یکان

مجله ریاضیات

دورهٔ هشتم ـ شمارهٔ ۶ شمارهٔ مسلسل: ۸۳ اسفند ۱۳۵۰

در این شماره:

بها: بیست و پنج ریال

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ هشتم ـ شمارهٔ پنجم ـ شمارهٔ مسلسل : ۸۳

اسفند ۱۳۵۰

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : بانونصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره :

تهران ، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۹۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VIII, number 6. March. 1972

subscription : 3$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر ـ تلفن: ۸۲۵۹۲۸

یکان سال ۱۳۵۰

یکان سال ۱۳۵۰، شمارهٔ ویژهٔ یکان برای سال ۱۳۵۰ ، در ۱۸۸ صفحه بابهای ۸۰ ریال منتشر شده است. این شمارهٔ ویژه برای تمام مشترکان فعلی یکان به‌نشانهٔ پستی آنان ارسال شده‌است .

دریکان سال ۱۳۵۰ علاوه‌بر سؤالهای امتحانات نهایی کلاسهای ششم طبیعی وریاضی وحل مسائل آنها، کلیهٔ سؤالهای کنکور سراسری گروههای ریاضی وطبیعی ، حتی سؤالهای ادبیات فارسی وانگلیسی درج شده وپاسخهای درست سؤالهای ریاضی، فیزیك وشیمی مربوط به‌آن نیز ارائه گردیده‌است . غیرازآن، سؤالهای کنکورهای اختصاصی ونمونه‌های سؤال‌های کنکور چندکشور خارجی نیز ازجمله مندرجات یکان سال ۵۰ می‌باشد .

چون چاپ مندرجات یکان سال ۵۰ قبل از اسفند ماه انجام گرفته است، ازاین‌جهت درج بعضی ازسؤالهای کنکورهای اختصاصی که توسط علاقمندان ارسال شده ودیرترازموعد به‌دفتر مجله رسیده درمجلهٔ مزبور میسر نگردیده‌است.

دربارهٔ ضمیمهٔ یکان سال ۱۳۵۰

باتوجه به‌ترقی بهای کاغذ وهزینهٔ چاپ و پایین بودن تیراژ ضمیمه‌های یکان سال، درسال جاری ضمیمهٔ یکان سال برای دانش‌آموزان کلاسهای سوم دبیرستان چاپ نمی‌شود .

آموزش سادهٔ

نظریهٔ مجموعه‌ها

با روش برنامه‌ای

مربوط به‌صفحه‌های ۳۵۱ ، ۳۵۲ ، ۳۵۳ ، ۳۵۴

به‌دنبال آخرین موضوع مجلهٔ قبل، اولین موضوع این مجله رادردفترچه بنویسید. یك‌بار به‌دقت آنرابخوانید: به‌سادگی خواهید فهمید که جای خالی را باچه چیزباید پر کنیدیااگرپرسشی شده است پاسخ آن‌چیست. بعدازآنکه این پاسخ را درزیرپرسش نوشتید ، یاجای خالی را باموضوع مربوط پر کردید، آنگاه‌صفحهٔ مجله رابرگردانید و درست درپشت محل همان موضوع، پاسخ آن را مشاهده کنید. اگرپاسخی که‌شمانوشته‌ایددرست بوده‌است، آنگاه موضوع شمارهٔ بعدرایافته به‌ترتیب بالاآنرا دردفترچهٔ خودبنویسید وپاسخ آن رامعلوم کنید. اما اگرپاسخ‌شمادرست نبوده است، موضوع‌قبلی رامجدداًوبادقت بیشتربخوانیدتا پاسخ درست آنرا دریابید. بعد ازاطمینان‌ازدرست بودن پاسخ هرموضوع، موضوع شمارهٔ بعدآن را بنویسید وپاسخ دهید .

توجه داشته باشید که‌قبل ازآنکه پاسخ هرموضوع‌راشخصاً معلوم نکرده‌اید به‌پشت‌صفحه‌مراجعه‌نکنید. با این‌روش، بدون نیاز به معلم ویابه‌کتاب دیگر، مفاهیم تازه‌ای را به سادگی وبه‌آسانی خواهیدآموخت .

آغاز سال ۱۳۵۱ و جشن ملی نوروز را به‌همهٔ خوانندگان یکان شادباش می‌گوید.

عبدالحسین مصحفی

اولیاء دانش آموزان و روشهای جدید ریاضی

بسیاری ازدانش‌آموزان تکالیف خارج ازآموزشگاه را زیرنظر ویاتحت رهبری اولیاء وبزرگترهای خود انجام می‌دهند. این کارمحاسن ومعایبی دارد. ازجمله معایب آن، که‌بی‌شك بزرگترین عیب است، ناهماهنگی راهنمائیهای اولیاء با روشهایی است که از طرف معلمان بکار رفته است.

روشهای آموختن ریاضی دگرگون شده است. تقریباً عموم اولیاء دانش‌آموزان که دست‌اندرکارتعلیم وتربیت نیستند، ازروشهای جدید بی‌اطلاعند. اینان از یك طرف در مواجههٔ با روشهای جدید ازکمك به‌فرزندان خود باز می‌مانند، وازطرف دیگربه این‌تصور که روشهای قدیم سهلتر وکوتاهتر است آنها را به‌کودکان خود اعمال می‌کنند. نتیجهٔ این رویه ایجاد حس بی‌اعتمادی در طفل وعقب‌ماندگی وی است.

برحذرداشتن اولیاء دانش‌آموزان از نظارت درتکالیف فرزندان خودعملا بجایی نمی‌رسد. اما آشناساختن آنان با روشهای جدید و مزیتهای این روشها، چه ازراه تشکیل جلسات بحث و تبادل‌نظر و چه از راه تهیهٔ جزوات وکتابهای مخصوص، اقدامی مفید و مؤثر خواهد بود.

عبدالحسین مصحفی

تحقیقات ارزندهٔ آقای **ابوالقاسم قربانی** درتاریخ ریاضیات شاید در نوع خود بی‌نظیرباشد؛ هم‌اکنون درتاریخ ریاضیات ازافرادی به‌عنوان ریاضیدانان عالیمقام‌نام برده می‌شودکه تا قبل‌از تحقیقات آقای قربانی، چهرهٔ واقعی آنان ناآشنا وخدمات گرانبهای ایشان ناشناخته بوده است. اخیراً کسب اطلاع شدکه آقای قربانی چهرهٔ دیگری از ریاضیدانان گمنام‌راکشف کرده‌اند. ازایشان درخواست شدکه اولین معرفی این‌چهره توسط یکان انجام شودوایشان مقالهٔ زیررا به‌همین منظورفراهم آوردند.

یکان

ابوالحسن بن بامشاد قاینی

از: **ابوالقاسم قربانی**

ابوالحسن علی‌بن عبدالله‌بن محمدبن بامشاد قاینی ازریاضیدانان ومنجمان ایرانی بودکه در زمان **ابوریحان بیرونی** (متوفی بعدازسال ۴۴۲ه/۱۰۵۰م) ویا پیش ازوی می‌زیست. شرح احوال اورا درهیچیك ازمنابع متعددی‌که به زبانهای مختلف‌دراختیاردارم نیافتم. ولی خوشبختانه دومقاله ازوی‌دردست است‌که ازآنها نام وکنیه ونسبت اوبه‌طور دقیق معلوم می‌شود وازروی‌یکی‌ازآنها می‌توان دانست‌که‌وی‌لااقل قسمتی ازعمرخودرا درزادگاه خود یعنی شهرقاین واقع در خراسان گذرانده است. **بیرونی** که معمولا درنوشته‌های ریاضی ونجومی‌خودفقط ازریاضیدانان و منجمان بزرگ نام می‌برد، برهان دوقضیهٔ هندسی‌را ازوی نقل‌کرده (خواهدآمد) واز این‌روپیداست‌که **قاینی** درزمان **بیرونی** در ریاضیات شهرت داشته است. **بیرونی** دریك موضع اورا «ابوالحسن بن بامشاد» ودرموضع دیگر«ابوالحسن‌علی‌بن‌عبدالله‌بن‌بامشاد» نامیده است.

آثارموجودقاینی عبارتنداز:

الف- مقالةفی‌استخراج ساعات مابین‌طلوع‌الفجر و طلوع‌الشمس‌کل‌یوم من‌ایام‌السنة بمدینة قاین.

این مقاله درجزو «الرسائل‌المتفرقه‌فی‌الهیئةللمتقدمین و معاصری‌البیرونی» (رسالهٔ‌چهارم) درسال ۱۹۴۷م درحیدرآباد دکن به‌چاپ رسیده‌است. موضوع این مقاله تعیین‌روش‌محاسبهٔ مدت‌زمان بین‌طلوع‌فجروطلوع آفتاب وهمچنین غروب آفتاب وغروب شفق است‌که درهریك از روزهای سال درشهرقاین می‌توان آن را حساب‌کرد. مؤلف درآغاز رساله عرض جغرافیایی قاین را ۳۳ درجه و۵۵ دقیقه معین‌کرده ونوشته است‌که آنچه درمقاله بیان‌کرده ازروی حدس وتخمین نیست بلکه متکی براصول حساب وهندسه وهیئت ورصداست.

ب- مقالةفی‌استخراج‌تاریخ‌الیهود

این مقاله نیزدرجزو «الرسائل‌المتفرقه‌فی‌الهیئة (رسالهٔ سوم) درسال ۱۹۴۷م درحیدرآباد دکن چاپ شده است و چنین شروع می‌شود: «قال‌ابوالحسن علی‌بن‌عبدالله‌بن محمدبن بامشادالقاینی، اعلم‌اول‌السنین‌التسع عشرةعلی حساب‌الیهود الف‌مائة وثمانیة واربعین‌للاسکندر...»

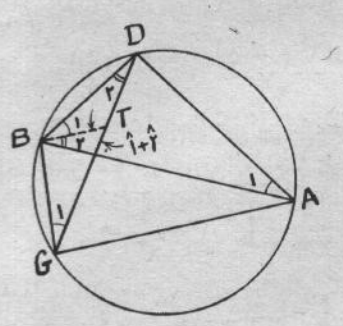
ج- چنانکه گفتیم **ابوریحان بیرونی** در کتاب «استخراج‌الاوتارفی‌الدائره بخواص خط‌المنحنی‌الواقع فیها»(۱) برهان دوقضیهٔ هندسی را از**قاینی** نقل‌کرده‌است. (بیرونی: استخراج‌الاوتار،ص۳۷و۴۰) من دراینجا آن دوقضیه و برهان آنها را باعلائم واصطلاحات متداول‌کنونی می‌نویسم وخاطر

(۱) - این‌کتاب درسال ۱۹۴۸م درحیدرآباد دکن چاپ‌شده ولی متأسفانه هم مغلوط است وهم با چندرسالهٔ دیگر از بیرونی مخلوط شده.

نشان می‌کنم که اولا این دو قضیه را یونانیان می‌دانسته‌اند و ثانیاً **بیرونی** چندین استدلال ازخود واز ریاضیدانان دیگر مانند **ابوسعیدسجزی** (۱) و **ابوعلی بصری ابونصر عراق وابوعبدالله‌شنی وسلیمان‌بن‌عصمة وسمرقندی وابوالحسن مصری‌وابوجعفرخازن** ودیگران آورده‌است.

قضیهٔ اول- اگرقوس AG ازدایره‌ای را درنقطهٔ D نصف‌کنیم و روی همان قوس نقطهٔ دلخواه B را اختیارکنیم واین نقاط را دوبه‌دو به‌هم‌وصل‌کنیم‌رابطهٔ زیر برقراراست:(۲)

$$AB \times BG + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{GD}^2$$



بیرونی این‌قضیه را به‌زبان عربی چنین بیان‌کرده‌است: «اذاقسم قوس‌بنصفین وبقسمین مختلفین فان مضروب وتری‌القسمین‌المختلفین. احدهمافی‌الاخرمع مربع وترمابین‌النصف و بین‌احد- المختلفین‌مساویالمربع‌وترنصف‌القوس»(← **بیرونی:استخراج الاوتار**، ص ۲۵)

برهان قضیهٔ اول ازابوالحسن‌بن‌بامشادقاینی (۳)

قاینی برای این قضیه برهانی شبیه آنچه **بطلمیوس** برای قضیهٔ معروف خود دربارهٔ چهارضلعی محاطی بیان‌کرده آورده است‌که خلاصهٔ آن ازاین قراراست:

ازنقطهٔ B نیم خطی رسم می‌کنیم‌که با BD زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ BGD بسازد وفصل مشترک‌آن را با GD نقطهٔ T می‌نامیم. دومثلث DGB وDBT متشابه هستند و داریم: $\frac{GD}{DB} = \frac{BD}{TD}$ وازآنجا:

$$\overline{BD}^2 = GD \times TD \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر دومثلث ADB وGBT متشابه هستند (ازروی شکل واضح است‌که زاویهٔ BTG که زاویهٔ‌خارجی مثلث BTD است مساوی است با $\hat{۱} + \hat{۲}$ و زاویهٔ ABD نیزمساوی است با $\hat{۱} + \hat{۲}$) وداریم:

$$\frac{AB}{GT} = \frac{AD}{BG}$$

وازآنجا:

$$AB \times BG = AD \times GT \qquad (۲)$$

دوتساوی (۱) و(۲) را عضوبه‌عضو باهم‌جمع می‌کنیم حاصل می‌شود:

$$AB \times BG + \overline{BD}^2 = AD \times GT + GD \times TD$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم که $GD = AD$ و درطرف راست تساوی فوق ازGD عامل مشترک می‌گیریم:

$$AB \times BG + \overline{BD}^2 = GD(GT + TD)$$

ویا

$$AB \times BG + \overline{BD}^2 = \overline{GD}^2 = \overline{AD}^2$$

وحکم ثابت است.

تبصره- اگرقوس AB را α وقوس‌BGرا β بنامیم رابطهٔ‌فوق‌را می‌توان به‌صورت اتحادزیرنوشت:

$$\sin\alpha \,.\, \sin\beta = \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

قضیهٔ دوم (۴) **اگرقوسAG ازدایره‌ای رادرنقطهٔD نصف‌کنیم وروی همان دایره نقطهٔ دلخواهB را به‌قسمی‌اختیار کنیم‌که نقاط B وD دردوطرف وترAC واقع شوند واین‌نقاط را دوبه‌دوبه‌هم وصل‌کنیم رابطهٔ زیر برقراراست:**

$$AB \times BG + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$$

---

(۱) - برای‌کسب اطلاع ازاحوال وآثاراو وابونصرعراق رجوع‌کنید به «کتاب ریاضیدانان ایرانی» تألیف قربانی‌که درمدرسهٔ عالی دختران ایران‌چاپ‌شده ودرکتابفروشی طهوری روبروی دانشگاه تهران به فروش می‌رسد.

(۲) - اگرچهارنقطهٔ A وD وB وG باهمین مشخصات روی یک‌خط‌راست واقع باشندبازاین قضیه صحیح است. یعنی اگرنقطهٔ D وسط پاره‌خط AG ونقطهٔ B نقطهٔ دلخواهی‌ازپاره‌خط AG باشد رابطهٔ حکم‌قضیه بازبرقراراست (رجوع‌کنیدبه‌شکل پنجم ازمقالهٔ دوم اصول‌اقلیدس)

(۳) - این برهان درترجمهٔ آلمانی «استخراج‌الاوتار» (**سوتر A**) نیامده است.

(۴) - این قضیه وبرهانی‌که **قاینی** برای‌آن‌بیان‌کرده درترجمهٔ‌آلمانی‌کتاب «استخراج‌الاوتار» (**سوتر A**) نیامده‌است.

بیرونی این قضیه را به‌زبان‌عربی چنین بیان کرده‌است:
«فان‌القوس‌المعطاة اذاقسمت‌بنصفین وزیدعلیهامن‌دائرتها قوس ماعلی‌استدارتهافان مضروب وترالقوس‌المعطاة مع‌الزیادةفی وترالزیاده‌مع‌مربع نصف‌القوس‌المعطاةیساوی مربع وترمجموع هذاالنصف‌مع‌الزیاده» (← **بیرونی: استخراج الاوتار**، ص ۳۹ و ۴۰)

برهان قضیهٔ دوم ازابن‌باشادقاینی :

فصل مشترك AG وBD را نقطهٔ T می‌نامیم. دو مثلث DAB وGTB ،متشابهند وداریم $\frac{BD}{AB}=\frac{BG}{TB}$

وازآنجا :

$$AB \times BG = BD \times BT \qquad (۳)$$

ازطرف دیگردومثلث ATD وBAD متشابهندوداریم

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DT}$$

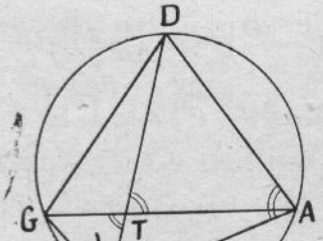
وازآنجا

$$\overline{AD}^{۲} = BD \times DT \qquad (۴)$$

دوتساوی (۳) و(۴) را عضوبه‌عضو با هم‌جمع می‌کنیم حاصل می‌شود :

$$AB \times BG + \overline{AD}^{۲} = BD \times BT + BD \times DT$$

وبا $AB \times BG + \overline{AD}^{۲} = BD(BT + TD) = \overline{BD}^{۲}$



وقضیه ثابت است.

تبصرهـ در واقع این دوقضیه‌دوحالت‌از یك‌قضیه هستندکه‌چون قدما علامت منهارا به کار نمی‌برده‌اند مجبور بوده‌اند آن را بـه دوصورت بیان‌کنند. می‌توان هردوقضیه‌را به‌شکل زیربیان‌کرد .

اگرنقطهٔ D وسط قوس AG ازیك‌دایره ونقطهٔB نقطهٔ دلخواهی ازهمان دایره باشد داریم :

$$AB \times BG = \pm(\overline{AD}^{۲} - \overline{BD}^{۲})$$

علامت + نظیرحالتی است‌که نقاط B وD دریك‌طرف خط راست AG واقع باشند وعلامت − نظیرحالتی است‌که نقاط B وD دردوطرف وترAG قرارگیرند .

از میان نامه‌های رسیده

* آقای **سیدنعمت‌الله جذبی** دبیرریاضی‌دبیرستانهای شیراز ضمن نامهٔ خود شکوه‌کرده‌اندکه چرا وزارت آموزش و پرورش ازچاپ وانتشارکتابهای حل‌المسائل مغلوط‌وپرازاشتباه جلوگیری نمی‌کند. ایشان پیشنهادکرده‌اندکه‌کمیسیونی از معلمان مندرجات‌کتابهای حل‌المسئله‌را قبل‌ازچاپ‌بررسی‌کند.

آقای جذبی به‌عنوان‌نمونه ذکرکرده‌اند که دردوکتاب حل‌المسئلهٔ هندسهٔ فضایی‌که ظاهراً توسط دومؤلف مختلف از دبیران ریاضی تهران تألیف شده (ودرحقیقت یکی از آنها رونویس دیگری‌یا هردورونویس‌کتاب ثالث می‌باشند) وتوسط دوناشرمختلف چاپ شده‌اند دریك مسئلهٔ مشابه طول سهم‌هرم ناقصی برابربا عددمنفی $\frac{a(۲-\sqrt{۵})}{۲}$ ارائه شده‌است .

* آقای **علی‌حاجی‌ابراهیمی** ازآبادان روش زیررا برای تعیین مجانبهای توابع اصم یادآوری‌کرده‌اند:

$$y=\frac{\sqrt{x^{۴}-۱}}{x+۲}=\frac{x^{۲}}{x+۲}\sqrt{۱-\frac{۱}{x^{۴}}}=$$

$$=(x-۲+\frac{۴}{x+۲})\sqrt{۱-\frac{۱}{x^{۴}}}$$

$$x\to\infty \Longrightarrow y=x-۲$$

$$y=۳x+\sqrt{x^{۲}+۱۳x+۱}=۳x+\sqrt{(x+\frac{۱۳}{۲})^{۲}-\frac{۱۶۵}{۴}}$$

$$=۳x+|x+\frac{۱۳}{۲}|\sqrt{۱-\frac{۱۶۵}{۴(x+۶/۵)^{۲}}}$$

$$x\to\infty \Longrightarrow y=۳x\pm(x+\frac{۱۳}{۲})$$

کاوش آسمان(دنباله از صفحهٔ ۳۲۸)

می‌تواند ازمساحتی‌به‌پوست ۱۰۰۰ کیلومتر عکس‌برداری‌نماید وتصاویررا بلافاصله‌به‌یك‌ایستگاه‌که باوی مربوط است‌بفرستد. اقمار هواشناسی می‌توانند انرژی‌تشعشعی فرستاده شده‌بوسیلهٔ زمین وجورا اندازه‌گیری‌کنند. بدین‌جهت ازنظرنجومی‌اقمار مصنوعی‌خیلی‌مفیدوذی‌قیمت‌اندوباتغییردادن‌مسیرشان‌می‌توانند دقیقاًشکل‌کره زمین‌وطرزتقسیمات‌اجرام‌درداخل‌آنرامعین‌کنند .

بوسیلهٔ آنها مطالعه دراشعهٔ‌کیهانی اولیه و نوارهای جذابه‌گازبین‌الکواکب وتشعشع ماوراءبنفش ستارگان‌وبعلاوه امکان عکاسی ومشاهدات تلویزیونی درماوراءبنفش ازمیدانهای ستارگان دور وسحابیها ممکن می‌گردد. بدست‌آوردن طیف ستارگان درحوزهٔ اشعهٔX واندازه‌گیری فواصل‌کهکشانی و جستجوی چیزهای جدیدمشاهدهٔ سطح ستارگان و مطالعهٔ در ستارگان‌مضاعف‌که درروی زمین مطالعه درآنها باعث زحمت است (به‌علت لرزش‌جو) وبالاخره ممکن است‌که به ستارگان مسکون وماه وسایر سیارات منظومه شمسی رفت وازنزدیك به مطالعهٔ سطح آنها پرداخت .

استدلال در ریاضیات

نوشتهٔ: G.PO'LY وابستهٔ آکادمی علوم واستاد افتخاری
مدرسهٔ پلی تکنیك فدرال زوریخ دانشگاه استانفورد

ترجمهٔ: داوید ریحان

☆ دنباله ازشمارهٔ قبل ☆

VII - دربارهٔ طبیعت کشف استقرائی - باسراجعه به بخشهای اخیر (III تا VI) می‌توانیم پرسشهای بسیاری را عنوان کنیم:

چه بدست آوردیم؟ نه اثباتی ونه حتی سایه‌ای از اثبات، بلکه فقط یك فرضیه بدست آوردیم: تشریح ساده‌ای از عملیات که از قلمرو محدود به مفروضات تجربی ما با ارزش است وفقط مختصر امیدی است که این تشریح درخارج ازحدود این قلمرو نیز باارزش باشد.

فرضیه را چگونه بدست آوردیم؟ به‌طریقه‌ای مشابه با آنکه هرکسی مورداستفاده قرارمی‌دهد، یا به‌مثابهٔ کاوشگرانی که درقلمروی غیر ریاضی کار می‌کنند. ملاحظات مناسب را مجتمع کردیم، آنهارا آزمودیم ومقایسه کردیم، نظمهای جزئی را بررسی کردیم، تردید کردیم، اشتباه کردیم وبالاخره موفق شدیم که عناصر پراکنده را به‌صورت **مجموعه‌ای مفهوم** در آوریم. به‌طریق مشابه، یك باستانشناس می‌تواند بوسیلهٔ حروف پراکندهٔ روی یك سنگ خراب‌شده، کتیبهٔ کامل را دوباره تشکیل دهد، یا اینکه، دیرین‌شناس می‌تواند به‌کمك چند استخوان فسیل‌شده سیمای اصلی حیوانی متعلق به‌نوع گمشده رادوباره تشکیل دهد. درحالتی که مورد نظر ماست، مجموعهٔ مفهوم در لحظه‌ای ظاهرشدکه به‌وجود مقسوم علیه‌ها پی‌بردیم.

VIII - دربارهٔ طبیعت «اثبات» استقرائی - چند پرسش نیز هنوز بدون پاسخ مانده‌اند. ارزش «اثبات» ما چقدراست؟ پرسش ناقص است. طبیعتاً شما از «اثبات» استقرائی فرضیه ما که دربخش VI داده شده وآنرا می‌توان ازجدول I بخش V بدست آورد، سخن می‌رانید. «اثبات» هنگامی مستحکم است که قانع کننده باشد ووقتی مقنع است که موفق شودکسی راقانع کند. ولی شما به‌من نمی‌گوییدکه این اثبات چه کسی را باید قانع کند: من، شما، اولر، مبتدی، من‌شخصاً این «اثبات» را به قدرکافی قانع کننده یافته‌ام. ملاحظه کرده‌ام که این موضوع نیزبرای **اولر** موردتأیید بود. (نام اولررا بدان‌جهت دراینجا آوردم که نزدیکتر ازهمهٔ ما دریافتن فرضیه بود.) یقین‌دارم که یك مبتدی‌هم که کمی باخاصیت بخش‌پذیری اعداد آشنایی‌داشته باشد، این«اثبات» رانیز نسبتاً قانع کننده خواهد انگاشت. یکی از همکاران بنده که ریاضیدان نخبه است ولی با این قسمت از نظریهٔ اعدادآشنایی کمی‌دارد، این«اثبات» را«صددرصدقانع کننده» یافت.

خواهیدگفت که تأثیرات نفسانی مورد توجه من نیست. چیزی که من‌خواستار شناخت آن‌هستم، درجهٔ ایمان قیاسی‌است، که ازخارج ارزیابی می‌شودوزاییدهٔ این«اثبات» استقرائی‌است.

بدین‌ترتیب، شما چیزی به‌من می‌دهید (A)، ولی در دادن یکی دیگر قصور می‌کنید (B)، آنگاه ازمن سومی‌راطلب می‌کنید (C).

(A) شما «اثبات» استقرائی را به من می‌دهید: فرضیهٔ درمورد ۱۳ حالت اولیه یعنی برای اعداد ۴، ۱۲، ۲۰، ... و ۱۰۰ محقق است. این کاملاً واضح است.

(B) ازمن می‌خواهیدکه درجهٔ اعتمادقیاسی محقق برای این «اثبات» را ارزیابی کنم. ولی این اعتماد بسته به هوس و سرشت ما، باید اقلاً به **معلومات** شخصی که «اثبات» از طرفش ارائه‌شده است، بستگی داشته باشد. می‌توان اثبات قضیهٔ قیاسی یاتمثیل وارونه‌ای که غلط بودن آنرا اثبات کند، بشناسیم.

رهردوحالت، درجهٔ اعتمادیاکه تابه‌حال بدست آمده است ، بوسیلهٔ «اثبات استقرائی» ماتوجیه نخواهد شد. ولی اگر به چیزی‌که بسیار نزدیك به‌اثبات‌کامل ، یاردکامل قضیه باشد ، آشنا باشیم،اعتماد ما توجیه خواهد شد و بوسیلهٔ «اثبات» استقرائی‌که دراینجا معرفی شده‌است می‌توان بکاربرد. هر چند که درجات اعتماد را بتوان ازآن نتیجه گرفت واین‌خود تابعی ازآنچه است‌که می‌دانیم.

در صورتی‌که خواستار جوابی معین‌هستید، بایدتصریح کنیدکه‌برای قضاوت‌در«اثبات»استقرائی‌بایددرچه‌ترازمعینی‌قرار گرفت(A). می‌بایست‌مجموعه‌ای‌معین وعمیق‌ازعملیات‌شناخته شده (شاید لیستی ضمنی ازگزاره‌های مقدماتی شناخته شده از نظریهٔ اعداد) را به‌من‌بدهید .

(C) از من‌می‌خواهیدکه دقیقاً درجهٔ اعتماد قیاسی‌محقق بوسیلهٔ «اثبات» استقرائی خودمانرا بدهم. شاید می‌خواهیدکه آنرا به‌صورت درصد«اعتماد مطلق»بدهم؟ (درجهٔ اعتمادمحقق بوسیلهٔ یك اثبات ریاضی کامل را می‌توانیم به نام « اعتماد مطلق» بخوانیم.) آیا انتظار داریدکه‌بگویم «اثبات» داده شده تا ۹۹٪ یا ۲/۸۷۵٪ یا اینکه تا ۰۰۰۰۰۰۱٪ «اعتمادمطلق» صادق است ؟

خلاصه می‌کنم، شما می‌خواهیدکه مسئلهٔ زیرراحل‌کنم : «اثبات»استقرائی(A) ومجموعهٔ محدودی ازعملیات‌وگزاره‌های شناخته شده مفروض‌است، درصد اعتماد مطلق (C) راکه‌قیاساً ازان منتج می‌شود، محاسبه‌کنید.

حل این‌مسئله خارج از توانائی‌من است. تاکنون‌کسی را نشناخته‌ام‌که بتواند آنرا حل وشاید جرأت امتحان آنرا داشته باشد، فیلسوفانی رامی‌شناسم‌که قول چنین‌کاری را در چهارچوبی بسیارکلیترمی‌دهند. ولی‌درمقابل‌چنین‌مسئلهٔ‌جامدی، عقب‌نشینی می‌کنند، لنگ می‌اندازند و هزاران عذر و بهانه می‌تراشند تا از زیربار پاسخگوئی به‌آن شانه خالی‌کنند .

بدون‌شك این یکی‌از همان مسائل فلسفی است‌که به طریقهٔ‌کلی می‌توان درباره‌اش بسیارحرف زد و به راستی خیلی خاطرانسان را به‌خود مشغول می‌کند ولی وقتی ذات مسئله را موردبررسی قرارمی‌دهیم‌می‌بینیم که‌اساسش‌برآب‌است.

آیا می‌توانید « اثبات » استقرائی را با حالت مقایسه‌ای بسنجیدوبدین‌ترتیب به‌ارزیابی مناسب‌ارزش«اثبات»ما بپردازید؟

«اثبات» استقرائی فرضیهٔ خودرا با«اثباتی»که ازآن باشه‌است، مقایسه می‌کنیم .

فرضیهٔ باشه به‌قرار زیر بود : معادلهٔ

$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ درازای $n = 1, 2, 3, \ldots$

حداقل دارای یك‌جواب به‌صورت اعدادصحیح غیر منفی x ، y، z، وw است. وی‌این فرضیه‌را برای $n = 1, 2, \ldots, 325$ مورد تحقیق‌قرارداد (بخش II وخصوصاًجدول‌کوچك‌رابینید).

فرضیهٔ ما اینست: در ازای عدد فردu، عدهٔ جوابهای معادلهٔ $4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ که به صورت اعداد فرد ومثبتی‌هستندبرابربا مجموع مقسوم‌علیه‌های uاست.این‌فرضیه را برای$u = 1, 3, 5, 7, \ldots, 25$ (۱۳حالت) مورد تحقیق‌قرار داده‌ایم (بخشهای III تا VI رامالاحظه‌کنید).

این دوفرضیه و «اثبات»های استقرائی آنهاراکه بوسیلهٔ تحقیقات‌متوالیشان‌صورت گرفته‌است،ازسه‌نقطه‌نظرمقایسه‌می‌کنم.

عدهٔ تحقیقات ـ فرضیهٔ باشه در۳۲۵ حالت‌وفرضیهٔ‌ما فقط در ۱۳ حالت مورد تحقیق قرارگرفته‌بود. واضح است‌که از این نقطه‌نظر فرضیهٔ باشه جلوتر است .

تصریح‌گمان ـ درفرضیهٔ باشه پیش‌بینی می‌شود که عدهٔ‌جوابهابزرگترازواحداست؛درفرضیهٔ‌ماپیش‌بینی‌می‌شودکه‌عدهٔ جوابها دارای مقداری‌کاملا معلوم است . به‌نظر من‌عاقلانه‌ترآنست‌که به‌تحقیقی باپیش‌بینی مشخص بیشتر از تحقیقی‌که صراحتش‌کمتر است، ارزش بگذاریم. واضح است‌که ازاین‌نقطه نظر، ما جلوتریم.

فرضیه‌های رقیبـ فرضیهٔ‌باشه مربوط‌به‌عدهٔ ماکزیمم M مربعهای لازم برای نمایش یك عدد صحیح اختیاری مثبت، بوسیلهٔ اعداد مربع بودکه در فرضیهٔ باشه $M = 4$ است. فکر نمی‌کنم‌که باشه کمترین دلیل پیشاپیشی برای ترجیح $M = 4$ بر $M = 5$ یا بر هرمقدار دیگری مانند $M = 6$ یا $M = 7$ داشته باشد؛ حتی $M = \infty$ را نیز نمی‌توان پیشاپیش‌کنار گذاشت. (طبیعتاً، $M = \infty$ به معنای آنست که اعداد بسیار بزرگی وجوددارندکه برای نمایش‌آنها مربعهای بسیار زیادی لازم است. $M = \infty$ را نیز می‌توان فرضیه‌ای پنداشت‌که به حقیقت نزدیکتر است.) بطورخلاصه باید بگویم‌که فرضیهٔ‌باشه دارای رقبای زیادی است. برعکس، فرضیهٔ ما دارای رقیبی نیست. با ملاحظهٔ رشتهٔ نامنظم عدهٔ نمایشها (بخشVI) بنظر می‌رسدکه یافتن قانونی‌کلی غیرممکن است. هم‌اکنون قانونی را پیدا می‌کنیم‌که بطور تحسین‌آمیزی روشن باشد . امیدواری دریافتن قانونی دیگر مشکل است .

درصورتی‌که انتخاب همسر از میان عدهٔ زیادی دختران جوان وزیبا صورت بگیرد؛کاری بسیار مشکل خواهد بود ، ولی اگر فقط یك‌دختر جوان وجودداشته باشد، به‌فوریت می‌توان تصمیم گرفت. به‌نظر من رفتار ما نیز درقبال‌فرضیه‌های‌متفاوت‌کمی‌مشابه‌باآنست. ازمیان تمام چیزهای متساوی قبول فرضیه‌ای‌که دارای رقبای آشکاری است مشکلتر ازقبول فرضیه‌ای است‌که دارای هیچ رقیبی نیست. اگر مانند من‌فکر می‌کنید، باید به‌این‌نتیجه رسیده باشدکه رجحان ازآن‌فرضیهٔ ماست نه‌ازآن فرضیهٔ باشه.

بخاطر داشته باشیدکه «اثبات» فرضیهٔ باشه دربرخی از نقطه نظرها مستحکم است ، حال آنکه «اثبات» فرضیهٔ ما از برخی نقطه‌نظرهای دیگر ارجحیت دارد؛ پس‌سؤالهایی‌رامطرح نکنیدکه پاسخ به‌آن غیرممکن باشد. **دنباله‌دارد**

کاوش آسمان

ابزارهای نجومی

دوربین ـ تلسکوپ ـ طیف نما ـ رادیو تلسکوپ
بالون ـ موشك ـ اقمار مصنوعی

ترجمهٔ : **محمدرکنی قاجار**

بالونها و موشکها و اقمار مصنوعیـ مانع عمده‌ای در مشاهدات نجومی جو زمین است که بطور قابل ملاحظه‌ای ازخصلت تصاویر تلسکوپی یا طیف‌نمائی می‌کاهد. بدین‌جهت که‌طبقات‌جوزمین متوالیاً گرم و سردند و لرزش‌دارند و ازگرد و خاك و ابر ومه ودوده یعنی از اکسیژن و ازت و گازکربنیك و بخارآب‌که مهمترین آنها هستند ساخته شده و نورهای‌آسمانی‌درجو باعث‌مزاحمت‌مشاهدات نجومی می‌باشند مخصوصاً درموقع بررسی منابع نورهای ضعیف. در روزانتشار همه جانبهٔ نور خورشید بوسیلهٔ ذرات هوا وگرد و خاك و بخارآب مزاحم بررسی طبقات خارجی خورشید (کروموسفر و تاج) می‌باشند و درشب نیز جو مانع جداکردن و شناخت سحابیها ازستارگان‌کم نوراست. بهمین جهت به فکرافتاده‌اند که رصدخانه‌ها را در ارتفاعات زیاد بسازند مانند رصدخانهٔ **قلهٔ جنوب** (Picdumidi) در ارتفاع ۲۸۸۷ متری و رصدخانهٔ **کلیماکس** درارتفاع ۳۳۰۰متر متعلق به دانشکدهٔ **کلرادو**.یا در بالن به مشاهده بپردازند یا بالن را با موشك به بالا بفرستند ، یا تلسکوپها را براقمار مصنوعی سوار کنند که بطور کمربندی بدور زمین حرکت می‌کند و درآیندهٔ خیلی نزدیك شاید ماه برای ارصاد کواکب و مشاهدات برگزیده شود .

نخست در۱۸۷۴ بفکرافتادندکه با بالون به مشاهدات نجومی بپردازند و منجم فرانسوی **ژان سن** به اتفاق **پلبر** در۲۲ مارس۱۸۷۴ بوسیلهٔ بالون**سیول و کروسه‌اسپینلی** به بالا صعودکردند اما برحسب نوشتهٔ روزنامهٔ (خلبانی) در ماه مه ۱۸۷۴ مقصد صعود این بوده‌است‌که بفهمد در تجزیه طیفی سدیم « دو نوار تاریکی‌که در راست و چپ خط طیفی مضاعف سدیم می‌باشند چطور می‌شوند وآیاآنها خطوط طیفی بخارآب‌اند». تجربه بوسیلهٔ طیف نما انجام‌گرفت (در ارتفاع ۷۳۰۰ متر) و آنهادانستندکه‌نوارهادرآنجاکاملا محوی‌شوند و اصل‌آنها جوی بوده است. این تجربه برطبق پیش‌بینی‌ژان سن بود و درست درآمد درصورتی‌که **پ نچی** عقیده داشت که اصل‌آنها خورشیدی است. پس‌ازآن صعود دیگری در ۲۳ و ۲۴ مارس ۱۸۷۵ انجام گرفت اما بدبختانه در دنعهٔ سوم یعنی در ۱۵آوریل که خلبان سیول واسپینگی به علت خفگی درگذشتند و تا ارتفاع ۸۰۰۰ متری صعودکرده بودند وتنها یك نفر جان سالم بدر برد و این امر مشاهدات نجومی را متوقف نمود تا چندی قبل‌که دوباره شروع شد. که‌جالبترین آنها بوسیلهٔ دکتر**شوارتس چیلد** از دانشکدهٔ **پرینستون ودلفونس** فرانسوی منجم رصدخانهٔ **مودون**انجام گرفت. دکترنامبرده پروازهای بی‌خلبان‌را برای‌این‌کاربرگزیدوقصدش عکاسی خورشید بود و بالونهای پلاستیکی را انتخاب کرد زیرا خیلی سبك بوده و زیاد متورم نمی‌شدند و می‌توانستند تا ارتفاع ۳۰۰۰۰متر بالا بروند و تلسکوپهایی‌راکه به بالا می‌فرستادند در روی سکویی قرار می‌دادند و دوربینها خود به‌خود به سمت خورشید متوجه می‌شدند البته وسائل عکاسی هم با تلسکوپ همراه بود . در سال ۱۹۵۷ سه پرواز به این

طریق انجام گرفت (در **ویسکونسین**). پروازنخست به فصد آزمایش بود و پرواز دوم بخوبی موفق شدند ولی در دفعهٔ سوم موفقیت چشمگیری نیافتند . آنها بطور رضایت بخشی از (دانه‌های برنج)یعنی برجستگیهای سطح خورشیدعکس گرفتند. درپرواز چهارم‌که در ۱۱ اوت ۱۹۵۹ انجام شد ازروی زمین به تلسکوپ دستورالعمل می‌دادند و به طور خودکار تصاویر را می‌دیدند واین امرهم‌مدیون **دلفونس**پسر**شارل دلفونس** خلبان مشهور بودکه طرز جدید ارصاد نجومی رابا بالونهای بدون خلبان پیشنهادکرد و اول دفعه یك بالون معمولی را انتخاب‌کردکه گنجایش ۱۲۰۰ مترمکعب داشت وآلات مختلف نجومی از جمله تلسکوپ بسیار سبکی راکه ۲۸/۵ کیلوگرم وزن داشت و دارای آئینهٔ‌شلجمی‌شکل‌به‌قطر ۲۸ سانتیمترو سایر ابزار الکترونیکی بود به بالا برد . اولین صعود در ۳۰ مه ۱۹۵۴ انجام شد و هدایت بالون بوسیلهٔ شارل دلفوس بود. از ۵۵۰۰ متر تا ۷۰۰۰ متری مریخ وماه را مشاهده می‌نمود بعد خورشید درحال طلوع را رصدکرد ودرارتفاعات مختلف مقدار بخارآب طبقات جورا معین نموده و برحسب آن تلسکوپ را میزان می‌کردند .

پروازهای دوم وسوم در ۲۲ نوامبر ۱۹۵۶ واول آوریل ۱۹۵۷ انجام‌گرفت ودونفرازدانشگاه‌کمبریج به‌اساسی دکتر **بلاك‌ول** و دکتر **دیوهیرست** تجربه‌ای شبیه به تجربهٔ منجم فرانسوی را آغازکردند و تلسکوپی با شیئی به قطر ۳۰سانتیمترو۹۰کیلووزن بکاربردند وهدفشان عکاسی از خورشیدبود وچهارصدکلیشه‌بدست‌آوردند ودردفعهٔ دوم ۶۰۰ کلیشه‌که بعضی ازآنها خیلی روشن است وبا شرایط عادی نمی‌توان به اینطورمشاهده نمود. حتی برجستگیهایی‌که ۲۲۵ کیلومترازهم فاصله‌دارند بخوبی می‌توان دید اماصعودعجیبتر وعالیتردر۲۲آوریل ۱۹۵۹ انجام‌گرفت با ابرازی که‌کاملا با وسائل قبلی تفاوت داشت وفن خلبانی آنهم با سایر مواقع فرق داشت. به‌این شکل‌که۱۰۵ بالون‌که هرکدام به‌قطر۳ متربودند۳تا۳تا بیکدیگربستند وبافواصل متساوی به یك‌کابل ۴۵۰متری متصل‌کردند وکابین‌آن مانندکابین‌کروی پروفسور **پیکار** بودکه تلسکوپ آن دارای آئینه‌ای به‌قطر۵۰سانتیمتر وخیلی قوی ودرخارج کابین قرار داشت ومنظورشان این‌بود که‌بدانندودرمریخ وزهره آب وجود دارد یانه تا ۱۴۰۰۰متر بالارفتند تا بالاخره طیف بخارآب را درزهره ومریخ تشخیص دادند. ومراجعت آنها هم به‌سهولت انجام گرفت زیرا با ترکاندن بعضی‌ازبالونها بوسیلهٔ فرمانهای رادیوالکتریکی پایین‌آمدن آسان می‌شد. دراین مدت دلفونس‌هم‌به‌تجربیات طیفی مشغول‌بودومعلوم‌کردکه‌مقداربخارآب‌درقسمتهای علیای جوزمین زیاداست. ودانستندکه تلسکوپ ازارتفاع ۳۵۰۰ متر به‌بالا می‌تواند خدمات مهمی انجام دهد. ازاین‌نظردلفوس در فلات **جونگ‌فروجش** که ۳۴۵۷ مترازسطح‌دریا بالاتراست درزمستان ۱۹۶۳ مشاهداتی انجام دادکه بازوجودآب را در مریخ وزهره به‌ثبوت رساند .

باید دانست‌که ازبالونها درعلم هواشناسی وفیزیك‌اشعهٔ کیهانی زیاداستفاده می‌شود.

برای‌کاوش درقسمتهای علیای‌جو موشك‌هم‌بکارمی‌رودو بدین‌وسیله‌درجهٔ حرارت وفشار ووزن‌مخصوص وترکیب‌جودر ارتفاعات مختلف وتراکم‌یون‌ها والکترنهایش‌که سهم‌مهمی در انتشارامواج رادیوالکتریك دارند وشفق قطبی وغیره اندازه گرفته وبعمل آنها پی‌می‌بردند .

موشکهای بابردزیاد معلوم کرده‌اندکه دومنطقه تشعشع خیلی شدید وجوددارد یکی درارتفاع ۲۰۰۰ کیلومتری و دیگری درارتفاع ۱۶۰۰۰ کیلومتری واین‌ها همان‌کمربند **وان‌آلن** می‌باشد. علاوه براینها بوسیلهٔ موشك می‌توان‌در خصوص گازهای بین‌کواکب به‌کمك دام الکتروستاتیك که ذرات الکتریکی را اسیرکرده ومقدار فلوی‌آنها را در روی واحد سطح درثانیه معلوم می‌کندوهمین‌طور می‌تواندبرخورد ذرات‌کیهانی را درحجم مشخصی ازفضاحساب‌کند وطیفهای بسیارروشن وعالی وتصاویرخورشید در حوزهٔ ماوراءبنفش واشعهٔ مجهول بدست آورده‌اندومی‌خواستندکه برای سیارات همین قسم عمل نمایند ولی با اشکالاتی مواجه شدند ولی در عوض در ۱۹۶۲ و۱۹۶۳ ملاحظه‌کردندکه ازیك ناحیهٔ‌مجاور مرکزکهکشان ودونقطهٔ دیگرآن اشعهٔX ساطع می‌شود .

وبالاخره **لونیك** III بوسیلهٔ دربینهایش از قسمت نامرئی ماه عکس‌برداری نمود **ورنجر** VII عکسهایی داد که معلوم می‌کردتمام سطح ماه ازدهانه‌های‌آتشفشانی‌خیلی‌کوچك پوشیده شده است و**مارینر** II اطلاعاتی از زهره داده است و **مارینر** IV آشکارکردکه درآتیهٔ خیلی نزدیك مریخ ودیگر سیارات منظومهٔ شمسی را می‌توان شناخت .

اما قمرهای مصنوعی ازموشکها بهترند زیرا مدتها می‌توانند درارتفات خیلی‌زیاد بمانند وبعلاوه قادرندکه باخود تلسکوپ وطیف‌نما برده وبه‌طرف ستارگان میزان نمایند وبا کمال دقت مانندروی زمین عمل‌کنند ودرهواشناسی مورد استعمال دارند. بطورکلی تمام‌اطراف‌کره گردش‌کرده وموقعیت توده‌های‌ابر را درجوتشخیص دهند. بعلاوه‌یك‌قمرمانند Tiros

دنباله در صفحهٔ ۳۲۴

مکانیك کوانتم چیست؟

نوشتهٔ: و. ای. ری‌دنیك

ترجمهٔ: علی‌رضا توکلی صابری

شناسنامهٔ اتم‌ها

نیلز بوهر، فیزیکدان جوان دانمارکی، دراین‌جار وجنجال کوشش نمود تا تصوراتی جدید ازکوانتم راکه باعلم طیف‌نمائی سازگارباشد، ارائه دهد. بافرارسیدن قرن‌بیستم، صدها مقاله‌راجع به‌علم طیف‌نمائی نگاشته شد. بررسی وموشکافی دراین‌علم به‌سوی تکامل راه‌بازنموده و گامهای مؤثری دررشته‌های شیمی، نجوم، فلزشناسی وسایرعلوم‌برداشت.

افتخارکشف طیف به‌نبوغ **نیوتن** منحصر می‌شود. با وجود این‌بیش ازیك قرن از عمر طیف شناسی نمی‌گذرد. در سال ۱۸۵۹، شیمیست برجستهٔ‌آلمانی، **بنسن**، آزمایش‌نیوتن رامبنی برقراردارن منشوری شیشه‌ای درمقابل اشعهٔ خورشید تکرار نموده ونور خورشید را به‌طیف تجزیه‌کرد. منتهی در این آزمایش رل خورشید را پارچهٔ‌آغشته به‌نمك طعام بازی می‌کرد. نیوتن باآزمایش‌خودنوررا به‌نواری ازرنگهای‌مختلف تجزیه‌کرد.

ولی بنسن هیچ نواری مشاهده نکرد. وقتی‌که پارچه رابه‌نمك‌طعام«کلرورسدیم»آغشته‌می‌کرد،در طیف فقط تعدادی خطوط باریك دیده می‌شد؛ یکی ازاین‌خطوط زرد روشن‌بود.

بنسن، بافیزیکدان مشهور آلمانی، **کیرشف**، که بدین موضوع علاقمند بود، آشناشد وهردو مستقیماً بدین نتیجه رسیدند که رل منشور شیشه‌ای‌عبارتست ازتجزیهٔ نور به‌طول موجهایی که آنرا تشکیل داده‌اند. نواری‌که ازطیف خورشید بدست‌آمده بود خاطرنشان می‌ساخت‌که نور مرئی تمام طول موجهارا داراست. وخطزردکه درمورد پارچهٔ‌آغشته به‌نمك طعام ظاهر می‌شد، حاکی بودکه‌این‌نمك طول موج معینی را داراست.

نمك‌طعام «کلرور سدیم» ازدوعنصر سدیم وکلر تشکیل شده‌است. پس این‌خط زرد به‌کدام‌عنصر (سدیم یاکلر) تعلق دارد؟ بررسی این‌سؤال کارآسانی بود. اگرهیدرژن راجانشین سدیم کنیم، کلرورئیدرژن، HCl بدست‌می‌آید، که وقتی‌درآب حل‌شود اسیدکلریدریك به‌ما خواهد داد. پارچه را آغشته به اسیدکلریدریك کرده‌وبه‌جای فتیله، درچراغ بنسن قرارمی‌دهیم تا طیف دو باره نمایان شود. اثری از خط زرد در طیف مشاهده نمی‌شود، درحالی‌که اجسامی که‌مرکب ازسدیم‌بودند این‌خط زرد را درطیف خودبهمراه داشتند.

برای صحت این‌آزمایش، باردیگرآن‌را تکرارمی‌کنیم. این‌بار سدیم درجای خود باقی‌مانده ودرکلرورسدیم، به‌جای کلر، OH جانشین آن می‌کنیم‌که «NaOH» سود سوزآور بدست می‌آید. خط زرد روشن به‌زودی درطیف ظاهر می‌شود. دیگرجای هیچگونه‌تردیدی نیست. تغییر محل سدیم‌بی‌اهمیت است. درواقع خط زرد وجود سدیم‌را درجسم مشخص می‌کند وبا مشاهدهٔ آن باید فوراً دریافت که جسم موردآزمایش‌سدیم بهمراه دارد. و این خط زرد موردگفتگو «شناسنامهٔ» عنصر سدیم است.

بعدها روشن گردیدکه سدیم دراین‌زمینه استثناء نیست، وهرعنصر شیمیایی طیفی مخصوص‌به‌خودرا داراست. کلیتر بگوئیم، بعضی از طیفها خیلی پیچیده‌تر از طیف سدیم بوده و ازتعداد زیادی خط تشکیل شده‌اند. ولی ترکیب ویاجسمی‌که عنصر را بهمراه دارد درخورتوجه نیست، بلکه عنصر درهر

ترکیبی که باشد طیف وابسته به‌خودرا که همیشه مشخص است، ظاهر می‌سازد، درست‌مانندعکسی که‌ازکسی گرفته‌می‌شود.

برای پیداکردن یک‌شخص درمیان جمعیتی، بادیدن شناسنامهٔ هریك، می‌توان آن‌شخص را پیدا نمود، مانند شیمیستها که برای شناختن عناصر مواد معدنی ازروشها و آزمایشهای شیمیایی‌درتجزیهٔ مواد، کمك‌می گیرند. امابهترین راه شناسایی، داشتن عکس ومشخصات است. این‌مثال‌بازگو کنندهٔ این است که چطور پژوهشها به‌کمك تجزیهٔ طیفی «طیف شناسی» صورت پذیرفتند وبه‌وجودعناصری که درمکانهای دور دست جایی که«شناسایی‌آنها»مقدورنیست- مانند عناصرمتشکلهٔ سطح خورشید، ستارگان دوردست،کوره‌های ذوب‌فلزوپلاسما توسط طیفهای مربوط به‌هریك پی‌بردند.

درمثال جمعیت، آنچه مورد نیاز است، عکسهایی از کلیهٔ اشخاص (یاشناسنامهٔ) آنهاست. امروزه متجاوز ازصد عنصر شیمیایی شناخته شده وتقریباً کلیهٔ آنها ازروی طیفهای مربوط، طبقه‌بندی شده‌اند.

چرا اجسام‌می‌درخشند؟

طیف‌شناسی نتایج درخشانی را بهمراه‌آورد، لیکن باز نقصی اساسی وجودداشت. عمارت دانش مذکور برپایهٔ نظریهٔ تابش‌حرارتی‌بناشده بود وازاینرو نقصهایی‌راکه درشالوده‌وجود داشت، تحمل می‌کرد. نقطهٔ ضعف این‌نظریه در پاسخ بدین سؤال گنجانده‌شده بودکه: چراوقتی‌اجسام گرم می‌شوند ازخود نورتابش می‌کنند؟

نورچگونه تابش می‌شود؟ ظاهراً این کار توسط اجزاء تشکیل‌دهندهٔ‌جسم- اتمها ومولکولها صورت می‌گرفت. شدت درجهٔ حرارت برسرعت‌وجنبش مولکولها، می‌افزایدو درنتیجهٔ جنبش سریع‌مولکولها، برخوردهای شدید وسریعی بین‌آنها صورت گرفته و به سرعت به‌نوسان درمی‌آیند وبالاخره‌پرتو- افشانی راآغازمی‌کنند. این‌توجیهی‌بودکه فیزیك قدیم ازتابش اجسام گرم‌می‌نمود. ولی‌چرادردرجهٔ حرارت معمولی وقتی‌که بازمولکولهای اجسام در حرکتند، نوری تابش‌نمی‌کنند؟ بعداً برای این مطلب‌تفسیرهایی پیداشد.

درسال۱۸۹۸، **تامسن**دانشمند انگلیسی اولین مدل اتم را پیشنهادکرد. راز پرتوافکنی به‌نظر حل شده می‌رسید. در این‌مدل، اتمها را ابرهایی ازبار مثبت دانست‌که درمیان‌آنها الکترونها بابارمنفی بامقادیری مکفی برای تعادل‌بار، غوطه- ورند. ابرهای مثبت الکترونها را جذب کرده و حرکت آنها راکند می‌کند. این‌مدل بصیرت مستقیمی دربارهٔ وضع قرار گرفتن الکترونها درداخل اتم به‌ما‌می‌دهد.

امّا بنابر گفته فیزیك کلاسیك، ذرات باردار، وقتی‌که حرکاتشان‌کند می‌شود باید تشعشع‌الکترومانیتکی داشته‌باشند. ظاهراً، این‌تشعشع، نوری است‌که با گرم شدن اجسام، تابش می‌شود. درنظر اول، این‌توجیه کاملا متقاعدکننده بود. هرچه جسم بیشتر گرم‌شود، برسرعت الکترونها در اتمها افزوده می‌شود ودرنتیجهٔ جنبشهای سریع، ابرهای با بار مثبت جذب بیشتری انجام‌می‌دهند وقاعدتاً ازسرعت‌حرکت الکترونها کاسته شده و روشنائی خیره‌کننده تری را باعث می‌گردد. موضوع اخیر درصورتی صادق است‌که‌الکترونها درهنگام پرتوافکنی، انرژی‌ای ازدست ندهند. لیکن وقتی‌که ازسرعت آنها کاسته می‌شود انرژی از دست‌داده وبایستی درکسری ازثانیه‌به‌داخل ابرهای مثبت (بابار مثبت) فروروند.

اشتباه‌درکجاست- چندسال بعدروشن گردیدکه مدل‌اتمی تامسون درقالبهای دیگر نمی‌تواند مورد استفاده قرارگیرد و ازحل‌مسائل زیادی دراین‌زمینه عاجز است. مثلا چراالکترون به‌راحتی به‌داخل ابرهای مثبت فرورفته ولی با آنها ترکیب نمی شود تا بار مجموع خنثی شود؟ جوابهایی راکه این‌مدل بدست می‌داد دراغلب حالات باآزمایش وفق نمی‌داد.

درسال۱۹۱۱، **راترفورد**، دانشمند فقید انگلیسی‌مدل جدیدی از اتم را پیشنهاد نمود. او اتمهای اجسام‌مختلف را باذرات اشعهٔ آلفای حاصله از اجسام رادیواکتیو، که‌به‌تازگی کشف شده بود بمباران‌نمود. این‌ذرات دارای‌بارمثبت‌بودند.

راترفورد باسطالعه‌برروی‌پراکندگی ذرات آلفا براتمها به‌نتایجی مهم دست‌یافت. د پراکندگی‌ذرات آلفا، دفع ذرات که‌قبلا توسط ابرهای مثبت اتم تامسون صورت می‌گرفت گوئی دراینجا توسط قسمت بسیار ریزی از اتم که درجایی نزدیك‌مرکزمتمرکز شده بود، انجام پذیرفته‌وظاهراً کلیهٔ‌بارهای مثبت اتم نیز دراین‌قسمت ریز مرکزی جمع‌شده بودند.

راترفورد این‌قسمت از اتم را محور«هسته» نام‌نهاد. بنابراین باید پرسیدکه دراین‌مدل الکترونها درکجاقراردارند؟ دراینکه الکترونها بانیروهایی‌الکتریکی جاذب، به‌بارهای‌مثبت دریك اتم بسته شده‌بودند جای گفتگو نبود. اما ازآنجایی‌که الکترونها در فاصلهٔ معینی ازهسته‌قراردارند، می‌بایست‌نیروی دیگری موجود باشدکه موازنه‌ای بین نیروی الکتریکی‌حاصله ازجذب متقابل الکترونها وهسته، برقرارسازد.

روشن‌بودکه این‌نیرو درتمام‌مدت موثراست. اتمهابرای مدت‌زمان قابل ملاحظه‌ای دوام دارند، وبنابراین‌نیروی‌حدس زده شده باید مشابه نیروی الکتریکی جذب بین الکترونها و هسته «نیروی جاذبه» پایدار باقی بماند.

چنانچه الکترونها به‌دور هستهٔ اتمی خودگردش می‌کردند آنگاه منطقی بودکه این نیرو را نیروی گریز ازمرکز بدانیم.

این نیروی نگهدارندهٔ الکترونها قابل محاسبه بود و دریافتندکه این نیرو می‌تواند ازسقوط الکترونهـا به‌هسته جلوگیری کند. محاسبات بعدی نشان‌دادکه‌شرط گردش‌الکترونها به دور هسته باسرعتهایی برابر هـزاران‌کیلومتر درثانیه در فواصلی برابر صدها میلیونیم‌سانتیمتر از هسته، وجود یك‌چنین نیرویی می‌باشد.

این‌مدل اتم راذرفورد بود. توپی‌که به انتهای طنابی بسته شده وحرکت دورانی‌داشت، بطور غیرمستقیم تصورثقل سیارات را درذهن نیوتن‌پدیدآورد؛ مشابه همین‌عقیده نیزراذرفورد را به‌اندیشه‌ای نبوغ‌آمیز وکاملا صحیح (آنطورکه‌بعداً خواهیم‌دید) رهبری نمودواین‌تصور ساختمان سیاره‌ای درمدل اتم بود.

حال بازمی‌گردیم‌به‌مسئلهٔ انتشار نور ازاجسام وجواب این‌سؤال را درمدل اتم راذرفـورد جستجو می‌کنیـم. حـرکت الکترونها به‌دور هسته، حرکتی تندشونده‌است (الکترونها در مدارات بسته‌ای گردش می‌کنند) واز این‌رو بایدتشعش الکترومانیتکی وجود داشته‌باشد. قوانین‌کلاسیك بامـدل اتمهـای تامسون وراذرفورد وفق می‌دادند. لیکن متأسفانه، موفقیت هردونیز یکی‌بود. درتابش‌نور، الکترون انرژی‌خودرا ازدست داده وازسرعتش درکمتر از میلیونیم ثانیه‌کاسته شده و ناگزیر به‌سمت هسته‌سقوط می‌کنند. مشابه این‌عمل نیز دردنیای‌عینی صورت می‌پذیرد. سقوط الکترون به‌هسته مـانند فرودآمـدن سفینه‌ای است‌که وقتی به‌جو زمین می‌رسد ازسرعت آن کاسته شده وبه‌زمین سقوط کند. سرنوشت الکترون نیز مانند سفینهٔ کذائی است. اما اتم درچنین شرایطی خیلی‌زود نابودمی‌شود.

لیکن اتمها دوام دارند. الکترونهـا نیز نباید انرژی خودرا ازدست‌بدهند وهمچنین نوری تابش‌نمی‌کنند. این‌اجسام هستندکه وقتی گرم می‌شوند پرتوافشانی می‌کنند!

زندگی‌نامهٔ اتم: نوشتهٔ نیلز بوهر

فیزیك‌کلاسیك دوباره به‌بن‌بست می‌رسد. وبار دیگر از توجیه پدیده‌ای عاجز می‌ماند. این‌پدیده، نـورافشانی اجسام گرم‌بود. همچنین این‌فیزیـك نمـی‌توانست وجـود اسپکتر را ترجمان گردد.

پارچهٔ آغشته به‌محلول کلرورسدیم را بخاطر بیاوریم. درطیف این‌نمك فقط خط زردی دیده می‌شد، واین‌می‌رساندکـه تابش اتمهای آن‌فقط دارای یك‌طول موج است.

حتی اگر فرض‌کنیم‌که این‌خط زرد تـوسط‌کاهش سرعت الکترون دراتم پدیدآمده‌باشد، بازدرمقابل معمایی ناگشودنی قرارداریم. بنابراین قوانین فیزیك‌کلاسیك یك‌چنین‌الکترونـی بایدطیفی پیوسته ونوارمانند باکلیهٔ طول‌موجهاتـابش نمایـد. همچنین نبایستی اختلافی بین‌طیف یك‌الکترون وطیف خورشید وجود داشته‌باشد. ولی درطیف الکترون یك خـط زرد بیشتر مشاهده نمی‌شد.

به‌نظربوهر اشتباهی‌رخ داده‌است. امااین اشتباه‌چیست؟ شایدگناه ازمدل اتم راذرفورد بود؟ نه، خیلی زودبودکه این مدل‌را کناربگذاریم. و ارنست‌راذرفورد، معلم بوهر، نیزخود براین‌عقیده بود. شایدهم می‌بایست راهی برای اصلاح این‌مدل اندیشید بطوری‌که الکترون دراین مدل بتواند بـه دورهسته گردش‌کرده وازخودنور تابش نماید وهیچگاه بـه روی هسته سقوط ننماید.

سال ۱۹۱۲ فرا رسید، نسیمهـای روح‌بخشی درافکار فیزیکدانهاشروع به‌وزیدن‌نمودکه‌خالق‌آن‌فوتونهای **اینشتین** بودند. وفقط سه‌سال قبل‌ازارائه‌فوتونها، اینشتین‌نظریهٔ‌نسبیت را تکمیل‌نمودـکه این نیز نسیم جانبخش دیگری بود. قاعدتاً لبهٔ تیز شمشیر انتقاد متوجه فیزیك‌کلاسیك‌بود وکلیهٔ‌حملات درجبههٔ‌آن صورت می‌گرفت. ولی‌این‌حملات سبب‌نمی‌شدکـه فیـزیکـدانهای جوان دست ازتلاش‌بردارند. بلکـه آنهـارا تحریك‌نموده وبرشهامت‌آنها دربرابرروش‌فکریشان، می‌افزود.

بوهر مدتها برروی حل این‌مشکل وقت صرف نمود تا بتواند نتایجی بیرون‌کشدکه بتوان آنها را با واقعیـات محك زد، وسرانجام راهی‌یافت. چرا الکترون دراتم بطور پیوسته ازخود نور تابش می‌کند؟ آیا بخاطر اینست‌که همیشه‌باسرعتی تندشونده درحرکت است؟ نه، بهتر است‌از این‌جواب چشم‌پوشی‌کرده وبگوئیم‌که احتیاجی نیست الکترون موجوددراتم حتی درحرکتهای تندشونده نیز ازخود نوری تابش‌کند.

این‌بارنیز دربرابر خط فکری جدید رادعی وجوددارد. زیرا اگر الکترون ازخودنـوری تابش‌نکند ودرروی‌جاده‌های مشخصی «مدارات» به‌دورهسته بچرخد وحتی نتواند از ایـن مدارات خارج شود، پس‌می‌تواند برای هرمدتی‌که بخواهددر اتم باقی بماند.

اما فیزیك‌کلاسیك نمی‌توانست ازچنین ایده‌ای پشتیبانی کند، زیرا این‌موضوع از هیچ نظریه‌ای متابعت نمی‌کرد. خود بوهرهم نتوانست آنرا اثبات نماید وبناچار باکمال فروتنی‌آن را یك‌قیاس منطقی نامید. بوهر، هرگز قادرنبودکه در چهارچوب نظریهٔ خود آن‌را بـه‌اثبات رساند واثبـات آن دردوسه دههٔ بعد انجام پذیرفت وکاملا غیر منتظر بود، که بعداًدربارهٔ آن گفتگو خواهیم‌کرد.

آیا چندین‌مدارممکنه وجوددارد‌که یك‌الکترون‌می‌تواند

دنباله در صفحهٔ ۳۸۳

محاسبات تقریبی

نوشتهٔ : محمد رکنی قاجار

فصل دوم - خطای نسبی

تعریف - خطای نسبی یک‌عدد تقریبی نسبت خطای مطلق‌آن عدد است به‌خود عدد صحیح آن.

اگر e خطای مطلق مقدار تقریبی عدد N باشدوخطای نسبی‌آنرا به E نمایش دهیم، برحسب تعریف $E=\frac{e}{N}$، مثلا خطای نسبی۹۹۹۰که مقدار تقریبی ۱۰۰۰۰است عبارتست‌از

$$\frac{۱۰}{۱۰۰۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

ازفرمول فوق نتیجه می‌شودکه $e=N.E$، پس خطای مطلق مساوی است با حاصل‌ضرب خطای نسبی درعددصحیح.

درمحاسبهٔ کمیات یانتیجهٔ یك محاسبه مهمتراز همه چیز دانستن خطای نسبی است. زیرا خطای نسبی درجهٔ صحت‌یك عدد تقریبی را مشخص می‌کند. مثلا درسنجش دوطول که‌یکی ۱۰۰۰ مترودیگری ۱۰۰۰۰ باشد اگرمطلقاً یك‌متر بخطارفته باشیم، درهرکدام‌ازدوعمل‌خطای نسبی مقادیر تقریبی مربوطه عبارتند از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ و $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ ازنتیجهٔ عمل‌دوم معلوم می‌شود که درجهٔ صحت آن بیشتر از اولی است زیرا درمحاسبهٔ اولی درهرمتریك میلیمتر ودرمحاسبهٔ دومی درهرمتر $\frac{۱}{۱۰}$ میلیمتر خطاکرده‌ایم.

اغلب در محاسبات، خطای‌نسبی برای ما کاملاً معلوم نیست، بلکه فقط حدی ازاین خطا مشخص می‌باشدکه عدد از آن نمی‌تواند تجاوزکندوغالباً این حد یك‌مرتبهٔ اعشاری‌است. درمحاسبات خطای نسبی بازهمان دومسئله که‌قبلا ذکر نمودیم پیش می‌آید؛

۱ - باچه خطای نسبی ممکن است نتیجهٔ یك محاسبه بدست‌آید. درصورتی‌که خطای نسبی هریك از آن اعداد داده شده است.

۲- باید خطای نسبی هر یك از اعداد را چه‌قدر فرض کرده تااینکه خطای نسبی نتیجه مساوی مقدار مفروضی‌باشد.

قضایای اصلی

محاسبهٔ خطای نسبی متکی به‌قضایای ذیل است:

قضیهٔ ۱- اگر عددی با m رقم صحیح فرض شود خطای نسبی‌آن‌کوچکتر است ازکسری‌که صورت آن واحد و مخرجش اولین رقم‌سمت چپ عدد مفروض‌که سمت راست‌آن $m-۱$ صفرداشته باشد.

مثلا عدد ۳/۱۴۱۵۹۲که درآن ۵ رقمش را بگیریم مقدار تقریبی‌آن ۳/۱۴۱۵ است وخطای نسبی‌کوچکتراست‌از $\frac{۱}{۳۰۰۰۰}$.

زیرا خطای مطلق مقدار تقریبی ۳/۱۴۱۵ مساوی ۰/۰۰۰۰۹۲ است پس‌خطای نسبی عبارتست از:

$$E=\frac{۰/۰۰۰۰۹۲}{۳/۱۴۱۵۹۲}=$$

$$=\frac{۹۲}{۳۱۴۱۵۹۲}<\frac{۱۰۰}{۳۱۴۱۵۹۲}<\frac{۱۰۰}{۳۰۰۰۰۰۰}$$

$$E<\frac{۱}{۳۰۰۰۰}=\frac{۱}{۳\times ۱۰^{-۴}}$$

بطور عموم اگر درسمت چپ عدد N، m رقم صحیح فرض نمائیم‌که اولین‌آنها a باشد پس $E<\frac{۱}{a\times ۱۰^{m-۱}}$

تبصره - اگر مقداری از ارقام قسمت صحیح‌یك‌عدد اعشاری‌رااختیارکرده وطرف راست‌آن‌به‌ازاء ارقام‌محذوف‌صفر قرار دهیم مثلا اگراز عدد ۸۷۶۵۹۲/۳۵ چهار رقم اول اختیار کرده و بجای بقیه صفر قرار دهیم می‌شود ۸۷۶۵۰۰

که خطای نسبی آن از $\frac{1}{8000}$ کمتر است.

قضیهٔ ۲ـ اگر عددی که دارای m رقم صحیح است اختیار نمائیم ، خطای نسبی همیشه کمتر است از کسری که صورتش واحد و مخرجش 10^{m-1} باشد. برحسب قضیهٔ قبل $E=\frac{1}{a\times 10^{m-1}}$ والبته $E<\frac{1}{10^{m-1}}$. عکس قضیه همیشه صحیح نیست.

قضیهٔ ۳ـ اگر خطای نسبی یك عدد تقریبی کوچکتر از کسری که صورت آن واحد ومخرجش 10^m است باشد آن عدد بطور عموم m رقم اولش صحیح است. مثلاً ۸۳۵۷۶ که مقدار تقریبی عدد N است وخطای نسبی آن هم کوچکتر است از $\frac{1}{10^4}$ می گوئیم که ۴ رقم اول این عدد صحیح است یعنی ۸۳۵۷ و ازطرف دیگر $E<\frac{1}{10^4}$ و $N<100000$ ومی‌دانیم که $E.N=e$ پس $e<100000\times\frac{1}{10000}$ ویا $e<10$.

قضیهٔ ۴ـ اگر اولین رقم سمت چپ یك عدد تقریبی a باشد وخطای نسبی آن هم کوچکتر باشد از $\frac{1}{(a+1)\times 10^{m-1}}$ m رقم اول چنین عددی صحیح است . فرض می‌کنیم که ۸۳۵۷۶ مقدار تقریبی N باشد با خطای نسبی کمتر از $\frac{1}{(8+1)\times 10^3}=\frac{1}{9000}$ گوئیم که ۴ رقم اول ۸۳۵۷۶ صحیح است زیرا $E<\frac{1}{9000}$ و $N<90000$ بنابر این $e<\frac{1}{9000}\times 90000$ و یا $e<10$ یعنی چهار رقم اول ۸۳۵۷۶ صحیح است.

جمع و تفریق

خطای نسبی مجموع چند عدد تقریبی ازبزرگترین خطای نسبی آن اعداد کمتر است.

اگر e_1 و e_2 و e_3 خطاهای مطلق مقادیر تقریبی اعداد N_1 و N_2 و N_3 باشند خطاهای نسبی مربوطه عبارتند از: $\frac{e_1}{N_1}$ و $\frac{e_2}{N_2}$ و $\frac{e_3}{N_3}$ ....ووقتی که مقادیر تقریبی همه دریك جهت باشند خطای نسبی مجموع $\frac{e_1+e_2+e_3}{N_1+N_2+N_3}$ خواهد بود. امابنابر قضیهٔ واسطه، این مقدار کوچکتر است ازبزرگترین کسرهای $\frac{e_1}{N_1}$ و $\frac{e_2}{N_2}$ و $\frac{e_3}{N_3}$ درنتیجه قضیه محقق می‌شود.

به کمك این قضیه می‌توان مسائل راجع به جمع و تفریق را حل کرد.

مسئلهٔ ۱ـ با چه خطای نسبی می‌توان مجموع چندین عدد تقریبی را بدست آورد درصورتی که خطاهای نسبی هریك از اعداد داده شده باشد. مثلاً اعداد تقریبی ۲۷/۸۹۵۲ و ۰/۴۶۷۳ و ۲۹۴/۵۳۸۶ که به ترتیب خطاهای نسبی هرکدام ۰/۰۰۰۱ و ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۰۰۱ است داده شده ،مطلوبست خطای نسبی حاصل جمع.

می‌دانیم که خطای حاصل جمع این اعداد از بزرگترین خطای نسبی آن اعداد کوچکتر است پس نتیجه تا ۰/۰۰۱ تقریب به عدد نزدیك است. قضیهٔ فوق دربارهٔ تفاضل دوعدد هم صادق است.

مسئلهٔ ۲ـ باچه خطای نسبی باید اعداد مفروضی را فرض نمود برای اینکه مجموع یا تفاضل آنها باتقریب معین مفروضی بدست آید. این مسئله مانند مسئلهٔ نظیر ان در خطای مطلق حل می‌شود.

ضرب

قضیه ـ خطای نسبی حاصل ضرب دو عامل که یکی صحیح و دیگری تقریبی باشد مساوی است با خطای نسبی عدد تقریبی.

فرض می‌کنیم که N_2 صحیح و $(N_1\pm e_1)$ مقدار تقریبی N_1 باشد ، می‌خواهیم نشان دهیم که خطای حاصل ضرب $N_2(N_1\pm e_1)$ مساوی $\frac{e_1}{N_1}$ است زیرا:

خطای مطلق دوعدد که یکی ازآنها صحیح و دیگری تقریبی باشد مساوی است با حاصل ضرب عدد صحیح درخطای مطلق عدد دیگر پس خطای $N_2(N_1\pm e_1)$ مساوی N_2e_1 است وازآنجا برحسب تعریف خطای نسبی حاصل ضرب عبارتست از $\frac{e_1}{N_1}=\frac{N_2e_1}{N_1N_2}$. بطورکلی خطای نسبی حاصل ضرب چندین عامل که یکی از آنها فقط تقریبی باشد مساوی است با خطای نسبی آن عدد تقریبی.

قضیهٔ ۲ـ خطای نسبی دوعدد تقریبی متحدالجهت مساوی است با مجموع خطاهای نسبی عوامل تقریبی بعلاوه یا منهای حاصل ضرب خطاها.

۱ـ هردوعامل تقریبی اضافی اند:

$$(N_1+e_1)(N_2+e_2)-N_1N_2=e_1N_2+e_2N_1+e_1e_2$$

و خطای نسبی حاصل ضرب چنین است:

$$\frac{e_1N_2+e_2N_1+e_1e_2}{N_1N_2}=\frac{e_1}{N_1}+\frac{e_2}{N_2}+\frac{e_1}{N_1}\times\frac{e_2}{N_2}$$

۲ـ هردوعامل نقصانی اند:

$$N_1N_2-(N_1-e_1)(N_2-e_2)=$$
$$=e_1N_2+e_2N_1-e_1e_2$$

و خطای نسبی حاصل‌ضرب:

$$\frac{e_1}{N_1}+\frac{e_2}{N_2}-\frac{e_1}{N_1}\times\frac{e_2}{N_2}$$

قضیهٔ ۳ـ خطای نسبی حاصل‌ضرب دو عامل تقریبی مختلف‌الجهت مساوی تفاضل خطاهای نسبی دو عامل است منهای حاصل‌ضرب خطاها.

اگر مانند قضایای قبل عمل نمائیم بدست می‌آید:

$$\frac{e_2}{N_2}-\frac{e_1}{N_1}-\frac{e_1}{N_1}\times\frac{e_2}{N_2}$$

$$\frac{e_1}{N_1}-\frac{e_2}{N_2}-\frac{e_1}{N_1}\times\frac{e_2}{N_2}$$

حاصل‌ضرب $\frac{e_1}{N_1}\times\frac{e_2}{N_2}$ نسبت به‌هریك از عوامل $\frac{e_1}{N_1}$ و $\frac{e_2}{N_2}$ خیلی کوچك است و درعمل ازآن صرف‌نظر می‌نمایند و ازآنجا قضیهٔ ذیل بدست می‌آید:

قضیهٔ ۴ـ خطای نسبی حاصل‌ضرب دو عدد تقریبی متحدالجهت یامختلف‌الجهت محسوساً مساوی مجموع ویاتفاضل خطاهای نسبی آن عوامل است. و بطور عموم خطای نسبی حاصل ضرب چندین عامل‌تقریبی‌متحدالجهت محسوساً مساوی مجموع خطاهای نسبی آن‌عوامل‌است.

مسئلهٔ ۱ـ دوعدد تقریبی با m رقم صحیح داده شده حاصل‌ضرب‌آنها دارای چندرقم صحیح خواهد بود؟

اگر a و a′ اولین ارقام سمت چپ آن دو عدد باشند خطاهای نسبی آن اعداد کمترند از $\frac{1}{a\times 10^{m-1}}$ و $\frac{1}{a'\times 10^{m-1}}$ درنتیجه‌خطای نسبی‌حاصل‌ضرب‌کمتراست‌از:

$$E<\frac{1}{10^{m-1}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)$$

دراینجا ۳ حالت قابل ملاحظه است:

۱ـ اگر $a>1$ و $a'>1$ دراین‌صورت $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\leqslant 1$

در نتیجه $E<\frac{1}{10^{m-1}}$ وحاصل‌ضرب دارای $m-1$ رقم صحیح خواهد بود.

۲ـ اگر $a=1$ و $a'\geqslant 2$ خطای نسبی حاصل‌ضرب چنین است: $E<\frac{1}{10^{m-1}}+\frac{1}{2\times 10^{m-1}}$ و یا $E<\frac{3}{2\times 10^{m-1}}$ درنتیجه $E<\frac{1}{\frac{20}{3}10^{m-2}}$.

۳ـ اگر $a=a'=1$ باشد $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=2$ در نتیجه

$E<\frac{2}{10^{m-1}}=\frac{1}{5\times 10^{m-2}}$ به‌طریق‌اولی $E<\frac{1}{10^{m-2}}$

حاصل‌ضرب دارای $m-2$ رقم صحیح است.

درقسمت دوم اگر اولین رقم حاصل‌ضرب‌کوچکتراز ۶ باشد $m-1$ رقم آن صحیح است و اگر بزرگتریا مساوی ۶ باشد $m-2$ رقم از حاصل‌ضرب صحیح خواهد بود.

نتیجه ـ درهرحال حاصل‌ضرب دارای $m-2$ رقم صحیح می‌باشد.

تبصره ـ اگر عدهٔ ارقام صحیح عوامل مختلف باشد هرحالت مخصوص باید جداگانه مورد امتحان واقع شود.

مثال ۱ـ اعداد ۳۲/۹۶ و ۴/۸۲۵ هرکدام دارای۴ رقم صحیحند. برحسب قضیهٔ بالا حاصل‌ضرب دارای ۳ رقم صحیح است وتقریب آن‌کمتر است از $\frac{1}{1000}$ یعنی‌ازحاصل‌ضرب

$$32/96\times 4/825=159/03200$$

فقط ۳ رقم ۱۵۹ مقدار تقریبی حاصل‌ضرب است تا کمتر از ۰/۰۰۱ تقریب.

مثال ۲ـ اعداد ۱۴/۵۳ و ۱۷۲/۹ هرکدام دارای ۴رقم‌صحیح‌اند. پس‌حاصل‌ضرب‌آنها دارای دو رقم صحیح‌است یعنی خطای نسبی حاصل‌ضرب‌کمتراز ۰/۰۱ است:

$$172/9\times 14/53=2512/237$$

این حاصل‌ضرب دارای دو رقم صحیح است و اگرآنرا۲۵۰۰ فرض نمائیم خطای نسبی‌کمتر از ۰/۰۱ خواهدبود.

مثال ۳ـ اعداد ۲/۳۲ و ۴۲۵۶ و ۳۷۲/۵۲ دارای ۳ و ۴ و ۵ رقم صحیح‌اند و ارقام صحیح حاصل‌ضرب آنها بنابه‌قضیهٔ فوق‌کمتر است از:

$$\frac{1}{2\times 10^{2}}+\frac{1}{4\times 10^{3}}+\frac{1}{3\times 10^{4}}=$$

$$=\frac{1}{10^{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{40}+\frac{1}{300}\right)$$

و چون مجموع داخل پرانتز کمتراز واحد است پس خطای نسبی حاصل‌ضرب از ۰/۰۱ کمتراست و دو رقم حاصل‌ضرب صحیح است.

مسئلهٔ ۲ـ دو عدد مفروض‌اند. چند رقم صحیح هریك دارا باشند تااینکه حاصل‌ضرب‌آنها دارای m رقم‌صحیح باشد.

دنباله در صفحهٔ ۳۶۴

درسی از فیزیک و مکانیک

حرکت در دایره

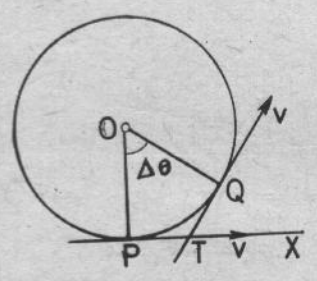
هوشنگ شریفزاده

دراین‌مقاله حرکت نقطه‌ای مادی راکه باسرعت یکنواخت حول‌دایره‌ای‌حرکت می‌کند مورد توجه‌قرار خواهیم‌داد. نیز به‌نقاطی‌که مربوط به‌حرکت نقطه‌ای مادی است‌که‌تحت اثر جاذبهٔ زمین حول دایره‌ای قائم حرکت می‌کند، توجه‌خواهیم‌کرد.

بدیهی است‌که اگر نقطه‌ای مادی حول دایره‌ای حرکت‌کند، تندی‌آن، اگر ازنظر بزرگی تغییر نکند، از نظر جهت دائماً درتغییراست، وبنابراین شتاب وجود دارد . اگر بزرگی تندی ثابت بماند ، سرعت حرکت یکنواخت نامیده می‌شود ، و نشان خواهیم‌دادکه جهت، شتاب حرکت متوجهٔ مرکز دایره است. اما اگر سرعت متغیر باشد، شتاب درهرلحظه دارای مؤلفه‌ای درامتداد مماس بردایره و درعین‌حال‌مؤلفه‌ای‌متوجه به‌مرکز دایره‌دارد. دراین مقاله هرجا، بردارسرعت منظور بوده است اصطلاح تندی بکار برده شده‌است .

اگر نقطه‌ای مادی حول دایره‌ای به‌شعاع r ، با سرعت یکنواخت v حرکت کند، شتاب آن $\frac{v^2}{r}$ ومتوجه‌مرکزدایره‌است.

فرض می‌کنیم O مرکز دایره (شکل ۱) و P وضع نقطهٔ مادی در یک لحظهٔ دلخواه، و Q وضع آن پس‌ازمدت‌زمان‌کوتاهی برابر $\triangle t$ باشد.



شکل ۱

فرض می‌کنیم که زاویهٔ کوچک POQ برابر $\triangle\theta$ ، و قوس کوچک PQ برابر $\triangle s$ باشد. تندی P درامتداد مماس PT برابر v است و تندی Q در امتداد مماس TQ برابر v است و زاویهٔ $QTX = \triangle\theta$.

اگر تندی Q را درامتدادهای موازی وعمود بر PX تجزیه کنیم، مؤلفه‌های آن عبارت خواهند بود از $v\cos\triangle\theta$ به‌موازات PX و $v\sin\triangle\theta$ عمودبر PX.

تغییر تندی به‌موازات مماس PX برابراست با:

$v\cos\triangle\theta - v$

بنابراین شتاب متوسط به موازات PX در فاصلهٔ زمانی $\triangle t$ برابراست با $\frac{v\cos\triangle\theta - v}{\triangle t}$ ، ودرنتیجه شتاب درامتدادمماس PX برابر است با حدعبارت فوق‌هنگامی‌که $\triangle t$ به‌سمت‌صفر میل کند، یعنی:

$$\lim\frac{v(\cos\triangle\theta - 1)}{\triangle t} = \lim\frac{-2v\sin^2\frac{\triangle\theta}{2}}{\triangle t} =$$

$$= \lim\left\{-v\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\triangle\theta}{\frac{1}{2}\triangle\theta}\cdot\frac{\triangle\theta}{\triangle t}\cdot\sin\frac{1}{2}\triangle\theta\right\} = 0$$

تغییر تندی به‌موازات‌قائم PO برابراست با $v\sin\triangle\theta$ وبنابراین شتاب متوسط به‌موازات قائم PO در فاصلهٔ زمانی $\triangle t$ برابر است با $\frac{v\sin\triangle\theta}{\triangle t}$

بنابراین شتاب P درامتداد PO برابراست با :

$$\lim\frac{v\sin\triangle\theta}{\triangle t} = \lim\frac{v\sin\triangle\theta}{\triangle\theta}\cdot\frac{\triangle\theta}{\triangle t} = v\frac{d\theta}{dt}$$

بنابراین شتاب درهر نقطهٔ‌دلخواه ازدایره متوجه O وبه‌بزرگی

$v\frac{d\theta}{dt}$ است .

اما $\frac{d\theta}{dt}$ تندی زاویه‌ای P دردایره است وبنابراین اگر آن را به ω نمایش دهیم، شتاب برابر $v\omega$ ومتوجه مرکزاست.

چون $v = r\omega$ است، شتاب راممکن است به‌صورت زیر نوشت :

$$r\omega^2 \quad \text{یا} \quad \frac{v^2}{r}$$

اگر جرم نقطه‌ای مادی برابر m باشد، نیروی‌لازم برای‌بوجودآوردن‌چنین‌شتابی‌برابر $\frac{mv^2}{r}$ یا $m\omega^2 r$ خواهدبود ، وباید دائماً به‌سمت مرکز دایره اعمال شود.

این‌نیرو را ممکن است به‌طرق مختلف فراهم ساخت ، مثلا ممکن است نقطهٔ مادی توسط نخ انعطاف ناپذیری به O مربوط باشد، یااینکه ازسیم‌صیقلی دایره‌ای‌شکلی مانند یکدانه تسبیح گذرانده شده باشد. درحالت اول،کشش نخ ودر حالت دوم عکس‌العمل سیم نیروی متمایل به مرکز لازم را فراهم می‌کند .

باید دقیقاًبه‌خاطر داشت‌که گرچه (درحالتی‌که نقطهٔ‌مادی درانتهای یاه‌نخ‌حول‌دایره‌ای می‌چرخد) نخ‌درحالت‌کشش‌است، نقطهٔ مادی تمایلی ندارد که در امتداد شعاع دایره **به‌طرف خارج** حرکت‌کند. اگر نخ پاره‌شود، نقطهٔ مادی در امتداد مماس بردایره‌به‌حرکت خود ادامه‌خواهد داد ومسیر بعدی‌آن مانند مسیر پرتابهٔ آزاد خواهد بود.

درحالتی‌که قطار، مسیری‌منحنی طی می‌کند نیروی‌لازم به‌طرف داخل‌انحنا بوسیلهٔ فشار ریل خارجی برلبه‌های‌چرخ‌های‌قطار تأمین می‌شود. درمورد اتومبیل، نیروی لازم‌بوسیلهٔ اصطکاك بین‌چرخها وزمین تأمین می‌شود.درهردوحالت با بالا بردن سطحی‌که‌زیرچرخهای خارجی است می‌توان قسمتی‌یا تمام نیروی‌لازم را به‌طرف داخل بوسیلهٔ وزن قطار یااتومبیل تأمین‌کرد. دراین‌صورت چرخهای خارجی بالاتر ازچرخهای داخلی است. این‌مورد را بعداً مورد توجه قرارخواهیم داد .

مثال۱ـ جسمی به‌جرم 5kg باسرعت 2m/s که‌دریك صفحهٔ صیقلی افقی حرکت می‌کند بوسیلهٔ نخی به‌طول 1m به نقطهٔ ثابتی متصل شده‌است. کشش نخ‌را تعیین‌کنید.

حل‌ـ دراینجا $v = 2m/s$ ، $r = 1m$. شتاب‌حرکت‌به طرف نقطهٔ ثابت برابر است‌با $\frac{4}{1} = 4m/s^2$ بنابراین کشش نخ برابر است با $5 \times 4 = 20N$ یا $\frac{20}{9/8} = 2/04\ kgf$

یادداشت‌ـ نیرو وقتی‌که بافرمول $\frac{mv^2}{r}$ یا $m\omega^2 r$ داده می‌شود همیشه برحسب **واحدهای** مطلق است، یعنی در سلسلهٔ C.G.S برحسب دین ودرسلسلهٔ SI یا M.K.S برحسب نیوتن ودرسلسلهٔ F.P.S برحسب پوندال است.

مثال۲ـ نقطه‌ای مادی به جرم 4/9 kg روی میزی صیقلی واقع است وبوسیلهٔ نخی به‌طول 1/2m به‌نقطهٔ‌ثابتی‌از میز متصل است ودرهردقیقه ۳۰۰ دورمی‌زند. کشش نخ را تعیین‌کنید .

حل‌ـ

۵ دور درثانیه = ۳۰۰دور دردقیقه

رادیان برثانیه $= 10\pi$ = تندی‌زاویه‌ای ∴

کشش نخ نیوتن $mr\omega^2 = 4/9 \times 1/2 \times 10^2\pi^2$

تقریباً $= 600kgf$ = کیلوگرم‌نیرو $= 60\pi^2$

مثال۳ـ لوکوموتیوی به‌جرم ۸۱ تن قوسی‌ازدایره به‌شعاع 240m طی‌می‌کند. سرعت‌حرکت 48km/h است . ازطرف ریلها چه‌نیرویی باید به‌طرف مرکز دایره وارد شود؟

حل‌ـ

$$48\ km/h = \frac{40}{3} m/s$$

$$81t = 81000kg$$

∴ نیرو $= 81000 \times \left(\frac{40}{3}\right)^2 \times \frac{1}{240}$

تقریباً $= 6122\ kgf$ = نیوتن $= 60000$

مثال۴ـ نقطه‌ای مادی بوسیلهٔ نخی‌کشسان به‌طول۲۵ سانتیمتر به‌نقطهٔ ثابتی ازیك میز افقی وصیقلی متصل است، و برآن‌میز حول نقطهٔ ثابت مذکور با سرعت ثابت دایره‌می‌زند. اگر ضریب‌کشسانی نخ برابر وزن نقطهٔ مادی باشد ونقطهٔ مادی درهردقیقه ۲۰ دوربزند، نشان‌دهیم‌که افزایش طول نخ در حدود 3cm است ($g = 9/8m/s^2$ و $\pi^2 = 9/9$ اختیار شود).

حل‌ـ فرض می‌کنیم جرم نقطهٔ مادی برابر m کیلوگرم باشد ؛

$\frac{1}{3}$ دور درثانیه = ۲۰ دور دردقیقه

بنابراین تندی زاویه‌ای برابر $\frac{2\pi}{3}$ رادیان برثانیه‌است.

اگر طول نخ برابر x متر باشد ، کشش $(mr\omega^2)$ برابراست با: $mx \times \frac{4\pi^2}{9}$ نیوتن

اما افزایش طول نخ برابر است با $(x - 0/25)$ متر، وچون ضریب کشسانی $\lambda = mq$ است، کشش نخ برحسب نیوتن برابر است با T که:

$$T = \frac{mg}{0/25}(x - 0/25)$$

$$\therefore \quad 4mg(x - 0/25) = mx\frac{4\pi^2}{9}$$

$$\therefore \quad x = 0/28m$$ تقریباً

بنابراین افزایش طول نخ درحدود 3cm است.

تمرین

۱ـ نقطه‌ای مادی به‌جرم 2/5kg که‌بر میز صیقلی افقی قراردارد به‌وسیلهٔ نخی به‌طول 1/2m به نقطهٔ ثابتی ازمیز متصل شده است. اگر این نقطهٔ مادی باسرعت 2/4m/s دایره‌ای افقی طی کند، کشش نخ چقدر خواهد بود ؟

۲ـ نخی به طول 0/5 متر می‌تواند وزنه‌ای به جرم 20 کیلوگرم را بدون‌آنکه پاره شود ، تحمل کند. به‌یك‌انتهای این‌نخ وزنهٔ 2 کیلوگرمی متصل می‌کنند وآن‌را برروی میزی صیقلی بطور یکنواخت می‌چرخانند. انتهای دیگر نخ به‌نقطهٔ ثابتی از میز متصل شده است. این وزنه حداکثر چند دور در دقیقه می‌تواند بزند بدون‌آنکه نخ پاره شود؟

۳ـ لوکوموتیوی به‌جرم 60تن‌قوسی از دایره به‌شعاع 240m را باسرعت 90 km/h طی می‌کند. از طرف ریلها چه‌نیرویی باید به‌طرف مرکز دایره اعمال شود ؟

۴ـ اتوموبیلی به جرم 2 تن مسیری منحنی به شعاع 0/5 کیلومتر را با سرعت 90km/h طی می‌کند . نیروی اصطکاك لازم بین چرخها وزمین چقدراست ؟

۵ـ یك انتهای نخ‌کشسانی به‌طول 0/5 متر به نقطهٔ ثابتی از یك‌میزصیقلی متصل است، وانتهای دیگرآن‌به‌وزنه‌ای به‌جرم 2kg که بر میز واقع است متصل است. اگر وزنهٔ 2 کیلوگرمی بطور قائم به‌نخ آویزان می‌شد ، افزایش طول نخ 10cm می‌شد. این‌وزنه طوری به‌حرکت درآمده است‌که در هردقیقه 40 دوربه دورنقطهٔ ثابت دوران می‌کند. افزایش طول نخ را تعیین‌کنید .

۶ـ نخ‌کشسانی، که طول آن درحالت غیرکشیده برابر l است، ازیك‌انتها به‌نقطه‌ای ثابت شده است و وقتی‌که بطور قائم آویزان‌است‌می‌تواند وزنه‌ای به‌جرم m کیلوگرم راتحمل کند ودراین‌صورت افزایش طول نخ به‌اندازهٔ نصف‌طول‌طبیعی نخ است. اکنون وزنه ونخ‌را روی میزی افقی‌وصیقلی قرار می‌دهیم ویك انتهای نخ‌را به‌نقطه‌ای ثابت‌می‌کنیم. نخ‌را می‌کشیم تا طول آن دوبرابر شود ووزنه‌را درامتداد میزطوری پرتاب می‌کنیم‌که بتواند دایره‌ای افقی‌به‌دورنقطهٔ‌ثابت‌طی‌کند. زمان یك‌دور گردش وزنه را تعیین‌کنید.

۷ـ دو وزنهٔ متساوی به‌وسیلهٔ نخی‌که ازسوراخ میزی صیقلی عبورکرده‌است به‌یکدیگر متصل‌هستند. یکی‌از وزنه‌ها روی میز است ووزنهٔ دیگردرزیر میز است. وزنه‌ای‌که روی میز است ، چند دوردردقیقه‌دایره‌ای به‌شعاع 15cm طی‌کند تا وزنهٔ دیگر به‌حال سکون‌باشد ؟

۸ـ میزافقی ناصافی‌می‌تواندحول‌محوری‌قائم‌دوران‌کند ووزنه‌ای روی‌میز و به فاصلهٔ 60cm ازمحور قرار دارد. میزطوری به دوران در می‌آید که تندی آن متدرجاً افزایش می‌یابد؛ اگرضریب اصطکاك بین وزنه ومیز برابر $\frac{1}{4}$ باشد ، نشان‌دهیدکه وزنه، تاوقتی‌که‌عدهٔ دور دردقیقه از19 کمتراست حرکت‌نخواهدکرد .

۹ـ دیسك مدور افقی‌ای به دوران یکنواخت به دور مرکزش‌درمی‌آید، ودرهرثانیه دو دورکامل می‌زند. نشان‌دهید که بزرگترین فاصله از مرکز دیسك برای اینکه جسم‌کوچکی بتواند برروی دیسك درآن‌فاصله ساکن بماند تقریباً برابراست با $6/18\mu$ که درآن μ ضریب اصطکاك بین جسم و دیسك است .

۱۰ـ چرخهای دوچرخه‌ای به‌قطر 75cm است. نسبت دندانه‌های محوررکاب به‌محور چرخ برابر $2\frac{1}{2}$ است. وطول رکاب 20cm است. تندی انتهای رکاب‌وبزرگی‌وجهت‌شتاب رکاب را هنگامی‌که دربالاترین نقطهٔ مسیرش می‌باشد تعیین کنید، دوچرخه باسرعت 75cm/s حرکت‌می‌کند.

دربارهٔ محاسبهٔ حدود و تعیین مجانبهای توابع اصم

علی ترابیان اصفهانی
دبیر دبیرستانهای شمیران و تهران

قبل ازطرح اصل موضوع، چندمطلب یادآوری می‌شود:

۱ـ قدرمطلق مقدار x که با $|x|$ نشان داده‌می‌شود، در حالتی‌که x مثبت باشد برابر با خودx ودرحالتی‌که x منفی باشد باقرینهٔ x برابراست:

$$x>0 \Longrightarrow |x|=x \quad \text{و} \quad x<0 \Longrightarrow |x|=-x$$

۲ـ وقتی $x\to\infty$ حدهرچند جمله‌ای از x برابر است با حد جملهٔ بزرگترین درجهٔ آن:

$$\lim_{x\to\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\ldots+l)=\lim_{x\to\infty} ax^n$$

۳ـ هرگاه x' و x'' دوریشهٔ متمایز معادلهٔ:

$x^2+px+q=0$ باشد، عبارت $\sqrt{x^2+px+q}$

وقتی حقیقی است که x خارج فاصلهٔ (x'' و x') باشد.

۴ـ به‌فرض آنکه $f(x)>0$ باشد، $\sqrt{f(x)}$ نمایش یك مقدار مثبت ودرنتیجه $-\sqrt{f(x)}$ نمایش مقداری منفی است. بنابراین رابطهٔ $\sqrt{x^2}=x$ وقتی صحیح است که x منفی باشد. درحالت کلی داریم: $\sqrt{x^2}=|x|$

نتیجه‌ـ ازآنچه که گفته‌شد نتیجه‌می‌شود: حد تابع $y=\sqrt{x^2+px+q}$ هرگاه $x\to\infty$ برابراست باحد تابع $y=\sqrt{x^2}$ یعنی برابر است باحد تابع $y=|x|$

حدتابع $y=x\pm\sqrt{x^2+px+q}$ وقتی $x\to\infty$ برابر است با حد تابع $y=x\pm|x|$

حد تابع به‌صورت کلی:

$$y=mx\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$$

وقتی $x\to\infty$ برابر است با حد تابع $y=mx\pm\sqrt{a}\,|x|$ که این‌تابع درحالتی‌که x مثبت باشدبرابر است با:

$$y=mx\pm x\sqrt{a}=(m\pm\sqrt{a})x$$

ودرحالتی‌که x منفی باشد برابراست با:

$$y=mx\pm\sqrt{a}(-x)=(m\mp\sqrt{a})x$$

هرگاه $m\pm\sqrt{a}=0$ باشد حد تابع وقتی $x\to\infty$ به صورت مبهم $0\times\infty$ درمی‌آید که برای رفع ابهام، تابع مفروض در مزدوج خود ضرب وتقسیم می‌شود.

مثال۱ـ حد تابع $y=x+\sqrt{x^2+4x+2}$ وقتی‌که $x\to\pm\infty$ برابر است با حد تابع $y=x+|x|$. هرگاه $x\to+\infty$ حدتابع برابر می‌شود باحدتابع $y=x+x=2x$ وبرابرمی‌شودبا $+\infty$. هرگا $x\to-\infty$ حدتابع برابرمی‌شود باحد $y=x-x=0\times x$ که به‌صورت‌مبهم $0\times\infty$ است. برای رفع ابهام، تابع مفروض را در مزدوج خود ضرب و تقسیم می‌کنیم که‌می‌شود:

$$y=\frac{-4x-2}{x-\sqrt{x^2+4x+2}}$$

حد این‌تابع برابراست باحد $\frac{-4x}{x-|x|}$ که چون x مقداری منفی است ($x\to-\infty$) پس این حد برابر است با:

$$\frac{-4x}{x-(-x)}=\frac{-4x}{2x}=-2$$

حد تابع مفروض وقتی $x\to+\infty$ برابر است با $+\infty$ و وقتی $x\to-\infty$ برابراست با -2.

مثال۲ـ هرگاه $x\to\pm\infty$ حدتابع:

$$y=x-\sqrt{x^2-3x+1}$$

برابر است با حد تابع $y=x-|x|$ که هرگاه $x\to-\infty$ برابر است با حد $y=x+x=2x$ وبرابر است با $2(-\infty)=-\infty$؛ اما هرگاه $x\to+\infty$ حد تابع برابر

می‌شود باحد $y = x - x = 0 \times x$ که $0 \times \infty$ ومبهم است.

پس قبلا تابع را درمزدوج خود ضرب وتقسیم می‌کنیم:

$$y = \frac{3x - 1}{x + \sqrt{x^2 - 3x + 1}}$$

حد این تابع برابر است باحد $y = \frac{3x}{x + |x|}$ که وقتی $x > 0$ باشد برابر است با $\frac{3}{2} = \frac{3x}{2x}$، پس وقتی $x \to +\infty$ حد تابع برابر است با $\frac{3}{2}$

مثال۳ـ تعیین مجانبهای تابع :

$$y = x + \sqrt{x^2 + 2x + 5}$$

معادلهٔ مجانب را به‌صورت $y = mx + h$ درنظرمی گیریم که m برابراست‌باحد $\frac{y}{x}$ و h برابر است باحد $y - mx$ وقتی‌که $x \to \infty$. بنابراین داریم :

$$m = \lim \frac{x + |x|}{x}$$

$$x \to +\infty \Longrightarrow m_1 = \lim \frac{x + x}{x} = 2$$

$$x \to -\infty \Longrightarrow m_2 = \lim \frac{x - x}{x} =$$

$$= \lim \frac{0 \times x}{x} = 0$$

$$h_1 = \lim(y - 2x) = \lim(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x)$$

$$= \lim \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x} = \lim \frac{2x}{|x| + x}$$

$$x \to +\infty \Longrightarrow h_1 = \lim \frac{2x}{x + x} = 2$$

$$h_2 = \lim(y - 0) = \lim(x + \sqrt{x^2 + 2x + 5})$$

$$= \lim \frac{-2x - 5}{x - \sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \lim \frac{-2x - 5}{x - |x|}$$

$$x \to -\infty \Longrightarrow h_2 = \lim \frac{-2x}{x + x} = -1$$

منحنی تابع مفروض‌دارای دومجانب به‌معادله‌های $y = 2x + 2$ و $y = -1$ است .

تاریخچهٔ ریاضی (دنباله ازصفحهٔ ۳۴۲)

مورد محاسبات مثلثاتی از همه بیشترهندیان کارکردند.

درقرن ششم دانشمند معروف هندی به‌نام **آریابهاتا** رساله‌ای مربوط به‌ستاره‌شناسی منتشرکرد که شامل چهارقسمت بود. او درقسمت دوم این‌کتاب روشی برای تنظیم جدول سینوسها ابداع کرده است. در مورد جدولهای مثلثاتی یکی دیگر از منجمین هندی مطالعاتی انجام داده است. نام او **بهاسکارا ـ آکاریا** بوده ودرقرن دوازدهم می‌زیسته‌است. او در رسالهٔ ستاره‌شناسی خود «هلال سیستم‌ها» فرمول تقریبی برای محاسبهٔ وتر k متناظریك‌کمان را به‌صورت زیرمی‌دهد.

$$k = 4d \frac{b(p - b)}{\frac{5}{4}p^2 - b(p - b)}$$

که درآن d قطره‌دایره و p پیرامون‌آن و d طول‌کمان داده‌شده است.

علاوه براین بهاسکارا روشی برای محاسبهٔ سینوس‌زوایا با استفاده از فرمول سینوس زوایا ابداع کرد.

تنظیم‌کننده‌ومحاسب جدولهای‌مثلثاتی‌درقرن‌دهم‌ریاضیدان ومنجم ایرانی **ابوالوفا** بود که مفسر و مترجم با هوش هندسه‌دانان یونانی‌بود. او جدولهای سینوس و تانژانت را با گام ′۱۰ (ده دقیقه) با دقت تا ۹ رقم محاسبه وتنظیم‌کرد.

درقرن‌پانزدهم منجم‌مغول **الغ بیك** (۱۴۴۹ـ۱۳۹۴) کارهای زیادی‌درتنظیم ومحاسبهٔ جدولهای مثلثاتی انجام‌داد. او در سمرقند دارای رصدخانهٔ مجهزی بودکه اعضای آن را منجمین‌بزرگ‌تشکیل‌می‌دادند. برای‌کارهای دقیق ستاره‌شناسی الغ‌بیك جدولهای بسیار دقیقی برای سینوس وتانژانت زوایای ازصفرتا °۴۵ باگام °۱ واز °۴۵ تا °۹۰ باگام ′۵ (دقیقه) محاسبه وتنظیم‌کرده بود. همچنین جدولی برای‌کتانژانت‌باگام °۱ نوشته بود.

این جدولها را الغ‌بیك در سیستم شصتگانی نوشته بود ودرنتیجه «تانژانت» را «اولین تصویرکمان» و «کتانژانت» را دومین تصویرآن می‌دانست.

درقرن پانزدهم نکات جالبی درمورد محاسبه و تنظیم جدولهای مثلثاتی در اروپا مشاهده می‌شود. این موضوع قبل ازهمه‌برحسب‌تقاضای ممتد منجمین‌مطرح می‌شود. دانشمندان جدولهایی تا هفت رقم تنظیم می‌کنند. چنین جدولهایی مثلا توسط منجم **پیرباخ** و شاگرد او **ریگی‌مونتان** محاسبه و تنظیم شد. جدول سینوسهای «ریگی‌مونتان» با دقت $\frac{1}{107}$ تنظیم شده بود.

درسال ۱۶۱۴ کاشف معروف لگاریتم **نپر** اسکاتلندی جدول لگاریتم سینوسها را محاسبه و تنظیم کرد. ستایش‌کنندهٔ نبوغ او **بریگس** انگلیسی جدول لگاریتمی اعشاری‌سینوسها را تنظیم‌کردکه ازجدول نپرجالبتر و مفصل‌تر بود. اما مرگ اجازه‌ندادتا بریگس کارپرارزش‌خودرا به‌پایان‌برساند. جدولهای او بعدها تکمیل وبه‌چاپ رسید.

تاریخچهٔ ریاضی

۱۳ـ رشته ها

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری

بابلیهای قدیم با تصاعد حسابی آشنایی داشه‌اند . مثلا درکتیبه‌ای به خط میخی‌که از آنان مانده مسئله‌ای در مورد محاسبهٔ‌قدرنسبت‌تصاعدحسابی‌وقتی‌مجموع ده جمله‌از آن‌معلوم است و همچنین تعیین جملهٔ هشتم‌آن مطرح شده است.

مصریان قدیم هم با تصاعدها آشنایی داشتند . در پاپیروس مصری «رایند» مسئله‌ای درمورد تصاعد هندسی به صورت زیرآمده است:

« هفت خانه وجود دارد ـ در هرخانه هفت گربه‌است. هر گربه هفت موش می‌خورد، و هر موش هفت خوشهٔ جو می‌خورد و هرخوشهٔ جو دارای هفت دانهٔ جو می‌باشد.

بطورکلی چند خانه و گربه و موش و خوشه و دانه وجود دارند؟».

فیزیکدان و ریاضیدان بزرگ **«ارشمیدس»** نیز با تصاعدهای حسابی و هندسی آشنایی داشته و ازآنها استفاده می‌کرده است . او در تألیف خود به نام « محاسبهٔ شن‌ها» از تصاعد استفاده‌کرده است. درعصررنسانس ریاضیدانان تصاعد را بیشترمورد مطالعه واستفاده قرار دادند. پایه‌گذارریاضیات این عصر **«فیبوناچی»** درکتاب خود (۱۲۰۲) تصاعد های حسابی وهندسی را بطور مفصل مورد بحث قرار داده و حتی رشته‌هایی را که امروز به نام « سری فیبوناچی » معروفند در کتاب خودآورده است. مثلا سری‌هایی به صورت :

..... و ۸ و ۵ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱ و ۰

راکه هرعنصر برابر مجموع دوعنصر قبل از خود می‌باشدرا می‌توان ازجمله سری‌های فیبوناچی نام‌برد. درقرن شانزدهم **«اشتیفیل»** ازتصاعد حسابی و هندسی برای‌ساده ترکردن محاسبات عملی استفاده‌کرد. و جالب است بدانیم که«اشتیفیل» یك کشیش بود . حتی اوکوشش کرد تا ریاضیات را به صورت یکی از وظایف دینی درآورد. به این ترتیب‌که با استفاده از پژوهشهای عدد و عرفانی خود در تورات پایان جهان را پیشگویی‌کرد. او ۱۹ اکتبر ۱۵۳۳ را طبق محاسبات خود پایان جهان اعلام‌کرده است. معلوم است‌که از این پیشگویی چیزی برنیامد و جهان به پایان نرسید . این موضوع باعث شدکه او از دین وآئین دست‌کشیده و به مطالعهٔ درعلم واقعی بپردازد. درنتیجه اولین تألیف او به نام «درس حساب» در سال ۱۵۴۴ و «حساب آلمانی» او در سال ۱۵۴۵ منتشر شد و بالاخره درسال ۱۵۵۳ پژوهشهای او درمورد جبر به‌چاپ رسید. درقرن هفدهم با عمومیت دادن تصاعد **«والیس»** ، **«لایب نیز»** و **«نیوتن»** از تصاعد هندسی به بررسی سریهای توانی پرداختند.این سریها امروزه در ریاضیات عالی بسیار مورد استفاده هستند . درکتابهای خطی قدیم مسائلی‌از تصاعد مشاهده می‌شود. مثلا دریکی ازآنهامسئله‌ای به‌صورت زیرآمده است . «مردی می‌خواست صفحهٔ شطرنج را با دانهٔ گندم طوری پرکندکه : درخانهٔ اول یك، درخانهٔ دوم دودانه و درخانهٔ سوم چهار دانه و در خانهٔ چهارم هشت دانه و در خانه پنجم شانزده دانه و به همین ترتیب در کلیهٔ ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنج درهرخانه دوبرابر تعداد دانه های خانهٔ قبلی آن قرار می‌دهد . تعیین‌کنید مجموع کلیهٔ دانه‌های گندم و همچنین قیمت‌آن‌درصورتی‌که قیمت هرخروار گندم‌معلوم باشد. دو مسئلهٔ دیگر را می‌توانید مشاهده‌کنید.

۱ـ «فروشنده‌ای دارای ۱۴ جام نقره می‌باشد،که وزن آنها طبق تصاعدی عددی با قدرنسبت ۴ افزایش می‌یابند. در صورتی که وزن جام آخری ۵۹ باشد تعیین کنید وزن جامها و وزن کل‌آنها .

۲ـ «مردی اسب خودرا به بازار برد و قیمتی برابر ۱۵۶ دینار برای‌آن به خریداران پیشنهادکرد ولی‌کسی‌حاضر به خرید نشد. مرد به یکی ازخریداران گفت. من حاضرم این

اسب را به شما مجانی بدهم و فقط پول میخهای نعل اوراز توسی گیریم. به‌این‌ترتیب که‌برای‌میخ‌اول $\frac{1}{4}$ دینار، برای میخ‌دوم $\frac{1}{2}$ دینارو برای‌میخ سوم یك‌دینار والی‌آخر. حال درصورتی‌که هر نعل شش میخ داشته باشد تعیین‌کنید خریدار چقدر باید بپردازد. البته خریدار این شرط را قبول‌کرد زیرا که فکر می‌کرد قیمت اسب بسیار ارزان خواهد شد. آیااو درست فکر می‌کرد؟

۱۴ - کشف لگاریتم

مطالعهٔ لگاریتم به مطالعهٔ اعداد نمایی وسریهای‌نمایی مربوط می‌شود. فکر لگاریتم به صورت ابتدایی آن در قرن سوم قبل از میلاد توسط دانشمند قدیم **ارشمیدس** مطرح شد. درآن زمان او در رسالهٔ خود به نام «محاسبهٔ شن‌ها» سریهارا مورد بررسی قرار داده. او در «سریها» تصاعدی هندسی را مورد بررسی قرارداده‌که شکل‌کنونی آن به‌صورت زیر است:

$$1, a, a^2, a^3, \ldots$$

او برای این سریها قاعده‌ای را به صورت:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

بیان داشت.

پس از رسیدن به بعضی از خواص لگاریتم ارشمیدس نمی‌توانست لگاریتم را کاملا توجیه‌کند و به همین جهت نتوانست جدولهای لگاریتمی را تنظیم‌کرده و از آنها درعمل استفاده‌کند. نظریهٔ اولیهٔ در مورد لگاریتم درقرن سوم قبل‌از میلاد درکارهای ریاضی **«دیوفانت»** نیز مشاهده می‌شود. او درضمن مطالعهٔ توانهای مثبت و منفی مجهول به‌این‌نظریه‌ها برخوردکرد. او حتی برای این اعداد نمایی قانون بالا راکه قبلا گفته شد به صورت فرمولی بدست‌آورد. درضمن مطالعهٔ سریها و تصاعدها مفهوم‌کلی توان توجیه شد وشرایط لازم‌را برای‌کشف لگاریتم و جدولهای‌آن مهیاکرد.

اولین‌کسی‌که دانسته و فهمیده به ایدهٔ لگاریتم نزدیك شد **«اشتیفیل»** بود. اما اوآنطورکه باید و شاید این ایده را توجیه نکرد. او درکتاب خود به نام «حساب عمومی» بطور ناقص‌توان را نه تنها به‌صورت مثبت‌آن بلکه به‌صورت منفی وکسری مورد بررسی قرارداد. بعداز ده سال ریاضیدان و مهندس هلندی **«استیفن»** جدول درصدهای مرکب را که از اعداد به صورت زیر تشکیل شده بود تنظیم‌کرد:

$(1+r)^n$ به‌ازاء $r = 0/05$ و $0/04$ و ....

کلیهٔ محاسبات لازم‌را استیفن به‌کمك‌کسرهای اعشاری‌که خود او درست‌کرده بود انجام داد. دست یافتن اشتیفیل و استیفن به تکنیك محاسبات به‌کمك تنظیم جدول اعداد نمایی به‌آنها کمك کرد تا بالاخره راهی برای محاسبات لگاریتمی و تنظیم جدول لگاریتمی بدست آورند. اولین‌کسانی که عملا نظریهٔ لگاریتم را با تنظیم جدولهای مخصوص‌آن‌که‌کار بسیاردقیقی است پیاده‌کردند، **بیورگی** سوئیسی (۱۶۳۲-۱۵۵۲) و **نپر** اسکاتلندی (۱۶۱۷-۱۵۵۰) بودند. این دوهریك مستقلا به تنظیم جدول لگاریتم پرداختند بدون اینکه از کار یکدیگر اطلاعی داشته باشند.

اما اگربخواهیم‌کشف‌لگاریتم را به‌یکی ازاین دونسبت دهیم «نپر» سزاوارتراست زیرا نتیجهٔ‌کار اودقیقتر وجدولهای تنظیم‌شده توسط او به‌حقیقت نزدیکتراست. توجه می‌دهیم‌که در مورد تقدم‌کشف لگاریتم، تاریخ ریاضی نویس دانمارکی **گ.گ.تسیفین** می‌نویسد: «نپررا حقیقتاً می‌توان شخص اول درکشف لگاریتم دانست زیرا او معلومات خودرا در این مورد فوراً دراختیار عموم‌گذاشت و تئوری درستی برای آن بنا نهاده و روشهای محاسباتی ساده‌ای را پیشنهاد و ابداع کردکه به‌کمك آنها **بریگس** از لگاریتم‌استفاده های عملی زیادی‌کرد و لگاریتم را به‌صورت‌کنونی درآورد.

اگرچه **بیورگی** و **نپر** هردو در یك زمان لگاریتم‌را کشف‌کردند اما نپر اولین‌کسی بودکه لگاریتم خود را منتشر ودراختیار عموم‌گذاشت.

اما «بیورگی» آنقدر لگاریتم خود را درخفانگاهداشت که بالاخره **کپلر** اورا به‌خاطر این‌کار موردسرزنش قرارداده‌و وجدان اورا بیدارکرد تاکشف مهم خود را در اختیار عموم بگذارد. اما وقتی بیورگی لگاریتم خود را منتشرکردکه لگاریتم نپر درمیان مردم رواج پیداکرده بود و به‌همین‌جهت لگاریتم او نتوانست توسعه یابد. کلمهٔ «لگاریتم» (در ترجمه ازیونانی «لوگاس» به‌معنی نسبت و «آریاموس» به‌معنی‌عدد) درسال ۱۶۱۴ توسط نپردرکتابی به‌نام «معرفی دستگاه‌عجیب لگاریتم» که درحدود ۲۰ سال‌سرآن‌کارکرده بودانتخاب‌ومورد قبول قرارگرفت.

او در مقدمهٔ کتاب خود می‌نویسد: « به این ترتیب محاسبهٔ این جدول که باید به ازاء نماهای مختلف قابل استفاده باشد اگر توسط یك نفر تنظیم ومحاسبه شود پیداشدن اشتباهات زیاد درآن نباید تعجب‌آور باشد. گذشته ازاین اشتباهات براثر خستگی محاسب ویا بی‌دقتی چاپخانه درچاپ جدول اشتباهاتی پیش می‌آیدکه قبلا از خوانندگان عزیز عذر می‌خواهم. اما اگر ببینیم که استفاده از این کشف برای دانشمندان مفید است دراین‌صورت فوراً توضیحی دربارهٔ روش محاسبه برای تهیه کردن کتاب خواهم داد. البته معلوم است که کار محاسباتی محاسبها که آثار خود را در دنیا منتشر می‌کنند ازکنار یك نفر دقیقتر خواهد بود. هیچ چیز در ابتداکامل نبوده است».

بیورگی جدولهای لگاریتم خودرا درسال ۱۶۲۰ به‌نام «جدولهای تصاعد حسابی وهندسی» باضمیمهٔ آموزش وکاربرد آنهادرکلیهٔ محاسبات منتشرساخت. باتوجه به‌ارزش جدولهای لگاریتمی کپلر (۱۶۳۰-۱۵۷۱) شروع به‌همکاری با بیورگی کردو درسال ۱۶۲۴ کتاب مشترك خودرا به‌نام «جدول لگاریتم اعشاری» انتشاردادند.

در سال ۱۶۱۹ یك معلم ریاضی گمنام انگلیسی به نام **اپیدیل** لگاریتم طبیعی(لگاریتم نپری) راکه مبنای آن عدد e بود انتشار داد.

(خودنپر مبنای لگاریتم‌خود را عددی نزدیك e انتخاب کرده بود نه خود e) پس از انتشار جدولهای لگاریتم نپر در جهان، پروفسور انگلیسی **بریگس** (۱۶۳۱-۱۵۵۶) با آنها آشناشده به‌هیجان آمد.

او با پیشنهادی برای ساده‌ترکردن سیستم لگاریتم نزد نپر رفت. کلمات اول او خطاب به‌نپر اینطور بود: «میلورد من این راه دور را برای دیدن تو طی کرده به اینجا آمده‌ام و حال می‌خواهم روش ترا دیده و بیاموزم که چگونه توانستی به این فکر بیفتی که راه بسیار جالبی برای نجوم پیدا کنی (دربارهٔ لگاریتم). بریگس دربارهٔ دیدار نپر باز می‌نویسد: «نپر با لگاریتم عجیب وتازهٔ خودمرا واداشت تا سخت با سر ودستهای خودکارکنم. آرزو دارم اورا در تابستان ببینم، زیرا هیچ کتابی نخوانده بودم که اینقدربرای من جالب باشد و اینقدر حیرت مرا برانگیزد».

بریگس نیز همزمان بانپر جدولهای لگاریتم اعشاری‌را برای کلیهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۲۰۰۰۰ و از ۹۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ تنظیم ومحاسبه کرد. این کار یك کاربسیار دقیقی بود. برای محاسبهٔ لگاریتم یك عدد تا ۱۴ رقم بریگس باید ۵۴ بار تا ۳۲ رقم بعد ریشه می‌گرفت. برای کارهای عادی روزانه اغلب از جدولهای لگاریتم چهاررقمی استفاده می‌شودوکمتر جدولهای با ارقام بالاتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. و فقط در محاسبات دقیق علمی است که از جدولهای لگاریتم با ارقام ۱۴ و یابیشتر استفاده می‌شود.

مثلا برای چنین کارهایی از جدول لگاریتم بیست‌رقمی که برای اعداد از ۲ تا ۱۲۰۰ توسط **کالیه** فرانسوی درسال ۱۷۹۵ محاسبه وتنظیم شده استفاده می‌کنند.

دانشمندان جدولهای لگاریتم با ارقام‌خیلی بیشتررانیز محاسبه وتنظیم کرده‌اند (تمام‌آنها در مورد لگاریتم طبیعی با مبنای e هستند). این نوع جدولها توسط **« یا ـ ای ـ پیریلمن»** محاسبه و تنظیم شده و به‌نام «لگاریتم بزرگان» معروف است.

دربارهٔ مقادیر لگاریتمها هرچه بگوییم کم گفته‌ایم و مبالغه‌ای نکرده‌ایم.

لگاریتم برای مهندسین و تکنیسین‌های کلیهٔ رشته‌هالازم است. ازلگاریتم، منجمین، ناوبران وتوپچی‌هااستفاده‌می‌کنند. لگاریتم برای کسی که می‌خواهد محاسبات بزرگی را انجام‌دهد لازم است. واقعاً ریاضیدان و فیزیکدان و منجم فرانسوی **لاپلاس** (۱۸۲۷-۱۷۴۹) درست گفته است که:

«کشف لگاریتم کارمنجم راکوتاه‌وزندگی اورا درازکرد»

۱۵-جدولهای مثلثاتی

دراابتدا ازجدولهای وترمتناظر باکمان داده‌شده استفاده می‌شد. اولین جدول وترها را منجم یونان قدیم **هیپارك** در قرن دوم قبل ازمیلاد تنظیم کرد.

درقرن دوم میلادی جدول متشابهی توسط منجم اهل اسکندریه به نام **بطلمیوس** تنظیم شد. این جدول را او در کتاب خود به‌نام **المجسطی** آورده است. کتاب مزبور شامل جدول وترها ازصفر تا °۱۸۰ باگام نیم‌درجه وهمچنین جدول سینوس زوایای از صفرتا °۹۰ باگام ربع‌درجه می‌باشد. در

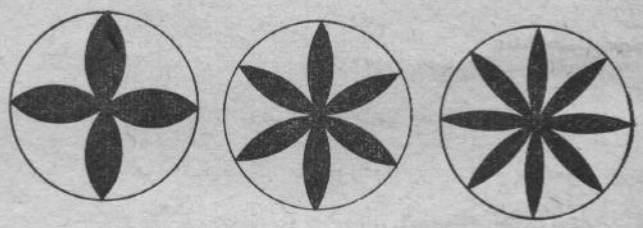
دنباله درصفحهٔ ۳۳۹

حل مسائل نمونه

تعیین مساحت گلهای ترسیمی n پر وحد آن هرگاه $n \to \infty$

ترجمهٔ: **جعفر آقایانی چاوشی**

بارسمهای تزیینی به‌شکل گلهای چندپر آشنایی‌داریم. درشکل زیرسه‌نمونهٔ چهارپر، شش‌پر، هشت‌پر ملاحظه‌می‌شود.

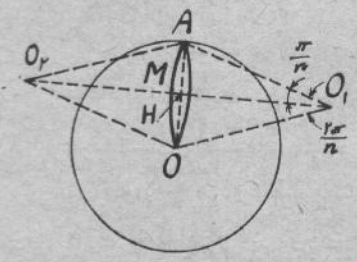


n=4 n=6 n=8

برای رسم گل n پر $(n > ۲)$ درحالت کلی، قاعدهٔ زیررا بکارمی‌بریم: دایره‌را به n کمان برابر بخش‌می‌کنیم. هرگاه O مرکز دایره و A یکی ازنقاط تقسیم‌دایره باشد، مثلث‌متساوی‌الساقینی به‌قاعدهٔ OA می‌سازیم‌که زاویهٔ رأس‌آن برابر با $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ باشد، برای این کار از O خطی رسم می‌کنیم‌که با OA زاویه‌ای به‌اندازهٔ زیربسازد:

$$\frac{۱}{۲}\left(۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n}\right) = ۹۰^\circ - \frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

ازاین خط دوعدد درطرفین OA رسم می‌شودکه از تلاقی آنهاباعمودمنصف OA دونقطهٔ $O_۱$ و $O_۲$ بدست‌می‌آید. به مرکز هریک از نقاط $O_۱$ و $O_۲$ و به شعاع $r = O_۱O = O_۲A$ دوکمان دایره محصور بین O و A رسم می‌کنیم‌که یک گلبرگ از گل موردنظررسم می‌شود. درمورد سایر نقاط تقسیم‌دایره، نیز به‌همین روش‌عمل‌می‌کنیم. درازاءمقادیری از n، مراکزمربوط‌به کمانهای دو نقطه از



نقاط تقسیم برهم‌واقع‌می‌شوند. درازاء $n = ۶$ مراکزکمانهای‌نظیر هریک ازنقاط‌تقسیم، نقاط تقسیم مجاور به‌این نقاط می‌باشند.

فرض می‌کنیم‌که گلی n پر طبق قاعدهٔ‌بالا رسم‌شده باشد. مساحت این گلبرگها رویهم برحسب n چقدر است؟ هرگاه $n \to \infty$ آیا این‌مساحت حدی دارد وحدآن چیست؟

قبلاً مساحت‌یکی‌ازگلبرگهاراحساب‌می‌کنیم: فرض‌می‌کنیم R شعاع دایرهٔ‌مفروض‌و r شعاع هریک‌ازکمانهای گلبرک‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O_۱AH$ داریم:

$$AH = \frac{R}{۲}$$

$$r = O_۱A = \frac{R}{۲} : \sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} = \frac{R}{۲\sin\frac{۱۸۰}{n}} = \frac{R}{۲\sin\frac{\pi}{n}}$$

مساحت قطاع $O_۱AMO$ می‌شود:

$$\frac{\pi r^۲}{۲\pi} \times \frac{۲\pi}{n} = \frac{\pi r^۲}{n}$$

مساحت مثلث $O_۱AO$ برابراست با:

$$\frac{۱}{۲}O_۱A \cdot O_۱O \cdot \sin\frac{۲\pi}{n} = \frac{۱}{۲}r^۲\sin\frac{۲\pi}{n}$$

مساحت قطعهٔ AMO می‌شود:

$$\frac{\pi r^۲}{n} - \frac{۱}{۲}r^۲\sin\frac{۲\pi}{n}$$

مساحت گلبرگ دوبرابر این‌مساحت است، پس برابراست‌با:

$$s_۱ = r^۲\left(\frac{۲\pi}{n} - \sin\frac{۲\pi}{n}\right)$$

باتوجه به‌مقدار r برحسب R وباتوجه به‌فرمول‌بالا، مساحت گل n پر می‌شود:

$$S = n\left(\frac{R}{۲\sin\frac{\pi}{n}}\right)^۲\left(\frac{۲\pi}{n} - \sin\frac{۲\pi}{n}\right)$$

دنباله در صفحهٔ ۳۸۰

ضمن پوزش ازخوانندگان درخواست می‌شودکه سطرهای دهم ویازدهم ابتدا از آخرستون اول صفحهٔ ۲۸۵ ازیکان شمارهٔ گذشته را به‌صورت‌زیر اصلاح فرمایند:

$$۸ = (۱۱)_۷ \quad و \quad ۸ = (۲۰)_۴$$
$$۹ = (۱۲)_۷ \quad و \quad ۹ = (۲۱)_۴$$

راهنمای کنکور

اطلاعاتی که برای تعیین جوابهای درست یا رد جوابهای غلط، مفید، بلکه لازم است

عبدالحسین مصحفی

دریکان شمارهٔ گذشته، گفتگو ازاین‌شدکه درتعیین‌جواب درست تستهای‌کنکور، روشی که بکار می‌رود اهمیت ندارد. داوطلب نباید برای تمام تستها خود را به روش واحد مقید کند. در یک تست روش مناسب آن است که مسئلهٔ داده‌شده مستقیماً حل گردد و جواب درست آن معلوم شود. اما در تست دیگر، روش مناسب‌آن است‌که جوابها امتحان گردند تا درست‌آنها معین شود. درمورد اخیر مثالهایی نیز در یکان شمارهٔ گذشته ارائه گردید.

اگرامتحان‌جوابهابرای‌تعیین‌جواب‌درست‌بعضی ازتستها روشی مناسب است، برای بعضی از تستها تنها روش ممکن می‌باشد. در بسیاری ازاین نوع تستها، اگربه‌بعضی از احکام آگاهی داشته باشیم، بدون انجام عملیات، یا با انجام حداقل عملیات، می‌توانیم جواب درست را تشخیص بدهیم، یااینکه جوابهای غلط را ردکنیم. احکام مزبور ممکن است که‌به‌صورت قضیه درمتن‌کتابهای درسی مطرح شده باشند، و ممکن است که از راه مطالعهٔ‌کتابهای‌جنب درسی یاکتابهای ازنوع‌دیگر، به‌آنهاآگاهی یافته باشیم.

مثالهایی ازکنکور سراسری یاکنکورهای اختصاصی

۱ـ aعدد مثبت‌غیرمشخصی‌است، کدامیک‌ازنامساویهای زیرهمواره درست است:

الف) $a - \frac{1}{a} > ۲$ ب) $a + \frac{1}{a} \geqslant ۲$

ج) $a + \frac{1}{a} < ۴$ د) $a - \frac{1}{a} < ۴$

هرگاه این‌حکم مشهور را بدانیم‌که: «مجموع هرعدد مثبت و عکس آن، ناکوچکتر از ۲ است» بدون هیچ اتلاف وقت و با اطمینان خاطر جواب (ب) را نشانه می‌گذاریم. اما اگر از حکم مزبورکه به صورت مسئله یا قضیه در بیشتر کتابهای جبر، درسی یا جنب درسی، درج است بی‌خبرباشیم ناچاریم‌که برای امتحان جوابها به‌ترتیب وقتی را هدردهیم.

۲ـ α زاویه‌ای بین صفر و ۹۰ درجه است. کدامیک‌از تساویهای زیر می‌تواند درست باشد:

الف ـ $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$

ب ـ $\cos\alpha \sin\alpha = -۲$

ج ـ $tg\alpha + cotg\alpha = -۱$

د ـ $\sin\alpha + \cos\alpha = ۲$

در این تست باید معلوم گردد که کدامیک از جوابها **می‌تواند** درست باشد، بنابراین باید جوابهایی را که مطمئناً غلط می‌باشند ردکنیم.

می‌دانیم‌که هرگاه α کمان حاده باشد، همهٔ نسبتهای مثلثاتی آن مثبت می‌باشند. بنابراین حاصل‌ضرب یاحاصل‌جمع هردونسبت‌از نسبتهای مثلثاتی α عددی است‌مثبت وجوابهای (ب) و (ج) هردوغلط می‌باشند. همچنین می‌دانیم‌که $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هرکدام از یک کوچکترند واگر یکی از آنها یک باشد دیگری برابر صفر است، پس مجموع آنها نمی‌تواند ۲ باشد

وبنابراین جواب (د) نیز غلط است . جوابهای (ب ، ج، د) رد شدند پس جواب (الف) می‌تواند درست باشد.

۳ـ اگر روی اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه، سه مثلث متساوی‌الاضلاع با مساحات S و S' و S'' بسازیم که S مساحت مثلث مربوط به وتر باشد ، کدامیك از روابط زیر صحیح است :

الف ـ $S^2 = S'^2 + S''^2$ ب ـ $S = (S' - S'')^2$

ج ـ $S = S' + S''$ د ـ $S^2 = S' \cdot S''$

هرگاه بدانیم که صورت کلی قضیهٔ فیثاغورس عبارتست از: «هرگاه روی ضلعهای یك مثلث قائم‌الزاویه سه شکل متشابه بسازیم ، مساحت شکل مربوط به وتر برابر است با مجموع مساحتهای دو شکل دیگر» به سادگی و بدون انجام هیچگونه عملیات و یاصرف وقت، جواب (ج) را صحیح اعلام می‌کنیم. اما اگر به‌این حکم آگاهی نداشته باشیم ناچار از انجام محاسبات می‌باشیم.

۴ـ درچندجمله‌ای:

$$(4x^2 - 2x - 1)^4(2x - 1)^5(2x + 1)^3$$

مجموع ضرایب x ، x^2، x^3 ، . . . و x^{16} برابر با کدامیك ازعددهای زیر است:

الف ـ ۲۵ ب ـ ۲۶ ج ـ ۲۷ د ـ ۲۸

بسط چند جمله‌ای بالا و مرتب‌کردن آن و از آن راه محاسبهٔ مجموع ضرایب آن کاری کاملا ناشیانه است. دراین مسئله باید بدانیم که‌مجموع ضرایب هرچندجمله‌ای نسبت به‌x برابر است با مقدار آن چندجمله‌ای در ازاء $x = 1$. بنابراین چون در چندجمله‌ای بالا x را برابر با یك قرار دهیم حاصل چندجمله‌ای برابربا ۲۷ بدست می‌آید.

۵ـ به‌ازاء چه‌مقداری از x عبارت زیرصفراست:

$$\sqrt{x^4 - 2x^2 - 4} + x$$

الف ـ ± 2 ب ـ -2 ج ـ $+2$ د ـ -1

باید بدانیم که‌درحوزهٔ مقادیر حقیقی، $\sqrt{f(x)}$ نمایش یك‌عددنامنفی است، یعنی یاصفراست یا مثبت. درضمن‌می‌دانیم که مجموع دو مقدار مثبت صفر نیست . بنابراین در عبارت داده‌شده ، x نمی‌تواند مثبت باشد و جوابهای (الف) و (ج) رد می‌باشند. کافی است‌که فقط یکی ازجوابهای (ب) یا (د)را امتحان‌کنیم تامعلوم شودکدامیك ازآنها جواب صحیح‌می‌باشد.

۶ـ در دایره‌ای به شعاع ۲/۵ سانتیمتر، طول کمانی برابر ۸/۷۵ سانتیمتراست. اندازهٔ این‌کمان چندرادیان‌است:

الف ـ ۳/۵ ب ـ ۲/۵ ج ـ ۳ د ـ ۲

شاید عده‌ای چنین عمل کنند که مثلا ابتدا محیط دایره را حساب‌کنندآنگاه نسبت بین اندازهٔ‌کمان و اندازهٔ تمام‌محیط را بدست‌آورند. اماآنان‌که تعریف رادیان را به خاطر داشته باشند (اندازهٔ‌کمانی‌که طول‌آن برابر شعاع است)، طول‌کمان یعنی ۸/۷۵ رابرطول شعاع یعنی ۲/۵ تقسیم می‌کنندکه۳/۵ حاصل می‌شود.

۷ـ اگراز نقطهٔ M واقع بر محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC سه عمود بر اضلاع مثلث فرود آوریم ، پای این سه عمود :

الف ـ روی یك خط مستقیمند.

ب ـ روی یك دایره‌اند.

ج ـ روی یك بیضی‌اند.

د ـ روی شکل مشخص نیستند.

این پرسش همان **قضیهٔ سمسن** است‌که در متن‌کتابهای درسی مذکور نیست، اما در بعضی ازکتابهای جنب درسی درج می‌باشد . قضیهٔ سمسن چنین است: «تصاویر هرنقطه از دایرهٔ‌محیطی‌مثلث براضلاع آن روی یك خط مستقیم‌واقعند.»

تبصره ـ در پرسشهایی‌که موضوع مکان هندسی مطرح است، می‌توان مکان را عملا پیش‌بینی کرد . به این معنی که چندین وضع مختلف از متغیررا به‌اندازهٔ‌کافی دقیق رسم‌می‌کنیم ومکان‌آنها را نسبت‌به‌هم می‌سنجیم. مثلا درپرسش بالا هرگاه چندین نقطهٔ‌مختلف ازدایرهٔ محیطی مثلث را انتخاب وازهریك ازآنها عمودهایی برضلعهای مثلث رسم‌کنیم، مشاهده می‌کنیم که درهریك‌ازحالتهاپاهای‌سه عمود روی یك‌خط راست‌واقعند.

۸ـ a و b دوعدد صحیح و مثبت مفروضند بطوری‌که $i = \sqrt{ab}$ و $I = \frac{a+b}{2}$. کدامیك ازجوابهای‌زیردرست‌است:

الف ـ $i > I$ ب ـ $i < I$ ج ـ $i = I$

د ـ i و I هیچ رابطه‌ای بایکدیگر ندارند.

یکی از نامساویهای مشهور ، نامساوی واسطه‌های حسابی وهندسی است به‌این معنی‌که : «واسطهٔ حسابی هرچند عدد مثبت از واسطهٔ هندسی آنها بزرگتراست» بادانستن این نامساوی بدون احتیاج به انجام هرنوع عملیاتی جواب (ب) را به‌عنوان جواب صحیح اعلام می‌کنیم .

۹ـ وقتی $180° < \alpha < 270°$ است، $\sqrt{1 + \sin 2\alpha}$ برابر است‌با :

الف ـ $\cos\alpha + \sin\alpha$ ب ـ $\cos\alpha - \sin\alpha$

ج ـ $-\cos\alpha - \sin\alpha$ د ـ $-\cos\alpha + \sin\alpha$

باعلم به‌اینکه $\sqrt{1 + \sin 2\alpha}$ مقداری است مثبت پس آن جواب‌که بتواند مقدار منفی باشد رد می‌شود . انتهای α در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی است و $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ دردومقادیر منفی‌اند. پس جواب (الف) که مسلماً منفی است و جوابهای (ب) و (د) که می‌توانند منفی باشند رد می‌شوند و جواب (ج) جواب صحیح است.

دنباله‌دارد

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۸۲

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۸۲/۱ـ هرگاه a و b ریشه‌های معادلهٔ:

$$u^2 + pu + q = 0$$

باشند، جوابهای دستگاه زیررا برحسب p و q بدست آورید:

$$\begin{cases} b(a-b)x + by = 2a \\ (a+b)x - y = 2 \end{cases}$$

حل ـ ازحل دستگاه طبق فرمولهای کرامر، یابه روش حذفی، بعداز اختصار خواهیم‌داشت:

$$x = \frac{a+b}{ab} \quad \text{و} \quad y = \frac{a^2+b^2}{ab}$$

چون a و b ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض می‌باشند، بنابه‌روابط بین‌ریشه‌ها وضرایب داریم:

$$a+b = -p \quad \text{و} \quad ab = q$$

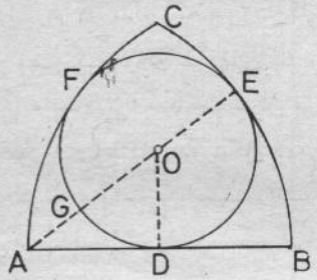
$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = p^2 - 2q$$

$$x = \frac{-p}{q} \quad \text{و} \quad y = \frac{p^2 - 2q}{q}$$

۸۲/۲ـ ترجمه، فرستنده: **جوادفیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی تبریز

پاره خط AB به‌طول l مفروض است. به‌مرکزهای A و B وبه شعاع AB دریك طرف AB دوکمان دایره رسم می‌کنیم که درنقطهٔ C باهم متلاقی می‌شوند. دایره‌ای رسم‌می‌کنیم که برپاره‌خط AB وبرهریك ازکمانهای AC و BC مماس باشد. اندازهٔ شعاع این دایره را برحسب l حساب‌کنید.

حل ـ هرگاه O مرکز دایرهٔ محاطی‌مثلث منحنی‌الخط مفروض و r شعاع آن و D و E و F به‌ترتیب‌نقاط تماس‌آن باخط AB وکمانهای BC و CA باشد؛ چون خط AE را رسم کنیم در نقطهٔ دیگر G دایرهٔ محاطی راقطع می‌کندوداریم:



$$AO = AE - OE = AB - OE = l - r$$

$$OD = r \quad \text{و} \quad AD = \frac{AB}{2} = \frac{l}{2}$$

$$\overline{AO}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{AD}^2 \quad \text{یا} \quad (l-r)^2 = r^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$4l^2 + 4r^2 - 8lr = 4r^2 + l^2 \Longrightarrow r = \frac{3l}{8}$$

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۸۲/۳ـ هرگاه a و b ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^2 + px + q = 0$$

باشند وداشته باشیم:

$$\frac{a^6b^4 + a^4b^6}{a^4 + b^4} = q^2 \quad \text{و} \quad q \neq 0$$

مقدار p را برحسب q حساب‌کنید.

حل ـ بنا به‌فرض داریم:

$$a + b = -p \ ، \ ab = q$$

از طرف دیگر داریم:

$$a^6b^4 + a^4b^6 = a^4b^4(a^2 + b^2) =$$

$$= a^4b^4[(a+b)^2 - 2ab] = q^4(p^2 - 2q)$$

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=$$
$$=[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2=$$
$$=(p^2-2q)^2-2q^2=p^4-4p^2q+2q^2$$
$$\frac{q^4(p^2-2q)}{p^4-4p^2q+2q^2}=q^2 \text{ و } q\neq 0$$
$$p^4-5p^2q+4q^2=0$$
$$p^2=q \text{ یا } 4q \text{ و } p=\pm\sqrt{q} \text{ یا } \pm 2\sqrt{q}$$

شرط قابل قبول‌بودن جوابها $q>0$ است.

۸۲/۴ـ ترجمهٔ: **فتح‌الله زرگری**

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$$

حل ـ بافرض $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=X$ داریم:

$$X^2=\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}-\frac{8}{3}$$
$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3\left(\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}\right)=3X^2+8$$
$$3X^2-10X+8=0 \Longrightarrow X=2 \text{ یا } \frac{4}{3}$$
$$\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2 \text{ یا } x^2-6x-12=0 \Longrightarrow x=3\pm\sqrt{21}$$
$$\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3} \text{ یا } x^2-4x-12=0 \Longrightarrow x=6 \text{ یا } -4$$

۸۲/۵ـ ترجمهٔ: **فتح‌الله زرگری**

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$2^{2x+2\sqrt{x^2-2}}-5\times 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$$

حل ـ طرفین معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم،

$$2\times 2^{2(x+\sqrt{x^2-2})}-5\times 2^{x+\sqrt{x^2-2}}=12$$

بافرض $X=2^{x+\sqrt{x^2-2}}$ خواهیم داشت:

$$2X^2-5X-12=0 \text{ و } X=4 \text{ یا } -\frac{3}{2}$$

چون $X=2^{\alpha}$ مثبت است پس فقط $X=4=2^2$ قابل‌قبول است وداریم:

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=2^2$$
$$x+\sqrt{x^2-2}=2$$
$$\sqrt{x^2-2}=2-x$$

باید داشته باشیم $2-x\geqslant 0$ وبااین‌شرط داریم:

$$x^2-2=x^2-4x+4=x=\frac{3}{2}$$

این جواب درشرط گفته‌شده صدق می‌کند وقابل قبول است.

۸۲/۶ـ فرستنده: **هادی تابنده** ششم ریاضی دبیرسان رازی تهران

همانند جدول‌ضرب 10×10، جدول $n\times n$ را در نظرمی‌گیریم ومجموع اعداد ردیف اول، افقی یا ستونی، آن را با S_1 می‌نمائیم؛

$$1+2+3+\ldots+n=S_1$$

اولاً ثابت‌کنیدکه:

۱) مجموع تمام اعداد مندرج در جدول برابر است با $(S_1)^2$

۲) مجموع اعداد مندرج درآخرین ردیف افقی‌وستونی رویهم برابر n^3 است.

ثانیاً مجموع زیررا حساب‌کنید:

$$S_2=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$

حل ـ اولا اعداد مندرج درجدول را به‌ترتیب ردیفها به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$1+2+3+\cdots+n=S_1$$
$$2(1+2+3+\ldots+n)=2S_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$n(1+2+3+\ldots+n)=nS_1$$

مجموع تمام اعداد بالا می‌شود:

$$(1+2+\ldots+n)(1+2+\ldots+n)=S_1^2$$

۲) مجموع‌اعداد مندرج درآخرین ردیف افقی، همچنین مجموع اعداد مندرج درآخرین‌ستون برابراست با:

$$n+2n+3n+\ldots+n^2$$

پس مجموع‌اعداد ردیفهای‌آخر افقی وستونی، باتوجه به‌اینکه n^2 درهردومشترك است می‌شود:

$$2(n+2n+3n+n^2)-n^2=$$
$$=2n(1+2+3+\ldots+n)-n^2$$
$$=2n\times\frac{n(1+n)}{2}-n^2=n^3$$

ثانیاً باتوجه‌به‌آنچه درقسمت(۲) گفته‌شد؛ مجموع‌اعداد مندرج در ردیفهای آخر افقی و ستونی برابر با n^3 است، مجموع اعداد مندرج درردیفهای ماقبل‌آخر افقی وستونی برابراست‌با $(n-1)^3$،... مجموع اعداد مندرج درردیفهای

دوم افقی وستونی برابراست با $۲^۳$ و چون $۱^۳ = ۱$ است پس مجموع :

$$S_۲ = ۱^۳ + ۲^۳ + \dots + n^۳$$

برابر است با مجموع تمام اعداد مندرج درجدول یعنی برابر است با $S_۱^۲$ وبنابراین :

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + n^۳ = \left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲ = \frac{۱}{۴}n^۲(n+۱)^۲$$

۸۲/۷ـ فرستنده: **رحیم کیا** ، پنجم ریاضی دبیرستان امیرخیزی تبریز.

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$x + \log(۵^x - ۴) = x\log ۲ + \log ۵$$

حل ـ قبلا توجه می‌کنیم که:

$$x\log ۲ = x\log\frac{۱۰}{۵} = x(۱ - \log ۵) = x - x\log ۵ = x - \log ۵^x$$

ومعادلهٔ مفروض چنین‌می‌شود:

$$\log(۵^x - ۴) = \log ۵ - \log ۵^x = \log ۵^{۱-x}$$

$$۵^x - ۴ = ۵^{۱-x} = \frac{۵}{۵^x}$$

$$(۵^x)^۲ - ۴ \times ۵^x - ۵ = ۰$$

$$(۵^x + ۱)(۵^x - ۵) = ۰$$

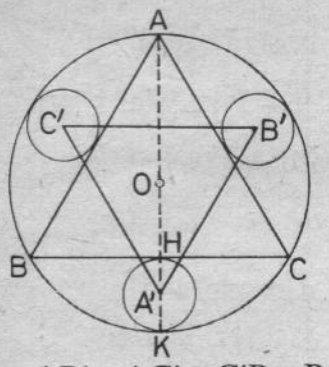
$$۵^x + ۱ \neq ۰ \text{ و } ۵^x - ۵ = ۰ \text{ یا } ۵^x = ۵ \Longrightarrow x = ۱$$

کلاس چهارم طبیعی

۸۲/۸ـ فرستنده: **نصرتی نیا** ،پنجم ریاضی دبیرستان هدف ۱

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع a ودایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم . در خارج مثلث سه دایرهٔ متساوی رسم می‌کنیم‌که به ترتیب بریك ضلع مثلث و بردایرهٔ محیطی مثلث مماس باشند. هرگاه شعاع این دایره‌ها بزرگترین مقدار ممکن را داشته باشد و A' و B' و C' به‌ترتیب مرکزهای آنها باشند نوع مثلث $A'B'C'$ را تعیین‌کرده و مساحت آن را برحسب a حساب‌کنید.

حل ـ دایره‌ای که بر ضلع مثلث و بر دایرهٔ محیطی آن مماس باشد، شعاع آن وقتی بزرگترین مقدار را داردکه مرکز آن‌روی‌عمودمنصف ضلع واقع باشد. پس نقاط A'، B' و C' به‌ترتیب برعمود منصفهای BC ، CA و AB قرار دارند. چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است ، سه دایرهٔ A' ، B' و C' با هم برابرند و نتیجه خواهد شد که :



$$AB' = AC' = C'B = BA' = A'C = CB'$$

نقطهٔA برعمود منصف $B'C'$ واقع است پس $B'C'$ با BC موازی است. همچنین $C'A'$ باCA و $A'B'$ باABموازی بوده ومثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

هرگاه H وسط ضلع BC باشد، داریم :

$$AH = \frac{AC\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

$$AO = \frac{۲}{۳}AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} \text{ و } AK = \frac{۲a\sqrt{۳}}{۳}$$

$$KH = ۲A'H = AK - AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$$

$$\Longrightarrow A'H = \frac{a\sqrt{۳}}{۱۲}$$

$$OA' = OH + HA' = \frac{a\sqrt{۳}}{۶} + \frac{a\sqrt{۳}}{۱۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۴}$$

$$A'H' = \frac{۳}{۲}A'O = \frac{۳a\sqrt{۳}}{۸}$$

$$A'H' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}B'C' \Longrightarrow B'C' = \frac{۳a}{۴}$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{۱}{۲}B'C'.A'H' = \frac{۹a^۲\sqrt{۳}}{۶۴}$$

۸۲/۹ـ ترجمهٔ:**فتح‌الله‌زرگری**

دوخط متوازی ثابت $\triangle_۱$ و $\triangle_۲$ و نقطهٔ ثابت O بین آنها مفروض است. از O قاطعی رسم می‌کنیم‌که $\triangle_۱$ رادرA و $\triangle_۲$ را درB قطع‌کند. در B عمودی برقاطع اخراج‌می‌کنیم و روی آن نقاط M و N را انتخاب می‌کنیم که :

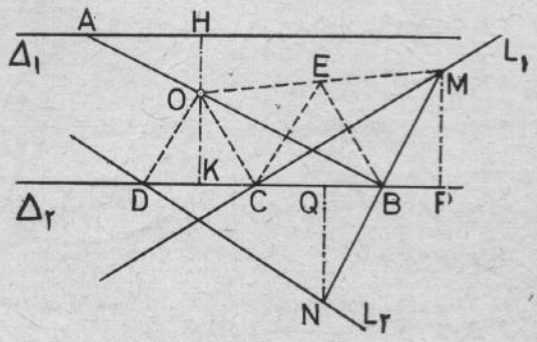
$BM = BN = OA$ باشد. هرگاه قاطعAB حولO بچرخد مکان نقاط M و N را پیدا کنید.

حل ـ ازO عمود HK را بر $\triangle_۱$ و $\triangle_۲$ و ازM و N عمودهای MP و NQ رابر $\triangle_۲$ رسم می‌کنیم وروی $\triangle_۲$ دو نقطهٔ C و D را انتخاب می‌کنیم که :

$$KD = KC = OH$$

باشد. مثلثهای MBP و NBQ با مثلث OAH برابرند و در نتیجه داریم :

$$BP = BQ = OH = KC = KD$$



هرگاه E وسط OM باشد از تساوی $KC = BP$ برمی‌آیدکه $EB = EC$ باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBM میانهٔ BE نصف وتر OM است پس CE نیز نصف OM است ومثلث OCM در زاویهٔ C قائمه است. بنابراین مکان M خط L_1 است که درنقطهٔ ثابت C برخط ثابت OC عمود است. به‌طریق مشابه ثابت می‌شودکه مکان N خط L_2 است که درنقطهٔ D بر OD عمود است

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۸۲/۱۰ـ از **سیدجمال آشفته** دانشجوی حسابداری منحنیهای C_1 و C_2 به‌معادله‌های :

$$(C_1) : y = ax^2 \quad و \quad (C_2) : y = \frac{x^2+1}{2}$$

رادرنظر می گیریم. اولامعلوم کنید به‌ازاء چه‌مقادیر a دومنحنی متقاطعند. ثانیاً اگردومنحنی در دونقطهٔ A و B متقاطع باشند، مقدار a را معلوم کنیدکه مثلث AOB قائم‌الزاویه باشد. *ثالثاً به ازاء* $a = 1$ دو منحنی را دریك‌شکل رسم کنید.

حل ـ اولا ازحل معادلات دو منحنی داریم:

$$x^2 + 1 = 2ax^2 \quad یا \quad (2a-1)x^2 - 1 = 0$$

این معادله وقتی جواب‌داردکه :

$$2a - 1 \neq 0 \quad و \quad \Delta = 2a - 1 \geqslant 0 \Longrightarrow a > \frac{1}{2}$$

ثانیاً ازمعادلهٔ بالا داریم:

$$x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2a-1}} \quad و \quad y = ax^2 = \frac{a}{2a-1}$$

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2a-1}} \quad و \quad \frac{a}{2a-1}\right)$$

$$و \quad B\left(\frac{-1}{\sqrt{2a-1}} \quad و \quad \frac{a}{2a-1}\right)$$

نقاط A وB نسبت به محور $y'y$ قرینه‌اند ، پس مثلث AOB متساوی‌الساقین است وفقط می‌تواند درزاویهٔ O قائمه باشد. برای اینکه زاویهٔ AOB قائمه باشد لازم و کافی است که ضریب زاویه‌ای خط OA برابر یك باشد، یعنی

$$m_{OA} = \frac{y_A}{x_A} = \frac{a}{\sqrt{2a-1}} = 1 \Longrightarrow a = 1$$

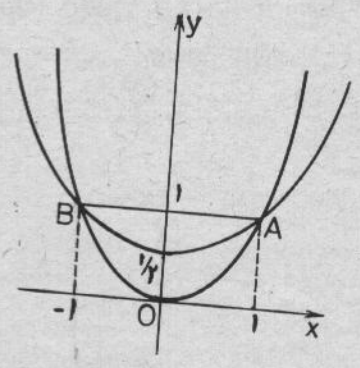
ثانیاً به ازاء $a = 1$ داریم:

$$(C_1): \ y = x^2 \quad و \quad y' = 2x$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$			0		$+$		
y	$+\infty$	↘	1	↘	0	↗	1	↗	$+\infty$

$$(C_2): \ y = \frac{x^2+1}{2} \quad و \quad y' = x$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$			0		$+$		
y	$+\infty$	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	$+\infty$



۸۲/۱۱ـ از **جوادفیض** دانشجوی دانشکدهٔ‌فنی‌تبریز

ثابت‌کنیدکه هرگاه‌داشته‌باشیم: $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = tg\gamma$

خواهیم‌داشت: $tg\alpha \, cotg\beta = tg\left(\frac{3\pi}{4} - \gamma\right)$

حل- رابطهٔ فرض را چنین می‌نویسیم:

$$-\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=tg\gamma$$

طرفین را در صورت‌ترکیب نسبت و در مخرج تفضیل نسبت می‌کنیم، می‌شود:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta}{-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{1+tg\gamma}{1-tg\gamma}=\frac{tg45^\circ+tg\gamma}{1-tg45^\circ tg\gamma}$$

$$-tg\alpha cotg\beta=tg(45^\circ+\gamma)$$

$$tg\alpha cotg\beta=-tg(45^\circ+\gamma)=tg(180^\circ-45^\circ-\gamma)=$$
$$=tg(135^\circ-\gamma)$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۸۲/۱۲- از سیدرضا میرزنده‌دل دانشجوی فنی

تابع زیر مفروض است:

$$f(x)=(x^2+1)cotg^2\alpha+2x\cos\alpha+\sin^2\alpha$$

ثابت کنید که: $f(x)-f'(x)=f(x-1)$

و $f(x-1)$ مجذور کامل است.

حل- داریم:

$$f(x)-f'(x)=[(x^2+1)cotg^2\alpha+2x\cos\alpha+\sin^2\alpha]$$
$$-[2xcotg^2\alpha+2\cos\alpha)]$$
$$=(x^2-2x+1)cotg^2\alpha+2(x-1)\cos\alpha+\sin^2\alpha$$
$$=(x-1)^2cotg^2\alpha+2(x-1)\cos\alpha+\sin^2\alpha=f(x-1)$$
$$=[(x-1)cotg\alpha+\sin\alpha]^2$$

۸۲/۱۳- منحنیهای زیررا در نظر می‌گیریم:

$$(C_1):y=-\frac{1}{8}(x^2-4x-52)$$

$$(C_2):y=\frac{1}{3}(ax^2+14)$$

۱) دومنحنی به‌ازاء چه‌مقادیر از a متقاطعند. آیاممکن است‌که دومنحنی برهم مماس باشند؟

۲) هرگاه دومنحنی در A و B متقاطع باشند و S رأس منحنی (C_1) باشد، مقدار a را تعیین‌کنید برای آنکه زاویهٔ ASB قائمه باشد.

۳) به‌ازاء $a=\frac{1}{4}$ دومنحنی را در یك شکل رسم‌کنید.

حل- ۱) ازحل معادلات دومنحنی داریم:

$$(8a+3)x^2-12x-44=0 \qquad (1)$$

$$\triangle'=36+44(8a+3)>0\Longrightarrow a>\frac{-21}{44}$$

به‌ازاء $a=\frac{-21}{44}$ دومنحنی برهم مماسند.

۲) هرگاه‌معادلهٔ (۱) دارای‌دوجواب x' و x'' باشدداریم:

$S(2$ و $7)$

$$A(x' \text{ و } \frac{ax'^2+14}{3})\text{ و }B(x'' \text{ و } \frac{ax''^2+14}{3})$$

برای‌آنکه زاویهٔ ASB قائمه باشد لازم و کافی است‌که داشته باشیم:

$$m_{SA}.m_{SB}=-1$$

$$\frac{ax'^2-7}{3(x'-2)}\times\frac{ax''^2-7}{3(x''-2)}=-1$$

$$a^2(x'x'')^2-7a(x'^2+x''^2)+49=$$
$$=-9x'x''+18(x'+x'')-36$$

x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ (۱) می‌باشند پس:

$$x'+x''=\frac{12}{8a+3} \text{ و } x'x''=\frac{-44}{8a+3}$$

$$x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=$$
$$=\frac{144}{(8a+3)^2}+\frac{88}{8a+3}=\frac{704a-408}{(8a+3)^2}$$

$$a^2(\frac{-44}{8a+3})^2-\frac{7a(704a+408)}{(8a+3)^2}+49=$$
$$=\frac{396}{8a+3}+\frac{216}{8a+3}-36$$

این معادله بعد از ساده شدن می‌شود:

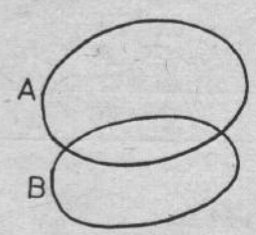
$$16a^2-24a-7=0\Longrightarrow a=\frac{7}{4} \text{ یا } -\frac{1}{4}$$

هر دو جواب از $\frac{-21}{44}$ بزرگترند و قابل قبولند.

۳) بـه ازاء $a=\frac{1}{4}$ داریم:

دنباله در صفحهٔ ۳۵۵

۹۲



هرگاه دو مجموعه دارای جزئی مشترك شامل عضوهای مشترك باشند، **دو مجموعهٔ متقاطع** نامیده می‌شوند.

مجموعه‌های A و B، شکل بالا، دومجموعهٔ ..... می‌باشند.

جدا ازهم

متقاطع

۹۶

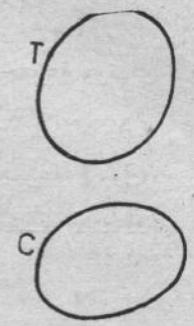
فصل مشترك دومجموعهٔ C و D مجموعه‌ای تهی است. دومجموعهٔ C و D متقاطعند یا جدا ازهم؟

. . . . . .

هیچ

$\emptyset$

جدا ازهم



۱۰۰

مجموعهٔ ورقهای بازی راکه سرباز می‌باشند با V و مجموعهٔ ورقهای بازی راکه گشنیزمی‌باشند باT نشان‌می‌دهیم.

فصل مشترك دومجموعهٔ V وT عبارتست از:

. . . . . .

$T \cap D = \{$بی‌بی گشنیز$\}$

متقاطع

۱۰۴

کسی‌که درانتخابات مجلس شورای ملی رأی می‌دهد، ایرانی و بالغ است، یعنی‌هم به مجموعهٔ ایرانیان تعلق دارد وهم به مجموعهٔ اشخاص بالغ. اگرI مجموعهٔایرانیان و M مجموعهٔ اشخاص بالغ باشد ،کسی‌که رأی می‌دهد به . . . . . مجموعه‌های I وM تعلق دارد.

بالغ هستند اما ایرانی نیستند

۱۰۸

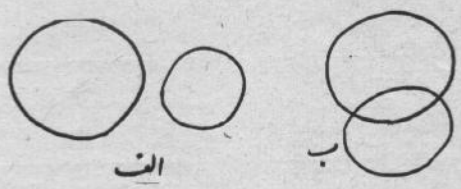
یك گروه ورزشکاران به دودسته تقسیم شده‌اند. دستهٔA شامل آنهایی است‌که قدآنان‌کمتراز ۱/۸۰ متراست ودستهٔA شامل آنهایی است‌که قدآنان بیشتر از۱/۶۰ متراست.

$A \cap B$ شامل آن دسته ازورزشکاران است‌که قد آنان

. . . . . .

۹۵

شکل الف نمودار دومجموعهٔ .... است .



شکل ب نمودار دومجموعهٔ .... است

متقاطع

۹۹

مجموعهٔ ورقهای بازی راکه گشنیز می‌باشند با T نشان می‌دهیم .

مجموعهٔ ورقهای بازی را که خشت می‌باشند با C نشان می‌دهیم .

دومجموعهٔ T و C چند عضو مشترك دارند ؟

. . . . . .

$T \cap C = \ldots$

T و C دومجموعهٔ . . . . می‌باشند .

نمودار مجموعهٔ C را به‌شکل اضافه کنید .

جدا ازهم

یك ورق سرباز گشنیز

۱۰۳

T مجموعهٔ ورقهای بازی است که گشنیز می‌باشند و D مجموعهٔ ورقهای بازی است که بی‌بی می‌باشند .

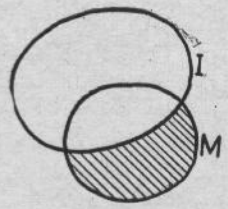
$T \cap D = \{ . . . . \}$

T و D دومجموعهٔ . . . . می‌باشند

فصل‌مشترك

۱۰۷

درنمودار مقابل، I مجموعهٔ ایرانیان و M مجموعهٔ اشخاص بالغ است. ناحیهٔ هاشور ـ خورده نمودار اشخاصی است که . . . . .



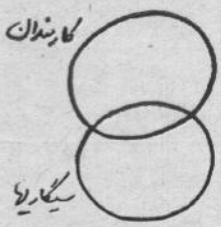
از ۱/۸۰ متر و از ۱/۶۰ متر بیشتر است.

(دنباله دارد)

۹۳

مجموعهٔ کارمندان و مجموعهٔ اشخاص سیگاری دارای جزء مشترکی می‌باشند که شامل کارمندانی است که سیگار می‌کشند.

این دو مجموعه . . . . . می‌باشند.



متقاطع

جدا از هم

۹۷

مجموعهٔ ورقهای بازی را که قرمز (دل ، خشت) می‌باشند با R نشان می‌دهیم ، مجموعهٔ ورقهای بازی را که سیاه (پیک ، گشنیز) می‌باشند با N نشان می‌دهیم.

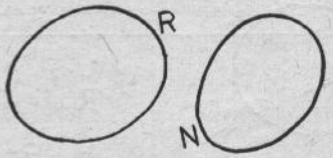
دو مجموعهٔ R و N آیا عضو مشترك دارند؟

. . . . . .

رابطهٔ زیر را کامل کنید:

$R \cap N = \ldots$

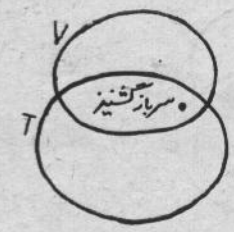
R و N دو مجموعهٔ . . . . می‌باشند.



۱۰۱

دو مجموعهٔ V و T جزء مشترکی دارند که شامل یك عضو سرباز گشنیز، است.

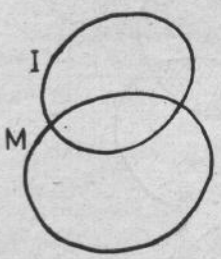
V و T دو مجموعهٔ . . . . می‌باشند.



۱۰۵

درشکل روبرو، I نمودار مجموعهٔ ایرانیان و M مجموعهٔ اشخاص بالغ است.

ناحیه‌ای را که شامل اشخاصی است که می‌توانند در انتخابات مجلس شورای ملی شرکت کنند، با هاشور مشخص کنید .



ایرانی هستند اما

بالغ نمی‌باشند

۹۴

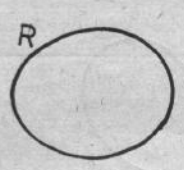
مجموعه‌هایی که دارای عضوهای مشترک باشند مجموعه‌های..... نامیده می‌شوند.

مجموعه‌هایی که هیچ عضو مشترک نداشته باشند مجموعه‌های ..... نام دارند .

متقاطع

۹۸

R و N دو مجموعهٔ جدا ازهم می‌باشند . نمودار مجموعهٔ R رسم شده است . در همین شکل نمودار مجموعهٔ N را رسم کنید .



نه

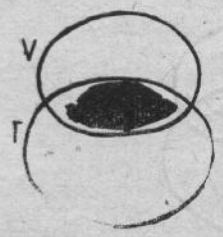
Ø

جدا ازهم

۱۰۲

شکل روبرو نمودار دو مجموعهٔ V و T است .

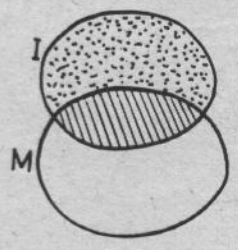
روی این نمودار سرباز گشنیز را در جای خود بنویسید.

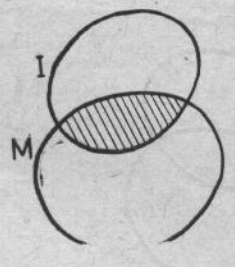


متقاطع

۱۰۶

درنمودار مقابل ، I مجموعهٔ ایرانیان و M مجموعهٔ اشخاص بالغ است . ناحیهٔ هاشور خورده نمودار اشخاصی است که هم ایرانی هستند و هم بالغ. ناحیهٔ نقطه‌چین نمودار اشخاصی است که ...





دنباله از صفحهٔ ۳۵۰

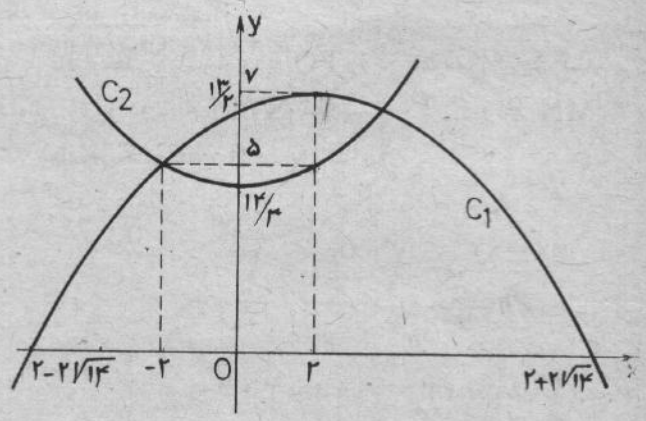
$$(C_1):\quad y=\frac{-x^2+4x+52}{8}$$ و

$$y'=\frac{-2x+4}{8}$$

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{14}$		0		2		$2+2\sqrt{14}$		$+\infty$
y'				+			0	−			
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{13}{2}$	↗	7	↘	0	↘	$-\infty$

$$(C_2):\ y=\frac{x^2+56}{12}\ \text{و}\ y'=\frac{x}{6}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'				−	0		+		
y	$+\infty$	↘	5	↘	$\frac{14}{3}$	↗	5	↗	$+\infty$



۸۲/۱۴ـ از سیدجمال آشفته

ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$\cos(2\theta+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha$$

مقادیر $tg(\theta+\alpha)$ و $tg\alpha$ و $tg\theta$ تصاعد هندسی می‌سازند.

حل ـ رابطهٔ داده شده را به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{\cos(2\theta+\alpha)}{\cos\alpha}=\cos 2\alpha$$

$$\frac{\cos(2\theta+\alpha)-\cos\alpha}{\cos(2\theta+\alpha)+\cos\alpha}=\frac{\cos 2\alpha-1}{\cos 2\alpha+1}$$

$$\frac{-2\sin\theta\sin(\theta+\alpha)}{2\cos\theta\cos(\theta+\alpha)}=\frac{-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}$$

$$tg\theta\, tg(\theta+\alpha)=tg^2\alpha$$

۸۲/۱۵ ـ فرستنده : **سید رضا میرزنده‌دل**
دانشجوی فنی

چه‌رابطه‌ای باید برقرار باشد برای آنکه دومعادلهٔ زیر هم‌ارز باشند؟

$$p\sin 2x+q\cos 2x=r$$

$$m\,tg(x+a)=n\,tg(x-a)$$

حل ـ باید رابطه‌ای تعیین کنیم که هر معادله تبدیلی از معادله دیگر باشد، یا اینکه هردو معادله تبدیلی از یك معادله باشند. معادلهٔ دوم را به ترتیب زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{tg(x+a)}{tg(x-a)}=\frac{n}{m}$$

$$\frac{\sin(x+a)\cos(x-a)}{\sin(x-a)\cos(x+a)}=\frac{n}{m}$$

$$\frac{\sin 2x+\sin 2a}{\sin 2x-\sin 2a}=\frac{n}{m}$$

$$\sin 2x=\frac{n+m}{n-m}\sin 2a$$

چون این مقدار را در معادلهٔ اول منظور کنیم، بدست می‌آید:

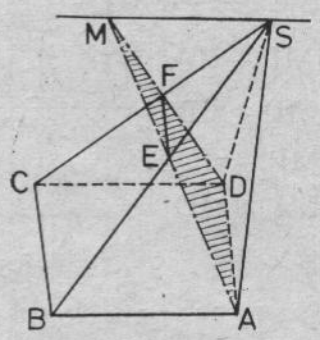
$$\cos 2x=\frac{r(n-m)-p(n+m)\sin 2a}{q(n-m)}$$

با استفاده از رابطهٔ $\sin^2 2x+\cos^2 2x=1$ بعد از اختصار خواهیم داشت:

$$(n+m)^2(p^2+q^2)\sin^2 2a-2pr(n^2-m^2)\sin 2a+(n-m)^2(r^2-q^2)=0$$

۸۲/۱۶ـ ترجمهٔ: **داو یدریحان**

S رأس هرمی است که قاعده‌اش متوازی الاضلاع ABCD است. در وجه SBC پاره‌خط EF را موازی با BC ومحصور بین SB و SC رسم می‌کنیم. خطوط AE و DF یکدیگر را درM قطع می‌کنند. هرگاه EF موازی با خودش حرکت کند مکان M چیست؟



حل ـ چون BC با AD موازی‌است پس EF نیزبا AD موازی است و در مثلث MAD داریم:

$$\frac{MF}{MD}=\frac{EF}{AD}=\frac{EF}{BC}$$

در مثلث SBC داریم:

$$\frac{SF}{SC}=\frac{EF}{BC}$$

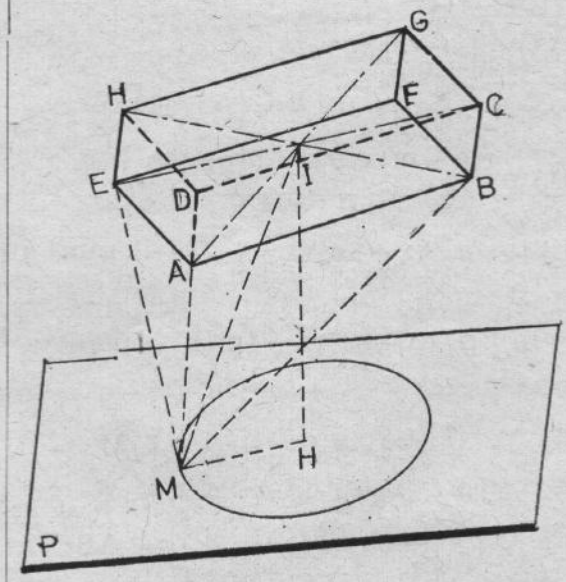
پس خواهیم داشت:

$$\frac{MF}{MD}=\frac{SF}{SC}\Longrightarrow SM \parallel CD$$

پس مکان Sx است که از S موازی با ضلعهای CD و AB از قاعدهٔ هرم رسم می‌شود.

۸۲/۱۷ـ ترجمهٔ **داود بدریحان**

متوازی‌السطوح ABCDEFGH و صفحهٔ ثابت P مفروض است. مکان نقاط M از صفحهٔ P را تعیین کنید که مجموع مجذورات فواصل M از رأسهای متوازی‌السطوح مقدار ثابت k^2 باشد.



حل ـ هرگاه I نقطهٔ تلاقی اقطار متوازی‌السطوح و H تصویر قائم I بر صفحهٔ P باشد، در مثلثهای MAG، MBH، MCE و MDF به ترتیب داریم:

$$MA^2+MG^2=2MI^2+2IA^2$$
$$MB^2+MH^2=2MI^2+2IB^2$$
$$MC^2+ME^2=2MI^2+2IC^2$$
$$MD^2+MF^2=2MI^2+2ID^2$$

طرفین تساویهای بالا را نظیر به نظیر باهم جمع می‌کنیم. طرف اول حاصل جمع بنا به‌فرض برابر k^2 است. درطرف دوم نیز مجموع:

$$IA^2+IB^2+IC^2+ID^2=l^2$$

ثابت است، پس خواهیم داشت:

$$8MI^2=k^2-2l^2$$

به‌شرط $k>l\sqrt{2}$ چون $k^2-2l^2=8m^2$ فرض‌شود داریم: $MI^2=m^2$. درمثلث قائم‌الزاویهٔ IAH با فرض $IH=n$ داریم:

$$HM^2=IM^2-IH^2=m^2-n^2$$

به‌شرط $m\geqslant n$ مکان M دایره‌ای است از صفحهٔ P که مرکز آن H و شعاع آن $\sqrt{m^2-n^2}$ است.

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۸۲/۱۸ـ هذلولی به معادلهٔ زیر مفروض است:

$$x^2-4y^2-2x-8=0$$

اولا هذلولی را رسم کنید.

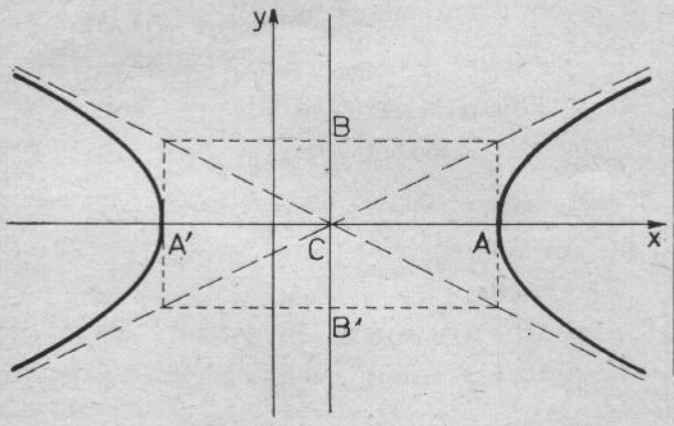
ثانیاً هرپاره‌خط که از مرکز هذلولی بگذرد و بین دوشاخهٔ آن محصور باشد، قطر هذلولی نامیده می‌شود. اگر P(۲ و ۶) یک سر قطری از هذلولی به‌معادلهٔ بالا باشد، مختصات Q سر دیگر این قطر را بدست آورید.

ثالثاً خط △ موازی با PQ را در نظر می‌گیریم که هذلولی را در دونقطهٔ M و N قطع کند. اگر S وسط MN باشد معادلهٔ مکان نقطهٔ S را بدست آورید.

حل ـ داریم:

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$$

$$C(\alpha=1 \text{ و } \beta=0)\ ،\ a=3 \text{ و } b=\frac{3}{2}$$



ثانیاً ـ چون C مرکز هذلولی مرکز تقارن آن است پس Q قرینهٔ P نسبت به C است و داریم:

$$Q(x = ۲ - ۶ = -۴ \text{ و } y = -۲)$$

ثالثاً- ضریب‌زاویه‌ای خط PQ می‌شود:

$$m = \frac{۲+۲}{۶+۴} = \frac{۲}{۵}$$

پس معادلهٔ خط △ می‌شود: $y = \frac{۲}{۵}x + h$ واز حل این‌معادله باسعادلهٔ هذلولی داریم:

$$x^۲ - ۴(\frac{۲}{۵}x + h)^۲ - ۲x - ۸ = ۰$$

$$۹x^۲ - ۱۰(۸h + ۵)x - ۱۰۰h^۲ - ۲۰۰ = ۰$$

x' و x'' طولهای نقاط M و N ریشه‌های این‌معادله‌اندوچون S وسط MN است پس اگر x و y مختصات S باشنددارایم:

$$x = \frac{x' + x''}{۲} = \frac{۵(۸h + ۵)}{۹} = \frac{۴۰h + ۲۵}{۹}$$

$$y = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۴۰h + ۲۵}{۹}\right) + h = \frac{۲۵h + ۱۰}{۹}$$

برای‌تعیین معادلهٔ‌مکان S،پارامتر h رابین x و y حذف‌می‌کنیم:

$$۴۰h + ۲۵ = ۹x \text{ و } h = \frac{۹x - ۲۵}{۴۰}$$

$$y = \frac{۱}{۹}\left[۲۵ \times \frac{۹x - ۲۵}{۴۰} + ۱۰\right]$$

$$y = \frac{۵x - ۵}{۸}$$

۸۲/۱۹- در مثلث ABC داریم:

$$AB = ۱۰ \text{ و } B = ۴۵^\circ \text{ و } \cos A = -\frac{۳}{۵}$$

اندازه‌ضلعهای BC و AC ومساحت مثلث‌راحساب‌کنید.

حل- زاویهٔ A منفرجه است وداریم:

$$\sin A = \sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = \frac{۴}{۵}$$

$$\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin C = \frac{۴}{۵} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۳}{۵} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$$

$$c = AB = ۱۰ \text{ و } \frac{c}{\sin C} = ۱۰ : \frac{\sqrt{۲}}{۱۰} = ۵۰\sqrt{۲}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Longrightarrow a = ۵۰\sqrt{۲} \times \frac{۴}{۵} = ۴۰\sqrt{۲}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Longrightarrow b = ۵۰\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۵۰$$

$$S = \frac{۱}{۲}ab\sin C = \frac{۱}{۲} \times ۴۰\sqrt{۲} \times ۵۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۱۰} = ۲۰۰$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۸۲/۲۰- فرستنده: **کیقباد شمس‌اسحاق**

منحنی نمایش تغییرات تابع زیررا رسم‌کنید.

$$y = \frac{x^۲|x|}{|x| - ۱}$$

حل- چون باتبدیل x به $-x$ مقدار y تفاوت‌نمی‌کند، پس محور yها محور تقارن منحنی است. بنابراین تغییرات تابع را در فاصلهٔ $(+\infty \text{ و } ۰)$ تعیین می‌کنیم. درازاء $x \geqslant ۰$ داریم: $|x| = x$ و:

$$y = \frac{x^۳}{x - ۱} \text{ و } y' = \frac{x^۲(۲x - ۳)}{(x - ۱)^۲}$$

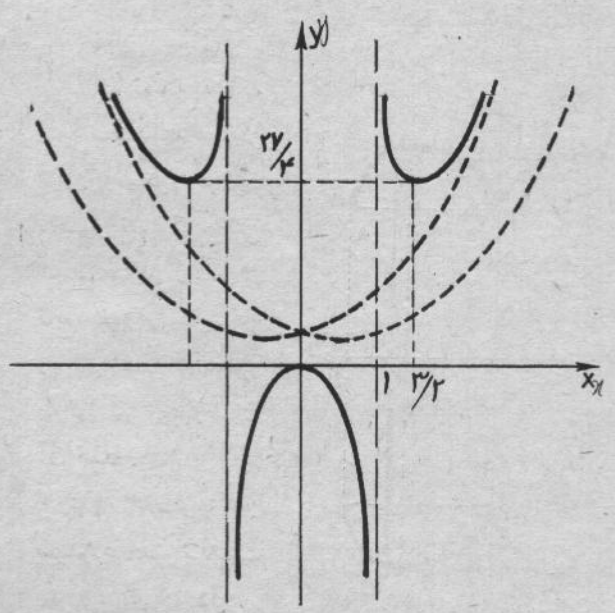
x	۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
y'	۰	−		−	۰	+	
y	۰	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{۲۷}{۴}$	↗	$+\infty$

تابع به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = x^۲ + x + ۱ + \frac{۱}{x - ۱}$$

هرگاه $x \to \infty$ حد $\frac{۱}{x - ۱}$ برابر صفر است پس منحنی نمایش‌هندسی‌تابع بامنحنی تابع $y = x^۲ + x + ۱$ مجانب‌است.

باتوجه به‌اینکه $y'y$ محور تقارن منحنی است، منحنی نمایش هندسی تابع مفروض به‌شکل زیراست.



۸۲/۲۱ـ فرستنده: کیقبادشمس اسحاق

منحنی تغییرات تابع زیررا رسم کنید:

$$y=|x|\pm\sqrt{4-x^2}$$

حل ـ با تبدیل x به x− مقدار y تفاوت نمی‌کند، پس y′y محور تقارن منحنی است و می‌توانیم تغییرات تابع‌را فقط در ازاء مقادیر مثبت x بدست‌آوریم. درازاء $x\geqslant 0$ داریم $|x|=x$ و:

$$y=x\pm\sqrt{4-x^2}\Longrightarrow y-x=\pm\sqrt{4-x^2}$$

منحنیهای نمایش دو تابع:

$$y=x-\sqrt{4-x^2}\quad \text{و}\quad y=x+\sqrt{4-x^2}$$

نسبت به مبدأ مختصات قرینهٔ یکدیگرند زیرا اگر در هر یك از این دو تابع x را به x− و y را به y− تبدیل کنیم تابع دیگر بدست می‌آید. بنابراین کافی است منحنی‌نمایش تغییرات تابع:

$$y=x+\sqrt{4-x^2}$$

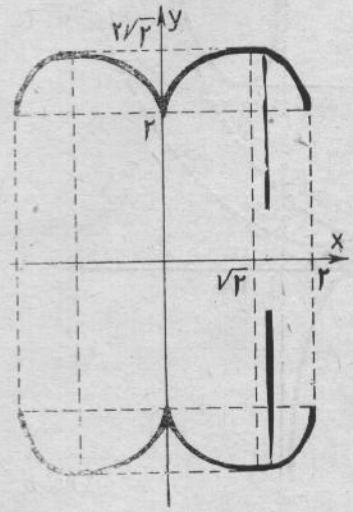
را در ازاء مقادیر مثبت x رسم کنیم و بعد قرینهٔ آن‌را نسبت به مبدأ مختصات وسپس قرینهٔ شکل حاصل را نسبت به محور عرضها رسم کنیم.

با توجه به اینکه $x\geqslant 0$ اختیار می‌شود، تابع در ازاء $0\leqslant x\leqslant 2$ معین است. مشتق تابع:

$$y'=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

درفاصلهٔ مزبور در ازاء $x=\sqrt{2}$ صفر شده از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد. جدول تغییرات تابع چنین است:

x	0		$\sqrt{2}$		2
y′		+	0	−	0
y	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2



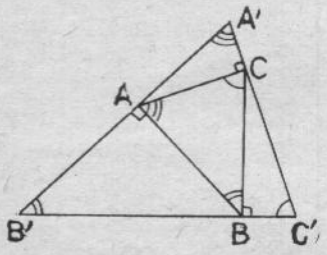
با توجه به‌آنکه مبدأ مختصات مرکز تقارن و محور عرضها محور تقارن منحنی است، منحنی نمایش تابع مفروض به شکل روبرو است که محور طولها نیز محورتقارن آن است.

۸۲/۲۲ـ فرستنده: سیدرضامیرزنده‌دل.

از رأسهای A و B و C مثلث مفروض ABC به ترتیب عمودهایی بر AB و BC و CA اخراج می‌کنیم تا از تلاقی آنها مثلث A′B′C′ بدست‌آید. ثابت‌کنیدکه نسبت مساحت این مثلث به‌مساحت مثلث مفروض برابراست‌با:

$$(cotg A+cotg B+cotg C)^2$$

حل ـ دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابهند و نسبت مساحتهای آنها برابر است با مجذور نسبت ضلعهای متناظر آنها:



$$\frac{S'}{S}=\left(\frac{B'C'}{BC}\right)^2$$

$$B'C'=B'B+BC'$$

در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABB′ و BCC′ به‌ترتیب‌داریم:

$$BB'=\frac{AB}{\sin B'}=\frac{AB}{\sin B}$$

$$BC'=BC\,cotg C'=BC\,cotg C$$

$$AB=\frac{BC}{\sin A}\times\sin C\Longrightarrow BB'=\frac{BC\sin C}{\sin A\sin B}$$

$$B'C'=\frac{BC\sin C}{\sin A\sin B}+BC\,cotg C$$

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}+cotg C$$

$$=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}+cotg C$$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\sin B}+cotg C$$

$$=cotg A+cotg B+cotg C$$

$$\frac{S'}{S}=\left(\frac{B'C'}{BC}\right)^2=(cotg A+cotg B+cotg C)^2$$

۸۲/۲۳ـ فرستنده: سیدرضامیرزنده‌دل

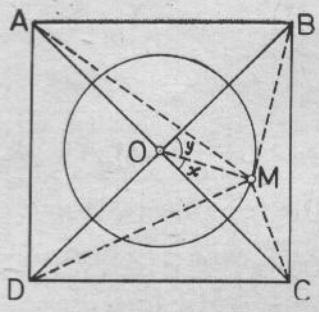
مربع ABCD به‌طول ضلع 2a مفروض‌است. به‌مرکز O مرکزمربع، وبه شعاع $R<a$ دایره‌ای‌رسم‌می‌کنیم. هرگاه‌از نقطهٔ M واقع براین دایره قطرهای مربع به زاویه‌های α و β دیده شوند، رابطه‌ای‌مستقل‌ازمکان M بین α و β بدست‌آورید.

حل- در مثلث OMC داریم:

$$\frac{OM}{OC}=\frac{\sin OCM}{\sin OMC}$$

$$\frac{R}{a\sqrt{2}}=\frac{\sin(MOC+OMC)}{\sin OMC}$$

$$\frac{R}{a\sqrt{2}}=\frac{\sin MOC}{tg OMC}+\cos MOC$$



هرگاه x اندازهٔ زاویهٔ MOC فرض شود، خواهیم داشت:

$$tg OMC=\frac{a\sqrt{2}\sin x}{R-a\sqrt{2}\cos x}$$

به طریق مشابه در مثلث OMA خواهیم داشت:

$$tg OMA=\frac{a\sqrt{2}\sin x}{R+a\sqrt{2}\cos x}$$

$$tg\alpha=tg(OMC+OMA)=$$

$$=\frac{tg OMC+tg OMA}{1-tg OMC\, tg OMA}$$

$$tg\alpha=\frac{2aR\sqrt{2}\sin y}{R^2-2a^2}$$

با فرض اینکه اندازهٔ زاویهٔ MOB برابر y باشد. باروش مشابه بدست خواهیم آورد که:

$$tg\beta=\frac{2aR\sqrt{2}\sin y}{R^2-2a^2}$$

$$x+y=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow tg\beta=\frac{2aR\sqrt{2}\cos x}{R^2-2a^2}$$

$$tg^2\alpha+tg^2\beta=\left(\frac{2aR\sqrt{2}}{R^2-2a^2}\right)^2(\sin^2x+\cos^2x)$$

$$tg^2\alpha+tg^2\beta=\frac{8a^2R^2}{(R^2-2a^2)^2}$$

۸۲/۲۴- از: جهانشاه کریمی بیرگانی

کوچکترین وبزرگترین عدد چهاررقمی‌را پیدا کنید که حاصل‌ضرب آن در ۵ مکعب کامل باشد.

حل- هرگاه N عدد مطلوب باشد به صورت $25k^3$ است و:

$$1000\leqslant 25k^3<10000$$

$$40\leqslant k^3<400 \Longrightarrow 4\leqslant k\leqslant 7$$

کوچکترین عدد مطلوب در ازاء $k=4$ و بزرگترین آن در ازاء $k=7$ بدست می‌آید که به ترتیب برابرند با:

$$25\times 4^3=1600 \text{ و } 25\times 7^3=8575$$

۸۲/۲۵- از: جواد فیض

ثابت کنید که عدد زیر اصم است:

$$N=\sqrt{1341^{1962}+1348^{1967}+1350^{1972}}$$

حل- به‌ترتیب داریم:

$$1341^{1962}=(1340+1)^{1962}=10k+1$$

$$1348^{1962}=10k_1+8^{1967}$$

$$8^{1967}=2^{5901}=2^{4q+1}=10k_2+2$$

$$1348^{1967}=10k'+2$$

$$1350^{1972}=10k''$$

$$N=\sqrt{(\text{مضرب } 10)+3}$$

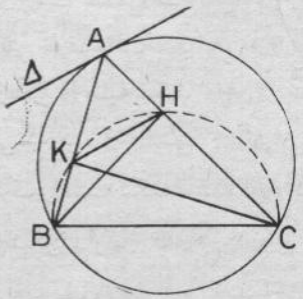
چون مجذور هیچ عدد صحیح به ۳ ختم نمی‌شود پس N عدد اصم است.

۸۲/۲۶- ترجمهٔ ازفرانسه

مثلث ABC ودایرهٔ محیطی آن را درنظر می‌گیریم. ارتفاعهای BH و CK ازمثلث ومماس △ را در A بردایرهٔ محیطی آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط △ با خط KH موازی است.

حل- چهارضلعی BKHC محاطی است، پس:

$$\overline{AK}\cdot\overline{AB}=\overline{AH}.\overline{AC}=k$$

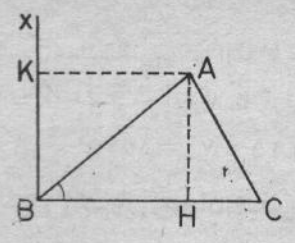


در انعکاس به‌قطب A وبه قوت K نقطهٔ B به نقطهٔ K و نقطهٔ C به نقطهٔ H تبدیل می‌شود، بنابراین منعکس دایرهٔ محیطی مثلث ABC خط KH است. چون خط KH منعکس دایره است پس بر قطری از دایره که ازقطب انعکاس می‌گذرد عمود است و در نتیجه با مماس درنقطهٔ A بردایره، یعنی با △ موازی است.

۸۲/۲۷- ترجمهٔ ازفرانسه

درمثلث ABC دورأس B و C ثابتندورأس A تغییرمی‌کند بقسمی که $AC=AB\cos B$ است. مکان رأس A چیست؟

حل ـ به فرض آنکه زاویهٔ B حاده باقی بماند ، چون ارتفاع AH ازمثلث را رسم کنیم، درمثلث



ABH داریم $BH = AB \cos B$. ازمقایسهٔ این رابطه بارابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود $BH = AC$. درنقطهٔ B عمود Bx را بر BC اخراج می‌کنیم و عمود AK را بر Bx رسم می‌کنیم $AK = BH = AC$ است. پس مکان A' سهمی است که Bx خط هادی و C کانون آن است.

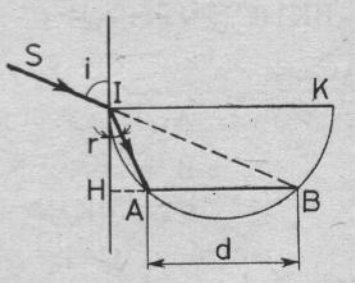
حل مسائل فیزیك

زیر نظر: هوشنگ شریفزاده

۸۲/۲۸ـ فرستنده: **رسول آژیری** دبیر دبیرستانهای گچساران

ظرفی است به‌شکل نیمکره به‌قطر ۲a ودر داخل آن سکه‌ای وجود دارد. ازکنار ظرف چنان نگاه می‌کنیم که سکه دیده نشود. درهمین‌حال ظرف را با مایعی به‌ضریب انکسار n پر می‌کنیم که درنتیجهٔ آن تمام سکه‌دیده‌می‌شود. قطر سکه را برحسب a و n حساب کنید.

حل ـ شعاع نورانی در امتداد SI است بقسمی که وقتی ظرف‌خالی است ازنقطهٔ B، لبهٔ سکه، می‌گذرد ، و وقتی



ظرف‌پر است شکسته شده ازA لبهٔ دیگر سکه می‌گذرد. مطابق با شکل داریم:

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} \quad و \quad \sin i = \frac{BH}{IB} \quad و \quad \sin r = \frac{AH}{AI}$$

$$n = \frac{BH.AI}{AH.BI}$$

دومثلث IHB و IHA متشابهند وداریم :

$$\frac{BI}{AI} = \frac{BH}{IH} \Longrightarrow n = \frac{IH}{AH}$$

$$AH = a - \frac{d}{2} \Longrightarrow IH = n(a - \frac{d}{2})$$

$$AI^2 + BI^2 = AI^2 + AK^2 = 4a^2$$

و $AI^2 = IH^2 + HA^2$

$$BI^2 = IH^2 + BH^2 = IH^2 + (HA + d)^2$$

$$2IH^2 + AH^2 + (AH + d)^2 = 4a^2$$

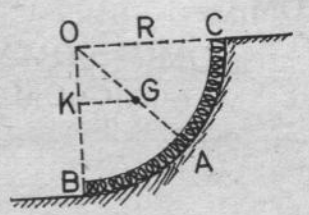
$$2n^2(a - \frac{d}{2})^2 + (a - \frac{d}{2})^2 + (a + \frac{d}{2})^2 = 4a^2$$

$$d = 2a(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1})$$

۸۲/۲۹ـ فرستنده: **رسول آژیری**

لوله‌ای است به‌شکل ربع دایره وبدون مالش ، زنجیری به طول $\frac{\pi r}{2}$ وبه‌وزن $\frac{w\pi r}{2}$ در داخل آن‌قراردارد. اگر این زنجیر ازحال سکون شروع به‌لغزش‌کند، هنگامی که‌ازلوله‌رها می‌شود سرعت آن چقدراست؟ درصورتی که‌زنجیر پس‌ازخروج ازلوله درسطح افقی حرکت کند.

حل ـ G گرانیگاه زنجیرروی OA نیمساز زاویهٔ BOC واقع است بقسمی که :



$$OG = \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \quad یا \quad OG = \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}$$

$$OG = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi}$$

درمثلث OKG داریم :

$$OK = \frac{OG\sqrt{2}}{2} = \frac{2r}{\pi} \Longrightarrow BK = r - \frac{2r}{\pi}$$

بنابه قضیهٔ انرژی سینتیك داریم :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w\pi r}{2g}\right)V^2 = \frac{w\pi r}{2} \times KB$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w\pi r}{2g}\right)V^2 = \frac{w\pi r}{2}\left(r - \frac{2r}{\pi}\right)$$

$$V = \sqrt{2rg(1 - \frac{2}{\pi})}$$

حل مسائل شیمی

زیر نظر : باقر مظفرزاده

۸۲/۳۰ ـ فرستنده : **کرامت‌الله اشراق** دانشجوی شیمی دانشسرای عالی

مقدار ۲ گرم سنگ معدن کرم را دراسید حل‌کرده و بعدتاحصول $Cr_2O_7^{--}$ بوسیلهٔ $(NH_4)_2S_2O_8$ اکسیدکرده‌ایم وزیادی $(NH_4)_2S_2O_8$ رابا جوشانیدن ازبین برده‌ایم. محلول را به بالون ژوژهٔ ۱۰۰ میلی‌لیتری منتقل‌کرده وبعد از سردکردن تارسیدن به‌نشانهٔ بالون رقیق‌کرده‌ایم. برای‌سنجش مقدار ۲۰سانتیمتر مکعب محلول حاصله را انتخاب کرده وبا ۲۵cc محلول $FeSO_4$ عمل‌کرده‌ایم. برای تیترکردن زیادی $FeSO_4$ مقدار ۱۵cc محلول ۰/۰۴۵ نرمال پرمنگنات بکار رفته است . مقدارکرم مادهٔ معدنی‌را برحسب درصد بیان کنید درصورتی‌که می‌دانیم ۳۵cc محلول $KMnO_4$ برای ۲۵cc محلول $FeSO_4$ مصرف‌می‌شود .

حل ـ به ترتیب داریم :

$$Cr_2(SO_4)_3 + 3(NH_4)_2S_2O_8 + 7H_2O \rightarrow (NH_4)_2Cr_2O_7 + 2(NH_4)_2SO_4 + 7H_2SO_4$$

$$Cr_2O_7^{--} + 6Fe^{++} + 14H^{+} \rightarrow 6Fe^{+++} + 2Cr^{+++} + 7H_2O$$

$$10FeSO_4 + 8H_2SO_4 + 2KMnO_4 \rightarrow 5Fe_2(SO_4)_3 + 2MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O$$

$N.V = N'.V'$ یا $25 \times N = 35 \times 0/045$

$N = 0/063$ نرمالیتهٔ محلول سولفات‌فرو

$15 \times 0/045 = V \times 0/063$

$V = 10/71$ حجم زیادی سولفات‌فرو

$25 - 10/71 = 14/29$ سولفات‌فرو مصرف‌شده

$2Cr \rightarrow Cr_2O_7^{--} \rightarrow 6Fe^{++}$

۵۲ گرم کرم $\quad 3 \times 1000^{cc}$

$x \quad 14/29 \times 0/063$

$x = 0/0156$ مقدارکرم در ۲۰cc رقیق‌شده

$0/0156 \times 5 = 0/068$

مقدارکرم در ۱۰۰cc رقیق‌شده یا در ۲ گرم سنگ معدن

۲ گرم $\quad 0/068$

$100 \quad x \quad x = 3/4$ یا $3/4\%$

۸۲/۳۱ ـ فرستنده: **کرامت‌الله اشراق**

برای تعیین مقدار منگنز یک‌محلول سولفات منگنز، آن را درمحیط خنثی بامحلول پرمنگنات پتاسیم(معادلهٔ عمل)تیتر کرده ونرمالیتهٔ پرمنگنات (تیتراژ درمحیط اسیدی) برابر با ۰/۰۲۵ بوده‌است. مقدار منگنز در محلول مصرف شده چقدر است؟ درصورتی‌که برای این‌تیتراژ ۴۲ میلی‌لیتر محلول پرمنگنات بکاررفته‌است.

حل ـ داریم :

$$2MnSO_4 + 2KMnO_4 + 2H_2O \rightarrow 5MnO_2 + K_2SO_4 + 2H_2SO_4$$

نخست از رابطهٔ $C = N.E$ غلظت پرمنگنات را برابر با $C = 0/79$ گرم درلیتر بدست می‌آوریم .

چون پرمنگنات درمحیط خنثی دارای تغییر ظرفیت ۳ است ، پس نرمالیتهٔ آن درمحیط خنثی می‌شود :

$$N' = 0/79 : \frac{158}{3} = 0/015$$

$3 \times 55Mn \qquad 2 \times 3 \times 1000KMnO_4$

$x \qquad 42 \times 0/015$

$x = 0/017325$

پاسخ تستهای ریاضی

۸۲/۳۲ ـ (ج) هرگاه x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 5x - 1 = 0$ و y' و y'' ریشه‌های معادلهٔ $y^2 - (m^2 + 2)y + m - 4 = 0$ باشد، داریم :

$$y'y'' = (x'x'')^2 \Longrightarrow m - 4 = 1 \Longrightarrow m = 5$$

$$y' + y'' = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x''$$

$$m^2 + 2 = 25 + 2 \Longrightarrow m = \pm 5$$

جواب مشترک دومعادلهٔ بدست آمده $m = 5$ است.

۸۲/۳۳ ـ (الف) اگریکی ازریشه‌های معادلهٔ:

$$x^2 - (4 + 3m)x + 7 + 5\sqrt{2} = 0$$

مجهور ریشهٔ دیگر باشد، داریم :

$$\begin{cases} x' + x'' = x' + x'^2 = 4 + 3m \\ x'x'' = x'^3 = 7 + 5\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3 \end{cases}$$

$$x' = 1 + \sqrt{2} \Longrightarrow 3m + 4 = 1 + \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})^2 = 4 + 3\sqrt{2} \Longrightarrow m = \sqrt{2}$$

۸۲/۳۴ـ (د) ازمعادلهٔ :

$$x^4-(k^2+9)x^2+9k^2=0$$

داریم :

$$x=\pm 3 \text{ یا } \pm k$$

هر گاه $k\neq 3$ باشد معادله چهار جواب متمایز دارد و هر گاه $k=3$ باشد معادله فقط دوجواب متمایز دارد .

۸۲/۳۵ـ (د) باتوجه به‌اینکه‌در $\log x$ داریم $x>0$ پس $\log x^2=2\log|x|$ ودرنتیجه :

$$5^{\log x^2}=5^{2\log|x|}=25^{\log|x|}$$

۸۲/۳۶ ـ (الف) هر گاه a_1 ، a_2 ، a_3،...،a_n به‌ترتیب جمله‌های متوالی یك‌تصاعد حسابی باشند، هر گاه d قدرنسبت این تصاعد باشد داریم :

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\dots=a_n-a_{n-1}=d$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+\dots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{a_n-a_1}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}$$

$$=\frac{(n-1)d}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

۸۲/۳۷ ـ (د) هر گاه دردوتصاعدحسابی وهندسی :

$$\overset{\circ}{\circ}a_1 . a_2 . a_3 \dots a_n$$

$$\overset{\circ\circ}{\circ\circ}b_1 : b_2 : b_3 :\dots : b_n$$

$a_1=b_1$ و $a_2=b_2$ وتمام جمله‌های‌تصاعدحسابی و همچنین قدرنسبت‌آن‌عددهای مثبت باشند به‌فرض‌آنکه d قدرنسبت تصاعدحسابی و q قدرنسبت تصاعدهندسی باشدداریم:

$$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}$$

$$a_1=b_1>0 \ ، \ d>0 \Longrightarrow q>1 \Longrightarrow a_n>a_{n-1}$$

$$d=a_1q-a_1=a_1(q-1)$$

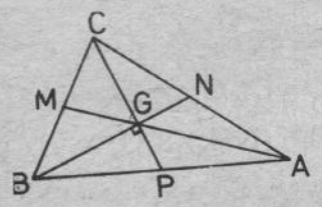
$$1<q \Longrightarrow n-1<1+q+q^2+\dots+q^{n-2}$$

$$d(n-1)<a_1(q-1)(1+q+q^2+\dots+q^{n-2})$$

$$a_1+d(n-1)<a_1+a_1(q^{n-1}-1)$$

$$a_1+d(n-1)<a_1q^{n-1}=b_1q^{n-1} \Longrightarrow a_n<b_n$$

۷۲/۳۸ ـ (ج) هر گاه دومیانهٔ BN و CP از مثلث ABC برهم عمودباشند، به‌فرض‌آنکه G نقطهٔ تلاقی میانه‌ها باشد در مثلث قائم ـ الزاویهٔ BGC میانهٔ GM نصف وتر BC است وچون G در ثلث میانهٔ AM ابتدا



ازM واقع است پس:

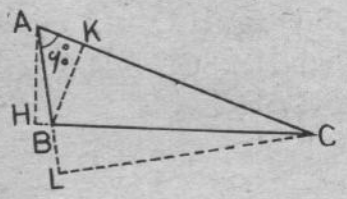
$$AM=3GM=\frac{3BC}{2}$$

۸۲/۳۹ ـ (ب) قبلاً یادآوری می‌شودکه جملهٔ «هر گاه BH ارتفاع نظیرضلع BC باشد» که درصورت مسئله دریکان شمارهٔ گذشته مشاهده می‌شود اشتباه است و صحیح آن چنین بوده‌است: «هر گاه AH ارتفاع نظیر ضلع BC باشد».

هر گاه‌درمثلث ABC داشته‌باشیم :

$$a^2=b^2+c^2-bc$$

چون زاویهٔ A حاده است داریم :



$$a^2=b^2+c^2-2b.AK$$

که AK تصویرAB برAC است پس :

$$2AK=AB \Longrightarrow A=60^\circ$$

به‌فرض‌آنکه CL ارتفاع نظیر رأس C باشد زاویهٔ ACL برابر 30° است وAL نصف AC است. اما چون زاویهٔ $ABC<120^\circ$ است پس زاویهٔ ABH بزرگتراز 60° ودرنتیجه زاویهٔ HAB کوچکتراز 30° است وداریم :

$$BH<\frac{AB}{2}<\frac{AL}{2} \text{ و } AL=\frac{AC}{2} \Longrightarrow BH<\frac{AC}{4}$$

۸۲/۴۰ ـ (ب) خط △ به‌معادلهٔ :

$$(3m+2)x-(m+3)y+5m+8=0$$

به ازاء همهٔ مقادیرm ازنقطهٔ ثابت $M(-1 \text{ و } 2)$ می گذردو این مختصات درتابع $y=\frac{x-1}{2x+1}$ صدق می‌کند. نقطهٔ M

برمنحنی C نمایش هندسی تابع واقع است وچون منحنی C هذلولی است پس یکی ازخطوطی که از M می گذرد برمنحنی مماس است وسایراین خطوط منحنی C را دردونقطه قطع می کنند.

۸۲/۴۱ ـ (د) دومنحنی C و C′ به معادله‌های :

$$y = x^2 + 8x + 12 \quad و \quad y = \frac{-16(x+2)}{x-2}$$

درنقطهٔ به‌طول (۲ −) بریکدیگر مماسند ودرضمن در همین نقطه ازیکدیگر می گذرند. زیرا ازحل دومعادله‌خواهیم داشت: $(x+2)^3 = 0$ که ریشهٔ مکررمرتبهٔ سوم دارد.

۸۲/۴۲ ـ (د) بافرض P(aوb) معادلهٔ کلی خط گذرندهٔ برP می‌شود :

$$y = mx - ma + b$$

ازحل این معادله با معادلهٔ :

$$y = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 5)$$

خواهیم داشت :

$$x^2 - 2(2m-1)x + 4ma - 4b + 5 = 0$$

$$\Delta' = 4[m^2 - (a+1)m - b - 1]$$

برای‌آنکه معادلهٔ $\Delta' = 0$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد لازم وکافی است که $-b-1 = -1$ یا $b = 0$ باشد. پس برای‌آنکه‌ازP بتوان دومماس عمودبرهم برمنحنی C رسم‌کرد لازم وکافی است‌که P بر x′x واقع باشد .

۸۲/۴۳ ـ (د) در گاه $\alpha = \log 49$ اندازهٔ کمانی برحسب رادیان باشد داریم :

$$\cos(\log 49) = \cos(2\log 7) = 1 - 2\sin^2(\log 7)$$

۸۲/۴۴ ـ (د) معادلهٔ مثلثاتی

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x$$

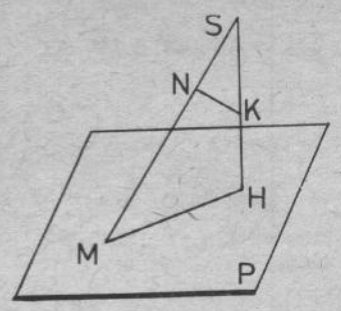
بعدازآنکه طرف اول آن‌را به‌حاصل‌ضرب تبدیل کنیم به‌صورت زیرتبدیل می‌شود :

$$\sin 2x(2\cos x - 1) = 0$$

به‌فرض $0 \leqslant x \leqslant \pi$ این معادله دارای چهارجواب است:

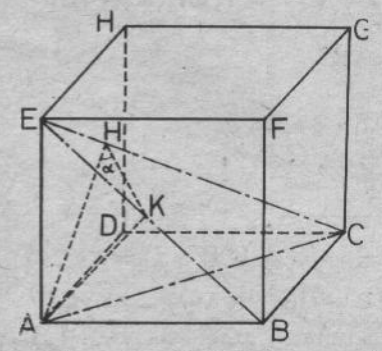
$$x = 0 \text{ و } \frac{\pi}{3} \text{ و } \frac{\pi}{2} \text{ و } \pi$$

۸۲/۴۵ ـ (د) ازنقطهٔ S واقع در خارج صفحهٔ P به



نقطهٔ M ازصفحه وصل می‌کنیم وبر SM نقطهٔ N راانتخاب می‌کنیم که $SM.SN = k$ باشد، دراین صورت هرگاه H تصویرS برصفحهٔP وK نقطه‌ای ازSH باشد که $SK.SH = k$ باشد دومثلث SKN و SMH باهم متشابهند وزاویهٔ SNK قائمه است. چون S و H ثابتند پس K نیزثابت است ومکان N کرهٔ به قطر SK است .

۸۲/۴۶ ـ (ج) در مکعب ABCDEFGH هرگاه



عمودAK را برEB و عمود AH را برEC رسم‌کنیم، چون AK برBC عمود است پس AK بر صفحهٔ EBC عموداست وبنا به‌قضیهٔ سه عمود لازم می‌آید که KH برEC عمود باشد. پس KHA زاویهٔ مسطحهٔ دو صفحهٔ EAC و EBC است. هرگاه α اندازهٔ این زاویه و a طول یال مکعب باشد، داریم :

$$AC = BE = a\sqrt{2} \quad و \quad EC = a\sqrt{3}$$

$$AH.EC = AE.AC \longrightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$AK = \frac{BE}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{AK}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = 60^\circ$$

۸۲/۴۷ ـ (د) هرگاه دومنحنی C و C′ نسبت به‌خط △ قرینهٔ یکدیگر باشند هرنقطهٔ تلاقی △ با یکی‌ازدومنحنی درهردومنحنی مشترك است. ازحل دومعادلهٔ

$$y = x^3 - 3m^2x + 2m^3 \quad و \quad y = 3x$$

داریم :

$$x^3 - 3(m^2+1)x + 2m^3 = 0$$

$$4p^3 + 27q^2 = -108(3m^4 + 3m^2 + 1)$$

درازاء همهٔ مقادیر m داریم $4p^3 + 27q^2 < 0$ پس خط △ ومنحنی C همواره درسه نقطه متقاطعند ودرنتیجه دو منحنی C و C′ همواره حداقل سه‌نقطهٔ مشترك دارند .

۸۲/۴۸ـ (ب) تابع $y = 2x - \sqrt{x^2 + x + 1}$ در ازاء جمیع مقادیر x معین است و مشتق آن هیچگاه صفر نمی‌شود. پس این تابع همواره و مخصوصاً در فاصلهٔ $-7 \leqslant x \leqslant 7$ صعودی است.

۸۲/۴۹ ـ (د) معادلهٔ مثلثاتی :

$$2\sin^2 x + 2a\sin^2 2x = 1$$

به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود :

$$f(\cos 2x) = 2a\cos^2 2x + \cos 2x - 2a = 0$$

داریم $f(1)f(-1) = -1$ پس درازاء همهٔ مقادیر a معادله جواب قابل‌قبول دارد.

۸۲/۵۰ ـ (الف) هرگاه درمثلثی داشته باشیم :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$$

نتیجه خواهد شد که :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$$

$$\cos A \cos B \cos C = 0 \Longrightarrow A \text{ یا } B \text{ یا } C = 90^\circ$$

۸۲/۵۱ ـ (ب) به‌فرض آنکه a و b دوعدداول متمایز وبزرگتر ازیك ومعلوم باشند وتعداد مقسوم‌علیه‌های عدد N^2 دوبرابر تعداد مقسوم علیه‌های عدد $N = a^\alpha b^\beta$ باشد، داریم :

$$N^2 = a^{2\alpha} b^{2\beta}$$

$$(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = (\alpha + 1)(\beta + 1)$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3 = 1 \times 3$$

$$(\alpha = 2 \text{ و } \beta = 4) \text{ یا } (\alpha = 4 \text{ و } \beta = 2)$$

$$N = a^2 b^4 \text{ یا } a^4 b^2$$

۸۲/۵۲ ـ (الف) به‌فرض آنکه عددصحیح a نسبت به ۲ وهمچنین نسبت به ۵ اول باشد کسر تحویل ناپذیر $\frac{A}{2^\alpha \times a}$ مولد کسراعشاری متناوب مرکب است که تعداد رقمهای دورهٔ غیر گردش آن برابر است با α.

۸۲/۵۳ ـ (الف) هرگاه دو مثلث ABC و DEF نسبت به دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC قطب وقطبی معکوس یکدیگر باشند، نقاط D و E و F همان نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی با اضلاع مثلث است وزاویه‌های مثلث DEF برابرند با :

$$90^\circ - \frac{C}{2} \text{ و } 90^\circ - \frac{B}{2} \text{ و } 90^\circ - \frac{A}{2}$$

بنابراین مثلث DEF درهرحال حادالزوایا است.

۸۲/۵۴ ـ (ب) به‌فرض آنکه دوخط D و $\triangle$ دریك صفحه باشند و A نقطه‌ای از $\triangle$ و C دایره‌ای باشد که بر A گذشته و بر D مماس و مرکزش بر $\triangle$ باشد، مرکز دایرهٔ C نقطهٔ تلاقی خط $\triangle$ با سهمی به کانون A و به‌خط هادی D است. خطی که از کانون سهمی می گذرد درحالتی که برخط هادی عمود باشد فقط دریك نقطه ودرغیر آن در دونقطه با سهمی متقاطع است.

محاسبات تقریبی (دنباله ازصفحهٔ ۳۳۴)

برای اینکه حاصل‌ضرب دارای m رقم صحیح باشد خطای نسبی باید کمتر از $\frac{1}{10^m}$ باشد پس کافی است که خطای نسبی هرعامل کمتر از $\frac{1}{2 \times 10^m}$ باشد درنتیجه اگر اولین رقم سمت‌چپ ۲ یا بزرگتر از ۲ باشد باید در هرعامل $m + 1$ رقم صحیح اختیارکرده اگر اولین رقم هرعامل واحد باشدباید $m + 2$ رقم صحیح درهریك ازعوامل اختیارکرد.

بطور عموم کمتراز ۱۰ عامل داده‌شده برای‌هریك‌ازآنها چقدر رقم صحیح اختیار نمائیم تا حاصل‌ضرب دارای m رقم صحیح باشد.

اگر به‌طریق مذکور استدلال نمائیم می‌بینیم که باید هرکدام از عوامل دارای $m + 2$ رقم صحیح باشند گاهی اوقات $m + 1$ رقم صحیح کافی است وبسته است به‌اولین‌رقم سمت‌چپ آنها.

مثال ۱ـ می‌خواهیم که حاصل‌ضرب ۲/۹۶۸۷۳۱ و ۶/۳۲۲۵ تا ۳ رقم صحیح باشد.

درهریك ازعوامل ۴ رقم صحیح اختیار می‌کنیم یعنی ۲/۹۶۸ × ۶/۳۲۲ آنوقت حاصل‌ضرب دارای ۳رقم صحیح است‌یعنی ۱۸/۷ مقدار تقریبی حاصل‌ضرب باخطای نسبی کمتر از ۰/۰۰۱ تقریب.

مثال ۲ـ مطلوبست محاسبهٔ حاصل‌ضرب $\pi \times e \times \sqrt{2}$ با ۳رقم صحیح.

خطای نسبی حاصل‌ضرب کمتر است‌از $\frac{1}{1000}$ پس کافی است‌که خطای هریك ازعوامل کمتر باشد از $\frac{1}{3 \times 10^2}$ و در نتیجه کافی است که ۴ رقم صحیح برای اولین عامل و برای دومی وسومی ۵رقم اختیار نمائیم‌یعنی:

۱/۴۱۴۲ × ۲/۷۱۸۲ × ۳/۱۴۱، ۱۲ عبارتست از مقدار تقریبی حاصل‌ضرب وخطای نسبی آن کمتراست از ۰/۰۰۱.

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۸۳/۱ـ ترجمهٔ: **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی تبریز

هرگاه a و b و c و p و q و r اعدادی حقیقی باشند و نامساویهای زیر به‌ازاء جمیع مقادیر x برقرار باشند:

$$ax^2 + 2bx + c \geqslant 0 \quad \text{و} \quad px^2 + 2qx + r \geqslant 0$$

ثابت کنید که نامساوی زیر نیز به‌ازاء جمیع مقادیر x برقرار است:

$$apx^2 + 2bqx + cr \geqslant 0$$

۸۳/۲ـ ترجمهٔ: **جواد فیض**

سه نقطهٔ A و B و C غیرواقع بر یك خط مستقیم مفروض است. سه دایره رسم کنید که دو به‌دو درنقاط مزبور با یکدیگر مماس خارج باشند.

کلاس چهارم ریاضی

۸۳/۳ـ ترجمهٔ: **جواد فیض**

هرگاه a و b و c اعداد حقیقی باشند و در ازاء $-1<x<1$ داشته باشیم:

$$1<ax^2 + bx + c<1$$

بیشترین و کمترین مقدارهریك از مقادیر $2a+b$ و $2a-b$ را تعیین کنید.

۸۳/۴ـ ترجمهٔ: **فتح‌الله زرگری** دانشجوی دانشکدهٔ فنی تهران

دستگاه دومعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 6y = 0 \\ y^3 - x^2y + x = 0 \end{cases}$$

۸۳/۵ـ ترجمهٔ: **جوادفیض**

اندازه‌های ضلعهای مثلثی تصاعد حسابی باقدرنسبت d می‌سازند. هرگاه مساحت این مثلث مقدار معلوم S باشد، اندازه‌های ضلعها را برحسب S و d بدست آورید.

۸۳/۶ـ از: **سیدرضا میرزنده‌دل** دانشجوی فنی

نیمدایرهٔ به‌قطر $AB = 2a$ مفروض است. قطر AB را ازطرف B به‌اندازهٔ نصف خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B_1 بدست آید واز B_1 مماس B_1A_1 را برنیمدایرهٔ مفروض رسم کرده ونیمدایرهٔ به‌قطر A_1B_1 را درخارج نیمدایرهٔ مفروض رسم‌می‌کنیم. مجدداً قطر A_1B_1 را ازطرف B_1 به‌اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تانقطهٔ B_2 بدست‌آید و مماس B_2A_2 را بر نیمدایرهٔ به‌قطر A_1B_1 وبعدازآن درخارج این نیمدایره، نیمدایرهٔ به‌قطر A_2B_2 را رسم‌می‌کنیم. هرگاه عمل بالا تابینهایت مرتبه ادامه‌یابد حدمساحت ومحیط شکل حاصل برحسب a چقدراست؟

۸۳/۷ـ ترجمهٔ از فرانسه

دوخط $x'x$ و $y'y$ درنقطهٔ O بر یکدیگر عمودند. به مرکز O وبه‌شعاع R دایرهٔ C را رسم می‌کنیم ونقطهٔ M را روی Ox درخارج دایرهٔ مزبور ونقطهٔ N راروی Ox' چنان انتخاب می‌کنیم که $OM \cdot ON = R^2$ باشد. وتر AB ازدایرهٔ C را موازی با $x'x$ ومتقاطع با Oy رسم می‌کنیم. خطوط MA و NB یکدیگر را در S وخطوط MB و NA یکدیگر

را در T قطع می‌کنند. ثابت کنید چهار ضلعی SATB محاطی است و OA و OB بردایرهٔ محیطی آن مماس می‌باشند.

۸۳/۸ـ ترجمهٔ: فتح‌الله زرگری

دوقطعه خط AB و CD باطولهای ثابت مفروض است. مکان هندسی نقاط M را تعیین کنید که مجموع مساحتهای دو مثلث MAB و MCD برابر مقدارثابت k^2 باشد.

کلاس پنجم طبیعی

۸۳/۹ـ از: سیدجمال آشفته دانشجوی حسابداری

از نقطهٔ M به‌عرض a − واقع برمحور y′y دومماس MA و MB را بـر منحنی C نمایش هندسی تابع $y = ax^2$ رسم می‌کنیم. اولاثابت کنیدکه طول پاره‌خط AB مقداری‌است ثابت که به‌a بستگی ندارد.

ثانیاً مقدار a را تعیین کنید برای آنکه زاویهٔ AOB قائمه باشدکه O مبدأ مختصات است.

۸۳/۱۰ـ از: جواد فیض

مقدار عددی عبارت زیررا بدست‌آورید:

$$P = \frac{(1+\cos 18^\circ)(1+\cos 54^\circ)(1+\cos 126^\circ)}{(\cos 36^\circ + \cos 108^\circ)^2} \times (1+\cos 172^\circ)$$

کلاس پنجم ریاضی

۸۳/۱۱ـ منحنیهای به‌معادلات زیر مفروض‌است:

$$(C') : y = x^2 - 3ax + 3b$$

$$(C) : y = \frac{a}{bx}$$

اولاً مقادیر a و b را پیداکنید برای آنکه هریک‌از دو منحنی C و C′ برخط △ به‌معادلهٔ $y = x + 2$ مماس‌باشد.

ثانیاً بافرض $a = -1$ و $b = 1$:

الف‌ـ خط $y = k$ عموماً منحنی C′ را دریک‌نقطهٔ M قطع می‌کند. معلوم‌کنید به‌ازاء چه‌مقادیر k این‌خط منحنی C را در دونقطهٔ P و Q قطع می‌کند. به‌ازاء چه‌مقادیر ازkنقطهٔ M بین P و Q وبه‌ازاء چه‌مقادیر ازkنقطهٔ M خارج P و Q واقع است.

ب‌ـ منحنیهای C و C′ وخط △ رادریک‌دستگاه‌محورهای مختصات‌رسم‌کنید.

۸۳/۱۲ـ ترجمهٔ: فتح‌الله زرگری

یك بار با استفاده‌ازمشتق‌ویك‌بار بدون استفاده از مشتق معلوم‌کنیدکه تابع زیر به‌ازاء چه‌مقادیرx ماکسیمم یا می‌نیموم است:

$$y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{a}\right)$$

۸۳/۱۳ـ ترجمهٔ: فتح‌الله زرگری

صحت تساوی زیررا ثابت‌کنید:

$$tg^6 10^\circ + tg^6 50^\circ + tg^6 70^\circ = 433$$

۸۳/۱۴ـ ترجمهٔ: داوید ریحان

مثلث ABC قائمه درزاویهٔ A مفروض است. ارتفاع AH ازآن را رسم می‌کنیم و CAH را حـول AH دوران می‌دهیم تا به‌وضع DAH درآید بقسمی‌که زاویـهٔ دوصفحـهٔ BAH و DAH برابر 60° باشد. به‌فرض $AH = a$ حجم چهار وجهی DAHB را برحسب a حساب‌کنید.

۸۳/۱۵ـ ترجمهٔ: داوید ریحان

مکعبی درمخروطی محاط شده‌است بقسمی‌که یك‌وجه‌آن د، صفحهٔ قاعدهٔ مخروط واقع است وچهاررأس دیگرش بر سطح جانبی مخروط تکیه دارند. هرگاه نسبت بین ارتفاع‌مخروط و شعاع قاعدهٔ آن‌برابر $\sqrt{2}$ باشد، ثابت‌کنیدکه‌طول‌یال‌مکعب‌با نصف ارتفاع مخروط برابر است.

کلاس ششم طبیعی

۸۳/۱۶ـ اولا معادلهٔ سهمی P را بنویسید بنابرآنکه‌از مبدأ مختصات می‌گذرد وکانونش بر y′y واقع‌بوده واین‌محور را درنقطهٔ دیگر به‌عرض ۴ − نیز قطع می‌کند. محور سهمی‌با هیچیك ازمحورهای مختصات زاویهٔ حاده‌نمی‌سازد.

۸۳/۱۷ـ هرگاه درمثلث ABC داشته‌باشیم:

$$2(a^2 - b^2 - c^2) = 3bc$$

مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برحسب a چقدراست؟

کلاس ششم ریاضی

۸۳/۱۸ـ اولامعادلهٔ‌مکان هندسی نقاطی‌ازصفحهٔ‌محورهای مختصات را بدست‌آورید که حاصل ضرب فواصل ایـن

نقاط ازدوخط $y = x$ و $y = 3x$ برابر با $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ باشد.

ثانیا ازروی معادلهٔ حاصل، مکان مزبوررا رسم کنید.

۸۳/۱۹ـ ترجمهٔ: **جوادفیض**

اولاً معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل دهیدکه بین α و β و γ ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = b \end{cases}$$

ثانیاً برای آنکه دوریشه ازریشه‌های معادله باهم برابر باشند چه‌رابطه بین a و b باید برقرار باشد؟ دراین‌حالت اگر $b = 2\sqrt{3}$ باشد مقدار a چقدراست؟

۸۳/۲۰ـ ترجمهٔ: **جواد فیض**

S مساحت و A یك‌زاویه ازمثلثی داده‌شده است. به‌فرض آنکه a اندازهٔ ضلع مقابل‌به‌زاویهٔ A کمترین مقدارممکن رادارا باشد، اندازه‌های ضلعهای مثلث را برحسب S و A بدست آورید.

۸۳/۲۱ـ ترجمهٔ: **سیدرضا میرزنده‌دل**

چهار نقطهٔ M، N، P و Q به‌همین‌ترتیب بریك‌خط‌مستقیم واقعند بقسمی‌که:

$$MN = 4 \quad و \quad NP = 2 \quad و \quad PQ = 6$$

O نقطه‌ای است‌که ازآن هریك ازپاره خطهای MN و NP و PQ به زاویهٔ مساوی دیده می‌شوند. اندازهٔ این زاویه چقدر است؟

۸۳/۲۲ـ از: **سیدجمال آشفته**

عددهای M و N و P راتعیین‌کنید بقسمی‌که M از n رقم متشابه و N از n رقم متشابه دیگر و P از $2(n+1)$ رقم متشابه تشکیل‌شده وداشته باشیم:

$$(\overline{M8})^2 - (\overline{N3})^2 = P$$

۸۳/۲۳ـ از: **محمد رضا خلیلی‌زاده** ششم ریاضی دبیرستان خردادشمارهٔ۲

به‌فرض‌آنکه A و B و C و a و b و c عددهای صحیح ومثبت باشند، ثابت‌کنیدکه عدد N از رابطهٔ زیر هیچگاه‌مضرب ۵ نیست:

$$N = A^{4a} + B^{4b} + C^{4c} + 1$$

۸۳/۲۴ـ ترجمهٔ از فرانسه

دایرهٔ C و نقطهٔ S واقع در خارج آن مفروض است. قطر متغیر AB ازدایرهٔ C را درنظر می‌گیریم. خطوط SA و SB به‌ترتیب دایرهٔ C را درنقاط دیگر M و N قطع می‌کنند.

ثابت‌کنیدکه:

۱ـ دایرهٔ محیطی مثلث SAB غیرازS بریك‌نقطهٔ‌ثابت I می‌گذرد.

۲ـ خط MN ازیك‌نقطهٔ ثابت E می‌گذرد.

۳ـ دایرهٔ محیطی مثلث SMN از یك نقطهٔ ثابت J می‌گذرد.

۸۳/۲۵ـ ترجمهٔ از فرانسه

دوخط $x'x$ و $y'y$ در O بریکدیگر عمودند و A و B دو نقطه از $x'x$ می‌باشند بقسمی که $OA = OB = a$ مقدار معلوم است. دایرهٔ متغیر C را درنظر می‌گیریم‌که بر A و B بگذرد وهرگاه MN قطر این‌دایره باشدکه‌با $x'x$ موازی‌است، مکان M و N را تعیین‌کنید.

مسائل فیزیك

زیر نظر: **هوشنگ‌شریفزاده**

۸۳/۲۶ـ ترجمهٔ: **جواد فیض**

یك توپ‌پلاستیکی را از ارتفاع یك‌متری رها می‌کنیم. چندین مرتبه ازکف زمین به‌جای خود بازمی‌گردد. ضریب جبران را درطول اصابت به‌کف‌زمین پیداکنید، هرگاه ازاولین برخورد تا دومین برخورد بازمین ۱/۳ ثانیه طول‌بکشد.

۸۳/۲۷ـ فرستنده: **رسول‌آذری** دبیر دبیرستانهای گچساران

توپ‌کوچکی ازارتفاع h می‌افتد وپس‌ازبرخورد بازمین برمی‌گردد وپس‌ازآنکه این‌عمل چندین‌بار تکرار شد، توپ ساکن می‌شود. اگرضریب‌کاهش سرعت توپ k فرض‌شود، تعیین‌کنیدکه توپ چه مسافتی‌راپیموده است؟ (برخوردکاملا الاستیك است).

۸۳/۲۸ـ فرستنده: **رسول‌آذری**

زنجیر یکنواختی به‌طول 2l وبه‌وزن 2p راطوری‌روی منشور مثلث‌القاعده قرار می‌دهیم‌که حلقهٔ وسطی بریال بالایی منشور بیفتد. (منشور بقسمی برسطح افقی تکیه‌داردکه مقطع قائم آن مثلثی است‌که قاعده‌اش افقی است). منشور را با چه شتابی به‌سمت چپ‌بکشیم تازنجیر نسبت به آن بیحرکت بماند (از نیروی مالش بین زنجیرومنشور چشم‌پوشی می‌شود).

مسائل شیمی

زیر نظر: باقر مظفرزاده

۸۳/۲۹ـ فرستنده: **کرامت‌الله اشراق** دانشجوی شیمی دانشسرای عالی

با فرض:

$$HC\equiv CH + H_2O \xrightarrow{H_2SO_4} A \xrightarrow{\text{اکسیداسیون}}$$

$$B \xrightarrow{CuCO_3} C \xrightarrow{\text{تکلیس}} D \xrightarrow{2H} E \xrightarrow{-H_2O} F \xrightarrow{Cl_2}$$

$$G \xrightarrow{Cl_2} K \xrightarrow{\text{ساپونیفیکاسیون}} M$$

مطلوبست تعیین اجسام A، B، C، D، E، F، G، K و M

۸۳/۳۰ـ از: **هوشنگ مقیمی** دانشجوی فنی دانشگاه تبریز

اسید آلی سه‌کربنه به اکی والان ۵۲ دارای ۳/۸۴٪ هیدرژن و ۶۱/۵۴٪ اکسیژن است. این اسید براثر گرما گاز A را می‌دهد و تبدیل به اسید دیگری مانند B می‌شود که دارای مشخصات زیر است:

الف‌ـ محلول گاز A درآب خاصیت اسیدی ضعیف دارد واز سوختن ترکیبات آلی تولید می‌شود.

ب‌ـ نمک سدیم اسید B باسود هیدروکربور زنجیری شکل C را می‌دهد که براثر سوختن آن دراکسیژن وکلر حجم مساوی از این دواکسیدکننده لازم است. مطلوبست تشخیص ترکیبات A و B و C وهمچنین اسید مجهول.

تستهای ریاضی

کلاس چهارم ریاضی

۸۳/۳۱ـ هرگاه نامساوی:

$$(m-1)x^2 + 2mx + 2(m+1) > 0$$

به‌ازاء جمیع مقادیر x برقرارباشد، دراین‌صورت معادلهٔ:

$$y^2 - 2my + m^2 - m + 1/2 = 0$$

الف‌ـ هیچگاه جواب ندارد.

ب‌ـ همواره ریشهٔ مضاعف دارد.

ج‌ـ همواره دوریشهٔ متمایز دارد.

د‌ـ گاهی جواب دارد و گاهی جواب‌ندارد.

۸۳/۳۲ـ دستگاه دومعادلهٔ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m^2 \\ xy = 8 \end{cases}$$

وقتی جواب داردکه:

الف‌ـ $m \geqslant 4$ یا $m < -4$ ب‌ـ $-4 < m < 4$

ج‌ـ همواره جواب‌دارد. د‌ـ هیچگاه جواب ندارد

۸۳/۳۳ـ هرگاه a و b ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \text{و} \quad A = a^2 + b^2 \quad \text{و} \quad B = a^3 + b^3$$

ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + px + q = 0$ فرض شوند، داریم:

الف‌ـ $p = -2$ و $q = 26$

ب‌ـ $p = -2$ و $q = -26$

ج‌ـ $p = -2$ و $q = 10$

ج‌ـ $p = 2$ و $q = -10$

۸۳/۳۴ـ تعداد کلیهٔ اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۵ برابراست با:

الف‌ـ ۱۷۹ ب‌ـ ۱۸۰ ج‌ـ ۹۰ د‌ـ ۳۶۰

۸۳/۳۵ـ حد مجموع بینهایت جمله ازیک تصاعدهندسی برابر ۹ و حد مجموع مجذورات جمله‌های آن برابر ۴۰/۵

است. اگر ع جملهٔ اول و q قدرنسبت این تصاعد باشد، داریم:

الف- $a=3$ و $q=\frac{1}{3}$ ب- $a=6$ و $q=\frac{1}{3}$

ج- $a=3$ و $q=\frac{1}{6}$ د- $a=6$ و $q=\frac{1}{6}$

۸۳/۳۶- درمثلث ABC نقطهٔ D را بر ضلع BC چنان انتخاب می‌کنیم که $BA^2 = BC.BD$ باشد، دراین‌صورت:

الف- AD ارتفاع مثلث است.

ب- AD نیمساز مثلث است.

ج- مثلث ADC بامثلث ABC متشابه است.

د- مثلث ABD بامثلث ABC متشابه‌است.

۸۳/۳۷- مثلث ABC مفروض است. روی‌ضلع BC مستطیل BCQP را می‌سازیم. از Q عمود Qy را بر AB وازP عمود Px را بر AC رسم‌می‌کنیم. هر گاه M نقطهٔ تلاقی Px با Qy باشد، وقتی PQ به موازات BC حرکت کند مکان M:

الف- میانهٔ ضلع BC ازمثلث است.

ب- نیمساز زاویهٔ A است.

ج- عمودمنصف ضلع BC است.

د- ارتفاع نظیر رأس A از مثلث است.

کلاس پنجم ریاضی

۸۳/۳۸ - از نقطهٔ به‌عرض ka واقع برمحور y'y دو مماس برسهمی $y=ax^2$ رسم شده است. برای‌آنکه پاره‌خط واصل بین‌نقاط تماس از مبدأ مختصات به‌زاویهٔ قائمه دیده شود، مقدارk باید برابر باشدبا:

الف- $\frac{1}{a}$ ب- $\frac{-1}{a^2}$ ج- $\frac{-1}{a}$ د- $\frac{1}{a^2}$

۸۳/۳۹- منحنی C نمایش هندسی تابع $y=\frac{x+1}{x}$ را درنظر می‌گیریم. فرض‌می‌کنیم M نقطه‌ای باشدکه اگر از آن خط غیر مشخصی بگذرانیم تا منحنی C را دردونقطهٔ A وB قطع‌کند، مماسهای مرسوم برمنحنی C درنقاط A و B، بایکدیگر موازی باشند؛

الف- چنین نقطه‌ای وجودندارد.

ب- مکان M خطی است نامحدود.

ج- مکان M یا یک‌پاره‌خط یا دو نیم‌خط است.

د- نقطهٔ M منحصر به فرد است.

۸۳/۴۰- برای آنکه دومنحنی $y=ax^2$ و $y=\frac{a}{x}$ یکدیگررا به‌زاویهٔ قائمه قطع‌کنند مقدار a باید برابرباشدبا:

الف- $\pm\sqrt{2}$ ب- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج- $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ د- $\sqrt{2}$

۸۳/۴۱- درمثلث غیرمشخص ABC که هرسه‌زاویهٔ آن حاده است، دایره‌ای‌که بردورأس B وC وبر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد، ارتفاع AH از مثلث را در M قطع می‌کند. هرگاه $\sin A = 0/6$ باشد، $\sin BMC$:

الف- $0/96$ است ب- $\frac{\sqrt{10}}{10}$ است

ج- $0/6$ است د- قابل محاسبه نیست.

۸۳/۴۲- دومعادلهٔ زیررا درنظرمی‌گیریم:

(۱) $\cos 3x \cos^2 x + \sin 3x \sin^2 x = 0$

(۲) $\cos 2x = 0$

الف- این دومعادله هم‌ارزند

ب- هرجواب از معادلهٔ (۲) جواب معادلهٔ (۱) است اما بعضی جوابهای معادلهٔ(۱) در معادلهٔ (۲) صدق نمی‌کند.

ج- دومعادله بعضی جوابهای‌مشترك وبعضی‌جوابهای غیرمشترك دارند.

د- دومعادله جواب مشترك‌ندارند.

۸۳/۴۳- درچهار وجهی ABCD زاویه‌های ABC و ADC قائمه‌اند واگر M وسط BD وN وسط AC باشد $AM = CM$ است. خط MN:

الف- بر AC عمود است اما نسبت به BD مایل‌است.

ب- بر BD عمود است، اما نسبت به AC مایل‌است.

ج- برهیچیك ازدوخط AC وBD عمود نیست.

د- برهردوخط AC وBD عمود است.

۸۳/۴۴- کرهٔ به‌شعاع R ویك استوانه ویك مخروط دوار درنظر می‌گیریم بقسمی‌که هم استوانه وهم مخروط بر کرهٔ مزبور محیط می‌باشند وچه‌دراستوانه وچه درمخروط‌طول مولدبا قطر قاعده‌برابر است. هرگاه S مساحت سطح‌کره، S_1 مساحت سطح‌کل استوانه وS_2 مساحت سطح‌کل مخروط‌باشد:

الف- $S^2 > S_1S_2$ ب- $S^2 < S_1S_2$

ج- $S^2 \neq S_1S_2$ د- $S^2 = S_1S_2$

کلاس ششم ریاضی

۸۳/۴۵ـ منحنی نمایش هندسی تابع:

$$y = 2x + 4 + \sqrt{x^2 + ax + 3}$$

الف- درازاء جمیع مقادیر a خطی است منحنی یکپارچه یا دوپارچه .

ب- درازاء یک مقدار از a خطی است شکسته.

ج- درازاء دومقدار از a خطی است شکسته.

د- درازاء بیش ازدومقدار از a خطی است شکسته.

۸۳/۴۶ـ نمایش هندسی تابع :

$$y = |x|^{\sqrt{|\cos x| - 1}} \quad \text{و} \quad x \neq 0$$

الف- منحنی است پیوسته ویکپارچه

ب- خطی است مستقیم یا شکسته .

ج- مجموعه‌ای از نقاط مجزا است.

د- حقیقی نیست زیرا تابع همواره نامعین است.

۸۳/۴۷ـ درمثلث ABC هرگاه AH و CL به‌ترتیب ارتفاعهای نظیر ضلعهای BC و AB باشند، طول LH برابر است با :

الف- $b\sin B$ ب- $b\cos B$

ج- $b\sin A\sin C$ د- $b\cos A\cos C$

۸۳/۴۸ـ در مثلث ABC مجذورات اندازه‌های اضلاع تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. دراین‌مثلث توابعی از زوایا وجود دارد بقسمی‌که مقادیر f(A) و f(B) و f(C) نیز تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند . اگر این تابع را f(x) فرض کنیم برابر است با:

الف- $\sin x$ ب- $\cos x$ ج- $tg x$ د- $cotg x$

۸۳/۴۹ـ عددی‌که حاصل‌جمع آن با مجموع رقمهایش ۶۲۵ باشد ؛

الف- منحصر به فرد است .

ب- منحصر به‌دو عدد است .

ج- بیش از دوعدد وجود دارد.

د- وجود ندارد .

۸۳/۵۰ـ جذرتقریبی نقصانی عددصحیح N تا ۰/۰۱ تقریب برابر ۲۵/۶ است . هرگاه α عددی صحیح باشد بقسمی‌که $1<\alpha<5$، عدد N برابراست با:

الف- $660+\alpha$ ب- $660-\alpha$

ج- $660\pm\alpha$ د- $660\pm 2\alpha$

۸۳/۵۱ـ دایرهٔ ثابت C ووتر ثابت AB ازآن‌مفروض است. نقطهٔ M براین‌دایره حرکت می‌کند. دودایرهٔ Γ و Γ' بر M می‌گذرند وبه‌ترتیب در A و B بر AB مماسند. هرگاه N نقطهٔ تلاقی دیگر این دودایره باشد، مکان N:

الف- خطی‌است مستقیم .

ب- دایره‌ای است‌که باخط AB متخارج است .

ج- دایره‌ای است‌که بر A و B می‌گذرد وبا دایرهٔ C برابر نیست .

د- دایره‌ای است‌که قرینهٔ دایرهٔ C نسبت‌به AB است.

۸۳/۵۲ـ سهمی به‌کانون F وبه خطهادی D مفروض است. خط متغیر △ از F می‌گذرد وسهمی را دردونقطهٔ M و M′ قطع می‌کند. هرگاه J وسط MM′ باشد، مکان J:

الف- یك سهمی است .

ب- خطی‌است موازی با محور سهمی مفروض.

ج- خطی‌است عمود بر محور سهمی.

د- نه‌خط است ونه سهمی.

مسائل انتخابی از

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث دوم ، سال تحصیلی ۴۹ـ۵۰ (اسفند ۱۳۴۹)

● دنباله ازشمارهٔ قبل ●

رقومی و ترسیمی (کلاس ششم ریاضی)

دبیرستانهای : آریا ـ انوشیروان دادگر ـ بهمن قلهک ـ پیشاهنگ ـ جعفری ـ حکیم‌الهی ـ داورپناه ـ مدائن

دبیر : مهندس محمودخوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی : واحد سانتیمتر ـ مقیاس $\frac{1}{1}$

محورهای اقصرواطول کاغذ را رسم‌کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکزبنامید ـ اندازهٔ کادر کاغذ ۲۵ × ۲۰ اختیارشود.

مسئله: ۱ـ نقطهٔ c_2 به‌فاصلهٔ ۶ سمت چپ‌مرکز کاغذ روی محوراقصرواقعست. ازاین‌نقطه صفحهٔ P را بـه شیب $p = 1$ بقسمی مروردهیدکه افقیه‌هایش موازی محوراقصر بوده‌وترقی رقوم خط بزرگترین شیب‌آن ازبالا به‌پایین باشد. یـك مقیاس شیب صفحهٔ P راکنارچپ کاغـذ رسم نمائید. از نقطـه c_2 خط c_2b_7 را به شیب $p = \frac{2}{3}$ درصفحهٔ P بقسمی رسم‌کنید کـه b سمت راست c قرار گیرد.

۲ـ برروی قطعه خط BC درصفحهٔ P مثلث ABC را بقسمی رسم نمائیدکه شعاع دایرهٔ‌محیطی آن‌برابر $R = 4/5$ ورقـوم A برابر۴ و a سمت راست محور اطـول کاغـذ واقع گردد. وسعت حقیقی مثلث را با تسطیح حول افقیه رقـوم ۷ صفحهٔ P درسمت پایین کاغذ نشان دهید .

۳ـ صفحهٔ Q را به‌موازات‌صفحهٔ P درباالی‌آن‌به‌فاصله ۳۱/۲ رسم نموده و یـك مقیاس شیب صفحهٔ Q را درمحـل مناسب سمت چپ کاغذ نشان دهید .

۴ـ برروی مثلث ABC درصفحهٔ P متوازی‌الاضلاع ABCD را بقسمی بناکنید کـه AC قطـرش باشد وملخص متـوازی‌السطـوح ABCDEFGH را کـه قـاعـده‌اش متوازی‌الاضلاع ABCD و یالهای جانبی آن افقی بـوده و یال cg در تصویر با محوراقصر زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازدواز چپ براست وپـائین ببالا ممتد می‌باشد وقـاعده EFGH در صفحهٔ Q واقع وg درسمت بالای محوراقصر وسمت‌چپ‌محور اطول واقع است رسم‌کرده وآن را مرئی ومخفی نمائید.

۵ـ صفحهٔ R را به شیب $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$ بقسمی رسم‌کنید که افقیهٔ رقوم ۶ آن برمحوراقصر کاغذ منطبق بوده و از بالا به‌پائین ترقـی‌کند. یـك‌مقیاس شیب‌صفحهٔ R را درسمت راست کاغذ رسم نموده و مقطع متوازی‌السطوح ABCDEFGH را با صفحهٔ R یافته وآن را مرئی ومخفی‌کنید .

ب ـ هندسهٔ ترسیمی :

مسئلهٔ ۱ـ ازنقطـهٔ aa' به‌بعد۲وارتفاع ۳ خطی رسـم کنیدکه بـا صفحهٔ نیمساز دوم موازی بـوده و بـرخط نیمرخ $cdc'd'$ متکی باشد .

مسئلهٔ ۲ـ بریك خط جبهی (DD') ویك خط موازی نیمسازدوم $(\triangle\triangle')$ که متقاطع می‌باشند صفحه‌ای مرور داده آثارش را بیابید .

مسئلهٔ۳ـ فصل مشترك صفحهٔ مواجه PQ' راکـه‌بعد اثرافقی آن۴ وارتفاع اثرقائمش۲ است‌باصفحهٔ‌ماربرخط‌الارض و نقطهٔ OO' به‌بعد۳ وارتفاع ۴ بیابید .

مسئلهٔ ۴ـ ازنقطهٔ aa' واقع درصفحهٔ منتصب $P\alpha Q'$ خطی در این صفحه موازی صفحه‌ای که بادوخط متقاطع DD' و $\triangle\triangle'$ تشکیل شده رسم کنید .

مسئلهٔ ۵ـ ازنقطهٔ aa' خطی رسم کنید که باصفحهٔ افق تصویرزاویهٔ $\alpha = ۳۰$ درجه بسازد و بر خط مفروض DD' عمود گردد .

دبیرستان ابن‌سینا

دبیر: جعفرزاده ـ فرستنده : قاسم جبارزاده

الف ـ هندسهٔ رقومی :

محورهای کاغذ را رسم کنید واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ است .

۱ـ مقیاس شیب صفحهٔ P راکه با صفحهٔ تصویر زاویهٔ ۴۵° می‌سازد واثرش برمحوراقصر منطبق است درسمت چپ کاغذ باترقی رقوم ازپایین به‌بالا رسم کنید .

۲ـ ازنقطهٔ $a_۶$ واقع در صفحهٔ P که تصویرش برمحور اطول منطبق است خط $a_۶b_۲$ را به شیب ۰/۵ دراین صفحه رسم کنید. b سمت راست محوراطول قراردارد .

۳ـ ازنقطهٔ A خط $a_۶d_۲$ را درصفحهٔ P به‌قسمی رسم کنید که زاویهٔ BAD قائمه باشد .

۴ـ ملخص مستطیل $ABCD$ واقع برصفحهٔ P را کامل کنید .

۵ـ ملخص مکعب مستطیل $ABCDEFGH$ را که طول حقیقی یال AE آن برابر $۵\sqrt{۲}$ بوده و نقطهٔ E بالای صفحهٔ P قراردارد تعیین ومرئی ومخفی نمائید .

۶ـ مقطع این‌جسم را با صفحهٔ افقی به رقوم ۴ تعیین و مرئی ومخفی نمائید .

ب ـ هندسهٔ ترسیمی :

۱ـ ازنقطهٔ aa' به‌بعد۲ وارتفاع۳ صفحهٔ مواجهی رسم کنید که با صفحات تصویر زوایای مساوی بسازد .

۲ـ ازنقطهٔ aa' واقع در خارج صفحهٔ $P\alpha Q'$ افقیه‌ای رسم کنید که صفحه رادر bb' قطع کند و $AB = l$ باشد.

۳ـ فصل مشترک صفحهٔ مار بر xy و aa' به بعد۲ و ارتفاع۱ رابا خط مفروض dd' پیدا کنید .

۴ـ خطی چنان رسم کنید که از aa بگذرد و با صفحهٔ $P\alpha Q'$ موازی باشدوخط‌الارض را نیزقطع کند .

۵ـ عمود مشترک خط نیمرخ $ab\ a'b'$ وخط‌الارض را رسم کنید .

دبیرستان اروندرود

دبیر : صدیق‌آرا ـ فرستنده : کیهان یزدانی

الف ـ هندسهٔ رقومی :

محورهای اطول واقصر کاغذ را رسم کنید. واحدسانتیمتر ومقیاس ۱:۱ است .

۱ـ زاویهٔ صفحهٔ P با صفحهٔ افق ۴۵° است یك مقیاس شیب ازاین صفحه را طرف‌چپ کاغذ با ترقی رقوم از پایین به بالا طوری مدرج کنید که محوراقصر افقیهٔ رقوم۱ ازآن‌باشد.

۲ـ ازنقطهٔ $a_۲$ واقع درصفحهٔ P که به‌فاصلهٔ ۵ سمت راست محوراطول قراردارد خط $a_۲b_۱$ را به شیب $\frac{۱}{۲}$ طوری رسم کنید که b چپ a باشد .

۳ـ نقطهٔ $m_۴$ را درصفحهٔ P طوری تعیین نمائید که زاویهٔ $AMB = ۶۰^\circ$ باشد وازدوجواب حاصل آن را اختیار کنید که به‌محوراطول نزدیکتراست .

۴ـ نقطهٔ $m_۴$ مرکز وپاره خط $a_۲b_۱$ یك ضلع از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ واقع در صفحهٔ P است . ملخص متوازی‌الاضلاع راکامل ووسعت حقیقی آن را با تسطیح‌حول افقیهٔ رقوم۱ ازصفحهٔ P درقسمت پائین کاغذ نشان دهید.

۵ـ ازنقطهٔ $a_۲$ خط $a_۲e_۷$ را به شیب $\frac{۱}{۲}$ طوری رسم کنید که AE بر AB عمودبوده و e زیرمحوراقصر باشد.

۶ـ ملخص متوازی‌السطوح $ABCDEFGH$ را وقتی AE یال جانبی آن باشدکامل و مرئی ومخفی آن را آشکارسازید. مقطع این جسم را با صفحهٔ افقی رقوم ۵ تعیین نمائید .

ب ـ هندسهٔ ترسیمی :

۱ـ ازنقطهٔ aa' جبهه‌ای رسم کنید که‌نیمرخ $mnm'n'$ را قطع کند .

۲ـ دوخط‌متقاطع AA' و BB' مفروضند. AA' جبهیه و بعلاوه B بر A' و B' بر A منطبق است. آثار صفحهٔ گذرنده برآنها را تعیین کنید .

۳ـ نقطهٔ aa' ومواجهٔ DD' مفروضست از aa' خطی چنان رسم کنید که با صفحهٔ قائم زاویهٔ α بسازد و DD' را قطع کند .

۴ـ ازنقطهٔ aa' واقع درصفحهٔ $P\alpha Q'$ خطی در این صفحه موازی صفحهٔ نیمساز ربع دوم رسم کنید .

۵ـ پاره‌خط $bcb'c'$ قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین

ABC است. اگر بعد وارتفاع A برابر واحد باشد ملخص مثلث را تعیین کنید .

۶ـ عمودمشترك خط $\triangle\triangle'$ وخط زمین‌را رسم کنید.

دبیرستان البرز

دبیر : مهندس محمودخوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی :

واحد سانتیمتر ـ مقیاس $\frac{1}{1}$ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز بنامید. کادر کاغذ ۲۰ × ۲۵ اختیارشود .

۱ـ نقطهٔ a_5 برروی محور اقصر کاغذ به‌فاصلهٔ ۶ سمت چپ‌مرکز کاغذ واقع است. خط a_5b_1 رابه‌شیب $p = \frac{1}{2}$ بقسمی رسم کنیدکه تصویرش برمحوراقصر کاغذ منطبق بوده ونقطهٔb سمت راستa قرارگیرد. ازنقطهٔ A خط AD را بقسمی‌مرور دهیدکه تصویرش با محوراقصر زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد واز چپ براست وازپائین ببالا ممتدبوده ومحوراطول را درسمت بالای مرکزکاغذ قطع کند ونقطهٔ d_{12} را روی این خط‌بقسمی مشخص کنیدکه زاویه $\widehat{DAB}$ درفضا قائمه باشد .

۲ـ درنقطهٔ A کنج سه‌قائمه‌ای تشکیل دهیدکه‌دوخط AB و AD دوخط‌الرأس آن‌بوده‌وخط‌الرأس سوم آن a_5e_9 را بدست آوریدوباسه قطعه‌خط AB وAD وAE ملخص مکعب‌مستطیل ABCDEFGH راکه مستطیل ABCD قاعده آن بوده (AC قطرمستطیل‌می‌باشد) وAE ارتفاع ویال جانبی مکعب مستطیل است کامل کنید ورقوم رؤس آن را تعیین نمائید . (بدون مرئی ومخفی)

۳ـ قطعه‌خط افقی $MN = 11/6$ را بر دوقطعه خط BC وAE ازمکعب‌مستطیل فوق متکی ومحصورنمائید.

۴ ـ ازگوشه‌های مکعب مستطیل مزبور هشت هرم سه‌قائمه حذف‌نمائید بقسمی‌که خط‌الرأس‌های هریك ازهرم‌ها نصف خط‌الرأس‌های مربوط به‌کنج مکعب‌مستطیل باشندوحجم حاصل‌راکه‌یك‌چهارده‌وجهی صاب‌وکدراست‌مشخص‌کرده مرئی و مخفی نمائید (رقوم‌کلیه رؤس چهارده وجهی اعداد صحیح‌می‌باشند) .

۵- مقطع چهارده‌وجهی‌مزبوررا باصفحه قائمی‌که اثرش به‌فاصلهٔ‌یك‌سمت راست محوراطول وموازی آن‌می‌باشد یافته وسعت حقیقی آن‌را روی صفحهٔ افقی رقوم ۹ بیابید

ب ـ هندسه ترسیمی :

مسئلهٔ ۱ـ برروی خط مفروض DD' نقطه‌ای تعیین کنیدکه فاصله‌اش ازاثرقائم خط درفضا دوبرابر ارتفاع نقطهٔ مزبور باشد .

مسئلهٔ ۲ـ خط DD' مفروض‌است. آثارآن را یافته‌و براین خط صفحهٔ $P\alpha Q'$ را بقسمی مرور دهیدکه با صفحهٔ‌افق تصویرزاویه $\alpha = 30$ درجه بسازد .

مسئلهٔ ۳ـ برخط مفروض DD' صفحه‌ای مانند $P\alpha Q'$ بقسمی‌مرورده‌یدکه برصفحهٔ نیمسازاول عمود بوده وفصل مشترك صفحهٔ مزبوررا با صفحهٔ نیمسازاول بیابید .

مسئلهٔ ۴ـ فصل مشترك خط جبهی DD' را با صفحهٔ موازی نیمسازدوم تعیین نمائید .

مسئلهٔ ۵ـ ازنقطهٔ aa' که a برP و a' بر $\alpha Q'$ منطبق است خطی رسم کنیدکه با صفحهٔ افق تصویر زاویهٔ $\alpha = 30^\circ$ بسازد وباصفحهٔ $P\alpha Q'$ موازی باشد .

دبیرستان امیرکبیر یزد

دبیر : استوار ـ فرستنده : محمدعلی اخوان بهابادی

هندسهٔ ترسیمی :

۱ـ ازنقطهٔ مفروض aa' به ارتفاع ۲وبعد۳ خطی‌رسم کنیدکه با صفحهٔ افق تصویرزاویهٔ α وبا صفحهٔ قائم تصویر زاویهٔ β بسازد .

۲ـ مکان هندسی آثارافقی خطوطی را پیداکنید که از نقطهٔ bb' به ارتفاع ۳وبعد۴ بگذرند وباصفحهٔ افق تصویر زاویهٔ 30° بسازند .

دبیرستان جوینی قوچان

دبیر: معمارزاده ـ فرستنده : محمدحسن‌صادقی

هندسهٔ زقومی :

واحد سانتیمتر ومقیاس ۱:۱ است. محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید .

۱ـ نقطهٔ a_6 به‌فاصلهٔ ۴سمت چپ محور اطول کاغذ و به‌فاصلهٔ ۱بالای محوراقصرانتخاب شود.

۲ـ خط a_6b_2 به شیب $P = \frac{2}{3}$ را چنان رسم کنید که نقطهٔ رقوم۵ آن برمحوراقصر کاغذ واقع گردد وb سمت‌راست a قرارگیرد .

۳- برخط a_6b_2 صفحهٔ P به‌اساس $i = 1$ را مروردهید و مقیاس شیب آنرا سمت چپ محور اطول کنار کاغذ رسم کنید .

۴ـ خط a_2d_7 را به‌طریقی رسم کنیدکه $bd = 7/5$ و BD درفضا برAB عمود شود وd سمت راست a قرارگیرد (d خارج‌ازصفحهٔ P واقع است) .

۵- یك مقیاس شیب صفحهٔ مثلث $a_6b_7d_7$ راست راست محور اطول کنار کاغذ رسم و آنرا Q بنامید.

۶- در صفحهٔ Q ملخص چهار ضلعی محاطی AbCD راکه درآن ۴ = CD و C سمت چپ D قراردارد رسم کنید.

۷- منشور AbCDEFGH راروی چهارضلعی محاطی AbCD به‌قسمی بنا کنید که ۷ = bf و نقطهٔ f سمت چپ محور اطول وروی افقیهٔ رقوم ۸ صفحهٔ P واقع گردد. ملخص منشور را بافرض کدر بودن آن مرئی ومخفی نمائید.

۸- منشور فوق را باصفحهٔ رقوم ۷/۵ قطع می‌دهیم، ملخص مقطع راشخص کنید وآنرا مرئی ومخفی کنید.

دبیرستان دانش بابل

دبیر: خیرخواه- فرستنده: علی‌اکبر احسانی

الف- هندسهٔ رقومی

محورهای اطول واقصر کاغذ رارسم کرده محل تلاقی آنها رامرکز کاغذ بنامید. واحدسانتیمتر ومقیاس ۱:۱ اختیارشود.

۱- نقطهٔ a_6 را به‌فاصلهٔ ۵ بالای مرکز کاغذ روی محور اطول انتخاب کنید وازاین نقطه خط a_6b_0 را به‌شیب $\frac{2}{3}$ طوری مرور دهید که نقطهٔ b_0 روی محور اقصر درسمت چپ قرار گیرد.

۲- برخط a_6b_0 صفحهٔ P راکه افقیه‌های آن در تصویر موازی محور اقصر کاغذ است مرور داده ملخص یك خط بزرگترین شیب آنرا درسمت چپ کاغذ رسم کنید.

۳- برروی خط AB درصفحهٔ P مثلث ABD رابقسمی رسم کنید که (°۶۰ = D درفضا) ورقوم D برابر ۴ ونقطهٔ D سمت راست AB واقع گردد. ملخص مثلث رارسم کنید.

۴- متوازی‌الاضلاع ABCD را بقسمی رسم کنید که BD قطر آن باشد.

۵- متوازی‌السطوح قائم ABCDA'B'C'D' را بقسمی بنا کنید که متوازی‌الاضلاع فوق قاعدهٔ تحتانی آن بوده وطول یالهای جانبی آن برابر ۸ باشد. بافرض کدربودن سطح متوازی السطوح خطوط مرئی را ازمخفی تمیزدهید.

ب- هندسهٔ ترسیمی

۱- درروی خط dd' نقطه‌ای تعیین کنید که ارتفاع آن ۴ واحد بیشتر ازبعدش باشد.

۲- aba'b' تصاویر ضلع AB از مربع ABCD داده‌شده، تصاویر مربع را رسم کنید درصورتی که ضلع AD آن افقیه باشد.

۳- تصاویر خطی برآثار صفحهٔ PαQ' منطبق است. به خط مزبور صفحه‌ای مرور دهید که برصفحهٔ PαQ' عمود باشد.

۴- صفحهٔ PαQ' وخط dd' درصفحهٔ نیمساز ربع دوم داد شده است. ازنقطهٔ mm' خطی رسم کنید که باصفحهٔ PαQ' موازی بوده وخط dd' راقطع کند.

دبیرستان رازی

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف- هندسهٔ رقومی

مسئله- واحدسانتیمتر، مقیاس $\frac{1}{1}$ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌هارا مرکز بنامید.

۱- نقطهٔ h_3 به‌فاصلهٔ ۳ زیر مرکز کاغذ برروی محور اطول کاغذ واقع است. ازاین نقطه خط HA را به‌شیب $p = \frac{1}{2}$ بقسمی رسم کنید که a سمت چپ مرکز کاغذ بر محور اقصر واقع ودرصفحهٔ مقایسه قرار گیرد. برخط HA صفحهٔ P را به‌شیب p = ۱ بقسمی مرور دهید که ترقی رقومش ازبالا بپائین باشد و یك خط بزرگترین شیب صفحهٔ P راسمت چپ کاغذ رسم کنید.

۲- درصفحهٔ P مثلث ADB رابقسمی رسم کنید که AH ارتفاع مثلث نظیر ضلع BD بوده ومیانهٔ آن $\overline{AM} = ۶/۸$ و m سمت راست a واقع ورقوم c برابر ۲ باشد. ملخص مثلث را رسم کرده برروی آن متوازی‌الاضلاع ABCD راکه BD قطر آنست بنا کرده ملخص آن را نشان داده وسعت حقیقی متوازی‌الاضلاع را درسمت بالای کاغذ مشخص کنید.

۳- متوازی‌السطوح ABCDEFGH رابقسمی کامل نمایید که یال AE = ۷/۵ خط افقی بوده و از فضا بر AH عمود باشد. متوازی‌السطوح رامرئی ومخفی کنید.

۴- صفحهٔ Q راسمت راست کاغذ به‌شیب $p = \frac{2}{3}$ بقسمی رسم کنید که افقیهٔ رقوم ۵ آن برمحور اقصر کاغذ منطبق وترقی رقومش ازبالا بپائین باشد. مقطع متوازی‌السطوح را باصفحهٔ Q بدست آورده مرئی ومخفی نمائید.

۵- عمود مشترك خط AH و یال BF را روی شکل رسم کنید.

ب- هندسهٔ ترسیمی

مسئلهٔ ۱- از نقطهٔ aa' خطی رسم کنید که باصفحهٔ قائم تصویر زاویهٔ °۴۰ بسازد وبرجبهیه مفروض DD' متکی باشد.

مسئلهٔ ۲- P به‌بعد ۵ اثرافقی صفحهٔ مواجهی است که فاصلهٔ این صفحه ازنقطهٔ مفروض aa' به‌بعد ۲ وارتفاع ۵ برابر ۱ می‌باشد. اثرقائم صفحهٔ مواجه‌را بدست آورید.

مسئلهٔ ۳- فصل مشترك صفحهٔ PαQ' راکه بر نیمساز

دوم عموداست با صفحه‌ای که بر خط‌الارض ونقطهٔ oo' به‌بعد ۳ وارتفاع ۲ می‌گذرد بیابید.

مسئلهٔ ۴ـ قطعه خط $bcb'c'$ قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC است که $\overline{AB}=\overline{AC}$ ورأس A به‌بعد ۱ درصفحهٔ نیمساز اول‌واقع است. تصاویر مثلث را رسم کنید.

مسئلهٔ ۵ـ عمود مشترك دو خط‌نیمرخ متنافر $aba'b'$ و $cdc'd'$ رارسم‌نمائید.

دبیرستان سپاس

دبیر: بنائی ـ فرستنده: محمدتقی ایلاتی

الف ـ هندسهٔ رقومی

محورهای‌اطول واقصر کاغذ را رسم کنید، واحدسانتیمتر ومقیاس ۱:۱ است.

۱ـ نقطهٔ a_0 را روی محور اقصر وبه فاصلهٔ ۳cm از مرکز کاغذ ودرسمت چپ مرکز انتخاب کنید وازنقطهٔ a_0 خط a_0b_4 را باشرط $ab=8cm$ بقسمی رسم کنیدکه تصویرش با محور اقصر زاویهٔ °۳۰ بسازد وترقی‌رقومش ازپائین‌به‌بالا واز چپ به‌راست ممتد باشد.

۲ـ برخط a_0b_4 صفحهٔ P را طوری مرور دهیدکه‌مقیاس شیب‌آن موازی محور اطول باشد.

۳ـ نقطهٔ c_5 را درصفحهٔ P سمت چپ b بقسمی‌تعیین کنیدکه $CBA=60°$ وسپس ملخص ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ را درصفحهٔ P بدست‌آورید. قاعدهٔ بزرگتر آن AB می‌باشد.

۴ـ ملخص منشورقائم $ABCDEFGH$ رابدست‌آورید درصورتی که قاعدهٔ فوقانی آن $ABCD$ و یك یال آن $AE=8\sqrt{2}$ باشد وآن را مرئی ومخفی‌نمائید.

۵ـ صفحهٔ Q را به‌موازات صفحهٔ P و به فاصلهٔ حقیقی $4\sqrt{2}$ درزیرصفحهٔ P رسم کنید ومقطع منشور قائم را باصفحهٔ Q بدست‌آورید.

ب ـ مسائل ترسیمی

۱ـ برخط نیمرخ $aba'b'$ صفحهٔ $P\alpha Q'$ رابقسمی‌مرور دهیدکه باصفحهٔ افق تصویر زاویهٔ °۶۰ درجه بسازد.

۲ـ خط نیمرخ $aba'b'$ وخط افقی hh' در نقطهٔ aa' متقاطع هستند. آثارصفحهٔ $P\alpha Q'$ راکه ازاین دوخط‌متقاطع می‌گذرد بدست‌آورید.

۳ـ ازنقطهٔ $A(3\ و\ 2)$ خط مواجه hh' را وخط dd' را که‌ماربر xy است‌رسم کنیدوسپس ملخص نیمساززاویهٔ‌دوخط‌متقاطع D و H راکه $\triangle\triangle'$ است بدست‌آورید.

۴ـ صفحهٔ غیرمشخص $P\alpha Q'$ وخط قائم zz' به‌بعد ۱ وخط منتصب vv' به‌ارتفاع ۲ مفروض است. خط dd' را براین دوخط بقسمی متکی کنیدکه درصفحهٔ $P\alpha Q'$ باشد.

۵ـ درصفحهٔ $P\alpha Q'$ ملخص نقطهٔ $A(3\ و\ 2)$ رابدست آوریدوسپس ازنقطهٔ aa' خط dd' رادراین‌صفحه‌طوری‌بدست‌آورید که باصفحهٔ افق زاویهٔ °۳۰ بسازد ونقطهٔ cc' را به‌بعد ۱ روی dd' بدست‌آورید واگر خط AC یك‌قطر از لوزی $ABCD$ باشد ملخص لوزی رادرصفحهٔ $P\alpha Q'$ بدست‌آورید. بعد نقطهٔ B برابر ۳cm می‌باشد.

دبیرستان کورش وطبری

دبیر: بنائی ـ فرستنده: آلبرت گلچه‌ای

الف ـ هندسهٔ رقومی:

محورهای اطول و اقصر را رسم کنید واحد سانتیمتر مقیاس $\frac{1}{1}$.

۱ـ نقطهٔ a_6 را به‌فاصلهٔ ۲ سانتیمتر زیر محور اقصر و به‌فاصلهٔ یك سانتیمتر سمت راست محور اطول کاغذ انتخاب کنید و از نقطهٔ a_6 خط a_6b_4 راکه $AB=2\sqrt{5}$ است بقسمی رسم کنیدکه b روی محور اقصر و سمت راست مرکز باشد.

۲ـ برخط a_6b_4 صفحهٔ P رابقسمی مرور دهیدکه مقیاس شیب P موازی محور اطول باشد.

۳ـ نقطهٔ c_2 را درصفحهٔ P بقسمی بدست‌آوریدکه: $CBA=90°$ و سپس ذوزنقهٔ $a_6b_4c_2d_5$ در صفحهٔ P تعیین کنید (AB قاعدهٔ کوچکتر است).

۴ـ ملخص هرم $s_{12}a_6b_4c_2d_5$ را بقسمی بدست آورید که کنج B سه‌قائمه باشد.

۵ـ ازنقطهٔ d_5 خط $DM=4\sqrt{2}$ را به صفحهٔ P عمود کنید ($h_M>h_D$) سپس‌از نقطهٔ M صفحهٔ Q رابه‌موازات‌صفحهٔ P رسم کنید.

۶ـ مقطع هرم $SABCD$ را باصفحهٔ Q بدست آورید و هرم ناقص $ABCDEFGH$ را مرئی و مخفی نمائید.

۷ـ زاویهٔ حقیقی خط SD را باصفحهٔ P بدست‌آورید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ فصل مشترك خط قائم zz' (به‌بعد ۲) را با صفحهٔ نیمساز ربع اول که نقطهٔ aa' است بدست‌آورید. سپس ازنقطهٔ aa' خط dd' رابقسمی رسم کنیدکه باخط قائم zz' زاویهٔ °۶۰ درجه بسازد ودرصفحهٔ ماربر xy باشد.

۲ـ صفحهٔ مواجه PQ' که موازی صفحهٔ نیمساز ربع دوم و به‌فاصلهٔ $3\sqrt{2}$ ازآن می‌باشد مفروض است. قرینهٔ نقطهٔ $A(3\ و\ 5)$ را نسبت به‌صفحهٔ مواجه PQ' بدست‌آورید.

۳ـ فصل مشترك خط منتصب zz' را با صفحهٔ $P\alpha Q'$ که برصفحهٔ نیمساز ربع دوم عمود است بدست‌آورید.

۴ـ خط dd' که‌درصفحهٔ‌نیمساز ربع اول می‌باشدبانیمرخ $aba'b'$ متقاطع است. آثارصفحهٔ‌این‌دو خط، تقاطع راکه $P\alpha Q'$ است بدست‌آورید .

۵ـ از لوزی ABCD تصویر افق abcd و تصویر قائم خط $a'c'$ در دست‌است. ملخص‌آنرا کامل کنید .

دبیرستان مروی

دبیر: مختاری ـ فرستنده : محمد حسن نوری

الف ـ هندسهٔ رقومی :

واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ و مرکز کاغذ محل‌برخورد دو محورآنست .

نقطهٔ a_0 برمرکز کاغذو λ_2 به‌فاصلهٔ ۳ واحد بالای‌محور افقی و ۳ واحد چپ محور اطول قرار دارد . این دو نقطه برصفحهٔ قائم v واقعند. مطلوبست :

۱ـ نمایش مثلث متساوی‌الساقین $a_0\lambda_2\delta_4$ واقع‌برصفحهٔ قائم v به‌رأس a_0 (درتصویر a بین λ و δ)

۲ـ صفحهٔ قائم v را حول محورقائمی‌که از a_0 می‌گذرد 45° درجهت مثلثاتی دوران می‌دهیم تا به‌صفحهٔ قائم R تبدیل شود.وضع‌جدید نقاط λ_2 و δ_4 راکه به‌ترتیب γ و β می‌نامیم و هم‌چنین رقومهای‌آنها را مشخص‌کنید .

۳ـ صفحهٔ قائم R را حول اثرش 60° دوران می‌دهیم تا به‌صفحه P تبدیل شود یك مقیاس شیب ازصفحهٔ P رارسم و وضع جدید β و γ راکه بترتیب b و c می‌نامیم مشخص‌و رقوم‌آنها را دقیقاً تعیین‌کنید (نقاط b و c بالای محور افقی قرار دارند)

۴ـ روی مثلث ABC متوازی الاضلاع ABCD را بسازید وآنرا قاعدهٔ متوازی‌السطوح قائمی بگیریدکه‌یال AE آن برابر $6\sqrt{3}$ و رقوم E مثبت‌باشد ملخص متوازی‌السطوح را رسم و خطوط مرئی و مخفی را مشخص‌کنید .

۵ـ اگرنقطهٔ M وسط یال DH باشدمقطع صفحهٔ BEM را در متوازی‌السطوح تعیین نمایید .

ب ـ مسائل ترسیمی :

۱ـ برخط dd' صفحه‌ای عمود بر صفحهٔ نیمساز دوم و چهارم رسم‌کنید .

۲ـ از نقطهٔ aa' واقع برصفحه مفروض $P\alpha Q'$ خطی روی این صفحه رسم‌کنیدکه موازی صفحهٔ نیمساز اول وسوم باشد .

۳ـ برخط مفروض dd' صفحه‌ای رسم‌کنیدکه با صفحهٔ افق تصویر زاویهٔ 60° بسازد (شرط امکان مسئله چیست)

۴ـ نقاط aa' و bb' مفروضند . مطلوبست رسم مکان هندسی نقاطی از فضاکه متساوی‌الفاصله‌انداز این دونقطه .

۵ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ مفروض است. زاویهٔ این‌صفحه رابا صفحه قائم تصویر معین‌کنید .

دبیرستان مهرباختر

دبیر : بنائی ـ فرستنده : مهناز امیدواران

الف ـ هندسهٔ رقومی :

محورهای افقی و اطول کاغذرا رسم‌کنیدواحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ است .

۱ـ ملخص نقطهٔ a_0 را روی محور افقی و سمت‌راست مرکز به‌فاصلهٔ $3\sqrt{3}$ از مرکز انتخاب‌کنید و از این نقطه‌خط a_0o_2 را طوری رسم‌کنید که $AO = 3\sqrt{5}$ بوده و نقطهٔ O روی محور اطول و بالای مرکز قرار دارد . اساس و شیب این خط را بدست آورید وآنرا مدرج‌کنید .

۲ـ برخط AO صفحهٔ P را به‌اساس $i = 1$ مروردهید که مقیاس شیب‌آن موازی محور اطول باشد .

۳ـ درصفحهٔ P نقطهٔ b_2 را درسمت چپ O طوری‌بدست آوریدکه $BO = 3cm$ باشدو سپس ملخص متوازی الاضلاع ABCD رابدست‌آوریددرصورتی‌که‌خط AB یك‌ضلع آن‌ونقطهٔ O مرکزآن باشد. وسعت‌حقیقی‌متوازی‌الاضلاع رادرتسطیح نشان‌دهید

۴ـ از نقطه o_2 خطی‌بر صفحهٔ P عمودکنید و روی این خط نقطهٔ S راکه زیر صفحهٔ P است طوری بدست‌آورید که $OS = 6\sqrt{2}cm$ باشد .

۵ـ ملخص‌هرم SABCD را بدست‌آورید وآنرامرئی و مخفی نمائید .

۶ـ صفحهٔ Q را به‌موازات صفحهٔ P بـفاصلهٔ حقیقی $3\sqrt{2}$ در زیرصفحهٔ P رسم‌کنید و مقطع هرم را با صفحهٔ Q بدست‌آورید .

ب ـ مسائل ترسیمی :

۱ـ از نقطهٔ $A(2و3)$ که به‌فاصلهٔ 4cm از صفحهٔ قائم $P\alpha Q'$ می‌باشد خط dd' را طوری رسم‌کنیدکه باصفحهٔ افق تصویر زاویهٔ ۳۰ درجه ساخته و بر اثر افق صفحهٔ قائم $P\alpha Q'$ عمود باشد .

۲ـ خط نیمرخ $aba'b'$ و خط قائم zz' به‌بعد ۲ وخط قائم vv' به‌بعد ۱ مفروضند. خط $\triangle\triangle'$ رابراین‌سه‌خط‌طوری‌متکی کنیدکه در صفحهٔ ماربر xy باشد .

۳ـ برخط‌نیمرخ $aba'b'$ صفحه مواجه PQ' را مرور دهید و فصل مشترك صفحهٔ مواجه PQ' را بـاخط افقی hh' بدست‌آورید .

۴ـ خط dd' که‌موازی نیمساز ربع دوم می‌باشدمفروض است . فصل مشترك این خط را باصفحهٔ نیمساز ربع اول که نقطه aa' است بدست‌آورید سپس از نقطهٔ aa' یك خط افقی

hh' رسم کنید و آثار صفحهٔ $P\alpha Q'$ راکه ازاین دوخط می گذرد بدست آورید .

۵ـ نقطهٔ $C(۲و۳)$ و خط dd' که xy را در نقطهٔ aa' قطع می کند مفروضند . نقطهٔ bb' را روی خط dd' طوری تعیین کنید که زاویهٔ $CBA = ۹۰^\circ$ سپس ملخص مستطیل $ABCD$ را بدست آورید .

دبیرستان نظام

دبیر: عسجدی و بنائی - فرستنده : رحیم جلالی

الف ـ هندسهٔ رقومی :

محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ است .

۱ـ از نقطهٔ a_0 که تصویر آن واقع برمرکز کاغذ است خط △ را با اساس ۲cm طوری رسم کنید که ترقی رقومش از پائین به بالا و از چپ به راست باشد و تصویرش با محور اقصر زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد و روی این خط نقطهٔ B را طوری بدست آورید که $AB = ۳\sqrt{۵}$ باشد و رقوم B از رقوم A بزرگتر باشد .

۲ـ برخط a_0b_2 حاصل صفحهٔ P را به اساس (۱) مرور دهید و از دو جواب آنرا انتخاب کنید که مقیاس شیبش با محور اطول موازی است .

۳ـ ملخص مثلث متساوی الساقین $a_0b_2c_4$ را در صفحهٔ P بدست آورید $(CA = CB)$ سپس ملخص متوازی الاضلاع ABCD را رسم کنید وسعت حقیقی این متوازی الاضلاع را بوسیله تسطیح نشان دهید .

۴ـ از نقطهٔ a_0 خط $AE = ۶\sqrt{۲}$ را بر صفحهٔ P عمود کنید بقسمی که E زیر صفحهٔ P باشد ملخص منشور : (EFGH و ABCD) را رسم کنید درصورتی که AE یال آن و ABCD یك قاعدهٔ آن باشد .

۵ـ خطوط مرئی و مخفی منشور فوق را تعیین کرده و محل تلاقی یالهای آنرا با صفحهٔ مقایسه پیدا کنید و نقاط حاصل را بهم وصل کنید (مقطع افقی)

۶ـ نقطهٔ m_2 را طوری پیدا کنید که فاصلهٔ حقیقی آن از صفحهٔ P برابر $\sqrt{۲}$cm بوده و $MA = MB$ باشد .

ب ـ مسائل ترسیمی:

۱ـ خط قائم vv' به بعد ۴ مفروض است. ملخص نقطهٔ (aa') به ارتفاع ۴ و بعد ۵ به فاصلهٔ حقیقی ۵cm از خط قائم vv' بدست آورید و سپس از نقطه aa' خطی رسم کنید که با صفحهٔ افق تصویر زاویهٔ ۴۵ درجه ساخته و خط قائم vv' را قطع کند .

۲ـ خط نیمرخ $aba'b'$ و نقطهٔ خارجی cc' را اختیار کرده و آثار صفحه‌ای راکه برخط و نقطهٔ مزبور می گذرد رسم کنید .

۳ـ صفحهٔ مواجه PQ' را باختیار فرض کرده و فصل مشترك آن را باصفحه‌ای که بر xy و نقطه oo' به ارتفاع ۳ و بعد ۲ می گذرد تعیین کنید .

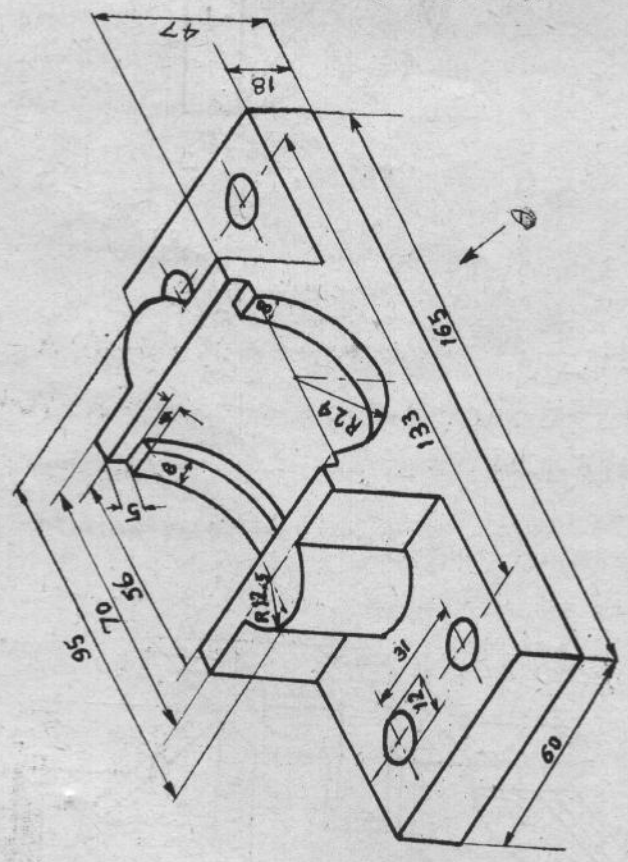
۴ـ دو صفحهٔ $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$ طوری فرض شده که اثرهای قائم آنها موازی و اثرهای افقی آنها متقاطع است فصل مشترك این دو صفحه را تعیین کنید .

۵ـ خط $aba'b'$ مفروض است و ac تصویر افقی پاره خط دیگری است. $a'c'$ را طوری تعیین کنید که AB بر AC عمود باشد .

رسم فنی

دبیرستان ایرانشهر یزد

دبیر: حیدری ـ فرستنده : مهدی ملك یزدی

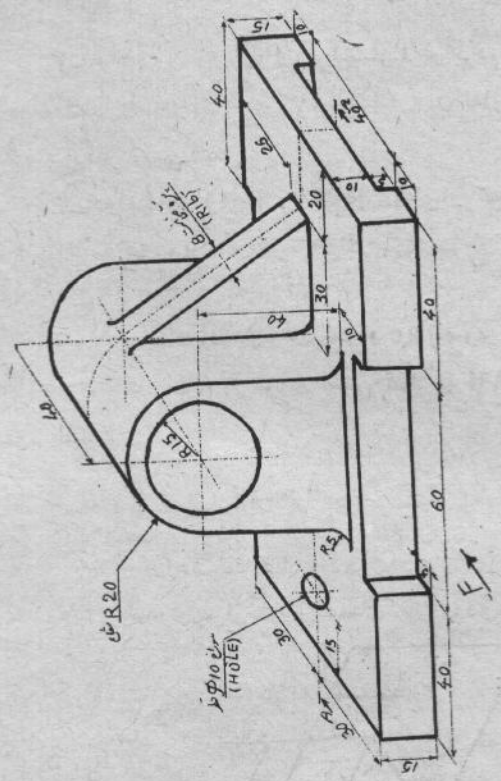


دبیرستانهای : حکیم الهی ـ داورپناه ـ زاکروس ـ مدائن

دبیر: مهندس محمود خوئی

مطلوبست رسم مقطع A – A در تصویر قائم از دید F و رسم تصاویر افق و نیمرخ چپ در ناحیهٔ اول فضا، واحد میلیمتر و مقیاس ۱:۱ کاغذ A_4 (۲۹۷ × ۲۱۰) محورهای تقارن،

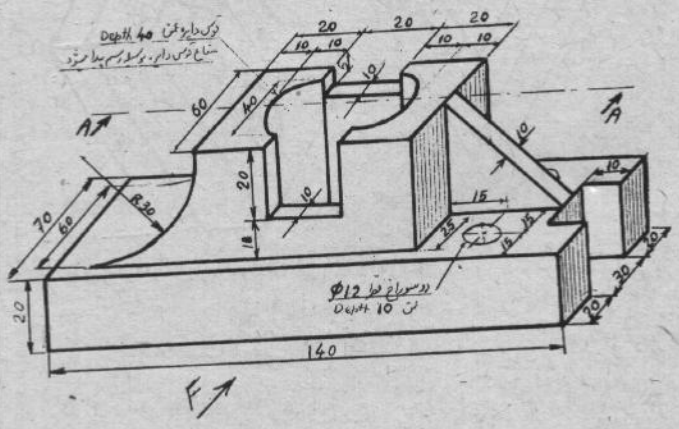
دوران و مقطع رسم شود. در مقطع رسم خطوط مخفی اجباری است .



دبیرستان رهنما

دبیر: مهندس محمود خوئی

پرسپتیکو کاوالیه جسم مفروض است . مطلوبست مقطع A – A درتصویر قائم ـ تصویرافق وتصویر نیمرخ چپ با مقیاس ۱:۱ واحد میلیمتر، درناحیه اول فضا، با اندازه گذاری کامل ورسم محورها. خطوط مخفی درمقطع رسم شود.



دبیرستان دانش بابل

دبیر: پوست‌دوز ـ فرستنده: علی‌اکبر احسانی

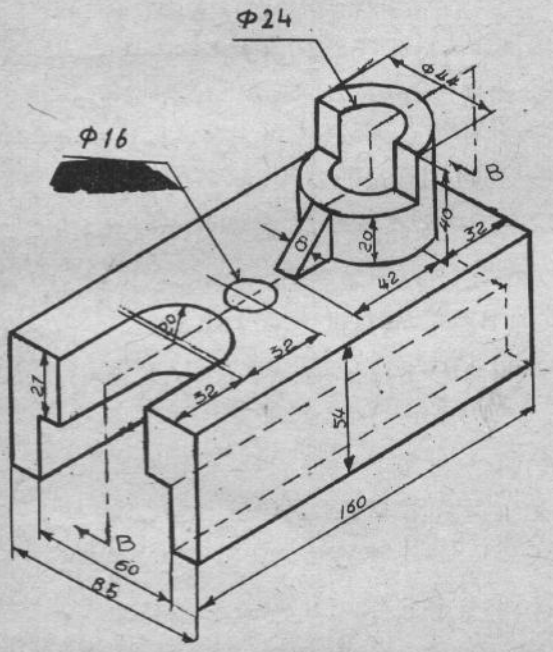
مطلوبست :

۱ـ رسم تصویر افقی

۲ـ مقطع کامل B – B درتصویر قائم

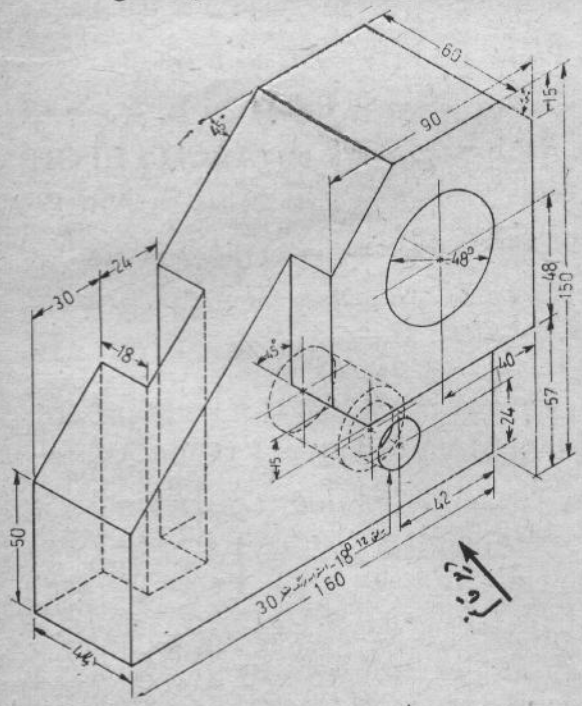
۳ـ تصویر نیمرخ چپ

۴ـ اندازه گذاری کامل



دبیرستانهای مهرباختر، سپاس وطبری

دبیر: بنائی ـ فرستنده: محمدتقی ایلاتی



مسائل مکانیك

دبیرستان دارالفنون

دبیر: تبریزی- فرستنده: علی هاشمی‌زاده

راندمان صنعتی یك ماشین حرارتی $\frac{1}{5}$ راندمان حرارتی (علمی) ماکزیمم آن می‌باشد. درجه حرارتهای دومنبع گرم و سرد به‌ترتیب $327^\circ C$ و $27^\circ C$ می‌باشد. معین کنید حرارت مصرف شده را در یك دقیقه درصورتی که توان مفید ماشین ۱۲۰۰۰ کیلوگرم‌متر برثانیه است.

دبیرستان دانش بابل

دبیر: جعفرزاده- فرستنده: علی‌اکبر احسانی

اتومبیلی به‌جرم ۱۸۰۰ کیلوگرم از جاده شیبداری به‌شیب ۵ درصد که نیروی اصطکاك آن ۴۰۰ نیوتن و طولش ۱۲۰۰ متراست باحرکت متشابه‌التغیر شونده درمدت یك‌دقیقه بالا می‌رود. شتاب اتومبیل سرعت متوسط و سرعت آنرا درانتهای جاده، نیروی موتور وتوان متوسط آنرا تعیین کنید. اگر راننده در ۳۰ متری انتهای جاده موتوررا خاموش کرده ترمز نماید بطوری که درانتهای جاده بایستد نیروئی که اتومبیل را ازحرکت باز- داشته، نیروی ترمز و گرمای ایجادشده در ترمزراتعیین کنید.

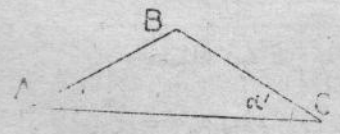
$J = 4/2 j/cal$ و $g = 10 m/s^2$

دبیرستانهای زاگرس وورجاوند

دبیر: معلم- فرستنده: غلامرضاعالی‌شاه

-دوسطح شیب‌دار AB و BC مطابق‌شکل درنقطهٔ B بهم مربوط‌شده وضریب اصطکاك هردو $\frac{\sqrt{3}}{5}$ است.

($AB = BC = 64cm$ و $\alpha = \alpha' = 30^\circ$ فرض می‌شود)



گلولهٔ کوچکی را از نقطهٔ A باسرعت اولیه V_0 دراستداد خط بزرگترین شیب سطح به طرف بالا پرتاب کرده‌ایم بطوری که باسرعت صفر به نقطهٔ B رسیده. اولا مقدار V_0 را حساب کنید ثانیاً گلوله باهمین وضعیت واردمسیر BC می‌شود و در امتداد خط بزرگترین شیب سطح شروع به حرکت می‌نماید. زمان رسیدن از A به C و سرعت گلوله را در نقطهٔ C بدست آورید. $g = 10 m/s^2$

-بریك قطعه چوب پنبه به وزن یك کیلوگرم چه نیروئی ودرچه جهتی باید اثر دهیم تا در داخل آب تعادل داشته باشد. واگر آنرا درعمق ۵ متری آب رهاکنیم طی چه‌مدت و وباچه سرعتی به‌سطح آب خواهد رسید. وزن مخصوص چوب پنبه ۰/۲ و $g = 10 m/s^2$ است. ازمقاومت آب صرفنظرشده.

دبیرستان قناد بابل

دبیر: جعفرزاده- فرستنده: عزیزالله زارع

-گلوله‌ای به‌جرم یك کیلوگرم روی سطح شیب‌داری که نیروی اصطکاك آن $\frac{1}{5}$ وزن گلوله وباافق زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد قرارداشته بوسیلهٔ نخی که ازروی قرقره واقع در بالای سطح می‌گذرد به‌وزنهٔ دیگری به‌جرم ۲۰۰ گرم که درامتداد قائم می‌تواندحرکت کند متصل است. دستگاه را بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم شتاب و سرعت وکشش نخ ومسافت طی‌شده را پس‌از ۶ ثانیه تعیین کنید. دراین‌لحظه نخ پاره‌می‌شود معلوم کنید درمدتی که وزنهٔ قائم از لحظهٔ شروع حرکت بجای اولش برمی‌گردد چه مقدار گرما در نتیجه اصطکاك در گلوله ایجاد می‌شود.

$J = 4200 j/k cal$ و $g = 10 m/s^2$

-سرعت خطی نقطه‌ای اززمین به‌عرض جغرافیایی ۶۰ درجه وپریود به‌طول یك‌متر را دراین نقطه تعیین کنید. جرم زمین $6 \times 10^{24} kg$ و شعاع متوسط $6400 km$ و ضریب جاذبه عمومی در دستگاه MKS علمی $\frac{20}{3} \times 10^{-11}$ ومدت گردش وضعی زمین ۲۴ ساعت است و $\pi = \frac{25}{8}$ فرض می‌شود ونیز تعیین کنید این آونگ هرچند وقت ازآونگی که‌ثانیه را می‌زند یك‌دقیقه جلو یاعقب می‌افتد؟

دبیرستان کورش کبیر نهاوند

دبیر: سلماسی- فرستنده: کیقباد شمس‌اسحاق

اتومبیلی به‌جرم ۲/۴۵ تن‌از حال سکون در روی سطح افقی شروع به‌حرکت می‌کند و پس از ده‌ثانیه سرعتش به ۳۶ کیلومتر در ساعت می‌رسد. اگرنیروی اصطکاك جاده‌دربرابر حرکت اتومبیل مساوی ۵۰ کیلوگرم نیرو باشد؛ اولانیروی موتور را برحسب kgf و توان متوسط‌آن را برحسب kw و اسب بخار حساب کنید. $g = 9/8 m/s^2$. ثانیاً چه مقدار حرارت در همین مدت در اثر اصطکاك ایجاد می‌شود: $J = 4/18 j/cal$. ثالثاً این اتومبیل به‌سربالایی می‌رسد که شیب آن $\sin\alpha = \frac{10}{98}$ است و اصطکاك جاده مانند حالت‌اول می‌باشد. اگرسرعت اتومبیل‌در روی این جاده ثابت‌وبرابر $10 m/s$ باشد، نیروی موتور چقدر است؟ درصورتی که بازده موتور اتومبیل ۴۰٪ باشد موتور چند لیتر بنزین در

۱۰۰ کیلومتر مصرف می‌کند درصورتی که گرمای سوخت هر گرم بنزین cal ۱۰۰۰۰ ووزن مخصوص بنزین ۰/۷۵ فرض شده‌است .

مسائل شیمی

دبیرستان ابن‌سینا همدان

دبیر : سیف‌الدین ـ فرستنده : حسین اسدی

ـ چگالی بخاراستری که اسیدآن اسیدآرسنیك و الکل آن‌متشابه‌الترکیب با الکل اتیلیك است نسبت به‌هوا ۴است. الکل مولداستر را مشخص‌کنید .

ـ از حل یك گرم از یك آلدئید اشباع شده یك ظرفیتی (متشابه الترکیب باآلدئید استیك) در ۱۰۰ گرم‌آب‌نزول‌نقطهٔ انجمادی برابر ۰/۳۲ درجه حاصل می‌شود ؛ الف ـ فرمول آلدئید و نام‌آنرا معلوم‌کنید . ب ـ ۰/۲۹ گرم از این آلدئید چند سانتیمتر مکعب مایع فهلینگ (۳۵ گرم سولفات مس متبلور درلیتر) را بیرنگ می‌کند. ضریب رائول ۱۸۵۰وآب تبلور سولفات مس ۵ ملکول است .

دبیرستان دانش بابل

دبیر :محبوبی ـفرستنده: علی‌اکبراحسانی

۵۰cc از محلول‌آب و الکل را در ظرف سربسته با سولفوکرمیك اکسیدکرده‌ایم‌الکل کاملا به‌اسید تبدیل شده‌است ۲۵cc از محلول حاصل‌از اکسیداسیون در اثر دوبرابرحجمش آب باریت دسی‌نرمال خنثی می‌گردد . درجهٔ الکلی محلول الکل‌را‌حاسبه‌کنید$D = ۰/۸$(ازتغییرحجم‌درضمن‌اکسیداسیون صرفنظر می‌شود).

دبیرستان شاهپور شهرکرد

دبیر : هنری ـ فرستنده : هوشنگ مقیمی

ـ هیدروکربوراتیلنی A مفروض‌است.آن را با اوزن و سپس با آب ترکیب نموده‌ایم نسبت چگالی به حالت بخار آلدئیدهای حاصل $\frac{۲۹}{۲۲}$ است وچگالی مخلوط نسبت به‌هیدرژن ۲۵/۵ می‌باشد .

اولا فرمول گستردهٔ هیدروکربوراتیلنی‌را مشخص کنید.

ثانیاً ۱/۴ گرم هیدروکربور A را هالوژنه‌کرده سپس باپتاس ترکیب کرده‌ایم . در صورتی که در این‌عمل ۱/۶۶۴ گرم الکل تولیدشود راندمان عمل‌را بیابید .

ـ اگر گازحاصل ازاحتراق ۰/۴۴ گرم الکل‌یك‌ظرفیتی اشباع شده بتواند فاکتور ۱۲۵cc آب‌آهك را ۰/۴ نرمال تغییر دهد فرمول الکل را پیداکنید .

دبیرستان فردوسی تبریز

دبیر: مغازه‌ای ـ فرستنده : غلامرضا جوانشیر

آلدئیدی به فرمول $R - CHO$ بابنیان اشباع‌شدهٔ متشابه‌الترکیب، با استالدئید موجود است. از اکسیداسیون آن اسیدی حاصل می‌شودکه اگربا پتاس خنثی شود ۰/۵۸ گرم آن با ۰/۵۶ گرم پتاس خنثی می‌شود. فرمول جسم را پیدا کرده‌واثرآنرا با پنتاکلرورفسفربنویسید .

دبیرستان مروی

دبیر: فروتن، ثقةالاسلامی ـ فرستنده: محمدحسن‌نوری

ازتجزیهٔ ۰/۵۸ گرم‌ازیك‌جسم‌آلی‌مرکب‌از$O - H - C$ مقدار ۰/۶۷۲ لیتر گازانیدریدکربنیك و۰/۵۴ گرم‌آب‌تولید شده است. درآزمایش دیگر۰/۲۹ گرم ازهمان جسم‌آلی را به‌صورت بخاردرمی‌آوریم حجم هوای‌جابجاشده ۱۱۲ سانتی‌مترمکعب می‌شود فرمول بسته جسم‌را پیداکنید واگر بدانیم که این جسم آلدئیداست‌فرمول گسترده جسم ونام‌آنرابنویسید ثالثاً ۰/۰۲ ملکول‌گرم جسم آلی را اکسیده کرده و نمك سدیم جسم حاصل را با آب آهك تکلیس می‌کنیم حجم گاز حاصل را پیداکنید .

دبیرستان مهرتبریز

دبیر: رحیمی ـ فرستنده : سید حسین حسینی

ـ ۱۵/۸ گرم استات‌کلسیم را تکلیس نموده وبخار حاصل را واردمحلول‌کلروردوشو می‌نمائیم. جسم‌آلی‌حاصل‌را تحت تأثیرنور قرارداده وبا آمونیاك ترکیب می‌دهیم . وزن جسم آلی حاصل ۴/۳ گرم می‌شود . راندمان عمل را بیابید .

ـ سه مولکول‌اکل‌متیلیك را با چهار مولکول اسید پروپیونیك ترکیب می‌دهیم. حداتری شدن را بیابید .

مسئلهٔ نمونه(دنباله از صفحهٔ ۳۴۳)

با فرض $x = \frac{۲\pi}{n}$ داریم:

$$S = \frac{۲\pi}{x} \times \frac{R^۲}{۴} \times \frac{x - \sin x}{\sin^۲ \frac{x}{۲}} = \frac{\pi R^۲}{۲}\left[\frac{۱ - \frac{\sin x}{x}}{\sin^۲ \frac{x}{۲}}\right]$$

هرگاه $n \to \infty$ مقدارx به‌سمت صفرمیل‌می‌کند$(x \to ۰)$ ومقدارکسر داخل‌کروشه به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. با استفاده از دستور هوپیتال نتیجه‌خواهدشدکه هرگاه $n \to \infty$ حد S برابر خواهد بود با $\frac{\pi R^۲}{۳}$ یعنی‌حد مساحت‌گل nپروقتی $n \to \infty$ برابر باثلث مساحت دایرهٔ مفروض است.

سؤالهای امتحانی دانشسرای دوسالهٔ راهنمایی اصفهان

نیمهٔ دوم سال تحصیلی ۴۹ ـ ۵۰

دبیر : قوام نحوی

I ـ سال اول

مسئلهٔ ۱ـ اگر p و q دو گزاره باشند، صحت روابط زیر را تحقیق کنید :

$$\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$$
$$\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$$
$$\overline{p \leftrightarrow q} \equiv \bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$$

مسئلهٔ ۲ـ اگر گزارهٔ p (اوکوتاه قداست) و گزارهٔ q (اوبا هوش است) باشد، گزاره‌های ترکیبی زیر رابا علامتهای منطق ریاضی بنویسید :

۱ـ اوکوتاه‌قداست ولی با هوش نیست .

۲ـ چنین نیست که اوبلندقد باشد یا باهوش .

۳ـ اونه‌کوتاه‌قد است ونه باهوش .

۴ـ اوکوتاه‌قداست یا بلندقداست وبی‌هوش .

مسئلهٔ ۳ـ معین کنید که گزاره‌های ترکیبی زیر کدام راست هستند وکدام دروغ :

$$[\forall a \in Q \text{ و } \forall b \in R \Longrightarrow (a - 2b) \in N] \vee [\forall x \ ، \ |x| = x]$$

$$[\exists x \in N \ ، \ x^2 + 3x + 2 = 0] \Longrightarrow [\forall x \in N \ ، \ x + 3 > 2]$$

مسئلهٔ ۴ـ اگر A و B و C سه مجموعه باشند که نمودارآنها سه‌منحنی بستهٔ دوبه‌دومتقاطع باشد؛

اولاً صحت رابطهٔ زیررا تحقیق کنید :

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

ثانیاً اگر A مجموعهٔ مضربهای ۶۰ و B مجموعهٔ مضربهای ۴۰ و C مجموعهٔ مضربهای ۲۰ باشد، صحت رابطهٔ بالا را تحقیق کنید .

ثالثاً پیداکنید $A \cap B \cap C$ راوآن را بوسیلهٔ دیاگرام نیزنشان دهید .

مسئلهٔ ۵ـ n را طوری بگیرید که کسر $\frac{n}{2n+1}$ مولد کسراعشاری نامحدود . . . ۰/۴۹۵۹۰ شود، سپس ازاین کسراعشاری تا ۰/۰۰۱ تقریب جذربگیرید .

مسئلهٔ ۶ـ اولاً ازراه استقراء ریاضی صحت رابطهٔ زیر را تحقیق کنید :

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

ثانیاً اگر n زوج باشد ثابت کنید عبارت طرف دوم بر ۳ بخش‌پذیراست .

II ـ سال دوم

۱ـ درمجموعهٔ اعدادگویا و مثبت عمل بین a و b به‌صورت زیرداده شده است :

$$a * b = a + \frac{1}{b}$$

معین کنید این عمل خاصیت جابجایی و انجمنی دارد یا نه . همچنین تحقیق کنید که عنصربی‌اثردارد یا نه .

۲ـ مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3, 6\}$ مفروض است . عمل بین عناصر آن کوچکترین مضرب مشترک دوعدد است. جدول عمل آنرا رسم کنید وتحقیق کنید مجموعهٔ A گروه تشکیل می‌دهد یا نه .

۳ـ روی مجموعهٔ اعدادطبیعی دوقانون زیررادرنظرمی گیریم :

$a \circ b =$ بزرگترین عادمشترک دوعدد

$a \triangle b =$ کوچکترین مضرب مشترک دوعدد

اولاً تحقیق کنید هریک ازاین دوقانون خاصیت جابجایی وانجمنی دارند یانه .

ثانیاً ثابت کنید که عمل ضرب نسبت به هریک از این دوقانون خاصیت پخشی دارد .

۴ـ مجموعهٔ $S = \{a, b, c, d, e\}$ را درنظر می گیریم. قانون * و △ مطابق بادو جدول زیر بین عناصر دومجموعه برقراراست:

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	e	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

دنباله در پایین صفحهٔ بعد

نوشتهٔ ریند Rhind

تهیه‌و تنظیم از: داوید ریحان

کنسرتهای اقلیدیوتالسی

کیست که اقلیدیوتالسی را نشناسد؟ عدهٔ قلیلی از پیانیستهای امروزی توانسته‌اند به پایهٔ شهرت او برسند و هرجا که برود برای حضور در رستیالهایش سرودست می‌شکنند. تالسی استاد، همانند تمام دست‌اندرکاران موسیقی عادت عجیب و غریبی دارد که بالاخص در موقع تنظیم برنامه‌هایش ظهور می‌کند. آیا اینرا می‌توان پای خرافات‌پرستی او گذاشت؟ کی می‌داند؟

شما هرچه می‌خواهید آنرا حساب کنید، حال ببینید که در آخرین سری رستیال چهارتائی او چه گذشته است. در برنامه‌های مختلف، آثار **بتهون، برامس، موزارت، لیت وشوپن** به‌چشم می‌خورد. ولی در هر برنامه، پیانیست مشهور فقط چهار قطعه را اجرا می‌کرد که هرکدام متعلق به آهنگساز مختلفی بود. همچنین دو رستیال نمی‌توان یافت که در آنها چهار آهنگساز دریك ترتیب باشند. مثلا، موزارت و بتهون هیچگاه باهمدیگر دریك برنامه گنجانیده نشده‌اند. ولی اگر تالسی امشب یك آهنگ از بتهون اجرا نمی‌کرد، حتماً اثری از موزارت و بلافاصله اثری از شوپن را اجرا می‌کرد. درعوض، اگر موزارت را کنار می‌گذاشت کنسرت خودرا با اثری از برامس خاتمه می‌داد. بالاخره، سنت تغییرناپذیر او این بود که اگر برامس دریك برنامه گنجانیده می‌شد، دراین صورت کنسرت بایست شروع می‌شد.

خوانندهٔ عزیز، بطوری که مشاهده می‌شود، اگر سه کنسرت اولیهٔ این سری با اثری از یك آهنگساز خاتمه یافته باشد، برای شما چندان مشکل نخواهد بود که نام آهنگسازانی را که آثارشان در آخرین رستیال وجود داشته و همچنین ترتیب اجرای آثارشان را تعیین کنید، پس از آن می‌توانید پاسخ خود را با پاسخ مندرج در دو صفحهٔ بعد تطبیق دهید.

△	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e
c	a	c	e	b	d
d	a	d	b	e	c
e	a	e	d	c	b

تحقیق کنید مجموعهٔ S تشکیل میدان می‌دهد یا نه [$S-\{a\}$ برای عمل △ باید تشکیل گروه بدهد].

۵ـ جملهٔ عمومی یك سری به‌فرم زیراست:

$$u_n=(1+\frac{1}{n})^n.a^n$$

که در آن a عددی است مثبت. معین کنید در دو حالت $a>1$ و $a<1$ سری بالا متقارب است یا متباعد.

۶ـ در دو حالت $x>1$ و $x<1$ معین کنید سری $u_n=nx^n$ متقارب است یا متباعد.

۷ـ اگر a و b و c عناصر یك گروه جابجائی باشند صحت روابط زیررا تحقیق کنید:

$$(b=a')\Longleftrightarrow(a=b')$$

$$(a\circ b)^2=a^2\circ b^2$$

$$(a\circ b\circ c)^2=a^2\circ b^2\circ c^2$$

۸ـ جملهٔ عمومی یك رشته به‌صورت زیراست:

$$a_n=8+\frac{8^n+1}{8^{n+1}}$$

معین کنید این رشته متقارب به‌چه عددی است.

۹ـ مجموع ۶ جمله و همچنین حد مجموع بینهایت جمله ازجملات سری زیررا پیدا کنید:

$$4-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$$

۱۰ـ ثابت کنید اگر دریك قانون ترکیب یك عضو بی‌اثر وجود داشته باشد آن عضو منحصر به‌فرد است.

بدون تابش‌نور درآنها جایگزین شود؟ بوهر بامحاسبات خود نشان‌دادکه تعداد این‌مدارات فراوانند، شاید این‌تعداد یك بینهایت بزرگ‌بوده‌که درآن مدارات به‌فواصل مختلف از همدیگر قرار داشته وباید فاصلهٔ میانگین آنهارا ازهسته‌در نظرداشت. دراینجا معما فاصله نیست، موضوع مهم میزان انرژی وابسته به‌الکترون درمدارش است،که درحیطهٔ معارف ما قابل فهم‌است، زیرا هرقدر الکترون به‌هسته نزدیکترباشد، سریعتر حرکت‌کرده تا روی آن سقوط نکند. عکس مطلب نیز صحیح است، یعنی هرقدر فاصلهٔ‌الکترون ازهسته بیشترباشد، شدت جذب به‌طرف هسته‌کمترشده، وبنابراین‌آهسته‌تر درمدار گردش می‌کند.

پس نتیجه می‌گیریم‌که جاده‌های «مدارات» الکترونها، باتوجه به‌انرژی‌آنها، بایکدیگر اختلاف دارند. و تازمانی‌که الکترون درمدار خود ثابت‌است، هیچگونه نوری تابش نمی‌شود.

دراینجا بوهر فرضیهٔ دیگری را ارائه داد. فرض کنیم الکترون غفلتاً ازیك مدار باانرژی بیشتر به‌مداری باانرژی کمتر بجهد. پس مازاد انرژی چه‌خواهد شد؟ می‌دانیم انرژی هیچگاه نابود نمی‌شود.

بوهر می‌گوید: این انرژی اضافی را در خارج اتم جستجوکنید.

انرژی مذکور به‌صورت یك کوانتم (از اتم) صادرمی‌گردد، همان‌کوانتم انرژی نورانی‌که‌اینشتین برآن نام‌فوتون نهاده بود.

الکترونی‌که ازخود فوتون نشرمی‌دهد تغییر مدارداده ودیگر نوری ازخود تابش‌نمی‌کند. این‌فوتون‌درکسری ازثانیه زمانی‌که الکترون ازمداری به‌مداردیگر جهش می‌کند، تابش می‌شود.

دراین‌مدت فوتون راه‌خود را به‌خارج بازکرده و سرانجام ازجسم‌خارج می‌شود. این فوتون می‌تواند چشم را تحت تأثیر قرارداده ودرطیف‌نما از میان‌منشور شیشه‌ای‌عبور کرده وازآن عکس گرفته‌شود.

انرژی‌فوتون، پیش‌ازآنکه‌تصویر واقعی‌آن‌راکه‌به‌صورت خطی سیاه برصفحهٔ عکاسی ظاهر می‌شود، ببینیم، بارها تغییر شکل می‌دهد.

این‌خط خود یادآورسرگذشت خویش‌است وباتعیین‌محل آن‌برروی صفحهٔ‌عکاسی، می‌توانیم‌طول موج وبسامدآن‌راپیدا کنیم وسپس به‌کمك رابطهٔ‌پلانك‌انرژی فوتون‌راحساب‌کنیم.

این انرژی دقیقاً برابر اختلاف انرژی مدارهای جدید وقدیم الکترون می‌باشد. میزان‌سیاهی‌خط(طیف خطی) برروی صفحهٔ عکاسی نمایندهٔ وفور فوتونها می‌باشد؛ هرچه‌تعداد فوتونها زیادتر باشد، خط‌سیاهتر است ودرنتیجه‌جسمی‌که‌آنها را تابش نموده است، روشنتر است.

این توجیه‌دقیق وظریفی‌بودکه دربارهٔ طیف‌بیان‌نمودند.

اتمهای یك‌جسم متشابهند. بنابراین الکترونها همگی تحت شرایطی‌یکسان وجوددارند. وفوتونهای تابش شده در مدت تغییرمدار الکترون، متشابه‌خواهندبود. درکاوش نهایی، می‌بینیم ازکلیهٔ تغییر مدارهایی‌که الکترونها انجام می‌دهند، فقط یك‌طیف خطی واحد بدست می‌آید.

پیشتر یادآورشدیم‌که مدارهای زیادی در اتم وجود دارند والکترون‌می‌تواند درمدارهای مختلف قرارگیرد.

هرجهشی ازیك مدار باانرژی بیشتر به‌مداری باانرژی کمتر، به‌همراه خود یك‌فوتون تولیدمی‌کند. ولی‌ازآنجایی‌که انرژی‌مدارهای مزبورمتغیرند،فوتونها نیزانرژیها وبسامدهای گوناگون دارند وصفحهٔ حساس عکاسی یك سری خطوط طیفی باریك رانشان می‌دهد. طیف خطی گاز هیدرژن نیز چنین‌است واز دهها خط طیفی باطول‌موجهای متفاوت تشکیل‌شده‌است.

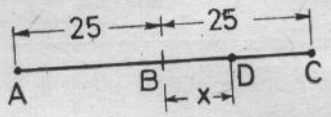
عاسی‌ترصحبت‌کنیم، طیفهایی‌نظیر طیف سادهٔ سدیم‌که شامل یك‌خط زردباشند، بسیارنادرند. اغلب طیفها ازدهها و هزاران خط تشکیل‌شده‌اند. نمونه‌های طیفی بعضی ازترکیبات شیمیایی‌به‌قدری پیچیده ودرهم‌اندکه حتی امیدی‌به‌تجزیهٔ‌کامل آنها نیست. اما قوانینی وجوددارندکه‌این‌کاررا آسان‌می‌کنند.

پیش از نظریهٔ بوهر، افکار فیزیکدانها سخت متوجه نمونه‌های طیفی پیچیده و بدست‌آوردن کلید رمز آنها بود. و وقتی‌که بوهر ثابت‌کردکه طیف زندگینامهٔ اتم ویادر واقع زندگینامهٔ الکترونهاست، این‌کارمهم بسیارآسان‌شد. فقط‌کافی بودکه مدارهای مختلف الکترونی اتم را ترکیب‌کرد تابتوان خطوط طیفی مربوط را پیش‌بینی ومشاهده نمود.

وبرعکس، بابررسی خطوط طیف‌حاصله، می‌توان‌به‌کلیهٔ نتایج و شرایطی‌که تحت آن‌شرایط الکترونهای اتمی وجود دارند، پی‌برد. واین امر بسیارمهمی بود. براستی تمام‌آنچه‌را که دربارهٔ لایه‌های الکترونی اتمها بدست آوردیم، حاصل پژوهشها وبینشهای‌دقیقی بودکه درطیف‌شناسی انجام‌پذیرفت.

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 95 - An army 25 miles long marches 25 miles in a day. At the start of the day a messenger starts from the near of the column, carries a message to the front of the column, immediately turns and starts back to his original place at the rear. The messenger reaches the rear just as the day's march comes to an end. How fast did the messenger travel?



Solution: From Fig . we see that the rear of the line starts at A and travels to B. The front starts at B and travels to C. The messenger starts at A, meets the front of the line at D, and returns x miles to B. The ratio of the total distance the messenger and the front of the column traveled is equal to ratio of the distance each traveled until they met at D.

$$\frac{25+2x}{25}=\frac{25+x}{x}$$

$$25x+2x^2=625+25x$$

$$\text{and } x^2=\frac{625}{2}$$

$$\text{or } x=\frac{25\sqrt{2}}{2}$$

The total number of miles traveled was $25+2x$. Using the value of x obtained above wehave.

total number of miles $=25+25\sqrt{2}$

The messenger's rate was 60.35 miles per day.

Problem 96 - What is the smallest natural numben which has a remainder of 1 wher it is divided by 2, by 3, by 4, by 5, or by 6, and has a remainder of 0 when divided by 7?

Solution: The solution to this problem must be one greater than a common multiple of 2, 3, 4, 5, and 6 and divisible by 7. The least multiple of these numbers is 60, but 61 is not divisible by 7. The next smallest multiples are 120, 180, and 241 are not divisible by 7. however, 301 is a multiple of 7. Therefore 301 is the smallest natural number which has a remainder of 1 when divided by 2, by 3, by 4, by 5, or by 6, and has a remainder of 0 when divided by 7.

داستانهای ریاضی(دنباله‌از صفحهٔ ۳۸۲)

پاسخـ بتهون وموزارت دریك‌برنامه شرکت‌نمی‌کنند (که باعث تأسف است)، پس درهررسیتال آثاری ازبـراس ، شوپن ولیست اجرا می‌شود. براس درهر برنامه درنظر گرفته می‌شود،در نتیجه‌هرکدام‌ازاین‌برنامه‌هابالیست شروع‌شده‌است.

فرض می‌کنیم کـه بتهون راکنارگذاشته‌بـاشیم؛ دراین حالت، قطعهٔ مـوزارت بلافاصله بـوسیلهٔ قطعه‌ای از شوپـن دنبال می‌شود .

پس برنامه‌را می‌توان به‌دوصورت زیرتشکیل داد:

a) لیست، موزارت، شوپن، براس .

یا

b) لیست، براس، موزارت، شوپن .

اگرموزارت راکنارگذاشته باشیم ، بـراس رستیال را خاتمه می‌دهد؛ پس بتهون وشوپن می‌توانند دردومین‌وسومین ردیف قرارگیرند وبـالعکس. دراین‌صورت بـرنامهٔ ایمن دفعه به‌صورت زیرتنظیم می‌شود:

a) لیست، بتهون، شوپن، براس

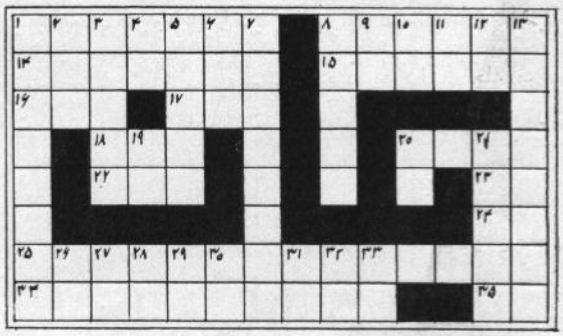
یا

b) لیست، شوپن، بتهون، براس

می‌گوئیم‌که سه‌کنسرت اولیه با اثری ازیك موسیقیدان ختم شده‌است (یعنی ازترکیبات (a) ، (b) ، (c) و (d)) و ترکیب (d) معرف برنامهٔ آخرین‌کنسرت است .

جدول اعداد

طرح از: محمدرضا خلیلی‌زاده (تاریخ وصول به‌دفتر مجله : ۱۳۴۹/۴/۲۱)



افقی: ۱ـ کوچکترین عدد هفت رقمی که رقمهایش به تصاعد حسابی می‌باشد. ۸ـ ریشهٔ سوم آن سه‌برابر ریشهٔ چهارم آن است. ۱۴ـ به‌صورت $\overline{abcdcba}$ است واز سمت چپ درچهاررقم باعدد ۱ افقی یکسان است. ۱۵ـ ریشهٔ هفتم آن حاصل‌ضرب دوعددمتوالی است. ۱۶ـ هریك از رقمهایش هم مجذور کامل وهم مکعب کامل است. ۱۷ـ تفاضل عدد ۱۴ افقی براین‌عدد مضرب ۱۰۰۰ است. ۱۸ـ هفت‌برابر عدد ۱۶ افقی. ۲۰ـ به‌صورت $\overline{mcdu}$ است که درآن $\overline{mc}$ زوج ومجذور کامل و $\overline{du} = m^2 + c^2$ عدد اول است. ۲۲ـ عددی اول است ومجذوررقم یکان آن برابر است بامجموع مجذورات دورقم دیگر ۲۳ـ حاصل جمع این‌عدد با مجموع رقمهایش برابر ۲۷ است. ۲۴ـ مجذوراست وبرابراست با مجموع مکعبهای سه عدد صحیح. ۲۵ـ ازسمت چپ به‌راست، چهاررقم اول آن به‌تصاعد هندسی وبقیهٔ رقمهایش به‌تصاعد حسابی می‌باشند وکوچکترین عددی است که این خاصیت را دارد. ۳۴ـ کوچکترین عدد ده رقمی با رقمهای متفاوت . ۳۵ـ مقسوم‌علیهی از عدد ۱۶ افقی

قائم : ۱ـ عددی است هشت رقمی که هیچیك از رقمهایش صفرنیست ومجموع رقمهایش ۸ است. ۲ـ رقم یکانش مکعب کامل است وهریك ازدورقم دیگرش دو برابر رقم یکان آن است. ۳ـ چون با ۱۶۲ جمع شود وحاصل سه‌برابر گردد بزرگترین عددپنج رقمی بدست آید. ۴ـ عددی است به‌صورت $\overline{aa}$ که تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های آن ۶ است . ۵ـ دورهٔ غیر گردش ویك دورهٔ گردش ازکسراعشاری متناوبی که مولد آن $\frac{26419}{49500}$ است. ۶ـ اگر باعدد ۴ قائم جمع شود، شش‌برابرعدد ۱۶ افقی بدست‌آید. ۷ـ به‌صورت $\overline{abbabbcd}$ است که $a = 7b$ و $d = 3c = 6b$ می‌باشد. ۸ـ به‌صورت $\overline{abcba}$ است که عدد $\overline{cba}$ مجذورعدد $\overline{ba}$ است. ۹ـ همان عدد ۳۵ افقی. ۱۰ـ چون با مجذوررقم یکان خودجمع شود ۱۰۰ بدست آید. ۱۱ـ مجذورکامل‌است ومتمم حسابیش مضرب ۱۷ است. ۱۲ـ یك واحدکمترازعدد ۴ قائم. ۱۳ـ اگرآن را از وسط ببریم‌دوعدد چهاررقمی بدست‌آیدکه عدد چهاررقمی سمت‌چپ همان عدد ۲۰ افقی است وعددچهار رقمی سمت راست ازپنج برابر این‌عدد ۵۲۲ واحدبیشتراست. ۱۹ـ هفت، برابر نصف عدد ۲۶ قائم. ۲۰ـ ربع‌عدد ۴ قائم. ۲۱ـ اگر ازرقم یکان آن ۷ واحدکم شود عددی به صورت $\overline{ababa}$ بدست آید که $a = 3b$ است ۲۶ـ مضرب ۱۰ است. ۲۷ـ شش‌برابرجذر عدد ۱۱ قائم. ۲۸ـ تفاضل عدد ۲۲ افقی برعدد ۲۳ افقی . ۲۹ـ خارج قسمت تقسیم عدد ۴ قائم برعدد ۲۰ قائم. ۳۰ـ مقلوب متمم حسابی عدد ۱۱ قائم. ۳۱ـ همان عدد ۳۵ افقی. ۳۲ـ هشت برابرجذر عدد ۲۴ افقی. ۳۳ـ اگربا یك جمع شود برشش عدد صحیح متوالی بخش‌پذیر گردد .

۱ ۶	۲	۲ ۵	■	۳ ۸	۴ ۱	■	۵ ۶	۱	۶ ۴
۸	■	۷ ۵	۸ ۱	■	۹ ۶	۱۰ ۲	۴	■	۲
۱۱ ۶	۱۲ ۱	■	۱۳ ۸	۱۴ ۸	۸	۸	■	۱۵ ۱	۳
■	۱۶ ۲	۱۷ ۱	■	۱۸ ۹	۱	■	۱۹ ۲	۴	■
۲۰ ۱	۱	۱	۲۱ ۱	■	■	۲۲ ۲	۲	■	۲۳ ۷
۱	■	۲۴ ۱	۵	■	■	۲۵ ۱	۲	۲۶ ۴	۸
■	۲۷ ۳	۱	■	۲۸ ۲	۲۹ ۵	■	۳۰ ۲	۹	■
۳۱ ۱	۶	■	۳۲ ۴	۴	۴	۳۳ ۴	■	۳۴ ۴	۳۵ ۵
۵	■	۳۶ ۱	۸	۲	■	۳۷ ۳	۳۸ ۷	■	۷
۳۹ ۸	۲	۵	■	۴۰ ۴	۹	■	۴۱ ۲	۵	۶

حل جدول شمارهٔ پیش