یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ نهم، شمارهٔ ۳ شمارهٔ مسلسل: ۸۸ آذر ۱۳۵۱

دراین شماره:

بها: ۲۵ ریال

عرض تبریك به‌مقام عالی وزارت آموزش و پرورش

کشورما درپیشرفت چشمگیر اخیر خود در بسیاری از موارد، عنوان کشورنمونه‌رابدست‌آورده‌است. یکی‌ازاین‌موارد، تحولاتی‌است‌که در زمینهٔ کتابهای درسی‌انجام گرفته ومشهود همگان است. دگرگونیهای برنامه‌ها وکتابهای درسی‌مستلزم ایجاد تحولاتی هماهنگ باآن در زمینه‌های دیگر آموزشی و مخصوصاً تربیت‌معلم وامتحانات بود. درایجاد این‌هماهنگی، اقدامی اساسی درهفتهٔ گذشته توسط وزارت‌آموزش و پرورش انجام‌گرفت و سازمانها و ادارات: برنامه‌ریزی و تحقیقات، کتابهای درسی، انتشارات‌آموزشی، تربیت‌معلم، امتحانات، امورتربیتی و سمعی و بصری زیر نظر معاونت آموزشی آن وزارت قرار گرفتند.

به‌مناسبت این اقدام شایان‌تحسین، ومخصوصاً انتخاب آقای **جهانگیر شمس‌آوری** برای تصدی معاونت‌مزبور، به‌مقام عالی وزارت‌آموزش و پرورش تبریك و تهنیت عرض می‌شود.

آقای جهانگیر شمس‌آوری غیر از تحولاتی‌که هماهنگ انقلاب مملکتی در زمینهٔ کتابهای درسی پدیدآورده، وغیراز سوابق‌وفعالیتهای‌مختلف فرهنگی‌که داشته، دراشاعه و گسترش ریاضی جدید درایران سهم مؤثر ایفاکرده‌است؛ دورهٔ کتابهای «کاوش درریاضیات نوین» بـه‌کوشش وی فراهم‌آمد و اولین مقالات مربوط به‌ریاضی جدید و تحول جهانی روش آموزش آن‌که دریکان‌درج‌شدبه‌قلم وی بود.

ناگفته نباید گذاشت‌که مجلهٔ‌یکان ازآغاز انتشارخوداز همکاری‌معنوی وصمیمانهٔ آقای جهانگیرشمس‌آوری برخوردار بوده وبخصوص شماره‌هایی ازدورهٔ اول مجله‌مستقیماًزیرنظر معظم‌له تهیه شده است.

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ نهـم ـ شمارهٔ سوم ـ شمارهٔ‌مسلسل: ۸۸

آذر ۱۳۵۱

صاحب امتیاز وسردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیر: بانونصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، **شمارهٔ** ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

حساب بانکی: حساب‌جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ‌لاله‌زارنو بانك‌صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Director : **MOS'HAFI Abdolhossein**

Volume IX , number 3. Dec. 1972

subscription : 3$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ‌آذر ـ تلفن: ۸۲۵۹۲۸

توجه

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت‌دیگر، وجهی‌به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریزمی‌کنید، حتماً مراتب راضمن‌نامهٔ جداگانه به‌دفتر مجله اطلاع دهید. فراموش‌نکنیدکه درنامهٔ ارسالی، نشانی کامل خودرا باخط خوانا بنویسید.

۲ـ اگر مشترك مجله هستید ونشانی شما تغییرمی‌کند، نشانی جدید خودرا به‌دفتر مجله اطلاع دهید. مجله‌هایی‌که‌تا قبل‌از اطلاع برنشانی جدید شما به نشانی سابـق ارسال شده باشد، مجدداً برای شما ارسال‌نخواهد شد.

۳ـ درنامه‌های ارسالی خود به دفتر مجلـه، نام، نام‌خانوادگی، شهر ونشانی‌خودرا باخط خوانا وواضح‌بنویسید.

۴ـ غیراز انتشارات یکان، کتاب دیگری را ازما تقاضا نکنید. برای تهیهٔ کتابهایی‌که زیر عنوان «معرفی‌کتاب» یابـه صورت‌آگهی درمجله معرفی‌می‌شوند، به ناشران‌آنها مراجعه فرمایید.

پاسخهای مربوط به حل مسئلهٔ مسابقه در صفحهٔ ۱۸۴

رویهٔ یکان درمورد اصطلاحات

درج مقاله‌های مربوط به‌منطق‌دریکان، ضمن آنکه ازطرف اهل این علم مورد استقبال قرار گرفته، ازدونظر، مخالف باهم، مورد ایراد واقع شده‌است.

ایراد اول که توسط شخصیتی ناشناس درمذاکره‌ای تلفنی تذکرداده‌شد، این بود که چرا به‌جای اصطلاحات مناسب ومتداول منطقیون گذشته، اصطلاحاتی جدیدالولاده (مثلاً اصطلاح «گزاره») بکار می‌رود که استعمال آنها برای مفاهیم مربوط، ازنظرمعانی کلمات، کاملاً اشتباه وبی‌مورد است.

ایراد دوم که بارها توسط برخی‌از صاحب‌نظران یادآوری‌شده این‌است که چرا برای همهٔ اصطلاحات قدیمی (مثل «سور») اصطلاحاتی جدید ازفارسی سره بکار نمی‌رود.

اولین شمارهٔ یکان که منتشر شد ودربارهٔ آن از صاحب‌نظران نظر خواسته‌شد، این حقیقت آشکار گشت که حتی در مورد قواعد رسم‌الخط فارسی تشتت آراء وجود دارد. بعدها که مقالات و ترجمه‌های مربوط به‌ریاضی جدید درمجله‌چاپ گردید، معلوم‌شد که دربارهٔ انتخاب معادلهای فارسی برای اصطلاحاتی که جدیداً وضع می‌شود اختلاف آراء شدیدتر است.

برای انتخاب اصطلاحات وموارد دیگر مورد اختلاف صاحب‌نظران، هررویه‌ای که‌برای یکان اختیارشود ازنظربرخی ازاشخاص خوشایند وازنظر برخی دیگر از اشخاص ناصواب خواهدبود. در این‌باره، برای یکان رویه‌ای انتخاب شده است که ازطرف وزارت آموزش وپرورش برای کتابهای درسی اتخاذ شده و در سراسر کشور بطوریکسان بکارمی‌رود. حال اگر روشی یااصطلاحی بی‌مورد وناصواب است، باید وزارت آموزش وپرورش را برآن آگاه‌ساخت.

عبدالحسین مصحفی

اندیشهٔ ریاضی

نقل از کتاب مرجان

نوشته : پرویز شهریاری

ما نباید گفته‌ای را به‌صرف اینکه دیگران گفته‌اند باور کنیم .
ما نباید احادیث واخبار دیگران را به‌اسم اینکه ازقدیم به‌ما رسیده باور کنیم .
ما نباید گفته و نوشتهٔ دانشمندان وخردمندان را تنها چون گفته و نوشتهٔ دانشمندان و خردمندان است بپذیریم .
ما نباید گمان کنیم که پاره‌ای ازاندیشه‌های پریشان، چون صورت آشفتگی وپریشانی دارد ، ازخدایان وعالم غیب رسیده وآنهارا باور کنیم.
ما نباید به‌استدلالهای خودمان اطمینان داشته باشیم .
ما نباید تنها به‌ملاحظهٔ شباهت چیزی را بپذیریم .
ما نباید کلام استاد و پیرخودمان را، تنها چون کلام استاد وپیرمان است، قبول کنیم .
اما باید آنچه‌را به‌عقل وفهم وادراك خودمان صحتش بالرأی والعیان برایمان به‌ثبوت رسیده است قبول کنیم، خواه کلام باشد یا نوشته یا چیز دیگر .

«بودا»

من خیال نمی‌کنم که ما مجبور باشیم افکار و احکامی راکه میراث گذشته‌اند بپذیریم، مگر آنکه این احکام متکی بر دلایل قطعی وغیرقابل تردید باشد. زیرا به‌نظرمن این نشانهٔ نهایت ضعف ونادانی است که ماحق مسلم وبدیهی رامحترم نشماریم وعقایدی راکه سابقاً داشته‌ایم با اصرار ولجاج محفوظ داریم.

«بلز پاسکال»

اندیشه‌ای راکه **بودا** و **پاسکال**ـ باهمهٔ اختلاف زمانی که دارندـ دنبال می‌کنند، یك اندیشهٔ ریاضی است . اندیشهٔ ریاضی یعنی اندیشه‌ای که تنها از استدلال منطقی پیروی کند وبه‌هیچ حکمی گردن نگذارد مگرآنکه قابل اثبات باشد.

آنچه که به‌صورت بنیانی، ریاضیات را از سایرعلوم جدا می‌کند، درهمین روش پذیرفتن احکام است . علوم تجربی و قوانین و نتیجه گیریهای آنها بر تجربه و مشاهده بنیان گرفته است، درحالی که در ریاضیات تنها استدلال منطقی می‌تواند مورد قبول باشد.

درست است که ریاضیات‌هم ازیك‌طرف ازتجربهٔ طولانی بشر سرچشمه گرفته است و از طرف دیگر احکام و روابط آن با تجربه روی پدیده‌های طبیعت موردتأیید قرار می‌گیرد ولی آنچه که اهمیت اساسی دارد روش کار و شیوهٔ پذیرفتن احکام ریاضی‌است که نمی‌تواند به‌صورت تجربی واستقرائی باشد.

روش استدلال ریاضیات **روش قیاسی** است، یعنی باید حکمی درحالت کلی ثابت شود تا بتواند برای حالتهای خاص موردقبول قرار گیرد، برعکس روش استقرائی که ازجزء به‌کل می‌رود ووقتی حکمی درموارد جداگانه وروی حالتهای خاص تأیید شود به‌صورت کلی وبرای همهٔ موارد مشابه مورد تأیید قرار می‌گیرد.

به‌همین‌مناسبت است که اگر درتدریس و تفهیم مطالب ریاضی روی روشهای درست استدلال، تکیه نشود ودانش‌آموز وادار به‌تفکر درزمینه‌های منطقی و روشهای بنیانی ریاضیات نشود، مطلقاً ازریاضیات بهره‌ای نخواهد برد ودرانواع خاصی ازروشهای استقرائی، محدود وسردرگم می‌ماند.

بدین‌علت است که اکثردانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی، برای توفیق درحل مسئله‌ها به‌حافظهٔ خود وبراساس نمونه‌سازی متوسل می‌شوند وباکمترین تغییری که درنحوهٔ بیان مطالب پیداشود گمراه وبدون چاره می‌مانند .

ریاضیات وشیوهٔ فراگیری آن باید به‌دانش‌آموز کمك کند

تاذهنی منطقی پیداکند ودرهمهٔ مسائلی که باآنها مواجه می‌شود به‌چون وچرابپردازد وبتواند ازذهن اندیشمندخودبرای گره‌گشایی درسایرزمینه‌های علمی واجتماعی سودجوید؛ ولی اگر قرارباشدکه درخود ریاضیات هم مواجه بامسائل واحکام بدون ارتباطباهم‌باشد ویابه‌دلیل یك‌تجربه ویاصرفاً گفتارمعلم حکمی‌را بپذیرد ، چگونه می‌توان توقع داشت‌که ذهنی منظم ومنطقی پیداکند ودرسایر مسائلی‌که درگیر می‌شودکوتاهترین راه ومنطقی‌ترین روش‌را پیداکند.

ریاضیات نه به‌معنی فراگرفتن وبه‌خاطر سپردن مشتی روابط واحکام است ونه‌فرورفتن درانبوه مسائل؛ ریاضیات در اساس به‌معنای شناختن‌دستگاههای‌ریاضی ودرك درست‌مفاهیم وروشهای استدلالی است؛کسی که‌ذهن ریاضی‌دارد ممکن‌است نتواند مسئله‌ای طرح ویا حل‌کند ولی‌هرگز استدلال‌نادرست نمی‌کند، روشهای غیرعلمی‌را تشخیص می‌دهد واین‌قدرت فکری‌را داردکه بتواند درست را از نادرست بازشناسد.

به‌این جهت است‌که ریاضیات متوسطه نقشی اساسی در استحکام سازمان فکری دانش‌آموز دارد وبسته به‌اینکه چگونه آموخته شود می‌تواند اورا به‌فردی منطقی، متفکر وبا ذهنی منظم بارآورد و یا اینکه اورا متزلزل، بی اعتماد به خود و سردرگم درمسائل و روابطی‌که نه‌مفاهیم و بنیادهایشان را می‌شناسدونه ازکاربردآنها مطلع‌است رها سازد.

ریاضیات به‌نظم، حوصله وتفکرنیاز دارد واین‌سه‌را هر فرد طبیعی دارد وتنها باید به‌آنها عادت‌کند واین‌ممکن نیست مگر ازهمان سالهای اول متوسطه وحتی دبستان . وقتی‌که دانش‌آموزی را تنها با روابط واحکام آشنا کنیم و ریشه‌های استدلالی مفاهیم را باحوصله وبه‌تدریج به‌او نشناسانیم ناچار است‌که درریاضیات به‌حافظه تکیه‌کند وتنها از نمونه‌سازیها و الگوهایی‌که در،قابل اونهاده‌شده است پیروی‌کند. وقتی‌که چنین‌شد قدرت فکری دانش‌آموزفلج‌می‌شود ودرمقابل‌مطالب تازه ویا تغییرشکل‌یافته درمی‌ماند وآن‌وقت حق داردکه گمان را برکم‌ظرفیتی و احتمالاً بی‌استعدادی خود بگذارد و چنین پنداردکه توان درك مسائل ریاضی را ندارد؛ وقتی‌که این بی‌اعتمادی به‌خود درسالهای دبیرستان درذهن اوریشه‌بدواند دیگر هرگز نخواهد توانست به بازسازی خود بپردازد ودر نتیجه درهرکاری‌که شروع‌کند با دودلی ونگرانی پیش‌می‌رود وبادست خود راه را برموفقیتهای خود می‌بندد.

چگونه می‌توان ریاضیات را به‌درستی‌آموخت ؟

۱ـ فیزیکدان وریاضیدان بزرگ نیمهٔ اول قرن بیستم، اینشتین معتقد است‌که :

« استنباطات الهامی که نتیجهٔ بلاواسطهٔ مشاهده »
« می‌باشند ، همیشه با حقیقت مطابقه ندارند. . . »
«هنگام تجسس برای درك قوانین طبیعت، آنچه‌که»
« از واضحترین حدسیات الهامی نتیجه می‌شود ، »
« اغلب نادرست‌ترین آنهاست...».

هزاران سال بشر با تکیه به «عقل‌سلیم» و «مشاهدات روزانه» معتقد بودکه زمین مسطح‌است وساکن وهیچکس گمان نمی‌بردکه روزی بتوان طاق بلورین‌آسمان راشکافت وبه ماه وسیارات دیگر دسترسی پیداکرد .

اگردرریاضیات به‌جای‌استدلال قیاسی‌ازاستدلال‌استقرائی کمك‌گرفته شود، هرگز نباید این انتظاررا داشت‌که متفکر ریاضی بوجودآید. اغلب دیده می‌شودکه مثلاً برای‌اثبات دستور $a^m.a^n = a^{m+n}$ به‌مثالی اکتفامی‌شود ویا درهندسه باتوسل به‌شکل واستفاده ازجملهٔ «روی شکل دیده می‌شود» برای اثبات یك قضیه استفاده می‌شود، یعنی حالت خاصی از موضوع مطرح می‌شود وباتوجه‌به‌درست بودن آن ازدانش‌آموزان خواسته می‌شود که آن‌را درحالت‌کلی قبول‌کنند.

درست است‌که در بعضی مراحل نمی‌توان قضیه‌ای را بطورکامل و باردقت ریاضی برای دانش‌آموز دبیرستانی ثابت کرد، ولی‌این‌مطلب‌دلیل‌آن‌نمی‌شودکه‌استدلال‌ناقص استقرائی رابه‌عنوان استدلال‌کامل ارائه‌دهیم. وقتی‌که دستور: $a^m.a^n = a^{m+n}$ رابرای حالت خاص صحیح ومثبت بودن m و n ثابت‌می‌کنیم باید حتماً یادآوری‌کنیم‌که این دستور برای هرعدد حقیقی m و n صحیح است ولی به علت اینکه بعضی مقدمات رانمی‌دانیم ما نمی‌توانیم‌آن را درحالت‌کلی ثابت‌کنیم وبعدها درسالهای بالاتربرای شما اثبات خواهند کرد .

یا وقتی‌که ناچاریم یك‌قضیهٔ هندسی را به کمك شکل ثابت‌کنیم، باید همهٔ حالتهای ممکن شکل‌را درنظر بگیریم و دانش‌آموز را عادت دهیم‌که همیشه متوجه انواع مختلف و ممکن مسئله باشد.

برای جلب‌نظر دانش‌آموزان دراین‌مورد، کمك‌گرفتن‌از تاریخ ریاضیات و طرح بعضی‌مسائل سادهٔ معمایی بسیار مفید است .

گاهی ذکر یك‌سابقهٔ‌تاریخی ازیك‌مطلب ریاضی وبررسی گرفتاریها واشتباههایی‌که گریبانگیرحتی ریاضیدانهای بنام‌بوده چنان شوقی دردانش‌آموزبرمی‌انگیزاندکه تمام هوش وحواس اورا متوجه مطلب می‌کند وضمناً اورا متوجه دامهایی‌که در مقابلش گسترده‌است می‌نماید .

درطرح مسائل‌سادهٔ معمایی هرگز نباید مبنارا برمسائل

استثنائی ومشکل گذاشت . می‌توان بارسم یك شکل نادرست مثلاً ثابت کرد که‌زاویهٔ قائمه بازاویهٔ منفرجه برابراست وبعد از دانش‌آموزخواست که نقص استدلال را پیداکند. درزمینهٔ هندسه دوکتاب بسیارجالب «سرگرمیهای هندسه» و « اشتباه استدلالهای هندسی» ودرزمینهٔجبر وحساب کتابهای«سرگرمی‌های ریاضی» و«سرگرمیهای جبر»می‌تواندراهنمای خوبی برای همهٔ ما باشد.

بطور خلاصه :

اولین شرط آموزش صحیح ریاضی عبارت از توجه به استدلال دقیق منطقی و آگاه کردن دانش‌آموز به روشهای نادرست قضاوت است.

اگردانش‌آموزی نتواند مسئله‌ای را حل کند هیچ مهم نیست ولی اگردانش‌آموزی مسئله را نادرست حل می‌کند و نمی‌تواند استدلال‌نادرست را از استدلال درست بازشناسدباید موجب نگرانی شود .

درك ریاضی به‌معنای قدرت حل فوری مسائل نیست،بلکه به‌معنای شناخت استدلالها وروشهای درست است. به همین مناسبت اگر دو دانش‌آموز درفاصلهٔزمانی معینی‌بطورجداگانه روی مسئله‌ای فکرکنند ، اولی راه حلی پیدانکند ودومی راه نادرستی ارائه‌دهد ، باید بطورکلی ازآیندهٔ دانش‌آموز دومی نگران‌شد، نه اولی .

۲ـ اکثردانش‌آموزان دربیان مطالب ریاضی دقت‌لازم را ندارند وگاهی بابیان نادرست وحتی‌تصورنادرست، اعمال ریاضی را انجام می‌دهند و باید قبول کنیم که این وضع بطور اساسی ناشی ازروش سطحی تدریس ریاضی است.

ازدانش‌آموز رشتهٔ‌ریاضی‌سؤال کنید «$a^2 - b^2$»چیست؟ به‌جای‌اینکه بطور ساده‌بگوید یك‌عبارت جبری، یا اگربخواهد ماهیت عبارت را بیان کندبگویدتفاضل‌دومجذورکامل،معمولاً جواب می‌دهد: یك اتحاد مزدوج است. واین به‌معنای‌آنست که نه‌معنی اتحاد را فهمیده ونه‌اصطلاح عبارتهای مزدوج‌را می‌داند. شاید می‌خواهد بگویدکه این‌عبارت را می‌توان به صورت‌ضرب دوعبارت مزدوج تجزیه‌کرد ، ولی بدون تردید وقتی‌که جملهٔ نادرست خود را بیان می‌کند مطلقاً به مفهوم واقعی آن توجه ندارد .

سهل‌انگاری دانش‌آموز ومعلم دراین‌قبیل موارد، ذهن جستجوگر دانش‌آموز را خراب می‌کند و اورا به‌کسی تبدیل می‌کندکه‌تنها باتداعی‌معانی‌روی بعضی کلمات وجملات اسرارآمیز روابطی را بنویسد وعملیاتی را انجام دهد.

از دانش‌آموزی‌که می‌گوید « طرفین وسطین می‌کنیم » بپرسیدیعنی‌چکارمی‌کنید،معمولاً نمی‌تواندعمل‌ریاضی‌راکه‌انجام می‌دهد توضیح دهد وبگوید طرفین‌این‌تساوی رادرحاصل‌ضرب مخرجها ضرب می‌کنیم.

این عدم دقت دربیان‌مطالب حتی به کتابهای درسی و سؤالهای‌امتحان نهایی‌هم سرایت‌کرده است. وقتی‌که‌به‌دانش‌آموز یاد می‌دهیم که صورت ومخرج کسررا درصفرضرب و یا برصفر تقسیم نمی‌توان‌کرد واصلاً تقسیم بر صفر معنی ندارد و آن وقت از دانش‌آمـوز می‌خواهیم که مثلاً مقدار کسر $\frac{x^2-1}{x+1}$ را به‌ازای $x = -1$ پیداکند جز ایجاد تناقض در ذهن دانش‌آموز ویا بی‌اعتمادکردن اونسبت به‌مطالب ریاضی چه نتیجهٔ دیگری انتظارداریم. چه‌اشکالی داشت می‌گفتیم‌حد کسر $\frac{x^2-1}{x+1}$ را وقتی x به‌سمت (-1) میل کند پیداکنید.

مثال دیگر : می‌گوییم حاصل کسر $\frac{1}{x}$ بـه‌ازای $x = 0$ برابراست با $\pm\infty$. اولا قبلا به‌دانش‌آموز گفته‌ایم که تقسیم بر صفر معنا ندارد ، ثانیاً کسر $\frac{1}{x}$ که یك ارزشی است یعنی به‌ازای هرمقدارمشخص x یك‌مقدار برای‌آن به‌دست‌می‌آید، برای $x = 0$ دومقدار بدست‌آورده‌ایم*، مگرچه ایرادی دارد که بطور صحیح بگوییم: اگرx را ازجهت مثبت به‌سمت‌صفر میل دهیم حد $\frac{1}{x}$ مساوی $+\infty$ می‌شود واگر x را ازجهت منفی به سمت صفرمیل دهیم حد $\frac{1}{x}$ مساوی $-\infty$ می‌شود . ومی‌دانیدکه هرچه بخواهید ازاین نمونه‌ها می‌توان ذکرکرد.

دریکی ازسؤالهای امتحان جبر ششم ریاضی‌که بطـور نهایی انجام می‌شود خواسته شده‌بودکه نقطه‌ای روی‌بیضـی پیداکنندکه فاصله‌اش ازمبدأ مختصات ماکزیمم باشد و برای فرار ازدقت تأکید شده‌بود: معادلـه‌ای بنویسیدکـه ریشهٔ آن طول این‌نقطه باشد .

اگر دانش‌آموزمفهوم‌ماکزیمم‌ومی‌نیمم‌نسبی‌راکه معرف نقطه‌های خاصی روی منحنی است با ماکزیمم ومی‌نیمم‌مطلق یـك تابع اشتباه‌کند شاید قابل بخشش باشد ، ولی طرح کنندهٔ سؤال امتحانی‌را نمی‌توان بخشید.

قصد طرح کنندهٔسؤال‌این بوده‌است که‌این‌فاصله‌رابرحسب طول‌نقطهٔ مجهول پیداکنند و مشتق آن‌را نسبت به‌این طول مساوی صفر قراردهند تا معادلهٔ مطلوب بدست‌آید .

اولاً ماکزیمم ومی‌نیمم مطلق تنها به ازای طولهـای نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم نسبی بدست نمی‌آید واکثر به حـدود متغیر مربوط می‌شود. ثانیاًخود ماکزیمم و می‌نیمـم نسبی هم همیشه متکی به‌مشتق نیست. مشتق‌تنها به‌ضریب زاویهٔ‌مماس

برمنحنی مربوط است و بنابراین اگر درحالتی مماس درنقطه، ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی موازی محور طول شود ، ضریب زاویه‌ای مساوی صفر پیدا می‌کند ومی‌توان باصفر قرار دادن مشتق آنرا جستجو کرد.

حالا فرض کنید که‌اگر دانش‌آموزی بخواهد وبتواند این مسئله را بطور دقیق حل کند چقدر وقت باید صرف کند تایك یا دونمرهٔ آن‌را بدست‌آورد. درحالی‌که اگر از بی‌دقتی طرح کنندهٔ سؤال پیروی‌می‌کرد خیلی‌زودتر به‌نمرهٔ مطلوب‌می‌رسید.

بطور خلاصه :

بی‌دقتی در بیان جمله‌ها و بی‌توجهی به‌مفاهیم اساسی کلمه‌هایی که بکارمی‌بریم و بدتر از همه بی‌توجهی به‌حالتهای خاص، دانش‌آموز را گمراه می‌کند وعلاوه بر آنکه تکیه بر درك ریاضی واصول وتعاریف را زبین‌می‌برد اکثر به‌نتیجهٔ نادرست‌می‌رساند.

این مسئله را ازکتاب درسی جبر چهارم ریاضی انتخاب کرده‌ام که مسئله‌ای‌فوق‌العاده‌ساده‌است. منظورحل این معادله است .

$$\frac{۲}{x+۵}+\frac{۲۰}{x^{۲}-۲۵}=\frac{۳}{۵-x}$$

تاآنجاکه من‌اطلاع دارم ودرکتابهای‌کم و بیش‌مضحك « حل‌المسائل» دیده‌ام جواب این معادله را $x=-۵$ بدست آورده‌اند. واقعاًهم اگرطرفین این معادله‌را در $x^{۲}-۲۵$ ضرب کنیم به‌سادگی به‌همان نتیجه می‌رسیم. ولی این‌مطلب روشن فراموش می‌شودکه ماحق نداریم طرفین‌یك‌تساوی را درصفر ضرب‌کنیم ووقتی دو طرف معادله را در $x^{۲}-۲۵$ ضرب می‌کنیم به‌این معناست‌که $x\neq\pm۵$ و بنابراین $x=-۵$ به عنوان جواب‌معادله قابل قبول نیست.

ذکر این نمونه‌ها رابطور بی‌پایانی می‌توان ادامه‌داد. به‌اعتقاد من به جای اینکه با دادن پلی‌کپیها و طرح مسائل استثنائی ومعمایی‌دانش‌آموزان‌رادرانبوه مسائل‌سردرگم‌کنیم، منطقی‌ترآنست‌که به‌این نمونه‌های ساده و درعین‌حال بنیانی توجه‌کنیم و تلاش خود را در جهت تحکیم مبانی استدلالی و منطقی دانش‌آموز قراردهیم.

اجازه بدهید درهمین‌جا به نکتهٔ دیگری هم اشاره‌کنم و آن داشتن دفترچهٔ پاکنویس برای دانش‌آموز است .

من‌نمی‌دانم حاصل‌این کارچیست؟ ازیك‌طرف وقت‌دانش‌آموز رامی‌گیرد وچون‌باعجله واحتمالاً ازروی دفترچهٔ‌دیگران می‌نویسد ، نه‌تنها به ریاضی او بلکه حتی به خط او هم‌کمك نمی‌کند. بعلاوه ما به‌این‌طریق به دانش‌آموز اجازه می‌دهیم دفتری به‌نام‌چرکنویس داشته‌باشد وهرگونه بی‌نظمی وبی‌دقتی را درآن مورد قبول قرارمی‌دهیم وبه‌این وسیله به‌او یاد می‌دهیم‌که نظم فقط دردفترپاکنویس ضروری است و در سایر موارد ضرورتی ندارد .

به‌نظر من روش درست آن‌است که‌دانش‌آموز عادت‌کند همیشه منظم باشد ومثلاً برای‌جبرخود تنها یك دفتر داشته باشد، صفحه‌های این دفتر را به‌دوقسمت تقسیم‌کند به‌این طریق :

شمارهٔ مسئله .... حل	

دانش‌آموز حل‌مسئله‌را زیرصورت مسئله‌ودرستون‌سمت راست می‌نویسد و ستون سمت چپ سفید باقی‌می‌ماند.

وقتی‌که درکلاس مسئله حل‌می‌شود ویا بوسیلهٔ دبیر مورد بازدید قرارمی‌گیرد، اگر حل مسئله‌ای نادرست بود ، حل‌درست ومثلاً باقلم قرمز درستون سمت‌چپ جلو مسئله نوشته می‌شود .

به‌این‌ترتیب وقتی‌که بعدازگذشت مدتی فرصتی بدست آید ودفترها بوسیلهٔ معلم مورد بررسی قرارگیرد نقاط‌ضعف کلاس بطورکلی شناخته می‌شود ومعلم می‌فهمد روی چه‌نکاتی باید تکیه‌کند. خود دانش‌آموز هم وقتی بخواهد به‌مسائل گذشته مراجعه‌کند می‌داند در چه نوع مسائلی ضعف دارد و روی همان نمونه‌ها بیشتر تمرین می‌کند.

دراینجا به‌نکتهٔ دیگری‌هم باید اشاره‌کنم وآن این‌است که دانش‌آموزان عادت‌کرده‌انددرکلاس‌به‌یك منشی‌تبدیل‌شوند وهرچه اززبان معلم بیرون می‌آید ویا روی تخته نوشته می‌شود روی دفترچهٔ خود منعکس‌کنند. روشن است‌که وقتی کسی مشغول نوشتن است نمی‌تواندتمام حواسش متوجه‌درس باشد وبه‌همین مناسبت‌به‌جای اینکه مطالب رادرك‌کنددفترچهٔ خودرا سیاه‌می‌کندوبه‌نظرمن این‌یکی‌ازعوامل‌اصلی‌عقب‌افتادن دانش‌آموز است.

البته یادداشت‌برداشتن‌حق‌دانش‌آموزاست،ولی‌یادداشت

برداشتن باتحریر همهٔ مطالب فرق دارد. دانش‌آموز باید عادت کندکه اگر به‌نکته‌ای برخوردکه‌برایش تازگی داردباچند کلمه، یادداشتی در دفترچهٔ خود بنویسد و سپس عصر همان روز یادداشتهای خودرا در منزل مرورکند و اگر ضروری دانست بعضی‌ازمطالب آنرا به‌تفصیل روی دفترچهٔ خود واردکند، ولی درکلاس فقط‌گوش‌کند وبه‌اصطلاح شش‌دانگ حواسش‌را به‌طرف مطالبی که‌طرح می‌شود متمرکز نماید.

۳ـ یکی‌ازگرفتاریهای آموزش زمانهٔ ما وجود **معلم خصوصی** است وروشن است‌که این مطلب اختصاصی به درسهای ریاضی ندارد. شاید دراین‌مورد بیشترین گناه متوجه پدران ومادران باشد.

ازیک‌طرف وجود حل‌المسائلهای بی‌معنی وازطرف‌دیگر وجود معلم خصوصی درمنزل، دانش‌آموز را به فردی عاطل تبدیل می‌کند وتمام خلاقیت وقدرت فکری را از اومی‌گیرد.

من‌حتی معتقدم‌که معلم درسرکلاس‌هم نباید درشروع هردرس تمام ریزه‌کاریها را بیان‌کند، دانش‌آموز باید عادت کندکه جستجوگر باشد وخودش دنبال بعضی مطالب برود و واگر به‌اشکالی برخوردکرد ازمعلم خود سؤال‌کند.

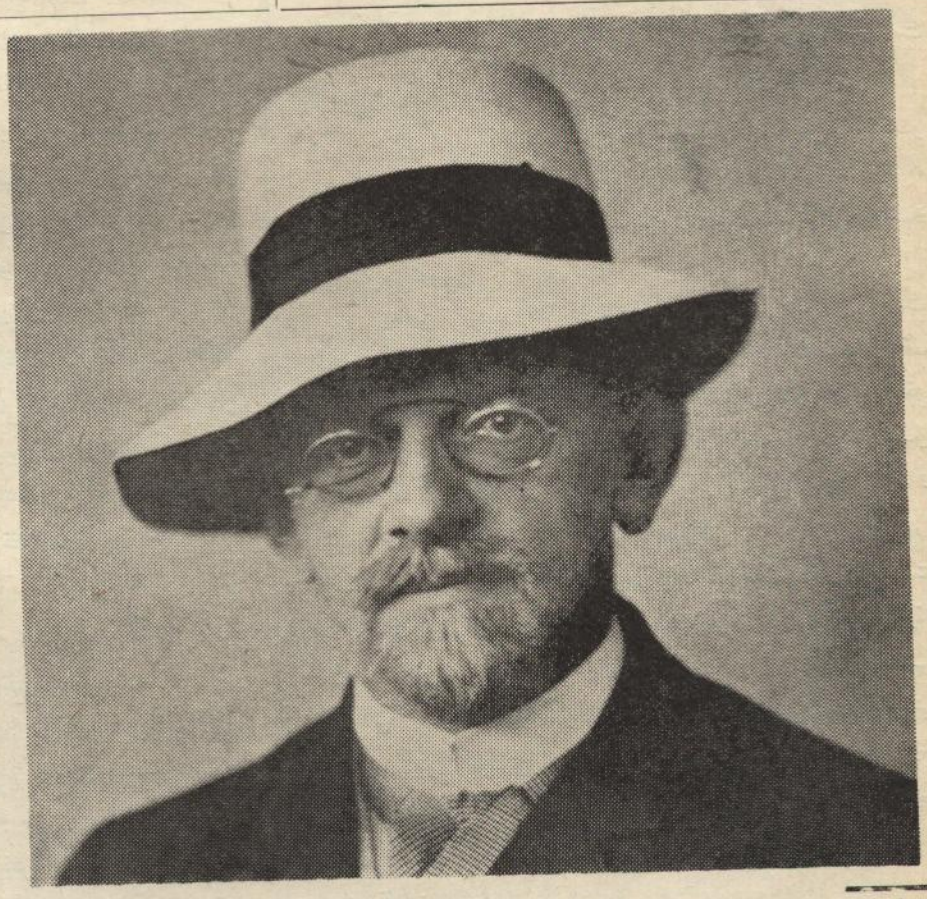
ضمناً به گمان من مسئلهٔ وجودی «معلم خصوصی» یک‌نوع توهین به‌مقام معلمی‌هم هست. باید قبول‌کرد که در علم هیچ‌نوع خصوصیتی وجودندارد وهمهٔ افراد درمقابل آن یکسانند.

ازهمهٔ پدران ومادران تقاضا می‌کنم به‌جای انتخاب «معلم خصوصی» تلاش خودرا دردوجهت دیگربگذرانند.

اولاًـ بامعلمین‌فرزند خود درتماس دائم باشند، نقطه‌های قوت وضعف فرزند خود را بشناسند و با همفکری مسئولان مدرسه وکمك معلم مربوطه وآن‌هم درخودکلاس راهی برای جبران ضعفهای فرزند خود بیابند.

ثانیاًـ پولی‌که می‌خواهند صرف «معلم خصوصی» بکنندبه‌خریدکتاب برای‌فرزند خوداختصاص دهند وباراهنمایی معلمان مدرسه‌کتابهایی راکه به‌درك درسهای فرزندشان‌کمك می‌کند و یا دید اورا وسیعتر می‌کند دراختیار او قرار دهند. باهمهٔ فقری‌که دراین‌زمینه داریم، آنقدرکتاب خوب درزبان فارسی وجوددارد‌که‌اگر دانش‌آموز تمام وقتهای‌بیکاری‌خودرا هم به مطالعهٔ آنها اختصاص دهد. هرگز نمی‌تواند آنها را به‌پایان برساند.

دراین‌زمینه باید ازهمکاران عزیزهم توقع‌کنم‌که نه‌تنها خود تن به‌درس خصوصی ندهند، بلکه با تمام قوای‌خود با آن مبارزه‌کنند واین زمینهٔ تنبلی ذهنی را از شاگرد دور نگاه دارند.



داوید هیلبرت ریاضیدان آلمانی‌در۱۸۶۲در **کونیگسبرگ** بدنیاآمد و در **۱۸۹۵** به استادی ریاضیات دانشگاه **گوتینگن** انتخاب‌شد وبه‌سال **۱۹۴۳** درهمین شهردرگذشت. وی عادت داشت که‌برای‌چندسال‌پیاپی وباشدت‌روی یك‌موضوع خاص کارکند. آثار او در زمینه‌های مختلف‌کم‌حجم اما سرشار ازتازگی ونبوغ است.

مهمترین کار هیلبرت تجدیدبنای هندسهٔ اقلیدسی است. وی‌آنچه را که اقلیدس بدیهی پذیرفته‌بودکنار گذاشت وهندسه را باتکیه به ۲۷ اصل موضوع باروش کاملاً اصولی ومجرد بیان داشت.

داویدهیلبرت‌سردستهٔ‌ریاضیدانان اصولی‌درعصرجدید بشمارمی‌رود.

ترجمهٔ: مهدی‌ملك‌یزدی

الغ بیك و رصدخانهٔ سمرقند

جعفر آقایانی چاوشی

طراغای محمد الغ بیك بن شاهرخ ازمنجمین بزرگ و نامی عالم اسلام در قرن نهم هجری بوده است. وی‌درسال ۷۹۶ هـ. ق. درسلطانیه دیده به جهان گشود ، درمحیط نظامی نشو و نماکرد و در اوان جوانی دراغلب جنگهای نیایش **تیمور** شرکت جست. درهیجده سالگی به حکومت‌ترکستان و ماوراءالنهررسید . طبع‌لطیف و قریحه و استعدادی سرشار داشت، دقیق النظر وکنجکاو، وشیفتهٔ نمودهای طبیعی بود .

افسونگران آسمان جانش را برمی‌انگیختند وبه‌تفکردر اسرار طبیعت وکشف کائنات وا می‌داشتند . همین استعداد شگرف عامل مؤثر و محرك اصلی او در ایجاد رصدخانهٔ سمرقندبود. یکی از مورخین معاصرش اورا چنین توصیف کرده است:

«در حق سلطان ماضی الغ بیك گورکان رحمت‌الله علیه باید گفت که وی پادشاهی عالم و عادل و قادر و قاهربود و در نجوم مرتبتی بلند و درمنطق، نظری موشکاف داشت. در زمان سلطنتش قدردانایان به مقامی بلند و درکنف حمایتش منزلت دانشمندان به مرتبتی ارجمند رسید. درهندسه مظهری از دقایق و رموز بود و دز هیأت، المجسطی راشرح وتفسیر می‌فرمود. همهٔ عالمان وفیلسوفان در این عقیده همداستانند که نه تنها ازصدر اسلام بلکه از زمان اسکندر ذوالقرنین تاکنون پادشاهی که مانند میرزا الغ بیك جامع فلسفه و علوم باشد براریکهٔ پادشاهی تکیه نزده است. حضرتش را دردانش ریاضی دستی دراز بود به حدی‌که در ارصادکواکب ، علمای عصر از قبیل **قاضی‌زاده‌رومی‌ومولاناغیاث‌الدین‌جمشیدکاشانی** را مدد می‌داد. اما این دوعالم‌متبحرپیش از به ثمررسانیدن کار بدرودحیات گفتند وسلطان‌همهٔ‌همت شاهانه‌راصرف‌انجام‌این مهم‌کرد و ارصادات و مطالعات آنان راکامل نمود و زیج‌سلطانی را بوجود آورد و خود مقدمه‌ای برآن‌نوشت.جداول این ذیج امروز معمول است و فیلسوفان برای‌آن، قدرقائلندو برخی آنرا از زیج ایلخانی **نصیرالدین‌طوسی** برترمی‌دانند»

گرچه الغ بیك از نظرعلمی مردی فوق‌العاده بود ولی این نبوغ علمی نتوانست وی را درامور حکومت یاری‌داده و لکه‌هایی راکه ازلحاظ سیاسی‌بردامن‌اووارد‌شده بودبزداید.

بعد از مرگ پدرش **شاهرخ** وضع او به وخامت گرائید و دچار حوادث ناگوار وکشمکشهای شدید سیاسی گردید. سرانجام پسرش **عبداللطیف**علیه اوعلم طغیان برافراشت ودر جنگ باپدر او راشکست‌داده‌ودرسال ۸۵۳هـ. ق. به‌قتل‌رسانید.

اخیراً نویسندگان روسی در مقالات خود ادعاکرده‌اند

که الغ بیك عالمی بودکه باخرافات! مبارزه می کرد ، وروی این موضوع روحانیون وشیوخ ارتجاعی!! اسلام‌اورامحکوم به مرگ‌کرده مقتول نموده‌اند. این ادعا پنداربی‌اساسی بیش نیست و هیچگونه مأخذموثقی ندارد. مطالعه دروضع‌زندگی الغ‌بیك به خوبی نشان می‌دهدکه او علناً احکام اسلامی را نقض‌کرده افشاء منکرات واظهار فحشا می‌نموده است .[۱]

رصدخانهٔ سمرقند

رصد خانهٔ سمرقند را می‌توان بزرگترین ومجهزترین رصدخانهٔ عالم اسلام دانست. چه درآن از عظیمترین ابزارها گرفته تا دقیقترین آلات فراهم‌بود.

این رصد خانه در بخش خاوری شهر **سمرقند** ساخته شده ،کف آن در عمق ۳۰ متری زمین وارتفاع برجش‌تافراز ۳۰ متری ازکف زمین‌بود. پلکان و دیوارهایش از سنگ مرمر پوشیده و دیوارهای آن منقش به جداول اخترشناسی و صور فلکی بودکه صرف نظر از لحاظ علمی ازحیث‌هنری و معماری نیزبدیع و بی‌نظیربود.

ساختمان رصدخانه‌درسال ۸۲۴ ه.ق. آغازگردیدوتاسه سال بطول انجامید.

«میرخواند» صاحب«روضة‌الصفا»می‌نویسد:«فرمانهایی صادرگردیدکه استادان ماهر به ساختمان رصدخانه بپردازند. در این امر**مولانا غیاث الدین جمشید** تکیه‌گاه علم‌نجوم ، بطلمیوس‌ثانی، بهترین تجسم دانشمندان یونان،شرکت‌داشت. در آن زمان این بنای بزرگ با کوشش و دقت و استحکام ساخته شد. نتیجهٔ فعالیت رصدخانه عبارت از تصحیح‌جداول نجومی بود.این جداول‌تصحیح شده به نام جداول جدید گورکانی خوانده شدند»[۵]

الغ بیك برای تحقیقات فضائی دراین‌رصدخانه‌ازعده‌ای منجم و ریاضیدان‌که نخبه و برگزیده بودند دعوت نمود، و این دعوت مورد توجه و اقبال علمای مورد نظرکه دررأس آنها **جمشیدکاشانی** قرار داشت واقع گردید . این دسته‌از دانشوران به رصد اجرام سماوی و مطالعهٔ بسیاری ازمسائل نجومی از قبیل تعیین طول سال و زاویهٔ مدار زمین باصفحهٔ استوا و وضعیت مدار سیارات و دورهٔ‌گردش آنها پرداختند و با استفاده از مشاهدات خود زیج معروف‌گورکانی را تدوین و جدول مشروحی از ثوابت باتعیین مختصات‌وقدر آنهاتنظیم نمودند. «**عبدالرزاق**» صاحب «مطلع‌السعدین» می‌نویسد:

«الغ‌بیك شکل‌کرهٔ‌زمین‌را درغایت دقت می‌پرداخت و بخشش ربع مسکون براقالیم سبع و طول ایام وعرض‌بلد و ارتفاع قطب شمال در مواضع وصورت وضع و اسامی بلدان و هیئت جزایر و دریاها روشن و مبرهن گردانید....»[۱]

اهمیت این فعالیت به حدی بودکه رصد خانهٔ سمرقندرا شهرت جهانی بخشیده و الغ‌بیك را بلند آوازه و در زمرهٔ منجمینی چون **بطلمیوس و ابرخس** قرارداد و مکتب نجومی نوینی بنیان‌گرفت. و تا چند قرن بعد از ذیج الغ‌بیك‌استفاده گردید.

عضو مؤثر و عالیرتبهٔ این رصدخانه ملجاء طالبان علوم **غیاث‌الدین‌جمشید کاشانی** بودکه **ملاعلی‌بیرجندی** اصل رصدسمرقند را از آثار طبع لطیف او دانسته است. وی در این رصدخانه به ابتکارات و اختراعات جالبی پرداخت. آلت «طبق‌المناطق» را برای تعیین عروض کواکب اختراع نمود وکتاب «نزهة‌الحدائق» را در شرح آن نوشت. از این رساله چنین استنباط می‌شود که آلت مزبور برای تعیین فواصل ستارگان اززمین و حرکت رجعی آنها و همچنین خسوف‌ماه‌و کسوف خورشید و تمام موضوعات مربوطه نیزقابل استفاده بوده است . می‌توان‌گفت‌که این آلت به شکل اسطرلاب ساخته شده و یك‌نوع«نوموگرام» مخصوص برای‌حل‌گرافیك تقریبی یك رشته مسائل در بارهٔ حرکت ستارگان آسمان برپایهٔ جداول اندازهٔ متوسط مختصات آنها بوده است . در رصدخانهٔ سمرقند علاوه‌برآلت اصلی‌که ازنوع «سدس‌فخری» می‌باشد وسایل دیگری از قبیل ذات‌الحلق (= کره‌آرمیلار)و ذات‌الثقبتان (= دیوپتر) و شامله (= یکنوع تئودولیت ابتدایی شامل دایرهٔ افقی و یك‌ربع‌دایرهٔ قائم) وذات‌الشعبتان و اسطرلات‌وجودداشته و از حیث تجهیزات علمی واقعاً کامل بوده‌است.

از آلت اصلی رصد فقط برای تعیین ارتفاع‌خورشید و ماه و ستارگان درربع‌کرهٔ جنوبی افق استفاده می‌شده‌ودرربع شمالی‌کرهٔ آسمان، مختصات ستارگان بوسیله سدس فخری و ذات الحلق و شامله وغیره اندازه‌گیری و با تعیین ارتفاع و عظیمه اجرام در افق وضع آنها بوسیلهٔ انتقالات مثلثاتی دستگاه منطقة‌البروج نقل می‌شده است.محاسباتی‌که اخیراً از جهت آلت اصلی شده نشان داده است‌که دقت‌آن درآن‌زمان کافی بوده وکارهایی‌که دررصد خانهٔ سمرقند شده چه ازلحاظ اهمیت و چه از حیث دقت ازکارهای درجهٔ اول بوده‌است .

الغ بیك برای تنظیم‌زیج ،کتابهای **ابوالوفای بوزجانی، عبدالرحمن‌صوفی ، ابوریحان بیرونی ، حکیم عمرخیام ، و خواجه نصیرالدین‌طوسی**راگردآورده‌و مورد مطالعه و امعان نظرقرارمی‌داد. ونیز به‌منظور تبادل‌نظربا منجمین‌چینی‌واطلاع ازکارهای آنها و محاسبهٔ طول یك درجهٔ نصف النهار و مساحت‌کرهٔ زمین، **ملاعلی‌قوشچی** را به چین فرستاد. محاسبهٔ عدد π تاشانزده رقم اعشار و اختراع‌کسرهای‌اعشاری‌بوسیلهٔ

کاشانی زمینه را برای تحقیقات وپژوهشهای فضائی به وجه احسن فراهم ساخته بود. و با آنکه کار رصد باوضع حیرت انگیزی، پیش می‌رفت، مع‌الاسف قبل ازآنکه کار زیج آغازشود **غیاث‌الدین‌جمشیدکاشانی** دیده از جهان فروبست و دراوایل کارزیج نیز **قاضی‌زاده رومی** که از منجمین برجستهٔ این‌رصد خانه بود به‌کام‌اجل گرفتار آمده و بدرود حیات گفت. اما الغ‌بیك‌باهمکاری **معین‌الدین‌کاشانی** و **ملاعلی قوشچی** تحقیقات راادامه داده وزیج رابه‌اتمام رسانید.

این زیج که حاصل زحمات و پژوهشهای پیگیر این‌علما و بالاخص الغ بیك‌بود به فارسی نوشته شده و عنوان آن چنین است:

«الزیج‌المسمی بالخاقانی فی تکمیل الزیج‌الایلخانی»

زیج مزبور دارای چهار مقاله است. مقالهٔ اول‌دارای یك مقدمه و پنج‌باب در حساب توقیعات، گاهشماری، کارهای منجمین سلف، سبب ایجاد زیج و همکاران‌آن، مقالهٔ دوم در بیست و هشت باب‌درشناسائی‌اوقات‌ـمقالهٔ سوم در سه‌باب‌در شناسائی سیرکواکب و موضع آنها ـ مقالهٔ چهارم در موضع و محل اختران ثابت، است.

الغ‌بیك در مقدمهٔ این زیج‌چنین نوشته است:

«... اما بعد چنین‌گوید اضعف عبادالله واحوجهم‌الی الله المستعان الغ‌بیك بن‌شاهرخ بن تیمورگورکان احسن‌الله تعالی احواله و انجح‌بالخیرآماله‌که بتوزع‌بال و تکثراشغال از تکفل مصالح اهم وتعهد مناحج بنی‌آدم برمقتضای«المرء یطیربجناح همته» همگی همت وقصاری نهمت براحرازقضیات کمال و استجماع مآثر فضل و افضال محصور و مقصور داشت. اعنهٔ سعی جمیل وازمهٔ جدجزیل. بجانب استحصال حقایق علمیه و استحضار دقایق حکمیه معطوف و مصروف گردانیدتاتوفیق‌الهی‌رفیق‌شفیق این ضعیف‌گشت بروفق‌فرمودهٔ من‌طلب شیاء و جد وجدبقلم فطنت و خامه فکرت غوامض علوم و دقایق فنون راسیما علوم حکمی‌که بتغییر ملل‌وادیان و اختلاف‌کلمهٔ زمان غبار تغییر و تبدیل به هرامن‌آن‌نگردد مبین و مکشوف گردانید و چون حضرت باری غراسمه از خزانهٔ‌کرم عمیم وان من‌شی‌الاعند ناخزائنه ومانزله‌الا بقدر معلوم» این بندهٔ فقیرحقیر را بچنین موهبتی عظمی ومکرمتی کبری شرف اختصاص و امتیازبخشید خواست تا مضمون: «تلك‌آثارنا تدل علینا فانظروابعدناالی الاثار» برکتابه‌غرایب نگار روزگار آید و رایت افتخار و اشتهار برقمهٔ قبه‌فلك‌دوار افراشته، رصد ستارگان‌اختیار فرمود وباعانت وامدادحضرت استادی و سندی علامة العالم ناصب رایات‌الفضل والحکم سالك مسالك التحقیق ناهج‌مناهج التدقیق مولاناصلاح‌الملة و الدین موسی‌المشتهر بقاضی‌زاده رومی علیه‌الرحمة و الغفران و حضرت مولانا الاعظم افتخارالحکماء فی‌العالم مکمل علوم الاوایل‌کاشف المسایل مولانا غیاث الملة والدین جمشیدبرد الله مضجعه‌که ضمیر منیر هریك شمع انجمن دانشوری بل‌جام جهان نمای فضل‌گستری بود اتفاق شروع افتاد. درمبادی حال حضرت مولانا مغفور مبرور غیاث‌الدین جمشید طاب‌ثراه ندای اجیبوا داعی‌الله رابسمع‌اجابت‌تلقی‌نموده وازدارالغرور جهان بدارالسرور جنان رحلت نمود. در اثناء حال‌پیش‌از آنك این مهم ساخته و پرداخته آید حضرت استادی شکرالله مساعیه‌بجوار رحمت پروردگارپیوست‌پس‌باتفاق‌فرزندارجمند؛ علی بن محمدکه قوشچی درحد است وسن وعنفوان شباب قصب السبق درمضمار فنون وعلوم بنوعی رسیده بودکه امید واثق ورجاء متحقق است صیت‌مآثران علی‌اقرب‌الزمان‌و اسرع الاوان باطراف واکناف جهان منتشر و مستفیض‌گردد انشاءالله العزیز بعون عنایت الهی و فیض نامتناهی این‌مهم خطیرعسیر باتمام رسانیده آمد و آنچه ازروش ستارگان‌برصد و امتحان معلوم‌شد دراین‌کتاب ثبت افتاد ....»

پس از مرگ‌الغ‌بیك ملاعلی قوشچی برای اولین‌باراین زیج رادرقسطنطنیه بچاپ‌رسانید. دیری‌نگذشت‌که‌برای باردوم در قاهره و دمشق از نوچاپ شد. و در قرن هفدهم میلادی زیج‌الغ‌بیك بفاصله سه نوبت درلندن، پاریس، فلورانس وژنو تجدید چاپ‌گردیده و بااستقبال بی‌سابقه‌ای از طرف محافل علمی روبروشد. دقت این زیج به حدی بودکه بسیاری از منجمین اروپائی را به‌اعجاب وتحسین واداشت و آنها را وادار نمود تادر جداول نجومی خودکه به‌کمك‌تلسکوپ‌بدست آورده بودند تجدید نظر کرده و نقایص آنهارا بوسیلهٔ آن مرتفع سازند وازاین زیج مطالب تازه‌ای‌فراگیرند.

سدیو (A.L.Sedillot) مقدمهٔ زیج الغ‌بیك را در سالهای ۱۸۵۳ و ۱۸۴۶ به فرانسه ترجمه نموده و بچاپ رسانده است.

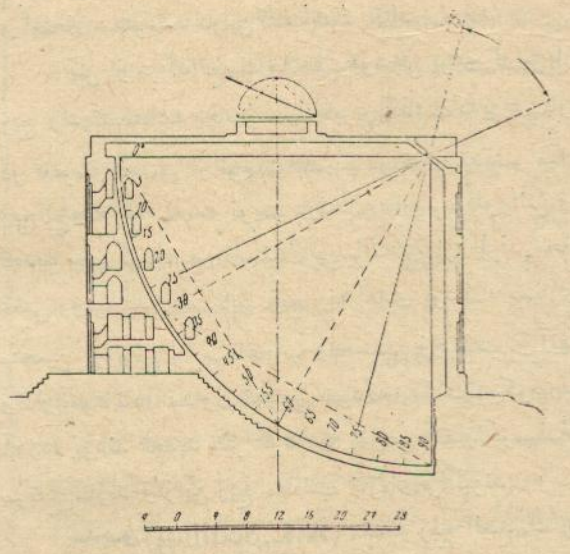
رصد خانهٔ سمرقند بعد از مرگ‌الغ‌بیك متروك ماند و دیری نپائیدکه منهدم‌گردیده و روی تلی ازخاك مدفون شد. ولی در سال ۱۹۰۸ خاورشناس روسی **واسیلی ویاتکین** (V.Viatkin) برای یافتن بقایای این رصدخانه از نشانی دقیقی‌که دریك وقف نامهٔ قدیمی یافته بود مشغول‌کاوش و حفاری‌گردید. در اثنای حفاری سرداب طویل و عمیقی‌کشف گردیدکه در جهت نصف النهار واقع وآلت اصلی رصدبوده که به شکل ربع دایره ساخته شده و باآن ارتفاع اجرام در موقع‌گذر از نیمروز اندازه‌گیری می‌شده است. پس‌از ادامهٔ حفاری از سردابهٔ مزبور قطعات سنگ مرمر تراشیده بدست

آمدکه بعضی ازآنها ازکف و بعضی ازکنار مستدیربود.

قطعاتی که ازکف مستدیر بوده بر روی سطح دایرهٔآلت اصلی نصب و روی آنها درجات تقسیم دایره حك شده ودر دو طرف شیارآلت اصلی لبهٔ مخصوصی برای حرکت دادن کشوی اندازه‌گیری زاویه پیش‌بینی شده‌بود.

قطعات سنگ مرمرکه ازکنار مستدیر و ازکف مسطح بوده به دایرهٔ بزرگ افقی مربوط است‌که مانند دایرهٔ قائم دارای درجه بندی بوده و ظاهراً (باکمك شاخص‌که در وسط دایره قرارداشته)برای تعیین عظیمه استعمال می‌شده‌است.

اندازهٔ هردرجهٔ آلت اصلی (ربع‌دایرهٔ قائم)۷۲سانتیمتر و تعداد درجات آلت مزبور بیش از ۶۰ واساس درجه‌بندی همان ۳۶۰ درجه بوده است ولی‌طبق معمول آن زمان برای تعیین درجات، حروف به جای اعداد بکاربرده شده است.



در روی تپه‌ای ساختمان رصدخانه به صورت یك دایرهٔ افقی بزرگ‌کشف گردیدکه قطرآن ۲۴ مترمی‌باشدوآلت اصلی درروی قطر آن درجهت شمال جنوب قرارداشته و از آثاری‌که پیدا شده معلوم شده است‌که ساختمان آن‌سه‌طبقه و به‌شکل استوانه بوده وآلت اصلی رصد در وسط آن‌به‌صورت ربع دایرهٔ قائم ساخته شده‌که نیمی از آن در ساختمان و نیم پائین در داخل زمین قرارداشته‌است.

درخاتمه مقایسه‌یی راکه میان ارقام حرکت سالانهٔ‌پنج سیاره شده متذکر می‌شویم.

	نام سیاره	رقمی که در زیج الغ‌بیك‌آمده	رقمی که‌امروزه به آن‌رسیده‌اند
دالامبر	زحل	۱۲°،۱۳′،۳۹″	۱۲°،۱۳′،۳۶″
	مشتری	۳۰°،۲۰′،۳۴″	۳۰°،۲۰′،۳۱″
لالاند	مریخ	۱۹۱°،۱۷′،۱۵″	۱۹۱°،۱۷′،۱۰″
	زهره	۲۲۴°،۱۷′،۳۲″	۲۲۴°،۱۷′،۳۰″
	عطارد	۵۳°،۴۳′،۱۷″	۵۳°،۴۳′،۱۷″

مراجع و مآخذ

۱ــ **الغ بیك و زمان او**.نوشتهٔ‌بارتولد،ترجمهٔ‌محمدحسن احمدی‌پور، تبریز۱۳۳۷

۲ــ **الغ بیك دانشمندایرانی**،ترجمهٔ‌مهندس‌پرویز قوآمی، مجلهٔ دانشمند شمارهٔ ۴، ۱۳۴۹

۳ــ **تراث‌العرب العلمی فی‌الریاضیات والفلك**، تألیف قدری حافظ طوقان، قاهره

۴ــ**جبرومقابلهٔ‌خیام**، ضمیمه تاریخ ریاضیات، تألیف غلامحسین مصاحب، تهران ۱۳۱۷

۵ــ **غیاث‌الدین‌جمشید کاشانی**، نوشتهٔ دکترتمدن،نامه علمی وفنی شمارهٔ ۶، ۱۳۳۸

۶ــ**رصدخانهٔ‌سمرقند**،نوشتهٔ غلامحسین صدری افشار، مجلهٔ سخن علمی شمارهٔ ۱۰، ۱۳۴۸

۷ ــ**کشف رصدخانهٔ سمرقند**، نوشتهٔ‌ابوالقاسم‌اشتری، نامهٔ علمی وفنی شمارهٔ۲، ۱۳۳۷

۸- Aydin Sayili: **The Observatory in Islam**» Ankara, (1960)

۹- «**The Sage of Samarkand**» Sputnik Monthly Digest , London (1960)

۱۰-**The Astronomer of Samarkand** Soviet Weekly (1969)

۱۱- L . A .Sedillot : «**Prolégoménes des tables Astronomiques d'Oloug Beg**» Paris (1853)

استدلال در ریاضیات

نوستهٔ: G. PO'LYA وابستهٔ آکادمی علوم و استاد افتخاری
مدرسهٔ پلی‌تکنیک فدرال زوریخ و دانشگاه استانفورد

ترجمهٔ: داوید ریحان

فصل هفتم - استقراء ریاضی

روش ژاك برنولی برای طبیعیدان نیز مهم است. بوسیلهٔ مشاهدهٔ حالات $C'_1, C'_2, C'_3, \ldots$ را بدست می‌آوریم و بنظر می‌رسد که این یك خاصیت A از تصور B باشد. راوش برنولی می‌آموزد که به تصور B نباید خاصیت A را که بوسیلهٔ استقراء ناقص کشف شده وابسته کنیم، بدون آنکه بدانیم که A و B بهم مربوطند و مستقل از حالات دیگرند. در اینجا، مانند خیلی قلمروهای دیگر، ریاضیات مدلی را برای علوم طبیعی تقدیم می‌کند.

ارنست ماخ

I- مرحلهٔ استقرائی. بازهم از یك مثال شروع می‌کنیم. یافتن مجموع n عدد صحیح اولیه بسیار ساده است. فرض می‌کنیم که رابطهٔ:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

راکه به روشهای گوناگون بدست می‌آید، داشته باشیم. یافتن عبارتی مشابه برای مجموع مربعات n عدد صحیح اولیه کمی مشکل است.

$$1+4+9+16+\ldots+n^2=?$$

محاسبهٔ این مجموع برای مقادیر کوچك n هیچگونه اشکالی تولید نمی‌کند، ولی بدست آوردن یك قانون کلی به این سادگیها نیست. نوعی تناظر مابین دو مجموع جستجو می‌کنیم و آنها را مجموعاً می‌آزمائیم:

n	:	۱	۲	۳	۴	۵	۶	. . .
$1+2+\ldots+n$ ..	:	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	. . .
$1^2+2^2+\ldots+n^2$	:	۱	۵	۱۴	۳۰	۵۵	۹۱	. . .

چه رابطه‌ای بین دو سطر آخر وجود دارد؟ نسبت جملات متناظر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

n	:	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}$ ..	:	۱	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$	۳	$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱۳}{۳}$	...

اکنون، قانون مطلوب واضح است واگر نسبتها رابه‌صورت زیر بنویسیم، به‌قانون مربوط دست می‌یابیم:

$$\frac{۳}{۳} \quad \frac{۵}{۳} \quad \frac{۷}{۳} \quad \frac{۹}{۳} \quad \frac{۱۱}{۳} \quad \frac{۱۳}{۳}$$

به سختی می‌توان مانع ازاین شدکه فرض کنیم که:

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}=\frac{2n+1}{3}$$

چون مجموع واقع در مخرج کسررا می‌دانیم پس فرم جدید فرضیه به صورت زیردرخواهدآمد:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{9}$$

آیا این رابطه صحیح است؟ یا به‌عبارت دقیقتر، آیا درحالت کلی درست است. رابطه مطمئناً برای $n=1,2,3,4,5,6$ (حالاتی که شکل رابطه را برای ما متصور ساختند) صحیح است، آیا برای عدد بعدی یعنی به ازای $n=7$ نیزصحیح است؟ فرضیهٔ ما بیان می‌داردکه:

$$1+4+9+16+25+36+49=\frac{7\times 8\times 15}{9}$$

و در واقع، هردو عدد برابربا ۱۴۰ می‌باشند.

طبیعتاً، می‌توانیم همین کوشش را در مورد حالت بعدی $n=8$، به خرج دهیم ولی این فکر زیاد قوی نیست. فرض می‌کنیم که این رابطه بازهم محقق باشد، در این صورت این تصدیق، مقدارکمی به اعتماد ما می افزاید (آنقدراندك که به زحمت می‌توان آنرا به حساب آورد). چگونه می‌توانیم

فرضیهٔ خود را با قاطعیت مورد تحقیق قرار دهیم، اگرفرضیهٔ ما صحیح باشد، در این‌صورت نباید به حالت موردنظربستگی داشته باشد و باعبور از یك‌حالت به حالت بعدی نیزباید صحیح باقی بماند. فرض می‌کنیم که:

$$1+4+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ولی اگر این‌رابطه در حالت‌کلی صحیح باشد، **در حالت‌بعدی نیز باید صحیح‌باشد،** در این صورت باید داشته باشیم:

$$1+4+\dots+n^2+(n+1)^2=$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

حال باطریقه‌ای قاطع می‌توانیم درمورد قضیه قضاوت کنیم؛ از تفریق اعضای‌اولین رابطه ازدومی، بدست می‌آید:

$$(n+1)^2=$$
$$\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

آیا این نتیجهٔ فرضیه صحیح است؟ بامحاسبه‌ای ساده‌داریم:

$$\frac{(n+1)}{6}[(n+2)(2n+3)-n(2n+1)]=$$
$$=\frac{n+1}{6}[2n^2+3n+4n+6-2n^2-n]=$$
$$=\frac{n+1}{6}[(6n+6)=(n+1)^2$$

نتیجهٔ مورد آزمایش درست از آب درآمد و فرضیهٔ ما پیروزمندانه از بوتهٔ آزمایش خارج‌شد.

II- مرحلهٔ اثباتی - تحقیق یك نتیجهٔ غیرمشخص براعتمادی‌که به فرضیهٔ خودداریم می‌افزاید، ولی تحقیق نتیجه‌ای‌که هم‌اکنون آزمودیم، ثمربخش‌تر و شامل **اثبات** خواهد بود. برای این منظور کافی است نقطهٔ دیدخودرا کمی تغییردهیم واشاره‌هایی راکه تا به‌حال‌ازنظر گذرانده‌ایم، مورد بررسی مجدد قراردهیم.

فرضکردیم که:

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

بدون شك رابطهٔ زیر درست است:

$$(n+1)^2=$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و در نتیجه داریم:

$$1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2=$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

(طرفین معادلات اخیر را عضو به عضوباهم جمع کرده‌ایم).

به بیانی دیگر: اگرفرضیهٔ ما برای عدد صحیح دلخواه n صحیح‌باشد، الزاماً برای عدد صحیح بعدی نیز صحیح است.

ولی بنابه فرض، فرضیه برای $n=1,2,3,4,5,6,7$ صحیح است، چون برای ۷ صحیح است، باید برای ۸ نیز چنین باشد؛ چون برای ۸ صحیح است، باید برای ۹نیزچنین باشد، به همین منوال چون برای ۹ صحیح است برای ۱۰ و ۱۱ و همینطور تاآخر صحیح خواهد بود. چون فرضیه‌برای تمام اعداد صحیح درست است پس ما اثبات کلی را بدست آورده‌ایم.

III- مرحلهٔ عبوراز یك‌حالت به حالت‌دیگر- آخرین استدلال بخش اخیررا می‌توانیم ساده‌کنیم کافی است‌که از فرضیه دوچیز را بدانیم:

فرضیه برای $n=1$ صحیح است.

با فرض اینکه برای n صحیح باشد، بایدبرای $n+1$ نیزچنین باشد.

در این صورت فرضیه برای تمام اعداد صحیح‌درست خواهد بود. چون برای ۱ درست است، برای ۲ نیز درست است و چون برای ۲ درست است، برای ۳ صحیح‌خواهدبود والخ....

در اینجا مواجه بایك روش اساسی اثبات هستیم، می‌توانیم آنرا روش «عبور ازn به $n+1$» بنامیم‌ولی‌عموماً آنرا **«استقراء ریاضی»** می‌نامند.

آیا این نوع استدلال بااستقراء نسبتی‌دارد؟ مطمئناً و به همین منظور هم‌هست‌که آنرا در اینجا عنوان می‌کنیم.

در مثال قبلی، استدلال اثباتی بخش II، بطور طبیعی مکمل استدلال استقرائی بخش I بود و این مثالی ازاین‌نوع بود. غالباً، استقراء ریاضی به عنوان مرحلهٔ‌آخر ازیك‌تحقیق قیاسی معرفی می‌شود. این آخرین مرحله را اغلب درعناصر کشف شدهٔ مراحل اخیرمداخله داده‌ایم.

دلیل عالیتری‌که معرف توجه به استقراء ریاضی است، ازگفتهٔ **ارنست‌ماخ** مستفاد می‌شودکه در ابتدای این‌فصل ذکر کردیم (*). برای قضاوت در فرضیه، حالات متعددی راکه فکر می‌کنیم صحیح است، می‌آزمائیم. مایلیم بدانیم‌که‌آیا

(*) **ماخ** فکر می‌کردکه استقراء ریاضی توسط **ژاك‌برنولی** کشف شده است، ولی‌بنظر می‌رسدکه قسمت عمدهٔ این کشف متعلق به **پاسکال** است. (آرشیو بین‌المللی‌تاریخ‌علوم).

رابطهٔ عنوان شده توسط فرضیه پانا یعنی مستقل ازحالات مورد نظر است یاخیر. همچنین توجه ما معطوف به **عبور** از یك‌حالت به حالت دیگر می‌شود. بنابه گفتهٔ **نیوتن** «هرگاه‌به حرکات‌سفاین بیندیشیم، به سادگی می‌توان فهمیدکه تحت تأثیر نیروهای مرکزی، سیارات می‌توانند روی‌برخی‌ازمدارها قرارگیرند» ووی سنگی را درنظر گرفت‌که باسرعتهای‌اولیه هرچه بیشتر پرتاب بشود تاآنکه مانند ماه درمسیری حول زمین بچرخد. بدین ترتیب، نیوتن عبور پیوستهٔ حرکت یك سفینه را باحرکت یك‌سیاره محسوس‌کرد.وی عبورازدوحالتی راکه قانون جاذبهٔ جهانی بطور مساوی برآنها تأثیرمی‌کردو وی مایل به اثبات آن بود، در نظرگرفت . هرمبتدی‌که از استقراء ریاضی برای اثبات قضیه‌ای مقدماتی استفاده می‌کند مانند نیوتن عمل می‌کند: وی عبور از n به n + ۱ را در نظر می‌گیرد و همین اعمال را در مورد قضیهٔ مربوط انجام می‌دهد .

IV_ فن استقراء ریاضی - اگر می‌خواهید ریاضیدانی خوب یابازیگری ورزیده باشید، یااینکه درهرزمینه‌ای موفق باشید، می‌بایست‌که بتوانید پیش‌بینی‌کنید. به نظرمن، برای پیش‌بینی‌کردن، مطمئناً باید باهوش بود، ولی‌این کافی‌نیست. باید فرضیه‌های موقتی را بیازمائیم و آنرا باعمل درآمیزیم‌و اگرلازم است آنرا تغییردهیم وبدین وسیله تجربه‌ای وسیع (و عمیق) از این فرضیاتی‌که قبول یاردشده‌اند ،کسب‌کنیم . باچنین تجربه‌ای می‌توانید در بارهٔ صلاحیت فرضیاتی‌که ممکن است صحیح یاغلط باشند، قضاوت‌کنید.

استقراء ریاضی روشی اثباتی است‌که غالباً برای‌تحقیق فرضیات ریاضی‌که متعاقب بانوعی استقراء بدست آمده‌اند، بکار می‌رود. به همین منظور، اگر بخواهیم تجربه‌ای‌درمورد تحقیق ریاضی استقرائی بدست آوریم، لازمه‌اش نوعی‌آشنائی بااستقراء ریاضی است. هدف این‌بخش، یاری درتفهیم این فن است .

۱ـ مرحلهٔ استقرائی ـ از مثالی شروع می‌کنیم‌که‌با آنهایی‌که در بخشهای I و II مطالعه‌کردیم ، بسیار مشابه است. منظور تعیین فرمولی‌کلی برای مجموع زیراست‌که‌با مربعات n عدد صحیح اولیه مرتبطاست.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{35}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}=$$

$$=\frac{1}{4\times 1^2-1}+\frac{1}{4\times 2^2-1}+\frac{1}{4\times 3^2-1}+$$

$$+\dots+\frac{1}{4n^2-1}$$

این مجموع را برای تمام مقادیر اولیهٔ n محاسبه می‌کنیم و جدول نتایج را تشکیل می‌دهیم:

$$n = 1,\ 2,\ 3,4,\dots$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\dots$$

فرضیهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

بااستفاده از تجربهٔ بدست‌آمده از مسئلهٔ مجاوری‌که مطالعه نمودیم و بامطالعهٔ عبور ازn به n + ۱ ، فرضیه را باروشی بسیار قاطع تحقیق می‌کنیم. اگرفرضیه درحالت‌کلی صحیح باشد، بایدبرای n و n + ۱ همزمان باهم نیزصحیح‌باشد:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=$$

$$=\frac{n+1}{2n+3}$$

از تفریق عضو به عضو روابط بالا ، بدست می‌آید :

$$\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}$$

آیا این نتیجهٔ فرضیه صحیح است؟ اگراعضای رابطهٔ فوق را باعملیات جبری به صورت مشهودی درآوریم بدست‌می‌آید:

$$\frac{1}{(2n+2)^2-1}=\frac{2n^2+3n+1-2n^2-3n}{(2n+3)(2n+1)}$$

با تبدیلات جبری بسیار ساده می‌توان‌دیدکه اعضای‌این‌روابط متحدند. بنابراین نتایج آزمایش شده بدون‌شك درست است.

۲ـ مرحلهٔ اثباتـ مانندمثال قبلی بخش II استدلال‌می‌کنیم.

فرض می‌کنیم‌که :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

رابطهٔ زیر واضح است:

$$\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}$$

درنتیجه:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=$$

$$=\frac{n+1}{2n+3}$$

فرضیه‌که برای n صحیح فرض شده‌بود ، برای n + ۱ نیز

درست است و چون برای $n = 1$ صحیح بود، درحالت کلی نیز صحیح خواهدبود.

۳ــ روش بسیار سریعــ توانستیم کمی به‌مرحلهٔ استقرائی استدلال خود بپردازیم. پس‌از بیان فرضیهٔ خود دریافتیم که استقراء ریاضی روشی مناسب برای اثبات است، به‌همین‌سبب بدون هیچگونه کوششی به‌کاربرد استقراء ریاضی به‌طریق‌زیر راهنمایی شدیم.

فرض می‌کنیم که :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=$$

$$=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=$$

$$=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+2)^2-1}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{n+1}{2n+3}$$

بدین ترتیب به رابطه‌ای برای $n+1$ رسیدیم که فرض می‌کردیم که برای n صحیح است. و این همان چیزی است که مترصد انجامش بودیم و بدین ترتیب قضیه اثبات‌شده‌است

این راه حل کمتر شامل مکرراتی است که درراه‌حلهای ۱ و ۲ پیدا می‌شدند ولی شاید طبیعی‌تر ازآن باشد.

۴ــ روش بازهم سریعتر ـ درصورتی که رابطهٔ‌زیر را درنظر بگیریم، دراولین نظر می‌توانیم جواب مسئله‌رابیابیم:

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

(در صورتی که از قاعدهٔ تجزیهٔ کسرهای منطق به‌کسرهای ساده استفاده‌کنید، خیلی ساده به رابطهٔ فوق می‌رسید). با اختیار $n=1,2,3,\dots$ و باجمع آنها، بدست می‌آید:

$$\frac{1}{4-1}+\frac{1}{16-1}+\frac{1}{36-1}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}$$

$$=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\dots+$$

$$+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.$$

$$\left.+\dots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{n}{2n+1}$$

نتایجی از این قبیل نادر نیستند. یك قضیه، که بوسیلهٔ‌استقراء ثابت شده است، غالباً می‌تواند باروشهایی بسیار سریعتراز سایر روشها ثابت شود. آزمایش موشکافانهٔ استقراء ریاضی می‌تواند منتهی به اختصاراتی ازاین قبیل گردد.

۵ــ مثالی‌دیگرــ دو عدد a و b که درنامساویهای $0<b<1$ و $0<a<1$ صدق‌می‌کنند، مفروضند. واضح است که

$$(1-a)(1-b)=1-a-b+ab>1-a-b$$

تعمیم قضیهٔ فوق را می‌توانیم به‌صورت زیر بیان‌کنیم :

اگر $n>2$ و داشته باشیم $0<a_1<1$ ، $0<a_2<1$ ،....، $0<\alpha_n<1$ و در این صورت‌خواهیم داشت:

$$(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)>1-a_1-a_2-$$
$$-\dots-a_n$$

برای اثبات صورت‌این گزاره‌ازاستقراء ریاضی استفاده‌می‌کنیم. دیدیم که این نامساوی در مورد اولین حالت یعنی برای $n=2$ صحیح بود. فرض می‌کنیم که این گزاره‌برای n $(n>2)$ صحیح باشد، دراین صورت باید ثابت‌کنیم که برای $n+1$ نیز صحیح است.

فرض‌می‌کنیم که:

$$(1-a_1)\dots(1-a_n)>1-a_1-\dots-a_n$$

ومی‌دانیم که:

$$0<a_{n+1}<1$$

در نتیجه بدست می‌آید :

$$(1-a_1)\dots(1-a_n)(1-a_{n+1})>$$
$$(1-a_1-\dots-a_n)(1-a_{n+1})$$
$$=1-a_1-\dots-a_n-a_{n+1}+(a_1+\dots+a_n)$$
$$\times a_n+1>1-a_1-\dots-a_n-a_{n+1}$$

بدین ترتیب رابطه‌ای راکه درمورد n صحیح فرض کرده بودیم، برای $n+1$ نیز تحقیق شد: اثبات‌خاتمه یافته‌است.

یادآوری می‌کنیم که استقراء ریاضی را می‌توان برای اثبات گزاره‌هایی به‌کاربرد که نه فقط در مورد تمام اعداد صحیح مثبت، بلکه برای تمام اعداد صحیح مثبت ازردیفی‌به بعد نیزبکار می‌روند. به‌عنوان مثال قضیه‌ای‌که اثبات کردیم تنها شامل مقادیری از n می‌شودکه‌کمتر از ۲ نباشند.

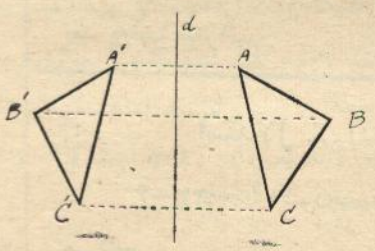
دنباله‌درصفحهٔ ۱۳۶

تقارن و دوران در فضاهای اقلیدسی

علیرضا امیرمعز
دانشگاه تکزاس‌تک

دوشکل F و F′ را برابر (Congruent) گویندهرگاه بتوان، مثلاً، F را پس‌ازیك‌دوران وانتقال بر F′ منطبق کرد اگر فضارا به‌صفحه محدود کنیم، ملاحظه می‌شودکه دوشکل متقارن نسبت به‌یك‌خط را نمی‌توان بوسیلهٔ دوران وانتقال بر یکدیگر منطبق کرد؛ مگرآنکه بکار بردن فضای سه بعدی را مجازبگیریم. این‌موضوع درفضای سه‌بعدی وتقارن نسبت‌به یك‌صفحه سبب اشکال بیشتری‌می‌شود. دراین‌مقاله این‌مطلب وتعمیم‌آنرا بررسی‌می‌کنیم.

۱ـ تقارن نسبت به‌یك‌خط ـ فرض‌کنیم‌که d یك خط راست درصفحه باشد (شکل‌مقابل). مثلث ABC رادرنظر می‌گیریم. فرض‌کنیم که‌نقاط A′، B′ و C′ به‌ترتیب متقارنهای A، B و C نسبت به‌d باشند. به‌آسانی می‌توان نشان دادکه اجزاء متناظر ABC و A′B′C′ برابرند. ازاینرو دو مثلث ABC و A′B′C′ برابرندولی‌برای‌انطباق A′B′C′ بر ABC باید مثلث‌را حول d درفضا به‌اندازهٔ زاویهٔ π دوران دهیم. به‌این‌ترتیب بعد سوم را بکاربرده‌ایم.



اکنون این‌موضوع را به‌روش جبری بررسی‌می‌کنیم. فرض‌کنیم‌d را بر محور x قرارداده‌ایم، ازاینرو ماتریس‌تقارن چنین می‌شود:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

واضح است‌که معکوس S خود S است؛ یعنی:

$$S.S=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولی S دوران نیست چون ماتریس یك‌دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ t در صفحه چنین است:

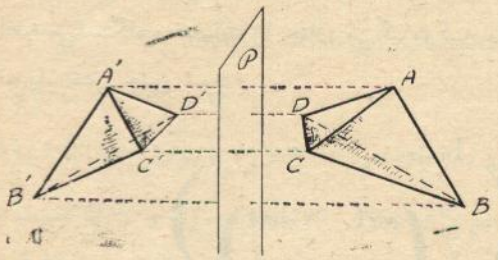
$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

اکنون صفحه را درفضا قرارمی‌دهیم چنانکه محور z برصفحهٔ xy عمود باشد. به‌این‌ترتیب ماتریس این‌تقارن چنین‌می‌شود:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

دوباره ملاحظه می‌شودکه $S^2=I$ و S ماتریس دوران حول محور x به‌اندازهٔ π است.

۲ـ تقارن نسبت به‌یك‌صفحه: صفحهٔ P وچهاروجهی ABCD را درفضا در نظر می‌گیریم (شکل زیر)



فرض می‌کنیم‌که نقاط A′، B′، C′ و D′ به ترتیب متقارنهای‌نقاط A، B، C، وD نسبت به‌P باشند واضح‌است که اجزاء متناظر چهار وجهی‌های ABCD و A′B′C′D′ برابرند. ومی‌توان گفت‌که‌دوچهاروجهی برابرند. ولی‌انطباق یکی بردیگری درفضای سه‌بعدی ممتنع است.

اکنون مسئله‌را بطورجبری مطالعه می‌کنیم. هرگاه صفحهٔ xy را روی P بگذاریم، ماتریس تقارن چنین می‌شود:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

با اینکه معکوس S خود S است این تابع دوران نیست. اکنون فضارا درون یك فضای‌چهاربعدی قرارمی‌دهیم. محور w را برفضای xyz عمود می‌گیریم. دراین‌صورت ماتریس Sچنین می‌شود:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

به‌آسانی می‌توان‌دیدکه S دوران‌حول‌صفحهٔxyبه‌اندازهٔزاویهٔ πاست. چون $S^2=1$ است، این‌دوران یك‌چهار وجهی را بر دیگری منطبق می‌کند.

۳ـ دوران حول یك زیر فضا: درصفحه تنها دورانی‌که ممکن است، حول یك‌نقطه است. درفضای‌اقلیدسی سه‌بعدی دوران یك‌خط راست راثابت‌نگاه می‌دارد. این خط محور دوران‌خوانده‌می‌شود. البته، محورمختصات رامی‌توان چنان انتخاب‌کردکه ماتریس‌این دوران چنین‌شود:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

اکنون موضوع را تعمیم می‌دهیم. درفضای n بعدی اقلیدسی‌دستگاه مختصات را چنان می‌گیریم‌که ماتریس یك تبدیل خطی چنین شود:

$$S=\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

دراینجا I_{n-2} ماتریس واحد رتبهٔ $(n-2)$ است. فرض‌کنیم دستگاه‌مختصات قائم $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ باشد. به‌این‌ترتیب گوئیم که S ماتریس دوران حول زیرفضای $[\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}]$ است؛ یعنی زیرفضائی‌که بابردارهای $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}$ ساخته‌می‌شود.

۴ـ تقارن ودوران: فرض کنیم‌که E_n یك فضای اقلیدسی n بعدی و $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ یك دستگاه مختصات قائم در E_n باشد. فرض‌کنیم‌که S تقارن نسبت به زیر فضای $[\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}]$ باشد. سپس ماتریس Sچنین‌می‌شود:

$$S=\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

که درآن I_{n-1} ماتریس واحد رتبهٔ $(n-1)$ است. واضح است‌که $S^{-1}=S$. اکنون یك بعد به‌فضا می‌افزائیم. بردار α_{n-1}راعمودبرE_n می‌گیریم. بنابراین$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\}$ یك دستگاه مختصات قائم در فضای اقلیدسی $(n+1)$ بعدی است، ماتریس‌تقارن نسبت به‌زیرفضای $[\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}]$ چنین می‌شود:

$$S=\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

که ماتریس دوران حول زیرفضای $[\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}]$به‌اندازهٔ زاویهٔ π نیز می‌باشد. واضح است‌که $S^{-1}=S$.

ازآنچه دراین مقاله بررسی شد به‌این نتیجه می‌رسیم: متقارن یك جسم درفضای n بعدی نسبت به یك زیر فضای $(n-1)$ بعدی را برآن جسم وقتی‌می‌توان منطبق‌کردکه یك بعد به‌فضا بیفزائیم.

استدلال ... (دنبالهٔصفحهٔ ۱۳۴)

۶ـn چیست؟ اکنون‌قضیه‌ای از هندسهٔمسطحه‌رامطالعه می‌کنیم.

هرگاه چند ضلعی بسته و مدب P درداخل منحنی بستهٔ Q واقع‌شود،پیرامون I از پیرامون Qکوچکتراست. واضح است‌که مساحت چند ضلعی داخلی Pکمتر از مساحت چند ضلعی خارجی Q است. ولی قضیهٔ اظهار شده بدین واضحی نیست چراکه بدون بیان تحدب P ،قضیه غلط می‌بود.

شکل ۱ ایدهٔ اساسی اثبات را می‌دهد. قسمت هاشورخوردهٔ چند ضلعی خارجی Q را حذف‌می‌کنیم؛ چندضلعی‌جدید Q' بدست می‌آیدکه بخشی ازچند ضلعی Q است ودارای دو خاصیت‌است:

اولاً: Q' خارج چند ضلعی P است‌وچون محدب‌است کاملا در یك طرف خط $A'B'$ که امتداد ضلع AB از P است واقع است.

ثانیاً: پیرامون Q' کمتراز پیرامون Q است.مرز Q'

دنباله‌درصفحهٔ ۱۴۲

دربارهٔ محور تقارن منحنی توابع

ترجمهٔ: فتح‌الله زرگری

می‌دانیم که منحنی تغییرات توابع زوج نسبت به محور عرضها تقارن دارد . دربعضی مواقع برای آسان کردن رسم منحنی لازم است محورهای تقارن دیگر منحنی را نیز بدست آوریم .

دوقضیهٔ زیر که به‌سادگی اثبات می‌شوند به ما امکان می‌دهند که در بعضی مواقع این محورهای تقارن را به‌آسانی پیدا کنیم .

قضیهٔ اول ـ اگر $f(x)$ یك تابع زوج باشد ، در این صورت خط $x=a$ محور تقارن منحنی تغییرات تابع $y=f(x-a)$ خواهد بود .

برای اینکه یك تابع $y=\varphi(x)$ به صورت $\varphi(x)=f(x-a)$ باشد لازم و کافی است که اولا حوزهٔ تعریف تابع $\varphi(x)$ نسبت به نقطهٔ a تقارن داشته باشد (یعنی اگر $a+x$ متعلق به حوزهٔ تعریف تابع $\varphi(x)$ است $x-a$ نیز متعلق به این حوزه باشد) .

ثانیاً رابطهٔ $\varphi(a-x)=\varphi(a+x)$ صادق باشد (برای کلیهٔ مقادیر x که به‌ازاء آنها نقاط $a+x$ متعلق به‌حوزهٔ تعریف تابع $\varphi(x)$ می‌باشند) .

قضیهٔ دوم ـ اگر تابع $F(x,y)$ نسبت به x (به‌ازاء $y=y_0$ دلخواه) زوج باشد دراین‌صورت مجموعهٔ M کلیهٔ نقاطی که مختصات آنها در معادلهٔ $F(x-a,y-b)=0$ صادقند، نسبت به‌خط $x=a$ متقارن است. به‌همین‌ترتیب اگر تابع $F(x,y)$ (به‌ازاء $x=x_0$ دلخواه) نسبت‌به y زوج باشد دراین صورت مجموعهٔ M نسبت به خط $y=b$ متقارن است .

چندمثال درمورد کاربرد این قضایا می‌آوریم .

مثال ۱ ـ مطلوبست رسم‌منحنی تغییرات تابع :

$$y=x^2+|x-3|-6x+7$$

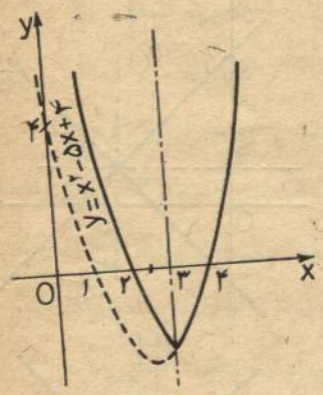
این‌تابع به صورت $y=(x-3)^2+|x-3|-2$ یعنی به‌صورت $y=f(x-3)$ درمی‌آید و تابع $f(x)=x^2+|x|-2$ یك تابع‌زوج است .

پس طبق قضیهٔ اول خط $x=3$ محور تقارن این‌منحنی تغییرات خواهد بود .

به‌ازاء $x\geqslant 3$ تابع مفروض‌می‌شود :

$$y=x^2-5x+4$$

قسمتی از منحنی نمایش این‌تابع که‌سمت راست‌خط $x=3$ است و قرینهٔ آن نسبت به خط $x=3$ رویهم نمایش هندسی تابع مفروض را بوجود می‌آورند (مطابق باشکل) :



(شکل۱)

مثال ۲ ـ مطلوبست رسم مجموعهٔ کلیهٔ نقاطی که مختصات آنها درمعادلهٔ زیرصادقند :

$$||y+2|-3|=|2-|x-1||$$

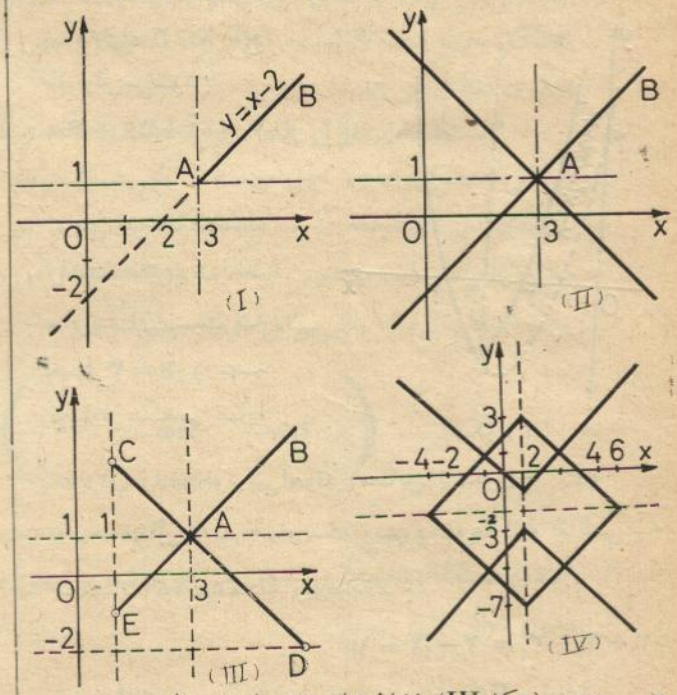
این معادله به‌صورت $F(x-1,y+2)=0$ می‌باشد .

تابع $F(x,y)=||y|-3|-|2-|x||$ نسبت به x و y زوج است . بنابراین طبق قضیهٔ دوم مجموعهٔ M مورد نظرنسبت به خطوط $x=1$ و $y=-2$ متقارن است . به این‌جهت کافی است جزئی ازمجموعهٔ موردنظرراکه درناحیهٔ $x\geqslant 1$ و $y\geqslant -2$ قرارگرفته رسم‌کنیم سپس برای رسم بقیهٔ مجموعه ازتقارن‌آن استفاده‌کنیم.

درناحیهٔ مزبور معادله به صورت $|y-1|=(x-3)$ درمی‌آید . مجموعهٔ کلیهٔ نقاطی راکه دراین معادله‌صادقندبا N نمایش می‌دهیم (کلیه نقاطی که نه فقط در ناحیهٔ $x\geqslant 1$ و

$y \geqslant -2$ بلکه درتمام صفحهٔ متغیرهای x و y قرار دارند). معادله را می‌توان به‌صورت : $G(x-3 \text{ و } y-1)=0$ نوشت که تابع $G(x \text{ و } y)=|y|-|x|$ نسبت به x و y زوج می‌باشد. بنابراین طبق قضیهٔ دوم مجموعهٔ N نسبت به خطوط $x=3$ و $y=1$ متقارن است.

به این جهت کافی است جزئی از مجموعهٔ N را به ازاء $x \geqslant 3$ و $y \geqslant 1$ رسم کنیم وسپس بقیهٔ آنرا با استفاده از خاصیت تقارن بدست آوریم . ازطرفی به‌ازاء $x \geqslant 3$ و $y \geqslant 1$ معادله به صورت $y-1=x-3$ یعنی $y=x-2$ درمی‌آید که معادلهٔ یك خط است . در(شکل I) قسمتی از نمایش تابع $y=x-2$ واقع درناحیه $x \geqslant 3$ و $y \geqslant 1$ و در (شکل II) به‌کمك تقارنی که نمایش تابع مفروض نسبت به خطوط $x=3$ و $y=1$ دارد کلیهٔ مجموعهٔ N را رسم کرده‌ایم : این مجموعه از دو خط تشکیل‌شده که ازنقطهٔ (۱و۳) می‌گذرند وموازی نیمسازهای ربع‌اول و دومند . جزئی ازمجموعهٔ N واقع درناحیهٔ $x>1$ و



$y>-2$ در(شکل III) نشان داده شده است.حال برای رسم مجموعهٔ M (متشکل ازکلیهٔ نقاطی که مختصات آنها در معادلهٔ اولیه صادقند) کافی است قسمتی از شکل II راکه مطابق با شکل III درناحیهٔ $x>1$ و $y>-2$ واقع است بقسمی کامل کنیم که نسبت به خطوط $x=1$ و $y=-2$ متقارن باشد . مجموعهٔ مورد نظر M مطابق با شکل IV بدست می‌آید .

مثال۳ - مطلوبست رسم مجموعهٔ نقاطی که مختصات آنها درمعادلهٔ زیرصادقند :

$$|y+1|=\frac{x^3-2x^2}{2|x-2|}$$

برای رسم این مجموعهٔ نقاط اگر تقارن را درنظر نگیریم چهارناحیه تشخیص داده می‌شوند :

۱) به‌ازاء $x>2$ و $y>-1$ داریم : $y=\frac{1}{2}x^2-1$

۲) به‌ازاء $x<2$ و $y>1$ داریم : $y=-\frac{1}{2}x^2-1$

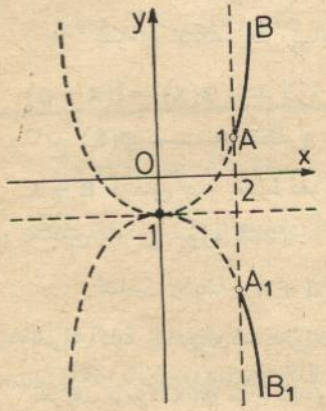
۳) به‌ازاء $x<2$ و $y<-1$ داریم : $y=\frac{1}{2}x^2-1$

۴) به‌ازاء $x>2$ و $y<-1$ داریم: $y=-\frac{1}{2}x^2-1$

اما اگر از محور تقارن مجموعهٔ نقاط یعنی : $y=1$ استفاده کنیم به جای چهار ناحیه فقط دوناحیه خواهیم داشت که با رسم منحنی دراین ناحیه وسپس با استفاده از خاصیت تقارن می‌توانیم بقیهٔ منحنی را نیز رسم کنیم . این دوناحیه عبارتند از:

۱) به‌ازاء $x>2$ و $y>-1$ داریم: $y=\frac{1}{2}x^2-1$

۲) به‌ازاء $x<2$ و $y>-1$ داریم: $y=-\frac{1}{2}x^2-1$



منحنی AB و نقطهٔ (۱ - و۰) را در دو ناحیهٔ اخیر رسم کرده سپس بااستفاده‌ازتقارن منحنی نسبت به خط $y=-1$ بقیهٔ آنرانیز رسم می‌کنیم.مجموعهٔ نقاط مورد نظر از دو منحنی AB و A_1B_1 و نقطهٔ (۱ - و۰) تشکیل شده است (مطابق با شکل) چند مثال دیگر درزیرمی‌آوریم که روش‌ترسیم‌آنها به ترتیبی‌است که برای مثال اخیربیان گردید .

مطلوبست رسم مجموعهٔ نقاطی که در معادلات زیر صادقند :

۱) $\log_{x^2+2x+2}(y^2-4y+4)=2$

۲) $2^{|y+4|}=x^2-6x+9$

۳) $y=||x+1|-2|$

۴) $||y|-3|=|x+2|-1|+2$

درسی از منطق

دو گزارهٔ قابل مقایسه

دو گزارهٔ متناقض ـ دو گزارهٔ متضاد ـ دو گزارهٔ در استلزام ـ دو گزارهٔ متعادل ـ شرط لازم ـ شرط کافی ـ شرط لازم و کافی

دو گزارهٔ مفروض P و Q را قابل مقایسه می‌نامیم هرگاه ارزش یکی ازآنها (ویاهریك ازآنها) به ارزش‌دیگری وابستگی داشته باشد .

گزاره‌های متناقض ـ اگر دو گزارهٔ P و Q چنان باشندکه هرگاه یکی ازآنها راست باشد لازم آیدکه دیگری دروغ باشد وهمچنین هرگاه‌یکی ازآنها دروغ باشدلازم‌آیدکه دیگری‌راست‌باشد، می گوییم که‌آن‌دو گزاره‌متناقض‌یکدیگرند.

دو گزارهٔ متناقض هردو باهم راست همچنین هردو باهم دروغ نیستند .

جدول ارزشهای دو گزارهٔ متناقض چنین است :

گزاره	ارزش	
Q	۱	۰
P	۰	۱

گزاره	ارزش	
P	۱	۰
Q	۰	۱

مثالها ازگزاره‌های متناقض :

۱ - P : حسن درخانه است .
Q : حسن درخانه نیست .

۲ - P : آب در ۵۰ درجهٔ سانتیگراد جوش‌می‌آید.
Q : آب در ۵۰درجهٔ سانتیگراد جوش‌نمی‌آید.

۳ - P : مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است .
Q : سه‌زاویهٔ‌مثلث ABC بایکدیگربرابرنیستند.

۴ - P : $a=b$
Q : $a\neq b$

۵ - P : $x\in E$
Q : $x\notin E$

۶ - P : $n<۶$
Q : $n\geqslant ۶$

گزارهای متضاد ـ هرگاه دو گزارهٔ P و Q چنان باشند که هردو باهم نتوانند راست باشند، آنهاراگزاره‌های متضاد می‌نامیم . دو گزاره که متضاد باشند ممکن است که یکی ازآنها راست و دیگری دروغ یا اینکه هردو باهم دروغ باشند . جدول ارزشهای دو گزارهٔ متضاد چنین است :

گزاره	ارزش	
Q	۱	۰
P	۰ یا ۱	۰ یا ۱

گزاره	ارزش	
P	۱	۰
Q	۰ یا ۱	۰ یا ۱

مثالهایی ازگزاره‌های متضاد .

۱ - P : حسن درخانه خوابیده است .
Q : حسن درکوچه مشغول راه‌رفتن است .

۲ - P : آب در ۶۰ درجهٔ‌سانتیگراد جوش‌می‌آید .
Q : آب در ۷۰ درجهٔ سانتیگراد جوش‌می‌آید .

۳ - P : مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است .
Q : مثلث ABC قائم‌الزاویه است .

۴ - P : N عدد اول بزرگتراز۳ است .
Q : N عدد زوج است .

۵ - $\begin{cases} P : a=b \\ Q : a>b \end{cases}$

۶ - $\begin{cases} P : n>۶ \\ Q : n<۶ \end{cases}$

تشابه و تفاوت تناقض با تضاد ـ تشابه تناقض و تضاد در آن است که درمورد هرکدام از آنها ، دو گزارهٔ مربوط ، باهم راست نیستند . به علت این تشابه گاهی در استدلالها تضاد با تناقض اشتباه می‌شود . اما تفاوت تناقض و تضاد درآن است که دو گزارهٔ متناقض هردو باهم که راست نیستند هردوباهم دروغ هم نمی‌باشند ، درصورتی که ممکن است دو گزارهٔ متضاد هردوباهم دروغ باشند . اگر دو گزاره متناقض باشند، راست‌بودن یکی‌ازآنها و دروغ بودن‌دیگری حتمی است، بقسمی‌که وقتی یکی ازآنها راست باشد دیگری الزاماً دروغ است ووقتی یکی از آنها دروغ باشد دیگری الزاماً راست است. اما اگر دو گزاره متضاد باشند ، وقتی یکی‌از آنها راست است دیگری‌حتماً دروغ است درصورتی که اگریکی ازآنها دروغ باشد ، دروغ بودن دیگری الزامی نیست؛ گزارهٔ دیگرممکن است‌که راست‌باشد وممکن است‌که دروغ باشد .

دو گزارهٔ«حسن درخانه‌است» و«حسن درخانه نیست» متناقض‌اند زیرا راست‌بودن هردوی‌آنها باهم وهمچنین دروغ بودن هردوی‌آنها باهم ممکن نیست . اما دو گزارهٔ : «حسن درخانه است» و «حسن در خیابان است» متضادند ولی متناقض نیستند،زیرا ممکن است که‌یکی از آنها راست‌باشد که در این‌صورت دیگری دروغ است، اما ممکن است‌که هردو دروغ باشند، مثلا حسن در اداره باشد .

دو گزاره‌که متناقض باشند متضاد نیز می‌باشند، اما دو گزاره‌که متضاد باشند ممکن است‌که متناقض نباشند . مثلا دو گزارهٔ :

«هوا آفتابی است» .

«هوا آفتابی نیست» .

متناقض ودرعین‌حال متضادند. اما دو گزارهٔ :

«هوا آفتابی است» .

«هوا ابری است» .

متضادند اما متناقض نیستند زیرا ممکن است‌که هوا آفتابی نباشد وابری هم‌نباشد (مثلا مهتابی باشد) .

استلزام ـ اگردو گزارهٔ P و Q چنان‌باشند که‌هرگاه P راست باشد Q نیز راست باشد و هرگاه Q دروغ باشد P نیزدروغ باشد، می گوییم‌که گزارهٔ P مستلزم گزارهٔ Q است وچنین می‌نویسیم :

$$P \Longrightarrow Q$$

که خوانده می‌شود: **اگر P آنگاه Q**

وقتی P مستلزم Q باشد، جدول ارزشهای آنها چنین است :

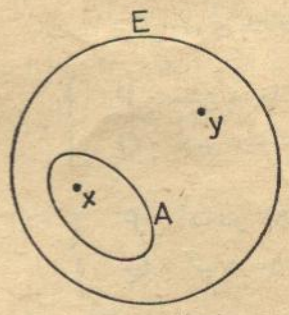
ارزش	گزاره
۰ ۱	Q
۰ ۰یا۱	P

ارزش	گزاره
۰ ۱	P
۱ ۱یا۰	Q

عبارت «$P \Longrightarrow Q$» رویهم **استلزام** نامیده می‌شود . در استلزام «$P \Longrightarrow Q$»، **گزارهٔ Q شرط لازم برای گزارهٔ P** ، و **گزارهٔ P شرط کافی برای گزارهٔ Q** عنوان می‌شود .

مثال ـ عبارت «اگرحسن اصفهانی باشد ایرانی است» که‌تلخیص عبارت«اگرحسن اصفهانی است آنگاه حسن ایرانی است»می‌باشدیك‌استلزام‌است.دراین‌استلزام، گزارهٔ«حسن‌ایرانی است» شرط لازم برای گزارهٔ «حسن اصفهانی است» می‌باشدو گزارهٔ «حسن اصفهانی است» شرط کافی برای‌گزارهٔ «حسن ایرانی است» می‌باشد . وقتی حسن اصفهانی باشد الزاماً ایرانی است اما وقتی‌حسن ایرانی باشد لازم‌نیست که‌حتماً اصفهانی باشد، ممکن است‌که تبریزی یا مشهدی یا .... باشد :

برای آنکه حسن ایرانی باشد کافی است‌که اصفهانی باشد (اما لازم نیست) .



هرگاه A مجموعهٔ اصفهانیهاوE مجموعهٔ ایرانیها باشد، A زیر مجموعه‌ای است از مجموعهٔ E . هر عضوی ازA عضو E نیزمی‌باشد :

$$x \in A \Longrightarrow x \in E$$

اما هرعضوی از E ممکن است که عضو A نباشد . مثلا مطابق بانمودار بالا ، y عضو E است اما عضو A نیست .

مثالهای دیگر از استلزام $P \Longrightarrow Q$:

۱ - P : هم‌اکنون ماه‌آبان است .
Q : هم‌اکنون فصل‌پاییز است .

۲ - P : N عدد زوج غیراز ۲ است.
Q : N عدد غیراول است .

۳ - P : مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است .
Q : یك‌زاویه‌ازمثلث ABC برابر ۶۰ درجه‌است.

۴ - P : دوخط D و △ متوازیند .
Q : دوخط D و △ دریك‌صفحه واقعند .

۵ - $P : n < ۹۰$
$Q : n < ۱۰۰$

۶ - $P : a > b > ۰$
$Q : a^۲ > b^۲$

۷ - $P : x - y = ۲k\pi$
$Q : \sin x = \sin y$

تعادل = هم‌ارزی ـ اگردو استلزام $P \Longrightarrow Q$ و $Q \Longrightarrow P$ هردوباهم برقرارباشند ، به عبارت دیگراگردو گزارهٔ P و Q درهرحال هم‌ارزش باشند، می گوییم که دو گزارهٔ P و Q هم‌ارز (= معادل) یکدیگرند ومی‌نویسیم :

$P \Longleftrightarrow Q$

که خوانده می‌شود : P **اگروفقط اگر** Q

درهم‌ارزی «$P \Longleftrightarrow Q$» هریك از دوگزارهٔ P و Q ، **شرط لازم و کافی** برای دیگری عنوان می‌شود .

مثال ـ دوگزارهٔ : «چهار ضلعی ABCD متوازی ـ الاضلاع است» و «دو قطرچهار ضلعی ABCD منصف یکدیگرند» هم‌ارزند ، زیرا چنانکه در هندسه ثابت می‌شود هرکدام ازآنهاکه راست باشد دیگری‌نیز الزاماً راست است، وهرکدام ازآنهاکه دروغ باشددیگری نیز الزاماً دروغ‌است. هریك ازاین دوگزاره شرط لازم وکافی برای دیگری است و می‌دانیم که هم‌ارزی مزبور درهندسه چنین بیان می‌شود : «شرط لازم وکافی برای‌آنکه چهارضلعی ABCD متوازی ـ الاضلاع باشدآن است‌که دوقطرآن منصف یکدیگرباشند».

مثالهایی دیگر ازهم ارزی $P \Longleftrightarrow Q$:

۱ - P : عدد N مضرب ۵ است .
Q : رقم یکان‌عدد N صفریا ۵ است.

۲ - P : چهارضلعی ABCD محاطی است .
Q : دوزاویهٔ روبرو از چهارضلعی ABCD مکمل‌یکدیگرند

۳ - P: کسرتحویل‌ناپذیر $\frac{a}{b}$ مولد عدد اعشاری تحقیقی است .
Q : در تجزیهٔ عدد b غیراز عاملهای ۲ ویا ۵ عامل دیگری وجود ندارد

۴ - P : a و c دوعددحقیقی مختلف‌العلامتند .
Q : معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ دو جواب مختلف‌العلامت دارد .

۵ - $P : x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۵ = ۰$
$Q : x = -۱$ و $y = ۲$

۶ - $P : \cos x = \cos y$
$Q : x \pm y = ۲k\pi$

تساوی‌دوگزاره ـ یك گزاره را می‌توان‌به‌صورتهای مختلف بیان‌کرد . دوگزاره که دوبیان ازیك‌گزارهٔ واحد باشند مساوی بایکدیگر نامیده‌می‌شوند. اگرP و Q دوگزارهٔ متساوی باشندمی‌نویسیم : $P = Q$. مثلاً دوگزارهٔ زیر با یکدیگربرابرند :

P : احمدپدرپرویز است .
Q : پرویز پسراحمد است .

دو گزاره که متساوی باشند متعادل نیزمی‌باشند اما دوگزاره‌که متعادل باشند ممکن است‌که متساوی نباشند. در بسیاری ازموارد تفاوت تساوی و تعادل دوگزاره مشکل است، از این‌جهت عموماً دوگزارهٔ متساوی را دوگزارهٔ متعادل نام می‌برند .

تمرینات :

درهریك ازموارد زیر معلوم‌کنیدکه دوگزارهٔ P و Q کدامیك از اوضاع: تناقض ، تضاد، استلزام،تعادل، رانسبت به یکدیگر دارا می‌باشند . در حالتهای استلزام و تعادل گزاره‌هارابه‌صورت‌شرط‌لازم،شرط‌کافی،شرط‌لازم‌وکافی‌بیان‌کنید .

۱ - P : سیمین‌ازشیرین بزرگتراست .
Q : شیرین ازسیمین بزرگتراست .

۲ - P: لیوان پراست .
Q : لیوان خالی است .

۳ - $\begin{cases} P: \text{محمود ازعلی بزرگتراست .} \\ Q: \text{محمود ازعلی بزرگترنیست .} \end{cases}$

۴ - $\begin{cases} P: \text{مینا دانش‌آموز دبیرستان است .} \\ Q: \text{مینا گواهینامهٔ دورهٔابتدایی‌رادارد.} \end{cases}$

۵ - $\begin{cases} P: \text{مثلث ABC به رأس A متساوی‌الساقین است .} \\ Q: \text{درمثلث ABC نیمساز زاویهٔ A برمیانهٔ ضلع BC منطبق است .} \end{cases}$

۶ - $\begin{cases} P: \text{چهارضلعی ABCD مستطیل است .} \\ Q: \text{دوقطرچهارضلعی ABCD متساویند .} \end{cases}$

۷ - $\begin{cases} P: \text{چهارضلعی ABCD مستطیل است .} \\ Q: \text{دوقطر چهارضلعی ABCD متساوی و منصف یکدیگرند .} \end{cases}$

۸ - $\begin{cases} P: \text{چهارضلعی ABCD مستطیل است .} \\ Q: \text{دوقطر چهار ضلعی ABCD متساوی نیستند .} \end{cases}$

۹ - $\begin{cases} P: \text{عدد N بر۹ بخش‌پذیراست .} \\ Q: \text{عدد N بر۳ بخش‌پذیراست.} \end{cases}$

۱۰ - $\begin{cases} P: \text{عدد A بر۲و بر۳ بخش‌پذیراست .} \\ Q: \text{عدد A بر ۶بخش‌پذیراست .} \end{cases}$

۱۱ - $\begin{cases} P: \text{عدد p مضرب ۲۴است .} \\ Q: \text{عدد p مضرب۶ ومضرب ۴ است .} \end{cases}$

۱۲ - $\begin{cases} P: x=۶ \\ Q: x\neq ۶ \end{cases}$

۱۳ - $\begin{cases} P: x=۱۰ \\ Q: x=۷ \end{cases}$

۱۴ - $\begin{cases} P: a=b \\ Q: a\geqslant b \end{cases}$

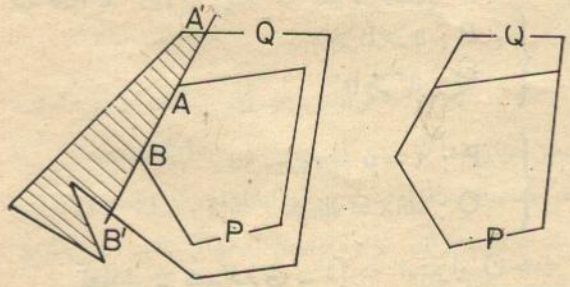
۱۵ - $\begin{cases} P: a\geqslant ۱ \\ Q: a+\frac{۱}{a}\geqslant ۲ \end{cases}$

۱۶ - $\begin{cases} P: x+y+z=۰ \\ Q: x^۳+y^۳+z^۳=۳xyz \end{cases}$

۱۷ - $\begin{cases} P: A+B+C=۱۸۰^\circ \\ Q: tgA+tgB+tgC=tgA\,tgB\,tgC \end{cases}$

استدلال ... (مانده‌ازصفحهٔ ۱۳۶)

بامرز Q متفاوت است زیرا اولی شامل قطعه خطی است که A' و B' را به هم وصل می‌کند و حال آنکه در دومی این دو نقطه توسط خط شکسته‌ای به هم وصل شده‌اند (اضلاع خارج از قسمت‌هاشورخورده) چون خط راست کمترین راه مابین دو نقطهٔ A' و B' است، پیرامون Q' ازپیرامون Q کوچکتر است.



شکل۲: حالت۱ = n **شکل۱ : عبورازn به n+۱**

همانطورکه از Q به Q' عبورکردیم ، می‌توانیم از Q' به چند ضلعی دیگر Q'' برویم. بدین ترتیب یک رشته چند ضلعی‌های Q ، Q' ، Q'' ، ... بدست می‌آوریم که هرکدام داخل دیگری است و پیرامونش کمتر از آنست و آخرین آنها P است. بنابراین پیرامون P کمتر از پیرامون Q است .

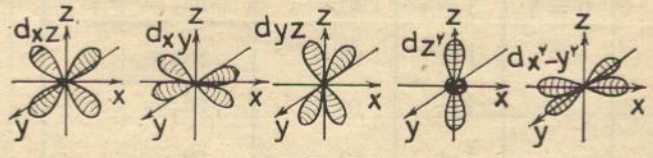
می‌بایست طبیعت اثبات اخیررا مجدداً بازشناسیم، در واقع این استدلال استقرائی بود،ولی نقش n دراینجاچه‌بود؟ این پرسش مهم است.استقراء ریاضی درزمینه‌های‌متعدد و حتی در مسائل مشکل و بسیار پیچیده مورد استفاده قرار گرفته است. بااهتمام‌در یافتن یك اثبات مخفی، می‌توانیم در مقابل تصمیم مشکلی قراربگیریم:نقش‌عددn چیست؟ استقراء ریاضی را از چه مقدار n باید شروع کنیم.

در اثبات اخیر می‌توان پیشنهادکردکه **تعداد اضلاع چند ضلعی محدب داخلی راکه‌کاملا متعلق به مرزچندضلعی خارجی هستند ، n فرض‌کنید.** شکل ۲ مربوط به حالت n = ۱ است. جستجوی مقدار مناسب n را برای حالت شکل ۱ به خواننده واگذار می‌کنم.

شیمی عمومی به‌روش برنامه‌ای (دنباله از شمارهٔ قبل)

ترجمهٔ: باقر مظفرزاده

۴۲ چون الکترونهای d می‌توانند دریکی از ..... حالت که مربوط به مقادیرمتفاوت m است، قرار گیرند، پس ..... اربیتال که به صورتهای مختلف درفضا سمتگیری شده‌اندامکان پذیراست. دراینجا شکل اربیتالهای d نشان داده شده‌است:



پاسخ ۴۳ : یك ـ سه ـ جهت

۴۴ چون انرژی الکترون دراتم به جهت اربیتال مربوط نیست (درصورتی که‌اتم تحت‌تأثیرمیدان مغناطیسی یاالکتریکی قرارنگرفته باشد) ، پس الکترونها بامقدارمتفاوت m ، . . . یکسان دارند.

پاسخ ۴۵ : دژنراسیون

۴۶ معلوم شده است که دژنراسیون دراتم منفرد برای اربیتالهای p سه‌بخشی وبرای اربیتالهای d و f به ترتیب ..... و ..... است .

پاسخ ۴۷ :

$$n=3\begin{cases}3d_{xy} & 3d_{xz} & 3d_{yz} & 3d_{x^2-y^2} & 3d_{z^2}\\ 3p_x & 3p_y & 3p_z & & \\ 3s & & & & \end{cases}$$

$$n=2\begin{cases}2p_x & 2p_y & 2p_z\\ 2s & & \end{cases}$$

$$n=1\{\ 1s$$

۴۸ علاوه‌برسه عددکوانتمی ..... ، ..... و .... ، برای معرفی کامل حالت الکترون دراتم، یك عددکوانتمی‌دیگر به‌نام عددکوانتمی اسپین ضرورت پیدا می‌کند.

پاسخ ۴۹ : چرخش

۵۰ بنابرمکانیك‌موجی،چرخش‌فیزیکی‌الکترون حتمی‌الوقوع نیست،لکن الکترون طوری رفتارمی‌کندکه بنظرمی‌رسد دارای آن‌درجهٔ‌آزادی‌است‌که فقطیکی‌از..... مقدارممکن‌رامی‌تواند دارا باشد.

پاسخ ۵۱ :

$n=1$	$l=0$	$m=0$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
$n=2$	$l=0$	$m=0$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=1$	$m=+1$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=1$	$m=0$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=1$	$m=-1$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
$n=3$	$l=0$	$m=0$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=1$	$m=+1$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=1$	$m=0$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=1$	$m=-1$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=2$	$m=+2$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=2$	$m=+1$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=2$	$m=0$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=2$	$m=-1$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$
	$l=2$	$m=-2$	$m_s=\pm\frac{1}{2}$

۵۲ عدهٔ کامل ترکیبهای اعدادکوانتمی در $n=1$ مساوی است با ۲، در $n=2$ مساوی است با.... ، در $n=3$ مساوی است‌با.... بطورکلی عده حالتهای انرژی‌که جوابگوی‌مقدار n است، مساوی است بادو برابرمجذور...

پاسخ ۵۳: دو

۵۴ دو الکترون‌که فقط در مقدار m_s با یکدیگر تفاوت دارند، ازنظر انرژی هم ارزند. این الکترونها را درنمودار سطوح‌انرژی باپیکانهایی که‌جهت ممکن‌اسپینها را معین‌می‌کنند نشان می‌دهند. بااستفاده ازاین روش نمایش، ۱۰ الکترون را طوری در نمودار جادهیدکه انرژی اتم حداقل باشد.

$3d_{xy}$ $3d_{xz}$ $3d_{yz}$ $3d_{x^2-y^2}$ $3d_{z^2}$

$3p_x$ $3p_y$ $3p_z$

$3s$

$2p_x$ $2p_y$ $2p_z$

$2s$

$\uparrow\downarrow 1s$

پاسخ ۴۲ : پنج
پنج

۴۳

برای هرمقدار n ، تنها . . . . اربیتال ۱s ، . . . . اربیتال p که فقط با .... خود درفضا بایکدیگرتفاوت دارند، امکان‌پذیراست .

پاسخ ۴۴ : انرژی

۴۵

حالتهای الکترون‌که با یک انرژی مشخص می‌شوند، دژنره نامیده می‌شوند وعدهٔ چنین حالتها را بخش‌پذیری .... می‌نامند.

پاسخ ۴۶ : پنج بخشی
هفت بخشی

۴۷

نمودارحالتهای الکترون دراتم را کامل‌کنید وسطوح اصلی‌و فرعی انرژی را درآن باعلامتهای متداول مشخص‌کنید.

n = ۳	$3d_{xy}$	$3d_{xz}$	$3d_{yz}$	$3d_{x^2-y^2}$	$3d_{z^2}$
	—	—	—		
	—				
n = ۲	$2p_x$	—	—		
	—				
n = ۱	1s				

پاسخ ۴۸ : اصلی n
سمتی l
مغناطیسی m

۴۹

عدد کوانتمی اسپین‌راکه‌باعلامت m_s نشان‌می‌دهند،قبلا به‌چرخش الکترون به دورمحورخود مربوط می‌کردند، بنابر امکان دوجهت.... (موافق‌حرکت عقربهٔ ساعت ومخالف‌آن)، به m_s دومقدارممکن $+\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ را نسبت می‌دهند.

پاسخ ۵۰ : دو

۵۱

مقادیرمجازچهارعدد کوانتمی راکه معرف رفتارالکترون هستند، می‌توان درجدول نشان داد . این‌جدول را بانشان دادن تمام ترکیبهای ممکن اعداد کوانتمی برای n = ۲ و n = ۳ کامل‌کنید .

n = ۱	l = ۰	m = ۰	$m_s = \pm\frac{1}{2}$
n = ۲	l = ۰	m = ۰	$m_s = \pm\frac{1}{2}$
	l =	m =	$m_s =$
	l =	m =	$m_s =$
	l =	m =	$m_s =$
n = ۳	l = ۰	m = ۰	$m_s = \pm\frac{1}{2}$
	l =	m =	$m_s =$
	l =	m =	m =
	l =	m =	$m_s =$
	l =	m =	$m_s =$
	l =	m =	$m_s =$
	l =	m =	$m_s =$
	l =	m =	$m_s =$
	l =	m =	$m_s =$

پاسخ ۵۲ : ۸
۱۸
عدد کوانتمی اصلی n

۵۳

بنابراصل پائولی، دو الکترون باچهارعدد کوانتمی یکسان در یک اتم نمی‌تواند وجودداشته باشد. چون $m_s = \pm\frac{1}{2}$ ، بنابراین در اربیتال مربوط به هرترکیب‌داده شده از m،l،n بیش‌از ... الکترون نمی‌تواند جاگیرد.

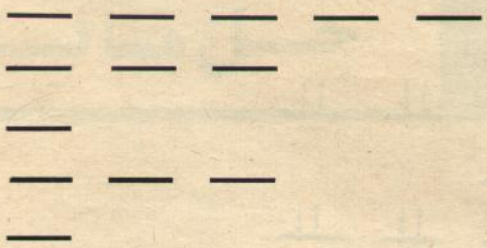
پاسخ۵۴

$3d_{xy}$	$3d_{xz}$	$3d_{yz}$	$3d_{x^2-y^2}$	$3d_{z^2}$
$3p_x$	$3p_y$	$3p_z$		
3s				
↑↓ $2p_x$	↑↓ $2p_y$	↑↓ $2p_z$		
↓↑ 2s				
↑↓ 1s				

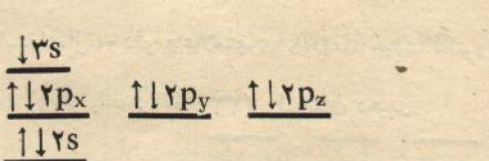
یکان دورهٔ نهم

۵۵

عدد اتمی فلوئورمساوی ۹ است. وضع ۹ الکترون را دراتم فلوئورکه درحالت اصلی قراردارد،درنمودارنشان‌دهید وباعلامتهای مربوط سطوح اشغال شده را مشخص کنید.



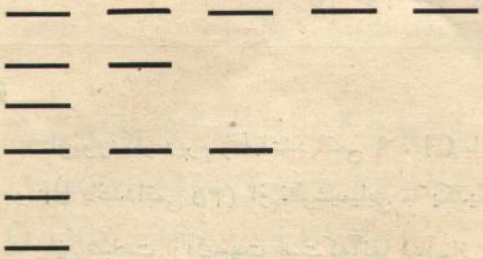
پاسخ ۵۶ :



$1s^2\ 2s^2\ 2p^2_x\ 2p^2_y\ 2p^2_z\ 3s^1$

۵۷

هیئت الکترونی‌اتم‌اکسیژن‌که در حالت اصلی قراردارد چنین است: $1s^2\ 2s^2\ 2p^2_x\ 2p^1_y\ 2p^1_z$ رانش الکترونـها سبب می‌شود تاآنها دواربیتال متفاوت باانرژی یـکسان را اشغال‌کنند. جهت اسپین چنین الکترونهای جـفت نشده‌یکـی است. هیئت‌الکترونی اکسیژن راکه درحالت اصلی قراردارد، نشان دهید.



پاسخ ۵۸ :

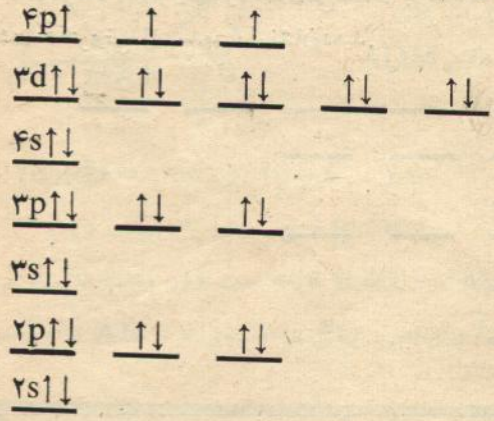
C : $1s^2\ 2s^2\ 2p^1_x\ 2p^1_y$

N : $1s^2\ 2s^2\ 2p^1_x\ 2p^1_y\ 2p^1_z$

۵۹

هیئت الکترونی‌عناصر سنگین‌تر این‌طورمعین می‌شود: الکترونها در اربیتالهابه‌ترتیب‌افزایش انرژی«جامی‌گیرند»، لکن نمودارسادهٔ انرژی‌در$n = 3$ و$n = 4$ کمی برهم‌می‌خورد. بادرنظرگرفتن این وضع، هیئت الکترونی پتاسیم (K با عدد اتمی ۱۹) را نشان دهید .

پاسخ ۶۰ :



$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^{10}\ 4p^1_x\ 4p^1_y\ 4p^1_z$

۶۱

عناصر هلیم (He باعدد اتمی۲) ، نئون (Ne با عدد اتمی ۱۰) و آرگون (Ar با عدد اتمی ۱۸) از نظر شیمیایی بی‌اثرند . این بی‌اثری با کامل بودن لایه‌های الکترونی آنها ارتباط دارد. هیئت الکترونی‌این‌عناصررامی‌توان به‌ترتیب به‌صورت ••••، ••••، و •••• نشان داد .

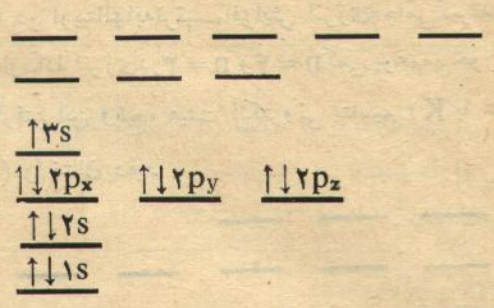
پاسخ ۶۲:

$1s^2\ 2s^2\ 2p^5$

$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^5$

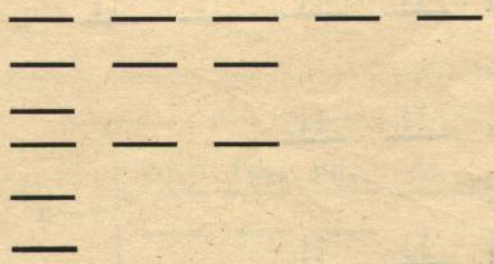
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^{10}\ 4p^5$

پاسخ ۵۵ :

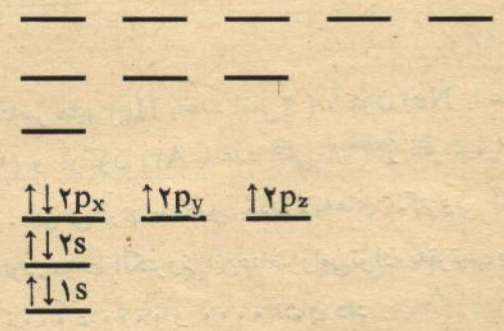


۵۶

وضع یاهیئت الکترونها را دراتم فلوئور می‌توان با ترکیب علامتها به صورت $1s^2 2s^2 2p_x^2 2p_y^2 2p_z^1$ یا $1s^2 2s^2 2p^5$ نشان داد. اعدادی که به‌صورت توان‌نوشته شده‌اند، عدهٔ الکترونها را نشان‌می‌دهند. بااستفاده‌ازاین‌روش هیئت الکترونی اتم‌سدیم را نشان‌دهید.



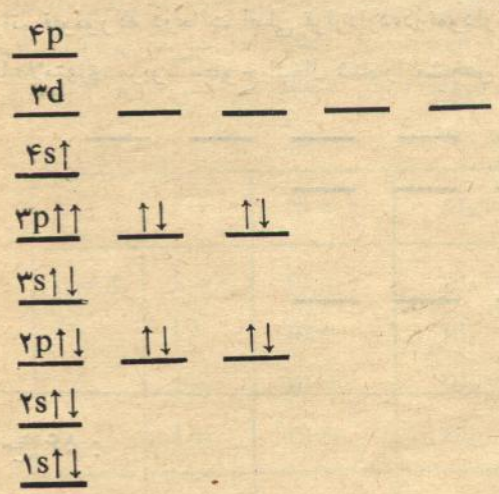
پاسخ ۵۷ :



۵۸

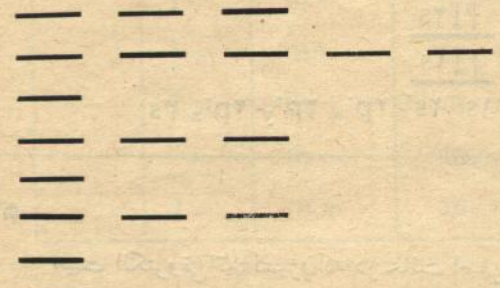
با استفاده‌ازعلامتهای s، p_x، p_y، p_z، حالت الکترونها را در اتمهای کربن (C باعدداتمی۶) ونیتروژن (N با عدد اتمی۷) که درحالت‌اصلی قراردارند، معین کنید.

پاسخ ۵۹:



۶۰

با استفاده‌ازنمودار وعلامتهای s،p،d هیئت‌الکترونی اتم ارسنیک (As باعدد اتمی ۳۳) را نشان دهید.



پاسخ ۶۱:

$1s^2$

$1s^2\ 2s^2\ 2p^6$

$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 2p^6$

۶۲

فلوئور، کلر وبرم (Fباعدد اتمی ۹ ، Cl با عدد اتمی ۱۷ و Br باعدداتمی ۳۵) ازنظرشیمیایی با یکدیگر شباهت دارند واین شباهت ازآن‌جهت است که‌آنها به‌آسانی الکترون می‌گیرندوآنیون‌تشکیل‌می‌دهند. هیئت الکترونی‌آنها نشان‌می‌دهدکه این خاصیت باتمایل آنهابه‌تکمیل اربیتالهای pمربوط است. هیئت الکترونی اتمهای فلوئور، کلر و برم را می‌توان به‌صورت ••••، ••••، و •••• نشان داد.

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۸۷

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۸۷/۱ـ فرستنده: **محمدمعینی**، ترجمه از کتابهای خارجی

به‌فرض $x \neq 1$ عبارت:

$$(x-1)^5 = a(x^5-1)$$

رابرحسب $y = x + \frac{1}{x}$ مرتب کنید.

حل ـ هر یك از دو عبارت $x^5 - 1$ و $(x-1)^5$ بر $x-1$ بخش پذیرند وپس‌از تقسیم طرفین بر این‌عامل‌مشترك عبارت بالا چنین می‌شود:

$$(1-a)x^4 - (4+a)x^3 + (6-a)x^2 - (4+a)x + 1 - a = 0$$

از تقسیم بر x^2 خواهیم داشت:

$$(1-a)x^2 - (4+a)x + 6 - a - \frac{4+a}{x} + \frac{1-a}{x^2} = 0$$

$$(1-a)(x^2 + \frac{1}{x^2}) - (4+a)(x + \frac{1}{x}) + 6 - a = 0$$

بافرض $y = x + \frac{1}{x}$ داریم:

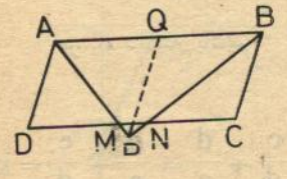
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \times x \times \frac{1}{x} = y^2 - 2$$

$$(1-a)(y^2-2) - (4+a)y + 6 - a = 0$$

$$(1-a)y^2 - (4+a)y + 4 + a = 0$$

۸۷/۲ـ متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. روی‌ضلع CD یا امتدادآن‌دونقطهٔ M و N را بقسمی‌انتخاب می‌کنیم‌که DM با DC دریك‌جهت و $DM = DA$ باشدو همچنین CN با CD در یك جهت و $CN = CB$ باشد. دو خط AM و BN درنقطهٔ P متقاطع می‌شوند. اگر Q وسط AB باشد ثابت‌کنیدکه طول PQ نصف طول AB است.

حل ـ اگر α اندازهٔ زاویهٔ $PMN = AMD$ و β اندازهٔ زاویهٔ



$PNM = BNC$ باشد. در مثلثهای متساوی‌الساقین ADM و BCN داریم:

$$2\alpha + D = 180^\circ \quad \text{و} \quad 2\beta + C = 180^\circ$$

$$C + D = 180^\circ \Longrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

مثلث MPN در زاویهٔ P قائمه است ودر مثلث قائم‌الزاویهٔ APB میانهٔ وتر یعنی PQ بانصف‌طول‌وتر AB برابراست.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۸۷/۳ـ از **محمدرضا خلیلی‌زاده** دانشجوی دانشکدهٔ نفت آبادان

چندجمله‌ای $f(x)$ راتعیین‌کنید بنابرآنکه:

$$ff(x) = x^2 f(x) - x^2$$

حل ـ اگر فرض‌کنیم که $f(x)$ چند جمله‌ای نسبت به x از درجهٔ n باشد، عبارت $ff(x)$ نسبت به x از درجهٔ n^2 و عبارت $x^2 f(x)$ نسبت به x از درجهٔ $n+2$ خواهد بود، پس بایدداشته باشیم:

$$n^2 = n + 2 \quad \text{یا} \quad n^2 - n - 2 = 0$$

$$(n-2)(n+1) = 0 \Longrightarrow n = 2$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$ff(x) = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c$$

$$ff(x) = a^3x^4 + 2a^2bx^3 +$$
$$+ a(b^2 + b + 2ac)x^2 + (2abc + b^2)x + c^2 + bc + c$$
$$x^2f(x) - x^2 = ax^4 + bx^3 + (c-1)x^2$$

باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} a^2 = a \text{ و } 2a^2b = b \\ a(b^2 + b + 2ac) = c - 1 \\ 2abc + b^2 = 0 \text{ و } c^2 + bc + c = 0 \end{cases}$$

نتیجه خواهد شد:

$$a = 1 \text{ و } b = 0 \text{ و } c = -1$$
$$f(x) = x^2 - 1$$

۸۷/۴ـ فرستنده : **محمد معینی**، ترجمه از کتابهای خارجی

هرگاه داشته باشیم:

$$a \neq b \neq c \neq d \neq e$$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c} = \frac{d}{e} + \frac{e}{d} = k$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$\frac{a}{e} + \frac{e}{a} = k^4 - 4k^2 + 2$$

حل ـ از تساوی اول داریم:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{b}{c} - \frac{b}{a} = b\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)$$
$$\frac{a-c}{b} = \frac{b(a-c)}{ac}$$
$$a \neq c \Longrightarrow b^2 = ac \text{ یا } \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = h$$
$$c = \frac{b^2}{a} \text{ و } d = \frac{c^2}{b} = \frac{b^3}{a^2}$$
$$e = \frac{d^2}{c} = \frac{b^4}{a^3}$$
$$\frac{e}{a} = \frac{b^4}{a^2} = h^4$$
$$\frac{a}{e} + \frac{e}{a} = h^4 + \frac{1}{h^4}$$
$$h + \frac{1}{h} = k \Longrightarrow h^2 + \frac{1}{h^2} = k^2 - 2$$
$$h^4 + \frac{1}{h^4} = (k^2 - 2)^2 - 2$$
$$\frac{a}{e} + \frac{e}{a} = k^4 - 4k^2 + 2$$

۸۷/۵ـ از دستگاه زیر مقادیر x و y رابدست آورید:

$$\begin{cases} 2^{x+2} + 2 \times 3^{x+y} = 70 \\ 3 \times 2^x + 3^{x+y+1} = 93 \end{cases}$$

حل ـ فرض می کنیم:

$$2^x = X \text{ و } 3^{x+y} = Y$$

دراین صورت دستگاه مفروض چنین می‌شود:

$$\begin{cases} 4X + 2Y = 70 \\ 3X + 3Y = 93 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ Y = 27 \end{cases}$$
$$2^x = 4 = 2^2 \Longrightarrow x = 2$$
$$3^{x+y} = 3^{2+y} = 27 \Longrightarrow y = 1$$

۸۷/۶ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

به فرض $A = \log_6 x$ از معادلهٔ زیر مقدار x را بدست آورید :

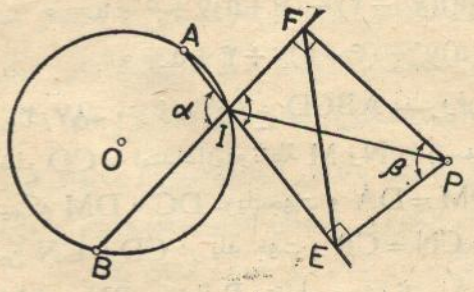
حل ـ داریم $6^{A^2} + x^A = 12$

$$6^{A^2} = (6^{\log_6 x})^{\log_6 x} = x^{\log_6 x} = x^A$$
$$x^A + x^A = 12 \text{ یا } x^A = 6$$
$$A \log_6 x = A^2 = 1 \Longrightarrow A = \pm 1$$
$$\log_6 x = \pm 1 \Longrightarrow x = 6 \text{ یا } \frac{1}{6}$$

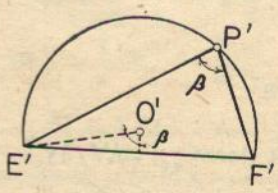
۸۷/۷ـ فرستنده: **حسین دارابی** از تهران

دایرهٔ O ودونقطهٔ ثابت A وB واقع برآن ونقطهٔ ثابت P درخارج آن مفروض است. بردایرهٔ O نقطهٔ I را چنان پیدا کنید که اگر AI وBI را رسم کرده وعمودهای PE وPF را به‌ترتیب برAI و BI رسم کنیم طول پاره خط EF به‌اندازهٔ معلوم l باشد .

حل ـ اندازهٔ زاویهٔ $EIF = AIB = \alpha$ برابر با نصف



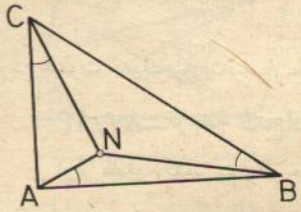
اندازهٔ کمان AB ومقدار ثابت است. چهارضلعی PEIF محاطی است ودرنتیجه اندازهٔ زاویهٔ $EPF = \beta = 180^\circ - \alpha$ مقدار ثابت است.



پاره‌خط $E'F'$ به‌طول I رارسم‌می‌کنیم‌وکمان درخور زاویهٔ β راکه بر E' و F' می‌گذرد رسم می‌کنیم. R شعاع این کمان با شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی PEIF برابراست. اما PI قطردایرهٔ محیطی چهارضلعی PEIF است. پس $PI = 2R$ است و I نقطهٔ تلاقی دایرهٔ مفروض با دایرهٔ به‌مرکز P و به شعاع 2R است. نقطهٔ I وقتی‌وجود داردکه دو دایرهٔ مزبور متقاطع یاممماس باشند.

۸۷/۸ـ فرستنده **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ‌فنی دانشگاه تبریز، ترجمه ازانگلیسی

نقطهٔ N را داخل مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض ABC چنان بیابید که سه‌زاویهٔ NBC، NCA و NAB باهم برابر باشند.



حل ـ اگرAزاویهٔ قائمهٔ مثلث وαاندازهٔ مشترک سه‌زاویهٔ متساوی NBC و NCA وNABفرض شود، درمثلث NAC داریم:

$$ANC = 180^\circ - (NCA + NAC) =$$
$$= 180^\circ - (NAB + NAC) = 180^\circ - A = 90^\circ$$

همچنین خواهیم داشت:

$$ANB = 180^\circ - B \quad و \quad BNC = 180^\circ - C$$

روی پاره‌خطهای AB، BC وCA به‌ترتیب کمانهای‌درخور زاویه‌های 90° و $180^\circ - B$ و $180^\circ - C$ رارسم‌می‌کنیم. این‌سه‌کمان دریك‌نقطه مشترکندکه همان نقطهٔ N است.

حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم‌ریاضی

۸۷/۹ـ با تعیین y نسبت به x نمایش هندسی معادلهٔ زیررا رسم‌کنید:

$$y^2 - xy - 2x^2 + 9x - 9 = 0$$

این‌نمایش هندسی محور $y'y$ را دردونقطهٔ P وQ قطع‌می‌کند ویك‌نقطهٔ M وجود داردکه درازاء طول‌آن‌معادلهٔ بالانسبت به y ریشهٔ مضاعف دارد. مختصات نقاط P و Q و M و مساحت مثلث MPQ را حساب‌کنید.

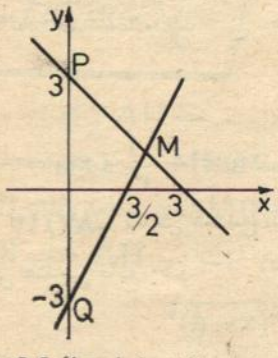
حل ـ نسبت به‌معادلهٔ مفروض داریم:

$$\triangle = x^2 + 8x^2 - 36x + 36 = (3x - 6)^2$$

$$y = \frac{1}{2}[x \pm (3x - 6)]$$

$$y = 2x - 3 \quad یا \quad y = -x + 3$$

نمایش هندسی معادلهٔ مفروض از دوخط مستقیم به‌معادله‌های بالا تشکیل شده‌است که‌درنقاط $P(0 و 3)$ و $Q(0 و -3)$ با محور $y'y$ ودرنقطهٔ M با یکدیگرمتقاطعند.



چون مختصات نقطهٔ M در هردو معادله صدق می‌کند پس معادلهٔ مفروض به‌ازاء طول‌نقطهٔ M نسبت‌به y ریشهٔ مضاعف دارد. پس‌طول‌نقطهٔ M ریشهٔ معادلهٔ $\triangle = 0$ است:

$$\triangle = (3x - 6)^2 = 0 \Longrightarrow x = 2 \quad و \quad y = 1$$

۸۷/۱۰ ـ فرستنده **جواد فیض** ترجمه از کتابهای خارجی

هرگاه α وβ وγ زاویه‌های‌یك‌مثلث قائم‌الزاویه باشند ثابت‌کنیدکه:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta\sin\gamma\sin(\beta - \gamma) +$$
$$+ \sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma) \times$$
$$\times \sin(\gamma - \alpha) = 0$$

حل ـ بافرض $\alpha = 90^\circ$ داریم:

$$\sin\alpha = 1$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta = \sin\gamma$$
$$\sin(\gamma - \alpha) = -\sin(90^\circ - \gamma) = -\sin\beta$$

بامنظورکردن این مقادیردر رابطهٔ‌داده شده صحت آن محقق می‌شود.

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم‌ریاضی

۸۷/۱۱ـ نامساوی:

$$|3x + 6| < 5$$

یك‌پاره خط AB را روی محور x'x مشخص می‌کند. طول‌های دونقطهٔ A و B وطول نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را بدست‌آورید.

حل- نامساوی‌مفروض به‌دودستگاه زیرتبدیل‌می‌شود:

$$\text{I-}\ \begin{cases} x \geqslant -۲ \\ ۳x+۶<۵ \end{cases} \Longrightarrow -۲<x<-\frac{۱}{۳}$$

$$\text{II-}\ \begin{cases} x<-۲ \\ -۳x-۶<۵ \end{cases} \Longrightarrow -\frac{۱۱}{۳}<x<-۲$$

پس بطورکلی داریم:

$$-\frac{۱۱}{۳}<x<-\frac{۱}{۳}$$

$$\Longrightarrow x_A=-\frac{۱}{۳} \quad \text{و} \quad x_B=-\frac{۱۱}{۳} \quad \text{و} \quad x_M=-۲$$

۸۷/۱۲- نمایش هندسی تابع $y=۴a$ خط مستقیم △ ونمایش هندسی تابع:

$$y=\sqrt{(x+a)^۲}+\sqrt{(x-a)^۲}$$

خط شکستهٔ Γ است. به‌فرض $a>۰$ خطهای‌مزبور رادریك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید و اگر متلاقی هستند مختصات نقاط تلاقی ومساحت سطح محصور بین‌آنها را بر حسب a حساب‌کنید.

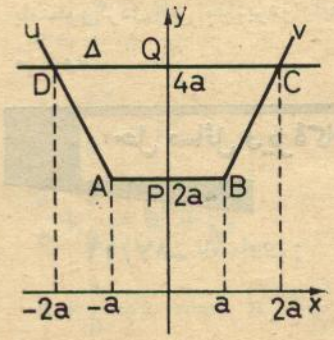
حل- به‌فرض $a\geqslant ۰$ تابع‌مفروض به‌صورت زیرتبدیل می‌شود:

$$y=|x+a|+|x-a|$$

$$\begin{cases} x\geqslant a \\ y=x+a+x-a=۲x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a<x<a \\ y=x+a-x+a=۲a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-a \\ y=-x-a-x+a=-۲x \end{cases}$$



نمایش هندسی تابع خط شکستهٔ uABv است. ازحل‌معادلهٔ $y=۴a$ با هریك از سه دستگاه بالا نتیجه می‌شودکه‌خط‌شکستهٔ نمایش هندسی تابع‌با خط △ در دو نقطهٔ $C(۲a \text{ و } ۴a)$ و $D(-۲a \text{ و } ۴a)$ متقاطعند وخطهای مزبور ناحیه‌ای ازصفحه رابه‌شکل‌ذوزنقهٔ ABCD محصور می‌کنندکه مساحت آن برابراست با:

$$S=\frac{۱}{۲}(AB+CD)PQ$$

$$S=\frac{۱}{۲}(۲a+۴a)۲a=۶a^۲$$

۸۷/۱۳- از: محمد معینی

ثابت‌کنیدکه دوعبارت زیربایکدیگر متحدند:

$$(۱+cotg a)sin^۳a+(۱+tg a)cos^۳a$$

$$(۱+cotg^۲a)sin^۲a+(۱+tg^۲a)cos^۳a$$

حل- حاصل عبارت اول برابراست با:

$$P=(۱+\frac{cos a}{sin a})sin^۳a+(۱+\frac{sin a}{cos a})cos^۳a$$

$$P=(sin a+cos a)sin^۲a+(cos a+sin a)cos^۲a$$

$$P=(sin a+cos a)(sin^۲a+cos^۲a)=sin a+cos a$$

حاصل عبارت دوم می‌شود:

$$Q=(۱+\frac{cos^۲a}{sin^۲a})sin^۳a+(۱+\frac{sin^۲a}{cos^۲a})cos^۲a$$

$$Q=(sin^۲a+cos^۲a)sin a+(cos^۲a+sin^۲a)cos a$$

$$Q=sin a+cos a$$

هردوعبارت به‌یك‌عبارت‌تبدیل می‌شوند پس بایکدیگرمتحدند.

۸۷/۱۴- ترجمهٔ فتح‌الله‌زرگری

اولا معلوم‌کنید به‌ازاء چه‌مقادیری از x تابع زیرمعین است:

$$y=tg(\pi sin x)$$

ثانیاً اگر $y=۱$ باشد مقدار x را مشخص‌کنید.

حل- اولا داریم:

$$-۱\leqslant sin\leqslant ۱ \Longrightarrow -\pi<\pi sin x<\pi$$

درفاصلهٔ $[-\pi \text{ و } +\pi]$ دومقدار $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲}$ وجود دارد که تانژانت‌آنهانامعین‌است. پس تابع مفروض وقتی‌معین‌است‌که:

$$\pi sin x\neq\pm\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow sin x\neq\pm\frac{۱}{۲}$$

$$x\neq k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

غیراز مقادیر بالا، به‌ازاء مقادیر x تابع معین است.

ثانیاً داریم:

$$tg(\pi sin x)=۱ \Longrightarrow \pi sin x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$\sin x = k + \frac{1}{4}$$

$$-1 < \sin x < 1 \Longrightarrow -\frac{5}{4} < k < \frac{3}{4}$$

چون k عدد صحیح است پس $k = 0$ یا $k = -1$ و:

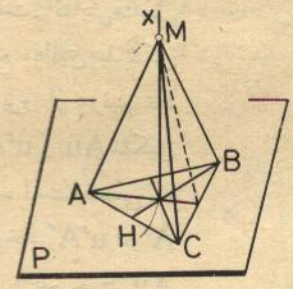
$$\sin x = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad -\frac{3}{4}$$

۸۷/۱۵- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. در نقطهٔ H مرکز ارتفاعی آن عمود Hx را بر صفحهٔ مثلث اخراج می‌کنیم وروی آن نقطهٔ M را به‌دلخواه اختیار کرده به A وB وC وصل می‌کنیم.

اولا ثابت کنید که هریك ازمثلثهای MAB، MBC، MCA متساوی‌الساقین وهریك ازخطوط MA،MB وMC برضلع مقابل خود ازمثلث ABC عمود است.

ثانیاً به‌فرض آنکه $AB = a$ ومثلث MAB متساوی‌الاضلاع باشد طول MH را برحسب a حساب کنید.

حل- صفحهٔ مثلث ABC را باP نشان می‌دهیم. چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است پس H از سه‌رأس آن به یك فاصله است. نسبت به صفحهٔ P مایلهای MA و MB وMC دارای بعدهای متساویند پس طولهای آنها باهم برابراست.



خط BC چون در صفحهٔ P واقع است بر Hx عمود است وهمچنین خط BC برخط AH عمود است، پس خط BC برصفحهٔ شامل دو خط Hx وAH عمود است. خط MA دراین صفحه قراردارد پس BC بر MA عمود است.

به‌ترتیب مشابه ثابت می‌شود که MB بر AC وMC بر AB عمود است.

ثانیاً وقتی مثلث MAB متساوی‌الاضلاع باشد:

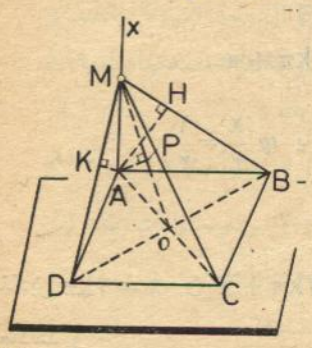
$MB = AB = a$ است و می‌دانیم که $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ پس:

$$MH^2 = MB^2 - HB^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

$$MH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

۸۷/۱۶- مربع ABCD به طول ضلع a مفروض است. درA عمودAx را برصفحهٔ مربع اخراج وروی آن نقطهٔ M را انتخاب می‌کنیم که $AM = a$ باشد. فاصلهٔ نقطهٔ A را ازهریك ازصفحات MBC،MCD وMDB وهمچنین ازیال MC برحسب a حساب کنید.

حل- به فرض آنکه O مرکز مربع باشد، عمودهای AH وAK وAL را به‌ترتیب بر MB و MD وMO رسم می‌کنیم. خط BC که بر دوخط متقاطع AB وAM عمود است برصفحهٔ MAB



ودرنتیجه برخط AH عموداست. خط AH بردوخط متقاطع MB وBC درنتیجه برصفحهٔ MBC عموداست وطول AH فاصلهٔ نقطهٔ A تا صفحهٔ MBC است. اما مثلث MAB قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین است پس AH نصف MB و برابر با $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ است.

با روش مشابه ثابت می‌شود که AK برصفحهٔ MCD عمود است وطول آن نیز $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ است. خط BD بردوخط متقاطع AC وAM درنتیجه برصفحهٔ شامل این دوخط و برخط AL ازاین صفحه عمود است. خط AL که بر دوخط متقاطع MO وBD عمود است بر صفحهٔ MBD عمود است و طول آن فاصلهٔ A از این صفحه است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MAO داریم:

$$AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad MO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$AL = \frac{MA.AO}{MO} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم دبیرستان

۸۷/۱۸- از: علی حاجی‌ابراهیمی

مقادیر ماکسیمم یا می‌نیمم تابع زیررا تعیین کنید:

$$y = \sin^{10}\frac{x}{2}\cos^{20}\frac{x}{2}$$

حل- داریم:

$$y' = 5\cos\frac{x}{2}\sin^{9}\frac{x}{2}\cos^{20}\frac{x}{2} - 10\sin\frac{x}{2}\sin^{10}\frac{x}{2}\cos^{19}\frac{x}{2}$$

$$y' = 5\sin^9\frac{x}{2}\cos^{19}\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin^9\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow x = 2k\pi$$

$$\cos^{19}\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow x = 2k\pi + \pi$$

$$\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0 \quad \text{یا} \quad tg^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2k\pi \pm 2\,\mathrm{Arc}tg\frac{1}{2}$$

مقادیر $x = 2k\pi$ و $x = 2k\pi + \pi$ رویهم با $x = k\pi$ معادلند و :

$$x = k\pi \Longrightarrow y = 0$$

$$tg^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{3^{15}}$$

۸۷/۱۸ـ از جوادفیض

معادلهٔ زیررا حل کرده و حدود قابل قبول m راتعیین کنید .

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = m\sin 2x(tgx + cotgx)$$

حل ـ چون طرف اول را تبدیل به‌حاصل‌ضرب وطرف دوم‌رابرحسب $\sin x$ و $\cos x$ نوشته ساده‌کنیم خواهیم داشت :

$$2\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2m$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2m\sqrt{3}}{3}$$

$$-1 < \frac{2m\sqrt{3}}{4} < 1 \Longrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \pm \mathrm{Arc}\cos\frac{2m\sqrt{3}}{3}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

مسائل منتخب از تمرینهای کتاب درسی

کلاسهای نهایی دبیرستانهای فرانسه

۸۷/۱۹ـ تابع $y = f(x)$ را در حوزهٔ مقادیر حقیقی چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = 0 : f(0) = 2 \\ x \neq 0 : f(x) = 3x + \dfrac{\sqrt{4x^2}}{x} \end{cases}$$

اولا پیوستگی تابع را برای $x = 0$ بررسی کنید.

ثانیاً نمایش‌هندسی تابع‌را درصفحهٔ محورهای‌مختصات متعامد رسم کنید.

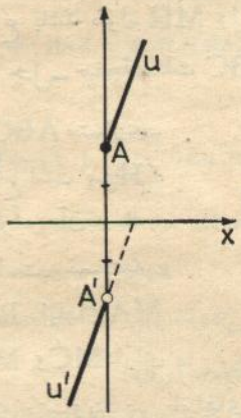
حل ـ تابع به‌ازاء $x \neq 0$ به‌صورت زیرنوشته‌می‌شود:

$$f(x) = 3x + \frac{2|x|}{x}$$

$$x < 0 \Longrightarrow f(x) = 3x - 2$$

$$x > 0 \Longrightarrow f(x) = 3x + 2$$

وقتی x به‌ازاء مقادیر منفی به‌سمت صفر میل‌کند تابع‌به‌سمت ۲ − میل می‌کند ووقتی x به‌ازاء مقادیر مثبت به‌سمت صفر میل‌کند تابع به‌سمت ۲ + میل می‌کند . درازاء $x = 0$ تابع بنابه تعریفی‌که شده معین است‌اماپیوسته نیست. نمایش‌هندسی تابع مطابق با شکل روبرو از دونیم خط $u'A'$ و Au تشکیل شده است بقسمی که نیم‌خط $u'A'$ در A' باز و نیم خط Au در A بسته است .



۸۷/۲۰ـ نظیر مسئلهٔ بالا برای تابع‌زیر:

$$x = 0 : f(0) = 2$$

$$x \neq 0 : f(x) = 3x + \frac{\sqrt{4x^2}}{|x|}$$

حل ـ در ازاء $x \neq 0$ داریم:

$$f(x) = 3x + \frac{2|x|}{|x|} = 3x + 2$$

وچون مقدار تابع به‌ازاء $x = 0$ برابربا مقدار۲ تعریف‌شده است، تابع درازاء $x = 0$ معین وپیوسته است ونمایش‌هندسی آن خط به معادلهٔ $y = 3x + 2$ است .

۸۷/۲۱ـ تابع زیررا درنظر می‌گیریم :

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

۱) y' و y'' را حساب‌کنید .

۲) اگر $y^{(n)}$ نمایش مشتق مرتبهٔ nام تابع y باشد ،

با استفاده از روش استقراء ریاضی ثابت کنید که:

$$y^{(n)} = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n\sqrt{1-x^2}}$$

که $P_n(x)$ چندجمله‌ای است نسبت به x ازدرجهٔ nام بقسمی که تمام جمله‌های آن همه ازدرجهٔ زوج یا همه ازدرجهٔ فرد می‌باشند.

۳) چندجمله‌ای $P_{n+1}(x)$ به‌صورت عبارتی برحسب $P_n(x)$ و $P'_n(x)$ بیان می‌شود. با استفاده از این‌عبارت و با روش استقراء ریاضی ثابت کنید که:

$$P'_n(x) = n^2.P_{n-1}(x)$$

حل ـ ۱) بعدازمشتق گیری واختصارخواهیم داشت:

$$y' = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad \text{و} \quad y'' = \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$$

۲) با درنظر گرفتن عبارتهای y' و y'' مشاهده‌می کنیم که فرمول به‌ازاء $n=1$ و $n=2$ صحیح است. فرض می کنیم که فرمول به‌ازاء $n=k$ درست‌باشد، باید ثابت کنیم که به‌ازاء $n=k+1$ نیزصحیح‌است. به‌فرض داریم:

$$y^{(k)} = \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^k\sqrt{1-x^2}} = \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{k+\frac{1}{2}}}$$

ازطرفین نسبت به x مشتق می گیریم:

$$y^{(k+1)} = \frac{P'_k(x)\times(1-x^2)^{k+\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{2k+1}} + \frac{(2k+1)x(1-x^2)^{k-\frac{1}{2}}P_k(x)}{(1-x^2)^{2k+1}}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{P'_k(x)(1-x^2)+(2k+1)xP_k(x)}{(1-x^2)^{k+1}\sqrt{1-x^2}}$$

چون عبارت $P_k(x)$ نسبت به x ازدرجهٔ k است پس عبارت $P'_k(x)$ نسبت به x ازدرجهٔ $k-1$ وعبارت $P'_k(x)(1-x^2)$ نسبت به x ازدرجهٔ $k+1$ است. همچنین عبارت $xP_k(x)$ نیز نسبت به x ازدرجهٔ $k+1$ است. بنابراین عبارت صورت کسر اخیرنسبت به x ازدرجهٔ $k+1$ است وداریم:

$$y^{(k+1)} = \frac{P_{k+1}(x)}{(1-x^2)^{k+1}\sqrt{1-x^2}}$$

از طرفی هرگاه تمام جملات $P_k(x)$ ازدرجهٔ زوج باشند، تمام جملات $P'_k(x)$ از درجهٔ فردوهمچنین تمام جملات عبارت $xP_k(x)$ نیزازدرجهٔ فردمی‌باشند. عبارت $1-x^2$ نسبت به x زوج است پس‌تمام جملات عبارت $P'_k(x)(1-x^2)$ ازدرجهٔ فردمی‌باشند. بنابراین اگر تمام جملات $P_k(x)$ ازدرجهٔ زوج باشند تمام جملات عبارت $P_{k+1}(x)$ ازدرجهٔ فردمی‌باشند و اگرتمام جملات عبارت $P_k(x)$ ازدرجهٔ فردباشندتمام جملات عبارت $P_{k+1}(x)$ ازدرجهٔ زوج می‌باشند.

فرمول‌داده شده‌به‌ازاء $n=1$ درست‌است ووقتی‌به‌ازاء $n=k$ درست‌باشدبه‌ازاء $n=k+1$ نیزدرست‌است، بنابراین به‌ازاء همهٔ مقادیرصحیح ومثبت n درست‌است.

۳) درمحاسبات بالاملاحظه شدکه:

$$P_{n+1}(x) = P'_n(x)(1-x^2)+(2n+1)xP_n(x)$$

باتبدیل n به $n+1$ خواهیم‌داشت:

$$P_{n+2}(x) = P'_{n+1}(x)(1-x^2)+ +(2n+3)xP_{n+1}(x)$$

باتوجه به‌این‌دورابطه ومقادیر $P_1=x$ و $P_2=2x^2+1$ نتیجه خواهد شدکه‌رابطهٔ:

$$P'_n(x) = n^2P_{n-1}(x)$$

به‌ازاء $n=2$ درست‌است واگربه‌ازاء $n=k$ درست‌باشدبه‌ازاء $n=k+1$ نیزدرست است، پس‌این رابطه به‌ازاء همهٔ مقادیرصحیح‌ومثبت $n\geqslant 2$ درست می‌باشد.

۸۷/۲۲ ـ به‌فرض $0<x<\frac{\pi}{2}$ اولاً جهت‌تغییرات هریك ازتابعهای زیررا معلوم‌کنید:

$$f(x) = -x+\sin x$$

$$g(x) = 1-\frac{x^2}{2}-\cos x$$

$$h(x) = -x+\frac{x^3}{6}+\sin x$$

$$l(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos x$$

ثانیاً نتیجه بگیرید که:

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$$

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$f'(x) = -1+\cos x\leqslant 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$

درفاصلهٔ مفروض تابع $f(x)$ پیوسته ونزولی است وازمقدارصفر به‌مقدار منفی $1-\frac{\pi}{2}$ تنزل‌می‌کند، بنابراین در فاصلهٔ مزبور $f(x)<0$ است .

$$g'(x)=-x+\sin x=f(x)\leqslant 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$1-\frac{\pi^2}{8}$

$\Longrightarrow g(x)\leqslant 0$

$$h'(x)=-1+\frac{x^2}{2}+\cos x=-g(x)\geqslant 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{48}$

$\Longrightarrow h(x)>0$

$$l'(x)=-x+\frac{\pi^3}{6}+\sin x=h(x)\geqslant 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$l'(x)$		$+$	
$l(x)$	0	$\nearrow$	$a>0$

$\Longrightarrow l(x)\geqslant 0$

ثانیاً ازنامساویهای چهارگانهٔ بالانتیجه‌می‌گیریم که در فاصلهٔ $(0 \text{ و } \frac{\pi}{2})$ وبه‌فرض $x\neq 0$ داریم:

$$\sin x<x \quad \text{و} \quad 1-\frac{x^2}{2}<\cos x$$

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x \quad \text{و} \quad \cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

ازاین چهارنامساوی نتیجه می‌شودکه :

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$$

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

۸۷/۲۳ـ فرستنده: **جواد فیض**،ترجمه ازکتابهای خارجی

ثابت‌کنیدکه اگر x زاویهٔ حاده باشدَاندازهٔ آن‌برحسب رادیان از واسطهٔ عددی سینوس وتانژانت آن‌کمتر است.

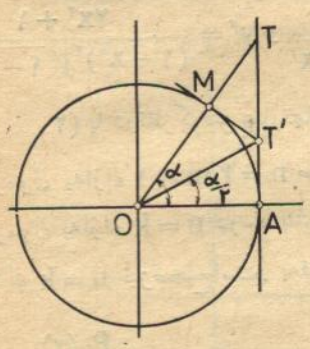
حل‌ـ می‌دانیم که هرگاه a و b دوعددمثبت باشندداریم:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 2^2$$

ازاین نامساوی نتیجه می‌شودکه‌اگر α زاویهٔ حاده باشد:

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha+tg\alpha)>\frac{2}{\frac{1}{tg\alpha}+\frac{1}{\sin a}}=\frac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=2tg\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha+tg\alpha)>2tg\frac{\alpha}{2} \quad (I)$$



دایرهٔ مثلثاتی و زاویهٔ حادهٔ α رادرآن درنظر می‌گیریم .مطابق با شکل ، مساحت قطاع OAM از مساحت چهارضلعی OAT'T یعنی از دو برابر مساحت مثلث OAT' کوچکتراست ، پس:

$$\frac{1}{2}\alpha<2\times\frac{1}{2}tg\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\alpha<2tg\frac{\alpha}{2}$$

ازاین نامساوی وازنامساوی(I) نتیجه می‌شود:

$$\alpha<\frac{1}{2}(\sin\alpha+tg\alpha)$$

۸۷/۲۴ـ منتخب ازتمرینهای‌کتاب درسی فرانسه

معادلهٔ مثلثاتی زیررا درنظر می‌گیریم :

$$\sin x\cos x+\sin^2 x=m$$

اگرکمانهای حادهٔ α و β دوجواب ازاین معادله‌باشند، مقدار m را معلوم‌کنیدکه :

$$tg2\alpha=tg2\beta$$

حل‌ـ معادله برحسب tgx چنین می‌شود:

$$(m-1)tg^2x-tgx+m=0$$

اگرکمانهای حادهٔ α و β دوجواب ازاین‌معادله باشند داریم :

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{1}{m-1}>0$$

$$tg\alpha tg\beta=\frac{m}{m-1}>0$$

$$tg2\alpha = tg2\beta \Rightarrow \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta}$$

$$(tg\alpha - tg\beta)(1 + tg\alpha tg\beta) = 0$$

عبارت پرانتزدوم مقدارمثبت است وعبارت پرانتزاول وقتی صفراست که معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\triangle = -4m^2 + 4m + 1 = 0 \text{ و } m > 1$$

$$\Longrightarrow m = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

۸۷/۲۵ـ از **محمود رضافر بود**، ششم ریاضی دبیرستان آذرشمارهٔ ۱

عددهای ازیك تا عدد n رقمی N را متوالیاً نوشته‌ایم، تعداد تمام رقمهای بکار رفته رویهم m شده است. ثابت کنید که:

$$N = \frac{1}{n}(\overbrace{11\ldots11}^{n\text{ مرتبه}} + m - n)$$

حل ـ داریم $10^{n-1} < N < 10^n$ وتعداد رقمهایی که برای نوشتن عددهای ازیك تا $10^{n-1}-1$ بکارمی‌رود برابر است باعدد $\overline{(n-2)88\ldots89}$ بنابراین:

$$m = (N + 1 - 10^{n-1})\,n + \overline{(n-2)88\ldots89}$$

ازاین رابطه بدست می‌آید:

$$N = 10^{n-1} - 1 + \frac{m - \overline{(n-2)88\ldots89}}{n}$$

$$N = \frac{\overline{n00\ldots0} - n + m - \overline{(n-2)88\ldots89}}{n}$$

$$N = \frac{111\ldots11 + m - n}{n}$$

۸۷/۲۶ـ از جمله مسائل ارسالی آقای **قوام نحوی** مدرس دانشسرای راهنمایی اصفهان

اولا در مبنای ۱۰ عدد سه رقمی به‌صورت $\overline{abc}$ با رقمهای متفاوت ومخالف صفر را تعیین کنید بقسمی که خارج قسمت تقسیم آن بر مجموع رقمهایش کمترین مقدار را داشته باشد.

ثانیاً اگر عدد سه‌رقمی مزبور در مبنای n نوشته شده باشد وعمل تقسیم نیز درمبنای n انجام گیرد، کمترین مقدار خارج‌قسمت را دردوحالت n زوج و n فرد مشخص کنید.

حل ـ اولا بایدکه کسر $\frac{\overline{abc}}{a+b+c}$ کمترین مقدار را داشته باشد وبرای این کارلازم است که $\overline{abc}$ کمترین مقدار و $a+b+c$ بیشترین مقدار را داشته باشدکه نتیجه می‌شود

$a=1$ و $b=8$ و $c=9$ و $\overline{abc} = 189$

ثانیاً اگر n مبنای عددنویسی باشد، عدد باشرط مزبوربه‌صورت $\overline{1(n-2)(n-1)}$ ومجموع رقمهای آن می‌شود:

$$1 + n - 2 + n - 1 = n + (n-2) = \overline{n(n-2)}$$

$$\begin{array}{r|l} \overline{1(n-2)(n-1)} & \overline{1(n-2)} \\ \overline{1(n-2)} & \overline{10/} \\ \overline{0(n-1)0} & \end{array}$$

$$\overline{(n-1)0} = n^2 - n \text{ و } 1(n-2) = 2n-2$$

$$n^2 - n = (2n-2) \times \frac{n}{2}$$

اگر n زوج باشد به‌فرض $n = 2n'$ خارج قسمت تقسیم بالا می‌شود $\overline{10/n'}$ و اگر n فردباشد با فرض $n = 2n'+1$ خارج قسمت تقسیم بالابه‌صورت عدد اعشاری متناوب زیر خواهدبود:

$$\overline{10/n'n'n'\ldots}$$

۸۷/۲۷ـ ترجمه ازفرانسه

مثلث ABC را درنظر می‌گیریم که در زاویهٔ A حاده باشد. درخارج مثلث، مثلثهای متساوی‌الساقین وقائم‌الزاویهٔ BAM و CAN قائمه درزاویهٔ A را می‌سازیم. به‌فرض آنکه O وسط BC باشد ثابت کنید:

۱) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM}$

۲) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Longrightarrow AO \perp MN$

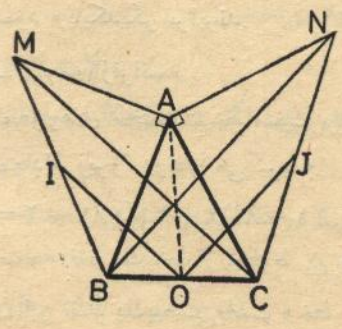
۳) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

۴) $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Longrightarrow BN \perp CM$

و $BN = CM$

۵) اگر I وسط BM و J وسط CN باشد، مثلث IOJ قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین است.

حل ـ مطابق باشکل داریم:



۱) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} = AB.AN.\cos(90^\circ + A)$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = AC.AM.\cos(90^\circ + A)$

$AM = AB$ و $AN = AC$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}$

۲) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN} -$

$- \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM})$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN} = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{MN} = 0$

ازاین رابطه نتیجه می‌شودکه AO برMNعموداست .

۳) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = AM.AN.\cos(180^\circ - A) =$

$- AB.AC.\cos A = - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

۴) $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN})(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM})$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM} +$

$+ \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + 0 + 0 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Longrightarrow BN \perp CM$

تساوی $BN = CM$ از تساوی دو مثلث MAC و NAB نتیجه می‌شود.

۵) OI موازی باCM ومساوی بانصف‌آن است . همچنین OJ باBN موازی‌وبانصف آن برابراست. پس OI و OJ بریکدیگرعمود وبایکدیگر برابرند.

۸۷/۲۸ـ ترجمه ازفرانسه

درصفحهٔ محورهای مختصات خط متغیر △ وابسته به پارامتر λ به‌معادلهٔ زیررا درنظر می گیریم:

$$\triangle : \quad (1 - \lambda^2)x + 2\sqrt{2}\lambda y - 2 = 0$$

بربعضی ازنقاط صفحه فقط یك خط از خطوط △ می گذرد . ثابت‌کنیدکه مکان این نقاط یك‌بیضی است وخط △ براین بیضی مماس است. طول نقطهٔ تماس را برحسب λ بدست آورید .

حل ـ معادله رانسبت به‌λمرتب می‌کنیم:

$$x\lambda^2 - 2\sqrt{2}y\lambda - x + 2 = 0$$

برای‌آنکه برنقطهٔ معلوم ازصفحه فقط یك خطازخطوط △ بگذرد، لازم‌و کافی‌است‌که معادلهٔ‌بالانسبت به‌λ فقط یك‌جواب داشته باشد، یعنی:

$$\triangle' = 2y^2 + x^2 - 2x = 0$$

$$(x-1)^2 + 2y^2 = 1$$

این معادله ، معادلهٔ یك بیضی است‌که برخط △ مماس است زیرا باصادق بودن‌این‌معادله معادلهٔ مفروض نسبت به‌λریشهٔ مضاعف دارد. چون معادله ریشهٔ مضاعف داردپس:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}y}{x} \Longrightarrow y = \frac{x\lambda\sqrt{2}}{2}$$

$$(x-1)^2 + \lambda^2 x^2 = 1 \Longrightarrow x = \frac{2}{\lambda^2 + 1}$$

حل مسائل گوناگون

۸۷/۲۹ـ ازمحمدرضاخلیلی‌زاده

اگر m، n، p، q ، r و s عددهای صحیح و مثبت باشند، ثابت‌کنیدکه تساوی زیر غیرممکن است:

$$10^m + 22^n + 56^p = 12^q + 34^r + 78^s$$

حل ـ برای اثبات اینکه تساوی برقرارنیست کافی‌است ثابت‌کنیم‌که باقیمانده‌های تقسیم عبارتهای طرفین بریك‌عدد معین بایکدیگربرابرنیستند: باقیماندهٔ تقسیم عبارت طرف اول بر۱۱برابراست با

$$(-1)^m + 0 + 1^p = 0 \text{ یا } 2$$

اماباقیماندهٔ تقسیم عبارت طرف دوم‌بر۱۱برابراست با:

$$1^q + 1^r + 1^s = 3$$

چون$3 \neq 0$وهمچنین$3 \neq 2$پس‌تساوی مفروض غیرممکن‌است.

از مسائل ارسالی‌آقای **جواد فیض**،ترجمه‌ازکتابهای‌خارجی

۸۷/۳۰ـ هرگاه

$t > x$ و $x^3y = at^2 + bt^3$ و a و b و x و y عددهای مثبت باشند، ثابت‌کنیدکه :

$$y \geqslant 2\sqrt{ab}$$

حل ـ رابطهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$\frac{x^3y}{t^3} = \frac{a}{t} + bt$$

$$\frac{a}{t}+bt>\sqrt{\frac{2abt}{t}}=\sqrt{2ab}$$

$$\frac{x^3y}{t^3}>\sqrt{2ab} \text{ و } x<t\Longrightarrow y\geqslant\sqrt{2ab}$$

۸۷/۳۱ـ اگر α ریشهٔ مکرر مرتبهٔ سوم معادلهٔ

$$x^n-ax^2+bx-c=0 \quad (x>2 \text{ و } c\neq 0)$$

باشد، ثابت کنید که :

$$\alpha=\frac{(n-1)b}{2(n-2)a} \quad \text{و} \quad \alpha^n=\frac{(n-1)b^2}{2(n-2)^2an}$$

حل ـ چون α ریشهٔ مکررمرتبهٔ سوم‌است درسه معادلهٔ زیرصدق می‌کند:

$$f(x)=x^n-ax^2+bx-c=0$$

$$f'(x)=nx^{n-1}-2ax+b=0$$

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}-2a=0$$

ازمعادلهٔ سوم نتیجه می‌شود:

$$\alpha^{n-2}=\frac{2a}{n(n-1)}$$

این مقداررا درمعادلهٔ دوم‌منظورمی‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\alpha=\frac{(n-1)b}{2(n-2)a}\longrightarrow\alpha^2=\frac{(n-1)^2b^2}{4(n-2)^2a^2}$$

$$\alpha^n=\alpha^{n-2}\alpha^2=\frac{(n-1)b^2}{2(n-2)^2an}$$

۸۷/۳۲ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$4\cos x\cos 2x\cos 3x=1$$

حل ـ $\sin x=0$ درمعادله صدق نمی‌کند پس‌طرفین را در $2\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$4\sin 2x\cos 2x\cos 3x=2\sin x$$

$$2\sin 4x\cos 3x=2\sin x$$

$$\sin 7x+\sin x=2\sin x$$

$$\sin 7x=\sin x\Longrightarrow x=\frac{k\pi}{3} \text{ یا } \frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

و چون $\sin x\neq 0$ یعنی $x\neq k\pi$ است پس جوابهای معادله عبارتنداز:

$$x=k\pi\pm\frac{\pi}{3} \text{ یا } k\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

ازمسائل‌ارسالی آقای **محمدمعینی**، ترجمه ازکتابهای‌خارجی

۸۷/۳۳ـ عبارت زیررا به‌ضرب عوامل تجزیه کنید:

$$P=a^4+b^4+(a+b)^4$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$P=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+(a+b)^4$$

$$P=[(a^2+b^2)^2-a^2b^2]+[(a+b)^4-a^2b^2]$$

$$P=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)+$$
$$+[(a+b)^2+ab][(a+b)^2-ab]$$

$$P=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)+$$
$$+(a^2+b^2+3ab)(a^2+b^2+ab)$$

$$P=(a^2+b^2+ab)(2a^2+2b^2+2ab)$$

$$P=2(a^2+b^2+ab)^2$$

۸۷/۳۴ـ دستگاه معادلات زیررا حل کنید :

$$\begin{cases}x^3+1=81(y^3+y)\\ x^2+x=9(y^2+1)\end{cases}$$

حل ـ طرفین معادلهٔ دوم رادر۳ضرب می‌کنیم ، آنگاه طرفین دومعادله راباهم جمع می‌کنیم، بعداز اختصارخواهیم داشت :

$$(x+1)^3=27(y+1)^3$$

$$x+1=3(y+1)$$

ازاین معادله x رابرحسب y بدست‌آورده درمعادلهٔ دوم دستگاه منظورمی‌کنیم، می‌شود:

$$27(y+1)^3-27(y+1)^2+3(y+1)=$$
$$=81y(y+1)$$

$$y+1=0\Longrightarrow y=-1 \text{ و } x=-1$$

$$y+1\neq 0\Longrightarrow 3y^2-6y+1=0$$

$$y=\frac{3\pm\sqrt{6}}{3} \text{ و } x=5\pm\sqrt{6}$$

۸۷/۳۵ـ اگر $f(x)$ چندجمله‌ای از درجهٔ چهارم و $f(0)=0$ وهمچنین :

$$f(x)=f(x-1)+4x^3$$

باشد $f(1)$ را حساب کنید .

حل ـ چون در رابطهٔ داده شده x را برابر با یك قرار دهیم نتیجه می‌شود :

$$f(1)=f(0)+4=4$$

۸۷/۳۶ـ اگر α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^3+px+q=0$$

باشد معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل دهیدکه ریشه‌هایش عبارت باشند از :

$$(\alpha-\beta)^2 \text{ ، } (\beta-\gamma)^2 \text{ ، } (\gamma-\alpha)^2$$

حل- داریم :

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p\\ \alpha\beta\gamma=-q\end{cases}$$

بافرض $X=(\beta-\gamma)^2$ خواهیم داشت:

$$X=(\beta+\gamma)^2-4\beta\gamma=\alpha^2+\frac{4q}{\alpha}$$

$$\alpha^3-\alpha X+4q=0 \quad (1)$$

α ریشهٔ معادلهٔ مفروض است، پس:

$$\alpha^3+p\alpha+q=0 \quad (2)$$

$$\alpha=\frac{3q}{X+p}$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

این مقدار را درمعادلهٔ (۲) منظور می‌کنیم، پس از اختصار خواهیم داشت:

$$X^3+6pX^2+4p^3+9p^2+27q^2=0$$

۸۷/۳۷- اگر a و b و c اندازه‌های ضلعهای یک‌مثلث باشند ثابت کنید که :

$$(a+b+c)^3\geqslant 27(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

حل- به‌ترتیب داریم :

$$a^2-(b-c)^2<a^2$$
$$(a+b-c)(a-b+c)<a^2$$
$$(b+c-a)(b-c+a)<b^2$$
$$(c+a-b)(c-a+b)<c^2$$

از ضرب نظیر به‌نظیر طرفین سه‌نامساوی دریکدیگر وباتوجه به‌اینکه‌مقادیر داخل هریك ازپرانتزها مثبت می‌باشند نتیجه خواهد شد:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)<abc$$

اما بنا به نامساوی واسطه‌ها داریم :

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$$

$$(a+b+c)^3\geqslant 27abc$$

بنابراین نامساوی مفروض محقق است .

۸۷/۳۸- دستگاه معادلات زیررا حل کنید :

$$\begin{cases}x^2+(y-z)^2=2\\ y^2+(z-x)^2=8\\ z^2+(x-y)^2=10\end{cases}$$

حل- از این‌دستگاه بدست می‌آید:

$$x^2+y^2-z^2+(y-z)^2+(z-x)^2-(x-y)^2=0$$

که بعداز اختصار خواهیم داشت:

$$(x+y-z)^2=0$$

همچنین خواهیم داشت:

$$(y+z-x)^2=16$$
$$(z+x-y)^2=4$$

بنابراین چهاردستگاه زیربدست می‌آید:

$$\begin{cases}x+y-z=0\\ y+z-x=4\\ z+x-y=-2\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y-z=0\\ y+z-x=4\\ z+x-y=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y-z=0\\ y+z-x=-4\\ z+x-y=2\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y-z=0\\ y+z-x=-4\\ z+x-y=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}-1\\ 2\\ 1\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}1\\ -2\\ -1\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}-1\\ -2\\ -3\end{cases}$$

از مسائل ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

۸۷/۳۹- باسه‌رقم که‌صفر جزء آنها نیست کلیهٔ عددهای سه‌رقمی ممکن را می‌سازیم. مجموع دوعدد ازاین‌عددها که‌از بقیه بزرگترند برابر ۱۴۴۴ می‌باشد. رقمها را پیداکنید.

حل- فرض‌می‌کنیم a و b و c سه‌رقم مورد نظر و $a>b>c$ باشد ، در این صورت بزرگترین دو عدد حاصل $\overline{abc}$ و $\overline{acb}$ است که اولی از دومی نیزبزرگتر است. با این فرض داریم :

$$2\overline{abc}>1444>2\overline{acb}\Longrightarrow a=7 \text{ و } c=1$$

$$\overline{7b1}+\overline{71b}=1444\Longrightarrow b=3$$

۸۷/۴۰- مطلوبست تعیین اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_{173}$ بقسمی که مجموع مجذورات‌آنها مضرب۵ باشد اما حاصل ضرب‌آنها بر۵ بخش‌پذیر نباشد.

حل- چون حاصل‌ضرب‌اعداد بالا بر۵ بخش‌پذیر نیست، پس تك‌تك این اعداد نیز بر۵ بخش‌پذیر نیست وبعضی ازآنها به‌صورت $5m\pm1$ وبرخی دیگر به‌صورت $5m\pm2$ است . مجذور هر یك از عددهای دستهٔ اول به‌صورت $5n+1$ و مجذور هریك ازعدهای دستهٔ دوم به‌صورت $5n-1$ است . هرگاه تعداد عددهای‌دستهٔ اول k باشد واین‌عددها را x_1 ، x_2، ... و x_k بنامیم،داریم:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2=5M+k$$

$$x_{k+1}^2+x_{k+2}^2+\ldots+x_{173}^2=5N-(173-k)$$

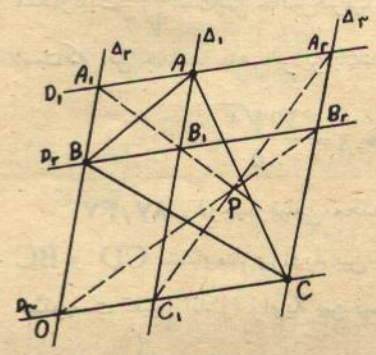
اگر S مجموع مجذورات تمام اعداد فرض شود:

$$S = ۵(M+N) - (۱۷۳ - ۲k)$$
$$S = ۵q \Longrightarrow ۱۷۳ - ۲k = ۵p$$
$$k = ۴، ۹، ۱۴، \ldots، ۱۶۸$$

از ۱۷۳ عدد تعداد ۴ یا ۹، ... یا ۱۶۸ عدد آنها باید به‌صورت $۵m \pm ۱$ و بقیهٔ آنها به‌صورت $۵m \pm ۲$ باشد.

۸۷/۴۱ـ سه‌نقطهٔ A، B و C غیرواقع بریك استقامت مفروضند. براین سه‌نقطه دودسته خطوط $D_۱ \parallel D_۲ \parallel D_۳$ و $\triangle_۱ \parallel \triangle_۲ \parallel \triangle_۳$ رامی گذرانیم که‌تعدادی‌متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شود. ازبین این متوازی‌الاضلاعها سه متوازی‌الاضلاع است که هریك ازخطوط AB، BC و CA قطری از آنها می‌باشند، ثابت‌کنید که قطرهای دیگر این سه متوازی‌الاضلاع دریك‌نقطه متقاربند.

حل‌ـ مطابق‌باشکل



اگر:

$$D_۱ \cap \triangle_۲ = \{A_۱\}$$

و

$$D_۱ \cap \triangle_۳ = \{A_۲\}$$
$$D_۲ \cap \triangle_۱ = \{B_۱\}$$

و

$$D_۲ \cap \triangle_۳ = \{B_۲\}$$
$$D_۳ \cap \triangle_۲ = \{O\} \quad \text{و} \quad D_۳ \cap \triangle_۱ = \{C_۲\}$$

وفرض می‌کنیم:

$$\overline{OB} = b \quad \text{و} \quad \overline{OC} = c$$

دراین‌صورت داریم:

$$\overline{OA_۱} = \lambda b \quad \text{و} \quad \overline{OC_۲} = \mu c$$
$$\overline{OA} = \lambda b + \mu c \quad \text{و} \quad \overline{OA_۲} = \lambda b + c$$
$$\overline{OB_۱} = b + \mu c \quad \text{و} \quad \overline{OB_۲} = b + c$$
$$\overline{A_۱B_۱} = (۱ - \lambda) b + \mu c$$

چون سه نقطهٔ A و B و C بریك‌امتداد نیستند پس:

$$\lambda + \mu \neq ۱$$

است و بنابراین $\overline{A_۱B}$ با $\overline{OB_۲}$ دارای امتداد مشترك نیستند ودریك نقطهٔ P متقاطع می‌باشند وداریم:

$$\overline{OP} = k\overline{A_۱B_۱} = k(b + c)$$
$$\overline{A_۱P} = \overline{OP} - \overline{OA_۱} = (k - \lambda) b + \lambda c$$
$$\frac{۱ - \lambda}{k - \lambda} = \frac{\mu}{k} \Longleftrightarrow k = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu - ۱}$$

$A_۲C_۲$ با $OB_۲$ نیز دریك‌نقطهٔ Q متقاطعند که

$$\overline{OQ} = l(b + c)$$

وبه‌ترتیب بالا نتیجه خواهد شد:

$$l = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu - ۱} \Longrightarrow k = l \Longrightarrow P = Q$$

دونقطهٔ P و Q منطبقند یعنی سه خط $A_۱B_۱$ ، $A_۲C_۲$ و $OB_۲$ متقاربند.

۸۷/۴۱ـ به فرض آنکه a و b عددهای طبیعی باشند ثابت‌کنید:

$$۲\sqrt[a+b]{a^{۲b} b^{۲a}} < a^۲ + b^۲$$

حل‌ـ با توجه به‌نامساوی واسطه‌های‌حسابی وهندسی داریم:

$$۲\sqrt[a+b]{a^{۲b} b^{۲a}} = ۲\sqrt[a+b]{\underbrace{a^۲.a^۲\ldots a^۲}_{b \text{ بار}}.\underbrace{b^۲.b^۲..b^۲}_{a \text{ بار}}}$$

$$< ۲ \times \frac{\overbrace{a^۲ + a^۲ + \ldots + a^۲}^{b \text{ بار}} + \overbrace{b^۲ + b^۲ + \ldots + b^۲}^{a \text{ بار}}}{a + b} =$$

$$= ۲ \times \frac{a^۲ b + a b^۲}{a + b} = ۲ab < a^۲ + b^۲$$

۸۷/۴۲ـ دستگاه معادلات زیررا حل‌کنید:

$$\begin{cases} \sin^۲ x = \sin y \\ \sin^۲ y = \sin z \\ \sin^۲ z = \sin x \end{cases}$$

حل‌ـ ازحذف y و z درمعادلات بالا داریم:

$$\sin x = \sin^۸ x \Longleftrightarrow \sin x = ۰ \text{ یا } ۱$$
$$\sin x = ۰ \Longrightarrow x \text{ و } y \text{ و } z = k\pi$$
$$\sin x = ۱ \Longrightarrow x \text{ و } y \text{ و } z = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

۸۷/۴۳ـ ثابت‌کنید به‌فرض‌آنکه عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ فردباشد عدد $b^۲ - ۴ac$ مجذور کامل نیست.

حل‌ـ اگر d عدد صحیح و مثبت بوده و داشته باشیم $b^۲ - ۴ac = d^۲$، دراین‌صورت‌چون a و b و c مقادیرمثبتند $d < b$ است وداریم:

$$۴a \times \overline{abc} = ۴۰۰a^۲ + ۴۰ab + ۴ac$$
$$= (۲۰a + b)^۲ - (b^۲ - ۴ac)$$
$$= (۲۰a + b)^۲ - d^۲$$
$$= (۲۰a + b + d)(۲۰a + b - d)$$

اگر abc فرد باشد لازم است که هریك از مقادیر دو پرانتز اخیر فرد باشند وبرای این کارلازم است که یکی‌از دو مقدار b و d زوج ودیگری فرد باشد اما از رابطهٔ:

$$b^۲ - d^۲ = ۴ac$$

برمی‌آید که b و d هردو زوج یا هردو فرد باشند. بنابراین وقتی $\overline{abc}$ فرد باشد، b^2-4ac مجذور کامل نیست.

۸۷/۴۴ـ به‌فرض آنکه p و q عددهای صحیح باشند ثابت کنید که مجموع مکعبات ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^3+px+q=0$$

بر ۳ بخش‌پذیر است.

حل ـ اگر a، b و c ریشه‌های معادله باشند داریم:

$$a+b+c=0$$

$$a^3+b^3+c^3=-(pa+q)-(pb+q)-$$
$$-(pc+q)=-p(a+b+c)-3q=-3q$$

۸۷/۴۵ـ درمثلث ABC به‌مساحت S میانه‌های AA_1 و BB_1 و CC_1 رسم‌شده‌اند، ثابت کنید که:

$$\frac{1}{3}(cotg\,BAA_1+cotg\,CBB_1+cotg\,ACC_1)=$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

حل ـ درمثلث ABC به‌ضلعهای a، b و c و به‌مساحت S داریم:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \quad و \quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

ازاینجا نتیجه می‌شود:

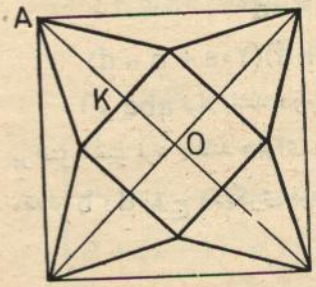
$$a^2=b^2+c^2-4S\,cotg\,A$$

هرگاه G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد رابطهٔ بالا درمثلثهای GAB ، GBC و GCA چنین می‌شود:

$$BG^2=c^2+AG^2-4S_{GAB}\cdot cotg\,BAA_1$$
$$CG^2=a^2+BG^2-4S_{GBC}\cdot cotg\,CBB_1$$
$$AG^2=b^2+CG^2-4S_{GCA}\cdot cotg\,ACC_1$$

ازجمع نظیربه‌نظیر طرفین رابطه‌های بالا رابطهٔ مطلوب‌بدست می‌آید.

۸۷/۴۶ـ ازیك ورقهٔ فلزی به شکل مربع به ضلع a یك هرم منتظم بقسمی می‌سازیم که چهار رأس مربع مفروض رأس هرم را تشکیل دهند. طول ضلع قاعدهٔ هرم را چگونه انتخاب کنیم تا حجم هرم حاصل ماکسیمم باشد؟



حل ـ اگر x طول ضلع قاعده و h ارتفاع هرم باشد داریم:

$$OK=\frac{x}{2}$$

و

$$AK=\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{x}{2}$$

$$h=\sqrt{AK^2-OK^2}=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)}$$

$$V=\frac{1}{3}x^2h=\frac{1}{3}x^2\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)}$$

$$V=\frac{16}{3}\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)}$$

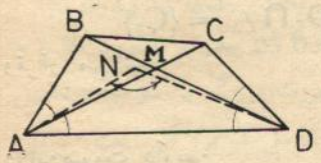
مجموع پنج مقدار مثبت:

$$\frac{x}{4},\ \frac{x}{4},\ \frac{x}{4},\ \frac{x}{4}\ و\ \left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)$$

مقدار ثابت $\frac{a}{\sqrt{2}}$ است پس حاصل‌ضرب این مقادیر وقتی ماکسیمم است که این جمله‌ها باهم برابر باشند:

$$\frac{x}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}}-x \Longrightarrow x=\frac{2a\sqrt{2}}{5}$$

۸۷/۴۷ـ درچهارضلعی محدب ABCD سه‌ضلع AB، BC و CD متساویند وزاویهٔ بین دوقطر برابر با α است. مطلوبست تعیین اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای‌دوزاویهٔ A و D.



حل ـ هرگاه M نقطهٔ تلاقی قطرها و N نقطهٔ تلاقی نیمسازهای‌زاویه‌های A و D باشد داریم:

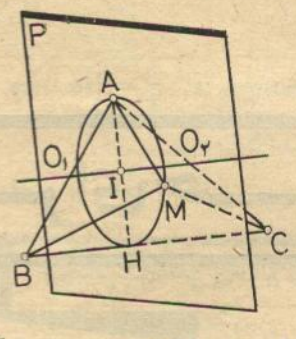
$$AND=180^\circ-\left(\frac{A}{2}+\frac{D}{2}\right)$$
$$=180^\circ-\frac{1}{2}(BAC+CAD+ADB+BDC)$$
$$=180^\circ-\frac{1}{2}(BCA+CBD)-$$
$$-\frac{1}{2}(CAD+ADB)$$
$$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)-\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)=\alpha$$

مسائل ترجمه از فرانسه

۸۷/۴۸ـ سه‌نقطهٔ A و B و C غیرواقع بریك‌استقامت مفروضند. مکان نقاط M از فضا را تعیین کنید بقسمی که هر یك از زاویه‌های AMB و AMC قائمه‌باشند.

حل ـ مکان نقاط M عبارتست از فصل مشترك دو کره که یکی به‌قطر AB ودیگری به‌قطر AC است. این‌فصل

مشترك دایـره‌ای است که بر A می‌گذرد و صفحهٔ آن برخط O_1O_2، خط واصل بین اوساط AB و AC، عمود است. I مرکز این دایره روی خط O_1O_2 است وچون O_1O_2 بر ارتفـاع AH ازمثلث ABC عموداست، پس دایرهٔ مکان M به‌قطر AH است وصفحهٔ آن بر BC عمود است.



۸۷/۴۹ـ بدون‌استفاده ازقاعدهٔ هوپیتال ثابت کنید که:

$$x \to a \ : \ \lim \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$$

حل ـ بافرض $x = a + \triangle x$ داریم:

$$\frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = \frac{(a + \triangle x)f(a) - af(a + \triangle x)}{\triangle x}$$

$$= f(a) - \frac{a[f(a + \triangle x) - f(a)]}{\triangle x}$$

وقتی $\triangle x \to 0$ حد $\frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x}$ برابراست با $f'(a)$

بنابراین وقتی $\triangle x \to 0$ یعنی $x \to a$ حدکسر مفروض برابر می‌شود با: $f(a) - af'(a)$

۸۷/۵۰ـ n ضلعی محدب P را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که اولا هیچ دوقطری ازآن باهم موازی نباشند وهیچ سه‌قطری‌ازآن که‌ازیك‌رأس نمی‌گذرند متقارب نباشند. تعداد تمام‌نقاط‌تلاقی‌دو به‌دوی‌قطرها (غیراز رأسهای nضلعی) را با P_n وتعداد نقاط مزبور راکه داخل n ضلعی واقعند با P_i وتعدادآنها راکه درخارج چند ضلعی واقعند با P_e نشان می‌دهیم. مقادیر P_n و P_i و P_e را برحسب n حساب کنید.

حل ـ تعداد تمام قطرهای n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$ و ازهررأس‌آن به‌تعداد $n - 3$ قطرمی‌گذرد پس هرقطر در دو رأس چندضلعی با $2(n-4)$ قطر متلاقی است وتعداد نقاط تلاقی‌آن با قطرهای دیگر می‌شود:

$$\left[\frac{n(n-3)}{2} - 1\right] - 2(n-4) =$$

$$= \frac{n^2 - 7n + 14}{2}$$

ازاینجا نتیجه می‌شود:

$$P_n = \frac{n(n-3)}{2} \times \frac{n^2 - 7n + 14}{4}$$

$$P_n = \frac{1}{8}n(n-3)(n^2 - 7n + 14)$$

نظیر هردوقطر AD وBC ازچندضلعی که یکدیگر را داخل چندضلعی قطع کنند یك‌چهارضلعی‌محدب ABCD وجوددارد. وبرعکس‌نظیرهرچهارضلعی‌محدب که‌چهار رأس آن‌چهار رأس‌از چندضلعی باشدیك‌نقطهٔ‌تلاقی‌دوقطردرداخل‌چندضلعی وجوددارد. بنابراین P_i برابراست باتعدادچهارضلعیهای‌محدب‌ازنوع‌مزبورو برابراست با تعداد چهارتاییهایی که ازn رأس می‌توان‌انتخاب کرد:

$$P_i = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$P_e = P_n - P_i = \frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5)$$

۸۷/۵۱ـ رشتهٔ:

$u_1 \ , \ u_2 \ , \cdots , u_n \ , \cdots$

را درنظر می‌گیریم که درآن u_n تابعی ازعدد طبیعی n است وفرض می‌کنیم:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

۱) هرگاه a وb دوعدد ثابت باشند و:

$$S_n = n\left(\frac{n^2}{3} - an + b\right)$$

باشد تابع $u_n = f(n)$ را مشخص کنید.

۲) مقادیر عددی a وb را بقسمی تعیین کنید که بـا استفاده‌ازقسمت بالا بتوان هریك از دومجموع زیررابرحسب n حساب‌کرد:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$S' = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1)$$

حل ـ ۱) داریم:

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^3}{3} - an^2 + bn -$$

$$- \left[\frac{(n-1)^3}{3} - a(n-1)^2 + b(n-1)\right]$$

$$u_n = n^2 - (2a+1)n + a + b + \frac{1}{3}$$

۲) برای مجموع S باید داشته باشیم:

$$n^2 - (2a+1)n + a + b + \frac{1}{3} \equiv n^2$$

$$\begin{cases} 2a + 1 = 0 \\ a + b + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = -\frac{1}{2} \ \text{و} \ b = \frac{1}{6}$$

دنباله‌درصفحهٔ ۱۸۲

مسائل برای حل

برای دانش‌آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

۸۸/۱ـ ازمحمد معینی

هرگاه داشته باشیم:

$$A = \frac{9+2\sqrt{14}}{\sqrt{21}-\sqrt{14}+\sqrt{6}-2}$$

$$B = \frac{5}{\sqrt{21}+\sqrt{14}+\sqrt{6}+2}$$

حاصل AB را به‌ساده‌ترین صورت حساب کنید.

۸۸/۲ـ ترجمهٔ از فرانسه

درچهارضلعی محدب ABCD خط △ ازوسط BC و همچنین از وسط ADمی‌گذرد وامتداد AB رادرP وامتداد CD را در Q قطع می‌کند. ثابت کنیدکه:

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QD}{QC}$$

برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

۸۸/۳ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

هرگاه x وy دوعدد حقیقی باشندکه دررابطهٔ:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$$

صدق کنند، کمترین مقدار $z=\frac{y}{x}$ رامعلوم کنید.

۸۸/۴ـ ترجمهٔ **محمد معینی**

ثابت کنیدکه هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}=a+b$$

اقلاً یکی از دوتساوی زیررا خواهیم داشت:

$$x+y=a+b$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+1=0$$

۸۸/۵ـ ترجمهٔ **محمد معینی**

از معادلهٔ زیر مقدار x را بدست آورید:

$$\log_x 10+6\log_{10x}10-12\log_{100x}10=0$$

۸۸/۶ـ از دستگاه زیر مقادیر x وy وz را برحسب $a\neq 0$ بدست‌آورید:

$$\begin{cases} xyz=10^a \\ \frac{1}{\log x}+\frac{1}{\log y}+\frac{1}{\log z}=\frac{9}{a} \end{cases}$$

۸۸/۷ـ ترجمهٔ ازفرانسه

ذوزنقهٔ ABCD قابل محیط شدن بریک‌دایره است. ازنقطهٔ تلاقی دوقطرآن خطی‌موازی با قاعده‌های AB وCD رسم می‌کنیم که ساقAD را در M وساق BC را درNقطع می‌کند. ثابت کنیدکه:

$$AM+BN=AB \text{ و } DM+CN=DC$$

۸۸/۸ـ ترجمهٔ **فتح‌الله‌زرگری**

چهارنقطهٔ A وB وC وD واقع دریک‌صفحه مفروض است. براین چهار نقطه به ترتیب چهار خط متوازی $\triangle_1$، $\triangle_2$، $\triangle_3$ و$\triangle_4$ را چنان بگذرانید که نسبت فاصلهٔ دو خط $\triangle_1$ و $\triangle_2$ به‌فاصلهٔ دوخط $\triangle_3$ و$\triangle_4$ برابر بامقدارمعلوم k باشد.

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۸۸/۹ـ فرستنده**محمدحسنی نژاد**دانش‌آموزدبیرستان هدف شمارهٔ ۳

A(۱ و ۳) یک‌رأس و $x-2y+1=0$ و $y-1=0$ معادله‌های دومیانه ازمثلث ABC می‌باشند. معادله‌های ضلعهای این مثلث را بنویسید.

۸۸/۱۰ـ ترجمهٔ **محمدمعینی**

اگر داشته باشیم :

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{x} \quad و \quad \cot g\alpha\cos\beta=\frac{1}{y} \quad و \quad \cot g\beta=\frac{1}{z}$$

مقدار k را از عبارت زیر پیداکنید:

$$k=x^2-y^2-z^2$$

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۸۸/۱۱ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

دونقطهٔ A وB به‌فاصلهٔ d ازیکدیگر مفروضند. می‌خواهیم یك‌دستگاه محورهای مختصات چنان انتخاب‌کنیم که نسبت به‌آن (۱ و۵)A و(۳ − و ۲)B باشد. اولاً مقدار d چقدرباید باشد تا مسئله ممکن‌باشد؟ ثانیاً طریقهٔ تعیین‌دستگاه محورها چیست ؟

۸۸/۱۲ـ ترجمهٔ **قوام‌نحوی**

در صفحهٔ محورهای مختصات متعامد چهار نقطهٔ زیر مفروض است :

A(۸ و ۰) ، B(۴ و ۸) ، C(۰ و ۰) ، D(۹ و ۳)

ازنقطهٔ D سه‌عمود DH ، DK وDL را به‌ترتیب برخطوط AB، BC وCA رسم می‌کنیم. ثابت‌کنید که سه‌نقطهٔ H و K وL روی یك‌خط مستقیم واقعند.

۸۸/۱۳ـ فرستنده**محمدحسنی نژاد**(ترجمه‌ازروسی)

اگر α وβ دوریشهٔ اصلی ومتمایز ازمعادلهٔ مثلثاتی

$$\sin(x+\lambda)=m\sin 2\lambda$$

باشند،ثابت‌کنید که :

$$m=\pm\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)$$

۸۸/۱۴ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

معادلهٔ زیررا حل‌کنید .

$$\frac{1+tgx}{1-tgx}=(\sin x+\cos x)^2$$

۸۸/۱۵ـ ترجمهٔ **داوید ریحان**

دوصفحهٔ متوازی P و Q پاره خط مفروض AD را درنقاط B وC بقسمی قطع می‌کنندکه:

$$AB:BC:CD=p:q:r$$

دوخط Ax وDy را درنظر می‌گیریم که دوصفحهٔ P وQ را به‌ترتیب در E، F وH،G قطع‌کنند. ثابت‌کنیدکه :

$$\frac{CF.CG}{BE.BH}=\frac{rp+rq}{pr+pq}$$

۸۸/۱۶ـ ترجمهٔ **داوید ریحا**

درفضای سه‌بعدی چهارنقطهٔ A، B، C وD را درنظر می‌گیریم. خطوط AB و CD توسط خطی درنقاط E وF و خطوط BC و DA توسط خطی درنقاط H و G بقسمی‌قطع می‌شوندکه :

$$\frac{AG}{GD}=\frac{BH}{HC} \quad و \quad \frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC}$$

ثابت‌کنیدکه خطوط EF وGH دریك صفحه واقعند.

برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۸۸/۱۷ـ ترجمهٔ **جوادفیض**

ثابت‌کنیدکه دودایرهٔ به‌معادله‌های زیر باهم برابر وبر یکدیگر مماس خارجند :

$$x^2+y^2+3x-y=0$$
$$x^2+y^2+x-7y+10=0$$

۸۸/۱۸ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

معادلهٔ زیر را حل‌کنید

$$\cos^2 x+\cos^2 11^\circ=\frac{3}{4}+\cos x\cos 11^\circ$$

برای دانش‌آموزان کلاس ششم‌ریاضی

۸۸/۱۹ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

ثابت‌کنیدکه منحنی نمایش تغییرات تابع زیر دارای یك مرکز تقارن‌است ومختصات این‌مرکز تقارن را بدست‌آورید:

$$y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

یکان‌ـ تعمیم مسئله را درمورد تابع زیر بررسی‌کنید:

$$y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\dots+\frac{1}{x-n}$$

n عددی است صحیح ومثبت‌که دوحالت زوج و فردآن باید درنظرگرفته شود .

۸۸/۲۰ـ فرستنده **جواد فیض** (ترجمه از کتابهای خارجی)

به‌فرض‌آنکه n عدد صحیح ومثبت و:

$$y=\sqrt[n]{(x+q)(x+q^2)\dots(x+q^n)}-x$$

باشد، وقتی $x\to+\infty$ حد y را بدست‌آورید .

۸۸/۲۱ـ فرستنده **جواد فیض** (ترجمه ازانگلیسی)

دو دایرهٔ C_1 وC_2 به‌معادله‌های :

$$x^2+y^2+2px-a^2=0$$
$$x^2+y^2+2qx-a^2=0$$

در A و B متقاطعند. خط متغیر △ از A می‌گذرد و C_1 را مجدداً در L تلاقی می‌کند. خطی که از B موازی با △ رسم شود C_2 را مجدداً در M قطع می‌کند. اگر P وسط LM باشد مکان P را تعیین کنید.

۸۸/۲۲- از جواد فیض

به‌شرط $ab=3$ ازروابط زیر مقادیر x و y و z راتعیین کنید:

$$\begin{cases} tg^2x+tg^2y+tg^2z=a^2 \\ cotg^2x+cotg^2y+cotg^2z=b^2 \end{cases}$$

۸۸/۲۳- ترجمهٔ فتح‌الله‌زرگری

ازروابط زیرمقدار $\cos 2\alpha$ را بدست‌آورید و بحث کنید:

$$tg^2\alpha-m\,tg\alpha+1=0 \quad \text{و} \quad 45^\circ<\alpha<90^\circ$$

۸۸/۲۴- ترجمهٔ فتح‌الله‌زرگری

ثابت کنید که اگر n عددصحیح مثبت فردباشد عدد زیر بر۱۱ بخش‌پذیر است:

$$N=1^n+2^n+3^n+\dots+10^n$$

۸۸/۲۵- فرستنده قوام‌نحوی

کسرهای زیررا درمبنای ۲ بنویسید:

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{15},\ \frac{1}{31},\ \dots$$

۸۸/۲۶- ترجمهٔ فتح‌الله‌زرگری

دایرهٔ‌ثابت C ونقطهٔ ثابت A واقع برآن مفروض‌است. وتر MN ازاین دایره تغییرمی‌کند، اما طول‌آن همواره‌برابر با مقدار ثابت l است. اگر H و G به‌ترتیب‌مرکز ارتفاعی و مرکزثقل مثلث ABC باشند، مکان این‌دونقطه راتعیین کنید.

۸۸/۲۷- ترجمهٔ ازفرانسه

وتر متغیر AB از بیضی مفروض دارای امتداد ثابت است؛

۱- ثابت کنید که مکان هندسی P وسط AB قطر PQ از بیضی است.

۲- اگر RS قطری ازبیضی موازی با AB باشد، دو قطر PQ و RS مزدوج یکدیگرنامیده می‌شوند. هرگاه MN و ML دو وتر ازبیضی باشندکه درM مشترك و N و L نسبت به‌مرکز بیضی قرینه‌باشند، ثابت کنیدکه این دو وتر در امتداد دوقطر مزدوج واقعند.

مسائل گوناگون

I- از مسائل ارسالی توسط: جوادفیض

۸۸/۲۸- هرگاه p و q دوعددصحیح فرد باشند، ثابت کنیدکه معادلهٔ $x^2+2px+2q=0$ جواب گویا ندارد.

۸۸/۲۹- نامساوی زیر را برای زوایای مثلث ثابت کنید:

$$\sqrt{5tgA+tgB+tgC}+\sqrt{5tgB+tgC+tgA}+$$
$$+\sqrt{5tgC+tgA+tgB}<5\sqrt{tgA\,tgB\,tgC}$$

II- ازمسائل ارسالی توسط: محمدمعینی

۸۸/۳۰- نامساوی زیررا وقتی‌که a و b و c سه ضلع یك مثلث باشند ثابت کنید:

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geqslant$$
$$>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

۸۸/۳۱- دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=3 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=3 \end{cases}$$

۸۸/۳۲- به‌فرض‌آنکه a و b و c اعداد مثبت و x و y و z اعداد مخالف صفرباشند، ثابت کنیدکه هرگاه داشته‌باشیم:

$$x=cy+bz \quad \text{و} \quad y=az+cx \quad \text{و} \quad z=bx+ay$$

خواهیم داشت:

$$a^2+b^2+c^2+2abc=1$$

۸۸/۳۳- مجموع زیررا بدست‌آورید:

$$S_n=6(1\times2+2\times3+3\times1)+$$
$$+9(2\times3+3\times4+4\times2)+\dots+$$
$$+3(n+1)[n(n+1)+(n+1)(n+2)+(n+2)n]$$

III- ازمسائل ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

۸۸/۳۴- اگر چهارنقطهٔ A، B، C و D روی یك خط مستقیم چنان قرارداشته باشندکه:

$$AC=CD=DB$$

اولاً ثابت کنیدکه برای هرنقطهٔ دلخواه M داریم:

$$AM^2+3DM^2=BM^2+3CM^2$$

ثانیاً مکان M را تعیین کنید برای آنکه:

$$AM^2 + 3DM^2 = a^2$$

۸۸/۳۵ـ هرگاه a_i و b_i عددهای مثبت باشند ثابت کنید که:

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_nb_n}{a_n+b_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(a_1+\dots+a_n)(b_1+\dots+b_n)}{(a_1+\dots+a_n)+(b_1+\dots+b_n)}$$

۸۸/۳۶ـ نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید:

$$y = |x|\sqrt{-\sin^2 x}$$

۸۸/۳۷ـ در دایره‌ای مثلث ABC محاط شده‌است. درنقاط A و B مماسهایی بر دایره رسم می‌کنیم که در S متقاطع می‌شوند و خط CS را رسم می‌کنیم که در M خط AB را تلاقی می‌کند. ثابت کنید:

$$AM:MB = AC^2:BC^2$$

۸۸/۳۸ـ چهارضلعی ABCD و نقطهٔ O درداخل آن مفروض است. نقاط F، M، N و E به‌ترتیب برضلعهای AB، BC، CD و DA اختیارمی‌شوند. هرگاه L، K، H و P به‌ترتیب نقاط تلاقی OA، OB، OC و OD با EF، FM، MN و NE باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{FK}{KM}\cdot\frac{MH}{HN}\times$$

$$\times\frac{NP}{PE}\cdot\frac{EL}{LF} = 1$$

۸۸/۳۹ـ روی وتر AB ازمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC دو نقطهٔ A_1 و B_1 چنان انتخاب می‌شوند که:

$$AA_1 = A_1B_1 = B_1B$$

باشد. ثابت کنید که:

$$cotg\,ACA_1 + cotg\,B_1CB = 3\,cotg\,A_1CB_1$$

۸۸/۴۰ـ ثابت کنید که اگر عدد p به صورت $p = 2^n + 1$ باشد تعداد p کسر با صورتهای یك وجوددارد که مجموع آنها برابر با یك‌است، یعنی:

$$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_p}$$

۸۸/۴۱ـ ثابت کنید که فقط چهارعددطبیعی بزرگتر از یك وجودداردکه حاصل‌ضرب هرسه‌عدد ازآنها بعلاوهٔ یك بر عدد چهارم بخش‌پذیر باشد.

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۸۸/۴۲ـ برای آنکه عبارت:

$$P = x(y-z)^3 + y(z-x)^3 + z(x-y)^3 + A$$

بر $x-y$ بخش‌پذیر باشد، لازم و کافی است که:

الف‌ـ $A = 0$ ب‌ـ $A = x-y$

ج‌ـ A مضرب $x-y$ نباشد.

دـ A بر $x-y$ بخش‌پذیر باشد.

۸۸/۴۳ـ معادلهٔ:

$$\sqrt[3]{x-16} + 1 = \sqrt[3]{x+3}$$

الف‌ـ جواب حقیقی ندارد.

ب‌ـ یك‌جواب حقیقی دارد.

ج‌ـ دوجواب حقیقی دارد.

دـ بیش‌از دوجواب حقیقی دارد.

۸۸/۴۴ـ هرگاه حاصل عبارت:

$$\left[\frac{(\sqrt{a^2}-1)(\sqrt{a}+1)}{a+\sqrt{a}+1}\right]^2 + \sqrt{(a^2+1)^2 - 4a^2}$$

برابر با $2(1-a)$ شده باشد؛

الف‌ـ a مقدار مثبت است.

ب‌ـ a مقدار منفی است.

ج‌ـ a مقدارحقیقی دلخواه است.

دـ درعملیات اشتباه شده‌است.

۸۸/۴۵ـ معادلهٔ:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{4}{2x^2+1}$$

الف‌ـ جواب حقیقی ندارد.

ب‌ـ دوجواب حقیقی دارد.

ج‌ـ چهار جواب حقیقی دارد.

دـ چهارجواب حقیقی دوبه‌دو قرینه دارد.

۸۸/۴۶ـ معادلهٔ لگاریتمی:

$$\log_4(1-x^2)=\frac{1}{2}+\log_2 x$$

الف ـ فقط یك جواب $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ دارد .

ب ـ دوجواب $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ دارد.

ج ـ جواب قابل قبول ندارد .

د ـ مبهم است.

۸۸/۴۷ـ معادلهٔ لگاریتمی :

$$\log_x 3\times\log_9 x^2\times\log_{27}x^3=\log_{81}x^4$$

الف ـ فقط یك‌جواب حقیقی دارد .

ب ـ دوجواب حقیقی دارد.

ج ـ چهارجواب حقیقی دارد.

د ـ مبهم است.

۸۸/۴۸ـ درمتوازی‌الاضلاع ABCD ازرأس C ودر خارج خط △ رارسم می‌کنیم که‌امتداد AB را درE وامتداد AD را درF قطع کند. وقتی △ تعییر کند، مقدار K ازرابطهٔ

$$K=\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}$$

الف ـ برابر با مقدار ثابت‌بزرگتر ازیك‌است.

ب ـ برابر بامقدار ثابت کمتر ازیك‌است.

ج ـ برابر با یك است .

د ـ مقداری متغیراست.

۸۸/۴۹ـ مستطیل ABCD مفروض‌است. می‌خواهیم لوزی رسم‌کنیم که دراین‌مستطیل محاط باشد؛

الف ـ حداکثر یك‌لوزی می‌توانیم رسم‌کنیم.

ب ـ حداکثر دولوزی می‌توانیم رسم‌کنیم.

ج ـ لوزی‌هایی به‌تعداد زیاد می‌توانیم رسم‌کنیم وهمهٔ آنها باهم‌متشابهند.

د ـ لوزی‌هایی به‌تعداد زیاد می‌توانیم رسم‌کنیم اماهمهٔ آنها باهم متشابه نیستند.

۸۸/۵۰ـ زاویهٔ xOy مفروض است. نقطهٔ متغیرA بر Ox ونقطهٔ متغیر B بر Oy حرکت می‌کندبقسمی‌که:

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{k}$$

است. اگر D نقطهٔ تلاقی نیمساز زاویهٔ O باخط AB باشد طول OD :

الف ـ همواره برابر با k است.

ب ـ همواره برابر با 2k است .

ج ـ مقدار ثابت‌کوچکتراز 2k است .

د ـ مقدار متغیر است.

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۸۸/۵۱ـ مجموعهٔ‌نقاطی از صفحهٔ محورهای‌مختصات که دررابطهٔ زیرصدق می‌کنند:

$$|x-y|+|y+2x-3|\leqslant 0$$

الف ـ ناحیه‌ای ازهمه‌طرف محصور است .

ب ـ ناحیه‌ای‌است‌که دریك یادوسمت نامحدوداست.

ج ـ فقط شامل یك‌نقطه است.

د ـ تهی‌است(یعنی هیچ‌نقطه‌ای را شامل‌نیست).

۸۸/۵۲ـ مختصات سه‌رأس مثلثی عبارتنداز:

A(۲ و ۰) ، B(−۱ و −۲) ، C(−۴ و ۹)

معادلهٔ نیمساز داخلی زاویهٔ A از این‌مثلث عبارتست‌از:

الف ـ $5x-y=20$ ب ـ $x+5y=2$

ج ـ $x+y=2$ د ـ $x+5y=10$

۸۸/۵۳ـ درصفحهٔ محورهای مختصات خط △ را با ضریب زاویه‌ای m در نظر می‌گیریم که از نقطهٔ (۰ و۳) می‌گذرد. هرگاه $-1<m<0$ باشد، خط △ نمایش‌هندسی تابع $y=|x|$ را:

الف ـ در دونقطه قطع می‌کند .

ب ـ در یك‌نقطه قطع می‌کند .

ج ـ قطع نمی‌کند .

د ـ دربیش‌از دونقطه قطع می‌کند.

۸۸/۵۴ـ دومتحرك روی مسیر دایره‌ای به‌شعاع ۷۰ متر ابتدا ازیك‌نقطه ودریك‌جهت و با سرعتهای ثابت شروع به‌حرکت می‌کنند. اولی یك دور مسیر را ۴ دقیقه زودتر از دومی طی‌می‌کند. دومتحرك ۳۵ دقیقه بعدازآغاز حرکت به یکدیگر می‌رسند. اگر v_1 و v_2 به‌ترتیب مسافتهای پیموده شدهٔ توسط دومتحرك اولی ودومی‌درمدت یك‌دقیقه باشد:

الف ـ $v_1=10\pi$ و $v_2=14\pi$

ب ـ $v_1=14\pi$ و $v_2=10\pi$

ج ـ $v_1=7\pi$ و $v_2=5\pi$

د ـ $v_1=5\pi$ و $v_2=7\pi$

۸۸/۵۵ـ نامساوی مثلثاتی:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\cos 3x\right)>0$$

الف ـ غیرممکن است. ب ـ همواره ممکن‌است.

ج ـ فقط وقتی‌ممکن‌است‌که x کمان حاده باشد .

د- فقط وقتی ممکن است که x کمان حاده و کوچکتر از ۳۰ درجه باشد.

۸۸/۵۶- به فرض $cotg x = \frac{۱۳}{۴}$ مقدار کسر :

$$\frac{۲\cos x + \sin x}{\cos x - ۲\sin x}$$

برابر است با:

الف- ۲ - ب- ۲ ج- ۶ د- ۶ -

۸۸/۵۷- معادلهٔ مثلثاتی :

$$(a^۲ + ۱)\sin|x| = ۲a$$

فقط وقتی جواب دارد که :

الف- $a > ۰$ باشد. ب- $a > ۱$ باشد.

ج- a هرچه باشد. د- $a \leq ۱$ باشد.

۸۸/۵۸- زاویهٔ قائمهٔ xOy مفروض است. صفحهٔ P ضلع Ox را در A و امتداد ضلع Oy را در B قطع کرده است. تصویر زاویهٔ xOy بر صفحهٔ P:

الف- زاویهٔ منفرجه است. ب- زاویهٔ حاده است.

ج- زاویهٔ بزرگتر از °۱۳۵ است.

د- زاویهٔ کوچکتر از °۴۵ است.

۸۸/۵۹- چهار نقطهٔ A، B، C و D غیر واقع بر یک صفحه مفروض است. به فرض : از یک نقطهٔ O نیم‌خط Ox را موازی با AB و نیم خط Oy را موازی با CD رسم می‌کنیم. هرگاه داشته باشیم:

$$CA^۲ - CB^۲ = DA^۲ - DB^۲$$

در این صورت زاویهٔ xOy :

الف- حاده است ب- قائمه است ج- منفرجه است

د- یا حاده یا منفرجه است.

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۸۸/۶۰- منحنی نمایش هندسی تابع

$$y = |x|\sqrt{x^۲ + ۱}$$

درمبدأ مختصات :

الف- عطف دارد.

ب- می‌نیمم دارد و برمحور x'x مماس است .

ج- می‌نیمم دارد و برمحور y'y مماس است.

د- می‌نیمم دارد اما برهیچیک ازمحورها مماس نیست.

۸۸/۶۱- منحنی نمایش هندسی تابع:

$$y = \frac{\sqrt{x^۲ + ۱}}{|x|}$$

الف- دومجانب افقی دارد.

ب- مجانب افقی ندارد.

ج- یک مجانب افقی دارد که با آن متقاطع است .

د- یک مجانب افقی دارد اما با آن متقاطع نیست.

۸۸/۶۲- نمایش هندسی تابع:

$$y = (\cos ۲x)^{\sqrt{-tg^۲ x}}$$

الف- به صورت حقیقی وجود ندارد.

ب- مجموعه‌ای ازنقاط مجزا ازهم است.

ج- مجموعه‌ای شامل فقط دو نقطه است.

د- مجموعه‌ای شامل یک نقطهٔ تنها است .

۸۸/۶۳- معادلهٔ مثلثاتی زیر نسبت به x:

$$\sin^۲ x + \sin^۲ a + \cos(x + a)\cos(x - a) = \cos x$$

الف- درازاء همهٔ مقادیر a جواب دارد .

ب- هیچگاه جواب ندارد .

ج- مبهم است .

د- درازاء مقادیری از a جواب دارد.

۸۸/۶۴- برای آنکه درمورد تابع :

$$y = (a^۲ + ۱)\cos ۲x + ۴a\sin ۲x$$

رابطهٔ $y'' + ۴y = ۰$ برقرار باشد، برای a:

الف- فقط یک مقدار وجود دارد .

ب- مقداری وجود ندارد.

ج- فقط دومقدار وجود دارد.

د- بیش از دومقدار وجود دارد .

۸۸/۶۵- درفاصلهٔ (۰ و π) تابع:

$$y = \cos x(tg x - ۱)$$

الف- یک مجانب دارد ب- دومجانب دارد

ج- بیش ازدومجانب دارد د- مجانب ندارد.

۸۸/۶۶- هرگاه عدد $N = ۵a + ۲b$ مضرب ۱۷ باشد عدد $M = ۹a + ۷b$ برابر است با :

الف- $۱۷k + ۱$ ب- $۱۷k \pm ۱$

ج- $۱۷k + n$ و $n < ۱۷$ د- $۱۷k$

۸۸/۶۷- هرگاه $a_۱$، $a_۲$، ... ، a_n رقمهای متفاوت باشند ($a_۱ \neq ۰$ و $a_n \neq ۰$ و $n < ۹$) وهریک ازدوعدد :

$$N_۱ = \overline{a_۱ a_۲ \ldots a_n} \quad \text{و} \quad N_۲ = \overline{a_n a_۲ \ldots a_۱}$$

بر ۷ بخش‌پذیر باشند چون تفاضل این دوعدد را بر ۷ تقسیم کنیم خارج‌قسمت عددی است :

الف- با رقمهای متفاوت ب- بارقمهای یکسان

ج- بارقمهای متفاوت بدون صفر.

د- با رقمهای متفاوت شامل صفر

(دنباله در صفحهٔ ۱۸۳)

مسائل انتخابی

از مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

کلاس ششم ریاضی - ثلث اول، سال تحصیلی ۵۱-۵۰ (آذر ۱۳۵۰)

جبر

گروه فرهنگی آذر

دبیر: آذرنوش- فرستنده: علیرضا بهروزیان

- منحنی (C) به‌معادلهٔ $y=\frac{x^2+mx+m}{x-m}$ و خط (D) به معادلهٔ $y=Y$ مفروض‌اند؛

الف - مختصات مرکز تقارن منحنی (C) را بیابید و معادلهٔ مکان هندسی آنرا بنویسید.

ب- شرطی برحسب m و Y پیدا کنید تا خط (D) و منحنی (C) برهم مماس باشند.

ج- اگر شرط مماس شدن خط (D) برمنحنی (C) به‌شکل معادلهٔ:

$$Y^2-6mY+m^2-4m=0$$

فرض شود حدود m را قسمی بیابید که یکی از ریشه‌های معادله بین صفر و ۱ - قرار گیرد.

د- معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طولهای ماکزیمم و می‌نیمم منحنی (C) باشد، سپس حدود m را چنان بیابید که ماکزیمم و می‌نیمم منحنی (C) در طرفین محور عرضها قرار گیرند.

- از نقطهٔ $M(k \text{ و } \frac{1}{k})$ دو قائم بر منحنی $y=\frac{1}{x}$ رسم شده است. معادلات قائمها را بنویسید، سپس k را قسمی بیابید که قائمها برهم منطبق شوند.

دبیرستان ادیب

دبیر: طاهری- فرستنده: محمود تهرانی خوروندی

- حد تابع زیر را به‌ازاء $x=+\infty$ تعیین کنید:

$$y=\left(\frac{2x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+8x-2}\right)^{x^2-x+2}$$

- جهت تحدب و تقعر و مختصات نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ زیر را پیدا کنید. (φ قوسی است معلوم):

$$y=\frac{x-\sin\varphi}{(x+\cos\varphi)^2}$$

- m را چنان تعیین کنید که تابع:

$$y=2x-\sqrt{mx^2+x}$$

مجانب به‌موازات محور xها داشته باشد.

دبیرستان امیرخیزی تبریز

دبیر: مرتضوی- فرستنده: سید محمد مرتضوی

تابع y از x به معادلهٔ $x^3+y^3-3xy=0$ در دستگاه مختصات قائم xOy مفروض است. نقاط A و B و C را روی منحنی انتخاب کرده و زوایای خطوط OA، OB و OC را باطرف مثبت محور xx′ به ترتیب α_1، α_2 و α_3 می‌نامیم. ثابت کنید شرط آنکه سه نقطهٔ مزبور بریك استقامت باشند آن است که داشته باشیم:

$$tg\alpha_1 tg\alpha_2 tg\alpha_3=-1$$

دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر: جعفری- فرستنده: علی‌اکبر سخائی

- اندازهٔ حقیقی تابع زیر را به‌ازاء $x=0$ بدست آورید:

$$y=\left(\frac{tg3x}{tg5x}\right)^{\frac{\cos x-1}{x}}$$

ـ درتابع $y = k(x^2 - 3)^2$ پارامتر k را طوری تعیین کنید که قائمهای به منحنی در نقاط عطف از مبدأ مختصات بگذرند.

دبیرستانهای رازی، شاهپور و محمد رضاشاه شیراز

دبیر: جواد پور

فرستندگان: سیروس اسفندیاری، علیرضا وکیل‌زاده

ـ تابع $y = \frac{x^2 - mx}{x + m}$ مفروض است $(m \neq 0)$، اگر M' و M'' نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق فرض شوند، ثابت کنید به‌ازاء جمیع مقادیر m خط $M'M''$ با امتداد ثابتی موازی است.

ـ مکان هندسی وسط نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y = \frac{2x^2 + 2m}{x - m + 1}$ را تعیین کنید.

گروه فرهنگی شهریار قم

دبیر: صدری ـ فرستنده: جوادبرقعی رضوی

منحنی نمایش تغییرات تابع $y = mx^2 - m^2x + 2$ به‌ازاء جمیع مقادیر m برمنحنی ثابتی که معادله‌اش را تعیین خواهید کرد مماس است. جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع فوق ومنحنی ثابت را وقتی درنقطه‌ای به‌طول ۲ برهم‌مماسند تعیین ورسم کنید.

دبیرستان فلسفی

دبیر: نوری

حدود m را چنان تعیین کنید که یکی از دوریشهٔ معادلهٔ

$$(m - 1)x^2 + 2mx + 2m - 6 = 0$$

بین ریشه‌های معادلهٔ $mx^2 - 3x + 3 - m = 0$ باشد.

دبیرستان کوروش کبیر گناباد

دبیر: فرشاد ـ فرستنده: حسین حیدری

منحنی نمایش تغییرات تابع زیررا رسم کنید:

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

مثلثات

دبیرستان ادیب

دبیر: طاهری ـ فرستنده: محمود تهرانی خوروندی

ـ معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل کنید (α قوسی است معلوم)

$$\cos^2 x - \cos^2 \alpha =$$
$$= 2\cos^2 x(\cos x - \cos\alpha) - 2\sin^2 x(\sin x - \sin\alpha)$$

ـ به‌فرض اینکه $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ باشد معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل وبحث کنید:

$$\sin x + 2\sin 3x + \sin 5x = 4k\sin 3x$$

ـ اولا معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل وبحث کنید:

$$m\sin^2 x - (m - 1)\sin 2x + 4m\cos^2 x = 0$$

ثانیاً به فرض اینکه x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند m را چنان تعیین کنید که:

$$\sin(x' - x'') = 3\sin(x' + x'')$$

دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر: جعفری

ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع زیررا به دقت رسم کنید.

$$y = \pm\frac{4\sin^2 x}{3 + \sin x}$$

دبیرستان رازی شیراز

دبیر: صادقی ـ فرستنده: سیروس اسفندیاری

ـ اگر x' و x'' دوجواب اصلی معادلهٔ:

$$m\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

باشد مقدار m را طوری حساب کنید که $x' - x'' = \frac{\pi}{2}$ باشد وبه‌ازاء $m = \sqrt{2}$ معادله راحل کنید.

ـ دستگاه زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} \cot g\, x = 3\, tg\, y \\ tg\, x + tg\, y = \frac{8\sqrt{3}}{3}\sin x \sin y \end{cases}$$

گروه فرهنگی شهریارقم

دبیر: امیدوار ـ فرستنده: جواد برقعی رضوی

ـ عبارت زیر را قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم کنید:

$$(tg\, x - tg\, 2x)^3 + (tg\, 2x - tg\, 3x)^3 + (tg\, 3x - tg\, x)^3$$

ـ مطلوبست حل نامعادلهٔ زیر درفاصلهٔ ربع اول دورهٔ تناوب آن.

$$\sin^2 x(\cos 2x - \cos 3x) + \sin^2 2x(\cos 3x - \cos x) +$$
$$+ \sin^2 3x(\cos x - \cos 2x) < 0$$

دبیرستان کورش کبیر گناباد

دبیر: فرشاد ـ فرستنده: حسین حیدری

ـ درمعادلهٔ $m\sin 2x + \cos 2x = 1$ پارامتر m راطوری تعیین کنید که مجموع ریشه‌های آن π باشد.

ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x - 1}}$ را درفاصلهٔ ۰ و 2π رسم کنید.

حساب استدلالی

گروه فرهنگی آذر

دبیر: صیامی- فرستنده: علیرضا بهروزیان

- عددی دردومبنای با اختلاف ۲ به‌صورتهای دو رقمی $\overline{۶a}$ و $\overline{a۶}$ نوشته شده‌است. دومبنا وعددرا تعیین کنید.

- تحقیق کنید هرعدد به‌صورت زیر مربع کامل است.

$$N = \underbrace{۹۹۹\ldots۹}_{n-۱\ \text{رقم}}\ \underbrace{۴۰۰\ldots\ldots۰}_{n-۱\ \text{رقم}}\ ۹$$

- کوچکترین عدد فردرا درمبنای ۸ آنطور تعیین کنید که اگر یك صفر بین ارقام یکان ودهگانش قراردهیم درهمان مبنا به‌اندازهٔ ۱۲۱۳۰ واحد بزرگتر گردد.

دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر: جعفری- فرستنده: علی‌اکبرسخائی

- دریك تقسیم مقسوم ۸۷۳۹۵۶ وباقیمانده‌های جزئی به‌ترتیب عبارتنداز:

$r_۱ = ۲۴۶$ ، $r_۲ = ۵۸۸$ ، $r_۳ = ۲۴۲$ و $r_۴ = ۵۴۵$

مطلوبست تعیین خارج‌قسمت ومقسوم‌علیه.

- سلسلهٔ طبیعی اعدادرا از ۱ تا ۵۲۳۱ وخود این‌عددرا بدون فاصلهٔ لازم دنبال یکدیگر نوشته‌ایم؛

الف- معلوم کنید رویهم چندرقم بکاررفته است.

ب- رقم ۳۱۰۵ ازاین‌سلسله چندرقمی‌است ومربوط به کدام عدد است.

ج- چندعدد سه‌رقمی دراین رشته‌هست که درآنها ارقام ۵ و۷ بکار نرفته است.

دبیرستان پهلوی نجف‌آباد

دبیر: آریا- فرستنده: مصطفی ایزدی

- اولاثابت کنیدکه عدد $a^{۲n+۱} - a$ بر ۶ قابل قسمت است. ثانیا ثابت کنید اگر:

$$S_۱ = a + b + c + \ldots + l$$

بر۶قابل‌قسمت باشد عدد:

$$S_{۲n+۱} = a^{۲n+۱} + b^{۲n+۱} + \ldots + l^{۲n+۱}$$

نیز بر ۶ قابل‌قسمت است.

- رقم یکان عدد زیررا تعیین کنید:

$$A = ۲^{۴n^۲+۲} + ۷^{۴n^۲+۲} + ۹^{۴n^۲+۲} + ۴^{۴n^۲+۲}$$

دبیرستان جوادی آذرشهر

دبیر: بهرامی- فرستنده: یعقوب رنجبری

- عدد سه‌رقمی $\overline{xyz}$ را طوری پیدا کنید تا رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\overline{xyz} + z = (\overline{xy})^۲ - z^۲$$

- ازمعادلهٔ زیر a وb را پیداکنید:

$$\overline{[(a+۲)(b-۶)]}_۹^۲ = ۵۱۸۴$$

دبیرستان خرد شیراز

دبیر: اردشیری- فرستندگان: غدیرصادقی، شهرام فتوتی

- عدد $\overline{mcdu}$ را طوری تعیین کنید که اولا عدد: $\overline{cd} > ۳۰$ مربع کامل بوده ثانیاً داشته باشیم:

$$\overline{du} = ۳\overline{mc} - ۴$$

- سلسلهٔ طبیعی اعداد را ازیك تاعدد چهار رقمی x و خود این عدد را به‌دنبال هم نوشته‌ایم تعداد ارقامی که بکار رفته‌اند مضربی است از $\frac{x}{۳}$، عدد x را تعیین کنید.

گروه فرهنگی شهریارقم

دبیر: صدری- فرستنده: جواد برقعی‌رضوی

- عدد چهاررقمی $\overline{mcdu}$ را چنان تعیین کنید که:

$$\overline{mcdu} = ۹۹۹ + \overline{mc} \times \overline{du}$$

- مجموع ارقام عدد $[(۱۰^{\alpha} + \alpha)^۳]_{۱۲}$ را در مبنای خودش تعیین کنید.

دبیرستان فارابی کرج

دبیر: اعتمادی- فرستنده: محسن مصباح

دوعدد را چنان تعیین کنیدکه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها ۱۲ وحاصل‌ضرب کوچکترین مضرب مشترکشان درمجموع دوعدد ۱۲۰۹۶ شود.

دبیرستان کوروش کبیر گناباد

دبیر: فرشاد - فرستنده: حسین‌حیدری

- اولین درجهٔ سانتیگراد بعداز صفرراکه معادلش نیز برحسب فارنهایت عدد صحیح باشد پیداکنید.

- عدد $A = ۱۰^{۳n} - ۱۰^{۲n}$ مفروض‌است. nراطوری تعیین کنیدکه مجموع ارقام A برابر ۵۴ باشد.

- ثابت کنید یکی‌از عبارات زیر بر۷ بخش‌پذیراست:

$$A = ۲^{۲p} + ۲p + ۱ \quad \text{و} \quad B = ۲p - ۱$$

هندسه رقومی و ترسیمی

گروه فرهنگی آریا

دبیر: مهندس محمودخوئی

الف- هندسهٔ رقومی :

واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذرا رسم کرده محل تلاقی آنهارا مرکز بنامید.

۱- نقطهٔ b_4 را به‌فاصلهٔ ۶ سمت‌چپ محور قائم و به‌فاصلهٔ ۱ بالای محور اقصر کاغذ انتخاب کرده ازاین‌نقطه صفحهٔ P را بقسمی مرور دهیدکه با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ $\alpha = 45^\circ$ بسازد ویك مقیاس شیب آن رادرسمت‌چپ کاغذ موازی‌محور اطول با ترقی رقوم پایین به‌بالا رسم کنید.

۲- نقطهٔ b_4 را حول افقیهٔ رقوم ۱ صفحهٔ P در سمت پایین کاغذ تسطیح کرده وخط $BC = 10$ رادرصفحهٔ P بقسمی رسم نماییدکه نقطهٔ c_1 درسمت راست محور اطول کاغذ قرار گیرد.

۳- برروی‌قطعه خط BC درصفحهٔ P مثلث متساوی‌الساقین ABC راکه $AB = AC$ و a سمت راست و بالای bc واقع ورقومش از b بیشتر است بقسمی رسم کنیدکه‌شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن ۲ باشد ملخص مثلث رارسم کنید.

۴- صفحهٔ Q را عمودبر صفحهٔ P بقسمی رسم کنیدکه افقیهٔ رقوم ۲ آن برمحور اقصر کاغذ منطبق باشد ویك مقیاس شیب آن را سمت راست کاغذ رسم نمایید.

۵- مثلث ABC قاعدهٔ تحتانی منشور ABCDEF می‌باشدکه یالهای جانبی آن افقی وهریك به طول ۷ بوده و وجه BFDC مستطیل می‌باشد (BF بر BC عمود است) ملخص منشور راکه fd سمت راست و بالای bc قرارگرفته رسم ومرئی ومخفی کنید.

۶- عمودمشترك خط FD را با خط AE روی شکل رسم نمایید.

۷- مقطع منشورفوق را باصفحهٔ Q تعیین وآن‌رامرئی ومخفی کنید.

۸- فاصلهٔ نقطهٔ b_4 را ازصفحهٔ Q تعیین کرده اندازهٔ حقیقی آن‌را نشان دهید.

ب- هندسهٔ ترسیمی :

مسئلهٔ ۱- نقطهٔ A را درربع اول بقسمی تعیین کنیدکه به‌فاصلهٔ ۵ از خط زمین بوده وبه‌یك‌فاصله ازافق وصفحهٔ نیمساز دوم است. نقطه را نشان دهید.

مسئلهٔ ۲- نقطهٔ A به‌بعد ۴ وارتفاع ۳ نشان داده و برروی‌خط‌زمین نقطهٔ bb' را به‌قسمی‌تعیین کنیدکه‌زاویهٔ AB با افق برابر 30° باشد.

گروه فرهنگی آذر

دبیر: ارشاقی - فرستنده : علیرضا بهروزیان

الف- هندسهٔ رقومی :

۱- صفحهٔ P به‌شیب ۱ مفروض است. مقیاس شیب آنرا درطرف چپ کاغذ باترقی رقوم ازپایین به‌بالا رسم کنید بطوری‌که‌محور اقصر کاغذ اثرصفحه باشد، نقطهٔ a_4 را دراین صفحه روی محور اطول کاغذ اختیار نموده خط a_4b_0 را در این‌صفحه طوری رسم کنیدکه طول حقیقی آن مساوی $4\sqrt{5}$ باشد ونقطهٔ b_0 طرف چپ محور اطول کاغذ قرارگیرد.

۲- نقطهٔ c_6 را در این صفحه طوری بدست آورید که $ABC = 45^\circ$ باشد.

۳- ملخص‌متوازی‌الاضلاع ABCD واقع دراین‌صفحه را رسم کنید.

۴- صفحهٔ عمود منصف خط a_4b_0 را رسم نموده یك مقیاس شیب‌آنرا دربالای کاغذرسم نمایید وآنرا Q بنامید.

۵- درصفحهٔ Q نقطهٔ g_{-2} را چنان بدست‌آوریدکه شیب خط a_4g_{-2} مساوی $\frac{3}{2}$ باشد، ازدوجواب آنراانتخاب کنیدکه نقطهٔ g ازمقیاس شیب صفحهٔ Q دورترباشد.

۶- ملخص متوازی‌السطوحی که‌یك قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع ABCD ویك یال جانبی‌آن CG باشد رسم نموده وخطوط مرئی ومخفی‌آنرا مشخص کنید.

۷- ملخص عمود مشترك خط AG را با اثر صفحهٔ P رسم نمایید.

از چهار مسئلهٔ زیر سه مسئله را انتخاب نمایید. در مسائلی‌که دوجواب دارد رسم‌یك‌جواب کافی است.

۱- صفحهٔ P به شیب یك و نقطهٔ a_1 مفروض‌اند. از نقطهٔ a_1 خطی به‌شیب $\frac{1}{2}$ به موازات این‌صفحه رسم کنید.

۲- پاره خط a_1b_2 $(ab = 4)$ ملخص یك ضلع مربع ABCD است بطوری‌که ضلع BC آن افقی است ملخص مربع را رسم کنید.

۳- درصفحهٔ P به شیب یك دو نقطهٔ a_2 و o_4 را در یك‌طرف مقیاس شیب انتخاب نمایید بطوری‌که فاصلهٔ a و o ازمقیاس شیب به‌ترتیب مساوی ۳ و۵ باشد. ملخص مثلث متساوی‌الاضلاع ABC واقع دراین‌صفحه رارسم کنید. بطوری که o_4 ملخص مرکز دایرهٔ محیطی‌آن و نقطهٔ a_2 ملخص یك رأسش باشد.

۴- دوصفحهٔ موازی P و Q بامیل 30° اختیار نمایید

بطوری‌که افقیهٔ رقوم یك صفحهٔ P افقیهٔ رقـوم ۴ صفحهٔ Q باشد، فاصلهٔ حقیقی این دوصفحه را با ترسیم ومحاسبه‌بدست آورید .

دبیرستان آیین دانش

دبیر: بنائی

الف-هندسهٔ رقومی:

محورهای اطول واقصر کاغذرا رسم‌کنید ومحل‌تلاقـی آنهارا مرکز کاغذ بنامید، واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱

۱- نقاط a_6 وb_{-2} را روی‌محور اطول به‌ترتیب زیر مرکز وبالای مرکز وبه‌فاصلهٔ ۴سانتیمتر ازمرکز کاغذ انتخاب کنید ($ab = 8$) اساس و شیب وطول حقیقی خط a_6b_{-2} را بدست‌آوریدوآنرا مدرج کنید.

۲- اگرمحوراقصرافقیهٔ H_0فرض شودعمودمشترك خط افقی H_0 وخط a_6b_{-2} را بدست‌آورید .

۳- برخط a_6b_{-2} صفحهٔ P را به اساس $i = 1$ رسم کنید ومقیاس شیب‌آنرا سمت‌چپ کاغذ رسم‌کنید.

۴- ملخص مثلث متساوی‌الاضلاع ABC($a_6b_{-2}c_2$) را درصفحهٔ P بدست‌آورید . c سمت راست مرکز می‌باشد و وسعت حقیقی مثلث را در تسطیح نشان دهید (حول لولای افقی ۶ صفحهٔ P) .

۵- ملخص نقطهٔ O محل تلاقی‌میانه‌های مثلث ABC وهمچنین ملخص دونقطهٔ s_{12} وm_{-8} بالا وپایین صفحـهٔ P رابقسمی بدست‌آوریدکه :

$$MC = SA = SB = SC = MA = MB$$

وملخص دو هرم SABC و MABC را بدست‌آورید . و اندازهٔ حقیقی OS وOM را محاسبه‌کنید.

۶-صفحات Q و R را به موازات صفحهٔ P در زیر و بالای صفحهٔ P به‌فاصلهٔ حقیقی $5\sqrt{2}$cm رسم کنید (اگـر نتوانستید محور اقصر را افقیه‌های ۸- و ۱۲ صفحات R وQدرنظر بگیرید) .

۷- مقطع دوهرم SABC وMABC را باصفحات Q و R بـه‌ترتیب مثلثهای DEF و GHI بگیرید و ملخص مرکز ثقلهای دومثلث مقطع را بدست‌آورید.

۸- قسمتی ازشکل نامبرده‌که مابین دو صفحهٔ مـوازی Q وR قراردارد (هشت‌وجهی)نمایش داده وبافرض‌کدربودن سطح‌آن‌خطوط مرئی ومخفی آنرا تمیزدهید.

۹- زاویهٔ حقیقی خط SB را باصفحهٔ P بدست‌آورید وبا α نشان دهید .

اپور شمارهٔ ۲

ملخص مکعب ABCDEFGH را بدست آورید در صورتی‌که زاویهٔ صفحهٔ قاعدهٔ فوقانی ABCD باصفحهٔ افق ۴۵° بوده و اساس قطـر a_0c_6 برابر ۲ باشد و آنرا مرئی و مخفی نمایید.

دبیرستان‌انوشیروان دادگر

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف- هندسهٔ رقومی :

واحد سانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محور اقصر کاغذ افقی و محور اطول را قائم اختیارکرده محل تلاقی‌آن‌هارامرکز کاغذ بنامید .

۱- نقطهٔ d_6 را به‌فاصلهٔ ۳ زیر مرکز کاغذ روی محور اطول انتخاب‌کرده از این‌نقطه‌خطd_6a_2 را به‌شیب $p = \frac{1}{2}$ به‌قسمی رسم‌کنیدکه‌نقطهٔa روی‌محوراقصرسمت‌راست‌مرکز کاغذ قرارگیرد.

۲- برخط a_2d_6 صفحهٔ P راکه با صفحهٔ افق تصویـر زاویهٔ $\alpha = 45°$ می‌سازد وافقیه‌های‌آن بامحوراقصر کوچکترین زاویهٔ ممکنه را می‌سازد مرور داده و یك مقیاس شیب صفحه را سمت‌چپ کاغذ نشان دهید.

۳-ازنقطهٔ DدرصفحهٔPخطی‌رسم‌کنیدکه باامتدادافقیه‌های صفحهٔمزبور درفضا زاویهٔ ۴۵° بسازد واثر افقی این‌خط سمت چپ محورقائم کاغذقرارگیرد و بر روی آن نقطهٔc_2 را انتخاب نمایید .

۴- برسه‌نقطهٔ A وC وD متوازی‌الاضلاع ABCD را به‌قسمی‌بسازیدکه‌AC قطرش باشد ملخص‌متوازی‌الاضلاع را نشان دهید.

۵- مساحت حقیقی متوازی‌الاضلاع را بـا تسطیح آن حول افقیهٔ ۶ درسمت پایین کاغذ نشان دهید .

۶- متوازی‌الاضلاع ABCD قاعـدهٔ تحتـانی منشور ناقص قائمی است‌که یالهای جانبی‌آن به‌ترتیب $AE = 10$، $BF = 10$، $CG = 5$ و$DH = 5$ می‌باشند رسم‌کرده وآنرا مرئی ومخفی‌کنید.

۷- مقطع منشور ناقص مزبوررا باصفحهٔ افقی رقوم ۴ تعیین‌کرده وآن‌را مرئی ومخفی‌کنید.

۸- عمودمشترك‌خط BF وخط AC را روی‌شکل‌رسم نمایید .

ب- هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ۱- فاصلهٔ نقطهٔ A ازخط‌زمین ۵ وبه‌فاصلهٔ۴/۵ ازصفحهٔ نیمساز دوم است. نقطه را درربع اول نشان دهید به قسمی‌که بالای نیمساز اول باشد .

مسئلهٔ۲- نقطهٔ A را به بعد ۳ در صفحهٔ نیمساز اول

نشان داده ازاین‌نقطه خط AB را بقسمی رسم کنیدکه با افق زاویهٔ °۳۰ بسازد وB روی‌خط زمین باشد.

دبیرستان البرز

دبیر: مهندس محمودخوئی

الف- هندسهٔ رقومی :

واحد سانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم‌کرده محل تلاقی‌آن‌ها را مرکز کاغذ بنامید .

۱- نقطهٔ a_2 به‌فاصلهٔ ۱ سمت چپ کاغذ روی محور اقصر مفروض است . از این نقطه خط a_2c_6 را بـه شیب $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$ به‌قسمی رسم نمایید که تصویرش موازی محور اطول کاغذ وترقی رقومش ازبالا به پایین باشد. اندازهٔ حقیقی آنرا با تسطیح روی صفحهٔ افقی ۳ نشان دهید.

۲- صفحهٔ عمودمنصف‌قطعه‌خط AC را رسم ویك‌خط بزرگترین‌شیب آن‌را درسمت راست کاغذ مشخص نمایید.

۳- قطعه خط AC قطرلوزی ABCD می‌باشدکه از دو مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده و AB = AC ورأس b_2 آن سمت چپ a_2c_6 قرار گرفته،ملخص لوزی را رسم نموده ویك مقیاس شیب‌صفحهٔ لوزی را درسمت پایین و چپ کاغذ نشان دهید.

۴- وسعت حقیقی لوزی ABCD را با تسطیح روی صفحهٔ افقی رقوم ۵ درسمت پایین کاغذ مشخص‌کنید .

۵- ازنقطهٔ C خطCG رابه‌قسمی رسم‌کنیدکه‌تصویرش cg عمودبر cb بوده و درفضا زاویهٔ حقیقی °۴۳ = GCD درجه باشد و برروی آن نقطهٔ g_{10} را بقسمی تعیین‌کنید که ترقی رقوم خط CG ازچپ به‌راست وپایین به‌بالا باشد.

۶- ملخص‌متوازی‌السطوح ABCDEFGH رارسم وآن را مرئی ومخفی نموده ومقطع آن‌را با صفحهٔ قائمی‌که اثرش بر محور اقصر کاغذ منطبق است یافته وسعت حقیقی مقطع را با تسطیح‌آن درسمت بالای کاغذ نشان دهید.

۷- مقیاس شیب صفحه‌ای را رسم‌کنیدکه به‌یك فاصله ازنقاط A، B، C، D وE بوده ومقطع‌اش بامتوازی‌السطوح فوق یك مثلث باشد.

ب- هندسهٔ ترسیمی :

مسئلهٔ۱- فاصلهٔ نقطهٔ A واقع درربع اول از صفحهٔ نیمساز دوم برابر ۳ وتفاضل فواصل‌آن ازخط‌زمین و صفحهٔ نیمساز اول برابر ۱/۵ می‌باشد.نقطه‌رانشان‌دهید.

مسئلهٔ۲- برروی خط مفروض DD′ نقطه‌ای تعیین کنیدکه فاصله‌اش ازصفحهٔ نیمساز اول دوبرابر ارتفاعش‌باشد.

مسئلهٔ۳- نیمرخ aba′b′ را بقسمی رسم کنید که فاصله‌اش ازخط زمین برابر ۵ ودرربع اول واقع و زاویه‌اش باصفحهٔ قائم دوبرابر زاویه‌اش با افق باشد .

دبیرستان‌پیشاهنگ وجام‌جم

دبیر: مهندس محمودخوئی

الف- هندسهٔ رقومی :

واحدسانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محورهای اطول واقصر کاغذرا رسم‌کنید، محل تلاقی‌آنهارا مرکز کاغذبنامید .

۱- خط m_5n_5 برمحوراقصر کاغذمنطبق‌است‌mرا سمت چپ وnراسمت راست‌مرکز به‌فاصلهٔ‌دلخواه‌اختیارکنیدبراین‌خط افقی‌صفحهٔ P را بقسمی‌مروردهیدکه شیب آن۱ = p بوده‌ویك مقیاس شیب‌آن را درسمت چپ‌کنار کاغذ بقسمی‌رسم‌نمایید‌که ترقی رقوم آن ازبالا به‌پایین باشد.

۲- ازنقطهٔA واقع‌برخط MN درصفحهٔPکه‌تصویرش به‌فاصلهٔ۵ سمت چپ‌مرکز کاغذ واقع‌است خط AD را بقسمی مروردهیدکه شیب آن$p=\frac{\sqrt{3}}{3}$ بوده وبرروی آن نقطهٔ d_8 راکه تصویرش سمت راست a واقع است انتخاب نمایید.

۳- ازنقطهٔ A در صفحهٔ P خط دیگر AB را بقسمی رسم‌نمایید‌که زاویهٔ‌حقیقی°۶۰ = $\widehat{DAB}$ ونقطهٔb_4سمت‌راست a واقع باشد.

۴- ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD راکه AC قطر آنست رسم نموده مساحت حقیقی آن‌را درسمت پایین کاغذ نشان دهید .

۵- ازنقطهٔ A خط AE راکه تصویرش موازی محور اطول وشیب آن$p=\frac{2}{3}$ وترقی رقومش ازپایین به‌بالاست‌رسم کنید. صفحهٔ Q را به‌موازات‌صفحهٔ P بقسمی رسم‌کنید کـه افقیهٔ رقوم ۱۵آن برمحور اقصر کاغذ منطبق بوده و یـك‌خط بزرگترین شیب آن را سمت‌راست کاغذ رسم‌نمائید.

۶- نقطهٔ E فصل‌مشترك خط AE را باصفحهٔQبدست آورید و ملخص منشور ABCDEFGH راکه قاعده‌اش ABCD و یال جانبی آن AE باشد رسم و مرئی و مخفی نمایید .

۷- عمودمشترك خط‌الرأس DH و خط MN رارسم کنید .

۸- مقطع منشوررا باصفحهٔ افقی رقوم ۷ بیابید و آنرا مرئی ومخفی‌نمایید.

ب- هندسهٔ ترسیمی :

مسئلهٔ۱- فاصلهٔ نقطهٔ A واقع درربع اول ازخط‌زمین ۵ وفاصله‌اش ازنیمساز اول دوبرابر ارتفاعش می‌باشد ملخص

نقطه را نشان دهید .

مسئلهٔ۲ ـ خط DD' مفروض است؛ آثار آنرا تعیین کرده وبرروی‌آن نقطه‌ای بیابید که به‌یك‌فاصله از افق وصفحهٔ نیمساز اول‌باشد .

گروه فرهنگی جاویدان

دبیر : مهندس‌محمودخوئی

الف‌ـ هندسهٔ رقومی :

محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم‌کنید. محل تلاقی آن‌ها مرکز کاغذواحد سانتیمترـ مقیاس ۱:۱ می‌باشد.

۱ـ صفحهٔ P را به‌شیب $p = ۱$ بقسمی رسم‌کنید کـه افقیهٔ رقوم ۲آن‌برمحوراقصر کاغذمنطبق باشدیك‌خط‌بزرگترین شیب صفحهٔ P را درسمت چپ‌کنار کاغذ باترقی رقوم ازبـالا به‌پائین رسم‌نموده ودراین‌صفحه نقطهٔ $a_۵$ را به‌فاصلهٔ ۲ سمت چپ محور اطول انتخاب نمائید.

۲ـ ازنقطهٔ $a_۵$ درصفحهٔ P خط $a_۵b_۱$ را بقسمی رسـم کنیدکه زاویهٔ حقیقی AB با افقیه‌های صفحه برابر °۶۰ و b سمت چپa باشد .

۳ـ برروی قطعه خط AB در صفحهٔ P مثلث ABC را بقسمی بناکنیدکه ضلع BC افقی بوده و c سمت راست b واقع و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC بـرابـر ۲ می‌باشد. ملخص مثلث ABC را رسم‌کنید ومساحت حقیقـی‌آن را در سمت پائین کاغذ نشان دهید.

۴ـ متوازی‌الاضلاع ABCDراکه‌ACقطرآن‌می‌باشد رسم وملخص‌آنرا کامل‌کنید .

۵ـ ازنقطهٔ $b_۱$ خطی رسم‌کنیدکه تصویـرش با امتداد محور اقصرکاغذ زاویهٔ °۶۰ بسازد وازچپ به‌راست و پائین به‌بالا ادامه یابد. برروی این خط نقطهٔ $f_۴$ را بقسمی تعییـن کنیدکه‌خط BF درفضا برAB عمودگردد.

۶ـ متوازی‌السطوح ABCDEFGH راکه‌قاعده‌اش متوازی‌الاضلاع ABCD ویال جانبی آن BF می‌باشد رسم وملخص‌آن‌را مرئی ومخفی‌کنید .

۷ـ صفحهٔ Q را بقسمی رسم کنید که خط بزرگتریـن شیب‌آن دربالای کاغذ موازی محور اقصربوده وترقی‌رقومش ازچپ به راست وافقیهٔ رقوم ۴آن برمحور اطول منطبق‌باشد اساس صفحهٔQ رابرابر ۲/۵ انتخاب‌نمایید.

۸ـ مقطع متوازی‌السطوح را باصفحهٔ Q یافته وآنرا مرئی ومخفی‌کنید .

ب‌ـ هندسهٔ ترسیمی :

مسئلهٔ۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ A ازخط زمین‌برابر ۵ وفاصله‌ـ اش ازصفحهٔ نیمساز اول دو برابر بعدش می‌باشد نقطه را در ربع اول نشان دهید.

مسئلهٔ۲ ـ خط DD' مفروض است، آثار آنرا تعیین کنید و روی آن نقطهٔ aa' را بقسمی تعیین‌کنیدکه بعدش $\frac{۲}{۳}$ ارتفاعش باشد.

دبیرستانهای جعفری‌ـ محمودزاده‌ـ نقش‌جهان

دبیر: مهندس محمودخوئی

الف‌ـ هندسهٔ رقومی :

واحد سانتیمترـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطـول کاغذ را رسم‌کنید محل تلاقی‌آن‌هارا مرکز کاغذ بنامید .

۱ـ نقطهٔ $b_۸$ رابه فاصلهٔ ۴ زیرمرکز کاغذ برروی‌محور اطول اختیارکرده‌ازاین نقطه خط AB را به شیب $p = \frac{۱}{۲}$ به قسمی رسم نمائیدکه‌تصویرش $ab = ۸$ و a سمت‌چپ‌مرکز کاغذ روی محور اقصر قرارگیرد ورقومش ازرقوم b کمتر باشد.

۲ـ برخط AB صفحهٔ P را بقسمی مروردهیدکه بـا صفحهٔ مقایسه زاویهٔ $\alpha = ۴۵°$ بسازد ویك‌خط بزرگترین‌شیب آن‌را سمت چپ کاغذ باترقی رقوم ازبالا به‌پایین نشان دهید.

۳ـ ازنقطهٔ B در صفحهٔ P خط دیگر BC را بقسمـی رسم‌کنیدکه باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ $\alpha = ۳۰°$ بسازد و$c_۵$سمت راست $b_۸$ قرارگیرد .

۴ـ ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD راکه درصفحهٔP واقع است وAC قطرش می‌باشد رسم نموده ووسعت حقیقی آن را با تسطیح حول افقیهٔ ۷درسمت پایین کاغذ نشان‌دهید.

۵ـ برروی متوازی‌الاضلاعABCD متوازی‌السطوح ABCDEFGH راکه خط BF یال جانبی آن بر BAدر فضا عمودبوده وشیب خط BF برابر $p = \frac{۲}{۳}$ مـی‌باشد رسم کرده وملخص‌آن را مرئی ومخفی نمائید به‌فرض‌آنکه رقـوم F برابر ۱۴ باشد .

۶ـ مقطع متوازی‌السطوح فوق را باصفحهٔ افقی‌رقوم ۶ تعیین کنید .

۷ـ خط بزرگترین شیب صفحهٔ EFGH را درسمـت راست کاغذ نشان داده وآنرا Q بنامید وفاصلهٔ دو صفحهٔ P و Q را تعیین‌کرده اندازهٔ حقیقی آن‌را نشان دهید.

ب‌ـ هندسهٔ ترسیمی :

مسئلهٔ۱ـ بعد نقطهٔ A برابر ۳ وفاصله‌اش ازصفحـهٔ نیمساز ربع دوم دو برابر ارتفاعش می‌باشد. نقطهٔ A را در ربع اول نشان دهید .

مسئلهٔ۲ـ خط DD' مفروض است. آثـار آنرا نشان دهید وبرروی‌آن نقطه‌ای تعیین‌کنیدکه به‌یك فاصله از صفحهٔ نیمساز اول وقائم تصویرباشد.

مسئلهٔ۳ـ نیمرخ $aba'b'$ مفروض است. ازنقطهٔ aa' نیمرخ دیگر AC را بقسمی رسم کنیدکه زاویهٔ حقیقی بین‌دو نیمرخ 30° باشد.

دبیرستان خرد شیراز

دبیر: کهنگی ـ فرستندگان: غدیر صادقی، جلیل حدیقه

الف ـ هندسهٔ رقومی:

۱ـ محورهای اطول واقصر کاغذرارسم کرده‌مرکز کاغذرا ω بنامید. نقاط a_2 و b_6 را طوری تعیین کنیدکه a بر نیمساز اول به‌فاصلهٔ۴ از ω و b برنیمساز دوم، ضمناً شیب خط AB برابر $\frac{1}{2}$ باشد.

۲ـ بر AB دوصفحه باشیب واحد می‌گذرد. نقاط M و N را روی آثار این دو صفحه طوری اختیار کنید که mn موازی محوراطول به‌فاصلهٔ ۲ ازآن ودرطرف چپ این محور و m بالای‌محوراقصر کاغذ باشد.

۳ـ نقطهٔ C را روی MN طوری اختیار کنید که $MCA = 60^\circ$ و $\overline{C\omega}$ حداقل باشد.

۴ـ ملخص مثلث AMB را کامل‌کرده آنرا قاعدهٔ منشوری اختیارکنیدکه MC یك‌یال جانبی آن‌باشد، ملخص این‌منشور راکامل‌کرده یالهای‌آنرا مرئی ومخفی نمائید.

۵ـ مقطع این منشوررا باصفحهٔ‌افقی رقوم ۳ تعیین کنید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ ازنقطهٔ‌مفروض aa' واقع درناحیهٔ اول خطی‌رسم کنیدکه تصویر قائمش با خط‌الارض زاویهٔ α ساخته بعد اثر افقیش l باشد.

۲ـ برخط مفروض $\triangle\triangle'$ نقطه‌ای تعیین کنیدکه‌تفاضل بعد وارتفاعش l باشد.

۳ـ ازنقطهٔ مفروض aa' خطی رسم کنیدکه خط‌الارض را قطع‌کرده زاویهٔ بین تصاویرآن α باشد.

دبیرستان دکترنصیری (شبانه)

دبیر: بنائی

الف ـ هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اطول واقصر کاغذ رارسم کنید ومحل تلاقی‌آنها را مرکز کاغذ بنامید.

۱ـ ملخص نقطهٔ a_0 را روی محور اطول و ۴cm بالای مرکز ونقطهٔ b_4 را روی محور اقصر ۴ سانتیمتر سمت چپ مرکز انتخاب‌کنید اساس وشیب و اندازهٔ خط AB را بدست‌آورید وسپس ازنقطهٔ a_0 خط a_0d_4 را به‌اساس۲ بقسمی رسم‌کنیدکه d سمت راست مرکز روی محور اقصر کاغذ قرار گیرد.

۲ـ اگردوخط متقاطع a_0b_4 و a_0d_4 نمایش صفحهٔ P باشد مقیاس شیب این‌صفحه را درسمت چپ کاغذ رسم‌کنید و اساس وشیب این‌صفحه را بدست‌آورید، سپس زاویهٔ حقیقی دو خط AD و AB را بدست‌آورید و با β نشان دهید.

۳ـ ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD را در صفحهٔ P بدست آورید و نقطهٔ m_4 را روی خط b_4d_4 بقسمی بدست آوریدکه فاصلهٔ حقیقی M ازدوخط AD وAB برابرباشد.

۴ـ صفحهٔQ رابه‌موازات‌صفحهٔP بقسمی‌رسم کنیدکه‌محور اقصر کاغذ افقیهٔ ۲۴ آن باشد سپس نقطهٔ e_{14} را در صفحهٔ Q طوری بدست‌آوریدکه $ME = 10\sqrt{2}$ باشد.

۵ـ ملخص منشور ABCDEFGH را بدست‌آورید درصورتی‌که متوازی‌الاضلاع ABCD قاعدهٔ‌تحتانی ویك‌یال آن AE باشد سپس‌آنرا مرئی ومخفی نمایید.

۶ـ فاصلهٔ حقیقی دو صفحهٔ موازی P و Q را بدست آورید. همچنین ملخص نقطهٔ s_0 را درصفحهٔ P بقسمی بدست آوریدکه زاویهٔ حقیقی خط SE باصفحهٔ P برابر 60°باشد.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ ازنقطهٔ$A(e=3$ و$h=4)$ خط $aba'b'$ رابقسمی رسم‌کنیدکه با صفحهٔ افقی تصویر زاویهٔ 30° بسازد و صفحهٔ نیمساز ربع اول را درنقطهٔ $B(e=1$ و $h=1)$ قطع کند.

۲ـ خط نیمرخ $aba'b'$ وخط قائم dd' مفروضندبراین دوخط یك‌خط مواجه hh' متکی‌کنید (عمود مشترك دو خط مفروض)

۳ـ ازنقاط$A(e=1$ و $h=4)$ و$B(e=4$ و $h=1)$ خطوط مواجه hh' وdd' را رسم‌کنید سپس‌آثار صفحهٔ‌مواجه PQ' راکه از دوخط موازی مفروض می‌گذرد بدست‌آورید ونشان دهیدکه زاویهٔ صفحهٔ مواجه PQ' باصفحهٔ افق 45° است.

۴ـ فصل مشترك صفحهٔ $P\alpha Q'$ راکه برصفحهٔ نیمساز ربع دوم عمود است (آثارش برهم منطبق است) با صفحات نیمساز ربع‌اول ودوم بدست‌آورید.

۵ـ خط $aba'b'$ مفروض است. نقطهٔ $A(0$ و $0)$ و $B(4$ و$4)$ ورابط bb'، ۴ سانتیمتر سمت راست aa'می‌باشد نقطهٔ cc' را روی xy بقسمی بدست آوریدکه $AB \perp BC$ باشد. سپس ملخص مستطیل ABCD را معین‌کنید.

دبیرستان رازی

دبیر: مهندس‌محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محور اقصر افقی ومحور قائم کاغذ را رسم‌کرده محل تلاقی آن‌هارا مرکزبنامید.

۱- نقطهٔ c_2 به‌فاصلهٔ ۴ سمت چپ مرکز کاغذ برروی محور اقصر واقع است. خط AC را به‌شیب $p=\frac{4}{3}$ بقسمی رسم کنید که تصویرش بر محور اقصر منطبق بوده و a_{11} سمت راست c_2 و رقومش‌از c بیشتر باشد ملخص AC را رسم‌کرده آن‌را روی‌صفحهٔ رقوم۲ تسطیح کنید وطول حقیقی‌آن را نشان دهید.

۲- صفحهٔ عمودمنصف قطعه خط AC را رسم و یك مقیاس شیب‌آن‌را سمت پائین کاغذ نشان دهید.

۳- قطعه‌خط AC قطرلوزی ABCD است‌که تصویر قطر BD بامحوراقصر زاویهٔ °۱۳۵ ساخته وامتدادش ازراست به‌چپ وازپائین به‌بالاممتد است ونقطهٔ b_{10} آن دربالای محور اقصر کاغذ قرار می‌گیرد ملخص لوزی رارسم‌کنید.

۴- اندازهٔ حقیقی زاویهٔ CAD را با تسطیح آن در سمت پائین کاغذ مشخص نمائید.

۵- ازنقطهٔ B خطی رسم‌کنیدکه شیب‌آن $p=\frac{\sqrt{5}}{5}$ بوده ونسبت به‌خط BC عمود باشد برروی این‌خط نقطهٔ f_7 راکه تصویرش دربالای محور اقصرواقع وبه‌محور قائم کاغذ نزدیکتر است تعیین نمائید.

۶ - لوزی ABCD قاعدهٔ متوازی‌السطوح ABCDEFGH می‌باشدکه خط BF یال جانبی آنست متوازی‌السطوح‌را رسم ومرئی ومخفی کنید.

۷- مقطع متوازی‌السطوح را باصفحه‌ای قائم که‌اثرش به‌موازات محوراقصر وبه‌فاصلهٔ ۵ در بالای محور اقصر واقع است‌یافته ووسعت حقیقی آن‌رادرسمت بالای کاغذ نشان‌دهید.

ب- هندسهٔ ترسیمی:

۱- نقطهٔ aa' را به‌فاصلهٔ ۵ ازخط زمین بقسمی‌تعیین کنیدکه فاصله‌اش ازصفحهٔ‌نیمسازدوم‌دوبرابر ارتفاعش باشد و درناحیهٔ‌اول‌قرارگیرد.

۲- ازنقطهٔ aa' به‌بعد۳ وارتفاع۴ خطی رسم‌کنیدکه خط زمین‌رادر bb' قطع‌کرده وباآن زاویهٔ °۳۰ بسازد.

۳- برروی خط مفروض DD' نقطه‌ای پیداکنید که به‌فاصلهٔ ۱ زیر نیمساز اول‌باشد.

دبیرستانهای‌شاهپور ورازی شیراز

دبیر: جوادپور: فرستنده: سیروس اسفندیاری

الف- هندسهٔ‌رقومی:

محورهای اطول واقصر کاغذ را رسم‌کنید واحدسانتیمتر ومقیاس ۱:۱ است.

۱- صفحهٔ P به‌شیب ۱ مفروض است - مقیاس شیب آن‌رادرطرف‌چپ کاغذ باترقی رقوم ازپائین به‌بالا رسم‌کنید بطوری‌که افقیهٔ رقوم ۴آن برمحور اقصر کاغذ منطبق باشد ونقطهٔ a_1 را دراین‌صفحه روی محوراطول اختیارکرده ازاین نقطه خط a_1b_4 را دراین صفحه طوری رسم‌کنیدکه‌تصویرش بامحور اطول کاغذ زاویهٔ °۶۰ بسازد و b طرف راست مرکز کاغذ قرارگیرد.

۲- طول حقیقی وشیب و اساس خط a_1b_4 را حساب کنید.

۳- ازنقطهٔ a_1 خطی بر صفحهٔ P عمود نموده‌ازاین‌خط صفحهٔ Q را به‌شیب۱/۵مرور دهید ازدوجواب‌آن راکه‌افقیهٔ رقوم۴ این‌صفحه محور اقصر کاغذ را درطرف چپ مرکز کاغذ قطع‌کند اختیار نموده ویك‌مقیاس شیب‌آن‌رادرپائین کاغذ رسم کنید.

۴- نقطهٔ d_4 را روی فصل مشترك دوصفحهٔ P و Q اختیار نموده درصفحهٔ P برروی خط a_1d_4 مثلث ADC را چنان رسم‌کنیدکه شعاع دایرهٔ محیطی آن ۴ بوده و تصویر نقطهٔ C روی محوراطول‌کاغذ و بالای محور اقصر باشد.

۵- ازنقطهٔ a_1 خط a_1e_{-2} را به‌شیب ۰/۵ درصفحهٔ Q رسم‌کنید بطوری‌که e طرف چپ محور اطول کاغذ باشد سپس ملخص منشوری راکه یك‌قاعده‌اش چهارضلعی ABCD ویك یالش AE باشد رسم نموده وخطوط مرئی ومخفی را مشخص‌کنید.

ب- هندسهٔ ترسیمی:

۱- برنیمرخ $aba'b'$ نقطه‌ای تعیین‌کنید که فاصله‌اش ازصفحهٔ نیمساز ربع دوم برابر ارتفاعش باشد.

۲- ملخص‌نقطه‌ای‌راتعیین‌کنیدکه‌مجموع بعدوارتفاعش ۵ ونسبت فواصلشان ازصفحات نیمساز $\frac{2}{3}$ باشد.

۳- قرینهٔ خط $\triangle\triangle'$ رانسبت به‌صفحات نیمسازفرجه‌های اول ودوم تعیین‌کنید.

گروه فرهنگی شهریارقم

دبیر: بابایی- فرستنده: جواد برقعی‌رضوی

الف- هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر ومقیاس ۱:۱ است.

۱- محورهای اطول واقصر کاغذ را رسم‌کرده ومرکز آنرا نقطهٔ a_2 انتخاب‌کنید. ازمرکز کاغذ خط d راطوری انتخاب‌کنیدکه باجهت مثبت محور اقصر زاویهٔ °۴۵ بسازد. این خط را تصویر خطی فرض‌کنیدکه با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ °۳۰ می‌سازد آنرا مدرج‌کنید به‌فرض‌اینکه ترقی رقوم‌ازپائین به‌بالا باشد.

۲- برخط d صفحه‌ای مرور دهید که با صفحهٔ افق زاویهٔ 45° بسازد، ازدو صفحه آنرا اختیار کنید که مقیاس شیب آن با جهت منفی محور اطول زاویهٔ بیشتری می‌سازد واین صفحه را P بنامید .

۳- نقطهٔ b_5 خط d را پیدا کنید و درصفحهٔ P مثلث متساوی‌الاضلاع ABC رارسم کنید که طول ضلع آن AB باشدو رأس C آن درتصویر بالای تصویر AB قرار گیرد .

۴- ملخص منشور قائم و مثلث‌القاعدهٔ ABCDEF راکه طول یال جانبی آن ۱۰ می‌باشد رسم کرده ویالهای مرئی ومخفی آنرا مشخص کنید (رقوم D وE وF ازرقوم A و B وC بیشتراست).

ب- هندسهٔ ترسیمی

۱- پاره‌خط افقیه‌ای به‌طول معلوم l رسم کنید که برخط غیرمشخص DD' وقائم مفروض VV' متکی باشد .

۲- ازنقطهٔ مفروض aa' افقیه‌ای رسم کنید که فاصلهٔ اثر قائمش ازنقطهٔ مفروض bb' واقع درصفحهٔ تصویر قائم برابر طول معلوم l باشد.

۳- مطلوبست رسم آثار صفحه‌ای که برنقاط aa' واقع درصفحهٔ افق وbb' واقع درصفحهٔ قائم وcc' واقع درصفحهٔ نیمسازربع دوم مرورمی‌کند (نقاط بریك استقامت نیستند).

۴- درصورتی که vv' وhh' آثارقائم وافقی خط مفروض dd' باشند براین خط صفحهٔ $P\alpha Q'$ را چنان مرور دهید که داشته باشیم $\frac{\alpha v'}{\alpha h}=k$ (k مقدارثابت دلخواهی است) تمام جوابها را مشخص کنید.

دبیرستانهای طبری- سپاس (دارالفنون)

دبیر: بنائی

الف- هندسهٔ رقومی

از دو اپور زیر یکی رابه‌دلخواه رسم کنید.

محورهای اطول واقصر کاغذرا رسم کنید ومحل تلاقی آنهارا مرکز کاغذ انتخاب کنید- واحدسانتیمتر مقیاس ۱:۱

۱- ملخص نقطهٔ a_{10} را روی محوراطول وبالای مرکز به‌فاصلهٔ ۵ سانتیمتر ازمرکز کاغذ انتخاب کنید وازاین نقطه خط $a_{10}b_5$ رابقسمی رسم کنید که محور اقصر را درسمت راست مرکز کاغذقطع کندباشرط $AB=5\sqrt{3}\ cm$ اساس وشیب این خطرا بدست آورید وآنرا مدرج کنید.

۲- اگر نقطهٔ C برمرکز کاغذ باشد ملخص مستطیل ABCD را بدست آورید، درصورتی که AC قطر باشد .

۳- مقیاس شیب مستطیل $a_{10}b_5c_0d$ را P نامیده ودرسمت چپ کاغذ کشیده ومساحت مستطیل رامحاسبه نمایید ووسعت حقیقی مستطیل را درصفحهٔ افقی ۵ نشان دهید (لولا را افقی ۵ صفحهٔ P انتخاب کنید).

۴- برخط $a_{10}b_5$ صفحهٔ Q را به‌شیب یك مروردهید و مقیاس شیب آنرا در سمت راست کاغذرسم کنید وترقی رقومش ازپائین به‌بالا می‌باشد ونقطهٔ f_{12} را درصفحهٔ Q بقسمی بدست آورید که زاویهٔ حقیقی $FBA=45^\circ$ باشد و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث BFA را M نامیده وملخص نقطهٔ M رابدست آورید .

۵- ملخص منشور ABCDEFGH را بدست آورید درصورتی که ABCD قاعدهٔ تحتانی وBF یکی ازیالهای آن باشد. اگرقاعدهٔ فوقانی AEHD توخالی بوده وحاکی ماوراء باشد بافرض کدربودن سطح جسم آنرا مرئی ومخفی کنید.

۶- عمودمشترك خط $a_{10}c_0$ را باافقیهٔ ۵ صفحهٔ ۵ به‌محور اقصر قراردارد بدست آورید.

۷ - زاویهٔ دو صفحهٔ P وQ (مسطحه)را با α نشان دهید .

اپور شمارهٔ ۲

ملخص مکعب ABCDEFGH را بدست آورید درصورتی که مربع $a_0b_0c_4d_4$ قاعدهٔ فوقانی بوده و: $AB=4\sqrt{2}\ cm$ باشد .

ب- هندسهٔ ترسیمی

ازنقطهٔ $A(e=1$ و $h=3)$ خط $aba'b'$ بقسمی رسم کنید که باصفحهٔ افق زاویهٔ 30° ساخته وصفحهٔ نیمساز ربع دوم رادرنقطهٔ $B(e=-1$ و $h=1)$ قطع کند .

دبیرستان فارابی کرج

دبیر: اعتمادی- فرستنده: محسن مصباح

الف- هندسهٔ رقومی

محورها را رسم کنید واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ است.

۱- مقیاس شیب صفحهٔ P را به‌شیب یك درطرف چپ کاغذ موازی بامحور اطول باترقی رقوم از پائین به‌بالا رسم کنید بطوری که افقیهٔ رقوم یك آن ازمرکز کاغذ بگذرد ونقطهٔ o_2 را درصفحه چنان تعیین کنید که تصویرش برمحور اطول واقع باشد.

۲- o_2 مرکزلوزی ABCD واقع درصفحهٔ P است که قطر AC ازآن به‌طول حقیقی $6\sqrt{10}$ بوده وشیبش $p=\frac{1}{3}$ است ورقوم A کمتراز C وتصویر A سمت چپ وC سمت راست محور اطول ورقوم B برابر ۲ است. ملخص لوزی را کامل کنید .

۳- از o_2 خطی عمودبرصفحهٔ P اخراج کنید وروی آن

نقطهٔ F را چنان اختیار کنید که $OF = ۵\sqrt{۲}$ بوده و F زیر صفحه باشد .

۴- ملخص منشوری که یك قاعدهٔ آن لوزی ABCD ویك یالش BF باشد رسم نمائید .

۵- خطوط مرئی ومخفی منشوررا مشخص کنید.

۶ - اوساط یالهای ae و cg را به‌هم وصل کرده آنرا اثرصفحهٔ قائم V فرض نموده ومقطع آنرادر منشور تعیین و اندازهٔ حقیقی مقطع رانشان دهید .

ب ــ هندسهٔ ترسیمی

۱ ــ نقاط (۲ و ۳ و ۱) A و (۱ و۵ و۱) B را رسم کنید سپس فصل مشترك خط نیمرخ AB را با نیمساز وجه‌ها پیداکنید .

۲ــ ازنقطهٔ (۳و۲و۰) A یك خط افقی که با صفحهٔ قائم زاویهٔ °۴۵ درجه بسازد و یك جبهی که با صفحهٔ افقی زاویهٔ °۳۰ بسازد رسم کنید .

۳ــ نقاط ۱- (۵/۱و۱و۱ -)A و ۲ (۴ و ۵ و۲) B رارسم کنیدسپس فصل مشترك خط AB را با نیمساز فرجهٔ اول و دوم پیداکنید .

دبیرستان کوشش

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف ــ هندسهٔ رقومی :

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز کاغذ بنامید .

۱- صفحهٔ P راکه باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ $\alpha = ۴۵^\circ$ می‌سازد بقسمی رسم کنید که افقیهٔ رقوم ۲ آن برمحوراقصر کاغذمنطبق بوده باشد یك مقیاس شیب صفحه‌را سمت چپ کنار کاغذ باترقی رقوم ازپائین به‌بالا رسم نمائید ونقطهٔ $o_۲$ را در این صفحه بر روی محور اطول اختیارکنید .

۲- نقطهٔ $o_۲$ درصفحهٔ P مرکزشش‌ضلعی ABCDEF واقع درصفحهٔ P می‌باشد که قطر $AD = ۸$ ونقطهٔ a سمت چپ و d سمت راست o واقع می‌باشد قطر AD افقی بوده وضلع آن BC برروی اثرصفحهٔ P واقع می‌گردد بقسمی که زاویهٔ $ABC = ۱۳۰^\circ$ و $BCD = ۱۲۰^\circ$ و b سمت چپ c واقع است ونقطهٔ a سمت چپ b قرارمی‌گیرد ملخص شش ضلعی را رسم نمایید .

۳- صفحهٔ Q را به موازات صفحهٔ P به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ درزیرآن رسم‌نموده یك‌مقیاس شیب صفحهٔ Q راسمت راست کاغذ نشان دهید .

۴- قطعه‌خط AA' راکه تصویرش موازی محوراطول کاغذ و شیب آن $p = \frac{۲}{۳}$ است بقسمی رسم کنید که ترقی رقومش ازپائین به‌بالا باشد ونقطهٔ A' درصفحهٔ Q قرارگیرد.

۵- منشور $A'B'C'D'E'F'$ ، ABCDEF را که درآن شش‌ضلعی فوق قاعدهٔ تحتانی وخط AA' یال‌جانبی آن می‌باشد کامل کرده وبه‌فرض آنکه رقوم A' برابر ۶ باشدملخص منشوررا رسم‌کرده وآنرا مرئی ومخفی کنید.

۶- مقطع منشور فوق را باصفحهٔ قائمی که اثرش بر محور اطول کاغذ منطبق است یافته وسعت حقیقی آن‌راسمت چپ کاغذ نشان دهید .

۷- عمودمشترك خط EF ویال CC' را روی شکل رسم کنید .

ب ــ هندسهٔ ترسیمی

۱ــ نقطهٔ aa' رادرربع اول بقسمی تعیین کنید که مجموع بعد وارتفاع آن برابر ۶ وفاصله‌اش ازنیمسازدوم دوبرابرارتفاعش باشد.

۲ــ خط DD' مفروض است؛ آثارآن را تعیین کنید و برروی آن نقطه‌ای تعیین کنید که به‌فاصلهٔ ۴ ازاثرقائم خط باشد. ملخص نقطه رانشان دهید .

۳ــ خط نیمرخ $aba'b'$ مفروض است . برروی آن نقطه‌ای بیابید که‌فاصله‌اش ازاثرقائم دوبرابر ارتفاع آن‌باشد.

دبیرستانهای نظام و مهرباختر

دبیر: بنائی

الف ــ هندسهٔ رقومی:

از دواپور زیر یکی‌را رسم کنید.

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آنهارا مرکز کاغذ بنامید.

۱- ملخص نقطهٔ $a_{-۴}$ را زیر مرکز وروی محوراطول به‌فاصلهٔ ۴ سانتیمتر ازمرکز انتخاب کنیدواز این نقطه خط $a_{-۴}c_۰$ را به‌اساس $i = ۲$ بقسمی رسم کنید که C روی محور اقصر و سمت راست مرکز قرارگیرد.

۲- برخط $a_{-۴}c_۰$ صفحهٔ P را به‌اساس $i = ۱$ مرور دهید واز دوجواب آنکه مقیاس‌شیبش با محور اطول موازی است درسمت چپ کاغذ رسم کنید .

۳- اگرنقطهٔ b برمرکز کاغذباشد ملخص لوزی ABCD را بدست‌آورید درصورتی که خط AC قطرباشد.

۴- مقیاس‌شیب لوزی $a_{-۴}b_۲c_۰d$ را R نامیده‌درسمت راست کاغذ نمایش دهید ووسعت حقیقی لوزی را در تسطیح حول‌لولای $H_{-۶}$ صفحهٔ R درپائین کاغذ نمایش‌دهید ومساحت لوزی را حساب کنید.

۵ـ صفحهٔ Q را به‌موازات صفحهٔ P و به‌فاصلهٔ حقیقی $2\sqrt{2}$ cm درزیر صفحهٔ P رسم کنید سپس قرینهٔ نقطهٔ b_2 را نسبت به‌صفحهٔ Q که نقطهٔ s_4 است بدست‌آورید.

(اگر نتوانستید نقطهٔ s را بالای‌مرکزروی محوراطول به‌فاصلهٔ ۶cm ازمرکز انتخاب‌کنید $sb = 6$)

۶ـ ملخص منشور مایل ABCDEFGH را بدست آورید درصورتی‌که نقطهٔ s_4 مرکز لوزی EFGH باشد سپس مرئی ومخفی‌آنرا تمیز دهید.

۷ـ عمودمشترك خط‌افقی H'_4 صفحهٔ Q که برمحور اقصر قراردارد باخط a_4b_2 بدست‌آورید.

۸ـ وسعت‌حقیقی‌مقطع قائم‌منشورفوق‌را بدست آورید درصورتی‌که اثر صفحهٔ قائم خط XY بوده وروی محوراطول قراردارد.

۹ـ اندازهٔ زاویهٔ حقیقی خط AB را باصفحهٔ P بدست آورید.

اپور شمارهٔ ۲

ملخص مکعب ABCDEFGH را بدست آوریدبقسمی‌که ملخص سه‌نقطهٔ b_4، d_4 و e_4 دردست باشدبا شرط $(BD = BE = ED = 5cm)$ و نقطهٔ A بالای صفحهٔ مثلث BDE می‌باشد.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

ازنقطهٔ $A(2 = e$ و $3 = h)$ خط $aba'b'$ را بقسمی رسم‌کنیدکه باصفحهٔ‌افق زاویهٔ $30°$ بسازد وصفحهٔ نیمسازاول را درنقطهٔ $B(e = 5$ و $h = 5)$ قطع‌کند.

گروه فرهنگی هدف

دبیر: مهندس‌محمودخوئی

الف ـ هندسهٔ‌رقومی:

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم‌کرده محل تلاقی‌آنهارا مرکز کاغذ بنامید. کادر ۲۵ × ۲۰ انتخاب‌شود.

۱ـ صفحهٔ P را به‌شیب $p = 1$ بقسمی رسم‌کنیدکه‌افقیهٔ رقوم۳آن برمحور اقصر کاغذ منطبق بوده‌یك مقیاس شیب‌آن را درسمت‌چپ کاغذ باترقی رقوم ازبالابه‌پائین رسم نمائید.

۲ـ ازنقطهٔ b_8 واقع درصفحهٔ P که برمحور اطول کاغذ منطبق است خط BF راکه‌تصویرش $bf = 8$ با افقیه‌های‌صفحهٔ P زاویهٔ $30°$ می‌سازد درصفحهٔ P بقسمی‌رسم‌کنیدکه نقطهٔ f سمت راست مرکز کاغذ قرارگیرد رقوم f راکه ازb کمتراست تعیین نمایید.

۳ـ عمودداست‌بقسمی رسم‌کنیدکه a سمت‌چپ b قرارگیرد وملخص مستطیل ABFE راکه AF قطرآن می‌باشدرسم‌ورقوم e را تعیین‌کنید.

۴ـ وسعت حقیقی مستطیل ABFE را با تسطیح حول افقیهٔ۶ درسمت پائین کاغذ نشان دهید.

۵ـ برخط BF صفحهٔ Q را بقسمی مروردهیدکه شیب آن $p = \frac{2}{3}$ بوده ومقیاس‌شیب‌آن راکه تقریباً موازی محور اقصر کاغذاست درسمت پائین کاغذ رسم‌کنید.

۶ـ ازنقاط A وE دوخط برصفحهٔP عمودکرده وفصل مشترك‌آنهارا باصفحهٔ Q تعیین‌نموده وبه‌ترتیب‌نقاط C وD بنامید ومنشور ABCDEF را رسم‌کنید.

۷ـ صفحهٔ R را به‌فاصلهٔ $2\sqrt{2}$ موازی صفحهٔP ودر بالای آن‌مروردادهویك مقیاس شیب‌آنرا درسمت راست کاغذ رسم‌کرده ومقطع منشور فوق را باصفحهٔ R تعیین نمائید و منشورمزبور ومقطع آن‌را به‌فرض‌آنکه‌منشور مجوف و فقط صفحهٔ Q حاکی ماوراء وسایر وجوه وصفحهٔ‌قاطع R کدرفرض شوند مرئی ومخفی‌نمائید.

ب ـ هندسهٔ‌ترسیمی:

مسئلهٔ۱ـ فاصلهٔ‌نقطهٔ A تاخط زمین۵ ونسبت‌فواصلش ازصفحهٔ‌افق تصویروصفحهٔ نیمساز دوم برابر $\frac{2}{3}$ است. نقطه را در ربع اول نشان دهید.

مسئلهٔ۲ـ خط غیرمشخص DD' مفروض است، آثار آنرا تعیین‌کرده وبرروی آن نقطهٔ cc' راکه به‌فاصلهٔ۳ ازاثر قائم خط می‌باشد تعیین‌نمائید.

مسئلهٔ۳ـ نیمرخ $aba'b'$ مفروض‌است. برروی‌آن‌نقطهٔ cc' را بقسمی تعیین کنید که فاصله‌اش از اثر قائم نیمرخ دو برابر فاصلهٔ‌آن تاصفحهٔ افق تصویرباشد.

رسم فنی

دبیرستان دولتی اروندرود (شبانه)

دبیر: بنائی

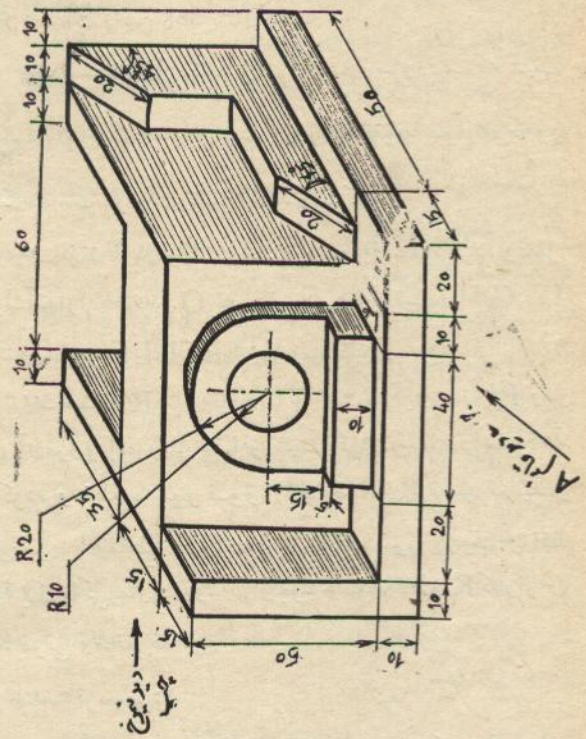
مطلوبست:

۱ـ تصویرقائم از دیدA.

۲ـ تصویر افقی.

۳ـ تصویر نیمرخ چپ.

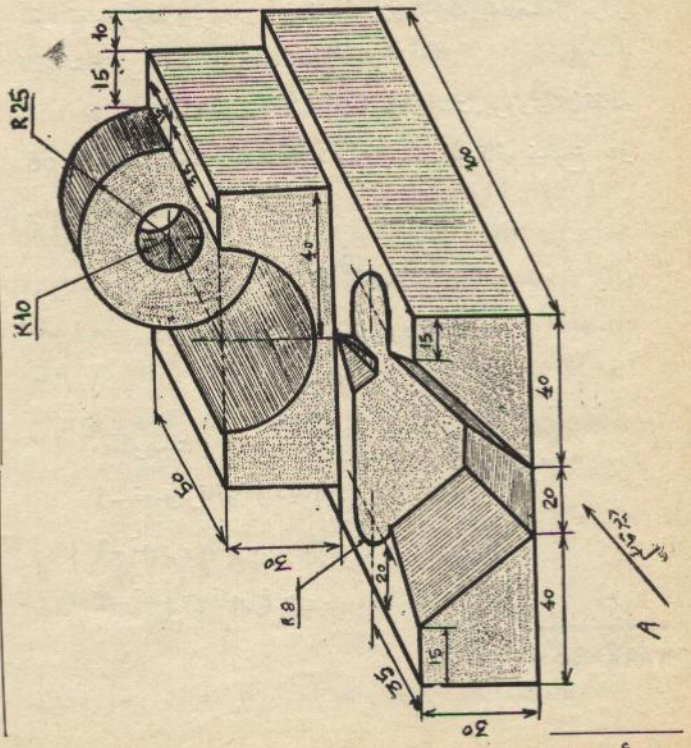
۴- اندازه گذاری کامل ورعایت قواعد ترسیم ومحور تقارن وظرافت خطوط ونظافت رسم.



دبیرستانهای طبری و سپاس (دارالفنون)

دبیر: بنائی

مطلوبست تصویر قائم ازدید A وتصویر افق‌وتصویر نیمرخ‌چپ‌واندازه گذاری کامل .

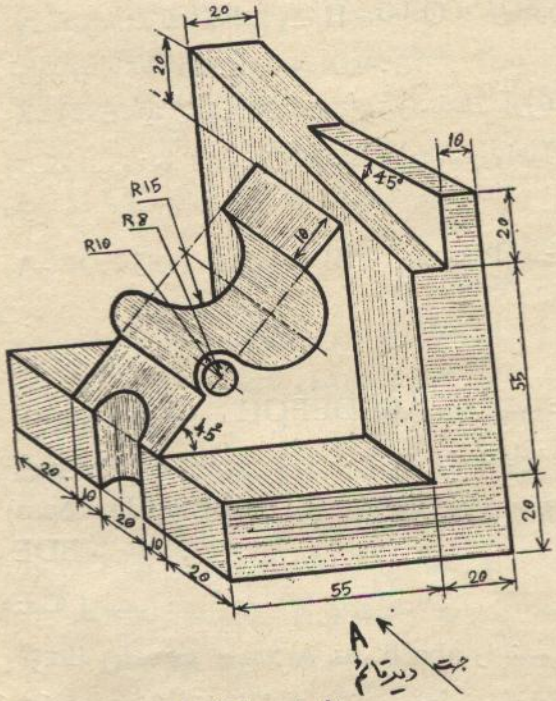


دبیرستان مهرباختر

دبیر: بنائی

مطلوبست :

۱- تصویر قائم ازدید A. ۲-تصویر افق. ۳-تصویر نیمرخ چپ- با اندازه گذاری کامل .



مسائل مکانیک

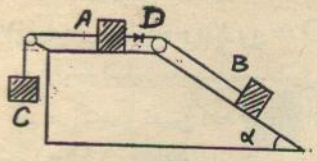
گروه فرهنگی آذر

دبیر: پیله‌رودی- فرستنده: علیرضا بهروزیان

- مسیر متحرك M سطح شیبدار با اصطکاك AB وسطح افقی بدون اصطکاك BC می‌باشد. این متحرك از نقطهٔ A بدون سرعت اولیه شروع به حرکت نموده و پس از طی مسیر ABC از نقطهٔ C از سطح افقی BC جدا می‌شود ودر فضا حرکت پرتابی می‌کند. به فرض آنکه AB = ۲۵m و BC = ۲۵m و ضریب اصطکاك $K = \frac{۱}{۲}$ و شیب سطح $sin\alpha = ۰/۶$ و $g = ۱۰m/s^۲$ باشد: اولاسرعت را درنقطهٔ B وزمان حرکت را در مسیر ABC حساب کنید. ثانیاً مختصات زمانی و معادلهٔ مسیر متحرك را پس ازجداشدن از صفحهٔ BC بنویسید. ثالثاً معین کنید درچه فاصله‌ای ازپای قائم نقطهٔ‌پرتاب متحرك به‌زمین‌اصابت می‌کند وسرعت‌متحرك در این لحظه و همچنین زمان این حرکت چقدر است وبالاخره تانژانت زاویهٔ سرعت را هنگام برخورد بازمین باامتداد افق

تعیین کنید. فاصلهٔ نقطهٔ C از سطح زمین $CD = 5m$ است.

ـ سه وزنه باجرمهای مساوی هریك برابر $M = 3Kg$ مطابق شکل در روی سطح شیبدار بدون اصطکاك، سطح افق بدون اصطکاك و امتداد قائم حرکت می‌کند. زاویهٔ شیب $\alpha = 30^\circ$ می‌باشد. اولا شتاب حرکت و کشش نخ را در طرفین وزنهٔ A حساب کنید و اختلاف کشش را در طرفین وزنهٔ A مستقیماً بدست آورید. ثانیاً پس از ۳ ثانیه درنقطهٔ D نخ رامی‌سوزانیم معادلات حرکت وزنه‌ها را از این به‌بعد بنویسید.



$g = 10m/s^2$

دبیرستان حکیم نظامی قم

دبیر: کبیری ـ فرستنده: جواد برقعی رضوی

اتومبیلی به‌جرم ۱۰تن درروی جاده افقی که اصطکاك آن ۴۰۰۰ نیوتن است ازحال سکون به‌حرکت درآمده و پس از طی مسافت ۵۰ مترسرعتش به $36Km/h$ رسیده است. اولا نیروی موتوررا حساب کنید. ثانیاً در این موقع اتومبیل به جاده شیبداری به شیب ۵٪ رسیده و در امتداد آن بالا می‌رود (اصطکاك همان مقدار سابق است) نیروی‌موتورچقدر باشد تا اتومبیل باهمان شتاب به‌حرکت خود ادامه دهد. ثالثاً پس از ۱۰ ثانیه حرکت روی سطح شیبدار راننده‌موتور را خاموش کرده وترمز می‌کند و اتومبیل پس‌ازطی مسافت ۴۰متر می‌ایستد. نیروی‌ترمز را حساب کنید. $g = 10m/s^2$

دبیرستان شاهپور کرمانشاه

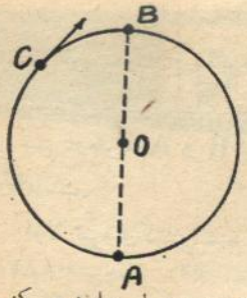
دبیر: کاظمیان ـ فرستنده: داریوش نوید

اتومبیلی به جرم ۲تن درروی جاده‌ای افقی که ضریب اصطکاك آن برابر ۰/۵ است بدون سرعت اولیه‌دارای‌حرکتی تند شونده می‌باشد. نیروی موتوری برابر با $4000Kgf$ به آن وارد می‌شود. بعد از ۲ثانیه راننده موتور را خاموش می‌کند و نیروی ترمزی برابر $1000Kgf$ به اتومبیل‌وارد می‌کند. مطلوبست مسافت طی‌شده درثانیه سوم ازمبدأحرکت $(g = 10m/s^2)$

گروه فرهنگی شهریارقم

دبیر: کبیری ـ فرستنده: جواد برقعی‌رضوی

گلوله‌ای به جرم ۱۰۰ گرم را به انتهای نخی به‌طول ۲ متر بسته ودرصفحهٔ قائم با سرعت $\frac{5}{2\pi}$ دور درثانیه می‌چرخانیم. اولا موقعی که گلوله در بالاترین وضعیت قرار دارد (نقطهٔB) چه نیرویی به دست‌ما وارد می‌کند (برحسب نیوتن) ثانیاً وقتی گلوله در نقطهٔ C قراردارد وبه طرف بالا می‌رود (فاصلهٔ AC در مدت $\frac{3\pi}{20}$ ثانیه پیموده‌شده است) نخ را رها می‌کنیم. اگر ارتفاع نقطهٔC اززمین ۷/۵ متر باشد معلوم کنید گلوله درچه فاصله‌ای از قائم نقطهٔ‌پرتاب به زمین می‌رسد ثالثاً ارتفاع نقطهٔ اوج را اززمین بدست‌آورید



$g = 10m/s^2$

دبیرستان‌فارابی کرج

دبیر: وطنچی ـ فرستنده: محسن مصباح

معادلهٔ حرکت جسمی به صورت $x = At^n$ است. n را طوری تعیین کنیدکه سرعت جسم پس از ۱۰ ثانیه‌چهار برابرسرعت آن پس از پنج ثانیه باشد.

مسائل فیزیك

دبیرستان شاهپور شیراز

دبیر: فیروزمند ـ فرستنده: سیروس اسفندیاری

نقطهٔ M به فاصلهٔ 5cm از دو منبع ارتعاش A و B واقع شده‌است. معادلات امواج رسیده از منبع A و B به نقطهٔ M در لحظهٔ t به ترتیب عبارتند از:

$$x = 2\sin.(6.\pi t - \frac{\pi}{6})$$

$$x = 2\sin.(6.\pi t + \frac{\pi}{2})$$

معین کنید:

۱ـ دامنهٔ نوسان نقطهٔ M را.

۲ـ معادلات ارتعاشی دومنبع‌ارتعاش A وB را.

۳ـ اختلاف فازنقطهٔ M از هریك‌ازدومنبع ارتعاش‌را.

۴ـ آیا می‌توان دامنه و اختلاف‌فازنقطهٔ M را ازدو منبع ارتعاش A و B به‌طریق رسم هندسی فرنل تعیین‌نمود؟ چگونه

دامنه‌های A و B برحسب cm بوده و سرعت سیر ارتعاشات در محیط $18m/s$ می‌باشد.

گروه فرهنگی مهدخرد شیراز

فرستندگان: غدیرصادقی، شهرام فتوتی

سیمی به طول یك مترو به جرم ۵ گرم روی صوت سنجی بین دوخرك A و B کشیده شده و صوت اصلی حاصل از آن، do است.

اولا نیروی کشش سیم راحساب کنید ($la_2 = 435$)

ثانیاً- خرك متحرك رادر $\frac{1}{3}$ طول سیم قرار می‌دهیم و قسمت AC راکه طول آن برابر $\frac{1}{3}$ طول سیم AB است به ارتعاش درمی‌آوریم. ارتفاع صوت حاصل ونام آنرا تعیین کنید در این حالت نام صوت حاصل از ارتعاش $\frac{2}{3}$ طول باقیمانده (BC) چه خواهدبود.

مسائل شیمی

دبیرستان آذر

دبیر: نمازی- فرستنده: علیرضابهروزیان

-درحدود $200^\circ C$، ۶۰٪ ملکولهای پنتاکلرورفسفر به PCl_2 و Cl_2 تجزیه می‌شودچگالی مخلوط گازی‌شکل درحال تعادل ($PCl_5 \rightleftarrows PCl_2 + Cl_2$) رادرحدود دمای فوق، نسبت به‌هوابدست آورید. ثابت صعودنقطهٔ جوش برای بنزن ۲۵۶۰ است، -۳/۲ گرم گوگرد را در ۴۰ گرم بنزن حل می کنیم نقطهٔ جوش بنزن $0/8^\circ$ بالا می‌رود. فرمول ملکولی گوگرد را مشخص کنید.

-مخلوطی ازدوکربور اتیلنی گازی‌شکل بانسبت ضرایب ملکولی $\frac{1}{4}$ داریم که‌چگالی مخلوط نسبت به گازئیدروژن ۱۵/۴ است کربورهای اتیلنی را مشخص کنید. برای ئیدروژناسیون یك‌حجم ازمخلوط گازی‌شکل فوق‌چه حجمی گازئیدروژن لازم است.

دبیرستان شاهپور شیراز

دبیر: کیان- فرستنده: سیروس اسفندیاری

از الکل اشباع‌شده یك ظرفیتی A به‌کمك اجسام آبگیر جذب‌آب کرده‌ایم هیدروکربور B نتیجه شده است. این هیدروکربور را با محلول قلیایی پرمنگنات پتاسیم ترکیب کرده‌ایم جسم آلی C بدست آمده که ۵۱/۶۱ درصد اکسیژن دارد. فرمول اجسام A و B و C را تعیین کنید.

گروه‌فرهنگی‌شهریارقم

دبیر: رادمنش- فرستنده: جواد برقعی رضوی

۶۲/۵ سانتیمتر مکعب الکل اتیلیك ۹۲ درجه را با مقدار لازم اسیدسولفوریك‌حرارت می‌دهیم تاتمام‌الکل‌قسمتی به اتیلن وقسمتی به اکسیداتیل تبدیل شود. اتیلن‌حاصل را می‌سوزانیم وزن‌آب تولید شده برابر ۱۸ گرم می‌شود معین کنید: اولا- حجم اتیلن تولید شده رادر ۲۷/۳ درجه‌حرارت‌و ۷۶۰ میلیمتر فشار جیوه ($D = 0/8$). ثانیاً- وزن الکل‌تبدیل شده به اکسیداتیل. ثالثاً- اکسیداتیل حاصل‌را در یك کیلوگرم آب حل می کنیم، تعیین کنید نقطهٔ انجماد آب‌چه مقدارتنزل می کند ($K = 1850$ آب)

دبیرستان قطب دزفول

دبیر: فردوسی- فرستنده: غلامرضابدلی

50^{cc} مخلوطی ازمتان و استیلن واتیلن را با 150^{cc} اکسیژن‌مخلوط‌کرده در آب سنجی محترق و دستگاه راسرد می‌کنیم گازهای حاصل رااز پتاس عبور می‌دهیم ۱۷۶ میلی گرم به وزن ظرف اضافه می‌شود و 20^{cc} گاز باقیمانده‌که جذب فسفر می‌شود. در صدحجمی هریك‌از گازها را درمخلوط‌حساب کرده چگالی مخلوط را نسبت به CO_2 حساب کنید.

حل مسائل (دنبالهٔ صفحهٔ ۱۶۱)

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n\left(\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

$$S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

برای مجموع S' باید داشته‌باشیم:

$$n^2 - (2a+1)n + a + b + \frac{1}{3} = n(n+1)$$

$$\begin{cases} 2a+1 = -1 \\ a+b+\frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ و } b = \frac{2}{3}$$

$$S' = 1\times 2 + 2\times 3 + \dots + n(n+1) = n\left(\frac{n^2}{3} + n + \frac{2}{3}\right)$$

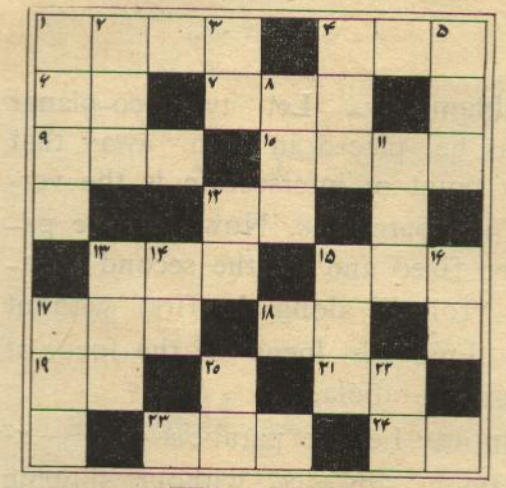
$$S' = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

پاسخ تستهای ریاضی

۵۲- د	۵۳- ب	۵۴- الف	۵۵- ج
۵۶- ب	۵۷- ب	۵۸- د	۵۹- ج
۶۰- الف	۶۱- ج	۶۲- د	۶۳- ب
۶۴- ج	۶۵- د	۶۶- د	۶۷- الف
۶۸- الف	۶۹- د	۷۰- ب	۷۱- الف
۷۲- ب	۷۳- ب	۷۴- ج	۷۵- ب
۷۶- د	۷۷- د	۷۸- ج	۷۹- ب

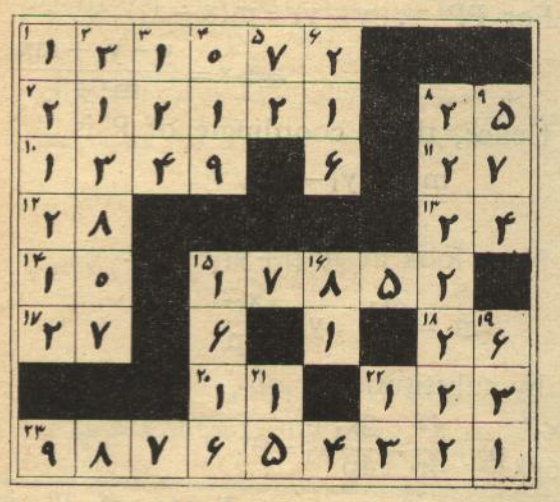
جدول اعداد

طرح از: غلامحسین رحم‌دل (تاریخ وصول به‌دفترمجله: ۱۳۴۹/۸/۲۵)



افقی: ۱- به‌صورت $\overline{abab}$ که $\overline{ab}$ زوج و توان چهارم است. ۴- به‌صورت $\overline{aba}$ و مجذور $\overline{aa}$ است. ۶- جملهٔ ششم از تصاعد حسابی که جملهٔ بیستم آن ۴۰ و جملهٔ دهم آن ۲۰ است. ۸- به‌صورت $\overline{aba}$ و توان سوم است. ۱۰- هرگاه این عدد را از متمم حسابیش کم کنیم ۴۹۴ بدست آید. ۱۱- مقلوب عدد ۱۱ افقی. ۱۳- همان عدد ۶ افقی. ۱۵- حاصل‌ضرب سه عدد اول که تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند و رقم دهگان آن برابر با مجموع دو رقم دیگر آن است. ۱۷- متمم حسابی عدد ۴ افقی. ۲۰- مقلوب عدد ۱۵ افقی. ۲۲- عدد ۱ افقی تکرار این عدد است. ۲۳- خارج‌قسمت کامل تقسیم آن برمجموع رقمهایش مکعب کامل است. ۲۵- دوبرابر عدد ۱۳ افقی. ۲۷- رقمهای آن یکسانند و تجزیهٔ آن به‌عوامل اول به‌صورت a^3b است. ۲۸- متمم حسابی آن دوبرابر عدد ماقبل آن است.

قائم: ۱- به‌صورت $\overline{aabb}$ است که $\overline{ab}$ همان عدد ۶ افقی است. ۲- توان چهارم رقم یکان خود است. ۳- به‌صورت a^2b تجزیه می‌شود و درضمن مقلوبش مجذور است. ۴- یك واحد کمتر از عدد ۲۰ افقی. ۵- همان عدد ۴ افقی. ۹- دوبرابر عدد ۱۵ افقی. ۱۲- اگر یك واحد به رقم سدگان آن اضافه شود هفت برابر یك نهم عدد ۲۷ افقی بدست آید. ۱۳- جذر عدد ۴ افقی. ۱۵- یك واحد بیشتر از عدد ۱۵ افقی. ۱۶- دوبرابر عدد ۲۲ افقی. ۱۷- رقم سدگان آن مجموع دو رقم دیگر و رقم یکان آن یك هفتم مجموع دو رقم دیگر است. ۱۹- متمم حسابیش کعب رقم یکان آن است. ۲۰- حاصل‌ضرب عدد ۱۳ قائم در عدد ۲۲ افقی. ۲۴- مقلوب عدد ۱۹ قائم. ۲۶- مقلوب عدد ۲۸ افقی.



حل جدول شمارهٔ قبل

تستهای ریاضی (دنبالهٔ صفحهٔ ۱۶۷)

۸۸/۶۸- پنج خط $\triangle_1$، $\triangle_2$، $\triangle_3$، $\triangle_4$ و $\triangle_5$ در نقطهٔ O متقاربند و خط D_1 بوسیلهٔ چهار خط $\triangle_1$، $\triangle_2$، $\triangle_3$ و $\triangle_4$ و خط D_2 بوسیلهٔ چهارخط $\triangle_1$، $\triangle_2$، $\triangle_3$ و $\triangle_5$ به‌توافقی قطع شده است. دوخط $\triangle_4$ و $\triangle_5$:

الف- برهم عمودند ب- طرفین $\triangle_1$ واقعند

ج- طرفین $\triangle_3$ واقعند د- برهم منطبقند.

۸۸/۶۹- دایرهٔ C به‌مرکز O و به‌شعاع R مفروض است. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های به‌شعاع R که بر دایرهٔ C عمودند دایره‌ای است به‌مرکز O و به‌شعاع:

الف- $R\sqrt{2}$ ب- $2R$

ج- $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ د- $2R\sqrt{2}$

۸۸/۷۰- مستطیل ABCD مفروض است. مکان هندسی نقاط M بقسمی دوخط MA و MC نسبت به‌دوخط MB و MD شعاعهای مزدوج توافقی باشند:

الف- بیضی محیطی مستطیل است.

ب- بیضی محاطی مستطیل است.

ج- بیضی است که مستطیل درداخل آن قرار دارد.

د- بیضی نیست.

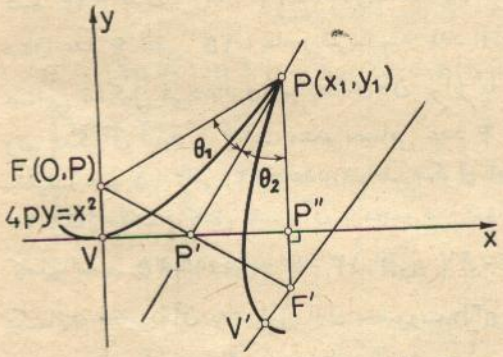
PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 105 – Let two co-planar parabolas be placed in such away that the only point of intersection is the vertices of the parabolas. Now, let one parabola be fixed and let the second parabola be "rolled" along the first without slipping. Find the locus of the focus of the second parabola.

Solution: Let the parabola $4py = -x^2$ "roll" along $4py = x^2$ without slipping (Fig.)

(1) $\widehat{VP} = \widehat{V'P}$, since there is no slipping

(2) $\overline{FP} = \overline{F'P}$ because of original symmetry with the x-axis.



(3) PP' is tangent to both curves since P is the only point of contact. Note that arcs are symmetric about $P'P$.

(4) $\theta_1 = \theta_2$ by original symmetry with the x-axis.

(4) $\triangle FPF'$ is isosceles by (2).

(6) PP' is the perpendicular bisector of $\overline{FF'}$ by (4).

Now let the slope of $\overline{PP'}$ be m then the slope of $\overline{FF'}$ is $-\frac{1}{m}$ since $\overline{PP'} \perp FF'$.

For $\overline{FF'}$, $y = \frac{-x}{m} + p \Rightarrow x = me - my$

For $\overline{PP'}$, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\Rightarrow x = \frac{y - y_1 + mx_1}{m^2 + 1}$$

Hence, the y-coordinate of P' is

$$\frac{m^2p + y_1 - mx_1}{m^2 + 1}$$

Now look at $m^2p + y_1 - mx_1$.

$$m = \frac{2x_1}{4p}, \quad y_1 = \frac{x_1^2}{4p}$$

and by substitution

$$\frac{4x_1^2}{16p^2}p + \frac{x^2}{4p} - \frac{2x_1}{4p}x_1 = 0$$

wich says that y-coordinate of P' is always 0. Now, since P' bisects $\overline{FF'}$ by (6) we can construct $\overline{F'P''}$ perpendicular to the x-axis to from $\triangle VFP' = \triangle P''F'P'$ ann $\overline{VF} = \overline{P''F'}$. Reverting to coordinates, we see that the y-coordinate of F' is always $-p$. Hence the locus of the focus of $4py = -x^2$ is $L = \{(x, y) | y = -p\}$

پاسخهای رسیدهٔ مربوط به

مسئلهٔ مسابقه

به‌دنبال اسامی که درشمارهٔ ۸۷ درج شد، اسامی کسان دیگری که حل‌مسئلهٔ‌مسابقه‌را فرستاده‌اند درزیر درج‌می‌شود. راه‌حلهایی که با استفاده از روابط متری انجام گرفته بودکنار گذاشته شد وازدرج‌اسامی فرستندگان این راه‌حلها خودداری گردید.

سید عمید امیرخلیلی دبیرستان علوی مشهد ـ خلیل کریمی دبیرستان شهیدی قزوین ـ احمدصرامی دبیرستان‌حکیم سنائی اصفهان ـ محمد اژدری هنرستان صنعتی شرکت نفت اهواز ـ سیامک‌صمیمی دبیرستان سعدی اصفهان ـ عظیم رضائی شجاعی دبیرستان جهان‌علوم اردبیل ـ مهری فروهیده‌رشت ـ قاسم‌ضرغامی سلطان‌احمدی ـ خشایار خواجیان دبیرستان هدف شمارهٔ۳ ـ سیدعلیرضا ظهیری دبیرستان حکیم‌سنائی‌اصفهان

چهارمین کنفرانس ریاضی کشور

دانشگاه تهران

چهارمین کنفرانس ریاضی کشور به‌مدت چهار روز از تاریخ ۸ فروردین تا ۱۱ فروردین ۱۳۵۲ در دانشگاه تهران تشکیل خواهد شد. برنامهٔ کنفرانس به‌شرح زیر خواهد بود .

۱ـ کنفرانسهای اختصاصی صبح که توسط چندتن از ریاضیدانان برجستهٔ جهان ایرادخواهدشد وهرکدام یك‌ساعت طول خواهدکشید.

۲ـ کنفرانسهای بعدازظهر توسط ریاضی‌دانان ایرانی و خارجی شرکت‌کننده ایراد خواهدشد وهرکدام نیم‌ساعت‌طول خواهدکشید .

۳ـ جلسات میزگرد .

سخنرانی‌ها به‌یکی اززبان‌های‌فارسی ـ فرانسه ـ انگلیسی ایراد خواهدشد.

علاقمندان به‌شرکت درکنگره به‌نشانی زیرمکاتبه‌فرمایند :

گروه ریاضی دانشگاه تهران ـ خیابان شاهرضا