# یکان

۹

# مجلّه ریاضیّات

در این شماره :




از انتشارات ایران‌مک‌گروهیل
سازمان انتشارات و خدمات فرهنگی

سال یکم ـ شماره نهم

آبان ماه ۱۳۴۳
بها : ۳۰ ریال

خواننده عزیز

شورای نویسندگان مجله ، که از این شماره سرگرم کار شده ، تصمیم گرفته‌است ، چنانچه خوانندگان موافق باشند : از شمارهٔ ۱۳ به‌بعد ، که نخستین شمارهٔ سال دوم خواهد بود . از نظر تعداد صفحات و نوع مطالب وقطع مجله وطرح پشت‌جلدو غیره ، تغییرات مناسبی در مجله بدهد .

خواهشمندیم نظر خود را در این‌باره برای ما بنویسید تااگر تغییراتی درمجله‌داده‌می‌شود ، با نظر اکثریت‌خوانندگان محترم باشد .

مسؤولان ادارهٔ مجله ، همه روزه ( باستثنای روزهای تعطیل و پنجشنبه‌ها) بین ساعت‌های ٦ تا ٨ بعد از ظهر آمادهٔ پذیرائی ازخوانندگان عزیز و استماع نظرات ایشان میباشند.

سپاسگزاریم

شورای نویسندگان

جای اداره : خیابان تخت جمشید ، چهارراه‌روزولت شمارهٔ ۲۸۲



## تقاضااز اشخاصی که برای مجله مطلب یا مسأله می‌فرستند

۱ـ مطالب فقط در یك روی صفحهٔ کاغذ و با خط خوانا نوشته شود .

۲ـ مطالب مختلف دراوراق جداگانه نوشته‌شود .

۳ـ با هر مسأله حل آن همراه باشد .

٤ـ برای هرمسأله‌ذکرشود که طرح فرستنده‌است‌یااینکه از جای دیگر اخذ شده‌است ومأخذ آن معرفی شود

٥ـ ازارسال مسائلی که درحل‌المسائل‌ها وکتابهای‌درسی چاپ ایران چاپ شده است خودداری‌گردد

٦ـ مشخصات فرستندهٔ مطلب یا مسأله به وضوح‌ذکرشود

۷ـ اشخاصی که نخواسته باشندنام‌آنها ذیل مطلب‌یامسألهٔ ارسالی ذکرشودتذکر دهند اما در هرحال‌باید نام ونشانی‌آنها در نامهٔ ارسالی ذکر شده باشد .

۸ـ ادارهٔ مجله از قبول پاکت‌هائی‌که به آنهاکسر تمبر تعلق گرفته باشد معذور است .

۹ـ مطالب و مسائل رسیده به شرط رعایت نکات فوق به ترتیبی‌که واصل می‌شود باتوجه به موضوع و مناسبت‌سال‌تحصیلی در مجله درج می‌گردد.


# یکان

## مجلهٔ ریاضیات

شمارهٔ نهم ـ سال اول

آبانماه ۱۳٤۳

هر ماه یکبار منتشر می‌شود

از انتشارات : ایران ـ مك‌گروهیل

تخت جمشید ـ چهارراه روزولت ـ شماره ۲۸۲

تلفن : ۷٥٦۸٦۳

صاحب امتیاز : عبدالحسین مصحفی

زیرنظر شورای نویسندگان

نشانی پستی : صندوق پستی ۲٤٦۳

اشتراك سالانه (۱۲ شماره) ۲۰۰ریال

تك شماره ۲۰ ریال

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود





چاپخانهٔ محمد علی علمی

# چه باید کرد؟

علم همیشه در پیشرفت و توسعه بوده است . اما سرعت این پیشرفت در قرن بیستم ، از سرعت آن در قرون گذشته بسی افزونتر است . به قول یکی از دانشمندان ، نود درصد اکتشافات علمی بشر ، از آغاز تازمان حال ، درپنجاه سال اخیر انجام گرفته است . ریاضیات نیز از این پیشرفتها بی‌نصیب نبوده است و به نظر می‌رسد که دانشجویان ودانش‌آموزان جوان برای آگاهی از این کشفیات از هر جهت اولویت دارند. چنانکه در کشور های مترقی ، آنها که فرهنگشان بر نظامی استوار است ، کلیهٔ تغییرات وتحولات علمی بلافاصله در برنامه‌ها وارد می‌شود . می گویند که دراین عصر تغییر و تحول ، معلم نباید به کلاس برود که مطالبی‌را که ده‌سال‌پیش فرا گرفته‌است‌تدریس کند، بلکه باید به کلاس برود تا مطالب تازه‌ای را که شب پیش آموخته است به محصلان منتقل سازد .

یك بررسی ساده و کوتاه در برنامه های تحصیلی کشور ما آشکار می‌سازد که اثری از این پیشرفتها در آنها نیست . آیا شایسته است که نسل جوان کشور ما از چنین پیشرفتهایی نا آگاه بماند ؟ آیادرست است که طبق برنامهٔ مصوب ، در دبیرستانهای ما همان موادی ازعلوم وریاضیات تدریس شود که یك قرن پیش جزء برنامه‌های دبیرستانی‌بوده است ؟ آیانباید درمطالب تعلیماتی‌برنامه‌های علوم وریاضیات تجدیدنظر کرد ومقدمات فهم اکتشافات تازه تری رافراهم آورد ؟ مسلماًپاسخ همهٔ این سؤالهامثبت است . اغلب کشورها بابررسیهای کامل وسریع چنین کاری را کرده ودر فکر هماهنگ ساختن مواد علمی برنامه‌های آموزشی دانشگاهی ودبیرستانی‌خودبااین پیشرفتها برآمده‌اند و گامهای بلندی نیزدراین‌راه برداشته‌اند . مانیز چه بخواهیم و چه نخواهیم باید هرچه زود تر چاره جوئی کنیم و در این راه گامهایی برداریم . اگرچند سال دیگردراین کارتأخیر کنیم ، دیگر دانش‌آموزان یا دانشجویان ما که برای ادامهٔ تحصیل به خارج می‌روند زبان ریاضیاتی را که در آنجا تعلیم داده می‌شود نخواهند فهمید .

باشرایط خاصی که دستگاه تعلیم وتربیت کشور به سبب پیروی ازنظام مرکزیت دارد، تجدید نظر در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی باید دروزارت فرهنگ انجام گیرد . امادیگر برای صاحبنظران قابل قبول نخواهد بود که تنی چند به عنوان تجدید نظر در برنامه گرد هم بنشینند وهمان مطالب موجود دربرنامهٔ فعلی را ازنظر کلاس بندی پس وپیش کنند . به‌نظرما تجدید نظر دربرنامهٔ ریاضیات دبیرستانی باید دارای دوجنبه باشد . یکی آنکه مطالب کهنه و

نالازم جای خود رابه‌مطالب‌نوولازم بدهد ودیگر آنکه نحوهٔ برداشت مطالب با توجه به زبان جدید ریاضیات تغییر یابد وقالب نوینی به خود گیرد .

معلوم نیست کـه چرا دانش آموز رشتهٔ ریاضی درسال ششم باید هندسهٔ رقومی تحصیل کند، کدزمان‌درازی‌است حتی‌از برنامهٔ‌دبیرستانی کشوری که ما برنامه‌های خودرااز آن اقتباس کرده‌ایم حذف شده است ، ولی ازفرا گرفتن احتمالات ومسائل عملی مربوط به‌آن یا تبدیل وترکیب وترتیب با آن‌همه موارد استعمال درمسائل عادی روزانه بی‌بهره بماند ؟ معلوم‌نیست که چرا در هندسه‌ای که تدریس می کنیم معتقد به پیروی ازروش استدلال قیاسی هستیم ولی جبررا به‌طور ماشینی می‌آموزیم ودانش‌آموزان رابه‌آکروبات بازی باحروف وامی‌داریم . چرا درسال اول روش نصف کردن یك پاره خط رادرهندسه بااستدلال بیان می کنیم ولی روش جذر گرفتن از اعداد رادر حساب بدون استدلال عرضه می‌داریم . آیا درست است که دانش - آموزی رشتهٔ ریاضی دبیرستان را به‌پایان رسانده باشد ولی با اصول توزیعی وشرکت پذیری واستقلال ازترتیب اعمال جمع وتفریق و ضرب وتقسیم آشنا نباشد ؟ آیا درست است که اصل استقلال ازترتیب رادرحساب استدلالی سال ششم به عنوان‌قضیه به خورد دانش آموزان بدهیم وبه اصطلاح درصدد اثبات آن نیزبرآییم !! اساساً حساب استدلالی درسال ششم برای چیست ؟ مگر نمی‌توان ازهمان ابتدا ، یعنی حتی از دبستان ، حساب را با استدلال تدریس کرد، نهایت استدلالی درخورفهم طفل . پس چه‌موقع دانش‌آموز باید طرزکاربا‌ماشینهای محاسبه وبه ویژه خط کش محاسبه رافرا گیرد ؟ آیا هنگامی که از تصاعدهای حسابی وهندسی بحث می کنیم ، نمی‌توانیم ، رشته‌هاوسریها را نیز به‌طورکلی مورد بحث قرار دهیم ؟

اینها وصدها نکتهٔ مهمتر دیگر دربارهٔ ریاضیات دبیرستانی‌وتعلیم آن، این مطلب را تأیید می کند که برنامهٔ فعلی ریاضیات‌باید به‌یکباره واژگون شود . این برنامه به قول معروف نه به درد دنیامی‌خورد ونه به درد آخرت . شایسته است که هیئتی متشکل ازاستادان و دبیران ، آنها که باجهت تغییرات نوین برنامه های ریاضیات دردبیرستانهای دنیاآشنا باشند ، از جانب وزارت فرهنگ به‌طور موظف به این‌کار گمارده شوند وروزی لااقل چندساعت ازوقت خود را به مطالعهٔ برنامه های کشورهای پیشاهنگ وتطبیق آن با شرایط خاص ایران صرف کنند وبه تدوین برنامه‌ای جامع درکادر هدفهای تعلیماتی کشور بپردازند . این تنها راهی است که می‌توان برنامهٔ کهنه وپوسیدهٔ کنونی را متناسب با انقلابی کرد که از سال ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ در صحنهٔ تعلیمات ریاضیات‌دبیرستانی به‌وقوع پیوسته است .

**جهانگیر شمس آوری**

# هفت پل کونیگسبرگ

از : لیونهارد اولر

ترجمه‌از: احمد بیرشك

در کتاب «توپولوژی» که بتازگی به‌همت سازمان انتشارات وخدمات فرهنگی «ایران مك گروهیل» ، بعنوان طلیعهٔ یك سلسله کتاب زیر عنوان «کاوش در ریاضیات نوین» ، انتشار یافته ، بحثی در بارهٔ پلهای کونیگسبرگ شده است . چون مسألهٔ « هفت پل کونیگسبرگ » از مسائل مهم است، ترجمهٔ مقاله‌ای که «لیونهارد اولر» دربارهٔ آن نوشته است از نظر خوانندگان ارجمند می گذرد .

اولر ، که از اجلهٔ دانشمندان ریاضی است ، بسال ۱۰۸۵ هـ . ش .(=۱۷۰۷م.) در شهر بال کشور سویس چشم بدنیا گشود . کار اصلی او در ریاضیات است و در رشتهٔ آنالیز ومکانیك استدلالی اکتشافات جالب کرده است. درهیأت فرضیهٔ جدیدی دربارهٔ ماه آورد و دربارهٔ اختلال حرکات سیارات مطالعاتی کرد . در رشته‌های فیزیك وشیمی و فلسفه نیز کار کرد . با اینکه در ۶۰ سالگی کور شد تا ۷۶ سالگی ، یعنی زمان مرگ دست از پژوهش برنداشت . آراگو ، ستاره‌شناس مشهور فرانسوی دربارهٔ وی گفته است :

«اولر بدون زحمت حساب می کرد ، بهمان آسانی که آدمی نفس می کشد وعقاب درمیان باد درآسمان پرواز می کند . » از او سیزده فرزند وشصت تا هفتاد مجلد بزرگ نوشته بجاماند . هنگامی که بسال ۱۱۱۳ هـ . ش . (=۱۷۳۵ م.) درسن پطرزبورگ (لنین گراد کنونی) در خدمت کاترین ، ملکه روسیه ، بسر می‌برد مسألهٔ هفت پل کونیگسبرگ بوی عرضه شد ووی از این مسألهٔ تفریحی یك قاعدهٔ مهم ریاضی بیرون کشید و مقاله‌ای راکه اینك ترجمهٔ آن از نظرشما می گذرد به‌فرهنگستان علوم روسیه تقدیم کرد .

دانش‌آموزان دبیرستانی درهندسهٔ فضایی با رابطهٔ معروف اولر که‌بین‌تعدادرؤوس و وجوه وپالهای چند وجهی‌هاوجوددارد آشناشده‌اند. این‌رابطه‌عبارت است از: ۲+ تعداد یالها = تعداد وجوه + تعدادرؤوس .

دکارت ، ریاضی‌دان مشهور فرانسوی هم ۹۲ سال پیش ازاولر باین رابطه برخورده بود .

---

۱ ـ شاخه‌ای از هندسه که با اندازه ها سروکار دارد درزمان گذشته با نهایت علاقه مطالعه شده، اما شاخهٔ دیگری تاکنون ناشناخته مانده است . **لایب‌نیتز** برای نخستین بارازآن سخن گفته وآن‌را «هندسهٔ موضعی(۱)» نامیده است . این نوع هندسه با روابطی سر وکار دارد که فقط به «موضع» شکل بستگی دارند ودر آن مطلقاً اندازه‌ها مورد توجه نیست و محاسبهٔ کمیات مداخله ندارد .

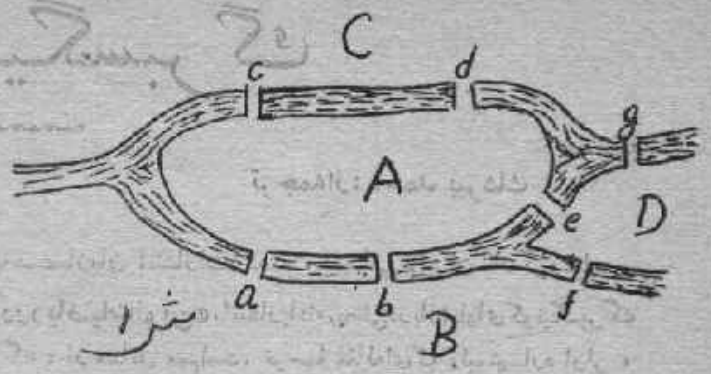
اما تاکنون‌از مسائلی که‌مربوط به‌این شاخهٔ هندسه‌هستند یا روشی که برای حل‌آنها لازم است تعریف رضایت‌بخشی نشده است . اخیراً مسأله‌ای‌طرح شده که مسلماً مربوط به‌هندسهٔ است اما چون هیچ‌روی اندازه‌ها را درآن‌دخالتی نیست ومحاسبات کمی‌درآن مورد پیدا نمی‌کند. من تردید بخود راه ندادم که آن را جزءهندسه‌موضعی بدانم ، خاصه که حل مسأله فقط‌منوط بمطالعه در موضع بود وبه‌محاسبه احتیاجی نداشت . در این نوشته من روشی راکه برای حل این گونه مسائل کشف کرده‌ام بیان می کنم، باشدکه بعنوان مثالی ازهندسهٔ موضعی‌مورداستفاده واقع گردد .

۲ـ این مسأله ، که گمان می کنم کاملا معروف باشد ، باین صورت بیان می‌شود : در شهر **کونیگسبرگ، پروس** جزیره‌ایست بنام «**کنایب‌هف**» که دو شاخهٔ رود «**پره‌گل**» در اطراف آن جریان دارند، این جزیره را A می‌نامیم .هفت پل a و b و c و d و e و f و g بر روی دوشاخهٔ رود ساخته شده‌اند . مسأله این‌است که آیا مسیری می‌توان یافت که‌ازروی هرهفت پل بگذرد واز روی هریك از آنها بیش‌از یك بارعبور نکند ؟ شنیدم که عده‌ای منکر امکان وجود چنین مسیری بودند و عده‌ای هم دروجود آن تردید کردند اماهیچکس عقیده‌نداشت که این‌کار عملا مقدور باشد.

---

۱ - Geométric de position

یا Geometria situs



شکل ۱

من بر اساس آنچه گفتم این مسأله کلی را برای خود طرح کردم : بهرصورتی که رود وشاخه‌های آن باشند و برروی آنها هرچند پل ساخته شده باشد، آیا ممکن است کسی طی راه پیمایی از روی همهٔ این پلها بگذرد و از روی هریك فقط یك بار عبور کند ؟

۳ـ مسأله هفت پل کونیگسبرك رامی‌توان با تنظیم جدولی حل کرد که درآن همه راههایی که امکان پذیر باشد جمع شده باشند و با تحقیق و آزمایش راهی را که جواب مسأله باشد (اگر چنین راهی وجودداشته باشد ) پیدا کرد . اما این روش بسبب تعداد زیادی راههایی که بنظر می‌رسند بسیار خسته کننده و دشوار است و اگر عدهٔ خیلی بیشتری پل وجود داشته باشد این روش را بهیچ روی نمی‌توان بکاربرد .

هرگاه طریقه‌ای راکه شرح دادم تجزیه کنیم، به تعداد زیادی مطالب جزئی برمی‌خوریم که با مسأله ارتباطی ندارند و بی‌شك به همین دلیل است که این روش تا این حد سنگین و غیر عملی است . پس من این روش را معتبر نشمردم و در پی یافتن روشی با هدف محدودتر برآمدم ، یعنی روشی که تعیین کند آیا مسیری که باشرایط مسأله وفق‌دهد ممکن الحصول است. گمان می‌کنم که از این راه که سهل‌تر است بتوان آسانتر به مقصود رسید.

۴ـ پایهٔ روش من برطرز بیان خاص و مناسبی است که در این نوع مسأله بکار می‌برم . برای نشان دادن زمینها یا ناحیه‌هایی که به وسیلهٔ رود از هم جدا شده‌اند حروف بزرك A و B و C و D و... رابکار می‌برم . وقتی کسی باگذشتن از پل a یا b از ناحیهٔ A به B برود این نقل مکان را باعلامت AB نشان می‌دهم که در آن حرف اول (دست چپ) نمایندهٔ ناحیه‌ایست که حرکت از آن آغاز گردیده و حرف دوم (دست راست) ناحیه‌ای را نشان می‌دهد که پس از گذشتن از پل به آن وارد شده است . اگر رهرو ما با عبور از پل از B به D برود مسیرش را با BD نمایش می‌دهم . اما اگر هردوحرکت پی‌درپی انجام شود مسیررا به ABD نشان‌می‌دهم . دراین‌نمایش حرف وسط B درعین حال نمایندهٔ ناحیه‌ایست که حرکت‌اول به آن منتهی می‌شودوناحیه‌ای که حرکت دوم‌ازآن آغازمی گردد. پس تکرارB لازم نیست .

۵ـ همچنین اگر رهرو ما باعبور از پل g از D به C برود سه عبور پیاپی را باعلامت ABDC نمایش می دهم .این چهار حرف نشان‌می‌دهندکه مسافر از A حرکت کرده ونخست به B ، سپس به D و سرانجام به C رسیده است . وچون‌این چهار ناحیه با آب از هم جداشده‌اند، مسافر بناچار ازسه پل گذشته است . عبور از چهار پل باپنج حرف مشخص می‌شود و بطورکلی اگرمسافر ازچند پل بگذرد مسیر او با حروفی مشخص می‌گردد که تعدادشان از عدهٔ پلها یکی بیشتر است ؛ مثلا برای عبور از هفت‌پل هشت‌حرف لازم‌است.

۶ـ در این روش مرا باپلی که از آن عبور شده است کاری نیست ، یعنی اگر بین دوناحیهٔ A و B چند پل وجود داشته باشد، AB مبین رفتن از A به B است و بستگی به پلی که از آن عبور شده ندارد . باین ترتیب اگر مسیری یافته شود که در آن از هرهفت پل کونیگسبرك و از هریك فقط یك بارگذر شود مسیر باهشت حرف نمایش داده می‌شود و ممکن است که در این مسیر ترکیب حروف A و B (یعنی AB یا BA) دوبار وارد شود زیراکه دو پل a و b دو ناحیه را بهم مربوط می‌کنند. همچنین‌ممکن است که ترکیب AC تکرار گردد، اما AD و BD و CD هریك فقط یك بار بکار می‌رود.

۷ـ مسأله‌ای که باقی می‌ماند این است که آیا ازچهار حرف A و B و C و D می‌توان یك رشتهٔ هشت حرفی تشکیل داد که در آن‌تمام ترکیبهای یادشده به تعداد لازم وارد شوند. پیش از اینکه برای تحقیق در بارهٔ امکان تحقق چنین امری بکوشیم ، بهتر است ببینیم‌نظراً حصول چنین امری امکان دارد یا نه . زیراکه اگر ثابت شودوجود این امر امکان پذیرنیست هرکوشش در راه رسیدن به آن عبث و بیهوده است . باین سبب‌من درپی کشف قاعده‌ای برآمدم که برطبق آن بتوان دراین مسأله ومسائل مشابه بی‌زحمت ودردسر درامکان ترکیب حروف به‌نحو مطلوب تحقیق کرد.

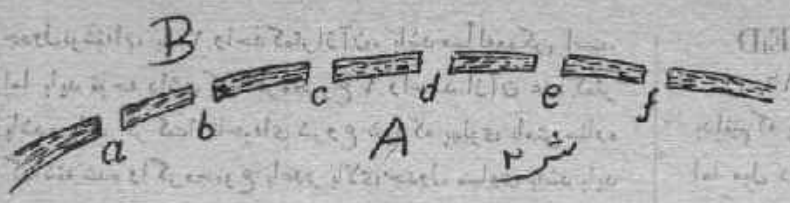
۸ـ به منظور یافتن چنین قاعده‌ای من یك منطقهٔ تنهای A فرض‌می‌کنم که پلهای متعدد به آن منتهی می‌شوند (شکل ۲). از این پلها نخست فقط a را در نظر می گیرم . اگر کسی از این پل بگذرد یا پیش از گذشتن از آن در A بوده است و یا پس از عبور از آن به A وارد می‌شود . در هرحال باترتیبی

که برای نمایش عبور از پل دادیم حرف A یک‌بار در نوشتن وارد میشود. اگر سه پل a و b و c را در نظر بگیریم و کسی یک‌بار از هر سه عبور کند، حرف A دو مرتبه در نوشتن مسیر بکار میرود، خواه آن کس از A حرکت کرده باشد یا از ناحیهٔ دیگر. اگر مسافر از پل بگذرد، حرف A در مسیر او سه بار وارد می‌شود. بطور کلی اگر عدد پلهائی که مسافر از آنها میگذرد فرد باشد، ۱ به آن بیفزائید و حاصل جمع را نصف کنید، عددی که بدست می‌آید تعداد دفعاتی است که حرف A در مسیر تکرار می‌شود.

۹ـ حالا برمی‌گردیم به مسألهٔ کونیگسبرگ (شکل ۱). چون آنجا بوسیلهٔ پنج پل میتوان به جزیرهٔ A وارد یا از آن خارج شد، در عبارتی که مسیر مطلوب را تعیین میکند حرف A باید سه بار نوشته شود. حرف B باید دوبار تکرار گردد، زیرا که سه پل به ناحیهٔ B منتهی میشود. و نیز حرفهای D و C باید هریك دوبار تکرار شود. بنابراین حروفی که باید در نوشتن مسیر بکار روند (وچنانکه دیدیم عددشان ۸ است) باید از سه A، دو B، دو D و دو C تشکیل شوند. اما ممکن نیست در یك رشتهٔ هشت حرفی نه حرف داشت. پس واضح میشود که عبور از هفت پل کونیگسبرگ به نحوی که خواسته شده است مقدور نیست.

۱۰ـ با بکاربردن این روش درصورتی که تعداد پلهایی که به ناحیهٔ خاصی منتهی می‌شوند فرد باشد، همیشه می‌توانیم بدانیم که آیا می‌توان با یك راه پیمایی از روی همهٔ آنها گذشت و از روی هریك فقط یك‌بار عبور کرد. تحقق این امر وقتی میسر است که عدد پلها بعلاوهٔ ۱ مساوی باشد با مجموع اعدادی که تعیین می‌کنند هرحرف به تنهایی چندبار ممکن است تکرار شود. اما اگر عدد مذکور از عدد پلها بعلاوهٔ ۱ بزرگتر باشد مسأله جواب ندارد، مانند مسألهٔ کونیگسبرگ. قاعده‌ای که در قسمت ۸ گفتیم وتعیین می‌کند که برحسب تعداد پلهایی که به ناحیهٔ A منتهی می‌شوند حرف A در تعیین مسیر چندبار تکرار می‌شود اعم است از وقتی که پلها A را بیك منطقه دیگر یا چند منطقه دیگر مربوط سازند، زیرا که برای وضع قاعده فقط ناحیهٔ A را در نظر گرفتیم.

۱۱ـ وقتی که عدد پلها زوج باشد، باید ببینیم که حرکت را از ناحیهٔ A شروع می‌کنیم یا از ناحیهٔ دیگر. مثلا اگر دو پل داشته باشیم و حرکت از A شروع شود، حرف A دوبار در مسیر وارد می‌شود: یکی برای بیان حرکت از A و عبور از یك پل و دومی برای عبور از پل دیگر و ورود به A. اما اگر حرکت از ناحیهٔ دیگر شروع شود، حرف A در مسیر فقط یك‌بار نوشته می‌شود که درعین حال مبین ورود به A از یك پل و خروج از آن از پل دیگر است.



شکل ۲

۱۲ـ حالا حالتی را در نظر می‌گیریم که تعداد پلها ٤ باشد. اگر حرکت از ناحیهٔ A شروع شود، حرف A در مسیر سه بار تکرار می‌شود و اگر از ناحیهٔ دیگر آغاز شود، فقط دوبار. اگر عدد پلها ٦ باشد، درصورت حرکت از ناحیهٔ A حرف A چهار بار تکرار می‌شود و درصورت حرکت از ناحیهٔ دیگر فقط سه بار. بطور کلی اگر عدد پلها زوج باشد و حرکت از ناحیهٔ A شروع نشود، عدهٔ دفعاتی که حرف A در مسیر وارد می‌شود نصف عدهٔ پلها است، و اگر از ناحیهٔ A شروع شود نصف بعلاوهٔ ۱ عدهٔ آنها.

۱۳ـ هرمسیری بناچار از ناحیه‌ای شروع می‌شود. عده دفعاتی را که حرف نمایندهٔ هرناحیه در مسیر وارد می‌شود از روی تعداد پلهایی که به آن ناحیه منتهی می‌شوند باین ترتیب معین می‌کنیم: اگر عدد پلها فرد باشد، ۱ به آن افزوده حاصل را تقسیم به دو می‌کنیم؛ و اگر عدد پلها زوج باشد، همان را بر ۲ قسمت می‌نمائیم. هرگاه مجموع عددهایی که به این نحو بدست می‌آیند با عدد پلها بعلاوهٔ ۱ مساوی باشد، راه‌پیمایی به نحو مطلوب میسر است مشروط به آنکه حرکت از ناحیه‌ای آغاز شود که عدد پلهای منتهی به آن فرد باشد؛ اما اگر مجموع مذکور از عدد پلها بعلاوهٔ ۱ باندازهٔ یك واحد کمتر باشد (یعنی مساوی عدهٔ پلها باشد)، برای امکان حل مسأله باید حرکت را از ناحیه‌ای شروع کرد که تعداد پلهای منتهی به آن زوج باشد، زیرا که دراین صورت هم به مجموع ۱ علاوه می‌شود.

۱٤ـ برای تعیین آنکه وقتی که تعداد رودها و پلها هرچه باشد درچه صورت مسیر از روی هرپل فقط یك‌بار می‌گذرد طرز عمل من به این نحو است: ۱) ناحیه‌هایی را که از یکدیگر بوسیلهٔ آب جدا می‌شوند به حروف A و B و C و ... متمایز میسازم. ۲) به عدهٔ پلها ۱ می‌افزایم و حاصل جمع را یادداشت میکنم. ۳) زیراین عدد حروف A و B و C و ... را درستونی زیرهم نوشته روبروی هریك عدد پلهایی را که به آن منتهی میشوند ثبت میکنم. ٤) پهلوی هرحرفی که عدد روبروی آن زوج باشد علامت ستاره میگذارم. ٥) روبروی هرعدد زوج نصف آن و روبروی هرعدد فرد نصف بعلاوهٔ ۱ آن را می‌نویسم. ٦) عددهای ستون آخر را جمع می‌کنم، اگر مجموع مساوی عددی که بالای

جدول نوشته‌ام، یا ۱ واحد کمتر از آن، باشد مسأله ممکن است. اما باید توجه داشت که اگر مجموع ۱ واحد از آن عدد کمتر باشد، باید حرکت از ناحیه‌ای شروع شود که پهلوی نامش ستاره گذاشته شده و اگر مجموع با عدد بالای جدول مساوی باشد باید شروع حرکت از ناحیه‌ای که جلو اسمش ستاره نیست باشد.

برای مسأله کونیگسبرك این جدول را تنظیم می‌کنیم:

عدد پلها : ۷ $\quad$ ۷+۱=۸

| | | |
|---|---|---|
| A | ۵ | ۳ |
| B | ۳ | ۲ |
| C | ۳ | ۲ |
| D | ۳ | ۲ |
| | | ۹ |

مجموع ستون آخر از ۸ بزرگتر است، پس مسأله جواب ندارد و راه‌پیمایی به نحو مطلوب میسر نیست.

۱۵ـ درمثال دیگر دو جزیره را درنظر میگیریم که چهار رود، مطابق شکل ۳، آنهارا درمیان گرفته‌اند و پانزده پل a و b و c و... نواحی مختلف را بیکدیگر مربوط میسازند. باز هم مسأله این است که آیا میتوان مسیری تعیین کرد که ازروی هر ۱۵ پل بگذرد اما از روی هیچیك بیش از یك بار عبور نکند.

۱) کار را با گذاشتن نامهای A، B، C، D، E، F بر روی نواحی آغاز میکنیم. بعدد پلها یك می‌افزایم و عدد ۱۶ را در بالا می‌نویسم.

۲) حروف A تا F را درستونی زیر ۱۶ یادداشت میکنیم و روبروی هریك عدد پلهایی را که به آن منتهی میشوند مینویسیم، مثلا ۸ جلو A، ٤ جلو B و ....

٤) حرفهایی را که عدد روی آنها زوج است باعلامت ستاره ممتاز میکنیم. ٥) درستون سوم نصف هر عدد زوج یا نصف بعلاوهٔ ۱ هر عدد فرد را مینویسیم.

٦) عددهای ستون سوم را جمع میکنیم، مجموع ۱٦ است و با عددی که در بالای جدول نوشته شده است یکی است، پس مسأله ممکن است مشروط به آنکه حرکت از یکی از نواحی بی‌ستارهٔ (D یا E) آغاز شود. مسیر را وقتی که از ناحیهٔ E شروع شود با

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ۱٦ | | |
| * | A | ۸ | ٤ |
| * | B | ٤ | ۲ |
| * | C | ٤ | ۲ |
| | D | ۳ | ۲ |
| | E | ٥ | ۳ |
| * | F | ٦ | ۳ |
| | | | ۱٦ |

نام پلی که باید بین هردو ناحیه ازروی آن گذشت مینویسیم:

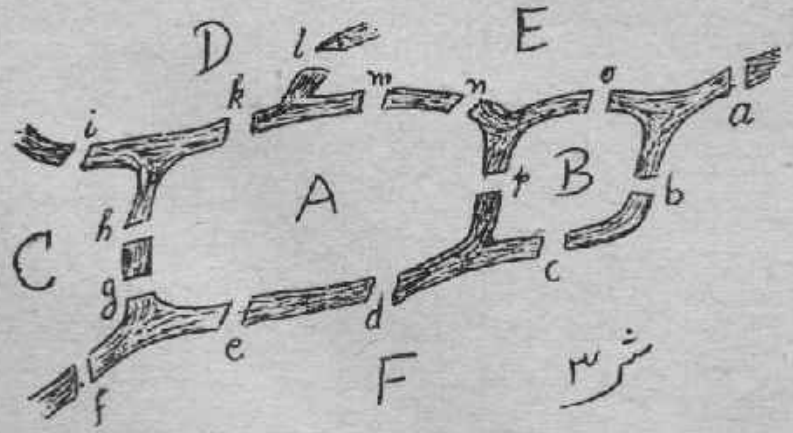
$E_aF_bB_iF_dA_eF_fC_gA_bC_iD_kA_mE_nA_pB_oE_lD$

۱٦ـ بااین روش حتی در پیچیده‌ترین حالتها می‌توانیم بدانیم که یافتن مسیری برای حل مسأله ممکن هست یا نیست. اما میل دارم روش خیلی ساده تری را بیان کنم که با توجه به چند نکته خیلی به آسانی از روش قبلی نتیجه می‌شود.

از جمله اینکه مجموع عددهای نمایندهٔ پلهای منتهی به نواحی مختلف، که درستون دوم روبروی حروف A و B و... ثبت شده‌اند، دوبرابر تعداد پلها است، زیرا که درستون مذکور هر پل برای دومنطقه، یعنی دوبار، به حساب آمده است.

۱۷ـ با درنظر گرفتن این نکته متوجه می‌شویم که مجموع عددهای ستون دوم همیشه زوج است، زیرا که نصف آن مساوی عدهٔ پلها است. پس ممکن نیست که فقط یکی از عددهای روبروی A و B و C و ... فرد، یعنی مثلا ۱ یا ۳ یا ٥ یا ...، باشد. اگر یکی از این عددها فرد باشد حتماً یك عدهٔ زوج از آنها، یعنی دو یا چهار یا ... عددشان باید فرد باشد تا مجموعشان زوج شود. درمثال کونیگسبرگ هرچهار عدد و در مثال دوم دو عدد روبروی E و D فرد هستند.

۱۸ـ چون مجموع عددهای روبروی A و B و... مساوی دوبرابر عدهٔ پلها است واضح است که اگر ۲ به آن بیفزائیم و حاصل را تقسیم بردو کنیم خارج قسمت مساوی عددی می‌شود که در بالای جدول نوشته شده است. وقتی همهٔ عددهای ستون دوم زوج باشند و نصف هریك را درستون سوم نوشته باشیم مجموع



شکل ۳

عددهای ستون سوم یك واحد کمتر از عدد بالای جدول است. دراین حال بهرصورت و از هرناحیه که حرکت را آغاز کنیم راه‌پیمایی میسر است به‌دلیل آنکه عدد پلها برای هرناحیه زوج است و این همان چیزی است که مسأله می‌خواهد. در کونیگسبرگ نمی‌توانستیم مسأله را حل کنیم بشرط آنکه ازروی هرپل دوبار بگذریم، یعنی درحقیقت هر پل را به دوپل تقسیم کنیم تا عددشان زوج شود.

بقیه درصفحهٔ ٦۳

(بقیه از شمارهٔ قبل)

# خدمات ریاضیدانان ایرانی

گردآورنده : **حسین هاشمی** ، دبیرریاضی دبیرستانهای آبادان

چهارمین دانشمند بزرگ ایرانی **ابوریحان بیرونی** است که در دوران جوانی در نزد قابوس و شمگیر در **گرگان** بود . پس از آن در خدمت محمود غزنوی به **افغانستان و هند** رفت و چهل سال درهندوستان بفرا گرافتن علوم مختلفه عصر خویش پرداخت . **بیرونی** در میان دانشمندان‌عصر خویش شهرتی بسزا داشت واهالی مغرب زمین او را جزء بزرگترین دانشمندان و فلاسفهٔ جهان بشمار میآورند . تألیفات و تصنیفات او بسیار و تقریباً شامل همهٔ علوم ازقبیل فلسفه، فیزیك، زمین‌شناسی، ریاضی ونجوم میباشد . فرضیهٔ قوهٔ جاذبهٔ زمین و حرکات وضعی و انتقالی آن ازاوست که شش‌قرن‌بعدبوسیلهٔ **کپرنیك** و **نیوتون** به اثبات رسیده است . **بیرونی** برای اولین بار وزن مخصوص دوازده جسم را اندازه گیری کرد و جدولی برای‌آنها ترتیب داد . شعاع کرهٔ زمین را اندازه گرفت (۱) و بالاخره شیب مدار خورشید را نسبت‌به سطح استوا با چنان دقتی حساب کرد که بانبودن وسائل دقیق علمی درآن‌زمان یکی از شاهکارهای علم ریاضی بشمارمیرود (۲) .

خوشبختانه قدر او در جهان دانش مجهول نماند . اکثر مستشرقین اروپائی و ایران شناسان آمریکائی در نوشته‌های خود از او به احترام یاد کرده‌اند. ذکر آن اظهار نظرهااز حوصلهٔ این مقاله خارج و بهتراست که صحبت از بیرونی را بهمین جا خاتمه دهیم وقدم درسیرتکامل علم جبربگذاریم .

این علم که در گذشته هسته‌های اولیهٔ آن وسیلهٔ دانشمندان شاعرپیشهٔ هند پایه گذاری شده بودچنانکه‌دیدیم بهمت **خوارزمی** برودخانه عظیمی از دانش بشری تبدیل گردید و در بستر خود افکار دانشمندان ملل مختلف اسلامی بخصوص ایرانیان را باخود همراه کرد . وقتی که این رود عظیم باافکار و اندیشه های فیلسوف ، شاعر، ریاضی دان ایرانی **عمرخیام** تلاقی کرد دارای چنان ابهت و عظمتی شد که تاقرن ۱۷ زمینهای پهناور دوستداران دانش رابتنهائی آبیاری میکرد.

اگر این قول **وایراشتراس** فیلسوف بزرگ آلمانی را بپذیریم که میگوید : «شایسته‌ترین ریاضیدان کسی است که کمی هم شاعر باشد» ، بیتین **خیام** در قلهٔ پرعظمت دانش قراردارد .

از مطالعهٔشرح‌حال و ازفحوای رباعیات حکیمانه او چنین مستفادمیشود که خیام مردی منزوی و گوشه‌نشین بوده‌وهرگز باکسی انس و الفت نداشته است . مورخین او را بدلیل اینکه آثار زیادی از خود باقی نگذاشته است به بخل وحسد متهم کرده‌اند . در صورتی که در واقع خیام بعلت وسعت اندیشه و دارا بودن مشرب صوفیانه معلومات خود را در مقابل مجهولات دانش بشری خرد و ناچیز میشمرده و آنها را قابل عرضه نمیدانسته است . با این حال کتاب **جبرومقابله‌ای** که از او باقیمانده است نمونهٔ بسیار باارزشی از نبوغ فکری و قدرت خلاقهٔ او در تهیه و تنظیم مطالب علمی میباشد . این کتاب، که در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم بوسیلهٔ **وپکه** مستشرق معروف فرانسوی چاپ و منتشر شده است ، دارای چنان دقت ومهارتی در دسته‌بندی و حل‌معادلات درجهٔ دوم و سوم است که اگر قبل از قرن هفدهم

دراروپا رایج میشد، **دکارت** و **توماس بیکر** محتاج بکشف مجدد آنها نمیشدند.(۳)

خدمت دیگر **خیام** که باید از آن به افتخار یاد کرد وضع **تاریخ جلالی** است. مطابق نوشتهٔ دایرةالمعارف اسلامی در سال ۱۰۷٤ میلادی عید نوروز مصادف میشد با سیزدهم ماه اسفند بدین مناسبت هیئتی از منجمان اسلامی تحت نظر عمر خیام مأمور اصلاح تقویم اسلامی میشوند و آن تقویم را به پاس قدردانی به نام پادشاه عصر، سلطان **جلال‌الدین ملکشاه**، **جلالی** مینامند. این تقویم که درهر ۳۷۷۰ سال فقط یك روز با حرکت حقیقی خورشید اختلاف دارد بمراتب از تقویم **گرگوار** که پانصد سال بعد از آن عیسویان تنظیم کردند دقیقتر است چه تقویم گرگوار در هر ۲۲۳۰ سال یك روز اختلاف پیدا میکند.

بالاخره آخرین اکتشاف علمی خیام که مستشرقین روسی آنرا عنوان کرده‌اند بسط دوجمله‌ای $(x+a)^n$ که تاکنون اختراع آنرا به نیوتن نسبت میدادند و همچنین مثلث متشکل از ضرایب این بسط است که در تاریخ ریاضیات به‌نام **مثلث پاسکال** معروف است. واز این پس به نام **مثلث خیام** خوانده خواهد شد.

**خیام** به اینکه می‌توان هندسه‌هایی غیر از هندسه اقلیدسی بنا کرد واقف بوده است چه از اوست که نوشته است: «مطمئنم که بدون قبول **اصل اقلیدس** می‌توان هندسهٔ دیگری به‌وجود آورد» اما اینکه چرا دنبال کار را رها کرده و چنین هندسه‌ای بنیاد نکرده است معلوم نیست.

ششمین دانشمند بزرك ایرانی که ما و جهانیان همه مدیون‌وی‌هستیم **خواجه‌نصر الدین‌طوسی** است. او که در اوایل قرن دوازدهم میلادی در شهر **طوس** به دنیا آمدمقدمات‌علوم‌ریاضی ونجوم را نزداستادان عصرخویش بیاموخت و در سن بیست و دو سالگی پس از فراغ از تحصیل اجازهٔروایت گرفت.

**خواجه‌نصیر الدین** از بزرگترین دانشمندان عصر خویش بود در حدود پنجاه جلد کتاب در رشته‌های‌مختلفهٔ علوم نوشته است که از بین آنها پنج جلد مربوط به علوم ریاضی و نجوم است. نخستین کسی است که علم مثلثات را بعنوان یك دانش مستقل موردمطالعه‌قرار داد وبدان‌وسعت فوق‌العاده‌بخشید. کتاب او راجع به این علم**شکل القطاع** نام دارد که مانند کلیهٔ دانشمندان سلف خود آنرا به زبان عربی نوشته است. در این کتاب روابط بین اجزاء شش گانهٔ مثلث با تعاریفی جامع و مانع بیان شده و موارد استعمال آنها نیز ذکر گردیده‌است. کتاب شکل‌القطاع دراواخر قرن نوزدهم بزبان فرانسه ترجمه شده وبامتن عربی آن در **قسطنطنیه** بچاپ رسیده است.

شاید ذکر این نکته بیمورد نباشد که در کتب یونانی هیچ‌یك ازروابط مثلثاتی مورداستفاده قرارنگرفته‌است. هندیان نیز جز سینوس نسبتهای دیگر مثلثاتی را نمی‌شناختند. بدین‌ترتیب اختراع علم‌مثلثات از شاهکارهای علمای اسلامی است که زحمات آنان وسیلهٔ خواجه نصیرالدین طوسی جمع‌آوری وبدانش جدیدی بنام مثلثات تبدیل‌شده‌است.

البته خواجه علاوه برمثلثات در نجوم نیزدست داشت و رصدخانه مشهور مراغه را بدستور هلاکوخان مغول بنا کرد مطابق گفتهٔ مورخان این رصد خانه دارای کتابخانهٔ بسیار بزرگی شامل چهارصد هزارجلد کتاب بوده است. به عدد چهار هزار خوب توجه کنید و بخاطر بیاورید که در آن زمان صنعت چاپ اختراع نشده بود.

بالاخره آخرین ریاضی دان مشهورایرانی که ضمناً بزرگترین آنها نیزمیباشد استاد **غیاث‌الدین‌جمشید کاشانی** است که ازدانشمندان بنام‌قرن‌پانزدهم‌بوده وآثاراو در ریاضیات مایهٔ تحسین واعجاب کلیهٔ دانشمندان امروزی‌میباشد. مهمترین آنها دو کتاب بنامهای **رسالهٔ محیطیه و مفتاح الحساب** است که استاد در آنها برای اولین بار در

تاریخ بشری بکشف و استعمال کسرهای اعشاری می پردازد .

متأسفانه اروپائیان اختراع کسر اعشاری را به **فرانسواویت** فرانسوی یا به **سیمون‌ستون** بلژیکی نسبت‌میدهند. با توجه باینکه **جمشید کاشانی** زماناً ۱۵۶ سال از **ویت** فرانسوی و ۱۶۲ سال از **ستون** بلژیکی قدیمی تر بوده است این قضاوت اروپائیان جز بعدم اطلاع یا تعصب بچیز دیگری تعبیر نمی گردد . به ویژه که نسخه های خطی کتب فوق هم اکنون در کتابخانه های معتبر دنیا موجود است . و کتاب مفتاح‌الحساب بچاپ نیز رسیده است . و اما این‌انتقاد بخود ما بیشتر از خارجیها وارد است در هیچ یك از کتب درسی موجود در کشورنامی از **غیاث الدین جمشید** برده نشده و یقیناً بعضی از شما خوانندگان گرامی نیز او را نمی شناسید .

دیگر از کارهای مهم **غیاث الدین جمشید** محاسبهٔ عدد π است این عدد که حتی اطفال دبستانی با آن آشنا هستند و در محاسبات خود آنرا بکار میبرند سرگذشت جالب و شنیدنی دارد :

از دو هزارسال قبل ازمیلاد بشر پی برده بود که نسبت محیط هردایره برقطر آن ازعدد ۳ بیشتراست و از این رو دانشمندان‌ریاضی کوشش میکردند که مقدارحقیقی آنرا پیدا کنند دراین راه مغزهایی مانند **اقلیدس ارشمیدس** از یونانیان **آریاباتا** از هند و **چوشنگه شیه** از چین و بالاخره **خوارزمی - ابوالوفا - و بیرونی** از ایران زحمات فراوانی کشیدند که حاصل رنج آنها منجر میشود به محاسبهٔ عدد پی تا دو رقم اعشار بمعنی ۳٫۱۴ در حقیقت همان که اطفال دبستانی ما آنرا حفظ دارند .

**استاد غیاث الدین جمشید** ضمن یادآوری خدمات آنان متذکرمیشود که چون این اعمال مختل بود خواستم عدد π را با چنان دقتی حساب کنم که اگرمنظور محاسبهٔ دایره‌ای باشد که قطرش ۶۰۰ هزار برابر قطرزمین فرض شود اختلاف محاسبه از مقدار حقیقی ازضخامت یك مو کمتر باشد .

پس از ذکر این مقدمه استاد بمحاسبهٔ عدد π میپردازد که جزئیات آن موضوع کتابی است بنام رسالهٔ محیطیه که در پیش نامی ازآن بردیم.

خوشبختانه نسخهٔ اصلی‌این کتاب بخط خودجمشید هم‌اکنون در کتابخانهٔ‌آستان رضوی درمشهد موجود است . در این کتاب **غیاث الدین جمشید** با یك روش مخصوص که خود واضع آنست مقدار عدد π را تا شانزده رقم اعشار محاسبه کرده است . این دقت درمحاسبه از لحاظ علمی در حدود دو قرن پس از وی بی رقیب بوده است (٤)

**جمشید کاشانی** کتابی نیز در نجوم نوشته است که نسخهٔ خطی‌آن در کتابخانه **دانشگاه پرینستون** در شهر پرینستون از ایالت نیوجرسی آمریکا می باشد .

امیدوارم که ذکر گذشتهٔ درخشان ایران ما را بسعی و کوشش بیشتری وادار کند تا مقام ایران در بین کشورهای متمدن جهان آنچنانکه درخور و متناسب با سابقهٔ پردرخشان اواست بدست آید . به امید آنروز

---

۱ - فرمولی که بیرونی برای محاسبهٔ شعاع زمین بکاربرده $R=h\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

۲ - مقدارآنرا بیرونی ۲۷٫۳۵ حساب کرده که اندازه حقیقی‌آن ۲۷٫۲۳ است .

۳ - خیام و اکثرریاضی دانان اسلامی بحل‌هندسی معادلات درجهٔ دوم وسوم‌آشنائی داشتند و اغلب‌آنها را با استفاده از مقاطع مخروطی حل میکردند .

٤ - عددی‌راکه‌استاد غیاث‌الدین جمشید تاشانزده رقم‌بعدازممیز برای π بدست‌آورده ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲ ست

# آیا می دانید که

## π تا ۱۰۰،۲۶۵ رقم بعد از ممیز حساب شده است ؟

**دانیل شنکس** و **ژان ورنچ** مقدار π و e را تا ۱۰۰۲۶۵ رقم بعداز ممیز باماشین آی، بی،ام، سیستم ۷۰۹۰ حساب کرده‌اند . این محاسبه دربیست ونهم ژوئیه سال ۱۹۶۱ درنیویورك انجام گرفته است . مدتی که صرف محاسبهٔ π شده ۸ ساعت و ۴۳ دقیقه بوده است ، درحالی که محاسبهٔ e فقط ۲٫۵ ساعت وقت لازم داشته است .

قبل ازآنکه بگوییم چنین محاسباتی اصولاً چرا انجام میگیرد بد نیست نظری بگذشته دراین مورد بیندازیم .

**ارشمیدس** مقدار π رابین $3\frac{1}{7}$ و $3\frac{10}{71}$ معین کرد . مصریها مقدارآنرا ۳٫۱۶ حساب کرده بودند . یکی ازمنجمان چینی به نام **تسوچانگ چیه** کسر ساده‌ای درقرن پنجم کشف کرد که مقدار π راتا ۶ رقم بعد از ممیز به دقت معین می‌کرد :

(۱)

$$\frac{355}{113} = 3{,}141592(9)$$

**غیاث‌الدین جمشید کاشانی** یکی‌ازریاضیدانان برجستهٔ ایرانی که دراین شماره از اوبادی شده است درقرن پانزدهم میلادی π را تا شانزده رقم بعداز ممیز حساب کرد . جدول زیرین شامل نام کسانی‌است که به محاسبهٔ π دست زده‌اند .

| نام | سال | تعداد رقمهای بعد ازممیز |
|---|---|---|
| آبراهام شارپ | ۱۶۹۹ | ۷۲ |
| فوتنتدولانبی | ۱۷۱۹ | ۱۲۷ |
| ژرژون وگا | ۱۷۹۴ | ۱۴۰ |
| ناشناس | اواخرقرن‌هیجدهم | ۱۵۲ |
| ویلیام راترفورد | ۱۸۴۱ | ۲۰۸ |
| و . لهمان | ۱۸۵۳ | ۲۶۱ |

درتعداد ارقام بعداز ممیز بیشترازهمه **ویلیام شینکس** پیش رفته است . وی ازسال ۱۸۵۳ تا ۱۸۷۳ ، مدت ۲۰سال، به‌کار محاسبهٔ π مشغول بود وسرانجام تا ۷۰۷ رقم بعد از ممیز آن‌راحساب کرد . امادرسال ۱۹۴۵، **د.ف. فرگوسن** معلوم ساخت که شنکس ضمن محاسبهٔ خود در پانصد وبیست وهشتمین رقم بعداز ممیز اشتباه کرده است .

درسال ۱۹۴۷ **ژان ورنچ** و **فرگوسن** ، π راتا ۸۰۸ رقم بعداز ممیز حساب کردند که به اندازه‌ای که درمحاسبهٔ e پیش‌رفته بودند برسند .

عمدهٔ این‌محاسبات، من‌جمله‌محاسبهٔ شنکس‌وفرگوسن به‌وسیلهٔ اعمال برروی کاغذ واحیاناً ماشینهای سادهٔ محاسبه انجام گرفته است . امابس ازاختراع ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی ، آنها را به‌کارمحاسبهٔ π گرفتند ودراین کار چنین پیش رفتند :

| تعداد رقمهای بعد از ممیز | تاریخ |
|---|---|
| ۱۱۲۰ | ژوئن ۱۹۴۹ |
| ۲۰۳۷ | سپتامبر ۱۹۴۹ (در ۷۰ساعت) |
| ۳۰۹۳ | نوامبروژانویهٔ ۱۹۵۴ (فقط در۱۳دقیقه) |
| ۱۰۰۰۰ | ژانویهٔ ۱۹۵۸ (در ۱ ساعت و۴۰دقیقه) |
| ۱۶۱۶۷ | ژوئیهٔ ۱۹۵۹ |

آخرین محاسبه همان است که در ابتدای این مقال به آن اشاره شد .

**سیمون نیوکام** ، ریاضیدان ومنجم ، دربارهٔ اندازهٔ π اظهارکرده است که مقدارآن تا ده‌رقم بعد ازممیز کافی است تا بتوانیم محیط کرهٔ زمین را باتقریب کمتر ازکسری از سانتیمتر محاسبه کنیم واندازهٔ آن تاسی‌رقم بعدازممیز ،محیط‌جهان‌شناخته شده را بادقت میکرسکپی معلوم می‌سازد !

باتوجه به‌این‌مطلب ، پس چرا درمحاسبهٔ π آنقدر پیش می‌روند وبه ظاهر کار عبث می‌کنند .

یك دلیل عملی این موضوع آن است که درستی ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی جدید را می‌توان بامسائلی که جواب آنها معلوم است وبرای محاسبهٔ درماشین‌آماده شده است امتحان کرد مثلاً اگرحالاماشین جدیدی رابرای محاسبهٔ π تا ۱۰۰۲۶۵ رقم بعد از ممیز بکار بریم ونتیجه ای که به دست می آید همان باشد که قبلاً می‌دانستیم ، درواقع صحت‌آن ماشین را امتحان کرده‌ایم. دراین صورت چرامحاسبه‌راباین ماشین پیشتر نبریم‌تا بتوانیم ماشینهای جدید آنی را امتحان کنیم .

ازاین دلیل که‌بگذریم ، جالبترین دلیل ـ البته جالبترین دلیل برای ریاضیدانان ـ آن است که بامحاسبهٔ واقعی ، ببینند

---

۱ـ دربارهٔ آنکه این کسر به وسیلهٔ تسوچانك چینی یا متروس هلندی تعیین شده است اتفاق نظروجود ندارد . دراین باره باید تحقیق بیشتری گردد .

که آیا اعدادی نظیر $\pi$ و $\sqrt{2}$ ، عدد عادی هستند یا نه . یعنی آیا ارقام ۱و۲و۳و۴و۵و۶و۷و۸و۹و۰ در آنها ، پس از ممیز ، طبق نظم آماری توزیع شده است یا نه (یعنی تعداد تکرار هر رقم تقریباً ۱۰٪ عدهٔ ارقام است یا نه)

تا ۱۶۰۰۰ رقم بعد از ممیز در اندازهٔ $\pi$ ، توزیع غیر عادی مشاهده نشده است . یعنی بنظر می‌آید که $\pi$ عددی عادی باشد ولی تا حال اثباتی جهت عادی بودن آن عدد نشده است ومعلوم نیست که درمحاسبهٔ بینهایت رقم بعد از ممیز این توزیع ادامه داشته باشد .

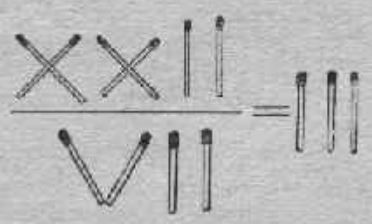
شنکس وورنج پیش بینی کرده اند که درعرض ۵ تا ۷ سال آتیه ماشینهای محاسبه ای به بازار خواهد آمد که قادرند $\pi$ را تایك میلیون رقم بعد از ممیز حساب کنند . باید درنظر داشت که ماشینی که برای محاسبهٔ $\pi$ تا ۱۰۰۶۲۵ رقم بعد از ممیز به کار رفته ومحاسبه‌را در ۸ ساعت و ۴۳ دقیقه انجام داده است ، ماهها وقت لازم دارد تا محاسبهٔ $\pi$ را تایك ملیون رقم بعد از ممیز انجام دهد .

**یادداشت : در آلمان به عدد $\pi$ تا ۳۵ رقم بعد از ممیز ، عدد لودولف میگویند. دلیل آن این است که لودولف وان سولن LudolPh van Ceulen ، یکی از ریاضیدانان آنجا درسال ۱۵۹۶ عدد $\pi$ را تا ۳۵ رقم بعد از ممیز حساب کرد وتقاضا داشت که پس از مرگ، این عدد بر روی سنگ قبرش حك گردد . وی به سن هفتادسالگی درگذشت وسنگ قبرش با این عدد مزین گشت .**

**از مجلهٔ ریاضیات تفریحی ترجمهٔ : ج.ش. آوری**

* * *

حال که تا اندازه ای باتاریخچهٔ محاسبهٔ $\pi$ آشنا شدید ، این مسئله را دربارهٔ آن حل کنید :



باحرکت یك چوب کبریت این تساوی رادرست کنید .

# مسئلهٔ سوزن بوفن

روش دیگری برای تعیین عدد $\pi$ پس ازبوجود آمدن علم احتمالات باطرح مسئلهٔ سوزن بوجود آمد .

اگر صفحهٔ مستوی رابا خطوط نازك ومتوازی ومتساوی‌الفاصله (بفاصلهٔ l) خط کشی کنیم وسوزنهای یکنواخت (یا چوب کبریت های استوانه‌ای شکل) بطول h را برحسب تصادف (نه به قصد معین) روی این صفحه بریزیم احتمال تعداد دفعاتیکه این سوزنها خطوط راقطع می‌کنند به تعداد دفعاتیکه سوزنها راروی صفحه ریخته ایم برابر $p=\frac{2l}{\pi h}$ است . این مسئله را اولین بار **بوفن** طبیعی دان فرانسوی درسال ۱۷۳۳ میلادی مطرح ودر سال ۱۷۷۷ آنرا حل نمود .

درسالهای ۱۸۵۰ ـ ۱۸۵۲ میلادی **ولف** منجم وریاضی دان سویسی این آزمایش را با خطوطی بفواصل $l=4.5Cm$ و سوزنهائی به بلندی $h=3.6Cm$ انجام داد . طبق فورمول فوق $P=\frac{2\times 3.6}{4.5\pi}=\frac{72}{45\pi}$ است . ولف دراین تجربه ۵۰۰۰ بار سوزن راروی صفحهٔ مذکور انداخت وملاحظه کرد ۲۵۳۲ بار سوزن خطوط راقطع کرده یا مماس برآن بود بنابر این فورمول زیر حاصل شد :

$$P=\frac{\text{تعداد دفعاتیکه سوزن خطها را قطع کرده}}{\text{تعداد کلیهٔ دفعات}}=\frac{2532}{5000}=0.5064$$

حال از فورمول $0.5064=\frac{72}{45\pi}$ عدد $\pi$ برابر با $\pi=3.1596$ که باعدد $\pi$ حقیقی $3.1596-3.1415=0.0181$ اختلاف دارد بدست میآید .

درسال ۱۸۵۵ نیزهمین آزمایش تکرار شد، البته با سوزنهایی بطول ۳ سانتیمتر وخطوطی بفاصلهٔ ۵ سانتیمتر ،ومقداری که برای $\pi$ بدست آمد ۳٫۱۴۱۲ بود .

پس بطور خلاصه اگر صفحه‌ای راباخطوط نازك ومتساوی‌الفاصله خط کشی کنیم وتعدادی سوزن، به بلندی فاصلهٔ خطوط ،رادراین صفحه بریزیم وتعداد کلیهٔ دفعات ریختن سوزن‌هارابر تعداد دفعاتیکه سوزنها خطوط راقطع کرده اند تقسیم کنیم عدد $\frac{\pi}{2}$ حاصل میشود .

شك نیست هراندازه تجربه راتکرار کنیم طبق قوانین احتمالات مقدار $\pi$ دقیقتر بدست خواهدآمد. مثلاً با ۵۰۰ سوزن عمل‌رایکهزار بارتکرار کرده وعدد $\pi$ را مساوی ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۶ بدست آورده‌اند که تاهفت رقم بعد از ممیز صحیح است .

**ایرج ادیبی**

## مباحث جدید در ریاضیات متوسطه

# همنهشت های درجهٔ دوم

پرویز شهریاری
با استفاده از نوشتهٔ . امیل بورل

اکنون به همنهشت های درجهٔ دوم میپردازیم . شکل عمومی یك همنهشت درجهٔ دوم چنین است :

$$(1)\quad ax^2+bx+c\equiv 0 \pmod{p}$$

فرض می‌کنیم که $a$ صفر نباشد (یعنی بر $p$ قابل‌قسمت نباشد) زیرا درآنصورت حاصل ضرب $ax^2$ نسبت به مدول $p$ صفرمیشود وهمنهشت به درجهٔ اول تبدیل میگردد .

میتوانیم طرفین همنهشت را در $4a$ ضرب کنیم ( فرض میکنیم که $p$ مساوی ۲ نباشد یعنی عدد اول غیرزوج باشد ، در حالتی که مدول $p$ مساوی ۲ باشد میتوان مستقیماً و بسادگی آنرا مطالعه کرد) :

$$(2)\quad 4a(ax^2+bx+c)\equiv 0 \pmod{p}$$

این رابطه نمیتواند صحیح نباشد مگر اینکه رابطهٔ (۱) برقرارباشد ، زیرا $p$ عددی است اول وحاصل ضرب دو عامل طرف اول رابطهٔ (۲) نمیتواندبر $p$ قابل‌قسمت باشد مگراینکه یکی ازآنها بر $p$ قابل قسمت باشد و میدانیم که عامل $4a$ بر $p$ قابل قسمت نیست .

باعملیات ساده ومعمولی‌جبر . همنهشت (۲) بصورت‌زیر درمیآید :

$$(3)\quad (2ax+b)^2\equiv b^2-4ac \pmod{p}$$

یعنی :

$$(4)\quad y^2\equiv r \pmod{p}$$

بافرض :

$$(5)\quad 2ax+b\equiv y \pmod{p}$$

$$(6)\quad b^2-4ac\equiv r \pmod{p}$$

باتوجه برابطهٔ (۶) میتوان $r$ رامثبت ومقداری بین‌صفر و $p-1$ درنظر گرفت .

بدین ترتیب میتوان یك یا چند ریشهٔ همنهشت (۴) را پیداکردوبافراردادن هریك ازمقادیر $y$ درهمنهشت (۵)مقداری برای $x$ بدست میآیدکه یکی ازجوابهای (۱) میباشد .

دوحالت در نظر میگیریم :

**حالت اول ـ**

$b^2-4ac\equiv r\equiv 0$

دراینحالت همنهشت (۴) تنها جواب $y\equiv 0$ را میدهد ، زیرا $y^2$ نمیتواند برعدد اول $p$ قابل‌قسمت باشد مگر اینکه $y$ بر $p$ قابل قسمت باشد . اکنون‌به همنهشت (۵) مراجعه‌می‌کنیم که درآن $y$ صفراست ، یعنی یك همنهشت درجهٔ اول خواهد بود وهمانطورکه میدانیم تنهایك ریشه خواهد داشت . این‌ریشه صفرنیست مگراینکه $b$ صفرباشد . ولی درحالتی‌که $b$ صفر است ، چون $r$ صفر و $a$ مخالف صفراست $c$ هم صفرمیشود و همنهشت به $x^2\equiv 0$ تبدیل میشود .

**حالت دوم ـ** $b^2-4ac$ نسبت به‌مدول $p$ صفرنیست. برای‌تجزیهٔ این همنهشت رزیدوهای مربعات $p-1$ عدد اولیه رامحاسبه می‌کنیم :

$$(7)\quad 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ (p-1)^2$$

این رزیدوها را رزیدوهای کوادراتیك برای مدول $p$ مینامند . ازاین رزیدوهادوعدد راچنان انتخاب میکنیم که‌نسبت به مدول $p$ متساوی باشند . اگراین دوعددرا $m^2$ و $n^2$ بنامیم داریم :

$$(8)\quad m^2-n^2\equiv 0 \pmod{p}$$

ویا :

$$(9)\quad (m+n)(m-n)\equiv 0 \pmod{p}$$

اما چون $m$ و $p$ هردو از $u$ کوچکترند $m-n$ نمیتواند بر $p$ قابل قسمت باشد وخواهیم داشت :

$$(10)\quad m+n\equiv 0 \pmod{p}$$

رزیدوهای(۷)دوبدو نسبت‌به مدول $p$مساویند یعنی‌داریم :

$$(11)\quad \begin{cases} 1^2\equiv(p-1)^2 \\ 2^2\equiv(p-2)^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\equiv\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \end{cases} \pmod{p}$$

این همنهشت ها تنهاشامل‌اعداد صحیح اند ، زیرا $p-1$ و $p+1$ اعدادی زوج هستند .

باین ترتیب نتیجه میشود که تعداد رزیدو ـ کوادراتیکهای مشخص برای مدول اول $p$ مساوی $\frac{p-1}{2}$

است ، یعنی فقط نصف اعداد بین صفر و $p-1$ رزیدو کوادراتیک هستند ، بقیه را غیر رزیدو گویند .

اگر مثلاً عدد اول ۷ را درنظر بگیریم ، رشتهٔ (۷) به رشتهٔ زیر تبدیل خواهد شد :

(۱۲) ۱و۴و۲و۲و۴و۱

بنابراین برای ۷ ، اعداد ۱و۲و۴ رزیدو وبقیه یعنی ۳و۵و۶ غیررزیدو هستند همچنین برای ۱۱ رشتهٔ (۷) بصورت زیردر میآید :

(۱۳) ۱و۴و۹و۵و۳و۳و۵و۹و۴و۱

رزیدوها عبارتند از ۱و۳و۴و۵و۹ وغیررزیدوها عبارتند از: ۲و۶و۷و۸و۱۰ .

برای عدد ۱۳ ، رزیدوها ۱، ۴، ۹، ۳، ۱۰و۱۲ وغیررزیدوها ۲، ۵، ۶، ۷، ۸، ۱۱ میباشد . می‌بینیم که در اینحالت میتوان گفت که ۱ — رزیدو است ، درحالیکه برای ۷ و ۱۱ این وضع وجود نداشت ، میتوان ثابت کرد که این وضع تابع یك قاعدهٔ عمومی است .

باین ترتیب درحالتیکه r یك رزیدو کوادراتیك از p باشد ، همنهشت درجهٔ دوم ریشهٔ مختلف دارد ودرحالتی که r غیررزیدو است همنهشت دارای جواب نیست .

***

واضح است که حاصلضرب دورزیدو یك رزیدو است ، زیرا اگر داشته باشیم :

$$x^2 \equiv r \pmod{p}$$
$$y^2 \equiv r' \pmod{p}$$

نتیجه میشود :

$$(xy)^2 \equiv rr'$$

یعنی $rr'$ هم یك رزیدواست .

این تبصره وسیله‌ای بدست میدهد که بتوان رزیدوها را جزء بجزء محاسبه کرد. اگر عدد p بزرگتر از ۳ باشد ، رزیدوهای ۱و۴ بلافاصله بدست میآید . همچنین مجذور ۴ یعنی ۱۶ ، اگر مثلاً مدول ۱۳ را داشته باشیم، رزیدوی ۳ را هم خواهیم داشت. با ضرب ۳ در ۴ عدد ۱۲ بدست می‌آید که معادل ۱— است . حاصل ضرب ۱— در ۳و۴ جوابهای ۳— و ۴— را که معادل ۱۰ و ۹ میباشند (۹ ازمجذور ۳ هم بدست میآید) و باین ترتیب ۶ رزیدوخواهیم داشت .

تبصرهٔ بسیارمهم زیرراهم ذکرمی‌کنیم: اگر تمام اعداد بین صفر و $p-1$ را در r ضرب کنیم ، بعنوان باقیماندهٔ این حاصلضربها نسبت به مدول p همان اعداد ازصفر تا $p-1$ منتهی با ردیف دیگری بدست خواهد آمد. بنابراین دوباره تمام رزیدوها وغیررزیدوها بدست میآید . ولی رزیدوها ازضرب r دررزیدوها وغیر رزیدوها هم ازضرب r در غیر رزیدوها بدست میآید . بنابراین :

**حاصل‌ضرب یك رزیدو دریك غیررزیدو برابر بایك غیررزیدواست**

باتحقیق مشابه یعنی ضرب یك غیر رزیدو در $p-1$ عدد واقع بین صفر و $p-1$ دیده میشود که **از ضرب یك غیر رزیدو دریك غیر رزیدو ، یك رزیدو بدست میآید .**

# عمل غلط ، اما جواب صحیح

این معادله را درنظر بگیرید :

$$\log(3x+2)+\log(4x-1)=2\log 11$$

اگر log را ازدوطرف این معادله حذف کنیم (که عملی غیرمجاز است) حاصل می‌شود :

$$(3x+2)+(4x-1)=(2)(11)$$

ازآنجا

$$7x=21$$
$$x=3$$

واتفاقاً این همان جواب معادلهٔ بالااست که هرکس به آسانی می‌تواند آن‌را امتحان کند .

حال ببینید که شماهم می‌توانید معادله‌ای نظیر معادلهٔ فوق تشکیل دهید که باچنین عمل غیرمجازی جواب صحیح بدهد ؟

# ادعای ثابت نشدهٔ فرما

**افراسیاب ملکی**
دبیر دبیرستانهای تفرش

مصریان قدیم به این واقف بودند که مثلثی به اضلاع ۳ و ٤ و ٥ و یا متناسب با آن مثلثی قائم الزاویه است و از این خاصیت در کارهای عملی استفاده میکردند. **فیثاغورس** قضیهٔ مشهور خود را در مورد مثلث قائم الزاویه اثبات کرد: اگر وتر مثلث را $z$ و اضلاع زاویهٔ قائمه را $x$ و $y$ بنامیم رابطهٔ $x^2+y^2=z^2$ میان طول اضلاع زاویهٔ قائمه و وتر مثلث برقرار است. **دیوفانتس** باین فکر افتاد که آیا تنها مثلثهائی که طول اضلاع آنها متناسب با اعداد ۳ و ٤ و ٥ است قائم الزاویه‌اند یا جوابهای دیگری نیز وجود دارد بعبارت دیگر، آیا جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ (۱) تنها اعداد متناسب با ۳ و ٤ و ٥ است؟ وی باین نتیجه رسید که جوابهای دیگری نیز امکان دارد و دستورهای کلی زیر را جهت تعیین جوابهای معادلهٔ (۱) بدست آورد:

$$x=u+\sqrt{2uv}$$

$$y=v+\sqrt{2uv}$$

$$z=u+v+\sqrt{2uv}$$

هرگاه $2uv$ مجذور کامل باشد، $x$ و $y$ و $z$ اعداد درست خواهند بود. مثلا برای $u=8$ و $v=1$ نتیجه میگردد:

$$x=12 \quad \text{و} \quad y=5 \quad \text{و} \quad z=13$$

هرگاه $x$ و $y$ و $z$ مقسوم علیه مشترکی نداشته باشند، مانند مثال فوق، آنها را **سه‌تائی ابتدائی**، در غیر اینصورت آنها را سه‌تائی ثانوی **فیثاغورثی** مینامند. دستور ساده تری نیز خود فیثاغورث ابداع کرده است.

$$x=p^2-q^2$$

$$y=2pq$$

$$z=p^2+q^2$$

در این روابط $p$ و $q$ هرعدد دلخواهی میتوانند باشند. دستور زیر بعضی از جوابهای ابتدائی را برحسب یك پارامتر معلوم میدارد:

$$x=2n^2+2n$$

$$y=2n+1$$

$$z=2n^2+2n+1$$

کمی از بحث اصلی خود که بررسی مسئلهٔ بزرگ **فرما** است دورشدیم. **فرما** هنگام مطالعهٔ چاپ جدید کتاب حساب دیوفانتس ضمن مشاهدهٔ دستور او راجع بجوابهای صحیح معادله $x^2+y^2=z^2$ حاشیه‌ای بر آن کتاب نوشت که مطالب همین حاشیه قریب سه قرن افکار ریاضیدانان نامی را بخود مشغول ساخته است جمله‌ای که وی نوشته بود چنین است:

**« درست است که معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ جوابهای صحیح بیشماری دارد، اما معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ در حالت $n>2$ هیچگاه جواب صحیح ندارد. براستی استدلال شگفت انگیزی برای اثبات آن وجود دارد که حاشیهٔ کتاب کوچکتر از آنست که استدلال در آن نوشته شود ».**

پس از فوت **فرما** کتب او بدست اهل تحقیق افتاد و مطالب حاشیه در این کتاب آشکار گشت. از آن زمان تاکنون کوشش همه ریاضی دانان نامی و افراد عادی برای یافتن استدلالی که **فرما** آن را نوشته است بجائی نرسیده است. **اولر**، **لاگرانژ**، **دیریکله**، **کومر**، **ریمان** که نام همهٔ آنها را شنیده‌اید اوقات گرانبهائی صرف مسئلهٔ فرما نمودند. اولر در حالت: $n=3$ و ٤ و دیریکله در حالت $n=5$ عدم وجود جواب صحیح را برای معادلهٔ فرما اثبات نموده‌اند. تاکنون صحت مطلبی که فرما ادعا کرده تا $n=269$ به ثبوت رسیده است ولی با اینهمه اثبات آن در حالت کلی میسر نگردیده است.

در سال ۱۹۰۸ دکتر **ولسفکول** آلمانی، که خود کوشش زیادی در مورد اثبات قضیهٔ فرما نموده بود، جائزه‌ای بمبلغ ۱۰۰۰۰۰ مارك برای اثبات کنندهٔ آن معین کرد. این موجب شد که بار دیگر سروصدای زیادی براه افتد و رساله‌ها در مورد مسئله نگاشته شود بدون شك میتوان کتابخانهٔ کوچکی از تمام این نوشته‌ها تشکیل داد ولی بار انگیزهٔ پول نیز نتوانست کمکی به حل مسئله بنماید و تمام کوششها بی‌ثمر ماند.

عده‌ای معتقدند که ممکن است فرما خود نیز دچار اشتباه شده باشد و امکان دارد که عدم صحت قضیه روزی مشاهده شود یعنی بتوان اعدادی یافت که در معادلهٔ فرما صدق کنند.

جهت آشنائی بیشتر با معادلهٔ فرما بعضی مطالب مربوط بآن بیان میگردد تا شاید کسی بفهم بیشتر مسئله و حل آن باشد:

$$x^n+y^n=z^n \qquad x>0 \quad y>0 \quad z>0$$

طرح زیر به وسیلهٔ آقای **دکتر علیرضا امیر معز** تهیه شده است که در آوریل ۱۹۶۲ در هشتمین شمارهٔ مجلهٔ ریاضیات تفریحی چاپ شده است . خصوصیت آن این است که در زیر تصویر خیام ، همان‌طور که می‌بینید، نوشته شده است : «خیام و موازیها» و این مسبوق به آن است که خیام وجود هندسه‌های غیراقلیدسی را پیش بینی می‌کرده است . (به مقالهٔ خدمات ریاضیدانان ایرانی درهمین شماره رجوع فرمائید) .

آلبرت انیشتاین
وبعد چهارم

رنه دکارت
ومختصات کارتزین

عمر خیام
وموازیها

آقای دکتر علیرضا امیرمعز یکی از ریاضیدانان معاصر ایرانی مقیم آمریکا است که جناب دکتر هشترودی درشمارهٔ ۷ مجلهٔ یکان به نام مشارالیه اشاره فرموده‌اند.

---

اولاً $x$ و $y$ نمیتوانند مساوی باشند زیرا در این صورت:

$$x^n+y^n=x^n+x^n=2x^n=z^n$$

$$\frac{z^n}{x^n}=2 \quad \text{و} \quad \frac{z}{x}=\sqrt[n]{2}$$

چون $z$ و $x$ باید اعداد درست باشند ، فقط در حالت $n=1$ معادله اخیر جواب دارد . بنابراین همیشه میتوان فرض کرد که $x>y$ . ازطرف دیگر ، بآسانی مشاهده میگردد که مقدار $z$ باید در نامساوی زیرصدق کند :

$$x<z<x+y \qquad (2)$$

چون در صورت $z=x+y$ نتیجه میشود: $x^n+y^n<z^n$

با توجه به نامساوی (۲) میتوان اثبات کرد که هیچگاه $y$ نمی‌تواند برابر یك یا دو باشد ، چون در صورت $y=1$ نتیجه میشود : $x<z<x+1$ که در اینحالت برای $z$ جواب صحیح وجود ندارد و در حالت $y=2$ باید $x<z<x+2$ که تنها $z=x+1$ میتواند باشد. اگر $x$ زوج باشد ، سمت چپ معادلهٔ فرما زوج وسمت راست آن فرداست و در صورت فرد بودن $x$ عکس اینحالت بوجود میآید که هیچگاه تساوی بوجود نخواهد آمد.

مطلب مهم دیگری که دربارهٔ مسئلهٔ فرما می‌توان اثبات کرد این که جوابهای معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ نمیتوانند جوابهای قینیه باشند و در اینحالت نامساوی زیر برقرار است:

$$x^n+y^n<z^n$$

مطالب فوق را به این طریق می‌توان ثابت کرد :

داریم : $\frac{y}{x}<1$ ، از آنجا :

$$\frac{y^{n-2}}{x^{n-2}}<1 \quad \text{یا} \quad (3) \quad \frac{y^n}{x^n}<\frac{y^2}{x^2}$$

همچنین داریم : $\frac{z}{x}>1$ از آنجا :

$$\frac{z^{n-2}}{x^{n-2}}>1 \quad \text{یا} \quad (4) \quad \frac{z^n}{x^n}>\frac{z^2}{x^2}$$

باتوجه بنامساویهای ۳ و ٤ نتیجه میگردد:

$$1+\frac{y^n}{x^n}<1+\frac{y^2}{x^2}=\frac{z^2}{x^2}<\frac{z^n}{x^n}$$

یا

$$1+\frac{y^n}{x^n}<\frac{z^n}{x^n}$$

درنتیجه : $x^n+y^n<z^n$

و بدین طریق ثابت می‌شود که هیچگاه اعداد صحیحی که جوابهای معادلهٔ فیثاغورسند نمیتوانند جواب معادلهٔ فرما باشند .

از آنچه گفته شد نباید چنین نتیجه بگیریم که چون ریاضی‌دانان بزرگی چون **اولر** نتوانسته‌اند مسئلهٔ فرما را حل کنند کوشش ما کوچکتران بجائی نخواهد رسید ، بلکه باید بخود تلقین کنیم که ممکن است راه ساده‌ای برای اثبات ادعای فرما وجود داشته باشد و بکوشیم تا شاید افتخار کشف آن نصیب ما گردد .

# حل مسألهٔ ((الحسن)) مسابقهٔ ممتاز شمارهٔ اول

در شمارهٔ اول مجله ، تحت عنوان مسابقهٔ ممتاز دو مسأله مطرح و آخرین مهلت قبول پاسخ آنها آخر مرداد ماه ۴۳ اعلام شده بود . راجع به حل این مسائل پاسخهای زیاد واصل شده است . بسیاری از پاسخ دهندگان مرتکب اشتباه شده‌اند ودیگران راه‌حلهائی ارائه داده‌اند که اغلب آنها مشابه‌میباشد. در زیر پس‌ازبیان صورت مسأله،راه حلهای مختلف که درپاسخ‌های‌رسیده‌مطرح شده‌است باطلاع خوانندگان میرسد و درشمارهٔ بعد بهترین حل اعلام میشود .

**مسألهٔ « الحسن » با بیان هندسی :**

دایرهٔ به‌مرکز O و با شعاع معلوم R و نقطهٔ A واقع در داخل آن داده شده است ، مثلث ABC را چنان بسازید که دو رأس B و C ازآن بر دایرهٔ مفروض واقع بوده و O مرکزدایره نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی آن باشد .

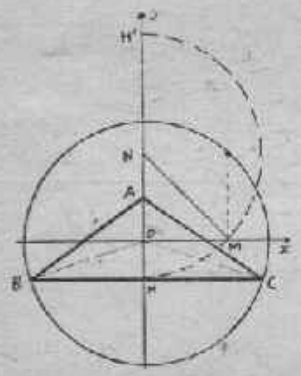
**مرحلهٔ اول حل مسأله** ـ مقدمةً به‌آسانی‌ثابت میشود که مثلث متساوی‌الساقین بوده نیمساز AO در یك نقطهٔ H بر ضلع BC عمود است و چنانچه طول OH معلوم باشد نقطهٔ H و درنتیجه ضلع BC مشخص خواهد شد .

آقایان **احمد ترابی** از تهران (۴۲/۱۲/۱۳) ـ **بیوك میرفتاحی** از دانشکدهٔ فنی تبریز ( ۴۲/۱۲/۲۲ ) ـ **محمد حسین تیبانی** از فرهنگ مجیشیر ( ۴۳/۱/۲۰ ) ـ **ناصر ربانی** از مشهد (۱/۲۶) ـ **غلامحسین راستگو** از تبریز (۴/۲۳) ـ **اسماعیل واعظ قاسمی** پنجم ریاضی دبیرستان امیر کبیر لنگرود(۴/۲۵) ـ **عبدالحسن پوریکتا** پنجم‌ریاضی دبیرستان امیر کبیر لنگرود (۵/۲) **بیژن امامی آل‌آقا** پنجم ریاضی دبیرستان مرآت ( ۵/۱۳) **حسین اصغائی** چهارم ریاضی دبیرستان هدف۳(۵/۱۳) **محمد حسن نجفی** از دانشکدهٔ افسری (۵/۲۷) با استفادهٔ از روابط‌متری بین‌اجزاء مثلث و محاسبات جبری وآقایان **سید حجت ذاکر** ازتهران (۴۲/۱۲/۱۷) ـ**ناصرعلی‌فرح‌بخش**(۴۵ر۲۵)ـ**بیژن‌غیور** (۴/۲۸) ـ **عباس‌چاوشی** ازاصفهان(۲۶ر۱) بااستفادهٔ‌ازروابط خطوط مثلثاتی زوایای‌مثلث‌طول OH رابرحسب $R$ و $OA=d$ شعاع دایره‌بدست‌آورده و بدون‌اینکه‌راه هندسی تعیین OH را شرح دهندحل‌مسأله را پایان یافته دانسته‌اند .

آقای **بهمن مشهود**ازتهران (۴/۱۱) راه حلی مطرح ساخته‌اند که بعلت عدم وضوح نوشته و اشکال رسم شده مفهوم نشد .

## حل کامل مسأله

**راه اول** ـ توسط آقای **ع . ر** از تهران و با طریق مشابه ازفریدون‌شهیدی پنجم ریاضی‌دبیرستان البرز(۵/۲۰) **نصرالله اعتمادی** (۴۱/۱۸) ـ مثلث ABC متساوی‌الساقین است (چنانچه A روی محیط دایره باشد مثلث متساوی‌الاضلاع و اگر A به فاصلهٔ $OA=d=\frac{R}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ از مرکز واقع باشد مثلث‌قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین خواهد بود ) .




هرگاه مسأله را حل‌شده فرض‌نمائیم‌درمثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABH با استفاده از خواص نیمسازوروابط زیرداداریم :

$$(1)\quad d.BH=AB.OH$$

$$(2)\quad AB.BH=R^2+d.OH$$

از رابطهٔ (۱) مقدار AB را بدست آورده در رابطهٔ (۲) قرار میدهیم :

$$(3)\quad d.\overline{BH}^2=R^2.OH+d.\overline{OH}^2$$

و چون $\overline{BH}^2=R^2-OH^2$ پس

$$(4)\quad \overline{OH}^2+\frac{R^2}{2d}OH-\frac{R^2}{2}=0$$

حال با استفادهٔ از رابطهٔ ( ٤ ) مثلث را بترتیب زیر رسم میکنیم :

۱) روی دو خط متعامد oy و ox طولهای $OM=\frac{R}{\sqrt{2}}$ و $ON=\frac{R^2}{4d}$ را جدامیکنیم ( تعیین‌ترسیمی طولهای $\frac{R}{\sqrt{2}}$ و $\frac{R^2}{4d}$ بآسانی میسر است ) طول MN برابر

خواهد بود با :

$$MN=\frac{R}{4d}\sqrt{R^2+8d^2}$$

۲) به مرکز N و بشعاع NM دایره‌ای رسم میکنیم تا خط oy را در H و H' قطع کند .

$$OH=NH-ON=-\frac{R^2}{4d}+\frac{R}{4d}\sqrt{R^2+8d^2} \quad (5)$$

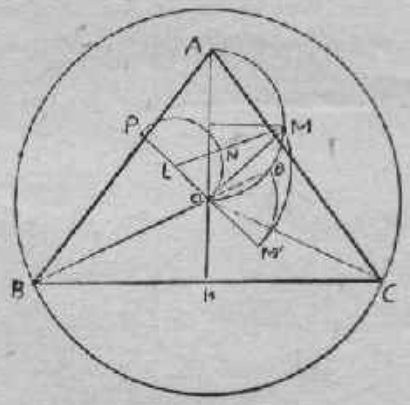
که همان جواب مثبت معادلهٔ (٤) میباشد .

۳) درنقطهٔ H عمودی بر AH اخراج میکنیم تادایرهٔ بمرکز O و بشعاع R را در نقاط B و C قطع کند . مثلث ABC مثلث مطلوب است .

***

**راه دوم** ـ توسط آقای **ناشناس** و با راههای مشابه ازآقایان **مهدی حجازی** ششم ریاضی‌دبیرستان البرز(۵/۱۳) **اسدالله‌زرگرباشی**(۵/۱۶) ـ **سید حسین علوی زاده** از تبریز (۵/۲۹)

مسأله را حل شده فرض میکنیم در نقطهٔ A عمودی بر BA اخراج میکنیم تا امتداد BO را در F قطع کند ، مثلث




OAF متساوی‌الساقین است و داریم AO=AF . در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAF روابط زیر رادارایم :

$$\overline{AF}^2=\overline{AO}^2=FB\cdot FD=OD(2OD+R)$$

بعبارت‌دیگر : $2\overline{OD}^2+R\cdot OD-d^2=0 \quad (6)$

با استفادهٔ از رابطهٔ(٦)مثلث‌را بترتیب زیررسم میکنیم

۱) عمود منصف OA را رسم میکنیم تا نیمدایرهٔ بقطر OA را در M قطع کند . $OM=\frac{d}{\sqrt{2}}$ است .

۲) در نقطهٔ O عمودی بر OM اخراج مینمائیم وبرآن $OP=\frac{R}{2}$ را جدا میکنیم . از M به L وسط OP وصل مینمائیم دایرهٔ بقطر OP را در N قطع میکند . داریم

$$\overline{MO}^2=MN(MN+\frac{R}{2})\rightarrow 2\overline{MN}^2+R\cdot MN-d^2=0$$

با مقایسهٔ با رابطهٔ (۵) نتیجه میشود MN=OD

۳) به شعاع LM و به مرکز L دایره‌ای رسم میکنیم تا امتداد LO را در M' قطع کند OM'=MN=OD

٤) به مرکز O و به شعاع OM' کمانی رسم میکنیم دایرهٔ بقطر OA را در D قطع میکند .

۵) امتداد DO دایرهٔ مفروض را در B قطع میکند و بعد ازآن C بدست میآید .

***

**راه سوم** ـ توسط آقای **حبیب صارمی** ششم ریاضی دبیرستان مروی (۱۱ر۱ر۴۳) :

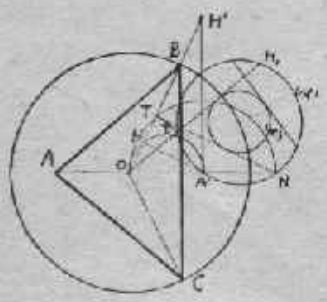
مساله را حل شده فرض میکنیم از نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت به O عمودی بر AO اخراج مینمائیم تا امتداد OB را در H' قطع کند پای عمود مرسوم از A' بر OB را با H و نقطهٔ تلاقی دیگر OB را با دایرهٔ الحسن ( دایرهٔ مفروض ) با B' مینمائیم . A'B' با AB موازی است (دوقطرچهارضلعی ABA'B' منصف یکدیگرند ) و نتیجه میشود که مثلث B'A'H' متساوی‌الساقین بوده و B'H=HH' و اگر T قرینهٔ O نسبت به H باشد H'T=OB'=R . چنانچه N قرینهٔ O نسبت به A' باشد دایرهٔ بقطر ON=2OA مکان هندسی نقطهٔ T میباشد وچون چهارضلعی A'NH'T محاطی است OT·OH'=OA'·ON

و با استفادهٔ از این رابطه مثلث را بترتیب زیر رسم مینمائیم .

۱) A' قرینهٔ A را نسبت به O و N قرینهٔ O را نسبت به A' تعیین میکنیم .

۲) دایرهٔ دلخواه (α) را بر A' و N میگذرانیم بطوریکه بتوان درآن وتر دلخواهی برابر با R شعاع دایرهٔ الحسن رسم نمود و دایرهٔ (α') متحدالمرکز با دایرهٔ (α) وممّاس براین وتررا رسم مینمائیم .

۳) از O بردایرهٔ (α') مماس میکنیم که دایرهٔ (α) را در $T_1$ و $H_1$ قطع میکند .




٤) بمرکز O و بشعاع $OT_1$ کمانی رسم میکنیم که دایرهٔ بقطر ON را در T قطع مینماید .

۵) امتداد OT دایرهٔ الحسن را در B قطع میکند و از روی آن نقطهٔ C بدست میآید .

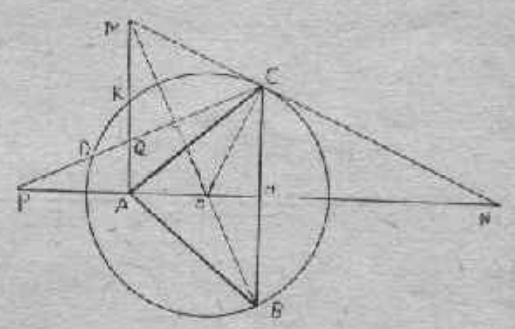
**راه چهارم** ـ آقای **منصور تعلمی** پنجم ریاضی دبیرستان دارالفنون ( ۲۰ر۴ر۴۳ ) ابتدا به‌طریق فوق ثابت کرده‌اند که درمثلث قائم‌الزاویهٔ $OA'H'$ طول $TH'$ برابر با $R$ میباشد آنگاه با استفاده از مسألهٔ زیرراه رسم مثلث را بدست‌آورده‌اند :

**مسأله** ـ از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC$ که $A=90^\circ$ است‌طول ضلع $AB$ معلوم میباشدو اگر $P$ قرینهٔ $B$ نسبت‌به $H$ (پای ارتفاع $AH$) باشد طول $PC$ نیزمعلوم است ، مثلث را رسم کنید .

برای رسم این مثلث نتیجه گرفته‌اندکه دایرهٔ به مرکز $B$ وبه‌شعاع $BN=AB\sqrt{2}$ بردایرهٔ به‌قطر $PC$ عموداست وبا استفادهٔ ازآن‌ابتدا طول $BO$ خط‌المرکزین دودایره وبعد طول $BC$ را معلوم نموده مثلث $ABC$ را ساخته‌اند وبا تعیین طول $AB$ مثلث الحسن رسم میشود .

***

**راه پنجم** ـ توسط‌آقایان **حسن یوسفی‌آذری نژاد**ـ **محمد حسین شاکرحسینی** دانشجویان دانشکدهٔ علوم از رضائیه(۲۰ر۵ر۴۳) ـعمودی‌که در نقطهٔ $A$ بر $OA$ اخراج شود دایره را در $K$ قطع می‌کند ، امتداد $BA$ دایره را در $D$ و امتداد $BO$ (که بر $CD$ عمود است) امتداد $AK$ را در $M$ و امتداد $OA$ امتداد $CD$ را در $P$ قطع میکند ، دستگاه $(A,PDQC)$ توافقی است( $Q$ نقطهٔ برخورد $AK$ با $CD$ است) و نتیجه خواهد شدکه $P$ قطب $AK$ و $M$ قطب $CD$ نسبت به‌دایرهٔ $O$ میباشد،مماس مرسوم در $C$ بردایره (که نیمساززاویهٔ خارجی $ACB$ است) از $M$ میگذرد و امتداد $OH$ را در $N$




قطع‌میکند $\overline{OH}.\overline{ON}=R^2$ است و در مثلث متساوی‌الساقین $PCN$ با استفادهٔ از اجزاء متساوی نتیجه میشودکه

$$\begin{cases} ON-2OH=OP \\ ON.2OH=2R^2 \end{cases}$$

طول‌های $ON$ و $2OH$ که تفاضل و واسطهٔ هندسی آنها معلوم است‌رسم میشوند و با تعیین طول $OH$ ضلع $BC$ بدست خواهدآمد .

**راه‌ششم** ـ آقای **سیاوش فلاح** از تهران (۱۱ر۵) با استفادهٔ ازروابط متری درمثلث نتیجه گرفته‌اندکه بین $R'$ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $AOB$ و $OA=d$ و $R$ شعاع دایرهٔ مفروض رابطهٔ زیربرقرار است .

$$2R'^2-RR'-d^2=0$$

و این معادلهٔ درجهٔ دوم را از راه ترسیم حل نموده مقدار $R'$ ودر نتیجه مثلث $AOB$ را مشخص نموده‌اند .

**راه‌هفتم** ـ آقای **فرهادنوذری** دانشجوی سال اول دانشکدهٔ فنی (۲ر۵) از $O$ خطی موازی $BC$ رسم نموده‌انـد که $AC$ رادر $M$ قطع میکند و عمود $MK$ را بر $OC$ رسم نموده ازتشابه مثلث‌های $AHC$ و $AOM$ ومثلث‌های $CMK$ و $COH$ وبا استفاده ازروابط متری ومحاسبات جبری معادلهٔ زیررا بدست آورده اند

$$2d\overline{OH}^2+R^2.OH-R^2d=0$$

واین معادله را ازطریق‌هندسی حل کرده طول $OH$ ودرنتیجه مثلث $ABC$ را مشخص ساخته اند .

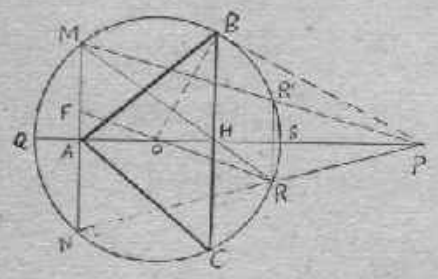
**راه‌هفتم** ـ آقایان **بهروز اسلامی** دانشجوی دانشکدهٔ فنی ( ۴ر۱۲ر۴۲ ) ـ **محمد داوری** از اردکان ( ۱۹ر۱۲ ) با استفادهٔ ازروابط مثلثاتی بین زوایا واضلاع مثلث رابطهٔ (۵) (مذکور در راه حل اول)رابدست‌آورده آنگاه باترسیمات هندسی طول $OH$ رابدست آورده‌اند

***

**راه‌حل هشتم** ـ توسط آقایان **مهندس عباس سعیدی** از تهران (۱۵ر۴) ـ **بهروز قمیصی** دانشجوی ریاضی دانشسرایعالی (۱۰ر۴) ـ **اسرافیل کسرائی** از مشهد(۱۱ر۵) **فرخ مجتهدی** ازتبریز ( ۱۱ر۵ ) ـ **محمد صادق‌پور** از تبریز (۳۰ر۵) که نوشتهٔ آقای مهندس سعیدی در زیر نقل میشود .

۱) مسأله راحل شده انگاشته و از نظر تقارن مشاهده میشودکه خط $BC$ بر $SQ$ قطر گذرنده از $A$ عمود است .

۲) مماس در نقطهٔ $B$ بردایره بر $BO$ نیمساز داخلی زاویهٔ $B$ عمودبوده خود نیمساز خارجی زاویهٔ $B$ میباشد این مماس امتداد $SQ$ رادر $P$ قطع میکند .



۳) نیمسازهای داخلی وخارجی هرزاویه تشکیل دستگاه اشعهٔ توافقی میدهند وهر خط که آنهارا قطع کند بتوافق تقسیم میشودپس (B.POHA) دستگاه اشعهٔتوافقی و (POHA) تقسیم توافقی است .

٤) هرگاه ازیك نقطه به چهار نقطه‌ای که تقسیم توافقی تشکیل میدهند وصل شود یك‌دستگاه اشعهٔ توافقی تشکیل خواهد شد پس (R.POHA) دستگاه توافقی است و عمود مرسوم در نقطهٔ A بر OA که با اشعهٔ دستگاه فوق قطع میشود بتوافق تقسیم میشود یعنی (FNMA) تقسیم توافقی است ودارایم :

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FM}}=-\frac{\overline{NA}}{\overline{NM}}=-\frac{1}{2}\rightarrow \boxed{\overline{FM}=-2\overline{FA}}$$

٥) از P دو قاطع PRN و PR'M که بر دایرهٔ O رسم شده است نقطهٔ تلاقی RM و R'N بر CB قطبی P نسبت به‌دایره‌واقع است‌وچون PM وPN نسبت به PA متقارن‌اند نقطهٔ تلاقی RM وR'N بر PA واقع خواهد شد و نتیجه‌آنکه RM از H میگذرد .

**طریقهٔ رسم :** ابتدا عمودی در نقطهٔ A بر OA رسم میکنیم تا دایره را در M قطع کند ، طول AM را به‌سه‌جزء متساوی تقسیم‌کرده نقطهٔ F را به فاصلهٔ $FA=\frac{1}{3}AM$ بر AM پیدا می‌کنیم ، از F به O مرکز دایره وصل‌کرده و امتداد میدهیم تا درنقطهٔ دیگر R دایره را قطع کند . RM را رسم مینمائیم درنقطهٔ H با SQ قطر گذرنده بر A متلاقی میشود، عمود مرسوم بر SQ در H ، دایره را درنقاط B وC قطع میکند ، مثلث ABC جواب مسأله است .

## دانش‌آموز رتبهٔ اول امتحانات نهائی

آقای **عبدالمجید چلبی** دانش‌آموزششم طبیعی‌دبیرستان رازی آبادان بسال۱۳۲۳ در آبادان بدنیاآمده و تحصیلات ابتدائی و متوسطه را بدون هیچگونه وقفه‌ای بپایان رسانیده است .

آقای چلبی‌که امروز دانشجوی دانشکدهٔ پزشکی تهران‌است‌درامتحانات خرداد ماه ٤٣ با معدل **۱۸٫۰۴** در بین‌کلیهٔ دانش‌آموزان رشتهٔ طبیعی **استان خوزستان** رتبهٔ اول گردیده است .

رئیس دبیرستان رازی آبادان ـ دکتر نراقی

فرستندهٔ خبر : مطبوعاتی دهداری نمایندگی یکان درآبادان

# راهنمای ریاضیات متوسطه

## محاسبهٔ مساحت مثلث

### باصطلاح بودن‌مختصات سه‌رأس آن

**اقتباس ازکتاب « مقدمات هندسهٔ تحلیلی » تألیف : افی‌موف**

**توسط : هوشنگ شریف‌زاده دبیر دبیرستانهای نی‌ریز**

فرض میکنیم مختصات سه‌رأس مثلثی عبارت باشد از

$$A\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix} \text{ و } B\begin{vmatrix}x_2\\y_2\end{vmatrix} \text{ و } C\begin{vmatrix}x_3\\y_3\end{vmatrix}$$

طول اضلاع AB و AC را بترتیب با d و d' وزاویهٔ آنها را با محور ox بترتیب با $\alpha$ و $\beta$ نمایش میدهیم در این صورت

$$\widehat{BAC}=|\alpha-\beta|$$

میدانیم که S مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{1}{2}dd'\sin|\alpha-\beta| \text{ و یا}$$

$$S=\frac{1}{2}dd'\left|\sin(\alpha-\beta)\right|=\frac{1}{2}dd'\left|\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\right|$$

$$S=\frac{1}{2}\left|d\sin\alpha\cdot d'\cos\beta-d\cos\alpha\cdot d'\sin\beta\right|$$

چنانچه X و Y تصاویر $\overline{AB}$ و X' و Y' تصاویر $\overline{AC}$ برمحورهای Ox وOy باشد داریم :

$$X=d\cos\alpha \text{ و } Y=d\sin\alpha \text{ و } X'=d'\cos\beta \text{ و } Y'=d'\sin\beta$$

و خواهیم داشت :

$$S=\frac{1}{2}\left|X'Y-XY'\right|$$

$$\begin{vmatrix}X=x_2-x_1\\Y=y_2-y_1\end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix}X'=x_3-x_1\\Y'=y_3-y_1\end{vmatrix}$$

و بدست خواهدآمد .

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|}$$

**نتیجه ـ اگرمختصات‌سه‌رأس مثلثی‌اعداد منطق باشند مساحت مثلث عدد منطق است .**

**مثال :** $A\begin{vmatrix}6\\4\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}4\\2\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}1\\7\end{vmatrix}$

$$S=\frac{1}{2}\left|(4-6)(7-4)-(1-6)(2-4)\right|$$

$$S=\frac{1}{2}\left|-16\right|=8$$

# ترسیمات هندسی

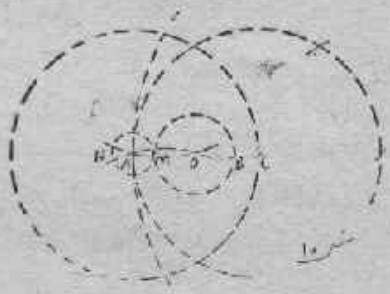
## ترسیمات هندسی فقط با پرگار

تنظیم از : حبیب‌الله عبداللهی

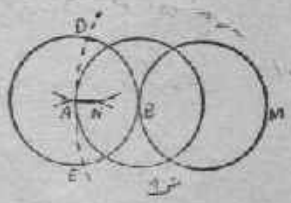
**مسألهٔ ۹ ـ** خط مفروض (AوB) را به سه یا چند قسمت متساوی تقسیم کنید . ابتدا مانند مسألهٔ (۳) نقطهٔ M را دراستداد AB تعیین میکنیم که $AM=3AB$ باشد آنگاه به مرکز M وبه شعاع MA دایره‌ای رسم‌میکنیم تادایرهٔ به‌مرکز A وبه‌شعاع AB رادر نقاط DوE قطع کند.دوایری که‌به‌مرکز های DوE وبا شعاع AB رسم شوند علاوه بر A در نقطهٔ دیگر N متقاطعند و AN برابر با یك سوم AB میباشد (شکل۹) .

اثبات ـ مانند مسألهٔ (۷) دومثلث AMD و ADN بانسبت ۳ بر ۱ متشابه‌اند ودرنتیجه $AB=3AM$

باروش مشابه ، خط (AوB) به چهار ، پنج وبالاخره به n قسمت متساوی تقسیم خواهد شد .



شکل ۱۰



شکل ۹

**مسألهٔ ۱۰ـ** نقاط AوBوC واقع بریك استقامت مفروض اند . مطلوب است تعیین نقطه‌ای برخط AB بطوریکه فاصلهٔ آن تا A برابر باشد باطول BC .

مانند مسألهٔ (۷) نقطهٔ O وسط AC را تعیین میکنیم و مانند مسألهٔ (۳) M قرینهٔ B را نسبت به O و N قرینهٔ M رانسبت به A بدست میآوریم $AM=AN=BC$ (شکل۱۰)

اثبات ـ

$OA=OC$و$OM=OB \rightarrow AM=BC$

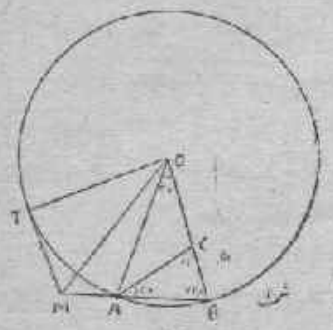
آقای حبیب‌الله‌عبداللهی دوست و همکار ما توفیق آنرا بدست‌آورده‌اندکه بااستفادهٔ ازبورس دولت فرانسه به‌آن کشور عزیمت نموده‌دررشتهٔ ریاضیات جدید تحصیلات عالی خودرا ادامه دهند.امیدواریم همکاری خودرا بامجلهٔ یکان قطع نکرده بلکه‌آنرا توسعه دهند .

## رسم n ضلعی منتظم ،

## رسم خط مساوی باطول کمان

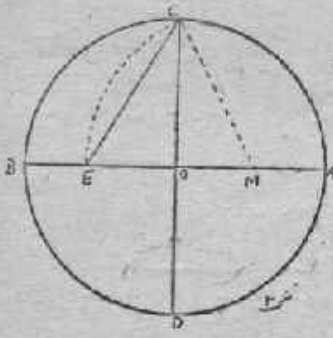
تنظیم از : یحیی یحیوی (دبیر دبیرستانهای تهران)

**I ـ رسم سه‌ضلعی ، چهار ضلعی و در** نتیجه رسم چند ضلعی منتظمی که تعداد اضلاع آن $2^n \times 3$ یا $2^n \times 4$ باشد درکتابهای درسی مذکور است



شکل ۳

**II ـ رسم ده‌ضلعی و پنج ضلعی منتظم** که سابق‌درکلاس‌چهارم دبیرستان تدریس میشد بترتیب زیر است :اگر AB ضلع ده ضلعی منتظم ($C_{10}$) باشدزاویهٔ O برابر با $36^\circ$ وهریك اززاویه‌های OBA و OAB برابر با $72^\circ$ است،چنانچه AC نیمسازاویهٔ OAB باشد



شکل ۴

$OC=AC=AB=C_{10}$

وازتشابه دومثلث AOB و ABC بدست میآید

$$\frac{AB}{OA}=\frac{BC}{AB} \text{ یا } \frac{C_{10}}{R}=\frac{R-C_{10}}{C_{10}}$$

ونتیجه‌میشود $C_{10}^2=R(R-C_{10})$ یعنی $C_{10}$ واسطهٔ‌هندسی بین طولهای R و $R-C_{10}$ میباشد وازحل معادلهٔ بالا نتیجه میشود $BA=C_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ را ازطرف A تانقطهٔ M به‌اندازهٔ $MB=R$ امتدادمیدهیم‌ومماس MT رابردایره رسم‌مینمائیم، MH واسطهٔ هندسی‌است بین $MA=R-C_{10}$ و $MB=R$ پس $MH=C_{10}$ و در دایرهٔ به مرکز B و باشعاع OB چون وتر OM برابر با زاویهٔ مرکزی $72^\circ$ است پس $OM=C_{10}$ ودر مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM نتیجه میشود :

ضلع‌پنج ضلعی منتظم وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که یك

ضلعش شعاع دایرهٔ محیطی آن وضلع دیگرش ضلع ده‌ضلعی منتظم محاط درهمان دایره باشد (شکل ۱)

**طریقهٔ ترسیم :** دردایرهٔ به‌شعاع R وبه مرکز O دو قطر عمود برهم AB و CD رارسم کرده به مرکز M وسط OA وبه شعاع MC کمانی رسم میکنیم تا OB رادر E قطع کند $OE=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ بدست‌آمده وبرابر با $C_{10}$ واز آنجا CE برابر با $C_5$ میباشد (شکل ۲)

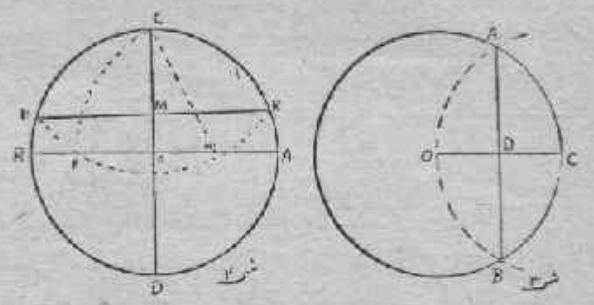
**III- رسم هفت ضلعی منتظم** - به مرکز C واقع بردایرهٔ به مرکز O وبه شعاع CO دایره ای رسم میکنیم تا دایرهٔ O رادر A وB قطع کند اگر D وسط AB باشد طول AD بتقریب ۰٫۰۰۱ شعاع برابر ضلع هفت ضلعی منتظم ($C_7$) میباشد و عملاً برای تقسیم دایره به هفت جزء متساوی کفایت میکند. (شکل ۳)

داریم :

$$C_7=2R\sin\frac{\pi}{7}\neq R\times 0.8673$$

$$AD=\frac{AB}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}\neq 0.8660R$$

$$C_7-AD=0.0120R$$




**IV- رسم نه‌ضلعی منتظم** - اگر $CH=C_6$ و M تصویر H برقطر CD باشد (شکل ٤) طول CM با تقریب ۰٫۰۱ شعاع برابر با $C_9$ است زیرا

$$C_9=2R\sin\frac{\pi}{9}\neq 0.6840R$$

$$CM=OC-OM=R-R\cos\frac{2\pi}{5}=$$

$$R\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)\neq 0.6810R$$

$$C_9-CM=0.0003R$$

**V- تبدیل کمان کوچکتر از ۹۰° دایره به خط مستقیم** - فرض میکنیم شعاع دایره $R=1$ باشد و $\alpha$ اندازهٔ کمان OM برحسب رادیان بوده و $\alpha<\frac{\pi}{2}$ باشد ، دستگاه محورهای مختصات xoy را انتخاب میکنیم که ox بر دایره مماس و oy بر c مرکز دایره بگذرد. اگر N نقطه ای از ox باشد که طول قطعه خط ON برابر باطول کمان OM باشد داریم (شکل ۵)

$$N\left|\begin{array}{l}x=\alpha\\ y=0\end{array}\right. \quad \text{و} \quad M\left|\begin{array}{l}x=\sin\alpha\\ y=1-\cos\alpha\end{array}\right.$$

معادلهٔ خط MN به صورت

$$y(\sin\alpha-\alpha)=x(1-\cos\alpha)-\alpha(1-\cos\alpha)$$

بدست‌آمده‌ازروی آن مقدار h عرض‌نقطهٔ B نقطهٔ‌تلاقی MN با oy به‌صورت زیرحساب میشود

$$h=\frac{\alpha(1-\cos\alpha)}{\alpha-\sin\alpha} \qquad (1)$$

درازاء $\alpha=\frac{\pi}{2}$ داریم $h=\frac{\pi}{\pi-2}$ واگرمقداد تقریبی $\pi$ برابربا $3.14\neq\frac{22}{7}$ اختیارشود $h=\frac{11}{4}$ بدست میآید. به‌آسانی معلوم میشود که بازاء مقادیرمختلف $\alpha$ اندازهٔ h درحدود ۰٫۰۱ تقریب تغیر میکند و عملاً نقطهٔ B ثابت میماند . حال بر oy نقطهٔ B راباعرض $OB=\frac{11}{4}$ انتخاب کرده از B به M یك نقطه از ربع دایرهٔ OA وصل میکنیم تا ox رادر N قطع قطع کند ، ثابت میکنیم طول قطعه خط ON با ۰٫۱ تقریب برابرباطول کمان OM است. ازرابطهٔ (۱) نتیجه میشود

$$\alpha=\frac{h\cos\alpha}{h-1+\cos\alpha} \qquad (2)$$

اگر $\alpha=\widehat{OM}=\overline{ON}=l$ و $h=\frac{11}{4}$ باشد رابطهٔ (۲) به صورت زیر در میآید

$$l=\frac{h\sin\alpha}{h-1+\cos\alpha} \quad \text{یا} \quad l=\frac{11\sin\alpha}{7+4\cos\alpha}$$

چون اندازهٔ l تحقیقاً برابر اندازهٔ $\alpha$ نیست اگرخطای نسبی رادراین اندازه گیری برابر D فرض کنیم

$$D=l-\alpha \quad \text{یا} \quad D=\frac{l\sin\alpha}{h-1+\cos\alpha}-\alpha$$

بوده حد اکثر D خطای فوق را بامحاسبات زیربررسی میکنیم

$$D'=\frac{h\cos\alpha(h-1+\cos\alpha)+h\sin^2\alpha}{(h-1+\cos\alpha)^2}-1$$

ازمعادلهٔ $D'=0$ حاصل خواهد شد

$$\cos^2\alpha-(h^2-2h+2)\cos\alpha+h^2-3h+10=0$$

$$\cos\alpha=1 \quad \text{و} \quad \cos\alpha=h^2+3h+1$$

وبازاء $h=\frac{11}{4}$ داریم:

$\cos\alpha = ۱$ و $\alpha = ۰$

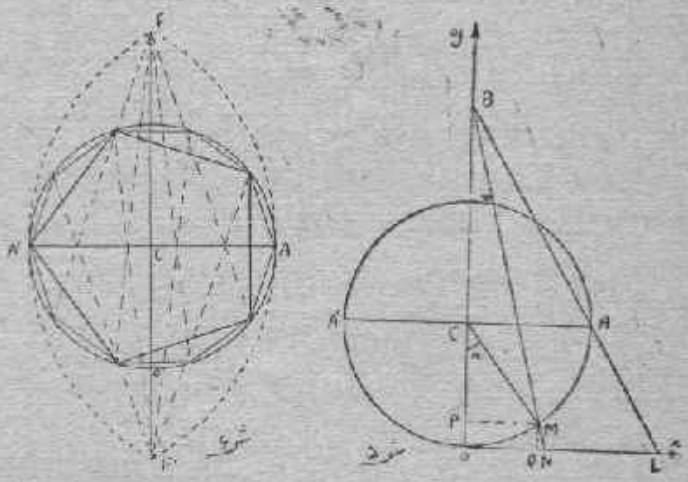
رادیان $\alpha \approx ۷۱^\circ ۳۰' \approx ۱٫۲۴۷$ و $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۶}$

یعنی اگر نقطهٔ B ثابت بماند تابع D بازاء $\alpha = ۰$ می‌نیمم وبازاء $\alpha = ۱٫۲۴۷$ ماکزیمم وحداکثر خطا برابر خواهد بود با

$D = ۱ - \alpha$ یا $D = ۱٫۲۶۱ - ۱٫۲۴۷ = ۰٫۰۱۴$

یعنی باتقریب درحدود ۰٫۰۱ داریم $\overline{ON} = \widehat{OM}$

**تبصره** ـ درمحاسبات فوق شعاع دایره $R = ۱$ فرض‌شد ومسلماً هرچه R بزرگتر باشد مقدارخطای حاصل نیز بیشتر خواهد بود وقاعدهٔ بالا برای دایره هائی که شعاع آنهاخیلی بزرگ نباشد قابل اعمال است .




شکل ۶ — شکل ۷

**VI ـ مورداستعمال : تقسیم دایره به n جزء متساوی**

چون $\overline{OL} = \widehat{OA} = \frac{\pi}{۲}$ است پس اگر خط BM پاره خط OL را نصف کند کمان OA رانیز نصف میکند وبطورکلی اگرازنقطهٔ B خطوطی رسم کنیم که OL رابه n قسمت متساوی تقسیم کنند کمان OA را نیزبه n قسمت (تقریباً متساوی) تقسیم مینمایند وواضح است که شعاع CA نیز دراین حال به n قسمت متساوی تقسیم میشود ، وازاینجا قاعدهٔ تقریبی زیر (که عملاً قابل استفاده است) برای تقسیم محیط دایره به n جزء متساوی بدست میآید :

**VII ـ قاعده :** قطر $AA'$ از دایره رابه n قسمت متساوی تقسیم میکنیم به مرکز A وبه شعاع $AA'$ کمانی‌رسم میکنیم تا عمود منصف $A'A$ رادر F و $F'$ قطع کند (بجای نقطهٔ B نقطه F اختیار میشود زیرا

$( CF = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} - \sqrt{۳} \approx ۱٫۷۳۲$ و $CB = \frac{۱۱}{۴} = ۱٫۷۵$ )

از F و $F'$ به‌نقاط تقسیم $AA'$ وصل کرده امتداد میدهیم عملاً محیط دایره به n کمان متساوی تقسیم خواهدشد (شکل ۶)

**تبصره** ـ بااستفاده ازمسألهٔ V عملا میتوان کمانی از دایره را به اجزاء متساوی تقسیم نموده (تثلیث زاویه) . یا اینکه پاره خطی باطول $\pi$ رسم نمود (تربیع دایره)

## بی آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

سه‌قوطی است که درهریك دوسنك مرمر قراردارد . دریکی هردوسنك سفید ودر دیگری هردوسنك مشکی و درسومی یکی سفید ودیگری مشکی است . روی در هرقوطی برچسبی نصب شده است که رنك سنگهای داخل قوطی را معلوم می‌کند. مثلاً روی در آن قوطی که داخلش دوسنك مرمر سفید است برچسب س.س وروی درآن قوطی که در داخلش دوسنك مشکی است برچسب م.م وبالاخره برروی در قوطی سوم برچسب س.م چسبانده شده است . حال اگردرهای قوطیهارابا‌هم عوض کنیم به‌طوری که ازبرچسب هیچ دری نتوان فهمید که درداخل آن قوطی چه‌رنك سنك قراردارد ، معلوم کنید که چند سنك ازقوطیها باید درآوریم و رنك آن را ببینیم تا رنك بقیهٔ سنگهای داخل قوطیهارا ندیده تشخیص بدهیم ؟

## مسئلهٔ گردو

چندنفر بباغی‌رفته مقداری گردوچیدند ودرگوشهٔ اطاق انبارنمودند وشب به‌استراحت پرداختند. یکی ازآنهانصف شب بیدارشد وبتصورآنکه دیگران ممکن است درتقسیم اورا مغبون کنند ، گردوهارا بتعداد نفرات تقسیم نمود ، یك گردوزیادآمد ، آنرابموجب حکم وجدان که نمیخواست بیشتراز دیگران سهمی برده باشد بخارج پرتاب کرد وسهم خودرا پنهان نمود وبه بسترخود رفت . بلافاصله نفردوم بیدارشد وباهمین تصورباقیمانده رابتعداد نفرات تقسیم کرد ویك گردو اضافه‌آمد ، آنرا بخارج پرتاب کرده سهم خودرا پنهان کرد و برختخواب رفت . نفرسوم ، نفرچهارم ، الی‌آخر به‌ترتیب بیدارشدند واین عمل‌رانکرار کردند تعیین کنید تعداد گردوهارا .

مسئله را برای سه‌نفر و ۵ نفرحل کنید . (ایرج ادیبی)

# حل مسائل شمارهٔ ۸

حل مسائلی که برای دانش آموزان دورهٔ دوم دبیرستانها در شمارهٔ ۸ مطرح شده بود در زیر درج میشود نام فرستندگان پاسخهای حل که این مسائل نامههای مربوطه حداکثر تا بیستم آبان واصل شده باشد درصفحات آخر مجله چاپ میشود . حل مسائل متفرقه با ذکر نام حل کنندگان آنها در شمارهٔ دهم چاپ خواهد شد .

## کلاس چهارم طبیعی

**حل مسألهٔ ۱۵۰۳ـ** پس از ضرب دو جمله‌ای $x+1$ درجمله‌های داخل کروشه وتحویل جمله‌های متشابه حاصل تمام عبارت برابر خواهد شد با

$$x+2(-1)^{n-1}x^{n+1}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۰۴ـ** تبدیل عبارت $A=x^2+y^2-4x-4y+8$ به صورت مجموع دومربع و تعیین مقادیری از $x$و$y$ که در ازاء آن $A=0$ است .

داریم $A=(x-2)^2+(y-2)^2$ و چون مجموع دو مربع همواره مثبت است مگر اینکه هردو باهم برابرصفر باشند، لذا فقط وقتی $A=0$ است که داشته باشیم

$$\begin{cases}(x-2)^2=0\\(y-1)^2=0\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}x=2\\x=2\end{cases}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۰۵ـ** ساده‌نمودن کسر $\frac{x^3-|x|}{x^2+|x|}$

۱) اگر $x>0$ باشد $|x|=x$ بوده وداریم

$$\frac{x^3-|x|}{x^2+|x|}=\frac{x^3-x}{x^2+x}=\frac{x(x+1)(x-1)}{x(x+1)}=x-1$$

۲) اگر $x<0$ باشد $|x|=-x$ بوده و

$$\frac{x^3-|x|}{x^2+|x|}=\frac{x^3+x}{x^2-x}=\frac{x(x^2+1)}{x(x-1)}=\frac{x^2+1}{x-1}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۰۶ـ** اولاً دوعبارت داده شده به صورت زیر تجزیه میشوند

$(x-3)(x-1)$ و $(x-3)(2x-3)$

ثانیاً هریك ازکسرها پس از ساده‌شدن برابر است با

$$A=\frac{3(x+3)(x+1)}{(x+2)(x-3)}=\frac{3(x+1)}{x-3}$$

$$B=\frac{(1-3x)(x-1)}{(x-1)(3-x)}=\frac{1-3x}{x-2}$$

$$C=\frac{(2x-3)^2}{(2x-3)(x-3)}=\frac{2x-3}{x-3}$$

$$A+B+C=\frac{3x+3+1-3x+2x-3}{x-3}=\frac{2x+1}{x-3}$$

## کلاس چهارم ریاضی

**حل مسألهٔ ۱۵۰۷ـ** اثبات اینکه اگر $a+b+c=0$ (۱) باشد داریم

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4) \qquad (2)$$

طرفین رابطهٔ (۱) را به توان ۲ میرسانیم و نتیجه خواهیم گرفت

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc)$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(ab+ac+bc)^2$$

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=4(a^2b^2+$$
$$+a^2c^2+b^2c^2)+8abc(a+b+c)$$

$$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \qquad (3)$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+$$
$$+a^2c^2+b^2c^2) \qquad (4)$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۳) و (۴) رابطهٔ (۲) بدست خواهد آمد .

**حل مسألهٔ ۱۵۰۸ ـ** برای تجزیهٔ عبارت صورت کسر به‌ترتیب زیرعمل میکنیم :

$$x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x)$$

عبارت را نسبت به $x$ مرتب مینمائیم

$$x^3(z-y)-x(z^3-y^3)+yz^3-zy^3=$$
$$=x^3(z-y)-x(z-y)(z^2+zy+y^2)+$$
$$+yz(z-y)(z+y)=$$

از عامل $z-y$ فاکتور گرفته عامل دیگررا نسبت‌به $y$ مرتب میکنیم .

$$(z-y)[y^2(z-x)+yz(z-x)-x(z^2-x^2)]$$

در عبارت داخل کروشه از عامل $z-x$ فاکتور گرفته

باقی را نسبت به $z$ مرتب مینمائیم که بالاخره حاصل عبارت فوق عبارت خواهد شد از

$$(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

عبارت مخرج کسر نیز بطریق مشابه تجزیه شده و بصورت زیر نوشته میشود $-(x-y)(y-z)(z-x)$

ودر نتیجه حاصل کسر برابر میشود با $-(x+y+z)$

**حل مسألهٔ ۱۵۰۹ـ** عبارت داده شده به صورت زیر نوشته میشود :

$$2^{(5x-3)(x-2)}=2^{5(x+2)(x-1)}$$

و خواهیم داشت :

$$(5x-3)(x-2)=5(x+2)(x-1)$$

$$-18x=-16 \text{ و } x=\frac{8}{9}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۱۰ـ** اولاً خواهیم داشت

$$A-1=\frac{4bc-a^2}{bc+2a^2}-1=\frac{3(bc-a^2)}{bc+2a^2}$$

$$B-1=\frac{3(ca-b^2)}{ca+2b^2} \text{ و } C-1=\frac{3(ab-c^2)}{ab+2c^2}$$

با توجه بهرابطهٔ مفروض $a+b+c=0$ داریم

$$bc+2a^2=bc+a^2+a^2=bc+a^2-a(b+c)$$
$$=\ldots(a-b=)(a-c)$$

$$ca+2b^2=(b-a)(b-c) \text{ و}$$

$$ab+2c^2=(c-a)(c-b) \text{ و}$$

$$bc-a^2=bc+a(b+c)=ab+bc+ca$$

$$ca-b^2=ab+bc+ca \text{ و } ab-c^2=ab+bc+ca$$

$$A+B+C-3=2(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\right]$$

عبارت داخل کروشه پس از ساده شدن برابر با صفر شده و درنتیجه $A+B+C=3$ یا $A+B+C-3=0$

ثانیاً درنظر میگیریم که

$$4bc-a^2=4bc-(b+c)^2=-(b-c)^2$$

$$4ca-b^2=-(c-a)^2 \text{ و } 4ab-c^2=-(a-b)^2$$

$$ABC=-\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}\times\frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}\times$$
$$\times\frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{(b-c)^2(c-a)^2(c-b)^2}=1$$

**حل مسألهٔ ۱۵۱۱ـ** بفرض اینکه $m$ عدد صحیح مثبت فرد باشد اثبات اینکه

$$P=(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$$

بر $(a+b)(b+c)(c+a)$ بخش‌پذیر است .

درازاء $a=-b$ وهمچنین $b=-c$ وبالاخره $c=-a$ مقدار $P$ برابر باصفر میشود پس $P$ بر هریك از عاملهای $a+b$ و $b+c$ و $c+a$ بخش‌پذیر بوده برحاصل‌ضرب آنها نیز بخش‌پذیر است .

**حل مسألهٔ ۱۵۱۲ ـ** بفرض

$$x=a+b+c+d \text{ و } y=a+b-c-d$$

$$z=a-b+c-d \text{ و } t=a-b-c+d$$

$$ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$$

اثبات رابطهٔ $xy(x^2+y^2)=zt(z^2+t^2)$

$$xy=[(a+b)+(c+d)][(a+b)-(c+d)]$$
$$=(a+b)^2-(c+d)^2$$

$$x^2+y^2=[(a+b)+(c+d)]^2+[(a+b)$$
$$-(c+d)]^2=2[(a+b)^2+(c+d)^2]$$

و نتیجه خواهد شد

$$xy(x^2+y^2)=2[(a+b)^4-(c+d)^4]$$

و با محاسبات نظیر بدست خواهد آمد که

$$zt(z^2+t^2)=2[(a-b)^4-(c-d)^4]$$

فرض میکنیم $H=xy(x^2+y^2)-zt(z^2+t^2)$

خواهیم داشت :

$$H=2[(a+b)^4-(a-b)^4]-2[(c+d)^4-(c-d)^4]$$
$$=\ldots=16[ab(a^2+b^2)-cd(c^2+d^2)]=0$$

و رابطهٔ مطلوب محقق خواهد شد

**حل مسألهٔ ۱۵۱۳ـ** اولا تجزیهٔ عبارت‌داده شده‌عبارت خواهد شد از $(a+b)(b+c)(c+a)$

ثانیاً عبارت $P$ پس‌از تحویل به‌یك‌مخرج به‌صورت کسری درمیآید که صورت آن عبارت مفروض و مخرج آن تجزیه شدهٔ عبارت صورت میباشد درنتیجه $P=1$ میباشد

**حل مسألهٔ ۱۵۱۴ـ** هواپیمائی در امتدادی از سطح زمین برمیخیزد و درهرثانیه $\frac{200}{7}$ متر به ارتفاع آن افزوده میشود. اولاً تعیین ارتفاع هواپیما در ۸ ثانیه بعد ازپرواز . ثانیاً بفرض اینکه سرعت هواپیما ۱۰۰ متر در ثانیه باشد تعیین زاویهٔ میل امتداد پرواز هواپیما با صفحهٔ افق .

ارتفاع هواپیما بعد از ثانیهٔ هشتم عبارتست از جملهٔ‌هشتم

یك تصاعد حسابی که جملهٔ اولش صفر وقدر نسبتش $\frac{۲۰۰}{۷}$ میباشد .

$l=a+(n-۱)d$ و $l=۲۰۰m$

ثانیاً مسافت پیموده شده توسط هواپیمادر ۸ ثانیه برابر است با ۸۰۰ متر واگر $\alpha$ زاویهٔ میل امتداد پرواز باافق باشد.

$\sin\alpha=\frac{۲۰۰}{۸۰۰}=\frac{۱}{۴}$ و $\alpha\simeq ۱۴^\circ$

**حل مسألهٔ ۱۵۱۵ ـ** تعیین حاصل عبارت زیر

$P=۱۰۰۰^۲-۹۹۹^۲+۹۹۸^۲-۹۹۷^۲+\cdots+۲^۲-۱^۲$

$P=(۱۰۰۰+۹۹۹)(۱۰۰۰-۹۹۹)+(۹۹۸+۹۹۷)$
$\times(۹۹۸-۹۹۷)+\cdots+(۲+۱)(۲-۱)$

$P=۱۰۰۰+۹۹۹+۹۹۸+\cdots+۲+۱=۵۰۰۵۰۰$

**حل مسألهٔ ۱۵۱۶ ـ** چون تعداد جمله ها زوج است تصاعد را به صورت زیرفرض میکنیم که درآن $۲r$ قدر نسبت است .

$a=x-۳r$ و $b=x-r$ ، $C=x+r$ و $d=x+۳r$

$abcd=(x^۲-۹r^۲)(x^۲-r^۲)=x^۴-۱۰r^۲x^۲+۹r^۴$

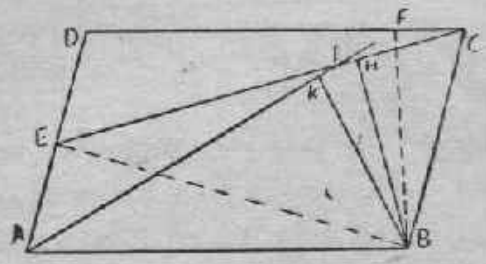
$(b-a)^۴=(۲r)^۴=۱۶r^۴$

$abcd+(b-a)^۴=x^۴-۱۰r^۲x^۲+۲۵r^۴=$
$(x^۲-۵r^۲)^۲$

یعنی عبارت مربع کامل است .

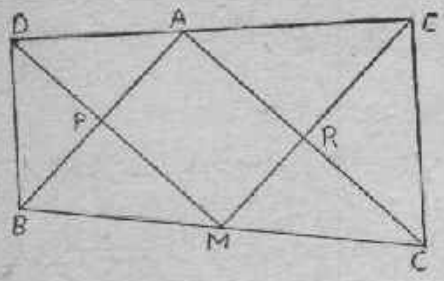
**حل مسألهٔ ۱۵۱۷ ـ** متوازی‌الاضلاع ABCD که‌در آن زاویهٔ A حاده بوده و $AB>AD$ میباشد مفروض است برضلع AD نقطه‌ای‌مانند E انتخاب میکنیم . تحقیق کنید که برضلع CD نقطه‌ای‌مانند F میتوان‌تعیین کرد که $AF=CE$ باشد واگر I نقطهٔ تلاقی AF با CE باشد ثابت کنید که BI نیمساز یکی از زاویه‌های دوخط AF و CE میباشد .

اولاً چون درمثلث ACD زاویهٔ D منفرجه‌است‌لذا $AC>CE>CD$ میباشد و چون $AD<CD$ است پس $AC>CE>AD$ بوده نتیجه‌میشودطول $AF=CE$ وجود دارد که F بر CD واقع باشد .




ثانیاً دو مثلث ABF و BCE که هر دو با مثلث ABD معادلند بایکدیگر معادل بوده ارتفاع‌های BK و BH آن دوبایکدیگر مساویست یعنی نقطهٔ B ازدوضلع زاویهٔ I به‌یك فاصله بوده به نیمساز این زاویه تعلق‌دارد .

**حل مسألهٔ ۱۵۱۸ ـ ۱)** اثبات اینکه سه نقطهٔ D و A و E بریك استقامتند .




هریك‌اززاویه‌های DAB و EAC برابر $۴۵^\circ$است و مجموع سه زاویهٔ EAC و DAB و CAB برابر خواهد شد با $۱۸۰^\circ$ یعنی خطوط AE و AD بر یك امتداداند.

۲) اثبات اینکه چهار ضلعی BDEC ذوزنقهٔ قائم بوده وتعیین مساحت آن: دوخط CE و BD که هردو برخط DAE عمود اند متوازیند پس چهار ضلعی مذکور ذوزنقهٔ قائم است وداریم

$BD=DA=AB\frac{\sqrt{۲}}{۲}=c\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و

$AE=EC=AC\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{b\sqrt{۲}}{۲}$

$S=\frac{(BD+CE)(DA+AE)}{۲}=$

$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{c\sqrt{۲}}{۲}+\frac{b\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}(b+c)^۲$

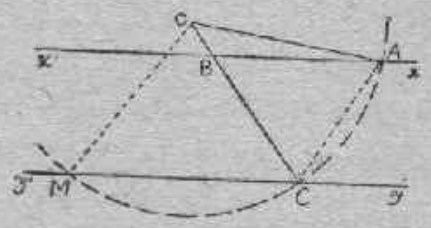
۳) اثبات اینکه چهار ضلعی ARMP مستطیل است : چون AM میانهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است لذا $MA=MB=MC$ و از تساویهای $MA=MB$ و $DA=DB$ نتیجه میشودکه MD عمود منصف AB است و از تساویهای $MA=MC$ و $EA=EC$ نیز معلوم میشود که ME عمودمنصف AC بوده درنتیجه‌چهارضلعی فوق‌الذکر مستطیل میباشد .

**حل مسألهٔ ۱۵۱۹ ـ** خط xy و نقاط A و B در خارج آن مفروض‌اند . نقطهٔ C رابر xy چنان بدست آورید که یکه از میانه های مثلث ABC باخط xy زاویهٔ معلوم $\alpha$ بسازد. ازیك نقطهٔ دلخواه O واقع بر xy دو خط $\Delta$ و $\Delta'$ را چنان رسم میکنیم که هریك‌با xy زاویهٔ $\alpha$ بسازد واز نقطهٔ M وسط AB بموازات $\Delta$ یا $\Delta'$ رسم میکنیم تا xy رادر C و C' قطع کند مثلث ABC یا ABC' جواب مسأله است .

چنانچه $\alpha$ زاویهٔ میانهٔ نظیر رأس A با xy باشد ابتدا از A بموازات $\Delta$ یا $\Delta'$ رسم میکنیم که xy را در N یا N' قطع میکندواز B بموازات xy رسم‌میکنیم که AN یا AN' رادر K و K' قطع مینماید خطی‌که از B به وسط KN یا K'N' وصل شود xy رادر C یا C' قطع مینماید .

**حل مسألهٔ ۱۵۳۰** ـ دوخط متوازی $x'x$ و $y'y$ ونقطهٔ $A$ واقع بر $x'x$ داده شده است ازنقطهٔ مفروض $O$ خطی مرور دهید که $x'x$ رادر $B$ و $y'y$ رادر $C$ قطع کندو $AB=AC$ باشد.

اگر مسأله را حل شده فرض کنیم از تساوی زاویه های $ABC$ و $ACB$ وهمچنین $ABC$ و $BCy'$ نتیجه میشودکه $AC$ نیمساز زاویهٔ $ACy'$ میباشد وچون $CM=AC$ رابر $Cy'$ جدانمائیم نتیجه خواهد شدکه $OM=OA$. بنابراین برای رسم خط مطلوب کافی است دایره بمرکز $O$ وبه شعاع $OA$ رارسم کنیم تا $y'y$ رادر $M$ قطع نماید. نیمساز زاویهٔ $MOA$ جواب مسأله است. مسأله وقتی جواب خواهد داشت که دایرهٔ مزبور خط $y'y$ راقطع نماید.




## کلاس‌های پنجم طبیعی و ریاضی

**حل مسألهٔ ۱۵۳۱** ـ بنابه فرض داریم $x_A=-1$ و $x_B=4$ وخواهیم داشت $x_{A'}=1$ و $x_{B'}=-4$ و

$$x_P=\frac{x_A+x_{B'}}{2}=-\frac{5}{2} \text{ و } x_{P'}=\frac{x_{A'}+x_B}{2}=\frac{5}{2}$$

$$PP'=x_{P'}-x_P=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=5$$

**حل مسألهٔ ۱۵۳۲** ـ سه نقطه $A(0,1)$ و $B(3,0)$ و $M(a+1,\ 3a-1)$ مفروض است.

۱) بااستفاده ازفرمول فاصلهٔ دونقطه بدست خواهدآمد:

$$AM=BM=\sqrt{10a^2-10a+5}$$

۲) مختصات نقطهٔ $P$ وسط $AB$ بترتیب $\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{2}$ است وازیکی از معادله‌های $a+1=\frac{3}{2}$ یا $3a-1=\frac{1}{2}$ برای $a$ مقدار $a=\frac{1}{2}$ بدست میآید.

۳) برای اینکه مثلث $AMB$ قائم‌الزاویه باشد باید داشته باشیم $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=\overline{AB}^2$ وبعد از محاسبه‌های لازم مقادیر $a=0$ و $1$ بدست میآید.

۴) برای اینکه $M$ ازدو محور به یك فاصله باشد باید $|a+1|=|3a-1|$ یا $a+1=\pm(3a-1)$ و دومقدار $a=0$ و $1$ بدست میآید.

۵) وضع نقطهٔ $M$ واقع بر محور $y'y$ میباشد یعنی $a+1=0$ یا $a=-1$ و مختصات $P$ عبارت است از $P(0,-4)$ و ازروی روابط بین مختصات چهار رأس یك متوازی‌الاضلاع $Q(2,5)$ بدست خواهدآمد.

**حل مسألهٔ ۱۵۳۳** ـ اگر $x$ اندازهٔ زاویهٔ $B$ بحسب گراد باشد اندازهٔ زاویهٔ $C$ بحسب درجه برابر خواهد بود با $\frac{18x}{5}$ وبرحسب گراد برابر خواهد شد با

$$\frac{18x}{5}\times\frac{200}{180}=4x$$

وچون اندازهٔ زاویهٔ قائمهٔ $A$ برابر ۱۰۰ گراد است پس:

$4x+x=100$ و $x=20$ گراد

$B=20\ gr=18^\circ$ و $C=80\ gr=72^\circ$

**حل مسألهٔ ۱۵۳۴** ـ دردایرهٔ جهت داربه‌مبدأ $A$ نقاط $M$ و $M_1$ و $M_2$ بترتیب زیر بدست میآیند.

$$\widehat{AM}=1045^\circ=4\times360^\circ+105^\circ=8\pi+\frac{7\pi}{12}$$

$$\widehat{AM_1}=-1750\,gr=-4\times400-150\,gr=$$
$$=-8\pi-\frac{3\pi}{4}=-10\pi+\frac{5\pi}{4}$$

$$\widehat{AM_2}=-\frac{649\pi}{12}=-54\pi-\frac{\pi}{12}=-56\pi+\frac{23\pi}{12}$$

تفاضل دو بدوی هر یك از کمانهای با اندازه های $\frac{7\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{23\pi}{12}$ برابراست با $\frac{2\pi}{3}$ پس نقاط $M$ و $M_1$ و $M_2$ سه رأس یك سه ضلعی منتظم میباشند وفرمول کلی اندازهٔ کمان شامل هرسه کمان فوق عبارت است از $\frac{2K\pi}{3}+\frac{7\pi}{12}$

## کلاس پنجم ریاضی

**حل مسألهٔ ۱۵۳۵** ـ معادلهٔ (۱) $ax^2+b|x|+c=0$ که در آن $x$ مجهول و $a\neq0$ است مفروض‌است، فرض میکنیم $|x|=y$ دراین صورت معادلهٔ (۱) با دستگاه زیرهم ارز میباشد.

$$\begin{cases} ay^2+by+c=0 \\ |x|=y \end{cases} \qquad (2)$$

ازدستگاه (۲) معلوم میشود که فقط ریشه‌های مثبت معادلهٔ نسبت به $y$ برای معادلهٔ نسبت به $x$ قابل قبول میباشد (اگر $y=0$ باشد $x=0$ خواهد بود)

۱) اگر $ac<0$ باشد ازمعادلهٔ (۲) دومقدار مختلف العلامت برای $y$ بدست میآید که درازاء مقدارمثبت آن که قابل قبول است دومقدار قرینه برای $x$ حاصل میشود.

۲) اگر $ac>0$ و $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد اولاً ضریب $b$ صفر نمیتواند باشد زیرا لازم میآید که $ac<0$ باشد و معادلهٔ (۲) دارای دو جواب متحدالعلامت $y'$ و $y''$ میباشد. چنانچه $-\frac{b}{a}<0$ باشد مقادیر $y'$ و $y''$ هردومنفی بوده ومعادلهٔ (۱) دارای ریشهٔ قابل قبول نمیباشد. چنانچه $-\frac{b}{a}>0$ باشد مقادیر $y'$ و $y''$ هردو مثبت بوده ومعادلهٔ (۱) دارای چهار ریشهٔ $x_1=y'$ و $x_2=-y'$ و $x_3=y''$ و $x_4=-y''$ خواهد بود.

۳) در حالت $c=0$ معادلهٔ (۲) دارای ریشه‌های $y'=0$ و $y''=-\frac{b}{a}$ است که اگر $-\frac{b}{a}<0$ باشد معادلهٔ (۱) فقط دارای ریشهٔ $x=0$ است و اگر $-\frac{b}{a}>0$ باشدمعادلهٔ (۱) دارای سه ریشهٔ $x_1=0$ و $x_2=y''$ و $x_3=-y''$ خواهد بود و اگر $-\frac{b}{a}=0$ باشد معادلهٔ (۱) فقط دارای ریشهٔ $x=0$ میباشد (میتوان گفت $x=0$ ریشهٔ مرتبهٔ سوم معادله میباشد)

۴) درحالت $\Delta=0$ معادلهٔ (۲) دارای ریشهٔ مضاعف $y=-\frac{b}{2a}$ است. چنانچه $-\frac{b}{2a}<0$ باشد معادلهٔ (۱) دارای ریشه نیست و چنانچه $-\frac{b}{2a}>0$ باشد معادلهٔ (۱) دارای ریشه های $x=\pm\frac{-b}{2a}$ است و اگر $b=0$ باشد معادلهٔ (۱) دارای ریشهٔ مضاعف $x=0$ میباشد.

**حل مسألهٔ ۱۵۳۶ ـ** حل وبحث معادلهٔ زیر:

$$\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}=1 \qquad (1)$$

طرفین را بتوان ۲ میرسانیم

$$x-a+x-b-2\sqrt{(x-a)(x-b)}=1$$

$$\sqrt{(x-a)(x-b)}=x-\frac{a+b+1}{2} \qquad (2)$$

ریشه‌های معادلهٔ (۲) عبارت اند از ریشه های دستگاه زیر

$$\begin{cases}(x-a)(x-b)=\left(x-\frac{a+b+1}{2}\right)^2 & (3)\\ x-\frac{a+b+1}{2}\geq 0 & (4)\end{cases}$$

از معادلهٔ (۳) پس ازساده کردن بدست خواهد آمد

$$x=\frac{(a+b+1)^2-4ab}{4} \qquad (5)$$

وتامساوی (۴) باتوجه به (۵) پس ازساده شدن چنین مشود:

$$(a+b+1)^2-2(a+b+1)-4ab\geq 0$$

که بازهم ساده میشود:

$$(a+b)^2-1-4ab=(a-b)^2-1\geq 0$$

ونتیجه خواهد شد

$$|a-b|\geq 1 \qquad (6)$$

اگرشرط (۶) برقرار باشد جواب (۵) از $x$ برای معادلهٔ (۲) قابل قبول بوده اما برای معادلهٔ (۱) خواهیم‌داشت

$$\sqrt{x-a}=\sqrt{\frac{(a+b+1)^2-4ab}{4}-a}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a-b-1)^2}{4}}=\frac{|a-b-1|}{2}$$

$$\sqrt{x-b}=\cdots=\sqrt{\frac{(a-b+1)^2}{4}}=\frac{|a-b+1|}{2}$$

وطرف اول معادلهٔ (۱) عبارت میشود از

$$\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}=\frac{|a-b-1|-|a-b+1|}{2}$$

بادر نظر گرفتن رابطهٔ (۶) دوحالت درنظر میگیریم

حالت اول ـ $a-b\geq 1$ باشد دراین صورت

$$\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}=\frac{(a-b-1)-(a-b+1)}{2}=-1$$

ومقدار $x$ از رابطهٔ (۵) ریشهٔ معادلهٔ (۱) نخواهد بود.

حالت دوم ـ $a-b\leq -1$ باشد در این صورت

$$\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}=\frac{-(a-b-1)+(a-b+1)}{2}=1$$

ومقدار $x$ ازرابطهٔ (۵) برای (۱) ریشهٔ قابل قبول میباشد.

خلاصه باتوجه به اینکه در حالت $-1<a-b<1$ شرط (۶) برقرار نیست بحث چنین میشود.

۱ ـ اگر $a-b\leq -1$ باشد معادله دارای یك ریشهٔ (۵) میباشد.

۲) اگر $a-b>-1$ باشد معادله ریشه نخواهد داشت:

**حل مسألهٔ ۱۵۳۷ ـ** حل و بحث نامعادلهٔ

$$mx^2+(m-1)x+m-1<0$$

و $\Delta=-(3m+1)(m-1)$ و $a-m$

با توجه به علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم بحث درنامعادله در جدول زیر خلاصه میشود .

| m | Δ | a | جواب |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $-$ | $-$ | $\forall x$ |
| $-\frac{1}{3}$ | $\cdot$ | | $(x\neq -2)\forall x$ |
| | $+$ | $-$ | $x<x''$ و $x>x'$ |
| $\cdot$ | | $\cdot$ | $x>-1$ |
| | $+$ | $+$ | $x''<x<x'$ |
| $1$ | $\cdot$ | | ممکن نیست |
| | $-$ | $+$ | نامعادله ممکن نیست |
| $+\infty$ | | | |

**حل مسألهٔ ۱۵۲۸ـ** حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} 2x^3-3x=2y^3-3y \\ x^4-2x^2=y^4-2y^2 \\ x\neq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x^3<y^3)=3(x-y) \\ x^4-y^4=2(x^2-y^2) \end{cases}$$

با تجزیهٔ عبارات طرفین تساوی‌ها و حذف عامل $x-y\neq 0$ داریم :

$$\begin{cases} 2(x^2+xy+y^2)=3 \\ (x+y)(x^2+y^2-2)=0 \end{cases}$$

و این دستگاه به‌دو دستگاه زیر تجزیه میشود :

$$\begin{cases} 2(x^2+xy+y^2)=3 \\ x^2+y^2-2=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 2(x^2+xy+y^2)=3 \\ x+y=0 \end{cases}$$

با حل هر یك از دو دستگاه فوق که نسبت x و y متقارن هستند جوابهای زیر بدست میآید :

$$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y=-\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=-\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y=\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\pm\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\pm\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۲۹ـ** حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} xy+xy^2+xy^3=280 \\ x+xy^4+xy^5=980 \end{cases}$$

طرفین معادلهٔ دوم را نظیربه نظیر بر طرفین معادلهٔ اول تقسیم میکنیم پس از حذف $x\neq 0$ از صورت و مخرج کسر حاصل ، خواهیم داشت :

$$\frac{y^5+y^4+1}{y^3+y^2+y}=\frac{7}{2}$$

عبارت مخرج بصورت $y(y^2+y+1)$ تجزیه میشودو عبارت صورت کسر بر $y^2+y+1\neq 0$ قابل‌قسمت است‌که پس از تقسیم وساده کردن کسر خواهیم داشت :

$$\frac{y^3-y+1}{y}=\frac{7}{2} \quad \text{یا} \quad 2y^3-9y+2=0$$

$$2y^3-8y-y+2=0 \quad \text{یا} \quad 2y(y^2-4)-(y-2)=0$$

$$(y-2)(2y^2+4y-1)=0 \quad y=2 \quad \text{و} \quad \frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$$

در ازاء این مقادیر y ، از روی یکی‌از معادله‌های‌دستگاه مقادیر نظیر x بدست میآید .

**حل مسألهٔ ۱۵۳۰ـ** حل دستگاه

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=13\sqrt{2} \end{cases}$$

از تقسیم طرفین دومعادله بریکدیگر وحذف عامل $x-y\neq 0$ نتیجه میشود $x+y=26$ که چون درمعادلهٔدوم قرار دهیم و ساده نمائیم $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2}$ وازروی آن $\sqrt{xy}=12$ یا $xy=144$ بدست خواهد آمد و با توجه به اینکه $x>y>0$ است خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x+y=26 \\ xy=144 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=18 \\ y=8 \end{cases}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۳۱ـ** حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} x^3=7x+3y \\ y^3=3x+7y \end{cases}$$

طرفین دو معادلهٔ دستگاه را نظیر به‌نظیر یك دفعه با هم جمع و یك دفعه از هم کم مینمائیم :

$$\begin{cases} x^3+y^3=10(x+y) \\ x^3-y^3=4(x-y) \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2-10)=0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2-4)=0 \end{cases}$$

و چهار دستگاه زیر حاصل خواهد شد

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x^2-xy+y^2=10 \\ x^2+xy+y^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2=4 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x^2-xy+y^2=10 \\ x-y=0 \end{cases}$$

که از حل هریك از دستگاهها مقادیر زیر برای x و y بدست خواهدآمد .

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{10} \\ y=\pm\sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{13}) \\ y=\pm\frac{1}{2}(1-\sqrt{13}) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=\pm\frac{1}{2}(1-\sqrt{13}) \\ y=\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{13}) \end{cases}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۳۲ـ** حل دستگاه

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^2+y^2+a^2}+\sqrt[3]{(x-y+a)^2}=2\sqrt[3]{4xy} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{a}=0 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم حاصل میشود $ay-ax+xy=0$ و در نتیجه خواهیم داشت $(x-y+a)^2=x^2+y^2+a^2$ و دستگاه بصورت زیر در میآید .

$$\begin{cases} 2\sqrt[3]{(x-y+a)^2}=2\sqrt[3]{4xy} \\ a(x-y)-xy=0 \end{cases}$$

و بالاخره بدست خواهد آمد :

$$\begin{cases} x-y=a \\ xx=a^2 \end{cases}$$

و از حل این دستگاه خواهیم داشت

$$x=\frac{a}{2}(1\pm\sqrt{5}) \quad \text{و} \quad y=\frac{a}{2}(-1\pm\sqrt{5})$$

**حل مسألهٔ ۱۵۳۳ـ** بفرض

$$b=3\sin u-4\cos u \quad \text{و} \quad a=3\cos u+4\sin u \quad \text{و} \quad 0<u<2\pi$$

و $c=c\,tg\,u$ محاسبهٔ مقادیر $y=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ از روی مقادیر u .

پس ازمحاسبات وساده‌کردن عبارت خواهیم داشت .

$$y=\sqrt{\frac{25}{\cos^2 u}}=\frac{5}{|\cos u|}$$

۱) اگر $0<u<\frac{\pi}{2}$ باشد داریم $y=\frac{5}{\cos u}$

۲) اگر $\frac{\pi}{2}<u<\frac{3\pi}{2}$ باشد داریم $y=-\frac{5}{\cos u}$

۳) اگر $\frac{3\pi}{2}<u\leqslant 2\pi$ باشد $y=\frac{5}{\cos u}$

**حل مسألهٔ ۱۵۳۴ ـ** بفرض

$$x=\frac{1}{\cos a\cos b} \quad \text{و} \quad y=\frac{tg\,a}{\cos b} \quad \text{و} \quad z=tg\,b$$

مقدارعبارت $P=x^2-y^2-z^2$ بعد از محاسبات لازم و اختصار برابربا $P=1$ بدست خواهدآمد .

**حل مسألهٔ ۱۵۳۵ ـ** بفرض

$$x=\frac{a}{\cos u}+b\,tg\,u \quad \text{و} \quad y=a\,tg\,u+\frac{b}{\cos u}$$

برای تعیین رابطهٔ مستقل از u بین x و y عبارت $x^2-y^2$ را حساب مینمائیم که بعد از محاسبات لازم وباتوجه به رابطهٔ $\frac{1}{\cos^2 u}-tg^2 u=1$ خواهیم داشت $x^2-y^2=a^2-b^2$

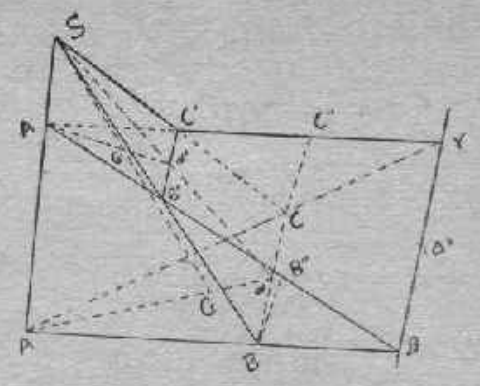
**حل مسألهٔ ۱۵۳۶ ـ** مثلث ABC ونقطهٔ S واقع در خارج صفحهٔ آن مفروض است بر خطوط SA وSB وSC نقاط A' وB' وC' را چنان تعیین میکنیم که

$$\frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}}=\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \frac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{SB}}=\frac{\overrightarrow{SC'}}{\overrightarrow{SC}}=\frac{1}{2}$$

۱) تعیین Δ فصل مشترك صفحات ABC و A'B'C' :

خطوط AB و A'B' موازی نیستند ودرنقطه‌ای مانند β یکدیگررا قطع می‌کنند . خطوط AC و A'C' نیز درنقطه‌ای مانند γ متلاقیند وخط Δ که بر β و γ میگذرد فصل مشترك مطلوب میباشد .

تعیین نسبت‌های $\frac{\overrightarrow{\beta B}}{\overrightarrow{\beta A}}$ و $\frac{\overrightarrow{\gamma C}}{\overrightarrow{\gamma A}}$ و $\frac{\overrightarrow{\beta\gamma}}{BC}$ : اگر B'' وC'' بترتیب قرینه‌های نقطهٔ A' نسبت به‌نقاط B' و C' باشند $\overrightarrow{BB''}=\overrightarrow{CC''}=\overrightarrow{A'S}=-\overrightarrow{SA'}$ بوده و داریم :



$$\frac{\overrightarrow{\beta B}}{\overrightarrow{\beta A}}=\frac{\overrightarrow{\gamma C}}{\overrightarrow{\gamma A}}=\frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{AA'}}=\frac{1}{2}$$

وار روی آن نتیجه خواهد شد که $\overrightarrow{\beta\gamma}=2\overrightarrow{BC}$ و در نتیجه $\beta\gamma$ با BC موازی میباشد .

۲) تعیین نسبت بین $\overrightarrow{SG}$ و $\overrightarrow{SG'}$ : اگر $\alpha$ وسط BC باشد خط $S\alpha$ خط $B'C'$ رادر $\alpha'$ قطع میکند وخط $A\alpha'$ فصل مشترك دوصفحهٔ $A'B'C'$ و $SA\alpha$ است .

خط SG درصفحهٔ $SA\alpha$ واقع بوده ونقطهٔ تلاقیش با صفحهٔ $A'B'C'$ همان نقطهٔ $G'$ نقطهٔ تلاقی SG و $A'\alpha'$ میباشد. داریم :

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{A\alpha}}=\frac{2}{3} \text{ و } \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AS}}=\frac{2}{3} \text{ پس}$$

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{A\alpha}}=\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AS}}=\frac{2}{3}$$

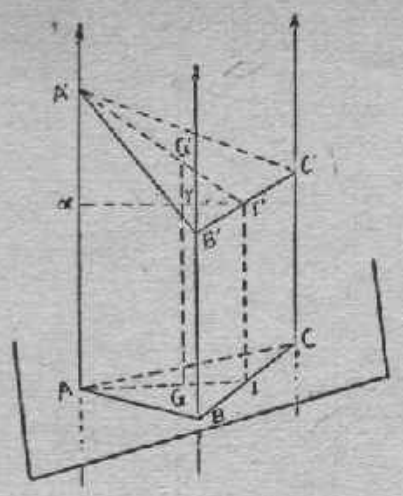
و نتیجه میشود که $A'G$ با $S\alpha$ موازی است و همچنین

$$\frac{\overrightarrow{A'G}}{\overrightarrow{S\alpha}}=\frac{2}{3}$$ وخواهیم داشت :

$$\frac{\overrightarrow{GA'}}{\overrightarrow{S\alpha'}}=2\frac{\overrightarrow{GA'}}{\overrightarrow{S\alpha}}=-\frac{4}{3}$$

$$\frac{\overrightarrow{G'G}}{\overrightarrow{G'S}}=-\frac{4}{3} \text{ یا } \frac{\overrightarrow{SG}-\overrightarrow{SG'}}{\overrightarrow{SG'}}=\frac{4}{3}$$

$$3\overrightarrow{SG}=7\overrightarrow{SG'} \text{ یا } \frac{\overrightarrow{SG'}}{\overrightarrow{SG}}=\frac{3}{7}$$



**حل مسألهٔ ۱۵۳۷** ـ اولاً اثبات اینکه $G'$ نقطهٔ ثابتی است اگر $I$ و $I'$ به ترتیب اوساط BC و $B'C'$ و G مرکز ثقل مثلث ABC و $G'$ مرکز ثقل مثلث $A'B'C'$ باشد داریم

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GI}}=-2 \text{ و } \frac{\overline{G'A'}}{\overline{G'I'}}=-2 \rightarrow \frac{\overline{GA}}{\overline{GI}}=\frac{\overline{G'A'}}{\overline{G'I'}}$$

وازاین رابطه معلوم میشود که $GG'$ باهریك ازسه محورمفروض موازی است . اگراز $I'$ خطی موازی با AI رسم شود $GG'$ رادر $\gamma$ و $AA'$ رادر $\alpha$ قاطع میکند . از تشابه مثلث های $I'G'\gamma$ و $I'A'\alpha$ نتیجه میشود

$$\frac{\overline{\gamma G'}}{\overline{\alpha A'}}=\frac{\overline{I'\gamma}}{\overline{I'\alpha}}=\frac{\overline{IG}}{\overline{IA}}=\frac{1}{3}\rightarrow\overline{\gamma G'}=\frac{1}{3}\overline{\alpha A'}$$

$$\overline{GG'}=\overline{G\gamma}+\overline{\gamma G'}=\overline{A\alpha}+\frac{1}{3}\overline{\alpha A'}=$$

$$=\frac{3\overline{A\alpha}+\overline{\alpha A'}}{3}=\frac{\overline{A\alpha}+\overline{\alpha A'}+2\overline{A\alpha}}{2}=$$

$$=\frac{\overline{AA'}+2\overline{A\alpha}}{3}$$

در ذوزنقهٔ $BCC'B'$ خط $II'$ اوساط دوساق رابهم وصل کرده است وداریم :

$$2A\alpha=2II'=\overline{BB'}+\overline{CC'}$$

ونتیجه میشود

$$\overline{GG'}=\frac{1}{3}(\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'})=\frac{1}{3}K$$

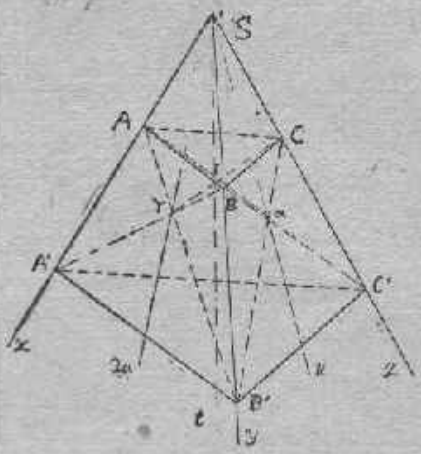
یعنی $G'$ نقطه ایست ثابت

برعکس فرض میکنیم $A''$ و $B''$ و $C''$ نقاط تلاقی محورهای مفروض باصفحهٔ دلخواهی باشد که بر نقطهٔ $G'$ گذشته است اگر $I''$ وسط $B''C''$ باشد خط $II''$ بامحورهای مفروض وبا $GG'$ موازی بوده با استفاده از قضیهٔ تالس معلوم خواهد شد که $G'$

مرکز ثقل مثلث $A''B''C''$ میباشد وباترتیب عکس آنچه که قبلاً ثابت شد بدست خواهد آمد که

$$\overline{AA''}+\overline{BB''}+\overline{CC''}=K$$

**حل مسألهٔ ۱۵۳۸ـ** اولاً تعیین فصل مشترکهای دوبدوی صفحات ونقطهٔ مشترك هرسه صفحه : اگر نقطهٔ تقاطع $BC'$ و $CB'$، $\alpha$ باشد $\alpha$ به هریك ازدوصفحهٔ $ACB'$ و $ABC'$ تعلق




دارد بنابراین $A\alpha$ فصل مشترك این دوصفحه میباشدوچنانچه $\gamma$ نقطهٔ تلاقی خطوط $AB'$ و $BA'$ وبالاخره $\beta$ نقطهٔ تلاقی خطوط $AC'$ و $CA'$ باشد $C\gamma$ فصل مشترك دو صفحهٔ $ACB'$ و $BCA'$ و $B\beta$ فصل مشترك دوصفحهٔ $ABC'$ و $BCA'$ میباشد . $A\alpha$ و $C\gamma$ در یك نقطهٔ I متقاطع اند که I به هرسه صفحه تعلق داردوتنها نقطهٔ مشترك هرسه صفحه میباشد .

ثانیاً تعیین مکان I — در ذوزنقهٔ $BCC'B'$ نقطهٔ تلاقی دوقطر یعنی $\alpha$ با S نقطهٔ تلاقی دوساق واوساط دوقاعدهٔ $BC$ و $B'C'$ چهارنقطهٔ واقع بریك استقامت میباشند بنابراین مکان $\alpha$ وقتی که $B'C'$ بموازات $BC$ حرکت کند خط $Su$ میانهٔ مثلث $SBC$ میباشد ونقطهٔ I درصفحهٔ $xSu$ قرارخواهد داشت . مکان $\gamma$ خط $Sw$ میانهٔ مثلث $SAB$ است و نقطهٔ I در صفحهٔ $ZSw$ واقع است و بنابر این I بر $St$ فصل مشترك صفحات $xSu$ و $ZSw$ واقع میباشد و $St$ صفحهٔ $ABC$ را در G مرکز ثقل مثلث $ABC$ قطع می کندبنابراین مکان I خط $St$ که بر G میگذرد میباشد .

## کلاس‌های ششم طبیعی وریاضی

**حل مسألهٔ ۱۵۳۹ ـ**

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b$$

$$f''(x)=(x-c)+(x-b)+(x-a)+(x-c)+(x-a)+(x-b)=2[(x-a)+(x-b)+(x-c)]$$

$$F(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=$$

$$=\frac{(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

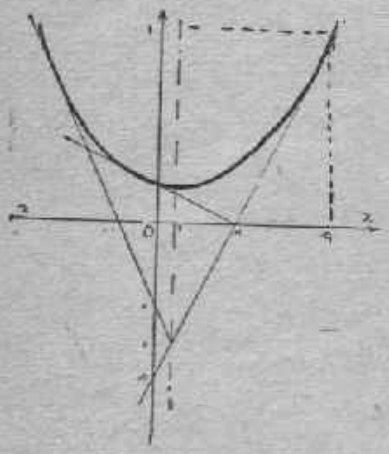
$$\varphi(x)=\frac{1}{(x-b)(x-c)}+\frac{1}{(x-c)(x-a)}+\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{(x-a)+(x-b)+(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{f''(x)}{f(x)}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۴۰ـ** اولاً رسم‌جدول ومنحنی (C) نمایش تابع $y=\frac{1}{8}(x^2-2x+17)$ به شرح زیر است .

$$y'=\frac{1}{8}(2x-2)$$

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | 0 | $+$ | |
| y | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{17}{8}$ | $\searrow$ 2 $\nearrow$ | $+\infty$ |



۲) تعیین معادلهٔ مماس برمنحنی در نقطهٔ ازآن بطول ۹ — مشتق. تابع در ازای $x=9$ برابر با ۲ میشود که برابراست با ضریب زاویهٔ مماس و در ازاء $x=9$ داریم $y=10$ ومعادلهٔ مماس عبارت میشود از

$$y-10=2(x-9) \text{ یا } y=2x-8$$

۳) نقطهٔ تلاقی خط $y=2x-8$ بامحور $x'x$ عبارت است از $P(x=4 \text{ و } y=0)$ وباخط $x=1$ عبارت است از $M(x=1 \text{ و } y=-6)$ معادلهٔ کلی خطوطی که بر P میگذرند به صورت $y=mx-4m$ ومعادلهٔ کلی خطوطی که بر M میگذرند $y=mx-m-6$ میباشد .

$$\frac{1}{8}(x^2-2x+17)=mx-4m$$

$$x^2-2(1+4m)x+17+32m=0$$

$$\Delta'=(1+4m)^2-17-32m=16m^2-24m-$$

$$-16=0 \text{ و } m=2 \text{ و } -\frac{1}{2}$$

ومعادلات PT و PT' خطوط مماس مرسوم از P بر (C) عبارت است از :

$$y=2x-8 \text{ و } y=-\frac{1}{2}x+2$$

$$\frac{1}{8}(x^2-2x+17)=mx-m-6$$

$$x^2-2(1+4m)x+65+8m=0$$

$$\Delta'=(1+4m)^2-65-8m=16m^2-64=0 \text{ و}$$

$$m=\pm 2$$

ومعادلات مماسهای MS و MS' عبارت میشود از

$$y=2x-8 \text{ و } =-2x-4$$

چون حاصلضرب ضریب زاویه های خطوط PT و PT' برابر با ۱− است پس زاویهٔ TPT' قائمه است وچون M برمحور تقارن منحنی (C) یعنی خط $x=1$ واقع است و دو خط MS و MS' با محور تقارن زاویه‌های مساوی میسازند نسبت به محور تقارن منحنی متقارن بوده در نتیجه :

$$MS=MS'$$

**حل مسألهٔ ۱۵۴۱ـ** حل معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x=1+\sin 3x$ و تعیین جوابهای کلی و جوابهای بین صفر و $2\pi$

$$2\sin^2 x=1-\cos 2x=1+\sin 3x$$

$$\sin 3x=-\cos 2x=\sin(-\frac{\pi}{2}+2x)$$

$$3x-\frac{\pi}{2}+2x=2k\pi+\pi \text{ و } x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}$$

$$3x+\frac{\pi}{2}-2x=2k\pi \text{ و } x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

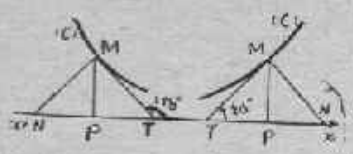
جوابهای واقع در فاصلهٔ صفر و $2\pi$ عبارتند از

$$x_1=\frac{3\pi}{10} \text{ و } x_2=\frac{7\pi}{10} \text{ و } x_3=\frac{11\pi}{10} \text{ و } x_4=\frac{15\pi}{10}=$$

$$=\frac{3\pi}{2} \text{ و } x_5=\frac{19\pi}{10}$$

## کلاس ششم ریاضی

**حل مسألهٔ ۱۵۴۲ـ** وقتی که تحت مماس و تحت قائم نظیر یک نقطهٔ M از منحنی (c) متساوی باشند مثلث NMT قائم الزاویهٔ متساوی الساقین بوده و زاویهٔ مماس با محور ox برابر $\pm 45^\circ$ میباشد .




برای اینکه برمنحنی نمایش تابع $y=ax^2+bx+c$ نقطه‌ای بیابیم که نظیر آن تحت مماس با تحت قائم مساوی باشد کافی است نقطه‌ای بر منحنی تعیین کنیم که مماس درآن نقطه با منحنی با محور ox زاویه $\pm 45^\circ$ بسازد . معادلهٔ کلی خطوطی که با محور ox زاویه $45^\circ$ میسازند عبارتست از $y=\pm x+h$

$$ax^2+bx+c=\pm x+h \text{ یا}$$

$$ax^2+(b\pm 1)x+c-h=0$$

$$\Delta=(b\pm 1)^2-4ac+4ah=0$$

و چون $a\neq 0$ فرض شود برای b همواره دو جواب بدست خواهدآمد . طولهای نقاط یعنی نقاطی که درآنها تحت مماس با تحت قائم مساویست عبارتند از

$$x=-\frac{b+1}{2a} \text{ و } x=-\frac{b-1}{2a} \text{ و برای هر دو}$$

$$y=\frac{4ac-b^2+1}{4a}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۴۳ـ** نظیر مسألهٔ قبل عمل میشود و مختصات نقاط مطلوب عبارتست از :

$$(x=\frac{p}{2} \text{ و } y=p) \text{ و } (x=\frac{p}{2} \text{ و } y=-p)$$

**حل مسألهٔ ۱۵۴۴ـ** منحنی ( c ) با معادلهٔ زیر مفروض است .

$$x^2+y^2-2xy-2x-2y=0$$

۱) تعیین معادلهٔ محور تقارن منحنی (c) : اگر خط $y=ax+b$ منحنی (c) را در دو نقطهٔ M و N قطع کند طولهای M و N ریشه‌های معادلهٔ زیر میباشند .

$$x^2+(ax+b)^2-2x(ax+b)-2x-2(ax+b)=0$$

$$(a^2-2a+1)x^2-2)(-ab+a+1)x+$$

$$+b^2-2b=0$$

و اگر I وسط M و N باشد داریم :

$$x_I=\frac{-ab+a+b+1}{a^2-2a+1}$$

و از معادلهٔ $y=ax+b$ عرض I پس از ساده شدن

چنین بدست میآید :

$$y_I=\frac{a^2-ab+a+b}{a^2-2a+1}$$

با حذف b بین مقادیر x و y نقطهٔ I معادلهٔ مکان I شامل پارامتر a عبارت میشود از $y=x+\frac{a+1}{a-1}$ که خطی است مستقیم و این خط وقتی برخط $y=ax+b$ عمود است که $a=-1$ باشد که در این صورت مکان I بصورت $y=x$ در میآید یعنی خط $y=x$ محور تقارن منحنی (c) میباشد (برای توضیحات بیشتر به شمارهٔ اول یکان مراجعه شود)

۲ـ چنانچه مانند مسأله‌های ۱۵۴۲ و ۱۵۴۳ عمل شود معلوم خواهد شد که برمنحنی (c) هیچ نقطه‌ای نمیتوان یافت که در آن تحت مماس با تحت قائم مساوی باشد .

۳) نقطهٔ $P(x=\alpha \text{ و } y=\beta)$ را درنظر میگیریم ، برای تعیین معادلهٔ خطوط مماسی که از این نقطه بر (c) رسم میشود معادلهٔ کلی خطوط گذرنده بر P را با معادلهٔ (c) حل میکنیم :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy-2x-2y=0 \\ y=mx-m\alpha+\beta \end{cases}$$

پس از حذف y بین معادلات واختصار خواهیم داشت :

$$(m^2-2m+1)x^2-2(m^2\alpha-m\beta-m\alpha+\beta+$$
$$+m+1)x+m^2\alpha^2+\beta^2-2m\alpha\beta+2m\alpha-2\beta=0$$

برای اینکه خطوط گذرندهٔ بر P بر (c) مماس باشند لازم وکافیست که مبین معادلهٔ بالا برابر صفر باشد که پس از اختصار داریم :

$$\Delta=(4\alpha+1)m^2-2(2\alpha+2\beta-1)m+4\beta+1=0$$

چنانچه در این معادله $\frac{c}{a}=-1$ باشد اولاً معادله دارای دو جواب $m'$ و $m''$ خواهد بود و ثانیاً چون $m'm''=-1$ است بنا براین دو مماس مرسوم از P ( با ضریب زاویه‌های $m'$ و $m''$) بریکدیگر عمود میباشند

$$\frac{c}{a}=\frac{4\beta+1}{4\alpha+1}=-1 \rightarrow 2\beta+2\alpha=1$$

و نتیجه میشود که مکان P عبارت است از خط به معادلهٔ $2y+2x=1$

**تبصره ـ** خط مکان P بر محور تقارن منحنی (c) عمود است. ثابت میشود که منحنی (c) یك سهمی است وخط مکان P خط هادی آن میباشد .

۴ ) فرض میکنیم $N(\alpha \text{ و } \beta)$ پای قائم مرسوم از $M(\frac{3}{4} \text{ و } \frac{3}{4})$ برمنحنی (c) باشد پس از تعیین ضریب زاویهٔ خط قائم وبعد از اختصار معادلات زیر را خواهیم داشت

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta-2\alpha-2\beta=0 \\ (\alpha-\beta)(2\alpha+2\beta-1)=0 \end{cases}$$

و از این دستگاه مقادیر زیر برای $\alpha$ و $\beta$ بدست خواهد آمد .

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha=0$ | $\alpha=\frac{3}{4}$ | $\alpha=-\frac{1}{4}$ |
| $\beta=0$ | $\beta=-\frac{1}{4}$ | $\beta=\frac{3}{4}$ |

ودر نتیجه از نقطهٔ M سه خط با معادلات زیر، قائم بر منحنی (c) میتوان رسم نمود :

$$y=x \text{ و } y=\frac{3}{4} \text{ و } x=\frac{3}{4}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۴۵ـ** تابع $y=ax^2$ مفروض است، اثبات اینکه در ازاء هر دوعدد متمایز دلخواه $\alpha$ و $\beta$ یك عدد و فقط یك عدد مانند $\gamma$ وجود دارد بطوریکه رابطهٔ زیر برقرار باشد .

$$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\gamma) \qquad (1)$$

مشتق تابع برابر است با $y'=2ax$ و رابطهٔ فوق عبارت خواهد شد از :

$$a\beta^2-a\alpha^2=(\beta-\alpha)\times 2a\gamma \quad \text{یا}$$
$$\beta^2-\alpha^2=(\beta-\alpha)\times 2\gamma$$

و پس از ساده کردن عبارت وحذف $\beta-\alpha\neq 0$ بدست میآید $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$

یعنی $\alpha$ و $\beta$ متمایز هرچه باشند همواره فقط یك مقدار $\gamma$ وجود دارد تا رابطهٔ (۱) برقرار باشد .

**مورد استعمال ـ** اگر A و B دونقطهٔ دلخواه ازمنحنی (c) نمایش هندسی تابع $y=ax^2$ باشد فرض میکنیم $\alpha$ و $\beta$ طولهای این دو نقطه باشند . ضریب زاویهٔ خط AB برابر خواهد بود با $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ و چنانچه C نقطه‌ای از منحنی (c) با طول $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$ باشد (که مسلماً C بر کمان AB واقع خواهد بود) ضریب زاویهٔ مماس درنقطهٔ C برمنحنی (c) برابر است با $f'(\gamma)=f'(\frac{\alpha+\beta}{2})$ و از رابطهٔ (۱) معلوم میشود که مماس در نقطهٔ C با خط AB موازی است . اگر I نقطهٔ وسط AB باشد طول I برابر است با $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ودر نتیجه خط CI بامحور $y'y$ یا محورتقارن منحنی (c) موازی میباشد

**حل مسألهٔ ۱۵۴۶ـ** تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M :

$$M\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{a-b-2mc}{1+m^2} \quad و \\ y=\dfrac{(a-b)m-m^2c+c}{1+m^2} \end{array}\right.$$

خواهیم داشت $y-mx=c$ که از این رابطه مقدار m برحسب x و y بدست آمده و چون در یکی از روابط طول یا عرض M قرار دهیم معادلهٔ مکان M بصورت زیر بدست میآید

$$\left(x-\frac{a-b}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+c^2$$

**حل مسألهٔ ۱۵۴۷ـ** چون یك دفعه از تابع $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ مشتق بگیریم و ساده کنیم خواهیم داشت $y=2y'\sqrt{1+x^2}$ (۱) وچنانچه از این رابطه مجدداً مشتق بگیریم پس از ساده کردن و با توجه به رابطهٔ (۱) نتیجه خواهد شد :

$$4(1+x^2)y''+4xy'-y=0$$

**حل مسألهٔ ۱۵۴۸ـ** رابطهٔ مفروض $\cos^3 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\lambda^2\cos 2\alpha=\lambda^2$ به صورت زیر درمیآید

$$\cos^2 2\alpha=\lambda^2\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\right)=\lambda^2 tg^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\pm\lambda tg\alpha$$

$$1-tg^2\alpha=2-(1+tg^2\alpha)=\pm\lambda tg\alpha(1+tg^2\alpha)$$

یا

$$(1+tg^2\alpha)(1\pm\lambda tg\alpha)=2$$

**حل مسألهٔ ۱۵۴۹ـ** اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی از یك تصاعد حسابی با قدر نسبت d باشند داریم

$$(1)\ \frac{a+c}{2}=b \quad و \quad \frac{c-a}{2}=d \quad و \quad a-b=b-c$$

$$\sin(a-b)=\sin(b-c)$$

$$\sin a\cos b-\cos a\sin b=\sin b\cos c-\cos b\sin c$$

$$\cos b(\sin a+\sin c)=\sin b(\cos a+\cos c)$$

عبارت داخل هریك از دو پرانتز را به حاصل ضرب تبدیل نموده با توجه به روابط (۱) و حذف جمل متشابه از طرفین بدست خواهد آمد :

$$\cos a+\cos c=2\cos b\cos d$$

**حل مسألهٔ ۱۵۵۰ـ** تعیین مجموع زیر

$$S_n=\sin^3\frac{x}{3}+3\sin^3\frac{x}{9}+\dots+3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n}$$

روابط زیر را در نظر میگیریم

$$\sin^3\frac{x}{3}=-\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{4}\sin\frac{x}{3}$$

$$\sin^3\frac{x}{3^2}=3\left(-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{3}+\frac{3}{4}\sin\frac{x}{3^2}\right)$$

.

.

.

$$\sin^3\frac{x}{3^n}=3^{n-1}\left(-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{3^{n-1}}+\frac{3}{4}\sin\frac{x}{3^n}\right)$$

از جمع روابط فوق حاصل میشود

$$S_n=\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{x}{3^n}-\sin x\right)$$

**محل مسألهٔ ۱۵۵۱ ـ** باتوجه به

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\dots=\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

روابط زیررا مینویسیم

$$Arctg\frac{q-1}{\frac{1}{a_1}+a_2}=Arctg a_2-Arctg a_1$$

$$Arctg\frac{q-1}{\frac{1}{a_2}+a_3}=Arctg a_3-Arctg a_2$$

.

.

.

$$Arctg\frac{q-1}{\frac{1}{a_n}+a_{n+1}}=Arctg a_{n+1}-Arctg a_n$$

ازجمع نظیر بنظیر طرفین روابط بالا نتیجه خواهد شد .

$$S_n=Arctg a_{n+1}-Arctg a_1$$

**حل مسألهٔ ۱۵۵۲ ـ** از تساوی های داده شده روابط زیررا بدست میآوریم

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{tg(\alpha+\varphi_2)}{tg(\alpha+\varphi_1)} \quad یا \quad \frac{A_1+A_2}{A_1-A_2}=\frac{\sin(2\alpha+\varphi_1+\varphi_2)}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}$$

ازضرب طرفین رابطه در $\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)$ بدست میآید

$$\frac{A_1+A_2}{A_1-A_2}\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)=\cos(2\alpha+2\varphi_2)-$$

$$-\cos(2\alpha+2\varphi_1)$$

$$\frac{A_2+A_3}{A_2-A_3}\sin^2(\varphi_2-\varphi_3)=\cos(2\alpha+2\varphi_3)-\cos(2\alpha+2\varphi_2)$$

$$\vdots$$

$$\frac{A_n+A_1}{A_n-A_1}\sin^2(\varphi_n-\varphi_1)=\cos(2\alpha+2\varphi_1)-\cos(2\alpha+2\varphi_n)$$

ازجمع نظیر بنظیر طرفین روابط معلوم خواهد شدکه مجموع جمل طرف اول برابر با صفر است یعنی رابطهٔ مطلوب بدست میآید .

**حل مسألهٔ ۱۵۵۳** ـ دردستگاه شمار باچه پایه‌داریم.

$$122\times103=13121$$

اگرپایهٔ دستگاه را $x$ فرض کنیم

$$(x^2+2x+2)(x^2+3)=x^4+3x^3+x^2+x^2+2x+1$$

وپس ازساده‌کردن بدست خواهدآمد .

$$x(x^3-4x-4)=5$$

وچون $x$ عدد صحیح بزرگتراز یك بوده و ۵ فقط به‌یك صورت $1\times5$ تجزیه میشود لذا تساوی وقتی برقرار خواهد بودکه داشته باشیم :

$$\begin{cases} x=5 \\ x^3-4x-4=1 \end{cases}$$

$x=5$ در معادلهٔ دوم نیز صدق نموده وجواب مسأله میباشد .

**حل مسألهٔ ۱۵۵۴** ـ در دستگاه شمار باچه پایه داریم

$$131^2=21054$$

مانند مسألهٔ قبل عمل میشود وجواب عبارت خواهد بود ازپایهٔ ۷

**حل مسألهٔ ۱۵۵۵** ـ تعیین دوعدد صحیح و مثبت که اگریك واحد به اولی و دو واحد به دومی اضافه کنیم حاصل ضرب آنهادوبرابر گردد

داریم $(x+1)(y+2)=2xy$ و این رابطه بترتیب چنین مینویسیم

$$xy+2x+y+2=2xy$$

$$xy-2x-y-2=0$$

$$x(y-2)-(y-2)-4=0$$

$$(x-1)(y-2)=4=1\times4=2\times2=4\times1$$

ودستگاههای زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=4 \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases} \text{و} \begin{cases} x-1=2 \\ y-2=2 \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=4 \\ y-2=1 \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$$

**حل مسألهٔ ۱۵۵۶** ـ فرض میکنیم $q$ خارج قسمت و $r$ باقیماندهٔ تقسیم $a-1$ بر $b$ باشد داریم

$$\begin{cases} a-1=bq+r \\ r<b-1 \end{cases}$$

طرفین هردورابطه را در $b^n$ ضرب مینمائیم

$$\begin{cases} ab^n-b^n=b^{n+1}q+rb^n \\ rb^n<b^{n+1}-b^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab^n=b^{n+1}q+(rb^n+b^n) \\ rb^n+b^n<b^{n+1} \end{cases}$$

روابط بالا به‌صورت زیر نوشته میشوند

$$\begin{cases} ab^n-1=b^{n+1}q+(rb^n+b^n-1) \\ rb^n+b^n-1<b^{n+1} \end{cases}$$

ومعلوم میشود که $q$ خارج قسمت و $rb^n+b^n-1$ باقیماندهٔ تقسیم $ab^n-1$ بر $b^{n+1}$ میباشد .

**حل مسألهٔ ۱۵۵۷** ـ رشته تساویهای زیررا درنظر میگیریم :

$$N=2(a_2+3a_3+\dots+3\times4\times\dots\times na_n)+a_1=$$
$$=2N_1+a_1(0<a_1<1)$$

$$N_1=3(a_3+4a_4+\dots+4\times\dots\times na_n)+a_2=$$
$$=3N_2+a_2(0<a<2)$$

$$\vdots$$

$$N_{n-2}=(n-1)(a_{n-1}+na_n)+a_{n-2}=$$
$$=(n-1)N_{n-2}+a_{n-2}(0<a_{n-2}<n-2)$$

$$N_{n-2}=na_n+a_{n-1}\quad=nN_{n-1}+a_{n-1}$$
$$(0<a_{n-1}<n-1)$$

$$N_{n-1}=(n+1)\times0+a_n=(n+1)N_n+a_n$$
$$(0<a_n<n1)$$

تساویهای بالانشان میدهدکه :

$N_1$ و $a_1$ بترتیب خارج قسمت وباقیماندهٔ تقسیم $N$ بر ۲ میباشد.

$N_2$ و $a_2$ بترتیب خارج قسمت وباقیماندهٔ تقسیم $N_1$ بر ۳ است .

وبالاخره $N_{n-1}$ $(=a_n)$ و $a_{n-1}$ بترتیب خارج قسمت وباقیماندهٔ تقسیم $N_{n-2}$ بر $n$ میباشد یا بعبارت دیگر از تقسیمات متوالی $N$ بر اعداد ۲ و ۳ و ٤ و... خارج قسمت‌های $N_1$ و $N_2$ و $N_3$ و ... حاصل میشود و چون مقسوم علیه ها بترتیب بزرگ میشوند خارج قسمت‌ها بترتیب کوچك شده بالاخره آخرین قسمت برابر صفر میشود.

اگر طرفین روابط بالارا از بالا به پائین بترتیب در ۱ و ۲! و ۳! و ... و $(n-1)!$ و $n!$ ضرب کرده پس از آن طرفین روابط را عضو به عضو باهم جمع کنیم جمله های $N_1$ و ... و $N_{n-1}$ حذف شده حاصل خواهد شد:

$$N=a_1+a_2\times 2!+a_3\times 3!+\dots+a_n\times n!$$

تبصره عملاً بسط فوق رامیتوان به روش زیر انجام داد

$$\begin{array}{l|l}
N & 2 \\
a_1 & N_1 \\
 & a_2 \quad N_2 \quad 3 \\
 & a_3 \quad N_3 \quad 4 \\
 & \vdots \\
 & N_{n-1} \quad n+1 \\
 & a_n \quad 0
\end{array}$$

مثال عددی برای $N=31457$

$$\begin{array}{l|l}
31457 & 2 \\
1 & 15728 \quad 3 \\
2 & 5242 \quad 4 \\
2 & 1310 \quad 5 \\
0 & 262 \quad 6 \\
4 & 43 \quad 7 \\
1 & 6 \quad 8 \\
6 & 0
\end{array}$$

ونتیجه میشود:

$$N=1+2\times 2!+2\times 3!+0\times 4!+4\times 5!+1\times 6!+\times 7!$$

**حل مسألهٔ ۱۵۵۸** - نقاط $P_1$ و $P_2$ و ... و $P_n$ رأسهای متوالی یك $n$ ضلعی منتظم محدب محاط دردایرهٔ به شعاع $r$ وبه مرکز $O$ و $M$ نقطهٔ دلخواهی ازاین دایره میباشد

۱) نظیرآنچه درحل مسألهٔ ۱۲۲٤ (راه دوم - صفحه ۳۰ مجلهٔ شمارهٔ ۸) وحل مسألهٔ ۱٤۹۲ (صفحهٔ ٤٦ شمارهٔ ۸) بیان شده است معلوم میشود که

$$\Sigma\overrightarrow{OP_i}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\dots+\overrightarrow{OP_n}=0$$

۲). بترتیب چنین مینویسیم

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP_i}-\overrightarrow{OM}$$

$$(\overrightarrow{MP_i})^2=(\overrightarrow{OP_i})^2+(\overrightarrow{OM_i})^2-2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP_i}$$

$$(MP_i)^2=(OP_i)^2+(OM)^2-2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP_i}$$

$$(MP_i)^2=2r^2-2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP_i}$$

$$\Sigma(MP_i)^2=2nr^2-2\overrightarrow{OM}(\Sigma\overrightarrow{OP_i})$$

وچون $\Sigma\overrightarrow{OP_i}=0$ پس

$$S=\Sigma(MP_i)^2=2nr^2$$

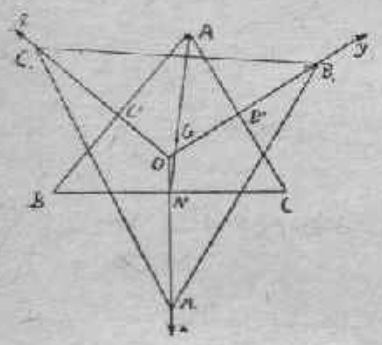
**حل مسألهٔ ۱۵۵۹** - اولا اثبات اینکه شرط لازم وکافی برای اینکه $G$ مرکز ثقل یك مثلث $ABC$ باشد آن است که

$$(1)\quad \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$$

اگر $A'$ وسط ضلع $BC$ ازمثلث $ABC$ و $G$ نقطه‌ای ازصفحهٔ مثلث باشد شرط لازم وکافی برای اینکه $G$ مرکز ثقل مثلث باشد آن است که $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA'}=0$ و چون

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$ پس شرط لازم وکافی آن میشود که

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$$




ثانیاً اگر $O$ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $ABC$ و $A'$ و $B'$ و $C'$ اوساط $a$ و $b$ و $c$ طولهای اضلاع $BC$ و $CA$ و $AB$ باشد بر $A'x$ و $B'y$ و $C'Z$ عمودمنصف‌های اضلاع نقاط $A_1$ و $B_1$ و $C_1$ راتعیین میکنیم که

$$\overline{A'A_1}=Ka \text{ و } \overline{B'B_1}=Kb \text{ و } \overline{C'C_1}=Kc$$

باشد ($k$ عددی است جبری) دردوران به مرکز $O$ وبه زاویهٔ ۹۰ درجه حاملهای $\overrightarrow{A'A_1}$ و $\overrightarrow{B'B_1}$ و $\overrightarrow{C'C_1}$ به حاملهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ تبدیل میشوند وداریم

$$\vec{u}=K.\overrightarrow{BC} \text{ و } \vec{v}=K.\overrightarrow{CA} \text{ و } \vec{w}=K.\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=K(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=0$$

پس

$$(2)\quad \overrightarrow{A'A_1}+\overrightarrow{B'B_1}+\overrightarrow{C'C_1}=0$$

برای اثبات اینکه $G$ مرکز ثقل مثلث $A_1B_1C_1$ می‌باشد مینویسیم:

$$\overrightarrow{GA_1}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{A'A_1}$$

$$\overrightarrow{GB_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{B'B_1} \text{ و } \overrightarrow{GG_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{C'C_1}$$

$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{A'A_1}+\overrightarrow{B'B_1}+\overrightarrow{C'C_1}$$

وبا توجه به روابط (۱) و (۲) بدست میآید

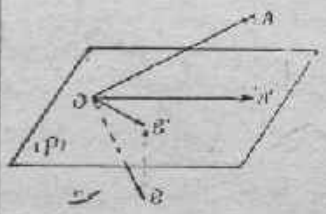
$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}=0$$

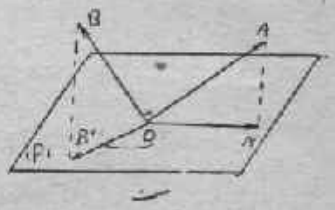
یعنی G مرکز ثقل مثلث $A_1B_1C_1$ میباشد .

**حل مسألهٔ ۱۵۶۰ ـ** اولا در نظر میگیریم که

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'A} \text{ و } \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'B}$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'A})(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'B})=$$
$$=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{B'B}$$




چون زاویهٔ دو حامل $\overrightarrow{OA'}$ و $\overrightarrow{B'B}$ وهمچنین زاویهٔ دوحامل $\overrightarrow{OB'}$ و $\overrightarrow{A'A}$ قائمه است بنابراین

$$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{A'A}=0$$

ودرنتیجه

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{B'B}$$

ویابعبارت دیگر

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}+\overline{A'A}\cdot\overline{B'B} \quad (1)$$

ثانیاً ـ الف) فرض میکنیم زاویهٔ AOB قائمه باشد در این صورت داریم

$$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}=-\overline{A'A}\cdot\overline{B'B}$$

وحالات زیررا درنظر میگیریم

۱) $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ هر دو در یك طرف صفحهٔ (P) واقع باشند که $\overline{A'A}\cdot\overline{B'B}>0$ بوده و $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}<0$ در نتیجه زاویهٔ A'OB' منفرجه میباشد (شکل ۱)

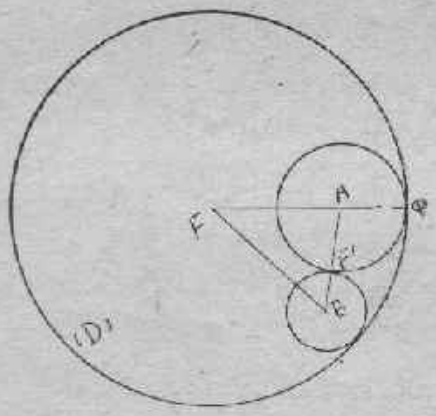
۲) $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ طرفین صفحهٔ (P) واقع باشنددر این صورت $\overline{A'A}\cdot\overline{B'B}>0$ و $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}>0$ بوده زاویهٔ A'OB' حاده میباشد .

ب ـ بفرض اینکه زاویهٔ A'OB' قائمه باشد بطریق مشابه با قسمت الف معلوم خواهد شد که :

۱) اگر $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ در یك طرف (P) واقع باشند زاویهٔ AOB حاده خواهد بود

۲) چنانچه $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ طرفین (P) واقع باشند زاویهٔ AOB منفرجه خواهد بود

**حل مسألهٔ ۱۵۶۱ ـ** اولا شرط لازم وکافی برای اینکه A نقطه‌ای از بیضی باشد به‌کانونهای F و F' و دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F آن است که دایرهٔ بمرکز A و مماس بر (D) بر F' بگذرد وبنابراین مکان F' عبارت خواهد بود از دایرهٔ بمرکز A و مماس بردایرهٔ (D) .

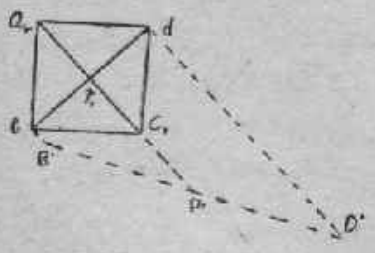



ثانیاً ـ وقتی که AF' بیضی نظیر را در B قطع کند F' بین A وB واقع بوده و داریم $BF'+BF=R$ و نتیجه میشود $BF+BA=R+AF'$ و اگر $AF=d$ باشد $AF'=A\varphi=R-d$ بوده و $BF+BA=2R-d$ یعنی B بر بیضی باکانونهای F و A و با طول قطر بزرگتر $2R-d$ واقع است .

**حل مسألهٔ ۱۵۶۲ ـ** تصویرقائم لوزی بریك صفحه وقتی مربع خواهد بود که قطر کوچکتر لوزی با صفحهٔ تصویرموازی باشد ودرنتیجه خواهیم داشت $ac=bd=AC=4$ . اگر P مرکزلوزی باشد و p تصویرآن ، رقوم p برابر با رقوم a و c و برابر با ٤ است وچنانچه x رقوم b باشد داریم

$$\overline{PB}^2=\overline{pb}^2+(x-4)^2 \text{ یا } 16=4+(x-4)^2$$

برای x مقادیر $2\pm4\sqrt{3}$ حاصل میشود و چون x کوچکتر از ٤است پس رقوم b برابرخواهد بود با $4-2\sqrt{3}$ و تا ۰٫۱ تقریب برابر ۰٫۶ و رقوم d برابر خواهد شد با $4+2\sqrt{3}$ و تا ۰٫۱ تقریب برابر با ۷٫٤




از راه ترسیم طبق شکل مقابل عمل میشود که پس از تعیین P' تسطیح p دایرهٔ به‌مرکز P' و به شعاع ٤ نقاط D' و B' را بدست میدهد .

## راهنمای ریاضیات متوسطه

روشهای استدلال درریاضیات متفاوت است . یکی از روشهای استدلال که باآن به خوبی آشنا هستید ، روش استدلال قیاسی است . همان‌طور که می‌دانید ، در این روش از اصول و مفروضاتی استفاده می‌شود و نتایجی با برهان و اتکاء به آنچه قبلاً ثابت شده است اثبات می گردد. همهٔ قضایائی که درهندسه خوانده‌اید ازهمین راه استدلال شده‌اند. اما روش دیگری برای استدلال درریاضیات هست که به‌آن‌روش استقرائی می گویند . در برنامه‌های دبیرستانهای بیشترممالك ، این روش را نیز جزء مواد گنجانده‌اند و دانش آموزان را باآن‌آشنا می سازند .

مجلهٔ یکان‌درصدد بود که مقاله‌ای دراین زمینه تهیه‌و تقدیم خوانندگان عزیزخود کند. خوشبختانه قبل از اقدام به این‌کارآقای محمد شریف زاده دانش‌آموزسال پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی‌مقاله‌ای در این خصوص ترجمه و برای مجله ارسال‌داشته‌اند . پشت‌کار و دقت‌وکوشش‌ایشان درخور تحسین‌است. دانش‌آموزان عزیزرا به خواندن این مقاله وحل تمرینهای‌آن دعوت می کنیم . «یکان»

---

# استقراء ریاضی

### ترجمهٔ از کتاب College Algebra

**توسط : محمد شریف زاده دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۲**

استقراء ریاضی روشی برای اثبات قضایا است . این‌روش اغلب برای اثبات قضایائی بکار میرودکه دارای متغیر خاصی هستند . مثلاً درزیر بکمك استقراء ریاضی ثابت خواهد شد که مجموع n عدد فرد متوالی مساوی $n^2$ میباشد .

اثبات یك قضیه توسط استقراء ریاضی عموماً شامل سه قسمت میباشد :

**۱ـ تحقیق** : دراین قسمت باید تحقیق کرد که قضیه بازاء یك یاچند مقدار اختصاصی ازمتغیر صحیح است. معمولاً چنانچه n متغیر مفروض باشد ، تحقیق می کنندکه قضیه بازاء $n=1$ صحیح است .

**۲ـ تعمیم** : دراین قسمت باید ثابت‌کردکه هرگاه‌قضیه بازاء یك‌مقدار معینی ازمتغیر مثلاً $n=k$ صحیح باشد، بازاء $n=k+1$ نیزصحیح خواهد بود.این‌قسمت عموماًمشکل‌ترین قسمت می‌باشد .

**۳ـ نتیجه** : پس از اینکه قسمت ۱ به‌تحقیق وقسمت ۲ باثبات رسید نتیجه میشودکه قضیه بازاء تمام مقادیرصحیح‌مثبت n درست است .

باتوجه بمطالب بالا قضیهٔ اساسی استقراء ریاضی بصورت زیر بیان میگردد :

**قضیهٔ اساسی استقراء ریاضی** : هرگاه درقضیه‌ای (مربوط باعداد صحیح مثبت از متغیر n ) معین شودکه :

I ـ قضیه بازاء $n=1$ صحیح است .

II ـ اگرقضیه بازاء یك مقدار مشخصی از $n(n=k)$ صحیح باشد حتماً بازاء مقدار بزرگتر قابل قبول بعدی n $(n=k+1)$ نیز صحیح است .

قضیه بازاء تمام مقادیر صحیح و مثبت n درست خواهد بود .

**اثبات قضیهٔ اساسی** : به دوطریق میتوان این قضیه را اثبات‌کرد :

**۱ـ اثبات مستقیم** : میدانیم که بنابر (I) قضیه بازاء $n=1$ صحیح است وبنابر (II) اگر قضیه برای مقدار معینی صحیح باشد بازاء مقدار بزرگتر بعدی n نیز صحیح است : بنابراین‌چون قضیه به ازاء $n=1$ صحیح‌است‌بازاء $n=2$ نیز درست است وبه‌همین ترتیب بازاء $n=3$ صحیح است ، الی آخر. یعنی قضیه بازاء هر مقدارصحیح مثبت n درست است .

**۲ـ اثبات غیر مستقیم** (برهان خلف) : فرض‌میکنیم که صحت (I) و (II) محقق شده است و باز فرض میکنیم که قضیه بازاء یك مقدارصحیح مثبت n درست نباشد ومثلا $m+1$ کوچکترین مقدار از n باشدکه قضیه بازاء آن صحیح نیست بنابراین قضیه بازاء m و ... و ۳ و ۲ و $n=1$ صحیح‌است. ( m عددی صحیح و مثبت است) و لیکن بازاء $n=m+1$ صحیح نیست . میدانیم که بنابر (I) قضیه بازاء $n=1$ درست

است، بنابراین $m > 1$ . و بنابر (II) هرگاه قضیه بازاء $n=m$ صحیح باشد، بازاء $n=m+1$ نیز باید صحیح باشد پس هرگاه صحت I و II تحقیق شود قضیه بازاء تمام مقادیر صحیح مثبت n درست است .

درمثالهای زیر روش اثبات بعضی ازقضایا بوسیلهٔ استقراء ریاضی مشاهده میشود .

**مثال ۱ :**

ثابت کنید که بازاء تمام مقادیر صحیح و مثبت n داریم:

$$1+3+5+\ \dots\ +(2n-1)=n^2 \quad (1)$$

**اثبات ـ اولاً تحقیق:** اگر $n=1$ فرض شود رابطه بصورت $1=1$ بوده ودرست میباشد .

**ثانیاً تعمیم :** حال باید ثابت نمود که هرگاه رابطهٔ (۱) بازاء یك مقدار معینی از n مثلا $n=k$ صحیح باشد، بازاء مقدار بزرگتر بعدی n یعنی $n=k+1$ نیز صحیح است، بنابراین فرض میکنیم :

$$1+3+5+\ \dots\ +(2k-1)=k^2 \quad (2)$$

وباید ثابت کنیم که هرگاه رابطهٔ (۲) صحیح باشد رابطهٔ (۱) بافرض $n=k+1$ نیز صحیح خواهد بود :

$$1+3+5+\ \dots\ +[2(k+1)-1]=(k+1)^2 \quad (3)$$

رابطهٔ اخیر پس از ساده کردن و باتوجه به رابطهٔ (۲) به صورت زیر نوشته میشود :

$$[1+3+5+\dots\dots+(2K-1)]+(2K+1)=$$
$$K^2+2K+1=(K+1)^2$$

**ثالثاً نتیجه :** در بالا ثابت شد که قضیه بازاء $n=1$ صحیح است و همچنین هرگاه قضیه بازاء $n=K$ صحیح باشد بازاء $n=K+1$ نیز صحیح است بنابراین بنابر قضیهٔ اساسی رابطهٔ (۱) بازاء تمام مقادیر صحیح مثبت n درست است .

**مثال ۲ :**

بااستفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید که :

$$1\times2+2\times3+3\times4+\dots\dots+n(n+1)=$$
$$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad (4)$$

**اثبات ـ**

**تحقیق :** طرف چپ رابطهٔ (٤) از n جمله تشکیل یافته است. هرگاه $n=1$ فرض شود ، خواهیم داشت :

$$1\times2=\frac{1}{3}\times1(1+1)(1+2)=\frac{1}{3}\times2\times3=2$$

یا $2=2$

یعنی رابطهٔ (۳) بازاء $n=1$ صحیح است .

**تعمیم :** حال باید ثابت کنیم که هرگاه رابطهٔ (٤) بازاء $n=K$ صحیح باشد، بازاء $n=K+1$ نیز صحیح است .

ابتدا رابطهٔ زیر را مینویسیم :

$$1\times2+2\times3+3\times4+\dots\dots+K(K+1)=$$
$$\frac{1}{3}K(K+1)(K+2) \quad (5)$$

وهرگاه رابطهٔ (۵) صحیح باشد باید ثابت کنیم که رابطهٔ زیر نیز صحیح است :

$$1\times2+2\times3+3\times4+\dots\dots+(K+1)(K+2)=$$
$$\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3) \quad (6)$$

(این رابطه ازقرار دادن $n=K+1$ در رابطهٔ (٤) بدست آمده است)

عبارت طرف چپ رابطهٔ (٦) بهصورت زیراست .

$$[1\times2+2\times3+\dots\dots+K(K+1)]+$$
$$(K+1)(K+2)$$

میدانیم که بنابررابطهٔ (۵) مقدار داخل کروشه برابر است با :

$$\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)$$

بنابراین :

$$1\times2+2\times3+\dots\dots+(K+1)(K+2)$$
$$=\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)+(K+1)(K+2)$$
$$=(K+1)(K+2)\left(\frac{K}{3}+1\right)$$
$$=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$$

یعنی اگر (۵) صحیح باشد، (٦) نیزصحیح است .

**نتیجه :** بنابرقضیهٔ اساس، رابطهٔ (٤) بازاء تمام مقادیر صحیح مثبت n درست است .

**توجه:** درقسمت اول اثبات،معمولاً تحقیق باکوچکترین عدد صحیح مثبت انجام میگیرد.دربعضی از موارد ممکن نیست که بازاء $n=1$ قضیه را تحقیق کرد، مثلاً دررابطهٔ:

$$\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\dots\dots+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$\frac{n-2}{3(n+1)}$$

تحقیق باید بازاء $n=3$ انجام گیرد چه بازاء $n=1$ یا $n=2$ طرف چپ رابطه معنی نخواهد داشت .

**مثال ۳ :**

ثابت کنید که هرگاه n عددی صحیح مثبت باشد ،

$x^n - y^n$ بر $x-y$ قابل قسمت است .

**اثبات (با روش استقراء ریاضی ) :**

**تحقیق :** قضیه بازاء $n=1$ صحیح است چون دراین صورت مقدار عبارت برابر خواهد شد با $x-y$ که بر $x-y$ قابل قسمت است.

**تعمیم:** باید ثابت کنیم که هرگاه $x^k - y^k$ بر $x-y$ قابل قسمت باشد $x^{k+1} - y^{k+1}$ نیز بر $x-y$ قابل قسمت است برای این منظور مینویسیم :

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x \times x^k - y \times y^k - xy^k + xy^k = x(x^k - y^k) + y^k(x-y)$$

و چون قبلاً فرض کردیم که $x^k - y^k$ بر $x-y$ قابل قسمت است ، این عبارت که هر دو جملهٔ آن بر $x-y$ قابل قسمت است نیز بر $x-y$ قابل قسمت است .

**نتیجه :** وبنابر قضیهٔ اساسی ، این قضیه به ازاء تمام مقادیر صحیح ومثبت n صادق است .

## تمرینات

باروش استقراء ریاضی فرمولهای زیررا ثابت کنید :

۱) $1+2+3+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

۲) $1+5+9\dots+(4n-3)=n(2n-1)$

۳) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

۴) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

۵) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=(1+2+3+\dots+n)^2$

۶) $1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

۷) $1\times6+2\times9+3\times12+\dots+n(2n+3)=n(n+1)(n+2)$

۸) $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\dots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

۹) $3+3^2+3^3+\dots+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1)$

۱۰) $a+ap+ap^2+\dots+ap^{n-1}=\frac{ap^n-a}{P-1}$

۱۱) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

۱۲) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

۱۳) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

۱۴) $1\times3+3\times5+5\times7+\dots+(2n-1)\times(2n+1)=\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$

---

# آیا این پرسش و این پاسخ تعجب آور نیست ؟

**می‌دانید که تلاش وسیعی در دنیا برای نوکردن برنامه‌های ریاضیات مدارس آغاز شده است . پیشنهاد های متفاوتی بدین منظور از جانب متخصصان ومربیان شده است‌که همه در خورتعمق وتأمل است . کوشش همه براین است‌که راهی بیابند تا بتوانند از همان آغاز کار ریاضیات نوین و مفاهیم آن را به‌دانش آموزان عرضه کنند . یکی از شاخه‌های جدید ریاضیات منطق علامتی است . سؤال و جواب زیر که از صفحهٔ ۶۲ مجلهٔ NEA ، ارگان انجمن ملی فرهنگیان آمریکا ، مورخ شهریور ۱۳۴۳ (سپتامبر ۱۹۶۴) ترجمه شده است مؤید آن است که انقلاب ریاضیات معاصر تاچه حد دربرنامه‌های تحصیلی تأثیرداشته است .**

**سؤال :** آیا شاگردان بااستعداد در دبستان قادرند که منطق ریاضی را فراگیرند ؟

**جواب :** به موجب تحقیقی که به وسیلهٔ **پاتریك ساپس و فردریك بیفورد** به عمل آمده است ، آری . از ۲۶۰ نفر دانش آموزان سال پنجم ابتدایی که در شمار دانش آموزان ممتازآمریکا قرار داشتند آزمایشی در این باره به‌عمل آمد .همین آزمایش بادانشجویان دانشگاه که درس مقدماتی منطق ریاضی راخوانده‌بودند تکرارشدو نتیجهٔ این دوآزمایش بایکدیگر مقایسه گردید. تبحری که‌دانش آموزان سال پنجم ابتدایی در این رشته کسب کرده بودند درحدود ۸۵ تا ۹۰درصد معلومات مکتسبهٔ دانشجویان دانشگاه در این درس بوده است .

ترجمه از دکتر ع . ك . تویسرکانی

# حل مسائل نمونه

## کلاس های چهارم

**۱۵۹۹ ـ** بدون عمل تقسیم ، خارج قسمت چند جمله‌ای مفروض را بر $x-\alpha$ بدست آورید

چندجمله‌ای زیر را که نسبت به $x$ از درجهٔ $n$ است در نظر میگیریم

$$f(x)=ax^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $x-\alpha$ نسبت به $x$ ازدرجهٔ $n-1$ بوده واولین جملهٔ آن عبارت است ازخارج قسمت تقسیم $ax^n$ بر $x$ (اولین جملهٔ مقسوم براولین جملهٔ مقسوم علیه) که برابر میشود با $ax^{n-1}$ وچون این جمله را در $x-\alpha$ ضرب نموده باتغییر علامت با جمله‌های همدرجهٔ ازمقسوم جمع نمائیم مقسوم جزء اول بدست میاید که جملهٔ اول آن عبارت است از :

$$a_1x^{n-1}+a\alpha x^{n-1}=(a\alpha+a_1)x^{n-1}$$

وازتقسیم این جمله براولین جملهٔ مقسوم علیه یعنی $x$ ، دومین جملهٔ خارج قسمت به‌صورت $(a\alpha+a_1)x^{n-1}$ حاصل میشود وبااین قیاس میتوان کلیهٔ جمله‌های خارج قسمت را تعیین کرد ، به‌شرح زیر :

ضریب اولین جملهٔ خارج قسمت نسبت به $\alpha$ از درجهٔ صفر است

ضریب دومین جملهٔ خارج قسمت نسبت به $\alpha$ از درجهٔ یك است

.
.
.

ضریب آخرین جملهٔ خارج قسمت نسبت به $\alpha$ ازدرجهٔ $n-1$ است

درهریك ازضریب های فوق که نسبت به $\alpha$ مرتب شده است ضرایب بترتیب $a$ ، $a_1$ و $a$ ، $a_1$ و $a_2$ ... بالاخره $a_1$ و $a_2$ و ... و $a_{n-1}$ میباشد به ترتیب زیر

| | |
|---|---|
| جملهٔ اول خارج قسمت | $ax^{n-1}$ |
| جملهٔ دوم « « | $(a\alpha+a_1)x^{n-2}$ |
| جملهٔ سوم « « | $(a\alpha^2+a_1\alpha+a_2)x^{n-3}$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| جملهٔ آخر خارج قسمت | $(a\alpha^{n-1}+a_1\alpha^{n-2}\dots+a_{n-1})$ |

وملاحظه میکنیم که :

$$a\alpha+a_1=a\times\alpha+a_1=A$$

$$a\alpha^2+a_1\alpha+a_2=(a\alpha+a_1)\times\alpha+a_2=A\alpha+a_2=A_1$$

$$a\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3=A_1\alpha+a_3$$

بعبارت دیگر :

ضریب جملهٔ اول خارج قسمت = ضریب جملهٔ اول مقسوم

ضریب جملهٔ دوم خارج قسمت = ضریب جملهٔ اول خارج قسمت $\times\alpha$ + ضریب جملهٔ دوم مقسوم

ضریب جملهٔ سوم خارج قسمت = ضریب جملهٔ دوم خارج قسمت $\times\alpha$ + ضریب جملهٔ سوم مقسوم

.
.
.

باقیماندهٔ تقسیم = ضریب آخرین جملهٔ خارج قسمت $\times\alpha$ + جملهٔ معلوم مقسوم

**مثال ۱ ـ** تعیین خارج قسمت وباقیماندهٔ تقسیم زیر :

$$(4x^4-14x^3+6x^2-4x+20):(x-3)$$

| | |
|---|---|
| جملهٔ اول خارج قسمت = | $4x^3$ |
| جملهٔ دوم « « = | $(4\times3-14)x^2=-2x^2$ |
| جملهٔ سوم « « = | $-2\times3+6)x=0$ |
| جملهٔ چهارم « « = | $(0\times3-5)=-5$ |
| باقیماندهٔ تقسیم = | $(-5\times3+20=5$ |

یعنی خارج قسمت عبارت شد از $4x^3-2x^2-5$

**مثال ۲ ـ** تعیین خارج قسمت و باقیماندهٔ تقسیم :

$$(3x^7+26x^6-5x^5-270x^4+64x^3-42x^2+50x+350):(x+7)$$

جمله‌های خارج قسمت بترتیب عبارتند از :

۱) $3\rightarrow3x^6$

۲) $3(-7)+26=5\rightarrow5x^5$

۳) $5(-7)-5=-40\rightarrow-40x^4$

۴) $-40(-7)-270=10\rightarrow10x^3$

۵) $10(-7)+64=-6\rightarrow-6x^2$

۶) $-6(-7)-42=0\rightarrow0$

۷) $0\times(-7)+50=50\rightarrow50$

باقیماندهٔ تقسیم مساویست با

$$50(-7)+350=0$$

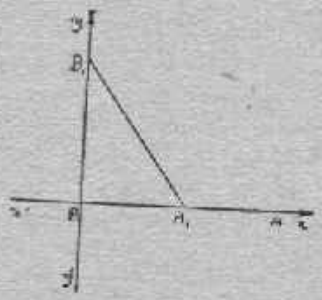
**مثال ۳ ـ** در تقسیم

$$(x^5-4x^3+2x-7):(x-2)$$

ضرائب جمله‌های دوم و چهارم مقسوم صفر بوده و چون طبق قاعدهٔ فوق عمل شود خارج قسمت عبارت خواهد شد از $x^4+2x^2+2$ وباقیمانده برابر با ۳− بدست میآید(ع.ر)

## کلاس های پنجم

**۱۶۰۰ ـ** کشتی A در ۷۵ میلی شرق کشتی B قرار داشته وباسرعت ۱۲ میل درساعت در جهت از مشرق به مغرب حرکت میکند ، کشتی B باسرعت ۹ میل درساعت درجهت از جنوب به شمال حرکت میکند بعد از چه مدت فاصلهٔ این دو کشتی می‌نیمم(حداقل) خواهد بود .




محور $x'x$ رادرامتداد مغرب ومشرق وجهت مثبت آنرا بطرف مشرق و محور $y'y$ را درامتداد جنوب بشمال اختیار میکنیم وفرض میکنیم درابتدا B بر مبدأ مختصات واقع باشد یعنی درابتداداشته باشیم $A(x=75 و y=0)$ و $B(x=0 و y=0)$ A برمحور $x'x$ و B برمحور $y'y$ حرکت کرده وفرض میکنیم وقتی که A بـه وضع $A_1$ باشد B بـه وضع $B_1$ واقع شود ، چنانچه مدت زمان لازم برای اینکه A به وضع $A_1$ و B به وضع $B_1$ درآید t باشدمختصات نقاط $A_1$ و $B_1$ عبارت خواهد بود از

$$A_1(75-12t \text{ و } 0) \text{ و } B_1(0 \text{ و } 9t)$$

طبق فرمول فاصلهٔ دونقطه خواهیم داشت

$$A_1B_1=\sqrt{(75-12t)^2+81t^2}=$$

$$=\sqrt{225t^2-1800t+5625}$$

$$A_1B_1=15\sqrt{t^2-8t+25}=15\sqrt{(t-4)^2+9}$$

مقدار $A_1B_1$ وقتی می‌نیمم است که عبارت $(t-4)^2+9$ نی‌نیمم باشد ، این عبارت از مجموع دوجملهٔ مثبت تشکیل شده است که یك جملهٔ آن $+9$ ثابت است ودر نتیجه عبارت وقتی می‌نیمم است که $(t-4)^2$ می‌نیمم یعنی برابرصفرباشد و خواهیم داشت $t=4$ یعنی بعد از ٤ ساعت ، فاصلهٔ کشتی‌های A و B می‌نیمم‌می‌باشد

**(ترجمه ازانگلیسی ـفرستنده : یدالله ارضی)**

## کلاس های ششم

**۱۶۰۱ ـ** حل معادلهٔ زیر

$$\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{2}+2=0 \qquad (1)$$

ازمعادلهٔ (۱) بدست میآید که

$$\sin\frac{x}{2}=2+\cos\frac{x}{3}<1$$

ولزوماً بدست میآیدکه $\cos\frac{x}{3}<-1$ وچون $\cos\frac{x}{3}\geq -1$

بنابراین تنها مقداری از $\cos\frac{x}{3}$ که در معادله صدق خواهدکرد عبارتست‌از $\cos\frac{x}{3}=-1$ وازروی‌آن واز معادلهٔ (۱) حاصل میشودکه $\sin\frac{x}{2}=1$ بنابراین ریشه‌های معادلهٔ (۱)عبارتند ازریشه‌های مشترك دومعادلهٔ زیر :

$$\cos\frac{x}{3}=-1 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{x}{2}=1 \qquad (3)$$

از معادلهٔ (۲) حاصل خواهد شد .

$$\frac{x}{3}=2k\pi+\pi \text{ یا } x=6k\pi+3\pi \quad (2')$$

و از معادلهٔ (۳) بدست میآید :

$$\frac{x}{2}=2k'\pi+\frac{\pi}{2} \text{ یا } x=4k'\pi+3\pi \quad (3')$$

($k$ و $k'$ اعداد صحیح هستند )

باید معلوم نمائیم بازاء چه مقادیر $k$ و $k'$ مقادیر $x$ از روابط (۲') و (۳') مشترکند برای این منظور مینویسیم .

$$6k\pi+3\pi=4k'\pi+\pi$$

و یا $3k=2k'-1$

طرف دوم عددی است فرد بنابراین طرف اول نیزباید فرد باشدونتیجه میشود $k=2n+1$ وازروی‌آن‌خواهیم داشت

$$x=6(2n+1)\pi+3\pi=12n\pi+9\pi \qquad (4)$$

کـه ریشهٔ‌کلی معادلهٔ ( ۱ ) میباشد و درآن $n$ نمایش عدد صحیح میباشد .

**تبصره ـ** انتهای‌کلیهٔ کمانهائی که از (٤) بدست میآیند در دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ $A'$ نقطهٔ متقاطر A مبدأ کمانها میباشد اما هرکمان‌که انتهایش $A'$ باشد ( مثلا $x=5\pi$ ) جواب معادلهٔ (۱) نخواهد بود .

**( ترجمهٔ از فرانسه )**

# فارغ التحصیلان ششم ریاضی

**۱۶۰۲ـ** درصفحهٔ محورهای مختصات متعامد (ox و oy) خط شکستهٔ ABCD... KL را که دارای n ضلع AB و BC و ... و KL میباشد با شرایط زیر رسم نموده‌ایم.

نقطهٔ A بر ox واقع بوده و $\overline{OA}=1$ است.

نقطهٔ B با زاویه‌های زیر مشخص شده است:

$(\overrightarrow{Ox}\text{ و }\overrightarrow{OB})=\lambda$ و $(\overrightarrow{Ax}\text{ و }\overrightarrow{AB})=\alpha$ و

$(0<\lambda<\alpha<\pi)$

نقطه‌های C و D و ... و K و L بقسمی واقع‌اند که مثلث‌های OBC و OCD و ... و OKL با مثلث OAB متشابه میباشند.

**۱)** طول OL را برحسب λ و α و n بدست آورید.

بفرض معلوم بودن λ، حدود α را تعیین کنید برای آنکه وقتی n زیاد میشود طول OL تنزل نماید.

**۲)** مقادیر λ و n معلوم‌اند و فرض میکنیم $OL=q^n$ $(q>0)$، α را برحسب λ و n و q بدست آورید

مثال عددی: $\lambda=90^\circ$ و $n=10$ و $OL=10$

**۳)** اندازهٔ جبری تصویر قائم $\overrightarrow{AL}$ بر $\overrightarrow{AB}$ را به P نمایش‌می‌دهیم، ازروی q که قبلا ذکر شده است، یک‌دفعه بوسیلهٔ مجموع n جمله ویک دفعه بوسیلهٔ مجموع ۲ جمله مقدار P را حساب کنید.

با فرض $0<q<1$ حد P را وقتی که n نامحدود شود بدست آورید.

**۴)** بااستعمال مقادیر عددی مذکور در ۳) و درحالت $0<q<1$ اندازهٔ مجموع

$$S=1+\frac{\cos 9^\circ}{\sqrt[10]{10}}+\frac{\cos 18^\circ}{\sqrt[10]{100}}+\frac{\cos 27^\circ}{\sqrt[10]{1000}}+\dots+\frac{\cos 9n}{\sqrt[10]{10^n}}+\dots$$

را وقتی که تعداد جمله‌ها نامحدود باشد حساب کنید.

**حل: ۱)** ازتشابه مثلثهای OBC و OCD و ... OKL با مثلث OAB داریم:

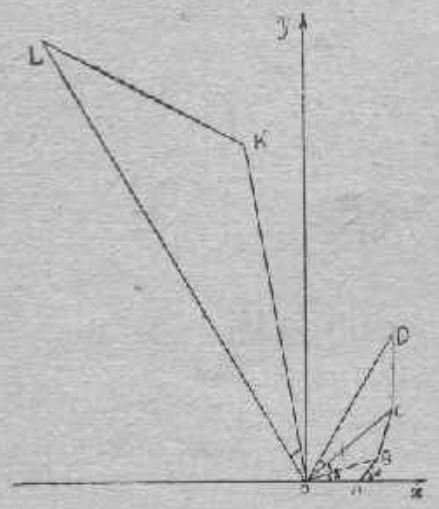
$$\frac{OB}{OA}=\frac{BC}{OB}=\frac{OD}{OC}=\dots=\frac{OK}{OH}=\frac{OL}{OK}$$

$$=\sqrt[n]{\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OC}{OB}\cdots\frac{OL}{OK}}=\sqrt[n]{\frac{OL}{OA}}$$

و چون $OA=1$ است نتیجه میشود:

$$OL=\left(\frac{OB}{OA}\right)^n=OB^n$$

$$\frac{OB}{OA}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\lambda)}\quad\text{و}\quad OL=\left[\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\lambda)}\right]^n\quad(1)$$




برای اینکه OL تابعی نزولی از n باشد لازم وکافیست که

$$\frac{OB}{OA}<1\quad\text{یا}\quad OB<OA$$

$$\pi-\alpha<\alpha-\lambda\quad\text{یا}\quad\alpha>\frac{\pi+\lambda}{2}$$

و بالاخره با توجه به مفروضات:

$$\frac{\pi+\lambda}{2}<\alpha<\pi\quad(2)$$

**۲)** بفرض $OL=q^n$ رابطهٔ (۱) بصورت زیر درمیاید

$$q=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\lambda)}$$

$$q(\sin\alpha\cos\lambda-\sin\lambda\cos\alpha)=\sin\alpha$$

$$q(\cos\lambda-\sin\lambda\,\mathrm{cotg}\,\alpha)=1$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha=\mathrm{cotg}\,\lambda-\frac{1}{q\sin\lambda}\quad(3)$$

**مثال عددی:** با فرض $\lambda=90^\circ$ و $n=10$ و $OL=10$ داریم:

$$q^{10}=10\quad\text{یا}\quad q=\sqrt[10]{10}\neq 1.259$$

و بالاخره نتیجه میشود

$$\mathrm{cotg}\,\alpha=\mathrm{cotg}\,9^\circ-\frac{1}{q\sin 9^\circ}$$

$\log\mathrm{cotg}\,9^\circ=0.800029$ و $\mathrm{Ant}\log 0.800029=6.3138$

$\mathrm{cotg}\,9^\circ=6.3138$

$\log q=\frac{1}{10}=0.10000$ و $\log\sin 9^\circ=\bar{1}.19433$

$\log q\sin 9^\circ=\bar{1}.29433$ و $\log\frac{1}{q\sin 9^\circ}=0.70567$

$\mathrm{Ant}\log 0.70567=5.0778=\frac{1}{q\sin 9^\circ}$

$cotg\alpha = ۶٫۳۱۳۸ - ۵٫۰۷۷۸ = ۱٫۲۳۶۰$

$logcotg = ٫۰۹۲۰۲$ و $logcotg ۳۸^\circ\ ۵۸' = ٫۰۹۲۱۵$

$۶۰''$ $\quad -۲۶$

$x = ۳۰''$

$x'' \quad -۱۲$

$\alpha = ۳۸^\circ\ ۵۸'\ ۳۰''$

**۳)** اولاً در نظر میگیریم :

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \dots + \overrightarrow{KL}$$

تصویر قائم $\overrightarrow{AL}$ بر محور محمل AB و هم‌جهت با $\overrightarrow{AB}$ عبارت میشود از

$$\overline{P} = AB + BC\cos(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{BC}) + \dots + KL\cos(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{KL})$$

با توجه به روابط

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\lambda)} = q$$

$$(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{CD}) = \dots = (\overrightarrow{HK} \text{ و } \overrightarrow{KL}) = \lambda$$

خواهیم داشت :

$$(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{BC}) = \lambda \text{ و } (\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{CD}) = ۲\lambda \text{ و} \dots$$

$$(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{KL}) = (n-۱)\lambda$$

$$BC = AB.q \text{ و } CD = AB.q^۲ \text{ و} \dots$$

$$KL = AB.q^{n-۱}$$

و نتیجه خواهد شد :

$$\overline{P} = AB[۱ + q\cos\lambda + q^۲\cos ۲\lambda + \dots + q^{n-۱}\cos(n-۱)\lambda]$$

از رابطهٔ $\frac{AB}{\sin\lambda} = \frac{OA}{\sin(\alpha-\lambda)}$ بدست میآید

$$AB = \frac{\sin\lambda}{\sin(\alpha-\lambda)}$$

و بالاخره نتیجه خواهد شد :

$$\overline{P} = \frac{\sin\lambda}{\sin(\alpha-\lambda)}[۱ + q\cos\lambda + q^۲\cos ۲\lambda + \dots + q^{n-۱}\cos(n-)\lambda] \quad (٤)$$

ثانیاً داریم : $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OA}$ و چون آنرا بر محور محمل $\overrightarrow{AB}$ تصویر نمائیم خواهیم داشت :

$$\overline{P} = OL\cos(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{OL}) - OA\cos(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{OA})$$

$$(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{OL}) = (\overrightarrow{Ox} \text{ و } \overrightarrow{OL}) - (\overrightarrow{Ox} \text{ و } \overrightarrow{AB}) = n\lambda - \alpha$$

$$(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{OA}) = -\alpha \text{ و } OL = q^n$$

$$P = q^n\cos(n\lambda - \alpha) - \cos\alpha \quad (٥)$$

اگر $۰ < q < ۱$ و $n \to \infty$ در اینصورت $q^n \to ۰$ و چون $\cos(n\lambda - \alpha)$ همواره محدود و محصور بین ۱ و ۱− است لذا $\overline{P} \to -\cos\alpha$

**تبصره** ـ ازمقایسهٔ روابط (٤) و (٥) و $\overline{P}$ نتیجه میشود که اگر $۰ < q < ۱$ و $n \to \infty$ داریم

$$۱ + q\cos\lambda + q^۲\cos ۲\lambda + \dots = -\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\lambda)}{\sin\lambda} \quad (٦)$$

**۴)** مجموع S همان طرف اول رابطهٔ (٦) است که $q = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ و $\lambda = ۹^\circ$ باشد پس

$$S = -\frac{\cos\alpha\sin(\alpha - ۹^\circ)}{\sin ۹^\circ} \quad (٧)$$

زاویهٔ $\alpha$ ازمعادلهٔ زیر تعیین میشود

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - ۹)} = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

که قبلاً در (۲) حساب شده است و بنابراین خواهیم داشت

$$S = \frac{\cos ۲۹^\circ ۵۸' ۳۰'' \times \sin ۳۸^\circ ۵۸' ۳۰''}{\sin ۹^\circ}$$

$$\log S = \log\cos ۲۹^\circ ۵۸' ۳۰'' + \log\sin ۳۸^\circ ۵۸' ۳۰'' + co\log\sin ۹^\circ = \dots = ٫۵٤۱۳٦$$

$$S = ۳٫٤۷۸۳$$

**(ترجمهٔ ازفرانسه)**

## دانش‌آموز رتبهٔ اول امتحانات نهائی

آقای **علی پی براه** دانش‌آموزششم‌ریاضی‌آبادان در خرداد ماه ۱۳٤۳ با معدل **۱۸٫۴۹** دربین دانش‌آموزان‌رشتهٔ ریاضی **آبادان** رتبهٔ اول گردیده است .

آقای پی براه که امروز دانشجوی‌دانشکدهٔ‌فنی‌آبادان است در همهٔ دوران تحصیل رتبهٔ‌اول بوده وازلحاظ درس‌و اخلاق رضایت اولیای دبیرستان را فراهم‌کرده است .

رئیس دبیرستان رازی آبادان ـ دکتر فراقی

فرستندهٔ خبر : مطبوعاتی دهداری نمایندگی یکان

# مسائل برای حل

**( مهلت قبول پاسخ تا ۲۰ آذر ۴۳ ـ دانش‌آموزان هر کلاس از ارسال مسائل کلاس ماقبل خودداری نمایند )**

## کلاس چهارم طبیعی

**۱۶۰۳ـ** ثابت کنید که از تساوی

$$\frac{ad+b}{bc+a}=\frac{bd+a}{ac+b}$$

یکی از تساوی‌های $|a|=|b|$ یا $cd=1$ نتیجه میشود

**( بهروز پرهامی ـ دانشجوی دانشکده فنی )**

**۱۶۰۴ـ** بفرض $y=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$

اولا مقدار $y^2$ را حساب کنید .

ثانیاً حاصل کسر زیر را تعیین کنید :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}+2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}-2}$$

**( حافظی ـ دبیر دبیرستان بنیس )**

**۱۶۰۵ ـ** صحت تساوی زیر را بازاء $x=2+\sqrt{2}$ تحقیق کنید .

$$\frac{x^3-3x-2}{(x+1)^2}=\sqrt{2}$$

**۱۶۰۶ـ** درمثلث ABC که $AC>AB$ است نیمساز داخلی AD را رسم مینمائیم و فرض میکنیم $B'$ قرینهٔ محوری B و $C'$ قرینهٔ محوری C نسبت بمحور گذرنده بر AD باشد .

اولا ثابت کنید که هریك ازطولهای $CB'$ و $BC'$ برابر با تفاضل دو ضلع AC و AB میباشد .

ثانیاً اگر اندازهٔ زاویهٔ A برابر $60^\circ$ و اندازهٔ زاویهٔ B برابر $90^\circ$ باشد ثابت کنید D نقطهٔ تلاقی سه نیمساز داخلی مثلث $ACC'$ میباشد .

## کلاس چهارم ریاضی

**۱۶۰۷ـ** حاصل کسر زیر را حساب کنید .

$$\frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}-\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}}$$

**( حافظی ـ دبیر دبیرستان بنیس )**

**۱۶۰۸ـ** صحت تساوی زیر را تحقیق کنید .

$$\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}=1$$

**( حافظی )**

**۱۶۰۹ـ** بفرض اینکه a طول وتر و b و c طولهای دوضلع دیگر از یك مثلث قائم الزاویه باشند حاصل عبارت زیر را تعیین کنید .

$$\frac{\left[\frac{(\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}})^{-1}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\right]^{-1}}{\frac{1}{\sqrt{a+b}}}+\frac{\left[\frac{(\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{c}})^{-1}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{c}}}\right]^{-1}}{\frac{1}{\sqrt{a+c}}}$$

**۱۶۱۰ ـ** ثابت کنید در هر تصاعد حسابی با جمله‌های $a_1$ و $a_2$ و ... و $a_k$ و ... $a_n$ هر یك از دو رابطهٔ زیر برقرار است :

$$1)\ (a_1)^2-(a_2)^2+(a_3)^2-(a_4)^2+\dots+(a_{2k-1})^2-(a_{2k})^2=\frac{k[(a_1)^2-(a_{2k})^2]}{2k-1}$$

$$2)\ \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

**( فرستنده : محمد شریف‌زاده )**

**۱۶۱۱ـ** ثابت کنید که اگر $S_n$ و $S_{2n}$ و $S_{3n}$ بترتیب مجموع n جملهٔ اول ، مجموع 2n جملهٔ اول و مجموع 3n جملهٔ اول از یك تصاعد هندسی باشند، رابطهٔ زیرمحقق است.

$$S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$$

**( فرستنده : مهندس عباس سعیدی )**

**۱۶۱۱ـ** قطعه خط ثابت AB به طول a مفروض است نقطهٔ M را بر AB اختیار میکنیم و مثلث متساوی الاضلاع AMD را میسازیم ؛ در نقطهٔ D عمودی بر MD و در

نقطهٔ B عمودی بر AB اخراج میکنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند .

اولاً مکان هندسی نقطهٔ O وسط MC را وقتی که M بر AB حرکت کند بدست آورید .

ثانیاً محیط چهار ضلعی MBCD را بر حسب a حساب کنید .

( مجلهٔ ریاضیات مقدماتی )

## کلاس پنجم طبیعی

**۱۶۱۳ـ** اولاً منحنی نمایش هندسی تابع $y=\frac{1}{2}x^2$ را بوسیلهٔ نقطه‌یابی و خط بمعادلهٔ $3x+2y=4$ را در یک دستگاه محورهای مختصات روی کاغذ شطرنجی رسم نمائید . خط و منحنی یکدیگر را در دو نقطهٔ A و B قطع میکنند ، مختصات دو نقطهٔ A و B را از روی شکل در نظر گرفته و با آزمایش در هریک از دو معادله طول و عرض A و B را دقیقاً بدست آورید .

ثانیاً اگر $A(-4 \text{ و } 8)$ و $B(1 \text{ و } \frac{1}{2})$ باشد .

الف ـ تحقیق کنید که زاویهٔ AOB قائمه است .

ب ـ بجز نقطهٔ O دیگری مانند C روی محور $x'x$ وجود دارد که زاویهٔ ACB قائمه میباشد ، طول نقطهٔ C را پیدا کنید .

**۱۶۱۴ـ** x کمانی است حاده و داریم :

$$tg x + cotg x = \frac{3}{\cos x}$$

خطوط مثلثاتی کمان x را بدست آورید .

## کلاس پنجم ریاضی

**۱۶۱۵ـ** با معلوم بودن مختصات سه رأس یک مثلث ، مختصات مرکز دایرهٔ محیطی آنرا تعیین کنید .

مثال عددی :

$A(1 \text{ و } 7)$ و $B(-3 \text{ و } -1)$ و $C(-1 \text{ و } 3)$

**۱۶۱۶ـ** سه نقطهٔ زیر داده شده است .

$A(0 \text{ و } 5)$ و $B(1 \text{ و } -2)$ و $C(m-3 \text{ و } -2m+1)$

۱) تحقیق کنید تفاضل مربعات فواصل نقطهٔ C از دو نقطهٔ A و B برابر با مقدار ثابت است و این مقدار ثابت را بدست آورید .

۲) از راه محاسبه مقدار m را چنان تعیین کنید که فاصلهٔ C از O مبدأ مختصات می‌نیمم ( حداقل ممکن ) باشد .

۳) اگر M وسط AB و D قرینهٔ C نسبت به M باشد مقدار m را چنان معلوم کنید که عمود منصف CD از مبدأ مختصات بگذرد .

۴) درحالتیکه C برمحور $x'x$ واقع است مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD را تعیین کنید .

**تبصره ـ** دو مسألهٔ فوق بدون استفادهٔ از معادلهٔ خطوط حل شوند .

**۱۶۱۷ـ** x کمان حاده بوده و انتهای کمان y در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی واقع است و داریم :

$$\begin{cases} tg x + tg y = \frac{1}{6} \\ cotg x + cotg y = -1 \end{cases}$$

خطوط مثلثاتی دو کمان x و y را تعیین کنید .

**۱۶۱۸ـ** معادلهٔ زیر مفروض است :

$$4x^2 - 2(\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0$$

بدون حل معادله معلوم کنید که $x'$ و $x''$ ریشه‌های آن میتوانند سینوس و کسینوس یک کمان باشند .

**۱۶۱۹ـ** ثابت کنید که اگر دو کمان x و y در یکی از دو رابطهٔ $a \sin x \sin y \pm b \cos x \cos y = 0$ ($a \neq b$ و $ab \neq 0$) صدق کنند، عبارت:

$$E = \frac{1}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} + \frac{1}{a \sin^2 y + b \cos^2 y}$$

مستقل از x و y است (E.P.M.Combes)

**۱۶۲۰ـ** دو مثلث ABC و A'BC غیر واقع در یک صفحه مفروض است ، H و H' بترتیب نقطهٔ تلاقی ارتفاعات آنها میباشند ثابت کنید اگر AA' برصفحهٔ ABC عمود باشد، HH' برصفحهٔ A'BC عمود خواهد بود و بالعکس ( E.P.M. )

**۱۶۲۱ـ** دو خط متنافر و متعامد Ax و Bx مفروض است و $AB=a$ عمود مشترک آنها میباشد، قطعه خط MP با طول ثابت $MP=l$ چنان تغییر مکان میدهد که M همواره بر Ax و P همواره بر By واقع است ($l>a$)

۱) ثابت کنید که اندازهٔ زاویهٔ دو خط AB و MP مقدار ثابت است .

۲) مکان هندسی I نقطهٔ وسط MP را تعیین کنید : ( E.P.M. )

## کلاس ششم طبیعی

**۱۶۲۲ـ** اولاً منحنی (c) نمایش هندسی تابع $y=x^2+x+2$ را رسم کنید .

ثانیاً معلوم کنید که معادلهٔ $x^2+x+2-m=0$ در

ازاء جمیع مقادیر m فقط یك جواب دارد .

ثالثاً معادلهٔ مماس بر منحنی (c) را در نقطهٔ تلاقی آن با محور y'y نوشته و طول نقطهٔ تلاقی این مماس را با x'x بدست آورید .

رابعاً خط بمعادلهٔ $y=2x+2$ را درشکل منحنی(c) رسم کرده و معلوم کنید که منحنی (c) از این خط دو پاره خط متساوی جدا میسازد .

**۱۶۲۳ـ** بفرض اینکه :

$$y=2k\pi+\frac{\pi}{2}+x \quad \text{و} \quad z=2k'\pi+\frac{\pi}{2}-x$$ باشد

مطلوب است تعیین x درصورتیکه داشته باشیم :

$$\sin^2 3y-\cos^2 3z=1$$

## کلاس ششم ریاضی

**۱۶۲۴ـ** دو تابع زیر مفروض است :

$$y=f(x) \quad \text{و} \quad z=\frac{x^2}{f(x)}$$

و فرض میکنیم نمایش هندسی دو تابع y و z در صفحهٔ محورهای مختصات متعامد بترتیب منحنی‌های (c) و (c') باشد. خط عمود بر Ox درنقطهٔ H بطول $OH=x(x\neq 0)$ منحنی (c) را در M و منحنی(c') را در M' و مماسهای برمنحنی‌های (c)و (c') درنقاط M و M' محور Ox رابترتیب درنقاط T و T' قطع میکنند .

۱) رابطهٔ زیر را بدست آورید $\frac{y'}{y}+\frac{z'}{z}=\frac{2}{x}$

۲) اگر نقطه M معلوم باشد نقطهٔ M' را از راه ترسیم بدست آورید و با استفادهٔ از رابطهٔ بالا ثابت کنید که تقسیم (O و H و T و T') توافقی است . (F.P.M.)

**۱۶۲۵ـ** تابع زیر داده شده است $y=\cos\pi\sqrt{x}$

۱) معادلهٔ مماس برمنحنی نمایش تابع را درنقطه‌ای از آن بطول یك بدست آورید .

۲) طولهای نقاط تلاقی منحنی را با محور طولها که در فاصلهٔ (۰و۹) واقع‌اند تعیین کنید .

**۱۶۲۶ـ** درصفحهٔ محورهای مختصات متعامد (Ox و Oy) حاملهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ با مفروضات زیر مفروض‌اند:

$$\begin{cases} OA=AB=BC=1 \\ (\overrightarrow{Ox}\ \text{و}\ \overrightarrow{OA})=\theta \ \text{و}\ (\overrightarrow{OA}\ \text{و}\ \overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AB}\ \text{و}\ \overrightarrow{BC})=\varphi \end{cases}$$

$$(0<\theta<\pi \ \text{و}\ 0<\varphi<\pi)$$

۱) اگر X و Y اندازه‌های جبری تصاویر $\overrightarrow{OC}$ برمحورهای مختصات باشد مقادیر X و Y را برحسب $\theta$ و $\varphi$ بدست آورید .

۲) بازاء چه مقدار از $\varphi$ خط‌شکستهٔ OABC مسدوداست؟

۳) بفرض $\varphi=\frac{\pi}{6}$ مقدار $\theta$ را چنان معلوم کنید که نقطهٔ C برمحور Ox ویا برمحور Oy واقع باشد ودرهردوحال $\overline{OC}$ را حساب کنید .

۴) چه رابطه‌ای باید بین $\theta$ و $\varphi$ برقرار باشد برای اینکه نقطهٔ C بریکی از نیمسازهای محورهای مختصات واقع باشد .

(F.P.M.)

**۱۶۲۷ـ** ثابت کنید که درهر مبنای $x>4$ عددی بشکل $\overline{(x-3)(x-3)44}$ وجود دارد که مربع کامل عددی بشکل $\overline{(x-2)(x-2)}$ باشد .

**( قوام نحوی ـ دبیر دبیرستانهای اهواز )**

**۱۶۲۸ـ** کوچکترین عدد چهاررقمی بفرم $\overline{abcc}$ را چنان معلوم کنید که اگر یك واحد از آن کم کنیم عددی به $\overline{aaxx}$ و مضرب ۳ بدست آید .

**( احمدکهربائیان ـ دانشجوی پزشکی مشهد )**

**۱۶۲۹ـ** شش عدد صحیح متوالی پیدا کنید که کوچکترین آنها بصورت $\overline{abac}$ و مجموع آنها بصورت $\overline{aacbb}$ باشد .

**( مهندس عباس سعیدی )**

**۱۶۳۰ـ** دایرهٔ برمرکز O و دو نقطهٔ ثابت P و Q مفروض است بطوریکه PQ از O میگذرد و P و Q نسبت به O متقارن نیستند. دو وتر $AB=AC$ را چنان رسم کنید که AB بر P و AC بر Q بگذرد .

**۱۶۳۱ـ** بیضی با قطر اطول AA' وکانونهای F و F' مفروض است مماسی متغیر براین بیضی، مماسهای درنقاط A و A' برآن را بترتیب در نقاط T و T' قطع میکند ، ثابت کنید که دایرهٔ بقطر TT' برکانونهای F و F' میگذرد و حاصلضرب AT.A'T' برابر با مقدار ثابت میباشد . (G.P.B.)

**۱۶۳۲ـ ( رقومی )** دو نقطهٔ a و b بفاصله $ab=10$ واقع درصفحهٔ مقایسه مفروض‌اند .

۱) در صفحهٔ مقایسه نقطه s را چنان بیابید که طول میانهٔ sm از مثلث sab برابر با ۳ و تفاضل مربعات فواصل s از a و b برابر با ۴۰ باشد .

۲) اگر s تصویر نقطه‌ای مانند S واقع دربالای صفحه مقایسه بود وزاویهٔ aSb قائمه باشد رقوم s را از راه ترسیم و از راه محاسبه تعیین کرده مقیاس شیب صفحهٔ aSb را رسم کنید .

## مسائل متفرقه

**۱۶۳۳ ـ** دودایره بامرکزهای O و O' و باشعاعهای R و R' مفروض اند ، نقطهٔ M را درخارج دودایره چنان انتخاب کنید که اگر A نقطهٔ تلاقی MO با دایرهٔ O و B نقطهٔ تلاقی MO' بادایرهٔ O' باشد مثلث MAB متساوی‌الاضلاع باشد.

**(حسن یوسفی آذری نژاد ـ دانشجوی ریاضی دانشکده علوم)**

**۱۶۳۴ ـ** مثلث ABC مفروض است ، نقطهٔ M را بر ضلع BC چنان تعیین کنید که داشته باشیم .

$$1)\ \frac{MB}{MC}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \qquad 2)\ \frac{MB}{MC}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{AC}^3}$$

$$3)\ \frac{MB}{MC}=\frac{\overline{AB}^n}{\overline{AC}^n}$$

**(خسروجهانبار ـ ششم ریاضی دبیرستان شمس العلماء)**

**۱۶۳۵ ـ** نامساوی زیررا برای هرمثلث ثابت کنید.

$$\frac{h_a}{r_a}+\frac{h_b}{r_b}+\frac{h_c}{r_c}\geq 3$$

**(سیروس فخریاسری ـ دانشجوی دانشکده فنی)**

**۱۶۳۶ ـ** بااستفادهٔ ازروش استقراء ریاضی نامساوی زیر را ثابت کنید .

$$1^2\times 2^2\times 3^2\times\cdots\times n^2\geq n^n$$

**فرستنده : (مهندس عباس سعیدی)**

***

**سه مسأله ازمسائل ارسالی توسط : ایرج ادیبی**

**۱۶۳۷ ـ** ثابت کنید درمثلث قائم‌الزاویه ، بفرض اینکه طول‌های اضلاع اعدادصحیح باشندمجموع وترویك ضلع مجاوربه زاویهٔ قائمه وهمچنین تفاضل آنها مربع کامل ونصف مجموع وتر وضلع دیگر نیز مربع کامل میباشد .

مثال برای مثلثی که اضلاع آن برابر با اعداد ۳و۴و۵ است .

$$5+4=9=3^2 \text{ و } 5-4=1^2 \text{ و } \frac{5+3}{2}=4=2^2$$

آیا مجموع وتروضلع اول همواره یك عدد فرد است ؟

آیا نصف مجموع وتروضلع دیگرهمواره یك عددزوج است؟

**۱۶۳۸ ـ** ثابت کنید دوعدد متوالی که مجموع آنها برابر بامربع یك عدد فردباشد بااین عدد فرد تشکیل اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای را میدهند

مثلاً داریم $13+12=5^2$ واعداد ۵و۱۲و۱۳ اندازه‌های اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه میباشند

**۱۶۳۹ ـ** ثابت کنید سه رقم مختلف نمیتوان یافت که ترکیبات مختلف آن عدد اول باشد ( ترکیبات مختلف سه‌رقم کلیهٔ اعداد سه رقمی است که باآن سه‌رقم میتوان تشکیل‌داد)

***

## برخی ازمسائل تاریخی ریاضی

تنظیم از : مهندس عباس سعیدی

**۱۶۴۰ ـ اتحاد لاگرانژ**

$$1)\ (a^2+b^2)(a'^2+b'^2)-(aa'+bb')^2=(ab'-a'b)^2$$

$$2)\ (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2=(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2$$

**۱۶۴۱ ـ نامساوی برنولی ؛** هرگاه مقادیر $x_1$ و $x_2$ و ... و $x_n$ همعلامت وبزرگتراز ۱ ـ باشند ثابت کنید

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)>1+x_1+x_2+\cdots+x_n$$

**۱۶۴۲ ـ مسألهٔ حساب از فیبوناچی؛** عددی پیدا کنید که اگرآنرا به یك مربع کامل اضافه کنیم ویااز آن کم کنیم درهردوحالت حاصل مربع کامل باشد

$$\begin{cases} x^2+a=y^2 \\ x^2-a=z^2 \end{cases}$$

**۱۶۴۳ ـ مسألهٔ حساب ازتبولت ؛** عددی بصورت $\overline{aabb}$ درمبنای اعشاری چنان پیدا کنید که اگریك واحد بر آن اضافه کنیم یك عدد مربع کامل بدست آید

**۱۶۴۴ ـ مسأله از : کاتالان ؛** عبارت زیررا به‌حاصل ضرب دوچند جمله‌ای کامل تجزیه کنید

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)^p-x^n$$

**۱۶۴۵ ـ مسأله از : هرمیت ؛** اگرعبارت $f(x,y)$ نسبت به x و y متقارن وبر $x-y$ بخش پذیرباشد بر $(x-y)^2$ نیز بخش پذیرخواهد بود

**۱۶۴۶ ـ مسأله‌ازکاتالان ؛** عبارت زیر را خلاصه کنید

$$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2+1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2+1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$$

**۱۶۴۷ ـ مسأله ازفرما ؛** اگر p یك عدد اول و با عدد a متباین باشد ثابت کنید $a^{p-1}-1$ بر p بخش پذیراست

**۱۶۴۸ ـ مسأله ازبرنولی ؛** چندجمله‌ای از x بصورت $f(x)$ ازدرجهٔ p چنان تشکیل دهید که‌داشته باشیم :

$f(x)-f(x-1)=x^p$ وبازاء $x=0$ برابرصفر گردد

**مورد استعمال ـ** محاسبهٔ مجموع قوای متشابه n عدد اولیه $1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$

مسائل از : **استاد دکتر محسن هشترودی**

# برای دانش آموزان

**۱۶۴۹ـ** دستگاه‌های زیررا برای جوابهای همسان حل کنید :

$$\text{I}\begin{cases} x_1(x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+2x_n) & =a^2 \\ x_2(4x_1+3x_2+4x_3+4x_4+\dots+4x_n) & =4a^2 \\ x_3(6x_1+6x_2+5x_3+6x_4+\dots+6x_n) & =9a^2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_n[2nx_1+2nx_2+2nx_3+2nx_4+\dots+(2n-1)x_n] & =n^2a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+2x_n)-2(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)+1 & =0 \\ x_2(4x_1+3x_2+4x_3+4x_4+\dots+4x_n)-4(x_1+x_2+x_4+\dots+x_n)+1 & =0 \\ x_3(6x_1+6x_2+5x_3+6x_4+\dots+6x_n)-6(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)+1 & =0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_3[2nx_1+2nx_2+2nx_3+2nx_4+\dots+(2n-1)x_n]-2n(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)n+1 & =0 \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} x_1(x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+2x_n) & =0 \\ x_2(2x_1+x_2+2x_3+2x_4+\dots+2x_n)+2(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n) & =-1 \\ x_3(2x_1+2x_2+x_3+2x_4+\dots+2x_n)+8(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n) & =-16 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_n(2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+x_n)+2(n-1)^2(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n) & =-(n-1)^4 \end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases} x_1(x_1+2x_2+2x_3+\dots+2x_n) & =a^2 \\ x_2(2x_1+x_2+2x_3+\dots+2x_n)+3(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n) & =4a^2 \\ x_3(2x_1+2x_2+2x_3+\dots+2x_n)+8(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)^2 & =9a^2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_n(2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+x_n)+48(x_1+x_2+x_3\dots+x_n)^2 & =n^2a^2 \end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases} x_1(x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+2x_n)+8(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)^2 & 9a^2 \\ x_2(2x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_n)+24(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)^2 & =25a^2 \\ x_3(2x_1+2x_2+x_3+2x_4+\dots+2x_n)+48(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)^2 & =49a^2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_n(2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+x_n)+4n(n+1)(x_1+x_2+\dots+x_n)^2 & =(2n+1)^2a^2 \end{cases}$$

$$\text{VI}\begin{cases} x_1(x_1+2x2+2x_3+2x4+\dots+2x_n) & =0 \\ x_2(2x_1+x_2+2x_3+2x_4+\dots+2x_n)+2(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n) & =-1 \\ x_3(2x_1+2x_2+x_3+2x_4+\dots+2x_n)+4(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n) & =-4 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_n(2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+x_n)+2(n-1)(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n) & =-(n-1)^2 \end{cases}$$

**۱۶۵۰ـ** معادلهٔ درجهٔ پنجم : $x^5 - 5b^2x^3 + 5b^4x = 2a^5 - 0$ را بفرض اینکه بدانیم $a > b$ است و معادله فقط یك ریشهٔ حقیقی دارد حل کنید .

**۱۶۵۱ـ** دومقطع مخروطی دریك کانون مشترك‌اند، نقاط تقاطع و مماسهای مشترك منحنی‌ها را تعیین کنید .

**۱۶۵۲ـ** نقاط تقاطع و مماسهای مشترك دائرهٔ راکه مرکز آن برمحور اطول مقطع مخروطی است با این مقطع مخروطی معلوم کنید .

**۱۶۵۳ـ** دونقطهٔ A وB درسطح دائرهٔ معلوم O بشعاع R قراردارند. قطر متغیر PQ را دردائره رسم کرده وخطوط PA وPB و QA وQB را رسم می‌کنیم تا با تقاطع باهم نقاط M وN را بدست دهند .

۱) خط MN قطر PQ را درنقطهٔ S قطع کند مطلوبست مکان هندسی این نقطه

۲) مکان هندسی نقطهٔ T وسط قطعه خط MN را تعیین کنید .

۳) مکان هندسی نقاط M و N یك منحنی درجهٔ چهارم است دردوحالت این‌منحنی بدودایرهٔ منطبق برهم (یك دائرهٔ ـ مضاعف) تبدیل میشود این‌دوحالت را تعیین کنید .

**۱۶۵۴ـ** بنابرتعمیم‌تعریف دوعدد راکه قدر مطلق اختلاف آنها برابرواحد است متوالی می‌نامیم ( تعمیم تعریف اعداد متوالی درعددهای صحیح).ظل‌مثلثاتی زوایای مثلثی اعداد متوالی می‌باشند ثابت کنید که این اعداد اعداد صحیح‌اند ویکی اززوایای مثلث °٤٥ درجه می‌باشد. همچنین ظل تمام نیم زوایای مثلثی اعداد متوالی می‌باشند ثابت کنید که این اعداد اعداد صحیح‌اند و مثلث قائم‌الزاویه است .

**۱۶۵۵ـ** فصل مشترك دومقطع مخروطی که قطرهای اطول آنها بریك امتداد واقع‌اند تعیین کنید .

**۱۶۵۶ـ** در چهارضلعی ABCD رؤوس A وB دونقطهٔ ثابت از صفحه می‌باشند اضلاع AD وBC با هم برابربوده و طول ثابتی دارند و زاویهٔ آنها همواره برابر مقدار ثابت $\alpha$ باقی میماند مکان هندسی نقطهٔ M وسط ضلع CD را تعیین کنید. آیا ممکن‌است این چهارضلعی دوذنقهٔ محاطی گردد ؟ درصورتیکه این امرهمواره میسرنیست شرط امکان را تعیین کنید .

بطورکلی اگردرچهارضلعی ABCD رؤوس A وB دونقطهٔ ثابت‌بوده وطول‌اضلاع AD و BC وزاویهٔ آنهاباهم همواره ثابت مانده وتغییرنکنند مکان هندسی نقطه M وسط CD را تعیین کنید .

---

## بازی اعداد

### مسألهٔ منسوب به شیخ بهائی

عددی درنظر بگیرید که از ۱۰۵ کمتر باشد . عددمزبور را بر ۳ تقسیم نموده و مانده اگر یك شد عدد ۷۰ و اگر ۲ شد عدد ۳۵ را یادداشت نمائید . مجدداً عدد اصلی را بر ۵ تقسیم نموده‌و مانده را در۲۱ ضرب کرده‌و حاصل را یادداشت نمائید . دفعهٔ سوم عدد اصلی را بر۷ تقسیم کرده مانده را در ۱۵ ضرب نموده حاصل را یادداشت کنید . سه‌عددی که یادداشت کرده‌اید باهم جمع کنید ، اگرمجموع از ۱۰۵ بیشتر شدتفاضل آن بر ۱۰۵ و اگر مجموع از ۱۰۵ کمتر شد خود عدد اصلی میباشد .

فرستنده : قوام نجوی

## دانش آموز رتبهٔ اول امتحانات نهائی

آقای **بایرام مکارکه** در امتحانات ششم طبیعی خرداد۴۳ بین دانش‌آموزان دبیرستان درخشانی بنیس با معدل **۱۵٫۷۴** حائز رتبهٔ اول‌شده است بسال ۱۳۲۳ درطسوج تولد یافته‌وهمواره از لحاظ درس و اخلاق شاگرد ممتاز بوده است .

رئیس دبیرستان درخشانی بنیس ـ رحیمی

مسائل از : استاد دکتر محسن هشترودی

# برای دانشجویان

**۱۶۵۷ ـ** ۱) دایره‌ای بمرکز O مبدأ مختصات دردست است برروی شعاع حامل نقطهٔ P برروی دائره نقطه M راچنان تعیین کنید که مماس برمنحنی مکان M موازی مماس نقطه Q برداییره باشددرصورتیکه بدانیم زاویهٔ $\widehat{QOP}$ برابر مقدارثابتی مانندهمیباشد

۲) ـ ثابت کنید که برای هر مارپیچ لگاریتمی دائره‌ای میتوان یافت که مماسهای مارپیچ موازی مماسهای این دائره باشد و ازاین روتعریف مارپیچ لگاریتمی را انطباق دهید .

**۱۶۵۸ ـ** ۱) ـ مرغانه (Ouale) دکارت منحنی است که ترکیب خطی ازفواصل هرنقطه ازآن ازدونقطهٔ ثابت F و F' بنام‌کانون مقدارثابتی باشد یعنی اگر M نقطه‌ای از مرغانه باشد $\overline{kMF}+\overline{k'MF'}=a$ که درآن k و k' اعداد ثابت و a طول ثابتی‌است (فاصله $FF'=2c$ می‌باشد) (مثلاً اگر $k=\pm k'=1$ باشد مرغانه به‌بیضی یاهذلولی تبدیل میشود) شکل‌کلی مرغانه دکارت رابرحسب k و k' بحث کنید .

۲) ـ ثابت کنید که مرغانه کانونی مانند F" دارد که ترکیب‌های خطی مانند $\overline{h_1MF'}+h_2\overline{MF''}=l_1$ و $\overline{hMF}+\overline{h'MF''}=l$ نیزثابت میمانند $h$ و $h'$ و $h_1$ و $h_2$ و $l_1$ و $l$ را ازروی k و k' و a و c بدست‌آورید (F" برروی خط FF' واقع است)

**۱۶۵۹ ـ** ۱) ـ ثابت کنید که مسیر نقطه‌ای درتحت اثرقوه جاذبه متناسب باعکس مکعب فاصله باتبدیل $Z=z^h$ بصورت $R^h=AX+BY$ می‌باشد که درآن $z=x+iy$ و $Z=X+iY$ فرض شده است . اگرجرم نقطه واحد وضریب مطلق جذب برای قوه مؤثربرابر H باشد مقادیر h و k را ازروی H بدست‌آورید (سرعت سطحی اولیه حرکت برابر C می‌باشد) (مسیردارای سه پارامتراست یعنی A و B دوپارامترآشکاروk پارامتراست که به C نیز بستگی دارد)

۲) ـ اگرقوه متناسب‌باعکس فاصله قوهٔ دافعه‌باشد آیابرای‌مسیرحرکت میتوان صورت‌ساده‌ای مانند قسمت اول بدست آورد ؟

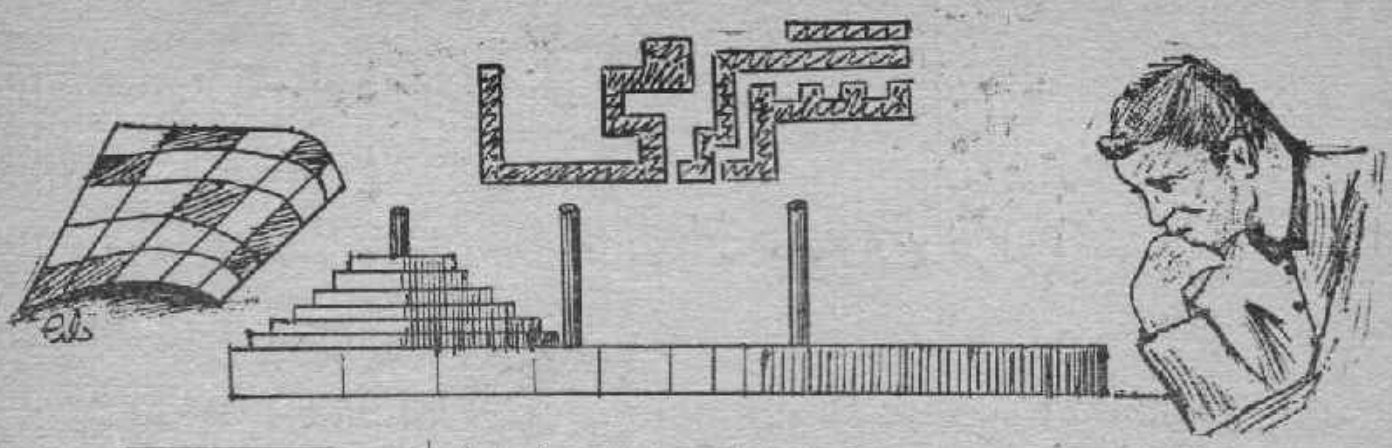
**۱۶۶۰ ـ** معادله $x^6-5b^2x^3+5b^4x-2a^5=0$ راحل کنید . بفرض $a>b$ ثابت کنید که معادله فقط یك ریشه‌حقیقی داردوبفرض $a<b$ ثابت کنید که جمیع ریشه‌های معادله حقیقی است . اگر $a=b$ باشد ریشه‌های حقیقی ازیك ریشهٔ ساده و دوریشهٔ مضاعف تشکیل میشوند .

**۱۶۶۱ ـ** دستگاه معادلات زیر راحل کنید :

$$x_1(x_1+2x_2+2x_4+\dots+2x_n)=a^2$$
$$16x_2(2x_1-14x_2+2x_3+2x_4+\dots+2x_n)+15(x_1+x_2+\dots+x_n)^2=16a^2$$
$$81x_3(2x_1+2x_2-79x_3+2x_4+\dots+2x_n)+80(x_1+x_2+\dots+x_n)^2=81a^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n^4x_n[2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots-(n^4-2)x_n]+(n^4-1)(x_1+x_2+\dots+x_n)^2=n^4a^2$$

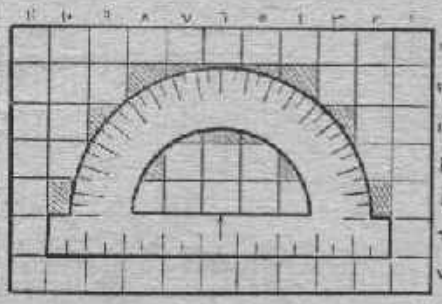
ثابت کنید که اگر n نسبت به بی‌نهایت میل کند دستگاه متقارب است یعنی مقادیر $x_n$ سلسله متقاربی تشکیل میدهند . دراین صورت حد $S_n=x_1+x_2+x_3+\dots+x_n$ راوقتی n نسبت بی نهایت میل می‌کند تعیین کنید .

ثابت کنید که تعداد جمل منفی اگرنامحدود باشد تعداد جمل مثبت محدود است وبرعکس . بستگی این امررا باعلامت حد $S_n$ معین کنید، تعداد جمل مثبت یا منفی محدود را معلوم کنید .



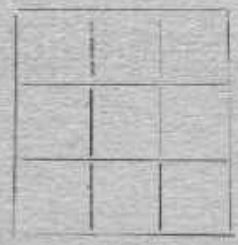
## جدول کلمات متقاطع

تاکنون جدول های بسیار از دانش‌آموزان دریافت شده است . اما بعلت اینکه مطالب آنها منحصراً دربارهٔ ریاضات نبوده ازچاپ آنها خودداری شده‌است.)



**افقی:** ۱ـ ریاضیدان بزرگ ایرانی که ازجملهٔ کارهایش وضع کسر اعشاری است. ۲ـ بعداز حرف اولش ی اضافه شود نام قاعده‌ای است که معلوم میکند در معادلهٔ مثلثاتی چه خطی را باید مجهول مساوی اختیار نمود ـ آخرش قبل از اول بیاید از دوران دایره حول قطرش پدید میآید . ۳ـ رسمی که ثلث آن کشیده نشده‌است ـ معکوس دوسوم از یک‌دوم . ٤ـ خیام را به پرسش از آن مشهور ساخته‌اند ـ طول کروی درمختصات افقی ـ خودش اول است اما سمت راست هرعدد واقع شود ، آن عدد غیراول است . ٥ـ اصلش هندی و جیا بوده است که در فارسی جیب و در اروپا چنین شده است . ۷ـ آخرش را غیر ملفوظ بگیرید در هرمثلث براوساط اضلاع ، پای ارتفاعات ، واوساط پاره خطهائی که رأسها را به نقطهٔ تلاقی ارتفاعات وصل میکنند میگذرد.

**قائم:** ۱ـ رشته‌ای از ریاضیات جدید . ۲ـ درابتدا راهزنی میکرده وبعد از جملهٔ ریاضیدانان دربارمأمون شده است و صاحب سه‌پسر ریاضیدان بوده است . ۳ـ چون پهلوی نصفش واقع شود مربع گردد . ٥ـ اگرسمت راستش تکرارشود ده برابر گردد وچون این رقم حذف شود ۲۷ واحد کم شود . ٦ـ ضمیر شخصی و واحد وزن ۷۰ـ ضمیر شخصی و نصف از قوه . ۹ـ واحدسطح . ۱۰ـ بزرگترین عدد سه‌رقمی مربع کامل شامل رقم بیمعنی . ۱۱ـ تابعی که در ازاء هرمقدار از متغیر برای آن به‌تعداد محدود مقادیر بدست میآید .



در نظر می‌گیریم $a^m b^n$ که اگر m و n مقادیر صفر و ۱ و ۲ را باترتیب‌های مختلف قبول کنند. نه‌جمله حاصل میشود ، این نه‌جمله را درخانه‌های جدول بالاچنان قرار دهید که حاصل‌ضرب سه جملهٔ واقع درهرسطر یا هرستون و یا هرقطر برابر یامقدار ثابت باشد واین مقدار ثابت راتعیین کنید.

### بازی اعداد

دوعدد دورقمی چنان تعیین کنید که اگر هردو را باهم مقلوب نمائیم حاصل‌ضرب آنها تغییر نکند ، همهٔ جوابها را بدست آورید .

مثال $۱۲ \times ٤۲ = ۲۱ \times ۲٤$

### نوشتن اعداد بایک رقم

باپنج رقم ۲ (نه بیشتر ونه کمتر) اعداد از ۱ تا ۲٥ را بنویسید

مثال : $۱ = ۲ + ۲ - ۲ - \frac{۲}{۲}$

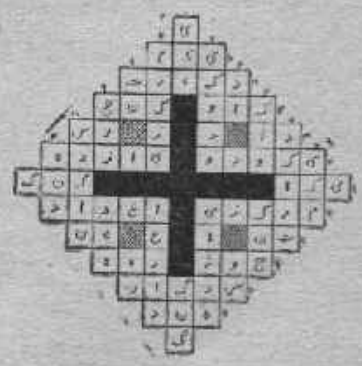
$۲ = ۲ + ۲ + ۲ - ۲ - ۲$

$۳ = ۲ + ۲ - ۲ + \frac{۲}{۲}$

$٤ = ۲ \times ۲ \times ۲ - ۲ - ۲$

### حل مسأله صفحه سرگرمی شمارهٔ ۷

از کیسهٔ اول یک سکه . از کیسهٔ دوم دوسکه ... وبالاخره از کیسه n ام n سکه برداشته وزن مجموع آنها را تعیین میکنیم ، وزن مجموع برابر با : $A - KB \frac{n(n+۱)}{۲}$ خواهد شد. اگر $K = ۱$ باشد کیسهٔ اول ، اگر $K = ۲$ باشد کیسهٔ دوم .... و بالاخره اگر $K = n$ باشد کیسهٔ n ام شامل سکه‌های B گرمی است.



# اشتباه در چیست؟

۱ـ می‌دانید که یك من برابر است با ۳ کیلو . بنابراین می‌توانیم بنویسیم :

کیلو ۶ = من ۲ (۱)

کیلو ۱٫۵ = من $\frac{1}{2}$ (۲)

ازطرفی می‌دانیم که اگر دومقدار متساوی را دردوچیز متساوی ضرب کنیم حاصلها برابراست . بنابراین دوطرف رابطهٔ (۱) رادردوطرف رابطهٔ (۲) ضرب می‌کنیم ، می‌شود :

کیلو ۹ = من ۱

این نتیجه که درست نیست ، پس اشتباه درکجاست ؟

***

۲ـ می دانید که واحدپول درآمریکا دلار است . هر دلار برابر ۱۰۰ سنت است . پس می‌توانیم بنویسیم :

سنت ۲۵ = دلار $\frac{1}{4}$

ازدوطرف این تساوی جذر می گیریم ، می‌شود :

$$\sqrt{\frac{1}{4}}\ \text{دلار} = \sqrt{25}\ \text{سنت}$$

یا

$$\frac{1}{2}\ \text{دلار} = 5\ \text{سنت}$$

درصورتی که می‌دانیم $\frac{1}{2}$ دلاربرابر ۵۰ سنت است، پس اشتباه درکجاست؟

***

۳ـ فرض کنید که a و b دوعدد متساوی ومخالف صفراند . بنابراین می‌توانیم بنویسیم :

$a=b$

با ازضرب دوطرف در a : $a^2=ab$

یاباتفریق کردن $b^2$ ازدوطرف : $a^2-b^2=ab-b^2$

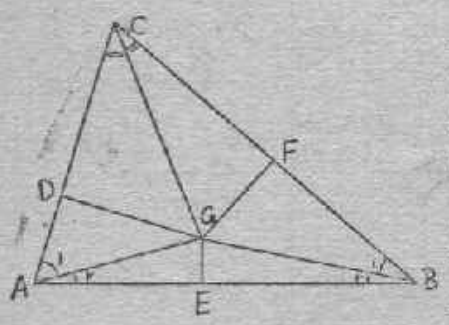
یا $(a-b)(a+b)=b(a-b)$

یاباتقسیم کردن دوطرف بر $a-b$ : $a+b=b$

حال اگر بگیریم : $a=b=1$ ، ازتساوی آخر نتیجه می‌شود : $2=1$ . اگر در عملیات اشتباه نشده است پس این نتیجهٔ عجیب چیست ؟

***

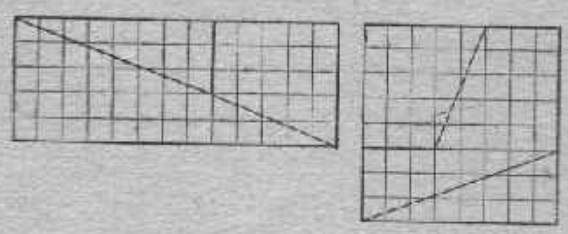
۴ـ مثلث ABC را که درآن $AC<BC$ (درنتیجه زاویهٔ A بزرگتراز زاویهٔ B است) درنظرمی گیریم. زاویهٔ A ممکن است که حاده، قائمه یامنفرجه باشد . نیمسازداخلی زاویهٔ C وعمود منصف ضلع AB را رسم می کنیم که یکدیگر رادرنقطهٔ G قطع می‌کنند. خطوط GA و GB وعمودهای GD و GF رابه ترتیب بر AC و BC رسم می‌کنیم. ازخاصیت عمود منصف نتیجه میشود که




$GA = GB$ (۱) و ازخاصیت نیمساز نتیجه میشود که $GD = GF$ (۲) وازتساوی‌های (۱) و (۲) برمی‌آید که دو مثلث قائم‌الزاویه GAD و GBF متساوی باشند (درحالت وتر و یك ضلع) و از آنجا نتیجه میشود که دوزاویهٔ $A_1$ و $B_1$ باهم مساوی باشند وچون دوزاویهٔ $B_2$ و $A_2$ نیز متساویند (مثلث متساوی‌الساقین GAB) پس لازم میآید که $A_1+A_2$ یعنی تمام زاویهٔ A با $B_1+B_2$ یعنی تمام زاویهٔ B مساوی باشد ، آیا هرمثلثی متساوی‌الساقین است ؟ـ آیا هردوزاویه ازهرنوع بایکدیگر مساویند ؛ اگرنه ، اشتباه درچیست ؟

***

۵ـ مربعی بضلع ۸ واحد رسم نموده آن رابه ۶۴ = ۸ × ۸ خانهٔ متساوی جدول بندی مینمائیم . این مربع را مطابق شکل به دو ذوزنقه قائم (با قاعده‌های ۵ و ۳ وساق قائم ۳) . و دو

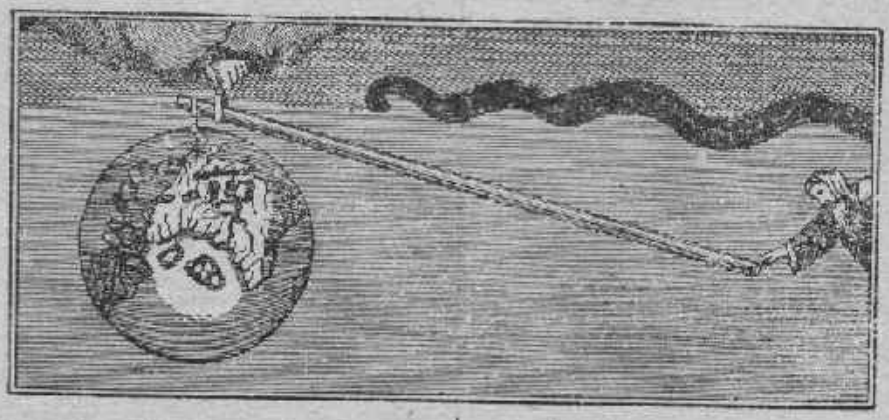


مثلث قائم‌الزاویه (باقاعدهٔ ۳ وارتفاع ۸) تقسیم نموده و این چهاربخش رامجزانموده پهلوی هم چنان قرارمی‌دهیم تامطابق شکل یك مربع مستطیل ۶۵ = ۵ × ۱۳ واحد سطح تشکیل شود . مساحت مربع مستطیل با مساحت مربع مساوبست دراین صورت آیا ۶۵ = ۸ × ۸ ؟ این نتیجه که درست نیست ، پس اشتباه درچیست ؟

# آیا ارشمیدس هرگز میتوانست زمین را بلند کند؟

ترجمهٔ از کتاب Phisics for Entertainment

توسط : محمد رضا قسیمی دانش آموز سال پنجم ریاضی دبیرستان دارالفنون



«یك نقطهٔ اتکاء بمن بدهید من زمین را بلند خواهم کرد» این گفته‌ایست که به **ارشمیدس**، نابغه‌ای که قانون اهرمها را کشف کرد نسبت میدهند.

«اگر زمین دیگری وجود داشت من به آنجا میرفتم و سیارهٔ خودمان را بلند میکردم.»

**ارشمیدس** میدانست که با نیروئی ضعیف می‌توان وزنهٔ سنگینی را با استفاده از یك اهرم بلند کرد . کافی است که این نیروی کم به انتهای بازوی کارگر وارد آید و سبب حرکت نیروی مقاوم که در انتهای بازوی ایستادگی قرار دارد ، گردد . بنابراین ارشمیدس تصور میکرد که با فشار وارد آوردن به بازوی یك اهرم خیلی طویل قادر خواهد بود وزنه‌ای را که جرم آن معادل جرم کرهٔ زمین است بلند کند .

برای ساده شدن موضوع فرض کنیم که منظور از بلند کردن زمین یعنی آنکه وزنه‌ای را که جرمش باندازهٔ جرم کرهٔ زمین باشد از روی سطح کرهٔ زمین بلند کرد .

بدون شك اگر ارشمیدس از تودهٔ عظیم زمین اطلاع داشت هرگز چنین سخنی نمیگفت . حال فرض کنیم که ارشمیدس روی سیارهٔ دیگری قرار داشت و اهرم دراز مورد لزوم دراختیارش بود . آیا می‌توانید حدس بزنید که چه زمانی طول میکشید تا ارشمیدس زمین را فقط یك سانتیمتر بلند کند ؟

سی میلیون سال ۳۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ حتماً تعجب کرده‌اید ؟ پس اجازه بدهید که با یك حساب ساده درستی این عدد را ثابت کنیم :

اگر وزنه‌ای باندازه کرهٔ زمین در روی سطح زمین قرار داشت با حسابی که کرده‌اند این وزنه باندازهٔ :

۶,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تن وزن خواهد داشت .

حال فرض می‌کنیم که یکنفر بتواند یك وزنهٔ ۶۰ کیلوگرمی را بطور مستقیم از سطح زمین بلند کند ، اگر او بخواهد وزنه‌ای را که باندازهٔ کرهٔ زمین جرم دارد بلند کند ، به اهرمی احتیاج خواهد داشت که طول بازوی کارگر آن :

۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

مرتبه بزرگتر از طول بازوی ایستادگیش باشد .

شما می‌توانید بسادگی حساب کنید که اگر انتهای بازوی کوتاه‌تر ( بازوی مقاوم ) باندازهٔ ۱ سانتیمتر بالا رود انتهای دیگر اهرم یعنی انتهای بازوی کارگر قوسی باندازهٔ :

۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

کیلومتر طی می‌کند یعنی این فاصله را ارشمیدس برای فشار وارد آوردن به اهرم بایستی می‌پیمود تا اهرم کرهٔ زمین را باندازهٔ یك سانتیمتر ، فقط یك سانتیمتر ، بلند کند ، و اما پیمودن این فاصله چه مدت زمان طول می‌کشید ؛

فرض کنیم که ارشمیدس می‌توانست ۶۰ کیلوگرم را در یك ثانیه ، یك متر بلند کند . بنابراین برای بلند کردن تودهٔ زمین باندازهٔ فقط یك سانتیمتر زمانی برابر

۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

ثانیه یا

۳۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

سال لازم داشت. ملاحظه می‌شود که این زمانی است فوق‌العاده طولانی و ارشمیدس وسیله‌ایکه بکمك آن این زمان را بمقدار قابل توجهی کوتاه کند ، دراختیار نداشت از این گذشته بفرض اینکه ارشمیدس قادر بود که اهرم را با سرعت نور یعنی ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه حرکت دهد برای بلند کردن تودهٔ زمین باندازهٔ یك سانتیمتر ، ده میلیون سال وقت لازم داشت . آیا اگر جای پایی هم به ارشمیدس داده می‌شد او می‌توانست زمین را بلند کند ؟

# اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از: ایرج ارشاقی

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ratio | نسبت | Fraction | کسر ـ برخه |
| Proportion | تناسب | Vulgar Eraction | کسر متعارفی |
| Extremes | دوطرف تناسب | Decimal Fraction | کسر اعشاری |
| Means | دووسط تناسب | Numerator | صورت کسر ـ برخه شمار |
| Reduce | تحویل کردن ـ ساده کردن | Denominator | مخرج کسر ـ برخه نام |
| Fquivalent Fractions | کسرهای متساوی | Slanting Line | خط کسری |
| Lowest term | ساده‌ترین شکل ـ ساده نشدنی | Proper Fraction | کسر کوچکتر از واحد |
| | | Mixed numder | عدد کسری |

Two and one third $= ۲\frac{۱}{۳}$

One - half plus Five Sixth $= \frac{۱}{۲} + \frac{۵}{۶}$

Four tenth minus two point three five $=$ ۰٫٤ + ۲٫۳۵

Point nought one eight $=$ ۰٫۰۱۸

## Problems

1- Express $17\frac{3}{4}$ as an improper Fraction (تجنیس کنید)

2- Express $\frac{59}{8}$ as a Mixed number. (رفع کنید)

3- Reduce $\frac{768}{2592}$ to its lowest term. (بساده‌ترین شکل بدآورید)

4- Reduce $\frac{5}{6}$ to an equivalent fraction, whose denominator is 3 units more tnan its numerator.

5- A can do a piece of work in 6 days. B in 8 days, and C in 9 days; in how many days would all three working together finish it?

6- Express the following decimals as vulgar fractions, and reduce the fractions to their lowest terms:

0·0052 2·0725

# پرسش و پاسخ

بعضی ازخوانندگان مجله سؤالهائی برای مامی‌فرستند که به‌آنها پاسخ دهیم . از این اظهار لطف و علاقمندی خوانندگان بی‌اندازه سپاسگزاریم . ازاین شماره به بعد سعی خواهیم کرد که به‌سؤالهای رسیده تاآنجا که مقدورمان است پاسخ دهیم. نهایت از سؤال کنندگان محترم تقاضا داریم که در موقع ارسال سؤال حدود معلومات‌خودرا نیز معین کنند که پاسخ‌متناسب باآن باشد واحیاناً پاسخی درسطح پایین داده نشود که قانع کننده نباشد .

**اینك چند سؤال و جواب آنها :**

**سؤال :** بزرگترین عدد اولی که تاکنون شناخته شده است چیست ؟

**کوروش پازوکی**

**جواب :** تاآنجاکه ما اطلاع داریم ، بزرگترین دو عدد متوالی اولی که تاسال ۱۹۵۰ شناخته‌شده بودند عبارتنداز:

۲،۳۰۵،۸۴۳،۰۰۹،۲۱۳،۶۹۳،۹۵۱

که معادل است با : $2^{61}-1$ و

۲،۳۰۵،۸۴۳،۰۰۹،۲۱۳،۶۹۳،۹۶۷

که معادل است با : $2^{61}+15$ .

ازاینکه ازسال ۱۹۵۰ به این طرف عدد اولی بزرگتر ازاین‌شناخته شده باشد اطلاعی نداریم. خواهشمندیم که اگر خوانندگان اطلاعی در این خصوص دارند ، آن را برای ما جهت درج درمجله وآگاهی عموم بفرستند .

ضمناً بدنیست که بدانید که به‌وسیلهٔ ماشین‌آی، بی، ام ۷۰۴ ، شش میلیون از نخستین اعداد اول محاسبه شده است و جدولی برای‌آنها تهیه وچاپ کرده‌اند . اولین عدد اول دراین جدول ۱ وآخرین‌آن ۱۰۴،۳۹۵،۲۸۹ است .

***

**سؤال :** نظریهٔ فعلی دانشمندان در جنسیت نورچیست ؟ آیا نور ازذرات مادی به نام فوتون تشکیل یافته است . در این‌صورت طبق فرمول زیرآیا جرمشان بی‌نهایت است ؟ (زیرا که با سرعت نورحرکت می‌کنند)

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

**(حق نواز)**

**جواب :** دانشمندان برای فوتون جرم درنظرنمیگیرند بلکه فوتون را واحد انرژی می‌دانند . فرمولی که مرقوم داشته‌اید برای ذراتی نظیر الکترون یا پروتون یا نوترون صادق است که اگر سرعتشان خیلی زیاد شده به سمت سرعت سیرنور میل کند ، جرمشان نسبت به جرم درحال سکون خیلی زیاد می‌شود.

***

**سؤال :** آیا سرعت نور دراثر عبور ازجوکم می‌شود؟

**(خلیل فضل‌اللهی)**

**جواب:** سرعت سیرنور درهرمحیط شفاف از این فرمول کلی حساب می شود : $V=\frac{c}{n}$

که درآن c سرعت سیرنور درخلاء (معادل $3\times10^8$ کیلومتر درثانیه) و n ضریب شکست‌آن محیط است. ضریب شکست هوا برای نورمرئی درحدود ۱،۰۰۰۲۷۳ است . بنابراین سرعت سیر نوردرهواکمترازسرعت سیرآن درخلاء است .

***

**سؤال :** ۱ ـ حلزون پاسکال چیست ؟ ۲ ـ فرمول محیط بیضی چه می‌باشد. آنرا چگونه بدست می‌آورند ؟

**(هوشنك رستمیان)**

**جواب :** ۱ـ حلزون پاسکال یکی از کونکوئیدهای دایره است . کونکوئید دایره مکان هندسی نقاطی است که از یك نقطه ثابت به هریك ازنقاط آن دایره وصل کرده ازآن نقطهٔ دایره بر روی این امتداد دو طول متساوی وثابت در دو جهت جداکنیم .

۲ـ محیط بیضی مانند محیط بعضی ازاشکال هندسی نظیر دایره نیست که اندازه‌آن از روی فرمولی بر حسب یکی از اجزائش، به‌دست‌آید. به طورکلی برای محاسبهٔ طول قوسی از یك منحنی که معادلهٔ‌آن دردست باشد ، درریاضیات عالی راهی وجود داردکه همان استفاده از انتگرال‌گیری است . نهایت در مورد بیضی ، انتگرالی که به دست می‌آید ، انتگرال بیضوی است که برای محاسبهٔ آن جدولهای مخصوصی ترتیب داده‌اند .

**سؤال :** ۱ ـ آیا ممکن است که در فاصلهٔ دو عدد K و ۲K عدد اولی وجود نداشته باشد؟ ۲ـ آیا می‌شود تعیین کرد که درهرطبقه ازاعداد حداقل چند عدد اول موجود است ؟

**(عزیز صفائی)**

**جواب :** ۱ ـ به تجربه ثابت شده است که همواره بین دوعدد K و ۲K اقلا یك عدد اول وجود دارد .

ضمناً این را نیز بدانید که می‌توان ثابت کرد که همواره n عدد متوالی وجود دارد که هیچیك عدد اول نیستند . این دومطلب بظاهر متعارض می‌رسند، اما درحقیقت متعارض نیستند چه‌آخرین عدداز n عدد متوالی دوبرابرعدد نخستین نیست .

۲ـ توابعی هستندکه به‌تقریب تعداد اعداد اول را بین دوطبقه از اعدادبدست می‌دهند. ابتدائی‌ترین این توابع‌باسم « لگاریتم انتگرال» معروف است و آن :

$$\int_{n}^{n+k} \frac{dx}{Lx}$$

می‌باشد ( البته بشرطی‌که n و n+k بزرگ باشند) .

***

**سؤال :** ۱ـ دایرهٔ نه‌نقطه موسوم به‌دایرهٔ اولر است‌یا دایرهٔ دفوربانخ؟ ۲ـ آیا مرکز ثقل نیمدایره نقطه مشخصی است یا نه ؟

**( شاهرخ طاهری آشتیانی)**

**جواب :** ۱ـ دایرهٔ نه‌نقطه به‌اسم هردو معروف است .

۲ـ معلوم‌نگردیده‌ایدکه مرکزثقل محیط نیمدایره‌منظور شماست یا مرکز ثقل سطح نیمدایره . بهرحال مرکز ثقل هرکدام‌که منظور شما باشد ، نقطه مشخصی است برروی محور تقارن شکل و فاصلهٔ آن ازمرکز نیمدایره درمورد مرکز ثقل محیط $\frac{2R}{\pi}$ ودرمورد مرکز ثقل سطح $\frac{4R}{3\pi}$ می‌باشد (بااستفاده ازقضیهٔ گولدن ، این اندازه‌ها به‌آسانی به‌دست می‌آید) . نهایت باید توجه داشته باشیدکه تعریف و ترسیم سادهٔ هندسی برای این نقاط دردست نیست.

***

**سؤال :** درصفحهٔ ۴۶ یکان شمارهٔ ۵ مربوط به‌حل دو مسئله ازکنکور فرانسه ذکرشده است‌که « مماسهای مرسوم براین منحنی درنقاط $A(-\frac{\pi}{3}, 0)$ و $B(0, 1)$ با یکدیگر موازیند ، پس «بین این‌دونقطه حتماً یك‌نقطهٔ عطف‌وجوددارد». آیا درتمام‌منحنیها این‌خاصیت وجوددارد؟ یا منحصر به‌منحنیهای محدودی می‌باشد ؟

**( حق نواز )**

**جواب :** اگرشاخهٔ منحنی‌بین‌آن دومماس پیوسته‌باشد، حتماً مماس بریکی ازنقاط آن شاخه از منحنی خواهدگذشت. دربین نقاطی‌که مماس برآنها از منحنی عبور می‌کند یکی هم نقطه عطف است . البته نقاط دیگری هم هستندکه همین‌خاصیت را دارند، نهایت‌معادلهٔ منحنیهایی که‌دارای‌چنین نقاطندرادیکالی هستند . چون اینگونه نقاط ، به‌غیر ازنقطه عطف ، درریاضیات عالی معرفی می‌شوند ، از دانش‌آموز متوسطه استدلال فوق را برای وجود نقطه عطف می‌توان پذیرفت .

***

**سؤال :** درکتاب یك ، دو ، سه ، بینهایت ترجمهٔ‌آقای احمدبیرشك صفحهٔ ۳۰ نوشته شده است که«وینوگرادف‌ریاضیدان روسی ثابت‌کرده است‌که هیچ عدد جفتی نمی‌تواند مجموع‌بیش ازچهار عدد اول باشد»، درصورتیکه من ۱۰۰۰ را می‌توانم به‌این صورت بنویسم :

$$1000 = 97+3+181+19+293+7+389+11$$

چون احکام ثابت شده ریاضی استثناء قبول نمی‌کند آیا من مرتکب اشتباهی شده‌ام ؟

**( ناصر طاعتی )**

**جواب:** به‌طورقطع‌اگر وینوگرادف ثابت‌کرده بودکه «هر عدد زوجی حداکثر مجموع چهار عدد اول است» مثالی که‌شما مرقوم فرموده‌اید بهترین شاهد برای‌نقض بیان او می‌بود.ولی خوشبختانه یا متأسفانه ، آنچه وینوگرادف ثابت کرده است مختصری بااین تفاوت دارد . وینوگرادف ثابت‌کرده است‌که **« هرعدد زوج ، بزرگتر از حدی معین ، مجموع حداکثرچهار عدداول است»** متأسفانه‌وینوگرادف‌نتوانسته است‌که این‌حدمعین را مشخص سازد. بنابراین مثال شما باآنچه درواقع وینوگراف ثابت‌کرده‌است متناقض‌نیست .

شاید آقای گاموف نویسندهٔ کتاب یك ، دو، سه، بینهایت سلاح آن‌دیده باشندکه گفتهٔ وینوگرادف راباجرح وتعدیلی در کتاب خود بیان کنند.

***

**سؤال :** اگریك پاره خط بگیریم وبردو سرآن دوخط عمودکنیم ، این دوخط متوازی می‌شوند ویکدیگررا دربینهایت قطع می‌کنند . از تقاطع آنها مثلثی به وجود می‌آیدکه دارای دو زاویهٔ قائمه و یك‌زاویه دیگر است‌که از صفر بیشتر است . بنابراین آیادرست نیست‌که یکی ازدو قانون زیررا بپذیریم ؟

۱ـ مجموع زوایای داخلی یك مثلث بیش از دو قائمه است ؟

۲ـ دو خط متوازی در بینهایت نیز همدیگر را قطع نمی‌کنند ؟

**(غلامرضا ـ غلامحسین ـ پنجم طبیعی دبیرستان دهقان تبریز)**

**جواب :** درریاضیات مفهوم اینکه بگوییم دوخط متوازی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند یا دو خط متوازی در بینهایت متقاطعند یکی است ، چه بینهایت، جای مشخصی نیست‌که شما بگویید در آنجا دوخط متوازی یکدیگر را قطع میکنند . هروقت دوخط متوازی (!!) یکدیگررا درنقطه‌ای قطع کنند ، ولوآن نقطه بسیاربسیاردورباشد ، مطمئن باشیدکه‌آنجابینهایت نیست.زاویهٔ‌بین دوخط متوازی صفراست واز صفر بیشترنیست .

# از جمله نامه‌های رسیده

آقای **عبدالحسین ساوه** دبیر شیمی دبیرستان پهلوی کرمان راجع به حل مسألهٔ شیمی که به شمارهٔ ۱۵۰۲ درشمارهٔ ۸ چاپ شده است توضیح داده‌اند که بجای آنکه مسأله مانند یك مسألهٔ جبر حل شود بهتر بود راه حل معمولی مسائل شیمی مراعات می‌گردید وضمن نامهٔ خود راه حل زیر را برای مسألهٔ مزبور بیان داشته اند :

$$CH_3-CH_2OH+3O_2\rightarrow 2CO_2+3H_2O \qquad (1)$$

$$\overline{3\times 32}$$

اتانل ۰/۰۱۰۰

$$CH_3OH+\frac{3}{2}O^2\rightarrow CO_2\times 2H_2O \qquad (2)$$

$$\overline{3\times 16}$$

متانل ۰/۰۱۰۰

اگر مخلوط شامل صد درصد اتانل وصفر درصد متانل باشد ازرابطهٔ (۱) چنین بدست می‌آید

$$\frac{K}{K'}=\frac{3\times 32}{3\times 18}=\frac{16}{9}$$

واگر بعکس مخلوط شامل صد درصد متانل وصفر درصد اتانل باشد ازرابطهٔ (۲) بدست می‌آید که :

$$\frac{K}{K'}=\frac{3\times 16}{3\times 18}=\frac{4}{3}$$

وچون نسبت اختلاط دوجسم درصد قسمت همیشه عددی‌است‌بین صفروصد یعنی ازصد تجاوز نمی‌کند پس درصورتیکه اتانل‌زیاد شود نسبت $\frac{K}{K'}$ به $\frac{16}{9}$ نزدیك می‌گردد واز آن‌نمی‌تواند بیشتر باشد وبعکس ، درصورتیکه متانل زیاد شود نسبت $\frac{K}{K'}$ به $\frac{4}{3}$ نزدیك‌شده وازآن‌نمی‌تواند کمتر باشدبنابراین‌خواهیم داشت

$$\frac{4}{3}<\frac{K}{K'}<\frac{16}{9}$$

***

آقای **حسین سلطانی** دبیر ریاضیات دبیرستان مغربی اصطهبانات درنامهٔ خود نوشته اند :

«آقای **حسین عظیمی** که سال‌تحصیلی گذشته درکلاس سوم دبیرستان‌تحصیل می‌کرده است ازجملهٔ دانش‌آموزان‌ممتاز وبا استعدادی است که علاوه بر موفقیت هایی که در تحصیلات آموزشگاهی‌بدست می‌آورد ازتحقیقات شخصی‌درزمینه‌های علمی نیزغافل نبوده ودر این باره به‌پیشرفتهائی‌نائل‌میشود . چنانچه این دانش‌آموز با استعداد درحل معادلات درجهٔ سوم درحالت خاص راه حل تازه‌ای‌کشف نموده است وامید میرود به‌توفیقهای بیشتری نایل‌آید .»

آقای حسین عظیمی به ضمیمهٔ نامهٔ دبیرخود برای تعیین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم درحالیکه ریشهٔ‌مضاعف دارد روشی ارائه داده وروابطی بین ریشه‌ها وضرایب بدست آورده است و همچنین برای قابلیت تقسیم اعدادبر۱۳و۱۹و۲۳و۲۹ روشهائی را بیان داشته است .

**یکان** - توفیق بیشتر آقای عظیمی راآرزومندیم

***

آقای **یدالله ارضی** از اراك در نامهٔ مفصل خود اولاً راجع به حل مسألهٔ جبر امتحان نهائی ششم‌طبیعی که درشمارهٔ ۶ یکان چاپ شده است راه حلی بیان داشته‌اندکه بموقع توسط طرح کنندهٔ سؤال امتحان مزبور بـه ضمیمهٔ بارم نمرهٔ مسائل برای حوزه های امتحانی ارسال شده است ودرموقع مناسب در مجله درج خواهد گردید .

ثانیاً راجع به مسألهٔ ۱۵۰۰ توضیح داده‌اندکه این‌مسأله باکمی اختلاف درکتاب فیزیك پنجم تألیف (بروخیم -آرام) چاپ شده است .

***

آقایان **رضاانگجی - حسین‌طاهری - زهراقدوسی** به‌نمایندگی ازطـرف ۲۷۵ نفر فارغ‌التحصیلان ششم دبیرستان ضمن نامه‌ای مشروح خواسته‌اندکه دانشکدهٔ علـوم در تأسیس مجدد کلاسهای تهیـه برای داوطلبـان ورود به دانشگاه اقدام نماید تابـه این وسیله موجبات راهنمائی بسیاری از جـوانان مملکت درکسب تحصیلات عالیه فراهم آمده باشد .

**یکان** - در بسیاری ازکشورها ، برای داوطلبانی‌که برای ورودبه دانشکده‌ها معلومات‌کافی ندارندکلاسهای‌مقدماتی تشکیل میشود ومحصلین‌این کلاسها در سورت موفقیت درامتحان مربوطه بدون کنکور در دانشکده ثبت نام می نمایند . مناسبت دارد درایران هم اینگونه‌کلاسها تشکیل شود ، دست‌کم فارغ‌التحصیلان دبیرستان‌باگذراندن این‌کلاسها با نحوهٔ امتحانات ورودی دانشگاه آشنائی می‌یابند .

**یکان**

# پاسخ های رسیده دربارهٔ حل مسائل شمارهٔ ۸

**دربارهٔ حل مسائل شمارهٔ ۸ که دراین شماره چاپ شده‌است، نام کسانی که پاسخ فرستاده‌اند و نامه‌های آنها تا ۲۰ آبان واصل شده‌است ذیلا به‌ترتیب شمارهٔ مسائل ذکر می‌شود :**

**۱۵۰۳** بیوك‌مددی ـ محمدجواد غفوری ـ یوسف قانع ـ هاشم اخوان مشائی

**۱۵۰۴** ـ مهدی فردوسی ـ بیوك مددی ـ احمد مشرفی ـ علی صحرا نورد ـ مجید خرمی ـ سید رضا کافی یوسف قانع ـ هاشم اخوان .

**۱۵۰۵** ـ حسین محمودی هاشمی ـ مهدی فردوسی ـ احمد مشرفی ـ سید رضا کافی ـ منوچهر فنائی ـ حسین جعفری گلپایگانی ـ هاشم اخوان .

**۱۵۰۶** ـ مهدی فردوسی ـ بیوك مددی ـ احمد مشرفی ـ عبدالله ابوالاحرار ـ مجید خرمی ـ سید رضا کافی منوچهر فنائی ـ یوسف قانع ـ عباسعلی کوچکی ـ هادی افشار ـ حسین جعفری گلپایگانی .

**۱۵۰۷** ـ مهدی فردوسی ـ اکبر مأنوسی ـ مهرداد لاله‌زاری ـ یوسف قانع ـ بیوك مددی ـ احمد مشرفی عبدالله ابوالاحرار ـ مجید خرمی ـ منوچهر فنائی ـ محمد جواد غفوری ـ احمد داروئی ـ رحیم خیردوست ـ حسین رزاقی زاده .

**۱۵۰۸** ـ مهردادلالدزاری ـ بیوك مددی ـ یوسف قانع ـ احمد داروئی ـ رحیم خیردوست ـ حسین جعفری گلپایگانی ـ هاشم اخوان .

**۱۵۰۹** ـ حسین محمودی هاشمی ـ یوسف قانع ـ حسین نادمپور ـ سید حسن مرتضوی ـ اکبر مأنوسی ـ مهردادلالهزاری ـ بیوك مددی ـ احمد مشرفی ـ سیدرضا کافی ـ علی صحرانورد ـ عبدالله ابوالاحرار ـ مجید خرمی سید علیرضا فاضلی ـ منوچهرفنائی ـ محمد جواد غفوری ـ فرهاد مالی ـ احمد داروئی ـ هادی افشار ـ هاشم اخوان.

**۱۵۱۰** ـ بیوك مددی ـ عبدالله ابوالاحرار ـ مجید خرمی ـ احمد داروئی ـ عباسعلی کوچکی .

**۱۵۱۱** ـ یوسف قانع ـ بیوك مددی ـ محمد جواد غفوری ـ احمد داروئی .

**۱۵۱۲** ـ بیوك مددی ـ محمد هاشم پسران ـ احمد داروئی.

**۱۵۱۳** ـ حسین نادمپور ـ یوسف قانع ـ بیوك مددی ـ احمد مشرفی ـ سیدرضا کافی ـ عبدالله ابوالاحرار مجید خرمی ـ احمد داروئی ـ پرویز ابراراصل ـ هادی افشار .

**۱۵۱۴** احمد مشرفی ـ احمد داروئی ـ عباسعلی کوچکی .

**۱۵۱۵** ـ مهردادلالهزاری ـ یوسف قانع ـ بیوك مددی ـ احمد مشرفی ـ محمد جواد غفوری ـ احمدداروئی رحیم خیردوست .

**۱۵۱۶** ـ سید رضا کافی ـ مجید خرمی .

**۱۵۱۷** سید حسن مرتضوی ـ احمد مشرفی ـ سید رضا کافی ـ احمد داروئی ـ حسین جعفری گلپایگانی ـ

**۱۵۱۹** ـ یوسف قانع ـ بیوك مددی ـ احمد مشرفی ـ سید رضا کافی ـ علی اصغر عرب ـ احمد داروئی ـ رحیم خیردوست ـ هادی افشار .

**۱۵۲۰** ـ بیوك مددی ـ علی اصغر عرب ـ احمد داروئی ـ رحیم خیردوست ـ حسین رزاقی زاده .

**۱۵۲۱** ـ یوسف قانع ـ مهدی فردوسی ـ بیوك مددی ـ منصور جابری ـ حسین رزاقی زاده ـ زهرا معینی .

**۱۵۲۲** ـ محمد رزم جو ـ محمد علی داماد سادات .

**۱۵۲۳** ـ بیوك مددی ـ هادی افشار .

**۱۵۲۸** ـ حسین محمودی هاشمی ـ حسین نادمپور ـ داود تراکمه ـ علی اصغر ترابی ـ اسدالله مس فروش ـ منوچهر فنائی ـ علی اصغر منتظر حقیقی ـ محمد جواد غفوری ـ محسن چهل تنی ـ منصور جابری ـ حسین رزاقی زاده .

**۱۵۲۹** بیوك مددی ـ کاظم مددی ـ عباسعلی کوچکی ـ حسین رزاقی زاده .

**۱۵۳۰** ـ حسین نادمپور ـ زهرا معینی ـ اکبر مأنوسی ـ اسدالله مسفروش ـ یوسف قانع ـ بیوك مددی ـ کاظم مددی، محمود صابر همیشگی ـ منوچهر فنائی ـ علی اصغر منتظر حقیقی ـ محمد جواد غفوری ـ حسن شبابی ـ علی اصغر ترابی رحیم خیردوست ـ احمد علی اختری ـ رسول کلاهدوزان ـ حسین رزاقی زاده .

**۱۵۳۱** ـ حسین محمودی هاشمی ـ حسین نادمپور ـ اسدالله مس فروش ـ یوسف قانع ـ محمود صابر همیشگی حسن شبابی ـ محسن چهل تنی ـ رحیم خیردوست ـ رسول کلاهدوزان ـ حسین رزاقی زاده .

**۱۵۳۲** ـ یوسف قانع ـ اسدالله مس فروش ـ علی اصغر منتظر حقیقی ـ رحیم خیردوست ، بیوك مددی

**۱۵۳۳** ـ یوسف قانع ـ بیوك مددی ـ داود تراکمه ـ علی اصغر منتظر حقیقی ـ رسول کلاهدوزان .

**۱۵۳۴** ـ حسین نادم پور ـ مهدی فردوسی ـ زهرا معینی ـ احمد علی اختری ـ یوسف قانع ـ بیوك مددی دینیار ترکی ـ داود تراکمه ـ اسدالله مس فروش ـ علی اصغر منتظر حقیقی ـ منصور جابری ـ حسن شبابی ـ محمد علی داماد سادات ـ علی اصغر ترابی ـ رحیم خیردوست ـ عباسعلی کوچکی ـ رسول کلاهدوزان ـ حسین رزاقی زاده علی اصغر ترابی .

**۱۵۳۵** ـ حسین نادم پور ـ مهدی فردوسی ـ اکبر مأنوسی ـ بیوك مددی ـ داود تراکمه ـ حسن شبابی رحیم خیردوست ـ پرویز ابراراصل .

**(چاپ بقیهٔ نامها دراین شماره میسر نشد ، درشمارهٔ ۱۰ چاپ خواهد شد)**

## بقیهٔ هفت پل ...

۱۹ ـ اگر فقط دوعدد روبروی حروف فرد وبقیه زوج باشند، حل مسأله ممکن است مشروط به آنکه ازمنطقه‌ای شروع کنیم که تعداد پلهایش فرد باشد . درحقیقت، نصف هرعدد زوج ونصف هرعدد فردرا پس ازآنکه ۱ به آن افزوده شود . اختیار می‌کنیم، مجموع این نصفها ۱ واحد بیشتر ازعدد پلها، یعنی مساوی باعدد بالای جدول است. امااگر ٤ یا ٦ یا ۸ یا... عدد ازاعداد ستون دوم فردباشد واضح است که مجموع اعداد ستون سوم ۱ یا ۲ یا ۳ یا... واحد بزرگتر ازعدد بالای جدول خواهدشد وراه پیمایی باشرایط مطلوب میسر نخواهد بود .

۲۰ ـ پس درهرصورت ودرهرحال آسانترین راه برای تشخیص آنکه فقط یك بار عبورازهرپل ممکن یاغیرممکن خواهد بود بکاربستن این قواعد است: اگر بیشتر ازدو ناحیه وجودداشته باشد که تعداد پلهای منتهی به آنها فرد باشد مسیری که واجد شرایط مطلوب باشد وجودندارد. هرگاه فقط عددپلهای منتهی به دوناحیه فردباشد، مسأله ممکن است مشروط بآنکه حرکت از یکی ازآن دومنطقه شروع شود. وبالاخره اگرعدد پلهای هیچ ناحیه فردنباشد راه‌پیمایی میسراست ومی‌توان آن‌را از هرجا شروع کرد .

این قواعد مسأله‌ای راکه طرح شده است. بطوردقیق به‌جواب می‌رساند.

۲۱ ـ پس ازآنکه اطمینان حاصل شدکه چنین مسیری وجود دارد مسأله دیگری پیش می‌آید وآن تعیین راهی است که بایدطی شود . برای این منظور این قاعده بکار می‌رود. در اینجا هر دوپلی راکه دوناحیه را بهم مربوط میسازد کنار میگذاریم وباین ترتیب ازتعداد پلها بطورقابل توجهی می‌کاهیم. آنگاه راه مطلوب را ازروی پلهای دیگررسم می‌کنیم ، واین کار زیاد دشوار نیست . پس از یافتن طرح مسیر استفادهٔ از پلهایی که حذف کرده‌ایم کار آسانی است وگمان نمی‌کنم لازم باشدکه برای یافتن راه بیشتر ازاین صحبت شود .

**پایان**

# یکان سال

به تصمیم شورای نویسندگان یکان، در پایان هر سال شمارهٔ فوق العاده‌ای به نام:

**یکان سال**

منتشر می‌شود. نخستین شمارهٔ «یکان سال» در اسفندماه ۱۳۴۳ منتشر خواهد شد

یکان سال  یکان سال

یکان سال

یکان سال

نمایندگان شهرستانها بهمیزان درخواستی (که بدون برگشتی باشد) قبلا وجه حواله نمایند

طالبین در تهران به ادارهٔ مجله و یا به یکی از کتابفروشیهای

ابن سینا، اندیشه، ایران، نیل مراجعه نمایند

در شرف انتشار و یک هفتهٔ دیگر آمادهٔ انتشار است

چاپ سوم شمارهٔ اول یکان

# تدریس خصوصی

**کلیهٔ دروس متوسطه**

**و ریاضیات عالی**

توسط دانشجوی سال سوم ریاضی

با دفتر مجلهٔ یکان راهنمای شمارهٔ ۱

تماس بگیرید

**ریاضیات، فیزیک، شیمی**

سالهای اول ودوم و سوم و چهارم دبیرستان

درخانه

به وسیلهٔ دانشجوی دانشکده علوم

با دفتر مجله راهنمای شمارهٔ ۲ تماس بگیرید