2=9$$

ناکوچکتر است. تساوی وقتی است که:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=1 \Longrightarrow a=b=c$$

ثانیاً در معادلهٔ دوم دستگاه داده شده از تقسیم طرفین بر xyz خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9$$

با توجه به معادلهٔ اول دستگاه خواهیم داشت:

$$\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9$$

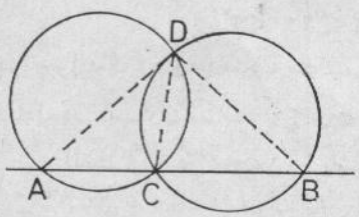
از مقایسهٔ این تساوی با ناکوچکتری ثابت شدهٔ در قسمت اولا نتیجه می‌شود که:

$$x=y=z=\frac{a}{3}$$

۹۷/۲ـ ترجمهٔ ازروسی

نقطهٔ C را بر پاره خط AB انتخاب می‌کنیم. دو دایرهٔ متساوی به‌شعاع R رسم می‌کنیم که اولی بر A و C و دومی بر B و C بگذرد. این دو دایره غیرازC درنقطهٔ دیگر D متلاقی می‌شوند. هرگاه R تغییر کند مکان نقطهٔ D چیست؟

حل ـ چون دو دایره متساویند پس کمانهای CD از دو دایره نیزمتساویند ودر نتیجه دو زاویهٔ محاطی مقابل به این دو کمان یعنی دوزاویهٔ DAB و DBA با هم برابرند. مثلث ADB متساوی الساقین است و D برعمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد. پس مکان هندسی نقطهٔ D عمود منصف پاره‌خط AB است.



حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم ریاضی

۹۷/۳ـ از محمد معینی

اگر a و b و c عددهای مثبت باشند ثابت کنید که:

$$\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant a+b+c$$

حل ـ ناکوچکتری زیر برای مقادیر مثبت b و c برقرار است:

$$\frac{b^2+c^2}{b+c}\geqslant\frac{b+c}{2} \qquad (1)$$

زیرا این ناکوچکتری به ترتیب معادل است با:

$$2b^2+2c^2\geqslant(b+c)^2=b^2+c^2+2bc$$

$$b^2+c^2-2bc=(b-c)^2\geqslant 0$$

به همین ترتیب داریم:

$$\frac{c^2+a^2}{c+a}\geqslant\frac{c+a}{2} \qquad (2)$$

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b}{2} \qquad (3)$$

از جمع نظیر به‌نظیر طرفین ناکوچکتریهای (۱) و(۲) و (۳) ناکوچکتری مورد نظر بدست می‌آید.

۹۷/۴ـ ترجمهٔ ازروسی

بزرگترین عدد صحیح موجود درعدد حقیقی x رابا $[x]$ نشان‌می‌دهیم. مثلا $[4/75]=4$ و $[-\sqrt{2}]=-2$ و $[\pi]=3$ بااین قرارداد ، معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$2x^2+[x]=x^4$$

حل ـ معادلهٔ داده شده را به صورت زیرمی‌نویسیم:

$$[x]+1=x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$$

نتیجه می‌شود که:

$$[x]+1\geqslant 0 \Longrightarrow x\geqslant -1$$

از طرف دیگر هرگاه $x\geqslant 2$ باشد خواهیم داشت:

$$2x^2+[x]\leqslant x^3+x<2x^3\leqslant x^4$$

پس جوابهای $x\geqslant 2$ درمعادله صدق‌نمی‌کنند. بنابراین‌جوابهای معادله در نامساوی مضاعف $-1\leqslant x<2$ صادقند.

الف ـ اگر $-1\leqslant x<0$ باشد داریم $[x]=-1$ و:

$$(x^2-1)^2=0 \Longrightarrow x=-1$$

ب ـ اگر $0\leqslant x<1$ باشد داریم:

$$[x]=0 \Longrightarrow x=0$$

ج ـ اگر $1\leqslant x<2$ باشد داریم:

$$[x]=1 \Longrightarrow (x^2-1)^2=2$$

$$x^2=1+\sqrt{2} \text{ و } x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

۹۷/۵ـ ترجمهٔ ازروسی

k و n عددهای طبیعی می‌باشند . جملهٔ اول یك تصاعد حسابی a_1 معلوم‌است. قدرنسبت این تصاعد را معین کنید برای آنکه نسبت مجموع n جملهٔ اول‌آن به‌مجموع kn جملهٔ بعدی مقدارثابت مستقل ازn باشد.

حل ـ با فرض آنکه d قدر نسبت تصاعد مطلوب باشد داریم:

$$\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=$$

$$=c\times\frac{kn}{2}[2(a_1+nd)+(n+kn-1)d]$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$(2a_1-2a_1kc-d+cdk)+$$
$$+n(d-cdk^2-2cdk)=0$$

این تساوی وقتی به ازای همهٔ مقادیر n برقرار است که داشته باشیم:

$$\begin{cases}2a_1-2a_1kc-d+cdk=0\\ d-cdk^2-2cdk=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2a_1-d)(1-ck)=0\\ c=\dfrac{1}{k(k+2)}\end{cases}$$

از رابطهٔ دوم این دستگاه نتیجه می‌شود که $1-ck\neq 0$ و بنابراین:

$$2a_1-d=0 \Longrightarrow d=2a_1$$

۹۷/۶ـ ترجمهٔ ازروسی

ثابت کنید که‌عددهای $a_1, a_2, \ldots, a_n$ کسر به‌ازای $n\geqslant 3$ در رابطهٔ زیر صدق کنند جمله های متوالی یك تصاعد حسابی می‌باشند :

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

حل ـ به ازای $n=3$ داریم:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3}$$

$$\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_1a_3}=\frac{1}{a_1a_3}-\frac{1}{a_3a_2}$$

$$a_3-a_2=a_2-a_1$$

به ازای مقادیر $n\geqslant 4$ و $n-1$ و $n-2$ داریم:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-2}}=\frac{n-3}{a_1a_{n-2}}$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}=\frac{n-2}{a_1a_{n-1}}$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

از تفریق نظیر به نظیر طرفین رابطه‌های اول و دوم از رابطهٔ سوم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n}-\frac{1}{a_1a_n}=(n-2)\frac{a_{n-1}-a_n}{a_1a_{n-1}a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}-\frac{1}{a_1a_{n-2}}=(n-2)\frac{a_{n-2}-a_{n-1}}{a_1a_{n-1}a_{n-2}}$$

$$\begin{cases}a_1-a_{n-1}=(n-2)(a_{n-1}-a_n)\\ a_1-a_{n-1}=(n-2)(a_{n-2}-a_{n-1}\end{cases}$$

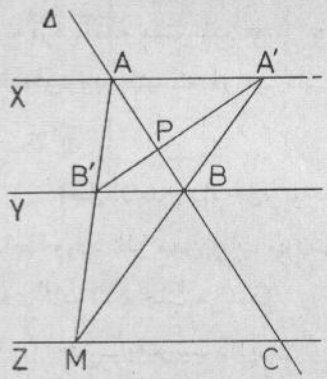
$$a_{n-1}-a_n=a_{n-2}-a_{n-1}$$

پس مسئله به ازای هر مقدار دلخواه $n\geqslant 3$ صحیح است.

۹۷/۷ـ ترجمهٔ ازروسی

سه خط متوازی X و Y و Z مفروض است. خط معین Δ با X در A با Y در B متلاقی‌است. نقطهٔ متغیر M از Z را به A و B وصل می‌کنیم که خطوط حاصل به‌ترتیب با Y در B′ و با X در A′ متلاقی‌شوند. هرگاه M خط Z را بپیماید، ثابت کنید که خط A′B′ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

حل ـ اگر P نقطهٔ تلاقی A′B′ با AB و C نقطهٔ تلاقی Δ با Z باشد، از تشابه مثلثها داریم:



$$\frac{PA}{PB}=\frac{AA'}{BB'}$$

$$\frac{AA'}{BB'}=\frac{AM}{MB'}$$

$$=\frac{AC}{BC}$$

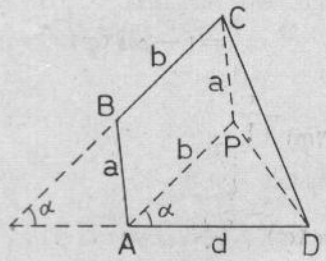
$$\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}$$

از تناسب اخیر معلوم می‌شود که دونقطهٔ C و P پاره خط AB را به نسبت معین تقسیم کرده‌اند و چون سه نقطهٔ A و B و C ثابتند پس P نیز نقطهٔ ثابت است که A′B′ از آن‌می‌گذرد.

۹۷/۸ـ ترجمهٔ ازفرانسه

اندازه‌های ضلعهای یك‌چهارضلعی محدب و اندازهٔ زاویهٔ بین امتدادهای دوضلع مقابل‌آن داده شده‌است. این‌چهار ضلعی را رسم‌کنید.

حل ـ به فرض‌آنکه ABCD چهار ضلعی مطلوب‌باشد چون از A پاره خط AP رامساوی‌وموازی با BC رسم‌کنیم اندازهٔ زاویهٔ PAD برابر با α و طول CP برابربا a می‌باشد، بنابراین



راه رسم چهار ضلعی به قرار زیر است:

مثلث ADP را با دو ضلع به طولهای d و b وزاویهٔ بین آنها به اندازهٔ α می‌سازیم، دو دایره به مرکزهای P و D و به شعاعهای a و c رسم می‌کنیم که از تلاقی آنهانقطهٔ C بدست می‌آید. از C مساوی و موازی با AP رسم می‌کنیم که نقطهٔ B مشخص می‌گردد.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۹۷/۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

مشتق تابع زیررا بدست‌آورید وساده کنید:

$$y=(x+\sqrt{1+x^2})^m\times(x-\sqrt{1+x^2})^p$$

حل ـ با فرض آنکه $m=p+r$ باشد (که r مثبت، منفی یا صفر می‌تواند باشد) تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=(x+\sqrt{1+x^2})^{p+r}\times(x-\sqrt{1+x^2})^p$$

$$y=(x+\sqrt{1+x^2})^r[(x+\sqrt{1+x^2})\times(x-\sqrt{1+x^2})]^p$$

$$y=(-1)^p(x+\sqrt{1+x^2})^r$$

$$y'=(-1)^p r\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)(x+\sqrt{1+x^2})^{r-1}$$

$$y'=\frac{(-1)^p r}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})^r$$

$$y'=\frac{(-1)^p(m-p)\,(x+\sqrt{1+x^2})^{m-p}}{\sqrt{1+x^2}}$$

۹۷/۱۰ـ از **جوادفیض** دانشجوی دانشکدهٔ‌فنی‌تبریز

هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=a\\ \cos x+\cos y=b\end{cases}$$

مقدارS ازرابطهٔ زیررا به‌ساده‌ترین صورت بدست‌آورید:

$$S=a\sin\frac{x+y}{2}+b\cos\frac{x+y}{2}$$

حل ـ طرف اول هریك از تساویهای داده شده را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم آنگاه طرفین تساویهای حاصل را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases}2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a\\ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b\end{cases}$$

$$b\sin\frac{x+y}{2}=a\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\frac{a\sin\frac{x+y}{2}}{a^2}=\frac{b\cos\frac{x+y}{2}}{b^2}=$$

$$=\frac{a\sin\frac{x+y}{2}+b\cos\frac{x+y}{2}}{a^2+b^2}$$

$$S=\frac{a^2+b^2}{a}\sin\frac{x+y}{2}=\frac{a^2+b^2}{b}\cos\frac{x+y}{2}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم ریاضی

۹۷/۱۱ـ ترجمهٔ از فرانسه

ثابت کنید که می‌توان تابع

$$f(x)=\frac{1+x}{1-x}$$

را به‌صورت $P(x)+I(x)$ به‌مجموع دوتابع تبدیل کرد بقسمی که $P(x)$ تابع زوج و $I(x)$ تابع فرد باشد. معلوم کنید که آیا دو تابع $f(x)$ و $P(x)+I(x)$ دقیقاً در یك فاصله معین می‌باشند؟

حل ـ یك تابع $f(x)$ زوج نامیده می‌شود هرگاه $f(x)=f(-x)$ باشد و فرد نامیده می‌شود هرگاه $f(x)=-f(x)$ باشد.

هرگاه $f(x)=P(x)+I(x)$ باشد داریم:

$$\frac{1+x}{1-x}=P(x)+I(x) \qquad (1)$$

در این رابطه x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1-x}{1+x}=P(-x)+I(-x)$$

چون $P(x)$ زوج و $I(x)$ فرد است پس:

$$\frac{1-x}{1+x}=P(x)-I(x) \qquad (2)$$

از جمع و تفریق نظیر به نظیر طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$P(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}\right]$$

$$P(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2} \quad \text{و} \quad I(x)=\frac{2x}{1-x^2}$$

تابع $f(x)$ درازای همهٔ مقادیر $x\neq 1$ معین است. اما هریك از دو تابع $P(x)$ و $I(x)$ در ازای همهٔ مقادیر $x\neq\pm 1$ معین می‌باشند. در ازای $x=-1$ تابع $f(x)$ معین اما دو تابع $P(x)$ و $I(x)$ نامعین می‌باشند.

۹۷/۱۲ـ از محمد معینی

به‌فرض آنکه داشته باشیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \quad \text{و} \quad y=\underbrace{ff\cdots f}_{2k+1\text{ مرتبه}}(tg\varphi)$$

و به فرض آنکه مشتق تابع y با y' ومشتق تابع y' با y'' نشان داده‌شود ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$y+y''=3y^5$$

[قبل از درج راه حل، توجه خواننده به اشتباهی که در رابطهٔ مورد نظر ضمن چاپ صورت مسئله در یکان شمارهٔ قبل روی داده است جلب می‌شود]

حل ـ به ترتیب داریم:

$$f(tg\varphi)=\sqrt{\frac{tg^2\varphi+1}{tg^2\varphi-1}}=\sqrt{\frac{-1}{\cos 2\varphi}}$$

$$ff(tg\varphi)=\sqrt{\frac{\frac{-1}{\cos 2\varphi}+1}{\frac{-1}{\cos 2\varphi}-1}}=\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}=tg\varphi$$

.....

$$\underbrace{ff\cdots f}_{2k+1\text{ مرتبه}}(tg\varphi)=y=\sqrt{\frac{-1}{\cos 2\varphi}}=$$

$$=(-\cos 2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'=-\sin 2\varphi(-\cos 2\varphi)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y''=-2\cos 2\varphi(-\cos 2\varphi)^{-\frac{3}{2}}+$$

$$+3\sin^2 2\varphi(-\cos 2\varphi)^{-\frac{5}{2}}$$

$$y''=2(-\cos 2\varphi)^{+1}(-\cos 2\varphi)^{-\frac{3}{2}}+$$

$$+3(1-\cos^2 2\varphi)(-\cos 2\varphi)^{-\frac{5}{2}}+$$

$$y=\sqrt{\frac{-1}{\cos 2\varphi}}$$

$$\Longrightarrow \cos 2\varphi=\frac{-1}{y^2} \quad \text{و} \quad \cos^2 2\varphi=\frac{1}{y^4}$$

$$y''=2y+3y^5-3y$$

$$y+y''=3y^5$$

۹۷/۱۳ـ فرستنده : **محمد معینی**

هرگاه داشته‌باشیم:

$$tg\alpha=\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \quad \text{و} \quad tg\beta=\sqrt{\frac{y-z}{y+z}} \quad \text{و}$$

$$tg\gamma=\sqrt{\frac{z-x}{z+x}}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma=1$$

حل‌ـ خواهیم داشت:

$$tg^2\alpha=\frac{x-y}{x+y}$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{y}{x}$$

$$\cos 2\beta=\frac{z}{y} \quad \text{و} \quad \cos 2\gamma=\frac{x}{z}$$

$$\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma=1$$

۹۷/۱۴ـ فرستنده: **محمد معینی**

نوع مثلثی‌را تعیین کنید که در آن‌رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\frac{cotg A}{tg B+tg C-tg A}=\frac{cotg B}{tg C+tg A-tg B}=$$

$$=\frac{cotg C}{tg A+tg B-tg C}$$

حل‌ـ از رابطه‌های داده شده خواهیم داشت:

$$(tg B+tg C-tg A)tg A=(tg C+tg A-tg B)tg B=$$

$$=(tg A+tg B-tg C)tg C$$

$$\begin{cases} tg^2 A-tg^2 B=tg C tg A-tg C tg B \\ tg^2 B-tg^2 C=tg B tg A-tg C tg A \end{cases}$$

$$\begin{cases} (tg A-tg B)(tg A+tg B+tg C)=0 \\ (tg B-tg C)(tg A+tg B+tg C)=0 \end{cases}$$

چون $tg A+tg B+tg C\neq 0$ است پس:

$$\begin{cases} tg A-tg B=0 \\ tg B-tg C=0 \end{cases} \Longrightarrow tg A=tg B=tg C$$

$$A=B=C$$

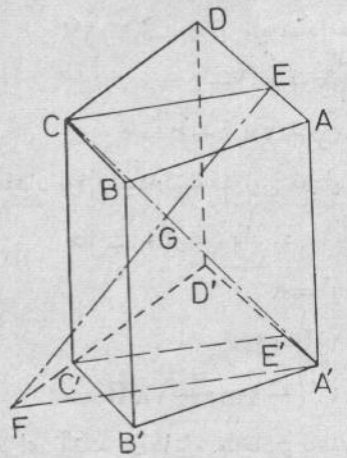
۹۷/۱۵ـ ترجمهٔ **داوید ریحان**

منشور کامل $ABCDA'B'C'D'$ رادرنظر می گیریم بقسمی که $ABCD$ یك‌چهار ضلعی محدب است. برضلع AD نقطهٔ E وبر امتداد ضلع $C'D'$ نقطهٔ F رابقسمی انتخاب می کنیم که :

$$\frac{DE}{DA}=\frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \frac{FC'}{C'D'}=\frac{1}{2}$$

باشد. ثابت کنید که خطوط $A'C$ و EF متقاطعند ونسبت‌پاره خطهایی‌را که روی آنها جدامی‌شود بدست آورید.

حل‌ـ بر $A'D'$ نقطهٔ E' راانتخاب می کنیم بقسمی که:



$$\frac{D'E'}{A'D'}=\frac{2}{3}$$

نتیجه خواهدشد که CE با $C'E'$ برابر و موازی است و چون $D'C'=2C'F$ است پس:

$$\frac{D'C'}{D'F}=\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{D'E'}{A'D'}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C'E' \parallel A'F \parallel CE$$

از توازی CE با $A'F$ نتیجه می‌شود که دو خط $A'C$ و EF در نقطهٔ G متقاطعند. از طرف دیگر در مثلث $A'D'F$ داریم:

$$\frac{D'C'}{D'F}=\frac{C'F'}{A'F}=\frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{CE}{A'F}=\frac{2}{3}$$

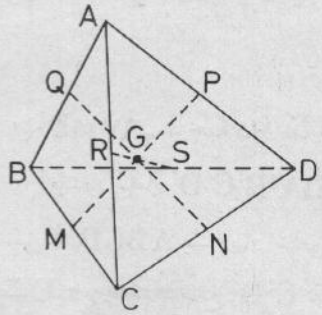
$$\frac{CG}{GA'}=\frac{CE}{A'F}=\frac{2}{3}$$

۹۷/۱۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

چهار وجهی‌را مشخص کنید که طولهای پاره‌خطهای‌واصل بین اوساط ضلعهای مقابل‌آن واندازه‌های زاویه‌های بین دو به دو ازاین پاره‌خطها معلوم‌است.

حل‌ـ درچهاروجهی خطهای‌واصل بین‌اوساط‌ضلعهای‌مقابل

و خط واصل بین اوساط دو قطر در نقطهٔ G متقارب و منصف یکدیگرند.



کنج G بامعلوم بودن سه زاویهٔ رأس مشخص است. بریالهای این کنج نقاط P و Q و R را تعیین می‌کنیم که فاصله‌های آنها از G به ترتیب برابر با نصف مقادیر داده شده باشد و نقاط M و N و S قرینهٔ این نقاط نسبت به G را نیز تعیین می‌کنیم. مثلث BCD بامعلوم بودن اوساط سه ضلع مشخص می‌شود و از روی آن نقطهٔ A به سادگی معین می‌گردد.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم دبیرستان

۹۷/۱۷- دودایره به معادله‌های زیر مفروضند:

$$x^۲+y^۲-۴x-۲my+m^۲-۵=۰$$

$$x^۲+y^۲+۴mx+۲y+۴m^۲-۳=۰$$

مقدار m راپیداکنید که این دودایره متخارج باشند.

حل- به ترتیب داریم:

$$(x-۲)^۲+(y-m)^۲=۹$$

$$(x+۲m)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

$C(۲$و$m)$ و $R=۳$ و $C'(-۲m$و$-۱)$و$R'=۲$

برای آنکه دو دایره متخارج باشند لازم وکافی است که:

$$CC'>R+R'$$

$$CC'=\sqrt{(۲m+۲)^۲+(m+۱)^۲}=$$

$$=|m+۱|\sqrt{۵}$$

$$|m+۱|\sqrt{۵}>۵$$

$m+۱>\sqrt{۵}$ یا $m+۱<-\sqrt{۵}$

$m>\sqrt{۵}-۱$ یا $m<-\sqrt{۵}-۱$

۹۷/۱۸- ترجمهٔ ازروسی

مقادیرماکسیمم ومی‌نیمم تابع زیررا پیداکنید:

$$y=۲\cos^۲x-۳\sqrt{۳}\cos x-\sin^۲x+۵$$

حل- داریم:

$$y'=-۴\sin x\cos x+۳\sqrt{۳}\sin x-۲\sin x\cos x$$

$$y'=\sin x(۳\sqrt{۳}-۶\cos x)$$

$$\sin x=۰\Longrightarrow y=۷\pm۳\sqrt{۳}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Longrightarrow y=\frac{۷}{۴}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۹۷/۱۹- ترجمهٔ ازفرانسه

تابع زیررا درنظر می‌گیریم:

$$y=\sqrt{x(x-۱)}+\sqrt{x(x+۱)}$$

اولا: حدود تغییرات تابع‌را تعیین کنید. آیاتابع درازای $x=۰$ معین است یانه؟

ثانیاً: منحنی‌نمایش هندسی‌تابع رارسم کنید ومعلوم کنید که مبدأ مختصات چه‌نوع نقطه‌ای ازنمایش هندسی است.

حل - تابع وقتی معین است‌که:

$$\begin{cases} x(x+۱)\geqslant۰ \\ x(x-۱)\geqslant۰ \end{cases}\Longrightarrow x=۰ \text{ یا } x\geqslant۱ \text{ یا } x\leqslant-۱$$

در ازای $x=۰$ مقدار تابع برابر با صفر و معین است.

$$y'=\frac{۲x-۱}{۲\sqrt{x(x-۱)}}+\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x(x+۱)}}$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	▥	▥	▥	▥	▥	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\sqrt{۲}$		۰		$\sqrt{۲}$	↗	$+\infty$

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{x(x+۱)}}{x}+\frac{\sqrt{x(x-۱)}}{x}$$

اگر $x\rightarrow+\infty$ می‌توانیم بنویسیم:

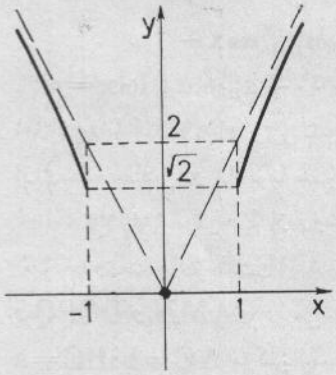
$$\lim\frac{y}{x}=\lim\left[\sqrt{\frac{x-۱}{x}}+\sqrt{\frac{x+۱}{x}}\right]=۲$$

$$y-۲x=\sqrt{x(x-۱)}-x+\sqrt{x(x+۱)}-x$$

$$y-۲x=\frac{-x}{\sqrt{x(x-۱)}+x}+\frac{x}{\sqrt{x(x+۱)}-x}$$

$$x\rightarrow+\infty\Longrightarrow\lim(y-۲x)=۰$$

خط $y=2x$ یك مجانب منحنی است.



به طریق مشابه معلوم خواهد شد که خط $y=-2x$ مجانب دیگر منحنی است. منحنی نمایش هندسی تابع به‌شکل مقابل است که مبدأ مختصات نیز جزء نمایش هندسی است و «نقطهٔ تنها» از آن می‌باشد.

۹۷/۲۰ـ ترجمهٔ از فرانسه

اولا: جدول تغییرات و منحنی C نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید:

$$y=|x|+\sqrt{4+x^2}$$

ثانیاً: نقطهٔ M از محور $y'y$ را پیدا کنید که از آن بتوان دو مماس بر منحنی C رسم کرد بقسمی که زاویهٔ بین دو مماس مقدار معلوم α باشد. به ازای مقادیر مختلف α در وجود نقطهٔ M بحث کنید. به‌ازای $\alpha=60^\circ$ نقطهٔ M را مشخص کنید.

حل ـ اولا: با تبدیل x به $-x$ مقدار y فرق نمی‌کند پس محور $y'y$ محور تقارن منحنی است. برای رسم منحنی کافی است که قسمتی از آن را که در ازای $x\geqslant 0$ مشخص می‌شود رسم کنیم و با توجه به محور تقارن آن را کامل کنیم.

درازای $x\geqslant 0$ داریم:

$$y=x+\sqrt{4+x^2}$$

$$y'=1+\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$x\geqslant 0 \Longrightarrow y'>0$$

x	0		$+\infty$
y'	1	+	
y	2	↗	$+\infty$

$$x\to+\infty : \lim\frac{y}{x}=\lim\left(1+\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}\right)=2$$

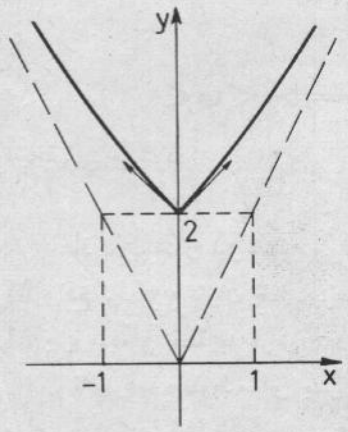
$$\lim(y-2x)=\lim(\sqrt{4+x^2}-x)=$$

$$=\lim\frac{4}{\sqrt{4+x^2}+x}$$

$$x\to+\infty : \lim(y-2x)=0$$

خط به معادلهٔ $y=2x$ مجانب منحنی است.

با توجه به‌آنکه محور $y'y$ محور تقارن منحنی است، نمایش هندسی تابع مفروض به شکل مقابل است.



ثانیاً: چون نقطهٔ M بر محور تقارن منحنی واقع است و هریك از شاخه‌های منحنی که در طرفین $y'y$ قرار دارد یکنوا است، چون از M دو مماس بر منحنی رسم کنیم این دو مماس نیز نسبت به $y'y$ قرینه‌اند. اگر زاویهٔ بین دو مماس α باشد زاویهٔ بین هریك از آنها و $y'y$ برابر $\frac{\alpha}{2}$ و ضریب زاویه‌ای آنها $m=\pm cotg\frac{\alpha}{2}$ است. هرگاه از M مماس بر شاخهٔ با x های مثبت منحنی رسم کنیم که ضریب زاویه‌ای آن $m=cotg\frac{\alpha}{2}$ باشد، دراین صورت از M دو مماس بر منحنی رسم می‌شود که زاویهٔ بین آنها α می‌باشد. با فرض $M(0$ و $p)$ معادلهٔ خطی با ضریب زاویه‌ای معلوم که بر شاخهٔ با طولهای مثبت منحنی مماس باشد و از M بگذرد می‌شود:

$$p-(x+\sqrt{4+x^2})=\left(1+\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right)(-x)$$

از این معادله بعد از اختصار خواهیم داشت:

$$p=\frac{4}{\sqrt{4+x^2}}$$

اولا باید $p>0$ باشد و ثانیاً با فرض $p>0$ خواهیم داشت:

$$x^2=\frac{4(4-p^2)}{p^2}\Longrightarrow 0<p<2$$

برای آنکه بتوان از M خطی بر منحنی مماس کرد لازم است که M بر پاره‌ای از محور عرضها قرار داشته باشد که عرض نقاط آن مثبت و از ۲ نا بزرگتر باشد.

با فرض معلوم بودن m ضریب زاویه‌ای خط مماس داریم:

$$1+\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}=m$$

$$\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}=m-1$$

$$x\geqslant 0 \Longrightarrow m\geqslant 1$$

$$\frac{x^2}{4+x^2}=(m-1)^2$$

$$x^2=\frac{-m^2+2m}{(m-1)^2}\geqslant 0 \Longrightarrow 0<m<2$$

نتیجهٔ کلی می‌شود:

$$1\leqslant m<2$$

از روی شکل نیز معلوم می‌شود که اولا بـرای آنکه از M واقع بر yy' بتوان خطی برمنحنی مماس کرد لازم است که M بین مبدأ و نقطهٔ به عرض ۲ واقع باشد.

ثانیاً همهٔ خطوط مماس بـر منحنی بـین مجانـب آن و مماس بر آن در نقطهٔ نظیر می‌نیممش واقعند پس ضریب زاویه‌ای مماسها (برای شاخهٔ باطولهای مثبت) بیـن یـك و دو محصور است.

به ازای $\alpha=60^\circ$ داریم:

$$m=cotg 30^\circ=\sqrt{3}$$

$$1+\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}=\sqrt{3}\Longrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$p=\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{8\sqrt{19}}{19}\quad,\quad M\left(0 \text{ و } \frac{8\sqrt{19}}{19}\right)$$

۹۷/۲۱ـ ترجمهٔ ازروسی

ثابت کنید که اگر مجموع:

$$a_1\cos(\alpha_1+x)+a_2\cos(\alpha_2+x)+\cdots+a_n\cos(\alpha_n+x)$$

به ازای $x=0$ وبه ازای مقدار دیگر $x=x_1\neq k\pi$ به سمت صفر میل کند در این صورت به‌ازای همهٔ مقادیر x برابر باصفر خواهد بود.

حل ـ در ازای $x=0$ داریم:

$$a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\cdots+a_n\cos\alpha_n=0 \qquad (1)$$

و درازای $x=x_1$ داریم:

$$a_1\cos(\alpha_1+x_1)+a_2\cos(\alpha_2+x_1)+\cdots+a_n\cos(\alpha_n+x_1)=$$

$$(a_1\cos\alpha_1+\cdots+a_n\cos\alpha_n)\cos x_1-(a_1\sin\alpha_1+\cdots+a_n\sin\alpha_n)\sin x_1=0$$

با توجه به رابطهٔ (۱) و با توجه به اینکه $\sin x_1\neq 0$ است نتیجه می‌شود:

$$a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\cdots+a_n\sin\alpha_n=0 \qquad (2)$$

مجموع داده شده به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

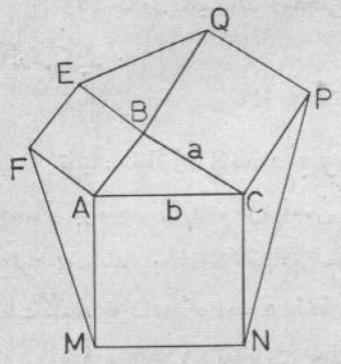
$$(a_1\cos\alpha_1+\cdots+a_n\cos\alpha_n)\cos x-(a_1\sin\alpha_1+\cdots+a_n\sin\alpha_n)\sin x=0$$

اما از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که رابـطهٔ اخیر به‌ازای همهٔ مقادیر x برابر با صفر است.

۹۷/۲۲ـ ترجمهٔ از روسی

روی‌ضلعهای مثلث ABC ودرخارج آن‌مربعهای ABEF و BCPQ و CAMN را می‌سازیم. بامعلوم بـودن مقادیـر $BC=a$ و $AC=b$ ماکسیمم‌مساحت شش‌ضلعی EFMNPQ را بدست آورید.

حل ـ هر یك از مثلثهای AFM و BEQ و CPN با مثلث ABC معادلند زیرا در دو ضلع باآن برابرند و زاویه‌هـای بین این ضلعها مکمل یکدیگرند، بنابراین S مساحت‌شش ضلعی‌برابر مـی‌شود بـا مجمـوع مساحتهای سه‌مـربع و چهاربرابرمساحت‌مثلث مفروض:



$$S=c^2+a^2+b^2+2ab\sin C$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\sin C$$

$$S=2[a^2+b^2+ab(\sin C-\cos C)]$$

$$S=2[a^2+b^2+\sqrt{2}\sin(C-45^\circ)]$$

مقدار S وقتی ماکسیمم است که $\sin(C-45^\circ)$ مـاکسیم باشد یعنی:

$$C-45^\circ=90^\circ\Longrightarrow C=135^\circ$$

$$S=2(a^2+b^2+ab\sqrt{2})$$

۹۷/۲۳ـ ترجمهٔ از روسی

عدد پنج رقمی پیدا کنید که رقم دهگان آن صفر باشد وبر عددهای ۱۷ و۱۹ و ۲۳ بخش‌پذیر باشد.

حل ـ عددمطلوب به‌صورت $23\times 19\times 17k=7429k$ و برابر است با: $7430k-k$ کـه در آن $2<k<13$ است. در این عدد رقم دهگان وقتی و فقط وقتی صفراست کـه در عدد $3k$ به ازای $2\leqslant k\leqslant 9$ رقم یکان برابر یك و به ازای $10\leqslant k<13$ رقم یکان برابر ۲ باشد. نتیجه می‌شود $k=7$ و عـدد مطلوب ۵۲۰۰۳ بدست می‌آید.

۹۷/۲۴ـ ترجمهٔ از روسی

به‌ازای چه مقادیر از عدد طبیعی n عدد $5^n - 2^n$ بر ۹ بخش‌پذیر است ؟

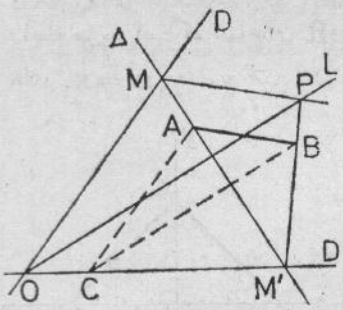
حل ـ باقیمانده‌های تقسیم عددهای 5^n و 2^n بر ۹ وقتی با هم برابرند که $n=3k$ باشد. ازطرف دیگر می‌توانیم بنویسیم :

$$5^{n+3} - 2^{n+3} = 125(5^n - 2^n) + 117 \times 2^n$$

نتیجه می‌گیریم که اگر حکم مسئله به‌ازای n درست باشد به‌ازای $n+3$ نیز درست است. وبرعکس اگر به ازای $n+3$ درست باشد به‌ازای n نیز درست است. ازمحاسبه‌ای مختصر معلوم می‌شود که حکم مسئله به ازای $n=3k+1$ و $n=3k+2$ درست نیست . بنابراین حکم مسئله تنها وقتی درست است که $n=3k$ باشد .

۹۷/۲۵ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دریك صفحه دوخط D و D' درنقطهٔ O متقاربند ودونقطهٔ A و B چنان واقعند که هیچکدام ازآنها برهیچیك ازدوخط واقع نیست ونیزخط AB باخط D موازی نیست. خط متغیر Δ بر A می‌گذرد و D رادر M و D' را در M' قطع می‌کند . خطی که از M موازی با AB رسم‌شود BM' رادر P تلاقی می‌کند . مکان‌هندسی نقطهٔ P رامشخص کنید.



حل ـ از A موازی با D رسم می کنیم که D' را در C قطع می‌کند واز B به C وصل‌می‌کنیم. بافرض $\overline{M'M} = \lambda \overline{M'A}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{CA}} = \lambda$$

$$\overrightarrow{MP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OM} = \lambda \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \lambda(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$$

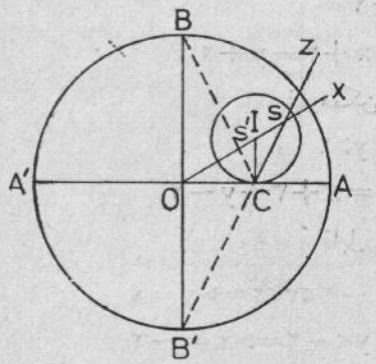
$$\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB} \Longrightarrow OP \parallel CB$$

مکان P خط L است که از O موازی با CB رسم‌می‌شود.

۹۷/۲۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دایرهٔ به مرکز O ودوقطرعمود برهم $A'A$ و $B'B$ از آن مفروض‌است. از نقطهٔ C وسط OA عمودی برآن اخراج می‌کنیم ونیم خط Ox راداخل قطاع AOB درنظر می‌گیریم که‌عمود مزبوررا در I قطع کند. دایرهٔ به‌مرکز I رارسم‌می‌کنیم که بر C بگذرد. هرگاه S و S' مرکزهای تجانسهای مستقیم ومعکوس دو دایرهٔ O و I باشد ، وقتی که Ox تغییر می‌کند مکان S و S' راپیدا کنید.

حل ـ IC و OB' دوشعاع موازی‌وهمجهت از دو دایره‌اند پس S نقطهٔ تلاقی OI و $B'C$ مرکزتجانس مستقیم دو دایره‌است‌ومکان S نیم‌خط Cz است که امتدادآن از B' می‌گذرد .



IC و OB دو شعاع موازی ومختلف‌الجهت ازدو دایره‌اند پس S' نقطهٔ تلاقی BC با OI مرکز تجانس معکوس دو دایره است ومکان S' پاره خط BC است.

مسائل گوناگون

مسائل مربوط به تاکسی فاصله

[موضوع سرمقالهٔ یکان شمارهٔ ۹۶]

تعریف ۱ـ درصفحهٔ محورهای مختصات تاکسی‌فاصلهٔ دونقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$t(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

تعریف ۲ـ تاکسی فاصلهٔ یك نقطهٔ A از یك خط Δ کوتاه‌ترین تاکسی‌فاصلهٔ A ازنقاط خط Δ است، بقسمی که‌اگر M نقطهٔ غیرمشخصی‌از خط Δ باشد:

$$t(A, \Delta) = \min\left\{t(A, M)\right\}$$

۹۷/۲۷ـ مکان هندسی نقاطی از صفحه را پیداکنید و رسم کنید که‌ازدونقطهٔ مفروض $A(3, -2)$ و $B(-3, 2)$ دارای تاکسی‌فاصله‌های برابرباشند.

حل ـ اگر $M(x, y)$ نقطه‌ای ازمکان باشد داریم:

$$|x-3| + |y+2| = |x+3| + |y-2|$$

حالتهای زیررا درنظر می‌گیریم:

۱) $x \geqslant 3$ و $y \geqslant 2$

$$x - 3 + y + 2 = x + 3 + y - 2$$

تساوی غیرممکن: $6 = 4$

۲) $x \geqslant ۳$ و $-۲ < y < ۲$

$x-۳+y+۲=x+۳-y+۲$

$y=۳$ غیرقابل‌قبول

۳) $x \geqslant ۳$ و $y < -۲$

$x-۳-y-۲=x+۳-y+۲$

$-۶=۴$ غیرممکن

۴) $-۳ < x < ۳$ و $y \geqslant ۲$

$-x+۳+y+۲=x+۳+y-۲$

$x=۲$ قابل‌قبول

۵) $-۳ < x < ۳$ و $-۲ < y < ۲ \Longrightarrow y=x$

۶) $-۳ < x < ۳$ و $y < -۲ \Longrightarrow x=-۲$

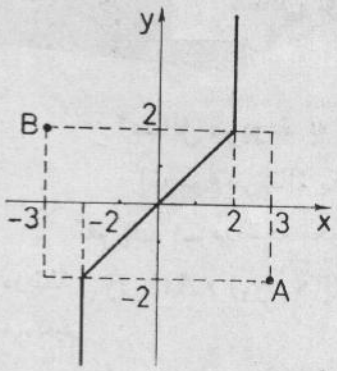
۷) $x < -۳$ و $y \geqslant ۲$: غیرممکن

۸) $x < -۳$ و $-۲ < y < ۲$: غیرقابل‌قبول

۹) $x < -۳$ و $y < -۲$: غیرممکن

مکان موردنظر ازیك پاره خط ودونیم خط به معادله‌های زیر تشکیل شده‌است :

$$\begin{cases} x=۲ \text{ و } y \geqslant ۲ \\ y=x \\ \text{و } -۲ < y < ۲ \\ x=-۲ \\ \text{و } y < -۲ \end{cases}$$



واین‌مکان به‌شکل‌روبرو است.

۹۷/۲۸ـ مسئلهٔ قبل‌را برای دونقطهٔ $A(-۱ \text{ و } -۲)$ و $B(۴ \text{ و } ۵)$ حل کنید .

حل‌ـ نظیرمسئلهٔ قبل‌داریم:

$$|x+۲|+|y+۱|=|x-۴|+|y-۵|$$

بادرنظر گرفتن حالتهای مختلف نتیجه خواهد شدکه:

۱) $x \geqslant ۴$ و $-۱ \leqslant y \leqslant ۵ \Longrightarrow y=-۱$

۲) درازای $x \geqslant ۴$ و $y \leqslant -۱$ رابطهٔ بالا به‌اتحـاد تبدیل می‌شود ، پس هر نقطه با مختصات ($x \geqslant ۴$ و $y \leqslant -۱$) جزء مکان است.

۳) $-۲ \leqslant x \leqslant ۴$ و $y > ۵ \Longrightarrow x=-۲$

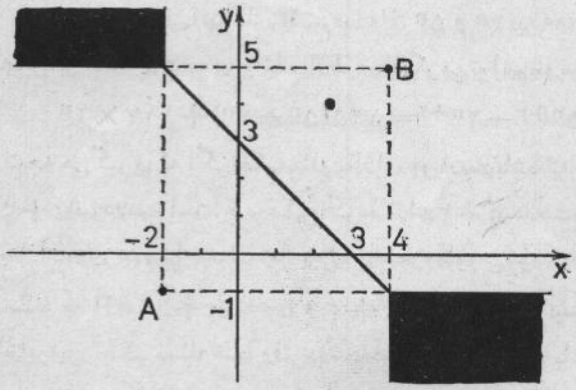
۴) $-۲ \leqslant x \leqslant ۴$ و $-۱ \leqslant y \leqslant ۵ \Longrightarrow x+y=۳$

۵) $-۲ \leqslant x \leqslant ۴$ و $y \leqslant -۱ \Longrightarrow x=۴$

۶) درازای $x \leqslant -۲$ و $y \geqslant ۵$ رابطه‌به‌اتحاد تبدیل‌می‌شود.

۷) $x \leqslant -۲$ و $-۱ \leqslant y \leqslant ۵ \Longrightarrow y=۵$

باتوجه به‌حالتهای هفتگانهٔ بالامکان نقطهٔ مطلوب به‌شکل زیر است.



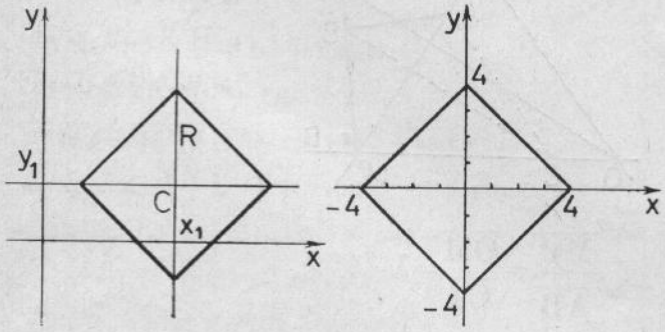
۹۷/۲۹ـ مکان هندسی‌نقاطی از صفحه را پیداکنیدکه تاکسی‌فاصلهٔ آنها ازنقطهٔ‌ثابت $C(x_۱ \text{ و } y_۱)$ مقدارثابت R باشد.

مثال عددی: $C(۰ \text{ و } ۰)$ و $R=۴$

حل‌ـ اگر $M(x \text{ و } y)$ نقطه‌ای غیر مشخص از مکان باشد داریم :

$$|x-x_۱|+|y-y_۱|=R$$

باتوجه به‌حالتهای مختلف که درنظربگیریم، نمایش هندسی این رابطه مربعی‌است‌که شعاع‌آن R وقطرهایش‌خطهای به معادله‌های $x=x_۱$ و $y=y_۱$ است (شکل پایین‌چپ)



درحالت $C(۰ \text{ و } ۰)$ و $R=۴$ مربع شکل‌بالا سمت‌راست را خواهیم داشت.

۹۷/۳۰ـ مکان هندسی‌نقاطی از صفحه را پیداکنیدکه مجموع تاکسی فاصله‌های‌آنها از دو نقطهٔ ثابت $F(۲ \text{ و } ۰)$ و $F'(-۲ \text{ و } ۰)$ مقدارثابت ۵ باشد.

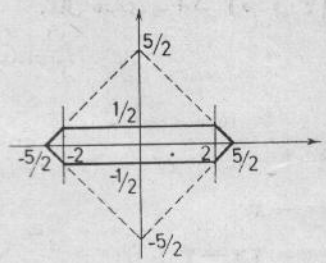
حل‌ـ برای نقطهٔ غیرمشخص $M(x \text{ و } y)$ ازمکان داریم:

$$|x-۲|+|y|+|x+۲|+|y|=۵$$

$$|x-۲|+|x+۲|+۲|y|=۵$$

حالتهای مختلف $x \geqslant ۲$ یا $-۲ \leqslant x \leqslant ۲$ یا $x \leqslant -۲$ یا $y \geqslant ۰$

یا $y<0$ را که در نظر بگیریم و برای هر حالت رابطهٔ نظیر را تعیین کنیم، شکل روبرو را خواهیم داشت که مکان مورد نظر است.

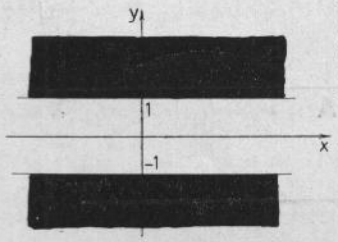


۹۷/۳۱ـ مکان هندسی نقاطی از صفحه را پیدا کنید که تفاضل تاکسی فاصله‌های آنها ازدو نقطهٔ ثابت $F(0$ و $1)$ و $F'(0$ و $-1)$ مقدار ثابت ۲ باشد.

حل ـ داریم:

$$\big||y-1|-|y+1|\big|=2$$

اگر $y\geq 1$ یا $y\leq -1$ باشد رابطهٔ بالا به اتحاد تبدیل می‌گردد. اگر $-1\leq y\leq 1$ باشد $y=\pm 1$ بدست می‌آید. پس مکان مورد نظر مطابق شکل روبرو ازدو نیم صفحه تشکیل شده است.



۹۷/۳۲ـ در صفحهٔ محور های مختصات، تاکسی فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1$ و $y_1)$ را از خط Δ به معادلهٔ $ax+by+c=0$ بدست آورید.

مثالهای عددی:

۱) Δ: $x-2y+3=0$ و $A(3$ و $4)$:

۲) Δ: $2x-y+3=0$ و $A(3$ و $4)$:

۳) Δ: $x-y+3=0$ و $A(3$ و $4)$:

حل ـ نقطهٔ متغیر M از خط Δ را درنظر می‌گیریم. اگر x طول این نقطه باشد عرض آن می‌شود $y=\frac{-ax-c}{b}$ و بنابه تعریف ۲ داریم:

$$t(A\text{ و }\Delta)=\min\{|x_1-x|+|y_1+\frac{ax+c}{b}|\}$$

درازای $x-x_1=0$ یعنی $x=x_1$ داریم:

$$\left|y_1+\frac{ax_1+c}{b}\right|=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{b}\right|$$

درازای $y_1+\frac{ax+c}{b}=0$ داریم:

$$x=\frac{-by_1-c}{b}\Longrightarrow|x_1-x|=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{a}\right|$$

دو کسر $\frac{ax_1+by_1+c}{a}$ و $\frac{ax_1+by_1+c}{b}$ دارای صورتهای برابرند پس مقایسهٔ آنها همان مقایسهٔ مخرجهای آنها یعنی مقایسهٔ a و b می‌باشد.

اگر $|a|>|b|$ باشد خواهیم داشت:

$$t(A\text{ و }\Delta)=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{a}\right|$$

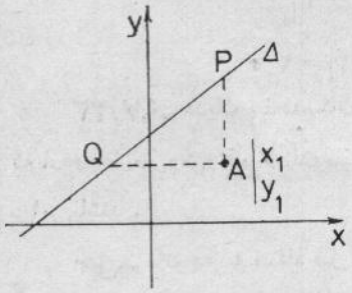
اگر $|a|<|b|$ باشد داریم:

$$t(A\text{ و }\Delta)=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{b}\right|$$

اگر $|a|=|b|$ باشد داریم:

$$t(A\text{ و }\Delta)=\left|\frac{ax_1+ay_1+c}{a}\right|$$

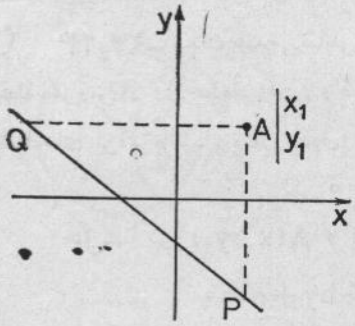
هرگاه درصفحهٔ محورهای مختصات از $A(x_1$ و $y_1)$ به ترتیب موازی با $y'y$ و $x'x$ رسم کنیم تا خط Δ به معادلهٔ $ax+by+c=0$ را در P و Q قطع کند داریم:



$$AP=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{b}\right|$$

$$AQ=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{a}\right|$$

مقایسهٔ طولهای AP و AQ برحسب اندازهٔ زاویهٔ PQA که از 45° کوچکتر یا بزرگتر یا با آن برابر باشد انجام می‌گیرد. زاویهٔ PQA برابر است بازاویهٔ حاده‌ای که خط Δ با $x'x$ می‌سازد. می‌دانیم که تانژانت زاویهٔ جهت‌داری که خط Δ با Ox می‌سازد ضریب زاویه‌ای خط Δ وبرابر است با $m=-\frac{a}{b}$. بنابراین:



اگر $|m|<1$ باشد تاکسی فاصلهٔ A از Δ برابر است باتاکسی فاصلهٔ A ازنقطه‌ای ازخط Δ که با A همطول است.

اگر $|m|>1$ باشد تاکسی‌فاصلهٔ A از Δ برابراست با تاکسی‌فاصلهٔ A ازنقطه‌ای از Δ که باA همعرض است.

اگر $|m|=1$ باشد، تاکسی فاصلهٔ A از Δ برابراست باتاکسی فاصلهٔA ازهریك ازنقاط پاره خط PQ که P و Q نقاطی از Δ می‌باشندکه به ترتیب با A همطول وهمعرض‌هستند.

مثالهای عددی:

۱) $A(3,4)$ و $\Delta: x-2y+3=0$

$$|m|=\frac{1}{2}<1 \Longrightarrow t(A,\Delta)=\left|\frac{3-2\times4+3}{-2}\right|=1$$

۲) $A(3,4)$ و $\Delta: 2x-y+3=0$

$|m|=2>1$

$$t(A,\Delta)=\left|\frac{2\times3-4+3}{2}\right|=\frac{5}{2}$$

۳) $A(3,4)$ و $\Delta: x-y+3=0$

$|m|=1$

$t(A,\Delta)=|3-4+3|=2$

۹۷/۳۳ـ دریك صفحه‌مکان هندسی‌نقاطی راتعیین کنید که ازدوخط مفروض‌واقع درآن صفحه دارای تاکسی فاصله‌های برابر باشند.

حل ـ باتوجه به مسئلهٔ قبل نتیجه می‌شودکه این مکان خطی‌است راست‌که برنقطهٔ تلاقی دو خط می‌گذرد و معادلهٔ آن عبارتست از:

$$\left|\frac{ax+by+c}{a \text{ یا } b}\right|=\left|\frac{a'x+b'y+c'}{a' \text{ یا } b'}\right|$$

درحالتی که‌ضریب زاویه‌ایهای دوخط برابریاقرینه باشند مکان مزبورهمان نیمساز زاویهٔ دوخط است.

۹۷/۳۴ـ مکان هندسی‌نقاطی ازصفحه راپیداکنیدکه‌از نقطهٔ مفروض A وازخط‌مفروض Δ واقع‌درآن‌صفحه دارای‌تاکسی فاصله‌های برابر باشند. مثال عددی:

$A(4,0)$ و $\Delta: y=0$

حل ـ اگر $A(x_1,y_1)$ و Δ به معادلهٔ:

$M(x,y)$ و $ax+by+c=0$

نقطه‌ای ازمکان باشد داریم:

$$|x-x_1|+|y-y_1|=\left|\frac{ax+by+c}{a \text{ یا } b}\right|$$

بادرنظر گرفتن حالتهای $x\geq x_1$ یا $x\leq x_1$ و... مکان مورد نظرمجموعه‌ای ازدو پاره‌خط ودونیم‌خط خواهدبودکه **تاکسی سهمی** نامیده می‌شود. A کانون وΔ خط‌هادی این‌تاکسی‌سهمی نام‌دارد.

مثال عددی ـ اگر $A(4,0)$ و Δ به معادلهٔ $y=0$ باشدداریم:

$|x-4|+|y|=|x|$

$x\geq4$ و $y\geq0 \Longrightarrow y=4$

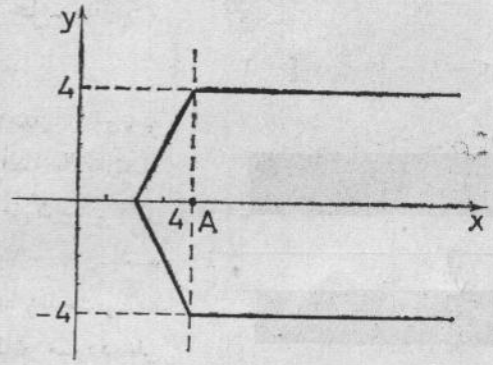
$x\geq4$ و $y<0 \Longrightarrow y=-4$

$0\leq x\leq4$ و $y\geq0 \Longrightarrow y=2x-4$

$0\leq x\leq4$ و $y<0 \Longrightarrow y=-2x+4$

$x<0$ و $y\geq0 \Longrightarrow y=-4$ غیر قابل قبول

$x<0$ و $y<0 \Longrightarrow y=4$ غیرقابل‌قبول



بارسم نمودار مربوط به هر یك از حالتهای بالا نمودار بالا بدست می‌آیدکه تاکسی‌سهمی به‌کانون A وباخط هادی $y=0$ می باشد.

ترجمهٔ ازفرانسه

۹۷/۳۵ـ مجموعهٔ مرجع R را مجموعهٔ دانش‌آموزان یك دبیرستان‌اختیارمی‌کنیم. زیرمجموعه‌هایی ازR راکه‌عضو-های‌آنها درانجمنهای ورزش، موسیقی وکتابخانه شرکت دارند به‌ترتیب باA وB وC نشان می‌دهیم. باعلم‌به‌آنکه هیچیك‌ازاین زیرمجموعه‌ها تهی‌نباشد:

اولا: هریك‌اززیرمجموعه‌های زیر، چه دانش‌آموزانی از دبیرستان رامشخص می‌کند:

۱) $A\cap B$ و $B\cap C$ و $A\cap C$

۲) $A\cap B\cap C$ و $A\cap B\cap \overline{C}$ و $A\cap \overline{B}\cap \overline{C}$ و $\overline{A\cup B\cup C}$

ثانیاً: فرض می‌کنیم که $A\cap B\neq\emptyset$ و $A\cap B\subset C$ باشد، نمودار ون مربوط به‌مجموعهٔ R وزیر مجموعه‌های‌آن را رسم کنید وروی‌آن هریك‌ازمجموعه‌های‌قسمت اولا را مشخص کنید.

ثالثاً: بافرض‌آنکه داشته‌باشیم:

$nA=600$ و $nB=370$ و $nC=750$ و

$n(A\cap B)=100$، $n(A\cap C)=300$ و $n(B\cap C)=250$ و

$n(\overline{A \cup B \cup C}) = ۳۰$

معلوم کنید :

الف- تعداد دانش‌آموزان دبیرستان را .

ب - تعداد دانش‌آموزانی ازدبیرستان راکه دردوانجمن وفقط در دو انجمن عضویت دارند .

ج- تعداد دانش‌آموزانی که‌فقط دریك‌انجمن عضوهستند.

حل- اولا به‌ترتیب داریم :

$A \cap B$ = مجموعهٔ دانش آموزانی که عضو دو انجمن ورزش وموسیقی هستند.

$B \cap C$ = مجموعهٔ دانش آموزانی که عضو دو انجمن موسیقی وکتابخانه می‌باشند.

$A \cap C$ = مجموعهٔ دانش آموزانی که عضو دو انجمن ورزش وکتابخانه هستند.

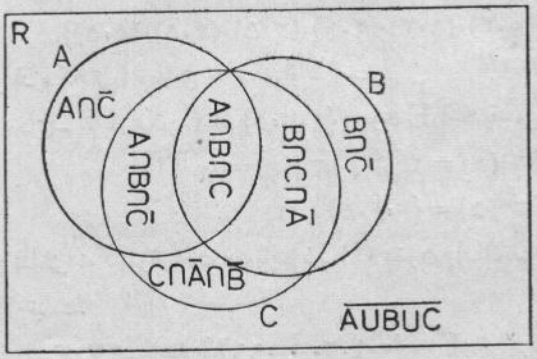
$A \cap B \cap C$ = مجموعهٔ دانش آموزانی که عضو سه انجمن ورزش وموسیقی وکتابخانه می‌باشند.

$A \cap B \cap \bar{C}$ = مجموعهٔ دانش‌آموزانی که دردوانجمن ورزش و موسیقی شرکت دارند اما عضو انجمن کتابخانه نمی‌باشند.

$A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ = مجموعهٔ دانش آموزانی که در انجمن ورزش شرکت دارند اما در هیچیك از انجمنهای موسیقی و کتابخانه عضویت ندارند.

$\overline{A \cup B \cup C}$ = مجموعهٔ دانش‌آموزانی که در هیچیك ازسه‌انجمن ورزش، موسیقی وکتابخانه عضویت ندارند.

ثانیاً-بافرض $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap B \subset C$ نمودار ون مربوط به مجموعه‌ها به‌شکل زیر است .

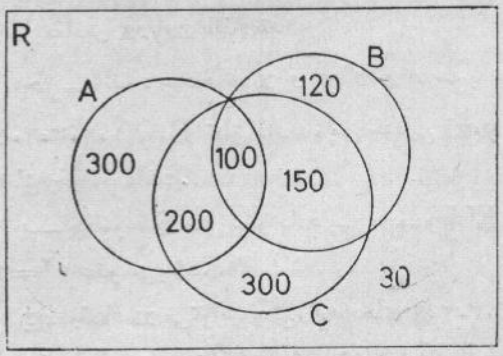


ثالثاً- باتوجه به مقادیر داده شده نمودار زیر را داریم وازروی‌آن معلوم خواهد شدکه :

الف- تعدادکل دانش‌آموزان دبیرستان برابراست با:

$۱۰۰ + ۲۰۰ + ۱۵۰ + ۳۰۰ + ۱۲۰ + ۳۰۰ + ۳۰ = ۱۲۰۰$

ب- تعداد دانش آموزانی‌که در دو انجمن و فقط در دو



انجمن عضویت دارند برابر است‌با:

$۲۰۰ + ۱۵۰ = ۳۵۰$

ج- تعداد دانش‌آموزانی‌که فقط‌دریك انجمن عضوهستند برابر است با:

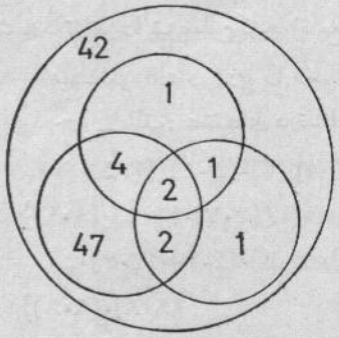
$۳۰۰ + ۳۰۰ + ۱۲۰ = ۷۲۰$

۹۷/۳۶- درنتیجهٔ آمارگیری از وسایل نقلیهٔ ساکنان یك شهرمعلوم شدکه ازهر ۱۰۰ نفر: ۸ نفر اتومبیل ، ۶ نفر موتور سیکلت، ۵۵ نفردوچرخه، ۳نفراتومبیل وموتورسیکلت ۴نفرموتور سیکلت و دوچرخه ، ۶ نفراتومبیل و دوچرخه و بالاخره ۲نفرهرسه وسیلهٔ مزبوررا دارا می‌باشند . معلوم‌کنید که ازاین ۱۰۰ نفر:

الف - چند نفر صاحب اتومبیل می‌باشند بدون آنکه موتورسیکلت یادوچرخه داشته‌باشند.

ب- چند نفرهیچیك از سه وسیلهٔ مزبوررا ندارند .

حل- بااستفاده از نمودار روبرو معلوم می‌شود که :



الف - فقط یك نفر از صد نفر صاحب اتومبیل‌است بدون‌آنکه موتورسیکلت‌یادوچرخه داشته‌باشد .

ب- ۴۲ نفر از صد نفر صاحب هیچیك‌از سه وسیلهٔ نقلیه نمی‌باشند.

۹۷/۳۷- یك تاس‌نرد شش وجهی‌راکه روی وجوه‌آن عددهای ۱،۲،۳،۴،۵،۶ حك شده است سه دفعهٔ پشت سرهم می‌اندازیم وعددهای حاصل‌را به‌صورت سه‌تایی‌مرتب (xyz) یادداشت می‌کنیم :

الف- این سه تایی به‌چه مجموعهٔ حاصل ضربی مستقیم (دکارتی) تعلق دارد؟

ب- این‌مجموعهٔ حاصل‌ضربی چند عضودارد؟

ج- از بین عضوهای این مجموعهٔ حاصل‌ضربی برای چند عدد آنها مقادیر x و y و z متفاوتند؟

حل- الف : عدد های x و y و z هرسه به مجموعهٔ $E=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ تعلق دارند، پس سه‌تایی (x،y،z) به $E^۳$ تعلق خواهد داشت.

ب- مجموعهٔ E شش عضو دارد پس مجموعهٔ $E^۳$ دارای $۶^۳=۲۱۶$ عضو می‌باشد.

ج- مقدار x می‌تواند یکی ازعددهای ۱،۲،۳،۴،۵،۶ باشد. وقتی‌مقدار x مشخص شده‌باشد، ۵عدد دیگرباقی می‌ماند که y می‌تواند یکی ازآنها راانتخاب کند و بعد ۴ عدد دیگر باقی‌می‌ماندکه z می‌تواندیکی‌ازآنها باشد. پس‌تعداد سه‌تاییهایی که دارای عضوهای متفاوتند برابر است‌با:

$$۶\times۵\times۴=۱۲۰$$

۹۷/۳۸- مجموعهٔ زیررا درنظر می گیریم:

$$E=\{x|x\in N \text{ و } ۱<x<۹\}$$

دراین مجموعه دوتناظر f و g رااز E درE به‌ترتیب زیر درنظر می گیریم:

$$\forall x\in E:\begin{cases} x\to f(x)=x & \text{اگر x فرد باشد :} \\ x\to f(x)=x-۱ & \text{اگرx زوج باشد:}\end{cases}$$

$$\forall x\in E:\begin{cases} x\to g(x)=x & \text{اگرx زوج باشد:} \\ x\to g(x)=x-۱ & \text{اگرx فردباشد:}\end{cases}$$

الف- عضوهای هریك ازدوتناظررامشخص کنیدونوع هر- یك ازدوتناظررا نیزمعلوم کنید (تابع است یاگسترش) .

ب- نمودارهای f و g را رسم کنید.

حل- الف: عضوهای دوتناظر f و g به‌ترتیب عبارتنداز:

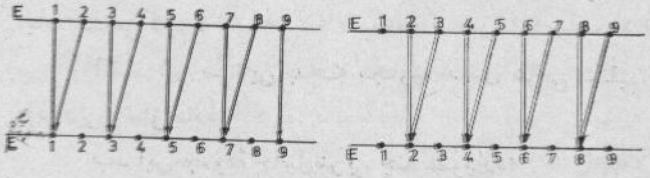
$\{(۱،۱)،(۲،۱)،(۳،۳)،(۴،۳)،(۵،۵)،(۶،۵)،$
$(۷،۷)،(۸،۷)،(۹،۹)\}$

$\{(۲،۲)،(۳،۲)،(۴،۴)،(۵،۴)،(۶،۶)،(۷،۶)،$
$(۸،۸)،(۹،۸)\}$

تناظرf گسترشی از E در E است بقسمی که :

$$f(E)=\{۱،۳،۵،۷،۹\}$$

تناظرg گسترش نیست زیرا عدد یك دارای تصویر نیست. اما g تابع است که دامنهٔ آن {۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲} وبردآن



{۲،۴،۶،۸} است.

ب- نمودار های f و g به ترتیب مطابق با شکلهای سمت چپ وسمت راست دربالااست.

۹۷/۳۹- مجموعهٔ زیررا درنظر می گیریم .

$$E=\{x|x\in N \text{ و } ۰<x<۵\}$$

دراین مجموعه تناظراز E درE رابه‌شرح زیر تعریف می کنیم:

$$x<۲\to f(x)=۳$$
$$x=۲\to f(x)=۱$$
$$x>۲\to f(x)=۵$$

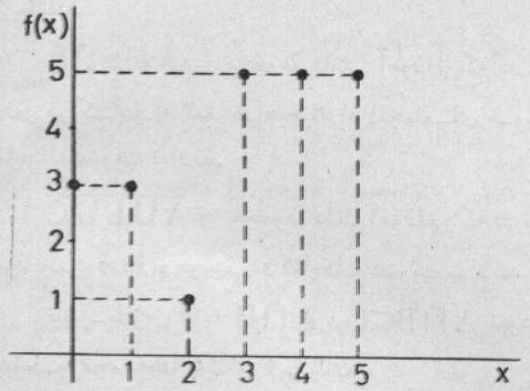
الف- این‌تناظر گسترش است یاتابع؟ دامنه وبرد آن را مشخص کنید .

ب- نموداردکارتی f را رسم کنید.

ج- تناظرعکس f یعنی $f^{-۱}$ رامعین کنید.

حل- الف- تناظرf یك گسترش است زیرا هرعضوی از E توسط f دارای تصویر است . دامنهٔ f همان E و برد آن {۱،۳،۵} است.

ب- نمودارf مجموعهٔ دوتاییهای (f(x) و x) است که عبارتست از:



$\{(۵،۵)،(۴،۵)،(۳،۵)،(۲،۱)،(۱،۳)،(۰،۳)\}$

نمودار دکارتیf مطابق با شکل بالا است .

ج- تناظرعکس f از {۱،۳،۵}بسوی E است بقسمی که:

$$f^{-۱}(۱)=۲ \qquad f^{-۱}(۳)=۰$$
$$f^{-۱}(۵)=\{۳،۴،۵\}$$

این تناظر نه گسترش‌است ونه‌تابع زیرا که عضو۵ دارای‌تصویری درE نیست.

۹۷/۴۰- مجموعهٔ $E=\{۰،۱،۲،...،۹۹\}$ یعنی‌مجموعهٔ عددهای طبیعی کوچکتر ازصد و گسترش f از E درE رابه‌شرح زیردرنظر می گیریم:

$x\to f(x)=x$ مجموع رقمهای

دومعادلهٔ زیررا درمجموعهٔ E حل کنید:

$(1)\ f(x)=12$ ، $(2)\ f(x)=19$

حل- اگر u رقم یکان و d رقم دهگان x باشد $f(x)=u+d$ است ومعادلهٔ $f(x)=12$ معادل است با :

$$\begin{cases} d+u=12 \\ 0<d<9 \\ 0<u<9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} d=12-u \\ 0<12-u<9 \\ 0<u<9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} d=12-u \\ 3<u<9 \end{cases}$$

معادلهٔ مفروض دارای $9-2=7$ جواب است ومجموعهٔ جواب آن می‌شود:

$$S=\{39,84,75,66,57,48,93\}$$

معادلهٔ $f(x)=19$ باتوجه به‌اینکه :

$$f(x)=d+u<9+9=18$$

دارای جواب نمی‌باشد. درمورد این‌معادله $S=\emptyset$ است.

پاسخ تستهای ریاضی

۴۱-ج	۴۲-د	۴۳-الف	۴۴-ج
۴۵-الف	۴۶-ج	۴۷-ب	۴۸-الف
۴۹-الف	۵۰-د	۵۱-ب	۵۲-ج
۵۳-ج	۵۴-هیچکدام	۵۵-د	۵۶-ب
۵۷-د	۵۸-ج	۵۹-ب	
۶۰-هیچکدام	۶۱-الف		

توضیحات مربوط به تستها

۴۳- داریم:

$$\frac{p+3q}{p+q}-\sqrt{3}=\frac{(3-\sqrt{3})q-(\sqrt{3}-1)p}{p+q}$$

$$=\frac{q(\sqrt{3}-1)}{p+q}\left(\sqrt{3}-\frac{p}{q}\right)$$

چون $\frac{q(\sqrt{3}-1)}{p+q}>0$ است پس دوعبارت :

$\left(\frac{p+3q}{p+q}-\sqrt{3}\right)$ و $\left(\sqrt{3}-\frac{p}{q}\right)$، هم‌علامتند.

۴۴- عددهای سه رقمی مضرب ۳ ابتدا از ۱۰۲ ومنتهی به ۹۹۹ است ومجموع تمام‌آنها ۱۶۵۱۵۰ است.

۴۵- اگر تعداد جمله‌های تصاعدی حسابی عدد فرد باشد یك‌جمله دروسط دارد ومجموع دو جملهٔ اول وآخر که دو برابر جملهٔ وسط است نمی‌تواند فردباشد .

۴۶- ضلعهای دوزاویه نظیر به نظیر برهم عمودند، پس‌این دوزاویه یامساوی یامکمل یکدیگرند.

۴۷- اندازهٔ هریك از دوزاویهٔ BMC و BIC برابر است با $90^\circ+\frac{A}{2}$

۴۸- درچاپ صورت این مسئله اشتباه شده‌است . صحیح آن چنین است : «هرگاه نمایش هندسی تابع فقط در بخشهای اول‌وسوم از محورهای مختصات واقع‌باشد». بااین شرط داریم:

$$x\geqslant 0\Longrightarrow(x-a)^{2n+1}\geqslant 0\Longrightarrow x-a\geqslant 0$$

$$x<0\Longrightarrow(x-a)^{2n+1}<0\Longrightarrow x-a<0$$

بنابراین $a=0$ است.

۴۹- معادلهٔ $anx^{n-1}=m$ وقتی حداکثر دو ریشهٔ حقیقی‌دارد که $n-1$ عدد زوج یعنی n عدد فرد باشد.

۵۰- معادلهٔ :

$$(x-a)^2=(x-a)\Longleftrightarrow(x-a)(x-a-1)=0$$

به ازای هیچ مقداری از a ریشهٔ مضاعف ندارد.

۵۱- درهرمثلث داریم:

$$tgA=-tg(B+C)=\frac{-tgB-tgC}{1-tgBtgC}$$

$$tgB=2cotgC\Longrightarrow tgBtgC=2$$

$$tgA=\frac{-tgB-tgC}{1-2}=tgB+tgC$$

۵۲- ازتساوی (I) داریم:

$$\frac{1}{cosx}=\sqrt{2}cosy\Longrightarrow\frac{1}{cos^2x}=2cos^2y$$

$$tg^2x=2cos^2y-1=cos2y$$

وچون عبارت نسبت به x و y متقارن‌است پس همچنین خواهیم داشت:

$$tg^2y=cos2x$$

۵۳- درچهار وجهی ABCD اگر E وسط AB و F وسط CD باشد EF وخط واصل‌بین اوساط هر دو یال مقابل یکدیگر درG متقارب ومنصف یکدیگرند وداریم:

$$MA^2+MB^2=2ME^2+\frac{AB^2}{2}$$

$$MC^2+MD^2=2MF^2+\frac{CD^2}{2}$$

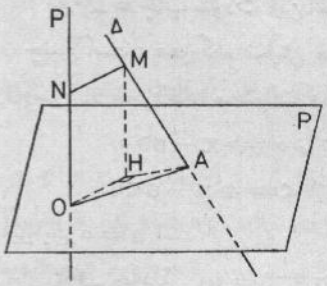
$$ME^2+MF^2=2MG^2+\frac{EF^2}{2}$$

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=$$

$$=4MG^2+EF^2+\frac{AB^2+CD^2}{2}$$

درطرف دوم فقط MG متغیراست، پس عبارت طرف اول وقتی می‌نیمم است که $MG=0$ یعنی M بر G واقع باشد.

۵۴ـ مکان M سطح استوانی است به مولد D . زیرا اگر صفحهٔ P را از A عمود بر D رسم کنیم که آن را در O قطع کند و H تصویر M براین صفحه باشد ، زاویهٔ AHO قائمه است ومکان H دایرهٔ به‌قطر AO است. پس MH با D موازی وبردایرهٔ به‌قطر AO متکی است . بنابراین مکان M سطح استوانی است که دایرهٔ مزبور دایرهٔ هادی آن و D مولد آن است .



۵۵ـ داریم :

$$y'=\frac{x+m}{y}$$

$$\begin{cases} y'=0 \Longrightarrow x=-m \\ y^2=x^2+2mx+m \end{cases}$$

$$y^2=x^2-2x^2-x$$

$$x^2+y^2+x=0$$

۵۶ـ داریم:

$$y'=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{y}{y-x}$$

$$y=kx \Longrightarrow y'=\frac{k}{k-1} \text{ و } \frac{-1}{y'}=\frac{1-k}{k}$$

۵۷ـ ازطرفین تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم :

$$-y'\sin y=2\sin x\cos x$$

$$y'=\frac{-2\sin x\cos x}{\sin y}=\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=$$

$$=\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$$

$$y'=\frac{-2\sin x\cos x}{|\cos x|\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi \Longrightarrow y'=\frac{2\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$0\leqslant x<\frac{\pi}{2} \Longrightarrow y'=\frac{-2\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

هرگاه x به‌ازای مقادیر کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل کند مشتق به‌سمت $-\sqrt{2}$ میل خواهد کرد وهرگاه x به‌ازای مقادیر بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل کند مشتق به‌سمت $\sqrt{2}$ میل خواهد کرد. پس مشتق درازای $x=\frac{\pi}{2}$ نامعین است.

۵۸ـ عبارت را برحسب $t=tg\frac{x}{4}$ می نویسیم و چون $0<t<\sqrt{2}-1$ است به‌سادگی نتیجه خواهد شد که حاصل عبارت منفی است.

۵۹ـ می‌توانیم بنویسیم:

$$A=B(n-1)+2n+1$$

$$4B=(2n+1)(2n+3)-3$$

هرعدد که A و B را بشمرد $2n+1$ را می‌شمرد وهرعدد که B و $2n+1$ را بشمرد عدد ۳ را می‌شمرد پس اگر $2n+1$ و ۳ نسبت به‌هم اول باشند A و B نیز نسبت به‌هم اولند. اما ۳ و $2n+1$ نسبت به‌هم اولند وقتی که n مضرب ۳ باشد .

۶۰ـ کسرمورد نظر برابراست با:

$$\frac{a}{b}=\frac{9k}{999999}=\frac{k}{111111}$$

به‌شرط آنکه تعداد رقمهای دورهٔ گردش مضرب ۹ نباشد ، عدد ۱۱۱۱۱۱ مضرب ۹ نیست وچون این‌عدد مضرب b است پس b نیزمضرب ۹ نمی‌باشد.

۶۱ـ اگر ω نقطهٔ تلاقی PP' با OO' باشد نتیجه خواهد شد که :

$$\overline{\omega P'}=\frac{k'}{k}\cdot\overline{\omega P}$$

P' مجانس نقطهٔ P است درتجانس به مرکز ω.

مسائل برای حل

[مسائلی که زیرعنوان «ترجمهٔار روسی» مشخص گردیده‌اند توسط آقای **مهندس فتح‌الله‌زرگری** ترجمه شده‌اند.]

برای دانش‌آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

۹۸/۱ـ ترجمهٔ از فرانسه

به فرض آنکه p و q دو مقدار حقیقی مثبت و a مقدار حقیقی بزرگتر از یك باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{p}{q}<a \Longleftrightarrow \frac{p+a^2q}{p+q}>a$$

۹۸/۲ـ ترجمهٔ از فرانسه

زاویهٔ xOy و نقطهٔ P در صفحهٔ آن مفروض است. دو دایره رسم می‌کنیم که بر O و P بگذرند و اولی با Ox و Oy در A و B و دومی با این دو ضلع در A' و B' متقاطع باشد. ثابت کنید که دو مثلث PAA' و PBB' متشابهند و نسبت $\frac{AA'}{BB'}$ مقدار ثابت است.

برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

۹۸/۳ـ ترجمهٔ از فرانسه

هرگاه x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x+\lambda=0$ و y' و y'' مقادیری باشند که نظیر مقادیر x' و x'' از روی $y=x^2+\lambda x+\lambda^2$ بدست می‌آیند، ثابت کنید که حاصل عبارت زیر مستقل از λ است:

$$E=\lambda\left(\frac{y'}{x'^3}+\frac{y''}{x''^3}\right)-2\left(\frac{y'}{x'^2}+\frac{y''}{x''^2}\right)+\left(\frac{x'}{y'}+\frac{y''}{x''}\right)$$

۹۸/۴ـ فرستنده: **احمد صبوری جهرمی** پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۱

کمترین مقدار عبارت:

$$A=x(x-2)(x-4)(x-6)$$

را بدست آورید و معلوم کنید که این کمترین مقدار درازای چه مقدار یا مقدارهایی از x حاصل می‌شود.

۹۸/۵ـ ترجمهٔ از روسی

مجموع جمله‌های یك تصاعد حسابی برابر با A ومجموع مجذورات این جمله‌ها برابر با B^2 است. قدر نسبت این تصاعد را برحسب A و B و n (تعداد جمله‌ها) بدست آورید.

۹۸/۶ـ ترجمهٔ ازروسی

مجموع n جمله از یك تصاعد هندسی را با S. مجموع معکوسات این جمله‌ها را با S' و حاصل ضرب این جمله‌هارا با P نشان می‌دهیم. مقدار P را برحسب S و S' بدست آورید.

۹۸/۷ـ ترجمهٔ از روسی

اندازه‌های میانه‌های مثلثی با اعداد ۱ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ متناسبند. ثابت کنید که این مثلث قائم‌الزاویه است و سینوسهای زاویه‌های حادهٔ آن را حساب کنید.

۹۸/۸ـ فرستنده: **محمد حسنی‌نژاد** از دبیرستان هدف شمارهٔ ۳

در مستطیل ABCD طول ضلع AB برابر با a و اندازهٔ زاویهٔ ACB برابر با θ است. از رأس B عمود BP را بر AC فرود می‌آوریم و از P موازی با CD رسم می‌کنیم تا AD را در Q قطع کند و از Q عمود QR را بر AC رسم می‌کنیم. طول پاره خط PR را برحسب a و θ بدست آورید.

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۹۸/۹ـ فرستنده: **جوادفیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی تبریز

هرگاه داشته باشیم:

$$f(x)=(x-a)^r(x-b)^s g(x)$$

$$a\neq b \text{ و } g(a)\neq 0 \text{ و } g(b)\neq 0$$

ثابت کنید که:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r}{x-a}+\frac{s}{x-b}+\frac{g'(x)}{g(x)}$$

۹۸/۱۰ـ فرستنده: **جواد فیض**

مقدار x را از معادلهٔ زیر بدست آورید:

$$\cos(3x+\alpha)\cos(3x-\alpha)+$$
$$+\cos(5x+\alpha)\cos(5x-\alpha)=\cos 2\alpha$$

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۹۸/۱۱ ـ فرستنده: **محمد علی مرادی نسب**
از دبیرستان کورش کبیر سمنان

خط Δ به معادلهٔ $2y=x$ منحنی به معادلهٔ $2y=7x-x^2$ را در دو نقطهٔ O و A قطع می‌کند. بر کمان OA از منحنی نقطهٔ P را چنان تعیین کنید که اگر از P موازی با Oy رسم کنیم تا Δ را در Q تلاقی کند، طول PQ می‌نیمم باشد.

۹۸/۱۲ـ ترجمهٔ از فرانسه

منحنی C به‌معادلهٔ $y=x^2-6x+8$ و نقطهٔ $A(30)$ مفروض است. خط Δ بر A می‌گذرد و منحنی C را در دو نقطهٔ M' و M'' قطع می‌کند. بر Δ یك نقطهٔ B وجود دارد بقسمی که:

$$\frac{\overline{BM'}}{\overline{BM''}}=-\frac{\overline{AM'}}{\overline{AM''}}$$

هرگاه Δ حول A بچرخد معادلهٔ مکان B را بدست آورید.

۹۸/۱۳ـ فرستنده: **محمد حسنی نژاد**

هرگاه مقادیر α و $\alpha\pm\frac{\pi}{3}$ سه ریشهٔ معادلهٔ

$$a\cos 2x+b\sin 2x=c\cos x+d\sin x$$

باشند، رابطه‌ای مستقل از x بین a و b و c و d بدست آورید.

۹۸/۱۴ـ فرستنده: **شهریار بهرامی اقدم** دانشجوی مدرسهٔ عالی کامپیوتر

اگر h_a و d_a به ترتیب ارتفاع رأس A و نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث ABC باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{h_a}{d_a}+\sin\frac{B-C}{2}<2$$

۹۸/۱۵ـ ترجمهٔ ازروسی

دو خط متوازی a و b و خط c که آنها را قطع می‌کند و دو نقطهٔ M و N روی خط c مفروض است. دو صفحهٔ α و β را به ترتیب بردو خط a و b طوری مروردهید که اگر A و B نقطه‌های تلاقی آنها با c باشد دو پاره خط AM و BN باهم برابر باشند.

۹۸/۱۶ـ ترجمهٔ از روسی

در داخل چهار وجهی ABCD کرهٔ به شعاع r محاط است. صفحه‌هایی موازی باوجه‌های چهار وجهی و مماس بر کره رسم می‌کنیم که ازچهار وجهی مفروض چهار چهار وجهی دیگر پدید می‌آورند. هرگاه r_1، r_2 و r_3 و r_4 شعاعهای کره‌های محاطی این چهار وجهها باشد ثابت کنید که:

$$r_1+r_2+r_3+r_4=2r$$

برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۹۸/۱۷ـ از مسائل ارسالی آقای **قوام نحوی**

از نقطهٔ $A\left(a \text{ و } \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$ خطی مماس و خطی قائم بر بیضی به معادلهٔ $x^2+3y^2=2a^2$ رسم می‌کنیم که اولی محور طولها را در P و دومی محور عرضها را در Q قطع می‌کند. معادلهٔ خط PQ را بدست آورید و ثابت کنید که بر بیضی مماس است.

۹۸/۱۸ـ در مثلث ABC طول میانهٔ AM برابر با $6\sqrt{2}$ و زاویه‌های حاده‌ای که میانه‌های BN و CP باهم و میانه‌های BN و AM باهم می‌سازند به ترتیب 45° و 60° است. طولهای ضلعهای مثلث را حساب کنید.

برای دانش‌آموزان کلاس ششم ریاضی

۹۸/۱۹ـ ترجمهٔ از روسی

سهمی به معادلهٔ $y=x^2$ بر O مبدأ مختصات و بر $B(a,a^2)$ می‌گذرد. بر کمان OB نقطهٔ A را چنان پیدا کنید که مجموع مساحتهای بین سهمی و وترهای OA و AB می‌نیمم باشد.

۹۸/۲۰ـ ترجمهٔ از فرانسه

تابع $y=x\,tg\,x$ مفروض است.

۱) منحنی C نمایش هندسی تابع را در فاصلهٔ $-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ رسم کنید.

۲) مماسی که در نقطهٔ غیر مشخص M بر منحنی رسم شود محور $y'y$ را در T قطع می‌کند. ثابت کنید که:

$$\overline{OT}=-\overline{OM}^2$$

۳) ثابت کنید که منحنی C دارای نقطه‌های عطفی است که همه بر یك خط راست واقعند و قائمهای برمنحنی در این نقاط بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرند.

۴) ثابت کنید که مماسهای در نقاط عطف برمنحنی C بر سهمی ثابتی که آن را مشخص خواهید کرد مماسند.

۹۸/۲۱ـ فرستنده : **محمد حسنی‌نژاد** از دبیرستان هدف ۳

اگر داشته باشیم:

$$\sqrt[3]{1+3\sin^2 x}=\sqrt[3]{\sin^2\frac{y}{2}}+\sqrt[3]{\cos^2\frac{y}{2}}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$(1+3tg^2x)tg\,y=\pm 2tg^3x$$

۹۸/۲۲ـ ترجمهٔ از روسی

اگر a و b و c و d اندازه‌های ضلعهای چهار ضلعی محیطی ABCD باشد، ثابت کنید که مجذور مساحت آن برابر است با:

$$abcd\sin^2\frac{B+D}{2}$$

۹۸/۲۳ـ از مسائل ارسالی آقای **قوام نحوی**

تحقیق کنید که باقیماندهٔ تقسیم عدد پنج رقمی $N=\overline{abcde}$ بر ۷ یا ۱۱ یا ۱۳ برابر است با باقیماندهٔ تقسیم عدد $M=\overline{cde}-\overline{ab}$ بر ۷ یا ۱۱ یا ۱۳ و نتیجه بگیرید که هر عدد به شکل $\overline{ab7ab}$ بر ۷ بخش پذیر است.

۹۸/۲۴ـ ترجمهٔ از فرانسه

صورت و مخرج کسر کوچکتر از یك و تحویل ناپذیر $\frac{a}{b}$ عددهای دو رقمی می‌باشند. این کسر مولد عدد اعشاری متناوب مرکبی است که دورهٔ غیر گردش آن یك رقمی و دورهٔ گردش آن سه رقمی است.

اولا مقدار یا مقادیر b را پیدا کنید.

ثانیاً به فرض آنکه b کمترین مقدار ممکن را داشته باشد و رقم غیر گردش ۸ باشد مقدار a را معلوم کنید.

۹۸/۲۵ـ ترجمهٔ از فرانسه

دایرهٔ (O) به مرکز O و به شعاع R و نقطهٔ ثابت A واقع بر آن و عدد مثبت $k\neq 1$ مفروض است. دایرهٔ متغیر (ω) را در نظر می‌گیریم که ω مرکز آن بر دایرهٔ (O) واقع و شعاع آن $r=k.\omega A$ باشد.

اگر H پای قطبی A نسبت به دایرهٔ (ω) باشد، مکان H را پیدا کنید و نتیجه بگیرید که (ω) بر دایرهٔ ثابتی عمود است.

۹۸/۲۶ـ ترجمهٔ از فرانسه

هذلولی متساوی القطرین به مرکز O و به کانونهای F و F′ مفروض است. نقطهٔ دلخواه M بر این هذلولی را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که OM واسطهٔ هندسی است بین MF و MF′

مسائل گوناگون

مسائل ترجمهٔ **مهندس زرگری** از روسی

۹۸/۲۷ـ تیکهٔ پلاستیکی سخت به وزن ۱۰ گرم را به سه جزء چنان تقسیم کرده‌ایم که وزن هریك از آنها برحسب گرم عدد صحیح است و با آنها می‌توانیم وزن اجسام از یك تا ۱۰ گرم را تعیین کنیم. وزن هریك از این اجزاء چقدر است؟

۹۸/۲۸ـ در رابطهٔ $A=1*2*3*4$ به جای ستاره‌ها علامتهای چهار عمل اصلی (وپرانتز) را چنان قراردهید که A اولا بیشترین مقدار، ثانیاً کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۹۸/۲۹ـ تعداد ۹ ترکه چوب با طولهای متفاوت از یك تا ۹ سانتیمتر موجود است. طول ضلع مربعهایی را پیدا کنید که باهمه یا بعضی از این ترکه‌ها می‌توان ساخت (مقصود مربعهایی است که پیرامون آنها ازاین ترکه‌ها تشکیل می‌شود).

۹۸/۳۰ـ با اعداد از یك تا ۹ می‌توان مربع وفقی 3×3 را به گونه‌های مختلف پر کرد. در این گونه‌ها عدد یك در چه خانه‌هایی قرار می‌گیرد؟

۹۸/۳۱ـ روی صفحه ۹ نقطه به صورت مربع 3×3 قرار گرفته‌اند و یکی از آنها با A مشخص شده است. چند مثلث می‌توان ساخت که یك رأس از هر یك از آنها A و دو رأس دیگر آنها دو نقطهٔ دیگر از ۹ نقطه باشد؟

۹۸/۳۲ـ کمترین مقدار مجموع زیر چقدر است که در آن a و b و c و d مقادیر مثبتند.

$$S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}$$

۹۸/۳۳ـ نا معادلهٔ زیر را حل کنید:

$9^n+10^n<11^n$ ، n عدد طبیعی

۹۸/۳۴ـ در چهار ضلعی چپ ABCD زاویه‌های ABC و ADC قائمه‌اند. عمودهای AA′ و CC′ را بر BD رسم می‌کنیم. ثابت کنید که $A'B=C'D$

مسائلی از منطق و ریاضی جدید

از مسائل ارسالی آقای **قوام‌نحوی**

۹۸/۳۵ـ تحقیق کنید که رابطهٔ گزاره‌ای زیر یك قانون است:

$$[p\wedge(p\Longrightarrow q)]\Longrightarrow q$$

مثال: برف می‌آید و اگر برف بیاید هوا سرداست پس‌هواسرد است.

۹۸/۳۶ـ معلوم کنید که استنتاج زیر صحیح است‌یانه:

اگر علی مجاز باشد که مسؤولیت یك قایق را بـه عهده بگیرد آنگاه او باید قایقرانی بلد باشد و هم بتواند شناکند. پس اگر او قایقرانی بلد نباشد یا نتواند شناکند آنـگاه او نمی‌تواند مسؤولیت قایق را به عهده بگیرد.

۹۸/۳۷ـ ثابت کنید که گزارهٔ مرکب زیر یك‌قانون‌است (همواره راست است):

$$(p\wedge q)\vee\{\sim[p\vee\sim q)\wedge q]\}$$

۹۸/۳۸ـ اگر X و Y دو زیرمجموعه از مجموعهٔ کل (مجموعهٔ مرجع) U و Y′ و متمم Y باشد، صحت رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$(X\cap Y)\cup[X\cup Y')\cap Y]=U$$

[دو مسئلهٔ اخیر ازگزاره‌ها و مجموعه‌ها متناظر یکدیگرند.]

۹۸/۳۹ـ ثابت کنید که‌مجموعهٔ

$$S=\{p،q،r،u،v،w\}$$

با عمل * مطابق جدول زیر، یك گروه غیر جـابجائی تشکیل می‌دهد و یك زیر گروه آن را بنویسید.

*	p	q	r	u	v	w
p	p	q	r	u	v	w
q	q	r	p	w	u	v
r	r	p	q	v	w	u
u	u	v	w	p	q	r
v	v	w	u	r	p	q
w	w	u	v	p	r	q

۹۸/۴۰ـ تحقیق کنید که مجموعهٔ باقیمانده‌های اعـداد طبیعی بر ۶ با عمل شبه جمع یك گروه تشکیل‌می‌دهد وهمچنین تحقیق کنید که مجموعه‌های {۰،۳} و {۰،۲،۴} با همان عمل زیر گروههای گروه بالا می‌باشند. [منظور از عمل شبه جمع‌آن است که به جای مجموع دوعدد باقیماندهٔ آن بر۶ راقراردهیم.]

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم‌ریاضی

۹۸/۴۱ـ مجموع دو عدد $5m$ و حاصل ضرب آنها m^2 است، این دو عدد:

الف ـ به ازای همهٔ مقادیرحقیقی m گویا می‌باشند.

ب ـ به ازای هیچ مقدار حقیقی m گویا نمی‌باشند.

ج ـ وقتی گویا هستند که m گویا باشد.

د ـ وقتی گویا هستند که m گنگ باشد.

۹۸/۴۲ـ معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$m^2x^2-2(m^2-m)x+m^2-2m+1=0$$

نسبت به x ریشهٔ مضاعف حقیقی دارد.

الف ـ به ازای همهٔ مقادیر حقیقی m

ب ـ به ازای همهٔ مقادیر حقیقی $m\neq 0$

ج ـ به ازای همهٔ مقادیر حقیقی $m\neq 0$ و $m\neq 1$

د ـ به ازای $m=1$

۹۸/۴۳ـ دو حکم زیررا در نظر می‌گیریم:

I ـ معادلهٔ $x^2+ax+a^2-1=0$ ریشهٔ حقیقی دارد

II ـ عدد حقیقی a در نامساویهای $-2\leqslant a\leqslant 2$ صدق می‌کند.

کدام یك از حکمهای زیر صحیح است:

الف ـ اگر I صحیح باشد II نیزصحیح است

ب ـ اگر II صحیح باشد I نیز صحیح است.

ج ـ I و II هردو باهم صحیح یا هردوباهم غلط می‌باشند

د ـ صحت I یا II به دیگری مربوط نیست

۹۸/۴۴ ـ تعداد عددهای متوالی مضرب ۴ ابتدا از ۱۰۰۰ که مجموع آنها ۹۹۹۰۰۰ است برابر است با:

الف ـ ۹۹۹ ب ـ ۵۰۰ ج ـ ۴۹۹ د ـ ۵۰۱

۹۸/۴۵ ـ در یك تصاعد هندسی جملهٔ اول ۱۰۰ وتعداد جمله‌ها ۳ و مجموع جمله‌ها S است بقسمی که:

$$\log S = ۲ + \log ۱۳۳$$

قدر نسبت این تصاعد برابراست با:

الف ـ ۱۲ ب ـ ۱۱ ج ـ ۱۱ یا ۱۲ ـ د ـ ۱۲ یا ۱۱ ـ

۹۸/۴۶ ـ دو نقطهٔ A و B را بر دایره‌ای انتخاب می‌کنیم و در آنها دو مماس a و b را بردایره رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه M واقع بر کمان AB عمودهای MP و MQ و MR به ترتیب بر AB و a و b رسم می‌کنیم. کدامیك ازرابطه‌های زیر صحیح است:

الف $\overline{MR}^۲ = MP \cdot MQ$

ب $\overline{MQ}^۲ = MR \cdot MP$

ج $\overline{MP}^۲ = MQ \cdot MR$

د $۲MP = MQ + MR$

۹۸/۴۷ ـ درمثلث متساوی‌الاضلاع ABC نیمدایره‌ای بقسمی محاط می‌کنیم که قطرآن بر BC واقع باشد و بر دو ضلع AB و AC به ترتیب در نقاط P و Q مماس باشد. نقطهٔ دلخواه R را برکمان PQ در نظر می‌گیریم و در آن مماسی بر نیمدایره رسم می‌کنیم که AB و AC را به ترتیب در M و N قطع می‌کند. هرگاه R کمان PQ را بپیماید کدامیك از مقادیر زیر ثابت باقی می‌ماند.

الف ـ $BM + CN$ ب ـ $BC + MN$

ج ـ $BC \cdot MN$ د ـ $BM \cdot CN$

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۹۸/۴۸ ـ برمنحنی C به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ دو نقطهٔ A و B به طولهای α و β را در نظر می‌گیریم وخطی موازی با AB برمنحنی C مماس‌می‌کنیم. طول نقطهٔ تماس برابراست با:

الف ـ $\left|\frac{\alpha - \beta}{۲}\right|$ ب ـ $\frac{\alpha + \beta}{۲}$

ج ـ $\frac{\alpha|\alpha - \beta|}{۲}$ د ـ $\frac{a(\alpha + \beta)}{۲}$

۹۸/۴۹ ـ اگرخط به معادلهٔ $y = mx - ۱$ با منحنی به معادلهٔ $y = x^۲ + x$ نقطهٔ مشترك داشته باشد، کدامیك از نابرابریهای زیرصحیح است:

الف ـ $-۱ \leq m \leq ۳$

ب ـ $-۳ \leq m \leq ۱$

ج ـ $m \geq ۳$ یا $m \leq -۱$

د ـ $m \geq ۱$ یا $m \leq -۳$

۹۸/۵۰ ـ خط Δ به معادلهٔ $y = mx - m$ و منحنی C به معادلهٔ $y = \frac{۱}{x - ۱}$ را درنظرمی‌گیریم. اگر $۱ \leq m \leq ۵$ باشدکدام یك از حکمهای زیرغلط است:

الف ـ Δ با C متقاطع است.

ب ـ Δ با C نقطهٔ مشترك دارد

ج ـ Δ با C نقطهٔ‌مشترك ندارد

د ـ Δ بر C مماس نیست.

۹۸/۵۱ ـ هرگاه برای دوزاویهٔ B و C از مثلث ABC داشته‌باشم:

$$tg B \, tg C - (tg B + tg C) = ۱$$

اندازهٔ زاویهٔ A برابر است‌با:

الف ـ ۳۰° ب ـ ۴۵° ج ـ ۶۰° د ـ ۹۰°

۹۸/۵۲ ـ اگر در مثلث ABC داشته باشیم:

$$\cos B + \cos C < \cos \frac{B - C}{۲}$$

در این صورت خواهیم داشت:

الف ـ $A > ۶۰^\circ$ ب ـ $A > ۹۰^\circ$

ج ـ $۹۰^\circ > A > ۶۰^\circ$ د ـ $A < ۶۰^\circ$

۹۸/۵۳ ـ براستوانهٔ دوار مفروض‌به ارتفاع h مخروط دواری را محیط می‌کنیم بقسمی که حجم آن‌می‌نیمم باشد. ارتفاع این مخروط برابراست‌با:

الف ـ $۲h$ ب ـ $۳h$ ج ـ $\frac{۳h}{۲}$

د ـ مقداری غیر ازسه مقدار الف، ب، ج

۹۸/۵۴ ـ خط D ودایرهٔ C غیر واقع در یك صفحه و عدد ثابت k مفروض است. نقطهٔ O را در نظر می‌گیریم‌بقسمی که در تجانس به مرکز O و به نسبت k مجانس خط Δ با دایرهٔ C متقاطع باشد. مکان نقطهٔ O عبارتست از:

الف ـ استوانهٔ دوار به محور D

ب ـ استوانهٔ مستدیر به‌مولد D

ج ـ استوانهٔ مستدیری‌که مولد آن موازی با D است.

د ـ استوانهٔ مستدیری‌که C دایرهٔ‌هادی آن‌است.

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۹۸/۵۵ـ منحنی نمایش هندسی تابع

$$y=ax+\sqrt{ax^2+1}$$

به ازای چه مقادیر حقیقی از a مجانب ندارد:

الف ـ همهٔ مقادیر a　　ب ـ مقادیر $a>0$

ج ـ مقادیر $a<0$　　د ـ هیچ مقدار از a

۸۹/۵۶ـ کدامیك از خطهای به معادله‌های زیرمجانب تابع مفروض زیر نمی‌باشد:

$$y=\frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$$

الف ـ $x=\pm 1$　　ب ـ $y=+1$

ج ـ $y=-1$　　د ـ $y=0$

۹۸/۵۷ـ مساحت سطح محصور بین منحنی‌نمایش تابع $y=x\sin x$ و محور $x'x$ وعرضهای نقاط به طولهای $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ برابر است با:

الف ـ ۱　　ب ـ $1-\frac{\pi}{2}$　　ج ـ $\frac{\pi^2}{8}$　　د ـ $1+\pi$

۹۸/۵۸ ـ اگر I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و R شعاع دایرهٔ محیطی آن باشد طول AI برابر است با:

الف ـ $4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$　　ب ـ $4R\cos\frac{A}{2}$

ج ـ $4R\sin\frac{A}{2}$　　د ـ $2R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

۹۸/۵۹ـ شعاع دایرهٔ محیطی‌مثلث ABC چهاربرابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن است. در این مثلث مقدار:

$$\cos A+\cos B+\cos C$$

برابر است‌با

الف ـ $\frac{4}{5}$　　ب ـ $\frac{5}{4}$　　ج ـ $\frac{3}{4}$　　د ـ $\frac{4}{3}$

۹۸/۶۰ ـ برای آنکه مقدار تقریبی نقصانی کسر $\frac{n+13}{n-2}$ با تقریب ۰/۱ برابربا ۱/۸ باشد، مقدار عددطبیعی n باید برابرباشد با:

الف ـ فقط ۱۹　　ب ـ فقط ۲۰

ج ـ ۱۹ یا ۲۰

د ـ هر عدد طبیعی بزرگتر از ۲۰

۹۸/۶۱ـ کوچکترین کسری که چون آن را برهریك ازکسرهای $\frac{11}{24}$ و $\frac{13}{60}$ و $\frac{65}{96}$ تقسیم کنیم خارج قسمت عددی طبیعی‌باشد برابراست‌با:

الف ـ $\frac{480}{143}$　　ب ـ $\frac{96}{143}$　　ج ـ $\frac{715}{24}$　　د ـ $\frac{715}{12}$

۹۸/۶۲ ـ دایرهٔ C به مرکز O و به قطر AA' مفروض است. براین قطر دو نقطهٔ F و F' را به یك فاصله از O انتخاب می‌کنیم و از نقطهٔ اختیاری M واقع بردایره به F و F' وصل می‌کنیم.

MF و MF' دایره را در H و H' تلاقی می‌کنند. خط Δ که در H عمود بر HH' اخراج شود:

الف ـ دارای امتداد ثابت است

ب ـ برنقطهٔ ثابت می‌گذرد

ج ـ برخط ثابتی عمود است

د ـ با AA' زاویهٔ ثابت می‌سازد

یك مسئله برای تفنن

ترجمهٔ: **مهدی تراشی** دانشجوی مقیم آمریکا

۵ نفرطراح کامپیوتر (Computer programmer) در همسایگی یکدیگر درکوچه‌ای زندگی می‌کنند. شمارهٔ منزلهای ایشان به ترتیب ازچپ به راست ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۰۹ است. هریك از آنان از نژاد مختلفی است به علاوه نوع اتومبیلش‌هم با دیگران اختلاف دارد. نوع حیوان، نوشیدنی و رنگ در منزل هریك نیز از دیگران متفاوت است.

ایرلندی در خانهٔ قرمز زندگی می‌کند. یونانی صاحب سگ است. قهوه در خانهٔ سبز نوشیده می‌شود. سویسی چای می‌نوشد. خانهٔ سبز همسایهٔ دست راستی خانهٔ سفید است. رانندهٔ فورد صاحب گربه است، رانندهٔ شورولت درخانهٔ زرد زندگی می‌کند. نوشیدنی‌دلخواه ساکن‌منزل‌وسطی آب است. دانمارکی در اولین خانهٔ سمت چپ‌زندگی می‌کند. خرگوش درهمسایگی راننده شورولت زندگی می‌کند. رانندهٔ بیوك شیر می‌نوشد. فرانسوی رلزریس می‌راند. خانهٔ آبی‌متصل به خانهٔ دانمارکی واقع شده است. رانندهٔ دوج‌در همسایگی‌صاحب لاك‌پشت‌زندگی می‌کند.

اکنون به پرسشهای زیرپاسخ دهید:

۱ـ طوطی مال کیست؟

۲ـ شرابخوار کیست؟

۳ـ کدام‌رنگ، نژاد، اتومبیل، حیوان و نوشیدنی به کدامیك از شمارهٔ منزلها تعلق دارد؟

مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث دوم، سال تحصیلی ۵۲-۱۳۵۱ (اسفند ۱۳۵۱)

کلاس ششم ریاضی

جبر

دبیرستان ارس

دبیر: حافظ قرآن ـ فرستنده: تربتی

ـ تابع $y=\frac{ax+b}{(x-2)^2}$ مفروض است. a و b را طوری حساب کنید که تابع در نقطه‌ای روی محور عرضها با خط: $2y-2x-1=0$ مماس گردد؛ سپس جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع $y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ رارسم کنید ومختصات نقطهٔ عطف وجهت تحدب وتقعر منحنی نمایش آن‌را تعیین کنید.

ـ a راچنان پیدا کنید که منحنی زیر مجانب خود را در نقطه‌ای به‌طول یك قطع کند:

$$y=\frac{(x+a)^3}{x^2-1}$$

دبیرستان پانزده بهمن رودسر

مشتق تابع زیررا حساب کنید:

$$y=\sin^{2n}(4n+1)x\times tg^n(2x+1)x+$$
$$+(\arcsin x+\operatorname{Arccos} x)^n+\sin^n x\cos nx$$

دبیرستان شاهین

دبیر: بحرانی ـ فرستنده: خسرو دادور

ـ مشتق سوم تابع زیررا معین کنید:

$$y=f(x)=tg\,\operatorname{arctg} x(Lx)^{Lx}$$

ـ حدتابع زیررا به‌ازاء $x\to\pi$ محاسبه کنید:

$$y=f(x)=\lim(L\sec x)^{tg\frac{x}{2}}$$

گروه فرهنگی شهریارقم

دبیر: صدری ـ فرستنده: جواد برقعی‌رضوی

ـ تابع $y=\frac{x^2+2ax+a+2}{x^2-1}$ مفروض است. اولا a راچنان تعیین کنید که مجموع ماکزیمم ومی‌نیمم تابع برابر (-3) گردد. ثانیاً جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع: $y=\frac{(x+2)^2}{x^2-1}$ رارسم کنید. ثالثاً معادلهٔ قائم بر منحنی را در نقطه‌ای که مجانب افقیش را قطع می‌کند وهمچنین معادلات مماسهایی راکه از مبدأ مختصات می‌توان بر منحنی تابع فوق رسم کرد بنویسید. رابعاً به ازاء مقادیر مختلف m ریشه های معادلهٔ زیررا بااعداد ۲و۲ـ مقایسه کنید:

$$(m-1)x^2-4x-m-4=0$$

ـ تابع زیرمفروض است:

$$y^2-x(ay+1)+1-a=0$$

اولا a راچنان تعیین کنید که $\omega(-\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2})$ مرکز تقارن منحنی تابع فوق باشد. ثانیاً ثابت کنید خط (D) به‌معادلهٔ $y=p-x$ منحنی (C) نمایش تابع $y^2-xy-x-1=0$ راهمواره دردونقطه قطع می‌کند. ثالثاً اگر نقاط تقاطع خط (D) ومنحنی (C) راA وB ووسط پاره خط AB راM وقرینهٔ M نسبت به‌نیمساز ربع اول وسوم را M′ بنامیم مطلوبست مکان هندسی M′ وقتی p تغییر می‌کند.

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر : مظاهری ـ فرستنده : لطف‌الله معینی

ـ تابع زیرمفروض است. a و b را طوری تعیین کنید که خط $y=x+2$ مجانب مایل آن باشد:

$$y=\frac{ax^3}{(x-b)^2}$$

وسپس منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ را رسم کنید .

ـ در وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم :

$2x^3-mx^2-1=0$ بحث کنید و اگر α و β و γ ریشه های این معادلهٔ درجهٔ سوم باشند مقدار $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ را برحسب m پیدا کنید .

ـ تابع اولیهٔ $y=\frac{x^3-3x+3}{(x-1)^2}$ را حساب کنید و سطح محصور بین منحنی و دو خط $x=-1$ و $x=0$ را پیدا کنید .

مثلثات

دبیرستان ارس

دبیر: حافظ قرآن ـ فرستنده : تربتی

ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را بین صفر و 2π رسم کنید :

$$y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$$

ـ معادلهٔ زیررا حل و بحث کنید:

$$\sin^2 x-2m\sin x\cos x-m+1=0 \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{2}>x>0$$

ـ دستگاه زیررا حل کنید:

$$\begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \cos 2x+\cos 2y=0\end{cases}$$

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر: مظاهری ـ فرستنده: لطف‌الله معینی

ـ معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل و بحث کنید درصورتی که:

$$\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$$

$$\sqrt{2}(\sin x-\cos x)-2m\sin 2x+m-1=0$$

ـ در مثلثی $a=\frac{b-c}{\cos\alpha}$ می‌باشد. ثابت کنید:

$$tg\alpha=\frac{2\sqrt{bc}\sin\frac{A}{2}}{b-c}$$

ـ درمثلث ABC زاویهٔ $A=30^\circ$ ورابطهٔ : $d_a+d'_a=Kh_a$ بین نیمساز داخلی وخارجی وارتفاع رأس A برقرار است. معادله‌ای برحسب خطوط مثلثاتی $\frac{B-C}{2}$ تشکیل دهید. سپس شرط وجود جواب راپیدا کنید.

حساب استدلالی

دبیرستان ارس

دبیر: حافظ قرآن ـ فرستنده : تربتی

ـ ثابت کنید به‌ازاء جمیع مقادیر n عدد : $16^n-2^{2n+1}+1$ بر ۹ قابل تقسیم است.

ـ مطلوبست تعیین یك‌عدد چهار رقمی به قسمی که چهار برابر مقلوب خودش باشد یعنی:

$$\overline{abcd}=4\overline{dcba}$$

ـ مطلوبست تعیین دوعدد دورقمی که تفاضل حاصل‌ضرب ومجموع آنها ۲۲۰ باشد:

$$xy-(x+y)=220$$

دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر: جعفری ـ فرستنده: حسین غیاثی

ـ سلسلهٔ طبیعی اعدادرا ازیك تایك عدد چهار رقمی N بدون جدا کردن ارقام درپی یکدیگر نوشته‌ایم و می‌دانیم تعداد ارقامی که بکاررفته است K برابر عدد N است. N و K رامحاسبه کنید. (K عددیست صحیح).

ـ عدد $A=999\ldots99$ کـه شامل n رقم ۹ می‌باشد مفروض است . ثابت کنید مجموع ارقام عدد A^2 برابر $9n$ است .

ـ عددی تعیین کنید که باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۲۳ برابر ۱۸ بوده وهرگاه آنرا بر ۱۹ تقسیم کنیم باقیمانده برابر خارج قسمت باشد.

گروه فرهنگی شهریارقم

دبیر: صدری ـ فرستنده : جواد برقعی رضوی

ـ عدد چهار رقمی $\overline{mcdu}$ را چنان تعیین کنید که در

رابطهٔ $\overline{mcdu}=8\times\overline{mc^2}$ صدق کند.

ـ مطلوبست تعیین دوعدد که بین بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها D و کوچکترین مضـرب مشترکشان M رابطهٔ $MD+M+D=564$ برقرار باشد.

ـ اعداد M وN، $(M>N)$ ورقم a رادرنظر می‌گیریم. ثابت‌کنید شرطلازم و کافی برای آنکه عدد $p=\overline{Ma}$ بر عدد $q=\overline{N1}$ قابل‌قسمت باشدآن است که $M-a\times N$ بر q قابل قسمت باشد.

ـ کسر $\frac{a}{a^2+a+1}$ که درآن a عددیست صحیح‌مفروض است:

اولاـ ثابت‌کنید کسر تحویل ناپذیراست.

ثانیاـ ثابت کنید کسر فـوق همواره مولد عدد اعشاری متناوب ساده است.

ثالثاـ aراچنان تعیین کنید که کسرفوق مولد عدداعشاری متناوب ۰/۰۹۸۹۰۱۰۹۸۹۰۱۰۰۰۰ باشد.

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر: حبیب‌اللهی ـ فرستنده: لطف‌الله معینی

ـ رقم یکان عدد زیررا پیداکنید:

$44^{n+2}+178^{n+3}$

ـ اولاکلیهٔ مقسوم علیه‌های عدد ۲۱۶ را بنویسید، ثانیاً اعداد صحیح ومثبت a وb راطوری تعیین‌کنید که:

$m-3D=216$ و $10<D<15$

باشد (m کوچکترین مضرب‌وD بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b است).

ـ کسر $\frac{4n+1}{n(4n-1)}$ مفروض‌است. اولاثابت‌کنید به‌ازاء جمیع مقادیر صحیح و مثبت n کسر فوق تحویل ناپذیر است، ثانیاً n را چنان تعیین‌کنید که‌کسر مفروض مولد عدد اعشاری متناوب مرکب ۰/۲۸۳۳۰۰۰۰ باشد.

مسائل رقومی‌و ترسیمی

دبیرستان البرز

فرستنده: مناف شریف‌زاده

الف: هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر ومقیاس ۱:۱ است. محورهای کاغذ را رسم‌کنید ونقطهٔ a_6 را برمحور اطول وبه‌فاصلهٔ ۶ بالای مرکز اختیارکنید.

۱ـ نقطهٔ b_0 رابر محور اقصرسمت چپ‌مرکزطوری‌پیدا کنیدکه $AB=10$ باشد.

۲ـ برخط a_6b_0 صفحهٔ P رابه اساس یك مرور داده و جوابی‌را اختیارکنیدکه افقیهٔ‌رقوم ۱ـ آن محور اطول‌راپائین مرکز کاغذ قطع کند.

۳ـ خط a_6b_{12} راکه تصویرش برمحور اطول‌واقع وبر خط a_6b_0 عموداست رسم‌کرده ونقطهٔ d_{12} را مشخص‌کنید.

۴ـ ملخص مستطیل ABCD راکه BD یك قطرآنست کامل‌کنید.

۵ ـ نقطهٔ o_1 را در صفحهٔ P سمت راست محور اطول چنان بیابیدکه $AOB=90^\circ$ باشد.

۶ـ یك‌مقیاس شیب‌ازصفحهٔ مستطیل ABCDرا دربالای صفحهٔ‌کاغذ رسم‌کرده وصفحهٔ Q راموازی این‌صفحه وبه فاصلهٔ ۵ درزیرآن رسم‌کنید.

۷ـ نقطهٔ برخورد خط a_6o_1 رابا صفحهٔ Q یافته واین نقطه رامرکز متوازی‌السطوحی فرض‌کنیدکه قاعده‌اش مستطیل ABCD است. ملخص متوازی‌السطوح راکامل‌کنید و خطوط مرئی ومخفی‌آنرا مشخص‌کنید،

ب: هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ جبهیه‌ای رسم‌کنیدکه یك‌خط قائم، یك خط منتصب و یك خط نیمرخ مفروض را قطع‌کند.

۲ـ قرینهٔ خط‌الارض رانسبت‌به‌صفحهٔ $P\alpha Q'$ رسم‌کنید.

۳ـ آثار صفحهٔ مواجه PQ' را که به موازات صفحهٔ نیمساز فرجهٔ اول می‌باشد رسم کرده و فصل مشترك این صفحه را با صفحهٔ RPS که آثارش بر یك استقامند پیدا کنید.

۴ـ نقطهٔ aa' ودوخط متنافر DD' و$\Delta\Delta'$ مفروض‌اند. از aa' خطی متعامد با DD' ومتقاطع‌با $\Delta\Delta'$ رسم‌کنید.

دبیرستان شیخ بهائی

دبیر: جلالی ـ فرستنده: لطف‌الله معینی

الف‌ـ هندسهٔ رقومی:

۱ـ محورهای اطول واقصرکاغذ را رسم‌کنید، صفحهٔ P باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۳۰ می سازد مقیاس شیب‌آن را در طرف چپ‌کاغذ باترقی رقوم از پائین به بالا به موازات محور اطول کاغذرسم‌کنید بطوری که‌افقیهٔ رقوم۲ آن محور اقصرکاغذ باشد.

۲ـ نقطهٔ A' راروی محور اطول‌کاغذ وبه فاصلهٔ ۶ از مرکز کاغذ ودرپائین‌آن اختیار نمائید. این نقطه تسطیح نقطهٔ A درصفحهٔ P حول افقیهٔ رقوم ۲ آن می‌باشد، آن را ترفیع نموده ورقوم A را حساب‌کنید. (رقوم A مثبت)

۳ـ ازنقطهٔ a_5 که پس‌از ترفیع A' بدست می‌آید خطی درصفحهٔ P رسم‌کنیدکه زاویهٔ حقیقی‌آن باافقیه‌های این‌صفحه برابر 45° بوده ومحور اقصرکاغذ را درنقطه‌ای مانند f_2 طرف راست مرکز قطع‌کند.

۴ـ ملخص مثلث ABF واقع درصفحهٔ P رارسم نمائید بطوری که یك ضلع آن a_5f_2 و ضلع BF افقی و شعاع دایرهٔ

محاطی داخلی مثلث برابر با ۲ و b طرف چپ محور اطول باشد.

۵ـ از نقطهٔ a_5 خطی برصفحهٔ P عمود نموده وازاین خط وخط a_5f_2 صفحهٔ Q را مرور داده ویك مقیاس شیب از آن را درپائین محور اقصر رسم نمائید.

۶ـ ازنقطهٔ a_5 خط a_5d_2 رابه شیب $\frac{3}{4}$ در صفحهٔ Q رسم نمائید بطوری که d درطرف چپ محور اطول باشد. سپس بر روی دوضلع AD و AB متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم و رأس C رامشخص نمائید.

۷ـ ملخص متوازی‌السطوحی راکه یك قاعده‌اش متوازی‌الاضلاع ABCD و یك یالش BF باشد رسم وخطوط مرئی و مخفی را مشخص نمایید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ نقطهٔ A درناحیهٔ اول واقع است، بعدآن ۴ وفاصله‌اش ازصفحهٔ نیمساز فرجهٔ اول ۳ است. ملخص آن‌رارسم نمایید (ارتفاع A بیشتراست).

۲ـ خطی موازی صفحهٔ نیمساز فرجهٔ اول وسوم رسم کنید که قائم مفروضی را قطع کرده وازنقطهٔ مفروض aa' گذشته باشد.

۳ـ یك خط جبهی ویك خط موازی صفحهٔ نیمساز فرجهٔ دوم مفروض است. آثار صفحه‌ای که براین دو خط متقاطع می‌گذرد رسم کنید.

۴ـ دوصفحهٔ مواجه دلخواه اختیار کرده و فصل مشترك آن دوصفحه رارسم کنید.

۵ـ نقطه bb' رابه بعد ۳ و ارتفاع ۲ ونقطهٔ cc' رابه بعد ۶ و ارتفاع ۳ اختیار کنید بطوری که فاصلهٔ رابطهای آن دو نقطه ازهم برابر ۳ و bb' در طرف چپ cc' باشد. مطلوب است رسم ملخص مثلث متساوی‌الساقین ABC که درآن $AB=AC$ ونقطهٔ A درصفحهٔ افق وبعدآن ۲ باشد.

دبیرستان نظام ومهر باختر

دبیر: بنائی

الف ـ هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ محورهای اطول واقصر کاغذ را رسم کنید.

۱ـ دوصفحهٔ عمود برهم P و Q را بااساسهای یك بقسمی رسم کنید که محوراقصر کاغذ افقیهٔ صفردوصفحه بوده وترقی رقوم صفحهٔ P از پائین به‌بالا باشد. $(P \perp Q)$ و همچنین دو صفحهٔ عمود برهم R و T را به اساسهای یك بقسمی رسم کنید که محور اطول افقیهٔ صفر هردوصفحه بوده وترقی رقوم صفحهٔ T از چپ به‌راست باشد $(R \perp T)$.

۲ـ نقطهٔ o_0 رادراین چهارصفحه انتخاب کنید وافقیه‌های ۳ این چهار صفحه همدیگررا درچهار نقطهٔ a_3، b_3، c_3 و d_3 قطع می‌کند بدست‌آورید و مساحت مربع ABCD را محاسبه کنید ونقطهٔ a_3 دردوصفحهٔ P و T (ناحیه اول) بوده و تصاویر a و b و c و d درجهت دایرهٔ مثلثاتی می‌باشد.

۳ـ وسعت حقیقی مثلثهای OAB و OBC و OCD و ODA را درتسطیح درصفحهٔ افقی ۳ نشان دهید ومساحت مثلث OAB را محاسبه کنید.

۴ـ از نقطهٔ o_0 صفحهٔ Z را به شیب $p=\sqrt{2}cm$ بقسمی رسم کنید که برصفحهٔ Q عمودباشد $(Z \perp Q)$ ویك مقیاس شیب آنرا دربالاوسمت راست کاغذ رسم کنید ونقطهٔ s_9 رادرصفحهٔ Z طوری بدست آورید که روی، محور اطول کاغذ باشد (اگر نتوانستید نقطهٔ s را بالای مرکز به‌فاصله ۹ سانتیمتر انتخاب کنید).

۵ـ ملخص هرم SABCD رابدست‌آورید ومقطع این هرم را باصفحهٔ افقی ۶ که به ترتیب نقاط E و F و G و H است بدست‌آورید وحجم هرم SABCD رامحاسبه کنید.

۶ـ ملخص هرم ناقص ABCDEFGH را بدست آورید وآنرا مرئی ومخفی نمائید.

۷ـ چهارصفحهٔ P'، Q'، T' و R' به ترتیب به موازات صفحات P، Q، T و R به فاصلهٔ $\sqrt{2}$ در بالای آنها رسم کنید سپس نقطهٔ m_2 را بقسمی بدست‌آورید که ازچهار صفحهٔ P، Q، T و R به‌یك فاصله باشد وفاصلهٔ حقیقی $\overline{OM}$ را بدست‌آورید.

۸ـ اندازهٔ مسحطهٔ بین دوصفحهٔ P و T را بدست‌آورید وبا β نمایش دهید.

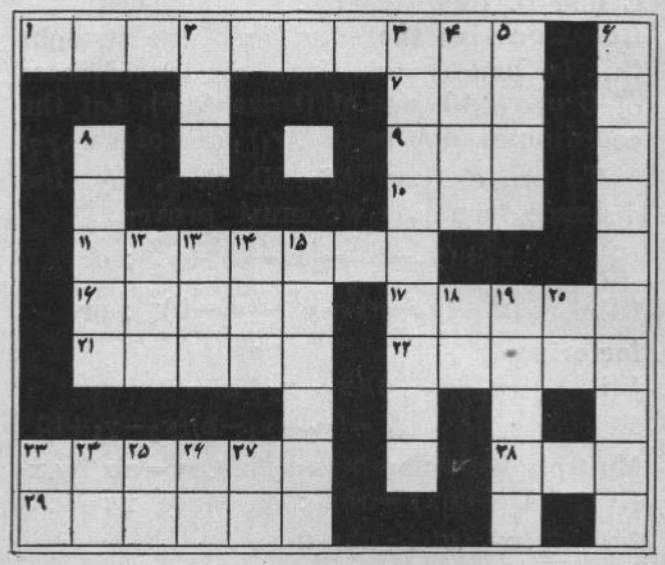
ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ نقطهٔ aa' را بقسمی بدست‌آورید که فاصله‌اش از xy برابر $R=5cm$ وهمچنین فاصلهٔ این نقطه تا نیمساز ربع اول دوبرابر ارتفاعش باشد.

۲ـ روی خط غیرمشخص dd' نقطهٔ cc' رابقسمی بدست آورید که فاصله‌اش از xy برابر $R=5\ cm$ باشد (از دو جواب آنرا انتخاب کنید که بعدش بیشتر باشد).

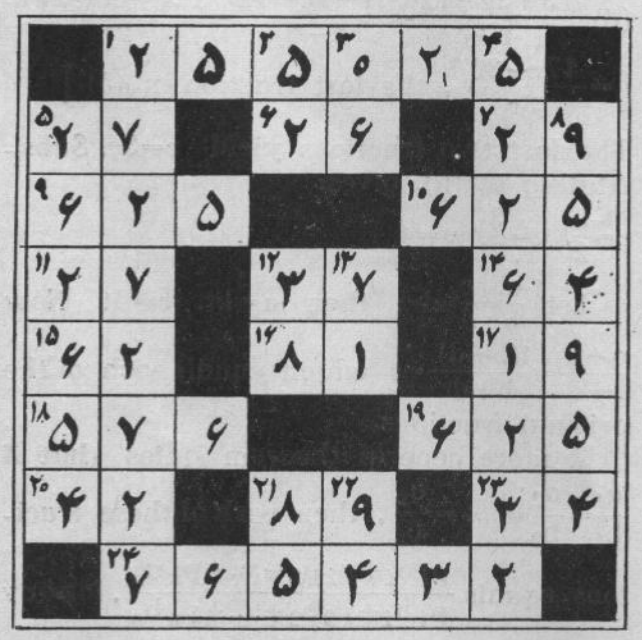
جدول اعداد

طرح ازجواد فیض دانشجوی دانشکدهٔ فنی‌دانشگاه تبریز (تاریخ وصول به‌دفترمجله : ۱۳۵۰/۱/۱۴)



افقی : ۱ـ بزرگترین عدد با رقمهـای متفاوت . ۷ـ بزرگترین عددی که باسه‌رقم ۱، ۲، ۳ نوشته می‌شود ومضرب ۱۱ است. ۹ـ مقدار عدد ۳۵ در مبنای ۴. ۱۲ـ از عدد ۹ افقی به اندازهٔ نصف رقم‌یکان خود بزرگتراست. ۱۱ـ عددی‌بارقمهای متفاوت به شکل $\overline{abcdefg}$ بقسمی که b و a، c به‌همین‌ترتیب تصاعد هندسی و d ، e ، f و g به همین ترتیب تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند و $b>g$ وهیچیك از رقمها صفر یا ۵ نیست . ۱۶ـ خودش وثلثش به‌شکل $\overline{ababa}$ است که $b=3a$ می‌باشد. ۱۷ـ پنج‌رقمی‌است‌وچون‌با۵جمع‌شودبرابر با $(2n+1)\times 10^n$ گردد. ۲۱ـ عدد زوج به‌شکل $\overline{ab0cd}$ که $\overline{cd}$ توان‌چهارم و هریك ازعددهای a و b و $\overline{ab}$ توان دوم است. ۲۲ـ اگر رقم سمت چپ‌آن رابرداشته درسمت راست‌آن قراردهیم کوچکترین عدد بارقمهای زوج متفاوت‌بدست‌آید. ۲۳ـ کوچکترین‌عددشش رقمی‌مضرب ده وبارقمهای متفاوت. ۲۸ـ ۲واحد بیشتر ازعددی که توان سوم رقم یکان خودش‌است وبیش‌از ۴مقسوم علیه‌دارد. ۲۹ـ اگرمبنای عدد نویسی x باشد این‌عدد برابر خواهد بود با: $x^5+x^4+x^3+x^2+2x$

قائم : ۲ـ توان چهارم رقم‌یکان خود . ۳ـ به صورت $\overline{aaaabbbbb}$ که b توانی از a است. ۴ـ به صورت علمی $1/3\times 10^3$ نوشته می‌شود. ۵ـ رقمهایش به ترتیب چهارجملهٔ اول از رشتهٔ $u_{n+1}=u_n+n$ می‌باشند. ۶ـ کوچکترین‌عدد ده رقمی بارقمهای متفاوت. ۸ـ به غیرازرقم یکان سایررقمهای آن باهم برابرند ومجموع رقمهایش توان چهارم است . ۱۲ـ مجموع رقمهای‌آن ۲۷ است. ۱۳ـ یکدهم عدد ۴ قائم. ۱۴ـ مجموع رقمهایش ۱۲ و مضربی از ۹۷ است . ۱۵ـ به صورت $\overline{abc}\times 10^3$ است که هریك ازعددهای $\overline{bc}$ و a مجـذور کامل است . ۱۸ـ متمم حسابی چهار برابر رقم یکان خود . ۱۹ـ کوچکترین عددی که رقم سمت چپ‌آن ۹ و چهار رقم دیگرش متفاوتند. ۲۰ـ دوواحد بیشتراز عدد۱۸ قائم. ۲۳ـ ۹برابرآن عددی است با رقمهای یکسان. ۲۴ـ۵ برابرش ۵ واحد بیشتر از توانی‌از ۱۰ است. ۲۵ـ مقلوب عدد۱۳ قائم. ۲۶ـ سه‌واحد کمتر از چهار برابر عدد ۲۳ قائم . ۲۷ـ مقلوبش مجذور رقم یکان خویش‌است .



حل‌جدول شمارهٔ‌قبل

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 121 - Prove: If a straight line intersects the graph of $xy=k$ at poiots A and B and the coordinate axes in points C and D, then $AC=DB$.

Solution: Let the equation of the straight line be $bx+ay=ab$. Then the coordinates of C are $(0,b)$ and of D are $(a,0)$. Let the coordinates of A be (x_1, y_1), and of $B(x_2,y_2)$

To prove that $AC=BD$, then, by the distance formulas we must prove:

(i) $x_1^2+(y_1-b)^2=(x_2-a)^2+y_2^2$; or

(ii) $x_1^2-(x_2-a)^2=y_2^2-(y_1-b)^2$; or

factoring,

(iii) $(x_1+x_2-a)(x_1-x_2+a)=$
$=(y_2+y_1-b)(y_2-y_1+b)$

Multiply both members of $bx+ay=ab$ by x:

(iv) $bx^2+axy=abx$; or, since $xy=k$,

(v) $bx^2-abx+ak=0$

Now the roots of equation (v) are x_1 and x_2, the abscissas of A and B. By the the formula for the sum of the roots:

(vi) $x_1+x_2=a$. Similarly it can be shown that:

(vii) $y_1+y_2=b$.

Substituting (vi) and (vii) into (iii) verifies that (iii) is true. Then, since the steps are reversible, $AC=BD$.

Problem 122– Towns A and B are located on a straight river, A being 24 miles down stream from B. The river is navigable for only half the distance so that a person can row only 12 miles and must walk the other 12. Under these circumstances a man can travel from B to A in five hours, and from A to B in seven hours. If there were no current, the journey would require $5\frac{2}{3}$ hours. Find his rate of walking, his rate of rowing. and the rate of the current.

Solution: Let M be the midpoint of $\overline{AB}$, and let w=rate of walking, r=rate of rowing in still water, and c=rate of the currnet. Each term in the following equations represents the time taken to travel a designated distance:

(1) $\dfrac{\text{Row: B to M}}{\dfrac{12}{r+c}} + \dfrac{\text{Walk:M to A}}{\dfrac{12}{w}} = \dfrac{\text{Total Time}}{5}$

(2) $\dfrac{\text{Walk:A to M}}{\dfrac{12}{w}} + \dfrac{\text{Row:M to B}}{\dfrac{12}{r-c}} = 7$

(3) $\dfrac{\text{Walk}}{\dfrac{12}{w}} + \dfrac{\text{Row}}{\dfrac{12}{r}} = \dfrac{17}{3}$

Solve for $\frac{12}{w}$ in each:

(4) $\dfrac{12}{w}=5-\dfrac{12}{r+c}=7-\dfrac{12}{r-c}=\dfrac{17}{3}-\dfrac{12}{r}$; therefore

(5) $\dfrac{12}{w}=\dfrac{5r+5c-12}{r+c}=\dfrac{7r-7c-12}{r-c}=\dfrac{17r-36}{3r}$

Use the following theorm in proportions:

If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, then either fraction is equal to $\frac{a+c}{b+d}$, i.e. equals (numerator+numerator) over (denominator+denominator).

Apply this to the second and third fractions in (5).

(6) $\dfrac{5+5c-12}{r+c}=\dfrac{7r-7c-12}{r-c}=\dfrac{12r-2c-24}{2r}$

$\left[=\dfrac{17r-36}{3r}\right.$, the last fraction in (5).$\left.\right]$

The last two fractions yield $r=3c$. Substituting in (5). gives:

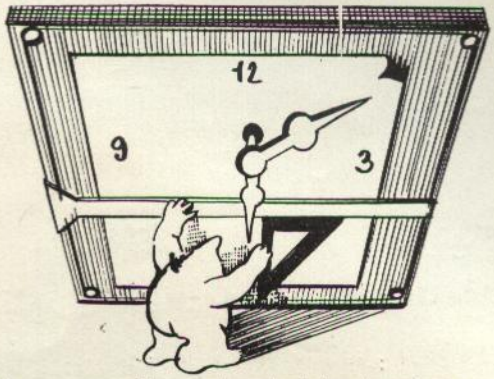
$r=\frac{9}{2}$, $c=\frac{3}{2}$, $w=4$

Let $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=t$; then $a=bt$, $c=dt$. Now $\frac{a+c}{b+d}=\frac{t(b+d)}{b+d}=t$ which equals each of the original fractions.

A more general theorem states that if $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$, then each of these fractions equals $\dfrac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}{p_1b_1+p_2b_2+\ldots+p_nb_n}$, for any p_i,s, provided that the denominator does not become zero.

سرگرمیهای ریاضی

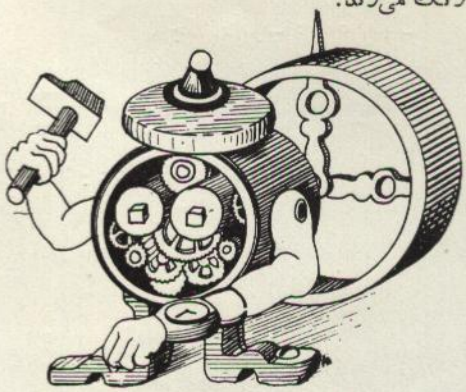
۱ـ سرگرمی مندرج درصفحهٔ ۲۱۱ یکان ۹۷ وپاسخ آن



در مدت ۲۴ ساعت ابتدا از ظهر یك‌روز تاظهر روز بعد ازآن، دو عقربهٔ ساعت چندبار با یکدیگر زاویهٔ قائمه می‌سازند؟

پاسخـ بین‌هردو بارمتوالی انطباق عقربه‌ها آنها دوبار با یکدیگر زاویهٔ قائمه می‌سازند. درمدت ۱۲ ساعت ابتدا ازظهر عقربه‌ها ۱۱ باربرهم منطبق‌می‌شوند. پس درمدت ۱۲ساعت۲۲ بار ودرمدت۲۴ساعت ۴۴ بارعقربه‌هاباهم زاویهٔ قائمه‌می‌سازند.

۲ـ ساعتی در ابتدای هرساعت‌به تعداد ساعاتی که‌از۱۲ گذشته است زنگ می‌زند.



این ساعت برای آنکه ساعت ۵ را اعلام کند ۶ ثانیه و برای‌آنکه ساعت ۹ را اعلام کند ۱۲ ثانیه وقت می‌گیرد. چه مدت از روز صرف زنگ‌زدن ساعت می‌شود؟

۳ـ رقمهای X و Y و Z را در جمع زیر بیابید:

```
XXXX+
YYYY
ZZZZ
-----
YXXXZ
```

۴ـ رانندهٔ یك اتومبیل باسرعت ثابت ازشهر خارج شده و با همان سرعت جاده‌ای را پیمود. نخست به فاصله‌ای ازشهر رسید که به‌حسب کیلومترعددی دوررقمی بود. یك ساعت بعد از آن به فاصله‌ای رسید که عددی دو رقمی مقلوب اولی بود. یك ساعت بعد ازاین به فاصله‌ای رسید سه رقمی که از همان‌رقمهای دوعدد قبلی به علاوهٔ یك رقم صفر بین آنها تشکیل شده بود. سرعت اتومبیل چقدر بوده است؟

۵ـ در جمع و تفریق زیر هرحرف نماینده یك‌رقم است و حرفهای متفاوت نماینده رقمهای متفاوت می‌باشند. هرحرف نماینده چه رقمی است؟

```
XYZ+        XYZ−
 AB          AB
-----       -----
CDEF        BGA
```

۶ـ در ضرب زیرهرستاره نمایندهٔ یك رقم اول ، یعنی یکی از رقمهای ۲،۳،۵،۷ است. این رقمها را پیدا کنید:

```
***×
 **
-----
****
****
-----
*****
```