یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ دهم ، شمارهٔ : ۳ — شمارهٔ مسلسل : ۹۶ — آذر ۱۳۵۲

دراین شماره:

تاکسی فاصله	عبدالحسین مصحفی	۱۱۳
شیمیدانان اسلامی ، جابر بن حیان	جعفر آقایانی چاوشی	۱۱۵
ریاضیات و موسیقی	دکتر علیرضا امیرمعز	۱۳۱
کشف حساب انتگرال توسط ارشمیدس	ترجمهٔ داوید ریحان	۱۲۵
تصاعدها	ترجمهٔ مهندس زرگری	۱۲۷
نامساویهای جبری	سعید شعاری نژاد	۱۳۱
دربارهٔ دستگاه معادلات	ترجمهٔ مهندس زرگری	۱۳۵
تعمیم چند مسئلهٔ ریاضی	علی اصغری	۱۳۹
با ریاضیات آشتی کنید	ترجمهٔ : مصحفی	۱۴۱
حل مسائل یکان شمارهٔ ۹۵	—	۱۴۴
مسائل برای حل	—	۱۵۸
مسائل انتخابی از مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها	—	۱۶۴
جدول اعداد	کیقباد شمس اسحاق	۱۶۸
Problems & Solutions	—	ماقبل آخر

بها : ۳۰ ریال

دربارهٔ سؤالهای کنکور

از علاقمندان به یکان که قسمتی یا تمام سؤالهای کنکورهای مختلف را در اختیار دارند، تقاضا می‌شود درصورت تمایل آنها را برای درج در یکان سال در اختیار مجله قرار دهند. ذکر نام واگذارکنندگان سؤالها بستگی به تمایل ایشان خواهد داشت، و اگر خواسته باشند از چاپ نام ایشان خودداری خواهد شد واگرشرایط دیگری هم داشته باشندمی‌توانند در میان بگذارند.

پنجمین کنفرانس ریاضی کشور

پنجمین کنفرانس ریاضی کشور از ۸ تا ۱۱ فروردین ۱۳۵۳ در دانشگاه پهلوی شیراز برگزار خواهدشد.

علاقمندان مایل به شرکت‌درکنفرانس‌برای کسب‌اطلاعات به نشانی «دانشگاه پهلوی شیراز، کمیتهٔ برگزاری پنجمین کنفرانس ریاضی» مکاتبه فرمایند.

ساعات کار دفتر مجلهٔ یکان

همه روزه غیر از روزهای تعطیل صبحها ازساعت ۹ تا ساعت ۱۲ عصرها از ساعت ۱۷ تاساعت ۱۹

کتابفروشی فخررازی

محل فروش مجله و سایر انتشارات یکان

مرکز فروش‌کلیهٔ کتابهای درسی وحل‌المسائل

تهران ـ خیابان شاه‌آباد ـ تلفن ۳۱۰۵۵۲

تالیفات آقایان زاوشی وبحرانی

حل‌المسائل جبر ششم ریاضی

« جبرو مثلثات ششم طبیعی

« مثلثات ششم ریاضی

« حساب استدلالی

« جبر پنجم طبیعی و ریاضی

« مثلثات « « «

« جبرچهارم « «

« جبرکنکور

تهران ـ شاه‌آباد ـ کتابفروشی‌زوار

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ دهم ـ شمارهٔ سوم ـ شمارهٔ مسلسل :۹۶

آذر ۱۳۵۲

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملک‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume X, number 3 . Dec. 1973

subscription : 4$

TEHERAN-P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است‌که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی‌که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

با استفاده از بورس کوتاه مدتی که از طرف دولت بلژیك در اختیار وزارت آموزش و پرورش ایران گذاشته شده، فرصتی پیش آمده است تا در بروکسل با استفاده از امکاناتی که از طرف:

«Centre Belge de pédagogie de la Mathématique»

فراهم شده است به اتفاق دوست دانشمندم جناب **غلامرضا عسجدی**، درزمینهٔ آموزش ریاضی جدید مطالعاتی انجام دهیم.

مرکز مذکور توسط ریاضیدان و پدالوگ مشهور

پروفسور ژرژ پاپی

Le professeur Georges PAPY

اداره می‌شود. پاپی که از افتخارات بلژیك بحساب می‌آید ودر محافل دانشگاهی وعلمی پنج قارهٔ زمین شهرت دارد، دارای تألیفات و مقالات متعددی در ریاضیات جدید و آموزش آن می‌باشد که مهمترین آنها دورهٔ کتابهای «Mathématique Moderne» است. از این کتابها تاکنون جلدهای یکم، دوم، سوم، پنجم و ششم چاپ شده و علاوه برزبان فرانسه به چند زبان دیگر نیز ترجمه شده است، اما جلد چهارم آن هنوز دردست تألیف است.

پاپی علاوه بر تألیف کتاب ونگارش مقاله و تدریس دردانشگاه در زمینهٔ آموزش ریاضی جدید در سطح دبستان و دبیرستان فعالیتهای مجدانه و دائمی دارد و در همین زمینه وسیله‌ای ابداع کرده است به نام «Minicomputer» که از یك صفحهٔ مقوایی چهار خانه تشکیل شده است و بوسیلهٔ آن و تعدادی مهره هر کودك دبستانی می‌تواند انواع محاسبات را در مبنای ۲ انجام دهد.

یکی دیگر از فعالیتهایی که زیر نظر پاپی انجام می‌گیرد، انتشار مجلهٔ ریاضی «NICO» است که هر سال سه شماره از آن چاپ می‌شود و اشتراك سالانهٔ آن برای خارج از بلژیك سیصد فرانك بلژیك (نزدیك به‌شصت تومان) است. عمدهٔ مقالات این مجله در بارهٔ ریاضی جدید و آموزش آن است. یکی از مقالاتی که در این مجله مشاهده شد و عنوان آن «Taxidistance» بود، بنظر رسید که برای خوانندگان یکان جالب باشد، ازاین جهت مضمون آن به فارسی تهیه شد و در زیر درج می‌گردد.

عبدالحسین مصحفی

تاکسی فاصله

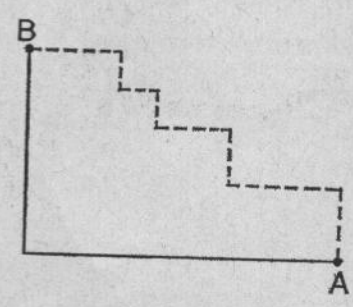
زمانی که هندسه‌های غیر اقلیدسی عرضه شد، در ابتدا فقط به صورت یك فانتزی پذیرفته شدند. اما بعد که بشر با فضاهایی غیر از فضای عادی سروکار یافت، کاربرد این هندسه‌ها مسلم گردید. در محیط معمولی اطراف ما نیز مواردی وجوددارد که قضایای هندسهٔ اقلیدسی در آن صادق نیست.

بیاد دارم که در زمان تحصیل در سال اول دبیرستان از

کتاب هندسه‌ای استفاده می‌کردیم که در آن قضیه‌ای زیر عنوان «قضیهٔ حماریه» به این شرح بیان شده بود:

«اگر در یك سر میدانی یك ظرف جو بگذاریم و در سر دیگر میدان الاغی را رها کنیم، الاغ در چه راهی به سمت ظرف جو خواهدرفت؟ مسلماً در خط مستقیم. الاغ می‌فهمد که اقصر فاصلهٔ بین دو نقطه خط مستقیم است...»

فعلا که درعصرماشین بسرمی‌بریم، ازماشین مثال بزنیم.



اتومبیلی درنظر بگیرید که می‌خواهید باآن‌در تهران از میدان ۲۴ اسفند به میدان سپه بروید، برای شما اقصر فاصله کدام است؟ بدیهی است که‌خط‌مستقیم نیست. فرض کنیم که نقطهٔ A نمایش میدان ۲۴ اسفند و نقطهٔ B نمایش میدان سپه باشد، با وجود خیابانهای متعددی که بین این دومیدان‌وجود دارد، مسیرهای مختلفی را می‌توانید اختیار کنید که همهٔ آنها اقصر فاصلهٔ بین دو میدان و همهٔ آنها باهم برابر می‌باشند. دو مسیردر شکل نموده است و به‌سادگی می‌توانید دریابید که چرا طولهای این دو مسیر باهم برابرند.

با توجه به‌اینکه‌رانندهٔ تاکسی، بنابه وظیفه یا به‌خواست مسافر، همواره فاصلهٔ بین دو نقطه ازیك شهر را درکوتاهترین مسیر می‌پیماید، چنین تعریف می‌کنیم:

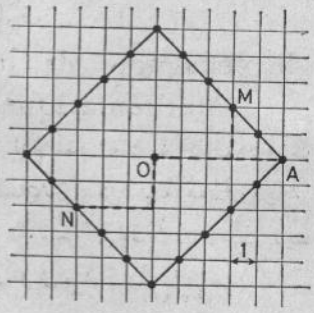
تعریف ـ در یك شهر، کوتاهترین راهی را که برای رفتن از یك نقطه به‌نقطهٔ دیگر می‌توان پیمود؛ **تاکسی فاصلهٔ** بین آن دو نقطه می‌نامیم. تاکسی فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B را با $t(a \text{ و } b)$ می‌نمائیم.

تاکسی فاصلهٔ بین دو نقطه معمولا خط مستقیم نیست. بین دو نقطه عموماً چندین تاکسی فاصله وجود دارد.

مسائل بسیاری مربوط به تاکسی فاصله می‌توانیم مطرح کنیم. اما اگر یك شهر معمولی دارای کوچه‌ها و خیابانهای‌پر پیچ و خم و با امتدادهای مختلف را در نظربگیریم، حل این مسائل پیچیده خواهدبود. چون مقصودنمایاندن تفاوتهای‌بارزی است که بین اقصرفاصلهٔ بین دو نقطه در صفحهٔ اقلیدسی و در صفحهٔ شهری وجود دارد، از این جهت در طرح این مسائل شهری را در نظر می‌گیریم که همهٔ خیابانهای آن یاشمالی ـ جنوبی یا شرقی ـ غربی می‌باشند و از همهٔ نقطه‌هایی که در مسائل نام می‌بریم فرض می‌کنیم که در تقاطع دو خیابان قرار داشته باشند.

تاکسی دایره ـ درصفحهٔ‌اقلیدسی، مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ مفروض به فاصلهٔ معین می‌باشندمنحنی بسته‌ای‌است که دایره نام‌دارد. اما این مکان در صفحهٔ تاکسی‌فاصله‌مجموعهٔ نقاطی است که برضلعهای یك مربع واقعند. این مکان را **تاکسی دایره** می‌نامیم. در شکل زیرتاکسی دایرهٔ به مرکز O و به شعاع ۵ واحد رسم شده است. برای مثال داریم:

$$t(O \text{ و } A) = t(O \text{ و } M) = t(O \text{ و } N) = ۵$$



تعبیر تحلیلی ـ در صفحهٔ محورهای مختصات‌متعامد، تاکسی فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_1 \text{ و } y_1)$ و $B(x_2 \text{ و } y_2)$ عبارتست‌از

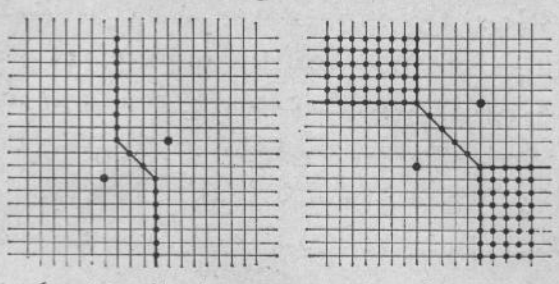
$$t(A \text{ و } B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

و به سادگی معلوم خواهد شدکه مکان‌هندسی نقطهٔ $M(x \text{ و } y)$ بقسمی که:

$$t(O \text{ و } M) = |x| + |y| = R$$

باشد، مربعی است که قطرهایش برمحورهای مختصات واقعند و طول قطرآن ۲R است.

مسئلهٔ دیگر ـ در صفحهٔ اقلیدسی مکان هندسی نقاط متساوی الفاصلهٔ از دو نقطه خطی است مستقیم که عمود منصف پاره خط واصل بین‌آن دو نقطه است. در صفحهٔ تاکسی این مکان به یکی از دو صورت زیر است، البته به شرط آنکه دو نقطهٔ مفروض در یك خیابان واقع نباشند.



ملاحظه می‌شودکه مکان مورد نظردر یك‌حالت خطی شکسته‌ودر حالت دیگر (که خط مستقیم واصل‌بین دونقطه باامتداد خیابانها زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد) مجموعه‌ای است از یك پاره خط و دو ناحیه ازصفحه.

از نظر تحلیلی مقصود تعیین مکان نقطهٔ $M(x \text{ و } y)$ است‌بقسمی که‌اگر $A(x_1 \text{ و } y_1)$ و $B(x_2 \text{ و } y_2)$ دونقطهٔ‌مفروض باشند داشته باشیم:

$$|x - x_1| + |y - y_1| = |x - x_2| + |y - y_2|$$

مسائل بسیاری می‌توان مربوط به‌تاکسی فاصله‌طرح‌وحل کرد. مثلادرصفحهٔ تاکسی‌فاصله، مثلث‌متساوی‌الاضلاع، مربع، شش ضلعی متنظم، بیضی، سهمی،... به چه‌شکلی درمی‌آیند. خوانندهٔ علاقمند به موضوع می‌تواند این مسائل و مسائل دیگری را شخصاً حل کند.

جعفر آقایانی چاوشی

دنباله از شمارهٔ قبل

ابتکارات علمی جابر بن حیان

جابر درزندگی پرتلاش علمی خود آثار گرانقدری به جوامع بشری ارزانی داشت و سالها متفکران و اندیشمندان عالم را حیرت‌زده نظریات جالب و ابتکارات تازه علمی خود ساخت، بطوری که برخی ازدانشمندان ضمن بررسی آثار اوبه نکاتی برخورده‌اند که به‌تصور درنمی‌آید. درآن زمان یعنی در عصر تکوین علوم عقلی در اسلام ازکسی چنان افکاری تراوش کند ولی نکته‌ای را بایدملحوظ نظر قرار داد وآن شاگردی جابرنزد **امام صادق** (ع) است در واقع این اکتشافات و ابتکارات صرفاً ثمرهٔ افکار شخصی خود او نیست بلکه نتیجه تعلیمش در محضر امام صادق است. در تأیید این مطلب بهتر است عنان سخن را به خود او واگذارکنیم. وی ضمن بحث از جیوه می گوید:

«بدان که جیوه مروارید را سنگین می کند و آن را مستحکم می‌سازد و این از رؤس مطالب و اساس کارها است، خدا، از سرور من (=امام صادق (ع)) راضی باشد، او هر وقت مطالبی ازاین قبیل دز خواص اشیاء می گفت به دنبال آن می‌فرمود ای جابر این اسرار دلها است...»(۱۹)

جابر در علم شیمی از موازین تجربه و آزمایش استفاده کرد و مباحثی تازه، از ابتکارات خود، برآن افزود و نام آن را علم‌الموازین» نهاد و کتابهایی چند در این زمینه نوشت چنانچه از فهرست کتابهای او این نکته روشن می گردد. مقصود از علم موازین نوعی معادله در طبایع موجود در معادن است.

یعنی طبیعت هریك ازمعادن را تعیین کردن وبرای‌هریك از آنها میزانی قائل شدن. گروهی برای این نظریه و آنچه به تفصیل دربارهٔ آن درکتابهای جابر آمده است اعتبار وارزش قابل توجهی قائل شده‌اند و آن رانظیر برخی از نظریات‌جدید از قبیل ترکیب عناصر و امکان استحالهٔ بعضی از آنها به بعضی دیگر دانسته‌اند. تلاش جابر بزرگترین گامی بودکه در قرون وسطی برای پایه گذاری علوم طبیعی برمبنای اصولی که‌بر کمیت و مقدار استوار است برداشته شد. و این جزهمان هدف علمای طبیعی امروز نیست. از اینجا عظمت و نبوغ دانشمندی مانند جابر نمایان می گردد. زیرا ما اکنون به خوبی می‌بینیم که فعالیت عمدهٔ دانشمندان در رشته‌های مختلف مصروف جایگزین کردن کمیت به جای کیفیت می گردد. درك این اصل مهم توسط جابر کافی است که تاریخ علوم جدید و قدیم، اورا در صف اول قراردهد.

قانون تناوبی **مندلیف** (Mendeleiev) کاملا مبین صحت این اصل است، چه تغییرات کمی باعث تغییرات کیفی‌در اتم‌هاست و تفاوت عناصر مختلف جز تفاوتی در کمیت نمی‌باشد.(۲۰)

۱۹ـ «و اعلم ان الزئبق یثقل اللؤلؤ و یشده و یصلبه، هذه من الامهات و حبات القلوب رضی الله عن سیدی، فانه‌کان اذا مربه مثل هذه الخواص شیء قال: یا جابر هذه حبات‌القلوب. و مایتبغی لك اذا نظرت فی کتبنا هذه الا ان تجمعها، و ما ینضاف الیها من فنونها و السلام»

(← **الدکتورمحمدیحیی‌الهاشمی**: «الامام الصادق ملهم الکیمیاء » المؤسسه السوریة العراقیه ۱۹۵۹

۲۰ـ **محمد علی نجفی** : «جابربن حیان» مجلهٔ پیام نوین سال دوم شمارهٔ اول ۱۳۳۸ هجری شمسی

نظریهٔ جابر در بارهٔ ساختمان اتم بی‌شباهت بـه نظریـهٔ جدید اتمی نیست زیرا وی اتم را شبیه به منظومهٔ شمسی‌دانسته ومی‌نویسد :

«اما جوهر فرد: مهربان خدا، تورا رحمت کند، ازخلل تشکیل شده و به اشکال گوناگون ترکیب گـردیده است و در ذات آن همه چیز نهفته است و چنانچه آفتاب بر آن مستقیم بتابد می‌شکافد و نورافشانی کرده ظاهر می‌شود پس باید بدانی که آن، همان نفس جرم فلك منیراعظم است ... ستایش خدای آفریننده‌را... خجسته‌باد نامهای او»(۲۱) .علوم‌عصری‌این‌پدیدهٔ فکری را تأیید می‌کند. در عصر حاضر اتم‌شکافته شده ودرون تابناك آن آشکار و نقش اساسی الکترون و پروتون‌که اولی‌به گرد مدار خود یعنی هستهٔ مرکزی درگردش است درساختمان درونی اتم به ثبوت رسیده است.

همچنین جابر ده قرن قبل از **دالتون** (Dalton) شیمیدان انگلیسی نظریه‌ای‌که معادل با قانون معروف نسبتهای مضاعف اوست، درکتاب:

المعرفة بالصفة الالهیه و الحکمه الفلسفیة» تصریح کرده است. (۲۲)

از خصوصیات ویژه جابر آن است‌که وی آزادی رأی‌و استقلال فکر داشت نه تنها پیرو روش متعارف عصر خویش‌نبوده بلکه به‌عقاید خاص وشکوك وایرادات خود بر **ارسطو** ممتاز می‌باشد.

جابر معتقد است‌که منطق ارسطو وسیلهٔ کشف مجهولات نیست و نشایدکه اهم اوقات خود را در راه معرفت مصروف آن نمود بلکه باید اصول و قوانینی بدست آورد که به آن وسیله کشف مجهولات میسر شود. وی با این تلاش ذهنی اندیشه رابه مجرای نوینی سوق داده، و اطلاعات عمیق و نظریات دقیقی در استنباط مطالب و استخراج نتایج تحصیل‌کرده است، و در پژوهشهای علمی خود تجربه را ملاك قرار داده آن را عنصر فعالی در تکوین نظریات علمی شمرده وعلم به واقعیات وحصول یقین را به اسلوبی منحصر کرده که‌منطق تطبیقی‌که هدفش‌تطابق عقل با جهان خارج است محور اصلی آن را تشکیل می‌دهد.

از اینرو جای شگفتی نیست در زمانیکه درنظرپاره‌ای ازفلاسفه تبدیل عناصر به یکدیگر امری مستحیل می‌نمود وی از وحدت عناصر طبیعی و امکان انقلاب آنها به یکدیگر بحث‌کرده ، ادله‌ای به نفع خود و بربطلان نظردستهٔ مقابل‌ابرازکرده‌است. این نکته وسعت نظر و قدرت علمی اورا نشان می‌دهد چنانکه گوئی در اندیشهٔ ژرفنگر او مفهوم رادیو اکتیویته اجسام و تغییرماهیت عناصر مبهماً صورت پذیر بوده است امروز می‌دانیم براثر مشاهدات تجربی و استدلالهای علمی دانشمندان هستهٔ اتم (=پروتون) و الکترونها و اجزاء اصلیهٔ دیگر اتم ازقبیل نوترون و نوترینو و پوزیترون و غیره تحت مداقه و مطالعه قرارگرفت و براساس این تحقیقات مکانیسم و مسیر تلاشی اتم تعقیب شد و صحت نظریهٔ تغییر ماهیت عناصر مسلم و مبرهن گردید و تبادل انفصالی‌که موجب تغییر هسته اتم و در نتیجه تبدیل عناصر می‌گردید نظریهٔ تبادل انفصالی را در انرژی نیز بوجود آورد و نظریه‌کوانتای کلاسیك پایه‌گذاری شد.

از جمله اموری‌که دلالت بردقت نظر و اهتمام جابر در فحص و تجسسات علمی داردکشف ضعف قوه مغناطیس به مـرور زمان است. **ابوریحان بیرونی** درکتاب الـجماهـر خـود می‌نویسد:«جابربن‌حیان‌درکتاب‌الرحمة گفته است‌که مغناطیسی داشتیم‌که اجسام آهنینی راکه به وزن صد درهم بودند جـذب می‌کرد مدتی گذشت و باآنکه در وزن آن تغییری حاصل نشده بود ولی فقط هشتاد درهم را به خود جذب می‌کرد و البته این نقصان در اثرکم شدن نیروی آن بود» (۲۳) به استعداد شگرف جابر از اینجا می‌توان پی‌برد که او نخستین‌کسی بودکه اسید سولفوریك رااز تکلیس‌زاج‌سبز و حل گـازهای حـاصل درآب بدست‌آورد وآن را زیت الزاج نامید (۲۴) همچنین وی‌نخستین کسی است‌که اسید نیتریك راکشف‌کرد (۲۵) و هـم اوست‌کـه تیزاب را برای اولین‌بار تهیه‌کرد (۲۶) .

۲۱- اقتباس از مأخذ شماره ۲۰ بااندك تصرفاتی

۲۲- **لطف‌الله صافی گلپایگانی:** جابربن‌حیان پدرشیمی
نشریه‌کتابخانهٔ مسجد اعظم، دورهٔ جدید شمارهٔ دوم سال ۱۳۴۴ هجری شمسی

۲۳- **ابوریحان بیرونی:** «الجماهرفی معرفة الجواهر»
حیدرآباد (مطبعة دائرة المعارف العثمانیه) ۱۳۵۵ هجری قمری

۲۴- این عمل را امروزه می‌توان با استفاده از علائم جدید به صورت زیرنمایش داد:

$$2SO^4Fe \rightarrow SO^1 + SO^3 + Fe^2O^3$$

۲۵- **غیاث‌الدین جزایری:** جابربن حیان صوفی‌کاشف اسید نیتریك» مجله دواسازی عصرحاضر

۲۶-برای اطلاع ازتهیه تیزاب بوسیله جابربن حیان به مقاله‌زیر رجوع شود:

Julius Ruska ; «Vorschriften Zur Herstellung Von Scharfen Wasser bei Gabir und Razi» Der Islam , Band 25 , Berlin (1939)

آثار علمی جابر بن حیان:

بدون شك جابر بن حیان یکی از پرکارترین دانشمندان است و در غالب علوم ومعارف تألیفاتی بسیار دارد. کثرت تألیف او دلالت برقدرت فوق‌العاده او می‌نماید بطوری‌که نظیر اورا کمتر می‌توان یافت. گرچه در صحت انتساب این آثار به‌جابر تردید شده است ولی دلیلی در دست نیست که‌انتحال وساختگی بودن این تألیفات را برساند مخصوصاً که تصریحات بسیاری از دانشمندان، انتساب این آثار رابه جابر تاکید می‌کند ودلیلی قانع‌کننده در رد این انتساب نداریم و تنها شك و تردید در آمری بدون اینکه از معاضدت دلیلی آشکار و قانع‌کننده برخوردار باشد قابل توجه و اعتناء نیست بطوری‌که **کراوس** می‌نویسد رسائل جابر از لحاظ اسلوب و استعمال لغات و از جهات ادبی به‌سبکی خاص نوشته شده است و ارتباط وهمبستگی این رسالات باهم بسیار زیاد است مثلا در هررساله‌ای به رسالهٔ دیگرش اشاره می‌کند. این وحدت در سبك و وابستگی‌به حدی است‌که نمی‌توان برخی از این آثار را ساختگی و مجعول و برخی را اصیل دانست مگرآنکه بگوییم تمامی این آثار ازآن جابر نیست. و چون یقین داریم‌که قسمتی از این آثار ازقبیل کتاب الرحمه از جابر است و از طرفی هم اعتراف داریم که رساله‌های او چون حلقه‌های زنجیر به هم مرتبطاند و یك واحد را تشکیل می‌دهند ناچار باید به صحت انتساب کلیهٔ‌این آثار به جابراعتراف‌کنیم. باوجود این‌باید گفت‌که درفهرست کتابهای جابر نامهای مکرر یا اسامی متعددی برای یك‌تألیف آمده است و چه بساکه برخی از نامهای‌رسائل وکتابهای‌جابر در حقیقت نامها و عناوین فصول یك‌کتاب باشند نه نامهای کتابهای متعدد و شواهدی هم برای تایید این نظر در دست است، فهرست‌کتب اصلی جابر را **ابن‌الندیم** صاحب الفهرست در دست داشته است‌که بعداً مفقود شده واز اینروخود ابن‌الندیم‌فهرست ناقصی ازآثار جابر را درکتابش آورده،ولی آن را مانند مرجع صحیح و معتبری مورد اعتماد قرار نداده اما **فلوگل** (Felugel) خاور شناس‌آلمانی به هنگام‌ترجمه و چاپ‌کتاب الفهرست ابن‌الندیم آن را به عنوان مأخذ موثقی تلقی‌کرده و همین امر منشأاشکالات محققین بعدی گردیده‌است. من باب مثال شرحی‌که **برتلو** دربارهٔ‌کتب جابر نوشته ازاین جهت‌که‌مأخوذ ازکتاب‌الفهرست ابن‌الندیم است، ووی‌نتوانسته تصحیف و اشتباهاتی‌که از طرف‌کاتب و غیره بعمل‌آمده مورد تحقیق قرار داده و در رفع‌آنها بکوشد، از اعتبار ساقط است. ما در اینجا از تألیفات جابر آنچه راکه شرح شده یا در کتابخانه‌های شرق و غرب به صورت دستنویس ومخطوطموجود است یا آنهایی را که ترجمه شده ویا به چاپ رسیده است و نیز کتابهایی‌که در مدارك معتبر ازآنها نام‌برده شده است یاد می‌کنیم:

۱ـ «الاسطقس الاس الاول»

۲ـ «الاسطقس الاس الثانی»

۳ـ «الاسطقس الاس الثالث»

جابراین سه‌کتاب را برای برامکه نوشته است و هرسه کتاب در سال ۱۸۹۱ میلادی در هند بطورافست چاپ شده‌است و **محمد بن‌زکریای رازی** کتاب الاس جابررا به شعردر آورده است. (۲۷)

۴ـ «تفسیر الاسطقس» این‌کتاب به‌کتابهای‌سه‌گانهٔ قبل اضافه می‌شود **ابن‌ندیم** درالفهرست آن را ذکر نکرده است. (۲۸)

۵ـ «الواحد الاول» نسخه‌ای از این‌کتاب در شعبهٔ عربی‌کتابخانهٔ ملی پاریس در مجموعهٔ ۲۶۰۶ موجود است و این‌کتاب شاید همان باشدکه ابن ندیم آن را به اسم «الواحد الکبیر» ذکرکرده است. (۲۹)

۶ـ «الواحد الثانی» نسخه‌ای خطی ازآن‌درکتابخانهٔ ملی پاریس در مجموعهٔ ۲۶۰۶ موجود است و این احتمالاهمان کتابی است‌که نزد ابن‌ندیم به اسم «الواحد الصغیر» معروف بوده است. (۳۰)

۷ـ «الرکن» که شاید همان‌کتاب «الارکان» باشد. قسمتهایی از این کتاب در قسمت هفتم کتاب «رتبه الحکیم» **مجریطی** وارد شده **وهولمیارد** مدعی است‌که نسبت این کتاب به مجریطی اشتباه است. جابر خودش کتابی به نام «الارکان الاربعه» درکتاب «نارالحجر» ذکر می‌کند (۳۱)

۸ـ «البیان» این‌کتاب در سال ۱۸۹۱ با چاپ سربی در هندوستان به طبع رسیده است. (۳۲)

۹ـ «النور» این‌کتاب نیزدرسال ۱۸۹۱ باچاپ‌سربی چاپ شده است.(۳۳)

---

۲۷ ـ **اسماعیل مظهر:** جابربن حیان»

المقتطف، المجلد الثامن والستون الجزءالخامس، ۱۳۴۴ هجری قمری

۲۸ و ۲۹ و ۳۰ و ۳۱ و ۳۲ و ۳۳ ـ همان مأخذ

۱۰ـ «الزیبق» برتلو دوکتاب به نام «زیبق شرقی» و دیگری «زیبق غربی» منسوب به جابر راکه درکتابخانهٔلیون در مجموعهٔ شمارهٔ ۴۴۰ بودبچاپ رسانده است. دونسخهٔ خطی از این کتاب درکتابخانهٔ ملی پاریس درمجموعهٔ ۲۶۰۶ موجود است. (۳۴)

۱۱ـ«الشعر» یك نسخه از این کتاب در موزهٔانگلستان در مجموعه ۷۷۲۲ موجود است (۳۵)

۱۲ـ «البتویت» یك نسخهٔ خطی ازآن درکتابخانهٔ ملی پاریس در مجموعهٔ ۲۶۰۶ مظبوط است. (۳۶)

۱۳ـ «الدرةالمکنونة» در موزهٔ انگلستان نسخه‌ای خطی به این اسم در ضمن تألیفات جابر در مجموعهٔ ۷۷۲۲ موجوداست (۳۷)

۱۴ـ«کتاب الشمس و القمر» یعنی کتاب زر وسیم، تصور می‌رودکه این کتاب مختصری ازکتاب «الاحجار السبعة» باشد و **جلدکی** در «نهایةالمطلب» ازآن نام برده و یك‌نسخه ازآن درکتابخانهٔ ملی پاریس در مجموعهٔ ۲۶۰۶ موجود است. (۳۸)

۱۵ـ «التراکیب» یك نسخهٔ آن درکتابخانهٔ ملی پاریس در مجموعهٔ ۲۶۰۶ محفوظ است (۳۹)

۱۶ـ «الاسرار» شاید همان‌کتاب «سرالاسرار» باشد که یك نسخهٔ آن در موزهٔ انگلستان در مجموعهٔ ۱۳۴۱۸شمارهٔ ۱۴وجود دارد. در زبان لاتینی نسخه‌ای تحت عنوان:

«Screta scretorum»

منسوب به جابر در دانشکدهٔ گونل و کایوس (Govnille & Cauis College) و درکالج کورپس کریستی (Corpus christi Callege) به شمارهٔ ۹۹ موجود است که‌احتمالاترجمهٔ لاتینی‌کتاب سرالاسراراست. (۴۰)

۱۷ـ «ارض» جابرکتابی به نام «ارض الاحجار» دارد که **برتلو** آن را از مجموعهٔ لیدن شمارهٔ ۴۴۰ بدست آورده و چاپ‌کرده و یك نسخهٔآن درکتابخانهٔ ملی پاریس درمجموعهٔ ۲۶۰۶ محفوظ است.(۴۱)

۱۸ـ «الخواص» یك نسخهٔ آن در موزهٔ انگلستان به شمارهٔ ۴۰۴۱ و در مجموعهٔ شمارهٔ ۲۳۴۱۹ محفوظ است(۴۲)

۱۹ـ «التذکیر» یك نسخهٔ خطی آن بـه همین عنوان ضمن تألیفات جابر در مجموعه ۷۷۲۲ درموزهٔانگلستان‌موجود است، **هولمیارد** این‌کتاب را تحت این نام:

«The book of rendering masculin»

معرفی‌کرده، در این صورت این‌کتاب اختصاص به بحث دربارهٔ عنصر «تولید» پیدا می‌کند و مقصود ازآن مذکر ساختن‌محض نیست.(۴۳)

۲۰ـ «الاستتمام» ـ طغرائی قسمتهائـی از آن را نقل‌کرده همچنین «**جلدکی**» درکتاب «نهایةالمطلب» از آن یادکرده است. این‌کتاب درسال ۱۶۷۲ تحت عنوان

«Liber de investigatine perfectionis»

به لاتینی‌ترجمه شده است.(۴۴)

درکتابخانهٔ شهر فلورانس واقع در ایتالیا

(Libreria Riccardiana ، Firenze)

در زیرشمارهٔ ۹۳۳کتابی به نام جابربن حیان تحت عنوان:

«Gcber de investigatione perfectionis magistcrii»

درج شده بـود ، دانشمند جابـر شناس آلمانـی **دارمشتر** (E.Darmstaedfer)که در بارهٔکتابهای‌کیمیایـی جابر تحقیقات زیادی کرده وکتابهایی دربارهٔ آنها نوشته است، پس ازمطالعهٔ آن معلوم می‌کندکه‌این‌کتاب مطابقت‌با کتـاب لاتینی «Secretum Bubacaris» داردکـه **برتلو** درکتاب «شیمی در قرون وسطی»ذکرکرده است. **یولیوس روسکا** این تحقیقات را ادامه داده و متن این نسخه را با متن عربی نسخه خطی‌کتاب سرالاسرارکتابخانهٔگوتینگن مقایسه کرده و ثابت‌کرده است‌که این نسخه ترجمهٔ قسمتی ازکتاب سرالاسرار می‌باشد و بعضی قسمتهای آن ازکتابهای‌کیمیائی دیگر گرفته شده است و یا مترجم آن را از معلومات شخصی خـود به آن افزوده است.

۲۱ـ «الاحجار» که درسال ۱۸۹۱ میلادی درهندوستان به طریقهٔ افست چاپ شده است. (۴۵)

۲۲ـ «الروضة»ـ جلدکی در جزء دوم کتاب«نهایهٔ المطلب» از این‌کتاب یادکرده است (۴۶)

---

۳۴ و ۳۵ و ۳۶ و ۳۷ و ۳۸ و ۳۹ و ۴۰ و ۴۱ و ۴۲ و ۴۳ـ همان مأخذ

۴۴ و ۴۵ و ۴۶ـ همان مأخذ

۴۷ ـ عبدالله نعمه : «فلاسفه شیعه»

۲۳ـ «المنافع» درکتابخانهٔ برلین کتابی خطی به نام «منافع الاحجار» به شمارهٔ ۴۱۹۹ موجود است.(۴۷)

۲۴ـ «الایضاح» که به سال ۱۸۹۱ میلادی در هند بطور افست چاپ شده است . جابر در این کتاب مطالبی راکه حکما بطور رمز در این زمینه بیان کرده‌اند تا نادانان را از فراگرفتن این دانش باز دارند، توضیح داده است. این‌رسالهٔ کوچك و مختصر در پنج‌صفحه‌است. دو نسخه ازآن‌درکتابخانهٔ «آصفیه» در ضمن کتابهای‌شیمی به شماره‌های ۸۸ و ۵۹ثبت‌شده و اولش این است: «الحمدلله القوی المنان ذی‌الغرة والسلطان» در این رساله به بررسی و سنجش عقاید قدما پرداخته و در مورد تکوین فلزات با **ارسطو** مخالفت کرده و معتقد شده‌است که نظر ارسطو باتوجه به بسیاری از تجربه‌ها درست نیست و از اینرو از پیروی کردن ازنظریهٔارسطو عدول کرده وآنچنانکه بـا حقایق علمی معروف آن روز بیشتر تـوافق داشته باشد، مطلب را بیان‌کرده است. این تعدیل را جابردرکتاب «افصاح» خود توضیح داده و به نظریهٔتازه‌ای در پیدایش و تکوین‌فلزات رسیده است‌که تا قرن هیجدهم میلادی همچنان برافکار علمی حکومت داشته است. این‌کتاب به نام «الافصاح والایضاح» هم نامیده شده است. **ابن ندیم** می‌گوید : این کتاب منسوب به **احمدبن محمدبن سلیمان مصری** معروف به **ابن عیاض** شاگرد جابر است.(۴۷)

۲۵ـ «مصححات افلاطون» که نسخه‌ای از آن در کتابخانهٔ «راغب‌پاشا» در استانبول در مجموعهٔ ۹۶ ، شمارهٔ ۴ موجود است.(۴۸)

۲۶ـ «الضمیر» نسخه‌ای ازآن درکتابخانهٔ ملی‌پاریس در مجموعهٔ ۲۶۰۶ موجود است . **جلدکی** در جزء دوم «نهایةالمطلب» آن را به نام «الضمیرفی خواص الاکسیر»آورده است. (۴۹)

۲۷ـ «الموازین» که **برتلو** آن را از روی نسخه‌ای که در لیدن در مجموعهٔ ۴۴۰ بودچاپ‌کرده است.**هولمیارد** احتمال می‌دهدکه این‌کتاب همان است که در کتابخانهٔ انجمن شیمیائی‌پاریس به شمارهٔ ۱۶۵۴ در صفحهٔ ۱۰۳ تحت عنوان:

«Liber de ponderibisartis»

ذکرشده است. (۵۰)

۲۸ـ «کتاب‌الملك» در صنعت شیمی وتبدیل معدن به طلاکه **برتلو** آن را از روی نسخهٔ موجود در لیدن به شمارهٔ ۴۴۰ چاپ‌کرده است و نسخهٔ دیگری به همین نام درکتابخانهٔ ملی پاریس به شمارهٔ ۲۶۰۵ وجود داردکه بااین نسخه اختلاف دارد و این دو نسخه بانسخهٔ سومی از همین‌کتاب‌که بطورافست در سال ۱۸۹۱میلادی در هند چاپ‌شده است، اختلافهائی‌دارند و از اینرو می‌توان گفت‌که‌کتاب مزبور از چندکتاب همنام تشکیل شده است.

کارینی (Carini) نیز این‌کتاب را تحت عنوان : «Rivista sicula» معرفی‌کرده است . (۵۱)

۲۹ـ «الریاض» نسخه‌ای از این کتاب در کتابخانهٔ «بودلین» به شمارهٔ ۷۰ و نسخهٔ دیگری در موزهٔ انگلستان در مجموعهٔ ۷۷۲۲ به شمارهٔ ۵ موجود است.

۳۰ـ «ابی‌قلمون» ابن ندیم‌این‌کتاب را به نام«کتاب الی‌قلمون» ذکرکرده. برتلو این‌کتاب را تحت عنوان :

«Livre à Qalamoc peut être faut il lire Le Livre du Camleon»

معرفی‌کرده‌وCamleon که‌در اصطلاح فرانسه معادل‌بوقلمون است مرغی‌است‌که به‌رنگهای مختلف‌دیده می‌شودودر انگلیسی آن را Chameleon نامند ولی هولمیارد معتقد است‌که نام‌کتاب‌ابی‌قلمون‌به معنی حشره‌ای است‌که درانگلیسی آن را «Jasper» گویند وبرتلو اشتباهاً آن را Camleon معرفی‌کرده است. (۵۲)

۳۱ـ کتاب ال ـ ب روح: برتلواین‌کتاب رابه غلط به نام البدوح al _ Badonh معرفی‌کرده است.(۵۳)

۳۲ـ «کتاب المجودات» ابن ندیم در الفهرست از آن نام برده و این کتاب درزبان لاتینی به نام:

«Liber denudatorum»

معروف است و اشتباهاً آن را به**محمدزکریای رازی** نسبت می‌دهند.(۵۴)

۳۳ـ «التصریف» این‌کتاب درزبان لاتینی تحت‌عنوان «Liber Mutatorium» معروف است. (۵۵)

۴۷ـ **عبدالله‌نعمه:** «فلاسفه شیعه» ترجمهٔ سید جعفرغضبان، تبریز ۱۳۴۷

۴۸ و ۴۹ و ۵۰ و ۵۱ ـ اسماعیل مظفر: «جابربن حیان» المقتطف

۵۲ و ۵۳ و ۵۴ و ۵۵ـ همان مأخذ

۳۴ـ «کتاب الثلاثین کلمة» که در لاتینی به نام:

«Liber de XXXX Verbis»

معروف است. (۵۶)

۳۵ـ «کتاب الخمسة عشر» که در عالم لاتینی به نام Liber XV معروف است، نسخه‌ای از آن در کتابخانهٔ «دانشگاه تربنتی» در آکسفورد به شمارهٔ ۳۶۳ موجود است. (۵۷)

۳۶ـ «مصححات سقراط» هولمیارد احتمال می‌دهد که این کتاب همان است که به‌لاتینی تحت عنوان:

«Ad laudem Socratis dixit Geberis»

ترجمه گردیده و در کتابخانهٔ بودلین به شمارهٔ ۱۴۱۶ موجود است. (۵۸)

۳۷ـ «کتاب السبعین» که در عالم لاتینی به نام: Liber LXX معروف است و نسخه‌ای از آن در موزهٔ انگلستان در مجموعهٔ ۱۰۷۶۴ موجود است. (۵۹)

۳۸ـ «کتاب شرح المجسطی» که از روی نسخه‌ای خطی در دانشگاه «کورپس کرستی» دراکسفورد درمجموعهٔ ۲۳۳ و نسخهٔ دیگری در کتابخانهٔ «بودلین» و نسخهٔ سومی در کتابخانهٔ دانشگاه کمبریج بوسیله **جرارد آوکرمونی** (Gerard of Cermona) به‌لاتینی ترجمه شده‌است. (۶۰)

۳۹ـ «کتاب الوصیة» نسخه‌ای از این کتاب در موزهٔ انگلستان در مجموعهٔ ۷۷۲۲ موجود است. یك ترجمهٔ لاتینی از این کتاب تحت عنوان:

«Geberi testamentum»

در کتابخانهٔ دانشگاه ترینتی، کمبریج موجود است که چندین بار به چاپ رسیده است. (۶۱)

۴۰ـ «کتاب الملاغم» ملاغم از اصطلاحات کیمیاگران است منظور مخلوطی از معدن وزیبق است. (۶۲)

۴۱ـ «الخاص» ـ فردینان هوفر (Fer.Hoefer) می‌گوید:

«کتاب الخالص» جابر همان کتابی است که ترجمهٔ لاتینی آن به نام:

«Summa perfectionis»

در اروپا شهرت دارد. (۶۳)

۴۲ـ «کشف الاسرار و هتك الاستار» نسخه‌ای از آن در کتابخانهٔ قاهره و نسخهٔ دیگری از آن در موزهٔ بریتانیا در مجموعهٔ ۷۷۲۲ شمارهٔ ۵۴ موجود است این کتاب را پروفسور **ستول** (R.Stule) درسال ۱۸۹۲ میلادی به‌انگلیسی ترجمه کرده و از طرف لوزاك (Lazac & Co) چاپ ومنتشرشده است و اصل آن نیز در سال ۱۶۸۸ در لیدن چاپ شده است. (۶۴)

۴۳ـ «خواص اکسیر الذهب» نسخه‌ای از این کتاب در کتابخانهٔ ملی پاریس در مجموعهٔ ۲۶۲۵ شمارهٔ ۶ موجود است و استاد **هولمیارد** ترجمهٔ انگلیسی آن رادر سال ۱۹۲۲ در مجلهٔ «Science preogress» به‌چاپ رسانده است. (۶۵)

۴۴ـ «کتاب الاصول» که نسخه‌ای از آن درموزهٔ بریتانیا در مجموعهٔ ۳۳۴۱۸ شماره ۱۳ موجود است و **بوریلیوس** (Borillius) معتقد است که این کتاب همان است که ترجمهٔ لاتینی آن تحت عنوان:

«Liber Radicum» معروف است. (۶۶)

۴۵ـ «کتاب الصافی» دو نسخه از این کتاب در موزهٔ بریتانیا شمارهٔ ۷۷۲۲ موجود است. (۶۷)

۴۶ـ «کتاب نارالحجر» نسخه‌ای از آن در کتابخانهٔ ملی پاریس به شمارهٔ ۲۶۰۶ موجود است و برتلو از روی نسخهٔ کتابخانهٔ لیون شمارهٔ ۴۴۰ به چاپ رسانده است. (۶۷)

۴۷ـ «المقابلة و المماثلة» یك نسخهٔ از آن در کتابخانهٔ برلن به شمارهٔ ۴۱۷۷ موجود است (۶۸)

۴۸ـ «الرحمة» برتلو این کتاب را از روی نسخه‌ای

دنباله در صفحهٔ ۱۶۳

---

۵۶ و ۵۷ و ۵۸ ۵۹ـ همان مأخذ

۶۰ و ۶۱ و ۶۲ـ همان مأخذ

۶۳ـ Hoefer ، Ferd.: «Histoire de la Chimie» Tome I، Pars (1942)

۶۴ و ۶۵ و ۶۶ و۶۷ـ **اسماعیل مظهر:** «جابر بن حیان»

۶۸ـ همان مأخذ

ریاضیات و موسیقی

علیرضا امیرمعز دانشگاه تکزاس تک

برای اینکه موسیقی را از نظر ریاضی بررسی کنیم تنها باید که کسرها و تصاعد هندسی را بکاربریم. در این مقاله سعی می‌کنیم که این موضوعها را به ساده‌ترین صورت نگاه داریم.

۱ـ موزون های یك صدا ـ هرگاه صدایی، مثلا از زدن به سیم یك اسباب موسیقی بوجود آید، ذرات هوا که نزدیك سرچشمهٔ صدا هستند به ارتعاش در می‌آیند. فرض کنیم که عدهٔ ارتعاشات در این مورد در یك ثانیه عدد f باشد. این عدد را عدهٔ ارتعاشات آن صدا می‌خوانیم. معمولا صدایی را که عدهٔ ارتعاشاتش $f=256$ است، در زبان موسیقی «دو» یا «C» می‌خوانند.

اکنون فرض کنیم که صدایی C خوانده شود و عدهٔ ارتعاشاتش $c=256$ باشد. یونانیان قدیم کشف کرده‌اند که هرگاه صدای C شنیده شود و سپس صداهایی با عدهٔ ارتعاشات $2c$، $3c$، ... بوجود آیند، این صداها به گوش خوش آیندند. (در تاریخ ریاضی این مطلب را زادهٔ فکر **فیثاغورس** می‌دانند) هرگاه این اصوات یکی پس ازدیگری باضربی مخصوص نواخته شده گوییم که یك آهنگ (melody) ساخته شده است. هرگاه این صداها را باهم بنوازیم، مجموعهٔ اصوات را یك هارمونی گوییم.

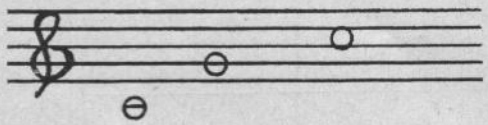
صداهایی که عده ارتعاشاتشان $2c$، $3c$، $4c$، ... می‌باشند صداهای موزون C یاهارمونیهای C می‌نامند.

۲ـ میزان ابتدائی ـ ریاضیات موسیقی یونان قدیم تنها شامل کسرهای متعارفی بوده است.

عمر خیام در رسالهٔ «شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس» [۱] می‌گوید که نسبت اعداد صحیح در علم موسیقی بسیار مهم است. اکنون این مطلب را بطور مختصر بیان می‌کنیم. دوباره صدای C را باعدهٔ ارتعاشات c در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که C_1 صدایی باعدهٔ ارتعاشات $2c$ باشد و G_1 صدایی باعدهٔ ارتعاشات $3c$. اکنون صدایی که عده ارتعاشاتش $\frac{3}{2}c$ است G می‌نامیم. از اینرو صداهای C، G و C_1 هارمونی یکدیگرند. نتیجه را در جدول زیر نشان می‌دهیم:

صوت	C	G	C_1
c	۱	$\frac{3}{2}$	۲

خط نخست اصوات را نمایش می‌دهد وخط دوم ضریب عدهٔ ارتعاشات را. مثلا $\frac{3}{2}$ یعنی $\frac{3}{2}(256)=\frac{3}{2}c$. صدای تقریبی این اصوات همان (**دو ، سل، دو**) است. صدای C_1 را اکتاو (Octave) صدای C گویند، به‌خط موسیقی این جدول چنین می‌شود:



البته تفاوت بین این اصوات و **دو ، سل ،دو** رابعداً بیان خواهیم کرد. واضح است که با این سه صوت نمی‌توان موسیقی جالبی تهیه کرد.

۳ـ موسیقی خاور دور ـ اکنون هارمونیهای پنجم و هفتم C را در نظر می‌گیریم؛ بدین معنی که صوتهای E_2 و K_2 را به ترتیب با عدهٔ ارتعاشات $5c$ و $7c$ در نظرمی‌گیریم و اصوات با عده ارتعاشات $\frac{5}{2}c$ و $\frac{7}{2}c$ را به ترتیب E_1 و K_1 می‌نامیم. چون

$$2<\frac{5}{2}<\frac{7}{2}<4$$

اصوات E و K را به ترتیب با عدهٔ ارتعاشات $\frac{5}{4}$ و $\frac{7}{4}$ انتخاب

می‌کنیم. ازاینرو:

$$۱<\frac{۵}{۴}<\frac{۳}{۲}<\frac{۷}{۴}<۲$$

بنابراین در میزان ۵ صوت موجود است. نتیجه را بوسیلهٔ یك جدول نمایش می‌دهیم:

صوت	C	E	G	K	$C_۱$
c	۱	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۷}{۴}$	۲

این اصوات بطور تقریب صداهای موسیقی خاور دور را تشکیل می‌دهند.

۴ـ موسیقی خاور نزدیك ـ هرگاه هارمونیهای دیگر را در نظر بگیریم: میزان شامل اصوات بیشتر می‌شود. واضح است که ازاصوات باعدهٔ ارتعاشات ۴c، ۸c ، ۱۶c وغیره صدایی تازه به میزان اضافه نمی‌شود، بنابراین هارمونیهای **نهم یازدهم ، سیزدهم و پانزدهم** را در نظر می‌گیریم ، همانطور که در بخش ۳ دیدیم رابطهٔ

$$۱<\frac{۹}{۸}<\frac{۵}{۴}<\frac{۱۱}{۸}<\frac{۳}{۲}<\frac{۱۳}{۸}<\frac{۷}{۴}<\frac{۱۵}{۸}<۲$$

میزانی تازه را پیشنهاد می‌کند. نتیجه را در جدول زیر نمایش می‌دهیم:

صوت	C	D	E	P	G
c	۱	$\frac{۹}{۸}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۱۱}{۸}$	$\frac{۳}{۲}$

H	K	B	$C_۱$
$\frac{۱۳}{۸}$	$\frac{۷}{۴}$	$\frac{۱۵}{۸}$	۲

قبل ازاینکه‌این‌اصوات‌را بررسی کنیم جدولی که مربوط به میزان اصوات فیزیکی است مطالعه می‌کنیم:

صوت	C	D	E	F
c	۱	$\frac{۹}{۸}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۴}{۳}$

G	A	B	$C_۱$
$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۱۵}{۸}$	۲

هرگاه در این دو جدول دو صوت P و F را مقایسه کنیم، ملاحظه‌می‌شود که نسبت‌عدهٔ ارتعاشات P به عدهٔ ارتعاشات F عبارتست از

$$\frac{۱۱}{۸}:\frac{۴}{۳}=\frac{۳۳}{۳۲}$$

از اینرو نتیجه می‌شود که P از F **زیر** تراست. اینجاست که موسیقی خاور نزدیك با موسیقی فیزیك متفاوت است . بطور تقریب مجموعهٔ اصوات

$$\{C, D, E, P, G, K, B, C_۱\}$$

میزان موسیقی خاور نزدیك را تشکیل می‌دهد . از این‌به‌بعد نسبت عدهٔ ارتعاشات دو صدا را با نسبت نامهای آنها نمایش می‌دهیم. معمولا این نسبت را فاصلهٔ (interval) گویند. در باره نسبت دیگری را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{K}{A}=\frac{۷}{۴}:\frac{۵}{۳}=\frac{۲۱}{۲۰}$$

ملاحظه می‌شود که K از A زیرتراست.

۵ـ پرده و نیمپرده ـ اکنون میزان هریك را از نظر فواصل بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که

$$\frac{D}{C}=\frac{۹}{۸} \text{ و } \frac{E}{D}=\frac{۱۵}{۹} \text{ و } \frac{F}{E}=\frac{۱۶}{۱۵} \text{ و } \frac{G}{F}=\frac{۹}{۸}$$

$$\frac{A}{G}=\frac{۱۰}{۹} \text{ و } \frac{B}{A}=\frac{۹}{۸} \text{ و } \frac{C_۱}{B}=\frac{۱۶}{۱۵}$$

این نسبتها نظریهٔ پرده و نیمپرده را پیشنهاد می‌کند . ملاحظه می‌شود که فواصل $\frac{F}{E}$ و $\frac{C_۱}{B}$ کوتاهندوتقریباً نصف فواصل دیگرند.

نتیجه را در جدول زیر چنین می‌نویسیم:

صدا	C	D	E	F	G	A	B	C
کلمه		۱	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱	۱	۱	$\frac{۱}{۲}$

آنجاکه ۱ نوشته شده است فاصله را **پرده** گوئیم و آنجاکه $\frac{۱}{۲}$ نوشته شده است فاصله را **نیم‌پرده** می‌نامیم.

۷ ـ میزان جدید : میزان موسیقی بین المللی بر فرضیهٔ تساوی نیم پرده بنا شده است . ملاحظه می‌شود که بین C و $C_۱$ دوازده نیم پرده است. چون فاصلهٔ:

$$\frac{C_۱}{C}=۲$$

است، هر نیم پرده را واسطهٔ هندسی **دوازدهم ۲** می‌گیریم، بدین معنی که فاصلهٔ نیم پرده برابر $\sqrt[12]{2}$ شود، از اینرو میزان جدید بوسیلهٔ جدول زیر بیان می‌شود.

صوت	D	E	F
c	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{4}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{5}$

G	A	B	C_1
$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{9}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{11}$	۲

خواننده به آسانی می‌تواند ثابت کند که فاصله‌ها در جدول پرده و نیمپرده صدق می‌کنند. میزان بین‌المللی قدری ازهارمونیهای طبیعی دوراست ولی حسن آن در بالا وپایین بردن (modulation) میزانهاست که بعداً به عرض خواهد رسید.

هارمونی پنجم یك میزان را **فرمانروا** (Dominavt) خوانند زیرا این صوت بیشتر از صداهای دیگر میزان خودرا به گوش عرضه می‌کند. در میزان جدید این صدا کمی پائین‌تر از هارمونی پنجم طبیعی است. ملاحظه می‌شود که برای میزان جدید

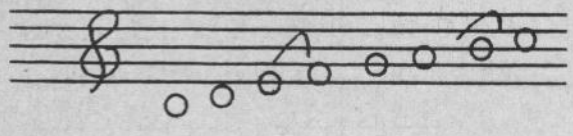
$$\frac{G}{C}=\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}=1/498\ldots$$

و در میزان طبیعی

$$\frac{G}{C}=\frac{3}{2}=1/5$$

معمولا در موسیقی سیمی مثل ویلون انگشت را می‌لرزانند که صدای G به طبیعی برسد ولی چون پیانو کوك ثابت دارد همان صدای کمی بم‌تر از طبیعی را می‌دهد.

۸ ـ دستگاه بزرگ (mojor Key) جدول اصوات دربخش ۷ نمونه‌ای از دستگاه بزرگ‌است. این‌صداها با خط موسیقی چنین می‌شود:



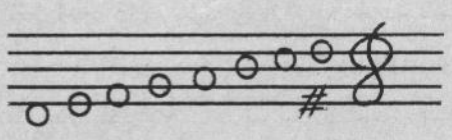
آهنگی که دراین‌دستگاه‌نوشته‌می‌شود(C mojor) **دوماژور** نام دارد. فواصل در دستگاه بزرگ معمولا شبیه‌اند، به این‌معنی که همهٔ فاصله‌ها یك پرده‌اند به‌استثنای $\frac{F}{G}$ و $\frac{B}{C_1}$. برای‌روشن‌شدن مطلب می‌توان گفت که فاصلهٔ بین اصوات سوم و چهارم و فاصلهٔ بین اصوات هفتم و هشتم نیمپرده‌اند. معمولا C_1 را (tonic) و B را (زیر tonic) گویند.

دستگاه بزرگ‌بعد(G major)**سل‌ماژور**است. شروع این دستگاه G یا فرمانروای دستگاه C بزرگ‌است. برای اینکه فاصلهٔ بین اصوات هفتم و هشتم یعنی تنیك و زیرتنیك نیمپرده‌شودصدای F_1 رانیمپرده‌بالامی‌بریم.وآنرا(F_1 shaip) یا ($F_1^{\#}$) **فادیز** می‌خوانیم به این ترتیب اصوات دستگاه سل‌ماژور با جدول زیر نمایش داده می‌شوند

صوت	G	A	B	C_1
c	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{9}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{11}$	۲

D_1	E_1	$F_1^{\#}$	G_1
$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{14}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{16}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{18}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{19}$

این جدول به خط موسیقی چنین است:



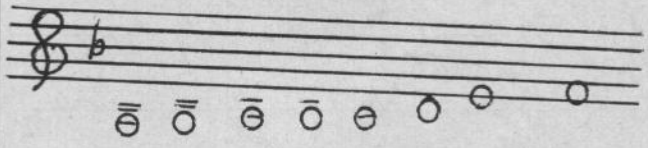
هرگاه به این ترتیب دستگاه را بالا ببریم دستگاه (D major) یا **ر ماژور** بدست می‌آید. این عمل‌را می‌توان تکرار کرد و دستگاههای بزرگ با (#)ها بدست‌آورد. آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

اکنون دستگاههای بزرگ را با پائین آوردن صداها بررسی می‌کنیم. هرگاه دستگاهی در نظر بگیریم که صدای پنجم آن باشروع دستگاه **دوماژور** یکی باشد ، دستگاه زیر حاصل می‌شود که ابتدا جدول آنرا درج می‌کنیم:

صوت	F_0	G_0	A_0	B_0
c	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-7}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-5}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-3}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-2}$

C	D	E	F
۱	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{4}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{5}$

ملاحظه می‌شود که در این جدول B_0^b (B flat) یا **سی بمل** بکار برده‌ایم، یعنی صدای B را نیمپرده پائین برده‌ایم تافاصلهٔ بین اصوات سوم و چهارم نیمپرده شود. این جدول به خط موسیقی عبارتست از



این دستگاه را (F mojor) **فا ماژور** خوانند . خواننده می‌تواند این عمل را تکرار کند و دستگاههای بزرگ دیگر بابمل‌ها بدست آورد.

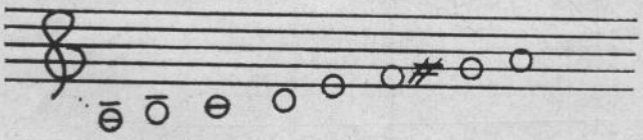
۹ـ دستگاه کوچك ـ آهنگهای بیشماری در وصف قصه‌های خاور می‌آید و قصه‌های مذهبی نوشته شده‌اند که درآنها سازنده سعی کرده است که **نالهٔ** موسیقی شرقی را تقلید کند. به این ترتیب دستگاه کوچك بوجود آمده است. دراین مقاله فقط آنچه راکه بیشتر بکار می‌رود بررسی می‌کنیم.

ساده‌ترین دستگاه کوچك (Aminur) **لامینور** است که هارمونی پنجم آن تقریباً C است. جدول این دستگاه چنین‌است:

صوت	A_0	B_0	C	D
c	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{3}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{1}$	۱	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$

E	F	$G^{\#}$	A
$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{4}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{5}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{8}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{9}$

چون بین تونیك وزیرتونیك دستگاه‌نیم‌پرده است دراین‌دستگاه G بکار رفته است. به خط موسیقی این دستگاه چنین نوشته می‌شود:



دراین موردوجود **سل‌دیز** ($G^{\#}$) سبب می‌شود که‌فاصلهٔ $\frac{F}{G^{\#}}$ یك پرده و نیم‌شود .

همانطورکه دستگاههای بزرگ‌از یکدیگر بدست‌می‌آیند می‌توان دستگاههای کوچك را بالا و پائین‌برد. این موضوع را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

[۱] Omar Khayyam، ،Discussion of Difficulties in Euclid،، Scripta Mathematica V. 24، pp. 275 - 303 (1959).

بازی با اعداد

۱ـ در هریك از سطرهای زیر بین رقمهای ۵ یکی از علامتهای «+ ، − ، × ، ÷» را چنان قرار دهید که تساویها درست‌باشند:

۵	۵	۵	۵=۳
۵	۵	۵	۵=۵
۵	۵	۵	۵=۶
۵	۵	۵	۵=۲۶
۵	۵	۵	۵=۳۰
۵	۵	۵	۵=۵۰
۵	۵	۵	۵=۵۵
۵	۵	۵	۵=۱۲۰

۲ـ در ضرب زیر یك رقم از حاصل ضرب حذف شده است. آیا بدون انجام عمل ضرب می‌توانید این رقم را بیابید.

۹۸۵۶۴ ×
۵۴۹۷۲
۵۴۱؟۲۶۰۲۰۸

کشف حساب انتگرال توسط ارشمیدس

ترجمهٔ : داوید ریحان

به‌نظر می‌رسد که یکی‌از بزرگترین کشفیات ریاضی تمام اعصار به راهنمائی‌مفاهیم فیزیکی انجام گرفته است. دراین‌باره ازکشفی‌صحبت می‌کنیم که‌توسط **ارشمیدس** انجام گرفته است وپایهٔ شاخه‌ای ازریاضی‌است که امروزه حساب انتگرال‌خوانده می‌شود. ارشمیدس مساحت قطاع سهمی ، حجم کره و درحدود دوازده نتیجه ازاین نوع را به‌کمك یك روش اصولی که درآن ایدهٔ تعادل بازیگر نقش مهمی بود، بدست‌آورد. بطوری که‌خودش می‌گوید؛ «به‌کمك مکانیك، تحقیقاتی برروی برخی ازمسائل ریاضی انجام داد».

اگر بخواهیم کار ارشمیدس را درك کنیم ، می‌بایست که اطلاعاتی چند درحدود سطح معلوماتی داشته باشیم که‌وی‌ازآنجا شروع کرده است . هندسهٔ یونان در زمان **ارشمیدس** به‌اوج خودرسید؛ **ادوکس** و**اقلیدس** قبل‌ازارشمیدس و **آپولونیوس** همزمان با وی بود. چند نکتهٔ ویژه‌ای راکه درکشف‌ارشمیدس مؤثر بوده‌اند ، ذکرمی‌کنیم .

بطوری که خود ارشمیدس می‌گوید ، ذیمقراط حجم مخروط راکشف‌کرد وثابت نمودکه‌برابر با ثلث‌حجم‌استوانه‌ای هم‌قاعده وهم‌ارتفاع باآن است. ازروش ذیمقراط هیچ نمی‌دانیم ولی دلایلی وجود داردکه تصورکنیم که وی چیزی را درنظر می‌گرفته است‌که همان برش عرضی متغیر است که به‌موازات قاعدهٔ مخروط حرکت کند.

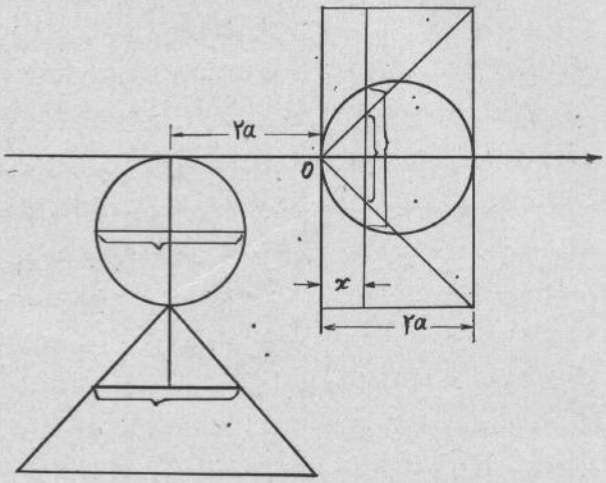
ادوکس اولین‌کسی بودکه‌قضیهٔ ذیمقراط را ثابت‌کرد. وی بااثبات این‌قضیه وچند قضیهٔ مشابه باآن « روش افناء » را اختراع‌نمود ودر ریاضیات یونان دلایل صحت‌آن را ارائه داد.

باید بدانیم که یونانیان در برخی از جنبه‌ها به«هندسهٔ مختصات » آشنائی داشته‌اند . آنها عادت داشتند که مکانهای هندسی مسطح را بادرنظرگرفتن فواصل یك نقطهٔ متحرك ازدو محور مرجع ثابت بیابند. در صورتی که مجموع مربعات این فواصل ثابت بوده و محورهای مرجع برهم عمود باشند مکان عبارت ازیك دایره‌است؛ این‌قضیه متعلق به‌هندسهٔ مختصات‌است ولی‌هنوز به‌هندسهٔ تحلیلی تعلق ندارد . هندسهٔ تحلیلی ازآنجا شروع می‌شودکه رابطهٔ‌فوق رابه‌کمك نشانه‌های جبری به‌صورت $x^2+y^2=a^2$ نمایش بدهیم .

مکانیك یونانیها هیچگاه نتوانست از هندسه‌شان پیشی گیرد واولین‌کوششهای‌آنان دراین زمینه بعدها صورت گرفت. درصورتی‌که ازروی گفته‌های مبهم **ارسطو** وسایرین ، قضاوت کنیم، می‌توانیم بگوئیم که مکانیك به‌منزلهٔ یك علم، باارشمیدس شروع شد. می‌دانیم که ارشمیدس قانون اجسام غوطه‌وروهمچنین قوانین اهرم وخواص‌اساسی مرکز ثقل را کشف کرد . حال آماده‌ایم که قابل ملاحظه‌ترین مسئله‌ای را که می‌توان درآثار ارشمیدس یافت ، مورد مطالعه قراردهیم ؛ حجم‌کره را با روش وی بدست می‌آوریم. ارشمیدس ،کره را دوران یافتهٔ یك دایره درنظرگرفت ودایره را مکان هندسی مشخص شده توسط رابطهٔ بین فواصل یك نقطهٔ متغیراز دو محور مرجع دانست . به‌کمك نشانه‌های جدید ، این رابطه به‌صورت زیرنوشته می‌شود :

$$x^2+y^2=2ax$$

معادلهٔ اخیر، معادلهٔ دایره‌ای به‌شعاع a است‌که برمحور yها در مبدأ مماس است. شکل زیرکمی با شکل اولیهٔ متعلق به‌



ارشمیدس ، اختلاف دارد ؛ از دوران دایرهٔ حول محور xها ، یك‌کره بدست می‌آید. فکرمی‌کنیم که استعمال‌نشانه‌های‌جدید، طبیعت ایدهٔ ارشمیدس را تغییر نمی‌دهد بلکه برعکس به‌نظر می‌رسدکه این نشانه امروزه ما را در پی‌گیری افکارارشمیدس یاری‌کند وحقیقتاً این نشانه‌ها با نشانه‌هایی که راهنمای خود

ارشمیدس بوده‌اند ، بسیار اختلاف دارد.

در معادلهٔ دایره ، جمله‌ای به‌صورت y^2 وجـود دارد . می‌دانیم که πy^2 عبـارت ازسطح یك **برش عرضی متغیر از کره** است . از طرفی ، ذیمقراط با مداخله دادن تغییرات برش عرضی‌خود توانست حجم مخروط را بدست‌آورد. این‌عمل، ما را راهنمائی‌می‌کند که معادلهٔ دایره رابه‌صورت زیر بنویسیم:

$$\pi x^2+\pi y^2=\pi 2ax$$

حال می‌توانیم‌اظهار کنیم که πx^2 عبارت ازسطح یك‌برش عرضی متغیر از مخروط است که از دوران خط $y=x$ حول محور x بدست‌آمده‌است(شکل‌صفحهٔقبل). این‌موضوع مارا وا می‌دارد که تعبیری مشابه برای $\pi 2ax$ قائل شویم. اگر تعبیری ازاین‌قبیل نبینیم ، می‌توانیـم معادله را تحت اشکال جدیـدی بنویسیم و شانس‌آنرا داشته باشیم که‌آنرا چنین بنویسیم:

$$(A) \qquad 2a(\pi y^2+\pi x^2)=\pi x(2a)^2$$

خیلی‌چیزها دراین معادلهٔ (A) وجود دارد . با ملاحظهٔ آن ، وبا درنظر گرفتن‌طولهاومساحاتی که‌آنرا در**وضع تصویری** قرار می‌دهند ، می‌توانیم در تولد یك فکربزرگ حضور داشته باشیم؛ این‌ایده‌ازاتحاد رابطهٔ(A) وشکل‌بالامتوجه‌خواهد شد.

از سه قرص دایره‌ای پی به‌حضور مساحات πy^2، πx^2 و $\pi(2a)^2$ می‌بریم: این سه دایره عبارت از برشهای یك صفحه با سه جسم دوار می‌باشند. این‌صفحه برمحور x عمود است ودر فاصلهٔ x ازمبدأ a قرارگرفته‌است.

سطوحی که سه جسم دواررا محدود می‌کنند ، عبارتنداز کره ، مخروط واستوانه . این سطوح به‌ترتیب از سه منحنـی بدست‌آمده‌اند که معادله‌های‌آنها وقتی که قسمت راست شکل بالا حول محور xها می‌چرخد، برابراست با (A) و $y=x$ و $y=2a$. مخروط واستوانه در ارتفاع وقاعده مشترکند. شعاع قاعدهٔ مشترك وارتفـاع مشتـرك برابر با $2a$ می‌باشند و رأس مخروط درمبدأ O واقع است. ارشمیدس ، قرصهایی را که در اعضای مختلف معادلهٔ A ظاهر شده‌اند ، با فرمهـای متفاوت بررسی‌کرد. وی قرص به‌شعاع $2a$ را که برش راست استوانه است ، دروضع اولیه ودرفاصلهٔ x ازمبـدأ باقی‌گذاشت . ولـی برشهای متوالی‌کره واستوانه را که دوایری به‌شعاعهای x و y می‌باشند ، از وضع اولیه برداشت وبه‌نقطهٔ H از محور x که طولش برابر با $2a$ـاست ، منتقل‌کرد. این‌قرصهای‌به‌شعاعهای y و x را با نخی‌که ازوزنش صرف‌نظرمی‌شود بهH می‌آویزیم (مراکزآنهاروی‌قائم‌این‌نقطه‌باقی‌می‌ماند. این‌نخ عاملی‌است‌که ازوزن‌آن صرف‌نظرشده وبه‌شکل‌اولیهٔ‌ارشمیدس‌اضافه شده‌است.)

محور xها را یك **اهرم** فرض می‌کنیم که میله‌ای است سخت وباوزن قابل‌اغماض ، ونقطهٔ O را نقطهٔ اتکای‌آن درنظر می‌گیریم. درمعادلهٔ (A) **گشتاورها** را باز می‌شناسیم. (در اینجا، گشتاور عبارت ازحاصل‌ضرب وزن در بازوی‌اهرم‌است.) ازمعادلهٔ (A) استنباط می‌شود که‌گشتاور مربوط به‌دوقرص واقع درطرف چپ ، برابر با گشتاور مربوط به‌قرص واقع درطرف راست‌است ؛ بنابراین، برطبق قانون‌کشف شده‌توسط‌ارشمیدس، اهرم درحال تعادل‌است.

وقتی که x از صفرتا 2π تغییر می‌کند ، تمام برشهای راست استوانه بدست می‌آید ؛ این برشهای راست، استوانه را دربرمی‌گیرنـد. همینطور برشهای مربوط به‌کـره و مخروط وصل شده در H بااستوانه متعادلند . برطبق قانون ارشمیدس نتیجه می‌گیریم که مماسها باید باهم مساوی باشند . حجم‌کره را V مـی‌نامیم وعبارت حجم مخروط (متعلق به‌ذیمقراط) و حجم‌استوانه ووضع واضح مرکزثقل‌آن را به‌خاطر می‌آوریم . درصورتی که‌ازگشتاورهای مربوط‌به‌برشها به‌گشتاورهای مربوط به‌اجسام مربوط بگذریم ، ازمعادلهٔ A به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$(B) \qquad 2a\left(V+\frac{\pi(2a)^2 2a}{3}\right)=a\pi(2a)^2 2a$$

که به‌فوریت رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}$$

با رجعت به‌استدلالهای اخیرمی‌بینیم که قدم قطعی همان بود که مارا از A به B راهنمائی‌کرد ، یعنی : برشهای اجسام . مع‌الوصف این‌قدم تنهابوسیلهٔ دلایل خصوصیات آنی محقق است وبطور منطقی هنوزاثبات نشده است . این عمل پذیرفتنی‌است، کاملا هم پذیرفتنی‌است ولی دارای ارزش‌اثباتی نیست . دراین عمل ، ماحدس زده‌ایم ولی‌اثبات نکرده‌ایم. وارشمیدس باعیان‌داشتن بزرگترین روایت دقیق ریاضی یونان ، خوب می‌دانست که : «نتیجه‌ای راکه بدان رسیدیم واقعـاً بوسیلهٔ برهانی‌که از آن استفاده‌کردیم ، اثبات نشده‌است ؛ ولی‌این برهان فایده‌ای دربرداشت وآن‌اینکه مشخص‌نمودکه نتیجه درست است». مورد استعمال این برهان دقیق محدود به‌یك‌کاربرد نیست. از آنچه که منحصراً برای یك مسئلهٔ معمولی‌لازم‌است ، فکرما پارافراتر می‌نهد ومناظر کاملا وسیعتری را می‌گشاید. عبوراز (A) به (B) ، یعنی‌ازبرش به‌جسم‌کامل ، درزبان جدید به‌نام عبور از عنصر بینهایت‌کوچك به‌مقدار محدود ویاعبور ازدیفرانسیل به‌انتگرال ، خوانده می‌شود. این عبور منشأ اعمال بسیار مهمی است وارشمیدس ، مردی‌که برای دیدن وقایع در منظرتاریخی آن ، دارای ارزشی باکفایت بود آن را به‌خوبـی می‌دانست : «ملاحظه‌کرده‌ام که این روش درریاضیات‌کم‌اهمیت نیست. حدس می‌زنم که بایك مرتبه درك‌آن ، برای سایر ریاضیدانان ، آنانی که زنده‌اند وآنهایی که به‌دنیا می‌آیند ، سرمشقی برای کشف قضایائی‌خواهد بودکه هنوزنتوانسته‌ام بدانها فکرکنم».

تصاعدها

ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری

II- تصاعد حسابی (= تصاعد عددی)

۵- تعریف

فرض کنیم اولین جملهٔ سری (a_n) برابر ۵ باشد و هر جملهٔ دلخواه دیگر، از افزودن عدد ۳ به جملهٔ قبلی بدست آید. یعنی: $a_1=5$ و $a_{n+1}=a_n+3$. چند جملهٔ اول این سری را می‌نویسیم:

$$a_1=5 \text{ و } a_2=a_1+3=8 \text{ و } a_3=a_2+3=11$$
$$a_4=a_3+3=14 \text{ و } \cdots$$

تعریف- سری عددی را که هر جمله (بعد از جملهٔ اول) آن با افزودن عددی معین به جملهٔ قبلیش بدست آید یك **تصاعد حسابی** یا **عددی** گویند.

از تعریف فوق این نتیجه را می‌توان گرفت که در تصاعد حسابی (a_n) تفاضل بین جملهٔ دلخواه و جملهٔ قبلش مقداری است معین و ثابت:

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=$$
$$=a_{n+1}-a_n=\cdots$$

این مقدار معین و ثابت را **قدر نسبت** تصاعد گویند. قدر نسبت تصاعد حسابی را با حرف d نشان می‌دهند (حرف اول کلمه لاتین differentia به معنی تفاضل) به این ترتیب تصاعد حسابی (a_n) به صورت زیر تعریف و داده می‌شود: $a_{n+1}=a_n+d$ و $a_1=a$ که در آن a عددی است معین. برای دادن یك تصاعد عددی (a_n) کافی است اولین جملهٔ آن a_1 و قدر نسبت آن d را بدهیم.

مثلا اگر $a_1=1$ و $d=1$ باشد در این صورت تصاعد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... را خواهیم داشت که سری اعداد طبیعی است.

هرگاه $a_1=1$ و $d=2$ باشد تصاعد عبارت خواهد بود از سری اعداد فرد طبیعی:

$$1,3,5,7,9,\cdots$$

واضح است که تصاعدی که قدر نسبتش مثبت باشد یك سری صعودی و در صورتی که قدر نسبت آن منفی باشد یك سری نزولی خواهد بود. و اگر قدر نسبت تصاعد حسابی صفر باشد در این صورت کلیهٔ جمله‌هایش مساوی خواهند بود و یك سری ثابت خواهیم داشت.

تمرینات

۲۲- پنج جملهٔ اول تصاعد حسابی (a_n) را بنویسید:

a) $d=4$ ، $a_1=10$

b) $d=-0/2$ و $a_1=1/7$

۲۳- در تصاعد حسابی (b_n) دو جملهٔ اول معلوم نیستند. مطلوبست تعیین آنها.

a) $b_1,b_2,17,23,29,\cdots$

b) $b_1,b_2,4\sqrt{2}-\sqrt{3},5\sqrt{2}-2\sqrt{3},$
$6\sqrt{2}-3\sqrt{3},\cdots$

۲۴- دو جمله از تصاعد حسابی (b_n) معلومند: $b_5=6$ و $b_6=10$. مطلوبست جملهٔ b_1.

۲۵- فرض کنیم (x_n) یك تصاعد حسابی باشد. مطلوبست بدست آوردن قدر نسبت تصاعد برحسب:

a) x_{11} و x_{10} b) x_{23} و x_{20}

۲۶- ثابت کنید که اعداد $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sqrt{3}$ یك تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند.

۲۷- آیا سری (b_n) تصاعد حسابی است در صورتی که:

a) $b_n=3n-1$ ، $1\leq n\leq 5$

b) $b_n=2-5n$ ، $1\leq n\leq 7$

c) $b_n=n^2-1$ ، $1\leq n\leq 10$

۲۸- ثابت کنید که: a) اگر سری (a_n) تصاعد حسابی

باشد هرجملهٔ بعد ازاولی مقدار متوسط دوجملـهٔ قبلی وبعدیش می‌باشد. یعنی:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad (n\geqslant 2)$$

b) اگر برای سه‌جملهٔ متوالی دلخواه a_{n-1} و a_n و a_{n+1} $(n\geqslant 2)$ ازیك سری مانند (a_n) رابطهٔ :

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

برقرار باشد دراین صورت این‌سری یك‌تصاعد عددی است.

۲۹ـ می‌دانیم که مقادیرزوایـای مثلثی تشکیل یك‌تصاعد حسابی‌را می‌دهند. ثابت کنیدکه مقـدار یکی از زوایای مثلث 60° می‌باشد.

۶ـ «فرمول جملهٔ n ام تصاعدحسابی»

بادانستن جملهٔ اول تصاعد حسابی (a_n) وقدر نسبت‌آن می‌توان باکمك محاسبات متوالـی جمله دلخواه این تصاعد را بدست‌آورد.

مثلا اگر $a_1=2/3$ و $d=0/45$ باشد دراین‌صورت $a_2=2/75$ ، $a_3=3/2$ ، $a_4=3/65$ وغیره. فرض کنیم لازم است که جملهٔ دهم تصاعدی حسابی راکه جملهٔ اول و قدر نسبت‌آن داده شده‌است بدست آوریم. این‌مسئله رامی‌توان بدین ترتیب حل کردکه تمام جملات ازدومی تادهمی‌را بدست آوریم. برای بدست‌آوردن جملهٔ‌صدم معلـوم است‌که محاسبات بسیاری باید انجام‌دهیم. آیا روش ساده‌تری برای محاسبهٔ جملهٔ دلخواه تصاعد حسابی موجود نیست؟

طبق تعریف تصاعد حسابی‌داریم:

$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$$
$$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d$$
$$a_6=a_1+5d$$

به‌آسانی می‌توان دیدکه :

$$a_{10}=a_1+9d \text{ و } a_{23}=a_1+22d$$

درحالت‌کلی داریم:

$$a_n=a_1+d(n-1)\qquad (1)$$

به این ترتیب فرمولی بـدست آوردیم که به کمك‌آن می‌توان جملهٔ nام تصاعدحسابی‌را برحسب جملهٔ اول‌وقدرنسبت وشمارهٔ ترتیب جمله بدست‌آورد .

مثلا: ۱ـ به‌مسئله‌ای که درابتدای‌این‌قسمت بررسی کردیم برمی‌گردیم. فرض‌کنیم بخواهیم جملهٔ صدم‌تصاعد حسابی(a_n) راپیداکنیم‌که جملهٔ‌اول‌آن ۲/۳ وقدرنسبتش ۰/۴۵ باشد. از فرمول (۱) استفاده می‌کنیم:

$$a_{100}=2/3+0/45(100-1)=$$
$$=47/3-0/45=46/85$$

۲ـ پیداکنید جملهٔ k ام تصاعدحسابی (b_n) راکه جملهٔ اول‌آن برابر ۷ وقدرنسبتش برابر $-0/5$ است .

b_k را از فرمول (۱) پیدا می‌کنیم:

$$b_k=7-0/5(k-1)=-0/5k+7/5$$

۳ـ بگوئیدآیا اعداد ۷۱و۱۰۰ جمله‌های تصاعد حسابی زیر می‌باشند؟

$$-10,-5/5,-1,+3/5,\cdots$$

فرض می‌کنیم جملهٔ شمارهٔkام این‌تصاعد برابر۷۱باشد، دراین‌صورت تساوی زیربرقرار خواهد بود:

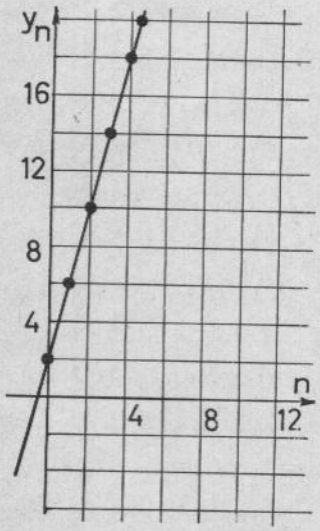
$$71=-10+4/5(k-1)\Longrightarrow 4/5(k-1)=81$$
$$\Longrightarrow k-1=18\Longrightarrow k=19$$

نتیجه می‌گیریم‌که عدد ۷۱ جملهٔ ۱۹ام تصاعد حسابی‌می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم جملهٔ m ام این تصاعد برابر ۱۰۰ باشد. داریم:

$$100=-10+4/5(m-1)\Longrightarrow m=25\frac{4}{9}$$

ولـی $25\frac{4}{9}$ نمی‌تواند شمارهٔ ترتیب جمله‌ای ازتصاعـد باشد زیرا شمارهٔ ترتیب عددی‌است طبیعی. پس‌درتصاعد داده‌شده‌جملهٔ برابر ۱۰۰ نداریم.



n امین جملهٔ تصاعد حسابی (a_n) راکه درآن $a_1=6$ و $d=4$ بـرابـر است‌با :

$$a_n=6+4(n-1)=4n+2$$

فـرمـول به صورت $y=kx+b$ نمایش تابعی است خطـی . بنـابـراین تصاعـد حسابی (a_n) تابعی است خطی :

$(y=a_n$ و $k=۴$ و $x=n$ و $b=۲)$

که روی مجموعهٔ اعداد طبیعی N معین است . شکل این تابع مجموعه‌ای است از نقاط (۱و۶) و (۲و۱۰) و (۳و۱۴) وغیره که روی یك خط راست به معادلهٔ $y=۴x+۲$ قرار گرفته‌اند (شکل صفحهٔ قبل).

بطور کلی کلیهٔ تصاعدهای حسابی توابع خطی‌اند که روی مجموعهٔ اعداد طبیعی داده شده‌اند . این موضوع را به آسانی می‌توان با نوشتن جملهٔ nام تصاعد حسابی :

$a_n=a_۱+d(n-۱)$ درك کرد:

$a_n=dn+(a_۱-d)$

دراینجا $y=a_n$ و $k=d$ و $x=n$ و $b=a_۱-d$ می‌باشد .

تمرینات

۳۰ـ فرض کنیم (a_n) تصاعد حسابی باشد که جملهٔ اول آن $a_۱$ وقدر نسبتش d است. مطلوبست مقادیر :

$a_{۲m}$ ، a_m ، $a_{۱۲۶۰}$ ، $a_{۱۰۰}$ ، $a_{۲۶}$ ، $a_{۱۵}$ ، $a_۳$

۳۱ـ در تصاعد حسابی (c_n) داریم $c_۱=۲۰$ و $d=۳$ پیدا کنید $c_۵$ ، $c_{۱۰۱}$ ، $c_{n-۳}$ را.

۳۲ـ پیدا کنید $a_۱$ را درصورتی که :

a) $a_{۱۰}=۱۳۱$ ، $d=۱۲$

b) $a_{۱۰۰}=۰$ و $d=-۳$

۳۳ـ مطلوبست قدر نسبت تصاعد حسابی که در آن :

a) $a_۱=-۷$ ، $a_{۱۶}=۲$

b) $a_{۴۷}=۷۴$ ، $a_{۷۴}=۴۷$

۳۴ـ آیا اعداد ۱۴۳ ، ۲۶۲ ، ۵۵۱ متعلق به تصاعد حسابی زیر می‌باشند؟

$۳,۱۰,۱۷,۲۴,\cdots$

۳۵ـ در تصاعدی حسابی جملهٔ ۳۱ام برابر ۱۷ وقدر نسبت ۲/۵ می‌باشد. پیدا کنید جملهٔ ۴۱ ام و ۴۷ ام این تصاعد را.

۳۶ـ مطلوبست شکل ترسیمی تصاعد عددی (y_n) در صورتی که :

a) $y_۱=۲$ و $d=۰/۵$ و $۱\leqslant n\leqslant ۸$

b) $y_۱=۵$ و $d=-۱/۵$ و $۱\leqslant n\leqslant ۶$

معادلهٔ خطی را بنویسید که این نقاط روی آن قرار دارند.

۳۷ـ سری بافرمول $b_n=۲n+۳$ داده شده است . مطلوبست مقدار تفاضل :

a) $b_۲-b_۱$

b) $b_{۱۰}-b_۹$

c) $b_{k+۱}-b_k$

آیا این سری یك تصاعد عددی می‌باشد؟

۳۸ـ سری (y_n) توسط جملهٔ nام آن داده شده است:

a) $y_n=۲n-۵$

b) $y_n=-۳n+۲$

ثابت کنید که سری (y_n) تصاعد عددی است، سپس قدر نسبت آنرا پیدا کنید.

۷ـ فرمول مجموع n جملهٔ اول تصاعد حسابی

فرض کنیم بخواهیم مجموع صد عدد اول اعداد طبیعی را بدست آوریم. جواب را می‌توان ازجمع کردن متوالی اعداد به ترتیب صعودی بدست آورد. معلوم است که چنین راه حلی بسیار مشکل است. سعی می‌کنیم نتیجه را به طریق دیگر بدست آوریم. مجموع اعداد طبیعی ازیك تا صد را یك بار به ترتیب صعودی و باردیگر به ترتیب نزولی می نویسیم:

$$۱+۲+۳+\cdots+۹۸+۹۹+۱۰۰$$

$$۱۰۰+۹۹+۹۸+\cdots+۳+۲+۱$$

به‌آسانی متوجه می‌شویم که مجموع دو عددی که زیرهم نوشته شده‌اند در کلیهٔ موارد مقداری است معین:

$$۱+۱۰۰=۲+۹۹=۳+۹۸=\cdots$$
$$=۹۸+۳=۹۹+۲=۱۰۰+۱$$

مجموع هرجفت ازاین اعداد برابراست با ۱۰۱ و تعداد این جفتها معلوم است که ۱۰۰ می‌باشد. بنابراین:

$$۱+۲+۳+\cdots+۹۸+۹۹+۱۰۰=$$
$$=\frac{۱۰۱\times ۱۰۰}{۲}=۱۰۱\times ۵۰=۵۰۵۰$$

ازهمین روش برای محاسبهٔ مجموع n جملهٔ یك تصاعد حسابی استفاده می‌کنیم.

مجموع n جملهٔ اول تصاعد حسابی (a_n) را به S_n نشان داده و این مجموع را دوبار و در دو جهت معکوس نسبت به هم می‌نویسیم:

(۱)

$$S_n=a_۱+a_۲+a_۳+\cdots+a_{n-۲}+a_{n-۱}+a_n$$

(۲)

$$S_n=a_n+a_{n-۱}+a_{n-۲}+\cdots+a_۳+a_۲+a_۱$$

اگر روابط (۱) و (۲) را جزء به جزء باهم جمع کنیم خواهیم داشت :

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+$$
$$+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_{n-2}+a_3)+$$
$$+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$$

درسمت راست تساوی اخیر مجموع جفتهای داخل پرانتز ها برابرند با a_1+a_n زیرا:

$$a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+(a_n-d)=a_1+a_n$$
$$a_3+a_{n-2}=(a_2+d)+(a_{n-1}-d)=$$
$$=a_2+a_{n-1}=a_1+a_n\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

به‌این ترتیب داریم:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$$
$$=a_{n-2}+a_3=a_{n-1}+a_2=a_n+a_1$$

تعداد چنین جفتهایی برابر n است. بنابراین.

$$2S_n=(a_1+a_n)\cdot n\Longrightarrow S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

مثال: پیداکنید مجموع بیست جملهٔ اول تصاعدحسابی (b_n) را:

$1,3/5,6,\cdots$

اولین جملهٔ تصاعد برابر واحد وقدر نسبتش ۲/۵ می‌باشد. جملهٔ ۲۰ام این تصاعد راپیدا می‌کنیم:

$$b_{20}=1+2/5(20-1)=1+2/5\times 19=48/5$$

حال می‌توان مجموع مورد نظررا پیداکرد:

$$S_{20}=\frac{(1+48/5)\times 20}{2}=49/5\times 10=495$$

توضیح: در فرمول $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ مقدار a_n را ازفرمول $a_n=a_1+d(n-1)$ جایگزین می‌کنیم خواهیم داشت:

$$S_n=\frac{a_1+a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=$$
$$=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$$

بدین ترتیب فرمولی بدست آوردیم که مجموع n جملهٔ اول تصاعد حسابی را برحسب جملهٔ اول، قدرنسبت وعدد n بدست می‌دهد.

تمرینات:

۳۹ـ پیداکنید مجموع ۲۰۰ جملهٔ اول تصاعد حسابی (c_n) را درصورتی‌که:

a) $c_1=10$ ، $c_{200}=350$

b) $c_1=50$ ، $c_{200}=-125$

۴۰ـ پیداکنید مجموع۸ جملهٔ اول تصاعد حسابی(a_n) که درآن:

a) $d=3$ ، $a_1=-23$

b) $d=-4$ ، $a_1=9$

۴۱ـ پیداکنید مجموع ۱۰ جملهٔ اول تصاعد حسابی:

a) $\frac{6}{7}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{17}{21}$ و .....

b) $-\sqrt{8}$ و $-\sqrt{2}$ و ۰ و .....

۴۲ـ پیداکنید مجموع:

a) ۵۰ جملهٔ اول سری‌اعداد طبیعی.

b) کلیهٔ اعداد دو رقمی.

۴۳ـ پیداکنید مجموع n جمله اول‌تصاعد حسابی(x_n) که درآن:

a) $x_n=2n-1$

b) $x_n=4-\frac{1}{2}n$

۴۴ـ پیدا کنید اولین جملهٔ و قدر نسبت تصاعد حسابی (a_n) را درصورتی‌که:

a) $\begin{cases}a_1+a_5=24\\ a_2\cdot a_3=60\end{cases}$

b) $\begin{cases}a_2+a_3+a_4=3\\ a_2\cdot a_4=-8\end{cases}$

۴۵ـ مجموع S_n از n جملهٔ اول تصاعد حسابی (a_n) معلوم است. پیداکنید:

a) چهارجملهٔ اول تصاعد را درصورتی‌که:

$$S_n=\frac{n^2}{4}-n$$

b) اولین جمله و قدر نسبت تصاعد را در صورتی‌که:

$$S_n=2n^2+3n$$

نامساویهای جبری

ترجمهٔ : سعید شعاری نژاد

(دنبالهٔ ازشمارهٔ قبل)

۶ـ نامساویهای مربوط بههمهٔ واسطهها

۶ـ۱: فرض کنید a_1 و ... و a_n اعداد مثبت باشند. برای هرعدد گویای $r \neq 0$ ، عدد مثبت:

$$\left(\frac{a_1^r + \cdots + a_n^r}{r}\right)^{\frac{1}{r}}$$

ممکن‌است بهعنوان کلیهٔواسطه‌های عددی a_1 و ... و a_n باشد. این‌عدد بهصورت $M_r(a_1 \cdots a_n)$ یا $M_r(a)$ نشان داده می‌شود. واسطهٔعددی معمولی فقط $M_1(a)$ می‌باشد.

$M_0(a)$ بهعنوان واسطهٔ هندسی معمولی $(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ تعریف می‌شود . دلیل این تعریف رابطهٔ زیر می‌باشد که خارج ازبحث این‌قسمت است:

$$\lim_{r \to 0} M_r(a) = M_0(a)$$

بابکاربردن این‌نوع واسطه بعضی‌از قضایای قبلی‌را باکمی‌تغییر می‌توان نوشت.

قضیهٔ واسطهها $(AM \geqslant GM)$

$M(a) \geqslant M_0(a)$ است که‌اگروفقط‌اگر $a_1 = \cdots = a_n$ باشد تساوی تحقق می‌یابد.

برای‌اعدادمثبت $a_1, \cdots, a_n$ و $b_1, \cdots, b_n$ ، $M_r(ab)$ بر $M_r(a_1 b_1 \cdots a_n b_n)$ دلالت می‌کند.

نامساوی‌کوشی، محدود به اعدادمثبت چنین می‌شود.

$$M_1(ab) < M_2(a) M_2(b)$$

صورت تساوی موقعی اتفاق می‌افتد که فقط وفقط:

$$a_1 : \cdots : a_n = b_1 : \cdots : b_n$$

نامساوی چپسفکی را می‌توان بهصورت زیرنیز بیان‌کرد . اگر $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ و $b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ باشد در این صورت :

$$M_1(ab) \geqslant M_1(a) M_1(b)$$

بانتیجه‌ای‌که اگر k_1 و ... و k_n عددهای گویای مثبت‌باشند.

$$\left\{M_{k_1 + \cdots + k_n}(a)\right\}^{k_1 + \cdots + k_n} \geqslant \left\{M_{k_1}(a)\right\}^{k_1} \cdots \left\{M_{k_n}(a)\right\}^{k_n}$$

قضیه ۳ـ۴ بهصورت زیردر می‌آید:

اگر r و q و p عددهای گویاباشندبطوری‌که $p-q-r$ و r همعلامت باشند وهیچ‌یك ازاعداد p و q و $p-r$ و $q+r$ صفر نباشند :

$$\left\{M_p(a)\right\}^p \left\{M_q(a)\right\}^q \geqslant \left\{M_{p-r}(a)\right\}^{p-r} \left\{M_{q+r}(a)\right\}^{q+r}$$

۶ـ۲: خواص مقدماتی $M_r(a)$

۶ـ۲ـ۱: برای کلیهٔ مقادیر گویای r ، $M_r(a) = 1$ وقتی‌است که $a_1 = \cdots = a_n = 1$. این موضوع بطور واضح ازتعریف پیداست.

۶ـ۲ـ۲: برای کلیهٔ مقادیر گویای r وبرای هرعدد گویای $k \neq 0$

$$M_r(a) = [M_{rk}(a^{\frac{1}{k}})]k$$

باتوجه به‌این رابطه مشاهده می‌شودکه برهر i فقط b_i مثبت واحدی وجود دارد بطوری‌که $a_i = b_i^k$ و اگر $r \neq 0$ باشد:

$$M_r(a) = \left[\frac{(a_1^r + \cdots + a_n^r)}{n}\right]^{\frac{1}{r}} = \left[\left\{\frac{(b_1^{rk} + \cdots + b_n^{rk})}{n}\right\}^{\frac{1}{kr}}\right]^k = [M_{rk}(b)]^k$$

واگر $r=0$ باشد:

$$M_0(a)=(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=(b_1\cdots b_n)^{\frac{k}{n}}$$
$$=[M_0(b)]^k$$

۳-۲-۶ : برای هرعدد گویای مثبت r:

$$M_r(a)\geqslant M_0(a)\geqslant M_{-r}(a)$$

وتساوی درصورت برقراری رابطهٔ $a_1=\cdots=a_n$ می‌باشد (همچنین بهقضیهٔ ۴ — ۶ مراجعه کنید).

بااستفاده ازقضیهٔواسطه‌ها

$$\frac{(a_1^r+\cdots+a_n^r)}{n}\geqslant(a_1\cdots a_n)^{\frac{r}{n}}$$

تساوی درصورت تساوی $a_1=\cdots=a_n$ واقع می‌شود . با بتوان $\frac{1}{r}$ رساندن دوطرف نامساوی خواهیم داشت:

$$M_r(a)\geqslant M_0(a)$$

دوبارهٔ ،

$$\frac{(a_1^{-r}+\cdots+a_n^{-r})}{n}\geqslant(a_1\cdots a_n)^{\frac{-r}{n}}$$

با بتوان $\frac{-1}{r}$ رساندن دوطرف نامساوی خواهیم‌داشت :

$$M_0(a)\geqslant M_{-r}(a)$$

۳-۶: نامساوی هودر (Hölder)

ابتدا به اصول نامساویهای دستهٔاخیر می‌پردازیم.

اگر a_1 ، $\cdots$ ، a_n و b_1 ، $\cdots$ ، b_n دومجموعه اعداد مثبت نامتناسب باشند ، و اگـر p و p' اعدادگویای مخالف صفر باشند بطوری‌که $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ دراین‌صورت:

$$M_1(ab)<\text{ یا }>M_p(a)M_{p'}(b)$$

در صورتی‌که p' و p هر دو می‌توانند مثبت یا منفی‌باشند.

(I)- ابتدا فرض می‌کنیم pوp' هردو مثبتند . دو عدد گویارا دریك زمان می‌توان به‌صورت $\frac{S}{r}$ و $\frac{S}{r'}$ بیان‌کرد که S،rوr' اعدادصحیح مثبت هستندو:

$$r+r'=S \text{ یا } \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

برای هر i ، اعداد مثبت α_i و β_i را بوسیلهٔ تساویهای $a_i=\alpha_i^{\frac{r}{s}}$ و $b_i=\beta_i^{\frac{r'}{s}}$ تعریف می‌کنیم. بعد با استفاده از قضیهٔ (۵—۳) چنین بدست می‌آید :

$$\frac{r\alpha_i}{SM_1(\alpha)}+\frac{r'\beta_i}{SM_1(\beta)}\geqslant$$

$$\left(\frac{\alpha_i}{M_1(\alpha)}\right)^{\frac{s}{r}}\left(\frac{\beta_i}{M_1(\beta)}\right)^{\frac{r'}{s}}$$

چون a_1و$\cdots$وa_n با b_1 و $\cdots$ وb_n متناسب نیستند،پس α_1 و $\cdots$ و α_n و β_1 و$\cdots$وβ_n نیزمتناسب نخواهند بود، بنابراین‌حداقل یکی‌ازعلامتهای$\geqslant$ درنامساویهای اخیر می‌توانند بوسیله $>$ جایگزین شود. بااضافه‌کردن‌مشابه طرفین نامساوی وتقسیم نتیجه به n، خواهیم‌داشت:

$$1=\frac{r}{S}+\frac{r'}{S}>\frac{M_1(\alpha^{\frac{r}{s}}\beta^{\frac{r'}{s}})}{\left\{M_1(\alpha)\right\}^{\frac{r}{s}}\left\{M_1(\beta)\right\}^{\frac{r'}{s}}}$$

$$\left\{M_1(\alpha)\right\}^{\frac{s}{r}}\left\{M_1(\beta)\right\}^{\frac{r'}{s}}>M_1(ab)$$

$$\left\{M_1(a)\right\}^{\frac{r}{s}}=\left\{\frac{(\alpha_1+\cdots+a_n)}{n}\right\}^{\frac{r}{s}}=$$

$$=\left\{\frac{(\alpha_1^{\frac{r}{s}}+\cdots+\alpha_n^{\frac{r}{s}})}{n}\right\}^{\frac{r}{s}}=M_p(\alpha)$$

$$M_p(a)M_{p'}(b)>M_1(ab)$$

(II)- حـالا فرض‌کنیم ، یکی از اعداد p وp' ، مثلا p، منفی باشد، دراین صورت p'مثبت است وداریم :

$\frac{1}{p'}=1+(\frac{1}{-p})$ یـا $1+p'=(\frac{-p'}{p})$. فـرض مـی‌کنیم $\rho=-\frac{p}{p'}$ و $\rho'=\frac{1}{p'}$ و دراین‌صورت ρ و ρ' هر دو اعداد مثبتند و $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=1$ برای‌هر i، چنین‌تعریف می‌کنیم: $\delta_i=(a_ib_i)^{\rho'}$ و $\gamma_i=a_i^{-\rho'}$ در صورتی‌که اعداد مثبت γ_n و $\cdots$ و γ_1 متناسب بااعداد مثبت δ_nو$\cdots$وδ_1

نیستند. با استفاده از قسمتی از قضیه‌ای که اخیراً ثابت شد؛

$$M_p(\gamma)M_{p'}(\delta)>M_1(\gamma\delta)$$

$$M_1(\gamma\delta)=M_1(b^{p'})=\{M_{p'}(b)\}^{p'}$$

$$M_p(\gamma)=\left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{-p'}{p}}=\{M_p(a)\}^{-p'}$$

$$M_{p'}(\delta)=\left(\frac{(a_1b_1)^{p'p'}+\cdots+(a_nb_n)^{p'p'}}{n}\right)^{\frac{1}{p'}}=$$

$$=\{M_1(ab)\}^{p'}$$

$$\{M_p(a)\}^{-p'}\{M_1(ab)\}^{p'}>\{M_{p'}(b)\}^{p'}$$

چون $p'>0$ ، در نتیجه:

$$M_1(ab)>M_p(a)M_{p'}(b)$$

۱-۳-۶:

قسمت اول نامساوی هودر را به آسانی بوسیلهٔ استقراء می‌توان به نتایج زیر بسط داد.

اگر p_m و ... و p_1 اعداد گویا باشند، بطوری که $p_1^{-1}+\cdots+p_m^{-1}=1$، در این صورت

$M_1(ab\cdots c)<M_{p_1}(a)\cdots M_{p_m}(c)$ که a_1 و ... و a_n و ... b_1 و ... و b_n، ... و c_1 ... و c_n مجموعهٔ اعداد مثبتند و هیچکدام از مجموعه‌ها با هم‌متناسب نیستند.

مثال۱- ثابت کنید که دوقسمت نامساوی هودر به‌صورت عبارت ذیل نمایش داده می‌شوند. اگر p و p' بر دو مخالف صفر باشند بطوری که $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ باشد ، در این‌صورت

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^{pp'}<$$

$$(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{p'}(b_1^{p'}+\cdots+b_n^{p'})^p$$

که a_1 و ... و a_n و b_1 ... و b_n دو مجموعهٔ اعداد مثبت‌اند و با هم مناسبتی ندارند.

مثال۲- نشان دهید که نامساوی‌هودر وقتی $p=p'=2$ باشد به نامساوی کوشی تبدیل می‌شود.

مثال۳- اگر c_1 و ... و c_n و d_1 و ... و d_n دو مجموعهٔ اعداد مثبت نامتناسب باشند و اگر t و t' عددهای گویای مخالف صفر باشند بطوری که $t'+t=1$ در این‌صورت:

$$(c_1^td_1^{t'}+\cdots+c_n^td_n^{t'})^{\frac{1}{tt'}}<$$

$$(c_1+\cdots+c_n)^{\frac{1}{t'}}(d_1+\cdots+d_n)^{\frac{1}{t}}$$

مثال۴-

$$(c_1^{\frac{1}{3}}d_1^{\frac{2}{3}}+\cdots+c_n^{\frac{1}{3}}d_n^{\frac{2}{3}})<$$

$$(c_1+\cdots+c_n)^{\frac{1}{3}}(d_1+\cdots+d_n)^{\frac{2}{3}}$$

۴-۶: از نتیجهٔ ۳-۲-۶ باطریقهٔ مناسب استقراء وقتی $M_r(a)$ با تغییر r تغییرمی‌کند می‌توان نتایج کاملتروبیشتر را اثبات کرد.

برای هرعدد گویای r و s بطوری که $r<s$ باشد ،

$$M_r(a)<M_s(a)$$

باتوجه به ۳-۲-۶، فقط احتیاج به ملاحظهٔ حالتی که r و s هردو مخالف صفر هستند داریم.

$$\left(\frac{s}{r}\right)^{-1}+\left(\frac{s}{r'}\right)^{-1}=1 \quad \text{یعنی} \quad r+r'=s$$

اگر $r>0$، $\frac{s}{r}$ و $\frac{s}{r'}$ هردو مثبت باشندنامساوی‌هورد از $M_p(a)=\{M_1(a^r\times 1)\}^{\frac{1}{r}}$ نتیجه می‌دهد:

$$M_r(a)<\{M_{\frac{s}{r}}(a^r)\times M_{\frac{s}{r'}}(1)\}^{\frac{1}{r}}=\{M_{\frac{s}{r}}(a^r)\}^{\frac{1}{r}}=$$

$$=M_s(a)$$

همچنین می‌توان از ۲-۲-۶ نیز استفاده کرد.

اگر $r<0$، یکی از $\frac{s}{r}$ و $\frac{s}{r'}$ مثبت‌باشد، بطوری که دیگر منفی خواهد شد

$M_1(a^r\times 1)>M_{\frac{s}{r}}(a^r)\times M_{\frac{s}{r'}}(1)=M_{\frac{s}{r}}(a^r)$ اماچون $r<0$ پس:

$\{M_1(a^r\times 1]^{\frac{1}{r}}<\{M_{\frac{s}{r}}(a^r)\}^{\frac{1}{r}}$ ومحاسبهٔلازم مثل‌محاسبهٔ قبلی می‌باشد.

۵-۶: نامساوی مینکوسکی

اگر a_1 و ... و a_n ، b_1 و ... و b_n دو مجموعهٔاعداد مثبت بوده وهیچ‌نسبتی‌باهم نداشته‌باشند، و اگر $c_i=a_i+b_i$ باشد که $i=1$ و ... و n برای هرعدد گویای:

$$r>1 \ : \ M_r(a)+M_r(b)>M_r(c) \qquad (I)$$

$$r<1 \ : \ M_r(a)+M_r(b)<M_r(c) \qquad (II)$$

اگر $r=1$ فقط تساوی زیر اتفاق می‌افتد

$$M_1(a)+M_1(b)=M_1(c)$$

(I) فرض کنید $r>1$ عدد گویای مثبت r' وجود دارد بطوری که $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$ از اینرو بابکار بردن نامساوی‌هودر خواهیم‌داشت:

$$n\{M_r(c)\}^r=c_1^r+\cdots c_n^r$$

$$=(a_1c_1^{r-1}+\cdots+a_nc_n^{r-1})+$$

$$+(b_1c_1^{r-1}+\cdots b_nc_n^{r-1})$$

$$<(a_1^r+\cdots+a_n^r)^{\frac{1}{r}}(c_1^{(r-1)r'}+\cdots+c_n^{(r-1)r'})^{\frac{1}{r'}}$$

$$+(b_1^r+\cdots+b_n^r)^{\frac{1}{r}}(c_1^{(r-1)r'}+\cdots+c_n^{(r-1)r'})^{\frac{1}{r'}}$$

$$=n^{\frac{1}{r}}\{M_r(a)+M_r(b)\}(c_1^r+\cdots+c_n^r)^{\frac{(r-1)r'}{r}}$$

$$=n^{\frac{1}{r}}\{M_r(a)+M_r(b)\}\times n^{\frac{r-1}{r}}\{M_r(c)\}^{r-1}$$

و بنابراین:

$$M_r(c)<M_r(a)+M_r(b)$$

(II) فرض بعدی $r<1$ است اماه $r\neq$ یك عدد گویای منفی r وجود دارد بطوری که $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$ بحث کاملامشابه قبلی است و نشان می‌دهد که $M_r(c)>M_r(a)+M_r(b)$ وقتی که $r=0$ می‌باشد ناچاریم ثابت کنیم که

$$(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}+(b_1\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}<$$

$$\{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)\}^{\frac{1}{n}}$$

با استفاده از قضیهٔ واسطه‌ها برای اعداد نامساوی

$$\frac{a_1}{a_1+b_1}\ \text{و}\cdots\text{و}\ \frac{a_n}{a_n+b_n}$$

داریم

$$\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdots\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)^{\frac{1}{n}}<\frac{\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)}{n}$$

و بطور مشابه

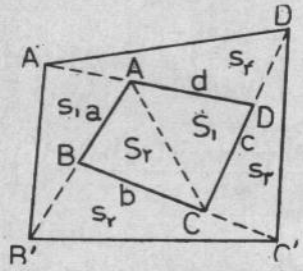
$$\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdots\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)^{\frac{1}{n}}<\frac{\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)}{n}$$

از جمع نظیر به نظیرطرفین دو نامساوی مقصود حاصل‌می‌شود.

دنباله دارد

تعمیم چند مسئلهٔ ریاضی (دنباله از صفحهٔ ۱۴۰)

مسئلهٔ۴ـ اگر در مسئله قبل به جای مثلث یك چهار ضلعی محدب داشته باشیم چه وضعی پیش می‌آید؟ (مساحت چهار ضلعی حاصله را بدست‌آورید)



حل‌ـ فرض کنیم:

$$BB'=ka \text{ و } CC'=lb \text{ و } DD'=mc$$

$$AA'=nd$$

اگر قطر AC را بکشیم داریم:

$$s_2=\frac{1}{2}ka(a+lb)\sin B=k(l+1)S_2$$

$$s_4=\frac{1}{2}mc(d+nd)\sin D=m(n+1)S_1$$

اگر قطر BD را بکشیم وفرض کنیم که $BCD=S_3$ مساحت و $ABD=S_4$ مساحت، دراین صورت:

$$s_1=n(k+1)S_4 \text{ و } s_3=l(m+1)S_3$$

$$S'=S+s_1+s_2+s_3+s_4=n(k+1)S_4+k(l+1)S_2+l(m+1)S_3+m(n+1)S_1+S$$

و اما $S_1+S_2=S$ و $S_3+S_4=S$ بنابراین اگر:

$$n(k+1)=l(m+1) \text{ و } k(l+1)=m(n+1)$$

در این صورت S' برحسب S به آسانی بدست می‌آید. (و یا اینکه ضرایب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 برابر باشند). در غیر این صورت وضع مشخص نیست. در حالتی که ضرایب با هم برابر باشند داریم:

$$\begin{cases} k(l+1)=m(n+1) \\ k(l+1)=l(m+1) \\ k(l+1)=n(k+1) \end{cases}$$

که دستگاهی‌است ازسه معادله باچهار مجهول. اگر این‌دستگاه را برحسب‌سه مجهول m و n و l برحسب k حساب کنیم‌جواب قابل قبول معادله $m=n=l=k$ خواهد بود و درنتیجه:

$$S'=2n(n+1)S+S$$

$$S'=(2n^2+2n+1)S$$

«دربارهٔ دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی درجهٔ دوم»

ترجمهٔ : مهندس فتح‌الله زرگری

در این مقاله کلیهٔ حالات دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوم به صورت کلی بررسی می‌گردند، این دستگاهها با روشهای معمول در ریاضیات متوسطه بررسی و حل خواهند شد، وحل این نوع دستگاهها منتهی به حل دستگاههایی با یك معادلهٔ درجهٔ دوم یك مجهولی و یك معادلهٔ درجهٔ اول دو مجهولی می‌گردد توجه می‌دهیم که حتی دستگاههای سادهٔ به صورت مثلا

$$\begin{cases} X+\sqrt{Y}=5 \\ Y+\sqrt{X}=6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y=5 \\ y+x=6 \end{cases}$$

را نمی‌توان با معلومات دبیرستانی حل کرد.

حل این دستگاه منجر به حل معادلهٔ درجهٔ چهارم زیر می‌گردد:

$$(5-x^2)^2+x=6$$

روش حل چنین معادلات رادردرس ریاضیات عالی بررسی می‌کنند.

در این مقاله ثابت می‌شود (مثالهای عددی بررسی‌شده) که دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوم نسبت به x و y به صورت:

$$\begin{cases} A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0 & (1) \\ A_2x^2+2B_2xy+C_2y^2+2D_2x+2E_2+F_2=0 & (2) \end{cases}$$

در حالات زیر به‌سادگی قابل حل می‌باشد.

I) دستگاه خطی

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+D_1=0 \\ B_1x+C_1y+E_1=0 \end{cases} \qquad (3)$$

دارای فقط یك جواب به صورت $x=x_1$ و $y=y_1$ می‌باشدو دستگاه

$$\begin{cases} A_2x+B_2y+D_2=0 \\ B_2x+C_2y+E_2=0 \end{cases} \qquad (4)$$

نیز دارای یك جواب به صورت $x=x_2$ و $y=y_2$ و منطبق برجواب دستگاه (۳) است.

II) عبارت سمت چپ یکی از معادلات دستگاه معادلات (۱) و (۲) قابل تجزیه به حاصل ضرب دوکثیرالجملهٔ درجهٔ اول نسبت به x و y می‌باشد. مثلا

$$A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1= \\ =(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$$

که این فقط و فقط وقتی ممکن است که:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix}=0$$

یعنی اینکه :

$$A_1(C_1F_1-E_1^2)-B_1(B_1F_1-E_1D_1)+ \\ +D_1(B_1E_1-C_1D_1)=0$$

همراه این دو حالت کلیهٔ دستگاههای به صورت (۲)و(۱) که حل آنها قابل بررسی در دبیرستان می‌باشند و خارج از چهارچوب ریاضیات متوسطه نمی‌باشند نیز تجزیه و تحلیل می‌گردند.

(اثبات این اظهارات در مقاله نخواهدآمد).

دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوم

$$\begin{cases} x^2+y=5 \\ y^2+x=6 \end{cases}$$

که قبلا آوردیم با شرایط فرموله شده در قسمتهای I و II قابل بررسی نمی‌باشد. به این جهت نمی‌توان آنرافقط بااتکای به ریاضیات متوسطه حل کرد.

هریك از این حالات را بررسی می‌کنیم.

۱) مجهول معاونهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را به ترتیب زیر درنظر می‌گیریم :

$$\begin{vmatrix} x=\bar{x}+x_1 \\ y=\bar{y}+y_1 \end{vmatrix}$$

که درآن x_1 و y_1 فعلا اعداد دلخواهی هستند. شرط لازم و

کافی برای آنکه معادلهٔ تغییریافته (۱) شامل‌مجهولات درجهٔ اول $\bar{x}$ و $\bar{y}$ نباشد این‌است که x_1 و y_1 دردستگاه (۳) صادق باشند.

به‌همین ترتیب برای آنکه در تبدیل $x=\bar{x}+x_2$ و $y=\bar{y}+y_2$ معادلهٔ (۲) شامل‌مجهولات‌درجهٔ اول $\bar{x}$ و $\bar{y}$ نباشد شرط لازم‌و کافی این‌است که x_2 و y_2 دردستگاه (۴) صادق باشند.

دترمینان ضرایب دستگاههای خطی (۳)و(۴) را به‌ترتیب با Δ_1 و Δ_2 نمایش می‌دهیم:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

هرگاه $\Delta_1\neq 0$ و $\Delta_2\neq 0$ باشند دراین صورت‌دستگاههای (۳) و (۴) معین و سازگارند. یعنی هـریـك از آنها دارای جواب منحصربه‌فرد می‌باشند:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ C_1 & E_1 \end{vmatrix}}{\delta_1} \quad \text{و} \quad y_1=\frac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ E_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\delta_1}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} B_2 & D_2 \\ C_2 & E_2 \end{vmatrix}}{\delta_2} \quad \text{و} \quad y_2=\frac{\begin{vmatrix} D_2 & A_2 \\ E_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\delta_2}$$

بررسی دستگاه معادلات (۱) و (۲) درحالتی که:

$$y_1=y_2=y_0 \quad \text{و} \quad x_1=x_2=x_0 \qquad (5)$$

باشد جالب خواهد بود.

قضیهٔ زیرصادق است:

دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔدوم دلخواه راکه‌برای آن‌روابط (۵) صادق‌باشند می‌توان به‌دستگاهی‌شامل معادله‌های همگن بدل کرد.

اثبات ـ فرض‌کنیم برای معادله‌های (۱) و (۲) داشته باشیم:

$$x_1=x_2=x_0 \quad \text{و} \quad y_1=y_2=y_0$$

مجهول معاونهای زیررا بکار می‌بریم:

$$x=\bar{x}+x_0 \quad \text{و} \quad y=\bar{y}+y_0$$

از آنجا که x_0 و y_0 در عین حال در دستگاههای معادلات (۳)و(۴) صادقند، بنابراین در دستگاه معادلات تبدیل شده، عناصری که شامل مجهولات درجهٔ اول جدید $\bar{x}$ و y می‌باشند حذف می‌گردند. ودر نتیجهٔ این چنین تبدیلی دستگاه معادلات (۱)و(۲) به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{cases} A_1\bar{x}^2+2B_1\bar{x}\bar{y}+C_1\bar{y}^2+F_1=0 & (6) \\ A_2\bar{x}^2+2B_2\bar{x}\bar{y}+C_2\bar{y}^2+\bar{F}_2=0 & (7) \end{cases}$$

که درآن:

$$\bar{F}_1=D_1x_0+E_1y_0+F_1$$

$$\bar{F}_2=D_2x_0+E_2y_0+F_2$$

هرگاه یا $\bar{F}_1=0$ ویا $\bar{F}_2=0$ باشند یکی ازمعادلات‌دستگاههای بدست‌آمده همگن خواهدبود.

هرگاه $\bar{F}_1$ و $\bar{F}_2$ مخالف صفر باشند ازضرب طرفین‌معادلهٔ (۶) در $\bar{F}_2$ و طرفین معادلهٔ (۷) در $\bar{F}_1$ و سپس تفریق طرفین آنها ازیکدیگر دستگاه معادلات زیررا بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \bar{A}_1\bar{x}^2+2\bar{B}_1\bar{x}\bar{y}+\bar{C}_1\bar{y}^2=0 & (8) \\ A_2\bar{x}^2+2B_2\bar{x}\bar{y}+C_2\bar{y}^2+\bar{F}_2=0 & (9) \end{cases}$$

که درآن:

$$\bar{A}_1=A_1\bar{F}_2-A_2\bar{F}_1$$

$$\bar{B}_1=B_1\bar{F}_2-B_2\bar{F}_1$$

$$\bar{C}_1=C_1\bar{F}_2-C_2\bar{F}_1$$

دستگاه معادلات (۸)و(۹) معادل دستگاه معادلات (۶)و (۷) می‌باشد.

معادلهٔ (۸) ازدستگاه بدست‌آمده همگن‌است وقضیه ثابت می‌باشد.

حل‌دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔ دوم که یکی‌ازآنها همگن‌باشد مشکل‌نیست. هرگاه $\bar{C}_1\neq 0$ باشددراین‌صورت $\bar{x}\neq 0$ خواهدبود. از تقسیم‌طرفین‌معادلهٔ (۸) بر $\bar{x}^2$ بدست می‌آوریم:

$$\bar{A}_1+2\bar{B}_1\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)+\bar{C}_1\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)^2=0$$

به‌فرض $\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=t$ به یك معادلهٔ درجهٔ دوم بـا ریشه‌های t_1 و t_2 می‌رسیم:

$$\bar{A}_1+2\bar{B}_1t+\bar{C}_1t^2=0$$

به‌همین ترتیب دستگاه معادلات (۸) و (۹) به دو دستگاه زیر تجزیه می‌گردند:

$$\begin{cases} y = t_1 \bar{x} \\ A_2 \bar{x}^2 + 2B_2 \bar{x}\,\bar{y} + C_2 \bar{y}^2 + \bar{F}_2 = 0 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} \bar{y} = t_2 \bar{x} \\ A_2 \bar{x}^2 + 2B_2 \bar{x}\,\bar{y} + C_2 \bar{y}^2 + \bar{F}_2 = 0 \end{cases}$$

حل دودستگاه اخیر که درآنها یکی‌ازمعادلات خطی‌است،منجر به حل معادلهٔ درجهٔ دوم می گردد.

مثال۱ـ دستگاه معادلات زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} 24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0 & (1') \\ x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 & (2') \end{cases}$$

حل ـ برای این‌دستگاه معادلات داریم:

$$x_1 = x_2 = x_0 = 1 \quad \text{و} \quad y_1 = y_2 = y_0 = -1$$

بنابراین‌این‌دستگاه معادلات رامی‌توان به‌دستگاه معادلاتی‌شامل معادله‌های همگن بدل کرد. باتغییر متغیرهای $x = \bar{x} + 1$ و $y = \bar{y} - 1$ دستگاه معادلات‌داده‌شده به‌صورت زیردر می‌آید:

$$\begin{cases} 24\bar{x}^2 - 25\bar{x}\,\bar{y} - 84 = 0 & (3') \\ \bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 7 = 0 & (4') \end{cases}$$

ازضرب طرفین معادلهٔ (۴′) درعدد ۱۲ وتفریق آن از معادلهٔ (۳′) دستگاه زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} 12\bar{x}^2 - 25\bar{x}\,\bar{y} + 12\bar{y}^2 = 0 & (5') \\ \bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 7 = 0 & (6') \end{cases}$$

که معادل دستگاه معادلات (۴′)ـ(۳′) می‌باشد. معادلهٔ اولی دستگاه اخیر همگن می‌باشد. باگرفتن مجهول معاون :

$$(\bar{x} \neq 0) \quad \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = t$$

به‌معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم.

$$12t^2 - 25t + 12 = 0 \Longrightarrow t_1 = \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad t_2 = \frac{4}{3}$$

به‌این ترتیب دستگاه دو معادلهٔ دو مجهول (۶′)ـ(۵′) به دو دستگاه زیر تجزیه می‌شود:

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{3}{4}\bar{x} \\ \bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \bar{y} = \frac{4}{3}\bar{x} \\ \bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 7 = 0 \end{cases}$$

که دارای جوابهای زیر می‌باشند:

(۴و۳)و(۳ـ و۴ـ)و(۳i و۴i)و(ـ۳i و ـ۴i)

($i = \sqrt{-1}$ بوده‌وجوابهای شامل i جوابهای غیرحقیقی‌دستگاه می‌باشند). بابرگشتن به‌مجهولات اصلی x و y جواب اصلی دستگاه معادلات به‌صورت زیر نتیجه می‌شوند:

(۵و۲)و(۳ـ و۴ـ)و(۱ + ۳i و ۱ ـ ۴i)

و (۱ ـ ۳i و ۱ ـ ۴i)

II ـ هرگاه برای یکی از معادلات دستگاه (۲)ـ(۱) مثلا برای معادلهٔ (۱)، $\Delta_1 \neq 0$ باشد و به‌کمك مجهول معاون گرفتن‌بتوانیم آنراهمگن کنیم (یعنی $\bar{F}_1 = 0$)دراین‌صورت‌مستقل از شکل معادلهٔ درجهٔ دوم جواب این‌چنین دستگاهی نیز به کمك روشهای معمول‌درریاضیات متوسطه بدست می‌آید.

مثال۲ـ دستگاه زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0 & (1') \\ 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0 & (2') \end{cases}$$

حل ـ برای معادلهٔ اول $x_1 = 3$ و $y_1 = 0$ پس‌مجهول معاونهای $x = \bar{x} + 3$ و $y = \bar{y}$ را در نظر می‌گیریم. برای تعیین $\bar{x}$ و $\bar{y}$ دستگاه معادلات زیررا بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} \bar{x}^2 + 4\bar{x}\,\bar{y} + 3\bar{y}^2 = 0 & (\bar{1}) \\ 9\bar{x}^2 - 24\bar{x}\,\bar{y} + 16\bar{y}^2 + 34\bar{x} + 38\bar{y} - 29 = 0 & (\bar{2}) \end{cases}$$

اولین معادلهٔ این‌دستگاه همگن‌است. طرف چپ‌آنرامی‌توان به‌حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کرد:

$$\bar{x}^2 + 4\bar{x}\,\bar{y} + 3\bar{y}^2 = (\bar{x} + \bar{y})(\bar{x} + 3\bar{y}) = 0 \quad (3')$$

طبق رابطهٔ (۳′) دستگاه معادلات $(\bar{2})$ـ$(\bar{1})$ به دودستگاه زیر تجزیه می گردد :

$$\begin{cases} \bar{x} + \bar{y} = 0 \\ 9\bar{x}^2 - 24\bar{x}\,\bar{y} + 16\bar{y}^2 + 34\bar{x} + 38\bar{y} - 29 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x} + 3\bar{y} = 0 \\ 9\bar{x}^2 - 24\bar{x}\,\bar{y} + 16\bar{y}^2 + 34\bar{x} + 38\bar{y} - 29 = 0 \end{cases}$$

دودستگاه اخیرمعادل دستگاههای زیرند:

$$\begin{cases}\bar{y}=-\bar{x}\\ 49\bar{x}^2-4\bar{x}-29=0\end{cases}$$

و

$$\begin{cases}\bar{x}=-3\bar{y}\\ 169\bar{y}^2-64\bar{y}-29=0\end{cases}$$

با تعیین جوابهای این دو دستگاه و تبدیل آنها بـه مجهولات اصلی x و y کلیهٔ جوابهـای دستگاه داده شده بدست می‌آید (این نتایج رااز روش لاگرانژ نیزمی‌توان بدست آورد).

$$\left(\frac{149+5\sqrt{57}}{49} \text{ و } -\frac{2+5\sqrt{57}}{49}\right)$$

$$\left(\frac{149-5\sqrt{57}}{49} \text{ و } -\frac{2-5\sqrt{57}}{49}\right)$$

$$\left(\frac{411-30\sqrt{237}}{169} \text{ و } \frac{32+5\sqrt{237}}{169}\right)$$

$$\left(\frac{411+30\sqrt{237}}{169} \text{ و } \frac{32-5\sqrt{237}}{169}\right)$$

هرگاه $\Delta_1=0$ (یا $\Delta_2=0$) باشد دراین‌صورت دستگاه (۳) (یا (۴)) یااصلا جواب ندارد ویا دارای بینهایت جواب است.

در حالت دوم طرف سمت چپ معادلهٔ (۱) (یا (۲)) به حاصل‌ضرب دوچند جمله‌ای درجهٔ اول تجزیه می‌گردد.

مثال۳ـ دستگاه زیررا حل کنید:

$$\begin{cases}4x^2-4xy+y^2+2x-y-2=0 & (1')\\ 2x^2+xy+y^2+x-y-4=0 & (2')\end{cases}$$

حل ـ طرف‌سمت‌چپ‌معادلهٔ اول‌رامی‌توان به‌حاصل‌ضرب عوامل اول به‌صورت زیرتجزیه کرد.

$$\begin{cases}(2x-y+2)(2x-y-1)=0\\ 2x^2+xy+y^2+x-y-4=0\end{cases}$$

دستگاه اخیربه دودستگاه به‌صورت زیرتجزیه می‌گردد:

$$\begin{cases}y=2x+2\\ 2x^2+xy+y^2+x-y-4=0\end{cases}$$

و

$$\begin{cases}y=2x-1\\ 2x^2+xy+y^2+x-y-4=0\end{cases}$$

از حل هریك از آنهـا جوابهای دستگاه داده شده را بـدست می‌آوریم:

$$\left(\frac{-9-\sqrt{145}}{16} \text{ و } \frac{7-\sqrt{145}}{8}\right)$$

و

$$\left(\frac{-9+\sqrt{145}}{16} \text{ و } \frac{7+\sqrt{145}}{8}\right)$$

$$\left(-\frac{3}{2} \text{ و } -\frac{1}{4}\right) \text{ و } (1 \text{ و } 1)$$

تمرینات : ۱ـ دستگاههای زیررا حل کنید

$$1)\begin{cases}x^2+xy+y^2-x+y-18=0\\ x^2-xy+y^2-3(x-y)-4=0\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}x^2+y^2-4x+6y+9=0\\ xy+3x-2y-6+9=0\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}4(x^2+xy+y^2)-2(7x+5y)-3=0\\ 4xy+2(x-y)-13=0\end{cases}$$

۲ـ مطلوبست مکان‌هندسی نقاطی ازصفحه که مختصاتشان (x و y) درشرایط زیرصادق باشند:

$$1)\begin{cases}3x^2+4xy+y^2-2x-1\leqslant 0\\ 5x^2+4xy+y^2-6x-2y+2=0\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}4x^2-4xy+y^2+2x-y-2\leqslant 0\\ 50x^2-20xy+2y^2-35x+7y-4\leqslant 0\end{cases}$$

۳ـ دستگاههای زیررا حل کنید:

$$1)\begin{cases}x^2-xy-2y^2-19x+32y+34=0\\ x^2-xy-y^2-16x+29y-9=0\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}2x^2+y^2-4x+2y+3=0\\ 5(x-1)^2+(y-2)^2=9\end{cases}$$

۴ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

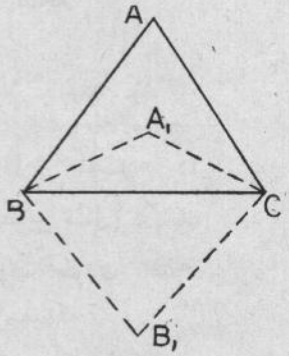
$$12\sin^2x-4\cos x-16\sqrt{3}\sin x+17=0$$

راهنمایی ـ مجهول معاون $X=\cos x$ و $Y=\sin x$ را انتخاب کنید.

تعمیم چند مسئلهٔ ریاضی

طرح وحل از **علی اصغری** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

مسئلهٔ ۱ ـ در مثلث ABC اگر A_1 محل تلاقی نیمسازهای داخلی B و C و B_1 محل تلاقی نیمسازهای خارجی B و C باشد دراین‌صورت داریم:



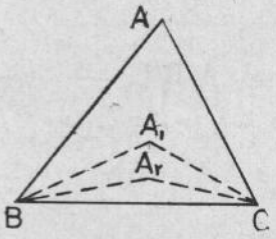
$$A_1 = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

و

$$B_1 = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

این مسئله که درکتاب درسی هندسهٔ چهارم ریاضی درج است به شرح زیر تعمیم داده می‌شود:

تعمیم ـ A_1 مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ABC و A_2 مرکز (دایرهٔ محاطی) داخلی A_1BC و A_n مرکز (دایرهٔ محاطی داخلی) A_nBC می‌باشد، اولا زاویهٔ A_n را برحسب زاویهٔ A



حساب کنید ثانیاً اگر n خیلی زیاد شود A_n چقدر می‌شود

حل ـ به ترتیب داریم:

$$A_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$$

$$A_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{A_1}{2} \Longrightarrow A_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{A}{4}$$

$$A_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{A_2}{2} \Longrightarrow A_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{A}{8}$$

و از اینجا می‌توان حدس زد که:

$$A_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \cdots + \frac{\pi}{2^n} + \frac{A}{2^n}$$

برای رفع هرگونه شك و شبهه با استفاده از استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم که فرم A_n درست است. فرض می‌کنیم رابطهٔ بالا برای n درست باشد در این صورت ثابت می‌کنیم که برای $n+1$ نیز درست است. داریم که

$$A_{n+1} = \frac{\pi}{2} + \frac{A_n}{2}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$A_{n+1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \cdots + \frac{\pi}{2^{n+1}} + \frac{A}{2^{n+1}}\right)$$

پس فرم A_{n+1} از فرم A_n پیروی می‌کند. چون در حالت $n=1$ داریم $A_1 = \frac{\pi}{2^1} + \frac{A}{2^1}$ که از شکل کلی A_n پیروی می‌کند و درست نیز می‌باشد در نتیجه به ازای $n = 1+1 = 2$ نیز درست است و از آنجا:

$$A_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \cdots + \frac{\pi}{2^n} + \frac{A}{2^n}$$

$$A_n = \pi \times \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} + \frac{A}{2^n} \Longrightarrow$$

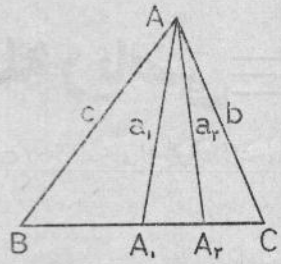
$$\Longrightarrow A_n = \pi - \frac{\pi - A}{2^n}$$

و اما حد A_n با توجه به شکل هندسی (A_n روی BC قرار می‌گیرد) برابر π می‌باشد. از رابطهٔ بالا نیز دیده می‌شود که اگر:

$$n \to \infty \Longrightarrow \frac{\pi - A}{2^n} = 0 \Longrightarrow A_n = \pi$$

تعیین B_n را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مسئلهٔ ۲ـ $AA_1=a_1$ میانهٔ مثلث ABC و $AA_2=a_2$ میانهٔ مثلث AA_1C و $AA_n=a_n$ میانهٔ مثلث AA_1A_{n-1} می‌باشد. a_n را برحسب اضلاع مثلث حساب نموده وحد آنرا وقتی که $n\to\infty$ بدست آورید.



با استفاده از قضیهٔ میانه‌ها:

$$(a_1)^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$4^1(a_1)^2=2\times 4^0(b^2+c^2)-a^2$$

$$(a_2)^2=\frac{2b^2+2a_1^2-\frac{a^2}{4}}{4}$$

$$4^2a_2^2=2\times 4^1(a_1^2+b_1^2)-a^2$$

$$a_3^2=\frac{2a_2^2+2a_1^2-\frac{a^2}{16}}{4}$$

$$4^3(a_3)^2=2\times 4^2(a_2^2+a_1^2)-a^2$$

و از آنجا مثل مسئلهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که:

$$4^n(a_n)^2=2\times 4^{n-1}[(a_{n-1})^2+a_1^2]-a^2$$

$$a_n^2=\frac{1}{2}a^2{}_{n-1}+\frac{1}{2}a_1^2-\frac{1}{2^{2n}}a^2$$

$$\frac{1}{2}a^2{}_{n-1}=\frac{1}{4}a^2{}_{n-2}+\frac{1}{4}a_1^2-\frac{1}{2^{2n+1}}a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2{}_{n-2}=\frac{1}{8}a^2{}_{n-2}+\frac{1}{8}a_1^2-\frac{1}{2^{2n+2}}a^2$$

$$\frac{1}{2^{n-2}}a_2^2=\frac{1}{2^{n-1}}a_1^2+\frac{1}{2^{2-1}}b^2-\frac{1}{2^{3n-2}}a^2$$

از جمع نظیر به‌نظیر طرفین این نامساویها داریم:

$$(a_n)^2=a_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2^{n-1}}b^2-\frac{a^2}{2^{2n}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)$$

$$(a_n)^2=(1-2^{1-n})a_1^2+2^{1-n}b^2-$$

$$2^{-2n}(1-2^{2-n})a^2$$

$$(a_n)^2=(1-2^{1-n})\left(\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2\right)+$$

$$+2^{1-n}b^2-2^{-2n}(1-2^{2-n})a^2$$

$$a_n^2=\frac{1}{2}(1-2^{1-n})c^2+\frac{1}{2}(1+2^{1-n})b^2-$$

$$\frac{1}{4}[(1-2^{1-n})+2^{-2n+2}(1-2^{2-n})]a^2$$

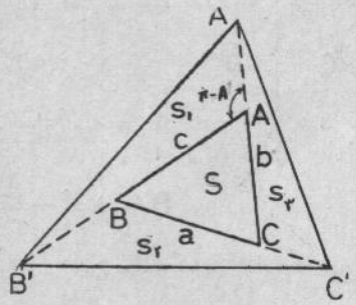
با توجه به شکل وقتی $n\to\infty$ دراین صورت $A_n=a_1$ و از فرمول بالا نیز این نتیجه بدست می‌آید.

$$2^{1-n}=2^{-\infty}=0 \quad \text{و} \quad 2^{-2n+2}=0$$

در نتیجه:

$$a_n^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2$$

مسئلهٔ ۳ـ درمثلث ABC اضلاع را (مطابق شکل) در یك جهت طوری امتداد می‌دهیم که:



$$\frac{AA'}{AC}=n \quad \text{و}$$

$$\frac{BB'}{BA}=l \quad \text{و}$$

$$\frac{CC'}{CB}=m$$

مساحت مثلث $A'B'C'$ را برحسب مساحت ABC بدست آورد.

حل ـ با توجه به مفروضات مسئله:

$$CC'=ma \quad \text{و} \quad BB'=lc \quad \text{و} \quad AA'=nb$$

$$s_1=\text{مساحت مثلث } AA'B'$$

$$\frac{1}{2}AA'\cdot AB'\sin(\pi-A)=\frac{1}{2}(nb)(c+lc)\sin A$$

$$s_1=\frac{1}{2}n(l+1)bc\sin A$$

و اما:

$$\frac{1}{2}bc\sin A=S$$

پس:

$$s_1=n(l+1)S$$

به همین ترتیب

$$s_2=l(m+1)S \quad \text{و} \quad s_3=m(n+1)S$$

و در نتیجه مساحت $A'B'C'$ برابر است با

$$S'=s_1+s_2+s_3+S$$

$$S'=[nl+n+lm+l+mn+m+1]S$$

بقیه در صفحهٔ ۱۳۴

با ریاضیات آشتی کنید

(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

اثر: A.BULLAS استاد آموزش ریاضی در فرانسه

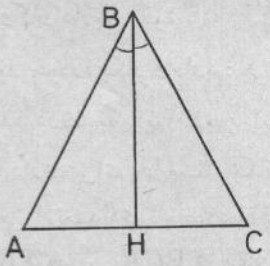
ترجمهٔ : ع.مصحفی

بخش نهم - بسط قوهٔ تصویر

مسائل به دو دسته تقسیم می‌شوند :

دستهٔ اول : شکلی که بنابر مفروضات رسم می‌شود برای حل مسئله کافی است .

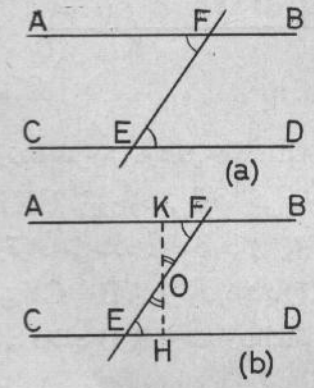
مثال - ثابت کنید که نیمساز BH ازمثلث متساوی‌الساقین ABC میانهٔ ضلع AC است .



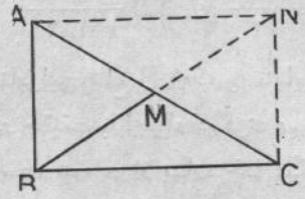
دراین مسئله به رسم هیچ خط اضافی نیازی نیست. دومثلث ABH و CBH درشکل ملاحظه می کنیم. ثابت می کنیم که این‌دومثلث متساویند و نتیجه می گیریم که AH با HC برابر است.

دستهٔ دوم: شکلی که بنابرمفروضات رسم می‌شودبرای حل مسئله کافی نیست ؛ لازم است که یك یا چند خط در آن رسم کرد .

مثال- برای اثبات آنکه اگرمورب EF دوخط‌متوازی AB و CD را قطع کند دو زاویهٔ متبادلهٔ داخلی E و F متساویند بدون رسم خط‌جدید، یعنی فقط با استفاده ازشکل (a) نمی‌توان مسئله راحل کرد. از O وسط EF خط KH راعمودبردوخط متوازی‌رسم‌می کنیم. دومثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌شودکه ثابت می کنیم متساویند وازروی‌آن تساوی دو زاویهٔ متبادل داخلی E و F نتیجه‌می‌شود.



مثال دیگر: اثبات اینکه‌درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC میانهٔ BM نظیروتر بانصف‌وتر برابراست. با استفادهٔفقط از شکل‌داده شده نمی‌توان مسئله‌را حل کرد. بلکه لازم است تامیانهٔ BM را به اندازهٔ خود تا N امتداد دهیم. چهار ضلعی ABCM حاصل می‌شودکه ثابت می کنیم مستطیل است واز آنجا نتیجه می‌شودکه BN با AC ودرنتیجه BM با نصف AC برابر است .

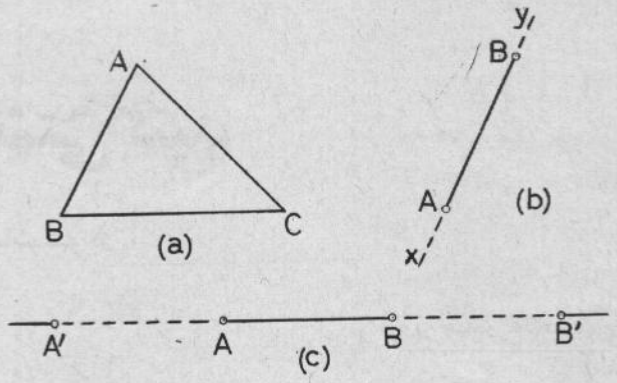


حل هردو دسته ازمسائل به‌معلومات ذهنی نیازدارد، اما درحل مسائل دستهٔ دوم علاوه برآن قوهٔ تصور نیز بکارمی‌آید. بنابراین اگر می‌خواهیدکه درحل مسائل ورزیده گردید لازم است‌که قوهٔ تصور خودرا گسترش دهید. چگونگی گسترش قوهٔ تصور موضوع این‌بخش است.

اصل‌مهمی‌که برتمام بررسیهای ماحاکمیت خواهدداشت این است‌که : هیچ جزئی رانباید به‌تنهایی درنظر گرفت. لازم است‌که همواره همراه هرجزء جزء های دیگری در ذهن شما نمودار بشود.

مثلث ABC را درنظر بگیرید(شکل a). دانش آموزی

که به گسترش قوهٔ تصور خود نایل‌آمده باشد هرضلع از این مثلث، مثلا AB، راپاره خطی ازیك خط نامحدود xy ملاحظه



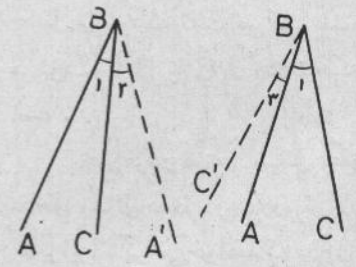
می‌کند (شکل b). همچنین هریك ازضلعها مثلا AB رانیمه‌ای ازپاره خط دو برابر آن در نظر می‌گیرد (شکل c). مثلا اگر AB را ازسمت B به‌اندازهٔ $BB'=AB$ امتداد دهیم‌می‌توانیم تساویهای مختلفی مثلا سه‌تساوی زیررا بنویسیم:

$$BB'=AB \text{ یا } AB=\frac{AB'}{۲} \text{ یا } BB'=\frac{AB'}{۲}$$

همچنین می‌توان AB را ازسمت A به‌اندازهٔ $AA'=AB$ امتداد داد که دراین‌صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$AA'=AB \text{ یا } AA'=\frac{A'B}{۲} \text{ یا } AB=\frac{A'B}{۲}$$

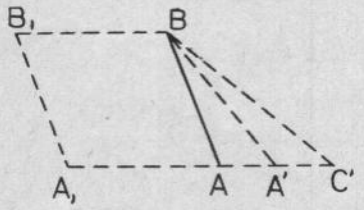
بنابراین ضلع AB که به تنهایی یك‌پاره خط ملاحظه می‌شود در حقیقت با اجزاء دیگری همراه است. پاره‌ای از یك امتداد است، نیمه‌ای از پاره خط دیگر است، یك سوم از پاره خط دیگراست ،....



برای زاویه‌ها هم موضوع ازهمین قراراست. اگرزاویهٔ ABC راداشته‌باشید می‌توانیدآن‌رانیمه‌ای ازاویهٔ‌دیگر ABA' یازاویهٔ CBC' تصورکنید.

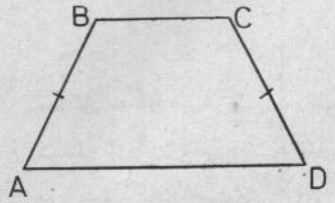
این‌موضوع رابه‌خوبی درنظر داشته‌باشیدکه: هرجزء از یك شکل‌را می‌توانید جزئی ازبینهایت جزء دیگر تصورکنید.

برای مثال پاره خط AB را در نظر می‌گیریم. این پاره خطرا می‌توان ضلع مثلثهایی ازقبیل ABA' ، ABC' وغیره‌تصورکرد. همچنین می‌توان آن‌راضلعی‌ازمتوازی‌الاضلاع‌های ABA_1B_1 ، ABA_2B_2، وغیره تصورکرد.همچنین می‌توان AB راوتری از یك دایره یا جزئی از هزاران شکل دیگر در نظرگرفت . اما از بین‌همهٔ این‌شکلها فقط آنهایی اهمیت دارند که‌دارای‌خواص‌مخصوص

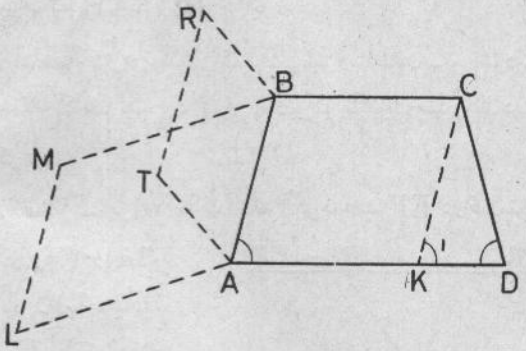


می‌باشند، ازقبیل متوازی‌الاضلاع، مربع، دایره. برای‌آنکه به ارزش آنچه که گفته شد بهتر پی ببرید به مثال زیر توجه کنید :

مثال ـ ثابت کنید که در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD که در آن $AB=CD$ استدو زاویهٔ A و D متساویند .



در اینجا با مسئله‌ای از دستهٔ دوم سروکار داریم . قوهٔ تصور خودرا بکار واداریم: می‌توانیم AB را جزئی‌ازشکلهای متعدد درنظربگیریم. ازبین این شکلها بعضی به خاطرخواصی که دارند برای حل‌مسئله بکار می‌آیند. مثلا می‌توان AB را ضلعی ازتعدادی نامحدود از متوازی‌الاضلاعهای LMBA ، ATRB ، ABCK وغیره درنظر گرفت. دربین همهٔ این متوازی‌الاضلاعها متوازی‌الاضلاع ABCK ازلحاظ ضلع CK وضعی‌خاص دارد. در حقیقت ضلع CK علاوه برآنکه درداخل

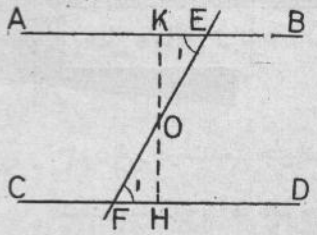


ذوزنقهٔ مفروض دوشکل‌جدید:متوازی‌الاضلاع ABCK ومثلث CKD رابوجود می‌آورد بین‌تمام اجزاء ذوزنقه نیز ارتباطی برقرار می‌سازد . چون شکل ABCK متوازی الاضلاع است پس $AB=CK$ وچون داشتیم $AB=CD$ پس $CK=CD$ است ومثلث CKD متساوی‌الساقین است و در نتیجه دو زاویهٔ

D و K_1 متساویند. ازطرف دیگر چون AB با CK موازی است نسبت به‌مورب AK دوزاویهٔ A و K_1 متساویند وبنابراین دوزاویهٔ A و D باهم برابرند.

خلاصه‌ـ AB و CD راکه به‌تنهایی دو ساق از ذوزنقه بودند اجزایی‌از شکلهای دیگر تصور کردیم وازبین این‌شکلها بعضی‌را انتخاب کردیم که حل مسئله را ممکن‌ساخت.

مثال دیگرـ دوخط متوازی AB و CD توسط مورب EF قطع شده‌اند، ثابت کنید که دو زاویهٔ متبادلهٔ E_1 و F_1 متساویند.

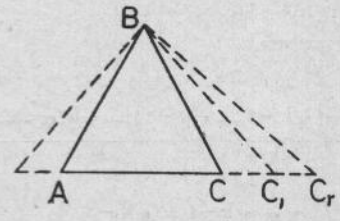


دوزاویهٔ E_1 و F_1 را اجزائی از شکلهای مختلف‌تصور می‌کنیم. از بین این شکلها دومثلث قائم‌الزاویهٔ KOE و HOF کلید حل مسئله را بدست می‌دهند. اما درابتدا این دو مثلث روی شکل وجودندارند، تصورما آنها را می‌آفرینند و با رسم عمود مرسوم ازO وسط EF بردوخط متوازی آنهاراروی شکل ظاهر می‌سازیم.

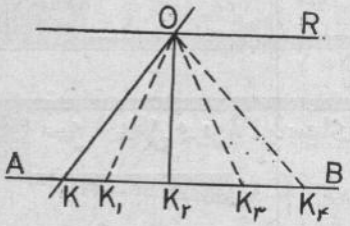
قبل‌ازآنکه به دنبالهٔ مطلب بپردازیم باید مطمئن‌شوید که مقصود از آنچه را که تاکنون گفته شده است به خوبی درك کرده‌اید.

هرجزء ازشکل هرچندکه تنها بنظر می‌رسد امامی‌تواند جزئی ازهزاران شکل دیگر تصور شود، برای نمایاندن این شکلها کافی است که بعضی خطوط به‌شکل اضافه‌کرد.

مثالـ اگرمثلث ABC راداشته باشیم، ضلع AB از آن به‌تنهایی یك پاره خطاست، اما می‌توان این‌پاره خط را ضلع تعداد نامحدودی مثلثهای دیگر تصور کرد که ازامتداددادن



AC ورسم خطوط BC_1 ، BC_2 و غیره بوجود می‌آیند. از بین‌این مثلثهای به‌تعداد نامحدودکه می‌توان‌روی یك‌ضلع‌ساخت فقط‌آنهایی برای‌ما اهمیت دارندکه درحل مسئله بکارمی‌آیند. این‌شکلها ازاضافه‌کردن بعضی خطوط به شکل مفروض بوجود می‌آیندکه این‌خطها به‌نوبهٔ خودیاعمود برخطوط دیگریاموازی باآنها رسم می‌شوند، که دراینجا موازی به‌معنی اعم‌آن در نظر گرفته شده‌است، مثلا وقتی خطی را امتداد می‌دهیم یعنی اینکه خطی موازی ومنطبق برآن رسم می‌کنیم. وانگهی ازبین‌خطوط مختلف که می‌توان در یك شکل رسم‌کرد آنهاکه‌موازی‌بابعضی از خطوط یا عمود بر آنها رسم می‌شوند اهمیت‌مخصوص‌دارند.

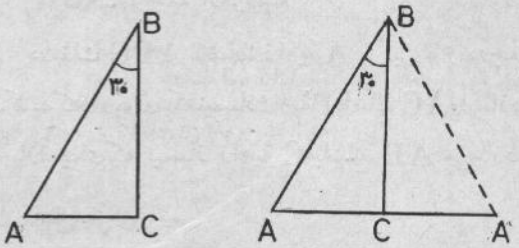


برای مثال خط AB ونقطهٔ O را درخارج‌آن درنظر می‌گیریم. خطی‌تصور می‌کنیم که از O می‌گذرد و AB را درK قطع می‌کند.هرگاه این خط حول O بچرخد اوضاع‌مختلفی اختیار می‌کندکه دووضع آن اهمیت مخصوص دارد، یکی OK_2 است‌که بر AB عمود است و دیگری OR موازی با AB است . ما این دو خط را اصطلاحاً «خطهای‌کارآمد» نام‌گذاری می‌کنیم. این اصطلاح «خطهای‌کارآمد» راخوب به‌خاطربسپارید زیرا دردنبالهٔ‌مطلب زیاد تکرار می‌شود.

اکنون حالتهای مختلفی رابررسی‌می‌کنیم‌که می‌توان از اضافه‌کردن بعضی‌خطوط به‌شکل مفروض‌شکلهای جدیدی‌بوجود آورد .

خطوط امتداد یافته‌ـ (ضلع یك شکل)

ثابت‌کنیدکه اگریك زاویهٔ حاده از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳۰درجه باشد ضلع روبروی‌آن نصف‌وتر است.درمثلث ABC که‌زاویهٔ B برابربا ۳۰درجه‌وزاویهٔ C قائمه است، برای‌آنکه



ثابت‌کنیم‌که AC نصف AB است ،کافی است‌که ثابت کنیم پاره خطی‌که دوبرابر AC باشد با AB برابراست پس باید AC رابه‌اندازهٔ خودامتداد دهیم‌بقسمی‌که $AC=CA'$.هرگاه B رابه A' وصل‌کنیم دومثلث ACB و A'CB خواهیم‌داشت که ضلع BC درهر دومشترك است. درمثلث ABA' خط BC میانهٔ‌ضلع AA' وهمچنین ارتفاع‌نظیراین‌ضلع است،پس‌این‌مثلث متساوی‌الساقین است ودوزاویهٔ A و A' باهم برابرند. زاویهٔ A

بقیه در صفحهٔ ۱۵۷

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۹۵

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۹۵/۱ـ فرستنده : **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی تبریز .

حاصل هریك ازعبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت بدست‌آورید :

$$A=(\sqrt[3]{2}-1)^5 \quad , \qquad B=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$$

حل ـ به‌ترتیب زیرعمل می‌کنیم:

$$A=(\sqrt[3]{2}-)^5=(\sqrt[3]{2}-1)^3(\sqrt[3]{2}-1)^2$$
$$=(1+3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4})(1-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})$$

که بعد از اختصار خواهیم‌داشت:

$$A=7+7\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{4}$$

درمورد عبارت B نیزداریم:

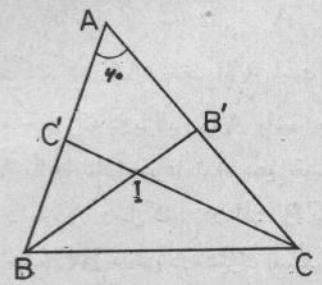
$$B=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}$$

$$B=\frac{1}{3}(1+2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4})$$

۹۵/۲ـ ترجمهٔ ازفرانسه

درمثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۶۰ درجه‌است . ثابت کنید که‌زاویه‌ای که‌نیمساززاویهٔB باضلع AC می‌سازدبرابر است بازاویه‌ای‌که نیمساز زاویهٔ C باضلع AB می‌سازد.

حل ـ می‌دانیم که زاویهٔ BIC برابر است‌با:



$$90^\circ+\frac{A}{2}=$$
$$90^\circ+30^\circ=120^\circ$$

مجموع دو زاویهٔ A و B′IC′ برابر می‌شود با ۱۸۰° وچهارضلعی AC′IB′ محاطی است و:

$$AB'I+AC'I=180^\circ$$

اما زاویهٔ AB′C مکمل‌زاویهٔ BB′C است. بنابراین‌دوزاویهٔ AC′C وBB′C بایکدیگر برابرند. به‌عبارت دیگرزاویه‌های حاده‌ای که نیمسازهای دوزاویهٔ B وC باضلعهای‌متقابل می‌سازند بایکدیگر برابرند.

حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم‌ریاضی

۹۵/۳ـ فرستنده: **جوادفیض**

ثابت کنید که‌به‌ازای همهٔ مقادیر صحیح ومثبت n حاصل عبارت زیرعددی است صحیح:

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

حل ـ اگرعبارت مفروض برابر F_n باشد، داریم :

$$F_1=\frac{(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}=1$$

$$F_2=\frac{(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2}{2^2\sqrt{5}}=1$$

به‌طریق استقراء فرض‌می‌کنیم‌تا $n=k$ نیزعبارت‌مفروض‌برابر عدد صحیح باشد. برای $n=k+1$ بافرض:

$$1+\sqrt{5}=x \text{ و } 1-\sqrt{5}=y$$

داریم :

$$F_{k+1}=\frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{5}}$$

$$=\frac{x^k(x+y)-xy(x^{k-1}-y^{k-1})-y^k(x+y)}{2^{k+1}\sqrt{5}}$$

$$=\frac{x+y}{2}\left(\frac{x^k-y^k}{2^k\sqrt{5}}\right)-\frac{xy}{4}\left(\frac{x^{k-1}-y^{k-1}}{2^{k-1}\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})}{2}F_k-$$

$$-\frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4}F_{k-1}$$

بنابراین :

$$F_{k+1}=F_k+F_{k-1}=\text{عددثابت}$$

۹۵/۴ـ ترجمهٔ **مهندس فتح‌الله‌زرگری** ازروسی.

به‌دانش‌آموزی تکلیف‌شده‌بود تاازعددی کعب گرفته‌نتیجه را درچهارضرب وحاصل‌را با ۶۰ جمع کند . لیکن دانش‌آموز عکس هرعمل‌را وبه‌همان‌ترتیب انجام‌داد. هرگاه حاصل‌عملیات دانش‌آموز برابر باشد با حاصل عملیاتی‌که بایستی انجام داده باشد،عدد مورد نظرچه بوده است؟

حل‌ـ فرض می‌کنیم a عدد داده‌شده باشد. طبق‌فرض

$$4\sqrt[3]{a}+60=\frac{a^3}{4}-60$$

بافرض $x=\sqrt[3]{a}$ داریم:

$$x^9-16x-480=0$$

این‌معادله را به‌ترتیب زیرتجزیه می‌کنیم:

$$(x^9-512)-16(x-2)=$$
$$=[(x^3)^3-8^3]-16(x-2)=$$
$$=(x^3-8)(x^6+8x^3+64)-16(x-2)=$$
$$=(x-2)[(x^2+2x+4)(x^6+8x^3+64)-16]$$
$$=(x-2)\Big\{[(x+1)^2+3][(x^3+4)^2+48]-$$
$$-16\Big\}=0$$

این معادله دارای جواب منحصر به فرد $x=2$ است بنابراین $a=8$ ودانش‌آموز به‌جواب ۶۸ رسیده است.

۹۵/۵ـ ترجمهٔ **مهندس فتح‌الله زرگری**

معادلهٔ زیررا حل‌کنید:

$$3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$$

حل‌ـ معادله رابه‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$3^3\times 3^{2(x^2-3x)}+6\times(2\times 3)^{x^2-3x}=$$
$$=2^3\times 2^{2(x^2-3x)}$$

با فرض:

$$3^{x^2-3x}=A \quad و \quad 2^{x^2-3x}=B$$

داریم :

$$27A^2+6AB-8B^2=0$$

یا

$$(9A-4B)(3A+2B)=0$$

$$9A-4B=0\Longrightarrow 3^2\times 3^{x^2-3x}=2^2\times 2^{x^2-3x}$$

$$3^{x^2-3x+2}=2^{x^2-3x+2}$$

تساوی فقط وقتی برقراراست‌که :

$$x^2-3x+2=0 \quad یا \quad (x-2)(x-1)=0$$
$$\Longrightarrow x=1 \quad یا \quad x=2$$

$$3A+2B=0\Longrightarrow$$
$$3\times 3^{x^2-3x}=-2\times 2^{x^2-3x}$$
$$3^{x^2-3x+1}=-2^{x^2-3x+1}$$

به‌ازای هرمقدار x طرف اول مثبت وطرف دوم منفی است. پس معادلهٔ اخیر جواب ندارد.

۹۵/۶ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

معادلهٔ زیررا حل‌کنید:

$$(\frac{4}{3}\log_9 27)\log_2(3-x)-\log_2(7x+9)=$$
$$=\frac{2}{\log_8 16}-\frac{7}{2}$$

حل‌ـ معادله رابه‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$(\frac{4}{3}\times\frac{3}{2})\log_2(3-x)-\log_2(7x+9)=$$
$$=2\times\frac{3}{4}-\frac{7}{2}=-2$$

مقادیری از x می‌توانند دراین معادله صادق‌باشندکه برای‌آنها داشته باشیم:

$$3-x>0 \quad و \quad 7x+9>0\Longrightarrow -\frac{9}{7}<x<3$$

بااین شرط معادله رابه‌ترتیب زیرعمل می‌کنیم:

$$2\log_2(3-x)-\log_2(7x+9)=-2$$
$$\log_2\frac{(3-x)^2}{7x+9}=-2\Longrightarrow$$
$$\frac{x^2-6x+9}{7x+9}=2^{-2}=\frac{1}{4}$$
$$4x^2-31x+27=0$$
$$4x^2-4x-27x+27=0$$
$$4x(x-1)-27(x-1)=0$$
$$(x-1)(4x-27)=0$$

ازاین معادله دوجواب بدست می‌آید که فقط جواب $x=1$ از آن درمعادلهٔ مفروض صادق است.

۹۵/۷ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

درداخل مربع به‌ضلع واحد تعداد $2n^2+1$ نقطه بطور دلخواه پخش شده‌است. ثابت کنید که داخل این مربع می‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{n}$ رسم کرد بقسمی که حداقل بر سه نقطه از نقاط مفروض محیط باشد.

حل ـ هرضلع مربع را به n قسمت مساوی تقسیم و از این نقاط خطوطی موازی‌اضلاع مربع‌رسم می‌کنیم. دراین‌صورت n^2 مربع کوچك با طول ضلع $\frac{1}{n}$ بدست خواهدآمد. در بین این‌مربعات اقلایك‌مربع‌یافت می‌شود که حداقل سه‌نقطه درداخل یاروی مرزش دارا باشد. زیرا درغیر این‌صورت تعداد نقاط‌از $2n^2+1$ کمتر خواهد شد. سپس به‌مرکزمربع موردنظردایره‌ای به شعاع $\frac{1}{n}$ رسم می‌کنیم که شامل سه نقطه ازنقاط داده‌شده خواهد بود.

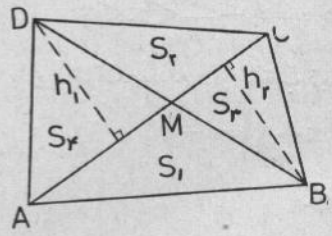
۹۵/۸ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

قطرهای چهارضلعی محدب $ABCD$ در M متلاقیند. اگر S مساحت چهار ضلعی و S_1 و S_2 به ترتیب مساحتهای مثلثهای MAB و MCD باشد وداشته باشیم:

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$$

ثابت کنید که چهارضلعی مزبور ذوزنقه است.

حل ـ طبق‌فرض



$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$$

ویا:

$$S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$$

اگر S_3 و S_4 به‌ترتیب مساحت مثلثهای MCB و MAD باشند، دراین‌صورت:

$$S_3+S_4=2\sqrt{S_1S_2} \qquad (1)$$

مثلثهای AMD و CMD دارای ارتفاع مشترك DH و مثلثهای AMB و CMB دارای ارتفاع‌مشترك DK می‌باشند. بنابراین:

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{S_4}{S_2}=\frac{AM}{MC}\Longrightarrow S_1S_2=S_3S_4$$

وبا استفاده ازتساوی (۱) نتیجه می‌شود که:

$$S_3+S_4=2\sqrt{S_3S_4}\Longrightarrow S_3=S_4$$

ازاینجا مثلثهای ADB و ACB معادل هم‌بوده ودارای‌قاعده مشترك AB می‌باشند. بنابراین DC با AB موازی بوده و درنتیجه چهارضلعی مفروض ذوزنقه است.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۹۵/۹ـ درصفحهٔ محورهای‌مختصات سه‌نقطهٔ:

$A(-1,0)$ ، $B(5,2)$ ، $P(x,2x-3)$

مفروض است. مقدارياحدود x راتعیین کنید برای‌آنکه:

الف ـ P برخط AB واقع‌باشد.

ب ـ زاویهٔ BPA قائمه باشد.

ج ـ زاویهٔ BPA منفرجه باشد.

د ـ زاویهٔ BPA حاده باشد.

حل ـ برای اینکه P برخط AB واقع‌شود باید ضریب زاویه‌ای خط AB باخط PA برابرباشد یعنی:

$$\frac{1}{3}=\frac{2x-3}{x+1}\Longrightarrow x=2$$

راه دوم‌آن است که فرض می‌کنیم $P(\alpha, 2\alpha-3)$ باشد. اگر M وسط AB باشد دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$M(x=2, y=1)$$

و داریم.

$$AB=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}\Longrightarrow MA=\sqrt{10}$$

$$PM=\sqrt{(\alpha-2)^2+(2\alpha-4)^2}=|\alpha-2|\sqrt{5}$$

$$PM=0\Longrightarrow\alpha=2$$

ب ـ دراین‌حالت چنین داریم:

$$PM=MA \text{ یا } (\alpha-2)\sqrt{5}=\sqrt{10}$$

$$\alpha-2=\sqrt{2}\Longrightarrow\alpha=2+\sqrt{2}$$

ج ـ دراین حالت‌داریم:

$$PM<MA\Longrightarrow\alpha<2+\sqrt{2}$$

د ـ دراین مورد:

$$PM>MA\Longrightarrow\alpha>2+\sqrt{2}$$

۹۵/۱۰ـ فرستنده: **جوادفیض**

هرگاه داشته باشیم:

$$\cos\alpha+\cos\beta=p \quad \text{و} \quad \frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}=q$$

اولا معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که مقادیر $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ ریشه‌های آن باشد. ثانیاً به‌فرض $p=\frac{3}{4}$ و $q=6$ اندازه‌های کمانهای α و β را پیدا کنید.

حل ـ اولا داریم:

$$q=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\Longrightarrow \cos\alpha\cos\beta=\frac{p}{q}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها p وحاصل‌ضرب آنها $\frac{p}{q}$ خواهد شد.

دراین‌صورت معادلهٔ مطلوب به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2-px+\frac{p}{q}=0 \quad \text{یا} \quad px^2-pqx+p=0$$

ثانیاً ـ به ازاء $p=\frac{3}{4}$ و $q=6$ داریم:

$$8x^2-6x+1=0$$

که از این معادلـه $x_1=\frac{1}{2}$ و $x_2=\frac{1}{4}$ بـدست می‌آید.

بنابراین:

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Longrightarrow \alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{1}{4}=\cos\varphi \Longrightarrow \beta=2k\pi\pm\varphi$$

که درآن $\varphi=\mathrm{Arc}\cos\frac{1}{4}$ می‌باشد:

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم ریاضی

۹۵/۱۱ـ ترجمهٔ: **مهندس فتح‌الله زرگری** ازروسی

دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xz+yu=7 \\ xz^2+yu^2=11 \\ xz^4+yu^3=19 \end{cases}$$

حل ـ ازضرب طرفین معادلات دوم وسوم در $(z+u)$ وپس ازاختصار داریم:

$$\begin{cases} xz^2+yu^2+zu(x+y)=7(z+u) \\ xz^3+yu^3+zu(xz+yu)=11(z+u) \end{cases}$$

ویا:

$$\begin{cases} 7(z+u)-5zu=11 \\ 11(z+u)-7zu=19 \end{cases}$$

ازدستگاه اخیرجوابهای:

$$(u_2=1 \text{ و } z_2=2) \text{ و } (u_1=2 \text{ و } z_1=1)$$

حاصل‌می‌شود. باقراردادن این‌مقادیر درمعادلات اول‌ودوم‌دستگاه بدست می‌آید:

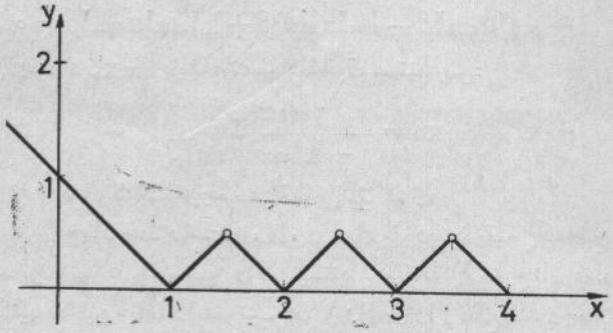
$$(x_1=3 \text{ و } y_1=2) \text{ و } (x_2=2 \text{ و } y_2=3)$$

۹۵/۱۲ـ ترجمهٔ: **مهندس زرگری** ازروسی

تابع $f(x)$ چنین تعریف شده است که در ازای هر مقدار حقیقی x مقدار $f(x)$ برابراست با فاصلهٔ x تا نزدیکترین عدد طبیعی باآن. نمایش هندسی این تابع‌را رسم کنید.

حل ـ هرگاه $x\leqslant 1$ باشد دراین‌صورت نزدیکترین عدد مثبت صحیح به‌آن عددیك می‌باشد ومقدارتابع به‌ازاء این‌مقدار x برابر $1-x$ خواهدبود.

رسم منحنی‌درروی قسمتهای دیگر محور اعداد بهتر است بطورهندسی انجام‌شود. درنقاطی که بین‌اعداد صحیح k و $k+1$ قراردارند بطورعمود خطی رسم می‌کنیم به‌طول از k تا x اگر x نزدیکتر به k باشد وبه‌طول x تا $k+1$ اگر x نزدیکتر به $k+1$ باشد.



درنقاطی که x برابر $k+\frac{1}{2}$ است تابع تعریف شده‌نمی باشد ومعلوم نیست که به‌کدام عدد نزدیکتراست.

۹۵/۱۳ـ از **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی تبریز

ثابت کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر x نامساوی مضاعف زیر برقراراست:

$$19 \geqslant \sin^2 x - 24 \sin x \cos x + 11 \cos^2 x \geqslant -7$$

حل ـ اولا برای نامساوی :

$$\sin^2 x - 24 \sin x \cos x + 11 \cos^2 x + 7 \geqslant 0$$

ازتقسیم طرفین بر $\cos^2 x$ که مثبت است داریم:

$$tg^2 x - 24 tg x + 11 + 7(1 + tg^2 x) =$$
$$= 2(4 tg^2 x - 12 tg x + 9) = 2(2 tg x - 3)^2 \geqslant 0$$

برای نامساوی:

$$\sin^2 x - 24 \sin x \cos x + 11 \cos^2 x - 19 \leqslant 0$$

به‌ترتیب فوق خواهیم‌داشت:

$$-18 tg^2 x - 24 tg x - 8 = -2(3 tg x + 2)^2 \leqslant 0$$

پس نامساوی برقراراست.

۹۵/۱۴ـ فرستنده : **محمد حسنی نژاد** ششم ریاضی دبیرستان هدف شمارهٔ۳

به فرض آنکه x_1 و x_2 دو مقدار متمایزاز x باشندکه در معادلهٔ :

$$\cos x = \cos\alpha \cos\beta \pm \sin\alpha \sin\beta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$$

صدق کنند، ثابت کنید که :

$$\cos x_1 + \cos x_2 = \frac{2 \cos\alpha \cos\beta}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}$$

حل ـ به‌صورت زیرعمل می کنیم. داریم:

$$(\cos x - \cos\alpha \cos\beta)^2 = \sin^2\alpha \sin^2\beta (1 - k^2 \sin^2 x)$$
$$= \sin^2\alpha \sin^2\beta (1 - k^2 + k^2 \cos^2 x)$$
$$(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta) \cos^2 x - 2 \cos\alpha \cos\beta \cos x +$$
$$+ \cos^2\alpha \cos^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\beta + k^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta = 0$$

$\cos x_1$ و $\cos x_2$ ریشه‌های معادلهٔ فوق هستند پس:

$$\cos x_1 + \cos x_2 = \frac{2 \cos\alpha \cos\beta}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}$$

۹۵/۱۵ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

چهار خط راست a، b، c و d مفروضند بقسمی که هیچ سه‌تای آنها دریك صفحه واقع نیستند . صفحهٔ P را چنان رسم کنید که این‌خطها رابه‌ترتیب در A وB وC وD قطع کند وچهار ضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد.

حل ـ حالت کلی مسئله راوقتی که خطوط a وb وc وd دو به‌دومتقاطع بوده‌وتمام آنهاموازی یك‌صفحه نباشندبررسی‌می کنیم.

مجموعهٔ اوساط خطوطی راکه ابتدا وانتهای آنها روی خطوط a وb می‌باشند صفحهٔ λ_1 ومجموعهٔ اوساط خطوطی‌راکه ابتدا و انتهای آنها روی خطوط c وd می‌باشند را صفحهٔ λ_2 می گیریم. این‌دوصفحه موازی نمی‌باشند زیرا درغیراین‌صورت لازم‌می آیدکه خطوط مفروض‌موازی یك‌صفحه باشند واین‌خلاف فرض‌است. فرض می کنیم فصل مشترك λ_1 و λ_2 خط l باشد. از نقطهٔ L متعلق به‌خط l خط P_1 راطوری رسم می کنیم که‌خطوط a وb رابه ترتیب در A وB وخط P_2 راطوری رسم می کنیم که خطوط c وd را در C وD قطع کند. چهارنقطهٔ بدست‌آمده‌چهار رأس متوازی الاضلاع ABCD می‌باشند که اقطارآن در L متقاطعند .

به‌هرنقطه ازخط l می‌توان متوازی‌الاضلاعی متناظر آن نسبت‌داد. در این حالت بینهایت صفحه مانند $\alpha(P_1$ و $P_2)$ موجود است که نقاط تقاطع آنها باخطوط a وb وc وd تشکیل متوازی‌الاضلاع می‌دهند.

اگر $\lambda_1 = \lambda_2$ باشد دراین‌صورت صفحاتی‌مانندαمتناظر باهرنقطه ازصفحهٔ λ_1 وجود دارند که خطوط داده شده را در رئوس متوازی‌الاضلاعهایی قطع می کنند. (ممکن وغیر ممکن) واضح است که اگرخطوط رابه‌صورت دوتایی بررسی کنیم مانند (a وc)و(b وd) یا (a وd)و(b وc) دراین‌صورت دوسری‌جواب دیگر خواهیم داشت.

اگر $\lambda_1 \parallel \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ باشد مسئله ممکن‌است‌جوابی نداشته باشد.

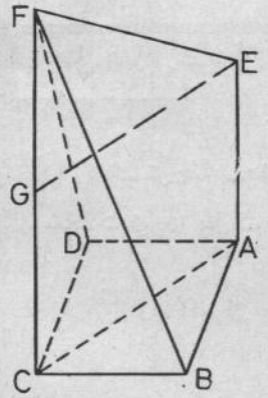
حالت خاص این‌مسئله وقتی است که تمام این خطوط در دریك نقطه متقارب باشند.

۹۵/۱۶ـ ترجمهٔ **داوید ریحان**

مربع ABCD به‌طول‌ضلع a مفروض است. از A وC دوعمود AE وCF رابرصفحهٔ مربع اخراج می کنیم که:

$$AE = AC \text{ و } CF = \frac{3}{2} AC$$

باشد. ثابت کنید که مثلث BEF قائم‌الزاویه است وخط EE برصفحهٔ BDE عمود می‌باشد.



حل ـ ازنقطهٔ E، عمود EG را بر FC رسم می کنیم . چون EA برصفحهٔ ABCD عمود است بنابراین بر AB عمود می باشد و داریم :

$$BE^2 = AE^2 + AB^2$$

ولی :

$$AE^2 = AC^2 = 2a^2$$

بنابراین :

$$BE^2=3a^2 \Longrightarrow BE=a\sqrt{3}$$

به همین طریق CF بر CA عمود است و چون $AE=AC$ است بنابراین EGCA مربع و EG مساوی و موازی با AC است. داریم:

$$GE=\frac{1}{2}AC$$

$$EF^2=EG^2+GE^2=\frac{5}{4}AC^2=\frac{5}{2}a^2$$

بطور مشابه FC بر BC عموداست وداریم:

$$BF^2=\frac{9}{2}\times 2a^2+a^2=\frac{11}{2}a^2$$

درمثلث BEF خواهیم‌داشت:

$$BE^2+EF^2=3a^2+\frac{5}{2}a^2=\frac{11}{2}a^2=BF^2$$

ومثلث DEF قائم‌الزاویه است.

ازبرابری مثلثهای EAB با EAD وهمچنین FCB با FCD نتیجه می‌گیریم :

$$EB=ED \text{ و } FB=FD$$

ومثلثهای EBF وEDF باهم برابرند . داریم:

زاویه BEF = زاویه DEF = قائمه

EF بر ED وهمچنین بر EB عموداست ودر نتیجه FE بر صفحهٔ BDE عموداست.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم‌دبیرستان

۹۵/۱۷ـ فرستنده: محمد معینی

مقدار مشتق‌تابع زیررا به‌ازای $x=0$ حساب‌کنید:

$$y=x(x-a)(x-2a^2)(x-3a^3)\dots(x-2na^{2n})$$

حل‌ـ داریم :

$$y'=(x-a)(x-2a^2)(x-3a^3)\dots(x-2na^{2n})+$$
$$+x(x-2a^2)(x-3a^3)\dots(x-2na^{2n})+\dots$$

غیراز اولین‌جمله بقیهٔ جملات دارای عامل x می‌باشند پس در ازای $x=0$ خواهیم داشت:

$$y'=a\times 2a^2\times 3a^3\times\dots\times 2na^{2n}$$

$$=1\times 2\times 3\times\dots\times 2na^{1+2+\dots+2n}$$

$$=1\times 2\times 3\times\dots\times 2na^{n(2n+1)}$$

۹۵/۱۸ـ از جوادفیض

به‌فرض‌آنکه a وb وc مقادیرمثبت باشند ودو زاویهٔ حادهٔ α وβ بارابطهٔ:

$$\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\cos\beta}=c$$

به‌هم‌مربوط باشند، ثابت‌کنید که عبارت $a\cos\beta+b\cos\alpha$ وقتی می‌نیمم است که $\alpha=\beta$

حل‌ـ [درچاپ صورت مسئله درشمارهٔ قبل اشتباهی پیش آمده که صحیح‌آن اینطوراست. ثابت‌کنید که عبارت : $a\cos\beta+b\cos\alpha$ وقتی می‌نیمم است که $\alpha=\beta$]

داریم :

$$\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\cos\beta}=\frac{a\cos\beta+b\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=c$$

$$\Longrightarrow a\cos\beta+b\cos\alpha=c\cos\alpha\cos\beta$$

طرف چپ تساوی وقتی می‌نیمم است که طرف‌راست می‌نیمم‌باشد دراین‌صورت به‌ترتیب‌زیرعمل می‌کنیم:

$$c\cos\alpha\cos\beta=\frac{c}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

$$=c\left[\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)\right]$$

این‌عبارت وقتی می‌نیمم است که :

$$\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)=0 \Longrightarrow \alpha=\beta$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم‌ریاضی

۹۵/۱۹ـ ترجمهٔ مهندس‌زرگری

روی منحنی نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ تبدیلات زیررا انجام می‌دهیم:

منحنی‌را درامتداد محورطولها ودرجهت منفی‌این محور سه واحد انتقال می‌دهیم، آنگاه نسبت به‌محور عرضها به‌عنوان محور تقارن آنرا برمی‌گردانیم، سپس نسبت به مبدأ مختصات به‌عنوان مرکزتقارن‌آن راتبدیل می‌کنیم، بالاخره قسمتی ازآن

راکه درنیم صفحهٔ باxهای منفی واقع شده است حذف می‌کنیم.
تابع نظیر منحنی‌حاصل رامشخص کنید.

حلـ داریم:

$$f_1(x)=f(x+3) \text{ و } f_2(x)=f_1(-x)$$

$$f_3(x)=-f_2(-x)=-f_1(x)=-f(x+3)$$

دراین‌صورت تابع موردنظر $f_4(x)$ به‌صورت زیرخواهدبود:

$$f_4(x)=f_3[(\sqrt{x})^2]=-f[(\sqrt{x})^2+3]$$

۹۵/۲۰ـ ترجمهٔ ازفرانسه

تابع y برحسب متغیر u به‌شرح زیرمفروض‌است:

$$y=\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt{1+u}}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}$$

اولا حدود تغییرات u راتعیین‌کنید برای آنکه تابع y معین باشد.

ثانیاً به‌فرض $u=\frac{2x}{1+x^2}$ تابع y رابرحسب متغیر x مشخص‌کرده نمایش هندسی‌تغییرات‌آن رارسم‌کنید.

حلـ اولا باضرب صورت ومخرج‌تابع درعبارت‌مزدوج مخرج خواهیم داشت:

$$y=\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u})^2}{1+u-1+u}=\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}$$

وتابع به ازای مقادیر $-1\leqslant u\leqslant 1$ معین‌است.

ثانیاً درازای $u=\frac{2x}{1+x^2}$ خواهیم‌داشت:

$$1-u^2=1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\sqrt{1-u^2}=\frac{|1-x^2|}{1+x^2}$$

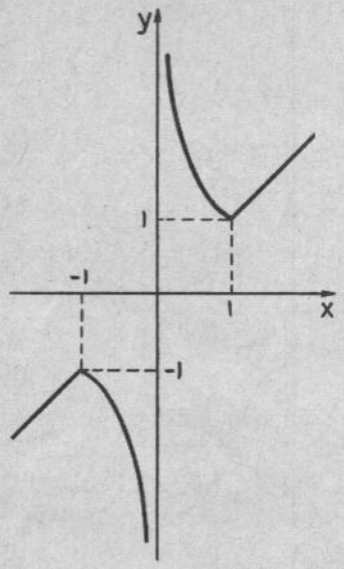
$$x^2\geqslant 1 \text{ یا } [x\leqslant -1 \text{ یا } x\geqslant 1]\Longrightarrow |1-x^2|=x^2-1$$

$$y=\frac{1+\frac{x^2-1}{x^2+1}}{\frac{2x}{x^2+1}}=\frac{2x^2}{2x}=x$$

$$x^2\leqslant 1 \text{ یا } -1\leqslant x\leqslant 1\Longrightarrow |1-x^2|=1-x^2$$

واگر به ترتیب‌بالا عمل‌کنیم خواهیم داشت:

$$y=\cdots=\frac{1}{x}$$



نمایش هندسی تابع ترکیب شده است از قسمتی از خط $y=x$ که در فاصله‌های $x\geqslant 1$ یا $x\leqslant -1$ واقع است و قسمتی از منحنی $y=\frac{1}{x}$ که در فاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ قرار دارد.

۹۵/۲۱ـ فرستنده: **محمدمعینی**

معادلهٔ زیررا حل‌کنید:

$$2(3\cos 3x-4\sin 3x)\sin^3 x+$$
$$+2(3\sin 3x-4\cos 3x)\cos^3 x=9\sin 4x\sin 2x$$

حلـ به‌صورت زیرعمل می‌کنیم:

$$6(\cos 3x\sin^3 x+\sin 3x\cos^3 x)-$$
$$-8(\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x)=$$
$$=3[(1+\cos 2x)\cos x\cos 3x+$$
$$+(1-\cos 2x)\sin x\sin 3x]-4[(\sin 4x-$$
$$-\sin 2x)\sin^2 x+(\sin 4x+\sin 2x)\cos^2 x]$$
$$=3[\cos x\cos 3x+\sin x\sin 3x+$$
$$+(\cos x\cos 3x-\sin x\sin 3x)\cos 2x]$$
$$-4[\sin 4x+(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin 2x]$$
$$=3(\cos 2x+\cos 4x\cos 2x)-4(\sin 4x+$$
$$+\sin 2x\cos 2x)-9\sin 4x\sin 2x=0$$
$$3(1+\cos 4x)\cos 2x-4(2\sin 2x\cos 2x+$$
$$+\sin 2x\cos 2x)-9\times 2\sin^2 2x\cos 2x=0$$
$$\cos 2x(6\cos^2 2x-12\sin 2x-18\cos^2 2x)=0$$
$$\cos 2x=0\Longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$
$$\cos^2 2x-2\sin 2x-3\sin^2 2x=0$$
$$1-\sin^2 2x-2\sin 2x-3\sin^2 2x=0$$
$$4\sin^2 2x+2\sin 2x-1=0$$
$$\sin 2x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \sin\frac{\pi}{10} \Longrightarrow$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{20} \quad \text{و} \quad x = k\pi + \frac{9\pi}{20}$$

$$\sin 2x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} = \sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right) \Longrightarrow$$

$$x = k\pi - \frac{3\pi}{20} \text{ و } x = k\pi + \frac{13\pi}{20}$$

۹۵/۲۲ـ فرستنده: **حسن نیکو آمال راد**

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$(\sin^2 x - 2)^3 + (\cos 2x + \sin^2 x)^3 + 1 = 0$$

حل ـ داریم:

$$\sin^2 x - 2 + \cos 2x + \sin^2 x + 1 = 0$$

می‌دانیم که اگر $a+b+c=0$ باشد در آن صورت:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

خواهد بود. بنابراین درمورد معادلهٔ مفروض خواهیم‌داشت

$$3 \times 1 \times (\sin^2 x - 2)(\cos 2x + \sin^2 x) = 0$$

$\sin^2 x - 2 > 0$ است بنابراین:

$$\cos 2x + \sin^2 x = 0$$

$$2\cos 2x + 1 - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x = -1 \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۹۵/۲۳ـ ترجمهٔ: **مهندس زرگری**

ثابت کنید که بین هر n عدد دلخواه مفروض حداکثر دو عدد وجوددارد که مجموع یاتفاضل آنها بر n بخش پذیراست.

حل ـ هرگاه درتقسیم هر n عدد دلخواه مفروض برعدد n به‌ترتیب باقیمانده های ۰و۱و...و$n-1$ بدست‌آید دراین صورت دوعددی را درنظرمی گیریم که باقیمانده های آنها ۱ و $n-1$ یا ۲و$n-2$ ویا ۳و$n-3$ و ... باشندکه در این حال حاصل جمع آنها بر n بخش پذیراست. هرگاه در تقسیم فوق چندین باقیمانده یکسان بدست‌آوریم دراین‌حال کافیست‌هر دوجفت ازاین اعداد را که دارای باقیمانده های یکسان هستند در نظر بگیریم که در این صورت تفاضل آنها بر n بخش پذیر است.

۹۵/۲۴ـ ترجمهٔ: **مهندس زرگری**

بارقمهای ۱،۲،۳و۴ دوعدد چهار رقمی تشکیل می‌دهیم بقسمی که درهرعدد هررقم بیش ازیك‌بار بکار نرفته‌باشد. ثابت کنیدکه این‌دوعدد برهم پذیر نمی‌باشند.

حل ـ بزرگترین عددی‌که با ارقام ۱و۲و۳و۴ می‌توان ساخت عدد ۴۳۲۱ وکوچکترین عدد حاصل ۱۲۳۴ است. در این‌صورت هرگاه یکی‌ازاعداد حاصل بردیگری بخش‌پذیرباشد درخارج قسمت بدست‌آمده اعداد ۳ ویا ۲ وجود خواهدداشت. ازطرفی مجموع ارقام بدست‌آمده برابر است‌با:

$$1+2+3+4=10$$

که بر۳ بخش پذیرنیست، بنابراین درخارج‌قسمت عدد۳نخواهد بود. درخارج قسمت عدد ۲ نیز نمی‌تواند باشدزیرا با ضرب ارقام مفروض در۲ ارقام ۲و۴ و۶ و۸ بدست می‌آیدکه مخالف فرض‌مسئله است. بنابراین باشرایط‌مسئله نمی‌توان دوعدد تشکیل دادکه برهم بخش‌پذیرباشند.

۹۵/۲۵ـ فرستنده: **حبیب‌میر تبریزیان** دانشجوی دانشکدهٔ کشاورزی همدان.

پاره خط AB ونقطهٔ C در وسط‌آن مفروض است. این پاره خط را بوسیلهٔ نقاط $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ بـه n قسمت برابر بخش می‌کنیم:

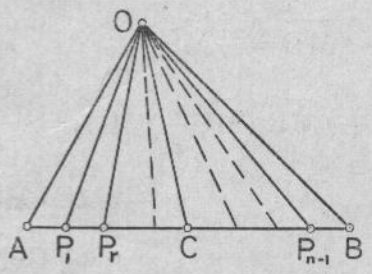
$$AP_1 = P_1P_2 = \cdots = P_{n-1}B$$

ازنقطهٔ دلخواهO به‌نقاط $A, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$و$B$ وصل می‌کنیم. حاصل مجموع هندسی زیررا بدست‌آورید:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_{n-1}} + \overrightarrow{OB}$$

حل ـ اگر S مجموع فوق باشدداریم:

$$S = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_{n-1}} + \overrightarrow{OB}$$



$$2S = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_{n-1}}) +$$

$$+ (\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_{n-2}}) + \cdots + (\overrightarrow{OP_{n-1}} + \overrightarrow{OP_1}) +$$

$$+ (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$$

اما داریم:

$$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP_1} \quad \text{و}$$

$$\overrightarrow{OP_{n-1}}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP_{n-1}}$$

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_{n-1}}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{BP_{n-1}})$$

ولیکن $\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{BP_{n-1}}=0$ است بنابراین:

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_{n-1}}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

به همین ترتیب مقدار هریك از پرانتزها برابر $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ خواهد بود بنابراین:

$$2S=n(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OC}\Longrightarrow S=n(\overrightarrow{OC})$$

۹۵/۲۶ـ ترجمهٔ از فرانسه

در یك صفحه چهار نقطهٔ A و B و C و D داده شده است. به فرض آنکه k عدد معلومی باشد مکان نقاط M از صفحه را تعیین کنید بقسمی که:

$$(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD})=k$$

حل ـ هرگاه G و G′ نقاطی باشند بقسمی که

$$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{G'C}-2\overrightarrow{G'D}=\overrightarrow{0}$$

در این صورت برای هر نقطهٔ M از صفحه داریم:

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$$

$$\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MG'}$$

$$(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD})=$$

$$=-3\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MG'}=k$$

اگر O وسط GG′ باشد:

$$-3(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OG})(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{OG})=k$$

$$-3(MO^2-OG^2)=k$$

$$OM^2=OG^2-\frac{k}{3}$$

به شرط $k\leqslant 3OG^2$ مکان مطلوب دایره‌ای است به مرکز O و به شعاع

$$\sqrt{OG^2-\frac{k}{3}}$$

حل مسائل گوناگون

ترجمه: **مهندس فتح‌الله زرگری** از روسی

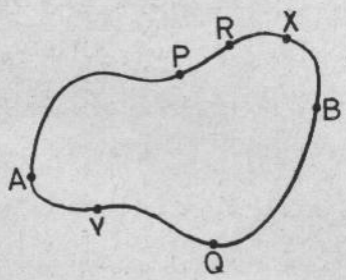
۹۵/۲۷ـ در یك مسابقهٔ ژیمناستیك دو تیم باعده‌های مساوی ازنفرات شرکت‌داشتند. در طول مسابقه هریك‌ازنفرات ۸ یا ۹ امتیاز بدست آورد ودر پایان مسابقه مجموع‌امتیازهای کسب شده توسط کلیهٔ شرکت‌کنندگان برابر ۱۵۶ شد . عدهٔ افراد هرتیم چقدر بوده است.

حل ـ چون تعداد نفرات هرتیم‌مساوی می‌باشدبنابراین مجموع افراد دو تیم نیزعددی است زوج. ماکزیمم امتیازهایی که توسط ۱۶ نفر بدست می‌آید: $16\times 9=144$ که از۱۵۶ کوچکتر می‌باشد . می‌نیمم امتیاز نیزکه توسط ۲۰ نفرممکن است بدست آید $20\times 8=160$ می‌باشد که بزرگتر از۱۵۶ است. بنابراین تعداد کل نفرات ۱۸ نفر بوده است.

۹۵/۲۸ـ بین دوشهر A و B دو جادهٔ همطول کشیده شده است‌که به ترتیب از شهرهای X وY می‌گذرند. جاده‌ای که X را به Y وصل می‌کند و از B می‌گذرد کوتاهتر از جاده‌ای است‌که X را به Y وصل می‌کند و از A می‌گذرد. در ضمن شهر Y از شهرهای A و B به A نزدیکتر است. هرگاه a و b و c و d به‌ترتیب‌فواصل AX ، XB ، AY YB باشد، این مقادیر را برحسب بزرگی و کوچکی مرتب کنید.

حل ـ فرض می‌کنیم نقاط P و Q اوساط دوجاده کشیده شده از A به B و R نقطه‌ای باشدکه مسیربسته YY را به دو قطعه مساوی تقسیم می‌کند.

طبق فرض $c<d$ می‌باشد در این صورت واضح است‌که شهر X درمسیر PRB قرار دارد.(در غیراین صورت مسیر XAY از مسیر XBY کوتاهتر می‌شود). همچنین طولهای $QY=PR$ و $RB=AY$ می‌باشد



و در نتیجه $b<c$ است. فواصل a و d بزرگتر از نصف فاصله A و B و فاصلهٔ c کوتاهتر از نصف این فاصله می‌باشد و خواهیم داشت $c<a$ و $c<b$.

طبق فرض $a+b=c+d$ و چون $b<c$ است بنابراین $a>d$ و خواهیم داشت:

$$b<c<d<a$$

۹۵/۲۹ـ طولهای دو بازوی ترازویی a و b است که $a<b$ می‌باشد.

برای متعادل کردن کفه‌های ترازو باید وزنه‌ای معادل با m در کفهٔ نظیر بازوی a قرار دهیم. آیا از این ترازو می‌توان برای توزین اجسام استفاده کرد؟

حل ـ فرض می‌کنیم بازوهای a و b از یک جنس و یکنواخت و وزن آنها به ترتیب c و d باشند. وزن هر بازو عددا برابر طول آن و محل اثر آن مرکز ثقل آن می‌باشد. بنابراین معادلهٔ تعادل خواهد شد:

$$(m+c)a+\frac{a^2}{2}=db+\frac{b^2}{2} \quad (1)$$

حال اگر جسمی به وزن x را در کفهٔ بازوی a و در کفهٔ دیگر وزنهٔ p را قرار دهیم که تعادل برقرار شود. در این صورت خواهیم داشت:

$$(x+m+c)a+\frac{a^2}{2}=(p+d)b+\frac{b^2}{2} \quad (2)$$

اگر رابطهٔ (۱) را از (۲) کم کنیم داریم:

$$xa=pb \Longrightarrow x=p\frac{b}{a}$$

بنابراین به شرطی می‌توانیم از این ترازو استفاده کنیم که وزنهٔ متعادل کننده p در کفهٔ b را در $\frac{b}{a}$ ضرب نماییم.

۹۵/۳۰ـ نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{999999}{1000000}<\frac{1}{1000}$$

حل ـ با مجذور کردن نامساوی طرف چپ داریم:

$$\frac{1}{2^2}\times\frac{3^2}{4^2}\times\frac{5^2}{6^2}\times\cdots\times\frac{999999^2}{1000000^2}<$$

$$\frac{1}{2^2-1}\times\frac{3^2}{4^2-1}\times\cdots\times\frac{999999^2}{1000000^2-1}$$

$$=\frac{1}{1\times3}\times\frac{3^2}{3\times5}\times\frac{5^2}{5\times7}\times\cdots\times$$

$$\times\frac{999999^2}{999999\times1000001}=$$

$$=\frac{1}{1000001}\Longrightarrow\sqrt{\frac{1}{1000001}}<\frac{1}{1000}$$

۹۵/۳۱ـ به ازاء چه مقادیری از n نامساوی زیر برقرار است:

$$(n+2)^n<n^{n+2}$$

حل ـ نامساوی را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\sqrt[n+2]{n+2}<\sqrt[n]{n}$$

واضح است که:

$$\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$$

اگر طرفین این نامساوی را به توان $n(n+1)$ برسانیم در این صورت:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$$

$$a_n=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}$$

به ازاء $n=3$ واضح است که $a_n<1$ می‌باشد. برای مقادیر $n\geqslant3$ داریم: $a_{n+1}<a_n$ نامساوی اخیر به این معنی است که

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n+1}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}$$

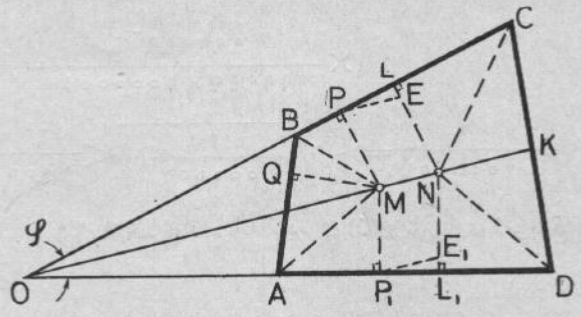
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

که این نامساوی واضح و معلوم است. به این ترتیب برای مقادیر $n\geqslant3$ داریم $a_n<1$

۹۵/۳۲ـ در چهار ضلعی محدب ABCD نیمسازهای دو زاویهٔ A و B در M و نیمسازهای دو زاویهٔ C و D در N متلاقیند. طول پاره‌خط MN را برحسب $AB=m$ و $CD=n$ و $AD=b$ و $BC=a$ و زاویهٔ $(AD \text{ و } BC)=\varphi$ بدست آورید.

حل ـ از نقطهٔ M عمودهای MP و MQ و MP_1 را

به ترتیب براضلاع BC و AB و AD رسم می‌کنیم. چون



M روی نیمساززاویه‌های A و B قرار دارد بنابراین $MP_1=MQ$ و $MQ=MP \Longrightarrow MP=MP_1$ درنتیجه M روی نیمساززاویهٔ φ قرار دارد. به طریق فوق N نیزروی همین نیمساز قرار می‌گیرد. خطوط PE و P_1E_1 را موازی MN رسم می‌کنیم واضح است‌که : $PE=P_1E_1=MN$ می‌باشد در نتیجه $PL=P_1L_1$ از طرفی M مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث AOB و N مرکز دایرهٔ محاطی‌داخلی مثلث COD می‌باشد. اگر p_1 و p_2 نصف محیط این دو مثلث باشندداریم:

$$OL=p_2-n \text{ و } OP_1=p_1$$

از اینجا خواهیم داشت:

$$PL=p_2-n-p_1=\frac{1}{2}\Big(OB+a+n+b+OA-2n-OA-OB-m=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b-m-n)$$

از طرفی

$$MN=PE=\frac{PL}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$MN=\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}(a+b-m-n)$$

در حالت خاص‌که $a+b=m+n$ باشدچهار ضلعی محیطی و $MN=0$ است و محل تقاطع نیمسازها همان مرکز دایرهٔ محاطی می‌باشد.

۹۵/۳۳ـ دایره‌ای بوسیلهٔ n نقطه به n قسمت برابر تقسیم شده است، nدایرهٔ متساوی‌رسم می‌کنیم‌که مرکزهرکدام ازآن یکی از نقاط تقسیم دایرهٔ مفروض باشد و هر دو دایرهٔ متوالی بریکدیگر مماس خارج باشند، به این وسیله ستاره‌ای منحنی الخط در داخل دایرهٔ مفروض تشکیل می‌شود. به ازای چه مقدار n محیط این ستاره بامحیط دایرهٔمفروض‌برابراست.

حل ـ اگر R و r را به ترتیب شعاعهای دایرهٔمفروض و دوایر متساوی بنامیم داریم:

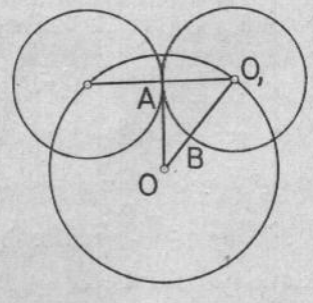
$$r=R\sin\frac{\pi}{n}$$

کمان AB برحسب رادیان برابر است‌با

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}=\frac{\pi(n-2)}{2n}$$

و طول آن خواهد شد:

$$\frac{\pi r(n-2)}{2n}$$



اگر محیط ستاره با محیط دایرهٔ مفروض برابرباشد داریم:

$$2\pi R=2n\frac{\pi r(n-2)}{2n}=(n-2)\pi R\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\Longrightarrow \sin\frac{\pi}{n}=\frac{2}{n-2}$$

$$\cos\frac{\pi}{n}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{n-2}\right)^2}=\frac{\sqrt{n^2-4n}}{n-2}$$

$$tg\frac{\pi}{n}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{2}{\sqrt{n^2-4n}}$$

چون زاویهٔ $\frac{\pi}{n}$ حاده است بنابراین

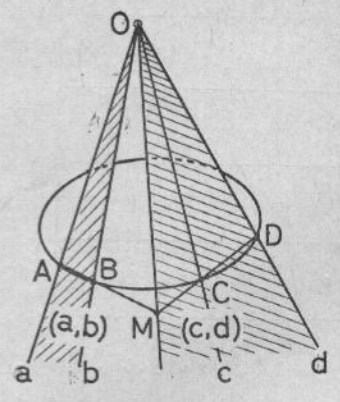
$$\sin\frac{\pi}{n}<\frac{\pi}{n}<tg\frac{\pi}{n}\Longrightarrow\frac{2}{n-1}<\frac{\pi}{n}<\frac{2}{\sqrt{n^2-4n}}$$

که از حل این نامساوی برحسب n بدست می‌آوریم:

$$\frac{2\pi}{\pi-2}<n<\frac{4\pi^2}{\pi^2-4}\Longrightarrow 5<n<7\Longrightarrow n=6$$

۹۵/۳۴ـ چهار خط a و b و c و d در O متقاربندو هیچ سه تا از آنها در یك صفحه نیستند. نقطهٔ A بر a و نقطهٔ B برb مفروض است. بر AB صفحهٔ P را بگذرانیدکه c و d را در C و D قطع کند بقسمی‌که چهار نقطهٔ A وB وC و D بریك دایره واقع باشند.

حل- نقطهٔ تقاطع خط AB با صفحهٔ (c و d) را M می‌نامیم. هرگاه از نقاط A و B دایره‌ای عبور کند و خطوط c و d را به ترتیب در C و D قطع کند در این صورت نقطهٔ M روی امتداد CD می‌باشد یعنی خطوط AB و CD در نقطهٔ M همدیگر را قطع می‌نمایند و بعلاوه:



$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}$$

فرض می‌کنیم

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=R^2$$

در این صورت در صفحهٔ (c و d) دایره‌ای به مرکز M و به شعاع R رسم می‌کنیم و در انعکاس نسبت به این دایره نقاط منعکس را روی خطوط c و d پیدا می‌کنیم. برای این منظور برای خط c در انعکاس دایرهٔ C_2 را رسم می‌کنیم. هرگاه C_2 بر d مماس باشد یك جواب خواهیم داشت. در صورتی که C_2 دارای نقطهٔ مشترکی با d نباشد جوابی نخواهیم داشت.

در حالتی که خط AB موازی صفحهٔ (c و d) باشد، بروسط AB صفحهٔ μ را عمود می‌کنیم. واضح است که صفحهٔ μ برصفحهٔ (c و d) نیزعمود می‌باشد و فصل مشترك آنها را خط m می‌نامیم. خط c' قرینهٔ c نسبت به m خط d را درنقطهٔ D قطع می‌کند. از D خطی موازی AB رسم می‌کنیم تاخط c را در C قطع نماید. از نقاط A و B و C و D می‌توان دایره‌ای مرور داد طوری که نسبت به صفحهٔ μ نقاط A و B همچنین C و D قرینهٔ یکدیگر باشند. در این حالت نیز مسئله دارای یك جواب می‌باشد. درحالتی که $d \parallel c'$ باشد مسئله دارای بینهایت جواب خواهدبود.

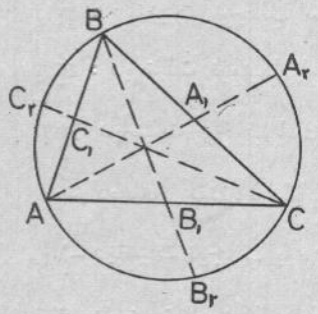
۹۵/۳۵- میانه‌های AA_1 و BB_1 و CC_1 از مثلث ABC دایرهٔ محیطی این مثلث را به ترتیب در نقاط A_2 و B_2 و C_2 قطع می‌کنند. ثابت کنید که:

$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\leqslant\frac{9}{4}$$

حل- فرض می‌کنیم

$$BC=a\ ،\ AC=b\ ،\ AB=c$$

باشد. در این صورت داریم



(۱)

$$AA_1^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

نسبت به دو وترمتقاطع

$$AA_1\cdot AA_2=\frac{a^2}{4}$$

$$AA_1\cdot AA_2=AA_1\cdot(AA_1+A_1A_2)=AA_1^2+AA_1\cdot AA_2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

(۲)

$$AA_1\cdot AA_2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{b^2+c^2}{2}$$

از تقسیم روابط (۱) و (۲) بریکدیگر بدست می‌آوریم:

$$\frac{AA_1}{AA_2}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b^2+c^2}$$

به همین ترتیب

$$\frac{BB_1}{BB_2}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2+c^2}$$

$$\frac{CC_1}{CC_2}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}$$

$$=3-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)$$

با استفاده از نامساوی زیر

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geqslant\frac{3}{2}$$

بدست می‌آوریم:

$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\leqslant 3-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

حالت تساوی وقتی پیش می‌آید که مثلث متساوی الاضلاع باشد.

الفـ از مسائل ارسالی توسط آقای **قوام نحوی**

۹۵/۳۶ـ سه گزارهٔ زیررا در نظر می گیریم:

p : ریاضیات نوجالب است.

q : ریاضیات نومشکل است.

r : ریاضیات نوخوب است.

گزاره‌های ترکیبی زیر را باعلامات ریاضی منطقی نشان دهید:

۱ـ ریاضیات نوجالب یا مشکل است.

۲ـ ریاضیات نومشکل و خوب است.

۳ ـ اگر ریاضیات نوخوب است پس مشکل نیست.

۴ ـ اگرریاضیات نو مشکل است پس جالب نیست.

۵ ـ اگر بگوییم ریاضیات نوجالب است معادل است با اینکه بگوئیم ریاضیات نوخوب است.

۶ ـ ریاضیات نوجالب و خوب است و مشکل نیست.

حلـ

۱- $p \vee q$ ۲- $q \wedge r$

۳- $r \rightarrow (\sim q)$ ۴- $q \rightarrow (\sim p)$

۵- $p \Leftrightarrow r$ ۶- $(p \wedge r) \wedge (\sim q)$

ب ـ مسائل ترجمه از فرانسه

۹۵/۳۷ـ p و q دو گزارهٔ دلخواه می‌باشند. ثابت کنید که هرگاه دو استلزام

$$(۱)\ p \wedge q \Rightarrow \bar{q} \quad ، \quad (۲)\ p \wedge \bar{q} \Rightarrow q$$

هردو درست باشند، گزارهٔ p نادرست است.

حلـ جدول ارزشهای دو گزاره را تشکیل می‌دهیم:

p	q	$p \wedge q$	$\bar{q}$	$(p \wedge q) \Rightarrow \bar{q}$
۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۱

p	q	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow q$
۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱

ملاحظه می‌شود که دو گزارهٔ مفروض وقتی هردو راست می‌باشند که گزارهٔ p دروغ باشد.

۹۵/۳۸ـ از سه عدد a و b و c یکی مثبت، دیگری منفی و آن دیگر صفر است. هرگاه سه استلزام درست زیر را داشته باشیم:

$$a = ۰ \Rightarrow b > ۰$$

$$a > ۰ \Rightarrow b < ۰$$

$$b \neq ۰ \Rightarrow c > ۰$$

نوع هریك از سه عدد را مشخص کنید.

حلـ به فرض $a = ۰$ خواهیم‌داشت:

$$a = ۰ \Rightarrow b > ۰ \Rightarrow b \neq ۰ \Rightarrow c > ۰$$

چون دو نامساوی $b > ۰$ و $c > ۰$ هردوباهم نمی‌توانند درست باشند پس فرض $a = ۰$ غلطاست. بنابراین یا $a > ۰$ یا $a < ۰$ است.

به فرض $a > ۰$ داریم:

$$a > ۰ \Rightarrow b < ۰ \Rightarrow b \neq ۰ \Rightarrow c > ۰$$

چون $a > ۰$ و $c > ۰$ هردو باهم درست نیستند پس فرض $a > ۰$ نیزرد می‌شود. بنابراین $a < ۰$ است. حال اگر

$$b > ۰ \Rightarrow b \neq ۰ \Rightarrow c > ۰$$

که قابل قبول نیست پس $b = ۰$ است و در نتیجه $c > ۰$.

۹۵/۳۹ـ دو مجموعهٔ X و Y را مشخص کنید به فرض آنکه داشته باشیم:

$$X \cup Y = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$$

$$X \cap Y = \{d, f, k\}$$

$$X \cup \{c, d, e\} = \{a, c, d, e, f, h, k\}$$

$$Y \cup \{b, a, h\} = \{b, d, e, f, g, h, k\}$$

حلـ از (۲) برمی‌آید که مجموعه‌های X و Y شامل عضوهای d و f و k می‌باشند. از (۳) نتیجه می‌شود که a و h هر دو به X تعلق دارند. همچنین از (۳) نتیجه می‌شود که b

به X متعلق نیست. بنابراین با توجه به (۱) نتیجه می‌شود که $b \in Y$

از (۴) بر می‌آید که $c \notin Y$ بنابراین با توجه به (۱) داریم $c \in X$ از (۴) همچنین برمی‌آید که $e \in Y$ و $g \in Y$ بنابراین:

$$X = \{a, c, d, f, h, k\}$$
$$Y = \{b, d, e, f, g, k\}$$

۹۵/۴۰ـ دو مجموعهٔ X و Y را از روابط زیر مشخص کنید:

$$X \cup Y = \{a, b, c, d, e\}$$
$$X \cap Y = \{b, c, d\}$$
$$a \notin Y - X$$
$$e \notin X - Y$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a \notin (Y - X) \\ a \notin (X \cap Y) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \in X \\ a \notin Y \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} e \notin (X - Y) \\ e \notin (X \cap Y) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} e \in Y \\ e \in X \end{array}\right.$$

$$X = \{a, b, c, d\} \text{ و } Y = \{b, c, d, e\}$$

پاسخ تستهای مکانیك

۴۱ـ هـ	۴۲ـ ب	۴۳ـ ب	۴۴ـ د
۴۵ـ الف	۴۶ـ هـ	۴۷ـ الف	۴۸ـ د
۴۹ـ ج	۵۰ـ هـ	۵۱ـ ب	۵۲ـ ب
۵۳ـ ج	۵۴ـ ج	۵۵ـ د	۵۶ـ الف
۵۷ـ د	۵۸ـ ب	۵۹ـ ج	۶۰ـ د
۶۱ـ هـ			

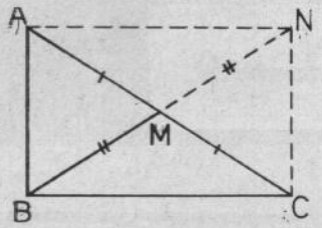
با ریاضیات آشتی ... (دنباله از صفحهٔ ۱۴۳)

به‌اندازهٔ ۶۰ درجه است پس‌زاویهٔ A' نیز به اندازهٔ ۶۰ درجه است و نتیجه می‌شود که مثلث ABA' متساوی‌الاضلاع است و:

$$AA' = AB \Longrightarrow AC = \frac{AA'}{2} = \frac{AB}{2}$$

خطوط امتداد یافته ـ (خط داخلی یك شکل)

اثبات اینکه در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وتر بانصف وتر برابراست.

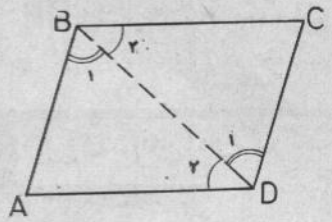


درمثلث ABC زاویهٔ B قائمه و M وسط AC است. برای آنکه ثابت‌کنیم BM بانصف AC برابراست باید پاره خطی‌دوبرابر BM پیداکنیم وثابت‌کنیم که‌آن پاره خط با AC برابراست. بنابراین باید BM را به اندازهٔ خودش تا N امتداد دهیم که $BM = MN$ است. چون از N به A و C وصل‌کنیم چهار ـ ضلعی حاصل می‌شود که دوقطر آن AC و BN یکدیگر را نصف کرده‌اند، پس‌این چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است و چون یك زاویهٔ آن قائمه‌است پس‌مربع مستطیل است. درمربع مستطیل‌دو قطر باهم برابرند یعنی $AC = BN$ و چون BM نصف BN است پس‌نصف AC نیزمی‌باشد.

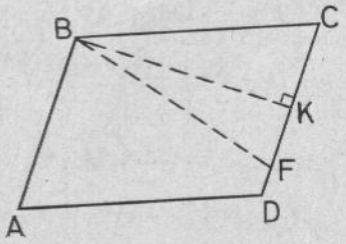
خطوط مرسوم(دلخواه، عمود، موازی)

اثبات اینکه‌دوضلع مقابل متوازی‌الاضلاع باهم برابرند.

می‌خواهیم ثابت‌کنیم که دوضلع BC وAD از متوازی‌الاضلاع ABCD با هم برابرند. می‌دانیم که AD و BC می‌توانند ضلعهای بینهایت مثلث باشند، ازاین مثلثها کدامها را انتخاب‌کنیم که در اثبات بکارآیند؟ دومثلث ABD و BCD را انتخاب‌می‌کنیم که بارسم قطر BD پدید می‌آیند. این دومثلث از این جهت اهمیت دارند که درضلع BD مشترکند وزاویه‌های B_1 و B_2 به‌ترتیب بازاویه های D_1 و D_2 برابرند. پس‌دومثلث مزبور درحالت تساوی دو زاویه وضلع بین متساویند و در نتیجه BC با AD برابر است.



خط BD راکه درداخل متوازی‌الاضلاع مفروض رسم کردیم‌عنوان‌خط‌عمود وهمچنین عنوان‌خط متوازی را ندارد. یك خط دلخواه است اما خطی است که دارای خاصیت‌مشخص می‌باشد. در صورتی‌که خطوط دلخواه دیگر مثل BF یا خط عمود BK خاصیتی راکه برای اثبات بکارآید دارا نیستند.



دنباله‌دارد

مسائل برای حل

برای دانش‌آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

۹۶/۱ـ از مناف شریف زاده

ثابت کنید که تفاضل دوعبارت زیر مقدار ثابت مستقل از x است:

$$y_1=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^{m-1}}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$y_2=(\sqrt{x^2+1}-x)^m+k$$

۹۶/۲ـ ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

ساقهای AD و BC ازذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ یکدیگررا در S قطع می‌کنند. دایره‌های محیطی دومثلث ACS و BDS علاوه بر S درنقطهٔ دیگر O متلاقیند. ثابت کنید که O مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقه است.

برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

مسائل ترجمهٔ: **مهندس زرگری**

۹۶/۳ـ به‌فرض $z\geqslant y\geqslant x>0$ ثابت کنید که:

$$y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y}(x+z)\leqslant(x+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$$

۹۶/۴ـ هرگاه a و b و c و S اندازه‌های ضلعها ومساحت یك مثلث باشند ثابت کنید که:

$$a^4+b^4+c^4\geqslant 16S^2$$

۹۶/۵ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\log_2\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}=\log_9\left(\log_9\frac{x}{3}\right)$$

۹۶/۶ـ نامعادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\log_2\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{x-1}$$

۹۶/۷ـ درداخل دایره‌ای دوچهار ضلعی محاط شده‌اند بقسمی که ضلعهای آنها نظیر به‌نظیر متوازیند. ثابت کنید که قطرهای این دو چهار ضلعی نظیر به نظیر متساویند.

۹۶/۸ـ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر S است. خطی ازرأس قائمهٔ این مثلث گذشته وآن را به دومثلث چنان تجزیه کرده است که دایره‌های محاطی این دو مثلث متساویند. ثابت کنید که طول پاره‌ای ازخط مزبور که بین‌رأس ووترمحدود است برابر $\sqrt{S}$ می‌باشد.

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۹۶/۹ـ سه‌نقطهٔ $A(-3,6)$ و $B(-1,0)$ و $C(4,5)$ مفروض است. برخط BC دو نقطهٔ P و Q یافت می‌شود بقسمی که‌نسبت مساحت‌مثلث APC به‌مساحت مثلث APB همچنین نسبت مساحت مثلث AQC به‌مساحت مثلث AQB مثل‌نسبت ۳به۲ است. معادلهٔ هریك ازخطهای AP و AQ را بدست آورید ومحقق کنید که AP بر BC عمود است.

۹۶/۱۰ـ از محمد معینی

هرگاه دوزاویهٔ α و β متمم یکدیگر باشند ثابت کنید که:

$$\left(1+tg\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+tg\frac{\beta}{2}\right)=2$$

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۹۶/۱۱ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

درصفحهٔ محورهای مختصات قائم $x'Ox$ و $y'Oy$ خط به‌معادلهٔ $ax+by+c=0$ و نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ درخارج آن داده شده‌است. مطلوبست فاصلهٔ هندسی نظیرهریك ازمقادیرزیر:

$$\left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{a}\right| \text{ و } \left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{b}\right| \text{ و } \left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{c}\right|$$

۹۶/۱۲ـ منتخب ازیك کتاب درسی فرانسه

نمایش هندسی رابطهٔ زیررا مشخص کنید که درآن y تابع x است:

$$|x|-|y|=x-y$$

۹۶/۱۳ـ فرستنده: محمد معینی

هرگاه برای سه‌زاویهٔ حاده ومتمایز α و β و γ داشته باشیم:

$$\frac{(tg\alpha+tg\gamma)tg(\beta+\gamma)}{(tg\beta+tg\gamma)tg(\gamma+\alpha)}=\frac{(tg^{2}\beta-tg\alpha tg\gamma)tg\alpha}{(tg^{2}\alpha-tg\beta tg\gamma)tg\beta}$$

ثابت کنید که خواهیم‌داشت:

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma$$

۹۶/۱۴ـ فرستنده: محمد معینی

به‌فرض آنکه داشته باشیم:

$$tg\alpha=\frac{1}{k}(\sqrt{1+k}-1)(\sqrt{1-k}+1)$$

مقدار $sin4\alpha$ را برحسب k بدست‌آورید.

۹۶/۱۵ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

درفضا دوصفحهٔ متقاطع α و β ونقطهٔ O درخارج آنها داده شده است. تابع $N=f(M)$ را به این ترتیب تعریف می‌کنیم که نظیر هر نقطهٔ M ازصفحهٔ α نقطهٔ N عبارتست از محل تقاطع OM باصفحهٔ β. معلوم کنید که تابع N به ازای چه مواضع از M معین‌است.

۹۶/۱۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

ثابت کنید که برای آنکه دونقطه ازیك خط به‌یك فاصله باشند لازم وکافی‌است که فاصله‌های آنها ازصفحاتی که بوسیلهٔ آن خط ونقطهٔ دیگر تشکیل می‌شود باهم برابر باشند.

برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۹۶/۱۷ـ فرستنده: حسن نیکو آمال‌راد

معادلهٔ قطرهای دایره‌ای به‌صورت زیراست:

$$(m+n)x+(m-n)y=2m$$

می‌دانیم که عددمطلق مساحت این‌دایره دوبرابرعدد مطلق‌محیط آن است. معادلهٔ این‌دایره رامشخص کنید.

۹۶/۱۸ـ فرستنده: محمد معینی

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$sin(\pi sin x)+cos(\pi sin x)=\sqrt{2}$$

برای دانش‌آموزان کلاس ششم ریاضی

۹۶/۱۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

منحنی نمایش هندسی رابطهٔ زیررا رسم کنید:

$$\frac{x|x|}{25}+\frac{y|y|}{9}=1$$

۹۶/۲۰ـ ترجمهٔ ازفرانسه

جدول تغییرات و منحنی نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{(x+1)^{3}}$$

۹۶/۲۱ـ فرستنده: محمد حسنی‌نژاد

هرگاه داشته باشیم:

$$x^{2}+y^{2}=\frac{x\cos3\alpha+y\sin3\alpha}{\cos^{3}\alpha}=\frac{y\cos3\alpha-x\sin3\alpha}{\sin^{3}\alpha}$$

رابطهٔ مستقل از α رابین xوy بدست‌آورید.

۹۶/۲۲ـ فرستنده: جوادفیض

مجموع زیررا حساب کنید:

$$S=\frac{\sin x+\cos x}{\sec x+\operatorname{cosec} x}+\frac{\sin2x+\cos2x}{\sec2x+\operatorname{cosec} x}+\cdots+\frac{\sin nx+\cos nx}{\sec nx+\operatorname{cosec} nx}$$

۹۶/۲۳ـ ترجمهٔ: مهندس‌زرگری

ثابت کنید که در مجموعهٔ اعداد صحیح معادلهٔ زیر جواب ندارد:

$$x^{6}+y^{6}-z^{6}=1972$$

۹۶/۲۴ـ ترجمهٔ: مهندس‌زرگری

جزء کسری عدد گویای r را با $\{r\}$ نمایش می‌دهیم.

مثلا:

$$\left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}\ ،\ \left\{\frac{3}{7}\right\}=\frac{3}{7}\ ،\ \{4/75\}=0/75$$

هرگاه m و n دوعدد طبیعی ونسبت به‌هم اول باشند، مجموع زیررا پیدا کنید:

$$\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\cdots+\left\{(n-1)\frac{m}{n}\right\}+\{m\}$$

۹۶/۲۵ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دودایرهٔ به مرکزهای O و O' وبه شعاعهای R و R' که $R>R'$ است دردو نقطهٔ A و B برهم عمودند. اگر TT' مماس مشترك این دو دایره و $OO'=d$ باشد ثابت کنید که $TT'=\sqrt{2RR'}$ وتصویر TT' بر OO' با AB برابر است.

۹۶/۲۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دایرهٔ ثابت C به مرکز O وبه شعاع R ونقطهٔ ثابت A درداخل آن ونقطهٔ متغیر P واقع بر آن مفروض است. عمودمنصف پاره خط AP دایرهٔ C را در M و N قطع می‌کند. اولا اگر I وسط AP و H تصویرقائم O روی MN باشد مکان هندسی هریك ازنقاط I و H را تعیین کنید. ثانیاً اگر ω مرکزدایرهٔ محیطی مثلث AMN باشد مکان هندسی ω راپیدا کنید وثابت کنید که دایرهٔ اخیر بردایرهٔ ثابتی‌مماس است.

مسائل گوناگون

ترجمهٔ از روسی وسط مهندس زرگری

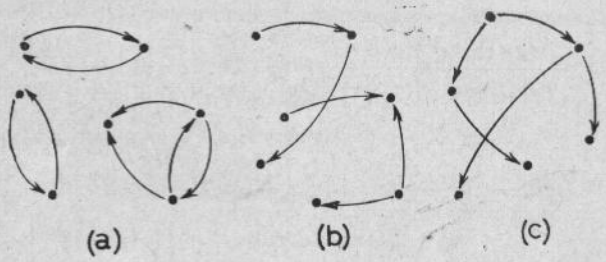
۹۶/۲۷ـ دوماشین باری برای حمل بارازیك شهر به‌شهر دیگررفت وآمد می‌کنند. هرگاه اولی‌چهار دفعه ودومی‌سه‌دفعه رفت‌وآمدکند رویهم کمتر از ۲۱ تن بارحمل می‌کنند. هرگاه اولی‌هفت دفعه ودومی چهار دفعه رفت و آمد داشته باشد رویهم بیش‌از ۳۳ تن‌بار حمل می‌کنند . ظرفیت کدام ماشین بیشتر است ؟

۹۶/۲۸ـ دوتراشکار قرارگذاشتندکه باهم کاری راکه تراش قطعاتی به‌تعدادکمتراز ۱۰۰۰ عدد بود انجام دهند. در روزهای اول‌ودوم وسوم اولی به‌ترتیب $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{6}$ و $\frac{9}{20}$ کار خود ودومی به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{11}$ و $\frac{3}{7}$ کار خود را تمام‌کرده هریك از دوتراشکار در روزسوم چند قطعه را تراشیده‌اند؟

۹۶/۲۹ـ سوزنبان قطار دراتاقك خود به‌فاصلهٔ یك‌متری ازپنجرهٔ به‌عرض یك‌متر نشسته است. خط‌آهن به‌موازات پنجره ودرفاصلهٔ۲۹۹ متری‌ازآن کشیده شده‌است. ده‌ثانیه طول‌می‌کشد تا سوزنبان قطار به طول ۱۰۰ متر راکه روی این خط آهن می‌گذرد به تمامی مشاهده‌کند. سرعت قطار چقدر است؟ (از عرض‌قطار وفاصلهٔ بین‌چشمان سوزنبان صرف‌نظر می‌شود).

۹۶/۳۰ـ درهریك ازشکلهای زیرهردایرهٔ سیاه‌کوچك نماینده یك فرداست. دریکی ازشکلها هرپیکان‌که ازیك فردبه فرددیگر کشیده شده‌است.معلوم‌می‌کندکه اولی پدربزرگ‌دومی است. درشکل دیگر هرپیکان نشان می‌دهدکه فردی پدر فرد دیگراست. درشکل سوم هرپیکان برادرهرفرد رامعین‌می‌کند.

درکدام یك ازاین سه‌شکل هرپیکان پدر بزرگ نوهٔ خودرا مشخص می‌کند؟ درکدامیك ازشکلها پیکانها ازپدرهابه



پسرها رسم شده‌اند؟ درشکلی‌که مربوط به برادرها است آیا خواهر فرد یاافرادی نموده شده‌است؟

۹۶/۳۱ـ ثابت‌کنیدکه مجموع مربعات پنج‌عدد طبیعی متوالی نمی‌تواند مربع‌کامل باشد.

۹۶/۳۲ـ درچهار ضلعی محدب ABCD نقطه های P وQ به‌ترتیب وسطهای BC و CD می‌باشند. هرگاه‌خطوط AP و AQ قطر BD ازچهار ضلعی‌را به سه‌قسمت متساوی تقسیم کنند ، ثابت کنیدکه چهار ضلعی مزبور متوازی‌الاضلاع است .

۹۶/۳۳ـ خطی‌موازی ضلع AB ازمثلث ABC رسم می‌کنیم تا AC رادر A_1 و BC رادر B_1 قطع کند. از C خط دلخواهی مرور می‌دهیم تا AB را در D قطع‌کند. ثابت کنیدکه مساحت چهارضلعی CA_1DB_1واسطهٔ هندسی‌مساحت‌های مثلثهای CAB و CA_1B_1 است. عکس این‌مطلب رانیز ثابت‌کنید.

۹۶/۳۴ـ قطرهای چهارضلعی محدب ABCD درO متلاقیند. ثابت‌کنیدکه مراکز دوایرمحیطی مثلثهای OAB و OBC و OCD و ODA رأسهای یك متوازی‌الاضلاعند . هرگاه زاویهٔ بین‌قطرهای چهارضلعی °۴۵ باشد مساحت این متوازی‌الاضلاع رابرحسب مساحت چهارضلعی بدست‌آورید.

۹۶/۳۵ـ خطوطی‌موازی باضلعهای مثلث مفروض‌چنان رسم کنید که از برخوردآنها با ضلعهای مثلث یك شش ضلعی متساوی‌الاضلاع پدیدآید.

مسائلی از منطق و ریاضی جدید

ترجمهٔ از فرانسه

۹۶/۳۶ـ دردهکده‌ای تنها یك‌سلمانی وجود دارد.این

سلمانی فقط وفقط ریش اشخاصی‌را می‌تراشد که خودشان ریش‌خود را نمی‌تراشند. آیا سلمانی‌ریش خودرا شخصاً می‌تراشد؟

۹۶/۳۷ـ مجموعهٔ تمام زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ E رابا $P(E)$ وعدداصلی مجموعهٔ E را با $n(E)$ نشان می‌دهیم. به‌فرض آنکه $E_p=\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ مجموعه‌ای متناهی شامل p عضو باشد؛

۱) ثابت کنید که:

$$n[P(E_{p+1})]=2n(P(E_p))$$

۲) عدد اصلی $P(E_n)$ رابرحسب n حساب کنید.

۹۶/۳۸ـ دومجموعهٔ زیرمفروض است:

$$A=\{1,2\} \text{ و } B=\{2,3\}$$

اولا عضو های هر یك از مجموعه های زیررا تعیین کنید (مجموعهٔ تهی‌را به‌حساب نیاورید):

$$P(A), P(B), P(A\cap B), P(A\cup B), P(A\Delta B)$$

و از آنجا رابطه‌ای راکه از یك طرف بین $P(A\cap B)$ و $P(A)\cap P(B)$ و از طرف دیگر بین $P(A\cup B)$ و $P(A)\cup P(B)$ وجود دارد بدست‌آورید.

ثانیاً مسئله را درحالت زیرحل کنید:

$$A=\{1,2,3\} \text{ و } B=\{1,3\}$$

۹۶/۳۹ـ ثابت کنید که اگرحاصل‌ضرب قائم دومجموعهٔ A و B برابربامجموعهٔ تهی‌باشد، اقلایکی‌از دومجموعهٔ A یا B تهی است.

۹۶/۴۰ـ ثابت کنید که عمل‌ضرب قائم مجموعه‌ها نسبت به‌اشتراك آنها پخشی‌است، یعنی:

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۹۶/۴۱ـ به‌فرض آنکه داشته‌باشیم:

$$f(x+\frac{1}{x})=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{x^2}$$

مقدار $f(\sqrt{2})$ برابراست با:

الف‌ـ $\frac{11+4\sqrt{2}}{2}$ ب‌ـ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

ج‌ـ $\sqrt{2}+1$ د‌ـ $3+2\sqrt{2}$

۹۶/۴۲ـ کدامیك ازرابطه‌های زیرصحیح‌است:

(I) : $x<1$ و $y<10 \Longrightarrow x<y$

(II) : $x>0$ و $y^2>x^2 \Longrightarrow y>x$

(III) : $xy<0$ و $x>0 \Longrightarrow y>0$

(IV) : $x^2>1 \Longleftrightarrow x>1$

الف‌ـ فقط I ب‌ـ II و IV

ج‌ـ I و III د‌ـ هیچکدام

۹۶/۴۳ـ مخرج کسرزیر راگویاکنید:

$$\frac{3(2+\sqrt[3]{5})}{4+\sqrt[3]{5}(2+\sqrt[3]{5})}$$

الف‌ـ $4-\sqrt[3]{25}$ ب‌ـ $\sqrt[3]{25}-4$

ج‌ـ $2-\sqrt[3]{25}$ د‌ـ 3

۹۶/۴۴ـ حاصل عبارت‌زیررا بدست‌آورید:

$$\log x^2+\log x^3-2\log x$$

الف‌ـ $2\log x^4$ ب‌ـ $2\log x^5$

ج‌ـ $\log x^4$ د‌ـ $5\log x$

۹۶/۴۵ـ به‌فرض آنکه a و b و c و h به‌ترتیب اندازه‌های دوضلع زاویهٔ قائمه ووترو ارتفاع نظیروترازیك مثلث‌قائم‌الزاویه باشند وداشته باشیم:

$$x=\log a+\log b-2\log c$$

مقدار x برابراست با:

الف‌ـ h ب‌ـ ch

ج‌ـ $\frac{h}{c}$ د‌ـ $\frac{c}{h}$

۹۶/۴۶ـ درچهار ضلعی غیرمشخص $ABCD$ اگر α اندازهٔ زاویهٔ حاده‌ای باشدکه نیمسازهای دوزاویهٔ مقابل A و C با یکدیگر می‌سازند وتفاضل اندازه‌های دوزاویهٔ B و D برابر با 2β باشد، دراین‌صورت:

الف- $\alpha>\beta$ ب- $\alpha=\beta$ ج- $\alpha<\beta$ د- $\alpha\neq\beta$

۹۶/۴۷- نقطهٔ M بر نیمدایرهٔ به‌قطر AB تغییرمکان می‌دهد. عمود MH را بر AB رسم می‌کنیم و روی OM طول OP برابر با MH را جدا می‌کنیم. مکان نقطهٔ P :

الف - دایره‌ای است مماس بر AB

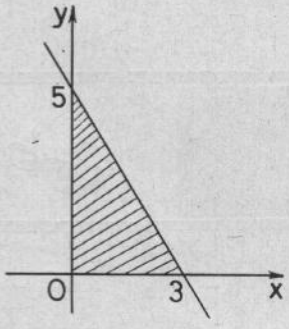
ب - دایره‌ای است به قطر OB

ج - یا دایرهٔ به‌قطر OA یا دایرهٔ به قطر OB است.

د - دایره‌ای است که بر A و B می‌گذرد.

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۹۶/۴۸- درشکل مقابل، ناحیهٔ هاشور خورده نمایندهٔ یك دستگاه سه‌نامساوی است که $x>0$ و $y>0$ دو نامساوی آن می‌باشند. نامساوی دیگرعبارتست از:



الف- $3y-5x>15$

ب- $3y>5x-15$

ج- $3y+5x<15$

د - $3y-5x<15$

۹۶/۴۹- به‌فرض $A(x,y)$ و $B(4,1)$ و $C(-3,1)$ و به فرض اینکه مساحت مثلث ABC برابر با ۱۵ واحدسطح باشد، معادلهٔ مکان نقطهٔ A عبارتست از:

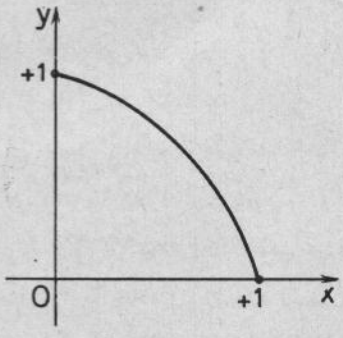
الف - $4x-3y=43$

ب - $4x-3y+17=0$

ج - $4x+3y=43$ یا -17

د - $4x-3y=43$ یا -17

۹۶/۵۰- منحنی شکل مقابل قسمتی از نمایش هندسی کدامیك ازتابعهای‌زیر می‌تواند باشد:



الف- $y=\cos x$

ب- $y=\log(10-9x)$

ج- $y=x^2+1$

د- $y=x^3-x$

۹۶/۵۱- اگر A زاویهٔ‌منفرجه و $\sin A=0/28$ باشد کدامیك از مقادیرزیر با $-0/96$ برابراست:

الف- $\cos(180^\circ-A)$ ب- $tg A$

ج- $tg(180^\circ-A)$ د- $\cos A$

۹۶/۵۲- در مثلث ABC زاویهٔ A حاده و:

$$\sin A=\frac{15}{17} \text{ و } tgB+tgC=15$$

است. مقدار $tgB\,tgC$ برابراست با:

الف- -7 ب- 7 ج- 9 د- -9

۹۶/۵۳- در چهار ضلعی چپ مفروض چهارصفحه رسم می‌کنیم که به ترتیب بروسط یك ضلع بگذرد و برضلع مقابل‌به آن عمود باشد. همچنین دو صفحهٔ دیگررسم می‌کنیم که بروسط هرقطر بگذرد و برقطر دیگرعمود باشد، این شش صفحه:

الف - در یك نقطه متقاربند.

ب- در یك خط متقاربند.

ج - دوبه دو متوازیند.

د - دو به دو برهم عمودند.

۹۶/۵۴- صفحهٔ P و دو نقطهٔ A و B در خارج آن مفروض است . مکان هندسی نقاط M از صفحهٔ P بقسمی که $\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=k^2$ مقدار ثابت باشد:

الف- یك دایره است ب- یك خط است

ج - دو خط متوازی‌است د- دوخط‌عمود برهم است.

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۹۶/۵۵- در تابع زیر مقدار a چقدر باشد تا هرگاه $x\to-\infty$ در این صورت $y\to-\infty$:

$$y=\sqrt{x^2+x+1}-ax$$

الف - $a>1$ ب- $a>-1$

ج- $a<-1$ د- $a=\pm1$

۹۶/۵۶- هرگاه $x\to+\infty$ حد تابع زیر کدام است

$$y=\sqrt[4]{x^4+1}-x$$

الف- $\pm\infty$ ب- $+\infty$ ج- $-\infty$ د- صفر

۹۶/۵۷- تابع زیررادر فاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$ در نظر می‌گیریم:

$$x\neq0 \;:\; y=\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}$$

این تابع در ازای $x=0$:

الف ـ پیوسته است. ب ـ ناپیوسته است.

ج ـ نامعین است. د ـ تعریف نشده است.

۹۶/۵۸ـ منحنی نمایش هندسی تابع $y=x\,tg\,x$:

الف ـ نقطهٔ عطف ندارد.

بینهایت نقطهٔ عطف دارد واقع بر:

ب ـ خطی موازی $x'x$

ج ـ محور $x'x$ د ـ یك منحنی

۹۶/۵۹ـ اگر u عدد حقیقی باشد ، بزرگترین عدد صحیح موجود در u را با $[u]$ نشان می‌دهیم، با این تعریف و با فرض اینکه انتهای کمان x در بخش دوم از دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد، معادلهٔ:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+2[\cos x]=0$$

الف ـ یك جواب دارد. ب ـ دوجواب دارد.

ج ـ بیش از دوجواب دارد. د ـ جواب ندارد،

۹۶/۶۰ـ تعداد n عددصحیح‌متوالی‌ابتدا ازعدددلخواه a را در نظر می‌گیریم. چندعدد ازاین اعداد مضرب n است؟

الف ـ فقط یکی ازآنها ب ـ هیچکدام

ج ـ حداکثر دوعدد ازآنها

د ـ یا یك عدد و یا دو عدد ازآنها

۹۶/۶۱ ـ به فرض آنکه n عدد طبیعی باشد، برای آنکه از عددی‌که 3^n رقم یك تشکیل شده است مضرب ۳ باشد مقدار n چه باید باشد؟

الف ـ مضرب ۳ باشد ب ـ هرچه باشد.

ج ـ مضرب ۳ نباشد. د ـ فرد باشد،

۹۶/۶۲ـ متوازی الاضلاع $ABCD$ وعدد $0<\lambda<1$ را در نظر می‌گیریم. روی ضلع AB نقطهٔ M و روی خط BC نقطهٔ N را بقسمی انتخاب می‌کنیم که:

$$\overline{AM}=\lambda\overline{AB} \text{ و } \overline{CN}=\lambda\overline{BC}$$

اگر P قرینهٔ D نسبت به I وسط MN باشد، مکان P :

الف ـ خطی است عمود بر AC

ب ـ پاره خطی است عمودبر AC

ج ـ خطی است موازی با AC

د ـ پاره خطی است موازی با AC

شیمیدانان‌نامی اسلامی (دنباله از صفحهٔ ۱۲۰)

موجود درکتابخانهٔ لیدن شمارهٔ ۴۴۰ بچاپ رسانیده است‌وگفته می‌شوداین‌کتاب چاپ شده‌تألیف **ابوعبدالله محمدبن‌یحیی** است و قسمتهایی از مطالب جابر را در آن آورده است زیرا مؤلف در چند جای همین‌کتاب نام خودرا ذکرکرده است(۶۹)

۴۹ـ «الرحمة الصغیر» برتلو آن را چاپ‌کرده و یك نسخه از آن درکتابخانهٔ ملی‌پاریس به شمارهٔ ۲۶۰۵ موجود است و در سال ۱۸۹۱ میلادی به‌طریقهٔ افست چاپ شده است.

شلمغانی معروف به **ابن ابی العزاقر** که در سال ۳۲۲ هجری‌کشته شدو**ابوقران** از اهالی «نصیبین» **وابوبکررازی** هریك جداگانه آن را شرح داده‌اند. (۷۰)

۵۰ـ «المکتسب نهایة الطلب» این کتاب همراه با ترجمهٔ فارسی‌آن از**جلدکی** در سال ۱۳۰۷ هجری قمری در هندوستان چاپ شده است. (۷۱)

۵۱ـ «الجفر الاسود» ظاهراً این‌کتاب از آن‌پانصد رساله‌ای است‌که امام صادق (ع) برجابر املاء فرموده است ، زیرا در اولش نوشته است : «حدیث جعفر باشرح و بیان آن بنابر آنچه از امام جعفر (ع) شنیده‌ام واول آن چنین است: «اعلم وفقك‌الله الی طاعته و الهمك الحکمة و الرشد» و آخرش چنین است:

«ولایظهر فی‌الارض الفساد و صلی‌الله علی سیدنا محمد وآله...(۷۲)

۵۲ـ «الرسائل فی الجفر» این‌کتاب مشتمل برپانصد رساله است و درسال ۱۵۳۰ میلادی در استراسبورگ آلمان چاپ شده است. (۲۷)

۵۳ـ «التدابیر» یك نسخه از این کتاب درکتابخانه «آصفیه» به شمارهٔ ۵۷ در ردیف‌کتابهای شیمی موجود است و اولش‌این‌است: «الحمدلله‌رب‌العالمین کثیراً کما هواهله...»(۷۴)

دنباله دارد

۶۹ ـ فلاسفه شیعه تألیف‌عبدالله نعمه

۷۰ ـ جابربن حیان : «المکتسب‌نهایة المطلب» بمبئی ۱۳۰۷ قمری

۷۱ و۷۲ـ فلاسفه شیعه

۷۳ ـ «جابربن‌حیان» : «الرسائل فی‌الجفر» استراسبورگ ۱۵۳۰

۷۴ ـ فلاسفه شیعه

مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث اول، سال تحصیلی ۵۲-۱۳۵۱ (آذر ۱۳۵۱)

کلاس ششم ریاضی

هندسهٔ رقومی و ترسیمی

دبیرستانهای انوشیروان دادگر وپیشاهنگ

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف: هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم‌کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز کاغذ بنامید.

۱- نقطهٔ a_5 را به فاصلهٔ ۵ سمت چپ مرکز کاغذ روی محور اقصر انتخاب‌کرده از این نقطه‌خطی رسم‌کنید که‌تصویرش موازی محور اطول بوده و شیب آن $p=\frac{1}{2}$ وجهت‌ترقی‌رقوم آن از پائین به بالا باشد . برروی این خط طـول حقیقی $AB=3\sqrt{5}$ را جدا نموده ملحض نقطهٔ B را که رقومش از A بیشتر است تعیین‌کنید.

۲- از نقطهٔ a_5 خط دیگر a_5d_{12} را به‌شیب $p=1$ بقسمی رسم نمایید‌که d روی محور اطول و درزیر مرکز کاغذ قرارگیرد.

۳- ملخص متوازی الاضلاع ABCD راکه BD قطر آن می‌باشد رسم نمایید.

۴- از نقطهٔ d_{12} خط $d_{12}h_9$ راکه در فضا DH بر AD عمود می‌باشد و h_9 برروی محور اقصر سمت راست مرکز کاغذ قرارگیرد مرور دهید.

۵- برروی متوازی‌الاضلاع ABCD متوازی‌السطوح ABCDEFGH را بسازیدکه DH یال جانبی آن باشد ملخص متوازی‌السطوح را رسم وآن‌را مرئی و مخفی نمایید.

۶- مقطع متوازی‌السطوح فوق را با صفحهٔ افقی رقوم ۷ یافته و آن را مرئی و مخفی‌کنید.

۷- یك خط بزرگترین شیب صفحهٔ مثلث ADH رادر سمت چپ‌کاغذ رسم‌کرده‌وسعت حقیقی‌مثلث ADH را باتسطیح حول افقیهٔ رقوم ۱۲ در سمت‌پایین‌کاغذ نشان دهید.

ب : هندسهٔ ترسیمی

۱- نقطهٔ A را در ناحیهٔ اول بقسمی تعیین نمایید‌که فاصلهٔ آن از خط زمین ۵ و فاصله‌اش از نیمساز دوم سه برابر ارتفاعش باشد.

۲- برروی خط جبهی DD' به بعد ۳ نقطه‌ای تعیین نمایید‌که فاصله‌اش ازخط زمین ۵ باشد.

۳- از نقطهٔ aa' به بعد ۵ و ارتفاع ۲ خطی رسم‌کنید که با صفحه افق زاویهٔ 30° بسازد و تصویر قائمش‌با خطزمین زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل‌دهد.

دبیرستانهای بهمن قلهك وجام جم

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف: هندسهٔ رقومی

واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محور اقصرکاغذ افقی و محور اطول را قائم اختیار کنید. محل تلاقی دو محور مرکز کاغذ می‌باشد.

۱- صفحهٔ P بـه شیب $p=1$ را بقسمی رسم‌کنید کـه افقیهٔ رقوم ۱۰ آن برمحور اقصرکاغذ منطبق بوده و جهت‌ترقی رقوم آن از پایین به بالا باشد. یك مقیاس شیب صفحه را سمت چپ‌کنارکاغذ رسم نمایید و نقطهٔ a_{10} را در صفحهٔ P بقسمی انتخاب‌کنید‌که به‌فاصلهٔ ۵ سمت چپ محور قائم‌کاغذ قرارگیرد.

۲- از نقطهٔ a_{10} در صفحهٔ P خط $a_{10}b_7$ را بقسمی رسم‌کنید‌که در فضا باافقیه‌های صفحهٔ P زاویهٔ حقیقی ۳۰درجه بسازد و نقطهٔ b_7 سمت راست a_{10} واقع گردد.

۳ـ از نقطهٔ b_7 خط دیگر b_7c_{11} را درصفحهٔ P بقسمی رسم کنید که زاویهٔ ABC در فضا قائمه باشد.

۴ـ با دوخط $a_{10}b_7$ و b_7c_{11} ملخص مستطیل ABCD را که در صفحهٔ P واقعست و AC قطرش می‌باشد رسم کرده و وسعت حقیقی آن را باتسطیح حول افقیهٔ ۷ در سمت پائین کاغذ نشان دهید.

۵ـ از نقطهٔ a_{10} خط $AE=10$ را بر صفحهٔ P عمود نمایید بقسمی که رقوم E از A کمتر باشد.

۶ـ ملخص مکعب مستطیل ABCDEFGH را که ABCD قاعده و AE یال جانبی آنست رسم و مرئی و مخفی کنید.

۷ـ مقطع مکعب مستطیل فوق را با صفحهٔ افقی رقوم ۶ یافته و آن را مرئی و مخفی نمایید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ A از خط زمین ۵ و به فاصلهٔ ۱ زیر صفحهٔ نیمساز اول است نقطه را در ناحیهٔ اول نشان دهید.

۲ـ خط DD′ که بانیمساز اول مـوازی است مفروض است برروی آن نقطه‌ای بیابید که مجموع بعد وارتفاعش ۲ باشد.

۳ـ از نقطهٔ aa′ خطی رسم کنید که با صفحهٔ افق زاویهٔ ۳۰ بسازد و دو تصویرش موازی باشند.

دبیرستان رازی

دبیر: مهندس محمود خوئی

هندسهٔ رقومی:

محور اقصر کاغذ افقی و محور اطول را قائم و محل تلاقی آنها مرکز کاغذ واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ انتخاب شود.

۱ـ نقطهٔ a_5 به فاصلهٔ ۴ سمت بالای محور اقصر و به فاصلهٔ ۳ سمت راست محور قائم کاغذ تصویر می‌شود از این نقطه خط AC را به شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی رسم کنید که نقطهٔ c_1 آن در سمت چپ مرکز روی محور اقصر واقع شود.

۲ـ برخط AC صفحه‌ای به اساس $i=1$ مرور دهید و یك مقیاس شیب صفحه را در سمت چپ کاغذ بقسمی رسم کنید که ترقی رقوم آن از پایین به بالا باشد وآن را P بنامید.

۳ ـ قطر AC در صفحهٔ P مستطیل ABCD را بنا کنید که b_3 سمت راست a_5c_1 قرار گیرد.

۴ـ از نقطهٔ c_1 خط c_1g_7 را به شیب $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$ بقسمی رسم کنید که تصویرش موازی محور اطول و ترقی رقومش ازبالا بپایین باشد.

۵ـ متوازی‌السطوح ABCDEFGH را که قاعده‌اش مستطیل ABCD و یك یال جانبی آن CG می‌باشد رسم و آن را مرئی و مخفی کنید.

۶ـ مقطع متوازی السطوح فوق را با صفحهٔ افقی رقوم ۴ تعیین کرده مرئی و مخفی نمایید.

۷ـ ارتفاع متوازی السطوح را که از مرکز قاعده فوقانی می‌توان رسم کرد مشخص نموده اندازهٔ حقیقی آن را نشان دهید.

۸ ـ عمود مشترك خط CG و خط BD را روی شکل رسم کنید.

۹ـ زاویهٔ حقیقی خط CG را با صفحهٔ P مشخص کنید.

یکی از دو مسئلهٔ زیر را انتخاب کرده حل و رسم نمایید:

۱ـ رقومی: قطعه خط a_2b_4 به اساس ۲ ضلع مربعی است که قطرش AC افقی است. آن را رسم کنید.

۲ـ ترسیمی: از نقطهٔ aa′ که بعدش ۵ و ارتفاعش ۴ است خطی رسم کنید که خط زمین راقطع کند وباصفحهٔ افق زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد.

دبیرستان کوشش

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ محور اقصر کاغذ افقی ومحور اطول را قائم اختیار کرده محل تلاقی دو محور را مرکز کاغذ بنامید.

۱ـ نقطهٔ a_5 برروی محور قائم کاغذ به فاصلهٔ ۵ زیر مرکز کاغذ مفروض است. ازاین نقطه صفحهٔ P رابقسمی مرور دهید که افقیه‌هایش موازی محوراقصر کاغذ بوده وترقی رقوم آن از بالا به پایین باشد و با صفحهٔ افق تصویر زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد.

۲ ـ در صفحهٔ P خط AB را بقسمی رسم نمایید که با صفحهٔ افق تصویر زاویهٔ $\alpha=30$ درجه ساخته و برروی آن نقطهٔ b_2 را بقسمی انتخاب کنید که تصویرش سمت چپ و بالای a واقع گردد.

۳ـ قطعه خط AB ضلع مثلث قائم الزاویهٔ $a_5b_2c_1$ واقع در صفحهٔ P می‌باشد که در زاویهٔ A قائمه است. این مثلث را رسم نموده وسعت حقیقی آن را درسمت پایین کاغذ نشان دهید.

۴ـ مثلث ABC قاعدهٔ هرم SABC است که در کنج A سه قائمه بوده و رقوم S برابر ۱۵ می‌باشد. تصویر هرم را رسم کنید.

۵ـ مقطع هرم فوق را با صفحهٔ افقی رقوم ۸ تعیین کنید.

۶ـ اندازهٔ حقیقی زاویهٔ BSC را باتسطیح آن درسمت بالای کاغذ مشخص نمایید.

۷ـ قسمتی از هرم راکه بین قاعده ABC وصفحهٔقاطع افقی فوق واقع‌است مشخص نموده و خطوط مرئی و مخفی را تمیزدهید.

۸ـ در صفحهٔ قائمی‌که اثرش بر خط محور اقصرمنطبق است افقیه‌ای به ارتفاع یك رسم‌کرده عمود مشترك آنرا باخط SA رسم‌کنید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی :

۱ـ قرینهٔ نقطهٔ aa' به بعد ۲ و ارتفاع ۵ را بـوسیلهٔ رسم نسبت به صفحهٔ‌نیمساز اول و دوم روی دو شکل نشان‌دهید.

۲ـ از نقطهٔ aa' به بعد ۵ و ارتفاع ۲ خطی‌رسم‌کنیدکه با صفحهٔ افق تصویر زاویهٔ ۳۰ بسازد و بعداثرافقی‌آن۳ باشد.

دبیرستان کوشش‌مریم

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی :

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم‌کنید محل تلاقی آن‌ها را مرکز کاغذ بنامید.

۱ـ صفحهٔ P که اثرش برمحور اقصر کاغذ منطبق وترقی رقوم آن از بالا به پائین بوده و زاویه‌اش با صفحهٔ افق تصویر $\alpha=45^\circ$ است در سمت چپ‌کاغذ رسم‌کنید و نقطهٔ b_2 راکـه تصویرش برمحور قائم‌کاغذ منطبق است‌در این صفحه نشان‌دهید

۲ـ از نقطهٔ b_2 در صفحهٔ P خطی مروردهید که شیب آن $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$ بوده و برروی آن نقطهٔ d_5راکه تصویرش‌سمت راست محور قائم واقع است انتخاب نمایید.

۳ـ قطعه خط BD قطرلوزی ABCD واقع درصفحهٔ P است‌که رأس c_6 آن سمت چپ bd واقعست ملخص لوزی را رسم‌کنید.

۴ـ صفحهٔ Q را به موازات صفحهٔ P بقسمی رسم کنید که افقیهٔ رقوم ۱۴ آن برمحور اقصر منطبق باشد یـك مقیاس شیب این صفحه را در سمت راست‌کاغذ نشان دهید و فاصله دو صفحهٔ P و Q را بوسیله رسم مشخص‌کنید.

۵ـ قطعه خط b_2f_{10} راکه‌تصویرش با محور اقصرزاویهٔ ۱۲۰ ورجه در جهت مثلثاتی در تصویر می‌سازد و bf محور اقصررا سمت چپ مرکز کاغذ قطع مـی‌کند و از سمت راست به‌چپ پایین به بالاامتداد دارد رسم‌کنید بقسمی‌که F در صفحهٔ Q باشد.

۶ـ متوازی السطوح ABCDEFGH راکـه لوزی ABCD قاعده‌وBF یال جانبی آن است رسم و آن را مرئی و مخفی نمایید.

۷ـ مقطع متوازی السطوح فوق را باصفحهٔ افقی رقوم۴ بدست آورده و مرئی و مخفی‌کنید.

۸ـ اندازهٔ حقیقی زاویهٔ FBC را در سمت راست‌کاغذ مشخص نمایید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ A از خط زمین ۵ ونسبت بعد به‌ارتفاع آن $\frac{3}{2}$ می‌باشد. نقطه را در ناحیهٔ اول نشان دهید.

۲ـ خط DD' مفروض است آثار آن را نشان دهیدوبر روی آن نقطه‌ای را نشان دهیدکه فاصله‌اش تا اثر افقی مساوی ارتفاع اثرقائمش باشد.

گروه‌فرهنگی‌مرجان

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ‌رقومی:

واحدسانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱محورهای‌اقصر و اطول کاغذ را رسم‌کنید. محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید.

۱ـ نقطهٔ a_2 برروی محور اطول کاغذوبه فاصلهٔ۲زیرمرکز کاغذ قرار دارد. از ایـن نقطه صفحهٔ P را بـه شیب $p=1$ بقسمی مرور دهیدکه افقیه‌هایش موازی محور اقصر کاغذباشند. یك مقیاس شیب صفحه را سمت چپ‌کنار کاغذ رسم نموده وجهت ترقی رقوم آن رااز بالا به پایین اختیار نمایید.

۲ـ از نقطهٔ a_2 در صفحهٔ P خـط a_2c_5 را بـه شیب $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$ بقسمی مروردهیدکه c_5 سمت راست محورقائم قرار گیرد.

۳ـ قطعه خط a_2c_5 قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC واقع در صفحهٔ P است‌که $BA=BC$ ورقوم رأس B برابر۶ و تصویرش سمت چپ ac واقع است‌ملخص‌مثلث را رسم نمایید.

۴ـ برروی مثلث ABC ملخص لوزی ABCD راکه AC قطرآن است رسم‌کنید.

۵ـ قطعه خط a_2e_{10} راکه شیب آن $p=1$ و تصویرش ae محور اقصر را در فاصلهٔ ۱ سمت چـپ مرکـز کاغذ قطع می‌کند و از راست به چپ و پایین به بـالا ممتد است و e_{10} بالای محور اقصر و سمت چپ محـور قائم قرار می‌گیرد رسم کنید.

۶ـ متوازی السطوح ABCDEFGH را که لوزی ABCD قاعده و AE یال جانبی آن است رسم وآنرامرئی و مخفی نمائید.

۷ـ مقطع متوازی السطوح فوق را باصفحهٔ افقی رقوم۴ بدست آورده مرئی و مخفی‌کنید.

۸ـ اندازهٔ حقیقی زاویهٔ BAE را در سمت راست‌کاغذ نشان دهید.

۹ـ ارتفاع متوازی السطوح را رسم‌کرده اندازهٔحقیقی آن را باتسطیح مشخص نمایید.

ب- هندسهٔ ترسیمی:

۱- فاصلهٔ نقطهٔ A از خط زمین ۵ و بعدش ۲ برابر ارتفاعش می‌باشد. به طریق رسم نقطه را نشان دهید.

۲- برروی خط غیرمشخص DD′ نقطه‌ای پیدا کنید که در صفحهٔ نیمساز اول یا دوم باشد. (روی یك شکل رسم شود)

دبیرستان نقش‌جهان

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف - هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کرده. محل تلاقی آن‌ها مرکز کاغذ می‌باشد.

۱- بزرگترین شیب صفحهٔ P را سمت چپ کنار کاغذ با ترقی رقوم از پایین به‌بالا باشیب $p=1$ بقسمی رسم کنید که افقیهٔ رقوم ۱۰ آن برمحور اقصر کاغذ منطبق باشد. نقطهٔ b_7 را دراین صفحه به فاصلهٔ ۲ سمت‌راست محور اطول اختیار نمایید

۲- از نقطهٔ b_7 در صفحهٔ P خط b_7a_{10} را بقسمی رسم کنید که a_{10} سمت چپ b_7 واقع بوده و زاویهٔ حقیقی خط AB در فضا با افقیه‌های صفحهٔ P برابر ۳۰ درجه باشد.

۳- درصفحهٔ P ملخص مستطیل ABCD را برروی قطعه خط AB بقسمی رسم کنید که AC قطر مستطیل بوده و رأس c_{11} سمت راست محور اطول قرار گیرد . ملخص مستطیل را نشان داده ووسعت حقیقی آن را درسمت پایین کاغذ نشان دهید

۴- از نقطهٔ a_{10} خطی رسم کنید که تصویرش موازی محور اطول و شیب آن $p=\frac{1}{2}$ و ترقی رقومش از پایین به‌بالا باشد و زاویهٔ این خط را با صفحهٔ P تعیین کنید. (این خط را Δ بنامید)

۵- صفحهٔ Q را سمت راست کاغذ موازی صفحهٔ P بقسمی رسم نمایید که افقیهٔ رقوم ۶ آن برروی محور اقصر کاغذ قرار گیرد و فصل مشترك صفحهٔ Q را با خط Δ یافته و آن را E بنامید و ملخص آن را نشان دهید.

۶- ملخص متوازی السطوح ABCDEFGH را که ABCD قاعده و AE یال جانبی آنست رسم کرده و مرئی و مخفی کنید.

۷- مقطع متوازی‌السطوح فوق را با صفحهٔ افقی ۱۲ یافته و آن را مرئی و مخفی نمائید.

ب- هندسهٔ ترسیمی:

۱- فاصلهٔ نقطهٔ A از خط زمین ۵ و نسبت فواصلش از صفحهٔ نیمساز اول به‌صفحهٔ نیمساز دوم $\frac{1}{3}$ است. نقطه را نشان دهید

۲- خط DD′ مفروض است آثار آن را تعیین کنید و روی آن نقطه‌ای بیابید که فاصله‌اش از اثرقائم مساوی ارتفاعش باشد.

۳- برروی خط نیمرخ aba′b′ نقطهٔ cc′ را بقسمی تعیین کنید که بعدش ۲ واحد بیشتر از ارتفاعش باشد.

گروه فرهنگی هدف

الف- هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها رامرکز کاغذ بنامید.

۱- نقطهٔ a_2 برروی محور اقصر کاغذ به فاصلهٔ ۷ سمت چپ مرکز واقع است. ازاین نقطه صفحهٔ P را به‌شیب $p=1$ بقسمی مروردهید که افقیه‌های آن موازی محوراقصر کاغذباشند. یك مقیاس شیب صفحه راکنار چپ کاغذ با ترقی رقوم ازپایین ببالا رسم کنید.

۲- از نقطهٔ a_2 در صفحهٔ P خط a_2m_7 را به شیب $p=\frac{2}{3}$ بقسمی رسم نمایید که m سمت‌راست a قرار گیرد.

۳- ملخص مثلث متساوی الاضلاع ABD را درصفحهٔ P بقسمی رسم کنید که AM در فضا قطردایرهٔ محیطی آن‌بوده و d سمت راست am واقع گردد و b سمت چپ am قرار گیرد (رقوم b و d با ۰/۱ تقریب اعداد صحیح می‌باشند)

۴- ملخص لوزی ABCD واقع در صفحهٔ P رابنحوی کامل کنید که BD قطر آن باشدوسعت‌حقیقی لوزی را درپایین کاغذ نشان دهید.

۵- صفحهٔ Q را سمت راست کاغذ بقسمی نشان دهید که موازی صفحهٔ P و به فاصلهٔ ۱۰ بالای آن باشد.

۶- متوازی‌السطوح ABCDEFGH که قاعده آن لوزی ABCD وقاعدهٔ فوقانی درصفحهٔ Q واقع بوده ورقوم راس E ازخط‌الراس جانبی AE برابر ۸ وامتداد تصویر یالهای جانبی بامحوراقصر کاغذ زاویه ۶۰ درجه درتصویر می‌سازند و ازچپ به‌راست و ازبالا بپایین ممتدهستند رسم کرده ملخص آن را مرئی ومخفی نمایید.

۷- مقطع متوازی‌السطوح مزبور را باصفحه قائمی که اثرش موازی محور اطول و برنقطهٔ m_7 می‌گذرد یافته‌وسعت حقیقی آن راباتسطیح سمت‌راست کاغذ نشان دهید.

ب- هندسهٔ ترسیمی :

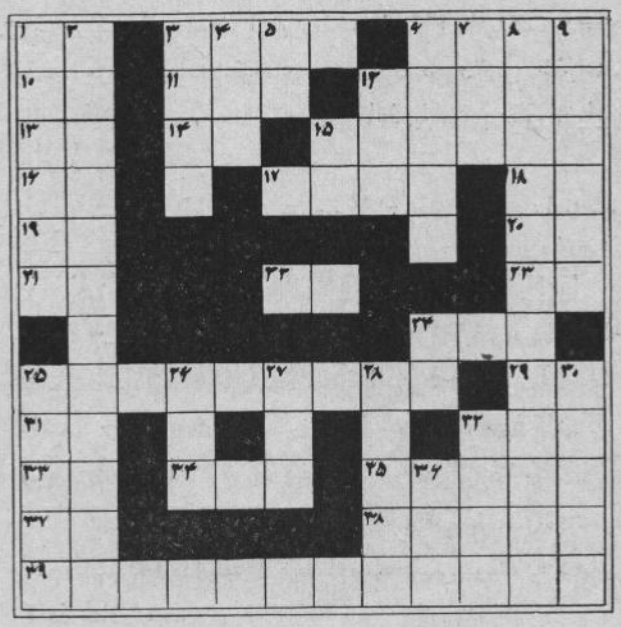
۱- فاصلهٔ نقطهٔ A از خط زمین ۵ و فاصله‌اش ازنیمساز اول دوبرابر بعدش می‌باشد نقطه رادرناحیهٔ اول بالای نیمساز نشان دهید.

۲- خط DD′ مفروض است. آثارآنرا رسم کنید وبرروی آن نقطه‌ای بیابید که بعدش ۲ واحد بیش‌ازارتفاعش باشد.

۳- از نقطه aa′ به بعد ۳ و ارتفاع ۵ خطی رسم کنید که باافق زاویهٔ ۳۰ بسازدوافقیهٔ DD′ باارتفاع ۲ را قطع کند.

جدول اعداد

طرح از : **کیقباد شمس اسحاق** (تاریخ وصول به‌دفتر مجله: ۱۳۴۹/۱۱/۲۴)



افقی: ۱ـ عددی است دورقمی ومجذور رقم یکان خود. ۳ـ ده برابر مجذور عدد ۲۲ افقی. ۶ـ عدد ۵۰۵ که در مبنای ۵ نوشته شده باشد. ۱۰ـ دوبرابر بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك عددهای ۲۱۰ و ۱۰۵. ۱۱ـ سه واحد بیشتر از مجذور عدد $\overline{ab}$ بقسمی که :

$$4(\overline{ab})+1=(\overline{ba})_9$$

۱۲ـ یك واحد بیشتر ازصد برابرعدد $\overline{abc}=c^5$. ۱۳ـ عدد $\overline{ab}$ که چهار مقسوم علیه دارد و $a=b^2$ است. ۱۴ـ دوبرابر عدد۲۲ افقی. ۱۵ـ عددی‌است به‌صورت $\overline{abab02}$ بقسمی که : $\overline{ab}=(\overline{ba})_8+1$. ۱۶ـ جذرعدد ۱ افقی. ۱۷ـ عدد چهار ـ رقمی با رقمهای همسان که ۱۲مقسوم‌علیه دارد. ۱۸ـ توان‌پنجم آن سه رقمی‌است . ۱۹ـ مقلوبش متمم حسابی ۱۸ افقی‌است . ۲۰ـ خارج‌قسمت تقسیم عدد۱۹ افقی برعدد ۱۶ افقی. ۲۱ـ دو واحدکمتراز‌پنج برابرعدد ۲۲ افقی. ۲۲ـ به‌ازای این مقدار از m معادلهٔ زیرریشهٔ مضاعف دارد:

$$11x^2-2mx+2m-11=0$$

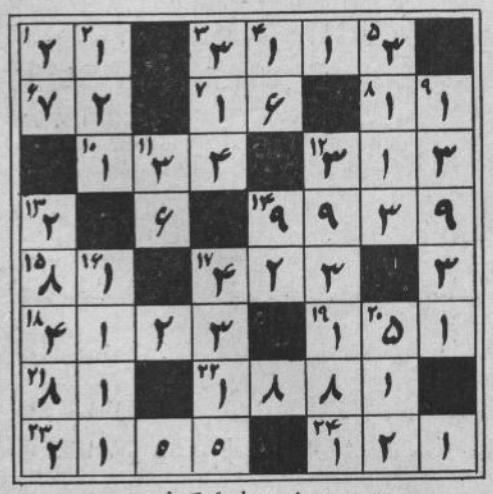
۲۳ـ همان عدد ۱۶ افقی. ۲۴ـ مجموع رقمهایش برابر با ۹ است وهفت‌برابررقم دهگان‌آن برابراست با ۲ برابررقم سدگان آن. ۲۵ـ عدد۲۹۲ که درمبنای ۲ نوشته شده‌باشد. ۲۹ـ مقدار x ازرابطهٔ زیر: $3^x+4^x=5^x$. ۳۱ـ همان عدد۲۱ افقی. ۳۲ـ توان نهم‌است. ۳۳ـ متمم حسابی‌مقلوب عدد ۲۱ افقی . ۳۴ـ دو واحد بیشتر از توان سوم عدد ۱۶ افقی . ۳۵ـ چهار برابرآن به‌صورت 29×10^{2n} نوشته می‌شود. ۳۷ـ در مبنای ۲ به‌صورت۱۰۱۰۰ نوشته می‌شود. ۳۸ـ ۲۰۰۵ واحدکمتراز عدد ۳۵ افقی. ۳۹ـ تکرارعدد $\overline{abc}$ بقسمی‌که:

$$(\overline{abc})_7=(\overline{cba})_9$$

قائم : ۱ـ سه برابر مجذور مقلوب عددی‌که در نوشتن عدد ۳۹ افقی تکرار می‌شود . ۲ـ سه واحد کمتر از عدد ۳۹ افقی. ۳ـ مابه‌ازای عددی «عدل مظفر» به‌حساب ابجد. ۴ـ عدد با سه رقم همسان‌که ۸ مقسوم‌علیه دارد. ۵ـ در معادلهٔ زیرصدق می‌کند :

$$x^2-2\times16x+17\times15=0$$

۶ـ تکراریك رقم. ۷ـ مقلوب عدد۲۱افقی. ۸ـ تکرارپی‌درپی کوچکترین عددچهاررقمی. ۹ـ شش رقم‌اولیه‌به‌ترتیب صعودی. ۱۲ـ دو برابر عدد ۳۴ افقی. ۱۵ـ چهار برابر عدد ۲۲افقی. ۲۴ـ همان عدد ۱۹ افقی . ۲۵ـ توان ششم رقم یکان خود می‌باشد. ۲۶ـ نصف عدد ۴ افقی. ۲۷ـ مقلوب عدد ۲۴ افقی. ۲۸ـ حاصل ضرب عددهای ۲۴ قائم و ۲۶ قائم . ۳۰ـ چون عدد ۲۱ افقی‌را سمت راست بیست‌برابرعدد ۲۲ افقی بنویسیم این عدد بدست آید . ۳۲ ـ پنج برابر ربع عدد ۱۷ افقی . ۳۶ـ توان پنجم رقم یکان‌خود می‌باشد.



حل جدول شمارهٔ گذشته

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 115– A treasure is located at a point along a straight road with towns A, B,C, and D on it in that order. A map gives the following instructions for locating the treasure:

(1) Start at town A and go $\frac{1}{2}$ of the way to C.

(2) Then go $\frac{1}{3}$ of the way to D.

(3) Then go $\frac{1}{4}$ of the way to B, and dig for the treasure.

If AB=6 miles, BC=8 miles, and the treasure is buried mid way between A and D, find the distance from C to D.

Solution: If the distance from C to D is x, the given data translates into the equation,

$$\frac{x+14}{2}=7+\frac{1}{3}(x+7)-\frac{1}{4}[\frac{1}{3}(x+7)+1]$$

Solving this we obtain: x=6.

Problem 116– Each of the letters in the following division problem represents a different digit. Reconstruct the problem in numerals:

```
          R I R
      ---------
GR)L M T T R
   L T R
   -------
     V V T
     V L S
     -------
       L T R
       L T R
       -------
```

Solution: (i) Since T−S=T, S=0

(ii) Since V−L=L, 2L=V, whence for

L=1,2,3,4, V=2,4,6,8.

(iii) R×GR(=LTR) ends in R. Therefore R=1 or 5 or 6.

But R≠1, because 1×G1 equals a three-digit number,a contradication.

(iv) Assume R=6. From I×GR=VLS, which ends in 0, I must be 5. G6×5=210, or 420, or 840, because V=2L; (not 630, for then R and V would both be 6). Therefore (10G+6)×5=210, 420, 840, from which 50G=180, 390, 810, all of which are impossible for integral G. Hence R=5, and I is an even number (≠0)

(v) By a similar method we test all possibilities of the pattern G5×I=210, 420, 630, 840, for I=2,4,6,8, and find that the only possibility is 35×6=210. Therefore G=3, R=5, I=6, V=2, L=1, S=0

(vi) The rest follows readily, and we soon discover that the divisor is 35, the dividend 19,775, and the quotient 565.

Problem 117– A dollar and sixty – two cents is made up from pennies, dimes, and nickels; half of the coins are nickels. Find the number of ways in which this division can be done, giving the number of pennies, dimes, and nickels for each solution.

Solution: Let p=the number of pennies, n=the number of nickels, and d=the number of dimes. Then p+5n+10d=162 and $n=\frac{p+n+d}{3}$. If we eliminate n from these two equations, we obtain: $p=\frac{54-5d}{2}$

Since 54 is an even number, d must be even for p to be integral. We can now make the following table:

d	0	2	4	6	8	10
p	27	22	17	12	7	2
n	27	24	21	18	15	12

But since the statement of the problem implies that there must be at least one of each type of coin, we omit the first column.

انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها
تألیف:علی اصغرهومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هشترودی

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

راهنمای ریاضیات متوسطه
تألیف : عبدالحسین مصحفی
چاپ چهارم : ۱۲ ریال

معماهای ریاضی
ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار
بها : با جلد شمیز ۷۵ ریال
با جلدزرکوب : ۱۰۰ریال

روش سادهٔ
حل مسائل‌شیمی
ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا
بها: ۲۰ ریال

تستهای چندجوابی شیمی
ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا
بها : ۴۰ریال

مسائلی ازحساب استدلالی
تألیف: محمودکاشانی
جلد اول ۱۲ریال
جلددوم ۱۵ریال
جلد سوم ۱۵ریال

تستهای هوش
ترجمهٔ: باقرمظفرزاده
بها : ۶۰ریال

مبادی
منطق وریاضی جدید
تألیف: غلامرضا عسجدی
بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان‌که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان‌که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان‌که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.