

ب

پرسنل اخلاقی

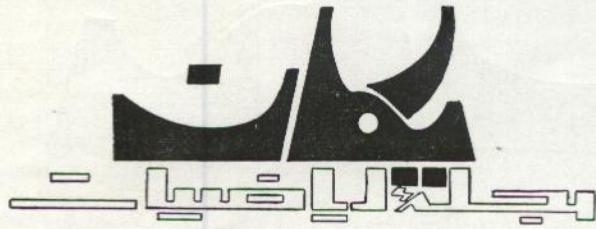
دوره نهم، شماره ۴

شماره مسلسل: ۸۹

دی-بهمن ۱۳۵۱

در این شماره:

۱۸۵	مصحفی	ریاضیات نظری
۱۸۶	جعفر آقایانی چاوش	ریاضیدادان اسلامی، خازنی
۱۹۱	پرویز شهریاری	تاریخ کسرهای اعشاری در چین
۱۹۹	ترجمه فتح اللہ رگری	مفهوم تابع بر مبنای مفهوم رابطه
۲۰۶	محمد معینی	خواص چهارضلعی با قطرهای عمودبر هم
۲۰۸	ترجمه داوید ریحان	مسائل منسوب به ریاضیدانان مشهور
۲۱۰	ترجمه باقر مظفرزاده	شیمی عمومی بروش بر فناههای
۲۱۵	—	حل مسائل یکان شماره ۸۸
۲۳۰	—	مسائل برای حل
۲۳۴	—	تستهای ریاضی
۲۳۶	—	مسائل انتخابی از مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها، ثلث دوم سال تحصیلی ۱۳۵۰-۱۳۵۱
۲۴۲	—	درباره مسئله مسابقه
۲۴۴	غلامحسین رحمند	جدول اعداد
ما قبل آخر	—	معرفی کتاب



پژوهش از تأخیر انتشار مجله

به علت بعضی از پیشامدهای فنی در چاپخانه؛ چاپ و انتشار این شماره از مجله، که بنایه قاعده پایستی در نیمة اول دی منشر شود، تا نیمة اول بهمن به تأخیر افتاد. بدین وسیله از همه علاقمندان مخصوصاً مشترکان و نمایندگان فروش مجله پژوهش می‌طلبیم.

توضیح:

در اجرای خواستهای خوانندگان مجله که چاپ تمام یک مقاله را دریک شماره برچاپ آن به صورت چند بخش در چند شماره ترجیح می‌دهند، به علت چاپ دو مقاله نسبتاً طولانی اما مفید، از چاپ بعضی از مقالات در این شماره معدوم گردیدیم.

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال هشت شماره منتشر می‌شود

دوره نهم - شماره چهارم - شماره سلسله ۸۹

دی-بهمن ۱۳۵۱

صاحب امتیاز و مدیر و سردبیر: عبدالحسین مصطفی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیک شاهرضا، شماره ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۶۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبه‌لله‌زارنو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Director : **MOS'HAFI Abdolhossein**

Volume IX , number 4. Jan. 1973

subscription : 3\$

TEHERAN . P.O. B. 2463

چاپ آذربایجان: ۸۲۵۹۲۸

قبل از اطلاع بر نشانی جدید شما به نشانی سابق ارسال شده باشد، مجدداً برای شما ارسال نخواهد شد.

- ۳- در نامه‌های ارسالی خود به دفتر مجله، نام، نام خانوادگی، شهر و نشانی خود را با خط خوانا و واضح بنویسید.
- ۴- غیر از انتشارات یکان، کتاب دیگری را ازما تقاضا نکنید. برای تهیه کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی در مجله معرفی می‌شوند، به ناشر آنها مجمعه فرمایید.

بار یاضریات آشنا کنید

این عنوان سلسله مقالاتی است که از فرانسه ترجمه شده و چاپ آنها از شماره آینده در مجله آغاز خواهد شد. هدف از این مقالات راهنمایی افرادی است که تصور می‌کنند ریاضیات مشکل است و آنان استعداد درک آن را ندارند.

فعالیت علمی

بنا به آگهی که در شهرضا منتشر و نسخه‌ای از آن به دفتر مجله و اصل شده است، آقای قدرت‌الله شمالی در شهرستان مزبور کلاس تدریس مجانی ریاضیات دایر کرده است که در آن یک دوره کامل ریاضیات را بطور فشرده به علاقمندان تدریس می‌کند.

توجه

-۱- اگر بابت اشتراک یا از بابت دیگر، وجهی به حساب بانکی مجله حواله یا واریزی کنید، حتماً مراتب راضی‌من نامه جداگانه به دفتر مجله اطلاع دهید. فراموش نکنید که در نامه ارسالی، نشانی کامل خود را با خط خوانا بنویسید.

-۲- اگر مشترک مجله هستید و نشانی شما تغییری کنید، نشانی جدید خود را به دفتر مجله اطلاع دهید. مجله‌هایی که تا

ریاضیات نظری

دولتمندان یونان باستان سروکار داشتن با ریاضیات کاربردی را دور از شأن خود می دانستند و از آن پرهیز داشتند. در برابر، روی آوری به ریاضیات نظری گونه ای بالندگی برای آنان بود. ریاضیات نظری با آنکه آغاز گاهش طبیعت بود، سازوکاری پرداخته‌ی ذهن را داشت و با ماشه گرفتن از منطق قیاسی، که آن هم تبیه‌ی ذهن بود، بر بنیانی استوار پاگرفت و گسترش یافت.

ریاضیدانان یونان باستان در بر پایی و گسترش ریاضیات نظری، ناهمواری هایی را پشت سر گذاشتند و با بن بست هایی رویرو شدند که توانستند آنها هم از میان بردارند. یکی از بن بست‌ها را منطق دانی به نام زنون ایلیانی بر سر راه بالا برده بود. او چهار پرسش ذهنی را به میان گذاشت و ریاضیدانان آن روزگار را در پاسخ دادن به آنها مدت‌ها سر در گم نگه داشت.

پرسش هایی هم در زمینه‌ی مساحت‌ها و قضیه‌ی تالس نموده شده بودند؛ برای آنکه ثابت کنند مساحت مستطیل برابر با حاصل ضرب دو ضلع آن است و برای آنکه ثابت کنند خط‌های موازی دو خط ناموازی را به نسبت های برابر تقسیم می کنند، در حالتی که یک ضلع یا یک پاره خط نسبت به دیگری سنجش ناپذیر باشد دقت استدلال لنگ می‌ماند.

این دشواری‌ها پا بر جا مانده بودند تا اینکه ریاضیدان یونانی به نام اوودوسوس "قاعده‌ی افباء" را بیان کرد. قاعده‌ای به شرح زیر که به عنوان یک اصل پذیرفته شد و بن بست ها را از سر راه برداشت.

قاعده‌ی افباء :

بنا بر آنکه دو مقدار نا برابر نموده شده باشند، اگر از مقدار بزرگتر بیش از نصف آن کم شود و از آنچه بر جای می‌ماند باز مقداری بیش از نصف آن کم شود، و این فرایند پشت سر هم تکرار شود، سرانجام مقداری بر جای می‌ماند که کمتر از مقدار کوچک داده شده خواهد بود.

قاعده‌ی افباء تعریف حد انجامید و گسترش بخشی از ریاضیات به نام "آنالیز بینهایت کوچک‌ها" را به دنبال داشت.

خازنی و اکتشافات علمی او

جعفر آقایانی چاوشی

وزن مخصوص و شناسائی نسبت آلیاژها و تکائف نسبی مایعات بکارمی رود از روزگار ارشمیدس تا ابو بکر محمدزادگر یار رازی، ابو ریحان بیرونی، حکیم عمر خیام و ابو حاتم مظفر افسر از با چگونگی ساختمان هر کدام را بیان کرده و سپس به شرح ترازوئی که خود ساخته پرداخته است.

باتمام ارزشی که این کتاب داشته است مع الاسف علمای اسلامی بعد از خازنی آنچنانکه باید و شاید به ارزش این اثر بزرگ پی نبرده و کمتر به آن توجه و عنایت کرده‌اند. فقط عده‌کمی از ریاضیدانان اسلامی از قبیل کمال الدین فارسی غیاث الدین جمشید کاشانی، و ملامحمد باقر یزدی در چند مورد در اطراف این کتاب به تحقیق پرداخته و بعضی از معضلات آنرا تشریح نموده‌اند.

این کتاب برای اولین بار در سال ۱۳۵۹ ه.ق در حیدرآباد کن هند بچاپ رسیده است.

۳—«زیج معتبر سنجری»

خازنی این کتاب را برای سلطان سنجر سلجوقی تألیف نموده است. نسخه نفیسی از این زیج به شماره ۶۸۲ در کتابخانه مدرسه عالی سپهسالار موجود است. خازنی در این کتاب اوساط و تعدیلات سیارات را فراهم کرده که در پیشتر آنها جای بحث است جز در تقویم عطارد در حال بازگشت که موافق رویت و امتحان است.

۳—«رساله فی آلات العجيبة الرصدية»

در این رساله چند آلت رصد از قبیل ذات الشعوبین و آلت ذات الثقبین و اسطر لاب و غیره تو صیف شده و طرز استعمال هریک از آنها نیز تشریح گردیده است.

این رساله مشتمل بر هفت مقاله و هر مقاله شامل سه بخش است، بخش اول در ساختن آلات رصد و چگونگی استعمال آن

عبدالرحمون بن منصور خازنی مکنی به ابوالفتح از برجسته‌ترین فیزیکدانان و ریاضیدانان اسلامی در اوایل قرن پنجم و اوایل قرن ششم هجری بوده است. تاریخ ولادت و همچنین تاریخ وفاتش علی التحقیق معلوم نیست.

دکتر هافری سوتر (H.Suter) ولادت خازنی را در سال ۵۳۰ ه.ق. دانسته و اورا از مردم بغداد معرفی کرده است [۶]. ولی اغلب ارباب تذكرة حکما و تراجم احوال مولدو منشأش را دیار روم (یونان) نامیده و تأکید کرده‌اند که وی به غلامی علی خازنی مروژی در آمده و در کتف حمایت وی در مر و نشو و نما یافته و ریاضیات و فلسفه آموخته است. همچنین نقل کرده‌اند که وی با علمائی چون حکیم عمر خیام و حکیم ابو حاتم اسفزاری مراوده داشته و با آنان در کارهای نجومی و بیویژه در اصلاح تقویم جلالی همکاری می‌کرده است. [۱]

آثار قلمی خازنی:

۱—**میزان الحكمه**: این کتاب از نظر علمی بسیار با ارزش است و حقیقتاً باید آنرا در شمار شاهکارهای دوره اسلامی محسوب کرد. کتاب مذکور که نام خازنی را بلند آوازه کرد حاوی دقیق‌ترین و شگفتزین تحقیقات علمی پیشینیان در باب مکانیک و هیدرولاستاتیک بود و احتملاً بهترین آنها در این فن می‌باشد. زیرا خازنی در این کتاب بیشتر از کتب دیگر استینهای مطلب نموده و موضوع را بادقت هرچه تمام‌تر مطرح ساخته است.

موضوع این کتاب چنانکه از نامش نیز پیدا است در توصیف ترازوها می‌باشد. خازنی در آن، نخست انواع و اقسام ترازوها را توصیف کرده سپس تاریخچه پیدایش و تطور ترازوها را که برای سنجش

۳- خازنی تشخیص داده بود که ثقل آب هر قدر به مرکز زمین نزدیکتر شویم بیشتر است و این موضوع را بعد هارا جر بیکن تشخیص و ثابت کرد.

۴- خازنی برای محاسبه وزن مخصوص و چگالی نسبی اجسامی که از یک یا دو ماده ساخته شده اند از رابطه ای استفاده می کرده است که خلاصه آن با اصطلاحات و عالم جدید چنین است:

هر گاه وزن مطلق جسم موردنظر را A و وزن مخصوص آنرا D و وزن مخصوص هر یک از اجزاء سازنده آنرا d' و d'' و وزن مطلق مادة d را X فرض کنیم خواهیم داشت:

$$X = A \frac{\frac{1}{d'} - \frac{1}{D}}{\frac{1}{d'} - \frac{1}{d''}}$$

این همان فرمولی است که اکنون نیز در مکانیک حائز اهمیت است و برای تعیین وزن مخصوص اجزاء سازنده یک آلیاژ استعمال می شود. [۱] و [۵]

۵- فیزیکدان بزرگ اسلامی ترازوئی اختراع کرده بود که از غرائب مکانیک بشمار می رفت، و میزانش بطور اعشار خوانده می شد و تا $\frac{1}{10}$ رقم اعشارش صحیح بود. همچنین وی برای تعیین وقت یک ساعت آبی به نام میزان الساعه ساخته بود. [۳]

۶- خازنی قوه جاذبه را چنین توصیف کرده است: در مرکز هر جسم قوه ای است که آنرا به سوی مرکز زمین می کشاند. [۱]

۷- کتاب میزان الحکمه کرویت زمین را تأیید می کند. [۱]

۸- عبدالرحمن خازنی از خاصیت جذب لوله های موئین مطلع بوده است. [۴]

خازنی با ترازویش وزن مخصوص 50 جسم را معین کرده است و این کار دقت اورا به وجه اتم روشن می نماید. زیرا اختلاف حساب او با آنچه فیزیکدانان امروز به آن رسیده اند بسیار ناجیز است و این نشان می دهد که می خواسته به کمک ترازوی خویش توانائی کارهای اعجاب آوری داشته است. اینکه برای مقایسه وزن مخصوص چند جسمی که خازنی محاسبه کرده با نتایج جدید آنها را می آوریم:

اجسام	نتیجه خازنی	نتایج جدید
طلای مذاب	۱۹/۰۵	(۱۹/۲۶-۱۹/۳)
جیوه	۱۳/۵۶	(۱۳/۵۵۷)

بعش دوم در فایده و اعمال محاسبه با این آلات و بخش سوم در برآهین هندسی آن است. یک نسخه خطی از این رساله نیز در کتابخانه مدرسه عالی سپهسالار به شماره ۶۸۱ مطبوع است.

۴- «البرهان على الشكل السابع من كتاب بنى موسى»
۵- «الوجيز في الزيج السلطاني»، این کتاب به خازنی منسوب است.

۶- «زیج شاهی» این کتاب با همکاری حسام الدین علمی بن فضل الله سالار و حکیم الذری تدوین شده است.
ترجمه های کتاب میزان الحکمة

ترجمه فارسی قسمتی از میزان الحکمه در قرن ششم یا هفتم هجری بواسیله دانشمند گمنامی صورت گرفته که آقای مدرس رضوی در سال ۱۳۴۶ ه.ش. با مقدمه و هواشی آنرا بچاپ رسانده است. [۱]

خانیکف (N.khanikov) خاورشناس روسی در سال ۱۸۵۷ م ترجمه فرانسوی منتخبی از این کتاب را منتشر کرد و سال بعد آنرا به زبان روسی ترجمه نموده است. قبل از آن نیز مجله آسیائی ایالات متحده آمریکا چاپ بوستن در مجلد پنجم خود ترجمه انگلیسی و قسمتی از متن عربی میزان الحکمه را انتشار داده بود.

خاورشناس شهر و دانشمند آلمانی ویدemann (E.Wiedemann) که در تاریخ ریاضیات اسلامی تبحر و افری دارد در اطراف این کتاب تحقیقات عمیقی کرده و مقالات ارزشمند انتشار داده است. [۹] و [۱۰].

همچنین در مجله آلمانی: Sitzungsberichte der Physik med. Sozietät, Erlangen

مقالاتی متعدد که حاوی ترجمه آلمانی قسمتهاشی از میزان الحکمه می باشد بچاپ رسیده است.

خلاصه مطالب علمی کتاب میزان الحکمه: نظریات مبتکرانه و اکتشافات ارزشمند خازنی را بطور کلی می توان به طریق زیر خلاصه کرد:

۱- خازنی چند قرن پیش از گالیله در مورد اصول اساسی هیدرو استاتیک مطالعات عمیقی کرده و درباره آن نظریات صحیحی اظهار نموده است. [۲]

۲- کتاب میزان الحکمه شامل مباحثی درباره توزیع فشار در مایعات و جریان آزاد مایعات از منافذ است. می شود گفت که علمای اسلامی در این مباحث بر تریچه ای پیشی داشته اند [۲].

اجسام	نتیجه خازنی	نتایج جدید
سرب	۱۱/۳۲	(۱۱/۴۴۵-۱۱/۴۲۸)
نقره	۱۰/۳۰	(۱۰/۴۴۵-۱۰/۴۲۸)
مس مداد	۸/۶۶	(۸/۷۲۸-۸/۶۶۷)
آهن چکش خورده	۷/۷۴	(۷/۷۹-۷/۶)
مروارید	۲/۶۰	(۲/۶۸۴)
نظردا نشمندان غربی درباره کتاب «میزان الحکم»:		
دکتر جورج سارتون، کتاب «میزان الحکم» خازنی را زجالبرین کتابهای قرون وسطی درباب مکانیک سیالات و هیدرولیک و فیزیک دانسته و می‌نویسد: «در این کتاب از مطالب زیر بحث شده است:		
فرضیه جاذبه عمومی (جاذبه عمومی که به مرکز عالم یعنی به مرکز میین متوجه است)، وزن‌ها، ملاحظاتی درباره خاصیت کشش در لوله‌های موئین، چگالی سنج برای اندازه‌گیری وزن مخصوص، و میزان حرارت برای درجه حرارت مایعات، فرضیه اهرمها، استعمال ترازو برای اندازه‌گیری زمان» [۴]		
بولتون (H.C.Bolton) در یکی از سخنرانیهای خود در آکادمی علوم آمریکا ضمن اشاره به ارج و اهمیت کتاب «میزان الحکم» می‌گوید:		
خازنی آلت (Areometer) برای محاسبه وزن مخصوص اجسام اختراع نموده بود و در کتاب وی مسئله جاذبیت و همچنین موضوع علم الحرکات (سینماتیک) مطرح شده است [۲]		
تاتون (R.Taton) در کتاب تاریخ علوم خود درباره خازنی و کارهای علمی اووارد بحث شده و اظهار می‌کند:		
«طبق گفته خازنی مکانیک علم مرکز اثقال و حالات تعادل اجسام است. (این تعریف به پیروی از تعالیم ارسطو-ارشمیدس و پاپوس می‌باشد) به علاوه در مکانیک از فن ساختن واستعمال میزان و قیان بحث می‌شود که از آنها می‌توان برای اندازه-گیری زمان و برای تعیین وزن مخصوص مواد مختلف استفاده کرد، این قسمت از مکانیک فقط راجع به نظریات فیزیکی و شیمیائی این علم می‌باشد. از طرف دیگر مکانیک را می‌توان برای نشان دادن و تأیید صحت نظریات ریاضی بکاربرد. مثلاً قانون معکوس نسبتها را می‌توان بوسیله نسبت بین دو وزن متعادل در یک اهرم که متناسب با معکوس فواید است که گاه اهرم می‌باشد نشان داد. حتی ابوریحان بیرونی ترازو را برای تأیید و توجیه قوانین جبر و مقابله بکاربرده است. و بر عکس خازنی از قانون نسبتها برای تعیین صحت ترازو استفاده کرده است [۱]		
کلازت (M.Clagett) نیز در اثر خود «علم مکانیک در		

قرون وسطی ضمن اشاره به کارهای خازنی چنین اظهار نظر کرده است:

«بخش دوم کتاب میزان الحکم، اقتباس از بحثهای ارسطو است ولی برآن از کتاب:

«Libre de ponderoso et levi»

که به اقلیدس منسوب است اضافاتی شده و در فصل هشتم این کتاب مذکور است که هر گاه اجمامی را که دارای حجم متساوی و شکل یکسان هستند باهم مقایسه کنیم، اجمام با ثقل مخصوص بیشتر دارای نیروی بیشتری می‌باشند. نتیجه بخش دوم از نظر خازنی به این وسیله تأیید می‌شود «که اگر دو جسم با حجم یکسان را در مایعی بگذاریم آنکه ثقلش بیشتر است مربوطتر حرکت می‌کند، ولی اگر قوا (وزنها) یکی باشند. جسم با حجم بیشتر (بنابراین باسطح خارجی بیشتر) کندتر حرکت می‌کند.

فصل چهارم از بخش اول راجع به قانون ارسطو است که قوه ثقل را تابعی از سرعت می‌داند و این نیز از کتاب مذکور اقلیدس اقتباس گردیده است. بنابراین تعریف، اجمامی از نظر ثقل یکسانند که فواید متساوی را در مدت زمانهای متساوی طی کنند. هر جسم وزین در مرکز عالم مرکزش با مرکز عالم متنطبق خواهد بود و بنابراین هر صفحه‌ای که از مرکز عالم بگذرد آن جسم را به دو قسمت تقسیم می‌کند که هر قسمت با قسمت دیگر از نظر قوه ثقل متعادل خواهد بود. و پدین طریق گرانیگاه یک جسم نقطه‌ای است متنطبق بر مرکز عالم و قنی که جسم در مرکز عالم در حال سکون باشد. البته این تعریف یک تعریف نظری است نه عملی.

فصل پنجم - بخش اول این فصل ممکن است شامل قسمتهایی از کتاب «تعادل صفحات» گردد، که احتمالاً از رساله ارشمیدس در باره میزانهای اقتباس شده است، نتیجه بحث این فصل آنست که اگر به مجموعه اجمامی که در حال تعادل هستند قوه وزینی افزوده و یا کم شود به طوری که مرکز ثقل این مجموعه تغییر نکند، حالت تعادل در نتیجه این افزایش و یا کاهش تغییر نخواهد کرد.

خازنی از اصل «هر کل بزرگتر از جزئی از اجزایش می‌باشد» در مضماین هفتم و نهم فصل پنجم کتاب خود استفاده کرده است.

فصل ششم - بخش اول: از اولین تعریف این قسمت می‌توان چنین استنباط کرد که خازنی برای اجمام متحرک فرضیه گشناور نیز و را در نظر نداشته مثلاً از نظریه جسمی که به مرکز عالم حرکت می‌کند، پس از رسیدن به آنجا متوقف می‌شود در حالی که بعدها اوضاع تصور می‌کرده است که جسم

خازنی دقیقترین اطلاعات را درباره ساختمان ترازویش و همچنین طرز استعمال آن به ما می‌دهد که مبتنی بردو اصل ارشمیدس (برابری بازوها و کم شدن وزن جسم در آب) می‌باشد. وی مانند اکثر دانشمندان اسلام با کمال میل به تحقیق پرداخته و مطالب لازم را به نحو استقصای تبع نموده است. به همین جهت کتاب او برای ما از این لحاظ که نموداری از مکانیک اسلامی می‌باشد قابل توجه و حائز اهمیت است.

اصول عمدۀ در بارۀ مرکز تقلیل از ابوسهل قهستانی و ابن حاتم نقل شده است. این اصولی است که بدون دلیل بیشتری پشت‌سرهم نقل شده و به هیچ‌وجه از اصول مکانیک یونانی پیرون نیست «یک جسم سنگین آنست که به علت فیروی خاصی به طرف مرکز عالم حرکت کند، این نیرو را نمی‌توان از او گرفت و جسم در هیچ نقطه از حرکت بازنخواهد ایستاد مگر در مرکز عالم که در آنجا از حرکت می‌ایستد، هنگامی که يك جسم مایع حرکت کند حرکتش نسبت مستقیم با درجه میزان دارد، و به این دلیل سرعت آن در مایع‌ترین مایعات بیشتر است وغیره.

مطلوب راجع به کم شدن وزن جسم در آب و تعادل اجسام شناور و شکل کروی یک مایع درحال تعادل وغیره در کتاب خازنی نیز از ارشمیدس است، و مطالب تازه‌ای نمی‌باشد. خازنی کم شدن وزن هرجسم را در مایعات می‌دانست، و همچنین عقیده داشت که هر قدر مایع غلیظتر یا سنگینتر باشد وزن جسم کمتر می‌شود یا بالعکس، و این مطلب نتیجه گرفت که «هر جسم در هوای نیز مقداری از وزن خود را از دست می‌دهد» و بدین ترتیب در هوای متراکم مقدار بیشتری از وزن خود را از دست می‌دهد تا در هوای رقیقت ر.

از اینجا چنین استنتاج می‌شود که «وقتی يك جسم سنگین را از هرماده‌ای از هوای رقیق به هوای غلیظتری بیاوریم از وزن آن کاسته می‌شود» حال اگر هوا را نیز مانند آب دارای وزن بدانیم چنانکه قدمًا گفته‌اند (و فقط آتش را سبک مطلق یعنی بی وزن می‌دانستند) بدینه است که هوای چه به مرکز عالم نزدیک شود غلیظتر خواهد شد. از اینجا طبعاً نتیجه می‌شود که هر جسم وزنی که در فاصله معینی از مرکز عالم باشد، وزن معینی خواهد داشت. و هنگامی که این فاصله از مرکز عالم تغییر کند وزن کمتر و یا بعکس خواهد بود، بنابراین وزن يك جسم به نسبت مستقیم فاصله آن از مرکز عالم تغییر می‌یابد.

س از سقوط به مرکز عالم بواسطه اثر نیروئی که درحال سقوط کسب کرده است از آنجا (مرکز عالم) خواهد گذشت و پس از طی فاصله معینی دوباره به مرکز سقوط خواهد کرد.

بنابراین تامدتی در اطراف مرکز نوسان می‌کند» [۷]

روزنبرک در کتاب تاریخ فیزیک خود مفصل مطالب میزان الحکمه را مورد بررسی و نقادی علمی قرارداده است. گرچه اظهارات وی درباره کتاب میزان الحکمه آمیخته به اغراض و تعصب است وسعي کرده است آنهمه ابتکارات و اکتشافات این کتاب را ناشی از تعلیمات حکماء یونان مخصوصاً ارشمیدس بداند، ولی باز درحال مباحث خود به فصل خازنی و تبحر کامل وی اعتراف نموده است. از این جهت ما برای مزید فایده خلاصه نظریات وی را در اینجا می‌آوریم:

«تنها اثری که در علم مکانیک از مسلمین می‌شناسیم کتاب میزان الحکمه است که خازنی در سال ۱۵ هجری نوشته است این کتاب در توصیف ترازووها می‌باشد. ترازوی خازنی بیش از هرچیز برای تعیین وزن مخصوص بکاره‌ی رود و مانند ترازوها معمولی که از دو بازوی متساوی تشکیل شده ولی برخلاف این ترازوها تعداد کفه‌های آن حداقل ۵ عدد است. بازوها این ترازو آنچنان مدرج شده‌اند که بوسیله آن می‌تواند مانند ترازوها سریع استعمال شود.

این ترازو طبق نوشته خازنی دارای مزایای زیادی است که اهم آن از این قرار است:

۱- ترازو فلز خالص را از آلیاژ آن تشخیص می‌دهد.
۲- آنقدر دقیق است که در برابر ۱۰۰۰ مثقال جسم تو زین شده فقط یک مثقال اضافه نشان می‌دهد (به فرض آنکه تو زین کننده شخص ماهری باشد).

۳- تشخیص ترکیب فلز در اقل وقت.
۴- ترازو بین دو فلزی که در هوا دارای وزن یکسانند در آب وزین ترین آنها را مشخص می‌کند و بعکس.

۵- ترازو، از روی وزن جسم تو زین شده ماهیت آن را معین می‌کند.

۶- خلوص سکه‌های مختلف را تعیین می‌نماید و این هنگامی است که شخص برای این منظور یکبار نسبت بازوها تعیین کند.

۷- مهمترین مزیت این ترازو طبق گفته خازنی آنست که با آن می‌توان جواهرات اصل را از بدл تشخیص داد.

* این ترجمه با مختصر تصرفاتی از مقدمه کتاب ترجمۀ فارسی میزان الحکمه (۱) اقتباس شده است

کتاب خازنی همچنین دال بر آن است که مسلمانان در فیزیک ریاضی آنچه از یونانیان در اختیار داشتند با مهارت بی نظیری انجام دادند، اما این تجربیات راه را برای تحقیق دادن به فرضیات روشنگر، و برای حل پدیده های پیچیده و مشاهده همه جانبه حقایق جدید از روی آگاهی و نقشه بکار برده اند. هرچه قدرت و حوصله یونانیان در خلق فرضیات زیاد از حد بود از آن مسلمین کمتر از اندازه بوده است. این اصل مانع از آن شد که آنها در توسعه همه جانبه روش های تجربی موفق گردند.

در هر صورت ماقبل اعتراف کردیم که تجربیات اندازه گیری خازنی اولین گام به سوی روش تجربی می باشد. اکنون نیز به این نکته اذعان داریم که مسلمانان این گام را بهتر از یونانیان برداشته اند ولی هیچگاه به هدف نرسیدند و برای اولین بار در او اخیر قرون وسطی از اندازه گیریها، فیزیک تجربی بوجود آمد [۱۱].

ما خذ و مراجعا

۱- ترجمه فارسی میزان الحکمة از قرن ششم هجری با متأله تصحیح حواشی و مقدمه به کوشش آقای مدرس رضوی تهران ۱۳۴۶

۲- «تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك» تأليف قدری حافظ طوقان، قاهره، ۱۳۶۰. هـ.

۳- حکیم ابوحاتم مظفر اسفزاری نوشتہ: آبرت ناپلئون کمپانیونی مجله دانشکده ادبیات، سال پنجم تهران ۱۳۳۶

4. G.Sarton : «Introduction to the History of Science Baltimore(1953)

5-S.H.Nasr : «Science and civilization in Islam With a pref. by G.desantillana.(1963)

6 - H . Suter : «Mathematiker und Astronmen der Araber» Leipzig 1900

7- M. Clagett: «The science of Mechanics in the Middle Ages» Madison (1961)

8- T.Ibel : «Die wage im Altertum und Mittelalter Erlangen (1908)

9- E. wiedemann : «Inhalt eines Gefasses in Verschiedenen Abstaden Vom Erdmitte punkte Cnach A- Cazini» (Wiede man's Annalen Vol 39 , 1890)

10- E.Wiedemann: «Uber die Kenntnisse der Muslime auf dem Gebiete der Mechanik und Hydrostatik» (Archiv für Geschichte der Naturwiss (Vol. 2, 1910)

11- F. Rosenberger, «Die Geschichte de Physik» vol 1 (1960)

خانیکف از این مطلب چنین نتیجه گرفته که مسلمانان از قوه جاذبه به مفهوم واقعی مطلع بوده اند ، در حالی که خازنی بطور واضح در مشاهداتش اجرام آسمانی را وارد نمی کند و تنها بحث خود را به اجرام زمینی محدود می نماید . بد علاوه خازنی جاذبیت را به نسبت مستقیم با فاصله اجسام از مرکز زمین (عالی) می دانست نه به نسبت معکوس مجدد آن. خانیکف همچنین می خواهد تغییرات وزن اجسام را مطابق مفهوم امروزی به خازنی نسبت دهد. مانند تو انیم با تمام آنها موافق باشیم. نظریه خازنی درباره وزن همان نظریه یونانی ها بود. و همیشه تصور می کرد از هرسو فشار متعادلی جسم را به طرف مرکز عالم حرکت می دهد و این فشار در مرکز عالم برابر صفر می باشد. او از یک نیروی متحدد الشکل و همچنین از تأثیر یک نیروی تغییر دهنده هیچ آگاهی نداشت. این مطلب از آن جا معلوم می شود که او یک جسم در حال سقوط را در مرکز بطور ناگهانی متوقف می پنداشته و همیشه از وزن جسم صحبت می کرد نه از سقوط جسم. تنها چیز تازه ای که خازنی ارائه می دهد این است که اشاره به تغییرات کم شدن وزن جسم در طبقات مختلف هوا می کند و ظهور تغییرات دروزن به این جهت بوجود می آید که او مفهوم وزن مطلق و وزن در هوای از هم جدا نمی داند. وزن مطلق برای خازنی در تمام مسافت از مرکز یکسان می ماند و فقط وزن نسبی در هوا تغییر پیدا می کند.

در پنجین قسمت کتاب میزان الحکمة خازنی از آبی صحبت می کند که برای تعیین وزن مخصوص بکار می رود. او بطور دقیق تفاوت وزن آبهای مختلف را می دانسته و چیزی که شاهد دقت شگفت انگیزی در مطالعاتش می باشد این است که او می دانسته که وزن مخصوص آب در اثر حرارت کم می شود. او بیان می کند که چگونه ترازوی او کمترین مقدار وزن مخصوص را در تابستان و بزرگترین مقدار را در زمستان نشان می دهد. خانیکف تصور می کند که ممکن است مسلمانان ترازوی آبی را به عنوان میزان الحرارة بکار می بردند. مادر این باره فقط مانند سابق می توانیم بگوییم که اطلاعات قاطع برای اثبات این مطلب در داشت نیست.

کتاب خازنی در عین حال که معرف تفوق فکری علمای اسلام است نقاط ضعف آنان را نیز نشان می دهد. این کتاب مهارت فوق العاده مؤلف را در پاک بودن دستگاهش روشن می کند، ولی در همین حال وابستگی شدید اورابه اعمال علمای یونانی می رساند. همانطور که البتا بزرگترین منجم اسلام در مطالعات دقیق از یونانیان پیشی گرفت لیکن در اصول پارا از استاد خود بطلمیوس فراتر نگذاشت. به همین ترتیب نیز فیزیکدان بزرگ اسلامی (= خازنی) در روش و هدف بزرگ علمی خود متکی به ارشمیدس بود.

انجمن ریاضی دانشآموزان دبیرستانهای مرجان (وابسته به گروه فرهنگی مرجان) ، از من خواسته بودند تا درباره به وجود آمدن کسرهای اعشاری برای آنها صحبت کنم . ضمن یادداشت‌هایی که ازینجا و آنجا بر می‌داشتم (و از این‌بابت از کتاب پراج محقق و دانشمند فرزانه، آقای ابوالقاسم قربانی به نام «کاشانی‌نامه» سود بسیار برد) به مقاله‌ای در مجله «ریاضیات در دیبرستان» (شماره ۳ سال ۱۹۶۳ چاپ مسکو) برخوردم که بنظرم بسیار جالب و تازه آمد. و اینست ترجمه‌آن مقاله.

پرویز شهریاری

تاریخ کسرهای اعشاری در چین

ترجمه: پرویز شهریاری

نوشته: آ.آ. برزکینا

با مطالعه تاریخ ، این مطلب هم امروز روشن شده است که قبل ازستون، در کشورهای شرق از کسرهای اعشاری استفاده می‌کرده‌اند. **غیاث الدین جمشید کاشانی** ریاضیدان ایرانی در کتاب خود به نام «*مفتاح الحساب*» (۱۴۲۷)، شرح کاملی از عملیات با کسرهای اعشاری را می‌دهد.

مقایسه روش ساختن کسرهای اعشاری در چین با روشی که مورد استفاده کاشانی و ریاضی‌دانهای اروپایی بوده است، این مطلب را روشن می‌کند که مدارک چینی برای تاریخ علم برتری خاصی دارند. کاشانی و دانشمندان اروپایی، کسرهای اعشاری را به قیاس عددشماری شصتگانی^(۱) ساختند، درحالی که در چین بطور مستقل و بدون استفاده از کسرهای شصتگانی (که هر گز در چین مورد استفاده قرار نگرفته است) بوجود آمد. از

در این اوآخر اطلاعات تازه و جالبی در باره تاریخ کسرهای اعشاری بدست آمده است . ضمن مطالعه یکی از رساله‌های قدیمی چینی «رساله ریاضی سون تسلزی» که تقریباً مربوط به قرن سوم میلادی است، روشن شده است که در آن زمان کسرهای اعشاری را می‌شناخته‌اند^(۲) و این خیلی قدیمی‌تر از زمانی است که «عمولاً» از استعمال کسرهای اعشاری صحبت می‌کنند.

عمولاً سال رسمی بوجود آمدن کسرهای اعشاری را ۱۵۸۵ ، یعنی سالی که سیمونستون (۱۵۴۸-۱۶۲۰) کتاب خود را منتشر کرد ، می‌دانند. از این زمان کسرهای اعشاری بطور جدی وارد در ریاضیات شد و در دسترس هر کسی که به تحصیلات مدرسی اشتغال داشت، قرار گرفت.

۱ - از مؤلف این رساله اطلاعی نداریم، رساله یکی ازده قسمتی است که در مجموعه «ده کتاب ریاضی» در عصر تان (قرنهای هفتم تا نهم) وارد شده است. این مجموعه به عنوان کتاب درسی در چین قرون وسطی تنظیم شده بود.

۲ - کشف دستگاه عدد نویسی موضعی شصتگانی مربوط به بابلیها است . آنها در ابتداء علامتی برای صفر نداشتند و عددی را که می‌نوشتند می‌شد به عنوان عددی صحیح یا عددی کسری قبول کرد .

بعدها منجمین دوره **الینی** از یک نوع عدد نویسی مختلط استفاده می‌کردند : قسمت صحیح را با دستگاه غیر موضعی اعشاری و قسمت کسری را با دستگاه شصتگانی می‌نوشتند . در هنر ، کشورهای اسلامی شرق و اروپای قرون وسطی با این کسرهای آشنا بودند، ولی چون در همه جهان دستگاه عدد نویسی موضعی اعشاری عمومیت پیدا کرده بود، به تدریج ریاضی‌دانهای این سمت کشانده شدند که کسرهای بابلی را به کسرهای در مبنای ۱۰ تبدیل کنند .

دادن عدددهای گویا (وتنها عدددهای گویا) ، به کمک کسرهای اعشاری هم اعداد گویانمایش داده می شوند، منتهی به مفهومی کلیتر و به عنوان اعداد حقیقی: و این بدان مناسبت است که در نوع نمایش اعداد بوسیله کسرهای اعشاری، اختلافی بین اعداد گویا و گنگ وجود ندارد. چه در حالت تقسیم (وقتی که باقیمانده به صفر نرسد) و چه در حالت ریشه گرفتن، باید طبق قواعدی که وجود دارد، عمل را به اندازه کافی ادامه دهیم و رسمی این امر بروط به یکدهم، یکصدم، یکهزارم وغیره را در تقسیم یا ریشه بدست آوریم.

به این ترتیب به سوالی که در بالا طرح شد می توان اینطور جواب داد: کسرهای اعشاری در حوزه اعداد حقیقی عمل می کنند و بنابراین با بوجود آمدن کسرهای اعشاری، حوزه اعداد حقیقی در ریاضیات مطرح می شود و منشاء چینی کسرهای اعشاری می تواند مؤید این حکم باشد .
بررسی اثر کالاسیک «ریاضیات درنه کتاب» (*) نشان می دهد که دانشمندان چینی دوره هان (قرن دوم قبل از میلاد تا قرن دوم بعد از میلاد) بطور کامل با مجموعه اعداد گویا کار می کردند. در «ریاضیات» قوانین عمل با کسرهای متعارفی، تقریباً شبیه آنچه که امروز معمول است، ذکر شده است. در همین زمان مفهوم کوچکترین مضرب مشترک و قاعدة امروزی تقسیم کسرها هم وجود داشته است که تنها در قرن شانزدهم در اروپا وارد کتابهای درسی شد.
اعداد منفی هم کشف شده بود .

باتوجه به اینکه محاسبین چین قدیم، اعداد گویا را در اختیار داشتند، می توانستند هر کمیتی را یا با اندازه گیری مستقیم و یا انجام اعمال محاسبه ای روی اعداد مفروض، بیان کنند .
آنها جواب مسئله را، حتی در مواردی که بی معنی بود، بدست می آوردند. مثلاً اینکه برای انجام کاری $\frac{3726}{1063}$ وزنه در یک فاصله به تعداد $\frac{1629}{2603}$ کتاب ششم).

آدم لازم است (مسئله ۲۲ کتاب پنجم) یا انجام حرکت یک وزنه در یک فاصله به تعداد $\frac{57}{8}$ مرتبه (مسئله ۸)
در مورد عدددهایی مثل π و یا ریشه های گنگ چه

* - چینی ها ابتدا تعداد واحدهای یک طبقه را با رقمهای هیرو گلیفی و سپس خود طبقه را با همان رقمها می نوشتند. این طریقه خیلی راحت بود به دستگاه عددنویسی موضعی امروزی خیلی نزدیک است. کافی است در عددنویسی چینی نام طبقه را حذف و علامت صفر را وارد کنیم، تا همان عددنویسی امروزی بدست آید .

** - این یکی از رساله های «ده کتاب ریاضی» است که در حدود دو قرن قبل از میلاد تنظیم شده است .

مدتها قبل از آن هم دستگاه عدد شماری اعشاری در چین بوجود آمده بود (۱). بنابراین سیر بوجود آمدن کسرهای اعشاری در تاریخ ریاضیات چین به صورت «حالص» خود بوده است .
رساله ریاضی سون تسدزی «، که مورد مطالعه ما در این مقاله است، بد ما امکان می دهد که مراحل اساسی راه پر پیچ و خم بوجود آمدن این مفهوم جدید ریاضی را بطور روش بررسی کنیم. مثل فسیل شناسی که با مطالعه حیوان فسیل شده مراحل متوجه شدن آنرا بررسی می کند، به تجدید ساختمان مفهوم کسر اعشاری در دوره های مختلف تکامل آن می پردازیم .
در چینی، با وجود منحصر بفرد بودن آن، دارای اهمیت فوق العاده ای است. در مورد بوجود آمدن کسرهای با بلی به خاطر عدم دسترسی به منابع قابل اعتماد و به خاطر نوع دستگاه عددشماری آنها، تقریباً نمی توان قضایت کرد .

قبل از همه سوالی طرح می کنیم : درحالی که کسرهای متعارفی را بخوبی می شناختند چه احتیاجی به کسرهای اعشاری بود؟ چه اختلافی بین کسر متعارفی با کسر اعشاری وجود دارد، آیا این اختلاف مربوط به شکل نوشت آنهاست و یا در محتوی این دو مفهوم وجود دارد؟

کسر متعارفی عبارتست از عدد گویایی که می تواند به صورت کسر اعشاری محدود و یا متناوب نامحدود نوشته شود. ولی مجموعه همه کسرهای اعشاری را نمی توان به صورت کسر متعارفی نوشت . برای اثبات این مطلب می توان به عنوان مثال از عدد $\sqrt{2}$ ، که بوسیله فیثاغوریان پیدا شد، نام برده که با هیچ کسر گویایی قابل بیان نیست. ولی بطور کلی هر عدد گنگ می تواند بوسیله کسر اعشاری غیر متناوب نامحدودی بیان شود. روش است که دو مفهوم اعشاری و متعارفی، هم ارز نیستند، عضوهای مجموعه کسرهای اعشاری نامحدود و عضوهای مجموعه کسرهای متعارفی را نمی توان در تنازع یکیکی قرارداد .

ولی در اینجا برای ما این مطلب اهمیت دارد که اختلاف بین دونوع نوشت آن عدد را، نه از لحاظ نظریه مجموعه ها، بلکه بیشتر از نظر گسترش واستحکام مفهوم خود عدد، تا آنچا که به شکل نوشت آن مربوط است، مورد توجه قراردهیم . کسر متعارفی، از نظر ماهیت خود، وسیله مناسبی است برای نشان

دریک حالت ممکن است برای حالت دیگر واحد صحیح یا واحد یکصدم باشد و ممیز می‌تواند جای خود را تغییر دهد. مثلاً اگر در عبارت $\frac{1}{10} \times 10$ واحد اصلی را چی بگیریم، کسر مساوی $\frac{1}{10}$ می‌شود و اگر تسون را واحد اصلی بگیریم

مساوی $\frac{1}{10}$ می‌شود.

از نوع چنین کسرهایی در رساله سون قسه فراوان است. ولی در آنجا کسرهای بفرنجی از نوع آنچه که در بالا از «ریاضیات در نه کتاب» آورده‌یم، دیده نمی‌شود. در رساله سون قسه «ریاضیات در مسائل ساده انتخاب شده‌اند و چنانند که منجر به جوابهای کوچک و ساده می‌شوند. مقادیر این دستگاه «شبهمتری» به کمک دستگاه‌سیعی از واحد می‌شوند، به نحوی که کسرهای متعارفی در حالت تقسیم محدودیه آنها تبدیل می‌شوند. مثالی می‌آوریم؛

مسئله‌ای وجود دارد که در هر دو رساله: «ریاضیات در نه کتاب» و «رساله ریاضی سون تسهیزی» آمده است. این مسئله مربوط به مبادله غلات است: « $\frac{1}{10} \times 10 = 1$ ». حل مسئله ساده است: در جدول خاصی (که «ریاضیات...» کتاب دوم با آن شروع می‌شود) سه رابطه بین انواع مختلف غلات از لحاظ تعادل قیمت داده شده است (این رابطه در مورد دونوع غله مسئله ما مساوی $\frac{1}{10}$ است). مقدار موردنظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{10} \times 10 = 1$$

از محاسبه‌ها معلوم می‌شود که:

$$1 \text{ هو} = 10 \text{ دوی}$$

$$1 \text{ دوی} = 10 \text{ شهنو}$$

واحد اصلی در چین دوی بوده است که به تقریب مساوی $\frac{1}{10}$ لیتر است.

به سادگی معلوم می‌شود که با توجه به این واحدها به

دست می‌آید: « $\frac{1}{10} \times 10 = 1$ » که در «ریاضیات

در نه کتاب» هم به همین ترتیب داده شده است. کسرهای **لیوهوئه** با بیانی کاملاً مشابه، منتهی خیلی کوتاهتر است. او تنها از سه واحدی که در عمل بکار می‌روند، استفاده کرده است. البته **لیوهوئه** از تقسیمات خیلی کوچک‌تر هم استفاده کرده است؛ این تقسیمات در محاسبه‌های اقتصادی مورد مصرف نداشتند ولی به این علت درست شده بودند که بتوان مقادیر

می‌کردند؟ در این موارد با مقادیری کم و بیش تقریبی کار می‌کردند: مساحت دایره و حجم کره را با فرض $\pi = 3$ بدست می‌آوردند و ریشه گرفتن را فقط در مورد جذرو کعب اعداد گویا انجام می‌دادند.

در دو متنی که از لحاظ زمانی جدیدتر است و قریب ۵۰۰ سال بعد نوشته شده، مطلب به نحو دیگر عنوان شده است. این دو متن عبارتند از حواشی مستقلی که **لیوهوئه** بر «ریاضیات در نه کتاب» نوشته است و همین بررسی اوست که به ما رسیده است، و «رساله ریاضی سون قسه» که قبل از آن یاد کرده‌ایم.

لیوهوئه عدم رضایت خود را از قاعده محدود ریشه گرفتن، که تنها مربوط به حالت مقادیر گویا بود، و مقدار تقریبی $\pi = 3$ ابراز می‌دارد و در بحث خود روابط تقریبی زیر را برای ریشه‌های گنگ می‌دهد:

$$a + \frac{1}{2b+1} < \sqrt{a+b} < a + \frac{1}{2b}$$

و مقدار دقیق تر $\pi = 3.14$ را به کمک چند ضلعی‌های منتظم محاطی بدست می‌آورد. او برای ریشه گرفتن توصیه می‌کند وقتی که ریشه منجر به مقدار صحیح نمی‌شود از مرتباً‌های اعشاری استفاده کنیم، او این علامتها را «وی» (یعنی کوچک‌ترین) می‌نامد، ولی متأسفانه مثالی نمی‌آورد.

می‌توان از بخشی که **لیوهوئه** در باره محاسبه عدد π انجام داده است متوجه شد که اوچگونه کسرهای اعشاری را نمایش داده است.

در اینجا، او پاره خطها را به کمک تقسیم‌بندی اعشاری بیان می‌کند، واحدهای که برای طول، چی، بکار می‌برد عبارتند از: تسون، فن، لی، هاوا، میاوا، هو، و اگر عددی در حد این واحد قابل بیان نبود، با قیمانده رابا کسر متعارفی نشان می‌داد، مثلاً:

$$9 \text{ تسون } 7 \text{ فن } 8 \text{ لی } 8 \text{ هاوا } 5 \text{ میاوا } 8 \text{ هو } \frac{9}{10} \text{ هو.}$$

و این کسری است شبیه دستگاه متری که در آن هر قسمت نام خاصی دارد و ضمناً در هر مورد نوع اندازه گیری ذکر می‌شده: طول یا وزن یا گنجایش، بسته به نوع انتخاب واحد صحیح، اسامی بعدی متعاقباً قسمتهای یکدهم، یکصدم، یکهزارم، یکدهم غیره از این واحد را نشان می‌دهند. به این ترتیب واحد یکدهم

گمتر ازو احد را در دستگاه اعشاری بیان گرد.

به این ترتیب بنظر می‌رسد که **لیوهوئه** از کسرهایی با منطق دستگاه متغیر استفاده می‌کرد، در حالی که در «ریاضیات...» هنوز چنین کسرهایی وارد نشده بود. در «رساله ریاضیات سون تسه زی» به کار برده منطقی تری از فکر کسرهای اعشاری برخوردمی کنیم. بنظر می‌رسد که **سون تسه زی** با اقتباس مسئله‌ای از «ریاضیات در نه کتاب» تلاش می‌کند بخصوص ثابت کند که مقدار مجهول رامی‌توان در آنجا به صورت کسر کامل اعشاری نشان داد: $\frac{3}{8}$ دوی ۳ شه تو ۱ گه ۸ شائو برای اینکه کسر متعارفی را بکار نبرد از واحدهای کوچکتر از شهنو، که خودش یکدهم واحد گنجایش است، استفاده می‌کند.

این مسئله می‌تواند به عنوان مسئله خاصی که سون تسه زی را به کسرهای اعشاری (با نظم دستگاه متغیر) هدایت می‌کند، مورد بررسی قرار گیرد. برای این منظور، او برخلاف لیوهوئه به جای استفاده از روش کلی ریشه‌گرفتن استفاده نمی‌کند، بلکه روش کلی تقسیم را بکار می‌برد، یعنی مفهوم طبقه‌های کسرهای اعشاری را به همان صورتی که امروز در مدارس انجام می‌دهند، روشن می‌کند.

برای این منظور به دنبال این مسئله، سه مسئله دیگر مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این سه مسئله هم از «ریاضیات در نه کتاب» اقتباس شده‌اند که در آنجا هم با همین ردیف آمده‌اند. با این مسئله‌ها حالتهای مختلف تقسیم عددی صحیح معروف شده است، به نحوی که جواب در یک مورد عددی صحیح، در مورد دوم کسر مرکب تحویل ناپذیر و در مورد سوم کسر مرکب تحویل پذیریدست می‌آید.

حالت چهارم، حالت تقسیم با باقیمانده، که کسر اعشاری را معرفی می‌کند، از لحاظ منطقی منجر به موضوع جدیدی در ریاضیات می‌شود.

کسرهای اعشاری در مسئله‌های سون تسه زی، تنها برای بیان مقادیر مجهول بکار نمی‌رود (یعنی مواردی که ضمن محاسبه بدست می‌آید، آنطور که در مسئله مشخص نشان داده شد)، بلکه در شرایط مفروض مسئله‌ها هم وارد می‌شود. به کمک آنها حتی ضریب تبدیل و احدهای جم به واحد گنجایش هم توضیح داده می‌شود که اغلب در مسئله‌ها عمل تقسیم بر آن انجام می‌گیرد. این ضریب برابر است با $1 \frac{6}{5}$ (این آنها در مسئله‌های قدیمی چیزی وجود ندارد؛ این عدد عبارت است از حجم ۱ دوی از مایعی که ظرف مکعب مستطیل شکل به قاعده ۱ چی مربع و ارتفاع ۱۶۲ چی را پر کرده باشد).

در «ریاضیات در نه کتاب» که در آنجا تنها سه واحد طول مورد استفاده قرار گرفته است:

$$1\text{ چیان} = 10\text{ چی}$$

$$1\text{ چی} = 10\text{ تسون}$$

این ضریب با کسر متعارفی نوشته شده است: $1\text{ چی} = 10\text{ تسون}$ و $\frac{1}{5}\text{ تسون}$.

نوع محاسبه‌ای که از مسئله‌های سون تسه زی است بسط می‌شود نشان می‌دهد که می‌توانست در روی این کسرهای اعشاری اعمال مربوطه را انجام دهنده. عملهای بفرنجی مثل ضرب و تقسیم را با منظور کردن قانون ویرگول انجام می‌دادند، که در اساس همان روشی است که ما امروزهم بکار می‌بریم. اختلاف تنها مربوط به شکل خاصی است که این کسرهای با منطق دستگاه متغیر را مشخص می‌کند. با یک مثال مطلب را روشن می‌کنیم. مسئله ۲۵ از کتاب آخر سون تسه زی را، که برای هدف مامناسب است، مورد بررسی قرار می‌دهیم (سون تسه زی سه کتاب داشته است، کتاب اول، کتاب متوسط، کتاب آخر). «دیر کی با اندازه‌های نامعلوم وجود دارد. سایه آنرا اندازه گرفته ایم ۱ چیان ۵ چی بدل است. جدا از این دیر ک، سه تو نی ۵ قرار دارد که طول آن ۱ چی ۵ تسون است. سایه این سه تو نی ۵ تسون است. طول دیر ک چقدر است؟

جواب: $4\text{ چیان} 5\text{ چی}$.

مقدار مجهول عبارت است

از جزء چهارم تناسبی
که با سه جزء معلوم
آن ضلعهای مجاور به
زاویه قائمه دو مثلث
متشابه قائم الزاویه را

$$x = \frac{ab_1}{a_1}$$

در آنجا را حل مسئله، که خیلی هم ساده است، برای ماجالب نیست، آنچه مورد توجه ما است روش‌های محاسبه است. اگر واحد صحیح را چیان قبول کنیم، حل چنین مسئله، با نوع نوشتن امروزی، چنین است:

$$x = \frac{1/5 \times 0/15}{0/05} = \frac{0/225}{0/05} = \frac{225}{5} = 4/5$$

در حقیقت در نوشته چنین گفته شده است:

«بر قرار می‌کنم سایه دیر ک را به ۱ چیان ۵ چی. این

توضیح بیان می‌شوند، و اغلب به اختصار کامل برگزار می‌شوند).

به این ترتیب می‌بینیم که ریاضی دانهای چینی به قاعده ضرب ردیفهای اعشاری آشنا بوده‌اند: چنان را درجی ضرب می‌کردند و چی بدست می‌آورند وغیره:

	چزان	چی	تسون	
۱	۵			مضروب
	۱	۵		مضروب فیه
	۱	۵		حاصل ضرب
	۵			های جزئی
	۲	۵		حاصل ضرب
	۲	۲	۵	
۴	۵		-	خارج قسمت
۲	۲	۵		مقسوم
۵				مقسوم علیه

نتیجه ضرب (که مساوی $2\frac{1}{5} \times 5$ فن است) به سمت چپ برد شده است، مثل اینکه آنرا در $10 \times$ ضرب کرده باشد. واضح است که این عمل به مناسب تقسیمی که بعد باید انجام داد، لازم است: تقسیم $2\frac{1}{5} \times 5$ چزان $\frac{1}{5}$ بر 5 تسون (در حقیقت باید $\frac{1}{5}$ بروز چزان، زیرا مخرج هم در $10 \times$ ضرب شده است؛ در تخته حساب حرکت مقسوم علیه انجام شده است، ولی در ذکر قاعده درباره تبدیل مقسوم علیه صحبتی به میان نیامده است). خارج قسمت مساوی $4\frac{1}{5}$ چزان $\frac{1}{5}$ می‌شود.

ولی کسرهای بامنطبق‌تری راهنمای نمی‌توان کسرهای اعشاری امروزی دانست، آنها تنها شکل ابتدائی کسرهای اعشاری به حساب می‌آیند. برای اینکه مفهوم کسر اعشاری بطور کامل انتزاعی آن بdst آید، باید از پوشش منطق‌متري بیرون آید یعنی از پوسته و از حوزه مقادیری که خود به خود فکر تقسیم منظم واحدها را تلقین می‌کند، بیرون بیاید و تو اند بطور کلی تا هرجا که لازم است ادامه پیدا کند. رسیدن به چنین ساختمان انتزاعی کار مشکلی بود، زیرا برای ریاضی دانهای باستانی همیشه مسئله‌ها به صورت مشخص و عملی آن مطرح بوده است.

در مسئله‌های باستانی معمولاً سخن از اندازه سطح کف اطاقها، حجم آب بندها و آبروها و دیوار قلعه‌ها، گنجایش انبارهای غله، وزن ابریشم یا پنبه خام، اندازه

مقدار را در طول ستون یعنی در $1\frac{1}{5} \times 5$ تسون ضرب می‌کنم. به طبقه سمت چپ حرکت می‌دهم، بdst می‌آید $2\frac{1}{5} \times 5$ چزان $\frac{1}{5}$. این مقدار را بر سایه ستون یعنی بر 5 تسون تقسیم می‌کنم و معهول را بdst می‌آورم.

قبل از آنکه به روشن کردن قانونی پردازیم که با اصطلاحاتی مثل «برقرارمی کنم» و «حرکت می‌دهم» بیان شده است، با وسیله‌ای آشنا شویم که در چین باستان برای محاسبه مورد استفاده قرار می‌گرفت. این وسیله یک نوع تخته‌یا چرتکه محاسبه‌ای بود که در پیشرفت روش‌های عمومی محاسبه‌ای در ریاضیات چین باستان اثر فون العاده‌ای داشته است. مادقیقاً نمی‌دانیم که این وسیله چگونه بوده است، ولی عده‌ها روی آن به کمل چوب خطاهای محاسبه‌ای درستگاه به بنای پنج نشان داده می‌شد. تا عدد 5 را بطور ساده با کنارهم گذاشتند چوب خطاهای نشان می‌دادند (مثل $4\frac{1}{5}$ به صورت $|||$ نشان داده می‌شد)، ولی برای بیان عده‌های از 6 تا 9 ، چوب خطی عمود بر سایرین و در بالای آنها می‌گذاشتند و اندازه آنرا 5 به حساب می‌آورند (مثل 8 به صورت $|||$ نشان داده می‌شد). روی تخته چوب خطاهای صورت افقی و قائم و با استفاده از روش موضعی بودن رقمها منظم می‌گردند، جای خالی بین رقمها معرف این بود که ردیفی وجود ندارد. صفر را روی تخته لازم نداشتند، به این ترتیب لااقل در چهار قرن قبل از میلاد، چینیها از همان دستگاه اعشاری موضعی، که ما امروز بکار می‌بریم، استفاده می‌کرده‌اند، یعنی حتی روش تعیین عده‌های صحیح و کسری را تقریباً بدون تفاوت با روش امروزی انجام می‌دادند. در مورد حل مسئله یک برنامه‌کلی برای یکرشته عملهای لازم روی تخته محاسبه طرح می‌گردند و این شبیه برنامه‌ای است که امروز برای حل مسئله‌ها به ماشینهای محاسبه الکترونی می‌دهند.

طرح عملهایی را که روی تخته محاسبه برای حل مسئله، می‌دادند در اینجا روشن می‌کنیم. عمل را از ردیفهای بزرگتر به طرف ردیفهای کوچکتر انجام می‌دادند:

- ۱) $1\frac{1}{5} = 1\frac{1}{5} \times 1$ چزان
- ۲) 5 تسون $= 1\frac{1}{5} \times 5$ چی
- ۳) 5 تسون $= 5$ تسون $\times 1\frac{1}{5}$ چزان

۵ فن 2 تسون $= 2\frac{1}{5} \times 5$ تسون $= 5$ تسون. 5 چی
در اینجا قسمتهای یکدهم تسون وارد شده است (فن)،
ولی قاعده آن شرح داده نشده است (قاعده‌های چینی بدون

در اینجا آموزش کسر اعشاری مطرح نیست، ولی کسر اعشاری وجود دارد: ۳۷ عدد صحیح و ۵ دهم، منتهی ۵ دهم دهقان نمی‌تواند وجود داشته باشد. در اینجا ریاضی دان چیزی برای قسمتهای اعشاری عدد از کلمه «فن» استفاده کرده است

که به معنی $\frac{1}{10}$ تسون است. بکار بردن نامهای مشخص برای قسمتهای اعشاری انتزاعی کاملاً معمول بوده است و بعداً هم از این عادت پیروی شده است. در چین قدیم این قسمتهای اعشاری را از روی ارزش سکه‌ها نام می‌گذاشتند. سون تسه‌زی قسمتهای اعشاری «بو» را بکار می‌برده است که بطور کلی وجود نداشته است: ۱ بو از عچی تشکیل شده بود. در این حالت «بو» مثل آدم، مقداری غیر قابل تقسیم بود.

این مرحله که قسمتهای اعشاری هر عدد بynam یک مقدار مشخص را بکار می‌بردند، عبوری است از مفهوم کسر با منطق متری به مفهوم کسر اعشاری. می‌بینیم چگونه به تدریج وجود هرسه مقیاس با منطق متری برای طول، وزن و حجم و غیره لازم می‌شود، زیرا در ابتدا یکی از این مقیاسها کافی بود (*)

وقتی که «فن»، قسمت اعشاری تسون، معنای اولیه خود را از دست داد، معنای جدیدی برای قسمت اعشاری بطور کلی کسب کرد؛ این معنا تنها برای بقیه مقادیر با منطق متری نبود، بلکه برای قسمت اعشاری یک عدد بطور کلی بکار می‌رفت.

این درک جدید از مفهوم عدد و توسعه آن به صورت دستگاه اعشاری و پیداشدن ردیفهای کوچکتر از واحدتر خود ریاضیات بوجود آمد و به همین علت ابتدا در حوزه محدودی عملی شد.

دو مسئله را از رساله سون تسه‌زی مقایسه می‌کنیم که به خوبی می‌تواند احتیاطی را که در تبدیل به وضع جدید وجود داشته است روش نماید.

یکی از آنها، مسئله بیست و یکم از کتاب متوسط رساله است:

«کف اطاقی به شکل منحنی است که طول آن ۶۴۹ بو و

*) در این مورد بجاست از تلاشی که در قرن دهم برای عرض کردن یک جدول «بد» در مورد وزنها و تبدیل آن به دستگاه اعشاری انجام گرفته است نام ببریم. ضمناً نام واحده‌ها از اندازه‌های طول اقتباس شده بود به مانظور که دیپلم در مثال لیوهوئه به صورت اعشاری به هم مربوط بودند.

پارچه‌های ابریشمی یا کتانی است. بنابراین در مسئله‌هایی که از زندگی روزانه گرفته شده است، اغلب با مقدارهای با منطق متری یا واحدهایی که برای واحده‌ای مختلف آن نام و وجود داشته باشد، سرو کار دارند.

ولی ریاضیات مایه اصلی این مسئله‌های مشخص راجداً می‌کند و روش‌هایی برای حل کلی یک دسته از مسئله‌های معین بوجود می‌آورد و کلیترین نوع مسئله‌هارا به حل ساده‌ترین آنها می‌رساند.

به این ترتیب محتوی عملی مسئله‌های اتسیم طرحهای کلی می‌شود و با کثار رفتن آن مسئله‌های خالص علمی به وجود می‌آید.

در حقیقت حالا دیگر همه امکانات برای تنظیم مسئله‌ها به صورت کلی و بدون توجه به جنبه عملی آنها، بوجود آمده بود. در «ریاضیات در نه کتاب» به مسئله‌هایی کاملاً کلی و حل جبری آنها برخورد می‌کنیم: در کتاب هفتم به نام «زیادی - کاستی» و در کتاب هشتم به نام «قانون فان - چون». ولی بطور کلی برای مسئله‌های چینی این خصوصیت اساسی وجود دارد که شکل عملی با محتوی انتزاعی به هم آمیخته است، شبیه آنچه که قبل از در مورد قسمتهای کسری برای آدم دیدیم.

سون تسه‌زی هم، وقتی که درک خودش را از کسرهای اعشاری با مفهوم کلی پیشنهاد می‌کند، درست به همین ترتیب عمل می‌کند. او مقداری را انتخاب می‌کند که از قبل معلوم است قسمتهای کوچکتری ندارد. این مقدار غیر قابل تقسیم، مثلاً آدم است که قسمتی از آن بدون معنا می‌شود. کاملاً روشن است که قسمتهای اعشاری چنین عددی، کسرهای اعشاری امروزی را معرفی می‌کند، اگرچه خود عدد ظاهر آن انتزاعی نیست و به نامی وابسته است.

این مسئله دوم از کتاب آخر رساله سون تسه‌زی است:

۱۵۰۰۰۰۰۰ دهقان وجود دارد، [که از آنها] ۴۰۰۰۰۰ سرباز انتخاب شده است. می‌خواهیم بدانیم از هر چند دهقان یک سرباز انتخاب شده است؟

جواب: ۳۷ دهقان و ۵ فن.

با قیمانده رادر \times ضرب می‌کنم اچزان و ۲ چی بدست می‌آورم.
آنرا بر ۴ تقسیم می‌کنم ۳ چی بدست می‌آورم.

همین شباهت تاریخی رادر ریاضیات با بلی هم می‌توانیم پیدا کنیم. در آن جاداستگاه شصتگانی محاسبه را کشف کرده بودند که بر اساس موضوعی بودن رقمها بناشده بود و تنها در محاسبه‌ها بکار می‌رفت؛ ولی مقدارهای مفروض و یا نتیجه‌هایی را که بعد از محاسبه بدست می‌آمد در دستگاه شصتگانی و یا دستگاه اعشاری غیرموضعی (که در متنهای اقتصادی بکار می‌رفت و در عمل رواج فراوان داشت) بیان می‌کردند.

خاصیت اصلی کسر اعشاری، یعنی اینکه انتقال ممیز به راست (به چپ) با ضرب عدد در توانی از ده (تقسیم عدد بر توانی از ده) معادل است، به خوبی در چین باستان شناخته شده بود. در زبان چینی دو اصطلاح وجود داشته است: «شانشی چزه» به معنای بزرگ کردن یک عدد با ضرب آن در ۱۰، و «تویی» (عقب کشیدن) به معنای حرف کت از ردیف مورد نظر به طرف چپ، این عملها ضمن حل مسئله‌های ۲۱ و ۲۲ کتاب سوم از رساله سونتسه‌زی وجود دارد. یکی از این مسئله‌هارا در اینجا می‌آوریم:

۱) ای کتان وجود دارد که ۱۸۰۰۰ تسبیان می‌ارزد. قیمت یک چزان، یک چی، یک تسون از کتان بطور جداگانه چقدر است؟ (*)

جواب: چزان- ۴۵۰۰ تسبیان،
چی- ۴۵۰ تسبیان،
تسون- ۴۵ تسبیان.

روش حل: ۱۸۰۰۰ تسبیان را برقرار می‌کنم، آنرا بر ۴ تقسیم می‌کنم، ارزش یک چزان بدست می‌آید. به طرف راست عقب می‌کشم، یک بار دیگر به طرف راست عقب می‌کشم، ارزش چی و تسون را بدست می‌آورم.

در این مسئله اصطلاح «تویی» بکار رفته است. در مسئله دیگر (۲۲) که عدد ۱۸۰۰۰۰۰۰ در ۱۰ ضرب می‌شود، ردیف را به سمت چپ حرکت می‌دهد، یعنی با اصطلاح امروزی عالمت ممیز را دو رقم به سمت راست می‌برد. در مسئله ۹ از کتاب سوم رساله سونتسه‌زی، ضرب در ۴ با دو عمل انجام می‌شود: ضرب در ۱۰ و در ۴.

به این ترتیب، چنی‌های خاطر تکنیک خوب و پیشرفت‌های که در محاسبه داشتند، در حالی که لگاریتم و مثلاً را

قطر آن ۳۸۰ بود است. سطح کف اطاق چقدر است؟
باید مساحت قطاع را طبق دستور چینی بدست آوریم:

$$\frac{C}{2} \cdot \frac{D}{2} = \text{مساحت قطاع}$$

که در آن C طول قوس و D قطر دایره قطاع است. برای نصف کردن طول قوس یعنی ۶۳۹ بود، عدد اعشاری ۵/۳۱۹ بودست می‌آید. سونتسه‌زی این مقدار را این‌طور بدست می‌آورد:

«طول قوس را نصف می‌کنیم ۳۱۹ بود ۵ فن بدست می‌آید».

ولی در همین کتاب از رساله مسئله شانزدهم هم وجود دارد.

«طنابی به طول ۵۷۹۴ بوداریم. اگر با آن مربعی سازیم، طول ضلع مربع چقدر است؟

جواب: ۱۴۴۸ بود ۳ چی».

جواب این مسئله را می‌شود به صورت کسر اعشاری ۱۴۴۸/۵ بود.

ولی سونتسه‌زی این کار را نمی‌کند. از این دو مسئله‌ای که ذکر کردیم معلوم می‌شود که سونتسه‌زی تحت فشار سنت بوده است. در عملی که سونتسه‌زی بدعنوان یک عمل بینایی انجام می‌دهد، به خودش حق می‌دهد از یک بدععت در زمینه محاسبه استفاده کند. این کار برای او خطری ندارد، زیرا در مسئله اول و برای محاسبه مساحت قطاع باید بالآخره ۵/۳۱۹ را در ۱۰ ضرب کند و در نتیجه کسر اعشاری باقی نمی‌ماند. ولی در مورد مسئله دوم وضع بکلی فرق می‌کند. کارمندانداره ارضی کتاب را مطالعه می‌کند و ممکن است از لحاظ واحد اختراعی جدید به زحمت بیفتد. و می‌بینیم که سونتسه‌زی لازم می‌بیند که در این مسئله از قانون خودش بگذرد و همان اندازه‌های قدیمی وعادی را برای طول در نظر بگیرد. البته حل مسئله پیچیده می‌شود، ولی آیا سونتسه‌زی هم می‌خواهد همین را نشان بدهد؟ به جای یک عمل تقسیم ناچار شده است دو عمل دیگر هم انجام دهد:

«طول طناب را ۵۷۹۴ بود برقرار می‌کنم، آنرا بر ۴ تقسیم می‌کنم، ۱۴۴۸ بودست می‌آورم و ۲۶ بود هم باقی می‌ماند.

$$(*) ۱\text{ پی} = ۴\text{ چزان} = ۴۰\text{ چی} = ۴۰۰ \text{ تسون}$$

واحدهای مختلف اندازه‌گیری در رشته‌های مختلف فعالیت آدمی، همزمان و بدون ارتباط با یکدیگر بوجود آمده است. به کمک پی و دو آن (قطعه) پارچه را اندازه‌می‌گرفتند، به کمک بو (قدم) ضلعهای قطعه زمینها را بدست می‌آوردند، به کمک لی (ورست) فاصله تانقاًط پر جمعیت را بیان می‌کردند.

چی که حالا مساوی $\frac{1}{3}$ متر است و در طول تاریخ از ۱۹۰۰ متر

تا ۳۵۰۰ متر تغییر کرده است، برای اشیایی که در منزل و یا سایر جاهای مورد مصرف داشته‌اند، بکار می‌رفته است.

وقتی که هر یک از این واحدها در جای خود مستقر شدند، لازم شد که مقایسهٔ بین آنها بعمل بیاید. البته رابطهٔ بین این واحدها بکلی غیر اعشاری بود. ولی وقتی که برای دانشمندان ضمن محاسبه، عده‌های خیلی کوچک و خیلی بزرگ بوجود می‌آمد، وضع دیگری بود. در این مورد می‌شد از یک مقیاس منظم استفاده کرد و این مقیاس بطور طبیعی در دستگاه شمار اعشاری وجود دارد که در آن می‌توان بطور دلخواه‌وتا هر اندازه که لازم باشد از دو طرف عدد جلو رفت.

تاریخ چین حتی از نخستین قانون گذاری دربارهٔ اندازه‌ها خبر می‌دهد، این قانون گذاری در قرن سوم قبل از میلاد و بوسیلهٔ امپراطور تسین شی هوان دی انجام گرفت. این امپراطور چن را به صورت یک دولت واحد درآورد و اصلاحاتی انجام داد؛ خطنوشتی را یکنواخت کرد، برای عبور از ابهاهای جاده کشید و غیره. تا این زمان در مورد مقیاسها آشناستگی زیادی بودند؛ ۸ چی = ۱ سیون؛ ۲ سیون = ۱ چزان؛ و همچنین ۸ چی = ۱ ژن، گاهی هم ممکن بوده ۴ چی با ۷ چی تشکیل یک ژن را بدهند.

بخوص مطالب زیادی دربارهٔ منطق متری می‌توان در «رسالهٔ ریاضی سون تسه زی» پیدا کرد.

اگر اولین صفحه این رساله را باز کنیم، به جدول اندازه‌ها وزنها برخورد می‌کنیم.

با این جدولها بیشتر آشنا می‌شویم. قبل از همه جدول سوم اندازه حجم‌ها برای ما مهم است که در مسئلهٔ مربوط به مبادلهٔ غلات به آن برخورد می‌کنیم. این جدول شامل اجزایی کوچک‌تر از آنچه که در این مسئله نسبت به واحد ۵۵ وی می‌ینیم، می‌باشد:

«برای تعیین حجم باشروع از سو:

۱ گه = ۱۰ شاو
۱ گوی = ۶ سو
دنباله در صفحه ۲۴۳

نمی‌شناختند، به برتری کسرهای اعشاری بی بودند و نظر من این است که مفهوم کسر اعشاری در قرن سوم میلادی و در چین کشف شده است. درست است که بعدها هم خصوصیت متري بودن کسرهای اعشاری باقی ماند، ولی این خصوصیت کاملاً به سمت انتزاع متمایل بود.

به شهادت اوراق تاریخ تسه زو چون - چڑی ریاضی دان قرن پنجم چین هم از این کسرها استفاده می‌کرده است. نام تسه زو چون - چڑی ازین جهت در تاریخ آمده است که عدد ۴ را تا مشخص رقم صحیح اعشار محاسبه کرده بود.

جبردانهای قرن سیزدهم و چهاردهم میلادی: تسین تسه زیو-شاو، چڑوشی - تسه زه، لی گه و یان - هوئه هم کسرهای اعشاری را بکار بردند. اصطلاح امروزی چینی «سیانوشو» (عددهای کوچک) برای کسرهای اعشاری مربوط به چڑوشی - تسه زه است. او مقیاس واحد طول را تا ۱۶-۱۰ چی داده بود و نامهایی که برای این مقیاسها گذاشته بودند مدت‌ها و تازمانی که ریاضیات جدید از غرب به چین نفوذ کرد حفظ شده بود. یان هوئه در یکی از مسئله‌های خود ابتدا کسر متعارفی را به کسر اعشاری تبدیل می‌کند و بعد عمل (ضرب) را نجام می‌دهد. در دوره کانگ-هی (۱۶۶۲-۱۷۲۲) تعیین واحدهای اندازه گیری قدیمی را، که گویا مورد استفاده هوان دی امپراطور افسانه‌ای قرن بیست و هفتم قبل از میلاد بوده است مورد تجدید نظر و دقت قرار دادند. جدولهای اندازه گیری را که به این ترتیب درست شد، در «فرهنگ ریاضی» ضبط کردند. در این جدولها اندازه‌های کسری خیلی دقیق داده شده است، اندازه طول تا ۳۱-۱۰ چی، اندازه حجم تا ۱۵-۱۰ شن،

اندازه تا ۱۶-۱۰ لان. رابطهٔ بین واحدها تقریباً در همه جا به صورت اعشاری است و رابطه‌های از نوع (۶ چی = ۱ بو) به رابطه ساده‌تر (۵ چی = ۱ بو) تغییر پیدا کرده است.

ما با تفصیل لازم تکامل کسرهای اعشاری را از صورت جنینی آن، کسرهای با منطق متری به کسرهای اعشاری انتزاعی مورد مطالعه قراردادیم. منتهی خود کسرهای با منطق متری چگونه بوجود آمدند؟ و چه ضرورتی باعث پیدایش آنها شد؟

روشن است که بدون درنظر گرفتن اثر تختهٔ محاسبه (که به کمک آن محاسبه‌های اعشاری انجام می‌گرفت) نمی‌توان به این سؤال جواب داد. برای این بررسی به تاریخ منطق متری نظری می‌اندازیم.

مفهوم تابع بر اساس تعریف رابطه

ترجمه: فتح الله زرگری

وصل می کنند (شکل ۱)

تمرین: چند جفت مرتب از عناصر: a) مجموعه دو عنصری $\{b\}$ و b) مجموعه یک عنصری $\{\hat{a}\}$ ، می توان ساخت؟

حاصل ضرب مستقیم مجموعه ها: فرض کنیم X و Y دو مجموعه باشند.

تعریف: حاصل ضرب مستقیم مجموعه های X و Y عبارتست از مجموعه ای متشکل از کلیه جفت های مرتب (y, x) ، که عنصر اول آنها به مجموعه X و عنصر دوم آنها به مجموعه Y متعلق باشد.

حاصل ضرب مستقیم دو مجموعه X و Y به صورت $X \times Y$ نوشته می شود:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ و } y \in Y\}$$

مثالها:

۱) فرض کنیم $\{1, 2, 3\} = X$ و $\{4, 5\} = Y$ در این صورت:

$$X \times Y =$$

$$\{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

حال اگر هر جفت مرتب از حاصل ضرب مستقیم را بایک پیکان نمایش دهیم نمودار پیکانی حاصل ضرب مستقیم را بدست می آوریم. (شکل ۲).

(شکل ۲)

شکل دیگر نمودار حاصل ضرب مستقیم به صورت زیر است: مطابق با شکل ۳ دو محور عمود بر هم می گیریم و فرض می کنیم محور افقی مکان عناصر مجموعه X و محور عمود بر آن مکان عناصر مجموعه Y باشد، حال محل هر عنصر را روی محور متناظرش تعیین می کنیم (نقطه x, y) از این نقاط خطوطی موازی محورها رسم می کنیم محل تقاطع این خطوط عبارت خواهد بود از جفت های مرتب (y, x) . این نوع نمودار

در این مقاله به ترتیب مفهوم « رابطه » و مفهوم « تابع » شرح داده می شود . فرض براین است که دانش آموزان با مفهوم های مجموعه، زیر مجموعه، اعمال مربوط به اجتماع و اشتراک مجموعه ها و همچنین علائم مربوطه آشنا هستند.

۱- رابطه دو تایی

جفت مرتب: در ریاضیات مفهوم مجموعه $\{x, y\}$ متشکل از دو عناصر x و y از مفهوم جفت مرتب فرق دارد. هرگر عناصر x و y از مجموعه $\{x, y\}$ به ترتیب مورد توجه باشند در این صورت یک جفت مرتب خواهیم داشت که آنرا با (x, y) نمایش می دهیم . مثلاً کلیه جوابهای معادله $x - y = 2$ که در فواصل $0 < n < 6$ و $0 < y < 6$ قرار دارند عبارتند از: $x_1 = 3$ و $y_1 = 1$ ، $x_2 = 4$ و $y_2 = 2$ ، $x_3 = 5$ و $y_3 = 3$ ، $x_4 = 6$ و $y_4 = 4$. این جوابها را به صورت جفت های مرتب می نویسیم :

(۱، ۳) و (۲، ۴) و (۳، ۵) و (۴، ۶) . معلوم

است که جفت های مرتب (۲، ۴) و (۴، ۲) متفاوتند زیرا

اعداد $x = 4$ و $y = 2$ جواب معادله $x - y = 2$ می باشند

اما اعداد $x = 2$ و $y = 4$ جواب آن نیستند . بنابراین

$(2, 4) \neq (4, 2)$ و بطور کلی $(x, y) \neq (y, x)$.

جفت های مرتب (y, x) و (z, u) فقط و فقط وقتی

مساویند که $y = u$ و $x = z$ باشد . نتیجه می گیریم که جفت های

مرتب (x, y) و (x, z) فقط و فقط وقتی مساویند که

$x = y$ باشد که در نتیجه آن جفت مرتب (x, x) را خواهیم

داشت ..

اگر (y, x) جفت مرتب باشد در این صورت X را مختص اول یا عنصر اول یا تصویر اول یا طول و y را مختص دوم یا عنصر دوم یا تصویر دوم و یا عرض آن می گویند .

اغلب جفت مرتب (y, x) را به کمک یک پیکان نمایش

می دهند . برای این

کار عناصر X و Y را

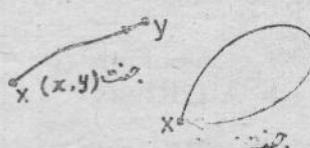
در صفحه تعیین کرده

و آنها را با پیکانی که

ابتدا ایش روی عنصر

اول و انتهایش روی

عنصر دوم است به هم



(شکل ۱)

۵) تاجی دایره‌ای (ناحیه مخصوص بین دو دایره هم مرکز) مفروض است. مجموعه نقاط قطعه‌ای از شعاع تاج واقع در روی آن را با X و مجموع نقاط واقع در پیرامون داخلی تاج را با Y نمایش می‌دهیم. برای تعیین هر نقطه از تاج کافی است یک نقطه x از مجموعه X و یک نقطه از مجموعه Y را در دست داشته باشیم. برای بدست آوردن نقطه‌ای از این تاج دایره‌ای بشعاع Ox و به مرکز O (شکل ۷) رسم می‌کنیم تا امتداد شعاع Oy را قطع کند. محل تقاطع نقطه مورد نظر (y , x) می‌باشد. به این ترتیب تاج را می‌توان مانند یک مجموعه از جفت نقاط (y , x) موردنظر برشی قرار داد که در آن X نقطه‌ای از قطعه X و y نقطه‌ای از دایره Y می‌باشد. یعنی تاج موردنظر عبارت از حاصل ضرب مستقیم قطعه X و دایره Y می‌باشد.

تمرینات:

۱) فرض کنیم $X = \{4, 7\}$ و $Y = \{2, 3, 5\}$. پیدا کنید $X \times Y$ و $Y \times X$ را. این دو حاصل ضرب را با هم مقایسه کنید. آیا تساوی $X \times Y = Y \times X$ درست است؟

۲) مطلوب است حاصل ضرب مستقیم و نمودار:

$$Z \times Z = Z \quad (\text{a})$$

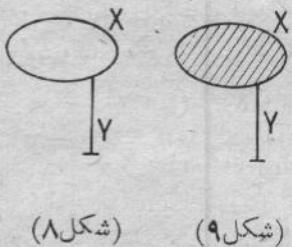
$$X = \{x \mid 0 < x < 2\} \quad (\text{b})$$

$$Y = \{y \mid y \in \mathbb{R}\} \quad (\text{c})$$

۳) فرض کنیم X مجموعه نقاط روی بیضی و Y مجموعه نقاط روی قطعه خط (شکل ۸) باشند. $X \times Y$ مجموعه نقاط چیست؟

۴) فرض کنیم X مجموعه نقاط داخل بیضی و Y مجموعه نقاط روی قطعه خط (شکل ۹) باشند.

$X \times Y$ مجموعه نقاط چیست؟



(شکل ۸)

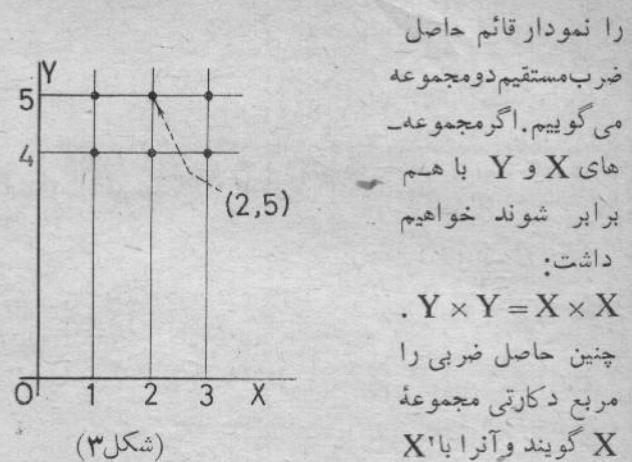
رابطه دوتایی

مثالها:

۱) در مجموعه R زیر مجموعه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

- (a) $A_1 = \{(x, y) \mid x = y\}$ بطوری که $A_1 \subset R^2$.
- (b) نمودار این زیرمجموعه نیمساز ربع I و III (شکل ۱۰) است.

۲) فرض کنیم $A_2 = \{(x, y) \mid y \in R \text{ و } x \in R \text{ و } x > y\}$. این مجموعه متشکل



(شکل ۳)

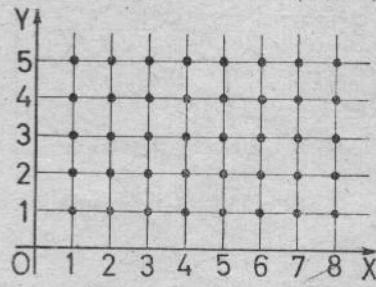
را نمودار قائم حاصل ضرب مستقیم دو مجموعه می‌گوییم. اگر مجموعه‌های X و Y با هم برابر شوند خواهیم داشت: $Y \times Y = X \times X$.

چنان حاصل ضربی را مربع دکارتی مجموعه X گویند و آنرا با X^2 نمایش می‌دهند.

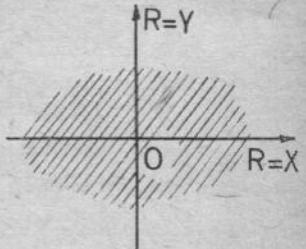
مثال: اگر $X = \{a, b, c\}$ باشد خواهیم داشت:

$$X^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

۲) فرض کنیم N مجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد. N^2 مجموعه‌ای است از جفت‌های مرتب که عناصر اول و دوم آن اعداد طبیعی می‌باشند. نمودار این جفت‌های مرتب عبارت از نقاطی است با مختصات صحیح که در ربع اول دستگاه مختصات قائم قرار دارند (شکل ۴).



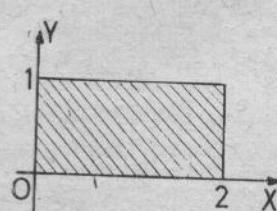
(شکل ۴)



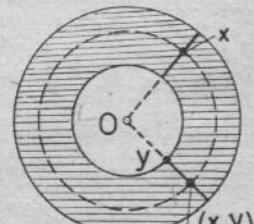
(شکل ۵)

۳) فرض کنیم R مجموعه اعداد حقیقی باشد (محور اعداد). R^2 مجموعه‌ای است متشکل از جفت‌های مرتب که عناصر آنها نیز اعداد حقیقیند. R را صفحه اعداد می‌نامیم. نمودار این مجموعه کلیه مختصات را پر می‌کند. (شکل ۶)

۴) فرض کنیم $\{(x, y) \mid 0 < x < 2 \text{ و } 0 < y < 1\}$ باشد. $X \times Y$ عبارت است از قسمتی از صفحه اعداد که بین خطوط $x = 0$ و $x = 2$ و $y = 0$ و $y = 1$ قرار گرفته است (شکل ۶).



(شکل ۶)



(شکل ۷)

$$b) A_1 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c), (d,d), (d,e), (e,d), (e,e), (f,f)\}$$

$$c) A_2 = \{(a,a), (a,b), (a,f), (b,b), (b,a), (b,f), (c,c), (d,d), (e,e), (f,a), (f,b), (f,f)\}$$

مثلث جفت (a,b) در مجموعه A_1 بدين معنى است که ملثهای a و b با هم مساویند و جفت (b,c) در مجموعه A_2 می رساند که مثلثهای b و c متشابهند و بالاخره جفت (a,f) در مجموعه A_2 می رساند که مثلثهای a و f معادلند. می بینیم که رابطه های تساوی، تشابه و تعادل را بین جفت مثلثهای مجموعه M ، زیر مجموعه های A_1 و A_2 و A مربوط به مربع دکارتی مجموعه M را بدست می دهند.

در مثالهای ۱ و ۲ دیدیم که هر رابطه دلخواهی بین جفتهای متشکل از عناصر مجموعه M را می توان به کمک مجموعه جفتهای مرتب بیان کرد بطوری که در آن فقط و فقط جفتهای مربوط به رابطه موردنظر قرار گیرند و بر عکس هر زیر مجموعه دلخواه A از مربع دکارتی M مجموعه M تعیین کننده رابطه ای است بین عناصر مجموعه M .

تعریف: زیر مجموعه دلخواه A از مربع دکارتی M را رابطه دوتایی بر روی مجموعه M گویند.

اگر جفت $(x,y) \in M^2$ متعلق به رابطه A باشد در این صورت می نویسند xAy و یا $(x,y) \in A$. اگر جفت (x,y) متعلق به رابطه نباشد می نویسند $(x,y) \notin A$. برای رابطه هایی که بیشتر از همه در ریاضیات با آنها مواجه هستیم شانه های مخصوصی مانند \parallel و \perp و \sim و \supset و \subset و غیره در نظر گرفته و تعریف کرده اند. (از این به بعد هر جا کلمه رابطه آمد منظور از آن رابطه دوتایی است).

مجموعه مختصات اول جفتهای مرتب را ناحیه طولها و مجموعه مختصات دوم جفتهای مرتب را ناحیه عرضها گوییم و آنها را به ترتیب با X و Y نمایش می دهیم. مثلاً رابطه « X دو واحد بزرگتر از y » بر روی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = M$ یک مجموعه از جفتهای مرتب به صورت زیر است:

$$A = \{(6,4), (5,3), (4,2), (3,1)\}$$

در این رابطه، ناحیه طولها $\{3, 4, 5, 6\} = X$ و ناحیه عرضها $\{1, 2, 3, 4\} = Y$ می باشد.

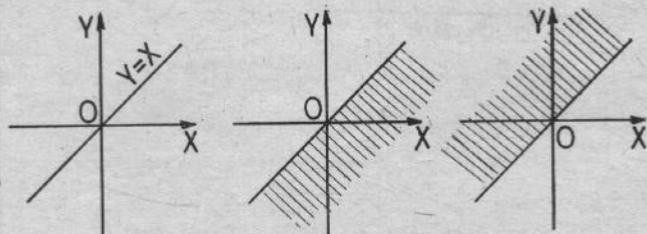
برای رابطه نیز نمودار پیکانی و نمودار قائم بکار می بردیم:

از کلیه نقاط قسمتی از صفحه است که زیر خط $x = y$ (شکل ۱۱) قرار گرفته اند.

بطوری که: $A_2 \subset R^2$ (c)

از کلیه نقاط قسمتی از صفحه است که بالای خط $x = y$ قرار

گرفته اند. (شکل ۱۲)

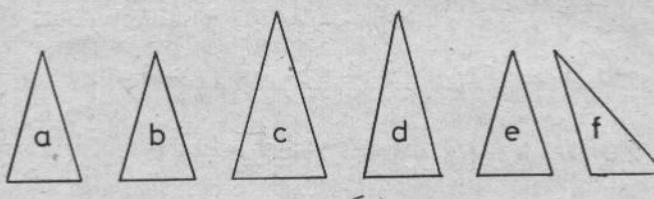


(شکل ۱۱) (شکل ۱۲)

با انتخاب زیر مجموعه A_1 متشکل از جفتهای مرتب که برای آنها $x = y$ می باشد خود به خود رابطه تساوی را برای مجموعه اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف کرده ایم: در رابطه تساوی عدد اول هر جفت برای عدد دوم همان جفت می باشد. (مجموعه اصلی R^2 می باشد) با انتخاب زیر مجموعه A_2 متشکل از جفتهای مرتب که برای آنها عدد اول بزرگتر از عدد دوم می باشد رابطه بزرگتری را در مجموعه اعداد حقیقی تعریف کرده ایم.

به همین ترتیب با انتخاب زیر مجموعه A_3 متشکل از جفتهای مرتب که در آنها عدد اول کوچکتر از عدد دوم می باشد رابطه کوچکتری را در مجموعه مورد نظر تعریف کرده ایم.

(۲) فرض کنیم $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ مجموعه مثلثهای (شکل ۱۳) باشد. مثلثهای مجموعه M می توانند: (a) مساوی

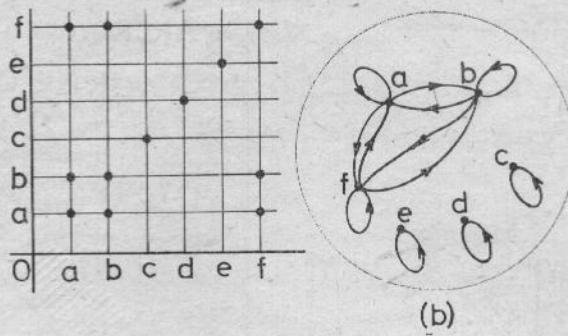


(شکل ۱۳)

باشند یا نباشند. (b) متشابه باشند یا نباشند. (c) معادل باشند یا نباشند. با دسته بندی کلیه جفت مثلثهای مساوی و متشابه و معادل مجموعه جفتهای مرتب را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$a) A_1 = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,a), (d,d), (e,e), (f,f), (c,c)\}$$

در شکل ۱۶ نمودارهای قائم و پیکانی رابطه «X» دو واحد از y بزرگتر است « بر روی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ مشاهده می‌شود .



(شکل ۱۷)

مثالهای دیگر رابطه دوتایی عبارتند از :

- بخش پذیری بر روی مجموعه اعداد صحیح ؛
- تساوی ، کوچکتری ، بزرگتری بر روی مجموعه
- اعداد طبیعی ، اعداد صحیح ، اعداد حقیقی ؛
- توازی ، تعامل ، تقاطع بر روی مجموعه خطوط ؛
- تساوی ، تشابه ، تعادل بر روی مجموعه شکلهای هندسی ؛
- هم ارزی بر روی مجموعه معادلات ؛
- مادر بودن ، پدر بودن ، دختر بودن ، برادر بودن بر روی مجموعه مردمان ؛
- ...

تمرینات :

$$1 - \text{در مجموعه } M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \text{ رابطه های}$$

زیر تعریف شده اند :

$$(a) x \text{ بر } y \text{ بخش پذیر است} . \quad (b) x \text{ و } y \text{ نسبت}$$

به هم اولند » .

مطلوب است نمایش این رابطه ها به صورت جفت های مرتب و ترسیم نمودارهای پیکانی و قائم آنها .

۲ - در مجموعه N اعداد طبیعی رابطه های زیر را در نظر می گیریم : (a) «تساوی» (b) «بزرگتری» (c) «کوچکتری» نمودارهای قائم این رابطه ها رارسم کنید .

۳ - نمودار قائم هر یک از رابطه های زیر را رسم

کنید :

$$A = \{(x, y) | x \in Z \text{ و } y \in Z \text{ و } y = x\} \quad (a)$$

مجموعه اعداد نسبی می باشد .

$$A = \{(x, y) | x \in R \text{ و } y \in R \text{ و } y = 2x + 1\} \quad (b)$$

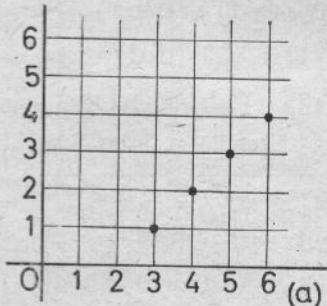
مجموعه اعداد حقیقی است .

$$A = \{(x, y) | x \in R, y \in R \text{ و } y \geq 0 \text{ و } y < x\} \quad (c)$$

$$A = \{(x, y) | x \in R, y \in R \text{ و } y \geq 0 \text{ و } y \leq x \text{ و } y < -x + 1\} \quad (d)$$

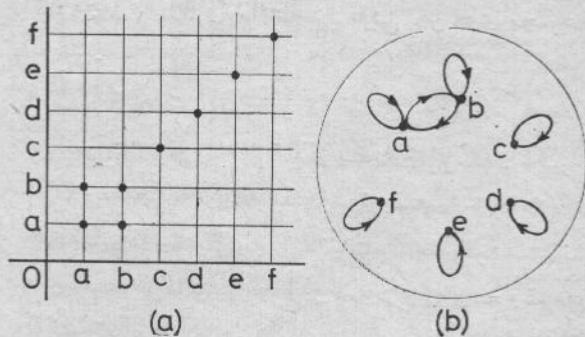
$$A = \{(x, y) | x \in R, y \in R \text{ و } y = |x|\} \quad (e)$$

$$A = \{(x, y) | x \in R, y \in R \text{ و } y^2 = x^2\} \quad (f)$$

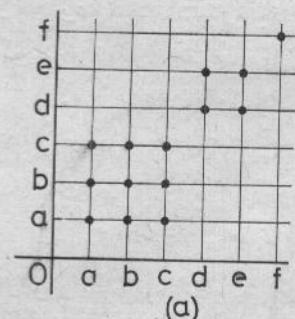


(شکل ۱۶)

در شکلهای ۱۵، ۱۶ و ۱۷ به ترتیب نمودارهای رابطه های «تساوی» ، «تشابه» و «تعادل» بر روی مجموعه مشاهده های $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ (شکل ۲) مشاهده می شود . در این نمودارها نقاطی که معرف یک عنصر از مجموعه M می باشند دوبار نمایش داده نشده اند و به این جهت نمودار پیکانی آنها مطابق با شکلهای ۱۵ - b - ۱۶ - b = ۱۷ است .

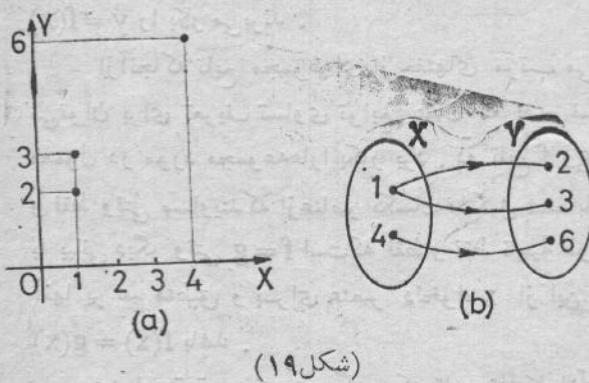


(شکل ۱۵)



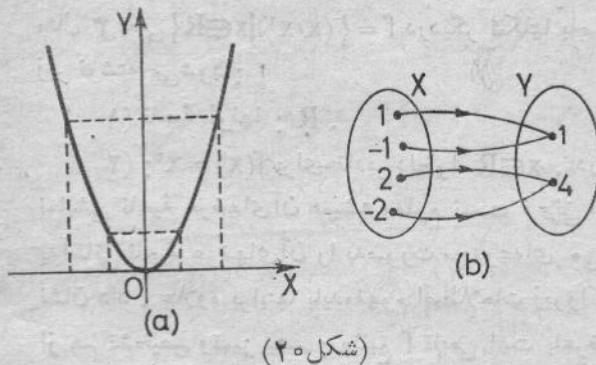
(شکل ۱۶)

نمی باشد زیرا که عناصر $\{1, 2\}$ و $\{1, 3\}$ دارای اولیه‌های یکسان می‌باشند. (شکل ۱۹).



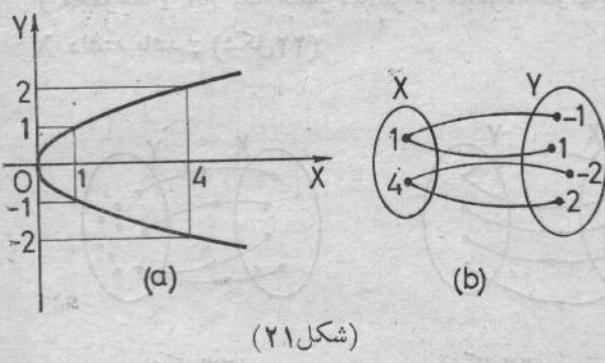
(شکل ۱۹)

۳- رابطه $\{A = \{(x, x^2) | x \in R\}\}$ یک تابع است، زیرا که اگر $x = u$ باشد $x^2 = u^2$ (شکل ۲۰) خواهد بود.



(شکل ۲۰)

۴- رابطه $\{A = \{(x^2, x) | x \in R\}\}$ یک تابع نیست، زیرا که در آن جفت‌های $(1, 1)$ و $(-1, 1)$ و $(2, 4)$ و $(-2, 4)$ وغیره موجودند. (شکل ۲۱)



(شکل ۲۱)

به جای کلمه «تابع» اغلب کلمه «تبدیل» را بکارخواهیم برد. اگر f تابعی با ناحیه طولهای X و ناحیه عرضهای Y باشد در این صورت آن را به صورت $Y = f(X)$ و یا

$X \rightarrow Y$ نمایش می‌دهند و آنرا تابع به فرم X در Y می‌نامند. اگر $f \in \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ باشد در این صورت X را آن‌گومنان با متغیر نامند و y را عرض تابع در X یا تبدیل عنصر X در تبدیل f یا عنصری که f عنصر X را به آن بدل می‌کند

II - تابع

رابطه X دو واحد بزرگتر از Y است را بر روی مجموعه $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ در ناحیه طولهای $X = \{3, 4, 5, 6\}$ و ناحیه عرضهای $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ یعنی رابطه:

$A = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\}$ را دوباره بررسی می‌کنیم.

با توجه بداینکه هر عدد طبیعی نمی‌تواند از بیش از یک عدد طبیعی دو واحد بزرگتر باشد نتیجه می‌گیریم که در نمودار پیکانی (شکل ۱۶) از هر نقطه مجموعه فقط یک پیکان منحصر به‌فرد می‌توان خارج کرد. این بدین معنی است که در نوشتن رابطه به صورت جفت‌های مرتب نمی‌توان دو جفت با اولیه‌های مساوی و ثانویه‌های مختلف پیدا کرد، و در نمودار قائم چنین رابطه‌ای بر روی هر قائم فقط یک نقطه منحصر به‌فرد خواهیم داشت. (شکل a-۱۶) چنین رابطه‌هایی را رابطه‌های تابعی و یا بطور ساده توابع گویند.

تعریف: تابع عبارت از چنان مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب است که دو جفت مختلف از عناصر آن دارای اولیه‌های یکسان نباشد.

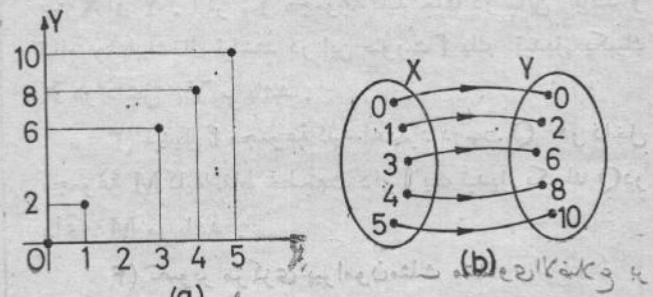
تابع را با حروف f, g, r, s, t نمایش می‌دهند.

رابطه دلخواه A که به صورت مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب می‌باشد وقتی و فقط وقتی تابع است که شرط زیر در مورد آن صدق کند: اگر $(x, u) \in A$ و $(x, v) \in A$ باشند $u = v$ باشد.

مثالها: ۱- رابطه:

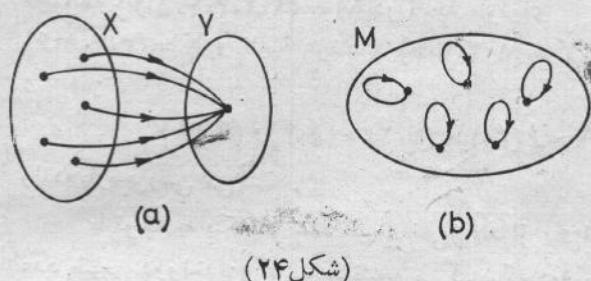
$f = \{(0, 0), (1, 2), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$ تابعی است با ناحیه طولهای $X = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ و ناحیه عرضهای $Y = \{0, 2, 6, 8, 10\}$ (شکل ۱۸)

۲- رابطه $\{A = \{(1, 2), (1, 3), (4, 6), (4, 5)\}\}$ یک تابع



و کلمه تابع (تابع) می‌باشد. (شکل ۱۸) (شکل ۱۸) (شکل ۱۸)

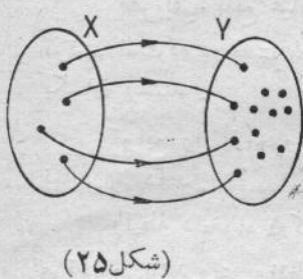
اگر مجموعه عرضهای تابع از یک عنصر منحصر به فرد تشکیل شده باشد چنین تابعی را ثابت گوییم (شکل ۲۶-a).



و اگر هر عنصر مجموعه X در تبدیل f به خودش بدل شود چنین تبدیلی (تابعی) را یکسان نامند (شکل ۲۴-۶).
به عنوان تابع ثابت می‌توان تابع $f(x) = x$ ، $x \in R$ و به عنوان تابع یکسان می‌توان تابع $f(x) = x$ را مثال آورد.

تابع تک مقدار یا تبدیل یکبیک

تعیین اف: تبدیل مجموعه X در داخل Y را تک مقدار



یا یکیک گویند اگر
عناصر مختلف مجموعه
 X به عناصر مختلف
از مجموعه Y بدل
شوند، یعنی از
 $x_1 \neq x_2$ نتیجه شود :
۲۵ شکل $f(x_1) \neq f(x_2)$
مثالها :

مثالها:

۱) $y = 2x - 1$ بر روی $R \rightarrow R$ مجموعه X را تک مقدار یا یکتا باشد، اگر f تبدیل یکبیک مجموعه X و Y گویند.

۲) تبدیل f مجموعه X بلیطهای فروش رفته بر روی
مجموعه Y جاهای موجود در سالن عبارتست از یک تبدیل یکبیک
بین X و Y . اگر Y مجموعه کلیه جاهای در سالن باشد و
تمام جاهای اشغال نباشند در این صورت f یک تبدیل یکبیک
 X در داخل Y میباشد.

۳) تبدیل f مجموعه کلیه اعداد درست Q در داخل مجموعه M کلیه نقاط خطجهت دار است یک تبدیل یکنیک در داخل M می باشد .

٤) تصویر مرکزی پیرامون مثلث متساوی الاضلاع بر روی دایره محیطی یکتبديل یکپیک نقاط پیرامون مثلث بر روی
محمود عمه نقاط دایره محیطی می باشد.

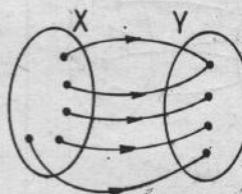
می گویند، اگر y تبدیل عنصر X معلوم باشد در این صورت X را تبدیل عکس عنصر y نامند. برای نمایش y علامت $y = f(X)$ را بکار می بردند.

از آنجاکه تابع مجموعه‌ای از جفتهای مرتب می‌باشد
می‌توان برای تعریف تساوی توابع همان تعریف تساوی
ممکن است که مجموعه‌هارا بکار برد. دو تابع f و g وقتی
و فقط وقتی مساویند که از عناصر یکسان تشکیل شده باشند،
با یکانی دیگر وقتی $f = g$ است که فقط و فقط ناحیه طولهای
آنها بر هم منطبق و برای عنصر x از این ناحیه
 $f(x) = g(x)$ باشد.

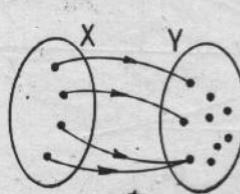
به این ترتیب نتیجه‌منی گیریم که تابع وقتی کاملاً معین و معلوم است که ناحیه‌طولهای آن و مقادیر عرضهایش به ازای هر یک از عناصر ناحیه‌طولهای معین و معلوم باشد . بنابراین تابع مثال ۳ یعنی $\{x \in X | x^2 = f\}$ در دیگر شکلها به صورت زیر نوشته می‌شود :

١) ناحية طولها : R

(۲) $f(x) = x^2$: برای مقادیر دلخواه $x \in \mathbb{R}$. در چنین نمایشی ناحیه عرضهای آن همیشه معلوم نیست، ولی اغلب به آسانی ناحیه عرضهای آن را به صورت مجموعه‌ای می‌توان نشان داد. علاوه بر اینها باید مفهوم اصطلاحات زیر را کاملاً از هم تشخیص و تمیز دهیم: «تابع f تابعی است با عرضهای روی Y » یا «تبديل بر روی مجموعه Y است» و «تابع f تابعی است با عرضهای در Y » یا «تبديل در داخل مجموعه Y ». مبدل X بروی Y خواهد بود به شرطی که هر عنصر از مجموعه Y اقلاییک عنصر متناظر در مجموعه طولهای معنی X داشته باشد. (شکل ۲۲)



(شکل ۲۲)

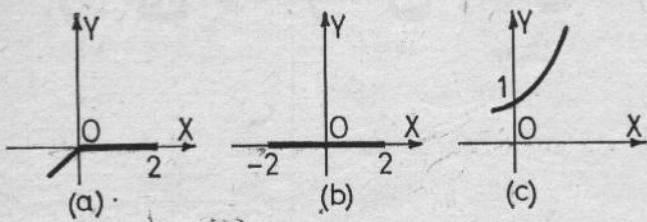


(شکل ۲۳)

اگر ناحیه عرضه‌ای تابع f زیرمجموعه‌ای از مجموعه Y باشد، در این صورت f تبدیل مجموعه X در داخل مجموعه Y است (شکل (۲۳)).

مثال $x \in R$, $f(x) = 2x$ یک تبدیل بر روی R می باشد،
تابع به فرم $f: R \rightarrow R$ است .
مجموعه اعداد حقیقی بر روی مدول آنها یا مدل R بر روی R + است .

- نمودار قائم چندتابع در شکل ۲۸ نمایش داده شده است. ناحیه طولها و مجموعه عرضهای هر یک را پیدا کنید.
آیا آین توابع تک مقدارند؟



(شکل ۲۸)

۹- مطلوبست نمودار قائم تابع زیر:

$$y = \begin{cases} x & \text{اگر } x < 0 \\ x^2 & \text{اگر } x \geq 0 \end{cases}$$

آیا این تابع تک مقدار است (تبدیل یکبیک است)؟

توابع معکوس

فرض کنیم f یک تابع مثل $\{x, f(x)\} \subseteq R$ باشد.
عنصرهای تابع f را جا بجا می کنیم و در نتیجه رابطه $g = \{(f(x), x) | x \in R\}$ را بدست می آوریم که تابع نیست.
رابطه g فقط و فقط تابع خواهد بود که از $y = g(x)$ و $(y, x) \in g$ معنی است که از $(z, y) \in f$ و $(x, y) \in f$ نتیجه شود $x = z$. برای تابع f این بدنی یا باید تابع تک مقداری باشد.

تعریف: اگر f یک تابع تک مقدار باشد تابع حاصل از جابجا کردن عناصر آن را عکس تابع f نامیده و به صورت f^{-1} نمایش می دهند.

از آنجاکه نقاط (x, y) و (y, x) نسبت به نیمساز ربع اول و سوم محورهای مختصات قرینه هم هستند به این جهت شکل تابع f^{-1} به کمک تصویر آینه ای شکل تابع f که آینه همان نیمساز ربع اول و سوم باشد بدست می آید.

مثالها:

$$-1 \quad f(x) = x - 2, \quad x \in \{3, 4, 5, 6\}, \quad f(x) = x - 2 \quad \text{وقتی} \quad y = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$-2 \quad f = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\} \quad \text{خواهیم داشت.}$$

$$-3 \quad f^{-1} = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\} \quad (\text{به شکل ۱۴ مراجعه شود})$$

$$-4 \quad \text{رابطه } f: R \rightarrow R, \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{یک تابع تک مقدار}$$

دنباله در صفحه ۳۱۰

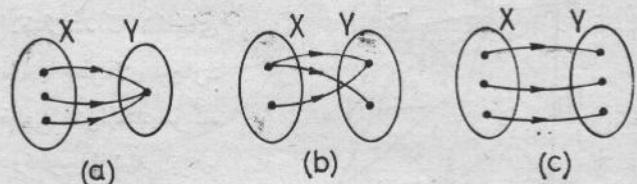
۵) تبدیل $f: R \rightarrow R$ که طبق قانون $x^2 = f(x)$ داده شده یک تبدیل یکبیک نمی باشد زیرا که اعداد مختلف x و $-x$ دارای یک عدد متناظر $x^2 = (-x)^2$ می باشند.

تمرینات:

۱- فرض کنیم f رابطه «..... در کشور قرار دارند» بر روی مجموعه شهرها باشد. مفهوم هریک از روابط را بیان کنید: (تهران) f ، (پاریس) f ، (مسکو) f ، (لندن) f . آیا f یک تابع است؟ نمودار پیکانی و قائم f را رسم کنید.

۲- فرض کنیم f رابطه «..... دارای کوه است» بر روی مجموعه کشورها باشد. مفهوم هریک از روابط را بیان کنید: (ایران) f ، (فرانسه) f ، (شوری) f ، (انگلیس) f ? آیا f تابع است؟

۳- آیا رابطه هایی که نمودار پیکانی آنها در شکل ۲۶ نشان داده شده اند تابع اند؟ کدام یک از آنها تبدیل یکبیک هستند؟



(شکل ۲۶)

۴- تابع $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 2|x| + 1$ داده شده است.

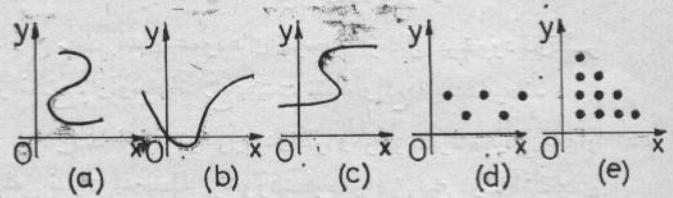
شکل آنرا رسم کنید.

۵- مطلوبست ناحیه عرضهای تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ و رسم شکل آن.

۶- مطلوبست ناحیه طولها و مجموعه عرضهای توابع زیر:

$$a) f(x) = \frac{1}{|x|}, b) f(x) = \frac{1}{x^2}, c) f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

۷- رابطه هایی دارای نمودار قائم به صورت شکل های ۲۷ می باشند. کدام یک از این رابطه ها تابع اند؟ و کدام یک تبدیل یکبیک اند؟



(شکل ۲۷)

بخی از خواص چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم

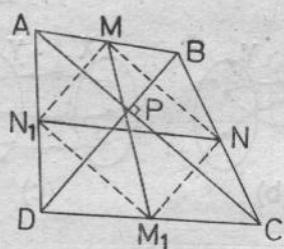
تئییه و تنظیم از: محمد معینی

ثانیاً در مثلثهای DAC و BAC داریم:

$$|AB'| - |BC'| = 2AC \cdot IP' \quad |AD'| - |CD'| = 2AC \cdot IP'$$

از این روابط و از رابطه (۲) نتیجه می‌شود $IP' = IP$ و چون P و P' دریک طرف I می‌باشند پس برهم منطبقند، یعنی خط BD بر خط AC عمود است.

ب- می‌دانیم که اوساط چهارضلع هر چهارضلعی محدب



الاضلاع مربوط مرربع مستطیل است و می‌دانیم که دو قطره ربع مستطیل با هم برابرند.

بر عکس، هرگاه M و N ، M_1 و N_1 به ترتیب اوساط ضلعهای AB ، BC ، CD و DA بوده و $MN, M_1N_1 = NN_1, MM_1$ باشد، متوازی الاضلاع MN و MN_1 بر AC عمود است. پس AC و MN مستطیل و MN بر MN_1 نیز برهم عمودند.

۲- چهارضلعی محدب محاطی

در هر چهارضلعی محدب محاطی که دو قطر آن برهم عمود باشند:

الف- هر خط که از محل برخورد قطرها بریک ضلع عمود شود از وسط ضلع مقابل به ضلع مزبور می‌گذرد؛

ب- پاهای عمودهای مرسوم از محل برخورد دو قطر بر اضلاع، و اوساط اضلاع، هشت نقطه واقع بریک دایره‌اند؟

ج- نقطه برخورد دو قطر و مرکز دایرة محیطی چهارضلعی نسبت به نقطه برخورد خطوط واصل بین اوساط ضلعهای مقابل، قرینه یکدیگرند؟

د- فاصله مرکز دایرة محیطی چهارضلعی از هر ضلع

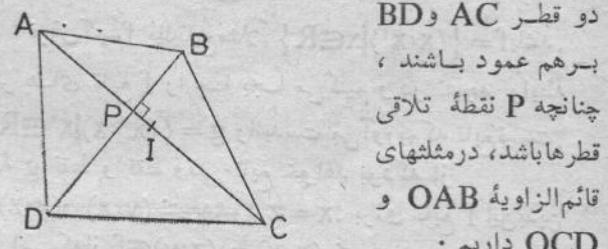
۱- چهارضلعی محدب غیرمحاطی

در هر چهارضلعی محدب که دو قطر آن برهم عمود باشند:

الف- مجموع مجذورات دو ضلع مقابل برابر است با مجموع مجذورات دو ضلع دیگر و برعکس؛

ب- پاره خطهای که اوساط ضلعهای مقابل را به هم وصل می‌کنند با هم برابرند و برعکس.

اثبات: الف- هرگاه در چهارضلعی محدب $ABCD$



$$AB' = OA' + OB' \quad CD' = OC' + OD'$$

نتیجه می‌شود که:

$$AB' + CD' = OA' + OB' + OC' + OC'$$

به طریق مشابه خواهیم داشت:

$$BC' + DA' = OA' + OB' + OC' + OD'$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین دورابطه خواهیم داشت:

$$AB' + CD' = BC' + DA' \quad (1)$$

بر عکس، اگر رابطه اخیر برقرار باشد می‌توانیم بنویسیم:

$$AB' - BC' = AD' - CD' \quad (2)$$

هرگاه I وسط AC و P و P' به ترتیب پاهای عمودهای مرسوم از B و D بر AC باشند.

اولاً از رابطه (۲) نتیجه می‌شود که P و P' در یک

طرف I واقعند یا در I برهم منطبقند زیرا:

$$[AB \geq BC \Rightarrow AD \geq CD] \Rightarrow$$

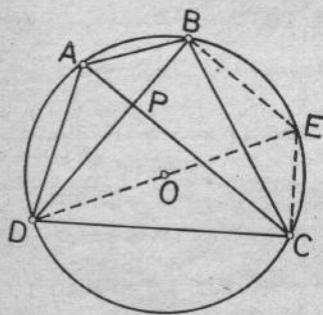
$$\Rightarrow [PA \geq PC \text{ و } P'A \geq P'C]$$

$$[AB \leq BC \Rightarrow AD \leq CD] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [PA \leq PC \text{ و } P'A \leq P'C]$$

نصف و تبرابر است) پس OK با نصف ضلع AD برابر است.
به ترتیب مشابه ثابت می شود که فاصله مرکز دایره محیطی از
هر ضلع با نصف ضلع روبروی آن برابر است.

هـ - قرینه مرکز ارتفاعی هر مثلث ثابت به هر ضلع آن
بر دایره محیطی آن واقع است. قطر BD از چهار ضلعی یکی از
ارتفاعهای مثلث ABC است. پس D قرینه مرکز ارتفاعی
مثلث ABC نسبت به ضلع AC است. برای رأسهای دیگر
نیز به همین ترتیب ثابت می شود.



زاویه داخلی (P) نیز 180° است، پس دو کمان CE و AB و
در نتیجه دو وتر AB و CE متساویند و در مثلث قائم الزاویه
الله CDE به فرض $DE = 2R$ داریم :

$$CD' + CE' = CD' + AB' = DE' = 4R$$

همچنین خواهیم داشت :

$$AD' + BC' = 4R$$

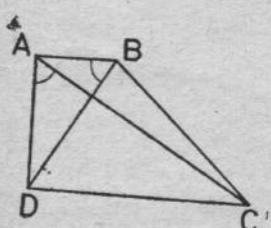
ز - از دورابطه بالا نتیجه می شود :

$$AB' + BC' + CD' + DA' = 8R$$

ح - از دو مثلث قائم الزاویه CPD و APB نتیجه می شود:
 $PA' + PB' + PC' + PD' = AB' + CD' = 4R$

۳ - ذوزنقه قائم

در ذوزنقه قائمی که دو قطر آن برهم عمود باشند،
ارتفاع یعنی ساق قائم و اسطه هندسی دو قاعده است.



اثبات - در ذوزنقه
ساق $ABCD$ بر
قاعدها عمود است و
دو قطر BD و AC نیز
بر یکدیگر عمودند. در
مثلث قائم الزاویه

دو زاویه CAD و ADB با هم برابرند.
دو مثلث قائم الزاویه ABD و ADC با هم متشابهند
و داریم :

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD' = AB \cdot CD$$

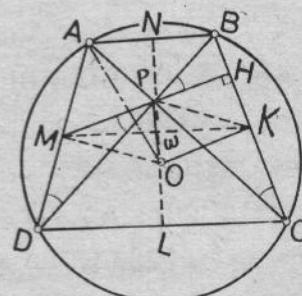
برابر است با نصف ضلع مقابله به آن ضلع :
۵ - قرینه هر رأس نسبت به یک قطر برمتر کز ارتفاعی
مثلث حاصل از سه رأس دیگر منطبق است.

و - مجموع مجذورات دو ضلع مقابله برابر است با
مجذور قطر دایره محیطی چهار ضلعی :

ز - مجموع مجذورات ضلعهای چهار ضلعی برابر است
با دو برابر هجده بیانه قطر دایره محیطی چهار ضلعی :

ح - مجموع مجذورات چهار قطعه قطرهای چهار ضلعی
برابر است با مجذور قطر دایره محیطی چهار ضلعی .

اثبات : چهار ضلعی محدب $ABCD$ را محاط در دایره
به مرکز O در نظر می گیریم بقسمی که دو قطر BD و AC و
از آن برهم عمود باشند و نقطه برخورد دو قطر آن P می نامیم:
الف - از P به M و سطخ ضلع AD وصل می کنیم و عمود



BC را بر ضلع PH فرود می آوریم؛ در
مثلث قائم الزاویه MPD که PM خط APD
میانه و تراست بانصف
و تر AD برابر است
در نتیجه دو زاویه

PBC و MDP با هم برابرند. در مثلث قائم الزاویه ADB و BPH با زاویه BCP برابر است. دو زاویه ADB و ACB متساویند، پس دو زاویه BPH و MPD نیز متساویند
و دو خط PH و MP در یک امتداد واقعند.

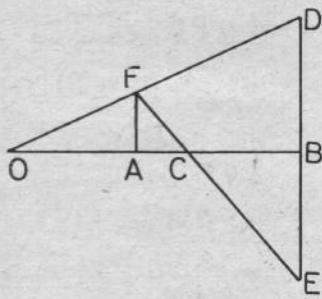
ب - اگر K ، N ، M ، L ، H ثابت باشد که N به ترتیب اوساط ضلعهای
 AB و DA ، CD و BC باشد، قبل از N ثابت باشد که LN و KM بر ابروند و در ω منصف یکدیگرند. دایره به قطر MK بر M و N نیز بر H می گزند. به طریق مشابه ثابت می شود که پاهای عمودهای
مرسوم از P بر سه ضلع دیگر چهار ضلعی نیز بر دایره مربوط
واقعند.

ج - چون K و H بر دایره به مرکز ω واقعند پس ω روی عمود منصف KH قرار دارد و اگر O مرکز دایره محیطی
چهار ضلعی باشد چهار ضلعی $OKHP$ ذوزنقه قائم است و
عمود منصف KH ساق PO را نیز نصف می کند یعنی ω
وسط OP است.

د - چون K و M منصف یکدیگرند چهار ضلعی
 $PMOK$ متوازی الاضلاع است و $OK = PM$ اما
با نصف AD برابر است (میانه و تر از مثلث قائم الزاویه با

چند مسئله از پاپوس

تنظیم از: داوید ریحان



مسئله ۳ - روی عمودی که در نقطه B بر OB رسم شده است از دو طرف طولهای $BD = BE$ را جدا می‌کنیم خط OD را رسم می‌کنیم. تا عمود مرسم از A بر OB را در نقطه F قطع کند.

روز رسم می‌کنیم تا AB را در C قطع کند. ثابت کنید که OC میانگین توافقی بین OA و OB است.

اثبات: با توجه به شکل داریم:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{FA}{DB} = \frac{FA}{BE} = \frac{AC}{CB} = \frac{OC - OA}{OB - OC}$$

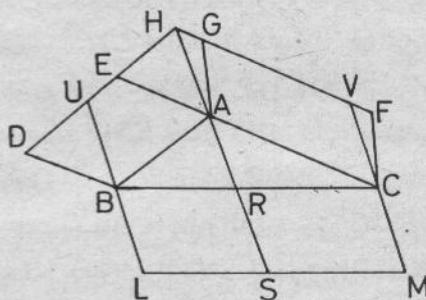
از رابطه اول و آخر به رابطه زیر می‌رسیم:

$$2OA \cdot OB = OC(OA + OB)$$

$$\frac{2}{OC} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$$

* در کتاب چهارم مجموعه ریاضی قضیه فیثاغورس به صورت زیر تعمیم داده شده است.

مسئله ۳ - روی مثلث خیر مشخص ABC (مطابق با



* در کتاب سوم پاپوس موسوم به «مجموعه ریاضی» به مسئله جالب زیر که معرف نمایش هندسی میانگینهای است برمی‌خوریم.

مسئله ۱ - روی قطعه خط AC نقطه B مخالف با O و سط پاره خط AC را اختیار کنید، عمود مرسم ب B دایره به قطر AC را در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند، فرض کنید که پای عمود مرسم از D بر OB نقطه F باشد. ثابت کنید که FD ، BD ، OD هندسی و میانگین توافقی پاره خطهای AB و BC است و ثابت کنید که هر گاه $AB \neq BC$ باشد آنگاه:

میانگین توافقی $>$ میانگین هندسی $>$ میانگین حسابی

اثبات: نقطه O و سط AC است پس:

$$OD = \frac{AC}{2} = \frac{AB + BC}{2}$$

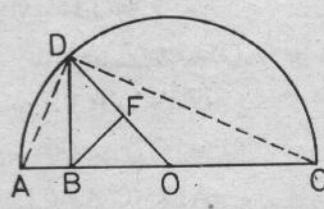
در مثلث قائم الزاویه

داریم: ADC

$$BD^2 = AB \cdot BC$$

در مثلث قائم الزاویه

داریم: BDO



$$DB^2 = FD \cdot OD \Rightarrow$$

$$AB \cdot BC = FD \cdot \left(\frac{AB + BC}{2} \right) \Rightarrow \frac{2}{FD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}$$

با توجه به شکل به سادگی دیده می‌شود که:

$$OD > BD > FD$$

* در کتاب سوم مجموعه ریاضی، پاپوس طریقه ترسیمی زیر را برای تعیین واسطه توافقی بین دو پاره خط OB و OA پیشنهاد کرده است (شکل را بینید).

آن به این سادگی نیست. یکی از این راه حلها توسط **فوهرمان R.A.Johnson** در کتاب **Modern Geometry** نوشته شده است.

* در کتاب هفتم مجموعه ریاضی، یکی از قضایای مربوط به مرکز ثقل را که معمولاً به نام **قضیه گولدن (1577-1672)** معروف است، ذکر کرده است. این قضایا را می‌توان چنین تعریف کرد:

(۱) از دوران یک کمان حول محوری واقع در داخل صفحه اش که کمان را قطع نمی‌کند، سطحی بدست می‌آید که مساحت آن برابر است با حاصل ضرب طول کمان در مسیری که مرکز ثقل کمان پیموده است.

(۲) هر گاه یک سطح مستوی حول محوری واقع در صفحه اش که با آن متقاطع نیست، دوران کند، حجم جسم دوران حاصل برابر است با حاصل ضرب سطح مذبور در طول مسیری که مرکز ثقل آن من پیماید.

بطوری که گفته شد پاپوس در اثبات قضیه‌های مرکز ثقل بر گولدن پیشی جسته است: در همین کتاب پاپوس مسئله معروف «مکان نسبت به سه یا چهار خط» را به صورت زیر عنوان کرده است.

«هر گاه p_1, p_2, p_3, p_4 طولهای پاره خط‌هایی باشند که از نقطه مفروض P رسم شده و با چهار خط مفروض زاویای مفروضی بسازند و در ضمن روابط $p_1p_2 = kp_3p_4$ یا $p_1p_3 = kp_2p_4$ را که در آن k عدد ثابتی است بسازند؛ این مسئله که صورت مکان P یک مقطع مخروطی است.» این مسئله که بوسیله آبولونوس حل شده است از لحاظ تاریخی حائز اهمیت است زیرا در ضمن تعمیم این مسئله به خط n بود که دکارت در سال ۱۶۳۷ موفق به فرمول درآوردن روش مختصات شد؛ معاصرین پاپوس بسیار کوچک‌ترند که این مسئله را تعمیم دهند. حالت خطی این مسئله که در متون هندسه دیراستانی دیده می‌شود و به نام «**قضیه استوارت**» موسوم است، در همین کتاب آمده است و به صورت زیر تعریف شده است:

«هر گاه A, B, C, D چهار نقطه از یک خط‌جهت دار باشند در این صورت برای اندازه‌های تجربی پاره خط‌های اویم:

$$(AD)(BC) + (BD)(CA) + (CD)(AB) + \dots + (BC)(CA)(AB) = 0$$

باید D اخارج از خط ABC باشید این تصور قدرت دارد. نسبت غیر تقوافقی می‌نماید و مقاطعه $(AB)(CD)$

شکل (متوازی الاضلاعهای $ABDE$ و $ACFG$) را در طرف خارج اضلاع AB و AC می‌کنیم. محل تقاطع امتدادهای FG و DE را H می‌نامیم و خطوط BL و DE

وموازی با HA رسم می‌کنیم. ثابت کنید که $BCML = ABDE + ACFG$ مساحت

اثبات: HA را ادامه می‌دهیم تا BC را در R و LM را در S قطع کند، و محل تقاطع LB را با U و محل تقاطع MC را با V نمایش می‌دهیم؛ خواهیم داشت:

(۱) $ABDE = BRSL$ مساحت $ABDE = ABUH$ مساحت $(زیرا مساحت دومتوازی الاضلاع که ارتفاعشان با هم برابر بوده و یک ضلع مربوط به همین ارتفاع با هم برابر باشند، با هم برابر است).$

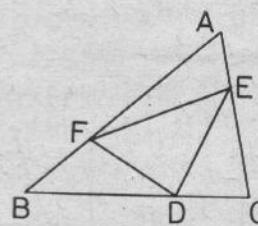
طوفین روابط (۱) و (۲) را جمع می‌کنیم تا رابطه مطلوب بدست آید.

* در کتاب هشتم مجموعه ریاضی، پاپوس قضیه زیر را اثبات کرده است:

مسئله ۴ هر گاه F, E, D, C, B نهضه واقع بر اضلاع ABC از مشابه AB, CA, BC باشد به گونه‌ای که

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$

در این صورت مرکز ثقل مثلثهای ABC و DEF بر هم منطبق خواهد بود.



این موضوع را یا به طریق تحلیلی یا به طریق تجزیه‌ای اثبات کنید:

اثبات: با تذکر این

نکته که مختصات نقطه‌ای که خط و اصل بین نقاط (a, b) و (c, d) را به نسبت $\frac{m}{n}$ قطع می‌کند عبارتست از:

$$\frac{nb+md}{m+n} \text{ و } \frac{na+mc}{m+n}$$

ومختصات مرکز ثقل یک مثلث که مختصات رأسهایش (b, c, d) و (a, e, f) است:

$$\frac{(b+d+f)}{3} \text{ و } \frac{(a+c+e)}{3}$$

می‌توان به طریق عبارتنداز:

تحلیلی این موضوع را اثبات نمود. ولی طریق تجزیه‌ای

شیوه‌ی عموی به روش بر نامه‌ای

ترجمه: باقر مظفر زاده

فصل دوم - پیوند شیمیائی و ساختمان مولکول
اینکمی دانید که حالت الکترونها دراتم (انرژی، اندازه شکل و جهت اربیتالها، و همچنین جهت اسپین) با چهار عدد کوانتمی معین می‌شود. برطبق اصل پائولی، در هر اربیتال بیش از دو الکtron جانمی گیرد. با توجه به این اصل و با دانستن انرژی نسبی اربیتالها می‌توانید هیئت الکترونی اتمهای را که در حالت اصلی قراردارند، نشان دهید.

یکی از مهمترین مسایل شیمی توضیح مکانیسم تشکیل پیوند بین اتمها در مولکول و نمایش آن است.

در این بخش تصوری از پیوندهای کووالانسی و یونی بددست خواهید آورد، با نمودارهایی که توزیع تراکم الکترونی در مولکول را نشان می‌دهند، آشنا خواهید شد. این نمودارها امکان می‌دهند تا شکل خود مولکول را پیش‌بینی کنید.

ذر صفحه‌ مقابل —

مفهوم تابع (ذنباله صفحه ۲۰۵)

با ناحیه عرضهای ∞ و 0 می‌باشد. تابع عکس آن عبارتست از $\{x\} = \{-1/\sqrt{x}\}$ با ناحیه طولهای ∞ و 0 .

ناحیه عرضهای ∞ و 0 .

برای آنکه آنرا بر حسب ناحیه طولها و عرضهای تابع به ازای هر عنصر ناحیه طولها بنویسیم فرض می‌کنیم $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ، در این صورت $x = t^2$ و $t = \sqrt{x}$ را چنین می‌نویسیم:

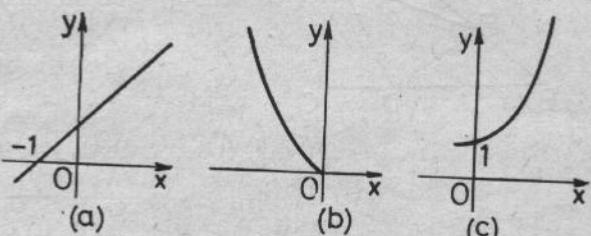
$$f^{-1}(t) = \sqrt{t^2} = |t| \quad t \in \mathbb{R}$$

یک تابع معین در مجموعه اعداد حقیقی و مثبت \mathbb{R}^+ با عرضهای در مجموعه \mathbb{R}^+ می‌باشد یعنی $x = f^{-1}(t)$.

تمرینات:
۱- مطابقت رسم نمودارهای توابعی که عکس آنها

شکل ۲۹

در شکل ۲۹ آمده است.



۲- تعیین کنید آیا هر یک از توابع زیر دارای تابع عکس می‌باشد یا نه؟ سپس ناحیه طولها و عرضهای تابع را به ازای هر عنصر از ناحیه طولهای هر یک از توابع معکوس بدست آورید. نمودار قائم این توابع و عکس آنها را نیز رسم کنید:

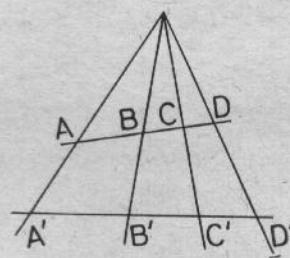
- a) $y = x$ $x \in \mathbb{R}$ d) $y = |x|$ $x \in \mathbb{R}^-$
- b) $y = 3x + 1$ $x \in \mathbb{R}$ e) $y = |x|$ $x \in \mathbb{R}^+$
- c) $y = |x|$ $x \in \mathbb{R}$ f) $y = x^2 - 1$ $x \in \mathbb{R}$
- g) $y = x^2 - 1$ $x \in \mathbb{R}^+$ h) $y = x^2 - 1$ $x \in \mathbb{R}^-$
- i) $y = x^2$ $x \in \mathbb{R}^-$

چهار نقطه D و C و B و A واقع بر یک خط را می‌توان به صورت

تعریف کرد و عبارتست از نسبت نسبتها بی که

C و D خط AB را می‌برد.

در کتاب هفتم مجموعه ریاضی، پاپوس ثابت می‌کند که اگر چهار خط شعاعی بوسیله دو قاطع به ترتیب در D, C, B, A و D', C', B', A' قطع شود، دو نسبت متقاطع (A'B', C'D') با هم برابرند. به بیانی



دیگر، نسبت متقاطع چهار نقطه واقع بر یک خط در اثر تصویر کردن تغیر نمی‌کند. این یکی از قضایای اساسی هندسه تصویری است.

کتاب هفتم شامل راه حلی بر مسئله زیر است:

مسئله: در دایره‌ای مثلثی محاط کنید که اضلاع و یا امتداد آنها از سه نقطه مفروض واقع بر یک خط مفروض گذر کنند.

این مسئله به نام مسئله کاستیلیون - کرامر معروف است، زیرا در قرن هشتم این مسئله در حالتی که سه نقطه واقع بر یک خط نیستند بوسیله کرامر تعمیم داده شد و حل این تعمیم در سال ۱۷۷۶ بوسیله کاستیلیون انتشار یافت. راه حل هایی نیز بوسیله لاغرانژ، اوولر، لوئیلیه، فوس، لکسل در سال ۱۷۸۰ داده شد. سالها بعد یک پسر بچه شانزده ساله با استعداد آلمانی بدنام جمودانو این مسئله را به صورت محاط کردن یک n ضلعی که اضلاع از سه نقطه مفروض بگذرند، در یک دایره عنوان کرد و خودش را حل ظرفی برای آن ارائه داد. پونسله نیز این مسئله را با جانشین کردن دایره بوسیله یک مقطع مخروطی دلخواه، گسترش بیشتری داد.

در کتاب هفتم پاپوس همچنین اولین عبارات مربوط به خواص مربوطه به سه مقطع مخروطی داده شده است.

در کتاب هشتم نیز مانند کتاب هفتم به مسئله برمی خوریم که احتمالاً مبدع آنها پاپوس است. در این کتاب به مسئله ساختن یک مقطع مخروطی که از پنج نقطه مفروض بگذرد برمی خوریم. یکی از جالب ترین احکامی که احتمالاً از خود پاپوس است در ابتدای مقاله و به صورت مسئله ۴ ذکر گردید.

۱۷- تشکیل بسیاری از یونها را می‌توان با تمایل اتمها در بسته‌آوردن هیئت الکترونی شامل... الکترون توضیح داد.

پاسخ ۱۸: H₀

۱۹- جفت الکترون که اتمهای کلر C₁: و ئیدروژن ..

H₀ را با هم پیوند می‌دهد، همانطور که در فرمول لیوئیس برای مولکول کلرور ئیدروژن دیده می‌شود...، اربیتالهای خارجی آنها را کامل می‌کند.

پاسخ ۲۰: جفت الکترون مشترک

۲۱- فرمول لیوئیس برای مولکول کلر... است.

پاسخ ۲۲: تعلق

۲۳- وقتی که الکترونها از اتمهای یک عنصر به اتمهای عنصری دیگر منتقل می‌شوند، ترکیبی بوجود می‌آید که دارای ذرات باردار یعنی... است. پیوند بین این ذرات را ... می‌نامند.

پاسخ ۲۴: H × O × H

۲۵- اتم سدیم با... یک الکترون می‌تواند هیئت الکترونی اکت را بست آورد.

پاسخ ۲۶: کووالانسی

۲۷- از فرمول لیوئیس برای ازت (N₃): برمی‌آید که اتم ازت برای بسته‌آوردن هیئت الکترونی اکت به تشکیل... جفت الکترونی نیاز دارد. این موقعیت در مولکول آمونیاک حاصل می‌شود که تشکیل آن را می‌توان به این طریق نشان داد:....

پاسخ ۲۸: Br : P : Br :
.. ..
: Br : ..

۲۹- فرمول لیوئیس برای مولکول ازت یعنی N₃: طریقه دیگر نمایش تکمیل لایه الکترونی است. هر اتم ازت با تشکیل سه جفت الکترونی هیئت الکترونی پیدا می‌کند.

H : C : : O :
..
H

پاسخ ۳۰:

۱- دو الکترون می‌تواند در اربیتال ۱s جاگیرد. اربیتال پرشده ۱s که با علامت ۱s² ۱s¹ مشخص می‌شود، هیئت الکترونی پایدار عنصر... است.

پاسخ ۲: ۱s² 2p^۶ ۲s^۲ ۲p^۳ ۳s^۲ ۳p^۶

۳- اگر الکترونها ی را که دارای بیشترین مقدار اربیتال هستند، الکترونها خارجی آن اتم بنامیم، پس برای پرشدن اربیتالهای s و p لایه خارجی اتمهایی که پس از هلیم قرار دارند،... الکترون لازم است.

پاسخ ۴: ۱

۵- وقتی که تشکیل پیوند شیمیایی را مورد بحث قرار می‌دهیم مناسب‌تر آن است که از فرمول لیوئیس استفاده کنیم، یعنی هسته و تمام الکترونها داخلی را با علامت عنصر و الکترونها خارجی را با نقطه مشخص کنیم. مثلاً فرمول لیوئیس برای اتم لیتیم Li₀ است. فرمول لیوئیس برای اتم سدیم و پتاسیم به ترتیب... و... است.

پاسخ ۶: Mg₀, Ca₀, Mg₀, Ca₀

۷- چون هیئت الکترونی اتم کربن که در حالت اصلی قرار دارد،... است، پس اتم کربن (C با عدد اتمی ۶) الکترون خارجی دارد.

پاسخ ۸: P

۹- حداقل عدد الکترونها خارجی s و p در اتم نئون... است. این الکترونها را معمولاً جفت جفت در اطراف علامت عنصر نشان می‌دهند. با در نظر گرفتن این راه نمایش الکترونها، فرمول لیوئیس را برای اتم نئون بنویسید.

پاسخ ۱۰: اسپینهای

۱۱- چون الکترونها یکدیگر را می‌رانند، اگر اربیتالهایی با انرژی پکسان در دسترس باشد، ترجیح می‌دهند یک اربیتال را اشغال نکنند. به همین جهت اتم اکسیژن (O₂) که در حالت عادی قرار دارد، دارای دو الکترون جفت نشده است. با در نظر گرفتن این اصل، فرمول لیوئیس را برای اتم اکسیژن بنویسید.

پاسخ ۱۲: ۱s^۲ ۲s^۲ ۲p^۱ x ۲p^۱ y ۲p^۱ z

: F:

۱۳- چون همه هالوژنها، همانند فلوئور، در گروه هفتم جدول تناوبی قرار دارند، پس برای تکمیل ساختمان لایه‌های خارجی خود... الکترون کم دارند.

پاسخ ۱۴: ازدست می‌دهد

۱۵- هالوژنها نیز (مشلاً فلوئور) به طریق مشابه با سدیم یک الکترون... و بدیون Hal تبدیل می‌شوند که فرمول لیوئیس برای آن چنین است ...

پاسخ ۱۶: انتقال (واگذاری)

پاسخ ۱۷: هشت

۱۸- فرمول لیوئیس برای اتم نیدروژن ... است .
اتمهای نیدروژن در نتیجه جفت شدن الکترونها باهم پیوند می یابند و به این ترتیب لایه های الکترونی خارجی خود را کامل می کنند . تکمیل لایه های الکترونی خارجی را برای اتم های نیدروژن می توان به صورت $H:H$ نشان داد .

پاسخ ۱۹: هجده

۲۰- با اینکه اتم های کلر با گرفتن یک الکترون از اتم های دیگر مانند سدیم، می توانند هیئت الکترونی اکت پیدا کنند، اما هیئت الکترونی اکت در نتیجه ایجاد ... بین اتم های یکسان نیز می تواند تشکیل شود .

پاسخ ۲۱: بیست و یک

۲۲- اصطلاح «کووالانسی» معمولاً برای پیوندهای بکار می رود که به وسیله جفتهای الکترونی بوجود می آیند و این جفتهای الکترونی به یک اندازه به اتم های پیوند یافته دارند .

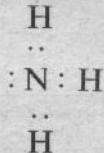
پاسخ ۲۳: یونها
یونی

۲۴- با استفاده از فرمول لیوئیس نشان دهید که مولکول H_2O در نتیجه جفت شدن الکترونها که در ابتدا به اتم های نیدروژن و اکسیژن تعلق داشت، بوجود می آید .

پاسخ ۲۵: از دستدادن

۲۶- برای لایه الکترونی خارجی اتم سدیم بوجود آوردن هیئت الکترونی اکت از راه تشکیل جفت الکترونها دشوار است و این واقعیت که سدیم پیوندهای باثبات تشکیل نمی دهد، با بوجود نیامدن هیئت الکترونی اکت از راه تشکیل جفت الکترونها در اتم سدیم مطابقت دارد .

پاسخ ۲۷: سه



۲۸- بادرنظر گرفتن ویژگی های هیئت الکترونی اتم های

فسفور و برم (P⁻ و Br⁻)، فرمول لیوئیس را برای ترکیب

قابل امکان آن دو با یکدیگر نشان دهید .

پاسخ ۲۹: اکت

۳۰- در مولکول فرمالدئید دو جفت الکترون بین اتم های کربن و اکسیژن به شرکت گذاشته شده است . فرمول لیوئیس برای مولکول فرمالدئید چنین است

پاسخ ۱: هلیم

۲- نئون و آرگون در گروه گازهای بی اثر پس از هلیم قرار دارند . هیئت الکترونی آنها به ترتیب عبارت است از ... و

پاسخ ۳: هشت

۴- ساختمان اریتالهای اتم های لیتیم، سدیم و پتاسیم نشان می دهد که هر یک از اتم های این عناصر در اریتال خارجی خود ... الکترون دارد .

پاسخ ۵: Na⁺ و K⁺

۶- هر یک از اتم های بریلیم (Be^{[1s^2]2s^2}) ، منیزیم (Ca^{[1s^2]2s^22p^63s^23p^6}) و کلسیم (Mg^{[1s^2]2s^22p^6}) در اریتال خارجی خود ... الکترون دارد و فرمول لیوئیس برای آنها به ترتیب Be⁺... و ... است .

پاسخ ۷: ۱s²2s²2p⁴
۴

۸- در فرمول لیوئیس برای اتم کربن یعنی C. بین

الکترونها S و ... تفاوتی قابل نمی شود .

پاسخ ۹: هشت

Ne:

۱۰- هر جفت نقطه در فرمول لیوئیس الکترونها یعنی را که به یک اریتال تعلق دارند، نشان می دهد . در این صورت این الکترونها باید ... مخالف داشته باشند .

پاسخ ۱۱: O²⁻ یا O⁻

۱۲- اتم فلوئور (F⁻ با عدد اتمی ۹) ، همانطور که از هیئت الکترونی آن ...، و فرمول لیوئیس برای آن ... پیداست، در حالت اصلی دارای یک الکترون جفت نشده است .

پاسخ ۱۳: یک

۱۴- اتم معمولاً برای این درواکنش شرکت می کنند نا هیئت الکترونی خاص نزدیکترین گاز بی اثر را پیدا کنند . مثلاً اتم سدیم با هیئت الکترونی ۱s²2s²2p⁶3s¹ یک الکترون ... و در این عمل به یون Na^+ تبدیل می شود .

پاسخ ۱۵: بدست می آورند .

Hal:

۱۶- هیئت الکترونی اکت ، خاص نزدیکترین گازهای بی اثر، برای سدیم و فلوئور در نتیجه ... یک الکترون از اتم سدیم به اتم فلوئور بدست می آید .

۴۱- مولکولهایی که از اتمهای متفاوت تشکیل شده‌اند قطبی‌اند، یعنی دارای مماندی پل هستند. این به آن معنی است که جفت الکترون مشترک بیشتر اوقات در نزدیکی یکی از اتمهای تو اند و در نتیجه، در امتداد پیوند شیمیایی... پیدا می‌شود.

پاسخ: ۴۲: بگشود

۴۳- هیئت الکترونی هلیم چنین است: ..

پاسخ: ۴۴: ۲

۴۵- هیئت الکترونی اتم تیدرورژن... است. اریتال آن پرنده است و بنابراین یک الکtron، برای تشکیل پیوند، می‌تواند در آن راه یابد.

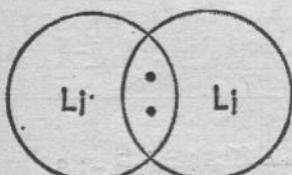
H:H پاسخ: ۴۶

۴۷- الکترونهایی که در تشیل پیوند H:H شرکت می‌کنند به یک اندازه به هردو هسته تعلق دارند و در حرکت روی مدار مشترک کاملاً آزادند. بنابراین اریتال پیوندی مشترک دارای... الکtron است.

پاسخ: ۴۸: - ۱ - ۲ -

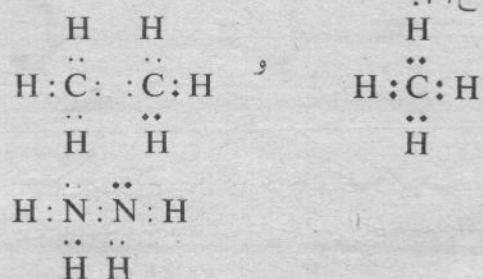
۴۹- هیئت الکترونی لیتیم (Li با عدد اتمی ۳)... است الکترونهای ۱s اتم لیتیم جفت شده‌اند، یعنی اسپینهای... دارند و نمی‌توانند در تشکیل پیوند را شرکت کنند.

پاسخ: ۵۰: Li:Li



۳۱- در حضور بازهای قوی ممکن است تیدرورژن از مولکول آب دور شود. در این عمل یونی تولید می‌شود که فرمول لیوئیس برای آن چنین است....

پاسخ: ۳۲:



۳۳- فرمول لیوئیس را برای این ترکیبات که پیوندهای دوگانه و سه‌گانه دارند بنویسید: استیلن C₂H₄، سیانور تیدرورژن HCN و اسید فرمیک HCOOH

پاسخ: ۳۴: شکل

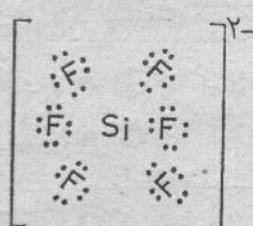
۳۵- ویژگی پیوند کووالانسی اشنترالکدوهسته اتم در.... است که از الکترونهای جفت نشده اتمهای آزاد تشکیل یافته است.

پاسخ: ۳۶

سه
یک
چهار

۳۷- پیوند کووالانسی ممکن است در نتیجه اشنترالکدوهسته در.... که به یک اتم تعلق دارد، بوجود آید. چنین پیوندی را گاهی پیوند کووالانسی کوئسوردیناسیونی می‌نامند.

پاسخ: ۳۸



۳۹- با در نظر گرفتن هم ارزی کامل هر چهار پیوند ریون آمونیم [NH₄⁺] و هرشش پیوند ریون -[SiF₄⁻] می‌توان گفت که در آنها ظرفیت از تو سیلیسیم به ترتیب مساوی با... و... است.

پاسخ: ۴۰:
مثبت
منفی
صفر

پاسخ ۴۱: دی پل

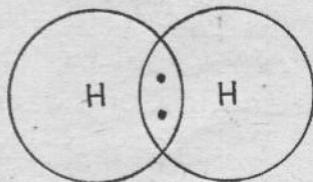
-۴۲ هرچه یکی از اتم در مقایسه با اتم دیگر، جفت الکترون را بیشتر به سوی خود... مولکول قطبی تر است.

پاسخ ۴۳: ۱۸^۱

-۴۴ چون اربیتال ۱s در هیلیم کاملاً پراست، یعنی... الکترون با اسپینهای مخالف دارد؛ پس اتم هیلیم از نظر شیمیایی بی اثر است.

پاسخ ۴۵: ۱۸^۱

-۴۶ اربیتالهای کروی ۱s دو اتم بُدرُزن می‌توانند



یکدیگر را قطع کنند (پوشانند). در این عمل الکترونها با تشکیل پیوند، دریک ناحیه از فضای سهیم می‌شوند. پیوند اتمهای بُدرُزن و تشکیل مولکول

بُدرُزن را به وسیله فرمول لیوئیس به صورت... یا به وسیله نمودار اربیتالی به این صورت نشان می‌دهند:

پاسخ ۴۷: دو

-۴۸ الکترونها یکی که در تشکیل پیوند H:H شرکت می‌کنند، باید اسپینهای مخالف داشته باشند، یعنی اگر عدد کوانتمی اسپین برای یکی از الکترونها $\frac{1}{2}$ ، برای

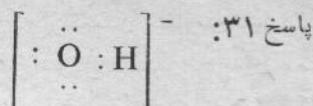
دیگری ... $m_s = \dots$

پاسخ ۴۹: ۱۸^۱۲۸^۱

مخالف

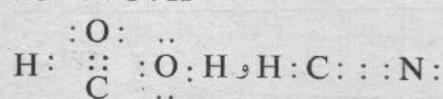
-۵۰ اربیتال ۲s در اتم لیتیم که فقط یک الکtron دارد، ممکن است بوسیله‌هایی که این اتم را در این شرکت مولکول Li₂ تشکیل شود.

فرمول لیوئیس را برای مولکول Li₂ بنویسید و نمودار اربیتالی آن را رسم کنید.



-۴۱ فرمول لیوئیس را برای این ترکیبات که پیوتساده دارند، بنویسید: متان CH₄، اتان CH₃، ویدرازین N₂H₄.

پاسخ ۴۳: H:C:::C:H



-۴۴ هردو فرمول H:O:H و O:H:O: درست

است. بنابراین به کمک فرمول لیوئیس نمی‌توان... مولکول را تشخیص داد.

پاسخ ۴۵: جفت الکترونی

-۴۶ ظرفیت (والانس) عنصر در ترکیباتی که پیوند کووالانسی دارند باعده جفت الکترونها مشترک معین می‌شود. مثلاً در مولکول NH₃، ظرفیت ازت و بُدرُزن به ترتیب مساوی با... و... است و در مولکول SiF₄ ظرفیت سیلیسیم مساوی با... است.

پاسخ ۴۷: جفت الکترونی

-۴۸ با استفاده از تصویری که از پیوند کوئور دیناسیونی بدست آورده‌اید، فرمول لیوئیس را برای آنیون -[SiF₆]⁴⁻ که از واکنش مولکول SiF₄ با دو یون F⁻ بوجود می‌آید، بنویسید.

پاسخ ۴۹: چهار و شش

-۵۰ ظرفیت اتم که همچون تعیین کننده عدد پیوندهای یک اتم با اتمهای دیگر است، همیشه باید... باشد، یعنی نمی‌تواند... یا مساوی با... باشد.

حل مسائل مسکان شماره: ۸۸

قطع می کنند و داریم :

$$(1) \frac{PA}{PB} = \frac{AN}{BB'} \quad (2) \frac{QD}{QC} = \frac{ND}{CC'}$$

دو مثلث MCC' و MBB' به حالت تساوی دوزاویه وضلع بین متساویند و $BB' = CC'$ و همچنین $AN = ND$ پس نسبتها طرف دوم روابط (۱) و (۲) باهم برابرند و در نتیجه نسبتها طرف اول آنها نیز باهم برابرند.

حل مسائل ویژه کلاس چهارم ریاضی

۸۸/۳- ترجمه فتح الله زرگری

هر گاه x و y دو عدد حقیقی باشند که در رابطه :

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1$$

صدق کنند، کمترین مقدار $\frac{y}{x}$ را معلوم کنید.

حل- اولاً باید داشته باشیم $1 \leq x \leq 2$ و $1 \leq y \leq 2$ داشته باشیم :

$$\sqrt{x-1} = 1 - \sqrt{y-1} \geq 0 \Rightarrow y \leq 2$$

$$\sqrt{y-1} = 1 - \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow y \leq 2$$

بنابراین باید داشته باشیم :

$$1 \leq x \leq 2 \quad 1 \leq y \leq 2$$

کسر $\frac{y}{x}$ وقتی کمترین مقدار را دارد که صورت آن کمترین مقدار و مخرج آن بیشترین مقدار خود را داشته باشد یعنی

$$z = \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \quad y = 1 \quad x = 2$$

۸۸/۴- ترجمه محمد معینی

ثابت کنید که هر گاه داشته باشیم :

حل مسائل ویژه کلاس های چهارم دبیرستان

۸۸/۱- از محمد معینی

هر گاه داشته باشیم :

$$A = \frac{9 + 2\sqrt{14}}{\sqrt{21} - \sqrt{14} + \sqrt{6} - 2}$$

$$B = \frac{5}{\sqrt{21} + \sqrt{14} + \sqrt{6} + 2}$$

حاصل AB را به ساده ترین صورت حساب کنید.

حل- به ترتیب داریم :

$$A = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

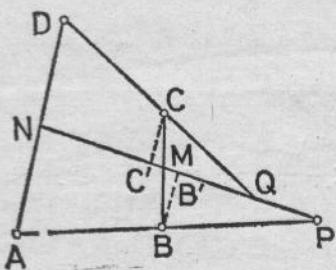
$$B = \frac{5}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$$

$$AB = 5$$

۸۸/۲- ترجمه از فرانسه

در چهارضلعی محدب $ABCD$ خط $\triangle ABC$ از وسط BC و همچنین از وسط AD می گذرد و امتداد AB را در P و امتداد CD را در Q قطع می کند. ثابت کنید که :

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QD}{QC}$$



حل- وسط BC را با M و سط AD را با N نمائیم. از B می نماییم. AD رسم CQ موازی با PN می کنیم که به ترتیب CQ را در B' و C' باشیم.

را بر حسب $a \neq 0$ بدست آورید:

$$\left\{ \begin{array}{l} XYZ = 1^{\circ} \\ \frac{1}{\log X} + \frac{1}{\log Y} + \frac{1}{\log Z} = \frac{1}{a} \end{array} \right.$$

حل - از معادله اول داریم:

$$\log XYZ = \log X + \log Y + \log Z = a$$

از ضرب طرفین این معادله با معادله دوم مفروض داریم:

$$(\log X + \log Y + \log Z) \left(\frac{1}{\log X} + \frac{1}{\log Y} + \frac{1}{\log Z} \right) = 9$$

هرگاه هریک از مقادیر X و Y و Z بزرگتر از واحد باشند، هر یک از مقادیر $\log X$ و $\log Y$ و $\log Z$ مثبت می‌باشند و می‌دانیم که برای مقادیر مثبت a و b و c داریم:

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

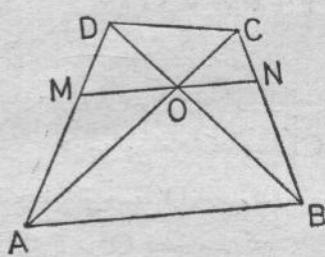
که تساوی فقط وقتی است که $a = b = c$ بنابراین:

$$\log X = \log Y = \log Z = \frac{a}{3} \Rightarrow X = Y = Z = 1^{\circ}$$

- ترجمه از فرانسه ۸۸/۷

ذوزنقه $ABCD$ قابل محیط شدن بریکدایره است. از نقطه تلاقی دوقطر آن خطی موازی با قاعده‌های CD و AB رسم می‌کنیم که ساق AD را در M و ساق BC را در N قطع می‌کند. ثابت کنید که:

$$AM + BN = AB \quad DM + CN = DC$$



حل - با فرض $BC = b$ و $AB = a$
 $DA = d$ و $CD = c$

چون ذوزنقه محیطی است پس:

$$a + c = b + d$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AD}{OC} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{AM}{AM + MD} = \frac{a}{a + c}$$

به طریق مشابه خواهیم داشت:

$$AM = \frac{ad}{a + c}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = a + b$$

اقلایکی از دوتساوی زیر را خواهیم داشت:

$$x + y = a + b$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1 = 0$$

حل - با فرض $y = bX$ و $x = aX$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} aX + bY = a + b \\ \frac{a}{X} + \frac{b}{Y} = a + b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} aX + bY - (a + b) = 0 \\ aY + bX - (a + b)XY = 0 \end{array} \right.$$

از جمع طرفین دورابطه اخیر و افزودن به $aX + bY$ به

طرفین رابطه حاصل خواهیم داشت:

$$X[aX + bY - (a + b)] +$$

$$+ Y[aX + bY - (a + b)] + [aX + bY - (a + b)] = 0$$

$$(X + Y + 1)[aX + bY - (a + b)] = 0$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1 \right)[x + y - (a + b)] = 0$$

چون حاصل ضرب دو عامل برابر صفر است پس اقلایکی از آن دو عامل برابر با صفر است.

- ترجمه محمد معینی ۸۸/۵

از معادله زیر مقدار X را بدست آورید:

$$\log_{10} 1^{\circ} + 6 \log_{10 X} 1^{\circ} - 12 \log_{100 X} 1^{\circ} = 0$$

حل - معادله به صورت زیرنوشته می‌شود:

$$\frac{\log 1^{\circ}}{\log X} + \frac{6 \log 1^{\circ}}{\log 10 X} - \frac{12 \log 1^{\circ}}{\log 100 X} = 0$$

$$\frac{1}{\log X} + \frac{6}{1 + \log X} - \frac{12}{2 + \log X} = 0$$

از این معادله با فرض $X = \log X$ نتیجه خواهد شد:

$$5X^2 - 3X - 2 = 0$$

$$(5X + 2)(X - 1) = 0$$

$$X = \log X = 1 \Rightarrow X = 1^{\circ}$$

$$X = \log X = -\frac{2}{5} \Rightarrow X = \frac{1}{\sqrt[5]{100}}$$

- از دستگاه زیر مقادیر بزرگتر از واحد x و y و z ۸۸/۶

مسئله به تعداد نامحدود جواب دارد زیرا هرچهار خط متوالی که بر چهار نقطه مفروض بگذرند دارای شرایط مطلوب می‌باشد.

حل مسائل ویژه گلاسهای پنجم ۵ بیرونستان

-۸۸/۹ فرستنده محمد حسنی نژاد انش آموز دیورستان هدف شماره ۳

$y - 1 = 0$ یک رأس و $x - 2y + 1 = 0$ معادله‌های دومیانه از مثلث ABC می‌باشند. معادله‌های ضلعهای این مثلث را بنویسید.

حل - مختصات A در هیچیک از معادله‌های داده شده صدق نمی‌کند، پس این معادله‌ها مربوط به میانه‌های BM و CN رأسهای B و C می‌باشند. هرگاه BM به معادله $y - 1 = 0$ و CN به معادله $x - 2y + 1 = 0$ با فرض (α, β) و (γ, δ) چون M وسط AC و N وسط AB است پس:

$$M\left(\frac{1+\gamma}{2}, \frac{3+\delta}{2}\right) \quad N\left(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3+\beta}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta + 1 = 0 \\ \frac{3+\beta}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta - 1 = 0 \\ \frac{1+\gamma}{2} - 2 \times \frac{3+\delta}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C \begin{cases} \gamma = 5 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

مختصات سه رأس مثلث معلوم است، از روی آنها معادله‌های ضلعهای آن به سادگی بدست می‌آیند.

$$AB : x + 2y - 7 = 0$$

$$BC : x - 4y - 1 = 0$$

$$CA : x - y + 2 = 0$$

-۸۸/۱۰ ترجمه محمد معینی

اگر داشته باشیم:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{x} \quad \cot \alpha \cos \beta = \frac{1}{y} \quad \cot \beta = \frac{1}{z}$$

مقدار k را از عبارت زیر پیدا کنید:

$$k = x^2 - y^2 - z^2$$

حل - داریم:

$$k = \frac{1}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} - \frac{1}{\cot^2 \alpha \cos^2 \beta} - \frac{1}{\cot^2 \beta}$$

$$BN = \frac{ab}{a+c}$$

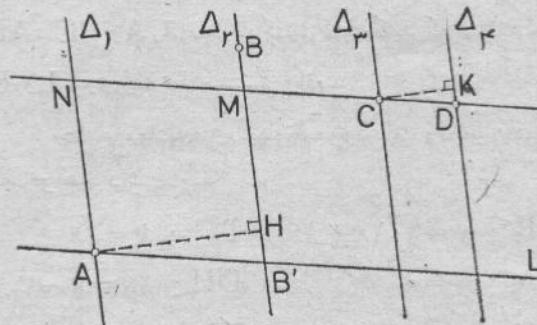
$$AM + BN = \frac{a(b+d)}{a+c} = a = AB$$

$$DM + CN = b + d - (AM + BN) =$$

$$= a + c - a = c = CD$$

-۸۸/۸ ترجمه فتح الله زرگری

چهار نقطه A و B و C و D واقع در یک صفحه مفروض است. براین چهار نقطه به ترتیب چهار خط متوالی $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ را چنان بگذرانید که نسبت فاصله دو خط Δ_1 و Δ_2 بفاصله دو خط Δ_3 و Δ_4 برابر باشد و مقدار معلوم باشد k .



حل - مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر امتداد خطوط Δ_1 و Δ_2 را به ترتیب در N و M قطع کند و خطی باشد که از A موازی با CD رسم شده باشد و نقطه تلاقی آن با Δ_4 را B' بنامیم و بالاخره CK و AH به ترتیب عمودهای مرسوم از A و C بر Δ_2 و Δ_4 باشند. به فرض داریم $AB'H = k.CK$ و دوم مثلث CDK و $AB'H$ متشابهند و نتیجه می‌شود:

$$AB' = k.CD$$

بنابراین روش ترسیم چنین می‌شود: خط L را از A موازی با CD رسم می‌کنیم و روی آن B' را چنان تعیین می‌کنیم که $AB' = k.CD$ باشد. B' را به B وصل می‌کنیم که Δ_2 امت وسیه خط دیگر را موازی با آن رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه B' را در دو طرف A می‌توانیم تعیین کنیم مسئله در حالت کلی دو جواب دارد.

هرگاه AB با CD موازی و $AB \neq k.CD$ باشد خطوط Δ_1 و Δ_2 بر AB و خطوط Δ_3 و Δ_4 بر CD منطبقند. اگر AB با CD موازی و $AB = k.CD$ باشد

یک از محورها را چنان اختیار می‌کنیم که A درربع اول و B در ربع چهارم آنها واقع باشد. هرگاه مقید باشیم که جهت صفحه را درجهت مستقیم، یا درجهت معکوس، اختیار کنیم مسئله فقط یک جواب دارد. اما اگر قید توجیه صفحه درجهت مستقیم یا معکوس در کار نباشد مسئله دو جواب خواهد داشت (برنیمایرہ به قطر AB علاوه بر' O نقطه' رابه فاصله ۴ از A و ۳ از B نیز اختیار می‌کیم).

۸۸/۱۲ ترجمه قوام‌نحوی

در صفحه محورهای مختصات متعامد چهار نقطه زیر مفروض است:

A(۵ و ۳)، B(۴ و ۸)، C(۰ و ۰)، D(۹ و ۳) از نقطه D سه عمود DK و DH را به ترتیب برخطوط CA و BC رسم می‌کنیم. ثابت کنید که سه نقطه H و K و L روی یک خط مستقیم واقعند.

حل - معادله‌های خطوط مورد عمل را تعیین می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} AB : y &= -2x + 16, \quad BC : y = 2x \\ CA : y &= 0, \quad DH : 2y = x - 3 \\ DK : 2y &= -x + 15, \quad DL : x = 9 \end{aligned}$$

$$H \left\{ \begin{array}{l} y = -2x + 16 \\ 2y = x - 3 \end{array} \right. \Rightarrow H \left(\frac{1}{2}, 15 \right)$$

$$K \left\{ \begin{array}{l} y = 2x \\ 2y = -x + 15 \end{array} \right. \Rightarrow K \left(\frac{15}{5}, 3 \right)$$

$$L \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ y = 9 \end{array} \right. \Rightarrow L(9, 0)$$

مالحظه می‌کنیم که:

$$\frac{2-6}{7-3} = \frac{6-0}{3-9}$$

پس سه نقطه H و K و L بر یک خط راست واقعند.

۸۸/۱۳ فرستنده محمد حسنی نژاد (ترجمه از روسی)

اگر α و β دوریشه اصلی و متمایز از معادله مثلثاتی

$$\sin(x + \lambda) = m \sin 2\lambda$$

باشند، ثابت کنید که:

$$m = \pm \frac{\cos \alpha - \beta}{2} \cos c(\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \\ k &= \frac{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = 1 \end{aligned}$$

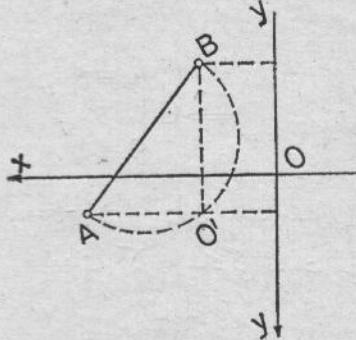
حل مسائل ویژه کلاس پنجم ریاضی

۸۸/۱۱ ترجمه فتح الله زرگری

دونقطه A و B به فاصله d از یکدیگر مفروضند. می‌خواهیم یک دستگاه محورهای مختصات چنان انتخاب کنیم که نسبت به آن (۱ و ۵) A و (۳ - ۲) B باشد. اولاً مقدار d چقدر باید باشد تا مسئله ممکن باشد؟ ثانیاً طریقه تعیین دستگاه محورها چیست؟

حل - اولاً یک دستگاه محورهای مختصات متعامد در جای دلخواه از صفحه رسم می‌کنیم و نسبت به ن دو نقطه (۱ و ۵) A و (۳ - ۲) B را تعیین می‌کنیم. اکنون کافی است که این دستگاه را در صفحه تغییر مکان دهیم تا' A' بر A و B' منطبق شود، اما دو پاره خط وقتی قابل انطباق نداشته باشد. بنابراین مسئله وقتی ممکن است که:

$$d = AB = A'B' = \sqrt{(5-2)^2 + (1+3)^2} = 5$$



ثانیاً یک روش تعیین دستگاه چنین است: به قطر AB نیمایرہ ای رسم می‌کیم و بر آن نقطه' O را بقسمی پیدا می‌کنیم که:

$$AO' = 5 - 2 = 3 \quad BO' = 1 - (-3) = 4$$

باشد. AO' امتداد محور طولها و BO' امتداد محور عرضها را مشخص می‌کند. چون طولهای هردو نقطه A و B مشبّند این دونقطه در یک طرف محور عرضها واقعند. AO' را ابتدا از' O و درجهت از' A به' O به اندازه ۲ واحد امتداد می‌دهیم و از نقطه حاصل خطی موازی با' BO رسم می‌کنیم که این خط محمل محور عرضها است. دونقطه A و B در طرفین محور طولها واقعند پس بر' BO نقطه به فاصله ۳ - | از' O و به-

فاصله یک از' B پیدا کرده از آن موازی با' AO' رسم می‌کنیم که محمل محور طولها است. با توجه به اینکه جهت مثبت هر

$$\frac{BH}{CG} = \frac{DB}{DC} = \frac{DC + BC}{DC} = 1 + \frac{q}{r} = \frac{r+q}{r}$$

$$\frac{CF \cdot CG}{BE \cdot BH} = \frac{p+q}{p} \times \frac{r}{r+q} = \frac{pr+qr}{pr+pq}$$

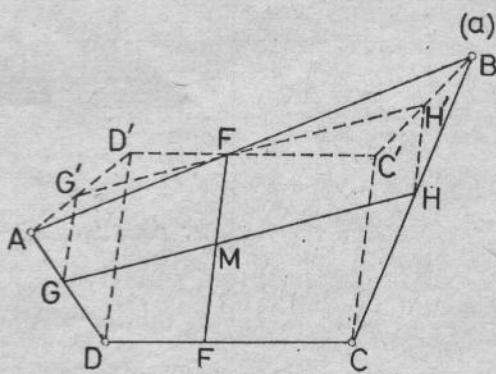
۸۸/۱۶ - ترجمه داوید ریحان

در فضای سه بعدی چهار نقطه A، B، C و D را در نظر می گیریم. خطوط AB و CD توسط خطی در نقاط E و F و خطوط BC و DA توسط خطی در نقاط H و G بقسمی قطع می شوند که :

$$\frac{AG}{GD} = \frac{BH}{HC}, \quad \frac{AE}{BE} = \frac{DF}{FC}$$

ثابت کنید که خطوط EF و GH در یک صفحه واقعند.

حل - متوازی الاضلاع CDD'C' را چنان رسم می کنیم که C'D' از E بگذرد و CC' و DD' با EF موازی باشند. از H موازی با CC' واز G موازی با DD' باشند.



رسم می کنیم که BC' و AD' را به ترتیب در H' و G' قطع می کنند. بر خط EF نقطه M را بقسمی انتخاب می کنیم که :

$$\frac{EM}{MF} = \frac{AG}{GD} = \frac{BH}{HC}$$

واز M به نقاط H و G وصل می کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{EF}{EM} = \frac{AD}{AG} = \frac{DD'}{GG'}$$

چون EM = GG' پس EF = DD' و چهار ضلعی GMG'E متوازی الاضلاع است و GM با G'E موازی و متساوی است. به طریق مشابه ثابت می شود که MH با H'E موازی و متساوی است. دو مثلث BEC' و AED' متشابهند و در

حل - بنابراین فرض α و β در معادله صدق می کنند:

$$\sin(\alpha + \lambda) = \sin(\beta + \lambda) = m \sin 2\lambda$$

با توجه به اینکه α و β متمایزند پس :

$$\alpha + \lambda + \beta + \lambda = 2k\pi + \pi$$

$$\lambda = (2k+1) \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin[\alpha + (2k+1) \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}] = \\ = m \sin[(2k+1)\pi - (\alpha + \beta)]$$

$$\pm \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = m \sin(\alpha + \beta)$$

$$m = \pm \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cosec(\alpha + \beta)$$

۸۸/۱۷ - ترجمه فتح الله زرسکری

معادله زیررا حل کنید :

$$\frac{1 + \operatorname{tg} X}{1 - \operatorname{tg} X} = (\sin X + \cos X)^2$$

حل - به ترتیب داریم :

$$\frac{\cos X + \sin X}{\cos X - \sin X} = (\sin X + \cos X)^2$$

$$(\cos X + \sin X)(\cos^2 X - \sin^2 X - 1) = 0$$

$$\cos X + \sin X = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} X = -1 \Rightarrow X = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos^2 X - \sin^2 X - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2X = 1 \Rightarrow X = k\pi$$

۸۸/۱۵ - ترجمه داوید ریحان

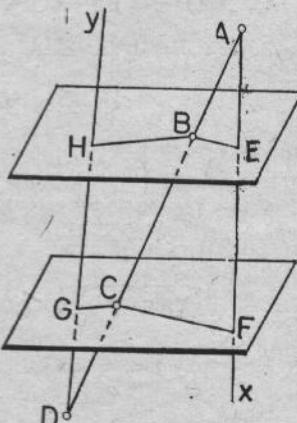
دو صفحه متوازی P و Q پاره خط مفروض AD را

در نقاط B و C بقسمی قطع می کنند که:

$$AB:BC:CD = p:q:r$$

دو خط AX و DY را در نظر می گیریم که دو صفحه P و Q را به ترتیب در E، F و H، G قطع کنند. ثابت کنید که :

$$\frac{CF \cdot CG}{BE \cdot BH} = \frac{rp + rq}{pr + pq}$$



حل - دو خط BE

و CF با هم و دو خط

و CG با هم

متوازیند و داریم :

$$\frac{CF}{BE} = \frac{AC}{AB} =$$

$$\frac{AB + BC}{AB} = 1 +$$

$$+ \frac{q}{p} = \frac{p+q}{p}$$

۸۸/۱۸ - ترجمه فتح الله زرگری
معادله زیر را حل کنید

$$\cos^2 X + \cos^2 11^\circ = \frac{3}{4} + \cos X \cos 11^\circ$$

حل - به ترتیب داریم :

$$4\cos^2 X - 4\cos X \cos 11^\circ + 4\cos^2 11^\circ - 3 = 0$$

$$\Delta' = 4\cos^2 11^\circ - 16\cos^2 11^\circ + 12 = 12\sin^2 11^\circ$$

$$\cos X = \frac{2\cos 11^\circ \pm 2\sqrt{3}\sin 11^\circ}{4}$$

$$\cos X = \frac{1}{2} \cos 11^\circ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 11^\circ$$

$$\cos X = \cos 60^\circ \cos 11^\circ \pm \sin 60^\circ \sin 11^\circ$$

$$\cos X = \cos(60^\circ \pm 11^\circ)$$

$$X = 360^\circ k \pm 71^\circ \text{ یا } X = 360^\circ k \pm 49^\circ$$

حل مسائل ویژه کلاس‌های ششم بیرون‌ستان

۸۸/۱۹ - ترجمه فتح الله زرگری

ثابت کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع زیر دارای یک مرکز تقارن است و مختصات این مرکز تقارن را بدست آورید:

$$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

یکان - تعیین مسئله را در مورد تابع زیر بررسی کنید:

$$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots + \frac{1}{x-n}$$

n عددی است صحیح و مثبت که دو حالت زوج و فرد آن باید

در نظر گرفته شود.

حل - اگر (b) و (a) مرکز تقارن منحنی باشد، دو نقطه

(x, y) و (2a - x, 2a - y) نسبت به I قرینه‌اند و

هر گاه مختصات اولی در تابع صدق کند از دومی نیز صدق خواهد کرد:

$$2a - y = \frac{1}{2a - 1 - x} + \frac{1}{2a - 2 - x} + \frac{1}{2a - 3 - x} \quad (1)$$

با انتخاب $x = 0$ داریم:

نتیجه دو زاویه EBC' و EAD' متساویند و

اما :

$$\frac{AG'}{AD'} = \frac{AG}{AD} = \frac{BH}{BC} = \frac{BH'}{BC'}$$

پس داریم :

$$\frac{AG'}{BH'} = \frac{AD'}{BC'} = \frac{AE}{EB}$$

دو مثلث AEG' و BEH' متشابه‌اند و در نتیجه دو امتداد یک خط مستقیم واقعند پس EG' و EH نیز در امتداد یک خط مستقیم می‌باشند و از آنجا نتیجه می‌شود که MG و MH نیز در امتداد یک خط راست قرار دارند یعنی M از GH می‌گذرد و با EF متقاطع است.

حل مسائل ویژه کلاس‌های ششم بیرون‌ستان

۸۸/۱۷ - ترجمه جواد فرض

ثابت کنید که دو دایره به معادله‌های زیر باهم برابر و بر یکدیگر مماس خارجند:

$$x^2 + y^2 + 3x - y = 0$$

$$x^2 + y^2 + x - 7y + 10 = 0$$

حل - به ترتیب داریم :

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{10}{4}$$

$$C_1(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \text{ و } R_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{10}{4}$$

$$C_2(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}) \text{ و } R_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

اولاً چون شعاعهای دو دایره باهم برابرند پس این دو دایره با هم برابرند. ثانیاً داریم :

$$C_1 C_2 = \sqrt{(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{7}{2})^2} = \sqrt{10}$$

$$C_1 C_2 = R_1 + R_2$$

خط المرکزین دو دایره با مجموع دوشعاع برابر است پس دو دایره مماس خارجی‌اند.

$$y = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-3} + \dots + \frac{2}{1} + \frac{2}{-1} + \dots + \\ + \frac{2}{-(n-3)} + \frac{2}{-(n-1)} = 0$$

یعنی I بر منحنی واقع است. اگر n فرد باشد داریم:

$$y = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-3} + \dots + \frac{2}{0} + \dots + \\ + \frac{2}{-(n-3)} + \frac{2}{-(n-1)} = 0$$

که تابع نا معین است. خط $\frac{n+1}{2}$ مجانب منحنی است و I نقطه تلاقی این مجانب با محور طولها است.

۸۸/۳۰ - فرستنده جواد فیض (ترجمه از کتابهای خارجی)

به فرض آنکه n عدد صحیح و مثبت و:

$$y = \sqrt[n]{(x+q)(x+q^2)\dots(x+q^n)} - x$$

باشد، وقتی $x \rightarrow +\infty$ حد y را بدست آوردید.

حل - فرض می کنیم:

$$(x+q)(x+q^2)\dots(x+q^n) = X^n$$

$$y = X - x = \frac{X^n - x^n}{X^{n-1} + X^{n-2}x + \dots + x^{n-1}}$$

$$y = \frac{(q+q^2+\dots+q^n)x^{n-1} + \dots}{X^{n-1} + X^{n-2}x + \dots + x^{n-1}}$$

هر یک از جمله های عبارت مخرج نسبت به x از درجه ۱ است و ضریب x^{n-1} در آن برابر یک است. پس هر گاه $x \rightarrow +\infty$ حد y برابر می شود با:

$$y = \frac{q+q^2+\dots+q^n}{n}$$

۸۸/۲۱ - فرستنده جواد فیض (ترجمه از انگلیسی)
دو دایره C_۱ و C_۲ به معادله های:

$$x^2 + y^2 + 2px - a^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2qx - a^2 = 0$$

در A و B متقاطعند. خط متغیر \triangle از A می گذرد و C_۱ را مجدداً در L تلاقی می کند. خطی که از B موازی با \triangle رسم شود C_۲ را مجدداً در M قطع می کند. اگر P وسط LM باشد مکان P را تعیین کنید.

حل - از حذف y بین دو معادله نتیجه خواهد شد که دو دایره در دو نقطه (a, 0) و (-a, 0) متقاطعند.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2b + \frac{11}{6} = \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2a-2} + \frac{1}{2a-3} \\ 2b + \frac{13}{12} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2a-2} \end{array} \right.$$

طرفین معادله دوم را از طرفین معادله اول کم می کنیم:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2a-3} - \frac{1}{2a} \Rightarrow a = 2 - \frac{1}{2}$$

$$a = 2 \Rightarrow b = 0, a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{35}{24}$$

تنها در ازاء $a = 2$ و $b = 0$ معادله (۱) به صورت معادله مفروض در می آید پس تنها نقطه (۰, ۰) مرکز تقارن منحنی است.

تعمیم - در مورد تابع:

$$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-n}$$

چون روش بالا را بکار ببریم خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2b + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \\ \quad = \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2a-2} + \dots + \frac{1}{2a-n} \\ 2b + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} = \\ \quad = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a-1} + \dots + \frac{1}{2a-(n-1)} \end{array} \right.$$

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2a-n} - \frac{1}{2a} \quad (\text{A})$$

$$4a^2 - 2an - n - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ یا } \frac{n+1}{2}$$

در ازاء $a = -\frac{1}{2}$ رابطه (A) نسبت به n یک اتحاد می شود

و چون این مقدار در حالت خاص $n = 3$ قابل قبول نبود

پس در حالت کلی نیز قابل قبول نیست. در ازاء $\frac{n+1}{2}$

I ($\frac{n+1}{2}$) داریم $a = b$ و به سادگی محقق خواهد شد که (۰, ۰)

مرکز تقارن منحنی نمایش تابع است: اگر n زوج باشد در

$$\text{ازاء } a = \frac{n+1}{2} \text{ داریم:}$$

با این شرط داریم :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1 = - \frac{\sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

-۸۸/۲۴ ترجمه فتح الله زرگری

ثابت کنید که اگر n عدد صحیح مثبت فرد باشد عدد زیر بر 11 بخش پذیر است :

$$N = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + 10^n$$

حل - می‌دانیم که اگر n عدد صحیح مثبت فرد باشد $a + b$ بر $a^n + b^n$ بخش پذیر است و چون داریم:

$$N = (1^n + 10^n) + (2^n + 9^n) + \dots + (5^n + 6^n)$$

پس N بر $11 = 1 + 10 = 11$ بخش پذیر است.

-۸۸/۲۵ فرستنده قوام‌نحوی

كسرهای زیر را در مبنای ۲ بنویسید :

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \frac{1}{31}, \dots$$

حل - با توجه به اینکه :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots = \frac{1}{n-1}$$

به ترتیب داریم :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = (0,010101\dots),$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \dots = (0,001001\dots),$$

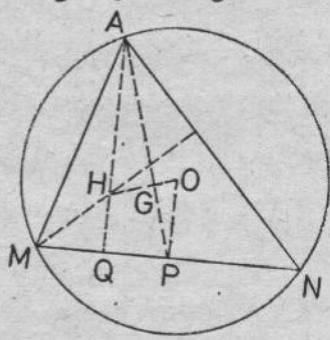
$$\frac{1}{15} = \frac{1}{16} + \frac{1}{256} + \dots = (0,00010001\dots),$$

$$\frac{1}{31} = \frac{1}{32} + \frac{1}{1024} + \dots = (0,0000100001\dots),$$

-۸۸/۲۶ ترجمه فتح الله زرگری

دایره ثابت C و نقطه ثابت A واقع بر آن مفروض است.

وتر MN از این دایره تغییر می‌کند، اما طول آن همواره برابر با مقدار ثابت 1 است. اگر H به ترتیب مرکز ارتفاعی و مرکز مثلث AMN باشند، مکان این نقطه را تعیین کنید.



حل - اگر P

وسط MN و Q پای

عمود وارد از A بر

P باشد، مکان MN

دایره Γ به مرکز O مجانس

است. نقطه G مجانتس

اگر m ضریب زاویه‌ای خطوط Δ یا AL و BM باشد، معادله‌های این خطوط می‌شود:

$$AL : y = mx + a \quad BM : y = mx - a$$

از حل این معادله‌ها با معادله‌های دوایر خواهیم داشت:

$$L(x = \frac{-2(p+am)}{1+m^2}, y = \frac{a-2mp-am^2}{1-m^2})$$

$$M(x = \frac{-2(q-am)}{1+m^2}, y = \frac{-a-2mq+am^2}{1+m^2})$$

$$P(x = \frac{p+q}{1+m^2}, y = \frac{-m(p+q)}{1+m^2})$$

از تقسیم طرفین دو تساوی اخیر بر یکدیگر $m = \frac{y}{x}$ بدست می‌آید که چون در تساوی مربوط به x منظور کنیم نتیجه خواهد شد:

$$x^2 + y^2 + (p+q)x = 0$$

-۸۸/۲۲ از جواب فیض

به شرط $ab = 3$ از روابط زیر مقادیر x و y را تعیین

کنید :

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z = a^2 \\ \cot g^2 x + \cot g^2 y + \cot g^2 z = b^2 \end{cases}$$

حل - از ضرب طرفین دو تساوی در یکدیگر نتیجه

می‌شود :

$$(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z)(\cot g^2 x + \cot g^2 y + \cot g^2 z) = 9$$

می‌دانیم که برای سه مقدار مشتت a و b و c داریم :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

که تساوی فقط وقتی است که $a = b = c$ بنا بر این :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z = \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{b}$$

$$x = y = z = k\pi + \operatorname{Arccot} \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

-۸۸/۲۳ ترجمه فتح الله زرگری

از روابط زیر مقدار $\cos 2\alpha$ را بدست آورید و بحث کنید:

$$45^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ و } \operatorname{tg} \alpha >$$

حل - با شرط $1 > \operatorname{tg} \alpha >$ معادله نمی‌تواند ریشهٔ مخفیع

داشته باشد پس وقتی جواب دارد که :

$$\triangle = m^2 - 4 > 0$$

$$\left\{ af(1) = -m > 0 \right. \Rightarrow m < -2$$

$$\left. 1 + \frac{b}{2a} = 1 - \frac{m}{2} > 0 \right.$$

حل مسائل گوناگون

I- از مسائل ارسالی تو سط: جو ادفیض

-۸۸/۳۸ هرگاه p و q دو عدد صحیح فرد باشند، ثابت کنید که معادله $x^2 + 2px + 2q = 0$ جواب گویا ندارد.

حل - جواب معادله عدد فرد نیست زیرا اگر x فرد باشد x^2 هم فرد است اما مجموع عدد فرد x^2 با عدد زوج $(px + q)$ نمی‌تواند صفر باشد. جواب معادله عدد زوج نیست، زیرا اگر x زوج باشد $x^2 + 2px$ مضرب ۴ است و چون q فرد و $2q$ مضرب ۴ نیست پس تساوی $x^2 + 2px = -2q$ غیر ممکن است. جواب معادله کسر نیست زیرا می‌توانیم بنویسیم $-2q = p^2 - (x + p)^2$ طرف دوم این تساوی عدد صحیح است و چون p نیز عدد صحیح است پس x نمی‌تواند کسری باشد. جواب معادله زوج نیست، فرد نیست، کسری هم نیست. بنابراین عدد گویا نیست.

-۸۸/۳۹ نامساوی زیر را برای زوایای مثلث ثابت کنید:

$$\sqrt{5\tan A + \tan B + \tan C} + \sqrt{5\tan B + \tan C + \tan A} + \sqrt{5\tan C + \tan A + \tan B} < 5\sqrt{\tan A \tan B \tan C}$$

حل .. او لاً باتوجه به طرف دوم رابطه لازم است که هر سه زوایه حاده باشند و گرنه رابطه بی معنی است.

ثانیاً برای عدد مثلث K داریم:

$$4K + 1 < 4K^2 + 4K + 1 \Rightarrow \sqrt{4K + 1} < 2K + 1$$

و برای سه عدد مثلث K و L و M خواهیم داشت:

$$\sqrt{4K + 1} + \sqrt{4L + 1} +$$

$$+ \sqrt{4M + 1} < 2(K + L + M) + 3$$

فرض می‌کنیم که:

$$K = \frac{1}{\tan A \tan B}, L = \frac{1}{\tan B \tan C}, M = \frac{1}{\tan C \tan A}$$

هرگاه A و B و C سه زوایه مثلث باشند داریم:

$$K + L + M = 1$$

و اگر این زوایا حاده باشند هر یک از مقادیر K و L و M

مثلث خواهد بود، بنابراین داریم:

نقطه P در تجانس به مرکز A و به نسبت $\frac{2}{3}$ است، پس مکان G

دایره Γ' است که در تجانس مزبور مجانس دایره Γ است.

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{2}{3}$$

می‌دانیم که در هر مثلث O مرکز دایره معیطی، G مرکز

شق و H مرکز ارتفاعی روی یک خط راست واقعند و داریم

$$\overline{OH} = -2\overline{OG}$$

- نقطه H مجانس نقطه G است. پس مکان H دایره

Γ' است که در تجانس اخیر مجانس دایره Γ است.

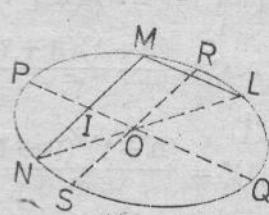
$$- ۸۸/۲۷ ترجمه از فرانسه$$

وتر متغیر AB از بیضی مفروض دارای امتداد ثابت است:

۱- ثابت کنید که مکان هندسی P وسط AB قطر Q از بیضی است.

۲- اگر RS قطری از بیضی موازی با AB باشد، دو قطر RS و PQ مزدوج یکدیگر نامیده می‌شوند. هرگاه MN و ML دو وتر از بیضی باشند، ثابت کنید که این دو وتر در امتداد دو قطر مزدوج واقعند.

حل-۱) اگر E بیضی مفروض و $\triangle ABC$ باشد، دایره C وجود دارد که بیضی E تصویر آن است. هرگاه $\triangle A'BC$ خطی از صفحه دایره C و $\triangle AB'C$ وتری از این دایره باشد که $\triangle A'B'C$ تصویر $\triangle ABC$ باشد، او لاً $\triangle A'B'C$ در صفحه دایره ثابت است. ثانیاً $A'B'C$ با $\triangle ABC$ موازی است. پس مکان I' وسط $A'B'C$ از دایره C است و چون I وسط AB تصویر I' و تصویر هر قطر از دایره قطری از بیضی است پس مکان I قطر PQ از بیضی است.



۲) دو قطر RS و PQ از بیضی را رسم

می‌کنیم که اولی بر I وسط MN و دومی

ML بگذرد.

چون NL قطر بیضی

و O وسط آن است پس OI با ML و OJ با MN موازی

است. PQ مکان اوساط وترهای موازی با MN است

بنابراین مزدوج RS است که با MN موازی است.

$$y = \frac{17}{4} \cdot x = \frac{5}{4}$$

-۸۸/۳۲ بدهفرض آنکه a و b و c اعداد مثبت و x و y اعداد مختلف صفر باشند، ثابت کنید که هر گاه داشته باشیم:

$$x = cy + bz \quad y = az + cx \quad z = bx + ay$$

خواهیم داشت:

$$a^r + b^r + c^r + 2abc = 1$$

حل- از دو رابطه اول و دوم نتیجه می شود:

$$y = az + c^r y + bcz$$

$$y(1 - c^r) = z(a + bc) \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{a + bc}{1 - c^r}$$

به روش مشابه نتیجه خواهد شد:

$$\frac{z}{x} = \frac{b + ac}{1 - a^r} \quad \frac{x}{y} = \frac{c + ab}{1 - b^r}$$

از ضرب نتایج به نظیر طرفین رابطه های بالا دریکدیگر و بعد از انجام عملیات لازم، رابطه مطلوب بدست می آید.

-۸۸/۳۳ مجموع زیر را بدست آورید:

$$S_n = 6(1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1) + \\ + 9(2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 2) + \dots +$$

$$+ 3(n+1)[n(n+1) + (n+1)(n+2) + (n+2)n]$$

حل- اگر U_n جمله عمومی سری انتخاب شود داریم:

$$U_n = 3(n+1)(3n^2 + 6n + 2) \\ = 3(n+1)[3(n+1)^2 - 1]$$

$$U_n = 9(n+1)^2 - 3(n+1)$$

چون n را به ترتیب برایر با مقادیر متوالی از یک تا n قرار داده و طرفین رابطه های حاصل را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$S_n = 9[2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2] - \\ - 3[2 + 3 + \dots + (n+1)]$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$S_n =$$

$$= \frac{3}{4}(n+1)(n+2)[3(n+1)(n+2) - 2] - 6$$

$$\sqrt{\frac{4}{tgAtgB} + 1} + \sqrt{\frac{4}{tgBtgC} + 1} + \\ + \sqrt{\frac{4}{tgCtgA} + 1} < 5$$

از ضرب طرفین این نامساوی در $\sqrt{tgAtgBtgC}$ و با توجه به اینکه در هر مثلث:

$$tgAtgBtgC = tgA + tgB + tgC$$

نامساوی مورد نظر بدست خواهد آمد.

II- از مسائل ارسالی تو سط: محمد معینی

-۸۸/۳۰ نامساوی زیر را وقتی که a و b و c سه ضلع یک مثلث باشند ثابت کنید:

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

حل- به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$(b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - (b-c)^2 \leq a^2$$

$$\frac{1}{(a+b-c)(a-b+c)} \geq \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{2a}{(a+b-c)(a-b+c)} \geq \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} \geq \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{b-c+a} \geq \frac{2}{b}$$

$$\frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{c-a+b} \geq \frac{2}{c}$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین سه نامساوی بالا، نامساوی مورد نظر حاصل می شود.

-۸۸/۳۱ دستگاه معادله های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y+2} = 3 \end{cases}$$

حل- خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x+1 = 9+y-2-6\sqrt{y-2} \\ x-1 = 9+y+2-6\sqrt{y+2} \end{cases}$$

$$6(\sqrt{y+2} - \sqrt{y-2}) = -6$$

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leq$$

$$\leq \frac{(a_1 + \dots + a_k)(b_1 + \dots + b_k)}{(a_1 + \dots + a_k) + (b_1 + \dots + b_k)}$$

چون بر طرفین این رابطه مقدار $\frac{a_{k+1} b_{k+1}}{a_{k+1} + b_{k+1}}$ را اضافه

کنیم با توجه به آنچه که به ازای $n=2$ محقق شد داریم :

$$\frac{(a_1 + \dots + a^k)(b_1 + \dots + b_k)}{(a_1 + \dots + a_k) + (b_1 + \dots + b_k)} + \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} <$$

$$< \frac{(a_1 + \dots + a_{k+1})(b_1 + \dots + b_{k+1})}{(a_1 + \dots + a_{k+1}) + (b_1 + \dots + b_{k+1})}$$

بنابراین داریم :

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{a_{k+1} + b_{k+1}} \leq$$

$$\leq \frac{(a_1 + \dots + a_{k+1})(b_1 + \dots + b_{k+1})}{(a_1 + \dots + a_{k+1}) + (b_1 + \dots + b_{k+1})}$$

رابطه به ازای $n=2$ محقق است و اگر به ازای $n=k$ محقق باشد به ازای $n=k+1$ نیز محقق است . بنابراین به ازای همه مقادیر n محقق است .

- نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید:

$$y = |x| \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

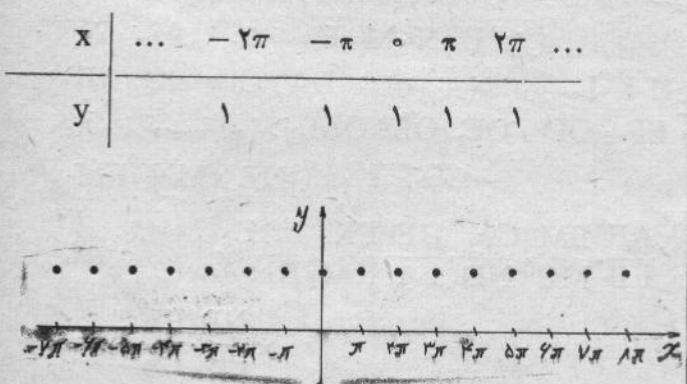
حل - تابع وقتی معین است که :

$$-\sin^2 x > 0 \implies \sin^2 x = 0$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$x = k\pi \text{ و } y = |\kappa|^\circ = 1$$

k عدد صحیح است پس جدول تغییرات و نمایش هندسی تابع چنین می شود :



III- ۸۳- مسائل فرجیه فتح الله زرگری

- ۸۸/۳۴ اگر چهار نقطه A, B, C و D روی یک خط مستقیم چنان قرارداشته باشند که :

$$AC = CD = DB$$

اولاً ثابت کنید که برای هر نقطه D لخواه M داریم :

$$AM + 3DM = BM + 3CM$$

ثانیاً مکان M را تعیین کنید برای آنکه :

$$AM + 3DM = a$$

حل - اولاً خط محمل نقاط را محور x' O و سمت AB را بدآن و جهت از A به B را جهت مشت آن اختیار می کنیم با فرض $AB = 6u$ داریم :

$$A(-3u, 0), B(3u, 0)$$

$$C(-u, 0), D(u, 0)$$

با فرض (x, y) خواهیم داشت :

$$AM + 3DM = 4(x' + y') + 12u^2$$

$$BM + 3CM = 4(x' + y') + 12u^2$$

ثانیاً باید داشته باشیم :

$$4(x' + y') + 12u^2 = a^2$$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{a^2 - 12u^2}{4}$$

اگر $a^2 > 12u^2$ باشد مکان M دایره‌ای است که مبدأ مختصات مرکز آن است .

اگر $a^2 = 12u^2$ باشد مکان M منحصر به مبدأ مختصات است .

اگر $a^2 < 12u^2$ باشد مکان وجود ندارد .

- ۸۸/۳۵ هر گاهی عدددهای مشت باشند ثابت کنید که :

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} \leq$$

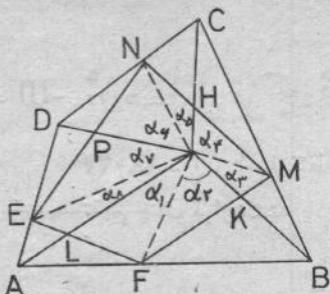
$$\leq \frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{(a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n)}$$

حل - در ازای $n=2$ داریم :

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} \leq \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)}$$

این رابطه به رابطه $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$ تبدیل می شود و محقق است . حال اگر رابطه به ازای $n=k$ محقق باشد ،

یعنی داشته باشیم :



حل - زاویه‌های
 حول نقطه O را مطابق
 شکل با، a_1, a_2, \dots, a_7 نشان می‌دهیم.
 مشهای AFO و BFO دارای ارتفاع
 و رأس O هستند،

پس نسبت مساحت‌های آنها به نسبت قاعده‌های آنها است.
 بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{OA \cdot OF \cdot \sin a_1}{OF \cdot OB \cdot \sin a_2} = \frac{OA \cdot \sin a_1}{OB \cdot \sin a_2}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{OB \cdot \sin a_2}{OC \cdot \sin a_4} \dots$$

$$\frac{EL}{LF} = \frac{OE \cdot \sin a_4}{OF \cdot \sin a_1} \dots$$

$$\frac{FK}{KM} = \frac{OF \cdot \sin a_2}{OM \cdot \sin a_3} \dots$$

از ضرب نظیر به نظیر طرفین روابط بالا رابطه مطلوب بدست می‌آید.

ABC - روی وتر AB از مثلث قائم الزاوية **ABC** دو نقطه A_1 و B_1 چنان انتخاب می‌شوند که:

$$AA_1 = A_1B_1 = B_1B$$

باشد. ثابت کنید که:

$$\cot A_1CA_1 + \cot B_1CB_1 = 3\cot A_1CB_1$$

حل - نقطه C را مبدأ بردارهای صفحه اختیار می‌کنیم.
 یک بردار به مبدأ C و به انتهای M را با \bar{M} و حاصل ضرب داخلی دو بردار \bar{M} و \bar{N} را با $\bar{M} \wedge \bar{N}$. $\bar{M} \wedge \bar{N}$ و حاصل ضرب خارجی آنها را با $\bar{M} \wedge \bar{N}$ نشان می‌دهیم می‌دانیم که:

$$\bar{M} \cdot \bar{N} = |\bar{M}| \cdot |\bar{N}| \cos(\bar{M}, \bar{N})$$

$$|\bar{M} \wedge \bar{N}| = |\bar{M}| \cdot |\bar{N}| \sin(\bar{M}, \bar{N})$$

بنابراین خواهیم داریم:

$$A_1 = \frac{\bar{A} + \bar{B}}{3} \quad B_1 = \frac{\bar{A} + 2\bar{B}}{3}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = d + \bar{A} \wedge \bar{A} = 0 \quad \bar{A} \wedge \bar{B} = -\bar{B} \wedge \bar{A}$$

($d + d$) + ($d + s$, s) = $d + s$, $d + s$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(d, s, s) = (d, s, d, s)$$

$$\cot A_1CA_1 + \cot B_1CB_1 = 3\cot A_1CB_1$$

مشکل نقصه ای داشت،

$$\cot A_1CA_1 + \cot B_1CB_1 = 3\cot A_1CB_1$$

نمایش هندسیتابع مجموعه‌ای است از نقاط جدا از هم که عرض همه آنها یک و طول آنها مضرب صحیحی از π است.

۸۸/۳۷ - در دایره‌ای مثلث ABC محاط شده است. در نقاط A و B مماسهایی بر دایره رسم می‌کنیم که در متقاطع می‌شوند و خط CS را رسم می‌کنیم که در خط AB را تقاضی می‌کند. ثابت کنید:

$$AM : MB = AC' : BC'$$

حل - اگر

نقطه تلاقي دیگر خط SC با دایره باشد، از تشابه دو مثلث MCB و MAD داریم:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AD}{BC}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{BD}{AC}$$

از دو تناسب بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AC}{BD} \quad (1)$$

دو مثلث SCA و SAD همچنین دو مثلث SBC و SBD متشابهند و خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \quad (2)$$

از رابطه‌های (1) و (2) بدست می‌آید:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC'}{BC'}$$

۸۸/۳۸ - چهارضلعی $ABCD$ و نقطه O در داخل آن مفروض است. نقاط E, N, M, F به ترتیب بر ضلعهای DA, CD, BC, AB و H, K, L, EF انتخاب شوند. هر گاه P به ترتیب نقاط تلاقي NE, MN, FM باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DE}{EA} \cdot \frac{FK}{KM} \cdot \frac{MH}{HN} = 1$$

$$\frac{NP}{PE} \cdot \frac{EL}{LF} = 1$$

یک وجوددارد که حاصل ضرب هر سه عدد از آنها بعلاوه یک بر عدد چهارم بخش پذیر باشد.

حل - فرض می کنیم $x < y < z < t$ و a, b, c, d وجود داشته باشد که :

$$xyz + 1 = at \quad \text{و} \quad xyt + 1 = bz$$

$$xzt + 1 = cy \quad \text{و} \quad yzt + 1 = dx$$

از این روابط اولاً نتیجه می شود که این چهار عدد باید بین هم اول باشند. ثانیاً نتیجه می شود که مجموع :

$$xyz + xyt + xzt + yzt + 1$$

بر $xyzt$ بخش پذیر است. پس مجموع زیر :

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{xyzt}$$

یک عدد صحیح است و چون عدها متفاوتند و :

$$x \geq 2 \quad y \geq 3 \quad z \geq 4 \quad t \geq 5$$

پس داریم :

$$S < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{120} = \frac{131}{120}$$

در نتیجه $S = 1$ می شود.

اگر $x > 2$ اختیار شود $y \geq 5$ و $z \geq 6$ و $t \geq 6$ است و خواهیم داشت :

$$1 < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{360} = \frac{343}{360}$$

که درست نیست پس $x = 2$ است و داریم :

$$1 = \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{1}{xyzt}$$

عدهای y و z و t فرد می باشند زیرا نسبت به $x = 2$ اولند. اکنون اگر $y > 3$ باشد داریم $y \geq 5$ و $z \geq 7$ و $t \geq 9$ و از

رابطه بالا نتیجه می شود $\frac{287}{315} < 1$ که درست نیست پس $y = 3$ است و خواهیم داشت :

$$\frac{1}{zt}$$

$$\frac{-1}{-6} = 6 + \frac{37}{t-6}$$

یا برابر با 7 یا برابر با 43 است. اگر $t > 43$

شود $z = 43$ بددست می آید که قابل قبول نیست.

پس $t = 43$ و $z = 7$ است.

$$\cot B, CB = \frac{2 \bar{B}}{A \wedge \bar{B}}$$

$$\cot A, CB = \frac{\bar{A} \wedge \bar{B}_1}{A_1 \wedge \bar{B}_1} = \frac{2(\bar{A}_1 + \bar{B}_1)}{2(A_1 \wedge \bar{B})}$$

$$\cot A_1, CA_1 + \cot B_1, CB = 3 \cot A_1, CB,$$

- ثابت کنید که اگر عدد p به صورت

$p = 2^n + 1$ باشد تعداد p کسر با صورتهای یک و با مخرجهای متفاوت وجود دارد متفاوت وجوددارد که مجموع آنها برابر با یک است، یعنی :

$$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_p}$$

حل - ثابت می کنیم مسئله نه تنها به ازای p به صورت داده شده بلکه به ازای هر مقدار از عدد صحیح $3 \geq p \geq 1$ درست است :

اولاً به ازای $n = 1$ داریم $p = 3$ و ثابت می کنیم که سه کسر با صورتهای یک و با مخرجهای متفاوت وجود دارد که مجموع آنها برابر یک است؛ چون سه کسر متفاوتند پس

بزرگترین آنها از $\frac{1}{3}$ بزرگتر است و در ضمن از یک کوچکتر

است، پس برابر با $\frac{1}{3}$ است. مجموع دو کسر دیگر می شود

$\frac{1}{3}$ که بزرگترین آن دو از $\frac{1}{3}$ بزرگتر و از $\frac{1}{3}$ کوچکتر پس

برابر با $\frac{1}{3}$ است. کسر سوم برابر $\frac{1}{3}$ بدست می آید :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

ثانیاً هرگاه مسئله به ازای $p = k$ محقق باشد، یعنی داشته باشیم :

$$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k}$$

از افزودن یک به طرفین و تقسیم طرفین حاصل بر 2 خواهیم داشت :

$$1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \dots + \frac{1}{2x_k}$$

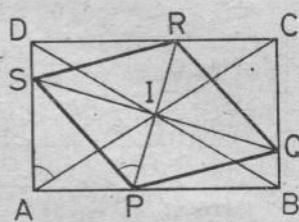
چون کسرهای طرف دوم متفاوت و تعداد آنها $k+1$ است پس مسئله به ازای $1+p$ نیز محقق است.

بنابراین مسئله به ازای هر مقدار از عدد صحیح $3 > p > 1$ محقق است.

- ثابت کنید که فقط چهار عدد طبیعی بزرگتر از

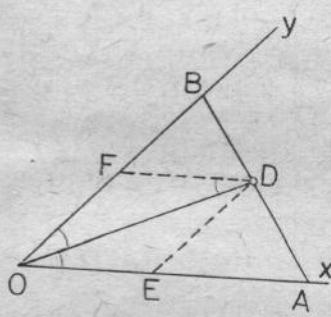
تستهای ریاضی

۵-۸۸/۴۹ ج (اولاً) هر دو خط عمود بر هم که در مرکز



مستطیل رسم کنیم، از تلاقی آنها با مستطیل یک لوزی حاصل می شود. ثانیاً اگر یک لوزی PQRS

محاط در مستطیل مفروض ABCD مطابق شکل باشد، مرکز لوزی بر مرکز مستطیل منطبق است و در چهار ضلعی محاطی زاویه IPS با زاویه IAS برابر بوده و مقدار ثابت است. پس زاویه های لوزی مقادیر ثابتند و تمام لوزی های با زاویه های برابر با هم متشابهند)



۶-۸۸/۵۰ ج (چون از D موازی با ضلعهای زاویه رسم کنیم لوزی OEDF بدست می آید و داریم:

$$\frac{DE}{OB} = \frac{EA}{OA} = \frac{OA - OE}{OA}$$

$$\frac{1}{OB} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{OE}$$

پس $OE = ED = k$ در نتیجه اولاً طول $OD = k$ ثابت است و ثانیاً $OD < OE + ED = 2k$

۷-۸۸/۵۱ ج (طرف اول رابطه که مجموع دو مقدار نامنفی است. پس فقط داریم:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$$

۸-۸۸/۵۲ ب (در ازای مختصات دو نقطه B و C برای عبارت $x + 5y - 2$ دو مقدار مختلف العلاست بدست می آید، پس B و C در طرفین خط به معادله $x + 5y = 2$ واقعند)

۵-۸۸/۴۳ صرف نظر از A در تجزیه بقیه عبارت

طرف دوم عامل $y - x$ وجود دارد یعنی این عبارت بر $y - x$ بخش پذیر است و چون هم لزوم و هم کفايت شرط مورد نظر است پس A باید بر $y - x$ بخش پذیر باشد)

۹-۸۸/۴۳ ج ($x = 24$ و $x = 11$)

۱۰-۸۸/۴۴ هیچ کدام (پاسخ درست ۱۰) است.

زیرا عبارت داده شده چنین می شود:

$$[(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)]^2 + \sqrt{(a^2 - 1)^2}$$

$$(a - 1)^2 + |a^2 - 1| = 2(1 - a)$$

$$|a^2 - 1| = 2(1 - a) - (a - 1)^2 =$$

$$= (a - 1)(-2 - a + 1) = -(a^2 - 1)$$

پس $a^2 - 1 > 0$ است و چون $a > 0$ است پس $a > 1$

۱۱-۸۸/۴۵ الف (معادله به رابطه غیر ممکن $= 1$ تبدیل می شود)

۱۲-۸۸/۴۶ الف (معادله چنین می شود:

$$\log_4(1 - x^2) = \log_4 2 + \log_4 x^2 = \log_4 2x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - x^2 = 2x^2 \\ \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

$$x > 1 \text{ و } 1 - x^2 > 0$$

۱۳-۸۸/۴۷ (معادله به صورت زیر در می آید:

$$\log_3 x^3 \times \log_2 x \times \log_2 x = \log_2 x$$

هر مقدار مثبت x در این معادله صدق می کند)

۱۴-۸۸/۴۸ ج (داریم:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{CD}{AE} = \frac{CF}{EF}$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{BC}{AF} = \frac{EC}{EF}$$

$$\frac{CF}{EF} + \frac{EC}{EF} = \frac{EF}{EF} = 1$$

۵-۸۸/۶۲ (تابع فقط در ازای $x = 0$ یعنی $\tan x = 0$ معین است و در این حال $y = (2k\pi)^0 = 1$ است.)
 ۶-۸۸/۶۳ -الف (معادله به صورت $\cos x = 1$ ساده می شود)
 ۷-۸۸/۶۴ -د (رابطه درازای همه مقادیر a بروقرار است.)

۸-۸۸/۶۵ (به فرض $\cos x \neq 0$ تابع به صورت $y = \sin x - \cos x$ مبهم است و وقتی $\cos x = 0$ حد تابع برابر باشد است.)
 ۹-۸۸/۶۶ (داریم:)

$$2(9a + 7b) = 7(5a + 2b) - 17a$$

وقتی N مضرب ۱۷ باشد M نیز مضرب ۱۷ است.

-ب (تفاضل دو عدد می شود:)

$|a_1 - a_n|^{(10^n - 1)} = |a_1 - a_n| \times 99\dots99$
 عدد مشتمل از ۱ - n رقم ۹ به ازای مقادیری از n بر ۷ بخش پذیر نیست.
 پس تفاضل دو عدد وقتی همواره مضرب ۷ است که مذبور بر ۷ برابر است با ۹۹...۹

۱۰-۸۸/۶۸ (هر یک از دو خط Δ_4 و Δ_6 مزدوج توافقی خط Δ_2 نسبت به دو خط Δ_1 و Δ_3 می باشند، پس بر هم منطبقند.)

۱۱-۸۸/۶۹ -الف (اگر I نقطه ای باشد که از آن مماس به طول R بر دایره به مرکز O و به شعاع R رسم شده باشد $OI = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$ می باشد.)

۱۲-۸۸/۷۰ -الف (اولاً اگر ABCD مربع باشد و D' نقاط تلاقی MD و MB با خط AC باشند، D' ب' نسبت به C و D مزدوج توافقی اند و به فرض آنکه O مرکز مربع باشد داریم:

$$\overline{OA'} = \overline{OC'} = \overline{OB'} \cdot \overline{OD'} = -\overline{OB} \cdot \overline{OD}$$

از این رابطه و با توجه به اینکه $D'O$ بر BD عمود است نتیجه می شود که B' مرکز ارتفاعی مثلث $D'BD$ است. یعنی زاویه BMD قائم است و مکان M دایره محیطی مربع است.

ثانیاً اگر مستطیل ABCD مربع نباشد، صفحه P و در آن مربع A'B'C'D' یافت می شود که ABCD تصویر آن باشد. هرگاه M' دایره محیطی مربع A'B'C'D' است. آن است، مکان M' دایره محیطی مربع A'B'C'D' است. پس مکان M عبارتست از تصویر این دایره بر صفحه P که بیضی محیطی ABCD است.

۱۳-۸۸/۷۳ -الف (نمایش هندسی تابع $y = \text{خط شکسته}$ است که Ou نیمساز ربع اول و Ov نیمساز ربع دوم محورهای مختصات است و خط Δ با ضریب زاویه ای $m = 1$ با هر دو نیم خط Ou و Ov متقاطع است)

-ب (دستگاه زیررا داریم:

$$\begin{cases} 35v_1 - 35v_2 = 2k\pi \\ \frac{140\pi}{v_2} - \frac{140\pi}{v_1} = 4 \end{cases}$$

۱۴-۸۸/۷۴ (با فرض $\cos 3x = y$ داریم:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$(\sin(\frac{\pi}{2} - \cos 3x) > 0 \quad \text{و} \quad 1 < \cos 3x = y < 1)$$

۱۵-۸۸/۷۵ (صورت و مخرج رابر x تقسیم می کنیم)

۱۶-۸۸/۷۶ (به ازاء همه مقادیر a نامساوی

$$\frac{2a}{a^2 + 1} < 1 \quad \text{محقق است.}$$

۱۷-۸۸/۷۸ -ب (اگر O' تصویر O بر صفحه P و

و سطح AB باشد $O'M$ که میانه AB است از OM و در نتیجه از نصف AB کوچکتر است، پس زاویه $AO'B$ منفرجه و در نتیجه زاویه مجانب آن حاده است.)

۱۸-۸۸/۷۹ -ب (اگر O تصویر قائم C بر AB باشد در

مثلث ACB داریم:

$$CA' - CB' = OA' - OB'$$

$$\Rightarrow DA' - DB' = OA' - OB'$$

نیز بر AB عمود است. خط AB بر صفحه COD و

در نتیجه بر خط CD عمود است.)

۱۹-۸۸/۸۰ -د (اگر X منفی باشد و به صفر نزدیک شود، مشتق تابع منفی است و به $(1 - X)$ نزدیک می شود، و اگر، X مثبت باشد و به صفر نزدیک شود، مشتق تابع مثبت است و به $(1 + X)$ نزدیک می گردد و چون تابع درازای $y = \frac{1}{X}$ معین و برابر با صفر است پس منحنی نمایش تابع در مبدأ مختصات می نیم است و در این نقطه بر نیمسازهای رباعی اول و دوم محورها مماس است.)

۲۰-۸۸/۸۱ (وقتی $X \rightarrow \infty$ همچنین وقتی $X \rightarrow -\infty$)

در هر دو حالت y می تواند فقط یک مجانب افقی دارد که با

آن متقاطع نیست.)

مسائل برای حل

۸۹/۴ - از محمد معینی

هر گاه داشته باشیم :

$$\begin{cases} a + 3x\sqrt{a} - 4(b+c) = 0 \\ x^2 + 3x\sqrt{a} + 4(b-c) = 0 \end{cases}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$(a-b-c)^2 = 27abc$$

۸۹/۵ - از جواد فیض

از معادله زیر مقدار x را بدست آورید :

$$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{2} = 2 \times 3$$

۸۹/۶ - ترجمه فتح الله ذرگری

معامله زیر را حل و بحث کنید :

$$|4 + \log_a x| = 2 + |2 + \log_a x|$$

۸۹/۷ - ترجمه فتح الله ذرگری

برچهار نقطه مفروض A و B و C و D چهار خط متوازی a و b و c و d را چنان مرور دهید که فاصله دو خط a و b با فاصله دو خط c و d برابر باشد.

۸۹/۸ - از حسین دارابی

دونقطه ثابت A و B و نقطه متغیر M را در نظر می گیریم. خط AM را رسم می کنیم و عمود BP را بر آن فرود می آوریم. هر گاه نسبت طول AM به طول BP مقدار ثابت k باشد مکان هندسی نقطه M را تعیین کنید.

برای دانش آموختان کلاسهای پنجم دبیرستان

۸۹/۹ - هر گاه $f(x)$ نسبت به x سه جمله‌ای از درجه دوم و $f'(x)$ مشتق آن و a و b ریشه‌های معادله $= 0$ باشد مطلوب است تعیین هریک از مقادیر زیر :

برای دانش آموختان کلاسهای چهارم دبیرستان

۸۹/۱ - فرستنده : جواد فیض، ترجمه از کتابهای

انگلیسی

هر گاه a و b و c اندازه‌های ضلعهای یک مثلث باشند،

ثابت کنید که مقادیر زیر نیز می‌توانند اندازه‌های ضلعهای یک مثلث باشند :

$$A = \sqrt{a(b+c-a)}, \quad B = \sqrt{b(c+a-b)},$$

$$C = \sqrt{c(a+b-c)}$$

۸۹/۲ - ترجمه از فرانسه

ذوزنقه $ABCD$ در دایره به مرکز O محاط است.

قطراهای ذوزنقه در E و امتداد ساقهای آن در F متقاطند.

ثابت کنید که هریک از چهار ضلعهای $ACFO$ و $ADEO$ محاطی است.

برای دانش آموختان کلاس چهارم ریاضی

۸۹/۳ - فرستنده : جواد فیض، ترجمه از انگلیسی

سه عدد مخالف صفر a و b و c در روابط زیر صدقند:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{1-a^2} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\sqrt{1-b^2} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{1-c^2} \end{cases}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a = c\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} \\ b = a\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \\ c = b\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-b^2} \end{cases}$$

مقدار مثبت a را مشخص کنید.

-۸۹/۱۴ از جواد فیض

از روابط زیر رابطه‌ای مستقل از x بین a و b و c بدست آورید.

$$\begin{cases} 2(a \sin x - b \cos x) = c \sin 2x \\ a \cos x + b \sin x = c \cos 2x \end{cases}$$

-۸۹/۱۵ ترجمه از فرانسه

ثابت کنید که در هر منشور چهار پهلو (منشور با قاعده چهارضاعی) اقطار به صورت دو جفت خطوط تقاطع هستند که فاصله نقاط تقاطع آنها برابراست با فاصله اوساط دو قطر چهارضلعی قاعده.

-۸۹/۱۶ ترجمه از فرانسه

ثابت کنید که هر منشور سه پهلو (منشور با قاعده مثلث) ، اولاً اگر دو وجه جانبی متساوی باشند فوجههای متقابل به آنها نیز متساوی‌اند و اگر دو وجه جانبی نامتساوی باشند فوجههای متقابل به آنها نیز نامتساوی‌اند و فرجه بزرگتر متقابل است به وجہ بزرگتر . ثانیاً مساحت هر وجه جانبی از مجموع مساحتهای دو وجه جانبی دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر است .

برای دانشآموزان کلاسهای ششم دبیرستان

-۸۹/۱۸ معادله‌یک هذلولی نسبت به دستگاه محورهای $x'oy$ و $x'ox$

$$y = \frac{x+1}{x-2}$$

اولاً معادلات مجانبهای، مختصات مرکز ، معادلات محورهای مختصات دور اس و مختصات دو کانون این هذلولی را حساب کنید .

ثانیاً اگر $X'X$ محور قاطع و $Y'Y$ محور غیر قاطع این هذلولی باشد، معادله آن را نسبت به دستگاه محورهای $X'X$ و $Y'Y$ بنویسید .

-۸۹/۱۸ از جواد فیض

دو معادله درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم .

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{و} \quad cx^2 + bx + a = 0$$

$$S = f'(a) + f'(b) , \quad P = \frac{a}{f'(a)} + \frac{b}{f'(b)}$$

-۸۹/۱۰ فرستنده: جواد فیض ترجمه از فرانسه

هرگاه a و b و c به ترتیب سه جمله از یک تصاعد حسابی با قدر نسبت h باشند، حاصل هریک از عبارتهای زیر را بر حسب خطوط مثلثاتی b و h بدست آورید :

$$A = \sin a + \sin c$$

$$B = \cos a + \cos c$$

$$C = \tan a + \tan c$$

برای دانشآموزان کلاس پنجم ریاضی

-۸۹/۱۱ هرگاه مشتق تابع $f(x)$ نسبت به x برابر باشد با :

$$f'(x) = [mx^{m-1} + (m-2)bx^{m-2} + c]g(x)$$

اولاً مقدار $\left(\frac{x^m}{m}\right)'$ را حساب کنید .

$$\text{ثانیاً به فرض } g(x) = \frac{1}{2f(x)}$$

کنید یقینی که $|d| = |f(0)|$ باشد .

-۸۹/۱۲ از محمد معینی

هرگاه $f(x)$ نسبت به x چند جمله‌ای از درجه چهار بوده و a و b و c و d ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله $f(x) = 0$ باشند و $f'(x)$ مشتق $f(x)$ نسبت به x باشد، حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بدست آورید :

$$P = \frac{a^2}{f'(a)} + \frac{b^2}{f'(b)} + \frac{c^2}{f'(c)} + \frac{d^2}{f'(d)}$$

-۸۹/۱۳ فرستنده: جواد فیض

به فرض آنکه داشته باشیم :

$$\tan a = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad \tan b = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\cos c = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{و} \quad \cos d = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

اولاً محقق کنید که کمان a با شرط زیر وجود دارد :

$$\cos a = \frac{\sin(a+b)}{\sin(c+d)}$$

ثانیاً مقدار $\cos 4a$ را حساب کرده و در نتیجه آن کمترین

۸۹/۲۳ - فرستنده : جواد فیض

اگر a و b و c و d و u عددهای صحیح باشند، ثابت کنید هر گاه سه عدد ac و ad و bd و $bc + ad$ مضرب u باشند هریک از دو عدد bc و ad نیز مضرب u می‌باشند.

۸۹/۲۴ - ترجمه از فرانسه

۱) اگر n عدد صحیح باشد ثابت کنید که ممکن نیست هر دو عدد :

$$A = \frac{vn - 1}{4} \quad B = \frac{5n + 3}{12}$$

عددهای صحیح باشند.

۲) هر گاه m و n عددهای صحیح باشند، ثابت کنید برای آنکه هر دو عدد :

$$A = \frac{vn - 1}{4} \quad B = \frac{5n + 3}{12}$$

صحیح باشند لازم است که نفاضل دو عدد m و n مضرب ۴ بناشد.

۸۹/۲۵ - ترجمه از فرانسه

دایره به مرکز O و چهار نقطه M و A و B و C واقع برآن مفروض است. دایره‌های به قطراهای MA و MB و MC غیر از M دو به دو در سه نقطه α و β و γ متقاطع می‌باشند. ثابت کنید که سه نقطه α و β و γ بر یک خط مستقیم واقعند.

۸۹/۲۶ - ترجمه از فرانسه

سهمی Γ به رأس S و به کانون F و به محور SX و با پارامتر p مفروض است. براین سهمی نقطه متغیر M را در نظرمی‌گیریم. عمودی که در M بر SM اخراج شود OX را در قطع می‌کند. بر AM نقطه P را انتخاب می‌کنیم که $\overline{AP} = \lambda \overline{AM}$ باشد.

اولاً ثابت کنید که مکان P یک سهمی است.

ثانیاً ثابت کنید که در حالت $2 = \lambda$ قائم برسی مکان در نقطه P همان خط AP است.

مسائل کوناکون

از مسائل ارسالی توسط : محمد معینی

۸۹/۲۷ - دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید :

هر گاه $\sin \alpha$ یک ریشه معادله اول و $\tan \alpha$ یک ریشه معادله

دوم باشد مقدار α را مشخص کنید.

برای دانش آموزان کلاس ششم ریاضی

۸۹/۱۹ - ترجمه از فرانسه

تابع زیر را در نظرمی‌گیریم :

$$y = \frac{(x - 1)^2}{2x}$$

الف - ثابت کنید که منحنی نمایش تابع یک مرکز تقارن دارد و مختصات این مرکز تقارن را بدست آورید.

ب - منحنی C نمایش هندسی تابع رارسم کنید.

ج - با استفاده از منحنی C' منحنی C نمایش هندسی تابع زیر را در همان شکل منحنی C رسم کنید.

$$y = \frac{(x - 1)^2}{|2x|}$$

۸۹/۲۰ - ترجمه از فرانسه

تابع زیر را در نظرمی‌گیریم

$$y = \frac{x^2 - |x|}{x^2 + x + 1}$$

۱) ثابت کنید که تابع درازای همه مقادیر x معین و پیوسته است و در ازای همه مقادیر x بغيراز $x = 0$ دارای مشتق است.

۲) معلوم کنید که منحنی نمایش تابع در مبدأ مختصات چه وضعی دارد؟

۳) منحنی نمایش هندسی تابع رارسم کنید.

۸۹/۲۱ - حد توابع زیر را وقتی x به سمت مقادیر داده شده میل می‌کند بدست آورید.

$$y = (\pi - 2x) \tan x \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$y = (a^r - x^r) \tan \frac{\pi x}{2a} \quad x \rightarrow a$$

۸۹/۲۲ - ترجمه فتح الله زرگری

نامعادله زیر را حل کنید.

$$\log_4(1 - \sin 2x) \leqslant \frac{1}{2} + \log_2 \sin x$$

$$x^x + y^y + z^z = t^t$$

-۸۹/۳۵ هرگاه G_n واسطه هندسی n جمله اول از رشته اعداد مثبت a_1, a_2, a_3, \dots باشد، ثابت کنید که:

$$nG_n - (n-1)G_{n-1} \leq a_n$$

از مسائل ارسائی آقای قوام نحوی

-۸۹/۳۶ دریک دستگاه عددنویسی رمزازهمان رقمهای عددنویسی معمولی یعنی $1, 2, 3, \dots, 9$ استفاده می‌شود با این تفاوت که این رقمها ارزش‌های غیر از ارزش‌های متعارفی خود دارند (مثلاً رقم ۴ ارزش ۷ را دارد و مانند آن). در این دستگاه داریم:

$$3^3 = 9 \times 6 = 54$$

$$1+7=8$$

معلوم کنید که در دستگاه مذبور ($10:2$) دارای چه ارزشی است؟

-۸۹/۳۷ عدد ($10!$) را که در دستگاه به پایه ۱۲

بنویسیم از سمت راست به چند عدد صفر ختم می‌شود؟

-۸۹/۳۸ در دستگاه عددنویسی دهگانی داریم:

$$\frac{1}{2} = \frac{6729}{13458} \quad \frac{1}{3} = \frac{5832}{17496}$$

در دستگاه به پایه ۴ داریم:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4}$$

تحقیق کنید که آیا در دستگاه به پایه ۶ کسرهای

معادل با $\frac{1}{2}$ وجود دارد بقسمی که در نوشت آنها تمام

رقمهای ازیک تا ۵ بدون تکرار بکار رفته باشد؟

یک مسئله ترجمه از فرانسه

-۸۹/۳۹ بابک و افسین و سامان به ترتیب چنین اظهار می‌دارند:

بابک: من ۲۲ سال دارم. من ۲ سال کوچکتر از افسین هستم. من یک سال بزرگتر از سامان می‌باشم.

افسین: من از همه جوانترم. من و سامان ۳ سال اختلاف سن داریم. سامان ۲۵ سال دارد.

سامان: من از بابک جوانترم. بابک ۲۳ سال دارد.

افسین ۳ سال بزرگتر از بابک است.

هرگاه یکی فقط یکی از اظهارات سه گانه هر کدام از سه نفر غلط باشد، سن هریک از آنان را تعیین کنید.

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ y + z + yz = 19 \\ z + x + zx = 14 \end{cases}$$

-۸۹/۳۸ هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{x(y+z-x)}{1} = \frac{y(z+x-y)}{m} = \frac{z(x+y-z)}{n} \\ 1+m+n=0 \end{cases}$$

ثابت کنید که:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

-۸۹/۳۹ دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$a^r - x^r = b^r - y^r = c^r - z^r = xy + yz + zx$$

-۸۹/۴۰ هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} P^r + aP + b = 0 \\ Q^r + aQ + b = 0 \\ R^r + aR + b = 0 \end{cases}$$

ثابت کنید که:

$$\frac{1}{Q^r + R^r - P^r} - \frac{1}{R^r + P^r - Q^r} + \frac{1}{P^r + Q^r - R^r} = 0$$

-۸۹/۴۱ معادله زیر را در نظر می‌گیریم.

$$x^r - 2\alpha x^r + \beta x - \gamma = 0$$

هرگاه a و b و c ریشه‌های این معادله اندازه‌های ضلعهای یک مثلث باشند، اندازه‌های شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی این مثلث را بحسب α و β و γ حساب کنید.

از مسائل ترجمه شده توسط: فتح الله زرگری

-۸۹/۴۲ مثلث ABC در دایره به شعاع R محاط شده است. نیمسازهای زاویه‌های مثلث دایره را در A_1, A_2, C_1, C_2 قطع می‌کنند. نیمسازهای زاویه‌های مثلث دایره را در $B_1, B_2, A_3, A_4, C_3, C_4$ قطع می‌کنندو... و نیمسازهای زاویه‌های مثلث دایره را در A_2, B_2, C_2 قطع می‌کنند. هرگاه $\infty \rightarrow n$ حد مساحت مثلث $A_n B_n C_n$ تلاقی می‌کنند. هرگاه $A_n B_n C_n$ را حساب کنید.

-۸۹/۴۳ ثابت کنید که اگر تصاعدی هندسی از عددهای طبیعی مختلف تشکیل شده و بیش از دو جمله داشته باشد، مجموع جملات آن توانی از سه نیست.

-۸۹/۴۴ ثابت کنید که در حوزه اعداد طبیعی معادله

زیر، جواب ندارد:

تستهای ریاضی

عدد طبیعی $n > 1$ درست است :

الف - صفر یکی از جمله های تصاعد است .

ب - جمله های تصاعد دو به دو قرینه یکدیگرند و صفر نیز یکی از جمله ها است .

ج - صفر نمی تواند یکی از جمله های تصاعد باشد .

د - تعداد جمله های مثبت تصاعد با تعداد جمله های منفی آن برابر است .

۸۹/۴۵ - نیمسازهای داخلی زاویه های B و C از

مثلث ABC دایره محیطی آن را به ترتیب در B' و C' قطع

می کنند . هرگاه I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث باشد :

الف - خط B'C' عمود منصف AI است .

ب - خط AI عمود منصف B'C' است .

ج - C'AI و B'AI منصف یکدیگرند .

د - A'C' و AI عمود منصف یکدیگرند .

۸۹/۴۶ - زاویه xOy و نقطه P در داخل آن مفروض

است . دایره به شعاع دلخواه R که بر P و O بگذرد ضلع

R را در A و ضلع Oy را در B قطع می کند . هرگاه R

تغییر کند :

الف - حاصل ضرب PB و PA ثابت می ماند .

ب - نسبت PA به PB ثابت می ماند .

ج - مجموع PA و PB ثابت می ماند .

د - مجموع معکوسات PA و PB ثابت می ماند .

در حدود بر نامه کلاس پنجم ریاضی

۸۹/۴۷ - هرگاه مشتق $f(x)$ برابر باشد با

$f'(x) = 5x^4$ مقدار $f''(x)$ برابر است .

الف $15x^8$ ب - $15x^8$ ج - $15x^5$ د - $5x^4$

۸۹/۴۸ - منحنی نمایش هندسیتابع $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

الف - می نیم دارد .

ب - ماکسیمم دارد .

در حدود بر نامه کلاس چهارم ریاضی

۸۹/۴۰ - معادله زیر را در نظر می گیریم :

$$\sqrt{x+|x|} + \sqrt{x-\sqrt{x}} = 3\sqrt{2}$$

جواب حقیقی قابل قبول این معادله باید در شرط یا شرایط زیر صدق کند :

الف - $x > 0$ ب - $9 > x > 0$

د - $x > 9$ ج - $x < 1$

۸۹/۴۱ - برای آنکه عبارت

$$(x^2 - 1)[ax^2 - (a-1)x - 1]$$

در ازای $x = 0$ صفر شده اما تغییر علامت ندهد :

الف - $a = -1$ ب - $a = 0$ ج - $a = 1$

د - a هرچه که باشد .

۸۹/۴۲ - با فرض آنکه چند جمله ای $P(x)$ دارای ریشه

$x = 0$ نباشد عبارت

$$\frac{1}{x} \cdot P(x)$$

در ازای $x = 0$ مبهم است . وقتی x از منفی به مثبت تغییر علامت دهد این عبارت :

الف - تغییر علامت می دهد .

ب - تغییر علامت نمی دهد .

ج - از منفی به مثبت تغییر علامت می دهد .

د - از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد .

۸۹/۴۳ - بین دو عدد a و 1 تعداد ۱۲ واسطه حسابی

درج کرده ایم که جمله وسط ۱۲ شده است . مجموع تمام جمله های تصاعد حسابی حاصل :

الف - برابر ۱۶۸ است . ب - برابر ۲۱۶ است .

ج - برابر ۵۴ است . د - قابل محاسبه نیست .

۸۹/۴۴ - مجموع n جمله که تصاعد حسابی می سازند برابر صفر است . کدام یک از گزاره های زیر در مورد هر مقدار از

- الف- مقدار ثابت مستقل از m است .
 ب- تابعی درجه اول از m است .
 ج- تابعی درجه دوم از m است .
 د- برحسب m تابعی هموگرافی است .

-۸۹/۵۵ هرگاه منحنی نمایش هندسی تابع :

$$y = \sqrt{x^2 + ax + b}$$

دارای نقطه می نیمی واقع بر محور x باشد ، مشتق تابع درازای طول نقطه می نیم :

- الف- صفر است ب- نامعین است

ج- معین است اما صفر نیست

د- مبهم است که بعداز رفع ابهام برابر صفر می شود .

-۸۹/۵۶ مجموع کسینوسهای دوزاویه غیر متساوی

از مثلث متساوی الساقینی $\frac{13}{25}$ است . مقدار تانژانت زاویه رأس

این مثلث برابر است با :

$$\frac{24}{7} - \frac{7}{24} \quad \text{الف- } \frac{24}{7} \quad \text{ب- } \frac{7}{24} \quad \text{ج- } \frac{7}{24} - \frac{24}{7} \quad \text{د- } \frac{7}{24}$$

-۸۹/۵۷ یک زاویه از مثلثی برابر 60° درجه است .

اگر مجموع سینوسهای دوزاویه دیگر از این مثلث باشد :

$$\begin{array}{ll} \text{الف- } 2 \geq a \geq \sqrt{3} & \text{ب- } 0 \leq a \leq \sqrt{3} \\ \text{ج- } 1 \leq a \leq 2 & \text{د- } 0 \leq a \leq 1 \end{array}$$

-۸۹/۵۸ هرگاه مجموع معکوسات معددهای طبیعی

برابر با عدد طبیعی N باشد ، عدد N :

الف- منحصر به فرد است ب- منحصر به دو عدد است .

ج- می تواند لخواه باشد د- وجود ندارد .

-۸۹/۵۹ برای آنکه یک کسر تحویل ناپذیر معادل با

کسری باشد که مخرج آن توانی از ۶ است لازم و کافی است

که مخرج آن کسر :

الف- توانی از ۶ باشد ب- مضربی از ۶ باشد .

ج- غیر از ۲ یا ۳ به عدد دیگر بخش پذیر نباشد .

د- غیر از ۶ به عدد دیگر بخش پذیر نباشد .

-۸۹/۵۰ سه خط ثابت Δ و Δ' و D واقع در یک

صفحه مفروضند . دونقطه متغیر M و M' به ترتیب بر Δ و

Δ' چنان تغییر مکان می دهند که وسط MM' بر D واقع

است . در این صورت خط MM' همواره بر منحنی ثابتی مماس

است . این منحنی :

الف- دایره است ب- بیضی یا هذلولی است .

ج- سهمی است د- غیر از منحنی های مقطع مخروطی است

ج- ماسیم یا می نیم ندارد .

د- همواره در یک جهت سیر می کند .

-۸۹/۵۹ برای آنکه منحنی نمایش هندسی تابع

$$y = \sqrt{x^2 + ax + b}$$

در نقطه به عرض یک برحور y مماس باشد :

الف- $a = 1$ و $b = 0$ ب- $a = 0$ و $b = 1$

ج- $a = 0$ و $b = 0$ د- $a = 0$ و $b = 0$

-۸۹/۵۰ به فرض $tg x + atg x - 1 = 0$ مقدار

$tg 2x$ برابر است با :

$$\frac{a}{a^2 - 2} \quad \text{الف- } \frac{2}{a} \quad \text{ب- } \frac{1}{a} \quad \text{ج- } \frac{1}{2} - \frac{a}{a^2 - 2}$$

-۸۹/۵۱ هرگاه مقدار x عددی گویا باشد :

الف- هریک از مقادیر x و $\sin 2x$ و $\cos 2x$ حتماً عددی گویا هستند .

ب- مقدار $\cos 2x$ بطور حتم عدد گویا است .

ج- مقداد $\sin 2x$ بطور حتم عدد گویا است .

د- ممکن است که هیچیک از دو مقدار $\cos 2x$ و $\sin 2x$ گویا نباشد .

-۸۹/۵۲ برایهای کنج سه قائم به رأس O به ترتیب

سه نقطه دلخواه A و B و C را انتخاب می کنیم و سه کرمه

به قطرهای OA و OB و OC درنظر می گیریم . این سه کرمه :

الف- در مرکز دایره محيطی مثلث ABC مشترک کند .

ب- در مرکز ارتفاعی مثلث ABC مشترک کند .

ج- نقطه مشترک ندارند .

د- دویه دو بریدگیگر مماسند .

-۸۹/۵۳ در هر م منظم مثلث القاعده $SABC$ اندازه

هریک از زاویه های ASB و ASB' و BSC برابر 30° درجه و

طول مشترک يالهای جانبی برای t است . برایهای SB و

SC به ترتیب B' و C' را چنان انتخاب کرده ایم که محيط

مثلث $A'B'C'$ می نیم می باشد . این مقدار می نیم برای

است با :

$$\text{الف- } t\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ب- } t\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ج- } t\sqrt{\frac{1}{3}}$$

درحدود بر نامه کلاس ششم ریاضی

-۸۹/۵۴ تابع زیر را در نظر می گیریم .

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + mx + 1} \quad m \neq \pm 2$$

اگر y_1 و y_2 مقادیر ماسیم و می نیم این تابع باشند مقدار

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}$$

مسائل انتخابی از

امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث دوم، سال تحصیلی ۱۳۵۰-۵۱ (اسفند ۱۳۵۰)

- اولاً - مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله ریشه مضاعف داشته باشد.
- ثانیاً - به ازاء چه مقادیر m ریشه‌ها عکس یکدیگرند.
- ثالثاً - m را چنان تعیین کنید که معادله دو ریشه قرینه داشته باشد.

مسائل فیزیک

دبیرستان پروین اعتضادی گچساران

دبیر: آذربایجانی - فرستنده: خدیجه هوشیاری

دومیله فلزی غیر همجناس داریم که طول هریک 30 cm می‌باشد. اگر دمای دومیله را از صفر به 100°C برسانیم اولی به اندازه 0.075 cm و دومی به اندازه 0.045 cm از دیاد طول پیدا می‌کند. تعیین کنید چه مقدار از سیم اولی و چه مقدار از سیم دومی را به یکدیگر بچسبانیم تا سیم به طول 30 cm بdest آید که اگر دمای آنرا از صفر به 100°C برسانیم به اندازه 0.065 cm برطوالش اضافه شود.

دبیرستان رضا شاه کبیر تبریز

فرستنده‌گان: علی غفاریان، سید جواد بوترابی، یوسف سرانی آذر - 100 Kcal ارزی حرارتی از 1 kg آب گرفته می‌شود تا به 10°C تبدیل شود. دمای آب چقدر بوده است.

- یک لیتر گاز در فشار معمولی را به دمای 273°C

رسانیده‌ایم، حجم آن $\frac{3}{4}$ حجم اولیه و فشار $\frac{1}{3}$ فشار اولیه گردیده است. دمای اولیه (K°) را محاسبه کنید و در این حالت چگالی گاز چند برابر می‌گردد (نسبت به حالت اولیه).

کلاس چهارم طبیعی

جبر

دبیرستان ۲۵ شهرپور گلپایگان

دبیر: علی اکبر جعفری

دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + 1}{(x+1)^2 + (y-1)^2} = 1 \\ \frac{x+y+1}{x+y+3} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

- نامعادله زیر را حل کنید:

$$\frac{mx-1}{5} - \frac{x+2m}{3} > 1 - \frac{2m-3x}{4}$$

دبیرستان پهلوی ملایز

دبیر: صفریان

دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را حل و بحث کنید:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = -14 \\ x - z + 3y = 2 \end{cases}$$

دبیرستان فیوضات مشهد

دبیر: مزیدی - فرستنده: عباس ناصریان

معادله درجه دوم زیر مفروض است:

$$x^2 - 2(2m-1)x + 5m - 4 = 0$$

دیبرستان فیوضات مشهد

دیبر: طوسی - فرستنده: عباس ناصریان

جرم کالریمتری 450 g گرم و گرمای ویژه آن 5 g است.
در این کالریمتر 90 g گرم آب 15°C درجه وجود دارد. چند گرم آب
 50°C و چند گرم آب 10°C در کالریمتر بریزیم تا کالریمتر
محتوی 200 g گرم آب 20°C گردد.

مسائل شبیه

دیبرستان سعادت

دیبر: شمینی

- 15 g یدورسیدیم را با اسید سولفوریک و بی اکسید
منگنز مخلوط کرده و حرارت می دهیم. ید حاصل با 50 ml -
لیتر تیوسولفات سدیم مجھوں الغلظت بیرنگ می شود. غلافت
و نرمالیتہ آنرا پیدا کنید.

- به 100 ml محلول نرمال هیدر اکسید پتابسیم چقدر آب
باید افزود تا نرمالیتہ محلول حاصل 25 ml نرمالیتہ محلول
اویله گردد.

دیبرستان فیوضات مشهد

دیبر: مدرسی - فرستنده: عباس ناصریان

محلولی شامل دونمک سولفات مس و سولفات فرو می-
باشد؛ در 100 ml این محلول مقدار کافی SK_2 افزوده ایم در
نتیجه مجموعاً $2/8\text{ g}$ گرم رسوب سیاه تولید شده است و اگر این
مقدار رسوبها را در محلول اسید سولفوریک حرارت دهیم
 SH مقدار از آنها حل و ترکیب شده و 224 ml لیتر گاز،
تولید می نماید. تعیین کنید غلافت محلول اویله را نسبت به هر
یک از دو نمک آن.

کلاس چهارم ریاضی

جبر

دیبرستان آموزگار

دیبر: سجادی

m را طوری پیدا کنید که بین ریشه های معادله:

$$3x^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0$$

رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{9x'^2x'' + 3x'^2 + 9x'x'' + 3x''}{3} = \frac{38}{3}$$

دیبرستان ارس

دیبر: حافظ قرآن - فرستنده: سلطانی

معادله زیر را حل کنید:

$$(x+a+b)(x+a+c)(x+b+c) + abc = 0$$

دیبرستان استرآبادی گرگان

دیبر: سیدین، فرستنده: حمید رضا اسلامی

دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 24(t+x) = y(vxt - 24) \\ 4(x+y) = z(yzt - 4) \\ \lambda(y+z) = t(3xyz - \lambda) \\ 3(z+t) = x(yzt - 3) \end{cases}$$

دیبرستان امیرکبیر زنجان

دیبر: عباسچیان - فرستنده: جمال صدیق

نامعادله زیر را حل کنید:

$$\frac{(x^2 + 1)(-x^2 + 2x - 2)}{x^2(-x^2 + 3x - 2)(x^2 + x + 1)} > 0$$

دیبرستان پهلوی گلپایگان

دیبر: جعفری - فرستنده: علی اکبر سخانی

- معادله درجه دومی تشکیل دهید که بین ریشه های
آن روابط زیر برقرار باشد:

$$x'^2 + x''^2 = \frac{2(m^2 + 1)}{(m-1)^2} x'x'' \quad \text{و} \quad \frac{m+1}{m-1}$$

- حدود x را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$-\frac{x-2}{3} < x < \frac{3}{x+2}$$

دیبرستان پهلوی ملازیر

دیبر: صفریان

$$\text{كسر } \frac{5x+1}{x^2-2+x} \text{ را به دو کسر با مخرج درجه اول}$$

تبديل کنید.

دیبرستان دخترانه پیشاوهنگ

دیبر: شهریاری - فرستنده: ژیلا سوfer

- عبارت زیر را ساده کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{4} - \frac{1}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$$

دیبرستان شیخ بهایی
دیبر: هدانیا - فرستنده: محمد معینی
مطلوب است حل دستگاه دومجهولی زیر:

$$\begin{cases} (x+y+1)^2 + (x+y) = 19 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

 معادله درجه دومی تشکیل دهید که بین ریشه‌های آن روابط زیربرقرار باشد:

$$\begin{cases} \sqrt{2x'x''} + \sqrt{x'+x''} = 7 \\ 2x'x'' + (x'+x'') - 2\sqrt{2x'x''(x'+x'')} = 1 \end{cases}$$

دیبرستان فارابی کرج
دیبر: سوداگری - فرستنده: مجید مصباح
معادله اصم زیررا حل کنید:

$$\frac{1}{2-\sqrt{2+x}} + \frac{1}{2+\sqrt{2+x}} = \sqrt{\frac{4}{x}}$$

دیبرستان فردوسی سراب
دیبر: گویا - فرستنده: فریدون داودنژاد
معادله درجه دوم زیرمفروض است:

$$Px^2 - (P+1)x + 1 = 0$$

اولاً ثابت کنید مابین دوریشة معادله فوق رابطه‌ای مستقل از P وجود دارد. ثانیاً P را چنان تعیین کنید که یک ریشه معادله سه‌برابر ریشه دیگر باشد. ثالثاً معادله درجه دومی تشکیل دهید که دوریشة آن $\frac{x'}{x''}$ و $\frac{x''}{x'}$ باشد.

دیبرستان فروزی
دیبر: فلاحت - فرستنده: علی خسروی
معادله زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x+2}{2}} + \sqrt{\frac{x+2}{3}} &= \\ &= 2(\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{5}{2}}) \sqrt{\frac{x}{6}} \end{aligned}$$

دیبرستان نمازی شیراز
دیبر: محمد تقی دباغ
معادله زیر را حل کنید:

$$|x-1| - |x^2 + 7x + 12| + x - 5 = 0$$

ثابت کنید عبارت

$$x^{20} + x^{18} + x^{16} + \dots + x^2 + 1$$

boga- را طوری پیدا کنید که عبارت زیر بر $x - x^2 - x^3 - x^4$ قابل قسمت باشد:

$(b-a)x^4 + (3a-2b)x^3 - x^2 + (a+b-4)x + a$
و سپس کسر زیر را ساده کنید:

$$\frac{x^4 - x^3 - x^2 - x - 2}{x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1}$$

دیبرستان داریوش شمیران

دیبر: مطهری نژاد

- بافرض آنکه $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشد عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن درآورید:

$$\frac{f(x^2) - f(f(x))}{f(\frac{1}{x^2}) - f(\frac{1}{x})}$$

- در تقسیمی باقیمانده صفر و مقسوم علیه به صورت

$$\frac{x^m + a^m}{x + a}$$

$$Q(x) =$$

$$= 16x^4 - 8myx^3 + 4m^2y^2x^2 - 2m^3xy^2 + m^4y^4$$

می باشد. مقسوم و مقسوم علیه را پیدا کنید.

دیبرستان رهنماگرگان

دیبر: سیدین - فرستنده: شیرنگی

- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1552 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

- اگر a و b و c اضلاع مثلثی باشند، ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر n عبارت زیر مشتب است:

$$b^n + (b^2 + c^2 - a^2)n + c^n$$

دیبرستان شاپور میانه

دیبر: احمدنیا - فرستنده: حسین میانجی

در معادله:

$$x^2 - 2ax + a + 1 = 0$$

اولاً a را طوری تعیین کنید که بکی از ریشه‌های این معادله $1+a$ باشد. ثانیاً a را چنان بدست آورید که بین ریشه‌های این معادله رابطه زیر برقرار باشد:

$$x'^2 + x''^2 + x'x'' + x''x' = 4$$

ثالثاً معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله مفروض باشد.

دیبرستان پهلوی ملایر
دیبر: صفریان
معادله زیر را حل کنید:

$$\log_{x+1}(7x+1) + \log_x\sqrt{x} + \log_x x\sqrt{x} = 4$$

دیبرستان خردشیراز

دیبر: سلطانی - فرستندگان: خدیر صادقی، شهر ام فتوتی
اگر $P \leq N \leq M$ به ترتیب جملات m, n, p داشته باشد
تصاعد توافقی باشندگان کنید:

$$(m-n)M.N + (n-p)N.P + (p-m)P.M = 0$$

نمی‌دانیم عبارت جبری زیر مربع کامل است:

$$a(b-c)x^2 + b(c-a)xy + c(a-b)y^2$$

ثابت کنید a, b, c به تصاعد توافقی است.

- مقدار عدد صحیح n را طوری معین کنید تا کسر زیر مساوی با کسر مولده اعشاری متناوب $0.\overline{58333\dots}$ باشد

$$\frac{3n+4}{5n+7}$$

دیبرستان رهنما گرگان

دیبر: سیدین - فرستندگان: شیر نگی

دستگاه زیر را با شرط $0 < a < b$ حل کنید:

$$\begin{cases} (ax)^{\log a} = (by)^{\log b} \\ b^{\log x} = a^{\log y} \end{cases}$$

دیبرستان ستایش کرج

دیبر: برآزنه - فرستندگان: فرامرز بهشتی

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m}{n} \text{ برقرار است.}$$

ثابت کنید:

$$\frac{l_m}{l_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

دیبرستان شاپور میانه

دیبر: احمدنیا - فرستندگان: حسین میانجی

مجموع ۵ جمله از یک تصاعد حسابی برابر ریشه معادله

زیر است:

$$8^{2x+1} = (0,125)^{4-3x}$$

و جمله آخر این تصاضع برابر است با حد مجموع بینهایت
جمله از تصاعد هندسی نزولی

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

تصاعد حسابی را مشخص نمایید.

بر عبارت $1 + x + \dots + x^n + \dots$ بخشیده است.

- تعداد جمله های فاقد x از بسط عبارت زیر ابد است آورید:

$$(1+x+\frac{1}{x})^6$$

حساب

دیبرستان استرآبادی گرگان

دیبر: مشکین قلم - فرستندگان: حمیدرضا اسلامی

معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 2}}{4} - \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 2}}{5 \times 2} = 6$$

دیبرستان امیرکبیر زنجان

دیبر: کاوندی - فرستندگان: جمال صدیق

دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 10^2 - \log(x-y) = 25 \\ \log(x-y) + \log(x+y) = 1 + 2\log 2 \end{cases}$$

دیبرستان بهشت آئین اصفهان

دیبر: قوام نحوی

مقدار x را از رابطه زیر حساب کنید:

$$2\log x = 4\log a + \frac{1}{4}c\log b + 4$$

- لگاریتم زیر را بدون استفاده از جدول حساب کنید:

$$\log \frac{3}{\sqrt[3]{81}} = ?$$

دیبرستان بحر العلوم بروجرد

دیبر: کاظمی - فرستندگان: خدیوی، معتمدی

در دایره ای به شعاع R مربعی محاطی کنیم و داخل آن مربع دایره ای محاط کرده و در داخل این دایره، مربعی محاط می کنیم و این عمل را مرتبآ ادامه می دهیم. حداجم مجموع محیط های مربعه ای محاط شده و مساحت دوازده و شعاعها رابر حساب R پیدا کنید.

دیبرستان پهلوی گلپایگان

دیبر: علی اکبر جعفری

- درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{9+99+999+\dots}{20 \text{ جمله}} = \frac{10^{21}-190}{9}$$

- تعداد تمام قطرهای یک 20 ضلعی را حساب کنید.

$$\log_{abc}x = R \quad \log_b x = Q \quad \log_a x = P$$

مطلوب است محاسبه x

- معادله زیرا راحل کنید:

$$3 + \log_{\sqrt{9}}(x - 1/\sqrt{5})^2 - \frac{3}{8} = \log_{\sqrt{5}}$$

مسائل هندسه

دیبرستان استرآبادی گرگان

دیبر: تدریسی - فرستنده: حمید رضا اسلامی

در مثلث ABC که AD نیمساز داخلی زاویه A است،

ضلع BC را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه N بددست

آید، از نقطه N عمودی بر AD رسم می‌کنیم که اضلاع مثلث

را به ترتیب در نقاط F و E قطع کند و همچنین از نقطه C خطی

موازی AB رسم می‌کنیم تا EN را در نقطه K قطع کند؛

الف. نوع خط AK را در مثلث AEN مشخص کنید.

ب- ثابت کنید که دو مثلث FCK و AEF متساوی الساقین

همستند.

ج- ثابت کنید که $EB = 2FC$ است.

دیبرستان شیخ بهایی

دیبر: هدانیا - فرستنده: محمد معینی

مثلث قائم الزاویه ABC مفروض است؛ با ارتفاع AH

رارسم می‌کنیم، هر گاه شعاع‌های دایره محاطی مثلثهای

AHC و AHB را به ترتیب r' و r'' و r''' بنامیم ثابت کنید

$$r' = r'' + r'''$$

- متوازی الاضلاع $ABCD$ را در نظر می‌گیریم؛ هر گاه

روی اضلاع آن و در خارج این متوازی الاضلاع مربعهایی را رسم

و نیز مرکز این مربعهایی را به هم وصل کنیم ثابت کنید شکل حادث

یک مربع است.

مسائل فیزیک

دیبرستان شاپورمیانه

دیبر: احمد نیا - فرستنده: حسین میانجی

چرخ‌چاهی است که شعاع استوانه اش 20cm و شعاع

دسته اش 15 cm است. در بالای سطح شیب داری به شیب 5°

در صدق ارگفته است. استوانه چرخ‌چاه به وزنه 1200 kg کیلو گرمی

متصل است. پیدا کنید اولاً نیروی کارگر که بر دسته چرخ‌چاه دارد

موقع بالا بردن وارد می‌شود.

ثانیاً اگر کارگر چرخ را 2m دور در ثانیه به رخاند کارگر

دیبرستان شیخ بهایی

دیبر: کنگرلو - فرستنده: محمد معینی

- مطلوب است تعیین رابطه‌ای بین a و b در صورتی که:

$$\begin{aligned} \log_c b^a + \log_c b^a &= \\ &= 2 \log_c b^a \times \log_c b^a \end{aligned}$$

- مطلوب است تعیین عدد که تشکیل تصاعد حسابی بدهند

بشر طی که حاصل ضرب طرفین $\frac{9}{4}$ و حاصل ضرب وسطین آن 11 باشد

دیبرستان صفا

دیبر: سبحان الهی - فرستنده: مهدی با بازاده

دستگاه زیر راحل کنید:

$$\begin{cases} \log_y x + c \log_y \sqrt{v} = 0 \\ \log_{\sqrt{9}} x = 2 \log \sqrt{10} \end{cases}$$

دیبرستان فارابی کرج

دیبر: برآزندۀ فرستنده: مجید مصباح

عدد 221 را به سه قسمت چنان تعیین کنید که تقسیمات مذبور تشکیل یک تصاعد هندسی داده و عدد بزرگتر 136 واحد بیش از عدد کوچکتر باشد.

دیبرستان فردوسی سراب

دیبر: گویا - فرستنده: فریدون داودنژاد

مطلوب است محاسبه جمله اول و قدر نسبت تصاعد عددی که مجموع n جمله‌ای آن به ازاء هر مقدار n مساوی $n^2 + 3n + 2$ باشد.

دیبرستان فروزی

دیبر: مجتبهدی - فرستنده: علی خسروی

مجموع n جمله از تصاعد حسابی زیرا محاسبه کنید:

$$\frac{a-1}{a} + \frac{a-2}{a} + \frac{a-3}{a} + \dots + \frac{1}{a}$$

دیبرستان هدف شماره 2 دختران

دیبر: شاهدی - فرستنده: فرشته فروزنده

حاصل عبارت زیر را معین کنید:

$$A = \log \frac{(7 + 4\sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}}$$

در صورتی که داشته باشیم:

دیبرستان شیخ بهایی

دیبر: فرجی - فرستنده: محمد معینی

مقداری شوره را با گوگرد حرارت می‌دهیم. گازهای حاصل در شرایط متعارفی $8/096$ لیتر حجم دارد. حساب کنید اولاً اگر این مخلوط گازی را از سود غلیظ عبور دهیم، چند لیتر از آن بدون ترکیب از محلول خارج می‌شود و چه مقدار سولفیت سدیم بدست می‌آید و چه مقدار گوگرد در این عمل مصرف می‌شود.

دیبرستان صفا

دیبر: رحیمی - فرستنده: مهدی با بازاده

$2/4$ گرم پیریت را بر شته کرده و گاز حاصل راوارد آب ژاول می‌نماییم، چند CC از آب ژاول که در هر لیتر 5 لیتر کلر دارد ترکیب می‌شود.

دیبرستان فارابی کرج

دیبر: افتخاری - فرستنده: مجید مصباح

$1/97$ گرم سولفور روی را به شدت می‌سوزانیم ماده باقی مانده را در جوهر گوگرد حل می‌کنیم و محلول حاصل را تبعیر می‌نماییم، ماده متبلوری به وزن $2/87$ گرم حاصل می‌شود. عده مولکولهای آب تبلور محلول را تعیین کنید.

کلاس پنجم طبیعی

جبو و مثلثات

دیبرستان 25 شهریو گلپایگان

دیبر: علی اکبر جعفری

حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$A = \cos(x - 7\pi) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin(x + 5\pi) +$$

$$+ \sin(2\pi - x) + \tan(x - 3\pi) \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{5} \cos x \text{ و انتهای کمان } x \text{ در ربع چهارم و}$$

$$\sin y = \frac{3}{5} \text{ و انتهای کمان } y \text{ در ربع دوم باشد مطلوب است}$$

محاسبه $\tan(x - y)$

در مدت 30 ثانیه چقدر است. ثالثاً تو ان این کار گررا بر حسب اسب بخار حساب کنید. ($\pi = 3$)

دیبرستان شیخ بهایی

دیبر: فرجی - فرستنده: محمد معینی

سطح مقطع پیستون تلمبه دو چرخه ای $5cm^2$ و طول مسیر پیستون 50 سانتیمتر و تلمبه پراز هوا با فشار 75 سانتیمتر جیوه است. پیستون را 30 سانتیمتر پائین می‌بریم در این موقع چند کیلو گرم نیرو برای نگهداری آن لازم است. وزن مخصوص جیوه $13/6 \text{ gf/cm}^2$ و دما ثابت می‌باشد.

- گرماسنجی برنجی به جرم $8/0$ کیلو گرم دارای یک بهم زن

به جرم 50 گرم و یک دما سنج به جرم 20 گرم . در آن مقداری آب می‌ریزیم بطوری که جرم گرماسنج $1/294$ کیلو گرم و دمای آن 10 درجه می‌شود. یک قطعه سرب به جرم 100 گرم و دمای 300 درجه در گرماسنج وارد می‌کنیم در صورتی که گرمای ویژه سرب $0/03 \text{ cal}^{\circ}\text{C}$ باشد دمای تعادل را حساب کنید. گرمای ویژه برنج $1/09$ کالری و ارزش آبی دما سنج و همزن 4 گرم است.

دیبرستان صفا

دیبر: رحیمی - فرستنده: مهدی با بازاده

در کالریمتری که ارزش کل آبی 100 گرم و درجه حرارت آن 11°C است 500 گرم آب 100°C می‌ریزیم، درجه تعادل را بیابید. اگر 400 گرم آب 100°C و 200 گرم الكل 70° بریزیم تعادل فرق نمی‌کند، گرمای ویژه الكل را بیابد.

دیبرستان فارابی کرج

دیبر: وطنچی - فرستنده: مجید مصباح

میزان الحرارة جیوه ای $10/2 \text{ gr}$ جیوه دارد. طول لوله میزان الحرارة از درجه صفر تا درجه صد برابر 20 cm است. مطلوب است محاسبه قطر دما سنج.

$$d_{\text{جيوه}} = 14 \times 10^{-6} \lambda = 13/6 \text{ شیشه}$$

$$K = 181 \times 10^{-6} \text{ جیوه}$$

مسائل شیمی

دیبرستان ستایش کرج

فرستنده: فرامرز بهشتی

25CC محلول اسید کلریدریک، 75CC محلول دسینرمال

سود سوزان را خشی می‌کند. مطلوب است از 100CC اسید ثانیاً 100CC از اسید مزبور با $10\text{M}\text{N}\text{O}_4$ $10\text{M}\text{N}\text{O}_4$ چند سانتیمتر مکعب گاز تولید می‌کند. (در شرایط متعارفی).

مسائل فیزیک

دیبرستان پرونین اعتمادی گچساران

دیبر: آریزی - فرستندگان:

مهناز کشکولی، ژاله عباسی، همایشمانی، صغرا دیزجانی،
هما قشقائیان

- ۸۱ عدد پل مشابه داریم که مقاومت داخلی هر کدام
۱۰٪ اهم است. تعیین کنید که چگونه این بیلهار استه بندی کنیم

تاشدت جریان در مقاومت خارجی ۹٪ اهمی ماکزیمم شود.

- موتوری با اختلاف پتانسیل ثابت ۲۲۰ ولت کار
می کند، نیروی ضد محکم که موتور چقدر باشد تا سوانح مصرف
شده در آن ماکزیمم گردد. در این حالت اندازه آن را نیز بدست
آورید در صورتی که مقاومت داخلی موتور ۱۰٪ اهم باشد. ثانیاً
شدت جریان را نیز حساب کنید.

- دو میله ذغالی و آهنی هم قطر که در صفر درجه به اندازه
۵۹ cm اختلاف طول دارند بطور متواالی بهم بسته شده اند.
تعیین کنید که طول اولیه آنها چقدر باشد تا مقاومت الکتریکی
دستگاه در تمام دماهای ثابت بماند در صورتی که ضریب گرمایی
آنها $a_{Fe} = -3 \times 10^{-4}$ و $a_c = 6 \times 10^{-3}$ و ضریب
مقاومت آنها $\rho_{Fe} = 12 \times 10^{-3}$ و $\rho_c = 4 \times 10^{-2}$ می باشد.

پاسخهای رسیده مر بوط به مسئله مسابقه

به دنبال اسامی که در شماره های ۸۷ و ۸۸ درج شد،
امامی کسان دیگری که تا آخر آذرماه، مهلت مقرر، حل مسئله
مسابقه را فرستاده اند در زیر درج می شود. (از پاسخهای
رسیده آنها که با استفاده از روابط متغیر انجام گرفته بود کنار
گذاشته شدوازدراج اسامی فرستندگان این را محلها خودداری
گردید):

محمد ناصر مجیدی دیبرستان سوریخ رشت - احمد
فاضلی دیبرستان شاهپور شهر کرد - غلامرضا جهانشاهی دیبرستان
فردوسي تبریز - ابوالقاسم آموزگار دیبرستان پهلوی بهبهان
محمد تقی غلامشاهی دیبرستان محمد رضا شاه پهلوی بهبهان
مرتضی دیباشی دیبرستان پهلوی گلپایگان - عباس یاوری دیبرستان
پهلوی گلپایگان - رضاموسوی دیبرستان شریف ساری - رضا
سلامی دیبرستان پهلوی گلپایگان.

دیبرستان پهلوی ملایر

دیبر: صفریان

- اگر $\sin \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ باشد مقدار

زاویه β را بحسب درجه و رادیان حساب کنید و بعد خطوط
مثلثاتی کمان 15° را حساب کنید.

- اگر $x + y = \frac{\pi}{4}$ باشد تساوی زیر را ثابت کنید:

$$(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$$

دیبرستان شیخ بهایی

فرستنده: محمد معینی

- مشتق تابع زیر را بدست آورید:

$$y = x\sqrt{x-1} + x'\sqrt{x+1}$$

- تابع $3 - 2x - x^2 = y$ مفروض است. تابع مذکور

را رسم کرده و نیز نقطه ای روی منحنی فوق پیدا کنید که مماس
بر آن نقطه برخط $1 - 2x = y$ عمود باشد.

- اگر $\operatorname{tg} y = \frac{1}{2a+1}$ و $\operatorname{tg} x = \frac{a}{1+a}$ باشد ثابت

کنید که $x + y = \frac{\pi}{4}$ است.

دیبرستان فرخی

دیبر: حافظ قرآن - فرستنده: کمال آبادی

- تابع زیر مفروض است:

$$y = x^r + mx + 25$$

مقدار m را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش آن بر خط
به معادله $(x+5)^5 = y$ مماس گردد.

- معادله زیر را حل کنید:

$$2\cos 5x - 1 = 0$$

دیبرستان دخترانه لامعی گرگان

دیبر: سیدین - فرستنده: کاشانی راد

- تابع زیر مفروض است:

$$y = ax^r + bx^s + cx + d$$

ضرایب این تابع را چنان مشخص کنید که نمایش هندسی آن محور
عرضه ارا در نقطه ای به عرض ۶ قطع کند و مماس در نقطه عطف
که به طول یک می باشد به معادله $7 - 12x = y$ باشد.

- در صورتی که $\cot g x = \frac{12}{5}$ و انتهای کمان x در ربع

سوم باشد مقدار عبارت زیر را حساب کنید:

$$A = \sin(1440^\circ - x) - \cos(810^\circ - x) + \\ + \operatorname{tg}(13\pi - x)\operatorname{cotg}(720^\circ - x)$$

جدولها بطور واضح درباره تاریخ منطق متری سخن می‌گویند. برای تشکیل اندازه‌های کوچکتر و یا بزرگتر، واحدهای اصلی رابه طریقه‌های مختلف می‌شکستند و یا باهم یکی می‌کردند، و فقط بعد این عمل رابه صورت مقیاس اعشاری درآورده‌اند. این مطلب را بیش از همه می‌توان از جدول اندازه طول فهمید که سونتسه‌زی رساله خود را با آن شروع می‌کند:

«برای اندازه‌گیری طول ازه شروع می‌کنم. اگر بخواهی درباره‌هو بدانی، آن عبارتست از نخی که کرم ابریشم تف می‌کند.

$$1 \text{ یکیو} = 10 \text{ چزان} \quad 1 \text{ سی} = 10 \text{ هو}$$

$$1 \text{ دوانیو} = 50 \text{ چی} \quad 1 \text{ هاو} = 10 \text{ سی}$$

$$1 \text{ بی} = 40 \text{ چی} \quad 1 \text{ الی} = 10 \text{ هاو}$$

$$1 \text{ اف} = 10 \text{ الی}$$

$$1 \text{ بو} = 6 \text{ چی} \quad 1 \text{ تسون} = 10 \text{ فن}$$

$$1 \text{ مو} = 240 \text{ بو} \quad 1 \text{ چی} = 10 \text{ تسون}$$

$$1 \text{ لی} = 300 \text{ بو} \quad 1 \text{ چزان} = 10 \text{ چی}$$

اندازه طول هوبه اندازه قطر تارابریشم تعیین می‌شود. یکی از اندازه‌هایی که در اینجا نام برده شده است مربوط به مساحت است و این هو است، بنابراین تساوی مربوطه را باید اینطور گفت: 240 بوی مربع مساویست با 1 هو، و آنطور که از مسئله اول «ریاضیات در نه کتاب» نتیجه می‌شود، این مساحت مستطیلی است به ضلعهای 15 و 16 بو (قدم). تسین

شی هواندی 5 رقم اعشار برای چی داده بود.

می‌بینیم که فن محاسبه در منطق متری اثر گذاشت و این به نوبه خود مایه اصلی برای کسرهای اعشاری شد. تخته محاسبه همراه باروش موضعی که در آن بکارمی رفت به پیدایش کسرهای اعشاری کمک کرد. روی این تخته می‌باشد به سادگی عملهای تقسیم و ریشه گرفتن، بدون توجه به مرزی که سونتسه‌زی و رامشخص می‌کند، انجام شود. هرستون خالی که در سمت راست سونتسه‌زی واحد قرار گرفته باشد، می‌تواند برای بدست آوردن رقمهای اعشار بکار رود، که به زیان امروزی به معنای این است که در سمت راست ممیز صفر قرار دهیم.

ولی این تخته محاسبه‌هم به نوبه خود محدودیتی بوجود آورده بود. بعد از انجام عمل روی تخته به مخصوص اینکه نتیجه را از روی آن جدا می‌کردند، وضع موضعی بودن خود را از دست می‌داد. برای نوشتن، چینی‌ها از اصل ترکیب ضریبی استفاده می‌کردند، یعنی از دستگاه اعشاری که رقمهای آن در صفحه بعد

$$1 \text{ تسون} = 10 \text{ گه}$$

$$1 \text{ دوی} = 10 \text{ شهنو}$$

$$1 \text{ شاو} = 10 \text{ چاو}$$

این جدول از این جهت شایان توجه است که در همه تساویها، بجز نخستین آنها، باشمار اعشاری ساخته شده است. به همین مناسب، همانطور که قبل هم دیدم، می‌توان از آنها برای نشان دادن عدددها به صورت کسرهای با منطق اعشاری بسهولت استفاده کرد. به عنوان مثال اگر دوی را واحد بگیریم، به کمک جدول می‌توان تسعه رقم اعشاری را محاسبه کرد.

مذکور می‌شویم که اگر بر عکس مثلاً $\frac{1}{2}$ را به عنوان واحد اختیار کنیم، می‌توان دستگاهی با ردیفهای مشخص برای بیان عدددهای بزرگ در دست داشت به نحوی که برای هر ردیف نامی وجود داشته باشد. سونتسه‌زی دونمونه از چنین دستگاهی را ساخته است. در دستگاه اول هر ردیف جدید که از 10^8 شروع می‌شود، با نامهای خاصی داده شده است: ای، چزاو، تسه‌زی وغیره؛ در دستگاه دوم (که برای عدددهای بزرگ است) اسمهای مشابهی برای هر یک از طبقه‌های جدید، یعنی 10^{12} ، 10^{16} ، 10^{20} ... ذکر شده است.

جدول دیگر شامل اندازه وزنه است که البته اجزاء آن اهمیت اجزاء جدول حجمها را ندارد. اندازه‌هایی که مربوط به وزن در چنین اعشاری نبوده است. علاوه بر آنکه این جدول اعشاری نیست، یکنواخت هم نیست:

«برای وزن کردن با شروع ازشو:

$$1 \text{ تسه‌زین} = 16 \text{ لانو}$$

$$1 \text{ تسه زیون} = 30 \text{ تسه‌زین}$$

$$1 \text{ دوانیو} = 4 \text{ تسه‌زیون}$$

همانطور که دیده می‌شود همه رابطه‌های بین اندازه‌ها در این جدول، بجز دوتای اول آن، به صورتهای متفاوت است؛ به روشنی معلوم است که دورابطه اول هم بعداز تنظیم جدول به آن اضافه شده است. این مطلب بهما در این نتیجه گیری کمک می‌کند که جدولهای سونتسه‌زی نه یک جمع آوری ماده واحدهای موجود، بلکه نتیجه تنظیم و اصلاح آنها بوده است. ابتدا یک واحد اساسی تعریف می‌شود و سپس رابطه بین واحدهای مختلف حتی امکان به صورت اعشاری داده می‌شود.

جدول اعداد

طرح از: غلامحسین رحم دل (تاریخ وصول به دفترچه: ۱۳۴۹/۸/۲۵)

چون در چاپ این جدول در یکان شماره قبل اشتباههای متعددی در شماره گذاری مطالب روی داده است، ضمن درخواست پوزش از علاقمندان، به چاپ مجدد آن مبادرت می‌شود.

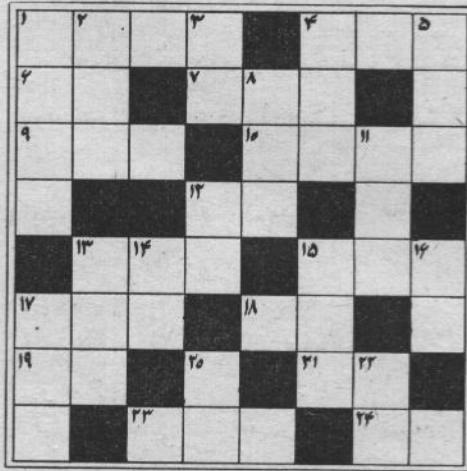
آن یك هفتم مجموع دو رقم دیگر است. ۱۶ - متمم حسابیش کعب رقم یکان آن است. ۱۷ - حاصل ضرب عدد ۱۲ قائم در عدد ۱۸ افقی. ۲۰ - مقلوب عدد ۱۶ قائم. ۲۲ - مقلوب عدد ۲۴ افقی.

دبایله از صفحه قبل

نامهای موضعی داشت، شیوه آنچه که در دستگاه عدد شماری شفاهی امروزی داریم. در این عدد نویسی صفر وجود ندارد. همانطور که روی تخته هم وجود ندارد. بودن علامت صفر (به نحوی که صفر را به عنوان یک رقم مثل سایر رقمهای اراده در عدد نکند) مانع بوجود آمدن شکل نهایی کسرهای اعشاری شد به همین علت است که در کسر اعشاری پیچنی علامت ممیز وجود ندارد. روی تخته کاملاً شیوه کسرهای اعشاری امروزی نشان داده می‌شود هر رقم دقیقاً در جای خودش بود، ولی همینکه از تخته جدا می‌شد و نتیجه عمل به صورت نوشته در می‌آمد، صورت منطق متری، یعنی رقمهای با نامهای مخصوص، به خود می‌گرفت، درست مثل شمار لفظی که یک دستگاه موضعی با ترتیب ضربی است. ما شاهد روش سون تسدزی وتلاش او برای بیرون آمدن از این وضع بودیم، و ضمناً دیدیم که چگونه با ساختن توانست به این امر موفق شود. از این به بعد کسرهای متعارفی و اعشاری در پیشرفت ریاضیات به دو راه مختلف افتادند. کسر، به عنوان نسبت دو عدد، مبنای برای تعمیم بعدی مفهوم عدد شد و این امکان بدست آمد که حوزه های عددی مختلف جبر امروزی ساخته شود. این جنبه جبری تعمیم مفهوم عدد بود.

اگر کسرهای متعارفی، اشیاء ساده ای هستند که عملیاتی طبق قاعده های معلوم روی آنها انجام می شود، کسرهای اعشاری مفهوم بینهایت و مسئله های ناشی از آنرا بالقوه در درون خود داشتند.

کسر اعشاری اساسی برای تعمیم و پیشرفت مفهوم تقریب در حوزه رشته ها و کسرهای مسلسل شد، بدون تردید، فیو تون برای تجزیه تابع به صورت یک رشته، از فکر کسر اعشاری الهام گرفته است، زیرا کسر اعشاری مثل رشته پیوسته ای است که در آن هر رقم معرف درجه ای از دقت مقدار واقعی عدد است. این جنبه تحلیلی تعمیم مفهوم عدد است.



افقی: ۱ - به صورت \overline{abab} که \overline{ab} زوج و \overline{abab} توان چهارم است. ۴ - به صورت \overline{ababa} و \overline{aa} است. ۶ - جمله ششم از تصادع حسابی که جمله بیستم آن ۴ و جمله دهم آن ۲۰ است. ۷ - به صورت \overline{ababa} و توان سوم است. ۹ - هر گاه این عدد را از متمم حسابیش کم کنیم ۴۹۴ بدست آید. ۱۰ - مقلوب عدد ۱ افقی. ۱۲ - همان عدد ۶ افقی. ۱۳ - حاصل ضرب سه عدد اول که تصادع حسابی تشکیل می‌دهند و رقم دهگان آن برابر با مجموع دو رقم دیگر آن است. ۱۵ - متمم حسابی عدد ۴ افقی. ۱۷ - مقلوب عدد ۱۳ افقی. ۱۸ - عدد ۱۱ افقی تکرار این عدد است. ۱۹ - خارج قسمت کامل تقسیم آن بر مجموع رقمهایش مکعب کامل است. ۲۱ - دو برابر عدد ۱۲ افقی. ۲۳ - رقمهای آن یکسانند و تجزیه آن به عوامل اول به صورت a^3b است. ۲۴ - متمم حسابی آن دو برابر عدد ماقبل آن است.

قائم: ۱ - به صورت \overline{aabb} است که \overline{ab} همان عدد ۶ افقی است. ۲ - توان چهارم رقم یکان خود است. ۳ - به صورت $\overline{a^3b}$ تجزیه می‌شود و در ضمن مقلوبش مجنوز است. ۴ - یک واحد کمتر از عدد ۱۷ افقی. ۵ - همان عدد ۴ افقی. ۸ - دو برابر عدد ۱۳ افقی. ۱۱ - اگر یک واحد به رقم سدگان اضافه شود هفت برابر یک نهم عدد ۲۳ افقی بدست آید. ۱۲ - جذر عدد ۴ افقی برایک نهم عدد ۲۳ افقی. ۱۴ - یک واحد بیشتر از عدد ۱۳ افقی. ۱۵ - دو برابر عدد ۱۸ افقی. ۱۵ - رقم سدگان آن مجموع دو رقم دیگر و رقم یکان

معرفی کتاب

روشهای حساب استدلالی

ترجمه و تأثیر : محمد هادی بکتاشی

شامل ۸۹۸ مسئله و ۵۰ تست و

۴۸ تست از کنکور سراسری

۴۳۴ صفحه - بها : ۲۲۵ ریال

انتشارات ارغون

شیوه عموی (در دو جلد)

تأثیر : منوچهر صباحی دبیر دبیرستانها و دانشرای راهنمایی
قابل استفاده جهت

دانشآموزان دوره دوم دبیرستانها - داوطلبین کنکور سراسری
دانشگاهها به ویژه دانشجویان دانشرای راهنمایی رشته علوم
تجربی (کتاب طبق برنامه دانشرای راهنمایی تنظیم شده است)

قیمت جلدی ۱۵۰ ریال

بنگاه مطبوعاتی هاشمی شیواز

۲۲۲ مسئلہ، سؤال

و قسمت

کنکور

شامل مسائل و سوالات و تستهای چهار جوابی
جبر - حساب - مثلثات - هندسه - شیمی و
فیزیک به انضمام فرهنگها و روابط ریاضیات
و شیمی و فیزیک در قطع جیبی با کاگذاعلاء
 منتشر شد

جهت دریافت یک جلد کتاب فوق می توانید ۸۰ ریال
پول یا تمبلر باطل نشده و سیله پست سفارشی ارسال
فرمایید تا کتاب با پست سفارشی جهت شما ارسال گردد.

آدرس : تهران - صندوق پستی ۷/۷۰۳۳ نامه نگاری شیوا
از تهران و شهرستانها نماینده فروش می پذیریم
(تلفن ۲۲۴۹۱)

تمرينهای ریاضیات مقدماتی

طرح و حل از : احمد شرف الدین

برای دانشآموزان، دانشجویان و دبیران

۱۵۶ صفحه به قطع جیبی - بها : ۵۰ ریال

انتشارات ارغون

کتاب فخر رازی

محل فروش مجله و سایر انتشارات بکان

مرکز فروش کتابهای درسی و حل المسائل آنها

تهران، خیابان شاه آبد - تلفن ۳۱۰۵۵۲

هزار به علاقمندان

کتاب و مجامعت

جهت دریافت لیست کتاب فوق بر نامه دبیرستانی
و خرید انواع کتب و مجلات قدیم و جدید (فارسی -
انگلیسی) باما مکاتبه فرمائید.

✿ نام کتاب و نام نویسنده کتاب دلخواه خود را
برای ما بنویسید و قیمت آنرا و سمله پست سفارشی یا
چک بانکی با پست معمولی ارسال فرمائید تا کتاب دلخواه
شما را ارسازداریم .

✿ جهت فروش انواع کتاب اضافی خود و هنجین
انواع مجلات علمی خویش (فارسی - انگلیسی) با ما
مکاتبه کنید .

آدرس : ایران - تهران - صندوق پستی ۷/۷۰۳۳

نامه نگاری شیوا

هزار به دانش آموزان خلاصه دستور زبان فارسی

چاپ دوم قابل استفاده برای دانشآموزان دوره اول و
دوره دوم و داوطلبان کنکور

برای دریافت آنکه خلاصه دستور زبان فارسی که
بطرز جالب و کامل نوشته شده است ، می توانید ۱۲ ریال
پول و یا تمبلر باطل نشده ارسال فرمایید .

آدرس : تهران - صندوق پستی ۷/۷۰۳۳ (۲۲۴۹۱)
نامه نگاری شیوا (تلفن ۷۰۳۳)

از شهرستانها نماینده فروش می پذیریم

انتشارات یکان

روش ساده

حل مسألهای شیمی

ترجمه: عطاء الله بزرگ نیا

۲۰ ریال

معماهای ریاضی

ترجمه: محمدرکنی قاجار

بها: باجلد شمیز ۷۵ ریال

باجلد زرکوب: ۱۰۰ ریال

مجموعه علمی

شامل مقالات ریاضی، فیزیک و شیمی

حل مسائل ممتاز ریاضی و مطالعه دیگر

۶۰ ریال

مسئلهای هوش

ترجمه: باقر مظفرزاده

بها: ۴۰ ریال

مسئلهای چند جوابی شیمی

ترجمه: عطاء الله بزرگ نیا

بها: ۴۰ ریال

سرگرمیهای جبر

ترجمه: پرویز شهریاری

نایاب

راهنمای ریاضیات متوسطه

تألیف: عبدالحسین مصحفی

چاپ چهارم: ۱۲ ریال

تمرینات

ریاضیات مقدماتی

تألیف: استاد عثیر و دی

فلا نایاب

مسائلی از حساب استدلالی

تألیف: محمود کاشانی

جلد سوم
۱۵ ریال

جلد دوم
۱۵ ریال

جلد اول
۱۲ ریال

مقدمه بر

تئوری مجموعه ها

تألیف: علی اصغر هومانی

فلا نایاب

مبادی منطق و ریاضی جدید

بها: ۲۴۰ ریال

تألیف: غلامرضا عسجی

مشترکان یکان که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان که ساکن تهران می باشند مستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند و آنان که در شهرستانها اقامت دارند می توانند وجه رابه صورت نقدي یا تمبر باطل نشده یا چک بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده شود.

