یکان

مجله ریاضیات

دورهٔ نهم، شمارهٔ : ۷ شمارهٔ مسلسل : ۹۲ خرداد ـ تیر ۱۳۵۲

در این شماره:

بها : ۲۵ ریال

مشکل چاپ مجله

در چاپ دورهٔ جاری مجله، با دو مشکل توأماً مـواجه بوده‌ایم : ترقی متوالی دستمزد چاپ ، بی توجهی مسؤولان چاپخانهٔ طرف‌معامله در انجام به موقع‌کار و درحسن کار. مشکل اول را با قبول زیان تحمل‌کردیم. اما مشکل دوم باعث شدکه از یك‌طرف چاپ مجلات به تأخیر افتد، وازطرف‌دیگرمجلاتی که به دست خوانندگان می‌رسد اکثراً معیوب و یا ناقص‌باشد.

چاپ مجلهٔ این شماره در چاپخانهٔ دیگری انجام‌گرفته است و امیدواریم‌که توجه مسؤولان این چاپخانه بهبود وضع چاپ و صحافی مجله را تأمین بکند.

تغییر وجه اشتراك وبهای تکفروشی مجله

با ترقی هزینهٔ چاپ از ازدیاد بهای تکفروشی مجله و وجه اشتراك آن ناگزیریم.

یك شمارهٔ دیگر از دورهٔ فعلی مجله در اواخر تیر ماه منتشر خواهد شد آنگاه دورهٔ دهم یکان از ابتدای مهرماه با بهایی غیر ازبهای فعلی به دست دوستداران آن‌خواهدرسید .

آشنا ساختن دانش‌آموزان دبیرستانی باریاضیات جدید

در سالهای اخیر برنامه‌های ریاضی دانشگاهها ومؤسسات عالی دستخوش دگرگونیهای عمیق گردیده است بقسمی که فارغ‌التحصیلان‌دبیرستانهای‌کنونی مادر ادامهٔ تحصیلات ازلحاظ ریاضی به اصطلاح جدیدکمبود دارند.

در دانشگاههای ایران این‌کمبود جبران می‌شود ، اما فارغ‌التحصیلانی‌که برای‌ادامهٔ‌تحصیل‌به‌کشورهای خارج‌می‌روند ناچارندکه قبل از ورود به دانشگاه ،کمبود خود را از ریاضی جدید شخصاً جبران‌کنند.

به قرار اطلاع از طرف وزارت‌آموزش وپرورش به این موضوع توجه شده و برنامه‌ای تنظیم شده است تا دانش‌آموزان دبیرستانهای‌کنونی ایران نیزآن قسمت از ریاضی جدید راکه لازم است فراگیرند .

در اجرای این‌برنامه یا دوره‌های تابستانی تشکیل‌خواهد شد، یا اینکه موادی از برنامهٔ ریاضیات‌کلاس ششم ریاضی‌که زائد بنظر می‌رسدحذف‌شده وریاضی‌جدید جایگزین آن‌می گردد

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تـأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ نهم ـ شمارهٔ هفتم ـ شمارهٔ مسلسل :۹۲

خرداد ـ تیر ۱۳۵۲

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملك‌یزدی

نشانی‌اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی۲۴۶۳

تلفن اداره:۳۹۳۱۸۱

حساب بانکی:حساب جاری۳۰۹۵شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume IX, number 7 · June 1973

subscription : 3$

TEHERAN-P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

مصاحبه با استادان ریاضی فرانسه

اخیراً دونفر از استادان ریاضی فرانسه برای بررسی و اظهار نظر دربارهٔ برنامه‌ها وکتابهای جدید ریاضی به ایران دعوت شده‌بودند.

درکمیسیونی‌که جهت این‌کار درمرکز تحقیقات‌وبرنامه ریزی درسی وزارت آموزش و پرورش تشکیل شده بود مدیـر یکان نیزشرکت داشت‌که در حاشیهٔ جلسات‌کمیسیون موفق شد تا پیرامون اثرات ریاضیات جدید مصاحبه‌ای با این‌شخصیتهای فرانسوی ترتیب دهد.

متن این مصاحبه درشماره‌های بعدی‌مجله‌چاپ‌خواهدشد.

درکمیسیون مزبور برنامه‌ها وکتابهای جدید ریاضی ایران از طرف استادان فرانسوی مورد تأیید وتحسین قرارگرفت‌وبرای آشناکردن دانش‌آموزان دبیرستانهای‌کنونی با ریاضیات جدید برنامه‌هایی پیشنهاد شد .

بطلمیوس یا پتولمی

هنوز مشکل ناشی از تشتت آراء در وضع اصطلاحات ریاضی بر طرف نشده که مشکل تازه‌ای سربار آن گردیده است: دوگونگی در تلفظ اسامی خاص خارجی.

سالها است که اسامی خاص از قبیل: **اقلیدس ، فیثاغورس ، بطلمیوس ،...** را به همین صورت تلفظ می‌کنیم و می‌شناسیم. از این جهت وقتی که در کلاس درس فلان استاد جوان، یا در ترجمهٔ فلان مقاله، به نامهای **یوکلید ، پیتاگور، پتولمی،...** برمی‌خوریم و گمان می‌بریم که با نامهای جدید سروکارداریم، نباید مورد ایراد واقع شویم.

فارغ التحصیلان دبیرستان قضیهٔ بطلمیوس را اکثراً خیلی خوب می‌شناسند ، اما به هنگامی که در جلسهٔ درس استاد از قضیه‌ای به‌نام قضیهٔ پتولمی نام برده می‌شود وتأکید براینکه در دورهٔ دبیرستان آن را فراگرفته‌اند، و آنان در هیچیك از کتابهای درسی دبیرستانی چنین قضیه‌ای را نمی‌یابند، در می‌مانند و پرسشگر که این دیگرچه قضیه‌ای است !؟ تا بالاخره قضیهٔ تازه‌ای برآنان کشف می‌شود و آن اینکه یکی از آثار ادامهٔ تحصیلات در خارج از کشور ، اصرار در بکار بردن هرچه بیشتر اصطلاحات خارجی و از جمله تلفظ اسامی خاص به گونه‌ای متفاوت با تلفظ متداول آنها در زبان فارسی است.

در این میان، برخی از خارج رفته‌ها یا مترجمان تازه‌کار، به علت عدم اطلاع یا احیاناً به خاطر خود نمائی، پا را فراتر نهاده اسامی خاص ایرانی را نیزبا تلفظ اروپائی بکارمی‌برند؛ مثلا **ابن سینا** را **آویسن** یا اینکه **مسئلهٔ‌الحسن** را **مسئلهٔ‌الهازن** ادا می‌کنند.

آشفتگی دیگری نیز دربرگردان اسامی خاص خارجی به زبان فارسی وجود دارد . مثلا درکتاب یا مقاله‌ای ، واضع فلان نظریه **ژاکوب** معرفی می‌گردد و درکتاب یا نوشتهٔ دیگر همین شخص به نام **یعقوب** معرفی می‌شود.یا اینکه نویسندهٔ مشهورکتابهای علمی به زبان‌ساده توسط مترجمان کتابهایش به نامهای: **ایزاك آسیموف ، اسحق آسیموف ، اسحق عظیم‌اف** شناسانده می‌شود.

فرهنگستان زبان فارسی که هم‌اکنون فعالیت خود را در چند جهت آغاز کرده است، در زمینهٔ چگونگی تلفظ اسامی خارجی نیزباید چاره‌ای بیندیشد و در این مورد ضابطه‌هایی را تعیین کند.

عبدالحسین مصحفی

حکیم عمر خیام نیشابوری و ابتکارات علمی او

جعفر آقایانی چاوشی

دنباله از شمارهٔ قبل

خیام و معادلهٔ $x^3+y^3=z^3$

قدری حافظ طوقان به نقل از Ball (*) نوشته است که خیام بحثی دربارهٔ اینکه مجموع مکعبات دوعددصحیح مساوی مکعب عدد صحیحی نمی‌شود ، یعنی امتناع معادلهٔ $x^3+y^3=z^3$ انجام داده است [۵] ولی نام کتاب یا رسالهٔ خیام راکه متضمن این بحث است ذکر نکرده است. این‌معادله چنانکه می‌دانیم حالت خاصی از قضیهٔ آخر **فرما** (Fermat) ریاضیدان فرانسوی است، و این قضیه ازاین قرار است:

معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ به ازای $n>2$ جواب ندارد البته باید دانست که **دیوفانت** (Diophante) ریاضیدان یونانی ثابت کرده بود که معادله $x^2+y^2=z^2$ جوابهای بیشماری دارد ولی معادله $x^3+y^3=z^3$ را برای نخستین‌بار ریاضیدان اسلامی **ابومحمود حامدبن‌خضر خجندی**،مورد بررسی قرارداده است، که **وپکه** در سال ۱۸۶۱ ضمن ترجمهٔ رساله‌ای تحت عنوان:

«رسالة فی‌انشاء المثلثات‌القائمة الزوایاالمنطقة الاضلاع والمنفعة فی‌معرفتها» [۲۲]متوجه این موضوع شده است. گرچه کتاب و یا رساله‌ای که خجندی دربارهٔ حل این معادله نوشته مفقود الاثر است ولی این‌احتمال‌وجود داردکه خیام‌نیز ازکتاب و یا رسالهٔ خجندی اطلاع داشته است. مطلبی که این نظر را تأیید می‌کند این است که **شیخ بهاءالدین عاملی** نیزهمین مسئله را به عنوان مسئلهٔ لاینحلی که اززمانهای پیش موردبحث علما بوده درکتاب خلاصة‌الحساب آورده است

عین عبارت استادطوقان چنین‌است:

«و بحث‌الخیام فی‌النظریة المسماه بنظریة «فرما» و قال ان مجموع عددین مکعبین لایمکن ان یکون مکعباً ولم یثبت لدی‌الباحثین ان الخیام تمکن من ایجاد البرهان الصحیح‌لهذه النظریة و قال ان الخجندی بحث فیها ایضاً وظن‌انه برهنها، و یقال ان‌برهانه غیرصحیح» [۵]

دوجمله‌ای خیام و مثلث حسابی‌خیام

پاول لوکی (P.Luckey) ریاضیدان و محقق آلمانی درسال ۱۹۴۸ میلادی مقالهٔ جامع و مهمی تحت عنوان «استخراج ریشهٔ nام و دو جمله‌ای در ریاضیات اسلامی» در مجلهٔ: «Mathematicsche Annalen» چاپ برلین جلد ۱۲۰منتشر کرد ودرآن باکمال دقت‌قسمتی‌ازکتاب مفتاح‌الحساب **غیاث‌الدین جمشیدکاشانی** رامورد مطالعه قرار داد و روشهای محاسبهٔوی را دربسط دو جمله‌ای باروش اسلاف‌او مقایسه کردومعلوم‌نمودکه ریاضیدانان اسلامی دربسط دوجمله‌ای بر**نیوتن** تقدم داشته‌اند.

همچنین **پروفسورروزنفلد** (B.Rosenfeld) ، استاد دانشگاه‌مسکو، هنگامی‌که مشغول ترجمهٔ کتاب‌جبرخیام به‌زبان روسی بودمتوجه شدکه‌آنچه به‌نام‌بسط دوجمله‌ای نیوتن مشهور است ، از طرف **خیام** مطالعه و مدون شده است .

اینك اجمالا این موضوع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

غیاث‌الدین جمشیدکاشانی درکتاب«مفتاح‌الحساب» خود می‌نویسد:

«راه‌دیگر برای‌بدست‌آوردن‌تفاضل‌یك قوه ازدو عددصحیح متوالی [یعنی محاسبهٔ $(a+1)^n-a^n$]، برای‌این بایداعدادی

* Rouse Ball : A short account history of mathematics New York (Dover publication Inc)

راکه به اصول منازل مضلعات موسوم هستند بشناسیم... بدان که اصل منزلت مال [یعنی ضریب a در بسط $(a+1)^2$] فقط یك عدداست و آن ۲ می‌باشد و اصول منزلت کعب [یعنی ضرایب a^2 و a در بسط $(a+1)^3$] دو عدد است که عبارتند از ۳ و ۳ و برای هریك از منزلت‌های بعدی اعداد دوطرف رایك واحد به‌ازای هرصف زیاد می‌کنیم و اگر هردوعدد مجاور از اصول یك منزلت را باهم جمع کنیم یکی از اعداد وسط از منزلت بعدی بدست می‌آید. مثلا اعداد منزلت مکعب ۳ و ۳ است که محموعشان ۶ می‌شود پس ۶ عدد وسط منزلت چهارم است و اصول منزلت چهارم ۴ و ۶ و ۴ می‌باشد ومجموع ۴ و ۶ یعنی ۱۰ یکی از دو عدد وسط منزلت پنجم است و مجموع ۶ و ۴ وسط دیگر است و به همین قیاس اصول منازل تا بینهایت بدست می‌آید. همانطور که درجدول زیر دیده می‌شود

جدول شمارهٔ ۱

صفوف	اصول قوهٔ نهم	اصول قوهٔ هشتم	اصول قوهٔ هفتم	اصول قوهٔ ششم	اصول قوهٔ پنجم	اصول قوهٔ چهارم	اصول قوهٔ سوم	اصول قوهٔ دوم
صف قوهٔ هشتم	۹							
صف قوهٔ هفتم	۳۶	۸						
صف قوهٔ ششم	۸۴	۲۸	۷					
صف قوهٔ پنجم	۱۲۶	۵۶	۲۱	۶				
صف قوهٔ چهارم	۱۲۶	۷۰	۳۵	۱۵	۵			
صف قوهٔ مکعب	۸۴	۵۶	۳۵	۲۰	۱۰	۴		
صف قوهٔ مربع	۳۶	۲۸	۲۱	۱۵	۱۰	۶	۳	
صف ریشه	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲

و هرگاه بخواهیم تفاضل بین یك قوه از دو عدد صحیح متوالی [یعنی $(a+1)^n - a^n$] را بدست آوریم عدد کوچکتر یعنی a رادراصل صف ضلع (= ریشه) متعلق به آن قوه ضرب می‌کنیم و مربع a یعنی a^2 را در اصل صف مربع و a^3 را در اصل صف مکعب ضرب می‌کنیم و به همین طریق عمل را ادامه می‌دهیم تا اینکه جمیع قوای a که از قوهٔ مفروض کوچکترند در اصول منازل مربوطه ضرب شوند و همهٔ حاصلها را باهم جمع می‌کنیم و یك واحد بر آن می‌افزاییم، تفاضل مطلوب بدست می‌آید

مثلا می‌خواهیم $۴^۵ - ۵^۵$ را حساب کنیم، صفوفی راکه کوچکتر از قوهٔ پنجم هستند رسم می‌کنیم ودر آنها اصول مربوط به‌خودشان را در یك ستون می‌نویسیم و عدد کوچکتر یعنی ۴ را در صف ضلع و مربع آن، یعنی ۱۶ را درصف قوهٔ سوم، و قوهٔ چهارم آن یعنی ۲۵۶ را در صف قوهٔ چهارم می‌نویسیم و بین آنها و بین اصول یك خط قائم رسم می‌کنیم سپس هرعدد راکه درصف اصول واقع شده در عدد نظیر خود از ستون قوا ضرب می‌کنیم و حاصل ها را در ستون قائم دیگری از جدول قرار می‌دهیم. سپس اعدادی راکه در جدول حاصل ضربها نوشته‌ایم باهم جمع می‌کنیم و یك واحد به آن می‌افزائیم ۲۱۰۱ حاصل می‌شود و این عدد مساوی است با:

$۴^۵ - ۵^۵$

صفوف	اصول قوهٔ پنجم	قوای عدد که بایددراصول ضرب شوند	حاصل ضربها
صف قوهٔ چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰
صف قوهٔ سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰
صف قوهٔ دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰
صف مربع	۵	۴	۲۰

جدول شمارهٔ ۲

و هر گاه بخواهیم تفاضل دو قوه از دو عدد غیر متوالی (یعنی $a^n - b^n$) مثلا $۷^۵ - ۴^۵$ را حساب کنیم ستون دیگری به جدول فوق اضافه می‌کنیم و در آن قوای متوالی تفاضل دو عدد یعنی $۷ - ۴ = ۳$ را می‌نویسیم بطوری که تفاضل یعنی ۳ در صف قوهٔ چهارم، و مربع ۳ یعنی ۹ در زیر آن، و قوهٔ چهارم آن در صف ریشه واقع شود. سپس اعدادی را که در صف حاصل ضربها واقع شده اند در اعداد نظیر آنها از ستون قوای تفاضل ضرب می‌کنیم و حاصل ضربهای اخیر را دریك ستون قائم دیگر می‌نویسیم، سپس آنچه راکه درجدول اخیر نوشته‌ایم یاهم جمع می‌کنیم و به آن قوهٔ پنجم تفاضل یعنی $۳^۵ = ۲۴۳$ رامی‌افزاییم عدد ۵۷۸۳ حاصل می‌شود و این عدد همان عدد مطلوب یعنی $۷^۵ - ۴^۵$ است

صفوف	اصول قوهٔ پنجم	قوای عدد که باید دراصول ضرب شوند	حاصل ضربها	قوای تفاضل که در حاصل ضربها ضرب شده اند	حاصل ضربها
صف قوهٔ چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰	۳	۳۸۴۰
صف قوهٔ سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰	۹	۵۷۶۰
صف قوهٔ دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰	۲۷	۴۳۶۰
صف ضلع	۵	۴	۲۰	۸۱	۱۶۲۰

جدول شمارهٔ ۳

باکمی دقت معلوم می‌شود که اولا جدول شمارهٔ ۱ همان مثلث حسابی منسوب به **پاسکال** است و تنها وجه تمایز آنها دراین است که وضع قرار گرفتن اعداد در آنها متفاوت است وجدول شمارهٔ ۱ ستون آحاد را ندارد . ثانیاً اگر در جدول شمارهٔ ۲ دو عدد صحیح متوالی را a و a+۱ بنامیم مفهوم این جدول با علائم امروزی چنین است:

$$(a+۱)^۵ - a^۵ = ۵a^۴ + ۱۰a^۳ + ۱۰a^۲ + ۵a + ۱$$

و یا

$$(a+۱) = a^۵ + ۵a^۴ + ۱۰a^۳ + ۱۰a^۲ + ۵a + ۱$$

ثالثاً اگر در جدول شمارهٔ ۳ دو عدد صحیح غیرمتوالی را a و b بنامیم مفهوم این جدول باعلائم جدید چنین است:

$$(a+b)^۵ - a^۵ = ۵a^۴b + ۱۰a^۳b^۲ + ۱۰a^۲b^۳ + ۵ab^۴ + b^۵$$

ویا

$$(a+b)^۵ = a^۵ + ۵a^۴b + ۱۰a^۳b^۲ + ۱۰a^۲b^۳ + ۵ab^۴ + b^۵$$

گرچه این دستور برای قوهٔ پنجم داده‌شده ولی قاعدهٔ متن مفتاح‌الحساب کلی است و می‌توان آن را برای هرقوهٔ دیگری نیز بکاربرد..

نکتهٔ مهم این است که برطبق آنچه در مفتاح الحساب نوشته شده برای بدست آوردن ضرایب بسط دو جمله‌ای $(a+b)^۷$ بایدهفت سطراول مثلث حسابی را نوشت تاسطرهفتم آن که همان ضرایب مذکور است بدست آید.

ملامحمد باقر یزدی درکتاب «عیون‌الحساب» قاعده‌ای بیان می‌کند که این ضرایب را مستقیماً و بدون اینکه احتیاج به نوشتن شش سطر اول مثلث حسابی باشد بدست می‌دهد . **یزدی** در پایان مطلب دهم از باب اول «عیون‌الحساب» فصلی دارد موسوم به:

«فصل لاستخراج الفضل بین مضلعی عددین تساوت منزلتها»

که مقصود از آن محاسبهٔ $a^n - b^n$ به فرض معلوم بودن a و b و n است. دراین فصل وی قاعده‌ای برای محاسبهٔ ضرایب بسط دو جمله‌ای می‌دهد وضرایب جملهٔ r ام رابا روشی بدست می‌دهد که بااصطلاحات و علائم جدید چنین است:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{۱}x^{n-۱}y + \binom{n}{۲}x^{n-۲}y^۲ + \cdots + \binom{n}{n-(n-۱)}xy^{n-۱} + y^n$$

یا

$$\binom{n}{r}=C_n^r=\frac{n!}{r!(n-1)!}$$

وی همچنین در تعیین ضرایب بسط دو جمله‌ای (=محاسبهٔ اصول منازل) قاعده‌ای ذکر می‌کند که با اصطلاحات و علائم جدید چنین است:

$$C_n^{p+1}=C_n^p\times\frac{n-p}{p+1}$$

سپس روش خود را برای $(a+b)^{12}$ بکار برد.

نکتهٔ مهم دیگر این است که **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** در مقدمهٔ «مفتاح‌الحساب» به صراحت می‌نویسد که تمام جداولی که در آن کتاب هست خودش وضع کرده مگر هفت جدول. که جداول شمارهٔ ۲ و ۳ که کاشانی آنها را جدول اصول منازل نامیده است، جزء همین هفت جدول است، یعنی کاشانی آنها را از اسلاف خود اقتباس کرده و در مفتاح‌الحساب آورده است.

با مطالعهٔ آثار ریاضیدانان پیش از کاشانی متوجه می‌شویم که **خیام** اولین کسی است که این مثلث حسابی را وضع کرده است. برای توضیح این امر باید گفت در تحقیقی که **خیام** برای حل معادلات جبری انجام داده است به بسط قوای مختلف یك دو جمله‌ای نیاز می‌داشته و تشکیل ضرایب این بسط و گسترش را به صورت قاعده و دستوری که امروزه به **مثلث پاسکال** معروف است، کشف کرده بوده است. خیام در کتاب جبر و مقابلهٔ خود می‌نویسد:

«هندیها برای استخراج جذر و کعب طرقی دارند که مبنی بر اندك تفحص است و آن عبارتست از دانستن مربعات ارقام نه‌گانه و حاصل‌ضرب آنها در یکدیگر، و من در اثبات صحت این طرق و چگونگی نیل به مقصود از روی آنها کتابی تألیف کرده‌ام. در این کتاب بر انواعی که هندوان ذکر کرده‌اند انواع دیگری از قبیل استخراج ریشه‌های چهارم و پنجم وششم وبالاتر افزوده‌ام و قبل از من کسی این مطالب را ذکر نکرده، براهین این کتاب عددی است و بر قسمتهای مربوط به حساب از کتاب اصول مبتنی می‌باشد.» [۷]

کتابی که خیام به آن اشاره می‌کند به احتمال قوی عبارتست از:

«رساله در صحت طرق هندی برای استخراج جذر و کعب» که متأسفانه از آن اثری نیست. اما از اینکه خیام در کتاب جبر و مقابلهٔ خود تصریح می‌کند که استخراج ریشه‌های چهارم و پنجم و بالاتر را به طرق هندی افزوده و قبل از وی کسی این مطالب را ذکر نکرده و نظر به این که مطالب مذکور بعد از خیام در کتب ریاضی نوشته شده و بعدها جزء مطالب درسی درآمده است می‌توان دانست که مخترع واقعی مثلث حسابی و دستور دوجمله‌ای (البته در حالت خاصی که قوهٔ دو جمله‌ای عدد صحیح مثبت باشد) همان خیام است [۱۱].

آقای **دکتر محسن هشترودی** در این باره می‌نویسد:

«بسط دوجمله‌ای جبری امروزه معمولا به نام **دوجمله‌ای نیوتن** معروف است چه اول بار، علی‌الظاهر، **نیوتن** این محاسبات را مدون کرده است، ولی با ملاحظهٔ اینکه **خیام** در کارهای خود این بسط و قانون تشکیل ضرایب آن را بکار برده است روشن می‌شود که **دوجمله‌ای نیوتن** و **مثلث پاسکال** بیش از چهار قرن پیش از این دو دانشمند توسط **خیام** کشف و وضع شده است.

در یکی از کنگره‌های بین المللی تاریخ علوم که در رم برپا شد دانشمندان خارجی به این امر اشاره کردند **وروزنفلد** از استادان دانشگاه مسکو پیشنهادی دائر بر تغییر نام دوجمله‌ای و مثلث به نام خیام به کنگره تقدیم داشت [۱۰]

کراسنوا (S.krasnovo)، یکی دیگر از محققین روسی، نسخهٔ تازه‌ای از کتاب جبر و مقابلهٔ خیام را کشف کرد و این بحث را بار دیگر مورد توجه قرار داد.

سمیث (D.E،Smith) در تاریخ ریاضیات خود می‌نویسد:

«بسط عبارت $(a+b)^n$ به ازای مقادیر مختلف n یا لااقل وسیلهٔ بدست آوردن ضرایب آن مدتها پیش از آنکه به اروپا برسد، در مشرق زمین شناخته شده بود. حالت $n=2$ را **اقلیدس** می‌دانست، اما تعمیم قاعده به ازای مقادیر مختلف n تا آنجا که اطلاع داریم در کتاب جبر **عمرخیام** آمده است [۱۹]

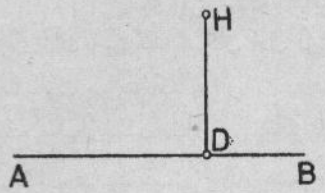
هگبن (L.Hogben) نیز در بارهٔ مثلث حسابی منسوب به **پاسکال** وارد بحث شده می‌گوید:

«... اینکه این مثلث حسابی را مثلث پاسکال می‌نامند برای آن است که پاسکال اول ریاضیدان فرانسوی است که به احتمالات ریاضی که اساس تئوری آمار است توجه کرده. در واقع سلسلهٔ مثلث حسابی را عمرخیام بدست آورد. این سلسله در کتاب «آئینهٔ قیمتی چهار عنصر» معرفی شد و این کتاب در حدود سال ۱۳۰۰ میلادی بوسیلهٔ ریاضیدان چینی **چوشی کی** (Chu-Shi-Kei) نوشته شده است[۱۱]

اثر معروف دیگر خیام در ریاضیات «رسالة فی شرح ما اشکل من مصادرات الاقلیدس» است. این رساله برای اولین بار در سال ۱۳۱۴ به کوشش **دکتر تقی ارانی** در تهران به چاپ رسید.[۱] **دکتر عبدالحمید صبره** نیز در بارهٔ این کتاب به تحقیق پرداخته و در سال ۱۹۶۱ میلادی نتایج پژوهش خود را به

صورت کتابی در اسکندریهٔ مصر به چاپ رسانید [۴] . آقای **جلال همائی** نیز این رساله را استادانه به فارسی ترجمه و تفسیر کرده و در سال ۱۳۴۶ در تهران چاپ کرده است [۹]. ترجمهٔ انگلیسی این رساله بوسیلهٔ **دکتر علیرضا امیرمعز** انجام شده[۱۴] ودر مجلهٔ (Scripta Mathematica)، چاپ آمریکا منتشر شده است. ترجمهٔ روسی این رساله بوسیلهٔ **روزنفلد و یوشگویچ** انجام‌شده است[۲] این رساله‌شامل سه کتاب است. خیام در نخستین کتاب اصل موضوع اقلیدس را در مورد توازی خطوط مورد بررسی قرار داده است . چنانکه می‌دانیم در کتاب هندسهٔ معروف به «تحریرات اقلیدس» اصلی مورد قبول قرار می‌گیرد که از آن به عنوان اصل موضوع (postulat) اقلیدس یا اصل توازی یاد می‌کنند و آن چنین است که از یك نقطه بیرون خطی مستقیم فقط می‌توان یك خط متوازی باآن خط رسم کرد. اقلیدس این اصل را به صورت قطعی و مسلم می‌پذیرد و چون وضوح و روش این اصل مانند سایر اصول اقلیدس (Axiomes) چندان بارزنیست از همان زمان برای تحلیل و منجر کردن این اصل به اصول دیگر اقلیدس کوششهایی بعمل‌آمده است. در حقیقت کسانی که به اثبات اصل توازی قیام کرده‌اند خواسته‌اند به این سؤال جواب دهند: «آیا می‌توان اصل توازی را از چهار اصل‌دیگر نتیجه گرفت؟ می‌توان ثابت کرد که ممکن است هندسه‌ای متضاد و یا منطبق طوری بناشود که در آن چهار پوستولاتوم به‌عنوان مقدمه و یك پوستولاتوم باقی به پوستولاتوم متضاد ذیل که **لوباچفسکی** هندسه‌دان روسی پیشنهاد می‌کند مبدل گردد،

« از یك نقطهٔ A واقع در خارج خط و روی صفحه‌ای که شامل هردو است می‌توان بینهایت خط مرور داد که خط اولی را قطع نکنند، تمام این خطوط غیرقاطع‌در داخل زاویه‌ای قرار دارند که رأس آن در A است.



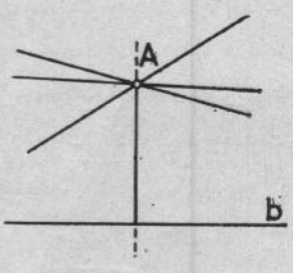
می‌توان به‌کمك «تئوری تعدد» **ریمان** ثابت کرد که بادستگاه جدید پوستولاتومها می‌توان هندسه‌ای که نمونهٔ کامل تضاد باشد بوجود آورد .

در هندسه‌های جدید که‌تئوری توازی در آنها تغییر کرده عده‌ای از مفهومها نیز از میان می‌رود. در هندسه‌های **ریمان** و **لوباچفسکی** حرکت ممکن است ولی تجانس ممکن‌نیست.

از این بیانات اهمیت اصل توازی وبالنتیجه کارهای‌خیام در این زمینه روشن می‌شود . در خلال تحقیق خیام مشاهده می‌شود که وی در قبول این حکم به صورت اصل مسلم مردد بنظر می‌رسد. و آن رااز بسیاری قضایا که اقلیدس خود راملزم به اثبات آنها دیده است، کمتر واضح می‌بیند، مثلا خیام اصل اقلیدس را ازاین قضیه که :

«زوایای‌مرکزی‌مساوی، در دو دایرهٔ‌متساوی، روبروی‌به کمانهای مساوانند» بغرنجتر احساس می‌کند.خیام کوششهایی‌راکه ریاضیدانان‌پیش ازاو مانند**هرون‌اسکندرانی و ابوالعباس نیریزی** برای اثبات اصل موضوع انجام‌داده بودند ردمی‌کند و آنها راقانع کننده‌نمی‌داند. خیام‌حتی‌استدلال **حسن‌بن‌الهیثم** را هم رد می‌کند. استدلال ابن‌هیثم براین اساس است که‌هرگاه پاره خطی برخط مفروض حرکت‌کند، انتهای بالای آن یك‌خط راست رسم می‌کند.

مثلا اگر خط AB خط مستقیم مفروضی باشدکه خط DH برآن عمود است، قضیه از این قراراست که اگر نقطهٔ D را بر خط AB متکی نگاه داشته همچنان خط HD را حرکت بدهیم از حرکت‌نقطهٔ H خط مستقیم دیگری رسم می‌شود که با خط AB موازی است .



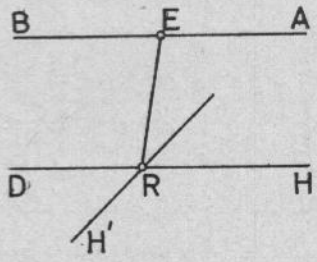
ابن هیثم دنبالهٔ این مقدمه را می‌گیرد و در کتاب «حل شکوك‌المقالة الاولی من کتاب اقلیدس» سعی می‌کند که قضیه را باکمك بعضی فرضیات مبهم، که در بارهٔ خواص حرکت‌مستقیم‌الخط یکنواخت می‌کند به اثبات برساند.

وی این قضیه را از خود به جای اصل موضوع‌اقلیدس می‌گذارد که:

«دو خط مستقیم متقاطع ممکن نیست بایك خط مستقیم دیگر موازی باشند » قطعاً مقصود ابن هیثم این است که دو خط متقاطع ممکن نیست که هردو باهم‌درعین‌حال که متقاطع‌اندباخط مستقیم مفروض ثالثی موازی باشند . و درغیراین صورت چه امتناعی داردکه از دو خط متقاطع یکی باخط سومی موازی وبا آن خط دیگرغیر موازی باشد .

ابن هیثم معتقد است که قضیه‌ای که‌او مطرح کرده‌به‌مراتب واضحتر از اصل موضوع اقلیدس است،

دو خط موازی AB و HD و قاطع RE مفروضند در این صورت دوزاویهٔ متبادلهٔ ERD و AER مساوی‌اند وگرنه به نقطهٔ R از خط RE زاویهٔ ERH را مساوی با زاویهٔ AHR رسم می‌کنیم آنگاه خط RH′ را از دوجهت امتداد می‌دهیم، و دراین صورت دو خط AB و RH′ متوازی‌خواهند بود برای اینکه دو زاویهٔ متبادلهٔ آنها مساوی فرض شده‌اند.



پس لازم می‌آید که دو خط RH′ و RD که بر نقطهٔ R تقاطع کرده‌اند موازی خط AB باشند و این امر مخالف آن قضیهٔ اساس است که گفتم دو خط متقاطع ممکن نیست(هردوباهم دریك‌حال) باخط مستقیم دیگری متوازی باشند.

خیام اساساً باروش‌کار و نظر **ابن‌هیثم** موافق نیست، زیرا او به پیروی از **ارسطو** تعاریفی از این قبیل کـه مکان حرکت را معلوم می‌کند از هندسه حذف مـی‌کند. خیام پس از مطالعهٔ کتاب «حل شکوك ابن هیثم» وی را شدیداً هدف انتقاد قرار داد و چهار اعتراض براستدلال وی وارد می‌کند:

اعتراض اول: «کیف یتحرك الخط علی الخطین مع انحفاظ القیام وای برهان علی ان هذاممکن»

«چگونه خطی بردو خط حرکت می‌کند، بااین فرض که قیامش از یك طرف ثابت و محفوظ باشد، وچه‌برهانی‌برامکان این عمل هست؟» به عبارت دیگر، خیام می‌خواهد بگوید؛ چـه دلیل برامکان‌این قضیه هست که‌مامی‌توانیم بوسیلهٔ حرکت دادن خطی برخط دیگر آنطورکه ابن هیثم فـرض کـرده است خط متوازی رسم کنیم؟»

اعتراض دوم ـ «ایة نسبة بین‌الهندسة والحرکة ومامعنی الحرکة»

«هندسه را باحـرکت چـه تناسب است و معنی حـرکت چیست؟»

یعنی حرکت از عوارض جسم طبیعی و جوهری‌است و با کمیت و مقدار عرض‌که موضوع علم هندسه است ارتباط نداردو این خود خارج شدن از موضوع علم است.

اعتراض سوم: «ان الخط عرض لایجوزان یکون الافـی سطح‌ذلك‌السطح فی‌جسم اویکون نفسه فی‌جسم من غیرتقدم سطح فکیف یجوز علیه‌الحرکة مجرداً عن موضوعه»

«خط از عوارض سطح و سطح از عوارض جسم، یـا خط مستقیماً از عوارض جسم است، بدون تقدم سطح؛ و در هـرحال چگونه ممکن است‌که خط عرضی را حرکت بدهیم بدون‌اینکه موضوع عرض یعنی سطح یاجسم حرکت‌کرده باشد؛»

اعتراض چهارم: «ان الخط‌کیف یحصل من‌حرکة النقطة و هوقبل النقطة بالذات والوجود»

«وجود نقطه بالذات بعد از خط یعنی فرع وجـود خط است، چنانکه وجود خط بالذات بعد ازوجود سطح است، پس چطور می‌گویندکه خط از حرکت نقطه حادث می‌شود و حـال آنکه خط وجوداً و ذاتاً قبل از نقطه است»

خیام همچنین براقلیدس اعتراض می‌کند ازایـن نظر که در تنظیم مبادی اصول هندسهٔ خود قصورکـرده و احیاناً مطالبی ذکرکرده‌که چندان مورد لزوم نیست واگرآن‌راحذف کنند خللی به ارکان قضایا و مسائل هندسی وارد نمی‌شود ودر مقابل یك قسمت از قضایاکه ذکرآنها در مبادی ضرورت داشته از قلم افتاده است‌که بایدآنها را اضافه‌کـرد از قبیل قضایـا و مسائل زیر:

«هرکمیت مقداری قابل تقسیم است الی‌غیرالنهایه و هیچ کمیت ومقداری از اجزاء غیرمنقسم یعنی جزء لایتجزاترکیب نشده‌است.

خیام معتقد است‌که بعضی از علمای هندسه خواسته‌انـد این‌قضایا را در خود هندسه‌اثبات‌کنند غافل ازاینکه‌مستلزم دور محال است، اما یك فیلسوف همچنانکه بابراهین فلسفی وجـود خط و دایره و سایرمبادی هندسه را اثبات‌کرده است می‌تواند آن قضایا را نیز اثبات‌کند، آن هم به طریق «برهان‌انی»یعنی پی بردن از معلول به علت نه «برهان‌لمی»که پی‌بـردن ازعلت است به معلول» [۹]

«معنی نامتناهی هندسی چیست و چگونه می‌گویند مثلا خطی مستقیم را الی غیرالنهایه اخراج می‌کنیم و حال آنکه در فلسفه اثبات شده‌که بعد نامتناهی محال است. وابعاد و اجسام همه متناهی است، حتی اینکه‌گفته‌اندکه خارج ازاجسام متناهی و ماوراء فلك محددجهات «لاخلاء ولاملاء» است.

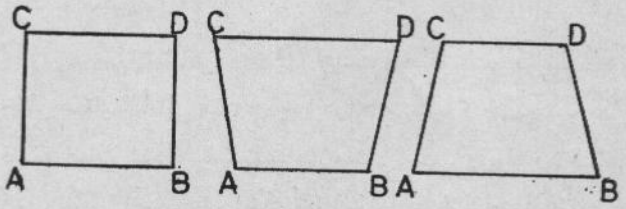
کوششی‌که خیام برای اثبات‌اصل‌موضوع اقلیدس می‌کند براساس اصل موضوع دیگری است‌که آن‌را منسوب به ارسطو می‌داند و این اصل چنین است:

«دو خطی که به هم نزدیك می‌شوند یکدیگر را قطع می‌کنند و برای دو خطی که از هم دور می‌شوند در «طرفی که فاصلهٔ آنها زیاد می‌شود نقطهٔ تلاقی وجود ندارد». عین عبارت خیام در بیان این اصل چنین است؛

«... و منها ان کل خطین مستقیمین متقاطعین وانهاالی الانفراج و الاتساع فی بعدهما عین زاویة التقاطع و منها ان الخطین المستقیمین المتضایقین فهما متقاطعان و لایجوزان یتسع خطان متضایقان فی مرور هماالی التضایق...»

خیام باتوسل به این اصل همهٔ قضایایی راکه مستقیماً از اصل موضوع پنجم اقلیدس حاصل می‌شود ثابت می‌کند. دراینجا روش خیام اصولا به کارهای **ابن هیثم** نزدیك است. خیام بالاخره چهارضلعی سه قائمه را مورد مطالعه قرار می‌دهد و ثابت می‌کند که زاویهٔ چهارم این چهار ضلعی هم قائمه است. برای این منظور ثابت می‌شود که اضلاع چهارضلعی دوبه‌دو برابرند (هرضلع که متصل به زاویهٔ چهارم است باضلع روبروی آن) این مطلب از راه برهان خلف ثابت می‌شود، یعنی ازاین راه که فرض؛ «زاویهٔ اول کوچکتر یا بزرگتر است از زاویهٔ دوم» به تناقض کشانده می‌شود. چهار ضلعی سه قائمه درمرکز توجه خیام قرارندارد، بلکه او بیشتر به چهار ضلعی ذوقائمتین متساوی‌الساقین اهمیت می‌دهد، فکرمربوط به این چهار ضلعی ممکن است از ابن‌هیثم به خیام رسیده باشد، ابن‌هیثم قضیه‌ای داردکه برطبق آن هرچهارضلعی ذوقائمتین متساوی‌الساقین بوسیلهٔ محور تقارن خود به دوچهارضلعی سه قائمه تقسیم می‌شود.

خیام ابتدا فرض می‌کند که دو زاویهٔ دیگرچهار ضلعی دو قائمهٔ متساوی‌الساقین (که باهم برابرند) حاده باشند سپس حالت منفرجه بودن آنها را مطرح می‌کند و در هردو حالت فرض را باکمك اصل خودش به تناقض می‌کشاند و به طریق برهان خلف ثابت می‌کند.



پس از خیام **خواجه نصیرالدین طوسی** و **علم‌الدین قیصر** نیز برای اثبات اصل موضوع اقلیدس قیام می‌کنند و خواجهٔ طوسی در «رسالهٔ شافیه» خود نظریات، خیام، والجوهری و ابن هیثم را مورد نقادی علمی قرار می‌دهد. و با استفاده از افکار آنها استدلال خاصی ذکر می‌کند. دراین رساله هم طوسی فرضهای حاده و یامنفرجه بودن دوزاویهٔ چهار ضلعی متساوی الساقین ذوقائمتین را رد می‌کند. توجه به دو نکته در اینجا ضروری است: نخست اینکه بین منطق‌وریاضیات نزد خیام و به تبع او در نظر خواجه نصیرالدین طوسی نوعی بستگی محکم وجود داردکه اصل توازی را به صورت دیگری عنوان می‌کندکه به نظراو منطقی‌تر از سبك اقلیدس است، دوم آنکه هندسه در نظرخیام علم به اشکال مجرد است که در فضای مجرد مستغرق‌اند و این‌نکته بسیارمهم است زیرا در هندسهٔ کلاسیك که به تحریر اقلیدس مستند است اشکال فضائی بیش از سه بعد ندارند و باید متوجه بودکه قدما ازفضا، فضای طبیعی، که جایگاه استقرار ماده و محل تغییر وضع وحرکت ماده است مراد می‌کردند و اغلب مسائل مورد بحث از قبیل تناهی‌ابعاد و قابلیت تقسیم بعد، از همین نکته‌ناشی می‌شودکه فضای‌هندسی مورد توجه قرار نمی‌گرفت، وچون‌فضای حسی ناچار به‌امکان تجربی انسانی محتاج بود بیش از سه بعد نمی‌پذیرفت.

در هندسهٔ تجریدی‌که امکان تجربی در آن مورد نظر نیست انحصار ابعاد به ابعاد سه‌گانه ضروری نیست وممکن است فضا را صاحب ابعادی بیش از سه بعد فرض‌کرد. و بایدمتوجه بودکه در این صورت غالب خواصی‌که در مورد فضای سه‌بعدی صادق است صحت خود رااز دست می‌دهد،مثلا دو سطح دوبعدی که در فضای عادی اگر متوازی‌نباشنددر یك خط مستقیم‌متقاطع می‌شوند در فضای چهار بعدی عموماً فقط در یك نقطه مشترك خواهندبود.

تصور فضای مجرد هم اکنون‌کمك شایانی در پیشرفت علوم ریاضی و فیزیکی نموده است. پیوستگی منطق و ریاضیات در نظر خیام به اصلی منجر می‌شودکه اکنون در فلسفهٔ علمی یکی از مبانی بنیانگذاری علوم محسوب می‌گردد و آن **اصل علت** (Causalité) به مفهوم علمی است. بحث در این مسئله در حوصلهٔ این گفتار نیست. فقط اشاره‌ای به آن‌کافی‌است که هرآن چیزی‌که به نام علت و معلول و بستگی علی بین‌آنها در علوم مورد بحث است، نوعی هم‌آهنگی ویکسانی در اندازه‌گیریها و نتایج مقایسات است‌که ثابت مانده و تغییر نمی‌کند و خیام به این مطالب توجه دقیقی دارد ودررباعیات خود به‌آن بارها اشاره‌کرده است.

«تابود نشان بودنیها بوده است» [۱۰]

استفادهٔ علمای مغرب زمین ازرسالهٔ خیام در اصل توازی خطوط

افکار **خیام** و **طوسی** در قرن هفدهم در اروپا اهمیتی

خاص کسب کرد. ارتباطی که این دو دانشمند بین اصل موضوع اقلیدس بامجموع زوایای یك چهارضلعی ویامعادل آن، مجموع زوایای یك‌مثلث، برقرار کردند، اساس کارهای بعدی واقع گردید.

لامبرت (Lambert) ریاضیدان سویسی دراواسط قرن هیجدهم در نظریهٔ خطوط موازی‌خود، چهارضلعی‌سه‌قائمه را مورد مطالعه قرار می‌دهد، اوهم مثل **ابن‌هیثم** برای زاویهٔ چهارم این چهار ضلعی فرضهای حاده و منفرجه بودن را پیش می‌کشد. کمی قبل ازآن در نیمهٔ اول قرن هیجدهم **ساکری** (J.Saccheri) دانشمند ایتالیائی اساس نظریهٔ خود را در بارهٔ خطوط موازی بر مطالعهٔ همان چهارضلعی متساوی الساقین ذوقائمین که‌خیام فرض کرده بود قرار می‌دهد . وی در چهار-ضلعی ABCD که اضلاع AD و BC ازآن برابروعمودبر AB می‌باشند، سه حالت را در نظرمی گیرد.

۱- C و D هردو قائمه می‌باشند و در این حالت‌مجموع زوایای هرمثلث برابر بادو قائمه است و ازآن فرض اقلیدس‌را می‌توان نتیجه گرفت.

۲- دو زاویهٔ C و D هردو حاده می‌باشند دراین حالت مجموع زوایای هرمثلث کمتر از دوقائمه است.

۳- دو زاویهٔ C و D هر دو منفرجه می‌باشند در این حالت مجموع زوایای هرمثلث بیشتر از دو قائمه است .

ولی نتیجهٔ اخیر بافرض ادامهٔ‌نامحدود خط متناقض‌است.

ساکری تبصرهٔ مهمی افزوده می‌گوید؛ اگر در یك مثلث مجموع زوایا برابر دو قائمه باشد، در تمام مثلثها این قضیه صادق خواهدبود.

وی بااین‌کار امکان منطقی هندسه‌ای‌که در آن مجموع زوایای هرمثلث کمتر ازدوقائمه باشد، درنظر گرفت،

قضایای‌جداگانهٔ‌ریاضیدانان اسلامی دربارهٔ خواص‌چهار-ضلعی مورد مطالعهٔ آنها دربارهٔ فرضهای حاده و منفرجه‌بودن زوایا در حقیقت نخستین قضایای هندسه‌های غیراقلیدسی **لباچفسکی وریمان** هستند. زیرا در هندسهٔ‌لوباچفسکی‌فرض زوایای حاده و در هندسهٔ ریمان فرض زوایای منفرجه صدق می‌کنند. و بدین ترتیب آثارریاضیدانان اسلامی دربارهٔ نظریهٔ خطوط موازی و بین‌آنهاکوششهای خیام الهام دهندهٔ اصلی کشف هندسهٔ غیر اقلیدسی بوده است.

دنباله دارد

* * * *

اشتباههای مربوط به مندرجات یکان سال ۱۳۵۱

(از همهٔ علاقمندانی که اشتباههای یکان سال۵۱ را متذکر شده‌اند سپاسگزاری می‌شود)

- صفحهٔ ۵ سطر ۱۸ از ستون دوم باید چنین باشد:

$$k\cos A - 2\sin A\cos A > 0$$

- صفحهٔ ۳۵ سطر ۱۷ از ستون اول باید چنین‌باشد:

۶ — d مضرب ۵ و

سایر اشتباهها:

صفحه	ستون	سطر	غلط	صحیح
۶۹	۱	آخر	بسیاربزرگ	بسیارزیبا
۸۴	۲	۱۴	$F(x)$	$F(2)$
۸۴	۲	۱۸	$cotg\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}cotg x$
۸۴	۲	۲۵	$2x(4)$	$tg\,2x(4)$
۱۲۱	۱	۱۳	۲—۲	۴—۲
۱۲۱	۱	۱۳	۳—۴	۱—۴
»	»	۱۶	۱—۱۷	۳—۱۷
»	»	۲۱	۲—۴۴	۴—۴۴
»	»	۲۲	۱—۴۶	۴—۴۶
»	۲	۱	۱—۳۱	۴—۳۱
۱۶۶	۲	۱۶	۲—۳۵	۳—۳۵
»	»	۱۹	۲—۵۰	۳—۵۰

- صفحهٔ ۲۱۲ رابطهٔ مربوط به مسئلهٔ ۶ به صورت زیر صحیح است :

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{2}\right\}^2=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

تعمیم قطب و قطبی

علیرضا امیرمعز ـ دانشگاه تکزاس تک

قطب و قطبی را می‌توان در جهتهای مختلف تعمیم داد. در این مقاله قطبی یك نقطه را نسبت به یك منحنی جبری که معادلهٔ آن چند جمله‌ای درجهٔ k بادو متغیر x و y است بررسی می‌کنیم و تعمیم آنرا به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۱ـ منحنیهای جبری ـ روشن است که معادلهٔ درجهٔ سوم

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+gx^2+hxy+ky^2+px+qy+r=0$$

را چنین می‌توان نوشت:

$$f_3(x,y)+f_2(x,y)+f_1(x,y)+f_0=0$$

که $f_3(x,y)$ صورت درجهٔ سوم است، $f_2(x,y)$ صورت درجهٔ دوم ، $f_1(x,y)$ صورت درجهٔ اول و f_0 صورت درجهٔ صفر یا مقدار ثابت. باید توجه کرد که صورتها همه همگن‌اند . مثلا جمله‌های صورت درجهٔ سوم نسبت به x و y درجهٔ سوم‌اند.

اکنون بطور کلی معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f_k(x,y)+f_{k-1}(x,y)+\cdots+f_1(x,y)+f_0=0 \qquad (1)$$

در این معادله، مثلا، $f_p(x,y)$ یك صورت درجهٔ p ام است یعنی تمام جملات آن نسبت به x و y از درجهٔ p ام‌اند . در معادلهٔ (۱)، باید متذکر شد که‌اقلا یکی از ضرایب $f_k(x,y)$ مخالف صفر است.

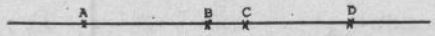
۲ـ تلاقی یك خط و یك منحنی جبری ـ معادلات پارامتری یك خط مستقیم ازاین قرارند:

$$\begin{cases} x=x_1+tl \\ y=y_1+tm \end{cases} \qquad (2)$$

محل تلاقی منحنی (۱) و خط از یك معادلهٔ درجهٔ k ام بدست می‌آید. معمولا ریشه‌های این معادله را نمی‌توان به آسانی بدست آورد. ولی در این مقاله فقط روابط بین‌ریشه‌ها وضرایب مورد نظراست.

۳ـ مجموعهٔ توافقی مرکزی ـ ابتدا یك دستگاه توافقی را مطالعه می‌کنیم. فرض کنیم که $(ABCD)$ یك دستگاه توافقی باشد، یعنی نقاط A، B، C، D بر یك خط قرار دارند (مطابق شکل) بقسمی که:

$$\frac{AC}{AD}=-\frac{BC}{BD} \qquad (3)$$



اکنون خط AB را به یك آسه تبدیل می‌کنیم بقسمی که صفر مربوط به A باشد ، t مربوط به B ، t_1 مربوط به C و t_2 مربوط به D. در این صورت (۳) چنین می‌شود:

$$\frac{0-t_1}{0-t_2}=-\frac{t-t_1}{t-t_2}$$

از این تساوی بدست می‌آید:

$$\frac{2}{t}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}$$

اکنون این موضوع را تعمیم می‌دهیم ، فرض کنیم که $(k+1)$ نقطهٔ A، A_1، A_2، ...، A_k روی‌یك محور باشند بقسمی که‌صفر مربوط به نقطهٔ A باشد و t_j مربوط به نقطهٔ A_j چنانچه $J=1,\ldots,k$ فرض کنیم که t مربوط به‌نقطهٔ B باشد بقسمی که

$$\frac{k}{t}=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t_j}$$

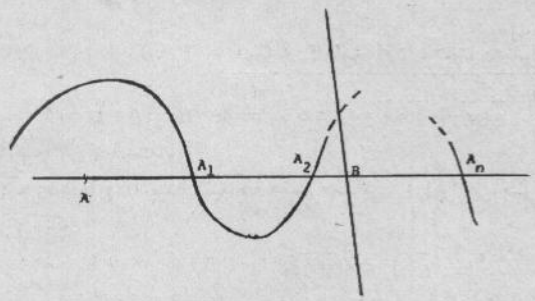
در این صورت‌نقطهٔ B را نیز مزدوج توافقی A نسبت به‌مجموعهٔ نقاط $\{A_1,\ldots,A_k\}$ می خوانیم . مقدار t رامیانگین‌توافقی اعداد t_1، ...، t_k گوئیم.

۴ـ قطب و قطبی ـ منحنی درجهٔ nام زیر را در نظر می‌گیریم

$$f_n(x,y)+\cdots+f_1(x,y)+f_0=0 \qquad (4)$$

فرض کنیم که A یك نقطهٔ ثابت در صفحه باشد.هرخط مستقیم مار بر A منحنی را در n نقطهٔ A_1، ...، A_n قطع می‌کند، بعضی از این نقاط ممکن است مجازی باشند ، فرض کنیم B

مزدوج توافقی A نسبت به‌مجموعهٔ نقاط $\{A_1 و \cdots و A_n\}$ باشد



در این صورت مکان هندسی B خطی است مستقیم که قطبی نقطهٔ A نسبت به منحنی (۴) است

برهان ـ برای ساده‌کردن مسئله مبدأ مختصات را بر نقطهٔ A قرار می‌دهیم در این صورت معادلات پارامتری یك خط‌مار بر نقطهٔ A به قرار زیر است

$$(۵)\quad \begin{cases} x=tl \\ y=tm \end{cases}$$

محل تلاقی این خط و منحنی (۴) از یك معادلهٔ درجهٔ n ام بدست‌می‌آید.

$$(۶)\quad [f_n(l,m)]t^n+\cdots+[f_1(l,m)]t+f_0=0$$

البته حالتی‌که $f_n(l,m)\neq 0$ است را درنظر گرفته‌ایم، اکنون فرض‌کنیم‌که $t_1,\cdots,t_n$ ریشه‌های معادلهٔ (۶) باشند بقسمی که A_i مربوط است به t_i و $i=1,\cdots,n$ (باید متذکرشد که بعضی از این ریشه ممکن است مجازی باشد) حال فرض می‌کنیم‌که t مربوط به B باشد چنانکه:

$$(۷)\quad \frac{x}{t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}=\frac{t_2\cdots t_n+\cdots+t_1\cdots t_n}{t_1\cdots t_n}$$

هرحاصل‌ضرب درصورت این‌کسر از $(n-1)$ ریشهٔ(۶)تشکیل می‌شود و مخرج آن حاصل‌ضرب تمام ریشه‌هاست. به‌این ترتیب (۷) چنین می‌شود:

$$\frac{n}{t}=-\frac{f_1(l,m)}{f_0}$$

البته حالتی‌که $f_0\neq 0$ و $f_1(l,m)\neq 0$ است درنظر گرفته‌ایم بنابراین

$$t=-\frac{nf_0}{f_1(l,m)}$$

اکنون فرض می‌کنیم‌که:

$$f_1(x,y)=px+qy \text{ و } f_0=r$$

باشند در این صورت

$$t=\frac{-nr}{pl+qm}$$

هرگاه مقدار t را در معادلهٔ خط قرار دهیم چنین نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} x=\dfrac{-nr}{pl+qm} \\ y=\dfrac{-nrm}{pl+qm} \end{cases}$$

این دستگاه معادلات بدل می‌شودبه:

$$\begin{cases} (px+nr)l+qxm=0 \\ pyl+(qy+nr)m=0 \end{cases}$$

این دستگاه دو معادلهٔ همگن درجهٔ اول باید جواب مخالف‌صفر داشته باشد یعنی $(l,m)\neq(0,0)$. بنابراین دترمینان ضرائب باید صفرباشد:

$$\begin{vmatrix} px+nr & qx \\ py & qy+nr \end{vmatrix}=0$$

این معادله را می‌توان ساده‌کرد و بدست‌آورد که

$$px+qy+nr=0$$

که معادلهٔ یك خط مستقیم است.

البته حالات خاصی را خواننده می‌تواند بررسی‌کند

۵ـ پیشنهاد ـ قضیهٔ قسمت ۴ را می‌توان در جهات مختلف تعمیم‌داد، به این ترتیب چندین وجه آنرا پیشنهاد می‌کنیم.

الف ـ قضیهٔ قطب و قطبی را نسبت به یك سطح $(n-1)$ بعدی جبری درجهٔ k در فضای n بعدی اقلیدسی بررسی‌کنید. قضیه و برهان‌کاملا شبیه بخش [۴] است.

ب ـ در صفحه می‌توان قطبی دوم ،...، قطبی k ام را تعریف‌کرد و به جای خط مستقیم منحنیهای جبری بدست آورد.

ج ـ موضوع قسمت [ب] را می‌توان به فضای n بعدی اقلیدسی‌تعمیم‌داد.

د ـ آیا ممکن است‌موضوع قطب و قطبی را برای‌توابعی که **سری تایلور** دارند تعمیم داد؟

متمم حسابی یک عدد ـ واسطهٔ تربیعی چند عدد

تهیه و تنظیم از: محمد معینی

۱ـ متمم حسابی یك عدد

تعریف ـ اگرعدد N که در پایهٔ B نوشته شده است n رقمی باشد، عدد $B^n - N$ متمم‌حسابی آن درپایهٔ B نامیده می‌شود. البته توجه داریم که رقم سمت چپ عددغیر ازصفراست.

چند مثال:

ـ متمم حسابی عدد ۷ برابر است با: $۱۰ - ۷ = ۳$

ـ متمم حسابی عدد ۳۹۴ برابر است با:

$$۱۰^۳ - ۳۹۴ = ۶۰۶$$

ـ متمم حسابی عدد $(۳۰۵)_۷$ برابراست با:

$$۷^۳ - (۳۰۵)_۷ = (۱۰۰۰)_۷ - (۳۰۵)_۷ = (۳۶۲)_۷$$

برای آنکه عددی با متمم حسابی خود برابر باشد، لازم است که پایهٔ عددنویسی مربوط زوج باشد، و در این‌صورت رقم سمت چپ عدد برابر بانصف پایه بوده و سایر رقمهای آن صفراست:

$$B^n - (N)_B = (N)_B$$

$$\Longrightarrow (N)_B = \frac{B^n}{۲} = \left(\frac{B}{۲}\circ\circ\ldots\circ\right)_B$$

مثلا عدد دو رقمی که بامتمم حسابی خود برابر باشد۵۰ است. همچنین در پایهٔ ۸ عددی سه‌رقمی که با متمم حسابی‌خود برابر باشد $(۴۰۰)_۸$ است:

$$۸^۳ - (۴۰۰)_۸ = (۱۰۰۰)_۸ - (۴۰۰)_۸ = (۴۰۰)_۸$$

چندمسئله:

۱ـ عدد سه رقمی $\overline{aba}$ را پیدا کنید که متمم حسابی آن $\overline{baa}$ باشد.

$$\overline{aba} + \overline{baa} = ۱۰۰۰ \Longrightarrow a = ۵ \text{ و } b = ۴$$

عدد مطلوب ۴۵۴ است.

۲ـ عدد $\overline{ab}$ را پیدا کنید که متمم حسابی $(\overline{ab})_۸$ برابر باشد با $(\overline{ab})_۶$.

$$۸^۲ - (\overline{ab})_۸ = (\overline{ab})_۶$$

$$۷a + b = ۳۲ \Longrightarrow a = ۴ \text{ و } b = ۴$$

عدد مطلوب ۴۴ است.

۲ـ واسطهٔ تربیعی چند عدد

جذر واسطهٔ حسابی مجذورات چند عدد، واسطهٔ تربیعی آنها نامیده می‌شود. واسطهٔ تربیعی n عدد $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ برابر است با:

$$\sqrt{\frac{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲ + \cdots + a_n^۲}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma a_i^۲}{n}}$$

قضیه: واسطهٔ تربیعی چندعد بزرگتر(ویا مساوی)است از قدر مطلق واسطهٔ حسابی آنها یعنی:

$$\frac{|a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_n|}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲ + \cdots + a_n^۲}{n}}$$

(تساوی برای حالتی است که $a_۱ = a_۲ = a_۳ = \ldots = a_n$ باشد).

اثبات این قضیه بااستفاده از اتحاد:

$$(\Sigma a_i)^۲ = \Sigma a_i^۲ + ۲\Sigma a_i a_j$$

و نامساوی $۲a_i a_j \leqslant a_i^۲ + a_j^۲$ به سادگی انجام می گیرد

آیا عجیب نیست؟

ترجمهٔ: فتح‌الله‌زرگری

۱ـ می‌دانیم که در هرمثلث قائم الزاویه، مجذورتر برابر است با مجموع مجذورات دو ضلع دیگر، حال آیا عجیب‌نیست که در یك مثلث قائم الزاویه مجذور وتر برابرباشد با مجموع دو ضلع دیگر؟ در این مورد دو مثال ذکر می کنیم:

مثال ۱ : مثلث به ضلعهای ۰/۴ و ۱/۲ و $\sqrt{۱/۶}$ قائم‌الزاویه است زیرا :

$$۰/۴^۲ + ۱/۲^۲ = ۰/۱۶ + ۱/۴۴ = ۱/۶$$

در این مثلث درعین‌حال داریم: $۰/۴ + ۱/۲ = ۱/۶$

مثال۲: مثلث به ضلعهای $\frac{۵}{۱۷}$ و $۱\frac{۳}{۱۷}$ و $\sqrt{۱\frac{۸}{۱۷}}$ نیز همین خاصیت را دارد؛

$$\left(\frac{۵}{۱۷}\right)^۲ + \left(۱\frac{۳}{۱۷}\right)^۲ = \frac{۵}{۱۷} + ۱\frac{۳}{۱۷} = ۱\frac{۸}{۱۷}$$

یکان ـ فرمول کلی اندازه‌های مثلث قائم الزاویهٔ با خاصیت مذکور در بالا دریکی از شماره‌های گذشتهٔ یکان ارائه شده است.

۲ـ مجذور قطر مکعب مستطیل برابر است با مجموع مجذورات سه‌بعد آن.. اما می‌توان مکعب مستطیلهایی یافت که درآنها مجذور قطر برابراست بامجموع سه‌بعد، به‌دومثال‌زیر توجه کنید؛

$$۰/۱۲^۲ + ۰/۸۴^۲ + ۱/۲^۲ = ۰/۱۲ + ۰/۸۴ + ۱/۲ = ۲/۱۶$$

$$\left(\frac{۴}{۱۵}\right)^۲ + \left(\frac{۸}{۱۵}\right)^۲ + \left(۱\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۴}{۱۵} + \frac{۸}{۱۵} + ۱\frac{۱}{۳} = ۲\frac{۲}{۱۵}$$

در اثبات سه قضیهٔ هندسی: «قضیهٔ اساسی برای تعیین مساحت مستطیل» و «قضیهٔ تالس» و «قضیهٔ اساسی برای تعیین حجم هرم = قضیهٔ کاوالیری»، در حالتی که پاره خطها برحسب واحد طول اندازه‌ناپذیر باشند مشکلی پیش می‌آید که معمولا با روش موسوم به «قاعدهٔ افناء» و با توسل به حدود برطرف می‌گردد.

در این مورد دو مقاله واصل شده است که در زیر درج می‌شوند، در مقالهٔ اول که ترجمهٔ از مجلات روسی است ، هرسه قضیه با برهان خلف و بدون کار برد قاعدهٔ افناء اثبات شده است. در مقالهٔ دوم که توسط دانشمند وهمکار گرامی آقای رزاقی خمسی نگاشته شده است. برهان مستقیم قضیهٔ اساسی حجم هرم ارائه گردیده است. یکان

اثبات بابرهان خلف سه قضیهٔ معروف هندسی

ترجمهٔ: فتح‌الله زرگری

این مقاله در مورد اثبات سه قضیهٔ زیر تهیه شده است :

قضیهٔ I : مساحت مستطیل برابر با حاصل‌ضرب طول و عرض آن است .

قضیهٔ II : اگر دو خط توسط یك دسته خطوط موازی قطع شوند، قطعات جدا شدهٔ روی آنها با یکدیگر متناسبند.

قضیهٔ III : حجم هرم برابر است با مساحت قاعدهٔ آن در یك سوم طول ارتفاعش.

در قضایای I و II حالت قطعات غیر قابل مقایسه یا بررسی نمی‌شود و یا از تئوری حدود استفاده می‌گردد. منظور از این مقاله نشان دادن آن است که بدون تئوری حدود نیز می‌توان به این نتایج رسید، در مورد قضیهٔ سوم نیز می‌توان همین حرفها را زد.

برای بررسی قضیهٔ I فرض می‌کنیم به هر کثیرالاضلاع A یك عدد مثبت $S(A)$ به عنوان مساحت آن که دارای سه خاصیت زیر است وابسته باشد.

۱) مساحت مربع به ضلع واحد مساوی واحد است.

۲) اگر کثیرالاضلاع A را به دو کثیرالاضلاع B و C بدون نقطهٔ مشترك داخلی تقسیم کنیم خواهیم داشت:

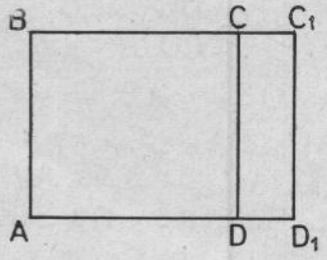
$$S(A)=S(B)+S(C)$$

۳) کثیرالاضلاعهای مساوی دارای مساحات مساویند.

در مورد حجم هرم در اثبات قضیهٔ III نیز همین قرار‌دادها را بکار می‌بریم.

اثبات قضیهٔ I : فرض می‌کنیم این قضیه (به روش معمولی) در مورد مستطیلی که اضلاع آن قابل مقایسه است ثابت باشد. نشان می‌دهیم که قضیه در موردی که فقط یکی از اضلاع قابل مقایسه با واحد اندازه‌گیری باشد نیز ثابت است.

فرض کنیم طول ضلع AB عدد گویای p و طول ضلع AD عدد گنگ α باشد.



ثابت می‌کنیم که مساحت S مستطیل ABCD برابر $p\alpha$ است، یعنی:

$$S=p\alpha \quad (1)$$

عکس این حالت یعنی $S\neq p\alpha$ را فرض می‌کنیم. در این‌صورت یا $S>p\alpha$ یا $S<p\alpha$ می باشد. حالت اول را بررسی می‌کنیم.

از آنجا که $\frac{S}{p}>\alpha$ است بنابراین بین این اعداد حقیقی یك عدد گویا مانند q قرار دارد :

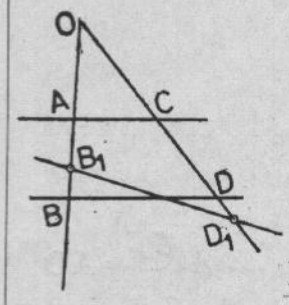
$$\frac{S}{p}>q>\alpha$$

فرض کنیم طول قطعهٔ AD_1 برابر q باشد در این صورت مستطیل ABC_1D_1 شامل مستطیل ABCD بوده و مساحت آن S_1 بزرگتر از S خواهد بود . چون طول اضلاع مستطیل ABC_1D_1 اعداد گویائی هستند بنابراین $S_1=pq$ و بنا به مقدار انتخاب شده برای q داریم $S_1<S$ به این ترتیب نامساویهای $S_1>S$ و $S_1<S$ را بدست آوردیم که مخالف یکدیگرند، حالت $S<p\alpha$ نیز به همین ترتیب

به تناقض برخورد می‌کند. بنابراین فرمول (۱) ثابت است.

باقی می‌ماند ثابت کنیم که فرمول (۱) وقتی p گنگ باشد نیز درست است، دو باره فرض می‌کنیم $S \neq P\alpha$ باشد و ابتدا حالت $S > p\alpha$ را بررسی می‌کنیم. حالت قبل و عدد q گویا را دوباره در نظر می‌گیریم. چون مستطیل ABC_1D_1 دارای یك ضلع AD_1 به طول q گویا می‌باشد. بنابراین طبق حالت قبل مساحت آن $S_1 = pq$ بوده و طبق فرضی که برای q کردیم $S_1 > S$ می‌باشد. از طرفی دیگر چون مستطیل ABC_1D_1 شامل مستطیل $ABCD$ می‌باشد نتیجه می‌گیریم که $S_1 > S$ است در نتیجه فرض $S < p\alpha$ نیز به تناقض بر می‌خورد. بنابراین فرمول (۱) برای کلیهٔ حالات ثابت است.

اثبات قضیهٔ II ـ دو خط متوازی AC و BD دو خط متقاطع در O را تلاقی کرده‌اند. فرض می‌کنیم که قضیه در حالتی که OA و AB قابل مقایسه باشند ثابت شده باشد (به روش معمول). اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که این دو قطعه قابل مقایسه نباشند. اگر $\frac{BA}{AO} \neq \frac{DC}{CO}$ باشد ابتدا حالت $\frac{BA}{AO} > \frac{DC}{CO}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. عدد گویای p را طوری در نظر می‌گیریم که $\frac{BA}{AO} > p > \frac{DC}{CO}$



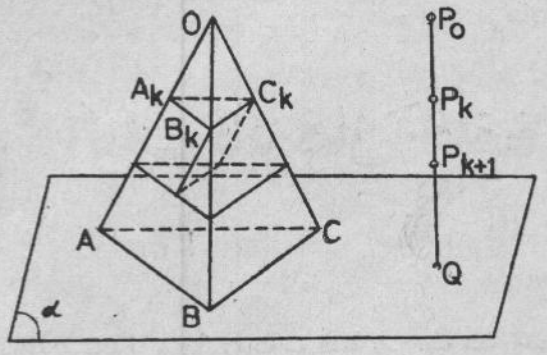
و قطعه خط AB_1 به طول $p.AO$ باشند. طبق مقداری که برای p فرض کردیم $p.AO < BA$ یعنی نقطهٔ B_1 بین A و B قرار گرفته است. $B_1D_1 \| AC$ را رسم می‌کنیم. چون قطعات OA و AB_1 طبق ترسیم قابل مقایسه هستند نتیجه می‌شود $\frac{D_1C}{CO} = \frac{B_1A}{AO} = p$ و از اینجا $D_1C = pCO > DC$ را طبق مقداری که برای p فرض کردیم بدست می‌آوریم. به این ترتیب نقطهٔ D_1 در خارج قطعه خط CD قرار دارد. بنابراین خطوط B_1D_1 و BD متقاطعند و این مخالف موازی بودن BD و B_1D_1 است (زیرا که $BD \| AC$ و $B_1D_1 \| AC$) به این ترتیب فرض $\frac{BA}{AO} > \frac{DC}{CO}$ به تناقض برمی‌خورد.

نامساوی عکس نامساوی اخیر نیز به همین ترتیب به تناقض برخورد می‌کند، بنابراین $\frac{BA}{AO} = \frac{DC}{CO}$ بوده و قضیه ثابت است

اثبات قضیهٔ III ـ هرم مثلث القاعده‌ای به مساحت قاعدهٔ S و به ارتفاع H و حجم V را در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم $V < \frac{1}{3}SH$ باشد، سپس باروش معمولی جسم پلکان وار را می‌سازیم. فرض کنیم α صفحهٔ قاعدهٔ هرم $OABC$ و قطعهٔ P_0Q عمود بر α (نقطهٔ Q روی صفحهٔ α قرار دارد) به طول H باشد. طبق فرض قبل می‌توان عدد طبیعی مانند n را آنقدر بزرگ در نظر گرفت که نامساوی زیر برقرار باشد.

$$\frac{V}{SH} > \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} < \frac{1}{3} \qquad (2)$$

قطعهٔ P_0Q را به کمك نقاط $p_1, p_2, \ldots, p_n = Q$ به n قطعهٔ مساوی تقسیم کرده وازهر نقطه مانند p_k صفحهٔ α_k را موازی با α مرور می‌دهیم. صفحهٔ α_k یالها را در نقاط A_k و B_k و C_k قطع می‌کند.



از قطعهٔ B_kC_k صفحهٔ β_k را موازی با OA مرور می‌دهیم. وجوه جانبی هرم و صفحات α_k و α_{k+1} و β_k تشکیل منشوری را می‌دهند که درداخل هرم اصلی قراردارد. این منشور و حجم آن را با V_k نمایش می‌دهیم.

جسم پلکان وار متشکل از منشور V_k دارای حجم $V' = V_1 + V_2 + \ldots + V_{n+1}$ بوده و درداخل هرم قراردارد بنابراین $V' < V$ می‌باشد. V_k را حساب می‌کنیم. ارتفاع این منشور برابر $\frac{1}{n}H$ می‌باشد. S_k مساحت قاعدهٔ $A_kB_kC_k$ برابر $\left(\frac{k}{n}\right)^2 S$ وچون دومثلث ABC و $A_kB_kC_k$ متشابهند داریم. $\frac{S_k}{S} = \left(\frac{p_0p_k}{p_0Q}\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2$. به این ترتیب $V_k = \frac{k^2}{n^3}SH$ و طبق مقداری که برای n (نامساوی (۲) در نظر گرفتیم داریم:

$$V' = \frac{SH}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2\right] =$$

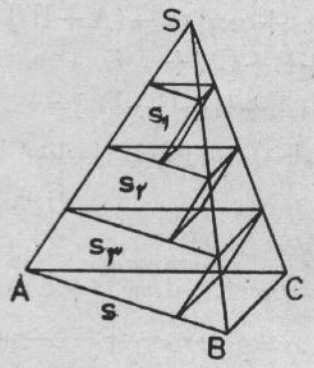
$$= \frac{SH}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = SH\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) > V$$

دو نامساوی متناقض $V' < V$ و $V' > V$ را نتیجه گرفتیم پس فرض $V < \frac{SH}{3}$ غلط است. فرض $V > \frac{1}{3}SH$ نیز به همین ترتیب به تناقض برمی‌خورد. بنابراین قضیه ثابت است.

محاسبهٔ مستقیم حجم هرم

از: م ـ ح رزاقی خمسی

در کتاب هندسهٔ فضایی کلاس پنجم ریاضی برای محاسبهٔ حجم هرم ابتدا درهرم مثلث القاعدهٔ $S.ABC$ تعدادی منشور مثلث‌القاعده محاط کرده و ثابت می کنند که حجم‌مجموع این منشورها وقتی که تعداد آنها بینهایت می‌شود میل می کند به سمت حجم‌هرم، سپس‌به کمك دوقضیهٔ دیگر به دستورحجم‌هرم می‌رسند. در اینجا می‌خواهیم راه جدیدی ارائه داده و مستقیماً حجم هرم را محاسبه نمائیم:



اگر یال SA را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و از نقاط تقسیم شده صفحاتی متوازی قاعدهٔ ABC رسم کرده و مطابق‌شکل منشورهایی‌درهرم محاط نمائیم، تعداداین‌منشورها $(n-1)$ خواهد بود.

اگر V_n مجموع حجمهای این منشورهای محاطی باشد دیده می‌شودکه V_n تابعی است از s و h و n (مساحت مثلث ABC را s و ارتفاع هرم را h می‌نامیم) برای محاسبهٔ V_n باید حجم هر یك از منشورها را محاسبه‌کرده و بعد آنها را باهم جمع کنیم:

ارتفاع هریك از منشورها $\frac{h}{n}$ بوده و داریم:

$$(1)\quad V_n = s_1\cdot\frac{h}{n} + s_2\cdot\frac{h}{n} + \cdots s_{n-1}\cdot\frac{h}{n}$$

حال برای محاسبهٔ s_1 و s_2 و $\ldots s_{n-1}$ می‌نویسیم:

$$\frac{s_1}{s} = \frac{\left(\frac{h}{n}\right)^2}{h^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{s_2}{s} = \frac{\left(\frac{2h}{n}\right)^2}{h^2} = \frac{2^2}{n^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{s_{n-1}}{s} = \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

در نتیجه رابطهٔ (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$(2)\quad V_n = \frac{s\cdot h}{n^3}\left[1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right]$$

با توجه به رابطهٔ شناخته شدهٔ زیر:

$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تساوی (۲) چنین نوشته می‌شود

$$(3)\quad V_n = \frac{s\cdot h(2n^2-3n+1)}{6n^2} = s\cdot h\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)$$

وقتی‌که n به سمت بینهایت میل‌کند تساوی (۳) به صورت‌زیر درمی‌آید:

$$V_n \to V = \frac{s\cdot h}{3}$$

(V مساوی است باحجم هرم $S.ABC$)

اگر قاعدهٔ هرم یك چندضلعی غیرمشخصی باشد به‌آسانی‌به‌کمك آنچه گفته شده ثابت می‌شودکه حجم هرم مساویست با مساحت قاعده ضرب در ثلث ارتفاع آن

معرفی کتاب

گویا و گنگ

نشریهٔ دانشجویان گروه ریاضی دانشگاه تهران

فروردین ۱۳۵۲

شامل مقالات: اعداد اول ـ انجمن ریاضی ایران پارادوکسهای ریاضی و منطقی ـ گزارشی ازچهارمین کنفرانس ریاضی کشور ـ اعدادکاردینال ـ مثال نقیض.

هیئت تحریریه: محمود احسانی ـ ناصرعصاره ـ خسرو بیرجندی ـ عباس کرمیان ـ محمد رضادرفشه ـ بهزاد کمالی ـ عزت‌الله‌سلیمی ـ منوچهر میثاقیان،

قوانین سینوسها و کسینوسها در چند ضلعی ها

ترجمهٔ: جعفر آقایانی چاوشی

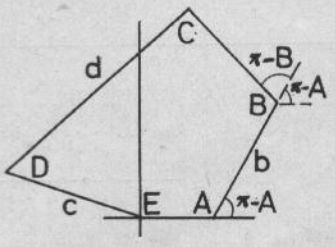
در این مقاله قوانین سینوسها و کسینوسهای مثلث را در حالت کلی برای چند ضلعیها مورد بررسی قرار داده و قوانین مشابهی برای چند ضلعی‌ها بدست می‌آوریم.

این قوانین بسیار جالب و مفید ودر عین‌حال مقدماتی می‌باشند. به سختی می‌توان آنها را موضوع تازه‌ای پنداشت؛ ولی به هرحال موضوعی است که به ندرت مورد بحث واقع‌شده است و اکنون مستقلا عنوان می گردد.

نویسنده این قوانین را حائزاهمیت زیاد یافته وامیدوار است که دیگران نیز همین احساس‌را نسبت به آنهاداشته وآنها را مفید تلقی نمایند،

در اینجا قوانین مزبور را برای پنج ضلعی وشش ضلعی مطرح و اثبات کرده سپس تفاوت جزئی بین حالتی راکه تعداد اضلاع‌فرداست باحالتی که عدهٔ اضلاع‌زوج‌می‌باشد توضیح‌می‌دهیم

فرض می کنیم A وB وC وD وE زوایا و a وb وc وd وe اضلاع یك پنج‌ضلعی باشند بقسمی که اضلاع a و b متعلق به زاویهٔ A باشند



این پنج ضلعی‌را مطابق شکل در دستگاه مختصات دکارتی قرار می‌دهیم بطوری که مختصات مبدأ ومنتهای ضلع a، به ترتیب (۰ و ۰) و (۰ و a) باشد. بدیهی است که زاویهٔ شیب ضلع b نسبت به‌محور طولهابرابراست با $\pi - A$ برای بدست آوردن زاویهٔ‌شیب‌ضلع c نخست باید آنرا به‌اندازهٔ $\pi - B$ دوران داد تا بر امتداد ضلع b قرارگیرد بالنتیجه زاویهٔ شیب ضلع c، برابر $2\pi - (A+B)$ است. به‌طریق مشابه زاویهٔ شیب d مساوی $3\pi - (A+B+C)$ و زاویهٔ شیب ضلع e، $4\pi - (A+B+C+D)$ و خلاصه از آن a برابر $5\pi - (A+B+C+D+E)$ و یا 2π خواهدبود زیرا مجموع زوایای داخل پرانتز که‌اندازه‌های زوایای داخل پنج ضلعی می‌باشند برابر 3π هستند

$$(1)\quad A+B+C+D+E=3\pi$$

چون این پنج ضلعی شکل مسدودی است، پس مجموع تصاویر ضلعهای آن برمحور طولها مساوی صفر است:

$$(2)\quad a+b\cos(\pi+A)+c\cos[2\pi-(A+B)]+d\cos[3\pi-(A+B+C)]+e\cos[4\pi-(A+B+C+D)]=0$$

با استفاده از رابطهٔ (۱) و محاسبات لازم رابطهٔ (۲) چنین می‌شود:

$$(3)\quad a-b\cos A+C\cos(A+B)=e\cos E-d\cos(D+E)$$

همچنین ملاحظه می‌شودکه مجموع تصاویراضلاع این پنج‌ضلعی برمحور عرضها نیز مساوی صفراست یعنی:

$$(4)\quad b\sin(\pi-A)+c\sin[2\pi-(A+B)]+d\sin[3\pi-(A+B+C)]+e\sin[4\pi-(A+B+C+D)]=0$$

ویا با استفاده از رابطهٔ (۱):

$$(5)\quad b\sin A-C\sin(A+B)=e\sin E-d\sin(D+E)$$

طرفین روابط (۳) و (۵) را مجذورکرده و سپس با هم جمع می کنیم خواهیم داشت:

$$(6)\quad a^2+b^2+c^2-2ab\cos A-2bc\cos B+2ac\cos(A+B)=d^2+e^2-2de\cos D$$

ملاحظه می‌شودکه رابطهٔ(۵) در واقع‌حالت کلی قانون‌سینوسهای مثلث برای پنج ضلعی می‌باشد.می‌توان پنج رابطهٔ مختلف‌برای هر پنج ضلع این پنج ضلعی به طریق زیر است:

قانون سینوسهای‌پنج ضلعی:

$$(a)\quad b\sin A-c\sin(A+B)=e\sin E-d\sin(D+E)$$

$$(b)\quad c\sin B-d\sin(B+C)=a\sin A-e\sin(E+A)$$

(c) $d\sin C - e\sin(C+D) = b\sin B - a\sin(A+B)$

(d) $e\sin D - a\sin(D+E) = c\sin C - b\sin(B+C)$

e) $a\sin E - b\sin(E+A) = d\sin D - c\sin(C-D)$

همچنین رابطهٔ (۶) در واقع تعمیم قانون کسینوسهای مثلث برای پنج ضلعی می‌باشد و می توان این روابط را با پنج شکل مختلف مانند زیر نمایش داد:

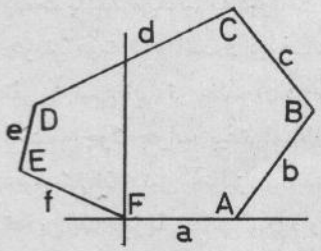
قانون کسینوسهای پنج ضلعی:

(a) $a^2+b^2+c^2-2ab\cos A-2bc\cos B+2ac\cos(A+B)=d^2+e^2-2de\cos D$

(b) $b^2+c^2+d^2-2bc\cos B-2cd\cos C+2bd\cos(B+C)=e^2+a^2-2ea\cos E$

(c) $c^2+d^2+e^2-2cd\cos C-2de\cos D+2ce\cos(C+D)=a^2+b^2-2ab\cos A$

(d) $d^2+e^2+a^2-2de\cos D-2ea\cos E+2da\cos(D+E)=b^2+c^2-2bc\cos B$



همانندقوانین کسینوسهای مثلث هر یک از این روابط متضمن تمام اضلاع و تقریباً دو زاویهٔ چندضلعی می‌باشند. اکنون به بررسی این قوانین برای شش ضلعی می‌پردازیم.

یك شش ضلعی را در نظر گرفته و آنرا مطابق شکل در دستگاه مختصات دکارتی قرار می‌دهیم،

سپس تصاویر اضلاع آنرا برمحورها مساوی‌صفرقرار داده خواهیم‌داشت:

(۷) $a-b\cos A+c\cos(A+B)=f\cos F-e\cos(E+F)+d\cos(D+E+F)$

(۸) $b\sin A-c\sin(A+B)=f\sin F-e\sin(E+F)+d\sin(D+E+F)$

طرفین روابط(۷) و(۸)را مجذور کرده وسپس باهم جمع می کنیم خواهیم‌داشت:

$$a^2+b^2+c^2-2ab\cos A-2bc\cos B+2ac\cos(A+B)=d^2+e^2+f^2-2de\cos D-2ef\cos E+2df\cos(D+E)$$

رابطهٔ (۸) قانون سینوسها برای شش ضلعی است و می‌توان با تبدیل دوری ضلعها و زوایا آن را به‌شش صورت دیگر نیز نوشت

رابطهٔ (۹) نیز قانون کسینوسها برای شش ضلعی است و می‌توان آنرا به شش فرم نمایش‌داد

آنالیز دیوفانتی... (بقیه ازصفحهٔ۳۸۵)

که در آن نامه قید شده است که مقاله هنگامی ارزیابی می‌شود که یك‌حق‌الزحمهٔ قابل ملاحظه‌ای به‌آن دپارتمان فرستاده‌شود.

ادموندلاندو ریاضیدان آلمانی نامه‌ای را بکار می‌برد که‌مضمون آن چنین بود: خانم- آقای عزیز اثبات آخرین مسئلهٔ فرما دریافت شد. اولین اشتباه درصفحـهٔ — سطر — رخ داده است . سپس یافتن بقیهٔ اشتباهها را به یکی از فارغ‌التحصیلان واگذار می کرد.

دونالدای نوث در انتهای پیشگفتار در اولین جلد از سری کتابهایش «فن برنامه ریزی برای کامپیوتر» (۱۹۶۸) در آخرین تمرین اثبات آخرین قضیهٔ فرمـا را خواسته است . پاسخش این است که کسی طرح کتاب را ریخته است اثبات قابل ملاحظه‌ای برای آن داشته است ولی حاشیهٔ صفحه کمتر از آن بوده است که بتواند آنرا شامل شود.

اولر در اثبات آخرین قضیهٔ فرما دچار شکست شدولـی وی یك ادعای کلیتر کرد که اگر آن درست باشد صحت آخرین قضیهٔ فرمارا که‌خود حالت خاصی ازحالت کلی ارائـه شده است نیز شامل می‌شود. اولر اظهار داشت که هیچ توان بزرگتر از۲ را نمی‌توان به صورت مجموعی کمتر از n قوهٔ n در آورد. بطوری که دیدیم مدت مدیدی بود که این مدعا برای $n=3$ پابرجا بود که خود آخرین قضیهٔ فرما برای قوهٔ مساوی با ۳ است. هنوز معلوم‌نشده است که‌آیا معادلهٔ $x^4+y^4+z^4=a^4$ دارای جوابی هست یاخیر.

مقالهٔ خود را با یادداشت نویدبخشی خاتمه می‌دهم . در سال ۱۹۶۶ **لیون-جی-لاندر و توماس-آر-پارکین** با استفاده از یك کامپیوتر اولین مثال مخالف را برای ادعای اولر بدست آوردکه برای اولین‌بار در۱۹۶۶ در نشریهٔ‌مؤسسهٔ ریاضیات آمریکا پس از دوقرن بعداز حدس اولر در مقاله‌ای درست در پنج‌خط منتشرشد. کوچکترین مثال مخالف وقتی که $n=5$ است چنین است :

$$28^5+74^5+110^5+133^5=144^5$$

آنالیز دیوفانتی و مسئلهٔ افسانه‌ای فرما «آخرین قضیه»

نوشتهٔ، مارتن گاردنر از مجلهٔ SCIENTIFIC AMERICAN

ترجمه وتنظیم از: داویدریحان

سیمون گفت «بسیارخوب» و نفس عمیقی کشید و ادامه داد «سؤال من این است: آیا آخرین مسئلهٔ فرما صحیح است؟» شیطان آب دهان خود را قورت داد. برای اولین دفعه حالت ثباتش متزلزل گردید و با صدایی ضعیف گفت: «آخرین چی و مال کی؟»

نقل از کتاب «شیطان وسیمون‌فلاگ» نوشتهٔ ARTHUR PORGES

یکی از مسائل قدیمی که در بیشتر کتابهای معماهای اواخر قرن نوزدهم (آن زمان که قیمت حیوانات خیلی کمتر از امروز بود) یافت می‌شود چنین است :

مزرعه‌داری برای خریدن ۱۰۰ حیوان از انواع مختلف ۱۰۰ دلار خرج کرد. قیمت هر گاو ۱۰ دلار، هرخوك ۳ دلارو هر گوسفند ۵۰ سنت (نیم دلار) است، بافرض اینکه وی حداقل یك گاو و یك خوك و یك گوسفند خریده باشد، از هر حیوان چند تا خریده است؟

در اولین نظری که به این مسئله می‌اندازیم به نظر می‌رسد که یکی از مسائل مقدماتی جبر باشد ولی وقتی بخواهیم آنرا حل کنیم ملاحظه می کنیم که با دو معادله وهم زمان باسه مجهول سروکارداریم که هر کدامشان می‌بایست دارای مقداری مثبت و صحیح باشد. امروزه یافتن جوابهای با اعداد صحیح معادلات را آنالیزدیونانتی می‌نامند. در قرنهای اخیر چنین آنالیزی فقط اعداد صحیح را به عنوان مقدار جواب مجاز می‌دانست ولی حالا معمولا این جوابها منحصر به اعداد درست به استثنای صفر، و اعداد صحیح منفی است. واضح است که در مورد مسئله‌ای که اخیراً عنوان کردم فقط جوابهای صحیح‌ومثبت قابل قبول است. در ادبیات معماها، مسائل دیوفانتی یا به اصطلاح دیگر مسائل سیال بسیار زیاد مطرح می‌شود که برخی از آنها را قبلا یادآوری کرده‌ام

جملهٔ «دیوفانتی» منسوب به دیوفانت اسکندرانی است. وی ریاضیدانی یونانی بود که در زمان خود بسیار مشهوربود ولی امروزه کسی نمی‌داند که وی درچه قرنی می‌زیسته است . بسیاری از مؤلفین زمان حیاتش را قرن سوم قبل از میلاد ذکر کرده‌اند. در باره‌اش چیز زیادی غیر از حکایات کمی که در حاشیهٔ مسائلی که در مجموعه‌های بعدی معماهای یونانی ذکرشده شده است نمی‌دانیم. ترجمهٔ بسیاری از آنها نقل شده است(مثلا درکتاب نظریهٔ اعداد و تاریخ آن نوشتهٔ Oyslein ore صفحهٔ ۱۸۰) و همچنین حل جبری آنها آنقدر مقدماتی است که احتیاجی به ذکر آنها در اینجا نیست. اگر این حکایات درست باشد، می‌دانیم که دیوفانت پسری داشته است که در سنین جوانی فوت شده است و دیوفانت ۸۴ سال عمر کرده است ، تقریباً نیمی از اثر عظیم او «Arithmetica» باقی‌مانده است که چون جواب بیشتر مسائل آن اعداد صحیح است،جملهٔ دیوفانتی از چنین آنالیزی آمده است. دیوفانت کوششی برای تدوین یك نظریهٔ اصولی نکرد و تقریباً هیچ نشانه‌ای از وجود آناليز دیوفانتی به توسط ریاضیدانان قبل از وی در دسترس نیست

امروزه، آنالیز دیوفانتی یك شاخهٔ وسیع و پیچیده از نظریهٔ اعداد (و نه جبر) با ادبیاتی عظیم است. فقط برای معادلات خطی نظریه‌ای کامل وجود دارد و روش کلی شناخته شده‌ای (که ممکن است قبلا هم وجود نداشته باشد) برای حل معادلات درجهٔ دوم یا بالاتر وجود ندارد . حتی ساده‌ترین معادلات غیر خطی دیوفانتی را به اشکال می‌توان تجزیه و تحلیل کرد که ممکن است جواب نداشته باشد یا اینکه تعداد نامحدودی جواب یا تعداد معینی جواب داشته باشد.از میان چنین مسائلی که از لحاظ سادگی بچه‌ای می‌تواند آنها را بفهمد، ممکن است مسئله‌ای وجود داشته باشد که درمقابل کوششهای کسانی که می‌خواهند جوابی برای آن بیابندویا عدم وجود جواب را اثبات کنند، مقاومت کرده است.

ساده‌ترین معادلهٔ کلی خطی دیوفانتی (معادلهٔ سیال خطی) به صورت $ax+by=c$ است که در آن a و b و c اعداد صحیح و x و y مجهولات هستند. ببینیم که چگونه می‌توان معمائی را که در مدخل مقاله آوردیم به صورت فوق درآوریم. فرض می‌کنیم که x تعداد گاوها، y تعداد خوکها و z تعداد گوسفندان باشد، می‌توانیم دو معادله بنویسیم.

$$۱۰x+۳y+\frac{z}{۲}=۱۰۰$$

$$x+y+z=۱۰۰$$

برای از بین بردن کسر، معادلهٔ اول را در ۲ ضرب می‌کنیم که نتیجه می‌شود $۲۰x+۶y+z=۲۰۰$ و معادلهٔ دوم را از آن کسر می‌کنیم تا z حذف شود و معادلهٔ $۱۹x+۵y=۱۰۰$ باقی بماند. جوابهای صحیح این معادله را چگونه بدست آوریم؟ راههای زیادی وجود دارد ولی من فقط یك آلگوریتم را بکار می‌برم که از کسرهای مسلسل استفاده شده و در مورد تمام معادلات از این قبیل بکار برده می‌شود.

جملهٔ باکوچکترین ضریب را در طرف چپ معادله می‌گذاریم، $۵y=۱۰۰-۱۹x$، هردو طرف را بر ۵ بخش می‌کنیم: $y=\frac{۱۰۰-۱۹x}{۵}$، مجدداً ۱۰۰ و ۱۹x را بر ۵ بخش می‌کنیم و باقی مانده را (اگر وجود داشته باشد) روی ۵ قرار می‌دهیم تا یك کسر انتهائی بدست آید. در این مورد معادله چنین می‌شود:

$$y=۲۰-۳x-\frac{۴x}{۵}$$

واضح است که اگر x و y اعداد مثبت باشند (که در اینجا باید باشند)، x می‌بایست مقدار مثبتی باشد که $\frac{۴x}{۵}$ عددی صحیح شود. روشن است که x می‌بایست مضربی از ۵ باشد. کمترین مقدار چنین مضربی خود عدد ۵ است. به ازای این مقدار برای y عدد ۱ و برای z (با جایگذاری این مقادیر در دو معادلهٔ اولیه) مقدار ۹۴ بدست می‌آید. پس جواب بدست آمده چنین است: ۵ گاو، ۱ خوك، ۹۴ گوسفند. آیا جوابهای دیگری وجود دارد؟ اگر جوابهای منفی مجاز باشد. بینهایت جواب وجود دارد ولی حیوانات به تعداد منفی وجود ندارد. اگر x را ۱۰ یا هریك از مضارب ۵ که از آن بزرگتر باشد اختیار کنیم y منفی می‌شود. در بنابراین مسئله فقط یك جواب خواهد داشت.

در مورد این مثال ساده، اولین کسر صحیح بدست آمده یعنی $\frac{۴x}{۵}$ شامل جمله‌ای از y نبود. برای معادلاتی از این قبیل ولی با ضرایب بزرگتر این روش را می‌بایست چندین مرتبه تکرار نمود. کسر انتهائی را مساوی با یك عدد صحیح نامعلوم مثلا مساوی با x می‌گیریم، جملهٔ باکوچکترین ضریب در طرف چپ قرار گیرد و این روش تکرار می‌گردد تا کسر انتهائی جدیدی بدست آید. مسلم است که در انتها به کسری می‌رسید که دارای یك مجهول است و آنقدر ساده است که شما می‌توانید ببینید که کدام عددی است که به ازای آن این کسر عددی صحیح گردد. با عمل وارونه روی دستهٔ معادلاتی که لازم بوده است مسئلهٔ اولیه حل می‌شود.

به عنوان مسئله‌ای که به صورت فوق بود، ولی دارای جواب نیست، فرض کنید که قیمت هر گاو ۵ دلار، هر خوك ۲ دلار و هر گوسفند ۵۰ سنت باشد. دو معادله درست مانند قبل ساده می‌گردند. اولی را در ۲ ضرب می‌کنیم تا کسر از بین برود و دومی را از آن کم می‌کنیم تا به معادلهٔ سیال $۹x+۳y=۱۰۰$ برسیم. با استفاده از روش کسرهای مسلسل به معادلهٔ $y=۳۳-۳x-\frac{۱}{۳}$ می‌رسیم که از روی آن دیده می‌شود که اگر x عددی صحیح باشد y عددی صحیح نمی‌تواند باشد. در این حالت، می‌توان با استفاده از قضیهٔ قدیمی زیر بگوئیم که معادلهٔ $۹x+۳y=۱۰۰$ دارای جواب نیست. اگر ضرایب x و y دارای مقسوم علیه مشترکی باشند که مقسوم علیه عدد طرف راست نباشد، معادله دارای جوابهای صحیح نیست. در این حالت ۹ و ۳ دارای مقسوم علیه مشترك ۳ هستند و ۱۰۰ بر ۳ بخش پذیر نیست. به سادگی می‌توان دید که چرا قضیه صحیح است. اگر دو جملهٔ طرف چپ مضرب m باشند، مجموعشان نیز مضرب m خواهد بود؛ در این صورت جملهٔ طرف دیگر نیز می‌بایست مضرب m باشد. مثال سادهٔ دیگری $۴x+۸y=۱۰۱$ است، طرف چپ تساوی می‌بایست عددی زوج باشد بنابراین نمی‌تواند مساوی با عدد فرد طرف راست باشد. ذکر این نکته نیز ضروری است که هرگاه سه عدد بدست آمده دارای یك عامل مشترك باشند، معادله را می‌توان فوراً برمقسوم علیه مشترکشان تقسیم کرد.

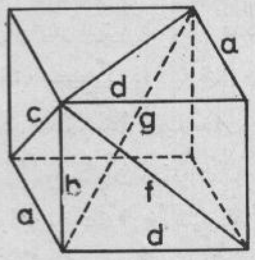
مثال دیگری از این مسائل مقدماتی که دارای تعداد محدودی جواب (بیشتر از یکی) صحیح و مثبت است، حالتی است که در آن قیمت هر گاو ۴ دلار، خوك ۲ و گوسفند $\frac{۱}{۳}$ دلار باشد.

هرگاه روش فوق الذکر را بکار بریم به معادلهٔ

$11x+5y=200$ می‌رسیم و اگر روش کسرهای مسلسل را بکاربریم جوابهای صحیح و مثبت زیررا می‌توان بدست آورد:

گوسفند	خوك	گاو
۶۶	۲۹	۵
۷۲	۱۸	۱۰
۷۸	۷	۱۵

برخی از مسائل هندسی معادل با یافتن جوابهای صحیح برای معادلات سیال می‌شود یکی از مسائل مشهورحل نشده از این نوع یافتن یك مکعب مستطیل است که‌درآن هرسه یال، سه قطرجانبی و تنها قطرفضائی (که از یك رأس به رأس مقابل‌جسم که

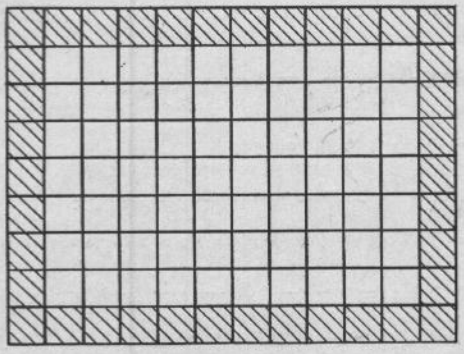


نسبت‌به‌مرکز جسم‌متقارنند وصل‌می‌شود) همگی‌اعدادصحیح‌باشند (شکل را ببینید). مسئله منجر به یافتن جوابهای صحیح با هفت مجهول، از چهار معادلهٔ زیرمی‌شود:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ a^2+d^2=e^2 \\ b^2+d^2=f^2 \\ b^2+e^2=g^2 \end{cases}$$

عدم امکان مسئله را هنوز اثبات نکرده‌اند و آنرا هنوز حل هم نکرده‌اند. **جان‌لیچ** در جستجوی جوابی برای آن برآمد و من به وی اطلاع دادم که کوچکترین مکعبی که اضلاع و اقطارش (به جز قطرفضائی آن) اعداد صحیح هستند دارای اضلاع به طولهای ۴۴، ۱۱۷ و ۲۴۰ می‌باشد. این اعداد را **لئونارد اولر** بدست آورده و به عنوان کوچکترین جواب می‌داند، اگرهمهٔ‌مقادیرصحیح باشند (به جزیکی ازاقطارجانبی) طول اضلاع کوچکترین مکعب ۱۰۴، ۱۵۳ و ۶۷۲ است که بازهم اولر آنها را بدست آورده است (قطرفضائی مکعب ۶۹۷ است). حالت سوم که فقط یك یال عددصحیح نیست، که قبل از اینکه لیچ بداند وجود نداشته است، دارای چندین جواب است ولی بنابه گفتهٔ لیچ تعداد آنها «نامعلوم» است. وی اظهار می‌دارد که کوچکترین چنین مکعبهائی ممکن است که دارای اضلاع ۴،۳ و ریشهٔ دوم عدد ۱۳۶۹۹۰۳۳۹۲۰۰ باشد. مسلم است که در این صورت حجم مکعب نیزغیر گویا خواهد بود

یکی دیگر از مسائل هندسی که ازکتاب سرگرمیهای **ال-اچ- لانگلی کوك** اخذکرده‌ام در شکل زیر ملاحظه می‌شود: یك مربع مستطیل (این جمله شامل‌مربع نیز هست) را روی یك کاغذ چهار خانه مطابق شکل رسم می‌کنیم و حاشیهٔ کناری‌آنرا هاشور می‌زنیم. در این حالت عدهٔ خانه‌های هاشور زده شده مساوی با خانه‌های هاشور نخوردهٔ داخل مربع مستطیل نیست. آیا می‌توان یك مربع مستطیل‌متناسب رسم‌کرد به نحوی که تعداد خانه‌های داخل محصور به حاشیه آن



مساوی با خانه‌های واقع در حاشیه باشد؟ اگرچنین است تمام جوابهای آنرا بیابید. معادلهٔ سیالی که بدست می‌آید به‌کمك حیلهٔ فاکتورگیری حل می‌شودکه در زیر می‌توانید آنرا ملاحظه نمائید:

اگر x و y اضلاع‌مستطیل بزرگ‌باشند تعداد خانه‌های داخل آن xy است. حاشیه به پهنای یك خانه شامل $2x+2y-4$ خانه است. چون گفته‌ایم که حاشیه دارای $\frac{xy}{2}$ خانه است می‌توانیم معادلهٔ زیر را بنویسم

$$\frac{xy}{2}=2x+2y-4$$

طرفین را در ۲ ضرب می‌کنم و جملات را مرتب می‌کنیم

$$xy-4x-4y=-8$$

به طرفین عدد ۱۶ را اضافه می‌کنیم

$$xy-4x-4y-16=8$$

طرف چپ را می‌توان فاکتورگیری کرد

$$(x-4)(y-4)=8$$

واضح است که $(x-4)$ و $(y-4)$ می‌بایست عوامل مثبت و صحیح عدد۸ باشند؛ تنها جفت چنین فاکتورهایی(۱،۸) (۲،۴) هستند. پس مسئله دارای دوجواب $(x=12, y=5)$ و $(x=8, y=6)$ است.

مسئله به مثلثهای قائم‌الزاویه با اعداد صحیح وابسته است عرض حاشیه تنها وقتی عددی صحیح می‌گردد که قطر مستطیل بزرگتر آنرا به چنین «مثلثهای فیثاغورسی» ببرد.

هرگاه مسئله را تعمیم داده وجوابها را برای حاشیه‌های باهرعرض یکنواختی در نظر بگیریم و منظور این باشدکه مساحت حاشیه مساوی با مساحت مستطیل داخل آن باشدمعمولا

فرمول ساده‌ای برای عرض حاشیه وجود دارد. برای این منظور طول دوضلع مجاور باحاشیه را باهم جمع کنید ؛ قطر مستطیل بزرگ‌را ازآن کم کنید وجواب را برچهار بخش کنید از این روش عرض حاشیه بدست می‌آید.

در زمانهای قدیم. معروفترین مسئلهٔ سیال که بوسیلهٔ **ارشمیدس** عنوان شده است به نام «مسئلهٔ گله» خوانده شده است که در آن هشت مجهول وجود دارد ولی جوابهای صحیح آن به‌قدری بزرگ‌است (کوچکترین جواب آن‌دارای ۲۰۰،۰۰۰ رقم است) که تا قبل از سال ۱۹۶۵ که باکاربردیك کامپیوتر جواب آنرا بدست آوردند، ناشناخته بود. بحث جالبی دراین زمینه را **اریك تمپل بل** درکتاب «آخرین مسئله» (۱۹۶۱ صفحات ۱۵۱-۱۵۷) آورده است و آخرین حل آن توسط **اچ-سی-ویلیامز** و دیگران درمجلهٔ [Mathematics of Computation] (اکتبر ۱۹۶۵) انجام گرفته است

یکی ازبرجسته‌ترین مسائل سیال که هنوزهم حل نشده است «آخرین قضیه» **پیردوفرما**، ریاضیدان فرانسوی قرن نوزدهم است که در تئوری اعداد آماتور بود (شغلش قضاوت‌بود) هر ریاضیدانی می‌داند که چطور فرماپس از خواندن ترجمهٔ فرانسوی حساب دیوفانتی ، یادداشتی به زبان لاتین برمسئلهٔ هشتم دومین کتاب، همانجاکه تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x^2+y^2=a^2$ خواسته شده بود افزود: «این مسئله در مورد قوای بزرگتر از ۲ دارای جوابهای صحیح نیست». (وقتی‌قوه مساوی ۲ باشد، جوابها به نام «سه‌تاییهای فیثاغورسی» خوانده می‌شوند و تعداد زیادی جواب برای آن وجود دارد) . بطور خلاصه، فرما اظهار داشت که معادلهٔ $x^n+y^n=a^n$ وقتی n عدد صحیح بزرگتر از ۲ باشد دارای جواب صحیح نیست. فرما در یادداشت خود افزوده است که «من اثبات خارق‌العاده‌ای برای آن یافته‌ام ولی این حاشیه آنقدر عریض نیست که بتوان آنرادر اینجا ذکر کرد.»

امروز، هیچکس نمی‌داند که آیا فرما حقیقتاً چنین‌اثباتی را یافته است. زیرا ممکن است که ریاضیدانان بزرگی چون فرما نیز در مورد یافتن چنین اثباتی‌شکست خورده باشند ودر نتیجه فرما دروغ گفته باشد. شواهد موجود حاکی از این‌است که فرما در مورد گفته‌هایش همیشه اثباتی نیز ارائه می‌داده‌است به عنوان مثال، معادلهٔ سیال $y^3=x^2+2$ را در نظربگیرید به راحتی می‌توان به‌طریقهٔ آزمون‌وخطاجوابهای $3^3=5^2+2$ و $3^3=(-5)^2+2$ را برای آن بدست آورد . برای اثبات اینکه جوابهای صحیح دیگری برای این معادله وجوو ندارد ، **بل** درکتاب ریاضیدانان نامی می‌نویسد «این موضوع مستلزم ظرفیت و پختگی بیش ازآموختن وفهمیدن تئوری نسبیت‌است» فرما گفت که چنین اثباتی را یافته است که از میان‌همه‌فقط آنرا انتشار نداده است. بل ادامه می‌دهد «در آن زمان این فقط یك حدس نبود، وی گفت که اثباتی برای آن دارد ؛ وبعدها اثباتی برای آن یافته شد» فرما اثبات نسبتاً ساده‌ای‌برای اینکه‌معادلهٔ $x^4+y^4=a^4$ دارای جواب نیست، انتشار داد وریاضیدانان بعدی به صورت مشکلتری عدم وجود جواب صحیح را برای معادلهٔ $x^3+y^3=a^3$ را اثبات کردند ، حالات $n=5$ و $n=7$ اخیراً در قرن نوزدهم اثبات شد.

اثبات اینکه آخرین قضیهٔ فرما در مورد تمام قوای n به غیر از اعداد اعداد اول بزرگتر از ۲ صحیح است، زیاد مشکل نیست. دستهٔ‌بخصوصی از اعداد اول برای آن وجوددارد و در سال ۱۹۴۱ صحت مسئله را وقتی که n بزرگتر از ۲۵۳،۷۴۷،۸۸۹ نباشد، اثبات کرده‌اند و درسال ۱۹۴۱ برای سایر اعداد اول n اثبات شد که در آن n حداقل می‌بایست ۲۵۰۱۳ باشد .

کوشش در اثبات آخرین قضیهٔ فرما، با تمام‌سادگی‌اش که به نظرمی‌رسد، آنچنان عقیم مانده که موجب شده است که در فانتزی که در شروع مقاله آوردم یك ریاضیدان زرنگتراز شیطان وانمود شود. این یکی از تودارترین مسائل حل نشده‌در نظریهٔ دیوفانتی است. برخی از ریاضیدانان اذعان دارند که‌این مسئله ممکن است صحیح باشد ولی‌قابل اثبات نباشد، اکنون که **کورت‌گودل** در اثبات عدم‌قطعیت مشهور خود نشان‌داده‌است که حساب دارای قضایائی است که در دستگاه قیاسی‌حساب قابل اثبات نیست. (اگر آخرین قضیهٔ فرما چنین باشد ، می‌بایست صحیح باشد، زیرا اگر غلط بود ، می‌بایست بوسیلهٔ یك مثال مخالف معین می‌شد .) در آخر از خوانندگان می‌خواهم که اثباتشان را برای من نفرستند زیرا صلاحیت ارزیابی آنها را ندارم. بنابه‌گفتهٔ بل **فردیناندلیندمان** که اولین نفری‌بود که غیر جبری بودن عدد پی را اثبات‌کرد (۱۸۸۲) ؛ اثبات طویلی برای‌آخرین‌قضیهٔ‌فرماانتشاردادکه به‌خودش‌برگردانیده شد. زیرا درست‌در همان اوایل‌اثبات‌دچار اشتباه‌شده بود . یك دو جین دیگر از اثباتهای اشتباه آمیز نیز توسط ریاضیدانان بزرگ‌دیگر منتشر شد. وقتی از **داویدهیلبرت** سؤال‌شد که چرا وی هرگز دست به سوی این‌مسئله دراز نکرده‌است‌جواب وی چنین بود: «قبل از شروع می‌بایست دربارهٔ آن‌سه‌سال‌شدیداً مطالعه کنم و من چنین وقتی را ندارم که در مورد مسئله‌ای هدردهم که احتمال شکست در اثباتش رادارم»

دپارتمانهای ریاضی بسیاری از دانشگاههای بزرگ‌تمام اثباتهای آخرین قضیهٔ فرما را با یك‌نوع نامه پس می‌فرستند

دنباله در صفحهٔ ۳۸۱

بار یاضیات آشتی کنید

(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

تألیف: A.BULLAS استاد آموزش ریاضیات در فرانسه

ترجمهٔ : ع.مصحفی

بخش پنجم ـ معجزات تمرکز حواس

برای آنکه در هندسه بسیار قوی گردید، قبل از هر چیز لازم است که نگاه کردن را بدانید. آنان که از نفهمیدن هندسه گله و شکایت دارند، هرگاه آن‌راهی را که من به ایشان نشان می‌دهم دنبال کنند پیشرفت سریع خواهند داشت.

در بخش پیش به شما گفتم که بعضی از آن جهت در ریاضیات ضعیفند که فاقد قابلیت تمرکز حواس می‌باشند.

شما که از این قابلیت اساسی به اندازهٔ کافی برخوردار نیستید، نه تنها به فوریت باید به آن بپردازید بلکه در این زمینه باید تلاش شدید داشته باشید.

در بارهٔ تمرکز حواس دو مرحلهٔ «مقدماتی» و «عالی» را می‌توان مشخص کرد. در مرحلهٔ مقدماتی عواملی که موجب حواس پرتی و بی‌نظمی در فعالیتهای ذهنی می‌شوند برطرف می‌گردند. این مرحله یك شرط لازم است اما کافی نیست.

بعد از آنکه از نوع تمرینهایی که نمونه‌های آن در این بخش آورده می‌شود به تعداد زیاد انجام دهید، آنگاه به مرحلهٔ عالی از تمرکز حواس نایل خواهیدشد.

برای توضیح در وجوه تمایز دو مرحلهٔ مقدماتی وعالی از تمرکزحواس، قسمتهایی ازکتاب دیگری را که نوشته‌ام وبه این موضوع مربوط است در اینجا نقل می‌کنم:

«آنگاه که ممارست خود را در حالی شروع می‌کنید که همهٔ آنچه راکه به درد موضوع نمی‌خورد از خود دورساخته‌اید نوعی تمرکز حواس مقدماتی را محقق کرده‌اید، سپس لازم‌است تا برای انجام نوع کاملا دقیق تمرکز حواس خود را ورزیده سازید.»

یك مثال: شکلی‌هندسی متشکل از مجموعه‌ای ازمثلثها و متوازی الاضلاعها راکه در داخل آن خطوط مهم: ارتفاعات، نیمسازهای زاویه‌ها، میانه‌ها و قطرها نیزرسم شده‌اند به D یکی از دانش‌آموزان نشان می‌دهم و به او تذکر می‌دهم:

ـ حواست را جمع کن، غیر از این شکل به چیز دیگر فکر نکن.

هرگاه او بتواند آن را در ذهنش نگاه دارد و در این مورد حواس‌پرتی به سراغش نیاید، در این صورت مرحلهٔ مقدماتی تمرکز حواس را عمل کرده است.

اکنون از D درخواست دیگری می‌کنم که مستلزم دقت نظر بیشتر است و باید ذهنش را روی بعضی از اجزاء شکل متمرکز کرده و سایر اجزاء آن را درنظر نگیرد:

ـ به جای آنکه نگاهت را بی‌خودی به این سو و آن سوی شکل، روی مثلثها، متوازی الاضلاعها و خطوط‌سرگردان کنی، فقط زاویه‌های مربوط به مثلثها را درنظربگیر، هردفعه که وسوسه می‌شوی تا به سایر خطوط فکر کنی، و هردفعه که ارتفاعات، نیمسازهای زوایا، قطرها در توجه تو رخنه می‌کنند آنها را از ذهن خودت دورکن.

در آنچه‌که در مرتبه‌های اول و دوم از D خواسته‌بودم وجه تشابهی وجود دارد: در ابتدا خواسته بودم آنچه را که خارج ازموضوع است کنار گذارد. ازنوع آن«فکرهای مزاحمی» که مخل‌کار محصلین‌می‌گردند: «امروز عصر به سینما می‌روم»، «وای، کلکسیون‌تمبرم‌را ازدیشب‌روی‌میزجا گذارده‌ام»،وغیره...

در مرتبهٔ دوم هم خواسته بودم‌که بعضی ازچیزهارا طرد کند، اما در این مورد موضوع حواس پرتیهای معمولی نیست، بلکه موضوع اجزایی از شکل است‌که می‌توانند در توجه‌خاص به زاویه‌ها اغتشاش بوجود آورند. اگر D خوب فهمیده باشد، اگر تلاشهایی راکه بکار می‌برد این امکان را فراهم آورندتا ذهنش فقط روی زوایا ثابت بماند، در این صورت تمام اجزاء دیگر شکل در تاریکی فرو می‌روند. در چنین حالتی مرحلهٔ

دوم تمرکز حواس عملی شده است.

یك‌بار دیگر، تکرار می‌کنم که هدف از این بخش تعیین تمرینهایی از آن نوع است که باانجام آنها قابلیت شما درتمرکز حواس بیش ازبیش توانا می‌گردد: نخست در مرحلهٔ مقدماتی، سپس در مرحلهٔ عالی.

شاید عبارتی که در ابتدای این بخش آورده‌ام شما را متعجب کرده باشد: «برای آنکه در هندسه بسیار قوی گردید، قبل از هرچیز لازم است که نگاه‌کردن را بدانید».

تعجب نکنید، چشمان‌شما خوب می‌بیند، اماشما نمی‌توانید دید آن را تنظیم کنید زیرا به اندازهٔ کافی قابلیت تمرکزحواس ندارید. در این باره آزمونهای متعددی روی افراد از۱۲تا۱۵ سال انجام گرفته و هیچ شکی باقی نمانده است.

یك‌بار شکلی را روی تخته سیاه کشیدم که مرکب بود از سه مثلث، یك‌متوازی الاضلاع، دو ذوزنقه. نتایجی چنین بدست آوردم:

۱) ۲۰ دانش‌آموز ۳ شکل دیده بودند.

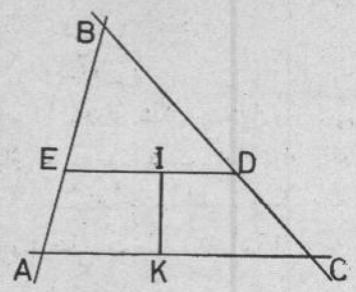
۲) ۱۸ دانش‌آموز ۴ شکل دیده بودند

۳) ۱ دانش‌آموز تنها یك شکل دیده‌بود.

۴) فقط یك دانش‌آموز بودکه ۶ شکل دیده بود.

مسلماً شکل متشکل از سه مثلث، دو ذوزنقه و یك متوازی الاضلاع روی شبکهٔ چشم هریك از دانش‌آموزان نقش بسته‌است، اما تنظیم دید یعنی نگاه‌کردن در آنان متفاوت بوده است. در حقیقت، دیدن و نگاه‌کردن دو واقعیت کاملا متفاوت می‌باشند. نگاه‌کردن یعنی تنظیم توجه بقسمی‌که بیشترین‌تعداد از اشیاء مورد نظر دیده شود. مطمئنم‌که در این لحظه بعضیها عکس‌العملی از این نوع‌بروزخواهند داد: «این بسیارآموزنده است: کتاب زیرعنوان باریاضیات آشتی‌کنید را تهیه می‌کنم به این گمان‌که از آن نتایج ثمربخش داشته باشم، اما مؤلف‌آن‌با بی‌اعتنایی به من اعلام می‌کندکه قبل از هرچیز باید قابلیت‌دیدن شکلهای مرسوم روی تخته سیاه را داشته باشم، مرا خیلی دست کم‌گرفته است؟ من‌که‌کور نیستم تا از تشخیص مستطیلها یا ذوزنقه‌های یك شکل عاجز باشم، تصور می‌کندکه شمردن راهم نمی‌دانم، چه مسخره!»

آقای B هم یك نفر از این دسته است و اعتراض دارد. او مدعی است‌که چشمانش خوب می‌بیند و شمردن را هم‌می‌داند من هم از اومی‌خواهم‌که‌به خاطر همهٔ خوانندگان به‌پرسشهایی که طرح می‌کنم پاسخ دهد.



(شکل۱)

روی صفحهٔ کاغذ سه خط رسم می‌کنم‌که در A وB وC متلاقیند. سپس از E موازی با AC رسم می‌کنم‌که BC را در D قطع می‌کند. اکنون از B می‌پرسم:

ـ چند شکل هندسی ملاحظه می‌کنی؟

ـ سه‌شکل، آقا!

ـ ممکن است‌که آنها را نام ببری؟

ـ دو مثلث ABC و BED و یك ذوزنقهٔ AEDC.

ـ بسیارخوب

از نقطهٔ I واقع بر DE عمود IK را بر AC رسم می‌کنم، مجدداً می‌پرسم‌که:

ـ اکنون چند شکل می‌بینی؟

ـ رویهم هفت شکل! دو مثلث، سه ذوزنقه، دو پنج ضلعی مقعر.

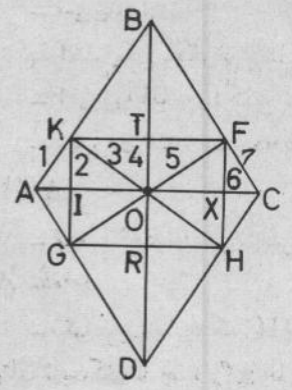
ـ مرحبا، مرحبا، موفق شدی. اگر به سوء استفادهٔ از حسن رفتارت تعبیر نکنی، می‌خوا هم‌که تمرین‌کوچك دیگری انجام‌دهی، اما می‌ترسم‌که خسته باشی.

ـ برعکس، مرا خوشحال‌می‌کنید. برای من‌هم‌سرگرمی است!

ـ عجب، عجب، عجب، این سرگرمی است!

امابگذار شکلی‌پیچیده تر رابررسی‌کنیم: لوزیABCD را در نظر می‌گیریم‌که قطرهای آن در O متلاقیند. عمودهای OF، OG، OH، OK را برضلعهای لوزی رسم می‌کنیم و این نقاط را به‌هم وصل می‌کنیم، ثابت می‌شودکه چهار ضلعی GKFH مستطیل است. اما این موضوع سؤال نیست، باقبول اینکه سه نقطهٔ G،O وF و همچنین سه نقطهٔ K وO و H بر یك خط راست واقعند دو خط KF و GH با AC و دو خطGK وFH باBD متوازیند می‌توانی بگویی که‌روی شکل چند نقطهٔ تقاطع وجود دارد؟

ـ اجازه‌بدهید بشمارم؛ ۳، ۶، ۹، ۱۱،



(شکل۲)

۱۳، رویهم ۱۳ عدد.

ـ آفرین!

ـ روی شکل چند پاره خط می‌بینی؟ در ضمن توجه‌داشته باش که نه تورا دست انداخته‌ام و نه می‌خواهم خسته‌ات کنم

ـ ناراحت نباشید، تعداد پاره خطها، چهار ضلع‌لوزی، چهار ضلع مستطیل، تعداد قطرها که رویهم چهارتا است، رویهم می‌شود ۱۲ تا.

ـ خوب، چند تا زاویه می‌بینی؟ شتاب هم مکن.

ـ زاویه‌ها، ۲ تا در A، ۴ تا در K،...، رویهم ۳۶ تا است.

ـ باز دقت کن، آیا ۱۲ پاره خط و ۳۶ زاویه می‌بینی؟

ـ بله آقا، واگر این نوع کارکردن برای قوی شدن در ریاضیات کافی است، من پیشرفت زیادی خواهم داشت!

ـ دوست عزیز، یا چشمهایت خوب نمی‌بیند یا اینکه شمردن نمی‌دانی!

ـ دست شما درد نکند!

ـ به هر ترتیب یکی از این دوعلت راداری، زیرا روی شکل ۵۰ پاره خط وجود دارد نه ۱۲ تا، همچنین ۱۲۰ زاویه وجود دارد نه ۳۶ تا! لوزی که رسم کرده‌ایم شامل مثلثها و مستطیلهایی است، مطمئناً بایدآنها را دیده باشی، درست است؟

ـ بلی، واضح است.

ـ اما آیا غیر از این‌مثلثها ومستطیلها چیزهای دیگری هم می‌بینی؟

ـ.....

ـ خوب نگاه کن.

ـ آه دیدم، یك ذوزنقه هم وجود دارد.

ـ یك ذوزنقه، کدام‌است؟

ـ ذوزنقهٔ AKFC

ـ فقط همین یك ذوزنقه است؟ بازهم نگاه کن

ـ.....

ـ نمی‌بینید؟

ـ آها، یکی دیگرهم پیدا کردم

ـ آفرین، اما چرا گفتی «یکی دیگرهم پیدا کردم»؟

ـ زیرا دو تا وجو دارد، یکی AKFC و دیگری AGHC

ـ دوست زودباور من، حس می‌کنم که در بخودآوردن تو ناکام شده‌ام!

ـ مگر قبول ندارید که AGHC ذوزنقه‌است؟ می‌خواهید برایتان ثابت کنم که چرا AC با GH موازی است؟

ـ موضوع را عوض نکن، من هم می‌دانم که AGHC ذوزنقه است، اما در لوزی رویهم ۳۶ شکل وجود دارد که همهٔ آنها از عنوان ذوزنقه مفتخر ند و تو بجز ۲ عدد ازآنها بقیه‌را نمی‌بینی!؟

ـ مرا دست‌نیندازید، چطور۳۶ذوزنقه درشکل‌وجوددارد؟

ـ من کاملا جدی‌صحبت می‌کنم.

۱۲ خط رسم کرده‌ام که این ۱۲ خط ۲۱۴ شکل بوجود آورده‌اند، ۱۲۰ زاویه، ۴۴ مثلث، ۹ مستطیل، ۴۰ ذوزنقه، یك لوزی، چهار ضلعیها و چند ضلعیهای غیرمشخصی راکه وجود دارند بحساب نمی‌آورم.

شاید این ۴۰ ذوزنقه توراگیج کند و بگویی که ممکن است وجود داشته باشند اما چگونه باید آنها را پیدا کرد.

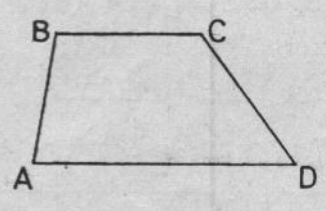
اجازه بده، فقط صرف ۲ دقیقه‌وقت کافی است. فقط یك شرط می‌کنم و آن اینکه برای پاسخ دادن به سه پرسش زیر آمادگی داشته باشی:

۱) شمردن ازیك تا ۷ را می‌دانی؟

۲) دست چپ و راست خودت را از هم تمیز می‌دهی؟

۳) مادرت سه عدد تخم مرغ سرسفره آورده است، تو می‌خواهی که چهار عددباشد، چه می‌کنی؟ آیا یکی به‌آنها اضافی نمی‌کنی؟

اکنون به جستجوی ۴۰ ذوزنقه برویم. این شکل را خوب نگاه کن،



(شکل۳)

ـ یك‌ذوزنقه است

ـ آفرین

ـ چون شمردن تا ۷ را می‌دانی پس تا ۴ هم می‌توانی بشماری. این شکل چند ضلع دارد؟

ـ چهارتا

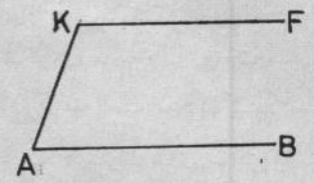
ـ بسیارخوب دراین‌شکل (شکل۴)چندضلع وجود دارد؟

ـ سه‌تا

ـ چند ضلع باید به آن اضافه کنیم تا ۴ ضلع داشته باشد؟

ـ یکی

ـ درست‌است



(شکل۴)

این مثال همانندمثال‌سه تخم مرغ است. به موضوع ذوزنقه‌ها برگردیم؛ ذوزنقه چیست؟ مجموعهٔ دو خط متوازی است که توسط دو خط دیگر قطع شده باشند. چپ و راست راکه ازهم تمیز می‌دهی؟

ـ طبیعی است.

ـ بسیار خوب، بگو ببینم که کدام پاره خط درسمت چپ شکل ۳وجود دارد؟

ـ پاره خط AB

ـ کدام در سمت راست است؟

ـ پاره خط CD

ـ تمام شد، ۴۰ ذوزنقه را یافتی

ـ چی! باسه تخم مرغ، سمت چپ وسمت راستم، دانستن شمردن تا ۷، تعداد ۴۰ذوزنقه بدست آمد، خنده‌آوراست!

ـ شاید هم خنده داشته باشد، اما موضوع شمردن ذوزنقه‌ها:

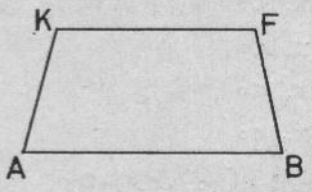
مرحلهٔ اول :پاره خطهای AK، KI، KO، TO، FO و FX (شکل ۱)رابه ترتیب ازیك تا ۷ شماره گذاری می کنم که همهٔ آنها بین دو خط متوازی AC و KF محصورند. از این به بعد آنها را با شمارهٔ مربوط نام می‌بریم، مثلا پاره خط شماره ۵ ، از این جهت که کاررا آسانتر می کند. برای‌ساختن یك ذوزنقه باید دو خط متوازی رسم کنیم و دو خط دیگر که آنها را قطع کنند. شکل ۴ را در نظر بگیریم. سرسفره چه چیز کم است؟

ـ سرسفره؟ آه، موضوع تخم مرغها، یك تخم‌مرغ کم‌است

ـ در اینجاهم یك ضلع کم است، چپ یا راست؟

ـ ضلع راست است؟

ـ اگر FB را اضافه کنیم ، ذوزنقهٔ AKFB را خواهیم داشت.



(شکل۵)

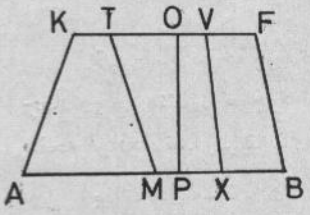
ـ این را قبلا هم که می‌دانستم، اما...

ـ اما چه؟ چیزهای دیگر را فراموش کرده‌ای.

ـ کدام چیزها؟

ـ همهٔ آنچه راکه می‌توان از رسم یك خط محصور بین دو خط متوازی بدست آورد.

به این شکل نگاه کن، ذوزنقه‌های AKTM ، AKOP ، AKVX ، AKFB ساخته شده‌اند که همه درضلع چپ AK مشترکند



(شکل۶)

ـ درست است، امااینها در شکل لوزی مفروض وجود ندارند.

ـ تو آنچه را می‌خواهی که در لوزی مفروض وجود دارد. اما باید راه وصول به هدف را پیداکرد، حواست‌راروی دو خط متوازی KF وAC (شکل ۲) و خط AK متمرکز کن، از AK (پاره خط شماره یك) شروع کن و تا FC پیش برو و معلوم کن چند ذوزنقه از اضافه‌کردن ضلع چهارم به مجموعهٔ دو خط متوازی KF و AC و ضلع AK بوجود می‌آید. بعد از خط نمرهٔ یك خط شمارهٔ ۲ است، اما AKI ذوزنقه نیست. به خط شمارهٔ ۳ می‌رسیم، AKO نیز ذوزنقه نیست. خط شمارهٔ ۴ ذوزنقهٔ AKTO را بدست می‌دهد ، خط شمارهٔ ۵ ذوزنقهٔ AKFO، خط شمارهٔ ۶ ذوزنقهٔ AKFX، خط شمارهٔ ۷ ذوزنقهٔ AKFC

بنابراین با در نظر گرفتن دوخط متوازی KF و AC چهار ذوزنقه بدست آوردیم که ضلع چپ همهٔ آنها AK است.

همین عمل رابرای خط KI انجام‌می‌دهیم وذوزنقه‌هایی راکه ضلع چپ آنها خط KI است می‌شماریم. خط شمارهٔ ۳به کنار می‌رود ، خط شمارهٔ ۴ هم به کنار ، خط شمارهٔ ۵ ذوزنقهٔ KIOF خط شماره۶ به‌کنار، خط شماره ۷ ذوزنقهٔ KICF را بدست می‌دهد.

ـ پس دو ذوزنقهٔ جدید پیداکردیم که ساق چپ آنها KI است.

اکنون ازخط‌شمارهٔ ۳یعنی KO شروع کنیم. ذوزنقه‌های OKFX و OKFC را خواهیم داشت که ساق چپ آنهاخط KO است.

با شروع از خط شمارهٔ ۴ ذوزنقهٔ OTFC و با شروع از خط شمارهٔ ۵ ، بعد خط شمارهٔ ۶ و شمارهٔ ۷ ذوزنقه‌ای نخواهیم داشت.

ذوزنقه‌هایی راکه تا به حال پیداکرده‌ایم بشماریم: با ساق چپ AK چهار عدد، باساق‌چپ KI دوعدد، باساق چپ KO دوعدد، با ساق چپ OT یك عدد، رویهم ۹ عدد.

ـ اما جناب، ۹ که چهل نمی‌شود!

ـ نه، اما ۹ × ۴ برابر ۳۶ است!

ـ ۹ × ۴ ؟

ـ بلی، ۹ × ۴، به‌شکل (شکل ۲) نگاه کن، چهارزوج خط متوازی می‌بینی: AC با KF، AC با GH ، GK با DB ، FH با DB. مافقط ذوزنقه‌هایی را یافتیم که‌قاعده‌های آنها بر AC و KF واقع بود، اگر برای سه زوج دیگرهم همان روش را بکار ببریم، برای هر کدام۹ذوزنقه پیدا می کنیم پس رویهم ۳۶ = ۹ × ۴ ذوزنقه شمرده‌ایم . هرگاه چهار ذوزنقهٔ متشکل از ضلعهای لوزی و قطرها یعنی AKHD ، BKHC ، BAGF و CBGF رانیز اضافه کنیم

۴۰ = ۴ + ۳۶ ذوزنقه خواهیم داشت.

اکنون به محاسبهٔ تعداد مستطیلها می‌پردازیم، برای‌این کار زوجهای خطوط متوازی AC وKF، AC وGH، DB

دنباله در صفحهٔ ۳۹۶

چهاردهمین المپیاد بین المللی ریاضیات

(لهستان - ژوئن ۱۹۷۲)

ترجمهٔ: فتح‌الله زرگری

چهار دهمین المپیاد بین‌المللی ریاضیات دبیرستانی، در ژوئن ۱۹۷۲ در جمهوری‌توده‌ای لهستان برگزار شد.

در این المپیاد رویهم ۱۴ تیم از کشورهای مختلف‌شرکت کرده بودند که عبارت بودند از: اتریش، بلغارستان، بریتانیای کبیر، مجارستان، جمهوری‌دموکراتیك آلمان، کوبا، مغولستان هلند، لهستان، رومانی، اتحاد شوروی، چکسلواکی، سوئد، یوگوسلاوی

کلیهٔ این کشورها در المپیاد قبلی نیز شرکت داشتند. از شرکت‌کنندگان المپیاد قبلی فقط تیم‌کشور فرانسه غایب بود. برای انتخاب مسائل و نظارت مسابقه هیئتی از داوران زیر نظر پروفسور «استانی سلاو بالچیشك» استاد دانشگاه«تورون» تشکیل شده بود.

سرپرستهای‌تیمهای‌شرکت‌کننده نیز در این هیئت‌شرکت داشتند.

از میان مسائلی که کشورهای شرکت‌کننده قبلا فرستاده بودند شش مسئله (هرروز ۳ مسئلـه) انتخاب شده بـود. هیئت داوران برای‌حل درست هرمسئله امتیاز معینی درنظر گرفته‌بود مسائل به زبانهای مادری شرکت‌کنندگان ترجمه شده وبرای هرعضو تیم شرکت‌کننده یك نسخه ازصورت مسائل تهیه گردیده بود. مسابقه در روزهای دهم و یازدهم ژوئیه (بیست وبیست‌ویکم خرداد ماه ۱۳۵۱) در شهر «تورون» انجام گرفت. در اولین روز مسابقه مسائل‌زیر داده شد:

۱ـ ثابت‌کنید که از ده عدد دورقمی، طبیعی، مختلف و دلخواه می‌توان دوگروه عددی طوری تشکیل داد که اولاً این دوگروه متقاطع نبوده و درثانی‌مجموع اعداد هردوگروه‌یکسان باشد. (شوروی ۵ امتیاز)

۲ـ ثابت‌کنید که ادعای زیر برای $n \geqslant ۴$ دلخواه درست است: هرچهار ضلعی محاطی دلخواهی را می‌توان به n چهار ضلعی محاطی دلخواه دیگر تجزیه‌کرد. (هلند ۶ امتیاز)

۳ـ ثابت‌کنید که به ازای اعداد مثبت، صحیح و دلخواه m و n عدد $\frac{(۲m)!(۲n)!}{m!n!(m+n)!}$ عـددی است صـحیح (فـرض می‌کنیم $۰! = ۱$). (بریتانیای‌کبیر ۷ امتیاز)

در روز دوم مسابقه شرکت‌کنندگان مسائل زیـر را حل کردند:

۴ـ مطلوبست کلیهٔ جوابهای $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵)$ دستگاه نامعادلات زیر: (هلند ۷ امتیاز)

$$(x_۱^۲ - x_۳x_۵)(x_۲^۲ - x_۳x_۵) \leqslant ۰$$
$$(x_۲^۲ - x_۴x_۱)(x_۳^۲ - x_۴x_۱) \leqslant ۰$$
$$(x_۳^۲ - x_۵x_۲)(x_۴^۲ - x_۵x_۲) \leqslant ۰$$
$$(x_۴^۲ - x_۱x_۳)(x_۵^۲ - x_۱x_۳) \leqslant ۰$$
$$(x_۵^۲ - x_۲x_۴)(x_۱^۲ - x_۲x_۴) \leqslant ۰$$

۵ـ فرض‌کنیم f و g توابع حقیقی ودر روی تمام‌محور اعداد معین باشند و به علاوه معادلهٔ زیر به ازای کلیهٔ مقادیر x و y صادق باشد.

$$f(x+y)+f(x-y)=۲f(x)g(y)$$

ثابت‌کنید که هرگاه $f(x)$ مخالف صفر و به ازای کلیهٔ مقادیر x، $|f(x)| \leqslant ۱$ باشد به ازای کلیهٔ مقادیر y داریم: $|g(y)| \leqslant ۱$ (بلغارستان ۷ امتیاز)

۶ـ چهار صفحهٔ موازی مختلف مفروضند. ثـابت‌کنید چهار وجهی منتظمی موجود است که رأسهایش روی ایـن چهار صفحه قراردارند. (بریتانیای‌کبیر ۸ امتیاز)

برای حل مسائل روز اول چهـار ساعت وقت تعیین شده بود. از آنجاکه مسائل روز دوم‌کمی مشکلتر از مسائل روزاول بودند طبق تصمیم هیئت داوران ۴/۵ ساعت وقت برای‌حل‌آنها داده شد.

نتیجهٔ‌کلی حل مسائل و امتیازات‌کسب شده در جدول I داده شده است.

جدول I

شمارهٔ مسئله و ماکزیمم امتیاز هر مسئله	عدهٔ شرکت کنندگان وامتیازات کسب‌شده توسط آنها								
	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۱(۵)	—	--	—	۶۱	۱	۱	۰	۹	۳۵
۲(۶)	—	—	۲۴	۱۴	۱۲	۱۶	۱۴	۱۱	۱۶
۳(۷)	—	۳۰	۴	۰	۰	۳	۱	۳	۶۶
۴(۷)	—	۵۱	۱	۶	۳	۲	۰	۱۸	۲۶
۵(۷)	—	۲۵	۳	۸	۲	۶	۹	۵	۴۹
۶(۸)	۲۸	۲	۶	۵	۷	۹	۹	۱۲	۲۹

به هشت شرکت‌کننده که ۴۰ امتیاز ماکسیمم را کسب کرده بودند دیپلم درجهٔ I داده شد و به‌کسانی که بین ۳۰ تا ۳۹ امتیاز کسب کرده بودند دیپلم درجهٔ II داده شده

کوچکترین شرکت‌کننده ، پسر ۱۳ ساله‌ای به نام «پ- کروگیر» از کشور جمهوری دموکراتیك آلمان بود که جایزهٔ مخصوص به او اهداء شد. ازهر کشور هشت نفر شرکت کرده بودند جز از کشور کوبا که سه شرکت‌کننده معرفی کرده بود

نتایج امتیازات تیم وشرکت‌کنندگان هر کشور جداگانه در جدول II آمده است.

(جدول II)

کشور	شمارهٔ شرکت‌کنندگان وعدهٔ امتیازات کسب‌شدهٔ توسط آنها								عدهٔ کل امتیازات کسب شده توسط هر تیم	تعداد دیپلم‌ها		
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸		درجهٔ I	درجهٔ II	درجهٔ III
اتریش	۲۶	۱۶	۲۲	۱۹	۲۰	۲۰	۱۱	۲	۱۳۶	—	—	۵
بلغارستان	۱۷	۳	۱۵	۲۲	۱۱	۲۹	۱۰	۱۳	۱۲۰	—	—	۲
بریتانیای کبیر	۳۳	۱۳	۲۱	۲۶	۳۶	۱۰	۲۱	۱۹	۱۷۶	—	۲	۴
مجارستان	۴۰	۲۵	۱۹	۳۰	۴۰	۳۶	۳۳	۴۰	۲۶۳	۳	۳	۲
جمهوری آلمان	۳۱	۳۵	۲۹	۱۹	۳۱	۴۰	۲۷	۲۷	۲۳۹	۱	۳	۴
کوبا	۱۰	۲	۲	—	—	—	—	—	۱۴	—	—	—
مغولستان	۱۲	۵	۴	۸	۵	۸	۲	۵	۴۹	—	—	—
هلند	۷	۴	۷	۷	۱۲	۵	۷	۲	۵۱	—	—	—
لهستان	۴۰	۱۱	۱۵	۸	۱۵	۳۷	۲۵	۹	۱۶۰	۱	۱	۱
رومانی	۱۶	۱۵	۳۵	۳۵	۱۵	۴۰	۱۹	۳۱	۲۰۶	۱	۳	۱
شوروی	۳۹	۴۰	۳۳	۳۸	۴۰	۳۸	۲۲	۳۰	۲۷۰	۲	۴	۲
چکسلواکی	۲۶	۵	۱۱	۱۰	۱۹	۱۸	۲۰	۲۱	۱۳۰	—	—	۴
سوئد	۹	۲۷	۴	۱	۰	۱۹	۰	۰	۶۰	—	—	۲
یوگوسلاوی	۲۵	۱۱	۱۷	۲۳	۱۷	۲	۱۵	۲۶	۱۳۶	—	—	۳

در نتیجه در این المپیاد شوروی، مجارستان ، جمهوری دمکراتیک آلمان به ترتیب مقامهای اول تا سوم را کسب کردند.

در مصاحبهٔ با شرکت‌کنندهٔ ۱۳ سالهٔ آلمانی ازاو خواستیم مسئله‌ای برای خوانندگان مجله مطرح کند. مسئلهٔ زیر را او مطرح کرد: نا معادلهٔ زیر را ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{\frac{a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+a_3a_4a_1+a_4a_1a_2}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_4}{6}}$$

که در آن a_1 عددی است حقیقی و مثبت.

علاوه برمسائل انتخابی برای مسابقه مسائل جالب‌دیگری نیز از طرف کشورهای شرکت‌کننده برای هیئت داوران فرستاده شده بود. اینك چندتای آنها را در اینجا می‌آوریم.

۱ـ ثابت کنید عددی موجود است که اولا بر عدد صحیح دلخواه a بخش‌پذیر است و درثانی برای نوشتن آن در مبنای ده از صفر استفاده نمی‌شود. عدد a مضرب ۱۰ نیست (جمهوری دمکراتیك آلمان)

۲ـ طولهای اضلاع مستطیلی اعداد زوج می‌باشند. ثابت کنید نقطه‌ای در داخل مستطیل نمی‌توان یافت که فاصله‌اش از هررأس مستطیل برابرعدد صحیح باشد. (هلند)

۳ـ روی صفحه‌ای $3n$ نقطه مفروضند بطوری که هیچ سه نقطه از آنها روی یك خط راست قرار ندارند.
ثابت کنید می‌توان n مثلث غیر متقاطع پیدا کرد که رأسهایشان روی این نقاط قرار گرفته باشند. (چکسلواکی)

۴ـ چهار ضلعی محدب ABCD مفروض است. اقطار AC و BD یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند. خطی از O عبور می‌دهیم تا قطعهٔ AB را در نقطهٔ M و قطعهٔ CD را در نقطهٔ N قطع کند. ثابت کنید که قطعه خط MN از هیچیك از قطعه خطهای AC وBD بزرگتر نیست.(شوروی)

۵ـ در خانه‌های یك جدول 4×4 اعداد از یك تا شانزده را طوری نوشته‌ایم که مجموع چهار عدد هرسطر ، هر ستون و هر قطر باهم برابرند و به علاوه اعداد یك و شانزده درگوشه‌های مقابل هم قرار گرفته‌اند. ثابت کنید که مجموع دو عدد که بطور قرینه نسبت به مرکز جدول قرار گرفته‌اند برابر ۱۷ است. (شوروی)

۶ـ کلیهٔ جوابها صحیح معادلهٔ زیر را پیدا کنید

$$1+x^2+x^3+x^4=y^4$$ (بلغارستان)

۷ـ نامساوی زیر را به ازای عدد طبیعی دلخواه $n\geqslant2$ ثابت کنید: (بلغارستان)

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}-n\cos\frac{\pi}{n}>1$$

۸ـ عدد 13^{101} در مبنای اعشاری داده شده است . مطلوبست دو رقم آخر این عدد در مبنای ۳. (سوئد)

۹ـ فرض کنیم $n_1, n_2, \ldots, n_k$ اعداد طبیعی و به‌علاوه $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ باشد ثابت کنید که:

$$\max(n_1+n_2+\cdots+n_k)=n^{n_1\cdot n_2\cdots n_k}=(t+1)^r t^{k-r}$$

که در آن $t=\left[\frac{n}{k}\right]$ و r باقیماندهٔ تقسیم n بر k می‌باشد یعنی $n=tk+r$ و $0\leqslant r\leqslant k-1$

حل مسائل چهاردهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

۱ـ قبل از هرچیز توجه می‌دهیم که موضوع غیرمتقاطع بودن گروهها چندان اساسی نیست. زیرا هرگاه دو گروه‌عددی متقاطع پیدا کنیم که مجموع اعدادشان برابر باشند. دراین‌صورت می‌توان باکنار گذاشتن اعداد مشترك آنها، دو گروه‌غیرمتقاطع بامجموع عناصر مساوی بدست آورد.

ابتدا تعداد کل گروههای عددی مختلفی راکه از ده عدد داده شده‌بدست می‌آیند حساب می‌کنیم ازآنجاکه برای هریك از ده عدد داده‌شده‌دوامکان متعلق بودن یا متعلق نبودن به گروه موجود است، بنابراین از ده عدد داده شده می‌توان 2^{10} گروه مختلف بدست آورد. به علاوه در این محاسبه ما گروهی را که در آن هیچیك از اعداد شرکت ندارند نیز بحساب آورده‌ایم . اگر این گروه را کنار بگذاریم تعداد کل گروههای مختلف برابر می‌شود با $2^{10}-1=1023$. از آنجاکه بزرگترین عدد ممکن هر گروه حداکثر۹۹ وحداکثر عناصرش فقط‌ده‌عدد می‌تواند باشد، بنابراین مجموع اعداد یك گروه حداکثر برابر $99\times10=990$ است. بنابراین بین ۱۰۲۳ گروه می‌توان گروههایی را پیدا کرد با مجموع اعداد مساوی

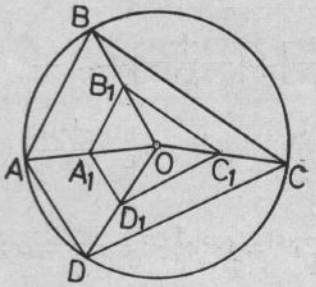
۲ـ راه حل اول : دوحالت زیر را بررسی می‌کنیم:

a) مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی ABCD درداخل چهار ضلعی قرار دارد.

b) مرکزدایرهٔ محیطی چهار ضلعی ABCD درخارج یا روی اضلاع چهار ضلعی قراردارد.

a) فرض کنیم O مرکز دایرهٔ محیطی باشد . عمودهای وارد از O براضلاع چهارضلعی ABCD آنرا به۴چهارضلعی که هرکدام از آنها دارای دو زاویهٔ قائمهٔ روبرو می‌باشند تجزیه می‌کنند. بنابراین‌می‌توان‌دایره‌ای بر هریك از چهار-ضلعیهای‌حاصل‌محیط‌کرد. یعنی حالت (a) برای $n=۴$ ثابت است. این حالت را برای $n\geqslant۵$ ثابت‌می‌کنیم. شعاعهای OA، OB، OC، OD را رسم‌کرده وروی آنها قطعات

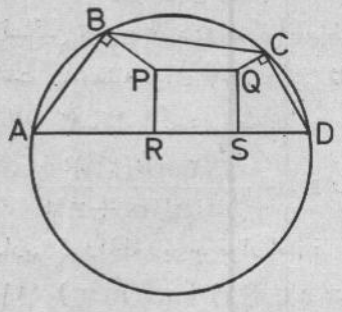
$$OA_۱=OB_۱=OC_۱=OD_۱=\frac{۱}{۲}OA$$



(شکل۱)

راجدا می‌کنیم وسپس چهارضلعی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ (شکل۱) رامی‌سازیم . در نتیجه این عمل‌چهار ضلعی ABCD به۵چهار ضلعی تجزیه می‌شود. چهارضلعی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ باچهارضلعی‌اصلی‌متشابه بوده‌وبنابراین می‌توان دایره‌ای بر آن محیط کرد و ۴ چهار ضلعی دیگر ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین‌می‌باشند ودرنتیجه می‌توان دوایری برآنها نیز محیط کرد . از طرفی هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین دلخواهی را می‌توان به‌کمك خطوطی موازی قاعده‌ها به ذوزنقه‌های متساوی الساقین دیگری تجزیه کرد و به این ترتیب می‌بینیم‌که مسئله برای $n\geqslant۵$ دلخواه ثابت می‌شود.

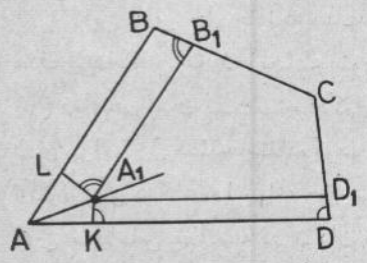
b) در این حالت به آسانی می‌توان متوجه شدکه دو زاویهٔ مجاور چهار ضلعی ABCD منفرجه می‌باشند . فرض کنیم این دو زاویه B و C (شکل۲) باشند. از B عمودی بر ضلع AB و از نقطهٔ C عمودی بر ضلع CD فرود می‌آوریم. معلوم است‌که در داخل چهار ضلعی ABCD و روی این عمودها می‌توان دو نقطهٔ P وQ را طوری‌انتخاب کرد که‌قطعه خط QP موازی ضلع AD گردد . اگر از نقاط P و Q عمودهایی بر ضلع AD فرود آورده و پای آنها را R و S بنامیم می‌بینیم‌که چهار ضلعی داده شده به ۴ چهارضلعی تقسیم می‌شود. هرگاه‌مجموع زوایای داخلی آنها را حساب‌کنیم متوجه‌می‌شویم‌که می‌توان‌برآنها دوایری محیط‌کرد . و چون مربع مستطیل PQRS را می‌توان‌به تعداد دلخواه مربع مستطیلهای کوچکتر



(شکل۲)

تجزیه‌کنیم نتیجه می‌گیریم‌که در این حالت (b) مسئله برای $n\geqslant۴$ دلخواه ثابت است:

راه حل دوم = این راه حل به محل قرارگرفتن‌مرکزدایره بستگی ندارد . فرض کنیم A کوچکترین زاویهٔ داخل چهارضلعی ABCD باشد.ازنقطهٔ



شکل ۳

A در داخل زاویهٔ BAD خطی رسم می‌کنیم. روی این خط نقطه‌ای مانند $A_۱$ به اندازهٔ کافی نزدیك نقطهٔ A طوری در نظر می‌گیریم‌که خطوط رسم شدهٔ موازی اضلاع AB و AD اضلاع BC و CD را به ترتیب در نقاط $B_۱$ و $D_۱$ (شکل ۳) قطع کنند. توجه داریم که چهار ضلعی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ متشابه چهار ضلعی ABCD می‌باشد و در نتیجه می‌توان دایره‌ای بر آن محیط کرد. از آنجا که زاویهٔ A کوچکترین زاویهٔ چهار ضلعی ABCD می‌باشد پس در ذوزنقهٔ $AA_۱D_۱D$ زاویهٔ $A_۱AD$ کوچکتراست‌از زاویهٔ $D_۱DA$. نتیجه‌می‌گیریم که روی AD می‌توان نقطه‌ای مانند K طوری انتخاب کرد که دو زاویهٔ $D_۱DK$ و $A_۱KD$ برابر باشند یعنی ذوزنقهٔ $KA_۱D_۱D$ متساوی‌الساقین گردد . به همین ترتیب روی ضلع AB نقطه‌ای مانند L طوری انتخاب می‌کنیم که ذوزنقهٔ $A_۱LBB_۱$ متساوی‌الساقین گردد . می‌ماند ثابت کنیم که می‌توان دایره‌ای بر چهار ضلعی $ALA_۱K$ محیط کرد . از آنجا که چهار ضلعی اصلی محاطی است پس $B+D=\pi$ و از طرفی : $ALA_۱=\pi-B$ و $AKA=\pi=D$ و بنابر این : $ALA_۱+AKA_۱=۲\pi-(B+D)=\pi$

یعنی بر چهار ضلعی $ALA_۱K$ می‌توان‌دایره‌ای محیط کرد. بنابراین مسئله برای $n=۴$ ثابت شد . ولی چون در تجزیهٔ اخیر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین داریم‌و دیدیم‌که هر ذوزنقهٔ

متساوی‌الساقین را می‌توان به تعداد دلخواه ذوزنقه‌های متساوی الساقین تجزیه کرد که همگی محاطی می‌باشند واین بدین‌معنی است که مسئله برای $n>4$ نیز ثابت است .

۳ـ راه اول : رابطه را به صورت

$$f(m \text{ و } n)=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

می‌نویسیم و توجه داریم که رابطهٔ زیر برقرار است:

$$f(m+1 \text{ و } n)=-f(m \text{ و } n+1)+nf(m \text{ و } n) \quad (1)$$

این موضوع را می‌توان با محاسبهٔ مستقیم محقق کرد .

با استفاده از رابطهٔ (۱) می‌توان با ثابت نگاهداشتن n ثابت کرد که $f(m \text{ و } n)$ عددی است صحیح .

این روش حل چنانکه مشاهده می‌کنید به سرعت مارا به هدف می‌رساند، اما از آنجاکه متوجه شدن به برقراری رابطهٔ (۱) زیاد هم آسان نیست، تعدادکمی از شرکت‌کنندگان ازاین روش برای حل مسئله استفاده‌کرده بودند . به همین جهت اکثراً روش دیگری را برای حل مسئله برگزیده بودند . این روش براساس مطالعه در توان ضرایب صورت و مخرج $f(m \text{ و } n)$ استوار است.

راه حل دوم: نشان می‌دهیم که ماکسیمم‌توان عدد اول p که صورت‌کسر داده شده برآن بخش پذیر است از توان همان عدد p که مخرج‌کسر برآن بخش پذیر است کوچکتر نمی‌باشد و دراین صورت مسئله ثابت خواهد بود.

لم ۱ـ فرض‌کنیم برای عدد اول p واعداد طبیعی n و k نامساوی $p^{k+1}>n$ برقرار باشد. در این صورت عدد p در تجزیهٔ $n!$ به n عامل باتوان

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

ظاهر خواهد شد. در این رابطه منظور از $[a]$ قسمت صحیح عدد a می‌باشد . اثبات این قضیه را به عهدهٔ خوانندگان می‌گذاریم.

لم۲ـ فرض‌کنیم a و b اعداد مثبت‌باشند. دراین‌صورت نامساوی زیر برای آنها برقرار است.

$$[2a]+[2b]\geqslant[a]+[b]+[a+b]$$

فرض‌کنیم $a=[a]+\alpha$ و $b=[b]+\beta$ که در آن $0\leqslant\alpha<1$ و $0\leqslant\beta<1$ باشند . هرگاه $\alpha+\beta<1$ باشد در این صورت $[a+b]=[a]+[b]$ و بنابراین داریم:

$$[2a]+[2b]\geqslant 2[a]+2[b]=[a]+[b]+2\beta\geqslant 1$$

فرض‌کنیم مثلا $2\alpha\geqslant 1$ (حالت $2\beta\geqslant 1$ به همین ترتیب بررسی می‌شود) باشد، در این صورت

$$[2a]=2[a]+1 \quad \text{و} \quad [a+b]=[a]+[b]+1$$

بنابراین

$$[2a]+[2b]\geqslant 2[a]+1+2[b]$$
$$=[a]+[b]+[a+b]$$

حال عدد اول دلخواه قدری بزرگتر از k رادر نظرمی‌گیریم که $p^{k+1}>2n$ و $p^{k+1}>2m$ باشد . در این صورت $p^{k+1}>m+n$ خواهد بود. بااستفاده از لم اول نتیجه می‌گیریم‌که عدد p باتوان s داده شدهٔ در زیر در صورت کسر ظاهر می‌شود،

$$s=\left[\frac{2n}{p}\right]+\left[\frac{2n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{2n}{p^k}\right]+\left[\frac{2m}{p}\right]+$$
$$+\left[\frac{2m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{2m}{p^k}\right]$$

و در مخرج باتوان t داده شدهٔ در زیر ظاهر می‌شود.

$$t=\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{p^k}\right]+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+$$
$$+\cdots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\left[\frac{m+n}{p}\right]+\left[\frac{m+n}{p^2}\right]+\cdots+$$
$$+\left[\frac{m+n}{p^k}\right]$$

سپس با بکار بردن لم دوم برای $a=\frac{m}{p^i}$ و $b=\frac{n}{p^i}$ بدست می‌آوریم،

$$\left[\frac{2m}{p^i}\right]+\left[\frac{2n}{p^i}\right]\leqslant\left[\frac{m}{p^i}\right]+\left[\frac{n}{p^i}\right]+\left[\frac{m+n}{p^i}\right]$$

بانوشتن چنین نامساویهایی‌برای $i=1$ و ۲ و ۳ و ... ، k نتیجه می‌گیریم که $s\geqslant t$ می‌باشد. و از اینجا نتیجه می‌شودکه صورت‌کسر داده شده برمخرجش بخش پذیر است

۴ـ معلوم است که

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=a \qquad (1)$$

جواب دستگاه داده شده به ازای مقادیر دلخواه a می‌باشد . نشان می‌دهیم که جواب دیگری وجود ندارد . فرض‌کنیم x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_5 در دستگاه داده شد صدق‌کنند. از آنجاکه دستگاه داده شده در تبدیل دوره‌ای:

$$x_1\to x_2\to x_3\to x_4\to x_5$$

تغییر نمی‌کند و می‌توان بدون هیچ محدودیتی فرض‌کردکه x_1 بین اعداد x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_5 بزرگترین است یعنی $x_1\geqslant x_i$ و $i=1$ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵

در این صورت معلوم است که

$$x_1^2-x_2x_4\geqslant 0 \quad \text{و} \quad x_1^2-x_3x_5\geqslant 0$$

با استفاده از نامعادلات اولی وپنجمی بدست می‌آوریم:

$$x_5^2 - x_2x_4 \leq 0 \text{ و } x_2^2 - x_3x_5 \leq 0$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که هرگاه اعداد x_2 و x_3 و x_4 و x_5 باهم برابر نباشند دراین صورت x_2 و x_5 نمی‌توانند بزرگترین بین آنها باشند. بنابراین بزرگترین عدد بین اعداد x_5 و x_4 و x_3 و x_2 فقط x_3 یا x_4 می‌تواند باشد. به‌سادگی می‌توان دید که دستگاه نامعادلات با تعویض جاهای x_3 و x_4 باهم و جاهای x_2 و x_5 باهم در یك‌زمان هیچ تغییری نمی‌کند. به این جهت بدون هیچ محدودیتی می‌توان فرض کرد که x_3 بزرگترین عدد بین اعداد x_2 ، x_3 ، x_4 ، x_5 می‌باشد. به این ترتیب (۵ و ۴ و ۲) $x_1 \geq x_3 \geq x_i$ در این صورت $x_1x_3 > x_4$ و $x_1x_3 \geq x_5$ و بنابراین با درنظر گرفتن نامعادلهٔ چهارم بدست می‌آوریم.

$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) = 0$$

پس یا $x_1x_3 = x_4^2$ یا $x_1x_3 = x_5^2$ می‌باشد. بادرنظر گرفتن نامعادلهٔ سوم بدست می‌آوریم، $x_1 = x_3 = x_4$ و یا $x_1 = x_3 = x_5$. در حالت اول اگر فقط یکی از اعداد x_2 و x_5 کوچکتر از $x_1 = x_3 = x_4$ باشد در این‌صورت درنامعادلهٔ سوم به‌تضادبرمی‌خوریم. یعنی دراین‌حالت‌هرپنج عدد بایدبرابر باشند. در حالت دوم عدد x_5 بزرگترین عدد بین اعداد x_2 ، x_3 ، x_4 ، x_5 می‌شود و چنانکه توجه کردیم این مورد فقط وقتی ممکن است که این چهار عدد باهم برابر باشند. به علاوه چون $x_1 = x_3$ می‌باشد پس هرپنج عدد باهم برابر خواهند شد.

به این ترتیب در حالت کلی رابطهٔ (۱) برقرار است و این بدین معنی است که دستگاه داده شده فقط دارای یك‌جواب به صورت (۱) می‌باشد.

۵ـ راه حل اول: حالت عکس را در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم در یك نقطه مانند y_0 داشته باشیم $|g(y_0)| = a > 1$. نقطهٔ x_0 را طوری در نظر می‌گیریم که $f(x_0) \neq 0$ باشد سری $\{x_k\}$ را برحسب اندیسهای $k = 0, 1, 2, \ldots$ به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + y_0 \Leftarrow |f(x_k + y_0)| \geq |f(x_k - y_0)| & \text{به‌ازای} \\ x_k - y_0 \Leftarrow |f(x_k + y_0)| < |f(x_k - y_0)| & \text{به‌ازای} \end{cases}$$

با استفاده از شرط داده شدهٔ در مسئله، بدست می‌آوریم:

$$2|f(x_{k+1})| \geq |f(x_k + y_0)| + |f(x_k - y_0)| \geq$$
$$\geq |f(x_k + y_0) + f(x_k - y_0)|$$
$$= 2|f(x_k)| \cdot |g(y_0)| = 2a|f(x_k)|.$$

بنابراین به ازای $a > 1$ ، $k = 0, 1, 2, \ldots$ داریم.

$$|f(x_{k+1})| \geq a|f(x_k)|$$

از اینجا بدست می‌آوریم

$$|f(x_{k+1})| \geq a^k |f(x_0)|$$

از آنجاکه $|f(x_0)| \neq 0$ و $a > 1$ می‌باشد بنابراین می‌توان k را چنان انتخاب کرد که به ازای آن $a^k|f(x_0)| > 1$ و در نتیجه $|f(k)| > 1$ گردد، که مخالف فرض مسئله می‌باشد. از تناقض بدست‌آمده بر می‌آید که به‌ازای جمیع مقادیر y داریم $|g(y)| \leq 1$

راه حل دوم: این راه حل راکسانی بکار برده بودند که با مفهوم حد فوقانی اعداد آشنائی داشتند

حد فوقانی یك مجموعه چنانکه‌معروف است، کوچکترین عدد محدودکنندهٔ عناصرمجموعه از بالا می‌باشد. فرض کنیم M حد فوقانی مجموعهٔ مقادیر تابع $|f(x)|$ باشد. از فرض مسئله نتیجه می‌شود که $M \neq 0$ و:

$$|2f(x)g(y)| = |f(x+y) + f(x-y)| \leq$$
$$\leq |f(x+y)| + |f(x-y)| \leq 2M$$

یعنی به‌ازای جمیع مقادیر x و y داریم: $|f(x)| \cdot |g(y)| \leq M$.

فرض می‌کنیم در نقطه‌ای مانند y_0 داشته‌باشیم $y_0 |g(y_0)| > 1$ در این صورت برای x دلخواه خواهیم داشت.

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|g(y_0)|} < M$$

یعنی عدد $\frac{M}{|g(y_0)|}$ مجموعهٔ مقادیر تابع $|f(x)|$ را ازبالامحدود می‌کندودرضمن‌این‌عددخیلی کوچکتر از M می‌باشد و این باحد فوقانی بودن M مخالفت دارد. به این ترتیب بافرض $|g(y_0)| > 1$ ما به تناقض برخورد می‌کنیم و بنابراین به‌ازای جمیع مقادیر y داریم:

$$|g(y)| \leq 1$$

۶ـ ابتدا قضیهٔ زیررا یادآوری می‌کنیم.

قضیه‌ـ فرض کنیم در یك صفحه سه خط موازی داده شده باشند. می‌توان مثلث متساوی الاضلاعی رسم کرد که هریك از رأسهایش روی یکی از این خطوط باشد.

اثبات این قضیه را به صورت یك مسئله به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

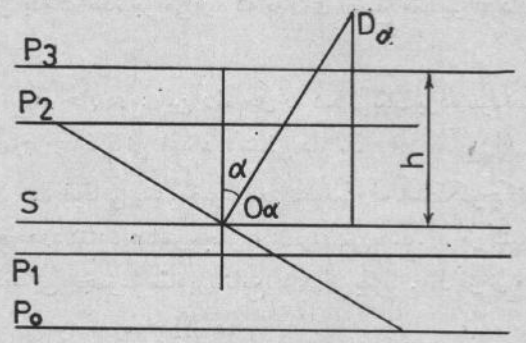
قبلاً توجه می‌دهیم که طول اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع بدست آمده در قضیهٔ فوق مستقل از روش‌رسم بوده و فقط‌بستگی به فواصل بین خطوط موازی داده شده دارد و این‌طول اضلاع مقداری است معیین و منحصر به فرد.

فرض کنیم p_0 ، p_1 ، p_2 ، p_3 صفحات موازی داده شده باشند و به علاوه بدون هیچ محدودیتی فرض می‌کنیم که صفحات p_1 ، p_2 ، p_3 در یك طرف صفحهٔ p_0 قرار داشته‌وفواصلشان از آن به ترتیب برابر d_1 ، d_2 ، d_3 باشد بطوری که:

$$0 < d_1 < d_2 < d_3$$

صفحهٔ دلخواهی را بررسی می‌کنیم که عمود بر آن با عمود بر صفحهٔ p_0 زوایهٔ α $(\alpha \neq 0)$ بسازد. این صفحه را به Q_α را نشان می‌دهیم. این صفحه صفحات p_0, p_1, p_2 را در خطوط موازی $l_0^\alpha, l_1^\alpha, l_2^\alpha$، قطع می‌کند و می‌دانیم که قضیهٔ فوق در مورد این سه خط موازی صادق است.

توجه‌داریم که فواصل خط l_0^α تا خطوط l_1^α و l_2^α به



ترتیب برابر ند با $\frac{d_1}{\sin\alpha}$ و $\frac{d_2}{\sin\alpha}$ مثلث. متساوی‌الاضلاع بدست آمده طبق قضیهٔ فوق را به $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ وطول اضلاعش را به a_α نشان می‌دهیم که در آن $A_\alpha \in P_0$، $B_\alpha \in P_1$، $C_\alpha \in P_2$ می‌باشند.

حال مجانس صفحهٔ Q_α را با مرکز تجانس A_α وضریب تجانس $k = \sin\alpha$ بدست می‌آوریم. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول اضلاع برابر $a_\alpha \sin\alpha$ بدست می‌آوریم که رأسهایش روی سه خط موازی قرار دارند که فواصل دوتا از این خطوط از خط سوم برابر d_1 و d_2 است طول اضلاع مثلث بدست آمده معین ومنحصر به‌فرد است و می‌توان این طول را برحسب مقادیر d_1 و d_2 بدست آورد. ولی برای هدفهای ما کافی است توجه داشته باشیم که این طولها با ثابت بودن محل صفحات نسبت به یکدیگر مقداری ثابت هستند طول اضلاع را a فرض می‌کنیم بنابراین داریم

$$a_\alpha \sin\alpha = a \Longrightarrow a_\alpha = \frac{a}{\sin\alpha}$$

حال حساب می‌کنیم که O_α مرکز مثلث $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ در چه فاصله‌ای از صفحهٔ P_0 قرار دارد. فرض کنیم E_α وسط ضلع $B_\alpha C_\alpha$ باشد. با بررسی صفحهٔ مار بر خط $B_\alpha C_\alpha$ وعمود بر صفحهٔ P_0 متوجه می‌شویم که فاصلهٔ نقطهٔ E_α تا صفحهٔ P_0 برابر $\frac{d_1+d_2}{2}$ است سپس با عبور دادن صفحه‌ای بر خط $A_\alpha E_\alpha$ و عمود بر P_0 و درنظر گرفتن اینکه $A_\alpha O_\alpha = \frac{2}{3} A_\alpha E_\alpha$ است نتیجه می‌گیریم که فاصلهٔ O_α تا صفحهٔ P_0 برابر است با :

$$\frac{2}{3} \times \frac{d_1+d_2}{2} = \frac{d_1+d_2}{3}$$

چنانکه از رابطهٔ اخیر برمی‌آید این فاصله به α بستگی ندارد بنابراین مراکز کلیهٔ مثلثهای متساوی الاضلاعی که رأسهایشان روی صفحات P_0, P_1, P_2 قرار دارند، بر روی صفحهٔ معینی مانند S می‌افتند که فاصله‌اش از صفحهٔ P_0 و در نتیجهٔ ازصفحهٔ p_3 مقداری است ثابت. فاصلهٔ صفحهٔ S تا صفحهٔ p_3 را h فرض می‌کنیم. حال چهار وجهی $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$ را درنظر می‌گیریم که قاعدهٔ آن مثلث $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ بوده و از دو وضع ممکن رأس D_α وضعی را انتخاب می‌کنیم که نسبت به صفحهٔ p_0 در فاصلهٔ دورتری قرار گرفته باشد. به‌آسانی می‌توان دید که ارتفاع $D_\alpha O_\alpha$ چهار وجهی بدست آمده برابر $\sqrt{\frac{2}{3}}\, a_\alpha$ می‌باشد. صفحه‌ای مار بر $D_\alpha O_\alpha$ برصفحهٔ p_0 عمود می‌کنیم. از بررسی ترسیم دراین صفحه (شکل ۴) که در آن p_0؛ p_1، P_2، p_3 و S فصل مشترکهای این صفحه باصفحات p_0، p_1، p_2، p_3، و S می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که فاصلهٔ نقطهٔ D_α تاصفحهٔ S برابر است با $\sqrt{\frac{2}{3}}\, a_\alpha \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a \cot g\alpha$. برای آنکه رأس D_α چهار وجهی $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$ روی صفحهٔ P_3 بیفتد، شرط لازم وکافی آن است که فاصلهٔ بدست آمده برابر h گردد، یعنی:

$$\cot g\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \frac{h}{a}$$

چون برای α همیشه می‌توان مقداری از رابطهٔ فوق بدست آورد نتیجه می‌گیریم که همیشه چهار وجهی بامشخصات داده‌شدهٔ در مسئله موجود است. به علاوه این فرمول به ما اجازه می‌دهد که با داشتن اوضاع چهارصفحه نسبت به یکدیگر همیشه چهاروجهی موردنظر را بسازیم

با ریاضیات آشتی کنید دنباله از صفحهٔ ۳۸۹

و GK ، DB و HF را در نظر می‌گیریم ، چهار مستطیل بزرگ داریم: IKTO، OTFX، GIOR، ROXH و چهار مستطیل کوچکتر: IKTO · OTFX ، GIOR ، ROXH و بالاخره مستطیل GKFH که همهٔ آنها را در بردارد؛ پس رویهم $۹ = ۱ + ۴ + ۴$ مستطیل داریم،

بنابراین؛ ۱۳ نقطهٔ تقاطع، ۵۰ پاره خط، ۱۲۰ زاویه، ۴۴ مثلث، ۹ مستطیل و ۴۰ ذوزنقه در روی شکل وجوددارد.

دوست عزیزم، از تو سپاسگزارم که موجب شدی تاهمهٔ دانش‌آموزانی که این نوشته را می‌خوانند دریابند که بایدنگاه کردن را یاد بگیرند، هرچندکه خوب می‌بینند!

وقتی نگاه‌کردن را یادگرفتند آنگاه می‌توانند شکل مربوط به یك قضیه یا یك مسئله را به خوبی بشناسند. آیاامکان داردکه به حل مسئله‌ای موفق‌شوید درحالی‌که بعضی ازاجزاء آن از نظرشما مخفی باشد؟

باید راهنمایی شوید تا در نگاه‌کردن همه چیزرا ببینید آنگاه حواس خود را متمرکز کنید، شاهد موفقیت درآغوش‌شما خواهدبود.

دنباله دارد

مروری در پرسشهای آزمون ریاضی وهوش کنکور سراسری ۱۳۵۱

یادآوری برخی از نکته‌ها که در تعیین پاسخ درست بعضی‌از پرسشها باید رعایت‌شده‌باشد،

ارائهٔ راه حل بعضی ازپرسشها.

پرسش۴ از آزمون ریاضی گروه ریاضی: شاید بعضی از دانش‌آموزان برای تعیین مکان M به حذف پارامتر t بین مقادیر x و y اکتفا کنند. در این صورت معادلهٔ $y=1+x$ راخواهند داشت که معادلهٔ یك خط راست است.

اما این دانش‌آموزان یك نکته را نادیده گرفته‌اند وآن شرط وجود مقادیر حقیقی x و y است : هرچه باشد t داریم $t^2\geq 0$ و در نتیجه $x\geq 0$ و $y\geq 1$ می‌باشد، پس مکان Mقسمتی از خط به معادلهٔ $y=1+x$ است که دو شرط $x\geq 0$ و $y\geq 0$ با هم در آن صادق باشند .

پرسش ۸ـ اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم :

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

هرگاه $x+y+z=0$ باشد . چون مجموع $x^2+y^2+z^2$ مقدار نامنفی است پس، باید مجموع $E=xy+yz+zx$ مقدار نامثبت یعنی $E\leq 0$ باشدتاحاصل جمع این دو مجموع برابر با صفر گردد .

پرسش ۹ـ بنابه قرارداد اگر A مقدار مثبت باشد $|A|=A$ است و اگر A مقدار منفی باشد $|A|=-A$ است از نا مساویهای $a<x<b$ نتیجه می‌شود که $x-a>0$ و $x-b<0$ پس :

$$|x-a|+|x-b|=(x-a)+(-x+b)=b-a$$

پرسش ۱۰ـ اگردو نامساوی همجهت باشند می‌توانیم طرفین آنها را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم . دو نامساوی مفروض را به ترتیب زیر همجهت می‌سازیم :

$$\begin{cases} x+y<1 \\ -x+y<1 \end{cases} \Longrightarrow 2y<2 \Longrightarrow y<1$$

می‌توان ناحیهٔ جواب هریك از دو نامعادله را در صفحهٔ محورهای مختصات تعیین و آنگاه معلوم کرد که کدامیك از جوابها در هردو ناحیه صادق است .

پرسش ۱۲ـ به ترتیب داریم :

$$\frac{U}{V}+\frac{U'}{V'}=\frac{UV'+U'V}{VV'}=0$$

$$UV'+U'V=0 \Longrightarrow UV=C^{et}$$

پرسش ۱۵ـ اگرخواسته باشیم این مسئله را مستقیما حل کنیم، کافی است که امتداد مجانب یعنی حد $\frac{y}{x}$ را وقتی $x\to\pm\infty$ تعیین کنیم :

$$\frac{x}{y}=2+\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$$

$$x\to+\infty \Longrightarrow \lim\frac{y}{x}=2+1=3$$

$$x\to-\infty \Longrightarrow \lim\frac{y}{x}=2-1=1$$

پس خط $y=x$ با مجانب (یکی از مجانبهای) منحنی موازی است .

می‌توانیم پاسخ درست را از راه امتحان جوابها بدست آوریم ؛ از حذف y بین تابع و معادلهٔ داده شده باید معادله‌ای بدست آید که در آن ضریب بزرگترین درجهٔ x حذف شود. معادلهٔ $y=x$ این خاصیت را دارد است :

$$x=2x+\sqrt{x^2+x} \Longrightarrow 0\times x^2+x=0$$

پرسش۱۶ـ هرگاه‌درتابع به‌صورت $y=f(x)+g(x)$ وقتی $x\to\pm\infty$ حد $f(x)$ برابربا صفر وحد $g(x)$ مخالف‌با صفر باشد،تابع $y=g(x)$ منحنی مجانب‌منحنی تابع‌مفروض را مشخص می‌کند. با این مقدمه و با توجه به اینکه تابع داده شده به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$y=x+1+g(x)-3$$

چون $y=x+1$ معادلهٔ مجانب منحنی است : پس وقتی $x\to\pm\infty$ حد $[g(x)-3]$ برابر است باصفر، پس حد $g(x)$ برابر است با ۳

پرسش ۱۷ـ با تبدیل x به $-x$ هر یك از مقادیر $|x|$ و $\sqrt{x^2+2}$ و در نتیجه y برابر با خود باقی می‌ماند؛ پس محور $y'y$ یعنی خط $x=0$ محور تقارن منحنی تابع است.

پرسش ۱۸ـ با تبدیل x و y به یکدیگر ، معادلهٔ داده شده تفاوت نمی‌کند. پس خط بـه معادلهٔ $x=y$ محور تقارن منحنی مربوط است .

پرسش ۱۹ـ باتوجه به نامساوی معروف زیر پاسخ درست به سادگی پیدا می‌شود :

$$x>0 \text{ و } y>0 \Longrightarrow (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant 2$$

صورت کلی این نامساوی چنین است:

$$x_i>0 \Longrightarrow (x_1+x_2+\cdots+x_n)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2$$

پرسش ۲۰ـ در این نـوع مسائل می‌توانیم قبلا معلوم کنیم که تابع مفروض کلا در چه فاصله‌هایی معین است آنگاه معلوم کنیم کدامیك از فاصله‌های داده شده جزئی از یکی از فاصله‌های مزبور است.

تابع $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{3}{2}}$ در فاصلهٔ $-1\leqslant x<1$ معین است .

از فاصله‌های داده شده ، فاصلهٔ $\left(-1 \text{ و } \frac{1}{2}\right)$ جـزئی از فاصلهٔ $(-1 \text{ و } 1)$ است .

پرسش ۲۵ـ می‌توانیم پاسخها را بـه نوبت امتحان کنیم :

$$f\left(\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=f\left(\cos\frac{x}{2}\right)\neq f\left(\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$f\left(tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=f\left(-cotg\frac{x}{2}\right)\neq f\left(tg\frac{x}{2}\right)$$

$$f\left(\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=f(\sin(2x+\pi))=$$
$$=f(-\sin 2x)\neq f(\sin 2x)$$

$$f\left(tg 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=f(tg(2x+\pi))=f(tg 2x)$$

پرسش ۲۹ـ عبارت داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\times\frac{2}{3}\left(\frac{\sin\frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}}\right)\times\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\frac{x^2}{6}}{\frac{x^2}{6}}\right)$$

با توجه به اینکه هرگاه $a\to 0$ حد $\frac{\sin a}{a}$ برابر است با یك. وقتی $x\to 0$ حد عبارت مفروض برابر می‌شود با $\frac{1}{18}$

پرسش ۳۰ـ برای تعیین تعداد جوابهای معادلهٔ $x-2\sin x=0$ خط بـه معادلهٔ $y=x$ و منحنی تـابع $y=2\sin x$ را در یك شکل رسم می‌کنیم. این خط و منحنی در مبدأ مختصات از یکدیگر می‌گذرند وچون ضریب زاویه‌ای مماس بر منحنی در مبدأ برابر است با $2\cos 0=2$ و ضریب زاویه‌ای خط $y=x$ برابر یك است، پس این خط زیر مماس بر منحنی واقع است و غیر از مبدأ در دو نقطهٔ دیگر (که نسبت به مبدأ قرینهٔ یکدیگرند) منحنی را قطع می‌کند . پس معادلهٔ مفروض دارای سه جواب است .

پرسش ۳۱ـ اولا از رابطهٔ $a^3=b^3+c^3$ بر می‌آید که $a>b$ و همچنین $a>c$. ثانیا رابطهٔ مزبور را چنین می‌نویسیم،

$$a^2=\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{a}$$

$$a>b \Longrightarrow \frac{b^3}{a}<\frac{b^3}{b}=b^2$$

$$a>c \Longrightarrow \frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{c}=c^2$$

$$a^2<b^2+c^2 \Longrightarrow A<90^\circ$$

پرسش ۳۲ـ در هر ذوزنقه دو زاویهٔ مجاور به‌هرساق مکمل یکدیگرند پس نیمسازهای آنها برهم عمودند .

دو زاویهٔ مقابل از چهار ضلعی حاصل قائمه‌اند ، پس این چهار ضلعی محاطی است.

[اگر در نظر بگیریم که هر متوازی‌الاضلاع، هرمستطیل هرلوزی و هرمربع نیز ذوزنقه است، باتوجه به اینکه هرمربع، هر مستطیل نیز چهار ضلعی محاطی است، پس در هرحال پاسخ (۴) درست است.]

پرسش ۳۳ـ می‌توانیم از این خاصیت استفاده کنیم که «در هر مثلث، نسبت فواصل هر نقطهٔ میانه از دو ضلع واقع در طرفین آن با این دو ضلع نسبت معکوس دارند». اگر G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC و H و I و J به ترتیب تصویرهای قائم G بر ضلعهای BC و CA و AB باشد داریم :

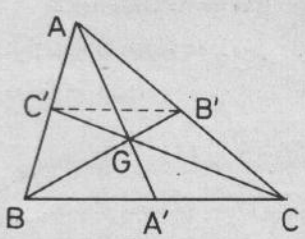
$$BC\times GH=CA\times GI=AB\times GJ$$

پس سه مثلث BGC و CGA و AGB معادلند .

می‌توانیم مطابق با شکل چنین عمل کنیم :

دو مثلث BGA' و $A'GC$ معادلند زیرا در رأس مشترکند و قاعده‌های آنها برابر و بـر یك خط واقعند . دو

مثلث $BB'C$ و $CC'B$ نیز معادلند زیرا در قاعده مشترکند و رأسهای آنها برخط موازی با قاعده قرار دارند. نتیجه‌می‌شود که دو مثلث $BC'G$ و $CB'G$ معادلند. از اینجا نتیجه خواهدشد



شش مثلثی که حول نقطهٔ G تشکیل شده است معادلند ومجموع مساحتهای دو به دو از آنها نیز با هم برابرند.

پرسش۳۸ـ صفحه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یك فاصله باشد یا با AB موازی است یا از O وسط AB می‌گذرد. بر خط D یك صفحه می‌توان گذراند که با AB موازی باشد و یك صفحه می‌توان گذراند که از O نیز بگذرد.

پرسش۴۰ـ دایرهٔ قاعدهٔ استوانهٔ دوار تصویر قائم هر مقطعی از آن است. چون قطر بزرگ بیضی مقطع دو برابر قطر کوچك آن و تصویر بیضی دایره‌ای است که قطر آن با قطر کوچك بیضی برابر است پس تصویر قطر بزرگ بیضی نصف این قطر است و در نتیجه زاویهٔ بین خط و تصویرش ۶۰ درجه است

پرسش۴۴ـ نقطهٔ A را دایرهٔ به‌شعاع صفر فرض‌می‌کنیم. مکان مطلوب محور اصلی دایره‌های A و O است که خط عمود بر OA است.

پرسش۴۶ـ اگر P قطب و K قوت انعکاس باشد. K برابر است با قوت P نسبت به دایرهٔ C. هرگاه خطی که از P می‌گذرد دایرهٔ انعکاس را در Q و دایرهٔ C را در A و B قطع کند داریم:

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=K \text{ و } \overline{PM}^2=K \Longrightarrow \overline{PM}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$$

پس دایرهٔ انعکاس (= دایرهٔ به مرکز P و به شعاع $PM=\sqrt{K}$) بر دایرهٔ C عمود است

پرسش۴۸ـ در این پرسش می‌توان بدون استفاده از فرمولهای تصاعد چنین عمل کرد:

$$۱۰۰<۱۴k<۹۹۹ \Longrightarrow ۸\leqslant k\leqslant ۷۱$$

تعداد اعداد صحیح ابتدا از ۸ و مختوم به ۷۱ برابر با ۶۴ است

پرسش۵۲ـ از رابطهٔ $ab=۱۰$ داریم:

$log\,a+log\,b=۱$. مجموع دو مقدار $log\,a$ و $log\,b$ مقدار ثابت است پس حاصل ضرب آنها وقتی ماکسیمم است که آنها با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} log\,a=log\,b \\ log\,a+log\,b=۱ \end{cases} \Longrightarrow log\,a\times log\,b=\frac{۱}{۴}$$

پرسش۵۳ـ در هر تقسیم، باقیمانده برمقسوم علیه‌های مشترك مقسوم و مقسوم علیه بخش پذیراست.

پرسش۵۴ـ عدد ۲۳۱×۱۰^n به صورت $۳\times ۷\times ۱۱\times ۲^n\times ۵^n$ تجزیه می‌شود وتعداد عاملهای اول آن ۵ است.

پرسش۵۷ـ داریم:

$$\overline{ab}+\overline{ab}=۱۱(a+b)$$

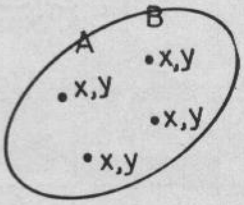
چون $۱<a+b\leqslant ۱۸$ و ۱۱ عدد اول است، عدد مفروض وقتی اول است که $a+b=۱۱$ باشد. تعداد جفتهای a و b که مجموع آنها ۱۱ است برابر است با تعداد اعداد ابتدا از ۲ و منتهی به ۹ که برابر است با ۸.

پرسش۶۰ـ باقیماندهٔ تقسیم ۲^3 و در نتیجه باقیماندهٔ تقسیم ۲^{3n} بر ۷ برابر است بایك و چون $۲^{۳۶}=۲\times ۲^{۳۷}$ پس باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۷ برابراست با $۱\times ۲=۲$

یادآوری نکته‌هایی مربوط به آزمون هوش

I ـ اشاره‌ای به معانی الفاظ: همه، بعضی، هیچ

فرض‌می‌کنیم A مجموعهٔ xها و B مجموعهٔ y ها باشد. یعنی هرعضوی ازمجموعهٔ A به نام x و هرعضوی از مجموعهٔ B به نام y باشد. دو مجموعهٔ A و B نسبت به هم حالتهای زیر را می‌توانند داشته‌باشند:



الف ـ دو مجموعهٔ A و B متساوی‌باشند، یعنی هرعضوی از A عضو B وهرعضوی از B عضو A نیز باشد. دراین‌صورت می‌نویسیم $A=B$ و می‌گوییم:

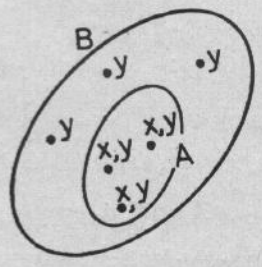
همهٔ xها y و همهٔ yها x هستند

یا اینکه می‌گوییم: **هر x، y است و هر x، y است**

به جای لفظهای «همه» یا «هر» می‌توان لفظهای معادل با آنها نیز بکار برد.

مثال: مجموعهٔ میوه‌های درخت رز با مجموعهٔ انگورها برابر است. پس: همهٔ انگورها میوهٔ درخت رز می‌باشند و همهٔ میوه‌های درخت رز انگورمی‌باشند.

برعکسـ هرگاه همهٔ x ها y و همهٔ y ها x باشند، در این صورت دو مجموعهٔ x ها و y ها باهم متساویند.



ب ـ مجموعهٔ A زیرـ مجموعه‌ای ازمجموعهٔ B بوده اما باآن برابر نباشد؛ هرعضو A عضوB نیز می‌باشد اما عضوهایی از B وجود دارند که عضو A نمی‌باشند. دراین حالت می‌نویسیم: $A \subset B$ و می‌گوییم؛

همه xها y هستند یا اینکه: **بعضی yها xمی‌باشند.**

مثال: مجموعهٔ کاشانیهازیرمجموعه‌ای از مجموعهٔایرانیها است. پس همهٔ کاشانیهاایرانی‌اندیااینکه: بعضی ایرانیها کاشانی می‌باشند.

برعکسـ هرگاه داشته باشیم: بعضی‌yها x هستند یا اینکه داشته باشیم : همهٔ x ها y می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ xها زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ yها است.

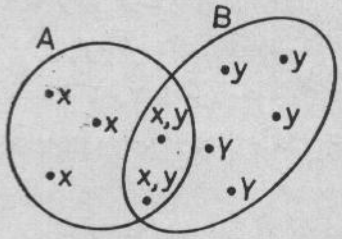
بعضی‌y ها x هستند $\Longleftrightarrow$ {ها x}⊂{ها y}

مثال: وقتی گفته شود: بعضی زاکولها مفتاد هستند یعنی اینکه مجموعهٔ مفتادها زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ زاکولهااست

جـ مجموعهٔ B زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ A باشد دراین صورت می‌نویسیم: $B \subset A$ و می‌گوییم :

همهٔ y ها xهستند یا اینکه: **بعضی xها y می‌باشند**

دـ A و B در بعضی ازعضوهامشترکند و عضوهایی غیرمشترک نیزدارند. در این‌حالت می‌نویسیم:



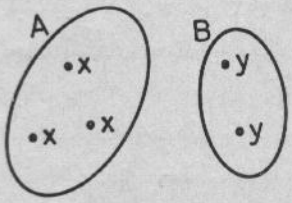
$A \neq B$ و $A \cap B \neq \emptyset$

ومی گوییم:

بعضی‌xها y و بعضی yها x هستند

مثال: عده‌ای از دانش‌آموزان عینك می‌زنند، عده‌ای از اشخاصی‌که دانش‌آموز نیستند نیز عینك می‌زنند ، دو مجموعهٔ دانش آموزان و عینکیها فصل مشترکی دارند ومی گوییم: بعضی از دانش‌آموزان عینکی و بعضی از عینکیهادانش‌آموزند

هـ ـ در مجموعهٔA و B عضو مشترك نداشته باشند که‌می‌نویسیم :



$A \cap B = \emptyset$

و می گوییم:

هیـچ x ، y نیست،

یااینکه،**هیچ y ، x نیست**

مثال: مجموعهٔ عددهای زوج با مجموعهٔعددهای فرد عضو مشترك ندارند: هیچ عددزوجی فرد نیست ، همچنین هیچ عدد فردی زوج نیست.

II ـ رابطهٔ ترتیب

در یك مجموعه یك رابطهٔ R درنظر می‌گیریم، اگراین رابطه سه خاصیت زیررا داشته باشد :

ـ هیچ عضو مجموعه باخودش دررابطهٔR نباشد؛

ـ اگر a با b در رابطهٔ R است، b با a در رابطهٔ R نباشد؛

ـ اگر a با b در رابطهٔ R باشد و اگر b با c دررابطهٔ R باشد، دراین صورت a با c نیز در رابطهٔ R باشد؛

در این صورت می گوئیم که R یك‌رابطهٔ ترتیب‌است.

مثال ـ در مجموعهٔ مقادیر رابطهٔ کوچکتری یك رابطهٔ ترتیب است، زیرا: هیچ مقداری کوچکتر ازخودش نیست، اگر مقدار a از مقدار b کوچکتر باشد مقدار b ناکوچکتر ازمقدار a است، اگر $a<b$ و اگر $b<c$ دراین‌صورت $a<c$

III ـ حل بعضی پرسشهای آزمون هوش

پرسش۶۱ ازگروه طبیعی: بنابرآنچه که گذشت‌خواهیم داشت:

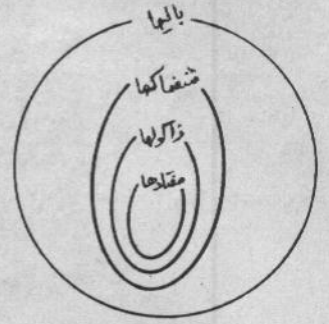
بعضی زاکولها مفتاد هستند، یعنی:

{زاکولها}⊂{مفتادها}

بعضی شفماکها زاکول هستند، یعنی:

{شفماکها}⊂{زاکولها}

همهٔشفحاکهابالی‌هستند، یعنی



{بالیها} ⊂ {شفماکها}

رابطهٔ⊂ یك رابطهٔ ترتیب‌است، بنابراین داریم:

{بالیها}⊂{شفماکها}⊂{زاکولها}⊂{مفتادها}

از این‌عبارت نتیجه می‌شودکه پاسخها ۱،۲،۳ غلط اما پاسخ۴ درست است زیرا:

{بالیها}⊂{زاکولها}

البته ساده‌تر آن است‌که ازشکل استفاده کنیم.

پرسش۱۶ از گروه‌طبیعی : رابطهٔ سنگینتری‌یك‌رابطهٔ ترتیب‌است. برای سادگی می‌توانیم همان علامت> رابرای آن بکاربریم:

دنباله در صفحهٔ ۴۱۱

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۹۱

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۹۱/۱ـ از **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی تبریز

به فرض آنکه x و y عددهای حقیقی باشند و در رابطهٔ :

$$2x^2+y^2+4xy-12x-8y+15=0$$

صدق کنند . حدود هریك از دو مقدار x و y را تعیین کنید.

حل ـ نسبت به x داریم :

$$2x^2+2(2y-6)x+y^2-8y+15=0$$

$$\Delta'=(2y+6)^2-2(y^2-8y+15)\geqslant 0$$

$$y^2-4y+3\geqslant 0 \Longrightarrow y\leqslant 1 \text{ یا } y\geqslant 3$$

نسبت به y داریم :

$$y^2+2(2x-4)y+2x^2-12x+5=0$$

$$\Delta'=2x^2-4x+1\geqslant 0$$

$$\Longrightarrow x\leqslant 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ یا } x\geqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۹۱/۲ـ از مسائل ارسالی توسط : **جواد فیض**

ثابت کنید که در هر مثلث داریم :

$$h_a h_b h_c=\frac{a^2b^2c^2}{8R^2}$$

$$S=\sqrt{2h_a h_b h_c}$$

حل ـ در هر مثلث روابط زیر را داریم :

$$bc=2Rh_a \text{ و } ca=2Rh_b \text{ و } ab=2Rh_c$$

از ضرب نظیر به‌نظیر طرفین این روابط ، رابطهٔ اول حاصل می‌شود و با توجه به رابطهٔ $S=\frac{abc}{4R}$ رابطهٔ دیگر نتیجه می‌گردد .

حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم ریاضی

۹۱/۳ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

اگر ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+b=0$ عددهای صحیح باشند ، این ریشه‌ها را پیدا کنید . به‌ازای مقادیر مختلف a و b بحث کنید .

حل ـ اگر $a\neq 0$ و $b\neq 0$ باشد ، به فرض آنکه m و n ریشه‌های معادله باشند داریم :

$$m+n=-\frac{b}{a} \text{ و } mn=-\frac{b}{a}$$

$$m+n+mn=0 \Longrightarrow (m+1)(n+1)=1$$

چون $m\neq 0$ و $n\neq 0$ و عدد یك غیرازخودش عامل دیگری ندارد ، پس ؟

$$m+1=n+1=1 \Longrightarrow m=n=-2$$

اگر $a=0$ و $b\neq 0$ باشد ، در ازای همهٔ مقادیر a و b معادله دارای ریشهٔ «۱ ـ» است .

اگر $a\neq 0$ و $b=0$ باشد معادله ریشهٔ منحصر به فرد برابر صفر دارد .

اگر $a=b=0$ باشد معادله مبهم است .

۹۱/۴ فرستنده: **قوام نحوی**

دستگاه دو معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^3+y^3+x^2y+xy^2=32 \\ x^4y^2+x^2y^4=128 \end{cases}$$

حل ـ دستگاه به صورت زیر در می‌آید :

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=32 \\ x^2y^2(x^2+y^2)=128 \end{cases}$$

با فرض $x+y=s$ و $xy=p$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} s(s^2-2p)=32 \\ p^2(s^2-2p)=128 \end{cases} \Longrightarrow s=\frac{p^2}{4}$$

$$\frac{p^2}{4}\left(\frac{p^4}{16}-2p\right)=32$$

$$p^6-32p^3-32\times 64=0$$

$$\Longrightarrow p^3=64 \text{ یا } -32$$

$$p=s=4 \Longrightarrow x=y=2$$
$$p=-2\sqrt[3]{4} \Longrightarrow s=2\sqrt[3]{2}$$

مقادیر x و y ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند :

$$z^2-2\sqrt[3]{2}z-2\sqrt[3]{4}=0$$
$$x=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3\sqrt[3]{4}} \text{ و } y=\sqrt[3]{2}-\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$$

یا :

$$x=\sqrt[3]{2}-\sqrt{3\sqrt[3]{4}} \text{ و } y=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$$

۹۱/۵ـ از مسائل ارسالی توسط : **محمد معینی**

مقدار زاویهٔ حادهٔ x را از معادلهٔ زیر بدست آورید :

$$(1+\cos x)^5-(1-\cos x)^5$$
$$=2[(1+\cos x)^3-(1-\cos x)^3]$$

حل ـ با فرض $1+\cos x=A$ و $1-\cos x=B$ داریم $A+B=2$ و معادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$A^5-B^5=2(A^3-B^3)$$
$$(A-B)(A^4+A^3B+A^2B^2-2A^2+AB^3-$$
$$-2AB+B^4-2B^2)=0$$
$$A-B=0 \Longrightarrow \cos x=0 \text{ و } x=90^\circ$$
$$(A+B)^4-3AB(A^2+B^2)-5A^2B^2+$$
$$+2AB-2(A+B)^2=0$$

چون $A+B=2$ است، خواهیم داشت :

$$A^2B^2-10AB+8=0 \Longrightarrow AB=5\pm\sqrt{17}$$
$$AB=(1+\cos x)(1-\cos x)=\sin^2 x$$
$$0^\circ<x<90^\circ \text{ و } \sin^2 x=5-\sqrt{17}$$
$$\Longrightarrow \sin x=\sqrt{5-\sqrt{17}}$$

۹۱/۶ـ از مسائل ارسالی توسط **جواد فیض**

یك رشته از اعداد را تصاعد توافقی می‌نامیم هرگاه رشته‌ای که از عکس اعداد مزبور تشکیل می‌شود تصاعد حسابی باشد .

هرگاه اعداد مثبت a و b و c و d به ترتیب تصاعد توافقی تشکیل دهند ، ثابت کنید که :

$$a+d>b+c \text{ و } ad<bc$$

حل ـ فرض می‌کنیم که :

$$\frac{1}{a}=m-n \text{ و } \frac{1}{b}=m \text{ و } \frac{1}{c}=m+n \text{ و}$$
$$\frac{1}{d}=m+2n$$

پس داریم :

$$a+d=\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+2n}=$$
$$=\frac{2m+n}{(m-n)(m+2n)}$$
$$b+c=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+n}=\frac{2m+n}{m(m+n)}$$
$$(m-n)(m+2n)<m(m+n)$$
$$\Longleftrightarrow -2n^2<0$$

بنابراین داریم : $a+d>b+c$ و از طرفی طبق خاصیت تصاعد داریم :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Longleftrightarrow \frac{a+d}{ad}=\frac{b+c}{bc}$$

دو کسر متساویند اما صورت اولی از صورت دومی بزرگتراست پس مخرج اولی از مخرج دومی کوچکتر خواهد بود، یعنی :

$$ad<bc$$

۹۱/۷ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر با ۱۱۷ متر است . از این دو نقطه دو جسم در یك لحظه به سمت یکدیگر شروع به حرکت می‌کنند. جسم اول در دقیقهٔ اول یك متر ودر دقایق بعد در در هر دقیقه نیم متر بیشتر از دقیقهٔ قبل را می‌پیماید. جسم دوم در هر دقیقه ۶ متر طی می‌کند . این دو جسم پس از چند دقیقه به هم می‌رسند؟

حل ـ اگر دو جسم پس از n دقیقه به هم برسند ، در این صورت مسافت طی شده توسط اولی برابر است با :

$$\frac{n}{2}\left[2+\left(n-1\right)\times\frac{1}{2}\right]$$

و مسافت طی شده توسط دومی برابر $6n$ است پس داریم :

$$n+\frac{n(n-1)}{4}+6n=117$$
$$n^2+27n-468=0 \text{ و } n>0 \Longrightarrow n=12$$

۹۱/۸ـ ترجمه از فرانسه

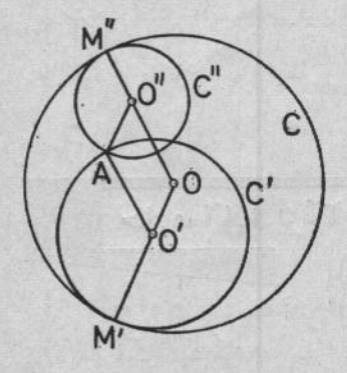
دودایرهٔ C' و C'' به مرکزهای O' و O'' و به‌شعاعهای R' و R'' با دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع R در نقاط M' و M'' مماس داخلند بقسمی که : $R=R'+R''$

ثابت کنید که :

۱) دو دایرهٔ C' و C'' متقاطع یا مماسند .

۲) اگر از دو نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ C' و C'' آنکه به C نزدیکتراست با A نشان داده شود، چهار ضلعی $OO'AO'$ متوازی‌الاضلاع است .

۳) مجموع طولهای دو کمان AM' و AM'' برابر است با طول کمان $M'M''$



حل ـ ۱) داریم

$$OO'=R-R'=R''$$
$$OO''=R-R''=R'$$
$$OO''-OO'\leqslant O'O''<$$
$$<OO''+OO'$$
$$R'-R''\leqslant O'O''<R'+R''$$

یعنی دو دایرهٔ C' و C'' متقاطعند یا مماسند .

۲) داریم :

$$OO''=R'=O'A \text{ و } OO'=R''=O''A$$

پس چهار ضلعی $OO'AO''$ متوازی‌الاضلاع است .

۳) سه زاویهٔ $AO'M'$ و $AO''M''$ و $M'OM''$ باهم برابرند . اگر α درجه اندازهٔ مشترك این زاویه‌ها باشد ، طولهای دو کمان AM' و AM'' به ترتیب برابرند با $\frac{\pi R'\alpha}{180}$ و $\frac{\pi R''\alpha}{180}$ و مجموع آنها می‌شود :

$$\frac{\pi\alpha(R'+R'')}{180}=\frac{\pi\alpha R}{180}$$

که عدد اخیر همان طول کمان $M'M''$ است .

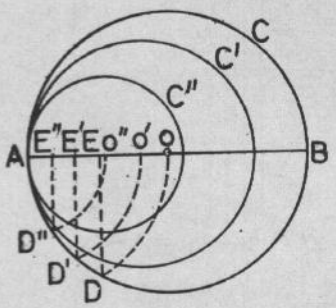
۹۱/۹ـ ترجمه از فرانسهٔ

دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع R و نقطهٔ A واقع بر آن مفروض است. دو دایرهٔ C' و C'' را چنان رسم کنید که در A بر دایرهٔ C مماس باشند و مساحت آن را به‌سه‌قسمت معادل تقسیم کنند.

حل ـ اگر مسئله حل شده باشد داریم :

$$\pi\overline{O''A}^2=\pi(\overline{O'A}^2-\overline{O''A}^2)=\pi(\overline{OA}^2-\overline{O'A}^2)$$

$$\overline{O''A}^2=\overline{O'A}^2-\overline{O''A}^2=\overline{OA}^2-\overline{O'A}^2$$



به مرکز A و به شعاعهای AO' و AO'' و AO کمان هایی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C را به‌ترتیب در D' و D'' و D قطع کنند و از این نقاط عمودهایی بر AB رسم می‌کنیم و پای آنهارا به‌ترتیب E' و E'' و E می‌نامیم .در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB داریم :

$$\overline{AD}^2=AB\cdot AE \Longrightarrow \overline{AO}^2=AB\cdot AE$$

به همین‌ترتیب داریم :

$$\overline{O'A}^2=AB\cdot AE' \text{ و } \overline{O''A}^2=AB\cdot AE''$$

این مقادیر را در رابطهٔ قبلی منظور می‌کنیم :

$$AB\cdot AE''=AB\cdot AE'-AB\cdot AE''=$$
$$=AB\cdot AE-AB\cdot AE'$$

$$AE''=AE'-AE''-AE-AE'$$

$$AE''=E''E'=E'E$$

بنابراین، برای ترسیم دایره‌های مطلوب ، نخست به مرکز A و به شعاع AO کمانی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مفروض را در D قطع کند و عمود DE را بر قطر AB رسم می‌کنیم . پاره خط AE را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم تا نقاط E' و E'' حاصل شوند . در این نقاط عمودهایی بر AB اخراج می‌کنیم تا دایرهٔ C را در D' و D'' قطع کنند . به مرکز A و به شعاعهای AD' و AD'' کمانهایی رسم می‌کنیم که از تلاقی آنها با AB نقاط O' و O'' مراکز دوایر مطلوب بدست می‌آیند .

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۹۱/۱۰ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

سهمی به معادلهٔ $y=x^2+px+q$ محور $x'x$ را در دو نقطهٔ A و B و محور $y'y$ را در نقطهٔ C قطع می‌کند. اولا ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث ABC از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد و این نقطه را مشخص کنید. ثانیاً هرگاه (۲ و ۲)ω مرکز دایرهٔ مزبور باشد، مقادیر p و q را مشخص کنید و سهمی را رسم کنید ،

حل ـ اولا : x' و x'' طولهای نقاط A و B ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ می‌باشند و داریم:

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=x'x''=q$$

عرض نقطهٔ C نیز برابر با q است و اگر D نقطهٔ به عرض یك واقع بر $y'y$ باشد داریم :

$$\overline{OC}\cdot\overline{OD}=q\times 1=q$$

$$\Longrightarrow \overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OC}\cdot\overline{OD}$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که چهار نقطهٔ A و B و C و D بریك دایره واقعند و از این چهار نقطه، نقطهٔ D ثابت است. پس دایرهٔ محیطی مثلث ABC همواره از نقطهٔ ثابت D می‌گذرد.

ثانیاً ـ نقطهٔ ω برعمودمنصف AB و همچنین برعمودمنصف CD واقع است پس :

$$\frac{x'+x''}{2}=\frac{-p}{2}=2 \Longrightarrow p=-4$$

$$\frac{q+1}{2}=2 \Longrightarrow q=3$$

۹۱/۱۱ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

هرگاه α و β دو زاویهٔ حاده و $tg\beta=3tg\alpha$ باشد : ثابت کنید که: $\beta-\alpha\leqslant 30^\circ$

حل ـ وقتی x زاویهٔ حاده باشد و ترقی کند tgx نیز ترقی می‌کند پس $\beta-\alpha$ مثبت و در ضمن حاده است و داریم:

$$tg(\beta-\alpha)=\frac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\beta tg\alpha}=\frac{3tg\alpha-tg\alpha}{1+3tg^2\alpha}$$

$$tg(\beta-\alpha)=\frac{2tg\alpha}{1+3tg^2\alpha}=\frac{2}{cotg\alpha+3tg\alpha}$$

بنابه نامساوی معروف به نامساوی واسطه‌های حسابی و هندسی داریم :

$$cotg\alpha+3tg\alpha\geqslant 2\sqrt{3cotg\alpha tg\alpha}=2\sqrt{3}$$

پس خواهیم داشت :

$$tg(\beta-\alpha)<\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=tg۳۰^\circ$$

$$\Longrightarrow \beta-\alpha<۳۰^\circ$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم ریاضی

۹۱/۱۲ـ منحنی C به معادلهٔ زیر مفروض است :

$$y=\frac{۲x}{x-۱}$$

۱) در نقطهٔ به طول α واقع بر منحنی خطی بر منحنی مماس می‌کنیم، اگر δ فاصلهٔ مبدأ مختصات از این مماس باشد، به ازای چه مقدار از x مقدار δ ماکسیمم است؟

۲) دو مماس موازی با هم بـر منحنی C رسم می‌کنیم و فاصلهٔ بین آنها را با D نشان می‌دهیم ؛ ماکسیمم مقدار D را تعیین کنید .

۳) دو مماس موازی با هم و به فاصلهٔ $D=۲\sqrt{۲}$ از یکدیگر بر منحنی C رسم کرده‌ایم. معادلات این دو مماس و مختصات نقاط تماس آنها را با منحنی C بدست آورید .

حل ـ ۱) معادلهٔ مماس می‌شود :

$$y-\frac{۲\alpha}{\alpha-۱}=\frac{-۲}{(\alpha-۱)^۲}(x-\alpha)$$

$$۲x+(\alpha-۱)^۲y-۲\alpha^۲=۰ \qquad (۱)$$

$$\delta=\frac{۲\alpha^۲}{\sqrt{۴+(\alpha-۱)^۴}}$$

$$\delta'=\frac{۴\alpha[۴-(\alpha-۱)^۳]}{[۴+(\alpha-۱)^۴]^{\frac{۳}{۲}}}$$

مقدار δ' درازای مقادیر $\alpha=۰$ و $\alpha=۱\pm\sqrt[۴]{۴}$ صفر می‌شود وتغییر علامت می‌دهد و باتعیین علامت δ' معلوم خواهد شد که δ وقتی ماکسیم است که $\alpha=۱\pm\sqrt[۴]{۴}$ باشد.

۲) چون (۲ و ۱) ω مرکز تقارن منحنی است و دومماس موازی با هم که بر منحنی رسم شوند نیز نسبت به ω قرینه‌اند، بنابراین فاصلهٔ دو مماس برابر است با دو برابر فاصلهٔ ω از یکی از مماسها. فرض می‌کنیم d فاصلهٔ ω از مماس بـر منحنی در نقطهٔ به طول $\alpha>۱$ باشد . معادلهٔ این مماس قبلا تعیین شده است و خواهیم داشت :

$$d=\frac{۴(\alpha-۱)}{\sqrt{۴+(\alpha-۱)^۴}}$$

$$d'=\frac{۴[۴-(\alpha-۱)^۴]}{[۴+(\alpha-۱)^۴]^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$d'=۰ \text{ و } \alpha>۱ \Longrightarrow \alpha=۱+\sqrt{۲}$$

$$\alpha=۱+\sqrt{۲} \Longrightarrow d=۲ \text{ و } D=۴$$

۳) به فرض $D=۲\sqrt{۲}$ داریم $d=\sqrt{۲}$ و :

$$\sqrt{۲}=\frac{۴(\alpha-۱)}{\sqrt{۴+(\alpha-۱)^۴}}$$

$$(\alpha-۱)^۴-۸(\alpha-۱)^۲+۴=۰$$

$$(\alpha-۱)^۲=۴\pm۲\sqrt{۳}=(\sqrt{۳}\pm۱)^۲$$

$$\alpha=۲\pm\sqrt{۳} \text{ یا } \pm\sqrt{۳}$$

چهار دسته خط مماس وجود خواهد داشت که معادلات آنها با منظور کردن مقادیرچهارگانهٔ α در معادلهٔ (۱) بدست خواهد آمد .

۹۱/۱۳ـ نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید :

$$y=\frac{x+۱-|x-۱|}{|x|+۱}$$

حل ـ به ترتیب داریم :

۱) $x<۰ \Longrightarrow |x|=-x$ و $|x-۱|=۱-x$

$$y=\frac{۲x}{۱-x} \text{ و } y'=\frac{۲}{(۱-x)^۲}$$

x	$-\infty$		۰
y'		+	۲
y	-۲	↗	۰

۲) $۰\leqslant x\leqslant ۱ \Longrightarrow |x|=x$ ، $|x-۱|=۱-x$

$$y=\frac{۲x}{x+۱} \text{ و } y'=\frac{۲}{(x+۱)^۲}$$

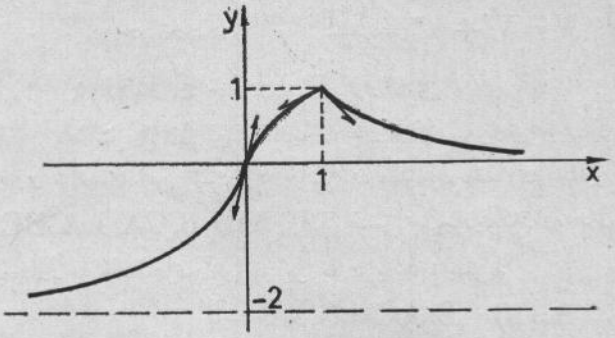
x	۰		۱
y'	۲	+	$\frac{۱}{۲}$
y	۰	↗	۲

۳) $x\geqslant ۱ \Longrightarrow =|x|=x$ و $|x-۱|=x-۱$

$$y=\frac{۲}{x+۱} \text{ و } y'=\frac{-۲}{(x+۱)^۲}$$

x	۱		$+\infty$
y'	$-\frac{۱}{۲}$	−	
y	۱	↘	۰

با توجه به جدولهای بالا ، منحنی تابع مفروض به شکل زیر است .



۹۱/۱۴ـ از جواد فیض

به فرض آنکه A و B و C زاویه‌های یك مثلث و همه حاده باشند و داشته باشیم :

$$\cos A=\frac{1-x}{1+x} \quad و \quad \cos B=\frac{1-y}{1+y} \quad و \quad \cos C=\frac{1-z}{1+z}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$$

حل ـ ازراوبط بالا و با فرض‌حاده بودن زاویه‌ها داریم:

$$x=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=tg^2\frac{A}{2}$$

$$y=tg^2\frac{B}{2} \quad و \quad z=tg^2\frac{C}{2}$$

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=$$

$$=tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}$$

و می‌دانیم که در هر مثلث مقدار اخیر برابر است با یك.

۹۱/۱۵ـ ترجمهٔ محمد معینی

هرگاه $a>0$ و $tgx=atgy$ باشد ، ثابت کنید که :

$$tg^2(x-y)\leqslant\frac{(a-1)^2}{4a}$$

حل ـ به ترتیب داریم :

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgxtgy}=\frac{(a-1)tgy}{1+atg^2y}$$

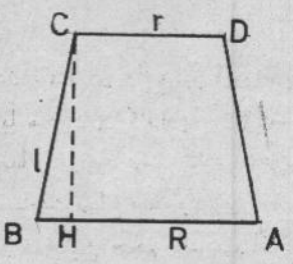
$$tg^2(x-y)=\frac{(a-1)^2}{(cotgy+atgy)^2}$$

$$(cotgy+atgy)^2=(cotgy-atgy)^2+4a$$

$$(cotgy+atgy)^2\geqslant 4a \Longrightarrow tg^2(x-y)\leqslant\frac{(a-1)^2}{4a}$$

۹۱/۱۶ـ ترجمهٔ داوید ریحان

در یك مخروط ناقص دوار ، طول مولد برابر است با مجموع شعاعهای دو قاعده . ثابت کنید که حجم این مخروط ناقص برابراست بایك‌ششم حاصل ضرب سطح کل در ارتفاع آن.



حل ـ اگر r و R شعاعهای دوقاعده‌و h ارتفاع و l طول مولد مخروط ناقص باشد مطابق با شکل داریم :

$$\overline{CH}^2=\overline{BC}^2-\overline{BH}^2$$

$$h^2=l^2-(R-r)^2=(R+r)^2-(R-r)^2=4Rr$$

$$h=2\sqrt{Rr}$$

سطح کل مخروط ناقص را با S و حجم آن را با V نشان می‌دهیم :

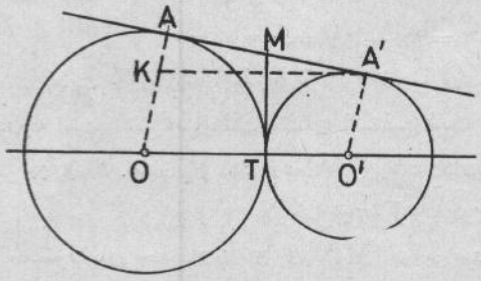
$$S=\pi l(R+r)+\pi R^2+\pi r^2$$

$$S=\pi[(R+r)^2+R^2+r^2]=2\pi(R^2+r^2+Rr)$$

$$V=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)=\frac{Sh}{6}$$

۹/۱۷ـ ترجمه از فرانسه

دودایرهٔ به‌مرکزهای O و O′ با یکدیگرمماس‌خارجند و AA′ یك مماس مشترك خارجی آنها است . شکل را حول خط OO′ دوران می‌دهیم ، ثابت‌کنیدکه مساحت سطح حادث از پاره خط AA′ واسطهٔ هندسی است بین مساحتهای دوکرهٔ حادث از دایره‌ها .



حل ـ اگر T نقطهٔ تماس مشترك دو دایره باشد ، مماس مشترك داخلی دو دایره از M وسط AA′ می‌گذرد و بر OO′ عمود است و طول TM نصف طول AA′ است . سطح حادث ازدوران‌پاره خط AA′ حول OO′ برابراست‌با:

$$S=2\pi TM\cdot AA'=\pi\overline{A'A}^2$$

از A′ موازی با OO′ رسم می‌کنیم تا AD را درK قطع کند . خواهیم داشت :

$$\overline{A'A}^2=\overline{A'K}^2-\overline{AK}^2$$

$$=(R+R')^2-(R-R')^2=4RR'$$

$$S=4\pi RR'=\sqrt{4\pi R^2\times 4\pi R'^2}$$

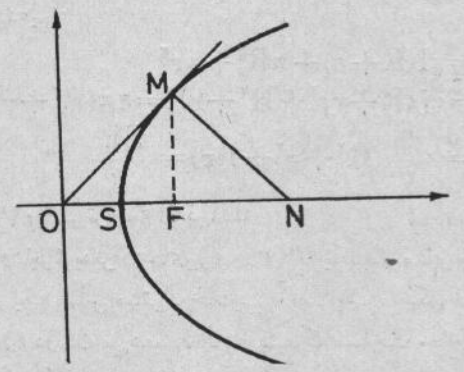
حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم‌دبیرستان

۹۱/۱۸ـ سهمی به معادلهٔ زیر مفروض است !

$$y^2-4x+4=0$$

در نقطهٔ M واقع بر این سهمی مماسی بر آن رسم می‌کنیم که با محور Ox زاویهٔ 45° بسازد. عمودی که در نقطهٔ M بر مماس مزبور رسم شود محور $x'x$ را در N قطع می‌کند. مساحت سطح محصور بین سهمی و خط MN و محور $x'x$ و همچنین حجم حادث از دوران این سطح حول $x'x$ را حساب کنید.

حل- ضریب زاویه‌ای مماس بر منحنی برابر است با $tg45^\circ=1$ و :



$$2y'y-4=0$$

$$y'=1 \Longrightarrow y=2 \text{ و } x=2$$

$$y-2=(x-2) \Longrightarrow y=x$$

در مثلث OMN زاویهٔ M قائمه و زاویهٔ O به اندازهٔ ۴۵ درجه است. پس این مثلث متساوی‌الساقین است و تصویر M بر $x'x$ که همان F است وسط ON است وداریم :

$M(2,2)$ و $F(2,0)$ و $N(4,0)$

سطح محصور بین سهمی و $x'x$ و MN برابراست با سطح بین سهمی و $x'x$ و خط MF به علاوهٔ سطح مثلث MFN که اولی را با S' و دومی را با S'' نشان می‌دهیم.

$$y=f(x)=2\sqrt{x-1}$$

$$F(x)=\frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+c$$

$$S'=|F(2)-F(1)|=\frac{4}{3}$$

$$S''=\frac{1}{3}FM\cdot FN=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$$

$$S=S'+S''=2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}$$ واحد سطح

$$g(x)=\pi y^2=4\pi(x-1)$$

$$G(x)=2\pi(x-1)^2+c$$

$$V'=|G(2)-G(1)|=2\pi$$

$$V''=\frac{\pi}{3}FN\cdot\overline{FM}^2=\frac{8\pi}{3}$$

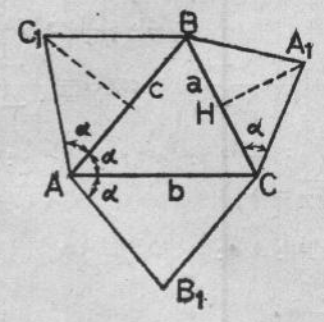
$$V=V'+V''=\frac{14\pi}{3}$$ واحد حجم

۹۱/۱۹- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

مثلث ABC به زاویهٔ $ABC=\alpha$ مفروض است. روی ضلعهای این مثلث و درخارج آن مثلثهای متساوی‌الساقین A_1BC و B_1CA و C_1AB را بقسمی می‌سازیم که زاویه‌های مجاور به قاعده‌های آنها برابر با α باشد، یعنی :

$$A_1CB=B_1AC=C_1AB=\alpha$$

ثابت کنید که مجموع مساحتهای دو مثلث ABC و A_1BC با مجموع مساحتهای دو مثلث ABC_1 و AB_1C برابر است.



حل- مساحت مثلث ABC را با S و مساحتهای مثلثهای A_1BC و B_1CA و C_1AB را به‌ترتیب با S_1، S_2 و S_3 نشان می‌دهیم. می‌دانیم که :

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

در مثلث A_1BC داریم :

$$A_1H=HC\,tg\alpha=\frac{a}{2}tg\alpha$$

$$S_1=\frac{1}{2}BC\cdot HA_1=\frac{1}{4}a^2tg\alpha$$

$$S_2=\frac{1}{4}b^2tg\alpha \quad \text{و} \quad S_3=\frac{1}{4}c^2tg\alpha$$

$$S+S_1=\frac{1}{2}bc\sin\alpha+\frac{1}{4}a^2tg\alpha$$

$$=\frac{1}{4}tg\alpha(2bc\cos\alpha+a^2)$$

$$=\frac{1}{4}tg\alpha(2bc\cos\alpha+b^2+c^2-2bc\cos\alpha)$$

$$S+S_1=\frac{1}{4}tg\alpha(b^2+c^2)$$

$$S_2+S_3=\frac{1}{4}tg\alpha(b^2+c^2)$$

$$S+S_1=S_2+S_3$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۹۱/۲۰- تابع زیر را در نظر می‌گیریم :

$$y=\frac{x}{ax^3+1} \quad \text{و} \quad x>0$$

عدد حقیقی a را تعیین کنید بنابر آنکه حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی و محور $x'x$ حول این محوردارای حدی برابر با $\frac{\pi}{12}$ باشد .

حل- تابع به ازای $x=0$ برابر با صفر و بـه ازای مقادیرمثبت x برابر با مقدار مثبت است . پس منحنی نمایش تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد و به‌ازای $x>0$ به تمامی در بالای محور $x'x$ واقع است . اکنون حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی و محور $x'x$ و خطوط $x=0$ و $x=k>0$ را حساب می‌کنیم :

$$g(x)=\pi y^2=\frac{\pi x^2}{(ax^3+1)^2}=\frac{\pi}{3a}\cdot\frac{3ax^2}{(ax^3+1)^2}$$

$$G(x)=\frac{\pi}{3a}\left(\frac{-1}{ax^3+1}\right)+C$$

$$V=|G(k)-G(0)|=\frac{\pi}{3a}\left(\frac{-1}{ak^3+1}+1\right)$$

هرگاه $k\to+\infty$ حد V می‌شود $\frac{\pi}{3a}$ و چون حد V برابر با $\frac{\pi}{12}$ است پس $a=4$ می‌باشد .

۹۱/۲۱- ترجمهٔ از فرانسه

تابع پارامتری زیر را درنظر می‌گیریم :

$$y=a\left(1-\cos\frac{x}{a}\right) \quad \text{و} \quad a>0$$

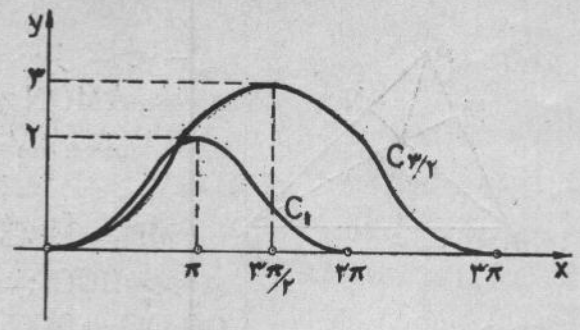
نمایش هندسی این تابع را به‌ازای مقدار غیرمشخص a با C_a نشان می‌دهیم ، منحنی C_1 را در فاصلهٔ $[0 \text{ و } 2\pi]$ رسم کنید و ثابت کنید که منحنی C_a ازروی منحنی C_1 بوسیلهٔ یك تجانس بدست می‌آید . مرکز ونسبت این تجانس را معین کنید. به‌ازای $a=\frac{3}{2}$ منحنی نظیر را روی شکل C_1 رسم کنید .

مساحت سطح محصور بین منحنی C_a و محور $x'x$ را در یك دورهٔ تناوب آن و همچنین حجم حادث از دوران ایـن سطح حول Ox را حساب کنید .

حل- به ازای $a=1$ داریم :

$$y=1-\cos x \quad : \quad y'=\sin x$$

x	0		π		2π
y'	0	+	0	−	0
y	0	↗	2	↘	0



تابع مفروض را چنین می‌نویسیم :

$$\frac{y}{a}=1-\cos\frac{x}{a}$$

با فرض $x=aX$ و $y=aY$ تابع به صورت $Y=1-\cos X$ درمی‌آید وچون نقطهٔ به مختصات $(aX \text{ و } aY)$ مجانس نقطهٔ $(X \text{ و } Y)$ در تجـانس به مرکز O و به‌نسبت a است ، پس منحنی C_a مجانس منحنی C_1 در تجـانس مزبور است . برای تعیین منحنی نمایش تـابع به ازای $a=\frac{3}{2}$ کافی است کـه طول و عرض هریك از نقاط منحنی C_1 را در $\frac{3}{2}$ ضرب کنیم . منحنی نظیردر شکل منحنی C_1 رسم شده است چون منحنی C_a به‌نسبت a مجانس منحنی C_1 است پس سطح محصور بین منحنی C_a و محور xx' و حجم حـادث از دوران آن حول $x'x$ به ترتیب a^2 برابر و a^3 برابر سطح و حجم نظیر مربوط به منحنی C_1 است . برای C_1 داریم :

$$f(x)=1-\cos x \Longrightarrow F(x)=x-\sin x+c$$

$$S_1=|F(2\pi)-F(0)|=2\pi$$

$$g(x)=\pi y^2=\pi(1-\cos x)^2$$

$$g(x)=\pi(1+\cos^2 x-2\cos x)$$

$$=\frac{\pi}{2}(3+\cos 2x-4\cos x)$$

$$G(x)=\frac{\pi}{2}\left(3x+\frac{1}{2}\sin 2x-4\sin x\right)+c$$

$$V_1=|G(2\pi)-G(0)|=3\pi^2$$

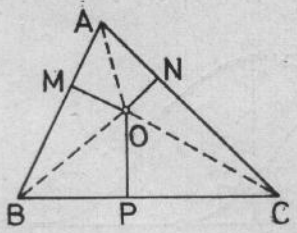
برای C_a خواهیم داشت :

$$S=a^2S_1=2\pi a^2 \quad \text{و} \quad V=a^3V_1=3a^3\pi^2$$

۹۱/۲۲- ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

ازنقطهٔ O واقع در داخل مثلث ABC عمودهای OM و ON و OP را به ترتیب بـرضلعهای AB و AC و BC رسم می‌کنیم ، ثابت کنید که اگر سه زاویهٔ AOB و BOC و COA با هم برابر باشند خواهیم داشت :

$$MN\cdot OP=NP\cdot OM=PM\cdot ON$$



حل ـ چهارضلعی AMON محاط در دایرهٔ به قطر OA است . پس داریم :

$$MN = OA \cdot \sin A$$

در مثلث BOC داریم:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot OP \Longrightarrow OP = \frac{OB \cdot OC \cdot \sin BOC}{BC}$$

$$MN \cdot OP = \frac{OA \cdot OB \cdot OC \cdot \sin A \cdot \sin BOC}{BC}$$

به‌فرض آنکه R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث مفروض باشدخواهیم داشت :

$$MN \cdot OP = \frac{OA \cdot OB \cdot OC \cdot \sin BOC}{2R}$$

$$NP \cdot OM = \frac{OA \cdot OB \cdot OC \cdot \sin AOB}{2R}$$

$$PM \cdot ON = \frac{OA \cdot OB\ OC \cdot \sin COA}{2R}$$

هرگاه سه زاویهٔ AOB و BOC و COA با هم برابر باشند ، سه مقدار اخیر نیز با هم برابرمی‌باشند .

۹۱/۲۳ـ فرستنده : **محمد حسنی نژاد ،**

کلاس پنجم‌ریاضی دبیرستان هدف ۳

اگر داشته باشیم :

$$\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\sin^3\alpha} = \frac{\cos(\beta+\varphi)}{\sin^3\beta} = \frac{\cos(\gamma+\varphi)}{\sin^3\gamma}$$

به‌شرط آنکه دو زاویه ازسه زاویهٔ α وβ وγ مضرب π نباشد ثابت کنید که :

۱) $tg\varphi = cotg\alpha + cotg\beta + cotg\gamma$

۲) $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$

حل ـ مقدارمشترك سه کسرمتساوی را m فرض می کنیم، در این‌صورت α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند :

$$\frac{\cos(x+\varphi)}{\sin^3 x} = m$$

این معادله بعد از اختصار و عملیات چنین می‌شود :

$$\cos\varphi\, cotg^3 x - \sin\varphi\, cotg^2 x + \cos\varphi\, cotg x - \sin\varphi - m = 0$$

با توجه به‌روابط بین ریشه‌ها و ضرایب خواهیم داشت :

$$cotg\alpha + cotg\beta + cotg\gamma = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi$$

$$cotg\alpha\, cotg\beta + cotg\beta\, cotg\gamma + cotg\gamma\, cotg\alpha = 1$$

$$cotg\alpha\, cotg\beta\, cotg\gamma = \frac{m + \sin\varphi}{\cos\varphi}$$

از سه رابطهٔ اخیر نتیجه خواهد شد :

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma$$

$$\Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = k\pi$$

۹۱/۲۴ـ ترجمهٔ از فرانسه

ثابت کنید که اگردراستخراج جذر تقریبی عدد N تا یك واحد تقریب ، باقیمانده ازجذر حاصل کوچکتر باشد، جذر حاصل جذرتقریبی عدد N تا نیم واحد تقریب است .

حل ـ فرض می کنیم که a جذر تقریبی عدد N تا یك واحد تقریب و r باقیماندهٔ این‌جذر باشد، دراین‌صورت‌داریم:

$$a^2 \leqslant N < (a+1)^2 \text{ و } r = N - a^2$$

بنا به‌فرض داریم :

$$r = N - a^2 \leqslant a \Longrightarrow N < (a + \tfrac{1}{2})^2$$

$$a \leqslant N < (a + \tfrac{1}{2})^2$$

از این نامساویها نتیجه می‌شودکه a جذر تقریبی عدد N تا نیم واحد تقریب است .

۹۱/۲۵ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

کدام شش رقم را سمت راست عدد ۸۸۸۸۸ قرار دهیم‌تا عدد حاصل مجذورکامل باشد ؟

حل ـ برای تعیین ارقام مطلوب کافی است کلیهٔ عددهای طبیعی را بیابیم که در نامساویهای زیرصدق می کنند :

$$888880000000 < N^2 < 888889999999$$

اما داریم :

$$(298/140)^2 < 88888 < (298/141)^2$$

$$(298/142)^2 < 88889 < (298/143)^2$$

شش رقم مطلوب در سمت راست مجذور هریك از عددهای ۲۹۸۱۴۱ و۲۹۸۱۴۲ واقعند .

۹۱/۲۶ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

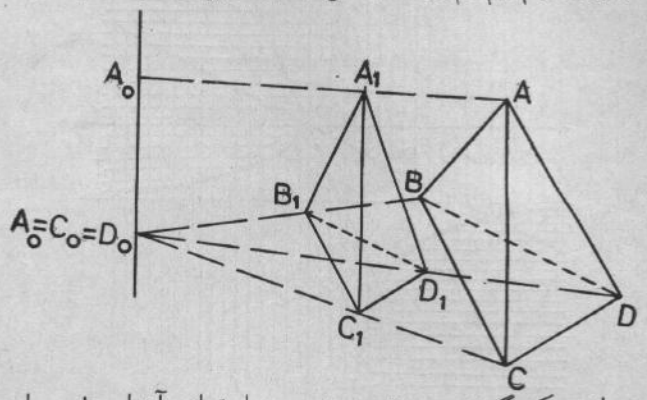
خط Δ وصفحهٔ P غیرموازی با Δ وچهاروجهی ABCD مفروض است. برهریك ازنقاط A،B،C و D صفحه‌ای موازی با صفحهٔ P می گذرانیم . این‌صفحات خط Δ را به ترتیب در نقاط A_0 ، B_0، C_0 و D_0 قطع می کنند . بر خطوط AA_0، BB_0 ، CC_0 و DD_0 نقاط A_1، B_1 ، C_1 و D_1 را بقسمی تعیین می کنیم که :

$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{B_0B_1}}{\overline{B_0B}} = \frac{\overline{C_0C_1}}{\overline{C_0C}} = \frac{\overline{D_0D_1}}{\overline{D_0D}} = k$$

نسبت حجم چهار وجهی $A_1B_1C_1D_1$ را به‌حجم چهاروجهی مفروض بدست آورید :

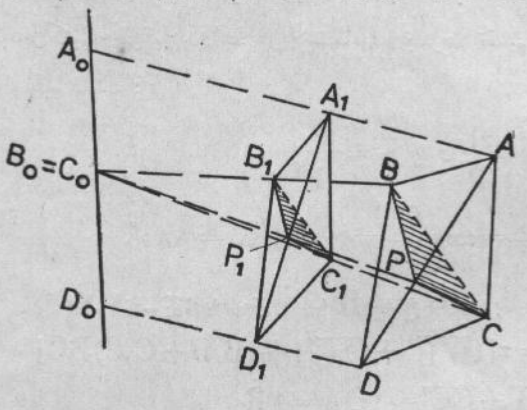
حلـ سه حالت درنظرمی گیریم :

I ـ صفحات مار بررأسهای B و C و D بـرهم منطبق گردند به‌عبارت دیگر صفحهٔ P با وجه BCD موازی‌باشد . در این‌حالت سه نقطهٔ B_0 و C_0 و D_0 برهم‌منطبقند ومثلثهای BCD و $B_1C_1D_1$ درتجانس به مرکز B_0 و بـه نسبت k



مجانس یکدیگرند و درنتیجه نسبت مساحتهای آنها برابر با k^2 است وچون دونقطهٔ A و A_1 برخط موازی بـا صفحهٔ P قرار دارنددوهرم ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ دارای‌ارتفاعهای متساویند ، پس‌نسبت حجمهای آنهاهمان‌نسبت مساحتهای‌قاعده‌های‌آنها یعنی k^2 است .

II ـ اگرصفحهٔ P با یال BC موازی باشد . دو نقطهٔ B_0 و C_0 برهم منطبقند . خط AD این صفحه را در نقطهٔ P قطع می کند. چهار وجهی ABCD به دوچهار وجهی ABPC و DBPC تجزیه می‌شود . اگرحجم اولی V_1 وحجم دومی



V_2 و حجمهای چهاروجهیهای $A_1B_1P_1C_1$ و $D_1B_1P_1C_1$ به ترتیب V_1' و V_2' باشد، بنابه حالت اول داریم :

$$\frac{V_1'}{V_1}=k^2 \text{ و } \frac{V_2'}{V_2}=k^2$$

در حالتی که رأسهای A و D در یك طرف صفحهٔ ماربر BC واقع باشند نقطهٔ P در خارج پاره خط AB واقع است و داریم :

$$\frac{V'}{V}=\frac{V_1'-V_2'}{V_1-V_2}=k^2$$

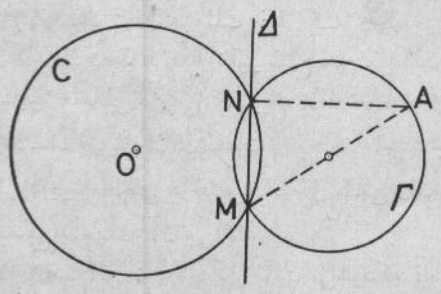
در حالتی که رأسهای A وD در دو طرف صفحهٔ ماربر BC واقع باشند ، نقطهٔ P بین A و D واقع است و داریم:

$$\frac{V'}{V}=\frac{V_1'+V_2'}{V_1+V_2}=k^2$$

III ـ صفحهٔ P باهیچیك ازوجوه و باهیچیك ازیالهای چهار وجهی موازی نباشد. در این حالت صفحهٔ ماربر رأس B یال AC را در نقطهٔ Q قطع‌می کند و چهاروجهی به‌سه‌چهار‌وجهی تجزیه می‌شود . هر کدام از آنها با حالت II مطابقت می کند و در نتیجه بازهم ثابت می شود که نسبت حجمهای دو چهار وجهی برابر با k^2 است .

۹۱/۲۷ـ ترجمهٔ از فرانسه

دایرهٔ C به مرکز O و نقطهٔ ثابت A واقع در خارج آن مفروض است . نقطهٔ متغیر M را بـر دایـرهٔ O در نظر می گیریم و دایرهٔ Γ بـه قطر AM را رسم می کنیم. اگر Δ محور اصلی‌دایره‌های C و Γ باشد، ثابت‌کنید که Δ برهذلولی ثابتی مماس است .



حلـ دو دایرهٔ C و Γ چـون در M مشترکند پس در نقطهٔ دیگر N نیز مشترکند و Δ همـان خط MN است (در حالتی که AM از O بگذرد N برM منطبق است) . زاویهٔ ANM قائمه است و N تصویرقائم A برخط Δ است. چون تصویر نقطهٔ ثابت A برخط متغیر Δ بردایرهٔ ثـابت C واقع است ، پس Δ برهذلولی مماس است‌که A کانون و C دایـرهٔ اصلی آن است .

پاسخ تستهای ریاضی

۹۱/۲۸ـج : معـادلهٔ داده شده غیر از $x=a$ دارای چهار ریشهٔ متمایز ± 1 و ± 2 است و برای‌آنکه ریشهٔ‌مضاعف داشته باشد ، لازم وکافی است که a با یکی از این‌چهارریشه برابرباشد .

۹۱/۲۹ـب: وقتی $\sqrt{f(x)}$ نمایش یك مقدار حقیقی باشد نامنفی است ، پس شرط لازم (اما نه‌کافی) برای وجود جواب حقیقی برای معادلهٔ مفروض آن است‌که :

$$(a^2+1)x+a^4-1\geqslant 0 \Longrightarrow x>1-a^2$$

۹۱/۳۰ـ الف. با فرض $y=mx$ و $a\neq 0$ خواهیم داشت :

$$(1):\ x^3=\frac{a(2m^2+3m)}{1+m^2}$$

$$(2):\ (2a-1)m^2+3am-1=0$$

هر گاه معادلهٔ(۲) ریشهٔ حقیقی داشته باشد ، معادلهٔ(۱) و درنتیجه دستگاه مفروض نیز ریشهٔ حقیقی دارد . امامعادلهٔ(۲) وقتی ریشهٔ حقیقی دارد که :

$$\Delta\geqslant 0\Longrightarrow a\geqslant\frac{-4+2\sqrt{13}}{9}\ \text{یا}\ a\leqslant\frac{-4-2\sqrt{13}}{9}$$

۹۱/۳۱ـ ب: داریم :

$$[a+(n-1)d^2]-[a+(n-1)d]=(n-1)(d^2-d)$$

۹۱/۳۲ـ الف: اگر a_1 جملهٔ اول تصاعد باشدداریم:

$$\begin{cases}A=a_1q^{m+n-1}\\ B=a_1q^{m-n-1}\end{cases}\Longrightarrow q=\sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$$

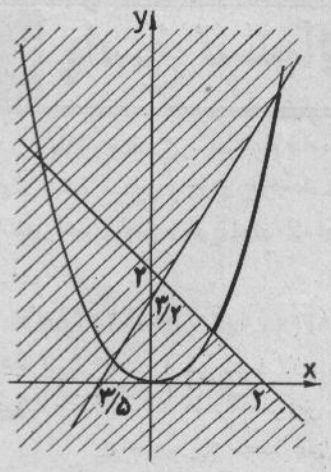
۹۱/۳۳ـ د : در هرمثلث خطی کـه اوساط دوضلع را به هم وصل کند از وسط ارتفاع نظیر ضلع سوم می گذرد. درهر مثلث قطردایرهٔ محاطی داخلی ازهریك از ارتفاعات ودرنتیجه شعاع آن ازنصف هریك از ارتفاعات کوچکتر است. پس‌درهر مثلث مرکز دایرهٔ محاطی داخلی در داخل مثلثی واقع است که اوساط سه ضلع رأسهای آن می‌باشند .

۹۱/۳۴ـ الف: به‌سادگی ثابت می‌شود که فاصلهٔ رأس B از خط PD برابراست با مجموع فواصل رأسهای A و C از این‌خط .

۹۱/۳۵ـ الف: چون xy مقدار مثبت است پس‌منحنی در ربعهای اول و سوم محورهـا واقع است و طول OM وقتی می‌نیمم است که $OM^2=x^2+\frac{a^4}{x^2}$ می‌نیمم باشد :

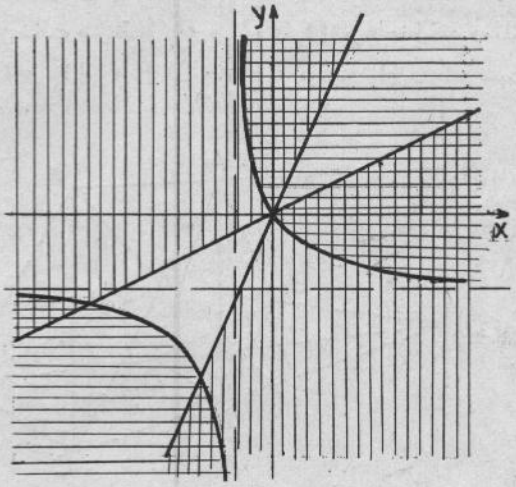
$$(OM^2)'=2x-\frac{2a^4}{x^3}=0\Longrightarrow x=y=\pm a$$

۹۱/۳۶ـ ج:



نمایش‌هندسی دستگاه معادلات و نامعادلات مفروض ، مطابق با شکل، قسمتی ازسهمی است که بدوخط‌محدود شده است.

۹۱/۳۷ـ الف: ناحیهٔ داخلی‌هذلولی را با هاشورهای افقی و ناحیه‌های جواب نامعادلهٔ مفروض را بـا هاشورهـای



قائم مشخص می‌کنیم . یك ناحیهٔ ازهمه طرف محصور هـاشور نخورده باقی‌می‌ماندکه همان ناحیهٔ مشترك دو ناحیهٔ P و Q است .

۹۱/۳۸ـ الف: در هرمثلث داریم :

$$P=\cos B+\cos C=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$0<\frac{B+C}{2}<90\ \text{و}\ 0<\frac{B-C}{2}<90^\circ\Longrightarrow P>0$$

۹۱/۳۹ـ ب: چون هریك ازروابط را به حاصل ضرب تبدیل کنیم وطرفین روابط هر دستگاه را بـرهم تقسیم کنیم ، خواهیم داشت :

$$tg\frac{C}{2}=\frac{q}{p}\ \text{و}\ tg\frac{C'}{2}=\frac{p}{q}$$

$$tg\frac{C}{2}=cotg\frac{C'}{2}\Longrightarrow C+C'=180^\circ$$

۹۱/۴۰ـ ج: به‌فرض آنکه R شعاع دایره باشدداریم:

$$\Sigma=\pi[(\overline{B'B}^2+\overline{C'C}^2)+(B'B+C'C)BC]$$

$$BB'+CC'=2OA=2R$$

$$\overline{B'B}^2+\overline{C'C}^2=(BB'+CC')^2-2BB'.CC'$$

D تصویر قائم C بر BB' بردایره واقع است و :

$$B'B.B'C=B'B.B'D=\overline{B'A}^2$$

$$\overline{B'B}^2+\overline{C'C}^2=4R^2-2\overline{B'A}^2$$

$$\Sigma=8\pi R^2-2\pi\overline{B'A}^2=m\pi R^2$$

$$\begin{cases}AB'=R\sqrt{4-m}\\ AB'\leqslant OB\ \text{یعنی}\ R\sqrt{4-m}\leqslant R\end{cases}\Longrightarrow 3\leqslant m\leqslant 4$$

۹۱/۴۱ـ الف: خطوطی که از A و B موازی با $x'x$ رسم کنیم دایرهٔ Γ را در A' و B' تلاقی می‌کنند و اگر M' وسط $A'B'$ باشد MM' با $x'x$ موازی‌است. وقتی Δ موازی با خودتغییرمکان دهد وتر $A'B'$ ازدایرهٔ Γ موازی با خود حرکت می‌کند ومکان M' قطری ازدایرهٔ Γ است. قسمتی از صفحه‌ای که بر این‌قطر وبرمحور سطح استوانی می‌گذرد و داخل‌سطح استوانی محصور است مکان M می‌باشد.

۹۱/۴۲ـ ب: وقتی x مثبت‌باشد، بنابهٔ‌نامساوی مشهور واسطه‌های حسابی وهندسی داریم:

$$n\cdot\frac{ax^m}{n}+m\frac{b}{mx^n}\geqslant(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^nb^m}{m^mn^n}}$$

تساوی وقتی است که:

$$\frac{ax^m}{n}=\frac{b}{mx^n}\Longrightarrow x=\sqrt[m+n]{\frac{nb}{ma}}$$

۹۱/۴۳ـ ج: معادلهٔ $x^3-3x+1=0$ دارای سه جواب حقیقی متمایزاست زیرا درآن $4p^3+27q^2=-81$ است. منحنی‌نمایش تابع وقتی برمحور $x'x$ مماس است که‌معادلهٔ $y=0$ ریشهٔ مضاعف‌داشته باشد وبزای این‌کار لازم وکافی‌است که m بایکی‌از سه ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم برابرباشد.

۹۱/۴۴ـ ب: درمثلث مفروض داریم:

$$a^3=b^3+c^3=(b+c)(b^2+c^2-bc)$$

$$a<b+c\Longrightarrow a^2>b^2+c^2-bc$$

$$b^2+c^2-2bc\cos A>b^2+c^2-bc$$

$$\cos A<\frac{1}{2}\Longrightarrow A>\frac{\pi}{3}$$

۹۱/۴۵ـ ب: از معادلهٔ مفروض داریم:

$$\frac{\pi}{6}+\left[\frac{\pi}{6x}\right]=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{یا}\ 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

$$\left[\frac{\pi}{6x}\right]=2k\pi\ \text{یا}\ 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$$

مقدار سمت چپ این‌تساوی عدد صحیح‌است وچون π عدد گنگ و k عدد صحیح است پس مقدارسمت راست‌فقط وقتی‌عددصحیح است که $k=0$ باشد:

$$\left[\frac{\pi}{6x}\right]=0\Longrightarrow 0\leqslant\frac{\pi}{6x}<1\Longrightarrow x>\frac{\pi}{6}$$

۹۱/۴۶ـ ب: از رابطهٔ:

$$\overline{a_1a_2\cdots a_n}\times 10=a_1(10^n-1)+\overline{a_2a_3\cdots a_na_1}$$

نتیجه می‌شود که عدد 10^n-1 نیزبر ۱۰۱ بخش‌پذیر است و چون $99\times 101=9999$ پس عدد n بایدمضربی‌از۴ باشد.

۹۱/۴۷ـ ج: عدد b برابراست با $2^\alpha\times 5^\beta\times b'$ که b' نسبت به ۱۰ اول‌است و تعداد ارقام دورهٔ غیرگردش کسر اعشاری حاصل از $\frac{a}{b}$ بزرگترین عددازدوعدد α و β است که با i نشان داده شده است. عدد b^2 برابرخواهد شد با $2^{2\alpha}\times 5^{2\beta}\times b'^2$ و تعداد ارقام دورهٔ غیرگردش کسر اعشاری‌حاصل از $\frac{a^2}{b^2}$ برابر است‌با بزرگترین عددازدوعدد 2α و 2β پس برابراست با $2i$.

۹۱/۴۸ـ ج: اگر P منعکس نقطهٔ S درانعکاس به‌قطب M و به‌قوت $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ باشد چهار ضلعی SPAB محاطی است وچون سه نقطهٔ S و A و B ثابتندپس مکان P دایرهٔ‌محیطی مثلث SAB است.

۹۱/۴۹ـ د: دایرهٔ به‌قطر MN بردایرهٔ C عموداست وچون این‌دایره از A می‌گذرد از F پای‌قطبی A نسبت‌به‌دایرهٔ C نیزمی‌گذرد. پس‌زاویهٔ MFN قائمه است و F بر دایرهٔ محیطی مثلث MAN واقع است. هرگاه از F عمودهای FH و FK و FI را به‌ترتیب بر Ax و Ay و MN رسم کنیم، بنابه قضیهٔ سمسن سه نقطهٔ H و K و I برخط مستقیم Δ واقعند. H و K ثابتند پس Δ ثابت است. تصویرقائم F برخط MN روی خط ثابت Δ واقع است، پس MN برسهمی مماس است که F کانون و Δ مماس در رأس آن می‌باشد.

مروری ... (دنباله ازصفحهٔ ۴۰۰)

م سنگینتر از ع است $\Longleftarrow$ $ع<م$

ی سنگینتر از م است $\Longleftarrow$ $م<ی$

ت سنگینتر از ی است $\Longleftarrow$ $ی<ت$

خواهیم داشت:

$ع<م<ی<ت$

ع سبکتر ازهرکدام م،ی است؟

پرسش ۵۶ ازگروه طبیعی: رابطهٔ‌شمالی بودن نیزیك رابطهٔ‌ترتیب است. می‌توانیم ازهمان علامت $<$ استفاده کنیم:

الف درشمال ج وب‌است $\Longleftarrow$ $ب<الف$ ، $ج<الف$

ج در شمال د است $\Longleftarrow$ $د<ج$

د در شمال ب است $\Longleftarrow$ $ب<د$

خواهیم‌داشت:

$ب<د<ج<الف$

پاسخ ۲ یعنی «ب درجنوب ج‌است» درست‌است،

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۹۲/۱ـ $p(x)$ چند جمله‌ای است صحیح نسبت به x هرگاه باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)$ برابر با ۴ و باقیماندهٔ تقسیم آن بر $(x-2)$ برابر با ۷ باشد ، باقیماندهٔ تقسیم آن بر (x^2-3x+2) برابراست با:

ب ـ ۲۸ ب ـ ۱۱

ج ـ $3x+1$ د ـ $11x+28$

۹۲/۲ـ برای آنکه رابطهٔ:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=$$
$$a(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

نسبت به x و y و z اتحاد باشد، لازم وکافی است که مقدار a برابرباشد با:

الف ـ ۱ ب ـ ۱ ـ ج ـ ۲ د ـ $\frac{1}{2}$

۹۳/۳ـ به فرض آنکه داشته باشیم:

$$f(x+2)=x^2+7x+14$$

عبارت $f(x)$ برابر است با:

الف ـ x^2+3x+4 ب ـ x^2+4x+3

ج ـ x^2-3x+4 د ـ x^2-4x+3

۹۲/۴ـ معادلهٔ:

$$x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+x+1+$$
$$+\frac{2}{x-1}=0$$

الف ـ ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب ـ فقط یك ریشهٔ حقیقی دارد.

ج ـ دو ریشهٔ حقیقی دارد.

د ـ بیش از دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۹۲/۵ـ به فرض آنکه داشته باشیم:

$$x=\frac{4t}{t^2+4} \text{ و } t\geq 2$$

حاصل عبارت

$$y=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$$

برابراست با:

الف ـ $\frac{2t}{\sqrt{t^2+4}}$ ب ـ $\frac{-4}{\sqrt{t^2+4}}$

ج ـ $\frac{4}{\sqrt{t^2+4}}$ د ـ $\frac{\pm 4}{\sqrt{t_2+4}}$

۹۲/۶ـ عبارت زیرمفروض است:

$$p(x)=a|x-1|+|x+1|-(a+2)x+a+2$$

کدامیك از اظهارات زیرغلط است:

الف ـ عبارت $p(x)$ به ازای همهٔ مقادیـر x مستقل از a است.

ب ـ عبارت $p(x)$ به ازای مقادیـری از x مستقل از a نیست .

ج ـ $p(x)$ وقتی مستقل از a است که $x\geq 1$ باشد.

د ـ اگر $x\leq -1$ باشدعبارت $p(x)$ مستقل از a نیست

۹۲/۷ـ به فرض آنکه a و b و k عددهای حقیقی و $a\neq 0$ و $b\neq 0$ باشد، معادلهٔ:

$$\sqrt{ax-b}+\sqrt{b-ax}=k^2$$

الف ـ ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب ـ یك ریشهٔ حقیقی‌دارد.

ج ـ دوریشهٔ‌حقیقی دارد.

د ـ بیش ازدوریشهٔ حقیقی دارد.

۹۲/۸ـ دستگاه نامعادلات:

$$\begin{cases} x^2-a^2-1>0 \\ x-a>0 \\ x+a<0 \end{cases}$$

الف ـ همواره ممکن است.

ب ـ وقتی ممکن است که $a \geq 0$ باشد.

ج ـ وقتی ممکن است که $a < 0$ باشد.

د ـ هیچگاه ممکن نیست.

۹۲/۹ ـ به فرض آنکه داشته باشیم:

$$y = |x+1| + |x-1| \quad \text{و} \quad x^2 < 1$$

خواهیم داشت:

الف ـ $y = 2$ ب ـ $y > 2$

ج ـ $y = 2x$ د ـ $y = -2x$

۹۲/۱۰ ـ هرگاه x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$$

و a و b و c مقادیر حقیقی باشند، در این صورت ریشه‌های معادلهٔ:

$$(y-x')(y-x'') + b^2 = 0$$

الف ـ حقیقی نیستند.

ب ـ عبارتند از a و b

ج ـ عبارتند از b و c

د ـ عبارتند از c و a

۹۲/۱۱ ـ معادلهٔ:

$$x^4 - 2ax^3 + (a^2+2)x^2 - 2ax + 1 = 0$$

الف ـ درازای همهٔ مقادیر a چهارجواب حقیقی‌دارد.

ب ـ در ازای بعضی از مقادیر a چهار جواب حقیقی متمایز دارد،

ج ـ درازای هیچ مقدار از a جواب حقیقی ندارد.

د ـ حداکثر دوجواب‌حقیقی(مضاعف)می‌تواندداشته‌باشد

۹۲/۱۲ ـ معادلهٔ:

$$\sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{a^2-1-x^2} = 1 - a^2$$

الف ـ وقتی جواب حقیقی داردکه $|a| < 1$

ب ـ به ازای همهٔ مقادیر a جواب حقیقی دارد.

ج ـ به ازای هیچ مقدار از a جواب حقیقی ندارد.

د ـ حداکثر دو جواب حقیقی می‌تواند داشته باشد.

۹۲/۱۳ ـ برای آنکه معادلهٔ:

$$(a^2-b^2)x^2 - 2(a^2-b^2-1)x + a^2 + b^2 = 0$$

دوریشهٔ حقیقی داشته باشد، شرط $|a| < |b|$:

الف ـ لازم است ب ـ کافی است.

ج ـ لازم وکافی است.

د ـ نه لازم است ونه‌کافی است.

۹۲/۱۴ ـ بهٔ فرض $x > 0$ و $a > 0$ و به فرض:

$$\log_a x + \log_x a = \frac{17}{4}$$

مقدار x برحسب a برابراست با:

الف ـ a^4 یا $\sqrt[4]{a}$ ب ـ $4a$ یا $\frac{a}{4}$

ج ـ $4\log a$ یا $\frac{1}{4}\log a$ د ـ $\log 4a$ یا $\log\frac{a}{4}$

۹۲/۱۵ ـ در یك تصاعد حسابی تعداد تمام جمله‌ها ۲۵ است و جملهٔ سیزدهم ۲۰ می‌باشد. مجموع تمام جمله‌های این تصاعد:

الف ـ قابل محاسبه نیست.

ب ـ برابر با ۵۰۰ است.

ج ـ برابر ۲۵۰ است.

د ـ برابر با ۱۰۰۰ است.

۹۲/۱۶ ـ جملهٔ هفتم یك تصاعد هندسی با قدر نسبت مثبت برابر با A و جملهٔ سوم آن B است. اگر جملهٔ پنجم این‌تصاعد x باشد:

الف ـ $x > \sqrt{AB}$ ب ـ $x < \sqrt{AB}$

ج ـ $x = \sqrt{AB}$ د ـ $x \neq \sqrt{AB}$

۹۲/۱۷ ـ هرگاه داشته باشیم:

$$5(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots) = 4(1 + q + q^3 + \cdots)$$

مقدار q برابر است با:

الف ـ $\frac{1}{5}$ ب ـ $\frac{4}{15}$ ج ـ $\frac{7}{15}$ د ـ $\frac{5}{12}$

۹۲/۱۸ ـ مجموع بینهایت جملهٔ یك‌تصاعدهندسی‌برابر $\frac{3}{2}$ و مجموع مجذورات بینهایت جملهٔ مزبور برابر با $\frac{9}{8}$ است قدر نسبت این تصاعد برابر است با:

الف ـ $\frac{2}{3}$ ب ـ $\frac{1}{2}$ ج ـ $\frac{1}{4}$ د ـ $\frac{1}{3}$

۹۲/۱۹ ـ به فرض $0 < x < 1$ جواب معادلهٔ:

$$2^{1+x+x^2+\cdots} = 9^{\log_5 2}$$

برابراست با:

الف ـ $\log_9 \frac{5}{9}$ ب ـ $\log_9 \frac{9}{5}$

ج ـ $\log_5 \frac{5}{9}$ د ـ $\log_5 \frac{9}{5}$

۹۲/۲۰ ـ یك دسته جواب دستگاه دو معادلهٔ

$$\begin{cases} (\log x)^2 + (\log y)^2 = 10(\log a)^2 \\ xy = a^2 \end{cases}$$

عبارتست از:

الف- $\frac{1}{a}$ و a^3 ب- $\frac{1}{a}$ و a

ج- ۱ و a^2 د- a و a

۹۲/۲۱- در مثلث ABC از K وسط AB خطی رسم می‌کنیم که AC را در L و امتداد BC (از طرف C) را در M قطع کند. هرگاه $MC=a\cdot BC$ باشد، نسبت AL به LC برابر خواهد بود با:

الف- a ب- $\frac{1}{a}$

ج- $\frac{a}{a+1}$ د- $\frac{a+1}{a}$

۹۲/۲۲- در ذوزنقه‌ای که دو ساق در امتدادهای عمود بر یکدیگر باشند، مجموع مجذورات دو قطر برابر است با:

الف- مجموع مجذورات دوساق

ب- مجموع مجذورات دو قاعده

ج- مجموع حاصل‌ضربهای دوقاعده و دوساق

د- تفاضل حاصل‌ضرب دو قاعده برحاصل‌ضرب دوساق

۹۲/۲۳ - میانه‌های AK و BL و CM از مثلث ABC در G متقاربند و N و P و Q به ترتیب اوساط GB و GC و GA می‌باشند. اگر مساحت مثلث ABC برابر با S باشد، مساحت شش ضلعی KPLQMN برابر است با:

الف- $\frac{S}{4}$ ب- $\frac{S}{3}$ ج- $\frac{S}{2}$ د- $\frac{2S}{3}$

۹۲/۲۴- دو رأس A و B از مثلث ABC ثابت است و رأس C از آن دایرهٔ ثابت به مرکز A را می‌پیماید. نیمساز داخلی زاویهٔ A ضلع BC را در D قطع می‌کند، مکان نقطهٔ D:

الف - دایره‌ای است به مرکز A

ب - دایره‌ای است که مرکز آن بر AB واقع است.

ج - دایره‌ای است به مرکز B

د - دایره نیست

۹۲/۲۵- مثلث متساوی الاضلاع ABC مفروض است. به قطر BC و در خارج مثلث نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم و بر آن نقاط D و E را چنان تعیین می‌کنیم که سه کمان BD و DE و EC با هم برابر باشند. خطوط AD و AE ضلع BC را در P و Q قطع می‌کنند. هر یك از دوپاره خط BP و QC:

الف - از PQ بزرگترند.

ب - از PQ کوچکترند.

ج - با PQ برابرند.

د - از ثلث BC بزرگترند.

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۹۲/۲۶- در صفحهٔ محورهای مختصات دو خط D و D′ نسبت به نقطهٔ I(۱ و ۲) قرینهٔ یکدیگرند. هرگاه $y=x+3$ معادلهٔ خط D باشد، معادلهٔ خط D′ عبارتست از:

الف - $y=x+1$ ب - $y=-x+1$

ج- $y=-x-1$ د- $y=x-1$

۹۲/۲۷- A(۵ و ۰) یك رأس و H(−۳ و ۱) مرکز ارتفاعی مثلث ABC است، ضریب زاویه‌ای ضلع BC از این مثلث برابر است با:

الف- $\frac{3}{4}$ ب- $-\frac{3}{4}$ ج- $\frac{4}{3}$ د- $-\frac{4}{3}$

۹۲/۲۸- خط به معادلهٔ $x-3y+6=0$ دو ضلع AB و AC از مثلث ABC را نصف می‌کند. به فرض A(۱ و ۴) معادلهٔ ضلع BC:

الف - مشخص نمی‌شود.

ب- برحسب یك پارامتر بدست می‌آید.

ج - عبارتست از: $x+3y+1=0$

د - عبارتست از: $x-3y+1=0$

۹۲/۲۹- نمایش هندسی دستگاه:

$$\begin{cases}(x+y)(x-y+1)<0\\ x-5y+5=0\end{cases}$$

الف - یك پاره خط است.

ب - دو نیم خط است.

ج - ناحیه‌ای محدود از صفحه است.

د - ناحیه‌هایی نامحدود از صفحه است.

۹۲/۳۰- تابع:

$$y=|x+1|+|x-1|$$

الف - می‌نیمم ندارد

ب - فقط در ازای $x=\pm 1$ می‌نیمم است

ج - فقط در ازای $x=0$ می‌نیمم است

د - در تمام فاصلهٔ $-1\leq x\leq 1$ می‌نیمم است

۹۲/۳۱- نمایش هندسی معادلهٔ:

$$|x|+|y|=2$$

الف - چهار خط نامحدود دو به دو عمود برهم است

ب - مربعی است که قطرهایش برمحورهای مختصات واقعند

ج ـ مربعی است که ضلعهایش بامحورهای مختصات موازیند

د ـ دو خط شکستهٔ جدا از هم است

۹۲/۳۲ـ درصفحهٔ محورهای مختصات نمایش هندسی نامعادلهٔ:

$$(|x|-1)(|y|-1)<0$$

الف ـ ناحیه‌ای بسته است

ب ـ یك نوار از صفحه است

ج ـ دونوار متقاطع از صفحه است

د ـ چهار نیم‌نوار از صفحه است

۹۲/۳۳ـ ضریب زاویه‌ای مماس بر منحنی تابع

$$y=\sin|x|+\cos|x|$$

در نقطه‌ای از آن به طول $x=-\frac{\pi}{2}$ برابر است با:

الف ـ -1 ب ـ 1 ج ـ ± 1 د ـ صفر

۹۲/۳۴ ـ تابع $y=\sqrt{f(x)}$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه $f'(x)$ مشتق $f(x)$ باشد به فرض $f(a)=0$ و $f'(a)\neq 0$ مماس برمنحنی تابع در نقطهٔ به طول a ازآن:

الف ـ بامحور طولها موازی است

ب ـ بامحور عرضها موازی است

ج ـ باهیچیك از دومحور موازی‌نیست

د ـ وجود ندارد

۹۲/۳۵ـ به‌فرض $4x+2y=1$، تابع $z=x^2+y^2$

الف ـ دارای ماکسیممی برابربا ۲۰ است

ب ـ دارای ماکسیممی برابر با $\frac{1}{20}$ است

ج ـ می‌نیممی برابربا $\frac{1}{20}$ دارد

د ـ می‌نیممی برابربا ۲۰ دارد

۹۲/۳۶ـ دو معادلهٔ زیر مفروض است

$$x^2-2px+q^2=0 \quad \text{و} \quad x^2-2qx+p^2=0$$

هرگاه ریشه‌های اولی $tg\,a$ و $tg\,b$ و ریشه‌های دومی $cotg\,a$ و $cotg\,b$ باشد، خواهیم داشت:

الف ـ $a=b=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

ب ـ $a=k\pi+\frac{\pi}{4}$ و $b=k\pi-\frac{\pi}{4}$

ج ـ $a=b=k\pi+\frac{\pi}{4}$

د ـ $a=b=k\pi-\frac{\pi}{4}$

۹۲/۳۷ ـ به فرض $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ مقدار کسر

$$\frac{\sin|x|+\cos|x|}{3\sin x+4\cos x}$$

الف ـ مثبت‌است ب ـ منفی است

ج ـ نامنفی است د ـ نامثبت‌است

۹۲/۳۸ـ به فرض آنکه داشته باشیم:

$$\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x<a$$

مقدار a برابراست با:

الف ـ $\sqrt{3}$ ب ـ $2\sqrt{3}$ ج ـ ۱ د ـ ۲

۹۲/۳۹ـ هرگاه $tg\,x=cotg\,a$ و a مقدار معین‌باشد، تابع:

$$y=\sin x\sin(x+2a)$$

الف ـ می‌نیمم‌است ب ـ می‌نیمم یاماکسیمم‌است

ج ـ ماکسیمم‌است د ـ نه‌می‌نیمم‌است و نه‌ماکسیمم

۹۲/۴۰ـ هرگاه $0<x<\pi$ و داشته‌باشیم:

$$\cos x=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$

مقدار x برابراست با:

الف ـ $\frac{\pi}{3}$ ب ـ $\frac{2\pi}{3}$ ج ـ $\frac{\pi}{6}$ د ـ $\frac{5\pi}{6}$

۹۲/۴۱ ـ از نقطهٔ O واقع در صفحهٔ P دو نیم خط OA و OB را در خارج صفحهٔ P و در یك طرف آن و نیم خط OC را در صفحهٔ P رسم می‌کنیم. اگر نیم خط OA' قرینهٔ OA نسبت به صفحهٔ P باشد، مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ AOC و BOC وقتی ماکسیمم است که OC واقع باشد برفصل مشترك صفحهٔ P با صفحهٔ:

الف ـ AOA' ب ـ BOB' ج ـ AOB

د ـ عمود برصفحهٔ AOB و ماربرنیمساز زاویهٔ AOB

۹۲/۴۲ـ سه نقطهٔ A و B و C مفروض است. برای آنکه کنجی سه قائمه بتوان ساخت که هریالش بریکی ازسه‌نقطهٔ مفروض بگذرد و رأسش بر هیچیك از این نقطه‌ها واقع نباشد لازم وکافی است که ABC مثلث:

الف ـ حاده الزوایا باشد.

ب ـ منفرجه الزاویه نباشد.

ج ـ قائم‌الزاویه نباشد.

د ـ غیرمشخص باشد.

۹۲/۴۳ـ در منشور قائم و کامل چهار پهلو (با قاعدهٔ چهار ضلعی غیر مشخص) مجموع اندازه‌های تمام فرجه‌ها برابر است با:

الف ـ ۱۲قائمه ب ـ ۸قائمه ج ـ ۶قائمهٔ د ـ ۱۰قائمه

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۹۲/۴۴ـ نمایش هندسی تابع

$$y=|x+2a|+|x+2b|$$

دارای محور تقارنی است به معادلهٔ:

الف ـ $x=a+b$ ب ـ $x=a-b$

ج ـ $x=-a+b$ د ـ $x=-a-b$

۹۲/۴۵ـ اگر m ضریب زاویه‌ای مماس برمنحنی‌تابع $y=x\sqrt{x^2+1}$ در نقطهٔ به طول x از آن باشد، وقتی $x\to\pm\infty$.

الف ـ $m\to\pm\infty$ ب ـ $m\to 0$

ج ـ $m\to 1$ د ـ $m\to\mp 1$

۹۲/۴۶ـ به فرض آنکه $P(x)$ و $Q(x)$ معرف چند جمله‌ایهای صحیح نسبت به x باشند، و C و C' منحنیهای نمایشهای هندسی دو تابع زیرباشند:

$$(C):\quad y=p(x)+\frac{1}{Q(x)}\ ,\ (C'):\quad y=p(x)$$

الف ـ C و C' مجانبهای مشترك دارند.

ب ـ C مجانب C' است.

ج ـ C' مجانب C است.

د ـ هیچیك از دو منحنی مجانب ندارد.

۹۲/۴۷ـ دو تابع زیررا در نظر می‌گیریم:

$$y_1=\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}\ \text{و}\ y_2=\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$$

به فرض آنکه $f(x)$ و $g(x)$ ریشهٔ مشترك نداشته باشند;

الف ـ در هر فاصله‌که y_1 معین باشد، y_2 نیزمعین‌است

ب ـ در هر فاصله‌که y_2 معین باشد، y_1 نیزمعین‌است.

ج ـ در هرفاصله‌که هریك از دوتابع معین باشد دیگری نیزمعین است.

د ـ هریك از دوتابع وقتی معین است‌که $g(x)\neq 0$ و $f(x)$ و $g(x)$ هم‌علامت باشند.

۹۲/۴۸ـ نسبت به یك دستگاه محورهای مختصات منحنیهای C و C' به معادله‌های زیر مفروض است

$$(C):\quad y=\log(x+1)+\log(x-1)$$

$$(C'):\quad y=\log(x^2-1)$$

الف ـ دو منحنی C و C' بریکدیگر منطبقند.

ب ـ منحنی C جزئی از منحنی C' است.

ج ـ منحنی C' جزئی از منحنی C است.

د ـ C و C' نسبت به محور $y'y$ قرینه‌اند.

۹۲/۴۹ـ سطح محصور بین منحنی تابع

$$y=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

و محور $x'x$ودوخط $x=2$ و $x=k>2$ وقتی $k\to+\infty$ دارای حدی است برابربا

الف ـ $\frac{3}{4}$ ب ـ $\frac{4}{3}$ ج ـ $\frac{2}{3}$ د ـ $\frac{8}{3}$

۹۲/۵۰ـ برای آنکه دو منحنی‌به معادله‌های

$$y=\frac{x^3-(5+3m)x+3}{mx^2}\ \text{و}\ y=x^2-5$$

بریکدیگر مماس گردند، برای m :

الف ـ مقداری‌وجود ندارد.

ب ـ فقط یك‌مقدار وجود دارد،

ج ـ حداکثر دو مقدار وجود دارد.

د ـ سه مقدار متمایز وجود دارد.

۹۲/۵۱ـ در تابع $y=\sqrt{1-\cos(3\pi\sin x)}$ هرگاه x به ازای مقادیر منفی به سمت صفر میل‌کند، ضریب زاویه‌ای مماس بر منحنی در نقطهٔ به طول x میل می‌کند به سمت:

الف ـ $\pi\sqrt{2}$ ب ـ $-\pi\sqrt{2}$

ج ـ $\pm\pi\sqrt{2}$ د ـ صفر

۹۲/۵۲ـ در یك دستگاه‌محورهای مختصات دومنحنی:

$$(C):\quad y=f(x)\quad \text{و}\quad (C'):\quad y=\frac{x^2}{f(x)}$$

رسم شده‌اند. دایره‌ای‌که از نقطهٔ M واقع بر (C) می‌گذرد و در مبدأ مختصات بر $x'x$ مماس است، منحنی (C') را در M' قطع می‌کند، اگر طول نقطهٔ M برابربا α باشد، طول نقطهٔ M' برابراست‌با:

الف ـ α ب ـ $-\alpha$ ج ـ $\frac{1}{\alpha}$ د ـ $\frac{-1}{\alpha}$

۹۲/۵۳ـ مقدار سطح محصور بین منحنی تابع

$y=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ و محور $x'x$ و خط $x=-1$:

الف ـ نامحدود است. ب ـ برابریك است.

ج ـ کوچکترازیك‌است. د ـ بزرگترازیك‌است

۹۲/۵۴ـ به فرض $a\neq 0$ تابع:

$$y=\cos(ax^2+bx+c)$$

الف ـ دورهٔ تناوبی‌کمتر از 2π دارد.

ب ـ دورهٔ تناوبی بزرگتر از 2π دارد.

ج ـ دورهٔ تناوبی‌برابر 2π دارد،

د ـ متناوب نیست.

۹۲/۵۵ـ در مثلث ABC وقتی رابطهٔ:

$$\frac{tg A}{tg B}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$$

برقرار است که این مثلث:

الف ـ متساوی الساقین باشد.

ب ـ قائم‌الزاویه باشد.

ج ـ یامتساوی‌الساقین و یا قائم‌الزاویه باشد.

د ـ متساوی الاضلاع باشد.

۹۲/۵۶ـ وقتی x به ازای مقادیر مثبت یا مقادیر منفی به سمت صفرمیل کند، حد تابع زیر برابر است با:

$$y=\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

الف ـ $\sqrt{2}$ ب ـ $-\sqrt{2}$ ج ـ $\pm\sqrt{2}$ د ـ صفر

۹۲/۵۷ـ اندازه‌های ضلعهای مثلثی ۴ و $2\sqrt{17}$ و ۱۰ است. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث از ضلع به طول $2\sqrt{17}$ برابراست با:

الف ـ $\frac{3\sqrt{17}}{4}$ ب ـ $\frac{4\sqrt{17}}{3}$ ج ـ $\sqrt{17}$ د ـ $\frac{\sqrt{17}}{2}$

۹۲/۵۸ ـ چهار عدد طبیعی a و b و c و d با شرط $ad=bc$ مفروضند.

هرگاه D_1 و D_2 به‌ترتیب بزرگترین‌مقسوم علیه‌مشترك (a و b) و (c و d) و M_1 و M_2 به‌ترتیب کوچکترین‌مضرب مشترك (a و b) و (c و d) باشد، داریم :

الف ـ $D_1M_2=D_2M_1$

ب ـ $D_1M_1=D_2M_2$

ج ـ $D_1D_2=M_1M_2$

د ـ $M_1M_2=(D_1D_2)^2$

۹۲/۵۹ـ اگر a و b دو عدد صحیح و $a>b$ باشد، عدد

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

الف ـ نیزعدد صحیح است.

ب ـ وقتی صحیح است که a و b هردو زوج باشند.

ج ـ وقتی صحیح است که a مضرب b باشد.

د ـ نمی‌تواند عدد صحیح باشد.

۹۲/۶۰ـ دو دایرهٔ متخارج O و O′ مفروضند . نقطهٔ دلخواه M را برمحور اصلی آنها در نظر می‌گیریم . از M مماس MT را بر دایرهٔ O و مماس MT′ را بر دایرهٔ O′ رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی مماسهای مشترك خارجی دودایرهٔ O و O′ را S می‌نامیم، دایره‌های Γ و Γ′ را چنان رسم می‌کنیم که بر S بگذرند و اولی در T بر دایرهٔ O و دومی در T′ بردایرهٔ O′ مماس باشد . این دو دایره غیر از S در نقطهٔ دیگر P متلاقیند:

الف ـ نقطهٔ P ثابت است.

ب ـ نقطهٔ P بر خط MS و در خارج پاره خط MS واقع‌است.

ج ـ نقطهٔ P برخط MS و بین M و S واقع است.

د ـ سه نقطهٔ M و S و P بریك دایره واقعند.

۹۲/۶۱ـ دایرهٔ C به قطر AB وبه مرکز O مفروض است. در انعکاس به قطب A و به قوت k^2 منعکس دایرهٔ C را خط Δ می‌نامیم. هرگاه Γ دایرهٔ انعکاس (=دایرهٔ به مرکز A و به شعاع k) باشد، خط Δ :

الف ـ بر Γ مماس است.

ب ـ قطبی O نسبت به Γ است.

ج ـ قطبی B نسبت به Γ است.

د ـ عمود منصف AO است.

۹۲/۶۲ـ در مثلث ABC دایرهٔ به‌قطر BC بردایرهٔ محاطی داخلی مماس است . هرگاه r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث مماس بر BC و $BC=a$ باشد طول r_a :

الف ـ برابر a است.

ب ـ بزرگتر از a است.

ج ـ کوچکتر از a است.

د ـ واسطهٔ هندسی بین a و r شعاع‌دایرهٔ محاطی داخلی است .

۹۲/۶۳ـ A و B در نقطهٔ ثابتند. برخط AB وخارج پاره‌خط AB نقطهٔ دلخواه H را در نظر می‌گیریم و روی عمودی که در H بر AB اخراج می‌شود نقطهٔ M را چنان انتخاب می‌کنیم که :

$$\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MB^2}=\frac{1}{MH^2}$$

باشد مکان M :

الف ـ سهمی‌است. ب ـ هذلولی است .

ج ـ بیضی است. د ـ دایره است

پاسخهای درست در یکی‌ازصفحات همین‌شماره اعلام شده‌است.

بیان منظوم قضیهٔ بطلمیوس

آقای **مهدی عیوقی** دانش‌آموز پایهٔ پنجم ریاضی دبیرستان ابن سینای همدان ، علاوه بر آنکه به دروس ریاضی علاقه دارد ، تا حدی هم با شعر و شاعری سروکار دارد . این دانش آموز قضیه‌هایی از هندسه را در قالب شعر بیان کرده که اشعار مربوط به قضیه‌های بطلمیوس و سه عمود را در تاریخ ۱۳۵۱/۱۲/۱۰ برای مجلهٔ یکان فرستاده است که اشعار مربوط به قضیهٔ بطلمیوس درزیر درج می‌شود؛

این سخن نقل مرا شد زیکی هندسه‌دان — که وراکهنه یقیناً نکند سیر زمان
گر بنا را ز ازل پایه به احکام نهی — بی‌گمان نیست ورا سوی‌خرابیش رهی
آن مهندس سخنی گفت ز نقصان‌همه‌دور — شعله‌ای ساخت که‌اشباع بسی گشته ز نور
گفت‌ما را که یکی دایره ترسیم کنیم — بهر او چاربری یکسره تقدیم کنیم
چو یکی قطر شود ضرب درآن قطر دگر — نرود زحمت ما یکسره بی شك به‌هدر
گر کنی ضرب تو اضلاع مقابل در هم — نیز افزوده کنی حاصل آنها برهم
یافت خواهی که دو محصول‌مساوی شده‌اند — همگی تابع آن فکر کذائی شده‌اند
حال اثبات وی از بهر تو آماده کنم — جام احساس ترا یکسره پر باده‌کنم
کنم ABCD در دایره‌ای حبس‌کنون — تا که از دارگمانت بکشم زود برون
حال اقطار ورا صورت ترسیم دهیم — B با ABD آنگاه برابر بنهیم
نگری گر تو بدین شکل به امعان نظر — شجر رنج تو خواهدکه دهد زود ثمر
با BAD سه بر EBC مانند بود — این سخن را به یقین فکرتو پابندبود
گر نویسی تو همی نسبت مانندیشان — متعجب شوی از فن هنرمندیشان
AD بر EC کنون چون DB بر BC رود — DB در EC همی‌چون CB در AD شود
دقتی کن تو در این شکل یکی بار دگر — تاکه قانع شوی ای یار نکو خلق وسیر
EBA ، BCD راگشته مشابه سه بری — شجر رنج تو وه داده چه نیکو ثمری
نسبت چونی آن گر بتو معلوم شود — رنگ اوهام وظنون یکسره معدوم شود
هست AE به DC همچو BA بر BD — یا BA در CD ماند به EA در DB
این روابط چو به هم جمع‌وکنی‌ساده سپس — بی‌گمان برتو نیاید دگر اشکال زکس
برتو (عیوقی) چه آمد سخن‌حق به ثبوت — نسزد در برحق کار دگر غیر سکوت

پاسخهای درست تستهای ریاضی

۱-ج	۲-د	۳-الف	۴-ب	۵-ج
۶-الف	۷-ب	۸-د	۹-الف	۱۰-د
۱۱-د	۱۲-ج	۱۳-ب	۱۴-الف	۱۵-ب
۱۶-ج	۱۷-ج	۱۸-د	۱۹-ب	۲۰-الف
۲۱-د	۲۲-ب	۲۳-ج	۲۴-ب	۲۵-ج
۲۶-د	۲۷-ب	۲۸-د	۲۹-الف	۳۰-د
۳۱-ب	۳۲-د	۳۳-ب	۳۴-ب	۳۵-ج
۳۶-الف	۳۷-الف	۳۸-د	۳۹-ج	۴۰-ب
۴۱-ب	۴۲-ب	۴۳-د	۴۴-د	۴۵-الف
۴۶-ج	۴۷-الف	۴۸-ب	۴۹-ب	۵۰-د
۵۱-ب	۵۲-الف	۵۳-ج	۵۴-ج	۵۵-ج
۵۶-ج	۵۷-الف	۵۸-ب	۵۹-د	۶۰-ج
۶۱-ج	۶۲-الف	۶۳-ب		

معرفی کتاب

سه نشریه از دفتر برنامه ریزی تعلیمات متوسطهٔ
وزارت آموزش و پرورش

I- نشریهٔ انجمن مرکزی معلمان علوم تجربی

شامل بیش از ۲۰ مقالهٔ علمی و گزارشی از یازدهمین کنفرانس عمومی مشهد، در ۱۳۸ صفحه

مدیر و مسؤول : حسین فرمان

II- یادبود دهمین سالگرد انقلاب سفید ایران

نشریهٔ انجمن دبیران علوم اجتماعی کشور

شامل بیش از پانزده مقاله و گزارش، در ۱۹۶ صفحه

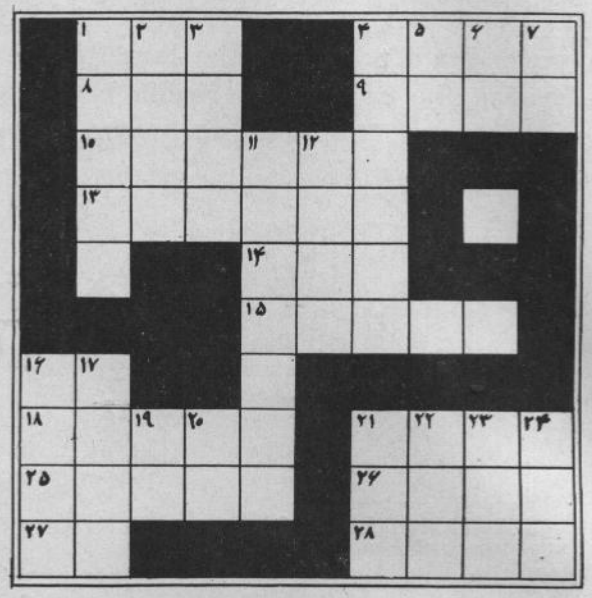
III- نشریهٔ انجمن دبیران زبان کشور

شامل مقالات و گزارشهایی به زبانهای فارسی وانگلیسی

جدول اعداد

طرح از : ابراهیم دین‌خواه

(تاریخ وصول به دفتر مجله : ۱۳۴۹/۹/۱۷)



افقی : ۱ـ به صورت $\overline{aba}$ و برابر است با $(\overline{aa})^2$. ۴ـ کوچکترین عدد چهار رقمی به صورت $\overline{mcdu}$ که مضرب ۷ است و خاصیت زیر را دارا است :

$$\overline{mcu}=\overline{mm}+\overline{cc}+\overline{uu}$$

۸ـ مجذور کامل و برابر است با :

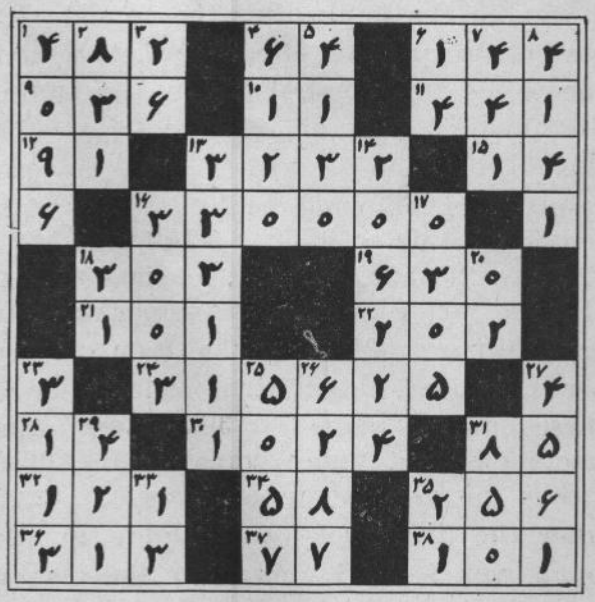
$$\overline{abc}=\overline{ac0}+c^2$$

۹ـ عدد چهار رقمی که چون بر رقم هزارگان خود تقسم شود مقلوبش بدست آید . ۱۰ـ رقم یکانش ۶ است و اگراین رقم را از سمت راست به‌سمت‌چپ عدد انتقال دهیم مجموع عدد حاصل و عدد مفروض ۷۳۵۸۰۱ شود. ۱۳ـ کوچکترین عدد شش رقمی که توان سوم عدد به شکل $\overline{aa}$ است . ۱۴ـ عددسه رقمی که در سمت راست عدد ۱۳ افقی واقع است . ۱۵ـ اگر ده برابر این عدد را از عدد ۱۰ افقی کم کنیم عددی یك رقمی حاصل شود . ۱۶ـ برابر است با $a^b \times b^a$. ۱۸ـ برابراست با $3^a \times 5^b$ و ۲۱ مقسوم‌علیه دارد. ۲۱ـ تکرارکعب عدد ۱۳ افقی. ۲۵ـ اگر رقم واقع در سمت‌چپ آن را حذف کنیم عدد حاصل باعدد ۱۴ افقی برابر است و درضمن رقم واقع در سمت چپ عدد همان رقم هزارگان‌عدد ۱۴ افقی‌است. ۲۶ـ یك‌واحد کمتر از ۲۵ برابر عدد ۸ افقی. ۲۷ـ برابر است با $\overline{ab}=a^2+10$ ۲۸ـ ۱۰۱ واحد بیشتر از عدد ۲۶ افقی .

قائم : ۱ـ تکرار یك رقم . ۲ـ اگر ۱۰ واحد از آن کم کنیم حاصل برابر می‌شود با $a^6(a+1)$ ۳ـ جذر آن‌تا ۰/۰۰۱ تقریب نقصانی برابر است با ۴۰/۴۴۷. ۴ـ کعب آن تا یك واحد تقریب نقصانی برابر ۵۸ و باقیماندهٔ این کعب‌به صورت $\overline{abba}$ است‌که جذر آن تا یك واحدتقریب اضافی ۳۸ است. ۵ـ متمم‌حسابی آن کعب رقم یکان آن است. ۶ـ مبنای متداول عددنویسی. ۷ـ حاصل‌ضرب آن در عدد ۱۲۳۴۵۶۷۹ فقط شامل رقم۹ است. ۱۱ـ به‌صورت $\overline{abbccdd}$ است که مجموع رقمهایش ۲۲ است و $d=2c+b=a+c$. ۱۲ـ به‌صورت $\overline{abbc}$ است بقسمی که $b=a+c$ و $a+b=\overline{1c}$. ۱۶ـ خارج‌قسمت تقسیم آن بر عدد ۱ افقی عدد به شکل $\overline{ab}$ است بقسمی که این عدد بزرگترین عدد دو رقمی با خاصیت زیر است:

$$b+a=\overline{1u} \text{ و } b-a=u$$

۱۷ـ مقلوبش ۷ واحدکمتراز مقلوب عدد ۹ افقی است. ۱۹ـ کوچکترین‌عددی که‌چون‌باعدد۱ افقی‌جمع‌شودعددی‌مجذورکامل بدست آید. ۲۰ـ توان سوم و مضربی ازمجموع رقمهایش‌است. ۲۱ـ عددی است به‌صورت $\overline{aba}$ که متمم‌حسابی آن به صورت $\overline{baa}$ است. ۲۲ـ ۱۰ واحد کمتر از هر یك از عددهای ۲۳و ۲۴ قائم. ۲۳ و ۲۴ — ده برابر خارج قسمت تقسیم عدد ۱۶ قائم بر عدد ۱ افقی.



حل جدول شمارهٔ پیش

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 108: Two coplanar circles are externally tangent, with the radius of one circle twice that of the other circle. From the center of the smaller circle two rays are down tangent to the larger circle. Determine the area of the region between the circles and between the rays. (See shaded region in Fig.1)

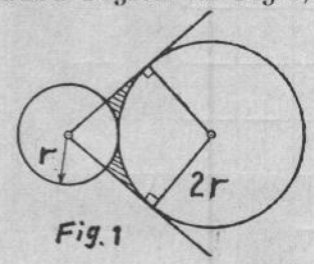


Fig.1

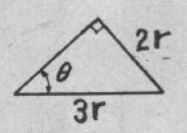


Fig.2

Solution— Eig.2 is the right triangle formed by the line segment connecting the centers of the circles, a tangent of the larger circle and a radius.

By the Pythagorean theorem, the «unknown» side of the triangle is $\sqrt{5}$, and the area of quadrilateral ABCD is $2r^2\sqrt{5}$. the area of the shaded portion in Fig. 1 is the area of the quadrilateral minus the area of the «pie shaped» pieces. The area of such a piece is $\frac{1}{2}r^2\theta$, where θ is the central angle measured in radians.

The angle marked θ in Fig.2 is $\text{Arc}\sin\frac{2}{3}$, and thus the area of the sector of the smaller circle is

$$\frac{4}{2}r^2\left(2\,\text{Arc}\sin\frac{2}{3}\right)$$

and the area of the sector of the larger cercle is

$$\frac{1}{2}(2r)^2\left\{2\left(\frac{\pi}{2}-\text{Are}\sin\frac{2}{3}\right)\right\}$$

Their swm, subtracted from the area of the quadrilateral is:

$r^2(2\sqrt{5}+3\text{Arc}\sin\frac{2}{3}-2\pi)$ or approximately. $3qr^2$

Problem 109 ; One day I started a savings account with an amount of money that happened to be a perfect square. The next week I added \$ 30.00,and noted that the amount in my account was again a perfect square.During the following week I deposited \$ 30.00 again, and again I noted that the total amount in my account was o perfect square. How money did I have in my account?

Solution— If the original deposit was x^2 and the total after the deposit was y^2, then.

$$x^2+3000=y^2 \text{ or } y^2-x^2=3000$$

$$y^2-x^2=(y+x((y-x)=3000$$

Therefore the original deposit is dependent upon the factors of 3000 The factorpairs af 3000 are:2,1500 ; 3,1000; 4,750 5,600;6,500; 8,375;10, 300, 12;250 , 15,200, 20;150, 24,125 ; 25,120, 30,100 , 40,75 , and 50,60

Since $(y+x)(y-x)=2y$, the amount of money in the bank after the second deposit is the square of one-half of the sum of one of the factor pairs of 3000 .Eliminating the factor pairs of 3000 not meeting this condition with an integral result, the following eight factor pairs remain: 2,1500 ; 4,750 , 6,500 ; 10,300 ; 12,250 , 20,150 , 30,100 , ane 50,60. Each of these factor pairs represent perfect squares that are 3000 greater than another perfect square. In addition, exactly on of these number pairs is 3000 less than another perfect square namely (30+100)/2 . thus the original deposit was \$ 12 25, after the first week the amount in the bank was \$ 42.25, and after the second week there was \$ 72.25 in the aacount.

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به حساب بانکی مجله حواله یا واریز می کنید، حتماً مراتب را ضمن نامهٔ جداگانه به دفتر مجله اطلاع دهید. فراموش نکنید که درنامهٔ ارسالی، نشانی کامل خود را باخط خوانا بنویسید.

۲ـ اگر مشترك مجله هستید و نشانی شما تغییر می کند، نشانی جدید خود را به دفترمجله اطلاع دهید. مجله‌هایی که تا قبل از اطلاع برنشانی جدید شما به نشانی سابق ارسال شده باشد، مجدداً برای شما ارسال نخواهد شد.

۳ـ در نامه‌های ارسالی خود به دفتر مجله ، نام، نام‌خانوادگی، شهر ونشانی خود را با خط خوانا وواضح بنویسید.

۴ـ انتشارات یکان منحصر به کتابهایی است که معمولا در پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی در مجله معرفی می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات کتابهایی که به‌صورت آگهی درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.