



دوره نهم، شماره : ۶ شماره مسلسل : ۹۱ فروردین - اردیبهشت ۱۳۵۲

دراين شماره :

۳۰۵	عبدالحسین مصحفی	شک و تردید ، کلید دروازه حقیقت
۳۰۶	جعفر آقایانی چاوشی	ریاضیدانان اسلامی ، حکیم عمر خیام
۳۰۹	دکتر علیرضا امیر معز	قشر محدب و حجم درون آن
۳۱۲	ترجمه مقصود عین الله	میانگین لگاریتمی
۳۱۴	ترجمه غلامرضا فرزین	تعیین اعداد اول از روی اعداد اول معلوم
		مسائل منسوب به ریاضیدانان مشهور ،
۳۱۸	داوید ریحان	نتایجی از قضیه بطل میوس
۳۲۱	ترجمه جعفر آقایانی چاوشی	یک نامساوی هندسی
۲۲۲	ترجمه فتح الله زرگری	بررسی یک مسئله مشهور حساب
۳۲۳	ترجمه مصحفی	با ریاضیات آشتبانی کنید
۳۲۷	ترجمه باقر مظفرزاده	شیوه عمومی به روش بر نامه ای
۳۳۱	-	حل مسائل یکان شماره ۹۵
۳۴۶	-	مسائل برای حل
۳۴۹	-	تستهای ریاضی
۳۵۲	-	مسائل انتخابی از مسائل امتحانات ثلث دوم دبیرستانهای در سال تحصیلی ۵۱ - ۱۳۵۰
۲	جلد	معرفی کتاب

عرض تهنیت

جایزه سلطنتی درجه اول تحقیق علمی بهترین کتاب سال ۱۳۵۵ به کتاب «کاشانی نامه» تعلق گرفت و در سلام نوروز سال جاری از طرف اعلیحضرت همایون شاهنشاه آریا هر به آقای ابوالقاسم قربانی مصنف آن اعطا شد.

از این بابت بهم تحقیق گرامی آقای ابوالقاسم قربانی تبریک و تهنیت می‌گوییم.

آقای ابوالقاسم قربانی علاوه بر ده کتاب ریاضی، کتابهای متعددی در زمینه تحقیق آثار ریاضیدانان ایرانی تألیف و تصنیف کرده است که هر کدام از آنها ضمن آنکه گوشش‌های تاریکی از تاریخ ریاضیات را روشن ساخته است، مقام والای ریاضیدانان ایرانی را با شایستگی و بایستگی تمام بر جهانیان نمایان ساخته است. امروزه هریک از آثار تحقیقی آقای قربانی مأخذ و مرجع مطمئنی برای دیگر محققان بشمار می‌آید.

بی‌شك، اعطای جایزه سلطنتی بهترین مشوق آقای قربانی در ادامه تحقیقات ارزنده علمی است.

معرفی کتاب

نسوی نامه

تحقیق در آثار ریاضی علی بن احمد نسوی

پژوهش و نگارش: ابوالقاسم قربانی

شامل پنج بخش و سه ضمیمه، در ۲۱۰ صفحه

انتشارات بنیاد فرهنگ ایران

بها: ۲۵۰ ریال

ریاضیات

ریاضیات عمومی - نظریه اعداد و جبر - هندسه

برای سال اول دانشسرای راهنمایی

تألیف:

غلامرضا عجبدی - عبدالحسین مصطفی

در ۱۶ + ۴۹۲ صفحه - بها: ۹۵ ریال

شرکت سهامی کتابهای جیبی



تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال هشت شماره منتشر می‌شود

دوره‌نهم - شماره ششم - شماره مسلسل: ۹۱

فروردین - اردیبهشت ۱۳۵۲

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصطفی

مدیر مسؤول: بانو نصرت ملک یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیک شاهرضا، شماره ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبه لاله‌زارنو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor: MOS'HAFI Abdolhossein

Volume IX, number 6. May. 1973

subscription: 3\$

TEHERAN. P.O. B. 2463

چاپ آذربایجان - تلفن: ۸۲۵۹۲۸

تذکر

انتشارات یکان منحصر به کتابهایی است که معمولاً در پشت جلد مجلات یکان، و پشت جلد همین شماره، معرفی می‌شوند. کتابهایی که زیرعنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی در مجله معرفی می‌شوند با مجله یکان ارتباطی ندارند، از درخواست این کتابهای آگهی در ترمبله یکان خودداری فرمایید. در مورد مندرجات کتابهایی که به صورت آگهی در مجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین در مورد تعهداتی نه صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند، هیچ‌گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه اداره یکان نمی‌باشد.

شک و تردید، کلید دروازه حقیقت

این روزها به مناسبت جشن‌های هزاره ابوریحان بیرونی در هر محفل علمی صحبت از مقام و منزلت ممتاز وی پیش می‌آید، و بی اختیار یا مشاهیر دیگر دوران خود مورد مقایسه واقع می‌شود. بسیاری از دانشمندان دوره درخشنان علم اسلامی شهرتی پیش از ابوریحان دارند، اما از بین همه آنان تنها یک یا دونفر را در مقامی همتراز با ابوریحان می‌توان نام برد. برای پی‌بردن به علوم منزلت علمی ابوریحان، تنها کافی است که مکاتبات وی را با دانشمند مشهور معاصرش، این سینا، مورد بررسی و موشکافی قرارداد؛ این یکی، هر آنچه را که مخالف نظریات استادان گذشته است مردود می‌شمارد، و آن یکی، بیان می‌دارد چه بسا که خود این نظریات مردود باشند.

دانش‌آموزان، آموزگاران و دبیران، دانشجویان، استادان، دانشمندان، ... هر-

کدام به دو گروه تقسیم می‌شوند: گروهی که متأسفانه در اکثریت است، بجز بازگویی، احیاناً بازگویی توأم با آرایشها و پیرایشها، از آنچه که خوانده و شنیده است هنر دیگری ندارد. اگر دانش‌آموز یا دانشجو است غیر از راهی که دبیریا استاد به او نموده راه دیگری را نمی‌شناسد. اگر دبیریا استاد است شاگرد خود را محکوم می‌کند که فقط از راهی برود که آن را به وی نشان می‌دهد. اگر دانشمند است در آنچه که شخصاً باور دارد چنان خشك و متعصب است که هر نظر تازه یا مخالف با آن را نسبت نماید و بررسی نکرده مردود می‌شمارد...

گروه دیگر، که متأسفانه در اقلیت است، جستجو گر حقیقت است و باشک و تردید در آنچه که دیگران ارائه داده‌اند راههای تازه‌ای را برای نیل به مطلوب خود پدید می‌آورد، در فضای لایق‌نامه حقایق پر وانه وارپر می‌گشاید و اگر بال و پرش را بشکنند بی‌جان و دل به سوی مقصود پیش می‌رود. چه بسا، دانش‌آموزان یا دانشجویان این گروه که از حضور درس رانده شده‌اند، دبیران و استادان این گروه که به ارزوا کشانده شده‌اند، دانشمندان این گروه که تکفیر شده و از جمع همگنان طرد گردیده‌اند، اما همین رانده شدگان و تکفیر شدگان بوده‌اند که درهای تازه‌ای از حقایق را به روی پسرگشوده‌اند، و به یمن وجود همینان بوده است که دانش بشری پیشرفت داشته است.

عبدالحسین مصحفی

حکیم عمر خیام نیشاپوری و ابتكارات علمی او

جعفر آقایانی چاوشی

نظامی عروضی دانشمند معاصرش، محضر یرفیض اورا در کرده و در مقالت سوم از چهار مقاله‌خود داستانی که متنضم‌نکته جالبی از پیشگوئی حکیم نیشاپور است می‌آورد. شمس الدین شهر زوری، محقق قرن هشتم، آخرین لحظات حیات حکیم را در کتاب «نزهه الارواح و روضة الافراح» چنین توصیف کرده است:

«...اما درخصوص وفات خیام می‌نویسند مشغول مطالعه الهیات بود و با خاللی از طلا دندانهای خود را خلال می‌کرد. همین که رسید به مبحث «الواحد والکثیر» خلال رادر میان کتاب بنهد و برخاست، مشغول نماز گردید. پس از ادای فریضه وصیت کرد و دیگر فه چیزی خورد و نه آشامید. همین فریضه وصیت کرد را ادا کرد، سربه سجده نهاد و عرض کرد: که فریضه عشاء را ادا کرد، سربه سجده نهاد و عرض کرد: «اللهم انی عرفتک علی مبلغ امکانی فاغفرلی فان معرفتی ایاک و سیلیتی الیک» دعا یاش به اتمام رسید و جان به جان آفرین تسیلم نمود»

ما آخذ موثق وبالاخص آثار علمی خود خیام حاکی از این است که خیام به اصول دینی کاملاً مقید و از تجلیات روح اسلامی از هر جهت برخوردار بوده است. این موضوع اظهارات افرادی را که وی را بی‌اعتنتا به مذهب و زند خراباتی و مست طافع معرفی کرده‌اند اساساً نفس و پایمال می‌کند.

خیام علاوه بر قریحه سیال علمی، طبع غرای شعری نیز داشت و مضامینی که به خاطرش خطور می‌کرده به صورت رباعی در می‌آورده است.

باتوجه به اینکه میان سخن و اندیشه پیوستگی و ملازمتی است و به مصدقاق «آدمی معخفی است در زیر سخن» از تأمل و تبع در کلام او بخوبی معلوم می‌شود که خیام همه مستغرق تجسس و غوطه‌ور بحر تفکر است.

ابو حفص یا ابوالفتح غیاث الدین محمد بن ابراهیم خیام یا خیامی از اعاظم علماء اعلام حکماء اسلامی در قرن پنجم هجری بوده است.

اورا در حکمت تالی ابوعلی سینا می‌خواندند و در ریاضیات سرآمد فضلاً می‌شمردند. با این همه جزئیات زندگی او برمی‌جهویل است، و هاله‌ای از ابهام سراسر زندگی او را فراگرفته است، و تاکنون نیز کسی آنچنانکه باید و شاید از این ابهام پرده بر نگرفته و به تفصیل در این مبحث غوری نکرده و مدارک لازم را در این خصوص بهذجو استقصاً تبع نکرده است. سال تولدش به تحقیق معلوم نیست، ولی با انتکاء به مدارکی چندمی‌توان ولادت او را در سال ۴۳۹ هجری قمری پنداشت [۱۶]

قطب الدین شیرازی صاحب «التعنۃ الشاہیۃ فی الھیۃ» او را لوکری منسوب به لوکر دانسته، ولی ارجح آن است که وی اهل نیشاپور بوده و در بیرون همین شهر نیز به سال ۵۱۵ هق بدرود زندگی گفته است.

بعضی از ارباب تذکرە حکما و فلاسفه اورا از شاگردان امام‌غزالی معرفی کرده‌اند، ولی این قول مستبعد است و بخلاف عقلی ناسازگار، چه غزالی در بعضی موارد بر افکار خیام خرده گرفته و از او انتقاد کرده است.

قدر مسلم آن است که وی پس از کسب معارف عقلی متوجه عوالم معنوی و مراتب اخلاقی و شناخت نفس شده و با علمای معاصر و فضلای همزمان مراوده داشته و به افکار حکماء سلف از فلاسفه نیز مراجعه می‌کرده است. مورخین متفق القولند که با سلطان جلال الدین ملکشاه سلجوقی و سلطان سنجر معاصر بوده و نزد آنها مکانت خاص داشته است. سفرهایی هم از او به بلخ و هرات و اصفهان و حجاز نقل کرده‌اند.

موضوع نسخه کتابخانه لیدن داشت، از این‌رو در صدد تحقیق دراین باره برآمد و نتایج تحقیقات خود را ضمن مقاله در «یادداشتها و مطالب مستخرج از نسخ خطی کتابخانه سلطنتی» انتشار داد. سپس گاسپار مونژ (G. Monge) در کتاب مهم خود به‌نام «نظر تاریخی در باب بسط و تکامل هندسه» به استناد مقاله سدیو مطالعه کتاب خیام را از لحاظ تاریخ علوم ریاضی حائز اهمیت اساسی دانست. مقارن همین ایام لمبری (G. Libri) نسخه کاملی از این کتاب نفیس را در کتابخانه سلطنتی یافت و اعلام کرد که قصد انتشار آنرا دارد، ولی به‌این کار موفق نگردید، و سرانجام و پیکه (F. Woepcke) در سال ۱۸۵۱ متن رساله جبر خیام را با ترجمه فرانسوی آن وحوشی گران‌بهای و ضمایمی در پاریس به چاپ رسانید [۲۱]

همچنین در سال ۱۹۳۱ ترجمه انگلیسی آن به‌خمامه کازیر (D. Kasir) چاپ و در نیویورک منتشر شد [۱۷]. ترجمه روسی آن در سال ۱۹۵۳ به‌وسیله روزنفلد (B. Rosenfeld) و یوشکویچ (A.P. Jushkevitsch) در مسکو انجام شده است. [۲] آقای دکتر غلام‌حسین مصاحب برای اولین بار در سال ۱۳۱۷ هجری شمسی جبر و مقابله خیام را به‌فارسی ترجمه کرد و در تهران به چاپ رسانید [۶] و در سال ۱۳۴۹ در کارپیشین خود تجدید نظر کرد و به نگارش کتاب نفیس «حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر» [۷] اقدام کرد. از خصوصیات بر جسته کتاب اخیر این است که متضمن ترجمه و تفسیر رساله منحصر به‌فرد دیگری از خیام در تحلیل یک مسئله است. آقای دکتر علیرضا امیرمعز رساله‌ای در تحلیل یک مسئله از خیام را که دکتر مصاحب به فارسی ترجمه کرده بود به‌انگلیسی نقل کرده و در سال ۱۹۶۱ در امریکا انتشار داده است [۱۳] این ترجمه را دکتر کنندی (E.S. Kennedy) در کتاب:

«The Cambridge History of Iran»

معرفی کرده است.

در رساله جبر و مقابله، خیام از تقطیع مقاطع مخروطی برای حل مسائل جبری استفاده کرده، شکل‌های مختلف معادلات درجه سوم را به‌ نحوی کامل طبقه‌بندی کرده و برای هر یک راه حل هندسی یافته است. برای معادلات درجه دوم برحسب تعداد جمله‌های آنها طبقه‌بندی خاصی قائل شده و حل جبری آنها را با حل هندسی ورسم شکل یا حل هندسی به‌وسیله حل جبری تکمیل کرده و این روش را منظماً در تمام کارهای خود رعایت کرده است. گذشته از اینها، معرف و مشخص کار او یک روح منظم و روش مرتب علمی است، اما کار اساسی او حل

کشف حقیقت را وجهه و مقصود قرار داده نیل به آن را عالیترین کمال و شریفترین او البصر دانسته است.

آسمان و ستارگان و جلال و جبروت فضای بیکران را می‌بیند و به تخیل اندر می‌شود که سرگردانی این اجرام برای چیست و مدیر آنها کیست؟ اگر برای زندگی در آغوش صلح و وصفاً باید از افلاک و افلاکیان بی‌خبر ماند و آنها را محجوب و مستور دانست پس این جهان چیست و این آمدن از کجا و رفتن به کجاست؟

هیچکس را ز دهر را نگشود حتی اصحاب فضل که به تفχص و تجسس حقیقت پرداختند از حصول معرفت بدان عاجز و از تسریخ اموره متعن و محال درمانندند، افسانه‌ای گفتمند و بخواب اندر شدند.

حکیم نیشابور کلیه مردمی است منیع الطبع باحس لطیف و قلب رقیق که از اوضاع و احوال روزگار متأثر و متألم است و از مرگ جوانان متأسف، و چون بدقت نظر کنیم مدار فکرش بردو سه مطلب بیش نیست و آن تذکر مرگ است و تأسف بر نایابی داری زندگی و بی اعتباری روزگار؛

از گذشت زمان در حیرت است و قافله عمر آواره بیراهه هاست در چنین مقامی غم فردا خوردن را خلاف عقل می‌پنداشد و بهره گیری از دم گذران را توصیه می‌کند.

آثار علمی و ابتکارات خیام

قراین و شواهد موجود مؤید این مطلب است که عمر خیام در فنون فضایل حظی وافر داشته است. از این رو آثاری از خود گذاشته که هنوز اهل ذوق از آن لذت می‌برند و ارباب تحقیق از آن استفاده می‌کنند.

کتاب «في البراهين على مسائل الجبر والمقابلة» او اثري است در نوع خود شاهکار رساله «في شرح ما الشكل من مصادرات الأقلidis» او اثري است به غایت بزرگوار و این آثار در کمال وضوح معرف حدت ذهن، وسعت نظر و احاطه علمی او در حل مشکلات و شرح معضلات است.

کتاب فی البراهین علی مسائل الجبر والمقابلة خیام در سال ۱۷۴۲ میلادی در شهر لیدن، از بلاد هلند، مکشوف شد و بر حسب عنوان رساله آنرا مشتمل بر حل معادلات درجه سوم پنداشته، بعدها مونتوکلا (J.E. Montucla) در جلد اول تاریخ ریاضیات خود به همین موضوع اشاره کرد. ولی رساله چندان مورد توجه محافل علمی واقع نشد، تا آنکه سدیو (Am.L. Sédillot) قسمتی از یک نسخه خطی در علم جبر در کتابخانه ملی پاریس کشف کرده موضوع شباخت تامی با

$$x = a'y' + b'y + c' \quad y = ax' + bx + c$$

را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که محورهای این دو سهمی بر هم عمودند.

از طرف دیگر مختصات نقاط تقاطع منحنی در هر ترکیب خطی از دو معادله صدق می‌کند. اکنون ترکیب خطی:

$$a'y + ax = aa'(x' + y') + a'bx + ab'y + a'c + ac'$$

راتشکیل می‌دهیم، مشاهده می‌شود که این ترکیب خطی:

$$aa'(x' + y') - (a'b - a)x + (ab' - a')y + ac' + a'c = 0$$

معادله یک دایره است و قضیه محقق می‌باشد(*).

حل معادله درجه سوم – اکنون برای حل معادله درجه چهارم:

$$x'^4 + a'x'^3 + b'x'^2 + c'x' + d' = 0$$

(*) = ۰ معادله درجه سوم خواهد بود) چنان عمل می‌کیم:

$$\text{در معادله اخیر تغییر متغیر } \frac{a'}{x} = x' \text{ می‌دهیم، معادله جدید جمله درجه سوم را دارا نخواهد بود و به صورت } x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

اکنون فرض می‌کیم $y = x^2$ ، در این صورت ریشه‌های معادله درجه چهارم همان ریشه‌های دستگاه معادلات زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} x^2 = y \\ x^4 + ay + bx + c = 0 \end{cases}$$

معادلات مذبور معادلات دو سهمی است که محورهای آنها بر یکدیگر عمود می‌باشند. حل این دستگاه منجر به حل دستگاه زیر می‌شود.

$$\begin{cases} x^2 = y \\ x^4 + y^2 + bx + c = 0 \end{cases}$$

دنباله در صفحه ۳۲۰

معادلات درجه سوم است، و این امر خیام را بزرگترین و با ابتکان‌ترین ریاضیدان زمان خود ساخته است. برای هر یک از معادلات درجه سوم که خود او وضع کرده راه حل هندسی یافته ورسم کرده و درباره تغییرات لازم برای هر حالت خاصی به بحث پرداخته است. او از این راه خدمتی به علم کرد که در خورذکر و شایان تحسین است.

اگر ملاحظه شو: که این طریقه در واقع طریقه‌ای تحلیلی وهندسی است، می‌توان گفت خیام اول کسی است که هندسه تحلیلی را برای حل معادلات بکار برد است و از این حیث نیز قریب چهار قرن قبل از دکارت هندسه تحلیلی را وضع کرده است. پس جای شگفتی نیست اگر منقد خبیر و دانشمند متبعی چون دکتر جورج سارتون (G.Sarton) مفتوح فکر منظم او شده و در مقام ستایش اثر نفیش برآمده اظهار کند:

«خیام اولین کسی است که به تحقیق منظم و علمی در معادلات درجات اول و دوم و سوم پرداخته و به طبقه‌بندی تحسین میزی از معادلات اقدام نموده است. و در حل تمام صور معادلات درجه سوم منظماً تحقیق کرده و به حل هندسی آنها توفیق یافته است. رساله وی در علم جبر که مشتمل بر این تحقیقات است معرف یک فکر منظم علمی است و این رساله یکی از بر جسته‌ترین آثار قرون وسطی ای و احتمالاً بر جسته‌ترین آنها در این علم است» [۱۹]. پاول تانری (P.Tannery) محقق علوم ریاضی براین عقیده است که راه حل معادلات درجات سوم و چهارم که امروزه معمول است همان روش هندسی خیام و با استفاده از مقاطع مخروطی است نهایت آنکه در قالب جبری استعمال می‌شود. [۸]

روش خیام در حل معادلات درجه سوم و چهارم

روش خیام در حل معادلات درجه سوم و چهارم مبتنی

بر قضیه زیر است:

قضیه: چهار نقطه تقاطع دو سهمی که محورهای آنها برهم عمودند بر یک دایره واقع اند. دو سهمی به معادلات:

*- بطور کلی می‌توان ثابت کرد که اگر محورهای دو مقطع مخروطی باهم موازی ویا برهم عمود باشند چهار نقطه تلاقی این دو منحنی بر روی یک دایره واقع اند. و بر عکس اگر نقاط تلاقی دو مقطع مخروطی بر روی یک دایره باشند و محورهای آین دو مقطع مخروطی باهم موازی ویا برهم عمود اند. برای بررسی این موضوع رجوع شود به کتاب «در باره معادله های جبری» پژوهش

احمد شرف الدین

فشر محدب و حجم درون آن

علیرضا امیرمعز دانشگاه تهران تک

$$(2) \begin{cases} x = x_1 t + x_2 s \\ y = y_1 t + y_2 s \end{cases}$$

ملاحظه می شود که سطح مثلثی که روی این دو بردار ساخته می شود عبارتست از :

$$a = \left| \iint_D dx dy \right| = \left| \iint_C \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} dt ds \right|$$

که در آن :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}$$

یعنی ژاکوبین (Jacobien) x و y نسبت t و s است.
از رابطه (2) نتیجه می شود که :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

فرض کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

بنابراین :

$$a = |\det A| \int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds =$$

$$= |\det A| \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2} |\det A|$$

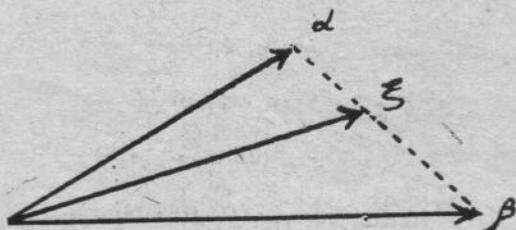
بالتالي :

$$a = \frac{1}{2!} |\det A|$$

البته $|\det A|$ مساحت متوازی الاضلاعی است که بر دو بردار α و β بنا می شود. اثبات آن را به [1] رجوع می کنیم.

روشن است که مساحت یک مثلث نصف مساحت متوازی الاضلاعی است که در قاعده و ارتفاع با مثلث شریک است. در این مقاله این قضیه را با روش برداری و انتگرال ثابت می کنیم. سپس آنرا به فضای n بعدی اقلیدسی تعمیم می دهیم.

۱- مساحت مثلث- فرض کنیم که $\{\alpha, \beta\}$ مجموعه ای بطور خطی مستقل از دو بردار α و β باشد (مطابق شکل)



شکل ۱

بردار γ را به قرار زیر در نظر می گیریم : $\gamma = t\alpha + s\beta$ و $t \geq 0$ و $s \geq 0$ و $t+s=1$ واضح است که انتهای γ روی قطعه خط بسته ای که انتهای α و β را وصل می کند قرار دارد. هنگامی که ، مثلا، مقدار t از صفر تا یک تغییر کند، بردار γ سطح مثلث را که روی α و β ساخته می شود می پیماید. این مجموعه $\{\alpha, \beta\}$ را فشر محدب (Convex full) گویند. اکنون مساحت این مثلث انسکلیسی انتگرال محاسبه می کنیم. فرض کنیم که یک دستگاه مختصات

قائم در نظر گرفته ایم بقسمی که : $\alpha \iff (x_1, y_1)$ و $\beta \iff (x_2, y_2)$

بنابراین رابطه (1) چنین می شود :

$$(x, y) = t(x_1, y_1) + s(x_2, y_2)$$

$$t \geq 0 \text{ و } s \geq 0 \text{ و } t+s=1$$

بدین ترتیب معادلات پارامتری قطعه خط چنین خواهد شد :

$$= |\det A| \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \int_0^{1-t_1-t_2} dt_3 = \\ = \frac{1}{3!} |\det A|$$

در این تساوی :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

بنابراین قضیه ثابت شده است.

۳- حجم متوازیالسطوح n بعدی - در کتاب

جبر (Birkhoff, Maclane) [۱] در صفحات (۲۹۰-۲۸۸)

قضیه زیر ثابت شد، است:

فرض کنیم که $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه از بردارهای

بطور خطی مستقل در یک فضای اقلیدسی باشد.

بنابراین اندازه (حجم) متوازیالسطوحی که روی این بردارها بنا می شود، عبارتست از:

$$V = [\det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_n, a_1) & \dots & (a_n, a_n) \end{pmatrix}]^{\frac{1}{2}}$$

هرگاه یک دستگاه مختصات قائم در نظر بگیریم بقسمی که $a_i \leftrightarrow (x_{i1}, \dots, x_{in})$ و $i = 1, \dots, n$ و فرض کنیم که:

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

نتیجه می شود که:

$$V = [\det AA']^{\frac{1}{2}}$$

که در آن A' وارونه A (transpose) است. چون

فضا را n بعدی گرفته ایم A ماتریسی مرربع است و

$$\det A = \det A'$$

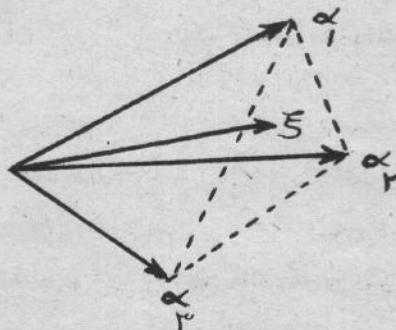
از اینرو

$$V = |\det A| = |\det A'|$$

برای جزئیات این قضیه به [۱] مراجعه شود.

۴- حجم چهار وجهی - فرض کنیم که $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

مجموعه ای از حاملهای بطور خطی مستقل باشند. روی این سه بردار چهار وجهی مثلث القاعده ای می سازیم. حجم این



شکل ۲

چهار وجهی $\frac{1}{4}$ حجم متوازیالسطوحی است که روی این سه بردار بنا شود.

اثبات مسئله شبیه اثبات بخش ۱ است. ولی برای آسان شدن مطلب آنرا بیان می کنیم. فرض کنیم که α روی سطح مثلثی که از انتهای بردارهای a_1, a_2 و a_3 تشکیل می شود پایان یابد. بنابراین

$$(3) \quad \alpha = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \quad \text{و} \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

هرگاه یک دستگاه مختصات قائمی در نظر بگیریم که نسبت به آن:

$$\alpha \leftrightarrow (x, y, z) \quad \text{و} \quad (x, y, z) \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$$

$$a_1 \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1) \quad \text{و} \quad a_2 \leftrightarrow (x_2, y_2, z_2)$$

رابطه (۳) به دستگاه پارامتری زیر بدل می شود:

$$\begin{cases} x = x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3 \\ y = y_1 t_1 + y_2 t_2 + y_3 t_3 \\ z = z_1 t_1 + z_2 t_2 + z_3 t_3 \end{cases}$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \quad \text{و} \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

از اینرو حجم چهار وجهی چنین می شود:

$$V = \iiint_D dx dy dz =$$

$$= \iiint_C \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} dt_1 dt_2 dt_3$$

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)} = \det \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \det A$$

از این‌رو :

$$V = |\det A| \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{n-1}} dt_n = \frac{1}{n!} |\det A|$$

بنابراین حجم داخل قشر محدب $\frac{1}{n!}$ ام حجم متوازی-
السطح مربوطه است.

[1] Birkhoff and Maclane, a survey of
Modern Algebra, Iheid Edition, Macmillan
New York 1965 PP288 - 290

حل مسائل (دباله از صفحه ۳۴۵)

می‌باشند و متساویند یعنی چهار ضلعی مزبور مستطیل است.
ثالثاً چون دایره‌های به قطراهای AC و BD در نقطه P بر
یکدیگر عمودند پس منعکسهای آنها یعنی $A'C'$ و $B'D'$
نیز بر یکدیگر عمودند و چهار ضلعی $A'B'C'D'$ مرربع است.

۵-۶۰-۹۵: اگر I وسط AB و A' و B' نقاط تلاقی
با مجانبهای هذلولی باشد I وسط $A'B'$ است و داریم:

$$\frac{|IA|}{|IA'|} = \frac{|IB|}{|IB'|} \quad \frac{|IB|}{|IB'|} = \frac{|IA|}{|IA'|}$$

از این روابط بر می‌آید که AM و BM در تجانس به -

مرکز I و به نسبت $\frac{|IA|}{|IA'|}$ مجانبهای هذلولی اند پس IM از O می‌گذرد.

پاسخ اشتباه از چیست؟

در مورد مسئله طرح شده راه حل دوم صحیح نیست:
وقتی می‌توانیم حکم کنیم تفاضل $a - a$ برابر با صفر است که
عدد معین باشد، زیرا می‌دانیم که $\infty - \infty$ یک صورت
میهم است.

معنی‌نیان تابع :

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

وقتی $x \rightarrow 0$ به صورت مبهم $\infty - \infty$ در می‌آید و حد
آن برابر است با حد تابع $y = \cot x$ یعنی برابر

است با ∞

۴- محاسبه یک انتگرال - برای اینکه قضیه‌حالات

کلی را ثابت کنیم انتگرال زیر را حساب می‌کنیم :

$$I = \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{k-1}} dt_k$$

خواننده به آسانی می‌تواند شباهت این انتگرال را با
انتگرال بعضی ملاحظه کند. محاسبه این انتگرال بسیار
آسان است فقط باید استقراء ریاضی -

(Mathematical induction) بکاربرد. آنرا به خواننده
و اگذار می‌کنیم و نتیجه را چنین می‌نویسیم :

$$I = \frac{1}{k!}$$

۵- حجم داخل قشر محدب - قشر محدبی را که
مجموعه $\{a_1, \dots, a_n\}$ از بردارهای بطور خطی مستقل
می‌سازد درنظر می‌گیریم. بردار \vec{u} را که روی (سطح ۱ -
 a^n) (Hypersurface) که از انجام بردارهای a_1, \dots, a_n بعدی) می‌گذرد، پایان می‌یابد، درنظر می‌گیریم. این بردار چنین
نوشته می‌شود :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n t_i a_i \quad \sum_{i=1}^n t_i = 1 \quad t_i \geq 0$$

البته این بردار به قسمت محدب سطح که با نقاط انتهای
حاملهای محدود است پایان می‌یابد. هرگاه دستگاه مختصات
قائمی در نظر بگیریم که

$$x_1, \dots, x_n \Leftrightarrow \vec{u}$$

$$a_i \Leftrightarrow (x_{i1}, \dots, x_{in}) \quad i = 1, \dots, n$$

معادله پارامتری \vec{u} چنین می‌شود،

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad j = 1, \dots, n$$

بنابراین حجم (measure) داخل قشر محدب چنین
است :

$$V = \left| \int_D \dots \int_{i=1}^n dx_i \right| =$$

$$= \left| \int_C \dots \int \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)} \prod_{i=1}^n dt_i \right|.$$

اکنون ملاحظه می‌شود که

میانگین لگاریتمی

ترجمه: مقصود عین اللهی دانشجوی رشته اقتصاد L.S.E.

نویسنده: B.C. Carlson از دانشکاه آیوا

رابطه زیر برقرار است:

$$\sqrt{xy} < \sqrt{xy} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \right) < L(x, y)$$

$$< \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \right)^2 < \frac{x+y}{2} \quad (4)$$

اثبات - عدد مشتت t را در نظر می‌گیریم. طبق نامساوی «میانگین هندسی \geqslant میانگین عددی» ($A \geqslant G$) داریم:

$$t^r + t(x+y) + \left(\frac{x+y}{2} \right)^r > t^r + t(x+y) + xy$$

$$> t^r + 2t\sqrt{xy} + xy$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(t + \frac{x+y}{2})^r} < \int_0^\infty \frac{dt}{(t+x)(t+y)} <$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(t + \sqrt{xy})^r}$$

$$\frac{2}{x+y} < \frac{1}{x-y} \lim_{t \rightarrow 0} [\log(t+y) - \log(t+x)]^R < \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

رابطه (2) مستقیماً از این رابطه نتیجه می‌شود. اما چون x و y هر مقداری می‌توانند باشند به جای آنها به ترتیب \sqrt{x} و \sqrt{y} قرار می‌دهیم، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sqrt{xy} < \frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\log x - \log y} < \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}$$

از ضرب این رابطه در $(V\bar{x} + V\bar{y})$ نامساوی داخلی

رابطه (4) بدست می‌آید. و دو نامساوی ابتدا و انتهای رابطه (4) از نامساوی $A \geqslant G$ منتج می‌گردد.

از تکرار شیوه‌ای که در اثبات رابطه (2) بکار بردیم می‌توانیم به رابطه (8) برسیم. اما به جای استفاده از این روش نخست یک نامساوی متداول ریاضی را ثابت می‌کنیم.

تعریف: میانگین لگاریتمی دو عدد مثبت x و y چنین

تعریف می‌شود:

$$L(x, y) = \frac{x - y}{\log x - \log y} \quad x \neq y \quad (1)$$

$$L(x, x) = x$$

L نسبت به x و y متقارن و همگن می‌باشد و در $x = y$ قدر متصال است.

مقدار میانگین لگاریتمی بین میانگین عددی و هندسی

واقع است یعنی:

$$\sqrt{xy} \leqslant L(x, y) \leqslant \frac{x+y}{2} \quad (2)$$

(علامت تساوی به ازای $x = y$ میدق می‌کند).

از تقسیم رابطه (2) بر y نامساوی دیگری با متغیر یگانه

$$x = \frac{y}{u} \quad u \text{ بدست می‌آید که بیشتر در ریاضی متداول است. اما}$$

چون رابطه (2) نسبت به x و y متقارن و همگن می‌باشد کاملتر و گویاتر است.

نامساوی طرف راست را به (Ostle و Terwilliger)

نسبت می‌دهند و روش‌های متعددی برای اثبات آن توسط

(Mitrionovic) ارائه شده است. در این هردو منابع به عملت

شرط غیر لازم $x \geqslant y$ موضوع تقارن حذف شده است. طرف

چپ نامساوی را (نویسنده) با استفاده از حالت خاصی از

انتگرال زیر بدست آورد:

$$\frac{1}{L(x, y)} = \int_0^1 \frac{du}{ux + (1-u)y} \quad (3)$$

در مقاله حاضر ابتدا رابطه (2) را با روش ابتدایی

اثبات و بررسی می‌کنیم. در این اثبات تقارن نسبت به x و y

منظور می‌باشد.

قضیه ۱ - اگر x و y دو عدد مثبت ناابرابر باشند

$$a_m(x \cdot y) = \frac{x^{t-m} + y^{t-m}}{2}$$

می باشد . بداعزای $n = 1$ حاصل ضربها را یک فرض می کنیم ، اجزاء اول و سوم رابطه (۸) به ترتیب توابع صعودی و نزولی از n می باشند و اختلاف مجدد آنها $x - y$ است . اثبات - در قضیه (۲) به جای t مقدار $2-n$ را قرار می دهیم و با توجه به اینکه

$$x - y = (x^{t-n} - y^{t-n}) \prod_{m=1}^n (x^{t-m} + y^{t-m})$$

است قضیه ثابت می شود . بداعزای $n = 1$ به ترتیب روابط (۲) و قسمت رابطه (۴) بدست می آید . وقتی $n \rightarrow \infty$ حاصل ضرب زیر را داریم .

قضیه منتج ۲ - اگر x و y اعداد مثبت باشند داریم :

$$L(x \cdot y) = \prod_{m=1}^{\infty} a_m(x \cdot y) \quad (9)$$

بداعزای هر رابطه برابر و یانا برابر برای (y/x) می توان نتیجه ای برای $\log x$ بدست آورد . برای مثال به ازای $y = 1$ از رابطه (۶) خواهیم داشت :

$$\frac{t \cdot x^t - 1}{t \cdot x^t + 1} < \log x < \frac{x^t - 1}{t x^t} \quad \text{و} \quad t \neq 0 \quad x > 1 \quad (10)$$

وبداعزای $x > 1$ علائم نامساوی معکوس می شود . نیز از رابطه (۹) بداعزای $x > 1$ خواهیم داشت :

$$\log x = (x - 1) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{2}{1 + x^{t-m}} \quad (11)$$

بالاخره دستوری برای محاسبه y و $L(x)$ و در نتیجه $\log x$ بوسیله روابط مذکور در بالا بیان می کنیم . از بسط رابطه (۵) درجه t در می یابیم وقتی که $t \rightarrow 0$ اختلاف A_t و G_t با L در جمله هائی از درجه t است . اما

$$L(x \cdot y) = \frac{1}{2} \{ A_t(x \cdot y) + 2G_t(x \cdot y) \} \quad \{ 1 + g_t(x \cdot y) \} \quad (12)$$

دنباله در صفحه ۳۱۷

برای هر عدد حقیقی $t \neq 0$ و $x > 0$ و $y > 0$ روابط زیر را

می کنیم :

$$A_t(x \cdot y) = t \left(\frac{x^t + y^t}{2} \right) \left(\frac{x - y}{x^t - y^t} \right) \quad x \neq y$$

$$G_t(x \cdot y) = t(x \cdot y)^{\frac{t}{2}} \left(\frac{x - y}{x^t - y^t} \right) \quad (5)$$

$$G_t(x \cdot x) = A_t(x \cdot x) = x$$

به علاوه اگر تعریف کنیم که :

$$G_0(x \cdot y) = A_0(x \cdot y) = L(x \cdot y)$$

به آسانی می توان ثابت کرد که G_t و A_t متصل و مثبت و نیز نسبت به t زوج می باشند .

قضیه ۳ - اگر x و y دو عدد مثبت و t عدد حقیقی باشد داریم :

$$G_t(x \cdot y) < L(x \cdot y) < A_t(x \cdot y) \quad (6)$$

$$t(x - y) \neq 0$$

اجزاء اول و سوم این نامساوی به ترتیب نسبت به

| t | توابع نزولی و صعودی می باشند ، و به علاوه داریم :

$$A_t^2(x \cdot y) - G_t^2(x \cdot y) = \frac{1}{4} t^2 (x - y)^2 \quad (7)$$

اثبات - در رابطه (۲) به جای x و y به ترتیب x^t و

y^t قرار داده طرفین را در $\frac{t(x-y)}{x^t - y^t} >$ ضرب می کنیم .

رابطه (۶) بدست می آید . و با چنان عمل ساده ریاضی خواهیم داشت :

$$t \frac{dG_t}{dt} = G_t \left(1 - \frac{A_t}{L} \right)$$

$$t \frac{dA_t}{dt} = A_t - \frac{G_t}{L}$$

از رابطه اخیر و رابطه (۶) برمی آید وقتی که A_t نسبت به $|t|$ صعود می کند G_t نسبت به $|t|$ نزول می کند .

قضیه منتج ۱ - اگر x و y اعداد مثبت نا برابر باشند و $x > y$ عدد صحیح باشد ، رابطه زیر برقرار است :

$$(xy)^{2-n} - \prod_{m=1}^n a_m(x \cdot y) < L(x \cdot y)$$

$$< a_m(x \cdot y) \prod_{m=1}^n a_m(x \cdot y) \quad (8)$$

تعیین اعداد اول از روی اعداد اول دیگر

تنظیم از: سهوان یکم خلبان غلامرضا فرزین

$$k = 6 + 11 + 13 + 16 + 20 + 21 + 24 + 26 + 27 + 31 + 34 \\ 35 + 36 + 37 + 41 + 46 + 48 + 50 + 51 + 54 + 55 + 56 + 57 + 61 + 62 + 63 + 66 + 68 + 69 + 71 + 73 + \dots$$

این رشته نامحدود اعداد را می‌توان به دسته‌های نامحدود زیر تقسیم‌بندی کرد. (البته ممکن است که برخی از اعداد در دو و یا چند دسته وجود داشته باشد):

- | | |
|-----|-----------------------------|
| (۱) | ۱۶، ۱۱، ۱۶، ۲۱، ۲۶، ۳۱، ... |
| (۲) | ۱۳، ۲۰، ۲۷، ۳۴، ۴۱، ۴۸، ... |
| (۳) | ۲۴، ۳۵، ۴۶، ۵۷، ۶۸، ... |
| (۴) | ۳۷، ۵۰، ۶۳، ۷۶، ۸۹، ... |
| (۵) | ۵۳، ۷۱، ۸۸، ۱۰۵، ۱۲۲، ... |
| (۶) | ۷۳، ۹۲، ۱۱۱، ۱۳۰، ۱۳۹، ... |
| (۷) | ۹۶، ۱۱۹، ۱۴۲، ۱۶۵، ۱۸۸، ... |

این دسته‌ها که فقط هفت دسته از آنها نوشته شده‌است دارای نظم و ترتیبی خاص و زیبا هستند که عبارتست از:
۱- تمام اعداد هر دسته باهم تشکیل یک تصاعد عددی می‌دهند.

۲- قدر نسبت هر دسته عددی است اول.

۳- قدر نسبت دسته اول عدد اول k و قدر نسبت دسته دوم عدد اول 7 و به همین ترتیب قدر نسبتها دسته‌های بعدی به ترتیب اعداد اول بعدی یعنی 11 و 13 و 19 و 23 و ... هستند.

۴- جمله‌های اول دسته‌ها دارای نظم و شکل معینی هستند:

$$6 = 1 + 5$$

$$13 = 1 + 5 + 7$$

$$24 = 1 + 5 + 7 + 11$$

$$37 = 1 + 5 + 7 + 11 + 13$$

چگونه می‌توان از اعداد اول، اعداد اول دیگر را بدست آورد؟

چنانچه بتوانیم تمام اعداد فرد غیر اول را به ترتیب بنویسیم در مجموعه آنها جاهای خالی متعلق به اعداد اول خواهد بود و بدین ترتیب اعداد اول برای مامشخص می‌شود. آنچه که در زیر بیان می‌شود از روی تجربه بدست آمده است و هنوز استدلال مرسیوط به آن انجام نگرفته است. اما چون هنوز نونهای که خلاف مطلب را ثابت کند ارائه نشده است می‌توان تاریخ زیادی به صحت آن اعتماد کرد.

اعداد فرد را می‌توان به صورت زیر طبقه‌بندی کرد:

- | | | |
|---------------------------|--|-------------|
| ۱- اعداد فرد اول | | ۲- « مضرب ۳ |
| اعداد فرد | | |
| ۳- « غیر اول و غیر مضرب ۳ | | |

ین اعداد دسته اول (اعداد اول) و دسته سوم (اعداد فرد غیر اول و غیر مضرب ۳) روابط جالبی وجود دارد که در زیر شرح داده می‌شود.

اگر عددی اول باشد به صورت $6k \pm 1$ است که در آن k عددی صحیح و مثبت است. اما آیا عددی که به صورت $6k \pm 1$ است عدد اول است؟

I- بررسی عدد به صورت $1 - 6k$

این عدد به ازای برخی از اعداد مثال

$$\dots + 87 + 53 + 29 + 1 =$$

عدد اول می‌شود و به ازای برخی دیگر از اعداد مثل $.... + 25 + 13 + 11 + 6 + 1 =$ عدد غیر اول است؟

اگر گروه دوم اعداد فوق یعنی اعدادی را که عبارت $1 - 6k$ را اول نمی‌کنند بنویسیم رشته نامحدود زیر بدست

می‌آید:

- (۳) ... و۵۶۴ و۵۳ و۴۲ و۵۳۱ و۷۵۰
 (۴) ... و۸۳۰ و۷۰ و۵۴ و۶۷ و۴۱ و۵۴
 (۵) ... و۱۳۳ و۱۱۶ و۹۹ و۸۲ و۶۵ و۴۸
 (۶) ... و۱۵۵ و۱۳۶ و۱۱۷ و۹۸ و۷۹ و۶۰

.....

این دسته‌های نیز دارای ترتیب و نظمی خاص خود هستند که در زیر شرح داده می‌شود.

۱- تمام اعداد هر دسته باهم تشکیل یک تصاعد عددی می‌دهند.

۲- قدر نسبت تصاعد عددی هر دسته عددی اول است.

۳- قدر نسبت دسته اول عدد اول و قدر نسبت دسته دوم عدد اول ۷ و قدر نسبت رشته‌های بعدی به ترتیب اعداد اول بعدی یعنی $11, 17, 19, 21, 23, \dots$ هستند.

۴- جملات اول دسته‌های مختلف دارای نظم و ترتیبی خاص مطابق زیر می‌باشند:

$$4 = \frac{5 - 1}{6} + 20 = \frac{7 - 1}{6} + 11 = \frac{11 - 1}{6}$$

$$28 = \frac{13 - 1}{6} + 48 = \frac{17 - 1}{6}$$

یعنی هر کدام از جملات اول دسته‌ها به صورت $\frac{a^r - 1}{6}$

است که در آن a عددی اول و برابر قدر نسبت عددی دسته مربوط است. مثلاً در دسته چهارم که جمله اول آن ۲۸ است، عدد ۲۸ برابر است با یک ششم «جدول عدد اول ۱۳ منهای یک» که عدد ۱۳ خودش قدر نسبت دسته‌ای است که عدد ۲۸ اولین عدد آن است.

فرمول هر یک از اعدادی که عبارت $1 + 6k$ را اول نمی‌کند مطابق شرحی که در بالا داده شد برابر است با

$$k = \frac{p^r - 1}{6} + np$$

و مثبت است. و چون $k + 1$ اول نیست بنابراین $(p^r - 1 + 6np) + 1 + 6np$ یا $p^r + 6np$ هیچگاه برابر عددی اول نیست.

نتیجه‌گذی: تمام اعدادی که عبارت $1 + 6k$ را اول نمی‌سازند و همچنین رشته اعدادی را که عبارت $1 + 6k + 1$ را اول نمی‌سازند به ترتیب می‌نویسیم:

دنباله در صفحه ۳۲۶

$$\begin{aligned} 54 &= 1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 \\ 73 &= 1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 \\ 96 &= 1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 \end{aligned}$$

.....

یعنی اولین عدد هر دسته برابر است با عدد یک به علاوه مجموع اعداد اول متواالی که اولین آنها عدد اول ۵ و آخرین آنها عدد اولی است که قدر نسبت آن دسته نیز می‌باشد.

فرمول- حال اگر اعدادی را که عبارت $1 + 6k$ را عدد اول نمی‌کنند و در بالا شرح داده شده‌اند در نظر بگیریم هر کدام را می‌توان به صورت $S_p + nl - 4$ نمایش داد که در آن S_p مجموع اعداد اول متواالی تا عدد اول p یعنی

$$(S_p = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + \dots + p)$$

و $p + 1$ دو عدد اول متواالی هستند که $p + 1$ می‌باشد و nl مثبت است.

چنانچه گفته شده عدد $4 - 6k$ عبارت $k = S_p + nl$

۱- $4 - 6k$ را اول نمی‌سازد یعنی عبارت $1 + 6(S_p + nl) - 4$ هیچگاه برابر عددی اول نخواهد بود. چنانچه این عبارت را خلاصه تر کنیم عبارت $25 - 6(S_p + nl)$ بحسب می‌آید. بنابراین:

«چنانچه مجموع اعداد اول متواالی از عدد اول ۲ تا عدد اول p باشد و نیز $p + 1$ دو عدد اول متواالی باشند که $p + 1$ باشد و nl هر عدد مثبت و طبیعی باشد عبارت $25 - 6(S_p + nl)$ هیچگاه اول نخواهد بود.

II- بررسی عبارت $1 + 6k$

این عبارت نیز مانند عبارت $1 + 6k$ به ازای برخی از عداد مثل $10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290, 295, 300, 305, 310, 315, 320, 325, 330, 335, 340, 345, 350, 355, 360, 365, 370, 375, 380, 385, 390, 395, 400, 405, 410, 415, 420, 425, 430, 435, 440, 445, 450, 455, 460, 465, 470, 475, 480, 485, 490, 495, 500, 505, 510, 515, 520, 525, 530, 535, 540, 545, 550, 555, 560, 565, 570, 575, 580, 585, 590, 595, 600, 605, 610, 615, 620, 625, 630, 635, 640, 645, 650, 655, 660, 665, 670, 675, 680, 685, 690, 695, 700, 705, 710, 715, 720, 725, 730, 735, 740, 745, 750, 755, 760, 765, 770, 775, 780, 785, 790, 795, 800, 805, 810, 815, 820, 825, 830, 835, 840, 845, 850, 855, 860, 865, 870, 875, 880, 885, 890, 895, 900, 905, 910, 915, 920, 925, 930, 935, 940, 945, 950, 955, 960, 965, 970, 975, 980, 985, 990, 995, 1000$ زیر بحسب می‌آید:

$$k = 4 - 29, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$$

این رشته نامحدود اعداد را نیز می‌توانیم به دسته‌های مختلف و نامحدود زیر طبقه بندی کنیم:

$$(1) 499, 149, 249, 299, 199, 149, 249, 499$$

نشانی از این رشته از $1 + 6k$ و $1 + 6np$ می‌باشد.

مسائل امتحانات.... (دنباله از صفحه ۳۶۴)

در رأس A قائم باشد.

- ۴۵- نقاط (۲۰۳ و ۲۰۲) E و (۲۰۱ و ۲۰۲) F مفروضند از نقطه E خط دلخواهی موازی صفحه نیمساز دوم و چهارم رسم کرده و نقطه برخورد این خطرا باصفحه‌ای که از خط اراض و نقطه F می‌گذرد بدست آورید.

دیبرستان مهر باخته

دیبر: بنائی

الف- هندسه رقومی

محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ نامیده واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ است.

- ۱- نقطه a را روی محور اقصر و سمت چپ مرکز کاغذ به فاصله ۴cm از مرکز انتخاب کنید و از این نقطه خط رابه‌شیب $\frac{1}{2} p = a \cdot b$ بقسمی رسم کنید که تصویرش با

محور اقصر زاویه 30° درجه بسازد و ترقی رقومش از چپ به راست و از پائین به بالا باشد.

- ۲- بر خط a₄b₄ دو صفحه P و Q را به اساس i = 1cm مرور دهید. مقیاس شیب صفحه P موازی محور اطول می‌باشد.

- ۳- ملخص مستطیل ABCD را در صفحه P بستسمی رسم کنید که رقوم نقطه C برابر ع باشد.

- ۴- صفحه R را موازی صفحه P بقسمی رسم کنید که محور اقصر افقیه - آن باشد سپس قرینه نقطه O₄ مرکز مستطیل ABCD را نسبت به صفحه R که نقطه S است بدست آورید.

- ۵- ملخص مکعب مستطیل ABCDEFGH را بدست آورید در صورتی که قاعده فوقانی آن مستطیل ABCD بوده و نقطه S مرکز قاعده تحتانی EFGH می‌باشد و سپس آنرا مرئی و مخفی نمایید، عاز از نقطه Z صفحه Z را بر خط a₄b₄ عمود کنید سپس فصل مشترک صفحه Z را بادو صفحه P و Q که دو خط MY و MX می‌باشد بدست آورید. سپس زاویه مسطحه دو صفحه Q و P را که $XMY = \beta$ است نشان دهید.

ب- هندسه ترسیمی

- ۱- از نقطه (۲۰۱) A خطی رسم کنید که با صفحه افق زاویه 45° درجه بسازد و خط قائم 'dd' راقطع کند.

- ۲- روی خط نیمرخ aba'b' نقطه cc' را طوری بدست آورید که فاصله ااش از صفحه نیمساز اول برابر ارتفاعش

نمایند.

- ۵- از نقطه aa' خط نیمرخی بقسمی رسم کنید که بر خط مفروض' DD عمود باشد.

دیبرستان مروی

دیبر: مختاری فرستنده: محمد حسن نوری

الف- هندسه رقومی:

واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ است و محل برخورد دو محور کاغذ مرکز برگ است.

- نقطه a₂ بر مرکز کاغذ و نقطه b سمت راست وبالای a تصویر شده چنانکه $a = ab$ و با محور اقصر زاویه 45° می‌سازد مطلوب است:

اولاً - رسم صفحه P که عمود منصف قطعه خط AB است و تعیین نقطه c که بر محور اطول تصویر شده و بعلاوه ABC = CA = CB باشد سپس یک مقیاس شیب از صفحه مثلث را که Q می‌نمایم رسم و زاویه میل صفحه Q را بوسیله اندازه‌گیری بدرجه معین کنید.

ثانیاً ملخص نقطه D رأس چهارم متوازی الاضلاع ABCD را بدست آورید و فصل مشترک صفحات P و Q را معین و زاویه حقیقی بین این فصل مشترک و خط AB را بوسیله تسطیح معین کنید.

ثالثاً ملخص خط افقیه \triangle را که از مرکز متوازی الاضلاع ABCD گذشته و تصویرش محور اقصر را در چهارسانه‌تیمتری SABCD چپ مرکز قطع می‌کند مشخص کنید و ملخص هرم را که S روی \triangle و sa قطعه هرم است رسم و خطوط مرئی و مخفی را مشخص کنید.

رابعاً مقطع هرم فوق را بوسیله صفحه قائمی که بروست بیان AD می‌گذرد و موازی محور اطول کاغذ است بدست آورده و اندازه حقیقی این مقطع را بوسیله تسطیح نمایش دهید.

ب- هندسه ترسیمی

- ۱- خط dd' را به دلخواه رسم کرده و بر این خط صفحه‌ای بگذرانید که بر صفحه نیمساز دوم و چهارم عمود باشد.

- ۲- صفحه PaQ' را به دلخواه رسم کرده و زاویه این صفحه را با صفحه قائم تصویر معین کنید.

- ۳- نقاط (۲۰۱) A و (۲۰۵) B را طوری مطلوب است تعیین نقطه C واقع بر خط زمین چنانکه مثلث ABC

باشد.

۳- نیمرخ $aca'c'$ در صفحه نیمرخ PaQ' مفروض است. ملخص مربع $ABCD$ را در صفحه PaQ' بدست آورید.

۴- فصل مشترک صفحه مواجه PQ' را با صفحه مواجه RS' بدست آورید.

۵- نقطه aa' بر xy واقع است. قرینه این نقطه را نسبت به خط مفروض dd' بدست آورید.

میانگین مسکاریتمی (دنباله از صفحه ۳۱۷)

که در این رابطه δ از درجه ۴ است. چون

$$A_t = \frac{1}{2}(A_t + G_t) \quad (13)$$

استخراج ریشه دوم t را نصف کرده و در نتیجه خطای δ را به نسبت $\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ کم می کند. به ازای مقادیر کوچک t اگر بخواهیم A_t و G_t را بطور مستقیم از رابطه (۵) بدست آوریم به عات حذف $y^t - x^t$ اشکال می شود. اما با استفاده از رابطه (۱۳) می توان این اشکال را رفع نمود. با فرض $A_t = a_n$ و $G_t = g_n$ دستور زیر را بیان می کنیم.

دستور - اگر x و y اعداد مثبت باشند، فرض کنید که:

$$a_1 = \frac{1}{2}(x+y) \quad g_1 = (xy)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + g_n) \quad g_{n+1} = (a_n + g_n)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

اکنون حد مشترک a_n و g_n وقتی که $x \rightarrow \infty$ همان میانگین لگاریتمی یعنی L می باشد که با رابطه (۱) تعریف شد. به علاوه

$$L = \frac{1}{2}(a_n + 2g_n)(1 + \varepsilon_n) \quad (15)$$

که در آن

$$0 < \varepsilon_n < \frac{2 - 4^n}{180} \left(\frac{x-y}{g_n} \right)^4 < \frac{2 - 4^n - 2(x-y)^4}{45x^4y^4} \quad (16)$$

۳- نیمرخ $aba'b'$ و خط افقی hh' در نقطه aa' متقاطع بوده و نمایش یک صفحه می باشد. آثار صفحه PaQ' را بدست آورید.

۴- قرینه نقطه (۲) و (۱) را نسبت به صفحه غیر مشخص PaQ' بدست آورید.

۵- فصل مشترک صفحه غیر مشخص PaQ' را با صفحه غیر مشخص RaS' بدست آورید. (در a مشترک دیرستان نظام دیر: بنائی

الف- هندسه رقومی

واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید و محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید.

۱- ملخص نقطه a را روی محور اطول کاغذ و 4 سانتیمتر زیر مرکز انتخاب کنید و از این نقطه خط b را به اساس 2cm بقسمی رسم کنید که b روی محور اقصر کاغذ و سمت راست مرکز قرار گیرد.

۲- طول حقیقی خط AB و میل و شبیه آن را بدست آورید سپس براین خط صفحه P به اساس ۱ چنان مسرودهید که مقیاس شبیش موازی محور اطول باشد.

۳- ملخص مربع $ABCD$ را در صفحه P بدست آورید. رتفاع نقطه C منفی است.

۴- ملخص مکعب $ABCDEFGH$ را بدست آورید در صورتی که مربع $ABCD$ قاعده تحتانی آن باشد.

۵- مرئی و مخفی مکعب را تمیز داده و مقطع آنرا با صفحه افقی به رقوم ۱ پیدا کنید.

ب- هندسه ترسیمی

۱- نقطه aa' به بعد ۵ و ارتفاع ۳ مفروض است. نقطه دیگر bb' را بقسمی بدست آورید که رابط آن به فاصله ۶ سانتیمتر سمت راست رابط aa' بوده و بعد نقطه B مساوی 45° وزاویه خط AB با صفحه افق تصویر 45° باشد تصویر قائم b' را بدست آورید.

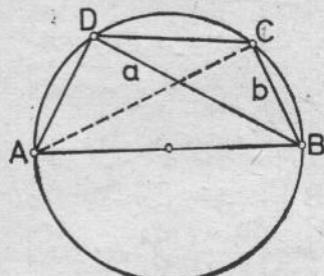
۲- خط نیمرخ $aba'b'$ و نقطه mm' در خارج آن مفروض است. از نقطه mm' خط افقی hh' را بقسمی رسم کنید که خط نیمرخ را قطع کند.

نتایجی از قضیه بسطمیوس

تنظیم از داوید ریحان

دایره به شعاع واحد باشند و d طول وتر مربوط به تقاضل
این دو کمان باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$d = \frac{a}{2} \sqrt{4 - b^2} - \frac{b}{2} \sqrt{4 - a^2}$$



$$DC = d \quad AB = 2 \quad AC = \sqrt{4 - b^2}$$

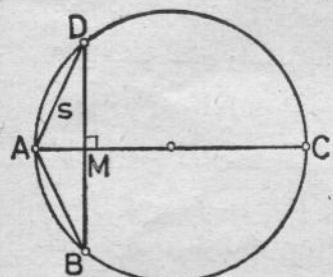
$$DA = \sqrt{4 - a^2}$$

پس:

$$a\sqrt{4 - b^2} - b\sqrt{4 - a^2} = d \times 2$$

نتیجه ۳- هرگاه t طول وتری از دایره‌ای به شعاع واحد و s طول وتر نصف کمان مربوطه باشد، خواهیم داشت:

$$s = \sqrt{2 - \sqrt{4 - t^2}}$$



$$(DB) \times (AC) = (DC)(AB) + (DA)(BC)$$

$$DA = AB = s \quad DC = CB = \sqrt{4 - s^2}$$

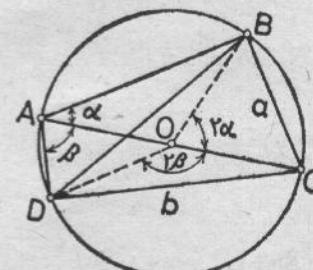
یکان دوره نهم

قضیه بسطمیوس (۱۶۵ ق.م) : در یک چهارضلعی محاطی حاصل ضرب اقطار برابر است با مجموع حاصل ضرب اضلاع مقابل.

اثبات این قضیه در کتابهای درسی مندرج است و در اینجا از ذکر آن خود داری می‌شود.

نتیجه ۱- هرگاه a و b طولهای دو وتر از دایره به شعاع واحد باشند و S طول وتر مربوط به مجموع دو کمان مذبور باشند در این صورت:

$$S = \frac{a}{2} \sqrt{4 - b^2} + \frac{b}{2} \sqrt{4 - a^2}$$



اثبات: روی دایره به شعاع واحد دو کمان DC و BC طول وترشان a و b است در نظر می‌گیریم و قطر AC دایره را رسم

می‌کنیم، با استفاده از قضیه بسطمیوس داریم:

$$a \cdot (AD) + b \cdot (AB) = (AC) \cdot (BD) \quad (1)$$

ولی با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویه ABC و ADC و اینکه است داریم:

$$AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{4 - b^2}$$

$$AB = \sqrt{4 - a^2}$$

هر گاه این مقادیر را در رابطه (1) قرار دهیم نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

نتیجه ۲- هرگاه $a \geq b$ و b طولهای دو وتر از

مقادیر $\frac{\sin X}{X}$ نزولی و مقدار $\frac{\operatorname{tg} X}{X}$ صعودی است، اثبات نماید.

با استفاده از رابطه ارسطر خس به روابط زیر می‌رسیم:

$$\frac{\operatorname{crd} 60'}{\operatorname{crd} 45'} < \frac{60}{45} = \frac{4}{3}$$

$$\text{یا } \operatorname{crd} 1^\circ < \frac{4}{3} \quad (\text{۰}^{\circ} / ۰^{\circ} ۲۶۲) = ۰^{\circ} ۰۳۴۹ \quad \text{همچنین}$$

$$\frac{\operatorname{crd} 90'}{\operatorname{crd} 60'} < \frac{90}{60} = \frac{3}{2}$$

$$\text{یا } \operatorname{crd} 1^\circ > \frac{2}{3} \quad (\text{۰}^{\circ} / ۰^{\circ} ۵۲۴) = ۰^{\circ} ۰۳۴۹ \quad \text{در این صورت}$$

$\operatorname{crd} 1^\circ = ۰^{\circ} ۰۳۴۹$ بدست می‌آید. با استفاده از نتیجه ۳ می‌توانیم $\operatorname{crd} 0^\circ / ۵^\circ$ را بدست آوریم و از روی آن می‌توانیم جدول اوتار را با تناوب $۵^\circ / ۰^\circ$ بدست آوریم.

رابطه‌ای به صورت "۳۷° ۴' ۵۵" معرف آن

است که وتر مقابل به زاویه مرکزی ۳۶° برابر است با $\frac{۳۷}{۶}$

(یا ۳۷ قسمت کوچک) شعاع به علاوه $\frac{۴}{۶}$ یکی از این قسمتهای کوچک به علاوه $\frac{۵۵}{۳۶}$ یکی از این قسمتهای اخیر. در شکل قبل دیده می‌شود که جدول وترها معادل با جدول مثلثاتی سینوسها است، زیرا:

$$\sin \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{OC} = \frac{\operatorname{crd} 2\alpha}{120}$$

بدین ترتیب از روی جدول وترهای بطلمیوس می‌توان سینوس زوایا را با تناوب ۱۵° از ۹0° تا ۹0° بدست آورد.

نتیجه ۱۶ - نتایج (۱) و (۲) و (۳) معادل با فرمولهای

مربوط به $\sin(\alpha + \beta)$ و $\sin(\alpha - \beta)$ است.

اثبات: چنانکه می‌دانیم دایره به شعاع واحد همان

دایره مثلثاتی است و با توجه به شکل اول داریم:

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad \sin \beta = \frac{b}{r}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - a^2}$$

$$\cos \beta = \sqrt{4 - b^2}$$

$$2t = 2s\sqrt{4 - s^2} \Rightarrow t = s(4 - s^2)$$

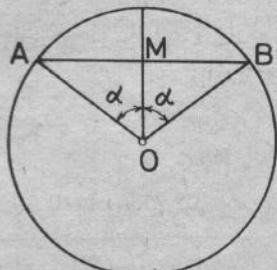
$$s^2 = 2 - \sqrt{4 - t^2} \Rightarrow s = \sqrt{2 - \sqrt{4 - t^2}}$$

تبصره ۱ - باید توجه داشت که جواب -

$$s = DC = \sqrt{2 + \sqrt{4 - t^2}}$$

فرض می‌شد.

تبصره ۲ - بطلمیوس با استفاده از نتایج اخیر جدولی



به نام جدول وترها تشکیل داد که در آن طول وتر مقابل به زاویه مرکزی را با تناوب نیم درجه به نیم درجه از $۵^\circ / ۰^\circ$ تا

۱۸۰° مجامیب کرد. کلودیوس بطلمیوس نشانه $\operatorname{crd} \alpha$ را برای نشان دادن طول کمان روبروی زاویه مرکزی α اختبار کرد.

مثلث در دایره به شعاع واحد $= 1$ است و نیز هرگاه M قطر AC را به نسبت ذات وسط و طرفین (یا نسبت طلائی) قطع کند (یعنی باشد) خواهیم

$\operatorname{crd} 36^\circ = ۰^{\circ} ۳۸۲۰$ داشت:

با استفاده از نتیجه ۲ و دو مقدار اخیر می‌توان طول وتر را بروی زاویه ۲۴° و ۳۶° درجه را محاسبه کرد:

$$\operatorname{crd} 24^\circ = \operatorname{crd}(60^\circ - 36^\circ) = ۰^{\circ} ۴۱۵۸$$

با استفاده از نتیجه ۳ می‌توان وترهای مربوط به کمانهای $۱2^\circ, ۶^\circ, ۳^\circ, ۰^\circ$ و ۹0° را محاسبه کرد، که در این صورت داریم:

$$\operatorname{crd} 45^\circ = ۰^{\circ} ۰۲۶۲ \quad \operatorname{crd} 90^\circ = ۰^{\circ} ۰۵۲۴$$

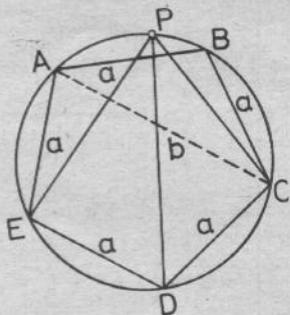
ارسطر خس در کتاب خود موسوم به «اندازه و فواصل ماه و خورشید» رابطه زیر را بکار برده است:

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b}$$

که در آن $b < a < \frac{\pi}{2}$ می‌باشد. (این رابطه راه

خواننده می‌تواند با رسم توابع $\operatorname{tg} X$ و $\sin X$ رسم کند و با

توجه به اینکه وقتی X از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ ترقی می‌کند



روابط فوق را در هم
ضرب می کنیم و پس از
اختصار به رابطه
مطلوب می رسمیم.

اثبات ج: در چهار ضلعی
صلعی $PEDB$ داریم:

$$PB(a) + PE(b) = PD(b)$$

در چهار ضلعی $PAED$ داریم:

$$PA(a) + PD(a) = PE(b)$$

در چهار ضلعی $PEDC$ داریم:

$$PD(b) = PC(a) + PE(a)$$

از جمع روابط فوق خواهیم داشت:

$$PA + PB + PD = PC + PE$$

اثبات مسئله زیر در حالت شش ضلعی منتظم به خوانده و اگذار می کنیم.

خیام (دنباله از صفحه ۳۰۸)

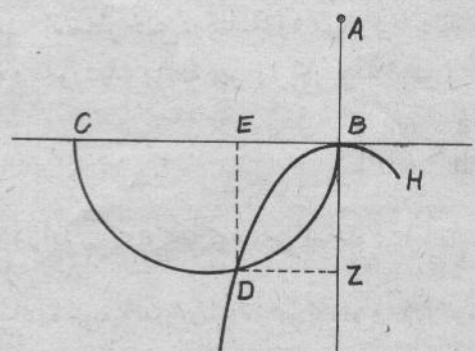
که در آن معادله اول بکسری ایست و معادله دوم یک دایره،
پس حل معادله درجه چهار

$$\begin{aligned} & x^4 + ax^2 + \\ & bx + c = 0 \quad (\text{یا درجه سوم اگر} \\ & \text{باشد}) \quad \text{منجر به} \\ & \text{تعیین نقاط تقاطع} \\ & y = x^2 \quad \text{سهیم ثابت} \\ & \text{و دایره متغیر} \\ & x^2 + y^2 + \\ & bx + (a - 1)y + c = 0 \quad \text{می شود.} \end{aligned}$$

مثلاً خیام برای حل معادله $x^4 + bx = a$ چنین عمل می کند.

فرض کنیم $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = a$ و $\overline{AB} = b$

را به رأس B و محور BZ و ضلع قائم AB و نیم دایره



دنباله در صفحه ۳۵۱

و نیز داریم: $\sin(\alpha + \beta) = \frac{DB}{2} = \frac{S}{2}$ و بدین ترتیب

خواهیم داشت:

$$2\sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta + 2\cos\alpha\sin\beta$$

وبه همین ترتیب می توان فرمولهای مثلثاتی

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

را از نتایج ۲ و ۳ و با توجه به شکلها قبل بدست آورد.

نتیجه ۵ - مسائل جالب زیر را به عنوان نتایجی از

قضیه بطلمیوس ثابت کنید: هرگاه P نقطه‌ای از دایره و روی

کمان AB از آن باشد ثابت کنید که:

الف: در مثلث متساوی الاضلاع ABC داریم:

$$PC = PA + PB$$

ب: در مربع $ABCD$ داریم:

$$(PA + PC)PC = (PB + PD)PD$$

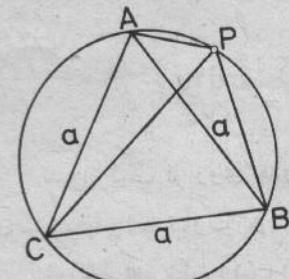
ج: در پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ داریم:

$$PC + PE = PA + PB + PD$$

د: در شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ داریم:

$$PD + PE = PA + PB + PC + PF$$

طول اضلاع را با a و طول اقطار را با b نمایش می دهیم



اثبات الف: با کار

برد قضیه بطلمیوس در

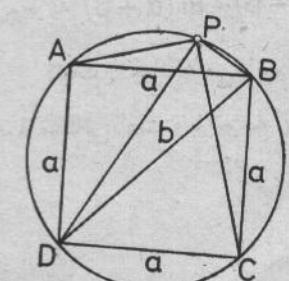
موردن چهار ضلعی

داریم: $PABC$

$$PA(a) + PB(a)$$

$$= PC(a) \rightarrow$$

$$PC = PA + PB$$



اثبات ب: در چهار

ضلعی $PADC$ رابطه

بطلمیوس را می نویسیم:

$$PA(a) + PC(a) =$$

$$= PD(b)$$

در چهار ضلعی

داریم:

$$PC(b) = PB(a) + PD(a)$$

یک نامساوی هندسی

ترجمه: جعفر آقایانی چاوشی

می‌توان ثابت کرد که:

$$\begin{aligned} Q'(x \text{ و } x') - Q(x)Q(x') &= \\ &= -4(VW + WU + UV) \\ V = zx' - z'x \quad U = yz' - y'z \quad \text{که در آن:} \\ W = xy' - x'y \end{aligned}$$

و چون $xU + yV + zW = 0$ است خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} -4xz(VW + WU + UV) &= \\ &= -4xzUV + 4x(U + V)(xU + yV) = \\ &= 4x'U' + 4x(x + y - z)UV + 4xyV' = \\ &= [2xU + (x + y - z)V] + Q(x)V' \end{aligned}$$

از اینرو نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} (4) \quad xz[Q'(x \text{ و } x') - Q(x)Q(x')] &= \\ &= [2xU - (x + y - z)V] + Q(x)V' \\ \text{و چون } <xz>_0 \text{ می‌باشد پس طرف چپ رابطه} \\ \text{آخر همواره بزرگتر و یا حداقل مساوی صفر است، زیرا} \\ \text{طرف راست مجموع دو جمله است که جمله اول مربع کامل و} \\ \text{جمله دوم نیز مثبت است. پس خواهیم داشت:} \\ Q'(x \text{ و } x') - Q(x)Q(x') &\geqslant 0. \end{aligned}$$

که این همان نامساوی (۲) یعنی در واقع نامساوی مطلوب است، از رابطه (۴) نیز معلوم است تساوی وقتی برقرار است که $U = W = V = 0$ باشند که در این حالت خواهیم داشت:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$$

و این رابطه نشان می‌دهد که در این حالت دو مثلث مفروض متشابه می‌باشند.

هرگاه a و b و c و a' ، b' و c' اضلاع مثلث ABC و $A'B'C'$ بوده و S و S' به ترتیب مساحت مثلثهای مذکور باشند، نامساوی زیر برقرار است:

$$(1) \quad a^4(-a'^2 + b'^2 + c'^2) + b^4(a'^2 - b'^2 + c'^2) + c^4(a'^2 + b'^2 - c'^2) \geqslant 16SS'$$

تساوی هنگامی برقرار است که این دو مثلث متشابه باشند.

گرچه راه هندسی جالبی برای این نامساوی وجود دارد ولی در اینجا کوشش شده است که مسئله از راه جبری ساده‌ای ثابت شود بنابراین برهان هندسی نامساوی فوق را به عهده خواننده واگذار می‌کنیم.

برهان: از روابط:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad 2p = a + b + c$$

نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} 16S^4 &= 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ 16S'^4 &= 2b'^2c'^2 + 2c'^2a'^2 + \\ &\quad + 2a'^2b'^2 - a'^4 - b'^4 - c'^4 \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم:

$$x \text{ و } y \text{ و } z = a^2 \text{ و } b^2 \text{ و } c^2$$

$$x' \text{ و } y' \text{ و } z' = a'^2 \text{ و } b'^2 \text{ و } c'^2$$

$$Q(x) = 2yz + 2xz + 2xy - x^2 - y^2 - z^2$$

$$Q(x') = 2y'z' + 2z'x' + 2x'y' - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

$$\begin{aligned} Q(x \text{ و } x') &= x(-x' + y' + z') + \\ &\quad + y(x' - y' + z') + z'(x + y - z) \end{aligned}$$

پس نامساوی (۱) چنین می‌شود:

$$(2) \quad Q'(x \text{ و } x') \geqslant Q(x)Q(x')$$

بررسی یک مسئله مشهور حساب

ترجمه: فتح الله زرگری

پس از اخته داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{10}{9}x_2 - x_1 = 10^5 \\ \frac{10}{9}x_3 - x_2 = 10^5 \\ \dots \\ \frac{10}{9}x_k - x_{k-1} = 10^5 \end{array} \right.$$

اگر طرفین معادلات را (بعداز معادله اول) به ترتیب در

$$\frac{10}{9} \text{ و } (\frac{10}{9})^2 \text{ و } \dots \text{ و } (\frac{10}{9})^{k-2} \text{ ضرب کنیم و سپس تمام آنها}$$

را با هم جمع کنیم به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(\frac{10}{9})^{k-1}x_k - x_1 = 10^5[1 + \frac{10}{9} + \dots + (\frac{10}{9})^{k-2}]$$

واز طرفی:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{10}{9} + \dots + (\frac{10}{9})^{k-2} &= \frac{(\frac{10}{9})^{k-1} - 1}{\frac{10}{9} - 1} = \\ &= 9[(\frac{10}{9})^{k-1} - 1] \end{aligned}$$

و از طرفی $x_k = 10^5 k$ می‌باشد و بنابراین:

$$(\frac{10}{9})^{k-1} \times k \times 10^5 - x_1 = 10^5 \times 9 \times [(\frac{10}{9})^{k-1} - 1]$$

که از رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$10^5 \times (\frac{10}{9})^{k-1}(k-9) = x_1 - 9 \times 10^5$$

واز آنجا که x_1 مقداری است صحیح $9 - k$ بر 9^{k-1} باید بخش پذیر باشد و به آسانی مشاهده می‌شود که به ازاء $k=9$ بخش پذیری ممکن است و به ازاء k از 2 تا 8 غیر ممکن است. به علاوه بسادگی به کمک استدلال استقرائی می‌توان بقیه در صفحه ۳۲۹

این مسئله منسوب به اوفر ریاضیدان معروف است: پدری در مورد تقسیم نقدینه خود وصیتnameای به ترتیب زیر نوشته: پسر اول ۱۰۰۰۰ تومان به اضافه $1/9$ باقی نقدینه، دومی ۲۰۰۰۰ تومان به اضافه $1/9$ باقیمانده جدید، سومی ۳۰۰۰۰ تومان به اضافه $1/9$ باقیمانده سوم و همینطور تا آخر. بعد از مرگ پدر و اجرای وصیتname مشاهده شد که تمام پسرها به مقدار مساوی پول دریافت کردند. تعداد فرزندان چند بوده و چهاریک چقدر رسیده است؟ مسئله را در موردی که به فرزندان پول مساوی نرسد حل کنید.

حل: تعداد فرزندان را k و سهم هریک را به ترتیب x_1, x_2, \dots, x_k ریال فرض می‌کنیم. معلوم است که اگر هر یک از فرزندان مقدار صحیح تومان سهمیه نبرد مقدار صحیح ریال سهمیه خواهد برد و ما از این فرض در حل مسئله استفاده می‌کنیم. بنابراین مفروضات مسئله داریم:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \times 10^5 + \frac{1}{9}(x_2 + x_3 + \dots + x_k) \\ x_2 = 2 \times 10^5 + \frac{1}{9}(x_3 + \dots + x_k) \\ \dots \\ x_{k-1} = (k-1) \times 10^5 + \frac{1}{9}x_k \\ x_k = k \times 10^5 \end{array} \right.$$

از تفریق هریک از معادلات از معادله بعدیش بدست می‌آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 = 10^5 - \frac{1}{9}x_2 \\ x_3 - x_2 = 10^5 - \frac{1}{9}x_3 \\ \dots \\ x_k - x_{k-1} = 10^5 - \frac{1}{9}x_k \end{array} \right.$$

بادریاضیات آشتی کنید

(اعجوبه ریاضیات‌شوید)

ترجمه: ع. مصطفی

تألیف: A. BULLAS استاد آموزش ریاضیات در فرانسه

بخش سوم - علل ضعف شهادت ریاضیات

قطع می‌شود؛ در اینجا منظرة تماشائی طبیعت شمارا به خود مشغول داشته است: آسمان آبی شفاف است، آفتاب به تابناکی می‌تابد، هوا عطرآگین است، مرغان آواز می‌خوانند؛ گردش در این هوا چه فرح بخش است ... غلتاً متوجه کار اصلی خود می‌شوید. اما ناچارید از اولین سطح رشروع کنید. مجدداً توجه شما به فکر دیگری معطوف می‌شود که با موضوع درس مورد مطالعه ارتباطی ندارد: هم‌اکنون درفلان سینما فیلم را نشان می‌دهند که ستاره اول آن در نقش یک سردار معروف بازی می‌کند، چه خوب است که در اولین فرستت به این سینما رفت و از هنرمنایهای هنرپیشه محبوب لذت بردا.

یک دقیقه، دو دقیقه می‌گذرد و بازنگاهان درس تاریخ به مخیله باز می‌گردد. اما زیاده‌تر نمی‌کشد، مجدداً موضوع فیلم سینما فکر شما را به خود جلب می‌کند. زمان می‌گذرد بدون آنکه توجه شما روی موضوع درس ثابت مانده باشد؛ فکر شما از هنرپیشه محبویتان به سردار معروف و از آنجا به قلمرو تاخت و تاز وی متوجه می‌شود. به جای درس تاریخ هزاران چیز دیگر فکر شمارا به خود مشغول می‌سازد و در نتیجه‌نمی‌توانید درس فردای خود را یاد بگیرید.»

تمرکز حواس قابلیت دقیقی است که به شما جازه می‌دهد همانند یک گرگ که به کمین طعمه نشسته است همه هوش و حواس خود را روی موضوع درستان متوجه کنید، نه آنکه حواس شما در همه جهات پراکنده باشد. قسمت عمده ضعف شما در ریاضیات به خاطر فقدان این قابلیت تمرکز حواس است، و من می‌کوشم تا این قابلیت را بازیابیم.

استدلال ریاضی چیست؟ یک رشته، یک زنجیر از گزاره‌ها که هر کدام آنها از قبلی نتیجه می‌شود. در نظر بگیرید که دیگر شما مشغول اثبات یک قضیه هنسنه است. او از گزاره‌ای

بیماری که برای درمان به پزشک مراجعه می‌کند، قبل از هرچیز باید به یکسری از پرسشها پاسخ دهد. پزشک این پرسشها را بعمل می‌آورد تا علت یا علتهای اساسی بیماری را در یابد، سپس به معالجه می‌پردازد و دستور عمل صادر می‌کند.

شما هم تا اندازه‌ای به این بیمار شبیه هستید. اما من نیازی ندارم تا به خاطر کشف علل ضعف شما پرسش‌هایی را مطرح کنم؛ مدت‌ها است که این علل را می‌شناسم. شما از این جهت در ریاضیات ضعیف هستید که قادر قوی تمرکز و تصور لازم می‌باشید.

در کتابی به عنوان پر ادعای «دانش آموزان»، می‌توانید صاحب ذهن فوق العاده باشید. در کامل، حفظ کامل «ثابت کرده‌ام که چگونه می‌توان از راه بسط و توسعه این دو قوه موثر آموزش را در گرگون ساخت.

من به خود حق می‌دهم که ادعاهای بزرگ داشته باشم زیرا تاکنون از کارهای خودم چهدر ریاضیات و چه درس‌ای رزمینه‌ها نتایج عالی بدست آورده‌ام. یاد بگیرید که حواس خود را متوجه شوید و قوی تصور خود را بسط دهید، در این صورت پیش‌فتهای شگفت‌انگیز خواهید داشت.

تمرکز حواس چیست؟ قابلیتی است که موجب می‌شود فکر در مدتی معین روی موضوعی معلوم ثابت بماند، بدون آنکه چیز دیگری خارج از آن موضوع آن را به خود مشغول دارد.

سطور زیر که از تأثیف سابقم استخراج شده‌اند در فهم دقیقت موضوع به شما کمک می‌کند:

«شما در اتاق خود پشت‌بیز کارتان نشسته‌اید و می‌کوشید تا درس تاریخ را فرآگیرید. یک سطر، دو سطر را می‌خوانید، اما ناگهان خواندن شما

به سوی رفیق پهلوودستی برمی‌گردید و به جستجوی مشغولیت تازه برمی‌آید. حال اگر ضمن درسهای دیگر هم حواس شما پر شود، آنگاه زمانی فراخواهد رسید که دیگر نمی‌توانید چیزی از درس را درکنید. حتی اگر تلاش زیاد کنید تا حواس جمع داشته باشید؛ زیرا قصوی هم همانند گزاره‌های یک قضیه، زنجیری را تشکیل می‌دهند.

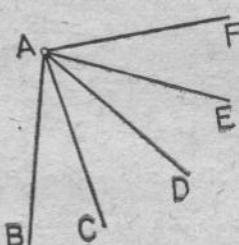
در این وضعیت دیگر مایوس می‌شوید و هیچ به درس گوش نمی‌دهید، با خود تصور می‌کنید که «ریاضیات به چه درد می‌خورد؟ درس بسیار مشکلی است!»

دوستان عزیز، اکنون متوجه شده‌اید که چرا در ریاضیات عقب افتاده‌اید. اگر می‌خواهید که توانائی خود را باز باید لازم است که یاد بگیرید چگونه حواس خود را متعرکر کنید. در ابتدا برای شما مشکل خواهد بود که همه حواس‌تان را در طول مدتی معین روی کاری معلوم متعرکر کنید. اما وقتی برای این کار تلاش کنید افکار مزاحم به تدریج بکنار خواهند رفت، و بالاخره پس از مدتی کوشش، توانائی لازم را در مرکز حواس بدست خواهید آورد.

در آن هنگام که توانستید برای هر مدت معین مرکز حواس داشته باشید، آنگاه می‌توانید به آسانی درس بخوانید.

مرکز حواس موجب می‌شود که در مشاهدات خود به سرعت خیلی از چیزها را ببینید. به این مثال ساده توجه کنید: چند سال پیش از این، با دانش آموزی مواجه شدم که از

با پیش‌فرض در ریاضیات شکایت داشت. من از او پرسیدم: آیا ممکن است که برای چند لحظه این‌طور نیندیشی؟ و بدون آنکه منتظر پاسخ او بمانم روی ورقه‌ای از کاغذ از یک نقطه A پنج نیم خط AE، AD، AC، AB و AF را رسم کردم و پرسیدم:



- این یک شکل بسیار ساده است. آیا آن را مشاهده می‌کنی؟ بگو که روی آن چند زاویه وجود دارد؟ مدتی مکث کرد. من تکرار کردم، چند زاویه؟ او جواب داد: - چهار زاویه.

- او! فهمیدم که چرا در هندسه ضعیف‌هستی. قبل از یاد گرفتن استدلال باید یاد گرفت که نگاه کرد.

موسوم به فرض شروع می‌کند تا آنکه به گزاره‌ای دست یابد که حکم نام دارد. او چگونه عمل می‌کند؟

زنجبیری می‌سازد که هر حلقه آن یک گزاره است و حلقه دوم آن به حلقه اول (فرض) جوش خورده است، حلقه سوم به حلقه دوم، ... بالآخره آخرین حلقه که همان حکم باشد به حلقه قبلی وصل شده است.

اگر کاملاً دقیق باشید، به عبارت دیگر روی توضیحاتی که معلم می‌دهد، تمرکز حواس داشته باشید، برایتان هیچ زحمتی نخواهد داشت که در همان زمان آن زنجیر را از نوبسازید، زیرا کافی است بدانید که بعد از هر حلقه آندام حلقه را باید بکار برد.

اما اگر یکی از حلقه‌های از نظر شما گم بشود. این در صورتی است که حواس شما برای چند لحظه پر شده باشد - آنگاه برایتان ممکن نیست که دنباله رشته را تمام کنید.

دیگر مشغول شرح و بحث است. شما هم دقیقاً گوش به وی فرا داشته‌اید. همه چیز بروفق مراد است. ناگهان رفیق پهلوودستی شما آستینتان رامی‌کشد و در گوشی چیزی با شمامی گوید، شمامه وی مشغول می‌شوید و می‌خندید، سپس مجدد آگشمان خود را به تخته سیاه می‌اندازید. اما ابروهایتان در هم می‌رود. روی تخته نوشته شده است: $AB = DE$ و شما نمی‌دانید این رابطه از کجا پیدا شده است.

موضوع درس اثبات تساوی دو مثلث ABC و DEF بوده است. اما شما همه‌اش به این دو مثلث فکر نکرده‌اید. فکر شما برای مدتی به موضوعی که رفیقتان در گوشستان گفته مشغول بوده است.

در آن زمان که فکرتان مجدد آبده موضوع درس متوجه شده است، رابطه $AB = DE$ را دیده و ندانسته اید چگونه آمده است.

با درماندگی می‌کوشید که توضیح مربوط را دریابید. فرض کنیم که در این کارهم موفق شوید. اما همچنان سر در گم هستید. زیرا بعضی از حلقه‌های زنجیر به هنگامی ساخته شده است که نکرشما به چیز دیگر مشغول بوده است. اگر هم یکی از این حلقه‌ها را بازیابید بازیکی دیگر برای شما نایید است. به هر جهت، چگونگی بدست آمدن تساوی که روی تخته نوشته شده است برای شما نامعلوم باقی می‌ماند. تساویهای دیگری هم که بعد از آن روی تخته نوشته می‌شوند سرگردانی شما را افزون می‌سازند. چه خواهید کرد؟

علت دیگر ضعیف شما در ریاضیات فقدان نیروی تصور است.

چرا روی یک مسئله به نوع رقت آوری خشکستان می‌زند؟ زیرا شکل داده شده چنان است که نمی‌توان مستقیماً از روی آن راه حل را کشف کرد. لازم است که مثلاً خطی را امتداد داد، یا اینکه عمودی را بریک خط‌سازم کرد. یا اینکه خطی را موازی با خط دیگر کشید، وغیره...، به هحال جزئی تغییری در شکل لازم است و شما ایده آن را ندارید.

برای پیشرفت در ریاضیات لازم است که نیروی تصور خود را توسعه بخشد. در این باره تمرينهای ویژه‌ای در بخش پنجم آمده است.

تمرکز حواس و نیروی تصور دو مایه اصلی برای پیشرفت در ریاضیات می‌باشد اما شما از آنها به اندازه کافی برخوردار نیستید. موضوع بخش‌های آینده کتاب چگونگی برخورداری بیشتر از این دو استعداد است.

تو روی شکل چهار زاویه می‌بینی، در حالی که من بیست زاویه مشاهده می‌کنم.

اطمینان دارم که شما هم به این دانش‌آموز می‌مانید؛ به هنگام مشاهده یک شکل بسیاری از اجزاء آن از نظرتان پنهان می‌ماند.

این بخش اختصاص به آن داشت که علل ضعف شما در ریاضیات یادآوری و تشریح گردد. فقدان تمرکز حواس یکی از این علتها است. به زودی به نحوی بارز برای شما معلوم خواهم ساخت که چگونه می‌توانید توجه خود را ثابت نگاه داشته باشید.

رفع حواس پرته تنها یک جزء از کاری است که باید انجام دهید؛ برای خیلی درخشنان شدن در ریاضیات باید تمرکزی از درجه بالاتر را در حواس خود ایجاد کنید. برای نیل به این مرحله عالی از تمرکز حواس باید تمرينهای را که در بخش پنجم کتاب گردآوری شده است انجام دهید.

بخش چهارم - کتاب خواندن را یاد بگیرید.

کنید: «برای اعجوبه شدن در ریاضیات» بعضی از صفحات آن را به این اختصاص دهید که خلاصه آنچه را که فرا می‌گیرید، بخش به بخش، در آن خلاصه نویسی کنید.

هر بخش را تنها وقتی شروع کنید که مطمئن باشد آنچه را در بخش‌های قبلی مطرح بوده است بطور کامل یاد گرفته‌اید.

مدت زمانی که صرف کار می‌شود قابل اهمیت نیست، مهم مقدار کاری است که انجام می‌دهید.

فرض کنیم مخیر باشید که از دوهدیه «یک تن پر تقال گندیده» و «یک دانه پر تقال سالم» یکی را بر گزینید. یقیناً یک دانه پر تقال سالم را ترجیح می‌دهید. مطالعه صدھا صفحه کتاب بدون دقت و بدون تمرکز حواس ارزشی بیش از یک تن میوه فاسد را ندارد. در صورتی که مطالعه جدی و عمیق یک صفحه کتاب ارزشی بسیار دارد زیرا به پرورش استعداد شما کمک می‌کند.

اگر برای فهم یک موضوع، یک ساعت، دو ساعت، ساعتها وقت لازم است، از آن مضایقه نکنید. مطلب رانه تنها یک

خواست من آن است که این کتاب برای شما یاور خوبی باشد. از این رو به خود حق می‌دهم که در باره‌همنه کتاب خواندن گفتگویی با شما داشته باشم.

بعضی از دانش‌آموزان کم حوصله خواندن یک کتاب علمی را همانند خواندن یک کتاب داستان برگزار می‌کنند. تند ورق می‌زنند، بی قرارند که زودتر به پایان کتاب برسند، بسیاری از مطالب کتاب راستطحی مرور می‌کنند و در جاهایی میان بر می‌زنند، بساکه برخی از نکات یامطالب را کم اهمیت تلقی می‌کنند در صورتی که لازم است از همینها بهترین بهره را بدست آورده باشند.

تمرکز حواس قابلیت مهمی است که کلید دانش است. متمرکز بودن حواس یعنی آنکه یک موضوع را با بیشترین توجه و بدون شتابزدگی مطالعه کرد. خواندن یک کتاب با دقت و باموشکافی اولین آزمایش و در ضمن اولین تمرین برای سعی در تمرکز حواس است. چه تصعیم می‌گیرید؟

دفترچه کوچک اختیار کنید، روی جلد آن چنین یادداشت

دستان عزیز، دانشآموزان جوان، امیدهای آینده کشور، غیرت خود را دوستی بچسبید، قلم و کاغذ را بردارید و بطور جدی بکار بپردازید. تلاش بدون سستی سرفصل موقیت است.

اعداد اول (دنبله از صفحه ۳۱۵)

اعدادی که عبارت $1 - 6k$ را اول نمی‌کنند [این اعداد از اوی روابط ذکر شده در قبل بدست می‌آیند] $k = 6, 11, 13, 16, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 31, 34, 35, 36, 37, \dots$ و اعدادی که عبارت $1 + 6k$ را اول نمی‌کنند: $k = 4, 8, 9, 10, 14, 15, 19, 20, 22, 24, 26, 29, 31, 36, \dots$

دیده می‌شود که می‌توان با معدودی از اعداد اول، سریهای (الف) و (ب) را تامقداری بدست آورد.
چون از روی این مقادیر بدست آمده اعداد غیر اول را ($\pm 6k$) در فرمولهای $1 \pm 6k$ تعیین کنیم و این اعداد را مرتب کنیم و اعداد فرد مضرب ۳ را نیز به آنها اضافه نمائیم، اعداد باقیمانده اول می‌باشند.

روشی دیگر. فقط باداشتن اعداد اول $5, 7, 11, 13, 15, 17$ می‌توانیم تمام اعدادی را که عبارت $1 - 6k$ را اول نمی‌کنند وحداکثر مقدارشان تا ۵ است بدست آورد. برای روشن شدن بیشتر آنها را در ریز می‌نویسیم
 $k = 6, 11, 13, 15, 16, 20, 21, 22, 24, 26, 27$ $31, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 44, 48, 50$

می‌دانیم که این اعداد در دسته‌های ذکر شده در قبل قرار دارند و ارقام این چهار دسته با چهار عدد $5, 7, 11, 13$ تمام بددست می‌آیند. حال سری اعداد پ که 18 تا هستند دارای یک سری اعداد است که $1 - 6k$ را اول نمی‌کنند. به مادگی می‌توان تمام اعداد بین صفر تا 15 را که در سری فوق نیستند نوشت و با جاگذاری هر یک آن‌هادر عبارت $1 - 6k$ یک عدد اول بدست آورد. مثلاً عدد 47 که در گروه پ نیست. بنابراین $1 - 1 \times 47 = 46$ یا عدد 281 عددی است اول. بدین صورت دیده می‌شود که با معدودی از اعداد اول مقداری معدود ولی قابل توجه از سریهای (الف) و (ب) بدست می‌آید که با جاگذاری اعدادی که در این سری نیستند در فرمولهای $1 + 6h$ اعداد اول بدست می‌آیند»

واضح است که باداشتن اعداد اول بیشتر مقدار بیشتری از این دوسری (الفوب) بدست می‌آید که با مقدار بیشتری از اعداد اول را بدست می‌دهند.

دفعه بلکه دو دفعه، دهدفعه، و آنقدر به دفعات مرور گنید تا کاملاً مرکوز ذهن شما بشود.
در اولین مرور همه بیز تاریک بنتظر می‌رسد، در دومین مرور نورهای ضعیفی مشاهده می‌شود. در سومین، چهارمین، ... و دفعات بعد نورهای بیشتری بچشم می‌خورد و بالآخره نور درخشان قویاً تابان می‌شود.
شادی در گل مطلب پاداش شما است و مشوقی است تا کار را ادامه دهید.

مردی را در تنظر بگیرید که می‌خواهد از تونلی بگذرد. او در تاریکی گام برمی‌دارد، اما می‌داند که با برداشتن هر گام به روشنائی نزدیکتر می‌شود، از این جهت از گام برداشتن کوتاهی نمی‌کند.

شما هم به هنگام مطالعه به این مرد می‌مانید. هر کوشش شما، شما را به حقیقت مورد نظر نزدیکتر می‌سازد؛ و آنگهی عادت به جستجو شمارا آماده می‌سازد که هر دفعه زودتر از دفعه قبل به کشف حقیقت نایل آید؛ در هر حال ارزش اولین گام غیر قابل انکار است.

در اینجا یک نصیحت به شما می‌کنم. که شاید بیهوده بنظر برسد، اما تجربه خلاف این را ثابت می‌کند – هر گاه در متن مورد مطالعه به لغتی برخورد کردید که معنی آن را فراموش کردید فوراً به فرهنگ لغات مراجعه کنید. خود من این نکته را همواره رعایت می‌کنم، زیرا هیچگاه نتوانسته ام قبول کنم که معنی یک لغت را کامل‌نمی‌دانم.

توجه داشته باشید که همه بخش‌های کتاب مهم هستند، این یا آن بخش را فرو گذار نکنید به این تصور که در درجه دوم اهمیت است، همه بخشها به هم پوسته‌اند، با میان برگردان احیاناً با برخورد به یک اشکال پیش بینی نشده متوقف خواهید شد، چه بسا ممکن است که کلید راه حل مسئله در همان صفحه‌ای باشد که به آن نظر نینداخته‌اید.

باز هم توجه شمارا به تمرينهای مزبور به تمرکز حواس جلب می‌کنم، هیچگاه نباید از فواید این قابلیت غافل بمانید. اگر می‌خواهید که در ریاضیات تو اگر دید باید یاد بگیرید که درست نگاه کنید. در بخش پنجم معجزات تمرکز حواس را به شما ارائه خواهیم داد و معلوم خواهیم کرد که چرا در یک شکل هندسی خیلی از جزئیات را مشاهده نمی‌کنید. در همین بخش دعوت خواهید شد تا برای تقویت نیروی مشاهده خود را اورزیزه سازید.

امیدوارم که توصیه‌ها را منظماً بکار بندید.
این ضرب المثل معروف را بخاراط داشته باشید: «کار نیکو کردن از پر کردن است».

شیمی عمومی به روش بر نامه‌ای (دباله از شماره قبل)

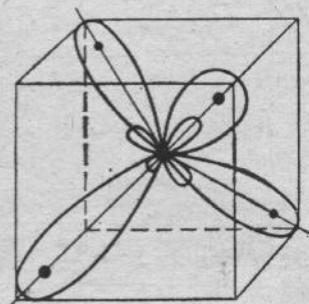
ترجمه: باقر مظفرزاده

-۹۷- برای توضیح هم ارز بودن چهار پیوند در مولکول CH_4 ، باید تصویر کرد که یک الکترون از اریتال $2s$ و در این صورت هیئت الکترونی اتم کربن چنین خواهد بود...

پاسخ ۹۸: هیبریداسیون

-۹۹- اریتالهای هیبریدی sp^3 نیز همان شکل اریتالهای sp^2 و sp را دارند، یعنی ...

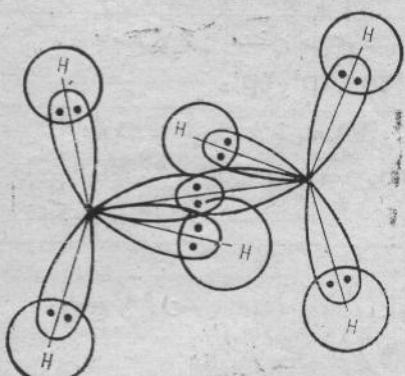
پاسخ ۱۰۰:



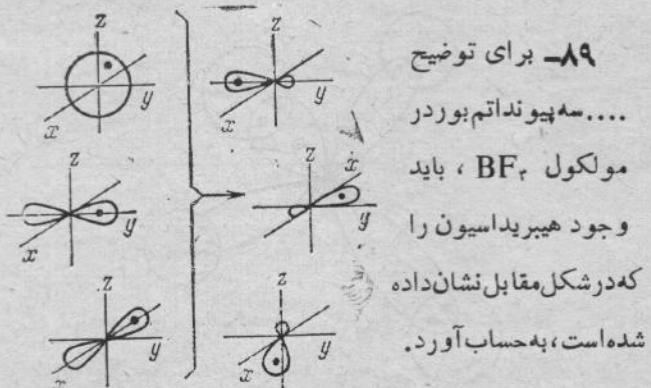
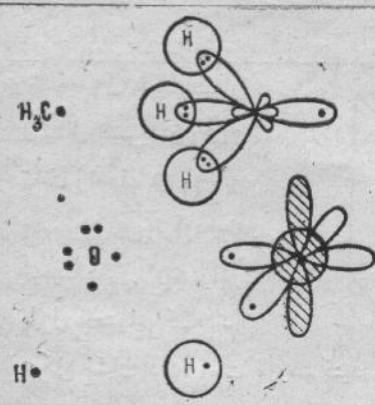
-۱۰۱- با در نظر گرفتن این که پیوند $\text{C}-\text{H}$ در مولکول متان CH_4 از اریتالهای هیبریدی sp^3 بوجود می آید، نمودار اریتالی مولکول متان را رسم کنید.

پاسخ ۱۰۲: $109^\circ 28'$

-۱۰۳- نمودار لیوئیس برای مولکول اتان C_2H_6 ... است.



-۱۰۵- شکل مقابل اجزای ساختمندان مولکول الكل متیلیک را نشان می دهد. آنها را طوری قراردهید تا نمودار اریتالی مولکول CH_3OH بدست آید.

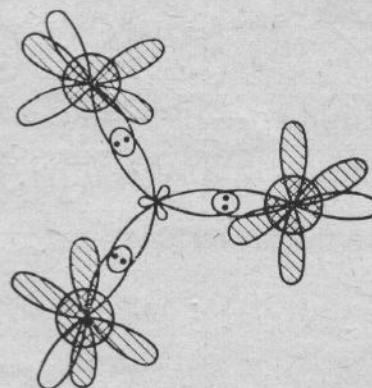


-۹۸- برای توضیح سه پیوند اتم بوردر مولکول BF_3 ، باید وجود هیبریداسیون را که در شکل مقابل نشان داده شده است، به حساب آورد.

پاسخ ۹۵: 120°

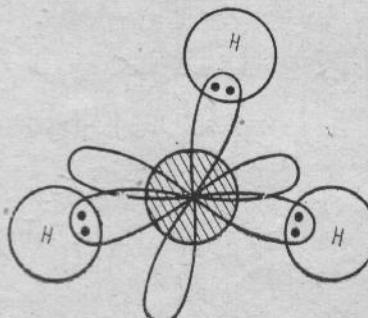
-۹۹- مولکول BH_3 می تواند در درجه حرارت زیاد وجود داشته باشد. تشکیل پیوند رایین سه الکترون خارجی بور و الکترونهای سه اتم نیتروژن را می توان با نمودار اریتالی ... نشان داد.

پاسخ ۹۶:



-۹۳- بر اساس نمودار اریتالی BF_3 در مسئله قبلی، می توان انتظار داشت که مولکول BF_2 ... است و بعلاوه زاویه بین پیوندهای $\text{B}-\text{F}$... است.

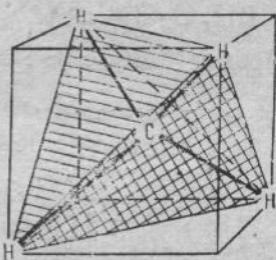
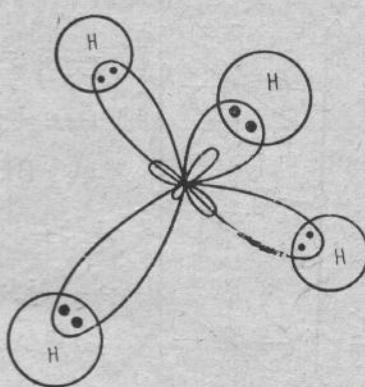
پاسخ ۹۷:



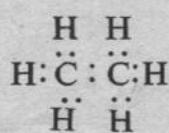
-۹۵- مولکول BF_2 که پیوندهای آن به وسیله اریتالهای هیبریدی sp^2 تشکیل می شود... است. در صورتی که مولکول NH_2 که پیوند در آن به وسیله اریتالهای p بوجود می آید، شکل ... را دارد.

پاسخ ۹۶: $1s^2 2s^2 2p_x^1 2p_y^1$

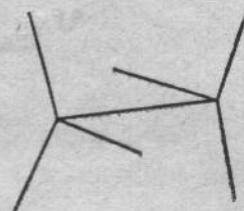
پاسخ ۱۰۱ :



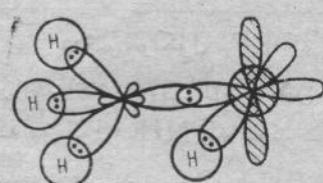
با ... است ، اشاره کنیم ، می توان گفت که مولکول متان
شکل چهار وجهی دارد .



پاسخ ۱۰۳ :



طوری تکمیل کنید تا
نمودار اربیتالی کامل
مولکول اتان بدست
آید .

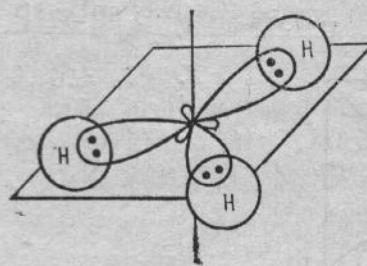
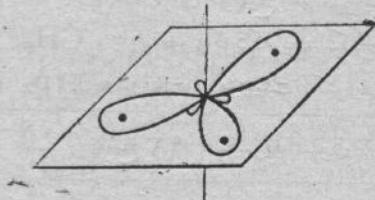


پاسخ ۱۰۵ :

یکان دوره نهم

پاسخ ۸۹ : هم ارز بودن

۹۰ - نمودار مقابله
نشان می دهد که سه
اربیتال هیبریدی sp^2
در یک صفحه قرار دارند.
زاویه بین اربیتالهای
مجاور ... است .



۹۲ - نمودار اربیتالی مولکول BF_3 را رسم کنید .

مسطح
هرم

پاسخ ۹۳ :

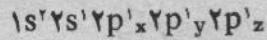
۹۴ - نمودار اربیتالی مولکول آمونیاک NH_3 ... است

مسطح
هرم

پاسخ ۹۵ :

۹۶ - هیئت الکترونی اتم کربن (C با عدد اتمی ۶) را
که در حالت اصلی قرار دارد ، بنویسید .

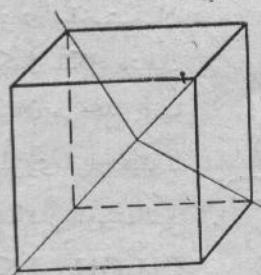
پاسخ ۹۷ : منتقل می شود



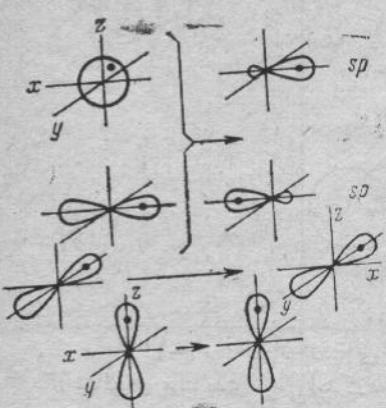
۹۸ - بر اثر اختلاط یا همانطور که مصطلح است بر اثر ...
اربیتالهای $2s$ ، $2p_x$ ، $2p_y$ و $2p_z$ چهار اربیتال هم ارز
تشکیل می شود .



پاسخ ۹۹ :



۱۰۰ - چهار
اربیتال هیبریدی sp^3
تحت زاویه $109^\circ 28'$ (شکل مقابله) قرار دارند.
اربیتالهای sp^3 رادر طول جهتی که در شکل نشان داده است ، رسم کنید .



پاسخ ۱۱۷ :

۱۱۶- با وجود اینکه تشکیل پیوند در مولکول H_2O را می‌توان با استفاده از اریتالهای s ، p_x ، p_y ، p_z ، sp نشان داد، طریقی دیگر نیز برای بیان این پیوند وجود دارد که مبتنی بر استفاده از اریتالهای هیبریدی^۳ sp است. این نمودار اریتالی را رسم کنید.

$109^{\circ} 28'$
 90°

پاسخ ۱۰۷ :

۱۱۸- هیئت الکترونی اتم سیلیسیم (Si) با شماره اتمی ۱۴ که در حالت اصلی قراردارد... است. نمودار اریتالی مولکول SiH_4 را رسم کنید.

پاسخ ۱۰۹ : در یک سطح
 120°

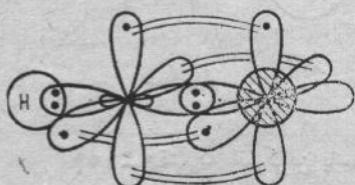
۱۱۹- اگر یکی از اریتالهای $2s$ و دو اریتال $2p$ اتم کربن که در حالت $z^2s^12s^12p^12p^1y2p^1x2p^1$ قرار دارد، سه اریتال هیبریدی^۲ sp^2 را تشکیل دهند، در آن صورت یک الکترون در اریتال... باقی می‌ماند.

پاسخ ۱۱۱ : π

۱۱۱- فرمول لیوئیس را برای مولکول اتیلن C_2H_4 بنویسید.

پاسخ ۱۱۳ : π

۱۱۴- سه پیوند σ هر اتم کربن در مولکول اتیلن بد و سیله اریتالهای هیبریدی بوجود آمده‌اند. این اریتالهای هیبریدی را می‌توان با اریتالهای... مشخص کرد.



پاسخ ۱۲۱ :

۱۱۲- تشکیل پیوند در مولکول CO_2 را نیز می‌توان با استفاده از اریتالهای s ، p_x ، p_y ، p_z اتم کربن توضیح داد. نمودار اریتالی مولکول CO_2 را رسم کنید.

پاسخ ۱۲۳ : خطی

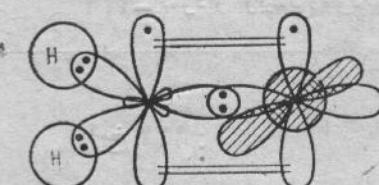
بورسی ... (دباله از صفحه ۳۲۲)

دید که به ازاء جمیع مقادیر k داریم $k < 9k - 1 < 9k - 9 < k - 9$ و مشاهده می‌شود که مفروضات مسئله به ازاء $k < 9$ صادق نیستند. از طرفی مفروضات مسئله به ازاء $k = 1$ صادقند. ولی ما این حالت را با درنظر گرفتن اینکه تعداد فرزندان بیش از یک است رد می‌کنیم.

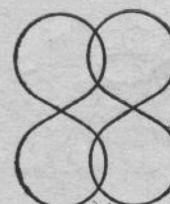
بنابراین k می‌تواند فقط مساوی ۹ باشد. اگر مقدار بذست آمده را در دستگاه (۱) قرار دهیم مقدار سهمیه هر یک از فرزندان را بذست می‌آوریم:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 9 \times 10^5$$

به این ترتیب تعداد فرزندان ۹ نفر بوده و به هر یک ۹۰۰۰۰ تومن رسانیده است.



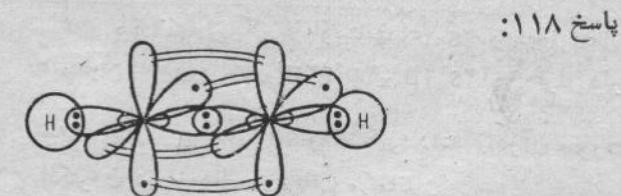
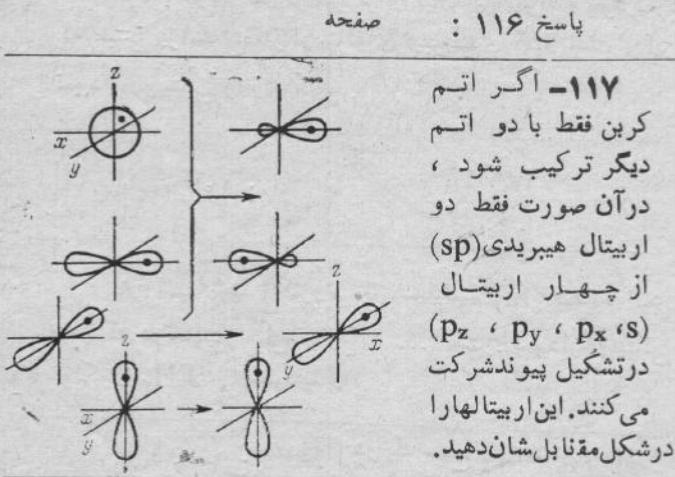
پاسخ ۱۱۵ :



۱۱۶- اگر پیوند همانطور که در شکل مقابل نشان داده شده است، از دو اریتال p که یکدیگر را می‌پوشانند تشکیل می‌شود، پس هر دو اریتال که هر یک دارای یک الکترون است، باید در یک... قرار گیرند.

۱۱۵- نمودار اربیتالی مولکول فرمالدئید H_2CO را رسم کنید.

پاسخ ۱۰۶:

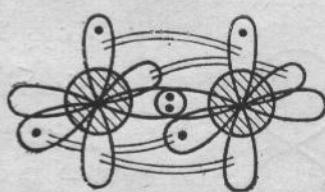


۱۱۹- معمولاً پیوند سه گانه بین اتمهای کربن را با یک پیوند ... و دو پیوند ... بیان می‌کنند.

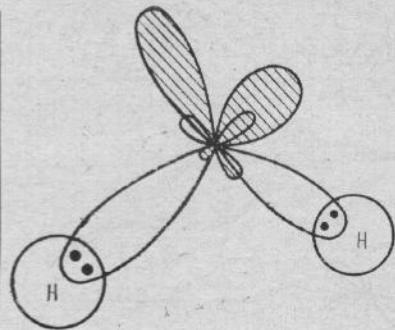
H:C:::N: : پاسخ ۱۲۰:

۱۲۱- نمودار اربیتالی مولکول HCN را رسم کنید.

$\ddot{\text{O}}\text{:}\text{C}:\ddot{\text{O}}\text{:}$: پاسخ ۱۲۲:

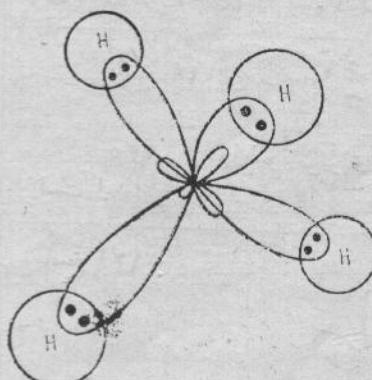


۱۲۳- بر اساس نمودار اربیتالی می‌توان انتظار داشت که شکل مولکول CO_2 باید ... باشد.



۱۰۷- از نمودار اربیتالی مولکول H_2O با استفاده از اربیتال‌های هیبریدی برمی‌آید که پیوندهای $\text{H}-\text{O}$ تحت زاویه ... قرار دارند. اگر هیبریداسیون نباشد، زاویه‌ای که به وسیله این پیوندها تشکیل می‌شود باید برابر با ... باشد (تحقیقات تجربی نشان می‌دهد که این زاویه برابر با 105° است).

پاسخ ۱۰۸:



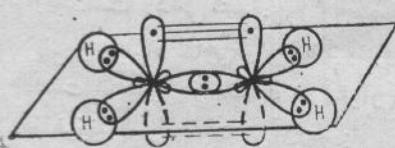
۱۰۹- وقتی که اتم کربن با اتم دیگر ترکیب می‌شود در آن صورت پرای تشکیل سه پیوند سه اربیتال sp^2 بکار می‌رود، نه چهار اربیتال sp . اربیتال‌های sp^2 در اتم کربن، همانند اربیتال‌های sp در اتم بور، ... قرار دارند و با یکدیگر زاویه ... می‌سازند.

پاسخ ۱۱۰:

۱۱۰- این اربیتال p بر صفحه‌ای که سه اربیتال sp^2 در آن قرار دارند، عمود است. در اینجا نیز مانند اربیتال‌های p در مولکول N_2 ، اربیتال p یکی از اتمهای کربن می‌تواند با اربیتال اتم دیگر پوشیده شود و پیوند ... تشکیل دهد.

HH
 H-C:::C-H

پاسخ ۱۱۲:



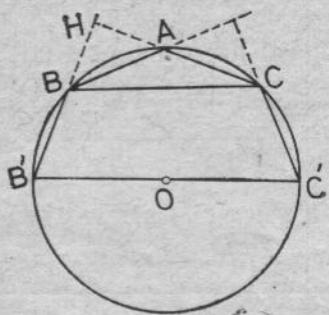
۱۱۳- نمودار اربیتالی مولکول اتیلن (شکل مقابل) نشان می‌دهد که اتمهای کربن با یکدیگر به وسیله یک پیوند ... و یک پیوند ... ترکیب شده‌اند.

پاسخ ۱۱۴:

صفحه ۳۳۰

حل مسائل مسکان شماره: ۹۰

زیرا هریک متمم زاویه A است. مجموع اندازه‌های این دو زاویه برابر است با نصف مجموع اندازه‌های دوکمان $B'A$ و $C'B'$. چون AC'



متمم هر یک از این زاویه‌ها است، پس اندازه زاویه A برابر با 45° درجه است.

۲) فرض می‌کنیم زاویه A منفرجه باشد. در این صورت نیز دو زاویه ABB' و ACC' با هم برابرند، زیرا ضلعهای آنها برهم عمودند. از طرف دیگر داریم:

$$jABB' + jACC' =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{CC'} + \widehat{C'B'} + \widehat{B'B} + \widehat{BA}) \\ &= \frac{1}{2}(360^\circ + 180^\circ) = 270^\circ \end{aligned}$$

پس اندازه هریک از دو زاویه ABB' و ACC' برابر با 135° درجه است. نسبت به مثلث ABH داریم:

$$\begin{aligned} jABB' &= 135^\circ = jBAH + 90^\circ \\ jBAH &= 45^\circ \Rightarrow jBAC = 135^\circ \end{aligned}$$

حل مسائل ویژه‌کلاس چهارم ریاضی

۹۰/۳ - ترجمه فتح الله زرگری
به ازای کدام اعداد طبیعی a و b عدد:

$$N = 4ab + 22a + 47b$$

حل مسائل ویژه‌کلاس چهارم دیزستان

۹۰/۱ - معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(m-2)x^2 - (2m+1)x + 4m = 0$$

هرگاه x' و x'' ریشه‌های این معادله اندازه‌های ضلعهای مثلث قائم الزاویه‌ای باشند که در آن طول و ترتیب ابر با 5 است، مقدار m را حساب کنید.

حل - به ترتیب داریم:

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 25$$

$$\left(\frac{2m+1}{m-2}\right)^2 - 2 \times \frac{4m}{m-2} = 25$$

$$(2m+1)^2 - 8m(m-2) = 25(m-2)^2$$

$$29m^2 - 120m + 99 = 0$$

$$m = \frac{60 \pm \sqrt{729}}{29} = \frac{33}{29} \text{ یا } 3$$

۹۰/۲ - ترجمه از روسی توسط فتح الله زرگری

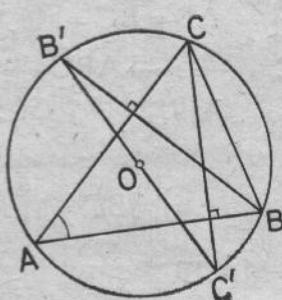
ارتفاعهای رأسهای B و C از مثلث ABC دایسره محيطی مثلث را در نقاط B' و C' قطع می‌کند. هرگاه $B'C'$ قطری از دایره محيطی مثلث باشد، اندازه زاویه A را پیدا کنید.

حل - اگر زاویه A قائم باشد سه نقطه B' و C' و

A برهم منطبقند. پس دو حالت در نظر می‌-

گیریم:

- فرض می‌کنیم زاویه A حاده باشد. دو زاویه ABB' و ACC' با هم برابرند.



مقادیر عددی y و z از روی این مقدار مشخص خواهند شد.

۹۰/۶ - ترجمه فتح الله زرگری

عددهای حقیقی و مثبت a و k معلومند. تصاعدی هندسی را مشخص کنید که جمله اول آن a و هر جمله آن برابر باشد با مجموع تمام جمله‌های بعداز خودش.

حل- فرض می‌کنیم که q قدر نسبت و n تعداد جمله‌های تصاعد باشد، عدد طبیعی i را درنظرمی‌گیریم و جمله‌های مرتبه n ام و مرتبه i ام تصاعد را به ترتیب با I_n و I_i نشان می‌دهیم. به ازای همه مقادیر طبیعی i (کوچکتر از n) باید داشته باشیم:

$$I_i = k(I_{i+1} + I_{i+2} + \dots + I_n)$$

$$aq^{-1} = k(aq^i + aq^{i+1} + \dots + aq^{n-1})$$

$$aq^{i-1} = kaq^{i-1}(q + q^r + \dots + q^{n-i})$$

$$1 = kq(1 + q + q^r + \dots + q^{n-i-1})$$

این تساوی فقط وقتی به ازای همه مقادیر طبیعی i (کوچکتر از n) برقرار است که $|q| < 1$ و n نامحدود باشد. در این

صورت داریم:

$$1 = kq(1 + q + q^r + \dots)$$

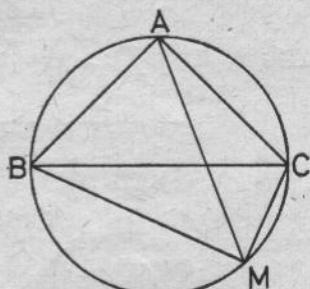
$$1 = kq\left(\frac{1}{1-q}\right) \Rightarrow q = \frac{1}{k+1}$$

۹۰/۷ - از محمد معینی

مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین ABC به طول ساق $AB = AC = a$ مفروض است. مکان هندسی نقطه M را تعیین کنید که داشته باشیم

$$MB + MC = MA\sqrt{2}$$

حل- از ضرب طرفین تساوی داده شده در a داریم:



$$a \cdot MB + a \cdot MC = MA \cdot a\sqrt{2}$$

بنابراین $AB = BC = a$

و مثلث ABC متساوی-

الساقین و در زاویه

قائم است پس

$BC = a\sqrt{2}$ و داریم:

$$AC \cdot MB + AB \cdot MC = MA \cdot BC$$

با به عکس قضیه بسطمیوس چهار ضلعی $ABMC$ محاطی

بر عدد $M = a^2 + b^2 + 811$ بخش پذیر است؟

حل- باید داشته باشیم:

$$4ab + 22a + 47b \geq a^2 + b^2 + 811$$

$$a^2 - 2(2b + 11)a + b^2 - 47b + 811 \leq 0$$

$$\Delta = -3b^2 + 91b - 690 \geq 0 \Rightarrow 15 \leq b \leq 15 \frac{1}{3}$$

b عدد طبیعی است پس $b = 15$ و در ازای آن $a = 41$ بدهست می‌آید.

۹۰/۸ - فرستنده: جواد فیض، ترجمه ازانگلیسی

هرگاه اعداد حقیقی a و c و b و d به همین ترتیب

به تصاعد هندسی باشند ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$$

حل- اگر r قدر نسبت تصاعد باشد داریم:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) =$$

$$= (a^2 + a^2r^2 + a^2r^4)(a^2r^2 + a^2r^4 + a^2r^6) =$$

$$= a^4r^8(1 + r^2 + r^4)^2 = (a^2r + a^2r^3 + a^2r^5)^2$$

$$= (ab + bc + cd)^2$$

۹۰/۵ - فرستنده: روح انگیز دولت فر

اگر x و y و z به همین ترتیب به تصاعد هندسی

باشند از معادلات زیر مقادیر عددی آنها تعیین کنید:

$$\begin{cases} x^3 + y^r = z^4 \\ x^r + y^r = z^r \end{cases}$$

حل- با توجه به اینکه $xz = y^2$ است، معادله دوم

می‌شود:

$$z^2 - xz - x^2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{x(1 + \sqrt{5})}{2}$$

(جواب منفی قابل قبول نیست)

$$y = \sqrt{xz} = x\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

مقادیر y و z بر حسب x را در معادله اول منظور می‌کنیم:

$$x^3 + x^r\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = x^4\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$$

چون $x \neq 0$ است پس طرفین را بر $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ تقسیم می‌کنیم و نتیجه

می‌شود:

$$x = \frac{4 + (1 + \sqrt{5})\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{14 + 6\sqrt{5}}$$

$$AB : y = 3x + 6$$

$$BC : y + 4x = 6$$

$$CA : 5x + 3y = 4$$

سهمی P از نقطه A می‌گذرد و مماس بر آن در این نقطه با ضلع BC موازی است و همچنین محور سهمی از M وسط ضلع BC می‌گذرد و با محور y' موازی است. معادله این سهمی را مشخص کنید.

حل - به ترتیب داریم:

$$A \left\{ \begin{array}{l} y = 3x + 6 \\ 5x + 3y = 4 \end{array} \right. \Rightarrow A \left| \begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$B \left\{ \begin{array}{l} y = 3x + 6 \\ y + 4x = 6 \end{array} \right. \Rightarrow B \left| \begin{array}{l} 0 \\ 6 \end{array} \right.$$

$$C \left\{ \begin{array}{l} y + 4x = 6 \\ 5x + 3y = 4 \end{array} \right. \Rightarrow C \left| \begin{array}{l} 2 \\ -2 \end{array} \right.$$

$$M(x = \frac{0+2}{2} = 1) \quad y = \frac{6-2}{2} = 2$$

چون محور سهمی با محور y' موازی است پس معادله آن به صورت $y = ax' + bx + c$ است. محور سهمی به معادله $x = 1$ است پس:

$$\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (1)$$

سهمی از نقطه A می‌گذرد پس:

$$3 = a - b + c \quad (2)$$

مماس بر سهمی در نقطه A با BC موازی است. ضریب زاویه‌ای BC برابر با -4 است و:

$$y' = 2ax + b \Rightarrow -4 = -2a + b \quad (3)$$

از معادله‌های (1) و (2) و (3) نتیجه می‌شود:

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 0$$

$$y = x' - 2x$$

۹۰/۱۰ - از علی حاجی ابراهیمی

حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بدست آورید:

$$P = \frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \cos 40^\circ}$$

است و چون زاویه BAC قائم است پس مکان M دایره به قطر BC است.

۹۰/۸ - از سید جمال آشفته

مثلث قائم الزاویه ABC ($A = 90^\circ$) و خط K واقع در صفحه آن مفروض است. خط L را موازی با خط K چنان رسم کنید که اگر M و N به ترتیب نقاط تلاقی آن با اضلاع یا با امتداد اضلاع AB و AC باشد، داشته باشیم:

$$BM^2 + MN^2 + NC^2 = BC^2$$

حل - به فرض آنکه مسئله حل شده باشد، از B و N به K و L رسم می‌کنیم که در AB و AC تلاقی می‌شوند و D خواهیم داشت: $ND = BM$ و $MN = BD$

$$DN^2 + BD^2 + NC^2 = BC^2$$

اما زاویه DNC قائم است پس $DN^2 + NC^2 = CD^2$ خواهیم داشت:

$$BD^2 + CD^2 = BC^2$$

بنابراین $DN^2 + NC^2 = CD^2$ بوده است و D بر دایره به قطر BC قرار دارد. راه حل مسئله چنین می‌شود: دایره به قطر BC و خطی از B موازی با خط K رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D تلاقی کنند. از D موازی با AB رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در N تلاقی کند. خطی که از N موازی با خط K رسم شود جواب مسئله است.

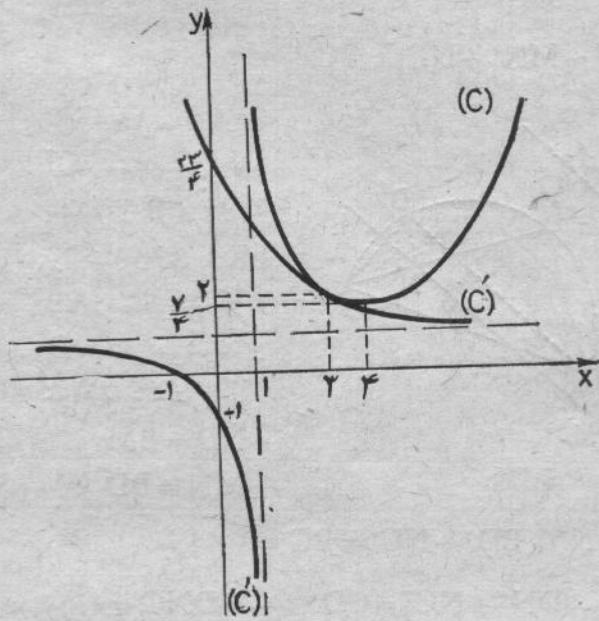
به سادگی محقق می‌شود که از دو نقطه M و N یکی داخل ضلع و دیگری در امتداد ضلع مریب قرار دارد بقسمی که A در خارج هر دوی از دوپاره خط BM و CN واقع است.

حل مسائل ویژه کلاسهای پنجم دبیرستان

۹۰/۹ - معادلات اضلاع مثلث ABC عبارتند از:

$$(C') : y = \frac{x+1}{x-1}, y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

x	-∞	-1	+	1	+∞
y'		-		-	
y	1	↘	↙ -1 ↘	-∞ ↗ +∞ ↘ 1	



اگر $y = ax + b$ معادله مماس مشترک دو منحنی باشد به.
ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{23}{4} &= ax + b \\ x^2 - 4(a+2)x + 23 - 4b &= 0 \\ \Delta' = 4a^2 + 16a + 4b - 7 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = ax + b$$

$$ax^2 - (a-b+1)x - b - 1 = 0$$

$$\Delta = a^2 + b^2 + 2ab + 6a - 2b + 1 = 0 \quad (2)$$

از معادله (1) مقدار b را برحسب a بدست آورده در معادله (2) قرار می‌دهیم، پس از اختصار خواهیم داشت:

$$16a^2 + 96a^3 + 120a^2 + 56a + 9 = 0$$

می‌دانیم که دو منحنی در نقطه به طول ۳ بر یکدیگر مماسند پس مماس بر منحنیها در نقطه مذبور یک مماس مشترک آنها

حل - به ترتیب داریم:

$$\sin 1^\circ + \sin 4^\circ = 2 \sin 25^\circ \cos 15^\circ$$

$$\sin 2^\circ + \sin 3^\circ = 2 \sin 25^\circ \cos 5^\circ$$

$$\cos 1^\circ + \cos 4^\circ = 2 \cos 25^\circ \cos 15^\circ$$

$$\cos 2^\circ + \cos 3^\circ = 2 \cos 25^\circ \cos 5^\circ$$

$$P = \frac{2 \sin 25^\circ (\cos 15^\circ + \cos 5^\circ)}{2 \cos 25^\circ (\cos 15^\circ + \cos 5^\circ)} = \tan 25^\circ$$

حل مسائل ویژه کلاس پنجم ریاضی

۹۰/۱۱ - دو منحنی C و C' به معادله‌های زیر را

در نظر می‌گیریم:

$$(C) : y = ax^2 + bx + c, \quad (C') : y = \frac{x+1}{x-1}$$

هرگاه دو منحنی در نقطه به طول ۳ بر یکدیگر مماس بوده و در همین نقطه از یکدیگر بگذرند اولاً مقادیر a و b و c را معین کنید.

ثانیاً دو منحنی را در یک شکل رسم کنید و معادله مماس (یا مماسهای) مشترک آنها را بدست آورید.

حل - برای آنکه دو منحنی در نقطه به طول ۳ بر یکدیگر مماس باشند و در ضمن از یکدیگر بگذرند لازم و کافی است که معادله حاصل از حذف y بین معادلات دو منحنی ریشه مکرر مرتبه سه داشته باشد.

$$ax^2 + bx + c = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + (b-a)x^2 + (c-b-1)x - c - 1 &= 0 \\ a(x-3)^2 &= ax^2 - 9ax^2 + 27ax - 27a \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b-a = -9a \\ c-b-1 = 27a \\ -c-1 = -27a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -2 \\ c = \frac{23}{4} \end{cases}$$

$$(C) : y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{23}{4}, \quad y' = \frac{1}{2}x - 2$$

x	-∞	0	4	+∞
y'		-	0	+
y	+∞ ↘ \frac{23}{4} ↘ \frac{7}{4} ↗ +∞			

$$a = 1 \text{ و } b = 2 \Rightarrow y = x + 2$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{7}} \text{ و } b = -\frac{4}{\sqrt{7}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{7}}x - \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{|-4a+2|}{3\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2} \Rightarrow a = -1 \text{ و } -7$$

$$a = -1 \text{ و } b = 4 \Rightarrow y = -x + 4$$

$$a = -7 \text{ و } b = 18 \Rightarrow y = -7x + 18$$

۹۰/۱۳ - فرستنده: جواد فیض، ترجمه از انگلیسی.

در دو مثلث $A'B'C'$ و ABC زاویه های A' و A متساویند. هرگاه مجموع سینوسهای زاویه های مثلث ABC از مجموع سینوسهای زاویه های مثلث $A'B'C'$ کوچکتر باشد، ثابت کنید که:

$$B' - C' < B - C$$

حل - بنابراین فرض داریم:

$$B + C = B' + C'$$

$$\sin B + \sin C < \sin B' + \sin C'$$

$$2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} < 2 \sin \frac{B'+C'}{2} \cos \frac{B'-C'}{2}$$

$$\frac{B-C}{2} < \frac{B'-C'}{2} \Rightarrow B - C > B' - C'$$

۹۰/۱۴ - از عباس جزء امیر سیافی دانش آموز

ششم ریاضی دبیرستان رستاخیز

ثابت کنید که عبارت زیر مکعب کامل است:

$$A = \sin^3 x + \cos^3 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

حل - با استفاده از فرمولهای $\sin^3 x$ و $\cos^3 x$ داشت:

$$A = 3 \sin x - 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x - 3 \cos x$$

$$A = 3 \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x \\ - 3 \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$A = \sin^2 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin x \cos^2 x - \cos^2 x \\ = (\sin x - \cos x)^3$$

۹۰/۱۵ - ترجمه داوید ریحان

کره به شعاع ۲ در مخروط دور قائم به شعاع قاعده

است. ضریب زاویدای این مماس مشترک برابر $\frac{1}{7}$ است.

$\frac{1}{7} - a$ یک جواب معادله بالا است و از آنجا معادله

بالا به صورت زیر تجزیه می شود:

$$(2a+1)(2a+9) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ یا } a = -\frac{9}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{7}{2}, \quad a = -\frac{9}{2} \Rightarrow b = \frac{35}{2}$$

دو منحنی دارای دو مماس مشترک به معادله های زیر می باشند:

$$x + 2y = 7 \quad 9x + 2y = 35$$

۹۰/۱۳ - در صفحه محورهای مختصات دایرة C به

مرکز $(1, 1)$ و به شعاع $R = \sqrt{2}$ و دایرة C' به مرکز

$(3, 5)$ و به شعاع $R' = \sqrt{2}$ را در نظر می گیریم. اولاً

ثابت کنید که این دو دایره همت خارجند. ثانیاً معادلات مماسهای

مشترک داخلی و خارجی آنها را بدست آورید. (در حل مسئله

به معادلات دایره ها نیازی نیست)

حل - اولاً داریم:

$$II' = \sqrt{(1-5)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$2\sqrt{5} > 3\sqrt{2} \Rightarrow II' > R + R'$$

ثانیاً معادله مماس مشترک دو دایره را به صورت

$$y = ax + b \quad ax - y + b = 0$$

فرض می کنیم. در این صورت نقاط I و I' از این خط به ترتیب

به فاصله های $\sqrt{2}$ و $R\sqrt{2}$ می باشند:

$$(1) \quad \frac{|a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2} \quad (2) \quad \frac{|5a-3+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 2\sqrt{2}$$

از تقسیم نظیر به نظیر طرفین دو تساوی بر یکدیگر داریم:

$$\left| \frac{a-1+b}{5a-3+b} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a+b-1}{5a+b-3} = \pm \frac{1}{2}$$

$$b = 3a - 1 \quad \text{یا} \quad b = \frac{5-7a}{3}$$

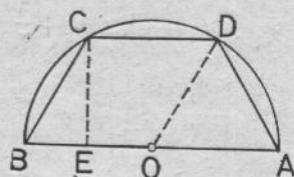
این مقادیر را به ترتیب در یکی از رابطه های (۱) یا (۲)

منظور می کنیم:

$$\frac{|4a-2|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2} \Rightarrow a = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{7}$$

منطبق است و شعاع قاعده کوچک آن نصف شعاع قاعده بزرگ آن است. نسبت سطح جانبی مخروط به سطح نیمکره را بدست آورید.

حل - صفحه شکل را منطبق بر یکی از صفحات نصف النهاری کرده و



مخروط ناقص اختیار می کنیم، در این صورت مطابق با شکل خواهیم داشت:

$$CD = OB = OD = BC = AD$$

چهار ضلعی $BCDO$ لوزی است و در نتیجه E وسط است و اگر S سطح جانبی مخروط ناقص و S' سطح نیمکره باشد داریم:

$$S = \frac{1}{4}(\pi AB + \pi CD)BC = \frac{3}{4}\pi R^2$$

$$S' = 2\pi R^2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{3}{4}$$

حل مسائل ویژه کلاس‌های ششم بیرونی

۹۰/۱۷ - هذلولی به معادله زیر مفروض است:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

اولاً مختصات رأسهای A و A' و کانونهای F و F' از این هذلولی را مشخص کنید بنابر آنکه A و F به ترتیب در سمت راست مرکز هذلولی واقعند.

ثانیاً معادله سهمی را بنویسید که F' کانون آن و رأس آن می‌باشد.

ثالثاً مختصات نقاط تلاقی هذلولی و سهمی را بدست آورید.

حل - اولاً به ترتیب داریم:

$$\omega(2) \cdot b = 3 \text{ و } c = \sqrt{13}$$

$$A(4) \text{ و } A'(1) \text{ و }$$

$$F(2 + \sqrt{13}) \text{ و } F'(2 - \sqrt{13})$$

یکان دوره نهم

R و به ارتفاع h محاط است. اولاً ثابت کنید که:

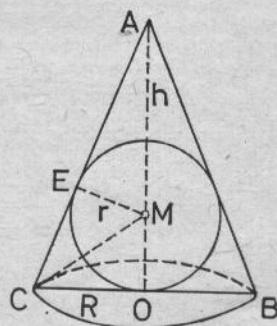
$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{rh}$$

ثانیاً اگر V و S' به ترتیب حجم و سطح کره و مخروط باشد ثابت کنید که:

$$\frac{V}{V'} = \frac{S}{S'}$$

حل - اولاً مطابق شکل داریم:

$$AE^2 = AM^2 - ME^2 = AM^2 - MO^2 = AO^2 - 2AO \cdot MO = h^2 - 2hr$$



مثلثهای ACO و AME مشابهند و:

$$\frac{AE}{AO} = \frac{EM}{CO} \text{ یا } \frac{h^2 - 2hr}{h^2} = \frac{r^2}{R^2}$$

$$1 - \frac{2r}{h} = \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{2}{rh}$$

ثانیاً چون MC نیمساز زاویه ACO است، با فرض 1 داریم:

$$\frac{CO}{AC} = \frac{MO}{AM} \text{ یا } \frac{R}{l} = \frac{r}{h-r}$$

$$Rh = r(l+R)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^2 \text{ و } V' = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R r(l+R)$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{4r^2}{R(l+R)}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{4\pi r^2}{\pi R^2 + \pi R l} = \frac{4r^2}{R(R+l)}$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{S}{S'}$$

۹۰/۱۸ - ترجمه ۹۰/۱۵ بید ریحان

مخروط دوار ناقصی در نیمکره به مرکز O محاط شده است بقسمی که قاعده بزرگ مخروط ناقص بر قاعده نیمکره

ثانیا داریم:

$$(y - \beta)^2 = -4p(x - a)$$

$$\alpha = 4 \text{ و } \beta = 1$$

$$p = F'A = 4 - (2 - \sqrt{13}) = 2 + \sqrt{13}$$

$$(y - 1)^2 = -(4 + 2\sqrt{13})(x - 4)$$

$$y^2 - 2y + 2(2 + \sqrt{13})x - 15 - 8\sqrt{13} = 0$$

۹۰/۱۸ - از علی حاجی ابراهیمی

معادله زیر را حل کنید:

$$\cos 8x + 32 \sin^9 x - 48 \sin^4 x + 18 \sin^2 x = 1$$

حل - به ترتیب داریم:

$$\cos 8x = 1 - 2(16 \sin^9 x - 24 \sin^4 x + 9 \sin^2 x)$$

$$\cos 8x = 1 - 2(3 \sin x - 4 \sin^3 x)^2$$

$$\cos 8x = 1 - 2 \sin^2 3x = \cos 6x$$

$$8x \pm 6x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \text{ یا } \frac{k\pi}{7}$$

حل مسائل ویژه کلاس ششم ریاضی

۹۰/۱۹ - جدول تغییرات و نمایش هندسی تابع زیر را

رسم کنید:

$$y = x \sqrt{1 - \frac{1}{|x|}}$$

حل - تابع فقط وقتی معین است که:

$$|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

اگر x به X - تبدیل شود y به y - تبدیل می‌گردد پس مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است.

$$y = x \sqrt{1 - \frac{1}{X}} = \sqrt{x^2 - x}$$

$$y' = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}, x \geq 1 \Leftrightarrow y' > 0$$

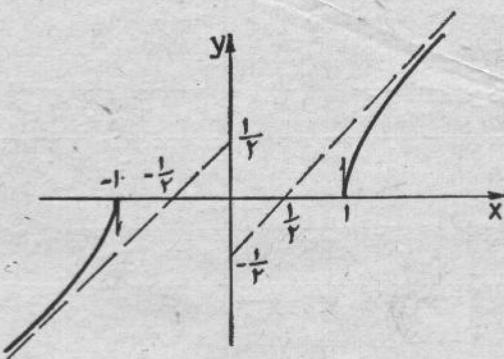
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\lim(\sqrt{x^2 - x} - x) = \lim \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = -\frac{1}{2}$$

خط به معادله $y = x - \frac{1}{2}$ مجانب منحنی است.

x	1	$+\infty$
y'	∞	+
y	0	\nearrow

با توجه به تقارن نسبت به مبدأ مختصات، منحنی نمایش تابع مفروض به شکل زیر است:



۹۰/۲۰ - دوتابع زیر مفروض است:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{a}} \quad \text{و} \quad y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

کوچکترین مقدار مثبت قابل قبول a را پیدا کنید که به ازای آن منحنیهای نمایش هندسی دوتابع در نقطه به طول گویا یکدیگر را تلاقی کنند. پس از تعیین a جدولهای تغییرات دوتابع را تعیین کرده و دو منحنی نمایش هندسی آنها را در یک شکل رسم کنید. اگر a طول نقطه تلاقی دو منحنی باشد، سطح محصور بین دو منحنی و خط $x = a + 2$ را حساب کنید.

حل - از حذف y بین دوتابع و پس از اختصار و با توجه به اینکه دو منحنی نقطه مشترک به طول ۱ ندارند، خواهیم داشت:

$$x^2 - (a+2)x + a - 3 = 0$$

مبین این معادله $\Delta = a^2 + 16 = 0$ و $a \neq 0$ است. کوچکترین

عدد مجدور بزرگتر از ۱۶ عدد ۲۵ است پس:

$$a^2 = 25 - 16 = 9 \text{ و } a > 0 \Rightarrow a = 3$$

تابع $y = \sqrt{\frac{x-1}{3}}$ در ازای $x \geq 1$ معین و پیوسته است و:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3(x-1)}} > 0$$

از حل معادلات دو منحنی با یکدیگر نتیجه خواهد شد که دو منحنی در نقطه به طول $x = 5$ متقاطعند. برای سطح محصور بین دو منحنی و خط $x = 7$ به ترتیب داریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{3}} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{9}(x-1)\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2 - 2x - 3} + C$$

$$S = |F(7) - F(5)| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

۹۰/۲۱ از جواب فیض

ثابت کنید که معادله زیر ریشه حقیقی دارد:

$$3\cos x = 4\sin^2 x$$

[توجه - در صورت همثیله مندرج دریکان شماره ۹۰ که

چاپ شده است «ریشه حقیقی ندارد» اشتباه بوده است.]

حل - به ترتیب داریم:

$$9\cos^2 x = 16\sin^2 x$$

$$16\sin^2 x + 9\cos^2 x - 9 = 0$$

با فرض $x = \sin^{-1} X$ داریم:

$$X^2 + \frac{9}{16}X - \frac{9}{16} = 0 \quad (\text{E})$$

در این معادله $p = \frac{9}{16}$ و $q = -\frac{9}{16}$ است پس

برای X فقط یک جواب ثابت وجود دارد، از طرفی از معادله

مفروض داریم:

$$-1 \leq \cos x = \frac{4}{3}\sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq \sqrt{\frac{9}{16}}$$

مقدار عبارت معادله (E) در ازای $x = \sin^{-1} X$ منفی و در

$$\text{ازای } x = \sqrt{\frac{9}{16}} \text{ مشبّت است، پس جواب معادله مذبور}$$

بین صفر و $\sqrt{\frac{9}{16}}$ واقع است و قابل قبول می‌باشد.

۹۰/۲۲ فرستنده: خشایار خواجهیان، ششم ریاضی

دیارستان هدف شماره ۳

اولاً ثابت کنید خطی که مرکز دایره محیطی مثلث را به

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

منحنی مجانب ندارد اما امتداد مجانبی آن امتداد محور طولها است:

x	1	$+\infty$
y'	$+\infty$	+
y	0	$+\infty$

تابع دوم وقتی معین است که $x > 3$ یا $x < -1$ باشد و در این دو فاصله:

$$y' = \frac{-4}{(x^2 - 2x - 3)\sqrt{x^2 - 2x - 3}} < 0$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 1$$

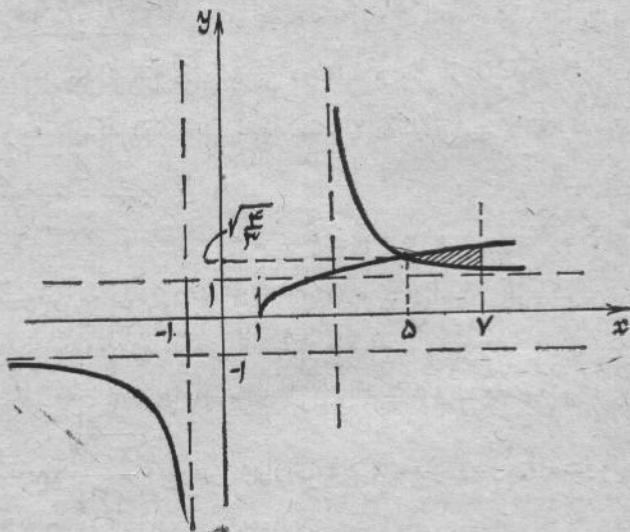
$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -1$$

$$x \rightarrow -1 \text{ یا } x \rightarrow 3 \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$$

منحنی دارای چهار مجانب به معادله‌های زیر است:

$$x = 3, x = -1, y = 1, y = -1$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	-			-
y	-1	$-\infty$	$+\infty$	1



حل - اگر $a = b = c$ باشد تمام کسرهای به شکل

$$\frac{aa}{aa} \quad \text{به شرط } 1 < a < 9 \text{ جواب مسئله‌اند.}$$

فرض می‌کنیم a و b و c رقمهای متمایز باشند و چنین می‌نویسیم:

$$\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c} \Rightarrow b = \frac{9ac}{10a-c}$$

در ازای ۱ داریم:

$$b = \frac{9c}{10-c} = \frac{9}{10-c} - 9$$

$10-c$ مقسوم علیهی از 90 و در ضمن $9 < b \leq 1$ است.

از نامساوی اخیر داریم $1 < c \leq 5$ و در نتیجه $c = 5$ باشد می‌آید:

$$a = 1 \text{ و } c = 5 \Rightarrow b = 9 \rightarrow \frac{9}{95} = \frac{1}{5}$$

$$a = 1 \text{ و } c = 4 \Rightarrow b = 6 \rightarrow \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

در ازای ۲ با روش مشابه برای b و c به ترتیب مقادیر ۶ و ۵ بدست می‌آید که داریم:

$$\frac{26}{95} = \frac{2}{5}$$

در ازای مقادیر $a = 3$ ، $a = 5$ و ... و $a = 9$ برای b و c مقادیر متمایز بدست نمی‌آید و در ازای $a = 4$ خواهیم داشت:

$$\frac{49}{98} = \frac{4}{8}$$

۹۰/۲۴ - ترجمه فتح الله زرگری

هرگاه x و y دو عدد طبیعی باشند، عددهای طبیعی را پیدا کنید که با کسر زیر برابر باشند:

$$N = \frac{x^2 + x + 1}{xy - 1}$$

حل - داریم:

$$Ny = \frac{x^2y + xy + y}{xy - 1} = x + 1 + \frac{x + y + 1}{xy - 1}$$

$$x + y + 1 \geq xy - 1 \Rightarrow (y - 1)x \leq y + 2$$

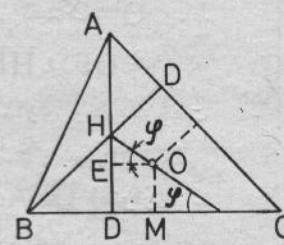
اما $y - 1 \geq 0$ است. اگر $y = 1$ باشد داریم:

$$N = x + 2 + \frac{3}{x-1} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } 4 \text{ و } N = 7$$

مرکز ارتفاعی آن وصل می‌کند با ضلع BC زاویه حاده φ می‌سازد که:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{\operatorname{tg}B \operatorname{tg}C - 3}{\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C} \right|$$

ثانیاً هرگاه دورأس B و C از مثلث ثابت باشد و رأس A از آن چنان تغییر کند که $|B - C| = \alpha$ مقدار ثابت و همچنین اندازه زاویه φ نیز ثابت بماند، مکان رأس A را مشخص کنید.



حل - مطابق با

شکل به ترتیب داریم:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{HE}{OE}$$

$$HE = |HD - DE| = |HD - OM|$$

$$HD = BD \operatorname{tg}HBD = BD \operatorname{cotg}C =$$

$$= c \cos B \cdot \operatorname{cotg}C = 2R \sin C \cos B \operatorname{cotg}C = 2R \cos B \sin C$$

$$OM = R \cos A = -R \cos(B + C) =$$

$$= R \sin B \sin C - R \cos B \cos C$$

$$HE = R |\sin B \cos C - \cos B \sin C|$$

$$OE = MD = |BM - BD| = R |\sin A - \sin C \cos B| = R |\sin B \cos C - \cos B \sin C|$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{\sin B \cos C - \cos B \sin C}{\sin B \cos C - \cos B \sin C} \right| = \left| \frac{3 - \operatorname{tg}B \operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C} \right| =$$

$$= \left| \frac{\operatorname{tg}B \operatorname{tg}C - 3}{\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C} \right|$$

ثانیاً به فرض $\operatorname{tg}\alpha = k$ داریم:

$$\left| \frac{\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C}{1 + \operatorname{tg}B \operatorname{tg}C} \right| = k$$

از خوب طرفین این رابطه در طرفین رابطه $\operatorname{tg}\varphi$ خواهیم داشت:

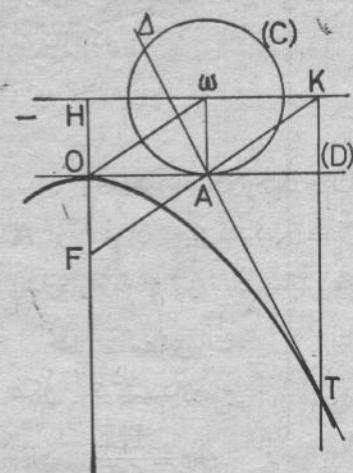
$$\left| \frac{\operatorname{tg}B \operatorname{tg}C - 3}{1 + \operatorname{tg}B \operatorname{tg}C} \right| = k \operatorname{tg}\varphi$$

نتیجه خواهد شد که مقدار $\operatorname{tg}B \operatorname{tg}C$ مقدار ثابت p است و بنا به مسئله معروفی که در این مورد می‌دانیم مکان A یک بیضی یا یک هذلولی است بر حسب آنکه مقدار p ثابت یا منفی باشد.

۹۰/۳۳ - فرستنده: قوام نحوی

کسرهای به شکل $\frac{ab}{bc}$ را تعیین کنید که با کسر

برابر باشند.



حل - اگر
 مرکز دایرة C و A و C نقطه تماس آن بر خط باشد، از O عمودی بر D اخراج می کنیم و روی آن نقاط H و F را چنان تعیین می کنیم که O وسط ωA با OF و HF مساوی و دریک جهت باشد. چهار ضلعی $OFA\omega$ قطع کند، A وسط FK می باشد: \triangle قطبی O نسبت به دایرة C از A می گذرد و بر $O\omega$ عمود است پس بر FK نیز عمود است. قرینه نقطه F نسبت به خط \triangle بر خط $H\omega$ قرار دارد، پس \triangle بر سهمی مماس است که F کانون و $H\omega$ خط هادی آن است.

الاضلاع است و $O\omega$ موازی با FA است و چون O وسط است، پس اگر FA را امتداد دهیم تا خط $R\omega$ رادر قطع کند، A وسط FK می باشد: \triangle قطبی O نسبت به دایرة C از A می گذرد و بر $O\omega$ عمود است پس بر FK نیز عمود است. قرینه نقطه F نسبت به خط \triangle بر خط $H\omega$ قرار دارد، پس \triangle بر سهمی مماس است که F کانون و $H\omega$ خط هادی آن است.

حل مسائل گوناگون

۹۰/۲۷ - از عباس جزء امیر سیافی

ثابت کنید که اگر داشته باشیم :

$$(xy)^m = (yz)^n = (zx)^p$$

خواهیم داشت :

$$x^{n(p-m)} \cdot y^{p(m-n)} z^{m(n-p)} = 1$$

حل - به ترتیب داریم :

$$(xy)^m = (yz)^n \Rightarrow y^{m-n} = \frac{z^n}{x^m}$$

$$y^{p(m-n)} = \frac{z^{pn}}{x^{pm}}$$

$$z^{m(n-p)} = \frac{x^{pm}}{y^{nm}} \text{ و } x^{n(p-m)} = \frac{y^{mn}}{z^{pn}}$$

از ضرب نظیر به نظری طرفین سه رابطه بالا، رابطه مطلوب بدست می آید.

اگر $y > 1$ باشد داریم:

$$x \leq \frac{y+2}{y-1} = 1 + \frac{3}{y-1}$$

$$y \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{y-1} \leq 3 \Rightarrow x \leq 4$$

$$x = 1 \Leftrightarrow N = \frac{3}{y-1} \Rightarrow N = 1$$

$$x = 2 \Leftrightarrow N = \frac{7}{2y-1} \Rightarrow N = 1$$

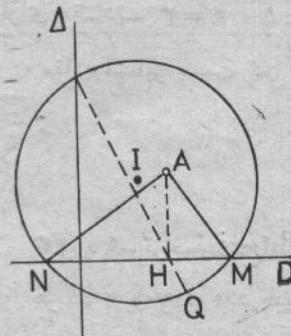
$$x = 3 \Rightarrow N = \frac{13}{3y-1} \Rightarrow N \neq$$

$$x = 4 \Rightarrow N = \frac{21}{4y-1} \Rightarrow N = 3$$

خلاصه آنکه N فقط با یکی از سه مقدار ۱ یا ۳ یا ۷ برابر است.

۹۰/۲۵ - ترجمه از فرانسه

دو خط ثابت و عمود برهم D و \triangle و نقطه ثابت A غیر واقع بر آنها و نقطه ثابت B واقع بر \triangle مفروض است. زاویه قائم xAy حول نقطه A می چرخد و اضلاع آن خط D را در M و N قطع می کند. مکان هندسی I مرکز دایرة محیطی مثلث BMN را معین کنید.



حل - عمود

را بر D رسم می کنیم و BH را امتداد می دهیم تا دایرة محیطی مثلث BMN را در نقطه دیگر Q قطع کند. داریم:

$$\overline{HB} \cdot \overline{HQ} = \overline{HM} \cdot \overline{HN} = -\overline{HA}^2$$

چون مقدار AH و نقاط B و H ثابتند پس نقطه Q نیز ثابت است و مکان I عمود منصف پاره خط BQ است.

۹۰/۲۶ - ترجمه از فرانسه

دایرة C به شعاع ثابت R در صفحه چنان تعییر مکان می دهد که همواره بر خط ثابت D مماس است. اگر O نقطه ای ثابت از صفحه و \triangle قطبی O نسبت به دایرة C باشد، ثابت کنید که \triangle بر سهمی ثابتی مماس است.

۹۰/۲۸ - وزاویه $A'B'C'$ متمم زاویه ABC است. پس دوزاویه $A'B'C'$ با هم برابرند.

چهارضلعی $AA'C'C$ نیز محاطی است و در نتیجه دو زاویه $A'C'B'$ و ACB با هم برابرند. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در حالت تساوی دوزاویه با یکدیگر متشابهند.

۹۰/۳۱ - از ثیان حبیب الله زاده پنجم ریاضی

دیرستان خوارزمی ۱

نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{r_a}{h_a} = \frac{r_b}{h_b} = \frac{r_c}{h_c}$$

حل - داریم:

$$\frac{r_a}{h_a} = \frac{S}{p-a} : \frac{2S}{a} = \frac{a}{2(p-a)}$$

$$\frac{r_b}{h_b} = \frac{b}{2(p-b)} \text{ و } \frac{r_c}{h_c} = \frac{c}{2(p-c)}$$

$$\frac{r_a}{h_a} = \frac{r_b}{h_b} = \frac{r_c}{h_c} = \frac{a+b+c}{2[3p-(a+b+c)]} = \frac{2p}{6p-4p} = 1$$

$$a = 2(p-a)$$

$$b = 2(p-b) \Rightarrow a = b = c$$

$$c = 2(p-c)$$

۹۰/۳۲ - ترجمه جعفر آقایانی چاوشی

هرگاه سه عدد مثبت a و b و c در رابطه زیر صدق کنند.

$$2[a'b' + b'c' + c'a'] \geq a^4 + b^4 + c^4$$

ثابت کنید که این سه عدد می توانند اندازه های ضلعهای یک مثلث باشند.

حل - نامساوی داده شده به ترتیب چنین می شود:

$$(a^2 + b^2)^2 + c^4 - 2c^2(a^2 + b^2) - 4a^2b^2 \leq 0$$

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 \leq 0$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 + 2a'b')(a^2 + b^2 - c^2 - 2a'b') \leq 0$$

$$[(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2] \leq 0$$

چون a و b و c مقادیر مثبتند پس:

$$\begin{cases} c + b \geq a \\ |a - b| \leq c \end{cases} \Rightarrow |a - b| \leq c \leq a + b$$

۹۰/۲۸ - از اصغر کرامت طلاتپه دانشجوی فنی

دانشگاه تبریز

برای دو عدد طبیعی a و n ثابت کنید که:

$$a^{2n} + 2a^{-n} \geq 3$$

حل - می دانیم که مجموع هر عدد مثبت و معکوس آن ناکوچکتر از ۲ است:

$$a^n + a^{-n} \geq 2$$

از این نا مساوی دو نامساوی زیر بدست می آید:

$$a^{2n} + 1 \geq 2a^n + 2a^{-n} \geq 4$$

از جمع نظیر به نظری طرفین این دونامساوی نامساوی مطلوب بدست می آید.

۹۰/۲۹ - از حسن نیکو آمال راد سپاهی ترویج و

آبادانی

هرگاه تاریخ تولد صادق هدایت

هجری خورشیدی و بین ارقام این تاریخ رابطه $ab^4 = 2cd^4$

برقرار باشد، تاریخ تولد این نویسنده بزرگ ایران رامعلوم کنید.

حل - به ترتیب داریم:

$$2 \text{ یا } 1 \text{ یا } 0 \leq ad \leq 12 \Rightarrow d = 0 \text{ و } 1$$

$$1 \leq bc \leq 3 \Rightarrow b = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3$$

رابطه داده شده بداعای $a = 1$ می شود

پس b زوج است:

$$b = 2 \Rightarrow 2cd^4 = 16 \Rightarrow d = 1 \text{ و } c = 8$$

تاریخ تولد صادق هدایت ۱۲۸۱/۱۱/۲۸ می باشد.

۹۰/۳۰ - از حسین دارابی

در مثلث ABC از رأسهای B و C عمودهای

BB' را بر AD نیمساز داخلی زاویه A رسم می کنیم و

پای ارتفاع نظیر رأس A را A' می نامیم. ثابت کنید که دو

مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابهند.

حل - مطابق با

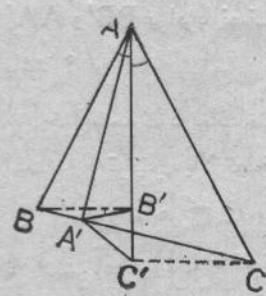
شکل، چهارضلعی $ABA'B'$

و در نتیجه دو زاویه

$BB'A'$ و BAA' با

هم برابرند. اما زاویه BAA'

متضاد ABA' می باشد.



داریم :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = (p - b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} \\ r' = (p - b) \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{r}{r'} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}$$

بنابراین داریم :

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{r'_1} \times \frac{r_2}{r'_2} \times \dots \times \frac{r_n}{r'_n} &= \\ &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{M_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi - M_1}{2} \operatorname{tg} \frac{M_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi - M_2}{2} \times \dots \times \\ &\quad \times \operatorname{tg} \frac{M_{n-1}}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi - M_{n-1}}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \\ &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{r'} \end{aligned}$$

از مسائل ترجمه شده توسط فتح الله زرگری

۹۰/۳۶ - کشتی A هر سه روز یک بار، کشتی B هر

چهار روز بار، کشتی C هر شش روزیک بار از بندر خارج می‌شوند. هر گاه این سه کشتی در روز شنبه ۱۲ اردیبهشت مقارن هم از بندر خارج شده باشند، معلوم کنید که بعد از آن درجه تاریخی مجدداً هر سه کشتی در روز شنبه از بندر خارج خواهند شد.

حل - بعد از ۱۲ اردیبهشت، کشتی A هر $3 \times 7 = 21$

روز یک بار، کشتی B هر ۲۸ روز یک بار و کشتی C هر ۴۲ روز یک بار در روز شنبه از بندر خارج می‌شود. کوچکترین مضرب مشترک سه عدد ۲۱ و ۲۸ و ۴۲ برابر ۸۴ است و روز پس از ۱۲ اردیبهشت می‌شود سوم مرداد، پس کشتی ها دوباره در روز شنبه سوم مرداد با هم از بندر خارج می‌شوند.

۹۰/۳۷ - دو پاره خط متساوی AB و A'B' چه زاویه هایی با یکدیگر بسازند تا فاصله بین او ساط پاره خط های AA' و BB' برابر با نصف طول مشترک پاره خط های مفروض باشد؟

[توجه - در چاپ صورت مسئله اشتباهی روی داده است که به ترتیب بالا تصحیح می‌شود.]

حل - هر گاه C وسط D A' و AA' و BB' باشد، به فرض آنکه CD با نصف AB = A'B' برابر باشد، چون از C موازی با A'B' رسم کنیم تا AB را در E قطع کند،

از مسائل ارسالی جواد فیض

۹۰/۳۴ - برای سه عدد مثبت و متمایز a و b و c نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$(a^4 + b^4 + c^4)(ab + bc + ca) > 9a^2b^2c^2$$

حل - بنا به نامساوی معروف به نامساوی واسطهها

داریم :

$$(a^4 + b^4 + c^4) > 3(a^2b^2c^2)$$

$$(ab + bc + ca) > 3\sqrt[3]{abc \cdot ab} = 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

از ضرب نظیر طرفین دو نامساوی بالا نامساوی مطلوب نتیجه می‌شود.

۹۰/۳۴ - هر گاه سه جملهای ax^r + bx + c بر سه

جمله‌ای ۱ x^r + px + ۱ بخش پذیر باشد ثابت کنید که:

$$a^r - c^r = ab$$

حل - بنابراین فرض داریم:

$$ax^r + bx + c = (x^r + px + 1)(qx + r)$$

$$= qx^r + (qp + r)x^r + (q + pr)x + r$$

$$\begin{cases} q = a \\ qp + r = 0 \\ q + pr = b \\ r = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ap + c = 0 \\ a + pc = b \end{cases}$$

از حذف p بین ۱ و رابطه اخیر رابطه مطلوب بدست می‌آید.

۹۰/۳۵ - برعکس AB از مثلث CAB تعداد ۱

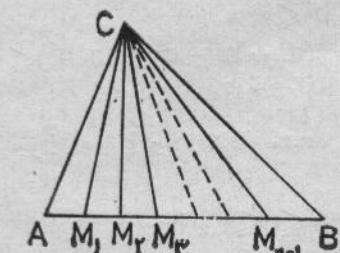
نقطه M_1, M_2, ..., M_{n-1} را به ترتیب و درجهت از

A به B در نظر می‌گیریم. شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی

و محاطی خارجی مماس بر AB از مثلثهای CAM_1, CAM_2, ..., CM_{n-1}, B را به ترتیب r_1, r_2, ..., r_n و r'_1, r'_2, ..., r'_n و از مثلث CAB را r و r' می‌نامیم. ثابت

کنید که:

$$\frac{r_1}{r'_1} \times \frac{r_2}{r'_2} \times \dots \times \frac{r_n}{r'_n} = \frac{r}{r'}$$



حل - در یک

مثلث ABC اگر r

شعاع دایره محاطی

داخلی و r' شعاع

دایره محاطی خارجی

داخل زاویه C باشد

می‌گذرند قرینه‌های \triangle نسبت به ضلعهای CA و BC می‌باشند. دو خط Δ_1 و Δ_2 یکدیگر را در نقطه K تلاقی می‌کنند. چون A' قرینه A نسبت به BN است پس دوزاویه BH و $B'N$ متساویند. دوزاویه AC و $B'HP$ نیز متساویند زیرا $B'P$ و PH نسبت به AC قرینه‌اند. دو زاویه BHN و $B'HN$ متساویند. دو زاویه $BA'N$ و $HB'K$ نیز مکمل یکدیگرند و چهار ضلعی $BA'KB'$ محاطی است. چون سه نقطه A' و B و B' بردايره محیطی مثلث واقعند پس K نیز براین دایره واقع است. به روش مشابه ثابت می‌شود که نقطه تلاقی Δ_1 و Δ_2 نیز بردايره مذبور قرار دارد. بنابراین سه خط Δ_1 و Δ_2 روی دایره مذبور متقاربند.

۹۰/۳۹ ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n حاصل $\tan^{2n} 15^\circ + \cot^{2n} 15^\circ = \tan^{2n} 15^\circ + \cot^{2n} 15^\circ$ برابر با مجموع مربعات سه عدد صحیح متولی است.

حل - به فرض آنکه X عددی صحیح بوده و داشته باشیم:

$$(x-1)^2 + (x+1)^2 = \tan^{2n} 15^\circ + \cot^{2n} 15^\circ$$

خواهیم داشت:

$$3x^2 = \tan^{2n} 15^\circ + \cot^{2n} 15^\circ - 2\tan^n 15^\circ \cot^n 15^\circ$$

$$3x^2 = (\tan^n 15^\circ - \cot^n 15^\circ)^2$$

$$3x^2 = [(2 - \sqrt{3})^n - (2 + \sqrt{3})^n]^2$$

$$3x^2 = [(A - B\sqrt{3}) - (A + B\sqrt{3})]^2$$

[A و B عدهای طبیعی می‌باشند]

$$3x^2 = 12B^2 \Rightarrow x = \pm 2B$$

چون B عدد طبیعی است پس X عدد صحیح است.

۹۰/۴۰ معادله زیر دارای چند ریشه حقیقی است؟

$$x^{27} + x^8 + 1 = 0$$

حل - چون $x = 0$ ریشه معادله نیست پس با فرض

$$y = \frac{1}{x}$$

خواهیم داشت:

$$f(y) = y^{27} + y^8 + 1$$

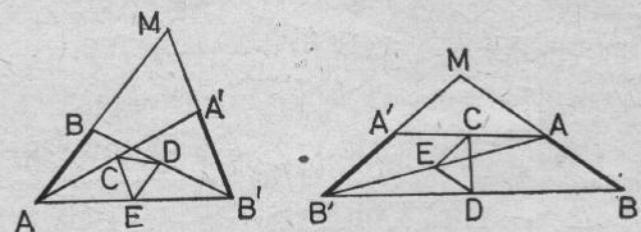
$$f'(y) = 27y^{26} + 8y^7 = y^7(27y^{19} + 8)$$

$f(y)$ تابعی است پیوسته و $f'(y)$ در ازای همه مقادیر مثبت است، پس $f(y)$ تابعی است همواره صعودی و چون این تابع نسبت به y از درجه فرد است، پس فقط و فقط در ازای یک مقدار حقیقی از y برابر با صفر می‌شود.

۹۰/۴۱ بردو نقطه A و B از سهمی مفروض دو

دایره می‌گذرانیم که اولی سهمی را در دو نقطه دیگر M و

نقطه E وسط AB' است زیرا در مثلث $AA'B'$ نقطه C



وسط ضلع AA' و خط CE با ضلع $A'B'$ موازی است. بنابراین داریم:

$$CE = \frac{1}{2} A'B' = \frac{1}{2} AB = CD$$

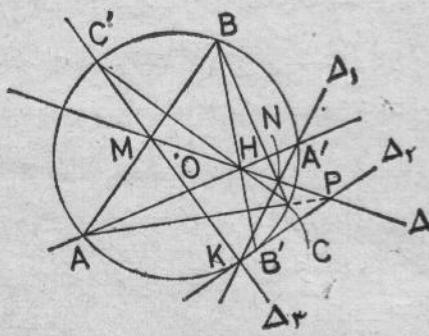
از طرفی چون E وسط AB' و D وسط BB' است پس AB با DE موازی و:

$$DE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} A'B' = CD = CE$$

مثلث CDE متساوی الاضلاع است و هر زاویه آن 60° درجه است. خطوط AB و $A'B'$ با دو ضلع این مثلث متوازیند پس زاویه بین آنها یا 60° درجه یا 120° درجه است.

۹۰/۴۸ خط Δ از مرکز ارتفاعی مثلث مفروض گذشته است. ثابت کنید که خطوط قرینه Δ نسبت به ضلعهای مثلث روی دایره محیطی مثلث متقاربند.

حل - می‌دانیم که قرینه H نقطه تلاقی ارتفاعهای مثلث نسبت به هر ضلع آن روی دایره محیطی مثلث واقع است. اگر M و N به ترتیب نقاط تلاقی Δ با ضلعهای AB ، AB' و $A'B'$ باشد و A' و B' و C' به ترتیب نقاط تلاقی Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 باشند.



ارتفاعهای AH و BH و CH با دایره محیطی باشند، خطوط Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 که به ترتیب بر $A'N$ و $B'P$ و $C'M$ و

$$x > 0 \Rightarrow \frac{|x| \cdot P(x)}{x^r} = \frac{xP(x)}{x^r} = \frac{P(x)}{x^{r-1}}$$

- ۹۰/۴۴ - ب - معادله اول وقتی ریشه حقیقی دارد که:

$$\Delta = m^r - 14m - 15 \geq 0 \Rightarrow m \geq 15 \text{ یا } m \leq -1$$

برای معادله دوم داریم :

$$\Delta = -11m^r + 2m + 9 \geq 0 \Rightarrow -\frac{9}{11} \leq m \leq 1$$

- ۹۰/۴۵ - پاسخ درست $k = q^{-n}$ است (در چاپ صورت مسئله منتهی ضریب n از قلم افتاده است):

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{ka_{n+1}}{1-q} \Rightarrow a_1 = ka_1 q^n \Rightarrow k = \frac{1}{q^n}$$

- ۹۰/۴۶ - ج - از نامساوی داده شده داریم :

$$4x^r + 2x^r - \frac{3}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^r + 2x^r - 2 < 0$$

$$(2x^r + 2)(2x^r - 1) < 0 \Rightarrow 2x^r < 1 \Rightarrow x^r < 0$$

- ۹۰/۴۷ - در مثلث ABC داریم :

$$AB \cdot AC = DB \cdot DC + AD^r$$

$$k^r = d^r + m^r \quad k > 0 \quad d > 0 \Rightarrow d < k$$

- ۹۰/۴۸ - ج : اگر O مرکز دایره محیطی مثلث و سطح ضلع BC باشد داریم :

$$AH = 2OM \quad OM^r + MB^r = OB^r$$

$$\left(\frac{AH}{2}\right)^r + \left(\frac{BC}{2}\right)^r = R^r \Rightarrow AH^r + BC^r = 4R^r$$

- ۹۰/۴۹ - ب : اگر α زاویه \triangle باشد، زاویه \triangle' با x' برایر با 2α خواهد بود و :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{1 - 4} = -\frac{2}{3}$$

- ۹۰/۵۰ - د : ضریب زاویه ایهای مماسهای بردومنحني در مبدأ مختصات به ترتیب ۱ و ۲ - است و از حذف y بین معادلات دوممنجني معادله ای بر حسب x بدست می آید که غیر از $x = 0$ جواب دیگر ندارد.

- ۹۰/۵۱ - ب : اگر m ضریب زاویه ای خطی باشد که بر P می گذرد، از حل معادله این خط با معادله منحنی خواهیم داشت :

$$mx^r + (m-2)x + 1 = 0 \Rightarrow m = 4 \pm 2\sqrt{r}$$

$$\Delta = m^r - 8m + 4 = 0$$

N و دومی آن رادردو نقطه دیگر P و Q قطع می کند . ثابت کنید که دو خط MN و PQ باهم موازیند.

حل - معادله سهی را به صورت $y = px^r$ اختیار می کنیم . دایره دلخواه به معادله زیر را نظر می گیریم :

$$x^r + y^r + ax + by + c = 0$$

از حذف y بین معادلات بالا داریم :

$$p^r x^r + (1 + bp)x^r + ax + c = 0$$

اگر سهی و دایره در چهار نقطه به طولهای x_1 و x_2 و x_3 و x_4 متقاطع باشند این مقادیر ریشه های معادله بالا می باشند و بنابر روابط بین ریشه ها و ضرایب داریم :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

اگر از چهار نقطه تلاقی سهی و دایره دونقطه A(x_1 , px_1^r) و B(x_2 , px_2^r) و C(x_3 , px_3^r) و D(x_4 , px_4^r) متغیر اختیار شوند با فرض $x_1 + x_2 = k$ داریم $x_3 + x_4 = -k$ و ضریب زاویه ای خط MN بر اساس است با :

$$\frac{px_1^r - px_4^r}{x_2 - x_3} = p(x_2 + x_4) = -pk$$

ضریب زاویه ای خط MN مقدار ثابت و مستقل از نهضت تلاقی آن با دایره و سهی است . به عبارت دیگر اگر دایره دیگر که بر A و B می گذرد سهی را در P و Q قطع کند ، ضریب زاویه ای خط PQ نیز $-pk$ است و دو خط MN و PQ متوازیند .

پاسخ قسمت های ریاضی

- ۹۰/۴۲ - ج - عبارت مفروض به صورت زیر تجزیه می شود :

$$(x+1)(x-1)^r(ax+1)$$

اگر $1 - a = 0$ باشد عبارت به صورت $(x+1)(x-1)^r$ - در می آید و در ازای $x = 1$ صفر شده تغییر علامت می دهد .

- ۹۰/۴۳ - اگر $P(0)$ مثبت باشد «ج» پاسخ درست است و اگر $P(0)$ منفی باشد «ج» پاسخ درست است زیرا :

$$x < 0 \Leftrightarrow \frac{|x| \cdot P(x)}{x^r} = \frac{-xP(x)}{x^r} = -\frac{P(x)}{x^r}$$

-۹۰/۵۹ ب : معادله مماس بر منحنی در نقطه بده طول می شود:

$$y = \frac{2(x-a) + 3a}{3\sqrt{a}}$$

از حذف y بین این معادله و معادله منحنی خواهیم داشت:

$$(x-a)^2(8x+a) = 0$$

-۹۰/۶۰ ب : از رابطه مفروض داریم:

$$a > b \text{ و } a > c \text{ و } a^r = \frac{b^n}{a^{n-r}} + \frac{c^n}{a^{n-r}}$$

$$a > b \Rightarrow \frac{b^n}{a^{n-r}} < \frac{b^n}{b^{n-r}} = b^r$$

$$a > c \Rightarrow \frac{c^n}{a^{n-r}} < c^r$$

$$a^r < b^r + b^r \Rightarrow A < 90^\circ$$

-۹۰/۶۱ ب : در مثلث مذکور داریم:

$$(\sin B + \sin C)\sqrt{3} = 2\sin A = \sqrt{3}$$

$$2\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 1 \text{ و } \frac{B+C}{2} = 30^\circ$$

$$\cos \frac{B-C}{2} = 1 \Rightarrow B = C \Rightarrow b = c$$

$$a = R\sqrt{3} \text{ و } b = c = R$$

$$\Rightarrow BM = \frac{R\sqrt{3}}{2} > \frac{R\sqrt{3}}{4}$$

-۹۰/۶۲ ب : عدد N برابر می شود با:

$$N = 99(a-c)$$

$$a - c = \pm 1 \text{ یا } \pm 2 \text{ یا } \dots \text{ یا } \pm 8 \text{ یا } \dots \text{ یا } \pm 9$$

چون $a - c = -9$ و $|a| < 9$ است جواب قبول نیست.

-۹۰/۶۳ ب : اگر صورت کسر را با A و مخرج آن را با B نشان دهیم داریم:

$$B^r - 2B - 9A = 1$$

عدد اول p که عامل مشترک A و B باشد عامل 8 نیز می باشد یعنی $p = 2$ است و A و B وقتی بر 2 بخش پذیر نیستند که n زوج باشد.

-۹۰/۶۴ ب : اولاً چون منعکس هر خط راست غیر مار بر قطب انعکاس یک دایره است پس چهارضلعی A'B'C'D' محاطی است. ثانیاً چون زاویه های APC و BPD قائم هدند پاره خط های A'C' و B'D' قطرهای دایره منعکس Δ دنباله در صفحه ۳۱۲

$$ta = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \frac{\sqrt{3}}{5} > 1 \Rightarrow a > 45^\circ$$

-۹۰/۶۵ ج : داریم:

$$4\sin^r ax + a^r \cos^r ax = 4 \Rightarrow a^r = 4$$

-۹۰/۶۶ ب : بعد از اختصار داریم:

$$\sin xy = 1 \Rightarrow y = \frac{(4k+1)\pi}{2x}$$

-۹۰/۶۷ ب : داریم:

$$a - b = \sin 18^\circ - \cos 36^\circ = 2\sin^2 18^\circ + \sin 18^\circ - 1$$

$$a - b = (\sin 18^\circ + 1)(2\sin 18^\circ - 1)$$

$$\sin 18^\circ < \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow a - b < 0$$

-۹۰/۶۸ آلف : تصویرهای قائم نقاط A و B روی

صفحه مقطع قائم استوانه برداشته مقطع واقع می شوند و تصویر عمود مشترک شعاع این دایره است و در ضمن بر تصویر AB نیز عمود است. می دانیم که در هر دایره شعاع عمود بر وتر منصف آن وتر است.

-۹۰/۶۹ ب : اگر G مرکز تقل مثلث ABC و G'

مرکز تقل مثلث A'B'C' باشد هر صفحه که بر وسط GG' بگذرد و یالهای جانبی منشور را قطع کند، منشور را به دو قسمت معادل تقسیم می کند.

-۹۰/۷۰ ج : وقتی $x \rightarrow +\infty$ شاخه منحنی با خط

$y = 1$ مجانب است و داریم:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1$$

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x + c$$

$$S = |F(k) - F(2)| = |\sqrt{k^2 - 1} - k + 2 - \sqrt{3}|$$

$$S = \frac{|(4 - 2\sqrt{3})k - 8 + 4\sqrt{3}|}{\sqrt{k^2 - 1} + k - 2 + \sqrt{3}}$$

$$k \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim S = 2 - \sqrt{3} < 1$$

-۹۰/۷۱ آلف : اگر α طول نقطه M فرض شود

معادله مماس بر منحنی در نقطه M می شود:

$$y = \frac{2a(x-a)}{3\sqrt{(a-1)^2}} + a\sqrt{(a-1)^2}$$

$$[T(\frac{3-a}{2}, 0, 0, 1), H(a)]$$

$$\Rightarrow \overline{SH} = 2\overline{TS}$$

مسائل برای حل

$$(1 + \cos x)^5 - (1 - \cos x)^5 = 2[(1 + \cos x)^3 - (1 - \cos x)^3]$$

۹۱/۶ از مسائل ارسالی توسط جواد فیض

یک رشته از اعداد را تصاعد توافقی می‌نامیم عرگاه رشته‌ای که از عکس اعداد مزبور تشکیل می‌شود تصاعد حسابی باشد.

هرگاه اعداد مثبت a و b و c و d به ترتیب تصاعد توافقی تشکیل دهند، ثابت کنید که :

$$a+d > b+c \quad ad < bc$$

۹۱/۷ ترجمه فتح الله زرگری

فاصله دونقطه A و B برابر با ۱۱۷ متر است. از این دو نقطه دو جسم دریک لحظه به سمت یکدیگر شروع به حرکت می‌کنند. جسم اول در دقیقه اول یک مترو در دقایق بعد در هر دقیقه نیم متر بیشتر از دقیقه قبل را می‌پیماید. جسم دوم در هر دقیقه ۶ متر طی می‌کند. این دو جسم پس از چند دقیقه به هم می‌رسند؟

۹۱/۸ ترجمه از فرانسه

دو دایره C' و C'' به مرکزهای O' و O'' و به شعاعهای R' و R'' با دایره C به مرکز O و به شعاع R در نقاط $R = R' + R''$ و M'' مماس دارند بقسمی که :

ثابت کنید که :

۱) دو دایره C' و C'' متقاطع یا مماسند.

۲) اگر از دونقطه تقاطع دو دایره C' و C'' آنکه به

C نزدیکتر است با A نشان داده شود، چهارضلعی $OO'AO''$ متوازی‌الاضلاع است.

۳) مجموع طولهای دو کمان AM' و AM'' برابر است با طول کمان $M'M''$

برای دانش آموzan کلاس‌های چهارم دیبرستان

۹۱/۹ از جواد فیض دانشجوی دانشکده فنی تبریز

به فرض آنکه x و y عددگاهی حقیقی باشند و در رابطه

$$2x^2 + y^2 + 4xy - 12x - 8y + 15 = 0$$

صدق کنند، حدود هریک از دو مقدار x و y را تعیین کنید.

۹۱/۱۰ از مسائل ارسالی توسط : جواد فیض

ثابت کنید که در هر مثلث داریم :

$$h_{ah} h_{bh} h_{ch} = \frac{a'b'c'}{4R^2}$$

$$S = \sqrt{h_{ah} h_{bh} h_{ch}}$$

برای دانش آموzan کلاس چهارم ریاضی

۹۱/۱۱ ترجمه فتح الله زرگری

اگر ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ عددگاهی

صحیح باشند، این ریشه‌ها را پیدا کنید. به ازای متادیر مختلف a و b بحث کنید.

۹۱/۱۲ فرستنده : قوام نحوی

دستگاه دو معادله زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x'y + xy^2 = 32 \\ x^4 y^2 + x^2 y^4 = 128 \end{cases}$$

۹۱/۱۳ از مسائل ارسالی توسط : محمد معینی

مقدار زاویه حاده X را از معادله زیر بدست آورید :

۹۱/۱۴- از جواد فیض

بهفرض آنکه A و B و C زاویه‌های یک مثلث وهمه حاده باشند و داشته باشیم :

$$\cos A = \frac{1-x}{1+x} \quad \cos B = \frac{1-y}{1+y} \quad \cos C = \frac{1-z}{1+z}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$$

۹۱/۱۵- ترجمه محمد عینی

هرگاه $a > 0$ باشد، $\operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} y$ باشد، ثابت کنید که :

$$\operatorname{tg}(x-y) \leqslant \frac{(a-1)^2}{4a}$$

۹۱/۱۶- ترجمه داوید ر بحان

در یک مخروط ناقص دوران، طول مولد برابر است با مجموع شعاعهای دوقاعده. ثابت کنید که حجم این مخروط ناقص برابر است با یک ششم حاصل ضرب سطح کل در ارتفاع آن.

۹۱/۱۷- ترجمه از فرانسه

دو دایره به مرکزهای O و O' با یکدیگر مماس خارجی و AA' یک مماس مشترک خارجی آنها است. شکل رحل خط OO' دوران می‌دهیم. ثابت کنید که مساحت سطح حادث از پاره خط AA' واسطه هندسی است بین مساحتهای دوکره حادث از دایره‌ها.

برای دانشآموzan کلاس‌های ششم ۵ بیرونستان

۹۱/۱۸- سهمی به معادله زیر مفروض است :

$$y^2 - 4x + 4 = 0$$

در نقطه M واقع براین سهمی مماسی بر آن رسم می‌کنیم که با محور OX زاویه 45° بسازد. عمودی که در نقطه M بر مماس مذبور رسم شود محور x' را در N قطع می‌کند.

مساحت سطح محصور بین سهمی و خط MN و محور x' و همچنین حجم حادث از دوران این سطح حول x' را حساب کنید.

۹۱/۱۹- ترجمه فتح الله زرگری

مثلث ABC به زاویه $BAC = \alpha$ مفروض است. روی ضلعهای این مثلث و در خارج آن مثلثهای متساوی الساقین

۹۱/۲۰- ترجمه از فرانسه

دایره C به مرکز O و به شعاع R و نقطه A واقع بر آن مفروض است. دو دایره C' و C'' را چنان رسم کنید که در A برداشتم مماس باشند و مساحت آن را به سه قسمت معادل تقسیم کنند.

برای دانشآموzan کلاس‌های پنجم ۵ بیرونستان

۹۱/۲۱- ترجمه فتح الله زرگری

سهمی به معادله $y = x' + px + q$ محور x' را در دو نقطه A و B و محور y' را در نقطه C قطع می‌کند. اولاً ثابت کنید که دایره محیطی مثلث ABC از نقطه A می‌گذرد و این نقطه را مشخص کنید. ثانیاً هرگاه $(\alpha + \beta)$ مرکز دایره مذبور باشد، مقادیر p و q را مشخص کنید و سهمی را رسم کنید.

۹۱/۲۲- ترجمه فتح الله زرگری

هرگاه α و β دو زاویه حاده و $\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha$ باشد، ثابت کنید که : $\beta - \alpha \leqslant 30^\circ$

برای دانشآموzan کلاس پنجم ریاضی

۹۱/۲۳- منحنی C به معادله زیر مفروض است :

$$y = \frac{2x}{x-1}$$

۱) در نقطه به طول α واقع بر منحنی سخطی بر منحنی مماس می‌کنیم. اگر α فاصله مبدأ مختصات از این مماس باشد، به ازای چه مقدار از α مقدار ۸ ماسکسیمم است؟

۲) دومماس موازی با هم بر منحنی C رسم می‌کنیم و فاصله بین آنها را با D نشان می‌دهیم، ماسکسیمم مقدار D را تعیین کنید.

۳) دومماس موازی با هم و به فاصله $\sqrt{2}$ از $D = 2\sqrt{2}$ یکدیگر بر منحنی C رسم کرده‌ایم. معادلات این دومماس و مختصات نقاط تماس آنها را با منحنی C بدست آورید.

۹۱/۲۴- نمایش هندسیتابع زیر را رسم کنید :

$$y = \frac{x+1 - |x-1|}{|x|+1}$$

۹۱/۲۳ - فرستنده: محمد حسنی نژاد، کلاس پنجم

ریاضی دبیرستان هدف ۳

اگر داشته باشیم:

$$\frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos(\beta + \varphi)}{\sin^2 \beta} = \frac{\cos(\gamma + \varphi)}{\sin^2 \gamma}$$

به شرط آنکه دو زاویه از سه زاویه α و β و γ مضرب π

نباشد ثابت کنید که:

$$1) \quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma$$

$$2) \quad \alpha + \beta + \gamma = k\pi$$

۹۱/۲۴ - ترجمه از فرانسه

ثابت کنید که اگر در استخراج جذر تقریبی عدد N تا یک واحد تقریب، باقیمانده از جذر حاصل کوچکتر باشد، جذر حاصل جذر تقریبی عدد N تا نیم واحد تقریب است.

۹۱/۲۵ - ترجمه فتح الله زرگری

کدام شش رقم را سمت راست عدد ۸۸۸۸۸ قرار دهیم
تا عدد حاصل مجدد کامل باشد؟

۹۱/۲۶ - ترجمه فتح الله زرگری

خط \triangle و صفحه P غیر موازی با \triangle و چهار وجهی $ABCD$ مفروض است. بر هر یک از نقاط A, B, C, D صفحه ای موازی با صفحه P می گذاریم. این صفحات خط \triangle را به ترتیب در نقاط A_1, B_1, C_1, D_1 قطع می کنند.
بر خطوط AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 نقاط A_1, B_1, C_1, D_1 را بقسمی تعیین می کنیم که:

$$\frac{A_1 A}{A_1 A} = \frac{B_1 B}{B_1 B} = \frac{C_1 C}{C_1 C} = \frac{D_1 D}{D_1 D} = k$$

نسبت حجم چهار وجهی $A_1 B_1 C_1 D_1$ را به حجم چهار وجهی مفروض بدست آورید.

۹۱/۲۷ - ترجمه از فرانسه

دایره C به مرکز O و نقطه ثابت A واقع در خارج آن مفروض است. نقطه متغیر M را بر دایره O در نظر می گیریم و دایره Γ به قطر AM رارسمی کنیم. اگر \triangle محور اصلی دایره های C و Γ باشد، ثابت کنید که \triangle بر هذلولی ثابتی مماس است.

$A, BC = B, CA = C, AB = a$ رابطه های می سازیم که زاویه های

مجاور به قاعده های آنها برابر با a باشد، یعنی:

$$A, CB = B, AC = C, AB = a$$

ثابت کنید که مجموع مساحت های دو مثلث ABC و AB, C با مجموع مساحت های دو مثلث A, BC برابر است.

برای دانش آموزان کلاس ششم ریاضی

۹۱/۲۰ - تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$y = \frac{x}{ax^2 + 1} \quad x \geq 0$$

عدد حقیقی a را تعیین کنید بنابر آنکه حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی و محور x' حول این محور دارای حدی برابر با $\frac{\pi}{12}$ باشد.

۹۱/۲۱ - ترجمه از فرانسه

تابع پارامتری زیر را در نظر می گیریم:

$$y = a(1 - \cos \frac{x}{a}) \quad a > 0$$

نمایش هندسی این تابع را به ازای مقدار غیر مشخص a با C_a نشان می دهیم. منحنی C_a را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید و ثابت کنید که منحنی C_a از روی منحنی C_1 بوسیله یک تجانس بدست می آید. مرکز و نسبت این تجانس را معین کنید. به ازای $a = \frac{3}{2}$ منحنی نظیر را روی شکل رسم کنید.

مساحت سطح محصور بین منحنی C_a و محور x' را در یک دوره تناوب آن و همچنین حجم حادث از دوران این سطح حول Ox را حساب کنید.

۹۱/۲۲ - ترجمه فتح الله زرگری

از نقطه O واقع در داخل مثلث ABC عمودهای OP و ON را به ترتیب بر ضلعهای AB و AC و BC رسم می کنیم. ثابت کنید که اگر مقدار زاویه AOB و BOC و COA با هم برابر باشند خواهیم داشت:

$$MN \cdot OP = NP \cdot OM = PM \cdot ON$$

تستهای ریاضی

ج - $nd(d-1)$

۹۱/۳۲ - دریک تصاعد هندسی جمله های $(m+n)$ ام و $(m-n)$ ام به ترتیب برابر ندید.

$$a_{m+n} = A \quad a_{m-n} = B$$

قدرتیبت این تصاعد برابر است با:

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

$$\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$$

الف -

$$\sqrt[2m]{\frac{A}{B}}$$

$$\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$$

ج -

۹۱/۳۳ - مرکز دایره محيطی داخلی مثلث ABC در داخل مثلث A, B, C واقع است که رأسهای آن اوساط ضلعهای مثلث ABC می باشند. مثلث ABC :

الف - متساوی الاضلاع است.

ب - حاده الزوایا است.

ج - منفرجه الزوایه است.

د - هر نوع مثلثی می تواند باشد.

۹۱/۳۴ - در صفحه متوازی الاضلاع $ABCD$ نقطه P را در نظر می گیریم و مساحت های مثلثهای PAD و PBD و PCD را بدتریب S_1 ، S_2 و S_3 می نامیم. در این صورت داریم:

$$S_1 > S_1 + S_2 \quad \text{الف - } S_1 = S_1 + S_2$$

$$S_1 < |S_1 - S_2| \quad \text{د - } S_1 = |S_1 - S_2|$$

در حدود بر نامه کلاس پنجم ریاضی

۹۱/۳۵ - بر منحنی به معادله $xy = a^2$ نقطه M را در نظر گرفته ایم. اگر طول OM کمترین مقدار خود را داشته باشد، نقطه M :

در حدود بر نامه کلاس چهارم ریاضی

۹۱/۲۸ - فرض کنیم n تعداد عددهای حقیقی باشد که چون هریک از این عددها را به جای a در معادله:

$$(x-a)(x^4 - 5x^2 + 4) = 0$$

قرار دهیم، این معادله ریشه مضاعف داشته باشد. با این فرض:

$$\text{الف - } n = 1 \quad \text{ب - } n = 2$$

$$\text{ج - } n = 0 \quad \text{د - } n = 4$$

$$91/39 - \text{برای آنکه معادله:}$$

$$\sqrt{f(x)} = (a^2 + 1)x + a^4 - 1$$

دارای جواب حقیقی باشد، شرط $x \geqslant 1 - a^2$

الف - لازم و کافی است.

ب - لازم است. ج - کافی است.

د - نه لازم است و نه کافی است.

$$91/30 - \text{فرض می کنیم:}$$

$$\geqslant \frac{-4 + 2\sqrt{13}}{9} \quad \text{یا} \quad \frac{-4 - 2\sqrt{13}}{9}$$

در این صورت دستگاه دومعادله:

$$\begin{cases} x^2 + xy^2 = a^2 \\ 2xy^2 + 3x^2y = a \end{cases}$$

الف - داران ریشه های حقیقی است.

ب - ریشه حقیقی ندارد.

ج - ممتنع است.

۹۱/۳۱ - دو تصاعد حسابی در جمله اول مشترکند و قدر نسبت دومی مجذور قدر نسبت اولی است. تفاوت جمله های ام این دو تصاعد برابر است با:

$$\text{الف - } d^2(n-1) \quad \text{ب - } (n-1)d^2$$

د - نه متساویندونه مکمل یکدیگرند.

۹۱/۴۰ - دایره به مرکز O و نقطه A واقع بر آن و قطر BC از آن را درنظر می‌گیریم. در نقطه A مماس TT' را برداشته رسم می‌کنیم و تصویر قائم BC بر TT' را به $B'C'$ نشان می‌دهیم. اگر Σ مساحت سطح کل محروم‌ناقص حادث از دوران $BCC'B'$ حول TT' و S مساحت دایره مفروض باشد، به فرض آنکه $\Sigma = mS$ باشد:

الف - $m \geq 4$

ب - $m \leq 3$

ج - $3 \leq m \leq 4$ یا $m \geq 4$

۹۱/۴۱ - سطح استوانی مستدير به دایره هادی Γ و به موله X' را درنظر می‌گیریم. خط متغیر Δ غیرمواری با X' سطح استوانی را در دونقطه A و B قطع می‌کند. وقتی که Δ بهموازات خود تغییر مکان دهد، مکان M وسط AB :

الف - قسمتی از صفحه‌ای است که بر محور سطح استوانی می‌گذرد.

ب - بخش‌هایی از دو صفحه‌ای است که با X' موافقند.

ج - دو صفحه عمود برهم و موازی با X' است.

د - صفحه‌ای است موازی با Δ .

درحدود برنامه کلاس ششم ریاضی

۹۱/۴۲ - تابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$y = ax^m + \frac{b}{x^n}$$

که در آن a و b دو عدد حقیقی مثبت و m و n دو عدد طبیعی می‌باشند. این تابع درازای $x = \sqrt[n]{\frac{nb}{ma}}$ و در فاصله $(-\infty, +\infty)$:

الف - ماکسیمم است.

ب - مینیمم است.

ج - ماکسیمم یا مینیمم است.

د - نه ماکسیمم و نه مینیمم است.

۹۱/۴۳ - به فرض آنکه m عددی حقیقی باشد برای آنکه منحنی نمایش هندسی تابع:

- الف - برنیمساز ربعتهای اول و سوم محورها واقع است.
- ب - برنیمساز ربعتهای دوم و چهارم محورها واقع است.
- ج - بریکی از نیمسازهای محورها واقع است.
- د - برهیچیک از نیمسازهای محورها واقع نیست.

۹۱/۴۶ - نمایش هندسی دستگاه معادله و نامعادلات:

$$\begin{cases} y = x \\ 5x - 2y + 3 \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

- الف - ناحیه‌ای است محدود.
- ب - ناحیه‌ای است نا محدود.
- ج - قسمتی محدود از سهمی است.
- د - دو نیم شاخه از سهمی است.

۹۱/۴۷ - ناحیه‌ای از صفحه محورهای مختصات را که از هر نقطه آن می‌توان مماسی بر منحنی نمایش هندسی تابع

$\frac{-2x}{x+1} = y$ رسم کرد با P نشان می‌دهیم. ناحیه‌ای از صفحه مذبور را که توسط نامساوی:

$$(x - \lambda y)(\lambda x - y) < 0$$

مشخص می‌شود با Q نشان می‌دهیم. ناحیه مشترک دوناحیه $: Q$ و P

- الف - یک ناحیه محدود است.
- ب - دو ناحیه ایست که هر کدام از آنها محدود است.
- ج - یک ناحیه یا محدود است.
- د - دوناحیه نامحدود است.

۹۱/۴۸ - اگر B و C دو زاویه از یک مثلث باشند

یکی از آنها منفرجه باشد مقدار $P = \cos B + \cos C$ عددی است:

الف - مثبت

ب - منفی

ج - منفی یا مثبت

د - مثبت یا صفر

۹۱/۴۹ - در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داریم:

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = p \\ \cos A + \cos B = q \end{cases} \quad \begin{cases} \sin A' + \sin B' = q \\ \cos A' + \cos B' = p \end{cases}$$

به فرض $p \neq q$ دو زاویه C و C' :

الف - متساویند

ب - مکمل یکدیگرند

ج - یا با هم برابرند یا مکمل یکدیگرند.

- ۹۱/۴۸ - دو دایره در A و B متقاطعند و مماسهای مشترک خارجی آنها در S متقابلند . برمحور اصلی دو دایره نقطه متغیر M را در نظر می گیریم و در انعکاس بهقطب M و به قوت $MA \cdot MB$ منعکس نقطه را P_1 نامیم . مکان نقطه :

الف - خطی است مستقیم .
ب - دایره‌ای است مماس بر دایره‌های مفروض .

ج - دایره محيطی مثلث SAB است .
د - دایره‌ای است محيط بر دایره‌های مفروض .

- ۹۱/۴۹ - زاویه قائم xAy و دایره ثابت C در یک صفحه مفروض است . نقطه متغیر M را بر AX در نظر می گیریم قطبی M نسبت به دایره C خط Ay را در N قطع می کند خط MN بر منحنی ثابتی مماس است . این منحنی :
الف - بیضی است ب - هذلولی است .
ج - بیضی یا هذلولی است .
د - سهمی است

خیام (دنیاله از صفحه ۳۲۰)

را به تظر BC می سازیم فرض کیم D نقطه تقاطع دو منحنی و E تصویر آن بر CB باشد .

خیام باروش ترکیبی (Synthetically) ثابت می کند $X = BE$ جواب معادله است .

اثبات مذکور به قرار زیر است : در سهمی داریم $ED = ZB \cdot DZ$ و چون $\overline{DZ} = BZ \cdot AB$ داشت :

$$(1) \quad \frac{AB}{BE} = \frac{BE}{ED}$$

$$(2) \quad \frac{BE}{ED} = \frac{ED}{EC} \quad \text{در دایره داریم :}$$

از (1) و (2) نتیجه می شود .

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$$

و یا $\overline{BE}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{EC}$ پس :

$$\overline{BE}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{EB} = \overline{AB} \cdot \overline{EC} + \overline{AB} \cdot \overline{EB} =$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{BE}^2 + b \cdot BE = a$$

و هو المطلوب . این معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد . لیست قطوعی که خیام در حل این معادله بکار می برد . سهمی

$$\frac{2x}{y} + \frac{1}{x} = y \quad \text{و دایره } y^2 = \sqrt{by}$$

دنیاله دارد

$$y = (x - m)(x^2 - 3x + 1)$$

- برمحور X' مماس باشد ، برای m :
- الف - تنها یک مقدار وجود دارد .
 - ب - دو مقدار متمایز وجود دارد .
 - ج - سه مقدار متمایز وجود دارد .
 - د - مقداری وجود ندارد .

- ۹۱/۵۳ - در مثلث ABC داریم :

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$$

مقدار زاویه A از این مثال :

- الف - برابر 60° درجه است .
- ب - بزرگتر از 60° درجه است
- ج - کوچکتر از 60° درجه است .
- د - قائم است .

- ۹۱/۵۴ - اگر X یک عدد حقیقی باشد بزرگترین عدد صحیح موجود در X را با [X] نشان می دهیم . با این قرار داد ، از معادله

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \left[\frac{\pi}{6x}\right]\right) = \frac{1}{2}$$

نتیجه می شود که :

$$x > \frac{\pi}{6} \quad \text{الف} - x = \frac{\pi}{6}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{د} - x < \frac{\pi}{6}$$

- ۹۱/۵۶ - هر گاه هر یک از دو عدد n رقمی

$$a_1a_2\dots a_na_1 \quad \text{و} \quad a_1a_2\dots a_n$$

بر ۱۰۱ بخش پذیر باشند ، عدد n :

الف - برابر با ۴ است ب - مضرب ۴ است

ج - توانی از ۴ است د - مضرب ۴ نیست

- ۹۱/۵۷ - کسر تجویل ناپذیر $\frac{a}{b}$ مولد عدد اعشاری متناوب

مرکبی است که تعداد ارقام دوره غیر گردش آن ۱ است . کسر

$\frac{a}{b}$ مولد عدد اعشاری متناوب مرکبی است که تعداد ارقام دوره

غیر گردش آن برابر است با :

الف - i ب - i+2 ج - 2i

مسائل منتخب از

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث دوم، سال تحصیلی ۱۳۵۰-۱۳۵۱ (اسفند)

- ۳- در تعداد نقاط برخورد خط $y = m$ با منحنی (C) از روی شکل بحث کنید.
- ۴- به فرض اینکه خط $y = m$ منحنی (C) را در دو نقطه A و B و محور yها را در نقطه P قطع کند او لاً مکان هندسی نقطه H وسط AB را تعیین کنید. ثانیاً مکان هندسی نقطه M مزدوجهای توافقی P را نسبت به A و B تعیین کنید.

-تابع اولیه تابع زیر را تعیین کنید:

$$y = \sin^3 x \cos 2x$$

دبیرستان استرآبادی گرگان

دبیر: تدریسی - فرستنده: محمود شفیع زاده
در تابع زیر اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ باشد مرکز تقارن منحنی

را بیایید:

$$y = ax + 1 + \sqrt{x^2 + 2bx}$$

$$y = \frac{x^2 - ax - 4b}{x^2 + b}$$

کنید که تابع در نقطه‌ای بد عرض - ۴ - بر خط $x = -4x + 4$ مماس بوده و رابطه زیر بین مختصات نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع فوق برقرار باشد:

$$y_1 + y_2 + 3x_1 x_2 = 0$$

دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر: علی اکبر جعفری

- منحنی C₁ به معادله $y = x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}$ مفروض است. معادله قرینه منحنی C₁ را نسبت به نقطه (۱-۰) و (۰-۰) بدست آورید و جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x - 1 \pm \sqrt{x^2 - 1}$ را رسم کنید.

- معادله منحنی را پیدا کنید که در نقطه A(y₀, x₀) آن

کلاس ششم ریاضی

جبر

دبیرستان اتحاد

دبیر: فضیلیان - فرستنده: منصور لؤلؤیان

$$- \text{تابع } y = \pm \sqrt{x^2 - 2x + 3} \text{ مفروض است.}$$

اولاً ثابت کنید که نقطه C(۱, ۰) مرکز تقارن منحنی است.

ثانیاً جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید.

ثالثاً سطح محصور بین منحنی و خط $y = 1$ و دو خط $x = 1$ و $x = 2$ را حساب کنید.

- در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه سوم زیر به ازای مقادیر مختلف m بحث کنید:

$$mx^3(2x + 3) = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

دبیرستان ادیب

دبیر: طاهری - فرستنده: محمود تهرانی خوروندی

$$- \text{تابع } y = \frac{x^2 + 4ax + 12}{x^2 - ax - 3} \text{ مفروض است.}$$

۱- بدون استفاده از مشتق ثابت کنید که به ازاء جمیع مقادیر a یکی از دو مقدار ماکزیمم و مینیمم مقداریست ثابت. سپس مقادیر a را حساب کنید که مقدار دیگر ماکزیمم یا مینیمم برابر $\frac{1}{a}$ باشد.

۲- جدول و منحنی نمایش تغییرات ناهم (C)،

$$y = \frac{x^2 + 8x + 12}{x^2 - 2x - 3}$$

و A و B نقطه برخورد مجانبها و سطح پاره خط AB و C و M و O مبدأ مختصات است) (نقطه ماکریم و می‌نمی منحنی (H_m) فرض شوند با تغییر پارامتر m معادله مکان هندسی مرکز ثقل مثلث OMC را بدست آورید.

ثالثاً: m را چنان معین کنید که مثلث OMC در رأس O قائم باشد و در این حالت قوت نقطه به عرض (۵) واقع بر محور عرضها را نسبت به دائرة محیطی این مثلث حساب کنید.

رابعاً: به ازاء $m = 3$ جدول و منحنی (H_3) نمایش تغییرات تابع مفروض را رسم کنید.

خامساً: در تعداد نقاط مشترک خط (D) به معادله

$$y = ax + \frac{3a}{4} \quad (a \neq 0) \quad \text{با منحنی } (H_3) \text{ بحث کنید}$$

علامت طولهای این نقاط را نیز مشخص نمایید و تحقیق کنید که یکی از نقاط مشترک همواره سمت چپ محور y را واقع است. در حالتنی که خط (D) بر منحنی مماس است طولهای نقاط مشترک خط و منحنی را بدست آورید.

سادساً: به کمل منحنی (H_2) در تعداد ریشه‌های معادله مثلثاتی $0 = -1 - 2(m+1)\sin^2\alpha - (m-1)\sin\alpha$ بر حسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

ساבעاً: مطلوبست محاسبه اندازه سطح واقع بین منحنی به معادله $x^2 - xy - 5 = 0$ و خط $x + y = 5$ و همچنین اندازه حجم حاصل از دوران همین سطح طول محور X را.

دیبرستان شیخ بهایی

دیبر: مظاہری - فرستنده: محمد معینی

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 2} \quad \text{اگر خط } m = y \text{ منحنی نمایش تابع}$$

را در دو نقطه N و M و محور y هارا در D قطع کند مختصات نقطه B مزدوج توافقی نقطه D را نسبت به N و M بر حسب m بدست آورید. سپس مکان هندسی نقطه B را وقتي m تغییر می کند بدست آورید.

دیبرستان فردوسی تبریز

فرستنده: سیدیونس ابوالعالی

- نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید:

$$y = x + \sqrt{4|x| - x^2}$$

- تابع $y = \frac{x-2}{(x-1)^2}$ مفروض است. اولاً درحالتنی که

خط $y = m$ منحنی آنرا در دو نقطه A و B تلاقی می کند مقدار

$$y'' = \frac{6}{x^2} \quad \text{بوده و ازنقطه } (2, 2) \text{ باشیب } 135^\circ \text{ بگزرد.}$$

دیبرستان خرد شیراز

دیبر: اردشیزی - فرستنده: غدیر صادقی

$$\text{اولاً منحنی نمایش تغییرات تابع } y = \frac{x^2 + 4}{x^2}$$

کنید. ثانیاً خطی موازی محور X ها به عرض a منحنی این تابع را قطع می کند معادله ای تشکیل دهید که ریشه های آن طولهای نقاط تقاطع خط و منحنی باشد. در وجود علامت ریشه های این معادله به حسب a بحث کنید. را چنان تعیین کنید که خط بر منحنی مماس باشد. طول نقطه تماس و طول نقطه تلاقی دیگر را محاسبه کنید.

ثالثاً - اگر A نقطه ای از منحنی به طول 2 باشد مطلوبست

محاسبه سطح بین قوسی از این منحنی و مجانب مایل آن و عرض نقطه A و عرض نقطه دیگری از منحنی که طول آن $3 < 1$ باشد. هرگاه 1 به سمت بینهایت میل کند حد این سطح را حساب کنید.

رابعاً ازنقطه A خطی با ضریب زاویه m رسم می کنیم این خط به ازاء مقادیر معینی از m منحنی فوق را در دو نقطه دیگر قطع می کند، معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های طولهای این نقاط باشد هرگاه معادله مطلوب صورت A به $0 = x^2 - x - 2 = 0$ باشد به ازاء چه مقادیر نقطه A بین دو نقطه تقاطع دیگر و یاد را خارج آن نقاط واقع می شود.

دیبرستان دارالفنون

دیبر: سعیی - فرستنده: غلامرضا بوسفی

مطلوبست رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع

$$y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

- تابع $\frac{x - a}{x^2 - x - 2} = 0$ مفروض است. بدون استفاده از مشتق

تحقیق کنید که تابع دارای یک ماکریم و یک می نیم است و سپس منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم نمایید.

دیبرستان شهریار قلهک

دیبر: قمیصی

$$\text{تابع } y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + m} \quad \text{مفروض است؛}$$

اولاً: بارامتر m را چنان معین کنید که منحنی (H_m) نمایش

تغییرات تابع مفروض دارای سه خط مجانب باشد.

ثانیاً: درحالتنی که منحنی (H_m) دارای سه مجانب است

الف - وبا a چنان تعیین کنید که نقطه $(\frac{1}{12}, -5)$ می تهم منحنی باشد . ب - منحنی نمایش تغییرات $y = \frac{x+2}{(x-1)^2}$ را رسم کنید و آنرا (C) بنامید . ج - اگر خط $y = m$ منحنی نمایش تغییرات C را در نقطه M و N قطع کند و M' و N' روی محور X ها باشند ، مقدار m را چنان بیابید که برابر قوت نقطه (و ۳) A نسبت به دایره ای به قطر ۵ باشد . د - m را چنان بیابید که دایره ای به قطر N M از مبدأ مختصات بگذرد . ه - را چنان بیابید که دایره محیطی چندماس بر منحنی (C) می توان رسم کرد . مختصات نقاط تماس را بیابید .

مثلثات

دیبرستان ادیب

دیبر: طاهری - فرستنده: محمود تهرانی خوروندی
- دستگاه دومعادله دووجهی زیرا حل کنید :

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y + \cos(x+y) = 1 \\ \sin x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

زوايا و نوع مثلث را تعیین کنید که در آن روابط زیر برقرار باشند (da نیمساز زاویه A):

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \sqrt{2} \frac{h_a}{d_a} + 1 \\ bc = R^2 \sqrt{3} \end{cases}$$

- ثابت کنید در هر مثلث غیر مشخصی رابطه زیر برقرار است :

$$r \times r_a \frac{r_b - r_c}{b - c} = S$$

r_a و r_b و r_c اشعه دو پر محاطی خارج A و B و C و شاع دایره محاطی داخلی مثلث هستند .

دیبرستان پهلوی گلپایگان

دیبر: جعفری - فرستنده: علی اکبر سخائی

در مثلث ABC زاویه A معلوم است و داریم $r_a = kr$ (شعاع دایره محاطی داخلی و k عدد بیست معلوم) همچنین ثابت کنید $r_a r_b r_c = H_m$ (H_m نامنمه هر مثلث) .

پکان دوچرخه نهاد

m را چنان بیابید که زاویه $\angle AOB = 90^\circ$ باشد (O مبدأ مختصات) ثانیاً اگر تصاویر A و B روی خط $y = 1$ نقاط A' و B' باشند مختصات نقطه ثابتی مانند P را روی این خط پیدا خواهید نمود که رابطه $\lambda = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$ برقرار است و مقدار λ را نیز حساب خواهید کرد . ثالثاً چه رابطه ای باید ما بین طولهای سه نقطه از منحنی برقرار باشد تا این سه نقطه بر یک استقامت باشند .

دیبرستان مرود

دیبر: غیاثی - فرستنده: محمدحسن نوری
بر حسب مقادیر مختلف a در وجود و علامت ریشه های معادله $= 0 = \frac{1}{a} x^3 + x^2 + x + a$ بحث کنید و اگر ریشه های این معادله را α و β و γ فرض کنیم حاصل $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ را بدست آورید .

دیبرستان نظام تهران

دیبر: مهدیزاده - فرستنده: شعبانی شعبانی
خط $y = m$ منحنی نمایش تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ را در دو نقطه A و B و محور x هارا در نقطه C قطع می نماید . مطلوب است : ۱ - مکان هندسی نقطه D مزدوج توافقی نقطه C نسبت به دو نقطه A و B . ۲ - معادلات مجذبهای منحنی فوق .

دیبرستان نمازی

دیبر: محمد تقی دباغ
تابع زیر مفروض است :

$$y = \frac{ax^2 + (2b - 3a)x - 6b}{x^2 - 1}$$

اولاً ثابت کنید روابطی بین a و b برقرار می شود که پیدا می نماید تابع به یک تابع هموگرافیک تبدیل شود . ثانیاً ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر a و b ماکریم و می نیم (در صورت وجود) در یک طرف محور x ها واقع است . ثالثاً a و b را چنان تعیین کنید که تابع از مبدأ مختصات و نقطه $(\frac{2}{3}, -2)$ بگذرد .

$$رابعاً تابع \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 1} = y را رسم کنید .$$

دیبرستان هدایت سندج

دیبر: هاشمی - فرستنده: عطا الله شکوهی
تابع زیر مفروض است :

$$y = \frac{1 + x^2}{x^2 - x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - x} = \frac{a(x-1)(x-2)}{x(x-1)} = \frac{a(x-2)}{x}$$

$$y = \frac{a(x-2)}{x}$$

دیبرستان دارالفنون

دیبر: وکیلی - فرستنده: غلامرضا یوسفی
- معادله زیر را حل کنید:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12} + 2x\right) = 1$$

- در مثلثی رابطه $h_b + h_c = 2Rm \sin A$ برقرار است. اولاً نتیجه بگیرید که $\sin B + \sin C = m \sin A$ ثانیاً به فرض معلوم بودن m وزاویه A وزوایای مثلث را تعیین کرده بحث کنید.

دیبرستان شیخ بهایی

دیبر: مظاہری - فرستنده: محمد معینی
- در مثلثی زاویه $60^\circ = A$ و رابطه زیر برقرار است.
زوایای B و C را حساب کنید:

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d'_a} = \frac{\sqrt{6}}{2h_a}$$

- معادله مثلثاتی زیر را حل کنید در صورتی که

$$\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$$

$$2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 2m \sin 2x + m - 1 = 0$$

دیبرستان مروی

دیبر: نیوشاد - فرستنده: محمدحسن نوری

- عبارت زیر را به صاده ترین صورت ممکن درآورید:
 $A = \operatorname{tg} 3^\circ \operatorname{tg} 17^\circ \operatorname{tg} 23^\circ \operatorname{tg} 37^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 57^\circ \operatorname{tg} 63^\circ \operatorname{tg} 77^\circ \operatorname{tg} 83^\circ$
- در مثلث ABC داریم $d'_a = b$ نتیجه بگیرید که

$$r_a - r = a \operatorname{cotg} 2C \quad B = 3C$$

دیبرستان نظام

دیبر: مهدیزاده - فرستنده: شعبانعلی شعبانی

- منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را در فاصله $(0, 2\pi)$ رسم کنید:

$$y = \frac{\sin^2 x - \sin x}{2 \sin x - 1}$$

- در مثلث A اولاً ثابت کنید $\frac{h_b + h_c}{\cos \frac{A}{2}} = 2da \sin B > C$

$$\sin(B - C) = \frac{2 \sin B \sin C}{\sin A} \quad (1) \quad \text{ثانیاً با معلوم بودن زاویه}$$

و در نظر گرفتن رابطه (1) معادله درجه دومی بر حسب

$\operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$ تشکیل دهید. ثالثاً اگر معادله درجه دوم به صورت

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = k$$

- معادله ای بر حسب $B - C$ تشکیل دهید و به

کمل آن زوایای B و C را بر حسب A بدست آورید.

- اگر رابطه زیر برقرار باشد ثابت کنید شرط وجود جواب قابل قبول برای زوایای B و C این است که

$$k \geq 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{2}\right)$$

$$\cos \frac{B - C}{2} = \frac{k \sin \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{A}{2}}{k}$$

$$- \text{بدازاء} R = 2cm \sin A = 90^\circ k = 2\sqrt{3}$$

دایره محیطی) اضلاع وزوایای مثلث را تعیین کنید.

دیبرستان خرد شیراز

دیبر: سلطانی - فرستنده: خدیر صادقی

$$- \text{تابع } y = \frac{-a \sin x + a \cos x + 1}{\cos x + b \cos x + 1} \text{ زیر مفروض است.}$$

الف) a و b را طوری تعیین کنید تا خط $x = \frac{\pi}{2}$ یکی از معجانهای

تابع بوده و منحنی محور طولها را در نقطه‌ای به طول $\frac{3\pi}{2}$ قطع کند.

$$- \text{جدول و منحنی نمایش تابع } y = \frac{\sin x - \cos x + 1}{\cos x - \sin x + 1}$$

را در فاصله صفر و π رسم کنید.

- در مثلث ABC ارتفاع h_a را رسم می‌کنیم و فرض

$$\text{می‌کنیم } \frac{h_a}{a} = m \text{ باشد؛}$$

الف) مقدار m را بر حسب خطوط مثلثاتی زوایای B و C پیدا کنید و نشان دهید که $\cos(B - C) = 2m \sin A - \cos A$

ب) اگر $B - C = \frac{\pi}{3}$ باشد زوایای B و C را بر حسب m و A تعیین کنید و معادله حاصل را بر حسب m بحث کنید (باتوجه به $|B - C| < B + C$ بحث کنید)

ج) اگر $B - C = \frac{\pi}{3}$ اختیار شود زوایای مثلث

را حساب کرده و اگر $h_a = 2$ باشد اضلاع را نیز بدست آورید.

- اعداد $100 > a > b > 200$ را در نظر می‌گیریم؛
خارج قسمت تقسیم این اعداد را بربزرگترین مقسوم‌علیه
 $\frac{a'b'}{(a'-b')^2} = \frac{585}{320}$ مشترکشان، a' و b' می‌نامیم. به فرض آنکه

باشد اولاً ثابت کنید که کسر طرف اول این رابطه غیرممکن
التحویل است (استدلال کامل باشد). ثانیاً اگر D و M کوچکترین
مضرب مشترک و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد a و b
باشد و $\frac{D}{5} > M > 27$ اعداد صحیح باشند اعداد a و b راتعین کنید.

- ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر صحیح n عدد $(1 - \frac{n^4}{n^P + 4})$
بخش پذیر است و آن نتیجه بگیرید که دو عدد n^P و $n^P + 4$
دارای ارقام یکان مشترک کی هستند.

دیرستان دارالفنون

دیر: وکیلی - فرستنده: غلامرضا یوسفی
- معادله زیر را حل کنید:

$$(ab)^2 = \overline{cab}$$

- ثابت کنید عبارت $1 - 13n - 14n^2$ به ازاء جمیع
مقادیر صحیح و مثبت n مضرب 169 است.
دیرستان شاهپور شیراز
دیر: کریمی - فرستنده: حمید واحدی
معادله $_{11} = \overline{(abc)} = \overline{(cba)}$ را حل کنید.
دیرستان شهریار قلهک

دیر: قمیصی

- عدد سه رقمی $n = \overline{abc}$ را در نظر می‌گیریم بطوری که
 $a = c + u$ و $c > u$ مقلوب این عدد را با n' نمایش
می‌دهیم و فرض می‌کنیم $n' < n$ باشد؛
اولاً: D را بر حسب n حساب کنید و تحقیق کنید که آیا
عدد D می‌تواند مربع کامل باشد یا خیر.
ثانیاً: ثابت کنید که اگر $a + c = b$ باشد و D نسبت
به هم اول نخواهد بود.
ثالثاً: اگر $a = b + c$ باشد و $c > b$ در چه شرایطی باید صدق
کنند تا D نسبت به هم اول باشند و در این حالت بزرگترین
و کوچکترین مقادیر n را بدست آورید.

- اگر A یک عدد صحیح و غیر مشخص و a و b یکان آن
و s مجموع ارقام آن باشد؛
اولاً: ثابت کنید که عدد $B = A + 2s + 3a$ مضرب

۶ است.

$$\frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} - 1 = 0$$

چه مقدار A معادله دارای جواب است.

حساب استدلای

دیرستان ادب

دیر: کاشانی - فرستنده: محمود تهرانی خوروندی
- مطلوب است تعیین کوچکترین عددی که 3^n برابر آن
مقسوم‌علیه داشته باشد.

- اولاً دو جمله کسر $\frac{1}{2n+21}$ چه مقسوم‌علیه‌های

مشترکی می‌توانند داشته باشند. ثانیاً به ازاء چه مقدار از n کسر
فوق از واحد کوچکتر است. ثالثاً n را بقسمی تعیین کنید تا کسر
فوق تحويل ناپذیر و کوچکتر از واحد و مولود عدد اعشاری
متناوب ساده باشد با دوره گردشی دورقمی و بالآخره n را
بقسمی تعیین کنید که جذر تقریبی این کسر تا $1/10$ تقریب برابر
باشد.

- ثابت کنید معادله $y^2 - 5xy - 7x^3 = 0$ جوابهای $y = 7k^2(7k+5)$
معادله جوابهای دیگری هم دارد؟

دیرستان استرآبادی گرگان

دیر: مشکین قلم - فرستنده: محمود شفیعزاده

بزرگترین عددی را که می‌توان بر عدد

$$A = 32m + 34m + 36m + 1$$

افزود تا خارج قسمت آن بر 51 تغییر نکند چیست؟ در صورتی
که m فرد باشد.

دیرستان پهلوی گلپایگان

دیر: جعفری - فرستنده: علی اکبر سخائی

- عدد $N = \overline{mcdu}$ راچنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$N = cm + 19m + d = 2(d+u) + 19m + c = d$$

- ثابت کنید اگر a فرد و با پنج اول باشد حاصل ضرب و
زیر بر 23040 قابل قسمت است:

$$(a^2 - 1)(a^2 - 9)(a^2 - 49)$$

- ثابت کنید عدد زیر بر 49 بخش پذیر است:

$$A_n = 2^{3n+2} + 21n - 4$$

دیرستان خرد شیراز

دیر: اردشیری - فرستنده: غدیر صادقی

$$n^{2p} - 1 = n^p(p+1)(2p+1)$$

$$\text{و } B = \frac{11110000}{m+1}$$

$$\text{اگر } m = \frac{11110000}{2m}$$

$$C = \frac{66660000}{m}$$

مرتبه

$C + A = A + B$ باشد ثابت کنید.

$C = 66660000$

مرتبه

مربع کامل است.

هندسه ترسیمی و رقومی

دیرستانهای آریا-پیشاوهنگ- جامجم- بهمن قلهک- محمودزاده

دیر: مهندس محمود خوئی

الف: هندسه رقومی:

مسئله: واحد سانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محورهای اقصرواطول
کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آنها را مرکز بنامید. اندازه کادر
کاغذ 25×20 اختیار شود.

۱- مقیاس شیب صفحه P را مستقیم چپ کنار کاغذموازن محور
اطول بقسمی رسم نماید که افقیه رقوم ۵ آن برمحور اقص
کاغذ منطبق بوده وجهت ترقی رقوم آن از پایین بالا باشد -
زاویه صفحه P با صفحه مقایسه ۴۵ درجه است. از نقطه a در
این صفحه که به فاصله ۵ سمت چپ محور قائم کاغذ واقع است خط
ra را در صفحه P بقسمی رسم نماید که با صفحه مقایسه
زاویه 30° درجه بسازد و b سمت راست a قرار گیرد.

۲- از نقطه b، c، d، e، f، g، h را بقسمی رسم نماید که C بروی
محور اقص واقع گردد و خط BC درضایر BA عمودشود.
مساحت حقیقی مثلث قائم الزاویه ABC ($B = 90^\circ$) را باتسطیع

حول افقیه رقوم ۲ در سمت پائین کاغذ نشان دهید.

۳- ملخص مستطیل ABCD را که رأس آن A و B و C و D بوده و
ABC قطر آنست رسم نموده و بروی آن متوازی السطوح
ABCDEFGH را که يالهای جانبی آن افقی بوده و تصاویر
آنها موازی محور اطول کاغذ و طول حقیقی هر یک برابر ۸ و از
پائین بالا ممتد است رسم نماید. قاعده EFGH در سمت بالای
کاغذ واقع است. متوازی السطوح را مرئی و مخفی نماید.
۴- عمود مشترک خط الراس (یال) BF را با خط AC

روی شکل رسم کرده رقوم آن را مشخص کنید.

۵- مقطع متوازی السطوح فوق را باصفحه Q که بر صفحه
P عمود بوده و افقیه رقوم ۱۱ آن برمحور اقص منطبق است
یافته و آن را مرئی و مخفی کنید.

ثانیاً: اگر $B = 600$ و A مضربی از a باشد A را مشخص کنید.

- کسر $y = \frac{n^4 + 2}{n(n^4 - 1)}$ مفروض است. n عدد صحیح و بزرگتر از ۱ است

اولاً: به ازاء چه مقادیر n کسر تحویل ناپذیر است.

ثانیاً: بافرض اینکه کسر تحویل ناپذیر است معین کنید که y مولد چه نوع عدد اعشاری می تواند باشد و در این حالت n را چنان معین کنید تا y مولد عدد اعشاری متناسب مركب باشد.

ثالثاً: n را چنان تعیین کنید که کسر y معادل عکس يك عدد صحیح باشد.

رابعاً: در ازاء ۵ = n دو جمله کسر مفروض را در مبنای ۴
نمایش داده و در همان مبنای بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین
مضرب مشترک دو جمله کسر را بدست آورید (تمام عملیات لازم
برای قسمت اخیر باید در مبنای ۴ انجام گیرد).

دیرستان شیخ بهایی

دیر: امتیاز جو- فرستنده: محمد معینی

- کوچکترین مضرب مشترک دو عدد برابر ۵۰۴ است و
می دانیم جذر تقریبی نقصانی حاصل ضرب آن دو عدد تا يك
واحد تقریب برابر ۹۵ می باشد آن دو عدد را مشخص کنید.
عدد a^2 را در مبنای ۲ - a بنویسید و تحقیق کنید یه از
چه مقدار از a امکان نخواهد داشت.

دیرستان کسری

دیر: داداشیز اده- فرستنده: مهرداد ساسار

- عدد چهار رقمی acdu را تعیین کنید که ارقامش در روابط زیر صدق کند:

$$\begin{cases} cd = 3au - 2(c+d) \\ ac = d + u - c \end{cases}$$

- به فرض اینکه n عدد صحیح باشد ثابت کنید اولاً کسر

$\frac{2n+1}{n(n+1)}$ تحویل ناپذیر است، ثانیاً به ازاء چه مقدار از

کسر فوق معادل با يك کسر اعشاری مطلق است.

دیرستان مروی

دیر: پاچناری- فرستنده: محمدحسن نوری

- ثابت کنید اگر $1 + wp + 2p + 1$ دو عدد اول بوده

و با عدد فرد n نیز اول باشند خواهیم داشت:

ب - هندسه ترسیمی :

۱- از نقطه 'aa' به بعد ۴ وارتفاع ۲ خطی رسم کنید که با صفحه افق تصویر زاویه $\alpha = 30^\circ$ بازد و بر نیمرخ مفروض cdc'd' متکی باشد.

۲- خط غیر مشخص 'DD' بزرگترین شیب یک صفحه نسبت به صفحه قائم تصویر مفروض است. ابتدا 'PaQ' آثار صفحه را رسم کرده سپس نیمساز حقیقی زاویه بین آثار را نشان دهد.

۳- فصل مشترک صفحه 'PaQ' را که بر صفحه نیمساز فرجه دوم عمود است با صفحه ماربر خط اراض و نقطه 'OO' به بعد ۲ و ارتفاع ۱ بیاید.

۴- به بعد ۴ اثر افقی صفحه مواجهی است که فاصله این صفحه از نقطه 'aa' واقع بر خط زمین برابر ۱ می باشد. اثر قائم صفحه مواجه را بیاید.

۵- از نقطه مفروض 'aa' خطی رسم کنید که بر خط مفروض 'DD' عمود بوده و با صفحه نیمساز فرجه دوم موازی باشد.

دیبرستان آئین دانش

دیبر : بنائی

الف - هندسه رقومی

واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید و محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید.

۱- نقطه 'a' به فاصله ۳cm سمت راست مرکز و روی محور اقصر و نقطه 'b' به فاصله ۴cm زیر مرکز کاغذ قرار دارد. اندازه های 'ab' و 'AB' و اساس و شیب خط 'AB' را بدست آورید.

۲- بر خط 'a.b' صفحه 'P' را به اتساع ۲ = i بقسمی مرور دهید که مقیاس شیبیش موأزی محور اطول کاغذ باشد. سپس ملخص مستطیل ABCD را در صفحه 'P' طوری بدست آورید که قطر 'AC' روی اثر صفحه 'P' باشد.

۳- از نقطه 'a' خطی به موازات محور اطول کاغذ رسم کنید و نقطه 'S' را روی این خط بقسمی بدست آورید که 'SA' باشد و ملخص هرم S.ABCD را بدست آورید.

۴- از نقطه 'E' وسط خط 'SA' صفحه 'R' را به موازات صفحه 'P' رسم کنید و مقطع هرم S.ABCD را با صفحه 'R' که مستطیل EFGH است بدست آورید و ملخص هرم

نافض ABCDEFGH را بدست آورده و سپس هرم نافض را مرئی و مخفی نمایند.

۵- حجم هرم S.ABCD را بدست آورید و همچنین زاویه مسطحه صفحه 'P' و صفحه SAB را بدست آورید و با β نشان دهید.

ب - هندسه ترسیمی :

۱- از نقطه (۳و۶) A خط aba'b' را بقسمی رسم کنید که با صفحه افق تصویر زاویه 45° ساخته و برخط افقی در فضا عمود باشد.

۲- خط نیمرخ aba'b' و خط غیر مشخص 'hh' مفروضند. برایین دو خط یک خط مواجه 'hh' متکی کنید.

۳- بر خط نیمرخ aba'b' صفحه 'PaQ' را بقسمی رسم کنید که زاویه بین آثارش در تصویر 90° باشد سپس زاویه ای را که صفحه 'PaQ' با صفحه افق تصویر می سازد بدست آورید.

۴- فصل مشترک صفحه 'PaQ' را که بر نیمساز ربع دوم عمود است با صفحه نیمساز اول و دوم بدست آورید.

۵- صفحه مواجه 'PQ' را بقسمی رسم کنید که با صفحه افق تصویر زاویه 30° بساند سپس قرینه نقطه 'aa' را که روی xy می باشد نسبت به صفحه مواجه 'PQ' بدست آورید.

دیبرستان انوشیروان دادگر

دیبر : مهندس محمود خوئی

الف : هندسه رقومی :

مسئله : واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید.

۱- صفحه 'P' را که با صفحه مقایسه زاویه $\alpha = 45^\circ$ درجه می سازد واقعیت رقوم ۲ آن بر روی محور اقصر کاغذ منطبق است بقسمی رسم کنید که ترقی رقوم خط بزرگترین شیب آن از بالا به پائین باشد. یک مقیاس شیب صفحه را سمت چپ کاغذ رسم نمایند.

۲- از نقطه 'a' واقع در صفحه 'P' بناصله ۲ سمت راست مرکز کاغذ خط 'a,b' را بقسمی در صفحه 'P' رسم کنید که با صفحه مقایسه زاویه $\alpha = 30^\circ$ درجه بساند و 'b' سمت راست 'a' قرار گیرد.

۳- از نقطه 'a' در صفحه 'P' خط دیگر 'a,d' را به نحوی

طرف چپ مرکز در نقطه d قطع کند. طول حقیقی و شیب خط a_1m را حساب کنید.

۲- رقوم نقطه b را تعیین کنید در صورتی که زاویه MAB و رأس A قائم باشد.

۳- در صورتی که رقوم b برابر 6 باشد بر خط a_2b صفحه P را بهشیب يك مرور دهید و از دو جواب آنرا که مقیاس شیب آن موازی محور اطول است در کنار چپ کاغذ رسم کنید.

۴- در صفحه P مثلث ABC را در نظر می گیریم بطوری که a_2b ملخص يك ضلع آن باشد و رقوم رأس C برابر 7 و طول ارتفاع وارد از رأس C بر AB مساوی $3/5$ گردد. ملخص مثلث را رسم و از دو جواب C آنرا که به محور اطول نزدیکتر است اختیار کنید.

۵- برروی مثلث ABC منشور قائمی که يك قاعده اش در پایین صفحه P واقع و طول حقیقی بالهایش $5\sqrt{2}$ باشد بنابرده ملخص آنرا رسم و بایهای مرئی و مخفی را مشخص کنید.

ب - هندسه ترسیمی

۱- زاویه حقیقی بین آثار صفحه PaQ' را رسم کنید.

۲- فصل مشترک صفحه PaQ' عمود بر نیمساز اول و RBS' عمود بر نیمساز دوم را رسم کنید.

۳- عمود مشترک خط قائم $\triangle \triangle$ و خط مواجه $'DD$ را رسم کنید.

۴- از نقطه مفروض aa' خطی رسم کنید که خط غیر مشخص DD' و خط اراض را قطع کند.

دیبرستان دار الفنون

دیبر : بهشتی - فرستنده : غلامرضا یوسفی

الف - هندسه رقومی

واحد : سانتیمتر - مقیاس $1:1$ - محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کرده و نقطه تقاطع را مرکز بنامید.

۱- نقطه O بر مرکز کاغذ منطبق است. از این نقطه خط a_1c_1 را به شیب $\frac{1}{2}$ بقسمی مرور دهید که $OA = OC$ بوده و تصویر آن بر محور اقصر کاغذ منطبق باشد و o سمت راست o و a سمت چپ o قرار گیرد.

۲- خط $ob = 3$ را که با امتداد محور اقصر زاویه 60°

رسم کنید که زاویه AD در فضای a با امتداد افقیهای صفحه بر ابر 40° درجه و d سمت چپ a واقع گردد.

۴- ملخص متوازی الأضلاع $ABCD$ را که AC قطر آنست رسم نموده و وسعت حقیقی آن را نشان دهید.

۵- بر روی محور اطول کاغذ نقطه e_1e_2 را بقسمی تعیین کنید که خط AE در فضای AB عمود گردد.

۶- بر روی متوازی الأضلاع $ABCD$ متوازی السطوح $ABCDEFGH$ را که AE یال جانبی آنست رسم و ملخص آن را مرئی و مخفی نمایید.

۷- صفحه ای بفاصله $4\sqrt{2}$ بالای صفحه P رسم کرده و مقیاس شیب آن را سمت راست کاغذ نشان داده و مقطع آن را بمتوازی السطوح یافته و مرئی و مخفی نمایید.

ب - هندسه ترسیمی :

۱- از نقطه aa' به بعد 5 و ارتفاع 2 خطی رسم کنید که بافق تصویر زاویه $30^\circ = a$ بسازد و يك خط منتصب مفروض را قطع کند.

۲- بر يك خط نیمرخ مفروض $'b'a'b'$ صفحه ای مرور دهید که زاویه بین آثارش در تصویر 50° درجه باشد.

۳- فصل مشترک صفحه موافق را با صفحه نیمساز اول و دوم روی يك شکل رسم کنید.

۴- صفحه غیر مشخص PaQ' و نقطه aa' بقسمی مفروض بند که a بر aP و a' بر $a'Q$ منطبق است قرینه PaQ' را نسبت به صفحه PaQ' بیابید.

۵- قطعه خط $a'b'$ اصلع مثلث قائم الزاویه ABC است که $A = 90^\circ$ درجه و c به بعد 2 در صفحه نیمساز اول است. ملخص مثلث را رسم کنید.

دیبرستان خرد شیراز

دیبر : کهنگی - فرستنده : غدیر صادقی

الف - هندسه رقومی

واحد سانتیمتر و مقیاس $1:1$

۱- محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید. نقطه m را روی محور اقصر بفاصله 3 سمت راست مرکز کاغذ و از این نقطه پاره خط mb را به طول 3 موازی با محور اطول بطوری که b بالای m باشد رسم کنید. از b خطی رسم کنید که با محور اقصر کاغذ زاویه 30° ساخته و آنرا در

و اطول کاغذ رسم کرده محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید .
 ۱- نقطه a_2 بر روی محور اقصر به فاصله 2° سمت راست مرکز کاغذ مفروض است . از این نقطه صفحه P را بقسمی مرور دهید که با صفحه مقایسه زاویه $\alpha = 40^{\circ}$ بسازد و ترقی رقوم آن از بالا به پائین باشد . یک مقیاس شبیب صفحه P را موازی محور اطول به فاصله 8 سمت چپ مرکز کاغذ رسم نماید .

۲- از نقطه a_2 در صفحه P خط a_2b_2 را به شبیب $\frac{1}{2} p$ بقسمی مرور دهید که b سمت راست a قرار گیرد .

۳- از نقطه a_2 در صفحه P خط دیگر AD را بقسمی رسم کنید که زاویه حقیقی AD با امتداد افقی های صفحه P در فضا برابر $\alpha = 40^{\circ}$ و d سمت چپ a واقع گردد و خط BD افقی باشد .

۴- ملخص متوازی الاشاع $ABCD$ را رسم و رقوم C را بقسمی تعیین کنید که AC قطر متوازی الاشاع باشد . و سعی حقیقی آن را نشان دهید .

۵- بر روی محور اطول کاغذ نقطه e_1 را بقسمی تعیین کنید که خط AE در فضا بر AB عمود گردد .

۶- بر روی متوازی الاشاع $ABCD$ ملخص اسطوح $ABCDEFGH$ را که AE یال جانبی آن می باشد رسم و ملخص آن را مرئی و مخفی کنید .

۷- مقطع متوازی اسطوح فوق را با صفحه افقی رقوم 7 یافته و آن را نسبت به جسم مرئی و مخفی نماید .

ب - هندسه ترسیمی :

۱- از نقطه $'aa'$ به بعد 3 و ارتفاع 2 خطی رسم کنید که بفاصله 2 از قائم VV' بوده و با افق تصویر زاویه 30° بسازد .

۲- بر یک خط جبهی و یک خط نیمیرخ مفروض که متقاطع هستند صفحه ای مرور داده آثارش را نشان دهید .

۳- فصل مشترک صفحه $'Q'$ را با صفحه مارب خطالاضر و نقطه $'OO'$ به بعد 3 و ارتفاع 2 پیدا کنید .

۴- دو صفحه $'P\alpha Q'$ و $'R\beta S'$ که موازی می باشند مفروضند فاصله حقیقی این دو صفحه موازی راتعین نماید

۵- از نقطه $'aa'$ خطی رسم کنید که بر خط $'DD'$ عمود بوده و با صفحه منتصب مفروض موازی باشد .

می سازد و از چپ به راست و از پائین به بالا ممتد بوده و b بالای محور اقصر و سمت راست محور اطول واقع می گردد رسم کرده و باشد نقطه a و b و c متوازی الاشاعی بشازید که قطر ac آن باشد . به فرض آنکه $ABCD$ لوزی باشد ملخص آنرا کامل کنید .

۳- به فرض آنکه ضلع AB افقی باشد مقیاس شبیب صفحه P مربوط به لوزی $ABCD$ رادر سمت راست کاغذ رسم نموده و سعی حقیقی لوزی را در سمت پائین کاغذ با تسطیح حول اثر صفحه P نشان دهید .

۴- از O_4 خط S_1O_4 را به شبیب $\frac{1}{3} p$ بقسمی مرور دهید که ترقی رقوم آن از بالا به پائین بوده و SO بر محور اطول کاغذ قرار گیرد . تصویر هرم $S.ABCD$ را کامل نموده مقطع هرم را با صفحه ای که موازی صفحه P و از $\frac{1}{3}$ بالهای جانبی (نزدیک به رأس هرم) می گذرد یافته و هرم ناقص $ABCDEFGH$ را که بین صفحه قاطع و صفحه P قرار گرفته مرئی و مخفی کنید .

۵- مقطع هرم ناقص مزبور را با صفحه افقی رقوم 4 مشخص کرده مرئی و مخفی نماید .

۶- عمود مشترک دو خط SO و AB را رسم کنید .

ب - هندسه ترسیمی

مسئله ۱- روی خط نیمیرخ مفروض $'aba'b'$ نقطه ای تعیین کنید که فاصله حقیقی آن از اثر قائم خط برای ارتفاع نقطه باشد .

مسئله ۲- از نقطه مفروض $'aa'$ به بعد 2 و ارتفاع 1 خطی رسم کنید که با صفحه افقی تصویر زاویه 30° بسازد و بر خط مواجہ مفروض $'\triangle'$ متکی باشد .

مسئله ۳- بر دو خط متقاطع $'DD'$ و $'\triangle'$ که اولی جبهی امت و دومی در صفحه نیمساز دوم واقع است صفحه ای مرور داده آثارش را رسم کنید .

مسئله ۴- پاره خط مفروض $'c'b'c'$ قاعده مثلث متساوی الساقین ABC است $(AB = AC)$ که رأس $'aa'$ آن بر روی خط قائم مفروض $'VV'$ می باشد . رأس مثلث را یافته تصاویر مثلث را کامل کنید .

دیبرستان دکتر حکیم الهی
دبیر : مهندس محمود خوئی

الف - هندسه رقومی :

مسئله : واحد سانتیمتر - مقیاس $1:1$ محورهای اقصر

دیبرستان رازی

دیبر : مهندس محمود خوئی

الف : هندسه رقومی :

مسئله : واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ محورهای اقصرو اطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آنها را مرکز بنامید. اندازه کادر 20×25 اختیار شود.

۱- خط \triangle به شیب ۱ = p تصویرش برمحور اطول کاغذ واقعست . نقطه رقوم ۱۱ این خط برمرکز کاغذ منطبق بوده جهت ترقی رقومش از بالا به پائین میباشد - از نقطه a که تصویرش بفاصله ۳ سمت راست محور قائم کاغذ و به فاصله ۲ زیر محور اقصر واقعست خطی رسم کنید که شیب آن $\frac{1}{2} p$ بوده و بر خط \triangle عمودگردد و بروی آن نقطه c را بقسمی انتخاب کنید که تصویرش سمت چپ محور اطول کاغذ قرار گیرد.

۲- قطعه خط AC قطر مستطیل $ABCD$ میباشد که قطر BD افقی بوده b سمت چپ و d سمت راست کاغذ واقع و bd با محور اقصر کاغذ موازیست - ملخص مستطیل را رسم نمائید و وسعت حقیقی آن را با تسطیح حول افقیه رقوم ۵ در سمت پائین کاغذ نشان دهید .

۳- متوازی السطوح $ABCD-EFGH$ را بروی مستطیل $ABCD$ بقسمی بنای کنید که $EAE = 6\sqrt{2}$ و AE بیش از A باشد ملخص متوازی السطوح را کامل نموده و آن را مرئی و مخفی کنید.

بفرض آنکه شیب خط AE برابر $\frac{\sqrt{2}}{2} p$ و e در سمت بالای کاغذ قرار گیرد.

۴- عمود مشترک خط \triangle را با خط BD روی شکل رسم نموده رقوم طرفین عمود مشترک رامعین نمائید. ۵- نقاط برخورد خط \triangle را با متوازی السطوح معین کرده و خط \triangle را نسبت به متوازی السطوح مرئی و مخفی کنید .

ب - هندسه ترسیمهی :

۱- از نقطه aa' بعد ۵ و ارتفاع ۳ خطی رسم کنید که با صفحه نیمساز اول موازی بوده و خط نیم رخ مفروض $cdc'd'$ را قطع کند .

۲- از نقطه aa' صفحه PaQ' را بقسمی مرور دهید

که با صفحه افق تصویر زاویه ۴۰ درجه بسازد و aP باخط زمین زاویه ۴۵ درجه تشکیل دهد.

۳- فصل مشترک صفحه مواجه PQ' را با صفحهای

که بر دو خط موازی DD' و \triangle میگذرد تعیین کنید.

۴- قرینه نقطه aa' واقع بر خط زمین را نسبت به صفحه

PaQ' که بر صفحه نیمساز دوم عمود است بیابید .

۵- قطعه خط $bcb'c'$ قاعده مثلث متساوی الساقین

$(AB = AC)ABC$ میباشد که رأس A به ارتفاع ۲ در صفحه نیمساز دوم است. تصاویر مثلث را رسم کنید.

دیبرستان همپاس

دیبر : بنائی

الف - هندسه رقومی :

محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید و محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱.

۱- مقیاس شیب صفحه P را به اساس ۱ بقسمی رسم

کنید که اثر صفحه P بر محور اقصر کاغذ بوده و ترقی رقومش از پائین به بالا باشد و نقطه O را در صفحه P و روی محور

اطول انتخاب کنید و از این نقطه خط a_0 را به شیب

$\frac{1}{2} p$ در صفحه P رسم کنید (ا) سمت چپ O میباشد).

۲- خط $a_0 b_0$ را در صفحه P بقسمی رسم کنید که فاصله

حقیقی نقطه O تا خط AB برابر $2cm$ باشد . سپس ملخص متوازی الاتصال $ABCD$ را در صفحه P بدست آورید. نقطه O مرکز متوازی الاضلاع میباشد .

۳- صفحه عمود میصفح خط $a_0 c_0$ را رسم کنید و نقطه

h_{-4} را روی محور اطول بقسمی بدست آورید که $HA = HC$ باشد .

۴- ملخص منشور $ABCDEFGH$ را بقسمی بدست

آورید که خط HD یک یال و قاعده آن $ABCD$ باشد . و سپس آن را مرئی و مخفی نمائید .

۵- نقطه m را بقسمی بدست آورید که فاصله حقیقی

$MAB = 90^\circ$ از صفحه P برابر $2\sqrt{2}$ بوده و زاویه باشد .

ب - هندسه ترسیمهی :

۱- از نقطه aa' و ارتفاع ۳ خطی رسم کنید

که با صفحه نیمساز اول موازی بوده و خط نیم رخ مفروض

$cdc'd'$ را قطع کند .

۲- از نقطه aa' صفحه PaQ' را بقسمی مرور دهید

گنید که با صفحه افق تصویر زاویه 45° ساخته و با صفحه قائم PQ' موازی باشد.

۲- نقطه \odot و C را روی xy بقسمی بدست آورید که فاصله اش از نیمتر $aba'b'$ برابر $l = 6\text{cm}$ باشد.

۳- دو خط متقطع dd' و hh' نمایش یک صفحه است. آثار صفحه PQ' را بدست آورید. (خط dd' موازی صفحه نیمساز دوم و خط hh' مواجه)

۴- فصل مشترک خط dd' که روی نیمساز ربع دوم است با صفحه مواجه PQ' را بدست آورید (بعد اثر افقی P برابر ۵ و ارتفاع اثر قائم Q' برابر ۱ می باشد).

۵- خط $aca'c'$ مفروض است. (o و A) و $(o$ و C) رابط CC' سانتیمتر سمتراست aa' است) ملخص اوزی $ABCD$ را بدست آورید درصورتی که خط xy روی AB باشد.

دیبرستان شیخ بهایی

دیبر: جلالی-فرستنده: محمد معینی

الف - هندسه رقومی:
محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید، واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ است.

۱- نقطه m را روی محور اقصر و به فاصله ۷ سمت راست مرکز انتخاب کنید از این نقطه خطي به موازات محور اطول کاغذ رسم کرده و روی آن نقطه b را در بالای m انتخاب نماید بطوری که $mb = 3$ باشد سپس از b خطی رسم کنید بطوری که محور اقصر را در نقطه a سمت چپ b قطع کند و $a_b = 6$ باشد. طول حقیقی و شیب و اساس AM را حساب کنید.

۲- رقوم نقطه B را بدست آورید درصورتی که خط MA در فضا بر AB عمود باشد (در فضا $MAB = 90^\circ$)

۳- اگر رقوم B مساوی ۱۲ شود بر خط a_b را به شیب ۱ طوری رسم کنید که مقیاس شیب آن موازی محور اطول باشد. یک مقیاس شیب آن را کنار چپ کاغذ رسم کنید.

۴- مثلث ABC در صفحه P قرار دارد ملخص این مثلث را رسم کنید به قسمی که ارتفاع رأس C از مثلث برابر ۳ و رقوم رأس C برابر 13 و C_{12} سمت چپ b_{12} واقع باشد.

۵- ملخص موازی الاصل $ABCD$ را رسم و رقوم

رأس D را پیدا کنید.

۶- ملخص موازی السطوح قائم $ABCDEFGH$ را به قسمی بسازید که AE بصفحة P عمود بوده و $AE = 5\sqrt{2}$ و رقوم از قوم A کمتر باشد. خطوط مرئی را از مخفی تمیز دهید.

ب - هندسه ترسیمی:

۱- فصل مشترک نیمتر $aba'b'$ را باصفحات نیمساز فرجهها بدست آورید.

۲- صفحه ای بوسیله آثارش PQ' مفروض است. فصل مشترک این صفحه را صفحه ای که بر aa' ببعد ۲ و ارتفاع ۴ و خط زمین می گذرد پیدا کنید.

۳- از نقطه aa' به بعد ۴ و ارتفاع ۲ خطی رسم کنید که با صفحه افق تصویر زاویه 30° ساخته و خط قائم مفروضی را قطع کند.

۴- bb' به بعد ۲ و ارتفاع ۳ و CC' به بعد ۱ و ارتفاع ۲ و به فاصله رابط ۴ مفروضند. ملخص مثلث قائم الزاویه ABC را ($B = 90^\circ$) رسم کنید بطوری که نقطه A بعد و ارتفاعش برابر ۱ باشد.

دیبرستان طبری

دیبر: بنائی

الف - هندسه رقومی:

واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ - محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید و محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید.

۱- ملخص نقطه a را بقسمی بدست آورید که a به فاصله 4cm زیر محور اقصرو 4cm سمت راست محور اطول کاغذ باشد. سپس از نقطه a خط a_b را به شیب $\frac{1}{2}$ بقسمی رسم کنید که b روی محور اقصر و سمت چپ مرکز کاغذ باشد. رسم کنید که b روی محور اقصر و سمت چپ مرکز کاغذ باشد.

۲- بر خط a_b صفحه P را به اساس ۱ مرور دهید و از دو جواب آن را انتخاب کنید که خط بزرگترین شبیه (مقیاس شیب) موازی محور اطول باشد.

۳- ملخص ذوزنقه $ABCD$ را در صفحه P بدست آورید درصورتی که فاصله دو قاعده در فضا 3cm بوده و طول حقیقی قاعده $CD = \sqrt{cm}$ بوده و قاعده بزرگتر AB باشد و $A = 90^\circ$ (نقطه C زیر صفحه مقایسه است).

۴- ملخص نقطه f را روی محور اطول بقسمی بدست آورید که $AB \perp FB$ باشد.

۲- ملخص مثلث متساوی الأضلاع ABC را رسم کرده بطوری که ضلع BC آن افقیه بوده و فقط ضلع AB آن روی صفحه P واقع است. (رأس C روی صفحه P واقع نیست).

۳- صفحه دیگر P' را که اثرش همان اثر صفحه P و بر صفحه P عمود است، در طرف راست کاغذ رسم کنید.

۴- قرینه نقطه C را نسبت به صفحه P' بدست آورده D بنامید.

۵- منشوری را که قاعده اش مثلث ABC و یک بالش پاره خط CD باشد، در نظر گرفته ملخص آنرا رسم کرده و مزئی و مخفی نمایید.

۶- مقطع صفحه قائمی را که اثرش ترا فقیه رقوم (۱) صفحه P منطبق است معین کرده و اندازه حقیقی آن را با تسطیح نشان دهید.

ب - هندسه ترسیمی

۱- خط غیر مشخص DD' خط بزرگترین شب صفحه P است نسبت به صفحه افق تصویر آثار صفحه PaQ' را یافته و فصل مشترک آنرا باصفحات منصف الفرجها پیدا کنید.

۲- دونقطه aa' به بعد ۲ و ارتفاع ۳ و bb' به بعد ۴ و وارتفاع یک که فاصله دو رابط آنها از هم ۳ می باشد مغروضند. ملخص مثلث متساوی الساقین ABC را تعیین کنید. بطوری که نقطه C به بعد ۳ و ارتفاع ۵ باشد.

۳- نیمرخ $'aba'b'$ واقع در ناحیه اول فضامغروض است. عمود مشترک آنرا با خط زمین پیدا کنید.

۴- فصل مشترک دو صفحه مواجه را بدست آورید.

دیرستان کوشش پسران

دیر: مهندس محمود خوئی

الف : هندسه رقومی :

۱- نقطه a_1 بفاصله ۶ بالای محور اقصرو بفاصله ۲ سمت راست محور اطیول مفروض است. از این نقطه خط نقطه b را بقسمی رسم کنید که طول تصویرش ۱۰ و سمت p که رقومش از نقطه a_1 کمتر است ببروی محور اقصیر سمت چپ مرکز قرار گیرد. براین خط صفحه P را به شب $\frac{\sqrt{2}}{2} p$ بقسمی مرور دهید که امتداد مقیاس شب آن تقریباً

با محور اطیول موازی باشد. یک مقیاس صفحه P را سمت چپ کاغذ رسم کنید.

۲- مستطیل $ABCD$ را که AB ضلع آن بوده و

۵- ملخص منشور $ABCDEFGH$ را بدست آورید در صورتی که چهارضلعی $ABCD$ قاعده و یک یا آن BF باشد سپس آن را مرئی و مخفی نمایید.

۶- ملخص نقطه m را بقسمی بدست آورید که بوده و نقطه M به فاصله $\sqrt{2}$ زیر صفحه P قرار گیرد.

ب .. هندسه ترسیمی :

۱- از نقطه $(e=3)$ و $h=4$ خطی رسم کنید که با صفحه افق زاویه 30° ساخته و بر خط غیر مشخص dd' عمود باشد.

۲- عمود مشترک خط نیمرخ $'aba'b'$ را با خط مواجه hh' بدست آورید.

۳- از نقطه $(o=5)$ واقع بر xy دو خط $'dd'$ و hh' رسم کنید و آثار صفحه ایندو خط متقاطع را بدست آورید (خط dd' روی نیمساز ربع اول و خط hh' روی نیمساز ربع دوم می باشد).

۴- فصل مشترک صفحه مواجه PQ' را با صفحه ماربر xy که از نقطه $(o=2)$ می گذرد بدست آورید.

۵- خط $aca'c'$ و خط qaa' بفاصله $2cm$ سمت راست A و $C(4\text{ و }3)$ را رسم کنید با شرط است وبعد خط qaa' بفاصله dd' برابر ۱ و رابط dd' بفاصله $2cm$ سمت راست رابط cc' است. ملخص لوزی $ABCD$ را بقسمی رسم کنید که یک قطر آن خط AC بوده و نقطه bb' روی خط qaa' باشد.

دیرستان قطب دزفول

دیر: فخر عطار - فرستنده: غلامرضا بدله

الف - هندسه رقومی

۱- محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید. مقیاس شب صفحه P را با اساس یک که اثرش محور اقصر کاغذ با ترقی رقوم از پایین به بالا می باشد، در کنار چپ کاغذ رسم کنید در این صفحه نقطه a را به فاصله ۲ سمت چپ مرکز کاغذ اختیار نمایید. از این نقطه خط $a'b$ را در صفحه چنان رسم کنید که زاویه حقیقی آن با اثر صفحه 45° درجه بوده و طرف راست محور اطول قرار گیرد.

$abc = \lambda$ و jz زیر محور اقصرو اقع وزاویه $= 60^\circ$ باشد رسم نموده ملخص مستطیل ورقوم نقاط C و D را تعیین کرده و یک مقیاس شیب از صفحه $ABCD$ را در سمت راست کاغذ نشان دهد.

۳- مستطیل $ABCD$ قاعدة تحتانی متوازی السطوح $ABCDEF$ می باشد که $BF = 4\sqrt{6}$ عمود بر صفحه P بوده ورقوم F از B بیشتر می باشد ملخص متوازی السطوح مذبور را رسم و مرئی و مخفی نماید (رقوم کلیه رئوس و نقاط فرضهای بالا اعداد صحیح می باشند).

۴- اندازه حقیقی زاویه ABC را با تسطیح روی صفحه فقی رقوم ۱۱ مشخص نماید.

۵- مقطع صفحه قائم V را که اثرش بر محور اطول کاغذ منطبق است در جسم یافته و وسعت حقیقی آن را نشان دهد.

ب - هندسه ترسیمی :

۱- بر روی خط نیمرخ مفروض $'b'c'$ نقطه $'cc'$ بقسمی تعیین کنید که فاصله نقطه C از اثر قائم نیمرخ برابر ۱ (در فضا) باشد.

۲- بر نقطه مفروض $'aa'$ و خط $'DD'$ که در صفحه نیمساز دوم واقع است صفحه ای مزبور داده و آثارش را نشان دهد.

۳- فصل مشترک صفحه $'PaQ'$ را که بر صفحه نیمساز دوم عمود است با صفحه ای که بر خط متقاطع $'DD'$ و $'\triangle'$ می گذردیابید.

۴- بر خط مواجه $'DD'$ صفحه مواجه $'PQ'$ را بقسمی مزبور دید که فاصله صفحه مزبور از نقطه مفروض $'aa'$ برابر ۲ باشد.

۵- از نقطه $'aa'$ خطی رسم کنید که بر خط مفروض $'DD'$ عمود بوده و با صفحه متصب مفروض $'R\beta S'$ موازی باشد. گروه فرهنگی مرجان

دانیر: مهندس محمود خوئی
الف: هندسه رقوه

مسئله: محورهای اقصرو اطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ می باشد.

۱- نقطه a_6 بناصله ۶ سمت چپ مرکز کاغذ روی محور

اقصر و اقع است. خط a_6b را به شیب $\frac{1}{2} =$ بقسمی رسم کنید

که تصویرش بر محور اقصرو کاغذ منطبق بوده و نقطه b_6 سمت رست مرکز کاغذ قرار گیرد. بر خط مزبور صفحه P را به شیب $p = 1$ بقسمی مزبور دهد که امتداد خط بزرگترین شیب آن از چپ به راست واژپایین به بالا متدور قوش در این جهت کاهش یابد و اثرش محور اطول را بالای مرکز کاغذ قطع کند. یک مقیاس شیب صفحه را سمت چپ کاغذ رسم نماید.

۲- از نقطه a_6 در صفحه P خط a_6e را بقسمی مزبور دهد که با صفحه مقایسه زاویه $30^\circ = a_6$ بسازد زیر محور اقصرو اقع و به محور اطول نزدیکتر باشد.

۳- از نقطه a_6 خط AD را که تصویرش با محور اقصرو کاغذ زاویه $60^\circ = a_6$ می سازد و محور اطول را بالای مرکز کاغذ قطع می کند رسم کرده و بفرض آنکه طول $ad = \lambda$ باشد آن را بقسمی مدرج کنید که زاویه DAB در فضای اتمم بوده ورقوم D را که عدد صحیح می باشد تعیین نماید.

۴- ملخص مستطیل $ABCD$ را که AC قطر آنست کامل نموده و یک خط بزرگترین شیب آن را سمت راست کاغذ نشان دهد.

۵- ملخص متوازی السطوح $ABCDEFGH$ را که $ABCD$ قاعده و AE یال جانبی آنست رسم نموده و مرئی و مخفی کنید.

۶- مقطع متوازی السطوح فوق را با صفحه افقی رقوم ۱۱ مشخص نموده و مرئی و مخفی کنید و اندازه حقیقی زاویه صفحه P را صفحه قاعده $ABCD$ بحسب آورید.

ب - هندسه ترسیمی

۱- نیمرخ $aba'b'$ مفروض است. بر روی آن نقطه cc' را بقسمی تعیین کنید که ارتفاعش دو برابر فاصله اش از صفحه نیمساز اول باشد.

۲- خط $'DD'$ مفروض است. آثار آن را تعیین کنید و بر این خط صفحه $'PaQ'$ را بقسمی مزبور دهد که با صفحه افق زاویه a_6 بسازد.

۳- فصل مشترک صفحه مواجه $'PQ'$ را با صفحه $'RS'$ که با نیمساز فرجه دوم موازی است رسم نماید.

۴- قرینه نقطه $'aa'$ واقع بر خط زمین را نسبت به صفحه مواجه $'PQ'$ که بعد اثر افقی ۴ و ارتفاع اثر قائمش ۲ می باشد تعیین دنباله در صفحه ۳۱۶

هدیه‌ای جالب، ارزنده و بیسابقه هدیه نوروزی نامه‌نگاری شیوا

برای دانشآموزان دوره اول و دوره دوم (طبیعی، ریاضی، ادبی، هنرستان) و علاقمندان گنکور.
جهت دیافت: یافته هدیه فوق، نام و کلاس و آدرس کامل خود را همراه سه ریال تمبر باطل نشده (هزینه ارسال هدیه) برای ما بفرستید تا هدیه را برای شما ارسال داریم.
آدرس: تهران - صندوق پستی ۷۷۰۳۳
نامه نگاری شیوا

۲۲۲۵ همه‌ئله، سؤال و قسمت کنکور

شامل مسائل و سوالات و تستهای چهار جوابی
جبر - حساب - مثلثات - هندسه - شیمی و
فیزیک به انضمام فرهنگ اوروبا و ابط ریاضیات
و شیمی و فیزیک درقطع جیبی با کاغذ اعلاء
 منتشر شد

جهت دریافت یک جلد کتاب فوق می‌توانید ۸ ریال پول یا تمبر باطل نشده و سیله پست سفارشی ارسال فرمایید تا کتاب با پست سفارشی جهت شما ارسال گردد.

آدرس: تهران - صندوق پستی ۷۷۰۳۳ نامه نگاری شیوا
از تهران و شهرستانها نماینده فروش می‌پذیریم
(تلفن ۲۲۴۹۱)

درباره کنکور معماری

اتلیه نیما چون هرسال شما را برای رشته‌های معماری دانشگاه تهران و ملی و هنرهای زیبا راهنمایی می‌کند.
به ما نامه بنویسید یا تلفن کنید تا شرایط شرکت و زمان کلاس‌هایمان را برایتان بنویسیم.

با همکاری مهندسین عبدالله فرنو - بهروز بلوری خیابان شاهزاده - مقابله سینما کاپری - خیابان اردبیله شماره ۱۷ - طبقه سوم - تلفن: ۶۶۸۲۴۹

هزدہ به علاقمندان کتاب و مجله

جهت دریافت لیست کتب فوق بر نامه دیپرستانی و خرید انواع کتب و مجلات قدیم و جدید (فارسی - انگلیسی) باما مکاتبه فرمائید.
نام کتاب و نام نویسنده کتاب دلخواه خود را برای ما بنویسید و قیمت آنرا و سیله پست سفارشی یا چک بانکی با پست معمولی ارسال فرمایید تا کتاب دلخواه شما را ارسال داریم.
جهت فروش انواع کتاب‌های خود و همچنین انواع مجلات علمی خوش (فارسی - انگلیسی) با ما مکاتبه کنید.
آدرس: ایران - تهران - صندوق پستی ۷۷۰۳۳
نامه نگاری شیوا

هزدہ به دانش آموزان خلاصه دستور زبان فارسی

چاپ دوم قابل استفاده برای دانش آموزان دوره اول و دوره دوم و داوطلبان گنکور
برای دریافت کتاب خلاصه دستور زبان فارسی که بطری جالب و کامل نوشته شده است، می‌توانید ۱۲ ریال پول یا تمبر باطل نشده ارسال فرمایید.
آدرس: تهران - صندوق پستی ۷۷۰۳۳
نامه نگاری شیوا (تلفن ۲۲۴۹۱)
از شهرستانها نماینده فروش می‌پذیریم

شیوه‌ی عمده‌ی

تألیف منوچهر صباحی دیپرستانها و دانشسرای راهنمایی
قابل استفاده جهت

دانش آموزان دوره دوم دیپرستانها - داوطلبین گنکور سراسری
دانشگاهها به ویژه دانشجویان دانشسرای راهنمایی رشتۀ علوم
تجربی (کتاب طبق برنامه دانشسرای راهنمایی تنظیم شده است)
قیمت جلدی ۱۵۵ ریال

بنگاه مطبوعاتی هاشمی شیراز

کتاب فخر رازی

محل فروش مجله و سایر انتشارات یکان
مرکز فروش کلیه کتابهای درسی و حل المسائل آنها
تهران، خیابان شاه آبداد - تلفن ۳۱۰۵۵۲

انتشارات یکان

روش ساده

حل مسألهای شیمی

ترجمه: عطاءالله بزرگ نیا

۲۰ ریال

معماهای ریاضی

ترجمه: محمد رکنی قاجار

بها: باجلد شمیز ۷۵ ریال

باجلد زرکوب: ۱۰۰ ریال

مجموعه علمی

شامل مقالات ریاضی، فیزیک و شیمی

حل مسائل ممتاز ریاضی و مطالعه دیگر

۶۰ ریال

تسهیهای هوش

ترجمه: باقر مظفرزاده

بها: ۴۰ ریال

سرگردانیهای جبر

ترجمه: پرویز شهریاری

نایاب

تسهیهای چند جوابی شیمی

ترجمه: عطاءالله بزرگ نیا

بها: ۴۰ ریال

راهنمای ریاضیات متوجه طه

تألیف: عبدالحسین مصححی

چاپ چهارم: ۱۲ ریال

تمرینات

ریاضیات مقدماتی

تألیف: اسدالحق شعرووری

فلا نایاب

مسائلی از حساب استدلالی

تألیف: محمود کاشانی

جلد سوم

۱۵ ریال

جلد دوم

۱۵ ریال

جلد اول

۱۲ ریال

مقدمه برای

تئوری مجموعه ها

تألیف: علی اصغر هومانی

فلا نایاب

مبادی منطق و ریاضی جدید

بها: ۴۳۰ ریال

تألیف: غلامرضا عسجذی

مشترکان یکان که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان که ساکن تهران می باشند مستقیماً به دفتر مجله مراجعة فرمایند و آنان که در شهرستانها اقامت دارند می توانند وجه رابه صورت نقدي یا تمیر باطل نشده یا چک بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده شود.