یکان

مجله ریاضیات

دورهٔ نهم، شمارهٔ : ۸ شمارهٔ مسلسل : ۹۳ مرداد ۱۳۵۲

در این شماره:

بها : ۲۵ ریال

پایان دورهٔ نهم

انتشار یکان در دورهٔ نهم به‌خاطر افزایش نرخ چاپ و بهای کاغذ درچند نوبت با اشکال مواجه گردید . اما با وجود همهٔ اشکالات، هرهشت شمارهٔ دورهٔ مزبور بدون تغییر بها به‌دست خواستاران آن رسید .

برای ادامهٔ انتشارمجله درآینده ، جز افزایش بهای آن چاره‌ای نیست . اگرمتناسب با افزایش نرخ چاپ وبهای کاغذ حساب شود ، بهای مجله باید به‌نسبت سابق ازیك برابر و نیم هم‌بیشتر باشد. اما باکم کردن چندصفحه ازتعدادمعمول صفحات، از ابتدای دورهٔ دهم ، یعنی ازمهر ۱۳۵۲ ،

بهای تکفروشی مجله: ۳۰ ریال

وجه اشتراك یك دوره: ۲۴۰ ریال

تعیین می‌شود . هردورهٔ اشتراك مانند سابق شامل هشت شمارهٔ ماهانه ویك شمارهٔ مخصوص یکان سال خواهد بود.

درآینده اشتراك مجله برای هر دوره‌فقط از اولین‌شمارهٔ آن دوره قبول می‌شود . کسانی که مجله را از اواسط دورهٔ نهم مشترك شده‌اند و فعلا مبلغی بستانکارند ، مبلغ دیگری که باید بپردازند تا اشتراك آنها تا پایان دورهٔ دهم تمدید شود توسط نامه به‌اطلاع آنان خواهد رسید .

تقاضا

هرگاه وجهی توسط یکی از شعبات بانکها به‌حساب بانکی مجله واریز می‌کنید ، حتماً مراتب را با ذکر مبلغ و فیش مربوط به اطلاع ادارهٔ مجله برسانید تا ازاین بابت حقی از شما ازبین نرود .

فراموش نفرمایید که درنامه‌های خود به‌ادارهٔ مجله ، نام و نشانی کامل خود را با خط خوانا و واضح مرقوم فرمایید .

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ نهم ـ شمارهٔ هشتم ـ شمارهٔ مسلسل :۹۳

مرداد ۱۳۵۲

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume IX, number 8. July 1973

subscription : 3$

TEHERAN_P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

نامهٔ رسیده

شرح زیر عین متن نامهٔ مورخ ۵۲/۴/۲۳ جناب آقای احمد شرف‌الدین است که خطاب به مدیرمجله مرقوم داشته‌اند:

«این جانب درسال ۱۳۴۷ کتابی به‌نام «چندقضیهٔ هندسه» منتشر کرده‌ام که شامل برخی از کارهای تحقیقی‌ام می‌باشد . درصفحهٔ شمارهٔ ۷۴ این کتاب روشی تازه برای محاسبهٔ حجم هرم ارائه داده‌ام . باکمال تأسف می‌بینم که جناب عالی این کار تحقیقی مرا درشمارهٔ ۹۲ مجلهٔ یکان نقل کرده‌اید و به شخص دیگری نسبت داده‌اید و این برخلاف قانون حفظ حقوق مصنفان و مؤلفان است .

نیز دریکان سال ۱۳۵۱ چنین نوشته‌اید:

کتاب «تمرینهای ریاضیات مقدماتی» تألیف استاد دکتر محسن هشترودی که در سال ۱۳۴۵ ازطرف مجلهٔ یکان منتشر شده است ، فعلا نایاب می‌باشد . کتابی که اخیراً ازطرف آقای احمد شرف‌الدین تألیف ومنتشرشده است و علی‌رغم منع صریح قانون حفظ حقوق مؤلفان و مصنفان ، همان نام بالا برای آن انتخاب گردیده است، غیراز کتاب تألیف استاد هشترودی نشریهٔ یکان می‌باشد .

توضیحاً اشعار می‌دارم که استنتاج جناب عالی از قانون حفظ حقوق مؤلفان و مصنفان بسیار نادرست است و اینکه این‌جانب نام « تمرینهای ریاضیات مقدماتی » را برای کتاب خود انتخاب کرده‌ام ، به هیچ وجه (دنباله درصفحهٔ سوم جلد)

خیام و ابتکارات علمی او

جعفر آقایانی چاوشی

دنباله از شمارهٔ قبل

خیام و اندازه‌های اصم

قسمت‌دوم «رسالة فی‌شرح مـااشکل مـن مصادرات کتاب اقلیدس» به نظریهٔ نسبتها اختصاص دارد. خیام دراین کتاب از تعریفی که **ادکسوس** (Eudoxus) برای تناسب بکاربرده‌و از اینکه **اقلیدس** موضوع مهمی را در قضایـای مـربوط بـه تساوی نسبتها نادیده انگاشته عدم رضایت خود را اظهار داشته است. او سپس تعریفی‌راارائه می‌دهد وبراساس آن سعی‌می‌کند تا حکمی را در مورد تناسب بین بعضی قطعه‌خطهای یك مثلث ثابت‌کند. اما به علت اینکه وی با علائم جدید سروکار نداشته این اثبات ناقص انجام شده است. در واقع باید گفت‌که تعریف خیام معادل یکی از تعاریف ادکسوس است. در این رسالهٔ‌خیام، عددهای اصم به وسیلهٔ رشته‌های نامحدود معرفی می‌شوند واین در حقیقت جانشین اصل ادکسوس یا اصل **ارشمیدس** گردیده است‌که هریك از اینها نوعی بیان اصل پیوستگی است.

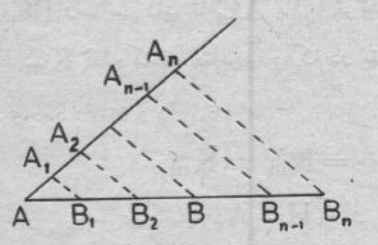
آقای **دکتر علیرضا امیرمعز** در سخنرانی خوددر کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، مسکو، در اوت ۱۹۶۶، ایـن موضوع را مورد بحث قـرار داده و روش خـیام را در اثبات قضیه‌ای به طرق زیر شرح می‌دهد:

«در این یادداشت تعریف و اثبات حکمی‌راکه خیام‌انجام داده و فعلا در بسیاری ازکتابهای مقدماتی هندسهٔ اقلیدسی بـه همان‌صورت بیان می‌شود یادآوری می‌کنیم. نخست روش ترسیمی تقسیم یك قطعه خط را به n قسمت متساوی متذکر می‌شویم‌کـه درآن n عددی است صحیح و مثبت:

۱ـ ترسیم : قطعه خط AB را در نظر مـی‌گیریـم و فرض می‌کنیم n عددی صحیح و مثبت باشد، برای اینکه AB را به n قسمت تقسیم‌کنیم، از A خط دلخواهی رسم می‌کنیم و روی آن نقاط A_1 و A_2و...وA_n را چنان انتخاب‌می‌کنیم که داشته باشیم:

$$AA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{n-1}A_n$$

A_n را به B وصل کرده و از نقاط A_1 و A_2 و... و A_{n-1} خطوطی‌موازی‌با A_nB رسم‌می‌کنیم تاخط AB را بـه ترتیب در نقاط B_1 و B_2 و... و B_{n-1} قطع‌کنند. بـه سادگی می‌توان ثابت‌کرد که:



$$AB_1 = B_1B_2 = \cdots = B_{n-1}B$$

اثبات حکم فوق در اغلب کتابهای هندسهٔ اقلیدسی‌مذکور است و ما ازبیان آن خودداری می‌کنیم.

۲ـ تعریف خیام : فرض می‌کنیم $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ دو رشته مقادیر (قطعه خطها) باشند و فرض می‌کنیم رشتهٔ $\{m_n\}$ از عددهای صحیح وجود داشته باشد به قسمی‌که:

$$A_{n+2} = A_n - m_nA_{n+1}$$

تنها وقتی برقرار باشدکه‌داشته باشیم:

$$B_{n+2} = B_n - m_nB_{n+1}$$

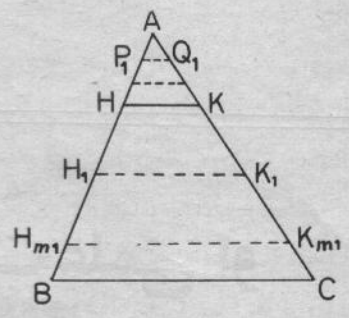
$$n = 1 \text{ و } 2 \text{ و } \cdots$$

پس‌خواهیم‌داشت :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1}$$

در این تعریف رشتهٔ $\{m_n\}$ می‌تواند محدود یانامحدود باشد.

۳ـ حکم: مثلث ABC و نقطهٔ H واقع برقطعه خط AB را در نظرمی گیریم. از H موازی با BC رسم می کنیم که AC را در K قطع می کند.



$$\frac{AH}{HB}=\frac{AK}{KC}$$

برهان: بدون آنکه از کلیت کاسته شود H را چنان انتخاب می کنیم که $AH<HB$ باشد. نقاط H_1 و H_2 و ... و H_{m_1} را چنان در نظر می گیریم که:

$$AH=HH_1=\cdots=H_{m_1-1}H_{m_1}$$

$$0\leq H_{m_1}B<AH$$

باشد. از نقاط H_1 و H_2 و ... و H_{m_1} خطوطی موازی با BC رسم می کنیم تا AC را به ترتیب در K_1 و K_2 و ... و K_{m_1} قطع کنند، بنابر آنچه که در بند ۱ گفته شد، این نقاط وجود دارند و داریم:

$$AK=KK_1=\cdots=K_{m_1-1}K_{m_1}$$

فرض کنیم $AH=A_2$ و $HB=A_1$ و همچنین $AK=B_2$ و $KC=B_1$ و بالاخره $H_{m_1}B=A_3$ و $K_{m_1}C=B_3$ ملاحظه خواهیم کرد که:

$A_3=A_1-m_1A_2$ تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$B_3=B_1-m_1B_2$$

دو حالت باید در نظر بگیریم:

۱) اگر $A_3=0$ باشد، در این صورت $B_3=0$ بوده و داریم:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}\Longrightarrow\frac{AH}{HB}=\frac{AK}{KC}$$

۲) اگر $A_3\neq 0$ باشد. در این صورت نقاط P_1 و P_2 و ... و P_{m_2} را روی AH چنان انتخاب می کنیم که داشته باشیم:

$$AP_1=P_1P_2=\cdots=P_{m_2-1}P_{m_2}$$

$$0\leq P_{m_2}H<H_{m_1}B \qquad \text{و} \qquad 0\leq P_{m_2-1}P_{m_2}$$

خطوطی که از P_1 و ... و P_{m_2} موازی با BC رسم شوند AK را به ترتیب در Q_1 و ... و Q_{m_2} قطع می کنند. بنا به روش ترسیم مذکور در بند (۱) داریم:

$$AQ_1=Q_1Q_2=\cdots=Q_{m_2-1}Q_{m_2}$$

فرض کنیم $P_{m_2}H=A_4$ و $Q_{m_2}K=B_4$ پس:

$A_4=A_2-m_2A_3$ تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$B_4=B_2-m_2B_3$$

بازهم اگر $A_4=0$ باشد، حکم ثابت شده است و در غیر آن عمل را به ترتیب بالا ادامه می‌دهیم، اکنون حالت کلیتری را در نظر می گیریم. فرض کنیم که چنین بدست آورده باشیم:

$$A_{n+2}=M_{m_n}B\neq 0 \quad \text{و} \quad B_{n+2}=N_{m_n}C\neq 0$$

بنا به بند (۱) رابطهٔ:

$$A_{n+2}=A_n-m_nA_{n+1}$$

تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$B_{n+2}=B_n-m_nB_{n+1}$$

که در آن $0<A_{n+2}<A_{n+1}$ می‌باشد

درحالت $A_{n+2}=0$ رشتهٔ $\{m_n\}$ به m_n پایان‌می‌پذیرد و در نتیجه حکم ثابت می‌باشد.

فرض کنیم $A_{n+1}\neq 0$ از نامساوی $A_{n+2}<A_{n+1}$ نتیجه می‌شود که عدد صحیح و مثبت m_{n+1} وجود دارد به‌قسمی که داشته باشیم.

$$A_{n+3}=A_{n+1}A_{n+2}$$

بنا به روش ترسیم مذکور در بند (۱) وجود نقطهٔ B_{n+3} مسلم است و داریم:

$$B_{n+3}=B_{n+1}-m_{n+1}B_{n+2}$$

برعکس رابطهٔ

$$B_{n+3}=B_{n+1}-m_{n+1}B_{n+2}$$

موجب می‌شود که داشته باشیم:

$$A_{n+3}=A_{n+1}-m_{n+1}A_{n+2}$$

در نتیجه بنابه تعریف (۲) داریم:

$$\frac{AH}{HB}=\frac{AH}{HC}$$

۴ـ حکم عکس: فرض کنیم K نقطه‌ای از ضلع AB و H نقطه‌ای از ضلع AC از مثلث ABC باشد به قسمی که داشته باشیم:

$$\frac{AK}{KB}=\frac{AH}{HC}$$

دراین صورت خط KH با ضلع BC موازی است، از اثبات حکم اخیرصرف نظر می کنیم. [۱۵]

فیزیك

خیام رسالهٔ مختصری تحت عنوان:
«رسالة فی‌الاحتیال لمعرفةمقداری الذهب والفضة فی‌جسم مرکب منهما»

در بارهٔ تعیین عیار طلا و نقره و شمشی که ازاین دوفلز ترکیب شده است تألیف کرده است که در واقع توضیح طریقهٔ معروف **ارشمیدس** و تجربهٔ مشهور این دانشمند است. دراین مورد نیزخیام برای‌تعیین اصل معروف‌ارشمیدس طریقهٔ‌استدلالی و تحلیلی بکار می‌برد که به طریقهٔ نظری کنونی بی‌شباهت نمی‌باشد.[۱۵]

رفورم تقویم

سلطان جلال الدین **ملکشاه سلجوقی** در سال ۴۶۷ هجری چند نفر از منجمین طراز اول از قبیل **ابوالمظفر اسفزاری ، میمون بن نجیب واسطی ، عبدالرحمن خازنی** و در رأس آنها **حکیم عمر خیام نیشابوری** رابه رصد خانه‌ای که‌تأسیس کرده بود دعوت کرد (محل‌این رصدخانه به تحقیق معلوم نیست، ولی به احتمال قوی این رصد خانه در اصفهان بوده است) و آنها را مأموراصلاح‌تقویم ایران‌بااستفاده از مشاهدات و محاسبات نجومی کرد.

تقویم ایران در آن زمان «تقویم‌یزدگردی» برمبانی‌زیر متکی بود:

سال شامل ۱۲ ماه سی روزه وپنج‌روز (خمسه) مسترقه‌یا اندرگاه بود و این پنج روز به ماه هشتم (= ماه آبان) به عنوان روزهای اضافی ملحق می‌گردید. ولی چون سال تقریباً $۳۶۵\frac{۱}{۴}$ روز است و بنابراین هرچهارسال یك‌روز و هر ۱۲۰ سال یك ماه اشتباه‌حساب رخ می‌داد ، بنابراین به فاصلهٔ هر ۱۲۰ سال یك‌بار سال ۱۳ ماهه بوجود می‌آمد.

نظر به اینکه تصحیح به فاصلهٔ هر۱۲۰ سال بعمل‌می‌آمد در این مدت به مرور نوروز از اول‌فروردین عقب می‌افتاد ودر زمان ملکشاه سلجوقی نوروز مصادف با ۱۳ حوت شده بود و ملکشاه می‌خواست منجمین مزبور کبیسهٔ دقیقی درست کنندکه نوروز را به عنوان اول سال و اول فروردین ثابت نگاهدارند. اکنون بطور دقیق معلوم‌نیست تغییراتی‌که از طرف این‌منجمین در سیستم فوق بعمل آمده از چه قرار است ، ولی آنچه مسلم است این است‌که آنها ۱۲ ماه سی روزه را با اسامی قدیمی خود نگاهداشتند و همچنین پنج روز تکمیلی را حفظ‌کردنداما آن را به انتهای ماه دوازدهم یعنی ماه اسفند ملحق ساختند و ضمنا هر چهار سال یك‌بار یك روز به سال افزودند.

(دقیقا معلوم نیست‌کجا افزوده می‌شد، احتمالا به دنبال پنج روز اضافی سالانه می‌آمد) نظر به این که سال بطور دقیق از $۳۶۵\frac{۱}{۴}$ کمتر است جهت منطبق ساختن تقویم با واقعیت بطوری‌که **الغ بیك** بیان نموده است بعد از یك دورهٔ ۲۴یا۴۸ ساله اضافه روز ششم (روزکبیسه در هرچهار سال) شش یا هفت بار تکرار می‌شد. برای بار بعدی به جای آنکه آن را پس از چهارسال اضافه‌کنند پس از پنج‌سال اضافه می‌کردند. بنابراین طبق نظر الغ‌بیك در هر ۶۲ سال مجموعا ۱۵ روز اضافی به عنوان‌کبیسه اضافه می‌شد و مدت سال بطور متوسط برابر با ۳۶۵/۲۴۱۹۳۵ روز می‌گردید (مدت واقعی‌تر ۳۶۵/۲۴۲۲ روز است) و بنابراین فقط در هر ۳۷۷۰ سال یك روز اشتباه حساب روی می‌داد

تقویم‌جدیدکه بسیار دقیق‌بود به **تقویم جلالی**معروف شد و در تدوین آن حکیم عمرخیام نقش درجهٔ اول را برعهده داشت، نتایج‌کار وتحقیقات خیام دراین‌باره عبارت از یك‌تجدید نظرکامل درجداول نجومی یا زیج‌ها بود.

ضمنا این تقویم جلالی از دهم رمضان۴۷۱ هجری‌قمری مطابق با ۱۵ مارس ۱۰۷۹ میلادی شروع می‌شد.

تقویم مسیحی نیز در ابتدا براساس تقویم **سزاری** یا **جولیوس (=ژولین)**بودکه بعدا ازطرف **پاپ‌گرگوری** سیزدهم مورد تجدید نظر قرارگرفت و تقویم‌گرگوری‌معمولی بین مسیحیان بوجودآمد. اما تقویم جلالی‌که با شرکت مؤثر خیام بوجود آمده از تقویم‌گرگوری دقیق‌تر است زیرادرتقویم اخیر در هر۳۳۳۰ سال یك روز اشتباه حساب رخ می‌دهد در حالی‌که این اشتباه یك روز درتقویم جلالی به فاصلهٔهر۳۷۷۰ سال اتفاق می‌افتد.

در اواخر قرن نوزدهم طول سال اعتدالی را منجمان اروپا با محاسبه و رصد ۳۶۵/۲۴۲۲۴۱ روز یافته‌اندکه آنهم با مقدار حقیقی مختصر اختلاف دارد و آنچه راکه امروز طبق محاسبات دقیق برای طول سال اعتدالی‌یافته‌اند عبارت است از:

$$۳۶۵/۲۴۲۱۹۸۷۹ - \frac{۶۱۴}{۱۰^{۱۰}}t$$

(t برحسب سالهای ژولین معین‌می‌شود) مقدار $\frac{۶۱۴}{۱۰^{۱۰}}t$ بسیار

ناچیز است که در عمل می‌توان از آن صرف‌نظر کرد وفقط‌عدد ۳۶۵/۲۴۲۱۹۸۷۹ روز را بحساب آورد. اما ملاحظه‌می‌کنیم که حکیم عمر خیام طبق محاسباتی‌که براساس رصدهای مکرر و محاسبات طولانی و یك سلسله محاسبات نجومی است مدت سال اعتدالی را ۳۶۵/۲۴۲۱۹۸۵۸ بدست آورده و با مقایسهٔ این دو حساب به خوبی معلوم می‌شود که درجهٔ صحت ودقت‌این محاسبه تا ۶ رقم اعشار مطابق است باآنچه‌که منجمین باوسایل جدید و تکنیك مجهز به آن رسیده‌اند.

ماخذ و مراجع

۱ـ ارانی، دکتر محمدتقی : «رسالة فی شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس للحکیم عمر بن ابراهیم الخیامی» چاپ تهران ۱۳۱۴ ه.ش

۲ـ روزنفلید و یوشکویچ : «رسائل‌الخیام» الترجمة لبوریس روزنفلید، المقالة الافتتاحیه والتعلیق لبوریس روزنفلید و ادولف یوشکیفیتش،موسکو ۱۹۶۲ م

مشتمل است‌برعکس متون عربی و فارسی وترجمهٔ روسی و تعلیقات وشرح رسائل‌زیر:

۱ـ فی‌البراهین علی مسائل الجبر والمقابله

۲ـ میزان الحکم

۳ـ رسالة فی‌شرح مااشکل من مصادرات‌کتاب اقلیدس،

۴ـ رسالة الکون و التکلیف

۵ـ الجواب عن ثلاث مسائل ضرورت التضاد فی‌العلوم والجبر والبقاء

۶ـ الضیاء العقلی فی‌الموضوع العلم‌الکلی

۷ـ الرسالة فی‌الوجود

۸ـ رساله‌دروجود ۹ـ نوروزنامه ۱۰ـ زیج‌ملکشاهی

۳ـ روزنفلید و یوشکویچ : نظریهٔ خیام در بارهٔ خطوط موازی الهام دهندهٔ هندسهٔ غیراقلیدسی»

مقدمهٔ کتاب رسائل خیام،ترجمهٔ پرویز شهریاری، مجلهٔ سخن علمی و فنی شمارهٔ ۳۴، ۱۳۴۴ ه ش

۴ـ صبره، دکتر عبدالحمید : «رسالة فی‌شرح مااشکل من مصادرات کتاب اقلیدس تصنیف ابی‌الفتح عمربن ابراهیم الخیامی» اسکندریه ۱۹۶۱ م،

۵ـ طوقان، قدری حافظ : «تراث‌العرب العلمی فی‌الریاضیات والفلك» قاهره ۱۳۶۰ ه.ق

۶ـ مصاحب، دکتر غلامحسین : «جبرومقابلهٔ‌خیام ضمیمهٔ تاریخ ریاضیات» تهران ۱۳۱۷ ه ش

۷ـ مصاحب، دکتر غلامحسین : «حکیم عمرخیام به عنوان عالم جبر» تهران ۱۳۳۹ ه ش

۸ـ مصطفوی، دکترجلال : «استفادهٔ مغرب زمین از جبر و مقابلهٔ خیام» تهران ۱۳۳۹ ه ش

۹ـ همائی، جلال‌الدین : «خیامی نامه» جلد اول تهران ۱۳۴۶ ه ش

۱۰ـ هشترودی، دکترمحسن: «خیام ، ریاضیدان شاعر» مجلهٔ دانشکدهٔ ادبیات، شمارهٔ ۳۹سال دهم ۱۳۴۲

۱۱ـ قربانی، ابوالقاسم : «مثلث حسابی خیام (یاپاسکال؟) و دستور دوجمله‌ای خیام (یا نیوتن؟) مجلهٔ سخن ادبیات و هنرشمارهٔ۱۰، ۱۳۳۸ ه ش

12-AMIR MOEZ,A.R. : «Khayyam's solution of cublic equation» Mathematics Magazine vol. 35 No. 5 Nov. 1962

13_AMIR MOEZ,A .R. A paper of Omar Khayyam» Scripta Mathematica, Vol XXVI, NO 4 1961

14-AMIR MOEZ,A.R. «Discussion of difficulties in Euclid by Omar Khayyam» Scripta Mathematica Vol XXIV. No.4.1959

15-AMIR MOEZ,A.R. «Khayyam and Irrational Magnitudes»

Scripta Mathematica Vol. XXVIII,1968

16- GOVINDA, T. T: «The nectar of grace, Omar Khayyaam's life and Work» Allahabad, 1941

17_KASIR,D.S. «The Algebra of Omar Khayyam» NeW York, 1931

18_SARTON,G. : «Introduction to the history of Science» Val 2 Baltimore 1953

19_SMITH,D.E. «History of Mathematics» V.S.A. 1953

20_STOREY, W.E. : «Omar Khayyam as a Mathematician» Boston 1918

21-WOEPCkE;F. «L'Algèbre d' omar Alkhayyami traduite et accompagnée d' extraits demanuscrits inédits» Paris 1851

22_WOEPCKE,F: Lettre du Chaikh Abu Djafar sur la formation des triangles rectanglés à Cotés rationnel et sur l'utilité qu' offre leur connaissance»

(Atti dell' Accademia Pontifica de Nouvi Lincei Vol. 14 1861)

تاریخچهٔ کوتاه هندسه

(چند دانشمند معروف)

از منابع روسی

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری

پیدایش هندسه

هندسه در آغاز براثر نیازی که انسان به اندازه‌گیری زمین داشت پیدا شد، کلمهٔ «جئومتریا» که برای هندسه بکار می‌رود به معنی اندازه‌گیری زمین است. به‌این ترتیب هندسه‌دانان اولیه بطور عمده اندازه‌گیران زمین بودند. پیشرفت هندسه در چند هزار سال پیش از این از زمانی آغاز می‌شود که در مصر، بابل، یونان، بعضی قوانین‌مربوط به شکلها وضع شد و از آنها برای محاسبهٔ مساحات و پیرامونهای زمینها استفاده می‌شد.

در قرون بعد با پیشرفت تجارت و صنعت، هندسه هم پیشرفت کرد.

دانشمندان یونانی نقش عمده را در پیشرفت هندسه ایفاء کرده‌اند. آنان آموزش هندسه را در سطحی بالا بنا نهادند و بالاخره در قرن سوم پیش از میلاد آن را به صورت کنونی تنظیم کردند. مهمترین دانشمندان یونانی که در پیشرفت هندسه سهم‌مؤثرداشته‌اند عبارتنداز: **تالس، ذیمقراط، ادوکسوس، فیثاغورس، اقلیدس**، و غیره. اما مهمترین نقش توسط اقلیدس انجام شده است.

اقلیدس که درسدهٔ سوم پیش از میلاد می‌زیسته، اطلاعات پراکندهٔ همکاران گذشته وحال خود رادربارهٔ هندسه‌جمع‌آوری کرده و پژوهشهای خود را به آن افزوده و بالاخره مجموعهٔ آنها را با رعایت نظم منطقی به صورت یك کتاب تدوین کرده است.

کتاب اقلیدس اولین کوشش موفقیت‌آمیز درزمینهٔ هندسه است. بعد از اقلیدس، مؤلفان دیگر کتابهای هندسه از کتاب‌وی اقتباس کرده‌اند، یا اقلا همان سبك اورا بکار برده‌اند.

امروزه با پیشرفت علوم و تکنیك، مسائل جدیدی در هندسه بوجود آمده است. اما بازهم هندسه یکی از شاخه‌های ریاضی است و در آن خواص وضعی و روابط اندازه‌ای شکلها بررسی می‌شود.

مسائل ترسیمی

اولین مسائلی که در مورد رسم اشکال مطرح شده در خیلی پیش ازاین بوده است. زادگاه چنین مسائل را می‌توان گفت که یونان است. زیرا در این کشور بود که برای اولین‌بار تئوری دقیقی در مورد آنها بیان شد. دانشمندان یونانی مسائلی را ترسیمی می‌گفتند که حل آن فقط به‌کمك پرگار وخط‌کش ممکن باشد. اگر در ضمن حل مسئله از وسائل دیگر به غیراز پرگار و خط‌کش استفاده می‌شد حل آن مسئله را غیرهندسی می‌گفتند. یونانیان قدیم فقط به مسائلی که فقط با پرگار و خط‌کش قابل رسم بود توجه داشتند و بقیه را خارج از هندسه می‌دانستند. ریاضیدانان یونان قدیم با سه مسئلهٔ ترسیمی زیر مواجه بودند که نتوانسته بودند آنها را حل کنند:

۱ـ مسئلهٔ تضعیف مکعب: باید یالهای مکعب را طوری رسم کنیم که حجم آن دوبرابر حجم مکعب مفروض باشد.

۲ـ مسئلهٔ تثلیث زاویه: می‌خواهیم با استفاده از پرگارو خط‌کش زاویه‌ای را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم.

۳ـ مسئلهٔ تربیع دایره: می‌خواهیم مربعی بسازیم که مساحت آن مساوی مساحت دایرهٔ مفروض باشد.

پیدایش این مسائل افسانه‌های مفصلی دارد. یکی از افسانه‌های جالبی که‌مربوط به اولی است در زیر نقل می‌شود:

پادشاه «می‌ناس» دستورداد یادبودی برای پسر اوبسازند معماران یادبود را به شکل یك مکعب‌به اضلاع ۱۰۰وجب ساختند. ولی «می‌ناس» گفت این کوچك است و باید آنرا دو برابر بسازید. معماران برای حل مسئله به هندسه روی آوردند و از یك دانشمند هندسه‌خواستندتا مسئله را برای آنهاحل کند ولی اوهم‌نتوانست مسئلهٔ آنها را حل کند. حال می‌دانیم که برای حل این مسئله به غیر از پرگار و خط‌کش وسائل دیگر نیز لازم است.

بیشتر مسائل ترسیمی را درکتاب اقلیدس می‌بینیم که در

آن وجود شکل و اثبات ترسیم آن‌ها به کمك. پرگار وخط کش نیز آمده است. درکتاب اقلیدس کلیهٔ مسائل ترسیمی راکه هم اکنون در دبیرستانها تدریس می‌شود می‌توانیم مشاهده کنیم.

محاسبهٔ مساحات اشکال هندسی

نخست تاریخچهٔ گوتاهی از محاسبهٔ مساحات اشکال هندسی (مربع مستطیل، مثلث؛ متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه) بیان می‌کنیم. مساحت این اشکال از خیلی قبل ازاین درموقعی که به فکر هندسه افتادند در نظر بوده است. در قرن نوزدهم قبل از میلاد بابلیها توانسته بودند مساحات مربع ، مستطیل، ذوزنقه و مثلث را بدست آورند: مصریان نیز با این هنر آشنائی داشتند ، آنهادر قرن هفدهم‌قبل ازمیلادمساحت‌مثلث‌قائم‌الزاویه را بدست آورده بودند. مصریان برای‌محاسبهٔ مساحت‌مثلث متساوی‌الاضلاع از فرمولی تقریبی استفاده می‌کردند. آنها برای تعیین‌مساحت مثلث نصف حاصل‌ضرب‌قاعده درضلع جانبی‌رامی گرفتند. مساحت ذوزنقه را مصریان نیزبطور تقریب حساب کرده بودند.

آنها برای بدست آوردن مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین نصف مجموع دو قاعده رادر یکی‌ازساقهای آن ضرب‌می‌کردند معلوم است‌که این فرمول جواب صحیح را فقط در حالتی‌که یکی از اضلاع جانبی برقاعده عمود می‌بود بدست می‌داد،

مسئلهٔ بدست آوردن مساحت ذوزنقه در لوحهٔ پاپیروس پاپیروس «رایندا» آمده است. که در زیر آنرا نقل می‌کنیم:

«اگر به تو قطعه‌ای به اضلاع جانبی ۲۰ و قاعده‌های ۶ و ۴ داده شود آیا می‌توانی مساحت آنرا بدست‌آوری؟» این مسئله به صورت زیرحل شده است:

$$\frac{1}{2}(4+6)20=100$$

کشف قضیهٔ فیثاغورس

فکر می‌کنند که فیثاغورس در حدود ۵۸۰-۵۰۰سال‌قبل از میلاد زندگی می‌کرده است. دربارهٔ زندگی او اطلاع‌زیادی در دست نیست . طبق اخبار جسته و گریختهٔ بعضی از تاریخ نویسان معلوم می‌شودکه فیثاغورس در جزیرهٔ «سماسه» متولد شده است. در جوانی برای آموختن علوم نزدکاهنها می‌رفته است. بعد درسراسر یونان سپس به بابل مسافرت کرده است. در مدت ۱۲ سال اقامتش در این‌سرزمین توانسته‌است‌طالع بینی و نجوم را نزدکاهنهای آن دیار بیاموزد. پس از بابل مدتی در سرزمین پدری خود بود و سپس به ایتالیای جنوبی وبعدازآن به سیسیل رفت و در آنجا مکتبی را تأسیس‌کرد. این‌مکتب‌در پیشرفت و توسعهٔ ریاضیات و نجوم سهم عمده‌ای داشته است. بعدها این مکتب به فلسفه و ماوراءالطبیه روی‌آورد.

در زندگی سیاسی، مکتب فیثاغورس تحولی دراساس برده‌داری و اشرافیت آن زمان بوجود آورد. فیثاغورس و شاگردان او بسیارکوشش کردندتا به هندسه صورت علمی‌بدهند علاوه برقضیهٔ معروف فیثاغورس کشفیات هندسی بزرگ دیگری را به او نسبت می‌دهند. از آنجمله:

۱- قضیهٔ مجموع زوایای داخلی مثلث

۲- مسئله پوشاندن، یعنی تقسیم صفحه به چند ضلعیهای منتظم (مثلث‌متساوی الاضلاع ، مربع، شش ضلعی منتظم)

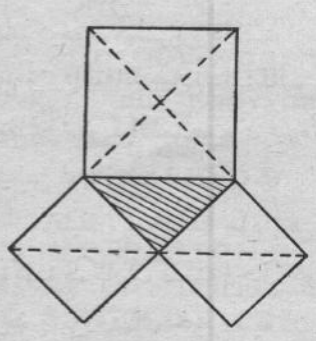
۳- روشهای هندسی‌برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم.

۴- قانون حل مسئله: «دوشکل داده شده‌اند. شکل‌سومی بسازیدکه معادل شکل اول بوده و باشکل دوم متشابه باشد.»

بیشتر معروفیت فیثاغورس‌به خاطر کشف«قضیهٔ‌فیثاغورس» است‌که تاکنون یکی از قضایای مهم هندسه بوده است و درکلیهٔ مراحل آموزش هندسه بکار می‌آید.

حالت خاص این‌قضیه راعده‌ای‌قبل ازفیثاغورس‌می‌دانستند مثلا در عمل ترسیم مصریان از مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ استفاده می‌کردند. این‌مثلث رابعدها«مثلث مصری» می‌نامیدند آنها می‌دانستندکه‌این مثلث قائم الزاویه بوده و رابطهٔ $5^2=4^2+3^2$ برای آن صادق است. پس چنانکه ملاحظه می‌کنیم آنها با قضیهٔ فیثاغورس آشنایی داشتند.

هندیان نیربدون اطلاع از قضیهٔ فیثاغورس از حالت خاص آن استفاده می‌کردند. آنان درستی قضیهٔ فیثاغورس را در حالت خاص‌با بررسی مستقیم شکل آن نتیجه می‌گرفتند.



اثبات خود فیثاغورس‌تا به‌حال‌بدست نیامده‌است. تاریخ‌نویس و ریاضیدان معروف آلمانی **م - کانتور** (۱۹۲۰-۱۸۲۹) می‌نویسدکه اثبات اولیهٔ قضیهٔ فیثاغورس برای حالت خاص آن یعنی مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین انجام‌گرفته است. هندیان نیزبه همین‌ترتیب مستقیماً بااستفاده از شکل قضیه را دراین حالت خاص نتیجه می‌گرفته‌اند.

در زمان حال بیش از صد راه برای‌اثبات قضیهٔ‌فیثاغورس وجوددارد.

ممکن است در میان این اثباتها اثبات خود فیثاغورس

(اگر او چنین اثبات کرده باشد) وجودداشته باشد. می گویند قضیه را خود او کشف نکرده بلکه یکی از شاگردانش اولین بار کشف کرده است. موضوع در اینجاست که در آن زمان طبق رسوم آنچه توسط شاگردان کشف می‌شد به نام رئیس مکتب یا معلم آنها ثبت می‌شد،

شرح حال مختصری از ارشمیدس

در بارهٔ زندگی ارشمیدس اطلاعات کمی دردست است که به همت نویسندگان قدیمی مانند «**سیسیرون**» و «**پلوتارخ**» و دیگران به ما رسیده است.

از نوشته‌های آنها برمی‌آید که ارشمیدس در ۲۸۷ سال قبل از میلاد در سیسیل متولد شده و در ۷۵ سالگی بعد از تسخیر شهر «سیراکوز» توسط رومیان در سال ۲۱۲ قبل از میلاد کشته شده است . زندگی ارشمیدس همراه با افسانه‌هایی دربارهٔ او است. در زیر چند افسانه اززندگی اورا می‌آوریم :

افسانهٔ اول: تعریف می‌کنند که ارشمیدس آنقدر در کارهای ریاضی غرق می‌شد که خوردن را فراموش می‌کرد و همیشه خدمتکاران به یاد او می‌آوردند که مدتی است غذا نخورده است. وقتی ارشمیدس مثلا در حمام می‌نشست فراموش می‌کرد کجا نشسته است و شروع به رسم اشکال هندسی با صابون رنگی روی بدن خود می‌کرد. بعد از مدتی خدمتکاران متوجه شده وبا اصرار و زور اورا از حمام بیرون می‌کشیدند،

افسانهٔ دوم: «**سیسیلن**» دربارهٔ مرگ ارشمیدس می‌نویسد زمانی که شهر سیراکوزبه دست رومیان افتاد ، ارشمیدس در میدان نشسته و با عصای خود شکلی هندسی را روی زمین می‌کشید. اوچنان در تماشای شکل هندسی خود فرورفته بود که متوجه شکست سربازان خودی و ورودشمن به داخل‌شهر نشد. رقتی سربازی رومی پای برشکل وی‌نهاد ارشمیدس از اوخواست که به‌شکل هندسی اودست‌نزند! وسرباز به این خاطراورا کشت تاریخ نویسان دیگر می‌نویستد که ارشمیدس در جواب سرباز رومی می‌گوید «مرا بزن اما به شکل دست نزن»

افسانهٔ سوم : می‌گویند «**هیرون**» پادشاه سیراکوز مقداری طلا به زرگری داد تا برای او تاجی از طلای خالص بسازد. زرگر مقداری از طلا را برداشته و به جای آن نقرهٔ هموزن باآن را با بقیهٔ طلاها ذوب و مخلوط‌کرد ، از آنجاکه پادشاه به استاد طلاساز اعتماد کافی نداشت ارشمیدس را نزد خود خواند و با خواهش از او خواست وزن طلای خالص بکار رفته در تاج را تعیین کند. کلید حل این مسئله را ارشمیدس در حالی که در داخل حمام نشسته ودراین باره فکر می‌کرد پیدا کرد. او چنان از این کشف به هیجان آمد که بدون لباس به خیابان دوید و فریاد زد «اوریکا ! اوریکا» یعنی پیدا کردم ! پیدا کردم!»

او قانون سبك شدن اجسام را در مایعات کشف کرده بودو ما امروز این قانون را به نام خود او «**قانون ارشمیدس**» می‌شناسیم.

افسانهٔ چهارم: ارشمیدس توانست به کمك دستگاهی که ساخته بود به مدت دوسال از شهر سیراکوز باموفقیت درمقابل نیروهای رومی دفاع کند . فرماندهٔ سربازان رومی یکی از بزرگترین سرداران آن زمان روم بود. نام‌او «مارك، کلاودی. مارسیل» بود. حال ببینیم پلوتارخ در بارهٔ فتح شهر سیراکوز توسط رومیان چه می‌نویسد. مارسیل بیشتر به زیادی تجهیزات و شهرت خود می‌بالید و به آنها متکی بود. اما تمام اینها در مقابل ارشمیدس ودستگاه او نتوانستندکاری از پیش‌ببرند،

ارشمیدس به پادشاه نوشته بودکه با نیروی‌کمی می‌توان وزنه‌های بسیار بزرگ‌را هر چقدر هم‌که سنگین‌باشند حرکت داده و به هرکجاکه بخواهیم می‌توانیم پرتاب‌کنیم. برای‌اثبات ادعای خودگفته بود اگر تکیه‌گاهی به من بدهی می‌توانم‌کرهٔ زمین را هم از جایش‌بکنم. پادشاه از این حرف‌ارشمیدس‌متعجب شده به او گفت که نشان دهد چگونه می‌تواند با نیروی‌کمی وزنه‌های بزرگی را حرکت دهد. ارشمیدس ادعای خود را به کمك یك‌کشتی باری سه دکله‌که ظاهراً می‌توانست تعدادزیادی مسافر را حمل‌کند نشان داد. ارشمیدس دستورداد تعداد زیادی مسافر درآن سوارشده وکشتی را باوزنه‌های سنگین پرکنند .

در حالی‌که او دور از ساحل قرار گرفته بود با کمك اهرمی بدون اینکه لرزشی تولید کرده و تعادل کشتی را بهم بزند به آرامی کشتن را بحرکت در آورد . پادشاه از این موضوع خیلی خوشحال و در ضمن احساس شکست در مقابل ارشمیدس‌کرد و درحالی‌که از این صنعت‌به‌شگفت‌آمده بود روبه ارشمیدس کرد و از او خواست ماشینی برای دفاع از شهر و همچنین در موقع لزوم حمله به دشمن بسازد. زمانی که رومیان شروع به حمله ازخشکی و دریا کردند سیراکوزیان ایستادگی‌در مقابل چنان‌نیروی‌عظیمی را غیرممکن می‌دانستند.

اما دراین موقع ارشمیدس ماشینها و دستگاههای مختلفی را که قبلا ساخته بود به میدان آورد و با کمك این ماشینها سنگهای عظیم را بر سر سربازان رومی وکشتی‌های آنهاپرتاب کرد. این عمل چنان‌به‌سرعت انجام‌گرفت که‌صف سربازان‌رومی بهم‌خورده و در هم پاشیده شد . در همان زمان برای حمله از ماشینی استفاده می‌کردندکه کشتی‌ها را از دریاگرفته و آنها

را پس از بلند کردن در آب دریافرو می‌برد. این ماشین تشکیل شده بود از دوچنگك بسیار بزرگ که یکی به‌زیر کشتی دشمن و دیگری بر روی آن قرار گرفته و آنرا سرنگون می‌کرد. و در همان موقع ماشین دیگری آنها را از آب بیرون می‌کشید و به ساحل می‌آورد و ملوانان آنها به‌اسارت در می‌آمدند.... رومیان آنقدر به وحشت افتاده بودند که همهٔ آنان فریادمی‌زدند بطوری که ارشمیدس متوجه آنها شده و ماشینها را به طرف آنها می‌راند و آنها از وحشت فرار می‌کردند، با دیدن این منظره سردار رومی دستور داد کـه دست از جنگ بکشند و شهر را محاصره کنند. «پلوتارخ» چنین ادامه می‌دهد. وقتی کشتی‌های «مارسیل» به تیررس می‌رسیدند ارشمیدس که در آن زمان پیر شده بود دستور می‌داد تا آینهٔ شش گوشی را که ساخته بود پیش آورند. در فواصل معین از این آینه آینه‌های تقریباً شبیه آنرا قرار می‌داد. این آینه‌ها حول لولای مربع شکل خود می‌توانستند دوران کنند.

ارشمیدس آینهٔ خود رامقابل آفتاب تابستانی یا زمستانی قرار می‌داد. اشعهٔ منعکس از آینه‌ها در کشتی‌های دشمن آتشی عظیم می‌افروخت و آنها را به آتش می‌کشید. البته این عمل وقتی انجام می‌گرفت کـه آفتاب بـود و کشتی‌ها بـه تیررس می‌رسیدند.

دانشمند معروف «بیوفان» در ۱۷۷۷ نشان داده است که این عمل ممکن است. او به کمك ۱۶۸ آینه در ماه آوریل توانست درختی را آتش زده و قطعه سربی را در فاصلهٔ ۴۵ متری ذوب کند. تا به‌امروز تألیفات زیر را از ارشمیدس بدست آورده‌اند.

۱ـ دو کتاب دربارهٔ کره و استوانه.

۲ـ اندازه گیری دایره

۳ـ دربارهٔ کنکوئیدها و شبه کرات

۴ـ دربارهٔ حلزونیها.

۵ـ دو کتاب دربارهٔ صفحات متعادل.

۶ـ محاسبهٔ شن‌ها.

۷ـ تربیع سهمی

۸ـ نامه‌ای برای «اراتوستن» دربارهٔ روش ساختن کارهای مکانیکی.

۹ـ دو کتاب دربارهٔ اجسام شناور.

۱۰ـ قطعات.

در کارهای ریـاضی خود ارشمیدس از نظریـهٔ ریاضیات تحلیل امروزی پیروی می‌کرده و مسائلی در مورد محاسبهٔ طول کمان، و مقدار سطح و حجم بدست آورده است.

«وایرشتراوس» و «س. و. کوالیوسکایا»

وایرشتراوس (۱۸۹۷-۱۸۱۵) ریاضیدان بر جستهٔ آلمانی است. او در جوانی علم حقوق را در «بن» و ریاضیات وا در «مونستر» آموخت.

کار خود را از شغل معلمی ریاضیات در دبیرستان شروع کردومدت ۱۳ سال از سال ۱۸۴۲ تا ۱۸۵۵ دراین شغل بود. با لیاقت و هوش سرشاری که در ریاضیات از خود نشان داد در سال ۱۸۵۶ به عنوان استادریاضی به دانشگاه برلین دعوت‌شد.

از آنجاکه وایرشتراوس مردی متواضع و فروتن بوددر انتشار کارهای علمی خود عجله نمی‌کرد بلکه با دقت بیشتر به بررسی و بـه تصحیح آنها می‌پرداخت. کشفیات علمی خود را اغلب به صورت کنفرانسهایی برای دانشجویان فاش می‌کرد و در آنان علاقه بـه علم را تقویت می‌کرد. بنابـراین کارهای ریـاضی وایـرشتراوس قبل از چاپ شدن معرف عموم بودند. تعجب‌آور نیست که کارهای اساسی وایرشتراوس پس از مرگ او انتشاریافت. مقالات وسخنرانهای علمی و ایرشتراوس بخشهای اصلی و خاص ریاضیات‌عالی‌را تشکیل می‌دهند. در میان‌شاگردان وایرشتراوس دانشمندان ریاضی بزرگی را می‌توان مشاهده کرد از آنجمله ریاضیدان‌شهیر **سوفیا، واسیلیونا، کاوالیو-سکایا**(۱۸۹۱-۱۸۵۰) که زنی‌روسی‌بود. درآن زمان‌ورودزنان بـه‌دانشگاه برلین ممنوع بود. به همین‌جهت وایرشتراوس‌بطور خصوصی به «کاوالیوسکایا» درس می‌داد. ابتدا نمی‌خواست به او درس دهد و بـرای بازکردن او از سر خود چندین مسئلهٔ ریاضی مشکل به او داد و امید داشت به این وسیله از دست او راحت شود. روز بعد وقتی کاوالیوسکایا را با دستهای پـر دید بسیار تعجب کرد؛ او تمام مسائل رادرست و کامل حل کرده‌بود.

بعد ازآن «س ـ و ـ کاوالیوسکایـا» یکی از شاگردان خوب وایرشتراوس بشمار می‌آمد. وایرشتراوس مدت چهارسال ریاضیات به او آموخت.

«س ـ و ـ کاوالیوسکایا» بخشهایی از ریاضیات عالی‌را مورد مطالعه قرار داد و توانست آنها را وارد مکانیك کرده و از آنها استفاده‌های عملی بکند. او علاوه بر مطالعات ریـاضی در نویسندگی هم ذوق فراوانی داشت مثلا درام «مبارزه برای خوشبختی» (او وهمکار نویسنده‌اش **میتاگلینلیر** مشترکاً این کتاب را نوشته‌اند) وداستانهای اتوبیوگرافیك (سرگذشت‌خود نـویسنده) «یادآور کـودکی» داستانی به نام «نیگی‌لیستکا» و داستانی نا تمام دربارهٔ «چورنی‌سیوکی» و مقداری شعر ازآثار اوست.

هیرون اسکندرانی و فرمول‌او برای محاسبهٔ مساحت مثلث

فرمول مساحت مثلث برحسب اضلاع آن یعنی:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

به نام «فرمول هیرون» معروف است. این فرمول به افتخار ریاضیدان یونان‌قدیم«هیرون اسکندرانی» که در شهر اسکندریه زندگی می‌کرد (حدود قرن اول قبل‌از میلاد) نامیده شده‌است. دربارهٔ زندگی هیرون اطلاعات پراکنده‌ای در دست است. معروف است که او دانشمند و مهندس برجسته‌ای بوده است. او در مسائل مساحی نیز دست داشته است. در تألیف خود «دیپتری» قانون‌اندازه‌گیری ارضی وهمچنین اساس درستی‌برای استفاده از مختصات قائم پایه‌گذاری کرده است. وسیله‌ای شبیه زاویه‌یاب (Theodolite) امروزی ساخته‌است. این دستگاه از خطکشی به‌طول چهار وجب که‌در دو سر آن صفحات کوچکی برای نشانه‌روی تعبیه شده‌بود تشکیل می‌شد. این خطکش روی صفحهٔ دایره شکلی طوری قرار گرفته بود که می‌توانست بطور افقی و عمودی در روی آن حرکت کند.

با چرخاندن‌خطکش تاجایی‌که به دوقطعه که‌روی صفحهٔ دایره شکل تعبیه شده‌بودند برخورد نکنند‌اندازه‌گیرنده امتداد عمود بر خط‌داده شده را تعیین می‌کرد. در این‌کار از تراز وشاقول نیز استفاده می‌کردند. باکمک‌این وسیله هیرون‌توانست مسائل زیر را حل کنید.

۱ـ مطلوبست فاصلهٔ بین دونقطه در صورتی‌که فقط یکی از این دو نقطه در دسترس است.

۲ـ مطلوبست فاصلهٔ بین دو نقطه که هیچ یك از آنهادر دسترس نیست،

۳ـ مطلوبست خط عمود برمسیری غیرقابل عبور. یعنی بدون دسترسی داشتن به یك خط امتداد عمود بر آنرا تعیین کنید.

۴ـ اختلاف سطح دو نقطه را نسبت به سطح افق تعیین کنید.

۵ـ بدون اینکه به‌قطعه‌زمینی‌دسترسی داشته‌باشم‌می‌خواهم مساحت آنرا‌اندازه‌بگیریم. کارهای‌ریاضی‌هیرون دایرةالمعارفی است ازمجموعهٔ ریاضیات عملی. کارهای هیرون تاعصر رونسانس تأثیر بسزائی در توسعه و پیشرفت ریاضیات و کاربرد آن در اروپا داشته است.

حل مثلثهای حادالزوایا

مثلثات ابتدا به منظور حل مثلثهای‌کروی توسعه یافت. انگیزهٔ‌توسعه و پیشرفت آن نجوم و نقشه‌برداری بود. همراه‌با پیشرفت مثلثات‌کروی مثلثات‌خطی‌نیز توسعه یافت. اولین‌تئوری کامل و درست مثلثهای کروی مستقل از نجوم در قرن سیزدهم توسط **نصیرالدین‌طوسی** در کتاب او به نام «رساله دربارهٔ چهارضلعها» پایه‌گذاری شد. روشهای حل مثلثهای کروی در حالات مختلف در فصلهای ششم و هفتم این رساله آمده است.

تئوری حل مثلثهای کروی به صورت یك دانش مستقل دراروپا در قرن پانزدهم توسط **«ریگی مونتان»** در رسالهٔ معروف او «دربارهٔ انواع و اقسام مثلثها» در سال ۱۵۳۳ انتشار یافت. این رساله بعد از گذشت ۵۷ سال از مرگ ریگی‌مونتان‌انتشار یافت. بعد از ریگی‌مونتان دانشمندان دیگر به تدریج تئوری کاملی برای حل مثلثهای حادالزاویهٔ خطی پایه‌گذاری کردند که امروز در مدارس تدریس می‌شود.

فرمولهای حجم منشور و هرم

تاریخچهٔ‌فرمولهای محاسبهٔ حجم منشورو هرم‌بسیارجالب است. بنظر می‌رسد که احتیاج به این فرمولها در خیلی قبل از این در زندگی مردم آن‌زمان احساس می‌شده است. مثلااین فرمولها برای بابلیهای قدیم در محاسبه‌وساختن‌وسایل‌ساختمانی برای موارد مختلف و همچنین برای محاسبهٔ ظرفیت مخزنها و و ظروف و غیره لازم بوده است. بابلیها در این نوع محاسبات به موفقیتهای بزرگی رسیده بودند.

از این حقیقت نمی‌توان گذشت که آنها حجم مکعب و هرم مستطیل‌القاعدهٔ ناقص را کاملا صحیح محاسبه می‌کردند. آنها به نتیجهٔ‌کلی زیر می‌رسیدند. البته‌این‌فرمول شکل‌امروزی آن است:

$$V=h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

پس از ساده کردن فرمول نتیجه می‌گیریم؛

$$V=\frac{h}{3}(a^2+b^2+ab)$$

اما تاکنون معلوم شده است که این فرمول چگونه بدست‌آمده است،

مصریان نیز با فرمولهای محاسبهٔ حجم منشور و هرم آشنایی داشتند. این فرمولها در ساختمان تجهیزات‌برای‌آنها لازم بود. برای مثال می‌توان هرمهائی راکه مصریان ساخته‌اند در نظر گرفت. مثلا هرم «خئوپس» دارای قاعدهٔ مربع شکل به ضلع ۲۳۳متر می‌باشد. ارتفاع این هرم‌برابر ۱۴۷متراست، در ساختمان این هرم تقریباً تعداد ۲۳۰۰۰۰۰ قطعه سنگ تراشیده شده بکار رفته که هریك از این قطعات ۲/۵ تن‌وزن دارد. ساختمان این هرم در ردیف خود بزرگترین کار بوده است.

این قطعات با دقت بسیار زیاد صاف و تراشیده و به هم چسبانده شده‌اند.

در «پاپیروس مسکو» که یکی از قدیمی‌ترین مدارك ریاضی مصریان قدیم است مسئله‌ای در مورد محاسبهٔ حجم هرم مربع‌القاعده ناقص آمده است. این مسئله به صورت زیرفرموله

می‌شود: مطلوبست حجم هرم مربع‌القاعدهٔ ناقص که ارتفاع آن ۶ و ضلع قاعدهٔ پایینی ۴ و ضلع‌قاعدهٔ بالائی ۲ است.

جالب است بدانید کـه این پاپیروس تـوسط جمع‌آوری کنندهٔ آثار باستانی به‌نام «گالینیشو» روسی در سال ۱۸۹۳ جمع‌آوری و درسال ۱۹۱۲ بـه موزهٔ اشیاء عتیقهٔ مسکو اهداء گردیده است.طول این پاپیروسها ۵۴۴ سانتیمتر وعرض آنها ۸ سانتیمتر است.

این پاپیروس پر ارزش اولین بارتوسط دانشمندان‌روسی به‌نامهای «ب. ا. تورایف» و «ب. ب. استرویه» مطالعه و خوانده شد.

مسئلهٔ فوق طبق فرمول حجم هرم ناقص حل می‌شود.

$$V = \frac{h}{۳}\left(B+b+\sqrt{Bb}\right)$$

$$V = \frac{۶}{۳}\left(۱۶+۴+\sqrt{۱۶\times ۴}\right)=۵۶$$

البته باید بگوئیم که مصریان از فرمول حرفی به‌صورت فوق استفاده نکرده‌اند بلکه در هرحالت از این فرمول برای بدست آوردن حجم هرم استفاده می‌کردند.

در زیر متن کامل حل این مسئله رامستقیماً از پاپیروس نقل می‌کنیم :

«مسئلهٔ حل هرم [شکل کناری] در صورتی‌که گفته شده باشد: ۴ پایینی ۲ بالائی اینطور انجام می‌دهند: مربع ۴ می‌دهد ۱۶، دو برابر ۴ می‌دهد ۸، اینطور انجام می‌دهند . مربع ۲ می‌شود ۴، ۱۶ راجمع، ۴ را جمع ، ۸ را جمع می‌کنیم بدست می‌دهد ۲۸ . اینطور انجام‌می‌دهند: ۲۸ را بگیر دو برابر کن تا بدست آید ۵۶ . حجم ۵۶ است. حالا تو به جواب درست رسیده‌ای».

چند وجهیهای منتظم

چند وجهیهای‌منتظم توسط فیثاغورس (پیروان‌فیثاغورس) کشف و شناخته شدند. طبق فلسفهٔ آنها چهار چند وجهی اول معرف عناصر چهارگانهٔ : آتش، هوا، زمین و آب بوده است. به علت فقدان عنصر پنجم‌طبیعت فیثاغورسیان‌چند وجهی پنجم را در خفا نگاهداشتند.

ساختن (رسـم) چند وجهی یکی ازدانشهای‌والا در میان مصریـان محسوب می‌شد. چند وجهیها را بیشتر اقلیدس مورد مطالعه وبررسی قرار داده است‌بطوری‌که فصل سیزدهم ازکتاب خود را به این موضوع اختصاص داده است.

اجسام دوار

مصریان و بابلیهای قدیم اجسام دوار را می‌شنـاختند . مثلا در «پاپیروس مسکو» مصریان درقرن نوزدهم قبل از میلاد سطح نیم‌کره را محاسبه‌کرده‌اند . این‌مسئله در پاپیروس بـا نام «محاسبهٔ زنبیل» آمده است . صورت مسئله در زیر مشاهده می‌شود . «اگر بتو بگویند: دهنهٔ زنبیل $۴\frac{۱}{۲}$ است سطح آنرا به‌من بگوچقدر می‌شود . ».

این مسئله طبق فرمول زیرحل شده است .

$$۲\times\left(\frac{۸}{۹}\right)^{۲}\cdot\left(۴\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$$

بـا فرض آنکه $\pi=۴\left(\frac{۸}{۹}\right)^{۲}$ و $D=۴\frac{۱}{۲}$ قطر باشد .

فرمول‌فوق کاملاً درست است از ریاضیدان یونانی فقط‌ارشمیدس است‌که دربارهٔ اجسام دواو مطـالعه‌کرده و برای حجم آنهـا فرمولهای‌کاملاً درستی‌بدست‌آورده است . قضیهٔ زیررا‌ارشمیدس بزرگترین‌کشف خود دانسته است :

«سطح‌کره برابراست با چهاربرابرمـاحت دایرهٔ‌عظیمهٔ آن و حجم استوانه‌ای‌که ارتفاع‌آن برابرقطرقاعده‌اش می‌باشد یك برابر ونیم‌حجم‌کرهٔ محاط درآن است .»

ارشمیدس وصیت کرد تا شکل مربوط به این مسئله را روی سنگ قبرش حکاکی‌کنند وهمانطورکردند که اوخواسته بود .

می‌گویند اقلیدس و شاگردانش فکر می‌کردندکـه فقط نسبت حجم اجسام را می‌توان اندازه‌گرفت و اندازه‌گیری‌حجم خود جسم غیرممکن است .

ن. ای... لوباچیوسکی وهندسهٔ او

I: «بیوگرافی‌کوتاهی از ن . ای . لوباچیوسکی»

نیکلای‌ایوانویچ لوباچیوسکی(۱۸۵۶-۱۷۹۲)

درشهر «نیژنی نوگورود» (شهرگرکی امروز) در خانواده‌ای فقیرکه سرپرست آن مأمور اندازه‌گیری زمین (مساح) بود بدنیاآمد و به‌زودی پدر خود را ازدست داد . ازآنجاکه مادر لوباچیوسکی زنـی پـر انرژی و دانا بود او را به دبیرستان «کازانسکی» فرستاد و پس‌از اتمام دبیرستان لوباچیوسکی به دانشگاهی با همان نام «کازانسکی» وارد شد . به‌زودی استادان او به‌نبوغ عظیم وی در ریاضیات پی‌بردند و او را درکـارهـای ریاضیش تشویق‌کردند .

ادارهٔ بازرسی دانشگاه‌اخلاق وروحیهٔ مستقل‌لوباچیوسکی را نمی‌پسندید ، وگفتگو بود لوباچیوسکی را ازدانشگاه‌بیرون کنند . واگراستادان او نبودند او را حتماً از ازدانشگاه‌بیرون می‌کردند . دلیل وبهانهٔ این‌استادان درنزد رئیس دانشگاه‌برای شفاعت از لوباچیوسکی این بودکه می‌توانند بعدها او را در کادرآموزشی استخدام‌کرده از او استفاده کنند . بدین ترتیب

لوباچیوسکی کارمند دانشگاه‌شد وموفقیتهای بیشتری بدست آورد. در هجده سالگی عنوان دستیارفیزیك ـ ریاضی را گرفت، برای بدست‌آوردن این عنوان باید از امتحانات مربوط بـا موفقیت می گذشتند .

لوباچیوسکی ۲۳ سال‌استاد دانشگاه بود. درسال۱۸۲۷ به‌ریاست دانشگاه «کازانسکی» رسید و مدت ۲۰ سال در این پست باقی ماند . بزرگترین کشف « ن . ای . لوباچیوسکی » هندسهٔ او است .

اولین اطلاعات دربارهٔ کشف بزرگ خود را « ن . ای. لوباچیوسکی» در۲۳ فوریه ۱۸۲۶ درجلسه‌ای درمورد فیزیك‌ـ ریاضی به‌دیگران داد . این روزمصادف با روزتولدلوباچیوسکی می‌باشد . اونظریه‌های خود را درصفحات مجله‌ای که خود او مؤسس آن بود بچاپ می‌رساند . « در بارهٔ اصول هندسه » (۱۸۲۹-۱۸۳۰)،«هندسهٔ موهومی» (۱۸۳۵) «کاربرد هندسهٔ موهومی دربعضی انتگرالها » (۱۸۳۶) «اصول جدید هندسه با تئوری کامل خطوط موازی» (۱۸۳۵-۱۸۳۸) « بررسیهای هندسه در مورد تئوری خطوط موازی » (۱۸۴۰) « هندسهٔ عمومی» (۱۸۵۵) .

هندسهٔ لوباچیوسکی انقلابی واقعی در ریاضیات بوجود آورد . بیهوده نیست که دانشمندان (مثلاً ریاضیدان انگلیسی **کلیفرد**)او را **کوپرنیك هندسه** نامیده‌اند . ولی‌دانشمند و استاد روسی « **ب ـ ف ـ کاگان** » این تشابه را در مورد لوباچیوسکی به‌اندازه کافی واضح و روشن نمی‌داند .

در میدان مرکزی شهر کوچك «تورن» پیکرهٔ کوپرنیك نصب شده است . و زیراین پیکره نوشته شده است: « متوقف کنندهٔ خورشید وبحرکت درآورندهٔ زمین » «می‌توانم به‌جرئت بگویم که ازحرکت‌بازداشتن خورشید وبحرکت درآوردن‌زمین آسانتر ازکمتر کردن‌مجموع زوایای‌یك مثلث است.» (درهندسهٔ لوباچیوسکی مجموع زوایای داخلی مثلث کمتر از دو قائمه می‌باشد) لوباچیوسکی بدون چشم‌داشتن ازمردم به‌آنهاخدمت می‌کرد وکمتر به‌فکرخویش بود . با تمام مخالفتهایی که با او می‌شد و با اینکه دولت ازنظرمالی به اوکمکی نمی‌کرد به‌کار خود ادامه می‌داد و درهمه‌جا از ایدهٔ خود و ثابت کردن آن دفاع می‌کرد . فقط پس ازمرگ او بود که ارزش کار او را فهمیدند .

اروپا هم از لوبـاچیوسکی حمـایت نکرد ، چنـانکه لوباچیوسکی به‌دانشمندآلمانی روی‌آورد و هندسهٔ خود را بااو درمیان گذاشت ولی ازاوهم نتیجه‌ای نگرفت . **گوس** درنامه‌های خصوصی به‌دوستانش لوباچیوسکی را به‌عنوان « نویسنده‌ای که دربارهٔ موضوعها مانند یك دانشمندی که حقیقتاً روح هندسه را درك کرده بحث وصحبت می کند نام برده است» ولی جرئت آن را پیدا نکرده تا موضوع را بطور آشکار در نشریات ویا اقلاً به‌خود لوباچیوسکی بنویسد .

باید واقعاً به ارادهٔ قوی لوبـاچیوسکی درود فرستاد که با همهٔ اینها پایداری کرد و ازحرف خود برنگشت .

لوباچیوسکی سعی داشت دنیای علم را به حقـانیت خود متقاعد کرده و پایه‌ای برای هندسه خود پی‌ریزی کند . او سعی داشت حقانیت‌خود را با استفاده ازمشاهدات‌نجومی اثبات کند، و برای این کار مثلثی‌درنظر گرفت که در رأسهای آن ستارگان قرارداشتند .

او می‌خواست با استفاده از اندازه گیری ثابت کند کـه مجموع زوایای داخلی کمتر ازدوقائمه است .

لوباچیوسکی حتی پس از مواجه شدن بـا مصیبتهـا و بدبختی‌هایی که به‌او روی‌آوردند باز درعقیدهٔ خود پابرجا ماند (اخراج او از دانشگاه . مرگ پسر بزرگش ـ بد شدن وضع مالی ...)

او بـه زودی سالخورده وکور شد . سال قبل از مرگش کاملاکور بود ودراین مدت‌حرفهای خود را برای دانشجویان خود دیکته می کرد . درسال آخرزندگی رساله‌ای به‌نام هندسهٔ عمومی که‌درآن نبوغ‌خودرا نشان می‌داد انتشارداد. دراین‌رساله نتیجه گرفته می‌شد که هندسهٔ معمولی (هندسهٔ اقلیدسی) حالت خاصی ازهندسهٔ عمومی لوباچیوسکی‌می‌باشد . لازم است‌متذکر شویم که لوباچیوسکی آخرین رسالهٔ خود را باکمال میل به ـ دانشگاه «کازانسکی» که زندگی خلاق خود را درآن گذرانده بود اهداء کرد .

در ۲۴ فوریه ۱۸۵۶ «ن‌ـای‌ـلوباچیوسکی» ازدنیارفت در حالی کـه هنوز بـه عمومیت ایده‌هـای هندسی خود دست نیافته بود .

اساس هندسهٔ لوباچیوسکی

هندسه مانند حساب یکی ازعلوم بسیارقدیمی است.اساس پیدایش‌آن به‌قرنها قبل ازاین برمیگردد . درقرن سوم قبل از میلاد هندسه توسط ریاضیدان یونان قدیم « اقلیدس » به صورت علم منظمی به‌عنوان یکی ازعلوم ریاضی بشمارآمد. اقلیدس۱۳ کتاب درمورد هندسه نوشته که‌کلا به‌نام « اصول » معروفند . این کتابها تنها کتابهای درسی درطی قرون گذشته بوده‌اند.حتی امروزه هندسه به‌ترتیبی که درکتاب اقلیدس‌آمده است درمدارس تدریس می‌شود .

به‌همین جهت هندسه‌ای که دردبیرستانها تدریس‌می‌شودبه

هندسهٔ اقلیدسی معروف‌است. درطی بیش ازدوهزارسال‌دانشمندان کلیهٔ کشورها فکرمی کردند که هندسه‌ای غیر از هندسهٔ اقلیدسی وجود ندارد ، با همین نظر آنها سعی می کردند اصل پنجم اقلیدس راکه ازیك نقطه بیش از یك خط موازی خط مفروض نمی‌توان عبور داد اثبات کنند. اما کلیهٔ این کوششها بی‌ثمر بود وآنها نتوانستند به موفقیت برسند .

درسال ۱۸۲۶ دانشمند و هندسه‌دان روس «**ن ـ ای ـ لوباچیوسکی**» ثابت کرد که‌اصل خطوط موازی اثبات‌ندارد. او این‌موضوع را با بنیان نهادن هندسه‌ای غیرازهندسهٔ افلیدسی بیان کرد. این هندسه‌امروزه‌به‌نام خود او به‌هندسهٔ‌لوباچیوسکی معروف است .

پایهٔ این‌هندسه را اصلهای هندسهٔ اقلیدسی تشکیل‌می‌دهند بجزاصل‌پنجم که این اصل را اوبه‌صورت زیر بیان می کند : «از یك نقطهٔ خارج یك خط درصفحه‌ای که توسط این خط و نقطه تشکیل می‌شود می‌توان‌بیش ازدوخط رسم کرد که خط مفروض را قطع نکنند» . لوباچیوسکی درحین پژوهشهای بیهوده‌ای که در مورداثبات‌اصل‌پنجم‌می کرد به‌این کشف خود رسید. درضمن اثبات اصل‌پنجم ازطریق معکوس او عملا هندسه‌ای ساخت که اصل پنجم درآن‌صادق نبود. با مشاهدهٔ اینکه‌کلیهٔ این اثباتها به تضاد منطقی برخود نمی کنند به‌نتیجهٔ فوق‌العاده‌ای رسید که اثبات اصل‌پنجم غیرممکن است ودرمقابل ممکن است هندسه‌ای غیرازهندسهٔ اقلیدسی درست کرد که در آن‌کلیهٔ اصلهای هندسهٔ اقلیدس بجز اصل پنجم صادقند. با استفاده از اصلهایی که در فوق بیان شد (اصول هندسهٔ لوباچیوسکی) قضایای زیر اثبات می‌شوند .

۱) خطوط عمود و مایل بریك خط واقع در یك صفحه می‌توانند متقاطع نباشند.

۲) مجموع زوایای‌داخلی‌مثلث بستگی به‌اضلاع‌آن دارد ولی همیشه‌کمتر ازدوقائمه می‌باشد. (یعنی مجموع زوایای‌داخلی مثلثها از یك مثلث به مثلث دیگرفرق می کند ولی همیشه‌کمتر از دوقائمه است) .

۳) مجموع‌زوایای داخل‌چهارضلعی محدب کمتراز چهار قائمه می‌باشد . وازاینجا می‌توان نتیجه گرفت که مربع وجود ندارد (یعنی‌چهارضلعی‌نمی‌توانیم پیدا کنیم که‌همهٔ‌زوایای داخلی آن°۹۰ باشند).

۴) اشکال متشابه وجود ندارند که نسبت تشابه آنها مخالف واحد باشد. درحالت خاص مثلا مثلثی نمی‌توان مشابه مثلث مفروضی با نسبت تشابه مخالف واحد ساخت.

۵) هرمثلث دلخواهی رانمی‌توان در دایره محاط کرد.

۶) مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از خط مفروض و واقع دریك سمت خط می‌تواند یك خط راست باشد (همیشه‌یك منحنی است) .

آیا هندسهٔ لوباچیوسکی حقیقت دارد (هندسه‌ای‌واقعی است) ؟

قبل از اینکه به این سؤال جواب داده شود . لازم است قبل ازهرچیز سؤالهایی که باید دربارهٔ نقطه ، خط و صفحه بدانیم جواب دهیم . درموردنقطه ، خط و صفحه بایدسه‌موضوع راکه خواص آنها جزء دستگاه اصول هندسی است بفهمیم. اصل چیست ؟آیا چنین اصلی دقیقتروصحیح‌تراز دستگاه اصول‌است؟

اصل‌بیان هندسی است که توسط ما بدون اثبات قبول می‌شود و از روی همین اصل است که مفهوم نقطه و خط و یا صفحه معلوم می‌شود. (دراینجا برای مثال فرض می کنیم. کره به‌شعاع r یك‌نقطه و استوانهٔ به‌شعاع r به‌عنوان خط و صفحهٔ پلاستیکی به‌ضخامت ۲r به‌عنوان‌صفحه باشد) . درآموزش‌هندسه در مدارس نخ قرقره را به‌عنوان مثالی برای خط می‌آورند ، و سطح آئینه صاف به‌عنوان صفحه معرفی می‌شود .

روی کاغذی مثلثی بکشید . اضلاع این مثلث در حال حاضرخطوط راست بنظر می‌رسند . حال این ورقهٔ کاغذ را به‌صورت استوانه‌ای درآورید ، مشاهده می کنید که خطوط در حالت‌کلی به‌صورت منحنی‌هایی درآمده‌اند . حال اگر کاغذ را بازکنید تا صاف شود منحنی‌های قبلی به‌صورت خطوط‌اولیه ظاهرخواهند شد . خطوطی راکه پس از باز کردن استوانه به‌صورت خطوط راست درمی‌آیند خطوط ژئودزی استوانه می گویند.

خطوط (منحنی‌های) ژئودزی کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطه روی سطح راگویند .

اگردونقطه را روی استوانه‌ای‌بگیریم (خطوط راست‌مار براین دونقطه درحالت‌بازشد)خط راست‌منحنی ژئودزی استوانه است و روی استوانه هندسهٔ اقلیدسی صادق است .

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که مجموع زوایای مثلث ژئودزی برابر دو قائمه است . و این موضوع معادل اصل پنجم است .

حال ببینیم چه هندسه‌ای روی‌کره صادق است . اگردو نقطه را روی‌کره گرفته و به‌عنوان خط راست خط ژئودزی آن را درنظربگیریم. (بایدتوجه داشته باشیم که‌کره یك سطح غیر قابل‌گسترش است یعنی نمی‌توان آنرا مانند استوانه باز کرد و خط ژئودزی‌آن را به‌صورت خط راست مشاهده‌کرد)، دوایر عظیمهٔ‌کره منحنی‌های ژئودزی کره است. کمانهای‌دوایرعظیمه دوبه‌دو همدیگررا قطع می کنند. به‌همین‌جهت روی‌کره خطوط

بقیه درصفحهٔ ۴۳۵

قطب و قطبی در فضای n بعدی

دکتر علیرضا امیرمعز دانشگاه تکزاس تک

بسیاری از قضایای هندسهٔ صفحه رامی‌توان برای فضاهای اقلیدسی n بعدی تعمیم داد. اثبات این قضایا به روش هندسهٔ تحلیلی در کتابها موجود است . بعضی از این برهانها چنان پیچیده و دور و درازند که خواننده از خواندن آنها صرفنظر می‌کند. امروزه روش برداری و ماتریسی‌معمول روز است. این روش بسیاری از قضایا را ساده می‌کند . برای نمونه موضوع قطب و قطبی نسبت به یک جسم درجهٔ دوم در فضای n بعدی اقلیدسی را بررسی می‌کنیم‌وبدین وسیله توانائی روش ماتریسی را نمایش می‌دهیم .

۱ـ اجسام درجهٔ دومـ ابتدا یك برش مخروطی در صفحه را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم که نسبت به یك دستگاه مختصات قائم معادلهٔ یك منحنی درجهٔ دوم چنین باشد :

$$(۱)\quad ax^۲+۲bxy+cy^۲+۲px+۲qy+r=۰$$

معادلهٔ ماتریسی (۱) چنین می‌شود:

$$(۲)\quad (x\ \ y\ \ ۱)\begin{pmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ ۱ \end{pmatrix}=۰$$

ماتریس قسمت درجهٔ دوم (۱) عبارتست از :

$$Q=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

اکنون ماتریسها را نام‌گذاری می‌کنیم : فرض کنیم

$$X=(x\ \ y\ \ ۱)$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

هرگاه خطوط یك ماتریس را به جای ستونهای آن بگذاریم ماتریس‌تازه‌ای‌بدست‌می‌آید که (Transpose) ترانسپزماتریس قبل نامیده می‌شود. مثلا اگر

$$B=\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۷ \end{pmatrix}$$

باشد، ترانسپز آن می‌شود:

$$B'=\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & ۷ \end{pmatrix}$$

(در تمام این مقاله ترانسپز یك ماتریس را با پریم «′» نمایش می‌دهیم. مثلا B' ترانسپز B است.)

اکنون ملاحظه می‌شود که معادلهٔ (۲) را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$(۳)\qquad XAX'=۰$$

بطورکلی در یك فضای اقلیدسی n بعدی ، یك جسم درجهٔ دوم را به صورت (۳) می‌توان نوشت به قسمی که

$$X=(x_۱\ \ x_۲\ \ \cdots\ \ x_n\ \ ۱)$$

و A یك ماتریس قرینه است یعنی $A'=A$. هرگاه آخرین خط و آخرین ستون A را حذف کنیم ، ماتریس صورت درجهٔ دوم (۳) بدست می‌آید. آنرا با Q نمایش می‌دهیم .

۲ـ خط مستقیمـ دستگاه معادلات پارامتری یك خط مستقیم در صفحه چنین است:

$$\begin{cases} x=x_۱+pt \\ y=y_۱+qt \end{cases}$$

این دستگاه را می‌توان به صورت یك معادلهٔ ماتریسی نوشت :

$$(x\ \ y\ \ ۱)=(x_۱\ \ y_۱\ \ ۱)+t(p\ \ q\ \ ۰)$$

ملاحظه می‌شود که به هر نقطهٔ (xوy) ماتریسی به صورت $(x\ \ y\ \ ۱)$ مربوط‌است‌وبه‌امتداد (p و q) ماتریس $(p\ \ q\ \ ۰)$. (گاهی‌این‌ماتریسهاراماتریسهای‌همگن (homogeneous) می‌خوانند. چون امتدادبه‌یك نقطه‌در بینهایت‌مربوط‌است‌مختصات سوم همگن آن صفر است).

اکنون ماتریسها را چنین می‌نامیم:

$$X=(x\ \ y\ \ ۱)\ \text{و}\ Y=(x_۱\ \ y_۱\ \ ۱)\ \text{و}\ D=(p\ \ q\ \ ۰)$$

البته معلوم است X نمایندهٔ یك نقطهٔ متغیروY نمایندهٔ یك‌نقطهٔ ثابت و D نماینده یك امتداد است، بنابراین معادلهٔ ماتریسی خط به صورت زیر در می‌آید:

$$(۴)\qquad X=Y+tD$$

در فضای n بعدی اقلیدسی معادلهٔ یك خط مستقیم به

همین صورت (۴) است. فقط :

$$X=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n\ 1)$$
$$Y=(y_1\ y_2\ \cdots\ y_n\ 1)$$
$$D=(p_1\ p_2\ \cdots\ p_n\ 0)$$

۳ـ فصل مشترك يك خط و يك جسم درجهٔ دوم ـ

به فرض فضا را n بعدی گرفته‌ایم محل تلاقی یك جسم درجهٔ دوم $XAX'=0$ و خط $X=Y+tD$ از دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} XAX'=0 \\ X=Y+tD \end{cases}$$

هر گاه X را بین دو معادله حذف کنیم نتیجه می‌شود :

$$(5)\quad (DAD')t^2+[YAD'+DAY']t+ +YAY'=0$$

قبل از اینکه دربارهٔ (۵) بحث کنیم معادله را ساده می‌کنیم . خواننده به آسانی می‌تواند ثابت کند که :

$$DAD'=DQD' \quad \text{و} \quad YAD'=DAY'$$

باید متذکر شد که در عبارت DQD' ماتریس D را به قرار زیر گرفته‌ایم :

$$D=(p_1\ p_2\ \cdots\ p_n)$$

واضح است که ضرایب مجهول t در (۵) ماتریسهای یك جمله‌ای اند، از اینرو معادلهٔ (۵) ساده می‌شود و بدست می‌آید:

$$(6)\quad (DQD')t^2+2(YAD')t+YAY'=0$$

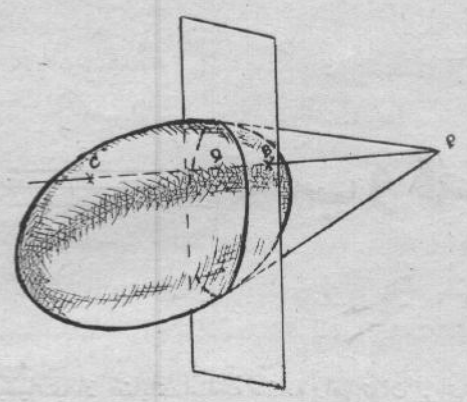
بحث این معادله را به خواننده واگذار می‌کنیم. فقط باید متذکر شد که شرط لازم و کافی برای دو جواب $DQD'\neq 0$ است. در این صورت دو جواب ممکن است حقیقی و مشخص باشند یا جواب مضاعف یا اینکه دو جواب مختلط و مزدوج . به هر جهت این حالت مورد نظر است.

۴ـ قطب و قطبی ـ فرض کنیم که $XAX'=0$ یك جسم درجهٔ دوم باشد و P یك نقطه در فضای n بعدی. به علاوه فرض می‌کنیم که هر خط مار بر نقطهٔ P جسم درجهٔ دوم را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. مکان هندسی Q ، مزدوج توافقی P نسبت به B و C، یك صفحهٔ $(n-1)$ بعدی است (hyperplane). این صفحه را قطبی نقطهٔ P نسبت به جسم $XAX'=0$ گوییم.

برهان ـ فرض کنیم که (PQBC) یك دستگاه توافقی باشد. لذا

$$(7)\quad \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=-\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}$$

(برای روشن کردن مطلب شکل فضای ۳ بعدی قضیه را درج می‌کنیم) .



اکنون نقطهٔ P را با ماتریس آن برابر می‌گیریم یعنی

$$P=(y_1\ y_2\ \cdots\ y_n\ 1)$$

به این ترتیب معادلهٔ خط مار بر نقطهٔ P با امتداد D چنین می‌شود :

$$X=P+tD$$

نقاط برخورد این خط و جسم از معادلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$(DQD')t^2+2(PAD')t+PAP'=0$$

و $DQD'\neq 0$.

روی خط مقدار $t=0$ مرتبط به $X=P$ است. فرض کنیم که t_1 و t_2 به ترتیب مربوط به نقاط $X=B$ و $X=C$ باشد و t مربوط به Q . بنابراین از تساوی (۷) رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$t=\frac{2t_1t_2}{t_1+t_2}=-\frac{PAP'}{PAD'}$$

البته فرض کرده‌ایم که $PAD'\neq 0$. هر گاه مقدار t را در معادلهٔ خط بگذاریم رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$(PAD')X=(PAD')P-(PAP')D$$

اکنون طرف راست این معادله را در AP' ضرب می‌کنیم . نتیجه می‌شود.

$$(PAD')(XAP')= =(PAD')(PAP')-(PAP')(DAP')=0$$

چون PAD' صفر نیست تساوی زیر بدست می‌آید:

$$XAP'=PAX'=0$$

که معادله‌ای است درجهٔ اول با متغیرهای x_1 و ... و x_n و این معادلهٔ قطبی P نسبت به $XAX'=0$ است .

ملاحظه می‌شود که هر گاه PAD' صفر باشد، نقطهٔ P در مرکز جسم درجهٔ دوم قرار می‌گیرد و در این صورت قطبی آن در بینهایت است . اثبات این مطلب را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم .

۵ـ خواص قطب و قطبی ـ آنچه که در صفحه‌راجع به قطب وقطبی نسبت به‌یك دایره وجود دارد می‌توان برای‌قطب و قطبی درفضای n بعدی نسبت به یك جسم درجهٔ دوم تعمیم‌داد. چون روش ماتریس بسیار ساده است برای هرقضیه فقط چندخط عملیات جبری آنرا ثابت می‌کند . اکنون چند مثال می‌زنیم و برهان را به عهده خواننده می‌گذاریم .

فرض کنیم که δ و γ دو خط مار بر نقطهٔ P باشند . فرض کنیم که δ جسم درجهٔ دوم را در نقاط B و C قطع کند و γ در نقاط D و E، به‌این‌ترتیب خطوط BD و EC متلاقیند و محل تلاقی آنها روی قطبی P نسبت به جسم درجهٔ دوم است.

هرگاه نقطهٔ A روی قطبی P نسبت به یك جسم درجهٔ دوم جابجا شود، قطبی A نسبت به جسم درجهٔ دوم بر نقطهٔ P مرور می‌کند.

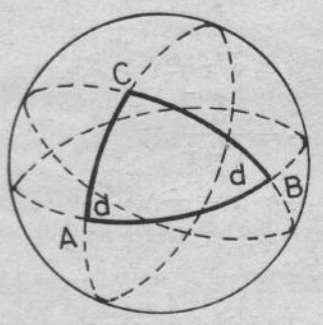
خواننده می‌تواند قضایای بیشماری را بررسی کند وحالات خاص را در نظر بگیرد. به‌علاوه به جای فضای اقلیدسی‌حقیقی می‌توان فضای اقلیدسی مجازی (unitaryspace) را بکار برد.

تاریخچهٔ کوتاه هندسه

دنباله ازصفحهٔ ۴۳۲

راست متوازی وجود ندارند . بنابراین روی کره از یك نقطهٔ خارج یك‌خط، نمی‌توان خطی موازی با آن رسم کرد.

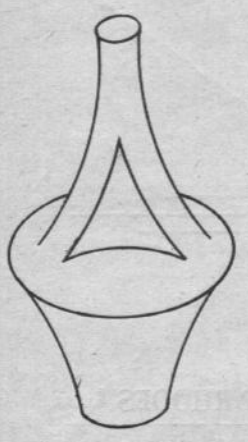
خصوصیت خاص این هندسهٔ روی کره این است که مجموع زوایای داخلی مثلث ژئودزی (مثلث با خطوط راست) بیش‌از دو قائمه است . این موضوع ازروی شکل و مدل به‌آسانی مشاهده می‌شود .



هندسهٔ کروی مدل ساده‌ای است از هندسهٔ غیر اقلیدسی به‌نام **هندسهٔ ریمان**

آیا هندسهٔ لوباچیوسکی واقعی است ؟

جواب این‌سؤال مثبت‌است . زیرا این هندسه روی سطوح‌حقیقی صادق است .



ثابت می‌شود که هندسهٔ لوباچیوسکی (هندسهٔ مسطحه)روی سطح شبه‌کره صادق‌است. اگر روی این سطح مثلث ژئودزی را رسم کنیم (خطوط ژئودزی روی‌این‌سطح به‌کمك نخ گچ‌اندود که کاملا کشیده شده و دوسر آن در رأسهای مثلث ژئودزی قرار داشته باشند بدست می‌آید. برای این‌کار کافی است نخ راکشیده و ول کرد . اثر آن روی سطح خطوط ژئودزی رابه‌ما خواهدداد)خواهیم دید که‌مجموع زوایای‌داخلی این مثلث کمتراز دوقائمه خواهد بود و این همان چیزی است که لوباچیوسکی درهندسهٔ خود به‌آن اشاره می‌کند .

این‌حقیقت‌را به‌آسانی ازروی (شکل بالا) که مدلی‌برای شبه‌کره است می‌توانید تحقیق کنید .

هندسهٔ لوباچیوسکی تعبیرواقعی خود را روی سطح شبه کره نیز بدست می‌آورد .

کشف هندسهٔ لوباچیوسکی عصرجدیدی را درعلوم‌بوجود آورده است . نظریه‌های لوباچیوسکی در فیزیك امروزی کاربردهای وسیعی دارد. مثلا برطبق فکر اساسی لوباچیوسکی تئوری امروزی مکانیك فضای کیهانی پایه‌گذاری شده است . بالاخره باید گفت که هندسهٔ لوباچیوسکی مستقیماً در تئوری توابع با متغیرهای مختلط وارد شده وحتی خود لوباچیوسکی برای محاسبهٔ انتگرالهای معین از هندسهٔ خود استفاده کرده است .

معرفی کتاب

سالنامهٔ کشور ایران

سال بیست و هشتم ـ ۱۳۵۲

مؤسس و مدیر : محمد رضامیرزا زمانی

در ۷۵۲ صفحه به‌قطع جیبی

دربارهٔ یک سری نامحدود

چرا $1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$ ؟

نوشتهٔ F.RHODES مجلهٔ گازت

ترجمهٔ : داوید ریحان

[آقای کامران پارسای‌قمی، دانشجوی ایرانی مقیم انگلستان، نیز ترجمهٔ به‌فارسی این مقاله را تهیه کرده و برای درج در یکان ارسال داشته‌اند که در تاریخ ۵۲/۲/۱۹ به دفترمجله‌واصل شده است. اما از این نظرکه ترجمهٔ آقای ریحان مقدم بر ترجمهٔ‌ایشان دریافت شده و علاوه برآن شامل توضیحات و اضافات است ، از این جهت برای درج در مجله انتخاب شد. از توجه آقای کامران پارسای قمی به مجلهٔ مورد علاقهٔ خودتشکر می‌شود . یکان]

بر طبق یکی از قضایای مشهورسریهای نامحدود ، هر- گاه یك سری متقارب باشد ، مقدارش عبارت از عددی است که این سری بـه آن نزدیك می گردد ولی اگر یك‌سری متقارب نباشد، هیچ عددی معرف آن نخواهد بود . در پشت این قضیهٔ مشهور، مثالهای عجیبی ازنمایش اعداد بوسیلهٔ سریها وجوددارد که توسط ریاضیدانان‌قرن ۱۸ ، ۱۹ عنوان شده است. هنگامی که این مثالها را بطور مجزا اختیار کنیم ممکن است بواسطهٔ غرابتشان ، آنها راکنار بگذاریم ولی به علت وجود سازگاری که بینشان وجود دارد لازم است که آنها را بطور دقیق مورد مطالعه قرار دهیم .

اکنون در مورد سریهایی بحث می کنیم که در موردآنها سؤال زیر مطرح می گردد : آیا چنین سریهایی را می‌توان به صورت عددی نشان داد؟ در هرحال هرکس که چنین سریهایی را قبول کند و آنرا در محاسباتش بکار بندد میل دارد کـه پرسش سادهٔ زیر را مطرح نماید که این سری معرف چه‌عددی است؟

اجازه دهید که این پرسش را در مورد سری زیراعمال کنیم :

$$1-1+1-1+\cdots$$

برطبق چندین راه حل می‌توان به جواب واحدی برای این سری رسید. راه اول، می‌توان نوشت :

$$s=1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+\cdots)$$

$$s=1-s \Longrightarrow s=\frac{1}{2}$$

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$$

راه دوم ـ هرگاه داشته باشیم :

$$s=1+r+r^2+r^3+\cdots$$

خواهیم داشت :

$$rs=r+r^2+r^3+r^4+\cdots$$

$$s-rs=1$$

با شرط $r\neq 1$ بدست می‌آید ،

$$s=1+r+r^2+r^3=\cdots=\frac{1}{1-r}$$

هرگاه $r=-1$ اختیار شود :

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$$

راه سوم، می‌توان تبدیل زیر راکه منسوب به اولر است بکار برد :

$$v_1-v_2+v_3-v_4+\cdots=\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}(v_1-v_2)-\frac{1}{2}(v_2-v_3)+\cdots$$

به سادگی دیده می‌شود که چگونه می‌توان طرف دوم را تشکیل داد . نحوهٔ عمل بدین قرار است که به ازای هر v_i که در طرف چپ موجود است ، دوتا $\frac{1}{2}v_i$ درطرف‌راست‌وجود دارد .

این تبدیل را می‌توان در مورد سریهایی که به آرامی متقارب می‌شوند بکار برد تا آن سری زودتر متقارب گردد. در سری مورد بحث $v_i=1$ است ، بنابراین :

$$1-1+1-1+\cdots=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-1)-\frac{1}{2}(1-1)+\cdots=\frac{1}{2}$$

این سه طریقه را می‌توان در مورد سایر تصاعدهـای هندسی بکار برد، به عنوان مثال :

$$s=1-2+2^2-2^3+2^4-\cdots$$
$$=1-2(1-2+2^2-\cdots)=1-2s$$
$$1-2+2^2-2^3+\cdots=\frac{1}{3}$$

فرمول مربوط به تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ — نیزبه همین نتیجه می‌رسد. در این مورد ، فرمول تبدیل اولر بـه صورت زیر در می‌آید:

$$s=1-2+2^2-2^3+2^4-\cdots$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2)-\frac{1}{2}(2-2^2)+\frac{1}{2}(2^2-2^3)-\cdots$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1+2-2^2+2^3-\cdots)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-s)$$
$$1-2+2^2-2^3+\cdots=\frac{1}{3}$$

اگر تصاعدهای «حسابی ـ هندسی» را مطابق روشی که در بالا در مورد سریهای هندسی بکار بـرده شد ، معالعه کنیم فرمول زیر بدست می‌آید.

$$a+(a+d)r+(a+2d)r^2+(a+3d)r^3+\cdots=$$
$$=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$$

درمورد تصاعدی که $a=d=1$ و $r=-1$ است ، بدست می‌آید :

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4}$$

همچنین در مورد سریهایی که درآنها $a=d=1$ و $r=-2$ است داریم :

$$1-2\times3+3\times2^2-4\times2^2+\cdots=\frac{1}{9}$$

همین نتیجه را می‌توان بـا تبدیل اولـر نیز بـدست آورد . راههای دیگری نیز وجود داردکه مؤید نتایج فوق است. برای اثبات سازگاری که بین چهارسری ملاحظه شدهٔ در فوق وجود دارد، نظری به ضرب سریها می‌افکنیم :

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)\times$$
$$(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n)$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+$$
$$+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$

می‌توان **قانون کوشی** را بکار برد :

$$(a_0+a_1+a_2+\cdots)(b_0+b_1+b_2+\cdots)$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+$$
$$+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\cdots$$

با استفاده از این قانون داریم :

$$(1-1+1-1+\cdots)(1-1+1-1+\cdots)$$
$$=1-2+3-4+5-6+\cdots$$

چون طـرف چپ معـرف عدد $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ و نتیجه طرف راست $\frac{1}{4}$ می‌باشد، پس نتیجهٔ بدست آمده با مقادیری که در فوق‌بدست آوردیم سازگار است. به طریق مشابه:

$$(1-2+2^2-2^3+\cdots)(1-2+2^2+2^3+\cdots)$$
$$=1-2\times2+3\times2^2-4\times2^3+\cdots$$

چون طرف چپ معرف $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ و طرف‌راست معرف‌عدد $\frac{1}{9}$ می‌باشد، پس نتیجه درست است. این نوع سازگاری را نیز می‌توان در مورد ضرب زیر ملاحظه کرد :

$$(1-1+1-1+\cdots)(1-2+2^2-2^3+\cdots)$$
$$=1-3+7-15+31-63+\cdots$$

طرف چپ معرف $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ است . اگر تبدیل اولر را در مورد سری طرف راست‌بکار بندیم به نتیجهٔ $\frac{1}{6}$ می‌رسیم . سازگاری این نتایج ممکن است این فکر را در ذهن تداعی نمایدکه هر کدام ازاین سریها را می‌توان بایك عددمنحصر به‌فرد نشان‌داد. حال آنکه اگر روشهای بکار برده شدهٔ در فوق را در مورد تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ بکار ببریم تغییر عقیده خواهیم

داد . آیا مسخره نیست که یك سری با جملات مثبت مساوی با یك عدد منفی گردد؟

معهذا :

$$s=1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots=$$
$$1+2(1+2+2^2+2^3+\cdots)$$
$$s=1+2s \Longrightarrow s=-1$$
$$1+2+2^2+2^3+\cdots=-1 \quad ؟!$$

اگر تبدیل اولر را درمورد این سری (که همهٔ جملاتش مثبت هستند) بکار بنبدیم، بدست می‌آید:

$$s=1+2+2^2+2^3+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{2}(2+2^2)+\frac{1}{2}(2^2+2^3)+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+2)(1+2+2^2+2^3+\cdots)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}s$$

که به‌همان‌نتیجه ختم‌می‌شود، به‌علاوه از فرمول‌مربوط به‌مجموع تصاعد هندسی نیز همین نتیجه بدست می‌آید :

$$1+2+2^2+2^3+\cdots=\frac{1}{1-2}=-1$$

هرگاه قانون کوشی را در مورد سریهای بدست آمده بکار بندیم ، سازگاری بین نتایج بدست آمده را خواهیم دید:

$$(1+2+2^2+2^3+\cdots)(1+2+2^2+2^3+\cdots)$$
$$=1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots$$

طرف راست معرف یك تصاعد حسابی ـ هندسی است که در آن $a=d=1$ و $r=2$ می‌باشد و معرف عدد

$$\frac{1}{-1}+\frac{1\times2}{(-1)^2}=1$$

می‌باشد .

مسلماً چون طرف چپ معرف $(-1)^2$ است، این‌رابطه سازگار است .

محاسبات مطرح شده در فوق در مورد سریهای پیشنهاد شده سازگار بود. از طرفی، محاسبات زیر به نتایج دیگری منتهی می‌شود :

$$1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+$$
$$+(1-1)+\cdots=0$$
$$1-1+1-1+\cdots=1-(1-1)-(1-1)-$$
$$-\cdots=1$$

ریاضیدانان قرن هیجدهم اینطور استدلال می‌کردند که در اولین محاسبهٔ مربوط به این سریها طرف اول دارای تعداد زوجی جملات است، حال آنکه در دومی این تعداد فرد است و چون هیچ دلیلی‌وجود ندارد که یکی را بردیگری ترجیح‌دهیم میانگین حسابی ۰ و ۱ را که عدد $\frac{1}{2}$ می‌باشد برای مجموع این سری‌ها بکار می‌بریم . با محاسبات دیگری که در مورد این سری انجام دادند، عدد $\frac{1}{2}$ را به عنوان مقدار این سری بدست آوردند و بدین لحاظ از استدلال خودراضی‌بودند. ولی‌این‌اطمینان درموردمحاسباتی‌ازقبیل زیرچندان‌محکم‌نیست:

$$1-2+3-4+\cdots=$$
$$(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots$$
$$=-1-1-1-\cdots$$
$$1-2+4-4+\cdots=$$
$$1-(2-3)-(4-5)-\cdots$$
$$=1+1+1+\cdots$$

مشکل است، بتوان تصورکردکه نتیجهٔ این‌محاسبات‌عدد $\frac{1}{4}$ باشد که در محاسبات قبلی برای سری بدست آمده است.از طرفی دیگر، نتیجهٔ عجیب مربوط به‌تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲، اساس اینگونه تعبیرات را فرو می‌ریزد.

در این مورد از محاسبات نتایج زیر عاید می‌شود :

$$1+2+2^2+2^3+\cdots=(1+2)+(2^2+2^3)+$$
$$+(2^4+2^5)+\cdots$$
$$=(1+2)(1+2^2+2^4+\cdots)$$
$$1+2+2^2+2^3+\cdots=$$
$$1+(2+2^2)(1+2^2+2^4+\cdots)$$
$$1+2+2^2+2^3+\cdots=-1$$

فهمیده می‌شود که برخی از ریاضیدانان قرن هیجدهم این نتیجه را کنار می‌گذاشتند ، حال آنکه محاسبات زیادی مؤید آن‌بود. در جبههٔ‌مقابل معاصرین‌آنها بودند. ریاضیدانانی که‌این‌نتایج ونتایج مشابه را بکارمی‌بردند ومجبوربودند که‌با کاوش در تئوریهای نمایش اعداد بوسیلهٔ سریها که چندتائی‌از آنها را در بالا ذکر کردیم، موجودیت و صحت این روابط را اثبات کنند.

آنها تئوری واحدی را که بتواند جوابگوی تمام این نتایج باشد بدست نیاوردند ، حال آنکه تئوریهای مختلفی را عنوان کردند که هر کدامشان برخی از این نتایج را توضیح می‌داد.

تا آنجاکه‌انتظار می‌رفت، نتایج عجیب مربوط‌به نمایش اعداد منفی برای سریهای با جملات مثبت، محتاج به مقداری تئوری مغلطه آمیز برای توضیح آنها بود. اساس تئوری اتصال

توابع با متغیر موهومی است و نمی‌تواند در مورد حالات اخیر الذکر بکار برده شود. تئوری مقدماتی دیگری را که عبارت از بسط تئوریهای متقارب است دراینجا توضیح می‌دهیم بطوری که خواهیم دید، کافی خواهد بود که عدد $\frac{1}{2}$ را برای نمایش سری $1-1+1-1+\cdots$ بکار بریم.

در تئوری سریهای متقارب، سری

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

را از لحاظ رشته مجموعهای جزئی در نظر می‌گیرند:

$$s_1=a_1 \ ، \ s_2=a_1+a_2 ، \cdots s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

سری برای مجموع s متقارب است اگر و فقط اگر رشتهٔ مجموعهای جزئی متقارب باشد. در مرحلهٔ اول، سریها را با رشتهٔ میانگینهای حسابی مجموعهای جزئی در نظر گرفتند:

$$m_1=s \ ، \ m_2=\frac{s_1+s_2}{2} ، \cdots ،$$

$$m_n=\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}$$

سری را بوسیلهٔ اولین میانگین حسابی s **جمع پذیر** گوییم اگر و فقط اگر این رشته به s نزدیك گردد. برای آنکه فرقی بین مفاهیم تقارب و جمع‌پذیری قائل شویم، ازهم اکنون نشانهٔ

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=s$$

را برای سریهایی بکار می‌بریم که به s نزدیك می‌شوند ونشانهٔ

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=s(C,1)$$

را برای نشان دادن سریهایی بکار می‌بریم که بوسیلهٔ اولین میانگین حسابی s جمع پذیرند. حرف C که در طرف دوم بکاربرده شده است اولین حرف از اسم ریاضیدان قرن نوزدهم **سزارو** (Cesaro) است که این روش جمع‌پذیری منسوب به اوست.

در مورد سری $1-1+1-1+\cdots$ داریم:

$$s_1=1 \ ، \ s_2=0 \ ، \ s_3=1 \ ، \ s_4=0 \ ، \cdots$$

این رشتهٔ مجموعهای جزئی متقارب نیست، بنابراین

$$1-1+1-1+\cdots\neq\frac{1}{2}$$

اولین میانگین حسابی این مجموعهای جزئی عبارتست از:

$$m_1=1 \ ، \ m_2=\frac{1}{2} ، \ m_3=\frac{2}{3} \ ، \ m_4=\frac{1}{2} ، \cdots$$

و بطور کلی:

$$m_{2n}=\frac{1}{2} \ و \ m_{2n+1}=\frac{n}{2n+1}$$

هرگاه $n\to\infty$ حد m_n برابر $\frac{1}{2}$ است پس:

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}(C,1)$$

اولین شرط جمع پذیری، جمع‌پذیری بوسیلهٔ اولین میانگین حسابی است.

در مورد دیگر، رشتهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$m_1'=\frac{s}{1} \ ، \ m_2'=\frac{s_1+(s_1+s_2)}{1+2} \ ،$$

$$m_3'=\frac{s_1+(s_1+s_2)+(s_1+s_2+s_3)}{1+2+3}$$

وجملهٔ عمومی آن عبارتست از:

$$m_n'=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{s_1}{\sum_{j=1}^{n} j}$$

سری اولیهٔ $\sum_{i=1}^{n} a_i$ را بوسیلهٔ میانگین دوم حسابی s جمع‌پذیر گویند اگروفقط اگراین رشته به s نزدیك‌شود. در این مورد از نشانهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=s(C,2)$$

به عنوان مثال سری $1-2+3-4+\cdots$ دارای رشتهٔ مجموعهای جزئی زیر است.

$$s_1=1 \ ، \ s_2=-1 \ ، \ s_3=2 \ ، \ s_4=-2 \ ، \cdots$$

و رشتهٔ میانگینهای حسابی برابر است با:

$$m_1=1 \ ، \ m_2=\frac{0}{2} \ ، \ m_3=\frac{2}{3} \ ، \ m_4=\frac{0}{4} \ ، \cdots$$

و بطور کلی

$$m_{2n}=0 \ و \ m_{2n+1}=\frac{n+1}{2n+1}$$

این رشته متقارب نیست، بنابراین سری بوسیلهٔ اولین‌میانگین حسابی جمع پذیر نیست. رشتهٔ دومین میانگین حسابی دارای جملهٔ عمومی:

$$m'_{2n}=\frac{n(n+1)}{2n(2n+1)} \ و \ m'_{2n-1}=\frac{n(n+1)}{(2n-1)2n}$$

است که به $\frac{1}{4}$ نزدیك می‌شود، پس:

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4}(C,2)$$

ممکن است که شرایط جمع‌پذیری سریهای مذکور در بالا را تعمیم داد. برای هر عدد صحیح k ، جمع‌پذیری توسط k امین میانگین حسابی را تعریف می‌کنیم و نشانهٔ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s(C, k)$ را برای آن بکار می‌بریم ، تا نشان دهیم که سری مفروض توسط k امین میانگین حسابی s جمع‌پذیر است این شرط به تدریج سستتر می‌گردد زیرا :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s(C, k) \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s(C, k+1)$$

تمام شرایط جمع‌پذیری از شرایط تقارب سستترند، زیرا

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ باشد در این صورت

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s(C, 1)$ می‌باشد. این نتیجهٔ اخیر را می‌توان از مسئلهٔ زیر که در بیشتر مسائل مقدماتی رشته‌ها یافت می‌شود بدست آورد :

وقتی $n \to \infty$ اگرحد s برابر باشد با s_n ثابت کنید که حد $\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}$ برابر است با s. تئوری سریهایی با میانگینهای حسابی جمع‌پذیرند از برخی لحاظ با تئوریهای تقارب متشابهند. در نظریهٔ تقارب می‌دانیم که هرگاه $\Sigma a_n = s$ و $\Sigma b_n = t$ باشد، دراین صورت برای هرعدد α و β داریم:

$$\Sigma(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha s + \beta t$$

گر چه در حاصل‌ضرب کوشی احتیاجی به تقارب سری نیست، معهذا می‌بایست که سریها جمع‌پذیر بوده و باید:

$$(\Sigma a_n)(\Sigma b_n) = st(C \text{ و } 1)$$

اگر داشته باشیم :

$$\Sigma a_n = s(C \text{ و } 1) \ ، \ \Sigma b_n = t(C, 1)$$

وقتی که $k \geq 1$ است برای هر دو عدد α و β داریم :

$$\Sigma(\alpha a_n + \beta b_n) = as + \beta t(C, k)$$

$$(\Sigma a_n)(\Sigma b_n) = st(C, k+1+1)$$

در هرحال ، تبدیل اولر را می توان در هر دو مورد سریهای جمع پذیر و همچنین سریهای متقارب بکاربرد، زیرا به ازای همهٔ مقادیر k داریم:

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}(v_1 - v_2) - \frac{1}{2}(v_2 - v_3) + \cdots (C, k)$$

تعریف دقیق روش سزارو را در مورد جمع‌پذیری با k امین میانگین حسابی می‌توان در کتاب «تئوری و کاربرد سریهای نامحدود» نوشتهٔ **نوپ** (Knopp) و همچنین در کتاب «سری‌های متباعد» نوشتهٔ **هاردی** (Hardy) یافت . این کتابها شامل مباحثی در موردسایرروشهای مطالعهٔ سریهای غیرمتقارب و نکته های تاریخی آن می‌باشد. در این کتابها ثابت می‌کنند که محاسباتی که مربوط به مبحث فوق می‌باشد در مورد مسائل اخیر صحیح است. همچنین نشان می‌دهند که موضوعی که‌عنوان این مبحث را تشکیل داده است می‌تواند بوسیلهٔ تئوری غنی و مناسب با عبارت زیر پاسخ گفته شود :

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}(C, 1)$$

توضیحات مترجم دربارهٔ برخی از نکات مقالهٔ فوق

بطوری که در مقالهٔ اخیر ذکر شده است، قانون سزارو فقط در مورد سریهای جمع‌پذیر (که سریهای متقارب نیزجزء آن است) مصداق پیدا می‌کند. حال آنکه تعبیری برای سریهای نامتقارب مثل مجموع هندسی باقدرنسبت ۲ و نتیجهٔ غریب ۱ — برای آن بوسیلهٔ روشهای ذکر شده ارائه نداده است و آنرا به صورت مبهمی باقی گذارده است ، هرچند بین نتایج حاصل به اصطلاح سازگاری تامی وجود داشته است (که ناشی از عدم توجه نویسنده به برخی نکات است) برای روشن ساختن این مطلب لازم است که چند نکته ذکر گردد :

I- برای هر معادله می‌بایست که حوزهٔ جوابها رامعلوم ساخت. به عنوان مثال ، معادلهٔ $x - \sqrt{3} = 0$ را در نظرمی‌گیریم . اگرحوزهٔ جوابها را مجموعهٔ اعداد صحیح (N) فرض کنیم، این معادله دارای جواب نخواهد بود ولی اگر حوزهٔ جواب مجموع اعداد حقیقی (R) باشد این معادله جواب $x = \sqrt{3}$ را دارا می‌باشد .

II- هر معادلهٔ $ax = bx + c$ حداکثر دارای سه

جواب است که یکی از آنها متعلق به مجموعهٔ اعداد حقیقی ودو تای دیگر متعلق به‌مجموعهٔ اعداد بینهایت می‌باشد .

البته می‌توان درمورد ضرایب‌حقیقی a و b و c معادلهٔ فوق بحث کرد و موردی راکه معادلهٔ فوق دارای چند جواب نیست ، ذکرنمود . اگر $a=b$ باشد معادله دارای دو جواب $\pm\infty$ است .

اگر a و b مختلف‌العلامه باشند جواب معادله به‌صورت منحصر $x=\frac{c}{a-b}$ است.

اگر a و b هم علامت باشند معادله دارای سه جواب است که یکی از آنها $x=\frac{c}{a-b}$ ودوتای‌دیگراعداد $+\infty$ و $-\infty$ می‌باشند . مثلاً اگر $a=1$ ، $b=2$ و $c=1$ باشد داریم $x=2x+1$ و ازآنجا جوابها عبارتند از $x=-1$ و $+\infty$ و $-\infty$ زیرا :

$$+\infty=2\infty+1 \;;\; -1=+2(-1)+1$$
$$-\infty=-2\infty+1$$

تذکر : درمورد روش اول برای محاسبهٔ مجموع تصاعد هندسی با قدر نسبت ۲ ، این مجموع متعلق به مجموعهٔ اعداد مثبت بینهایت است و بنابراین جواب مربوطه را می‌بایست در این مجموعه بدست‌آورد . عدد -1 و $-\infty$ متعلق به حوزهٔ جوابهای این معادله ($s=2s+1$) نیستند پس نمی‌توانند به‌عنوان جواب این معادله بکار برده شوند وتنها جواب قابل قبول این معادله همان جواب $s=+\infty$ است.

III ـ درتفریق دوعبارت تنها وقتی می‌توان از عددی صرف‌نظر نمودکه ، این عدد درمقابل اعداد دیگر مورد محاسبهٔ ناچیز باشد پس درمورد سری تصاعد هندسی که از فرمول $S=\frac{a}{1-q}$ استفاده شده از عبارت (q^n) در مقابل عدد یك صرف‌نظر گردیده است که اشتباه است وفرمول کلی برای‌مجموع تصاعد هندسی به‌صورت $S=a\frac{q^n-1}{q-1}$ می‌باشد . و عبارت $S=\frac{a}{1-q}$ فقط در مورد تصاعدهای هندسی بکار می‌رود که تعداد جملاتش بینهایت‌زیاد وقدر نسبت آن کوچکتر ازواحدباشد. اگردرفرمول کلی مجموع تصاعدهای هندسی اعداد مربوط را قرار دهیم جواب $S=+\infty$ برای معادله بدست می‌آید .

تذکر ـ درمورد نحوه بدست‌آوردن معادلهٔ $s-rs=1$ بازهم ازجملهٔ آخری 2^n که n بینهایت بزرگ است، در مقابل $a=1$ صرف‌نظرشده است که اگر آنرا واردمحاسبات کنیم‌داریم $s-rs+\infty=1$ که چون $r=+2$ است داریم $-s+\infty=1$ که جواب‌آن $s=\infty$ است .

درمورد تصاعد حسابی وهندسی نیزهمین اشتباه بکاررفته و نتیجهٔ $s=-1$ بدست آمده است . در واقع برای تعیین مجموع یك سری ابتدا فرم‌کلی مجموع را با دخالت دادن عدهٔ جملات n بدست می‌آوریم و به جای n عدد مفروض را قرار می‌دهیم . فرمولی که درمقالهٔ اخیر برای تصاعد حسابی‌ـهندسی آمده است مربوط به‌آن دسته از تصاعدهای حسابی هندسی‌است که متقارب بوده و تعداد جملاتش بینهایت است و کاربردآن درمورد سری متباعد بکار برده شده صحیح نیست .

IV ـ اگر بوسیلهٔ عملیاتی‌که در روش کوشی بکار رفته است ، همین‌نکات را ملحوظ داریم و جوابهای بینهایت را در نظربگیریم تناقضی بوجود نمی‌آید و خواهیم داشت $\infty=\infty$ زیرا درمحاسبهٔ طرف اول و همچنین‌طرف دوم مرتکب یك خطا شده‌ایم که همانا درنظر نگرفتن حوزهٔ تغییرات اعداد است .

V ـ در استدلال مربوط به مجموع $1-1+1-1+\cdots$ اینطور استدلال کردیم که یك‌بار تعداد جملات‌آن‌فرد و بار دیگرزوج باشد و میانگین آن‌دو را اختیارکردیم وچون اعداد بین ۰ و ۱ نوسان می‌کردند عدد $\frac{1}{2}$ که بین این‌دو قراردارد به‌عنوان جواب اختیار شده است. در مورد سریهائی‌که تمام جملاتشان مثبت است ، اگرهمین‌استدلال را بکاربریم باز به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم در واقع درموردسری $1+2+2^2+2^3+\cdots$ اگر تعداد جملات زوج یا فرد باشد مجموع به‌طرف بینهایت میل می‌کند و داریم $s_{2n}=\infty$ و $s_{2n+1}=\infty$ و میانگین آنها $s=\frac{\infty+\infty}{2}=\infty$ خواهد بود .

در مورد سریهای متناوب مثل

$$1-2+3-4+5-6+\cdots$$

اگرتعداد جملات‌فردباشد، بطوری‌که‌درمتن مقاله‌آمدمجموعش $s_1=1+1+1+\cdots=\infty$ و اگر تعداد جملاتش زوج باشد مجموعش $s_2=-1-1-\cdots=-\infty$ خواهدبود و چون دلیلی نداریم‌که یکی از این دو را بر دیگری ترجیح دهیم میانگین حسابی این‌دو را یعنی $s=\frac{s_1+s_2}{2}$ را به‌ـ عنوان مجموع این دو اختیار می‌کنیم که به‌صورت مبهم $s=\frac{\infty-\infty}{2}$ درمی‌آید و باید آنرا ازصورت ابهام خارج

نمود . برای بدست آوردن فرمول کلی تصاعد حسابی ـ هندسی چنین عمل می کنیم :

$$S_n=a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots+(a+nd)r^n$$

$$rS_n=ar+(a+d)r^2+(a+2d)r^3+\cdots+(a+nd)r^{n+1}$$

دو معادله را از هم کم می کنیم .

$$S_n-rS_n=a+d(r+r^2+\cdots+r^n)-(a+nd)r^{n+1}$$

$$(1-r)S_n=a+\frac{d(r^{n+1}-r)}{r-1}-(a+nd)r^{n+1}$$

و یا :

$$S_n=\frac{a}{1-r}+\frac{dr(1-r^n)}{(1-r)^2}-\frac{(a+nd)r^{n+1}}{1-r}$$

دراین رابطه تنهاوقتی می‌توان ازجملهٔ r^{n+1} صرف‌نظر کرد که $|r|<1$ باشد . که فرمول به‌صورت زیردرخواهدآمد:

$$S=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$$

در مورد مجموع $1-2+3-4+5-6+\cdots$

یك‌بار فرض می‌کنیم که n زوج و یك‌بـار فرض می‌کنیم که n فرد باشد . داریم $a=d=1$ و $r=-1$ پس در فـرمول کلی داریم :

$$S=\frac{1}{2}+\frac{(1)(-1)[1-(-1)^n]}{2^2}-\frac{(1+n)(-1)^{n+1}}{2}$$

اگر n زوج باشد داریم :

$$S_1=\frac{1}{2}-\frac{[1-1]}{2^2}-\frac{(1+n)(-1)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n}{2}+1$$

اگر n فرد باشد داریم :

$$S_2=\frac{1}{2}-\frac{[1+1]}{2^2}-\frac{(1+n)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}$$

و خواهیم داشت :

$$S=\frac{S_1+S_2}{2}=\frac{\frac{n}{2}+1-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

بطوری کـه دیده می‌شود جواب همـان جوابی است کـه نویسندهٔ مقاله بدست آورده است ، منتها با این تفاوت که وی از روشی استفاده کرده است کـه مجاز نیست . در مورد مجموع تصاعدحسابی‌ـهندسی $1-2\times2+3\times2^2-4\times2^3+\cdots$ نیز می‌توان همین استدلال را بکار برد . دراین مورد $a=d=1$ و $r=-2$ است و داریم :

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{(-2)[1-(-2)^n]}{3^2}-\frac{(1+n)(-2)^{n+1}}{3}$$

اگر تعداد جملات فرد باشد داریم :

$$S_1=\frac{1}{3}-2\ \frac{(1+2^n]}{9}-\frac{(1+n)2^{n+1}}{3}$$

اگر تعداد جملات زوج باشد :

$$S_2=\frac{1}{3}-\frac{2(1-2^n)}{9}+\frac{(1+n)2^{n+1}}{3}$$

$$S=\frac{S_1+S_2}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{9}(1+2^n+1-2^n)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

کـه همان جوابی است کـه نویسنده بدست آورده است ، در واقع در فرمول کلی S_n اگر یك بار تعداد جملات را زوج ویك‌بار تعداد جملات را فرد اختیـار کنیم در مورد سریهـای متناوب (r منفی است پس $R=-r$ را اختیـار می‌کنیم) داریم :

$$S\ (\text{فرد})=\frac{a}{1+R}-\frac{dR(1+R^n)}{(1+R)^2}-\frac{(a+nd)R^{n+1}}{1+R}$$

$$S(\text{زوج})=\frac{a}{1+R}-\frac{dR(1-R^n)}{(1+R)^2}+\frac{(a+nd)R^{n+1}}{1+R}$$

$$S=\frac{S(\text{فرد})+S(\text{زوج})}{2}=\frac{\frac{2a}{1+R}-\frac{2dR}{(1+R)^2}}{2}=\frac{a}{1+R}-\frac{dr}{(1+R)^2}=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$$

دنباله در صفحهٔ ۴۵۱

تثلیث زاویه به کمك بیضی

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری

چنانکه می‌دانیم تثلیث (به سه‌قسمت مساوی تعسیم کردن) یك زاویه به‌کمك پرگار و خطکش غیر ممکن است. ولی این مسئله به کمك منحنیهای درجهٔ دوم قابل حل است.

در این مقاله تثلیث زاویه به کمك بیضی راموردبررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنیم بیضی به معادلهٔ:

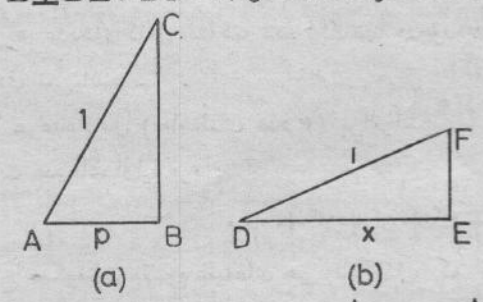
$$x^2+\frac{y^2}{c^2}=1 \quad (1) \qquad (c\neq 1)$$

با به اختیار خود ما مفروض باشد. نصف قطر این بیضی منطبق بر محور Ox را واحد محور انتخاب می‌کنیم :.. فرض کنیم زاویهٔ حاده A را بخواهیم تثلیث کنیم . بـه آسانی می‌توانیم کسینوس زاویهٔ A را بطور هندسی تعیین کنیم. برای این کار روی یکی‌از اضلاع زاویه قطعهٔ AB را برابر واحد جدا کرده‌و ازنقطهٔ B عمودی بر ضلع دیگررسم می‌کنیم(شکل a): خواهیم داشت :

$$\cos A=AC$$

مسئله تثلیث را می‌توان منجر به یافتن $\cos\frac{A}{3}$ کرد .

یعنی به رسم قطعهٔ DE (شکل b) که در آن زاویـهٔ D ثلث زاویهٔ A است خواهد شد اگر $DF=1$ و $FE\perp DE$ باشد



چون $\cos A=4\cos^3\frac{A}{3}-3\cos\frac{A}{3}$ با فرض $\cos A=p$ و $\cos\frac{A}{3}=x$ معادلهٔ درجهٔ سوم زیر را بدست می‌آوریم :

$$x^3-\frac{3}{4}x-\frac{p}{4}=0 \quad \text{یا} \quad p=4x^3-3x$$

ریشه‌های معادلهٔ اخیر را به کمك بیضی (۱) و دایـرهٔ کمکی زیر بدست می‌آوریم :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (2)$$

که در آن :

$$a=\frac{1-c^2}{4}p \quad (3) \quad \text{و} \quad b=\frac{(1-c^2)\sqrt{1-p^2}}{4c} \quad (4)$$

$$R=\sqrt{a^2+b^2+\frac{c^2}{2}+\frac{1}{2}} \quad (5)$$

قطعات a و b و R را می‌توان به‌کمك پرگار وخطکش رسم کرد .

ثابت می‌کنیم که طول نقاط تقاطع بیضی (۱) و دایـرهٔ (۲) ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ چهارم زیـر می‌باشند . (در حالت کلی دایره و بیضی در چهار نقطه متقاطعند) :

$$(x-p)\left(x^3-\frac{3}{4}x-\frac{p}{4}\right)=0 \quad (6)$$

از قراردادن مقادیر (۳)و(۴) و (۵) و $y=\pm c\sqrt{1-x^2}$ (از معادلـه ۱) در معادلهٔ (۲) و تقسیم طرفین بـه $(1-c^2)$ بدست می‌آوریم :

$$x^2-\frac{p}{2}x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-p^2}\cdot\sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

از این معادله خواهیم داشت :

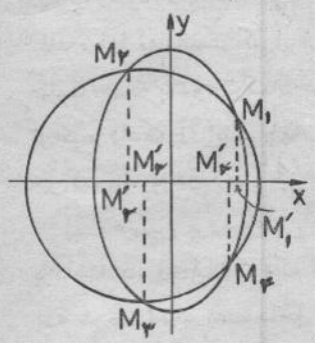
$$x^4-px^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}=0 \quad (8)$$

طرف چپ این معادله را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم.

$$(x-p)(x^3-\frac{3}{4}x-\frac{p}{4})=0$$

به این ترتیب یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۶) $x=p=\cos A$ و ریشه‌های دیگر جوابهای معادلهٔ $x^3-\frac{4}{3}x-\frac{p}{4}=0$ می‌باشند.

درشکل‌مقابل‌حالت‌خاص $c=2$ و $p=\cos A=\frac{1}{2}$ رسم شده است. باروش‌بالا می‌توان به سادگی سه مسئلهٔ زیر را حل کرد :



تثلیث زوایای

$$A_1=60^\circ \text{ و } A_2=420^\circ \text{ و } A_3=780^\circ$$

$$\cos\frac{A_1}{3}=OM_1' \text{ و } \cos\frac{A_2}{3}=OM_2'$$

$$\cos\frac{A_3}{3}=OM_3'$$

که در آنها M_1' و M_2' و M_3' بـه ترتیب تصاویر نقاط تقاطع M_1 و M_2 و M_3 بیضی و دایره روی محور Ox می‌باشند .

$$\frac{A_1}{3}=20^\circ \text{ و } \frac{A_2}{3}=20^\circ+120^\circ=140^\circ \text{ و}$$

$$\frac{A_3}{3}=20^\circ+240^\circ=260^\circ$$

برای تثلیث مثلا زاویه 300° ، $\left(\cos 300^\circ=\frac{1}{2}\right)$ کافی است آنرا مانند تفاضل زوایای $360^\circ-60^\circ$ نوشت. و پس‌از بدست آوردن ثلث هریك از آنها تفاضل آنها یعنی $(120^\circ-20^\circ=100^\circ)$ را رسم‌کرد .

دربارهٔ اعداد کامل

نوشتهٔ J. M. Wheaton

ترجمهٔ: احمد قاضی‌زاده

دربین‌مجموعه‌های اعدادتاریخی با خواص‌جالب ومحدود به ابهام ، شاید مجموعهٔ اعدادکامل غیرمستعمل‌ترین آنها باشد .

عددی راکامل‌می‌نامندکه مساوی مجموع‌تمام مقسوم‌علیه‌های خود (غیرازخود عدد) باشد .کوچکترین عددهای کامل ۶ است ؛ زیرا مقسوم‌علیه‌های غیر از ۶ عدد ۶ عبارتند از ۱، ۲، ۳ و داریم۳+۲+۱=۶عددکامل بعدی ۲۸ است زیرا:

$$۲۸=۱+۲+۴+۷+۱۴$$

روایاتی‌از«عهدقدیم»مشعر برآن است‌که یهودیان عددهای کامل ۶ و ۲۸ را می‌شناخته‌اند . خلاصهٔ این روایات این‌است که با وجودآنکه خدا می‌توانست دنیا را در یک لحظه خلق کند ، اما به‌مناسبت کامل بودن عدد ۶ و نشان دادن اینکه خلقت جهان به‌صورت‌کمال‌خویش انجام‌گرفته است ، خداوند ترجیح دادکه آفرینش جهان را در ۶ روز معنی بخشد . دورهٔ حرکت ماه به دورزمین نیز ۲۸ روز است‌که عددکامل است .

نخستین بررسی‌علمی درنظریهٔاعدادکامل‌توسط**اقلیدس** برداشته‌شد. وی‌بیان‌کردکه هرعدد به‌صورت $۲^{n-۱}(۲^n-۱)$ به شرط آنکه عدد داخل پرانتز اول باشد یك عدد کامل زوج است . بیست قرن بعد ازآن **اولر** ثابت کردکه فرمول مزبور تمام عددهای‌کامل زوج را بدست می‌دهد . تاکنون‌هیچ عددکامل فرد شناخته نشده است وگمان می‌رود (بدون آنکه ثابت شده باشد)که هیچ عدد کامل فرد وجود نداشته باشد .

مسئلهٔ معروف به «مسئلهٔ شطرنج» را همه می‌دانیم : بعد از آنکه بازی شطرنج به‌یکی ازپادشاهان‌هند عرضه شد ،پادشاه به مخترع آن اختیار دادتا هرچه‌راکه‌می‌خواهد تقاضاکند.اما مخترع شطرنج تقاضاکرد که در اولین خانه ازصفحهٔ شطرنج یك دانهٔ‌گندم ، در دومین خانه دو دانهٔ‌گندم ، و به‌همین‌ترتیب در هر خانه به‌تعداد دو برابر دانه‌های خانهٔ قبل ، دانهٔ‌گندم گذاشته ومجموع همهٔ آنها را به‌وی بدهند . تعداد دانه‌های گندم واقع در خانهٔ شصت وچهارم برابرمی‌شود با :

$$۲^{۶۳}=۹،۲۲۳،۳۷۲،۰۳۶،۸۵۴،۷۷۵،۸۰۸$$

و مجموع تمام دانه‌های گندم دو برابر این عدد منهای یك است‌که چند هزاربرابرمحصول سالانهٔ‌گندم دنیا است . اگراز دانه‌های گندم واقع دریك خانهٔ شطرنج،مثلاً خانهٔ $n+۱$ام، یك دانه برداریم باقیمانده برابر با $۲^n-۱$ دانهٔ گندم است. چنانچه این عدد اول باشد وآن‌را در عدد دانه‌های گندم خانهٔ قبل ضرب‌کنیم ، حاصل ضرب همان فرمول اقلیدس و عدد کامل است .

عدد اول به‌فرم $۲^n-۱$ به مناسبت تحقیقات **مرسن** ریاضیدان فرانسوی به **اعداد مرسن** مشهورند .

خواص عددهای‌کامل

با استفاده ازفرمول اقلیدس بسیاری از خواص جالب برای عددهای‌کامل شناخته شده است‌که حتی توضیح بعضی از این خواص دشوار می‌نماید. عجیب‌آن است‌که‌بیشتراز خواصی که برای عددهای‌کامل شناخته شده است‌تنها درموردعددکامل ۶ صادق نمی‌باشند .

هرعددکامل (به‌استثنای عدد ۶) برابراست با مجموع مکعبات عددهای اولیهٔ فرد :

$$۱^۳+۳^۳+۵^۳+۷^۳+\cdots$$

مجموع معکوسات مقسوم علیه‌های هر عددکامل، که خود عدد نیز بحساب آمده باشد، برابراست با ۲ .

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=۲$$

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۲۸}=۲$$

مجموع رقمهای هرعددکامل (به‌استثنای ۶) یك واحد بیشتر از مضربی از ۹ است . به عبارت دیگر ، هرعدد کامل (به استثنای ۶) مضربی است از ۹ به‌علاوهٔ یك :

$$۲۸=۳\times۹+۱$$

رقم سمت راست ۲۳ عدد کاملی که تا کنون شناخته شده است ۶ یا ۸ است . هرگاه رقم یکان عددکامل ۸ باشد رقم دهگان آن ۲ است و اگر رقم یکان عدد کامل ۶ باشد ، رقم

بقیه درصفحهٔ ۴۵۱

یک نامساوی هندسی

ترجمهٔ : جعفر آقایانی‌چاوشی

هرگاه A و B و C ، a و b و c ; p به ترتیب زوایا و اضلاع و نصف محیط مثلث مسطحی باشند ، نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$(\alpha)\quad (a+b+c)^3(S-a)(S-b)(S-c)\geqslant (a^2+b^2+c^2)^3\cos A\cos B\cos C$$

حل : اولا در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است :

$$4R^2\cos A\cos B\cos C=p^2-(2R+r)^2$$

که درآن R و r به ترتیب اشعهٔ دوایر محیطی ومحاطی داخلی مثلث می‌باشند.

برای اثبات این رابطه چنین عمل می‌کنیم : در هرمثلث داریم :

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=-2\cos A\cos B\cos C+1$$

$$\cos A\cos B\cos C=\frac{1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C}{2}=$$

$$=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2-8R^2}{8R^2}$$

$$a^2+b^2+c^2=2S^2-2r^2-8Rr$$

$$\cos A\cos B\cos C=\frac{2S^2-2r^2-8Rr-8R^2}{8R^2}=$$

$$=\frac{S^2-(2R+r)^2}{4R^2}$$

ثانیاً در هر مثلث نامساوی زیر برقرار است:

$$4(2R^2+r^2)\geqslant(a^2+b^2+c^2)$$

یك راه اثبات این نامساوی چنین است : هرگاه H مرکز ارتفاعی و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد داریم :

$$\overline{OH}^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)=$$
$$8R^2+R^2-(a^2+b^2+c^2)$$

اما $\overline{OH}^2\geqslant 0$ است و هنگامی تساوی صفر می‌شود که مثلث متساوی الاضلاع باشد در این حالت O بر H منطبق خواهد بود از طرف دیگر $R\geqslant 2r$ است، پس

$$8R^2+R^2\geqslant a^2+b^2+c^2$$
$$\Longrightarrow 8R^2+4r^2\geqslant a^2+b^2+c^2$$

هرگاه مساحت مثلث مفروض S باشد نا مساوی (α) با توجه به روابط فوق چنین می‌شود :

$$(\alpha')\quad (RpS)^2\geqslant 2(2R^2+r^2)^3[p^2-(2R+r)^2]$$

اگر فاصلهٔ مراکز دوایر محاطی داخلی ومحیطی این‌مثلث را d بنامیم می‌دانیم :

$$d=\sqrt{R^2-2Rr}$$

و چون این مقدار را در نامساوی (α') منظور کنیم نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$(1)\quad R^2(R-r+d)p^4\geqslant 4(r+d)(2R^2+r^2)^3$$

بنابراین کافی است نامساوی (۱) را ثابت کنیم.

ثابت خواهیم کرد که در هرمثلث نا مساوی مضاعف زیر برقرار است :

$$(2)\quad 2R^2+10Rr-r^2+2d(R-2r)\geqslant p^2\geqslant 2R^2+10Rr-r^2-2d(R-2r)$$

از طرف اول نامساوی (۲) نتیجه می‌شود.

$$2r^2(r+d)\geqslant(R-r+d)[p^2-(2R+r)^2]$$

نامساوی (۱) نتیجهٔ دو نامساوی زیر است :

با شرط $0\leqslant\frac{r}{R}\leqslant\sqrt{2}-1$:

$$(3a)\quad R^2(R-r+d)(2R+r)^4\geqslant 4(r+d)(2R^2+r^2)^3$$

با شرط $(\sqrt{2}-1)\leqslant\frac{r}{R}\leqslant\frac{1}{2}$:

$$(3b)\quad R^2(R-r+d)[2R^2+10Rr-r^2-2d(R-2r]^2\geqslant 4(r+d)(2R^2+r^2)^3$$

با توجه به (۱) طرف چپ (۱) بزرگتر و یا مساوی است از طرف چپ (3b). پس برای اثبات نامساوی (۱) کافی است نا مساویهای (3a) و (3b) را ثابت کنیم. برای این کار پارامتر x را به طریق زیر در نظر می‌گیریم :

$$\frac{d}{R}=\frac{x-1}{x+1}\ \text{و}\ \frac{r}{R}=\frac{2x}{(x+1)^2}\qquad (x\geqslant 1)$$

روابط (3a) و(3b) پس‌از اعمال‌لازم به شکل زیردرمی‌آیند.

$$(4a)\ :\ P_1(x)\equiv 2x^{13}+17x^{12}+52x^{11}+29x^{10}-226x^9-663x^8-816x^7-435x^6+10x^5+179x^4+128x^3+48x^2+10x+1\geqslant 0$$

$$(x\geqslant 1+\sqrt{2})\ ;$$

$$(4b)\ :\ P_2(x)\equiv -x^{14}-14x^{13}-31x^{12}+48x^{11}+253x^{10}+270x^9-129x^8-484x^7-314x^6+34x^5+181x^4+128x^3+48x^2+10x+1\geqslant 0$$

$$(1\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{2})\ ;$$

در $P_1(x)$ دو اختلاف علامت در ضرایب وجود دارد پس بنا به قانون دکارت $P_1(x)$ حداکثر دو ریشهٔ مثبت‌دارد.

اما داریم : $P_1(0)>0$ و $P_1(1)<0$ و

بقیه در صفحهٔ ۴۵۱

با ریاضیات آشتی کنید

(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

تألیف: A.BULLAS استاد آموزش ریاضیات در فرانسه

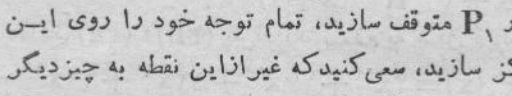
ترجمهٔ: ع.مصحفی

دنباله از شمارهٔ گذشته

تمرینهایی مربوط به مرحلهٔ مقدماتی تمرکز حواس

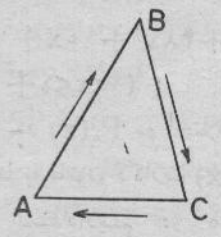
تمرین ۱ـ روی یك صفحه کاغذ پاره خط AB را رسم کنید و در مقابل آن راست بنشینید. حشره‌ای را در نظر بگیرید که روی AB از A به سوی B حرکت می‌کند. این حشره پس از آنکه به B برسد دور زده از آن به سوی A می‌رود و در A مجدداً به سوی B تغییر جهت می‌دهد و این عمل را مرتباً تکرار می‌کند. در تمام طول مدت تمرین باید بی‌حرکت باشید و چشمهای شما به AB دوخته شده باشد. اگر فکری خارج از موضوع به شما روی آورد به شدت آن را از خود دور سازید.

تمرین ۲ـ نقطه‌های P_1 ، P_2 ، P_3 را روی پاره خط AB انتخاب کنید. حشره‌ای را که روی AB متحرك فرض



کرده‌اید در P_1 متوقف سازید، تمام توجه خود را روی این نقطه متمرکز سازید، سعی کنید که غیر از این نقطه به چیز دیگر نیندیشید. اکنون تصور کنید که حشره از این نقطه به سوی P_2 حرکت می‌کند و در این نقطه می‌ایستد. حواس خود را روی P_2 متمرکز سازید. همچنین دربارهٔ P_3 نیز به همین ترتیب عمل کنید.

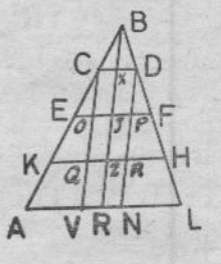
تمرین ۳ـ اکنون حرکت حشره را روی یك مثلث انجام دهید. حشره ابتدا از A به ترتیب مسیرهای AB ، BC و CA را می‌پیماید، اما همینکه به A برسد



دور می‌زند و در جهت عکس، مسیرهای AC ، CB ، BA را طی می‌کند.

مقصود از این تمرینها آن است که آماده شوید تا آنچه را که موجب حواس پرتی است از خود دور کنید. هرگاه از این راه راه نتایجی رضایتبخش بدست آوردید، آنگاه باید که تمرکز حواس را در مرحله‌ای دقیقتر انجام دهید.

مثلث ABL و روی ضلع AB از آن سه نقطهٔ K، E و C را در نظر بگیرید، خطوط CD ، EF و KH را موازی با AL و خطوط CV ، DN و BR را موازی باهم رسم کنید، اکنون پاسخ دهید که:



ـ چند شکل می‌بینید؟

نه تنها لازم است تا حواس شما متمرکز باشد، بلکه باید توجه خود را بقسمی توجیه کنید که هیچ چیز آن را منحرف نکند.

گمان می‌کنم که همه چیز را خیلی خوب فهمیده باشید، از این جهت بی‌مناسبت نخواهد بود که تشبیهی برای شما بیاورم:

هانری و ژاك دو دانش‌آموز همدوره‌اند. یك روز عصر، ژاك بادوست خودش قرار می‌گذارد که برای گرفتن کتاب بسیار جالبی به نزد او برود. اما وقتی که ژاك به خانهٔ هانری می‌رسد هانری متوجه می‌شود که کتاب در جای خود نیست و به جستجوی آن می‌پردازد. در این ضمن برق قطع می‌شود و هانری کورمال

کورمال به‌طرف گنجهٔ دیواری می‌رود. یك چراغ قوه راکه آنجا است پیدا کرده وروشن می کند. با روشن کردن این سو وآن‌سوی اطاق می کوشد تاکتاب را بیابد. اما بعد از چند دقیقه ازاینکه کتاب پیدا نمی‌شود ناراحت و عصبانی می گردد .

ژاك چراغ را می گیرد و جاهای مختلف را منظماً وارسی می کند: روی میز که نیست، روی صندلی هم که نیست، در گنجه هم نیست، وقتی که اشعهٔ چراغ بالای بخاری راروشن می‌سازند ، کتاب درآنجا مشاهده می‌شود.

عجیب آنکه هانری هم چندین بار نورچراغ را به بالای بخاری انداخته بود، اما چون به سرعت‌ازآن گذشته بودنتوانسته بودکه کتاب را ببیند.

امیدوارم که از این مثال تفاوت بین دو مرحلهٔ‌مقدماتی و عالی تمرکز حواس را درك کرده باشید: هرچندکه حواس هانری در موقع جستجوی کتاب‌پرت‌نبود، اما فاقد آن‌چیزهایی بودکه برای تأثیر آن لازم می‌بودند؛ ژاك که چراغ قوه‌را با ترتیب و نظم معین بکار برد، مرحلهٔ عالی تمرکز حواس را نسبت به دوست خودش اجرا کرد.

به موضوع تمرین خود بر گردیم، در جلوی خود مجموعه‌ای از خطوط را می‌بینید که چندین شکل هندسی‌تشکیل می‌دهند، مقصود تعیین تعداد این شکلها است.

چگونه بایدعمل کرد؟

عمل ژاك راسرمشق خود قراردهید. ذهن خود راهمانند چراغ قوه منظماً و متوالیاً به هریك از اجزاء شکل معطوف سازید .

نخست مرحلهٔ مقدماتی تمرکز حواس: خود را جمع و جورکنید، بدن را بی‌حرکت نگاه دارید و چشمها را به شکل خیره کنید، امتحان شروع می‌شود، **توجه!** اکنون در وضعی هستید که رشتهٔ افکار خود را از دست داده‌اید، نه به مانندژاك بلکه، همانند هانری عمل می‌کنید . زیرا ابتدا به رأس مثلث می‌نگرید و مثلث CBD را می‌بینید، آنگاه نگاه خود را از بالا به پایین می‌لغزانید و ذوزنقهٔ AKZR راکشف می کنید. باز به سوی‌بالامی‌نگرید وکشف‌تازه‌ای‌می کنید: متوازی‌الاضلاع OPDC، اه، یك مثلث کوچك هم در این سو است، یك ذوزنقهٔ دیگر در پایین،...،

به شما اخطار می کنم که اگر این رویه را ادامه دهید ، اشتباه فاحشی را مرتکب شده‌اید. برای تعیین‌سریع تعدادکامل شکلها باید همانند ژاك عمل کرد؛ ذهن شما باید به سان چراغ قوه یکایك اجزاء شکل را منظماً و متوالیاً زیر نظر بگیرد، (مرحلهٔ عالی تمرکزحواس)

ببینیدکه من چه می کنم: همهٔ خطوطی که ضلعهای مثلث ABL را تلاقی می کنندکنار می گذاریم، در این صورت‌غیراز این مثلث شکل دیگری نمی‌بینیم، در حقیقت ذهن‌ما روی‌سه‌پاره خط AB، BL و AL ساکن شده است.

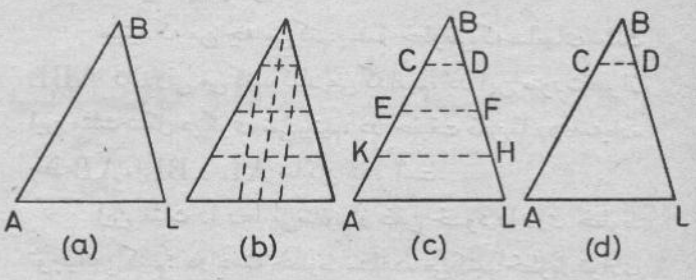
این مثلث را رها می‌سازیم و ذهن خود را روی خطوط توجیه می کنیم؛ دو دسته خطوط مشاهده می کنیم: خطوط‌متوازی که دو ضلع AB و BL را قطع می کنند ، و خطوط متوازی که قاعدهٔ AL را تلاقی می کنند، وضع پیچیده است و باید مواظب باشیم تاگمراه نشویم. فعلا دسته خطوط دوم راکنار می گذاریم و توجه خود را دقیقاً روی دسته خطوط اول‌متمرکز می کنیم، باید مواظب باشیم تا ذهن ما فقط متوجه خطوط متوازی CD ، EF وKH باشد وتوسط خطوط دیگرمنحرف نگردد، این سه خط را یکایك مد نظر قرار می‌دهیم ، نخست نگاه خود را روی CD ثابت نگاه می‌داریم، غیراز CDچیز دیگر نمی‌بینیم!

می‌دانیم که CD قاعدهٔ مثلث CBD است ، در اینجا یك خطروجود دارد و آن اینکه خط BX به ذهن ما راه یابد ومتوجه شویم که مثلث CBD به دو مثلث CBX و BDX تجزیه شده است، اما توجه به BX اشتباه است و آن را از ذهن خود دور می‌سازیم. درست است که دو مثلث کوچکتر در مثلث CBD وجود دارد، اما آن را به موقع خودمورد توجه قرار می‌دهیم، فعلا فقط CD را در نظرداریم، یك مثلث‌توسط CD بوجود آمده است، CD راکنار می گذاریم و EF را مورد توجه قرار می‌دهیم، توسط EF دومین مثلث، یعنی مثلث EBF تشکیل شده است، در اینجا هم یك مورد وسوسه گر وجود دارد، داخل مثلث EBF متوازی الاضلاعها و... وجود دارد. این وسوسه را به شدت رها می‌سازیم ونگاه خود رافقط روی ضلعهای مثلث EBF ساکن می‌سازیم.

EF را به‌کنار می گذاریم و KH را درنظرمی گیریم؛ توسط KH مثلث KBH پدید آمده است، بالاخره خط AL راکه در نظر بگیریم مثلث بزرگABLرا مشاهده می کنیم .

خلاصهٔ آنچه راکه تاکنون انجام داده‌ایم فهرست وار ذکر کنیم:

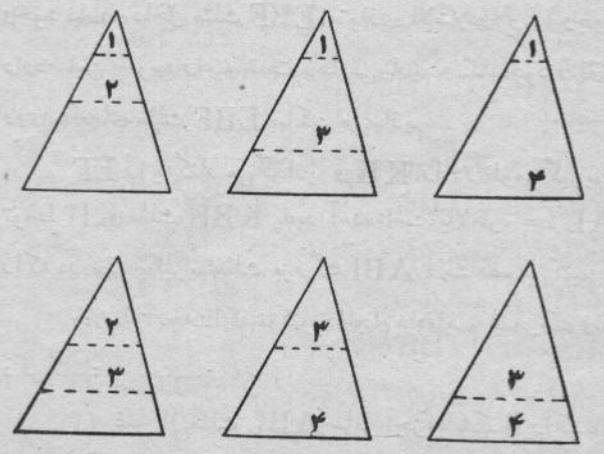
۱) غیر از مثلث ABL سایر اجزاء شکل راکنار گذاشتیم ودراین حال یك مثلثABL مشاهده کردیم .(شکلa)



۲) نگاه خود را به داخل مثلث ABL انداختیم، آنچه که روی شبکیهٔ چشم ما نقش بست شکل (b) بود. خطوط متعددی داخل مثلث موجود است، یک دسته از آنها راکنار گذاشتیم و نگاه خود را فقط به خطوط متوازی CD و EF و KH متوجه ساختیم. یعنی شکل را مطابق باشکل (c) درنظر گرفتیم. اما تعداد سه خط هم زیادی بود. دو تا ازآنها را رها ساختیم و خط CD را در نظر گرفتیم. در این حال یک مثلث CBD مشاهده شد (شکل d). بادر نظر گرفتن دومین موازی یعنی EF مثلث EBF و با در نظر گرفتن سومین موازی‌یعنی KH مثلث KBH و بالاخره باتوجه به AL مثلث ABL مشاهده شد.

تاکنون با درنظر گرفتن خطوط متوازی CD و EF و KH و AL چهار مثلث دیده‌ایم، اما این خطوط دو به دوبین خود نیز شکلهایی بوجود می‌آورند. چون چهار خط متوازی وجود دارد پس باید متوالیا جفتهای خطوط ۲-۱ ، ۳-۱ ، ۴-۱ ، ۳،۲ ، ۴-۲ ، ۴-۳ را امتحان کنیم که شکلهای‌زیررا به ترتیب در ذهن خود خواهیم داشت:

چه نتیجه می‌گیریم؟ شش ذوزنقه.

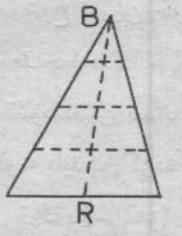


اولین قسمت ازکارماکه تمرکز حواس‌به درجهٔ عالی‌روی هریك از خطوط متوازی ۱، ۲، ۳و۴ و روی جفتهای این‌خطوط بود. چهار مثلث و شش ذوزنقه بدست داد.

فعلا موقع آن رسیده است‌که دسته خطوط اول راکنار بگذاریم و دستهٔ دیگر را مورد توجه قراردهیم: CV ، BR ، DN .

این خطوط را نیز به ترتیب یك به‌یك‌در نظرمی‌گیریم. ابتدا خط BR را ملاحظه می‌کنیم . این خط با CD در X متلاقی است و در نتیجه مثلث BCD را بـه دو مثلث CBX و BDX تقسیم می‌کند.

همان خط BR با EF در J متلاقی است ومثلث EBF را به دو مثلث تقسیم می‌کند. خط مزبور بـا KH نیز در Z متلاقی است و مثلث KBH را به دو مثلث دیگربخش می‌کند. بطورکلی هریك از چهار مثلثی که‌قبلا بدست آورده بودیم‌توسط BR بـه دو مثلث دیگـر تقسیم مـی‌شـود و در نتیجـه رویهم ۱۲=۳×۴ مثلث خواهیم داشت.



اما از تقاطـع BR با دستهٔ اول از خطوط متوازی، نه‌تنها مثلثها بلکه ذوزنقه‌هایی جدیدنیز تشکیل‌می‌شود. اما ما روش خود را باز هم بطور مرتب و منظم دنبال می‌کنیم.در قسمت اول ازکار خود ، با در نظر گرفتن دو به دوی خطوط متوازی، شش ذوزنقه‌کشف کردیم. خط BR از هریك از این ذوزنقه‌ها می‌گذرد وآن را به دو ذوزنقهٔ دیگر بخش می‌کند . مثلا از عبور خط BR از ذوزنقهٔ ECDF دو ذوزنقهٔ دیگر ECXJ و XDFJ یعنی رویهم سه ذوزنقه خواهیم داشت. بنابراین‌توسط خط BRرویهم تعداد ۱۸=۳×۶ ذوزنقه پدید می‌آید.

تاکنون دوازده مثلث و هیجده ذوزنقه شمرده‌ایم.

اکنون نوبت به‌خط CVرسیده‌است. این خط باخطوط متوازی EF ، KH و AL و همچنین با AB متلاقی است. پس باید دو نوع بررسی انجام دهیم : تقاطع CV با خطوط متوازی و تقاطع آن با AB

از تقاطع CV با خطوط متوازی، متوازی الاضلاعهایی بدست می‌آید، مثل متوازی الاضلاع OCXJ که داخل ذوزنقهٔ ECXJ واقع است. در هریك از ذوزنقه‌ها یك‌متوازی‌الاضلاع

واقع شده است، چون در سمت چپ BR شش‌ذوزنقه وجوددارد پس شش متوازی الاضلاع در سمت چپ BR خواهیم داشت. از تقاطع AB با CV سه مثلث و تعدادی ذوزنقه نتیجه خواهد شد که تعداد این ذوزنقه‌ها را بعداً معلوم خواهیم کرد.

در سمت چپ BR شش ذوزنقه؛ شش متوازی الاضلاع و سه مثلث داریم. با در نظر گرفتن DN نیز همانند CV معلوم خواهد شد که‌درسمت راست BR شش‌ذوزنقه، شش‌متوازی‌الاضلاع و سه مثلث وجود دارد.

همچنین تعداد شش متوازی الاضلاع دیگر باید بحساب آورد که‌ازاتصال متوازی الاضلاعهای سمت‌چپ‌وسمت‌راست BR بوجود می‌آیند.

نگاهی به شکل اصلی بیندازیم و معلوم‌کنیم تاکنون چه کرده‌ایم، آنچه که کشف کرده‌ایم عبارتنداز: هیجده مثلث، هیجده متوازی الاضلاع ، تعدادی ذوزنقه که هنوز بعضی از آنها را نشمرده‌ایم. در این مورد برای هر جفت از خطوط متوازی به همان گونه که در مورد لوزی عمل کردیم عمل می‌کنیم.

پاره خطهای واصل بین دو خط متوازی CD و EF تعداد پنج ذوزنقه بوجود می‌آورند. از دو خط متوازی EF و KH و پاره خطهای بین‌آنها تعداد هفت ذوزنقه‌و بالاخره‌بین KH و AL تعداد هفت ذوزنقه وجوددارد. جمع‌این‌ذوزنقه‌ها می‌شود ۱۹ عدد.

حال جهت قائم را درنظرمی‌گیریم، دوخط CA و CV که جفت خطوط متوازی EF و AL را تلاقی می‌کنند ، یك ذوزنقهٔ AEOV تشکیل می‌دهند که‌ذوزنقهٔ کوچکتر KEOQ و AKQV را نیز در بردارند که این ذوزنقه‌ها قبلا حساب شده‌اند. پاره خط CB ضلع سمت راست سه ذوزنقهٔ VCBR و QCBZ و OCBJ می‌باشد.

در سمت چپ BR نیزسه ذوزنقهٔ KCXZ ، ACXR و AEJR وجود دارد (ذوزنقه‌های کوچك مثل ECXJ قبلا حساب شده‌اند) . غیر از نوزده ذوزنقه کـه قبلا شمرده‌ایـم، تعداد ۷=۳+۳+۱ ذوزنقهٔ دیگر نیز در سمت چپ BR وجود دارد ، همین تعداد ذوزنقه نیز در سمت راست BR یافت می‌شود. اما هنوز شمارش شکلها تمام نشده است. CK ضلع چپ دو ذوزنقه است که ضلع راست آنـها BR است (KCDR و KCDH) همچنین AE ضلع چپ ذوزنقه‌های AEPN و AEFL و AC ضلع چپ ذوزنقه‌های ACDN و ACDL است. پس شش ذوزنقه هم به این ترتیب به جمع شکلها اضافه می‌شود. سه ذوزنقهٔ دیگرهم باساقهای چپ QC و VO و VC بایدبحساب آید: QCDH، VOFL، VCDL

به این ترتیب جمع کل ذوزنقه‌ها می‌شود:

۱۹+۷+۷+۶+۳=۴۲

در شکل مفروض هیجده مثلث، هیجده متوازی‌الاضلاع و وچهل ودو ذوزنقه وجود دارد

**

هرچند که پیدا کردن مثلثها؛ مستطیلهاوذوزنقه‌های‌موجود در یك شکل پیچیده‌کاری است که برای‌تمرکز حواس مفیدفایده است اما این‌گام اول است، در تجزیه و تحلیل یك شکل آنچه که مهمتر از شمردن اجزاء آن می‌باشد تعیین روابطی است که بین این اجزاء وجود دارد: روابط وضعی، روابط‌اندازه‌ای، برای مثال باز مسئلهٔ لوزی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. قبلانقاط را در نظر می‌گیریم.

در مورد نقطهٔB چه می‌توان گفت ؟ چیزهای بسیار:

۱) B نقطهٔ تقاطع چندین جفت از خطوط است: AB با BD ، AB با BN ؛ AB با BO AB با BL ،...

۲) B رأس سه زاویه است: EBL ، LBF ، EBF

۳) B رأس چندین مثلث است : EBF ، EBL ، LBF،...

۴) B یکی از رأسهای لوزی DABC است.

۵) B انتهای‌قطر چهارضلعی OEBF وهمچنین‌انتهای قطر لوزی DABC است.

۶) B رأس نظیر ارتفاع مثلث EBF و مثلث ABC است .

اگر به سایر نقاط نیز بپردازیم(که تعداد آنها۱۳است) روابط وضعی بسیار زیادی‌کشف خواهیم‌کرد: اوضاع نسبی این نقاط نسبت به پاره خطها،زاویه‌ها، مثلثها،...

اما از بین همهٔ نقاط بعضی از آنها اهمیت خاص دارند، چنانچه O یکی از این نقاط بلکه مهمترین آنها است ، این نقطه محل تقاطع قطرهای لوزی، محل تقاطع پاره‌خطهای OF و OE و OG و OH است که به ترتیب برضلعهای لوزی‌عمود می‌باشند.

از بررسی اوضاع نسبی O نسبت به پاره خطها نتایج جالبی حاصل می‌شود. در حقیقت، O که بر قطر BD واقع‌است

درعین حال بر نیمسازهای زاویه‌های B و D نیزقراردارد،زیرا در لوزی هر قطر نیمساز زاویه‌های نظیراست . از طرف دیگر چون از O عمودهای OE و OF برضلعهای AB و BC رسم شده‌اندپس OE=OF است، زیراهر نقطهٔ نیمسازاویه‌از دوضلع آن زاویه به یك‌فاصله است. نقطهٔ O بر نیمسازاویهٔ D نیزواقع است پس OG=OH

نقطهٔ O برقطر AC از لوزی پس‌بر نیمسازهای‌زاویه‌های A و C نیز واقع است و نتیجه می‌شودکه OE=OG و OF=OH

بطور خلاصه از ملاحظهٔ اوضاع نسبی نقطهٔ O تاکنون چه بدست‌آورده‌ایم؟

نقطهٔ O واقع است :

۱) بر BD قطربزرگ لوزی

۲) بر AC قطرکوچك لوزی

۳) برپاره خطهای OE ، OF ، OG ، OH

۴) برقطرهای چهار ضلعی GEFH

از اوضاع بالا نتایج زیررا بدست آورده‌ایم:

۱) O بر نیمسازاویهٔ B است پس OE=OF

۲) O برنیمساز زاویهٔ D است پس OG=OH

۳) O برنیمساز زاویهٔ A است پس OE=OG

۴) O برنیمساز زاویهٔ C است پس OF=OH

از روابط بالا نتیجه می گیریم که:

OE=OF=OG=OH

و بنابراین:

۱) چهار ضلعی GEFH متوازی الاضلاع است زیرا قطرهای آن یکدیگر رانصف کرده‌اند.

۲) این متوازی الاضلاع مستطیل است‌زیرا قطرهای‌آن باهم برابرند.

اگریادتان‌باشد در ابتدای تمرین مربوط به لوزی‌قبول کردیم‌که سه نقطهٔ H،O،E همچنین سه نقطهٔ F،O،G بریك استقامتند، در صورتی‌که اثبات این دو موضوع هم به سادگی میسراست.

از راه تمرکز حواس توانستیم بسیاری از روابط وضعی نقطهٔ O را با پاره خطهای شکل مشاهده کنیم ودر اثرآن‌خود به خود به این نتیجه رسیدیم‌که چهارضلعی GEFH مستطیل است .

بعد از نقاط نوبت پاره خطهااست، برای نمونه بین BL و سایر اجزاء شکل چه روابطی وجود دارد؟

۱) BL بین مثلثهای EBL و LBF مشترك است.

۲) BL ارتفاع مثلثهای EBL ، LBF و EBF است.

۳) BL تصویرضلع EB ازمثلث OBE روی OB است

۴) BL تصویر ضلع BF از مثلث OBF روی OB است .

و....

در روی شکل مجموعاً پنجاه پاره خط وجود دارد . حال تصورکنیدکه چند رابطه می‌توان بین این پاره خطها ملاحظه‌کرد

غیر از پاره خطها، صدوبیست زاویه تعداد زیادی مثلث، مستطیل، ذوزنقه، نیز در شکل وجود دارد.

ملاحظه‌کنیدکه روی شکل‌متشکل ازدوازده خط(ضلعهای لوزی، مستطیل وقطرهای‌آنها) چه بررسی اعجاب‌آوری‌می‌توان انجام داد.

اگر بخواهید نتیجهٔ این بررسی‌را یادداشت‌کنیدصدها صفحهٔ‌کاغذ را سیاه خواهیدکرد. همهٔ این‌نتایج شگفت انگیز حاصل تمرکزحواس است.

در پایان فصل بی‌مورد نیست‌که به اعتراض بعضیها پاسخ دهم، آنان‌که می گویند:

اگر بخواهیم برای هرشکل یك مسئله بررسیهایی‌همانند بررسی‌که در این بخش شد انجام دهیم مدتها وقت لازم‌خواهیم داشت تاآنکه مطلوب مسئله را بدست آوریم؟

اینان باید بدانندکه مقصود از تمرینهای این بخش‌بسط و توسعهٔ استعداد تمرکز حواس است بقسمی‌که‌بتوان درکمترین مدت بیشترین چیزها را ملاحظه‌کرد.

در حل یك مسئله مجبور نیستندکه همهٔ نقاط،همهٔ‌خطوط و همهٔ سایر اجزا شکل مربوط به مسئله را بررسی‌کنید، آنها را بشمارید، روابط مختلف بین آنها را جستجوکنید. مثلاً اگر در مثال گذشته مطلوب اثبات آن باشدکه چهارضلعی GEFH مستطیل است، شمردن زاویه‌ها و مثلثها و سایر اجزاء شکل عملی غیرلازم است. دراین مورد باید جزئی‌ازشکل را انتخاب کنیدکه‌گمان می‌برید برای نیل به هدف اهمیت لازم را دارد ، برای اثبات مستطیل بودن چهار ضلعی مزبور نقطهٔ O اهمیت مخصوص دارد. اما بررسی سریع این نقطه وقتی عملی است‌که قبلا در این‌کار ممارست‌کرده باشید.

اگرکمی حوصله داشته باشیددر بخشی‌که حل‌کلی‌مسائل مطرح خواهد شد، ملاحظه خواهید کردکه استعداد تمرکز حواس را چگونه بکار ببرید.

این بخش به پایان رسیده است و بی‌مناسبت نمی‌دانم که خاطرهٔ بسیار آموزنده‌ای را در اینجا ذکر کنم : در بخش دوم مواردی را ذکر کردم مبنی براینکه بعضی از دانش‌آموزان که تصور می‌کردند در ریاضیات ضعیفند چگونه موفق شدند تادراین رشته پیشرفت خارق‌العاده بدست‌آورند. یکی ازاین دانش‌آموزان که در ابتدا آرزو داشت تابتواند درریاضیات نمرهٔ قبولی بیاورد بعد چنان پیشرفت کرد که در امتحانات آخرسال رتبهٔ اول گردید. پیشرفت این دانش آموز مدیون توسعهٔ قابلیت تمرکز حواس در وی بوده است.

در ابتدای کار بااین دانش‌آموز، یك‌سری تستها به وی عرضه کردم تا بتواند آنچه راکه می‌خواهد دقیقاً ببیند. بیاد دارم که یك روز از حل مسئله‌ای که شامل سه سؤال بود عاجز مانده بود. برای حل دو قسمت آخر مسئله ناگزیر بود که قبلا قسمت اول را حل کرده باشد واما درمانده بود.

من دریافتم که او هنوز تجزیه و تحلیل یك شکل را یاد نگرفته است. به او پیشنهاد کردم که شکل‌را با تأمل نگاه کند و آنچه راکشف می‌کند که برایش جالب است درروی دفترچه‌اش یادداشت کند. اما با همهٔ تلاشی که‌در مدت سه ربع ساعت انجام داد بالاخره نتوانست چیزهای را بیابد که کلید حل مسئله باشد،

در این موقع به او پیشنهاد کردم تا هریك ازاجزاءشکل را متوالیاً بررسی کند، البته تأکید کردم که روی هرجزء تأمل کند و بعد به جزء دیگر بپردازد. هنوزده دقیقه نگذشته بود که فریاد زد: اهان! نقطهٔ E روی دایرهٔ به مرکز O واقع است ، نقاط A و B دو سر یك قطرند، پس زاویهٔ E قائمه است و با این کشف بقیهٔ مسئله‌را به‌سرعت حل کرد، چه چیز راهنمون وی درکشف اخیر شده‌بود؟ تمرکز دقت روی اجزاء شکل.

دوستان من، این گوی و این میدان ، کار را آغاز کنید حواس خود را متمرکز سازید ، یاد بگیرید که دقیق باشید ، بیاموزید که نگاه کنید، شکلها را تجزیه وتحلیل کنید واجزاء آنها را باهم مقایسه کنید. ازپیشرفتی که خواهید داشت‌خودتان مبهوت خواهید شد.

یك‌نامساوی هندسی

دنباله از صفحهٔ ۴۴۵

$P_1(1+\sqrt{2})>0$ و بنابراین برای $x\geqslant 1+\sqrt{2}$ داریم $P_1(x)>0$ و نامساوی (۳a) محقق می‌باشد.

به‌طریق‌مشابه $P_2(x)$ حداکثرسه‌ریشهٔ مثبت‌دارد وچون $P_2(0)>0$ و $P_2(1)=P_2'(1)=0$ و $P_2(1+\sqrt{2})>0$ وهنگامی که $x\to\infty$ داریم $P_2(x)\to-\infty$ پس $P_2(x)$ دارای یك‌ریشهٔ مضاعف $x=1$ بوده وریشهٔ‌مثبت منحصر به‌فرد دیگرش‌از $1+\sqrt{2}$ بزرگتر است و چون $P_2(1+\sqrt{2})>0$ پس $P_2(x)\geqslant 0$ برای $1\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{2}$ تساوی هنگامی برقراراست که فقط و فقط $x=1$ باشد . و بنابراین (۳b) نیز محقق خواهد بود .

در باره یك سری ...

دنباله ازصفحهٔ۴۴۲

بطوری که دیده می‌شود همان فرمول کلی بدست می‌آید که برای $|r|<1$ بکار رفته است . پس می‌توان گفت که فرمول تصاعدحسابی-هندسی $S=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$ فقط در مورد سریهائی بکار می‌رود که تعداد جملاتش بینهایت باشد و همچنین $|r|<1$ یا r منفی باشد (سریهای متناوب) درمورد سریهائی که تمام جملاتش مثبت است و $r>1$ می‌باشد (مثل $S=1+2+2^2+2^3+\cdots$) این شیوه را نمی‌توان‌بکار برد . زیرا اگر $n\to\infty$ مقادیر (زوج)S و (فرد)S با هم برابرند ، و باید ازفرمول کلی استفاده کرد .

دربارهٔ اعداد کامل

دنباله از صفحهٔ ۴۴۴

دهگان آن یك یا ۳ یا صفراست (به استثنای عدد کامل۴۹۶).

قدما که فقط چهار عدد کامل ۶، ۲۸، ۴۹۶ ، ۸۱۲۸ را شناخته بودند ، تصور می‌کردند که عددهای کامل متناوباً به رقمهای ۶ و ۸ ختم می‌شوند . اما درقرن پانزدهم که دو عدد کامل دیگرشناخته شد ، این ادعا ردگردید .

سؤالهای بی‌جواب :

درخصوص عددهای کامل سؤالهای زیادی مطرح است که همه بدون جواب مانده‌اند. مهمترین این سئوالها دوسؤال زیراست :

۱ـ آیا عدد کامل فردی وجود دارد ؟

۲ـ بزرگترین عدد کامل زوج کدام است ؟

تاکنون نتوانسته‌اند عدد کامل فردی را بیابند و نیز نتوانسته‌اند ثابت کنند که عدد کامل فرد وجود ندارد .

درمورد سئوال دوم ، قبلاً چهارعدد کامل را می‌شناختند. درسال ۱۸۷۶ **لوکاس** ریاضیدان فرانسوی دوازدهمین عدد کامل را برابر با $2^{126}(2^{127}-1)$ بدست‌آورد. این بزرگترین عدد کامل است که بدون عدد ماشینهای الکترونیکی یافته شده است . اما با استفاده ازماشینهای الکترونیکی تاکنون فقط۲۳ عدد کامل شناخته شده است . بزرگترین عدد کامل که تاکنون شناخته شده‌است ۲۲۴۲۵ مقسوم‌علیه‌دارد ودر۱۹۶۳ دردانشگاه ایلینوی آمریکا توسط کامپیوتر با ۲۲ عدد کامل کوچکتر ازآن حساب شده است .

شما خوانندهٔ عزیز می‌توانید همت بخرج دهید وبیست و چهارمین عدد کامل را حساب کنید و آن‌را به‌نام خود به‌ثبت برسانید .

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۹۲

در یکان شمارهٔ ۹۲ مسائلی زیر عنوان «تستهای ریاضی» درج گردید و شمارهٔ پاسخ درست هریك ازاین مسائل در همان شماره اعلام‌شد، که متأسفانه در چاپ آنهاچند اشتباه روی داده است.در زیر راه حلهای تستهای مزبور به صورت خلاصه ارائه می‌شود و در ضمن اشتباههای مربوط به‌شمارهٔ قبل نیز یادآوری می گردد .

۹۲/۱ـ ج: چون باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۴ است پس $P(1)=4$، و همچنین $P(2)=7$ است . باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر x^2-3x+2 چند جمله‌ای است حداکثر از درجهٔ یك که آن را $ax+b$ می گیریم :

$$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases}P(1)=a+b=4\\P(2)=2a+b=7\end{cases}\Longrightarrow \begin{matrix}a=3\\b=1\end{matrix}$$

چند جمله‌ای باقیمانده $3x+1$ است .

۹۲/۲ـ د: طرف دوم بعد از عملیات می‌شود :

$$2a(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

برای آنکه این عبارت همان عبارت طرف‌اول باشد لازم وکافی است که : $a=\frac{1}{2}$

۹۲/۳ـ الف: عبارت $f(x+2)$ را بر حسب $x+2$ مرتب می کنیم :

$$f(x+2)=x^2+7x+14=$$
$$=(x+2)^2-4x-4+7x+14$$
$$f(x+2)=(x+2)^2+3(x+2)+4$$

با تبدیل $x+2$ به x خواهیم داشت :

$$f(x)=x^2+3x+4$$

۹۲/۴ـ ب: معادله به صورت زیر ساده می‌شود :

$$\frac{(x^{2n+1}-1)+2}{x-1}=\frac{x^{2n+1}+1}{x-1}=0$$

این معادله فقط یك ریشهٔ حقیقی $x=-1$ دارد .

۹۲/۵ـ ج. به ترتیب داریم :

$$y=\sqrt{1+\frac{4t}{t^2+4}}-\sqrt{1-\frac{4t}{t^2+4}}$$

$$y=\sqrt{\frac{(t+2)^2}{t^2+4}}-\sqrt{\frac{(t-2)^2}{t^2+4}}$$

$$y=\frac{|t+2|}{\sqrt{t^2+4}}-\frac{|t-2|}{\sqrt{t^2+4}}$$

$$t\geqslant 2 \Longrightarrow y=\frac{(t+2)-(t-2)}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{4}{\sqrt{t^2+4}}$$

۹۲/۶ـ الف: برحسب آنکه $x\geqslant 1$ یا $x<1$ باشدعبارت $a|x-1|$ برابر با $ax-a$ یا $-ax+a$ است . فقط در حالت $x\geqslant 1$ عبارت $P(x)$ به‌عبارتی بدون a تبدیل می‌شود. پس پاسخ الف غلط است.

۹۲/۷ـ ب : معادلهٔ داده شدهٔ وقتی ریشهٔ حقیقی دارد که :

$$\begin{cases}ax-b\geqslant 0\\b-ax\geqslant 0\end{cases}\Longrightarrow x=\frac{b}{a} \text{ و } k=0$$

۹۲/۸ـ د : از دونامعادلهٔ $x-a>0$ و $x+a<0$ نتیجه می‌شود :

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2<0$$
$$\Longrightarrow x^2-a^2-1<0$$

این نامعادله متناقض نامعادلهٔ اول دستگاه مفروض است .

۹۲/۹ـ به ترتیب داریم :

$$x^2<1 \Longrightarrow -1<x<1$$
$$x-1<0 \text{ و } x+1>0$$
$$y=(x+1)-(x-1)=2$$

۹۲/۱۰ـ د : داریم :

$$x'+x''=a+c \text{ و } x'x''=ac-b^2$$
$$y^2-(x'+x'')y+x'x''+b^2=0$$
$$y^2-(a+c)y+ac=0 \Longrightarrow y'=a \text{ و } y''=c$$

۹۲/۱۱ـ د : معادلهٔ مفروض به صورت زیر درمی‌آید.

$$(x^2-ax+1)^2=0$$

۹۲/۱۲ ـ ج: معادلهٔ مفروض وقتی جواب حقیقی دارد که :

$$\begin{cases} x^2+a^2\geq 0 \\ a^2-1-x^2\geq 0 \\ 1-a^2\geq 0 \end{cases}$$

اما این دستگاه نامعادلات غیرممکن است .

۹۲/۱۳ ـ ب: اگر شرط داده شده برقرار باشد، $\frac{c}{a}$ معادله منفی است و معادله دوریشهٔ حقیقی دارد. اما ممکن است کـه معادله دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد ولی $\frac{c}{a}$ مثبت باشد.

۹۲/۱۴ ـ الف : به فرض $y=\log_a x$ داریم :

$$y+\frac{1}{y}=\frac{17}{4} \text{ یا } 4y^2-17y+4=0$$

$$y=4 \text{ یا } \frac{1}{4} \Longrightarrow x=a^4 \text{ یـا } \sqrt[4]{a}$$

۹۲/۱۵ ـ ب : درتصاعد موردنظر، جملهٔ سیزدهم جملهٔ وسط است. پس مجموع دو جملهٔ اول و آخر برابر است با دو برابر جملهٔ سیزدهم و مجموع تمام‌جمله‌ها برابر است باحاصل ضرب جملهٔ سیزدهم در تعداد جمله‌ها.

۹۲/۱۶ ـ ج : جملهٔ پنجم‌تصاعد هندسی واسطهٔ هندسی است بین جمله‌های سوم و هفتم .

۹۲/۱۷ ـ ج : داریم :

$$\frac{5}{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{1-q} \Longrightarrow q=\frac{7}{15}$$

۹۲/۱۸ ـ د : اگر a جملهٔ اولی و $q<1$ قدرنسبت تصاعد فرض شود، داریم :

$$\frac{a}{1-q}=\frac{3}{2} \text{ و } \frac{a^2}{1-q^2}=\frac{9}{8} \Longrightarrow q=\frac{1}{3}$$

۹۲/۱۹ ـ ب : با علم به اینکه به شرط $0<x<1$ داریم :

$$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

از طرفین در پایهٔ ۵ لگاریتم می‌گیریم :

$$\frac{1}{1-x}\log_5 2=\log_5 2\log_5 9$$

$$1-x=\log_9 5 \Longrightarrow x=\log_9\frac{9}{5}$$

۹۲/۲۰ ـ الف : با فرض $\log x=X$ و $\log y=Y$ و $\log a=A$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} X^2+Y^2=10A^2 \\ X+Y=2A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X=3A \text{ یا } -A \\ Y=-A \text{ یا } 3A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x=3\log a \text{ یا } -\log a \\ \log y=-\log a \text{ یا } 3\log a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=a^3 \text{ یا } a^{-1} \\ y=a^{-1} \text{ یا } a^3 \end{cases}$$

۹۲/۲۱ ـ د : از A موازی با KL رسم می‌کنیم که امتداد BC را در D قطع می‌کند. چون K وسط AB است، پس M وسط BD یعنی $MB=MD$ است و داریم :

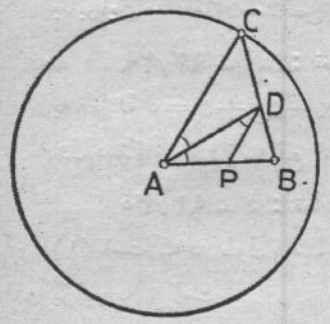
$$\frac{MC}{BC}=a \Longrightarrow \frac{MC}{MB}=\frac{MC}{MD}=\frac{a}{a+1}$$

$$\frac{AL}{LC}=\frac{MD}{MC}=\frac{a+1}{a}$$

۹۲/۲۲ ـ ب : اگر AB وCD دو قاعده د P نقطهٔ تلاقی دو ساق‌باشد،هریك‌از مثلثهای PAC، PBD، PAB و PCD در زاویهٔ P قائمه‌اند و چون رابطهٔ فیثاغورس را در این مثلثها بنویسیم، نتیجه خواهد شد:

$$AC^2+BD^2=AB^2+CD^2$$

۹۲/۲۳ ـ ج : چون MQ میانهٔ مثلث AMQ است پس مساحت مثلث MQG نصف مساحت مثلث AMQ است. به همین ترتیب در مورد سایرمثلثهای جزء شش ضلعی موردنظر عمل می‌شود و نتیجه می‌گردد که مساحت این شش ضلعی نصف مساحت مثلث مفروض است.



۹۲/۲۴ ـ ب : از D مـوازی بـا AC رسم می‌کنیم تـا AB را در P تلاقی کند. خواهیم داشت :

$$\frac{AC}{PD}=\frac{BC}{BD}=$$

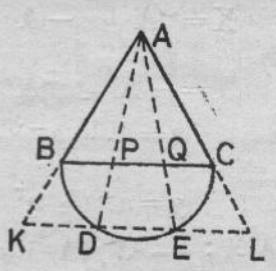
$$=\frac{BD+CD}{BD}=1+\frac{CD}{BD}=1+\frac{AC}{AB}$$

$$\frac{1}{PD}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}$$

اندازه‌هـای AB و AC ثـابت می‌باشند پس اندازهٔ PD نیز ثابت است. از طرف دیگر مثلث APD متساوی‌الساقین است و در نتیجه نقطهٔ P ثابت می‌باشد. پس مکان D دایره‌ای است به مرکز P و به شعاع ثابت PD .

۹۲/۲۵ ـ ج : امتداد خط DE امتدادهای AB و AC را در K و L تلاقی می‌کند. زاویهٔ BDE بـه اندازهٔ ۱۲۰ درجه است پس زاویهٔ BDK به اندازهٔ ۶۰ درجه است .

زاویهٔ K نیز ۰ ، ست.



مثلث BDK و همچنین مثلث CEL متساوی‌الاضلاع است و خواهیم داشت :

$$KD=BD=DE=$$
$$=CE=EL$$

با توجه بـه اینکه خطوط متقارب روی دو خط متوازی پـاره خطهای متناسب پدید می‌آورند پس $BP=PQ=QC$

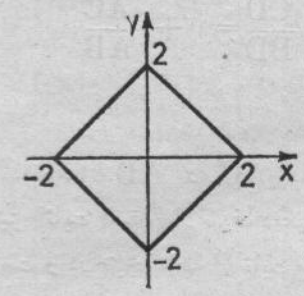
۹۲/۲۶ ـ د : ضریب زاویه‌ای خط D' همان ضریب زاویه‌ای خط D و برابر با یك است. نقطه‌ای از خط D مثلا $A(۰ \text{ و } ۳)$ را در نظرمی‌گیریم و قرینهٔ آن را نسبت به I پیدا می‌کنیم که می‌شود $A'(۲ \text{ و } ۱)$. معادلهٔ خط D' بامعلوم‌بودن ضریب زاویه‌ای $m=۱$ و مختصات یك‌نقطهٔ A' بدست می‌آید.

۹۲/۲۷ ـ ب : ضریب زاویه‌ای AH برابر با $\frac{۴}{۳}$ حساب می‌شود . پس ضریب زاویـه‌ای BC برابر $-\frac{۳}{۴}$ است.

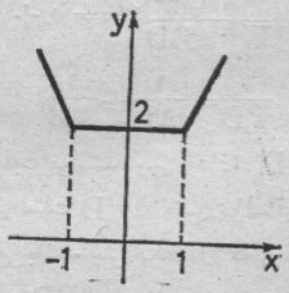
۹۲/۲۸ ـ د : قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت بـه یك نقطهٔ دلخواه از خط مفروض مثلا نقطهٔ $M(۰ \text{ و } ۲)$ پیدا می‌کنیم که نقطهٔ $N(-۱ \text{ و } ۰)$ بدست می‌آید. خط BC بر N می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای آن با ضریب‌زاویه‌ای خط مفروض برابر است بنابراین معادله آن مشخص می‌شود .

۹۲/۲۹ ـ الف: نمایش هندسی دستگاه قسمتی از خط به معادلهٔ $x-۵y+۵=۰$ است که در ناحیهٔ جواب نامعادلهٔ اول دستگاه مفروض واقع است.

۹۲/۳۰ ـ د : نمایش هندسی تـابع مفروض بـه شکل (۱) است که در طول فاصلهٔ $[-۱ \text{ و } +۱]$ دارای می‌نیمی برابر با ۲ است .



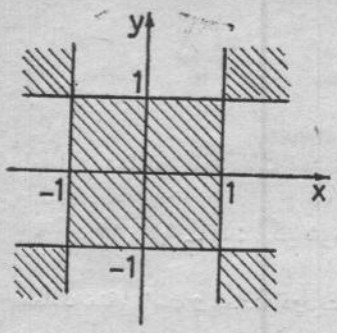
(۲)



(۱)

۹۲/۳۱ ـ ب : نمایش هندسی تابع مفروض به شکل۲ است .

۹۲/۳۲ـ د : نمایش هندسی معادلهٔ $|x|-۱=۰$ دو خط $x=\pm ۱$ و نمـایش هندسی معادلهٔ $|y|-۱=۰$ دو خط $y=\pm ۱$ است.چون علامت‌مربوط به‌هریك‌از ناحیه‌های خطوط به معادلات بالا را معلوم کنیم و ناحیه‌های غیرجواب را هاشور بزنیم، ناحیه‌های جواب مطابق با شکل چهار نیم نوار از صفحه می‌باشند.



۹۲/۳۳ـ ب : وقتی xمنفی‌باشد تابع مفروض می‌شود:

$$y=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$$
$$y'=-\cos x-\sin x$$
$$x=-\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow y'=۱$$

۹۲/۳۴ـ ب : وقتی $x \to a$ حد مشتق تابع $\pm\infty$ است پس مماس بر منحنی در نقطهٔ به طول a با محور عرضها موازی است .

۹۲/۳۵ـ ج : خواهیم داشت :

$$z=x^۲+\left(\frac{۱-۴x}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}(۲۰x^۲-۸x+۱)$$

این تابع در ازای $x=\frac{۱}{۵}$ می‌نیممی برابر بـا $\frac{۱}{۲۰}$ دارد .

۹۲/۳۶ـ الف : ریشه‌هـای دو معادلهٔ درجهٔ دوم عکس یکدیگرند پس ضریب جملهٔ درجهٔ دوم هر معادله برابر است با جملهٔ معلوم معادلهٔ دیگر :

$$p^۲=۱ \text{ و } q^۲=۱ \Longrightarrow p=q=\pm ۱$$
$$tg\,a=tg\,b=\pm ۱ \Longrightarrow a=b=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$$

۹۲/۳۷ ـ الف : چون x مثبت است ، کسر مفروض به صورت :

$$\frac{\sin x+\cos x}{۳\sin x+۴\cos x}$$

نوشته می‌شود و چون انتهای کمان x در بخش سوم از دایـرهٔ مثلثاتی است پس هریـك از مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ منفی‌اند و در نتیجه حاصل کسر بالا مقداری است مثبت .

۹۲/۳۸ـ د : نامعادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$\sin(۳x-\frac{\pi}{۳})<\frac{a}{۲} \Longrightarrow \frac{a}{۲}=۱ \text{ و } a=۲$$

۹۲/۳۹ـ ج : تابع مفروض به صورت

$$y=\frac{۱}{۲}[\cos ۲a-\cos(۲x+۲a)]$$

نوشته می‌شود . در ازای $tgx = atga$ یعنی

$x = k\pi + \frac{\pi}{2} - a$ مقدار $cos(2x+2a)$ برابر با -1 یعنی می‌نیمم است پس تابع مفروض ماکسیمم می‌باشد.

۹۲/۴۰ـ ب : از ضرب طرفین در $2sin\frac{\pi}{7}$ و تبدیل حاصل‌ضرب‌های طرف دوم به حاصل جمع نتیجه خواهد شد ؛

$$2sin\frac{\pi}{7}cosx = -sin\frac{\pi}{7}$$

$$cosx = -\frac{1}{2} \quad و \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \implies x = \frac{2\pi}{3}$$

۹۲/۴۱ـ ب : چون OA و OA′ نسبت به صفحهٔ P قرینه‌اند پس دو زاویهٔ AOC و A′OC متساویند. در کنج سه‌وجهی O.BCA′ مجموع دو زاویهٔ BOC و A′OC وقتی می‌نیمم است که یال OC بر وجه BOA′ واقع باشد. دراین حال OC بر فصل‌مشترك صفحهٔ P با صفحهٔ BOA′ منطبق است.

۹۲/۴۲ـ الف : اگر S رأس کنج مطلوب باشد، تصویر قائم S بر صفحهٔ ABC بر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC منطبق است. برای تعیین S ، ارتفاع AK از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ H مرکز ارتفاعی مثلث عمود Δ را بر صفحهٔ مثلث اخراج می‌کنیم. درصفحهٔ متشکل از Δ و AK دایرهٔ به قطر AK را رسم می‌کنیم که از تلاقی آن با Δ نقطهٔ S مشخص می‌شود . برای آنکه مسئله جواب داشته باشد لازم و کافی است که H بین A و K واقع باشد یعنی مثلث ABC حاده الزوایا باشد.

۹۲/۴۳ـ الف: چون منشور قائم و کامل است پس‌هریك از فرجه‌های آن که یالش یکی از ضلعهای دوقاعده باشد قائمه است. مجموع اندازه‌های فرجه‌هایی که یالهای آنها یالهای جانبی منشور است برابراست بامجموع اندازه‌های زوایای‌مقطع قائم منشور و برابر است با چهار قائمه. بنابراین مجموع تمام فرجه‌های منشور برابر است با ۱۲ قائمه.

۹۲/۴۴ـ د : هرگاه محور عرضها را انتقال دهیم که $O'(\alpha \text{ و } 0)$ مبدأ جدید باشد، نسبت به دستگاه جدید خواهیم داشت:

$$Y = |X + \alpha + 2a| + |X + \alpha + 2b|$$

برای‌آنکه با تبدیل X به $-X$ مقدار Y فرق نکند لازم وکافی است که :

$$\alpha + 2a = -(\alpha + 2b) \implies \alpha = -a - b$$

۹۲/۴۵ـ الف : ضریب زاویه‌ای مماس بر منحنی در نقطهٔ به طول x برابر است با:

$$m = \frac{y}{x} = \sqrt{x^2+1}$$

حد این کسر وقتی $x \to \pm\infty$ برابر است با $\pm\infty$

۹۲/۴۶ـ ج : چون $Q(x)$ چند جمله‌ای صحیح نسبت به x است، وقتی $x \to \pm\infty$ حد $\frac{1}{Q(x)}$ برابر با صفر است و حد y با حد $P(x)$ برابر است. پس $y = P(x)$ معادلهٔ مجانب منحنی تابع مفروض است.

۹۲/۴۷ـ الف : تابع y_1 وقتی معین است که مقادیر هریك از عبارتهای $f(x)$ و $g(x)$ مثبت باشد. در این حالت تابع y_2 نیز معین خواهد بود.

۹۲/۴۸ـ ب : منحنی C در فاصلهٔ $x \geqslant 1$ رسم می‌شود در صورتی که منحنی C′ در فاصله‌های $x \geqslant 1$ و $x \leqslant -1$ رسم می‌گردد. در فاصلهٔ $x \geqslant 1$ دو تابع برابرند پس C جزئی از C′ است.

۹۲/۴۹ـ ب : داریم :

$$Y = \frac{-1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + C = \frac{-2x}{x^2-1} + C$$

$$S = \left|\frac{-2k}{k^2-1} + \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{4k^2-6k-4}{3k^2-3}\right|$$

$$k \to +\infty \implies \lim S = \frac{4}{3}$$

۹۲/۵۰ـ د : از حذف y بین معادلات دو تابع و بعد از عملیات خواهیم داشت :

$$(mx-1)(x^3-5x+3) = 0$$

چون معادلهٔ $x^3-5x+3=0$ سه ریشهٔ متمایز دارد ، پس معادلهٔ بالا در ازای سه مقدار از m ریشهٔ مضاعف‌خواهدداشت.

۹۲/۵۱ـ ب : متأسفانه در چاپ این مسئله در شمارهٔ قبل اشتباه روی داده‌است. تابع داده شده به‌صورت زیرمی‌باشد:

$$y = \sqrt{1 - cos(2\pi sin x)}$$

به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

$$y = \sqrt{2sin^2(\pi sin x)} = \sqrt{2}|sin(\pi sin x)|$$

$$x \leqslant 0 \implies y = -\sqrt{2}sin(\pi sin \pi)$$

$$y' = -\pi\sqrt{2}cosx\,cos(\pi sin x)$$

$$x \leqslant 0 \text{ و } x \to 0 \implies \lim y' = -\pi\sqrt{2}$$

۹۲/۵۲ـ الف : اگر P تصویر قائم M بر x′x و M_1 نقطهٔ تلاقی دیگر PM با دایرهٔ مرسوم باشد ، داریم :

$$\overline{PO}^2 = \overline{PM}\cdot\overline{PM_1} \quad \text{یا} \quad \alpha^2 = f(\alpha)\cdot\overline{PM_1}$$

$$\overline{PM_1}=\frac{\alpha^2}{f(\alpha)}$$

نقطهٔ M_1 برمنحنی C' واقع است. به شرط آنکه‌دایرهٔ مرسوم منحنی C' را فقط در یك نقطهٔ M' قطع کند، M' بر M_1 منطبق و به طول α است.

۹۲/۵۳ـ ج: سطح محصور بین منحنی ومحور $x'x$ و خطوط $x=0$ و $x=k<0$ را حساب می‌کنیم:

$$Y=\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}+C$$

$$S=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{1+k^3}$$

$$k\to-1 \Longrightarrow \lim S=\frac{2}{3}<1$$

۹۲/۵۴ـ د: تابع y وقتی متناوب است که عدد T وجودداشته باشد بقسمی که:

$$a(x+T)^2+b(x+T)+c=ax^2+bx+c+2\pi$$

بعداز اختصار خواهیم داشت:

$$2axT+aT^2+bT=2\pi$$

با فرض $a\neq 0$ این تساوی نمی‌تواند به ازای هر مقدار از x برقرار باشد. به عبارت دیگر تابع y مفروض متناوب نیست.

۹۲/۵۵ـ ج: از رابطهٔ داده شده خواهیم داشت:

$$\sin 2A=\sin 2B \Longrightarrow A=B \text{ یا } A+B=90^\circ$$

۹۲/۵۶ـ ج: تابع داده شده‌را به صورت زیرمی‌نویسیم

$$y=\frac{2x-\sin x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\frac{2-\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right.}$$

$$x\to 0 \Longrightarrow \lim y=\pm\sqrt{2} \text{ و } x<0 \text{ یا } x>0$$

۹۲/۵۷ـ الف: در هر مثلث فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی از ضلع به طول a مقابل به زاویهٔ A برابراست با:

$\frac{a}{2}\cot g A$. با معلوم بودن اندازه‌های سه ضلع $\cos A$ ازروی آن $\cot g A$ و بالاخره طول مطلوب حساب می‌شود.

۹۲/۵۸ـ ب: در چاپ صورت این مسئله نیز اشتباه روی داده است. بین چهارعدد مفروض شرط $ab=cd$ برقرار است که در این صورت رابطهٔ $D_1M_1=D_2M_2$ به سادگی نتیجه می‌شود.

۹۲/۵۹ـ د: اگر کسر $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ برابر با عدد صحیح n باشد نتیجه خواهد شد:

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{n+1}{n-1}$$

اما کسر $\frac{n+1}{n-1}$ نمی‌تواند مربع کامل باشد، پس کسر مفروض نمی‌تواند برابر با عددصحیح باشد.

۹۲/۶۰ـ ج: اگر P_1 و P_2 به ترتیب نقاط تلاقی MS با دایره‌های Γ و Γ' باشد، خواهیم داشت:

$$\overline{MS}\cdot\overline{MP_1}=\overline{MT}^2 \text{ و } \overline{MS}\cdot\overline{MP_2}=\overline{MT'}^2$$

$$\overline{MT}=\overline{MT'} \Longrightarrow \overline{MP_1}=\overline{MP_2}$$

دو نقطهٔ P_1 و P_2 بریکدیگر منطبقند، به عبارت دیگر P بر MS واقع است واز رابطهٔ $\overline{MP}\cdot\overline{MS}=\overline{MT}^2$ نتیجه می‌شود که P بین M و S واقع است.

۹۲/۶۱ـ ج: اگر H نقطهٔ تلاقی Δ با AB باشدداریم $\overline{AH}\cdot\overline{AB}=k^2$ و چون A مرکز و k شعاع دایرهٔ انعکاس است، پس Δ قطبی B نسبت به‌دایرهٔ انعکاس است.

۹۲/۶۲ـ الف: اگر α و α' به ترتیب نقاط تماس دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی با ضلع BC و I و I' مراکز این دوایر و O وسط BC باشد در انعکاس به‌قطب α و به قوت:

$$k=\overline{\alpha B}\cdot\overline{\alpha C}=\overline{\alpha I}\cdot\overline{\alpha I'}=-rr_a$$

دایرهٔ به قطر BC منطبق برخودش باقی‌می‌ماند ودایرهٔ I به‌خط Δ تبدیل می‌شودکه برخط $I\alpha$ در نقطهٔ D' عمود است، چنانچه D نقطهٔ تلاقی αI با دایرهٔ I باشد، داریم:

$$\alpha D\cdot\alpha D'=rr_a$$

$$\alpha D=2r \Longrightarrow r_a=2\alpha D'$$

خط Δ عمود منصف $\alpha' I'$ بوده و بر دایرهٔ به قطر BC نیز مماس است پس $r_a=a$ می‌باشد.

۹۲/۶۳ـ ب: مثلث AMB در زاویهٔ A شبه قائمه است یعنی تفاضل دو زاویهٔ B و A برابر ۹۰ درجه است ودر نتیجه مکان M هذلولی است به رأسهای A و B،

مسائل با حل

از مجلهٔ روسی ریاضیات در دبیرستان

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری

۹۳/۱ـ پیدا کنید مجموع مساحات کلیهٔ مربع‌مستطیلهای حاصل ازخانه‌های صفحهٔ شطرنج درصورتی که ضلع هرخانه یك سانتیمتر باشد .

حل: مسئله درمورد مربع‌مستطیلهای مختلفی است که ازصفحهٔ شطرنج می‌توان جدا کرد . هرگاه طول اضلاع این مستطیلها را با a و b نشان دهیم ، مقادیر a و b برای تمام این‌چنین مستطیلها عبارتند از :

$a=۱ \rightarrow b=۱$ و ۲ و ۰۰۰۰ و ۸

$a=۲ \rightarrow b=۲$ و ۳ و ۰۰۰۰ و ۸

.....

$a=۷ \rightarrow b=۷$ و ۸

$a=۸ \rightarrow b=۸$

پس مجموع مساحات تمام مستطیلها برابراست با :

$$۱\times(۱+۲+\cdots+۸)+۲\times(۲+\cdots+۸)+\cdots+۸\times۸=۷۵۰(cm^۲)$$

۹۳/۲ـ در هریك از خانه‌های صفحهٔ شطرنج اعدادی نوشته شده است که نمایش دهندهٔ تعداد مستطیلهایی است که آن خانه داخل آنها قرار گرفته است . تعیین کنید درچه خانه‌هایی بزرگترین عدد و درچه خانه‌هایی کوچکترین عدد نوشته شده است.

حل: فرض کنیم که l محور تقارن افقی صفحهٔ شطرنج باشد. دوخانه‌ای را درنظر می‌گیریم که دارای ضلع افقی مشترکی روی خط m می‌باشند وفرض می‌کنیم یکی از آنها نزدیك محور l قرار گرفته باشد .

ثابت می‌کنیم عددی که درخانهٔ اخیر، که نزدیکتر به‌محور l قرار گرفته نوشته شده ازعددی که در خانهٔ دیگر نوشته شده است بزرگتر است. در مقایسهٔ اعداد این دو خانه ، مستطیلهائی که هردوخانه‌را دربردارند مورد نظر نیست، مجموعهٔ مستطیلهائی که فقط خانهٔ اول و مجموعهٔ مستطیلهائی که فقط خانهٔ دوم را دربرمی‌گیرند به‌ترتیب با حروف A و B نمایش می‌دهیم. هرمستطیل P از مجموعهٔ B را متناظرمستطیل Q می‌گیریم که قرینهٔ P نسبت به خط m می‌باشد . واضح است که Q متعلق به مجموعهٔ A می‌باشد. مستطیلهای دیگر $P_۱$ ، $P_۲$ ازمجموعهٔ B ، متناظرمستطیلهای $Q_۱$ و $Q_۲$ از مجموعهٔ A می‌باشند . بنابراین تعداد عناصرمجموعهٔ A کمتر از عدهٔ عناصر مجموعهٔ B نیست. ازطرفی درمجموعهٔ A بعضی ازمستطیلها موجودند که نمی‌توان با روش فوق نظیر آنها را ازمجموعهٔ B بدست آورد . به‌این‌جهت در مجموعهٔ A عناصری بیشتر ازعناصر مجموعهٔ B موجود است . به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که از دوخانهٔ با ضلع‌مشترك قائم آنکه به محورتقارن قائم صفحه نزدیکتر است دارای عدد بزرگتراست . به‌این‌ترتیب عدد واقع درداخل‌خانهٔ شطرنج با نزدیك‌شدن خانه به‌مرکزصفحه افزایش می‌یابد . بنابراین بزرگترین‌عدد درخانهٔ مرکزی صفحه و کوچکترین عدد در خانه‌های واقع درگوشه‌های صفحه قرار دارند .

۹۳/۳ـ درخانه‌های صفحهٔ شطرنجی $n\times n$ اعدادی به‌این‌ترتیب قرار دارند : عدد هرخانه مشخص کنندهٔ تعداد مستطیلهایی است که خانهٔ مزبور را دربرمی‌گیرند . مطلوبست تعیین مجموع کلیهٔ اعداد داخل‌خانه‌های این صفحهٔ شطرنج.

حل: خطوط افقی وقائم (فصل‌مشترك خانه‌ها) را ازیك تا $(n+۱)$ ازچپ به راست و ازپایین به‌بالا شماره‌گذاری‌می‌کنیم . فرض کنیم رأس پائینی ازچپ یك‌خانهٔ موردنظردرتقاطع خط قائم iام و خط افقی jام قرار گرفته باشد. کلیهٔ‌مستطیلهایی که خانهٔ اخیررا دربرمی‌گیرند از تقاطع خطوط قائمی که یك دسته آنها دارای شماره‌های از یك تا i و دستهٔ دیگر دارای شماره‌های از $(i+۱)$ تا $(n+۱)$ می‌باشند باخطوط افقی که یك دسته‌آنها دارای شماره‌های از یك تا j و دستهٔ دیگر دارای شماره‌های $(j+۱)$ تا $(n+۱)$ می‌باشند بدست می‌آیند . بنابراین تعداد چنین‌مستطیلهایی برابراست با :

$i(n+1-i)j(n+1-j)$ و مجموع اعداد داخل خانه‌ها برابرمی‌شود با :

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left[i(n+1-i)j(n+1-j)\right]=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} j(n+1-j)\right]=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)\right]^2=$$

$$=\left[(n+1)\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{i=1}^{n} i^2\right]^2=$$

$$=\left[(n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]^2=$$

$$=\left[\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right]^2$$

۹۳/۴ـ ده‌کشوموجود است. دربعضی ازآنها ده‌کشوی کوچکتر و دربعضی از کشوهای کوچکتر ده‌کشوی کوچکتر ازآنها قرارگرفته است. تعیین کنید تعداد کل کشورها را در صورتی‌که بدانیم فقط ۵۴ تا از کشوها پر هستند (دارای ده کشوی کوچکترمی‌باشند) .

حل: تعدادکشوهای بزرگ پررا x و تعداد کشوهای کوچکتر پررا y فرض می‌کنیم . طبق فرض مسئله $x+y=54$. ولی تعدادکشوهای کوچکتر ده برابر xوتعداد کوچکترین کشوها ده برابر y می‌باشد . پس تعدادکل کشوها برابراست با :

$$10+10x+10y=10(1+x+y)=$$
$$=10\times 55=550$$

۹۳/۵ـ درمسابقهٔ اسکی در رشته‌های سرعت ، پرش و هردوتوأماً (سرعت وپرش) بیش از۶۰ ورزشکارشرکت کردند. در این مسابقات ۴۵ نفرازسکوپریدند و ۴۰ نفر مسافت تعیین شده را طی کردند . ثابت کنید که تعداد شرکت کنندگان رشتهٔ سرعت و پرش توأم کمتراز۲۵ نفراست .

حل: هرگاه x تعداد شرکت‌کنندگان رشتهٔ سرعت و پرش توأماً باشد تعدادکل شرکت‌کنندگان a به‌ترتیب زیر محاسبه می‌شود : هرگاه به ۴۰ نفر شرکت‌کنندهٔ رشتهٔ سرعت ۴۵ نفرشرکت‌کنندهٔ رشتهٔ پرش را اضافه‌کنیم بدست می‌آوریم ۸۵ شرکت‌کننده ، ولی دراین صورت شرکت‌کنندگان سرعت و پرش توأم دوباربه‌حساب خواهندآمد پس:

$a=40+45-x$ و چون $a>60$ است پس $x<25$ می‌باشد .

۹۳/۶ـ مهرهٔ واقع در یکی ازخانه‌های سیاه سطر اول صفحهٔ شطرنج به‌چند طریق می‌تواند به سطرهشتم برسد؟(فرض می‌شود که مهره‌های دیگر روی صفحه نباشند).

حل: خانه‌های سیاه‌صفحهٔ شطرنج را با اعدادی که‌نشان دهندهٔ تعداد طرق رسیدن مهره واقع درآنها به‌سطر هشتم صفحهٔ شطرنج می‌باشد شماره گذاری می‌کنیم . معلوم است کـه اعداد واقع درخانه‌های سیاه سطرهشتم یك می‌باشند، به‌آسانی‌می‌توان خانه‌های سیاه سطرهفتم را پر کرد .

	۶۹		۱۰۳		۸۹		۳۵
۲۰		۴۹		۵۴		۳۵	
	۲۰		۲۹		۲۵		۱۰
۶		۱۴		۱۵		۱۰	
	۶		۸		۷		۳
۲		۴		۴		۳	
	۲		۲		۲		۱
۱		۱		۱		۱	

برای تکمیل خانه‌های باقیمانده‌کافی است توجه‌کنیم‌که اگر a و b به‌ترتیب تعداد طرق رسیدن به سطرهشتم ازدوخانه مجاور (دریك‌سطر) باشند دراین‌صورت از خانهٔ واقع بین‌آنها از سطرقبلی می‌توان با $a+b$ طریق به‌سطر هشتم رسید .

۹۳/۷ـ جدولی قائم‌الزاویه و 3×4 داده شده است‌در یکی ازخانه‌های آن عدد صفرقرار دارد . آیـا می‌توان کلیهٔ خانه‌های خالی جدول را با اعداد ازصفر تا ۹ طوری پرکرد که مجموع اعداد سطرها باهم برابر شده ومجموع اعدادهریك ازچهارستون برابر عددی بزرگتر از ۱۵ شود . درصورتی‌که از هرعدد فقط دوبار استفاده شود.

حل ـ اگرفرض‌کنیم که چنین جدولی را بتوان تکمیل کرد دراین‌صورت مجموع S کلیهٔ اعداد واقع درآن بـر ۳ و ۴ و ... و ۱۲ بخش‌پذیر بوده‌و به‌علاوه نامساوی $S\geqslant 4\times 16=64$ نیزصادق است .

در یکی‌ازخانه‌های جدول عددصفرقرار دارد پس‌مجموع

S بیش‌از ۷۴=۰+۴+(۵+۶+۷+۸+۹)۲ نخواهد بود . بنابراین ۶۴≤S≤۷۴ است وچون S بر۱۲ بخش‌پذیر است پس S=۷۲. درهرسطر مجموع اعداد برابر۲۴ است و مجموع اعداد روی‌هرستون‌برابر۱۸ می‌باشد. ولی‌دراین‌صورت درستون دارای صفر باید دوعدد ۹ قرارگیرد و روی‌سطردارای صفربزرگترین مجموع اعداد برابرخواهد شد با ۲۳=۰+۷+۸+۸ تناقض بوجود می‌آید و می‌رساند که چنین جدولی را نمی‌توان ساخت .

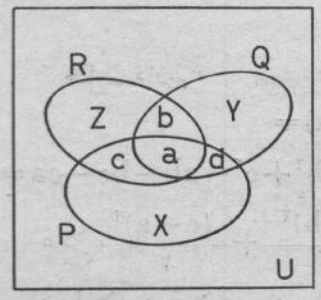
۹۳/۸ـ ۱۰۰ مکعب کوچك موجود است . ۸۰ تا از آنها دارای وجه قرمز رنگ و ۸۵ تای آنها دارای وجه آبی رنگ و۷۵تای‌آنها دارای وجه سبزرنگ می‌باشند . مطلوبست کمترین تعداد مکعبهائی‌که دارای وجوه با هر سه رنگ قرمز و آبی وسبزمی‌باشند .

راه‌حل‌اول‌ـ مجموعهٔ مکعبهایی را که رنگهای قرمز و آبی وسبزندارند به‌ترتیب‌با حروف A و B و C و مجموعهٔ مکعبهایی راکه هیچ یك از این سه رنگ را ندارند با حروف D نمایش می‌دهیم . مقصود تعیین تعداد عناصرمجموعهٔ E از مکعبها است‌که درمجموعهٔ D نمی‌باشند . مجموعه‌های A، B و C به‌ترتیب‌دارای ۲۰، ۱۵ و۲۵ عنصر ومجموعهٔ D عبارتست از فصل مشترك این‌مجموعه‌ها . ولی تعداد عناصر فصل مشترك چند مجموعه‌کمترازمجموع عناصر کلیهٔ مجموعه‌ها می‌باشد ودر حالت خاصی‌که مجموعه‌ها دوبه‌دوجدا ازهم باشند (یعنی هیچ‌دو تا از مجموعه‌ها دارای عنصرمشترك نباشند) این تعداد مساوی مجموع عناصرخواهد بود. بنابراین درمجموعهٔ D حداکثر۶۰ مکعب و درمجموعهٔ E حداقل ۴۰ مکعب موجود است .

مقدار ۴۰ موقعی حاصل می‌شودکه‌کلیهٔ مکعبها متعلق به فقط یکی‌از مجموعه‌های A،B،C باشند. بدین معنی که‌مکعبها فقط دارای دوتا ازرنگها باشند .

با فرض‌آنکه مجموعهٔ E دارای درست ۴۰ مکعب باشد لازم است ۴۰ مکعب سه رنگ ، ۲۰ مکعب با رنگهای آبی و سبز(مجموعهٔ A)، ۱۵ مکعب با رنگهای قرمز وسبز (مجموعهٔ B) و ۲۵ مکعب با رنگهای قرمز و آبی (مجموعهٔ C) ، در نظربگیریم تا منظور تأمین گردد .

راه‌حل‌دوم‌ـ



مجموعهٔ مکعبهایی را که رنگهای قرمز، آبی وسبزدادبه‌ترتیب باحروف P،Q ، R نمایش می‌دهیم ، در شکل مقابل مربع مستطیل بزرگ‌نمایش مجموعهٔ کلیهٔ مکعبها است . در داخل هریك ازنواحی که روی شکل نشان داده شده ، تعداد مکعبهای نظیرآن ناحیه نشان‌داده شده است . دراین‌صورت تساویهای زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x+a+c+d=۸۰ \\ y+a+b+d=۸۵ \\ z+a+b+c=۷۵ \\ x+y+z+a+b+c+d+u=۱۰۰ \end{cases}$$

هرگاه از معادلهٔ آخری معادلات دیگر را به‌ترتیب کم کنیم بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} y+z+b+u=۲۰ \\ x+z+c+u=۱۵ \\ x+y+d+u=۲۵ \end{cases}$$

هرگاه این سه رابطه را با هم جمع و از معادلهٔ چهارم‌دستگاه قبل‌کم‌کنیم بدست می‌آوریم :

$$a=۴۰+x+y+z+۲u \Longrightarrow a\geqslant ۴۰$$

فقط به‌ازای x=y=z=u=۰ مقدار a می‌نیمم خودیعنی a=۴۰ را خواهد داشت .

۳۹/۹ـ کلیهٔ اعداد دورقمی را پیداکنید ، که مجموع مقسوم علیه‌های اول هریك از آنهـا مقسوم علیهی از آن عدد باشد .

حل: هریك ازاعداد موردنظر نمی‌تواند بیش ازسه‌مقسوم علیه اول داشته باشد، زیراکه ۲×۳×۵×۷>۱۰۰است. فرض‌کنیم اعداد مورد نظر دارای سه مقسوم علیه اول باشند . یکی ازاین مقسوم‌علیه‌ها برابر ۲ است زیرا که ۳×۵×۷>۱۰۰ است . پس اعداد موردنظر به‌یکی از صور زیر می‌باشند :

۱) $۲^{\alpha}\times ۳^{\beta}\times ۵^{\gamma}$ که باید به ۲+۳+۵=۱۰ و۳ وهمچنین به ۳۰ بخش‌پذیر بـاشد . از اینجا اعداد مورد نظر ۳۰ ، ۶۰ ، ۹۰ می‌باشند .

۲) $۲^{\alpha}\times ۳^{\beta}\times ۷^{\gamma}$ که باید به ۲+۳+۷=۱۲ وبه ۷ و همچنین به ۸۴ بخش‌پذیرباشد ، از اینجا عدد مورد نظر فقط ۸۴ است .

۳) $۲^{\alpha}\times ۳^{\beta}\times p^{\gamma}$ که درآن p≥۱۱ است و باید بر ۲+۳+p و بر p باید بخش‌پذیر باشد ، اما p(۵+p)>۱۰۰ است .

۴) $۲^{\alpha}\times ۵^{\beta}\times ۷^{\gamma}$ که باید بر۲+۵+۷=۱۴ وبر ۵ و همچنین بر۷۰ بخش‌پذیرباشد ، ازاینجا عدد موردنظر۷۰ خواهد بود .

۵) $2^{\alpha}\times p^{\beta}\times q^{\gamma}$ که در آن $p\geqslant 5$ و $q\geqslant 11$ است و اما $2\times p\times q>100$ است .

هر گاه عدد مطلوب درست دو مقسوم علیه اول داشته باشد به یکی از صورتهای زیر خواهد بود:

۱) $2^{\alpha}\times p^{\beta}$ که بر $2+p$ بخش‌پذیر است . در این صورت $2+p=2^{\alpha_1}\times p^{\beta_1}$ شده و یا ۲ بر p و یا p بر ۲ بخش‌پذیر است که در هر حال قابل قبول نیست .

۲) $p^{\alpha}\cdot q^{\beta}$ با شرط $p\neq 2$ و $q\neq 2$ که بر $p+q$ بخش‌پذیر است و از طرفی $p+q$ زوج و $p^{\alpha}\cdot q^{\beta}$ فرد است و این ممکن نیست .

هر گاه عدد مطلوب فقط دارای یك مقسوم‌علیه اول باشد به صورت p^{α} بوده و تمام اعدادی که در رابطهٔ $10<p^{\alpha}<100$ صادقند اعداد مطلوب می‌باشند . این اعداد عبارتند از :

$2^4=16;\ 2^5=32,\ 2^6=64,\ 3^3=27.\ 3^5=81,$
$5^2=25,\ 7^2=49$

بالاخره تعداد ۲۱ عدد اول واقع بین ۱۰ و ۱۰۰ نیز جواب مسئله می‌باشند .

تعداد کل اعداد مطلوب برابر با ۳۳ است .

۹۳/۱۰ـ ثابت کنید که معادلهٔ $x^3+x^2+x=1$

a) دارای بیش از یك ریشهٔ حقیقی نیست

b) ریشهٔ حقیقی این معادله در نامساوی زیر صادق است :

$$\frac{1}{2}<x_0<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل ـ تابع $f(x)=x^3+x^2+x$ در فاصلهٔ $x\geqslant 0$ صعودی است ، پس معادلهٔ داده شده نمی‌تواند بیش از یك ریشهٔ مثبت داشته باشد . هر گاه $x<0$ باشد $f(x)=x(x^2+x+1)$ نیز منفی است ، پس معادلهٔ مفروض دارای ریشه‌های منفی نمی‌باشد . بنابراین معادلهٔ مطلوب بیش از یك ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت . حال اگر از مفهوم پیوستگی و قضایای مربوط به آن استفاده کنیم می‌توانیم نتیجه بگیریم که معادلهٔ داده شد دارای درست یك جواب حقیقی است. برای اثبات قسمت (b) کافی است برقراری نامساوی زیر را ثابت کنیم :

$$f(\frac{1}{2})<1<f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \qquad (1)$$

که به سادگی محقق می‌باشد .

۹۳/۱۱ـ معادلهٔ زیر را درمجموعهٔ اعداد اول حل کنید:

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{x^2-1}]=y$$

مقصود از $[a]$ قسمت صحیح موجود درعدد a است.

حل ـ قبلاً یادآور می‌شویم که :

$$[\sqrt{n^2}]=[\sqrt{n^2+1}]=\cdots=[\sqrt{(n+1)^2-1}]=n$$

بنابراین :

$$[\sqrt{n^2}]+[\sqrt{n^2+1}]+\cdots+[\sqrt{(n+1)^2-1}]=n(2n+1)$$

درنتیجه :

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots[\sqrt{(x^2-1}]=$$
$$([\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+([\sqrt{4}]+\cdots$$
$$\cdots+[\sqrt{8}])+\cdots+([\sqrt{(x-1)^2}]+\cdots+$$
$$[\sqrt{x^2-1}])=\sum_{n=1}^{x-1} n\,(2n+1)=$$
$$=2\sum_{n=1}^{x-1} n^2+\sum_{n=1}^{x-1} n=2\frac{(x-1)x(2x-1)}{6}+$$
$$+\frac{(x-1)x}{2}=\frac{x(4x^2-3x-1)}{6}$$

حال باید معادلهٔ زیر را درمجموعهٔ اعداد اول حل کنیم

$$\frac{x(4x^2-3x-1)}{6}=y$$

$$x(4x^2-3x-1)=6y$$

از اینجا y و ۳ و $x=2$. به‌ازای $x=2$ داریم $y=3$ به‌ازای $x=3$ داریم $y=13$ و به‌ازای $x=y$ معادلهٔ $4x^2-3x-1=6$ را بدست می‌آوریم که دارای ریشه‌ای در مجموعهٔ اعداد اول نمی‌باشد . در مجموعهٔ اعداد اول معادلهٔ مفروض دارای دو دسته جواب است :

$(x=2$ و $y=3)$ و $(x=3$ و $y=13)$

۹۳/۱۲ـ نامساوی زیر را ثابت کنید در صورتی که a و b اضلاع قائم و c وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باشد .

$$ab+bc+ca<2c^2$$

حل ـ داریم :

$$2c^2-(ab+bc+ca)=$$
$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=$$
$$\frac{(a-b)^2}{2}+\frac{(c-b)^2}{2}+\frac{(c-a)^2}{2}>0$$

وچون $c>b$ و $c>a$ پس:

$$ab+bc+ca<2c^2$$

۹۳/۱۳ـ سری $\{x_n\}$ طبق روابط زیرداده شده‌است .

$$x_0=1 \text{ و } x_n=\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}$$

ثابت کنید که : $x_n<\frac{1}{n}$

حل ـ به ازای $n=1$ داریم :

$$x_1=\frac{1}{2}<\frac{1}{1}$$

فرض کنیم $x_k<\frac{1}{k}$ باشد دراین‌صورت :

$$x_{k+1}=1-\frac{1}{x_k+1}<1-\frac{1}{\frac{1}{k}+1}=\frac{1}{k+1}$$

پس نامساوی به ازای همهٔ مقادیر x صحیح است .

۹۳/۱۴ـ به‌ازای کدام مقادیر طبیعی m و n کسر زیر برابر با عدد صحیح است .

$$\frac{4m}{2m+2n-mn}$$

حل ـ قبل‌ازهرچیز یادآورمی‌شویم که عبارت مفروض $f(m \text{ و } n)$ به‌ازای $m=2$ ومقداردلخواه n برابر n وبه‌ازای $n=2$ ومقدار دلخواه m برابر m می‌باشد و بدین ترتیب جوابهای مسئله به‌صورت جفتهایی به‌صورت $(n \text{ و } 2)$ و $(2 \text{ و } m)$ می‌باشند .

به‌علاوه $f(1 \text{ و } n)=\frac{4}{n+2}$ فقط به‌ازای $n=2$ مقدار صحیح به‌خود می‌گیرد ازطرف‌دیگرعبارت

$$f(m \text{ و } 1)=\frac{4m}{m+2}=4+\frac{-8}{m+2}$$

به‌ازای $m+2=4$ و $m+2=8$ مقدار صحیح به خود می‌گیرد .

درنتیجه یك جفت جواب جدید به‌صورت $(1 \text{ و } 6)$ بدست می‌آوریم :

حال $\frac{4m}{2m+2n-mn}$ را برابر k فرض کرده و تساوی را به‌صورت زیرمی‌نویسم .

$$(2k-4)m=k(m-2)n \quad (1)$$

ابتدا حالت $k>0$ را بررسی می‌کنیم . از رابطهٔ (۱) داریم :

$$n=\left(2-\frac{4}{k}\right)\frac{m}{m-2}=$$

$$\left(2-\frac{4}{k}\right)\left(1+\frac{2}{m-2}\right)<6$$

مجبوریم ۵ و ۴ و ۳ $=n$ را جداگانه بررسی کنیم. در این حالت برای این مقادیر n کلیهٔ مقادیر m و همچنین مقادیری راکه به ازای آنها $k<0$ می‌شود بدست می‌آوریم .

به‌ازای $n=3$ داریم .

$$f(m \text{ و } 3)=\frac{4m}{6-m}=-4+\frac{24}{6-m}$$

و بنابراین $6-m$ مقسوم علیه عدد ۲۴ بوده و کوچکتر از ۶ می‌باشد :

$$6-m=4 \text{ و } 3 \text{ و } 2 \text{ و } 1 \text{ و } -2 \text{ و } -3$$
$$-4 \text{ و } -6 \text{ و } -8 \text{ و } -12 \text{ و } -24$$

از اینجا داریم :

$$m=2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 8 \text{ و } 9 \text{ و } 10 \text{ و } 12 \text{ و }$$
$$18 \text{ و } 30$$

تعداد ۱۱ جواب جوابهای جدید مسئله می‌باشند .

به‌ازای $n=4$ با روش مشابه جوابهای زیر را بدست می‌آوریم :

$$m=2 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 6 \text{ و } 8 \text{ و } 12$$

که پنج جواب آخری جوابهای جدید می‌باشند .

به‌ازای $n=5$ داریم .

$$f(m \text{ و } 5)=\frac{4m}{10-3m}$$

هرگاه $4m$ بر $10-3m$ بخش‌پذیر باشد، دراین‌صورت عدد زیرنیز برآن بخش‌پذیرخواهد بود .

$$3[4m-(3m-10)]-(3m-10)=40$$

بنابراین $10-3m$ مقسوم‌علیه ۴۰ خواهد بود و کمتر از ۷ می‌باشد و داریم :

$$10-3m=5 \text{ و } 4 \text{ و } 2 \text{ و } 1 \text{ و } -2 \text{ و } -4$$
$$-5 \text{ و } -8 \text{ و } -10 \text{ و } -20 \text{ و } -40$$

از اینجا

$$m=[2] \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 6 \text{ و } 10$$

به‌این ترتیب به ۵ جواب جدید دیگردست‌یافتیم .

حال فرض‌کنیم $k<0$ باشد. به ازای $k=-1$ داریم:

$$n=\frac{6m}{m-2}=6+\frac{12}{m-2}$$

این رابطه وقتی مقادیرصحیح به‌خود می‌گیرد که $(m-2)$ مقسوم علیه ۱۲ باشد . پس :

$m=۳$ و ۴ و ۵ و ۶ و ۸ و ۱۴

و مقادیر نظیر n عبارتند از:

$n=۱۸$ و ۱۲ و ۱۰ و ۹ و ۸ و ۷

تعداد ۶ جواب دیگر به‌جوابها اضافه می‌شود.

به ازای $k=-۲$ جوابهای زیررا بدست‌خواهیم‌آورد:

$m=۳$ و ۴ و ۶ و [۱۰] و $n=۱۲$ و ۸ و ۶ و [۵]

که تعداد سه جواب جدید داریم:

هرگاه $k<-۳$ و $m\geq ۵$ باشد دراین‌صورت:

$$n=\left(۲-\frac{۴}{k}\right)\left(۱+\frac{۲}{m-۲}\right)<\left(۲+\frac{۴}{۳}\right)\left(\frac{۵}{۳}\right)$$

و وقتی $n\leq ۵$ باشدحالتی راخواهم داشت که قبلاً بررسی کردیم. باقی می‌ماندکه حالت $m=۳$ و $m=۴$ را بررسی کنیم. در حالت $m=۳$ باید مقدار $\frac{۱۲}{۶-n}$ صحیح باشد که به‌ازای‌مقادیر زیرممکن است.

$n=$ [۲] و [۳] و [۴] و [۵] و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و

[۱۲] و [۱۸]

و باز به‌چهار جواب جدید رسیدیم.

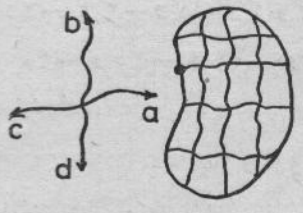
در حالت $m=۴$ باید مقدار $\frac{۸}{۴-n}$ صحیح باشد که به‌ازای مقادیر زیر صادق است.

$n=$ [۲] و [۳] و [۵] و ۶ و [۸] و [۱۲]

ودراین حالت یك جواب جدید بدست می‌آوریم:

کلیهٔ حالات ممکن بررسی شده است و غیر از جوابهای بدست‌آمده جواب دیگری برای مسئله وجود ندارد.

۹۳/۱۵ـ هانری در جستجوهای خود در اتاقك زیر شیروانی نقشهٔ جزیره‌ای راکه جدش «رودریگاس» گنجینهٔ خود را در آن خاك کرده بودپیدا کرد. درنقشه، مطابق با شکل، حاده‌ها ومحلی که باید قایق را درآنجا نگاه داشت نشان داده شده بود. بقیهٔ نقشه نامفهوم بود: حروفی مانند a و b و c و d و



یادداشتی به‌صورت: «طی کن adadcbbaabcdcbadc» نیز در نقشه آمده بود.

گنجینه درکجا مخفی شده‌است؟

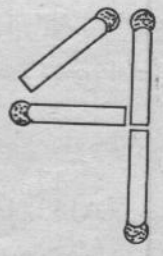
حل ـ هانری تمام شب را روی نقشه فکر کرد. نزدیکی‌های صبح معما حل شده بود.

«بله... هانری لبخند زد، رودریگاس پیرشوخی جالبی کرده است!

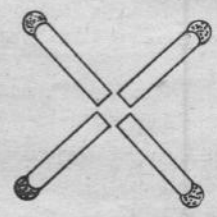
فقط آدم کودن درجهات abcd adcb یا cbad حرکت می‌کندزیرا که‌این مسیرها به‌همان‌چهار راهی که‌حرکت کرده است ختم می‌شوند. بنابراین می‌توان این‌قسمتها را از یادداشت‌حذف کرد باقی می‌ماند adbac. ولی دراینجامسیرهای db و ac نیزشخص را به‌همان چهار راهی که از آنجا شروع به‌حرکت کرده است می‌رسانند. پس این دسته حروف‌را نیز از یادداشت حذف می‌کنیم. باقی‌می‌ماند فقط یك‌حرف a! باید ازقایق پیاده شد و درجهت a حرکت کرد تا به اولین‌چهار راه رسید!»

دنباله از صفحهٔ ۴۶۴

۸ـ یکی از راه حلهای آن مطابق‌شکل است که عدد ۴ لاتین بدست می‌آید. مسئله‌راه حل دیگری هم دارد



که مربع را ازلحاظ شکل هندسی بررسی می‌کند و آن بدین صورت است که چوب کبریت بالائی راکمی به‌طرف بالا بکشید تا بین آنها مربعی‌حاصل شود (مطابق شکل)



۹ـ چهارسکه، سکه‌های شمارهٔ ۱، ۵، ۸و۹رابردارید. دراین‌صورت با مراکز سکه‌های باقی مانده نمی‌توان هیچ مثلث متساوی‌الاضلاعی ساخت.

۱۰ـ $n<۴۵$ است زیرا $n^۲=۲۰۲۵$ و همچنین $n>۴۳$ است زیرا $n^۲=۱۸۴۹$. پس $n=۴۴$ بوده که در این‌صورت $۴۴^۲=۱۹۳۶$ می‌شود و آقای اسمیت درسال $۱۹۳۶-۴۴=۱۸۹۲$ بدنیاآمده است.

۱۱ـ می‌توانید دوچهار وجهی منتظم بسازید که قاعدهٔ آنها مشترك باشد. دراین‌صورت تعداد یالها ۹ و تعداد مثلثها ۷ است.

۱۲ـ آرشیتکت خانه‌اش را درقطب شمال می‌سازد. زیرا دراین‌قطب به‌هرطرف که نگاه کنید، قطب جنوب را می‌بینید.

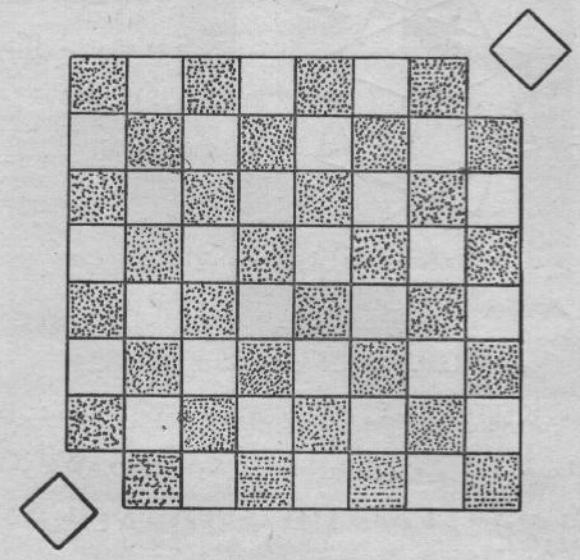
دنباله در صفحهٔ ۴۶۶

((مسائل کوتاه و معمائی))

ترجمه و تنظیم از: داوید ریحان

۱ـ دوعدد x و y را چنان بیابید که حاصل‌ضرب بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك و کوچکترین مضرب مشترکشان xy باشد .

۲ـ لوازم ضروری برای مسئله عبارتست از یك صفحهٔ شطرنجی ۶۴ خانه و ۳۲ دومینوئی که هرکدامشان دقیقاً دو



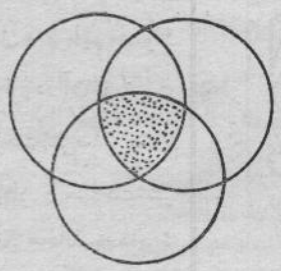
خانهٔ شطرنجی را بپوشاند . حال فرض کنید که دوخانهٔ سفید انتهای یك‌قطر صفحهٔ شطرنجی‌را مطابق شکل ۳ ببریم وهریك دومینوراهم کنار بگذاریم. آیا می‌توان با ۳۱ دومینوی باقیمانده ۶۲ خانهٔ شطرنجی را پوشاند؟ اگرجواب مثبت‌است، نشان‌دهید که می‌توان‌چنین کاری کرد . اگرجواب منفی است، ثابت کنید که این کار غیرممکن است .

۳ـ بدون استفاده ازکسرها ، عدد هشت را با استفاده از هشت تا هشت بنویسید .

۴ـ می‌خواهیم بیست و پنج درخت سیب را در دوازده ردیف‌طوری بکاریم که درهرردیف پنج درخت وجود داشته‌باشد، این کارچگونه ممکن است ؟

۵ـ نه کبوتر روی شاخهٔ درختی نشسته‌اند . یك‌شکارچی سه تا ازآنها را باگلوله می‌زند . چندکبوتر باقی می‌ماند ؟

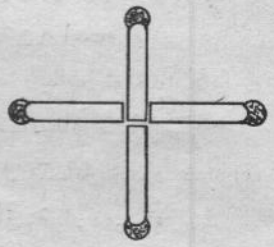
۶ـ مردی لیوان آبجوی خود را سه دفعه روی بار گذاشت و شکلی مطابق شکل ایجاد نمود و این عمل را چنان ماهرانه انجام داد که هر دایره ازمرکزدو دایرهٔ دیگربگذرد . صاحب‌بار معتقد است که سطح مشترك بین



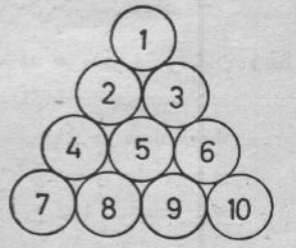
سه دایره (هاشور زده شده) کمتر ازیك‌چهارم سطح یك دایره است ، ولی‌مشتری می گوید که از یك چهارم بیشتراست حق باکیست ؟

۷ـ یك یونانی در روز هفتم سال ۴۰ قبل ازمیلاد بدنیا آمد و در روز هفتم سال ۴۰ بعد از میلاد فوت کرد . وی چند سال زندگی کرده‌است ؟

۸ـ چهارچوب کبریت مطابق شکل قرار دارند، باجابجا کردن فقط یك چوب کبریت ، یك مربع بسازید .



۹ـ این یکی از مسائلی است که کوبن فوجی‌مورا از ژاپن آنرا طرح کرده است: ده سکهٔ متشابه را به صورت مثلث



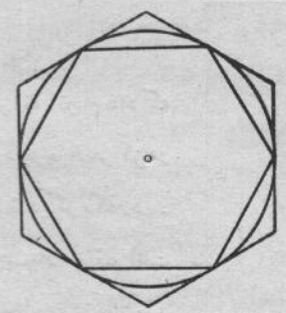
(مطابق شکل) روی میزقرار می‌دهیم . چندتا ازاین سکه‌ها را باید برداشت تا دیگر نتوان مثلث متساوی‌الاضلاعی با مراکز سه مثلث باقی‌مانده ساخت (حداقل تعداد سکه‌های برداشته شده را حساب کنید ، مرکز هرسکه رأس‌یك یا چند مثلث‌متساوی‌الاضلاع است) .

۱۰ـ آقای اسمیت درسال ۱۹۷۲ می گوید : « من در سال n^2 ، n ساله بوده‌ام» آیا می‌توانید سال تولدآقای‌اسمیت را بگویید ؟

۱۱ـ با ۹ عدد چوب کبریت با طولهای مساوی ۷مثلث متساوی‌الاضلاع بسازید (آنها را نباید خم کرده یابشکنید):

۱۲ـ زنی از شوهر آرشیتکت خود خواست که طرح خانه‌ای را برای وی بریزد که به‌شکل L بوده وتمام‌دیوارهایش دارای پنجره باشد به‌نحوی که همواره پنجره‌ها به‌طرف جنوب بازشوند . آقای آرشیتکت چگونه این مسئله را حل میکند ؟

۱۳ ـ بدون محاسبه و فقط ازروی شکل و ترسیم خطوط اضافی درآن ، نسبت مساحت‌شش‌ضلعی‌منتظم محیطی و مساحت‌شش ضلعی محاط دردایرهٔ مطابق (شکل) را محاسبه کنید .



۱۴ـ مسلماً دربارهٔ مربعهای جادویی یا وفقی‌چیزهایی شنیده‌اید. مثلادرمربع وفقی سه در سه‌مقابل مجموع اعداد واقع در هر سطر و ستون و قطر برابر با عدد ثابت ۱۵ است.

۶	۱	۸
۷	۵	۳
۲	۹	۴

آیا می‌توانید در خانه‌های خالی جدول مقابل اعداد مختلفی قرار دهید که حاصل ضرب اعداد واقع در هرسطر و هرستون و قطر مساوی مقدار ثابت ۲۱۶ باشد ؟

۱۵ـ دو دوست‌دوران مدرسه به هم می‌رسند واین گفتگو بین آنها رد و بدل می‌شود :

ـ خیلی وقت است که ترا ندیده‌ام و هیچ خبری از تو نداشته‌ام !

ـ حالامن دارای یك دخترشده‌ام .

ـ اسمش چیست ؟

ـ هم اسم مادرش است .

ـ هلن کوچك توچند سالش است ،

حال شما فکر کنید وهمچنین از دوستانتان بپرسید که چگونه کسی که هیچ خبری از زندگی خصوصی رفیقش نداشته است توانسته است اسم دختراورا بداند ؟

پاسخ مسائل بالا

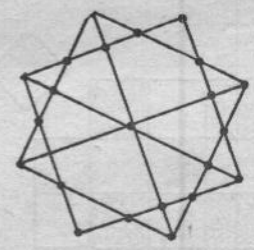
۱ـ هردوعدد غیرشخصی دارای چنین‌خاصیتی است.

۲ـ نمی‌توان با ۳۱ دومینو خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را (که دوگوشهٔ مقابل آنرا بریده وکنار گذاشته‌ایم) پوشانید و اثبات آن ساده است: دوخانهٔ قطری متقابل ازیك‌رنگ‌هستند. دراین‌صورت تعداد یکی از رنگهای خانه‌های باقی‌مانده دوتا از خانه‌های باقی‌ماندهٔ با رنگ مخالفش بیشتراست. هردومینو دوخانهٔ مجاور راکه رنگهایشان با هم فرق دارد می‌پوشاند ، زیرا فقط خانه‌های با رنگهای مختلف مجاورند. پس از اینکه ۶۰ مربع را با ۳۰ دومینو پوشاندند، دوخانه باقی می‌ماندکه ازیك رنگند . این دوخانه نمی‌توانند مجاور هم باشند ، پس نمی‌توانند بوسیلهٔ آخرین دومینو پوشانده شوند .

۳ـ داریم :

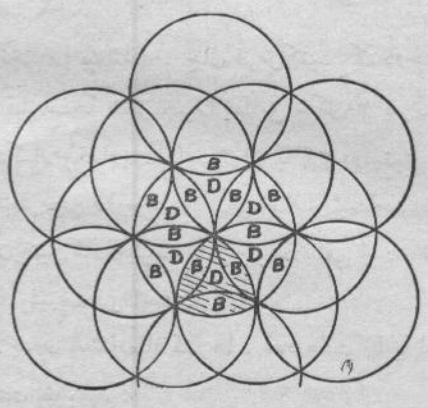
$$۸(۸۸۸۸۸)^{۸-۸} = ۸(۸۸۸۸۸)^{۰} = ۸(۱) = ۸$$

۴ـ مطابق با شکل می‌توان درختها را درنقاطی که دو خط یکدیگرراقطع کرده‌اند غرس نمود .



۵ـ پس از اینکه سه‌کبوتر گلوله خوردند ، بقیهٔ پرواز می‌کنند ، بنابراین کبوتری باقی نمی‌ماند .

۶ـ سه دایرهٔ متقاطع راکه هرکدامشان از مرکز دو دایرهٔ دیگرمی گذرد می‌توان روی‌یك صفحه‌مطابق باشکل‌دوباره تکرارکرد و دوایردیگری را مثل‌شکل ترسیم نمود. هر دایره از شش‌طرح Δ مانند (ناحیهٔ D) و دوازده طرح موزی شکل



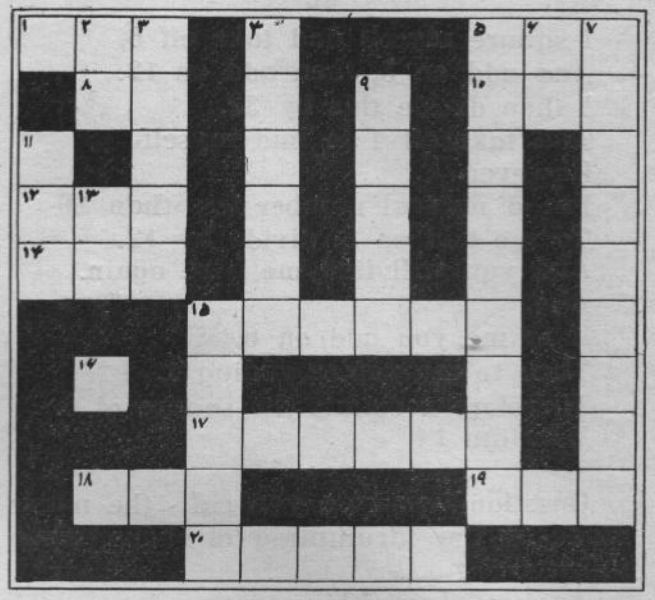
(ناحیه‌های B) تشکیل شده است . یك چهارم سطح یك دایره می‌بایست از D ۱/۵ و ۳B تشکیل شده باشد . سطح مشترك سه دایره از ۱D+۳B تشکیل شده است که کمتراز ربع سطح یك دایره است .

۷ـ یونانی ۷۹ سال زندگی کرده است ، زیراسال‌صفر وجود ندارد .

دنباله در صفحهٔ ۴۶۲

جدول اعداد

طرح از: علی اصغری (تاریخ وصول به‌دفتر مجله : ۱۳۴۹/۱۱/۹)



افقی : ۱ـ کعب آن تعداد نقاط مهمی از مثلث است که دایرهٔ اولر بـر آنها می‌گذرد . ۵ـ کوچکترین عدد سه رقمی که خودش و مجموع رقمهایش بـرمجذور رقم یکان آن بخش‌پذیرند . ۸ـ مضربی است از ۷ و دارای ۸ مقسوم‌علیه است. ۱۰ـ هر گاه نصف رقم سدگان را به رقم یکان بیفزاییم و نصف رقم یکان را از رقم دهگان کم کنیم ، عددی با سه رقم یکسان بدست آید، درصورتی‌که مجموع رقمهای عدد مفروض عددی فرداست. ۱۲ـ تعداد رقمهایی‌که برای نوشتن عددهای از یك تا این عددسه رقمی بکار می‌رود، برابر است بامضربی از این عدد به اضافهٔ ۳۲۷. ۱۴ـ رقم سدگان این‌عدد مکعب کامل و رقم دهگان آن مجذور کامل و مجموع رقمهای عدددو برابر رقم دهگان آن است . ۱۵ـ بـه صورت $\overline{abccba}$ است بقسمی که عدد $\overline{abc}$ مضرب ۹ و عدد $(\overline{abc}-1)$ مکعب کامل است. ۱۷ـ بـه صورت $\overline{abcdef}$ است بقسمی کـه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك و کوچکترین مضرب مشترك دو عدد $\overline{abc}$ و $\overline{def}$ به ترتیب ۵۱ و ۷۳۴۴ است. ۱۸ـ تعداد قطرهای بیست و دو ضلعی محدب. ۱۹ـ عدد سه رقمی که ۲ واحد از متمم حسابی خود بزرگتر است. ۲۰ـ ثلث این عدد برابر است با مجموع ضرایب تمام جمله‌های حاصل از بسط $(a+b)^{15}$

قائم : ۲ـ مربع‌رقم‌یکان خودمی‌باشد. ۳ـ بزرگترین عدد پنج‌رقمی‌که حاصل‌ضرب رقمهایش ۱۳۵۰ است. ۴ـ اگر ۴ واحد بـه آن اضافه شود مجذور سومین عدد کامل بـدست آید. ۵ـ ده برابر این عدد کـه با ۴ جمع شود برابر گردد با :

$$S=tg^{16}15^\circ+cotg^{16}15^\circ$$

۶ـرقمهایش همسانند. ۷ـ مقدار S_{21} درصورتی‌که :

$$S_1=1\ ,\ S_2=2+3+\cdots+8$$
$$S_3=9+10+\cdots+27$$
$$S_4=28+29+\cdots+64$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

۹ـ مجذور x از رابطهٔ زیر :

$$\lim \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}=13$$

۱۱ـ کوچکترین‌عدد سه رقمی‌که چون در ۳ ضرب شود عددی با رقمهای یکسان بدست آید. ۱۳ـ رقم دهگان آن جذر رقم یکانش است . ۱۵ـ اگر عددهـای از یك تـا این عدد را متوالیاً بنویسیم، مجموع تمام رقمهایی کـه بکار می‌رود برابر است با: $2^7\times5^3\times13$

	۱ ۱	۲ ۲	۳ ۱			۴ ۱	۵ ۹	۶ ۱	۷ ۸
	۸ ۱	۹ ۶				۹ ۹	۸	۰	۱
	۱۰ ۱	۲	۳	۱۱ ۴	۱۲ ۵	۶			
	۱۳ ۱	۶	۶	۳	۷	۵			
	۱			۱۴ ۳	۷	۵			
				۱۵ ۱	۲	۳	۴	۵	
۱۶ ۷	۱۷ ۲			۱					
۱۸ ۱	۸	۱۹ ۲	۲۰ ۲	۵		۲۱ ۵	۲۲ ۵	۲۳ ۵	۲۴ ۵
۲۵ ۳	۰	۳	۷	۵		۲۶ ۴	۸	۹	۹
۲۷ ۹	۱					۲۸ ۵	۰	۰	۰

حل جدول شمارهٔ گذشته

Fun With Mathematics

First Student: Can you extract a square root?

Second Student : No, I don't dig'em

**

I square myself and take off 6,
And add on 3, then add on 12.
I then divide this by 32,
And take off 1 to find myself.
However.
I'm a natural number less than 10.
To me add on 8, divide by 12.
And you will find me here again.
Also,
If to me you add on 0,
Then to me you're adding x.
Therefore x equals the square of 6.
Who am I ?

**

Question: what do you call the music made by the drumming of sticks upon fallen trees?

Answer : Logarithms.

Question : what trigonometric function names the Russian premier?

Answer : Cosecant (Kosygin)

Old mathematics teachers never die. They just reduce to lowest terms.

**

How many pairs of animals were fitted into Moses's ark at the time of the flood if the ark measured 9,284 feet by 4,672 feet?

(Answer : None! Moses did not have an ark. Noah did! Ha?)

**

Teacher : Is the following statement true?

πr^2

Student : No. Pie are round.

Teacher : Is it correct to say that 7 and 3 are 9?

Student : No 7 and 3 is 9.

**

Some Geometry Jokes

Q : Can a line run vertically?

A : A line can't run any way; it doesn't have legs.

Q : Can a triangle fly?

A : Yes, since it's on a plane.

Q : What did one perpendicular line say to the other?

A : Meet you at the corner?

Q : Why was the conditional arrested?

A : He broke the Law of Contrapositive.

Q : If one angle pays another angle a compliment, what kind ofangles are they?

A : Complementary angles.

Q : What did three collinear with them?

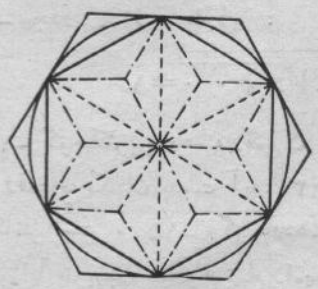
A : You're out of line!

Q : What did the boy angle say to the gir angle?

A : You're a– cute angle!

دنباله‌ازصفحهٔ ۴۶۲

۱۳ ـ مطابق شکل‌خطوطی رسم‌می‌کنیم و شش ضلعیهارا به مثلثهایی مطابق شکل تقسیم می‌کنیم: دراین‌شکل شش‌ضلعی محاطی دارای ۱۸ تا از این مثلثها و شش ضلعی محیطی دارای ۲۴ مثلث است ، پس نسبت مساحتشان عبارتست ازنسبت تعداد مثلثها که می‌شود : $\frac{۲۴}{۱۸}=\frac{۴}{۳}$



۱۴ـ مطابق‌شکل می‌توان اعداد مختلفی درخانه‌ها قرارداد تا مربع جادوئی ضربی باعددثابت ۲۱۶ بدست آید.عدد ۲۱۶ کوچکترین عددی است که با آن می‌توان مربع جادوئی‌ضربی‌را تشکیل داد (مربع سه درسه) به‌نحوی که درهر خانه‌اش‌عدد مختلفی قرارداشته باشد .

۱۲	۱	۱۸
۹	۶	۴
۲	۳۶	۳

۱۵ـ ما همیشه‌عادت کرده‌ایم که لغت«دوست» و«دیگری» را درعبارت «یکی دوست دیگری است » برای جنس مذکر در نظربگیریم . حال آنکه در واقع این دو دوست هردوزن‌بوده‌اند و اسم یکی ازآنها هلن بوده است .

فهرست مندرجات مجله‌های یکان دورهٔ نهم

سرمقاله‌ها

ریاضیدانان اسلامی

تحقیقات تاریخی

کلیات و روشهای ریاضی

در حاشیهٔ ریاضیات دبیرستان

درسهایی از ریاضیات دبیرستان

علوم تجربی

گوناگون

ریاضی جدید

باریاضیات آشتی کنید

جدول اعداد

مسائل

روشها

مسائل نمونه ـ مسائل مشهور

گوناگون

مسائل برای‌حل

تستهای‌ریاضی

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

حل‌مسائل

Problems & Solutions

مندرجات یکان سال ۵۱

دنباله از صفحهٔ دوم جلد

مخالف با قانون مذکور نیست. همه‌می‌دانیم که کتابهای متعددی به نامهای : حل مسائل هندسه، حل مسائل جبر ، الکتریسیتهٔ صنعتی، تئوری‌اعداد. ترمودینامیك، ترمودینامیك برای‌مهندسین، ... نوشته‌شده‌است. هیچ مؤلفی نمی‌تواند اعتراض کند که چرا دیگران همان نام را برای کتاب خود انتخاب کرده‌اند. اعتراض فقط موقعی جایز است که مؤلفی سوء استفاده کرده مطلب یا مطالبی رااز کتابهای دیگران بدون اجازه و ذکر مأخذدر کتاب خود نقل کند.

کلیهٔ مطالب مشروح‌در کتاب«تمرینهای‌ریاضیات‌مقدماتی» طرح و حل این جانب است و ازهیچ کتابی اقتباس نکرده‌ام . برخی از مطالب این کتاب درکتابهای دیگر مذکور است که نگارنده برای آنها راه حلهای تازه و یا اثباتهای تازه‌ای‌ارائه داده‌ام. مثلابرای اثبات قضیهٔ فیثاغورس پنج طریقهٔ تازه ابداع کرده‌امو درآن‌کتاب شرح داده‌ام و یامثلا برای اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ اثبات تازه‌ای عرضه‌کرده‌ام و مثالهایی مشابه باآنها.

جناب‌عالی در نوشتهٔ‌خود ذکر کرده‌اید که کتاب‌تمرینهای ریاضی مقدماتی‌که منتشر کرده‌اید فعلا نایاب می‌باشد، ازطرفی استاد هشترودی درکتاب خود ذکر کرده‌اند که‌همهٔ حقوق‌برای مؤلف محفوظ است، حال اگرجای اعتراضی باشد این اعتراض باید از جانب استادهشترودی انجام‌گیرد زیرا چاپ اول‌کتاب مذکور نایاب شده‌وچاپهای بعدی‌حق مؤلف یعنی‌استادهشترودی است. استاد هشترودی نیز اعتراض نخواهندکرد چه می‌دانند کلیهٔ مطالب‌کتاب «تمرینهای‌ریاضیات‌مقدماتی» که‌منتشر کرده‌ام متعلق به این جانب است و ازکتاب ایشان اقتباس‌نکرده‌ام.

احمد شرف‌الدین، ۱۳۵۲/۴/۲۳

یکان ـ برای توضیح، نه‌جوابگویی، اشعارمی‌دارد که:

۱ـ صاحبان مقالات مندرج در یکان اشخاص شناخته شده (اقلا ازطرف مسؤولان مجله)می‌باشند. وانگهی‌عین مقالات‌و مشخصات آنها درآرشیو مجله‌نگاهداری می‌شود.

۲ـ روش ناپسند «نقل مقالاتی ازاشخاص و درج آنها به نام اشخاص‌دیگردرمجله»معمول‌مسؤولان‌یکان‌نبوده‌و نخواهدبود.

۳ـ هرایراد یا ادعایی که‌علیه مقاله‌ای وارد شودنویسندهٔ آن مسؤول آن می‌باشد (مگردرمورد دخل وتصرفهایی که بدون اجازهٔ نویسنده درمتن مقاله انجام گرفته‌باشد).

۴ـ آنچه که‌دریکان سال ۵۱ راجع‌به‌نام کتاب«تمرینهای ریاضیات مقدماتی» درج شده‌اولا بدون استحضاراستادهشترودی بوده‌است، ثانیاً مقصود ازآن فقط رفع شبهه‌ای‌بوده‌است که‌برای بعضیها بوجود آمده‌بود. حال اگربرای آقای شرف‌الدین این تصور پیش‌آمده که نسبت به‌ایشان هتك‌حرمت‌شده است ازایشان پوزش می‌خواهیم.

توجه

انتشارات یکان منحصر به کتابهایی است که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت‌آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.