یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ نهم، شمارهٔ : ۵ شمارهٔ مسلسل: ۹۰ اسفند ۱۳۵۱

در این شماره :

هدف از نو کردن برنامه‌های ریاضی چه باید باشد؟	عبدالحسین مصحفی	۲۴۵
تعریف، شرایط تعریف	سیدمحمدکاظم نائینی	۲۴۶
فاصلهٔ دور	ترجمهٔ: علیرضا توکلی صابری	۲۵۳
خاصیت یکی از انواع مثلثها	ترجمهٔ فتح‌الله زرگری	۲۵۹
تقسیم مثلث به مثلثهای متشابه با خودش	ترجمهٔ: جعفر آقایانی چاوشی	۲۶۰
خاصیت مثلث با دو میانهٔ عمود برهم	محمد معینی	۲۶۱
مسائل منسوب به ریاضیدانان مشهور	ترجمهٔ داوید ریحان	۲۶۲
با ریاضیات آشتی کنید	ترجمهٔ : مصحفی	۲۶۵
تساویهای پایدار در اعداد	ترجمهٔ :فتح‌الله زرگری	۲۶۸
شمعی عمومی به روش برنامه‌ای	ترجمهٔ: باقر مظفر زاده	۲۶۹
حل مسائل یکان شمارهٔ ۸۹	—	۲۷۳
مسائل برای حل	—	۲۸۸
تستهای ریاضی	—	۲۹۱
اشتباه از چیست ؟	شهریار جهانیان	۲۹۴
بازی با اعداد	ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری	۲۹۴
مسائل انتخابی از مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها، ثلث دوم سال تحصیلی ۵۱-۵۰	—	۲۹۵
جدول اعداد	حسینعلی فنائی	۳۰۳
Problems & Solutions	—	۳۰۴

بها : ۲۵ ریال

یکان سال ۱۳۵۱

یکان سال ۱۳۵۱، شمارهٔ ویژهٔ یکان برای سال ۱۳۵۱، در بیش ازدویست صفحه به زودی منتشر می‌شود. این‌شمارهٔ ویژه برای‌تمام مشترکان فعلی یکان به‌نشانهٔ پستی‌آنان‌ارسال خواهد شد .

دریکان سال ۱۳۵۱ علاوه برسؤالهای امتحانات نهایی کلاسهای ششم‌طبیعی وریاضی وحل مسائل‌آنها، کلیهٔ سؤالهای کنکور سراسری گروههای ریاضی و طبیعی ، حتی سؤالهای ادبیات‌فارسی وانگلیسی درج شده وپاسخهای درست سؤالهای ریاضی ، فیزیك وشیمی مربوط به‌آن نیز ارائه گردیده است . غیرازآن، سؤالهای کنکورهای‌اختصاصی ونمونه‌های سؤالهای کنکور چند کشور خارجی نیز از جملـه مندرجات یکان سال ۵۱ می‌باشد .

چون چاپ مندرجات یکان سال ۵۱ قبل از اسفندمـاه انجام گرفته است ، از ایـن جهت درج بعضی از سؤالهای کنکورهای اختصاصی‌که توسط علاقمندان ارسال شده ودیرتر ازموعد به‌دفترمجله رسیده درمجلهٔ مزبورمیسر نگردیده است .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ نهـم ـ شمارهٔ پنجم ـ شمارهٔ مسلسل :۹۰

اسفند ۱۳۵۱

صاحب امتیاز و مدیروسردبیر : عبدالحسین مصحفی

نشانی اداره :

تهران ، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۹۳۱۸۱

حساب بانکی:حساب‌جاری۳۰۹۵ شعبهٔلاله‌زارنوبانك‌صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Director : **MOS'HAFI Abdolhossein**

Volume IX , number5 . March . 1973

subscription : 3$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ‌آذر ـ تلفن:۸۲۵۹۲۸

توجه

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت‌دیگر، وجهی‌به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریزمی‌کنید، حتماً مراتب راضمن‌نامهٔ جداگانه به‌دفتر مجله اطلاع دهید. فراموش‌نکنیدکه درنامهٔ ارسالی، نشانی‌کامل خودرا باخط خوانا بنویسید.

۲ـ اگر مشترك مجله هستید ونشانی شما تغییرمی‌کند، نشانی جدید خودرا به‌دفتر مجله اطلاع دهید. مجله‌هایی‌که‌تا قبل‌از اطلاع برنشانی جدید شما به نشانی سابـق ارسال شده باشد،مجدداً برای شما ارسال‌نخواهد شد.

۳ـ درنامه‌های ارسالی خود به دفتر مجلـه،نام، نام‌خانوادگی، شهر ونشانی‌خودرا باخط خوانا وواضح‌بنویسید.

۴ـ غیراز انتشارات یکان،کتاب دیگری را ازما تقاضا نکنید. برای تهیهٔ کتابهایی‌که زیر عنوان «معرفی‌کتاب» یابـه صورت‌آگهی درمجله معرفی‌می‌شوند ، به ناشران‌آنها مـ اجعه فرمایید .

هدف از نو کردن برنامه‌های ریاضی چه باید باشد؟

اولین شمارهٔ «کوشش» که اوایل سال تحصیلی جاری ازطرف دانشگاه جندیشاپور منتشر شد، حاوی ترجمهٔ مقاله‌ای به نسبت مفصل درنقد شدید برریاضیات جدیدبود. با توجه به اینکه اصل مقاله درمجلهٔ «Science et Vie» درج شده بوده است که ازمجلات علمی معتبر و پرتیراژکشور فرانسه است، ومترجم فارسی مقاله ازجمله استادان با نام ایرانی است که درسابق طرفداری خودرا ازریاضیات جدید اعلام کرده بوده است، انتشار مقاله عکس‌العملهای مختلفی را موجب گردیده است تا آنجا که بعضی ازافراد اعلام داشته‌اندکه فاتحهٔ ریاضیات جدید خوانده شده است.

دراین‌باره دونکته باید یادآوری گردد؛

نخست آنکه اظهارمخالفت با ریاضیات جدید درفرانسه تازگی ندارد. بلکه ازهمان زمان که دسته‌ای ازریاضیدانان فرانسه زیرنام «بورباکیها» پرچم ریاضیات جدید را برافراشتند، دسته‌ای دیگر ازریاضیدانان آن سرزمین به مخالفت جدی باآن بپاخاستند. بعد هم هرچندکه دستهٔ اول‌وپیروان‌آنان پیش بردند وتمام برنامه‌های ریاضی مدارس را زیرورو کردند اما بازهم دستهٔ دوم به مخالفت خود ادامه داده‌اند. هم‌اکنون‌که تغییر برنامه‌های ریاضی درفرانسه آخرین مرحلهٔ خود را می‌گذراند، نوآوران دربرنامه‌ها و طرفداران آنان اعلام می‌دارندکه این تغییر برنامه‌ها با موفقیت کامل مواجه است، درحالی‌که دستهٔ مخالف عقیده‌مندندکه درریاضیات جدید وظیفهٔ اساسی رفع نیازمندیهای سایر علوم، بویژه علوم فنی وتکنیك، فراموش گردیده است. مقالهٔ موردبحث در بالا انعکاسی از نظرات دستهٔ اخیر است.

دوم آنکه آنچه‌که درفرانسه درتغییربرنامه‌های ریاضی انجام گرفته غیرازآن است که درکشورهای دیگری ازقبیل انگلستان، شوروی، آمریکا وازجمله ایران، عمل شده است. درفرانسه تلاش شده‌است تا ریاضیات دورهٔ دبیرستان، همانندآنچه‌که یك ریاضیدان محض بررسی می‌کند، عاری ازهرگونه‌شهود باشد. اما دراینکه دانش‌آموز دورهٔ دبیرستان درك وفهم ریاضیات با روش مطلقاً اصل موضوعی‌را از عهده برآیدجای تردید وگفتگو است.

درایران وکشورهایی دیگر، هدف کلی‌واساسی که‌درتغییربرنامه‌ها موردنظر بوده است، وبایدباشد، **ایجاد تفکر ریاضی** در دانش‌آموز است؛ بدین معنی‌که دانش‌آموزچنان بارآیدکه دربارهٔ قضایا و موقعیتها همانندیك ریاضیدان واقعی استدلال ونتیجه‌گیری کند، نه‌آنکه به‌سان یك ماشین الکترونیکی بی‌روح، مغزی داشته‌باشد انباشته ازفرمولها ودستورات بدون‌آنکه مفاهیم اساسی مربوط به‌آنها را درك‌کرده باشد وبدون‌آنکه توانایی بکاربستن آنها را بدست‌آورده باشد.

اگردرایجاد تفکرریاضی دردانش‌آموز، آنطورکه شاید وباید، توفیق حاصل شود، به اجتماع و به مؤسسات علمی ودانشگاهی فردی تحویل خواهدشدکه نه تنها توانایی درك سریع وصحیح موقعیتها ونظریات را خواهد داشت بلکه دراین موارد ازقدرت خلاقه نیز برخوردار خواهد بود.

عبدالحسین مصحفی

تعریف، شرایط تعریف

(روشهای جدید در ریاضیات)

از : سید محمدکاظم نائینی

مقدمه

پیشرفتهای اخیر در زمینه‌های مختلف علوم فیزیکی، بیولوژیکی، کیهان شناسی و تمام علوم انسانی و اجتماعی نشان می‌دهد که ریاضیات به‌عنوان یك‌زبان‌ویك روش درکلیهٔ تحقیقات و بررسیهای جدید نقش بسیار مهمی دارد.

علوم ریاضی که خود به‌موازات علوم دیگر در حال گسترش و پیشرفت است زبان تمام علوم وابزاری دقیق‌برای درك و بیان مفاهیم است. علوم مختلف هر یك، شاخه‌ای از ریاضیات را مورد استفاده قرار داده و از آن به‌عنوان اصل و شالودهٔ قوانین علمی یادکرده‌اند.

درحال حاضر لزوم تجدید ساختمان شاخه‌های ریاضی‌و قرار دادن آن برمبنای منطق و تئوری مجموعه‌ها آشکارشده است، و چنین می‌نمایدکه باید با قرار دادن ریاضیات بر یك مبنای منطقی‌وتئوری مجموعه‌ها ساختمانی کلی‌برای ریاضیات بوجود آورد. این روش جدیدکه به ریاضیات نوین معروف است فواید زیر را در بر دارد:

الف: آموزش ریاضیات به‌عنوان مطالعهٔ ساختمانهای ریاضی به‌صورتی منظم در می‌آید.

ب: چون از ابتدا مطالب براساس منطق‌ریاضی‌تدریس می‌شود از یادگیری سطحی جلوگیری خواهدشد.

ج: چون شاخه‌های مختلف ریاضیات‌که ظاهرآشباهتی با یکدیگر ندارند همه براساس منطق استوارند، بوسیلهٔ‌منطق به‌هم مربوط می‌شوند.

د: با این روش آموزش ریاضیات بیش از آموزش به سبك قدیم استعداد ذاتی شاگردان را پرورش می‌دهد.

ه: ریاضیات جدید براساس منطق جدید استوار است.

و منطق جدید علم قوانین استنتاج است و راه رانشان‌می‌دهد در صورتی‌که منطق قدیم وسیله و قوانینی بودکه کاربردن‌آن ذهن را از لغزش و خطا بازمی‌داشت اما راه‌را نشان‌نمی‌داد.

منظور از بکار بردن دوکلمهٔ جدید و قدیم این‌نیست‌که ریاضیات قدیم منسوخ شده و ریاضیات جدید جای آنرا گرفته است بلکه این تعاریف و قراردادها است‌که تغییرکرده است و سبکی نو برای درك مفاهیم پدیدآورده است.

درنیمهٔ قرن نوزدهم بعضی اشکالات در منطق پیش‌آمد و دانشمندانی چون **وایت هیل و برتراند راسل** و **دلامبر** نقص دستگاههای منطقی را درك‌کرده و بیان‌کردند. درنتیجه منطق جدید پدید آمد و با تغییرکردن و دگرگونی منطق ریاضیات نیزتغییرکرد و پیشرفتها ودگرگونیهای‌زیادی درآن پدید آمد و اصطلاحات و علامات جدیدی وضع شد. نظریات جدید به علت افزایش ارتباطهای جهانی به‌منظور پیشرفت علوم و صنعت مورد توجه قرارگرفت و سپس‌لزوم وارد شدن آن در برنامه‌های آموزشی احساس‌گردید. وباید دانست‌که‌پایه واساس ریاضیات‌جدید برمبنای نظریهٔ‌مجموعه‌ها قرار دارد و به‌موجب‌آن ابتدا کلیات را بررسی‌کرده و هرچه بیشتر تعمیم می‌دهند سپس‌ازکل خواص جزء را درك می‌کنند.

مدتها است‌که ریاضیات مدرن دراکثر دانشگاههای جهان تدریس می‌شود اما در مدارس ابتدائی و متوسطه روش همان روش قدیم‌است ولی از آنجائی‌که‌ریاضیات نوین به‌روش اصل موضوعی است، و دانشجویان مدتها در دبستان و دبیرستان به روشی غیرازاین‌کارکرده‌اند این طریقه به‌نظرشان عجیب و غیر قابل‌هضم می‌آید. این است‌که تدریس ریاضیات نوین در سطح پایین می‌تواند به‌مراتب مفیدتر از سطح بالا باشد.

ریاضیات جدید

ریاضیات جدید چیست ؟ جواب دادن به‌این سؤال در ابتدای کار شاید بسیار مشکل باشد ، چون ریاضیات جدید شامل شاخه‌های متعدد و متنوع مانند جبر جدید ، منطق جدید مجموعه‌ها ، توپولوژی ، هندسه‌های غیر اقلیدسی و فضاهای برداری است و شاید در بدو امرچنین بنظر برسدکه بعضی از این رشته‌ها با سایرین ارتباطی ندارند . ولی‌باکمی تحقیق و تعمق بیشتر معلوم می‌شودکه تقریباً ساختمان تمام شاخه‌های ریاضی دربسیاری از خواص مشترك بوده و شامل مفاهیم اولیه (تعریف نشده‌ها) و اصول موضوعه و قضایا می‌باشند .

مفاهیم اولیه : حدود اولیه یا عناصر تعریف نشده در یك سیستم منطقی مفاهیمی هستندکه ناگزیر بدون تعریف پذیرفته می‌شوند . مانند نقطه و خط و صفحه وطول وعرض در سیستم هندسی یا مفهوم عدد در جبر و مفهوم بردار در هندسهٔ تحلیلی . علت پذیرش این عناصر این است‌که امکان تعریف آنها در بحث یك ساختمان قیاسی وجود ندارد.

مثلاً اگر بخواهیم نقطه و خط را در هندسه تعریف کنیم باید بوسیلهٔ عناصر دیگر هندسی آنها را تعریف‌کنیم که این عناصر جدید نیزبه‌نوبهٔ خودباید قبلاً تعریف شده باشند. به‌این ترتیب یا به یك رشتهٔ بی‌پایان از تعاریف می‌رسیم ویا دو باره‌به نقطهٔ شروع برمی‌گردیم‌که هردو بی‌فایده است.

مفاهیم اولیه ، سنگ‌بنای هرشاخهٔ ریاضی هستندکه باید در تمام قسمتهاانتخاب و پذیرفته شوند . این مفاهیم ناشی از تجربهٔ انسان است و به موازات پیشرفت ریاضی مفاهیم جدیدی نیز وارد سیستم منطقی می‌شودکه مبتنی بر مفاهیم اولیه است . بیشتر مفاهیم اولیه جنبهٔ تجرد دارندوبا جهان فیزیکی ارتباط چندانی ندارند .

پس ازانتخاب تعریف نشده‌ها هرعنصر یاهر شیء دیگر که وارد سیستم شود باید برحسب تعریف نشده‌ها تعریف شوند و انتخاب تعریف نشده‌هااختیاری است.

اصول موضوع : تعدادی از احکام یك علم را نیز بدون اثبات می‌پذیریم . زیرا اثبات همهٔ احکام یك تئوری قیاسی ممکن‌نیست. به دلیل اینکه وضعی مشابه حدود اولیه پیش می‌آید . این احکام را اصول موضوع یك تئوری قیاسی می‌نامند و پس از تعیین این اصول هرحکم دیگر تئوری را باید به استناد آنها و با استدلال‌منطقی استنتاج نمود.

در ریاضیات قدیم یونان (ریاضیات‌کلاسیك) اصول موضوع را به‌صورت حقایق روشن در بارهٔ مفاهیم اولیه می‌پنداشتند ، مانند اصول هندسهٔ اقلیدسی . اما در ریاضیات جدید اصول موضوع مجموعه‌ای از شرایط دربارهٔ مفاهیم اولیه هستندکه بطور منطقی سازگار می‌باشند مانند : «از یك نقطهٔ خارج خط فقط یك خط می‌توان‌به موازات‌آن رسم‌کرد» و یا «هر عدد به قوهٔ صفر برابر یك است» .

قضایا : قضایا نتایجی هستندکه از مفاهیم و اصول مفروض و برطبق قواعد منطق قیاسی استنتاج می‌گردند . قضایا ثمرهٔ حقیقی‌هرنوع فعالیت ریاضی است ودر این مرحله از دانش بشری است‌که استعدادهای فکری و نبوغ انسانی به فعالیت ثمربخش می‌پردازد. به عنوان مثال اقلیدس با استفاده از نه اصل معروف خوددرحدود پانصدقضیه‌درهندسهٔ‌اقلیدسی استخراج‌کرد .

استدلال : استدلال نقش مهمی در زندگی روزمره انسانی دارد و اگر بشر فاقد قدرت استدلال بود هیچگونه پیشرفتی نداشت .

در تئوریهایی‌که براساس اصول موضوع استوار است استدلال سهم بزرگی دارد .

استدلال استقرائی درکشف قضایاواستدلال‌قیاسی‌دراثبات آنها بکار برده می‌شود . تقریباً یك نوع استدلال در تمام بررسیهای علمی وجود دارد وآن این است‌که محقق تجربیات مکرر انجام می‌دهد ونتایج حاصل ازاین تجارب را دسته‌بندی و آمارگیری می‌کند وبا درنظرگرفتن ارتباط بین آنهابه‌کشف یك قانون نائل می‌شود .

گالیله در آزمایش خود جهت‌کشف قانون سقوط آزاد اجسام (دربرج پیزا) از همین روش استفاده‌کرد .

دیگر از مشخصات برجستهٔ ریاضیات جدید تمایل آن برای بررسی درخواص مشترکهای ریاضی و بنای ساختمانهای کلی و مجرد است‌که بتواند سیستمهای قبلی را متحد نماید.

***

تعریف‌کردن ، اصول و شرایط تعریف ، مسئله‌ای‌است، که‌کمتر بدان توجه می‌شود و غالباً نقص تعاریف باعث عدم درك مفاهیم بوده و حتی سبب رکود فکری و انحراف از استنتاجات علمی می‌گردد . اینك با مثالهای‌کافی مفهوم‌کلمهٔ تعریف واصول و شرایط آن بررسی می‌گردد .

تعریف چیست ؟

قبل‌ازهرچیز ابتدا باید معنی خودکلمهٔ «تعریف» ولزوم بکاربردن این کلمه‌ونقش‌آن را دراستدلال وبیان مفاهیم‌بدانیم.

مفاهیم را نه می‌توان مجسم‌کرد ونه می‌توان نمایش داد. مثل مفهوم سیاهی، سفیدی، خط، سطح و... بلکه فقط می‌توان درموردآنها فکرکرد. اما افکاربوسیلهٔ زبان شکل می‌گیرد ویا بوسیلهٔ علامات‌مجسم می‌شود یعنی اندیشه‌دربارهٔ هرمفهومی با نام همراه است. بدون اسم مفهوم هم وجود ندارد، علامت‌گذاری‌هم نوعی ازهمین نام‌گذاری است و این نامها وعلامتها هستندکه می‌توانند درذهن به شکل محسوسی نقش ببندند .

وقتی می‌گوئیم پنج، به احتمال قوی علامت۵ چیزی را مشخص نمی‌کند بلکه ما این شکل۵ را درفکر خود مجسم می‌کنیم وهمان مفهوم اصلی راکه خاصیت‌کلیهٔ مجموعه‌هایی است‌که تعداد اجزاءآنها پنج است درك می‌کنیم؛ ۵ مداد ، ۵قلم، ۵ انگشت ...

نقش علامات در این است‌که اولاً تجسم ساده‌ای از مفهوم اشیاء مجرد می‌دهد و ثانیاً این امکان را می‌دهیدکه عملیات مربوط به بعضی ازعناصرریاضی به‌کمك‌آنهابه‌سهولت انجام‌گیرد .

واما تعریف چیست. ما درضمن بحث خود درهر مورد معانی بعضی‌ازکلمات را دانسته فرض می‌کنیم و لزومی در تعریف وشناسائی آن نمی‌دانیم مثل‌کلمات سیب وگردو و چوب وبرگ ...

اما درضمن استدلال یا دادن توضیحات دربارهٔ مطالب هرعلمی ناچاریم بعضی ازلغات مصطلح درزبان عادی خود را به معنیهای خاص بکارببریم واگرقبلاً آن معانی خاص رابرای خواننده ویا شنونده روشن نکرده باشیم مقصود ما را درك نخواهدکرد وحتی ممکن است اشتباههایی پیش بیاید.پس باید استعمال لغات را طوری مشخص و محدود کنیم‌که درضمن استدلال به این‌اشکالها برنخوریم.

برای رسیدن به این هدف بایدکاملاً روشن و مشخص ومعلوم باشدکه دربارهٔ چه صحبت می‌کنیم یعنی باید شرح‌و معنی‌کلیهٔ‌کلماتی راکه بکار می‌بریم بطورواضح بیان‌کنیم .

مطالبی‌که برای روشن‌شدن معنی‌کلمه ذکرمی‌شودتعریف آن‌کلمه نامیده می‌شود .

اگرقبل ازورود به استدلال وقضاوت تعریف‌کلمات را نداده باشیم هرکسی ازآن چیزی خواهد فهمید وحتی خودما نیز درموقع تفکر واستدلال‌گرفتار ابهام خواهیم شد .

برای روشن شدن مطلب درزیرسه دستوررا‌که **پاسکال** درمورد تعریف داده است ذکرمی‌کنیم .

۱ـ هرگزنباید به تعریف هیچ یك ازاموری‌که فی‌نفسه معلومند پرداخت مگراینکه اصطلاحهای روشنتری دراختیار باشد .

۲ـ هیچ یك ازاصطلاحهایی راکه تاریك ومبهمند نباید بی‌تعریف گذاشت .

۳ـ درتعریف بایدکلمه‌هایی رابکار بردکه کاملاً معلومند ویا قبلاً بیان شده‌اند. از استعمال هرگونه اصطلاح‌نامعین درتعریف باید خودداری شود .

مثال :

۱ـ اگرمعنی‌کلمات: فاصله،کوتاهترین، نقطه، بین، را دانسته فرض‌کنیم خط مستقیم را اینطور تعریف می‌کنند (کوتاهترین فاصلهٔ بین دونقطه)

۲ـ اگرمعنی‌کلمات: کالا، تبدیل، قابلیت، حداکثر، را دانسته فرض‌کنیم تعریف پول چنین است « پول کالایی است که قابلیت تبدیل‌آن حداکثراست. »

۳ـ مفهوم هوش را نمی‌توان تعریف‌کرد ولی دریك محیط با هوش را اینطورتعریف می‌کنند .

در یك حوزهٔ محدود یك فرد را وقتی می‌توان گفت با هوش‌تراست‌که زودترازدیگران خودرا بتواند با محیط تطبیق کند (دراین‌تعریف معانی‌بعضی‌ازکلمات را دانسته‌فرض‌کردیم)

۴ـ اگرتعریف خط وصفحه را دانسته فرض‌کنیم دوخط متنافر باید تعریف شود زیراکلمهٔ متنافر دراینجا به معنی‌خاص دیگربکارمی‌رودکه با مفهوم تنفرکه‌گاهی در محاوره بکاربرده می‌شود فرق دارد. اینجا متنافررا اینطورتعریف می‌کنند: دو خط متنافر خطوطی راگویندکه در داخل یك صفحه نباشند.

این تعریف نسبت به هرتعریف دیگری‌که از دو خط متنافر شودکاملتر است زیرا با استفاده از مفاهیم اولیه و کلمات فنی مربوط باکمترین و ساده‌ترین کلمه بیان شده

است. اگر تعریف دیگرساده‌تراز این تعاریف عرضه شود که همین مفهوم را پدیدار سازد ولو اینکه (علامت) باشد آنرا می‌پذیرند وتعریف فوق را مردود خواهند شناخت.

گاهی درتعریف یك کلمه ناگزیریم توضیحات دیگری نیز بیان کنیم. این توضیحات را هرگز نباید جزء تعریف بشمار آورد. مثلاً می‌خواهیم کلمهٔ «تحقیق» راتعریف کنیم. می گوئیم: تحقیق عبارتست از مجموعهٔ اقداماتی که برای کشف قسمتی ازمشخصات جهان حقیقی انجام می گیرد. اینك دراین باره توضیح می‌دهیم که:

جهانی که در آن زندگی می کنیم دارای خواص و مشخصاتی است که قسمتی ازآنها بکلی برما پوشیده است. ولی درزندگی روزانهٔ خود چیزهایی را می‌بینیم وحس می کنیم وحتی دربارهٔ بعضی از محسوسات خود قضاوتهایی می کنیم واین حاکی از این است که به بعضی از حقایق جهان آشنائی داریم. آنچه‌را که می‌بینیم وحس می کنیم جهان ظاهری می‌نامند که با جهان واقعی وحقیقی کم وبیش تفاوت دارد.

ماهرروز مشاهده می کنیم که خورشید طلوع می کند، از مشرق درصحنهٔ آسمان بالاآمده ودرپایان روز در مغرب فرو می‌رود، این مشاهده مربوط به جهان ظاهری است. اما آزمایشها واندیشه‌هایی که بشرازآغاز تا به امروز برای کشف چگونگی شکل ومشخصات زمین وخورشید وروابط بین آنهاو کشف علت برآمدن وفرورفتن خورشید وتشخیص وضع زمین وخورشید دردنیای حقیقی کرده است تحقیق نامیده می‌شود. مردعادی عامی هرچه راکه درجهان می گذرد یا درمحیط پیش می‌آید پیش‌آمدی طبیعی می شمرد وبه گذشتهٔ آن کاری نداردو ازنتیجهٔ آن بیخبراست.

مرد عالم محقق به‌عکس به کلیهٔ نمودها با دقت می‌نگرد و کارهای پیشینیان‌را دربارهٔ آنها می‌بیند. عوامل وعلل بوجود آمدن نمود را رسیدگی کرده وکوشش می کند رابطهٔ بین آنها را بدست‌آورد.

یك مثال بسیارساده برای نشان‌دادن تفاوت احساس‌ما ازعوامل جهان ظاهری وتحقیق ما دربارهٔ آنها همانا احساس سنگینی یك جسم واندازه‌گرفتن میزان این سنگینی یعنی وزن آن جسم است وهمین مثال ساده نشان می‌دهدکه تحقیق سه عامل اصلی دارد. یکی موضوعی که باید موردتحقیق قرار گیردکه همان سنگینی یك جسم است. دوم میزان این‌سنگینی یعنی اینکه ما احتیاج داریم وزن‌آن جسم را بدانیم. سوم روشی که برای تحقیق این وزن بکارمی‌بریم. مثلاً جسم را با ترازو ویا هروسیلهٔ توزین که دراختیارباشد وزن‌می کنیم.

اینها تمام توضیحاتی بود که ما برای بیان مفهوم (تحقیق) بکاربردیم. آن‌تعریف اول که درچندجمله خلاصه‌بود وقتی برای یك فرد مفهوم است که قبلاً به این توضیحات آشنا باشد.

آنچه که مسلم است بعضی ازتعاریف ناقص است واحتیاج به توضیح دارد. مثلاً تعریف صفر (ازکتاب التفهیم لاوائل‌صناعة‌التنجیم) که بوسیلهٔ **ابوریحان بیرونی** بیان شده بدین گونه است:

«چون جایی خالی شود جای خالی را با دایره‌ای خرد نمایش داده وآن‌را صفر می‌نامیم» این تعریف با توضیحات بسیار مفهوم می‌شود ولی با مقایسهٔ با تعریف مجموعهٔ تهی درتئوری مجموعه‌ها خواهیم دریافت که این تعریف‌آنقدرها هم ازتعریف جدید صفردورنیست.

گاهی تلاش برای تعریف بعضی ازعلامات ویا مفاهیم سبب می‌شودکه یا جملات وکلمات بکاررفته آنقدر ناقص و نامفهوم‌اندکه تعریف چیزی را مشخص نمی کند ویا اینکه آنقدرثقیل وطولانی‌اندکه مفهوم اصلی را از یاد می‌برند. این گونه مفاهیم را نباید تعریف‌کرد مانند تعریف واحد.

ابو ریحان بیرونی می گویدکه «یکی آن است که یگانگی براو افتد وبدونام زده شود». این تعریف برای دانش‌آموزی که درمراحل اولیهٔ تحصیل است نامفهوم است‌و اما تعریف دیگر یك که بسیار مغلق وپیچیده است چنین است:

شیءکه از دیگر اشیاء گردآمده ومستقلاً اظهار وجود کند مادام که واردگروهی از اشیاء همنوع خود نشده است دارای خاصیت یگانگی ووحدت است. تصور وحدانیت مطلق برای این شیء را پس‌از سلب کلیهٔ خصوصیات وآثار وجودی اگرمیسر باشد با علامت یك نمایش داده و آنرا واحدگروه گویند وکلمهٔ‌یك را برآن اطلاق می کنند». این تعریف داری شرایط تعریف نیست فقط می‌توان آنرا توضیحی برای درك مفهوم وحدت بحساب آورد.

آنچه که درهرحال مسلم است پیداکردن راهی است برای درك مفاهیم، زیرا ما وقتی چیزی را مشاهده می کنیم اولین سؤالی که مطرح می‌شود این است که این چیست؟ چرا

ساخته شده است؟ وچگونه ساخته شده است ؟

سؤال اول لازمه‌اش آشنایی با شرایط تعریف است . سؤال دوم درحوزهٔ استدلال وبرهان قراردارد وجنبهٔ ریاضی دارد. اما سؤال‌سوم راکسی مطرح می‌کندکه با جهان‌فیزیکی سروکار دارد وبه شکل ظاهری اشیاء توجه می‌کند. اما در پاسخ‌دادن‌به‌سؤال‌اول گاهی درریاضیات واصولاً درهر مرحلهٔ علمی دیگربه‌کلمات یا علاماتی برخورد می‌کنیم که دارای تعریف نیستند وکوشش ما نیز برای تعریف آنها به ثمر نمی‌رسد. مانند عدد، نقطه، خط، ومجموعه. کلمات یاعباراتی که تاکنون به‌منظور تعریف‌کردن این مفاهیم بکاررفته بیهوده وباطل است .

مثلاً تعریفی راکه **اقلیدس** ازخط‌کرده این است : «خط آن است‌که فقط طول دارد و ضخامت و پهنا ندارد» . این تعریف مستلزم دانستن معانی کلماتی از قبیل طول وضخامت و پهنا است‌که شاید هیچکدام برای دیگری مفهوم نباشد ودرك این‌کلمات خود مربوط به این است‌که ماخط را تعریف‌کرده باشیم. پس این تلاش به‌منظور تعریف کردن خط بیهوده است وارزش علمی ومنطقی ندارد .

درریاضیات جدید خط را چنین بیان می‌کنند: «خط یك عنصر تعریف نشده درهندسهٔ‌اقلیدسی». برای روشن‌شدن‌مطلب مثالی را ذکرمی‌کنیم .

فرض‌کنید می‌خواهیم معنی لغت «گیزمو» را بدانیم و آنرا تعریف‌کنیم. به‌کتاب لغت مراجعه می‌کنیم مثلاً ملاحظه می‌شودکه جلوی این‌کلمه نوشته شده است « فرازیمور ـ وات‌سیس ـ سیلاکو» ما معنی این سه‌کلمه را هم نمی‌دانیم. مجدداً به دنبال معنی‌کلمهٔ «فرازیمور» درکتاب لغت‌می‌گردیم که شایدکلمه‌ای را بیان‌کندکه برای ما مفهوم باشد . اما می‌بینیم‌که آنجا هم درمعنی‌کلمهٔ «فرازیمور» نوشته است «وات‌سیس ـ سیلاکو ـ گیزمو» وهمین‌طورکلمهٔ «وات‌سیس» هم معنی شده «سیلاکو ـ گیزمو ـ فرازیمور» و... وما مجدداً به جای اول رسیده‌ایم. تنها نتیجه‌ای‌که عاید شده است این‌است که «گیزمو» دارای سه معنی دیگرهم هست. اگرتعریف آن را دانسته فرض‌کنیم سه‌کلمهٔ دیگران را می‌توان به‌کمك آن تعریف‌کرد .

حال فرض‌کنیدکه ما در یك تئوری دقیق ریاضی می‌خواهیم ترتیب منطقی را رعایت‌کرده‌هرجمله را به‌ترتیب تعریف‌کرده پیش‌برویم. یعنی همان کاری‌راکه **اقلیدس** برای تدوین‌کتاب هندسه خودکرده است. به این جمله می‌رسیم‌که: «گیزموهست یك....» اگر این اولین جملهٔ شروع کتاب باشد تکلیف ما چگونه خواهد بود ؟

واضح است‌که این تعریف امکان‌پذیرنیست. ناگزیریم که این اصل را بپذیریم‌که این‌کلمه تعریف ندارد. در هریك ازسیستمهای ریاضی ما با مفاهیم اولیه وکلمات تعریف نشده سروکار داریم. مانند مفاهیم خط ونقطه وصفحه وعدد و مجموعه...» نکتهٔ اصلی‌که باید بدان توجه‌کرد اتکاء معنی‌و مفهوم این‌کلمات به اصول موضوع هندسه است واین بسیار ساده‌تراست‌که ما این اصل معروف را بپذیریم‌که: آنچه‌که خود پدیدآمده یك حقیقت است. تا اینکه برای مفهوم یك کلمه الفاظی را بیهوده سروهم‌کنیم بدون نتیجه .

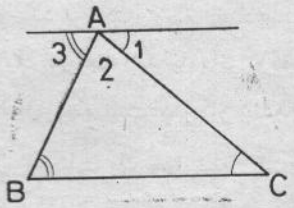
این اصول‌است‌که به‌ماطبیعت‌وماهیت‌کلمات رامی‌فهماند واز ترکیب آنها وروابطشان مفاهیمی ادراك می‌شود.

پس قراردادها واصول ناگزیر باید درسیستمهای‌ریاضی وجود داشته باشد وبدون‌آنها ما هرگز قادر به‌درك مفاهیم‌و بنای سازمانهای ریاضی‌نخواهیم بود.

وضع این قراردادهاواصول،متکی به‌تجارب واطلاعاتی است‌که‌ما ازنمودها کسب کرده‌ایم‌وحتی‌الامکان‌بایستی‌این‌اصول وقراردادها باهم همساز بوده و سازگاری داشته باشند و یا اصولاً وضع آنها ضروری‌باشد. متأسفانه تاکنون علم‌بشرقادر نبوده است‌که روشی اتخاذکندکه به‌کمك‌آن بتواندسازگاری بودن دویاچنداصل موضوع‌را قبلاً به‌اثبات‌برساند. با تجارب وعملیات‌مقدماتی‌می‌توان گاهی‌درحوزهٔ‌اطلاعات‌وافکارسازگاری یك اصل را تحقیق‌کرد ولی تحقیق‌کردن با ثابت‌کردن فرق دارد(*) مثلاً اگر بخواهیم تحقیق‌کنیم‌که مجموع‌زوایای یك مثلث در هندسهٔ اقلیدسی دوقائمه است‌کافی است با یك

*: مثلا: برای اینکه تحقیق‌کنیم‌که قرارداد «هرعدد به‌توان صفر برابر یك‌است» با قراردادهای‌دیگر جبر متوافق‌وسازگار است با یك‌مثال اینطور تحقیق می‌کنیم: مثلاً $a^{5-5} = a^{0} = a^5:a^5$ (۱) یا : $a^5:a^5 = \frac{aaaaa}{aaaaa} = 1$ چون این دو عمل دو شکل متفاوت از یك عمل تقسیم است‌باید نتیجهٔ‌آن‌یکی‌باشد پس: $a^0 = 1$ است. این تحقیق است‌نه اثبات متأسفانه‌در بعضی‌ازکتب این عمل را روشی برای اثبات $a^0 = 1$ بیان‌کرده‌اند

وسیلهٔ نسبتاً دقیق هرسه زاویهٔ مثلث را اندازه گرفته ومقادیر آنها را باهم‌جمع کنیم و برای اطمینان بیشتر این عمل را چندین بار تکرارکرده آمار بگیریم. وطبق روشهاوفرمولهای آماری با توجه به‌قوانین احتمالات‌با اطمینان واعتمادقریب‌به یقین بیان‌کنیم که :



مجموع‌زوایای یك مثلث دوقائمه است. این تحقیق‌است‌اما، دراثبات این‌حکم تنها به تعاریف واصول ومفروضات‌تکیه شده است.

با یك‌لم یاحیلهٔ علمی‌که ناشی از اندیشهٔ انسانی است از رأس A خطی‌موازی BC رسم‌می‌کنیم. از تساوی زوایای $B = A_2$و$A_1 = C$ نتیجه می‌شود:

$$A + B + C = A_1 + A_2 + A_3 = \text{دو قائمه}$$

این اثبات است‌که از ترکیب منطقی عبارات نتیجه شده است.

ماوقتی‌که دریك‌سیستم ریاضی ناگزیر، اصولی راوضع می‌کنیم، ابتدا امکان‌این‌نیست‌که سازگار بودن‌اصول رابه‌اثبات برسانیم بعداً دراثر تجارب‌این امر تا اندازهٔ تحقیق‌می‌شود. لذا ما در هرمورد یك‌اصل دیگرنیزبایدبه تمام اصول موضوع وقراردادها دریك سیستم ریاضی اضافه‌کنیم و آن اینست‌که تمام این اصول وقراردادها باهم سازگاری دارند.

برای روشن شدن مطلب به‌ذکر یك‌مثال می‌پردازیم : تعاریف زیر را قرارداد می‌کنیم:

عدد π :«نسبت محیط هردایره به قطرش»، (این‌تعریف ۶کلمه دارد)

عدد e : «مبنای لگاریتم طبیعی» ، (این تعریف ۳کلمه دارد)

عدد ۵ : تعداد انگشتان یك‌دست انسان»، (این تعریف ۵کلمه دارد)

عدد ۹ : «تعداد سیارات منظومهٔ شمسی»، (این‌تعریف ۴کلمه دارد)

عدد ۷ : «تعداد کواکب‌صورت فلکی‌دب‌اکبر»، (این تعریف ۶کلمه دارد) .

عدد a : «عددی‌که برای تعریفش‌کمتر از پنج کلمه‌لازم باشد»، (این‌تعریف ۱۰ کلمه دارد)

چنانکه ملاحظه می‌شود عدد e وعدد ۹ باتعریف‌عدد a سازگاری دارندو می‌توان گفت $a = e$ و $a = ۹$ امابه‌تعریف عددa توجه‌کنید این تعریف باخودش‌سازگاری ندارد، برای تعریف عددی‌که تعریفش‌کمتر از۵کلمه لازم‌دارد، ده‌کلمه‌بکار رفته است و این نمونه‌ای است از عدم سازگاری تعاریف و اصول .

بازی شطرنج دارای عناصری است به نامهای مهره، عرصه، پیاده وسواره (شاه‌و وزیرو رخ و اسب‌وفیل)

اینها مفاهیم اولیه هستند. دراین بازی قراردادهایی‌نیز وجود داردکه‌همان اصول موضوع دربازی شطرنج‌اند.

مثلاً: ۱- اسب به‌شکل L حرکت‌می‌کند. ۲- حرکت مهرهٔ رخ‌یا عمودی یا افقی‌است. ۳- تعداد خانه‌های شطرنج ۶۴ تا یك درمیان سیاه و سفید است و اصول دیگر.... اما چگونه می‌توان ثابت‌کردکه این اصول و قراردادها باهم سازگاری دارند؟آیا در ضمن‌حرکات متوالی،یکی روی‌دیگری اثر نمی‌گذارد؟ اینجا است‌که‌ما این اصل مکمل را می‌پذیریم که اصول خود باهم سازگاری دارند. مادام‌که بوسیلهٔ تجربه عدم سازگاری یك‌اصل را باسایر اصول درنیابیم آن را مبنای استدلال و بیان اعمال وتحقیق قرار می‌دهیم.

زبان‌ریاضی: برای نوشتن‌کتابهای علمی‌دو نوع‌زبان بکاربرده می‌شود. یکی زبان معمولی، که از لغات‌وکلمات، با معانی معمولی تشکیل یافته است و هیچگونه‌کوششی برای تنظیم وترتیب آنهاو یا دقتی‌برای بیان آنها بعمل نمی‌آیدو صرفاً برای فهماندن معانی بکار برده می‌شوند.

زبان دیگر زبان علمی یازبان ریاضی‌است‌که به‌زبان‌فنی معروف‌است. در این زبان هرکلمه یالغت وعلامتی‌که‌بکاربرده شود بایستی در بدو امر به‌دقت تعریف شده ودربارهٔ آن با زبان معمولی توضیح داده شود. این توضیحات باید دارای کلمات‌و جملاتی باشد که معانی‌و مفاهیم آن‌معمولی وروشن است. بدیهی‌است‌که اینگونه توضیحات را تعریف نمی‌نامند چه وقتی یك علامت یاکلمهٔ جدیدکه‌بکار برده می‌شود هیچ کلمه یاجملهٔ علمی وجود نداردکه بتواند طبق شرایط‌تعریف آنرا تعریف‌کند. این‌کلمه جزء مجموعهٔ‌کلمات تعریف‌نشده درمی‌آید. توضیح‌یاهر شرحی‌که‌دربارهٔ آن‌بوسیلهٔ زبان‌معمولی بعمل می‌آید می‌تواند فاقد هرگونه استدلال منطقی‌باشد. درحقیقت راه درك مفاهیم را برای ما روشن‌می‌سازد.

برای مثال‌کلمهٔ «نقطه» درهندسه به صورت یك‌کلمهٔ علمی بکار برده می‌شود. معنی آن روشن استو هیچگاه نباید

برای تعریف آن کوشش کرد و جزء مجموعهٔ تعریف نشده‌ها در هندسه است. ولی همین کلمه وقتی درفیزیك بکاربرده شودمعنی دیگر وتعریف دیگر داردکه بایستی تعبیر و تفسیرشود.

زبانی راکه معمولاً به‌صورت معمولی بکار می‌بریم و برای معرفی اشیاءو شناسائی کلمات و درك مفاهیم از آن استفاده می‌کنیم **سینتاکس** (Syntax) می‌نامند. زبان دیگر زبان ریاضی، و فنی است و آن را زبان **آبجکت** (Object Language) گویند.

گاهی ممکن است در یك حوزه زبان آبجکت را به‌عنوان زبان سینتاکس بکار ببریم و به‌عکس و این بسته به نحوهٔ تعریف وضرورت توضیح دارد.

مسئله‌ای که اینك مطرح می‌شود این است که چرا بیشتر کلمات را تعریف نشده فرض کرده واز توضیح و تعریف آنها خود داری می‌کنیم. علت این است که اصولاً خود تعریف هم تعاریفی دارد وشرایطی، وبدیهی است که اینگونه تعاریف در معنی و شکلهای مورد تعریف کاملاً روشن و واضح نیستند. مثلاً کلمهٔ «تند» درکتابها با کلمات «زود» «به‌سرعت» «باعجله» تعریف می‌شود. خوب که توجه کنید خواهید دریافت که خود این کلمات نیز تعریف لازم دارند واگر تعریف هرکدام ازآنها را بخواهیم بیان کنیم ناگزیر ازکلمات دیگر بایستی استفاده کنیم وهرگز به‌جائی نمی‌رسیم. تنها اطلاعی که ما ازاین کلمات جمع‌آوری شده و این فرمها داریم این است که تمام آنها دارای یك معنی ویك مفهوم است (البته در حوزهٔ موردنظر وتعریف شده) اگر یکی از این کلمات شناخته شود بقیه شناخته خواهند شد. واگر یکی از آنها شناخته نشود هیچ معنی و مفهومی برای سایر کلمات مستفاد نمی‌گردد. پس برای احتراز از برخوردبااین دور وتکرار بیهوده، ریاضیدانها دستور سادهٔ زیر راپیشنهادمی‌کنند و آنرا به‌عنوان اصل می‌پذیرند که «تعریف کلیهٔ کلمات وجملاتی راکه قبلاً بکار بردیم (هرکلمه وجمله‌ای که تعریف نشده) دانسته فرض می‌کنیم».

قاعدهٔ تعریف: در یك حوزه یك کلمه یایك علامت جدید تعریف شده است که هرگاه آنرا درمجموعهٔ سایر کلمات یا علامات بکار بریم معنی آن کلمات یاجملات را تغییر ندهد ومفهوم آن روشن باشد.

۱ـ هرکلمه یاهرعلامتی که برای نخستین بار درآن بکار برده می‌شود بایدقبلاً ما به‌زبان محاوره‌ای ویا به‌زبان علمی مفهوم آن را روشن کرده باشیم. یعنی درهر صورت بایدقبلاً کلمهٔ علمی تعریف شود ویا به‌صورت کلمات تعریف نشده پذیرفته گردد.

۲ـ کلمات جدید درتعریف باید قابل تبدیل به کلمات تعریف شده باشد یعنی تبدیل‌پذیر باشد.

۳ـ یك تعریف باید معکوس‌پذیر باشد مانند «یك عدد مثبت عددی است بزرگتر ازصفر». این تعریف می‌تواند جای عبارت زیر رابگیرد:

«یك عدد بزرگتر ازصفر عددی است مثبت».

۴ـ یك تعریف باید بامعانی ومفاهیم قبلی ومطالبی که پیش ازآن بیان شده است سازگار باشد.

مثال ۱ «مثلث یك چهارضلعی است که یك ضلع آن صفر باشد» در اینجا مثلث باچهار ضلعی سازگار نیست.

مثال ۲ «یك مستطیل یك کثیرالاضلاع مشخص است» در اینجا کثیرالاضلاع بالغت مشخص سازگار نیست.

۵ـ یك تعریف باید کامل باشد. مثلاً تعریف «مربع یك متوازی‌الاضلاع بااقطار مساوی است» کامل نیست.

۶ـ یك تعریف باید حتی‌المقدور ساده ومختصر باشد و نباید بیش از آنچه که لازم ومورد نیاز است دارای اطلاعات باشد. مثلاً تعریف زیر فاقد ارزش علمی است «یك مربع همانند یك متوازی‌الاضلاعی است که نه تنها چهار ضلع آن مساوی است بلکه اقطار وتمام زوایای آن نیزهمه برابرند» این تعریف ممکن است برای یك یا چند نفر خوب وکامل ومفید باشدولی عموماً صورت منطقی تعریف را ندارد.

۷ـ یك تعریف باید زیبا ولطیف باشد و دارای ظرافت علمی باشد وهرگز نباید ازکلمات ثقیل و لغات نامأنوس و بدآهنگ وکریه‌اللفظ وزشت استفاده کرد. مثلاً «دوخط درصفحه یابه هم برسند یا به‌هم نرس» یا «ذوزنقه یك چهارضلعی برس نرس است» (یعنی دو ضلع آن موازی و دو ضلع دیگر آن متقاطع‌اند) ویا مانند «برس نرس دولنگ‌پا جفت» یعنی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین.

تمرین: ۱ـ یك کتاب درسی دربارهٔ آیرودینامیك با این جمله آغاز می‌شود:

«آیرودینامیك مطالعهٔ حرکت هوا و نیروهای مؤثر بر اجسام فضائی است که بوسیلهٔ هوا درحرکت‌اند و رابطهٔ بین این نیروها است باهوا»

اولاً: دراین تعریف اولاً کلمات وجملات را تحت دو دسته سینتاکس وآبجکت دسته‌بندی کنید.

ثانیاً: دراین تعریف کدام کلمه را بایدتعریف کرد.

فاصلهٔ دور

نوشتهٔ : اسحق آسیموف

ترجمهٔ: علیرضا توکلی صابری

وقتی نوزده‌ساله‌بودم، یکی از خویشان مرا دعوت‌کرد که به ملاقاتش بروم. آدرس ایستگاهی راکه می‌بایست از آن پیاده شوم به من گفتند . ولی هیچ به فکرم خطور نکردکه چطور از ایستگاه‌به منزل فامیلم بروم . همچنین نیز به فکرم خطور نکردکه تاکسی گرفته و از رانندهٔ آن بخواهم تا منزل را پیداکند، و بالاخره به‌خاطرم نرسیدکه از ایستگاه‌به‌میزبانم تلفن‌کنم تا بیاید ومرا همراهی‌کند.

تنها چیزی‌که به فکرم رسید این بودکه از یك بلیط‌فروش آدرس خیابانی راکه منزل خویشم‌درآنجا بودپرسیدم. او جاده‌ای را به من نشان داد. با تردید پرسیدم «چقدر راه باید بروم؟»

گستاخانه پاسخ دادکه: «دور!»

آهی‌کشیده و به افق دوردست خیره‌گشتم، سپس به‌راه افتادم. چندکیلومتری راه رفته بودم ، تا اینکه متوجه شدم می‌بایست اطلاعات بیشتری بدست می‌آوردم، چنین فکر می‌کردم‌که باید تقریباً درنزدیکی‌منزل باشم‌ومی‌توانستم‌آدرس دقیق آنرا ازکسی بپرسم.

امامن از محل‌خانه‌خیلی دوره شده بودم و مجبور شدم مسافتی از راهی‌راکه آمده‌بودم برگردم. وقتی‌که بلیطفروش به من گفت راه دوری باید بروم، فراموش‌کردم‌که حتی از او بپرسم: «این دوری چقدر است؟»

«این دوری چقدر است ؟» یا «این دوری تاکجاست؟» درست سؤالاتی هستندکه با فرا رسیدن قرن نوزدهم منجمین از خود می‌پرسیدند . آنها می‌دانستند که ستارگان در فواصل دوری قرار دارند، ولی فاصلهٔ دقیق این دوری چقدر است؟

اولین پاسخ به این سؤال در سال ۱۸۳۰ داده شد. آن زمان‌که‌کشف‌کردند نزدیکترین ستارگان ۴/۳ میلیون سال نوری از ما فاصله دارند (هرسال نوری برابر ۹/۲ تریلیون کیلومتر است). یك قرن‌بعد، روشن شدکه کهکشان‌مامتجاوز از بیلیونها ستاره در فضای مارپیچ و وسیعی به وسعت ۱۰۰۰۰۰سال نوری را درخودگنجانیده است.

فواصل با چیزهایی‌که در خودگنجانیده دلربا است . اما منجمین عاجز و نا امیدند . هرچه ستاره دورتر باشد ، نورش ضعیفتر، زاویهٔ اختلاف منظر آن‌کوچکتر، وحرکت‌آن بطئی تر بنظر می‌رسد.

پس هرچه یك ستاره دورتر باشد ، دقیقاً تعیین میزان دوری آن مشکلتر خواهد بود، مثلاً اختلاف منظر اولین روش مؤثر ومفید برای تعیین‌فواصل‌نجومی است‌که‌نمی‌توان در خارج و ماوراء صدها سال نوری آن را خوب وارسی کرد- از این راه محدودیم‌که نظرخود را به همسایهٔ‌نزدیک‌ان سیستم خورشیدی معطوف بداریم.

با فرا رسیدن قرن بیستم، دورنماهای تجسس در جهان ماوراءکهکشان‌ما، و توجیه این دورنماها با اسلحهٔ فواصل ، نسبتاً نا امیدانه بنظر می‌رسیدند.

مطمئناً ، هیچوقت چیزی در ماوراء کهکشان‌ما وجود نداشت. فقط احتمالهائی‌که می‌رفت وجود توده‌های ابرمانندی بودکه آنها را سحابی نامیدند . بطورقطع عده‌ای از این سحابیها در داخل کهکشان ما بودند ، ولی شاید بقیه در کهکشانهای دیگر بودند. فرضیات سحابیهاکم‌کم قوت گرفت و در سالهای قرن بیستم موضوعی جالب و بحث روز شد .

برای بدست‌آوردن اطلاعات بیشتر در بارهٔ فواصل در مقیاسهای نجومی، داده‌هایی وجود دارندکه می‌توان مستقل از فاصله آنها را بررسی‌کرد ؛ از این نوع داده‌ها یکی تغییر محل است‌که در خطوط طیفی بر اثر سرعت پرتوی بعضی‌از اجرام نجومی‌حاصل می‌شود . یعنی وقتی حرکت این اجرام‌به‌سمت زمین است (در این حالت تغییر مکان خطوط به سمت آبی - بنفش است) و وقتی این اجرام از ما دور می‌شوند

(در این حالت تغییر مکان خطوط به سمت نارنجی - قرمز است) .

هرچه ستاره دورتر باشد،تیره‌تر بنظر می‌رسد، ومشکل بتوان طیفی از نور آن بدست آورد و سنجیدن خطوط طیفی آن نیز مشکل‌است. علاوه براین، مسئلهٔ تغییر رنگ‌واندازه‌گیری تغییر مکان خطوط براین مشکلات افزوده خواهد شد . در این قلمرو، زمانی‌که فواصل افزایش می‌یابد، اندازه‌گیری سرعت پرتو کاری دشوار است. به هرحال، اگر بتوان طیفی بدست آورد، در آن صورت سرعت پرتو با دقت زیادی‌بدون درنظرگرفتن فاصله، قابل اندازه‌گیری است. دورترین جرمی که می‌توان طیف آن را بدست آورد و خطوط طیفی آن‌قابل تشخیص باشند باید حرکتی دور شونده و یا نزدیك شونده نسبت به ما داشته و تا حد ممکن به ما نزدیك باشد.

در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم، سرعت پرتوی چندین ستاره را اندازه‌گرفتند . (امروزه سرعت پرتو هزاران ستاره را اندازه گرفته‌اند) . بعضی از سرعتهای پرتوی مقادیر نسبتاً کمی بودند ، و برای بعضی از ستارگان این سرعت واقعاً صفر بود. (سرانجام ممکن است بعضی از ستارگان باخطسیر جهان ما موازی بوده و برخی دیگر با زاویای قائم این خط سیر را قطع‌کنند ، بنابراین ، در آن لحظه آنها نسبت به ما نزدیك می‌شوند و نه دور خواهند شد). در معیاری‌وسیعتر، بعضی از ستارگان سرعت پرتوی برابر چهارصد تا پانصد کیلومتر در ثانیه نسبت به خورشید دارند . چنین معیارهایی استثنائی بودند. سرعت پرتوی اکثر ستارگان بین ۱۰ تا ۴۰ کیلومتر در ثانیه است . در اینجا برای دوری و نزدیکی آنها اهمیتی نمی‌توان قائل شد. بعضی از ستارگان دور می‌شوندو برخی دیگر به‌ما نزدیك می‌شوند .

از سرعتهای پرتوی،نسبت به‌حرکت مشخصهٔ‌ستارگان نتایج مطمئنی را می‌توان بدست آورد (این حرکت مشخصه حرکتی است که در امتداد خط دید ما انجام می‌دهد) . چنین حرکات مشخصه‌ای را فقط می‌توان مستقیماً برای نزدیکترین ستارگان اندازه‌گرفت. ولی ضروری نیست‌که سرعت پرتو یك ستارهٔ عادی به حرکت مشخصهٔ آن بستگی داشته باشد. برای متجاوز از تعداد زیادی ستاره ، بستگی آماری وجود داشته و این بستگی را می‌توان برای بدست آوردن‌حرکت واقعی‌آنها در سه‌بعد نسبت‌به‌خورشید، بکارگرفت.

وقتی‌که حرکت حقیقی ستارگان‌کشف شد ، در نگاه نخست ستارگان‌کهکشان ما مانند دسته‌ای زنبور بودندکه درکلیهٔ جهات پرواز می‌کنند ، پژوهش دقیقتری سبب می‌شد که نظم بیشتری را دربارهٔ‌آنها کشف‌کنیم.درسال ۱۹۰۴منجم هلندی، **ژاکوب(یعقوب)کرنلیوس** نشان‌دادکه‌ستارگان در دو دسته‌حرکت‌می‌کنند، حرکت یك دسته از آنها درخلاف جهت حرکت دستهٔ دیگر است .

سپس ، در سال ۱۹۲۵ ، منجم هلندی دیگری به نام **ژان‌هندریك‌اورت**این‌دوجهت‌مخالف را چرخش‌کهکشان نامید. بطورکلی، هرچه جرم نجومی از مرکز میدان‌گرانشی که به‌دور آن‌می‌چرخد ، دورتر باشد، حرکت‌مداری‌آن‌کندتر است. در سیستم خورشیدی‌ما، هرچه سیاره‌از خورشیددورتر باشد، در مدار خودکندتر حرکت می‌کند، درکهکشان‌ما، هر چه فاصلهٔ ستاره از مرکزکهکشان دورتر باشد در مدار خود به‌دور آن‌کندتر حرکت می‌کند.

ستارگانی‌که فاصلهٔ آنها تا مرکزکهکشان دورتر از فاصلهٔ خورشید است‌بایدخیلی‌کندتر از خورشید حرکت‌کنند . ما براین ستارگان تسلط داریم و بنظر چنین می‌رسدکه این ستارگان نسبت به ما به عقب رانده می‌شوند. ستارگانی‌که به مرکزکهکشان نزدیکترند تا خورشید، با سرعت بیشتری حرکت‌کرده و به سمت ما درحرکتند. بنابراین دو دسته‌ستاره وجود داردکه در دو جهت مختلف حرکت می‌کنند.

سرعتهای‌پرتوی، برای‌ما ابزاربسیارمطمئنی خواهندبود، زیرا آنها تصویری از تغییرات وسیع و کندکهکشان عظیم ما در روی محورش بدست‌می‌دهند؛ تصویری‌که به‌ندرت‌می‌توان از طرق دیگر بدین اطمینان بدست آورد.

تازه این آغازکار است.

صحنهٔ بعدی در این فتوحات درام‌انگیز سرعت پرتوی در سال ۱۹۱۲ ، شروع شد. در این زمان منجم آمریکائی **فلوین‌سلیپر**سرعت پرتوی سحابی امراةالمسلسله‌را اندازه گرفت. این یکی از سحابیهایی بودکه منجمین‌تصورمی‌کردند در خارج ازکهکشان ما قرار دارد . این تنها سحابی بودکه بدون اسلحه مانده بود و تحت چنین تصوراتی با زحمت‌ورنج فراوان مطالعه‌می‌شد. وبنابراین شاید از دورترین سحابیهایی بودکه چشم بشر توانسته بود ببیند.

گرچه، این سحابی‌بسیاردور بود ولیکن سلیپر توانست از نور آن خطوط طیفی را بدست‌آورد. او سپس نمونهٔ‌خطوط طیفی‌را مشخص‌نموده وازروی‌تغییر مکان‌خطوط،فاصلهٔ سحابی را تخمین زد . در ضمن توانست به سهولت سرعت پرتوی

سحابی را (در داخل یا خارج کهکشان ما) تعیین کند. تغییر مکان خطوط طیف به‌سمت آبی بود و سلیپر چنین نتیجه گرفت که سحابی امراةالمسلسله با سرعتی برابر ۲۰۰ کیلومتر در ثانیه به سمت خورشید در حرکت است. تصویری از مسیر سرعتهای پرتوی برای اجرام نجومی بدست آمد. که این تصاویر درکتابهای نجوم بچاپ می‌رسید و توجه همگان را جلب می‌نمود لیکن از لحاظ علمی فاقد ارزش بود.

این موفقیت باعث شدکه سلیپر کوشش کندسرعت‌پرتوی سحابیهای دیگری راکه شبیه امراةالمسلسله بودند و چون‌در فاصله‌های دورتری قرار داشتند نورشان از آن ضعیفتر بود، اندازه بگیرد. در سال ۱۹۱۷، او موفق شدکه سرعت‌پرتوی ۱۵ سحابی را اندازه بگیرد.

اما بعد سلیپر به مشکلی برخورد. وقتی‌که هیچگونه دلیلی برای وجود چیزی در دست نباشد، دانشمندان چنین تصور می‌کنندکه هر دسته از اندازه‌گیری‌ها، یك توزیع اتفاقی را نشان خواهند داد. به عبارت روشنتر، اگر سرعتهای‌پرتوی یك دسته سحابی را اندازه بگیریم، تقریباً نیمی باید از ما دور شده و نیمی دیگر به ما نزدیك شوند.

ولی سلیپر چنین نتیجه‌ای بدست نیاورده بود. از ۱۵ سحابی‌که سرعت پرتوی آنها را اندازه‌گرفته بود، فقط دو تا (امراةالملسلسله و یکی دیگر) به ما نزدیك می‌شدند و ۱۳ تای دیگر از ما دور می‌شدند.

تازه، موضوع غیرمنتظرهٔ دیگر اینکه این‌عقب‌نشینی به سرعت شگفتی انجام می‌پذیرفت. ۱۳ کهکشان با سرعت متوسطی برابر ۶۴۰کیلومتر در ثانیه از ما دور می‌شدند، این سرعت متوسط متجاوز از بالاترین مقداری بودکه‌برای‌سرعت پرتوی هر ستارهٔ دیگری اندازه‌گیری شده بود.

اگر سحابی خارج ازکهکشان ما باشد، این اندازه‌ها بسیار مغشوش و آشفته است. چطور یك دسته از اجرام در کهکشان ما با سرعت مافوق تصوری از ما دور می‌شوند به قسمی‌که هیچ چیز دیگر شبیه به آنها در این کهکشان وجود ندارد.

بر روی خواص شگفت‌انگیز سحابیهاکه از ماهیت کهکشانی سرچشمه می‌گرفت، بسیار بحث شد.

خوشبختانه، اینکه سؤال‌کنیم سحابی درکهکشان ما است و یا در خارج از آن، نکتهٔ دقیقی‌رامطرح نساخته‌ایم.

در سال ۱۹۱۷، وقتی‌که سلیپر راجع به این موضوع نگران بود، منجم آمریکائی دیگری به نام **ادوین پاول هبل** مشغول تحقیقات نجومی با استفاده از تلسکوپ یکصداینچی **مونت‌ویلسون** در کالیفرنیا بود. این تلسکوپ به قدری قوی بودکه می‌توانست نقاب‌ابهام و تیرگی را از چهرهٔ ستارگان دور دست بردارد ـ ستارگانی‌که‌بخاطر دوری، نوری ضعیف داشتند.

این‌تلسکوپ آخرین‌وسیله‌ای‌بودکه‌سحابی‌امراةالمسلسه و همچنین اجرام دیگری را نشان می‌داد. این اجرام شامل هزاران ستاره بودند و در خارج ازکهکشان ما در فضاهای دور دست قرار داشتند، و در حقیقت برای خودکهکشانهای دیگری بودند. از آن زمان مد شدکه به جای سحابی امراةالمسلسله‌صحبت‌ازکهکشان امراةالمسلسله به میان آید، و برای تشخیص مجموعهٔ جهانی ما، از ستارگان دیگر به عنوان راه شیری‌کهکشان نام برده شد.

این امر بسیاری از مسائل را حل‌کرد. منطقی بنظر می‌رسیدکه اجرام خارج ازکهکشان رویه‌ای متفاوت با آنچه که اجرام داخل کهکشان عمل‌می‌کنند داشته باشند. کاملاً تعجب‌آورنبودکه‌کهکشانها با سرعت‌مافوق‌تصوری نسبت به یکدیگر حرکت موکنندواین‌سرعت را با سرعت‌ستارگانی‌که‌در داخل‌یك کهکشان‌نسبت‌به‌یکدیگر دارند، مقایسه‌کنیم — این مقایسه درست مانند این است‌که شما اتومبیل خود را با سرعت متوسطی در شاهراهی برانید و این سرعت راباسرعت آن در شهر مقایسه‌کنید.

ولی هنوز عدم این تناسب بین‌کهکشانها لاینحل باقی مانده‌بود. چگونه‌بودکه ۱۳ سحابی از ما دورمی‌شدندوفقط دوتای آنها به ما نزدیك می‌شدند؟

سلیپرکهکشانهایی راکه از ما دور می‌شدند جدا نمود مطئناً اگر برروی‌این‌کهکشانهامطالعه‌می‌شدموضوع‌دوری و نزدیکی آنها روشن می‌گشت.

منجم‌آمریکائی به‌نام **میلتن‌لاسال‌همازون** این‌کاررا برعهده‌گرفت. کارمشکلی بود. سلیپرکهکشانهایی نورانی را مطالعه می‌کرد، آنهایی راکه باکمترین زحمت می‌توان طیفی از آنها بدست آورد. همازون توانست‌طیفهایی ازکهکشانهای تیره‌تر بدست آورد. او مجبوربوددر ساعت معینی ازروزبرای

بدست‌آوردن طیف سحابیهای تاریك‌که از کهکشانهای‌دورتری حاصل می‌شد، تصاویری ازآن‌سحابی بگیرد . مشکلات‌زیادی وجود داشت، ولی اوهمهٔ‌آنها را مرتفع ساخت .

همازون‌باشگفتی عجیبی‌روبروشده‌بود زیرانتیجهٔ‌آزمایش اوچیزی جزهمان تغییرمکان خطوط قرمز نبود . چنین بنظر می‌رسیدکه‌کلیهٔ‌کهکشانها (بجزدوتای‌آنهاکه نزدیك‌می‌شوند) نسبت به زمین دورمی‌شوند . لیکن دراینجا تغییرمکان‌خطوط به‌سمت قرمزحکایت‌ازسرعتهایی‌معادل هزاران‌کیلومتر(نه‌صدها کیلومتر) درثانیه می‌کرد. درسال ۱۹۲۸همازون تغییر مکان خط طیفی به سمت قرمزکهکشانی به نام ۷۶۱۹، NGC را اندازه‌گرفته و نشان دادکه این طیف برای کهکشان سرعتی معادل۳۸۰۰کیلومتردرثانیه راپیشنهاد می‌کند .

آنچه‌که موضوع راپیچیده‌ترمی‌کرد این بودکه هرچه کهکشان تیره‌تر(وبه‌ناچار دورترازما) باشدبا سرعت‌زیادتری ازما دورمی‌شود .

این موضوع برای منجمین قابل هضم نبود . بدست آوردن سرعت یك کهکشان که وابستگی تام به فاصله‌اش نسبت‌به‌ماداشت، اطلاعات‌زیادی بدست می‌داد. چرامی‌بایست فاصلهٔ‌کهکشان برروی‌کیفیت حرکت‌آن اثر داشته باشد؟ آیا چیزی دربارهٔ‌کهکشان ما وجود داشت‌که باعث دوری ودفع آن ازسایرکهکشانهای دیگر می‌شد، وآیا این‌نیروی دافعه با زیادشدن فاصله،افزایش می‌یافت؟مدتی بعد **آلبرت‌اینشتین** برای‌آن توضیحی یافت، ولی هرگزنیرویی چه دافع ویاجاذب دیده نشدکه با زیادشدن فاصله افزایش پیداکند واین احتمال نیزازبین رفت .

منجمین این‌بارنگاه عمیقتری به تغییرمکان خطوط به سمت قرمزافکندند ؛ به خاطرآوریدکه تغییرمکان این خطوط بودکه اندازه‌گیری شد ؛ و مشاهدهٔ غیرمترقبه‌ای بودکه می‌بایست پذیرفته شود ونتایج حاصل از آن،که حکایت ازدور شدن یك‌کهکشان می‌کرداستنتاجی خالص‌بودکه احتمال اشتباه درآن می‌رفت .

بالاخره دراواسط قرن نوزدهم ، منجمین متقاعد شدند که تغییرمکان خطوط به سمت قرمزنشانهٔ دورشدن منبع‌نور است، ولی‌آیا این‌تنها پدیده‌ای بودکه می‌توانستندتغییرکنند؟

نورازفواصل خیلی دور وازکهکشانهای دوردستی‌به ما می‌رسد؛این فواصل خیلی‌بیش‌ازفواصل ستارگان‌داخل‌کهکشان ما نسبت به زمین است. شاید حادثه‌ای درسرراه نوری‌که از فواصل دوربه ما می‌رسید، اتفاق می‌افتادکه تغییرمکان‌خطوط به سمت قرمزرا درطیف سبب می‌شد- حتی علی‌رغم سکون منبع نور(دراینجا یك‌کهکشان) یا سکون نسبی‌آن نسبت به زمین . وبدین‌ترتیب تغییرمکان خطوط به‌سمت قرمز در طیف ازسرعتهایی دورشونده وابسته به‌ستارگان داخل‌کهکشان‌ما ، حکایت می‌کند . اما شاید چیزدیگری وجود داشت‌که سایر کهکشانها نیزدارا بودند .

آیا می‌توان‌گفت‌که توده‌های ریز گردوغبارو گاز بین کهکشانهاکه طی میلیونها سال نوری ایجاد شده‌اند به‌تدریج قسمتی از نورهایی راکه به‌سمت ما روان بوده‌اند، جذب کرده‌اند؟ شاید این ذرات ابتدا نوربا طول موج کوتاه‌راجذب کرده وخطوط طیفی را به‌سمت آبی - بنفش تغییرمکان داده و درنتیجه باعث‌شده‌اند که‌کهکشانها روشنترازآنچه‌که بوده‌اند، به نظربرسند .

عده‌ای با تصورتغییرمکان خطوط به سمت قرمز طیف کهکشانها به‌نتیجهٔ مذکور دربالا می‌رسیدند . واین ایده به مرورزمان محکمترمی‌گشت . بدین‌ترتیب نور کهکشانهای دوردست می‌بایست قرمزباشد، و این امرفقط درنتیجهٔ نزدیکی نور وتغییرمکان خطوط به‌سمت آبی-بنفش درطیف بود نه در اثرتغییری درطول موج. به عبارت بهتراین پدیده توجیه‌قرمز شدن را می‌نمود ونمی‌توانست تغییرمکان به سمت قرمز را ایجادکند .

خوب، حال چنین فرض‌کنیدکه نور ، همانطورکه از فواصل بسیاردور ازمیان فضای لایتناهی عبور می‌کند، به تدریج انرژی خودرا ازدست داده واین‌کاهش انرژی فقط در میان فضاهای بین‌کهکشان قابل ملاحظه باشد . طول موج بستگی به ظرفیت‌انرژی‌نور دارد. بنابراین بایدهنگامی‌که‌نور میلیونها سال نوری درسفراست، طول موج آن به تدریج افزایش یابد. هرطول موجی، حتی‌آنهایی‌که درخطوط طیفی تصرف‌می‌کنند، به‌سمت رنگ قرمزتغییرمحل می‌دهند . طبیعتاً هرچه‌کهکشان دورتر باشد، نورآن انرژی بیشتری ازدست داده وتغییرمکان خطوط به‌سمت قرمزدرطیف آن بیشتراست. توجیه بهتراین پدیده چنین است‌که هر افزایشی در تغییرمکان خطوط به سمت قرمز با درنظرگرفتن فاصله، بدون فرض صفت خاصی‌که ممکن‌است‌کهکشان‌دارا باشد،صورت‌می‌گیرد. یعنی فاصله به خودی‌خود درخورتأمل است .

این اندیشه دربارهٔ «نورخسته» مشکلاتی دربرداشت، با وجود اینکه شما ازقانون بقای انرژی دست بکشید، که

با این کارفیزیکدانها سخت مخالفت می‌ورزیدند ، باید چنین تصور کنید که همانقدر که نور به‌تدریج انرژی خود را ازدست می‌دهد، چیزی نیز بدست می‌آورد . منجمین تا به امروز نتوانسته‌اند روشی را توجیه کنند که درآن انرژی‌نورانی در بین فواصل فضاهای کهکشانی بتواند به طریقی تغییرمکان به سمت قرمزرا بوجود آورد . قسمت اعظم انرژی بدست آمده ازدست‌می‌رود(مثلاً ، درفضامولکولهای‌مانع، یك‌فوتون نورجذب می‌کنند، اما بعداً لازم نیست دوباره یك فوتونی با انرژی کمترازاولی در همان جهت حرکت فوتون اولیه صادر کنند . گاز و ذرات‌غبار ممکن است نور را پخش ویا جذب کنند اما دیگرهیچ کاری نمی‌توانند انجام دهند واگر بخواهند کاری انجام دهند باید در چهارچوب وسایل و مشاهدات ما بگنجد.)

وانگهی، کاهش انرژی نور، اگر به اندازه‌ای باشدکه بتوان‌آن رادرتغییرمکان خطوط‌به سمت قرمزدرطیف کهکشانها به حساب بیاوریم ، باید همچنان به مقداری باشد که در بررسیهای بین فضاهای کهکشانها قابل مشاهده باشد ، لیکن چنین نیست .

بنابراین، فرضیهٔ نورخسته می‌بایست هم درنظریه‌وهم دربررسیهای علمی وآزمایشها صادق باشد ولی اینطور نبوده و رام‌نشدنی بود. پس‌آنرا می‌بایست به دورافکند- حداقل تا زمانی‌که اطلاعات وسیعتری به نفع‌آن اقامه‌نشده باشد.

ولی دراینجا نکتهٔ دیگری وجود داشت. درسال۱۹۱۶ اینشتین نظریهٔ نسبیت عمومی خود را عرضه داشت و خاطر نشان‌کردکه نوردرمقابل‌کشش یك میدان گرانشی منحرف‌شده و انرژی خودرا ازدست می‌دهد (البته بدون اینکه قانون بقای انرژی را نقض‌کند). نورتابش‌شده ازهرستاره‌ای‌درمیدان گرانشی‌آن ستاره منحرف‌شده وبنابراین نوری‌که از هرستاره یاکهکشان به ما می‌رسد باید نشان‌دهندهٔ یك تغییرمکان به‌سمت قرمزگرانشی باشد .

بنابراین ممکن است‌که تغییرمکانهای به سمت قرمز در طیف‌کهکشانها دراصل، به میدان‌گرانشی بستگی‌داشته باشند تا به دورشدن ستارگان .

مشکل دراین بودکه درشرایط معمولی این تغییرمکان برای همهٔ ستارگان ناچیزوغیرقابل مشاهده بود. برای اینکه بتوانیم تغییرمکان دراثرمیدان‌گرانشی را قابل مشاهده‌سازیم؛ به‌میدان خیلی شدید نیازداریم، وحتی بزرگی‌میدان به تنهایی کافی نیست.یك میدان‌گرانشی شدید فقط‌توسط مقادیرمتناسبی ازماده‌که برای جرم مخصوص بسیار زیادی فشرده شده است تهیه می‌شود مثلاً این‌میدان برای یك‌ستاره‌کوتوله سفید به وجود می‌آید .

برای تصوراینکه تغییرمکانهای به سمت قرمزدرطیف کهکشانهای دوردست مبدأ گرانشی دارندباید جرم‌مخصوص‌هایی خیالی برای آنها درنظر بگیریم. حتی اگرچنین فرض کنیم،آن جرم مخصوصهای خیالی بطورپیوسته به‌نسبت‌فاصلهٔ ازما، افزایش پیدا می‌کنند، وحتی‌مشکلتربتوان دریافت‌که‌چرا میدان‌گرانشی بایدبرروی جرم‌مخصوص یك‌کهکشان‌دوردست مؤثرباشد تا برروی سرعت‌آن .

این‌پدیده ما را دوباره برسرجای اول یعنی‌سرعت‌دوری به‌عنوان تنها توجیه پذیرفتنی تغییرمکانهای قرمز ، و رابطهٔ مبهم بین این سرعت و فاصلهٔ‌کهکشان نسبت به زمین ، برمی‌گرداند .

هبل از عهدهٔ این مهم برآمد . او از کلیهٔ روشهای ممکن برای تعیین رابطهٔ بین فواصل وابسته به کهکشانها استفاده‌کرد. ممکن است بتوان درکهکشانهای نزدیك‌ستارگان چشمك‌زن راکه متغییرسفیدنام‌گذاری شده‌اند، آشکارکرد. از کمیت تغییرات وشدت روشنائی‌آنها، فواصل وابسته به آنها (وبنابراین، فواصل وابسته به‌کهکشانهایی که‌آنها درآن قرار دارند)تعیین می‌شوند .

درکهکشانهای خیلی‌دور،ستاره‌های‌متغییرسفید تشخیص داده نمی‌شوند ولی عدهٔ کمی راکه بینهایت درخشان هستند، می‌توان دید . با فرض محدودیتهایی که در درخشندگی ستارگان وجود دارد واینکه اغلب ستارگان درخشنده‌تر در هرکهکشان دارای این محدودیتهاهستند. بنابراین‌درخشندگی این ستارگان تخمیناً باهم برابراست، و فواصل وابسته به کهکشانهایی راکه‌آنها رادربردارند، می‌توان با این‌ملاحظات تعیین نمود .

بالاخره، وقتی‌که‌کهکشانها به قدری دور هستندکه‌هیچ ستاره‌ای درآنها مشاهده نمی‌شود، می‌توان چنین پنداشت‌که جمیع درخشندگیهای‌کهکشان تقریباً باهم برابر بوده و، از روشنایی‌کلی‌آنها فواصل وابسته را تخمین زد .

این‌آزمایش بررسی وجامهٔ‌عمل به خود پوشید، سرعت دورشدن ازروی تغییرمکان قرمز اندازه گرفته شد، و رابطهٔ مستقیمی با فاصلهٔ‌کهکشان نسبت به‌ما، نشان می‌داد که در سال۱۹۲۹ هبل‌وجود چنین رابطه‌ای‌را به جهان‌اعلام‌داشت .

این رابطه را «قانون هبل» نامیدند. اگر کهکشان A نسبت به کهکشان B ، x مرتبه ازما دورتر باشد، درآن صورت کهکشان A با سرعتی x برابر سرعت کهکشان B ازما دورمی‌شود.

حال اگرقانون هبل صحیح باشد، منجمین وسیلهٔ مطمئنی برای اندازه گیری فواصل حتی اجرامی که دردورترین نقاط هستند، در دست دارند . فواصل کهکشانهای نزدیك را می‌توان با روشهایی تعیین کرد (هرروشی) البته نه ازطریق تغییرمکان خطوط به سمت قرمز درطیف. درآن صورت فاصلهٔ هر کهکشان دوری فوراً شناخته می‌شد .

درسال ۱۹۵۰ تلسکوپ ۲۰۰ اینچی کهکشانهایی راکه شایدتا حدود ۱/۵ میلیون سال نوری ازما دوربودند درمیدان دیدبشر قرارداد و درسال ۱۹۶۰ quasars ها را با فواصلی درحدود ۸ تا ۹ میلیون سال نوری کشف کردند ودرهمین هنگام نقطهٔ انتهای دیدما ازجهان مرئی با فاصله‌ای برابر ۱۲/۵ بیلیون سال نوری تخمین‌زده شد .

ولی هنوزعلت رابطهٔ میان فاصله وسرعت دوری ازنظر ما پنهان بود .

جواب این معما توسط رابطهٔ نسبیت‌عمومی اینشتین داده شد. اینشتین دراین نظریه یك سری «معادلات میدان» پیدا نمودکه خواص همگانی جهان را تشریح می‌کردند. (این سرآغازعلمی به‌نام کیهان‌شناسی بود.) اینشتین معادلات‌میدان را به طریقی حل کردکه نمایندهٔ جهانی متعادل وساکن بود، جهانی‌که درآن جرم مخصوص همهٔ موادثابت باقی‌می‌ماند.

درسال ۱۹۱۷ نیزمنجم هلندی **ویلم دوسیتر** راه‌حل دیگری پیشنهادکرده‌بودکه درآن جرم مخصوص همگانی ماده با زمان پیوسته کاهش می‌یافت .

یك راه برای تصوریك چنین کاهش دائمی این است که فرض‌کنیم جهان ازذراتی مادی‌که دارای جرم مخصوص‌ثابت بوده وبا سرعت ثابتی ازیکدیگردور می‌شوند، متشکل شده است. پس جهان با ذراتی‌نامتغیر به علاوهٔ مقدارهرچه‌بیشتری ازفضاهای بین ذرات وجرم مخصوص همگانی روبه خاموشی خواهدگرائید .

دوسیتر راه‌حل خودرا یك‌تمرین نظری‌محض‌می‌پنداشت، ولی وقتی هبل‌قانون خودرا عرضه داشت، اندکی‌نگذشت که دریافتند آن قانون نتیجه‌ای ازپیشنهاد دوسیتراست .

درجهان، می‌توان کهکشانهارا مانند ذرات ریزدانست. این کهکشانهاتوسط نیروی گرانشی‌متقابل بین ستارگان‌تشکیل دهندهٔ آنها، پایدارند، وبنابراین جرم مخصوص همگانی‌داخل یك‌کهکشان‌با زمان ثابت می‌ماند. وقتی‌که ازکهکشانهاصحبت کردم، این امررا دانسته پنداشتم که مقصودم نیز همچنان کهکشانهای منفرد ویا خوشه‌ها «دسته‌های» حوزهٔ گرانشی کهکشانها می‌باشد .

اگرکهکشانها پیوسته ازهم دورشوند، جرم مخصوص همگانی ماده درجهان مدام کاهش‌می‌یابد. دراین هنگام‌است‌که ما «جهانی درحال انبساط» به نمایش گذارده‌ایم .

درجهانی درحال انبساط، بیننده‌ای‌که دریکی از کهکشانهااست‌چنین می‌پنداردکه تمام‌کهکشانهای دیگر از او دورمی‌شوند. وانگهی به‌آسانی‌می‌توان نشان دادکه‌قانون‌هبل دراین جهان صادق است. هرچه یك‌کهکشان ازکهکشانی‌که بیننده درآن قرارگرفته، دورترباشد،سرعت دوری‌آن‌کهکشان نسبت به‌کهکشان بیننده سریعتراست .

این امر پارادوکسی راکه ازقانون هبل ناشی می‌شد، برطرف می‌کند. هیچ افسونی دربارهٔ ما وجودندارد وهیچ اثر مشکوکی‌که سرعت دوری را ازما بیشترکند درکهکشان ما نیست. آنچه‌که ما می‌بینیم ، همچنان می‌توان دربارهٔ هر کهکشان دیگری درجهان مشاهده‌کرد .

یك چنین پیشرفتی‌که ازموضوعات کاملاً کسل کننده تا تصورات وخیالات افراطی، طی مسیرمی‌کند، آن چیزی است که اتفاق خواهدافتاد، وقتی‌که‌آهنگ‌علم درست نواخته‌شود.

حل مسائل (دنباله صفحهٔ ۲۸۷)

عدد طبیعی‌کوچکتر از ۲ منحصر به عدد یك است .

۸۹/۵۹- ج ، اگر a و b دو عدد متباین‌باشنداولاً از $\frac{a}{b}=\frac{c}{6^n}$ نتیجه می‌شودکه b مقسوم علیهی از 6^n است یعنی در تجزیهٔ b فقط عاملهای ۲ و ۳ وجود دارد . ثانیاً به‌فرض $b = 2^p \times 3^q$ کسر $\frac{a}{b}$ به یکی از دوکسر

$$\frac{a \times 3^{p-q}}{6^p} \quad \text{یا} \quad \frac{a \times 2^{q-p}}{6^q}$$

تبدیل می‌شود .

۸۹/۶۰- ج ، اگر A و A′ اوضاع خاص M و M′ باشند نسبت AM به A′M′ مقدار ثابت است . اگر I نقطهٔ تلاقی دو خط △ و △′ و F نقطهٔ مشترك دیگر دایره‌های محیطی مثلثهای IAA′ و IMM′ باشد ، خطوط MM′ برسهمی‌به کانون F مماس است .

خاصیت یکی از انواع مثلثها

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری

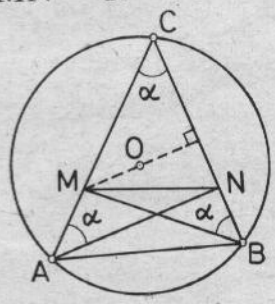
در این مقاله بعضی از خواص جالب یکی از انواع مثلثها بیان می‌شود .

تعریف I ـ مجموعهٔ کلیهٔ مثلثهایی راکه دارای قاعدهٔ مشترك $AB = 2c$ بوده و در دایرهٔ به‌شعاع R محاط هستند را با علامت $T(c \text{ و } R)$ نمایش می‌دهیم .

تعریف II ـ فرض کنیم در مثلث ABC روی ضلع CA (یا روی امتداد آن) و روی ضلع CB (یا روی امتداد آن) به‌ترتیب نقاط M و N را طوری انتخاب کنیم که برای زوایا تساویهای $MBC = NAC = ACB$ برقرار شود . قطعه خط MN را متقابل به ضلع AB برای مثلث ABC می‌نامیم .

قضیهٔ ۱ ـ قطعات متقابل به‌ضلع AB برای کلیهٔ مثلثهای $T(c \text{ و } R)$ دارای طولهای مساوی بوده و در تساوی زیر صدق می‌کنند :

$$\frac{1}{MN^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{1}{c^2} \qquad (1)$$



اثبات ـ فرض کنیم در مثلث ABC ضلع AB کوچکترین ضلع بوده و زاویهٔ $ACB = MBC = NAC = \alpha$ باشد . از مثلثهای متساوی‌الساقین MBC و ANC بدست می‌آوریم :

$$MC = \frac{BC}{2\cos\alpha} \quad \text{و} \quad NC = \frac{AC}{2\cos\alpha} \qquad (2)$$

از مثلث MNC طبق قضیهٔ کسینوسها و با در نظر گرفتن رابطه‌های (۲) بدست می‌آوریم:

$$MN = \frac{AB}{2\cos\alpha} \qquad (3)$$

$\cos\alpha$ را از رابطهٔ $AB = 2R\sin\alpha$ بدست آورده و در رابطهٔ (۳) قرار می‌دهیم و در نتیجه رابطهٔ (۱) را بدست می‌آوریم. به‌همین ترتیب رابطهٔ (۱) در حالتی که AB کوچکترین ضلع نیست نیز اثبات می‌شود .

قضیهٔ ۲ ـ فرض کنیم MN متقابل به‌ضلع AB برای مثلث ABC از $T(c \text{ و } R)$ باشد . برچهارضلعی MNBA می‌توان دایره‌ای به شعاع $R_1 = \frac{R}{2|\cos\alpha|}$ (۴) که درآن زاویهٔ $\alpha = ACB$ می‌باشد محیط کرد .

اثبات : فرض کنیم AB کوچکترین ضلع مثلث ABC باشد طبق رابطهٔ (۲) می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{BC}{MC} = \frac{AC}{NC} \qquad (5)$$

دو مثلث ABC و MNC در زاویهٔ ACB مشترکند و به‌علاوه رابطهٔ (۵) نیز بین آنها برقرار است نتیجه می‌گیریم که این دو مثلث متشابه هستند وزاویه‌های MNC و BAC متساویند بنابراین :

$$BAM + MNB = BAC + 180^\circ - MNC = 180^\circ$$

پس می‌توان برچهار ضلعی MNBA یك دایره محیط کرد .

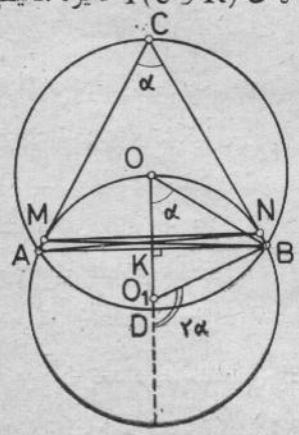
از مثلث ABM داریم :

$$2R_1 = \frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$$

که از رابطهٔ اخیر رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود .

به‌همین ترتیب قضیه رابرای‌حالات دیگر اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۳ ـ برای کلیهٔ مثلثهای $T(c \text{ و } R)$ دایرهٔ محیطی MNBA منحصر به **فرد** است .



اثبات : فرض کنیم O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC (شکل۲) O_1 مرکز دایرهٔ محیطی MNBA (به‌شعاع R_1) و زاویهٔ : $\alpha = ACB$ ، D نقطهٔ

(دنباله در صفحهٔ ۳۰۲)

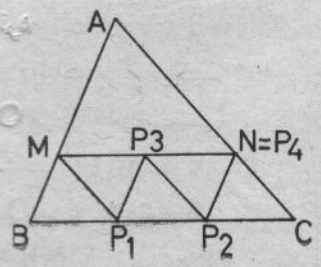
تقیسم مثلث به n مثلث متشابه با خودش

ترجمه : جعفر آقایانی چاوشی

تعریف : مثلث ABC وعددطبیعی n مفروض است، n عددی است که می‌توان مثلث را به تعداد آن بـه مثلثهای متشابه با خودش تقسیم کرد، برای هرمثلث عدد $n = ۱$ یکی ازاین اعداد است که با این شرایط وفق می‌دهـد . بـه علاوه مثلث ABC را درنظر گـرفته اوساط اضلاع AB و BC و AC را به‌ترتیب M و N و P می‌نامیم. دراین‌صورت‌مثلث ABC بـه مثلثهای AMP و BMN و CNP و MNP یعنی‌به چهارمثلث متشابه با خودش‌تقسیم شده‌است‌پس‌هرمثلث را می‌توان بـه تعداد ۱ و ۴ و ۷ و... مثلث متشابـه بـا خودش تقسیم نمود.این اعدادرا اصطلاحاً اعداد تقسیم‌مثلث می‌نامیم .

باردیگر فرض می‌کنیم ABC مثلثی با قاعدهٔ BC باشد. روی AB نقطهٔ M را آنچنان‌انتخاب می‌کنیم‌که MB ثلث AB شود،ازM خطی موازی بـا BC رسم می‌کنیم تـا ضلع AC را درN قطع‌کند، خطوط دیگری بـه طریق زیـر رسم می‌نمائیم :

ازM خطی موازی با AC رسم می‌کنیم‌تا BC را در $P_۱$ قطع‌کند و فـرض می‌کنیم $P_۲$ محل تقاطع خط MN بـا خطی‌که از $P_۱$ موازی با AB رسم شده است‌باشد. به همین منوال نقاط $P_۲$و$P_۴$ را بدست می‌آوریم. می‌توان ثابت‌کـرد

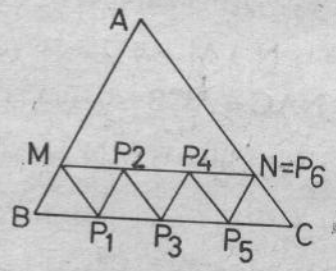


که$P_۴$ بر N منطبق‌بوده وهریك‌از مثلثهای‌تشکیل شده بـا مثلـث اصلـی متشابه‌اند. بنابراین ۶و ۹و۱۲ نیزاعدادی هستند که‌می‌توان‌مثلث‌مفروض را به آن تعداد به مثلثهای متشابه باخود قسمت نمود .

اکنون فرض می‌کنیم M روی AB آنچنان قرارگرفته باشدکه MB ربع AB شود.مانند قبل نقاط $P_۱$ و $P_۲$و....

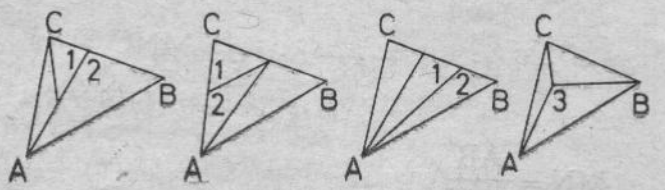
$P_۶$ را رسم می‌کنیم. می‌توان ثابت‌کرد ۸ ودرنتیجه۱۱ و۱۶ و۱۷ نیز ازمجموعهٔ اعداد تقسیم مثلث‌اند.بنابرایـن تاکنون قضیهٔ زیررا ثابت‌کرده‌ایم :

قضیه ـ همواره می‌توان مثلث مفروض را به nمثلث متشابه با آن تجزیـه کرد مشروط براینکه n عددی طبیعی ومخالف ۲و۳و۵ باشد. اکنون به بررسی حالات خاص قضیه می‌پردازیم .



فرض‌می‌کنیم ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ای دررأس A باشد . هرگـاه AM ارتفاع وترBC باشد مثلث ABC به مثلثهای ABN و ACM که متشابه با خودش می‌باشند تجزیه شده است بنابراین برای‌هر عددطبیعی‌قابل قبول است. ازطـرف دیگرهـرگاه مثلثی عـدد تقسیمش ۲ باشد، ازآنجاکه‌تجزیـهٔ مثلث بـاید از اتصال رأس مثلث به ضلع مقابل انجام شود بررسی این حالت می‌رساندکه مثلث با این عدد تقسیم می‌بایست قائم‌الزاویه باشد .

اکنون حـالت $n = ۳$ را درنظـر مـی‌گیریم . نخست متذکر این نکته می‌شویم‌که فقط ۴ راه اساسی ومختلف‌برای تقسیم یك مثلث به ۳ مثلث متشابه با خـود وجـود دارد . (۳راه تقسیم ازوصل‌نمودن یکی‌ازاضلاع کـوچکتر مثلث بـه رأس مقابل حاصل می‌شود) ایـن راههـای تقسیم درزیـر کشیده شده‌اند .



درحالت(a)و(b)و(c) داریم: $۲ز + ۱ز = ۱۸۰^\circ$

دنباله در صفحهٔ ۲۶۴

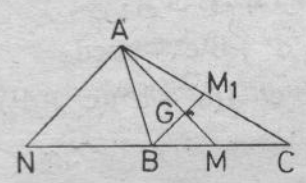
دربارهٔ مثلثی که دو میانهٔ آن برهم عمودند

تهیه‌وتنظیم‌از، محمدمعینی

۱- رسم مثلث

مطلوبست رسم مثلثی‌که از آن a و b معلوم بوده و نیز m_a و m_b بر هم عمود باشند.

حل- فرض‌می‌کنیم که‌مثلث ABC جواب‌مسئلهٔ‌باشد. از A خطی موازی با میانهٔ BM_1 رسم می‌کنیم تا CB رادر نقطهٔ N تلاقی کند.



زاویهٔ MAN قائمه است. در مثلث ACN چون M_1 وسط AC و M_1B با ضلع AN موازی است پس B وسط CN است و

$$MN = MB + BN = \frac{CB}{2} + CB = \frac{3a}{2}$$

برای رسم مثلث ابتدا $CB = a$ را رسم‌کرده و وسط آنرا M می‌نامیم سپس پاره خط CB را از طرف B به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ N حاصل‌شود. به‌قطر MN دایره‌ای رسم‌می‌کنیم‌سپس‌به‌مرکزC‌و‌به‌شعاع b دایره‌ای‌می‌زنیم که‌دایرهٔ اول رادر A قطع می‌کند و مثلث ABC مشخص‌می‌شود.

بحث - برای وجودجواب لازم است که‌دایره‌ها متقاطع باشندکه نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{2} < b < 2a$$

۲- روابط متری

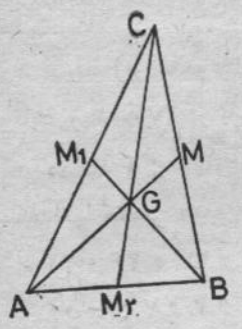
هرگاه AM_1، BM_1 و CM_2 میانه‌های‌مثلث ABC باشند درصورتی‌که AM_1 و BM_1 برهم عمود باشند داریم :

$$I \quad : CM_2 = \frac{3}{2}AB$$

$$II \quad : \overline{AM_1}^2 + \overline{BM_1}^2 = \overline{CM_2}^2$$

$$III : \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 5\overline{AB}^2$$

اثبات: I-درمثلث قائم‌الزاویهٔ AGB پاره خط GM_2 میانهٔ وارد بروتر است‌پس



$$CM_2 = \frac{AB}{2} = \frac{CM_2}{3}$$

و یا

$$AB = \frac{2CM_2}{3} \Longrightarrow CM_2 = \frac{3}{2}AB$$

II- در مثلث قائم‌الزاویهٔ AGB می‌توان نوشت :

$$\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 = \overline{AB}^2$$

چون $BG = \frac{2BM_1}{3}$ و $AG = \frac{2AM}{3}$ از رابطهٔ فوق خواهیم داشت :

$$\frac{4}{9}\overline{AM}^2 + \frac{4}{9}\overline{BM_1}^2 = \overline{AB}^2$$

$$\frac{4}{9}\overline{AM}^2 + \frac{4}{9}\overline{BM_1}^2 = \frac{4}{9}\overline{CM_2}^2$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM_1}^2 = \overline{CM_2}^2$$

III- در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AGM_1 و BGM داریم:

$$\overline{AM_1}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GM_1}^2$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GM}^2$$

طرفین‌دو رابطهٔ اخیر را نظیر به‌نظیر بایکدیگر جمع‌می‌کنیم

$$\overline{AM_1}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GM}^2 + \overline{GM_1}^2 + \overline{BG}^2$$

$$(\frac{1}{2}AC)^2 + (\frac{1}{2}BC)^2 =$$

$$= (\frac{2}{3} + (AM)^2 + (\frac{1}{3}AM)^2 + (\frac{1}{3}BM_1)^2 + (\frac{2}{3}BM_1^2)$$

دنباله در صفحه ۲۶۴

مسائلی از دیوفانت

تنظیم از داوید ریحان

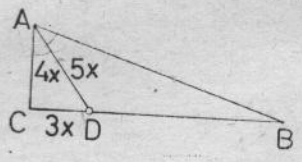
مسئلهٔ زیر مأخوذ از کتاب حساب (Arithmetica) دیوفانت (مسئلهٔ ۱۷ از باب اول) است .

مسئلهٔ ۱ : چهارعدد بدست آورید که مجموع سه به سهٔ آنها مقادیر معین باشند . فرض کنید که این مقادیر اعداد ۲۲ و ۲۴ و ۲۷ و ۲۰ باشد .

جواب : ۷ و ۴ و ۱۱ و ۹

مسئلهٔ زیر نیز در کتاب حساب (مسئلهٔ ۱۸ از باب ششم) آمده است .

مسئلهٔ ۲ : در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، قائمه درC نیمساز زاویهٔ A ضلع مقابل‌را در D قطع می‌کند. کوچکترین عددهای صحیح‌رابرای اندازه‌هایAB،AD،AC،BD،DC بدست آورید بقسمی که $DC:CA:AD = ۳:۴:۵$ باشد .



حل : فرض کنیم که

$AD = ۵x$ و $CA = ۴x$

$DC = ۳x$ و $۴x$ در

این صورت با توجه

به خاصیت نیمساز داریم :

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} \Longrightarrow \frac{۳x}{DB} = \frac{۴x}{AB} \Longrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{۴}{۳} = \frac{۴y}{۳y}$$

پس فرض می‌کنیم که $DB = ۳y$ کد دراین صورت

$CB = ۳x + ۳y = ۳z$ است و $AB = ۴y = ۴(z - x)$ است

ودرمثلث ABC داریم: $AB^۲ = AC^۲ + CB^۲$

$$۱۶(z - x)^۲ = ۱۶x^۲ + ۹z^۲ \Longrightarrow ۷z^۲ = ۳۲xz$$

$$\Longrightarrow ۷z = ۳۲x$$

چون ۷ و ۳۲ نسبت به هم اولند بنابراین کوچکترین جواب برای x و z عبارتست از : $z = ۳۲$ و $x = ۷$ و خواهیم داشت

$DC = ۲۱$ ؛ $BD = ۷۵$ ؛ $AC = ۲۸$ ؛ $AD = ۳۵$ ؛ $AC = ۱۰۰$

مسئلهٔ ۳ : اتحاد زیررا ثابت کنید و با استفاده ازآن عدد $۴۸۱ = ۱۳ \times ۳۷$ را به دو راه مختلف به صورت مجموع دومربع بنویسید :

$$(a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) = (ac \pm bd)^۲ + (ad \mp bc)^۲$$

حل : طرف دوم به ترتیب برابراست با :

$$a^۲c^۲ + b^۲d^۲ \pm ۲abcd + a^۲d^۲ + b^۲c^۲ \mp abcd =$$
$$= a^۲c^۲ + b^۲d^۲ + a^۲d^۲ + b^۲c^۲ = (a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲)$$

داریم :

$$۱۳ = ۴ + ۹ = ۲^۲ + ۳^۲ = a^۲ + b^۲$$
$$۳۷ = ۱ + ۳۶ = ۱^۲ + ۶^۲ = c^۲ + d^۲$$

مقادیر $a = ۲$ ، $b = ۳$ ، $c = ۱$ ، $d = ۶$ را در اتحاد مربوط قرار می‌دهیم و به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم :

$$۴۸۱ = ۲۰^۲ + ۹^۲ = ۱۶^۲ + ۱۵^۲$$

این اتحادها بعدها در سال ۱۲۰۲ توسط **فیبوناچی** درکتاب خودش به‌نام لیبرآباکی (Liber abaci) بدست آمد . این اتحادها مبین آنند که حاصل ضرب دوعدد را که هرکدامشان به صورت مجموع دو مربع باشند ، می‌توان به صورت مجموع دومربع (وبه دوصورت مختلف) درآورد. این اتحاد بعدها به صورت نطفهٔ شکلهای تربیعی حسابی در تئوری **گوس** و دربرخی از بسطهای جبر نوین درآمد .

مسئلهٔ ۴ : عدد $۱۱۰۵ = ۵ \times ۱۳ \times ۱۷$ را به‌صورت مجموع دومربع وبه چهار فرم مختلف بنویسید .

حل : هرکدام از اعداد ۵ و ۱۳ و ۱۷ را می‌توان به صورت مربع دوعدد نوشت :

$$۵ = ۲^۲ + ۱ \text{ ، } ۱۳ = ۳^۲ + ۲^۲ \text{ ، } ۱۷ = ۴^۲ + ۱$$

بااستفاده از اتحاد فوق‌الذکر خواهیم داشت :

$$۵ \times ۱۳ = ۸^۲ + ۱^۲ = ۷^۲ + ۴^۲$$
$$۵ \times ۱۷ = ۹^۲ + ۲^۲ = ۷^۲ + ۶^۲$$
$$۱۳ \times ۱۷ = ۱۴^۲ + ۵^۲ = ۱۱^۲ + ۱۰^۲$$

حال می‌نویسیم :

$$۱۱۰۵ = ۵ \times ۱۳ \times ۱۷ = ۵(۱۳ \times ۱۷) = (۲^۲ + ۱) \times$$
$$\times (۱۴^۲ + ۵^۲) = (۲ \times ۱۴ \pm ۱ \times ۵)^۲ + (۱۰ \mp ۱۴)^۲ =$$
$$۳۳^۲ + ۴^۲ = ۲۳^۲ + ۲۴^۲$$

به همین ترتیب می‌توانیم سایر ترکیبات حاصل‌ضرب $۵ \times ۱۳ \times ۱۷$ را نوشته و جوابهای آنرا بدست آوریم که خواهیم داشت :

$$۱۱۰۵ = ۳۳^۲ + ۴^۲ = ۳۲^۲ + ۹^۲ = ۳۱^۲ + ۱۲^۲ =$$
$$۲۴^۲ + ۲۳^۲$$

*دردو مسئلهٔ زیر « عدد » به معنای« عددصحیح‌مثبت» تلقی می‌شود .

مسئلهٔ ۵ : هرگاه تفاضل دوعدد m و n مساوی ۱ و x و y و a اعدادی باشند که $x + a = m^۲$ و $y + a = n^۲$ باشد ، ثابت‌کنید که عدد $xy + a$ مربع است.

حل : داریم :

$$xy + a = (m^۲ - a)(n^۲ - a) + a =$$
$$= m^۲n^۲ - a(m^۲ + n^۲) + a^۲ + a = (n + ۱)^۲n^۲ -$$
$$a(۲n^۲ + ۱ + ۲n) + a^۲ + a = [n(n + ۱)]^۲ -$$
$$۲an(n + ۱) + a^۲ = [n(n + ۱) + a]^۲ = (mn + a)^۲$$

مسئلهٔ ۶ : هرگاه m عدد غیر مشخصی بوده و $x = m^۲$ و $y = (m + ۱)^۲$ و $z = ۲(x + y + ۱)$ باشد ، ثابت‌کنید که‌شش‌عدد، $xy + x + y$ ، $yz + y + z$ ، $zx + y$ ، $zx + z + x$ ، $xy + z$ ، $yz + x$ همگی مربع کاملند.

به عنوان نمونه یکی ازاین روابط را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیه را به خواننده واگذار می‌کنیم :

$$xy + x + y = m^۲(m + ۱)^۲ + m^۲ + (m + ۱)^۲ =$$
$$= m^۴ + ۲m^۳ + m^۲ + m^۲ + m^۲ + ۱ + ۲m^۲$$
$$= m^۴ + ۲m^۳ + ۵m^۲ + ۱ = (m^۲ + m + ۱)^۲$$

* یکی از مؤثرترین افرادی‌که درتوسعهٔ جبروخصوصاً در تئوری اعداد و در پیشبردآن در اروپا دارای نقش‌بزرگی بوده است ، **دیوفانت (دیوفانتوس)اسکندرانی** است . دیوفانت یکی از ریاضیدانانی است که تاریخچهٔ زندگی و ملیتش معلوم نیست . قبلاً احتمال می‌داده‌اند که وی درقرن سوم می‌زیسته است ولی کاوشهای تاریخی اخیراً زمان زندگیش را درقرن‌اول میلاد بعداز مسیح قرار می‌دهد . غیر ازاینکه وی در اسکندریه بدنیا آمده است هیچ حقیقت قاطعی در مورد زندگیش نمی‌دانیم معهذا در کتاب « گلچین ادبی یونان » Greek Anthology نوشتهٔ **مترودورس** نکاتی در مورد زندگیش آمده است که :

« دیوفانتوس یك ششم از عمرش را در کودکی ، یك دوازدهمش را درنوجوانی ویك هفتم از زندگیش راکه پس از ازدواجش بود دارای فرزندی نشد ، پس از پنج سال دارای فرزند ذکوری شد که چهارسال قبل از پدرش فوت شد و در موقع مرگش نصف عمر نهائی او زندگی کرده بود .

هرگاه این معادلهٔ زندگی دیوفانت را که به صورت

$$x = \frac{x}{۶} + \frac{x}{۱۲} + \frac{x}{۷} + ۵ + \frac{x}{۲} + ۴$$

است حل‌کنیم ، عمردیوفانت ۸۴ سال می‌شودکه دراین‌صورت در سن ۲۱ سالگی ازدواج کرده و درسن ۳۸ سالگی پدرشده ودر سن ۸۰ سالگی فرزند خودرا از دست داده و در سن ۸۴ سالگی نیز دارفانی را وداع گفته است .

دیوفانتوس سه‌کتاب نوشت :«اریتمتیکا(حساب) » که یکی از مهمترین آنهاست و فقط شش باب از سیزده باب آن باقی مانده است ، « در بارهٔ اعداد بانمودار چند ضلعی » که تنها تطعه‌ای از آن باقی است و « پوریسم » (Porisms) که منقود شده است .

آریتمتیکا رسالهٔ تحلیلی نظریهٔاعدادجبری‌است که‌مؤلفش‌را به‌عنوان نابغه‌ای در این زمینه‌نشان می‌دهد .قسمت‌باقیماندهٔ آن اختصاص به حل تقریباً ۱۳۰ مسئله دارد که کاملاً متنوعندومنتهی به معادلات درجهٔ اول و درجهٔ دوم می‌شوند یك نوع معادلهٔ درجهٔ سوم در حالت خاص حل شده است .

باب اول شامل معادلات معین یك مجهولی و بابهای دیگربا معادلات نامعین درجهٔ دوم وگاهی با درجات بیشترکه شامل دویاسه مجهول است ، می‌باشد : نکتهٔ حائز اهمیت فقدان یك روش‌کلی و کاربرد مکرر راههای خلاقهٔ لازم برای هرمسئلهٔ خاص است ، که وی در پیشترحالات فقط به یك جواب مسئله قناعت می‌کرده است.قضایای عمیقی در زمینهٔ اعداد درکتاب آریتمتیکا یافت می‌شود .در این کتاب قضیهٔ زیررا بدون اثبات می‌بینیم : تفاضل دومکعب کامل مساوی با مجموع دومکعب کامل است . » این قضیه بعدها توسط **ویت ، باشه و فرما** تأیید شد . در این کتاب احکام زیادی مربوط به‌نمایش اعدادبه صورت مجموع دو ، سه یاچهارمربع ذکر شده است که بعدها توسط **فرما ، اولر و لاگرانژ**

تکمیل شده‌اند. شاید بی‌مناسبت نباشد که چند مسئله از مسائلی را که در آرتیمتیکا آمده است ، بدون حل ذکر کنیم تا خواننده با آن دست و پنجه نرم کند . باید بخاطر داشت که «عدد» به معنای «عدد صحیح مثبت » است .

مسئلهٔ ۲۹ از باب II: دو عدد مربع بدست آورید که هرگاه حاصل ضرب آنهارا باهر کدام از آنها جمع کنیم، نتیجه بازهم یك عدد مربع باشد .

مسئلهٔ ۷ از باب III: سه عدد بدست آورید به‌نحوی که مجموعشان مربع کامل بوده و نیز مجموع دو به دوی آنها هم مربع کامل باشد .

مسئلهٔ ۹ از باب III: سه عدد بدست آورید که به‌صورت تصاعد حسابی بوده و مجموع دو به‌دوی آنها مربع کامل باشد.

مسئلهٔ ۱۵ از باب III: سه عدد بیابید به نحوی که حاصل‌ضرب دوتای آنها منهای سومی مربع کامل باشد . (مسئلهٔ ۵ را ببینید) .

مسئله ۱۱ از باب IV: سه عدد بیابید که مجموعشان مساوی با مجموع مکعباتشان باشد .

مسئلهٔ ۲۲ از باب IV: سه‌عدد بدست آورید که به‌صورت تصاعد هندسی بوده و تفاضل دو به دوی آنها مربع کامل باشد.

مسئلهٔ ۱۸ از باب VI: مثلثی فیثاغورسی بیابید که در آن طول نیمساز یك زاویهٔ حاده عدد صحیح باشد (مسئلهٔ ۲ را ببینید) .

معادلات جبری که درآن مقصود یافتن جوابهای صحیح است نزد ریاضیدانان اروپایی به‌نام « معادلات دیوفانتی » و نزد ریاضیدانان اسلامی به معادلات سیال مشهورند در واقع دربیشتر مسائل جدید نیز قید جوابهای صحیح نیز به چشم می‌خورد . دیوفانت مبدع مسائل‌ازاین قبیل نبود و همینطور وی اولین کسی نبود که در مورد معادلات نامعین تحقیق کرده باشد همچنین اولین کسی نبود که معادلات درجهٔ دوم را به‌طریق غیرهندسی حل کند ، بلکه وی اولین‌کسی بود که اولین قدم را برای علامت گذاری جبری برداشت . این‌قدمها برای اختصاروتندنویسی بود . وی اختصاراتی برای‌مجهول تفاضل ،تساوی، معکوسات وتوانهاداشت . کلمهٔ«آریتمتیك» ازکلمهٔ یونانی arithmetike است که ترکیبی از کلمات arithmos برای «عدد» و techne برای « علم »است . بنابه‌گفتهٔ هیث ، دیوفانت مجهولات را باحروف اول ودوم یونانی به صورت α و β نمایش می‌داده است .

تقسیم مثلث .... (دنبالهٔ صفحهٔ ۲۶۰)

هرگاه مثلثهای کوچکتر که درون مثلث ABC تشکیل شده‌اند با خودمثلث ABC متشابه باشند ، باید دو زاویهٔ مختلف مثلث ABC برابربا زوایای ۱و۲ شوند بنابراین مجموع دو زاویه ازمثلث ABC ، ۱۸۰ درجه خواهد شد واین ممکن نیست مگرآنکه زاویه‌های ۱ و۲ برابر با همان زاویه از مثلث ABC شوند یعنی باهم برابرباشند. دراین حالت این مثلثهاقائم‌الزاویه بوده‌ومثلثABC نیزقائم‌الزاویه‌خواهدبود.

درحالت (d) (بدون آنکه ازکلیت مسئله کاسته شود) فرض می‌کنیم C بزرگترین زاویهٔ مثلث ABC باشد بدیهی است: C ز $<$ ۳ ز خواهد بود از اینرو مثلث با زاویهٔ ۳ نمی‌بایستی متشابه با مثلث اصلی گردد . پس فقط یك مثلث قائم‌الزاویه را می‌توان به‌سه مثلث قائم‌الزاویه تقسیم کرد .

ازاین مقدمه‌ها سؤال زیرمطرح می‌شود :

آیا مجموعهٔ اعداد تقسیم یك مثلث معرف شکل آن می‌باشند .

ودراین صورت آیا مثلثی که عدد تقسیمش۵ باشد قائم‌الزاویه خواهد بود ؟

به‌عکس، شکل یك مثلث مفروض است ، مجموعهٔ اعداد تقسیم‌آن چقدر است ؟

دربارهٔ مثلثی .... (دنباله صفحهٔ ۲۶۱)

$$\frac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}{4}=$$

$$=\frac{1}{9}[4\overline{AM}^2+\overline{AM}^2+\overline{BM_1}^2+4\overline{BM_1}^2]$$

$$\frac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}{4}=\frac{5}{9}(\overline{AM}^2+\overline{BM_1}^2)$$

با استفاده از رابطهٔ (II) داریم :

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\frac{4\times 5}{9}\overline{CM_2}^2$$

و با توجه به رابطهٔ I خواهیم داشت :

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\frac{4\times 5}{9}(\frac{3}{2}AB)^2=5\overline{AB}^2$$

با ریاضیات آشتی کنید

(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

تألیف A. BULLAS،
استاد آموزش ریاضیات در فرانسه

ترجمهٔ : ع. مصحفی

بخش یکم - بازیابی توانایی در ریاضیات

دوستان عزیز ، نزدیکتر بیایید ، می‌خواهم رازی را برای شما بازگو کنم. بسیاری از دانش آموزان دبیرستانهای ما به جد گمان می‌کنند که « ریاضیات بطور دهشت‌آوری مشکل است ! »

اما این‌اشتباه محض است . ریاضیات ساده است ، واین کتاب ازاین جهت نوشته می‌شود که شما این موضوع را دریابید .

دانش آموزی را در نظر بگیرید که به سنی درحدود ۱۳سال وارد دبیرستان شده است . نخستین برخورد با جبر همانند آنکه ناگهانی به‌زیر دوش‌آب سرد رفته باشد ، برای وی چندش‌آوربوده است . وهنگامی‌که هندسه قیافهٔ اخم‌آلود قضایای خودرا به وی نموده است ، نوعی وحشت بر مغز کوچك این دانش‌آموز چیره گشته است .

خدایا ! چرا پدرومادر تصمیم گرفته‌اندکه وی بازهم درس بخواند و دراین تنگنا گرفتارش ساخته‌اند ؟

بدون‌آنکه فعالیتی بخرج بدهد ، و بدون‌آنکه عاقلانه بیندیشد ، این فکررا پذیرفته است که وی هیچگاه چیزی از ریاضیات نخواهد فهمید ، وانگهی نمرات بدی که به خاطر کوشش نکردن بدست می‌آورد ، رفته رفته این فکر را دراو قوت می‌دهد که وی ذاتاً استعداد درك ریاضیات را ندارد . برای آنکه افسردگی خودرا ازاین بابت بزداید ، خودراتابع قضا وقدر قلمداد می‌کند و باخویشتن می‌گویدکه : سرنوشت این بوده است که از ریاضیات بیگانه باشد .

شاید ازبین دانش‌آموزانی که این نوشته را می‌خوانند بسیاری ازجملهٔ‌آنان باشند که مانند دانش‌آموز مزبورقربانی عقدهٔ حقارت شده باشند . برای‌آنکه اینان اعتماد به‌خویش‌را بازیابند ، کوشش خواهم کرد که در ریاضی توانا گردند .

دوستان من ، مهم نیست که شما در ریاضیات متوسط باشید ، یاضعیف باشید ، یااینکه به‌کل از آن برکنار باشید ، مهم این‌است‌که اگر قویاً مایل باشید می‌توانید درآن‌پیشرفت درخشان داشته باشید .

ممکن است که شما اعتراض کنید و بگوئید : « این یك شوخی است ، چگونه می‌شود باور کرد کسی‌که یك کلکسیون صفر در ریاضیات دارد بعد از خواندن این کتاب نمره های ۱۶ و ۱۸ دراین درس بدست آورد !؟»

اماخواندن این کتاب به تنهایی برای پیشرفت کافی نیست ، بلکه مخصوصاً لازم است تعالیمی را که در آن داده شده است به دقت بکاربست .

شمامی خواهید چیزی را برایتان ثابت کنیم که واضح است وعقل سلیم آن را باور دارد ! چیزی که عیان است چه حاجت به بیان است !

شما درریاضیات ضعیف هستید، این‌به‌جای خود یك‌نقص است ، اماآیا خواسته‌اید که علت‌آن را دریابید ؟

هنوز نخواسته‌اید ، در صورتی که وقتی این علت را دریابید سه چهارم از راه را جلورفته‌ایم .

بسیاری ازشما دوچرخه داشته‌اید . بسا که در جریان یك دوچرخه سواری برایتان پیش‌آمده باشد که دوچرخه از حرکت بازایستاده باشد . دراین وضع چه‌کرده‌اید ؟ آیا دست

روی دست گذارده‌اید ؟ مسلماً نه ، نخستین عکس‌العمل شما خود به خود کشف علت بوده است . بعداز آنکه علت را دریافته‌اید همهٔ کوشش خودرا در رفع آن بکاربسته‌اید ، سپس کوشیده‌اید تا عقب ماندگی خودرا جبران کنید .

ازاین مثال ساده متوجه خواهید شد که چگونه می‌خواهم توانایی در ریاضیات را به شما بازگردانم .

تجزیه وتحلیل‌علل ضعف شما در ریاضیات یك‌موضوع را روشن خواهد ساخت وآن اینکه در همان برخورد اول باکندی خود درریاضیات دست روی دست گذارده‌اید. اکنون متوجه خواهید شد که چرا از عهدهٔ اثبات یك قضیه یا حل یك مسئله برنیامده‌اید .

درخاتمه باید اضافه کنم که برای برطرف ساختن آنچه که شمارا در ریاضیات فلج کرده است باید توانایی مقاومت لازم را داشته باشید ، وانگهی لازم است که زمینهٔ فکری‌را که اکنون‌فاقد آن هستید بدست‌آورید ، درآن صورت موفقیت حتمی در انتظار شما است .

بخش ۲ ـ اثبات ادعا

می‌گویم و از عهده برون می‌آیم

پیشرفت در ریاضیات تا حد بدست آوردن نمره‌های ۱۷ و ۱۸ در آن ، بسیار عالی است ! اما علی‌رغم آنچه‌که گفته شد شما حتی تصورآن را هم‌نمی‌توانید بکنید . ازاینرو برای آنکه بخشهای آیندهٔ کتاب را با تعمق بخوانید لازم است که قبلاً اعتماد شما جلب بشود .

چگونه ممکن است به‌چیزی دست یافت درحالی‌که در این باره اطمینان وجود نداشته باشد ؟

این را هم باید بدانید که دانش‌آموزان دیگری نیز وجود داشته‌اند که مانند شما در ریاضیات ضعیف بوده‌اند و نیز به‌اندازهٔ شما دیرباور بوده‌اند ، ونمی‌خواسته‌اند بپذیرند که برای بازیابی توانایی لازم است‌که منفی بافی‌راکنارگذارد و راهی را دنبال کرد .

اکنون اینان وقتی که شادی توفیق درحل مسئله‌ای را حس می‌کنند چنان به هیجان می‌آیند که بی اختیار فریاد برمی‌آورند : « ریاضیات چه دلپذیر است !» . برای اینان چیزی دلپذیر است که در سابق برایشان ناخوشایند بود .

من مایلم که برای شما دوستان عزیز هم ریاضیات به همین اندازه دلپذیر باشد .

مثالهایی ازاین نوع دانش‌آموزان حس اعتماد شمارا تهییج‌خواهد کرد ، آن شایستگی را برای شما بوجود خواهد آورد تابرای‌نیل به‌هدف عالی‌که انتظارش را می‌کشیدکوشش لازم را بخرج دهید .

اجازه بدهید تابرای شما داستان دانش آموزی را بیان کنم که وقتی نزد من‌آمد تازه به‌دبیرستان وارد شده بود ودر ریاضیات آنچنان ضعیف بود که پدرش واهمه داشت وی در امتحانات رفوزه شود .

این دانش‌آموز به من گفت که پدرش مرتباً به خاطر ضعفش درریاضیات وی را سرکوفت می‌زند وبرایش خط ونشان می‌کشد که بالاخره رفوزه خواهد شد .

من سخنش را قطع کردم وپرسیدم که‌آیا درنوبت اول معدل آورده است ؟

پاسخ داد که نه ، زیرا ...

پرسیدم حال چه می‌خواهد ؟

گفت که اگر بتواند نمرهٔ قبولی بیاورد کاملاً راضی خواهد بود . اما در اینکه بتواند همین توفیق مختصر را بدست آورد تردید داشت .

دراین هنگام دیگرعصبانی شدم وفریادکشیدم : «نزدمن آمده‌ای تا فقط بتوانی نمرهٔ قبولی بیاوری ! نه عزیزم ، من وقت خودرا بیهوده به‌هدر نمی‌دهم . من فقط دانش‌آموزانی‌را راهنمایی می‌کنم که میل به پیشرفت عالی داشته باشند . تنها به یك‌شرط حاضرم باتو کاربکنم‌که قول بدهی‌درامتحانات نوبت بعد جزء پنج‌نفر ردیف اول باشی.»

آن دانش‌آموز اظهارداشت که از خدا می‌خواهد در ردیفهای‌بالا قرارگیرد اماچنین توانایی‌را درخود سراغ‌ندارد.

گفتم : « قبول ، اما من این چنین توانایی را در تو بوجود می‌آورم ».

این عکس‌العمل من چنان اطمینانی در آن دانش آموز بوجودآورد که بطورعجیبی به‌فراگیری ریاضیات روی‌آوردتا آنجاکه شیفتهٔ این درس گردید .

همین دانش‌آموز که امتحان نوبت اول در ریاضیات نمره نیاورده بود ، درامتحان‌نوبت دوم دراین درس چهارمین نمرهٔ عالی‌ودرامتحان نوبت سوم دومین نمرهٔ عالی را بدست

آورد . البته وی امیدوار بودکه دراین امتحانات نمرهٔ ۲۰ بدست آورد .

دانش‌آموز مورد بحث درسالهای دوم وسوم دبیرستان همواره در ریاضیات شاگرد ممتاز بود ودر این درس هیچگاه نمره‌ای کمتر از ۱۸ نگرفت . بعد از آن به رشتهٔ ریاضی وارد شد .

جالب اینجا است که دلباختگی به ریاضیات از وی اعجوبه‌ای کوچك در این علم بوجود آورده بود.

یاد دارم دراولین سالی که به رشتهٔ ریاضی وارد شده بود بانگرانی به وی تذکردادم که x شاگرد ممتازی است و بنظرمی‌رسد که غیرقابل رقابت باشد . اما او با اعتماد کاملی که به‌خودش داشت فقط گفت : خواهیم دید !

درتمام مدت تحصیلش در رشتهٔ ریاضی رتبهٔ اولی در ریاضیات‌درانحصار وی بود . درامتحانات نهایی بامعدل ممتاز قبول شد واکنون‌که این سطور را می‌نویسم در دانشگاه به تحصیلات درخشان خود ادامه می‌دهد .

روز اولی که‌این دانش‌آموز باآن درماندگی نزدمن‌آمده بود هرگزچنین آینده‌ای را برای خود تصورهم نمی‌کرد.

دوستان عزیز ، دراین باره چه می‌گویید ؟ آیا هنوز هم شك وتردید دارید ؟

در دومین سرگذشت از دخترخانمی صحبت می‌شودکه کمی دیرمتوجه این موضوع شد که شاگردان ضعیف هم می‌توانند درامتحان ریاضی شانس موفقیت داشته باشند .

دوسال پیش بودکه ازپدراین دخترخانم نامه‌ای‌دریافت کردم که درآن ازمن خواسته بود اگرممکن است دخترش‌را راهنمایی‌کنم . این دخترخانم درامتحانات نهایی خرداد ماه تجدید شده بود وبایستی درامتحانات شهریورماه شرکت‌کند. نمرهٔ ریاضی اودرامتحان خرداد ازیك تجاوز نکرده بود واین خودکافی بود تادختر خانم تصورکند در امتحان شهریورماه شانس قبولی بسیار کم دارد .

تصدیق می‌کنید که وضع وی هیچ درخشان نبود وازطرف دیگرمقتضیات هم چندان مساعد نبود زیرا قرار بود این دخترخانم تعطیلات تابستان را کنار دریا بگذراند . من فقط می‌توانستم از راه دور بااو درتماس باشم .

با وجود این قبول کردم که به‌او کمك‌کنم . در مدت تابستان بااو در مکاتبه بودم و این خود موجب شد که در امتحانات شهریورماه‌قبول‌شود.

درضمن امتحانات متوجه شدم که رئیس حوزهٔ امتحانی از دوستان من است . نامه‌ای به وی نوشتم و پاسخی که دریافت داشتم حاکی‌ازاین بودکه کلیهٔ اوراق بادقت کامل و بانظرمساعد تصحیح می‌شودتاحقی ازکسی ضایع نگردد .

دخترك که همانند دیگران امتحان شده بود به من چنین توضیح داد : « امتحان برای همهٔ ما یکنواخت بود »با وجوداین من قبول شدم ومخصوصاً نمرهٔ قبولی را درریاضیات بدست آوردم » .

شاید بعضیها فکرکنند که اقبال مساعد یار این دختر خانم بوده است ؛ برای اینان سرگذشت دانش‌آموز دیگری‌را بازگو می‌کنم ؛

این دانش‌آموز هم بایستی برای امتحانات نهایی آماده شود ودر ریاضیات بیش ازآنچه که تصورشود وضعی‌یأس‌آور داشت . درامتحان نوبت اول ازجبر صفر و از هندسه ۰/۵ گرفته بود ودرامتحان نوبت دوم تلافی کرده از جبر ۰/۵ وازهندسه صفر بدست‌آورده بود .

در دونوبت فقط صفر و۰/۵ باهم عوض شده بودند واین هیچ امیدوارکننده نبود .

وقتی‌که رئیس دبیرستان ازمن خواست تااین‌دانش‌آموز بااین وضع اسفناك را راهنمائی‌کنم تردید کردم که قبول‌کنم زیرا دراین مورد ناکامی درانتظار بود وبه شهرت من لطمه وارد می‌آمد (هرکس برای خود غروری دارد) . بالاخره برای آنکه رضایت رئیس راجلب‌کرده باشم پذیرفتم و تلاش لازم را برای برانگیختن ذوق دانش‌آموز بکاربردم . در این مورد هم‌معجزه‌بوقوع پیوست واین دانش‌آموز نیز موفق‌شد.

آیا این هم اتفاق بود ؟

برای آنکه این بخش طولانی نشود موارد دیگری را به‌اختصار ذکرمی‌کنم وامیدوارم‌که تئوری‌تکیه به‌قضاوقدررا درهم کوبیده باشم .

ژ.م. درامتحانات‌نوبت‌اول ودوم دردرس جبرنمره‌هایی کمی بالاتراز صفرگرفته بود . اما توانست عقب ماندگی خودرا جبران کند بقسمی که درامتحان آخرسال دومین نمرهٔ عالی را در درس جبربگیرد .

ج.س. دریك امتحان هندسه در ردیف نفرات‌آخرشده بود . اما بعدازیك ماه تلاش مؤثر دراین‌درس چنان پیشرفت کرد که در امتحان مجدد نفر چهارم شد .

د.م. در ریاضیات وبخصوص درجبر ضعیف بود . با چند ماه کوشش پی‌گیر عقب ماندگی خودرا در این ماده

جبران کرد ودرامتحان نهایی معدل نمرات ریاضی وی از ۱۴ تجاوز می‌کرد .

م.س. تقریباً ازریاضیات بیگانه‌بود (مخصوصاً درهندسه) دوماه ونیم تلاش‌کرد ونتیجه آن شدکه درامتحان هندسه نفر سوم ودرامتحان جبر باکسب نمرهٔ ۱۶/۵ نفر چهارم بشود .

ج.پ. در دو نوبت درهندسه نمرهٔ ۳ گرفته بود .بعد ازیك ماه فعالیت نمرهٔ ۱۳ گرفت ودرامتحان آخر سال نمرهٔ وی ۱۴ شد .

م.ل. درابتدا از ریاضیات کاملاً ضعیف بود . بعد کوشش کرد ودراین درس چنان پیشرفت کرد که دبیرش اورا بهترین شاگرد خود در ریاضیات می‌شناخت .

پ.ج. نیزدرریاضی ضعیف‌بود.چندماه بعد از زبده‌ترین شاگردان در ریاضیات بشمارمی‌آمد . از امتحان نهایی‌بخاطر نمرات عالیش در ریاضیات قبول شد .

خوانندهٔ عزیز ، اکنون نوبت تواست . آیا هنوزهم در شك وتردید خود باقی هستی ؟ آیا بازهم مرتباً تکرارخواهی کرد که : « دیگران قریحه دارند ومن فاقد آن هستم »؟

بهترآن است‌که عمل‌کرد . اشخاص دیگری همانندشما درریاضیات‌ضعیف بوده‌اند، اما بعدکه‌روش‌صحیح‌رابکاربسته‌اند دراین درس پیشرفتهای خارق‌العاده داشته‌اند . آیا تصمیم داری که این روش را دنبال کنی ؟

کشورمابه‌افراد دانشمند و به متخصصین‌فنی نیازدارد. مسؤولان اموربارها کمبود افراد ریاضیدان‌را اعلام‌داشته‌اند. همهٔ‌علوم‌متکی به ریاضیات می‌باشند . کسی‌که ریاضیات‌نداند هرگز نمی‌تواند فیزیکدان ، شیمیدان ،کیهان شناس ، مهندس وغیره ..... گردد .

همهٔ دانش آموزانی که در ریاضیات ضعیف هستید ، تصمیم قاطع بگیرید وجداً اراده کنید که درآن قوی شوید.

من به شما قول می‌دهم که اگر تعلیمات این کتاب را قویاً بکار ببندیدتوانایی کافی‌در ریاضیات‌رابدست‌خواهیدآورد.

درآن هنگام که اوراق امتحانی خود را با نمره‌های درخشانی که آورده‌اید باافتخار به‌این وبه‌آن نشان می‌دهید، مرا فراموش نکنید . همیشه شاگرد اول بودن لذتی دارد که تابه‌آن مرحله نرسید میزان آن را درك نخواهید کرد .

روابطی در اعداد: تساویهای پایدار

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری

گاهی مجموع مربعات چند عدد با مربعات چند عدد دیگر مساوی می‌شود بطوری‌که اگرمثلاً یك یاچند رقم ازهریك‌از اعداد حذف شود تساوی پایدار می‌ماند. به‌مثالهای زیر توجه کنید :

تساوی زیردرست است :

$$۱۲۳۹^۲ + ۵۶۱۵^۲ + ۶۴۲۴^۲ = ۲۴۲۸^۲ + ۷۶۱۳^۲ + ۳۲۳۷^۲$$

۱) اگررقم سمت چپ هریك ازاعداد حذف شود تساوی بهم نمی‌خورد وداریم :

$$۲۳۹^۲ + ۶۱۵^۲ + ۳۲۴^۲ = ۴۲۸^۲ + ۶۱۳^۲ + ۲۳۷^۲$$

درضمن اعداد حذف شده نیزبه‌تنهایی به‌صورت تساوی قبل باقی‌می‌مانند :

$$۱^۲ + ۵^۲ + ۶^۲ = ۲^۲ + ۷^۲ + ۳^۲$$

۲) دو رقم سمت چپ هریك از اعدادرا کنار می‌گذاریم . خواهیم داشت:

$$۱۲^۲ + ۵۶^۲ + ۶۴^۲ = ۲۴^۲ + ۷۶^۲ + ۳۲^۲$$

ارقام حذف شده نیز به تنهایی رابطه‌ای مشابه خواهند داشت

$$۳۹^۲ + ۱۵^۲ + ۲۴^۲ = ۲۸^۲ + ۱۳^۲ + ۳۷^۲$$

موضوع جالب دیگردراین است که اگر بین ارقام سوم و چهارم ارقام ۷ و ۹ و ۸ و ۸ و ۹ و ۷ را قرارداده وبازارقام ۸ و ۴ و ۶ و ۶ و ۴ و ۸ را به‌ترتیب بین ارقام چهارم و پنجم اعداد بدست‌آمده قراردهیم تساوی بازبهم نمی‌خورد و پایدار باقی می‌ماند :

$$۱۲۳۷۹^۲ + ۵۶۱۹۵^۲ + ۶۴۲۸۴^۲ = ۲۴۲۸۸^۲ + ۷۶۱۹۳^۲ + ۳۲۳۷۷^۲$$

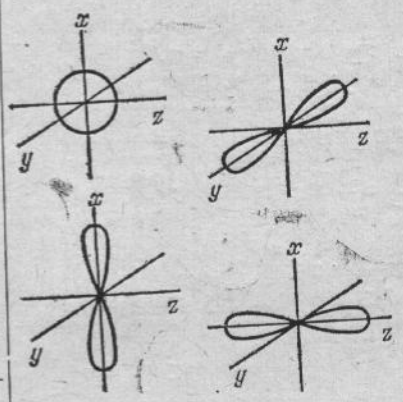
$$۱۲۳۷۸۹^۲ + ۵۶۱۹۴۵^۲ + ۶۴۲۸۶۴^۲ = ۲۴۲۸۶۸^۲ + ۷۶۱۹۴۳^۲ + ۳۲۳۷۸۷^۲$$

چنین تساویهای پایدار منحصربه‌فرد نمی‌باشند بلکه می‌توان به‌دلخواه هرچند عدد ازچنین تساویهایی را بسازیم . منتهی باید فکرکرد وشرایط اولیه را درنظرگرفت .

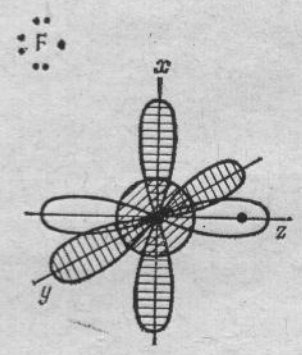
۵۱- ئیدرور لیتیم‌را می‌توان‌مانندترکیبی‌باپیوندکووالانسی مورد بررسی قرارداد ونمودار اربیتالی آن را به این صورت نشان داد:....

پاسخ ۵۲: $1s^2 2s^2 2p^1_x 2p^2_y 2p^1_z$

۵۳- شکلهای زیر اربیتالهای‌خارجی‌اتم‌فلوئور را نشان می‌دهند. اربیتالهایی راکه در تشکیل پیوند شرکت نمی‌کنند،هاشوربزنید.

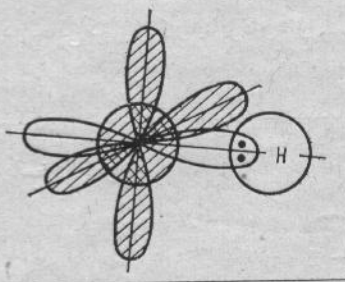


پاسخ ۵۴ :



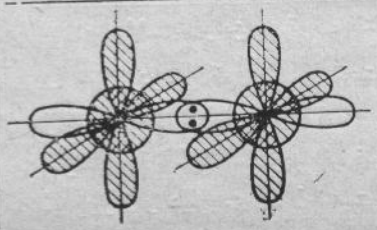
۵۵- نمودار اربیتالی اتم ئیدروژن‌چنین است:
.....

پاسخ ۵۶ :



۵۷- دو الکترون‌که در تشکیل پیوند شرکت می‌کنند و در اربیتال‌پیوندیی‌که از تقاطع‌اربیتالهای اتمی بوجود می‌آید قرار دارند، دارای ... مخالف هستند.

پاسخ ۵۸ :

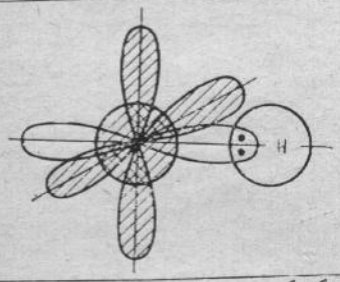


۵۹- به‌کمك فرمول لیوئیس نشان می‌دهندکه هر پیوند در نتیجهٔ اشتراکی شدن جفت الکترون تشکیل می‌شود. بااستفاده از نمودار اربیتالی می‌گویند که پیوند وقتی تشکیل می‌شود که دو اربیتال اتمی‌که هریك دارای ... الکترون است، یك ناحیه از فضا یا ..... را اشغال می‌کنند.

پاسخ ۶۰ : مخالف

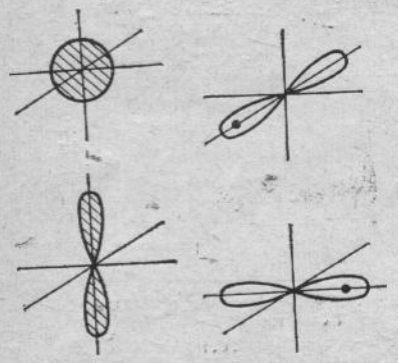
۶۱- نمودار اربیتالی اتم کلررا رسم‌کنید:

پاسخ ۶۲ :



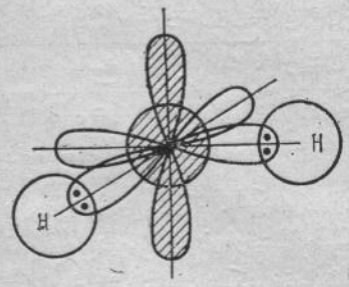
۶۳- هیئت الکترونی اتم‌گوگرد (s با عدد اتمی ۱۶) را با استفاده از علامتهای s ، p_x ، p_y ، p_z ، می‌توان اینطور نشان داد: .....

پاسخ ۶۴ :



۶۵- نمودار اربیتالی الکترونهای خارجی (n = ۳) اتم گوگرد را رسم‌کنید .

پاسخ ۶۶ :



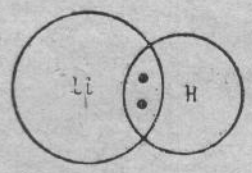
۶۷- از پاسخ پرسش قبلی‌چنین‌برمی‌آیدکه پیوندهای H – S در مولکول H_2S باید تحت زاویهٔ .... قرار داشته‌باشند.

پاسخ ۶۸ : اربیتالی، لیوئیس

۶۹- نمودار اربیتالی مولکول H_2O چنین است: ....

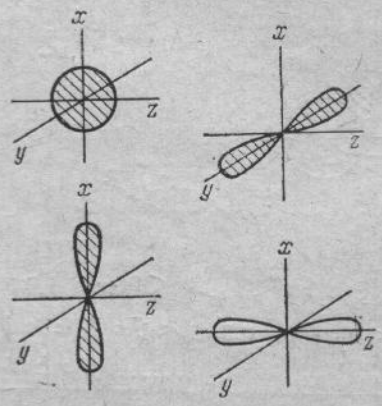
پاسخ ۷۰ : °۹۰

پاسخ ۵۱ :



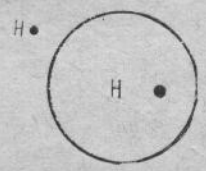
۵۲ ـ با استفاده از علامتهای s ، p_x ، p_y ، p_z ؛ هیئت الکترونی اتم فلوئور (F با عدد اتمی ۹) را می‌توان اینطور نشان داد : .....

پاسخ ۵۳ :



۵۴ ـ با استفاده از پاسخ پرسش قبلی ، نمودار اربیتالی اتم قلوئور را رسم کنید .

پاسخ ۵۵ :



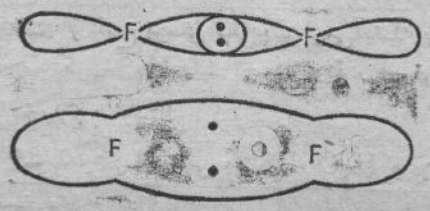
۵۶ ـ نمودار اربیتالی کامل مولکول HF را رسم کنید وموقعیت الکترونهایی راکه در تشکیل پیوندشرکت می‌کنند، نشان دهید .

پاسخ ۵۷ : اسپینهای

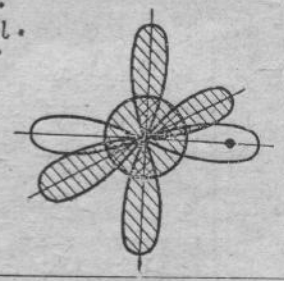
۵۸ ـ نمودار اربیتالی مولکول فلوئور را رسم کنید .

پاسخ ۵۹ : یك ، اربیتال

۶۰ـ اربیتالهای اتمی که به اتمهای پیوند یافته تعلق دارند یك ناحیه از فضا را اشغال می‌کنند و اربیتال‌مولکولی را بوجود می‌آورند . شکلهای زیر اربیتال مولکولی F_2 را نشان می‌دهد . چون اربیتال مولکولی به وسیلهٔ دوالکترون اشغال می‌شود، پس الکترونها بایداسپینهای ... داشته‌باشند.



پاسخ ۶۱ :

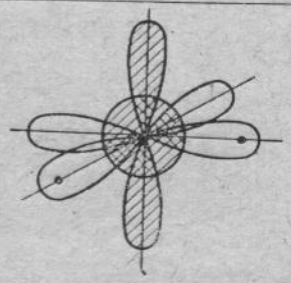


۶۲ـ با استفاده از پاسخ پرسش قبلی ، نمودار اربیتالی مولکول HCl را رسم کنید .

پاسخ ۶۳ : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2_x 3p^2_y 3p^1_y$

۶۴ـ اربیتالهای خارجی (n = ۳) اتم گوگرد را با قرار دادن هر اربیتال p روی یکی از محورهای دستگاه مختصات فضایی رسم کنید . اربیتالهای پرشده را هاشوربزنید والکترونهای والانسی را با نقطه نشان دهید .

پاسخ ۶۵ :

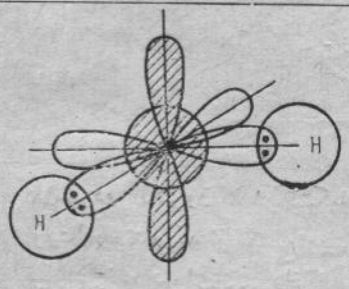


۶۶ـ نمودار اربیتالی مولکول H_2S را رسم کنید .

پاسخ ۶۷ : ۹۰°

۶۸ـ به‌طریق تجربی معلوم شده است که پیوندهای H – S در مولکول H_2S زاویهٔ ۹۲° می‌سازند . بنابراین شکل مولکولها رامی‌توان بر اساس‌نمودار... پیشگویی کرد در حالی‌که این کار بنابرنمودار ... امکان پذیر نیست .

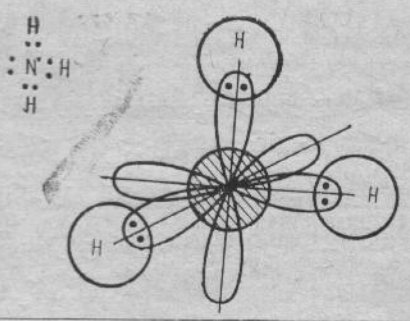
پاسخ ۶۹ :



۷۰ـ بنابراین می‌توان انتظار داشت که پیوندهای H – O در مولکول H_2O تحت زاویه ... قرار دارند (این زاویه در حقیقت برابر با ۱۰۵° است) . افزایش زاویه بین پیوندها را ممکن است به اثر نیروهای دافعه بین اتمهای ئیدروژن و هیبریدی شدن نسبت داد .

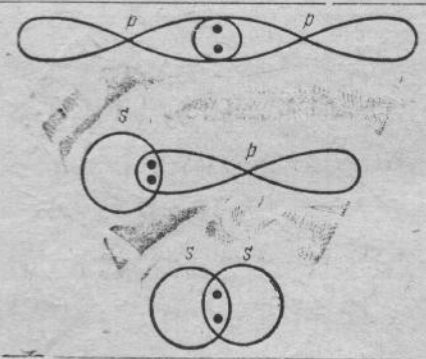
۷۱ـ با استفاده‌ازعلامتهای s ، p_x ، p_y ، p_z، هیئت الکترونی ازت (N با عـدداتمی۷) را نشان دهید و نمودار اربیتالی آن را رسم کنید .

پاسخ۷۲ :



۷۳ـ ازروی نمودارارربیتالی می‌توان انتظار داشت که مولکول آمونیاك مسطح نیست بلکـه شکل هـرم را دارد. هرمی‌بودن مولکول NH_3 به طریق تجربی‌نیزتأییدشده‌است. لکن زاویهٔ بین پیوندهای N – H به‌جای.... موردانتظار، ۱۸۰° است .

پاسخ ۷۴ :

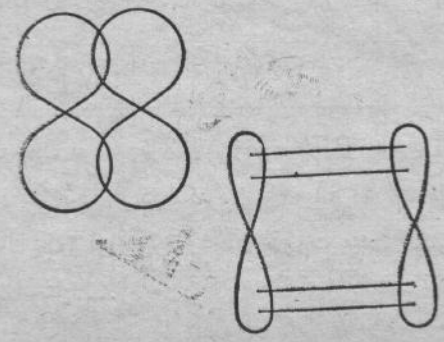


۷۵ـ نمودار اربیتالی دواتم ازت‌راکه‌ازراه به شرکت گذاشتن یکـی ازالکترونهای جفت‌نشدهٔ خـود پیونـد تشکیل داده‌اند، رسم کنید .

پاسخ ۷۶: :N:::N:

سه

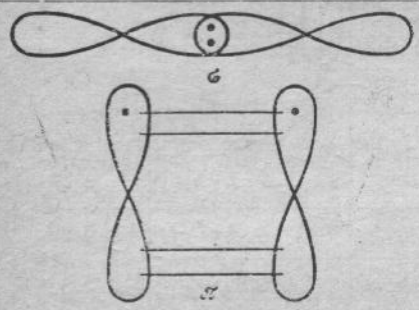
۷۷ـ اگردواربیتال که هریك دارای یك الکترون‌است، آنطورکـه درشکـل زیـرنشان داده شده است، یکـدیگر را بپوشانند، الکترونها پیوند π (پی) تشکیل می‌دهند . نمودار اربیتالی مولکول ازت را رسم‌کنیدودرآن، تشکیل پیوندها را به‌کمك خطوطی بین اربیتالهای مربوط نشان دهید .



پاسخ ۷۸ : σ π

۷۹ـ فرمول لیوئیس نشان می‌دهدکه درمولکول ازت بین‌اتمها سه پیوندکووالانسی‌تشکیل می‌شود، لکن این‌فرمول بین دونوع پیوندکووالانسی یعنی پیوندهای... و... تفاوتی قایل نیست .

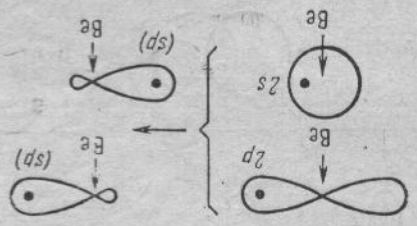
پاسخ ۸۰:



۸۱ـ هیئت الکترونی اتم بریلیم (Be با عدداتمی۴) که درحالت اصلی قراردارد چنین است .....

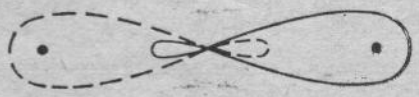
پاسخ ۸۲: $1s^2 2s^1 2p^1$ ، دو

۸۳ـ آزمایش نشان می‌دهدکه دوپیونـد در مـولکول BeH_2 هم‌ارزند. بنابراین باید قبول کردکه ازهیبریـدی شدن اربیتالهای‌sوp، دواربیتال جدیدتشکیل‌شده‌است (شکل‌زیر). هریك‌ازاربیتالهای هیبریدی sp جدید دارای...الکترون‌است.



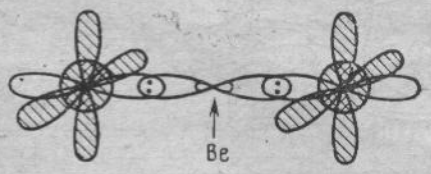
پاسخ ۸۴: $1s^2 2s^1 2p^1$

۸۵ـ همانطورکـه درشکل زیـرنشان داده شده است،



اربیتالهای هیبریدی sp درطول یك خط قراردارند. بـه‌همین جهت نمودارارربیتالـی BeH_2... است وخـودمـولکول نیز شکل .... دارد .

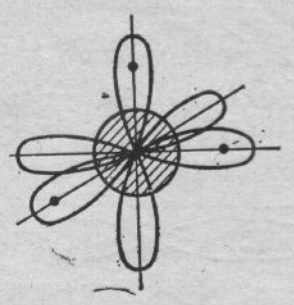
پاسخ ۸۶ :



۸۷ـ هیئت الکترونی اتم‌بورکه درحالت اصلی قرارداد ..... است .

پاسخ ۸۸ : $1s^2 2s^1 2p^1_x 2p^1_y$

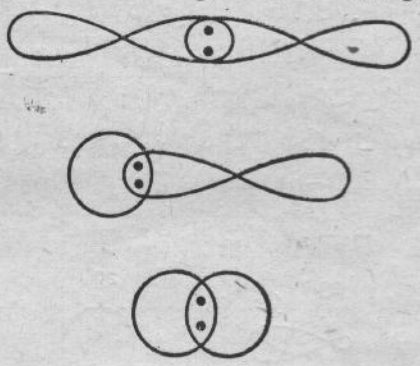
پاسخ ۷۱: $1s^2 2s^2 2p' \; 2p'_y 2p'_z$



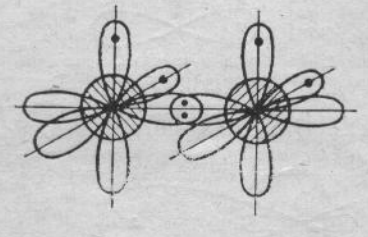
۷۲ـ براساس پاسخ پرسش قبلی نمودار اربیتالی مولکول آمونیاك NH_3 را رسم کنید.

پاسخ ۷۳: 90°

۷۴ـ پیوندهایی راکه‌تاحال‌مورد بحث قراردادیم، پیوندهای سیگما (σ) می‌نامند. درشکلهای زیر، اربیتالهای s یا p را که درتشکیل پیوند σ شرکت می‌کنند، نشان دهید.

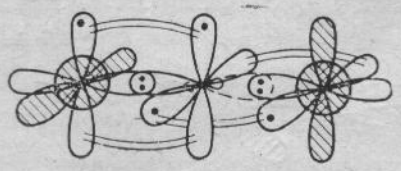


پاسخ ۷۵:



۷۶ـ فرمول لیوئیس برای مولکول ازت .... نشان می‌دهد که‌پوندبین‌اتمهابه وسیلهٔ.... جفت‌الکترون بوجودمی‌آید.

پاسخ ۷۷:



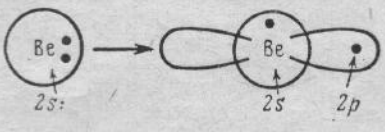
۷۸ـ همانطورکه درنمودار اربیتالی پاسخ پرسش قبلی دیده می‌شود، مولکول ازت، یك‌پیوند... ودو پیوند... دارد.

پاسخ ۷۹: σ ، π

۸۰ـ اگر دو اربیتال p که هریك یك الکترون دارد،یکدیگر را بپوشانند، پیوندهای σ یا π تشکیل می‌شودکه می‌توان‌آنها را به‌این شکل نشان داد:....

پاسخ ۸۱: $1s^2 2s^2$

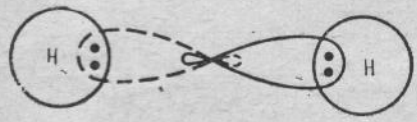
۸۲ـ اگر به اتم بریلیم ازخارج انرژی بدهیم، فرایندی‌که درشکل زیر نشان داده شده‌است، ممکن‌است روی دهد.هیئت الکترونی اتم‌بریلیم‌که درحالت تحریك‌شده قرار دارد...است وبنا براین اتم بریلیم می‌تواند... الکترون درتشکیل پیوند شرکت دهد.



پاسخ ۸۳: یك

۸۴ـ همانطورکه‌قبلاً گفته شد، ترکیب BeH_2 دو پیوند کووالانسی هم ارز دارد، اما هیئت الکترونی $1s^2 2s^2$ امکان تشکیل چنین پیوندی راپیش‌بینی نمی‌کند. باوجود این اگریك الکترون از 2s به 2p منتقل شود،هیئت الکترونی... بوجود می‌آید. سپس‌هیبرید اسیون اربیتالهای s و p صورت می‌گیرد ودرنتیجه نمودار زیر بدست می‌آید:

پاسخ ۸۵: خطی



۸۶ـ آزمایش نشان داده است‌که مولکول $BeCl_2$ شبیه مولکول BeH_2 وخطی است . نمودار اربیتالی مولکول $BeCl_2$ را رسم کنید.

پاسخ ۸۷: $1s^2 2s^2 2p^1_x$

۸۸ـ چون بور درترکیباتی‌ازنوع BF_3، سه‌پیوندکووالانسی دارد، پس یکی از دوالکترون 2s باید در اربیتال $2p_y$ یادر اربیتال $2q_z$ قرارگیرد ودرآن صورت هیئت الکترونی اتم‌بور چنین است:....

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۸۹

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۸۹/۱ ـ فرستنده : **جواد فیض** ، ترجمهٔ از کتابهای انگلیسی

هرگاه a و b و c اندازه‌های ضلعهای یك‌مثلث باشند، ثابت کنید که مقادیر زیر نیزمی‌توانند اندازه‌های ضلعهای یك مثلث باشند :

$$A=\sqrt{a(b+c-a)}\ ،\ B=\sqrt{b(c+a-b)}\ ،$$
$$C=\sqrt{c(a+b-c)}$$

حل ـ باید نامساویهای $|A-B|<C<A+B$ را ثابت کنیم . چون A و B و C مقادیر مثبت هستند به‌جای نامساویهای بالا می‌توانیم نامساویهای $(A-B)^2<C^2<(A+B)^2$ را ثابت کنیم :

$$(A\pm B)^2=$$
$$2ab+ac+cb-a^2-b^2\pm 2\sqrt{ab[c^2-(a-b)^2]}$$
$$C^2=ac+bc-c^2$$

نامساوی $(A+B)^2>C^2$ بعد از اختصار می‌شود :

$$2\sqrt{ab[c^2-(a-b)^2]}>a^2+b^2-2ab-c^2$$
$$4ab[c^2-(a-b)^2]>[(a-b)^2-c^2]^2$$
$$[c^2-(a-b)^2][4ab+(a-b)^2-c^2]>0$$
$$[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2]>0 \qquad (I)$$

چون a و b و c اندازه‌های سه‌ضلع یك مثلث می‌باشندداریم:

$$a+b>c\Longrightarrow(a+b)^2-c^2>0$$
$$c>|a-b|\Longrightarrow c^2-(a-b)^2>0$$

بنابراین نامساوی (I) مسلم است .

نامساوی $C^2>(A-B)^2$ بعداز اختصار می‌شود:

$$c^2-(a-b)^2<2\sqrt{ab[c^2-(a-b)^2]}$$
$$[c^2-(a-b)^2]^2<4ab[c^2-(a-b)^2]$$

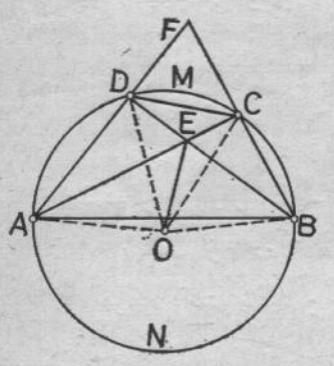
طرفین را برمقدار مثبت $c^2-(a-b)^2$ تقسیم می‌کنیم :

$$c^2-(a-b)^2<4ab\Longleftrightarrow c^2<4ab+(a-b)^2$$
$$\Longleftrightarrow c^2<(a+b)^2$$

بنابه‌فرض این نامساوی نیزمسلم است .

۸۹/۲ ـ ترجمهٔ ازفرانسه

ذوزنقهٔ ABCD در دایرهٔ به مرکز O محاط است . قطرهای ذوزنقه در E و امتداد ساقهای آن در F متلاقیند. ثابت‌کنید که هریك از چهارضلعیهای ADEO و ACFO محاطی است .



حل ـ ذوزنقه‌ای که در دایره محاط باشد متساوی‌الساقین است . خط OE عمود منصف AB است و اندازهٔ زاویهٔ AOE نصف اندازهٔ کمان AMB است . زاویهٔ ADB محاطی است واندازهٔ آن نصف اندازهٔ کمان ANB است .

مجموع دوکمان AMB و ANB برابربا تمام دایره است پس مجموع نصفهای آنها برابر با نیمدایره بوده و دو زاویهٔ AOE و ADE مکمل‌یکدیگرند وچهارضلعی AOED محاطی است . همچنین داریم :

$$AOC=\widehat{AD}+\widehat{DC}\ \text{و}\ AFC=\frac{\widehat{ANB}-\widehat{DC}}{2}$$

$$AOC+AFC=\frac{2\widehat{AD}+\widehat{DC}+\widehat{ANB}}{2}$$
$$=\frac{\widehat{AD}+\widehat{BC}+\widehat{DC}+\widehat{ANB}}{2}=180^\circ$$

وچهار ضلعی AOCF محاطی است .

حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم ریاضی

۸۹/۳ـ فرستنده : **جواد فیض** ، ترجمهٔ انگلیسی

سه عدد مخالف صفر a و b و c درروابط زیرصادقند :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{1-a^2} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\sqrt{1-b^2} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{1-c^2} \end{cases}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a = c\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} \\ b = a\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \\ c = b\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-b^2} \end{cases}$$

حل ـ از روابط داده شده داریم :

$$a^2 - b^2 = c(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}$$

طرف دوم را در مزدوج عبارت داخل پرانتز ضرب و تقسیم می‌کنیم ، نتیجه می‌شود :

$$a^2 - b^2 = \frac{c(a^2-b^2)}{a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}}$$

$$c = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$$

روابط دیگر به روش مشابه ثابت می‌شوند .

۸۹/۴ـ از **محمد معینی**

هرگاه داشته باشیم :

$$\begin{cases} a + 3x^2\sqrt[3]{a} - 4(b+c) = 0 \\ x^3 + 3x\sqrt[3]{a^2} + 4(b-c) = 0 \end{cases}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$(a-b-c)^3 = 27abc$$

حل ـ ازجمع و تفریق نظیربه‌نظیر طرفین دو رابطه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} (x+\sqrt[3]{a})^3 = 8c \\ (x-\sqrt[3]{a})^3 = -8b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a} \\ x = \sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b} \end{cases}$$

از حذف x بین این دورابطه داریم :

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c}$$

$$a - b - 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c}) = c$$

$$a - b - 3\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[3]{c} = C$$

$$(a-b-c)^3 = 27abc$$

۸۹/۵ـ از **جواد فیض**

از معادلهٔ زیر مقدار x را بدست آورید :

$$\begin{array}{lll} x & & x+1 \\ 2 & & 2 \\ 6 & = & 2\times 3 \end{array}$$

حل ـ بافرض $2^x = A$ داریم :

$$6^A = 2\times 3^{2A} \Longrightarrow 2^A \times 3^A = 2\times 3^{2A}$$

$$2^{A-1} = 3^A \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^A = 2$$

$$A = 2^x = \log_{\frac{2}{3}} 2 \Longrightarrow x = \frac{1}{\log 2} \times \log \frac{\log 2}{\log 2 - \log 3}$$

۸۹/۶ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

معادلهٔ زیر را حل وبحث کنید :

$$|4 + \log_a x| = 2 + |2 + \log_a x|$$

حل ـ اولاً هرگاه $\log_a x \geqslant -2$ باشد داریم :

$$4 + \log_a x = 2 + 2 + \log_a x$$

معادله مبهم است .

ثانیاً هرگاه $-4 < \log_a x < -2$ باشد داریم :

$$4 + \log_a x = 2 - 2 - \log_a x$$

$$\log_a x = -2 \Longrightarrow x = a^{-2}$$

ثالثاً هرگاه $\log_a x \leqslant -4$ باشد داریم :

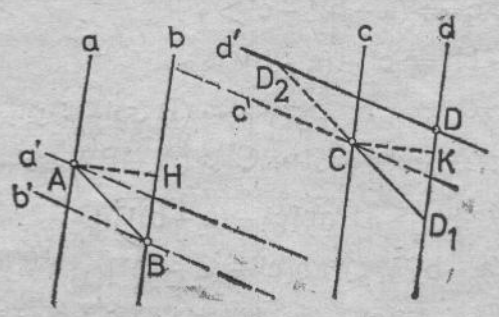
$$-4 - \log_a x = 2 - 2 - \log_a x$$

معادله غیرممکن است .

۸۹/۷ ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

برچهار نقطهٔ مفروض A و B و C و D چهار خط متوازی a و b و c و d را چنان مرور دهید که فاصلهٔ دوخط a و b با فاصلهٔ دوخط c و d برابر باشد .

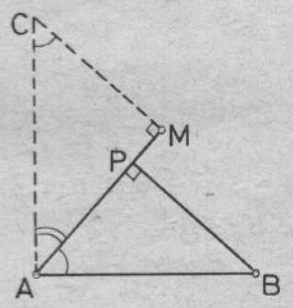
حل ـ اگرمسئله را حل شده فرض کنیم ، چون از C



موازی با AB رسم کنیم تا d را در D_1 قطع کند، چون AH و CK متساویند دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و CD_1K متساویند و در نتیجه CD_1 با AB برابر است. بنابراین برای رسم خطوط مطلوب ابتدا از C پاره خطی مساوی وموازی با AB رسم می‌کنیم. دونقطهٔ D_1 و D_2 بدست می‌آید و از این دونقطه به D وصل کرده از سایر نقاط مفروض موازی با D_1D یا D_2D رسم می‌کنیم. در حالت کلی دو دسته خطوط رسم‌می‌شود. درحالت خاصی‌که AB با CD موازی باشد ولی با آن برابر نباشد دو خط a و b بر ABودو خط c و d بر CD منطبق می‌باشند. درحالت خاصی که AB با CD موازی ومساوی باشد مسئله دارای بینهایت دسته جواب است.

۸۹/۸ ـ از حسین دارابی

دونقطهٔ ثابت A و B و نقطهٔ متغیر M را در نظر می‌گیریم. خط AM را رسم می‌کنیم و عمود BP را برآن فرود می‌آوریم. هرگاه‌نسبت طول AM به طول BP مقدار ثابت k باشد مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید.



حل ـ چون در M عمودی بر MA و در A عمودی بر AB اخراج کنیم تا در C متلاقی شوند، دو زاویهٔ BAP و MCA که هر دو متمم زاویهٔ MAC می‌باشند متساویند و دو مثلث ABP و AMC متشابهند وداریم:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AM}{BP}=k \Longrightarrow AC=k.\,AB$$

C نقطهٔ ثابت است و مکان M دایرهٔ به قطر AC است.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۸۹/۹ـ هرگاه f(x) نسبت به x سه‌جمله‌ای از درجهٔ دوم و $f'(x)$ مشتق آن و a وb ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ باشد مطلوبست تعیین هریك از مقادیر زیر:

$$S=f'(a)+f'(b)\ ،\ P=\frac{a}{f'(a)}+\frac{b}{f'(b)}$$

حل ـ چون a و b ریشه‌های سه جمله‌ای درجهٔ دوم f(x) می‌باشند پس داریم:

$$f(x)=A(x-a)(x-b)$$

که A عددی حقیقی است که همان ضریب جملهٔ درجهٔ دوم از سه جمله‌ای است.

$$f'(x)=A[(x-b)+(x-a]$$

$$f'(a)=A(a-b)\ ،\ f'(b)=A(b-a)$$

$$S=f'(a)+f'(b)=0$$

$$P=\frac{a}{f'(a)}+\frac{b}{f'(b)}=\frac{a}{A(a-b)}+\frac{b}{A(b-a)}$$

$$=\frac{a-b}{A(a-b)}=\frac{1}{A}$$

۸۹/۱۰ـ فرستنده: **جوادفیض** ترجمهٔ از فرانسه

هرگاه a و b و c به ترتیب سه‌جمله ازیك تصاعد حسابی با قدرنسبت h باشند، حاصل هریك‌از عبارتهای زیر را برحسب خطوط مثلثاتی b و h بدست‌آورید:

$$A=\sin a+\sin c$$

$$B=\cos a+\cos c$$

$$C=tg\,a+tg\,c$$

حل ـ به فرض $a=b-h$ و $c=b+h$ و داریم:

$$A=\sin(b-h)+\sin(b+h)=2\sin b\cos h$$

$$B=\cos(b-h)+\cos(b+h)=2\cos b\cos h$$

$$C=tg(b-h)+tg(b+h)=$$

$$=\frac{tg\,b-tg\,h}{1+tg\,b\,tg\,h}+\frac{tg\,b+tg\,h}{1-tg\,b\,tg\,h}=\frac{2tg\,b(1+tg^2h)}{1-tg^2b\,tg^2h}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم‌ریاضی

۸۹/۱۱ـ هرگاه مشتق تابع f(x) نسبت به x برابر باشد با:

$$f'(x)=[mx^{m-1}+(m-2)bx^{m-3}+c]g(x)$$

اولاً مقدار $f'\left(\frac{x^m}{m}\right)$ را حساب‌کنید.

ثانیاً به فرض $g(x)=\frac{1}{2f(x)}$ تابع f(x) را مشخص کنید بقسمی‌که $f(0)=|d|$ باشد.

حل ـ اولاً داریم :

$$f'\left(\frac{x^m}{m}\right)=$$

$$\left[\frac{x^{m^2-m}}{m^{m-2}}+\frac{(m-2)bx^{m^2-3m}}{m^{m-3}}+c\right]g\left(\frac{x^m}{m}\right)$$

ثانیاً به فرض $y=f(x)$ خواهیم داشت :

$$2yy'=mx^{m-1}+(m-2)bx^{m-3}+c$$

باتوجه‌به‌اینکه $2yy'$ مشتق y^2 و با توجه به سایر فرمولهای مشتق خواهیم داشت :

$$y^2=x^m+bx^{m-2}+cx+k$$

$$y=f(x)=\pm\sqrt{x^m+bx^{m-2}+cx+k}$$

بنابه‌فرض $f(0)=|d|$ است پس اولاً y مثبت است وثانیاً :

$$\sqrt{k}=|d|\Longrightarrow k=d^2$$

$$y=\sqrt{x^m+bx^{m-2}+cx+d^2}$$

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۸۹/۱۲ـ از محمد معینی

هرگاه $f(x)$ نسبت به x چند جمله‌ای از درجهٔ چهار بوده و a و b و c و d ریشه‌های حقیقی ومتمایز معادلهٔ $f(x)=0$ باشند و $f'(x)$ مشتق $f(x)$ نسبت به x باشد ، حاصل عبارت زیررا به ساده‌ترین صورت بدست آورید :

$$P=\frac{a^3}{f'(a)}+\frac{b^3}{f'(b)}+\frac{c^3}{f'(c)}+\frac{d^3}{f'(d)}$$

حل ـ اگر A ضریب جملهٔ درجهٔ چهارم ازچندجمله‌ای $f(x)$ باشد به ترتیب داریم :

$$f(x)=A(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

$$f'(x)=A[(x-b)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-c)]$$

$$P=\frac{a^3}{A(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^3}{A(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^3}{A(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^3}{A(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$P=\frac{Q(a\text{ و }b\text{ و }c\text{ و }d)}{A(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$

عبارت $Q(a$ و b و c و $d)$ چند جمله‌ای است که‌نسبت به هریك از حروف aوbوcوd از درجهٔ ۳ است . این چند جمله‌ای به‌ازای $a=b$ برابر با صفر می‌شود پس بر $a-b$ بخش پذیر است . همچنین چند جمله‌ای‌مزبوربر $a-c$،...، $c-d$ بخش پذیر است و داریم :

$$Q(a\text{و}b\text{و}c\text{و}d)=$$
$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

و نتیجه می‌شودکه :

$$P=\frac{1}{A}$$

۸۹/۱۳ـ فرستنده : **جوادفیض**

به فرض آنکه داشته باشیم :

$$tg\,a=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ و }tg\,b=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

و $\cos c=\sqrt{\frac{2}{3}}$ و $\cos d=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ و

و aوbوcوd کمانهای حاده باشند ،

اولاً محقق کنید که کمان α با شرط زیر وجود دارد :

$$\cos\alpha=\frac{\sin(a+b)}{\sin(c+d)}$$

ثانیاً مقدار $\cos 4\alpha$ را حساب کرده ودرنتیجهٔ آن کمترین مقدارمثبت α را مشخص کنید .

حل ـ به‌ترتیب داریم :

$$\sin a=\frac{1}{2}\text{ و }\cos a=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ ، }\sin b=\frac{1}{4}\text{ و}$$

$$\cos b=\frac{\sqrt{15}}{4}\text{ ، }\sin c=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ و }\sin d=\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}$$

$$\sin(a+b)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin(c+d)=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)\times 2}{8\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

اولاً مقدار $\cos\alpha$ مثبت و از یك کوچکتر است پس کمان α وجود دارد .

ثانیاً داریم :

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 4\alpha = -\cos\alpha = \cos(\pi-\alpha)$$

$$4\alpha = \pi - \alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{5} = 36^\circ$$

۸۹/۱۴ـ از جواد فیض

از روابط زیر رابطه‌ای مستقل از x بین a و b و c بدست آورید .

$$\begin{cases} 2(a\sin x - b\cos x) = c\sin 2x \\ a\cos x + b\sin x = c\cos 2x \end{cases}$$

حل ـ طرفین رابطهٔ اول را بر ۲ تقسیم کرده و در $\sin x$ ضرب می‌کنیم و طرفین رابطهٔ دوم را در $\cos x$ ضرب کرده آنگاه طرفین دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم که نتیجه می‌شود :

$$a = \frac{1}{2}c\sin 2x\sin x + c\cos 2x\cos x = c\cos^2 x$$

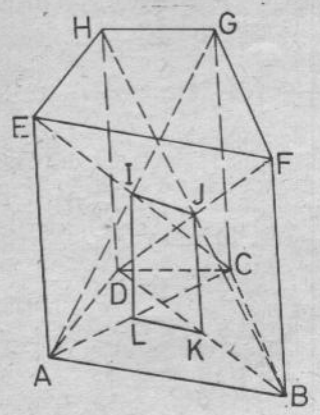
$$b = c\cos 2x\cos x - \frac{1}{2}c\sin 2x\cos x = -c\sin^2 x$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{a}{c}} \quad \text{و} \quad \sin x = \sqrt[3]{-\frac{b}{c}}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{c^2}$$

۸۹/۱۵ـ ترجمهٔ ازفرانسه

ثابت کنید که درهرمنشورچهارپهلو (منشور با قاعدهٔ چهارضلعی) اقطار به صورت دوجفت خطوط متقاطع هستند که فاصلهٔ نقاط تقاطع آنها برابراست با فاصلهٔ اوساط دوقطر چهار-ضلعی قاعده .

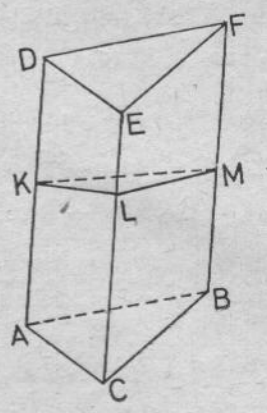


حل ـ منشورچهار-پهلوی ABCDEFGH را درنظر می‌گیریم ، چهار ضلعی ACGE متوازی‌الاضلاع است و دو قطر آن AG و CE در I متقاطع و منصف یکدیگرند . همچنین چهارضلعی BDHF متوازی‌الاضلاع است و دو قطر آن BH و DF در J متقاطع و منصف یکدیگرند. هرگاه K و L به‌ترتیب اوساط AC و BD باشند، در مثلث ACG خط IL موازی و مساوی با نصف CG است . در مثلث BDH نیز JK مساوی‌وموازی‌بانصف DH است. DH و CG مساوی‌وموازی یکدیگرند پس IL و JK نیز با یکدیگر مساوی و موازیند و چهار ضلعی IJKL متوازی‌الاضلاع است و IJ با KL برابر است .

۸۹/۱۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

ثابت کنید که هرمنشور سه پهلو (منشور با قاعدهٔ مثلث) ، اولاً اگر دو وجه جانبی متساوی باشند فرجه‌های مقابل به‌آنها نیزمتساویند واگر دو وجه جانبی نامتساوی باشند فرجه‌های مقابل به‌آنها نیز نامتساویند وفرجهٔ بزرگتر مقابل است به وجه بزرگتر . ثانیاً مساحت هروجه جانبی از مجموع مساحتهای دووجه جانبی دیگرکوچکتر وازتفاضل آنها بزرگتر است .

حل ـ هرگاه ABCDEF منشورسه پهلوی مفروض و مقطع قائم آن مثلث KLM باشد ،زوایای مثلث KLM زوایای مسطحهٔ فرجه‌های مقابل به وجوه جانبی منشور می‌باشد .



اولاً اگر دو وجه جانبی ، مثلاً ABED و BCFE متساوی باشند ارتفاعهای این دو وجه یعنی KL و LM

نیز متساویند و مثلث KLM متساوی‌الساقین است وزوایای K و M از این مثلث و در نتیجه فرجه‌های به یالهای AD و CF متساویند .

اگر مثلاً وجه ABFD از وجه BCFE کوچکتر باشد KL از LM و درنتیجه زاویهٔ M اززاویهٔ K کوچکتر و فرجهٔ به یال CF از فرجهٔ به یال AD کوچکتر است .

ثانیاً در مثلث KLM هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر است . چون هر یك از ضلعهای این‌مثلث را در طول مشترك یالهای جانبی‌منشور ضرب‌کنیم نتیجه می‌شودکه مساحت هر وجه جانبی منشور از مجموع مساحتهای دو وجه جانبی دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر است .

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم‌دبیرستان

۸۹/۱۷ـ معادلهٔ‌یك‌هذلولی نسبت به‌دستگاه‌محورهای $x'Ox$ و $y'Oy$ عبارتست از:

$$y=\frac{x+1}{x-2}$$

اولاً معادلات مجانبها، مختصات مرکز ، معادلات محورها، مختصات دورأس ومختصات دوکانون این هذلولی را حساب‌کنید .

ثانیاً اگر $X'X$ محورقاطع و$Y'Y$ محورغیرقاطع این هذلولی‌باشد، معادلهٔ آن‌را نسبت به دستگاه محورهای$X'X$ و$Y'Y$ بنویسید .

حل ـ مجانبهای هذلولی‌به معادله‌های $x=2$ و$y=1$ و نقطهٔ تلاقی آنها $\omega(2,1)$ مرکزهذلولی است . دو مجانب این هذلولی بریکدیگر عمودند و با محورهای مختصات متوازیند . پس خطوطی‌که از ω موازی بانیمسازهای‌محورها یعنی با ضریب زاویه‌ایهای ± 1 رسم شوندمحورهای‌هذلولی می‌باشندکه معادله‌های آنها می‌شود :

$$y-1=\pm(x-2)$$

$$y=x-1 \quad \text{و} \quad y=-x+3$$

ازحل معادلهٔ $y=-x+3$ با معادلهٔ‌مفروض معادلهٔ درجهٔ دومی بدست می‌آیدکه جواب حقیقی ندارد ، پس خط‌به معادلهٔ $y=-x+3$ محور غیر قاطع هذلولی و بنابراین خط به معادلهٔ $y=x-1$ محور قاطع آن است . از حل‌این معادله با معادلهٔ مفروض خواهیم داشت :

$$x^2-4x+1=0 \Longrightarrow x=2\pm\sqrt{3}$$

$$y=x-1=1\pm\sqrt{3}$$

$$A(2+\sqrt{3} \text{ و } 1+\sqrt{3}) \text{ و } A'(2-\sqrt{3} \text{ و } 1-\sqrt{3})$$

$$2a=AA'=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6} \quad \text{و}$$

$$a=\sqrt{6}$$

چون مجانبهای هذلولی برهم عمودند پس:

$$b=a=\sqrt{6} \quad \text{و} :$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

کانونهای هذلولی بر محور قاطع آن یعنی بر خط $y=x-1$ واقعند . اگر t طول کانون F فرض شود $F(t \text{ و } t-1)$ و از $\omega F=c=2\sqrt{3}$ نتیجه می‌شود:

$$(t-2)^2+(t-1-1)^2=12 \Longrightarrow t=2\pm\sqrt{6}$$

$$F(2+\sqrt{6} \text{ و } 1+\sqrt{6}) \text{ و} F'(2-\sqrt{6} \text{ و } 1-\sqrt{6})$$

ثانیاً نسبت به $X'X$ و $Y'Y$ محورهای هذلولی‌معادلهٔ آن عبارتست از:

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{یا} \quad \frac{X^2}{6}-\frac{Y^2}{6}=1$$

$$X^2-Y^2=6$$

۸۹/۱۸ـ از جواد فیض

دومعادلهٔ درجهٔ دوم زیررا درنظر می‌گیریم .

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{و} \quad cx^2+bx+a=0$$

هرگاه $\sin\alpha$ یك ریشهٔ معادلهٔ‌اول و$tg\alpha$ یك‌ریشهٔ‌معادلهٔ دوم باشد مقدار α را مشخص‌کنید .

حل ـ چون ضریبهای دومعادله‌به‌ترتیب عکس‌درجه‌ها با یکدیگر برابرند پس جوابهای دو معادله عکس یکدیگرند و داریم :

$$\sin\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Longrightarrow \sin^2\alpha=\cos\alpha$$

$$\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0 \Longrightarrow \cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha=2k\pi\pm \text{Arc}\cos\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۸۹/۱۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

تابع زیررا درنظرمی گیریم :

$$y=\frac{(x-1)^2}{2x}$$

الف- ثابت کنید که منحنی نمایش تابع یك مرکز تقارن دارد ومختصات این مرکزتقارن را بدست آورید .

ب- منحنی C نمایش هندسی تابع را رسم کنید .

ج- با استفاده از منحنی C منحنی C' نمایش هندسی تابع زیررا درهمان شکل منحنی C رسم کنید .

$$y=\frac{(x-1)^2}{|2x|}$$

حل- الف- تابع به صورت زیرنوشته‌می‌شود:

$$y=\frac{x}{2}-1+\frac{1}{2x}$$

منحنی نمایش تابع دو مجانب دارد به معادله‌های $x=0$ و $y=\frac{x}{2}-1$. اگر I مرکزتقارن منحنی باشد، مجانبها نیز نسبت به I باید متقارن باشند پس I نقطهٔ تلاقی مجانبها است وازحل معادله‌های مجانبها $I(0 \text{ و } -1)$ بدست می‌آید . وقتی I مرکزتقارن منحنی باشد، اگر $M(\alpha \text{ و } \beta)$ نقطهٔ غیر مشخصی ازمنحنی باشد نقطهٔ $M'(-\alpha \text{ و } \beta')$ برمنحنی‌وجود دارد بقسمی‌که $\frac{\beta+\beta'}{2}=-1$ می‌باشد :

$$\beta=\frac{\alpha}{2}-1+\frac{1}{2\alpha} \text{ و } \beta'=\frac{-\alpha}{2}-1-\frac{1}{2\alpha}$$

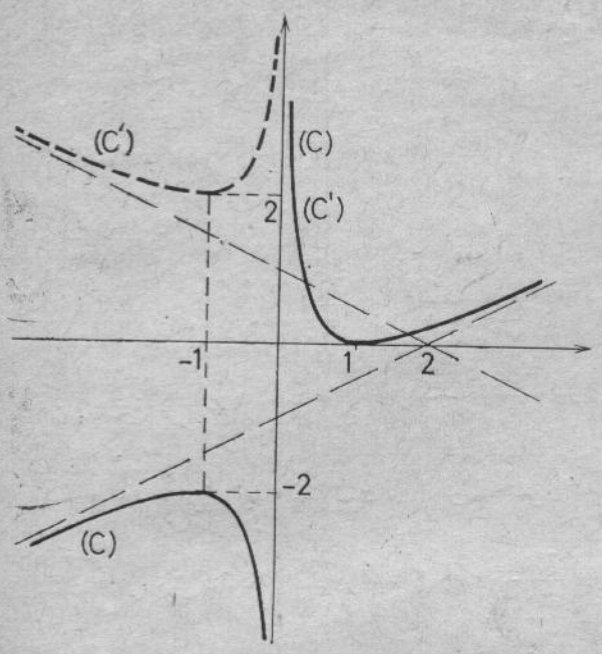
$$\beta+\beta'=-2$$

پس $I(0 \text{ و } -1)$ مرکز تقارن منحنی است .

ب- داریم :

$$y'=\frac{x^2-1}{2x^2}=0 \Longrightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$



ج- اگرx مثبت باشد $|2x|=2x$ است ومعادلهٔمنحنی C' همان معادلهٔ منحنی C است. پس آن قسمت ازمنحنیC' که سمت راست محور $y'y$ واقع است همان قسمتی از منحنی C است‌که سمت راست محورمزبور قراردارد .

اگر x منفی باشد $|2x|=-2x$ است ودر این حالت دوتابع نظیر منحنیهای C و C' قرینهٔ یکدیگرند .

پس آن قسمت از منحنی C'که سمت چپ محور $y'y$ است قرینهٔ آن قسمت ازمنحنی C واقع در سمت چپ محور مزبورنسبت به محور $x'x$ است (منحنی C' درشکل منحنی C درسمت چپ محور$y'y$ به صورت نقطه‌چین نشان دادشده ودرسمت راست محور مزبور منطبق برمنحنیC است).

۸۹/۲۰ـ ترجمهٔ ازفرانسه

تابع زیر را درنظرمی گیریم

$$y=\frac{x^2-|x|}{x^2+x+1}$$

۱) ثابت کنید که تابع درازای همهٔ مقادیر x معین و پیوسته است ودر ازای همهٔ مقادیر x بغیراز $x=0$ دارای مشتق است .

۲)- معلوم کنید که منحنی نمایش تابع درمبدأ مختصات چه وضعی دارد ؟

۳)- منحنی نمایش هندسی تابع را رسم کنید .

حل ـ ۱) سه‌جمله‌ای واقع درمخرج کسرتابع ریشهٔ حقیقی ندارد وصورت این کسر نیز چند جمله‌ای صحیح است. پس تابع درازای همهٔ مقادیرx معین واتصالی است .

مشتق تابع درازای $x = 0$ برابراست با حد $\frac{y}{x}$ وقتی $x \to 0$ اما :

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2+x+1}\left(x - \frac{|x|}{x}\right)$$

اگرx مثبت باشد وبه سمت صفر میل کند حد $\frac{|x|}{x}$ برابر با $+1$ و حد $\frac{y}{x}$ برابر با -1 است . اگر x منفی باشد و به سمت صفر میل‌کند حد $\frac{|x|}{x}$ برابربا -1 وحد $\frac{y}{x}$ برابر با $+1$ است. تابع در ازای $x = 0$ دارای مشتق نیست .

۲) هرگاه x منفی باشد داریم :

$$y = \frac{x^2+x}{x^2+x+1} \text{ و } y' = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0
y'		$-$			0	$+$	1
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0

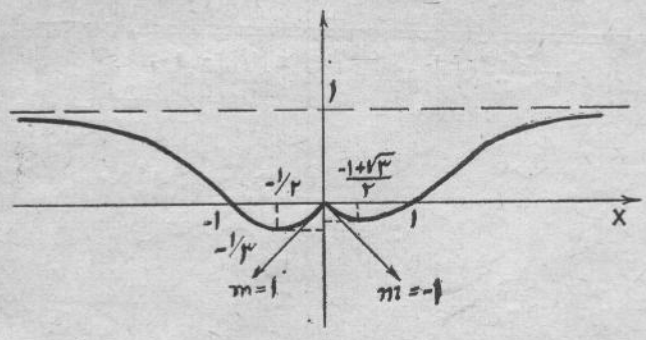
هرگاه x مثبت باشد داریم :

$$y = \frac{x^2-x}{x^2+x+1} \text{ و } y' = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2}$$

x	0		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		1		$+\infty$
y'	-1	$-$	0		$+$		
y	0	$\searrow$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

ازدوجدول بالا معلوم می‌شودکه تابع درازای $x = 0$ دارای ماکسیمم برابر صفر است .

۳) با توجه به دوجدول بالا منحنی نمایش تابع‌به‌شکل زیر است :



منحنی در همسایگی مبدأ مختصات بر نیمسازهای ربعهای سوم وچهارم محورها مماس است .

۸۹/۲۱ـ حد توابع زیر را وقتی x به سمت مقادیر داده شده میل می‌کند بدست آورید .

$$y = (\pi - 2x)tg x \qquad x \to \frac{\pi}{2}$$

$$y = (a^2 - x^2)tg\frac{\pi x}{2a} \qquad x \to a$$

حل ـ درمورد تابع اول با فرض $x = \frac{\pi}{2} - t$ داریم:

$$y = 2t\,tg(\frac{\pi}{2} - t) = 2t\,cotg\,t = 2\cos t \times \frac{t}{\sin t}$$

وقتی $x \to \frac{\pi}{2}$ ، $t \to 0$ودرنتیجه حد y برابر با ۲ است .

درمورد تابع دوم با فرض $x = a - t$ داریم :

$$y = t(2a - t)tg(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2a}) = t(2a - t)\,cotg\frac{\pi t}{2a}$$

$$= (2a - t)\frac{t}{tg\frac{\pi t}{2a}} = \frac{2a}{\pi}(2a - t)\frac{\frac{\pi t}{2a}}{tg\frac{\pi t}{2a}}$$

وقتی $x \to a$ ، $t \to 0$ وحد y برابر می‌شودبا:

$$\frac{2a}{\pi}(2a) \times 1 = \frac{4a^2}{\pi}$$

۸۹/۲۲ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

نامعادلهٔ زیررا حل‌کنید :

$$\log_4(1 - \sin 2x) \leqslant \frac{1}{2} + \log_2 \sin x$$

حل ـ نامعادله به ترتیب چنین نوشته می‌شود :

$$\log_4(\sin x - \cos x)^2 \leqslant \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sin x$$

$$\log_2(\sin x - \cos x) \leqslant \log_2 \sqrt{2}\sin x$$

$$\sin x - \cos x \leqslant \sqrt{2}\sin x$$

$$(\sqrt{2}-1)\sin x + \cos x \geqslant 0$$

ازاین نامعادله وبا توجه به اینکه اعداد منفی لگاریتم ندارند نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{8}) \geqslant 0 \\ \sin x \geqslant 0 \\ \sin x - \cos x \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{8} \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2k\pi + \frac{3\pi}{8} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{5\pi}{8}$$

۸۹/۲۳ـ فرستنده : **جواد فیض**

اگر a و b و c و d و u عددهای صحیح باشند ، ثابت کنید هرگاه سه عدد ac و bd و bc + ad مضرب u باشند هریك ازدوعدد bc و ad نیزمضرب u می‌باشند .

حل ـ اتحاد زیررا درنظر می گیریم :

$$(ad - bc)^2 = (ad + bc)^2 - 4abcd$$

بنا به‌فرض عبارت طرف راست رابطه مضرب u است پس عبارت طرف اول آن یعنی ad − bc نیز مضرب u است .

هرگاه k و h دوعدد صحیح باشند داریم :

$$(I) \begin{cases} ad + bc = ku \\ ad - bc = hu \end{cases}$$

$$ad = \frac{(k+h)u}{2} \text{ و } bc = \frac{(k-h)u}{2}$$

k + h و k − h عددهای زوج هستند زیرا از اتحاد بالا وبا توجه به دستگاه (I) معلوم می‌شود که $(k^2 - h^2)u^2$ مضرب $4u^2$ است پس (k + h)(k − h) مضرب ۴ و هر یك از عاملهای k + h و k − h مضرب ۲ است . عددهای $\frac{k-h}{2}$ و $\frac{k+h}{2}$ عددهای صحیح می‌باشند پس ad و bc مضربهایی از u می‌باشند .

۸۹/۲۴ـ ترجمهٔ ازفرانسه

۱) اگر n عدد صحیح باشد ثابت کنید که ممکن نیست هر دوعدد :

$$A = \frac{7n-1}{4} \text{ و } B = \frac{5n+3}{12}$$

عددهای صحیح باشند .

۲)ـ هرگاه m و n عددهای صحیح باشند، ثابت کنید برای آنکه هردوعدد :

$$A = \frac{7n-1}{4} \text{ و } B = \frac{5m+3}{12}$$

صحیح باشند لازم است نه تفاضل دوعدد m و n مضرب ۴ نباشد .

حل ـ ۱) ازحذف n بین A و B نتیجه می‌شودکه‌اگر A و B هردوعددهای صحیح باشند عدد زیر نیز باید عدد صحیح باشد :

$$21B - 5A = \frac{63+15}{12} = \frac{13}{2}$$

اما چنین نیست پس A و B هردو نمی‌توانند عددهای صحیح باشند .

۲) داریم:

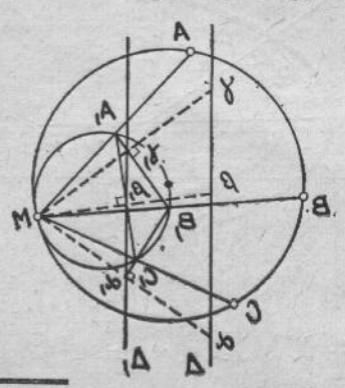
$$21B - 5A = \frac{35(m-n)}{4} + \frac{13}{2}$$

اگر m − n مضرب ۴ باشد طرف دوم عدد کسری است و A و B هردو نمی‌توانند عددهای صحیح باشند . بنابراین برای اینکه A و B هردوعددهای صحیح باشند لازم است (اما کافی نیست) که m − n مضرب ۴نباشد.

۸۹/۲۵ـ ترجمهٔ ارفرانسه

دایرهٔ به مرکزO وچهارنقطهٔ M وA و B وC واقع برآن مفروض است . دایره‌های به قطرهای MA و MB و MC غیراز M دوبه دو درسه نقطهٔ α و β و γ متقاطع می‌باشند. ثابت کنیدکه سه نقطهٔ α و β و γ بر یك خط مستقیم واقعند .

حل ـ اگر A_1 و B_1 و C_1 به ترتیب اوساط MA، MBوMC باشد، چون دایره‌های به قطرهای MB وMC درنقاط M وα مشترکند پس M وα نسبت به B_1C_1 خط‌المرکزین آنها قرینه‌اند . همچنین β قرینهٔ M نسبت به A_1C_1 و γ قرینهٔ M نسبت به A_1B_1 است.



به عبارت دیگر نقاط α و β و γ به‌ترتیب مجانسهای نقاط α_1 و β_1 و γ_1 درتجانس به مرکز M وبه نسبت۲می‌باشند. α_1 و β_1 و γ_1 بـه ترتیب اوساط $M\alpha$ و $M\beta$ و $M\gamma$ یـا به عبارت دیگر تصاویر نقطهٔ M برضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ می‌باشند. درتجانس مزبورنقاط A و B و C مجانسهای‌نقاط A_1 و B_1 و C_1 هستند و چون نقاط A و B و C بـردایرهٔ به مرکز O ومـار برM واقعند، پس نقاط A_1 و B_1 و C_1 بردایرهٔ به قطر MO قرار دارند. به عبارت دیگرMنقطه‌ای است از دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ و بنا به قضیهٔ سمسن نقاط α_1 و β_1 و γ_1 بـریك خط راست $\triangle_1$ واقعند. پس مجانسهای این نقاط یعنی α و β و γ نیزبریك‌خط راست $\triangle$، موازی‌با $\triangle_1$، قرار دارند.

۸۹/۲۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

سهمی Γ به رأس S وبه‌کانون F وبه محور Sx و با پارامتر p مفروض است. براین سهمی نقطهٔ متغیر M را در نظرمی‌گیریم. عمودی‌که در M بر SM اخراج شود Oxرا درA قطع می‌کند. بر AM نقطهٔ P را انتخاب می‌کنیم کـه $\overline{AP}=\lambda\overline{AM}$ باشد.

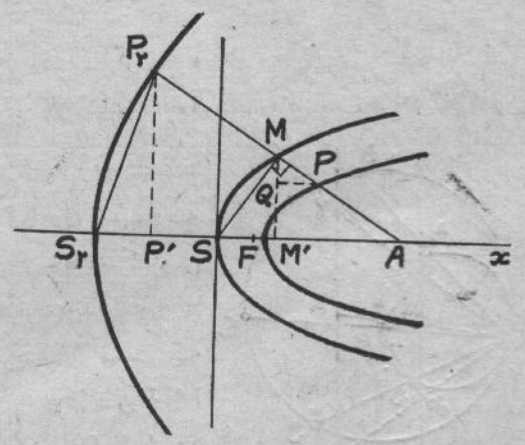
اولاً ثابت‌کنیدکه مکان P یك سهمی است.

ثانیاً ثابت‌کنیدکه درحالت $\lambda=2$ قائم‌بـرسهمی مکان P درنقطهٔ P همان خط AP است.

حل ـ اولاً اگر M' تصویر قـائم M بـرمحور Sx باشد درمثلث قائم‌الزاویهٔ SMA داریم:

$$M'M^2=SM'.M'A$$

وچـون M برسهمی واقـع است پس $M'M^2=2p.SM'$ نتیجه می‌شود $M'M=2p=4SF$



هرگاه Q تصویر قائم P بر MM' باشد داریم:

$$\frac{M'Q}{M'M}=\frac{AP}{AM}\Longrightarrow\frac{M'Q}{M'M}=\lambda$$

$$M'Q^2=\lambda^2M'M^2=2\lambda^2p.SM'$$

به فرض $SM'=x$ و $M'Q=Y$ داریـم $Y^2=2\lambda^2px$ پس مکان Q سهمی Γ' است‌کـه S راس آن، Sx محور آن و $p\lambda^2$ پارامترآن است. ازطرف دیگر داریم:

$$\frac{QP}{M'A}=\frac{MP}{MA}=\frac{MA-AP}{MA}=1-\lambda$$

$$QP=(1-\lambda)M'A=4(1-\lambda).SF$$

درانتقال به بردار $\overrightarrow{QP}$ برابربا $4(1-\lambda)\overrightarrow{SF}$ نقطهٔ P مبدل نقطهٔ Q است پس مکان P سهمی Γ_1 است‌که در انتقال مزبورمبدل سهمی Γ' است. محور این سهمی همـان Sx و رأس وکانـون آن بـه‌تـرتیـب S_1 و F_1است بقسمی کـه:

$$SS_1=4(1-\lambda)SF$$

و

$$SF_1=\lambda^2.SF+4(1-\lambda)SF=(\lambda-2)^2.SF$$

ثانیاً به فرض $\lambda=2$ نقطهٔ نظیر P را با P_2 می‌نمائیم که M وسط AP_2 خواهد بود. نقطهٔ P_2 بـرسهمی Γ_2 بـه رأس S_2 واقع است. اگر P' تصویر P_2 بر Sxباشد داریم:

$$\frac{AP'}{AM'}=\frac{AP_2}{AM}=2\Longrightarrow AP'=2AM'=4p$$

پارامتر سهمی Γ_2 برابر بـا $\lambda^2p=4p$ است. طـول تصویر AP_2 برمحورسهمی برابر با پـارامترسهمی شده است پس AP_2 درنقطهٔ P_2 قائم برسهمی Γ_2 است.

حل مسائل گوناگون

ازمسائل ارسالی توسط : محمد معینی

۸۹/۲۷ـ دستگاه معادله‌های زیررا حل‌کنید:

$$\begin{cases}x+y+xy=11\\y+z+yz=19\\z+x+zx=14\end{cases}$$

حل ـ ازافزودن یك برطرفین هریك ازمعادلات نتیجه خواهد شد:

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=12\\(y+1)(z+1)=20\\(z+1)(x+1)=15\end{cases}$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 60$$

$$\begin{cases} z+1=\pm 5 \\ y+1=\pm 4 \\ x+1=\pm 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l|l} x=2 & x=-4 \\ y=3 \quad \text{یا} & y=-5 \\ z=4 & z=-6 \end{array}$$

۸۹/۲۸ـ هرگاه داشته باشیم :

$$\begin{cases} \dfrac{x(y+z-x)}{l}=\dfrac{y(z+x-y)}{m}=\dfrac{z(x+y-z)}{n} \\ l+m+n=0 \end{cases}$$

ثابت کنید که :

$$\frac{x}{l^2}=\frac{y}{m^2}=\frac{z}{n^2}$$

حل ـ به فرض آنکه k مقدار مشترک کسرهای رابطهٔ اول باشد خواهیم داشت :

$$\begin{cases} xy+xz-x^2=kl \\ yz+yx-y^2=km \\ zx+zy-z^2=kn \end{cases}$$

ازجمع طرفین سه رابطهٔ بالا وبا توجه به رابطهٔ دوم مفروض نتیجه خواهد شد :

$$(x+y-z)^2=4xy \Longrightarrow \frac{k^2n^2}{z^2}=4xy$$

$$\frac{k^2n^2}{z}=4xyz \Longrightarrow \frac{z}{n^2}=\frac{4xyz}{k^2}$$

به طریق مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{x}{l^2}=\frac{y}{m^2}=\frac{z}{n^2}=\frac{4xyz}{k^2}$$

۸۹/۲۹ـ دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید :

$$a^2-x^2=b^2-y^2=c^2-z^2=xy+yz+zx$$

حل ـ با درنظرگرفتن تساوی سه‌جمله‌ای آخر باهریك ازدوجمله‌ایها وبعدازانجام عملیات لازم خواهیم داشت :

$$\begin{cases} (x+y)(x+z)=a^2 \\ (y+z)(y+x)=b^2 \\ (z+x)(z+y)=c^2 \end{cases}$$

ازضرب طرفین سه معادله دریکدیگر و جذرگرفتن ازطرفین تساوی حاصل وبالاخره ازتقسیم طرفین رابطهٔ بدست آمده برطرفین هریك ازمعادلات بالا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x+y=\pm\dfrac{ac}{b} \\ y+z=\pm\dfrac{bc}{a} \\ z+x=\pm\dfrac{ab}{c} \end{cases}$$

از این دستگاه به سادگی مقادیرمجهولها بدست می‌آیند .

۸۹/۳۰ـ هرگاه داشته باشیم :

$$\begin{cases} P^3+aP+b=0 \\ Q^3+aQ+b=0 \\ R^3+aR+b=0 \end{cases}$$

ثابت کنید که :

$$\frac{1}{Q^2+R^2-P^2}+\frac{1}{R^2+P^2-Q^2}+\frac{1}{P^2+Q^2-R^2}=0$$

حل ـ از روابط داده شده نتیجه می‌شود که P وQ وR ریشه‌های معادلهٔ $x^3+ax+b=0$ می‌باشند وبنا به روابط بین ریشه‌ها وضرایب داریم :

$$\begin{cases} P+Q+R=0 \\ PQ+QR+RP=a \\ PQR=-b \end{cases}$$

$$P+Q=-R \Longrightarrow P^2+Q^2-R^2=-2PQ$$

دو رابطهٔ دیگرمشابه با این رابطه بدست می‌آید ودرنتیجه عبارت مورد اثبات چنین می‌شود :

$$\frac{-1}{2PQ}+\frac{-1}{2QR}+\frac{-1}{2RP}=\frac{-(P+Q+R)}{2PQR}=0$$

۸۹/۳۱ـ معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم :

$$x^3-2\alpha x^2+\beta x-\gamma=0$$

هرگاه a و b و c ریشه‌های این معادله اندازه‌های ضلعهای یك‌مثلث باشند، اندازه‌های شعاعهای دایره‌های محیطی ومحاطی این مثلث را برحسب α و β و γ حساب کنید.

حل ـ بنا به روابط بین ضرایب وریشه‌ها داریم :

$$\begin{cases} a+b+c=2\alpha \\ ab+bc+ca=\beta \\ abc=\gamma \end{cases}$$

اگر 2p محیط مثلث باشد $p=\alpha$ است وداریم :

$$S=\sqrt{\alpha(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)}$$

$$S = \sqrt{\alpha[\alpha^3 - (a+b+c)\alpha^2 + (ab+bc+ca)\alpha - abc}$$

$$S = \sqrt{\alpha(\alpha^3 - 2\alpha^3 + \alpha\beta - \gamma)}$$

$$S = \sqrt{\alpha(\alpha\beta - \gamma - \alpha^3)}$$

بامنظور داشتن این مقدار S درروابط زیر مقادیر شعاعهای دایره‌های محیطی ومحاطی بدست می‌آیند :

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{\gamma}{4S} \text{ ، } r = \frac{S}{p} = \frac{S}{\alpha}$$

ازمسائل ترجمه شده توسط : فتح‌الله زرگری

۸۹/۳۲ـ مثلث ABC در دایرهٔ به شعاع R محاط شده است. نیمسازهای زاویه‌های مثلث دایره را در A_1 و B_1 و C_1 قطع می‌کنند . نیمسازهای زاویه‌های مثلث $A_1B_1C_1$ دایره را در A_2 و B_2 و C_2 قطع می‌کنندو... ونیمسازهای زاویه‌های مثلث $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ دایره را در A_n و B_n و C_n تلاقی می‌کنند. هرگاه $n \to \infty$ حد مساحت مثلث $A_nB_nC_n$ را حساب کنید .

حل ـ تساویهای زیر برای زاویه‌ها به آسانی ثابت می‌شود :

$$A_1 = \frac{B+C}{2} \text{ و } B_1 = \frac{C+A}{2}$$

$$|A_1 - B_1| = \frac{|A-B|}{2}$$

$$|A_2 - B_2| = \frac{|A_1 - B_1|}{2} = \frac{|A-B|}{4}$$

. . . . . .

$$|A_n - B_n| = \frac{|A_{n-1} - B_{n-1}|}{2} = \ldots = \frac{|A-B|}{2^n}$$

تفاضل دوزاویهٔ A و B مقدار ثابت‌است ووقتی $n \to +\infty$ مقدار 2^n نیز به سمت $+\infty$ میل می‌کند ودرنتیجه حد $|A_n - B_n|$ برابر با صفر است.یعنی‌درحددوزاویهٔ A_n و B_n متساویند .

به روش مشابه ثابت می‌شودکه درحد دوزاویهٔ B_nو C_n نیز متساویند. پس هرگاه $n \to +\infty$ مثلث $A_nB_nC_n$ به سمت مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ مفروض میل می‌کند ودراین حالت مساحت آن برابراست با: $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

۸۹/۳۳ـ ثابت کنیدکه اگرتصاعدی هندسی‌ازعددهای طبیعی مختلف‌تشکیل‌شده وبیش‌ازدوجمله‌داشته باشد، مجموع جملات آن توانی ازسه نیست .

حل ـ اگر عددطبیعی دلخواه a جملهٔ اول وعددطبیعی $q \pm 1$ قدرنسبت تصاعد فرض شود وتعدادجمله‌های‌آن $n \geqslant 3$ باشد، مجموع جملات آن می‌شود :

$$S = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$

هرگاه $S = 3^k$ باشد دراین صورت خواهیم داشت:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = 3^h \qquad (1)$$

ازاین رابطه معلوم می‌شودکه p مضربی از۳ نیست. پس $q = 3m \pm 1$ است. درحالت $q = 3m + 1$ باقیماندهٔ تقسیم هر توانی ازq بر۳ نیز برابر با یك است وازتساوی (۱) نتیجه می‌شودکه n بر۳ بخش‌پذیر است وبا فرض $n = 3p$ رابطهٔ (۱) راچنین می‌نویسیم :

$$(1 + q + q^2)(1 + q^3 + \ldots + q^{3p-3}) = 3^h$$

مجموع $1 + q + q^2$ مقسوم علیهی از 3^h است و چون $q = 3m + 1$ است پس :

$$1 + q + q^2 = 9m^2 + 9m + 3 = 3^r$$

$$3m^2 + 3m + 1 = 3^{r-1}$$

این رابطه فقط به ازای $r = 1$ می‌تواند برقرارباشدکه در نتیجه $m = 0$ و $q = 1$ وخلاف فرض است .

هرگاه $q = 3m - 1$ باشد ازرابطهٔ (۱)معلوم می‌شود که n باید زوج باشد وبافرض $n = 2p$ خواهیم داشت :

$$(1 + q)(1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2p-2}) = 3^h$$

$$1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2p-2} = 3^r$$

اما $q^2 = 3m' + 1$ است وبنابرآنچه‌که قبلاً ثابت‌شد این رابطه نیزغیرممکن است .

پس به ازای هیچ مقداری از $q \neq 1$ رابطهٔ (۱) ممکن نیست .

۸۹/۳۴ـ ثابت‌کنیدکه در حوزهٔ اعداد طبیعی معادلهٔ زیر جواب ندارد :

$$x^x + y^y + z^z = t^t$$

حل ـ فرض می‌کنیم $x \leqslant y \leqslant z$ دراین صورت $t > z$ است. درحالت $z = 1$ داریم $x = y = 1$ اما $t^t \neq 3$ است. درحالت $z = 2$ داریم $t \geqslant 3$ وازآنجا :

$$t^t \geqslant 3^3 > 3 \times 2^2 \geqslant x^x + y^y + z^z$$

خواهد شد. یعنی تساوی داده‌شده درست نیست .

اگر $z \geqslant 3$ باشد نتیجه می‌شود :

$$t^z \geqslant (z+1)^{z+1} > z^{z+1} \geqslant 3z^z \geqslant x^x + y^y + z^z$$

یعنی بازهم تساوی داده شده درست نیست. بنابراین معادلهٔ موردنظر درحوزهٔ اعداد طبیعی جواب ندارد .

۸۹/۳۵ـ هرگاه G_n واسطهٔ هندسی n جملهٔ اول از رشتهٔ اعداد مثبت a_1 ، a_2 ، a_3،... باشد، ثابت کنید که:

$$nG_n - (n-1)G_{n-1} \leqslant a_n$$

حل ـ داریم :

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \quad \text{و} \quad G_{n-1} = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$$

$$G_n = \sqrt[n]{G_{n-1} . G_{n-1} \ldots G_{n-1} . a_n}$$

طبق نامساوی معروف مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی داریم:

$$G_n \leqslant \frac{G_{n-1} + G_{n-1} + \ldots + G_{n-1} + a_n}{n}$$

$$nG_n - (n-1)G_{n-1} \leqslant a_n$$

ازمسائل ارسالی آقای قوام نحوی

۸۹/۳۶ـ دریك دستگاه عددنویسی رمزازهمان رقمهای عددنویسی معمولی یعنی ۰، ۱، ۲،...،۹ استفاده می‌شود با این تفاوت که این رقمها ارزشهایی غیراز ارزشهای متعارفی خود دارند (مثلاً رقم ۴ ارزش ۷ را دارد ومانند آن). در این دستگاه داریم :

$$3^2 = 9 \quad \text{و} \quad 6 \times 6 = 36 \quad \text{و} \quad 9 \times 6 = 54$$

$$1 + 7 = 8$$

معلوم کنید که در دستگاه مزبور (۱۰:۲) دارای چه ارزشی است ؟

حل ـ ازرابطهٔ $6 \times 6 = 36$ واینکه ۶ ارزشی غیراز خود دارد نتیجه می‌شود که ۶ ارزش ۵ را دارد زیرا غیر از ۶ فقط ۵ است که مجذورآن به ۵ ختم می‌شود وچون ۳۶ ارزش ۲۵ دارد پس ۳ ارزش ۲ و در نتیجه ۲ ارزش ۳ دارد و $3^2 = 9$ ارزش $2^3 = 8$ را دارد . یعنی ۹ ارزش ۸ دارد . حاصل‌ضرب 9×6 معادل حاصل‌ضرب 8×5 است یعنی ۵۴ ارزش ۴۰ دارد پس ۵ جانشین ۴ و ۴ جانشین صفر شده است.

ازرابطهٔ $1 + 7 = 8$ معلوم می‌شود که ۸ جانشین ۷ و ۷ جانشین ۱ و ۱ جانشین ۶ شده است وداریم :

$$2 \to 3 \ ، \ 3 \to 2 \ ، \ 7 \to 1 \ ، \ 4 \to 0$$

$$4 \to 5 \ ، \ 5 \to 6 \ ، \ 6 \to 1 \ ، \ 7 \to 8$$

$$8 \to 9 \ ، \ 9 \to 0$$

(۱۰:۲) تبدیل (۶۹:۳) یعنی ۲۳ است وچون ۲۳ به‌صورت ۳۲ نوشته شده است پس در دستگاه رمز داریم :

$$10:2 = 32$$

۸۹/۳۷ـ عدد (!۱۰) راکه در دستگاه به پایهٔ ۱۲ بنویسیم ازسمت راست به چند عددصفرختم می‌شود ؟

حل ـ داریم :

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 10$$

$$= (2 \times 3 \times 4 \times 6)(8 \times 9 \times 2) \times 7 \times 5 \times 5$$

$$= 12^2 \times 12^2 \times 7 \times 25 = 175 \times 12^4$$

این عدد دردستگاه به پایهٔ ۱۲ ازسمت راست به ۴ عدد صفر ختم می‌شود .

۸۹/۳۸ـ در دستگاه عددنویسی دهگانی داریم :

$$\frac{1}{2} = \frac{6729}{13458} \quad \text{و} \quad \frac{1}{3} = \frac{5832}{17496}$$

در دستگاه به پایهٔ ۴ داریم :

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{3}{12}\right)_4 \quad \text{و} \quad \frac{1}{3} = \left(\frac{3}{21}\right)_4$$

تحقیق کنید که آیا در دستگاه به پایهٔ ۶ کسرهایی معادل با $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ وجود دارد بقسمی که درنوشتن آنها تمام رقمهای ازیك تا ۵ بدون تکراربکار رفته باشد ؟

حل ـ در دستگاه به پایهٔ ۶ عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن صفر یا ۲ یا ۴ باشد اما صفر نمی‌تواند در نوشتن کسر مورد نظر بکار رفته باشد . اگر رقم یکان عدد واقع در مخرج ۲ اختیار شود کسرهای معادل با $\frac{1}{2}$ می‌شوند:

$$\left[\frac{34}{112}, \frac{41}{122}, \frac{51}{142}, \frac{54}{152}\right]_6$$

اما در نوشتن هریك از این کسرها رقمی تکرار شده است و هیچیك از آنها قابل قبول نیستند . اگر رقم یکان را برابر با ۴ اختیار کنیم کسرهای زیر را داریم :

$$\left[\frac{32}{104}, \frac{52}{144}, \frac{35}{114}, \frac{45}{134}\right]_6$$

از این کسرها اولی دارای رقم صفر و بقیه شامل رقم

مکرر می‌باشند پس هیچکدام از آنها قابل قبول نمی‌باشند .

بنابراین دردستگاه به پایهٔ ۶ کسری معادل با $\frac{1}{2}$ و با شرایط مورد نظر وجود ندارد .

در مورد $\frac{1}{3}$ باید عدد مخرج کسر مطلوب مضرب ۳ باشد. درپایهٔ ۶ عددی مضرب ۳ است که رقم یکان آن صفر یا۳باشد. رقم‌صفرکه‌قابل قبول نیست. اگر رقم ۳ را درنظر بگیریم کسرهای زیر را داریم:

$$\left[\frac{51}{233}, \frac{41}{203}, \frac{45}{223}\right]_6$$

اما هیچیک از این کسرها قابل قبول نیستند و برای $\frac{1}{3}$ نیزکسری معادل و دارای شرایط مطلوب وجود ندارد .

یك مسئله ترجمهٔ از فرانسه

۸۹/۳۹- بابك و افشین وسامان به ترتیب چنین اظهار می‌دارند :

بابك : من ۲۲ سال دارم. من ۲ سال کوچکتر ازافشین هستم. من یك سال بزرگتر ازسامان می‌باشم .

افشین : من از همه جوانتر نیستم . من وسامان ۳سال اختلاف‌سن داریم. سامان ۲۵ سال دارد .

سامان : من ازبابك جوانترم. بابك ۲۳ سال دارد . افشین ۳سال بزرگتر ازبابك است .

هرگاه یکی وفقط یکی‌از اظهارات سه‌گانهٔ هرکدام از سه نفرغلط باشد، سن هریك ازآنان را تعیین‌کنید .

حل - (با پوزش از خواننده تقاضا می‌شودکه در صورت مسئله مندرج در یکان شمارهٔ قبل اولین اظهار افشین را به نحو بالا تصحیح فرمایند) فرض می‌کنیم‌که b و a و s به‌ترتیب سنهای بابك و افشین و سامان باشد . اظهار اول بابك ($b=22$) با اظهار دوم سامان ($b=23$) ناسازگار است و حداقل یکی از دو اظهار غلط است و حالتهای زیر را درنظر می گیریم :

۱) با فرض $b\neq 22$ و $b\neq 23$ اولین اظهار بابك غلط است ، پس دو اظهار دیگر او صحیحند و داریم :

$$(1)\ b=a-2 \qquad (2)\ b=s+1$$

و چون اظهارات اول و سوم سامان نیز صحیحند پس :

$$(3)\ s<b \qquad (4)\ a=b+3$$

اما گزاره‌های (۱) و (۴) ناسازگارندپس‌فرض $b\neq 22$ و $b\neq 23$ غلط است .

۲) فرض می‌کنیم $b=22$ در این صورت اظهار دوم سامان غلط است و دو اظهار دیگر او صحیحند و داریم : $a=b+3=25$ و دراین صورت اظهار دوم بابك یعنی $b=a-2=23$ غلط است . لازم می‌آیدکه اظهار سوم بابك صحیح باشد یعنی داشته باشیم $s=22-1=21$ اما در چنین صورت $a-s=4\neq 3$ یعنی اظهار دوم افشین‌غلط است ، همچنین $s\neq 25$ یعنی اظهار سوم افشین نیزغلطاست. چون فقط یکی از اظهارات هر نفر غلط بوده است پس فرض $b=22$ نیز قبول نیست .

۳) با رد حالتهای ۱ و ۲ یك حالت $b=23$ باقی می‌ماند . با این فرض اولین اظهار بابك غلط و دو اظهار دیگر او صحیحند ونتیجه می‌شود $a=25$ و $s=22$.سومین اظهار افشین غلط و دو اظهار دیگر او صحیح ، سومین‌اظهار سامان غلط و دو اظهار دیگر او صحیح است .

بنابراین‌بابك ۲۳ سال ، افشین ۲۵ سال ، سامان ۲۲ سال دارد .

پاسخ تستهای ریاضی

۸۹/۴۰- د، از شرایط $x\geqslant 0$ و $x-\sqrt{x}\geqslant 0$ نتیجه می‌شود $x\geqslant 1$ و در نتیجه $|x|=x$ و خواهیم داشت :

$$\sqrt{x-\sqrt{x}}=3\sqrt{2}-\sqrt{2x}\geqslant 0 \Longrightarrow x\leqslant 9$$

۸۹/۴۱ ، ۸۹/۴۲- به علت اشتباههایی‌که در چاپ صورتهای این دومسئله روی داده است ، درج‌آنهابه‌صورت صحیح در این شماره تکرار خواهد شد .

۸۹/۴۳- هیچکدام ، تعداد جمله‌های‌تصاعدحاصل ۹ و جملهٔ وسط آن ۱۲ است پس مجموع جمله‌های اول و آخر آن $2\times 12=24$ و مجموع تمام جمله‌ها می‌شود :

$$\frac{n}{2}(a+l)=\frac{9\times 24}{2}=108$$

۸۹/۴۴- د ، وقتی n زوج باشد صفر جملهٔ تصاعد نیست ، وقتی n فرد باشد صفر جملهٔ وسط تصاعد است .اما در هر دو حالت تعداد جمله‌های مثبت با تعدادجمله‌های‌منفی آن برابر است .

۸۹/۴۵- الف ، چون B' وسط‌کمان AC و C'وسط کمان AB است پس خط $B'C'$ نیمساز هر یك از دو زاویهٔ

$AB'B$ و $AC'C$ است و دو مثلث $AC'B'$ و $IC'B'$ در حالت تساوی دو زاویه وضلع بین‌متساویند و $C'A = C'I$ و $B'A = B'I$

۸۹/۴۶ـ ب ، درچهار ضلعی محاطی $OAPB$ دو زاویهٔ PAB و POB همچنین دو زاویهٔ PBA و POA متساویند پس دو زاویه از مثلث PAB مقادیر ثابت دارند و این مثلث همواره متشابه‌با خودش باقی می‌ماند ونسبت‌اضلاع آن نیز مقدار ثابت است .

۸۹/۴۷ـ د

۸۹/۴۸ـ الف

۸۹/۴۹ـ در صورتی‌که اشتباه چاپی مربوط به‌صورت مسئله اصلاح شود، یعنی‌تابع به‌صورت زیر درنظر گرفته‌شود:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + ax} + b$$

جواب **الف**-صحیح است . زیرا خواهیم داشت:

$$y = \sqrt[3]{x^2} + 1 \Longrightarrow y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

در ازای $x = 0$ داریم $y = 1$ و $y' = \pm\infty$

۸۹/۵۰ـ الف ـ از رابطهٔ مفروض داریم :

$$a\,tg x = 1 - tg^2 x \Longrightarrow \frac{tg x}{1 - tg^2 x} = \frac{1}{2} tg 2x = \frac{1}{a}$$

۸۹/۵۱ـ ب ، به فرض $tg^2 x = t$ داریم :

$$\sin 2x = \frac{2\sqrt{t}}{1+t} \quad \text{و} \quad \cos 2x = \frac{1-t}{1+t}$$

۸۹/۵۲ـ ب ، کنج سه قائمه است وتصویر رأس O بر صفحهٔ ABC همان H مرکز ارتفاعی مثلثABC است. هر یك از زاویه‌های OHA ، OHB و OHC قائمه‌است وکره‌های به قطرهای OA و OB و OC بر H می‌گذرند.

۸۹/۵۳ـ الف ، اگر هرم را در صفحه بگسترانیم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقینی به‌طول ساق t خواهیم داشت که گستردهٔ خط شکستهٔ $AB'C'$ به‌صورت خط مستقیم و وتر آن مثلث خواهد بود .

۸۹/۵۴ـ الف ، چون معادله را نسبت به x مرتب کنیم و مبین آن را برابر با صفر قرار دهیم معادلهٔ زیربدست می‌آیدکه y_1 و y_2 ریشه‌های آنند :

$$(m^2 - 4)y^2 + 8y - 4 = 0$$

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = 2$$

۸۹/۵۵ـ ب ، مشتق تابع به‌صورت $y' = \frac{2x + a}{2y}$ است که در ازای $y = 0$ نا معین بنظر می‌رسد. اما بایدمشتق در ازای طول نقطهٔ می‌نیمم تغییر علامت دهد وچون $y \geqslant 0$ است پس طول نقطهٔ می‌نیمم ریشهٔ $2x + a = 0$ یعنی برابربا $x = -\frac{a}{2}$ است که چون این مقدار در معادلهٔ $y = 0$ منظور شود $a = \pm 2$ حاصل می‌شود و داریم :

$$y = \sqrt{x^2 \pm 2x + 1} = \sqrt{(x \pm 1)^2} = |x \pm 1|$$

این تابع در ازای $x = \pm 1$ می‌نیمم دارد درحالی‌که مشتق آن نا معین است .

۸۹/۵۶ـ د ،اگر A زاویهٔ رأس‌مثلث متساوی‌الساقین ABC باشد داریم :

$$A + 2B = 180^\circ \Longrightarrow \cos A = -\cos 2B = 1 - 2\cos^2 B$$

$$\cos A + \cos B = \frac{13}{25}$$

$$5\cos^2 B - 25\cos B - 12 = 0 \quad \text{و} \quad B < 90^\circ$$

$$\cos B = \frac{4}{5} \Longrightarrow -\cos 2B = \cos A = -\frac{7}{25}$$

$$\text{و} \quad tg A = -\frac{24}{7}$$

۸۹/۵۷ـ هیچکدام ، جواب صحیح $\frac{\sqrt{3}}{2} < a \leqslant \sqrt{3}$ است . زیرا به‌فرض $B + C = 120^\circ$ داریم :

$$a = \sin B + \sin C = 2\sin 60^\circ \cos\frac{B - C}{2} = \sqrt{3}\cos\frac{B - C}{2}$$

$$\cos\frac{B - C}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad 0 \leqslant \frac{B - C}{2} < \frac{B + C}{2} = 60^\circ$$

$$1 \geqslant \frac{a}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < a \leqslant \sqrt{3}$$

۸۹/۵۸ـ الف ، هرگاه $x < y < z$ سه عدد طبیعی باشند از شرایط $x \geqslant 1$ و $y \geqslant 2$ و $z \geqslant 3$ نتیجه می‌شود:

$$N = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$N < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Longrightarrow N < 2$$

(دنباله در صفحه ۲۵۸)

مسائل برای حل

برای دانش‌آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

۹۰/۱ ـ معادلهٔ زیررا در نظرمی‌گیریم :

$$(m-2)x^2-(2m+1)x+4m=0$$

هرگاه x' و x'' ریشه های این معادله اندازه‌های ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که درآن طول وتر برابر با ۵ است ، مقدار m را حساب کنید .

۹۰/۲ ـ ترجمهٔ از روسی توسط **فتح‌الله زرگری**

ارتفاعهای رأسهای B و C از مثلث ABC دایرهٔ محیطی مثلث‌را درنقاط B' و C' قطع می‌کند . هرگاه $B'C'$ قطری از دایرهٔ محیطی مثلث باشد ، اندازهٔ زاویهٔ A را پیداکنید .

برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

۹۰/۳ ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

به‌ازای کدام اعداد طبیعی a و b عدد :

$$N=4ab+22a+47b$$

برعدد $M=a^2+7b^2+811$ بخش پذیراست ؟

۹۰/۴ـ فرستنده : **جواد فیض** ، ترجمهٔ ازانگلیسی

هرگاه اعداد حقیقی a و b و c و d به همین‌ترتیب به تصاعد هندسی باشند ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$$

۹۰/۵ ـ فرستنده : **روح‌انگیز دولت‌فر**

اگر x و y و z به همین ترتیب به تصاعد هندسی باشند از معادلات زیر مقادیر عددی آنهارا تعیین کنید :

$$\begin{cases} x^3+y^3=z^4 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

۹۰/۶ ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

عددهای حقیقی و مثبت a و k معلومند . تصاعدی هندسی را مشخص کنید که جملهٔ اول آن a و هر جملهٔ آن برابر باشد با مجموع تمام جمله‌های بعداز خودش .

۹۰/۷ ـ از **محمدمعینی**

مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC به طول ساق $AB=AC=a$ مفروض است . مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید که داشته باشیم :

$$MB+MC=MA\sqrt{2}$$

۹۰/۸ ـ از **سید جمال آشفته**

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A=90^\circ)$ و خط K واقع در صفحهٔ آن مفروض است . خط L را موازی با خط K چنان رسم کنید که اگر M و N به‌ترتیب نقاط تلاقی آن با اضلاع یا بامتداد اضلاع AB و AC باشد ، داشته باشیم :

$$BM^2+MN^2+NC^2=BC^2$$

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۹۰/۹ ـ معادلات اضلاع مثلث ABC عبارتند از :

$$AB : y=3x+6$$
$$BC : y+4x=6$$
$$CA : 5x+3y=4$$

سهمی P از نقطهٔ A می‌گذرد و مماس برآن در این نقطه با ضلع BC موازی است و همچنین محور سهمی از M وسط ضلع BC می‌گذرد و با محور $y'y$ موازی است . معادلهٔ این سهمی را مشخص کنید .

۹۰/۱۰ ـ از **علی حاجی‌ابراهیمی**

حاصل‌عبارت زیررا به ساده‌ترین صورت بدست آورید :

$$P=\frac{\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 30^\circ+\cos 40^\circ}$$

برای دانش آموزان کلاس پنجم ریاضی

۹۰/۱۱ ـ دومنحنی C و C′ به معادله‌های زیر را درنظر می‌گیریم :

$$(C):\ y=ax^2+bx+c\ ،\ (C'):\ y=\frac{x+1}{x-1}$$

هرگاه دومنحنی درنقطهٔ به طول ۳ بر یکدیگر مماس بوده و درهمین نقطه از یکدیگر بگذرند اولاً مقادیر a و b و c را معین کنید .

ثانیاً دومنحنی را دریك شکل رسم کنید ومعادلهٔ مماس (یا مماسهای) مشترك آنهارا بدست آورید .

۹۰/۱۲ ـ در صفحهٔ محورهای مختصات دایرهٔ C به مرکز I(۱ و ۱) و به‌شعاع $R=\sqrt{2}$ و دایرهٔ C′ به‌مرکز I′(۳ و ۵) وبه شعاع $2\sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم . اولاً ثابت کنیدکه این‌دودایره‌متخارجند . ثانیاً معادلات مماسهای مشترك داخلی وخارجی آنهارا بدست‌آورید . (درحل مسئله به معادلات دایره‌ها نیازی نیست)

۹۰/۱۳ ـ فرستنده : **جواد فیض** ، ترجمهٔ از انگلیسی .

در دومثلث ABC و A′B′C′ زاویه های A و A′ متساویند . هرگاه‌مجموع سینوسهای زاویه‌های مثلث ABC از مجموع سینوسهای زاویه‌های مثلث A′B′C′ کوچکتر باشد ، ثابت کنید که :

$$B'-C'<B-C$$

۹۰/۱۴ ـ از عباس جزء امیرسیافی دانش آموز ششم ریاضی دبیرستان رستاخیز

ثابت کنید که عبارت زیرمکعب کامل است :

$$A=\sin 3x+\cos 3x+2\sin^2 x-2\cos^2 x$$

۹۰/۱۵ ـ ترجمهٔ **داوید ریحان**

کرهٔ به شعاع r درمخروط دوار قائم به شعاع قاعدهٔ R و به ارتفاع h محاط است . اولاً ثابت کنید که :

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{rh}$$

ثانیاً اگر V و S ، V′ و S′ به ترتیب حجم وسطح کره و مخروط باشد ثابت کنید که :

$$\frac{V}{V'}=\frac{S}{S'}$$

۹۰/۱۶ ـ ترجمهٔ **داوید ریحان**

مخروط دوارناقصی در نیمکرهٔ به مرکز O محاط شده است بقسمی که قاعدهٔ بزرگ مخروط ناقص برقاعدهٔ نیمکره منطبق است و شعاع قاعدهٔ کوچك آن نصف شعاع قاعدهٔ بزگ آن است . نسبت سطح جانبی مخروطبه سطح نیمکره‌را بدست آورید .

برای دانش آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۹۰/۱۷ ـ هذلولی به معادلهٔ زیر مفروض است :

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

اولاً مختصات رأسهای A و A′ و کانونهای F و F′ از این هذلولی را مشخص کنید بنابرآنکه A و F به ترتیب درسمت راست مرکز هذلولی واقعند .

ثانیاً معادلهٔ سهمی را بنویسید که F′ کانون آن و A رأس آن می‌باشد .

ثالثاًمختصات نقاط‌تلاقی هذلولی وسهمی‌رابدست‌آورید.

۹۰/۱۸ ـ از علی حاجی‌ابراهیمی

معادلهٔ زیررا حل‌کنید :

$$\cos 8x+32\sin^6 x-48\sin^4 x+18\sin^2 x=1$$

برای دانش آموزان کلاس ششم‌ریاضی

۹۰/۱۹ ـ جدول تغییرات ونمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید :

$$y=x\sqrt{1-\frac{1}{|x|}}$$

۹۰/۲۰ ـ دوتابع زیر مفروض است :

$$y=\sqrt{\frac{x-1}{a}}\quad \text{و}\quad y=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

کوچکترین مقدار مثبت قابل قبول a را پیدا کنید که به ازای آن منحنیهای نمایش هندسی دوتابع در نقطهٔ به‌طول گویا یکدیگر را تلاقی کنند . پس از تعیین a جدولهای

تغییرات دوتابع را تعیین کرده و دو منحنی نمایش هندسی آنها را در یك شکل رسم کنید . اگر α طول نقطهٔ تلاقی دو منحنی باشد ، سطح محصور بین دو منحنی وخط $x = \alpha + ۲$ را حساب کنید .

۹۰/۲۱ـ از جواد فیض

ثابت کنید که معادلهٔ زیر ریشهٔ حقیقی ندارد:

$$۳\cos x = ۴\sin^۳ x$$

۹۰/۲۲ـ فرستنده : **خشایار خواجیان** ، ششم ریاضی دبیرستان هدف شمارهٔ ۳

اولاً ثابت کنید خطی که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را به مرکز ارتفاعی آن وصل می‌کند با ضلع BC زاویهٔ حادهٔ φ می‌سازد که :

$$tg\varphi = \left|\frac{tgB\,tgC - ۳}{tgB - tgC}\right|$$

ثانیاً هرگاه دورأس B و C از مثلث ثابت باشد ورأس A ازآن چنان تغییر کند که $|B - C| = \alpha$ مقدارثابت وهمچنین اندازهٔ زاویهٔ φ نیز ثابت بماند، مکان رأس A رامشخص کنید.

۹۰/۲۳ـ فرستنده : **قوام نحوی**

کسرهای به شکل $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ را تعیین کنید که باکسر $\frac{a}{c}$ برابر باشند .

۹۰/۲۴ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

هرگاه x و y دوعدد طبیعی باشند ، عددهای طبیعی را پیداکنید که باکسر زیر برابر باشند :

$$N = \frac{x^۲ + x + ۱}{xy - ۱}$$

۹۰/۲۵ـ ترجمهٔ از فرانسه

دو خط ثابت و عمود برهم D و $\triangle$ و نقطهٔ ثابت A غیر واقع بر آنها و نقطهٔ ثابت B واقع بر $\triangle$ مفروض است. زاویهٔ قائمهٔ xAy حول نقطهٔ A می‌چرخد و اضلاع آن خط D را در M و N قطع می‌کنند . مکان هندسی I مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BMN را معین کنید.

۹۰/۲۶ـ ترجمهٔ از فرانسه

دایرهٔ C به شعاع ثابت R در صفحه چنان تغییرمکان می‌دهد که همواره برخط ثابت D مماس است. اگر O نقطه‌ای ثابت از صفحه و $\triangle$ قطبی O نسبت به دایرهٔ C باشد ، ثابت کنید که $\triangle$ برسهمی ثابتی مماس است .

مسائل گوناگون

۹۰/۲۷ـ از عباس جزء امیر سیافی

ثابت کنید که اگر داشته باشیم :

$$(xy)^m = (yz)^n = (zx)^p$$

خواهیم داشت :

$$x^{n(p-m)}.y^{p(m-n)}z^{m(n-p)} = ۱$$

۹۰/۲۸ـ از اصغر کرامت طلاتپه دانشجوی فنی دانشگاه تبریز

برای دو عدد طبیعی a و n ثابت کنید که :

$$a^{۲n} + ۲a^{-n} \geqslant ۳$$

۹۰/۲۹ـ از حسن نیکو آمال راد سپاه ترویج و آبادانی

هرگاه تاریخ تولد صادق هدایت $\overline{abcd}/\overline{ad}/\overline{bc}$ هجری خورشیدی و بین ارقام این تاریخ رابطهٔ $ab^۴ = ۲cd^۴$ برقرار باشد ، تاریخ تولد این نویسندهٔ بزرگ ایران رامعلوم کنید .

۹۰/۳۰ـ از حسین دارابی

در مثلث ABC از رأسهای B و C عمودهای BB′ و CC′ را بر AD نیمساز داخلی زاویهٔ A رسم می‌کنیم و پای ارتفاع نظیر رأس A را A′ می‌نامیم . ثابت کنید که دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابهند .

۹۰/۳۱ـ از ژیان حبیب‌الله زاده پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی ۱

نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن رابطهٔ زیر بر قرار باشد :

$$\frac{r_a}{h_a} = \frac{r_b}{h_b} = \frac{r_c}{h_c}$$

۹۰/۳۲ـ ترجمهٔ **جعفر آقایانی چاوشی**

هرگاه سه عدد مثبت a و b و c در رابطهٔ زیرصدق کنند .

$$۲[a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲a^۲] \geqslant a^۴ + b^۴ + c^۴$$

ثابت کنید که این سه‌عدد می‌توانند اندازه‌های ضلعهای یك مثلث باشند .

از مسائل ارسالی جواد فیض

۹۰/۳۳ـ برای سه عدد مثبت و متمایز a و b و c

نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$(a^4+b^4+c^4)(ab+bc+ca)>9a^2b^2c^2$$

۹۰/۳۴ـ هرگاه سه جمله‌ای ax^2+bx+c برسه جمله‌ای x^2+px+1 بخش پذیر باشد ثابت کنید که :

$$a^2-c^2=ab$$

۹۰/۳۵ـ برضلع AB از مثلث CAB تعداد $n-1$ نقطهٔ M_1 ، M_2 ، ...، M_{n-1} را به ترتیب و درجهت از A به B درنظر می‌گیریم . شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی مماس بر AB از مثلثهای CAM_1 ، CM_1M_2 ، ...، $CM_{n-1}B$ را به‌ترتیب r_1 و r'_1 و r'_2 ، ...، r_n و r'_n و از مثلث CAB را r و r' می‌نامیم. ثابت کنید که :

$$\frac{r_1}{r'_1}\times\frac{r_2}{r'_2}\times\dots\times\frac{r_n}{r'_n}=\frac{r}{r'}$$

از مسائل ترجمه شده توسط فتح‌الله زرگری

۹۰/۳۶ـ کشتی A هرسه روز یك بار ، کشتی B هر چهارروزیك‌بار، کشتی C هرشش روزیك‌بار از بندرخارج می‌شوند. هرگاه این سه کشتی درروزسه‌شنبه ۱۲ اردیبهشت مقارن‌هم از بندر خارج شده باشند ، معلوم کنید که بعد از آن درچه تاریخی مجدداً هر سه کشتی درروز سه شنبه از بندرخارج خواهندشد.

۹۰/۳۷ـ دو پاره خط متساوی AB و $A'B'$ چه زاویه‌هایی با یکدیگر بسازند تا فاصلهٔ بین اوساط آنها برابر با نصف طول مشترك آنها باشد ؟

۹۰/۳۸ـ خط △ از مرکز ارتفاعی مثلث مفروض گذشته است . ثابت کنید که خطوط قرینهٔ ضلعهای مثلث نسبت به خط △ روی دایرهٔ محیطی مثلث متقاربند .

۹۰/۳۹ـ ثابت کنید که به ازای هرمقدار از عدد طبیعی n حاصل $tg^{2n}15^\circ+cotg^{2n}15^\circ$ برابر با مجموع مربعات سه عدد صحیح متوالی است .

۹۰/۴۰ـ معادلهٔ زیر دارای چند ریشهٔ حقیقی است ؟

$$x^{27}+x^8+1=0$$

۹۰/۴۱ـ بردو نقطهٔ A و B از سهمی مفروض دو دایره می‌گذرانیم که اولی سهمی را در دو نقطهٔ دیگر M و N و دومی آن رادردو نقطهٔ دیگر P و Q قطع می‌کند . ثابت کنید که دو خط MN و PQ باهم موازیند.

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

[در چاپ مسئله‌های ۸۹/۴۱ و ۸۹/۴۲ در شمارهٔ گذشته اشتباه روی داده بود . این دومسئله به‌صورت صحیح مجدداً در این شماره چاپ می‌شوند .]

۹۰/۴۲ـ برای آنکه عبارت

$$(x^2-1)[ax^2-(a-1)x-1]$$

در ازای $x=1$ صفر شده اما تغییر علامت ندهد :

الف ـ $a=-1$ ب ـ $a=0$

ج ـ $a\neq-1$ د ـ a هرچه که باشد .

۹۰/۴۳ـ با فرض آنکه چند جمله‌ای $P(x)$ دارای ریشهٔ $x=0$ نباشد عبارت :

$$\frac{|x|.P(x)}{x^3}$$

در ازای $x=0$ مبهم است . وقتی x از منفی به‌مثبت تغییر علامت دهد این عبارت :

الف ـ صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد .

ب ـ تغییر علامت نمی‌دهد .

ج ـ از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد .

د ـ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد .

۹۰/۴۴ـ دومعادلهٔ درجهٔ دوم‌زیررا در نظرمی گیریم:

$$1):\ x^2-(m-1)x+3m+4=0$$

$$2):\ (3m^2-2)x^2+(m+1)x+1=0$$

هرگاه معادلهٔ (۱) ریشهٔ حقیقی داشته باشد ، در این صورت معادلهٔ (۲) :

الف ـ نیز ریشهٔ حقیقی دارد .

ب ـ ریشهٔ حقیقی ندارد .

ج ـ دوریشهٔ حقیقی همعلامت دارد .

د ـ دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت دارد .

۹۰/۴۵ـ حد مجموع جملات یك تصاعد هندسی نامحدود با جملهٔ اول a_1 برابر با S است.تعداد n جملهٔ اول این تصاعد راکنار می‌گذاریم . حد مجموع بقیهٔ جملات که اولین آنها a_{n+1} است برابر با S' است . هرگاه $S=kS'$ باشد و q قدر نسبت تصاعد باشد :

الف ـ $k=q^n$ ب ـ $k=q^{n+1}$

ج ـ $k=q^{n-1}$ د ـ k به q بستگی ندارد

۹۰/۴۶ـ برای آنکه داشته باشیم :

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(4^x+2^x-\frac{3}{2}\right)>1$$

الف ـ $x>0$ ب ـ $x>1$

ج ـ $x<0$ د ـ $x<1$

۹۰/۴۷ـ در مثلث ABC طول نیمساز داخلی زاویهٔ A برابر با d و واسطهٔ هندسی دو ضلع AB و AC برابر با k است ، در این صورت :

الف ـ $d=k$ ب ـ $d=k^2$

ج ـ $d>k$ د ـ $d<k$

۹۰/۴۸ـ مثلث ABC که H مرکز ارتفاعی آن است در دایرهٔ به شعاع R محاط است . مقدار $\overline{BC}^2+\overline{AH}^2$ برابر است با :

الف ـ $2R^2$ ب ـ $3R^2$

ج ـ $4R^2$ د ـ $2R^2\sqrt{2}$

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۹۰/۴۹ـ ضریب زاویه‌ای خط △ واقع در صفحهٔ محورهای مختصات برابر با $m=2$ است . خط $\triangle'$ قرینهٔ محور $x'x$ نسبت به خط △ است . ضریب زاویه‌ای خط $\triangle'$ برابر است با :

الف ـ $\frac{4}{3}$ ب ـ $-\frac{4}{3}$

ج ـ $\frac{3}{4}$ د ـ $-\frac{3}{4}$

۹۰/۵۰ـ منحنیهای نمایش هندسی دو تابع:

$$y=\frac{x}{x+1} \quad \text{و} \quad y=-\frac{1}{2}x^2-x$$

الف ـ در مبدأ مختصات بر یکدیگر مماسند .

ب ـ در مبدأ مختصات قائم بریکدیگرند و در دونقطهٔ دیگرمتلاقیند.

ج ـ در مبدأ مختصات قائم بریکدیگرند و دریك نقطهٔ دیگر مماسند .

د ـ در مبدأ مختصات قائم بر یکدیگرند و نقطهٔ تلاقی دیگرندارند.

۹۰/۵۱ـ از نقطهٔ $P(-1 \text{ و } -1)$ دومماس برمنحنی نمایش هندسی تابع $y=\frac{x-1}{x}$ رسم‌کرده‌ایم . اگر α زاویهٔ غیر منفرجهٔ بین این دو مماس باشد :

الف ـ $\alpha=45^\circ$ ب ـ $\alpha>45^\circ$

ج ـ $\alpha<45^\circ$ د ـ $\alpha=90^\circ$

۹۰/۵۲ـ بین تابع $y=\sin ax$ و y' مشتق آن‌رابطهٔ $4y^2+y'^2=4$ برقرار است.مقدار a برابر است با :

الف ـ ۲ ب ـ ۲−

ج ـ ۲± د ـ $\pm\sqrt{2}$

۹۰/۵۳ـ هرگاه داشته باشیم :

$$\sin xy=\sin^2 x+\sin^2 y+\cos(x+y)\cos(x-y)$$

y برحسب x :

الف ـ تابعی درجهٔ اول است.

ب ـ تابعی هموگرافی است .

ج ـ تابعی گنگ است .

د ـ قابل محاسبه‌نیست.

۹۰/۵۴ـ به فرض $a=\sin 18^\circ$ و $b=\cos 36^\circ$:

الف ـ $a>b$ ب ـ $a<b$

ج ـ $a=2b$ د ـ $b=2a$

۹۰/۵۵ـ سطح استوانه‌ای دوار و دو نقطهٔ A و B واقع برآن و غیر واقع بریك مولد مفروض است . اگر △

محور سطح استوانه‌ای باشد ، عمود مشترك $\triangle$ و AB :

الف ـ از وسط AB می‌گذرد.

ب ـ فقط در حالتی که AB با صفحهٔ مقطع قائم استوانه موازی باشد از وسط AB می‌گذرد .

ج ـ وقتی از وسط AB می‌گذرد که AB با صفحهٔ مقطع قائم استوانه موازی نباشد .

د ـ در هیچ حالتی از وسط AB نمی‌گذرد .

۹۰/۵۶ـ منشور مثلث القاعدهٔ $ABCA'B'C'$ مفروض است . صفحهٔ P را در نظر می‌گیریم که منشور را به دو قسمت معادل تقسیم کند و در ضمن باهر سه یال جانبی منشور متقاطع باشد . این صفحهٔ P :

الف ـ منحصر به فرد است .

ب ـ منحصر به دو عدد است .

ج ـ وجود ندارد د ـ به تعداد نامحدود وجود دارد.

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۹۰/۵۷ـ سطح محصور بین منحنی نمایش هندسی تابع $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ و مجانب افقی آن و دو خط $x = 2$ و $x = k > 2$ وقتی $k \to +\infty$:

الف ـ دارای حد برابر با یك است .

ب ـ دارای حد معین بزرگتر از یك است .

ج ـ دارای حد معین کوچکتر از یك است

د ـ دارای حد معین نیست .

۹۰/۵۸ـ منحنی نمایش هندسی تابع $y = a\sqrt[3]{(x-1)^2}$ محور $x'x$ را در S قطع می‌کند . نقطهٔ غیر مشخص M از منحنی را اختیار کرده در آن مماسی بر منحنی رسم می‌کنیم که این مماس محور $x'x$ را در T تلاقی می‌کند. اگر H تصویر قائم M بر $x'x$ باشد، رابطهٔ $\overline{SH} = 2\overline{TS}$:

الف ـ در ازای هر مقدار از $a \neq 0$ برقرار است .

ب ـ فقط در ازای $a = 1$ برقرار است.

ج ـ فقط در ازای یك مقدار $a \neq 1$ برقرار است .

د ـ هیچگاه برقرار نیست .

۹۰/۵۹ـ مماس بر منحنی به‌معادلهٔ $y^2 = x^2$ درنقطهٔ به‌طول α از آن، منحنی را مجدداً در نقطهٔ N قطع می‌کند .

طول نقطهٔ N برابر است با :

الف ـ $\frac{\alpha}{8}$ ب ـ $-\frac{\alpha}{8}$

ج ـ 8α د ـ -8α

۹۰/۶۰ـ درمثلث ABC بین اندازه‌های ضلعها رابطهٔ $a^n = b^n + c^n$ برقرار است که n عدد طبیعی بزرگتر از ۲ است . زاویهٔ A از این مثلث :

الف ـ منفرجه است . ب ـ حاده است

ج ـ کوچکتر از 120° و بزرگتر از 90° است.

د ـ بزرگتر از 120° است .

۹۰/۶۱ـ در مثلث ABC داریم :

$A = 120^\circ$ و $2a = (b + c)\sqrt{3}$

طول میانهٔ BM از این مثلث بر حسب شعاع دایرهٔ محیطی آن :

الف ـ برابر با $\frac{R\sqrt{7}}{4}$ است .

ب ـ بزرگتر از $\frac{R\sqrt{7}}{4}$ است .

ج ـ کوچکتر از $\frac{R\sqrt{7}}{4}$ است .

د ـ قابل محاسبه نیست .

۹۰/۶۲ـ عدد سه رقمی با ارقام متفاوت $\overline{abc}$ را در نظر می‌گیریم . تعداد عددهای N (مثبت یا منفی) که برابر باشند با $N = \overline{abc} - \overline{cba}$ برابر است با :

الف ـ ۱۸ ب ـ ۱۷ ج ـ ۱۶ د ـ ۹

۹۰/۶۳ـ کسر $\frac{n^2 - 1}{3n + 1}$ که در آن n عدد طبیعی است:

الف ـ در ازای همهٔ مقادیر n تحویل ناپذیر است.

ب ـ وقتی تحویل ناپذیر است که n زوج باشد .

ج ـ وقتی تحویل ناپذیر است که n فرد باشد .

د ـ به ازای هیچ مقدار از n تحویل ناپذیر نیست.

۹۰/۶۴ـ چهار نقطهٔ A ، B ، C و D بر خط $\triangle$ واقعند و B و D نسبت به A و C مزدوج توافقی یکدیگرند اگر P یکی از نقاط تلاقی دایره‌های به قطرهای AC و BD باشد و A' و B' و C' و D' منعکسهای نقاط A و B و C و D در انعکاس به قطب P باشد ، چهار ضلعی $A'B'C'D'$:

الف ـ محاطی غیر مشخص است .

ب ـ مستطیل است

ج ـ محاطی است اما مستطیل نیست.

د ـ مربع است .

۹۰/۶۵ـ دو نقطهٔ A و B را بر هذلولی مفروض در نظر گرفته و متوازی‌الاضلاع AMBN را می‌سازیم که ضلعهای آن با مجانبهای هذلولی موازی باشند . دراین‌صورت خط MN :

الف ـ امتداد ثابت دارد.

ب ـ با مجانبهای هذلولی زاویه‌های ثابت‌می‌سازد.

ج ـ برنقطهٔ ثابت غیرواقع‌برمجانبهای‌هذلولی می‌گذرد.

د ـ بر مرکزهذلولی می‌گذرد.

اشتباه از چیست ؟

شهریار جهانیان

دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان مرجان

این مسئله و یك راه‌حل آن‌دریکی‌ازکتابهای حل‌المسئله مندرج است . راه حل دیگر توسط نگارنده ارائه شده است. نتیجهٔ دوراه حل متفاوت می‌باشد ، پس در یکی از دوراه‌حل اشتباهی روی داده است . این اشتباه را معلوم کنید .

مسئله ـ حد تابع زیر را وقتی $x \to 0$ بیداکنید :

$$y = \frac{\text{Arc}\sin 2x - 2\text{Arc}\sin x}{x^3}$$

راه حل اول ـ با توجه به اینکه مشتق تابع $y = \text{Arc}\sin ax$ برابراست با $y' = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ وبااستفاده از قانون هوپیتال ، حد تابع بالا برابر می‌شودباحد :

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \frac{2(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2})}{3x^2(\sqrt{1-4x^2} \times \sqrt{1-x^2})}$$

$$= \frac{2 \times 3x^2}{3x^2(\sqrt{1-4x^2} \times \sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-4x^2} + \sqrt{1-x^2})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-4x^2)(1-x^2)}[\sqrt{1-4x^2} + \sqrt{1-x^2}]}$$

وقتی $x \to 0$ حد این کسر ، یعنی حد تابع مفروض ، برابر با $\frac{2}{2} = 1$ بدست می‌آید .

راه حل دوم ـ به ترتیب داریم :

$$\text{Arc}\sin 2x = \alpha \Longrightarrow \sin\alpha = 2x$$

$$\text{Arc}\sin x = \beta \Longrightarrow \sin\beta = x$$

$$y = \frac{\alpha - 2\beta}{x^3} = \frac{\alpha}{x^3} - \frac{2\beta}{x^3} = \frac{8\alpha}{\sin^3\alpha} - \frac{2\beta}{\sin^3\beta}$$

می‌دانیم وقتی $\alpha \to 0$ و $\beta \to 0$ حد هریك ازکسرهای $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ و $\frac{\beta}{\sin\beta}$ برابر با یك است ، پس خواهیم داشت :

$$y = \frac{8}{\sin^3\alpha} - \frac{2}{\sin^3\beta} = \frac{8}{4x^3} - \frac{2}{x^3} = \frac{2-2}{x^3} = 0$$

یکان ـ مسئلهٔ ساده‌ای از این نوع تعیین حد تابع

$$y = tg(\frac{\pi}{2} - x) - tg(\frac{\pi}{2} + x)$$

است وقتی $x \to 0$ که اگر در تابع به همین شکل x رابرابر با صفر قرار دهیم حد تابع برابر با صفر بدست می‌آید و اگر تابع را به شکل $y = cotgx + cotgx$ بنویسیم حد آن ∞ می‌شود . دراین مورد هم اشتباه از چیست ؟

نوشتن اعداد به شکل دیگر اما باهمان‌ارقام

$\sqrt{169} = -1 + 9 + 6$

$\sqrt{82 + 62} = 8:2 + 6 + 2 = 8:2 \times 6:2$

$74 - 54 = 7 + 4 + 5 + 4$

$61 - 45 = 6 + 1 + 4 + 5$

$\sqrt{361} = 3 \times 6 + 1$

$\sqrt{4489} = (4 + 4) \times 8 + \sqrt{9}$

$\sqrt{1296} = 1 \times 2\sqrt{9} \times 6$

$76 - 54 = 7 \times 6 - 5 \times 4$

$343 = (3 + 4)^3$

$\sqrt{6^2 + 8^2} = 6 - 2 + 8 - 2$

$92 - 72 = 9 + 2 + 7 + 2$

$83 - 63 = 8 + 3 + 6 + 3$

$\sqrt{3969} = 3 - 9 + 69$

$\sqrt{11449} = 114 - 4 - \sqrt{9}$

مسائل منتخب از

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث دوم سال، تحصیلی ۵۰ - ۵۱ (اسفند ۱۳۵۰)

کلاس پنجم ریاضی

جبر

گروه فرهنگی آذر

دبیر : کابلی ـ فرستنده : حبیب‌رضا گلپور

معادلهٔ زیر مفروض است :

$$y^2 - xy + x - m - 1 = 0$$

درصورتی‌که y تابع x باشداولاً مقدار y رابرحسب x و m تعیین‌کنید . سپس m را معین‌کنید بطوری‌که تابع y به ازاء جمیع مقادیر حقیقی x مقدار منطق (گویا) باشد.

ثانیاً ـ به‌ازاء $m = 0$ نمایش هندسی تابع را دردستگاه محورهای مختصات رسم‌کنید .

دبیرستان ارس

دبیر : حافظ قرآن ـ فرستنده : کاظمی

ـ از تابع زیر مشتق بگیرید :

$$y = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^2)^n$$

ـ مقدارکسر زیر را به ازاء $x = 1$ (بدون استفاده از قاعدهٔ هوپیتال) حساب‌کنید :

$$y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$$

دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر : علی‌اکبر جعفری

ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع زیررا رسم‌کنید:

$$y = x^2 - 4|x| + 3$$

ـ تابع $y = ax^2 + bx + c$ مفروض است . a و b و c را طوری تعیین‌کنیدکه $S(2 \text{ و } -1)$ رأس منحنی بوده وخط مماس درنقطهٔ T به‌طول ۳واقع برمنحنی برخط $2y + x = 0$ عمود باشد .

دبیرستان پهلوی ملایر

دبیر : صفریان

مشتق تابع زیر را حساب‌کنید :

$$y = (3x^2 - 1)^2\sqrt{3x^3} + \frac{x-2}{x+2} + \sqrt[7]{(x^2 - 3x + 1)^3}$$

دبیرستان خرد شیراز

دبیر : سلطانی ـ فرستنده : امرالله مهدی زاده

تابع $y = \dfrac{x^2 + ax - 2}{2x - 6}$ مفروض است. اولاً a را طوری تعیین‌کنیدکه مجموع عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم آن برابر ۵ باشد . ثانیاً جدول تغییرات تابع $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{2x - 6}$ را رسم‌کنید.

دبیرستان خواجه نصیر جهرم

دبیر : باقری نژاد ـ

فرستندگان : فتحعلی‌قناعت پیشه،ابراهیم‌یوسف زادگان

اولاً منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم‌کنید :

$$y = -(x^2 + 4x - 12)$$

ثانیاً در زیر منحنی مستطیلی چنان‌محاط‌کنیدکه‌یك ضلع آن محور xها بوده و مساحت آن ماکزیمم باشد . ثالثاً مکان

هندسی نقاطی را پیدا کنید که ازآن نقاط بتوان دو مماس عمود برهم بر تابع فوق رسم کرد . رابعاً معادلات مماس برمنحنی را در نقاط برخورد منحنی با محور xها تعیین کنید (نقاط A و B) و محل برخورد این دو مماس را C بنامید و مساحت مثلث ABC را تعیین کنید .

دبیرستان دانش بزرگ نیا

دبیر : نیرومند ـ فرستنده : اسماعیل مفیدی

مشتق تابع زیر را بدست آورید :

$$y = \sin^{2}\frac{x-1}{2x}\cos\sqrt{5x} + 2\,tg^{2}\sqrt{\frac{2x}{x-1}}$$

دبیرستان سلطانی شیراز

دبیر : دستغیب ـ فرستنده : علی‌اصغر ذاکری

نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید :

$$y = |x-2| + |x|$$

دبیرستان شاپور میانه

دبیر : احمدنیا ـ فرستنده : حسین میانجی

اولاً ضرایب a و b و c را طوری تعیین کنید که منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y = ax^{2} + bx + c$ از نقاط (۴ و ۲ −) و (۰ و ۱ −) و (۲ − و ۰) بگذرد و منحنی (C) را به ازاء این مقادیر رسم کنید . ثانیاً معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ K(۱ و ۱ −) بگذرد و منحنی (C) را در دو نقطهٔ A و B قطع کند بطوری که K وسط AB باشد و مختصات A و B را بدست آورید . همچنین مختصات نقطهٔ T فصل مشترك مماسهای برمنحنی را درنقاط A و B حساب کنید . ثالثاً اگر M_1 و M_2 فصل‌مشترکهای منحنی (C) با خطی باشند که از نقطهٔ K با ضریب زاویهٔ m رسم می‌شود ، ثابت کنید خطوطی که نقاط M_1 و M_2 را به نقطهٔ D(۰ و ۲ −) وصل می‌کنند به ازاء جمیع مقادیر m بریکدیگر عمودند .

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر : هدانیا ـ فرستنده : محمد معینی

ـ مشتق تابع زیر را بدون استفاده‌از مشتق تعیین کنید :

$$y = \sin 3x + \frac{x-1}{2x+1} + \sqrt{2x+1}$$

ـ تابع $y = x^{3} - x^{2} + 1$ و خط △ به معادلهٔ $y = ax + 1$ مفروضند . هرگاه خط و منحنی نمایش مذکور غیر از نقطه‌ای به‌طول صفر یکدیگر را در دو نقطهٔ دیگر مانند A و B قطع کنند مطلوبست معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P وسط پاره خط AB وقتی‌که پارامتر a تغییر می‌کند .

دبیرستان صفوی اردبیل

دبیر : داداش زاده ـ فرستنده : اسحق حصولی

مطلوبست تعیین معادلهٔ خطی‌که از نقطهٔ A(۳ و ۲) می‌گذرد و محورهای مختصات را در دو نقطه‌که مختصات آنها اعداد صحیح می‌باشند قطع می‌کند .

دبیرستان مروی

دبیر : نیوشا ـ فرستنده : محمد حسن نوری

مکان‌هندسی‌مرکزتقارن‌منحنیهای $y = \frac{mx + 2m}{x + 2m - 1}$

را وقتی‌که m تغییر کند بدست آورید .

دبیرستان نظام مافی

دبیر : غفاری ـ فرستنده:حسین شعبانی

تابع زیر مفروض است :

$$y = mx^{2} + 2(m-1)x + m$$

اولاً ثابت کنید به‌ازاء جمیع مقادیر m منحنیهای‌حاصل از نقطهٔ ثابتی گذشته و در همین نقطه برخط ثابتی‌مماس‌است. ثانیاً حدود m راچنان‌تعیین کنید که‌منحنیهای‌فوق محورطولها را در دونقطهٔ A و B قطع کند و ثابت کنید روی خط AB نقطه‌ای ثابت مانند C هست بقسمی‌که $CA \times CB = k$ باشد (kعدد ثابت).طول‌نقطهٔ C وعدد ثابت kراحساب کنید.

مثلثات

دبیرستان آریا لاهیجان

دبیر : دانشفر ـ فرستنده : غلامرضا شیشه‌گران

مطلوبست تعیین x از رابطهٔ زیر :

$$7^{\sin^{2}x} + 7^{1+\cos^{2}x} = 14$$

دبیرستان استر آبادی گرگان

دبیر : مشکین قلم ـ فرستنده : سید مهدی صفوی

ثابت کنید که هر مثلث ABC که درآن رابطهٔ زیر برقرار باشد متساوی‌الساقین است :

$$\sin\frac{A}{2}\cos^{2}\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^{2}\frac{A}{2}$$

دبیرستان پهلوی آبادان

دبیر : گلشن ـ فرستنده : محمد اسماعیل زمانی

اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ ریشه‌های‌معادلهٔ $x^{2} + px + q = 0$

باشد ثابت کنید :

$$\sin^2(\alpha+\beta)+6\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+$$
$$+p\cos^2(\alpha+\beta)=q$$

دبیرستان پهلوی بهبهان

دبیر : رفیع زاده ـ فرستنده : محمد حسین مرتب

اگر $tg3a=tg3b=tg3c=k$ باشد ثابت کنید :

$$(tga+tgb+tgc)(cotga+cotgb+cotgc)=9$$

دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر : علی‌اکبر جعفری

ـ اگر $tg(A-B)=\frac{\sin 2B}{3-\cos 2B}$ باشد ، ثابت کنید:

$$tgA=2tgB$$

ـ بدون استفاده از مشتق ماکزیمم و می‌نیمم عبارت زیر را تعیین کنید :

$$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x-1$$

ـ از رابطهٔ $2\sin(3x+y)=9\sin(3y-x)$ رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید :

$$7tg(2y+x)=11tg(2x-y)$$

دبیرستان پهلوی میاندوآب

دبیر : فرزدی ـ فرستنده : عبدالعزیز درویش

ـ اولاً مقدار $\sin 5x$ رابرحسب قوای $\sin x$ نوشته ، سپس معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin 5x=16\sin^5 x$$

ـ اگر $tg^2A=1+2tg^2B$ باشد ثابت کنید :

$$\cos 2A+\sin^2 B=0$$

دبیرستان دانش بزرگ نیا

دبیر : بقائی ـ فرستنده : اسماعیل مفیدی

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\sin(x+\alpha)-\sin x\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos(x+\alpha)+\sin x\sin\alpha}{\sin\alpha}=$$
$$=\frac{2\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$$

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر : ایزدی ـ فرستنده : میرزاکوچك

ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کرده جوابهای واقع بین صفر و 2π را بنویسید :

$$\frac{1}{\sin 4x}-\frac{1}{\sin 20^\circ}=cotg4x-cotg20^\circ$$

ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند صحت رابطهٔ زیر را ثابت کنید :

$$\frac{1-\cos A+\cos B+\cos C}{1-\cos C+\cos B+\cos A}=\frac{tg\frac{A}{2}}{tg\frac{C}{2}}$$

دبیرستان شاهپور رشت

دبیر : منظری ـ فرستنده : بهزاد جواد زاده

ـ اگر $\cos 2x$ و $\cos 2y$ و $\cos 2z$ تشکیل تصاعدعددی بدهند ثابت کنید سه مقدار $cotg(x+z)$ و $cotg(y+z)$ نیز تصاعد عددی می‌سازند .

ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید :

$$\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}+3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos x=0$$

دبیرستان شاپور میانه

دبیر : احمدنیا ـ فرستنده : حسین میانجی

معادلهٔ زیر را حل کنید و جوابهای بین صفر و 2π را پیدا کنید :

$$(\sqrt{2}+1)\sin^2 x+(\sqrt{2}-1)\cos^2 x+\sin 2x=$$
$$=\sqrt{2}-1$$

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر : قمیصی ـ فرستنده : محسن‌حمیدی

ـ α را بین دو رابطهٔ زیر حذف کنید و رابطهٔ بدست آمده را به ساده‌ترین صورت خود بنویسید :

$$\begin{cases} x\sin\alpha-y\cos\alpha=\frac{z}{2}\sin 2\alpha \\ x\cos\alpha+y\sin\alpha=z\cos 2\alpha \end{cases}$$

ـ اگر $tgx=\frac{\alpha\sin z}{1-\alpha\cos z}$ و $tgy=\frac{\sin z}{\cos z-\alpha}$

بوده و $0<x-y+z<3\pi$ باشد مقدار $x+y+z$ را برحسب رادیان بدست‌آورید .

ـ اگر $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ باشد (α و β و γ مثبتند) صحت رابطهٔ زیررا تحقیق کنید :

$$\frac{3\sqrt{\alpha}-\alpha\sqrt{\alpha}}{1-3\alpha}+\frac{3\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\beta}}{1-3\beta}+\frac{3\sqrt{\gamma}-\gamma\sqrt{\gamma}}{1-3\gamma}=$$
$$=\frac{(3\sqrt{\alpha}-\alpha\sqrt{\alpha})(3\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\beta})(3\sqrt{\gamma}-\gamma\sqrt{\gamma})}{(1-3\alpha)(1-3\beta)(1-3\gamma)}$$

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر : کنگرلو ـ فرستنده : محمد معینی

ـ عبارت زیررا قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم کنید :

$$S = \cos^2 5x - \sin^2 7x$$

ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$8(\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 6$$

دبیرستان کریم فاطمی اهواز

دبیر : کاوند ـ فرستنده : منوچهر افشار

اگر $b = \frac{3}{2}(\pi - a)$ باشد ثابت کنید :

$$\cot g(a+b)\cot g(a-b) = -tg\frac{a}{2}\cot g\frac{5b}{2}$$

دبیرستان مروی

دبیر : پاچناری ـ فرستنده : محمد حسن نوری

ـ معادلهٔ زیررا حل کرده وجوابهای بین صفر و 2π را بدست آورید :

$$tg^2 2x + \cot g^2 2x + 8\cot g 4x \cos 4x = 0$$

ـ درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\sin^4\frac{\pi}{7} + \sin^4\frac{2\pi}{7} + \sin^4\frac{3\pi}{7} = \frac{21}{16}$$

دبیرستان نظام مافی

دبیر : غفاری ـ فرستنده : حسین شعبانی

ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$(\sqrt{2}+1)^{\sin x} + (\sqrt{2}-1)^{\sin x} = 2$$

ـ از رابطهٔ $\sin(3x+y) = 3\sin(3y-x)$ رابطهٔ $tg(2y+x) = 2tg(2x-y)$ را نتیجه بگیرید .

دبیرستان هدف شمارهٔ ۳

دبیر : عباسی ـ فرستنده : کامیار احمدی کاشانی

ـ اگر داشته باشیم $a\sin^2 x + b\cos^2 x = m$ و $a\cos^2 y + b\sin^2 y = n$ و $atgx = btgy$ ثابت کنید :

$$(a-b)\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right] = 0$$

ـ اگر $tgx + tgy = tga$ و $\cot gx + \cot gy = \cot gb$ و $x + y = c$ باشد رابطه‌ای بین a و b و c برقرار کنید .

مسائل هندسه

دبیرستان آریا شمارهٔ ۴ لاهیجان

دبیر : منصوری ـ فرستنده : غلامرضا شیشه‌گران

درمتوازی‌الاضلاع $ABCDA'B'C'D'$ ثابت کنید صفحات $DA'B$ و $D'B'C$ قطر AC' را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند .

گروه فرهنگی آذر

دبیر : سعیدی ـ فرستنده : حبیب‌رضا گلپور

چهار وجهی منتظم $ABCD$ مفروض است. اوساط یالهای DA و BC را به ترتیب F و E می‌نامیم ؛

اولاً ثابت کنید ارتفاع AH چهار وجهی از وسط EF می‌گذرد .

ثانیاً ـ بافرض اینکه $FE = \frac{a\sqrt{2}}{7}$ باشد طول یال چهاروجهی را بدست‌آورید .

ثالثاً ـ صفحهٔ P موازی باوجه BCD این چهاروجهی را درمقطع MNK قطع می‌کند. تصویر این مقطع برصفحهٔ قاعده مثلث $M'N'K'$ می‌باشد با فرض اینکه حجم $MNKM'N'K$ برابر $\frac{a^3\sqrt{2}}{108}$ باشد فاصلهٔ صفحهٔ P را ازصفحهٔ ACD معین کنید

دبیرستان ابن‌سینا رضائیه

دبیر : جعفرزاده ـ فرستندگان : محمدعلی انوشه ، فرامرز مردانی

نقطهٔ O رأس زاویهٔ xOy روی صفحهٔ P قرار دارد و دوخط Ox و Oy روی صفحهٔ P واقع نیستند . در صفحهٔ P از نقطهٔ O خطی چنان رسم کنید که مجموع زوایای کنج $Oxyz$ می‌نیمم باشد .

دبیرستان پهلوی بهبهان

دبیر : علیزاده ـ فرستنده : محمد حسین مرتب

ثابت کنید که مقطع یك مکعب بوسیلهٔ صفحه‌ای که از وسط یکی از اقطار آن بر آن قطر عمود شود یك شش‌ضلعی منتظم است.

دبیرستان پهلوی آبادان

دبیر : فتاحی اصفهانی ـ فرستنده : محمداسماعیل زمانی

درصفحهٔ ثابت P دایره‌ای به‌مرکز ثابت O وشعاع ثابت R

مفروض‌است . دونقطهٔ A و B درخارج صفحهٔ P را به‌نقطهٔ متغیر M از دایرهٔ O وصل می‌کنیم . مکان هندسی نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث AMB را تعیین کنید .

دبیرستان پهلوی همدان

دبیر: آذرخویش- فرستندگان: علی‌اکبر جابری ،رسول‌قدیمی

زاویهٔ قائمهٔ XOY ونقطهٔ P واقع در خارج صفحهٔ آن مفروضند . قطعه خط AB به طول L را براضلاع زاویه چنان متکی کنید که زاویهٔ $APB = ۹۰^\circ$ باشد .

دبیرستان جام جم

دبیر: آذرهوشنگی - فرستنده : پروانه بکتاشی

هرم منتظم مثلث‌القاعدهٔ S.ABC که در آن خط SH ارتفاع‌هرم‌و $SH = AB = AC = BC = a$ مفروض است ؛

۱- مطلوبست‌محاسبهٔ‌طول یال جانبی هرم برحسب a.

۲- اندازهٔ زاویه‌ای که هریال جانبی با صفحهٔ ABC می‌سازد پیداکنید .

۳- طول سهم را دراین هرم برحسب a محاسبه کنید.

۴- کسینوس فرجه بین یك وجه جانبی با قاعده را بدست‌آورید .

۵ - طول عمود مشترك دوپاره خط SA و BC را بدست آورید .

۶- مرکز کرهٔ محیطی هرم SABC (یعنی نقطه‌ای‌که ازچهار رأس این هرم‌به‌یك فاصله است) را بدست‌آورید . اول بطریق هندسی دوم بطریق محاسبه .

۷- ازنقطهٔ O واقع‌بر SH که $OH = \frac{a}{۳}$ انتخاب شده صفحه‌ای‌به‌موازات ABC رسم‌می‌کنیم تامقطع A'B'C' بدست‌آید . مطلوبست محاسبهٔ سطح جانبی و حجم هرم ناقص منتظم ABC A'B'C را برحسب a بدست‌آورید .

دبیرستان دانش بزرگ نیا

دبیر : رجبی - فرستنده : اسماعیل‌مفیدی

روی یالهای کنج سه قائمه به‌رأس O نقاط A وB وC را اختیار می‌کنیم و از O عمود OH را بر صفحهٔ ABC فرود می‌آوریم ؛

۱- ثابت کنید H محل تلاقی‌سه ارتفاع مثلث ABC است .

۲- ثابت کنید :

$$\frac{۱}{OH^۲} = \frac{۱}{OA^۲} + \frac{۱}{OB^۲} + \frac{۱}{OC^۲}$$

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر : علی‌آبادی - فرستنده : میرزاکوچك

هرم منتظم EABCD مفروض است . قاعدهٔ هرم ، لوزی ABCD به طول‌ضلع a بوده و زاویهٔ $A = \alpha$ می‌باشد. ازنقطهٔ E دوممماس‌برکره محاط درآن رسم‌نموده تا به‌ترتیب BC و AD را درنقاط M و N قطع کند . می‌دانیم که MN از مرکز قاعده نقطهٔ O می‌گذرد . هرگاه نقطهٔ $O_۱$ مرکزکره و $O_۱M$ نیمساز زاویهٔ EMO باشد وداشته‌باشیم $EMO = \varphi$ ، ثابت کنید حجم هرم داده شده

$V = \frac{۴}{۳}R^۳ \frac{tg\varphi cotg^۳\frac{\varphi}{۲}}{sin\alpha}$ می‌باشدکه در آن R شعاع کره است .

دبیرستان سلطانی شیراز

دبیر : نجفی - فرستنده : سیدعلی اصغر ذاکری

ازیك نقطهٔ اختیاری O واقع در داخل چهار وجهی ABCD به رئوس‌چهاروجهی وصل می‌کنیم . اگرارتفاعات چهاروجیهای‌حاصل را $d_۱$ و $d_۲$ و $d_۳$ و $d_۴$ بنامیم‌وارتفاعات چهار وجهی ABCD را به $h_۱$ و $h_۲$ و $h_۳$ و $h_۴$ نمایش دهیم، ثابت‌کنید: $\frac{d_۱}{h_۱} + \frac{d_۲}{h_۲} + \frac{d_۳}{h_۳} + \frac{d_۴}{h_۴} = ۱$

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر : هدانیا - فرستنده : محمد معینی

کنج Oxyz که‌در آن‌زاویهٔ $xOy = xOz = ۴۵^\circ$ و $yOz = ۶۰^\circ$ می‌باشد مفروض است . روی Ox طول $OA = a$ و روی Oy و Oz به ترتیب طولهای $OB = OC = b$ را جدا می‌کنیم . ثابت‌کنید : الف- BC بر Ox عمود است. ب- طولهای AB وAC وBC ومساحت مثلث ABC را برحسب a و b حساب کنید .

دبیرستان‌کریم فاطمی اهواز

فرستنده : منوچهر افشار

هرم S.ABC را که در رأس S سه قائمه است در نظر می‌گیریم . اگر $SB = SC = a$ و $SA = \frac{a}{۲}$ باشد و

تصویر S را بر ABC نقطهٔ H و محل تلاقی را با BC نقطهٔ K بنامیم ؛ اولاً حجم و سطح کل این هرم را نسبت به a حساب کنید . ثانیاً زاویهٔ مسطحهٔ صفحات ABC و SBC را حساب کنید . ثالثاً روابط $\overline{SA}^2 = \overline{AH}.\overline{AK}$ و $\overline{SH}^2 = \overline{AH}.\overline{HK}$ را ثابت کنید .

دبیرستان مروی

دبیر : پاچناری ـ فرستنده : محمدحسن نوری

ازنقطهٔ A صفحه‌ای چنان مرور دهید که با خط D موازی بوده و فاصله‌اش با خط △ برابر l باشد .

دبیرستان نمازی

دبیر : محمدتقی دباغ

دوخط متقاطع D و D′ ونقطهٔ A خارج از صفحهٔ آن دومفروض است . از نقطهٔ A صفحه‌ای چنان مرور دهید که برصفحهٔ آن دوخط عمود و D و D′ را در B و C قطع کند و BC قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC باشد .

مسائل فیزیك

دبیرستان آریا لاهیجان

دبیر : سجادی ـ فرستنده : غلامرضا شیشه‌گران

شخصی به فاصلهٔ d ازسطح آئینهٔ تختی قراردارد .اگر شخص یا آئینه به موازات خود و به‌اندازهٔ a دور یا نزدیك شود ، ثابت کنید تصویر چه فاصلهٔ دور یا نزدیك می‌شود .

دبیرستان ابن سینا رضائیه

دبیر : فاتحی ـ فرستندگان : محمدعلی‌انوشه ـ فرامرز مردانی

برای‌خالص‌کردن مس جریان الکتریکی به شدت ۵۰ آمپر را از داخل سولفات مس عبور می دهیم، در قطب مثبت ۵۴ گرم مس ناخالص ودرقطب منفی ۶ گرم مس خالص‌قرار دارد ؛ اولاً در مدت ۶ دقیقه و ۲۶ ثانیه چه مقدار مس درقطب منفی‌آزاد می‌شود . ثانیاً بعدازچه مدت جرم دوقطعه فلز دوالکترود با هم برابر خواهند شد .

$n = ۲$ و $Cu = ۶۴$ و $F = ۹۶۵۰۰$

دبیرستان پهلوی بهبهان

دبیر : جاویدان ـ فرستنده : محمد حسین مرتب

مداری الکتریکی ازقسمتهای زیرتشکیل شده است : یك مولد به‌نیروی‌محرکهٔ ۱۲ ولت و مقاومت داخلی ۱۵ω وسیمی به مقارمت ۳/۵ω و موتور کوچکی به‌نیروی ضد محرکهٔ ۶ ولت ومقاومت داخلی ۲ω ، حساب کنید .

۱ـ شدت جریان درمدار. ۲ـ اختلاف پتانسیل دوسر سیم و دو سرمولد ودوسر موتور. ۳ـ توان مدارخارجی‌را.

دبیرستان خواجه نصیر جهرم

دبیر : کریمی

فرستندگان : ابراهیم یوسف زادگان،فتحعلی‌قناعت پیشه

یك آینهٔ مقعر به شعاع انحنای۲۰cm در دست‌است. جسمی را به فاصلهٔ ۲۰ سانتیمتری آینه قرار می‌دهیم نوع تصویر ومحل آن را تعیین کنید .

ثانیاً ـ اگرگودی داخل آینه را ازآب پرکنیم دراین حالت تصویرنهایی درکجا تشکیل می‌شود و طول آن چقدر است .($n = \frac{۴}{۳}$) (محل جسم و آینهٔ ثابت است)

دبیرستان دانش بزرگ نیا

دبیر : ترقی ـ فرستنده : اسماعیل مفیدی

درفاصلهٔ ۱۴سانتیمتری از یك عدسی محدب به فاصلهٔ کانونی ۱۰ cm جسم AB قرارگرفته . اولاً نوع و محل تصویررا تعیین کنید.ثانیاً به چه فاصله از این عدسی یك عدسی مقعر به هم‌گرایی $-\frac{۴۰}{۳}$ دیوپتری قرارد هیم تا تصویرنهایی حقیقی ۷/۵ برابر جسم اولیه باشد . ثالثاً ـاگر تیغه‌ای به ضخامت ۷/۵ میلیمتر وضریب شکست ۱/۵ بین دوعدسی قراردهیم محل تصویر نهایی کجاست .

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر : حسن زاده ـ فرستنده : میرزا کوچك

دوعدسی نازك محدب وتخت ومقعر وتخت به ضریب شکست ۱/۴ را به هم چسبانده و فضای بین‌آندورا ازمایعی به‌ضریب شکست ۱/۳ پرمی‌کنیم . مشاهده می‌شود اشعه‌ای که به موازات محور اصلی براین دستگاه بتابد به موازات محوراصلی خارج می‌شود . نسبت R_1 به R_2 را پیداکنید .

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر : فرجی ـ فرستنده : محمد معینی

ابژکتیف یك دستگاه عکاسی‌ازدوعدسی تشکیل‌شده‌است یکی همگرا به‌فاصلهٔ کانونی ۲۰ سانتیمتر ودیگری واگرا به‌فاصلهٔ کانونی ۵ سانتیمترکه درفاصلهٔ۱۵/۵ سانتیمتری پشت عدسی همگرا قراردارد . جسمی به طول ۱۰متر دریك کیلومتری قرار دارد . اولاً محل و طول تصویر آن را در این

دستگاه پیدا کنید . ثانیاً اگر بخواهند به جای این دوعدسی فقط ازیك عدسی همگرا استفاده شود تاهمان تصویر را به همان اندازه ایجاد کند فاصلهٔ کانونی این عدسی چقدر باید باشد .

دبیرستان کریم فاطمی اهواز

فرستنده : منوچهر افشار

یك عدسی همگرا به فاصلهٔ کانونی ۲۰cm و یك عدسی واگرا به فاصلهٔ کانونی ۱۰cm را به هم می‌چسبانیم. همگرایی دستگاه چقدر است؟ اگر آنها را چنان قرار دهیم که نوری که موازی محور اصلی به عدسی همگرا می‌تابد ازعدسی دیگر موازی خارج شود، فاصلهٔ آن دوچقدر است ؟

مسائل شیمی

دبیرستان استرآبادی گرگان

دبیر: زمانی ـ فرستنده : سید مهدی صفوی

در ۱۰cc سولفات کوئیوریك بقدر کافی یدورپتاسیم می‌ریزیم وسپس چسب نشاسته می‌افزاییم. برای ازبین بردن رنگ آبی ۱۰۰cc هیپوسولفیت سدیم متبلور ($S_2O_3Na_2$ و $5H_2O$) به غلظت ۶۲ گرم درلیتر لازم است . فاکتور وغلظت سولفات کوئیوریك را بدست آورید .

دبیرستان پهلوی آبادان

دبیر: احمدپور ـ فرستنده : محمداسماعیل زمانی

a گرم ازسولفات یك فلز دوظرفیتی مجهول با b گرم ازسولفات یك فلز دوظرفیتی مجهول دیگر ۴/۷۴ گرم وزن دارند نسبت وزنی دراین مخلوط برابر است با ۳/۲۲ بر ۱/۵۲ ازطرفی چون این مخلوط را درآب حل کرده وبه آن نیترات باریم اضافه کنیم رسوبی به وزن ۶/۹۹ گرم تولید می‌شود بطوریکه نسبت وزنی دورسوب مثل نسبت ۲ بر ۱ است از این آزمایش جنس دوفلز را محاسبه کنید .

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر: میکائیلی ـ فرستنده : میرزا کوچك

بر ۱۰۰cc مخلوطی شامل سولفات روی و کلرور کوئیوریك گاز SH_2 اثر می‌دهیم ۰/۴۸ گرم رسوب حاصل می‌شود. بر ۱۰۰cc دیگر مخلوطی دارای ۴۰۰cc نیترات باریم $\frac{9}{8}$ مولکول گرم درلیتر و ۱۰۰cc نیترات باریم $\frac{1}{2}$ مولکول گرم درلیتر می‌ریزیم تا عمل رسوب کامل شود. غلظت وفاکتور هریك ازنمکها را پیدا کنید .

دبیرستان سلطانی شیراز

دبیر : نادر ـ فرستنده : سیدعلی اصغر ذاکری

بر ۱۰۰cc محلول یدورپتاسیم آب کلر اضافه می‌کنیم و برنتیجه، محلول هیپوسولفیت دوملکول گرم درلیتر اضافه می‌کنیم. ۲۵cc ازاین محلول می‌تواند با ید حاصل ترکیب شود . غلظت و نرمالیتهٔ یدورپتاسیم را حساب کنید.

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر: مؤمنی ـ فرستنده : محمد معینی

محلولی ازکلرورسدیم و نیترات مس موجوداست. ۱۰۰cc ازاین محلول بوسیلهٔ ۵۰cc نیترات نقره $\frac{1}{5}$ نرمال رسوب کامل می‌دهد. در ۱۰۰cc دیگر ازمحلول اولیه جریان ئیدرژن سولفوره (SH_2) تا حد اشباع وارد می‌کنیم ۰/۱۹۲ گرم رسوب بدست می‌آید. غلظت هردونمك را محاسبه کنید .

دبیرستان کریم فاطمی اهواز

فرستنده : منوچهر افشار

محلولی دارای سولفات مس وسولفات فرو و سولفات فریك است . به ۵۰cc این محلول درمحیط اسیدی گاز SH_2 عبورمی‌دهیم ۱/۱۲ گرم رسوب بدست می‌آیدکه ۰/۱۶ گرم آن درسولفورکربن حل می‌گردد. محلول صاف شده را در محیط اسیدسولفوریك با آب اکسیژنهٔ ۴ حجمی اکسیدمی‌کنیم برای اکسیدشدن کامل محلول ۲۱cc آب اکسیژنه لازم می‌گردد. معین کنید غلظت هریك ازنمکها را .

دبیرستان مروی

دبیر : ناصری ـ فرستنده: محمدحسن نوری

آلیاژی ازآهن ومس را در محلول رقیق اسید نیتریك حل می‌کنیم وحجم آنرا با آب مقطر به یك لیتر می‌رسانیم . بر ۲۵۰cc ازآن سولفورآمونیم اثرمی‌دهیم رسوب بدست آمده پس ازشستشو با سولفورکربن ۰/۵۷ گرم ازآن باقی‌می‌ماند که اگر برروی آن اسیدسولفوریك رقیق بریزیم ۰/۳۳ گرم از آن حل می‌شود. اولاً فرمولهای مربوطه را نوشته، ثانیاً وزن هر یك ازدوفلز را در ۱۰۰ گرم آلیاژ حساب کنید .

کلاس ششم طبیعی

جبر ومثلثات

دبیرستان ۲۵ شهریور گلپایگان

دبیر: علی‌اکبر جعفری

ـ نقاط $F(\sqrt{13}+1, -2)$ و $F'(-\sqrt{13}+1, -2)$

دو کانون یك هذلولی و خط D به معادلهٔ $y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۸}{۳}$ یکی ازمجانبهای آن است. معادلهٔ هذلولی را بنویسید.

ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=\cos ۲x+۲\sin x-۱$$

را درفاصلهٔ صفر و ۲π رسم کنید. (محل تلاقی منحنی رابامحور $x'x$ بدست آورید). مساحت سطح محصوربین منحنی ومحور طولها را در فاصلهٔ $x=۰$ تا $x=\frac{\pi}{۶}$ حساب کنید.

ـ هذلولی H به معادلهٔ:

$$۴x^۲-۹y^۲-۸x-۳۶y=۶۸$$

مفروض است. مطلوبست مختصات مرکز ورئوس و کانونها و معادلات مجانبها ورسم آن.

دبیرستان شیخ بهایی

ـ تابع $y=\frac{ax+b}{x+c}$ مفروض است. اولاً a و b و c را طوری تعیین کنید که مرکزتقارن منحنی به طول یك بوده وبرخط D به معادلهٔ $۳x-۲y+۱=۰$ عمود باشد و علاوه بر آن مماس برمنحنی درنقطه‌ای به طول ۴ عمود برخط D باشد. ثانیاً مطلوبست رسم جدول و منحنی C به معادلهٔ $y=\frac{۲(x+۲)}{x-۱}$ وخط D به معادلهٔ $۲y-۳x=۱$ دریك دستگاه محورهای مختصات. ثالثاً معادلهٔ خطوطی راکه از مبدأ مختصات برمنحنی C مماس می‌شود بنویسید.

ـ معادلهٔ زیررا حل کرده وجوابهای کلی آنرا معین کنید:

$$۱۰\sin^۲x-۳\sin ۲x=۴\cos^۲x$$

مسائل فیزیك

دبیرستان پروین اعتصامی گچساران

دبیر: آژیری ـ فرستندگان: مریم غفاری، صغرا اصفهانی

مداری شامل یك بوبین به مقاومت $R=۳$ اهم و ضریب خود القاء $L=\frac{۱}{\pi}$ هانری و یك خازن به ظرفیت $C=\frac{۱}{۹۶۰۰\pi}$ فاراد است ودرمدت ۶ دقیقه و۵۸ ثانیه ۳۰۰۰۰ کالری گرما درمقاومت R تولید می‌شود و اختلاف پتانسیل مؤثر دوسرمدار ۵۰ ولت است. اولاً فرکانس جریان‌را حساب کنید. ثانیاً توان حقیقی وتوان ظاهری رابدست‌آورید. ثالثاً اختلاف پتانسیل دوسر مقاومت و بوبین و خازن را حساب کنید.

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر: فرجی ـ فرستنده: محمدمعینی

ـ ازارتفاع بیست‌متری بالای سطح‌آب‌جسمی با سرعت اولیهٔ $V_۰=۱۵m/s$ رها شده‌است. حساب‌کنید مسافت طی شده درمدت دوثانیه پس‌ازورود درآب را درصورتی که وزن مخصوص جسم $d=۲gr/cm^۳$ بوده وازمقاومت هواوآب صرف‌نظر می‌شود $g=۱۰m/s^۲$.

ـ ازیك بوبین به‌مقاومت $R=\sqrt{۲}$ (اهم) و ضریب‌خود القاء $L=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰۰\pi}$ هانری است جریان متناوبی به‌معادلهٔ $i=۱۰\sin ۱۰۰\pi t$ می‌گذرد. معادلهٔ اختلاف پتانسیل دوسر بوبین (مدار) را برای هرلحظه بنویسید و مقدار اختلاف پتانسیل ماکزیمم را بدست آورید.

خاصیت یکی از مثلثها (دنبالهٔ صفحهٔ ۲۵۹)

تقاطع خط‌المرکزین $OO_۱$ بادایرهٔ محیطی مثلث ABC و K نقطهٔ تقاطع $CO_۱$ با AB باشد. چون OK بر AB عمود است دوکمان AD و DB متساویند و خواهیم داشت:

$$O_۱OB=\frac{۱}{۲}AOB=\alpha$$

همچنین چون $DO_۱B=AOB=۲\alpha$ می‌باشد داریم: $O_۱BO=\alpha$ نتیجه‌می گیریم که‌مثلث $O_۱OB$ متساوی‌الساقین بوده و $O_۱O=O_۱B=R_۱$ می‌باشد.

بنابراین برای هرمثلث دلخواه از انواع (R و T(c دایرهٔ محیطی MNBA از سه‌نقطهٔ ثابت A و B و O می گذرد واین دایره منحصر به‌فرد است.

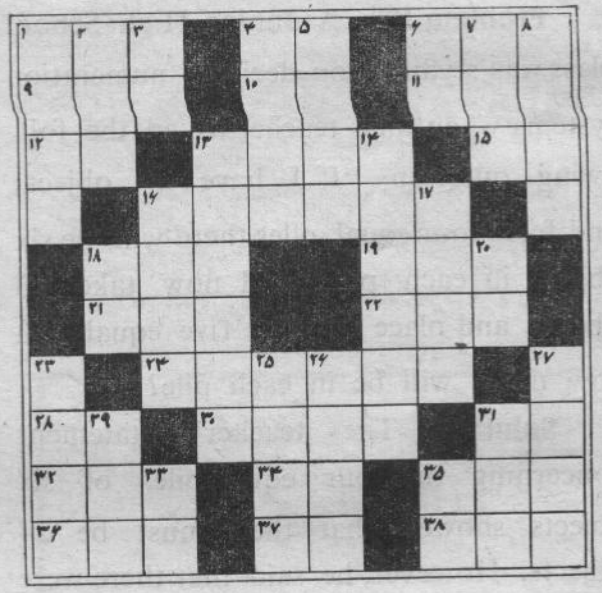
قضایای زیررا نیزمی‌توان به سادگی ثابت‌کرد:

قضیهٔ ۴ـ شعاع دایرهٔ محیطی MNBA برابر است با شعاع دایرهٔ محیطی مثلث MNC. مراکز این دوایرنسبت به قطعه خط MN متقارن هستند.

قضیهٔ ۵ ـ مراکز دوایر محیطی مثلثهای MNC برروی دایره‌ای به مرکز $O_۱$ (مرکزدایرهٔ محیطی MNBA) و شعاع R قرار دارند. و یا بیانی دیگر دایرهٔ به‌مرکز $O_۱$ و به‌شعاع R مکان هندسی مراکز دوایر محیطی مثلثهای MNC می‌باشد.

جدول اعداد

طرح از حسینعلی فنائی(تاریخ وصول به‌دفترمجله : ۱۳۴۹/۸/۳۰)



افقی : ۱ـ عددی است زوج که رقم دهگان آن دو برابر رقم سدگان و چهار برابر رقم یکان آن است . ۴ـ جذر آن از رقم یکان آن دو واحد بیشتر است . ۶ـ به‌صورت $\overline{abb}$ و مجذور کامل است . ۹ـ مجذوررقم یکان خودمی‌باشد و درضمن مجموع رقمهایش نیزمجذور کامل است . ۱۰ـچون با ده برابر خود جمع شود مجذورش حاصل شود . ۱۱ـ مقلوب عدد ۶ افقی . ۱۲ـ متمم حسابی رقم دهگان خود است . ۱۳ به‌صورت $\overline{abab}$ است‌که $\overline{ab}$ توان پنجم است . ۱۵ـ عدهٔ دههای عدد ۶ افقی . ۱۶ـ شش رقمی است وبرابر است با $(n-1)\times 11\times 10^n$. ۱۸ـ سه برابر عدد ۲۱ـ افقی . ۱۹ـ مقلوبش با عدد ۹ افقی برابراست . ۲۱ـخارج قسمت تقسیم عدد ۱۳ افقی برعدد ۴ افقی . ۲۲ـ واسطهٔ حسابی عددهای ۱۸ و ۲۱ افقی . ۲۴ـ به‌صورت $\overline{abcdef}$ است‌که $\overline{cdef}$ در سمت راست 5^{1966} قرار دارد و $\overline{ba}$ مقسوم علیهی از عدد ۱۲ افقی است . ۲۸ـ همان عدد ۱۵ افقی . ۳۰ـ مجذور نصف عدد ۴ افقی . ۳۱ـ برابراست‌با :

$$\overline{ab}=a^2+b^2-4$$

۳۲ـ مجذورعدد۱۰ افقی . ۳۴ـ مقلوب‌عدد ۳۱ افقی. ۳۵ـ توان هشتم است . ۳۶ـ ده واحد بیشتر از عدد ۱۸ افقی . ۳۷ـ هفت برابر عدد ۱۰ افقی . ۳۸ـ همان عدد ۲۱ افقی .

قائم : ۱ـ مجذور عدد ۴ افقی . ۲ـ سه برابر عدد اول به شکل $\overline{abb}$. ۳ـ دوبرابر عدد ۳۳ قائم. ۴ـ مضرب ۱۰ است و رقمهای دیگرش ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند:

$$x^3-9x^2+20x-12=0$$

۵ـ مقلوبش مقدار متداول عدد π بدون ممیزاست . ۶ـهمان عدد ۱۵ افقی . ۷ـ همان‌عدد ۱۱ افقی. ۸ـ به‌صورت $\overline{abab}$ است‌که $\overline{ba}$ همان عدد ۶ قائم است . ۱۳ـ برابر است با :

$$\overline{aaabbb}=\overline{a00b}\times bbb$$

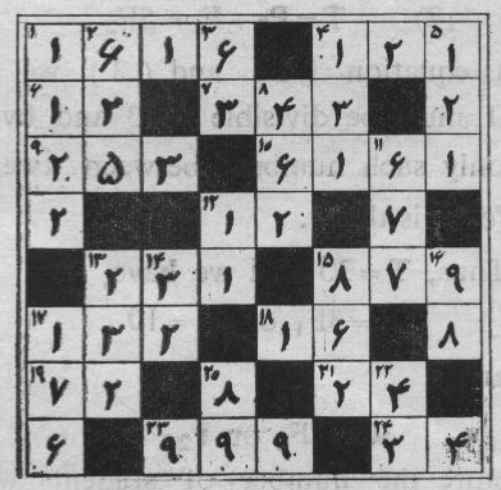
۱۴ـ به‌صورت زیر است :

$$\overline{a(a-2)(3a)aa(a+2)}$$

۱۶ـ ثلث آن برابر است با ۹ که در مبنای ۲ نوشته شود . ۱۷ـ دو واحد بیشتر از عدد ۱۸ افقی . ۱۸ـ مقلوب عدد ۳۳ قائم . ۲۰ـ تفاضل‌عددهای ۱۷ قائم و ۱۸ افقی . ۲۳ـ از نوشتن عدد ۳۳ قائم در سمت راست عدد ۱۸ قائم بدست می‌آید . ۲۵ـ باقیمانده‌اش به هزار می‌شود ۵۷ و مجموع رقمهایش ۱۷ است . ۲۶ـ به‌صورت زیر است :

$$\overline{(3a)a(4a)(a+5)}$$

۲۷ـ اگر ۴۶۵ ازآن‌کم شود تفاضل توان دوازدهم باشد . ۲۹ـ رقمهایش تصاعد هندسی می‌سازند . ۳۱ـ ده برابر عدد ۳۱ افقی . ۳۳ـ مقسوم علیهی از عدد ۱۲ افقی . ۳۵ـجذر عدد ۱۱ افقی .



حل جدول شمارهٔ گذشته

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 106: A Junior High School class was styding non-decimal numeration systems when their teacher asked the following question: "If I have 20 objects and form four equal piles there will be six objects in each pile. If I now take 13 obiects and place them in five equal pile how many will be in each pile?

Solution: The teacher's statement concerning the four equal piles of six objects showed that there must be 24 objects. However, he said that there were 20 objects. The 20 he stated must have been $20_{\text{we ve}}$ (two-zero base twelve. Out of the 24 objects he took 13 (actually 13_{twelve}). This means that he took one twelve and three ones, or fifteen. Fifteen divided into five equal piles will give three objects in each pile.

Problem 107 – In Mr. Niceguy's geometry class there are more than 20 and fewer than 40 students. A recent test showed that the average passing mark was 75 and the average failing mark was 48, with a class average of 66. Mr. Niceguy then raised every grade 5 points (the highest had becn 95), as a result of which the average passing mark became 77.5 , and the average failng mark became 45. If 65 is the minimum passing mark, how many students had their grade changed.

Solution: The average failing grade, 48, times the number of failing grades (F_1), plus the average passing grade, 75, times the number of passing grades (P_1), must equal the class average, 66, times the total number of students in the class ($F_1 + P_1 = T$).

$$48F_1 + 75P_1 = 66(F_1 + P_1)$$

or $$P_1 = 2F_1$$

and

$$(1) \qquad T = P_1 + F_1 = 3F_1$$

After Mr. Niceguy raised the grades 5 points, we have:

$$45F_2 + 77.5P_2 = 71(F_2 + P_2)$$

or $$P_2 = 4F_2$$

and

$$(2) \qquad T = P_2 + F_2 = 5F_2$$

From equation (1) and (2) we see that T must be divisible by 3 and by 5. The only such number between twenty and forty is thirty.

Thus, $T = 30$ and we have:

$$30 = 3F_1 \text{ or } F_1 = 10$$

and

$$30 = 5F_2 \text{ or } F_2 = 6$$

Therefore the number of students who had their grade changed is $10 - 6 = 4$.