یکان

مجله ریاضیات

دورهٔ دهم ، شمارهٔ : ۴ | شمارهٔ مسلسل : ۹۷ | دی ۱۳۵۲

در این شماره:

بها : ۳۰ ریال

دربارهٔ سؤالهای کنکور

از علاقمندان به یکان که قسمتی یا تمام سؤالهای کنکورهای مختلف را در اختیار دارند، تقاضا می‌شود درصورت تمایل آنها را برای درج در یکان سال در اختیار مجله قرار دهند. ذکر نام واگذارکنندگان سؤالها بستگی به تمایل ایشان خواهد داشت، و اگر خواسته باشند از چاپ نام ایشان خودداری خواهد شد واگرشرایط دیگری هم داشته باشندمی‌توانند در میان بگذارند.

پنجمین کنفرانس ریاضی کشور

پنجمین کنفرانس ریاضی کشور از ۸ تا ۱۱ فروردین ۱۳۵۳ در دانشگاه پهلوی شیراز برگزار خواهدشد.

علاقمندان مایل به شرکت‌درکنفرانس‌برای کسب‌اطلاعات به نشانی «دانشگاه پهلوی شیراز، کمیتهٔ برگزاری پنجمین کنفرانس ریاضی» مکاتبه فرمایند.

ساعات کار دفتر مجلهٔ یکان

همه روزه غیر از روزهای تعطیل صبحها ازساعت ۹ تا ساعت ۱۲ عصرها از ساعت ۱۷ تاساعت ۱۹

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲
هرسال هشت شماره منتشر می‌شود
دورهٔ دهم ـ شمارهٔ‌چهارم‌ـشمارهٔ مسلسل :۹۷
دی ۱۳۵۲

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملک‌یزدی

نشانی‌اداره:
تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

حساب بانکی: حساب جاری۳۰۹۵شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

YEKAN
Mathematical Magazine
Editor : MOS'HAFI Abdolhossein
Volume X, number 4 . Jan. 1974
subscription : 4$
TEHERAN_P.O.B. 2463
چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است‌که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی‌که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

از یادداشتهای سفر بلژیك

عبدالحسین مصحفی

سربلند از افتخارات ملی

به‌اتفاق دوست دانشمند آقای غلامرضا عسجدی به‌بروکسل رسیده‌ایم. مراسم وتشریفات معرفی‌وشناسایی انجام گرفته‌است. اولین مرحله ازبرنامهٔ مطالعاتی‌ما شرکت وبازدید از سمیناری مربوط به ریاضی جدید است که علاوه بر متخصصان بلژیکی افرادی ازکشورهای مختلف دیگرنیز درآن‌شرکت دارند؛ از: اسپانیا، پرتقال، برزیل، پرو، زئیر (کنگو)، اوراگوئه، ویتنام، ... درخاتمهٔ بحث سمینار، ازبرنامه‌های ریاضی درکشورما پرسش می‌شود وماضمن توضیحات، کتابهای ریاضی درسی‌خودمان راکه همراه آورده‌ایم ارائه می‌دهیم واشاره می‌کنیم که آغاز کتابهااز طرف راست‌است. دراولین صفحهٔ کتابها، نگاههای‌آنان روی تمثال شاهنشاه آریامهر متوقف می شود و لفظ «شاه» راکه ادا می‌کنند مابه خوبی می‌شنویم. ملاحظه می‌کنیم که رهبرعالیقدر کشورما برای‌آنان شخصیتی‌است والاتر ازآنچه‌که در زبانشان برای‌آن لفظ «Le Roi» رابکار می‌برند. آنکه بلژیکی‌است وهنوز غرور استعماری خودرا ازدست نداده، و آنکه کنگویی است وهنوز اززیربار استعمار قد راست نکرده است، وآنکه از اوراگوئه است وماازکشور وی ونوع‌حکومت‌آن اطلاعی‌نداریم همهٔ‌آنان‌کشورمارابه درستی‌می‌شناسند وازرهبرکشور مابه‌عنوان یکی از چند شخصیت بارز دنیای امروز نام می‌برند. در میان جمع خودرا سربلند احساس می‌کنیم و به خود حق می‌دهیم که از افتخارات ملی‌خویش بر دیگران ببالیم.

درریاضیات هم ایران همگام کشورهای پیشرفته جلورفته‌است.

کتابهارا ورق می‌زنند. خطما برای‌آنان نامفهوم است. اما از شکلها و علائم ریاضی به محتوای‌کتابها پی می‌برند. از اینکه برنامهٔ ریاضی مدارس‌ما تا این حد پیشرفته است اظهار شگفتی‌می‌کنند. ضمن گفتگوهایی درمی‌یابیم که‌کشورما درزمرهٔ کشورهای معدودی است که دراجرای ریاضیات طبق برنامه‌های جدید موفقیت بدست‌آورده‌اند.

بازدیدکننده نه‌کارآموز

ازمشاهدهٔ کتابهای ما و از توضیحاتی که دربارهٔ محتوای آنها می‌دهیم وبالاخره ازاینکه برهمهٔ‌آنچه‌که در سمینار مورد بحث است درسطحی بالاترآگاهی داریم از ما به عنوان: «Les Visiteurs iraniens = بازدیدکنندگان‌ایرانی» نام می‌برند درحالی که افراددیگری که ازسایر کشورهاآمده‌اند عنوان «Stagiaire = کارآموز» رادارند. من‌با تلقی‌عنوان مزبور به‌ناظر، در جلسات سمینارهای مختلف به گوش دادن و احیاناً یادداشت برداشتن اکتفا می‌کنم. اماعسجدی گاهی‌تحمل رااز دست می‌دهد وایرادها واشتباههای مربیان سمینارا اعلام می‌کند. بعد ازآن برنامهٔ بازدید از بعضی‌کلاسهای دبستانها و دبیرستانها را برای ماترتیب می‌دهند وکمترمی‌توانیم درجلسات سمینارها شرکت‌کنیم.

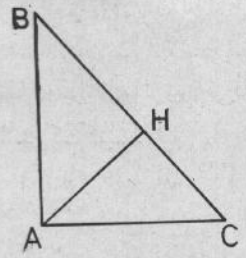
کم وکیف

اولین چیزی‌که در بازدید ازکلاسها نظر ما را به خود جلب می‌کند تعداد کم دانش‌آموزان است. شلوغترین کلاسها کمتراز بیست نفردانش‌آموز دارد. دربعضی‌ازکلاسها فقط هفت نفر دانش‌آموز ثبت‌نام‌کرده‌اند. تصورمی‌کنیم که‌کلاسهای رشتهٔ ریاضی خلوت است، امابه‌ما می‌گویند که کلاسهای سایررشته‌ها نیزبه همین گونه است. درکلاسی کـه ماداخل شده‌ایم معادل با کلاس چهارم فعلی دبیرستانهای ما است. تعداد دانش آموزان حاضر ده‌نفراست ودو نفرهم غایبند. کلاس‌هم مثل همهٔ‌کلاسهای دبستانها ودبیرستانهای بلژیك مختلطاست ودبیرهم بانویی‌است که‌حدود سی‌سال‌سن‌را می‌نمایاند. درس‌راشروع می‌کند: «مسئله: دریك صفحه سه‌خط A وB وC داده‌شده است حاصل ترکیب سه تقارن S_A و S_B و S_C چیست؟» ابتدا حالتی‌را در نظر می‌گیرد که سه خط مفروض باهم موازیند و نتیجـه می‌گیرد که حاصل ترکیب سه تقارن، تقارن S_D است که D نیزبا خطهای‌مفروض موازی‌است. آنگاه حالتی‌را اختیار می‌کند که سه‌خط A وB وC دریك نقطهٔ O متقاربند وثابت می‌کند که حاصل ترکیب تقارن S_D است که D نیزاز O می‌گذرد. دراینجا زنگ می‌خورد و کلاس پایان می‌یابد. درتمام این‌مدت‌آنچه معلم می‌گفت‌دانش‌آموزان دردفاترخود یادداشت می‌کردند. ازکتاب خبری نبود. درساعت تفریح فرصتی پیش‌می‌آید تا بادبیر صحبت‌کنیم. می‌پرسیم مگرکتاب درسی وجودندارد. پاسخ می‌دهد که یك‌کتاب توصیه شده است اما اوآن را نمی‌پسندد و توضیح می‌دهد که در بلژیك معلمان موظف به‌اجرای برنامهٔ مصوب می‌باشند اما در انتخاب‌کتاب ویا جزوه گفتن مخیرند. در پایان اضافه می‌کند به‌علت اینکه تابچه‌ها یك قسمت راخوب نفهمند به‌قسمت بعدی نمی‌پردازد، غالباً درپایان‌سال تحصیلی برنامه‌اش ناتمام‌می‌ماند. دراینجابه یادکلاسهای‌هشتادنفری خودمان وبرخی ازهمکاران می‌افتم که در بهمن ماه وحتی‌گاهی زودتر برنامهٔ سال‌را تمام کرده‌اند. به‌دنبال‌آن در فکر خودم به‌مقایسهٔ استعداد بچه‌های خودمان بابچه‌های آنها می‌پردازم و به‌یاد می‌آورم که فارغ ـ التحصیلان‌متوسط کلاسهای‌هشتادنفری ماکه به‌خارج‌می‌روندتازه در ردیف بهترین دانشجویان‌آن‌جاه‌اقرارمی‌گیرند.

***

جلسهٔ بعد به‌کلاس دیگری می‌رویم باتعداد نه نفردانش

آموز که معادل با کلاس فعلی چهارم ریاضی ما است و باهمان خانم دبیر. موضوع درس هم قضیهٔ فیثاغورس است: دبیر قبل از شروع درس اصلی راجع به حاصل ضرب اسکالر دو بردار پرسشهایی می کند و بعد با استفاده از پاسخهای خود دانش ـ آموزان نتیجه می گیرد که حاصل ضرب اسکالر $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ از یك طرف برابر است با:



$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH}$ (زیرا که $\overrightarrow{BH}$ تصویر قائم $\overrightarrow{BA}$ روی $\overrightarrow{BC}$ است)، و از طرف دیگر برابر است با $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}^2$ (زیرا $\overrightarrow{BA}$ تصویر قائم $\overrightarrow{BC}$ روی $\overrightarrow{BA}$ است). بنابراین $\overrightarrow{BA}^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH}$

و چون بردارهای $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BC}$ دارای امتداد مشترکند پس مربع اندازهٔ BA برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های BC و BH.

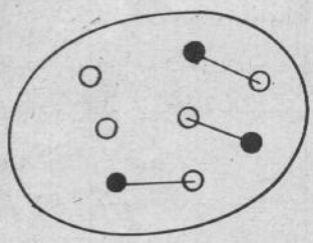
دبیر به همین ترتیب سایر رابطه‌های متری در مثلث قائم الزاویه را با استفاده از بردارها بدست می آورد. بعد که از او می پرسیم چرا از تشابهات یا مساحتهای معادل استفاده نکرد می گوید که تشابهات به صورت سابق در برنامهٔ فعلی ریاضیات دبیرستانهای بلژیك وجود ندارد، اما تبدیل تشابهی را سال بعد می خوانند.

***

کشورهای بلژیك، فرانسه، انگلستان، و کشورهای دیگر از قبیل آنها در اجرای برنامه‌های جدید ریاضی فقط چهار سال از ایران جلو هستند. در برنامه‌های جدید این کشورها هندسه به آن گونه که در سابق آموخته می‌شد وجود ندارد، مباحثی از ریاضیات آنها را تبدیلات در صفحه تشکیل می‌دهد که عبارتند از انتقال، دوران، تجانس، تشابه و... و ترکیبهای دوتایی یا سه‌تایی از آنها و تمام این تبدیلها به صورت برداری بیان می‌شوند. فارغ التحصیلان فعلی دبیرستانهای ما که برای ادامهٔ تحصیل به کشورهای خارج می‌روند علاوه بر کمبودی که از نظریهٔ مجموعه‌ها و فضاهای ریاضی دارند با زبان جدید هندسه نیز بیگانه‌اند که مدتی از وقت آنان صرف جبران این نقایص می گردد. از سال آینده که اولین سال از مرحلهٔ متوسطهٔ نظری در ایران با برنامه‌ها و کتابهای جدید آغاز می شود آنگاه امید می‌رود که فارغ التحصیلان دبیرستانهای ایران با زبان جدید ریاضیات و از جمله زبان جدید هندسه آشنایی کامل داشته باشند و بتوانند با ثبت نام در دانشگاه بدون درنگ درسهای اصلی دانشگاهی را آغاز کنند.

عددهای منفی در کلاس اول ابتدایی

در بازدید از یك کلاس اول دبستان با نوآموزان به سن شش سال، متوجه می‌شویم که خانم آموزگار مشغول آموزش عدد های منفی است. یك نفر را مثال می‌زند که در یك مسابقه شرکت دارد. هر باخت را با یك نشانهٔ قرمز و هر برد او را با یك نشانهٔ آبی روی تخته سیاه نشان می‌دهد و بچه‌ها هم در دفترچهٔ خود عمل می‌کنند. [در اینجا قرمز ها را با دایره های توخالی و آبی‌ها را با دایره‌های سیاه نشان داده‌ایم].



این شخص ۵ باخت و ۳ برد داشته است نتیجهٔ مسابقهٔ او چیست؟ هر یك نشانهٔ قرمز را با یك نشانهٔ آبی خط می‌زنیم. دو قرمز باقی می‌ماند پس: ۲ قرمز = ۳ آبی + ۵ قرمز آنگاه آموزگار به بچه‌ها حالی کرد که اگر ۳ را از ۵ کم کنیم ۲ باقی می‌ماند و بالاخره آموخت که اگر هر یك قرمز را با ۱ اما هر یك آبی را با $\bar{1}$ نشان دهیم خواهیم داشت:

$$5+\bar{3}=2 \quad \text{و} \quad 5+\bar{3}=5-3$$

در این موقع آموزگار تمرینهای متعددی مثل $\bar{7}+4$ یا $\bar{6}+\bar{2}$ مطرح کرد بچه ها به سادگی پاسخهای درست آنها را بدست آوردند.

در ساعت تفریح از آموزگار می‌پرسیم که آیا در آموزش عددهای منفی به بچه‌های شش ساله با اشکال مواجه نمی‌شود؟ پاسخ می‌دهد با تجربه‌ای که در این زمینه دارد مسلم می‌داند که آموزش مفهوم عددهای منفی به دانش آموزان دبیرستان بسیار مشکلتر از آموزش آن به نوآموزان سال اول دبستان می‌باشد.

گفتگویی با یك آموزگار ولایتی

در دبستانهای بلژیك آموزش ریاضی جدید اختیاری است. بیشتر آموزگاران همان برنامهٔ سابق را باهمان روش گذشته بکار می‌برند. برخی از آموزگاران ریاضی جدید را می آموزند که دسته‌ای از اینان روش **پاپی ـ فردریك*** را بکار می‌برند. با آموزگاری از دستهٔ اخیر که به بروکسل آمده است به گفتگو نشسته‌ایم. وی از توفیق در کار خود سخن می گوید و اظهار می‌دارد که بنا به شواهد و مدارك تحصیلی دانش آموزان کلاس وی نه تنها در ریاضی در سطحی بالاتر از همدوره‌های خود (که ریاضی سنتی را می‌خوانند) قرار دارند، بلکه در فهم سایر مواد آموزشی نیز آمادگی بهتر و بیشتری داشته‌اند. این آموزگار از اشکالات کار خودش نیز سخن می گوید و اظهار می‌دارد که در این مورد مشکلترین مسئله برای وی جرو بحث با بازرسان و راهنمایان تعلیماتی است که خود در زمینهٔ ریاضی جدید و هدفهای آن اطلاعی ندارند.

* **ژرژ پاپی** ریاضیدان بلژیکی همهٔ مفاهیم ریاضی جدید را با زبان فلش بیان کرده است و همسر او **فردریك**، همین روش را در زمینهٔ ریاضیات دبستان بکار بسته و در این باره کتابهایی تألیف کرده است.

جابر بن حیان

جعفر آقایانی چاوشی

دنباله از شمارهٔ قبل

۵۴ـ « جنات الخلدفی تدبیر الحجر » نسخه‌ای از این کتاب در کتابخانهٔ «آصفیه» به شمارهٔ ۵۹ ضمن کتابهای شیمی موجوداست. (۷۵)

۵۵ ـ «الخارصینی» یا «الخار الصینی من المعادن» که می‌رساند «خارصنی ترکیبی از زنگ و آهن است. یك نسخه از آن در کتابخانهٔ ملی پاریس در مجموعهٔ شمارهٔ ۲۶۰۶ موجود است (۷۶)

۵۶ ـ «اسرار الکیمیاء» که درسال ۱۸۹۳ میلادی در پاریس چاپ شده‌است. (۷۷)

۵۷ ـ «الکیمیا» این کتاب نیز درسال ۱۵۷۲ به‌چاپ رسیده‌است. (۷۸)

۵۸ ـ « التجمیع » برتلو این کتاب را ازروی نسخهٔ موجود در کتابخانهٔ لیدن به‌شمارهٔ ۴۴۰ به‌چاپ رسانید. (۷۸)

۵۹ ـ رسائل الجابر بن حیان : مشتمل بر رسائل زیر است: ۱ـ **الایجاز** ۲ـ **الحروف** ۳ـ **الکبیر** ازاین‌مجموعه نسخه‌ای به‌شمارهٔ ۲۶۰۶ در کتابخانهٔ ملی پاریس موجود است. (۷۹)

۶۰ـ «کتاب السموم ودفع مضارها» یك نسخهٔ خطی از این کتاب در کتابخانهٔ تیمورپاشا درقاهره به شمارهٔ ۱۰۵۳ موجود است نسخهٔ خطی دیگری نیز ازاین کتاب در کتابخانهٔ اسعد افندی درحلب وجوددارد. (۸۰)

این کتاب را نخستین‌بار **دکتر یعقوب صروف** در سال ۱۹۲۱ میلادی درجلد ۵۸ مجله‌المقتطف معرفی کرد. سپس **یولیوس روسکا و هولمیارد** نظرعلمای غربی‌را به‌این کتاب‌جلب نمودند و **پاول کراوس** نیزدرجلد اول کتاب‌خود دربارهٔ آثارجابر ابن‌حیان شرحی دربارهٔ آن نوشت. (۸۱)

وسرانجام **دکتر آلفرد زیگل (Alfred Siggel)** طبیعی‌دان وخاورشناس آلمانی آن را به‌صورت فاکسیمیله ازروی نسخهٔ کتابخانهٔ تیموریه درقاهره چاپ کرده وهمراه با ترجمهٔ آلمانی آن درسال ۱۹۵۸ میلادی درآلمان انتشارداده‌است (۸۲)

دکتر زیگل برای این کار متحمل زحمات زیادی شد. وی متن کتاب مزبور را از روی دونسخهٔ خطی موجود در کتابخانه‌های تیموریه واسعد افندی مورد بررسی ومقایسه وتطبیق قرارداده بادقت تمام به‌ترجمهٔ آن به‌زبان آلمانی اقدام کرد وچون

۷۵ـ ۷۶ـ همان مأخذ

۷۷ـ جابر بن‌حیان: «اسرارالکیمیاء» پاریس، ۱۸۹۳ میلادی

۷۸ـ جابر بن‌حیان: «الکیمیا» باسل ۱۵۷۲ میلادی

۷۹ـ اسماعیل مظهر: «جابر بن‌حیان» المقتطف

۸۰ ـ «مجلة معهد المخطوطات العربیة» المجلد الخامس الجزء الثانی ۱۳۷۹ هجری قمری

۸۱ـ Kraus, P. :«Jabir ibn Hayyan» Inistitot Fracais d'Archeologie Orientale Le Caire, Vol I, (1942)

۸۲ـ Siggel, A. : «Das Buch der Gifte des Gabir ibn Hayy-an» Wiesbaden, (1958)

احتمال داد که شاید اسامی اغلب امراض دراین کتاب با معادل فعلی آلمانی مطابق نباشد عین کلمهٔ عربی را درجنب آن ذکر کرده است .

نسخه‌ای که زیگل آن را چاپ کرده‌است دراردیبهشت ماه سال ۵۰۳ خراجی درشیراز نوشته شده وطبق معمول ، اغلب مالکین نام خودرا در پشت صفحهٔ اول نوشته‌اند، ازآن جمله است **صلاح‌الدین خلیل ابن ایبك الصفدی** ادیب و مورخ معروف. جابربن حیان در بررسیهای خود در این کتاب به‌یك روش کاملا علمی که درواقع با اسلوب وروش فعلی چندان فرقی ندارد عمل کرده است . وی در این کتاب اقوال فلاسفهٔ یونان ازقبیل : **بقراط ، جالینوس ، اندروماخس ، فیلون ، فیثاغورس ، ارسطو ، افلاطون** را درمورد زهرها وآثار آنها بیان داشته وآراء جدیدی برآن افزوده و تعلیماتی ، درمورد انواع سموم وداروهای آن وتأثیرسموم در حیوانات داده‌است. نکته‌ای که مایهٔ شگفتی‌است آن‌است که‌دراین کتاب ازبزرگترین‌داروشناس معروف یونانی **دیسقوریدوس** سخنی به‌میان نیامده است . این کتاب ازنظرزیست شیمی‌اهمیت بسزائی دارد.

جابردراین کتاب زهررا چنین تعریف کرده است:

«بعضی گفته‌اند زهرجسم طبیعی‌وتکوینی ودارای خواصی است که مایهٔ فساد بدن حیوانات می‌گردد وبرخی‌نیز گفته‌اند که زهرآمیزهٔ طبیعتهایی‌است که به‌ذاته برحیوانات جنبده غلبه‌دارد، گروهی از علما نیز گفته‌اند که سم‌آمیزه‌ای است که گاهی مایهٔ تباهی‌وزمانی‌سبب‌اصلاح‌است، این‌است‌آرا وعقاید مردم‌درتعریف زهر .

اما غرض ما دراین کتاب ظاهرساختن وبیان اسامی‌سموم واعمال ذاتی‌آنها وتعیین مقداری‌است که می‌شود ازآنهااستعمال کرد وشناختن بدوخوب‌آنها می‌باشد.

این کتاب شامل شش‌فصل‌است :

فصل‌اول: اوضاع قوای‌چهارگانه واین‌حالات قوا باادویه مسهله وسموم قاتله وتغییر طبیعتها وکیموسات‌که از آنها بدن حیوانات ترکیب می‌شود.

فصل‌دوم: اسامی‌سموم وتشخیص‌خوب وبدآنها واثرهریك دربدن انسان.

فصل سوم: سمومی که اثرآنها درهمهٔ بدنها یکسان‌است و سمومی که به‌بعضی‌ازبدنها اختصاص‌دارد.

فصل‌چهارم: علائم سموم دربدن بعد ازاستعمال، وحوادث ناشی‌ازآنها.

فصل پنجم: سموم مرکبه وبیان عوارض ناشی ازآنها.

فصل ششم : برحذر داشتن از استعمال سموم ، ومعرفی پادزهرها و ادویهٔ نافع برای مسموم. جابرسموم را به‌سه دسته تقسیم کرده است:

۱ـ سموم حیوانی: زهرمار، وسایرحیوانات زهرآگین.

۲ـ سموم نباتی: افیون ، بنگ سیاه، شوکران، حنظل، شیلم (= گندم دیوانه).

۳ـ سموم جمادی: جیوه، زرنیخ، زنگار، انواع زاجها، آهك و...

همانطورکه اشاره شد جابردراین کتاب مکررازفلاسفه و اطبای یونان نام می‌برد. ازجمله درجائی چنین‌آورده‌است :

«**سقراط و جالینوس و اندروماخس** وسایر بزرگان حرفهٔ طبابت بطورکلی گفته‌اندکه در اجسام حیوانات چیزی بهترازخون‌آنها نیست وخون پایهٔ بدن‌است»(۸۳)

فهارسی که دکترزیگل درآخرترجمه‌آورده عبارتست از:

۱ـ فهرست مواد موالید ثلاثه شامل: الف ـ حیوانات و مواد حیوانی ب ـ گیاهان ومواد گیاهی ج ـ مواد معدنی د ـ مواد مرکبه، اغذیه ، عطریات.

۲ـ نام عربی‌امراض.

۳ـ اوزان مذکور درکتاب‌السموم.

۴ـ مؤلفین یونانی که ازآنها درکتاب نقل شده.

بی‌شك این‌کتاب از مهمترین ونافعترین کتبی است که تاکنون درزمینهٔ علوم اسلامی دراروپا چاپ شده‌است.

گفتیم‌که **پاول کراوس** در سال ۱۳۵۴هجری قمری بعضی‌ازرسائل جابربن‌حیان راگردآوری‌کرده وهمراه مقدمه‌ای ازخود به‌زبان فرانسوی درقاهره به‌چاپ رسانده‌است(۸۴)، این رسائل به‌قرارزیر می‌باشند:

۱ـ کتاب اخراج ما فی‌القوة الی‌الفعل

---

۸۳ ـ «... قد اطلق بقراط وجالینوس و أندروماخس وسائر اصحاب‌المهنة‌الطبیة انه‌لاشیء فی‌اجسام‌الحیوان من‌الاخلاط‌اکرم من‌الدم وانه قاعدة‌البدن»

(← اسماعیل مظهر: «جابربن حیان»

۸۴ـ مختار رسائل‌جابربن‌حیان ـ عنی بتصحیحها ونشرهاـ ب‌کراوس. القاهره ۱۳۵۴

۲ـ کتاب‌الحدود

۳ـ کتاب‌الماجد

۴ـ الجزءالاول من کتاب‌الاحجار علی‌رأی بلیناس

۵ـ الجزءالثانی من کتاب‌الاحجار علی‌رأی بلیناس

۶ـ نخبة من‌الجزء الرابع من کتاب الاحجار علی رأی بلیناس

۷ـ کتاب میدان‌العقل

۸ ـ نخب من کتاب‌الخواص‌الکبیر

۹ـ ابتداء الجزءالاول من کتاب‌السر المکنون

۱۰ـ نخب من کتاب‌التجمیع

۱۱ـ نخب من کتاب‌التصریف

۱۲ـ نخب من کتاب المیزان‌الصغیر

۱۳ـ نخب من کتاب‌الخمسین

۱۴ـ نخب من کتاب‌البحث

۱۵ـ کتاب‌الراهب

۱۶ـ نخب من کتاب‌الحاصل

۱۷ـ نخب من کتاب القدیم

۱۸ـ نخب من کتاب‌الاشمال

ما اینك به جهت مزید فایدت ترجمهٔ فارسی مقدمهٔ این کتاب را در اینجا می‌آوریم:

پاول کراوس درمقدمهٔ این کتاب چنین می‌نویسد:

«دراین کتاب آثارعلمی‌جابربن‌حیان شاگرد **امام‌جعفر صادق** امام ششم شیعیان مدون شده است ، برای‌آنکه این کار به‌خوبی صورت پذیرد در بادی امرلازم بود مدارك مربوط به‌مسائلی‌که دراین‌آثار مطرح بود ، تحصیل ومورد تتبع وتحقیق واقع شود . درسال ۱۸۹۳ **هودا** (O. Houdas) **وبرتلو** در کتاب « La Chimie au Moyen Age » شش رساله ازجابر بن حیان را چاپ وترجمه‌کردند. **هولمیارد** نیز کتابی که متضمن یازده رساله از جابربن حیان بود چاپ کرد.(۸۵)

لیکن این‌اقدامات به‌هیچ وجه غـرض غائی‌وهدف نهائی مؤلف این رسائل (= جابر بن حیـان) را معلوم و مشخص نمی‌کرد .

از اینرو من پس‌ازمطالعهٔ کلیهٔ‌کتب خطی‌منسوب به‌جابر دراروپا، قاهره واستانبول درصدد چاپ خلاصهٔ اهم مطالب این رسالت برآمدم.

مجموعهٔ متونی‌که منظم ومدون‌کرده‌ام ازلحاظ مطالب و مشخصات تفاوت فاحشی دارند. قسمت عمده‌اش ازآنرو انتخاب شده که جهات مختلف علوم جابـری را روشن کند ، به‌کتاب «اخراج ما فی‌القوة الی‌الفعل» که‌گنجینه‌ای از نکات ودقایق علمی درباب قوه وفعل است رسائل مفصلی دربارهٔ نظریهٔ میزان منظم شده است. این نظریه اساس روش جابر است وتطبیق این تئوری با کیمیا وعلوم طبیعی به‌طور کلی در کتاب « الاحجار علی رأی بلیناس» بیان شده‌که درآن ضمناً رابطهٔ آثار جابر با **بلیناس** (Apollonius de Tyane) مشخص‌می‌گردد. برای ماجای بسی تأسف‌است‌که نتوانستیم همهٔ «کتاب‌السبعین» و«کتاب‌البحث» را که شرح نظریات‌کیمیائی‌وعلوم غریبه‌جابر است‌چاپ کنیم وناچار به‌درج خلاصه‌ای ازآنها اکتفا کردیم. همچنین برای ماممکن نشد که خلاصه‌ای از«کتاب‌السموم» که یگانه یادگار طبی جابراست چاپ‌نمائیم. به شش **فصـل** «کتاب الخواص»،بایدتوجه‌خاصی‌نمود، چه درآن ردیهٔ نظریهٔ‌متافیزیکی مأنوی ازنقطه‌نظرفلسفهٔ ارسطوئی عنوان‌گردیده‌است. قسمتهای دیگر این کتاب شامل نکاتی دربارهٔ شرح احوال وآثار جابر به‌قلم خود اوست‌که دردوجلدکتابی‌که بعداً چاپ خواهم کـرد ترجمهٔ قسمتی‌ازاین متون را نقل خواهم‌کرد.

تنظیم و تهیهٔ کتابی که دارای چنین موضـوعات دقیق و عمیقی است مسلماً در معرض اشتباه و لغزش واقع خواهد شد . هرچندکه نسبت به‌برخی ازکتب مانند «کتاب‌الخواص» چندین نسخه برای مقابله وتصحیح داشته‌ایم ولی نسبت به سایر کتابها ناگزیرشدیم به‌یك نسخه‌آنهم نسخه‌ای که جدیداً استنساخ شده قناعت‌کنیم . کتابهای خطی‌خوب وواضح جابر کمیاب ونادراست که از این کتب نادر باید کتاب‌البحث وکتاب‌الخمسین را نام برد. اغلب کتب‌او که به‌دست‌کاتبان بی‌سواد استنساخ شده مغلوط ودارای اشتباهات عجیب وتصرفات بیجا می‌باشد. ازقبیل‌کتاب شمارهٔ ۵۰۹۹ در کتابخانهٔ ملی پاریس که مأخذ چندین رسالهٔ این مجموعه است . همچنین‌کتاب خطی شمارهٔ ۳ ردیف «قسم‌الکیمیا» در کتابخانهٔ قاهره ، تصحیح و تنقیح یك کتاب خطی منحصر به‌فردکاری است بس دشوار ، این‌کار دشوارتر خواهد شد وقتی‌که متوجه شویم که دارای نثری پیچیده ومغلوط است. در این صورت باچه مقیاس ومیزانی می‌توان تمیز دادکه این اشتباهات ازنویسندهٔ اصلی است یا ازکاتب ؟ وتاچه‌حد می‌توان تصحیح قسمتهای خراب را بدون ترس از خیانت موقتی انجام داد ؟ به‌این علت ما سعی‌کرده‌ایم حتی‌المقدور از تصرف درمتن

۸۵ـ Holmyard, E. J. «The work of Jabir ibn Hayyan, Paris Geuthner, Vol I, 1928

خودداری کنیم مگر به‌ضرورت. البته مدعی نیستیم متنی که‌چاپ کرده‌ایم عین نوشتهٔ مؤلف است ولی متنی‌است قابل فهم ، که تا حدی هدفهای فکری مؤلف را روشن می‌نماید . ازتطبیق چهار نسخهٔ «کتاب الخواص» معلوم شد که نساخ بی‌سواد مرتکب چه اشتباهاتی شده‌اند ، بدیهی‌است سایر تصانیف جابر هم نمی‌تواند از این قاعده مستثنی باشد . شاید یك منقد سخت‌گیر و محتاط موافق برخی‌اصلاحات ما نباشد واز مجازبودن‌آن مشکوك شود، ومعتقد باشدکه رهاکردن آنها اصلح بود. ولی ما برای تکمیل اطلاع ازروش جابر این افکاررا لازم وضروری شمردیم. البته باید دانست فساد و خرابی که بر این متون وارد شده آن‌چنان نیست که موجب انحراف ازفکر عمومی وهدف نهائی مؤلف شود .(۸۶)

بررسی آثار جابر بن حیان

دراین‌قسمت فصولی‌چند ازآثارجابررا مورد بررسی‌قرار می‌دهیم تا روش علمی‌وطریقهٔ اوتااندازه‌ای بدست‌آید.

دربارهٔ تاریخ کیمیا : « بدان که فیلسوفان متوالی این‌علم (= کیمیا) را شایستهٔ‌آن می‌کرده‌اند که ازتکامل‌طولانی بهره‌مند شود وبه‌آن قدرت شگفت‌انگیز بخشیده‌اند وازاین راه به‌هدف خویش رسیده‌اند **آریوس** (= سلف **هرمس**) نخستین کسی‌است که خودرا وقف این‌صنعت کرد ؛ از زمان حیات او تا زمان ما، باآنکه مدتی بسیارطولانی گذشته است روایات پیوسته است ، **فیثاغورس** ، قدیمترین فیلسوف شناخته شده، غالباً می‌گفت: «پدرم **آریوس** چنین گفته است» واین‌طرز بیانی‌است که ما نیزامروزداریم وآدم ابوالبشررا «پدر» خویش می‌نامیم. به‌همین ترتیب ، فیلسوفانی که دراعصار جدیدترمی‌زیسته‌اند ، عادت براین داشته‌اند، که بگویند « پدر ما فیثاغورس » و این عنوان راعلت قدمت براومی‌نهاده‌اند. این‌آریوس نخستین‌کسی بوده‌است‌که به‌کنایه ازاین‌صنعت سخن گفته‌است ؛ وهمواست‌که نخستین عمل وتدبیر را دربارهٔ حجر به‌کار انداخت وی به‌این مطلب اشاره‌کرده‌است‌که این‌روش‌رانیاکان وی به‌اوآموخته‌اند، واز پدران به‌پسران انتقال یافته تابه‌اورسیده‌است . در پی‌او ، فیلسوفان‌نیزدربارهٔ حجر، این‌نخستین تدبیررا به‌کارمی‌بردند، وچنین بود تا نوبت به **سقراط** رسید. پس‌از سقراط کسانی آمدندکه تدبیرابتدائی‌را تغییردادند وساده کردند ومدعی آن بودند که تنها با تکریر وتصفیه می‌توانند به‌هدف خود برسند . این ساده‌کردن مزایای چندی داشت : مدت عمل کوتاه شد، و خود عمل‌آسانترصورت می‌گرفت ، واستعمال‌آن عامترشد. این را نیك بدان!

سپس فیلسوفان دیگری‌آمدندکه با توجه به‌تدبیردوم آن را بسیار طولانی یافتند ، چون دانستند که می‌توانند با صنعت ظریف خود آن را کوتاهترکنند ، عملی را اختراع کردندکه اکنون تدبیرسوم خوانده می‌شود. تدبیرسوم، نسبت به‌تدبیردوم ، همان منزلتی را دارد که تدبیر دوم نسبت به تدبیر اول داشته است . بنابراین ازهرسه بهتراست.

هنگامی که این اصول (= چهار طبع) باهم آمیختند و ترکیب شدند ، وهریك ازاین اعراض به‌یك‌بدن (= جسم)تعلق گرفت ،کسی (= **آریوس**) ظهورکرد واظهارکردکه انسان قابلیت‌آن را داردکه‌ازکارطبیعت تقلیدکند ، وی، بابرگرداندن چیزها به‌طبیعت اولی‌آنها ، نمونه‌ای ازاین قابلیت رانشان‌داد: فلزات را گداخت ، وآنها را در معرض طبخ دایمی قرار داد همانند طبخ پیوسته وتغییرناپذیری که طبیعت عامل‌آن است . نخست اسبابی برای گداختن اختراع کرد ، وبه‌آن شکل مدوری شبیه شکل‌کره ! داد ؛ سپس درآن سرب ریخت وآن‌قدر پختن آن را ادامه داد تا آنچه باقی ماند به‌صورت سیم سپید درآمد ؛

آنگاه پختن را ادامه داد تا مبدل به‌طلا شد. همین عمل را با قلع وآهن ومس نیزانجام داد وهمهٔ آنها را تبدیل کرد؛

۸۶ـ کتاب مختار رسائل جابربن‌حیان، مقدمه به‌فرانسوی به‌قلم پاول کراوس ، قاهره ۱۳۵۴هجری قمری

با نقره نیز چنین کرد.(۸۷)

این نخستین مرحله در پیشرفت وتکامل صنعت بود. استاد نخستین از میان رفت ؛ استاد دیگری ظهور کرد که شایستگی خارق‌العاده داشت . همو بود که [نخستین بار] در زمانی دور اکسیراعظم را تهیه کرد ، سپس درآن کوشیدند که زمانی‌را که برای‌آماده کردن‌آن لازم بودکوتاهتر کنند ، وبه‌این توفیق یافتند که زمان را به‌ده‌یك‌آنچه در ابتدا بود برسانند. این کار را دنبال کردند وبالاخره توانستند زمان را به‌یك صدم اندازهٔ اولی برسانند(۸۸) پس‌ازآن ، ترکیبات واعمال تازه‌ای کشف شد که بعضی‌ازآنها مباح بود ولی بعضی بد وبی‌ارزش بود همچون ساختن سکه‌های تقلبی و استعمالات خارجی دیگر (مقصود از کیمیای عرفی ومبتذل است)

باپیدا شدن چنین چیزها ،کوششهای فیلسوفان به‌تباهی کشیده شد .

وباید دانست که اصل این صنعت تنها ازطبایع است ونه‌از جزء آن ،

ومیزان‌آن رسیدن به‌معرفت این‌طبایع.

بنابراین هرکس که میزان را بداند، راههای هرچه را درآن‌است می‌شناسد ومی‌داند که چگونه ترکیب شده‌است» (۸۹)

همان‌گونه که جابر می‌گوید ، روش کار وی برمیزان مبتنی بوده‌است که به‌وسیلهٔ‌آن نسبت درست عناصر بدست می‌آید. بنابه‌گفتهٔ وی : «هر عمل کیمیایی مستلزم آن است که نسبت صحیح صفات یا طبایع یعنی گرم و سرد وخشك وتر برقرار شود

واما در مورد محصول دوم که محصول صنعت است . آن‌کس که به‌تمرین لازم معرفت پیدا کرده‌است ... نخست باید زمانی‌را انتخاب کند که درآن می‌خواهد چیزی را ترکیب کند وپس از آن مکان را ؛ یااول مکان را انتخاب کند وسپس زمان را ... پس ازآن باید ، برای افزودن طبایعی به‌جوهری ، کمیت و کیفیت شایسته‌ای را انتخاب کند ... سپس باید به‌کار آماده کردن طبعی [در جوهر] بپردازد که قویتر (=فعالتر) است ، وقسمت درونی جسم را اشغال می‌کند.

(بپرهیز ازآنکه [طبع] بیرونی‌را آماده‌کنی ، که آن اشتباهی بزرگ است)

براین باید متمم انفعالی آن را [از طبایع] بیفزاید به‌این ترتیب ظاهر... بروفق ترکیب باطن آماده می‌شود ؛ در مورد گرمی وسردی نیز به‌همان‌گونه تری وسردی عمل‌می‌شود: رنگ را می‌گیرند وازآن گرمی وخشکی را خارج می‌کنند.

آب را درقرعی می‌ریزیم که درآن ماده‌ای‌باخشکی‌زیاد، همچون گوگرد یاچیزی شبیه‌آن قرارداده شده‌باشد. بدین‌ترتیب تری‌آب با خشکی [گوگرد] وبا گرمی [آتش تقطیر] خشك می‌شود . تری به تمامی می‌سوزد و [از آب] سردی تنها باقی می‌ماند...

برای خاك ،که سرد وخشك است ، نیزهمین امر صحت دارد . آن را می‌گیرند و خشکی را از آن استخراج می‌کنند وسردی را برمی‌اندازند»(۹۰)

تقسیم‌بندی مواد از نظرجابر بن حیان

جابر ، موادی راکه درکیمیا استعمال دارد ، به سه دسته تقسیم کرده است که هردسته ، بنابرغلبه یکی‌از طبایع ، کیفیات

۸۷ـ جابردراینجا، با توجه به‌معنی‌خارجی‌کلمات خود ، به‌اعمال فلزکاری وذوب فلزات در دوران قدیم با همان اسبابهای معمول زمان ، اشاره می‌کند. واما در مورد طلا ، به‌احتمال قوی اشارهٔ او به‌آثار حقیقی از این فلز است که در بسیاری از کانه‌ها وجود دارد.

۸۸ـ جابردراینجا به«قانون انقباض زمان» اشاره می‌کند ، وآن اعتقادی جهانشناختی بوده‌است بدین مضمون که هرچه یك دورکیهانی پیش می‌رود ، حرکت آن سرعت بیشتری پیدا می‌کند.

۸۹ـ جابربن‌حیان :«کتاب‌السبعین» در مختار رسائل ، ترجمهٔ آقای احمد آرام

(← علم وتمدن دراسلام نوشته دکترسید حسین نصر ترجمهٔ احمدآرام تهران۱۳۵۰هجری شمسی)

۹۰ـ همان‌کتاب

خاص دارد:

۱ـ ارواح که در آتش کاملا تبخیر می‌شوند.

۲ـ اجساد فلزی که چکشخوارند و جلا دارند وتولید صوت می کنند ومانند «ارواح» و«اجساد» نیستند که بیصدا باشند.

۳ـ « اجساد » یا بدنها [مواد کانی] که چکشخوار نیستند و به شکل گرددرمی آیند. شمارهٔ «ارواح» پنج است : گوگرد، ارسنیك (روح زرنیخ) جیوه ، آمونیاك (روح نوشادر) وکافور ؛ وفلزات اینهاهستند : سرب، قلع ، طلا، نقره، مس، آهن، وخارصینی (= آهن‌چینی).

شك نیست که جابر، درطبقه‌بندی معدنیات نظر به موادی داشته است که سیماهای فیزیکی‌اشیاء معنای واقعی‌داشته‌اند. ولی کلید فهم نمودهارا نمی‌توان در شناختن سیمای فیزیکی آنها یافت ، بلکه‌این‌فهم در پرتومیزان وتعادل کیفیات ونظم موجود میان سیماهای ظاهری وباطنی‌مواد حاصل می‌شود . به همین جهت است که جابرمانند کیمیادانان دیگر، زبانی را به‌کار می‌برد که هم به‌قلمرو روانی تعلق می گیرد وهم به‌قلمرو فیزیکی حتی درآن‌حالت که مواد را ازلحاظ سیماهای فیزیکی آنها مورد مطالعه قرارمی‌دهد چنان سخن می گوید که تناظرموجود میان حالات روانی وفیزیکی آنهامحفوظ بماند.

نمونهٔ برجسته‌ای ازطرز تصورجابر، نظریهٔ گوگرد و جیوه‌ای اودربارهٔ ساختمان مواد فلزی‌است. این‌نظریه که تنها ازجنبهٔ فیزیکی‌مورد ملاحظه قرارگرفته منشأ نظریهٔ‌اسیدوبازی جدیداست. دواصل گوگرد وجیوه که در هرزمینه بروزوتجلی متناظر بااصلهای ، فاعل (مذکر) ومنفعل (مؤنث)است ازلحاظ شیمیایی به‌صورت اسیدوباز درمی‌آیدکه ازاتحادآنها ملح‌حاصل می‌شود . ازلحاظ کیمیایی ، این‌نظریه بیان‌کنندهٔ ثنویت نر و مادگی است که هروجود کیهانی نیازمندآن است ، وهمهٔ علوم جهانشناختی قدیم کارشان این بوده است که نمودهای طبیعت را ازاین راه توجیه کنند.

نظریهٔ کبریت و زیبق (= گوگرد و جیوه)

جابردربارهٔ نظریهٔ گوگرد وجیوه نوشته‌است: «همهٔ فلزات، ذاتاً ازجیوه ساخته شده‌اندکه با گوگرد منعقد شده‌باشد... تنها احتلافی که بایکدیگر دارند، از لحاظ صفات وکیفیات عرضی آنهاست ، واین اختلاف نتیجهٔ آن است که گوگردهای آنها گونه‌گون بوده ، واین گونه‌گونی به‌نوبهٔ خود ازآن پیداشده که خاکهامتفاوت بوده‌است ، ونیزاز اینکه قرارگرفتن آنها در معرض حرارت خورشید در حرکت دورانی آن یکسان نبوده است .(۹۱)

هنگامی که جیوه وگوگرد بایکدیگر ترکیب می‌شوند و مادهٔ واحدی می‌سازند . بدان می‌نمایدکه ذات آنها دگرگون شده و مادهٔ کاملا جدیدی به وجود آمده باشد . ولی واقع امر به‌صورتی دیگراست ، هم گوگرد وهم جیوه طبایع خاص‌خودرا محفوظ نگاه می‌دارند ، تنها چیزی که اتفاق می‌افتد این‌است که اجزای‌آنها خردتر می‌شود ودر مجاورت نزدیك یکدیگر قرار می گیرد ، وچنان‌است که محصول اجتماع آنها یکنواخت به‌نظرمی‌رسد.

اگرکسی بتواند اسبابی اختراع کندکه این‌اجزاء را از یکدیگرجدا کند ، بدین‌ترتیب بدون شك، نسبتها بااعداد بیان می‌شود، ولی دراینجا اعداد را نباید به‌معنای کمیتی آنها درنظر گرفت ، بلکه مفهوم فیثاغورسی آنها منظور است که سیماهای وجودی واحد است .

همچنانکه دیدیم منظور جابر از کبریت و زیبق دو مادهٔ شیمیایی گوگرد وجیوه نیست بلکه هدف او از اولی تمثیل و تشبیه اصل مذکروفعال جهان واز دومی‌اصل مؤنث ومنفعل عالم است(۹۲) ومعتقد است که طلا یا فلزکامل نتیجهٔ امتزاج کامل این دواصل‌است وسایرفلزات ناشی‌ازعدم خلوص آنها می‌باشد و چون درجهان ماده نظام‌کاملی‌حکمفرماست لذا تبدیل کیفی را می‌توان بر مبنای اصول کمی بیان داشت واز اینرو به‌فرضیهٔ میزان توسل جسته وآن را در رسالهٔ «کتب الموازین» خود مطرح کرده است . علم میزان درنظرجابر تعادل صفات وباطبایع اولیه‌است وبه‌این‌جهت اعداد را اساس این علم قرارداده ومانند فیثاغوریان‌قدیم‌جنبه‌ای کیفی‌وتمثیلی برای‌اعدادقائل‌بوده وعقیده دارداصل ازطبایع مأخوذاست ولاغیروشناخت‌صورطبایع منحصر به‌دانستن میزان‌آن است زیرااصل‌میزان ودلیل‌وجودآن سنجش میل نفس‌عالمی است که با همهٔ اجسام‌آمیخته‌است وعلم میزان از این راه‌حاصل‌می‌شود که‌محسوسات‌وجزئیات‌را به‌مشاهده‌وتجربه

دنباله در صفحهٔ ۱۹۸

۹۱- Holmyard ، E.J.:«The Arabic works of Jabir ibn Hayyan» paris Geuthner vol! I، 1928

۹۲- Corbin, H.: «Lé Live du Glorieux du Jabir idn Hayyan (Eranos Jahr-buch, Ascona, 1950)

مسئلهٔ هم محیطها

نوشتهٔ : G.POLYA

ترجمهٔ :داویدریحان

دایره اولین، ساده‌ترین وکاملترین اشکال است.
(پروکلوس)

I ـ براهین استقرائی دکارت ـ در اثر ناتمام دکارت به‌نام «Regulae ad Directionem Ingenii» (اثری که درشماریکی از آثار کلاسیك در بارهٔ منطق کشف است) به عبارت شگرف زیر برمی‌خوریم. «برای آنکه بوسیلهٔ شمردن ثابت کنیم که از میان تمام اشکال محدود به یك سطح داده‌شده دایره دارای کوچکترین محیط است، لازم نیست که تمام اشکال را بررسی کنیم، بلکه کافی است این گزاره را دربارهٔ چندشکل خاص که از آنها می‌توان به نتیجه رسید، تحقیق کنیم و بوسیلهٔ استقراء همین نتیجه را بـرای تمامـی اشکال دیگری نتیجه بگیریم.»

پس از درك عبارت‌فوق، به نصیحت دکارت گوش می‌دهیم. دایره را باسایر اشکال از قبیل مثلث‌ها، مستطیل‌ها و قطاع‌های دایره‌مقایسه‌می کنیم. دومثلث‌اختیارمی کنیم، یکی مثلث‌متساوی‌ـ الاضلاع و دیگری قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین (بنابراین زوایا به‌ترتیب‌برابرند با °۶۰، °۶۰، °۶۰ و °۹۰، °۴۵، °۴۵) . شکل یـك مستطیل با نسبت طول به عرضش مشخص مـی‌شود ، نسبتهای $\frac{1}{1}$ (مربع) ، $\frac{2}{1}$ ، $\frac{3}{1}$ و $\frac{3}{2}$را برمی گزینیم. شاخص شکل‌قطاع‌دایره‌زاویهٔ‌مرکزی‌اش‌است. زوایای °۱۸۰، °۹۰، °۶۰ را انتخاب می کنیم، فرض‌می کنیم که این‌اشکال هم‌مساحت‌باشند (مثلا مساحت هر کدام برابربا یك دسیمترمربع است) ، سپس پیرامون هر کدام‌را (برحسب دسیمتر) بدست می‌آوریم. اعدادی که بدین طریق حاصل می گردند در جدول زیر داده شده‌اند ، اشکال را در ترتیب صعودی پیرامونشان نوشته‌ایم:

جدول I

پیرامونهای‌چند شکل با مساحتهای‌متساوی

دایره	۳/۵۵
مربع	۴/۰۰
ربع‌دایره	۴/۰۳
مستطیل $\left(\frac{3}{2}\right)$	۴/۰۸
نیم دایره	۴/۱۰
قطاع‌دایروی °۶۰	۴/۲۱
مستطیل $\left(\frac{2}{1}\right)$	۴/۲۴
مثلث متساوی‌الاضلاع	۴/۵۶
مستطیل $\left(\frac{3}{1}\right)$	۴/۶۴
مثلث‌قائم الزاویهٔ‌متساوی الساقین	۴/۸۴

از میان ده شکل با مساحت‌مساوی که دربالا ذکر کردیم کمترین محیط متعلق به دایره است که درصدر جدول ثبت شده است. آیا می‌توانیم، بنابه گفتهٔ دکارت، بوسیلهٔ استقراء نتیجه بگیریم که محیط دایره نه تنها از ده‌شکل مذکور بلکه ازسایر اشکال ممکن دیگر، کوچکتر است؟ مطمئناً خیر . معهذا نمی‌توانیم اصلا منکر این شویم که این‌جدول نسبتاً کوتاه قویاً مارا برآن می‌داردکه فکر کنیم که قضیه در حالت کلـی صحیح است. این اصرار به حدی است که اضافه شدن یك یـا دوحالت جدید به آن محسوساً در قدرت آن تأثیری‌ندارد.

به عقیدهٔ من ،دکارت نیز به هنگام ادای این مطلب ، دقیقاً به نکتهٔ ظریفانهٔ اخیر می‌اندیشیده است . فکر کنم که منظور وی آن بوده است که طویل نمودن لیست نمی‌توانسته است محسوساً عقیدهٔ ما را تغییر دهد .

II- براهین ضمنی - « از میان تمام اشکال مسطح با مساحت متساوی، دایره‌دارای کمترین محیط است ». به این گزاره که حاصل جدول I است ، نام **قضیهٔ هم محیطها** را می‌دهیم . جدول I را که بنابه گفته‌های دکارت بنا کرده‌ایم شامل براهین استقرائی نسبتاً پیروز ، برای قضیهٔ هم‌محیطها است . چرا این برهان به نظرما پیروزمندانه جلوه می‌کند ؟

موقعیتی را که کمی با این مورد مشابهت داشته باشد درنظر می‌گیریم . ده درخت رااز ده‌نوع کاملا مشخص‌انتخاب کرده‌ایم . جرم ویژهٔ چوب هر درخت را اندازه می‌گیریم و درختی را برمی‌گزینیم که دارای کمترین جرم مخصوص‌باشد . آیا معقول به نظر می‌رسد که برمبنای فقط مشاهدات فکر کنیم که نوع کمترین جرم مخصوص از میان ده نوع ملاحظه شده ، ازمیان تمام انواع موجود ، جرم مخصوصش کمتر است ؟ یك چنین چیزی نه تنها عاقلانه نیست ، بلکه احمقانه است.

از کجا بدانیم که حالت دایره باآن متفاوت است ؟ در مورد دایره یك **پیش داوری** مساعد نموده‌ایم . دایره را کاملترین اشکال دانسته ایم ؛ در وهلهٔ اول ، فکر می‌کنیم که دایره درازای مساحت مفروض دارای کمترین محیط‌نیز هست . برهان استقرائی دکارت پیروزمندانه به نظر می‌رسد چراکه مؤید یك‌فرضیهٔ پذیرفتنی از همان ابتدا بوده است .

« دایره کاملترین اشکال است » جمله‌ای مرسوم است . این جمله را در نوشته‌های **دانته** (۱۳۲۱ - ۱۲۶۵) **پروکلوس** (۴۸۵ - ۴۱۰) ودر سایر نوشته‌های نویسندگان قدیمی می‌بینیم . مفهوم این عبارت‌واضح نیست ولی شایددارای ارزشی بیش از آن‌باشد که فقط به صورت سادهٔ سنت درآمده باشد.

III- براهین فیزیکی - « ازمیان تمام اجسام با احجام متساوی ، کره دارای کمترین مساحت است » . این گزاره را « قضیهٔ هم محیطهای فضایی » می‌نامیم.

بدون استمدادجوئی از هیچکدام از براهین‌ریاضی به صحت قضیهٔهم محیطهای فضائی اعتماد می‌کنیم. در مورد کره شاید عقاید موافق تری داشته باشیم تادر مورد دایره چرا که قطرات آب ، حبابهای صابون ، خورشید،ماه ، زمین وسیارات کروی و یا تقریباً کروی‌اند . شناسائی کمی عمیق از فیزیك کششهای سطحی می‌تواند ما را یاری کند تابا ملاحظهٔ یك‌حباب صابون قضیهٔ هم محیطها را نتیجه بگیریم.

ولی اگر دانش ما از فیزیك ناکافی باشد ، می‌توانیم با مشاهدات بسیار ساده به قضیهٔ هم محیطها پی‌ببریم . حتی یك گربه نیز می‌تواند این موضوع را به ما تفهیم کند . فکر کنم دیده باشید که در شبهای سرد زمستان، گربه چگونه خود را برای خواب مهیامی‌کند، پاهایش را درتنه‌اش فرومی‌کند و به صورت گلوله درمی‌آید ، بطور خلاصه کوشش می‌کند که بدن خود را تاحد ممکن کروی سازد . واضح است که مفهوم این عمل گربه ، نگاهداری حرارت بدنش است که بدین‌وسیله تاحد ممکن از اتلاف حرارت سطحی بدنش می‌کاهد . گربه به هیچ‌وجه قصد تقلیل حجم خود را ندارد بلکه می‌کوشد که هرچه ممکن است سطح خود راکوچکتر کند . او مسئلهٔ جسم با حجم مفروض و با سطح حد اقل را با چنین فرم کروی که به خود می‌دهد، حل‌می‌کند وچنان می‌نماید که شاید اطلاعاتی نسبت به مسئلهٔ هم محیطها داشته است .

تحقیقات فیزیکی که شالودهٔ آنها مشاهدات اخیر است بسیار ساده فراهم می‌گردند . ولی این مشاهدات نسبتاً با پیروزی همراهند و اگر آنها را به عنوان تحقیقات موقتی از قضیهٔ هم محیطها در نظر بگیریم ، بی‌اهمیت نیستند . چگونگی دلایلی که در مورد کره یا دایره صادقند و فوقاً به آنها اشاره کردیم، شروع به وضوح می‌نمایند. آیا اینها برمبنای مشابهتهای فیزیکی هستند ؟

IV- براهین استقرائی لرد رایله - کمی بیش از دویست سال پس از مرگ **دکارت** ، **لرد رایله** فیزیکدان اصوات منتشرهٔ توسط پرده‌هارا مورد مطالعه‌قرار داد . یك‌قطعه پوست گسترده روی یك طبل « پرده» است (یا ، تقریب قابل قبولی از ایدهٔ ریاضی پرده‌ها) با احتساب اینکه آنرا با دقت ویکنواخت گسترده باشیم . طبلها عموماً مستدیرند ولی از همه گذشته ، می‌توانیم طبلهای بیضوی ، چند ضلعی یا سایر انواع را بسازیم .

یك طبل‌به شکل‌غیر مشخصی، می‌تواندصوات گوناگونی را تولید کند که مهمترین آنها را که صوت اصلی می‌نامیم شدیدترین آنها نیز هست . لرد رایله اصوات اصلی پرده‌های با اشکال مختلف‌ولی با مساحتهای مساوی راکه در شرایطفیزیکی یکسان قرار داشتند باهم‌مقایسه کرد . وی جدولی (جدول II) را که ذیلامشاهده می‌شود ومشابه باجدل بخش I است، بنانمود. این جدول II حاوی مفروضاتی مربوط به پرده‌هایی است که به صورت شکلهای جدول I می‌باشند ؛ ترتیب قرار گیری این پرده‌ها کمی متفاوت است و برای هرکدامشان برحسب ارتفاع (یا فرکانس) صوت اصلی بیان شده است.

جدول II

فرکانسهای اصلی چند پرده با مساحتهای متساوی

دایره	۴/۲۶۱
مربع	۴/۴۴۳
ربع‌دایره	۴/۵۵۱
قطاع دایره (°۶۰)	۴/۶۱۶
مستطیل $\left(\frac{۳}{۲}\right)$	۴/۶۲۴
مثلث متساوی الاضلاع	۴/۷۷۴
نیمدایره	۴/۸۰۳
مستطیل $\left(\frac{۱}{۲}\right)$	۴/۹۶۷
مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین	۴/۹۶۷
مستطیل $\left(\frac{۳}{۱}\right)$	۵/۷۳۶

از میان ده پرده با مساحتهای متساوی ، پردهٔ مستدیر در صدر جدول قرار دارد و صوت اصلی مهمتر (grave) را تولید می‌کند . آیا با استقراء می‌توانیم نتیجه بگیریم که از میان **تمام** شکلهای ممکن ، دایره است که صوت اصلی مهمتر را می‌دهد ؟

مسلماً نمی‌توانیم ؛ روش استقرائی هیچگاه قاطع نیست . ولی قویاً مترصدیم که این نتیجه را مورد قبول قرار دهیم و این قصد خیلی قویتر از حالات قبلی است . می‌دانیم (مانند لرد رایله وهم عصری‌های وی) که ازمیان تمام‌اشکال با مساحت مفروض، دایره دارای کمترین محیطاست و نیز می‌دانیم که این قضیه را می‌توان بطورریاضی اثبات کرد. با حضورذهن نسبت‌به این خاصیت می‌نیمم، مایلیم بدانیم که آیا دایره دارای خاصیت فیزیکی می‌نیمم جدول II هست یاخیر. قضاوت خود را با مشابهت نفوذمی‌بخشیم و این نفوذ بسیار عمیق است.

مقایسهٔ جداول I و II بسیار آموزنده است وافکارجدیدی را به میان می‌کشدکه اکنون قصد مطالعهٔ آنها را نداریم.

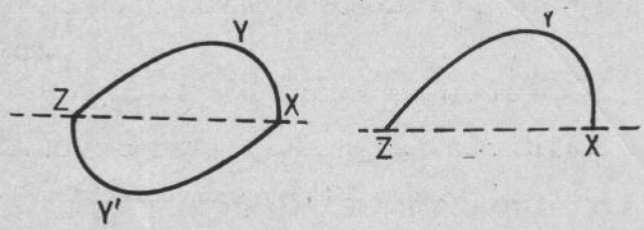
V ـ نتیجه‌گیری ـ چندین نقطه نظری‌راکه منتهی‌به براهین‌مساعد برای قضیهٔ هم محیطها شد، درنظر گرفتیم. این براهین برای اثبات این‌قضیه کافی نیستند ولی می‌توانیم‌آن را به عنوان یك فرضیهٔ قابل قبول بکار ببریم،یك فیزیکدان نیزبا آزمودن یك فرضیهٔ فیزیکی می‌تواند از آن نتیجه‌گیری کند . این نتایج می‌توانند موافق یامخالف واقعیات باشند وفیزیکدان تجربیاتی را انجام می‌دهد که درمورد صحت یاسقم آن تصمیم بگیرد . یك ریاضیدان نیزباآزمودن یك‌فرضیهٔ ریاضی می‌تواند به‌طریق مشابه‌اقدام کند.وی نتایجی را از فرضیهٔ خودمی‌گیرد که ممکن است صحیح یاغلط باشد و وی سعی می‌کند که یکی از این روابط ، را بشناسد. این روش را برای مطالعهٔ قضیهٔهم محیطها بکار می‌بریم و آنرا به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

از میان تمام اشکال مسطح و بامحیط مفروض‌دایره دارای سطح می‌نیمم است. این فرضیه نه‌تنها بافرم قبلی فرقی ندارد بلکه می‌توان دیدکه این گزاره‌ها با هم متعادلند (بخش II). این اثبات را بعداً (بخش VIII) بیان می‌کنیم و فعلا در آزمودن نتایج تعجیل می‌کنیم.

۱ـ دیدون، دخترپادشاه تیر tyr، از سرزمین خویش فرار می‌کند و پس از مسافرتهای بیشماربه ساحل افریقامی‌رسد و شهرکارتاژ را بنا می‌دهد و روایت می‌کنندکه وی اولین‌ملکهٔ این سرزمین شد. دیدون درکنارهٔدریا خواست‌که برای‌ساکنین زمینی بخردکه «مساحت آن بیشتر از مساحتی نباشد که یك افسارگاو می‌تواند محصورکند» و بدین ترتیب در مقابل یك مسئلهٔ هندسی قرارگرفت: بایك طناب باطول مفروض‌چه‌شکلی را باید اختیارکرد تامساحت ماکزیمم را بدست آورد؟

در داخل زمین‌ها واضح است‌که جواب مسئله دایره‌است ولی درکنار دریا مسئله فرق می‌کند، این مسئله را درحالتی حل می‌کنیم‌که ساحل دریا خطی راست باشد. در شکل a طول کمان XYZ داده شده است، می‌خواهیم سطح واقع بین این کمان و قطعه خط XZ را ماکزیمم‌کنیم (این قطعه خط روی خط نامحدود مفروض واقع است ولی می‌توان‌آنرا بطوردلخواه طویل یاکوتاه‌کرد).

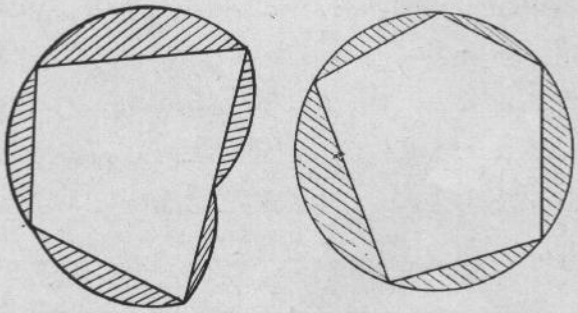
برای حل‌این مسئله خط‌نامحدود (کنارهٔ دریا) راهمانند یك آینه در نظر می‌گیریم (شکل b)



(b) (a)

کمان XYZ و تصویرش X′Y′Z′ در آئینه مجموعاً تشکیل منحنی بستهٔ XZY′ را می‌دهد که طولش ثابت بوده و مساحتش دوبرابر مساحتی است که منظور حداکثر نمودن آن است این سطح وقتی ماکسیمم است که منحنی بسته دایره‌ای باشد که خط مفروض (کنارهٔ دریا) محور تقارن آن باشد، بنابراین جواب مسئلهٔ دیدون نیمدایره‌ای است که مرکزش بر کنارهٔ دریا واقع است.

۲ ـ ژاکوب اشتینر نتایج قابل توجه وفراوانی را ازقضیهٔ هم محیطها بدست آورد. یکی از این نتایج را موردمطالعه قرار می‌دهیم که در ضمن بسیار مؤثر نیز هست . در دایرهٔ مفروض، یك چندضلعی محاط می‌کنیم (شکل c) . قطعاتی از دایره را در نظر می‌گیریم (که در شکل‌هاشورزده شده اند) که محدود به چند ضلعی محاطی بوده و غیر قابل تغییر شکل باشد (فرض می‌کنیم که از مقوابریده باشیم) . این قطعه هارا بوسیلهٔ لولایی که در رأسشان واقع است ، در نظرمی‌گیریم . دستگاه لولاشده

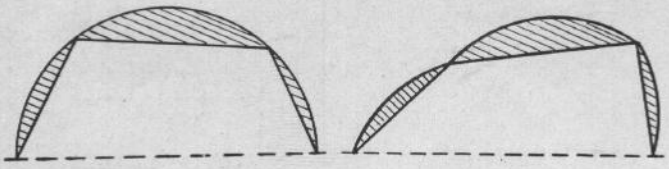


(d) (c)

راباتغییرزوایا، تغییر شکل می‌دهیم . پس ازتغییرشکل(شکل d) منحنی جدیدی بدست می‌آوریم که دایره نیست ولی از کمانهای متوالی دایره‌ای تشکیل شده و طولش برابر با پیرامون دایرهٔ اولیه است . با استفاده از قضیهٔ هم محیطها ، سطح محدود به منحنی جدید باید کمتر از مساحت دایرهٔ مفروض باشد. چون قطعات دایره تغییرشکل ناپذیرند ومساحتشان تغییر نکرده است و فقط چند ضلعی تغییر شکل یافته است که مساحتش را باید می‌نیمم کرده باشد: **مساحت یك چندضلعی محاط در دایره بزرگتر از مساحت تمام چندضلعیهایی است که اضلاعشان برابر با اضلاع همین چند ضلعی و در همان ترتیب قرار گرفته باشند .**

این نتیجه‌گیری ظریفانه است ، معهذا چون قضیهٔ هم‌محیطها را هنوز اثبات نکرده‌ایم، این نتیجه اثبات نشده است.

۳ ـ مسئلهٔ دیدون وروش اشتینررا باهم ترکیب می‌کنیم. در یك نیمدایره ، یك خط منکسر محاط می‌کنیم (شکل e) قطعات بریده شده از نیمدایره را بوسیلهٔ خط منکسر ، تغییر شکل ناپذیر فرض می‌کنیم(درشکل‌ها شورخورده‌اند) لولاهایی در رأسهای خط منکسر قرار می‌دهیم و زوایارا تغییر می‌دهیم و دو انتهای آنرا آزاد می‌گذاریم تا روی خط مفروض که شامل قطر بوده است ، بلغزد.منحنی جدیدی بدست می‌آوریم



(e) (f)

(شکل f) که متشکل از کمانهایی است که مجموع طولشان برابر بامحیط نیمدایره است ولی باتوجه به قضیهٔ مطالعه شده در I ، شامل(با خط) سطحی است که ازمساحت نیمدایره کمتر است . چون قطعات دایره تغییر شکل‌ناپذیرند ، چند ضلعی تغییر شکل یافته در وضعیتی قرار می‌گیرد که مساحتش می‌نیمم گردد و قضیهٔ زیر نتیجه می‌گردد:

ترتیب وطول تمام اضلاع، بجز یکی، ازیك چندضلعی مفروض است ، سطح محدود به‌آن وقتی ماکسیمم است که‌چند ضلعی در یك نیمدایره که قطرش ، ضلع داده نشده است ، محاط باشد .

VI ـ تحقیق نتایج ـ فیزیکدانی که از یك قضیه ، نتایج مختلفی را بدست آورده است می‌کوشد که یکی از آنها را بیابد که بتواند بتوسط تجربه محقق سازد. هرگاه تجربیات بطور غیرقابل انکاری بانتیجهٔ حاصل از یك فرضیه مباینت داشته باشند، می‌توانیم این فرضیه را رد کنیم و هرگاه تجربیات مؤید نتایج باشند ، ارزش فرضیه افزون می‌گردد و شایستهٔ اطمینان بیشتری است . ریاضیدان نیز می‌تواند چنین کند . وی نتایجی از فرضیهٔ خود را جستجو می‌کند که بتواند صحت وسقم آنها را اثبات کند . یك نتیجهٔ اثبات‌شده براطمینان‌شخص به این فرضیه ، می‌افزاید وراهی‌را برای‌اثبات آن می‌گشاید.

دربارهٔ موردی که در دست داریم چه فکر می‌کنید ، چندین نتیجهٔ مختلف را از قضیهٔ هم محیطها بدست آورده‌ایم؛ ولی کدام‌ساده‌تر است ؟

۱ ـ چندین نتیجهٔ بدست آمده از قضیهٔ هم‌محیطها ، در بخش اخیر ، ازمسائل مقدماتی ماکسیمها و می‌نیممها بدست آمده‌اند .

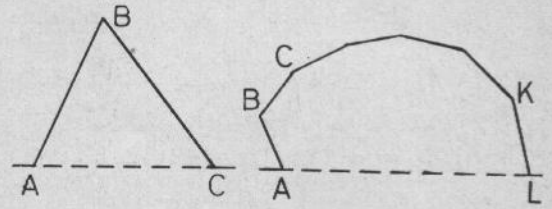
آیا می‌توانیم از این موضوع برای تحقیق نتیجه بهره‌برداری کنیم ؟ حالات نشان داده شده در شکلهای c و f را در نظر می‌گیریم. کدامیك از این شکلها ساده‌تر است؟ پیچیدگی یك چندضلعی با تعداد اضلاع افزون می‌گردد . بنابراین ساده‌ترین چندضلعی مثلث است؛ ومثلث را ترجیح می‌دهیم زیرا آنرا بهتر می‌شناسیم . مثلثی که اضلاعش داده شده باشد ، معین است ونمی‌تواند تغییر شکل بدهد . در مورد مثلث ، عبور از حالت نشان داده شده در شکل c را به حالت شکل d نمی‌توان دید . ولی عبور از شکل e به شکل f ، درمورد مثلث کاملا ممکن است. شاید این ساده‌ترین نتیجه‌ای باشد که تا به‌حال از قضیهٔ هم‌محیطها بدست آورده‌ایم؛ این موضوع را هرچه‌زودتر امتحان می‌کنیم.

حالت خاص و بسیار ساده از نتیجهٔ حاصل در بخش ۳ ـ IV جوابگوی مسئلهٔ زیر است : **دو ضلع مثلثی داده‌شده است ، ماکسیمم مساحت آنرا بدست آورید** (ش g): مساحت وقتی ماکسیمم است که مثلث در نیمدایره‌ای که قطرش ضلع داده نشده است ، باشد . این به معنای آن است که دوضلع مفروض برهم عمود باشند واین موضوع نیز محرز است .

ما موفق شدیم که اولین نتیجهٔ قضیهٔ هم محیطها رامحقق سازیم . در تحقیقی که انجام دادیم چه چیزی مهمتر است ؟ آیا می‌توانیم آنرا تعمیم‌دهیم ؟ آیا نتایج دیگری را نیزمی‌توانیم تحقیق کنیم ؟

۲ ـ ازتعمیم مسئلهٔ مطالعه شده در ۱، به‌مسئلهٔ زیرمی‌رسیم: **طولهای متوالی یك چند ضلعی داده شده است و فقط طول یکی ازآنها مجهول است، درچه شرایطی سطح محدود به چند ضلعی ماکسیمم است ؟**

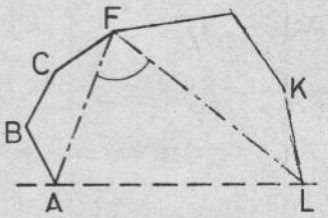
نشانه‌های شایسته را مداخله می‌دهیم (ش h) . طولهای AB ، BC ، ..... ، KL مفروضند ؛ طول LA داده نشده است . می‌توانیم خط شکستهٔ ABC .... F .... KL را نوعی «فوق انگشت . Super diogt» در نظر بگیریم :



(g) (h)

بندهای AB ، BC ، ..... KL طولهایی تغییر ناپذیرند ، زوایا در لولاهای B، C ، ... ، F، تغییر می‌کنند . منظور، ماکسیمم‌ساختن‌سطح محدود به چندضلعی ABC ... KLA است .

در برخی از مسائلی که قبلا مورد مطالعه قرار داده‌ایم اشکال اساسی موقعی بوجود آمد که تعداد متغیرها زیاد گشت (زوایا در B ، C ، ... ، F ، و K) . تاکنون در بخش ۱ ، حالت بسیار خاصی را که تنها یك‌متغیر داشتیم (فقط یك لولا ، شکل g) مورد مطالعه قرار دادیم . طبیعی است که امیدوار باشیم که‌از این حالت خاص به عنوان اساسی برای‌حل مسئلهٔ کلی استفاده کنیم . فرض‌می‌کنیم که مسئله حل‌شده باشد واندازهٔ‌تمام زوایارا بجزیکی ، بدست آورده باشیم . درشکل i، فرض‌می‌کنیم که‌زاویه‌در F متغیروسایرزوایادر B ، C ،... ، K معلوم‌باشند ؛ لولاهای B ، C ، ... K را سخت فرض‌می‌کنیم ولولای F را نرم وقابل حرکت‌درنظرمی‌گیریم. A را به F و L وصل می‌کنیم. طولهای AF و LF تغییر ناپذیرند. حال چندضلعی کامل ABC...F...KLA به سه‌جزء تقسیم شده



(i)

است که دوتای آنها تغییر شکل ناپذیرند (ماآنهارا مقوایی فرض می‌کنیم) و فقط سومی متغیر است . چند ضلعیهای ABC... FA و FL ... LK تغییر شکل ناپذیرند . مثلث AFL دارای دو ضلع مفروض FA و FL و یك زاویهٔ متغیر در F است . سطح مثلث ودر نتیجه سطح چند ضلعی کامل ABC... F ... KLA وقتی‌ماکسیمم‌است که زاویهٔ AFL قائمه باشد واین همان نتیجه‌ای است که چند لحظه پیش درا ، واز شکل g بدست آوردیم .

واضح است که این‌استدلال به همین‌طریق ، درموردسایر لولاها ، یعنی در زوایای B ، C ، ... و K (ش h) بکار می‌رود ومی‌بینیم که : **سطح چندضلعی ABC ... KLA وقتی ماکسیمم است که ضلع داده نشدهٔ AL ، از هریك‌از رأسهای B ، C ، .. F ، . K ، غیرواقع بر AL ، تحت زاویهٔ قائمه دیده‌شود .** اگر سطح ماکسیمم وجود داشته باشد ، باید در این شرایط صدق نماید. می‌توانیم فرض‌کنیم که چنین سطح ماکسیممی وجود داشته باشد و بااستمداد از یك قضیه از هندسهٔ مقدماتی نتیجهٔ حاصل را به صورت دیگری عنوان کنیم : **اگر وفقط اگر چند ضلعی بتواند دریك نیمدایره که‌قطرش ضلع داده نشده است، محاط باشد ، ماکسیمم سطح مطلوب بدست می‌آید .**

دقیقاً به‌همان‌نتیجهٔ بخش ۳ـV واین‌دفعه بدون استفاده از قضیهٔ هم محیطها رسیدیم .

بقیه در صفحهٔ ۲۱۷

تصاعدها

(دنباله ازشمارهٔ قبل)

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری

III ـ تصاعد هندسی

فرض کنیم اولین جملهٔ سری (b_n) برابر ۳ بوده وهرجملهٔ دلخواه دیگراز ضرب جملهٔ ماقبلش درعدد ۲ بدست آید، یعنی:

$$b_1=3 \text{ و } b_{n+1}=b_n\cdot 2$$

دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$b_2=b_1\times 2=3\times 2=6 \text{ و } b_3=b_2\times 2=6\times 2=12$$

$$b_4=b_3\times 2=12\times 2=24 \text{ و}$$

$$b_5=b_4\times 2=24\times 2=48 \text{ و } \cdots$$

۸ـ تعریف: سری عددی که‌هرجملهٔ آن (بعد از اولی) برابر باحاصل‌ضرب جملهٔ ماقبلش درعددی ثابت و معین غیر از صفرباشد، **تصاعد هندسی** نام‌دارد.

ازتعریف‌فوق‌می‌توان‌نتیجه‌گرفت که‌نسبت‌دوجملهٔ‌متوالی‌از تصاعد هندسی (b_n) مقداری است ثابت (توجه می‌دهیم که جملهٔ اول نمی‌تواند صفر باشد زیرا در این صورت تصاعدی نخواهیم داشت) :

$$b_2:b_1=b_3:b_2=\cdots=b_n:b_{n-1}=b_{n+1}:b_n=\cdots$$

این‌مقدار ثابت را **قدرنسبت** تصاعد گویند وآن را باحرف q نمایش می‌دهند.

به این ترتیب تصاعد هندسی با مفروضات زیر مشخص می‌شود :

$$b_1=b \text{ و } b_{n+1}=b_n\cdot q$$

که درآن b عددی است معین. حال مثالهایی از تصاعدهندسی را بررسی می‌کنیم.

هرگاه اولین‌جملهٔ تصاعدهندسی ۶ وقدرنسبتش برابر $\frac{1}{2}$ باشد، تصاعدبه‌صورت زیرخواهد بود:

$$6 \text{ و } 3 \text{ و } \frac{3}{2} \text{ و } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{3}{8} \text{ و} \cdots$$

بامفروضات $c_1=4$ و $c_{n+1}=c_n(-3)$ تصاعد هندسی زیرداده می‌شود:

$$4 \text{ و } -12 \text{ و } 36 \text{ و } -108 \text{ و} \cdots$$

توجه داریم که هرگاه $q<0$ باشد جمله‌های شمارهٔ فردبعلامت جملهٔ اول وجمله‌های باشمارهٔ‌زوج باعلامت مخالف‌علامت‌جمله اول هستند. دراین‌صورت تصاعد یك‌سری است‌نه‌صعودی ونه نزولی.

هرگاه $q>0$ $(q\neq 1)$ تصاعد یك سری خواهد بود یکنواخت. فرض کنیم‌مثلا $b_1=-2$ و $q=3$. دراین‌حالت تصاعد هندسی‌صعودی خواهدبود:

$$-2 \text{ و } -6 \text{ و } -18 \text{ و} \cdots$$

اگر $q=1$ باشد کلیهٔ جمله‌های تصاعدبایکدیگرمساوی‌خواهند شد ودراین حالت تصاعد یك‌سری ثابت است.

تمرینات

۴۶ـ مطلوبست ۵ جملهٔ اول تصاعد هندسی (b_n) در صورتی که داشته باشیم:

a) $b_1=-16$ ، $q=\frac{1}{2}$

b) $b_1=-24$ ، $q=-1/5$

c) $b_1=1/8$ ، $q=\frac{\sqrt{3}}{3}$

۴۷ـ فرض کنیم (a_n) و (c_n) تصاعدهای هندسی‌باشند. پیداکنید قدرنسبت وجملهٔ چهارم این‌دو تصاعد را:

a) 3 و 15 و $\cdots$ و a_n و $\cdots$

b) 6 و -12 و $\cdots$ و c_n و $\cdots$

۴۸ـ درتصاعد هندسی (y_n) دوجمله ازاول مجهولند ، آنهارا پیدا کنید.

a) y_1 و y_2 و ۲۴ و ۳۶ و ۵۴ و ...

b) y_1 و y_2 و $-\sqrt{20}$ و ۱۰ و $-\sqrt{500}$ و ...

۴۹ـ مطلوبست قدر نسبت و جمله‌های ششم وهفتم تصاعد هندسی (a_n) درصورتی که:

a) $a_8=6$ و $a_{10}=150$

b) $a_{12}=10$ و $a_9=-10$

c) $a_3=-2$ و $a_5=-18$

۵۰ـ مطلوبست شکل ترسیمی تصاعد هندسی (b_n):

a) $b_1=8$ و $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$ ، $1\leq n\leq 6$

b) $b_1=-8$ و $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$ ، $1\leq n\leq 6$

c) $b_1=-8$ و $b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n$ ، $1\leq n\leq 6$

۵۱ـ اولاچند جمله ازسری‌های زیررا نوشته و در ثانی بگویید چه‌نوع تصاعدی (هندسی یاحسابی) هستند.

الف‌ـ (a_n) که درآن $a_1=5$ و $a_{n+1}=4a_n$

ب‌ـ (x_n) که درآن $x_1=5$ و $x_{n+1}=4+x_n$

۵۲ـ ثابت کنید که اعداد $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ تشکیل یك‌تصاعد هندسی می‌دهند.

۵۳ـ ثابت‌کنید که سری (c_n) یك‌تصاعد هندسی است:

a) $c_n=2^n$

b) $c_n=5\times 3^n$

c) $b_n=3\times 2^{n+1}$

d) $c_n=\frac{3}{5^n}$

۹ـ فرمول جملهٔ nام تصاعد هندسی

بادانستن اولین‌جملهٔ b_1 وقدر نسبت q ازتصاعد هندسی (b_n) می‌توان جملهٔ دوم، سوم، وبطورکلی هرجملهٔ دلخواه از این تصاعدرا بدست‌آورد. ولی برای بدست‌آوردن جمله‌های با شماره ترتیبهای‌بالا مجبوریم ازفرمولی‌که جملهٔ nام رابرحسب جملهٔ اول b_1 ، قدر نسبت q وعـدد n بدست می دهد استفاده کنیم .

از تعریف تصاعد هندسی داریم:

$$b_2=b_1q$$

$$b_3=b_2\cdot q=(b_1\cdot q)\cdot q=b_1\cdot q^2$$

$$b_4=b_3\cdot q=(b_1\cdot q^2)\cdot q=b_1\cdot q^3 \quad , \ldots$$

بطورکلی داریم:

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1} \qquad (1)$$

چند مثال :

۱ـ درتصاعد هندسی (b_n) داریم $b_1=0/8$ و $q=\frac{1}{4}$ پیداکنید b_{10} را.

$$b_{10}=0/8(\frac{1}{2})^{10-1}=0/8(\frac{1}{2})^9=\frac{1}{640}$$

۲ـ در تصاعـد هندسی (c_n) داریـم $c_1=-27$ ، $q=\frac{1}{3}$. پیداکنید جملهٔ nام این تصاعد را.

$$c_n=-27\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}=-\frac{3^3}{3^{n-1}}=-3^{4-n}$$

تمرینات :

۵۴ـ فرض‌کنیم (x_n) تصاعد هندسی باشد، که جملهٔاول آن برابر x_1 وقدر نسبتش برابر q است. پیداکنید مقادیر:

x_5 ، x_{21} ، x_{150} ، x_m ، x_{m-3} ، x_{2n+1}

۵۵ـ درتصاعـد هندسی (u_n) داریم : $u_1=256$ و $q=\frac{1}{2}$ ، پیداکنید u_3 و u_5 ، u_{10} ، u_{n-3} را .

۵۶ـ درتصاعد هندسی (b_n) جملهٔ اول b_1 وقدرنسبت q معلومند. پیداکنید b_n را درصورتی‌که:

a) $n=6$ ، $q=-2$ ، $b_1=0/125$

b) $n=8$ ، $q=\frac{2}{3}$ ، $b_1=\frac{243}{250}$

c) $n=5$ ، $q=-\sqrt{6}$ ، $b_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$

۵۷ـ اولین‌جملهٔ تصاعد هندسی زیررا پیداکنید:

a) $q=2$ ، $b_8=384$

b) $q=-\frac{2}{3}$ ، $b_6=\frac{32}{81}$

۵۸ـ مطلوبست قدرنسبت تصاعد هندسی، درصورتی‌که :

a) $b_9=1280$ ، $b_1=5$

b) $b_6=-5\frac{1}{16}$ ، $b_1=\frac{2}{3}$

۵۹ـ مقادیر جمله‌های a_7 و a_{15} و a_{40} از تصاعد هندسی (a_n) را برحسب جملهٔ a_5 وقدر نسبت q بدست آورید.

۶۰ـ در تصاعد هندسی (c_n) داریم $c_5=27$ ، $c_4=9$ مطلوبست c_8 .

۶۱ـ مطلوبست شمارهٔ ترتیب n امین جملـه از تصاعد هندسی که در آن:

a) $q=3$ ، $b_1=2$ و $b_n=162$

b) $q=-2$ ، $b_1=640$ ، $b_n=10$

c) $q=\sqrt{2}$ ، $b_1=-1$ ، $b_n=-32$

۶۲ـ آیا اعداد زیر متعلق به‌تصاعد : ۰۰۰و۹۶ و ۱۴۴ می‌باشند ؟ :

a) ۶۴ b) $-\frac{4}{9}$

c) $28\frac{4}{9}$ d) $1\frac{5}{27}$

۶۳ـ a) بین دوعدد ۱و۱۶ سه‌عدد طوری قراردهید که رویهم تشکیل تصاعد هندسی بدهد.

b) بین‌اعـداد ۱ و ۱۶ هشت عدد طوری قرار دهید که رویهم تشکیل تصاعد حسابی دهد.

۱۰ـ فرمول مجموع n جملهٔ اول تصاعد هندسی

فرض کنیم (b_n) تصاعد هندسی باشد که قدر نسبتش مخالف یك است. n جملهٔ اول این تصاعد را می‌نویسیم:

b_1 و b_2 و b_3 و ۰۰۰ و b_{n-1} و b_n

مجموع این n جمله رابا S_n نمایش می‌دهیـم. دراین‌صورت خواهیم داشت.

$$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n \qquad (1)$$

طرفین تساوی اخیررا در q ضرب می‌کنیم :

$$qS_n=b_1q+b_2q+b_3q+\cdots+b_{n-1}q+b_nq$$

ولـی $b_1q=b_2$ و $b_2q=b_3$ و $b_3q=b_4$ و ۰۰۰ و $b_{n-1}q=b_n$ است وبنابراین:

$$qS_n=b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n+b_nq \qquad (2)$$

هرگاه از رابطهٔ (۲) رابطهٔ (۱) را جـزء به جزء کم کنیم ، بدست می‌آوریم:

$$qS_n-S_n=b_nq-b_1 \Longrightarrow$$

$$S_n(q-1)=b_nq-b_1$$

$$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1} \quad , \quad (q\neq 1)$$

توجه داریم که اگر قدر نسبت q مساوی واحد باشد تصاعد به‌صورت زیر در می‌آید :

b_1وb_1و۰۰۰وb_1و۰۰۰وb_1و۰۰۰وb_1و۰۰۰

در این حـالت مجمـوع n جملهٔ تصاعـد برابر nb_1 خواهد شد .

مثال ـ پیدا کنید مجموع ۱۰ جملهٔ‌اول ازتصاعدهندسی:

۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ۰۰۰

اولین‌جملهٔ تصاعد برابرواحد و قدر نسبت آن ۲می‌باشد . پس دهمین‌جملهٔ‌آن می‌شود:

$$b_{10}=1\times 2^{10-1}=29$$

حال با استفاده از فرمول مجمـوع n جملهٔ اول تصاعد هندسی داریم :

$$S_{10}=\frac{2^9\times 2-1}{2-1}=2^{10}-1=1024-1=1023$$

هرگاه درفرمول $S_n=\frac{b_n\cdot q-b_1}{q-1}$ به‌جای b_n مقدارش از رابطهٔ $b_n=b_1q^{n-1}$ قراردهیم، فرمول‌دیگری برای‌مجموع n جملهٔ اول‌تصاعد هندسی بدست می‌آوریم:

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

تمرینات

۶۴ـ پیدا کنید مجموع ۵جملهٔ اول تصاعد هندسی(x_n) راکه درآن:

a) $x_1=8$ و $q=\frac{1}{2}$

b) $x_1=3$ و $q=-2$

c) $x_1=-27$ و $q=\frac{1}{3}$

d) $x_1 = -1$ و $q = -10$

۶۵ـ مجموع n جملهٔ اول تصاعد هندسی (b_n) را بدست آورید درصورتی که :

a) $n = 6$ و $q = 3$ و $d_1 = -4$

b) $n = 8$ ، $q = -\frac{1}{2}$ ، $b_1 = -32$

۶۶ـ مطلوبست مجموع ۳ و ۵ و n جملهٔ اول تصاعد هندسی (b_n) که توسط فرمول جملهٔ n ام داده شده است:

a) $b_n = 1/5 \times 4^n$

b) $b_n = 2 \times 3^{1-n}$

۶۷ـ تصاعد هندسی $a_n = 3(\frac{1}{2})^n$ داده شده‌است. پیدا کنید مجموع جمله‌های بین جمله‌های دوم وهشتم.

۶۸ـ درهر حرکت تلمبهٔ تخلیه ۲۰٪ هوای داخل ظرف به‌خارج هدایت می‌شود. تعیین کنید فشار داخل‌ظرف را بعد از شش حرکت تلمبه. در صورتی که فشار اولیهٔ داخل ظرف ۷۵۰ میلیمتر جیوه باشد .

۶۹ـ ۱۰۰۰ تومان در پس انداز بانکی داریم سود ۲٪ سالیانه به‌آن تعلق گیرد پس‌از چهارسال پول پس‌انداز ماچقدر خواهدشد.

۷۰ـ باکتری‌هایی که درظرف تکثیر قرار گرفته‌اند هر کدام درهر نیمساعت به دو باکتری تکثیر می‌شوند . پس از ده ساعت چند باکتری ازیك باکتری حاصل می‌شود؟

۷۱ـ در یك منطقهٔ جنگلی‌سالیانه ۱۰٪ به مقدار چوب هردرخت افزوده می‌شود. تعیین کنید بعد از ۶ سال چه مقدار چوب خواهیم داشت در صورتی که مقدار اولیهٔ چوبها برابر ۲۰۰۰۰ مترمکعب باشد؟

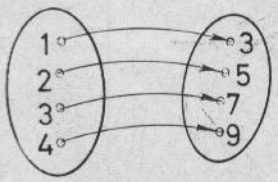
تعریفهای سری و تصاعد بابیانی دیگر

۱ـ سری محدود شامل n جمله تابعی است که در روی مجموعهٔ n عدد اول اعداد طبیعی‌داده شده‌است.

۲ـ سری نامحدود تابعی است که در روی مجموعهٔ اعداد طبیعی داده شده‌است.

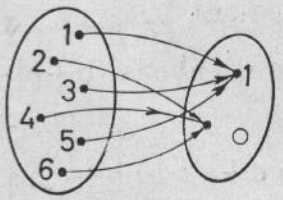
چند مثال :

۱) سری ۹ و ۷ و ۵ و ۳ تابعی است که ناحیهٔ معین بودن‌آن مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4\}$ و مجموعهٔ مقادیر آن



$\{3, 5, 7, 9\}$ می‌باشد . این تابع را می توان به‌کمك جفتهای (۳ , ۱) ، (۵ , ۲) ، (۷ , ۳) ، (۹ , ۴) و یا به کمك شکل بالا نشان داد.

۲) سری ۰ و ۱ و ۰ و ۱ و ۰ و ۱ دارای شش جمله تابعی است‌که در روی مجموعهٔ شش عدد اول اعداد طبیعی‌داده شده است.



مجموعهٔ مقادیر این تابع از دوعضو ۱ و ۰ (شکل بالا)تشکیل می‌شود .

۳) سری اعداد مثبت وزوج به ترتیب صعودی :

۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰۰۰

تابعی است معین در روی مجموعهٔ کلیهٔ اعداد طبیعی . بطوری که مقدار متناظریك برابر۲، مقدار متناظر ۲ برابر۴، مقدار متناظر ۳ برابر۶ مقدارمتناظر۴ برابر ۸و۱۰۰۰مقدارمتناظر ۱۰ برابر ۲۰ ، مقدار متناظر ۲۵ برابر ۵۰ ۱۰۰۰ وبطور کلی مقدار متناظر n برابر ۲n می‌باشد .

این‌مطلب را می‌توان درمورد تصاعدهای حسابی‌وهندسی تعمیم داد.

نامساویهای جبری

ترجمهٔ : سعید شعاری نژاد

(دنباله از شمارهٔ قبل)

تمرینات

۱) $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=$

$=\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2\geqslant 0$

۲) $y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\geqslant xyz(x+y+z)$

۳) $x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2\geqslant \frac{2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n}{n-1}$

۴ـ اگر a و b مثبت و $r\geqslant -1$ عدد گویا باشد :

$a^{r+2}+b^{r+2}\geqslant ab(a^r+b^r)$

۵ـ اگر a و b و c مثبت باشند:

$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+$
$+c^2(a+b)$

۶ـ اگر $b+c>a$ و $c+a>b$ و $a+b>c$ و $0<a<b<c$ باشد:

$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant(a^2+bc)(a+b+c)$

۷ـ اگر a و b و c مثبت و $a+b\geqslant c$ باشد:

$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{c}{1+c}$

۸ـ اگر n عدد صحیح مثبت و $x>0$ باشد:

$x^n-1\geqslant n(x-1)$

۹ـ با بکار بردن

$\frac{1}{r^3}<\frac{1}{(r-2)(r-1)r}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(r-2)(r-1)}-\frac{1}{(r-1)r}\right\}$

برای $r\geqslant 3$ ، ثابت کنید که:

$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{13}{8}$

نامساوی مشابهی برای عبارت زیر بدست آورید:

$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}$

۱۰ـ اگر c و b و a مثبت و $a>b$ باشد:

$\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}>1$

برای حالت $a<b$ نیز فرمولی بدست آورید.

۱۱ـ اگر d و c و b و a و s و r و q و p مثبت و $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ باشد:

$\frac{pa+qb}{ra+sb}\cdot\frac{a}{b}<\frac{pc+qd}{rc+sd}\cdot\frac{c}{d}$

۱۲ـ اگر d و c و b و a مثبت و اگر

$u_n=\frac{(a+bn)}{(c+dn)}$ باشد $u_n>u_{n+1}$ یا $u_n<u_{n+1}$

برحسب اینکه $ad>bc$ یا $ad<bc$ باشد.

۱۳ـ اگر $0<x<pr$ ، $0<y<pr$ ، $0<xy<p^2$ باشد:

$x+y<(r+r^{-1})p$

۱۴ـ اگر $c_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ثابت کنید

$\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}+\cdots+\sqrt{c_n}<\{n(2^n-1)\}^{\frac{1}{2}}$

۱۵ـ اگر اعداد c و b و a حقیقی و نامساوی باشند، ثابت کنید که

$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab>0$

باملاحظه عوامل $a^3+b^3+c^3-3abc$ ، یابرعکس، ثابت

کنید که، اگر c و b و a مثبت و نامساوی باشند، واسطهٔ حسابی آنها بیشتر از واسطهٔ هندسی آنهاست، و همچنین ثابت کنید که :

$$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)>6abc$$

۱۶ـ اگر c و b و a اعداد مثبت حقیقی باشند، ثابت کنید که :

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}>\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

اگر x و y اعداد مثبت حقیقی و $y>x$ باشد

$$\frac{y^3+3yx^2+4\left(y^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3y^2-x^2}>\frac{2}{3}\left\{y+(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

۱۷ـ اگر t و z و y و x هرعدد حقیقی باشند، ثابت کنید که:

$$x^4+y^4\geqslant 2x^2y^2 \text{ و } x^4+y^4+z^4+t^4\geqslant 4xyzt$$

همچنین ثابت کنید که:

$$(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2\geqslant 2(xy+zt)^2$$

نشان‌دهید که اگر :

$$x^4+y^4+z^4+t^4\leqslant 1$$

در این صورت :

$$x^{-4}+y^{-4}+z^{-4}+t^{-4}\geqslant 16$$

۱۸ـ برای هرمقدار z و y و x

$$(x^2-yz)^3+(y^2-xz)^3+(z^2-xy)^3-$$
$$-3(x^2-yz)(y^2-xz)(z^2-xy)$$
$$=(x^2+2yz)^3+(y^2+2zx)^3+(z^2+2xy)^3$$
$$-3(x^2+2yz)(y^2+2xz)(z^2+2xy)$$
$$=(x^2+y^2+z^2)^3+2(yz+zx+xy)^3-$$
$$-3(x^2+y^2+z^2)(yz+zx+xy)^2$$
$$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2\geqslant 0$$

۱۹ـ اگر c و b و a مثبت باشند

I) $(b^2-ca)(c^2-ab)+(c^2-ab)(a^2-bc)+$
$+(a^2-bc)(b^2-ac)\leqslant 0$

II) $(3a-b-c)^3+(3b-c-a)^3+$
$+(3c-a-b)^3-3(3a-b-c)\times$
$\times(3b-c-a)(3c-a-b)\geqslant 0$

۲۰ـ (I) اگر r و q و p مثبت‌واگر $u+v+w=0$ باشد

$$p^2u^2+q^2v^2+r^2w^2-2prvw-2rpwu-$$
$$-2pquv\geqslant 0$$

(II) اگر یکی از اعداد z و y و x دارای علامت مخالف دوتای دیگر باشد:

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy\geqslant 0$$

(III) اگر $b+c>a$ ، $c+a>b$ و $a+b>c$ باشد :

$$a^2(X-Y)(X-Z)+b^2(Y-Z)(Y-X)+$$
$$+c^2(Z-X)(Z-Y)\geqslant 0$$

۲۱ـ اعداد داده شدهٔ c_r و b_r و a_r همه به ازای n و ... و ۲ و ۱ $=r$ حقیقی و مثبت هستند همچنین

$a_r^2=b_r^2+c_r^2$ و $r=1$ و ۲۰۰۰ و n

$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$C_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

بوسیلهٔ استقراء ثابت کنید که (یا برعکس) $A_n^2>B_n^2+C_n^2$

۲۲ ـ با استفاده از میانگین موزون اعداد یک و $\frac{n}{n+1}$ به ترتیب به ازای ۱ و $n+1$ ثابت کنید که:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

[نامساوی، مندلسون]

۲۳ـ اگر $n>1$ باشد:

$$2!4!\cdots(2n)!>\{(n+1)!\}^n$$

[نامساوی ونکاترامان]

۲۴ـ با بکار بردن قضیهٔ «واسطهٔ هندسی<واسطهٔ عددی» برای اعداد $\frac{n+1}{n}$ و ... و $\frac{4}{3}$ و $\frac{3}{2}$ و $\frac{2}{1}$ و عکس آنها، ثابت کنید که برای عدد صحیح $n\geqslant 2$ داریم:

$$\frac{n}{n+1-S_{n+1}}<(n+1)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{S_n}{n}$$

که در آن:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

۲۵) I: $(n!)^{\frac{2}{n}}<\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$$II : (n!)^{\frac{2}{n}} < \frac{n(n+1)^2}{4}$$

۲۶ـ اگر θ و φ دوعدد گویا باشند که $\theta+\varphi=1$ و اگر $a_1 \cdots a_n$ و $b_1 \cdots b_n$ دو مجموعه اعداد مثبت مستقل از هم باشند:

$$\left(a_1^{\theta} b_1^{\varphi} + \cdots + a_n^{\theta} b_n^{\varphi}\right) < \text{یا} >$$

$$\left(a_1+\cdots+a_n\right)^{\theta}\left(b_1+\cdots+b_n\right)^{\varphi}$$

۲۷ـ اگر p و q عددهای گویای مثبت باشند بقسمی که $p^{-1}+q^{-1}=1$ ، ثابت کنید که، برای اعداد مثبت $a_1 \cdots a_n$ و $b_1 \cdots b_n$ داریم:

$$M_1(ab) \leqslant M_p(a) \cdot M_q(b)$$

حالت تساوی در چه صورتی اتفاق می‌افتد؟

۲۸ـ اگر:

$$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$$

و

$$0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots$$

و اگر:

$$M^{(n)}(ab) = \frac{(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)}{n}$$

$$M^{(n)}(a) = \frac{(a_1+\cdots+a_n)}{n}$$

$$M^{(n)}(b) = \frac{(b_1+\cdots+b_n)}{n}$$

ثابت کنید که:

$$(n+1)^2\left\{M^{(n+1)}(ab) - M^{(n+1)}(a)M^{(n+1)}(b)\right\}$$

$$> n^2\left\{M^{n}(ab) - M^{n}(a)M^{n}(b)\right\}$$

۲۹ـ ثابت کنید که در هر مثلث :

$$abcS \geqslant a^3(S-a)+b^3(S-b)+c^3(S-c)$$

و نتیجه بگیرید که:

$$\frac{abc}{r} \geqslant \frac{a^3}{r_1}+\frac{b^3}{r_2}+\frac{c^3}{r_3}$$ [نامساوی اندرسون]:

۳۰ـ اگر $\mu \geqslant 0$ و z و y و x همه مثبت باشند:

$$x^{\mu}(x-y)(x-z)+y^{\mu}(y-z)(y-x)+$$

$$z^{\mu}(z-x)(z-y) \geqslant 0$$

۳۱ـ x در شرایط $a \leqslant x \leqslant b$ صدق می‌کند، و p یک مقدار قرار دادی برای x است. خطای مطلق برابر با $|p-x|$ و خطای نسبی برابر با $\left|\frac{(p-x)}{x}\right|$ است. ثابت کنید که:

(I) حداکثر خطای مطلق یعنی $\max|p-x|$، حداقل است وقتی که $p=\frac{1}{2}(a+b)$ باشد و برابر است با $\frac{1}{2}(b-a)$

(II) حداکثر خطای نسبی $\max\left|\frac{(p-x)}{x}\right|$، حداقل است وقتی که: $p=\frac{2ab}{a+b}$ (پولیا)

۳۲ـ اگر $a_1 \cdots a_n$ اعداد مثبت باشند، نشان دهید که تابع

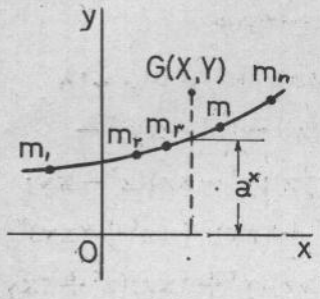
$$a_1+\cdots+a_n+x-(n+1)(a_1 \cdots a_n x)^{\frac{1}{n+1}}$$

مقدار می‌نیمم:

$$a_1+\cdots+a_n-n(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

را دارد و این مقدار وقتی که $x=(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ می‌باشد بدست می‌آید. (از قضیه $A.M \geqslant G.M$ نتیجه بگیرید)

۳۳ـ اگر $a>1$ باشد منحنی $y=a^x$ شکل مقابل را دارد، باید توجه داشت اینکه منحنی بالای محور x ها قرار دارد و اینکه صعودی است و تقعر آن رو ببالا است.



تعداد n نقطهٔ $(x_1 \text{ و } y_1)$ و $\cdots$ و $(x_n \text{ و } y_n)$ و $\cdots$ را در طول منحنی انتخاب و فرض کنید که جرمهای مثبت m_1 و $\cdots$ و m_n در این نقاط قرار دارند. مرکز ثقل این نقاط جرم‌دار مختصات $(X \text{ و } Y)$ را دارا می‌باشد که به صورت زیر داده شده است:

$$MX = m_1x_1+\cdots+m_nx_n$$

$$MY = m_1y_1+\cdots+m_ny_n$$

که در آن:

$$M = m_1+\cdots+m_n$$

چون تقعر منحنی رو به بالا است . G بالای منحنی قراردارد مگر اینکه $y_1=\cdots=y_n$ که در این حالت کلیهٔ نقاط برهم منطبق می‌شوند و G روی منحنی قرار می‌گیرد از اینرو ، $Y\geqslant a^x$ است‌وداریم:

$$\frac{m_1y_1+\cdots+m_ny_n}{M}\geqslant a^{\frac{m_1x_1+\cdots m_nx_n}{M}}$$

$$=\left(a^{m_1x_1}+\cdots+a^{m_nx_n}\right)^{\frac{1}{M}}=$$

$$=\left(\begin{matrix}m_1 & & m_n\\ y_1 & \cdots & y_n\end{matrix}\right)^{\frac{1}{M}}$$

با مقایسهٔ این نتیجه با قضیهٔ ۸ـ۳ متوجه می‌شویم که در اینجا لازم نیست m_1 و...و m_n را گویا فرض کنیم. با مراجعه‌به شکل، واضح است که y_1 و...و y_n می‌توانند مقادیر مثبت دلخواه باشند.

این اثبات قضیه متوسط موزون فاقد دقت زیاد مربوط به دلیل بکار برده شده در متن است، چون به قوهٔ استدراك ما در مورد رسم منحنی و خواص مربوط به‌تابع a^x مربوط می‌باشد. این مشکل را می‌توان باکاربرد قضیهٔ متوسط مقدار در حساب حل کرد.

اگرفرض کنیم $0<a<1$ بحث بالا چه فرقی خواهد کرد؟

۳۴ـ تقعر منحنی $y=x^k$، برای $x>0$ رو به‌بالااست اگر $k>1$ و روبه پایین است اگر $k<1$ باشد. بابکار گرفتن روش مسئلهٔ ۳۳، نشان دهیدکه اگر m_1و...وm_nو x_1 و... وx_n همه مثبت باشند، خواهیم داشت:

$$\frac{m_1x_1^k+\cdots+m_nx_n^k}{m_1+\cdots m_n}\geqslant \text{یا} \leqslant \left(\frac{m_1x_1+\cdots+m_nx_n}{m_1+\cdots\times m_n}\right)^k$$

برحسب اینکه $k>$ یا $k<1$ باشد.

۳۵ـ با توجه به تقعر منحنی $y=f(x)$ واگر m_1 و...وm_n مقادیر مثبت باشند ثابت کنیدکه:

$$f\left(\frac{m_1x_1+\cdots+m_nx_n}{m_1+\cdots+m_n}\right)\geqslant \frac{m_1f(x_1)+\cdots+m_nf(x_n)}{m_1+\cdots+m_n}$$

۳۶ـ اگر a_1 و a_2 و...وa_n مثبت و متمایز باشند، ثابت کنیدکه:

$$\sum_{r\neq s}\frac{a_r}{a_s}>n(n-1)$$

۳۷ـ با ملاحظهٔ مجموعهٔ اعداد $a_r=(n+r)(n+r+1)$ که در آن n یك عدد معین و مشخص است و r مقادیر ۱و۲و...و n را انتخاب می‌کند ، ثابت کنیدکه:

$$(n+1)^{n+1}(2n+1)^{n+1}\leqslant\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2<$$

$$<\left(\frac{r}{s}\right)^n(n+1)^{n+1}(2n+1)^{n-1}$$

۳۸ـ اگر $0<\theta<\alpha<\varphi<2\pi$ و $\alpha+\beta=\theta+\varphi<2\pi$ باشد نشان دهیدکه:

$$\sin\alpha+\sin\beta>\sin\theta+\sin\varphi$$

ثابت کنید بین کثیرالاضلاعهای n ضلعی محاط دردایرهٔ داده‌شده کثیرالاضلاعهای منتظم بزرگترین مساحت را دارند.

۳۹ـ اگر y و x اعداد مثبت و p و q اعداد صحیح مثبت باشند، ثابت کنیدکه:

$$\frac{x^py^q}{(x+y)^{p+q}}\leqslant\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}$$

۴۰ـ ثابت کنیدکه، اگر b_i و a_i ، اعداد حقیقی باشند

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

باگذاشتن $a_i=c_i^{\frac{3}{2}}$ و $b_i=c_i^{\frac{1}{2}}$ و $a_i=c_i$ و $b_i=1$ یك نامساوی بین $\sum_{i=1}^{n}c_i^3$ و $\sum_{=1}^{n}c_i$ بدست آوریدکه c_i مثبت باشد، نشان دهیدکه‌حالت تساوی وقتی وفقط وقتی اتفاق‌می‌افتد که تمام c_i ها باهم مساوی باشند.

۴۱ـ اگر a_1وa_2و...وa_n مثبت باشند و $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ و p عدد صحیح‌مثبت‌باشد، ثابت کنید که:

$$a_1^{-p}+a_2^{-p}+\cdots a_n^{-p}\geqslant n^{p+1}$$

۴۲ـ اگر $x^3y=az^2+bz^4$ باشدکه $z\geqslant x$ و$y\geqslant x$ و z و b و a حقیقی و مثبت می‌باشند ثابت کنیدکه :

$$y\geqslant 2(ab)^{\frac{1}{2}}$$

۴۳ـ اگر a_1و...وa_n وb_1و...وb_n حقیقی‌باشند:

$$\sqrt{(a_1^2+\cdots+a_n^2)}+\sqrt{(b_1^2+\cdots+b_n^2)}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2\}}$$

دربارهٔ مثلثهای محاط در یك مثلث

از علی فیاض دانشجوی دانشکدهٔ فنی تهران

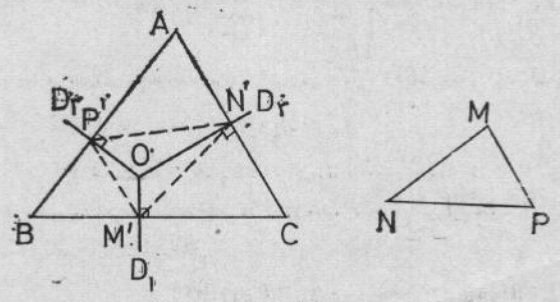
مسئلهٔ **فاگنانو** (بین تمام مثلثهای محاط در یك مثلث مثلث ارتفاعی محیط می‌نیمم دارد) آشنای خوانندگان بوده و در چند شماره ازاین‌مجله نیز مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. حال دو موضوع زیررا مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱ـ یك مثلث MNP یا مثلث متشابه آنرا چگونه در یك مثلث محاط می‌کنند.

۲ـ بین تمام مثلثهای متشابه مثلث MNP که در مثلث مفروض ABC محاط می‌شوند کدامیك محیط و مساحت‌می‌نیمم دارد.

۱/۱ـ دومثلث MNP و ABC مفروضند. مثلث MNP را در مثلث ABC محاط کنید (شرط وجود جواب در همین مقاله می‌آید)

حل ـ بافرض‌اینکه مثلث $M_1N_1P_1$ همان مثلث MNP است که در مثلث ABC محاط شده است‌دوایر محیطی مثلثهای CM_1N_1 و BM_1P_1 را رسم می‌کنیم. این دوایر همدیگر



شکل (۱-a)

را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. در دو چهار ضلعی محاطی CM_1ON_1 و BM_1OP_1 از تساوی دو زاویهٔ OM_1N_1 و OCA و همچنین از تساوی دو زاویهٔ OM_1P_1 و OBA نتیجه می‌شود که:

$$P_1M_1N_1 = OCA + OBA \qquad (۱)$$

از جانب دیگر در چهار ضلعی مقعر ABOC از اینکه مجموع زاویهٔ محدب BOC با زاویهٔ مقعر BOC برابر با 2π و همچنین مجموع زاویه‌های A و OCA و OBA با زاویهٔ مقعر BOC برابر با 2π است نتیجه می‌شود که:

$$BOC = A + OBA + OCA \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$BOC = A + P_1M_1N_1 \qquad (۳)$$

چون مثلث $M_1N_1P_1$ همان مثلث MNP است پس:

$$BOC = A + M$$

به همین ترتیب داریم:

$$BOA = P + C \qquad (۴)$$

$$COA = B + N \qquad (۵)$$

پس زوایای BOC و COA معلوم بوده و نقطهٔ O با رسم دو کمان درخور زوایای برابر با $(A+M)$ و $(B+N)$ که به ترتیب بر دو نقطهٔ (C و B) و دو نقطهٔ (A و C) می‌گذرند بدست می‌آید.

حال در چهار ضلعی محاطی CM_1ON_1 داریم:

$$\frac{OC}{\sin ON_1C} = \frac{M_1N_1}{\sin C} = 2R_1$$

$$\sin ON_1C = \frac{OC \cdot \sin C}{M_1N_1} \qquad (۶)$$

چون مقادیر $M_1N_1 = MN$ و OC (به دلیل معلوم بودن جای نقطهٔ O) و $\sin C$ معلومند پس طرف دوم رابطهٔ بالا معلوم است پس:

$$\sin ON_1C = \sin B \Longrightarrow ON_1C = \beta \text{ یا } \pi - \beta$$

که هر دو جواب قابل‌قبول است در نتیجه پس ازبدست‌آوردن نقطهٔ O برای رسم مثلث $M_1N_1P_1$ کمان در خور زاویهٔ β یا $\pi - \beta$ را بر دو نقطهٔ O و C رسم‌کرده و نقطهٔ N_1 یا N_1' را بدست می‌آوریم ازآنجا بادانستن:

$$\begin{cases} M_1N_1 = MN \\ N_1P_1 = NP \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} N_1'M_1' = MN \\ N_1'P_1' = NP \end{cases}$$

دو مثلث $M_1N_1P_1$ و $M_1'N_1'P_1'$ که دو جواب مسئله‌اند بدست می‌آیند.

۲/۱ـ نقطهٔ O در مسئلهٔ فوق برای تمام مثلثهای متشابه مثلث MNP که در مثلث ABC محاط می‌شوند ثابت است.

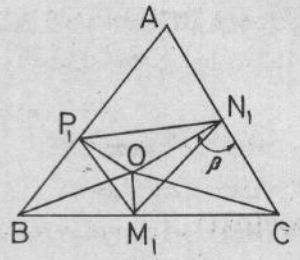
حل ـ چنانکه می‌بینیم روابط (۳) و (۵) که راهنمای بدست آوردن نقطهٔ O هستند فقط به زوایای دو مثلث MNP و ABC بستگی دارند و درنتیجه‌این روابط برای تمام‌مثلث‌های متشابه مثلث MNP که در مثلث ABC محاط می‌شوند ثابت بوده ویك نقطهٔ O رابدست می‌دهند. پس برای اینکه‌مثلث $M_2N_2P_2$ متشابه مثلث MNP را در مثلث ABC محاط کنیم فقط رابطهٔ (۶) تبدیل به رابطهٔ زیر می‌شود:

$$\sin ONC = \frac{OC \sin C}{M_2N_2} = \frac{OC \sin C}{m \cdot MN} = \sin \beta'$$

که در آن m نسبت‌تشابه دو مثلث $M_2N_2P_2$ و MNP است و بقیهٔ عملیات مثل مسئلهٔ قبل است.

۲ـ بین تمام مثلثهای متشابه مثلث MNP که درمثلث ABC محاط می‌شوند کدامیك محیط و مساحت می‌نیمم دارد.

حل ـ برای حل این قسمت مسئله از موضوع‌زیر استفاده می‌کنیم:



شکل (۲-a)

اگر از نقطهٔ O عمودهای OM' و ON' و OP' را به ترتیب براضلاع BC و AC و AB فرود آورده امتداد بدهیم و این سه نیم خط را که از O شروع می‌شوند به ترتیب مطابق شکل Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 بنامیم؛

۲/الف ـ مثلث $M'N'P'$ (مثلث پودر نقطهٔO) بامثلث MNP متشابه است.

۲/ب ـ ازدوران مجموعهٔ دستگاه سه نیم خط Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 به‌اندازهٔ زاویهٔ دلخواه α حول نقطهٔ O و قطع آن با اضلاع مثلث ABC مثلث $M_2N_2P_2$ متشابه مثلث MNP بوجود می‌آید.

۲/ج ـ کلیهٔ مثلثهای متشابه مثلث MNP که درمثلث ABC محاط می‌شوند حاصل دوران همین مجموعه دستگاه‌سه نیم خط است.

اثبات ۲/الف ـ در شکل (a—۲) با در نظر گرفتن دوچهار ضلعی محاطی $CM'ON'$ و $BM'OP'$ داریم

$$\begin{cases} OM'N' = OCA \\ OM'P' = OBA \end{cases} \quad (۷)$$

$$\Longrightarrow P'M'N' = OBA + OCA$$

همچنین درشکل (a—۱) با درنظر گرفتن دوچهار ضلعی‌محاطی CM_1ON_1 و BM_1OP_1 رابطهٔ (۱) را بدست آوردیم.

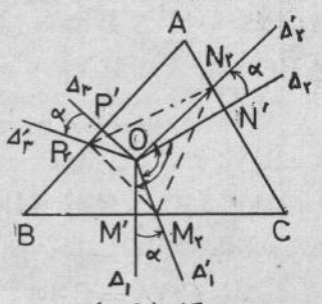
از (۱) و (۷) داریم:

$$P'M'N' = P_1M_1N_1$$

و به همین ترتیب:

$$P'N'M' = P_1N_1M_1$$

یعنی دومثلث $M'N'P'$ و $(MNP)M_1N_1P_1$ متشابهند.



شکل (۲-b)

اثبات ۲/ب ـ مطابق شکل‌مقابل وضع جدید Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 را به ترتیب Δ'_1 و Δ'_2 و Δ'_3 می‌نامیم چون‌در دوران مجموعه دستگاه سه نیم خط

$$(\Delta_1' \text{ و } \Delta_2') = (\Delta_1 \text{ و } \Delta_2) = \pi - C$$

چهار ضلعی CM_2ON_2 محاطی بوده و در نتیجه اثبات مثل حالت ۲/الف انجام می‌شود.

اثبات ۲/ج ـ مطابق قسمت۲/۱ نقطهٔ O برای دو مثلث $M'N'P'$ و $M_2N_2P_2$ یکی‌بوده همچنین مطابق قسمت۱/۱ در دوچهار ضلعی محاطی OM_2BP_2 و OM_2CN_2 داریم

$$\begin{cases} ON_2C = OM_2B \\ OP_2A = OM_2B \end{cases} \quad (۸)$$

$$\Longrightarrow ON_2C = OP_2A = OM_2B$$

و ازاین رابطه و در نظر گرفتن شکل (b-۲) داریم:

$$M'OM_2 = NON_2 = P'OP_2 = \alpha \quad (۹)$$

و مسئله اثبات شده است.

حال بپردازیم به حل مسئله یعنی پیدا کردن مثلث‌می‌نیمم بین مثلثهای متشابه MNP محاط در مثلث ABC. چنانکه دیدیم تمام مثلثهای متشابه MNP که در مثلث ABC محاط می‌شوند از دوران دستگاه سه نیم خط Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 بوجود می‌آیند. پس می‌توانیم محیط و مساحت این مثلثها رابرحسب تغییر زاویهٔ دوراز α مورد بررسی قرار بدهیم. مطابق شکل (b-۲) داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{M_2N_2}{\sin C} = \dfrac{OC}{\sin ON_2C} \\ \sin ON_2C = \cos\alpha \end{cases} \Longrightarrow \qquad (10)$$

$$\Longrightarrow M_2N_2 = \frac{OC \sin C}{\cos\alpha}$$

و برای اینکه مثلث $M_2N_2P_2$ کـه متشابـه خود در دوران مجموعه سه نیم خط Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 تغییر می‌کند از لحاظ محیط و مساحت می‌نیمم شود کافی است که یك ضلع آن مثلا M_2N_2 می‌نیمم شود. مطابق رابطهٔ فوق که در آن $\sin C$ و OC مقادیر ثابتی دارند می‌نیمم M_2N_2 وقتی بدست می‌آید که:

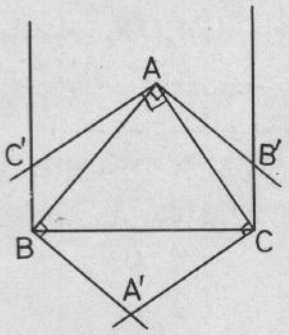
$$\cos\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = 0$$

یعنی مثلث $M'N'P'$ یا مثلث پودر نقطهٔ O بین کلیهٔ مثلثهای متشابه MNP که در مثلث ABC محاط می‌شونـد محـیط و مساحت می‌نیمم دارد.

مثالـ کوچکترین مثلث متساوی‌الاضلاع که در مثلث ABC محاط می‌شود کدام است؟

حلـ نقطهٔ O بامعلوم بودن زوایای $BOC = A + 60$ و $COA = B + 60$ معلوم شده و از آنجا مثلث پودر نقطهٔ O که جواب مسئله است بدست می‌آید.

۲/۱ـ چه وقت مثلث پودر O در داخل مثلث ABC قرار می‌گیرد. مطابق شکل در نقاط A و B عمودهایـی بر AC و BC اخراج می‌کنیم تا همدیگر را در C' قطع کنند به همین تـرتیب B' و A' را بـــدست می‌آوریم. آشکار است که برای اینکه مثلث پـودر نقطهٔ O در داخل مثلث ABC قرار بگیرد باید نقطهٔ O در داخـل شش ضلعی $AC'BA'CA$ قرار داشته باشد.

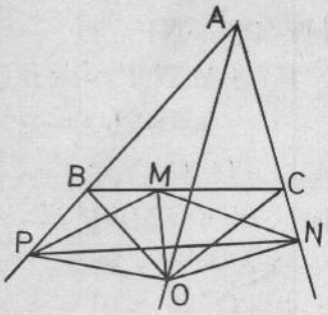


۲/۲ـ وجود جواب درمسئله ۱/۱: اگر مثلث MNP کوچکتر از مثلث $M'N'P'$ باشد نمـی‌توان آنـرا در مثلث ABC محاط کرد. البته اگر نقطهٔ O بیرون شش ضلعی $AC'BA'CA$ قرار گیرد جواب داریم منتها جوابی کـه در درون مثلث قراد داشته‌باشد نداریم.

۳ـ رأسهای مثلث MNP را برروی امتداد اضلاع مثلث ABC قرار دهید.

حلـ دوحالت زیر قابل پیش‌بینی است.

۳/الفـ مثلث MNP مطابق شکل زیـر محاط شود روابط زیر بین زوایا برقـرار است (اثبات برعهدهٔ خوانندگان)

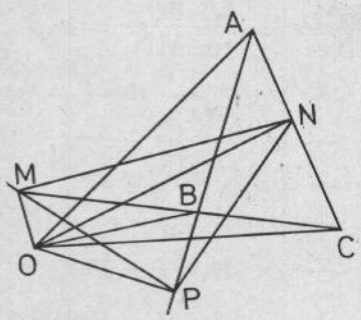


$$COB = M - A$$
$$COA = B - N$$
$$AOB = C - P$$

یعنی اگر یك زاویـهٔ مثلث MNP (مانند M) از یك زاویهٔ مثلث ABC (مانند A) بزرگتر و دوزاویهٔ دیگر آن از دو زاویهٔ دیگر مثلث ABC کوچکتر باشد یك جواب برای بدست‌آوردن نقطهٔ O داریم. در غیراین‌صورت جوابی نداریم.

(۳-a)

۳/بـ با فرض اینکـه مثلث MNP مطابق شکـل (۳-b) محـاط شـود روابط زیـر بین زوایا برقرار است.



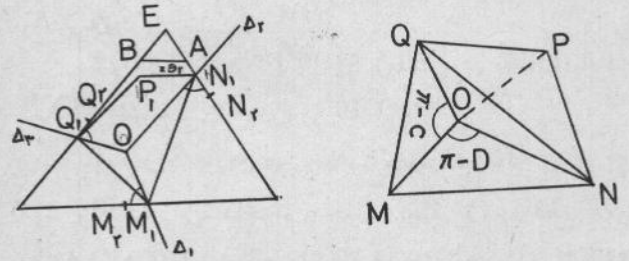
$$COA = B - N$$
$$BOC = M - A$$
$$AOB = P - C$$

یعنی اگر دوزاویهٔ مثلث MNP (مانند M و P) از دو زاویه مثلث ABC (مانند A و C) بزرگتر باشند یك جواب برای بدست آوردن نقطهٔ O داریم و در غیر این‌صورت جوابی نیست.

۴ـ تعمیم در چهار ضلعی‌ها

یك چهار ضلعی متشابه چهار ضلعی مفروض $MNPQ$ درچهار ضلعی مفروض $ABCD$ محاط کنید.

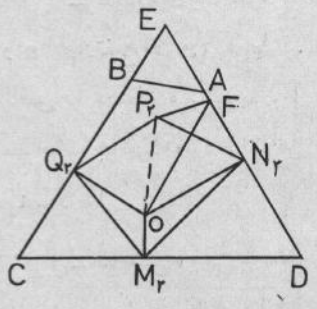
حلـ مطابق شکل (۴-a) ابتدا ازسه نقطهٔ M_1 و N_1



شکل (۴-a)

و Q_1 شروع می‌کنیم بدین‌سان که مثلث $M_1N_1Q_1$ را بـرابر مثلث MNQ و باروش مسئلهٔ ۱/۱ درمثلث ECD (E محل برخورد امتدادهای خطوط CB و DA می‌باشد) محاط می‌نمائیم و بعدچهار ضلعی $M_1N_1P_1Q_1$ را برابر چهارضلعی $MNPQ$ می‌سازیم.

نقطهٔ P_1 یا روی AB قرارمی گیرد که دراین‌صورت چهارضلعی $M_1N_1P_1Q_1$ جواب مسئله است ویانقطهٔ P_1 روی AB قرار نمی گیرد که درآن صورت حل‌زیررا درنظر می گیریم: نقطهٔ O مربوط به‌مثلث $M_2N_1Q_1$ (که باخواص آن در قسمتهای قبل آشنا شده‌ایم) مطابق‌روش مسئلهٔ ۱/۱ دردست است. اگر دورانی دلخواه به اندازهٔ زاویهٔ متغیر α برای مجموعه دستگاه سه نیم خط Δ_1وΔ_2وΔ_3 (مطابق‌شکل)درنظر بگیریم‌مثلث $M_1N_1Q_1$ تبدیل به مثلث متشابه خود یعنی $M_2N_2Q_2$ می‌شود (۲/ب) حال‌می‌توانیم‌بر روی‌مثلث $M_2N_2Q_2$ چهارضلعی $M_2N_2P_2Q_2$ رامتشابه چهارضلعی $M_1N_1P_1Q_1$ بناکنیم. اگرزاویهٔ α به اندازه‌ای باشد که P_2 روی AB قرارگیرد جواب‌مسئله‌بدست می‌آید. پس‌می‌آئیم برحسب زاویهٔ دوران α مکان P_2 رابدست آورده باخط AB قطع می‌دهیم.



(شکل۴-b)

ابتدا برای‌نقطهٔ O خاصیت زیررادارایم (برای شلوغ نشدن شکل b — ۴ رادرنظر می گیریم)

$$Q_2OM_2=\pi-C$$
$$M_2ON_2=\pi-D$$

یعنی‌نقطهٔ O برای‌تمام چهار ضلعی‌های متشابه MNPQ نقطهٔ متشابهی است درنتیجه دردوران سه نیم‌خط Δ_1 وΔ_2 وΔ_3 به‌اندازهٔ زاویهٔ متغیرαمثلث OP_2N_2 نیزمتشابه خودباقی می‌ماند (ومتشابه مثلث OPN) مثلث OPN بادانستن روابط:

$$MON=\pi-D \quad و \quad MOQ=\pi-C$$

درچهارضلعی مفروض MNPQ رسم‌می‌شود. حال می‌آئیم‌دایرهٔ محیطی‌مثلث ON_2P_2 را رسم می کنیم. این دایره خط AD رادر نقطهٔ F قطع می کند. درچهار ضلعی محاطی ON_2FP_2 داریم:

$$OFN_2=OP_2N_2=OPN \qquad (۱۱)$$
$$P_2FN_2=\pi-P_2ON_2=\pi-PON \qquad (۱۲)$$

چون زوایای OPN و PON درچهار ضلعی MNPQ با رسم مثلث OPN بدست می‌آیند، پس‌مکان P_2 خطی است که ازنقطهٔ F (که با رابطهٔ (۱۱) بدست می‌آید) گذشته و با خط AD زاویهٔ معلوم $(\pi-PON)$ می سازد. این خط را Δ' می‌نامیم. برای‌قطع Δ' وAB سه‌حالت زیررا درنظرمی گیریم.

۴/الف— Δ' وAB متوازیندپس‌برایP_2جوابی‌نداریم.

۴/ب — Δ' و AB در نقطه‌ای مانند P_2 همدیگر را قطع می کنند. ازآنجا بادانستن دونقطهٔ O و P_2 ازاین چهار ضلعی ودانستن اینکه این چهارضلعی باچهار ضلعی MNPQ (شکل a — ۴) متشابه است چهارضلعی جواب رسم می‌شود.

۴/ج— Δ' و AB بر هم منطبقند یعنی بینهایت چهار-ضلعی‌متشابه MNPQ را می‌توان در چهار ضلعی ABCD محاط کرد که ازآنها یکی‌باچهارضلعی MNPQ مساوی است، ونیز تنها دراین‌حالت است که یك‌چهار ضلعی مساوی MNPQ می‌توان درچهار ضلعی ABCD محاط کرد. برای‌چهارضلعی‌ها آنچه درقسمت ۲ آمده‌است درحالت‌اخیر برقرار بوده همچنین کوچکترین چهار ضلعی‌بین‌تمام چهار ضلعی‌های‌متشابه چهار-ضلعی‌MNPQ محاط درچهارضلعی ABCD موقعی که $\alpha=0$ است بدست می‌آید.

البته واضح‌است که درقسمت‌محاط کردن مثلث $M_1N_1Q_1$ درمثلث ECD دوجواب‌داریم پس‌درقسمت(۴/ب) نیزدوجواب خواهیم داشت.

در ضمن به جای شروع حل مسئله از مثلث $M_1N_1Q_1$ می‌توانستیم ازهرمثلثی که ازسه رأس از چهار ضلعی MNPQ تشکیل یافته‌است شروع‌بکنیم وبه‌همان نتایج برسیم.

تمرینات: ۱— مثلث باکوچکترین محیط و مساحت و متشابه مثلث ABC رامحاط درمثلث ABC پیداکنید.

۲— ثابت‌کنید اگرازنقطهٔ G واقع برروی دایرهٔ‌محیطی مثلث ABC سه خط چنان رسم‌کنیم که در یك جهت بااضلاع مثلث زوایای مساوی درست‌کنند سه‌نقطهٔ تقاطع برروی یك خط راست قراردارند.

حالت خاص این مسئله $B=90^\circ$ بوده و خط سمسن بدست می‌آید.

۳— نقطهٔ I را در داخل مثلث ABC چنان بیابید که

الف: $ICB=IAC=IBA$

ب: $IBC=IAB=ICA$

۴— یك n ضلعی منتظم مفروضی را درn ضلعی مفروض دیگرمحاط کنید وکوچکترینn ضلعی منتظم قابل محاط دریك n ضلعی‌منتظم مفروض‌را بیابید.

۵— رأسهای یك چهارضلعی متشابه چهار ضلعی مفروض MNPQ را در امتداد و روی اضلاع چهار ضلعی مفروض ABCD قرار بدهید (بحث‌کنید).

مساوی $\frac{5\pi}{4}$ باشد .

ثالثاً ـ اگر $m=3$ باشدمعادله را حل کرده و جواب‌های کلی معادله را بدست آورید.

رابعاً ـ m را طوری تعیین کنید که مجموع ریشه های معادله برابر $\frac{3\pi}{4}$ باشد .

دبیرستان محمد رضاشاه پهلوی مهاباد

دبیر: مردی ـ فرستنده : مناف شریف‌زاده

درمعادلهٔ $tgx - cotgx = m$ مقدار m راطوری تعیین کنید تابین ریشه‌های معادله روابط زیر برقرارباشد:

$$\cos(x'+x'') = 2\sin(x'+x'')$$

$$2\cos(x'+x'') = \sin(x'-x'')$$

دبیرستان ممتاز بابل

دبیر: خیرخواه ـ فرستنده : علیرضا حسین پور

معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$2tg^2(\frac{\pi}{3}+x) + cotg^2(\frac{\pi}{6}-x) = 1$$

دبیرستان مهرگان قم

دبیر: امیدوار ـ فرستنده : جواد برقعی رضوی

صحت اتحاد زیررا ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \left|\frac{1}{\cos\alpha} - tgx\right|$$

دبیرستان میرداماد

دبیر : رجائی ـ فرستنده: امیر حسین کریمی

ـ درستی رابطهٔ زیررا اثبات کنید :

$$\cos^4\frac{\pi}{12} - \sin^4\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ـ عبارت S را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید:

$$S = \sin 72^\circ - \cos 27^\circ, 40'$$

دبیرستان نوربخش رشت

دبیر: رجبی‌نژاد ـ فرستنده: رشید فرجی

اگر $\sin B$ واسطهٔ هندسی بین $\cos a$ و $\sin a$ باشد ثابت کنید:

$$\cos 2B = 2\cos^2(\frac{\pi}{4}+a)$$

مسائل هندسه

گروه فرهنگی دکتر هشترودی

(ثلث اول) ـ دبیر: ترابی ـ فرستنده : کیارخ کیائیان

ـ سه‌خط دوبه دومتنافر d_1 و d_2 و d_3 مفروضند. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC راطوری رسم کنید که یك‌رأس آن A بر d_1 و مرکزثقل آن بر d_2 واقع باشد و d_3 عمود منصف BC باشد.

ـ خط Δ ودایرهٔ C درصفحهٔ P ونقطهٔ A خارج‌ازصفحهٔ P مفروضند. صفحه‌ای عمود برصفحهٔ (Δ و A) رسم کنید که از A بگذرد وفصل‌مشترك آن باصفحهٔ P مماس بردایرهٔ (C) باشد.

(ثلث دوم) ـ دبیر: صدری ـ فرستنده : کیارخ کیائیان

ـ قاعده‌های یك هرم ناقص منتظم مربعهای به اضلاع a و $2a$ وارتفاع آن $2a$ می‌باشد. مخروط ناقص محیطی این هرم ناقص را درنظر می‌گیریم . اولا نسبت حجم ها و ثانیاً نسبت مساحات جانبی مخروط ناقص به هرم ناقص فوق را محاسبه کنید .

ـ در شش وجهی محدب $ABCDE$ که وجوه آن مثلث می‌باشند وسط یال AE را M و مرکزثقل وجهی راکه شامل این دو رأس نیست G می‌نامیم ثابت کنید خطوط نظیر MG ازیك نقطه می گذرند .

گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر: هدانیا ـ فرستنده ـ لطف‌الله معینی

ـ لوزی $ACBD$ به اقطار $AC=2a$ و $BD=a$ مقطع قائم یك سطح منشوری می‌باشد . روی یالهای جانبی آن ودریك‌طرف صفحهٔ‌لوزی طولهای $AA'=3a$ و $BB'=4a$ و $CC'=a$ راجدامی کنیم:

اولا ـ بوسیلهٔ محاسبه ثابت کنید که زوایای $B'A'C'$ و $DC'A'$ قائمه می‌باشند.

ثانیاً ـ صفحهٔ $A'B'C'$ ازنقطهٔ D می گذرد.

ثالثاً: مساحت جانبی وکل جسم $ABCDA'B'C'$ را محاسبه کنید .

ـ چهار وجهی منتظمی رسم کنید که از آن مرکز چهار وجهی (محل تلاقی ارتفاعات چهار وجهی) وامتداد یکی‌ازیالها معلوم باشد.

با ریاضیات آشتی کنید

(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

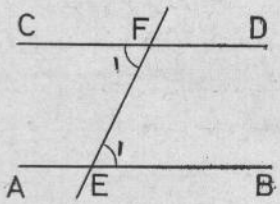
اثر: A.BULLAS استاد آموزش ریاضی در فرانسه

ترجمهٔ: ع. مصحفی

بخش نهم - بسط قوهٔ تصویر

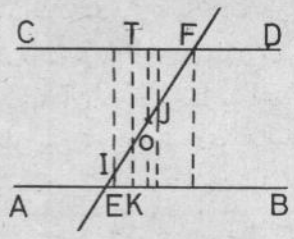
خطهای عمود

فرض کنیم که می‌خواهیم ثابت کنیم اگر دو خط AB و CD موازی باشند و خط EF آنها راقطع کرده باشد دو زاویهٔ E_1 و F_1 باهم برابرند.

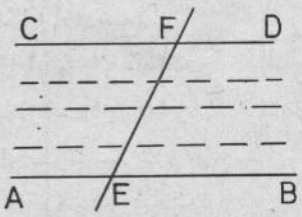


در اینجا با مسئله‌ای از نوع دوم روبروهستیم. شکل رسم شده برای اثبات آنچه‌که می‌خواهیم کفایت نمی‌کند. باید خط تازه‌ای رسم‌کرد، اما چه خطی؟

درست بیندیشیم: برای اثبات تساوی‌دوزاویه ازچه روش باید پیروی کنیم؟ این دوزاویه را به‌صورت اجزائی از دوشکل در نظر بگیریم مثلا دو مثلث، که تعداد آنها نامحدود است(اصل اساسی: یك جزء را هیچگاه به‌تنهایی در نظر نگیرید، همیشه‌آن را جزئی از یك شکل مشاهده کنید). از بین همهٔ این مثلثهای به تعداد نامحدود ، دو عدد برای ما مهم خواهد بود: دو مثلث متساوی که زاویه‌های E_1 و F_1 متعلق به آنهاباشند. البته در این‌دومثلث‌دوزاویهٔ متساوی E_1وF_1روبرو به‌ضلعهای متساویند. اما این دو مثلث در شکل وجود ندارند، باید آنها را بوجود آوردو برای این کار باید خط یا خطهایی رسم کرد. آیا این خط به وضع دلخواه رسم می‌شود؟ یا اینکه موازی با خطوطی از شکل‌است؟یااینکه عمود برخطوطی‌ازشکل‌است؟مقصوداز رسم این‌خط آن است که‌دومثلث متساوی‌بوجود آید، پس بایدبه‌وضعی رسم شودکه ما را به این‌مقصودبرساند. اما خط به وضع‌دلخواه چنین نیست.

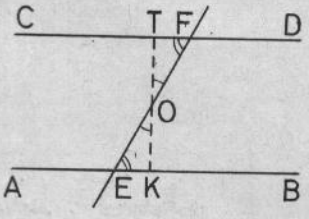


به وضع موازی چطور؟ در این وضع هم مثلثهایی بوجود نمی‌آید. همهٔ‌خطهایی که با AB و CD موازی باشندباخودشان نیز موازیند و تشکیل مثلث نمی‌دهند. اگر موازی با EF باشند وضع نیز به‌همین قرار است،



باقی می‌ماند که خطهای به وضع عمود را امتحان کنیم. در شکل بالا چند خط عمود بر AB و CD رسم کرده‌ایم و می‌توانیم به تعداد نامحدود از آنها رسم کنیم. هرکدام از آنها که EF را قطع کند دو مثلث بوجود می‌آورد. کدامیك ازاین خطها دو مثلث متساوی بوجود می‌آورد؟ بکوشیم تا این خطرا تعیین کنیم. اصل دیگری راکه قبلا گفته شده بود فراموش‌نکنیم خطهای عمودکه رسم می‌شوند، با EF در نقاط I و J و... و O متلاقیند. کدامیك از این نقاط مهم است؟ نقطهٔ O که وسط EF واقع است. خطی‌که از O وسط EF بگذرد و در K و T بر AB و CD عمود باشد دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OEK و

OFT تشکیل می‌دهد که وترهای آنها EO و FO باهم برابرند. این دو مثلث همانها هستند که در جستجوی آنها بودیم. دو زاویهٔ حادهٔ TOF و KOE نیز با هم برابرند. پس این دو مثلث قائم‌الزاویه در حالت تساوی وتر ویك زاویهٔ حاده باهم برابرند.

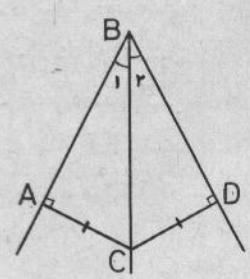


اما دوستان عزیز توجه‌داشته باشید که اشتباه نکنید. شما فعلا به مرحله‌ای رسیده‌اید که می‌خواهید اعلام کنید دو زاویهٔ E_1 و F_1 باهم برابرند و من‌در همین جا شما را نگاه‌می‌دارم و می‌پرسم چرا این دو زاویه متساویند؟

شما جواب خواهید داد برای آنکه در دو مثلث متساوی دو زاویهٔ مقابل‌به ضلعهای متساوی باهم برابرند. اشتباه شمادر همین جا است. اما شما معذورید، زیرا مانعی غیرقابل پیش‌بینی سد راهتان شده است. در این باره توضیح می‌دهیم:

در ابتدای هندسه غالباً از محصلین می‌خواهند که ثابت کنند فلان دو زاویه یا فلان دو پاره خط باهم برابرند. دراین موارد عموماً تساوی دو مثلث مطرح می‌گردد بقسمی که آن دو زاویه یا آن دوپاره خط به آنهاتعلق دارند. در حقیقت‌موضوع تناظر بین اجزاء متساوی به میان می‌آید: در دومثلث متساوی زاویه‌های مقابل به ضلعهای متساوی باهم برابرند و برعکس

مثال: هرگاه نقطهٔ C ازدوضلع‌زاویهٔ ABD به یك فاصله باشد، ثابت کنید که‌این نقطه بر نیمساز زاویهٔ B واقع است به‌عبارت دیگر ثابت کنید که دو زاویهٔ B_1 و B_2 با هم برابرند. ثابت می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC وBCD در حالت تساوی وتر و یك ضلع باهم برابرند و با توجه به قاعدهٔ تناظر بین اجزاء از اینکه دو ضلع AC و CD باهم متساویند نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ مقابل به آنها یعنی B_1 و B_2 باهم برابرند. اما مواردی پیش می‌آید که نمی‌توان قاعدهٔ تناظر اجزاء را بکار برد. اثبات‌تساوی دو زاویهٔ متبادل‌داخلی یکی ازاین موردها است.



درست است که دو مثلث TOF وKOE باهم برابرند اما چرا OT و OK باهم برابرند.

آنچه که گفته‌ایم فقط این بوده‌است که EO با FO برابر است و دو زاویهٔ FOT و EOK نیز باهم برابرند وازتساوی دو ضلع OT و OK صحبتی بمیان نیاورده‌ایم.

چه باید کرد؟ دو مثلث ABC و A'B'C' متساوی نامیده می‌شوند هرگاه بتوان آنها را باتغییرمکان برهم‌منطبق کرد که در این حالت ضلعها و زاویه‌هایی که روی هم قرار گرفته‌اند باهم برابرند.

در انطباق دو شکل اجزاء آنها باهم جفت‌می‌شوند. وقتی مثلث A'B'C' بر مثلث ABC چنان واقع شده باشد که A بر A' و B بر B' و C بر C' قرارگرفته باشد زاویه‌های A و A' باهم، زاویه‌های B و B' باهم، زاویه‌های C و C' باهم جفت شده‌اند. از ضلعها نیز AB با A'B'، BC با B'C' و CA با C'A' جفت شده است.

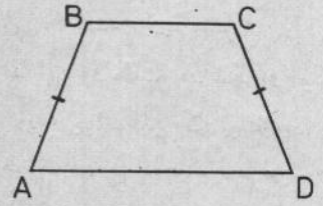
شاید بگویید که‌این یك حقیقت مشهود است. خواهم گفت که غیر از این نیست. همهٔ ریاضیات که اینقدر به نظر شما مرموز جلوه می‌کند، مجموعه‌ای از حقایق مشهود است. اگر شما توانسته‌اید به اثبات مسئله‌ای موفق شوید که بعضی دیگردر برابر آن خشکشان زده است، بازهم به خاطر اطلاع بر همین حقایق مشهود است.

به موضوع مورد بحث برگردیم. در دو مثلث TOF و KOE سه جفت زاویهٔ متساوی وجود دارد: یك جفت آن در O متقابل به رأس می‌باشند، یك جفت دیگر زاویه‌های قائمهٔ T و K می‌باشند و جفت سوم کدام است؟ جفتی که‌باقی مانده‌است و این یك حقیقت مشهود است. جفت باقیمانده زاویه‌های E_1 و F_1 می‌باشند پس باهم برابرند.

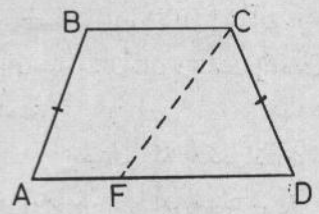
در این مسئله برای اثبات تساوی دوزاویهٔ متبادل داخلی بین دو خط متوازی و یك خط مورب ازقاعدهٔ تناظر بین اجزاء استفاده نکردیم، بلکه قاعدهٔ جفتهای زاویه‌های متساوی را بکار بردیم.

اکنون خطهایی را بررسی کنیم که زیاد با آنها سروکار داریم: خطوط به وضع موازی. چرا با این خطوط زیاد سر و کار داریم برای‌آنکه هم‌ضلعهای متساوی وهم زاویه‌های متساوی بوجود می‌آورند. مثال زیر کاربری زیاد این نوع خطوط را نشان می‌دهد.

ذوزنقهٔ متساوی الساقین ABCD را درنظر می‌گیریم که در آن‌دوساق AB وCD با یکدیگر برابرند. ثابت کنید که‌دوزاویهٔ A و D باهم برابرند.

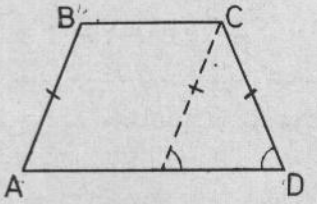


به سادگی متوجه می‌شویم که بدون دستکاری در شکل داده شده نمی‌توانیم به نتیجهٔ مطلوب برسیم، یعنی باز بامسئله‌ای از نوع دوم سروکار داریم. باید در آن خطی رسم کنیم تا اینکه بعضی از تصاویر فیلم قضیه‌ها که داریم در آن مشاهده بشود. این خط چگونه باید رسم شود؟ اگر خط به وضع دلخواه، مثلا CF را رسم کنیم یک ذوزنقهٔ غیر مشخص ABCF و یک مثلث غیر مشخص CDF



خواهیم داشت و از آن نمی‌توانیم به نتیجهٔ مطلوب برسیم. اگر CF بر AD عمود باشد، این ذوزنقه و مثلث قائم الزاویه‌اند اما باز نتیجه‌ای از آن بدست نخواهیم آورد.

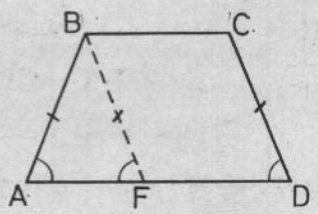
هرگاه از C خط CK را موازی با AB رسم کنیم، متوازی‌الاضلاع ABCK تشکیل می‌شود و زاویهٔ K که از این راه پدید می‌آید با زاویه A برابر است (به علت اینکه نسبت به دو خط متوازی



AB و CK و مورب AK متقابل داخل و خارجند). از متوازی الاضلاع مزبور همچنین نتیجه می‌گیریم که دو ضلع مقابل یعنی AB و CK باهم برابرند و چون بنا به فرض AB=CD است پس CK=CD و مثلث CKD متساوی الساقین است و در نتیجه دو زاویهٔ K و D باهم برابرند و چون زاویهٔ K با زاویهٔ A برابر بود پس زاویهٔ D با زاویهٔ A برابر است.

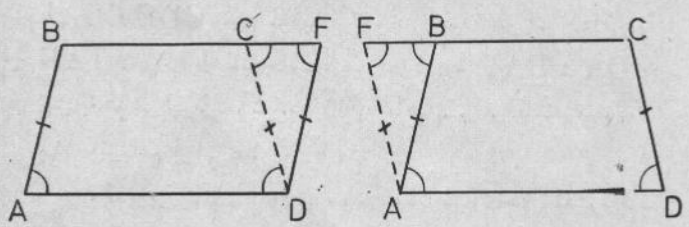
آیا به نقشی که خط CK در اثبات این مسئله داشت توجه پیدا کرده‌اید؟ همین خط برای ما سه تصویر از فیلم قضیه‌ها ظاهر ساخت که در اثبات مسئله به آنها نیاز داشتیم: ضلعهای مقابل متوازی الاضلاع باهم برابرند، اگر خطی دو خط متوازی را قطع کند دو زاویهٔ متقابل داخل و خارج باهم برابرند، در مثلث متساوی الساقین دو زاویهٔ مقابل به دو ساق باهم برابرند. اگر شما خوب یادگرفته باشید که تمرکز حواس داشته باشید که نگاه کنید، که یک شکل را بررسی کنید، بدون شک در اینجا پرسش زیر را مطرح خواهید ساخت: در شکل چهار نقطه وجود دارد. اما چرا خط موازی را باید از رأس C کشید، چرا از رأس A و رأسهای دیگر رسم نکرد؟ این تذکر بجا و ساده است و نشان می‌دهد که پیشرفت شما در هندسه قطعی است. شکل دارای چهار رأس است و از هر رأس می‌توانیم یک خط موازی رسم کنیم که در نتیجه چهار متوازی الاضلاع و چهار جفت زاویه‌های متساوی خواهیم داشت. ببینیم که نتیجهٔ هر کدام از این حالات چیست. CK را که بررسی کرده‌ایم و دانسته‌ایم که نتیجهٔ مطلوب از آن حاصل می‌شود.

اکنون رأس B را در نظر می‌گیریم. خط BF را که موازی با CD رسم کنیم شکلی مشابه با شکل حالت قبل خواهیم داشت و اثبات به همان گونه



انجام می‌گیرد و نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ A و D متساویند.

هرگاه از D موازی با AB رسم کنیم، شکلی با کمی تغییر از حالت قبلی را خواهیم داشت. در مثلث متساوی‌الساقین DCF دو زاویهٔ C و F باهم برابرند و در متوازی الاضلاع ABFD دو زاویهٔ مقابل A و F باهم برابرند و از طرفی نسبت به دو خط متوازی BC و AD و مورب CD دو زاویهٔ C و D متساویند، بنابراین دو زاویهٔ A و D باهم برابرند.

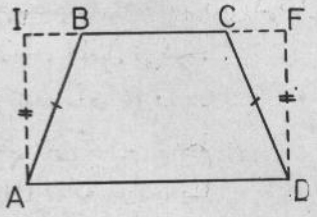


در مورد رأس A نیز وضع به همین منوال است.

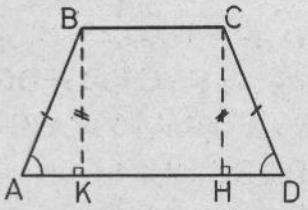
گفته شد که خطوط به وضع موازی در حل بسیاری از مسائل کاربرد دارد. وقتی می‌خواهید مسئله‌ای از نوع دوم را حل کنید قبلا به فکر خطوط به وضع موازی باشید. هرگاه که متوجه شدید این نوع خط برای آن مسئله مفید نیست آن وقت خط به وضع عمود را که مثلث قائم‌الزاویه پدید می‌آورد آزمون کنید.

همان مثال بالا را برای چند دانش‌آموز درمیان گذاشته بودم. یکی از آنها گفت که آیا برای حل مسئله می‌توان از C عمود CH را بر AD رسم کرد؟ در جوابش گفتم که این خط یک مثلث قائم‌الزاویهٔ CHD تشکیل می‌دهد اما بعد چی؟ در این بین یکی دیگر از دانش آموزان با شوق زیاد گفت که از این راه هم می‌توان به نتیجه رسید، به شرط آنکه عمود BK

بر AD نیز رسم شود. دومثلث قائم‌الزاویهٔ ABK وCDH تشکیل می‌شود که وترهای آنها بنا به‌فرض متساویند و چون BKHC متوازی الاضلاع است پس : BK=CH و دو مثلث مزبور در حالت تساوی وتر و یك ضلع متساویند ودر نتیجه دوزاویهٔ A و Dاز این دو مثلث که روبرو به ضلعهای متساویند باهم برابرند.



یکی از دانش آموزان اظهار داشت که اگر عمودها را از رأسهای A و D رسم کنیم در این حالت هم دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AIB و CDF با هم برابرند. اما زاویه‌ها چه می‌شود؟ دانش‌آموز دیگر گفت که دو زاویهٔ BAI و CDF باهم برابر می‌شوند وچون هریك ازدوزاویهٔ IAB و FDA قائمه است، پس دو زاویهٔ BAD و CDA نیز باهم برابرند. اگر دو زاویه باهم برابر باشند متممهای آنها نیزباهم برابرند.



از این دانش آموز پرسیدم که از تساوی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ گفته شده چگونه نتیجه می‌گیرد که دو زاویهٔ BAI و CDF باهم برابرند؟ آیا قاعدهٔ تناظر اجزاء را بکار برده است یا قاعدهٔ جفتهای متساوی را ؟ وی پاسخ داد که از قاعدهٔ جفتهای متساوی و توضیح داد که دو زاویهٔ قائمهٔ F وI یك‌جفت متساوی را تشکیل می‌دهند و در دو مثلث سه جفت زوایا وجود داردو....

این دانش آموز هر دو قاعدهٔ تناظر اجزاء و جفتهای متساوی را خوب یادگرفته بود اما چرا در اینجا متوقف شد. به وی مهلت دادم تا بیشتر فکر کند و بعد از چند لحظه متوجه شد که در اینجا باید از هردو قاعده استفاده کند. نخست قاعدهٔ جفتهای متساوی را برای ضلعها بکار می بریم، وترهای AB و CD یك جفت وضلعهای AI وDF یك جفت متساوی‌می‌باشند و چون دو مثلث دارای سه جفت ازضلعها می‌باشند پس ضلعهای BI و CF نیز یك جفت متساوی می‌باشند. اکنون قاعدهٔ‌تناظر اجزاء را بکار می‌بریم: دوزاویهٔ BAI و CDF که روبروبه ضلعهای متساویندباهم برابرند.

مسلماً این دانش‌آموز پیشرفت خیلی عالی در هندسه خواهد داشت، شما خوانندهٔ عزیز نیز به همچنین.

شیمیدانان‌نامی اسلامی (دنباله از صفحهٔ۱۷۶)

درآوریم. جابردراین‌باره چنین می‌نویسد: «حکیمی بر آن شد که این [نسبتها] را به‌تقلید ازنسبتهای موسیقی بازگرداند [تا ثابت کند] که‌آن تجلی که اشیاء [درجهان زیرفلك قمر] ازآن برخاسته‌اند، [لااقل] تاآن درجه که با تجلی توزیع شدهٔ به‌وسیله ستارگان وتناسب [عددی] آنها مربوط می‌شود ،کامل است.

تقلیدی که حکیم از آن سخن می گوید ، به موسیقی می‌انجامد، ولی‌آن نسبت شریف وعالی‌ازآن حاصل نمی‌شودکه $1\frac{1}{2}$ و $1\frac{1}{3}$ است وبه‌نسبت دوبه‌یك می‌انجامد [اشاره‌است به‌رشتهٔ

$$\left[1 : \left(1+\frac{1}{2}\right) : 2 : \left(1+\frac{1}{3}\right)\right]$$

این اختلاف ازآنجا ناشی می‌شود که اندازهٔ درجهٔ اول مشکوك است.

اگرچنان فرض کنیم که درجهٔدوم چهارباشد، وسوم شش، وچهارم هشت، نسبت ممکن‌است‌بدین‌ترتیب پیش‌رود ولی‌نسبتها نمی‌توانند به‌چهارمرتبه‌کامل شوند،چه مراتب همیشه سه‌است : آغاز ومیانه وپایان .

این تثلیثی است‌که دربارهٔ خود طبیعت‌آن را به ما تعلیم می‌دهد ونشانهٔ کمال‌است بنابراین می گویم : چون مراتب ، چنانکه‌گفته‌اند چهاراست ، وچنانکه‌گفتم چهار درجهٔ موجود، [ازطرف دیگرنسبتی] که شامل میانگین بابهترین تعادل‌است سه تایی است ، نتیجه آن می‌شودکه درجات طبایع [که تقلیدی ازنسبتهای موسیقی‌است] لزوماً باید [محدودبه] سه‌باشد، یعنی، درجات یك ودو وسه بدان سان‌که نسبتهای متعادل و کامل یك ویك دوم ویك‌سوم به‌دو برآنها بنا شده‌اند. اینهاهستندنسبتهای متعادل‌آهنگ ،که تمایل به‌تجاوز ازحدود ندارند.

هرکس که می‌خواهد نسبتهای میان طبایع و درجات کیفیات را همچون تصویری از نسبتهایی که میان سیارات ودر حرکت اول موجوداست (آن چنانکه احکام نجومیان واصحاب طلسمات وفیلسوفان گفته‌اند) برقرار کند، می‌تواند چنین‌کند این‌است اصل اساسی.

«استعمال میزان درکیمیا مستلزم آن است که نسبتهای صحیحی ازکیفیات در فلزات وجود داشته‌باشد. هرفلزدوکیفیت ظاهردارد ودوکیفیت باطنی: مثلا طلا از درون سرداست وخشك واز بیرون گرم و تر؛ نقره درست برعکس طلا است ـ گرم و تر درداخل وسرد وخشك درخارج هر کیفیت چهار درجه وهفت تقسیم جزء یعنی روی هم‌رفته بیست‌وهشت قسمت دارد.

دنباله دارد

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۹۶

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۹۶/۱ـ از مناف شریف زاده

ثابت کنید که تفاضل دوعبارت زیر مقدار ثابت مستقل از x است :

$$y_1=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^{m-1}}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$y_2=(\sqrt{x^2+1}-x)^m+k$$

حل ـ نخست مخرج کسر y_1 را گویا می کنیم.

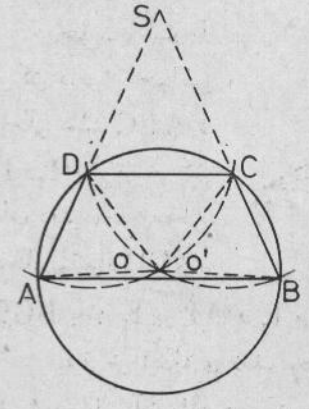
$$y_1=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^{m-1}\times(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)\times(\sqrt{x^2+1}-x)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^m}{x^2+1-x^2}=(\sqrt{x^2+1}-x)^m$$

بنابراین داریم: $y_2-y_1=k$

۹۶/۲ـ ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

ساقهای AD و BC از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD یکدیگر را در S قطع می کنند. دایره‌های محیطی دومثلث ACS و BDS علاوه بر S درنقطهٔ دیگر O متلاقیند. ثابت کنید که O مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقه است.



حل ـ اگر O' مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقهٔ مفروض باشد ، دو مثلث O'AD و O'BC باهم برابر و هر کدام متساوی‌الساقین می‌باشند. نتیجه می‌شود که چهارزاویهٔ OAD و ODA و OBC و OCB باهم برابرند. ازطرف دیگرزاویهٔ SCO' بازاویهٔ O'CB مکمل است ، پس زاویهٔ SCO' با زاویهٔ O'AD نیز مکمل است و چهار ضلعی ASCO' محاطی‌است، یعنی‌دایرهٔ محیطی مثلث ACS از O' می گذرد . به همین ترتیب ثابت می‌شود که دایرهٔ محیطی مثلث BDS نیزاز O' می گذرد. بنابراین O نقطهٔ تلاقی دو دایرهٔ مزبور بر O' منطبق‌است.

حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم ریاضی

مسائل ترجمهٔ: **مهندس زرگری**

۹۶/۳ـ به‌فرض $z\geq y\geq x>0$ ثابت کنید که :

$$y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y}(x+z)\leq(x+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$$

حل ـ به ترتیب داریم :

$$A=\left[y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y}(x+z)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(x+z)\right.=$$

$$=(x+z)\left[\frac{y}{xz}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right]$$

$$=(x+z)\left[\frac{y^2+xz-yz-xy}{xyz}\right]=$$

$$=\frac{(x+z)(y-z)(y-x)}{xyz}$$

اما بنابه‌فرض داریم:

$$y-z\leq 0 \text{ و } y-z\geq 0\Longrightarrow(y-z)(y-x)\leq 0$$

بنابراین $A\leq 0$ است ونامساوی مورد نظر محقق است .

۹۶/۴ـ هرگاه a و b و c و S اندازه‌های ضلعها ومساحت یك مثلث باشند ثابت کنید که:

$$a^4+b^4+c^4\geq 16S^2$$

حل ـ باتوجه به فرمول مربوط به‌مساحت مثلث داریم :

$$d=a^4+b^4+c^4-16S^2=a^4+b^4+c^4-$$
$$-[(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)+$$
$$+(a+b-c)]^2$$

$$d=a^4+b^4+c^4-(2a^2b^2+2b^2c^2+$$
$$+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)=$$
$$=(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\geq 0$$

تساوی $d=0$ فقط وقتی‌است که $a=b=c$

۹۶/۵ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\log_3\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}=\log_9\left(\log_9\frac{x}{3}\right)$$

حل- بااستفاده از فرمول $\log_a x = \log_{a^n}(x^n)$ به ترتیب داریم:

$$\log_9\left(\frac{1}{\log_3 x}\right) = \log_9\left(\log_9 \frac{x}{3}\right)$$

$$\frac{1}{\log_9 x^2} = \frac{1}{2\log_9 x} = \log_9 x - \log_9 3$$

به‌فرض $\log_9 x = X$ ازاین معادله خواهیم‌داشت:

$$2X^2 - X - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad (2X+1)(X-1) = 0$$

$$X = 1 \Longrightarrow x = 9$$

$$X = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{3}$$

۹۶/۶- نامعادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}$$

حل- نامعادلهٔ بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_2 \frac{1}{\log_3 \frac{x-1}{x+1}}$$

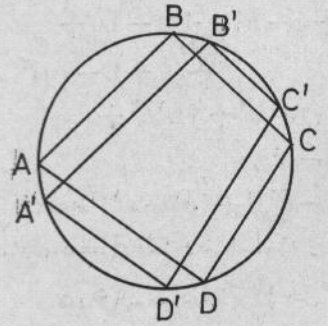
$$0 < \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{\log_3 \frac{x-1}{x+1}}$$

$$\begin{cases} \left[\log_3 \frac{x-1}{x+1}\right]^2 < 1 \\ \log_3 \frac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 < \log_3 \frac{x-1}{x+1} < 1$$

$$1 < \frac{x-1}{x+1} < 3 \Longrightarrow x < -2$$

۹۶/۷- درداخل دایره‌ای دوچهار ضلعی محاط شده‌اند بقسمی که ضلعهای آنها نظیر به‌نظیر متوازیند. ثابت کنید که قطرهای این دو چهار ضلعی نظیر به نظیر متساویند.

حل - اگر در یك دایره دو وتر باهم موازی باشند، کمانهای محصور بین آنها و در نتیجه‌وترهای نظیراین کمانها باهم برابرند. بر عکس اگر دو وتر متساوی باشند وترهای واصل بین طرفین آنها یاباهم موازیند ویا باهم برابرند.



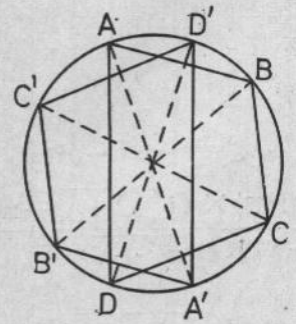
$AB \parallel A'B' \Longrightarrow AA' = BB'$ و $AB' = BA'$

$BC \parallel B'C' \Longrightarrow BB' = CC'$ و $BC' = B'C$

ازاین دو تساوی و دو تساوی دیگر نظیر آن خواهیم داشت:

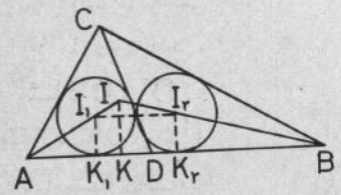
$$AA' = BB' = CC' = DD'$$

از تساوی $AA' = CC'$ نتیجه می‌شود که AC با $A'C'$ یا برابراست یا موازی است . همچنین از تساوی $BB' = DD'$ نتیجه می‌شودکه BD با $B'D'$ یا برابر است یا باآن موازی است. اگر AC با $A'C'$ و BD بـا $B'D'$ برابر باشدکه حکم مسئله ثابت است .



اگر AC بـا $A'C'$ موازی باشد در این صورت دو چهـار ضلعی‌مجانس یکدیگرند اگراین تجانس مستقیم باشد دوچهارضلعی برهم منطبقنـد . اگـر این تجانس معکوس‌باشد دو چهار ضلعـی نسبت به مرکز دایره قرینهٔ یکدیگرند ودرنتیجه AC با $A'C'$ وBD با $B'D'$ برابراست .

۹۶/۸- مساحت مثلث قائم‌الزاویـه‌ای برابر S است. خطی ازرأس قائمهٔ این مثلث گذشته وآن را بـه دومثلث چنان تجزیه‌کرده است که دایره‌های محاطی این دو مثلث متساویند. ثابت‌کنید که طول‌پاره‌ای ازخط مزبور که بین‌رأس ووترمحدود است برابر $\sqrt{S}$ می‌باشد.



حل- اگـر I مرکز دایرهٔ محـاطی داخلی مثلث ABC و I_1 وI_2 به‌ترتیب‌مرکز های دایره‌های محاطی داخلی‌مثلثهایACDو BCD باشد I_1 بر AI و I_2 بر BI واقع است.

به فرض اینکه p نصف محیط مثلث ABC و r شعـاع دایرهٔ محاطی آن مثلث وهمچنین p_1 و r_1 نصف محیط وشعاع دایرهٔ محاطی مثلث ACD و بالاخـره p_2 و r_1 نصف محیط و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث BCD باشد ، به فرض $CD = x$ داریم :

$$S = pr \text{ و } S_1 = p_1 r_1 \text{ و } S_2 = p_2 r_1$$

$$S=S_1+S_2=(p_1+p_2)r_1$$

$$r_1=\frac{S}{p_1+p_2}=\frac{S}{p+x}$$

خط I_1I_2 با AB موازی است وداریم:

$$\frac{r}{r-r_1}=\frac{c}{I_1I_2}$$

$$I_1I_2=K_1D+DK_2=p_1-b+p_2-a=$$

$$=p+x-b-a=c+x-p$$

$$\frac{\frac{S}{p}}{\frac{S}{p}-\frac{S}{p+x}}=\frac{c}{c+x-p}$$

$$x^2=p(p-c)=pr=S\Longrightarrow x=\sqrt{S}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۹۶/۹ـ سه‌نقطهٔ $A(-3,6)$ و $B(-1,0)$ و $C(4,5)$ مفروض است. برخط BC دو نقطهٔ P و Q یافت می‌شود بقسمی که‌نسبت مساحت‌مثلث APC به‌مساحت مثلث APB همچنین نسبت مساحت مثلث AQC به‌مساحت مثلث AQB مثل‌نسبت ۳به۲ است. معادلهٔ هریك ازخطهـای AP و AQ را بدست آورید ومحقق کنید که AP بر BC عمود است .

حل ـ چون مثلثهـای گفته شده در رأس A مشترکند بنابراین داریم:

$$\frac{CP}{BP}=\frac{CQ}{BQ}=\frac{3}{2}$$

به‌فرض $P(x_1 \text{ و } y_1)$ و $Q(x_2,y_2)$ واینکه P بین B و C و Q خارج‌آنها باشد داریم:

$$\frac{4-x_1}{x_1+1}=\frac{4-x_2}{-1-x_2}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{5-y_1}{y_1}=\frac{5-y_2}{-y_2}=\frac{3}{2}$$

$$P(x_1=1 \text{ و } y_1=2)$$

$$Q(x_2=-11 \text{ و } y_2=-10)$$

$$(AP):\frac{y-6}{x+3}=\frac{2-6}{1+3} \text{ یا } y=-x+3$$

$$(AQ):\frac{y-6}{x+3}=\frac{-10-6}{-11+3} \text{ یا } y=2x+12$$

$$m_{BC}=\frac{5}{4+1}=1 \text{ و } m_{AP}=-1\Longrightarrow AP\perp BC$$

۹۶/۱۰ـ از محمد معینی

هرگاه دوزاویهٔ α و β متمم یکدیگر باشند ثابت کنید که:

$$(1+tg\frac{\alpha}{2})(1+tg\frac{\beta}{2})=2$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$tg(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})=tg\frac{\pi}{4}=1$$

$$\frac{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}{1-tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}}=1$$

$$tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}=1$$

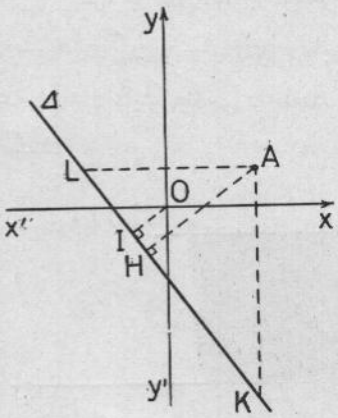
برطرفین یك واحد اضافه می‌کنیم وآنگاه طرف اول را تجزیه می‌کنیم رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید.

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم‌ریاضی

۹۶/۱۱ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

درصفحهٔ محور های مختصات قائم $x'Ox$ و $y'Oy$ خط بمعادلهٔ $ax+by+c=0$ و نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ درخارج آن داده شده‌است. مطلوبست فاصلهٔ هندسی نظیرهریك ازمقادیرزیر:

$$\left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{a}\right| \text{ و } \left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{b}\right| \text{ و } \left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{c}\right|$$



حل ـ خطهایی که از A موازی با yy' و $x'x$ رسم‌شوند خط مفروض Δ را به‌ترتیب در L و K قطع‌می‌کنند وداریم :

$$K(x_1=\alpha \text{ و } y_1=-\frac{a\alpha+c}{b})$$

$$AK=|\beta-y_1|=|\beta+\frac{a\alpha+c}{b}|$$

$$AK=|\frac{a\alpha+b\beta+c}{b}|$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$AL=|\frac{a\alpha+b\beta+c}{a}|$$

عمودهای AH و OI را بر Δ رسم می‌کنیم، داریم :

$$AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ و } OI=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{AH}{OI}=\left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{c}\right|$$

۹۶/۱۲ـ منتخب ازیك کتاب درسی فرانسه

نمایش هندسی رابطهٔ زیررا مشخص کنید که درآن y تابع x است :

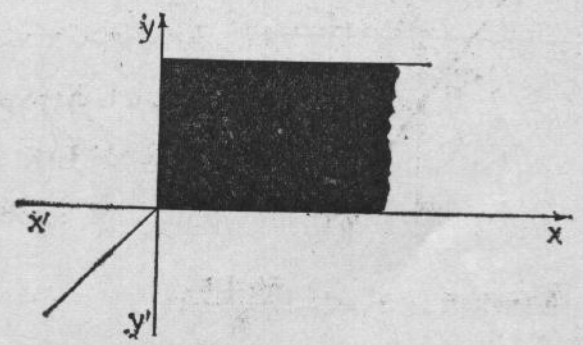
$$|x|-|y|=x-y$$

حل ـ اگر $M(x,y)$ نقطهٔ غیرمشخصی از نمایش هندسی رابطه باشد:

الف ـ اگر M در بخش اول محورهای مختصات قرارداشته باشد در این صورت $|x|=x$ و $|y|=y$ است و رابطهٔ مفروض به‌صورت اتحاد $x-y=x-y$ در می‌آید، یعنی هر نقطه از بخش اول محورها برنمایش هندسی رابطه واقع‌است.

ب ـ اگر M در بخش دوم محورها واقع باشد داریم $|x|=-x$ و $|y|=y$ ورابطهٔ مفروض به صورت $x=0$ در می‌آید که دراین حالت نیم محور Oy قسمتی از نمایش هندسی است .

ج ـ اگر M در بخش سوم محور ها واقع باشد داریم $|x|=-x$ و $|y|=-y$ ورابطهٔ مفروض به صورت $y=x$ درمی‌آید ونمایش هندسی رابطه در این حالت نیمساز $x'Oy'$ است .



د ـ وقتی M دربخش چهارم محورها واقع باشد خواهیم داشت $y=0$ ودر این‌حالت نیم‌محور Ox نمایش‌هندسی رابطه است .

بادر نظر گرفتن چهار حالت بالا باهم نتیجه می‌شود که نمایش هندسی‌رابطه مفروض به‌شکل بالا است.

۹۶/۱۳ـ فرستنده: **محمد معینی**

هرگاه برای سه‌زاویهٔ حاده ومتمایز α و β و γ داشته باشیم :

$$\frac{(tg\alpha+tg\gamma)tg(\beta+\gamma)}{(tg\beta+tg\gamma)tg(\gamma+\alpha)}=\frac{(tg^2\beta-tg\alpha tg\gamma)tg\alpha}{(tg^2\alpha-tg\beta tg\gamma)tg\beta}$$

ثابت کنید که خواهیم‌داشت:

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma$$

حل ـ بعد ازبسط $tg(\beta+\gamma)$ و $tg(\gamma+\alpha)$ در رابطهٔ بالا خواهیم داشت :

$$(1)\quad K=\frac{tg^2\alpha-tg\beta tg\gamma}{tg\alpha-tg\alpha tg\beta tg\gamma}=\frac{tg^2\beta-tg\alpha tg\gamma}{tg\beta-tg\alpha tg\beta tg\gamma}$$

اگر دونسبت باهم برابر باشند برابر خواهند بود بانسبت‌تفاضل صورتها برتفاضل مخرجهای خود :

$$K=\frac{tg^2\alpha-tg^2\beta-tg\gamma(tg\alpha+tg\beta)}{tg\alpha-tg\beta}$$

از حذف $tg\alpha-tg\beta\neq 0$ از صورت و مخرج خواهیم داشت :

$$K=tg\alpha+tg\beta+tg\gamma$$

اکنون صورت و مخرج کسر اول از رابطهٔ (۱) را در $tg\beta$ وصورت و مخرج کسر دوم را در $tg\alpha$ ضرب می‌کنیم وبه ترتیب بالا عمل می‌کنیم، که پس‌از انجام عملیات لازم خواهیم‌داشت:

$$K=cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma$$

۹۶/۱۴ـ فرستنده: **محمد معینی**

به‌فرض آنکه داشته باشیم:

$$tg\alpha=\frac{1}{k}(\sqrt{1+k}-1)(\sqrt{1-k}+1)$$

مقدار $\sin 4\alpha$ رابرحسب k بدست‌آورید.

حل ـ می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$tg\alpha=\frac{(\sqrt{1+k}-1)(\sqrt{1-k}+1)(\sqrt{1+k}+1)}{k(\sqrt{1+k}+1)}$$

$$tg\alpha=\frac{1+\sqrt{1-k}}{1+\sqrt{1+k}}$$

این‌معادله رابه‌یك معادلهٔ گویا نسبت‌به k تبدیل می‌کنیم، نتیجه خواهد شد:

$$(1+tg^2\alpha)^2 k = 4(1-tg^2\alpha)tg\alpha$$

$$k = 2\times\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\times\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$k = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$$

۹۶/۱۵ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

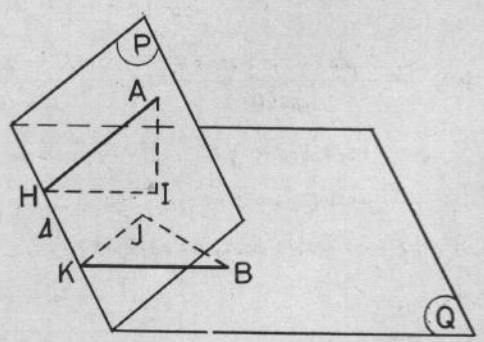
درفضا دوصفحهٔ متقاطع αوβ ونقطهٔ O درخارج آنها داده شده است. تابع $N=f(M)$ را به این ترتیب تعریف می‌کنیم که نظیر هـر نقطهٔ M ازصفحـهٔ α نقطهٔ N عبارتست از محل تقاطع OM باصفحهٔ β . معلوم کنیدکه تابع N به ازای چـه مواضع ازM معین‌است.

حل‌ـ نقطهٔ N تنها وقتی نامعین است‌که OM باصفحهٔ β موازی باشد . هرگاه γ صفحه‌ای باشدکه برO می‌گذرد و باصفحهٔ β موازی است وخط Δ فصل‌مشترك دوصفحهٔ αوγ باشد تابع N وقتی‌وفقط وقتی‌معین است‌که M برخط Δ واقع‌نباشد. پس‌تابع N به‌ازای مواضع M از صفحهٔ α بغیر از مواضع M از Δ معین می‌باشد.

۹۶/۱۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

ثابت‌کنیدکه بـرای‌آنکه دونقطه ازیك خط به‌یك فاصله باشند لازم وکافی‌است‌که فاصله‌های‌آنها ازصفحاتی‌که بوسیلهٔ‌آن خط ونقطهٔ دیگرتشکیل می‌شود باهم برابرباشند.

حل‌ـ خط Δ ودونقطهٔ A و B را در خارج‌آن در نظر می‌گیریم . صفحهٔ P را بر A و Δ وصفحهٔ Q رابر B و Δ می‌گذرانیم. عمودهای AH و BK رابر Δ وعمودهای AIو



BJ را به‌ترتیب برصفحات PوQ رسم می‌کنیم. بنابه قضیهٔ سه عمود IH و JK برΔ عمودند ودو زاویهٔ AHI و BKJ با هم برابرند. دومثلث قائم‌الزاویهٔ AIH و BJK دریك زاویهٔ حاده متساویند، پس اگر $AH=BK$ باشد نتیجه خواهد شد که $AI=BJ$ و بـر عکس از تساوی $AI=BJ$ تساوی $AH=BK$ نتیجه خواهدشد.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم‌دبیرستان

۹۶/۱۷ـ فرستنده: **حسن نیکو آمال‌راد**

معادلهٔ قطرهای دایره‌ای به‌صورت زیراست:

$$(m+n)x+(m-n)y=2m$$

می‌دانیم‌که عددمطلق مساحت این‌دایره دوبرابرعدد مطلق‌محیط آن است. معادلهٔ این‌دایره رامشخص‌کنید.

حل‌ـ قبلا باید معلوم‌کنیم‌که خطوط به معادلهٔ داده شده ازنقطهٔ ثابتی‌که همان مرکز دایره باشد می‌گذرند. برای این کارمعادله رابه صورت زیرمی‌نویسیم:

$$m(x+y-2)+n(x-y)=0$$

این معادله وقتی مستقل‌از mوn است‌که:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Longrightarrow x=y=1$$

مرکز دایره $C(1و1)$ است . اگر R شعاع آن باشد به ـ فرض داریم:

$$\pi R^2=4\pi R \Longrightarrow R=4$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=16$$

$$x^2+y^2-2x-2y-14=0$$

۹۶/۱۸ـ فرستنده: **محمد معینی**

معادلهٔ زیررا حل‌کنید:

$$\sin(\pi\sin x)+\cos(\pi\sin x)=\sqrt{2}$$

حل‌ـ به فرض $\pi\sin x=\alpha$ داریم:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$$

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=1 \Longrightarrow \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\pi\sin x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \quad و \quad \sin x=2k+\frac{1}{4}$$

$$-1<2k+\frac{1}{4}<1 \Longrightarrow k=0$$

$$\sin x=\frac{1}{4} \Longrightarrow x=2k\pi+\mathrm{Arc}\sin\frac{1}{4}$$

$$\text{یا} \quad x=2k\pi+\pi-\mathrm{Arc}\sin\frac{1}{4}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۹۶/۱۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

منحنی نمایش هندسی رابطهٔ زیررا رسم کنید:

$$\frac{x|x|}{25}+\frac{y|y|}{9}=1$$

حل ـ نقطهٔ $M(x,y)$ ازنمایش هندسی رابطه را درنظر می‌گیریم:

الف ـ اگر M دربخش اول محـور ها باشد داریـم $|x|=x$ و $|y|=y$ ورابطه چنین می‌شود:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

قسمتی ازبیضی به‌این معادله که دربخش اول محورها واقع است جزء نمایش هندسی‌است.

ب ـ اگر M دربخش دوم محورها باشد $|x|=-x$ و $|y|=y$ است وداریم:

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$$

این معادله یك هذلولی‌را مشخص می کند. قسمتی ازاین‌هذلولی که دربخش دوم محورها واقع‌است جزء نمایش هندسی است.

ج ـ اگر M دربخش‌سوم محورها واقع‌باشد $|x|=-x$ و $|y|=-y$ است وداریم:

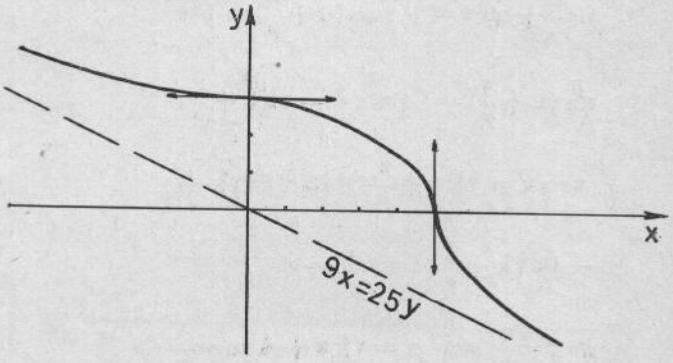
$$\frac{-x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$$

این‌رابطه به‌ازای مقادیرحقیقی x و y غیرممکن است. پس‌هیچ نقطه‌ای‌ازبخش‌سوم‌محورهاجزء نمایش‌هندسی‌رابطهٔ‌مفروض‌نیست.

د ـ اگر M در بخش چهارم محورها باشد $|x|=x$ و $|y|=-y$ است وداریم:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$$

قسمتی ازهذلولی به‌این معادله که دربخش چهارم محورها است جزء نمایش هندسی‌است.



بنابرآنچه گذشت نمـایش هندسی‌رابطهٔ مفروض به شکل بالا است که از یك ربع بیضی و از دو ربع هذلولی تشکیل شده است.

۹۶/۲۰ـ ترجمهٔ ازفرانسه

جدول تغییرات و منحنی نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{(x+1)^3}$$

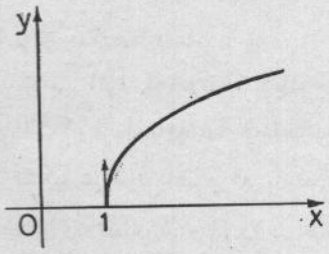
حل ـ تابع‌وقتی معین‌است که هریك‌ازدوتابع $\sqrt{x-1}$ و $\sqrt{(x+1)^3}$ به‌تنهایی معین باشند و نتیجه می‌شودکه تابع مفروض درازای $x\geqslant 1$ معین‌است ودراین صورت داریم:

$$y=(x+1)\sqrt{x^2-1}$$

$$y'=\sqrt{x^2-1}+\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$x>1\Rightarrow y'>0$$

x	1		$+\infty$
y'	∞	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$



۹۶/۲۱ـ فرستنده: **محمد حسنی نژاد**

هرگاه داشته باشیم:

$$x^2+y^2=\frac{x\cos 3\alpha+y\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{y\cos 3\alpha-x\sin 3\alpha}{\sin^3\alpha}$$

رابطهٔ مستقل از α رابین xوy بدست‌آورید.

حل ـ ازضرب صورت و مخرج اولین‌کسر در $\sin\alpha$ و صورت ومخرج‌کسر دوم در $\cos\alpha$ وبا استفاده از خواص تناسب خواهیم داشت:

$$x^2+y^2=\frac{x(\sin\alpha\cos 3\alpha-\cos\alpha\sin 3\alpha)+y(\sin\alpha\sin 3\alpha+\cos\alpha\cos 3\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}$$

$$x^2+y^2=\frac{-2x\sin 2\alpha+2y\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$(x^2+y^2+2x)\sin 2\alpha=2y\cos 2\alpha$$

یك بار دیگر صورت ومخرج اولین کسررا در $\cos\alpha$ واز دومی را در $-\sin\alpha$ ضرب می‌کنیم وبه ترتیب مشابه خواهیم داشت:

$$(x^2+y^2-x)\cos 2\alpha = y\sin 2\alpha$$

ازضرب نظیربه نظیر طرفین دو رابطهٔ بدست‌آمده در یکدیگر خواهیم داشت:

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+x-2)=0$$

۹۶/۲۲ـ فرستنده: جوادفیض

مجموع زیررا حساب کنید:

$$S=\frac{\sin x+\cos x}{\sec x+\operatorname{cosec} x}+\frac{\sin 2x+\cos 2x}{\sec 2x+\operatorname{cosec} x}+\cdots+\frac{\sin nx+\cos nx}{\sec nx+\operatorname{cosec} nx}$$

حلـ داریم:

$$\frac{\sin kx+\cos kx}{\sec kx+\operatorname{cosec} kx}=\frac{\sin kx+\cos kx}{\frac{1}{\cos kx}+\frac{1}{\sin kx}}=\sin kx\cos kx$$

$$S=\sin x\cos x+\sin 2x\cos 2x+\cdots+\sin nx\cos nx$$

$$2S=\sin 2x+\sin 4x+\cdots+\sin 2nx$$

$$4S\sin x=$$

$$2\sin 2x\sin x+2\sin 4x\sin x+\cdots+2\sin 2nx\sin x$$

$$4S\cos x=$$

$$\cos x-\cos 3x+\cos 3x-\cdots-\cos(2n+1)x$$

$$S=\frac{\cos x-\cos(2n+1)x}{4\sin x}=\frac{\sin nx\sin(n+1)x}{2\sin x}$$

۹۶/۲۳ـ ترجمهٔ: مهندس زرگری

ثابت کنید که در مجموعهٔ اعداد صحیح معادلهٔ زیر جواب ندارد:

$$x^6+y^6-z^6=1972$$

حلـ عددصحیح a رادرنظر می‌گیریم. باقیماندهٔ تقسیم a بر۷ یکی از عددهای صفر یا ± 1 یا ± 2 یا ± 3 است. اما باقیماندهٔ تقسیم هریك از عدد های $(\pm 1)^6$ و $(\pm 2)^6$ و $(\pm 3)^6$ بر۷ برابربا یك است. بنابراین باقیماندهٔ تقسیم a^6 بر۷ یاصفراست ویایك. اگر x و y و z عددهای صحیح باشند باقیماندهٔ تقسیم عدد $x^6+y^6-z^6$ بر۷ یاصفریا یك است در صورتی که باقیماندهٔ تقسیم ۱۹۷۲ بر۷ برابر۵ است. پس هیچ عدد صحیحی درمعادلهٔ مفروض صدق نمی‌کند.

۹۶/۲۴ـ ترجمهٔ: مهندس زرگری

جزء کسری عدد گویای r را با $\{r\}$ نمایش می‌دهیم.

مثلا:

$$\left\{\frac{7}{3}\right\}=\frac{1}{3},\quad \left\{\frac{3}{7}\right\}=\frac{3}{7},\quad \{4/75\}=0/75$$

هرگاه m و n دوعدد طبیعی ونسبت به‌هم اول باشند، مجموع زیررا پیداکنید:

$$\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\cdots+\left\{(n-1)\frac{m}{n}\right\}+\{m\}$$

حلـ به فرض آنکه مجموع مزبور برابر با S باشد چون $\{m\}=0$ است پس:

$$S=\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\cdots+\left\{(n-1)\frac{m}{n}\right\}$$

$$S=\left\{(n-1)\frac{m}{n}\right\}+\left\{(n-2)\frac{m}{n}\right\}+\cdots+\left\{\frac{m}{n}\right\}$$

طرفین این‌دو رابطه را باهم جمع می‌کنیم. چون m وn نسبت به‌هم اولند پس هریك ازدوعدد $\frac{km}{n}$ و $\frac{(n-k)m}{n}$ به‌ازای $1\leqslant k\leqslant n-1$ عددهای غیرصحیح می‌باشند اما مجموع این دو عدد برابراست با m که عدد صحیح‌است پس‌مجموع جزء های کسری دوعدد مزبور برابربا واحد است:

$$\left\{\frac{km}{n}\right\}+\left\{\frac{(n-k)m}{n}\right\}=1$$

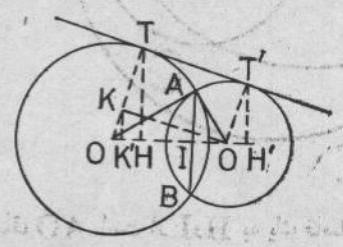
بنابراین ازجمع طرفین دورابطهٔ بالا خواهیم داشت:

$$2S=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1\text{ مرتبه}}=n-1\Longrightarrow S=\frac{n-1}{2}$$

۹۶/۲۵ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دودایرهٔ به مرکزهای O و O′ وبه شعاعهای R و R′ که $R>R'$ است دردو نقطهٔ A و B برهم عمودند. اگر TT′ مماس مشترك این دو دایره و $OO'=d$ باشد ثابت کنیدکه $TT'=\sqrt{2RR'}$ وتصویر TT′ بر OO′ با AB برابر است.

حلـ مطابق با شکل داریم:



$$\overline{TT'}^2=\overline{O'K}^2=$$

$$=\overline{O'O}^2-\overline{OK}^2$$

$$\overline{T'T}^2=\overline{OA}^2+\overline{O'A}^2-\overline{OK}^2$$
$$\overline{T'T}^2=R^2+R'^2-(R-R')^2=2RR'$$
$$TT'=\sqrt{2RR'}$$

عمود KK' را بر OO' رسم می‌کنیم. در مثلث OKO' داریم:

$$\overline{O'K}^2=OO'\cdot O'K'=d\cdot HH'$$
$$HH'=\frac{\overline{O'K}^2}{d}=\frac{\overline{T'T}^2}{d}=\frac{2RR'}{d}$$

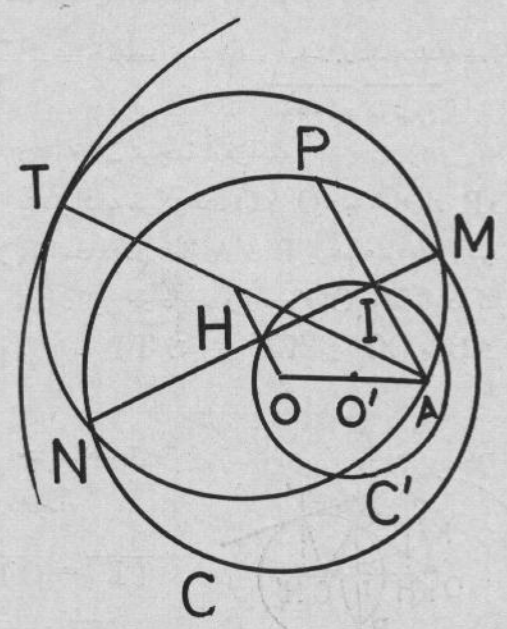
اگر I نقطهٔ تلاقی AB با OO' باشد، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAO' داریم:

$$OO'\cdot AI=OA\cdot O'A\Longrightarrow AI=\frac{RR'}{d}$$
$$H'H=2AI=AB$$

۹۶/۲۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دایرهٔ ثابت C به مرکز O وبه شعاع R ونقطهٔ ثابت A درداخل آن ونقطهٔ متغیر P واقع بر آن مفروض است. عمودمنصف پاره خط AP دایرهٔ C را در M و N قطع می‌کند. اولا اگر I وسط AP و H تصویر قائم O روی MN باشد مکان هندسی هریك ازنقاط I و H را تعیین کنید. ثانیاً اگر ω مرکزدایرهٔ محیطی مثلث AMN باشد مکان هندسی ω راپیدا کنید وثابت کنید که دایرهٔ اخیر بردایرهٔ ثابتی‌مماس است.

حل ـ اولا درتجانس به مرکز A وبه نسبت $\frac{1}{2}$ نقطهٔ I مجانس نقطهٔ P است. وچون‌مکان P دایرهٔ C است پس مکان I دایره‌ای است به مرکز O' وبه شعاع $\frac{R}{2}$ که O' وسط AO است. چهارضلعی $AOHI$ ذوزنقهٔ قائم است و چون O' وسط



ساق AO است از I و H به یك فاصله است یعنی دایرهٔ به‌مرکز O' که بر I بگذرد بر H نیز می‌گذرد. بنابراین مکان نقطهٔ H همان دایرهٔ C' مکان نقطهٔ J است.

ثانیاً ـ چون MN عمود منصف AP است، پس‌دایرهٔ C ودایرهٔ محیطی AMN نسبت به MN قرینه‌اند و ω قرینهٔ O نسبت به H است یعنی $\overline{O\omega}=2\overline{OH}$ بنابراین مکان ω دایره‌ای است که درتجانس به مرکز O وبه نسبت ۲ مجانس دایرهٔ C' است. مرکز این دایره نقطهٔ A وشعاع آن R است.

هرگاه T نقطهٔ تلاقی دیگر $A\omega$ با دایرهٔ محیطی AMN باشد، طول AT برابربا مقدارثابت $2R$ است، پس دایرهٔ محیطی AMN بردایرهٔ ثابت به‌مرکز A وبه‌شعاع $2R$ مماس‌است.

حل مسائل گوناگون

ترجمهٔ از روسی توسط مهندس زرگری

۹۶/۲۷ـ دوماشین‌باری برای حمل‌بارازیك شهر به‌شهر دیگررفت وآمد می‌کنند. هرگاه اولی‌چهار دفعه ودومی‌سه‌دفعه رفت‌وآمدکند رویهم‌کمتر از ۲۱ تن بارحمل می‌کنند. هرگاه اولی‌هفت دفعه ودومی چهار دفعه رفت و آمد داشته باشد رویهم بیش‌از ۳۳ تن‌بار حمل می‌کنند. ظرفیت کدام ماشین بیشتر است؟

حل ـ به فرض آنکه x و y به‌ترتیب ظرفیتهای‌ماشینهای اول و دوم باشد داریم:

$$\begin{cases}4x+3y<21\\7x+4y>33\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}44x+33y<231\\-49x-28y<-231\end{cases}$$
$$-5x+5y<0\Longrightarrow x>y$$

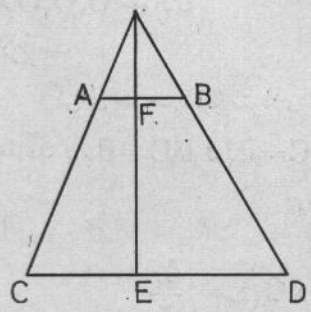
۹۶/۲۸ـ دوتراشکار قرارگذاشتندکه باهم‌کاری راکه تراش قطعاتی به‌تعدادکمتراز ۱۰۰۰ عدد بود انجام دهند. در روزهای اول‌ودوم وسوم اولی به‌ترتیب $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{6}$ و $\frac{9}{20}$ کار خود ودومی به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{11}$ و $\frac{3}{7}$ کار خود را تمام‌کرد. هریك از دوتراشکار در روزسوم چند قطعه را تراشیده‌اند؟

حل ـ تعدادقطعات تراشیده‌شدهٔ در هرروز عددی‌صحیح است. پس تعداد قطعاتی‌که توسط اولی تراشیده شده است باید بر ۷ و ۶ و ۲۰ بخش پذیرباشد پس مضربی از ۴۲۰ است. به همین ترتیب تعداد قطعاتی‌که توسط دومی تراشیده شده مضرب ۳۰۸ است. و چون مجموع قطعات تراشیده شدهٔ توسط دونفر

از ۱۰۰۰ کمتر است، پس اولی ۴۲۰ قطعه (نه ۸۲۰ قطعه) و دومی ۳۰۸ قطعه (نه ۶۱۶ یا ۹۲۴ قطعه) تراشیده است و کارآنان در روز سوم به ترتیب ۱۸۹ قطعه و ۱۳۲ قطعه بوده‌است.

۹۶/۲۹ـ سوزنبان قطار در اتاقك خود به‌فاصلهٔ یك‌متری ازپنجرهٔ به‌عرض یك‌متر نشسته است. خط‌آهن به‌موازات پنجره ودرفاصلهٔ ۲۹۹ متری‌ازآن کشیده شده‌است. ده‌ثانیه طول‌می‌کشد تا سوزنبان قطار به طول ۱۰۰ متر راکه روی این خط آهن می‌گذرد به تمامی مشاهده‌کند. سرعت قطار چقدر است؟ (از عرض‌قطار وفاصلهٔ بین‌چشمان سوزنبان صرف‌نظر می‌شود).

حل‌ـ اگر S نقطه‌ای باشدکه سوزنبان درآنجا نشسته است و AB پنجره و CD جزئی ازراه‌آهن باشدکه از پنجره دیده می‌شود ، چون SE را بر CD عمودکنیم بنا به فرض داریم:



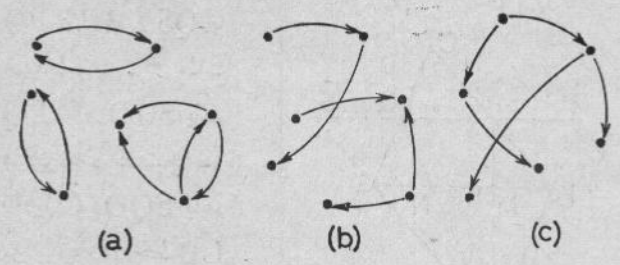
$AB=۱$ و $SF=۱$

$EF=۲۹۹ \Longrightarrow SE=۳۰۰$

از تشابه دومثلث SAB وSCD نتیجه‌می‌شودکه $CD=۳۰۰$ حال اگر قطار از C به طرف D در حرکت باشد سوزنبان سراسر قطار را از لحظه‌ای‌که انتهای واگن آخر به نقطهٔ C می‌رسد تا لحظه‌ای‌که ابتدای واگن اول به D می‌رسد می‌بیند پس قطار فاصلهٔ $۲۰۰=۱۰۰-۳۰۰$ متر را در ۱۰ ثانیه‌طی کرده است و سرعت آن برابراست با ۲۰ متربر ثانیه یا ۷۲ کیلومتر برساعت.

۹۶/۳۰ـ درهریك ازشکلهای زیرهردایرهٔ سیاه‌کوچك نماینده یك فرداست. دریکی ازشکلها هرپیکان‌که ازیك فردبه فرددیگر کشیده شده‌است،معلوم‌می‌کندکه اولی پدربزرگ‌دومی است. درشکل دیگر هرپیکان نشان می‌دهدکه فردی پدر فرد دیگر است. در شکل سوم هرپیکان برادر هرفرد را معین می‌کند.

درکدام یك ازاین سه‌شکل هرپیکان پدر بزرگ نوهٔ خودرا مشخص می‌کند؟ درکدامیك ازشکلها پیکانها ازپدرها به



پسرها رسم شده‌اند؟ درشکلی‌که مربوط به برادرها است آیا خواهر فرد یاافرادی نموده شده‌است؟

حل‌ـ چون در شکل (a) پیکانهای بین هردو فرد دو سویه است پس در این شکل هر پیکان نشان می‌دهد که فرد اول برادر فرد دوم است. در همین شکل فردی‌که دو پیکان به آن وصل شده اما پیکانی از آن خارج‌نشده است خواهر دوفرد دیگر است. در شکل (b) یك فرد است‌که دو پیکان به آن‌وصل شده است و چون یك فرد دارای دوپدر نیست، پس در این‌شکل هر پیکان نشان می‌دهدکه اولی پدر بزرگ دومی است. در شکل c هرپیکان از یك پدر به پسرآن رسم شده است.

۹۶/۳۱ـ ثابت‌کنیدکه مجموع مربعات پنج‌عدد طبیعی متوالی نمی‌تواند مربع‌کامل باشد.

حل‌ـ به فرض آنکه n عدد طبیعی کوچکتر از ۳باشد داریم:

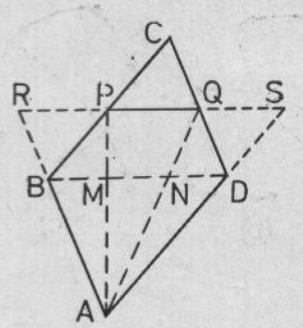
$$(n-۲)^۲+(n-۱)^۲+n^۲+(n+۱)^۲+(n+۲)^۲$$
$$=۵(n^۲+۲)$$

عدد $۵(n^۲+۲)$ وقتی مربع‌کامل است‌که $n^۲+۲$ بر ۵ بخش پذیرباشدکه در چنین صورتی رقم سمت راست عدد $n^۲$ یا ۳ یا ۸ خواهد بودکه این ممکن نیست. بنابراین $n^۲+۲$ مضرب ۵ نیست وحکم مسئله ثابت است.

۹۶/۳۲ـ درچهار ضلعی محدب ABCD نقطه های P وQ به‌ترتیب وسطهای BC و CD می‌باشند. هرگاه‌خطوط AP و AQ قطر BD ازچهار ضلعی‌را به سه‌قسمت متساوی تقسیم کنند ، ثابت کنیدکه چهار ضلعی مزبور متوازی‌الاضلاع است .

حل‌ـ خط PQ موازی با BD است‌وبنا به قضیهٔ‌خطوط

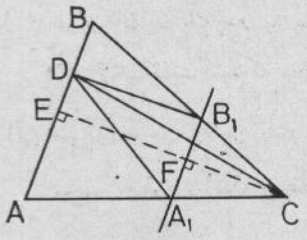
متقارب سه پاره خط PQ و RP و QS با هم برابرند . دو مثلث CPQ و SQD باهم برابرند و درنتیجه دو زاویهٔ C وSQD باهم برابرند ودو خط CB وDA متوازی‌می‌باشند به همین ترتیب ثابت



می‌شود که دو خط CD و AB نیز باهم موازیند.

۹۶/۳۳ـ خطی‌موازی ضلع AB ازمثلث ABC رسم می‌کنیم تا AC رادر A_1 و BC رادر B_1 قطع کند. از C خط دلخواهی مرور می‌دهیم تا AB را در D قطع کند. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی CA_1DB_1واسطهٔ هندسی‌مساحت‌های مثلثهای CAB و CA_1B_1 است. عکس این‌مطلب رانیز ثابت کنید.

حل‌ـ عمود CE را بر AB رسم می‌کنیم که A_1B_1 را در F قطع می‌کند.



به فرض $CE=h$ و $CF=h_1$ و اینکه S مساحت چهار ضلعی CA_1DB_1 و S_1وS_2 به‌ترتیب مساحتهای مثلثهای CAB و $C_1A_1B_1$ باشد داریم:

$$S=\frac{1}{2}A_1B_1(CF+EF)=\frac{1}{2}A_1B_1h$$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{h}{h_1}\Longrightarrow h_1=\frac{A_1B_1h}{AB}$$

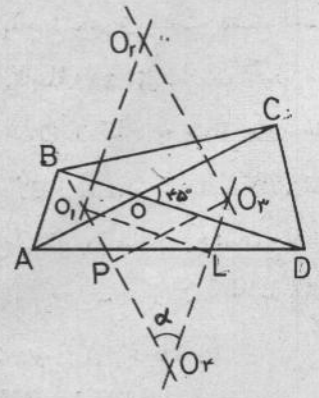
$$S_1\cdot S_2=\frac{1}{2}AB\cdot h\times\frac{1}{2}A_1B_1\times\frac{A_1B_1h}{AB}=$$

$$=\frac{1}{4}h^2\cdot(A_1B_1)^2=S^2$$

برعکس هرگاه رابطهٔ اخیز برقرارباشدنتیجه می‌شود که‌مساحت CA_1B_1D و در نتیجه مساحت DA_1B_1 مقدار ثابت مستقل از وضع D روی AB است،پس A_1B_1 و AB متوازیند.

۹۶/۳۴ـ قطرهای چهارضلعی محدب ABCD درO متلاقیند. ثابت کنید که مراکز دوایرمحیطی مثلثهای OAB و OBC و OCD و ODA رأسهای یك متوازی‌الاضلاعند . هرگاه زاویهٔ بین‌قطرهای چهارضلعی 45° باشد مساحت این متوازی‌الاضلاع رابرحسب مساحت چهارضلعی بدست‌آورید.

حل‌ـ اگر O_1 و O_2 و O_3 و O_4 به ترتیب‌مرکزهای دوایر محیطی مثلثهای نامبرده باشد ، O_1O_2 و O_3O_4 بر BDعمود وباهم موازیند،همچنین O_2O_3 وO_4O_1 هردو بر AC عمودند وباهم موازیند.پس‌چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$ متوازی اضلاع‌است.



اگر S مساحت این‌متوازی الاضلاع و α اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ آن و $BD=d_2$ و $AC=d_1$ باشد داریم:

$$S=O_1O_4\cdot O_3O_4\sin\alpha$$

$$O_3P=MN=\frac{d_1}{2}\ \text{و}\ O_1L=\frac{d_2}{2}$$

$$O_3O_4=\frac{PO_3}{\sin\alpha}=\frac{d_1}{2\sin\alpha}$$

$$O_4O_1=\frac{O_1L}{\sin\alpha}=\frac{d_2}{2\sin\alpha}$$

$$S=\frac{d_1d_2}{4\sin\alpha}$$

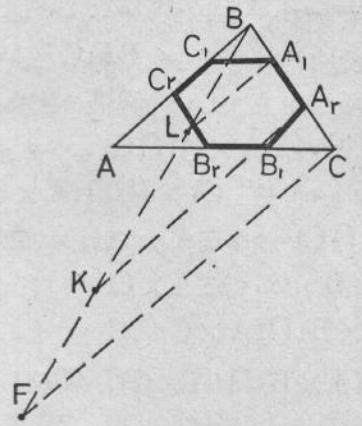
دو زاویهٔ حادهٔ O و O_4 باهم برابرند زیرا ضلعهای آنهابرهم عمودند پس $\alpha=45^\circ$ است و از طرف دیگر Σ مساحت‌چهارضلعی مفروض برابراست با نصف حاصل‌ضرب قطرهای آن در سینوس زاویهٔ بین‌آنها پس:

$$S=\frac{d_1d_2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}d_1d_2\frac{\sqrt{2}}{2}=\Sigma$$

۹۶/۳۵ـ خطوطی‌موازی باضلعهای مثلث مفروض‌چنان رسم کنید که از برخوردآنها با ضلعهای مثلث یك شش ضلعی متساوی‌الاضلاع پدیدآید.

حل‌ـ فرض می‌کنیم $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ شش ضلعی

مورد نظر بوده وطول ضلع آن برابر x باشد به فرض $BC=a$ و $CA=b$ و $AB=c$ داریم:



$$\frac{BA_1}{BC}=\frac{A_1C_2}{AC}$$

$$\Longrightarrow BA_1=\frac{ax}{b}$$

به همین ترتیب داریم $CA_2=\frac{ax}{c}$ پس ضلع BC توسط نقاط A_1 و A_2 به نسبت زیر تقسیم می‌شود:

$$BA_1:A_1A_2:A_2C=\frac{ax}{b}:x:\frac{ax}{c}=\frac{ac}{b}:c:a$$

برای ترسیم از B خطی رسم می‌کنیم و بر آن طولهای:

$$BL=\frac{ac}{b} \text{ و } LK=c \text{ و } KF=a$$

را جدا می‌کنیم. از F به C وصل می‌کنیم و از K و L موازی با FC رسم می‌کنیم که از برخورد آنها با BC نقاط A_1 و A_2 بدست‌می‌آیند وازروی آنها رأسهای دیگر شش‌ضلعی‌مشخص می‌شوند.

حل مسائل منطق و ریاضی جدید

ترجمهٔ ازفرانسه

۹۶/۳۶ـ در دهکده‌ای تنهایك سلمانی وجود دارد. این سلمانی‌فقط‌وفقط ریش اشخاصی‌را می‌تراشد که خودشان ریش‌خود را نمی‌تراشند. آیا سلمانی‌ریش خودرا شخصاً می‌تراشد؟

حل ـ گزارهٔ «سلمانی فقط و فقط ریش اشخاصی‌را می‌تراشد که خودشان ریش خود را نمی‌تراشند» را با p و گزارهٔ «سلمانی ریش خودش را می‌تراشد» را با q نشان‌می‌دهیم بنابراین دو استلزام زیر باید هردوصحیح باشند:

$$(p\wedge q)\Longrightarrow\bar{q}$$

$$(p\wedge\bar{q})\Longrightarrow q$$

اما این دو استلزام فقط وقتی هردو صحیح می‌باشند که p غلط باشد (مسئلهٔ ۳۷ یکان ۹۵) یعنی سلمانی باشرایط گفته شده وجود ندارد.

۹۶/۳۷ـ مجموعهٔ تمام زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ E را با $P(E)$ وعدداصلی مجموعهٔ E را با $n(E)$ نشان می‌دهیم. به‌فرض‌آنکه $E_p=\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$ مجموعه‌ای متناهی شامل p عضو باشد؛

۱) ثابت کنید که:

$$n[P(E_{p+1})]=2n(P(E_p))$$

۲) عدد اصلی $P(E_n)$ رابرحسب n حساب کنید.

حل ـ ۱) عضوهای‌مجموعهٔ $P(E_{p+1})$ که زیرمجموعه‌های مختلف E_{p+1} می‌باشند عبارتند از:

الف ـ تمام زیر مجموعه‌های E_p که تعداد آنها همان عدد اصلی $P(E_p)$ است.

ب ـ هریك از زیر مجموعه‌های قسمت الف که یك‌عضو a_{p+1} به آنها اضافه شده است که تعداد این‌اجزاء بازبرابر می‌شود با عدد اصلی مجموعهٔ $P(E_p)$. بنابراین عدد اصلی مجموعهٔ $P(E_{p+1})$ دو برابر عدداصلی مجموعهٔ $P(E_p)$ است.

۲) در ازای مقادیر صفر، یك، ۲،...، و n برای p به ترتیب داریم:

$$nP(E_1)=2nP(E_0)$$

$$np(E_2)=2nP(E_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$nP(E_n)=2nP(E_{n-1})$$

از ضرب نظیر به نظیر طرفین‌رابطه‌های بالا در یکدیگرخواهیم داشت:

$$nP\cdot(E_n)=2^n\times nP(E_0)$$

$$E_0=\emptyset \text{ و } nP(E_0)=1\Longrightarrow nP(E_n)=2^n$$

۹۶/۳۸ـ دومجموعهٔ زیرمفروض است:

$$A=\{1,2\} \text{ و } B=\{2,3\}$$

اولا عضو های هر یك از مجموعه های زیررا تعیین کنید (مجموعهٔ تهی‌را به‌حساب نیاورید):

$$P(A),P(B),\ P(A\cap B),P(A\cup B),P(A\Delta B)$$

و از آنجا رابطه‌ای راکه از یك طرف بین $P(A\cap B)$ و $P(A)\cap P(B)$ و از طرف دیگر بین $P(A\cup B)$ و $P(A)\cup P(B)$ وجود دارد بدست‌آورید.

ثانیاً مسئله را درحالت زیرحل کنید:

$$A=\{1,2,3\} \text{ و } B=\{1,3\}$$

حل ـ اولا صرف‌نظر از مجموعهٔ تهی؛

$P(A)$ شامل سه عضو است: $\{1\}، \{2\}، \{1،2\}$

$P(B)$ شامل سه عضو است: $\{2\}، \{3\}، \{2،3\}$

چون $A\cap B=\{2\}$ بنابراین $P(A\cap B)$ فقط شامل یك عضو $\{2\}$ است و چون $A\cup B=\{1،2،3\}$ پس $P(A\cup B)$ شامل ۷ عضو به شرح زیر است:

$$\{1\}، \{2\}، \{3\}، \{1،2\}، \{1،3\}، \{2،3\}، \{1،2،3\}$$

$$A-B=\{1\} \text{ و } B-A=\{3\} \Longrightarrow A\Delta B=\{1،3\}$$

عضوهای $P(A\Delta B)$ عبارتند از:

$$\{1\}، \{3\}، \{1،3\}$$

از رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$$

$$P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$$

ثانیاً در این حالت داریم:

$$P(A)=\{1\}، \{2\}، \{3\}، \{1،2\}، \{1،3\}، \{2،3\}، \{1،2،3\}$$

$$P(B)=\{1\}، \{3\}، \{1،3\}$$

$$B\subset A \Longrightarrow P(A\cap B)=P(B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)$$

$$A-B=\{2\} \text{ و } B-A=\emptyset$$

$$A\Delta B=\{2\} \text{ و } P(A\Delta B)=\{2\}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$$

۹۶/۳۹ـ ثابت کنید که اگر حاصل‌ضرب قائم دومجموعهٔ A و B برابر بامجموعهٔ تهی باشد، اقلا یکی از دومجموعهٔ A یا B تهی است.

حل ـ باید ثابت کنیم که:

$$(1)\quad A\times B=\emptyset \Longrightarrow (A=\emptyset \text{ یا } B=\emptyset)$$

برای اثبات این گزاره می‌توانیم گزارهٔ زیر راکه هم ارز با آن است ثابت کنیم:

$$(2)\quad (A\neq\emptyset \text{ و } B\neq\emptyset) \Longrightarrow A\times B=\emptyset$$

اما داریم:

$$\begin{cases} A\neq\emptyset \\ B\neq\emptyset \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists x: x\in A \\ \exists y: y\in B \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \exists (x \text{ و } y): (x \text{ و } y)\in A\times B$$

$$\Longrightarrow A\times B\neq\emptyset$$

۹۶/۴۰ـ ثابت کنید که عمل‌ضرب قائم مجموعه‌ها نسبت به‌اشتراك آنها پخشی‌است، یعنی:

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

حل ـ هرگاه یکی از مجموعه‌های A، B و C یااینکه مجموعهٔ $B\cap C$ تهی باشد رابطه واضح است. حال با فرض اینکه هیچ یك از مجموعه‌های مزبورتهی‌نیست چنانچه $(x و y)$ عضو عمومی $A\times(B\cap C)$ و $(u،v)$ عضو عمومی $(A\times B)\cap(A\times C)$ باشد اولا داریم:

$$(x،y)\in A\times(B\cap C) \Longrightarrow x\in A \text{ و } y\in B \text{ و } y\in C$$

$$\Longrightarrow (x،y)\in A\times B \text{ و } (x،y)\in A\times C$$

$$\Longrightarrow (x،y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$A\times(B\cap C)\subset(A\times B)\cap(A\times C) \qquad (1)$$

ثانیاً خواهیم داشت:

$$(u،v)\in A\times(B\cap C)$$

$$(A\times B)\cap(A\times C)\subset A\times(B\cap C) \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

تبصره ـ به ترتیب مشابه ثابت می‌شود که:

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

پاسخ تستهای ریاضی

۴۱ـد	۴۲ـد	۴۳ـالف	۴۴ـد	۴۵ـج
۴۶ـب	۴۷ـالف	۴۸ـج	۴۹ـد	۵۰ـب
۵۱ـد	۵۲ـج	۵۳ـالف	۵۴ـب	۵۵ـج
۵۶ـد	۵۷ـب	۵۸ـب	۵۹ـد	۶۰ـالف
۶۱ـب	۶۲ـد			

توضیحات مربوط به تستها

۴۱ـ می‌توانیم بنویسیم:

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1$$

$$f(x)=x^2+2x+1$$

۴۳ـ به فرض $a=2$ و $b=\sqrt{5}$ عبارت مخرج به صورت a^2+ab+b^2 است و از ضرب صورت و مخرج در $a=b=2-\sqrt{5}$ عبارت مخرج می‌شود: $8-5=3$

۴۶ـ در هرچهار ضلعی محدب زاویهٔ بین نیمسازهای دوزاویهٔ مقابل برابر است با نصف‌تفاضل دو زاویهٔ دیگر. اگر نیمسازهای دوزاویهٔ A و C از چهار ضلعی محدب $ABCD$

را در نظر بگیریم، چون از رأس A و در خارج چهار ضلعی خطوطی موازی با ضلعهای CB و CD و نیمساز زاویهٔ C رسم کنیم کافی است که از مجموع اندازه‌های زاویه‌های حول نقطهٔ A استفاده کنیم.

۴۷ـ اگر از O مرکز دایره عمودی بر AB اخراج کنیم تا نیمدایره را در C قطع کند از تساوی دو مثلث OMH و OCP نتیجه می‌شود که زاویهٔ P قائمه است و مکان P دایرهٔ به قطر OC است که بر AB مماس است.

۴۹ـ مکان نقطهٔ A دوخط موازی با BC است بقسمی که فاصلهٔ آنها تا BC برابراست با ۶ زیرا $BC=۵$ و از اینکه مساحت مثلث ABC برابر ۱۵ است طول ارتفاع $AH=۶$ می‌شود.

۵۰ـ هردو مختصات (۱و۰) و(۰و۱) فقط در تابع قسمت ب صدق می‌کنند.

۵۲ـ مقدار $tg\,A=\frac{۱۵}{۸}$ بدست می‌آید و :

$$tg(B+C)=\frac{tg\,B+tg\,C}{۱-tg\,B\,tg\,C}=-\frac{۱۵}{۸}$$

۵۳ـ در هرچهار ضلعی چپ اولا خطوط واصل بین اوساط ضلعهای مقابل و دو قطر در یك نقطهٔ M متقاربند. ثانیاً صفحات عمود منصف ضلعها وقطرها دریك نقطهٔ O متقاربند صفحاتی که بروسط یك ضلع یا یك قطر می‌گذرند و برضلع مقابل یا قطر دیگر عمودند با صفحات عمود منصف ضلعها و قطرها موازیند و در نتیجهٔ در یك نقطهٔ I متقاربند که I قرینهٔ O نسبت به M است.

۵۴ـ مکان هندسی نقاطی از فضا که تفاضل مربعات فواصل آنها از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت باشد صفحه‌ای است عمود بر AB وفصل مشترك این صفحه با صفحهٔ مفروض یك خط است که مکان مطلوب می‌باشد.

۵۷ـ تابع مفروض به صورت زیر ساده می‌شود:

$$y=\sin x+\sqrt{۲}\frac{|\sin x|}{\sin x}$$

$$-\frac{\pi}{۲}\leq x<۰\Longrightarrow y=\sin x-\sqrt{۲}$$

$$۰<x\leq\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow y=\sin x+\sqrt{۲}$$

اگر x منفی باشد وبه سمت صفر میل کند تابع به سمت $-\sqrt{۲}$ میل می‌کند و اگر x مثبت باشد و به سمت صفر میل کند تابع به سمت $+\sqrt{۲}$ میل می‌کند. بنابراین تابع درازای $x=۰$ پیوسته نیست.

۵۸ـ خواهیم داشت:

$$y''=۲(۱+tg^۲x)(۱+x\,tg\,x)=$$
$$۲(۱+tg^۲x)(۱+y)=۰$$

$$y''=۰\Longleftrightarrow y=-۱$$

۵۹ـ هرگاه انتهای کمان x در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد $-۱<\cos x<۰$ است پس $[\cos x]=-۱$ و داریم:

$$\sin x+\sqrt{۳}\cos x=۲$$

۶۰ـ اگر a مضرب n باشد غیر ازآن هیچیك ازعددهای دیگر رشته مضرب n نیستند زیرا باقیماندهٔ تقسیم دومین عدد بر n برابر با یك واز سومین عدد برابر با ۲ وبالاخره ازآخرین عدد برابر با $n-۱$ است. هرگاه a مضرب n نباشد باقیماندهٔ تقسیم آن بر n برابر با r است که دراین صورت هرگاه $n-r$ واحد به a اضافه کنیم عدد حاصل مضرب n است و چون $n-r<n$ است پس عدد حاصل یکی از عددهای رشته است و بعد از آن اولی عددی که مضرب n است خارج از رشته واقع است.

۶۱ـ مجموع ارقام عدد برابر است با ۳^n که به ازای همهٔ مقادیر عدد طبیعی n مضرب ۳ است.

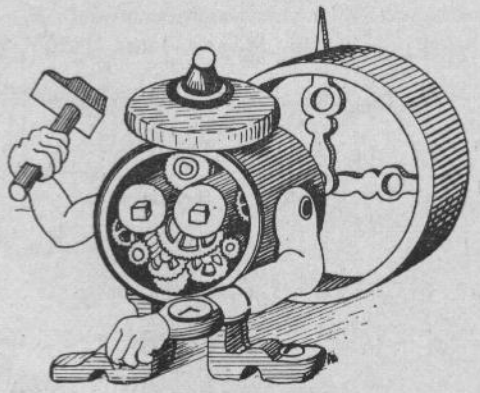
۶۲ـ اولا مکان I پاره خط OC است زیرا:

$$\overrightarrow{OI}=\frac{۱}{۲}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=\frac{۱}{۲}\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{OC}$$

ثانیاً مکان P پاره خطی است که در تجانس به مرکز D وبه نسبت ۲ مجانس نقطهٔ I است زیرا $\overline{DP}=۲\overline{DI}$

یك سرگرمی ریاضی

در مدت بیست‌وچهارساعت ابتدا ازظهر تاظهر بعدازآن دوعقربهٔ ساعت چندبار بایکدیگر زاویهٔ قائمه می‌سازند ؟



مسائل برای حل

[مسائلی که زیر عنوان «ترجمهٔ از روسی» مشخص شده‌اند توسط آقای **مهندس فتح‌الله زرگری** ترجمه گردیده‌اند.]

برای دانش‌آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

۹۷/۱ـ از محمد معینی

اولاـ ثابت کنید که برای هرسه عدد مثبت a و b و c داریم:

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant 9$$

ومعلوم کنید که تساوی درچه حالتی است.

ثانیاـ مقادیر مثبت x و y و z را از دستگاه زیر بدست آورید :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ 9xyz=xy+yz+zx \end{cases}$$

۹۷/۲ـ ترجمهٔ ازروسی

نقطهٔ C رابرپاره خط AB انتخاب می‌کنیم . دو دایرهٔ متساوی به‌شعاع R رسم می‌کنیم که اولی بر A و C و دومی بر B و C بگذرد. این دو دایره غیرازC درنقطهٔ دیگر D متلاقی می‌شوند. هرگاه R تغییر کند مکان نقطهٔ D چیست؟

برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

۹۷/۳ـ از محمد معینی

اگر a و b و c عددهای مثبت باشند ثابت کنید که :

$$\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant a+b+c$$

۹۷/۴ـ ترجمهٔ ازروسی

بزرگترین عدد صحیح موجود درعدد حقیقی x را با [x] نشان‌می‌دهیم. مثلا $[4/75]=4$ و $[-\sqrt{2}]=-2$ و $[\pi]=3$

بااین قرارداد ، معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$2x^2+[x]=x^4$$

۹۷/۵ـ ترجمهٔ ازروسی

k و n عددهای طبیعی می‌باشند . جملهٔ اول یك تصاعد حسابی a_1 معلوم‌است. قدرنسبت این تصاعد را معین کنید برای آنکه نسبت مجموع n جملهٔ اول‌آن به‌مجموع kn جملهٔ بعدی مقدارثابت مستقل ازn باشد.

۹۷/۶ـ ترجمهٔ ازروسی

ثابت کنید که‌عددهای $a_1, a_2, \ldots, a_n$ کسر به‌ازای $n\geqslant 3$ در رابطهٔ زیر صدق کنند جمله های متوالی یك تصاعد حسابی می‌باشند :

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

۹۷/۷ـ ترجمهٔ ازروسی

سه خط متوازی X و Y و Z مفروض است. خط معین Δ با X در A با Y در B متلاقی‌است. نقطهٔ متغیر M از Z را به A و B وصل می‌کنیم که خطوط حاصل به‌ترتیب با Y در B′ و با X در A′ متلاقی‌شوند. هرگاه M خط Z را بپیماید، ثابت کنید که خط A′B′ ازنقطهٔ ثابتی می‌گذرد .

۹۷/۸ـ ترجمهٔ ازفرانسه

اندازه‌های ضلعهای یك‌چهارضلعی محدب و اندازهٔ زاویهٔ بین امتدادهای دوضلع مقابل‌آن داده شده‌است. این‌چهار ضلعی را رسم کنید .

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۹۷/۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

مشتق تابع زیررا بدست‌آورید وساده کنید :

$$y=(x+\sqrt{1+x^2})^m\times(x-\sqrt{1+x^2})^p$$

۹۷/۱۰ـ از جوادفیض دانشجوی دانشکدهٔ‌فنی‌تبریز

هرگاه داشته باشیم :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b \end{cases}$$

مقدار S ازرابطهٔ زیررا به‌ساده‌ترین صورت بدست آورید:

$$S = a\sin\frac{x+y}{2} + b\cos\frac{x+y}{2}$$

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۹۷/۱۱ـ ترجمهٔ از فرانسه

ثابت کنید که می‌توان تابع

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

رابه‌صورت $P(x)+I(x)$ به‌مجموع دوتابع تبدیل کرد بقسمی که $P(x)$ تابع زوج و $I(x)$ تابع فرد باشد. معلوم کنید که آیا دو تابع $f(x)$ و $P(x)+I(x)$ دقیقاً در یك فاصله معین می‌باشند؟

۹۷/۱۲ـ از **محمد معینی**

به‌فرض آنکه داشته باشیم :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \quad \text{و} \quad y = \underbrace{ff\ldots f}_{2k+1\text{ مرتبه}}(tg\varphi)$$

و به فرض آنکه مشتق تابع y با y' ومشتق تابع y' با y'' نشان داده‌شود ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$5y + y'' = 3y^5$$

۹۷/۱۳ـ فرستنده : **محمد معینی**

هر گاه داشته‌باشیم:

$$tg\alpha = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \quad \text{و} \quad tg\beta = \sqrt{\frac{y-z}{y+z}} \quad \text{و}$$

$$tg\gamma = \sqrt{\frac{z-x}{z+x}}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma = 1$$

۹۷/۱۴ـ فرستنده: **محمد معینی**

نوع مثلثی‌را تعیین کنید که در آن‌رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\frac{\cot g A}{tg B + tg C - tg A} = \frac{\cot g B}{tg C + tg A - tg B} = \frac{\cot g C}{tg A + tg B - tg C}$$

۹۷/۱۵ـ ترجمهٔ **داوید ریحان**

منشور کامل $ABCDA'B'C'D'$ رادرنظر می گیریم بقسمی که $ABCD$ یك‌چهار ضلعی محدب است. برضلع AD نقطهٔ E وبر امتداد ضلع $C'D'$ نقطهٔ F رابقسمی انتخاب می کنیم که :

$$\frac{DE}{DA} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{FC'}{C'D'} = \frac{1}{2}$$

باشد. ثابت کنید که خطوط $A'C$ و EF متقاطعند ونسبت‌پاره خطهایی‌را که روی آنها جدامی‌شود بدست آورید.

۹۷/۱۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

چهار وجهی‌را مشخص کنید که طولهای پاره‌خطهای‌واصل بین اوساط ضلعهای مقابل‌آن واندازه‌های زاویه‌های بین دو به دو ازاین پاره‌خطها معلوم‌است.

برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۹۷/۱۷ـ دودایره به‌معادله‌های زیر مفروضند:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2my + m^2 - 5 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4mx + 2y + 4m^2 - 3 = 0$$

مقدار m راپیدا کنید که این دودایره متخارج باشند.

۹۷/۱۸ـ ترجمهٔ ازروسی

مقادیرماکسیمم ومی‌نیمم تابع زیررا پیدا کنید:

$$y = 2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x - \sin^2 x + 5$$

برای دانش‌آموزان کلاس ششم‌ریاضی

۹۷/۱۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

تابع زیررا درنظر می گیریم:

$$y = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$$

اولا: حدود تغییرات تابع‌را تعیین کنید. آیاتابع درازای $x=0$ معین است یانه؟

ثانیاً: منحنی‌نمایش هندسی‌تابع رارسم کنید ومعلوم کنید

که مبدأ مختصات چه‌نوع نقطه‌ای از نمایش هندسی است.

۹۷/۲۰ـ ترجمهٔ ازفرانسه

اولا: جدول تغییرات ومنحنی C نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید:

$$y=|x|+\sqrt{4+x^2}$$

ثانیاً: نقطهٔ M ازمحور y'y راپیدا کنید که ازآن بتوان دوممـاس برمنحنی C رسم کرد بقسمی که زاویهٔ بین دوممـاس مقدار معلوم α باشد. به ازای مقـادیر مختلف α در وجود نقطهٔ M بحث کنید. به‌ازای $\alpha=60^\circ$ نقطهٔ M را مشخص کنید.

۹۷/۲۱ـ ترجمهٔ ازروسی

ثابت کنید که اگرمجموع:

$$a_1\cos(\alpha_1+x)+a_2\cos(\alpha_2+x)+\dots+a_n\cos(\alpha_n+x)$$

به‌ازای $x=0$ وبه‌ازای مقدار دیگر $x=x_1\neq k\pi$ به سمت صفر میل کند دراین صورت به‌ازای همهٔ مقادیر x برابر با صفر خواهد بود.

۹۷/۲۲ـ ترجمهٔ ازروسی

روی‌ضلعهای‌مثلث ABC ودرخارج آن مربعهای ABEF و BCPQ و CAMN را می‌سازیم. بامعلوم بودن مقادیر $BC=a$ و $AC=b$ ماکسیمم‌مساحت شش‌ضلعی EFMNPQ را بدست‌آورید.

۹۷/۲۳ـ ترجمهٔ از روسی

عدد پنج رقمی‌پیدا کنید که رقم دهگان آن صفر باشد وبر عددهای ۱۷و۱۹و۲۳ بخش‌پذیر باشد.

۹۷/۲۴ـ ترجمهٔ ازروسی

به‌ازای چه مقادیر ازعدد طبیعی n عدد 5^n-2^n بر ۹ بخش پذیر است؟

۹۷/۲۵ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دریك صفحه دوخط D و D' درنقطهٔ O متقاربند ودونقطهٔ A و B چنان واقعند که هیچکدام ازآنها برهیچیك ازدوخط واقع نیست ونیزخط AB باخط D موازی نیست. خط متغیر Δ بر A می‌گذرد و D را درM و D' رادر M' قطع می‌کند. خطی که ازM موازی‌با AB رسم شود BM' رادر P تلاقی می‌کند. مکان هندسی‌نقطهٔ P رامشخص کنید.

۹۷/۲۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دایرهٔ بمرکز O ودوقطر عمود برهم A'A و B'B از آن مفروض‌است. از نقطهٔ C وسط OA عمـودی بر آن اخراج می‌کنیم ونیم خط Ox راداخل قطاع AOB درنظر می‌گیریم که‌عمود مزبوررا درI قطع کند. دایرهٔ بمرکز I رارسم‌می‌کنیم که بر C بگذرد. هرگاه S و S' مرکزهای تجانسهای مستقیم ومعکوس دو دایرهٔ O و I باشد، وقتی که Ox تغییر می‌کند مکان S و S' راپیدا کنید.

مسائل گوناگون

مسائل مربوط به تاکسی فاصله

[موضوع سرمقالهٔ یکان شمارهٔ۹۶]

تعریف ۱ـ درصفحهٔ محورهای مختصات تاکسی‌فاصلهٔ دونقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ را طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$t(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

تعریف ۲ـ تاکسی فاصلهٔ یك نقطهٔ A از یك خط Δ کوتاه‌ترین تاکسی‌فاصلهٔ A ازنقاط خط Δ است، بقسمی که‌اگر M نقطهٔ غیرمشخصی‌از خط Δ باشد:

$$t(A,\Delta)=\min\left\{t(A,M)\right\}$$

۹۷/۲۷ـ مکان هندسی نقاطی از صفحه را پیداکنید و رسم کنید که‌ازدونقطهٔ مفروض $A(3,-2)$ و $B(-3,2)$ دارای تاکسی‌فاصله‌های برابر باشند.

۹۷/۲۸ـ مسئلهٔ قبل‌را برای دونقطهٔ $A(-2,1)$ و $B(5,4)$ حل کنید.

۹۷/۲۹ـ مکان هندسی نقاطی ازصفحه را پیداکنید که تاکسی‌فاصلهٔ آنها ازنقطهٔ ثابت $C(x_1,y_1)$ مقدار ثابت R باشد.

مثال‌عددی: $C(0,0)$ و $R=4$

۹۷/۳۰ـ مکان هندسی‌نقاطی از صفحه را پیداکنید که مجموع تاکسی فاصله‌های‌آنها ازدو نقطهٔ ثابت $F(2,0)$ و $F'(-2,0)$ مقدارثابت ۵ باشد.

۹۷/۳۱ـ مکان هندسی نقاطی‌از صفحه را پیداکنید که تفاضل تاکسی فاصله‌های‌آنها از دو نقطهٔ ثابت $F(0,1)$ و $F'(0,-1)$ مقدارثابت ۲ باشد.

۹۷/۳۲ـ درصفحهٔ محور های مختصات، تاکسی فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ را از خط Δ بمعادلهٔ $ax+by+c=0$ بدست‌آورید.

مثالهای عددی :

۱) $\Delta: x-2y+3=0$ و $A(3,4)$:

۲) $\Delta: 2x-y+3=0$ و $A(3,4)$:

۳) $\Delta: x-y+3=0$ و $A(3,4)$:

۹۷/۳۳ـ دریك صفحه‌مکان هندسی نقاطی راتعیین کنید که ازدوخط مفروض‌واقع درآن صفحه دارای تاکسی فاصله‌های برابر باشند .

۹۷/۳۴ـ مکان هندسی‌نقاطی ازصفحه راپیدا کنید که‌از نقطهٔ مفروض A وازخط‌مفروض Δ واقع‌درآن‌صفحه دارای‌تاکسی فاصله‌های برابر باشند . مثال عددی:

$A(4,0)$ و $\Delta: y=0$

مسائلی از منطق و ریاضی جدید

ترجمهٔ ازفرانسه

۹۷/۳۵ـ مجموعهٔ مرجع R را مجموعهٔ دانش‌آموزان یك دبیرستان‌اختیارمی کنیم. زیرمجموعه‌هایی از R راکه‌عضو-های آنها درانجمنهای ورزش، موسیقی وکتابخانه شرکت دارند به‌ترتیب باA وB وC نشان می‌دهیم. باعلم‌به‌آنکه هیچیك‌ازاین زیرمجموعه‌ها تهی‌نباشد:

اولا: هریك اززیرمجموعه‌های زیرچه دانش‌آموزانی از دبیرستان رامشخص می کند:

۱) $A\cap C$ و $B\cap C$ و $A\cap B$

۲) $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ و $A\cap B\cap\overline{C}$ و $A\cap B\cap C$

$\overline{A\cup B\cup C}$

ثانیاً: فرض می کنیم که $A\cap B\neq\emptyset$ و $A\subset B\subset C$ باشد ، نمودار ون مربوط به‌مجموعهٔ R وزیر مجموعه‌های آن را رسم کنید وروی آن هریك ازمجموعه‌های قسمت اولارا مشخص کنید.

ثالثاً: بافرض آنکه داشته‌باشیم:

$nA=600$ و $nB=370$ و $nC=750$ و

$n(A\cap B)=100$ و $n(A\cap C)=300$ و $n(B\cap C)=250$ و

$n(\overline{A\cup B\cup C})=30$

معلوم کنید :

الف‌ـ تعداد دانش‌آموزان دبیرستان را .

ب ـ تعداد دانش‌آموزانی ازدبیرستان راکه دردوانجمن وفقط در دو انجمن عضویت دارند .

ج‌ـ تعداد دانش‌آموزانی که‌فقط دریك‌انجمن عضوهستند.

۹۷/۳۶ـ درنتیجهٔ آمارگیری از وسایل نقلیهٔ ساکنان یك شهرمعلوم شدکه ازهر ۱۰۰ نفر: ۸ نفر اتومبیل ، ۶ نفر موتور سیکلت، ۵۵ نفردوچرخه، ۳ نفراتومبیل وموتورسیکلت ۴نفرموتور سیکلت و دوچرخه ، ۶ نفراتومبیل و دوچرخه و بالاخره ۲ نفرهرسه وسیلهٔ مزبوررا دارا می‌باشند . معلوم کنید که ازاین ۱۰۰ نفر:

الف ـ چند نفر صاحب اتـومبیل می‌باشند بدون آنکه موتورسیکلت یادوچرخه داشته‌باشند.

ب‌ـ چند نفرهیچیك از سه وسیلهٔ مزبوررا ندارند .

۹۷/۳۷ـ یك تاس‌نرد شش وجهـی‌راکه روی وجوه‌آن عددهـای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ حك شده است سه دفعـهٔ پشت سرهم می‌اندازیم وعددهای حاصل‌را به‌صورت سه‌تایی‌مرتب (x و y و z) یادداشت می کنیم ؛

الف‌ـ این سه تایی به‌چـه مجموعهٔ حاصل ضربی مستقیم (دکارتی) تعلق دارد؟

ب‌ـ این‌مجموعهٔ حاصل‌ضربی چند عضودارد؟

ج‌ـ ازبین عضوهای این‌مجموعهٔ حاصل‌ضربی برای چند عددآنها مقادیر x و y و z متفاوتند؟

۹۷/۳۸ـ مجموعهٔ زیررا درنظر می گیریم:

$E=\{x \mid x\in N$ و $1\leq x\leq 9\}$

دراین مجموعه دوتناظر f و g رااز E درE به‌ترتیب زیر درنظر می گیریم:

$$\forall x\in E:\begin{cases} x\to f(x)=x & \text{اگر } x \text{ فرد باشد :} \\ x\to f(x)=x-1 & \text{اگر } x \text{ زوج باشد:}\end{cases}$$

$$\forall x\in E:\begin{cases} x\to g(x)=x & \text{اگر } x \text{ زوج باشد:} \\ x\to g(x)=x-1 & \text{اگر } x \text{ فردباشد:}\end{cases}$$

الف‌ـ عضوهای هریك ازدوتناظررامشخص کنیدونوع‌هر-یك ازدوتناظررا نیزمعلوم کنید (تابع است یاگسترش) .

ب‌ـ نمودارهای f و g را رسم کنید.

۹۷/۳۹ـ مجموعهٔ زیررا درنظر می گیریم .

$E=\{x \mid x\in N$ و $0\leq x\leq 5\}$

دراین مجموعه تناظراز E درE رابه‌شرح زیر تعریف می کنیم:

$x<2\to f(x)=3$

$x=۲\rightarrow f(x)=۱$

$x>۲\rightarrow f(x)=۵$

الف- این تناظر گسترش است یا تابع؟ دامنه و برد آن را مشخص کنید.

ب- نمودار دکارتی f را رسم کنید.

ج- تناظر عکس f یعنی $f^{-۱}$ را معین کنید.

۹۷/۴۰- مجموعهٔ $E=\{۰،۱،۲،...،۹۹\}$ یعنی مجموعهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از صد و گسترش f از E در E را به شرح زیر در نظر می گیریم:

$x\rightarrow f(x)=$ مجموع رقمهای x

دو معادلهٔ زیر را در مجموعهٔ E حل کنید:

(۱) $f(x)=۱۲$ ، (۲) $f(x)=۱۹$

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۹۷/۴۱- عبارت :

$$\frac{(x-۲)(x+۲)^{۲}(x^{۲}+۶x+۹)}{x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱}$$

به ازای کدام مقدار از x تغییر علامت نمی‌دهد:

الف- ۲ و ۳ ب- ۲ و ۳ و ۱

ج- ۲ و ۳ د- ۲ و ۳ و ۱

۹۷/۴۲- نامساویهای زیر را در نظر می گیریم :

$$(۱) : \frac{(۱-x^{۲})(x+۵)}{(x^{۲}+x)(x^{۲}-۲۵)}>۰$$

$(I) : x>۱$ ، $(II) : ۱<x<۵$ ،

$III : ۱\leq x<۵$ ، $IV : ۱\leq x\leq ۵$

کدامیك از نامساویهای I ، II ، III و IV نتیجه‌ای از نامساوی (۱) است:

الف- III و IV ب- فقط I

ج- II و III د- فقط III

۹۷/۴۳- اگر p و q دو عدد طبیعی مخالف صفر باشند و داشته باشیم:

$$(۱) : \frac{p}{q}<\sqrt{۳} \quad (۲) : \frac{p+۳q}{p+q}>\sqrt{۳}$$

الف- دو نامساوی (۱) و (۲) هم‌ارزند.

ب- (۱) از (۲) نتیجه می‌شود اما (۲) نتیجهٔ (۱) نیست.

ج- (۱) از (۲) نتیجه نمی‌شود اما (۲) نتیجهٔ (۱) است.

د- هیچیك از نامساویهای (۱) و (۲) نتیجهٔ دیگری نیست.

۹۷/۴۴- مجموع همهٔ عددهای سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۳ علاوه بر ۳ مضربی است از:

الف- ۹ و ۱۰ و ۷ ب- ۹ و ۲۰

ج- ۹ و ۵۰ د- ۲ و ۹ و ۱۲۵

۹۷/۴۵- در یك تصاعد حسابی از عددهای صحیح، مجموع جمله‌های اول و آخر عددی فرد است. تعداد جمله‌های این تصاعد عددی است :

الف- زوج ب- فرد

ج- زوج یا فرد د- اول و فرد

۹۷/۴۶- روی مماسی که در نقطهٔ A بر دایرهٔ به مرکز O رسم شده است دو نقطهٔ B و C را انتخاب می‌کنیم و از آنها مماس‌های BD و CE را بر دایره رسم می‌کنیم. دو زاویهٔ BOC و DAE:

الف- متساویند ب- مکملند

ج- یا متساویند یا مکملند د- نه متساویند و نه مکملند

۹۷/۴۷- در مثلث ABC ضلع AB از ضلع AC بزرگتر است. روی ضلع AB طول $AM=AC$ را جدا می‌کنیم و BC را رسم می‌کنیم، نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C را نیز رسم می‌کنیم که در I متلاقی می‌شوند. اگر α اندازهٔ زاویهٔ BMC و β اندازهٔ زاویهٔ BIC باشد:

الف- $\alpha>\beta$ ب- $\alpha=\beta$

ج- $\alpha<\beta$ د- $\alpha\neq\beta$

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۹۷/۴۸- تابع زیر را با فرض آنکه n عدد صحیح است

درنظر می گیریم:

$$y=\frac{1}{(x-a)^{2n+1}}$$

هـرگاه نمایش هندسی تابع فقط دربخشهای دوم و سوم از محورهای مختصات واقع باشد:

الف- $a=0$ ب- $a>0$

ج- $a<0$ د- $a\neq 0$

۹۷/۴۹- برای آنکه بتوان درامتداد معین حداکثردو مماس برمنحنی نمایش هندسی تابع $y=ax^n$ رسم کرد، عدد طبیعی $n>1$ باید:

الف- فردباشد ب- زوج باشد.

ج- مضرب ۲ باشد د- بزرگتر از ۲ باشد

۹۷/۵۰- خط D بمعادلهٔ $y=x-a$ ومنحنی C به معادلهٔ $y=(x-a)^2$ مفروض است،

الف- D به‌ازای همهٔ مقادیر a برC مماس است

ب- D به‌ازای یك مقدار a برC مماس است

ج- D درنقطهٔ به طول $x=a+\frac{1}{2}$ برC مماس‌است.

د- D به‌ازای هیچ مقدار از a برC مماس نیست

۹۷/۵۱- هرگاه در مثلث ABC داشته باشیم: $tgB=2cotgC$ دراین صورت خواهیم داشت:

الف- $tgA=tgB-tgC$

ب- $tgA=tgB+tgC$

ج- $tgA=tgC-tgB$

د- $A=B=C$

۹۷/۵۲- سه‌تساوی مثلثاتی زیرداده شده‌است:

I : $\sqrt{2}\cos x\cos y=1$

II: $tg^2y=\cos 2x$

III : $tg^2x=\cos 2y$

کدامیك ازتساویهای II و III نتیجه‌ای ازتساوی I است:

الف- فقط I ب- فقط II

ج- هردو د- هیچکدام

۹۷/۵۳- مجموع مربعات فواصل یك نقطه ازچهار رأس یك چهار وجهی وقتی می‌نیمم است که آن نقطه واقع باشد بر:

الف- مرکز کرهٔ محیطی چهاروجهی

ب- مرکز کرهٔ محاطی چهار وجهی

ج- وسط پاره خط واصل بین اوساط دویال مقابل

د- وسط عمود مشترك دویال مقابل

۹۷/۵۴- خط D ونقطهٔ A درخارج آن مفروض است. خط متغیر Δ بر A می گذرد و MN عمود مشترك دوخط D و Δ است که M بر Δ واقع است. مکان نقطهٔ M عبارتست از:

الف- یك خط موازی D

ب- یك صفحهٔ عمود بر D

ج- یك صفحهٔ موازی با D

د- سطح استوانی به محور D

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۹۷/۵۵- مکان هندسی نقاطی ازمنحنی به‌معادلهٔ:

$$y^2=x^2+2mx+m \quad , \quad m\neq 0 \text{ و } m\neq 1$$

که مماس بر منحنی در آن نقاط با محور $x'x$ موازی است عبارتست از:

الف - یك هذلولی ب- یك سهمی

ج - یك بیضی د- یك دایره

۹۷/۵۶- درنقطه‌ای ازمنحنی نمایش تابع:

$$y=x+\sqrt{x^2+4}$$

که عرض آن k برابر طول آن است خطی قائم بر منحنی رسم می کنیم. ضریب زاویه‌ای این قائم برابراست با.

الف- $\frac{k-1}{k}$ ب- $\frac{1-k}{k}$

ج- $\frac{k}{1-k}$ د- $\frac{k}{k-1}$

۹۷/۵۷- تابع y برحسب x طبق رابطهٔ زیرداده شده است:

$$\cos y=\sin^2 x \quad , \quad 0\leqslant y\leqslant \pi \text{ و } 0\leqslant x\leqslant \pi$$

مشتق تابع y درازای $x=\frac{\pi}{2}$ برابر است با:

الف - $\pm\sqrt{2}$ ب - $+\sqrt{2}$

ج - $-\sqrt{2}$ د- نامعین است

۹۷/۵۸- فرض می کنیم که:

$$y=2+cotgx-cotg\frac{x}{4} \quad , \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

کدامیك از رابطه های زیر به ازای همهٔ مقادیر داده شدهٔ x صحیح است:

الف- $y=0$ ب- $y>0$ ج- $y<0$ د- $y=1$

۹۷/۵۹- اگر n عدد طبیعی باشد، دوعدد:

$$A=n^3+n^2+1 \quad \text{و} \quad B=n^2+2n$$

نسبت بهم اولند وقتی که:

الف- n مضرب ۳ نباشد

ب- n مضرب ۳ باشد

ج- باقیماندهٔ تقسیم n بر ۳ برابر بایك باشد

د- n هرچه باشد.

۹۷/۶۰ - کسری تحویل ناپذیر مولد کسر اعشاری متناوبی است که دورهٔ گردش آن مضرب ۹ است. مخرج کسر مزبور:

الف- مضرب ۹ است

ب- ازرقمهای ۹ تشکیل شده است

ج- توانی از ۹ است

د- نسبت به ۹ اول است.

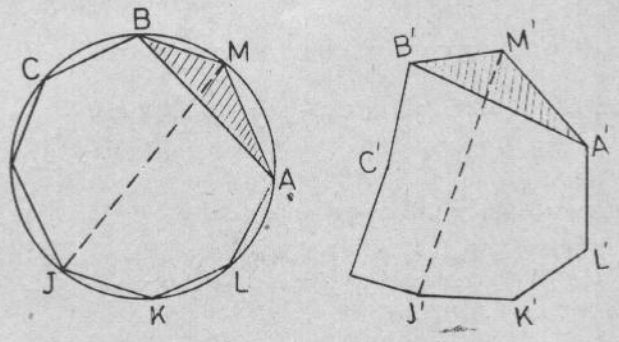
۹۷/۶۱- در یك صفحه دو نقطهٔ ثابت O و O' و نقطهٔ متغیر M داده شده است . دو عدد حقیقی k و k' را در نظر می گیریم ومجانسهای نقطهٔ M را در تجانسهای (k و O) و (k' و O') به‌ترتیب P و P' می‌نامیم. به‌فرض $k\neq k'$ نقطهٔ P' مبدل نقطهٔ P است دریك:

الف- تجانس ب- انعکاس

ج- انتقال د- دوران

مسئلهٔ هم محیطها (دنباله ازصفحهٔ ۱۸۱)

۳ - دروهلهٔ اول در ۱ ، نتیجه‌ای بسیار خصوصی ازقضیهٔ هم محیطها را محقق ساختیم وسپس در ۲ ، نتیجه‌ای بسیار کلی را تحقیق نمودیم . سرعت حصول می‌تواند ما را در رسیدن به نتیجهٔ کلی که در بخش ۲-V پیش‌بینی کردیم ، یاری کند .



(j)

دوچندضلعی $ABC\ldots KL$ و $A'B'C'\ldots K'L'$ (شکل j) را باهم مقایسه می کنیم . اضلاع متناظر متساویند:

$$AB=A'B',\ BC=B'C',\ \ldots,\ KL=K'L',\ LA=L'A'$$

ولی بعضی از زوایا متفاوتند؛ $ABC\ldots KC$ در دایره محاط است در صورتی که $A'B'C'\ldots K'L'$ چنین نیست .

رأس J از چند ضلعی $ABC\ldots KL$ را به مرکز دایرهٔ محیطی وصل می کنیم وقطر JM را رسم می‌نمائیم. اگر برحسب اتفاق نقطهٔ M بریك رأس از $ABC\ldots KL$ منطبق شود، کوشش ما بسیار سهل خواهد شد (مستقیماً می‌توانیم قضیهٔ بدست آمده در ۲ را مورداستفاده قرار دهیم). اگر چنین نباشد، M روی دایرهٔ محیطی و بین دو رأس متوالی مثلا A و B قرار می گیرد. نقاط M و A ، M و B' را بهم وصل می کنیم ومثلث AMB را در نظر می گیریم (در شکل j هاشور خورده است) و روی ضلع $A'B'$ مثلث $A'M'B'$ را (که بازهم هاشورخورده است) مساوی با مثلث AMB می‌سازیم. بالاخره نقاط J' و M' را بهم وصل می کنیم.

چندضلعی $AMBC\ldots KL$ بوسیلهٔ خط JM به دوقسمت تقسیم شده است (شکل j)؛ چندضلعی دیگر نیز توسط $J'M'$ به‌دوجزء تقسیم شده است . برای این دوجزء قضیهٔ اثبات‌شدهٔ در ۲ را بکار می بندیم. مساحت چندضلعی $MBC\ldots J$ محاط درنیمدایره کمتر ازمساحت چندضلعی $M'B'C'\ldots J'$ نیست ؛ اضلاع متناظر باهم مساویند ، بجزقطر MJ از نیمدایره که می‌تواند با $M'J'$ تفاوت داشته باشد . بهمین دلیل مساحت $MALK\ldots J$ کمتر از مساحت $M'A'L'K'\ldots J'$ نیست. پس از جمع داریم:

مساحت $AMBC\ldots KL$ > مساحت $A'M'B'C'\ldots K'L'$

ولی مثلثهای AMB و $A'M'B'$ باهم مساویند ودر نتیجه سطحشان نیز باهم مساوی است . پس از تفریق داریم:

مساحت $ABC\ldots KL$ > مساحت $A'B'C'\ldots K'L'$

سطح یك چندضلعی محاط در دایره بیشتر ازسطح سایر چندضلعیهایی است که اضلاعشان بااولی برابر است .

دقیقاً همان نتیجهٔ حاصل در بخش ۲-V را بدست آوردیم ولی از قضیهٔ هم‌محیطها در اینجا استفاده نکردیم.

(در اولین نامساوی ، بین مساحات چند ضلعیهای $AMBC\ldots KL$ و $A'M'B'C'\ldots K'L'$ از علامت < استفاده کردیم ، حال آنکه خوانندهٔ نکته‌سنج منتظر علامت ≤ بوده است. این نکتهٔ دلچسب را می آزمائیم. می گوئیم که چند ضلعی $A'M'B'C'\ldots K'L'$ دریك دایره محاط نیست؛ اگر چنین بود ، $A'B'C'\ldots K'L'$ نیز محاطی بود و این خلاف فرض است. می گوئیم که چند ضلعیهای $M'B'C'\ldots J'$ و $M'A'L'K'\ldots J'$ هر دو در نیمدایره‌ای به‌قطر $M'J'$ محاط نیستند؛ اگرچنین بود، چند ضلعی کامل $A'M'B'C'\ldots K'L'$ در یك دایره محاط بود و این خلاف فرض است. به همین دلیل به جای دومرتبه استفاده‌ازکلمات «غیر کمتر» به منظور رسیدن به‌نامساوی موردبحث، می‌توانیم لااقل یك‌مرتبه ازکلمهٔ «بیشتر» استفاده کنیم.)

دنباله‌دارد

مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث دوم، سال تحصیلی ۵۲-۱۳۵۱ (اسفند ۱۳۵۱)

کلاس چهارم ریاضی

جبر

دبیرستان بهشت آئین اصفهان

دبیر: قوام نحوی

ثابت کنید اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد معادلهٔ زیر دارای دو ریشهٔ حقیقی و متحدالعلامه است:

$$a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$$

دبیرستان پانزده بهمن بهشهر

دبیر: بزرگ نسب ـ فرستنده: غلامعلی شیرازی رستمی

دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5\\ x+y=35\end{cases}$$

دبیرستان پهلوی ملایر

دبیر: پوربابك

اگر $f(x)=2^x+\frac{1}{2^x}$ باشد ثابت کنید:

$$f(x)f(1)=f(x+1)f(x-1)$$

دبیرستان خواجه نصیرجهرم

دبیر: باقری نژاد ـ فرستنده: اسماعیل یوسف زادگان

نیم دایره‌ای به‌قطر $AA'=2R$ وبه مرکز O مفروض است. مماس برنیمدایره دریك نقطهٔ دلخواه M مماس در نقطهٔ A را در B وشعاع عمود بر AA' را در C قطع می‌کند. مطلوبست محاسبهٔ $\overline{AB}=x$ بقسمی که محیط ذوزنقهٔ $OABC$ برابر مقدار معلوم p باشد.

گروه فرهنگی سپهری

دبیر: علی آموزگار ـ فرستنده: علیرضا معینی

مطلوبست مقدار x ازرابطهٔ:

$$\left(1+\frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+4\left(\frac{x}{x+9}\right)^{\frac{1}{2}}=4$$

گروه فرهنگی شهریار قم

دبیر: صدری ـ فرستنده ـ جواد برقعی‌رضوی

عبارت درجهٔ دوم $f(x)$ راچنان تعیین کنید که:

$$f(1-x)=x^2+x+5$$

گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر: هدانیا ـ فرستنده: لطف‌الله معینی

مطلوبست حل‌دستگاه نامعادلهٔ زیر:

$$\begin{cases}(x^2+1)^m(x^2+x-2)>0\\ \dfrac{(x+1)^3}{x-3}<0\end{cases}$$

دبیرستان فیوضات مشهد

دبیر: مزیدی ـ فرستنده: احمدی تیغ‌چی

اولا معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که بین x' و x'' ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}m(x'+x'')-x'x''=m^2+4\\ 2x'x''=(m+2)(x'+x''-4)\end{cases}$$

حساب

دبیرستان پانزده بهمن بهشهر

دبیر: احمدی ـ فرستنده . غلامعلی شیرازی رستمی

دایره‌ای به‌قطر AB وبه‌مرکز O مفروض‌است. به‌مرکز O وبه‌قطر A_1B_1 (A_1وسط OA و B_1 وسط OB) دایره‌ای رسم می‌کنیم. دایرهٔ بعدی رابه‌مرکز O وبه قطر A_2B_2 (A_2 وسط OA_1 و B_2 وسط OB_1) می‌کشیم دایرهٔ سوم‌را به همان مرکز O وبه‌قطر A_3B_3 (A_3 وسط OA_2 و B_3 وسط OB_2) رسم‌کرده واین عمل‌را بینهایت مرتبه ادامه می‌دهیم . مطلوبست اولا حد مجموع محیطها ومجموع مساحتهای این دوایر. ثانیاً اگرقطر MN راکه بر AB عموداست رسم‌کرده و نقطهٔ M رابه A_1 ونقطهٔ A_1 رابه N_2 ونقطهٔ N_2 رابه B_3 وصل نموده واین‌عمل‌را بینهایت بارادامه‌دهیم‌تعیین کنیدحد مجموع طولهای پاره خطهای حاصل را . (N_1 وسط ON و N_2 وسط ON_1 است) .

دبیرستان پهلوی ملایر

دبیر: پوربابك

اگر aوbوc به‌ترتیب اضلاع و وتریك مثلث‌قائم‌الزاویه باشند ثابت‌کنید :

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \times \log_{c-b} a$$

دبیرستان خواجه نصیرجهرم

دبیر: باقری نژاد ـ فرستنده : اسماعیل یوسف زادگان

اگر مجموع n جملهٔ اول یك تصاعد حسابی از رابطهٔ زیر بدست‌آید :

$$1 + S_n = a_n - a_{n-1}$$

که $a_n = n(n^2 + 3n + 3)$ باشد پیداکنید اولا S_n وثانیاً I_n را. ثالثاً اولین جمله وقدر نسبت را.

گروه فرهنگی سپهری

دبیر: علی‌آموزگار ـ فرستنده:علی‌رضا معینی

اگر $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ باشد ثابت‌کنید :

$$f(x) = \frac{1}{2} f(2x^2 - 1)$$

گروه فرهنگی شیخ‌بهایی

دبیر: کنگرلو ـ فرستنده : لطف‌الله معینی

ـ دستگاه زیررا حل‌کنید :

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \\ 3\log x - 4\log y = 2 \end{cases}$$

ـ زوایای‌یك شش ضلعی محدب تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. اگر مجموع‌زاویهٔ‌اول و چهارم این‌شش‌ضلعی‌برابر 210° باشد زوایای‌آن را بدست آورید .

دبیرستان فیوضات مشهد

دبیر: نیرومند ـ فرستنده : احمد تیغ‌چی

مجموع زیررا بدست‌آورید:

$$(3+1)+(7+\sqrt{3})+(11+3)+\cdots+(63+2187\sqrt{3})$$

مسائل هندسه

دبیرستان پهلوی‌ملایر

دبیر: پوربابك

نقطهٔ M را درداخل مثلث ABC طوری تعیین‌کنیدکه اگر ازآن به‌سه رأس وصل‌کنیم سه زاویهٔ متساوی پدیدآید.

گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر : هدانیا ـ فرستنده : لطف‌الله معینی

ـ اگر G مرکزثقل مثلثABC باشد، (G محل‌تلاقی سه میانه) ثابت‌کنید:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

ـ زاویهٔ xOy مفروض‌است.مکان هندسی نقاطی‌رابدست آوریدکه مجموع فواصلش ازدوضلع زاویه برابر با k باشد.

کلاس پنجم ریاضی

جبر

دبیرستان الهی

دبیر: بابازاده‌ـ فرستنده‌ـ علی‌خسروی دهکردی

مطلوبست معادلهٔ خط مماس بر منحنی زیرکه با نیمساز ربع اول موازی باشد :

$$y = x^2 + 3x + 2$$

دبیرستان پهلوی ملایر

دبیر: پوربابك

خط $x=2$ محور x ها را در A قطع می‌کند. دایرهٔ به‌قطر OA خط $y=mx$ را درنقطهٔ B واین‌خط، خط $x=2$

را درنقطهٔ C قطع می‌کند. از B و C دوخط به‌موازات محورها رسم می‌کنیم تایکدیگررا در نقطهٔ D سمت چپ C قطع کنند. مکان D را بدست‌آورید درصورتی که m تغییر کند.

دبیرستان جهان مهر

دبیر: معینی ـ فرستنده: سید مهران‌رضوی

ـ اولاً ـ حدود معین ونامعین بودن تابع:

$y=2\pm\sqrt{-x^2+6x+16}$ را مشخص کنید.

ثانیاً ـ منحنی نمایش آنرا رسم نمایید.

ثالثاً ـ ازنقطه‌ای به طول ۱ ـ برمنحنی مماس و قائمی رسم کرده‌ایم معادلهٔ مماس وقائم‌را نوشته‌طول تحت‌مماس وتحت قائم را محاسبه کنید.

رابعاً ـ هرگاه ازنقطهٔ $A(0\,و\,-7)$ برمنحنی مماسهایی رسم کنیم معادلات مماس را نوشته و مختصات نقاط تماس را بدست‌آورید.

ـ مکان هندسی نقطهٔ A محل تقاطع دوخط:

$y=xtg\alpha+4$ و $y=3xtg\alpha+2tg\alpha$ را رسم کنید.

گروه فرهنگی دکتر هشترودی

دبیر: صدری ـ فرستنده: کیارخ کیائیان

ـ حد تابع زیررا وقتی‌که $x\to 1$ پیدا کنید:

$$y=\frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n}{x-1}$$

ـ ثابت کنید که بین مشتقهای اول ودوم تابع زیر رابطهٔ $2y^5+3yy''-12y'^2=0$ برقرار است:

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+bx+c}}$$

دبیرستان سعدی

دبیر: موحدی ـ فرستنده: مرتضی معین

ـ حد تابع زیررا وقتی‌که $x\to 1$ حساب کنید:

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$$

ـ مشتق تابع زیررا بدست‌آورید:

$$y=\operatorname{arctg}(\sin x)-\arccos(x^2-x)$$

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر: قمیصی ـ فرستنده: حسین احمدی

ـ دسته سهمی (P_m) به معادلهٔ زیرمفروض است:

$$y=mx^2-2(m-1)x+m+2$$

۱ـ تحقیق کنید که جمیع سهمی‌های (P_m) که به‌ازاء مقادیرمختلف پارامتر m بدست می‌آیند برخط ثابتی که معادلهٔ آنرا تعیین خواهید کرد مماسند.

۲ـ ثابت کنید که سهمی‌های مزبور خودشان نیز در نقطهٔ ثابتی برهم مماسند.

۳ـ معادلهٔ مکان هندسی نقاط ماکسیمم ومی‌نیمم سهمی‌های مزبوررا نوشته ومشخص کنید که چه قسمت ازآن مکان متعلق به نقاط ماکسیمم وچه قسمت متعلق به‌نقاط می‌نیمم است.

۴ـ اگر M' و M'' نقاط مشترك (P_m) بامحور xها باشند حدود m را چنان معین کنید تا دوایر به مراکز M' و M'' ماربر مبدأ مختصات مماس خارج باشند و معین کنید که به‌ازاء چه‌مقادیر m این دودایره باهم‌برابرند بدون‌آنکه برهم منطبق باشند. همچنین m راچنان معین کنید که دو دایره‌برهم منطبق باشند.

۵ـ بین دسته سهمی های (P_m) آنرا مشخص کنید که نقطهٔ می‌نیمم‌آن تانقطهٔ $S(-3\,و\,4)$ کمترین فاصلهٔ ممکن را داشته باشد.

ـ خط (Δ) در صفحهٔ دستگاه محور های مختصات چنان جابجا می‌شود که مجموع معکوسات قطعات حاصله بوسیلهٔ آن روی نیم‌خطهای Ox و Oy که به مبدأ مختصات منتهی می‌شوند مقدار ثابت $\frac{1}{k}$ است $(k>0)$ ثابت کنید که این‌خط ازنقطهٔ ثابتی که مختصات‌آن را تعیین‌خواهید کرد می‌گذرد.

ـ منحنی (H) به‌معادلهٔ $y=\frac{ax+1}{x+b}$ رادرنظر گرفته خط غیرمشخص (D) از مبدأ مختصات مرور می‌دهیم تا منحنی (H) را درنقاط A و B قطع کند و A' و B' تصاویرآنها راروی محور xها بدست می‌آوریم. a و b را چنان معین کنید که اگر خط (D) حول مبدأ مختصات دوران کند مجموع طولهای A' و B' وهمچنین مجموع معکوسات طولهای‌آنها ثابت بمانند.

گروه فرهنگی شهریارقم

دبیر: صدری ـ فرستنده: جواد برقعی رضوی

ـ نامعادلهٔ زیررا حل کنید:

$$|x^2-4|>|$$

ـ مطلوبست محاسبهٔ

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

ـ α و β راچنان تعیین کنید که نقاط :

$A(\beta-\alpha \text{ و } \alpha+\beta)$ و $B(\alpha+2\beta \text{ و } \alpha-\beta)$

نسبت به‌خط $y=x-2$ متقارن باشند .

گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر: هدانیا ـ فرستنده: لطف‌الله معینی

ـ بدون استفاده از فرمول ، مشتق تابع زیر را تعیین کنید :

$$y=\cos(2x+\alpha)+\frac{2x-1}{x+1}$$

ـ حد تابع زیررا وقتی‌که $x\to 1$ بدست آورید :

$$y=\frac{1+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{2(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}$$

دبیرستان فارابی کرج

دبیر : برازنده ـ فرستنده : مجید مصباح

مطلوبست حد تابع زیر به ازاء $x=\pm\infty$

$$y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}}$$

دبیرستان محمد رضا شاه پهلوی مهاباد

دبیر: مقراضی ـ فرستنده : مناف شریف زاده

روی محوری چهارنقطهٔ P و Q و M و L را در نظر می گیریم بقسمی که $\overline{PM}\cdot\overline{LQ}+\overline{LP}\cdot\overline{QM}=0$ باشد . با استفاده ازرابطهٔ فوق رابطهٔ زیررا نتیجه بگیرید:

$$\frac{2}{\overline{PQ}}=\frac{1}{\overline{PM}}+\frac{1}{\overline{PL}}$$

دبیرستان نیاکان

دبیر : قمیصی ـ فرستنده : حمید اسلامی

ـ دو متحرك در یك لحظه از نقاط $A(1110 \text{ و } 0)$ و $B(0 \text{ و } 740)$ با سرعتهای ثابت به ترتیب ۱۱۹۸ متر درثانیه بطور مستقیم بسمت مبدأ مختصات در حرکتند . حساب کنید که پس‌ازچند ثانیه، فاصلهٔ این‌دو متحرك ازیکدیگر کمترین مقدار ممکن خواهد شد (واحد متراست).

ـ تابع $y=x^2+4mx+2m+1$ مفروض است : (m پارامتر است) .

اولا : به‌ازاء چه‌مقدار m خط $x=-2$ محور تقارن منحنی‌نمایش تغییرات تابع مفروض خواهدشد.

ثانیاً : به‌ازاء مقادیرمختلف m درتعدادنقاط تقاطع خط (D) به معادلهٔ $y=3mx+2m$ بامنحنی نمـایش تغییرات تابع مفروض بحث کنید وتحقیق کنید که در حالتی که خط منحنی را در دو نقطهٔ A وB قطع می کند این دونقطه دریك طرف محور yها قرار خواهند گرفت واگر A' و B' تصاویراین نقاطروی محورyها فرض‌شوند m راچنان معین کنید که $A'B'=6\sqrt{3}$ باشد .

دبیرستان هدف شمارهٔ ۳

دبیر : منصور عباسی

توابع $y=x^2+(a+3)x+3a$ و $y=\frac{x+3}{x+a}$

مفروضند. اولاـ مطلوبست تعیین مقدار a بقسمی که مثلث‌حاصل ازتقاطع دومنحنی دررأسی که مختصاتش به‌a بستگی‌ندارد قائم‌ـ الزاویه باشد.

ثانیاً ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات (C) به معادلهٔ $y=x^2+2x-3$ وتابع (C_1) به‌معادلهٔ $y=\frac{x+3}{x-1}$ رادر یکدستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

ثالثاًـ از مبدأ مختصات خطی رسم کنید که منحنی (C) را درنقاط M وN ومنحنی (C_1) را در نقاط P و Q قطع کند بطوری که بین‌طولهای نقاط مزبور رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\frac{1}{x_M}+\frac{1}{x_N}=2\left(\frac{1}{x_P}+\frac{1}{x_Q}\right)$$

رابعاًـ بر منحنی (C_1) نقطه‌ای تعیین کنید که از آنجا بتوان دومماس عمود برهم برمنحنی (C) رسم کرد .

مثلثات

دبیرستان الهی

دبیر: بابازاده ـ فرستنده ـ شاهپور خسروی

ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$4\operatorname{arctg}(x^2-3x-3)=\pi$$

دبیرستان پهلوی ملایر

دبیر: پور بابك ـ فرستنده : رستم یزدان‌یار

ـ اتحاد زیررا ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2^4}$$

ـ عبارت زیررا به‌حاصل ضرب عوامل تبدیل کنید:

$$\cos(m+n+p)+\cos m+\cos n+\cos p$$

دبیرستان جام جم قم

دبیر: حسینی ـ فرستنده : حسین شجاع فرد

از رابطهٔ $tg^2 a=1+2tg^2 b$ رابطهٔ :

$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2b}{4}$ رانتیجه بگیرید.

دبیرستان دکتر هشترودی

دبیر: صدری ـ فرستندگان : کیارخ کیائیان، جواد برقعی

ـ به فرض آنکه $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ باشد به‌ازاء مقادیر مختلف عدد صحیح و مثبت n عبارت $\sin^n\alpha+\cos^n\alpha$ را با عـدد ۱ مقایسه کنید.

ـ درستی تساوی زیررا ثابت کنید :

$$4(\cos^3 20^\circ+\cos^3 40^\circ)=3\sqrt{3}\cos 10^\circ$$

ـ درستی برابری زیررا ثابت کنید :

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+$$
$$+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

دبیرستان ستایش کرج

دبیر: برازنده ـ فرستنده: فرامرز بهشتی

معادلهٔ زیر را حل کنید و جوابهای بین صفر و 2π را بدست آورید:

$$\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}=1$$
$$(\cos x)$$

گروه فرهنگی شهریارقم

دبیر: امیدوار ـ فرستنده : جواد برقعی رضوی

ـ اگر $tg\alpha=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ باشد عبارت $\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\sin\alpha}$ را برحسب a و b حساب کنید .

ـ مطلوبست حل معادلهٔ مثلثاتی زیر :

$$\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^{\cos 2x+\cos x-2}+$$
$$+\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^{\cos 2x+\cos x-2}=2$$

گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر: کنگرلو ـ فرستنده : لطف‌الله معینی

ـ مطلوبست محـاسبهٔ عبارت (x^2+y^2) برحسب t از دستگاه زیردرصورتی که $\cos 2\alpha=t$ باشد :

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha=tg\alpha \\ x\sin\alpha-y\cos\alpha=cotg^2\alpha \end{cases}$$

ـ ثابت کنید ازرابطهٔ زیر می‌توان رابطهٔ $tg A=4tg B$ را نتیجه گرفت :

$$tg(A-B)=\frac{3\sin 2B}{5-3\cos 2B}$$

دبیرستان عبدالله مستوفی

دبیر: عباسی

ـ ازرابطهٔ :

$$\frac{x}{tg(\theta+\alpha)}=\frac{y}{tg(\theta+\beta)}=\frac{z}{tg(\theta+\gamma)}$$

نتیجه بگیرید :

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+$$
$$+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$

ـ مربع ABCD مفروض‌است. برروی ضلع CD نقطهٔ اختیاری M را درنظر می گیریم، نیمساز زاویهٔ BAM را رسم‌می کنیم تا BC را درنقطهٔ N قطع کند. ثابت کنید:

$$AM=DM+BN$$

دبیرستان قطب

دبیر: فخرعطار ـ فرستنده : حسن جرگه

معادلهٔ مثلثاتی زیرمفروض است:

$$(m+2)\sin^2 x+2\sin 2x+\cos^2 x=2m-1$$

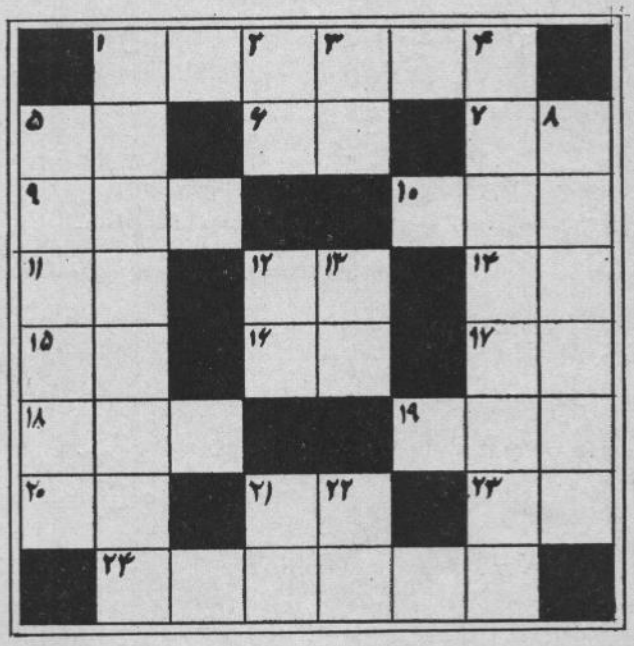
اولاـ معادلهٔ فوق رابرحسب $cotg x$ بیك معادلهٔ درجهٔدوم تبدیل کنید .

ثانیاـ m راطوری معین کنیدکه یکی از ریشه های آن

دنباله در صفحهٔ ۱۹۴

جدول اعداد

طرح از : حسین اسدی تاریخ وصول به‌دفترمجله ۱۳۵۰/۱/۱۷



افقی: ۱ـ به‌صورت $\overline{abbcab}$ ومجذورعدد $\overline{bcb}$ است. ۵ـ مکعب کامل است ومجذورنیست. ۶ـ اگر یك واحد به‌آن اضافه کنیم مکعب شود واگر یك واحد ازآن کم کنیم مجذور گردد. ۷ـ کوچکترین عدد اولی که مجموع رقمهایش به‌صورت $\overline{aa}$ است . ۹ـ توان چهارم رقم یکان خود است. ۱۰ـ همان عدد ۹ افقی. ۱۱ـ دو واحد بیشتر از جذر عدد ۹ افقی.۱۲ـ جملهٔ دوم ازتصاعد حسابی که قدرنسبتش ۱۲ و جمله‌های اول و سومش مجذورند. ۱۴ـ توان ششم است . ۱۵ـ مقلوب عدد ۶ افقی.۱۶ـ مجذور مجموع رقمهایش‌است. ۱۷ـ مجموع رقمهای عدد۱ افقی . ۱۸ـ برابر با : $19.2^{3n}\times 3^{n}$ ـ همان عدد ۹ افقی. ۲۰ـ مقلوب جذرعدد ۱۸ افقی. ۲۱ـ مجموع عددهای ۱۱ افقی و۱۵ افقی. ۲۳ـ دوواحد بیشتراز توان پنجم عددی. ۲۴ـ رقمهایش به‌تصاعد می‌باشند .

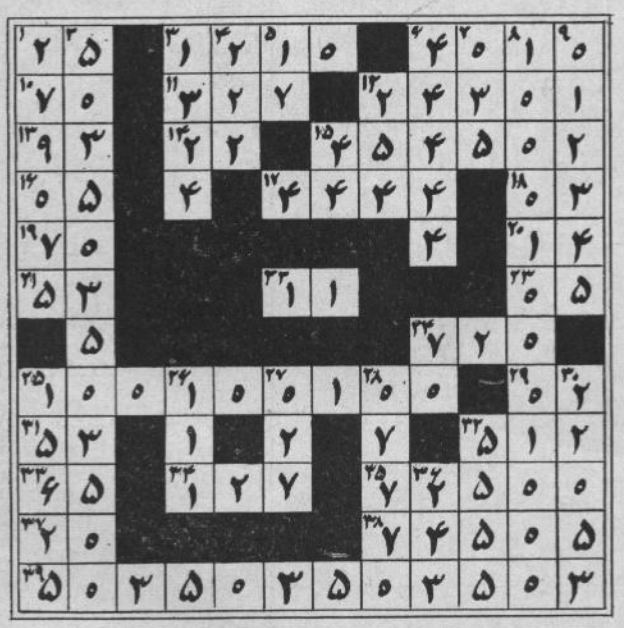
قائم : ۱ـ تکرارعدد ۵ افقی. ۲ـ مقلوب جذر عدد ۹ افقی . ۳ـ در واقع با رقم یکان عدد ۶ افقی برابر است. ۴ـ اگر M عدد چهار رقمی سمت چپ و N عدد چهار رقمی سمت راست‌آن باشد داریم :

$$M+N=6458 \quad \text{و} \quad \overline{MN}-\overline{NM}=39936006$$

۵ـ به‌صورت $\overline{ababcd}$ است که $\overline{ab}$ همان عدد۶ افقی و $\overline{cd}$ دو واحدبیشترازدوبرابر$\overline{ab}$ است. ۸ـتکرارعدد$\overline{abc}$ بقسمی که:

$$\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{cab}$$

۱۲ـ دوبرابرعدد ۱۷ افقی . ۱۳ـ متمم حسابی عدد ۷ افقی . ۲۱ ـ مضربی از رقم یکان خود ومضربی از مقلـوب عدد ۱۳ قائم است. ۲۲ـ متمم حسابی‌آن یك رقمی‌است ومقلوبش مجذور کامل است.



حل جدول شمارهٔ قبل

پاسخهای بازی با اعداد

(مندرج در صفحهٔ ۱۲۴ یکان‌شمارهٔ ۹۶)

۱ـ

$(5+5+5):5=3$

$5+(5-5)\times 5=5$

$(5\times 5+5):5=6$

$(5\times 5)+(5:5)=26$

$(5+5:5)\times 5=30$

$5\times 5+5\times 5=50$

$(5+5)\times 5+5=55$

$5\times 5\times 5-5=120$

۲ ـ باقیمانده‌های تقسیم عاملهای ضرب بر ۹ به ترتیب برابر است با ۵ و صفر. پس باقیماندهٔ تقسیم حاصل‌ضرب بر ۹ برابر است با $5\times 0=0$ و مجموع رقمهای حاصل ضرب ۹ است. نتیجه می‌شود که رقم حذف شده ۸ است.

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 118– A tank contains 250 gallons of water. A certain quantity of water is dipped out and replaced by the same amount of alcohol. From the mixture, the same amount of mixture is removed and is replaced by the same amount of alcohol. The final mixture contains weter and alcohol in the ratio 16:9 respectively. How much water was dipped out each time?

Solution: Let x be the number of gallons of water removed. After removing this water, the tank then contains $250-x$ gallons of water. Now x gallons of alcohol are added to the tank. The tank contains x gallons of alcohol and $250-x$ gallons of water. Next, x gallons of this mixture are removed. That is ,$x(\frac{x}{250})$ gallons of alcohol are removed, since the mixture is $\frac{x}{250}$ alcohol. Then $x-\frac{x^2}{250}$ is the number of gallons of alcohol remainig. Since x gallons of alcohol are then added, the final mixture contains $250-(x+x-\frac{x^2}{250})$

$$\frac{250-(x+x-\frac{x^2}{250})}{x+x-\frac{x^2}{250}}=\frac{16}{9}$$

Solving, $x=50=$ number of gallons of water removed the first time. Since 50 gallons of alcohol are then added, the tank contians 50 gallons of alcohol and 200 gallons of water. That is, $\frac{1}{5}$ is alcohol and $\frac{4}{5}$ is water. Then 50 gallons of this mixture are removed, so 40 gallons of water are removed the second time. The final mixture contains 90 gallons of alcohol and 160 gallons of water.

Problem 119 – If $x^2+ax+bc=0$ and $x^2+bx+ca=0$ $(a,b,c\neq 0)$ have a single common root, Prove that their other roots satisfy $x^2+cx+ab=0$

Solution: If $f(x)=x^2+ax+bc=0$ and $g(x)=x^2+bx+ca=0$ have a common root, then $f(x)$ and $g(x)$ have a common factor. They would have this factor in common with $f(x)-g(x)$, viz. $h(x)=(a-b)x+c(b-a)$. Hence the common root may be obtained by solving $h(x)=0$; viz. $x=\frac{c(a-b)}{a-b}$.

Now $a\neq b$, for if they were equal, $f(x)$ and $g(x)$ would be identical and have more than one common factor, contrary to the hypothesis. Hence $x=c$ is the common root.

Since the product of the roots of $f(x)=0$ is bc, its other root is b. Similarly, the other root of $g(x)$ is a. Also, since the sum of the roots of $f(x)=0$ is $-a$, $b+c=-a$, or $a+b=-c$. This confirms that $x^2+cx+ab=0$ has a and b(the other roots) as its roots.

Problem 120–A,B, and C are thermometers with different scales. When A reads 12° and 36°, B reads 13° and 29°, respectively. When B reads 20° and 32°, C reads 57° and 84°, respectively. If the temperature drops 18° using A's scale, how many degrees does it drop using C's scale?

Solution: If ΔA, ΔB, ΔC represent corresponding changes of temperature on the A, B, C scales, then $\frac{\Delta B}{\Delta A}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$;

$\frac{\Delta C}{\Delta B}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$. Therefore $\frac{\Delta C}{\Delta A}=\left(\frac{\Delta B}{\Delta A}\right)\times$

$\times\left(\frac{\Delta C}{\Delta B}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{3}{2}$.

Thus if $\Delta A=-18°$, $\Delta C=-27°$

انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها
تألیف:علی اصغرهومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هشترودی

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

راهنمای ریاضیات متوسطه
تألیف : عبدالحسین مصحفی
چاپ چهارم : ۱۲ ریال

معماهای ریاضی
ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار
بها : با جلد شمیز ۷۵ ریال
با جلدزرکوب : ۱۰۰ریال

روش سادهٔ
حل مسائل شیمی
ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا
بها: ۲۰ ریال

تستهای چندجوابی شیمی
ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا
بها : ۴۰ریال

مسائلی ازحساب استدلالی
تألیف: محمودکاشانی

جلد اول	جلددوم	جلد سوم
۱۲ریال	۱۵ریال	۱۵ریال

تستهای هوش
ترجمهٔ: باقرمظفرزاده
بها : ۶۰ریال

مبادی
منطق وریاضی جدید

تألیف: غلامرضا عسجدی
بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان‌که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان‌که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان‌که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.