



دوره هشتم، شماره ۴

شماره مسلسل: ۸۱

دی ۱۳۵۰

### در این شماره:

- |   |   |
|---|---|
| <p>۱۹۳ عبدالحسین مصطفی</p> <p>۱۹۴ ترجمه: داوید ریحان</p> <p>۱۹۹ ترجمه: محمد رکنی فاجار</p> <p>۲۰۲ جعفر آفایانی چاوشی</p> <p>۲۰۳ ترجمه: علیرضا توکلی صابری</p> <p>۲۰۷ محمد رکنی فاجار</p> <p>۲۱۰ داوید ریحان</p> <p>۲۱۱ ترجمه: مقصود عین الله</p> <p>۲۱۳ مصطفی</p> <p>۲۱۶ ترجمه: فتح الله زرگری</p> <p>۲۱۹ ترجمه: کامران پارسای قمی</p> <p>۲۲۰ ترجمه: جواد فیض</p> <p>۲۲۱ —</p> <p>۲۲۳ ترجمه: مصطفی</p> <p>۲۳۹ —</p> <p>۲۴۴ —</p> <p>۲۵۵ طهورث اسکندری</p> <p>۲۵۵ —</p> <p>۲۵۶ —</p> | <p>بر نامه‌های جدید و کارآموزی معلمان<br/>استدلال در ریاضیات، استقرار در هندسه<br/>کاوش آسمانها، ابرارهای نجومی<br/>نوصیحاتی درباره تاریخچه ریاضی<br/>مکانیک کوانتم چیست؟<br/>محاسبات تقریبی<br/>بازی با سکه، بازی با اعداد<br/>واسطه‌ها</p> <p>راهنمای گنکور، شمازگدام راه حل می‌گردید؟<br/>تاریخچه ریاضی<br/>مسئله نمو</p> <p>بعضی از مسائل لایحل حساب<br/>حل مسائل بکان شماره ۸۰</p> <p>آموزش مجموعه‌ها با روشن بر نامه‌ای<br/>مسائل برای حل</p> <p>مسائل انتخابی از مسائل امتحانات ثلث<br/>دوم سال تحصیلی ۱۳۵۰-۱۳۵۱ دیگر ستانها</p> <p>جدول اعداد<br/>کتابخانه بکان</p> <p>Problems &amp; Solutions</p> |
|---|---|

یکان ۱۳۵۰

# مقدمات چاپ یکان سال ۱۳۵۰ از هم اکنون فر اهم شده است.

از علاقمندانی که سؤالهای امتحانهای  
ورودی دانشکده‌ها و مدارس عالی را در  
اختیار دارند و مایلند که برای چاپ در  
یکان سال ۱۳۵۰ بفرستند تقاضامی شود که  
این سؤالهارا طوری ارسال کنند که قبل از  
پایان دی‌ماه سال جاری به دفتر مجله‌واصل  
شود.

توضیح

در اصلاح مقاله' داستانهای ریاضی مندرج در یکان شماره ۸۵ در تبدیل فرانک و سانتیم به ترتیب به تومن و رویال، الاح عملیات مربوط به حل مسئله برآمده نسبت رویال و تومن فراموش شده است. مسلماً خوانندگان دقیق متوجه این نکته شده و شخصاً اصلاحات لازم را انجام داده اند.

آموزش میاده

## نظریه مجموعه‌ها

با روش برو نامه‌ای

مر بوط به صفحه‌های ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶

به دنبال آخرین موضوع مجله قبل، اولین موضوع این مجله رادردفترچه بنویسید. یک بار به دقت آنرا بخوانید. به سادگی خواهید فهمید که جای خالی را با چه چیز باید پر کنید یا اگر پرسشی شده است پاسخ آن چیست. بعد از آنکه این پاسخ را در زیرپرسش نوشتید، یا جای خالی را با موضوع مربوط پر کردید، آنگاه صفحه مجله را برگردانید و درست در پشت محل همان موضوع، پاسخ آن را مشاهده کنید. اگر پاسخی که شما نوشته اید درست بوده است، آنگاه موضوع شماره بعد را یافته به ترتیب بالا آنرا در دفترچه خود بنویسید و پاسخ آن را معلوم کنید. اما اگر پاسخ شما درست نبوده است، موضوع قبلی را مجدداً و بادقت بیشتر بخوانید تا پاسخ درست آنرا دریابید. بعد از اطمینان از درست بودن پاسخ هر موضوع، شماره بعد آن را بنویسید و پاسخ دهید.

توجه داشته باشید که قبل از آنکه پاسخ هر موضوع را شخصاً معلوم نکرده اید به پشت صفحه مراجعه نکنید.

با این روش، بدون نیاز به معلم و یا به کتاب دیگر، مفاهیم تازه‌ای را به سادگی و به آسانی خواهید آموخت.

# برنامه‌های جدید و کارآموزی معلمان

مقاله‌ای که ظاهراً به نقل قول از یکی از معمران استادان ریاضی در یکی از نشریات درج شده و ضمن آن ایراد شده است که چرا برنامه‌ها و کتابهای درسی جدید ریاضی، همگام با پیشرفت ترین کشورها، از روشهای جدید ریاضی متأثر است، برای بعضی بهانه شده است تاوانمود کنند که معلم ان استادان ریاضی از تحولات همه جانبه روشهای جدید ریاضی آگاهی لازم ندارند و به کنه دگرگونیهای جهانی که در آموزش ریاضی روی داده است واقع نیستند.

این حقیقت را نمی‌توان انکار کرد که معلم ان استادان ریاضی نه تنها پایه‌گذاران بنای ریاضیات در این کشورند بلکه این بناء تابه حدی بسیار رفیع بالابرده اند و هنوز هم در رفت بیشتر آن سهم مؤثر دارند. بنای شواهد مسلم، آنچه که تا کنون در باره نوسازی برنامه‌ها و کتابهای درسی جدید ریاضی انجام گردیده است، مخصوصاً از طرف معلم ان استادان ریاضی تأیید و تحسین و تمجید شده است.

اما همه علاقمندان به پیشرفت ریاضیات در این کشور، چه آنان که در این راه مولود را سپید کرده‌اند و چه آنان که با شور شوق و نیروی جوانی اولین گامها را در این راه بر می‌دارند، در مورد یک مسئله از اظهار نگرانی خودداری نمی‌کنند، همه معتبر فند که کتابهای درسی جدید ریاضی آنگونه که لازمه این عصر بوده تهیه شده است، اما آیا آنان که باید این کتابها را تدریس کنند آمادگی لازم را بدست آورده‌اند؟

ریاضیات جدید به نظریه مجموعه‌ها و بعضی اصطلاحات جدید منحصر نمی‌شود؛ بنای تفکر بر اساسی استوار، هدف اصلی روشهای جدید ریاضی است.

کسی که باید تفکر صحیح را در اندیشه کودک یا جوان دانش آموز پایه‌گذاری کند، خود باید تفکری اینچنین داشته باشد. بسیاری از مؤسسات بخش خصوصی در آغاز دوره راهنمایی تحصیلی، به این نکته اساسی توجه داشته و تدریس کتابهای درسی جدید را به معلمانی سپرده‌اند که طرز تفکر نورا پذیرفته‌اند. بنایه آزمونها و آمار گیریهایی که در این مؤسسات بعمل آمده است، بیش از ۸۵٪ از دانش آموزان برای درک کامل محتوای کتابهای درسی نو استعداد لازم بروز داده‌اند. بنایه اظهار یکی از مسؤولان مؤسسه‌ای که شامل هیجده کلاس اول دوره راهنمایی و در همین حدود از کلاس‌های دوره دبیرستان است، در نوع تفکر و درک مفاهیم ارجحیت دانش آموزان سال اول راهنمایی بر دانش آموزان سالهای اول و حتی دوم دبیرستان کاملا مشهود است.

چند بخش خصوصی اصل «آمادگی معلم قبل از پیاده کردن برنامه‌های جدید» را قبول داشته و با توجه به آن زمینه بهره‌بری کامل دانش آموزان را از برنامه‌ها و کتابهای جدید فراهم داشته‌اند. در حالی که در مدارسی دیگر، معلمانی به تدریس کتابهای نو گماشته شده‌اند که خود آنان با فکر نوی که در تدوین کتابها مرعی گردیده و در تدریس آنها موردنظر بوده است آشنا نیستند. بسیاری از اینان در کلاس‌هایی به اصطلاح کارآموزی شرکت داشته‌اند. اما در آنجا به ایشان هندسه‌های ترسیمی ورقه‌ای و یا معادلات مجھول القوى تدریس گردیده است.

توقع تدریس و تفهیم کتابهای درسی جدید از معلمی که با روشهای مربوط به آنها آشنا نیست، مثل آن است که از یک کشاورز قدیمی که از طرز کار ماشینهای مدرن کشاورزی هیچ‌گونه آگاهی ندارد انتظار داشته باشیم تا روش کشاورزی مکانیزه را بکار ببرد.

## استدلال در ریاضیات

ترجمه: داوید ریحان

نوشته: G.PO'LYA وابسته آکادمی علوم و استاد افتخاری  
مدرسه پلی تکنیک فدرال زوریخ و دانشگاه استانفورد

### فصل III - استقراء در هندسه فضایی

می خواهیم بدانیم که عدد این نواحی چقدر است (به بیانی دیگر، قطعات پنیر بریده شده چقدر است). بنظر می رسد که نمایش نواحی قطع شده توسط ۵ صفحه مشکل باشد. (حتی «دیدن» آنها غیرممکن است. به هیچ طریقی نمی خواهیم برخلاف تخلیخ خود عمل کیم، پس سعی می کنیم که فکر کنیم. شاید استدلال مابتواند ما را دورتر از تخلیخ باخود بکشاند). ولی چرا فقط ۵ صفحه را بورد برسی قرار می دهیم؟ چرا تعداد غیر مشخص از صفحات را در نظر نمی گیریم؟ یا ۴ صفحه، فضا به چند ناحیه تقسیم می شود؟ یا ۳ صفحه یا ۲ صفحه؟ یا فقط بایک صفحه؟

اکنون مواجه با حالتی هستیم که باقصد هندسی ماتفاق است. واضح است که یک صفحه فضای را به ۲ ناحیه تقسیم می کند. درصورتی که دو صفحه باهم موازی باشند، فضا را به ۳ قسم تقسیم می کنند. ولی باید این حالت مخصوص را کنار بگذاریم؛ درحال کلی ۲ صفحه متقاطع فضا را به ۴ قسم تقسیم می کنند. سه صفحه غیر مشخص فضای را به ۸ باره تقسیم می کنند. پس از معروفی حالت اخیر که بسیار مشکل بود، می بایست ۲ دیوار قائم غیر موازی را در داخل یک ملک و صفحه ای انقی را که توسط تیرهای تکه داری شده در نظر بگیریم، صفحه اخیر با ۲ دیوار برخورد کرده و تشکیل طاق ۴ اطاق و همچنین کف ۴ تای دیگر را می دهد.

X - تعمیم، تخصیص و مشابهت - مسئله دربورد ۵ صفحه مطرح شده بود ولی به جای مقتول داشتن ۵ صفحه ما ابتدا، ۱، ۲، و سپس صفحه ۳ صفحه را ملاحظه نمودیم. آیا وقت خود را هدرداده ایم؟ مطمئناً خیر. به منظور آمادگی برای حل مسئله

VIII - تقسیم فضا - به مثال دیگری از کاوش‌های استقراء این هندسه فضایی می پردازیم. درمثال اخیر از یک مشاهده کلی نسبتاً بیهم شروع کرده بودیم. ولی این دفعه سرآغاز کار مسئله‌ای مشخص و مخصوص است. مسئله ماده‌ای از هندسه فضایی را که در ضمن کمی با آن مأнос هستیم، درنظر می گیریم: با پنج صفحه، فضا به چند ناحیه تقسیم می شود؟

درصورتی که این پنج صفحه باهم موازی باشند، پاسخ مسئله بسیار ساده بوده و جواب آن ۶ ناحیه است. ولی این حالت بسیار خاصی است. در حالت کلی که دو صفحه به موازات هم نباشند بیشتر از ۶ ناحیه وجود خواهد داشت. پس مسئله را باید به گونه مشخصتری عنوان کیم و شرط جدیدی را به آن اضافه نمائیم: با پنج صفحه که در اوضاع غیر مشخصی هستند، فضای را به چند ناحیه می توان تقسیم کرد؟

«ایده در اوضاع غیر مشخص» کاملاً ظرفیاند است؛ صفحات وقتی در این وضعیتند که با یکدیگر هیچ‌گونه رابطه‌ای نداشته، مستقل از یکدیگر بوده و بطور اتفاقی انتخاب شده باشند. به طریقی بسیار کاملی می توانیم با گسترش مخصوص مفهوم این جمله را به آسانی مشخص کنیم و این کار را به دودلیل انجام نمی دهیم. اولاً نمی خواهیم توضیحی کاملاً اتفاقی ارائه بدهیم، درثانی با کمی نامشخص گذرا دن این عبارت به روش فکری طبعیدانی نزدیک می شویم که مجبوری شود که از مقاومت مبهمی آغاز کند که متوجه واضح می گردد.

IX - توجیه مسئله - مسئله را از نزدیک مورد مطالعه قرار می دهیم، ۵ صفحه غیر مشخص داریم که فضا را به تعدادی نواحی تقسیم می کنند (به مشابه چاقویی که پنیر را می برد).

بگیریم. می بایست تقسیم صفحه باسه خطر اچنان در نظر بگیریم که بتوانیم آنرا توسط ملاحظات مشابه در بورد تقسیم فضا با خط بکار ببریم.

بنابراین ، مجدداً تقسیم صفحه را با خط (که محدود به مثلث می شود) مورد بررسی قرار می دهیم. یکی از نواحی محدود است: ناحیه داخلی مثلث ، و نواحی غیر محدود دارای: بایک ضلع مشترک با مثلث (ناحیه ازین نوع وجود دارد) ، بایک رأس مشترک (با ز هم تا وجود دارد) می باشند . بنابراین عده تمام نواحی برابر است با :

$$1 + 3 + 3 = 7$$

حال تقسیم فضا با ۴ صفحه را (که محدود به یک چهار وجهی می شوند) در نظر می گیریم . یکی از این نواحی محدود است و آن عبارت از داخل چهار وجهی است. یکی از نواحی غیر محدود می تواند با چهار وجهی در: یک وجه یعنی عنصر دو بعدی متعلق به مرز (۴ ناحیه از این نوع وجود دارد) ، بایک یال مشترک یعنی عنصری یک بعدی متعلق به مرز (۶ ناحیه از این نوع وجود دارد) ، یا اینکه یک رأس مشترک که عنصری ۰ بعدی متعلق به مرز (۴ ناحیه از این نوع وجود دارد) که در شکل ۳ نموده شده است ، مشترک باشد. در این حالت عده کل نواحی برابر است با :

$$1 + 4 + 6 + 4 = 15$$

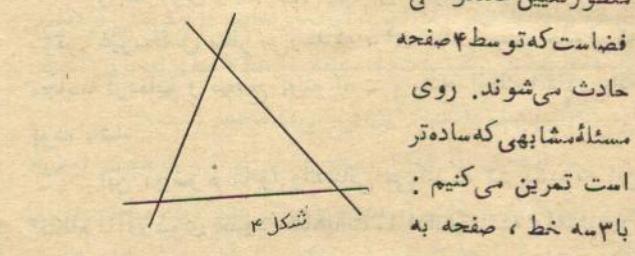
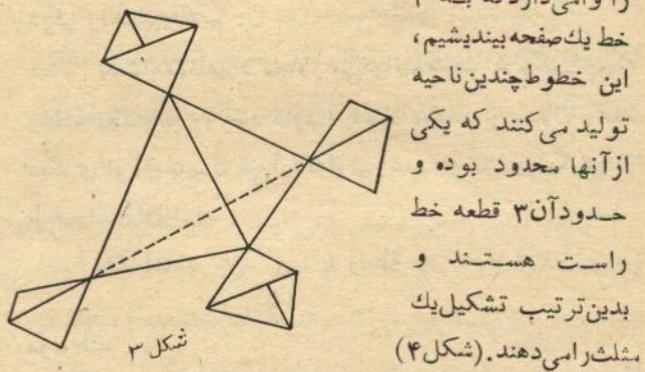
با مشابهت به این نتیجه رسیدیم و روش مشابه را به طریق پدید و قابل ملاحظه ای بکار بردیم . ابتدا ، مسئله ای مشابه و ساده تر را تصور کردیم و آنرا حل کردیم . سپس ، پس از حل مسئله اولیه (مربوط به چهار وجهی) ، این مسئله جدید (راجع به مثلث) را به عنوان مدل بکار بردیم . در حل مسئله مشکل شمای حل مسئله ساده را مورد تعقیب قرار دادیم . ولی قبل از آن مجبور شدیم که در حل مسئله ساده تجدید نظر کنیم و آنرا به صورتی جدیدتر ارائه دهیم .

آشکار ساختن یک مسئله مشابه ساده تر ، حل آن ، بازگردانید فرم حل آن به گونه ای که بتوان از آن به عنوان مدل استفاده کرد و بالاخره توانایی در حل مسئله اولیه با تعقیب این مدلی ک . برای این وضعیت درست شده است ، روشنی است که برای مبتدی بسیار بی ربط بنظر می رسد ولی آنرا می توان در کاوش های علمی ، ریاضی وغیره ، مورد استفاده قرار داد .

**XII - خانواده مسائل مشابه** - با وجود این ، مسئله اولیه ما هنوز حل نشده است ، منظور تقسیم فضا با ۵ صفحه است. در حالت دو بعدی مسئله مشابه به چه صورتی است؟ تقسیم با ۵ خط؟ یا با ۴ خط؟ ارجح است که این مسائل را در حالت

مثالهای مشابه ساده تری را آزمودیم . بروی این امثله پافشاری کردیم و برخی از ایده هایمان را روشن ساختیم و با نوع مسئله ای که باید رود رو باستیم آشنا شدیم . جاده ای که ما را به این مثالهای مشابه و ساده تر راهنمائی کرد ، مشخص است و در خوردن می ساخت . در ابتدا از حالت ۵ صفحه ای به عده صفحات غیر مشخص که آنرا  $n$  صفحه می نامیم رسیدیم و در نتیجه مسئله را تعمیم دادیم . سپس از  $n$  صفحه به ۴ صفحه  $2$ ، ۳ صفحه  $3$ ، ۴ صفحه  $4$  و فقط یک صفحه عبور کردیم ؟ در این صورت  $n$  را برابر با ۱، ۲، ۳، ۴ فرض کردیم . مسئله را تخصیص دادیم . ولی مسئله مربوط به تقسیم فضا به کمک ، مثلاً ۳ صفحه ، مشابه با مسئله اولیه مربوط به ۵ صفحه است . بدین ترتیب بوسیله روشی پدید و توسط تعمیم پیشاپیش متعاقب با یک تخصیص به یک مشابه رسیدیم .

**XI - یک مسئله مشابه** - درباره مسئله مربوط به ۴ صفحه چه می توان گفت ؟ در حالت کلی ۴ صفحه ، فضارا به چندین ناحیه تقسیم می کنند که یکی از آنها که محدود به ۴ وجه مشتمل است و به نام چهار وجهی است (شکل ۳). این شکل ما را وامی دارد که به ۳



خط یک صفحه بینندیشیم ، این خطوط چندین ناحیه تویید می کنند که یکی از آنها محدود بوده و حدود آن ۳ قطعه خط راست هستند و بدین ترتیب تشکیل یک مسئلہ رامی دهنده . (شکل ۴) منظور تعیین عده نواحی فضاست که توسط ۴ صفحه حادث می شوند . روی مسئله مشابهی که ساده تر است تمرین می کنیم : با ۳ سه خط ، صفحه به چند ناحیه تقسیم می شود ؟ خیلیها می توانند جواب مسئله را حتی بدون ترسیم شکل بدنهند و هر کسی می تواند با ترسیم یک شکل سریع ، جواب مسئله را دریابد (شکل ۴) . عده نواحی طلوب برابر با ۷ است . مسئله مشابه ساده تر را حل کردیم ؟ ولی آیا می توانیم این جواب را برای حل مسئله اولیه بکار ببریم ؟ آری و آن در صورتی است که به طریق مق قول مشابهت بین دو شکل را در نظر

ما متعلق به خانواده مسائل حل نشده است. نکته بسیار مهم این است که این مسائل تشکیل خانواده‌ای را می‌دهند: که مرتب بوده، دسته‌بندی شده، بطور وسیعی با یکدیگر مشابه بوده و برخی از آنها هم قبل حل شده‌اند.

اگر حالت کنونی مسئله را که بامسائل مشابه در یک چهارچوب قرار گرفته است، با موقعیت اولیه‌ای که به صورت کاملاً منفرد وجود داشت، مقایسه کنیم، به این فکر می‌افتیم که پیشرفتی در این کار نصیب مشاهده است.

**XIV. یک فرضیه** - نتایج داده شده در جدول را همانند طبیعه‌انی که به مجموعه نمونه‌هایش می‌نگرد، در نظر بگیریم. این جدول بادانش ابداعی و مجموعه مشاهدات ما به معارضه برخاسته است آیا می‌توانیم رابطه ونظمی در آن کشف کنیم؟

دومین ستون را می‌نگریم (تقسیم فضای توسط صفحات)، رشته منظم، ۱، ۲، ۳ و ۸ را که مشکل از قوای متواالی<sup>۲</sup> است می‌بینیم. ولی چه‌انتظاری بهوده‌ای! جمله بعدی<sup>۱۵</sup> است و برخلاف انتظارمان ۱۶ نیست. اولین فرضیه‌ما خوب از آب در نیامد پس باید یکی دیگر راجستجو کنیم.

با مشاهده اعداد مجاور می‌توانیم کشف کوچکی کنیم که رابطه بخصوصی وجود دارد؛ با جمع دو عدد از جدول، عدد دیگری از آن بدست می‌آید که اولین عدد در بالا و دیگری در طرف راست آن است.

مثالاً اعداد ۷ و ۸ با رابطه  $7 + 8 = 15$  به هم مربوطند.

رابطه فوق رابطه‌ای است قابل توجه و دلیلی است بسیار مؤثر. غیر محتمل بنظر می‌رسد که برای تمام قسمت جدولی که محاسبه کرده‌ایم و صحیح بوده است، منتج از یک اتفاق ساده بوده باشد.

این موضوع ما را راهنمایی می‌کند که بینه. یشیم که این انتظام تا آن سوی حدود مشاهدات ما ادامه داشته و اعدادی را که هنوز محاسبه نکرده‌ایم با همین رابطه به هم مربوطند؛ بدین ترتیب فرضیه‌ای را بنامی نهیم که مبتنى بر این است که این قانون که توسط مشاهدات بدست آمده است، در حالت کلی صحیح است.

در صورتی که این موضوع صحبت داشته باشد، می‌توانیم مسئله اولیه را حل کنیم. با جمع اعداد مجاور می‌توانیم جدول خود را تا آنجا وسعت دهیم تا عدد مطلوب حاصل شود:

در این جدول، دو عدد را که حاصل جمعهای  $7 + 4 = 11$

کلی آنها یعنی تقسیم فضای بوسیله  $n$  صفحه و تقسیم صفحه بوسیله  $n$  خط را بررسی کنیم. طبیعتاً، این خطوط می‌بایست غیر مشخص باشند (بین این خطوط باید  $2^2$  تا وجود داشته باشد که موازی بوده و یا  $3$  تا که متقارب باشند).

در صورتی که به مشابهت هندسی عادت کرده باشیم می‌توانیم قدیمی فراتر نهیم و تقسیم خط را بوسیله نقاط متفاوت مورد بررسی قرار دهیم. هر چند که مسئله معمولی بنظر می‌رسد ولی آموزنده است. بدون زحمت می‌بینیم که یک خط با یک نقطه به دو پاره، با ۲ نقطه به  $3$  قسمت، با ۳ نقطه به  $4$  قسمت و بطور کلی با  $n$  نقطه به  $n + 1$  قسمت تقسیم می‌شود.

در آنجاهم، در صورتی که به حالات حد عادت کرده باشیم، می‌توانیم فضا، صفحه یا خط، تقسیم نشده را به عنوان نتیجه «تقسیم توسط عنصر مقسم علیه»<sup>۵</sup> در نظر بگیریم.

جدولی تشکیل می‌دهیم که خلاصه نتایجی را که تابه حال بدست آورده‌یم در برداشته باشد:

تعداد نواحی بدست آمده توسط

عدد عناصر مقسوم علیه	فضای بوسیله صفحات	یک صفحه بوسیله خطوط	یک خط بوسیله نقاط
۰ . . . .	۱	۱	۱
۱ . . . .	۲	۲	۲
۲ . . . .	۴	۴	۳
۳ . . . .	۸	۷	۴
۴ . . . .	۱۵		۵
. . . . .	....	....	....
$n . . . .$			$n + 1$

**XIII. با حل یک مسئله، حل بسیاری از مسائل ساده می‌گردد** - سعی کردیم که مسئله مربوط به تقسیم فضا توسط ۵ صفحه را حل کنیم، آنرا هنوز حل نکرده‌ایم ولی به جای آن مسائل بسیار جدیدی را مطرح ساختیم. هرجای خالی در جدول مربوط به قسمتی است که حل نشده است.

این روش که مبتنى بر طرح سؤالهای جدید است ممکن است که برای مبتدی دور از عقل باشد. ولی تجربه به مامی آموزد که حل چندین مسئله دسته بندی شده ماده‌تر از حل یک مسئله از میان آنهاست و این در صورتی است که این مسائل متعدد با یکدیگر وابسته بوده و آن یک مسئله منفرد باشد. اکنون، مسئله اولیه

بکار بر دیم ، به همراه دارد. پس از گذراندن موقیت آمیز این امتحان ، فرضیه ما مستحکم گردیده است.

### XVI - بازهم بیشتر - ؟ نگریستن به شکل ملاحظه

کردیم که عدد مطلوب ۱۱ است ، یعنی به خوبی بنظر می رسد که ۴ خط صفحه را به ۱۱ ناحیه تقسیم می کنند ، ولی این عمل را مجددآ و با طریقہ عالیتری انجام می دهیم . این نواحی را با طریقہ ای شمردیم ، حال مجددآ آنها را به گونه ای که عاری از هر گونه خطایی که ناشی از اوضاع اختصاصی باشد می شماریم .

از آنجایی شروع می کنیم که ۳ خط صفحه را به ۷ ناحیه تقسیم می کند . دلایل در دست است که یقین داشته باشیم که ۴ خط ۱۱ ناحیه تولید می کنند . چرا ۴ ناحیه بیشتر؟ چرا عدد ۴ در اینجا مداخله کرد؟ چرا مداخله یک خط جدید ، عده نواحی را ۴ واحد افزایش داد؟

دقت خود را معطوف یکی از خطوط شکل ۵ می کنیم و آنرا مجددآ به صورت خط چین ترسیم می کنیم (شکل ۶) . این شکل جدبد تفاوت چندانی با قبلی ندارد ولی گشاینده نقطه دید جدیدی است .

خطی را که توجه ما به آن معطوف است به عنوان خط جدید و خطوط دیگر را قدیمی در نظر می گیریم . خطوط قدیمی صفحه را به ۷ ناحیه تقسیم می کنند . در صورتی که خط جدید را به آن اضافه کنیم چه اتفاقی می افتد؟

خط جدید که بطور دلخواه رسم می شود می بایست خطوط قدیمی را در نقاط متقاطع قطع کند که تعداد این نقاط ۳ تاست . این ۳ نقطه ، خط جدید را به ۴ پاره خط تقسیم می کنند . هر کدام از این قطعه خطوط یک ناحیه قدیمی صفحه را تقسیم کرده و از هر کدام از آنها دوناحیه جدید می سازد . این ۴ پاره خط متعلق به خط جدید ، ۸ تقسیم جدید تولید می کنند که ۴ تای قدیمی آنها حذف می شود؛ عده تقسیمات ۴ تا اضافه می گردد . به همین دلیل است که عده تقسیمات دقیقاً ۴ واحد افزون شده است :

$$7 + 4 = 11$$

این روش که اجازه داد که به عدد ۱۱ بررسیم موقیت آمیز است و مسئله را بسیار روشن می گرداند . دیدار منشاً انتظامی را که بربنای آن پیش بینی عدد ۱۱ را بیان نهادیم ، شروع می کیم و وجود توضیحی را حدس می زنیم که از روی آن اعتماد مابه صحت انتظام مشاهده شده بسیار افزون گردد .

### XVII - استقرار ارعماوج با استنتاج و حالت خاص

و  $26 = 15 + 11$  است با حروف سیاه نوشته ایم . در صورتی که فرضیه درست باشد ، تعداد نواحی تقسیم شده فضاً توسط ۲ صفحه باید ۲۶ تا باشد . بنابراین ، بنظیر می رسد که مسئله پیشنهاد

۰	۱	۱	۱
۱	۲	۲	۲
۲	۴	۴	۳
۳	۸	۷	۴
۴	۱۵	۱۱	۵
۵	۲۶		

شده را حل کرده ایم ، یا لااقل موفق شده ایم که فرضیه ای پذیرفتی ارائه دهیم که با تایجی که از قبل می شناخته ایم متوافق باشد .

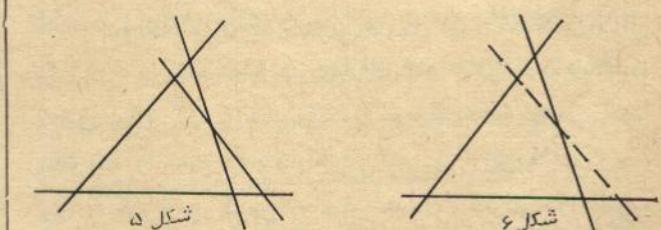
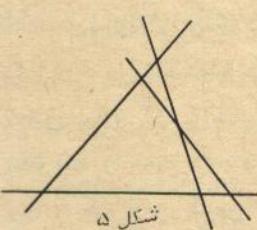
### XV - پیش بینی و تحقیق - در حالتی که اخیر آذکر

آن رفت ، دقیقاً روش طبیعتدان را دنبال کردیم .

اگر طبیعتانی نظم شگفت آوری را ملاحظه کند که نتواند آنرا معمولاً یک اتفاق ساده بیندارد ، آنرا خارج از حدود مشاهداتی که حقیقتاً انجام داده است نیز قابل ارزش می داند . غالباً ، فرضیه ای از این قبیل قدم اساسی در یک کاوش استقرائی است .

قدم بعدی مبتنی بر پیش بینی است ، طبیعتدان ، بر مبنای مشاهدات اولیه و توافقی که با قانون طرح شده دارد ، نتیجه مشاهدات بعدی را پیش بینی می کند . نتیجه این مشاهده بسیار حائز اهمیت است . پیش بینی صحیح است یا غلط؟ در اینجا مادرموقعيتی کامل مشابه با آن قرار داریم . ماجدنس زده ایم یا پیش بینی کرده ایم که عده نواحی تقسیم شده صفحه توسط ۴ خط برابر با ۱۱ است . آیا واقع آهمن طور است؟ آیا پیش بینی ما صحیح است؟

با امتحان یک شکل (شکل ۵) می توانیم در صحت فرضیه خود یقین داشته باشیم ، عدد ۱۱ همان عدد مطلوب است . این تأییدیه ، صحت استقرائی قانونی را که به عنوان مبنای مشاهدات اطمینان



وقت خود را مصروف گذشتن از تقسیم صفحه توسط خط به تقسیم صفحه توسط خط کردیم. ولی اعداد ۳ و ۴ دارای هیچ جنبه بخصوصی نیستند و سی توانیم از یک عدد غیر مشخص به عدد بعدی عبور کیم مثلاً از عدد  $n + 1$  به  $n + 2$  می‌توان رسمید. حالت خاص مطالعه شده رامی‌توان درمورد حالت کلی بکار برد. این موضوع را به خواننده و اگذاری کیم که از عبور حالت خاص بخش اخیر، ایده کلی را کمالاً در معرض دید قرار دهد. همچنین وی می‌تواند صریحاً قاعدة کشف شده بوسیله استقراء را حداقل در مورد آنچه که مر بوطه آخرین ستون می‌شود، ثابت کند. ولی، قبل از تکمیل اثبات، سی بایست نه فقط تقسیم صفحه توسط خطوط بلکه تقسیم فضارا بوسیله صفحات در نظر بگیریم. می‌توان ایدوار بود که اگر قادر به دیدن واضح مسئله تقسیم صفحه باشیم، مشابههای را در روشن ساختن مسئله تقسیم فضایاری خواهد نمود. در اینجا نیز به خواننده و اگذاری کنم که بوسیله روش مشابهت مباردت به این عمل کند.

XVIII. سایر فرضیه‌ها. سوژه‌ای را که در مورد تقسیم صفحه و فضا عنوان کردیم هنوز تهذیب شده است. باز هم باید کشتهای کوچکی بکنیم که بوسیله استدلال استقرائی کامل قابل قبولند. سی توانیم با مشاهدات دقیقانه و ترکیب هوشمندانه حالات خاص به این کشفیات نایل شویم.

می‌توانیم فرمولی را جستجو کنیم که عدد نواحی قطع شده صفحه را بوسیله  $n$  خط غیر مشخص، بدهد. در واقع از قبل فرمولی مربوط به حالت مشابه ساده‌تری را داریم:  $n$  نقطه غیر مشخص، خط را به  $n + 1$  قطعه خط تقسیم می‌کنند. این فرمول مشابه، حالات خاص ذکر شده در جدول، قانون کلی که به طریقه استقرائی کشف شده (و تقریباً ثابت شده است) و تمام نتایجی را که تا به حال بدست آورده ایم می‌توانند یارای مادر حل مسائل باشند. به جزئیات نمی‌بردازم، فقط پاسخ مسئله را می‌دهم که با طرق گوناگون و بادنیال کردن نکات اخیر می‌توان به آن رسید.

یک خط تو ط  $n$  نقطه مختلف به  $n + 1$  ناحیه تقسیم می‌شود. یک صفحه بوسیله  $n$  خط غیر مشخص به.

$$\frac{1 + n + n(n - 1)}{2}$$

ناحیه تقسیم می‌شود.

خواننده می‌تواند آخرین فرمول را اثبات کند بالا اقل آنرا درمورد حالات ساده‌تر به ازای ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ تحقیق نماید. کشف آخرین فرمول مربوط به عدد نواحی تقسیم شده فضای را به خواننده و اگذاری کنم. پس از این کشف کوچک وی بدهیکی از بزرگترین تجربه استدلال استقرائی در ریاضیات دست خواهد یافت و مایل خواهد شد که حل مسائل بزرگ و کوچک را به یاری مشابهت انجام دهد.

**موجب اثبات می‌شود** همیشه جانب احتیاط را در سوراخ افسای توازی باین استدلال خود روش طبیعیدان رانگهداشتند. این از حالت خاصی شروع کردیم همچنانکه طبیعیدان از یک مشاهده کامل عجیب شروع می‌کند. با ذکر حالات خاص سوجه، وبا یادآوری مشابههای آموزنده سعی کرده‌ایم که مطلب را تعمیم بدهیم. سعی کردیم که نوعی نظام مشاهده کنیم و موفق نشدیم، مجدداً سعی کردیم و به نتایج والائی رسیدیم. موفق شدیم قانون کلی فرضی را بدست آوریم که بوسیله تمام امکانات قابل دسترسی مورد تأیید قرار گرفته بود. حالت خاص مکمل را در نظر گرفتیم و مشاهده کردیم که با قانون مطرح شده متوافق است و در این صورت با این عمل به میزان اعتماد به فرضیه افزون گردید. بالاخره نوعی استدلال را ملاحظه نمودیم که بتواند این قانون کلی را توجیه کند. تحقیقات طبیعیدان نیز می‌تواند دقیقاً همین مراحل را طی کند.

بعد از دریک دوره ای بطور ناگهانی ریاضیدان از طبیعیدان جدامی شود. اگر مشاهده بالاترین دلیل برای طبیعیدان باشد، برای ریاضیدان چنین نیست. تحقیق درمورد حالاتی که حسن انتخاب در آنها بکار رفته باشد تنها روش تأییدی یک قانون قیاسی در علوم طبیعی است. این نوع تحقیق می‌تواند دلگرمی بسیار مفیدی بپخشد، ولی، در ریاضیات، نمی‌تواند جانشین اثبات شود. حالت خاصی را که مورد توجه داشت مورد امتحان قرار می‌دهیم. مطالعه اشکال متعدد و مقایسه آنها منتهی به فرض وجود یک قانون کلی شده که نتیجه آن جواب مسئله‌ای است که در ابتداء مطرح شد و عبارت از عدد ۲۶ بود. آیا مشاهدات و تحقیقات ما برای اثبات این قانون کافیت می‌کند؟ آیا از این نتیجه اختصاصی اثبات می‌شود که جواب مسئله ۲۶ است؟ به هیچ وجه. برای یک ریاضیدان که دارای اصول قوی است، عدد ۲۶ تنها نتیجه یک فرضیه ساهرانه است و هر قدر هم که تعداد تحقیقات تجربی متعدد باشد، برای اثبات صحت قانون مطروحه کافیت نمی‌کند. استقراء نتایجی را که به آن منتهی می‌شود محتمل می‌سازد ولی آنرا اثبات نمی‌کند. با وجود این، می‌توانیم خاطرنشان سازیم که کاوش استقرائی به طریقه‌ای که هنوز ذکر نکرده‌ایم، می‌تواند در ریاضیات مفید قایده باشد، مشاهدات دقیق حالات خاصی که منتهی به نتایج کلی ریاضی می‌شوند خود می‌توانند موجب اثبات شوند. از آزمایش عمیق یک حالت خاص، دیدن اندیشه مجموعه تولید می‌شود.

در واقع این همان چیزی است که در بخش قبل ذکری از آن بیان آورده‌یم. قانون کلی را که توسط استقراء کشف کردیم مربوط به عدد جدول (مثلاً ۴ و ۷) و مجموعشان (که ساوی ۱۱ است) است، در بخش آخر مفهوم هندسی اعداد ۷ و ۴ را نشان دادیم و فهمیدیم که چرا رابطه  $11 = 4 + 7$  وجود دارد.

# کاوش آسمان

دوربین-تلسکوپ-طیف‌نما-رادیو تلسکوپ-

بالون - موشک - اقمار مصنوعی

ابزارهای نجومی:

ترجمه: محمد کنی قاجار

گفت و بعد عدسیها را بطور ثابت در دوی تخته‌ای قراردادند که بهتر بتوانند بینند. چند هفته بعد از این تجربه در ۲۰ اکتبر ۱۶۵۸ این کشف را هانس لیپرسی به دولت هلند اطلاع داد و اجازه ساختن و بهره‌برداری از آن را با خود گرفت. از آن پس بعد آن تخته تبدیل به لوله مقوایی شد چنان‌که نورهای جانبی را بر طرف کند. امروز به این قبیل دو زینهای دوربین گالیله می‌گویند زیرا منجم ایتالیائی اول دفعه با آن به ارصاد کواكب پرداخت که تابدمتی تنها وسیله رؤیت ستارگان بود. دکارت هم چیزی بدان نیافرود. ولی تکامل عده آن مدیون منجم آلمانی کپلر (۱۶۳۰-۱۶۷۱) می‌باشد که به جای چشمی واگرا یک چشمی همگرا که همان ذره‌بین است قرار داد. به این ترتیب با بکار بردن عدسیهای شیمی با فاصله کانونی زیاد بر قدرت آنها افزود و وضع قرار گرفتن آنها و عیوب دوربینهای قبل را که در موقع رؤیت قوس و قرح می‌ساختند با بکار بردن عدسیهایی از نوع فلینت و کرون بر طرف کرد. یکی از معروف‌ترین دوربینهای رصدخانه‌هادوربین رصدخانه مودون (Meudon) است که عدسی شیمی آن است. دوربین رصدخانه یرک (Yerkes) (دانشگاه شیکاگو) از قویترین دوربینهای جهان است که شیمی آن ۱۵۲ سانتیمتر قطر و طول لوله عظیم آن ۱۹ متر است. در عصر ما دوربینها بهترین ابزار ارصاد است. هر چند به قدر کفايت عمل با آنها زحمت دارد. تا یک قرن و نیم قبل دور بینهای تکمیل نشده بودند و بواسطه قدمت‌وسط و نامتنااسب و استعمال بلور شیشه تصاویر به شکل رنگین کمان ظاهر می‌شدند. بسیاری

برای کاوش و تعبیر آسمان ابزار آلاتی بکار می‌رود که از روی قواعد ریاضی و فیزیکی و شیمیائی درست شده و با طرق خاصی از آنها بهره می‌برند. عده آن آلات وابزار نجومی عبارتند از: دوربین نجومی، تلسکوپ، طیف‌نما، رادیو تلسکوپ، موشک، اقمار مصنوعی، بعضی وقت‌هم بالون.

**دوربین نجومی و تلسکوپ** در دوربینهای نجومی نور یکشیعه مانند ستاره و خورشید وغیره بوسیله یک عدسی متقارب (همگرا) که فاصله کانونیش زیاد است و به عدسی شیعه وسوم است بطور حقيقی و معکوس در روی یک صفحه می‌افتد (همانطور که در عکاسی تصاویر بر روی شیشه تار ظاهر می‌شوند) آن‌وقت این تصویر بوسیله دستگاهی از عدسیهای دیگر (عدسی چشمی) رؤیت می‌شود.

عدسی چشمی مانند ذره‌بین تصویر را بزرگتر و مستقیم نه چشم بیننده می‌رساند اما تصویر مجازی است چون نمی‌شود آنرا در روی پرده نمایان ساخت. تصویر نسبت به شیعه اصلی معکوس است اما از لحاظ نجومی عیب بزرگی بشمار نمی‌آید. اولین دوربینها در سال ۱۶۵۸ در هلند ساخته شدند و عبارت بودند از یک عدسی همگرا و یک عدسی واگرا. بر حسب یک افسانه بیجه‌های هانس لیپرسی (Hans Lippershey) سازنده دوربینهای اولیه در میدلبورک با عدسیهای شیشه‌ای بازی می‌کردند اتفاقاً یکی از آنها یک عدسی مقعر را جلوی چشم خود گرفت و یک عدسی محدب را قدری دورتر در مقابل آن نگاهداشت و زنگ کلیسا‌ای مجاور را نگاه کرد. با تعجب دید که ناقوس بزرگتر شد و جلوتر آمد. او این اتفاق را به پدر خود

بردها ند. این تلسکوپها و تلسکوپ هاکسوب تو روسی برای عکاسی نجومی بکار می روند زیرا میدان دید آنها وسیع است و تضاد پر شان ظریف و نورانی است.

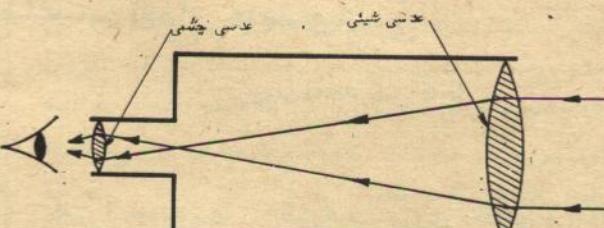
قویترین تلسکوپهای جهان در آمریکا است و آن تلسکوپ کوه پالومار در (کالیفرنی) است، آئینه آن دارای ۵ متر قطر و ۶۳ سانتیمتر ضخامت است، وزن آن ۱۴/۵ تن است. برای تهیه این تلسکوپ ابتداقطعه‌ای از پیر کس (PYREX) است. برای این تلسکوپ بوده اختیار شده ۳۱ تن مواد از قبیل که وزن آن ۲۵ تن بوده اختیار شده ۳۱ تن مواد از قبیل (منباده وشن وغیره) برای صیقلی کردن و تراش آن بکار رفته است. محلی که تلسکوپ را در آن جای داده اند ۴۵ متر ارتفاع و ۴۲۰ متر قطر دارد و ۱۰۰۰ تن وزن آن است که در روی ۳۲ واگن چرخی قرار دارد که در روی خط آهن‌های دایره‌ای شکل می‌غلتند.

در فرانسه تلسکوپ بزرگی است که در رصدخانه پروانس  
علیا قرار دارد و در ۱۵ کیلومتری ۱۹۵۸ بکار افتاده است که دارای  
آئینه‌ای است به قطر ۱/۹۳ متر و به وزن ۱/۲ تن و ابزاری  
خوب و عالی است.

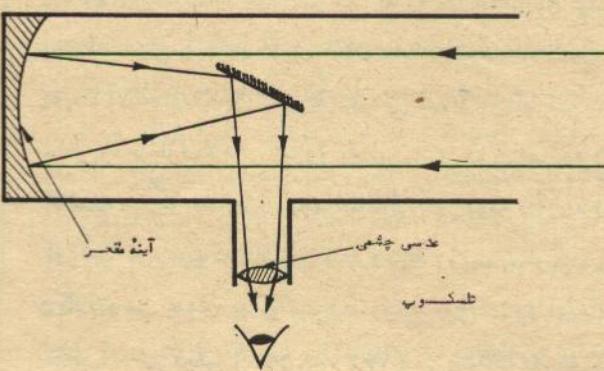
دوريينها وتلسكوپها باید در روی محماليان قرار بگيرند  
وبعلاوه بتوسط مكانيسمهای ساعت سازی حرکت کنند تا قابل استفاده بوده و بتوانند در پيروی حرکات سيارات آنها را بد لخواه  
حرکت دهند و بچرخانند.

می‌دانیم که به علت حرکت وضعی زمین بنتظر می‌آید که  
کواکب از طرف شرق به مغرب حرکت می‌کنند و سرعت شان به تناسب  
فاصله آنها از قطب کره سماوی می‌باشد. پس اگر دوربینها با  
سؤال ویژه‌ای برای حرکت مجهز نباشند باید دائم آنها را  
بادست حرکت دهیم تا لینکه متاره در میدان خود را باقی بماند و  
چون این عمل باعث زحمت است بدین جهت ابزار نجومی را  
بطور مخصوصی که به آن (استوانی) گویند سواری کنند. حرکت  
انتقالی که باید کاملاً معین و یکنواخت باشد بوسیله موتورهای  
الکتریکی انجام می‌گیرد و با آونگهای خیلی دقیق کنترل می‌شود.  
این ابزار و آلات خیلی سنگین‌اند. مثلاً آلاتیکه در رصد-  
خانه (پروانس علیا) دوربین بر آن سوار شده ۷۵ تن وزن دارد  
واز آن رصدخانه (کوه پالومار) که به شکل نعل اسب ساخته شده  
و ۹۰۵/۱۳ متر قطر آن است و ضخامتش ۲/۱۶ متر می‌باشد ۱۷۵ تن  
وزن دارد.

از منجمین بعد از فیوتن مانند گور گوری و کاس گرن و  
مخصوصاً هرشل تلسکوپها را به عوض دوربین بکار بردنده  
شیئی آن از یک آئینه مقعر تشکیل شده است که در جلوی آن  
تصویر حقيقی و معکوس شیء مورد نظر تشکیل می شود که  
(بکلی فاقد نورهای رنگن کمانی می اشد) و بوسیله یک آئینه  
کوچک به سمت عدسی چشمی که عمل ذره بین را نجام می دهد منعکسر  
می شود .



د و ریس آسمانی



لین آئینه‌ها یا پر نز ساخته شدند ولی آنها دارای معايي

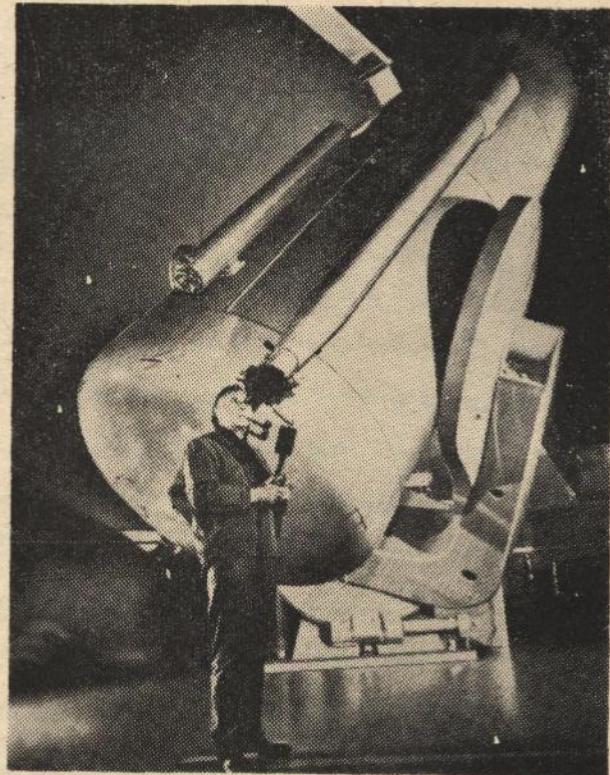
بودند، اولا وزنشان سنگین بود بعداً گر تار می‌شدند صیقلی  
کردن مجدد آنها دشوار بود بعلاوه عیب آئینه‌های کروی را  
داشتند یعنی اشعه نورانی که از محور دوربی شدن صحیح‌تر  
کانون جمع نمی‌شدند. بدینجهت تصاویر تا اندازه‌ای محو  
بنظر می‌آمدند.

فیزیکدان فرانسوی فوکو (۱۸۶۸-۱۸۱۹) این عیب را بر طرف کرد. یعنی عوض آئینه‌های کروی آئینه‌های شلجمی شکل اختیار کرد و دیگر اینکه به عوض بر نزد شیشه‌های نقره‌ای بکار برد و بر قدرت انعکاس آنها افزود. و موقعي که نقره پشت آئینه‌ها تارمی شد آنها را بواسیله اسید از تیک پاک کرده و دوباره نقره‌ای سی نمودند. اما در تلسکوپهای اشمید که بسیار خوبند و در ۱۹۳۴ وجود آمده‌اند آئینه‌ها کروی هستند و عیب آنها بواسیله تیغه‌های شیشه‌ای که در طرفین مقعر و در وسط محمد بنده از یین

درنتیجه اگر در تجزیه نوری ستارگان این طیف دیده شود می‌گویند که در آن ستاره سدیم وجود دارد. همین طور جیوه یک خط نورانی در بخش ویکی در آبی و در بیزود خطر در زرد که از هم نسبتاً بیشتر فاصله دارد وضعیت مانند D<sub>1</sub> و D<sub>2</sub> در سدیم نمی‌باشد. بعضی اجسام خطوط موازی زیادی دارند مانند آهن که طیف اهزاران خط موازی در ناحیه بین بخش و آبی تشکیل شده است. با این داشت که برای بدست آوردن طیف اجسام باید آنها را شفاف کرد یا به اصطلاح فیزیکدانها باید آنها را (تحریک) کرد. عده‌ترین وسیله تحریک شعله‌ای است که شامل ذرات اجسام باشد. قوس الکتریکی را برای گرفتن طیف فلزات بکار می‌برند. جرته الکتریکی نیز به همین منظور بکار می‌رود.

باطیف‌نما یک نور سفید را که از قوس الکتریکی بدست می‌آید امتحان می‌کنیم. دیده می‌شود که طیف متصلی مرکب از ۷ رنگ اصلی بنشن، نیلی، آبی، سبز، زرد، نارنجی و قرمز پیدید می‌آید. به علاوه مواراء بنشن و مادون قرمز. حال بین منبع نورانی و طیف‌نما یک شعله گرسی که محتوی بخار سدیم باشد قرار می‌دهیم. بعد اگر در طیف‌نما نگاه کنیم می‌بینیم که در روی طیف متصل خط پررنگتری درست در آنجایی که خط درخشان D سدیم قرار دارد بوجود آمده است. بدین ترتیب فلز اشعه ای که می‌توانسته منتشر کند جذب کرده است. و این پدیده رادر سال ۱۸۵۹ فیزیکدان آلمانی کیرشوف کشف کرده است و عمومیت دارد. هر بخار یا ماده شفاف که از آن یک دسته اشعه نورانی عبور کند اشعه‌ای را که می‌تواند منتشر کند جذب می‌کند. هر عنصر خطوط طیفی متحصر به خود دارد (درخشان یا تاریک). حال می‌توانیم متوجه شویم که منجمین چه نتایجی از طیف‌نما بدست می‌آورند. بو سیله طیف‌نما می‌توانند ترکیبات خورشید را به همراه واژو ستارگان و سطح آنها در ترکیبات کواکب و سیارات باخبر گردند. چنان‌که ژان سن منجم فرانسوی (۱۸۴۲-۱۹۰۷) می‌گفت «ستاره! اشعة خود را برای من بفرست تا بگویم که تو از چه ساخته شده‌ای». بو سیله طیف‌نما می‌توان با تقریب یک کیلومتر معین کرد ستارگانی که به ما نزدیک یا ازما دور می‌شوند سرعت شان چقدر است بدون اینکه فاصله آنها را تا زمین بدانیم. بایک مقایسه می‌توان دانست که تا چه اندازه طیف‌نما مفید است.

همیشه می‌توان ملاحظه کرد که ارتفاع صوت سوت یک لکوموتیو بر حسب اینکه به ما نزدیک شود یا دور گردد تغییر می‌کند. اگر نزدیک شود صدا به تدریج زیر می‌شود و اگر دور



#### یکی از تلسکوپهای رصدخانه کوه پالومار

**طیف‌نماها** — علاوه بر دوربینها، تلسکوپها، طیف‌نمایها نیز سفیدترین ابزارهای نجومی می‌باشند که ساختمان آنهاز منشورهای بلوری یا رزو (Réseaux) ها است. روزها تیغه‌های شیشه‌ای هستند که در روی آنها تعداد خیلی زیادی خطوط موازی بسیار نازک کشیده شده است منشور و رزو هردو نور را تجزیه می‌کنند و از آنجا می‌توانند به ماهیت جسم مورد آزمایش بپرند. در حقیقت تمام اجسامی که بشکل بخار یا مذاب می‌باشند دارای طیف‌اند، یعنی طیفی مخصوص به خود دارند که از خطوط موازی درخشان و رنگینی مانند (قوس و قزح) تشکیل شده‌اند.

مثل طیف سدیم که در حال بخار باشد خطی است (زرد درخشان) که D می‌نامند. طیف دارای محل ویژه‌ای است و به دو قسمت دیگر D<sub>1</sub> و D<sub>2</sub> تقسیم می‌شود. البته این دو قسمت اخیر را باید با ابزارهای حساستری مشاهده کرد.

اما D تنها نیست بلکه خطوط دیگری که در نواحی مادون قرمز و قرمز و سبز و آبی و مواراء بنشن قرار گرفته‌اند جزو طیف سدیم بشمار می‌روند ولی شدت نورانیت آنها خیلی ضعیف است بلکه از  $\frac{1}{100}$  نور D تجاوز نمی‌کند. به تمام اینها رویهم رفته طیف سدیم اطلاق می‌شود.

با دوربین اشمیدعکس برداری کند درروی آن ۱۰۰۰۰۰ ستاره ظاهر می شود و در بعضی نقاط صافتر که عده ستارگان زیادتر باشند تا ۵۰۰۰۰۰ ستاره درروی فیلم ظاهر شده اند.

بعوض دریافت تصاویر در روی پلاکهای عکاسی، امروزه آنها در روی سلولهای فتوالکترونیکی گیرند. سلولهای فتوالکترونیک فلوهای نورانی را به جریان الکترونیکی تبدیل می کند به عبارت دیگر دانه های نور یا فوتون را به دانه های الکترونیسته تبدیل می کنند که دارای حساسیت فوق العاده ای است بطوری که تصاویر حاصله بدون انداخت عیوب و نقصی می باشد.

بدین جهت با بکار بردن سلهای فتوالکترونیک در دوربینهای نجومی و تلسکوپهای بزرگ بر قدر آنها افزوده شده و دوربینهای کوچکتر هم ساند دوربینهای بزرگتر قوی می گردند. دیگر اینکه باز هم عکاسی نجومی ترقی کرده است.

امروز می توان تصاویر رنگی بدست آورد، یعنی فیلمها را با پروف کربنی در ( $78^{\circ}\text{C}$ ) سرد می کنند و ۳ حالت ظاهر می شود:

حساسیت سطحی که ۵ برابر حساسیت در درجه حرارت معمولی است. ورنگ آن بدون فیلتر بسیار خوب بدست می آید و هوایی که بواسطه عکاسی در ازار گرم شده بودند به حد مینیموم می رسند یعنی منبع دور شدید. دیگر (لکه های روغنی) بوجود نمی آورد و قسمتهای کم نورتر هم در همان وقت ظاهر می شوند.

### درباره مقاله تاریخچه ریاضیات مندرج در یکان شماره ۸۵

۱- درباره تناسب، کارهای ریاضیدانان اسلامی مخصوصاً حکیم عمر خیام به سکوت بر گذار شده است. برای بررسی این موضوع رجوع شود به مقاله «خیام و اندازه های اصم» در یکان شماره ۵۹-۲ در استعمال علائم و رموز جبری نزد علمای اسلامی آنچه بیش از همه حائز اهمیت بوده است، کارهای علی قلصادی و ابن قندد است که از ریاضیدانان مسلمان ادلس (اسپانیا) بوده اند (شرح احوال و آثار آنها را در آینده خواهیم نوشت).

متأسفانه نویسنده مقاله از آن بی اطلاع بوده است. برای اطلاع بیشتر در این زمینه رجوع شود به مقاله جامعی که توسط آقای ابوالقاسم قربانی تحت عنوان «رمزانها و عالمتهایی که مسلمانان در جبر بکار برده اند» در مجله سخن علمی شماره ۵۵ به چاپ رسیده است.

۲- اعداد منفی تیز در چند سوره نزد ریاضیدانان اسلامی بهویژه ابوالوفای بوزجانی استعمال تردیده است.

در ده صد ابم می شود. بایک دلیل ساده صحبت آن معلوم می گردد؛ وقتی که لکوموتیو نزدیک می شود ارتعاشات متواتی مسیری را طی می کنند که رفتہ رفته کم می شود و گوش آنها را بیشتر از موقعی که لکوموتیو بی حرکت باشد درک می کند. به عبارت دیگر عده ارتعاشاتی که در هر ثانیه گوش درک می کند بیشتر از فر کانس صدای حقیقی است و صوت زیرتر می گردد. یعنی صوت هر قدر زدتر باشد فر کانس ارتعاشات بزرگتر است. به عکس در موقع دور شدن لکوموتیو گوش در هر ثانیه ارتعاشاتی را کمتر از موقعی که لکوموتیو بی حرکت باشد در ریافت می کند. بدین جهت صدا بم بنظر می آید.

در ۱۸۴۳ گریستیان ۵۰ پلر اطریشی اثر بالا را اثبات کرد و ۵ سال بعد فیزی و فراسوی هم به همان نتیجه رسید. از این جهت آنرا در فیزیک قانون (۵۰ پلر-فیزی و) می نامند. در نور هم پدیده هایی تغییر صوت حاصل می شود که می توان آنها را با امواج صوتی مقایسه کرد.

وقتی که یک منبع نورانی در حرکت باشد اشعه ساطعه نیز در همان امتداد حرکت می کند و سرعت نوری که به مامی فرستد با سرعت حرکت خاصه منبع متحرک تر کیب می شود. اگر این نور را در طیف نما ملاحظه کنیم دیده می شود که خطوط طیفی به سمت پنش جابجا می شوند چون (فر کانس زیاد است) یا به طرف قرمز می روند چون (فر کانس کم است) یعنی آزمای دور می شود. حال اگر منبع نور ثابت باشد و مابه طرف آن حرکت کنیم یا از آن دور شویم همین نتایج بدست می آید. انتقال خطوط طیفی به سمت پنش معلوم می کنند که فاصله منبع کم می شود، و انتقال به سمت قرمز یعنی فاصله منبع افزوده می گردد. چون یک رابطه ریاضی ساده بین فر کانس ظاهري نور ساطعه از یک منبع و سرعت نزدیک شدن یادور شدن آن موجود است به سهولت می توان ابزارهای ساده و بختصر را بکار برد و سرعتها را حساب کرد.

عکس برداری نجومی- تصاویری که از دوربینها و تلسکوپها و طیف نمایها بدست می آیند می توان بر روی کاغذ عکسی ازدخت. مزیت عکس این است که سند قابل دوامی است که می توان آن را با فراغت بررسی کرد. به علاوه با این گذاشت در دوربین در شبها مختلف از ستارگان کم نورتر عکس برداری میسر می شود. بدین وسیله می توان نقشه آسمانی خیلی مشروح تهیه کرد و تا حدی به تعداد زیاد ستارگان آسمانی هی برد. بطوری که اگر یک فیلمی که ۸۵ میلیمتر قطر دارد مدت ۲۵ دقیقه

# مکانیات کو انتہم چیست؟

ترجمه: علی رضا توکلی صابری

دانشجوی دانشکده علوم دانشگاه تهران

نوشتہ: و. ای. ری دنیک

## گامهای نخست در راه فلسفهٔ جدید

### نور و حرارت

قانون اول، اینکه هر قدر یک جسم بیشتر گرم شود، درخشندگی تر شده و نور پیشتری از آن ساطع می‌شود. مقدار نور-افشانی که در هر ثانیه انتشار می‌یابد با تغییرات درجهٔ حرارت جسم مغایر است. اگر درجهٔ حرارت سه برابر افزایش یابد، افزایش تشعشع غالباً صد برابر می‌شود.

قانون دوم بیان می‌دارد که رنگ تشعشع با افزایش درجهٔ حرارت تغییر می‌یابد. به یک قطعه آهنی که در زیر مشعلی گذاشته شده تابهٔ حالت التهاب درآید، نگاه کنید. در ابتدا رنگ قطعه آهن کاملاً تیره است سپس نور لالکی که به تدریج قرمزی شود، نمودار شده هر چه درجهٔ حرارت بیشتر شود این نور به رنگ نارنجی و زرد و سفید در می‌آید.

یک کارگر فولادساز مجبوب می‌تواند با مشاهده رنگ درخشندگی این قطعه گداخته شده آهن به درجهٔ حرارت آن پی ببرد. او خواهد گفت که نور قرمز لالکی حاکی از درجهٔ حرارتی حدود ۵۰۰ درجهٔ سانتیگراد است و نور زرد حدود ۸۵۰ درجهٔ سانتیگراد و نور سفید روشن درجهٔ حرارتی بالای ۱۰۰۰ درجهٔ سانتیگراد را نشان می‌دهد.

از نظر فیزیکدانان این شرح کیفی چندان خوشایند نیست، آنها بدار قام صحیح نیاز دارند. برای یک فیزیکدان «هوای سرد است» درست به عنای این است که بگوئیم «او صورت بزرگی دارد». چیزی که بدان نیاز است اندازه‌ها و ارقام صحیح است، مثلاً در مثال بالا به داده‌هایی چون بزرگی بینی، لبها و پیشانی نیاز داریم.

در غروب یک زستان سرد چقدر لذت بخش است که نزدیک بخاری گرم نشسته و به صدای سلامی که از بخاری بر می‌خیزد گوش داده و خود را با حرارت بخاری گرم نمائیم. لیکن این حرارت چیست؟ چرا اطراف بخاری گرم است؟ چرا بدون اینکه آتش داخل بخاری را بینیم، می‌توانیم حرارت آن را از فاصله دور حس کنیم؟

بخاری شاعرهای نامرئی را که به ما احساس گرمی می‌دهد، نشر می‌کند، این شاعرها، شاعرهای گرمایی یا مادون قرمز نام دارند.

با کمی دقیق در مشاهدات خود می‌توان دریافت که تشعشع حرارتی پدیده‌ای عادی در طبیعت است. نور و حرارت هر دو توسط شمع یا آتشی عظیم و یا خورشید با عظمت‌ما منتشر می‌شوند. حتی ستارگان دور دست نیز شاعرهای حرارتی به زمین می‌پردازند.

اگر جسمی ملتهب نور افشاری کند، بطور قطع این جسم شاعرهای حرارتی تابش می‌کند. صدور نور و حرارت در واقع یک فرآیند بیش نیستند. و به همین علت است که دانشمندان تمام تشعشعات یک جسم را که تحت فرآیندی گرمایی منتشر می‌شوند، چه تابش نور و یا خاصیت تشعشع حرارتی، به نام تشعشع حرارتی خوانده‌اند.

در قرن گذشته، فیزیکدانها قوانین معتبر تشعشع حرارتی را کشف نمودند. این قوانین امروزه برهمنگی ماروشن است. ما در اینجا به ذکر دوقانون از این قوانین می‌پردازیم.

بر عکس، اگر جسم سیاهی به درجات حرارت بالاتری گرم شده و منبع نوری شود، در آن درجه حرارت، تشعشعات ویژه و خیره کننده‌ای را نسبت به اجسام دیگر داراست. هم این جسم تشعشع کننده مناسبی برای وضع قوانین کمی تشعشع حرارتی است.

به هر حال، آشکار شده است ده اجسام سیاه خود به طرق مختلف منتشر کننده تشعشعات هستند. برای مثال ممکن است که دوده سیاه‌تر و یاروش‌تر از متحمل باشد، این امر بسته به سوختی است که دوده را تولید می‌کند. و همین طور متحملها هم گوناگونند. این اختلافها کلاً نبوده و بهتر است آنها را بگناری گذاریم.

فیزیکدانها مدتی درباره «سیاهترین» جسم فکر می‌کردند، این جسم یک جعبه بود. جعبه‌ای که مخصوص آزمایش‌های تشعشع حرارتی بود. درون این جعبه را دیواره‌هایی از دوده پوشانیده بود. شعاع نوری از داخل روزنہ کوچکی وارد جعبه می‌شده دیگر منعکس نمی‌شد، زیرا برای همیشه جذب می‌شد. فیزیکدانها معتقد بودند که این جعبه تمام انرژی تابش شده را که داخل آن می‌شود جذب می‌کند.

حال فرض کنیم که جعبه مورد نظر ما یک منبع نور باشد. این چیزی است که هدف مورد نظر مارا تشکیل می‌دهد. اگر این جعبه به قدر کافی گرم شود، دیواره‌هایش درخشان شده و نوری دیدنی از آن ساطع می‌شود. همانطور که قبل بیان داشتیم برای درجه حرارت معینی تشعشع گرمائی و نوری یک چنین جعبه‌ای از سایر اجسام دیگر بیشتر خواهد بود. اکثر قوانین تشعشع حرارتی به دقت برای «سیاهترین» جعبه‌ها تدوین شده بود که نام کلی اجسام سیاه بدانها اطلاق می‌شد. با جزوی تغییر و اصلاح، این قوانین را نیز می‌توان برای سایر اجسام تیره بگاربرد.

### قوانین صحیح یا تقریب‌های ناهمجارت؟

حال باقیم و قوانین خود را یکبار دیگر به زبان فیزیک اصلاح کنیم.

اولین قانون بیان می‌داشت که قابلیت تشعشع یک جسم سیاه، یعنی همان انرژی که به صورت نور و گرما در هر ثانیه منتشر می‌کند، به نسبت  $\frac{1}{\mu}$  درجه حرارت مطلق جسم است. این قانون در اواخر قرن اخیر توسط دانشمندان آلمانی به نامهای استفان و بولتزمن کشف گردیده است.

دومین قانون این بود که همانطور که درجه حرارت یک جسم سیاه افزایش می‌یابد، طول موج با توجه به ماسک‌یزیم

فیزیکدانها با اختلافات گوناگون بیشماری از اجسام و شرایطی که تشعشع حرارتی از آنها نشمری یافت رو برو شدند. اما این اختلافات به هیچ‌روی قانع کننده نبودند. آنها به نمونه‌های «استاند» شده‌ای که بتوان آنها را به عنوان معیاری برای ساختن اصول قوانین تشعشع حرارتی اجسام ملتهب بگاربرد، نیازداشتند، تا بتوانند تابش نور توسط سایر اجسام را با این «استاند» توجیه کنند. این توصیف را در ذهن خود مجسم کنید «بینی یک شخص بزرگ‌تر از بینی های معمولی باشد، پیشانی کوتاه و چانه پهن و بزرگی داشته باشد، چشمها یاش هم کمی سبز و کوچکتر از چشم‌های معمولی باشد.» قیافه این شخص در نظر ما نسبتاً عجیب است، ولی فیزیکدانها را خوشحال می‌کند. حال علت آن را بیان می‌کنیم؟

### سیاه تراز سیاه

تعدادی از اشیاء رنگی را نتیخاب نموده و رنگ این اجسام را هر چقدر که ممکن است نزدیک به یکدیگر انتخاب کنید. حال آنها را بدقت آزموده و کوشش کنید تا علت اختلاف رنگ‌کرا در آنها بیابید.

آزمایش دقیق نشان می‌دهد که تفاوت‌های زیادی وجود دارند. یکی رنگ کمرنگ و دیگری رنگ سیر و کدر دارد. این اختلاف رنگ بدين خاطر است که مقداری از نور تابش شده به اجسام توسط جسم جذب شده و مقدار دیگری نیز منعکس می‌شوند. طبیعتاً، بستگی بین این دو مقدار یک سری اختلافات شگفتی را بوجود می‌آورد. دومورد را در نظر می‌گیریم، یک فلز درخشان تمام نور را که به آن تابیده می‌شود منعکس می‌نماید لیکن متحمل تمام نوری را که به آن تابش می‌شود جذب نموده و به ندرت نوری منعکس می‌نماید.

شعبده بازها از این خاصیت متحمل استفاده عملی خوبی می‌کنند، زیرا جسمی که نور را منعکس نمی‌کند، مشاهده نمی‌شود؛ در روزی صحنه نمایش، «جعبه‌ای که از متحمل سیاه پوشیده شده و در جای تاریکی قرار دارد توجه کسی را جلب نمی‌کند. به کمک همین جعبه شعبده باز می‌تواند تمام حقه‌های خود را که شامل مخفی و ظاهر نمودن دستمالها، کبوترها و یا حتی خودش باشد به معرض نمایش بگذارد.

فیزیکدانها در یافتن که این خاصیت اجسام سیاه بسیار با ارزش است. در پژوهش‌های خود برای یافتن جسمی به عنوان «استاندارد» تصمیم گرفتند که اجسام سیاه را انتخاب کنند. یک جسم سیاه اکثر تشعشعات نشر یافته را جذب نموده و بنابراین توسط این تشعشعات ملتهب شده و درجه حرارتی بیش از اسایر اجسام دیگر تولید می‌کند.

نگذشت که پی بردن این قانون فقط برای طول موجهای بزرگ طیف، سبز، زرد و قرمز بدروستی صادق است و در موردنورهای آبی، بنفش و ماقوّق بنفسخ صادق نیست.

از قانون جینز وریلف درسی یا ییم که هر قدر طول موج کوچکتر باشد، شدت تشعشع حرارتی بیشتر است. آزمایشها نتوانستند این گفته را تأیید کنند. به عبارت بهتر موضوع ناخوشایند این بود که عرچه به طرف طول موجهای کوچکتر می-رفتیم، شدت تشعشع بدون حدود افزایش می یافتد.

البته فزونی چنین حدی در تشعشع غیر ممکن بود. اگر یک قانون فیزیکی به جاده «بینهایت» کشیده شود، این قانون محکوم به فناست. در طبیعت چیزهای بزرگ وجود دارد، آنقدر بزرگ که حتی فکر ما از تصور آنها ناتوان است، لیکن همه حدود دارند، بجز خودجهان که نمی توان برای آن حدی قائل شد. این وضع غیر عادی و شگفت که از نظریه تشعشع بر می-سی خاست و به نام «جهش ماقوّق بنفسخ» خوانده می شد که در اوآخر این قرن بیان گردید. کسی تصور نمی کرد که این جهش فقط منحصر به یک قانون نسبتاً خصوصی شود. این نارسانی و ریزش به تمامی نظریه که این قانون از آن ناشی می شد، متوجه بود. و این عاقبت داستان فیزیک کلاسیک بود.

### فیزیک کلاسیک به بن بست می رسد

در همان عصر فیزیکدانهایی بودند که نظریه تشعشع را منگره افیزیک کلاسیک نمی دیدند. لیکن وجود هرمانع حتی کوچک، اهمیت داشت، زیرا در این نظریه تمام قوانین به یکدیگر مرتبط بودند. اگر چند نکته ای اشتباه باشد، نمی توانیم به توصیفی که از جنبه های دیگر پدیده می شود، اعتماد کنیم. اگر این نظریه نتواند بر موانع کوچک غلبه یابد، پس چه امیدی برای از بین بردن موامن بزرگی توان داشت؟

فیزیکدانها کوشش های وسیعی را برای فائق آمدن بر مشکلات نظریه تشعشع نمودند. امروزه این کوششها منطقاً بی ثبات و مستنقض بنظر می رستند. پس چه می توان انتظار داشت؟ وقتی که یک نظریه به حد اعلای نقطه اوج خود می رسد مانند این است که گربه ای در خانه ای که در آن آتش سوزی رخداده است قرار گرفته و فقط یک راه برای نجات خود به خارج داشته باشد، و آن راه پرت کردن خود به رو در خانه است. گربه از این سو به آنسو می دود، لیکن هیچگاه خود را در آب نمی افکند زیرا این عمل با غرایز حیوانی او منافات دارد.

چیزی مشابه همین جریان برای دانشمندان که در «آتش سوزی» گرفتار آمده باشند اتفاق افتاده بود و این آتش سوزی خانه ای بود که حاصل یک عمر زحمت و کار آنها بود. خانه ای

روشنانی دور کوتاه تر شد، و به ناحیه بنفش طیف تغییر محل می دهد. این قانون به نام کاشف ایتالیائی آن وین به نام «جا- بچائی وین» نامگذاری شد.

اکنون فیزیکدانها دو قانون کلی تشعشع را که بدون استثناء در مورد تمام اجسام صدق می نمود، در اختیار داشتند. قانون اول همانطور که قبل اگفتیم شرح دقیقی از افزایش روشنانی یلد. جسم ملتهب را بدست می داد.

بنظر می رسید که قانون وین توافق و سازگاری کمی در میدان مشاهدات از خود نشان می داد. زیرا با افزایش درجه حرارت، جسم مقادیر زیادی نور سفید تشعشع می نمود، نه بنفش.

اگر کمی تأمل کنیم می بینیم که قانون وین فقط راجع به رنگ اجسام با توجه به ماکریزم روشنانی نور تشعشع شده صحبت می نمود، نه از چیز دیگر.

این موضوع پذیرفته شده است که علاوه بر این تشعشع، تشعشعاتی با طول موجهای بزرگتر وجود دارند (بلابرای رنگ دیگر) که این تشعشعات در درجه حرارت های پایین منتشر می شوند.

وقتی که جسمی به حالت التهاب در می آمد، تشعشع آن خطوط طلیفی را وسعت داده و ناحیه های جدیدی را در طیف ایجاد می نمود. درنتیجه، اگر درجه حرارت به قدر کافی بالامی رفت، یک صدور طیفی جالب و دیدنی داشتیم.

این عمل را می توان به ارکستری قیاس کرد که وسائل آن هر قدر بیشتر شود صدای نتها و نواختن آن بالا می رود تا جایی که کلیه صدایها با هماهنگی خاصی آهنگی را که زیرترین صدایش «قرمز» و بالاترین صدای آن توسط فلوتها - واخته می شود «بنفسخ» است، می سازند.

### جهش ماقوّق بنفسخ

فیزیکدانها شیوه و میزدوب قوانین کلی شده بودند. چندی نگذشت که دریافتندیک پدیده و پدیده ای مشابه آن را که به نموده های مختلفی توسط قوانین متعددی بیان می شوند باشد به یکدیگر پیوسته و کلیه این قوانین را به صورت قانون عمومی واحدی که تمام این نمودها را شامل می شود، در آورند.

یک چنین کوششی توسط فیزیکدانان انگلیسی Jeans و Raybigh با توجه به قوانین تشعشع حرارتی صورت پذیرفته بود. این قوانین واحد که آنها ارائه داده بودند، بیان می داشت که شدت تشعشع یک جسم گرم به نسبت مستقیم درجه حرارت مطلق و به عکس مربع طول موج منتشر شده از نور استگی دارد. این قانون با آزمایش های تجربی و فرق می داد. لکن مدتی

که بهزندگی در آن خو گرفته و برای آنها بسیار ارجمند و عزیز بود. آنها سعی می نمودند که این آتش را خاموش کنند اما نمی توانستند راضی شوند که خانه را به حال خود رها کرده و فرار کنند.

به هر حال، برای دانشمندان زیرک و دقیق آشکار بود که فیزیک کلاسیک دوران آخر عمر خود را طی کرده و به بن بست رسیده است. نظریه تشعشع حرارتی تنها راه بن بست آن نیست. در همان روزها نظریه اتر فرضی نیز سقوط کرد.

این غروب به قدری زود آشکار شد که عموم فیزیکدانها را در یاس مطلق فرو برد. چه خطابی درینان نظریه شده بود؟ اگر واقعیات با نظریه سازگار نبودند، پس این خطاب از واقعیات ناشی شده بود. طبیعت از هیچ قانونی اطاعت نمی کند. طبیعت ناشناخته است! و این موضوعی است که فیزیکدانها را با اعصاب ضعیفیشان ناراحت کرده است.

عقاید فلاسفه ماتریالیست مختلف است. اگر واقعیات نتوانند با نظریه ای وفق دهند پس خود نظریه نادرست است. و باید فوراً برپایه های جدید دیگری بنا شوند. تاریخ یک بار دیگر نشان داد که ضروریات مهم مردان بزرگی را بوجود می آورد. راه خروجی این بن بست باعقادید جزئی تغییر ناپذیرش توسط ماکس پلانگ که در سال ۱۹۰۵ مفهوم «نظریه کوانتا» را عرضه داشت، و آلبرت آینشتین، که در سال ۱۹۰۵ «نظریه نسبیت» را ارائه داد پیداشد.

### راه خروجی به کجا منتهی می شد؟

کشف پلانگ چه بود؟

در نظر اول مشکل بتوان آن را یک کشف دانست. دو قانون راجع به تشعشع حرارتی اجسام گرم وجود داشت، که بطور جداگانه هر کدام کاملا درست بودند، ولی وقتی که به عنوان قانون واحدی به بوتة آزمایش ریخته می شدند با «جهش مافق بنشش» مواجه می شدند. چیزی شبیه به اینکه دونفر از یک راه تفکر به یکدیگر برستند؛ و بعد از اندکی بحث و تأمل دریابند که عقاید کامل «گنجی» داشته اند.

پلانگ در آن زمان بیش از ۴۰ سال داشت. و برای مدت مديدة بر روی نظریه تشعشع حرارتی مطالعه می کرد. این نظریه چه درهنگامی که او دانشجو بود و چه حال، به بن بست بر می خورد ولی او در جستجوی راه خروجی بود، او سلسه مراحلی را که این نظریه پیموده بود بدقت بررسی نمود و بالاخره بدین تبعیه رسید که اشتباهی در کار نیست. سپس پلانگ پارا فراتر نهاده و دامنه تحقیق خود را بسط داد.

سالها بعد او اقرار کرد که هیچ وقت به اندازه آن زمان که در اواخر قرن و فرار سیدن قرن جدیدی بود این رژی جوانی خود را بکار نینداخته بود. غیر ممکنها برای او کاملاً ممکن ب النظر می رسیدند، و با پاشاری مانند یک شخص متعصب یکی بعد از دیگری ترجمه و تفسیرهایی برای این تغیری ابداع می کرد.

در بدو امر او توسط عقیده ای نسبتاً ساده راهنمایی می شد. جمنز و ریلف دو قانون تشعشع حرارتی را یکی کرده و برای امواج کوتاه به نتیجه ای پوچ و بی معنی است یافته بودند. امکان داشت که این قوانین را به طرق مختلفی به قانون وین مربوط ساخت و نتیجه ای منطقی بدست آورد.

پلانگ در آزمایش های خود کوشش می کرد که فرمولی عمومی را که با موضوع مورد نظر او تناقضی نداشته باشد، پیدا کند. او بعد از پژوهش های زیاد به چنین فرمولی دست یافت. این فرمول کمی پیچیده بود، و به تشریحتی که معنای فیزیکی روشی نداشتند آمیخته بود. ترکیبی اتفاقی از مقادیری ناپیوسته، ولی کاملاً عجیب بود که این فرمول ساختگی با آزمایش می خواند. به عبارت بهتر، با این فرمول پلانگ تو انتهی بود که قانون، استファン بولتزمن و هم چنین قانون وین را بدست آورد. وبطور کلی این فرمول هیچ «حدودی» را نمود پذیرفت و پهلو فیزیکدانها فرسول دقیقی بود.

فتح؟ آیا راهی به خارج پیدا شده بود؟ ولی هنوز این راه تمام آگشته نشده بود. پلانگ که نمونه یک دانشمند واقعی بود به شک و بدیلی افتاده بود.

نواختن کلیدهای پیون آنهم ۲۰ بار بطور تصادفی ممکن است نتی را بسازد، لیکن اثبات اینکه این نتها حتماً باید آهنگی را بسازند چگونه است؟ این فرمول می باشد از چیزی استنتاج شده باشد. علم قوانینی را که فاتح آنها مورد انتقاد قرار گرفته اند. تا زمانی که فاتح قدم به قدم به پیش نزد و اقدامهای خود را ثابت نکند فتح ممکن نیست.

و در اینجاست که پلانگ هم شکست می خورد. زیرا فرمول پلانگ از قوانین فیزیک کلاسیک سر پیچی می نمود. موقعیت حزن آوری بود که پلانگ در آن قار داشت. آیا می باشد نظریه کلاسیک را در مقابل واقعیت پذیرد یا اینکه به کمک واقعیات با نظریه قدیم به بازاره برشیزد؟ پلانگ جبهه واقعیات را گرفت.

دنباشه دارد

# محاسبات تقریبی

نوشته: محمد رکنی قاجار

## دنباله از شماره قبل

**مسئله** - با چه تقریبی باید دو عدد را گرفت برای اینکه حاصل ضرب آنها تقریب مفروضی صحیح باشد.  
حل این مسئله بوسیله قاعدة او ترد است.

**ضرب به اختصار** - قاعدة او ترد برای بدست آوردن حاصل ضرب دو عدد با تقریب مفروض مقلوب ضربوب فیدرا در زیر ضربوب می نویسیم بقسمی که رقم آحاد ضربوب در زیر عددی از ضربوب فیده قرار گیرد که طبق آن صدمترتبه کوچکتر از مرتبه تقریب مفروض باشد و بعد از ارتقای اضافی (اعشاری) ضربوب و ضربوب فیده صرف نظر می نمائیم. پس از آن هر یک ارقام ضربوب را در عده از ازارقام ضربوب فیده ضربوب می کنیم که از سمت چپ تا فوق همان رقم ختم می شود و حاصل ضربها را در زیر گذاری کنیم و در حاصل ضرب دور قم از سمت راست حذف می کنیم و با اولین رقم سمت راست که باقی می ماند یک واحد اضافه می کنیم نتیجه تقریب خواسته شده صحیح است.

**مثال** - می خواهیم حاصل ضرب  $141592 \times 3$  را در تقریب  $45/838383$  تا  $50/01$  نهایی تعریف کنیم.

٣/١٤١	٥٩	٢	مضروب غایه
٣٨	٣	٨٣٨	/ $٥٤$
١٢	٥٦	٣٦	مضروب
١	٥٧	٧٥	
٢٥	١	٢٨	
٩	٤	٤٢	
٢	٤	٤٨	
	٩		
	١٤٤	٠٠٣٨	

این حاصل ضرب تا  $50/01$  تقریب صحیح است

## ضرب

**قضیه** - خطای مطلق حاصل ضرب دو عدد تقریبی اضافی از مجموع حاصل ضربهای هر یک از ضربوب و ضربوب فیده در خطای مطلق عامل دیگر کوچکتر است. این قضیه را می توان چنین نمایش داد:

$$n_1 - n_2 = (N_1 + e_1)(N_2 + e_2) = \\ = N_1 N_2 + (N_1 + e_1)e_2 + (N_2 + e_2)e_1 - e_1 e_2$$

و در نتیجه :

$$e < n_1 e_2 + n_2 e_1$$

**تبصره ۱** - اگر عوامل حاصل ضرب تقریبی در جهت مخالف باشند نمی توان حداثتی برای خطای مطلق آنها بادست آورد.

**تبصره ۲** - قضیه قبل درباره چندین عدد تقریبی اضافی نیز صادق است. یعنی اگر سه عدد  $n_1$  و  $n_2$  و  $n_3$  با خطاهای  $e_1$  و  $e_2$  و  $e_3$  موجود باشند:

$$e < e_1 n_1 n_2 + e_2 n_1 n_3 + e_3 n_2 n_3$$

به همین طور این قضیه درباره توغیر شخص یک عدد تقریبی اضافی نیز صادق است. مثلاً خطای مطلق مجدد یک مقدار تقریبی اضافی کمتر است از دو برابر خطای مطلق آن عدد در عدد تقریبی:

$$e < 2e_1 n_1$$

**مثال** - اعداد  $5/81$  و  $3/43$  اعداد تقریبی اضافی هستند تقریباً  $0/01$  است. حاصل ضرب آنها یعنی  $19/9283$  تقریباً  $0/01$  است ( $5/81 + 3/43 = 0/0924$ )

حال مخصوص - وقتی که یکی از عوامل عدد صحیح و دیگری تقریبی باشد مقدار تقریب مساوی حاصل ضرب عدد صحیح در تقریب عدد دیگر است. مثلاً:

$$N_1(N_2 + e_2) = N_1 N_2 + N_1 e_2$$

طرز عمل چنین است:

$$\begin{aligned} 4 \times 3 / 14159 &= 1256636 \\ 5 \times 2 / 1415 &= 157075 \\ 8 \times 3 / 141 &= 25128 \\ 3 \times 2 / 14 &= 942 \\ 1 \times 3 / 1 &= 248 \\ 3 \times 3 &= 9 \end{aligned}$$

اثبات - در اولین نظر معلوم می شود که ارقام ستون اول

$$\frac{1}{10000} \text{ می باشند و خطاهای حاصله در حاصل ضرب عبارتنداز:}$$

۱- مجموع خطاهایی که حاصل ضرب بهای جزء ایجاد کرده اند.  
۲- خطاهای حاصله از حذف ارقام عوامل ضرب که در نتیجه مقداری از حاصل ضربهای جزء ازین رفته اند.  
اولین حاصل ضرب جزء یعنی ۱۲۵۶۶۳۶ ده هزار مدارای خطایی است مساوی حاصل ضرب ۴ در اعدادی که از مضروب فیه حذف شده اند و چون اعداد حذف از یکصد هزار کوچکترند و رقم ۴ جزء عشرات مضروب است پس خطای اولین حاصل ضرب جزء از ۰۰۰۰۱ / ۴۰ یا ۰۰۰۰۴ کوچکتر است و به همین طریق می توان برای حاصل ضربهای دیگر نشان داد که خطای کوچکتر است از آن عدد در ۰۰۰۰۱ / ۵ ، بالنتیجه مجموع خطاهای حاصله در حاصل ضربهای جزء کمتر است لذا:

$$(4 + 5 + 8 + 3 + 1 + 2) \times 00001$$

اما راجع به خطاهای حاصله از قسمتهای حذف ضرب؛ می دانیم که مضروب فیه کوچکتر است از ۱۵ و قسمت حذف

$$\frac{8+1}{100000} \text{ کوچکتر است و در نتیجه حاصل ضرب}$$

۱۴۴ / ۰۰۳۸ دارای خطایی است کوچکتر از

$$10000 \times 00001 (4 + 5 + 8 + 3 + 8 + 1) = 10000 (4 + 5 + 8 + 3 + 8 + 1)$$

تجاویز کند این خطای  $\frac{101}{10000}$  کوچکتر است بعلاوه پس از حذف

دور قام اعشاری  $144 / 0038$  خطایی مرتفع می شویم کوچکتر

$$\frac{99}{10000} \text{ پس خطای کل از } \frac{101+99}{10000} \text{ یا } \frac{2}{10}$$

کوچکتر است. پس بعد از افزودن یک واحد به آخرین رقم اعشاری  $144 / 01$  حاصل ضرب تا ۰۰۱ تقریب بدست می آید.

تبصره ۱ - اگر مجموع ارقام مضروب بعلاوه اولین رقم، حذف از ۱۰۰ کند قاعدة فوق غلط می شود. در

این صورت بایستی رقم آحاد مضروب را در زیر رقم اعشاری از مضروب فیه قرار دهیم که هزار مرتبه از تقریب داده شده کوچکتر باشد و آن وقت باید در حاصل ضرب ۳ رقم را حذف نموده و باز به آخرین رقم اعشاری که باقی می ماند یک واحد اضافه نمود. واگراین مجموع یعنی پرانتر از ده تجاوز نکند رقم آحاد مضروب را در زیر رقم از تقریب دهیم که ۱۰ مرتبه از تقریب داده شده کوچکتر باشد در این صورت هم یک رقم حذف می کنیم و به آخرین رقم اعشاری سمت راست یک واحد می افزایم. تبصره ۲ - اگر عدد ارقام اعشاری مضروب فیه از عدد ارقام اعشاری مضروب کمتر باشد آنقدر صفر در سمت راست آن قرار می دهیم تا عمل ممکن گردد.

تبصره ۳ - اگر محل عوامل ضرب را تغییر دهیم نتیجه یک واحد بود.

تبصره ۴ - قاعدة ضرب اختصاری بدون هیچ تغییری در محاسبه مجدد، اعداد باتقریب معین استعمال می شود.

تعیین عدد ارقام اعشاری عوامل ضرب اگر عوامل ضرب اعشاری نباشند باید که فقط عدد لازم از ارقام اعشاری را در ضرب به اختصار استعمال نمود. حاصل ضرب باید تقریباً تا یک واحد اعشاری مرتبه ۱۱ام تعیین شود و می دانیم که همیشه رقم آحاد مضروب باید در زیر عددی از ارقام اعشاری مضروب فیه نوشته شود که مرتبه اش صد بار کوچکتر از مرتبه تقریب داده شده باشد. پس چنین نتیجه می گیریم که:

۱- اگر مضروب فیه دارای قسمت صحیح باشد  $d$  رقم با معنی، عدد ارقام اعشار مضروب  $d + (n + 1)$  خواهد بود ( $n$  عدد ارقام تقریب =  $n$ ).

۲- اگر مضروب فیه قسمت صحیح نداشته باشد و  $d$  رقم بعد از میزهم صفر باشد عدد ارقام اعشاری مضروب که باید استعمال شود  $d - (n + 1)$  خواهد بود.

مثال - می خواهیم حاصل ضرب  $\frac{17}{1919} \times \frac{\pi}{\sqrt{r}}$  را تقریباً ۰۰۰۱ حساب کنیم.

اولاً می دانیم که قسمت عدد صحیح  $\sqrt{\pi}$  یک رقمی است پس مضروب فیه بر حسب تبصره فوق، دارای  $5 = 5 + 1 = 6$  رقم اعشاری است.

ثانیاً چون خارج قسمت  $\frac{17}{1919}$  دارای قسمت صحیح نمی باشد و دو و قم بعد از میزهم صفر می باشد پس ارقام اعشاری  $\sqrt{\pi}$  باید بر حسب آنچه در فوق گفته شد  $= 2 - 1 + 3$  رقم باشد یعنی باید حاصل ضرب  $000885 \times 000001 / 77$  را تا ۱۰۰۱ تجاوز کند.

معین نمائیم پس چنین می شود:

$$\begin{array}{r} ۰/۰۰۸۸ \\ \hline ۷۷/۱ \\ \hline ۸۸۵ \\ ۶۱۶ \\ \hline ۵۶ \\ \hline ۱۵۵۷ \end{array}$$

$$\text{و تا یکهزارم تقریب: } ۰/۰۱۶ = \sqrt{\frac{۱۷}{۱۹۱۹}}$$

### تقسیم

**قضیه** - خطای مطلق خارج قسمت یک عدد تقریبی به عدد صحیح مساوی با خارج قسمت خطای مطلق مقسوم بر، مقسوم علیه. در حقیقت اگر  $n$  هم مقدار حقیقی آن فرض شود، هم  $N$  هم مقسوم علیه باشد که یک عدد صحیح است و  $e$  هم خطای مطلق خارج قسمت.

چنین خواهیم داشت:

$$n : N = (N \pm e) : N = \frac{N \pm e}{N} = \frac{e}{N}$$

**تبصره** - اگر تقریب مقسوم و مقسوم علیه هردو در یک جهت و یا در جهت مختلف باشند و یا اینکه فقط مقسوم علیه تقریبی باشد نمی توان عمل حدی برای خطای مطلق بر حسب مقادیر تقریبی مقسوم و مقسوم علیه معین نمود.

**مسئله** - با چه تقریبی باید مقسوم و مقسوم علیه را فرض نمود تا چنکه خارج قسمت آنها تاقریب معینی باشد.

حل این مسئله نیز بو سیله تقسیم اختصاری معلوم می گردد.

**قضیه** - اگر قسمتهای اعشاری یک مقسوم علیه بزرگتر از واحد را حذف نمائیم، خطای مطلق خارج قسمت اضافی بوده و کمتر است از خارج قسمت تقسیم بر قسمت عدد صحیح مقسوم علیه. فرض می کنیم که  $D$  مقسوم و  $۳/۱۴۱۵۹$  مقسوم علیه و  $q$  خارج قسمت صحیح باشد، اگر از قسمت اعشاری مقسوم علیه صرف نظر نمائیم گوئیم که خارج قسمت به اندازه کمتر از  $\frac{q}{3}$  افزوده

می شود زیرا اگر خارج قسمت  $\frac{D}{3}$  فرض شود می توان چنین نوشت:

$$q' - q = \frac{D}{3} - \frac{D}{3/14159} = \frac{D \times ۰/۱۴۱۵۹}{۳ \times ۳/۱۴۱۵۹} = \\ = q \times \frac{۰/۱۴۱۵۹}{۳}$$

و چون  $۰/۱۴۱۵۹$  کوچکتر از واحد است و مقسوم علیه،

$$\text{هم بر حسب فرض بزرگتر از واحد بوده پس: } q < q'$$

**قاعده تقسیم اختصاری** - برای بدست آوردن

خارج قسمت دو عدد تا کمتر از یک واحد تقریب صحیح یا اعشاری مفروضی ابتدا باید عدد ارقام خارج قسمت یعنی ( $n$ ) را تعیین نمود، بعد درست چپ، مقسوم علیه عددی فرض می کنیم که اقلال شامل یک دفعه واکثر آشامل ۹ دفعه  $n$  باشد، و درست راست همان عدد  $n$  رقم را منظور باشند و از بقیه صرف نظر می کنیم. عددی که به این قسم بدست می آید اولین مقسوم علیه نامیده می شود. از سمت چپ مقسوم آنقدر رقم جدا می کنیم که اقلال یک برابر واکثر آ ۹ برابر مقسوم علیه باشد و بقیه اعداد را حذف می نماییم. چنین عددی اولین مقسوم جزو نامیده می شود. اولین مقسوم را به اولین مقسوم علیه تمهیم می کنیم بعد باقیمانده را به همان مقسوم علیه با حذف یک رقم از سمت راست آن تقسیم می کنیم و همین طور عمل را مداومت می دهیم تا اینکه  $n$  رقم خارج قسمت بدست آید بعد تا هر چند رقم تقریب که لازم باشد از سمت راست خارج قسمت محیز می زنیم.

**مثال** - می خواهیم خارج قسمت  $۰/۴۷۸۶۵۶۵۰۰۰$  را بر  $۰/۴۸۷۱۵۶۵۶۵۰۰$  تقریب محاسبه کنیم.  
خارج قسمت دارای ۳ رقم می باشد اولین مقسوم علیه  $۹۴۷۸۶$  می گیریم و اولین مقسوم  $۹۴۷۸۶$  می باشد و عمل تقسیم چنین است:

$$\begin{array}{r} ۹۴۷۸۶ \\ ۷۴۶۲۵ \\ \hline ۲۰۱۶۱ \\ ۱۹۸۹۶ \\ \hline ۲۶۵ \\ ۱۷ \\ \hline ۲۴۸۷۵ \\ ۳ \\ \hline ۲۴۸۷ \\ ۸ \\ \hline ۲۴۸ \\ ۱ \\ \hline \end{array}$$

پس خارج قسمت می شود:  $۳/۸۱$

**اثبات** - برای اثبات اینکه  $۳/۸۱$  همان خارج قسمت مطلوب است کافی است ثابت کنیم  $۳/۸۱$  خارج قسمت است تا  $۰/۵۱۰$  تقریب و یا  $۳/۸۱$  خارج قسمت تقسیم  $۵/۹۴۷۸۶۵۶$  بر

## بازی با سکه

تئیه و تنظیم از: داود ریحان

۱- شانزده سکه همسان کنار هم چنان قرار گرفته‌اند که شکلی بهسان سریع بوجود آورده و چهار ریدهای افقی و چه در



(۱)

(۲)

ردیفهای ستونی یا در میان بشتر و روی باشند (شکل ۱). به شرط آنکه فقط دو سکه از این سکه‌ها را لمس کنید، ترتیب قرار گرفتن سکه‌های ابهق‌سی تغییر دهد که شکل مریع محفوظ بماند اما در هر یک از ردیفها، هر چهار سکه با یک‌وچهار رو شده باشند.

۲- شش سکه همسان مطابق باشکل (۳) به شکلی بهسان متوازی‌الاضلاع کنار هم قرار گرفته‌اند. با تغییر مکان فقط سه سکه



(۳)



(۴)

طبق قاعده زیر، شکل متوازی‌الاضلاع را به شکل شش ضلعی تبدیل کنید: هر دفعه فقط یک سکه تغییر مکان می‌یابد، یعنی بدون آنکه بلند شود در صفحه لغزانده می‌شود، هر سکه که تغییر مکان می‌یابد نباید وضع سکه‌های مجاور را بهم بزند.

## بازی با اعداد

۵۷	۵۷
۵۷	

عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۸ را در خانه‌های خالی جدول به‌قسمی قرار دهید که مجموع اعداد واقع در هرستون برابر ۵۷ باشد.

\* \*

پاسخها در یکی از صفحه‌های همین شماره

۲۴۸۷۵/۶۵۶ است تایک واحد تقریب. اگر  $\frac{q}{9}$  خارج قسمت صحیح این تقسیم باشد و از قسمتهای اعشاری مقسوم علیه صرف نظر نماییم خطای مطلق اضافی کمتر از  $\frac{9}{24875}$  است.

پس به طریق اولی از  $\frac{1}{24}$  کمتر است زیرا  $\frac{q}{9}$  هر قمی بوده و از ۱۰۰۰ کوچکتر است.

اگر  $\frac{5}{9} ۹۴۷۸۶۵۶$  را بر  $۲۴۸۷۵$  تقسیم نماییم رقم مات خارج قسمت که همان ۳ است بدست می‌آید و بقیمانده  $۲۰۱۶۱۵۶/۵$  خواهد بود. حان اگر تقسیم را مانند معمول اجرا کنیم خارج قسمت اضافی بدست آمده و خطای  $\frac{1}{24}$  کمتر است و اگر  $۲۰۱۶۱۵۶/۵$  را بر  $۲۴۸۷۵$  تقسیم کنیم رقم عشرات و آحاد بدست می‌آیند و یا  $۲۰۱۶۱۵/۶۵$  بر  $۲۴۸۷/۵$  اگر قمت اعشاری مقسوم علیه  $۲۴۸۷/۵$  را حذف کنیم خارج قسمت جدید که بیش از دو رقم نیست دارای خطای اضافی است کوچکتر از  $\frac{1}{24}$  و رقم عشرات خارج قسمت جدید چنین

است که  $۲۰۱۶۱$  را بر  $۲۴۸۷$  تقسیم نماییم، و این رقم ۸ است که باقیمانده آن  $۲۶۵۵/۶۵$  است و همین طور عمل را مداومت می‌دهیم تا خارج قسمت  $۳۸۱$  بدست آید که باقیمانده آن  $۱۷/۵۶۵$  است. خارج قسمت  $۳۸۱$  دارای خطای مطلقی است اضافی کمتر

از  $\frac{3}{23}$  یعنی کمتر از یک واحد بعلاوه اگر از تقسیم باقیمانده  $۱۷/۵۶۵$  به آخرین مقسوم علیه  $۳۴۸$  صرف نظر نماییم از خارج قسمت کمتر از یک واحد کاسته ایم. در تیجه خطای کلی در خارج قسمت  $۳۸۱$  عبارتست از تفاضل دو خطای هردو کوچکتر از واحد می‌باشند پس خود تفاضل نیز از واحد کمتر است ولذا خارج قسمت همان  $۳/۸۱$  است.

تبصره ۱- ممکن است یکی از مقسوم‌های جزء شامل ۱۰ برابر مقسوم علیه مربوطه به خود باشد در این صورت می‌دانیم که ارقام بعدی خارج قسمت صفر خواهد بود، آنگاه یک واحد به آخرین رقم خارج قسمت اضافه کرده و درست راست آن به اندازه ارقامی که باید حساب نماییم صفر قرار می‌دهیم.

تبصره ۲- اگر در مقسوم علیه به اندازه کافی رقم نباشد مطابق قاعده برای تشکیل اولین مقسوم علیه اولین رقم یا چند رقم را بوسیله معمولی تعیین کرده و بقیه را بوسیله تقسیم اختصاری عمل می‌کنیم.

ممکن است در سمت راست مقسوم و مقسوم علیه آنقدر صفر قرار دهیم تا ارقام لازم برای تشکیل اولین مقسوم علیه تکمیل شود و به سهولت می‌توان دید که این عمل هم مانند اولی است.

دنباشه دارد

## واسطه‌ها

ترجمه: مقصود عین اللهی

را با این ترازو بدست آوریم. برای این کار ابتدا جسم را در کفه راست می‌گذاریم و در کفه چپ آنقدر وزنه قرار می‌دهیم تا تعادل برقرار شود، وزن وزنه‌های کفه چپ را  $G_1$  می‌خوانیم. حال جای جسم را عوض می‌کنیم و آنرا در کفه چپ قرار می‌دهیم و در کفه راست وزنه می‌گذاریم تا تعادل برقرار شود و وزن وزنه‌های کفه راست را  $G_2$  می‌خوانیم. اگر طول بازوی راست ترازو  $a$  و طول بازوی چپ آن  $b$  باشد داریم:

$$G_a = G_1 b \quad G_b = G_2 a$$

$$(G_a)(G_b) = (G_1 b)(G_2 a)$$

$$G^r = G_1 G_2 \Rightarrow G = \sqrt{G_1 G_2}$$

وزن حقیقی جسم واسطه هندسی اوزانی است که در دو توزین بدست آمده است.

(۳) اعداد  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_n$  ... مفروض می‌باشند؛

واسطه توافقی آنها چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

واسطه توافقی را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

واسطه عددی  $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$  را بدست آورده آنرا معکوس می‌کنیم.

از مثالهای فراوان مربوط به واسطه توافقی مثالی را ذکر می‌کنیم:

فرض کنید که اعداد مشتت  $a$  و  $b$  را داریم و  $a < b$  و نیز فرض کنید بعضی کمیتهای عددی مشخصند که  $a$  از آنها بزرگتر نیست و بعضی کمیتهای عددی مشخصند که  $b$  از آنها کوچکتر نیست و هیچ چیز دیگری مشخص نیست. یک نفر چه مقداری را برای این کمیت انتخاب خواهد کرد؟ برای مثال، از شما خواسته می‌شود که لوله‌ای به طول  $L$  ببرید. اندازه گیریهای متعدد شمارا مطمئن کرده است که:

(۱) اعداد  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_n$  ... مفروضند، واسطه عددی آنها به طریق زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

در زندگی روزانه درست مانند ریاضیات و علوم دیگر مکرراً با این مطلب مواجه می‌شویم. بعضی مواقع منظور از واسطه عددی، معدل یا میانگین می‌باشد. چند مثال راجع به واسطه عددی:

(a) کلاسی ازیک مدرسه را در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم که  $a_1$  وزن اولین دانشآموز و  $a_n$  وزن دومین دانشآموز ...

و  $n$  تعداد دانشآموزان باشد  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  میانگین وزن داشت آموزان خواهد بود.

(b) در صفحه محورهای مختصات مثلثی را در نظر بگیرید که مختصات رأسهای آن  $y_1$  و  $x_1$  و  $y_2$  و  $x_2$  باشند. پس مختصات مرکز ثقل آن خواهد بود:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

طول مرکز ثقل مثلث میانگین طولها و عرض آن میانگین عرضهای سه رأس مثلث می‌باشد.

(۲) اعداد مشتت  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_n$  ... مفروضند. واسطه هندسی آنها برابر با مقدار زیر تعریف می‌شود:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

از مثالهای متعدد مربوط به واسطه هندسی در اینجا یکی را ذکر می‌کنیم. یک ترازو را در نظر بگیرید و فرض کنید که در باره برآورده طول دو بازوی آن مطمن نیستیم. در وهله اول چنین بنظر می‌رسد که توزین اجسام با این ترازو بی فایده است؛ ولی چنین نیست.

فرض کنید جسمی بوزن  $G$  اختیار کنیم و بخواهیم وزنش

آیا هیچ رابطه‌ای بین  $G_n$ ,  $A_n$  و  $H_n$  وجود دارد؟  
 یک قضیه مشهور می‌گوید که:  $(II)$   
 $H_n < G_n < A_n$   
 ۵) ملاحظه می‌کنید که برای اثبات نامساوی بالا کافی است ثابت کنیم که  $G_n < A_n$  زیرا اگر نامساوی فوق را ثابت کنیم چون نامساوی فوق شامل هر انتخاب  $a_1, a_2, \dots, a_n$  است شامل  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$  نیزی شود.

بنابراین:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \times \frac{1}{a_2} \times \frac{1}{a_3} \times \dots \times \frac{1}{a_n}} < \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)^n$$

پس

$$H_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = G_n$$

۶) نامساوی  $G_n < A_n$  به راههای مختلف ثابت شده است. روش اثبات زیر توسط آ.آل. کائوچی یکی از بزرگترین ریاضیدانان قرن نوزدهم بیان شده است.  
 اول ملاحظه می‌کنید که اگر  $n=2$  باشد اثبات این مطلب ساده است زیرا داریم:  
 $a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 > 0$   
 بنابراین:

$$G_2 = \sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1 + a_2}{2} = A_2$$

به عنوان قدم بعدی نامساوی  $G_n < A_n$  را در حالت مخصوصی ده  $n=2^m$  باشد ثابت می‌کنیم. ما باید ثابت کنیم برای هر عدد صحیح و مثبت  $m$  داریم:  $G_{2^m} < A_{2^m}$  (III)  
 برای  $m=1$  این موضوع را ثابت کردیم. حال از راه استقرانی عمل می‌کنیم. فرض کنیم که می‌دانیم برای بعضی اعداد، رابطه (III) برقرار است، پس با این فرض داریم:

$$(IV) \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \dots a_{2^m}} < (a_1 + a_2 + \dots + a_{2^m}) : 2^m$$

$$(V) \sqrt[2^m]{a_{2^m+1} a_{2^m+2} \dots a_{2^{m+1}}} < (a_{2^m+1} + a_{2^m+2} + \dots + a_{2^{m+1}}) : 2^m$$

(توجه کنید که اعداد  $2^m+1, 2^m+2, \dots, 2^{m+1}$  عدد می‌باشد).  
 مرکب از  $2^m$  عدد می‌باشد.

۱/۳۲۴/۱۷۰ شماره‌ای ۲ چه مقداری را انتخاب خواهید کرد؟ البته جواب این سؤال بستگی به موقعیت شما دارد. ولی راهی که برای این نوع مسائل کلی بنظر می‌رسد، روش زیر است. مقداری را که برای این کمیت انتخاب کرده‌ایم  $P$  می‌خوانیم. و فرض کنیم  $X$  مقدار حقیقی این کمیت باشد. می‌دانیم که  $a < x < b$ . اشتباهی که مابا انتخاب  $p$  به جای مقدار حقیقی آن  $x$  مرتکب می‌شویم برای  $|p-x|$  می‌باشد و خطای نسبی می‌باشد.

$$\frac{|P-x|}{x}$$

می‌توان برای هر مقدار  $X$  عدد  $\frac{|P-x|}{x}$  را بدست آورد که در رابطه  $a < x < b$  صدق کند ولی در میان این اعداد یک ماکریم وجود دارد که به صورت زیر شخص می‌شود:

$$\operatorname{Max}_{a < x < b} \frac{|P-x|}{x}$$

که خوانده می‌شود، (ماکریم) وقتی که  $a < x < b$

در موارد زیادی وقتی بخواهیم مقداری برای یک کمیت عذری انتخاب کنیم مسئله مورد علاقه ما به حداقل رساندن بزرگترین خطای نسبی ممکن می‌باشد. از آنجاکه در مسئله مورد مطالعه بزرگترین خطای نسبی ممکن بو سیله (I) مشخص می‌شود می‌تران  $P$  را طوری اختیار کرد که مقدار (I) به حداقل برسد. ثابت می‌شود که این امر فقط و فقط زمانی رخ می‌دهد که  $P$  بعنوان واسطه توافقی  $a$  و  $b$  انتخاب گردد:

$$P = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

۴) اگر  $a_1, a_2, \dots, a_n$  اعداد مشتبت مفروضی باشند و به ترتیب  $A_n, G_n$  و  $H_n$  واسطه‌های عددی، هندسی و توافقی آنها باشند:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$H_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

## شما از کدام راه حل می کردید؟

مسئله ۱۱ - (کنکور سراسری ۱۳۴۹)

کدامیک از چهار خط زیر نسبت به منحنی نمایش تغییرات:

$$y = \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x + 2}$$

مجانب است:

$$y = x - 1 \quad (1) \quad y = x - 2 \quad (2)$$

$$y = -x + 2 \quad (3) \quad y = x + 2 \quad (4)$$

راه حل اول - اگر:

$$y = mx + h$$

معادله مجانب فرض شود،  $m$  برابر است با حد  $\frac{y}{x}$  و

برابر است با حد  $x - mx - y$  وقتی  $x$  به سمت  $\pm\infty$  میل کند. اما:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^2 + 2x}$$

چون  $x^2$  همواره مثبت است پس در هر حال:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\sqrt{\frac{x^4 - 1}{x^2}}}{\frac{x^2 + 2x}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{x^4 - 1}{x^2}}}{\frac{x^2 + 2x}{x}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}}}{1 + \frac{2}{x}} \end{aligned}$$

وقتی  $x \rightarrow \pm\infty$  حد  $\frac{y}{x}$  برابر می شود بایک، پس  $m = 1$  و

$$\begin{aligned} y - x &= \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x + 2} - x = \\ &= \frac{\sqrt{x^4 - 1} - (x^2 + 2x)}{x + 2} = \\ &= \frac{(x^2 - 1) - (x^2 + 2x)}{(x + 2)[\sqrt{x^4 - 1} + x^2 + 2x]} = \end{aligned}$$

مسئله ۱۵ - (کنکور سراسری ۱۳۴۹)

حد تابع  $\frac{x \sin x}{\sin(x^2)}$  وقتی  $x$  به سمت صفر میل کند کدام

امت?

راه حل اول - در تابع مفروض صورت و مخرج رابر

$x^2$  تقسیم می کنیم، حاصل می شود:

$$\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}$$

می دانیم که حد  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$  وقتی  $\alpha$  به سمت صفر میل کند برابر

یک است، بنابراین وقتی  $x$  به سمت صفر میل کند حد

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \text{ و همچنین حد } \frac{\sin x}{x}$$

تابع مفروض برابر است با:

$$\frac{\sin x + x \cos x}{2x \cos(x^2)}$$

وقتی که  $x \rightarrow 0$ . اما تابع اخیر نیز مبهم است پس مجدد آزادستور هوپیتال استفاده می کنیم:

$$\frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)}$$

وقتی  $x \rightarrow 0$ ، حد این تابع و در نتیجه حد تابع مفروض برابر است با:

$$\frac{2}{2} = 1$$

$$x^4 - 1 \quad (2) \quad x^4 + 1 \quad (1)$$

$$x + 1 \quad (4) \quad x^2 - x\sqrt{2} + 1 \quad (3)$$

**راه حل اول** - عبارت مفروض را تجزیه می کنیم :

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2$$

$$= (x^2 + 1 + x\sqrt{2})(x^2 + 1 - x\sqrt{2})$$

پس جواب شماره (۳) قابل قبول است.

**راه حل دوم** - عبارت  $x^4 + 1$  را بر هر یک از عبارتهای داده شده تقسیم می کنیم تا معلوم کنیم بر کدامیک از آنها بخش پذیر است.

**راه حل سوم** - اولاً جواب (۴) قابل قبول نیست، زیرا ریشه عبارت  $x + 1$  برابر ۱ است و عبارت  $x^4 + 1$  در ازاء  $x = 1$  صفر نمی شود. ثانیاً جوابهای (۱) و (۲) نیز قابل قبول نیستند، زیرا ریشه اولی  $x = 1$  وریشه دومی  $x = 1$  است و عبارت :

$$x^4 + 1 = (x^2)^2 + 1$$

در ازاء هیچ کدام از این ریشه ها صفر نمی شود.

چون جوابهای (۱) و (۲) و (۴) قابل قبول نیستند، پس باید جواب (۳) قابل قبول باشد.

**مسئله ۱۳** (کنکور سراسری ۱۳۴۹)

تابع  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$  مفروض است. کدامیک از

احکام زیر همواره درست است :

(۱)  $y$  می تواند هر مقداری را انتخاب کند.

$$y > 1 \quad (2) \quad \frac{1}{2} < y < \frac{3}{1} \quad (2)$$

$$y > \frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \quad (4)$$

**راه حل اول** - عبارت را نسبت به  $x$  مرتب می کنیم:

$$(y - 1)x^2 - x + y - 1 = 0$$

برای اینکه این معادله در ازاء هر مقدار از  $x$  دارای

جواب باشد باید داشته باشیم :

$$\Delta = 1 - 4(y - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (y - 1)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$$

**راه حل دوم** - چون تابع همواره معین و اتصالی است

پس مقادیر ماکسیمم یا مینیمم حدود آن را معین می کند :

$$y' = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-4x^3 - 4x^2 - 1}{(x+2)[\sqrt{x^4 - 1} + x^2 + 2x]} \\ &= \frac{-4x^3 - 4x^2 - 1}{x^2} \\ &= \frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)\left[\frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^2} + \frac{x^2 + 2x}{x^2}\right]}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left[\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}} + 1 + \frac{2}{x}\right]} \end{aligned}$$

وقتی  $\infty \rightarrow x$  حد کسر اخیر برابر است با :

$$h = -2 - \frac{4}{1 \times 2} = -2 \quad \text{پس} \quad h = -2 \quad \text{و معادله مجانب تابع}$$

$$y = x - 2$$

**راه حل دوم** - با فرض آنکه :

$$y = mx + h$$

معادله مجانب باشد :

$$\frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x + 2} = mx + h$$

$$x^4 - 1 = [(x+2)(mx+h)]^2 =$$

$$m^2x^4 + 4m^2x^2 + 4mhx^2 + \dots$$

$$(m^2 - 1)x^4 + (4m^2 + 4mh)x^2 + \dots = 0$$

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 4m^2 + 4mh = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ h = -2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} m = -1 \\ h = 2 \end{cases}$$

پس دو خط به معادله های

$$y = x - 2 \quad \text{و} \quad y = -x + 2$$

هر دو مجانبهای منحنی اند !

از راه حل اول نتیجه می شود که فقط جواب (۱) قابل قبول است. اما از راه حل دوم نتیجه می شود که هم جواب (۱) و هم جواب (۴) قابل قبول می باشند. اختلاف نتایج دو راه حل در چیست؟

راه حل دوم هر چند که ساده تر و کوتاه تر است اما چون ضمن آن طرفین تساوی به توان زوج می رسد، تساوی حاصل با تساوی اول معادل نیست. به عبارت دیگر : هر گاه طرفین معادله ای رابه توان زوج برسانیم بسیار ممکن است که برای معادله جواب یا جوابهای اضافی بدست آید.

**مسئله ۱۲** - (کنکور سراسری ۱۳۴۹)  
عبارت  $x^4 + 1$  بر کدامیک از عبارات زیر قابل قسمت است.

است . حاصل این عبارت در ازاء  $-2 = x$  باید برابر ۳۳ باشد یعنی :

$$-3(-2+m) = 33 \Rightarrow m = -9$$

$$(x-1)(x-9) = x^2 - 10x + 9$$

**مسئله ۱۵** (کنکور ۱۳۴۹ شبانه دانشگاه تهران)

سه جمله‌ای  $x^2 + 2x + 1$  مفروض است ، آن را به صورتهای زیر تجزیه کردیم . کدام درست است :

$$\text{الف} : (x+1)(2x+2x+1)(2x+2x+1)$$

$$\text{ب} : (2x+2x+1)(2x-1)$$

$$\text{ج} : (2x+2x+1)(2x-2x+1)$$

راه حل اول - بافرض  $A = x^2 + 2x + 1$  و با توجه به اینکه :

$$2x^2 = 2x^2 = A^2$$

عبارت مفروض را بر حسب  $A$  نوشت و تجزیه می‌کنیم :

$$A^2 + A + 1 = A^2 - A^2 + A^2 + A + 1 =$$

$$= A^2(A^2 - 1) + (A^2 + A + 1) =$$

$$= A^2(A - 1)(A^2 + A + 1) + (A^2 + A + 1)$$

$$= (A^2 + A + 1)(A^2 - A^2 + 1)$$

$$2x^2 + 2x + 1 = (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$$

راه حل دوم - برای هریک از یک از سه عبارتی که به عنوان جواب داده شده است عمل ضرب و اختصار را انجام می‌دهیم . معلوم خواهد شد که حاصل ضرب (ج) برابر با عبارت مفروض است .

$$y' = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1, y = \frac{3}{2} \quad x = -1, y = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$$

**مسئله ۱۶** (کنکور سراسری ۱۳۴۹)

کدامیک از عبارات زیر همواره بر  $x$  قابل قسمت و باقیمانده تقسیم آن بر  $x+2$  برابر ۳۳ است :

$$x^2 - 10x + 9 \quad (1) \quad x^2 - 5x + 4 \quad (2)$$

$$x^2 - 9x + 8 \quad (3) \quad x^2 - 4x + 3 \quad (4)$$

راه حل اول - اولاً هریک از چهار عبارت داده شده بر  $x$  بخش پذیر ند زیرا حاصل هر کدام از آنها در ازاء  $x = -2$  برابر صفر است . ثانیاً مقدار هریک از چهار عبارت را در ازاء  $x = -2$  حساب می‌کنیم به ترتیب مقدایر  $18, 33, 15, 30$  بدست می‌آید . پس جواب (۲) قابل قبول است .

راه حل دوم - هریک از چهار عبارت داده شده را یک بار بر  $x$  و یک بار بر  $x+2$  تقسیم می‌کنیم تا معلوم شود برای کدامیک از آنها باقیمانده تقسیم اول صفر و باقیمانده تقسیم دوم ۳۳ است .

راه حل سوم - عبارتی که بر  $x$  بخش پذیر بوده و از درجه دوم باشد به صورت :

$$(x-1)(x+m)$$

### واسطه‌ها (دباله از صفحه ۲۱۲)

بنابراین :

$$A_{2^m+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{2^m+1}) : 2^{m+1} = \left[ \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^m}}{2^m} + \frac{a_{2^m+1} + a_{2^m+2} + \dots + a_{2^{m+1}}}{2^m} \right] : 2$$

$$> \left[ \sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_{2^m}} + \sqrt[m]{a_{2^m+1} a_{2^m+2} \dots a_{2^{m+1}}} \right] : 2$$

$$> \left[ \sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_{2^m}} \right]^{\frac{1}{m}} \left[ \sqrt[m]{a_{2^m+1} a_{2^m+2} \dots a_{2^{m+1}}} \right]^{\frac{1}{m}} = G_{2^m+1}$$

حال  $n$  را یک عدد صحیح و مشت دلخواه انتخاب می‌کنیم باید ثابت کنیم  $G_n < A_n$ . عدد صحیح و مشت  $m$  را طوری اختیار می‌کنیم که  $n > 2^m$  باشد . چون خود  $n$  می‌تواند مانند یک  $m$  عمل کند اما  $n > 2^m$  پس :

$$\sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_{2^m} \dots a_{n+1} \dots a_n} < (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2^m}) : 2^m$$

پس داریم  $G_n < A_n$  :

۶) از روی تعریف  $A_n$  و  $G_n$  و  $H_n$  معلوم است که اگر  $A_n = G_n = H_n$  باشد  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  خواهد بود و اگر

تمام  $a_i$  ها مساوی نباشند خواهیم داشت :

## ۷- اتحادهای جبری

ضلاع آن دو مربع برابر باشند برابر است با مساحت مربعی که ضلع آن برابر است با مجموع ضلعهای آن دو مربع.»

این اتحاد همان اتحاد جبری زیر است:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

دانشمند دیگر یونانی دیوفانت در کتاب حساب خود اتحادهای زیر را به شکل جبری بکار برده است.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

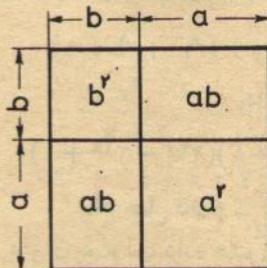
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

خوارزمی ریاضیدان اسلامی در کتاب خود اتحادها را با تعییر هندسی بیان کرده است. اتحادهایی که امروز مشهورند تو مسط دور ریاضیدان بزرگ ویت و دکارت تنظیم شده‌اند.

در آثار یسیار قدیمی ریاضی، بعضی اتحادهای جبری بکار رفته است. در حدود شش قرن قبل از میلاد **فیناغورث** برای تبیین عددی که بتوانند اندازه‌های ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه باشند اتحادهایی جبری ارائه داده است. بعد از آنکه در یونان به هندسه توجه شد، اتحادهای جبری نیز به شکل هندسه مطرح گردید. **اقلیدس** در کتاب معروف خود «اصول» که شامل ۱۳

مقاله در هندسه است،  
ده اتحاد جبری را به  
شکل هندسی بررسی  
کرده است. یکی از این  
ده اتحاد چنین است:  
«مجموع مساحت‌های  
دو مربع و دو مربع متطابق  
که ابعاد مستطیل‌ها با



## ۸- معادله‌های یک مجهولی درجه اول

در همین پاپیروس مسائل دیگری مطرح شده است که معادلات مربوط به آنها چنین است:

$$x + \frac{x}{y} = 19$$

$$x + \frac{x}{5} = 21$$

$$x + \frac{x}{2} = 16$$

$$x + \frac{x}{4} = 15$$

$$2x + \frac{1}{3}x = 1$$

$$3x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = 1$$

در پاپیروس دیگری که اکنون در مسکو نگاهداری می‌شود مسئله به صورت زیر مشاهده می‌شود: «مطلوبست ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه در صورتی که نسبت آنها مساحت مثلث علوم باشد».

بابیلان و مصریان قدیم مسائلی را حل کرده‌اند که محل آنها مستلزم حل معادله‌های یک مجهولی درجه اول بوده است. مثلاً در پاپیروس مصری به نام «راندا» که مربوط به ۲۰۰۰-۱۷۰۰ سال قبل از میلاد است، فصلی به نام «راهنمای محاسبه‌شنهای آخمیس» تنظیم شده است که بخشی از آن عنوان «محاسبه توده» را دارد و در آنجا توده به معنی مجهول بکار رفته است.

یک مسئله از مسائل این یادگاری با ارزش نقل می‌شود: «کدام عدد است که اگر دو ثلث آن را به آن بیفزائیم و از حاصل ثلث مجموع را کم کنیم غدد ۱۵ حاصل شود؟»

حل مسئله فعلاً از راه معادله زیر انجام می‌گیرد:

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = 15$$

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) = 1 \Rightarrow x = 15$$

**دیوفافت ریاضیدان یونانی** قسمت عمده کتاب «حساب»

خود را به معادلات اختصاص داده است. در «مجموعه منتخب یونانی» نوشته روی سنگ قبر دیوفانت به این صورت نقل شده است: در اینجا دیوفانت به خاک سپرده شده است. نبسته سنگ قبر، مارا در محاسبه قرنی که او زندگی می کرد راهنمایی می کند. به اراده خداوند دریک دوازدهم زندگی خود بچه بود. دریک ششم عمر او جوانی او گذشت. یک هفتم عمر اورا می افزاییم، می شود زمان ازدواج او. پنج سال می گذرد و صاحب هسروی می شود. اما پسر به اندازه نصف عمر پدر عمر کرد. دیوفانت ۴ سال ازین ضایعه ناراحت بود تا مرد بگویند که دیوفانت چند سال عمر کرد؟

نوشته بالا به صورت معادله زیر خلاصه می شود:

$$\frac{x}{12} + \frac{x}{6} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} = x$$

ازین معادله عمر دیوفانت برابر ۸۴ سال بدست می آید. دیوفانت مسائل را از راههای کوتاه و با عملیات بسیار کم حل می کرد بدون آنکه اعداد منفی و گنگ را بداند و از تقسیم سردری باور دارد. باید یادآوری کنیم که دیوفانت از حروف برای نشان دادن مجھول استفاده می کرد. کسی که بیش از پیشینیان خود به حل معادلات توجه کرده خوارزمی بوده است. خوارزمی برای حل معادلات دور و شیر «جبر» و «مقابله» را بکار برده است. همانطور که قبل از گفتیم جبر و مقابله به معنی مرتب کردن و ساده کردن معادله است. برای مثال معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$7x - 5 = 3x - 2$$

با بکار بردن روش جبر بدست می آوریم:

$$7x + 2 = 3x + 5$$

با بکار بردن روش مقابله خواهیم داشت:

$$4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

نظریه حل معادلات در اروپای قرن میزدهم همان روش متدالوی در آسیای میانه بوده است. در این زمان ریاضیدانان اروپائی از شرقیها پیروی می کردند. مثلا ریاضیدان ایتالیایی **فیبو ناچی** در قرن سیزدهم در کتاب خود برای حل معادله درجه اول همان روش خوارزمی را تکرار می کند.

پیشرفت‌های بعدی در حل معادلات از زمانی آغاز شد که استعمال حروف و علامات متدالوی کشته شد.

**فرانسوایت** (۱۶۰۳-۱۵۴۰) ریاضیدان بزرگ فرانسوی

ریاضیدانان هندی بیشتر از سایر اقوام قدیم در جبر موقیت بدست آورده بودند. در سال ۱۸۸۱ کتابی خطی مربوط به زمانهای قدیم بدست آمد که صفحات آن از پیوست درخت مخصوص درست شده بود و در آن مسائلی مطرح شده بود که حل آنها به معادله‌های درجه اول منجر می شد. یکی از این مسائل چنین است:

«از چهار هندی، دومی دو برابر اولی، سومی دو برابر بیشتر از دومی، چهارمی چهار برابر سومی صدقه می دهد. مبلغ صد هشتاد آن روبهم ۱۳۲ است. اولی چقدر صدقه داده است؟». در کتاب خطی مذبور این مسئله چنین حل شده است: «فرض کنیم صدقه اولی واحد باشد، پس از دومی ۲ واحد، از سومی ۶ واحد و از چهارمی ۲۴ واحد روبهم ۳۳ واحد می شود. ۱۳۲ چهار برابر ۳۳ است پس یک واحد اولی نیز باید چهار برابر شود یعنی صدقه اولی ۴ بوده است.

در کتاب حساب تألیف اریابهاتا ریاضیدان هندی که در اواسط قرن ششم نگاشته شده است ۳۳ روش و قاعده مربوط به محاسبات و مسائل طبق مرسوم آن عصر به صورت شعر بیان شده است. روش سی ام چنین است: «دو شخص دارای ثروتهاي متساويند. امامقدار پول نقد و تعداد اشياء بهادر آنان متفاوت است. حساب کنید بهای یک شيء بهادر را». هر گاه پول نقد اویی  $c$  و تعداد اشياء او  $a$  و پول نقد دومی  $d$  و تعداد اشياء وی  $b$  باشد داریم:

$$ax + c = bx + d \Rightarrow x = \frac{d - c}{a - b}$$

خود اریابهاتا فقط جواب مسئله را به صورت زیر بدست داده است: «... تفاضل پولهای شخص دوم برشخص اول تقسیم بر تفاضل تعداد اشياء اولی بر دومی».

ریاضیدان دیگر هندی، **بهاسکارا** در کتاب خود جبر را به فصلهای مختلف تقسیم کرده است. یکی از این فصلها به تعیین جواب معادلات اختصاص دارد. بهاسکارا در این فصل مسائلی را حل کرده است که به معادلات درجه اول متنقی می شوند. امتیاز کتاب بهاسکارا بر دیگر کتابهای ریاضی هند قدیم آن است که این کتاب به نظر نوشته شده است و بهمین جهت اشکالات و موارد نامفهومی که در آثار دیگران مشاهده می شود در این کتاب وجود ندارد. یکی از مسائلی که در کتاب بهاسکارا طرح و حل شده چنین است: «خمس بلک دسته زنبور عسل روی گل سرخ و ثلث این دسته روی شکوشه و سه برابر تفاضل این دو دو گروه روی گلهای دیگر نشستند، یک زنبور در حال پرواز باقی ماند. حال شما می توانید تعداد زنبوران عسل را تعیین کنید». این مسئله به صورت زیر حل می شود:

کرد . ویت و کیلی ممتاز بود . یکی از تاریخ نویسان ریاضی درباره او سی گوید: «ویت در پیشتر عمر خود آنقدر در کارها و فعالیتهای حقوقی خود غرق شده بود که مشکل بود تصور کرد که او به کارهای بزرگ ریاضی خود نیز می‌رسد . این کارهای ثمرة پژوهش‌های عمیق و پیگیر او در ریاضی و حاکی از مطالعه اساسی تأثیفهای قبلی است . حکایت می‌کنند که او قادر بود برای بررسی پژوهش‌های ریاضی خود مهشبانه روز مدام پشت میز خود بدون وقفه کار کند .»

\*\*\*

را اغلب پدر جبر حرفی می‌نامند . زیرا او تقریباً مبتکر جبر حرفی است و در این باره بیش از دیگران کار کرده است . مطالعه حالت کلی معادلات جبری و بسط آوردن روابط بین ریشه‌ها و ضرایب مطالعه درجه دوم را به اونسبت می‌دهند . ویت و کیل دعاوی بود و یکی از رجال بزرگ دولتی بشار می‌آمد . او ریاضیات را در موقع بیکاری دراداره یا در موقع استراحت در منزل مطالعه می‌کرد . ویت نه تنها جبر بلکه هندسه و مثلثات را در زمان کمی با موقتی فرا گرفت . پژوهش‌های خود را در ریاضیات در کتابی به نام «قانون ریاضیات» در سال ۱۵۷۹ منتشر

## معادلات یک‌جهولی درجه دوم

را بکار برده است . او ریشه منفی را بحساب نیاورده است . بهاسکارا در رساله مربوط به نجوم مسائلی را مورد بحث قرار داده است که حل آنها به معادله درجه دوم متنه می‌گردد . یکی از این مسائل بدین صورت است: «عددی می‌میمون ایستاده و نظاره می‌کنند . می‌ذور یک هشتمن تعداد آنها به داخل چنگل فرامی‌کنند و بقیه که ۱۲ عددند روی تپه جیغ می‌کشند . به من بگو که رویهم چند می‌میمون بوده است؟» . حل این مسئله منجر به حل معادله زیر می‌شود:

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

نظریه معادلات درجه دوم توسط خوارزمی توسعه یافته است . این ریاضیدان بر جسته شش صورت از معادلات درجه دوم را به شرح زیر بررسی کرده و جواب آنها را بدست داده است:

$$x^2 = bx \quad , \quad x^2 = c \quad , \quad bx^2 = c$$

$$x^2 + bx = c \quad , \quad x^2 + c = bx$$

$$bx + c = x^2$$

کوشش برای تکمیل نظریه عمومی معادلات درجه دوم در اروپا در قرن شانزدهم توسط ویت و بعد توسط ثییر از انجام گرفت .

قاریب‌چه حل معادلات درجه دوم نیز به قرن‌های بسیار قبل بر می‌گردد . در یونان قدیم جبر هندسی را بنا نهاده بودند که در آن برای حل بعضی از معادلات درجه دوم روش‌های هندسی بیان شده بود . در مقابل درجه دوم از کتاب «اصول» اقلیدس حل هندسی معادلات درجه دوم درج گردیده است . در قرن اول میلادی ، ریاضیدان و مهندس یونانی گیرون روش جبری خالص را برای حل معادله درجه دوم پیشنهاد کرد . وی ریشه معادله :

$$11x^2 + 29x = 212 / 4$$

را به صورت :

$$x = \frac{1}{11/2} \sqrt{176 \times 212 + 841} - 29$$

بدست داده است .

دیوفانت ریاضیدان یونانی قرن سوم نیز روش جبری برای حل معادلات درجه دوم پیشنهاد کرده است که این روش فعلاً در دست نیست . روش کلی حل معادلات درجه دوم توسط ریاضیدانان هندی ارائه شده است . ریاضیدان معروف هندی بهاسکارا برای تعیین ریشه معادله :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

فرمول :

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تعیین رابطه بین اندازه‌های ضلعهای مثلثی که در آن، نیمساز زاویه A، ارتفاع نظیر رأس B و میانه نظیر رأس C، متقارن‌بند

ترجمه: کامران پارسای قمی



می‌شود:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{AB + AC}{AC} \Rightarrow$$

$$\frac{PA}{AD} = \frac{AB + AB}{2AC + AB} \quad (5)$$

در مثلث ABC بنابراین قضیهٔ ثالث گون (\*) داریم:

$$\frac{PA}{AD} + \frac{PB}{BH} + \frac{PC}{CM} = 2 \quad (6)$$

با فرض: CA = b و BC = a و AB = c روابط

(۱) و (۲) و (۵) را در رابطه (۶) منظور می‌کنیم:

$$\frac{c+b}{2b+c} + \frac{c}{c+AH} + \frac{2b}{2b+c} = 2 \quad (7)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{c}{c+AH} = 2 - \frac{2b+c}{2b+c} = \frac{b+c}{2b+c}$$

$$\frac{c}{AH} = \frac{b+c}{b}$$

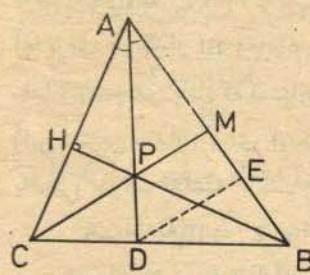
$$AH = \frac{bc}{b+c} \quad (8)$$

ارتفاع BH داخل مثلث واقع است پس زاویه A حاده است و داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AH$$

از این رابطه با توجه به رابطه (۸) نتیجه می‌شود:

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{2b \cdot c}{b+c}$$



در مثلث ABC داریم  
و BH و AD خط  
در نقطه P متقارن‌بند  
نیمساز زاویه AD  
ارتفاع وارد  
بر ضلع AC و CM میانه ضلع AB است.

در مثلث ABH بنابراین نیمساز داریم:

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow \frac{PB}{BH} = \frac{AB}{AB + AH} \quad (1)$$

در مثلث ACM داریم:

$$\frac{PC}{PM} = \frac{AC}{AM} = \frac{2AC}{AB} \Rightarrow \frac{PC}{BM} = \frac{2AC}{2AC + AB} \quad (2)$$

از D موازی با CM رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند.  
در مثلث ADE داریم:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{AM}{ME} \quad (3)$$

در مثلث BCM داریم:

$$\frac{BE}{ME} = \frac{BD}{DC}$$

چون AD نیمساز زاویه A است پس:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BE}{ME} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{BM}{ME} = \frac{AB + AC}{AC} \quad (4)$$

از دورابطه (۳) و (۴) با توجه به اینکه AM = BM نتیجه

# بعضی از مسائل سیال لایه حل

ترجمه: جواد فیض

معلوم نیست که آیا اعداد نامحدود دیگری برای  $m$  وجود دارد یا نه؟

**۱- آیا مسئله ۶ هنگامی که  $w = z$  شود یعنی معادله به صورت  $x^r + y^r + z^r = m$  باشد همواره جواب دارد؟**

آیا برای هر مقدار  $m$  معادله دارای جواب است؟ کمترین مقدار  $m$  چقدر باشد که کمتر از آن حتی مسئله جوابی نداشته باشد. (این کمترین مقدار، برای اینکه جواب معادله مشخص نباشد، یا حتی جواب نداشته باشد ۷۶ است).

**۲- معادله  $m = x^r + y^r + z^r$  به ازای مقادیر مخصوص معینی جوابهایش معلوم است، اما نه به آن معنا که برای همه مقادیر  $m$  جوابهای معادله مشخص باشد.**

**۳- آیا معادله سیال  $ax + by = c$  که در آن  $a$  و  $b$  نسبت به هم اولند، تعداد نامحدودی جواب دارد، بطوری که  $x$  و  $y$  نسبت به هم اول باشند؟**

**۴- حالت کلی  $a$  و  $b$  چه باشد تا جوابهای معادله زیر اعداد صحیح باشند:**

$$x^r + y^r + z^r - axyz = b$$

**۵- اگر جواب مسئله ۱۰) بله باشد آیا معادله برای حالت مخصوص:**

$$c=2 \quad a=1 \quad b=1$$

هم صحیح است؟

**۶- معادله:**

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4$$

سه گروه جواب دارد به این ترتیب:

$$\begin{cases} x = 1, 7, 21 \\ y = 2, 8, 36 \\ z = 3, 9, 37 \end{cases}$$

آیا این معادله جوابهای دیگری هم دارد؟ آیا تعداد این جوابها نامحدود است؟ آیا رابطه  $z - y \neq 1$  می‌تواند وجود داشته باشد؟

**۷- آیا تعداد اعداد اول نامحدودی به فرم  $(n^r + 1)^r$  وجود دارد؟**

**مسئله بذاری:**

$n = 1, 2, 4, 6, 10, 14, 16$  صحیح است. همان سؤال ممکن است در مورد اعدادی به فرم  $n! + 1$  مطرح شود مسئله هنگامی مشکلتر خواهد شد که پاسخ سؤال فوق «بلی» باشد.

**۸- آیا سه عدد صحیح و مثبت چنان یافته می‌شود که حاصل ضربشان مساوی سکع بمجموع عشان باشد؟ به عبارت دیگر آیا معادله سیال:**

$$(x + y + z)^r = xyz$$

دارای جواب است؟ مسئله برای اعداد صحیح و منفی هم قابل قبول است، شاید گمان کنیم که مسئله ساده است، اما هنوز بدون حل مطلوب باقیمانده است.

**۹- معلوم شده است که تعداد جوابهای معادله سیال:**

$$x^r - y^r = 7$$

محدود است، اما همه جوابهایش را نمی‌دانیم و حتی تعداد آنها هم مشخص نیست.

**۱۰- آیا او عدد متولی به فرم  $a^b$  و  $b^a$  وجود دارند بطوری که  $a$  و  $b$  خودشان اعداد متولی باشند؟ (جز ۲۲ و ۳۲)**

و هنوز حتی معلوم نشده است که آیا سه عدد متولی به این فرم وجود دارد یانه؟

**۱۱- آیا تعداد نامحدودی اعداد متولی وجود دارند که تصاعد حسابی بسازند؟ مثل ۷ و ۵ و ۳ یا ۵۹ و ۵۳ و ۴۷**

**۱۲- در ازای چه مقدار  $m$  معادله سیال:**

$$x^r + y^r + z^r + w^r = m$$

دارای جوابهای صحیح (مثبت یا منفی) برای مجهولات  $x$  و  $y$  و  $w$  و  $z$  است؟

**۱۳- حتی وقتی که یک مقدار  $m$  معین باشد (در مسئله ۶)**

## حل مسائل پکان شماره ۸۰

$$x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a-b}{b}} = \frac{\sqrt{2ab-b^2}}{ab}$$

$$\sqrt{1-ax} = \sqrt{1-\frac{\sqrt{2ab-b^2}}{b}} = \frac{b-\sqrt{2ab-b^2}}{b}$$

$$\sqrt{1+ax} = \frac{b+\sqrt{2ab-b^2}}{b}$$

$$\frac{\sqrt{1-ax}}{\sqrt{1+ax}} = \frac{b-\sqrt{2ab-b^2}}{b+\sqrt{2ab-b^2}} =$$

$$\frac{b^2 + 2ab - b^2 - 2b\sqrt{2ab-b^2}}{b^2 - 2ab + b^2} =$$

$$= \frac{a - \sqrt{2ab-b^2}}{b-a}$$

$$\sqrt{1+bx} = \sqrt{1+\frac{\sqrt{2ab-b^2}}{a}} = \frac{a + \sqrt{2ab-b^2}}{a}$$

$$\sqrt{1-bx} = \frac{a - \sqrt{2ab-b^2}}{a}$$

$$\frac{\sqrt{1+bx}}{\sqrt{1-bx}} = \frac{a + \sqrt{2ab-b^2}}{a - \sqrt{2ab-b^2}} =$$

$$= \frac{(a + \sqrt{2ab-b^2})^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a + \sqrt{2ab-b^2})^2}{(a-b)^2}$$

چون  $a > b$  است خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = \frac{a + \sqrt{2ab-b^2}}{a-b}$$

$$P = \frac{a - \sqrt{2ab-b^2}}{b-a} \times \frac{a + \sqrt{2ab-b^2}}{a-b}$$

$$P = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{-(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2}{-(a-b)^2} = -1$$

۸۰/۳ - ترجمه از فرانسه

پاره خط AB و نقطه C واقع بر آن مفروض است بقسمی

## حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۸۰/۱ - ترجمه فتح الله زرگری

حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بدست آورید:

$$S = \frac{\sqrt{60a^2b^2}}{b} + 2a\sqrt{\frac{5b}{3a}}$$

حل - عبارت وقتی با معنی است که  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$

باشد. با این شرایط داریم:

$$\sqrt{60a^2b^2} = 2|ab|\sqrt{15ab} = 2ab\sqrt{15ab}$$

$$\sqrt{\frac{5b}{3a}} = \sqrt{\frac{15ab}{9a^2}} = \frac{\sqrt{15ab}}{3|a|}$$

$$S = \frac{2ab\sqrt{15ab}}{b} + \frac{2a\sqrt{15ab}}{3|a|}$$

دو حالت را باید در نظر بگیریم. حالت اول اگر  $a > 0$  باشد

:  $|a| = a$  و در نتیجه

$$S = 2\sqrt{15ab}(a + \frac{1}{3})$$

حالت دوم - اگر  $a < 0$  باشد  $|a| = -a$  داریم:

$$S = 2\sqrt{15ab}(a - \frac{1}{3})$$

۸۰/۲ - ترجمه فتح الله زرگری

به فرض  $a > b > 0$  هرگاه داشته باشیم:

$$x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$$

حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بدست آورید:

$$P = \frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$$

حل - به ترتیب داریم:

$x^1 + x^2 + \dots + x^n - 1$  و چون  $x^1 + x^2 + \dots + x^n$  بخش پذیر است پس عبارت مفروض بر :  $x^1 + x^2 + \dots + x^n - 1$  بخش پذیر است.

- فرستنده: جواد فیض دانشجوی دانشکده فنی دانشگاه تبریز

ثابت کنید به ازاء مقادیر صحیح  $n > n^1 > n^2 > \dots > n^n$  داریم:

حل- هر گاه  $k$  و  $n$  دو عدد صحیح و مثبت و :

$$n - k > 1$$

باشد داریم :

$$(k+1)(n-k) = k(n-k) + (n-k)$$

$$k(n-k) + (n-k) > k \times 1 + (n-k) = n$$

$$(k+1)(n-k) > n$$

در این نامساوی  $k$  را به ترتیب با مقادیر :

$0, 1, \dots, n-1$  جانشین می کنیم که خواهیم داشت:

$$1 \times n = n$$

$$2 \times (n-1) > n$$

$$3(n-2) > n$$

⋮

$$(n-1) \times 2 > n$$

$$n \times 1 = n$$

از ضرب نظریه به نظریه طرفین تساویها و نامساویها بالادریکدیگر خواهیم داشت:

$$(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) > n^n$$

- ترجمه فتح الله زرگری

بهفرض  $a \neq b$  و  $a > b$  در ازاء :

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بدست آورید:

$$S = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

حل- اولاً مخرج کسر عبارت  $S$  را گویا می کنیم:

$$S = \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}{x+1 - (x-1)} = \frac{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}{2}$$

$$S = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{ثانیاً داریم:}$$

دنباله ۵۵ صفحه

که  $C$  از  $O$  و میانه  $AB$  متمایز است. به قطرهای  $AC$  و  $BC$  و دریک طرف  $AB$  سه نیمدايره رسم می کنیم و در نقطه  $C$  عمودی بر  $AB$  اخراج می کنیم که نیمدايره به قطر  $AB$  را در  $P$  قطع می کند. خطوط  $PA$  و  $PB$  را نیز رسم می کنیم که نیمدايرهای به قطرهای  $AC$  و  $BC$  را در  $A'$  و  $B'$  تلاقی می کنند. ثابت کنید که  $A'B'$  مماس مشترک نیمدايرهای به قطرهای  $AC$  و  $BC$  است و خطی که در  $P$  بر نیمدايره به قطر  $AB$  مماس باشد با  $A'B'$  موازی است.

حل- دو خط

$C'P$  را رسم می کنیم.

هر یک از زاویه های

$AA'C$  و  $APB$

$CB'B$  قائم هاند، زیرا

محاطی بوده و قطر دایره

مربوط را دربردارند. پس چهار ضلعی  $PA'CB$  مرربع-

مستطیل است. اگر  $I$  نقطه تلاقی  $PA'CB$  باشد داریم:

$$IP = IA' = IC = IB'$$

از  $I$  به نقاط  $A'$  و  $C$  از دایره به قطر  $AC$  وصل شده است و چون  $IA' = IC$  برابر و  $IB'$  برابر مماس است پس  $IA' = IB'$  برابر مماس است. به همین ترتیب معلوم خواهد شد که  $IA' = IB'$  برابر مماس  $BC$  است. پس  $A'B'$  مماس مشترک دایره های به قطرهای  $AC$  و  $BC$  است.

هر گاه  $X'$  خطی باشد که در  $P$  بر نیمدايره به قطر  $AB$  مماس است، زاویه ظلی  $BPX$  با زاویه محاطی  $PAB$  برابر است و زاویه اخیر با زاویه  $B'A'C$  و این زاویه با زاویه  $PB'A'$  برابر است. پس دوزاویه  $xPB$  و  $xP'A'$  باهم برابرند و در نتیجه خط  $X'$  با خط  $A'B'$  موازی است.

## حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

- فرستنده: محمود تویسر کانی دانشجوی

دانشکده فنی دانشگاه تهران

ثابت کنید که به ازاء مقادیر صحیح و مثبت  $k$  عبارت

$$x^{3k} + x^{2k} + x^k - 1$$

بعضی از عبارت مفروض به صورت زیر نوشته می شود:

$$(x^k)^{10} \times x^5 + (x^k)^6 \times x$$

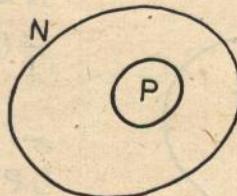
حاصل این عبارت در ازاء  $1 = x^3$  برابر است با  $x^2 + x + 1$  یعنی

با قیمانده تقسیم عبارت مفروض بر  $1 - x^3$  برابر است با:

آموزش ساده نظریه مجموعه‌ها با روش بر نامه‌ای - راهنمای در صفحه دوم جلد ملاحظه شود

متهم V نسبت به L

۶  
۲۰



زیر مجموعه  
PCN

همه عضوهای هر کدام همان عضوهای دیگری است.

خیر

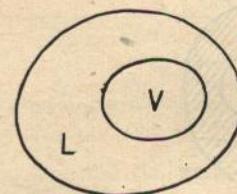
زیرا همه عضوهای هر کدام همان عضوهای دیگری نیست.

(دنباله در شماره بعد)

۵۳

وقتی می‌نویسیم:  $C_{AI}$   
مجموعه کل عبارتست از .....

۵۷



ناحیه مربوط به  
 $C_{LV}$   
را هاشور بزنید

۵۹

$C_{LV}$  را چه می‌خواند؟  
.....

۶۵

همه عضوهای متهم P نسبت به N، یعنی عضوهای  $C_{NP}$ ، در عین حال عضوهای مجموعه ... می‌باشند. پس:  
 $C_{NP} \subset ...$

۶۹

عدد اصلی مجموعه D چند است؟

.....

عدد اصلی مجموعه F چند است؟

.....

دوم مجموعه D و F دارای .... عدد اصلی می‌باشند.

L مجموعه تمام حرفهای آنبا است .

V مجموعه حرفهای صدا دار الفبا است .

A

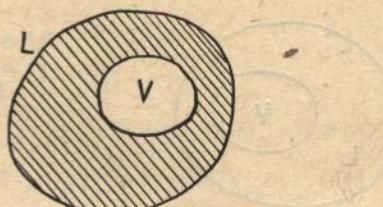
$\complement_{LV}$  چنین خوانده می شود :

.....

عدد اصلی مجموعه L برابر ۲۶ است .

عدد اصلی مجموعه V برابر ... است .

عدد اصلی مجموعه  $\complement_{LV}$  برابر ... است .



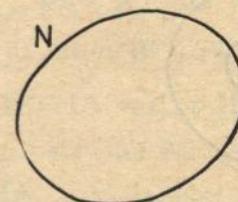
متهم V نسبت به L

تمام عضوهای مجموعه P (عددهای طبیعی زوج) ،

N عضوهای مجموعه

(عددهای طبیعی) نیز

می باشند .



نمودار N را رسم

کرده ایم، نمودار P را

رسم کنید .

مجموعه P .... مجموعه N است .

در سطر زیر چه علامتی باید نوشته شود :

P....N

دو مجموعه D و E متساویند زیرا :

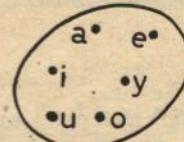
.....

$$\complement_{NP} \subset N$$

۴

۴

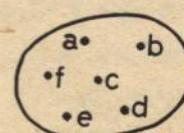
یک



عداد اصلی هر یک از این دو  
مجموعه ۶ است .

آیا این دو مجموعه  
متساویند ؟

.....



چرا ؟

.....

۵۴

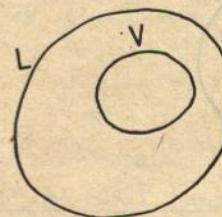
$C_A I$  یعنی متمم  $I$  نسبت به  $A$

$C_A B$  یعنی متمم  $B$  نسبت به  $A$

این دو متمم نسبت به یک مجموعه ... نوشته شده‌اند.

۶۵

حروفهای بی صدای الفبا



e و همچنین حرف p را روی شکل نشان دهید.

۵۸

با زیادآوری می کنیم که  
L مجموعه تمام حروفها  
و V مجموعه حروفهای  
صدادرانفبا است. حرف

۶۳

در موضوع شماره قبل، L عبارت است از مج. و عه....

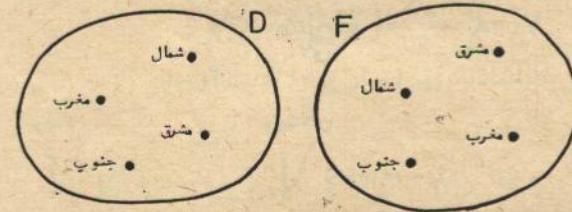
اعداد طبیعی فرد

۶۶

دو مجموعه D و F از چهار جهت اصلی را به شرح  
زیر در نظر می گیریم :

D = {مغرب، جنوب، مشرق، شمال}

F = {جنوب، شمال، مغرب، مشرق}



آیا هر عضوی از D عضو F نیز هست؟ ...

آیا هر عضوی از F عضو D نیز هست؟ ...

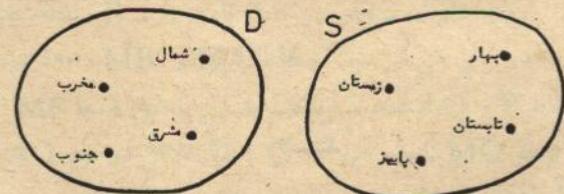
متساویند

۷۰

دو مجموعه متساویند هر گاه همه عضوهای هر کدام از  
آنها همان عضوهای دیگری باشد.

D مجموعه چهار جهت اصلی و S مجموعه چهار فصل است.

متساوی



آیا عضوهای هر یک از این دو مجموعه همان عضوهای  
دیگری است؟ ...

دو مجموعه D و S متساوی ...

۶۵

عدد اصلی مجموعه  
۸۰۰ است .

عدد اصلی مجموعه  
۲۰۰ است ،

عدد اصلی مجموعه  
چند است ؟ ...  $C_A I$

۶۶

عضوی مجموعه L عبارتند از : همه حرفهای الفبا .

عضوی مجموعه V عبارتند از : حرفهای صدادار الفبا .

عضوی مجموعه LV عبارتند از : ..... .

۶۳

مجموعه N اعداد طبیعی را در نظر می گیریم :

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

همچنین مجموعه P اعداد طبیعی زوج را در نظر

می گیریم :

$$P = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$$

ستم P نسبت به N یعنی  $C_{NP}$  عبارتست از مجموعه :

.....

۶۷

هر عضوی از مجموعه D عضو مجموعه F نیز می باشد .

هر عضوی از مجموعه F عضو مجموعه D نیز می باشد .

هر گاه دو مجموعه چنان باشند که همه عضوهای هر کدام از آنها کاملا همان عضوهای دیگری باشند، می گوئیم که آن دو

مجموعه متساویند .

مجموعه های D و F ....

۶۸

نه

نیستند

عدد اصلی هر یک از دو مجموعه D و S برابر ۴ است

اما این دو مجموعه متساوی نیستند .

اگر دو مجموعه دارای یک عدد اصلی باشند ، لازم نیست

که آن دو مجموعه .... باشند .

$$x = \frac{a^r + b^r}{2ab}$$

$$x^r - 1 = \frac{(a^r + b^r)^2 - 4a^r b^r}{4a^r b^r} = \frac{(a^r - b^r)^2}{4a^r b^r}$$

$$\sqrt{x^r - 1} = \left| \frac{a^r - b^r}{2ab} \right| = \frac{|a^r - b^r|}{2|ab|}$$

چون  $a^r > b^r$  است پس  $|ab| = ab$  و :

$$S = \frac{a^r + b^r}{2ab} + \frac{|a^r - b^r|}{2ab}$$

دو حالت باید در نظر بگیریم . حالت اول آنکه  $a^r > b^r$  باشد در این صورت :

$$|a^r - b^r| = a^r - b^r$$

امت و داریم :

$$S = \frac{a^r + b^r + a^r - b^r}{2ab} = \frac{2a^r}{2ab} = \frac{a}{b}$$

حالت دوم-اگر  $a^r < b^r$  باشد داریم  $|a| < |b|$  :

$$|a^r - b^r| = -a^r + b^r$$

و در نتیجه :

$$S = \frac{a^r + b^r - a^r + b^r}{2ab} = \frac{2b^r}{2ab} = \frac{b}{a}$$

### ۸۰/۷ - ترجمه فتح الله زرگری

از معادله زیر مقدار  $x$  را بدست آورید:

$$\sqrt{\frac{x+1}{\sqrt{\frac{3}{2^{2x}-1}}} - \sqrt{\frac{3x-7}{320/16x-1/8}}} = 0$$

حل- معادله به صورت زیر خلاصه می شود:

$$\frac{\frac{2x-1}{2x-3}}{\frac{2x-9}{2x-7}} = 2$$

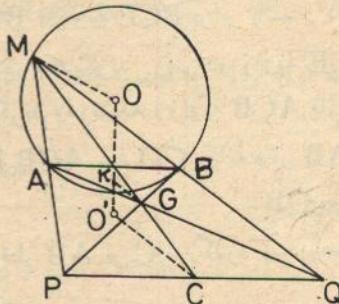
$$\frac{2x-1}{2x-3} = \frac{2x-9}{2x-7} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

### ۸۰/۸ - از عبدالوهاب فخری‌اسرا

روی دایرة مفروض دو نقطه ثابت  $A$  و  $B$  و نقطه متغیر  $M$  را در نظر می گیریم . خطوط  $MA$  و  $MB$  را به ترتیب تا نقاط  $P$  و  $Q$  امتداد می دهیم بقسمی که  $A$  وسط  $MP$  و  $B$  وسط  $MQ$  باشد. هرگاه  $G$  نقطه تلاقی دو خط  $AQ$  و  $BP$  باشد، مکان نقطه  $G$  را تعیین کنید.

حل- در مثلث  $MPQ$  دو خط  $QA$  و  $PB$  به ترتیب میانه‌های ضلعهای  $MP$  و  $MQ$  می باشند. پس  $G$  نقطه تلاقی میانه‌های مثلث است و اگر  $D$  و  $C$  به ترتیب نقاط تلاقی  $MG$

باشد  $D$  و سط  $PQ$  و سط  $AB$  باشد است.



قرینه  $O'$  نسبت به  $AB$  را بدست می آوریم و از  $G'$  سواری  $CO'$  رسم می کنیم تا  $OO'$  را در  $K$  قطع کند . چهار- غلیعی  $MOCO'$  متوازی الاضلاع است پس :

$$O'C = OM = R$$

می دانیم که  $MD = DC$  و  $MG = 2GC$  پس :

$$\begin{aligned} \frac{DG}{DC} &= \frac{DC - CG}{DC} = \frac{AC - 2CG}{AC} = \\ &= \frac{2CG - 2CG}{2CG} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{DK}{DO'} = \frac{KG}{O'C} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{3}$$

از تنشیهای اخیر نتیجه می شود که اولاً  $K$  نقطه ثابت است که در ثلث  $OO'$  ابتدا از  $O'$  واقع شده است . ثانیاً طول  $KG$

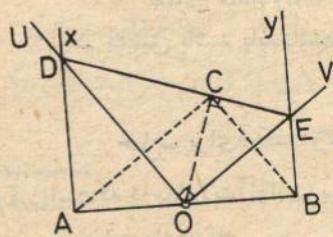
برابر با مقدار ثابت  $\frac{R}{3}$  است . پس مکان  $G$  دایره ای است به مرکز  $K$  و به شعاعی برابر با مثلث شعاع دایرة مفروض  $O$ .  
۸۰/۹ - ترجمه از مجله تربیت ریاضی

پاره خط ثابت  $AB$  را که  $O$  وسط آن است در نظر می گیریم .

در  $A$  و  $B$  عمودهای  $AX$  و  $BY$  را دریک طرف  $AB$  عمود بر  $AB$  رسم می کنیم . زاویه قائم  $UOV$  را در نظر می گیریم که رأس  $O$  از آن ثابت و ضلعهای  $OU$  و  $OV$  حول نقطه دوران می کنند بقسمی که  $OU$  با  $DX$  در  $D$  و  $OV$  با  $BY$  در  $E$  مترافق است . ثابت کنید که خط متغیر  $DE$  همواره بر دایرة میانه است .

حل- عمود

$OC$  را به  $DE$  رسم می کنیم . باید ثابت کنیم که طول  $OC$  با نصف طول  $AB$  برابر است . خطوط  $AC$  و  $BC$  را



$$\frac{b \cos \theta}{l} = \frac{a \sin \theta}{m} = \frac{ab}{n}$$

$$\cos \theta = \frac{ab \cdot l}{bn} = \frac{al}{n} \quad \sin \theta = \frac{bm}{n}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow a^2 l^2 + b^2 m^2 = n^2$$

## حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۸۰/۱۲ - از علیرضا علیپور دانشجوی دانشکده

فنی دانشگاه تهران

نقطه (۳ و ۱) A یک رأس از مربع ثابت ABCD است که  $\omega$  مركز آن بر خط متغیر  $\triangle$  به معادله  $(m+1)x - (m-1)y = 4$  قرار دارد. مختصات رأسهای دیگر مربع را پیدا کنید.

حل - قبل باید ثابت کنیم که خط  $\triangle$  درازاء همه مقادیر  $m$  از نقطه ثابت می گذرد. برای این کار معادله  $\triangle$  را نسبت به  $m$  مرتب می کنیم :

$$m(x-y) + x + y - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega \quad | \quad 2$$

رأس C از مربع قرینه A نسبت به  $\omega$  است پس (۱ و ۳).

با فرض  $(\alpha, \beta)$  داریم :

$$\begin{cases} BA' + BC' = AB' \\ BA' = BC' \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha - 1)^2 + (\beta - 3)^2 + (\alpha - 3)^2 + (\beta - 1)^2 = \\ = (3 - 1)^2 + (1 - 3)^2 \\ (\alpha - 1)^2 + (\beta - 3)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\beta - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 4\beta + 6 = 0 \\ \alpha = \beta \end{cases}$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 3$$

B(3, 3) و D(1, 1)

۸۰/۱۳ - هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت باشند

به فرض  $x \neq b$  اولاً نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید:

$$y = \frac{a\sqrt{(x-b)}}{x-b}$$

رسم می کنیم . هر یک از چهار ضلعهای OBEC و OADC و ACD و BCE بازاویه AOD بازاویه BOE برابر باشد . دوزاویه BOE نیز ACD و BCE قائم است . در مثلث متمم YKDIKRN و در نتیجه ، زاویه ACB قائم است .

قائم الزاویه ACB خط CO میانه و تر AB است پس :  $OC = OA = OB$

و دایره به قطر AB بر C می گذرد و در همین نقطه بر DE مماس است .

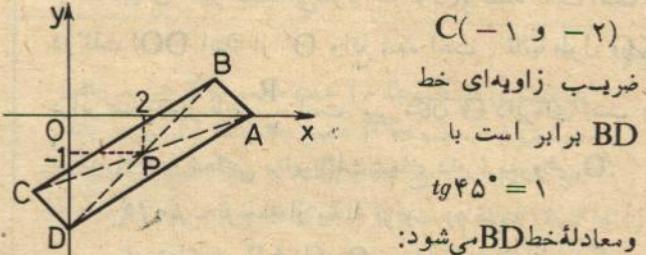
## حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۸۰/۱۰ - نقطه (۱ و ۲) P مرکز متوازی الاضلاع ABCD است که رأس A از آن به طول ۵ بر محور X'X قرار دارد و زاویه قطر BD از آن با محور X'X برابر  $45^\circ$  بوده و رأس D بر محور y'y واقع است . مختصات رأسهای متوازی الاضلاع را بدست آورید .

حل - چون P وسط AC و (۵ و ۵) A است پس :

$$x_p = 3x_p - x_A = 4 - 5 = -1$$

$$y_p = 2y_p - y_A = -2 - 0 = -2$$



C(-1, -2)

ضریب زاویهای خط  
BD برابر است با

$$\tan 45^\circ = 1$$

و معادله خط BD می شود:

$$y + 1 = 1(x - 2) \quad \text{یا} \quad y = x - 3$$

از این معادله درازاء  $x = 3$  داریم ، پس  $y = -3$  و چون P وسط BD است نتیجه خواهد شد :

B(4, 1)

۸۰/۱۱ - فرستنده: جواد فیض

ثابت کنید برای آنکه دو خط به معادله های :

$$lx + my = n \quad bx \cos \theta + ay \sin \theta = ab$$

برهم منطبق باشند باید داشته باشیم :

$$a^2 l^2 + b^2 m^2 = n^2$$

حل - برای آنکه دو خط برهم منطبق باشند لازم و کافی

است که در معادلات آنها ضریبها نظیر به نظری متناسب باشند .

پس باید داشته باشیم :

ثانیاً مقادیر  $\cos\alpha$  و  $\cos\beta$  را بدست آورید.

حل - بنابراین فرض داریم:

$$\begin{cases} a\cos^2\alpha + 2b\cos\alpha + c = 0 \\ a\cos^2\beta + 2b\cos\beta + c = 0 \\ \cos\alpha + 4\cos\beta = 2 \end{cases}$$

طرفین دو معادله اول و دوم را نظیر به نظیر از هم کم می کنیم.

باتوجه به اینکه:

$$\cos\alpha \neq \cos\beta$$

است خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a(\cos\alpha + \cos\beta) + 2b = 0 \\ \cos\alpha + 4\cos\beta = 2 \end{cases}$$

از حل این دستگاه نتیجه می شود:

$$\cos\beta = \frac{2(a+b)}{3a} \quad \cos\alpha = \frac{-2(a-4b)}{3a}$$

اولاً چون مقدار  $\cos\beta$  را در معادله مفروض قرار دهیم  
بعداز اختصار، رابطه موردنظر بدست می آید.

ثانیاً با استفاده از رابطه:

$$\tan X = \pm \sqrt{1 - \cos^2 X}$$

مقادیر  $\cos\alpha$  و  $\cos\beta$  بر حسب  $a$  و  $b$  بدست می آیند.

**۸۰/۱۵** - ترجمه فتح الله زرگری

هر گاه در مثلث  $ABC$  داشته باشیم  $\tan A \tan B < 1$   
ثابت کنید که مثلث منفرج الزاویه است.

حل - از رابطه  $A + B = \pi - C$  نتیجه می شود:

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

از این رابطه با توجه به فرض که:

است نتیجه می شود:

$$\frac{\tan A + \tan B}{\tan C} < 0$$

هر گاه:  $\tan A + \tan B > 0$

باشد  $\tan C < 0$  است و زاویه  $C$  منفرجه است.

هر گاه،  $\tan A + \tan B < 0$

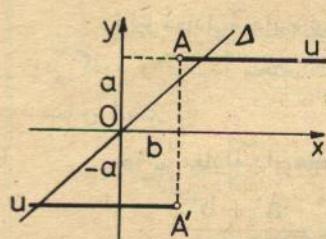
باشد، اقلاً یکی از دو مقدار  $\tan A$  یا  $\tan B$  منفی است یعنی یکی از دو زاویه  $B$  یا  $A$  منفرجه است.

ثانیاً خط متغیر  $\Delta$  را در نظر می گیریم که از مبدأ مختصات می گذرد و ضریب زاویه ای آن  $m$  است. از روی شکل درازه مقادیر مختلف  $m$  در تعداد نقاط تلاقی  $\Delta$  با نمایش هندسی قایع بحث کنید.  
حل - اولاً داریم:

$$y = \frac{ax - b}{x - b}$$

$$x > b \Rightarrow |x - b| = x - b \quad \text{و} \quad y = a$$

$$x < a \Rightarrow |x - b| = -(x - b) \quad \text{و} \quad y = -a$$



بنابراین نمایش هندسی  
تابع مطابق با شکل  
روب رو از دونیم خط  
با  $x'$  تشکیل می یابد  
با  $x$  تقسیم که دونقطه:

$$A'(b-a) \quad \text{و} \quad A(b-a)$$

است اما خود این دونقطه جزء نمایش هندسی تابع نیستند.  
ثانیاً از روی شکل معلوم می شود که هر گاه  $m$  ضریب زاویه ای  $\Delta$  مشتمل و از ضریب زاویه  $OA$  بزرگتر نباشد، یعنی

$$a/b < m$$

باشد، خط  $\Delta$  در یک نقطه با  $Au$  و در یک نقطه دیگر با  $A'u$  متقاطع است، یعنی نمایش هندسی تابع را در دونقطه قطع می کند.

هر گاه  $a/b > m$  باشد خط  $\Delta$  فقط  $A'u$  را در یک نقطه قطع می کند. هر گاه  $m$  منفی و از ضریب زاویه  $OA$  بزرگتر نباشد، یعنی

$$m < -\frac{a}{b}$$

در این حالت نیز خط  $\Delta$  فقط در یک نقطه نیم خط  $A'u$  را تلاقی می کند. بالاخره اگر:

$$-\frac{a}{b} < m < 0$$

باشد خط  $\Delta$  هیچیک از دونیم خط  $Au$  و  $A'u$  را قطع نمی کند.

**۸۰/۱۶** - از جواب فیض

هر گاه  $\alpha \pm \beta \neq 2k\pi$  و  $\alpha$  و  $\beta$  در معادله

$$a\cos^2 X + 2b\cos X + c = 0$$

صدق کنند بدفرض  $\alpha + 4\cos\beta = 2$  او لاثابت کنید که:

$$4(a+2b)^2 + a(9c+4b) = 0$$

دارد . هر گاه  $a = k$  باشد خط و دایره بر هم مماس می شوند و مسئله دو جواب دارد که نسبت به صفحه  $P$  قرینه یکدیگرند، در حالت  $a < k$  خط دایره را قطع نمی کند و مسئله جواب ندارد .

## حل مسائل کلاس ششم طبیعی

- اولاً ثابت کنید که مماس بر دایره به معادله :

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

در مبدأ مختصات به معادله  $x^2 + y^2 = 0$  است.

ثانیاً معادله دایره ای را بنویسید که از نقطه  $(4, 0)$  می گذرد و در مبدأ مختصات برخط به معادله  $3x + 2y = 0$  مماس است.

حل - معادله دایره به صورت زیر نوشته می شود :

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

مرکز دایره عبارتست از :

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

و ضریب زاویه ای شعاع  $OC$  از دایره می شود :

$$m = \left(-\frac{b}{2}\right) : \left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{b}{a}$$

مماس بر دایره در مبدأ بر شعاع  $OC$  عمود است پس ضریب

$$\text{زاویه ای مماس می شود} : \frac{a}{b} - \text{و معادله آن می شود} :$$

$$y = -\frac{a}{b}x \quad \text{یا} \quad ax + by = 0$$

ثانیاً با توجه به تساوی :

$$\frac{b}{a} = \frac{bp}{ap}$$

نتیجه می شود که معادله دایره ای که در مبدأ مختصات برخط  $ax + by = 0$  :

مماس باشد عبارتست از :

$$x^2 + y^2 + apx + bpy = 0$$

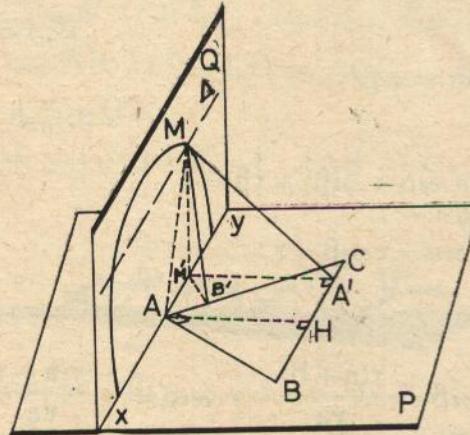
برای آنکه این دایره از نقطه  $(4, 0)$  بگذرد و در مبدأ برخط  $3x + 2y = 0$

مماس باشد باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} 16 + 16 + 4ap + 4bp = 0 \\ a = 3 \quad \text{و} \quad b = 2 \end{cases} \Rightarrow p = -\frac{8}{5}$$

۸۰/۱۶ - در صفحه  $P$  مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین  $ABC$  را در نظر می گیریم که طول وتر  $BC$  از آن  $2a$  باشد . صفحه  $Q$  را بر نقطه  $A$  بگذرا ایند که با خط  $BC$  موازی و بر صفحه  $P$  عبور باشد و در این صفحه نقطه  $M$  را چنان بیابید که از صفحه  $P$  به فاصله  $k$  باشد و اگر عمودهای  $MA'$  و  $MB'$  را به ترتیب بر  $BC$  و  $AC$  رسم کنیم :

$MA' = MB'/\sqrt{2}$  باشد . در ازاء مقادیر  $k$  بحث کنید.



حل - اگر  $M$  نقطه مطلوب باشد، چون عمود  $MM'$  را بر صفحه  $P$  رسم کنیم،  $M'$  بر  $xy$  فصل مشترک دو صفحه واقع می شود و بنا بدقتیه سه عمود  $M'A'$  بر  $BC$  و  $M'B'$  بر  $AC$  است و داریم :

$$MM' = k \quad M'A' = AH = a$$

$$MA'^2 = MM'^2 + M'A'^2 \quad MB'^2 = MM'^2 + M'B'^2$$

$$MA'^2 = MB'^2 \Rightarrow MA'^2 = 2MB'^2$$

$$MA'^2 + M'A'^2 = 2MM'^2 + 2M'B'^2$$

مثلث  $AB'M'$  قائم الزاویه متساوی الساقین است زیرا زاویه  $B'AM'$  که با زاویه  $C$  برابر است  $45^\circ$  است .

پس  $AM' = \sqrt{2}M'B'$  و رابطه بالا چنین می شود

$$MM'^2 + M'A'^2 = 2MM'^2 + AM'^2$$

$$AM'^2 + MM'^2 = M'A'^2 = a^2$$

$$AM' = a \Rightarrow AM = a$$

نقطه  $M$  در صفحه  $Q$  بر دایره به مرکز  $A$  و شعاع  $a$  قرار دارد . از طرف دیگر فاصله  $M$  از صفحه  $P$  برای  $\Gamma$  است ، پس برای تعیین  $M$  در صفحه  $P$  اولاً دایره  $\Gamma$  به مرکز  $A$  و به شعاع  $a$  و ثانیاً خط  $\triangle$  موازی با  $xy$  و به فاصله  $k$  از آن را رسم می کنیم .

هر گام  $a > k$  باشد این خط و دایره در دونقطه متقاطع می شوند و دونقطه  $M$  بدهست می آید که قرینه آنها نسبت به صفحه  $P$  نیز در شرایط مسئله صادقند پس در این حالت مسئله چهار جواب

x	0	1	+∞
y'	-	+	
y	+∞ ↴ 2 ↵ +∞		

این تابع به صورت :

$$y = x + \frac{1}{x}$$

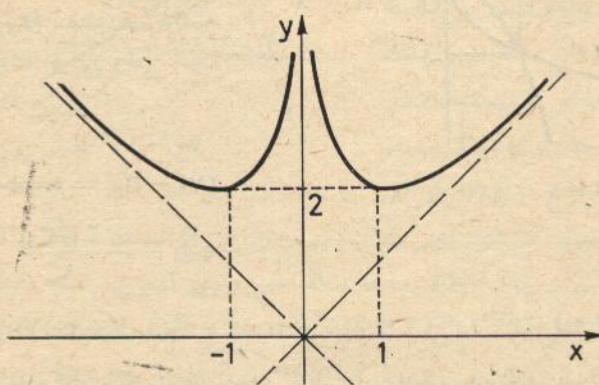
نوشته می شود پس خطیه معادله  $x = y$  مجانب منحنی است.

درمورد تابع II داریم :

$$y' = \frac{-x^2 + 1}{x^2} = 0 \quad \text{و } x < 0 \Rightarrow x = -1$$

x	-∞	-1	0
y'	-	+	
y	+∞ ↴ 2 ↵ +∞		

خط  $x = y$  مجانب منحنی این تابع است. با توجه به دو جدول بالا نمایش تغییرات تابع مفروض به شکل زیر است :



۸۰/۳۰ - اولامنحنی C را رسم کنید که مختصات نقاط

آن در رابطه زیر صدق کنند :

$$(y - x^2)(y - \frac{1}{x^2}) = 0$$

معادله دایره مطلوب بعد از اختصار می شود :

$$5x^2 + 5y^2 - 24x - 16y = 0$$

- بدهازاء چه مقدار از x متعلق به فاصله

:  $x \in \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$  تابع :

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{10} + 2x\right) \cos\left(\frac{\pi}{20} - 3x\right)$$

کمترین مقدار را دارد؟

حل - از تبدیل حاصل ضرب کسینو ها به حاصل جمع خواهیم داشت :

$$y = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{20}\right) + \cos\left(6x + \frac{\pi}{20}\right) \right]$$

تابع وقتی کمترین مقدار را دارد که داشته باشیم :

$$\cos\left(6x + \frac{\pi}{20}\right) = -1 \Rightarrow 6x + \frac{\pi}{20} = 2k\pi + \pi$$

$$x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{120}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{120} = \frac{19\pi}{120}$$

## حل مسائل کلاسی ششم ریاضی

۸۰/۱۹ - منحنی نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید :

$$y = \frac{x^2 + 1}{|x|}$$

حل - می دانیم که اگر  $x > 0$  باشد داریم :  $|x| = x$

و اگر  $x < 0$  باشد داریم :  $|x| = -x$

پس تابع داده شده به دو تابع شرطی زیر تبدیل می شود :

$$\text{I : } \begin{cases} y = \frac{x^2 + 1}{x} & , \\ x \geq 0 & \end{cases} \quad \text{II : } \begin{cases} y = \frac{-x^2 + 1}{x} & , \\ x < 0 & \end{cases}$$

هریک از این دو تابع درازاء  $x = 0$  نامعین می باشند. درمورد

تابع I داریم :

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \quad \text{و } x > 0 \Rightarrow x = 1$$

$$h = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

- اگر

باشد ،  $\triangle$  در دو نقطه با  $C$  مماس و در دو نقطه دیگر با آن متقطع است .

$$h \neq 0 \quad -\frac{2\sqrt{3}}{9} < h < \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

باشد ،  $\triangle$  در ۶ نقطه  $C$  را قطع کند .

- اگر  $h = 0$  باشد ،  $\triangle$  در سه نقطه مضاعف با  $C$  متقطع است .

۸۰/۲۱ - ترجمه فتح الله زرگری

اگر در مثلث  $ABC$  داشته باشیم :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = q$$

به ازاء چه مقادیر  $q$  ، مثلث  $ABC$  قائم الزاویه ، منفرج الزاویه یا حادل الزاویا است ؟

حل - رابطه داده شده را چنین می نویسیم :

$$1 - \cos^2 A + 1 - \cos^2 B + 2(1 - \cos^2 C) = 2q$$

$$2 - 2\cos(A+B)\cos(A-B) +$$

$$+ 2(1 - \cos^2 C) = 2q$$

اما داریم :

$$\cos(A+B) = -\cos C$$

ورابطه چنین می شود :

$$1 + \cos C \cos(A-B) + 1 - \cos^2 C = 2q$$

$$\cos C [\cos(A-B) - \cos C] = q - 2$$

$$\cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] = q - 2$$

$$2\cos A \cos B \cos C = q - 2$$

- هر گاه  $q = 2$  باشد لازم می آید که یکی از مقادیر

$\cos A$  یا  $\cos B$  یا  $\cos C$  صفر و درنتیجه یکی از زاویه های مثلث قائم است .

- هر گاه  $q > 2$  باشد حاصل ضرب مقدار

از مثلث نمی توانند منفرجه باشند یعنی دو مقدار از مقادیر مذکور نمی توانند هردو منفی باشند پس هر سه مقدار مذکور مثبت بوده و مثلث حادل الزاویا است .

- هر گاه  $q < 2$  باشد حاصل ضرب سه مقدار منفی است و لازم است که یکی از آنها منفی باشد . در این حالت یکی از زاویه های مثلث منفرجه است .

۸۰/۲۲ - ترجمه : زرگری

ثانیاً - از روی شکل در تعداد نقاط تلاقی منحنی  $C$  با

خط  $\triangle$  به معادله  $y = x + h$  بر حسب مقادیر مختلف  $h$  بحث کنید .

حل - منحنی  $C$  عبارتست از مجموعه دو منحنی  $C_1$  و  $C_2$  به معادلات زیر :

$$C_1 : y = x^2 \quad C_2 : y = \sqrt{x}$$

دو منحنی  $C_1$  و  $C_2$  نسبت به نیمساز زاویه اول و سوم محورها قرینه یکدیگرند . زیرا اگر در هر یکی از دوتابع اخیر  $x$  را به  $y$  و  $y$  را  $x$  تبدیل کنیم تابع دیگر بدست می آید . پس کافی است که تغییرات یکی از دوتابع ، مثلاً  $x^2 = y$  را تعیین کنیم . مشق این تابع :

$y' = 3x^2$  در ازاء  $0 = x$  صفر می شود اما تغییر علامت نمی دهد . مبدأ مختصات نقطه عطف منحنی است و در ضمن منحنی در مبدأ پر  $x'$  مماس است .

$$x^2 = \sqrt{x}$$

معادله :

دارای جواب حقیقی ،  $0 \leq x \leq 1$  است . پس مختصات  $C_1$  و  $C_2$  در مبدأ و در نقاط  $(1, 1)$  و  $(-1, -1)$  متقطعند و به شکل مقابل می باشند .

ثانیاً خط  $\triangle$  وقتی

بر منحنی  $C$  مماس است که معادله :

$$x^2 = x + h$$

$$x^2 - x - h = 0$$

ریشه مضاعف داشته باشد و این وقتی است که :

$$4(-1)^2 +$$

$$27(-h)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

از روی شکل و با توجه به اینکه  $x = y$  محور تقارن و مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی  $C$  است معلوم می شود که :

- اگر

$$h > \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ یا } h < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

باشد ،  $\triangle$  در دونقطه با  $C$  متقطع است .

۸۴۰ بدهست می‌آید.

### ۸۵/۲۴ - فرستنده: جواد فیض

ثابت کنید که هر گاه  $x$  و  $y$  عددهای صحیح باشند و عبارت  $2x + 3y = 17$  مضرب ۱۷ باشد، عبارت  $9x + 5y$  نیز مضرب ۱۷ است.

حل - به فرض خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 17k \Rightarrow x = -y + \frac{17k - y}{2} \\ 17k - y &= 2t \Rightarrow y = 17k - 2t \\ x &= -(17k - 2t) + t = 3t - 17k \\ 9x + 5y &= 9(3t - 17k) + 5(17k - 2t) \\ &= 17t - 4 \times 17k = 17t - 4 \times 17k \end{aligned}$$

۸۵/۲۵ - ترجمه از فرانسه

دو خط ثابت  $D$  و  $D'$  در  $O$  متقاطعند و نقطه ثابت  $A$  در صفحه آنها مفروض است. خط متغیر  $\Delta$  بر  $A$  می‌گذرد و  $D$  و  $D'$  را به ترتیب در  $B$  و  $B'$  قطع می‌کند. خطی که از  $B$  به  $I$  و سطح  $OA$  وصل شود خط  $D'P$  را در  $T$  تلاقی می‌کند و خطی که از  $P$  موازی با  $OA$  رسم شود خط  $\Delta$  را در  $M$  قطع می‌کند.

ولا مکان نقطه  $M$  را تعیین کنید.

ثانیاً اگر  $Q$  نقطه تلاقی  $MI$  با خط  $D'$  باشد نوع چهارضلعی  $BMPQ$  را معلوم کنید.

### حل - چهار شعاع

$PO, PA, PB, PM$  یک دسته توافقی هستند  $PM, OA$  که با  $OA$  موازی است بواسیله سه شعاع دیگر به دو قسمت برابر تقسیم شده است. خط  $\Delta$  بواسیله چهار شعاع مزبور به توافق

تقسیم می‌شود یعنی  $M$  مزدوج توافقی  $B$  نسبت به  $A$  و  $B'$  است. چون از  $O$  به چهار نقطه اخیر وصل کنیم یک دسته اشعة  $OB', OA, OB$  نیز ثابت است. مکان  $M$  شعاع ثابت است. پس شعاع  $OM$  نیز ثابت است.

مزدوج  $OB$  نسبت به دو شعاع  $OA$  و  $OB'$  است. ثانیاً نسبت به دو خط  $PB$  و  $MQ$  خط  $OA$  قطبی نقطه  $B'$  است. پس  $OA$  قطبی  $B'$  نسبت به  $PM$  و  $QB$  نیز می‌باشد. چون  $PM$  با  $OA$  موازی است پس  $QB$  نیز با آنها موازی است

اولاً مقادیر  $a$  و  $b$  را تعیین کنید برای آنکه دو دستگاه

معادلات زیر هم ارز یکدیگر باشند:

$$I \quad \begin{cases} 4\sin x \sin y = 3 \\ \tan x \tan y = 3 \end{cases} \quad , \quad II \quad \begin{cases} \cos(x-y) = a \\ \cos(x+y) = b \end{cases}$$

ثانیاً جوابهای دستگاه  $I$  را بدست آورید.

حل - دستگاه  $I$  را به ترتیب زیر به دستگاههای هم ارز تبدیل می‌کنیم. از تقسیم معادله اول بر معادله دوم داریم:

$$I, \begin{cases} 4\sin x \sin y = 3 \\ 4\cos x \cos y = 1 \end{cases}$$

طرفین دو معادله را یکبار باهم جمع و یکبار از هم کم می‌کنیم، نتیجه خواهد شد:

$$I, \begin{cases} \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases}$$

اولاً از مقایسه دستگاه  $I$  با دستگاه  $II$  نتیجه می‌شود:

$$a = 1 \quad \text{و} \quad b = -\frac{1}{2}$$

ثانیاً جوابهای دستگاه  $I$  همان جوابهای دستگاه  $II$  است و داریم:

$$\begin{cases} x+y = 2k_1\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ x-y = 2k_2\pi \end{cases}$$

$$x = k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad \text{و} \quad y = k'\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

۸۵/۲۳ - از جهانشاه کریمی بیرون گانی دانشجو

هر گاه  $x$  و  $y$  عددهای سرقمی باشند مقادیر ماکسیمم و

می‌نیم  $x$  و  $y$  را از رابطه زیر بدست آورید:

$$\frac{150}{x} = \left( \frac{40+y}{880} \right)$$

حل - از رابطه بالا معلوم می‌شود وقتی  $x$  ماکسیمم باشد  $y$  می‌نیم است و وقتی  $x$  می‌نیم باشد  $y$  ماکسیمم است.

اما طرف دوم رابطه مجدد کامل است پس  $\frac{150}{x}$  نیز مجدد

کامل است و  $x = 6k^2$  است. عدد  $x$  مده رقمی امت پس:

$$100 < x = 6k^2 < 1000 \Rightarrow 4 < k < 12$$

در ازاء  $k = 12$  برای  $y$  عدد صحیح بدست نمی‌آید، پس در ازاء

$k = 11$  برای  $x$  ماکسیمم ۷۲۶ و از روی آن برای  $y$  می‌نیم

۳۶۰ بدست می‌آید. می‌نیم  $x$  وقتی است که  $k = 5$  باشد، در

این صورت برای  $x$  مقدار می‌نیم ۱۵۵ و برای  $y$  مقدار ماکسیمم

وچهار ضلعی  $BMPQ$  ذوزنقه است.

۸۰/۴۶ - ترجمه از فرانسه

سه نقطه ثابت  $A$  و  $B$  و  $C$  به همین ترتیب واقع بر خط  $\triangle$  مفروضند. دایره متغیر  $\Gamma$  را درنظر می‌گیریم که در  $C$  بر  $\triangle$  معاس باشد. از  $A$  و  $B$  مساهای  $AT$  و  $BT'$ ، غیراز  $\triangle$ ، را برداشته  $\Gamma$  رسم می‌کنیم. ثابت کنید که عمود منصف  $TT'$  بریضی ثابتی که آنرا مشخص خواهد کرد معاس است.

حل - اگر  $S$  نقطه

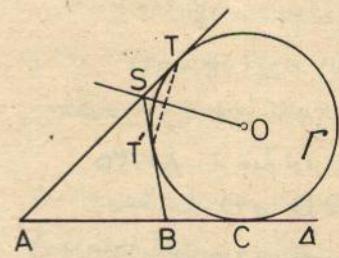
تلaci  $AT$  باشد

ولا داریم :

$$ST = ST'$$

$$BT' = BC \quad ,$$

$$AT = AC$$



$$\begin{aligned} SA + SB &= AT - ST + ST' + T'B = \\ &= AC + BC \end{aligned}$$

نقطه  $S$  به بیضی  $E$  متعلق است که  $A$  و  $B$  کانونها و  $AC + BC$  برابر باطول قطر اطول آن است.

ثانیاً چون مثلث  $STT'$  متساوی الساقین است پس عمود منصف  $TT'$  نیمساز زاویه  $TST'$  یعنی نیمساز زاویه خارجی است پس درنقطه  $S$  بر بیضی  $E$  معاس است.

یک مسئله شیمی

انتخاب توسط : باقر مظفرزاده

۸۰/۴۷ - فرستنده : احمد رضا

۱۰/۵۰/۰ گرم از یک ترکیب  $X$  رادر ۵/۰ گرم از کامفر حل می‌کنیم. نقطه ذوب کامفر  $8^{\circ}\text{C}$  پایین می‌آید. تجزیه نشان می‌دهد که  $X$  شامل ۶/۷٪ کربن ۱۳/۷٪ هیدرژن است. همچنین  $X$  با کلوراستیل ترکیب شده و با سدیم فلزی نیز تولید هیدرژن می‌کند. هنگامی که  $X$  را از روی  $\text{Cl}_2\text{O}_2$  در حرارت  $35^{\circ}\text{C}$

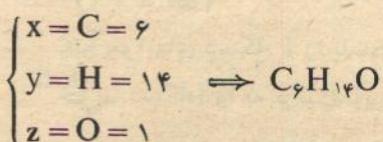
بگذرانیم تولید جسم  $y$  می‌کند و اگر  $y$  را با  $\text{O}_2$  (ازن) ترکیب کنیم و جسم حاصل را هیدرولیز نماییم دو جسم تولید می‌کند که یکی ختنی و دیگری اسیدی است با جرم ملکولی  $24+1$ . فرمول  $X$  را پیدا کنید.

حل - داریم :

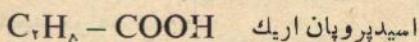
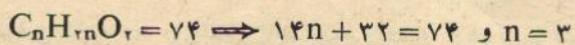
$$1) \quad M = \frac{Km}{\Delta tm'} = \frac{40000 \times 0/0102}{8 \times 0/5} = 102$$

$$2) \quad m_0 = 100 - (70/6 + 13/7) = 15/7$$

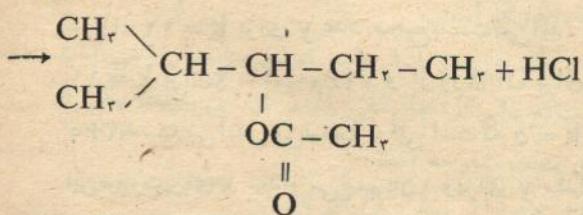
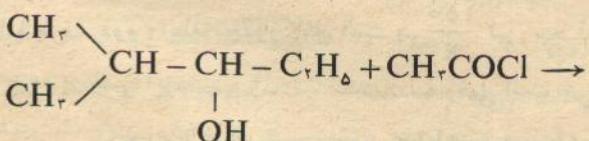
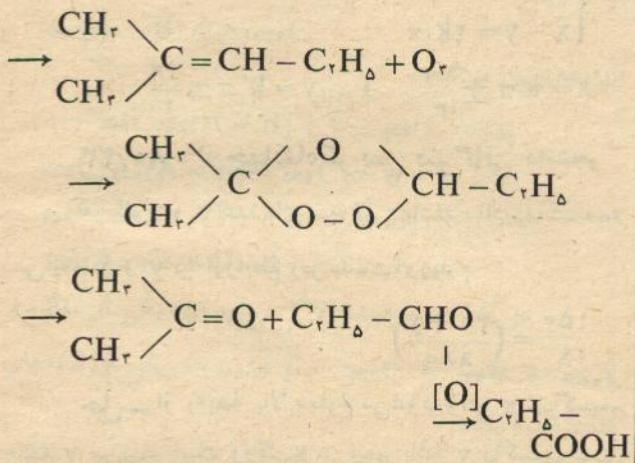
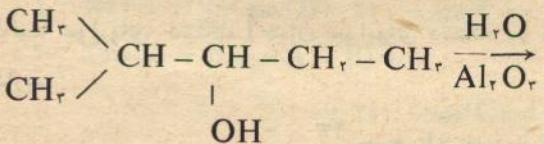
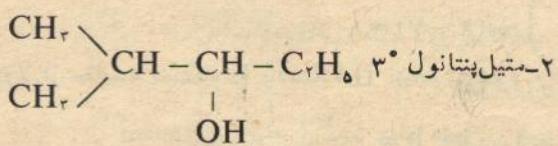
$$3) \quad \frac{102}{0/0102} = \frac{70/6}{12x} = \frac{13/7}{y} = \frac{15/7}{16z}$$



این جسم الكل است. فرمول اسید حاصل از اکسید اسیتون الفین حاصل را تعیین می‌کنیم:



چون الفین قرینه نیست پس دو لید ستن می‌کند پس:



معادله :

$$\log_x 3 \log_{x^3} 3 = \frac{1}{6}$$

چنین می شود :

$$\log_x X \log_{x^3} X = 6 \quad \text{یا} \quad \log_x (1 + \log_x X) = 6$$

$$(\log_x X)^2 + \log_x X - 6 = 0$$

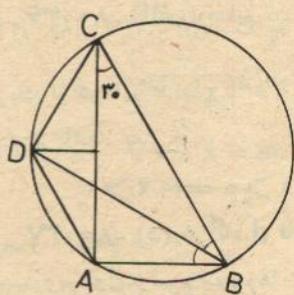
$$(\log_x X + 3)(\log_x X - 2) = 0$$

$$\log_x X + 3 = 0 \Rightarrow X = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$\log_x X - 2 = 0 \Rightarrow X = 3^1 = 9$$

**۸۰/۳۳-(ج)** در هر مثلث نیمساز داخلی یک زاویه و عمودمنصف

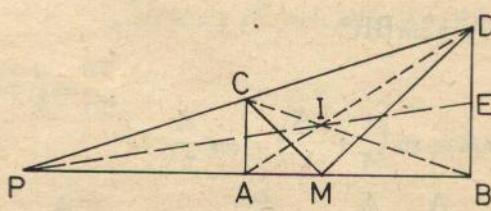
صلع مقابل یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند. هرگاه مثلث ABC در زاویه A و A' نقطه D تلاقی نیمساز زاویه AC عمودمنصف صلح باشد: D روی دایره محیطی مثلث قراردارد. BC = 2AB



اندازه زاویه ACB برابر  $30^\circ$  درجه است پس اندازه کمان AB برابر  $60^\circ$  است و چون اندازه کمان BC برابر  $180^\circ$  است پس اندازه زاویه ADC برابر  $120^\circ$  است.

**۸۰/۳۴-(الف)** روی پاره خط AB نقطه M بقسمی اختیار شده که  $BM = 2AM$  است. مطابق باشکل مثلثهای قائم الزاویه و متساوی الساقین AMC و BMD رامی سازیم دو خط AD و BC در I و دو خط AB و CD در P متلاقي می شوند و PI خط BD را در E قطع می کند. چون AC با BM برابر است پس  $AC \parallel BD$  و  $BM \parallel PE$  است. چون AC با BD موازی است پس :

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{BD} = \frac{1}{2}$$



## پاسخ قسمتهای ریاضی

$$2^{x-1+x} - 80/28 \quad (ب) \text{ حاصل عبارت } 2 \text{ و قسمی برابر با}$$

است که داشته باشیم :

$$|x-1| + x = 1 \quad \text{یا} \quad |x-1| = 1-x \Rightarrow x < 1$$

$$|x+3| < 2 \quad (د) \text{ نامعادله } 80/29 \text{ بسط دو دستگاه}$$

نامعادلات زیر تبدیل می شود:

$$I: \begin{cases} x+3 > 0 \\ x+3 < 2 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < -1$$

$$II: \begin{cases} x+3 < 0 \\ -x-3 < 2 \end{cases} \Rightarrow -5 < x < -3$$

جواب مشترک دستگاههای I و II می شود:

$$-5 < x < -1$$

$$80/30 \quad (\text{الف}) \text{ به فرص } 0 \leq a \leq b \text{ داریم:}$$

$$(a^5 + b^5) - (a^4b + ab^4) = a^4(a-b) -$$

$$-b^4(a-b) = (a-b)(a^4 - b^4) = (a-b) \times$$

$$(a^4 - b^4)(a^4 + b^4) = (a-b)^4(a+b)(a^4 + b^4)$$

می دانیم که :

$$(a-b)^4 > 0 \quad \text{و} \quad a^4 + b^4 \geq 0$$

وطبق فرض داریم  $a+b \geq 0$  پس داریم:

$$a^4 + b^4 \geq a^4b + ab^4$$

**۸۰/۳۱-(الف)** نا مساوی :

$$\log_x \log_{x^3} \frac{3x}{x-2} > 0$$

به ترتیب بانامساویهای زیر معادل است :

$$\log_x \log_{x^3} \frac{3x}{x-2} > \log_x 1$$

$$\log_x \frac{3x}{x-2} > 1 \Rightarrow \frac{3x}{x-2} > x$$

$$\frac{6}{x-2} > 0 \Rightarrow x > 2$$

**۸۰/۳۲-(د)** با توجه به فرمول :

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

یا

در مثلث زاویه A کوچکتر از  $180^\circ$  است پس :

$$\cos \frac{A}{2} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{A}{2} < 90^\circ$$

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad A = \frac{\pi}{3}$$

(الف) به فرض :

$$b \neq 0 \quad \text{و} \quad a \neq 0$$

$$(a - b)^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab \Rightarrow$$

$$\left| \frac{a^2 + b^2}{2ab} \right| \geq 1$$

پس وقتی داشته باشیم :

$$\cos X = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

داریم :

$$\frac{a^2 + b^2}{2ab} = 1 \Rightarrow \cos X = 1 \quad \text{و} \quad X = 2k\pi$$

$$y = \cos 5X - \cos 3X =$$

$$= \cos 10k\pi - \cos 6k\pi = 1 - 1 = 0$$

(ج) در چهاروجهی منتظم ABCD به طول a

اگر I وسط AB و J وسط CD باشد در مثلثهای متساوی -

الاضلاع ACD و

BCD داریم

$$AJ = BJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

مثلث AJB متساوی -

الساقین است پس :

J بر AB عمود

است و داریم :

$$IJ = \overline{AJ} - \overline{AI} =$$

$$= \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$

$$IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

(د) در چهاروجهی منتظم ABCD هر گاه

یکان دوره هشتم

A وسط PB و C وسط PD است یعنی BC و DA میانه - های مثلث PBD می باشند پس PI میانه سوم این مثلث است و E وسط BD است .

(۵) در صفحه محورهای مختصات نمایش هندسی  $x^2 - y^2 = 0$  عبارتست از نیمسازهای چهار زاویه محورها . این نیمسازها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می کنند که به ترتیب شامل نیم محورهای  $Ox'$  ،  $Oy$  ،  $Ox$  و  $Oy'$  می باشند . چون مختصات نقاط  $(0, 0)$  و  $(0, 1)$  در نامعادله  $y^2 > x^2$  صدق می کنند و مختصات نقاط  $(1, 0)$  و  $(0, 0)$  در این نامعادله صدق نمی کنند پس ناحیه نظیر نامعادله شامل  $Ox$  و  $Oy'$  یعنی شامل تمام محور  $x'$  است .

$$y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} \quad (\text{الف}) \quad \text{تابع} \quad \text{وقتی معین است}$$

که هر یک از دو تابع  $\sqrt{x+2}$  و  $\sqrt{x-1}$  به تهابی معین باشند و  $1 \neq x$  باشد، یعنی:

$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

(۶) هر گاه d فاصله نقطه P به طول x واقع بر نیمساز برابر اول و سوم محورها از خط  $\Delta$  به معادله:

$$3x - 4y + 5 = 0$$

باشد داریم (x و y) و :

$$d = \frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-x + 5|}{5}$$

طولهای نقاط تلاقی خط d به معادله ۱

هندسی تابع d عبارتنداز جوابهای معادله :

$$\frac{|-x + 5|}{5} = 1 \Rightarrow -x + 5 = \pm 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad 10$$

خط d هندسی تابع d را در دو نقطه (۱ و ۰) و (۰ و ۱۰) قطع می کند .

(ب) هر گاه I مرکز دایره محاطی داخلی

مثلث ABC باشد زاویه BIC برابر است با :

$$\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$$

$$\sin A = \sin BIC$$

داریم :

$$\sin A = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} \right) = \cos \frac{A}{2}$$

$$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} = 0$$

بعد از حذف  $y$  معادله زیر بدست می‌آید:

$$(a^2 - 1) \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + a^2 + 1 = 0$$

این معادله و درنتیجه دستگاه مفروض وقتی جواب دارد که:

$$\Delta' = 1 - a^2 + 1 > 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$$

(ب) دستگاه:  $\Delta' = 1 - a^2 + 1 > 0$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = \sin^2 x + \cos^2 y \\ \operatorname{tg}^2 y = \sin^2 y + \cos^2 x \end{cases}$$

با فرض  $\sin^2 y = b$  و  $\sin^2 x = a$  به دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} a^2 + a + b - ab - 1 = 0 \\ b^2 + a + b - ab - 1 = 0 \end{cases}$$

از این دستگاه داریم  $a^2 = b^2$  و نتیجه می‌شود:

$$a = b = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \sin^2 x = \sin^2 y = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در فاصله  $(-\pi/2, \pi/2)$  چهاردهسته جواب زیر را داریم:

$$x = y = \frac{\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{7\pi}{4}$$

**(ج)** هرگاه  $A$  و  $B$  دو عدد سه رقمی و مجزور

کامل بوده و  $A - B$  برابر با  $\overline{aaa}$  باشد بافرض  $A = M + N$  داریم:

$$M + N = \overline{aaa}$$

$$(M - N)(M + N) = a \times 3 \times 37$$

به فرض  $2 \mid a$  داریم:

$$\begin{aligned} M - N &= 2 & 6 \\ &\quad \text{یا} \\ M + N &= 111 & 37 \end{aligned}$$

چون مجموع و تفاضل دو عدد صحیح هردو زوج یا هردو فرد می‌باشند، دستگاه بالا برای  $M$  و  $N$  عددهای صحیح بدست نمی‌دهد. پس  $a \neq 2$  است.

**(الف)** هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

نتیجه خواهد شد:

$$a = \frac{bc}{c-d}, \quad c = \frac{ad}{a-b}$$

و سطح  $AB$  و  $J$  و سطح  $P$  عمود بر  $IJ$  یا الای  $G$ ,  $F$ ,  $E$ ,  $BD$ ,  $BC$ ,  $AD$ ,  $AC$  و  $H$  قطع کند، چون  $IJ$  و  $CD$  عمود است پس صفحه  $P$  و  $AB$  و  $CD$  موازی است و  $EF$  و  $GH$  با  $CD$  برویکدیگر عمودند پس چهارضلعی  $EFHG$  مربع مستطیل است.

**(ج)** برای آنکه خط به معادله  $x = 4y$  می‌جانب:

$$2ax^2y^2 - ax^2y + x^4 - a^2 = 0$$

باشد، باید معادله بالا به ازاء  $x = 4y$  ریشه بینهایت داشته باشد. معادله در ازاء مقدار مزبور بعد از اختصار چنین می‌شود:

$$(-32a + 256)y^4 - a^2 = 0$$

$$-32a + 256 = 0 \Rightarrow a = 8$$

**(ب)** از معادله  $x = 4y$ :

$$y^2 + x^2y - ax^2 = 0$$

با فرض  $a \neq 0$  نتیجه می‌شود:

$$x^2 = \frac{y^2}{a-y}$$

وقتی  $a < 0$  مقدار  $x$  به  $\pm \infty$  می‌کند. پس خط  $y = a$  می‌جانب منحنی نمایش تابع به معادله بالا است.

**(د)** تابع:

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x}$$

در ازاء  $x = 0$  مبهم است. با استفاده از دستور هوپیتال نتیجه خواهد شد که در ازاء  $x = 0$  داریم  $y = 0$ . چون مشتق تابع را تعیین کنیم در ازاء  $x = 0$  مبهم می‌شود که مقدار آن بعد از رفع ابهام برابر با صفر می‌شود. پس نمایش هندسی تابع در مبدأ مختصات بر  $X'$  محاس است.

می‌توانیم از این راه عمل کنیم که معادله را نسبت به  $x$

مرتب کنیم بعد از اختصار داریم:

$$x^2 + x^2y^2 - 2y = 0$$

این معادله در ازاء  $x = 0$  دارای ریشه مکرر مرتبه سوم است. پس منحنی در مبدأ مختصات بر  $X'$  محاس است و در ضمن از آن می‌گذرد.

**(د)** از دستگاه دو معادله:

$$\cos y(\sin x + \cos x) = a$$

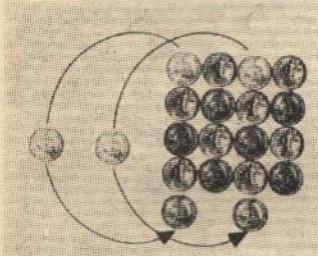
$$\cot y \cos x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{y}{a-x} \cdot \frac{y}{a+x} = 3 \quad y^2 = 3a^2 - 3x^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3a^2} = 1$$

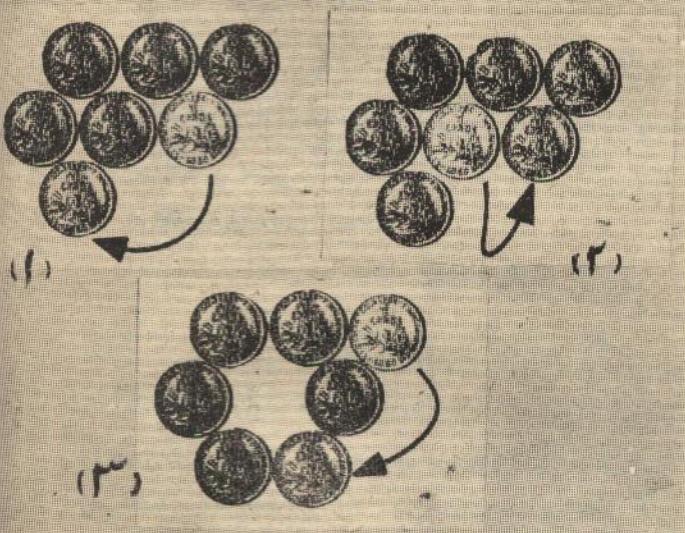
مکان A یک بیضی است که BC قطر کوتاه آن است.

### پاسخ بازی باسکه



۱- به کملک دوانگشت،  
سکه‌های اول و سوم از  
ردیف بالا را در صفحه  
لغزانده درزیر ستونهای  
اول و سوم قرار می‌دهیم  
و بدون رها کردن

سکه‌ها، این دوستون را به سمت بالاتغییر می‌دهیم.  
۲- مراحل و چگونگی تغییر مکانها به ترتیب مطابق  
با شکل‌های ۱، ۲ و ۳ از شکل زیر است:



### پاسخ بازی با اعداد

عددها را به ترتیب در اولین ردیف در جهت از چپ به  
راست و در دو میان ردیف در جهت از راست به چپ و در ردیف  
بعدی از چپ به راست و به همین ترتیب تابه آخر می‌نویسیم:

۱	۲	۳
۶	۵	۴
۷	۸	۹
۱۲	۱۱	۱۰
۱۳	۱۴	۱۵
۱۸	۱۷	۱۶
۵۷	۵۷	۵۷

به فرض آنکه اعداد مشت باشند باید داشته باشیم  $c > d$  و  $a > b$

یعنی هر یک از دو کسر  $\frac{c}{d}$  و  $\frac{a}{b}$  بزرگتر از واحد است.

۸۰/۴۹ - (ج) در ذوزنقه ABCD دور اس A و

ثابت و رأسهای C و D متغیرند بقسمی که طول ساق AD

برابر با مقدار ثابت m و طول قاعده کوچکتر CD برابر با قدر

ثابت b است. مکان P

محل تلاقی دو قطر

ذوزنقه یک دایره است.

زیرا از مشابه دو مثلث

DPC و APB با

فرض  $AB = a$  داریم:

$$\frac{BP}{BD} = \frac{a}{a+b}$$

نقطه P مجانس نقطه D است در تجانس به مرکز B و به نسبت

بالا. اما نقطه D بر دایره به مرکز A و به شعاع m حرکت

می‌کند پس نقطه P نیز بر دایره‌ای که مجانس دایره مکان D

است حرکت می‌کند.

۸۰/۵۰ - (ج)

در مثلث ABC دور اس

A و C ثابت و رأس

متغیر است. هر گاه خطی

که مرکز دایره محیطی

را به مرکز نقل مثلث

وصل می‌کند با

موازی باشد چون سه

نقطه H و G و O

مرکز ارتفاعی، مرکز نقل، مرکز دایره محیطی روی یک خط

واح اند پس داریم:

$$\frac{AK}{KH} = \frac{AG}{MG} = 3$$

با توجه به اینکه قرینه H نسبت به ضلع BC بر دایره محیطی

مثلث واقع است داریم  $KB \cdot KC = KA \cdot KH$  و خواهیم

داشت:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{AK}{KC} = \frac{AK}{AK \cdot KH} = \frac{AK}{KH} = 3$$

اگر حور طولها را منطبق بر BC و محور عرضها را منطبق

برغمود و منصف BC انتخاب کنیم با فرض:

$$BC = 2a \quad A(MK = x) \quad AK = y$$

# مسائل پرای حل

ریشه‌های معادله زیر کمترین مقدار را داشته باشد :

$$x^2 + ax + a - 2 = 0$$

۸۱/۵ - از: حسن گل محمدی دانشجوی دانشکده فنی  
دانشگاه تهران

از معادله زیر مقدار  $x$  را بدست آورید و بحث کنید:

$$\begin{array}{rcl} \log(x+a) & \log(x+2a) \\ \hline 100 & +100 & + \\ & & \\ \log(x+3a) & \\ \hline & +100 & = 29a^2 \end{array}$$

۸۱/۶ - از: سید رضا همیرزق‌هدل دانشجوی فنی  
مطلوب است تعیین یک تصاعد عددی که مجموع جمله‌های  
از سوم تا پنجم آن ۲۱ بوده و مجموع سه جملة آخر آن از  
مجموع سه جمله اولش ۴۲ واحد بیشتر باشد و بالاخره مجموع  
 تمام جمله‌های آن ۱۰۰ باشد.

۸۱/۷ - (ترجمه از کتابهای خارجی) - فرستنده: جواد فیض

نقطه‌ای است از دایره محیطی هشت ضلعی منتظم  $Q$   
 $P_1, P_2, \dots, P_8$  ثابت کنید مجموع توانهای چهارم فواصل  
 $Q$  از قطرهای  $P_1P_5, P_2P_6, P_3P_7, P_4P_8$  مقداری است  
 ثابت.

۸۱/۸ - ترجمه: محمد رکنی قاجار

در چهار ضلعی  $ABCD$  روی ضلعهای  $AB$  و  $BC$  و  $DA$  و  $CD$  به ترتیب و در همین جهت نقاط  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $L$ ،  $M$  و  $N$  و  $P$  را بقسمی انتخاب می‌کنیم که هر ضلع به سه‌باره متساوی تقسیم شود. هرگاه  $E$  نقطه تلاقی  $IN$  با

## کلاس چهارم طبیعی

۸۱/۱ - ترجمه: محمد رکنی قاجار

ثابت کنید که اگر در مثلث قائم الزاویه، طول یک ضلع زاویه  
قائم  $\angle C$  واحد کمتر از طول وتر باشد، طول ضلع دیگر برابر است  
با جذر دو برابر مجموع طولهای وتر و ضلع اول. با استفاده  
از این خاصیت طول ضلع مثلث قائم الزاویه را حساب کنید  
که طول وتر آن  $17$  و طول یک ضلع  $15$  است، یا آنکه طول وتر  
آن  $26$  و طول یک ضلع آن  $24$  است.

۸۱/۲ - از: جواد فیض دانشجوی دانشکده فنی  
تبریز

در مربع  $ABCD$  روی قطر  $BD$  نقطه  $P$  را انتخاب  
می‌کنیم که  $BP = BC$  باشد. عمودی که در  $P$  بر  $BD$  اخراج  
شود ضلع  $CD$  را در  $Q$  قطع می‌کند. ثابت کنید که:

$$PD = PQ = QC$$

## کلاس چهارم ریاضی

۸۱/۳ - فرستنده: جواد فیض

چند جمله‌ای  $P(x)$  با کمترین درجه را چنان بیا بید که:  
 $P(x)$  بر  $x^3 + 1$  و  $-1$  بر  $x^3 + 1$  بخش پذیر باشد.

۸۱/۴ - ترجمه: فتح‌الله‌زرنگری

عدد حقیقی  $a$  را تعیین کنید برای آنکه مجموع مربعات

### ۸۱/۱۴ - (ترجمه) فرستنده: جوادفیض

به فرض:

$$z = \sin(a+b) \quad y = \sin b \quad x = \sin a$$

هرگاه  $a$  و  $b$  کمانهای غیر مشخص باشند، عبارت گویای شامل  $x$  و  $y$  و  $z$  مستقل از  $a$  و  $b$  را بدست آورید.

### ۸۱/۱۵ - ترجمه از فرانسه

دو نقطه ثابت  $A$  و  $B$  عدد حسابی  $k \neq 1$  مفروض است. روی سهم  $AB$  دو نقطه  $I$  و  $J$  را تعیین می‌کنیم که هاره خط  $AB$  را به نسبت  $k$  تقسیم می‌کنند. اگر  $\triangle$  خطی باشد که نسبت فواصل دو نقطه  $A$  و  $B$  از آن برابر با  $k$  است و خط  $D$  فصل مشترک دو صفحه باشد که بر یکدیگر عمودند و به ترتیب بر  $I$  و  $J$  می‌گذرند، ثابت کنید که مکان خطوط  $\triangle$  بر مکان خطوط  $D$  منطبق است.

## کلاس ششم طبیعی

### ۸۱/۱۶ - فرستنده: جوادفیض

$$\text{ثابت کنید دایره‌ای که مرکزش: } \left( \frac{a}{2}, \frac{b+1}{2} \right)$$

است و از نقطه  $(1, 0)$  می‌گذرد، از نقاط تلاقی منحنی به معادله:  $y = x^2 + ax + b$ .

### ۸۱/۱۷ - ترجمه: فتح‌الله‌زرگری

معادله زیر را حل کنید:

$$5\sin 2x + \sin x + \cos x = 1$$

## کلاس ششم ریاضی

### ۸۱/۱۸ - ترجمه از فرانسه

- منحنی  $C_1$  نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید:

$$y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

- اگر  $M$  نقطه دلخواهی از منحنی  $C$  و  $M'$  قرینه نسبت به ببدأ مختصات باشد، معادله منحنی  $C_2$  امکان نقطه  $M'$  را بدست آورید.

- مجموعه دو منحنی  $C_1$  و  $C_2$  را  $C$  می‌نامیم. معادله

این منحنی  $C$  چیست؟

$F$  نقطه تلاقی  $LP$  و  $JM$  با  $G$  نقطه تلاقی  $JM$  با  $H$  و  $KQ$  نقطه تلاقی  $IN$  با  $KQ$  باشد، ثابت کنید که مساحت چهارضلعی  $EFGH$  یک نهم مساحت چهارضلعی  $ABCD$  است.

## کلاس پنجم طبیعی

### ۸۱/۹ - از: سید رضا میرزندهدل

دو تابع:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

را مشخص کنید بقسمی که داشته باشیم:

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = (x+1)^2 \\ f(x) - \gamma g'(x) = 2x^2 - x - 3 \end{cases}$$

### ۸۱/۱۰ - از علی حاج‌ابراهیمی، آبادان

از معادله زیر مقدار  $x$  را بدست آورید:

$$\cot x = \tan 20^\circ + 2 \tan 40^\circ + 4 \cot 80^\circ$$

## کلاس پنجم ریاضی

### ۸۱/۱۱ - حدود مقادیر حقیقی $x$ را تعیین کنید برای آنکه

تابع زیر معین باشد:

$$y = \sqrt{\log(x^2 - x - 5)} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$$

از: همایون مرادی ششم ریاضی دبیرستان پهر العلوم بروجرد

تابع زیر مفروض است:

$$y = (x^2 - 4x + 5)^m + 2x - 4$$

ثابت کنید همه منحنیهای نمایش این تابع که درازاء مقادیر مختلف  $m$  بدست می‌آیند در نقطه ثابتی بر خط ثابتی  $x=5$  مماس می‌باشند. مختصات این نقطه ثابت و معادله مماس ثابت را بدست آورید.

۸۱/۱۳ - در مربع  $ABCD$  از رأس  $A$  به نقطه  $M$  وسط ضلع  $BC$  وصل می‌کنیم و از  $M$  خطی رسم می‌کنیم که با خط  $MA$  زاویه  $\alpha$  ساخته و ضلع  $CD$  را در  $N$  قطع کند. به فرض  $CN = x$ ؛

اولاً حدود  $x$  را پیدا کنید برای آنکه زاویه  $\alpha$  حاده یا قائمه یا منفرجه باشد.

ثانیاً به فرض  $\alpha = 75^\circ$  مقدار  $x$  را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} \text{عدد } n+2 \text{ رقمی } N \text{ را از رابطه زیر بدست آورید:} \\ N = \underbrace{abb \dots bc}_{\text{مرتبه } n} = \underbrace{aa \dots a}_{\text{مرتبه } n+1} + \underbrace{bb \dots b}_{\text{مرتبه } n+1} + \\ + \underbrace{cc \dots c}_{\text{مرتبه } n+1} \end{aligned}$$

-۸۱/۲۴ ترجمه از فرانسه

دونقطه ثابت A و B مفروض است. دایره هایی را در نظر می گیریم که بر B می گذرند و از نقطه A به زاویه قائم دیده می شوند، یعنی اگر از A دو مسas بر آنها رسم کنیم زاویه بین این دو مسas قائم باشد.

ثابت کنید که مکان مرکز این دایره ها دایره ای است که مرکز آن قرینه A نسبت به B است.

-۸۱/۲۵ ترجمه از فرانسه

دو دایره C و C' در A و B متقاطعند و به فرض R شعاع اولی از' R شعاع دومی بزرگتر است. دایره هایی را در نظر می گیریم که در T بر دایره C و در' T' بر دایره' C' مماس باشد.  
 ۱) ثابت کنید که خط TT' از یکی از دو نقطه ثابت I و J که آنها را تعیین می کنند می گذرد.  
 ۲) ثابت کنید که مرکز دایره هایی که بر یکی از دایره هایی که آنها را تعیین می کنند می گذرد.

یک هذلولی H واقعند و این بیضی و هذلولی در نقاط A و B قائم بر یکدیگرند.

-۸۱/۲۶ معادله E به صورت زیر را نسبت به مجهول t در

نظر می گیریم:

$$(x-1)t^2 + 2(y-x)t + (x+1) = 0$$

مکان نقطه (y و x) T را در هر یک از حالت های زیر تعیین کنید:

الف - معادله E ریشه مضاعف داشته باشد.

ب - معادله E دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد.

-۸۱/۲۷ درتابع زیر مقدار a را تعیین کنید برای آنکه

هر گاه  $x \rightarrow \pm \infty$  حد y برابر با مقدار معینی باشد و این مقدار معین را بدست آورید:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - (ax + 1)$$

-۸۱/۲۸ از: علی حاج ابراهیمی، آبادان

معادله زیر را حل کنید:

$$(4 + \cos^2 x)(\cos^3 x + 3 \cos x) = \\ = 4(1 + 4 \cos^4 x) \sqrt{\cos x}$$

-۸۱/۲۹ به ازاء چه مقدار X نامساوی زیر محقق است:

$$\cos x \cos 2x > \sin x \sin 2x$$

-۸۱/۳۰ از: سید جمال آشفته دانشجوی حسابداری

عدد abba را با شرط زیر بدست آورید:

$$\overline{abba} = (\overline{aa})^2$$

-۸۱/۳۱ از: علی هاشمی زاده دانشجوی دانشکده فنی تهران

## QUESTHAI RIYASII

$$a = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-4}}{2}$$

برای آنکه داشته باشیم:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \left( a + \frac{1}{a} \right) + 2 = 0$$

الف -  $x = 4$  یا  $x = 0$  ب - فقط

ج - فقط  $x = 4$  د - کافی است که  $x \geq 4$

-۸۱/۲۸ معادله  $m > 0$  به فرض:

$$\sqrt{x^2 - mx} = x + m$$

الف - فقط یک جواب دارد ب - جواب ندارد.

ج - دو جواب دارد د - بیش از دو جواب دارد

## کلاس چهارم ریاضی

-۸۱/۲۹ به فرض  $a > 0$  و  $b > 0$  مقدار عبارت:

$$P = \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) - \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}$$

الف - منفی است. ب - مثبت است.

د - یامثبت یا منفی است.

ج - صفر است.

ج - مقدار  $q$  مشخص می شود اما مقدار  $p$  مشخص نمی شود .

د - مقدار  $p$  مشخص می گردد اما مقدار  $q$  مشخص نمی شود .

**۸۱/۳۴** - تابع زیر را درنظر می گیریم :

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x + a \sin^2 x \cos^2 x$$

هر گاه  $y'$  مشتق تابع بعد از اختصار برابر با صفر گردد ؟

$$a = -3$$

ج - برابر با هر مقدار می تواند باشد .

د - هر چه باشد  $\neq 0$  است .

**۸۱/۳۵** - مثلثی که  $(0, 0)$  و  $(0, 1)$  دو رأس آن رأس  $C$  از آن بر  $x'$  واقع بود و طول شعاع دایره محیطی آن

باشد :

الف - منحصر به فرد است . ب - وجود ندارد .

ج - دو عدد وجود دارد .

د - بیش از دو عدد وجود دارد .

**۸۱/۳۶** - هر گاه داشته باشیم

$$a = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad b = x \sin \alpha - y \cos \alpha$$

قدر  $\operatorname{tg} \alpha$  برابر است با :

$$\frac{ax + by}{ax - by} : \text{ب} : \frac{ax - by}{ax + by} : \text{الف} :$$

$$\frac{ay + bx}{ay - bx} : \text{د} : \frac{ay + bx}{ay - bx} : \text{ج} :$$

**۸۱/۳۷** - دو معادله زیر را درنظر می گیریم :

$$\sin x + \cos x + 2\sqrt{\sin x \cos x} = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$$

الف - دو معادله مستقل از یکدیگرند .

ب - دو معادله بعضی جوابهای مشترک و بعضی جوابهای غیرمشترک دارند .

ج - دو معادله جواب مشترک ندارند .

د - دو معادله هم ارزند .

**۸۱/۳۸** - دو صفحه  $P$  و  $Q$  در خط  $\Delta$  مشترک ندارند و زاویه مسطوحه آنها  $\alpha$  است . خط  $D$  که در صفحه  $P$  واقع است با خط  $\Delta$  زاویه  $\beta$  و با صفحه  $Q$  زاویه  $\gamma$  می سازد . به فرض :

$$x = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

الف -  $x > 1$  است ب -  $x < 1$  است .

ج -  $x \neq 1$  است .

**۸۱/۲۹** - هر گاه داشته باشیم :

$$\log ax^r - \log bx^r - \log bx + \log c = 0$$

مقادیر  $a$  و  $b$  و  $c$

الف - تصاعد حسابی می سازند .

ب - تصاعد هندسی می سازند .

ج - تصاعد توافقی می سازند .

د - دارای رابطه ای مستقل از  $x$  نیستند .

**۸۱/۳۰** - به فرض :

$$x = \log_{bc} a \quad y = \log_{ab} c \quad z = \log_{ac} b$$

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

خواهیم داشت :

$$\text{الف: } P < 1 \quad \text{ب: } P > 1$$

$$\text{ج: } P \neq 1 \quad \text{د: } P = 1$$

**۸۱/۳۱** - در مثلث  $ABC$  به ضلعهای  $a$  و  $b$  و  $c$

و  $BC = a$  و  $AC = b$  و  $AB = c$  درنظر

می گیریم بقسمی که نقاط  $D$  و  $G$  بر  $AB$  ، نقاط  $E$  و  $I$  بر  $ADEF$  و نقاط  $F$  و  $H$  بر  $AC$  و  $G$  بر  $BC$  واقعند هر گاه  $S_1$  مساحت لوزی  $ABC$  و  $S_2$  مساحت لوزی  $BGHI$  باشد به فرض  $a < b < c$  داریم :

$$\text{الف: } S_1 > S_2 \quad \text{ب: } S_1 = S_2 \quad \text{ج: } S_1 < S_2$$

د -  $S_1$  و  $S_2$  قابل مقایسه نیستند

**۸۱/۳۲** - در مثلث  $ABC$  زاویه ای که میانه  $AM$  با

ضلع  $AB$  می سازد دو برابر زاویه ای است که این میانه با ضلع

$AC$  می سازد . عمودی که در نقطه  $C$  بر ضلع  $AC$  اخراج شود

استداد میانه  $AM$  را در  $D$  قطع می کند .

$$\text{الف: } AE = 2AB \quad \text{ب: } AE = 2AB \quad \text{ج: } AE > 2AB \quad \text{د: } AE < 2AB$$

$$\text{الف: } AE > 2AB \quad \text{ب: } AE < 2AB \quad \text{ج: } AE > 2AB \quad \text{د: } AE < 2AB$$

## کلاس پنجم ریاضی

**۸۱/۳۳** - دو تابع زیر را درنظر می گیریم :

$$y_1 = x^2 + px + q \quad y_2 = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

هر گاه  $y_1$  و  $y_2$  به ترتیب مشتقهای دو تابع بوده و

دو معادله  $y_1 = 0$  و  $y_2 = 0$  هم ارز باشند، یعنی هر

جوابی از هر یک از آنها جواب دیگری نیز باشد ؟

الف - مقادیر  $p$  و  $q$  مشخص می شوند .

ب - هیچیک از دو مقدار  $p$  و  $q$  مشخص نمی شود .

- الف - جواب ندارد. ب - شش جواب دارد.  
 ج - بیش از شش جواب دارد. د - پنج جواب دارد.
- ۸۱/۴۳** در مثلث ABC اندازه زاویه B سه برابر اندازه زاویه A است اگر طول ضلع BC برابر با  $x^2$  و طول ضلع AC برابر با  $(x+1)^2$  باشد، لازم و کافی است که :
- الف -  $x = 0$  ب -  $x < 2 + \sqrt{2}$   $x > 2 - \sqrt{2}$   
 ج -  $x < 2 + \sqrt{2}$  یا  $x > 2 - \sqrt{2}$  د -  $x < 2 + \sqrt{2}$
- ۸۱/۴۴** عددی است سه رقمی و مضرب ۱۳، مقلوب N عددی است سه رقمی که اگر بایک جمع شود مضرب ۱۳ می شود. این عدد N :
- الف - منحصر به فرد است. ب - وجود ندارد.  
 ج - منحصر به دو عدد است.  
 د - به تعدادی بیش از دو وجود دارد.
- ۸۱/۴۵** اگر a و b و c و d عدهای صحیح بتمایز باشند، دستگاه :

$$\begin{cases} a+b=c+d \\ a^r+b^r=c^r+d^r \end{cases}$$

الف - جواب ندارد.

ب - به تعداد نامحدود جواب دارد.

ج - جواب دارد اما تعداد آنها محدود است.

د - فقط یک دسته جواب دارد.

- ۸۱/۴۶** در متوازی الاضلاع ABCD قاطع متغیر  $\triangle G$  مرکز مثلث ABD می گذرد و ضلعهای BD و DA و AB را به ترتیب در  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  قطع می کند. خط  $AB$  در  $\gamma'$  و با خط  $AD$  در  $\beta'$  متقاطع می شود. مکان نقطه تلاقی دو خط  $\gamma'$  و  $\beta'$  :

الف - خط بحمل BD است ب - خط عمود بر BD است.

ج - خطی بتمایز از BD و موازی با آن است.

د - خط مستقیم نیست.

- ۸۱/۴۷** M نقطه‌ای است ازیضی به کانونهای F و F' و به مرکز O بقسمی که  $OM = m$  و اندازه زاویه F'MF برابر با  $\theta$  است. مقدار  $\frac{\operatorname{tg} \theta}{2}$  برابر است با :

$$\begin{array}{ll} \frac{a^r - m^r}{b^r} & \text{ب} - \frac{a^r + m^r}{b^r} \\ \frac{a^r - b^r}{m^r} & \text{د} - \frac{a^r + b^r}{m^r} \end{array}$$

الف -

- ۸۱/۴۹** در چهار وجهی ABCD وجه ABC مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a است. وجه DBC مثلث قائم الزاویه است و بال AD بر صفحه DBC عمود است. شعاع کرمه می‌گیطي چهار وجهی بر حسب a برابر است با:

$$\text{از} - \frac{3a\sqrt{3}}{2} \quad \text{ب} - \frac{a\sqrt{6}}{4} \quad \text{ج} - a\sqrt{3} \quad \text{د} - \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

## کلاس ششم ریاضی

- ۸۱/۵۰** خطی که از نهاد نظیر ماقسیم و می نیم تابع :

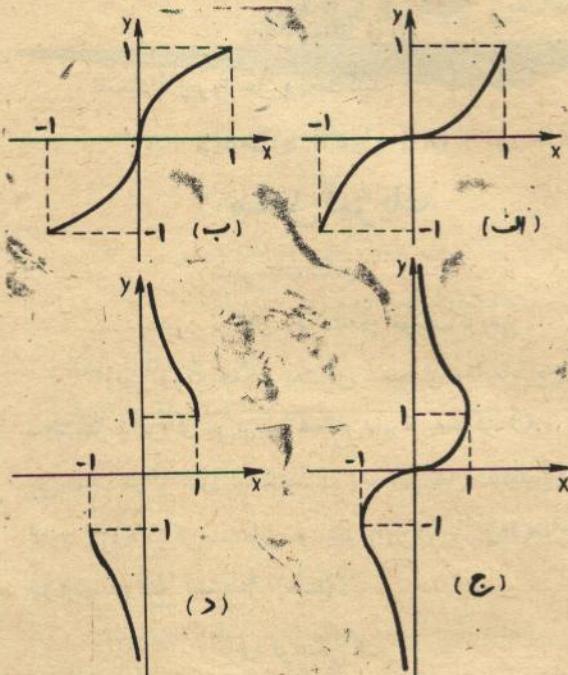
$$y = x^3 - 3x + q$$

می گذرد :

- الف - از نقطه ثابت می گذرد.  
 ب - در نقطه ثابت بر منحنی ثابتی مماس است.  
 ج - ثابت است. د - امتداد ثابت دارد.

- ۸۱/۴۱** شکل منحنی C به معادله زیر کدام است.

$$xy^2 - 2y + x^3 = 0$$



- ۸۱/۴۲** به فرض  $\pi < x < 0$  معادله مثلثی :

$$\frac{1 + \sqrt{1 - \sin 2x}}{1 + \sqrt{1 + \sin 2x}} = \operatorname{tg} x$$

## مسئل انتخابی از

# مسئل امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث دوم، سال تحصیلی ۱۳۴۹-۵۰ (اسفند)

و بحیط مشتث ABC

دبیرستان دین و دانش قم

دبیر: سعید - فرستنده: جواد بر قعی رضوی

دستگاه زیررا حل و بحث کنید:

$$\begin{cases} 2x - 2y = m \\ (m - 2)x - y = 1 - m \end{cases}$$

دبیرستان فرخی

دبیر: حافظ قرآن

نامعادله زیررا حل و بحث کنید:

$$a(x-1)^2 + (x+1)(a-1) > a(x+1)^2$$

### مسئل فیزیک

دبیرستان شاهپور رشت

دبیر: نو تاش - فرستنده: یوسف کریمی

از یک ورقه همگن به شکل مستطیل به ابعاد  $40 \times 20 \text{ cm}$  سانتیمتر دایره‌ای می‌بریم. شعاع دایره به مرکز O، می‌باشد. مرکز ثقل جسم نسبت به مرکز ثقل مستطیل کجا قرار دارد. (O مرکز مستطیل و خط  $OO' = 10 \text{ cm}$  و همچنین موازی دو ضلع مستطیل است).

گروه فرهنگی شهریار قم

دبیر: کبیری - فرستنده: جواد بر قعی رضوی

حجم یک گلوله فلزی در دمای صفر درجه  ${}^{\circ}\text{C}$   $800 \text{ cm}^3$  و در دمای  $20^{\circ}\text{C}$  درجه  ${}^{\circ}\text{C}$   $809.6 \text{ cm}^3$  می‌باشد. از جنس فلز این گلوله ورقه‌ای تهیه کرده‌اند که مساحت آن در صفر درجه  ${}^{\circ}\text{C}$   $1200 \text{ cm}^2$  است. مساحت ورقه را در دمای  $20^{\circ}\text{C}$  - درجه حساب کنید.

### کلاس چهارم طبیعی

#### جبر

دبیرستان آریا اهواز

دبیر: محمد رضا نادری

- اولاً، ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$\frac{x-a}{a} = \frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c} = k > 0$$

آنگاه می‌توان نوشت:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (k+1) \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ثانیاً، سه عدد  $m$  و  $n$  و  $p$  چنان بیاید که دارای شرایط ذیل باشند:

- سه عدد  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{2}$  بااعداد  $m - \sqrt{2}$  و  $n - \sqrt{3}$  و  $p - \sqrt{2}$  و  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{2}$  متناسب باشند.

- مجموع مربعات آنها  $3969$  شود.

- حاصل عبارت زیررا بدست آورید:

$$\frac{4}{\sqrt{9} + \sqrt{18}} + \frac{5\sqrt{15} - 3\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$$

دبیرستان الهی

دبیر: بابازاده - فرستنده: شاهپور خسروی دهکردی

- نامعادله زیررا حل کنید:

$$\frac{7}{x-4} + \frac{3}{x-3} < \frac{4}{x-5}$$

- در مثلث قائم الزاویه ABC ( $B = 90^{\circ}$ ) ضلع AB = 10m وزاویه C =  $30^{\circ}$  می‌باشد. مطلوب است مساحت

## مسائل شیمی

دیرستان الهی

$$\frac{\sqrt{V\lambda + V\sqrt{V\mu - 1}} - \sqrt{V\lambda - V\sqrt{V\mu - 1}}}{\sqrt{V\lambda - V\sqrt{V\mu + 1}}} = \sqrt{2}$$

دیرستان ارم

فرستنده: الهه و غلامرضا جوانشیر  
دستگاه زیر را حل کنید:

$$2(x+y) = 3xy$$

$$3(2x+z) = 5xz$$

$$\frac{y+2z}{yz} = \frac{4}{3}$$

دیرستان ایراندخت بهشهر

دیر: تهرانی - فرستنده: قمر عابدی نژاد

معادله درجه دوم زیر را حل کنید:

$$a(b-1)x^2 - (a^2 + b^2 - b)x + ab = 0$$

دیرستان بهشت آذین اصفهان

دیر: قوام‌نحوی

ثابت کنید اگر در معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

یکی از ریشه‌ها مربع عکس ریشه دیگر باشد رابطه زیر برقرار است:

$$a^2 + c^2 + abc = 0$$

دیرستان پهلوی رشت

دیر: نبوی - فرستنده: محمد رضا سرداری

اگر  $p$  عددی ثابت باشد ذاتاً مساوی زیر را اثبات کنید:

$$(p + \sqrt{p} + \sqrt[n]{p} + \dots + \sqrt[n]{p}) +$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt[n]{p}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{p}}\right) \geq 2n$$

دیرستان پهلوی گلپایگان

دیر: علی‌اکبر جعفری

دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = 18 \\ y^2 + yx + yz = 27 \\ z^2 + zx + zy = 36 \end{cases}$$

دیرستان جلیل نصیرزاده

دیر: نامدار - فرستنده: محسن بخشایش

اگر  $x'$  و  $x''$  ریشه‌های معادله:

دیر: ملقدیمی - فرستنده: شاهپور خسروی دهکردی  
 محلولی از کلرور سدیم و نیترات مس موجود است.  $30\text{cc}$   
 از محلول مذبور بوسیله  $15\text{cc}$  محلول نیترات نقره دو دسی-  
 نرمال رسوب کامل می‌دهد. در  $50\text{cc}$  محلول اولیه جریان گاز  
  $\text{SH}_2$  به حد اشباع وارد کردیم  $1/92$  گرم رسوب تولید شد.  
 غلظت دونمک را محاسبه کنید.

دیرستان ایراندخت بهشهر

دیر: نیازی - فرستنده: قمر عابدی نژاد

۴۹ - ۴ گرم کلرات پتاسیم را در اثر حرارت بطور کامل  
 تجزیه می‌نماییم. حجم گاز حاصل را در فشار  $50$  میلی‌متر جیوه  
 و  $22/3^\circ$  حرارت حساب کنید. اگر نمک تولید شده را در  
  $250\text{cc}$  آب حل کنیم محلول حاصل چه غلظت معمولی و  
 ملکولی و نیز نرمالیته خواهد داشت

## کلاس چهارم ریاضی

### جبر

دیرستان آذر - شماره ۳

فرستنده: گیتی خواجه‌خلیلی

- معادلات درجه دوم زیر مفروضند:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ Ay^2 + By + C = 0 \end{cases}$$

به شرط اینکه میان این دو معادله، ساوی باشند ثابت کنید  
 رابطه زیر برقرار است:

$$(2ax + b)^2 = (2Ay + B)^2$$

- تحقیق کنید حاصل عبارت زیر برابر  $x^2$  است:

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(b-a)(c-b)} = 0$$

دیرستان این سینا رضائیه

دیر: اسلام‌منور - فرستنده: فرامرز مردانی

ثابت کنید:

: b' و b

$$P = x'^{\Delta} + x''^{\gamma} + \frac{1}{x''^{\alpha}} + \frac{1}{x'^{\beta}}$$

دیبرستان فروزی مراغه

دیبر: شمس- فرستنده: رجب رزمی گنجی

اگر  $a_1, a_2, \dots, a_n$  باشد ثابت کنید:

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$$

دیبرستان بروی

دیبر: مختاری، شریفی- فرستنده: محمد حسن نوری

- عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc$$

- مقادیر A و B را طوری بیابید که عبارت:

$$x'^{\alpha} + Ax^{\gamma} + B \quad \text{بر } (x+1) \text{ قابل قسمت باشد.}$$

## همتم حساب

دیبرستان آذر - شماره ۳

فرستنده: گیتی خواجه خلیلی

- معادله زیر را حل کنید:

$$1 + 2 \log_x 2 \cdot \log_x (10-x) = \frac{2}{\log_x X}$$

- در صورتی که داشته باشیم:

$$\log 3 = 0.47712 \quad \text{و} \quad \log 2 = 0.30103$$

مطلوب است محاسبه اعداد زیر:

$$\log B = (0.3125)^{50} \quad \text{و} \quad \log A = (0.108)^{50}$$

دیبرستان آرش - شماره ۱

دیبر: بکتاشی - فرستنده: پروانه بکتاشی

- اولین جمله یک تصاعد هندسی نزولی نامحدود،

واحد و هر جمله مساوی سه برابر حد مجموع جملات بعدی

است. تصاعد را بنویسید.

- معادله زیر را حل کنید:

$$2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \frac{7}{16} + \dots$$

دیبرستان ارم تبریز

فرستنده: الله و غلامرضا جوانیشور

حاصل عبارت زیر را تعیین کنید:

$$S = 9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots99$$

n مرتبه

$$x^{\gamma} + px + q = 0$$

باشد، معادله درجه دومی تشکیل دهد که ریشه‌های آن عبارت

باشد از:

$$y' = \frac{x' - a}{b - x'} \quad \text{و} \quad y'' = \frac{x'' - a}{b - x''}$$

دیبرستان دین و دانش قم

دیبر: سعید- فرستنده: جواد برقی رضوی

معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x^2}-1}{\sqrt{x+1}} = 4$$

دیبرستان سعدی اصفهان

دیبر: تلگینی- فرستنده: بهدی تاجری هرندي

در معادله:

$$x^{\gamma} - 2mx + m + 1 = 0$$

اولاً m را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه‌های این معادله

m+1 باشد. ثانیاً m را طوری تعیین کنید که بین ریشه‌های

این معادله رابطه زیر برقرار باشد:

$$x'^{\alpha} + x''^{\alpha} + x'x''^{\alpha} + x''x'^{\alpha} = 4$$

ثالثاً معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های

معادله مفروض باشد.

دیبرستان شاهپور شیراز

دیبر: جوادپور- فرستنده: صمد صالحی

اگر  $\alpha$  ریشه معادله:

$$x^{\gamma} - px + q = 0$$

باشد ثابت کنید کسر زیر به  $\alpha$  و p بستگی ندارد:

$$\frac{\alpha'(\alpha-p)}{\alpha'-p\alpha+2q}$$

گروه فرهنگی شهریار قم

دیبر: صدری- فرستنده: جواد برقی رضوی

در صورتی که:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$$

$$g(x) = f(x^{\alpha}) + f(x^{-\alpha})$$

باشد مقدار  $(\bar{x}^{\alpha} - 2)g(x)$  را محاسبه و مخرج کسر حاصل را

گویا کنید.

دیبرستان فردوسی رضائیه

دیبر: قنبرزاده- فرستنده: ابراهیم حسین زاده

اگر  $x'$  و  $x''$  ریشه‌های معادله:

$$x^{\gamma} - vx + 1 = 0$$

باشند مطلوب است مقدار عبارت P بدون استفاده از دستورهای

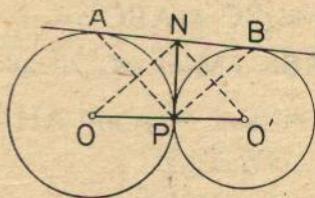
دیبرستان مروی

دیبر : غیاثی - فرستنده : محمد حسن نوری  
دریک صفحه هشت نقطه اختیار کرده و از هر نقطه به سایر نقاط وصل می کنیم . حساب کنید مجموع قطعه خطهایی که به این ترتیب حاصل می شود .

مسئلہ هندسه

دیبرستان آذر - شماره ۳

فرستنده : گیتی خواجه خلیلی  
دو دایره به مرکز  $O$  و  $O'$  در نقطه  $P$  برهم مماس خارج می باشند . خط  $AB$  مماس مشترک خارج آنها در نقطه  $M$  مماس داخلی را قطع می کند .



قائم الزاویه و دایره به قطر  $OO'$  بر  $AB$  مماس است .  
دیبرستان ارم

فرستنده گان : الهه و غلامرضا جوانشیر  
مکان هندسی نقاطی را پیدا کنید که مجموع فواصل آن نقاط از دو خط  $D$  و  $D'$  برابر ۱ باشد .

دیبرستان بنی هاشمی

دیبر : هدانیا - فرستنده : محمد معینی  
خطی موازی یک ضلع مثلث چنان رسم کنید که محیط ذوزنقه حدث برابر مقدار معولم ۱ باشد .  
در مثلث  $ABC$  زاویه  $B$  دو برابر زاویه  $C$  می باشد ، ثابت کنید .

$$b^2 - c^2 = ac$$

دیبرستان پهلوی گلپایگان

دیبر : علی اکبر جعفری

سه نقطه  $M$  و  $N$  و  $P$  غیر واقع بریک استقامت مفروضند ، خطی مانند  $\triangle$  چنان رسم کنید که اگر عمودهای  $MM'$  و  $NN'$  و  $PP'$  را بر آن فرود آوریم داشته باشیم :

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{2}{3} \quad \frac{NN'}{PP'} = \frac{3}{4}$$

دیبرستان سعدی اصفهان

فرستنده : مهدی تاجری هرندي

سه خط متقابله  $X$  و  $y$  و  $z$  مفروضند . از نقطه معلوم  $P$

دیبرستان الهمی

دیبر : با بازاره - فرستنده : شاهپور خسروی دهکردی  
از رابطه زیر  $X$  را حساب کنید :

$$4x^2 + 2x + 28 = 1 - 2x + 3x^2$$

دیبرستان امیر خیزی

دیبر : مرتضوی - فرستنده : نادر نادری زنوز  
مجموع  $n$  جمله از رشته زیر را بدست آورید :

$$S = \log \frac{1 \times 3}{2^2} + \log \frac{2 \times 4}{3^2} + \dots + \log \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

- در معادله درجه سوم زیر مقدار  $a$  را چنان تعیین کنید که ریشه ها تشکیل تصاعد حسابی بدهند :

$$x^3 - ax^2 + 11x - a = 0$$

دیبرستان بنی هاشمی

دیبر : کنگرلو - فرستنده : محمد معینی  
از تساوی زیر مقدار  $x$  را حساب کنید :

$$\log x = \frac{1}{3} \log 7 - \log 7 + \log 3 - 3 \log \sqrt[3]{6} + \\ + \log 13 - 3 \log \sqrt[3]{2}$$

دیبرستان پهلوی رشت

دیبر : نبوی - فرستنده : محمد رضا مردادی

مجموع بینهایت سری زیر را بدست آورید :

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{7}{16} + \frac{40}{32} + \dots$$

دیبرستان پهلوی همان

دیبر : از گمی - فرستنده : سعید سجادی

- اگر  $x$  و  $y$  مقادیر صحیح و مشتبی باشند مقدار آنها را

از معادله میاله زیر بدست آورید :

$$y^2 + xy + 2y = 51$$

دیبرستان فروزی مراغه

دیبر : مجتبی - فرستنده : رجب رزمی گنجی

نسبت مجموع  $n$  جمله از دو تصاعد حسابی :

$$\frac{5n+1}{7n-4}$$

است . مطلوب است میاسبه نسبت جمل هفدهم آنها .

دیبرستان محمد طبری آمل

دیبر : محمودی - فرستنده : ماشاء الله نژاد

چهار ضلعی، پنج ضلعی، شش ضلعی و ... را به ترتیب رسم می کنیم . اگر تعداد اقطار تمام این چند ضلعی ها برابر باشد ، چند عدد چند ضلعی رسم شده است .

۸۰۰

باز آن به طرف بالا باشد طول ستون هوای محبوس در قسمت پائین آن ۲۵ سانتیمتر است و اگر لوله را معکوس نمائیم طول ستون هوای ۲۱/۱۴ سانتیمتر است. اگر طول ستون جیوه ۲ سانتیمتر فرض شود، مشار جورا در محل آزمایش حساب کنید.

دیبرستان پهلوی گلپایگان

دیبر : علی اکبر جعفری

لوله‌ای که یک طرف آن بسته است روی طشتک جیوه قرار دارد. ارتفاع هوای داخل لوله ۴۵ سانتیمتر و دمای آن ۷°C است، ارتفاع جیوه داخل آن تا سطح جیوه طشتک ۴۰ سانتیمتر و مشار هوای خارج در محل آزمایش ۷۶ سانتیمتر جیوه است. اگر دمای هوای داخل لوله را به ۲۷°C برسانیم، جیوه چند سانتیمتر در لوله پایین می‌آید.

دیبرستان سعدی اصفهان

دیبر : یاکی - فرستنده : مهدی تاجیری هرندي

در ظرفی ۵ کیلو گرم آب ۶۰° وجود دارد. می‌خواهیم آنرا به دو قسمت آن چنان تقسیم کنیم که اگر یک قسمت آنرا سرد کرده تا به آب صفر درجه برسد و حرارت حاصل از آنرا بدقت  
دیگر بدھیم تبدیل به آب جوش ۱۰۰° گردد.

دیبرستان شاهپور مشیر از

دیبر : حداد - فرستنده : صمد صالحی

یک مکعب فلزی ۲۴۳ گرم وزن دارد اگر آنرا در الكل فروبریم ۲۱/۶ گرم از وزن آن کاسته می‌شود و اگر آنرا در گلیسرین فروبریم ۳۷/۸ گرم از وزن آن کم می‌شود. مطابق با میزان طول هر ضلع مکعب و وزن مخصوص فلز و نیز وزن مخصوص گلیسرین را. وزن مخصوص الكل ۵/۸ است.

دیبرستان علمیه

دیبر : اوالحسنی - فرستنده : ناصر سیفی

۲۰۰ گرم آهن و ۴۸۰ گرم آلومینیم را تا ۱۵ درجه گرم کرده اول قطعه آهن را در گرماسنجی که محتوی ۶۰۰ گرم نفت ۱۵ درجه است می‌اندازیم، درجه حرارت تعادل به ۲۵ درجه می‌رسد. سپس قطعه آلومینیم را در داخل گرماسنج وارد می‌کنیم، درجه حرارت تعادل به ۵۵ درجه می‌رسد، گرمای ویژه آهن و آلومینیم را حساب کنید در صورتی که گرمای ویژه نفت ۵/۰ کالری بر گرم و ازش آبی گرم اسنچ ۱۰ گرم باشد.

دیبرستان فردوسی رضائیه

دیبر : اسفندی - فرستنده : ابراهیم حسین زاده

جسمی را به نیرو منج آویخته در گلیسرین به وزن مخصوص ۱/۲۵ گرم وارد می‌کنیم، نیرو منج ۱۴۷ گرم را نشان می‌دهد. این جسم را روی جیوه به وزن مخصوص ۱۳/۶ نشان می‌دهد.

یکان دوره هشتم

خطی مرور دهید که اگر x و y و z را به ترتیب در A و B و

قطع کند  $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$  باشد (m) و n طولهای معلوم هستند.

دیبرستان فردوسی رضائیه

دیبر : رحیمی افوار - فرستنده : ابراهیم حسین زاده اگر فواصل مرکز دایره محيطی مثلث از سه ضلع به ترتیب  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  باشد، ثابت کنید:

$$\alpha + \beta + \gamma = R + r$$

دیبرستان فروزی مراغه

دیبر : اسدیان - فرستنده : رجب رزمی گنجی

در مثلث ABC ضلع BC و نقطه H پای ارتفاع AH روی

BC ثابت‌اند. مکان نقطه M وسط AB را وقتي که رأس A روی

عمود AH تغییر می‌کند تعیین کنید.

دیبرستان قناد باهل

دیبر : حسینی زاده - فرستنده : عزیزالله زادع

در مثلث ABC نقطه M روی ضلع BC (بین C و B)

قرار دارد. از نقطه M خطی موازی میانه AA' رسم می‌کنیم

تما ضلع AC را در N و ضلع AB را در P قطع کند.

ثابت کنید:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AN} \quad MN + MP = 2AA'$$

دیبرستان بروی

دیبر : غیاثی - فرستنده : محمدحسن نوری

در مثلث ABC زاویه حاده B دو برابر زاویه C می‌باشد.

ارتفاع AH را رسم کرده و AB را به اندازه BH امتداد

می‌دهیم تا نقطه H' بdest آید. از H' به H وصل کرده و

امتداد می‌دهیم تا AC را در نقطه H قطع کنید. ثابت کنید "H

و سطح AC می‌باشد.

## مسائل فیزیک

دیبرستان الهی

دیبر : قره باقی - فرستنده : شاهپور خسروی

داخل ۲۰ گرم آب ۱۰۰°C قطعه آهنی به جرم ۳۵ گرم و به

درجة حرارت T می‌اندازیم. ۲ گرم آب بخار می‌شود. درجه

حرارت T را حساب کنید. گرمای ویژه آهن ۱/۰ و حرارت

تبخیر آب ۱۰۰ درجه ۵۴۰۰ کالری است.

دیبرستان پهلوی

لوله باریکی که دیگ طرف آن بسته و طرف دیگر باز است،

اختیار کرده در آن کمی جیوه می‌ریزیم. اگر لوله قائم و طرف

عيار آب اکسیژنه را حساب کنید.

دبيرستان پهلوی رشت

دبير: رضوي - فرستنده: محمدرضا سرداري

مقداری آهن که در مجاورت هوا اکسید شده است در اسید

سولفوریک گرم می‌ريزيم. سپس پرمنگنات پتابسيم به آن می‌افزایم،

برای تولیدرسوب آجری زنگ ۶۵۴۵ سودنيم نرمال کافی است.

۱) وزن مخلوط و حجم اسید مصروفی را بدست آوريد

اگر غلظت اسید خمس نرمال باشد.

۲) حجم گاز تولید شده در دمای ۵۴/۶° و فشار

متعارفي حساب کنيد.

۳) اگر غلظت پرمنگنات پتابسيم  $\frac{1}{10}$  نرمال باشد حجم

آنرا بدست آوريد.

دبيرستان جام جم

دبير: خسروي - فرستنده: پروانه بكتاشي

آلائيزی از SnBa<sub>3</sub> را در اسید نيتريك رقيق حل می‌کنیم و حجم آن را به ۱۰۰۰cm<sup>3</sup> می‌رسانیم. در آزمایش اول بر ۱۰۰cm<sup>3</sup>

آن اسید سولفوریک اضافه می‌کنیم ۵/۲۳ گرم رسوب سفید حاصل می‌شود. در آزمایش دوم بر ۱۰۰cm<sup>3</sup> آن سود اضافه

می‌کنیم گاز حاصل را با ۲۰cc اسید سولفوریک  $\frac{1}{10}$  نرمال

ترکیب می‌کنیم عیار دو فلز را حساب کنید.

دبيرستان صفوی اردبیل

دبير: صفوی زاده - فرستنده: التقاط نعمتی

مخلوطی است از سولفات کلسیم و سولفات باریم. بروزی

۴/۵۷ گرم مخلوط اسید کلریدریک محلول می‌ريزیم گازهای حاصل را وارد آب کلرمی نمائیم به نتیجه اکسیداسیون کلوروباریم

۶/۹۹ گرم رسوب سولفات باریم تشکیل می‌شود؛

الف: وزن هریک از دو سولفات را حساب کنید.

ب: نسبت ملکولی مخلوط را بدست آوريد.

ج: اگر آب کلر مصروفی را با توجه به خاصیت اکسید

کنندگی آن بر روی محلول سولفات فرواضافه می‌کردیم چند

۱/۱۰ ملکول سولفات فرو  $\frac{1}{10}$  ملکول گرم در لیتر در این عمل

مصرف می‌شود.

د: اگر در عمل اول (اثر اسید بر سولفاتها) ۶۰۰ سانتیمتر

مکعب محلول اسید کلریدریک بکار رفته باشد پیدا کنید نرمالیتۀ

اسید مصرف شده را.

گرم قرار دهیم  $\frac{1}{5}$  حجم جسم در چیوه فروشی رود. از این دو آزمایش وزن مخصوص و وزن و حجم جسم را حساب کنید.

دبيرستان محمد طبری آمل

دبير: نیک خلق - فرستنده: ساشاله نژاد

جسم جامدی داخل مایع بددمای صفر درجه سانتیگراد شناور است ۹۸/۶٪ حجمش داخل مایع است. دمای مایع را چند

درجة بالا ببریم تا جسم کاملاً در مایع غوطه‌ور گردد. ضریب انبساط حجمی جسم  $10^{-6} \times 2$  و ضریب انبساط مایع

$A = 9 \times 10^{-4}$  می‌باشد.

دبيرستان مرود

دبير: عشقی - فرستنده: محمد حمین نوری

حباب هوایی از داخل ظرف جیوه بالا می‌آید. حجم آن در

عمر ۳۵ سانتیمتری از سطح جیوه ۵/۴cm<sup>3</sup> می‌باشد. حجم

آن در سطح جیوه چقدر است. فشار هوا ۷۶cmHg است.

(دما ثابت)

## مسائل شیمی

گروه فرهنگی آذر

دبير: ایروانی - فرستنده: رضا گلپر

مخلوطی از سولفات سدیم به وزن ۳/۹۴ گرم

داریم. چون این مخلوط را تحث اثر اسید کلریدریک قرار دهیم گازی

متضاعف می‌شود که در واکنش با سود می‌تواند  $\frac{2}{100}$  ملکول گرم

سولفات سدیم تولید نماید؛ اولاً مقدار هریک از نمکها را در

مخلوط حساب کنید. ثانیاً اگر مخلوط اولیه را در آب حل کنیم

و بر آن محلول کلروباریم کافی اضافه نمائیم چه مقدار رسوب بدست می‌آید.

دبيرستان الهی

دبير: ملاقدیمی - فرستنده: شاهپور خسروی

محلولی از کات کبود (Cu<sup>2+</sup> و SO<sub>4</sub><sup>2-</sup>) و زاج

سیز (Fe<sup>2+</sup> و H<sub>2</sub>O) موجود است.

از ۵۵cc این محلول گاز SH<sub>2</sub> عبور دادیم ۵/۹۶ گرم

رسوب سیاه تولید شد. ۵۵cc دیگر محلول اولیه را تبخیر کردیم

۵/۲۸ گرم جسم متبلور بدست آمد. غلظت دو جسم را تعیین کنید.

دبيرستان بنی هاشمی

دبير: فرجی، مؤمنی - فرستنده: محمد معینی

۱۰cc آب اکسیژنه را وارد محلول گاز سولفات کلریم

سپس در محلول حاصل محلول کلرور باریم می‌ريزیم رسوبی

تشکیل می‌گردد که ۱/۱۶۵ گرم وزن دارد. از این آزمایش

### دیبرستان علمیه

دیبر: بیهقی - فرستنده: ناصر سیفی

گاز حاصل از سوختن ۵ گرم پیرین، خالص (۴۸٪) را وارد محلول دسی نرمال پرمنگنات پتاسیم می نماییم. تعیین کنید چند CC پرمنگنات پیرنگ می گرد.

### کلاس پنجم طبیعی

#### جبر و مثلثات

دیبرستان آزم میاندوآب

دیبر: سعید فرشاد

محضیات نقاطی از تابع  $y = \frac{2x-2}{1-2x}$  را تعیین کنید که مماس مرسوم بر منحنی در آن نقطه بر خط  $x+3=4y$  عمود شود.

دیبرستان ابو ریحان (شبانه)

فرستنده: میدحسین طباطبائی

- از تابع زیر مشتق بگیرید:

$$y = \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2-x}+x}$$

- درستی تساوی زیر را تحقیق کنید:

$$\sin 200 + 2\sin 160 - \cos 70 + 3\sin 340 - 4\cos 110 - \sin 20 = 0$$

دیبرستان ایراندخت ساری

فرستنده: فریده با بازاده

دو خط به معادلات زیر مفروضند:

$$(1) (a+2)x - 4y = 5$$

$$(2) (2a+1)x - y = 2$$

ولا - a را به طریقی بیابید تا دو خط بایکدیگر موازی باشند.

ثانیاً - a را بطریقی بیابید تا عرض نقطه تلاقی دو خط برایر ۳ شود.

گروه فرهنگی جاویدان

دیبر: آذربستان - فرستنده: میرم吉د نویدی

در دایره جهت دار سه نقطه A و B و C چنان واقع شده‌اند که یکی از اندازه‌های کمان AB برابر با (-۴۵۰)

گراد و یکی از اندازه‌های کمان AC برابر با  $\frac{56}{6}$  رادیان است.

فرمول کلی اندازه‌های کمان BC را بدست آورید.

### دیبرستان مشافا

فرستنده: میدحسین طباطبائی

- درستی تساوی زیر را تحقیق کنید:

$$\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^4 x} = 1 - \cot^4 x$$

- مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید:

$$\sin 150^\circ \cos 300^\circ \tan 240^\circ \cot 210^\circ = ?$$

گروه فرهنگی شهریار قم

دیبر: امیدوار - فرستنده: جواد برگی رضوی

اولاً در تابع  $y = ax^2 + bx + c$  مدار a و b و c را چنان

تعیین کنید که منحنی تابع محور y هارا در نقطه به عرض ۲ قطع کند و در نقطه به طول ۵ دارای مراکزیم یا می‌نمیم برابر

۲/۲۵ باشد.

ثانیاً منحنی (C) به معادله:  $y = -x^2 + x + 2$

مفروض است؛ مطلوبست تعیین جدول و رسم منحنی نمایش تغیرات آن.

ثالثاً معادله خط مماس بر منحنی (C) در نقطه به طول ۲ را بدست آورید.

دیبرستان فردوسی گلپایگان

دیبر: علی‌اکبر جعفری

- دایره به معادله:  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + k = 0$

مفروض است. پارامتر k را طوری بیابید که دایره بر محور y ها مماس گردد.

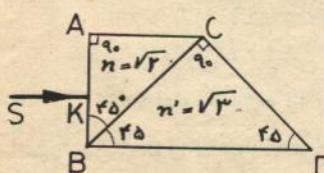
- سهمی به معادله:  $y^2 + ay - 6x + b = 0$

مفروض است. پارامترهای a و b را طوری تعیین کنید که نقطه (-۱، ۰) رأس سهمی باشد.

### مسائل فیزیک

گروه فرهنگی جاوید لاهیجان

دیبر: عبدالله زاده - فرستنده: میرم吉د نویدی



در شکل مقابل شاعع

تکرنگ SK عمود بر

وجه AB می‌تابد.

مسیر و انحراف را با

محاسبه پیدا کنید.

دیبر: بنی هاشمی

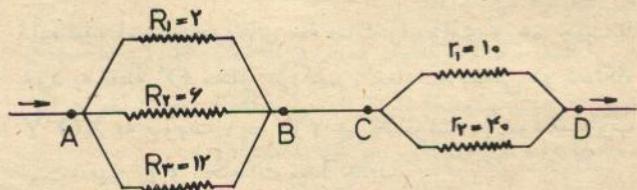
دوسر سیمی به مقاومت ۳۰ اهم را به دوقطب مولدی  
وصل می کنیم شدتی که از آن می گذرد ۴ آمپر است هر گاه ۲۰  
درصد انرژی مولد در داخل خودش مصرف شود.

اولا نیروی محرکه و مقاومت داخلی آنرا حساب کنید.  
ثانیاً اگر دو قطب مولدی که نیروی محرک آن ۱۵۰  
ولت و مقاومت داخلی ۷/۵ اهم است بطور متواالی به يك  
موتور و يك ظرف تجزیه سولفات مس با الکترو دهای سی و  
مقاومت داخلی ۲/۵ اهم متصل نمائیم:

الف - اگر موتور را از گردش باز داریم شدت جریان  
در مدار ۱۵ آمپر می شود. مقاومت داخلی موتور را حساب کنیم.  
ب - اگر موتور کار کند مقدار ۱/۶ گرم مس در مدت  
۱۶ دقیقه و ۵ ثانیه در کاتد آزاد می شود. نیروی ضد محرکه  
موتور را حساب کنید.  $C_U = ۶۴$  و  $F = ۹۶۵۰۰$

گروه فرهنگی شهریار قم

دیبر: کبیری: فرستنده: جواد بر قعی رضوی  
در شکل زیر شدت جریان در سیم  $R_1$  برابر ۱/۵ آمپر  
است. مطلوب است محاسبه شدت جریان در دو سیم  $R_2$  و  $R_3$  و  
شدت جریان در مدار اصلی و اختلاف پتانسیل بین دو نقطه  
.D و C



### مسائل شیمی

کلاس پنجم متفرقه - دیبرستان ۱۵ بهمن (ناحیه ۴)

فرستنده: بید حسین طباطبائی

- از حل کردن ۴/۶ گرم مس در اسید سولفوریک گرم  
و غیلظ چند لیتر گاز و چند گرم کات کبود به فرمول  
 $\text{SO}_4\text{Cu} \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  بدست می آید.

- چند سی سی مخلوط هر منگنات نرمال: وسیله ۱۰۰  
سی سی محلول سولفات فرو خالص به غلظت ۱۵/۲ گرم در  
لیتر کاملاً بیرنگ می شود (در مجاورت اسید سولفوریک).

- از حل کردن ۵/۶ گرم روی در اسید کلریدریک چند  
گرم نمک و چند گرم گاز بدست می آید.

### گروه فرهنگی جاوید لاهیجان

دیبر: شرفی - فرستنده: میرم吉ید تویدلی  
۲/۶۷ گرم کربنات پتاسیم با چند سانتیمتر مکعب اسید  
سولفوریک ۲۵٪ نرمال ترکیب می شود. حجم گاز را در  
شرایط متعارفی حساب کنید.

### کلاس پنجم ریاضی

#### جبر

دیبرستان اتحاد

خط  $x = ۲$  و محل تلاقی آن  $P$  با محور طولها مفروضند.  
دایره ای به قطر  $OP$  رسم کرده ( $O$  مبدأ مختصات) و سپس  
این دایره را با خط  $y = mx$  قطع کرده ایم تا دایره  $۱$  در نقطه  
 $M$  و خط  $x = ۲$  را در  $N$  قطع کند. از نقطه  $M$  خطی به موازات  
محور عرضها و از  $N$  خطی به موازات محور طولها رسم  
می کنیم تا همندیگر را در نقطه  $Q$  قطع کنند. مطلوب است مکان  
نقطه  $Q$  هنگامی که  $m$  تغییر می کند.

دیبرستان ادب

دیبر: ابطحی - فرستنده: محمود تهرانی خوروندی  
مشتق تابع زیر را حساب کرده و ساده کنید:

$$y = (1-x)\sqrt{\frac{2}{x-1}}$$

دیبرستان ارم تبریز

فرستنده: الهه و غلامرضا جوانشیر

$$y = \frac{x^2 - ax + 2}{x^2 - 1} \quad \text{مقدار } a \text{ را طوری تعیین}$$

کنید تا عرض نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع برابر صفر شود.

دیبرستان ارونده رو

فرستنده: حسین پور حیدریان

- مقدار حقیقی تابع زیر را به ازاء  $x = ۱$  حساب کنید:

$$y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}}$$

- منحنی نمودار تابع زیر را رسم کنید:

$$y = x^3 + 2x - x^5$$

دیبرستان استرآبادی گرگان

دیبر: سیدین - فرستنده: حسینعلی کاشانی

$$\text{حد تابع } y = \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \text{ را در ازاء } x = ۰ \text{ بدست آورید.}$$

مفروض است . مطلوب است تعیین موضع نقطه M در ناحیه‌ای از صفحه دوم حور تادوریشہ معادله مثبت باشد.

دیبرستان خردگر گان

- دیبر: آهنگری - فرستنده: سید عبدالله هاشمی
- توابع اولیه تابع زیر را بدست آورید:

$$y = \sin^r x + \cos^r x + \operatorname{tg}^r x$$

- مشتق تابع y را نسبت به x حساب کنید:

$$y = \frac{\sqrt{\sin u - \cos^r u}}{1-u} \quad \text{و} \quad u = (1+x^r)^{\frac{1}{r}}$$

دیبرستان خوارزمی - شماره ۱

- دیبر: صدری - فرستنده: خلامرضا جوانشیر
- مشتق تابع زیر را حساب کنید:

$$y = f(\sin^4 2x)$$

- ثابت کنید منحنیهای زیر فقط در یک نقطه متقطع هستند و یک مماس مشترک دارند، مختصات نقطه تقاطع و معادله مماس مشترک را بنویسید:

$$y = -x^2 + x - 1$$

دیبرستان خوارزمی - شماره ۲

- دیبر: محمدی - فرستنده: فرهاد فرزان
- معادله یک منحنی در دستگاه Oxy به صورت:

$$4x^2 + 8y^2 - x + 16y = k$$

داده شده است. مجموعهای مختصات را موازی و هم جهت با خود به نقطه O' منتقل می‌کنیم ، معادله منحنی در دستگاه XO'Y به صورت  $x^2 + 2y^2 = 1$  نوشته می‌شود. مطلوب است تعیین k و مختصات مبدأ جدید.

- مثلث قائم الزاویه ABC ( $A = 90^\circ$ ) بقسمی است که رأس A روی محور X ها و رأس B روی محور y ها و رأس C بر خط  $x + y = 15$  واقع است . مطلوب است تعیین مختصات سه رأس در صورتی که  $\frac{10}{3}$  و  $(3)$  مرکز تقل مثبت باشد .

دیبرستان دارالفنون

دیبر: سمیعی - فرستنده: مهرداد سرفراز

نقاط  $(4, 3)$  A و  $(-2, 1)$  B بروی قطر اطول یک لوزی قرار دارند که قطر اقصیر آن نصف قطر اطول می‌باشد. مختصات رئوس C و D را که بروی قطر اقصیر واقعند بدست آورد . (A و B دور اس دیگر لوزی هستند).

دیبرستان شاهپور شهر کرد

دیبر: آذری - فرستنده: قهرمان سلیمانی

$$y = \frac{ax + b}{x - c} \quad \text{- تابع } y = \frac{ax + b}{x - c} \text{ مفروض است. ضرایب } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ را بیاید تا نمایش هندسی تابع دارای مرکز تقارنی بر نیمساز}$$

ریج اول بوده و محور عرضها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند و مماس در این نقطه موازی ربع اول باشد.

دیبرستان بهشت آثین اصفهان

دیبر: قوام نحوی

مشتق تابع زیر را بدست آورید:

$$y = (2x + \sqrt{x^4 + \sqrt[4]{4-x^4}})^{10}$$

کلاس پنجم متفرقه - دیبرستان ۱۵ بهمن (ناحیه ۴)

فرستنده: سید حسین طباطبائی

- نقاط  $(2, 2)$  A و  $(-2, -2)$  B و  $(4, -4)$  C رأس مثلث ABC هستند. ثابت کنید این مثلث متساوی - الساقین است.

- نقاط  $(4, 0)$  A و  $(0, -2)$  B و  $(0, -4)$  C رئوس مثلث ABC می‌باشند. معادله خطی را بنویسید که از رأس A موازی ضلع BC رسم شود.

دیبرستان پهلوی گلپایگان

دیبر: علی اکبر جعفری

حدکسر زیر را وقتی  $1 \rightarrow x$  پیدا کنید:

$$y = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 8} - 3x}$$

دیبرستان پهلوی نجف آباد

دیبر: جوادی - فرستنده: مصطفی ایزدی نجف آبادی

اگر 'y و "y به ترتیب مشتقهای اول و دوم تابع:

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

باشد ثابت کنید:

$$y''' - 4y'' = 0$$

دیبرستان جعفری

دیبر: موسوی - فرستنده: مرتضی متولیان

- حاصل تابع زیر را به ازاء  $x = 0$  تعیین کنید:

$$y = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}$$

- معادله درجه دوم:

$$z^2 + 2(x-y)z + (y-x) = 0$$

که در آن x و y مختصات نقطه غیر مشخص M فرض شده

- مختصات نقاطی از منحنی تابع

$$y = \text{Arctg}(2x - 1)$$

را بدست آورید که مماس در آن نقاط موازی نیمساز ربع اول باشد.

گروه فرهنگی شهریار قم

دیبر: صدری - فرستنده: جواد برقی (ضوی

مطابقت محاسبه عبارت زیر وقتی  $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\sin(x - \frac{\pi}{3})}$$

دیبرستان فردوسی تبریز

فرستنده: غلامرضا جوانشیر

تابع  $y = x^2 - 4x + 1$  مفروض است. نقطه‌ای روی

محور عرضها چنان‌پیدا کنید که از آن نقطه منحنی فوق به زاویه قائمه دیده شود.

دیبرستان سروی

دیبر: نیوشان، حبیبی - فرستنده: محمدحسن نوری

تابع  $y = mx^2 - (m+1)x + 1$  مفروض است ( $m \neq 0$ )

الف - ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر  $m$  منحنی‌های

نمایش این قابع از دونقطه ثابت  $A$  و  $B$  که مختصات آنرا پیدا خواهید کرد می‌گذرند.

ب - معادلات خطوط مماس در نقاط  $A$  و  $B$  را بر منحنی‌های

فوق بنویسید و معادله مکان عنده‌ی نقطه  $G$  محل برخورد این مساهها را وقتی  $m$  تغییر می‌کند بدست آورید.

ج - چنان تعیین کنید که منحنی تابع فوق بر محور

طولها مماس گردد.

دیبرستان هدف - شماره ۱

فرستنده: محسن محسنی شهران

- مشتق تابع زیر را بدون آنکه تغییر شکل دهید حساب

کرده و به ساده ترین صورت تبدیل کنید:

$$y = \frac{2\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{3\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

- در تابع  $y = ax^2 + bx - 1$  ضرائب  $a$  و  $b$  را طوری

تعیین کنید که خط  $y = 2x - 9$  بر منحنی مماس بوده و نقطه ماقزیم یا می‌نیعم بروی خط  $y = 3x + 2$  قرار گیرد.

## مثلثات

دیبرستان ارم تبریز

فرستنده‌گان: الهه و غلامرضا جوانشیر

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda})(1 + \cos \frac{3\pi}{\lambda})(1 + \cos \frac{5\pi}{\lambda})(1 + \cos \frac{7\pi}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}$$

دیبرستان استرآبادی گرگان

دیبر: آهنگری - فرستنده: حسینعلی کاشانی راد  
اگر  $\tg X_1$  و  $\tg X_2$  و  $\tg X_3$  ریشه‌های معادله

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

باشد ثابت کنید:

$$x_1 + x_2 + x_3 = k\pi + \text{Arctg} \frac{b-d}{c-a}$$

دیبرستان بزرگمهر تبریز

دیبر: طاوسی - فرستنده: صمد ریخته گران  
را به قسمی تعیین کنید که تساوی زیر به ازاء  
جمعی مقادیر  $X$  برقرار باشد:

$$3\sin X - 4\cos X = k\sin(X + \alpha)$$

- درستی تساوی زیر را تحقیق کنید:

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$$

کلاس پنجم، تفرقه - دیبرستان ۱۵ بهمن (ناحیه ۴ تهران)

فرستنده: سیدحسین طباطبائی

عبارت زیر را خلاصه کنید:

$$(1 + \cot A - \frac{1}{\sin A})(1 + \tan A + \frac{1}{\cos A})$$

دیبرستان پهلوی گلپایگان

دیبر: علی‌اکبر جعفری

- بدون استفاده از مشتق ماکزیم و می‌نیعم عبارت زیر را حساب کنید:

$$y = 4\sin X + 3\cos X - 1$$

- ثابت کنید:

$$\text{Arctg} 1 + \text{Arctg} 2 + \text{Arctg} 3 = \pi$$

دیبرستان جعفری اسلامی

دیبر: رومینا - فرستنده: مرتضی متولیان

عبارت زیر را قابل محاسبه بوسیله لگاریتم کنید:

$$\sin^4(x+y) - \sin^2x - \sin^2y$$

دیبرستان فکرت اسکو

دیبر: صمدی میلانی - فرستنده: بهروز علمداری میلانی  
معادله زیر را حل کرده و جوابهای بین صفر و  $\pi/2$  را پیدا کنید:

$$\sqrt[4]{y} + \sqrt[4]{(\cos \frac{\pi}{4})(\tan x - \cot x)} + \sqrt[4]{28 - \sqrt[4]{(\cos \frac{\pi}{4})(\tan x - \cot x)}} = 5$$

دیبرستان مروی

دیبر: پاچناری - فرستنده: محمدحسن نوری  
مقدار عبارت زیر را بدون استفاده از جدول مثلثاتی محاسبه کنید:

$$y = \left( \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} \right) \left( \frac{1}{\cos 10^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\sin 10^\circ} \right) \tan 20^\circ$$

دیبرستان هدایت سنتندج

دیبر: عطایی

اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{3 + 4 \cos 4x + \cos 8x}{3 - 4 \cos 4x + \cos 8x} = \cot^4 2x$$

دیبرستان هدف - شماره ۱

دیبر: لنگرودی - فرستنده: محسن محسنی مهران  
- اولاً ریشه‌های معادله درجه دوم

$$8x^2 - 8\sqrt{2} \cos 3\alpha \cdot x + \sin^2 2\alpha = 0$$

را بدون استفاده از زاویه معین قابل محاسبه لگاریتمی کنید.  
ثانیاً در از  $a = 38^\circ 26' 22''$  مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید:

$$x = \sqrt{2} \cos^2 \frac{3\alpha}{2} \cos 3\alpha$$

- درصورتی که تساوی

$$\frac{a}{\cos x} = \frac{b}{\cos(x+\alpha)} = \frac{c}{\cos(x-\alpha)}$$

برقرار باشد عبارت  $S$  را حساب کنید:

$$S = \frac{a-b}{a+b} \cotg(x + \frac{\alpha}{2}) + \frac{a-c}{a+c} \cotg(x - \frac{\alpha}{2})$$

- در مثلث  $ABC$  رابطه زیر برقرار است. زاویه  $C$  را حساب کنید:

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} - \sqrt{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{3}{2}$$

- صحبت تساوی زیر را تحقیق کنید:

$$\sin \left\{ \text{Arc cos}[\tan(\text{Arc cos} \frac{1}{x})] \right\} = \sqrt{2-x^2}$$

- مطلوب است محاسبه  $\cos^3 x$  بر حسب  $\cos x$  و سپس از رزی آن معادله زیر را حل کرده و جوابهای آنرا در فاصله صفر و  $180^\circ$  محاسبه کنید:

$$8y^3 - 6y - 1 = 0$$

دیبرستان چهارم آبان

فرستنده: هنگامه طاهری

درستی تسویی زیر را تحقیق کنید:

$$2 \text{Arctg} \frac{1}{2} - \text{Arctg} 2 + \text{Arccotg} \frac{9}{13} = \frac{\pi}{4}$$

دیبرستان خوارزمی - شماره ۱

دیبر: صداقت کیش - فرستنده: غلامرضا جوانشیر

- عبارت  $2 \tan^2 17^\circ + \tan 56^\circ + \tan 17^\circ$  را قابل محاسبه لگاریتمی کنید:

معادله زیر را حل کنید:

$$\tan x \tan 2x \tan 3x \tan 4x = 1$$

دیبرستان شاهپور شهرکرد

دیبر: آذربایجان - فرستنده: قهرمان سلیمانی  
اگر  $\tan b = \tan a$  و  $\tan b$  ریشه‌های معادله:

$$x^2 + px + q = 0$$

باشد ثابت کنید:

$$a + b = \text{Arc} \frac{p}{q-1}$$

و اگر  $a + b = \alpha$  فرض شود  $q - 1 = 2p$  باشد مطلوب است  
محاسبه خطوط مثلثاتی  $2\alpha$ .

گروه فرهنگی شهریار قم

دیبر: امیدوار - فرستنده: جواد برقعی رضوی

اگر:

$\sin(-x+y+z) = \sin(x-y+z)$  و  $\sin(x+y-z)$   
سه جمله متولی یک تصاعد حسابی باشد ثابت کنید  $\tan x = \tan z$  و  $\tan y$  نیز سه جمله متولی یک تصاعد حسابی خواهد بود.

دیبرستان ملی صدر قم

دیبر: سعید - فرستنده: جواد برقعی رضوی

معادله زیر را حل کرده و جوابهای بین صفر و  $\pi/2$  از آن را مشخص کنید:

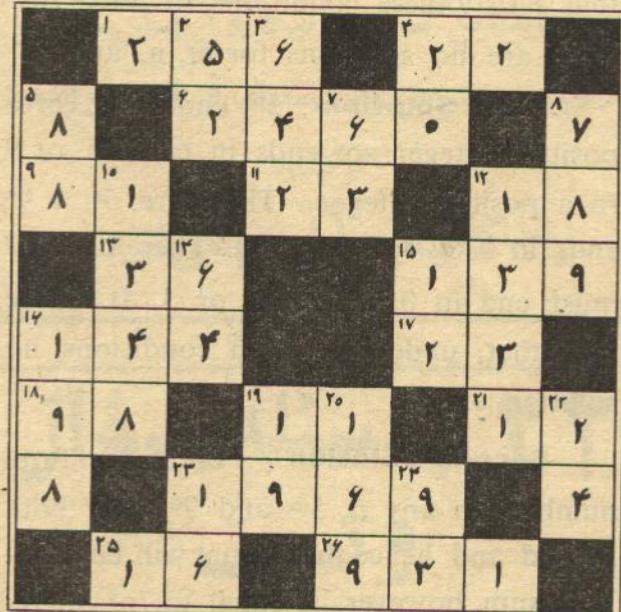
$$(1 + \cos 4x) \sin 4x = \cos 2x$$

دیبرستان فردوسی تبریز

دیبر: حسینزاده - فرستنده: غلامرضا جوانشیر

ج د و ل ا ع د ا د

## طرح از: طهمورث اسکندری



## حل جدول شماره گذشته

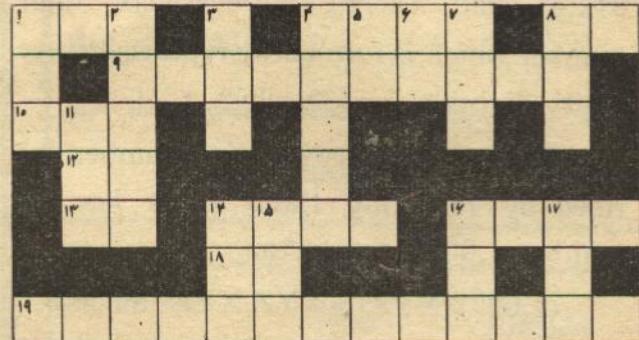


## نامه‌ها و مقالات ریاضی

ترجمه و تألیف: جمشید موری

# برای دانش آموزان و داوطلبان کنکور و دانشجویان شامل نامساویهای مشهور و موارد استعمال آنها در حل مسائل از انتشارات ارغون

درو ١٦٥ صفحه به قطعه جیبی، بها: ٥٠ ریال



افقی - ۱- به صورت  $aba$  و مجدد کامل است و چهار  
 برابر ش نیز چین است . ۴- عددی چهار رقمی که در رابطه  
 $abcd = (cd)^2$  صدق می کند . ۸- مجموع رقمها یش مکعب  
 کامل و تفاضل آنها مریع کامل است و از مقلوب خود کوچکتر  
 است . ۹- بزرگترین عدد ده رقمی مضرب ۸ که در ضمن مضرب  
 ۱۰۵ + ۱ نیز می باشد و هیچ رقمش نیست . ۱۰- سه برابر عدد ۱۲۷  
 ۱۲- متمم حسابی عدد ۸۳۶۰- عددی است زوج و متمم حسابیش  
 توان چهارم است . ۱۴- به صورت  $aabb$  و مجدد کامل است .  
 ۱۶- عددی چهار رقمی که چون در رقم یکان خود ضرب شود  
 مقلوبش بدست آید . ۱۸- سه برابر جذر عدد ۱۹۰- افقی .  
 مضربی است از و از  $125$  و اگر سه رقم سمت راست آن حذف شود  
 که حکمت بین عدد ده رقمی، بارقهای متفاوت بدست آید .

**قائم - ۱**- کوچکترین عدد سه رقمی که رقمهایش تصاعدی است که عددی می سازند . - تفاضل آن بر عدد ۱۴ افقی عددی است که بکسری آن ۹ واحد کمتر از عدد ۱ افقی است . - ۳ به صورت  $\overline{abcde}$  و مجدور کامل وزوج است . **۴**- به صورت  $\overline{aba}$  است که  $\overline{cde} = 3\overline{ab}$  . **۵**- متهم حسابیش دو ثلث عدد ۱۸ افقی است . **۶**- همان عدد ۵ قائم . **۷**- حاصل ضرب مقلوب عدد ۸ افقی در جذر عدد ۱ افقی . **۸**- مقلوب عدد ۷ قائم . **۹**- رقمهایش به ترتیب تصاعدی حسابی می سازند و یک ششم آن به صورت  $\overline{aab}$  است . **۱۰**- واحد کمتر از مقلوب نصف خود است . **۱۱**- ۱۴ و ۱۵ واحد بیشتر از عدد ۱۴ قائم . **۱۲**- کوچکترین عدد سه رقمی که رقمهایش تصاعد عددی با قدر نسبت ۴ می سازند . **۱۳**- ۱۷ . **۱۴**- مجدور کامل و ده برابر شش مکعب کامل است . **۱۵**- نصفش

## PROBLEMS AND SOLUTIONS

**Problem 90-** The number 397,397 is divisible by 13. So are the numbers 812,812 and 714,714 . Is every six digit number which is formed by repeating three digits divisible by 13? why?

**Solution:** Every six digit number formed by repeating three digits has the number 1,001 as a factor.

$$(1,001)(XYZ) = XYZ,XYZ \text{ Since}$$

$1,001 = (13)(77)$  we see every six digit number formed by repeating three digits is divisible by 13.

**Problem 91-** Find the number of terminal zeroes in:

$$100 \times 99 \times 98 \times \dots \times 2 \times 1 = 100!$$

Explain your procedure.

**Solution:** 100! can be thought of as the result of multiplying all the prime factors of all the integers less than 101. The only way a terminal zero will arise is to have both a factor of two and a factor of five appear in the set of prime factors. Since there are many even numbers between 0 and 101, the only limiting quality is number of fives available. There are twenty numbers that have at least one factor of five, i. e. 5, 10, 15, 20, etc. but when we inspect the numbers 25, 50, 75, and 100 we find two five factors in each. Thus there are  $20 + 4$  or 24 terminal zeros in 100!

**Problem 92-** In the equation  $5^m + 9^n = 7p^2$ , m, n, and p are natural numbers. Find three numbers m, n, and p that satisfy these conditions, or prove that there are no solutions for m, n, and p.

**First Solution :**  $5^m$  ends in 5 (m a positive integer).  $9^n$  ends in either 1 or 9 (n a positive integer). Therefore,  $5^m + 9^n$  ends in 0, 1, 4, 5, 6, or 9. Therefore  $7p^2$  must end in 0, 7, 8, 5, 2, or 3. It can be seen that, under the given conditions, no solution exists.

**Second Solution :** For any natural numbers m and n,  $5^m$  and  $9^n$  must both be odd and hence their sum will be even. This sum, however, is equal to  $7p^2$ ; therefore  $p^2$  is even and so is p. We can write p as  $2k$  for some natural number k and  $p^2$  as  $4k^2$ .

This can be restated as

$$p^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

and

$$7p^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

However,  $5 \equiv 1 \pmod{4}$  and  $9 \equiv 1 \pmod{4}$ .

Therefore, since 1 to any power is 1,

$$5^m \equiv 1 \pmod{4} \text{ and } 9^n \equiv 1 \pmod{4}$$

and

$$5^m + 9^n \equiv 2 \pmod{4}$$

Thus we see that  $7p^2$  must be congruent to both 0 and 2, an impossibility, and the equation has no solution.

# مسائل پنج دوره یکان

در نظر است مسائل پنج دوره یکان ابتدا از نخستین شماره تا آخرین شماره دوره پنجم، از نظر موضوعی تنظیم شده در یک یا چند کتاب به علاقمندان عرضه شود. در این باره در انتظار وصول نظرات خوانندگان و علاقمندان هستیم.

چاپ دوم

روش ساده

## حل مسائل شیمی

ترجمه: عطاءالله بزرگ زی

از انتشارات یکان

بها: ۲۰ ریال

آگهی

دانش آموزان محترم در شیراز، برای اشتراک یکان یا خرید تک شماره آن می توانند به کیوسک

کتابفروشی شمشاد

چهارراه زند، مراجعة فرمایند

## کتابفروشی فخر رازی

تهران - خیابان شاه آباد - تلفن: ۳۱۰۵۵۲

جای فروش مجله و سایر انتشارات یکان

تجدید چاپ

## مهمای ریاضی

ترجمه: محمد رکنی قاجار

از انتشارات یکان که مدتها نایاب بود، در شرف انجام است

چاپ جدید این کتاب در نیمه اول بهمن ماه سال  
جاری در دسترس علاقمندان قرار خواهد  
گرفت

بهای کتاب بعداً اعلام می شود

## ۲۲۲ مسئله، سؤال و قضیت کنکور

شامل مسائل و سؤالات و تستهای چهار جوابی  
جبر - حساب مثلثات - هندسه - شیمی و  
فیزیک به انضمام فرمولهای روابط ریاضیات  
وشیمی و فیزیک در قطع جیبی با کاغذ اعلاء  
 منتشر شد

جهت دریافت یک جلد کتاب فوق می توانید ۰۸ ریال  
پول یا تمبر باطل نشده و سیلہ پست سفارشی ارسال  
فرمایید تا کتاب با پست سفارشی جهت شما ارسال گردد.

آدرس - تهران - صندوق پستی ۷۲/۷۰۳۳ نامه نگاری شیوه  
از تهران و شهرستانها نماینده فروش می پذیریم  
(تلفن ۲۲۴۹۱)

## انتشارات بکان

روش ساده

### حل مسائل شیمی

ترجمه: عطاء الله بزرگ نبا

۲۰ ریال

### مجموعه علمی

شامل مقالات ریاضی، فیزیک و شیمی  
حل مسائل ممتاز ریاضی و مطالعه دیگر

۶۰ ریال

### راهنمای ریاضیات متوسطه

تألیف: عبدالحسین مصطفی

چاپ چهارم: ۱۲ ریال

### سروگو هیهای جبر

ترجمه: پرویز شهریاری

۶۰ ریال

تمرینات  
ریاضیات مقدماتی

تألیف: استاد هشتگردی  
فنا نایاب

مقدمه بر  
تئوری مجموعه ها  
تألیف: علی اصغر هومانی  
و ملا نایاب

معماهای ریاضی  
ترجمه: محمد رکنی قاجار  
فنا نایاب

### مسائلی از حساب استدلالی

تألیف: محمود کاشانی

جلد سوم  
۱۵ ریال

جلد دوم  
۱۵ ریال

جلد اول  
۱۲ ریال

مبادی  
منطق و ریاضی جدید

بها: ۴۳۰ ریال

تألیف: غلامرضا عجدی