



دوره هشتم - شماره ۸ شماره مسلسل: ۸۵ خرداد - تیر ۱۳۵۱

در این شماره:

- | | |
|-----|---|
| ۴۴۹ | عبدالحسین مصطفی
درباره مندرجات یکان سال ۵۰ |
| ۴۵۰ | — |
| ۴۵۱ | ابوالقاسم قربانی
خلاصه کتاب مأخذات ارشمیدس |
| ۴۵۶ | احمد بیرشک
نهادها در ریاضیات |
| ۴۶۰ | ترجمه: داویدریحان
استدلال در ریاضی، جنده‌مثال از استقراء |
| ۴۶۸ | ترجمه: علیرضا توکلی صابری ۳۶۳ مکرر
دیوار نور
مکانیک کوانتم چیست؟ |
| ۴۷۲ | محمد رکنی قاجار
محاسبات تقریبی |
| ۴۷۶ | تنظيم از داویدریحان
حل مسئله نمونه، یک نامساوی و نتایج آن |
| ۴۷۸ | « |
| ۴۷۹ | آموژش نظریه مجموعه‌ها با روش برنامه‌ای
ترجمه: مصطفی |
| ۴۹۵ | تنظيم از
تست هوش |
| ۴۹۷ | — |
| ۵۰۴ | ترجمه بررسی نیا
تست شیمی |
| ۵۰۶ | — |
| ۵۰۹ | — |
| ۵۱۱ | خسر و افتخاری
پاسخهای صحیح تستها |
| ۵۱۲ | — |
| ۵۱۳ | — |
| | Problems & Solutions
جدول اعداد
فهرست مندرجات دوره هشتم یکان |

دو نشریه جدید یکان:

تسهیه‌های هوش

مجموعه ۱۰ تست شامل ۳۹۰ مسئله جالب و سرگرم کننده

برای آنکه هر شخص ضریب هوشی خود را تعیین کند

قابل استفاده داوطلبان کنکور

تألیف: پروفسور ایزنک روانشناس انگلیسی

ترجمه: باقر مظفرزاده

بع: ۶۰ ریال

تسهیه‌های چند جوابی

تهدیدی

پیخصوص امتحانات سطح پیشرفته انگلیس

قابل استفاده داوطلبان کنکور

تألیف: ویتفیلد، نوال استادان دانشگاه کمبریج

ترجمه: عطاء الله بزرگ نیا

مشترکان یکان که به تهیه انتشارات یکان با استفاده از ۲۵٪ تخفیف مایل باشند، در تهران مستقیماً به دفتر مجله مراجعت کنند و مسکنان شهرستانها وجه را به صورت تمبر باطل نشده یا به وسائل دیگر ارسال دارند تا کتابهای درخواستی به نشانی آنان فرستاده شود.

آهورش سیاده

نظریه مجموعه‌ها

با روش برنامه‌ای

مر بوط به صفحه‌های ۴۷۶، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲

YEKAN
Mathematical Magazine

Volume VIII, number 8. June. 1972
subscription : 3\$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذربایجان: ۸۲۵۹۲۸

به دنبال آخرین موضوع مجله قبل، اولین موضوع این مجله را در دفترچه بنویسید. یک بار به دقت آنرا بخوانید. به سادگی خواهید فهمید که جای خالی را با چه چیز باید پر کنید یا اگر پرسشی شده است پاسخ آن چیست. بعد از آنکه این پاسخ را در زیر پرسش نوشتید، یا جای خالی را با موضوع مربوط پر کردید، آنگاه صفحه مجله را برگردانید و درست در پشت محل همان موضوع، پاسخ آن را مشاهده کنید. اگر پاسخی که شما نوشته اید درست بوده است، آنگاه موضوع شماره بعد را ایافته به ترتیب بالا آنرا در دفترچه خود بنویسید و پاسخ آن را معلوم کنید. اما اگر پاسخ شما درست نبوده است، موضوع قبلی را مجدداً و با دقت بیشتر بخوانید تا پاسخ درست آنرا دریابید. بعد از اطمینان از درست بودن پاسخ هر موضوع، موضوع شماره بعد آن را بنویسید و پاسخ دهید.

توجه داشته باشید که قبل از آنکه پاسخ هر موضوع را شخصاً معلوم نکردد اید به پشت صفحه مراجعت نکنید. با این روش، بدون نیاز به معلم و یا به کتاب دیگر، مفاهیم تازه‌ای را به سادگی و به آسانی خواهید آموخت.

چند گانگی در تعاریف

تعاریف، همچون مفاهیم اولیه و اصول، زیربنای نظریه‌های ریاضی را تشکیل می‌دهند. در بیان تعاریف، همانند قبول اصول، اختیار وجود دارد. از این جهت اگر چند گانگی در تعاریف ملاحظه می‌شود نباید موجب تعجب باشد. اما این چند گانگی در تعاریف، گاهی مسائلی را بوجود می‌آورد و اختلافهایی را باعث می‌گردد.

تاکنون در چند مرور داراز طرف دانش آموزان یک دبیرستان یا یک مؤسسه خواسته شده است تادر باره اختلاف نظرات دبیران آنان به خاطر مسئله‌ای معین، قضاؤت شود و نتیجه در یکان منعکس گردد. اما این قضاؤت انجام نگرفته است به این علت که تعاریف مربوط که مورد قبول هر دسته از آن دبیران باشد مشخص نبوده است. وقتی که دو دسته اشخاص تعاریف متفاوتی را قبول داشته باشند، بدیهی است که نظرات آنان در مورد معین مبنی بر تعاریف مزبور، مختلف خواهد بود. این اختلاف نظرها نباید به عنوان دلیل بر عدم اطلاع یک دسته و ارجحیت علمی دسته دیگر تلقی گردد.

یاد آوری این نکته نیز لازم است که برخی از تعاریف ریاضی به آن صورت که در کتابهای درسی سابق بیان می‌شده‌اند به صورتی تازه تر و کاملتر بیان می‌شوند. در این مورد اگر اختلاف نظر باشد، حقانیت با آن دسته است که از اطلاعات و معلومات جدید بهره‌مند می‌باشند.

عبدالحسین مصحّفی

در ناره مندرجات یکان سال ۱۳۵۰

ب- قم داشته اند که: ضمناً هم این بسته آنچاکه ذو شتّه شده

«به سادگی دیده شود که به از اعضو غیر مشخص Xداریم:

$$x^* \backslash = \backslash ^* x = \forall x + \exists - x = \exists \equiv x$$

پس عدد یک عضوی اثر است، این سؤال پیش می آید که عدد یک از کجا آمده است و اصولاً طرز ییدا کردن عضوی اثر چگونه است؟ برای تعیین عضوی اثرا لازم به تذکر است که قانون ترکیب چنین است:

$$x * y = x + y - xy - 1$$

اگر u عضو یو اثر فرض شود:

$$x^*u = ux + u - xu - x = x$$

$$x + 2u - xu - 2 = 0$$

$$(\gamma - x)(u - v) = 0$$

به شرط $x \neq 2$ عدد $1 = u$ عضوی اثراخانون است. در ضمن همانطور که در تصریح تذکر داده شده $2 = 2*x - 2$ است که

عدد ۲ عضه حاذب قانون نامدارد.

ثانيًاً در حل مسئله ۴ مندرج در صفحه ۱۷۲ نیز طرز تعیین

عضویت اثراورز معلوم نشده است. در این مورد اگر فرض کنیم که

(d,c) عضویت اثیر است، باید داشته باشیم:

$$(a \cdot b) * (c \cdot d) = (a \cdot b)$$

دنا په خاصیت قانون داریم:

$$ac = a, bc + d = b$$

یہ شطرنج دار یعنی $a = c = 10$ میں (۱۰) عضوی اثر

خواهد بود. اگر رابطه دوم را در نظر بگیریم:

$$ca = a, da + b = b \Rightarrow d = 0, c = 1$$

در مورد عضو متقارن هر عضو (a, b) که بسی شود

باشد تذکر داده شود که $a \neq 0$ است. اصولاً $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$

۱۵- حکم ایالت مسئله باید توحه داده بشود که به شرط $a \neq 0$

ویحده E باعما، * تشکیل گروه میگردید.

I - اشتباههای چایی

در چاپ صورت پرسشها و مسائل کنکور یا اعلام پاسخ صحیح آنها در یکان سال ۵۰، بعضی اشتباها روی داده است. هر چند که در بررسی دقیق مسائل و حل آنها، این اشتباها معلوم می‌شوند، با وجود این درزیز یادآوری می‌شوند. از آقایان محمود رضا عظیمی سجادی از تهران، کامیاب از بیرجند، حسین شعبانی از تهران، محمد رضا کاظمی از تهران، عبدالرضا معین از شیراز، حسین نجاتی از سمنان نیز که این اشتباها را یادآوری کرده‌اند تشکر می‌شود.

صفحة	شماره پرسش	غلط	صحيح	صفحة
۳۶	شماره پرسش	۴۸۹۴	۴۸۹۳	صفحة
۹۱	۱۵۱	۲	۱	۸۰
۹۳	۱۷۶	۳	۱	۹۳
۹۴	۸۹	۴	۱	۹۴
»	۹۸	-	۲	»
»	۱۰۳	۱	۲	»
»	۱۱۰	۴	۳	»
»	۱۱۱	۱	۳	»
»	۱۱۳	۴	۲	»
»	۱۱۴	۴	۱	»
»	۱۱۵	۳	۲	»
۹۵	۱۱۷	۴	۱	۹۵
۱۰۷	۲۴	$\frac{V_6}{3}$	$-\frac{V_6}{2}$	

II - ته ضیحہ در بارہ حا لک مسئلہ

همکار گرامی آقای قوام‌نحوی از اصفهان، اولادرباره
حل مسئله ریاضی جدید، مندرج در صفحه ۱۷۰ یکان سال ۵۰

خلاصه کتاب مآخذ ذات ارشمیدس

از روی تفسیر ابوالحسن نسوی (ریاضیدان ایرانی)

ابوالقاسم قربانی

مرکز تحقیقات علمی مدرسه عالی دختران

هیث A

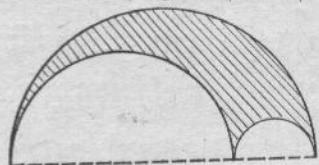
HEATH, T. L. : « The Works of Archimedes with the method of Archimedes », New York, Dover Publication, Inc.

هیث H

HEATH, T.L. : « A History of Greek Mathematics », 2 vol Oxford, 1921

به عقیده هیث اینکه کتاب مآخذ ذات به صورت فعلی آن توسط خود ارشمیدس تألیف شده باشد مورد تردید است. ممکن است دانشمند یونانی دیگری بعداز ارشمیدس قضایای موجود در آن کتاب را برای تشرییح مطالب کتاب قدیمی دیگری جمع آوری کرده باشد^(۱). از طرف دیگر بعضی از قضایای کتاب مآخذ ذات (شکلها) ^(۲) چهارم و پنجم و ششم و هشتم و چهاردهم) به حدی بدین و جالب توجه هستند که امکان اینکه اصل آنها از ارشمیدس باشد بعید نیست^(۳).

در قضایای چهارم و پنجم و ششم شکلی مورد بحث است



که آنرا به یونانی
اربلوس^(۴) (نامیده اند
وآن عبارت است از
سطح محصور بین سه

نیمدايره که مطابق با شکل مقابل دوهدو باهم مماس هستند.

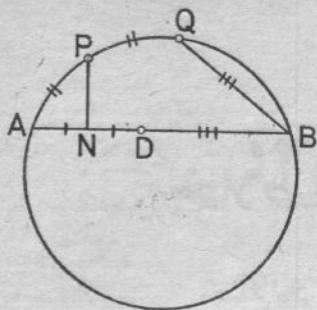
در شماره ۸۴ مجله یکان (صفحات ۳۸۷ به بعد) شرح احوال و آثار استاد مختص - ابوالحسن نسوی ریاضیدان ایرانی را نوشت و وعده دادم که کتاب «مآخذ ذات» ارشمیدس را که ثابت بن قره از یونانی به عربی ترجمه کرده و ابوسهل کوهی^(۵) آن را تفسیر کرده و فضیل الدین طوسی آن تفسیر را تحریر کرده است معرفی نمایم.

چون این کتاب کوچک دارای قضایا و مسائل جالب توجه هندسی است که اثبات و حل آنها برای کسانی که به هندسه علاقه دارند سرگرمی بسیار دلپذیری است و از طرف دیگر اصل یونانی کتاب مذکور ازین رفتہ و کوششهای چند ریاضی دان ایرانی که درباره آن کار و تحقیق کرده اند این کتاب را از خطر نابودی نجات داده است اینک به معرفی آن می پردازم . [خوانندگان گرامی مجله یکان می توانند قضایائی را که در این کتاب ذکر شده به ثبوت رسانند (متخصصوصاً تعمیم قضییه پنجم آن را که توسط ابوسهل کوهی صورت گرفته است) و به دفتر مجله یکان بفرستند تا به نام خودشان چاپ شود.]

در این مقاله از منابع زیر با علائم اختصاری که ذیلاً ذکر می شود استفاده کرده ام:
تحریر کتاب مآخذ ذات

ابن کتاب در جزو رسائل طوسی (الرسائل التسع)
در سال ۱۳۵۹ هجری قمری در ۱۷ صفحه به چاپ رسیده
(رساله سوم از مجموعه مذکور) و عنوان آن چنین است:
« کتاب مآخذ ذات لارشمیدس تحریر العلامه الفیلسوف
الخواجه نصیر الدین ...»

(۱)- برای کسب اطلاع احوال و آثار او رجوع کنید به کتاب «ریاضیدانان ایرانی - از خوارزمی تا بن سیتا» تألیف ابوالقاسم قربانی، مهرماه ۱۳۵۰ (۲)- هیث A، ص XXXII (۳)- هیث A، ص ۲۰۱ (۴)- هیث H، ج ۲ ص ۱۵۱ (۵)- گزنه (عنی آلتی که کفاشان برای بریدن و تراشیدن چرم بکار می برند)

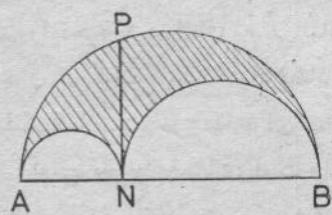


شکل سوم (قضیه) اگر
نقطه‌ای ستعلق به قوس
از یک دایره باشد
وازن نقطه PN عمود
را بر قوس AB فرو آوریم
و نقطه D را روی وتر
طوري اختیار AB

کنیم که ND مساوی با AN باشد و قوس \widehat{PQ} را مساوی
با قوس \widehat{PA} جدا کرده پاره خط QB را رسم کنیم، پاره خطهای
BD و BQ باهم مساوی خواهند بود.

تبصره ۵- باید قوس \widehat{AP} از نصف قوس \widehat{AB} کو چکتر
باشد تا نقطه Q روی قوس \widehat{APB} واقع شود. اگر چنین
نمی‌باشد باید بدجای نقطه A نقطه B را در نظر بگیریم.

شکل چهارم (قضیه)- نیم دایره‌ای به قدر AB در نظر



گرفته روی طری
نقطه دلخواه N را
اختیار می‌کنیم و در
داخل نیم دایره فروض
دونیم دایره به قطرهای
BN و AN رسم می‌سی.

کنیم. شکلی را که به سه نیم دایره مرسوم محدود می‌شود به
یونانی اربلوس (= گزنه) (۲) نامیده‌اند. حال اگر از نقطه N
عمودی بر قطر AB اخراج کنیم تا نیم دایره به قطر AB را
در نقطه P قطع کند، مساحت اربلوس مساوی است با مساحت
دایره به قطر PN.

تبصره ۶- اربلوس
خاصیت‌های ساده‌دیگری
ذیز دارد که در کتاب
«مأخذات» ذکر نشده
است. از جمله:
الف- اگر مماس

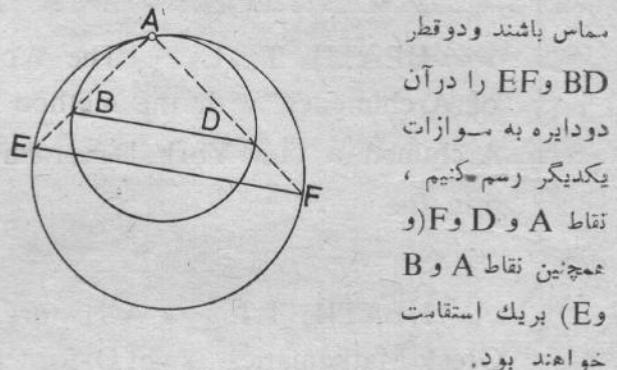
مشترک خارجی دو نیم دایره داخلی را رسم کرده نقاط تماس
را F و H بنامیم، دو پاره خط HF و NP باهم مساوی خواهند

قضیه پنجم، که درستن کتاب «مأخذات» در حالت خاصی
از شکل بیان شده است، چنانکه خواهیم دید، توسط ابو سهل
کوهی ریاضیدان ایرانی تعمیم داده شده است.
قضیه هشتم از حیث رابطه‌ای که با مسلسله «ثنیت زاویه» دارد
مهم است.

قضیه چهاردهم درباره شکلی است که آن را به یونانی
سالینون (۱) نامیده‌اند و بدیع و جالب توجه است.

پانزدهم شکل (قضیه یا مسئله) کتاب مأخذات به شرح
زیر است: (۲)

شکل اول (قضیه)- اگر دو دایره در نقطه A باهم

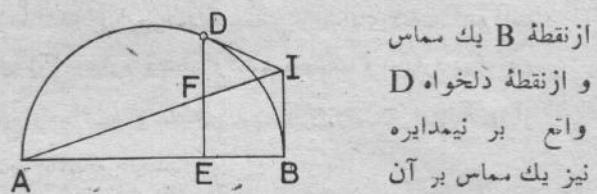


مساس باشند و دو قطر
EF و BD را در آن
دو دایره به موازات
یکدیگر رسم کنیم،
نقاط A و D و F و
B و A و C و
معچین نقاط E و
بریک استقامت
خواهند بود.

تبصره ۷- درستن کتاب «مأخذات» این قضیه در حالت

خاصی که دو قطر بر شعاع مار بر نقطه تماس عمود باشند
ذکر شده است. ولی می‌توان آن را به صورت فوق تعمیم داد.
این قضیه در حالتی که دو دایره مماس خارجی باشند نیز صحیح
است.

شکل دوم (قضیه)- نیم دایره‌ای به قطر AB رسم کرده



از نقطه B یک مسas
و ازن نقطه دلخواه D
واقع بر نیم دایره
نیز یک مسas بر آن

رسم می‌کنیم، تا این دو مسas یکدیگر را در نقطه T قطع کنند.
اگر از نقطه D عمود DE را بر قطر AB فرو آوریم و فصل
مشترک AT و DE را F بنامیم، پاره خطهای DF و FE
باهم مساوی خواهند بود.

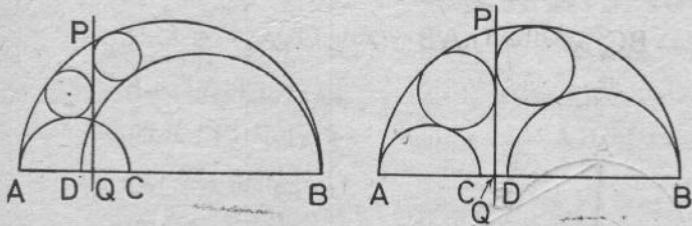
(۱)- درباره این اسم رجوع کنید به هیث A، ص XXXIII (یادداشت ذیل صفحه)

(۲)- اثبات این قضایا را در کتابهای زیر خواهید یافت: الف- (به عربی) در تحریر کتاب مأخذات. ب- (به انگلیسی)

در هیث A، صفحات ۳۱۸ تا ۳۰۱

arbelos-(۳)

هردو هم با خطر PQ وهم بانیمدایره به قطر AB مماس شوندو یکی از آنها بانیمدایره به قطر AC و دیگری بانیمدایره به قطر BD مماس شود، این دو دایره باهم مساوی خواهند بود (در صورتی که مجموع $AB = AC + BD$ از AB کوچکتر باشد دو نیمدایره به قطرهای AC و BD نقطه مشترک نخواهند داشت و در صورتی که $AB > AC + BD$ بزرگتر باشد دو نیمدایره یکدیگر را در یک نقطه قطع خواهند کرد).



شکل ششم (مسئله) - نیمدایره به قطر AB را در نظر می‌گیریم. و نقطه C را روی قطر AB طوری اختیار می‌کنیم که $AC = \frac{2}{3} BC$ باشد و دو نیمدایره یکی به قطر AC و

یکی به قطر BC در داخل نیمدایره مفروض رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای رسم می‌کنیم که باشه نیمدایره بر سر GH مماس باشد و قطر آن را GH می‌نامیم. می‌خواهیم نسبت GH به AB را حساب کنیم.

$$(جواب : \frac{6}{19})$$

تبصره - در کتاب «مأخذات» نسبت $\frac{AB}{BC}$ مساوی

$\frac{2}{3}$ اختیار شده است. اما می‌توان مسئله را تعمیم داد (۱).

$$\frac{GH}{AB} = \frac{m}{1+m+m^2} \text{ باشد داریم} \quad \frac{AB}{BC} = m \quad \text{اگر}$$

بود و یکدیگر را نصف خواهند کرد.

ب - خطوط راست PA و PB به ترتیب از نقاط H و F می‌گذرند.

ج - اربلوس خاصیت جالب توجه دیگری دارد که پاپوس (Pappus) آن را ثابت کرده است (۱).

شکل پنجم (قضیه) - نیمدایره به قطر AB را در نظر

می‌گیریم و نقطه دلخواه C را روی آن اختیار کرده عمود CD را بر AB اخراج می‌کنیم. تازه‌مدایر مفروض را در نقطه D قطع

کند و دونیمدایره به قطرهای AC و BC در داخل نیمدایره مفروض رسم می‌کنیم. اگر دو دایره رسم کنیم که هردو هم با خطر CD وهم با نیمدایره به قطر AB مماس باشند و یکی از آنها با دایره به قطر AC و دیگری با دایره به قطر BC نیز مماس باشد این دو دایره باهم مساوی خواهند بود.

تعمیم قضیه پنجم توسط ابوسهل کوهی

قضیه پنجم به وجهی که در فوق ذکر شد حالت خاصی از یک قضیه کلی است. در این حالت خاص نقطه دلخواه C روی قطر AB فرض شده و دونیمدایره به قطرهای AC و BC باهم مماس هستند.

ابوسهل کوهی ریاضیدان ایرانی در کتاب «تزيين كتاب مأخذات» قضیه فوق را تعمیم داده و در حالتهایی که به جای یک نقطه C دو نقطه C و D روی AB اختیار شود و دو نیمدایره به قطرهای AC و BD متقاطع یا متخارج باشند نیز قضیه را جدا گانه ثابت کرده است (۲).

می‌توان قضیه پنجم کتاب «مأخذات» و دو قضیه کوهی را پک جا با اصطلاحات کوتاهی به صورت زیر خلاصه کرد :

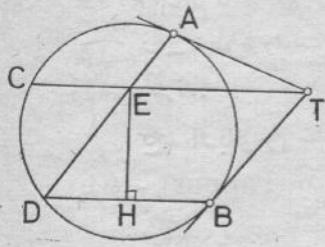
نیمدایره به قطر AB را در نظر می‌گیریم و دو نقطه C و D را روی قطر AB اختیار کرده و نیمدایره به قطرهای AC و BD رسم می‌کنیم. و محور اصلی دو نیمدایره اخیر را PQ نامیم. اگر در دو طرف خط راست PQ دو دایره رسم کنیم که

(۱) - رجوع کنید به: هیث A ذیل صفحه ۳۰۸

(۲) - استدلال این دو قضیه یعنی تعمیم قضیه پنجم کتاب مأخذات را در تحریر کتاب مأخذات، صفحات ۷ تا ۹

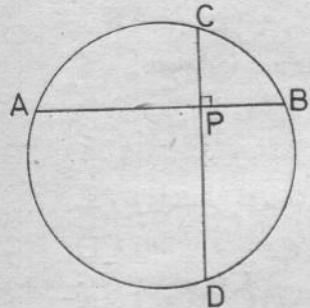
(۳) - هیث A، ص ۳۰۸

خواهید یافت (به زبان عربی)



دویم ماس TA و TB و
قاطع TC را بر همان
دایره رسم کنیم، و از
نقطه B و تر BD را
به موازات TC بکشیم،
و فصل مشترک AD را
با TC نقطه E به نامیم،

واز E عمود EH را بر BD فرو دآوریم، نقطه H وسط پاره خط
 BD خواهد بود.

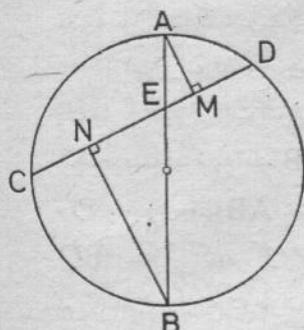


شکل یازدهم (قضیه)
اگر در دایره ای دو وتر
از CD و AB که از
مرکز نمی گذرند در
نقطه P بر هم عمود
باشند،
داریم:

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = \text{قطر دایره}^2 \quad (1)$$

شکل دوازدهم (قضیه)
اگر از نقطه T واقع در
خارج نیم دایره به قطر
دو مسas AB و TP و
را بر آن نیم دایره
رسم کنیم و فصل مشترک
 R رانقطه R و BP و AQ
بنامیم، TR بر AB عمود خواهد بود.

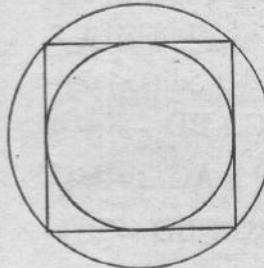
شکل سیزدهم (قضیه) - اگر در دایره ای قطر AB
و وتر CD یکدیگر را در نقطه E قطع کنند و عمودهای AM



BN و CD فرو
آوریم، خواهیم داشت:
 $CN = DM$

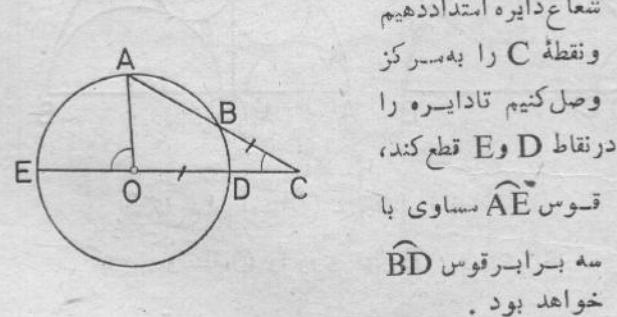
تبصره - اگر
نقطه E فصل مشترک
قطر AB (امتداد) و تر
در خارج دایره CD
واقع شود باز قضیه صحت دارد.

شکل چهاردهم (قضیه) - نیم دایره ای به مرکز O و

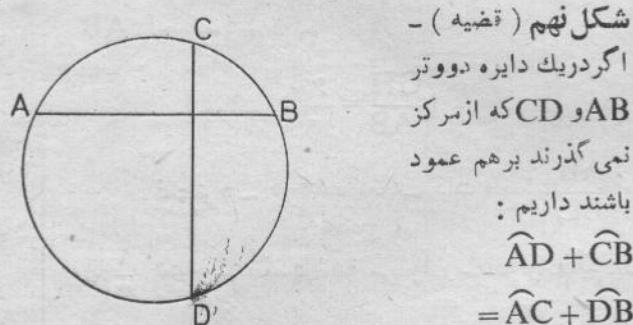


شکل هفتم (قضیه) -
اگر دایره ای بر یک مربع
محیط و دایره دیگری در
همان مربع محاط باشد،
مساحت دایره محیطی دو
برابر مساحت دایره
محاطی خواهد بود.

شکل هشتم (قضیه) - اگر AB وتر دلخواهی از
دایره به مرکز O باشد و AB را به اندازه BC مساوی با



تبصره - این قضیه با مسئله تثییث زاویه بستگی دارد.
زیرا زاویه C مساوی با یكی از زاویه AOE است. فرض کنیم
که بخواهیم قوس AE و درنتیجه زاویه AOE را به سه
قسمت متساوی تقسیم کنیم و ED قطر دایره باشد. برای بدست
آوردن قوسی که مساوی با یكی سوم قوس AE باشد کافی است از نقطه
A خط راستی رسم کنیم که دایره را در نقطه B درنقطه C قطع کند به قسمی که BC مساوی باشعاع دایره باشد
و سپس از نقطه O خطی به موازات AC رسم کنیم (۱).



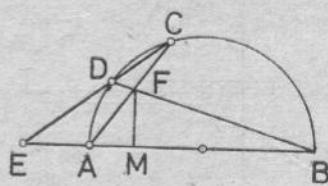
شکل نهم (قضیه) -
اگر در یک دایره دو وتر
از CD و AB که از مرکز
نمی گذرند بر هم عمود
باشند داریم:

$$\widehat{AD} + \widehat{CB} = \widehat{AC} + \widehat{DB}$$

تبصره - این مطلبی است بسیار ساده و از حیث اهمیت
با قضایای دیگر قابل مقایسه نیست.

شکل دهم (قضیه) - اگر از نقطه T واقع در خارج دایره ای

(۱) - برای بحث کاملتری درباره این موضوع رجوع کنید به فصل پنجم مقدمه کتاب همیشة CXI به بعد.



مسی نامیم و CD را
رسم مسی کنیم و امتداد
 AB تا امتداد CD قطع کند
و BD را رسم مسی کنیم
تا AC را در نقطه قطع کند
قطع کند و از F عمود

را بر AB فرود می آوریم. دراین صورت EM مساوی باشعاع دایره خواهد بود.

تبصره - می توان ثابت کرد که DE مساوی باشعاع نیمدایره DC مساوی با ضلع ده ضلعی منتظم محاطی (در دایره به قطر AB) است و بنابراین EC در نقطه D به نسبت $\frac{EC}{ED} = \frac{ED}{DC}$ ذات وسط و طرفین تقسیم می شود یعنی:

به قطر AB درنظر گرفته دوپاره خط AD و BE را مساوی با یکدیگر و مطابق با شکل از روی قطر AB جدا مسی کنیم و دو نیمدایره به قطرهای AD و BE در داخل نیمدایره مفروض ویک نیمدایره به قطر DE در

خارج نیمدایره مفروض رسم مسی کنیم. یونانیان سطح مخصوص به چهار نیمدایره بر سوم راسالینون^(۱) نامیده اند. حکم قضیه این است: مساحت سالینون مساوی است با مساحت دایره به قطر CF شکل پانزدهم (قضیه) - نیمدایرهای به قطر AB در نظر گرفته و تر AC را مساوی با ضلع پنج ضلعی منتظم محاطی (در دایره به قطر AB) رسم مسی کنیم و سطقوس AC را نقطه D

XXXXIII Salinon - (۱) درباره وجه تسمیه این شکل رجوع کنید به هدیث A، ص

استدلال (بقیه از صفحه ۴۶۳)

در خاتمه مثالهایی که حد کلاسیک معرف عدد π به میان کشیدند، برهانی مستدل برای بکاربردن این حد رصویر مسئله را در اختیار ما گذاشتند و این خود قدسی اساسی به سوی جواب مسئله بود.

در مجموع، طبیعی و مستدل بنظر می رسد که هر حلقه استقرائی قبل از مرحله اثباتی دیده شود. ابتدا پیش بینی کنید، سپس اثبات کنید.

On the page 512

the upper triangles yields:

$$Q^2 + M^2 = a^2 \text{ and } M^2 + N^2 = c^2$$

Subtracting the latter equation from the former gives us:

$$(1) \quad Q^2 - N^2 = a^2 - c^2$$

On the lower triangles, we again use the Pythagorean Theorem, and

$$Q^2 + P^2 = a^2 \text{ and } N^2 + P^2 = x^2$$

Subtracting as before, we have

$$(2) \quad Q^2 - N^2 = b^2 - x^2$$

Substituting equation (1) into equation (2) we obtain:

$$a^2 - c^2 = b^2 - x^2$$

and finally

$$x^2 = \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$$

دیوار نور (بقیه از صفحه ۴۶۷)

بر گردد و دراین جهان آنرا ملاقات کنیم.

در خاتمه باید بگوییم که تآنچاکه می دانم و عقیده ام هم بر آن است واذر لشخصی خود نتیجه گرفته ام (نه از قوانین فیزیکی) خاصیت تقارن جهان است که اصولی داشته و می گوید «شما نمی توانید برنده شوید!»

من تصویر می کنم که هریک از این دو جهان خود را تاریخون و دیگری: اتاكیون تصویر می نماید، بنابراین برای یک ناظر که بالای دیوار نور نشسته است (اگر بتوان یک چنین چیزی گفت) چنین بنظر می رسد که این دیوار یک جفت را زیکاریگر جدا کرده است. اگر کشته فضایی را به جهان تاکیون ها نسبت دهیم، ما همچنین خود را (حدائقی من اینطور درکشی کنم) بامیارهای جدید با سرعتهای (زیر روشنایی) در حرکت می بینیم و وقتی به عقب به جهانی که تاز پشت سر گذاشته ایم نظر می افکریم، جهان (ما فوق روشنایی) را می بینیم.

اگرچنین باشد، آنچه که می بینیم و آنچه که می توانیم بگوییم این است که بدست آوردن سرعتی مافوق سرعت نور غیرممکن است. همین وسیله.

نها ده‌ا در ریاضیات

احمد بیرشک

● دنباله از شماره قبل

قانون بین چند عضو نخست آن را بین برخی از آنها اجرا کنیم و سپس آن را بین حاصل این عمل و سایر عضوها اجرا نماییم و نتیجه در هر حال یکی شود.

$$\forall a, b, c \in E, aObOc = aO(bOc) = \\ = (aOb)Oc = \dots$$

اعمال، یاقوانین، جمع و ضرب در N هم نقل پذیراند و هم جمع پذیر.

۳) در مجموعه عضوی چون ۴ وجود داشته باشد که نتیجه اجرای قانون بین آن و هر عضو دیگر خود آن عضو دیگر شود. به عبارت دیگر ع در اجرای قانون اثربنداشته باشد آن را عضوی اثر قانون می نامیم.

$$\forall a \in E, \exists \epsilon \in E : aO\epsilon = \epsilon Oa = a$$

ممکن است عضوی در راست بی اثر باشد، یا در چپ. یاد راست و چپ.

در N با قانون جمع عضو «۵» و با قانون ضرب عضو «۱» در راست و چپ بی اثر هستند.

۴) با اجرای قانون برای هر عضو E مانند a قرینه می باشد و وجود داشته باشد (دو عضو را قرینه می گوییم وقتی که نتیجه اجرای قانون بین آنها عضوی اثرشود).

$$\forall a \in E, \exists a' \in E : aOa' = a'Oa = a$$

۵) ممکن است برخی یاتمام عضوهای E در اجرای

قانون O مرتب باشند، یعنی:

$$\begin{cases} aOx = aOy \iff x = y \\ xOa = yOa \iff x = y \end{cases}$$

و

در چنین صورتی می توان با حذف آن عضو مرتب از دو طرف رابطه بی آن رابطه را ساده کرد.

۲- قوانین ترکیب

۱،۷- مجموعه E را در نظر می گیریم. هر گاه بتوانیم برای برخی از جفت‌های مرتب عضوهای آن عضومتناظری در همان مجموعه پیدا کنیم، یعنی وقتی که بین دو عضو E قانونی (یا عملی) را اجرا کنیم و حاصل اجرای این قانون عضوی از همان مجموعه باشد، این تناظر را قانون ترکیب درونی می نامیم.

مثلًاً اعمال جمع و ضرب در عددهای طبیعی قوانین ترکیب درونی هستند اما تفریق نیست.

برای آنکه مطالب بطور کلی و بدون توجه به قانون یا عملی که معنی مشخصی دارد بیان شوند قوانین ترکیب را قانون O یا قانون * یا قانون \square یا قانون \dagger و امثال آنها می نامیم.

$$\forall a, b \in E : a * b \in E \implies * \text{ قانون ترکیب داخلی}$$

۳،۷- دوم مجموعه E و F را در نظر می گیریم. هر گاه نتیجه اجرای قانونی بین جفت‌های مرتب عضو $E \times F$ عضوی از F شود آن را ترکیب بیرونی می خواهیم. مانند حاصل ضرب عضوی از مجموعه N عددهای طبیعی در عضوی از مجموعه F بردارها، که بردار است و عضو F است.

۳،۷- وقتی که در مجموعه بی یک قانون ترکیب درونی را اجرای کنیم این قانون ممکن است هیچ؛ یا یک، یا چند و یا تمام این پنج خاصیت را داشته باشد:

۱) نقل پذیر باشد (Commutative)، یعنی اگر در اجرای قانون جای عضوهای را عوض کنیم نتیجه تغییر نکند:

$$\forall a, b \in E, aOb = bOa$$

۲) جمع پذیر باشد (Associative)، یعنی در اجرای

در کدام شوری مورد مطالعه قرار گیرد. مثلاً اگر نهاد گروه را در عده‌های علامت‌دار در نظر داریم قضایایی خاص عده‌های علامت‌دار دارد و اگر در تبدیلهای هندسی بررسی کنیم قضایایی مخصوص آن تبدیلها خواهد داشت.

۱۰- نهاد گروه

۱۰، ۹- مجموعه E توأم با قانون O ، که با نماد (E, O) نموده می‌شود دارای نهاد گروه است وقتی که چنین داشته باشیم:

۱) اصطلاحات تعریف نشده: عضوهای یک مجموعه دلخواه، بی‌توجه به نوع مجموعه و نوع عضوهای آن ۲) یک قانون بکلی مجرد O که هیچ معنی و مفهومی برای آن در نظر گرفته نمی‌شود.

۲) تعاریف: قانون ترکیب درونی، عضوبی اثر، عضو قرینه، نقل پذیری، ...
۳) اصول موضوع

اصل اول- قانون O ترکیب داخلی باشد،

$$\forall a, b \in E : aOb \in E$$

اصل دوم- O جمع پذیر باشد،

$$\forall a, b, c \in E : aObOc = (aOb)Oc = \dots$$

اصل سوم- مجموعه E با قانون O دارای عضو بی اثر باشد،

$$\forall a \in E : \exists e \in E : aOe = eOa = a$$

اصل چهارم- با قانون O برای هر $a \in E$ قرینه‌یی چون $a' \in E$ وجود داشته باشد،

$$\forall a \in E, \exists a' \in E : aOa' = a'aO = e$$

۴، ۱۰- هر گاه قانون O نقل پذیر هم باشد، یعنی:

$$\forall a, b \in E : aOb = bOa$$

اصل پنجم- (E, O) را گروه نقل پذیر یا گروه آبلی می‌نامیم.

۳، ۱۵- مثال در مجموعه $\{\alpha, \beta, \gamma\} = E$ قانون O را می‌کنیم و فرض می‌کنیم که نتایج بدین قرار باشند:
 $aOa = a$ ، $aOb = b$ ، $aOc = c$

$$bOa = b$$
 ، $bOb = c$ ، $bOc = a$

$$cOa = c$$
 ، $cOb = a$ ، $cOc = b$

O	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

در N با قوانین + و \times همه عضوهای مرتب آند، با قانون جمع ۰ نیز عضو مرتب است.

۴، ۷- هر گاه در مجموعه E دو قانون O و * اجرائیم (distributive) ممکن است قانون دوم بر قانون اول بخش پذیر باشد. * بر O بخش پذیر گفته می‌شود وقتی که:

$$\forall a, b, c \in E : a*(bOc) = (a*b)O(a*c)$$

یعنی هر گاه بخواهیم نخست قانون O را بین دو عضو c و b اجرائیم و بعد بین حاصل این عمل و عضو a قانون * را اجرا نمائیم، می‌توانیم اول قانون * را بین a و b و بین a و c اجرائیم و بین دو نتیجه حاصل قانون O را اجرانماییم.

مثال- در N قانون \times بر قانون جمع بخش پذیر است:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

۸- جیریاک مجموعه

۱، ۸- هر گاه مجموعه‌یی با قوانین معینی توأم باشد و عضوهای آن تابع و واحد قواعد و خواص آن قوانین باشند و بر طبق آنها بر روی یکدیگر عمل کنند مجموع آن قوانین جبر آن مجموعه را تشکیل می‌دهند.

۹- مفهوم نهاد (Structure)

۱، ۹- در ریاضیات با مجموعه‌های گوناگون سروکار داریم (عددها، بردارها، تبدیلهای هندسی، ...) هر گاه مجموعه‌یی با برخی قوانین ترکیب درونی یا بیرونی توأم باشد دارای جبر خاصی است.

قوانين جبری چنین مجموعه را نهاد آن مجموعه می‌نامیم. نهاد یعنی ساختمان مجموعه و خواصی که این ساختمان دارد.

۲، ۹- مجموعه‌های متعدد ممکن است یک نهاد داشته باشند. نتایج حاصل از بررسی نهاد در یکی از آنها در همه آنها درست خواهد بود.

۳، ۹- مجموعه‌هایی را که در ریاضیات بکار می‌روند بر حسب جبر خاص آنها، یعنی بر حسب نهادهای، به چهار طبقه تقسیم می‌کنیم: گروه‌ها، حلقه‌ها، هیأتها، فضاهای برداری.

پس در ریاضیات با چهار نهاد سروکار داریم: نهاد گروه، نهاد حلقه، نهادهای نهادهای برداری

۴، ۹- هر نهاد ریاضی از چهار قسمت اصلی تشکیل می‌شود:

اصطلاحات تعریف نشده، تعاریف، اصول موضوع، قضایا. در هر مورد اصطلاحات تعریف نشده و تعاریف و اصول موضوع هر نهاد داده می‌شوند، اما قضایا بستگی به آن دارد که

$$\begin{aligned} aOa &= a, \quad aOb = bOa = b \\ aOc &= cOa = c, \quad bOa = c \\ bOc &= cOb = a, \quad cOc = b \end{aligned}$$

و باقانون * به این نتایج بررسد:

$$\begin{aligned} a*a &= a*b = a*c = b*a = c*a = a \\ b*b &= b*c = b \quad c*c = b \quad c*b = c \end{aligned}$$

(E,O,*) دارای نهاد حلقه است. جدول آن را رسماً می‌کنیم و تحقیق را بر عهده خواننده می‌گذاریم.

O	a	b	c	*	a	b	c
a	a	b	c	a	a	a	a
b	b	c	a	b	a	b	b
c	c	a	b	c	a	c	b

- ۳،۱۱- مثال- $(Z, +, \times)$ نهاد حلقه دارد، زیرا که:
 ۱) $(Z, +)$ گروهی است نقل پذیر است.
 ۲) عمل \times بر $+$ بخش پذیر است (مثال ۴،۷).
 ۳) قانون ضرب جمع پذیر است.

علاوه، از نقل پذیر بودن \times نتیجه می‌گیریم که $(Z, +, \times)$ نهاد حلقه نقل پذیر دارد.

۱۲- نهادهای

- ۱،۱۲- هر گاه در حلقة $(E, O, *)$ دو اصل زیرین باشند:
اصل دهم- E باقانون * دارای یک عضوی اثر باشد
 (این عضو بی اثر را واحد هیأت می‌نامیم)،
اصل یازدهم- هر عضو E جزء $\{*\}$ (عضو بی اثر قانون اول O) باقانون * قرینه‌یی داشته باشد،
 می‌گوییم $(E, O, *)$ دارای نهادهای است.

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

جدولهای مربوط (۳، ۱۳۴) (صفحه بعد)

نتیجه را در جدولی شبیه به جدول ضرب ثبت می‌کنیم، بدین طریق که در بالای جدول و در طرف چپ آن عضوهای E را می‌نویسیم و در گوشش بلا و چپ قانون O را ثبت می‌نماییم آنگاه نتیجه اجرای قانون O بین هر دو عضو را درخانه جدول که محل برخورد سطر و ستونی است که آن دو عضو در اول یا بالای آن نوشته شده اند می‌نویسیم. پس از تکمیل جدول در (E, O) مطالعه می‌کنیم و می‌بینیم که: ۱) قانون ترکیب درونی است زیرا که نتایج همه اعمال عضوهای E هستند. ۲) قانون جمع پذیر است (کافی است امتحان و تحقیق کنید) ۳) عضوبی اثر E است. ۴) a قرینه خودش (همیشه عضو بی اثر قرینه خودش است) و b و c قرینه یکدیگرند، یعنی هر عضو E قرینه‌یی دارد. ۵) قانون نقل پذیر است.

۴،۱۰- تحقیق کنید که مجموعه عده‌های علامت‌دار توأم باقانون جمع نهاد گروه آبلی دارد.

۱۱- نهاد حلقه

۱،۱۱- هر گاه مجموعه E با دو قانون O و $*$ توأم باشد و با اوایی، یعنی (E, O) دارای نهاد گروه آبلی باشد و علاوه بر O باشد.

اصل هشتم- قانون * جمع پذیر باشد.

$$\forall a, b, c \in E : a * b * c = a * (b * c) = \dots$$

اصل هشتم- * بر O بخش پذیر باشد،

$$\forall a, b, c \in E : a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$$

می‌گوییم $(E, O, *)$ دارای نهاد حلقه است. و اگر

$a * b = b * a$ * نقل پذیر هم باشد: حلقه را نقل پذیر می‌نامیم.

۳،۱۱- مثال- اگر $E = \{a, b, c\}$ با قانون O چنین نتیجه‌داده: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline 4 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$

a	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

آن بردار است. عمل ضرب اسکالر یک قانون ترکیب بیرونی است که بین عضوهای مجموعه R عدههای حقیقی و عضوهای مجموعه V بردارها انجام می‌شود و حاصلش عضو V است.

۳،۱۴ - مجموعه بردارهای آزاد V توأم با قانون ترکیب درونی جمع بردارها و قانون ترکیب بیرونی ضرب اسکالر بر روی هیأت $(R, +)$ دارای نهادهای برداری است.

۳،۱۵ - هر گاه مجموعه E و هیأت $(F, O, *)$ داده شده باشد می‌گوییم E بر روی F دارای نهاد فضای برداری است وقتی که:

اصل اول - E توأم با یک قانون ترکیب درونی $\boxed{\quad}$ نهادگروه‌آبی داشته باشد،

اصل دوم - E با یک قانون ترکیب خارجی \neq با F مربوط شود به صورتی که:

$$\forall a \in F, \forall a \in E : a + a \in E \quad (1)$$

(۲)

$$\forall a \in F, \forall a, \beta \in E : a + (a \boxed{\quad} \beta) = (a + a) \boxed{\quad} (\alpha + \beta) \quad (3)$$

$$\forall a, b \in F, \forall a \in E : (aOb) + a = a + a \boxed{\quad} b + a \quad (4)$$

تصور ۵ - ممکن است $\boxed{\quad}$ یا O و نیز \neq با * یک عمل باشند.

مکانیک کوانتم (د باله از صفحه ۴۷۱)

هیچ ابزاری آشکارساز نداشت.

در اینجا فیزیک با اولین جوهر نامرئی روبرو گشت و حال با کشف دوبروی این جوهر نامرئی (امواج ماده) را بنا چار می‌بایست برای کلیه اجسام از الکترون خردگرفته تا ستارگان و اجرام نجومی بسیار بزرگ بسطداد. در اینجا به راستی می‌بایست پس نشست چگونه کسی می‌توانست تصور کند که الکترونی در برخورد باسانع، از کارهای آن گذشت و در سایه جسم فرورود و پیدیده پراش را تولید کند. خیر، امواج و ذرات دو جوهر کاملاً متفاوتند. یک چیز یاده است ویا موج!

با وجود این امواج دوبروی وجود داشتند. جمله «یا این یا آن» (مکانیک ذره‌ای) صحت نداشت بلکه می‌بایست گفته شود «هم این و هم آن» (مکانیک بوجسی). به هر حال در چهارچوبی می‌بایست دو امر بطنانشدنی را به یکدیگر مرتبط ساخت. و این امر تنها در حالت خاص پراش الکترون صورت نمی‌پذیرفت. اگر الکترونی دارای خواص موجی بوده ناچار این خواص در مرور دهم اجسام جهان ما، از خردترین تابزگترین آنها، صادق بود. دوبروی چنین پیشنهاد کرد که حل این ترکیب دو گانگی خواص را موج راهنمایش روش کنیم.

۲،۱۲ - هر گاه E مجموعه باقیمانده‌های اعداد برد باشد یعنی $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ دارای نهادهای است کافی است جدول آن را تنظیم کنیم (پایین صفحه قبل) و تحقیق یازده اصل پادشاه را در آن تحقیق نماییم (تحقیق را به خواننده گرامی و ایم کذاریم آنها بحواله اینجا دارد).

۳،۱۲ - تحقیق کنید که مجموعه عدههای گویا با قانونهای جمع و ضرب نهادهای دارد.

۱۳- نمایش سه نهادگر و حلقه و هیأت باهم

اصل ۱	O ترکیب درونی				
»	» جمع پذیر				
»	» عضوی اثر				
»	» عضو قرینه				
»	» نقل پذیر				
»	» *	ترکیب درونی			
»	» *	جمع پذیر			
»	» *	بر O بخش پذیر			
»	» *	نقل پذیر			
»	» *	دارای عضوی اثر			
»	» هر عضو E غیر از عبا				
*	*	دارای قرینه			

۱۴- نهاد فضای برداری

۱،۱۶ - نخست به بیان یک مثال می‌پردازیم. می‌دانیم

که حاصل جمع برداری با

$\rightarrow V_1$ و $\rightarrow V_2$ هندسی دو بردار

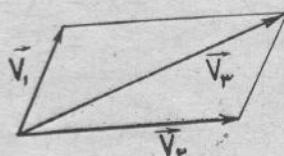
$\rightarrow V_3$ برداری است چون $\rightarrow V_3$ که

با قانون متوازی الاضلاع حاصل می‌شود.

تحقیق اینکه مجموعه

بردارهای فضا توأم با قانون

جمع یک گروه آبی تشکیل



می‌دهد که \rightarrow عضوی اثر آن و بردار $\rightarrow V$ - قرینه هر بردار

$\rightarrow V$ آن است کای امت آسان که بر عهده خواننده گذاشته می‌شود.

و نیز می‌دانیم که حاصل ضرب (اسکالر) هر بردار در یک عدد

برداری است که اندازه اش مساوی حاصل ضرب آن عدد را اندازه

استدلال در ریاضیات

ترجمه: داوید ریحان

نوشته: G.PO'L.Y داپسته آکادمی علوم و استاد افتخاری
مدرسه پلی‌تکنیک فدرال زوریخ و دانشگاه استانفورد

فصل پنجم - چندمثال از استقراء

$$\frac{1}{1-x+x^2} \text{ را بر حسب قوای } x \text{ به صورت سری بسط دهید.}$$

این مسئله را می‌توان به طرق مختلف حل کرد. راه حل زیرین کمی ثقیل است ولی براساس اصلی کامل استوار است و طبیعتاً به فکر هر مبتداً باهوشی که چیزهای کمی بداند واقلاً با مجموع تصاعد هندسی زیرآشنایی داشته باشد، می‌رسد.

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$$

با استفاده از این فرمول، موقعیتی برای حل این مسئله فراهم می‌آید:

هنگامی که به صحت یک قضیه واقع شدید آنگاه می‌توانید شروع به اثبات آن کنید.

یکی از استادان ریاضی

I - بسط به صورت سری - استدلال استقرائی همواره برای هر نوع مسئله‌ای لازم است. در شاخه‌های زیادی از ریاضیات مسائلی وجود دارد که در آنها باید نوع خاصی از استدلال استقرائی را معمول داشت.

این همان چیزی است که مورد نظر ما است و آنرا با چند مثال نه در این بخش می‌آوریم روش خواهیم ساخت. از مثالی نسبتاً ساده شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x+x^2} &= \frac{1}{1-x(1-x)} = 1 + x(1-x) + x^2(1-x) + x^3(1-x^2) + \dots \\ &= 1 + x - x^2 \\ &\quad + x^3 - 2x^4 + x^5 \\ &\quad + x^6 - 3x^7 + 3x^8 - x^9 \\ &\quad + x^{10} - 4x^{11} + 6x^{12} - 4x^{13} + x^{14} \\ &\quad + x^{15} - 5x^{16} + 10x^{17} - 10x^{18} + \dots \\ &\quad + x^{19} - 6x^{20} + 15x^{21} - \dots \\ &\quad + x^{22} - 7x^{23} + \dots \\ &\quad + x^{24} - \dots \\ &= 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + x^7 - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x+x^2} &= 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - \\ &\quad - x^6 - x^{10} + x^{11} + x^{12} - \dots \end{aligned}$$

تناوب! بنظر می‌رسد که رشتۀ ضرایب دارای تناوب ۶ است:

نتیجه حاصل قابل تعمق است. تمام ضرایب غیر صفریا به صورت ۱ یا به صورت ۱ - هستند. در صورتی که جملات جدیدی را محاسبه کنیم، مشاهده می‌شود که توالي ضرایب دارای نوعی نظم است:

P یک مقدار تقریبی و P' مقدار تقریبی دیگری از E که مقدار درست پیرامون بیضی است، می باشد.

در صورتی که a برابر با b باشد، بیضی به صورت دایره درمی آید و P و P' با E برابر می شوند.

در صورتی که a و b متفاوت باشند، با چه دقیقی P و P' به E نزدیک می شوند؟ کدامیک از اینها زودتر به E می رسد؛ P یا P' ؟ در تمام شاخه های ریاضیات، پرسشهایی از اینگونه بسیار است و برای پاسخ گویی به آنها روشنی پسیار کلی وجود دارد که آنرا می توان به صورت زیر خلاصه کرد: باید

$$\frac{P-E}{E}$$

را که همان خطای نسبی تقریب است، بر حسب پارامتر مناسب و کوچکی به صورت سری بسط داد، سپس در مورد اولین جمله غیر صفر بسط، قضاوت کرد.

مفهوم این عبارت چیست و حاصل کار برداشتن روش چیست؟ در وهله اول می بایستیک «پارامتر مناسب و کوچک» را انتخاب کنیم. خروج از مرکز E بیضی را می آزمائیم که از رابطه $\sqrt{a^2 - b^2} = \epsilon$ بدست می آید و در آن a و b نیم قطرهای

اطول و اقصیر بیضی اند. هنگامی که a با b مساوی می شود، بیضی تبدیل به دایره و خروج از مرکز کش صفر می شود. وقتی بیضی تقاضت چندانی با دایره نداشته باشد، ϵ کوچک است. خطای نسبی را بر حسب قوای صعودی ϵ بسط می دهیم. بدست می آید (با جایگزینی مقادیر) :

$$\frac{P-E}{E} = -\frac{\epsilon^3 + \dots}{\epsilon^4} = -\frac{P'-E}{E}$$

در این روابط، فقط اولین جمله را محاسبه کرده ایم و چون هر عبارت شامل ϵ^4 است، در هر دو حالت، هر کدام از جملات اولیه بسط از درجه چهارم است. جملات مرتبه بالاتر را که شامل ϵ^5 و ϵ^6 هستند کنار گذاشته ایم. جملات از قلم انداخته شده در مقابل جمله اولیه، وقتی که ϵ خیلی کوچک (بینهایت کوچک) یعنی بیضی تقریباً به صورت دایره باشد، قابل اعتمادند. وقتی ϵ به سمت صفر میل کند، نسبت دو خط به سمت $\frac{1}{\epsilon}$ میل خواهد

کرد.). P و P' نسبت به E مقادیر تقریبی اند و در ترتیب $E < P < P'$ قرار دارند.

تمام آنچه که گفته شد برای مقادیر کوچک ϵ ، یعنی برای بیضیهای تقریباً مستدير با ارزشند. ما نمی دانیم که این نتایج وقتی که ϵ کوچک نیست به چه صورت است. در واقع فقط با روابط حدی به ازای $\epsilon \rightarrow 0$ آشنا هستیم. بازهم در مورد خطای

۱۶۱۰۰ - ۱۶۱۰۵ - ۱۶۱۰۵ - ۱۶۱۰۵ - ۱۶۱۰۵
طبیعتاً انتظار داریم که این تناوب ملاحظه شده تا آن سوی حدود مشاهداتمان ادامه داشته باشد.

در اینجا استنتاجی استقرائی یا فرضی ساده وجود دارد که آنرا باید با نظری مشکوک نگریست. این فرض متکی بر عملیات است و در نتیجه در خوریک آزمایش جدی است. مفهوم آزمایش سوای سایر مفهوم هیمش، آنست که آنرا به صورت جدیدی بیان کنیم. طریقه جالبی برای بیان جدید آن وجود دارد:

$$\frac{1}{1-x+x^2} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \dots + x - x^4 + x^7 - x^{10} + x^{13} - \dots$$

حال به سادگی دیده می شود که در طرف دوم، دورشته تعابعد هندسی وجود دارد که $\frac{1}{1-x+x^2} = x^3 - x^6$ است و می توان مجموع آنها را بدست آورد. در این صورت فرضیه ما به صورت زیر خلاصه می گردد:

$$\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{1+x^3} + \frac{x}{1+x^6} = \frac{1+x}{1+x^3}$$

واضح است که نتیجه درست است و در این صورت فرضیه ثابت شده است.

این مثال در کمال سادگی، از بسیاری لحاظ قابل توصیف است. در صورتی که بخواهیم یک تابع را به صورت سری بسط دهیم، در حالت کلی می توان اولین ضرایب را بدون اشکال بدست آورد. با ملاحظه این ضرایب، مانند آنچه می انجام دادیم، می بایست قانونی را که بسط از آن تبعیت می کند، حدس بزنیم.

بر طبق عملیاتی که در مورد این حالت انجام گرفت، ارجح آنست که اثبات را با شروع از آخر و با عزیمت از مفهوم واضح و مناسبی از فرضیه انجام دهیم.

در این عبور باید خاطر نشان کنیم که این جواب، نتیجه ای را به همراه داشت (این نیز از علامات مشخصه آنست). این راه حل منتهی به رابطه بین ضرایب فرمول دو جمله ای شد. باید اضافه کرد که مسئله بسط به صورت سری یک تابع غالباً در اکثر شاخه های ریاضیات ظاهر می شود و این مطلبی است که در بخش زیر به آن بی خواهیم برد.

II- تقریبهای فرض می کنیم که E پیرامون بیضی و a و b نیم قطرهای آن باشند. رابطه ساده ای برای E بر حسب a و b وجود ندارد و بر عکس، روابط تقریبی بسیاری پیشنهاد شده است. بدون شک دورابطه زیر ساده ترین آنها هستند:

$$P = \pi(a+b), \quad P' = 2\pi\sqrt{ab}$$

امتدادی جدید و از سرچشمه‌ای کامل^۱ متفاوت‌منتج شده است و در نتیجه دارای ارزش خاصی است. خاطرنشان می‌کنیم که در بورد

$$\frac{P - E}{E} = - \frac{0.155}{0.064} = - \frac{5}{4}$$

خطای نسبی تقریباً ۱۱/۵٪ است. این خطای خیلی از اولین جمله‌اش در بسط به صورت سری بزرگتر است ولی با آن هم علامت است.

$$\text{با توجه به اینکه } \frac{4}{5} = 0.8 \text{ خیلی کوچک نیست، این نکته}$$

جای خوبی را در مجموعه بازمی‌کند و اعتماد ما را به این فرضیه زیادتر می‌کند.

فرمولهای تقریبی نقش عمده‌ای را در ریاضیات ایفا می‌کنند. وقتی منظور، قضایت در فرمولی از این قبیل است، معمولاً از روشی مشابه با آنچه که در این بخش تعقیب نمودیم، استفاده می‌کنیم. اولین جمله بسط خطای نسبی را محاسبه کرده و اطلاعاتی را که بدین ترتیب بدست آمده است با تحقیقات عددی، ملاحظاتی از مشابهت وغیره و بطور خلاصه بواسیله استدلالات استقرائی و نه اثباتی، کامل می‌نماییم.

III- حدود— قبل از اینکه به بررسی استدلال استقرائی درسایر قلمروها بپردازیم، مسئله زیر را در نظر می‌گیریم.

رشته غیر مشخصی از اعداد مثبت ... a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 مفروض است. ثابت کنید که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq e$$

این مسئله مستلزم مختصر معلومات قبلی و بخصوص دانستن مفهوم کنونی علامت \lim یا «حد فوکانی فاماکینی» است. در مواردی که با این علامت آشنایی داریم، باز ممکن است که دریافت اثبات آن دچار اشکال شویم و من هر داشش آموز مبتدی را که بتواند این مسئله را خودش، در چند ساعت حل کند، تقدیر می‌کنم.

در صورتی که مختصر توجیهی به این مسئله داشته باشد، مطالی را که در بخش‌های زیر آمده است با علاقه مرور خواهید کرد.

IV- سعی در اثبات غلط بودن گزاره از سؤالهایی عادی زیرشروع می‌کنیم.

فرض چیست؟ $a_n > 0$ و چیز دیگری داده نشده است. حکم چیست؟ نامساوی $a_n < 0$ نزدیکتر باشد تا ۰، بر می‌گزینیم:

$\frac{4}{5} = 0.8$. بدست می‌آید (با استفاده از

و در طرف اولش این حد پیچیده وجود داشت.

آیا قضیه‌ای نزدیک به آن را می‌شناسیم؟ قطعاً خیر. این با تمام آنچه که من می‌شناسم، متفاوت است.

که تقریبهای ما به ازای $5/0 = 0.5$ دارند، بی اطلاع هستیم. و طبیعتاً اینها اطلاعاتی از موارد ذاتی از این نوعند که احتیاج به عمل دارند.

دریکی از این حالات، اشخاصی با ایده‌های عملی، فرمول را عدد آور آزمایش قرار می‌دهند. مانند می‌توانیم در همین جاده قدم برداریم ولی از چه حالتی شروع کنیم؟ بهتر است که حالات حdra فراموش نکنیم. خروج از مرکز بین ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، وقتی $b = a = 0$ است، و بیضی به صورت دایره است. ولی با این مورد آشنایی کاملی داریم و در این صورت توجه خود را بر روی حالت دیگر حدی معطوف می‌کنیم. در ازای $2a = 1$ است و بیضی به صورت قطعه خطی به طول $a = 0.5$ است و پیرامونش ۴a است. در ازای $a = 0.5$ داریم:

$$E = 4a, P = \pi a, P' = 0$$

بهتر است یادآوری کنیم که در این دو حالت حدی، در زای $E = 0$ وقتی که $P = 0$ بسیار کوچک بوده نامساوی $E > P > P'$ بین مقادیر مربوط وجود دارد. آیا این نامساویها همواره برقرارند؟

در مورد دومین نامساوی، پاسخ بسیار ساده است. در واقع در ازای $a > b$ داریم:

$$P = \pi(a+b) < 2\pi\sqrt{ab} = P'$$

چرا که این نامساوی معادل با $(a+b)^2 > 4ab$ یا $(a-b)^2 > 0$ است.

دقت خود را بر روی سؤالی که هنوز پا در هواست، متمرکز می‌کنیم. آیا نامساوی $E > P$ در حالت کلی درست است؟ طبیعی بنظر می‌رسد که آنچه در حالت حدی ($E = 0.5$) درست بود، در حالات میانی (برای مقادیر E واقع مابین ۰ و ۱) نیز صادق باقی بماند. فرضیه ما مستکی بر مشاهدات بود ولی بواسیله مشابهت مورد تأیید قرار گرفت. مسئله نظری ($P > E$) را که مطرح ساختیم، در واقع بر حسب یک پاسخ مثبت بدست آمده است.

حالتی عددی را موردملاحظه قرار می‌دهیم. در حالاتی که E مجاور با صفر یا نزدیک به ۰ باشد، اطلاعات مختصری داریم. مقدار ساده‌ای از را که به نزدیکتر باشد تا ۰، بر می‌گزینیم: $b = 3, a = 5/5 = 0.8$. بدست می‌آید (با استفاده از جداول):

$$E = 2\pi \times 4/06275, P = 2\pi \times 4/0000$$

باز هم تساوی $E > P$ محقق است. این تحقیق در

$b_n = \left(\frac{c + (n+1)}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1+c}{n} \right)^n \rightarrow e^{1+c}$

چون $c = a_1$ است، نتیجه همواره از e بزرگتر است و
چون c را می توان هر قدر که می خواهیم کوچک اختیار کنیم،
این نتیجه می تواند مجاور با e بdest آید. من نمی توانم در تأیید
یا رد قضیه توفیق حاصل کنم.

بازهم سعی می کنیم. فرض می کنم $a_n = n^c$. بدست
می آید (پس از چند محاسبه):

$$b_n = \left[\frac{1 + (n+1)^c}{n^c} \right]^n \rightarrow \begin{cases} \infty : 0 < c < 1 \\ e^c : c = 1 \\ e^c : c > 1 \end{cases}$$

بازهم حدی بسیار نزدیک با همان e است که می خواستیم ولی
همیشه از آن بزرگتر است. قطعاً هیچگاه موفق نخواهم شد که
این ... حد را کوچکتر از e بdest آورم. پس موقع آن رسیده است
که عقیده خود را عوض کنم.

V - سعی در اثبات صحت گزاره بر طبق نشانه هایی
که با نظریه سرمساعد داشتم، نظر خود را تغییر می دهیم. در
برتو اطلاعاتی که جمع آورده ایم، امید اثبات غلط بودن گزاره به
همان اندازه ضعیف است که اثبات صحت آن قوی است.
بدین ترتیب باقی می ماند که مجدداً قضیه، صورت آن،
فرض، حکم و مفاهیم موجود در آن وغیره را بررسی کنیم.
آیا می توانید فرضیه را بوسیله فرضیه دیگری
که از آن دقیق تر باشد، جایگزین کنید؟ خیر، من
نمی توانم چنین کاری کنم. اگر $a_n =$ فرض شود، قضیه غلط
است ($a_1 = 0, a_2 = a_3 = \dots = 1$).
 $a_1 = 0, a_2 = a_3 = \dots = 1$

آیا حکم رامی توانید تکمیل کنید؟ قطعاً نمی توان
به جای عدد e عدد بزرگتری را فرازدهم، چرا که هنوز صحت
حکم را روشن نساخته ایم.

آیا تمام مفاهیم داخل مسئله را به حساب آورده اید؟
خیر، چنین کار را نکردام. شاید منشأ تمام مشکلات من همین
باشد.

چه چیز را به حساب نیاورده اید؟ تعریف $\lim_{n \rightarrow \infty}$ عدد e است.
مفهوم $\lim_{n \rightarrow \infty}$ چیست؟ عبارت است از حد فوقانی نامعینی
و قنی که n به سمت بینهایت میل می کند. مفهوم e چیست؟
این عدد را می توان به طرق مختلفی تعریف کرد. مثالهای پیشین
ایجاب می کنند که رایجترین تعریف e را بکار ببریم:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

بقیه در صفحه ۵۰۸

آیا احتمال دارد که قضیه صحیح باشد؟ یا اینکه
احتمال غلط بودنش در میان است؟ قطعاً احتمال غلط
بودن آن بیشتر است. در واقع نمی توانم باور کنم که چنین نتیجه
صریحی بتواند از فرضیهای بسیار کوچک مانند e ، عاید شد.
از شما می خواهند که چه بگنید؟ اثبات قضیه و یا
اثبات غلط بودن آن. من موافق آن ایده ام که اثبات غلط بودن
آنرا متضمن باشد.

آیا می توانید حالت خاصی را تحقیق کنید؟ بلی، و این آن
چیزی است که می خواهم انجام دهم (به منظور تسهیل فرمولها،
فرض می کنم که $b_n = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n$ و به جای
 n فرض می نویسم) برای $n = 1, 2, 3, \dots$ فرض

می کنم $a_1 = 0$ و در این صورت بدست می آید:
 $b = \left(\frac{1+1}{1} \right)^n = 2^n \rightarrow \infty$
در این سورد قضیه محقق است.

ولی باز هم می توانم فرض کنم $a_1 = 0$ و برای
 $n = 2, 3, 4, \dots$ فرض می کنم که $a_n = 1$ و بدست می آید:
 $b_n = \left(\frac{0+1}{1} \right)^n = 1^n \rightarrow 1 < e$
بنابراین قضیه غلط است اخیر، اینطور نیست. در فرضیه می توان
را $a_1 = 0$ نیز اختیار کرد ولی اجازه نمی دهد که a_1 را
برابر با صفر بگیریم. در این مورد متأسفم!

باز هم مثالهای دیگری را بیازمایم. فرض می کنم
 $a_n = n$ و بدست می آید:
 $b_n = \left(\frac{1+(n+1)}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n \rightarrow e$
قضیه، باز هم محقق است.

فرض می کنم $a_n = n^2$ باشد. بدست می آید:
 $b_n = \left(\frac{1+(n+1)^2}{n^2} \right)^n = \left(1 + \frac{2 \cdot n+1}{n} \right)^n \rightarrow e^2$
موقتیت جدیدی برای قضیه بدست آمد و باز هم مقدار e^2 را بدست
آوردم. از خود می پرسم که در طرف دوم آیا باید به جای
 e^2 را قرار داد؟ اگر اینطور باشد، قضیه ای قویتر بدست می آید.
یک پارامتر را مداخله می دهیم. فرض می کنم ...
بلی، فرض می کنم که $a_1 = c$ (می توانم c را در اختیار داشته
باشم) بوده و در ازای $n = 2, 3, 4, \dots$ داشته باشم
بدست می آید:

و در این صورت :

$$\frac{a_n}{n} < \frac{a_N}{N} - a_1 \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) = C - a_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

در این رابطه C عددی ثابت و مستقل از n است هرگاه $n > N$ باشد. این موضوع در اینجا حائز اهمیت نیست ولی در واقع $C = \frac{a_N}{N} + a_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right)$ است و چون n را می‌توان بطور دلخواه بزرگ انتخاب کرد، در این صورت دارای اهمیت است؛ از طرفی دیگر سری توافقی و اگر است: از این موضوع نتیجه می‌شود که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = -\infty$$

ولی این رابطه با فرضیه متناقض است چراکه a_n درازای $n = 1, 2, 3, \dots$ بزرگتر از صفر است و این تناقض یکی از تابع اجتناب ناپذیر فرمول (\exists) است. بنابراین در فرآول (\forall) تناقضی وجود دارد که حاصلش آنست که (\exists) با فرض $a_n > 0$ متوافق نیست؛ بنابراین گزاره متناقض (\exists) باید صحیح باشد؛ قضیه مطلوب ثابت شده است!

VI - نقش مرحله استقرائی - اگر نگاهی سطحی به راه حل اخیر بیندازیم می‌توانیم فکر کنیم که اولین مرحله استقرائی آن درباره دو مین مرحله اثباتی مورد استفاده قرار نگرفته است. در واقع، هیچ چنین نیست. مرحله استقرائی از نقاط نظر متعددی مفید بوده است.

دروهله اول و با آزمودن قضیه در حالات خاص، آنرا کاملتر فهمیدیم. در کردنیم که فرض عزیمت ضروری و حکم درست است. از این موضوع در مورد دوین قسمت بهره بردهیم: می‌دانستیم که می‌بایست فرضیه را بطور کامل مورد استفاده قرار می‌دادیم و می‌بایست که مقدار شخص و ثابت w را نیز به حساب می‌آوردیم.

سپس، تحقیق قضیه در حالات خاص متعدد به ماجازه داده که مواردی را که با آن سرمساعدت دارند جمع آوری کنیم. همچنین مرحله استقرائی اجازه داده که از دودلی اولیه در آیم و کاملاً به صحیت قضیه وقوف حاصل کنیم. بدون این دلگرمی، حقیقتاً در پیگیری اثباتی که به وضوح از جاده اصلی داشت منحرف می‌شد، دچار اشکال می‌شدیم: « وقتی به صحیت یک قضیه واقع شدید، در این صورت می‌توانید شروع به اثبات آن بکنید»: کاملاً حق به جانب استاد ریاضیات است.

دنباله در صفحه ۴۵۵

آیا می‌توانید قضیه را به صورت جدیدی بیان کنید؟

آیا می‌توانید قضیه را به گونه‌ای قابل قبولتر عنوان کنید؟

آیا می‌توانید حکم را به صورت جدیدی بیان کنید؟ حکم چیست؟ حکم شامل e است. e چیست؟ آه، بلی، حکم عبارتست از:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(a_1 + a_{n+1})}{(n+1)a_n} \right]^n \geq 1$$

این همان رابطه بهتر است.

آیا حکم می‌تواند غلط و فرضیه محقق باشد؟ این همان پرسش ماست. بینیم که حاصل نفی گزاره یعنی گزاره متناقض، چیست؟ می‌نویسیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(a_1 + a_{n+1})}{(n+1)a_n} \right]^n < 1$$

علامت سوال را از آنچه گذاشتیم که گزاره هنوز قطعی نیست. فرمول بالارا «فرمول (\exists) می‌نامیم». مفهوم فرمول (\exists) چیست؟ این فرمول وجود عدد صحیح N را ایجاب می‌کند بقیه که درازای $w > N$

$$\left[\frac{n(a_1 + a_{n+1})}{(n+1)a_n} \right]^n < 1$$

و در نتیجه:

با زهم نتیجه می‌شود ... کمی کوشش بخر ج می‌دهیم. بلی، می‌توانم صراحتاً بگویم! نتیجه می‌شود که درازای $w \geq N$:

$$\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1} < \frac{a_n}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} < -\frac{a_1}{n+1}$$

برای تمام جملات داریم:

$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} < -\frac{a_1}{n}$$

$$\frac{a_{n-1}}{n-1} - \frac{a_{n-2}}{n-2} < -\frac{a_1}{n-1}$$

.....

$$\frac{a_{N+1}}{N+1} - \frac{a_N}{N} < -\frac{a_1}{N+1}$$

گرده و آنقدر روی آن پافشاری نکنیم.
به ازاء هر افزایش سرعتی بیش از ۹۰٪ در معادله (۲) و تازمانی که این مقدار کمتر از ۱۵ باشد، مقدار مخرج کسر بطور یکنواخت به سوی صفر میل می کند و از این روش مقدار بدون حدود افزایش می یابد. بزرگی مقدار m اهمیت ندارد فقط کافی است بزرگتر از صفر باشد. (اگر حوصله داشته باشد m را برای قابل سرعتهای $999995 / 999990$ و $999990 / 999995$ وغیره حساب کنید).

در ریاضی، گوییم که در هر کسر $\frac{a}{b}$ ، که $a > 0$ است اگر b به سمت صفر میل کند، C بدون حدود افزایش می یابد. مختصرآ و بگفته مدقیق ریاضی، $\lim_{b \rightarrow 0} C = \infty$ ، که ∞ نمایش افزایش بدون حد، «بینهایت» نامیده می شود.

حال می توان گفت که برای هر شیء که دارای جرم است (حتی جزئی) وقتی که سرعت شیء به سرعت نور نزدیک می شود یاتوجه به ناظر، جرم آن به بینهایت نزدیک می گردد.

و این موضوع می رساند که جسم نمی تواند به سرعت نور بر سرده (گرچه فقط می تواند سرعتی غیر قابل مقایسه با سرعت نور داشته باشد) و به هیچ روی سرعت جسم از سرعت نور تجاوز نمی کند. حال بدشرح این موضوع می پردازیم.

اولاً تنها راهی را که بتوان جسمی معمولی را که جرم دارد با سرعتی بیش از سرعتی که در حال عادی می تواند داشته باشد حرکت دهیم این است که به آن نیرویی وارد کنیم و درنتیجه این نیروشتابی حاصل خواهد شد. هرچه جرم جسم بیشتر باشد، شتابی که تو سط نیروی داده شده تولید می شود باید کوچکتر باشد و بنابراین هرچه جرم به مقدار بینهایت نزدیک می شود، شتابی که در تحت نیرویی هر چند زیاد تولید می شود، به صفر نزدیک خواهد شد. در نتیجه وقتی که جرم جسم به سوی بینهایت می گراید تحت هیچ سرعتی جسم نمی تواند حرکت کند.

ثانیاً، جسمی که دارای انرژی جنبشی است $\frac{mv^2}{2}$

که در آن m جرم جسم و v سرعت جسم است) اگر نیرویی به جسم داده شود، انرژی جنبشی جسم افزایش پیدامی کند، زیرا v افزایش پیدا کرده و یا جرم جسم زیاد شده است، و با هر دو یعنی m افزایش پیدا کرده اند. معمولاً برای هر افزایش سرعتی (به غلط) فکر می کردیم که جرم جسم تحت کلیه شرایط ثابت باقی میماند.

واقع امر چنین است که سرعت و جرم تحت اثر نیروی وارد شده به جسم افزایش پیدا کرده اند، لیکن جرم تحت سرعتهای عادی افزایشی بسیار اندک پیدا می کند که غیر قابل اندازه گیری

جرم این ذرات را که دارای سرعتهای مختلف بودند، توانستند بادقت زیاد بدست آورده و صحبت معادله لورنتس را اثبات کنند. در حقیقت تا آن لحظه، نتوانسته بودند چشم اندازی برای این معادله پیدا کنند.

پس به ناچار باید معادله لورنتس را به عنوان برشی از حقیقت جهانی که تشریح می کند. حداقل تا زمانی که توجیه قویتری پیدا شده است، پنهانیم.

حال باقی بول معادله لورنتس، بوتر است از خود چند مسئله کنیم. اولاً، k نماینده چیست؟ برای پاسخ، جسمی را فرض کنید (هر جسمی که دارای جرم باشد) که نسبت به ناظر در حال سکون باشد. در این صورت سرعت آن صفر است پس:

$$v = 0 \Rightarrow \frac{v}{c} = 0 \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 0$$

و آنچه که از معادله بدست می آید چنین است:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - 0} = \sqrt{1} = 1$$

یعنی برای جسمی که نسبت به ناظر در حال سکون است، معادله لورنتس عبارت است از: $m = \frac{k}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = k$. ونتیجه بدست آمده چنین است: برای جسمی که نسبت به ناظر در حال سکون است k نماینده جرم جسم است. و آنرا عموماً «جمل در حال سکون» نامیده و به m نمایش می دهیم. حال معادله لورنتس را می نویسیم:

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (2)$$

مسئل بعدی این است که اگر سرعتی بیش از ۱٪ سرعت نور داشته باشیم چه اتفاق می افتد. مثلاً فرض کنید جسم با سرعتی برابر $v = 1C$ نسبت به ناظر در حرکت باشد؛ یعنی سرعتی برابر سرعت نور داشته باشد آن وقت، معادله لورنتس چنین می شود:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - 1^2} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} = 0$$

پس برای جسمی که سرعتی برابر سرعت نور داشته باشد معادله لورنتس چنین می شود:

$$m = \frac{m_0}{0}$$

و اگر اشکالی پیش بیاید، آن تقسیم بر صفر است که در ریاضیات عملی نیست. از نظر ریاضی معادله لورنتس برای اجسامی که با سرعت نور حرکت می کنند و دارای جرم هستند بدون معنی خواهد بود.

حال بهتر است که از سرعتی معادل سرعت نور صرف نظر

صورت زیر درخواهد آمد:

$$m(v) = m_0 \quad (4)$$

اگر فوتون یک جسم معمولی جرم دار بود وقتی که با سرعت نور حرکت می کرد جرمش (m) بینهایت می شد و معادله (۴) به صورت $m_0 = m \times v = \infty$ درستی آمد که چنین معادله ای در ریاضی بی معنی است.

خلاصه، جرمی بدلیک فوتون نسبت داده می شود که مقدارش $v = 0$ باشد، گرچه با سرعتی برابر سرعت نور حرکت کند، و برای هر مقدار $v = 0$ و ∞ که به m نسبت داده می شود، مقدار m در معادله (۴) برابر صفر است.

یعنی برای فوتونها، جرم در حال سکون (m_0) برابر صفر است. پس اگر m صفر باشد می توان گفت که جسم می تواند با سرعتی برابر سرعت نور حرکت کند.

(ین توضیح برای کسانی بود که فکر می کنند عیوبی در منطق این شتبین پیدا کرده و می گویند «اگر جسمی با سرعت نور حرکت کند جرمش بینهایت خواهد شد»، پس چرا فوتونها جرمنش بینهایت نیست؟ جواب سؤال این است که باید در اینجا ذراتی را که جرمنش در حال سکون صفر است باذراتی که جرمنش در حال سکون بیش از صفر است از یکدیگر تمیز دهیم).

حال فوتونی را تصویر کنید که با سرعتی کمتر از سرعت نور حرکت کند. در این حال مقدار زیر را دیدیک در معادله (۳) بزرگتر از صفر بوده و در m که خود نیز بزرگتر از صفر است ضرب خواهد شد. اگر هر دو مقدار بزرگتر از صفر باشد در نتیجه حاصل ضرب آنها (که m می شود) باید مقداری بزرگتر از صفر داشته باشد.

پس اثر فوتونی با سرعتی کمتر از سرعت نور حرکت کند (اندازه کمتری آن نیست)، دیگر نمی تواند جرم سکونی هر ایر صفر داشته باشد. مشابه همین امر برای فوتونی که با سرعتی بیش از سرعت نور حرکت کند (اندازه زیادی سرعت بهم نیست) صادق است. (چیزهای خنده داری برای اجسامی که سرعتی بیش از سرعت نور دارند در معادله خواهیم یافت که بزودی خواهیم دید. اما مضمون ترین پدیده این است که جرم در حال سکون دیگر برابر صفر نخواهد بود).

فیزیکدانها مصراً اند می گویند که باید برای هر جرم، جرم در حال سکون مقداری ثابت باشد، زیرا کلیه پدیده های قابل اندازه گیری وقتی صحت پیدا می کنند که این امر درست باشد. برای اینکه جرم سکون یک فوتون ثابت بماند (یعنی همیشه برابر صفر باشد) باید همیشه با سرعتی برابر سرعت نور حرکت کند. و حتی باید سرعتش به مقدار خیلی هم ناچیز کمتر یا بیشتر از آن باشد و ضمناً باید این حرکت در یک جسم

است. همانطور که سرعت جسم با توجه به ناظر، زیاد می شود، مقادیر زیاد و زیادتری از ارزی که توسط نیروی وارد به جسم حاصل شده به صورت افزایش جرم و مقادیر کوچک و کوچکتری به صورت افزایش سرعت ظاهری شوند. تا زمانی که سرعت جسم خیلی فردیک به سرعت نور خواهد شد. و واقعاً تسام افزایش ارزی به صورت افزایش جرم ظاهر خواهد شد (نمایه صورت افزایش سرعت). این تغییرات به تأکید بیان می دارند که سرعت نهایی هیچگاه به سرعت نور نمی رسد.

نپرسید چرا. زیرا جهان براین پایه بنا شده است. اسیدوارم توجه کرده باشید، گرچه وقتی راجع به این حقیقت که جرم جسم وقتی به سرعت نور می رسد، بینهایت می شود من ناچار از اطاعت حقایق ریاضی مانند «مقدار m اهمیتی نداشته و فقط کافی است بزرگتر از صفر باشد» بودم.

البته تمام اجزایی که ما و جهان مارامی سازند از پر و تونها، الکترونها، نوتونها، مزوتها هیپرونها، و غیره وغیره جرمنش در حال سکون از صفر بیشتر است و بنا بر این این انحصار هم چنان محدود نیست. در حقیقت، مردم غالباً می گویند، «غیرممکن است که سرعتی برابر سرعت نور و یا متفوق آن داشته باشیم» بدون آنکه شخص کنند که مقصودشان اجسامی است که جرم سکونشان بیش از صفر است زیرا این گفته چنین به فکر خطور می کند که برای همه اجسام رهمه جا صادق است.

حال موضوع را برای اجسامی که آنها کوچکتر از صفر است، بررسی می کنیم.

یک فوتون را در نظر بگیرید، برای مثال، یک «ذره» از تابش الکترومagnetیک - نور مرئی، امواج کوتاه، اشعه گاما وغیره.

درباره فوتونها چه می دانیم؟ نخست می گوئیم که فوتون ارزی معینی را داراست و درنتیجه مقدار آن همیشه بین صفر و بینهایت است. همانطور که این شتبین نشان داد ارزی با فرمول $E = mc^2$ به جرم وابسته است. یعنی به هر فوتون مقدار جرمی می توان نسبت داد که توسط این فرمول بدست می آید و مقداری بین صفر و بینهایت دارد.

دیگر اینکه فوتونها (باتوجه به هراظری) با سرعت نور حرکت می کنند. مسلماً نور این سرعت را داراست زیرا از فوتونها تشکیل یافته است.

حال با دانستن این دونکته، معادله (۲) را به شکل زیر تغییر می دهیم:

$$m \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = m_0 \quad (3)$$

برای یک فوتون که در آن $v = c$ ، معادله (۳) به

راکه با سرعت نور حرکت می‌کنند لوکسیون (Luxion) نامیدند که اسم لاتین نور (Light) است.

کلیه ذرات با جرم مخصوص بزرگتر از صفر که بنابراین دیگر نمی‌توانند به سرعت نور برستند و باید همیشه و برای ابد با سرعتی کمتر از آن حرکت کنند، تاردیون‌ها (Tardyons) خوانده می‌شوند. سپس آنها پیشنهاد کردند که برای تاردیون‌ها سرعتی کمتر از سرعت نور (زیر روشنایی)، (کندتر از نور) در نظر بگیرند.

حال راجع به اموری که تابه حال درباره آنها بحث نکرده‌ایم، فکر کنیم و ببینیم آیا ذراتی سریعتر از نور می‌توانند وجود داشته باشند یعنی به اصطلاح (ما فوق روشنایی) باشند؟

ذراتی را در نظر بگیرید که با سرعتی برای ابر ۲۰ حرکت کند؛ یعنی سرعتی ۲ برای ابر سرعت نور داشته باشد. در آن صورت:

$$\frac{V}{C} = \frac{20}{C} = 2$$

$$\left(\frac{V}{C}\right)' = \left(\frac{20}{C}\right)' = 4$$

و جمله $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2}$ چنین خواهد شد:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2} = \sqrt{1 - 4} = \sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$$

اما می‌دانیم که $\sqrt{-1} = i$ و $\sqrt{-3}$ تقریباً برای ابر $1/73$ است، پس برای ذره‌ای که با سرعتی ۲ برای ابر سرعت نور حرکت می‌کند معادله (۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$1/73mi = m \quad (5)$$

به $i = \sqrt{-1}$ عدد موهومی گفته می‌شود، عدد موهومی عدد ضعیفی است ولیکن وجود دارد. اگر مثالهایی را در نظر گرفته و در این مثالها برای جسم سرعتی ما فوق سرعت نور در نظر بگیرید خواهید دید که جرم مخصوص بدست آمده عددی موهومی خواهد شد.

جرم موهومی در جهان (زیر روشنایی) ما علامت فیزیکی شخصی ندارد و بدین جهت بر سرعتهای ما فوق سرعت نور (ما فوق روشنایی) قلم بطلان کشیده و وجود این ذرات را غیرممکن می‌دانند، زیرا که جرم موهومی نمی‌تواند وجود داشته باشد. وابن موضوع را من بارها با کرات گفتندام.

اما آیا جرم موهومی واقعاً بدون معنی است؟ یا اینکه جرمی را که به mi نمایش می‌دهیم طریقه ریاضی برای تشریح یک سلسله از قوانینی است که تابه حال با آنها آشناشی نداشته‌ایم، قوانینی که هنوز از نسبیت خاص اینستین پروری می‌کنند؟ مثلاً، در بازیهایی نظیر بیس بال، فوتbal، بسکتبال، فوتbal-

صورت پذیرد.

وقتی که یک فوتون بوجود آید، فوراً بدون هیچ وقفه‌ای، با سرعتی برابر 300000 کیلومتر در ثانیه شروع به دورشدن از نقطه مبدأ خود می‌نماید. شاید این امر پارادوکسی بنظر بیش نماید زیرا لازمه این امر دارا بودن شتابی بینهاست و در نتیجه وارد کردن نیروی بینهاست ام است اما همین جاتوقف می‌کنیم.

قانون دوم نیوتن، که از بستگی بین نیرو، جرم و شتاب صحبت می‌کند، فقط در مورد اجسامی صادق بود که جرم سکونشان بیشتر از صفر بود. این قانون برای اجسامی که جرمشان در حال سکون برای صفر بود، بکار نمی‌رفت.

بنابراین، اگر تحت شرایط عادی به جسمی معمولی انرژی داده شود، سرعت آن افزایش پیدا خواهد کرد؛ و اگر از آن انرژی گرفته شود، از سرعتش کاسته خواهد شد. اگر به فوتونی انرژی داده شود، بسامد (و جرم) افزایش یافته و لی سرعت آن ثابت باقی می‌ماند؛ و اگر از آن انرژی بگیریم، بسامد (و جرم) کاهش پیدا کرده لیکن باز هم سرعت آن ثابت باقی خواهد ماند.

اگر تمام آنچه که گفته شد صحیح باشد، بمنطق ضعیفی درباره (جرم در حال سکون) وابسته به فوتونها، و بروهستیم، زیرا باید فوتون وقتی که به حال سکون است دارای جرم باشد و یک فوتون هیچگاه نمی‌تواند سکون اختیار نماید.

اصطلاح دیگری توسط بیلانیوک و سودارشن، ارائه شده «جرم مخصوص» نام داشت. مقدار جرم مخصوص یک جسم جزء لاینفلک و ذاتی جسم بوده و به سرعت بستگی ندارد. در این صورت در اجسام عادی، این جرم ذاتی برای ابر جرمی است که جسم در حال سکون داشته و قابل اندازه گیری است. و در مورد فوتونها، این جرم را با قیاس و استنتاج کردن برآورده می‌کنند تا اندازه گیری مستقیم.

یک فوتون تنها جسمی نیست که می‌تواند باید با سرعتی برای ابر سرعت نور حرکت کند. هر جسم با جرم مخصوصی برای ابر صفر می‌تواند باید یک چنین سرعتی داشته باشد. علاوه بر فوتونها، بیش از پنج نوع ذره مختلف وجود ندارد که جرم مخصوص برا ابر صفر داشته باشد.

یکی از این ذرات، ذره فرضی ثقل است، که نیروی ثقل آنرا با خود حمل می‌کند، و در سال ۱۹۶۹، کشف گردید.

چهارتای دیگر نوترینوهای مختلفی هستند: ۱- نوترینو، ۲- پادنوترینو-۳- موئون نوترینو و ۴- موئون پادنوترینو.

ذره ثقل و چهار نوترینو می‌توانند و باید با سرعتی برای ابر سرعت نور حرکت کنند. آقای بیلانیوک و نیز سودارشن نام ذراتی

ذرات کیهانی) جرم خیلی کمی دارند. اشیایی که جرم‌شان زیاد است (مانند یک ستاره) سرعت خیلی جزئی دارند.

مشابه این امر در دنیای تاکیون‌ها وجود دارد. اجسامی که سرعت کمی دارند (در اینجا این سرعت باید درست کمی بیش از سرعت نور باشد) چون انرژیها در این جهان زیاد است پس باید دارای جرم کوچکی باشند و اختلاف چندانی با اشتعال‌ذرات کیهانی نداشته باشند. اشیایی که دارای جرم زیاد هستند باید انرژی جنبشی کمی داشته باشند و در نتیجه سرعتهای شگفتی دارند. مثلاً، یک ستاره تاکیونی باید سرعتی تریلیونها برابر سرعت نور داشته باشد. و این بدان معنی است که جرم ستاره، اگر اغراق نباشد. در فواصل وسیعی به قسمتهای خیلی کوچکی پخش شده، و بنا بر این باید مقدار ناچیزی از آن د هر زمان و مکان دلخواه وجود داشته باشد.

این دوچهان را می‌توان فقط در یک نقطه بایکدیگر تصادم داده و یک را از دیگر بدمت آورد و این نقطه ملاقات دیوار نور است. (هر دوچهان، فوتونها، مزونها، ذرات ثقل را بطور معمول بدمت می‌دهند).

اگر تاکیونی انرژی زا باشد، که در این صورت سرعت خیلی کند است، در این حال انفجاری از فوتونها در آن تولید می‌شود. داشتن دنیان متضطر ظهور چنین انفجاراتی هستند، اما شناس اتفاق افتادن آنها و اینکه وسیله‌ای داشته و درست در محل دقیق جایی که انفجارات صورت می‌پذیرند بگذرایم، یک بیلیون نیم ثانیه پا کمتر است که احتمال زیاد بزرگی نیست.

البته از خود سؤال می‌کنیم که آیا می‌توان این دیوار نور را که فاصله بین دوچهان است پر کست و از آن با وسیله‌ای غیر از شتاب عبور کرد. می‌بینیم غیرممکن است. آیا کسی می‌تواند تار دیونها و تاکیون‌ها را (شاید بوسیله فوتونها) به یکدیگر تبدیل نماید؟ این کار مانند این است که شخصی که این طرف دیوار نور استاده ناگهان خود را در آن طرف دیوار بدون آنکه از آن عبور کرده باشد، مشاهده کند. (درست مانند اینکه از تار دیونها فوتون نشست آورده و ناگهان ببینیم که اجراسی (فوتونها) با سرعت نور داریم بدون آنکه آنها شتاب دار شده باشند)

صحبت تاکیون‌ها مانند صحبت از موارء جهان است، تصوری که برای نویسنده‌گان داستانهای خیالی علمی شیرین است. مثلاً در چهان تاکیون‌ها یک کشتی فضایی که با سرعتی کمتر از سرعت نور حرکت می‌کند و دارای انرژی به حد کافی است ناگهان در وضعی قرار می‌گیرد (با همان انرژی قبلی) که سرعتی چندین برابر سرعت نور دارد. این کشتی می‌تواند در سه ثانیه به کوهکشانهای دور دست رفته و بطور خود کار به چهان تار دیونها دنباله در صفحه ۴۵۶

دستی، چو گان وغیره، رقیب یارقبایی که تلاش بیشتری می‌کنند برند خواهند بود. حال آیا کسی می‌تواند بگوید که مثلاً در یکی از این بازیها نمی‌توان رقیبانی را تصور کرد که تلاش کمتری کرده و پرنده هم شده‌اند؟ درباره گلف چه می‌گویید؟ نکته مهم در هر بازی که به مهارت نیاز دارد این است که رقیقی که تلاش بیشتری از خود نشان می‌دهد برند است - تلاش بیشتر بازی بهتر را ارائه می‌دهد، ولیکن این موضوع برای بازی گلف صادق نیست.

به طریق مشابه، برای اطاعت از نسبیت خاص، به نظر ما شبیه با جرم سکون موهوی نسبت به جرم‌هایی که با آنها سرو کار داریم و دارای جرم سکون حقیقی هستند باید پارادوکسی بیش نیاید. مثلاً، اگر شبیه با جرم سکون موهوی افزایش انرژی پیدا کند، از سرعتش کاسته خواهد شد؛ و اگر کاهش انرژی پیدا کرد، بر سرعتش افزوده می‌شود. به عبارت روشنتر، وقتی بر شبیه که جرم سکونی موهوی دارد نیرو بی واردشود از سرعتش کاسته خواهد شد و وقتی که در برخورد باشی دیگری مقاومت می‌نماید بر سرعتش افزوده خواهد شد.

خلاصه، در چنین ذراتی که انرژی آنها اضافه شده و در نتیجه از سرعتشان کم می‌شود، هیچگاه کاهش سرعت آنقدر نیست که برابر سرعت نور گردد و وقتی هم که سرعت آنها برابر سرعت نور شد جرم‌شان بینهایت می‌شود. و هنگامی که انرژی آنها کاهش یافته و به سمت صفر میل نماید، سرعتشان بدون حدود افزایش خواهد یافت. جسمی با جرم سکون موهوی، که انرژی اش صفر است، باید سرعتی بینهایت داشته باشد. چنین ذراتی همیشه سریعتر از نور حرکت می‌کنند و فین بر گت (Feinberg) نام «تاکیون‌ها» (Tachyons) را برای آنها بیشنده نموده که از اسم یونانی «سریع» مشتق شده است.

خوب، پس چهان تار دیون‌ها زیر روشنایی است، و سرعتهای ممکنه در آن از صفر، برای انرژی صفر تا C برای انرژی بینهایت تغییر می‌کنند، چهان تاکیون‌ها مافوق روشنایی است، و سرعتهای ممکنه در آن از C برای انرژی بینهایت تا ∞ برای انرژی صغیر تغییر پیدا می‌کنند. بین این دوچهان، چهان لوکسیون یا نور وجود دارد، که سرعتهای ممکنه در آن برای هر مقدار انرژی برای C است، نه از آن کمتر و نه بیشتر.

می‌توان کل چهان را با دیواری به دو بخش تقسیم کرد. در یک طرف این دیوار چهان تار دیون‌ها و در طرف چهان تاکیون‌ها را قرارداد، و بین آنها، دیوار بینهایت نازک و سخت نور احدها گذاشت.

در چهان تار دیون‌ها غالب اجسام انرژی جنبشی کمی را دارا هستند. و اجسامی که سرعتهای زیادی دارند (مانند اشعه

دیوار نور

ترجمه: علیرضا توکلی صابری

نوشتۀ آیراک آسیموف

از کتاب: The stars in Their courses

موضوعی را که می‌خواهم درباره آن بحث کنم ذرات سریعتر از نور ریاتاکیونها نامدارد. ایندادی بحث را با اولین معادله‌ای که توسط فیزیکدان هلندی لورنتس در سال ۱۸۹۵ ارائه شد، شروع می‌کنیم. لورنتس این معادله را برای جسم با ابار الکتریکی بکار برده و آنرا رای نسبیت خاص بکار گرفت و نشان داد که برای گلیمه‌ای جسم په دارای بار الکتریکی باشد و چه بیان می‌توان این معادله را بکار برد.

حال معادله لورنتس را کمی دستکاری می‌کنیم تا مقصود بهتر روشن شود. من خود این معادله را اینطور خواهم نوشت:

$$m = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (1)$$

در این معادله، m نماینده جرم جسم تحت شرایط سئله، v سرعتی است که باتوجه به حرکت داظر به چشم می‌رسد، c سرعت نور، و k مقدار ثابتی است که جرم بوردن نظردار است. فرض کنید جسم سرعتی برابر $1/10$ سرعت نور داشته باشد. یعنی $v = 1/10 c$ در این صورت، مخرج کسر در سمت راست معادله (۱) چنین خواهد شد.

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1/10}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - (0/1)^2} = \sqrt{1 - (0/10)} = \sqrt{0/99} = 0/995$$

و معادله (۱) چنین خواهد شد:

$$m = \frac{k}{0/995} = 1/005k$$

همین عملیات را می‌توان برای اجسامی که دارای سرعتهایی برابر $1/20$ ، $1/30$ و $1/40$ وغیره‌اند بکار برد. سرتان را با محاسبات در دنی آورم فقط جوابهایی را که با بردن این مقادیر

در معادله (۱) بدست می‌آید، می‌نویسیم:

سرعت	جرم	سرعت	جرم
$0/10$	$1/005k$	$0/50$	$1/15k$
$0/20$	$1/03k$	$0/60$	$1/24k$
$0/30$	$1/05k$	$0/70$	$1/41k$
$0/40$	$1/09k$	$0/80$	$1/67k$
		$0/90$	$2/29k$

همانطور که مشاهده می‌کنید، معادله لورنتس، اگر صحیح باشد، نشان می‌دهد که هر جسم وقتی که سرعت آن زیاد می‌شود، افزایش جرم پیدا می‌کند. این افزایش جرم خیلی به سرعت صورت می‌پذیرد و وقتی که این معادله را راهه شد با افکار عمومی سازگاری نداشت زیرا هر گز چنین افزایش جرمی در ساده‌دیده نشده بود.

علت این نا-ازگاری و گنگی در این بود که مقدار c با معیارهای ما به قدری بزرگ بود که امکان نداشت جسمی را با آن سرعت پھر کت در آوریم. بلی 300000 کیلومتر در ثانیه سرعت زیادی بود. در سرعتی معادل $1/10$ سرعت نور، جرم پک جسم $1/005k$ می‌شد یعنی در سرعت 30000 کیلومتر در ثانیه 3600×30000 کیلومتر در ساعت افزایش جرمی برابر نیم یا $1/005k$ درصد پیدامی کرد. و این افزایش جرم در عمل بخوبی آشکار بود؛ به هر حال سرعتی که «فقط» برابر $1/10$ سرعت نور بود بر ابر 300000 کیلومتر در ثانیه و یا 3600×30000 کیلومتر در ساعت است. یا به گفته دیگر برای بدست آوردن تغییرات جرم، می‌باشد یک چنین سرعتی را بتوانیم بدست بیاوریم که خارج از محدوده آزمایش‌های دانشمندان سال ۱۸۹۵ بود.

چند سال بعد، ذات ریز اتمی، در خروج از هسته اتمی را دیو اکتیو دیده شدند و سرعتی برابر کسری از سرعت نور داشتند.

مکانیک کوانتم چیست؟

ترجمه: علیرضا توکلی صابری

از نظریه بوهر تا مکانیک کوانتم

کوچک خود سعی می‌کند آنرا دوباره به لبِ حوض نزدیک سازد، مشاهده کنید. امواجی در زیر کشته پدیده می‌آیند که فقط باعث بالا و پایین رفتن کشته خود می‌شوند. از این موضوع بر می‌آید که آب باموج حرکت نمی‌کند بلکه فقط درجای خویش بالا و پایین می‌رود. در امواج بزرگ حاصل از پرتاب سنگهای سنگین در آب، آب نیز حرکت کندی دارد ولی این حرکت محدود است.

این خاصیت «حمل آب» که از امواج شدید حاصل می‌شود ورزشی را که به اصطلاح سوار بر موج خوانده می‌شود و با تخته‌ای بر روی آب انجام می‌پذیرد، ممکن می‌سازد. این ورزش در استرالیا و نقاط دیگر مرسوم است. وزشکار روی یک تخته سطح و بزرگ ایستاده و درجهٔ امواج عظیمی که بطور منظم رو به ساحل در حرکتند به بالا و پایین رانده می‌شود. میس موج عظیمی اورا با خود و با سرعت زیادی به سمت ساحل می‌کشد. کوچکترین خطایی در حرکت وزشکار باعث می‌شود که به عوض اینکه در رأس و بالای امواج حرکت کند، از روی تخته واژگون شده و غرق شود.

در این وزش مهیج و خطرناک، امواج آب و وزشکار را با خود به سمت ساحل می‌راند. اصطلاح «موج راهنماء» (Pilotwave) را بخاطر داشته باشید که بعد درباره آن بحث کرد.

در سده گذشته فیزیکدانها دریافتند که صوت نیزیک حرکت موجی است و معلوم شد که امواج صوتی در هوا، آب و جامدات انتشار می‌یابند. نوسانات در امواج صوتی چیستند؟ همان ذرات رابطی هستند که توسط آنها صوت منتشر می‌شود یعنی مولکولهای هوا، آب و اتمهای جامدات.

اگر هوا، آب و ماده را کنار بگذاریم، دیگر امواج صوتی نخواهیم داشت. زیرا صوت در خلاء منتشر نمی‌شود. یکان دوره‌هشتم

مقاله مهم

در سپتامبر سال ۱۹۲۴، نشریه ماهانه انگلیسی به نام «مجله فلسفی» (Philosophical Magazine) خواص مقاله‌ای از یک فیزیکدان ناشناس به نام لوئی دوبروی (louis de Broglie) بود. نویسنده از گشته از بروی نکات، بهمی از فیزیک نظری گذاشته و در بحث خود به احتمال وجود امواج ماده اشاره کرده بود.

امواج ماده؟ آیا این امواج، امواج صوت، نور و دیگر موجهای نظیر آنها نبودند، که کاملاً مادی بوده و می‌توان آنها را بوسیله اعضاء حسی درک نمود و یا با ابزارهای مختلف آنها را ثبت کرد؟

خیر، امواجی را که دو بروی در معجز خود می‌پروراند، کاملاً با آنها تفاوت داشت. نظریات ارائه شده دو بروی مطلوب عame نبود و گنگ بنظر می‌رسید و به آسانی با اصولی که یک ربع قرن قبل توسط پلانک راجع به کوانتم انرژی بیان شده بود، رقابت می‌کرد. به عقیده فیزیکدانان این نظریات نه فقط به خاطر اهمیتشان در فیزیک، بلکه همچنین به خاطر جبهه‌ای که خود را در آن ظاهر می‌کردند، عبارت بودند از یک دیر باوری آشکار.

به هر حال، این امواج ماده چیستند؟ قبل از بررسی آنها، بهتر است نظری به امواج «معمولی» بیندازیم که در آن زمان کاملاً شناخته شده بودند. سنگی را در حوضی اندخته و امواجی را که روی سطح آب پدید می‌آید، نظاره کنید. اتفاقاً امواج سطحی تنها مونهای از موج هستند که می‌توان حرکت آنها را مستقیماً و عملان مشاهده کرد.

چنین بنظر می‌رسد که آب نیز با امواج حرکت می‌کند. لیکن این نظر نیست. کودکی را که با پرتاب سنگ به اطراف کشته

وجود ماده مسلماً امواجی هم نخواهیم داشت، در واقع هیچ چیزی وجود نخواهد داشت!

حقیقت اینکه دو بروی نتوانسته بود نامی شایسته این امواج انتخاب کند تا سیمای آنها نمودروشند دهد. ولی چه می توانست بکند؟ موضوعاتی جدید، قبل از اینکه دانشمندان فرصتی برای تفکر بر روی آنها داشته باشند، نام گذاری شوند.

شبیه این امر نیز برای دو بروی صادق بود. امواج ماده ای که او پیشنهاد کرده بود بقدی بغرنج و پیچیده بودند که هنوز نیز فیزیکدانان درباره آن به بحث می نشینند. ما با نظر دقیقتری بر روی امواج دو بروی گفتگو خواهیم کرد زیرا این امواج شالوده مکانیک کو انت قرن حاضر است.

چرا نمی توان امواج دو بروی را مشاهده کرد؟
شاید این اولین سوالی بود که فیزیکدانان از دو بروی می کردند. سپس می پرسیدند چطور این امواج را درکنیم؟ اگر بوسیله اعصابی حسی باشد که وسیله بسیار ضعیفی است. گوش انسان امواج صوتی را که بسامدهایی بین ۲۵ تا ۱۶۰۰۰ اوتواش در هر ثانیه دارد، می شنود. این بسامدها بستگی به طول موجه ای صوتی بین ۱۷ متر تا ۲ سانتیمتر درهوا دارد. چشم انسان در مقابل امواج نورانی به طول موجه ای ۵۰۰ تا ۱۸۰ میکرون حساس است. و تازمانی که بطالعه بر روی امواج ادامه دارد، این حواس «پنجره های» طبیعت هستند (البته اگر امواج سطح دریا را کنار بگذاریم).

فیزیکدانها ابزارهای گونه گونی را بکار می گیرند، تا طول موجه ای را که بین این دو «پنجره» قرار گرفته اند و خارج از محدوده احساس بشر هستند، در تیرمن دید بشراره دهند. این امر گسترش کاملی به امکانات ما درباره مطالعه پدیده های موج می دهد. گیرنده های ادیوبی امواج رادیویی سانتیمتری و متري را که بمق Shan دراعماق فضا است گرفته و برسی آنها را آسان می کند، شمارنده های درخششی (*) اشعه گاما صادره از هسته اتمی را مشخص می نماید. این اشعه طول موجی برابر میلیون دهم میلیون نهم میلیونمتر اشتده او از نوع الکترو مانیتیک است. اکنون روش شد که دامنه طول موجه ای بسیار بزرگی مطالعه شده است. پس چرا نمی توان امواج دو بروی را آشکار کرد؟

مسئله این است که: چطور این امواج را آشکار سازیم؟ امواج مکانیکی (برای نمونه، امواج صوتی) که چند متر طول دارند توسط گوش شنیده می شوند. ولی رادیوحتی و قطبی که روی این طول موج تنظیم گردد، نمی تواند آنرا نمایان سازد، و از آنجا که هر گیرنده ای طول موجی وابسته به خویش دارد، امواج رادیویی را نیز نمی توان با گوش و یا هر وسیله مکانیکی دیگر

همچنانکه فضانوردان شاهد انفجارات عظیم آتش حاصل از سوت سفینه در خلاء می باشند، بدون اینکه کوچکترین صدایی بشنوند و فقط لرزش و تکان سطح سفینه را در زیر پاهای خود حس می کنند. در سطح ماه، سفینه در آرامش مطلق به جلوی رود و غرش موتور را کتها آنطور که مادر زمین می شنویم، در آن جا بی معنی است.

فیزیکدانهای قرن گذشته به همین شیوه در باره ماهیت امواج الکترو مانیتیک که از حرکت بارهای الکتریکی حاصل می شوند، قضاویت می کردند.

امروزه نور و امواج رادیویی که از ستارگان دور دست و سحابیها به زمین می رسند، هزاران و میلیونها سال پیش آغاز به سفر کرده اند و مسیر آنها اغلب از میان فضاهای بیکران و تفریانهای بین ستارگان طی شده است. در سطح ماه، فضانوردان در سکوت مطلق شاهد آتش خیزه کننده ای می باشند که از انتهای راکت آنها زبانه می کشد.

بنابراین در خلاء می توان دید ولی نمی توان شنید. و این امر اختلاف هم و اساسی بین امواج الکترو مانیتیک و امواج مکانیکی (مثل امواج صوتی) را بیان می دارد. برای انتشار امواج الکترو مانیتیکی به ماده واسطه ای نیاز نیست، بر عکس این واسطه اگر هم موجود باشد فقط سرعت آنها کاهش می دهد.

با امواج ماده آشنا شویم

بهتر است بار دیگر امواج ماده را بررسی کنیم. دو بروی خاطرنشان ساخت که این امواج در اثر حرکت هر گونه جسمی، از یک ستاره گرفته تا یک سنگ، ذره گرد و غبار و یا یک الکترون، تولید می شوند. امواج مذکور نیز مشابه امواج الکترو مانیتیک قابلیت انتشار در خلاء، طلاق را دارند. ازینرو آنها نمی توانند امواجی مکانیکی باشند و از آنجا که بوسیله کلیه اجسام حتی آنها بیکار الکتریکی ندارند، تولید می شوند پس از نوع امواج الکترو مانیتیکی نیز نخواهند بود.

در آن زمان فیزیکدانان موج دیگری نمی شناختند و بنابراین امواج مادی چهره های ناشناسی بودند که تا آن زمان به آنها برخورد کرده بودند. وقتی راجع به امواج مادی از آنها پرسش می شد با بالا اند اخترن شانه می گفتند: «چیزی بی اساس و کامل پوج است».

آنها قوی آنعت قدیم بودند که کلیه امواج اجتماعی کشف و شناخته شده اند و این دو بروی فیزیکدان جوان و گستاخ است که سخن از امواج ماده می کند، آنهم امواجی که نه مکانیکی بودند و نه الکترو مانیتیکی، بلکه آنها را امواج ماده؟ می نامید. و بدون

* شمارنده درخششی (Scintillation Counters) دستگاه شمار تعداد ذره ها و برای تشخیص تابشهای ضعیف بکار می رود.

که عدد بدهست آمده بهتر از طول موجی نیست که برای زمین پیدا کردیم. در اینجا نیز نمی‌توان آنرا آشکار ساخت. زیرا این طول موج یک میلیون، میلیون، میلیونیم بار کوچکتر از هسته اتم است و خود هسته اتم را نیز نمی‌توان بوسیله هیچ میکرو سکپی مشاهده کرد و خارج از دید بشر است.

محاسبات را برای یک الکترون انجام می‌دهیم. الکترون جرمی برابر 10^{-27} گرم دارد. اگر الکترونی در میدانی الکتریکی با اختلاف پتانسیلی برابر یک ولت قرار گیرد، سرعتی برابر $10^7 \times 6$ سانتیمتر در ثانیه خواهد داشت. مقدار را در رابطه دو بروی می‌بینیم چنین بدست می‌آوریم:

$$\lambda = \frac{6/6 \times 10^{-12}}{6 \times 10^7 \times 10^{-22}} = 10^{-7} \text{ cm}$$

این عدد کمی آشناست، 10^{-7} سانتیمتر تقریباً نزدیک به طول موج اشعه ایکس است و می‌توان آنرا آشکار ساخت. بنابراین، بطور کلی می‌توان طول موج دو بروی یک الکترون را در عمل مشاهده کرد.

موج دو بروی کشف شد

ولی چگونه؟ موج دو بروی در نظریه وجود داشت و بنظر نمی‌رسید که بتوان آن را بازاری آشکار ساخت. ولی یک موج، به هر حال یک موج است و باید پدیده‌ای وجود داشته باشد که بدون توجه به ساخته موج، موجودیت آن را ثابت کند. سعی بر آن شد که وجود موج دو بروی را بانمودی به ذام پرداز، که خود پدیده موجی کاملی بود، به اثبات براند. وقتی موجی با منعی روبروی شود از منع عبور نکرد، و از نواحی بلا فاصله مجاور آن می‌گذرد و پراش ایجاد می‌گردد. در این عبور موج اندکی ناچیز از مسیر اصلی خود منحرف شده و به سمت «ساختم» پشت منع پیش می‌رود.

نمود پراش حاصل از یک منع کروی و یا یک سوراخ گرد بر روی یک پرده به صورت حلقه‌ای متداول با روش و تاریک ظاهر می‌شود. برای مثال، چنین صحنه‌ای را می‌توان از پشت لیوانی مات وقتی آن را جلوی چراغی در خیابان گرفته ایم، تماساً کنیم. در شبها یخ بندان، ماء از اعدادی ازدواج تاریک و روشن احاطه کرده است، زیرا برس راه نور ماه ذرات ریز یخ که در هوای شناور نزد قرار داشته و نور به هنگام عبور از آنها پراشیده می‌شود.

پراش یک نمود موجی قابل مشاهده است، واین نمود شالوده بعثهای دقیق و ظرفی در ابتدای شروع قرن نوزدهم برای نظریه موجی نور شد. ولی طول امواج نورانی، صدها و هزاران بار بزرگتر از

شنبید، حتی اگر این امواج چندین متر طول داشته باشند.

مسلمان هر گیر ندهای طول موجی مخصوص به خود دارد. گوش امواج صوتی را می‌شنود، چشم امواج الکترو مانیتکی را هس می‌کند. حال چطربه ای تو ان امواج دو بروی را که شبیه به هیچیک از این دو دسته نیستند، آشکار ساخت؟ مقدمتاً می‌توان گفت که این جواب پرسشی است که در اول این بحث و چنین در عنوان مقاله مطرح شده است. راجع به این موضوع در آینده بیشتر بحث خواهیم کرد.

اگر بخواهیم طول این امواج ماده را تعیین کنیم، جواب دیگری نیز بدست خواهیم آورد. دو بروی رابطه:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

را برای خط فکری جدید خویش ارائه داد. در این رابطه λ معرف طول موج دو بروی $6/6 \text{ cm}$ به ترتیب جرم و سرعت جسم سوردنظر است h چهره آشنا و دوست قدیمی ماعده ثابت پلازنگ است.

این رابطه مهم بازگو کننده این حقیقت بود که امواج دو بروی ماهیت کوانتمی دارند. ضمناً، اجزهه دهید بینهم اجرامی که به دور مامی گردند چه طول موجهایی بر طبق رابطه دو بروی دارند. سپس به دقت این طول موجها را برای یک ستاره، یک سنگ و نیز یک الکترون محاسبه کنیم.

باندک دقتی در می‌دانیم که این طول موجها بسیار ناچیزند، زیرا در رابطه دو بروی ثابت پلازنگ که عدد بینهایت کوچکی است

$$\left(\frac{ارگ}{ثانیه} \right) \left(6/6 + 10^{-7} \right)$$

حال اگر سیاره را زمین فرض کنیم می‌دانیم که جرمی برابر با $10^{27} \times 6$ گرم و سرعتی تقریباً برابر با 10^6 سانتیمتر بر ثانیه در مدار خود به دور خورشید دارد. با قراردادن این مقدار در رابطه دو بروی طول موج زمین چنین بدست خواهد آمد:

$$\lambda = \frac{6/6 \times 10^{-22}}{6 \times 10^{27} \times 3 \times 10^6} = 3/6 \times 10^{-61} \text{ cm}$$

که بطریزشگفتی کوچک است، و هیچ ابزاری قادر به ثبت و آشکار ساختن آن نیست. حتی معواری وجود ندارد که کوچکی طول موج زمین را با آن بسنجیم.

حال طول موج یک قطعه سنگ را پیدا می‌کنیم. قطعه سنگی به وزن 100 گرم انتخاب کرده و آنرا با سرعتی برابر 100 سانتیمتر بر ثانیه به هوا پرتاب می‌کنیم. از رابطه دو بروی چنین داریم:

$$\lambda = \frac{6/6 \times 10^{-22}}{100 \times 100} = 6/6 \times 10^{-31} \text{ cm}$$

و بازگردانده می‌شوند. در حقیقت پراش حاصل از الکترونها در نتیجه برخورد آنها بالایه‌های خارجی بلور اتفاق می‌افتد. این پراش بر روی صفحات عکاسی ثبت می‌شود (۴).

تارتاکفسکی یک شعاع الکترون را بر روی صفحه نازکی از بلور که متشکل از ذرات سیار ریز بلورهای بود، تاباند. آزمایش چند دقیقه بطول انجامید.

بعد از خاتمه آزمایش صفحه عکاسی دایره‌های پراش را به وضوح نشان می‌داد. این صفحات که از شانها بیش از طلا بود به بزرگترین و مجهزترین آزمایشگاه‌های فیزیک در سراسر دنیا فرمتاده شدند و در آنجاها به دقت مورد بررسی قرار گرفتند. دیگر جای هیچگونه شکی نبود، زیرا فرخیه گستاخانه دوبروی، یعنی امواج ماده، از یک آزمایش روسفید بیرون آمده بود. تحال الکترونها از خود خواص ذره‌ای نشان می‌دادند و حال می‌بینیم که خواص موجی نیز دارند!

ذرات دو نمودی

حتی پیش از آزمایشهای پراش، تلاش دانشمندان برآن بود که مفهوم واقعی امواج دوبروی را دریابند. چگونه می‌توان ماهیت دو گانهٔ ذرات، مخصوصاً الکترونها در لذت کرد؟

در آن زمان فیزیکدانان الکترون را می‌شناسخند. ذره بسیار سبک و خردمندی که دارای بار سیار ناچیز الکتریکی است. این پرسش که الکترونها چه طرحی دارند و یا در داخل آنها چه می‌گذرد برای مدت زمانی طولانی مطرح نشد. راهی برای مشاهده دقیق یک الکترون وجود نداشت، همچنین برای تجسم ساختمان درونی آن تلاش بی‌ثمر و بی‌یهوده بود.

لیکن اگر الکترون یک ذره است، در آن صورت باید خواص ذره‌ای خود را آشکار سازد، حال چگونه یک الکترون خواص موجی دارد، آیا این خواص کاملاً متفاوت از خواص ذره‌ای است؟

اوین قدم برای تفسیر امواج ماده توسط خود دوبروی برداشته شد. روش بود که فیزیکدانان وقتی در بارهٔ جهان بینهایت کوچکها به تفکر پرداختند، بنابر عادت، الگوهای تجربی را به کمک فرآخواندند. در نظریه بوهر-رافروفه، اتم به منزله یک سیستم کیهانی است که در آن سیارات (الکترونها) به گردخوار شیده (هسته) در گردشند و فقط اختلاف آنها در مقایسه‌این بود که برخلاف سیارات، الکترونها می‌توانستند تغییر مدار دیدند. سپس مسئله کوانتم نور (فوتون) پیش آمد. بنابر نظریه این‌شیوه فوتون نیز خاصیت موجی و ذره‌ای را بهم دارد. آشکار است که یک چنین سیمایی دو گانه‌ای را نمی‌توانستند با دنباله در صفحه ۴۷۸

طول امواج الکترونی دوبروی بود، از این و طرحهایی که برای مشاهده پراش نور بکار می‌رفت. از قبیل شکافها، پرده‌ها و مشکلهای پراش همگی ناقص بودند و برای امواج دوبروی ابزارهایی زاید بشمار می‌رفتند. زیرا بعد اجسامی که برای مشاهده پراش یک موج بکار می‌رود باید از طول موج آن کمتر و یا حداقل قابل مقایسه با آن باشد. پدیده‌هایی که در بارهٔ امواج نورانی احتمال می‌رفت، وقتی که از دیدگاه امواج دوبروی نگریسته می‌شد، کاملاً بی‌هرزه و بی‌یهوده بودند.

در سال ۱۹۲۴، ابزاری که برای مشاهده پراش امواج الکترونی دوبروی لازم بودند، شناخته شدند. دو اندیشه قبل از این تاریخ لاوئه (Laue) دانشمند آلمانی، پراش اشعه ایکس را پس از عبور از داخل بلورها مشاهده کرده بود، لاوئه نقاط تاریک و روشنی را بر روی صفحه عکاسی که در معرض اشعه ایکس گذرنده از یک بلور قرار داشت، ملاحظه کرد. چند سال بعد، دو بی (Debye) و شربر (Scherer) آزمایش لاوئه را بر روی گرد بلور تکرار کرده و حلقه‌های پراش را بدست آوردند. در این حالات، پراش اتفاق می‌افتد زیرا فوائل بین اوتها در بلورها (مانند نقاط تاریک و روشن حاصل از اشعه ایکس بر صفحه عکاسی) به همان بلندی طول موج اشعه ایکس یعنی ۱۵-۸ سانیمتر بود. اما طول سوجهای دوبروی دقیقاً با این معیارهای خواندن! و این می‌رساند که اگر این امواج به راستی وجود داشته باشدند، در آن صورت می‌باشد که اگر این امواج به راستی وجود داشته باشدند، بلور، همان نمونه پراش اشعه ایکس را بر روی صفحه عکاسی، ایجاد کند.

چند سال بعد از این نظریه موجی دوبروی، دانشمندان آمریکائی به نامهای داویسن (Davisson) و ژرمر (Germer) و فیزیکدان روسی تارتاكفسکی (P.Tartakovsky) (با مشاهده پراش الکترونها در عبور از داخل یک کریستال، صحبت نظریه را تأیید کردند).

البته شباهت بین «اعشه الکترون» و اشعه ایکس به تنها بی کافی نبود، آزمایش نیز به استادی و مهارت زیادی نیاز داشت. اشعه ایکس به راحتی از داخل بلور می‌گذشت، در صورتی که الکترونها در لایه‌ای از بلور به ضخامت کسری از میلی‌متر جذب می‌شدند. از این و برای آزمایش به روشی که سیار نازک بلور و یا صفحات فلزی نیاز بود، شاید هم بهتر بود در آزمایشها از موانع به جای شکافها استفاده شود. در این صورت دسته‌ای از الکترونها را باز اویه کوچکی به سمت سطح بلورهایی که نیز دارند. بلور مانع گذشتن الکترونها می‌شود، سپس الکترونها در سطح بلور لغزدیده

* الکترونها مشابه اشعه ایکس و یا نور مرئی، صفحه عکاسی را تیره و کدر می‌کنند.

۵ حاسبات تقریبی

نوشته: محمد رکنی قاجار

فصل سوم - مقدار تقریبی یک عدد اعشاری

$$e = \frac{B}{10^n + p} < \frac{10^p}{10^n + p}, \quad e < \frac{1}{10^n}$$

تبصره ۱ - اگر اولین رقم محدود کمتر از ۵ باشد خطای از نصف واحد اعشاری آخرین رقم سمت راست کمتر است.
قضیه ۲ - اگر در یک عدد اعشاری از یک مرتبه غیرمشخصی به بعد تمام ارقام اعشاری را حذف نماییم و یک واحد به آخرین رقم سمت راست اضافه کنیم خطای مرتكبه کمتر است از یک واحد مرتبه اضافه شده
 اثبات مانند قضیه قبل است یعنی :

$$\frac{A}{10^n} < N < \frac{A+1}{10^n}$$

تبصره ۲ - اگر اولین رقم محدود ۵ یا بزرگتر از آن باشد خطای کمتر است از نصف واحد مرتبه رقم سمت راست که از آن به بعد حذف شده است.

از آنجه تا به حال گفته شد قواعد ذیل نتیجه می شود .
قاعده ۱ - اگر بخواهیم تا کمتر از یک واحد تقریب اعشاری مقدار عددی را بیان کنیم کافی است که از آن مرتبه به بعد تمام ارقام اعشاری را حذف نماییم .

قاعده ۲ - برای اینکه عدد اعشاری را تا نصف واحد مرتبه اعشاری معینی بیان کنیم از سمت راست آن تمام ارقام اعشاری را تا مرتبه مفروض حذف می نماییم و بعد آخرین رقم سمت راست را به همان حالت باقی می گذاریم یا یک واحد بیه آن اضافه می کنیم ، بنابراینکه اولین رقم سمت چپ محدود کمتر از ۵ یا زیادتر از آن باشد .

مثال ۱ - مقدار تقریبی $47/25614$ تا $1/001$ تقریب $47/256$ است .

مثال ۲ - مقدار تقریبی $47/25614$ تا نصف $1/001$ تقریب $47/257$ است (تقریب اضافی) .

مثال ۳ - مقدار تقریبی $47/25614$ تا نصف $1/0001$ تقریب $47/2561$ است (تقریب نقصانی)

اگر در یک عدد اعشاری یک مرتبه اعشاری غیر مشخصی را اختیار کرده و بقیه اعداد طرف راست آن مرتبه را حذف نماییم ، عدد تقریبی نقصانی برای آن عدد اعشاری بدست می آید و اگر یک واحد به آخرین رقم سمت راست اضافه نماییم عدد تقریبی اضافی بدست می آید .

مثال - عدد اعشاری $18/3960274$ را اختیار کرده و از طبقه هزارم به بالا را حذف می نماییم ، چنین می شود $18/396$ که عددی است تقریبی نقصانی ولی اگر رقم $18/396$ کنیم عدد $18/397$ عددی است تقریبی اضافی نسبت به عدد اعشاری مفروض .

قضیه ۱ - اگر در یک عدد اعشاری از یک مرتبه غیر مشخص به بعد را حذف نماییم خطای که مرتكب شده ایم از یک واحد آخرین رقم سمت راست کوچکتر است .

مثال اگر در عدد $18/3965274$ از مرتبه هزارم به بعد را حذف نماییم تمام ارقام محدود از $1/001$ کوچکترند .

زیرا

$$18/3965274 - 18/396 = 0/0005274 \\ 5274 < \frac{10000}{10000000} = \frac{1}{1000}$$

پس خطای حاصله از $1/001$ کوچکتر است .
 بطور کلی اگر در یک عدد اعشاری N تمام ارقام اعشاری

را از مرتبه n به بعد حذف نماییم خطای حاصله از $\frac{1}{10^n}$ کوچکتر است . زیرا اگر A عددی باشد که پس از حذف ارقام اعشاری بدست آمده باشد و B هم عددی باشد که از p رقم محدود تشکیل شده باشد :

$$N = \frac{A}{10^n} + \frac{B}{10^{n+p}}$$

مقدار تقریبی N عدد $\frac{A}{10^n}$ و خطای مرتكبه e عبارت است از

$$B < 10^p \text{ اما } B < \frac{B}{10^{n+p}}$$

قسمت اول قضیه است و همچنین $U < u'_n \leq U_n$ یعنی

$$B < 10(A+1) \leq U < \frac{A+1}{10^n}$$

$$\text{پس } \frac{B+1}{10^{n+1}} < \frac{A+1}{10^n} \text{ و با } B+1 \leq 10(A+1) \text{ یعنی:}$$

که اثبات قسمت دوم قضیه است.

$$\text{تصریف: اگر } \frac{C}{10^n} = U \text{ و مقدار تقریبی نقصانی } u_p$$

مساوی U باشد بقیه مقادیر همه با U مساوی می‌شوند.

اعداد اعشاری نامحدود

اگر N عدد غیر مشخصی باشد و V_n مقدار تقریبی نقصانی

$$\text{آن تا } \frac{1}{10^n} \text{ باشد و } V_{n+1} = \frac{\alpha}{10^{n+1}} \text{ بنابرای قضیه}$$

بالا

$$V_n < V_{n+1} < N$$

واز طرف دیگر:

$$\frac{\alpha}{10^n} < N < \frac{\alpha+1}{10^n}$$

پس

$$\frac{\alpha}{10^n} < \frac{\beta}{10^{n+1}} < \frac{\alpha+1}{10^n}$$

$$10\alpha < \beta < 10(\alpha+1)$$

و با

اثابت می‌شود که β افلاً شامل α مرتبه ۱۰ وده و از ۱ مرتبه ۱۵ کمتر است پس رقم عشرات β است یعنی برای

اینکه β را بدشت آوریم باید رقمی به سمت راست (اعضای کنیم).

اگر N عددی باشد بین ۱ ۱۰ و ۹ ۱۰ قسمت صحیحش یک رقمی بوده

: پس $V_0 = C_0$ و مقدار تقریبی V_0 با در قم چنین است:

$$V_n = C_0/C_1/C_2/C_3/\dots/C_n$$

و یا:

$$V_n = C_0 + \frac{C_1}{10} + \frac{C_2}{10^2} + \frac{C_3}{10^3} + \dots + \frac{C_n}{10^n}$$

بطوری که دیده می‌شود V_n عبارتست از یک سری که چنین نوشته می‌شود:

$$C_0 + C_1 \times 10^{-1} + C_2 \times 10^{-2} + \dots + C_n \times 10^{-n}$$

مجموع این سری عبارتست از مقدار تقریبی نقصانی

تا $\frac{1}{10^n}$ و این سری متقارن است و مجموع آن N است زیرا

$$\text{که } N - V_n < \frac{1}{10^n} \text{ بقسمی که } V_n \text{ به ازاء } 10^n \text{ میل می‌کند}$$

به سمعت: N

$$N = C_0/C_1/C_2/\dots/C_n$$

بررسی اعداد تقریبی اعشاری از لحاظ سری (Séries)

شرح - فرض می‌کنیم که U_n و u'_n دو مقدار تقریبی

نقصانی و اضافی U اشند. با این شرایط که اولاً کسوری هستند

که مخرج آنها 10^n است و عدد U بین آنها واقع شده:

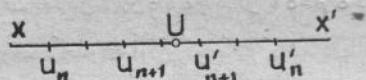
$$u'_n = U_n + \frac{1}{10^n} \quad u_n < U < u'_n$$

اگر در روی محور X' نقاط متساوی الفاصله به طولهای مختلف که مخارج آنها 10^n باشد فرض نمائیم مانند:

$$x = \frac{K}{10^n} \dots x = \frac{1}{10^n}$$

نقاط U_n و u'_n دو نقطه متواالی خواهند بود که الفاصله بین آنها شامل U است. باید دانست که در بعضی حالات ممکن

است U با U_n منطبق شود ولی u'_n اهمیشه بزرگتر از U خواهد بود.



قضیه - مقادیر تقریبی نقصانی u_n (اگر n ترقی کند)

هیچ وقت تنزل نخواهد کرد و همینطور مقادیر تقریبی اضافی (اگر n ترقی کند) هیچ وقت تنزل نخواهد کرد. اگر الفاصله

بین U_n و u'_n را بدهد قسمت متساوی تقسیم نمائیم نقاط

تقسیم به انضمام U_n و u'_n عبارت خواهد بود از کسور اعشاری به مخرج 10^n و U بین دونقطه از این تقسیمات واقع می‌باشد

که عبارتند از U_n و U_{n+1} و u'_{n+1} چون U_n در طرف چپ و u'_n در طرف راست است پس:

$$u_n < u_{n+1} < U < u'_{n+1} < u'_n$$

که عبارتست از معنی قضیه از لحاظ هندسی.

اثبات قضیه از لحاظ جبری چنین است:

اگر:

$$u'_{n+1} = \frac{B+1}{10^{n+1}} \quad u_{n+1} = \frac{B}{10^{n+1}} \quad u'_n = \frac{A+1}{10^n} \quad u_n = \frac{A}{10^n}$$

و B عدد صحیح است (برطبق آنچه که در فوق گفته شد)

$U < u'_{n+1}$ و $u_n < U$ و از آنجا:

$$\frac{A}{10^n} < U < \frac{B+1}{10^{n+1}}$$

$$10A < B+1 < \frac{B+1}{10^n} \quad \text{پس} \quad \frac{A}{10^n} < B+1 < \frac{B+1}{10^{n+1}}$$

چون $10A$ و $B+1$ هر دو عدد صحیحند نتیجه می‌شود

$$10A < B < \frac{B}{10^n} \quad \text{که اثبات}$$

$$(V_n + R_n) - (V_n + \frac{1}{10^n}) = R_n - \frac{1}{10^n}$$

وقدر مطلق آن عبارتست از :

$$\frac{1}{10^n} - R_n = \frac{10 - C_{n+1}}{10^{n+1}} - R_{n+1}$$

وچون اولین جمله طرف دوم که اقلام مساوی از $\frac{1}{10^{n+1}}$ بزرگتر است پس $R_{n+1} < \frac{10 - C_{n+1}}{10^{n+1}} - R_n$

$$\frac{1}{10^n} - R_n < \frac{10 - 5}{10^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^n} \leqslant C_{n+1} \geqslant 5$$

نتیجه - اگر دریک عدد اعشاری نامحدود از هر مرتبه به بعد را حذف نمائیم تمام ارقام مذوف کوچکتر است از یک واحد آخرین رقم اعشاری که در سمت راست عدد باقیمانده مثلا در عدد $13,6945812$ اگر آنرا به صورت $3/694$ بنویسیم قسمت مذوف یعنی $5815/1000$ از $5/1000$ کوچکتر است. اگر اولین رقم مذوف از ۵ کوچکتر باشد خطای نقصانی است ولی اگر از ۵ بزرگتر باشد ممکن است یک واحد به آخرین رقم اعشاری سمت راست اضافه کنیم در این صورت خطای اضافی است.

مثال - می خواهیم مجموع سری e را تا ۵ رقم اعشاری صحیح بدست آوریم (یعنی مقدار e را بطور نقصانی یا اضافی تا $\frac{1}{10^5}$ تقریب حساب کنیم) می دانیم که سری e چنین است :

$$e =$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!} \times \frac{1}{n!}$$

$$R = p_n = \frac{\theta_n}{n!} \times \frac{1}{n!}, \quad 0 < \theta_n < 1$$

وچون این سری نامحدود است پس باید مجموع چند جمله محدود آنرا حساب نمود. در این صورت رقم اعشاری تقریبی بدست می آید که در حالت e_n علامت این است که تا جمله n می خواهیم حساب کنیم) در این صورت خطای کلی عبارتند: اولا خطای حاصل از حذف n ثانیا خطای حاصل در محاسبه e_n پس حد اعلای خطای در p_n عبارتست $\frac{1}{10^5}$ پس باید هر جمله را تا بیشتر از ۵ رقم اعشاری حساب نماییم و بعد در مجموع آنچه از ۵ رقم زیادتر است حذف نمائیم و بنابر آنچه قبله دیده ایم عمل نمائیم.

قضیه عکس - اگر یک عدد اعشاری نامحدود فرض شود

که یک رقم عدد صحیح هم داشته باشد مانند:

$$C_0, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$$

می توان آنرا به یک سری تشبیه کرد به شکل :

$$C_0, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$$

که برای آن همه اعداد صحیح اند . در موقع مقایسه با سری (۱)

$$9 + 9 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + \dots + 9 \times 10^{-n}$$

که عبارتست از یک تصاعد هندسی نزولی که مجموعش

$$= \frac{9 \times 10}{9 - 1} = 10 \text{ می باشد و تقارب آن بجز است .}$$

بعدازوه مجموع سری که اقلام مساوی اولین جمله اش یعنی C_0

است از ۱۰ کوچکتر است یعنی اگر مجموع آنرا N فرض

کنیم $10 < N < 1$ و می توان نوشت :

$$N = C_0, C_1, C_2, \dots, C_n \dots$$

اگر باقیمانده سری را در نظر بگیریم :

$$R_n = C_{n+1} \times 10^{-(n+1)} + C_{n+2} \times 10^{-(n+2)} + \dots$$

بقسمی که

$$V_n = C_0, C_1, \dots, C_n$$

و یا :

$$R_{n+1} = 10^{-(n+1)} [C_{n+1} + C_{n+2} \times 10^{-1} + C_{n+3} \times 10^{-2} + \dots] = 10^{-(n+1)} \times C_{n+1}, C_{n+2}, \dots$$

به سهولت دیده می شود که مقدار داخل کروشه نیز از سری (۱)

$$\text{کوچکتر است پس } R_n < \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10^n} \text{ وچون تمام ارقام}$$

اعداد اعشاری ۹ نمی باشد پس باقیمانده آنها کوچکتر است از

$$\frac{1}{10^n} \text{ پس مقدار تقریبی عدد اعشاری است تا } \frac{1}{10^n} \text{ تقریب .}$$

در عمل و محاسبه باید دو حالت را در نظر گرفت:

$$C_{n+1} < 4 \text{ در این صورت: } (1)$$

$$R_n = \frac{C_{n+1}}{10^{n+1}} + R_{n+1} < \frac{C_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{C_{n+1} + 1}{10^{n+1}}$$

یعنی :

$$R_{n+1} < \frac{4+1}{10^{n+1}} = \frac{5}{10^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^n}$$

$$C_{n+1} \geqslant 5 \text{ در این صورت یک واحد به آخرین رقم } (2)$$

$$V'_n = V_n + \frac{1}{10^n} \text{ اعشاری سمت راست اضافه می کنیم و مقدار }$$

پس خطای مرتکب شده عبارتست از مقدار منفی :

تقریب حساب کنید.
فرض می کنیم که:

$$M = 1, u_1 = 0, 250, u_2 = 0, 111, u_3 = 0, 062 \\ u_4 = 0, 040, u_5 = 0, 027, u_6 = 0, 020$$

هر یک از جمل تا $0, 001$ تقریب حساب شده است:

$$u_7 = 0, 015, u_8 = 0, 012, u_9 = 0, 010$$

و مجموع جمله های آن $1, 0537 = S_{10}$ است. می دانیم که بقیه سری از $\frac{5}{100}$ کوچکتر است و خطای که در محاسبه هر یک از

جمل سری مرتكب شده ایم از $\frac{2}{100}$ کوچکتر ایست پس مجموع

این خطاهای از $\frac{7}{100}$ یا $\frac{1}{10}$ کوچکتر است و لذا اگر رقم برتیه

صدم و هزارم را حذف نماییم $S_{10} = 1, 0$ خواهد شد که تا

تقریب مساوی مجموع مری خواهد بود.

دنیاله از صفحه بعد

چون $S = \pi P$ است و $abc = 4RS$ می باشد داریم $abc = 4R\pi P$ که چون در نامساوی اخیر قرار دهیم بدست می آید:

$$4R\pi P < R(2P) \Rightarrow R \geqslant 2\pi$$

باشد در این صورت $c' = a, b' = c, a' = b$ (۳)

نامساوی اولیه چنین نوشته می شود:

$$a'c + b'a + c'b < R(a + b + c)$$

وبطور مشابه $a'b + b'c + c'a < R(a + b + c)$

پس از جمع کردن:

$$(\Sigma a)(\Sigma a') - \Sigma a' < 2R(\Sigma a)$$

فرض شود داشت $c' = c, b' = b, a' = a$ (۴)

می آید: (مثلث ABC حاد الزوایا است)

$$R > \frac{\sqrt{r}abc}{a' + b' + c'}$$

$$a' + b' + c' > \frac{\sqrt{r}abc}{R} = \frac{\sqrt{3} \times 4RS}{R} = 4\sqrt{3}S$$

که از آن می توان نامساوی مثلثاتی زیر را نتیجه گرفت:

$$4R(\sin A + \sin B + \sin C) \geqslant$$

$$4\sqrt{3} \times 2R \sin A \sin B \sin C$$

که پس از اختصار نتیجه می شود:

$$\Sigma \sin^2 A < 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{2} \sqrt{3} \Sigma \sin^2 A$$

ابن دادرس محاسبه رقم اعشاری باید در نظر گرفت که u_n از $\frac{1}{10^n}$ کمتر باشد در این صورت اگر جمل سری را به $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ بنمایانیم

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 0, 5$$

$$u_3 = \frac{u_2}{3} < 0, 2, u_4 = \frac{u_3}{4} < 0, 05$$

$$u_5 = \frac{u_4}{5} < 0, 01, u_6 = \frac{u_5}{6} < 0, 002$$

$$u_7 = \frac{u_6}{7} < 0, 0003, u_8 = \frac{u_7}{8} < 0, 00004$$

$$u_9 = \frac{u_8}{9} < 0, 000005$$

$$\text{در این صورت } \frac{u_9}{9} < 0, 000006 \text{ پس باید}$$

جمله سری را مختیار کنیم که ۷ عدد آنها تقریبی است

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 0, 5$$

$$u_3 = 0, 1666666$$

$$u_4 = 0, 0416666$$

$$u_5 = 0, 00083333$$

$$u_6 = 0, 00013888$$

$$u_7 = 0, 00001984$$

$$u_8 = 0, 0000248$$

$$u_9 = 0, 0000027$$

$$e_9 = 2, 7182812$$

مجموع خطاهای حاصل از محاسبه جمل کوچکتر است

از $\frac{7}{10^6}$ و اگر ۵ رقم اعشاری آنرا حساب کنیم خطای حاصل

کمتر است از $\frac{2}{10^6}$ و بالاخره خطای حاصل از حذف بقیه سری

کمتر است از $\frac{3}{10^6}$ تمام این خطاهای نقصانی اند

و مجموعشان به $\frac{4}{10^6}$ نمی رسد پس مقدار تقریبی نقصانی ۶ تا

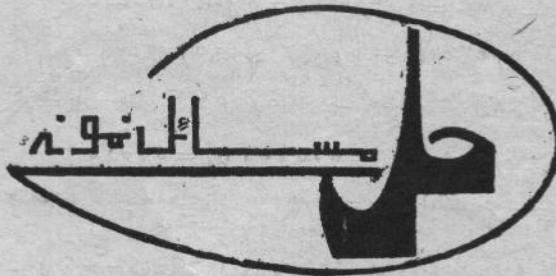
$$\frac{1}{5} \text{ عبارتست از } e = 2, 71828$$

مثال ۳ - مجموع سری:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{n^2} \text{ را تا}$$

بررسی یاک نامساوی ونتایج حاصل از آن

ترجمه و تنظیم از: داوید ریحان



$$b' \sin C'' - c' \sin B'' = 0$$

$$a' - b' \cos C'' - c' \cos B'' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a'}{\sin A''} = \frac{b'}{\sin B''} = \frac{c'}{\sin C''} \quad (4)$$

در رابطه (۲) دیده می شود که زوایای C'' ، B'' ، A'' بین C ، B ، A باشند. اگر در رابطه (۴)، A'' متفاوت باشد $-\pi + \pi$ قرار دارند، اگر در رابطه (۴)، A'' متفاوت باشد در این صورت b'' و c'' است که با (۲) متناقض است. این شرط نیز برای (۳) کافی است. در این صورت (۱) تناهی و قدرت زوایای A'' حدالزوایا و B'' و C'' باشند. این شرط نیز برای (۳) کافی است. در این صورت (۱) تناهی و قدرت زوایای A'' حدالزوایا و B'' و C'' باشند. این شرط نیز برای (۳) کافی است. در این صورت (۱) تناهی و قدرت زوایای A'' حدالزوایا و B'' و C'' باشند.

حالات خاص: با فرض $a' = b' = c'$ نامساوی اولیه به صورت زیر نوشته می شود:

$$a'' + b'' + c'' < 9R''$$

و درنتیجه:

$$4R''(\sin''A + \sin''B + \sin''C) < 9R''$$

$$\Rightarrow \sin''A + \sin''B + \sin''C < \frac{9}{4}$$

$$\sum \sin''A = 2 + 2\cos A \cos B \cos C < \frac{9}{4} \quad \text{چون}$$

$$\Rightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$$

$$abc < R''(a + b + c) \quad (2)$$

$$\wedge R'' \sin A \sin B \sin C < R'' \times R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\Rightarrow 4 \sin A \sin B \sin C = \sum \sin 2A \leq \sum \sin A$$

باقیه در صفحه قبل

* مثلثهای $A'B'C'$ و ABC را که اضلاعشان به:

ترتیب (c', b', a') و (c, b, a) باشند در نظر می گیریم. اگر R شعاع دایره محیطی ABC باشد، نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{a' + b' + c'}{a'b'c'} < \frac{R''(a' + b' + c')}{a'b'c'}$$

تساوی چه موقع برقرار است؟

حل - با توجه به روابط $a = 2R \sin A$ و ... در مثلث

ABC نامساوی فوق به صورت زیر نوشته می شود:

$$4R'' \left(\frac{\sin''A}{a'} + \frac{\sin''B}{b'} \right) \leq \frac{R''(a' + b' + c')}{a'b'c'}$$

$$\text{با بدیل } \sin''A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) \text{ و تبدیلات مشابه چنین}$$

خواهیم داشت:

$$(1) \quad (a')^2 + (b')^2 + (c')^2 + 2(b'c' \cos 2A + c'a' \cos 2B + a'b' \cos 2C) \geq 0$$

با فرض

$$(2) \quad C'' = \pi - 2C, B'' = \pi - 2B, A'' = \pi - 2A$$

$$A'' + B'' + C'' = \pi \quad \text{و}$$

رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$(a')^2 + (b')^2 + (c')^2 - 2(b'c' \cos A'' + c'a' \cos B'' + a'b' \cos C'') \geq 0$$

رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(3) \quad (a' - b' \cos C'')^2 + (b' \sin C'' - c' \sin B'')^2 \geq 0$$

که بدین ترتیب نامساوی فوق اثبات می شود.

شرط اینکه نامساوی فوق تبدیل به تساوی شود آنست

که هر دو مربع طرف اول نامساوی (۳) صفر شوند:

حل مسائل پکان شماره: ۸۲

$$x = \frac{a(a+b+c)}{b+c-a}, y = \frac{b(a+b+c)}{c+a-b}$$

$$z = \frac{c(a+b+c)}{a+b-c}$$

۸۲/۲ - ترجمه: فتح الله زرگری دانشجوی دانشکده فنی تهران

هر گاه زاویه A از لوزی ABCD برابر 45° و

نقشه‌ای غیرمشخص از دایره محاطی این لوزی باشد، ثابت کنید که:

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \frac{5}{2}\overline{AB}$$

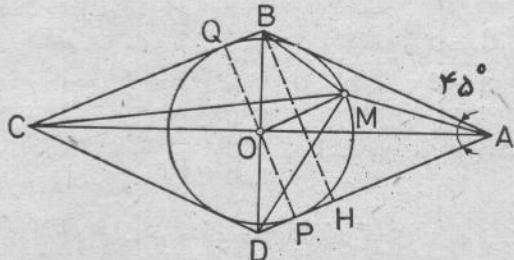
حل - از M به O مرکز لوزی وصل می‌کیم . خط

میانه هر یک از مثلثهای MBD و MAC است و

داریم :

$$MO^r = \frac{\overline{MA} + \overline{MC}}{2} - \frac{\overline{AC}}{4}$$

$$MO^r = \frac{\overline{MB} + \overline{MD}}{2} - \frac{\overline{BD}}{4}$$



از جمع دو رابطه بالا بدست می‌آید :

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 2MO^r + 2\overline{AB}$$

اگر نقاط تماس دایره محاطی لوزی باضلعهای AD

و BC باشد PQ بر AD عمود است و اگر از B عمود

را بر AD رسم کنیم داریم :

$$BH = PQ = 2MO$$

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۸۲/۱ - ترجمه: جواد فیض دانشجوی دانشکده فنی

تبریز

دستگاه سه معادله زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} &= \frac{1}{a} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} &= \frac{1}{b} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} &= \frac{1}{c} \end{aligned}$$

حل - به ترتیب داریم :

$$a = \frac{xy + xz}{x + y + z} \text{ و } b = \frac{yz + xy}{x + y + z}$$

$$c = \frac{zx + zy}{x + y + z}$$

$$b + c - a = \frac{yz + xy + zx + zy - xy - xz}{x + y + z}$$

$$b + c - a = \frac{2yz}{x + y + z}$$

$$\Rightarrow x(b + c - a) = \frac{2xyz}{x + y + z}$$

به طریق مشابه و با فرض خواهیم داشت :

$$x = \frac{k}{b+c-a}, y = \frac{k}{a+c-b}, z = \frac{k}{a+b-c}$$

برای تعیین k این مقادیر را در اولین معادله دستگاه قرار می‌دهیم :

$$\frac{b+c-a}{k} + \frac{2a}{k} = \frac{1}{a} \Rightarrow k = a(a+b+c)$$

از این معادله و از معادله سوم خواهیم داشت :

$$(xy + 1)^2 = 11 - xy$$

$$(xy)^2 + 2xy - 10 = 0 \Rightarrow xy = 2 \text{ یا } -5$$

$$yz + xz = 11 - xy$$

$$\begin{cases} z(x+y) = 11 - xy \\ (x+y)+z = 6 \end{cases} \Rightarrow z(6-z) = 11 - xy$$

$$xy = 2 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 9 = 0 \text{ یا } z = 3$$

$$\begin{cases} x+y = 3 & x = 1 & x = 2 \\ xy = 2 & y = 2 & y = 1 \end{cases}$$

$$xy = -5 \Rightarrow z^2 - 6z + 16 = 0$$

این معادله جواب حقیقی ندارد. پس دستگاه مفروض دارای دو دسته جواب است :

$$(3, 1, 2) \text{ یا } (2, 2, 1)$$

-۸۴/۵ ترجمه: جواد فیض

هر گاه داشته باشیم:

$$a = -\log\left(1 - \frac{1}{10}\right), b = -\log\left(1 - \frac{4}{100}\right)$$

$$c = \log\left(1 + \frac{1}{10}\right) \quad \text{و}$$

ثابت کنید که :

$$\log 2 = \gamma a - 2b + rc$$

$$\log 5 = 16a - 4b + vc$$

حل - داریم :

$$16a - 4b + vc = -\gamma \log \frac{9}{10} + 2 \log \frac{99}{100} + 3 \log \frac{81}{80}$$

$$= \log\left[\left(\frac{99}{100}\right)^2 \times \left(\frac{81}{80}\right)^3 : \left(\frac{9}{10}\right)^3\right] = \log 2$$

$$16a - 4b + vc =$$

$$= \log\left[\left(\frac{96}{100}\right)^4 \times \left(\frac{81}{80}\right)^7 : \left(\frac{9}{16}\right)^{16}\right] = \log 5$$

-۸۴/۶ ترجمه: فتح الله زرگری

چهار عدد مشتبه تعیین کنید که سه عدد اول تصاعد عددی

و سه عدد آخر تصاعد هندسی بسازند، مجموع سه عدد اول ۱۲ و مجموع سه عدد آخر ۱۹ باشد.

حل - اعداد مطلوب از حل دستگاه زیر بدست می آیند:

دنباله در صفحه ۴۸۳

$$A = 45^\circ \Rightarrow BH = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = 2MO$$

$$4MO = \frac{AB}{2}$$

$$MA' + MB' + MC' + MD' =$$

$$= 2AB + \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}AB$$

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

-۸۴/۶ ترجمه: جواد فیض

α و β ریشه‌های معادله $x^2 + ax + b = 0$ و γ ریشه‌های معادله $x^2 + cx + d = 0$ می‌باشند. به فرض

$$\frac{2}{\beta} \text{ ثابت کنید که: } \frac{1}{\beta} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma}$$

$$2(a-c) = (b-d)\left(\frac{b}{d} - \frac{d}{b}\right)$$

حل - رابطه مفروض را چنین می‌نویسیم :

$$\frac{2}{\beta} = \frac{1}{a\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$

اما β که ریشه مشترک دو معادله است در معادله حاصل از تفریق دو معادله نیز صدق می‌کند :

$$x^2 + ax + b - (x^2 + cx + d) = 0$$

$$\Rightarrow x = \beta = \frac{d-b}{a-c}$$

$$2 : \frac{d-b}{a-c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$

$$2(a-c) = (b-d)\left(\frac{b}{d} - \frac{d}{b}\right)$$

-۸۴/۷ ترجمه: فتح الله زرگری

دستگاه سه معادله زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ xz + yz = (xy + 1)^2 \end{cases}$$

حل - چون طرفین معادله اول را مجدول کنیم با توجه

به معادله دوم خواهیم داشت:

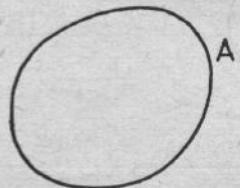
$$xy + yz + zx = 11$$

آموزش ساده نظریه مجموعه‌ها با روشن بر نامه‌ای (راهنما در صفحه ۳ جلد ملاحظه شود)

۱۴۹

فروشگاه X هر سال در تمام روزهای ماه مرداد و علاوه بر آن در تمام روزهای جمعه بسته است.

مجموعه متشکل از ۳۱ روز ماه مرداد را با A نشان می‌دهیم.
نمودار این مجموعه را در مجموعه D متشکل از ۵۲ جمعه سال باشد، نمودار آن را به شکل اضافه کنید.



Dومجموعه
می‌باشند.

هم عضوتیم فوتیال و
هم عضوتیم والیبال می‌باشند

فقط در ریاضی نمره بالاتر از ۱۲ آورده‌اند.

MUF

$$*(E \cup F) = *E + *F - *(E \cap F)$$

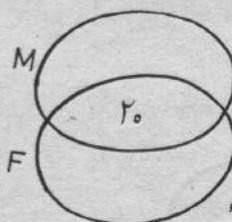
پایان

۱۴۳

عدد دانش آموزانی از کلاس که در هر دو تیم فوتیال و والیبال شرکت دارند برابر است با

عدد اصلی $F \cap V$ برابر است با

عدد اصلی $F \cup V$ برابر است با



۳۰ نفر از دانش آموزان کلاس در ریاضی نمره بالاتر از ۱۲ گرفته‌اند که ازین آنان ۲۵ نفر در درس فارسی نیز نمره بالاتر از ۱۲ گرفته‌اند.

عدد ۲۵ را که عدد دانش آموزانی از کلاس است که هم در ریاضی و هم در فارسی نمره بالاتر از ۱۲ آورده‌اند روی نمودار در محل خود نوشته شده است.

چند نفر از دانش آموزان کلاس فقط در ریاضی نمره بالاتر از ۱۲ آورده‌اند؟

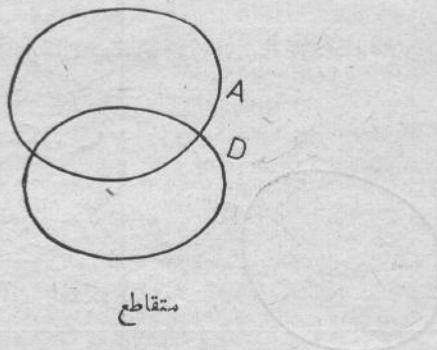
این عدد را روی نمودار در جای خود بنویسید.

۱۴۷

عدد اصلی مجموعه MUF با معنی مجموع عددهای اصلی دو مجموعه FM و MFI برابر نیست، زیرا M و F دو مجموعه می‌باشند.

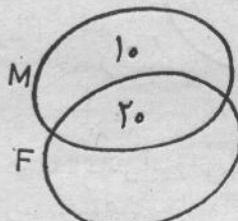
۱۴۴

تمام ۳۵ نفر دانش آموزان یک کلاس اقلال در یکی از دو تیم فوتبال والیبال دیپرستان شرکت می کنند.
مجموعه دانش آموزانی از این کلاس که عضو تیم فوتبال می باشند ۲۵ عضو دارد و آن را با F نشان می دهیم.
مجموعه دانش آموزانی از کلاس بنزبور که عضو تیم والیبال هستند، ۱۰ عضو دارد و آن را با V نشان می دهیم.
خاصیت مشترک عضوهای $F \cap V$ عبارتست از اینکه



۵
۵
۳۰

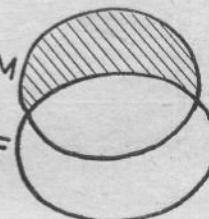
۱۰ نفر



متقاطع

۱۴۵

با ز همان دو مجموعه M و F را در نظر می گیریم.
خاصیت مشترک عضوهای آن قسمت از مجموعه M که در نمودار باهاشور مشخص شده عبارتست از اینکه



عدد ۵۰ که بدست آید، عبارتست از عدد اصلی مجموعه:
 $M \dots F$

۱۴۶

اگر E و F دو مجموعه بروز نسبی غیر مشخص باشند، در این صورت:

$$\#(EUF) = \#E + \#F - \dots$$

۱۳۰

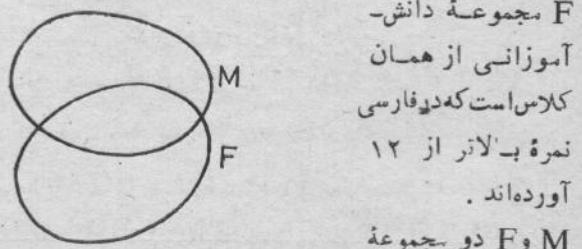
فروشگاه X در ۳۱ روز ماه مرداد و در ۵۲ جمعه سال
بسته است .

تعداد تمام روزهایی از سال که فروشگاه X بسته است با
 $31 + 52 = 83$ برابر نیست .

به عبارت دیگر عدد اصلی اجتماع دو مجموعه A و D
از جمی عدهای اصلی این مجموعه‌ها بدست نمی‌آید، زیرا A
و D دو مجموعه ... نمی‌باشند .

۱۳۱

مجموعه دانش‌آموزانی از کلاس است که در ریاضی
نمره بالاتر از ۱۲ گرفته‌اند .



مجموعه دانش‌آموزانی از همان
کلاس است که در فارسی
نمره بالاتر از ۱۲
آورده‌اند .

دو مجموعه M و F

متقاطعند. خاصه مشترک عضوهای $M \cap F$ عبارتست از اینکه ...

۱۳۲

عدد دانش‌آموزانی از کلاس که در فارسی نمره بیشتر از
۱۲ آورده‌اند ۴۵ نفر است .

چند نفر از دانش‌آموزان کلاس فقط در فارسی نمره بیش
از ۱۲ آورده‌اند؟ ...

این عدد را نیز در نمودار درجای خود بنویسید .

۱۳۳

عدد اصلی یک مجموعه مثلا E را با $\#E$ نشان می‌دهیم .

اگر E و F دو مجموعه جدا از هم باشند داریم:

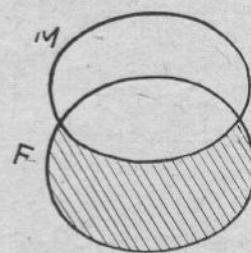
$$\#(E \cup F) = \#E + \#F$$

$$\#(E \cup F) \neq \#E + \#F$$

جدا از هم

اگر ۳۱ روز ماه سرداد ۱ با ۵۲ روز جمعه سان جمع
کنیم، ۴ روز جمعه ماه سرداد را دو دفعه بحساب آورده ایم .
در حقیقت ، تعداد تمام روزهایی از سال که فروشگاه X
بسته است برابر است با ...

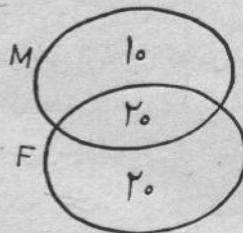
در هر دو درس ریاضی و فارسی
نمره بالاتر از ۱۲ آورده اند



خاصه مشترک عضوهای
مجموعه M آن است
که در ریاضی نمره
بالاتر از ۱۲ آورده اند.
خاصه مشترک عضوهای
آن قسمت از مجموعه

که در نمودار با هاشور مشخص شده عبارت است از اینکه ... F

۲۰ نفر



با مشاهده نمودار علوم کنید که
عدد کل دانش آموزان کلاس که در
یکی از دو درس ریاضی یا فارسی
نمره بیش از ۱۲ آورده اند ، چند
نفر است؟ ... ←

$$\#(E \cup F) = \#E + \#F$$

هر گا. E و F دو مجموعه متقاطع ناشنده، در این صورت:
 $\#(E \cup F) = \#E + \#F$

$$x + z = 2y$$

$$yu = z^*$$

$$x + y + z = 12$$

$$y + z + u = 19$$

از معادله های اول و سوم نتیجه می شود $y = 4$ و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x + z = 8 \\ 4u = z^* \implies 4(15 - z) = z^* \\ z + u = 15 \end{cases}$$

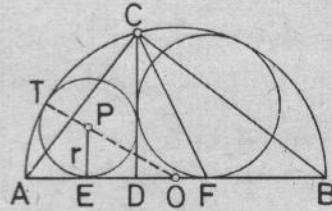
$$z^* + 4z - 60 = 0 \implies z = 6 \quad u = 9 \quad x = 2$$

-۸۴/۷ ترجمه: فتح الله زرگوی

نیمدایره به قطر AB و نقطه غیر مشخص C واقع بر آن

مفروض است. از C ععود CD را بر AB رسم می کنیم و دایره های محاطی مثلثهای منحنی ACD و BCD را رسم می کنیم که به ترتیب در E و F بر AD و DB مماس می شوند. ثابت کنید که CE نیمساز زاویه ACD و CF نیمساز زاویه BCD است.

حل - به فرض
آنکه O وسط AB و
 P به ترتیب مرکز
و شعاع دایره محاطی
مثلث منحنی ACD و
 $OA = R$ و $OD = a$
باشد داریم :



$$OP = OT - PT = OA - DE$$

$$(OA - DE)^* = OP^* = OE^* + EP^*$$

$$(R - r)^* = (r + a)^* + r^*$$

$$R^* - 2Rr = r^* + 2ar + a^* \quad (1)$$

از طرف دیگر داریم :

$$AC^* = AB \cdot AD \quad , \quad DC^* = AD \cdot DB$$

$$\frac{AC^*}{DC^*} = \frac{AB}{DB} = \frac{2R}{R + a}$$

$$\frac{EA^*}{ED^*} = \frac{(R - a - r)^*}{r^*}$$

ابت می کنیم که داریم :

$$\frac{2R}{R + a} = \frac{(R - a - r)^*}{r^*} \quad (2)$$

زیرا به ترتیب داریم :

$$2Rr^* = (R + a)[R^* + (a + r)^* + 2R(a + r)]$$

این رابطه با توجه به رابطه (۱) چنین می شود :

$$2Rr^* = (R + a)(2R^* - 2Ra - 4Rr)$$

$$r^* = (R + a)(R - a - 2r)$$

$$R^* - 2Rr = r^* + 2ar + a^*$$

این رابطه همان رابطه (۱) است که محقق شده است. بنابراین رابطه (۲) نیز محقق است و داریم :

$$\frac{AC^*}{DC^*} = \frac{EA^*}{ED^*} \quad \text{یا} \quad \frac{AC}{DC} = \frac{EA}{ED}$$

یعنی CE نیمساز زاویه ACD است. به ترتیب مشابه ثابت می شود که CF نیز نیمساز زاویه DCB است.

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۸۴/۸- از جواد فیض

دواتابع زیدا درنظر می گیریم :

$$y = x^* + ax + b \quad , \quad y = -x^* + bx + a$$

چه رابطه بین a و b برقرار باشد تا می تابع اول با

ماکسیمم تابع دوم برابر باشد؟

هر گاه رابطه مذبور برقرار باشد و علاوه بر آن منحنی که ماکسیمم دارد از مبدأ مختصات بگذرد مقادیر a و b را حساب نماید و در این حالت به شرط آنکه رأسهای دو منحنی منطبق نباشند دو منحنی را دریک شکل رسم کنید.

حل - باید داشته باشیم :

$$\frac{4b - a^*}{4} = \frac{-4a - b^*}{-4}$$

$$a^* + b^* + 4a - 4b = 0$$

منحنی نمایش تابعی که در آن ضریب x^* منفی است و قطبی از

مبدأ مختصات می گذرد که $a = 0$ باشد و در نتیجه داریم :

$$b^* - 4b = 0 \implies b = 0 \quad \text{یا} \quad 4$$

به ازاء $b = 0$ رأسهای دو منحنی منطبق می شوند و به ازاء

$b = 4$ داریم :

$$y = x^* + 4 \quad , \quad y = -x^* + 4x$$

که جدول تغییرات و منحنیهای نمایش آنها را با روش متداول رسم می کنیم .

-۸۴/۹ به فرض آنکه داشته باشیم :

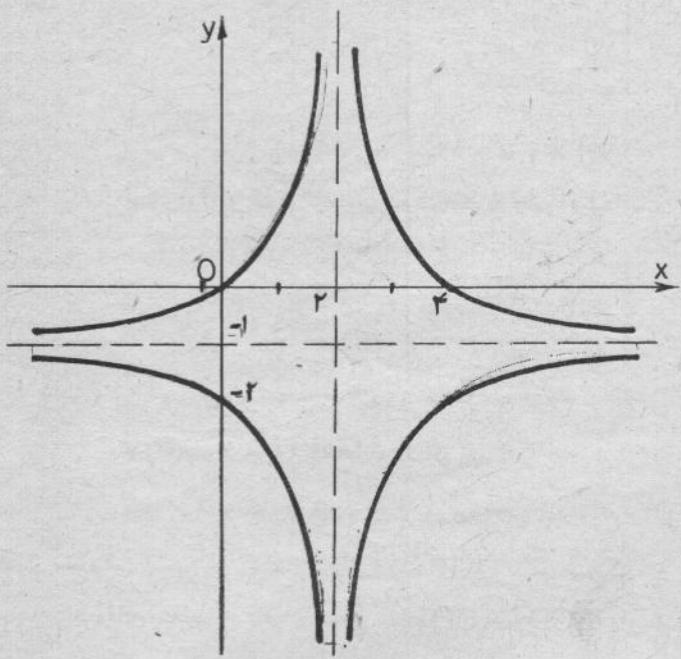
$$\operatorname{tg}^* \alpha - \operatorname{atg} \alpha + 1 = 0$$

مقدار $\cos 2\alpha$ بر حسب a حساب کنید.

حل - از رابطه داده شده نتیجه می شود :

$$\frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{a} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2}{a}$$

$$\cos 2\alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a}$$



از حل این معادلات ۱ دو تابع دو معادله زیر را خواهیم داشت:

$$mx^2 - 4mx + 4m + 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2m + 4 = 0$$

این معادلات وقتی جواب خواهند داشت که $m < 0$ باشد. از طرف دیگر چون در مربع دو قطر باهم برابرند و طول قطر هر مربع برابر است با تفاضل ریشهای هر یک از دو معادله بالا پس باید داشته باشیم:

$$\frac{-b}{m} = -4m \Rightarrow m = -1$$

در ازاء این مقدار از m هر یک از دو معادله بالا می شود:

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$A(2 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$$

$$B(2 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$$

$$C(2 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$$

$$D(2 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$$

حل ۸۴/۱۱ - از معادله زیر مقدار x را حساب کنید:

$$\cos ax \cos(a+n)x = \cos bx \cos(b+n)x$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

حل ۸۴/۱۰ - در صفحه محورهای مختصات دو خط به

معادله های $x = 2$ و $y = 1$ مفروض است.

اولاً معادله مکان نقطه (y, x) را بددست آورید که حاصل ضرب فواصل M از دو خط مفروض برابر با ۲ باشد. ثانیاً مکان مذبور به صورت دو تابع مشخص می شود. منحنی های نمایش این دو تابع، یعنی مکان M ، را در صفحه محورهای مختصات رسم کنید.

مالیاً ثابت کنید که تنها یک مربع $ABCD$ وجود دارد که چهار رأس آن بر منحنی مکان M واقعند، مختصات رأسهای این مربع را حساب کنید.

حل - اولاً اگر MH فاصله M از خط $x = 2$ و

فاصله M از خط $y = 1$ باشد داریم:

$$MH = |x - 2| \quad MK = |y + 1|$$

$$|x - 2||y + 1| = |(x - 2)(y + 1)| = 2$$

$$xy + x - 2y - 2 = \pm 2$$

با انتخاب $x + 2 = 0$ در طرف دوم دو تابع زیر بدست می آید:

$$y = \frac{-x + 4}{x - 2} \quad y = \frac{-x}{x - 2}$$

با رسم جدول تغییرات دو منحنی، شکل رو برو را خواهیم داشت.

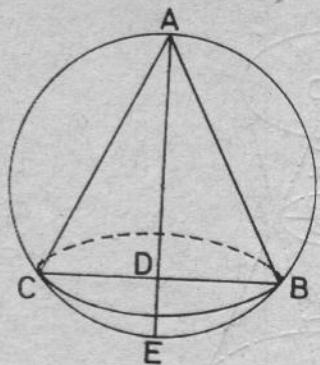
ثانیاً نقطه $(1, 0)$ مرکز تقارن هر یک از دو منحنی است، پس هر مربع که رأس هایش بر دو منحنی واقع باشد مرکز آن بر I قرار خواهد داشت. یعنی قطر مربع از I می گذرد. معادله یک قطر مربع را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y + 1 = m(x - 2)$$

$$y = mx - 2m - 1$$

معادله قطر دیگر آن می شود:

$$y = -\frac{1}{m}x + \frac{2}{m} - 1$$



حل - با فرض
آنکه ارتفاع $AD = h'$
 r مولد و
شعاع قاعده مخروط و
شعاع کره معیطی R
آن باشد، اولاً به فرض
داریم :

$$\pi r l = \frac{1}{3} \pi r^3 \Rightarrow l = 4r$$

در مثلث قائم الزاویه ABD داریم :

$$h' = AD = AB - DB = l - r = 15r$$

$$h = r\sqrt{15} \quad V = \frac{1}{3}\pi r^3 \sqrt{15}$$

امتداد ارتفاع AD مخروط کره معیطی آن رادر E قطع می کند
و در مثلث قائم الزاویه ABE داریم:

$$AB = AD \cdot AE \Rightarrow AE = \frac{l}{h} = \frac{16r}{\sqrt{15}}$$

$$R = \frac{AE}{2} = \frac{8r}{\sqrt{15}}, \quad V' = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2048\pi r^3}{45}\sqrt{15}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \sqrt{15} : \frac{2048\pi r^3}{45} = \frac{225}{2048}$$

۸۴/۱۴ - ترجمه: فتح الله زرگری

دو مخروط دوار با ارتفاعهای متساوی در نظر می گیریم
که رأس هر کدام از آنها بر مرکز قاعده دیگری واقع است.
هر گاه مولدهای دو مخروط با محور آنها به ترتیب زاویه های
فضای مشترک بین دو مخروط را برحسب α و β حساب
کنید.

حل - فضای مشترک دو مخروط، مطابق با شکل عبارتست
از دو مخروط دوار DAE و CAE و اگر V حجم فضای مشترک
باشد داریم:

حل - با تبدیل هر یک از طرفین به حاصل جمع خواهیم

داشت :

$$\cos(2a + n)x + \cos nx = \cos(2b + n)x + \cos nx$$

$$x[(2a + n) \pm (2b + n)] = 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{a+b+n} \text{ یا } \frac{k\pi}{a-b}$$

برای معین بودن جوابها لازم است که:
 $a+b+n \neq 0$ و $a \neq b$

-۸۴/۱۲ - اولاً معادله زیر را حل و بحث کنید:

$$\frac{a}{1 + \cos 2X} = 3 \operatorname{tg}^2 X - 1$$

ثانیاً مقدار a را تعیین کنید که یکی از جوابهای معادله
 $X = \frac{\pi}{4}$ باشد و پس از تعیین a تمام جوابهای معادله
را مشخص کنید.

حل - اولاً معادله را به ترتیب چنین می نویسیم:

$$\frac{a}{1 + \cos 2X} = \frac{2(1 - \cos 2X)}{1 + \cos 2X} - 1$$

$$\frac{a}{1 + \cos 2X} = \frac{2 - 4 \cos 2X}{1 + \cos 2X}$$

$$\cos 2X = \frac{2-a}{4}$$

$$-1 < \frac{2-a}{4} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq a \leq 2$$

درازاء $x = \frac{\pi}{4}$ داریم:

$$\frac{2-a}{4} = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\cos 2X = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۸۴/۱۳ - ترجمه: داویدریجان

سطح جانبی مخروط دواری برابر با یک چهارم سطح
دایره ای است که شعاع آن با مولد مخروط برابر است. نسبت
حجم مخروط به حجم کره معیطی آن را بدست آورید.

$$V = \pi |G(\varphi) - G(0)| = | - \lambda a \pi |$$

$$| - \lambda a \pi | = 32\pi \implies a = \pm 4$$

۱۶/۸۴- از: جواد فیض

ثابت کنید که در هر مثلث داریم:

$$a \cos 2B + 2b \cos A \cos B = c \cos B - b \cos C$$

حل- به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2R \sin A \cos 2B + 4R \sin B \cos A \cos B &= \\ &= 2R \sin C \cos B - 2R \sin B \cos C \\ \sin A \cos 2B + \sin 2B \cos A &= \sin C \cos B - \sin B \cos C \\ \sin(A + 2B) &= \sin(C - B) \quad (1) \end{aligned}$$

اما در هر مثلث داریم:

$$\sin(C - B) = \sin(\pi + B - C) = \sin(A + 2B)$$

بنابراین رابطه (۱) و در نتیجه رابطه مفروض محقق است.

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

-۸۴/۱۷- منحنی C به معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y = x + a\sqrt{2x - 1}$$

مقدار a را تعیین کنید که اگر سطح محصور بین منحنی و محور

$$x \text{ و } x = \frac{1}{2} \text{ را حول محور } X \text{ هادوران دهیم}$$

$$\text{حجم حادث برابر با } \frac{49\pi}{120} \text{ باشد.}$$

حل- به ترتیب داریم:

$$g(x) = y = x^2 + 2ax - a^2 + 2ax \sqrt{2x - 1};$$

$$g(x) =$$

$$x^2 + 2a^2 - a^2 + a\sqrt{2x - 1} + a(2x - 1)\sqrt{2x - 1}$$

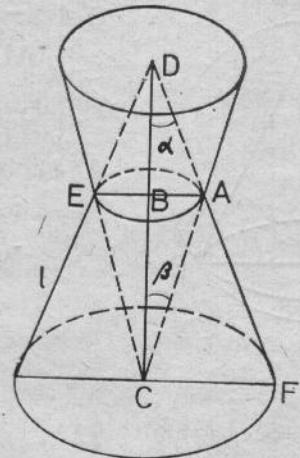
$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + a^2x^2 - a^2x +$$

$$+ \frac{a}{3}(2x - 1)\sqrt{2x - 1} + \frac{a}{5}(2x - 1)^2 \sqrt{2x - 1} + c$$

$$V = \pi [G(1) - G(\frac{1}{2})] =$$

$$= \frac{(90a^2 + 4a + 25)\pi}{120} = \frac{49\pi}{120}$$

$$45a^2 + 2a - 7 = 0 \quad , \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{218}}{45}$$



$$V = \frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot BD + \frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot BC$$

$$V = \frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot DC$$

$$DF = 1, \quad DC = DF \cos \alpha = l \cos \alpha$$

$$DC = DB + BC = AB \cot \alpha + AB \cot \beta$$

$$l \cos \alpha = AB (\cot \alpha + \cot \beta)$$

$$AB = \frac{l \cos \alpha}{\cot \alpha + \cot \beta} = \frac{l \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$V = \frac{\pi l^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

-۸۴/۱۵- در سهمی به معادله:

$$y^2 - 4y + ax - 2a = 0$$

مقدار a را تعیین کنید که حجم حادث از دوران سهمی حول

محورش و محصور بین رأس و صفحه عمود بر محور آن و به

فاصله ۴ از رأس، برابر با 32π واحد حجم باشد.

حل- معادله سهمی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(y - 2)^2 = -a(x - 2 - \frac{4}{a})$$

سیداً مختصات را به رأس سهمی انتقال می‌دهیم در نتیجه معادله

سهمی نسبت به ستگاه جدید می‌شود $X^2 - aX = -aX^2$ و داریم:

$$g(X) = -aX \implies G(X) = -\frac{1}{2}aX^2 + c$$

$$\pi \sin x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \pm \infty$$

$$\sin x = k + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

- ۸۴/۱۸ - معنی نمایش هندسی تابع زیر را در فاصله

: ۲۴) رسم کنید

$$y = \operatorname{tg}(\pi \sin x)$$

: حل - به ترتیب داریم

$$y' = \pi \cos x [1 + \operatorname{tg}^2(\pi \sin x)]$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y'	+	+	0	-	-	-	0	+	+
	$+\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\frac{\pi}{2} \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \cotg \frac{A}{2} \cotg \frac{B}{2}$$

$$\frac{p-c}{p-b} = \frac{\pi R(\sin A + \sin B - \sin C)}{\pi R(\sin A + \sin C - \sin B)} =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\frac{\pi}{2} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cotg \frac{C}{2}$$

- ۸۴/۳۰ - فرستنده: سید رضا میرزقده دانشجوی

فنی

هر گاه α و β و γ به ترتیب فواصل مرکز دایره محاطی داخلی مثلث قائم الزاویه تارأس زاویه قائم و رأسهای دیگر

باشند، ثابت کنید که:

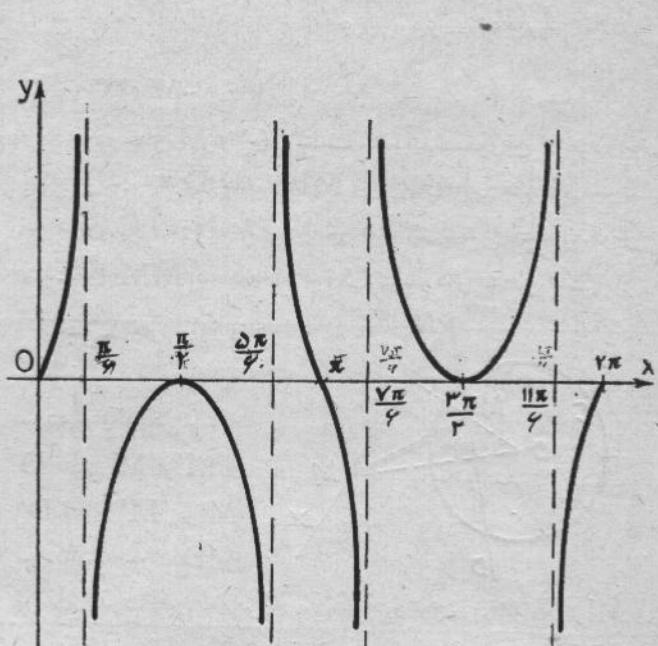
$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{V_2}{\beta\gamma}$$

حل - به فرض آنکه V شعاع دایره محاطی داخلی مثلث

باشد داریم:

$$r = \alpha \sin \frac{A}{2} = \beta \sin \frac{B}{2} = \gamma \sin \frac{C}{2}$$

$$\frac{\alpha V_2}{2} = \beta \sin \frac{B}{2} = \gamma \sin \frac{C}{2}$$



- ۸۴/۱۹ - از جواد فیض

ثابت کنید که در هر مثلث رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{p}{p-c} + \frac{p-c}{p-b} =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cotg \frac{C}{2} + \cotg \frac{A}{2} \cotg \frac{B}{2}$$

حل - به ترتیب داریم:

$$\frac{p}{p-c} = \frac{\pi R(\sin A + \sin B + \sin C)}{\pi R(\sin A + \sin B - \sin C)} =$$

فقط ۳۴۱ و ۳۱۹ و ۳۵۱ و ۴۲۹ مضرب ۱۱ می باشد اما مجدور هیچ کدام آنها متقارن نیست. بدفرض $a = 4$ داریم :

$$400004 \leq N \leq 499994 \Rightarrow 632 < N < 708$$

در ضمن عدد N به ۲۵ یا به ۸ ختم می شود و مضرب ۱۱ است که چهار عدد ۶۸۲، ۷۹۲، ۶۳۸ و ۷۴۸ چنین اند اما مجدور هیچ کدام از آنها متقارن نیست.

به فرض $a = 5$ برای N عدد ۷۱۵ بدمت می آید که مجدور آن نیز متقارن نیست.

به فرض $a = 6$ برای N عددهای ۷۰۴، ۸۱۴، ۷۲۶، ۸۳۶ بدمت می آید که از آنها فقط مجدور ۸۳۶ متقارن است.

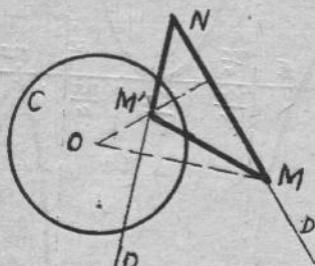
به فرض $a = 9$ برای N عددهای ۹۱۳، ۹۵۷ بدمت می آید اما هیچ کدام جوابگوی مسئله نیستند بنابراین تنها

جواب مسئله عبارتست از:

$$N = 836 = 698896$$

۸۴/۲۳ - ترجمه از فرانسه

دونقطه M و M' نسبت به دایره مفروض C مزدوج یکدیگرند. خط D قطبی نقطه M و خط D' قطبی نقطه M' نسبت به دایره C در N متلاقی می شوند. ثابت کنید که قطبی معکوس مثلث $MM'N$ نسبت به دایره C برخودش منطبق است.



حل - چون M و

M' نسبت به دایره C مزدوج یکدیگرند پس قطبی M بر M' و قطبی M' بر M قطبی D بر D' و قطبی D' بر D می گذرد. چون D بر

M می گذرد قطبی N بر M می گذرد و همچنین قطبی N بر M' می گذرد پس قطبی N نسبت به دایره می شود خط MN و درنتیجه قطبی معکوس مثلث MNM' نسبت به دایره C برخود این مثلث منطبق است.

۸۴/۲۴ - ترجمه از فرانسه

سهی P به کانون F و به خط هادی D مفروض است

از A واقع در خارج سهی دوماس AM و AM' بر آن رسم شده است. هرگاه I تصویر قائم A بر خط D و α زاویه حاده بین دو خط AM و AM' باشد، اولاً ثابت کنید که

$\cos \alpha = \frac{AI}{AF}$. ثانیاً به فرض آنکه نقطه A بقsmی تغییر کند که زاویه α ثابت بماند مکان نقطه A را معلوم کنید.

$$\sin \frac{B}{2} = \frac{a}{\beta \sqrt{2}} \text{ و } \sin \frac{C}{2} = \frac{a}{\gamma \sqrt{2}}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2}) =$$

$$\frac{a}{\beta \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \frac{C}{2} - \frac{a}{\gamma \sqrt{2}}) \Rightarrow \cos \frac{C}{2} = \frac{a}{\beta} + \frac{a}{\gamma \sqrt{2}}$$

$$\sin^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{2\gamma^2} + \left(\frac{a}{\beta} + \frac{a}{\gamma \sqrt{2}} \right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\sqrt{2}}{\beta \gamma} = \frac{1}{a^2}$$

۸۴/۲۱ - از علی هاشمی زاده دانشجوی دانشکده فنی تهران

تصاعد حسابی با جمله اول ۱۷ و با قدر نسبت ۲۱ و تصاعد هندسی با جمله اول ۲۲ و قدر نسبت ۸ را در نظر می گیریم. ثابت کنید مجموع جملات n ام دو تصاعد بر ۴۹ بخش پذیر است.

حل - مجموع جملات n ام در تصاعد می شود :

$$S = 17 + 21(n-1) + 32 \times 8^{n-1}$$

$$S = 4 \times 8^n + 21n - 4 = 4(8^n - 1) + 21n$$

$$S = 4(8-1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 1) + 21n$$

$$S = 7[4(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 1) + 3n]$$

عبارت پرانتز داخل کروشه شامل n جمله است که با قیمانده تقسیم هر جمله آن بر ۷ برابر است با 1^n و درنتیجه با قیمانده تقسیم عبارت داخل کروشه بر ۷ برابر است با با قیمانده تقسیم $7[4(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 1) + 3n]$ بر ۷ که برابر است با صفر. بنابراین S بر $7 \times 7 = 49$ بخش پذیر است.

۸۴/۲۲ - از اویدریجان

عددی شش رقمی به صورت $abccba$ پیدا کنید که مجدور

کامل باشد.

حل - عدد مطلوب را N می گیریم. این عدد به یکی از رقمهای ۱، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹ و درنتیجه N نسبت ۱۱ است.

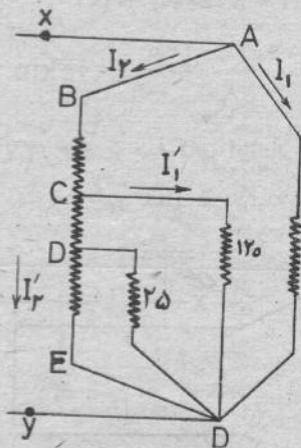
با فرض ۱ عدد $a = N^2$ بین ۱۰۰۰۱ و ۱۹۹۹۹۱ مخصوص است و درنتیجه N بین ۴۴۸ و ۳۱۶ مخصوص بوده به صورت $3x9$ یا $4x1$ یا $4x9$ است. از اعداد به این شکل

مقاومت سیم در شاخه چپ : AD

$$r_4 = 90 + 100 = 160\Omega$$

مقاومت معادل بین X و Y :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{160} + \frac{1}{40} \Rightarrow R = 32\Omega$$



برای محاسبه اختلاف
پتانسیل بین D و C

شکل را به صورت مقابل
در نظر می گیریم و داریم:

$$I_1 = \frac{350}{160} = \frac{35}{16} A$$

چون مقاومتهای معادل
دو شاخه چپ و راست
بین C و D هر دو ۱۲۰Ω

اهم است پس :

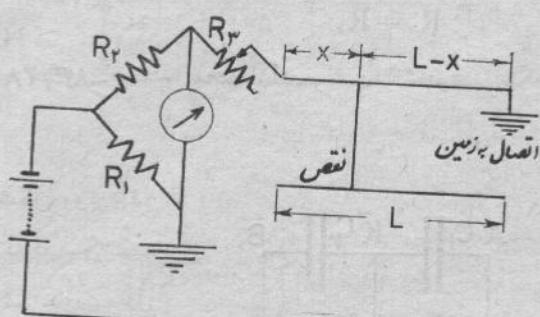
$$I_1 = I'_{1'} + I''_{1'} = 2I'_{1'} = 2I'_{1''}$$

$$I'_{1'} = I'_{1''} = \frac{35}{32} A$$

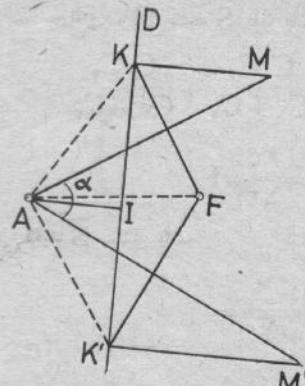
$$V_C - V_D = \frac{35}{32} \times 100 = 109,375 V$$

ترجمه کامران پارسای قمی - ۸۴/۳۶

مداری که در شکل مشاهده می کنید برای تعیین نقطه اتصال و خرابی دو سیم تلفن که ۳۵ کیلومتر طول دارند بکار



می رود. مقاومتهای R_1 و R_2 هر یک ۱۳۰۰ اهم و مقاومت سیم در هر کیلومتر ۱۴۰ اهم است. اگر در هنگام تعادل مقاومت R_2 برابر ۴۴۰ اهم باشد، فاصله X مربوط به اتصال و نقص را حساب کنید.



حل - از اینکه هر
یک از مثلثهای AKF
و AK'F و AK' متساوی الساقین است،
نتیجه می شود که زاویه
MAM' با زاویه KAI
برابر باشد. پس:

$$\cos \alpha = \frac{AI}{AK} = \frac{AI}{AF}$$

ثانیاً هر گاه α ثابت بماند و A تعییر کند چون:

$$\frac{AF}{AI} = \frac{1}{\cos \alpha} > 1$$

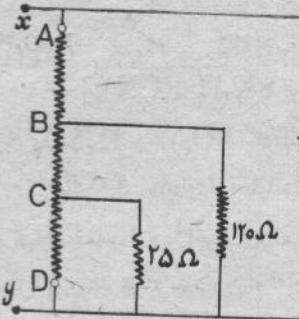
A هذلولی است که F یک کانون و D خط هادی نظیر این کانون آن می باشد.

حل مسائل فیزیک

زیر نظر: هوشنگ شریفزاده

- ترجمه جواد فیض - ۸۴/۲۵

در شکل رو برو مقاومت



سیم
اهم و C
است. مقاومت معادل بین دو
نقطه X و Y چقدر است.
هر گاه اختلاف پتانسیل
بین X و Y برابر باشد اختلاف
پتانسیل بین نقاط C و D
را حساب کنید.

حل - مقاومت معادل بین C و D :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{25} + \frac{1}{100} \Rightarrow r_1 = 20\Omega$$

مقاومت سیم در شاخه چپ DB :

$$r_2 = 20 + 100 = 120\Omega$$

مقاومت معادل بین B و D :

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{120} + \frac{1}{120} \Rightarrow r_2 = 60\Omega$$

حل - وقتی کلید S باز باشد :

$$C = C_{AB} + C_{CD} = \frac{C_1 C_r}{C_1 + C_r} + \frac{C_r C_4}{C_r + C_4}$$

$$C = \frac{1 \times 3}{1+3} + \frac{2 \times 4}{2+4} = \frac{25}{12} \mu F$$

وقتی کلید S بسته باشد :

$$C = \frac{1}{C_{KBDK}} + \frac{1}{C_{KACK}} =$$

$$= \frac{1}{C_r + C_4} + \frac{1}{C_1 + C_r} = \frac{10}{21} \mu F$$

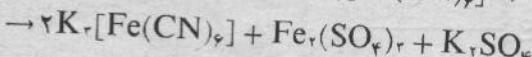
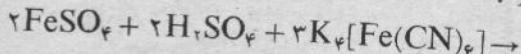
مسائل شیمی

زیر نظر : باقر مظفر زاده

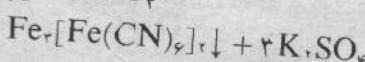
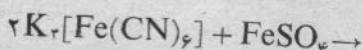
۸۴/۲۹ - فرستنده: محمد رضا کامیابی

در آزمایشگاه دیبرستان فری سیانور پتانسیم نداریم، ولی فرو سیانور پتانسیم موجود است. برای تشکیل رنگ آبی پاریس بوسیله فرو سیانور پتانسیم چه کنیم؟

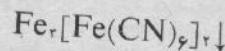
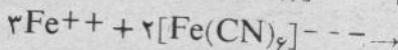
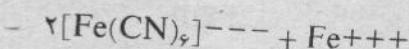
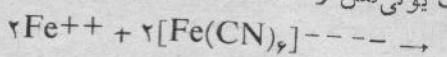
حل - اگر به محلول سولفات فرو، در میط اسید سوافوریک فرو سیانور پتانسیم اضافه کنیم رنگ آبی پاریس تشکیل خواهد شد. زیرا:



حال اگر مقدار فرو سیانور نسبت به سولفات فرو کم باشد در نتیجه تمام فرو سیانور احیاء شد؛ و به فری سیانور پتانسیم تبدیل خواهد شد، ممکن باشندات فرو با قیمانده ترکیب شده رسوب فری سیانور فرو که رنگ آبی پاریس دارد تولید خواهد کرد:



معادلات یونی فعل و انفعالات بالاچنین است:



۸۴/۳۰ - فرستنده: احمد رضا سروش

اگر کلید S بسته باشد درجه تفکیک عدد ثابت

حل - اگر R مقاومت در هر کیلومتر ۱ و X بر حسب کیلومتر باشد در هنگام تعادل داریم :

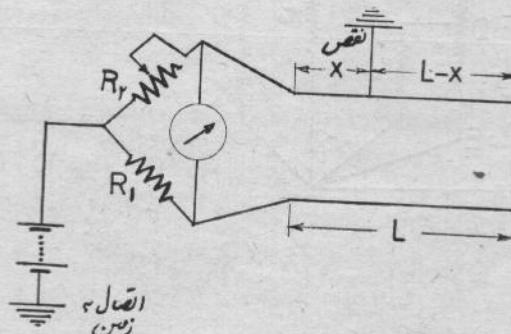
$$\frac{R_r}{R_1} = \frac{R_r + xR}{R(L-x)}$$

$$R_1 = R_r \Rightarrow R(L-x) = R_r + Rx$$

$$x = RI - \frac{R_r}{2R} = \frac{1200 - 440}{80} = 9.5 \text{ km}$$

۸۴/۲۷ - ترجمه کامران پارسا قمی

مداری که در شکل می بینید برای تعیین محل اتصال یک



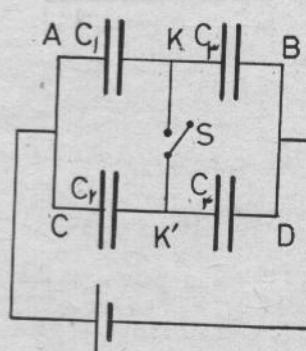
سیم تلفن به طول ۳۵ کیلومتر به زین بكاری رود. مقاومت R₁ برابر ۱۵۰۰ اهم است و مقاومت R_r در هنگام تعادل ۱۰۰ اهم است. طول x را حساب کنید.

حل - اگر R مقاومت سیم در هر کیلومتر باشد :

$$\frac{R_r}{R} = \frac{Rx}{R(2L-x)}$$

$$x = \frac{2R_r L}{R_1 + R_r} = \frac{2 \times 100 \times 30}{500 + 100} = 10 \text{ km}$$

۸۴/۲۸ - فرستنده محمد اسرشت دانشجوی دانشکده صنعتی پلی تکنیک



در شکل رو برو در موقعی که کلید S بسته باشد خازن تعادل را حساب کنید. به فرض آنکه اختلاف پتانسیل دو سر باطری ۱۲ ولت و:

$$C_1 = 1 \mu F$$

$$C_r = 2 \mu F$$

$$C_r = 3 \mu F, C_4 = 4 \mu F$$

$$\Rightarrow \alpha' = \frac{K_1}{C_1 K_1 + C_r K_r}$$

$$\alpha' = \frac{K_1}{C_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_r C_r}{K_1 C_1}}$$

$$\alpha' = \alpha \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{K_r C_r}{K_1 C_1}}}$$

درجه تفکیک اسید yH از رابطه زیر حاصل می شود:

$$\beta' = \beta \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{K_r C_r}{K_1 C_1}}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{K_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{10^{-9}}{0.1}} = 10^{-4}$$

$$\alpha' = \alpha \left(1 + \frac{0.1 K_r}{0.1 K_1} \right)^{-\frac{1}{2}} = 10^{-4} \left(1 + \frac{10^{-5}}{10^{-9}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\alpha' = 10^{-8}$$

دو اسید باهم:

$$[H^+]^r = C_1 K_1 + C_r K_r$$

$$PH = -\frac{1}{2} \log(C_1 K_1 + C_r K_r)$$

$$PH = -\frac{1}{2} \log(0.1 \times 10^{-9} + 0.1 \times 10^{-5}) = 3$$

اسید اول:

$$[H^+]^r = C_1 K_1 \Rightarrow$$

$$PH = -\frac{1}{2} (\log K_1 + \log C_1)$$

$$PH = -\frac{1}{2} (\log 10^{-9} + \log 0.1) = 5$$

$$PH = -\frac{1}{2} (\log K_r + \log C_r) = \text{اسید دوم} PH$$

$$= -\frac{1}{2} (\log 10^{-5} + \log 0.1) = 3$$

تفکیک و غلظت مولکولی اسید ضعیفی به فرمول xH باشد ،

ثابت کنید رابطه :

$$\alpha' = \alpha \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{K_r C_r}{K_1 C_1}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

وقتی برقرار است که C_r مل از اسید ضعیف دیگر yH به عدد

ثابت تفکیک K_r به اسید اولی اضافه کنیم .

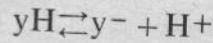
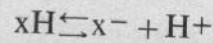
هرگاه اسید اولی اسید بوریک ، $K_r = 10^{-9}$ و

$C_1 = 0.1$ و اسید دوسری اسید استیک و $K_r = 10^{-5}$

$C_r = 0.1$ باشد α' را بدست آورید و PH مخلوط دو اسید

و PH هر یک را در محلولهای خود جداگانه حساب کنید .

حل-



$$\begin{cases} K_1 = \frac{[x^-][H^+]}{[xH]} & [x^-][H^+] = C_1 K_1 \\ K_r = \frac{[y^-][H^+]}{[xH]} & [y^-][H^+] = C_r K_r \\ [H^+] = [x^-] + [y^-] & [H^+] = [x^-] + [y^-] \end{cases}$$

از دستگاه سه معادله بالا حاصل می شود:

$$[H^+] = \frac{C_1 K_1 + C_r K_r}{[H^+]}$$

$$[H^+]^r = C_1 K_1 + C_r K_r$$

روج تفکیک xH ابتدا α است ولی بعد از واردشدن yH به α' تنزل می کند زیرا α' تبعی است از غلظت ، مشلا اسیدهای قوی مانند HCl در محلولهای غلیظ دارای α می شوند. از α می توان در مقابله یک صرف نظر کرد :-



$$C_1(1-\alpha) \quad C_1\alpha \quad C_1\alpha$$

$$K_1 = \frac{C_1 \alpha^2}{C_1(1-\alpha)} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{K_1}{C_1}$$

بعد از واردشدن yH درجه تفکیک xH می شود :

$$\frac{[H^+] C_1 \alpha'}{C_1(1-\alpha)} = K_1 \Rightarrow [H^+] = \frac{K_1}{\alpha'}$$

$$[H^+]^r = \left(\frac{K_1}{\alpha'} \right)^r = C_1 K_1 + C_r K_r$$

$$\left(\frac{K_1}{\alpha'} \right)^r = C_1 K_1 + C_r K_r \Rightarrow$$

پاسخ قسسهای ریاضی

$$\log_2 3 = \frac{a-2}{3} \Rightarrow \log_2 2 = \frac{3}{a-2}$$

$$\log_2 16 = 4 \log_2 2 = \frac{12}{a-2}$$

(الف) برای آنکه مجموع بینهایت جمله:

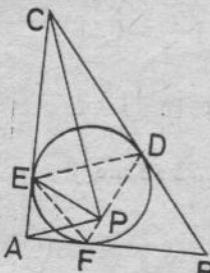
تصاعد هندسی با قدر نسبت $\frac{a^2}{2a^2+1}$ و جمله اول

$2a^2 + 1$ دارای حد باشد، باید داشته باشیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2}{2a^2+1} \neq 0 \quad \text{و} \quad \frac{a^2}{2a^2+1} < 1 \\ 2a^2 + 1 \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow a \neq 0.$$

(الف) به فرض آنکه مثلث ABC در زاویه:

A قائم و E و D و F و E و D و F نقاط تماس دایره محاطی داخلی آن باضلعهای CA، BC و AB و EP بر DF عمود باشد، اولاً چون چهارضلعی AEPPF محاطی است و در ضمن مثلث AEF قائم الزاویه متساوی الساقین است پس هریک از زاویه‌های



DFB چون مثلث BDF متساوی الساقین و در ضمن زاویه DFB بازاویه PEA برابر است، نتیجه می‌شود که دوزاویه CDP بازاویه CEP متساویند و چون مثلث CDE متساوی الساقین است پس مثلث PDE نیز متساوی الساقین است و CP نیمساز زاویه DPE است.

نیمسازهای دوزاویه مجنب بر یکدیگر عمودند، پس زاویه APC قائم است.

(ب) هرگاه در مثلث ABC اندازه زاویه A

برابر 60° و $AC = 2a$ و $AB = ra$ و L و K و به ترتیب

پای ارتفاعات رأسهای

P و C و B تصویر

KL باشد، A

چون عمود را

AL رسم کنیم، در

مشهای قائم الزاویه

KAL و در مثلث AKQ، ABL، ACL

خواهیم داشت:

(ب) دو معادله درجه دوم:

$$x^2 - 2(1-m)x - 4m = 0$$

$$2mx^2 - (4m - 1)x - 2 = 0$$

هر دو دارای جواب $x = 2$ و غیر از آن اولی دارای

$$x = -\frac{1}{2m} \quad \text{و دوی دارای جواب}$$

$$\text{امت در ازاء } m = \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{4m} \quad \text{دو جواب اخیر}$$

نیز متساویند.

(د) کسر

$$\frac{x^2 + (m-2)x - 2m}{x^2 + (2m-1)x - m}$$

به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{(x+m)(x-2)(2x-1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

اگر $m \neq -1$ باشد، کسر در ازاء $x = -m$ صفر می‌شود

اما تغییر علامت نمی‌دهد، اگر $m = -1$ باشد، کسر به صورت زیر

ساده می‌شود:

$$\frac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{x^2+x+1}$$

در این حالت کسر در ازاء $x = -1$ صفر می‌شود

و تغییر علامت می‌دهد.

(ب) به فرض آنکه A و B مقادیر معلوم باشند

دستگاه دو معادله:

$$4x^2 + x + y + my^2 = A$$

$$2mx^2 - 3xy - 4y^2 = B$$

وقتی نسبت به x و y متقارن است که اگر در هر معادله

x و y را با یکدیگر جایجا کنیم، آن معادله فرق نکند. پس باید

داشته باشیم:

$$\begin{cases} 4 = m^2 \\ 2m = -4 \end{cases} \Rightarrow m = -2$$

(ب) به فرض $\log_2 108 = a$ داریم:

$$\log_2 4 \times 27 = 2 \log_2 2 + 3 \log_2 3 = a$$

(د) به ترتیب داریم:

$$\sin X \sin\left(X + \frac{\pi}{4}\right) = a$$

$$\cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(2X + \frac{\pi}{4}\right) = 2a$$

$$\cos\left(2X + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2a$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - 2a \leq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2} - 2}{4} \leq a \leq \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

(الف) معادله $\sin 2X + \tan X = 2$ بر حسب

$\tan X$ به صورت زیر در می آید:

$$\tan^2 X - 2\tan^2 X + 3\tan X - 2 = 0$$

$$(\tan X - 1)(\tan^2 X - \tan X + 2) = 0$$

این معادله فقط در ازاء $\tan X = 1$ صفر می شود.

(ج) به فرض آنکه a و b طولهای ضلعهای

قائم از یک مثلث قائم الزاویه باشند طول وتر آن $\sqrt{a^2 + b^2}$ و

طول ارتفاع وارد بروتر $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است. هرگاه حجم حادث

از دوران این مثلث طول وتر $\frac{4\pi\sqrt{5}}{15}$ و مجموع حجمهای حادث

از دوران آن حول هریک از ضلعهای زاویه قائم 2π باشد داریم:

$$\begin{cases} \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4\pi}{15} \\ \frac{1}{3}\pi ab(ab) = 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab(a+b) = 6 \\ 5a^2 b^2 = 4\sqrt{5}(a^2 + b^2) \end{cases}$$

با فرض $x = a+b$ و $ab = y$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ 5x^2 = 4\sqrt{5}(y^2 - 2x) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x^2 y^2 = 36 \\ 5x^4 = 16(y^2 - 2x) \end{cases}$$

از حذف y^2 بین دو معادله خواهیم داشت:

$$5x^4 + 22x^2 - 16 \times 36 = 0$$

$$x^2 = 8 \Rightarrow x = 2 \quad \text{و} \quad y = 3$$

$$\begin{cases} ab = 2 \\ a+b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

(ب) اگر بخروط دوری بانصف زاویه رأس

در بخروط دوری بخروط دوری به ارتفاع ۶ و شمام قاعده ۴ چنان

سحط باشد که رأس اولی بر مرکز قاعده دومی واقع باشد و صفحه حاتم

$$AL = a \quad AK = \frac{3a}{2} \quad AQ = \frac{3a}{4}$$

$$KQ = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$

$$KL^2 = \frac{9a^2}{4} + a^2 - 2a \cdot \frac{3a}{4} \Rightarrow KL = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

$$AP \cdot KL = AL \cdot KQ \Rightarrow AP = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$$

(ج) منحنیهای نمایش هندسی دو تابع

$$y = x^2 + ax \quad \text{و} \quad y = \frac{x}{a(x-1)}$$

در ازاء همه مقادیر $a \neq 0$ در مبدأ مختصات متلاقي و

بر يكديگر عمودند. زيرا داريم:

$$y' = 2x + a \quad x = 0, m_1 = a$$

$$y' = \frac{-1}{a(x-1)} \quad x = 0, m_2 = \frac{-1}{a}$$

(ج) برای آنکه منحنیهای نمایش هندسی

دو تابع:

$$y = \frac{x-2}{x+2} \quad \text{و} \quad y = (x-2)(ax+1)$$

در يك نقطه متلاقي و در يك نقطه مماس باشند، بايد معادله

حاصل از حل آنها يعني معادله:

$$(x-2)[ax^2 + (2a+1)x + 1] = 0$$

يک ريشة ساده و يك ريشة مضاعف داشته باشد. اما

$\Delta = 0$ يک ريشة معادله است و اگر $x = 2$ ريشه سه جمله‌اي

داخل کروشه نيز باشدر يك ريشه مضاعف معادله خواهد بود. وانگهی

ممكن است که سه جمله‌اي داخل کروشه نيز يك ريشه مضاعف

داشته باشد. دربورد اين سه جمله‌اي داريم $\Delta = 4a^2 + 1 > 0$

پس فقط وقتی معادله ريشه مضاعف دارد که $x = 2$ در سه جمله‌اي

داخل کروشه نيز صدق کند:

$$4a + 4a + 2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{8}$$

(د) اگر α و β دوزاویه حاده از مثلث قائم الزاویه

باشند از $\sin \alpha + \sin \beta = q$ نتیجه می شود:

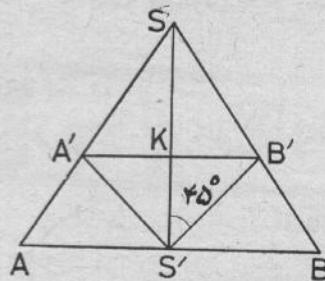
$$\sin \alpha + \sin(90^\circ - \alpha) = q$$

$$2 \sin 45^\circ \cos(\alpha - 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(\alpha - 45^\circ) = q$$

$$0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow -45^\circ < \alpha - 45^\circ < 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos(\alpha - 45^\circ) \leq 1 \Rightarrow 1 < q \leq \sqrt{2}$$

قاعده‌های دو مخروط
متوازی باشند، مقطع
قائم آنها مطابق باشکل
S'B' و خط SS'B
نیمساز زاویه
امت و :



$y' = -\cos x$ که درازاء $x = 0$ داریم $y' = -\cos x$ و منعنه بر نیمساز ربع دوم و چهارم محاس است. بنابراین منعنه تابع مفروض در مبدأ مختصات برهه یک از نیمسازهای محورها محاس است.

(د) به فرض $k < 0$ و به فرض آنکه در مثلث ABC داشته باشیم :

$$h_a = kd_a \text{ و } B + C = 120^\circ \Rightarrow C$$

خواهیم داشت :

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{h_a}{d_a} = k$$

$$\begin{cases} \frac{B-C}{2} = \operatorname{Arc} \cos k \\ \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow B = \frac{\pi}{3} + \operatorname{Arc} \cos k$$

(د) عدد شش رقمی به صورت abcabc عدد شش رقمی است، زیرا برابر است با :

$$1001 = 7 \times 11 \times 13 \text{ و } 1001 = abc$$

دارای عامل مجدد کامل نیست و $abc \neq 1001$ است.

(ج) هر گاه هر یک از دو عدد cba و abc

مضرب ۷ باشد داریم :

$$|abc - cba| = 99|a - c| = 7k$$

$$99 \neq 7k \Rightarrow |a - c| \neq k$$

$$(a = 1 \text{ و } c = 8) \text{ یا } (a = 2 \text{ و } c = 9)$$

$$(a = 8 \text{ و } c = 1) \text{ یا } (a = 9 \text{ و } c = 2)$$

$$\overline{8b1} - \overline{1b8} = 7q \Rightarrow b = 6$$

$$\overline{9b2} - \overline{2b9} = 7q \Rightarrow b = 5$$

پس عدد مطلوب یکی از چهار عدد ۲۵۹، ۸۶۱، ۱۶۸، ۲۵۹ است.

(ب) وقتی که دو نقطه A و B نسبت به دایره

C مزدوج باشند، یکی از دو نقطه بیرون دایره و دیگری درون دایره است. قطبی فقط اخیر نسبت به دایره به تمامی دریرون دایره واقع می‌شود. از جمله نقطه تلاقی این قطبی با قطبی نقطه دیگر نیز در بیرون دایره است و قوت آن نسبت به دایره مشتم است.

(ب) دو سهمی که در کانون F مشترک باشند و

خطهای هادی آنها در I متلاطی باشند، دارای یک محاس مشترکند که همان عمودمنصف FI است. زیرا قرینه کانون سهمی نسبت به هر محاس بر آن برخط هادی آن واقع است.

$$\frac{SB'}{BB'} = \frac{SS'}{S'B} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{KB'}{S'B} = \frac{SB'}{SB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{SK}{S'S} = \frac{BB'}{BS} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{R'h'}{R'h} = \frac{18}{125}$$

(ب) سطح محصور بین منعنه تابع .

$$y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

و خط $x = 1$ و دو خط $x = 4$ برابر

می‌شود با :

$$\sqrt{k^2 - 2k - 3} - k + 400\sqrt{5}$$

وقتی $k \rightarrow \infty$ عبارت اخیر به می‌شود که پس از رفع ابهام برابر با $\sqrt{5} - 3$ می‌شود.

(ج) برای آنکه معادله

$$m^2x^2 + 2(3m + a)x + 4a = 0$$

درازاء همه مقادیر $m \neq 0$ دو جواب بزرگتر از -۳

داشته باشد باید درازاء همه مقادیر m داشته باشیم :

$$\begin{cases} \Delta' = (9 - 4a)m^2 + 6am + a^2 > 0 \\ af(-3) = m^2 + (9m^2 - 18m - 2a) > 0 \\ -3 + \frac{b}{2a} = \frac{-3m^2 + 3m + a}{m^2} < 0 \end{cases}$$

برای این نامعادلات به ترتیب باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 9 - 4a > 0 & 4a^2 < 0 \\ 81 + 18a < 0 & \Rightarrow -\frac{9}{2} < a < -\frac{3}{4} \\ 9 + 12a < 0 \end{cases}$$

(الف) اگر $x \geq 0$ باشد داریم :

$$y' = \cos x \text{ و } y = \sin|x| = \sin x$$

درازاء $x = 0$ داریم $y' = 1$ و منعنه بر نیمساز ربع اول

وسوم محاس است. اگر $x \leq 0$ باشد $y = \sin|x| = -\sin x$ و

قسمت هوش

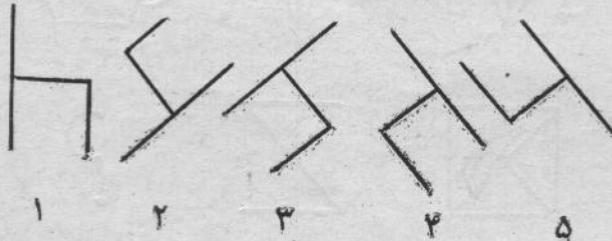
پرسشها و مسئله‌های هوشی که در زیر درج می‌شود، با اقتباس از پرسشها و مسئله‌های مندرج در کتاب

« تستهای هوش » نشریه اخیریکان تهیه شده است.

۴- کلمه‌ای دو حرفی بباید که به متزله آخر کلمه اول و اول کلمه دوم باشد.

پر () بره

۵- شکل در وضع ناجور را جدا کنید.



۶- کلمه‌های در هم ریخته را بباید و کلمه نامناسب را جدا کنید.

ر ر ا پ س

ش خ ک ط

م ا م د

م م م ق ق

۷- عدد افتاده را بنویسید.

۱۳ (۲۵) ۳۷

۴۲ () ۱۱۰

۸- عدد افتاده را بنویسید.

چشم = ۳

ابرو = ۴

دو چشم و دوا برو = ۶

۹- کلمه افتاده را بنویسید (تعداد نقطه‌های داخل پرانتز، تعداد حریفهای کلمه افتاده را می‌رساند).

بسقر (برخه) خیمه

مینا (....) هستی

۱۰- کدام کلمه از کلمه‌های زیر از لحاظی ممتاز است؟
هفت‌صد- بیست- دوازده- چهل- هشت

۱۱- عدد افتاده را بنویسید.

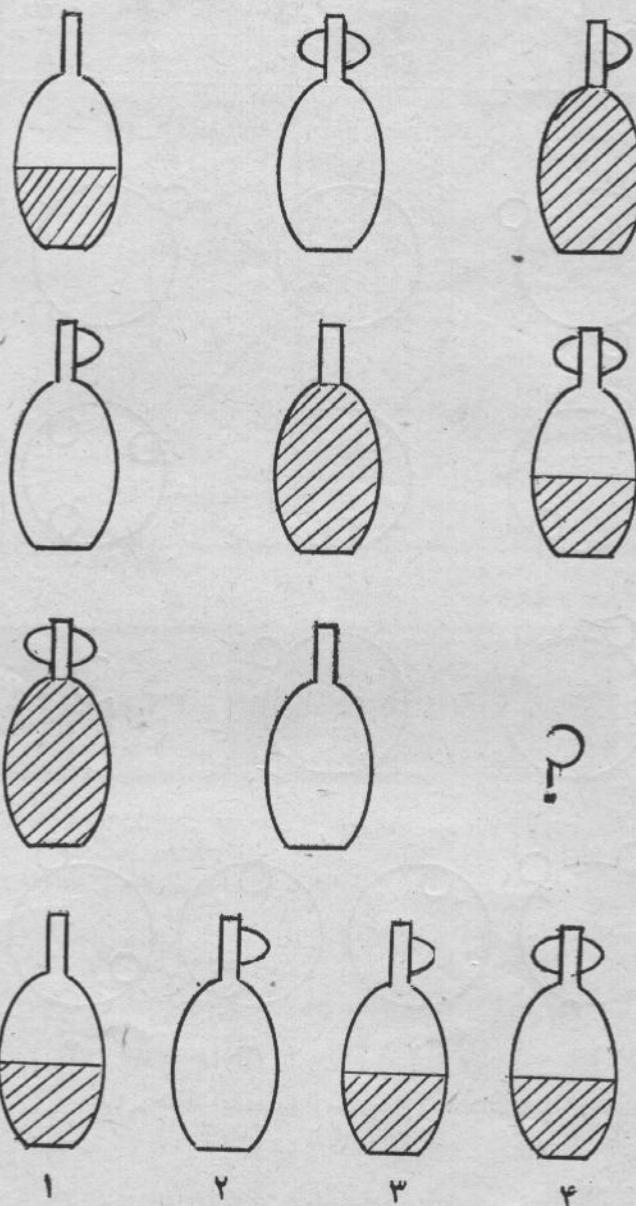
۱۲ ۵ ۷۱

۲۳ ۴۱ ۴۶

۳۲ ۱۱ ?

۱- از شکل‌های شماره گذاری شده، شکل لازم را انتخاب

کنید.



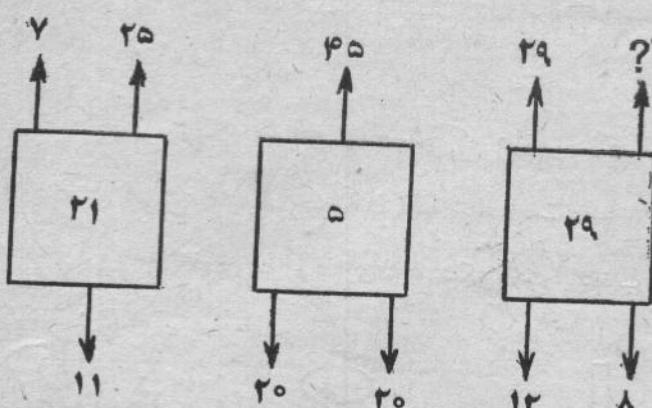
۱۲- عدد افتاده را بنویسید.

? ۱۹ ۳۵

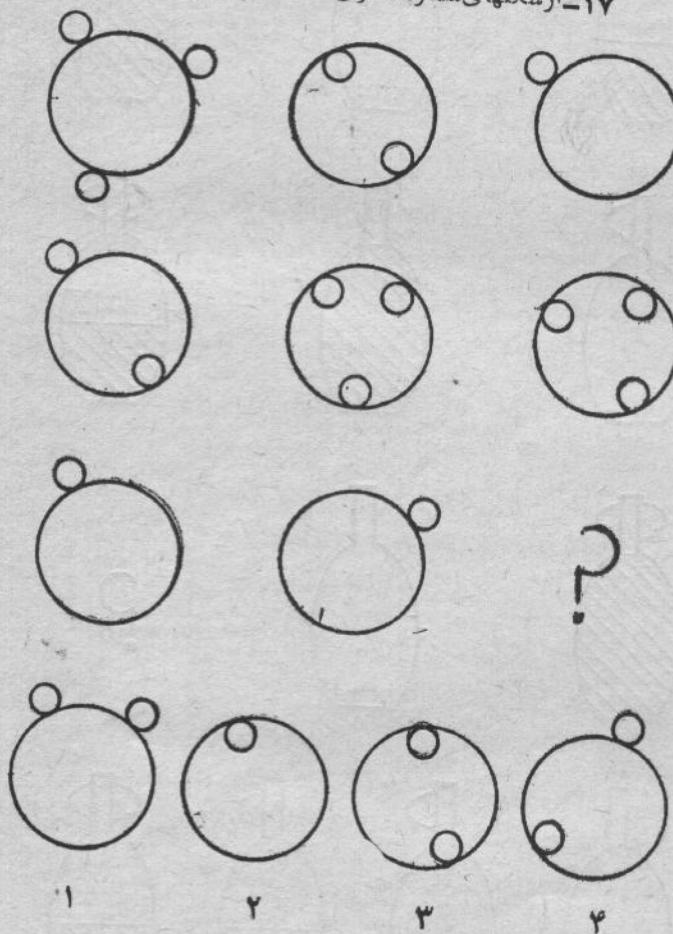
۳- حرف افتاده را بنویسید.

الف ب ت ج ذ

۱۶- عدد افتاده را بنویسید.



۱۷- از شکل‌های شماره گذاری شده، شکل لازم را انتخاب کنید.



۱۸- کلمه افتاده را از بین چهار کلمه داده شده انتخاب کنید.

باد = ۱۳

ابر = ۱۵

برف = ۳۷

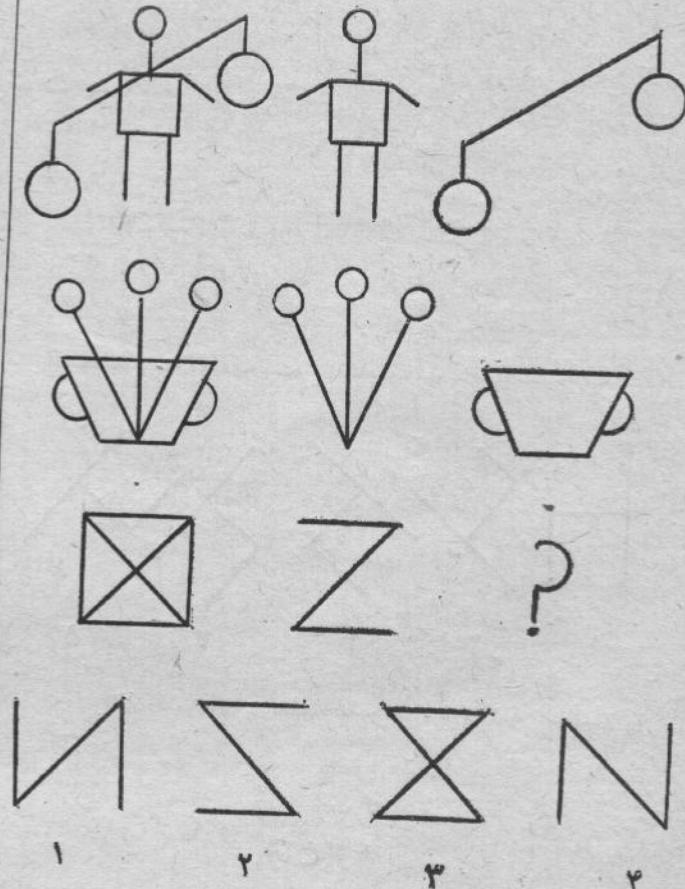
۴۳ = ?

باران - تگرگ - رعد - بوران

کنید.

یکان دوره هشتم

۱۹- از شکل‌های شماره گذاری شده شکل لازم را انتخاب کنید.



۲۰- حرف افتاده و عدد افتاده را بنویسید.

۲	ج	۱۲	?
۲	۶	۰	?

۲۱- عدد افتاده را بنویسید.

دختر	پسر	زن	مرد
۰	۲	۳	?

۲۲- از کلمه‌های درهم ریخته زیر، کدامیک نسبت به

بقیه از لحاظی ممتاز است؟

ب ش ه ن

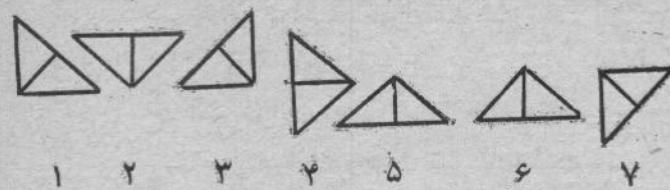
ك چ ي

ر م د د

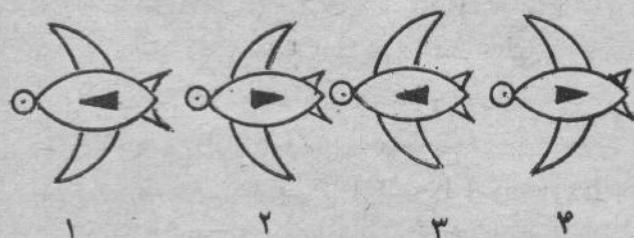
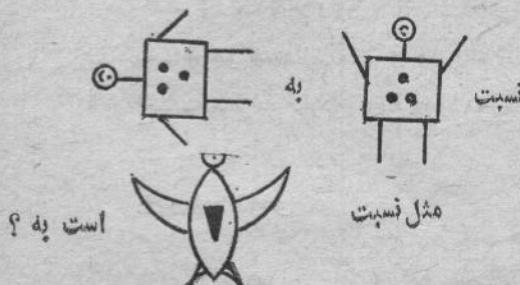
ي ل ق ث

ث ر ا ي م

۳۴- شکل در وضع ناجور را جدا کنید.



۳۵- از شکل‌های شماره گذاری شده، شکل لازم را انتخاب کنید.



۱۹- کلمه افتاده را بنویسید.

نسبت تو را به وزارت مثل نسبت را دارد است به؟

۴۰- عدد افتاده را بنویسید:

۱۲ ۲۷ ۴۲ ?

۴۱- کلمه‌ای بنویسید که به معنی کلمات خارج پرانتز باشد

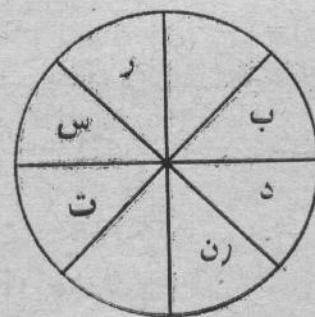
شکایت () رمه

۴۲- عدد افتاده را بنویسید

۱۲۳(۲۲)۶۷۸

۴۵۶()۹۰۱

۴۳- حرفهای افتاده را بنویسید



قستهای ریاضی

برای استفاده داوطلبان کنکور دانشگاهها و سایر علاقمندان

الف- در هر حال غلط است.

ب- در هر حال صحیح است.

ج- وقتی صحیح است که p منفی باشد.

د- وقتی صحیح است که p مثبت باشد.

۸۵/۳- هر گاه تساوی زیریک اتحاد باشد

$$\frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1} = \frac{x^2+7x^2-x+5}{x^2-1}$$

الف- مقادیر ضرایب معجهول عبارتند از:

$$d = -3, c = 3, b = 1, a = 1$$

I- در حدود بر نامه کلاس چهارم ریاضی

۸۵/۱- بفرض آنکه a عدد حقیقی منفی باشد، حاصل

$$V a^2 + 1 + 2V a^2$$

برابر است با:

$$\text{الف: } a - 1 \quad \text{ب: } a \pm 1$$

$$\text{ج: } 1 - a \quad \text{د: } a + 1$$

۸۵/۳- a عددی است مثبت و p عددی است

حقیقی. تساوی:

$$p \sqrt{a} = - \sqrt{ap}$$

د - وقتی n زوج باشد دارای جمله a^n است.

هزگاه: ۸۵/۱۰

β و $g(x) = x^3 + Sx + P$ و $f(x) = x^3 + x - 5$ دو مقدار باشند بقسمی که $f(\beta) = 0$ و $f(a) = 0$ ، برای آنکه $g(a\beta) = 0$ باشد لازم است که:

$$P = 5 \quad S = -6 \quad \text{الف}$$

$$P = -5 \quad S = -6 \quad \text{ب}$$

$$P = 5 \quad S = 6 \quad \text{ج}$$

$$P = -5 \quad S = 6 \quad \text{د}$$

برای آنکه جوابهای دستگاه: ۸۵/۱۱

$$\begin{cases} (2m-1)(x-2m+1)y=0 \\ (m-2)(x-y)=2 \end{cases}$$

هر دو مشیت باشند، لازم است که:

$$m > \frac{1}{2} \quad \text{ب} \quad -2 < m < \frac{1}{2} \quad \text{الف}$$

$$m < -\frac{1}{2} \quad -2 < m < \frac{1}{2} \quad \text{د} \quad \text{معادله} \quad ۸۵/۱۲$$

- (۱) $(x-1)^4 + (x^3 - 2x + 2)^4 = 17$
- الف - جواب حقیقی ندارد.
 - ب - دو جواب حقیقی دارد.
 - ج - چهار جواب حقیقی دارد.
 - د - هشت جواب حقیقی دارد.
- دوسته ۸۵/۱۳

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ yz + zx + xy - y^2 = 0 \\ xy + z^2 = 0 \end{cases}$$

- الف - منحصر یک دسته جوابهای حقیقی دارد.
- ب - دو دسته جوابهای حقیقی دارد.
- ج - بیش از دو دسته جواب حقیقی دارد.
- د - جواب حقیقی ندارد.

به فرض آنکه a و b و c عده‌ای مشیت باشند، معادله درجه دوم:

$$(ab + bc + ca)x^3 + (a + b + c)x + a^3 + b^3 + c^3 = 0$$

- الف - همواره دو ریشه مختلط العلامت دارد.
- ب - اگر دوریشہ حقیقی داشته باشد یکی از آنها از یک بزرگتر است.
- ج - ممکن است که دوریشہ مختلط العلامت داشته باشد.
- د - هیچگاه ریشه بزرگتر از یک ندارد.

ب - مقادیر ضرایب مجهول عبارتنداز:

$$d = 3, c = -3, b = 1, a = 1$$

ج - تعیین ضرایب مجهول یک مسئله میهم است.

د - تعیین ضرایب مجهول یک مسئله مختلف است.

هزگاه: ۸۵/۱۴

$$\frac{x^4 - 1}{x^4 + x} = \frac{x^4 + 3x + 2}{x^4 + x}$$

الف - دارای یک جواب $x = -1$ است.

ب - دو جواب دارد $x = -1$ و $x = 1$.

ج - سه جواب دارد $x = 1$ و $x = \pm 1$.

د - جواب قابل قبول ندارد.

تساوی: ۸۵/۱۵

$$\frac{x^4 + |x|}{x^4 - x} = \frac{x^4 - |x|}{x^4 + x}$$

الف - غیرممکن است.

ب - وقتی صحیح است که x مشیت نباشد.

ج - فقط درازاء $x = 0$ صحیح است.

د - درازاء x مقادیر x صحیح است.

به فرض آنکه $f(x) = ax + b$ باشد، ۸۵/۶

: $f(x^4 + 1)$

الف - هیچگاه بر $x^4 + 1$ بخش پذیر نیست.

ب - همواره بر $x^4 + 1$ بخش پذیر است.

ج - به ازای یک مقدار a و یک مقدار b بر $x^4 + 1$ بخش پذیر است.

د - به ازای دو مقدار a و یک مقدار b بر $x^4 + 1$ بخش پذیر است.

است با: ۸۵/۷

الف - $f(-x) = f(x)$ یک دسته

معادله: ۸۵/۸

$$x^4 + 4y^4 + 9z^4 + 2x - 4y + 2 = 0$$

الف - جواب ندارد.

ب - فقط یک دسته جواب دارد.

ج - فقط دو دسته جواب دارد.

د - دارای دسته جوابهای متعدد است.

به فرض آنکه n عدد صحیح مشیت باشد عبارت

خارج قسمت تقسیم $1 - a^{2n}$ بر $a^2 - 1$

الف هرچه باشد n دارای جمله a^n است.

ب - به ازای هیچ مقدار از n دارای جمله a^n نیست.

ج - وقتی n فرد باشد دارای جمله a^n است.

۸۵/۱۵ - برای آنکه معادله :

$$\left(a^2 + \frac{1}{a} \right) x^4 + ax^3 + (a+1)x^2 + ax + a + \frac{1}{a} = 0$$

اگر ریشه داشته باشد این ریشه ها عکس یکدیگر باشند، برای a :

الف - دو مقدار بدهست می آید .

ب - بیش از دو مقدار بدهست می آید .

ج - تنها یک مقدار بدهست می آید .

د - مقداری حقیقی بدهست نمی آید .

۸۵/۱۶ - هر گاه ممکن است a و b و c تصاعدی -

حسابی تشکیل دهند، سه عدد :

$$A = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} \\ C = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

الف - تصاعد هندسی تشکیل می دهند .

ب - تصاعد حسابی تشکیل می دهند .

ج - تصاعد توافقی تشکیل می دهند .

د - هیچ نوع تصاعد تشکیل نمی دهند .

۸۵/۱۷ - هر گاه داشته باشیم :

$$A = a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5$$

و مقادیر a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 به ترتیب جملات یک تصاعد حسابی باشند، خواهیم داشت :

الف - $A > 0$ ب - $A < 0$ ج - $A \neq 0$ د - $A = 0$

۸۵/۱۸ - اگر n, m, k عددهای مثبت و $x \neq 1$ باشند واعداد $\log_n x, \log_m x$ و $\log_k x$ تصاعد حسابی تشکیل

دهند، دراین صورت بدفرض :

$$y = (kn)^{\log_{km}}$$

الف - $y = n$

ج - $y = n^2$

۸۵/۱۹ - معادله :

$$\log_x x \cdot \sqrt{\log_x \sqrt{3x}} = -1$$

الف - جواب قابل قبول ندارد .

ب - دو جواب قابل قبول دارد .

ج - یک جواب بزرگتر یک دارد .

د - یک جواب کوچکتر از یک دارد .

۸۵/۲۰ - هر گاه داشته باشیم :

$$\log_{10} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} < 0$$

- الف - $x > 4$ یا $x < 2$
 ب - $x < 4$ یا $x < 3$
 ج - $x < 4$ و $x \neq 2$
 د - $x < 4$ یا $x < 2$ و $x \neq 4$
- ۸۵/۲۱ - اگر O, G, H به ترتیب مرکز ارتفاعی، مرکز ثقل، مرکز دائرة محیطی مثلث غیر مشخص ABC باشد، سه نقطه H و G و O :
- الف - بریک استقامتند و G بین H و O واقع است .
 ب - بریک استقامتند و G و سط پاره خط OH است .
 ج - تنها وقتی بریک استقامتند که مثلث ABC حاد - الزوايا باشد .
 د - بریک استقامت نیستند .
- ۸۵/۲۲ - به فرض آنکه O مرکز دائرة محیطی و H مرکز ارتفاعی و K پای ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC و سط پاره خط OH و L و سط پاره خط AH باشد، مثلث ωLK :
- الف - قائم الزاویه است .
 ب - متساوی الاضلاع است .
 ج - متساوی الساقین است .
 د - قائم الزاویه متساوی الساقین است .
- ۸۵/۲۳ - پاره خط $'OO'$ به طول ۸ را در نظر می گیریم .
 به مرکز O و به شعاع ۳ یک دایره و به مرکز O' و به شعاع یک دایره ای دیگر رسم می کیم . شعاع OM از دایره اول و شعاع $O'M'$ از دایره دوم را موازی و مختلف الجهات رسم می کیم .
 خط MM' با خط $'OO'$ در I متقاطق می شود . بر I خط \triangle را می گذرانیم که با $'OO'$ زاویه 60° درجه بسازد :
 الف - خط \triangle در خارج هر دو دایره واقع است .
 ب - خط \triangle با هر دو دایره متقاطع است .
 ج - خط \triangle بر یکی از دایره ها مماس و بادیگری متقاطع یا متخارج است .
 د - خط \triangle بر هر دو دایره مماس است .
- ۸۵/۲۴ - در مثلث ABC دور رأس B و C ثابتند و رأس A تغییر مکان می دهد بقسمی که $\overline{AB} + \overline{AC} = k^2$ ثابت است . اگر G مرکز ثقل مثلث باشد، مکان هندسی نقطه G :
- الف - خطی است عمود بر BC .
 ب - خطی است موازی با BC .
 ج - دایره ای است که مرکزش پای ارتفاع وارد بر ضلع BC است .
 د - دایره ای است که مرکزش پای ارتفاع وارد بر ضلع BC است .

الف - $N(-10, -45)$ ب - $N(10, 45)$
 ب - $(5, -10)$ ن - $(-10, 45)$
 $N(-10, 2) - A(4, 6)$ و $B(6, 4)$ دوران و
 مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. رأس دیگر این

مثلث عبارتست از:

الف - $C(-6, 5)$ ب - $C(5, 6)$
 ج - $C(-6, -5)$ د - $C(5, -6)$

نقطه $(1, -3)$ P و خط متغیر Δ به معادله $-85/33$

$a(2x - y - 6) + b(x - y - 4) = 0$ را در نظر می‌گیریم. تعداد خطهای Δ که فاصله آنها از نقطه

برابر با 3 باشد:

الف - بیش از 2 است.

ب - برابر با 2 است.

ج - برابر با یک است.

د - صفر است.

۸۵/۳۴ - برای آنکهتابع:

$$y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(2m+1)x + 2m - 3}$$

در ازاء جمیع مقادیر x معین باشد، لازم و کافی است که:

الف - $m > -1$ ب - $m \neq -1$

ج - $m < -1$ د - $m \geq -1$

۸۵/۳۵ - هرگاه بین دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ و مشتقهای

آنها رابطه:

$$f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = a$$

برقرار باشد، تابع $(x)g$ برابر است با:

الف - $\frac{ax}{f(x)}$ ب - $\frac{a}{f(x)}$

ج - $\frac{ax+b}{f(x)}$ د - $\frac{ax+b}{f(x)} + c$

۸۵/۳۶ - اگرین تابع $y = a \cos bx$ و مشتق آن رابطه:

$$y'' + y'^2 = a^2$$

برقرار باشد:

الف - $b = -1$ ب - $b = 1$ ج - $b = \pm 1$

د - برابر با هر عدد حقیقی دلخواه است.

۸۵/۳۷ - دوران مثلثی $(2, 3)$ و $(4, 1)$ و $(0, 1)$ از مبنای AM در رأس A برابر مساحت

است. در این صورت داریم:

الف - $b = 2$ و $a = 4$ ب - $b = 3$ و $a = 2$

ب - $b = 2$ و $a = 4$ ب - $b = 19$ و $a = -2$

۱۱ - در حدود بر قاعده کلاس پنجم دیاضی

۸۵/۲۵ - هرگاه X طول نقطه واقع بر محور X' باشد،

نمایش هندسی معادله:

$$|1 - x| = 2$$

الف - منحصر به یک نقطه است.

ب - از دو نقطه مجزا تشکیل شده است.

ج - پارهای از محور X' است.

د - نیمه‌ای از محور X' است.

۸۵/۲۶ - طول نقطه واقع بر محور X' است.

نمودار نامعادله: $X^2 - X - 12 < 0$

الف - منحصر به دونقطه مجزا است.

ب - دونیم محور مجزا است.

ج - تمام محور X' است.

د - پارهای از محور X' است.

۸۵/۲۷ - پاره خط AB در صفحه محورهای مختصات

واقع است. طول پاره خط AB برابر با 5 و طول تصویر آن بر

محور طولها برابر با 4 است. هرگاه عرض نقطه A برابر با 1 -

باشد، عرض نقطه B :

الف - قابل محاسبه نیست.

ب - مقدار دلخواه است.

ج - $y = 4$ - $y = 2$ + است.

د - فقط $+2$ است.

۸۵/۲۸ - برای آنکه منحنی نمایش هندسی معادله:

$$x^2 + |x - 2| + |y + 1| + |a - 3| = 0$$

از مبدأ مختصات گذرد:

الف - a برابر با صفر یا 6 است.

ب - a برابر با صفر یا 6 است.

ج - به ازاعه مقداری از a ، منحنی از مبدأ مختصات می‌گذرد.

د - به ازاعه همچنین مقدار از a ، منحنی از مبدأ مختصات نمی‌گذرد.

۸۵/۲۹ - معادله خطی که با دو خط به معادله‌های:

$$3x - 2y + 2a = 0 \quad 3x - 2y + 2b = 0$$

موازی بوده و از هر دو خط به یک فاصله باشد، عبارتست از:

$$3x - 2y + a - b = 0 \quad 3x - 2y + a + b = 0$$

$$3x - 2y \pm (a - b) = 0 \quad 3x - 2y \pm (a + b) = 0$$

$$3x + 4y = 5 \quad \text{خط } \Delta \text{ به معادله} \quad 3x + 4y = 5 \quad \text{محور}$$

X' را در P قطع می‌کند. خط D از P می‌گذرد و زاویه

$Ox\Delta$) را نصف می‌کند. ضریب از زاویه خط DB برابر است با:

$$\text{الف - } 3 \quad \text{ب - } \pm 3 \quad \text{ج - } \frac{1}{3} \quad \text{د - } \frac{1}{3}$$

$$-85/30 \quad \text{قرینه نقطه } (-9, -8) \text{ نسبت به خط}$$

گزرنده بر دونقطه $(4, -3)$ و $(3, 2)$ و $(-1, 1)$ عبارتست از:

بستگی به x نداشته باشد، باید داشته باشیم:
 $2a + 2b + 6c = 0$ الف.

$2a + 2b - 6c = 0$ ب-

$2a + 3b + 6c = 0$ ج-

$3a + 2b - 6c = 0$ د-

ABC- $\frac{85}{43}$ طول وتر AB از مثلث قائم الزاوية
برابر با $2 \sin A + \sin B = q$ است. S مساحت این مثلث
برابر است با:

الف - $q^2 - 1$ ب - $q^2 + 1$

ج - $\frac{1}{4}(q^2 - 1)$ د - $1 - q^2$

به فرض آنکه داشته باشیم:

$$y = \cos^4 x + \sin^4 x$$

$$\frac{1}{4} \leq y \leq 1 \quad \text{الف} - \quad -1 \leq y \leq 1 \quad \text{ب} -$$

$$-\frac{1}{4} \leq y \leq 1 \quad \text{ج} - \quad -1 \leq y \leq 1 \quad \text{د} -$$

ABC- $\frac{85}{45}$ اگر B و C دو زاویه از مثلث باشند و
نشانه باشیم:

$$\sin(B - C) = \cos B + \cos C$$

زاویه A از این مثلث:

ب - قائم است. الف - حاده است.

د - برابر 60° است. ج - منفرجه است.

ABC- $\frac{85}{46}$ اگر $\pi < x < 2\pi$ باشد معادله:

$$\cos x - \cos 2x = \sin 3x$$

الف - دو جواب قابل قبول دارد.

ب - سه جواب قابل قبول دارد.

ج - بیش از سه جواب قابل قبول دارد.

د - تنها یک جواب قابل قبول دارد.

ABC- $\frac{85}{47}$ صفحه P به موازات صفحه قاعده هرم مفروض،
بالهای جانی آن را قطع کرده است. هرگاه حجم هرم
ناقص محصور بین صفحه قاعده و صفحه قاطع، هفت برابر حجم
هرم واقع بین صفحه قاطع و رأس هرم مفروض باشد و فاصله
رأس هرم تا صفحه قاطع به a و فاصله صفحه قاطع تا صفحه قاعده
را به b نشاندیم:

$$b = 2a \quad \text{الف} - \quad b = va$$

$$b = 3a \quad \text{د} - \quad b = a \quad \text{ج} -$$

ABC- $\frac{85}{48}$ قاعده هرم منتظمی مربع به طول ضلع a است
و طول یال جانی هرم برابر با $5a$ است. مساحت سطح کره محاطی
این هرم برابر است با:

ج - $(a = 4b = 20)$ یا $(a = 4b = 39)$

د - $(a = -2b = 3)$ یا $(a = -4b = 7)$

ABC- $\frac{85}{49}$ اگر منحنی C در مبدأ مختصات برخط

به معادله $y = 3x$ مماس بوده و تمام منحنی زیر خط C واقع

باشد، به فرض $b \neq 0$ معادله منحنی C به صورت کدامیک از

توابع زیر می تواند باشد:

$$y = -x^2 + bx \quad \text{الف} - \quad y = x^2 + bx \quad \text{ب} -$$

$$y = x^2 - bx \quad \text{د} - \quad y = -x^2 - bx \quad \text{ج} -$$

ABC- $\frac{85}{50}$ منحنی C به معادله $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ برادر نظر

می گیریم. اگر M نقطه‌ای از این منحنی و P برای با حاصل ضرب

فاصل نقطه M از دو مجانب منحنی C باشد، وقتی M

تمام منحنی C را بیماید، مقدار:

الف - تغییر می کند و بر حسب x تابعی است صحیح و درجه اول.

ب - تغییر می کند و بر حسب x تابعی است صحیح و درجه دوم.

ج - نغاییر می کند و بر حسب x تابعی است هموگرافی.

د - مقدار ثابت می باشد.

ABC- $\frac{85}{51}$ دو منحنی C و C' نمایشهای هندسی دو تابع

$$y = (x - 2)(x - 1) \quad \text{و} \quad y = \frac{x - 2}{x - 1}$$

در نقطه به طول ۲:

الف - با یکدیگر زاویه قائم می سازند.

ب - بر یکدیگر مماسند.

ج - متقاطعند اما نه برهم مماسند و نه برهم عمودند.

د - متقاطع نیستند.

ABC- $\frac{85}{52}$ به فرض آنکه n عدد صحیح و k عدد صحیح

ثبت باشد، حاصل عبارت:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(45^\circ - kn) \times \dots \times \operatorname{tg}(45^\circ - 2n) \times \operatorname{tg}(45^\circ - n) \\ \times \operatorname{tg}45^\circ \times \operatorname{tg}(45^\circ + n) \times \dots \times \operatorname{tg}(45^\circ + kn) \end{aligned}$$

الف - بینهایت است.

ب - برابر صفر است.

ج - برابر با یک است.

د - بستگی به n و k دارد.

ABC- $\frac{85}{53}$ برای آنکه عبارت:

$$\begin{aligned} P = a(\sin^4 x + \cos^4 x) + b(\sin^4 x + \cos^4 x) + \\ + 6c \sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

ج - وقتی زوج یافرده است که $(X)f$ زوج یافرده باشد.

د - وقتی زوج یافرده است که $(X)f$ فردیازوج باشد.

۸۵/۵۳ - منحنی نمایش هندسی تابع $y = \sqrt[3]{x^5}$ در

مبدأ مختصات

الف - بر محور y' مماس است.

ب - بر محور x' مماس است.

ج - بر خط $x' = 5y^3$ مماس است.

د - بر خط $y + 5x = 3$ مماس است.

۸۵/۵۴ - منحنی نمایش هندسی تابع $y = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 2}$

در نقطه تلاقی $x' = X'$.

ب - ماسیمه ج است.

الف - عطف است.

د - عطف نیست.

ج - می نیم است.

۸۵/۵۵ - منحنی های به معادله های:

$$y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

الف - نسبت به محور X' قرینه اند.

ب - نسبت به محور y' قرینه اند.

ج - نسبت به نیمساز زیر اول و سوم محورها قرینه اند.

د - نسبت به نیمساز زیر بیم و چهارم محورها قرینه اند.

۸۵/۵۶ - برای آنکه خط به معادله $y = ax + b$ با

منحنی نمایش تابع $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - (ax + b)$

مجانب باشد، لازم و کافی است که :

$$b = -2a = -\frac{1}{2} \quad \text{ب} - 2a = \frac{1}{2}$$

$$b = \pm 2 \quad \text{د} - b = \pm \frac{1}{2} \quad \text{و} - 2a = \pm \frac{1}{2}$$

۸۵/۵۷ - تابع زیر را در نظر می گیریم :

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

هر گاه منحنی نمایش این تابع در نقاط A و B ماسیمه و می نیم باشد و دو خط C و D مجانبهای قائم آن باشند، این دو خط با خط AB در C و D متقاطع می باشند و :

الف - هر دو نقطه C و D بین A و B واقعند.

ب - هر دو نقطه C و D در خارج A و B واقعند.

ج - در هر حال یکی از دو نقطه C و D وسط پاره خط AB است.

د - یکی از دو نقطه C و D بین A و B و دیگری خارج

واقع است.

ب - $\frac{63\pi}{4}$

الف - $\frac{36\pi}{7}$

د - 81π

ج - 9π

۸۵/۵۹ - مکان هندسی نقاطی از فضای تقاضا که تفاضل مجذورات A و B مقدار ثابت $k^2 \neq 0$ باشد

الف - یک صفحه عمود بر خط AB است.

ب - دو صفحه است که هردو بر خط AB عمودند.

ج - کره ای است که بر کزان آن وسط AB است.

د - کره است که AB را به نسبت k تقسیم می کند.

۸۵/۵۰ - مساحت سطح مقطع قائم استوانه مابایلی از نصف

مساحت سطح قاعده آن کمتر است اگر α زاویه مولد استوانه با صفحه قاعده آن باشد.

ب - $a > 60^\circ$

الف - $a > 20^\circ$

د - $a < 30^\circ$

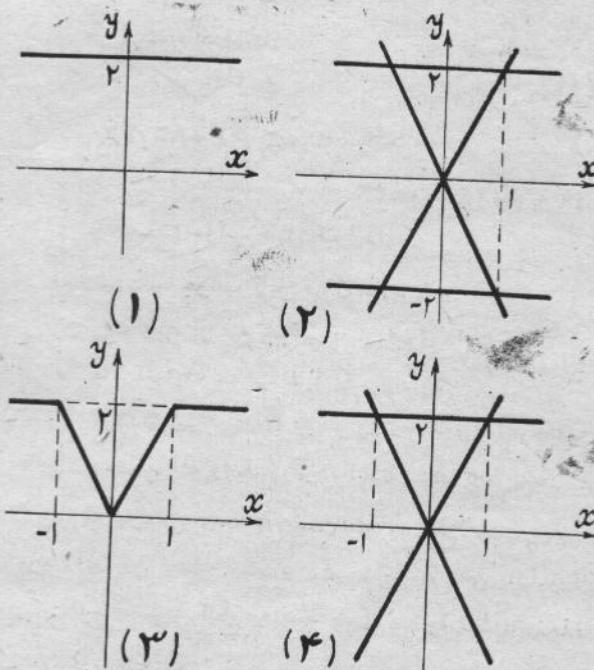
ج - $a < 60^\circ$

III - در حدود برنامه کلاس ششم ریاضی

۸۵/۵۱ - نمایش هندسی تابع

$$y = \sqrt{x^2 + 1 + 2\sqrt{x^2}} - \sqrt{x^2 + 1 - 2\sqrt{x^2}}$$

کدامیک از شکل های زیر است:



۸۵/۵۲ - تابع

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$

ب - فرداست.

الف - زوج است.

$$0 \leq y \leq \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

ج -

$$0 < y < \frac{1}{2}$$

د -

۸۵/۶۴ - اگر داشته باشیم.

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha = a \cos 3\alpha \\ x \sin \alpha - y \cos \alpha = 3a \sin 3\alpha \\ Z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

خواهیم داشت :

$$Z \leq a^2 \text{ یا } Z \geq 9a^2 \quad \text{الف -}$$

$$Z < a^2 \quad \text{د -} \quad a^2 < Z < 9a^2 \quad \text{ج -}$$

۸۵/۶۵ - در مثلث ABC نقاط K، M و N به ترتیب پاهای ارتفاعهای وارد برعشهای AB، CA، BC می‌باشند.
هر گاه داشته باشیم :

$$BC = ۲۱, CA = ۱۳, AB = ۲۰$$

مقدار $\sin \angle MKN$ برابر است با :

$$\begin{array}{ll} \frac{2209}{4225} & \text{الف -} \\ \frac{63}{65} & \\ \frac{2016}{4225} & \text{د -} \\ \frac{1008}{4225} & \text{ج -} \end{array}$$

۸۵/۶۶ - نمایش هندسی تابع .

$$y + |y| = \sin x + \sin |x| \quad \text{در فاصله } [2\pi, 0].$$

الف - منحنی است پیوسته.

ب - خط مستقیم است.

ج - پیوسته است اما قسمتی از آن منحنی و قسمت دیگر آن خط مستقیم است.

د - گستته است، و قسمتی از آن منحنی و قسمت دیگر آن خط مستقیم است.

۸۵/۶۷ - عدد سه رقمی که ۵ برابر حاصل ضرب ارقامش باشد :

الف - منحصر به یک عدد است.

ب - منحصر به دو عدد است.

ج - بیش از دو عدد است.

د - وجود ندارد.

۸۵/۶۸ - عدد پنج رقمی باشرط :

$$\overline{abcde} = (de)^e = e^5$$

الف - منحصر به یک عدد است.

ب - منحصر به دو عدد است.

ج - بیش از دو عدد است.

د - وجود ندارد.

۸۵/۶۹ - خط به معادله $y = mx$ مساحت سطح محصور

بین منحنی نمایش تابع $y = -x^3 + x^2$ و نیم محور Ox را نصف می‌کند. مقدار m برابر است با :

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{ب -} \quad \frac{2-\sqrt{2}}{2} \quad \text{د -}$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} \quad \text{ج -} \quad \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{برای آنکه معادله}$$

$$x^3 - 2x^2 + 2 - m = 0$$

فقط دو جواب داشته باشد، باید :

$$m > 4 \quad \text{ب -} \quad m < 0 \quad \text{یا} \quad 0 < m < 4 \quad \text{د -}$$

$$m < 0 \quad \text{ج -} \quad \text{معادله زیر را در نظر بگیریم:} \quad 85/60$$

$$(m-1)x^2 - (m-2)x - m^2 = 0$$

عدد یک :

الف - درازاء همه مقادیر m بین ریشه‌های معادله است.

ب - درازاء هیچ مقدار m بین ریشه‌های معادله نیست.

ج - درازاء همه مقادیر $m \neq 1$ بین ریشه‌های معادله است.

د - درازاء مقادیر از m بین ریشه‌ها و درازاء مقادیر دیگر m خارج ریشه‌هاست.

۸۵/۶۱ - در فاصله $\pi < x < 0$ ، معادله

$$\cos x \cos^3 x = \cos 5x \cos 7x$$

الف - دارای ۱۴ جواب است.

ب - دارای ۱۲ جواب است.

ج - دارای ۹ جواب است.

د - دارای ۸ جواب است.

۸۵/۶۲ - در فاصله $\pi < x < 0$. تابع

$$y = \frac{\tan x + 2}{\tan x - 1}$$

الف - دو مجذوب قائم دارد ب - یک مجذوب قائم دارد.

ج - سه مجذوب قائم دارد. د - مجذوب قائم ندارد.

۸۵/۶۳ - به فرض:

$$y = 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{2} < y < \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \quad \text{الف -}$$

$$\frac{1}{2} < y < \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \quad \text{ب -}$$

د - نمی توانند مجانس یکدیگر باشند.

۸۵/۷۳ در انعکاس به قطب P و به قوت K دونقطه

A' و B' به ترتیب منعکسهای دونقطه A و B می باشند. در این انعکاس :

الف - A' و B' به هروضعی که باشند پاره خط A'B' منعکس پاره خط AB است.

ب - هیچگاه ممکن نیست که پاره خط A'B' منعکس پاره خط AB باشد.

ج - در مروری ممکن است که پاره خط A'B' منعکس پاره خط AB باشد.

د - چهارضلعی ABA'B' در هر حال ذوزنقه است.

۸۵/۷۴ M نقطه‌ای از سه‌می به کانون F است. قائم بر سه‌می در نقطه M، محور آن رادر N قطع می‌کند. مثلث

الف - نظیر هروضعی از M قائم الزاویه است.

ب - نظیر هروضعی از M متساوی الساقین است.

ج - نظیر دو وضع از M متساوی الساقین است.

د - هیچگاه متساوی الساقین نیست.

۸۵/۷۵ خط ثابت \triangle و نقطه ثابت A به فاصله ۲a از \triangle مفروض است. دایره متغیر C به شاعر a را در نظر می‌گیریم که O مرکز آن بر خط \triangle حرکت می‌کند. از A دو مماس AM و AN را بر دایره رسم می‌کنیم. در نقطه MN تلاقی می‌کند.

مکان H :

الف - بیضی یا هذلولی است.

ب - دایره است.

ج - خط مستقیم است.

د - مسهمی است.

۸۵/۶۹ عدد پنج رقمی باشرط :

$$\overline{abcde} = 3 \times \overline{eabcd}$$

الف - منحصر به یک عدد است.

ب - منحصر به دو عدد است.

ج - بیش از دو عدد وجود دارد.

د - وجود ندارد.

۸۵/۷۰ صورت کسری که مخرج آن ۱۱۳ است و مقدار تقریبی نسبانی آن با تقریب ۰/۰۰۵۱ برابر است با $3/1415$

الف - ۲۵۵ ب - ۳۵۴ ، ۳۵۵ د - ۳۵۶

ج - ۳۵۵ و ۳۵۶ د - ۳۵۷ و ۳۵۸

۸۵/۷۱ هر گاه هریک از دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ تحویل ناپذیر باشد، کسر $\frac{ad + bc}{bd}$

الف - نیز تحویل ناپذیر است.

ب - وقتی تحویل ناپذیر است که a و c و همچنین b و d نسبت به هم اول باشند.

ج - تنها وقتی تحویل ناپذیر است که a و c نسبت به هم اول باشند.

د - تنها وقتی تحویل ناپذیر است که b و d نسبت به هم اول باشند.

۸۵/۷۲ در مثلث ABC مرکز اتفاقی، O مرکز دایره محیطی، B' وسط AC و A' وسط BC است. دوم مثلث : A'B'O و ABH

الف - مجانس مستقیم یکدیگرند.

ب - مجانس معکوس یکدیگرند.

ج - در مواردی مجانس مستقیم و در مواردی مجانس معکوس یکدیگرند.

قسمت ششمی

انتخاب از نشریه اخیریکان کتاب « تستهای چند جوابی شیمی » ترجمه عطاء الله بزرگ‌نیا

محلول آبی آن دارای PH هفت است و هنگامی که با محلول نیترات نقره ترکیب شود رسوبی تولید می‌کند که هم در محلول اسید نیتریک و هم در محلول آمونیاک نا محلول است. این نمک چیست؟

الف - Na_2CO_3 ب - NaI ج - NaCl
د - Na_2S_2 ن - Na_2HPO_4

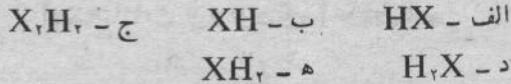
۸۵/۷۶ همه ذرات زیر بجزیکی از آنها ایزو الکترونیک هستند. این یک کدام است؟

الف - N_2 ب - O_2 ج - CO

د - NO_3^- ن - CN^-

۸۵/۷۷ نمکی از سدیم دارای مشخصات زیراست :

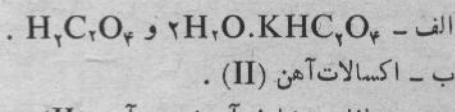
عنصر X که در قطب منفی دست آمده برابر با تعداد مولکولهای نیدرژنی است که در قطب مثبت دست آمده است. کدامیک از فرمولهای زیر بیشتر احتمال دارد که فرمول این ترکیب باشد (در فرمولهای زیر نشانه عنصری که بیشتر الکتروپوزیتیو است مقدم قرار دارد).



۸۵/۸۳ - ترکیب X به فرمول C₂H₈O در نیچه اکسیداسیون تولید ترکیبی به فرمول C₂H₆O می‌کند. بیشتر احتمال دارد که X کدامیک از ترکیبات زیر باشد.

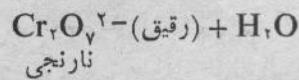
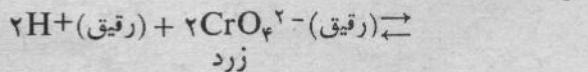
- الف - یک آلدئید
- ب - یک کتون
- ج - یک نوع الكل نوع سوم
- د - یک نوع الكل نوع دوم

۸۵/۸۴ - ۵ مول از ماده P_۲ را در بجاورت مقدار زیادی محلول اسید سولفوریک اکسید کند. P_۲ بیشتر احتمال دارد که یکی از مواد زیر باشد.
احتمال کدامیک بیشتر است؟



- ج - سولفات مضاعف آمونیوم و آهن (II).
- د - پراکسیدیدرژن.
- ه - نیتریت پتاسیم.

۸۵/۸۵ - همه گفته‌های زیر بجز یکی درباره محلول رقیقی که شامل مقادیر هم‌مول ازیون‌های موجود در معادله زیر می‌باشد صادق است. این یک کدام است؟



الف - اسید کلریدیریک کرومات را به یکرما تبدیل می‌کند.

ب - افزودن پنتاکلرید فسفر موجب افزایش رنگ زرد می‌شود.

ج - افزودن محلول نیدروکسید پتاسیم موجب افزایش رنگ زرد می‌شود.

د - افزودن محلول مولکول گرم در لیتر کربنات سدیم موجب افزایش رنگ زرد می‌شود.

ه - افزودن محلول کلرید باریم تولید رسوب زرد در محلول بی رنگ می‌کند.

۸۵/۷۸ - در یکی از روشهای تهیه سدیم، مخلوط مذابی از دو قسمت کلرید سدیم و سه قسمت کلرید کلسیم را در ۶۰۰°C حرارت الکتروولیزی کنند. فقط مقدار ناچیزی کلسیم همراه سدیم تولید می‌شود زیرا:

الف - میزان پتانسیل الکترود Na⁺ و Ca²⁺ به ترتیب + ۲/۷۱ ولت و + ۲/۸۷ ولت می‌باشد.

ب - الکترونگاتیویت سدیم و کلسیم به ترتیب ۱/۰۱ و ۱/۰۴ است.

ج - ولتاژ تجزیه کلرید سدیم و کلرید کلسیم در ۶۰۰°C حرارت در حدود ۳/۴۵ ولت و ۳/۷۶ ولت است.

د - نقاط ذوب سدیم و کلسیم به ترتیب ۹۸°C و ۸۵۰°C سانتیگراد است.

ه - کلسیم در سدیم مذاب تقریباً نامحلول است.

۸۵/۷۹ - فلز نسبتاً فعال M تشكیل دونوع سولفات به فرمول [M₂(SO₄)₂] می‌دهد. بهترین راه تهیه کلرید بی آب آن MCl₂ ترکیب پودرنم فلز M با چه ماده‌ای است؟

الف - کلر

ب - کلرید نیدرژن

ج - محلول کلرید نیدرژن در آتانول

د - محلول یک دریک اسید سولفوریک غلیظ و اسید کلریدیریک.

ه - ذوب با کلرید سرب (II).

۸۵/۸۰ - فلز M جانشین مس در محلول سولفات مس (II) می‌شود اما بر محلول نیترات روی اثری ندارد. از آرایشهای زیر کدامیک ترتیب کاهش قدرت احیاء کنندگی این سه فلز را نشان می‌دهد؟

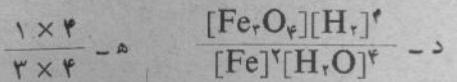
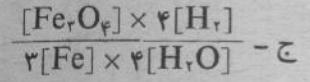
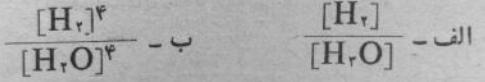
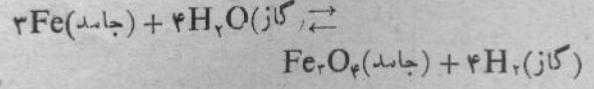
الف - Zn و Cu

ب - Zn و M

ج - Cu و Zn

د - M و Cu

۸۵/۸۱ - بهترین عبارت برای معرفی ثابت تعادل واکنش زیر کدام است؟

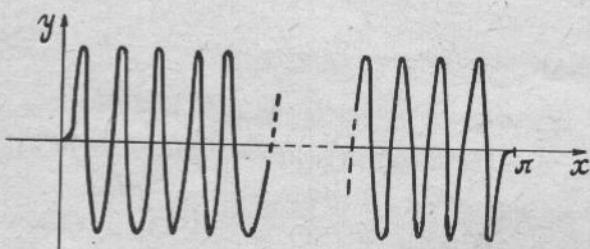


۸۵/۸۲ - ازالکتروولیزی به حالت مذاب تعداداتمهای

اعلام پاسخهای درست و حل مسائل ریاضی

امتحانات ورودی اختصاصی دانشکده‌ها و مدارس عالی مندرج در یکان سال ۱۳۵۰

شکل تقریبی منحنی در فاصله صفر و π چنین است:



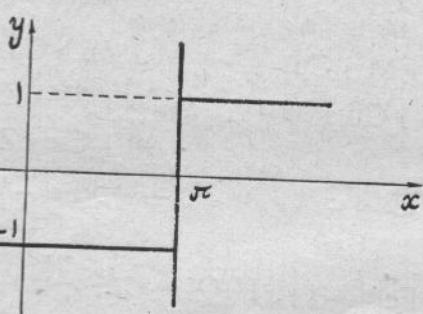
- در مورد تابع اول داریم:

$$x < \pi \Rightarrow y = \frac{-(x - \pi)}{x - \pi} = -1$$

$$x > \pi \Rightarrow y = \frac{x - \pi}{x - \pi} = 1$$

در ازاء $x = \pi$ تابع به صورت مبهم ∞ در می‌آید و y برابر با هر مقداری تواند باشد.

نمایش هندسی تابع به شکل زیر است.



در مورد تابع دوم داریم:

$$x < 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \left(\frac{-x}{x} + \frac{x - \pi}{x - \pi} \right) \sin x = 0$$

$$0 < x < \pi \Rightarrow y = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x} + \frac{x - \pi}{x - \pi} \right) \sin x = \sin x$$

$$x > \pi \Rightarrow y = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x} + \frac{x - \pi}{x - \pi} \right) \sin x = 0$$

I - گروه ریاضی دوره شباهه دانشگاه تهران

(صفحه ۱۰۶ یکان سال ۵۰)

۳-۴	۴-۳	۴-۲	۱-۱
۳-۸	۱-۷	۳-۶	۲-۵
۲-۱۲	۱-۱۱	۳-۱۰	۱-۹
۴-۱۶	۲-۱۵	۴-۱۴	۱-۱۲
۱-۲۰	۴-۱۹	۳-۱۸	۴-۱۷
۲-۲۴	۴-۲۳	۴-۲۲	۲-۲۱
۲-۲۸	۴-۲۷	۱-۲۶	۱-۲۵
۴-۳۲	۲-۳۱	۳-۳۰	۱-۲۹
۳-۳۶	۱-۳۵	۲-۳۴	۴-۳۳
۱-۴۰	۴-۳۹	۳-۳۸	۴-۳۷
۴-۴۴	۱-۴۳	۴-۴۲	۳-۴۱
۲-۴۸	۳-۴۷	۳-۴۶	۱-۴۵
۲-۵۲	۳-۵۱	۲-۵۰	۲-۴۹
۴-۵۶	۳-۵۵	۴-۵۴	۲-۵۳
۳-۶۰	۳-۵۹	۳-۵۸	۱-۵۷
۳-۶۴	۲-۶۳	۲-۶۲	۳-۶۱

II - دانشکده نفت آبادان (صفحه ۱۲۵ یکان سال ۵۰)

- با تبدیل x به $x + k\pi$ مقدار تابع فرق نمی‌کند پس دوره تناوب تابع π است. در فاصله صفر و π داریم:

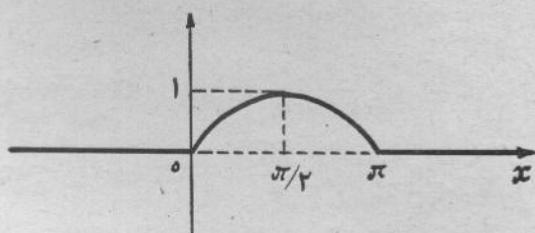
$$y = \sin x \sin 1000x = \cos 999x - \cos 1001x$$

$$y' = 1001 \sin 1001x - 999 \sin 999x$$

این درازاء $x = \frac{k\pi}{1000}$ صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد.

پس تابع در فاصله صفر و π دارای 500 ماکسیمم و 500 نیمم است. مشتق تابع در ازاء مقادیر $x = \pi$ و $x = 0$ صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد زیرا مقدار تابع در ازاء این دو مقدار تغییر علامت می‌دهد.

نمایش هندسی تابع به شکل زیر است.



۳- بافرض $BC = a$ داریم :

$$CF = a \text{ و } CE = 2a \text{ و } CD = 3a$$

$$BF = a\sqrt{2} \text{ و } BE = a\sqrt{5} \text{ و } BD = a\sqrt{10}$$

$$\frac{BD}{BE} = \frac{DF}{BF} = \frac{BF}{EF} = \sqrt{2}$$

دوم مثلث BEF و EDF درسه ضلع نظیر به نظیر متناسبند پس
متضایهند.

۴- اگر Q قرینه O نسبت به P باشد، چون از Q
موازی با Ox و Oy رسم کنیم، نقاط A و B بدست خواهد
آمد.

۵- مطابق باشکل، اگر A و B دو دهکده و CD پل

$$AD = BC \text{ و } CA' =$$

باشد، چون CA' را
موازی و مساوی با

رسم کنیم مثلث DA'

متتساوی الساقین $A'C'CB$

است و عمود منصف

CJ از $A'B$ می‌گذرد و در ضمن AA' با $DC = d$ برابر است.

پس برای تعیین موضع پل، ابتدا A' را تعیین می‌کنیم که

$AA' = d$ باشد، آنگاه عمود منصف $A'B$ را رسم می‌کنیم که

از تلاقی آن با کناره رودخانه نقطه C بدست می‌آید.

۶- اگر محور طولها رامنطبق بر محور اطول مستطیل و

محور عرضها رامنطبق بر محور اقصیر آن انتخاب کنیم و

$2b$ و $2a$ طولهای قطرهای بیضی باشند داریم :

$$\frac{225}{a^2} + \frac{100}{b^2} = 1 \Rightarrow a = \frac{15b}{\sqrt{b^2 - 100}}$$

$$S = \pi ab = \frac{15\pi b^2}{\sqrt{b^2 - 100}}$$

$$S' = \frac{15\pi(b^2 - 200b)}{(b^2 - 100)\sqrt{b^2 - 100}}$$

S' درازاء $b = 10\sqrt{2}$ صفرشده از منفی به مشت تغییر علامت
می‌دهد و تابع S می‌نیمم داشته ماسیم ندارد.

اگر محور اطول بیضی را متنطبق بر محور کوتاه مستطیل اختیار کنیم با محاسبات مشابه نتیجه خواهد شد که در این حالت هم تابع S می‌نیمم دارد اما ماسیم ندارد.

پس بیضی محيط بر مستطیل مفروض دارای مساحت ماسیم نیست، بلکه دارای مساحت می‌نیمم است و در این حال معادله آن به یکی از دو صورت زیر است:

$$\frac{x^2}{450} + \frac{y^2}{200} = 1 \text{ یا } \frac{x^2}{200} + \frac{y^2}{450} = 1$$

تبصره - این سئله را می‌توان چنین حل کرد: اگر

$$\frac{1}{22500a^2b^2} \text{ می‌نیمم باشد } S = \pi ab$$

ماسیم است و چون مجموع دو مقدار مشت $\frac{100}{b^2}$ و $\frac{100}{a^2}$ مقدار ثابت یک است پس حاصل ضرب آنها وقتی ماسیم است که این دو مقدار باهم برابر باشند، یعنی:

$$\frac{225}{a^2} = \frac{100}{b^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 15\sqrt{2} \text{ و } b = 10\sqrt{2}$$

۷- اگر X بر حسب رادیان باشد محيط قاعده محروط که همان طول کمان قطاع است برابر X است، پس شعاع قاعده

محروط می‌شود $\frac{X}{2\pi}$ و چون طول مولد محروط یک است پس

$$\text{ارتفاع آن } \frac{\sqrt{4\pi^2 - X^2}}{2\pi} \text{ است و داریم:}$$

$$V = \frac{X^2 \sqrt{4\pi^2 - X^2}}{24\pi} \text{ و } V' = \frac{8\pi^2 X - 3X^3}{24\pi \sqrt{4\pi^2 - X^2}}$$

باتوجه به اینکه X عدد مشت است نتیجه خواهد شد که V وقتی

$$\text{ماسیم است که } X = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \text{ باشد.}$$

۸- درازاء $= 0$ X مقادیر طرفین تساوی بر این نیستند، پس این تساوی اتحاد نیست.

III- مدرسه عالی ریاضیات و مدیریت کرج

(صفحه ۱۲۶ یکان سال ۵۰)

۴-۴	۲-۳	۳-۲	۴-۱
۳-۸	۲-۷	۴-۶	۱-۵
۲-۱۲	۴-۱۱	۴-۱۰	۴-۹
۴-۱۶	۴-۱۵	۱-۱۴	۳-۱۳
۲-۲۰	۴-۱۹	۳-۱۸	۳-۱۷
۳-۲۴	۲-۲۳	۲-۲۲	۴-۲۱
۲-۲۸	۱-۲۷	۴-۲۶	۱-۲۵

VI- استیتو تکنولوژی تهران (راه و ساختمان)

(صفحه ۱۳۵ یکان سال ۵۰)

$$-\pi^2 \cdot \frac{2}{2k\pi + \pi} - 2 \quad 0 < x < 100 \quad -1$$

$$\frac{9}{40} - \frac{k\pi}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{Arccotg} 2\sqrt{3} \quad -3$$

-۵ ۱۶ و ۱۲ (زمین به شکل مسنطیل است)

رشته برق و مکانیک (صفحه ۱۳۸ یکان سال)

$$2x \cos(x^2 + 1) - 2 \quad \frac{5}{4} - 1$$

$$x = \frac{a}{2} \quad ۱۵ \text{ سانتیمتر دریج}$$

$$2k\pi + \frac{5\pi}{12} \quad ۲k\pi + \frac{\pi}{4} \quad -5$$

$$\cos a \quad -6$$

رشته طراحی (صفحه ۱۴۱ یکان سال)

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad -2 \quad 6 - 1$$

$$1/283 - 4 \quad Y = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + C \quad -3$$

$$\frac{2}{3} - 6 \quad 178 \times 0/2 = 35/6 \quad -5$$

$$2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad k\pi \quad -7$$

$$3 - 8$$

VII- استیتو تکنولوژی تبریز

(صفحه ۱۴۱ یکان سال)

$$f(x) = x^2 - 7x + 11 \quad -2$$

$$f(x-2) = x^2 - 11x + 29$$

-۳ اولی به ازاء $x > 1$ دومی بذاء همه مقادیر.

$$A = 45^\circ, B = 60^\circ, C = 75^\circ \quad -4$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad 2k\pi \quad 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \quad -5$$

VIII- استیتو تکنولوژی شیراز

(صفحه ۱۴۲ یکان سال)

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1 + \cos 2x} + C \quad -2 \quad m = 1 - 1$$

$$(y-4)^2 = -(x-4) \quad -3$$

$$y = x \quad -5 \quad h = R = 2 - 4$$

$$1-32 \quad 4-31 \quad 1-30 \quad 2-29$$

$$1-36 \quad 1-35 \quad 4-34 \quad 2-33$$

$$1-40 \quad 3-39 \quad 2-38 \quad 2-37$$

$$3-44 \quad 4-43 \quad 3-42 \quad 2-41$$

(خرج بالکردن هر صد کیلو ۳۴۳ ریال) ۳-۴۵

$$1-49 \quad 1-48 \quad 1-47 \quad 3-46$$

$$1-53 \quad 4-52 \quad 1-51 \quad 3-50$$

$$2-57 \quad 3-56 \quad 3-55 \quad 2-54$$

$$3-60 \quad 1-59 \quad 4-58$$

IV- جوابهای مسائل هنرسرای عالی

(صفحه ۱۳۴ یکان سال ۵۰)

$$R^2(2\sqrt{3} - \pi) \quad -2 \quad \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{2\pi V^2}} \quad -1$$

$$9-5 \quad \pm 2\sqrt{3} \quad -4 \quad -3 \quad \text{قائم}$$

$$\frac{1}{4} - 8 \quad \frac{1}{a^2} - 7 \quad \frac{1}{a} - 6$$

$$a \sin \theta \operatorname{tg} \theta \quad -11 \quad \frac{3}{2} - 10 \quad 123 \text{ و } 748 \quad -9$$

$$2/50515 - 14 \quad 1 - \sqrt{2} - 13 \quad \pm 2 \sin \frac{a}{2} \quad -12$$

$$\frac{181\sqrt{3}}{9} \quad -16 \quad 2870 - 15$$

V- هنرسرای مقدماتی بهبهانی

(صفحه ۱۳۵ یکان سال ۵۰)

$$\frac{1-x^4}{4x^2} - \frac{4}{(1-x^2)^2} \quad -1$$

$$\frac{5(x-1)^2}{4} - \frac{5y^2}{16} = 1 \quad -2$$

$$-3$$

$$y' = 2 \cos 2x + 2 \sin 2x - 8 \sin x \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$Y = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x - \sin^2 x + C$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad 2k\pi + \pi \quad -4$$

$$6\pi + 2\pi + 12 \quad -6 \quad \text{متوازی الاضلاع}$$

$$0/15416 \quad -8 \quad 7 \quad 10 \text{ و } 13 \quad -7$$

X- دانشکده علوم اقتصادی و اجتماعی با بسلر

(صفحه ۱۴۴ یکان سال)

- ۱- ج ۲- ج ۳- ج ۴- ب ۵- ب
- ۶- ب ۷- هیچکدام ۸- ج ۹- هیچکدام ۱۰- ب
- ۱۱- الف ۱۲- ج ۱۳- ج ۱۴- ب ۱۵- الف
- ۱۶- الف ۱۷- ج ۱۸- ج ۱۹- د ۲۰- الف

IX- انتیتو تکنولوژی کرمانشاه

(صفحه ۱۴۳ یکان سال)

$$x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 2} - 2 \quad a = \frac{2}{3} - 1$$

$$a = b = 1 \quad c = 0 - 3$$

$$-4$$

$$\frac{3}{5}(x+1)\sqrt[5]{(x+1)^2} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{5}{3}\cos 3x + 10\cos x\right) + C$$

پاسخهای صحیح تستهای مدرج در این شماره

یاجمله نظیر).

۹- ماهی (حرفهای اول و دوم کلمه داخل پرانتز به ترتیب حرفهای اول و آخر کلمه سمت راست، و حرفهای سوم و چهارم آن به ترتیب حرفهای اول و آخر کلمه سمت چپ می باشند).

۱۰- واژه‌های در چهار کلمه دیگر، حروف متصلند).

۱۱- ۳۴۵ (در هر دو عدد سوم برابر است با مقلوب مجموع دو عدد دیگر).

۱۲- ۴ (در هر دوی شکل «م از حذف شکل دوم از شکل اول بدست می آید).

۱۳- (عددهای ۲، ۱×۳، ۲×۴، ۳×۴ و ۵×۴ به ترتیب یک در میان در بالا و پایین واقع شده‌اند. نظیر هر عدد حرفی واقع است که آن عدد شماره ترتیب آن در حروف الفباء است).

۱۴- ۳ (هر عدد تعداد نقطه‌های کنمه نظیر است).

۱۵- مردود (کلمه‌های دیگر: شنبه، پیچک، ثقيل،

ظ
۲۰

I- تست هوش

۱- ۳ (در شکلهای هر رده دو نوع تفاوت مشاهده می شود: اول آنکه پر، نیمه پر یا خالی می باشند. دوم آنکه بی دسته، یک دسته یا دو دسته‌اند).

۲- ۶۷ (هر عدد از دو برابر عدد قبل ۳ واحد کمتر است).

۳- س (در ترتیب حروف الفباء، بین ب و ت یک حرف، بین ت و حرف، بین ج و ذ سه حرف فاصله است. چهار حرف بعد از ذ حرف س است).

۴- تو (پرتو- تو بر).

۵- ۴ (شکلهای دیگر بالغزش در صفحه قابل انطباقند).

۶- ۴۵۰ (دیگر کلمات: پرگار، خطکش، مداد از ابزارهای زیم می باشند).

۷- ۷۶ (عدد داخل پرانتز واسطه حسابی دو عدد دیگر است).

۸- ۱۳ (عدد هر دوی برابر است با تعداد حروف کلمه

- ۲۰-۶۳ (اعداد رشته به ترتیب با ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰ و ۲۵) .
جمع می‌شوند).
- ۲۱-گله
- ۲۲-۳۵ (عدد داخل پرانتز مجموع رقمهای عدهای خارج پرانتز است).
- ۲۳-۱، (کلمه دیبرستان درجهت مثلثاتی خوانده می‌شود).
- ۲۴-۵ (دوران به زاویه 45° و درجهت مثلثاتی هر شکل رابه شکل بعدی تبدیل کرده است).
- ۲۵-۳ (شکل دوم از روی شکل اول با سه تغییر بدست آمده است: تمام بدن 90° درجه درجهت مثلثاتی چرخیده است، دسته‌های نسبت به بدن به پایین افتاده‌اند، شکل حاصل از خالهای داخلی 180° چرخیده است).

- میراث، دارای حروف نقطه دارند).
- ۲۶-۲۰ (عددهای نظیر پیکانهای به سمت پایین منفی منظور می‌شوند عدد داخل هر مرتبه مجموع جبری اعداد واقع در خارج آن است).
- ۲۷-۹ (هر دایره کوچک بیرونی یک واحد مشت و هر دایره کوچک درونی یک واحد منفی بحساب می‌آید. در هر ردیف شکل سوم مجموع دوشکل دیگر است).
- ۲۸-رعد (حروف الفباء را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره گذاری کنید. در هر تساوی عدد سمت چپ مجموع اعداد نظیر حروف کلمه سمت راست است).
- ۲۹-رادار (وزارت مقلوب ترازو است و مقلوب رadar خود آن است).

II- یاسخهای تستهای ریاضی (ابتدا از صفحه ۴۹۷ همین شماره)

۱-ج	۲-ج	۳-ب	۴-د	۵-ب	۶-الف	۷-الف	۸-ب	۹-د	۱۰-الف	۱۱-د	۱۲-ب	۱۳-الف	۱۴-ب	۱۵-ج	۱۶-ب	۱۷-د	۱۸-ج	۱۹-د	۲۰-الف	۲۱-الف	۲۲-ج	۲۳-د	۲۴-ج	۲۵-ب	۲۶-الف	۲۷-الف	۲۸-ب	۲۹-د	۳۰-الف	۳۱-ب	۳۲-ج	۳۳-ب	۳۴-د	۳۵-ج	۳۶-الف	۳۷-الف	۳۸-ب	۳۹-د	۴۰-ب	۴۱-ج	۴۲-د	۴۳-ب	۴۴-ب	۴۵-الف	۴۶-ب	۴۷-ج	۴۸-الف	۴۹-ب																																						
۵-۵۶	۵-۵۵	۵-۵۴	۵-۵۳	۶-۶۰	۶-۶۹	۶-۶۸	۶-۶۷	۶-۶۶	۶-۶۵	۶-۶۴	۶-۶۳	۶-۶۲	۶-۶۱	۶-۶۰	۶-۵۸	۶-۵۷	۶-۵۶	۶-۵۵	۶-۵۴	۶-۵۳	۶-۵۲	۶-۵۱	۶-۵۰	۶-۴۹	۶-۴۸	۶-۴۷	۶-۴۶	۶-۴۵	۶-۴۴	۶-۴۳	۶-۴۲	۶-۴۱	۶-۴۰	۶-۳۹	۶-۳۸	۶-۳۷	۶-۳۶	۶-۳۵	۶-۳۴	۶-۳۳	۶-۳۲	۶-۳۱	۶-۳۰	۶-۲۹	۶-۲۸	۶-۲۷	۶-۲۶	۶-۲۵	۶-۲۴	۶-۲۳	۶-۲۲	۶-۲۱	۶-۲۰	۶-۱۹	۶-۱۸	۶-۱۷	۶-۱۶	۶-۱۵	۶-۱۴	۶-۱۳	۶-۱۲	۶-۱۱	۶-۱۰	۶-۹	۶-۸	۶-۷	۶-۶	۶-۵	۶-۴	۶-۳	۶-۲	۶-۱														
۷-۷۹	۷-۷۸	۷-۷۷	۷-۷۶	۸-۸۳	۸-۸۲	۸-۸۱	۸-۸۰	۸-۷۹	۸-۷۸	۸-۷۷	۸-۷۶	۸-۷۵	۸-۷۴	۸-۷۳	۸-۷۲	۸-۷۱	۸-۷۰	۸-۶۹	۸-۶۸	۸-۶۷	۸-۶۶	۸-۶۵	۸-۶۴	۸-۶۳	۸-۶۲	۸-۶۱	۸-۶۰	۸-۵۹	۸-۵۸	۸-۵۷	۸-۵۶	۸-۵۵	۸-۵۴	۸-۵۳	۸-۵۲	۸-۵۱	۸-۵۰	۸-۴۹	۸-۴۸	۸-۴۷	۸-۴۶	۸-۴۵	۸-۴۴	۸-۴۳	۸-۴۲	۸-۴۱	۸-۴۰	۸-۳۹	۸-۳۸	۸-۳۷	۸-۳۶	۸-۳۵	۸-۳۴	۸-۳۳	۸-۳۲	۸-۳۱	۸-۳۰	۸-۲۹	۸-۲۸	۸-۲۷	۸-۲۶	۸-۲۵	۸-۲۴	۸-۲۳	۸-۲۲	۸-۲۱	۸-۲۰	۸-۱۹	۸-۱۸	۸-۱۷	۸-۱۶	۸-۱۵	۸-۱۴	۸-۱۳	۸-۱۲	۸-۱۱	۸-۱۰	۸-۹	۸-۸	۸-۷	۸-۶	۸-۵	۸-۴	۸-۳	۸-۲	۸-۱
۹-۸۳	۹-۸۲	۹-۸۱	۹-۸۰	۱۰-۷۹	۱۰-۷۸	۱۰-۷۷	۱۰-۷۶	۱۰-۷۵	۱۰-۷۴	۱۰-۷۳	۱۰-۷۲	۱۰-۷۱	۱۰-۷۰	۱۰-۶۹	۱۰-۶۸	۱۰-۶۷	۱۰-۶۶	۱۰-۶۵	۱۰-۶۴	۱۰-۶۳	۱۰-۶۲	۱۰-۶۱	۱۰-۶۰	۱۰-۵۹	۱۰-۵۸	۱۰-۵۷	۱۰-۵۶	۱۰-۵۵	۱۰-۵۴	۱۰-۵۳	۱۰-۵۲	۱۰-۵۱	۱۰-۵۰	۱۰-۴۹	۱۰-۴۸	۱۰-۴۷	۱۰-۴۶	۱۰-۴۵	۱۰-۴۴	۱۰-۴۳	۱۰-۴۲	۱۰-۴۱	۱۰-۴۰	۱۰-۳۹	۱۰-۳۸	۱۰-۳۷	۱۰-۳۶	۱۰-۳۵	۱۰-۳۴	۱۰-۳۳	۱۰-۳۲	۱۰-۳۱	۱۰-۳۰	۱۰-۲۹	۱۰-۲۸	۱۰-۲۷	۱۰-۲۶	۱۰-۲۵	۱۰-۲۴	۱۰-۲۳	۱۰-۲۲	۱۰-۲۱	۱۰-۲۰	۱۰-۱۹	۱۰-۱۸	۱۰-۱۷	۱۰-۱۶	۱۰-۱۵	۱۰-۱۴	۱۰-۱۳	۱۰-۱۲	۱۰-۱۱	۱۰-۱۰	۱۰-۹	۱۰-۸	۱۰-۷	۱۰-۶	۱۰-۵	۱۰-۴	۱۰-۳	۱۰-۲	۱۰-۱				
۱۱-۷۹	۱۱-۷۸	۱۱-۷۷	۱۱-۷۶	۱۲-۷۹	۱۲-۷۸	۱۲-۷۷	۱۲-۷۶	۱۲-۷۵	۱۲-۷۴	۱۲-۷۳	۱۲-۷۲	۱۲-۷۱	۱۲-۷۰	۱۲-۶۹	۱۲-۶۸	۱۲-۶۷	۱۲-۶۶	۱۲-۶۵	۱۲-۶۴	۱۲-۶۳	۱۲-۶۲	۱۲-۶۱	۱۲-۶۰	۱۲-۵۹	۱۲-۵۸	۱۲-۵۷	۱۲-۵۶	۱۲-۵۵	۱۲-۵۴	۱۲-۵۳	۱۲-۵۲	۱۲-۵۱	۱۲-۵۰	۱۲-۴۹	۱۲-۴۸	۱۲-۴۷	۱۲-۴۶	۱۲-۴۵	۱۲-۴۴	۱۲-۴۳	۱۲-۴۲	۱۲-۴۱	۱۲-۴۰	۱۲-۳۹	۱۲-۳۸	۱۲-۳۷	۱۲-۳۶	۱۲-۳۵	۱۲-۳۴	۱۲-۳۳	۱۲-۳۲	۱۲-۳۱	۱۲-۳۰	۱۲-۲۹	۱۲-۲۸	۱۲-۲۷	۱۲-۲۶	۱۲-۲۵	۱۲-۲۴	۱۲-۲۳	۱۲-۲۲	۱۲-۲۱	۱۲-۲۰	۱۲-۱۹	۱۲-۱۸	۱۲-۱۷	۱۲-۱۶	۱۲-۱۵	۱۲-۱۴	۱۲-۱۳	۱۲-۱۲	۱۲-۱۱	۱۲-۱۰	۱۲-۹	۱۲-۸	۱۲-۷	۱۲-۶	۱۲-۵	۱۲-۴	۱۲-۳	۱۲-۲	۱۲-۱				

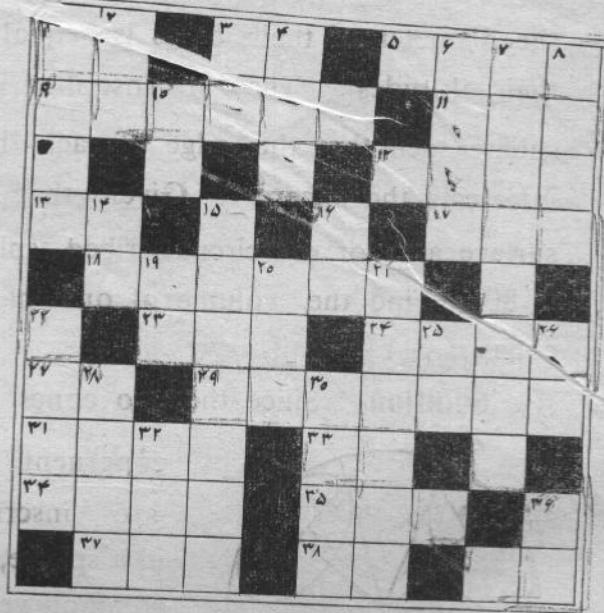
ج د و ل ا ع د

طرح از : خسرو اقصادی

قائم: ۱- میջذور کامل است و رقم یکن آن همان رقمه کان چذرش است. ۲- به صورت ab و سه برابرش به صورت aba است. ۳- همان عدد ۳۸ افقی، ۴- خاصل ضرب ار فامش مکعب کامل به صورت $aabb$ است. ۶- تکرار عدد ab که میջذور است و b^2 است. ۷- چون با عدد ۴۰۴۷۷۴۰۴ جمع شنود عددی بار قمهای همانند بدست آید. ۸- به صورت $abab$ است که ab توان چهارم است. ۱۵- جذر عدد ۱ قائم. ۱۴- همان عدد ۳ قائم. ۱۵- به صورت $abcdedd$ است که همان عدد ۳ قائم. ۱۶- پنج رقمهای متواالی اند. ۱۶- پنج $d = c, b, a, e$ و $c = 2b$ است. ۱۹- اگر این عدد ab باشد میջذورش ccb برابر عدد ۲۷۷ افقی. ۲۰- یکچهارم آن میջذور کمب عدد ۵ است و $a > b$ است. ۲۱- تکرار عدد abc که $a = 3b = 3c$ و $b = 2c$ است. ۲۲- تکرار عدد $abba$ است که ab همان عدد ۳۹ افقی است. ۲۵- به صورت $abba$ است که ab دو برابر مقلوب عدد ۳۸ افقی. ۲۶- اگر با عدد ۱ افقی جمع شود عددی توان ششم بدست می آید. ۲۸- دو واحد بیشتر از عدد ۳۱ افقی. ۳۰- هفت برابر نک عدد ۲۴ افقی. ۳۲- ۵۵ برابر عدد ۳۹ افقی. ۳۶- متمم حسابی رقم دهگان خویش است.

۱	۱	۵		۳	۳	۵	۳
۴	۲		۶		۲		۲
۹		۲	۱	۶			۱
	۱	۵	۶	۲	۵		
۱۱							
۱		۶	۶	۶		۱	
۱۵	۱		۶		۸		۲
۱۸	۶	۹		۴	۴		۱

حل جدول شماره گذشته

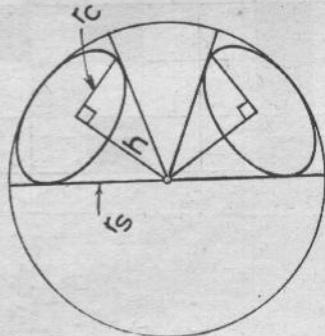


افقی: ۱- مقلوب عدد b^2 (۴۷) در متنای اعشاری
۳- هفت برابر عدد ۲۷۵ افقی. ۵- سطر سوم از مشاث خیام-پاسکال
۶- به صورت $abcabc$ است بقیه که عدد سه رقمی abc پنج
برابر حاصل ضرب رقمهای خویش است. ۱۱- به صورت aba
ب مضرب ۵۴ است. ۱۲- همان عدد ۵ افقی. ۱۳- شماره دهگان
عدد ۱۱ افقی. ۱۷- دارای ۸ تقسیم علیه است که کوچکترین
عدد اول سه رقمی یکی از آنها است و در تجزیه آن سه عدد اول
وجود دارد. ۱۸- کوچکترین عدد شش رقمی با رقم متواالی.
۲۳- توان هفتم است. ۲۴- بیازده برابر نصف عدد ۱۷ افقی
۲۷- تکرار یک رقم. ۲۹- حاصل ضرب 10010 در abc پیشنهادی
که $abc = 20^2$. ۳۰- یک زده برابر مقلوب خویش است. ۳۳-
مقلوب عدد ۱۳ افقی. ۳۴- متمم حسابی عدد ۳۱ افقی ۳۵۰.
اگر یک واحد از آن کم شود بزرگترین عدد سه رقمی که مکعب
رقم یکان خود می باشد بدست آید. ۳۷- یک ششم عدد ۱۷ افقی
۳۸- از ده برابر حاصل ضرب رقمهایش یک واحد بیشتر است و
مجموع رقمهایش ۸ است. ۳۹- میջذور مجموع رقمهایش است.

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 99 – Two congruent , right circular cones have a common vertex , and the diameter of their bases is equal to their altitudes . They are inscribed in a sphere such that the edge of each base intersects the sphere . Given that the surface area of the circumscribed sphere is 80π , find the volume of one of the cones .

Solution : Since the two cones are



congruent and are inscribed in a sphere, the common vertex must be the center of the sphere . Since

the vertex is the center, the slant height of the cone must be the radius of the sphere (Fig.) Given that the surface area of the sphere equals 80π , the radius can be found by using the formula

$$S = 4\pi r_s^2$$

$$80\pi = 4\pi r_s^2$$

$$r_s = 2\sqrt{5}$$

The slant height of a cone is the hypotenuse of a right triangle with the radius of the base and the height as its legs. Since the height of the cone equals its diameter, it also equals twice the

radius. Using the Pythagorean theorem , we obtain :

$$r_c^2 + h^2 = r_s^2$$

thus $r_c^2 + (2r_c)^2 = (2\sqrt{5})^2$

and $r_c = 2$

Since the radius of the base of the cone equals 2, the height must equal 4 . Using the formula for the volume of a cone we obtain :

$$V = \frac{1}{3}\pi r_c^2 h$$

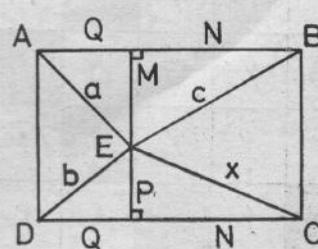
and $V = \frac{16}{3}\pi$

Problem 100 – ABCD is a rectangle,

Point E is in the interior of ABCD. \overline{AE} , \overline{DE} , and \overline{BE} have measures of a,b, and c respectively. Find the measure of \overline{CE} in terms of a,b, and c

Solution : Construct a perpendicular from E to \overline{DC} .

It is also perpendicular to \overline{AB} .



since ABCD is a rectangle. This line cuts both \overline{AB} and \overline{CD} into two parts,say Q and N .

Using the Pythagorean Theorem on

On the page 455

فهرست مهندر جات مجله‌های یکان دوره هشتم

۳۴۰	رشته‌ها
۳۴۱	کشف لگاریتم
۳۴۲	جدولهای مشناختی
۴۰۰	اعداد مختلط
کلیات و روش‌های ریاضی	
۲	استدلال در ریاضیات:
۷۱	- استقراء
۱۳۴-۱۹۴	- تعمیم، تخصیص، مشابهت
۲۶۵-۳۲۵	- استقراء در نظریه اعداد
۴۶۰	- چند مثال از استقراء
۹	روش برهان خلف
۳۹۲-۴۵۶	نهادها در ریاضیات
بررسی و معرفی کتاب	
۷-۶۵ + ۱-۱۲۹ + ۱-۲۵۵-۲۶۴-۳۷۰-۴۳۵-۴۴۶	
گوناگون	
۶۹	پرگار بیضی نگار طوفا
۹۴	از عجایب اعداد
۱۴۵	در ماره بیضی نگار
۲۱۰	بازی با سکه، بازی با اعداد
۳۸۶	روش شرافتمدانه
آموزش نظریه مجموعه‌ها با روش بر نامه‌ای	
۳۱-۹۵-۱۵۹-۲۲۳-۲۸۷-۳۵۱-۴۱۵-۴۷۹	
نجوم و علوم تجربی	
مکانیک کوانتم چیست؟	
۱۰-۷۷-۱۳۹-۲۰۳-۲۷۳-۳۲۹-۳۹۵-۴۶۸	
۲۳	موارد استعمال قوانین کیرشهوف
۸۳	شتاب، درسی از فیزیک
۱۹۹-۲۷۰-۳۲۷	کاوش آسمانها - ابزارهای نجومی
۲۳۵	حرکت در دیراه، درسی از مکانیک
۴۰۲	آنگ مخروطی، درسی از فیزیک
۴۶۳	دیوارنور

سر مقاله‌ها	
۱	دوهزار و پانصد سال افتخار
۶۵	درباره بخشش نامه وزارت آموزش و پرورش
۱۲۹	انتخاب اصطلاحات جدید تابع سلیمان شخصی است
۱۹۳	برنامه‌های جدید و کارآموزی معلمان
۲۵۷	انجمن ریاضی ایران
۲۲۱	روش‌های جدید ریاضی و اولیاء دانش آموزان
۳۸۵	اپیدرمی تست نویسی
۴۴۹	چند گانگی در تعاریف
آشنائی با دیبران و استادان ریاضی	
۱۳۰	حسین آزم
تحقیقات تاریخی - معرفی ریاضیدان	
۵	قطب الدین شیرازی
۶۶	کمال الدین فارسی
۱۳۲	تحقیقی در آثار خواجہ نصیر طوسی
۲۵۸	اکشافات ابن هیثم
۳۲۲	قاینی ریاضیدان گمنام
۳۸۷	ابوالحسن نسوی، ریاضیدان ایرانی
۴۵۱	مأخذ ذات ارشیدمده
تاریخچه ریاضی	
۱۸	کسرهای ساده
۱۹	کسرهای اعشاری
۸۰	عدد π
۱۵۰	کسر اعشاری متناوب
۱۵۰	تناسب و مقادیر متناسب
۱۵۱	جبرو و علائم حرفی
۲۱۶	اتحادها جبری
۲۱۶	معادله‌های یک مجهولی درجه اول
۲۱۸	معادله‌های یک مجهولی درجه دوم
۲۸۲	تابع
۲۸۲	توابع مشناختی
۲۸۳	فرمولهای اساسی مشناخت

مسائل برای حل	
۵۱-۱۰۹-۱۶۸-۲۳۹-۳۰۵-۳۶۵-۴۳۰	تست هوش
۴۹۵	تست شیمی
۵۰۴	تستهای ریاضی :
۵۳-۱۱۲-۱۷۰-۲۴۱-۳۰۸-۳۶۸-۴۳۳-۴۹۸	حل مسائل

یکان شماره	۷۷
۴۰	۷۸ » »
۹۹	۷۹ » »
۱۵۳	۸۰ » »
۲۲۱	۸۱ » »
۲۹۲	۸۲ » »
۳۴۶	۸۳ » »
۴۱۱	۸۴ » »
۴۷۷	پاسخ تستهای یکان شماره ۸۵
۵۰۹	۵۰۶ حل مسائل کنکور مندرج در یکان سال ۵۰

Problems and Solutions
۶۴-۱۲۸-۱۹۲-۲۵۶-۳۲۰-۳۸۴-۴۴۸-۵۱۲

مندرجات یکان سال ۱۳۵۰

۱	گفتگویی با داوطلبان کنکور
۳-۴	سؤالهای کلاس ششم طبیعی
۶-۱۱	سؤالهای کلاس ششم ریاضی
۱۶	حل مسائل کلاس های ششم
۴۰	سؤالهای کنکور سراسری گروه طبیعی
۶۷	» » » ریاضی
۹۳	پاسخهای درست سوالهای کنکور سراسری
۹۶	کنکور دوره شبانه دانشگاه تهران
۱۱۹	» » » تبریز
۱۲۵	دانشکده نفت آبادان
۱۲۶	مدرسه عالی ریاضیات کرج
۱۴۴	هترسراي عالي
۱۳۵	انستیتو تکنولوژی تهران
۱۴۱	تبریز
۱۴۲	شیراز
۱۴۳	» کرمانشاه
۱۴۴	دانشکده علوم اقتصادی با پلسر
۱۴۶	مسائل امتحانات ورودی دانشگاه، مسکو
۱۵۱	امتحانات G.C.E. انگلستان
۱۶۷	نمونه مسائل امتحانات ایالات متحده آمریکا
۱۷۰	امتحانات کشور فرانسه

درجاشیه بر نامه ریاضیات ۵ بیرونستان

۱۳	معادلات تابعی
۱۶	ماکسیمم و مینیمم روی مرز
۳۵	عددنویسی علمی
۳۷	مجموع زوایای خط شکسته بسته
۸۱	روشهای مختلف اثبات گنک بودن $\sqrt{2}$
۱۴۱	محاسبات تقریبی
۱۴۳	بررسی نیمساز گوشه
۲۱۱	واسطه ها
۲۷۹	استفاده از استقراء در تعیین مکانهای هندسی
۴۰۶	چند مسئله درباره معادله درجه سوم

درسهایی از ریاضیات ۵ بیرونستان

۸۸	محضن نقطه روی محور
۱۴۶	مجموع دو برابع
۳۳۸	درباره محاسبه حد و تعیین مجانب توافق اصم
	راهنمای کنکور

۲۰-۹۱-۲۱۳-۲۸۴-۳۴۴-۴۰۷

دادستانهای ریاضی

۶۲	جستجوی واقعیت
۱۲۷	جزیره های تروک و تراک
۱۹۰	تخته نرد
۳۱۸	به خط مستقیم
۳۸۲	اقلیدیو تالسی

جدول اعداد

۶۳-۱۹۱-۲۵۵-۳۱۹-۳۸۴ + ۱-۴۴۷-۵۱۱

مسائل

حل مسائل نمونه

۳۸	رسم مثلث با معلوم بودن مجموع دو ضلع و زاویه و طول نیمساز زاویه بین آنها
۱۴۸	مسائل ناپلئون - ماسکرونی
۲۱۹	رابطه ای در مثلث خاص
۲۲۰	بعضی از مسائل لایحل حساب
۲۹۱	بررسی یک مثلث خاص
۳۴۳	مساحت گل ترسیمی
۴۱۰	مثلث مورلی خارجی مثلث
۴۷۶	بررسی یک ناساوای و نتابیج آن

مسائل انتخابی از مسائل امتحانات داخلی ۵ بیرونستانها

۵۶-۱۱۵-۱۷۴-۲۴۴-۳۱۱-۳۷۱-۴۳۶

پایان دوره هشتم یکان

با این شماره دوره هشتم یکان پایان می‌یابد. شماره بعد مجله در اوایل مهر ماه آینده منتشر خواهد شد تعطیل تابستانی مجله به این امید منظور شده است تا فرصتی باشد برای تهیه مطالب جالب و مفیدتر مخصوص شماره‌های آینده. در این باره توصیه‌های خوانندگان و علاقمندان راهنمای ما خواهد بود. بویژه تقاضا می‌شود که برای ما بنویسید:

- چه مطالبی از شماره‌های گذشته بیشتر مورد توجه شما بوده است.

- چه مطالبی از شماره‌های گذشته به نظر شما زاید بوده است.

- دوست دارید که بیشتر مطالب مجله از چه نوع باشد.

خواهشمند است هر نوع نظر خود را راجع به مندرجات مجله مرقوم دارید.

تفاضا

از دانش آموزان گرامی که مایلند سؤالهای امتحانات داخلی دیبرستان خود را برای درج در یکان ارسال دارند تفاضا می‌شود. این سؤالهای را قبل از پایان تابستان سال جاری بفرستند. روی اوراق مربوط نام شهرستان، دیبرستان، کلاس، تاریخ امتحان، نام دبیر مربوط و نام خود را به رسمیت مرقوم دارند.

قضایا و مسائل هندسه

با بیش از ۱۲۰۰ قضیه و مسئله

تألیف: غلامرضا یاسی پور

در این کتاب، مثلث و خواص اجزاء آن مورد بحث قرار داده شده و از قضیه‌های معروف هندسه از قبیل: قضیه اولر، قضیه فوئر باخ، قضیه کارنو، قضیه سوا، قضیه منلائوس، قضیه آپولونیوس، قضیه ژرگون،...، سخن به یان آمده است.

با مطالعه این کتاب، خواننده با قضایا و مسائلی آشنا می‌شود که در مطبوعات فارسی تا به امروز کمتر از آنها گفتگو شده است.

مطالب کتاب می‌تواند برای دانش آموzan دوره دوم دیبرستان، دانشجویان رشته‌های ریاضی، و دهان ریاضیات مفید باشد.

تدویس ریاضیات فیزیک-شیمی-حسابداری

خصوصی و درآموزشگاهها تو سط دانشجویان حسابداری

به سپرستی: سید جمال آشفته

تلفن: ۷۵۴۶۰۶

۱	۳	۲	۴		۳	۷	۴	۵	۱	۶	۳	۷	۱
۹	۱	۷	۱۰	۵	۱	۷	۵		"	۶	۷	۶	
۳				۶		۷		"	۱	۳	۳	۱	
۱۱	۶	۷	۱۳	۱۵	۴		۱۹	۵	۱۷	۶	۰	۶	
۱۸				۱	۱۲	۳	۲۰	۴	۱۶				
۲۲	A			۱	۱	۳	۸		۲۱		۰		
۲۷	۱	۷	۱	۲۹	۱	۴	۳۶	۷	۱	۶	۷	۰	
۳۱	۱	۰	۳۲	۸	۹		۳۳	۷	۶	۳			
۳۳	۸	۹	۱	۱			۳۵	۷	۳	۰	۳۶		
۳۷	۱	۰	۱				۳۱	۷	۱	۸	۱		

حل جدول اعداد این شماره

انتشارات یکان

چاپ دوم کتاب معماهای ریاضی از امتیازهای زیر برخوردار است:
قطع کتاب به اندازه قطع کتابهای درسی است.
کاغذ کتاب از نوع کاغذ مرغوب ۸۰ گرمی است.
برخلاف صحافی ته چسب که فعلاً متداول است، صحافی کتاب
به صورت ته دوزی انجام گرفته است.

معماهای ریاضی

ترجمه: محمد رکنی قاجار

بها: با جلد شمیز ۷۵ ریال (برای مشترکان ۶۰ ریال)، با جلد زر کوب ۱۰۰ ریال (برای مشترکان ۸۰ ریال)
مشترکان یکان که به خرید کتاب با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان که ساکن تهران می‌باشند مستقیماً به دفتر مجله مراجعه
فرمایند و آنان که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به صورت نقدی یا تمثیر باطل نشده یا چک بانکی ارسال دارند تا
کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده شود.

روش ساده

حل مسائل شیمی

ترجمه: عطاء الله بزرگ نیا
۲۰ ریال

مجموعه علمی

شامل مقالات ریاضی، فیزیک و شیمی
حل مسائل ممتاز ریاضی و مطالعه دینور
۶۰ ریال

سرگرمیهای جبر

ترجمه: پرویز شهر باری
۶۰ ریال

راهنمای ریاضیات متوسطه

تألیف: عبدالحسین مصحفی
چاپ چهارم: ۱۲ ریال

تمرینات

ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هنروردی
فلا نایاب

مسائلی از حساب استدلای

تألیف: محمود کاشانی
جلد سوم: ۱۵ ریال
جلد دوم: ۱۵ ریال
جلد اول: ۱۲ ریال

مقدمه بر

تئوری مجموعه ها
تألیف: علی اصغر هومانی
فلا نایاب

مبادی منطق و ریاضی جدید

بها: ۳۶۰ ریال

تألیف: غلامرضا عسجی