یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ هشتم، شمارهٔ : ۳ شمارهٔ مسلسل : ۸۰ آذر ۱۳۵۰

در این شماره :

بها : ۲۵ ریال

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ هشتم - شمارهٔ سوم - شمارهٔ مسلسل : ۸۰

دی ۱۳۵۰

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : بانونصرت ملک‌یزدی

نشانی اداره :

تهران ، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیک شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۹۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VIII, number 3. Dec. 1971

subscription : 3$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر- تلفن:۸۲۵۹۲۸

یکان ۱۳۵۰

مقدمات چاپ یکان سال ۱۳۵۰ از هم اکنون فراهم شده است .

ازعلاقمندانی که‌سؤالهای امتحانهای ورودی دانشکده‌ها و مدارس عالی را در اختیار دارند و مایلند که برای چاپ در یکان سال ۱۳۵۰ بفرستند تقاضامی‌شود که این سؤالهارا طوری ارسال کنند که قبل از پایان‌دی‌ماه سال جاری به دفتر مجله‌واصل شود .

آموزش سادهٔ

نظریهٔ مجموعه‌ها

با روش برنامه‌ای

مربوط به‌صفحه‌های ۱۵۹ ، ۱۶۰ ، ۱۶۱ ، ۱۶۲

به‌دنبال آخرین‌موضوع مجلهٔ‌قبل، اولین موضوع این مجله رادردفترچه بنویسید. یك‌بار به‌دقت آنرابخوانید. به‌سادگی خواهید فهمید که جای خالی را باچه چیزباید پر کنیدیااگرپرسشی شده است پاسخ آن‌چیست. بعداز آنکه این پاسخ را درزیرپرسش نوشتید ، یاجای خالی را باموضوع مربوط پر کردید، آنگاه‌صفحهٔ مجله رابرگردانید و درست درپشت محل همان موضوع، پاسخ‌آن را مشاهده کنید. اگرپاسخی که‌شمانوشته‌ایددرست بوده‌است، آنگاه موضوع شمارهٔ بعدرایافته به‌ترتیب بالاآنرا دردفترچهٔ خودبنویسید وپاسخ آن رامعلوم کنید. اما اگرپاسخ‌شمادرست نبوده است، موضوع‌قبلی رامجدداًوبادقت بیشتربخوانیدتا پاسخ درست‌آنرا دریابید. بعد ازاطمینان‌ازدرست بودن پاسخ هرموضوع، موضوع شمارهٔ بعدآن را بنویسید وپاسخ دهید .

توجه داشته باشید که‌قبل از آنکه پاسخ هرموضوع‌راشخصاً معلوم نکرده‌اید به‌پشت‌صفحه‌مراجعه‌نکنید. با این‌روش، بدون نیاز به معلم ویابه‌کتاب دیگر، مفاهیم تازه‌ای را به سادگی و به‌آسانی خواهیدآموخت .

انتخاب اصطلاحات جدید فعلا تابع سلیقهٔ شخصی است

دربرگردان اصطلاحات جدید ریاضی از زبانهای خارجی به فارسی، تشتت آراء و اختلاف سلیقه وجود دارد . هم‌اکنون بـرای بعضی از مفاهیم ریاضی چندین اصطلاح بکارمی‌رود .

هریك از استادان دانشگاه‌وهریك‌ازمترجمان یانویسندگان کتابهای‌جدیدریاضی، که هرکدام درکارخود صاحب صلاحیتند ، برای یك مفهوم جدید اصطلاحی مطابق باسلیقهٔ شخصی خود بکار برده‌اند . شاید این اختلاف سلیقه درسطح دانشگاه اخلالی ایجادنکند، اما درسطح‌دبیرستان‌ومخصوصاًدردورهٔ‌راهنمایی‌تحصیلی،لازم‌است که‌برای‌یك‌مفهوم‌درتمام کشور اصطلاح واحد بکار رود. نویسندگان کتابهای درسی ناچارند که درمقابل یك‌مفهوم جدید تنهایکی ازاصطلاحات بکار رفته را انتخاب کنند و همه‌جا فقط همان را بکارببرند.

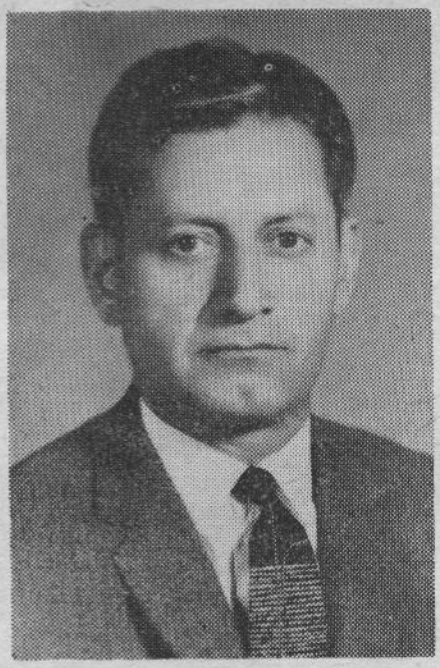
فعلا مأخذ یا مرجع‌رسمی برای وضع یا انتخاب اصطلاحات جدید ریاضی وجود ندارد یا اگر هست در این مورد خاص اقدامی نکرده است . پس ، نویسندگان کتابها در انتخاب اصطلاحات آزاد خواهند بودکه به سلیقهٔ شخصی عمل کنند .

نویسندهٔ یك کتاب جدید ریاضی ، اعم ازدرسی یاغیردرسی ، همچنین نویسنده یا مترجم یك مقاله ، نباید به خاطر انتخاب اصطلاحی که نـزد بعضیها متداول است و بعضی دیگرآن را نمی‌پسندند، مورد ایراد واقع شود .

عبدالحسین مصحفی

آشنای گرامی

حسین آزرم



نوشتهٔ : عبدالحسین مصحفی

سالها قبل از اقدام به انتشار یکان ، حسین‌آزرم برایم چهره‌ای آشنا بود ، هرچندکه اورا ندیده بودم . هرسال ، سؤالهای بخش عمدهٔ مواد ریاضی امتحانات نهایی طرح حسین‌آزرم بود ، و ازاین راه به‌عنوان‌فردی که درکارخودبصیرت‌کامل و درعلوم ریاضی اطلاعات وسیع و دقیق داشت، طرف آشنای دبیران ریاضی سرتاسرکشور و مورد احترام‌همهٔ آنان بود.

نخستین بار در کنگرهٔ بزرگ‌دبیران ریاضی به دیدارش نایل آمدم . دراین‌کنگره ، ادارهٔ گروهی را عهده‌دار بود که عضو آن بودم . درطی جلسات گروه ، جر وبحثهای مختلف پیش می‌آمد ودربیشتر مواردداختلاف آراء وجود داشت ، اما آنچه‌که مشهود بود شخصیت علمی و اجتماعی حسین‌آزرم و رفتار صمیمی و بی‌شائبهٔ وی بود ، و بخوبی معلوم بودکه به همهٔ اشکالات‌کار آموزش ریاضی درایران وقوف دارد .

چندسال‌پس ازآن‌تاریخ ، زمانی‌که مقدمات انتشاراولین شماره از یکان فراهم می‌شد ، بار دیگر به دیدار آزرم رفتم . در این موقع مدیریت کل تعلیمات متوسطه را بعهده داشت. با صمیمیت‌خارج از انتظار با من به‌گفتگو نشست و از نو- آوریهای برنامه‌های ریاضی‌کشورهای پیشرفته و راه یافتن نظریهٔ مجموعه‌ها در آموزش ریاضی سخن گفت ، و مقاله‌ای تحت عنوان « از اقلیدس تاکانتور» در اختیارم گذاشت. این مقاله درنخستین شمارهٔ یکان چاپ شد و سرآغازی گردیدبرای بحثها و مقالات مربوط به تجدید نظر دربرنامه‌های ریاضی و گرایش به‌سمت ریاضی جدید .

آزرم درمدتی‌که عهده‌دار مدیریت‌کل تعلیمات متوسطه بود ، همهٔ تلاش خودرا در اصلاح برنامه‌های ریاضی ونو- آوری‌آن بکار برد . می‌توان گفت‌که درآن روز تنها فردی از مسئولان اداری آموزش وپرورش بودکه به‌تحول جهانی‌روش و آموزش ریاضی آگاهی داشت. برای وقوف بیشتر به این تحول ، به بلژیك رفت و درآنجا با **پاپی** ، پیشروطرفداران ریاضی جدید ، ملاقات و گفتگوکرد . در مراجعت به‌ایران مقامات وزارت آموزش وپرورش را واداشت تا از پاپی برای سفر به‌تهران و آشنا ساختن دبیران ریاضی ایران با ریاضی جدید دعوت شود وجهت تأمین هزینهٔ مربوط ، شخصاً با ریاست هیئت مدیره ومدیرعامل شرکت ملی‌نفت ایران‌ملاقات کرد. دراین ملاقات ، که باید اواخر سال ۱۳۴۲ یا اوایل سال ۱۳۴۳ باشد ، وقوف **جناب دکتر اقبال** بر تحولات روشهای ریاضی و تأثیر نظریهٔ مجموعه‌ها برآن ، برای‌آزرم بسیار جالب بوده است ، وازهمین لحاظ موفق می‌شودکه در همان جلسه چك مربوط به هزینهٔ دعوت از پاپی و تشکیل کلاسهای کارآموزی ریاضی جدید را دریافت دارد . متأسفانه ابتلای به بیماری‌کلیه و لزوم سفربه خارج از کشور به‌منظور معالجه واستراحت بعد ازآن ، موجب قطع فعالیتهای اداری آزرم شد ودعوت ازپاپی و تشکیل‌کلاسهای کارآموزی‌ریاضی جدید در بوتهٔ‌فراموشی افتاد.

کنار رفتن آزرم از ادارهٔ تعلیمات متوسطه ، اورا از فعالیتهای در زمینهٔ ریاضی جدید باز نداشت . اولین مقالهٔ مربوط به مفاهیم مقدماتی‌نظریهٔ مجموعه‌ها را درمجلهٔ‌آموزش وپرورش بچاپ‌رساند. چاپ این مقاله محتاج به‌علامتهای‌جدید بودکه چاپخانه‌های ایران تا آن‌زمان فاقد آن بودند.آزرم نزدیك به شش‌ماه تلاش‌کرد تاموافقت وزارت آموزش‌وپرورش را برای تقبل هزینهٔ ساختن علامتهای چاپی ریاضی جدید بدست آورد. در نتیجهٔ این‌تلاش این علامتها ساخته شد وبین چاپخانه‌ها پخش گردیدکه فعلا مورد استفاده است.

در شروع کار انجمن معلمان ریاضی ، آزرم بـه ادارهٔ هیئت مدیرهٔ موقت بـرای تنظیم اساسنامه انتخاب شد . بـا علاقهٔ کامل درتمام جلسات شرکت می‌کرد. سعی وی همواره برآن بود تاانجمنی به معنی واقعی ، از معلمان ریاضی‌بوجود آید بقسمی‌که وسیله‌ای باشد بـرای بهبود و اعتلای وضع و مقام اجتماعی و معنوی معلمان ریاضی ، و بعدهاکه می‌دیدبر خلاف ایـدهٔ او ، انجمن در دامان دسته‌هـای معین افتاده و وسیله‌ای برای پیشبرد غرضهای خصوصی‌شده‌است رنج‌می‌برد.

آزرم دربـرقراری نظام جدید آموزشی در ایران و در تنظیم‌برنامه‌های‌جدید ریاضی ، سهم مؤثرداشت. اما عقیده‌اش آن بودکه باید قبل ازپیاده کردن برنامه‌های جدید ، معلمان آماده شده باشند .

نظر وی آن بودکه درکلاسهای کار آمـوزی ، معلمان مستقیماً زیر نظر متخصصان شایسته، از قبیل پاپـی ، فعالیت کنند ، نه‌اینکه ادارهٔ کلاس به شخصی واگذار گرددکه‌خودش هم از موضوع بحث اطلاعی نداشته باشد .

آزرم بعد ازبازنشستگی در وزارت آموزش و پرورش، مدتی عهده‌دار دبیرخانهٔ دانشگاه ملی شد و پس‌از آن تدریس ریاضی جدید را در دانشسرای عالی بعهده گرفت .

اکنون بیش ازیك سال است‌که حسین آزرم به دنبال دو عارضهٔ قلبی متوالی از فعالیتهای اجتماعی و علمی بازمانـده است. زیرنظر پزشکان و تحت مراقبت همسر شایستهٔ خود ، **بانو طاهر نیا**که خود ازدبیران باسابقه وممتاز دبیرستانهای تهران است، مجبور به استراحت مداوم است.

حسین آزرم نـزدیك بـه نیم قرن فعالیتهای فرهنگـی داشته‌است. تـاقبل از ابتلای به بیماری ، درتمام احـوال و موقعیتها و با وجود همهٔ مشاغل ، کارتدریس در دبیرستان‌را کنار نگذاشته‌است . به گفتهٔ یکی از دوستان، تنها بیش ازچهل سال در دبیرستان نظام ریاضیات تدریس‌کرده است.

برای‌آزرم، با وجود سالها فعالیتهای فرهنگی وتصدی مشاغل فنی ومخصوصاً شرکت مؤثردر برنامه‌ریزیهای‌درسی، خاطرات ونظرات زیاد وجوددارد، وبی‌شك برای‌مجلهٔ یـکان بهترین فرصت بود اگر بـه‌درج این‌نظرات نایل می‌آمد. امـا افسوس‌که فعلاتحریروتقریرمناسب حال‌آزرم نیست.خاطراتی راکه شخصاً ازاوداشتم بازگوکردم وبه‌اتفاق همهٔ دوستان و ارادتمندانش‌وهمهٔ آنان که‌ازپرتوعلمش ودرسش بهره گرفته‌اند ، آرزو می‌کنم تاهرچه زودتر سلامتیش رابازیابد.

بیوگرافی آزرم رادرخواست‌کرده‌بودم. باوجودکسالت درخواستم راپاسخ گفته وتاآنجاکه توانائیش اجازه داده‌شرحی راتقریرکرده است‌که درزیردرج می گردد.

* * *

اینجانب درسال ۱۲۹۱ شمسی **در نجف اشرف** بدنیا آمدم . تحصیلات ابتدائی خود را در **بابل** باتمام رسانیدم . برای‌تحصیلات متوسطه عازم **تهران**شدم. دورهٔ اول‌دبیرستان را در **مدرسهٔ ادب** و دورهٔ دوم رادر **مدرسهٔ دارالفنون** رشتهٔ علمی طی‌نمودم ودر ۱۳۱۰ به‌دریـافت دیپلم متوسطه نائل شدم. بعدوارد رشتهٔ ریاضی دانشسرایعالی گردیدم و در سال۱۳۱۳ به‌اخذلیسانس‌موفق گشتم. درهمان‌سال واردخدمت وزارت فرهنگ شدم. ابتدا در کتابخانهٔ ملی به‌عنوان معاون آن‌کتابخانه به‌انجام‌وظیفه‌پرداختم. ضمناًدردبیرستان‌دارالفنون چند ساعتی نیزبه‌تدریس ریاضی‌مسغول‌بودم. در۱۳۱۶به‌دایرهٔ مطبوعات ادارهٔ‌کل نگارش منتقل گشتم . در۱۳۱۷ به خدمت دبیری پرداختم. درسال ۱۳۲۱ به‌بازرسی فنی مشغول گشتم. درسال۱۳۲۵به‌ریاست فرهنگ مازندران منصوب‌وپس‌ازمدتی به‌تهران احضارشدم. چندسالی به‌تدریس‌وتألیف‌اشتغال داشتم. درسال ۱۳۲۷دربازرسی فنی‌مشغول‌شدم. بعدازمدتی‌به‌ریاست ادارهٔ‌کل‌بازرسی منصوب شدم. در۱۳۳۹ به‌ریاست ادارهٔ‌کـل تعلیمات متوسطه وپس‌ازسه‌سال به‌مدیریت‌کل‌تعلیماتی‌منصوب گردیدم . بعداز یك‌دوره بیماری در ۱۳۴۳ به ریاست‌شورای عالی اداری و درسال ۱۳۴۴ به افتخار بازنشتگی نائل شدم. بعد ازچندماه در تشکیلات دانشگاه ملی به مدیریت‌کل دبیرخانه و قائـم مقام رئیس دانشگاه در امور مالـی‌آن دانشگاه مشغول‌کار شدم. ضمناً در تمام طـول خدمت خود نیز تدریس می‌کردم کما اینکه تا سال ۱۳۴۹ در دانشسرای عالی تهران به تدریس ریاضی مشغول بودم. به‌تألیف کتابهای زیر نائـل آمده‌ام :

۱ـ ریاضی دورهٔ اول دبیرستان	۵ جلد
۲ـ جبر سال چهارم	۱ «
۳ـ هندسهٔ ترسیمی ورقومی سال ششم‌ریاضی	۱ «
۳ـ جبرومثلثات ششم طبیعی	۱ «
۵ـ حل‌المسائل ترسیمی ورقومی ششم	۱ «
۶ـ حل‌المسائل مثلثات ششم‌ریاضی	۱ «
۷ـ ریاضی جدید	۱ «

حسین آزرم

«نمونه‌ای از ابتکارات خواجه نصیر طوسی»

تنظیم از : جعفر آقایانی چاوشی

دریکان شمارهٔ ۷۴، مختصری دربارهٔ شرح احوال و آثار خواجه نصیرالدین طوسی درج گردید . در دنبالهٔ آن مقاله به چندکار علمی او اشاره می‌شود.

الف ـ ریاضیات :

۱ـ مثلثات ـ پروفسور **ویلهم شوایزر** ریاضیدان آلمانی در تاریخچهٔ مثلثات خود می‌نویسد : «برای اولین بار مسلمین درقرن نهم میلادی قوانین و اصول مسائل تانژانت و کوتانژانت را وضع کرده و برای طرز کار و استعمال آنها جدولهای حساب کرده‌ای ترتیب دادند .

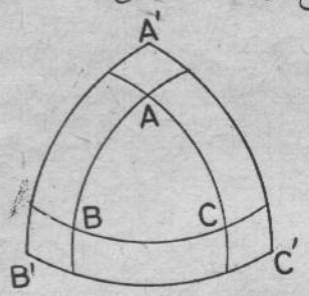
بزرگترین خدمت مسلمین کشف سینوس و دلائل آن بود و اولین دانشمندی که اثبات قضایا و دلائل آنرا بیان کرد ، **ابونصر فارابی** بود . **وخواجه نصیرالدین طوسی** اولین دانشمند اسلامی است که مثلثات را به عنوان یك علم مستقل معرفی کرده‌است، برای اولین بار مسلمین کسینوس را کشف کردند؛ **ابوریحان بیرونی** اولین دانشمندی است که ازکسینوس صحبت کرده ومسائل آنرا طرح نموده‌است؛ **رژیومونتانوس** و **یوهانس مولر** براثر مطالعهٔ آثار خواجه نصیر طوسی (= کشف القناع عن اسرار شکل القطاع) توانستند کتابی در این باره تألیف کنند که اساس تکامل وپایهٔ پیشرفت در مغرب زمین گردید .»

همانطور که قبلا نیز متذکر شدیم این کتاب نفیس ، به زبانهای مختلف ازجمله لاتین ، فرانسه ، انگلیسی ، وروسی ترجمه گردیده است .

طوسی اولین کسی است که حالات ششگانهٔ مثلث کروی قائم الزاویه را بکاربرده وآنرادرکتاب مذکور واردنموده‌است.

جالبترین موضوع این کتاب تعیین اضلاع مثلث کروی است ، وقتی که زوایای آن معلوم باشد. مسئله‌ای که درهندسهٔ مسطحه نمونه‌ای ندارد .

طوسی برای حل این مسئله مفهوم مثلث قطبی را وارد می‌کند . دونقطه ازکره را قطبهای دایرهٔ عظیمه‌ای از این کره می‌نامیم ووقتی این دونقطه همان وضع قطبهای کرهٔ زمین رانسبت به خط استوا داشته باشند ، دراین صورت مثلثی را قطبی مثلث مفروض گوئیم، وقتی که رئوس آن قطبهای اضلاع مثلث مفروض باشند ، طوسی رابطهٔ بین اضلاع وزوایای دومثلثی راکه متقابلا قطبی یکدیگرند پیدا می‌کند ،به این ترتیب اضلاع مثلثی که قطبی مثلث ABC است برابر است با :



$R(\pi - A)$ و $R(\pi - B)$ و $R(\pi - C)$

به‌کمك این مطلب ، تعیین اضلاع مثلث کروی از روی زوایای آن منجر به حل مسئله قبل یعنی تعیین زوایای مثلث کروی از روی اضلاع آن می‌شود .

۲ـ هندسه ـ آقای پروفسور محسن هشترودی ضمن سخنرانی خود، دربارهٔ «الرسالة الشافیة عن الشك فی الخطوط المتوازیة» درکنگرهٔ خواجه نصیر چنین گفته است :

«درآخرین نامه که خواجه به **علم الدین قیصر** نوشته است به این جمله برمی‌خوریم :

و اکنون گویم که من این حکمرا شکلی از اشکال کتاب قرار ندادم. بلکه من حکم به اینکه دوزاویه که پیدا می‌شوند میان دوعمود متساوی بوسیلهٔ خطی که ازکنار آندومی گذرد ، قائمه هستند شکلی قراردادم وآنرا با خلف بیان کردم پس بدین حکم منتهی شد وخلف ظاهر گشت . واین بیان نظیر آن بیانی است

که درشکل چهارم‌ازمقالهٔ اول گفته می‌شودکه اگرهنگام‌تطبیق دومثلث دو قاعدهٔ‌آن برهم منطبق نشوند ، احاطه به سطحی پیدا می‌کنند واین محال‌است زیرا حکم دراین بحث وحکم‌بر امتناع احاطهٔ دوخط‌مستقم‌به‌یك‌سطح دراینکه هردوضروری‌اند ومبدأ برای مسائل هندسی می‌باشند یکی است واگرنیازمندی به بیان پیدا شودجای بیانش علم دیگری است غیر از هندسه که درآنجا ماهیت خطوط مستقیم واعراض ذاتی‌آنها بیان شود وبکاربردن‌آنها درهندسه فقط برسبیل مصادره است ».

شکلی‌که خواجه نصیر اختیار می‌کند همان چهار ضلعی متساوی‌الساقین ذوقائمتین **ساکری** است و نتایجی‌که بدست می‌آوردهمان‌خوارق عادات‌ومشهودات هندسی است‌که‌ساکری ممتنع می‌پندارد .

مطلبی‌که شایان توجه است اشاره‌ای است‌که در پایان نامه‌به علمی می‌شودکه‌ازماهیات وعوارض ذاتی خطوط‌مستقیم یا اشکال هندسی بحث می‌کند و این نکته وسع نظر و قدرت منطقی خواجه نصیر را روشن می‌کند.

چنانکه گوئی دراندیشهٔ ژرف نگراو مفهوم بنا وتأسیس دستگاههای قیاسی منطق جدید مبهماً صورت پذیر بوده و این عجب نیست ، چه‌استاد درمنطق‌صاحب نظربوده وخودمکتبی خاص داشته است .

امروزه‌می‌دانیم‌که در دستگاههای قیاسی اساس براین است‌که ازمعلوماتی‌که خارج ازحوزهٔ مفروضات است استفاده نگردد ودرنتیجه‌حداقل احکام ومفروضات وتعاریف دربنای‌یك دستگاه قیاسی بکار رود چنانکه درهندسهٔ نظری :

(Gêométrie rationnelle)

هیلبرت آلمانی و شاگردان و پیروان مکتب علمی او چنین تأسیس را تعقیب‌می‌کنند. اشاره‌ای‌که خواجه به دستگاه بنای هندسه می‌کند به صورت مبهم بیان چنین نکته‌ای است ومعلوم می‌کندکه فکردقیق اوباین نکتهٔ باریك پی برده بود و شاید اگرعمر او وفا می‌کرد و درکار پیشین خود در رسالهٔ شافیه تجدید نظری بعمل می‌آورد به حل مشکل فائق می‌شد وکشفی‌که قریب شش قرن بعد از او صورت گرفت درعصر و زمان حیات او انجام می‌گرفت .»

دربحثی‌که طوسی دربارهٔ رسالهٔ **ارشمیدس** دربارهٔ کره واستوانه انجام داده توجه اصلی خود را به اثبات چهار اصل اول ارشمیدش دربارهٔ مقایسهٔ خطوط منحنی و سطوح منحنی معطوف داشته است . درحقیقت ، طوسی‌اصول ارشمیدس رابا یك تعریف جدید عوض می‌کند که طبق‌آن خط ازاجزاء خطی تشکیل شده است‌که دوانتهای هریك ازآنها دونقطه بینهایت نزدیك به‌هم‌می‌باشنداین نقطه‌نظر ، به‌همان اندازه‌که‌به‌طرفداران نظریهٔ اتمی قدیم نزدیك است ، به‌کاشفین حساب دیفرانسیل وانتگرال دراروپای غربی هم نزدیك می‌باشد . طوسی باتکیه به این تعریف اصول ارشمیدس را به‌طریق زیر ثابت می‌کند[۹]:

برای اثبات اینکه از دو خط منحنی محدب واقع بریك صفحه‌که دارای دوانتهای مشترك هستند ، خط منحنی داخلی کوچکتر از خارجی است .

ابتداآنرا برای خطوط شکسته‌ای‌که از وترهای این دو خط منحنی بوجود آمده‌اند ثابت می‌کند ، سپس آنرا برای خطوط منحنی‌تعمیم می‌دهد، زیراخط منحنی جزیك خط‌شکسته که تعداد اضلاع‌آن‌بینهایت است چیز دیگری‌نیست . دراینجا بیش از خود اثبات اصول ارشمیدس ، فکر و نحوهٔ اثبات‌آن ارزش دارد. واضح است‌که این «اتمی بودن ریاضی»که برای این اثبات مورد استفاده قرارگرفته ، بایستی به هدف برسد. از این قبیل افکار می‌شد برای توسعهٔ ریاضی استفاده‌کرد ، همانطورکه ریاضیدانان اروپایی بعداً این‌کار راکردند . ولی خواجهٔ طوسی به مسائل جدیدی از این نوع پرداخت وتنها نظرخود رابه اساس منطقی‌هندسه‌متوجه‌کرد. دربحثی‌که‌طوسی دربارهٔ‌کتاب «کره واستوانه»ارشمیدس‌می‌کند ،به نظریهٔ نسبتها هم تکامل‌بیشتری‌می‌دهد وبخصوص نظریهٔ نسبتهای نامساوی را توسعه می‌دهد. طوسی درابتدای اثر خود۱۱قضیه‌دربارهٔ نسبتهای نامساوی‌ثابت می‌کندتابه‌کمك‌آن به مطالب‌ارشمیدس استحکام منطقی بدهد .

خواجه نصیر باکمك این قضایا توابع :

$y = x(a-x)^2$ و $y = x(a-x)$

را مطالعه می‌کند وماکسیمم و می‌نیمم آنها را پیدا می‌کند . این‌توابع‌به طوسی‌امکان دادکه بتواندرکره‌روابط‌مشکل‌تری‌که به نظر ارشمیدس نرسیده بود مورد مطالعه قراردهد .

طوسی دربحثی‌که دربارهٔ ارشمیدس می‌کند بطوروسیعی ازمفهوم حرکت استفاده‌کرده است . طوسی امکان مقایسه خطوط مستقیم وخطوط منحنی ، سطوح مستوی ومنحنی رابه کمك حرکت نشان می‌دهد .

ب ـ هیئت و نجوم

خواجه‌نصیردرتذکرهٔ‌نصیریه، به‌بحث‌دربارهٔ‌نجوم‌پرداخته وآنرا بطرزمشکلی تنظیم نموده است،که بعدآشرحهایی‌برآن نوشته‌اند .

وی همچنین در آثار خود ، حجم بعضی از کواکب و ابعادآنها را هم واردکرده است .

سارتون چنین اعتراف می‌کند : انتقادی‌که « خواجه

دنباله در صفحهٔ ۱۴۰

نوشتهٔ : C. PO'LYA وابستهٔ آکادمی علوم و استاد افتخاری
مدرسهٔ پلی‌تکنیك فدرال زوریخ ودانشگاه استانفورد

ترجمهٔ : داویدریحان

فصل III- استقراء درهندسهٔ فضایی

در علوم ریاضی هم ، استقراء و تمثیل طرق اصلی نیل به مقصودند .

لاپلاس

I- چند وجهیها- «یك چندوجهی پیچیده دارای تعدادزیادی‌وجه، رأس ویال است». تعریف مبهمی ازاین‌نوع به‌فکرهرکسی‌که ازهندسهٔ فضائی اطلاعات‌کمی داشته باشد، خطورمی‌کند. ولی‌کم هستندکسانی‌که برای تعمق در این تعریف،کوشش بخرج‌داده‌واطلاعات مشخصی‌را ازآن‌استخراج کنند. کاری‌که بایدکرد، عبارت از تشخیص واضح مقادیری است‌که درآن دخالت‌کرده و مطرح ساختن سؤالی‌کاملاً معین است. بنابراین تعداد وجوه، رأسها ویالهای یك‌چندوجهی را به‌ترتیب به‌A،S،F نمایش می‌دهیم و سؤال روشنی به‌طریق ذیل را مطرح می‌کنیم: «آیا درست است‌که درحالت‌کلی ، تعداد وجوه با عدهٔ رأسهازیاد می‌شود؟ آیا F الزاماً با S زیاد می‌شود؟»

برای شروع به‌عمل، طبیعی است‌که چندمثال یعنی‌چند چندوجهی مخصوص‌را بایدامتحان‌کرد. مثلا درموردیك‌مکعب (I شکل۱) داریم :

$F=۶$ ، $S=۸$ ، $A=۱۲$

درموردمنشورمثلث‌القاعده (II شکل۱) داریم :

$F=۵$ ، $S=۶$ ، $A=۹$

برای قدم‌نهادن دراین‌راه می‌بایست چندین جسم صلب راکه درشکل۱ تصویرشده‌اند، امتحان‌کرده وباهم‌مقایسه‌کنیم، این اجسام بغیرازIوII عبارتنداز: منشورمخمس‌القاعده (III)، اهرام‌مربع‌القاعده ، مثلث‌القاعده ومخمس‌القاعده (IV،V،VI) هشت‌وجهی (VII)، برجی‌که در بالای آن یك بام نهاده شده است، یعنی هرمی‌که دربالای‌یك‌مکعب قرار گرفته‌استVIII، ویك «مکعب‌ناقص» IX. کمی قوهٔ‌تجسم خودرابکارمی‌اندازیم واین اجسام صلب را یکی‌بعدازدیگری، به طریقهٔ کاملا روشنی نمایش می‌دهیم، تابتوانیم وجوه ، رأسها ویالها را بشماریم. اعدادبدست آمده به‌صورت جدول زیرند:

شماره	نام چندوجهی	F	S	A
I	مکعب	۶	۸	۱۲
II	منشور مثلث‌القاعده	۵	۶	۹
III	« مخمس‌القاعده	۷	۱۰	۱۵
IV	هرم مربع‌القاعده	۵	۵	۸
V	« مثلث‌القاعده	۴	۴	۶
VI	« مخمس‌القاعده	۶	۶	۱۰
VII	هشت وجهی	۸	۶	۱۲
VIII	«برج»	۹	۹	۱۶
IX	مکعب ناقص	۷	۱۰	۱۵

شکل۱ کمی با جدول انواع بلورها مشابهت دارد و جدول فوق معرف مشابهتهایی با دفترچهٔ یاداشتهایی است‌که یك نفر فیزیکدان نتایج تجربیات خود را در آن ثبت می‌کند. اشکال واعدادگردآوری شده را امتحان‌کرده وباهم مقایسه می‌کنیم و به مثابهٔ معدن‌شناس یا فیزیکدانی که نمونه‌ها و نتایج را به‌قیمت‌کوششهای بزرگی گردآوری می‌کند، عمل

می‌کنیم. حال عواملی دراختیارداریم که می‌توانند جوابگوی سؤال‌مطرح‌شده درقسمت‌اول باشند: «آیا S باF زیادمی‌شود؟» پاسخ «منفی» است؛ مقایسهٔ مکعب وهشت‌وجهی (I وVII) به‌ما نشان دادکه تعداد رأسهای اولی بیشتراز دومی وتعداد وجوه دومی بیشترازاولی است. بدین‌ترتیب، اولین‌کوشش ما برای‌کشف یك‌قانون با شکست مواجه شد.

مع‌الوصف می‌توانیم سعی‌دیگری بکنیم. آیا A با F زیادمی‌شود؟ یابا S؟ قبل‌ازآنکه به‌این‌پرسشها، پاسخی‌بدهیم، به‌جدول‌خودمان‌بازمی‌گردیم. چندوجهیهارا درترتیب‌صعودی ازA قرار می‌دهیم:

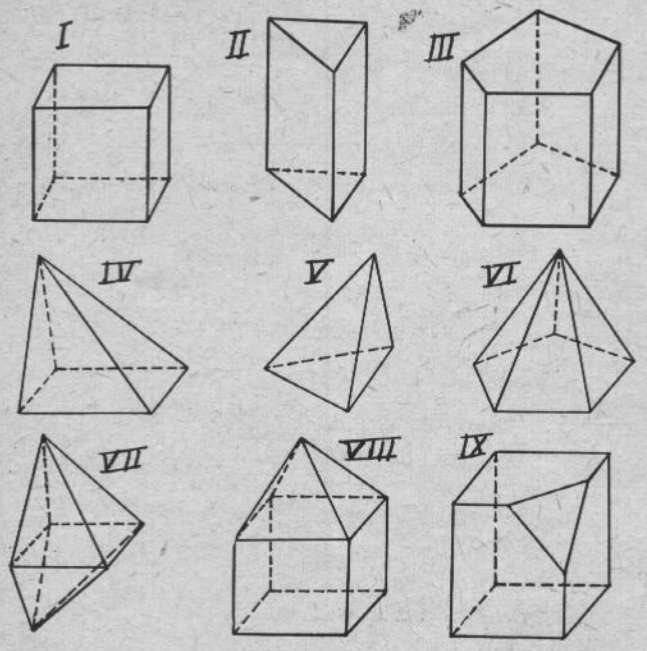
چند وجهیها	F	S	A
هرم مثلث‌القاعده	۴	۴	۶
« مربع‌القاعده	۵	۵	۸
منشور مثلث‌القاعده	۵	۶	۹
هرم مخمس‌القاعده	۶	۶	۱۰
مکعب	۶	۶	۱۰
هشت‌وجهی	۸	۶	۱۲
منشور مخمس‌القاعده	۷	۱۰	۱۵
«مکعب ناقص»	۷	۱۰	۱۵
«برج»	۹	۹	۱۶

اگربه مفروضات طریقهٔ‌جدید بنگریم، بسادگی می‌بینیم که هیچ قاعده‌ای ازنوع طرح‌شده وجود ندارد.

وقتیA از۱۵ به۱۶ ترقی می‌کند، S از۱۰ به۹ تنزل می‌کند. همینطوروقتی ازهشت‌وجهی به منشورمخمس‌القاعده عبورمی‌کنیم A از۱۲به۱۵ ترقی می‌کند، درصورتی‌که F از۸ به۷ تنزل می‌کند. بنابراین، هم F و هم S بطورمنظم با A ترقی نمی‌کنند.

بنابراین، برای‌بار جدیدی در تدوین یك قانون‌کلی با شکست مواجه شدیم. باوجوداین بازهم بزحمت می‌توانیم قبول‌کنیم‌که ایدهٔ اولیهٔ ماکاملا غلط بوده است. این ایده،اگر بطورشایسته‌ای توجیه شده‌باشد، می‌تواند صحیح باشد. اگر درست باشدکه هم F و هم S باA ترقی‌نمی‌کنند، بنظرمی‌رسد که «درمجموعهٔ خودشان» ترقی‌کنند. امتحان مفروضات نشان می‌دهدکه اگرچند وجهیها را درترتیبی که دسته‌بندی کرده‌ایم، اختیارکنیم، مجموع F + S **صعود** می‌کند. همچنین‌می‌توانیم یك رابطهٔ‌دقیق‌را بنویسیم؛ زیرا درتمام‌حالات اشاره‌شده‌داریم:

$$F + S = A + ۲$$



شکل ۱ــ

رابطهٔ فوق درموردنه حالتی‌که درلیست داشتیم،صادق است. بدیع بنظرمی‌رسدکه چنین نظم ثابتی اتفاقی بوده باشد. همچنین می‌توانیم **فرض کنیم** که نه‌فقط درحالات مشاهده‌شده بلکه درتمام چندوجهیها؛ **عدهٔ‌وجوه بعلاوهٔ عدهٔ‌رأسها برابربا تعداد وجوه بعلاوهٔ دواست.**

II ــ تحقیقات اولیه ــ یك‌طبیعی‌دان با تجربه هیچگاه به‌سادگی یك فرضیه را نمی‌پذیرد. حتی اگراین فرضیه درچند حالت قابل‌قبول بنظربرسد وتحقیق‌شود، باز وی‌برآن خرده می‌گیردوملاحظات جدیدی راگردآوری‌کرده وتجارب‌تحقیقی جدیدی را مجسم می‌کند. ماهم می‌توانیم همین‌کاررا بکنیم.

چندوجهیهای جدید را آزمایش می‌کنیم ووجوه، رأسها ویالهایشان را محاسبه‌کرده و F + S را با A + ۲ مقایسه می‌کنیم.

اعدادی راکه بدست می‌آوریم ازدوحال خارج نیستندیا مساویند ویا مساوی نیستند. این خود، نکتهٔ بسیارمهمی‌است که بایدروشن شود.

اگرشکل۱ را ببینیم ملاحظه می‌کنیم‌که قبلا سه چندوجهی منتظم ازقبیل مکعب، چهاروجهی وهشت‌وجهی (I،V وVII) را امتحان‌کرده‌ایم. آخرین چندوجهیهای‌منتظم یعنی بیست‌وجهی ودوازده وجهی را می‌آزمائیم.

بیست وجهی دارای بیست‌وجه است‌که همگی مثلث‌اند

ودرنتیجه $F = ۲۰$ است. این ۲۰مثلث‌دارای $۳ \times ۲۰ = ۶۰$ ضلعندکه دوبه‌دو دریك‌یال مشترکند. بنابراین تعداد یالها ۳۰ است. به‌طریق مشابهی می‌توانیم S را بیابیم. می‌دانیم‌که در حول هررأس بیست‌وجهی، ۵وجه گرد آمده‌اند. بیست مثلث دارای $۳ \times ۲۰ = ۶۰$ زاویه‌اندکه ۵تا ۵تا دریك رأس گرد آمده‌اند. درنتیجه تعداد رأسها:

$$\frac{۶۰}{۵} = ۱۲ = S$$

می‌باشد.

دوازده‌وجهی دارای ۱۲وجه است که‌همگی‌پنج ضلعی‌اند ودرهر رأس آن ۳تا ازاین پنج ضلعیها گرد آمده‌اند. بنابراین نتیجه می گیریم‌که:

$$F = ۱۲ \text{ ، } S = \frac{۱۲ \times ۵}{۳} = ۲۰ \text{ ،}$$

$$A = \frac{۱۲ \times ۵}{۲} = ۳۰$$

اکنون می‌توانیم دو سطر جدید به لیست خودمان بیفزائیم:

چند وجهی	F	S	A
بیست‌وجهی	۲۰	۱۲	۳۰
دوازده وجهی	۱۲	۲۰	۳۰

دراین دوحالت نیز، فرض $F + S = A + ۲$ باز هم محقق است.

III- تحقیقات جدید- تحقیقات اخیر، فرضیهٔ ما را محسوساً قابل‌قبول قلمدادکردند؛ ولی آیا این فرضیه برای سایرموارد‌نیز صادق است؟ واضح است‌که ممکن است چنین نباشد. درشرایط مشابهی، یك‌طبیعی‌دان ازتوفیق آزمایشهای خود مسرور خواهد شد ولی اقلا به تجسم حالات جدیدی نمی‌پردازد. ولی، اکنون‌کدام چندوجهی راآزمایش‌کنیم؟

فرضیهٔ ما تاکنون چنان‌خوب محقق بوده‌است‌که یك تحقیق جدید، خیلی‌کم به اعتماد ما نسبت به‌این فرضیه، می‌افزاید، آنقدر ناچیزکه انتخاب‌یك چندوجهی جدیدوشمارش عوامل آن بزحمتش نمی‌ارزد. آیا اثبات جالبتری وجود دارد که بتوانیم با آن فرضیهٔ خودرا برکرسی بنشانیم؟

شکل۱ را نگاه می‌کنیم، می‌بینیم‌که اجسام نشان داده شدهٔ درروی اولین‌سطر، همطبیعتند؛ همه منشورند. همینطور دومین سطرمتعلق به اهرام است. فرضیهٔ ما برای سه‌منشورو سه‌هرم شکل۱ با ارزش است؛ ولی آیا این فرضیه برای تمام منشورها وتمام هرمها با ارزش است؟

اگرمنشوری دارای n وجه‌جانبی باشد، جمعاً $n + ۲$ وجه، $۲n$ رأس و $۲n$ یال خواهد بود. هرمی‌که دارای n وجه‌جانبی است‌کلا دارای $n + ۱$ وجه، $n + ۱$ رأس و $۳n$ ریال است، بدین‌ترتیب می‌توانیم دوسطر جدیدبه‌لیست‌خود اضافه‌کنیم:

چند وجهی	F	S	A
منشوربا n وجه‌جانبی	$n + ۲$	$۲n$	$۳n$
هرم با n وجه‌جانبی	$n + ۱$	$n + ۱$	$۲n$

پس فرضیهٔ $F + S = A + ۲$ نه‌تنها برای یك یادوچند وجهی جدید درست است، بلکه برای مجموعهٔ نامحدودی از چندوجهیها صادق‌است.

IV- آزمایش مشکل- یادآوریهای اخیر به‌صورت قابل‌توجهی به اعتمادی‌که درمورد فرضیهٔ خود داشتیم افزود ولی طبیعی است‌که اثباتی را ارائه نداد. چه بایدکرد؟ آیا بایدبه‌آزمایشهای خود درموردچندوجهیهای خاص جدیدادامه دهیم؟ بنظرمی‌رسدکه درمورد این فرضیه نتوانیم تحقیقات ساده‌ای را با توفیق انجام دهیم. همینطور می‌توانیم تحقیق دامنه‌داری‌کنیم، بلکه بتوانیم آنرا مواجه با شکست‌کنیم.

مجدداً مجموعهٔ چندوجهیهای (شکل۱) رانگاه می‌کنیم. چندوجهیهای موجودعبارتند ازمنشورها(I، II، III)، هرمها (IV،V،VI) وچندوجهیهای منتظم (I،V،VII)؛ولی ماتمام آنها را موردبررسی قرارداده‌ایم. چه باقی می‌ماند؟ درشکل ۱یك «برج» (VIII) را نشان می‌دهدکه ازگذاردن یك «بام» برروی یك مکعب بدست‌آمده است. دراینجا امکان تعمیم را مشاهده می‌کنیم. به‌جای مکعب، یك‌چندوجهی غیرمشخص‌را اختیار می‌کنیم، یکی‌ازوجوه آنرا انتخاب می‌کنیم ویك «بام» روی آن قرارمی‌دهیم. فرض می‌کنیم‌که A،S،F به ترتیب عدهٔ وجوه، رأسها ویالهای چندوجهی اولیه بوده و n عدهٔ اضلاع وجه انتخاب شده‌باشد. روی این‌وجه یك هرم با n وجه‌جانبی قرارمی‌دهیم، بدین‌ترتیب یك‌چندوجهی‌جدیدبدست می‌آوریم. تعدادوجوه، رأسها ویالهای‌آن چقدراست؟ یك‌وجه (همانی‌که انتخاب‌کرده‌ایم) مخفی شده است وn وجه جدید (n وجه‌جانبی‌هرم) بقسمی ظاهرشده‌اندکه چندوجهی جدید دارای $F - ۱ + n$ وجه است. تمام رأسهای چند وجهی‌اولیه متعلق به‌چندوجهی جدیدند ولی‌یك رأس اضافی وجود داردکه

دراین صورت می‌شود $S+1$ رأس. همینطور، تمام یالهای چندوجهی قدیم متعلق به جدیدهستند ولی n یال را اضافه کرده‌ایم (یالهای جانبی هرم)، ازآنجا تعدادیالهای چندوجهی جدید $A+n$ می‌شود.

این نتایج را خلاصه می‌کنیم. چندوجهی اولیه دارای Fوجه، Sرأس و A یال است، درصورتی که‌چندوجهی مجهزبه «بام» دارای $F+n-1$ وجه، $S+1$ رأس و $A+n$ یال است. آیا این‌نتایج بافرضیهٔ‌ما متوافقند؟

اگر رابطهٔ:

$$F+S=A+2$$

درست باشد رابطهٔ:

$$(F+n-1)+(S+1)=(A+n)+2$$

نیز درست است. به بیانی دیگر، درصورتی‌که فرضیه برای اولی محقق شود برای حالتی‌که چندوجهی مجهز به‌بام‌می‌شود نیزمحقق است.

بنابراین، فرضیهٔ ماکه درموردچندوجهیهاانجام دادیم از یك‌آزمایش مشکل نیزپیروزمندانه بیرون آمد. تعداد بسیار زیادی چندوجهی وجودداردکه‌می‌توانیم ازروی‌چندوجهیهایی که قبلاآزمایش‌کردیم، توسط الصاق متوالی «بامها» بدست آوریم؛ فرضیهٔ ما برای تمام‌آنها محقق است.

ملاحظهٔ آخرین چندوجهی شکل۱ یعنی «مکعب‌ناقص» جادهٔ مشابهی را برروی ما می‌گشاید. به‌جای تکیه برروی مکعب، این عمل را برروی یك چندوجهی غیرمشخص و با حذف یك‌رأس‌که بطوردلخواه انتخاب‌شده‌است، انجام‌می‌دهیم. فرض می‌کنیم که‌F،Sو A به‌ترتیب عدهٔ وجوه، رأسهاویالهای چندوجهی جدیدباشد و n معرف تعداد یالهایی باشدکه‌ازرأس انتخاب شده منشعب می‌شوند. اگراین رأس راحذف کنیم، به‌چندوجهی اولیه، یك‌وجه (nضلعی)، n یال‌جدید وهمچنین n رأس جدیداضافه‌می‌کنیم ودرعوض‌یك‌رأس را ازدست‌می‌دهیم بطورخلاصه چندوجهی «ناقص» به‌ترتیب‌دارای $F+1$ وجه، $S+n-1$ رأس و$A+n$ یال است. رابطهٔ:

$$F+S=A+2$$

رابطهٔ:

$$(F+1)+(S+n-1)=(A+n)+2$$

را بهمراه دارد.

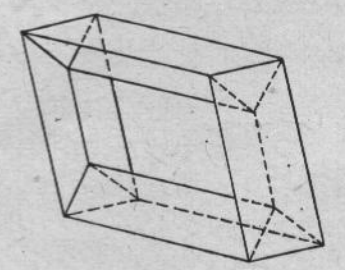
بنابراین، فرضیهٔ ما برای انجام عملیاتی‌که‌درمورد چند وجهیها انجام دادیم، نسبتاً محکم است وازیك آزمایش مشکل پیروز بیرون آمده است.

مواردداخیرالذکررا می‌توانیم به‌عنوان براهین قطعی بسیارقوی درنظر بگیریم. همچنین ممکن است چیزهای‌دیگری را پیش‌بینی‌کنیم: چاشنی اثبات‌راباعزیمت ازیك‌چندوجهی‌ساده مانند چهاروجهی یا مکعب، که فرضیهٔ ما برای آن با ارزش است، می‌توانیم بوسیلهٔ حذف‌یا الصاق «بامها» تعدادبیشماری ازچندوجهیهای جدید را بدست‌آوریم‌که قضیه برای‌آن‌صادق باشد. آیا بدین منوال می‌توانیم **تمام** چندوجهیهارا بدست آوریم؟ درصورتی‌که این موضوع صحت داشته‌باشد ما دارای یك اثبات‌کلی هستیم. ازطرفی دیگر، آیا عملیات‌دیگری‌وجود داردکه مانند حذفها والصاقهای «بامها»، صحت فرضیهٔ ما را دگرگون نکند.

۷ـ تحقیق و بازهم تحقیقـ روشن‌فکری طبیعدان مجرب اساساً با روشن‌فکری منکرمتفاوت نیست ولی کامل‌تر ازآنست. هرکدام پس‌ازچند مشاهده فرضیهٔ خودرا پایه‌ریزی می‌کنند و تمام هم خودرا مصروف تأیید ویاردفرضیهٔ خود می‌کنند. یك تأییدیه برای یك فرضیه، آنرا حقیقی‌تر جلوه می‌دهد، درصورتی‌که انکارآن، آنراواژگون می‌نمایدواختلاف اساسی همین‌جاست: منکرحالات نوع‌اول را جستجومی‌کند درصورتی‌که عالم درپی حالت دوم است. لازم به توضیح‌است که‌هرکدام ازمنکران ویا عالمان دارای نوعی بی‌ثباتی هستند که آنرا روی چیزهای متفاوتی اعمال می‌کنند. هرکس‌حتی‌پیش خودش هم، دوست ندارد اقرارکندکه اشتباه کرده است؛ حتی مایل نیست‌که به‌حالاتی برخوردنمایدکه فرضیه‌اش را ردنماید وازآنها فرارمی‌کند، حتی اگراین حالات خودی نشان دهند، وی سعی می‌کندکه‌آنها راکناربگذارد. برعکس، عالم، آماده است‌که بداندکه فرضیه‌اش ناصحیح است، ولی دوست ندارد که یك مسئله را پادرهوا نگاهدارد. یك تأییدیه را نمی‌توان مانند انکار، برای تدوین قانون قطعی بکاربرد. عالم درپی مقصد قطعی خود، حالاتی راکاوش می‌کندکه منتهی به نفی فرضیه شود واین‌خود نکتهٔ بسیارمهمی است. درصورتی‌که‌به حالاتی برخوردکنیم‌که قبلا نامساعد فرض می‌شد و درخاتمه به‌یك تأییدیه بینجامد، فرضیه ازآزمایش مربوط پیروز بیرون می‌آید. هرقدرمشکلات عظیمترباشد، پیروزی مفهومترخواهد بود؛ درصورتی‌که فرضیه‌ای از امتحان مشکلی پیروز بیرون بیاید، به‌آن اعتمادزیادی می‌کنیم‌وآنرا قویاً موردتأییدتجربی قرارمی‌دهیم. درهر موقعیتی می‌بایست تحقیقات زیادی انجام داد. ازهرموقعیتی‌که بتوان به‌مشکلات برخوردکرد، می‌توان به‌هرطریقی به‌هدف قطعی نزدیك شد واین خودمبین‌ارجحیت عالم است.

حال به مسئلهٔ مخصوص خود برمی‌گردیم و می‌بینیم که چگونه تبصره‌های پیشین می‌توانند درمورد «کاوشهای تجربی دربارهٔ چندوجهیها»یی که موردنظر ماست، بکاربرده شوند. هرحالت جدیدی که برای آن رابطهٔ $F+S=A+۲$ صادق باشد، افزایندهٔ اعتمادی است که به‌حقیقت فرضیه در حالت کلی داریم. ولی پس‌از یك‌رشته تحقیقات متشابه خسته می‌شویم. یك حالت مساعد فرضیه وکمی متفاوت با حالت آزمایش شده فقط‌کمی به اعتماد ما می‌افزاید. زیرا، حتی‌قبل از اینکه دست به آزمایش بزنیم، مشاهده‌کردیم‌که این حالت کمی متفاوت هم به‌همان طریق موجود است. خواست ماتنها یك تحقیق متمم نیست بلکه **تحقیقی به‌گونهٔ دیگر** است. درصورتی‌که مراحل مختلف کاوش خودرا بازبین کنیم (بخش II و III و IV) مشاهده خواهیم‌کردکه هرکدامشان ازنوعی تحقیق برخوردار است‌که ارزش آن خیلی بیشتر از ارزش و تحقیق قبلی است. درهر مرحله، فرضیه در مورد دیگردستهٔ **حالات وسیعتر** مورد تحقیق قرار می‌گیرد.

VI - امتحان حالت خیلی متفاوت - چون خواستار تنوع هستیم، چندوجهیهایی را جستجو می‌کنیم‌که با حالاتی‌که اخیراً آزمودیم، بسیار متفاوت باشند. می‌توانیم قاب یك تابلورابه‌عنوان یك چندوجهی درنظر بگیریم. چوب طویل با قاعدهٔ مثلثی را اختیار می‌کنیم و آنرا به چهار پاره تقسیم می‌کنیم و این اجزاء را در انتهایشان طوری پهلوی هم قرار می‌دهیم تا یك قاب بدست بیاید، شکل۲. ایجاب می‌کندکه این قاب‌را روی میزی قرار دهیم به‌نحوی‌که‌یالهای متعلق به‌چوب اولیه، افقی باشند. چهارسه‌تا یعنی ۱۲ یال افقی و همچنین چهارسه‌تا یال غیرافقی طوری وجوددارندکه تعدادکل یالها $A=۱۲+۱۲=۲۴$ باشد. درصورتی که وجوه و رأسها را محاسبه‌کنیم مقادیر $F=۴\times۳=۱۲$ و $S=۴\times۳=۱۲$ بدست می‌آید. بنابراین $F+S$ برابر با ۲۴ و مخالف با:



$A+۲=۲۶$

است. فرضیهٔ ماکه در منتهای‌کلیت خود قرارگرفته بود، غلط از آب درآمد!

واضح است‌که هرگزقصدنداشته‌ایم‌که‌به‌گزارهٔ خودمان چنین‌کلیتی بدهیم، چراکه همواره به‌چند وجهیهای محدب‌یا به بیانی دیگر، چند وجهیهای مشابه باکره، و نه به چند وجهیهای مشابه‌باحلقه‌که‌قاب نوعی‌ازآن‌است، می‌اندیشیده‌ایم ولی این عذرها موجه نیستند، پس باید موقعیت خودراتغییر دهیم و گزارهٔ نخستین خودرا توجیه‌کنیم. بسیار ممکن است که این ضربهٔ ناگهانی راکه برما وارد آمد به نفع ما باشد و ما را به فرم توجیه شده و مشخصتر فرضیه راهنمایی‌کند. به هرحال دراینجا به اعتماد ماخلل وارد شده است.

VII- مشابهت - مثال «قاب» ضربه‌ای‌سهلك برفرضیهٔ به‌صورت اولیه وارد ساخت ولی به‌راحتی می‌توانیم‌آنرا به صورت اصلاح شده‌ای (که امیداست‌که بهتر نیز شده باشد)با قیود مهمی عمر دوباره ببخشیم.

چهاروجهی، جسمی محدب‌است، همینطوراست‌مکعب وسایرچندوجهیهای مجموعهٔ شکل۱ و همینطورچندوجهیهایی که می‌توان بوسیلهٔ حذفها و الصاقهای «محتاطانهٔ» بامها (با قراردادن بامهای به حدکافی مسطح روی وجوه مختلف) بدست‌آورد. به‌هیچ طریقی نمی‌توانیم این عملیات را از روی چندوجهیهای محدب یا ازنوع «کروی» درمورد اجسام‌صلب «مشابه با حلقه» اعمال‌کنیم.

پس ازاین مشاهده، توضیح بسیار مفیدی می‌دهیم بدین نحوکه فرض می‌کنیم‌که رابطهٔ $F+S=A+۲$ که مابین وجوه، رأسها و یالها برقرار است، برای هرچند وجهی **محدب** قابل اجراست. (بدون شك ارجح است که به چند وجهیهای ازنوع «کروی» قناعت‌کنیم ولی مایل نیستیم‌که بحث خودرا برای تشریح تعریف دقیق این‌عبارت قطع‌کنیم.)

شانس زیادی وجود داردکه این فرضیهٔ جدید صحیح باشد. معذالك، به اعتماد ما خلل وارد شده است و برهان جدیدی راکه درخور آن باشد، باید جستجو کنیم. بنظر می‌رسدکه چشمه‌های بسیارساده ته‌کشیده است ولی می‌توانیم امیدوار باشیم‌که از استدلال مشابهی، استفاده‌کنیم. آیا حالت مشابه و ساده‌تری‌وجود داردکه بتواند این موضوع را روشن سازد.

چندضلعیها باچندوجهیها متماثلند. یك چندضلعی‌قسمتی از صفحه است، همچنانکه چندوجهی قسمتی ازفضاست. چند ضلعی دارای تعدادی رأس S (رأس زاویه) و تعدادی یال (یاضلع) A است. واضح است‌که $S=A$ است.

باوجود این رابطه‌که برای چند ضلعیهای محدب قابل ارزش است، بسیار ساده بنظر می‌رسد و می‌توانیم ازآن‌برای مطالعهٔ بسیار پیچیدهٔ $F+S=A+۲$ که فرض می‌کنیم که برای تمام چندوجهیهای محدب با ارزش است، استفاده‌کنیم.

درصورتی‌که این‌موضوع برای ما بسیار جالب باشد، سعی می‌کنیم‌که به‌این دورابطه شکلهای نزدیکی بدهیم. برای نیل به‌این نتیجه روشی ماهرانه وجوددارد. ابتدا اعداد را

دنباله در صفحهٔ ۱۷۳

مکانیك کوانتم چیست؟

نوشتهٔ : و. ای. ری‌دنیك

ترجمهٔ : علیرضا توکلی صابری
دانشجوی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

دنباله از شمارهٔ قبل

«دنیای نامرئی وغیرمحسوس»

فیزیکدانان به‌سختی گام برمی‌داشتند. پیشتر گامهایی به‌دنیای جدید برداشته‌بودند، ودرتمام این مدت مطمئن بودند که فقط درجزئیات اختلافاتی وجوددارد نه در اصول کلی. لیکن اکنون آنان درپهنه‌ای ازکشفیات قرار گرفته بودندکه احتمال وقوع هرچیزی امکان‌داشت؛ ازجانورهای عجیب‌تا هیولاهاو انسانهای وحشی.

حدودی‌برای تصورات مغزی کنجکاو وپرسشگرنمی‌توان قائل شد.

فیزیکدانها حتی بیشترازکاشفین دروضع نامعقولی قرار گرفته بودند، زیراکاشفین ازکشف عوامل طبیعی وبطورعموم عینی‌مانند قاره‌ها، کوهها ودریاهاکه دراطراف زمین‌پراکنده بودند، مأیوس وناامید می‌شدند. دردنیای‌جدید، دانشمندان‌با موجودات عجیب وغریبی روبرو می‌شدند که حتی نامی که بیان‌کنندهٔ‌کیفیت این‌موجودات باشد نمی‌توانستند برایشان‌پیدا نمایند. حتی‌تفکرات دربارهٔ این‌موجودات نمی‌توانست تصویر روشنی ازاین‌دنیای جدیدوغیرعادی اتمها بدست‌دهد.

اما باگسترش علوم‌لازم بودکه تصوراتی تکمیل شوند، اهمیتی نداشت‌که این‌تصورات غیرمتعارفی وناسازگار باشند. دشوارمی‌نمودکه‌مکانیك‌کوانتم‌ساخته‌شود، لیکن این کار بایستی عملی می‌شد.

مطمئناً ساختن نظریه‌هایی از روی مدلهای تصورکردنی دنیای اطراف‌ما آسانتربود، ولی‌راجع به‌ساختن مدلهایی برای دنیای بینهایت‌کوچکهاکه‌درساختمانشان‌اختلافات‌شگرفی‌وجود داشت چه‌می‌گویید؟ چه، این‌نوع‌مدلها نمی‌توانستندهیچگونه خدمتی‌به‌ما بکنند وبلااستفاده می‌ماندند.

خوب، حال‌اگر اندیشیدن دربارهٔ مدل برای‌راهنمایی تصورات فکری‌ما غیرممکن بود، به‌ناچار با مدلهایی سروکار داشتیم‌که به‌هیچ روی‌قابل تصور نبودند. سالها گذشت‌ومدلها مشکلات‌فراوانی‌ببارآورده‌وبیش‌ازحد غیرقابل‌تصورشده‌بودند، برای فیزیکدانها نیزگران تمام می‌شد، چون‌کسی نمی‌خواست ازاین مدلها دست‌بکشد. واین‌به‌غایت ناراحت‌کننده‌بود، زیرا وقتش سر می‌رسید ـ اگردر این داستان‌کمی به جلو برویم ـ به‌وقتی می‌رسیم‌که اجباراً تمام‌این‌مدلها دورریخته شده وجای آنها رامدلهایی پیچیده‌تر وغیرعادی‌ترکه حتی‌برای تصورشان مشکلات فراوانی وجود داشت، پرمی‌کند. این‌امرچگونگی پیشرفت علم رابیان‌می‌دارد.

عامل مهم‌پیشرفت‌علم‌وجود فیزیکدانهای مشهوری‌بود که دراین قرن‌زندگی می‌کردند. آنان قادربودندکه ازراههای پرپیچ وخم‌تجریدات و مدلها عبورنموده وبه‌هدف خودبرسند، آنان باموفقیت توانستند نظریهٔ بسیطی را ارائه‌دهندکه‌دنیای جدید بینهایت کوچکها را توجیه می‌نمود. خلاصه آنکه آنان توانستند براین مبنا به‌درخشانترین‌کشفیات درتاریخ تمدن‌بشر نایل‌آیند. آنان رازانرژی هسته‌ای راکه مانندمشروبی سالیان دراز درشیشه‌ای نگهداری می‌شدکشف‌کردند.

صنعت نیروی اتمی والکترونیك امروزه بدون وجود مکانیك‌کوانتم نمی‌توانست هستی‌داشته باشد.

«دشوار لیکن جالب»

ماهیت‌غیرطبیعی‌ذرات‌مکانیك‌کوانتمی و واقعیت‌غیرقابل تصوربودن‌این‌ذرات، موضوع‌رابرای‌تشریح دشوارمی‌ساخت. شاید اشتباهاتی‌درخودمکانیك‌کوانتم‌وجودداشت. مامی‌دانستیم که مشکل بتوان راجع به‌چیزی‌که درحال توسعه وتغییرات پی‌درپی است صحبت کرد، بخصوص یك‌چنین گسترش سریعی که خالق نظریه‌های محکمی بوده است. نه فقط به خاطر این موضوع، بلکه خود فیزیکدانها نیزتا به‌امروز دربارهٔ معانی مختلف مکانیك‌کوانتم وسیماهای ویژهٔ‌دنیای خرد که این‌مکانیك

آن راتشریح کرده است، به‌بحث ومجادله می‌پردازند.

حال‌ما به‌عصرفضا قدم گذارده‌ایم، جایی که دوباره‌فیزیك را برای فرش‌نمودن این راه فراخوانده‌اند. فیزیك مربوط به‌فضای عالم هستی بافیزیکی که «زمینی» است ودنیای بینهایت کوچکهامحوراصلی آن است، اختلافات اساسی‌دارد.

عقایدباستانی مبنی براینکه برخوردهای‌بزرگ‌وکوچکی در فضا صورت می‌گیرد، تصدیق وتأییدشدند. ستارگان‌عظیم و اتمهای خرد نه فقط به‌یکدیگر نزدیك هستند بلکه به‌عنوان واحدهایی مکمل‌یکدیگرند.

اغلب‌مشکل‌وغیرممکن‌است که‌بدون‌مراجعه به‌نمودهای بصری راجع‌به‌علوم چیزی بدرستی نوشته شود. بنابراین‌برای درك مکانیك‌کوانتم، اگرهیچ‌مدلی هم درطبیعت وجودنداشته باشد، باید تلاش‌کردکه قیاسها وشباهتهایی را برای درك آن پیداکنیم. به‌هرحال، چنین قیاسهایی دقیق وظریف نبوده وفقط کمك می‌کنندکه به‌سادگی تصوری‌کلی ازاشیاء بدست‌آوریم.

برای مثال، معنای این‌جملهٔ «الکترونها روی مداری به‌دور هسته‌ای اتمی می‌گردند» در نظر ما مانند جملهٔ «برف چیزی‌سفید، تقریباً شبیه نمك است وازآسمان فرو می‌ریزد» برای ساکنین‌مناطق حارهٔ‌آفریقا است. ایجاد حرکت‌یك‌الکترون در اتم و وجود الکترونی‌که غیرقابل اندازه‌گیری است‌خیلی پیچیده‌تراز تصورکردن آنها ومعرفت امروزی مانسبت به‌آنها است. نه‌فقط امروزه‌بلکه‌فردا و هزاران سال‌پس ازاین نیز این کار مشکل است.

در حقیقت تکامل مکانیك‌کوانتم اصلاحاتی رادر زمینهٔ گونه‌گونی بی‌حد وبیشمار خواص الکترون وهمچنین‌چیزهای دیگر بوجودآورده است.

امروزه‌ما دانشی ناقص‌دربارهٔ دنیای اطراف خودداریم. تازه‌شروع کرده‌ایم‌که به‌ژرفنای زمین، اقیانوسها و جو دست‌اندازی‌کنیم. هنوز برای درك آثار حیات در دشتها، جنگلها، کوهها، رودخانه‌ها وبیابانها دراول کاریم.

اگرچنین است، چطور باید انتظار داشته‌باشیم که‌دربارهٔ دنیای اتمها، هستهٔ اتمی و ذرات بنیادی، که هنوز مشاهدهٔ بصری و عمل شبیه بدیدن آنها مشکل است، چیزی بدانیم. پژوهشهای مفصلی در این‌علم برای‌صدها وهزاران سال‌پس از این‌بایدانجام گیرد. چه‌اکنون ما درسرچشمه رودخانهٔ‌قوی و پرزورعلم‌قرار گرفته‌ایم.

حتی چیزهای بهت‌آوری ازاین دنیای جدید کشف‌شده برای پژوهشگران آشکار شده است. درحقیقت‌آنچه راکه این علم جدیدبه‌روی تکنولوژی، صنعت، کشاورزی وطب گشوده است، افقهای خیالی‌ای هستندکه الهام‌دهنده وروح‌بخش می‌باشند. ایستگاههای نیروی‌هسته‌ای، ایزوتوپهای رادیواکتیو، ومولدهای خورشیدی، تعدادکمی ازاین افقها هستند. ما در آستانهٔ مهارکردن‌آزمایشهای گرمازای هسته‌ای ونفوذبه‌فضای خارج هستیم. تمام این‌فضیلتها وآیندهٔ خیره‌کننده‌اش درعصرما توسط دانه‌های ریزی‌که ۶۰ سال پیش به‌روی خاك حاصلخیز دانش توسط **ماکس پلانك**پاشیده شده بود، روییده‌اند، و هنوز توسط گروهی از دانشمندان برجسته بدقت‌کشت‌کاری و آمادهٔ بهره‌برداری‌می‌شوند.

پایان فصل‌اول

تحقیقاتی ... (دنباله صفحهٔ ۱۳۳)

نصیرالدین طوسی» برمجسطی وارد ساخته ، دلالت‌برنبوغ و تبحر اودر علم نجوم دارد و می‌توان انتقاد او را اولین گام‌در ایجاد اصلاحات «کوپرنیکی» دانست.»

خواجه نصیرنظریه‌ای‌که پایهٔ افسانه‌های خرافی یونان بود و گروهی از فلاسفهٔ مسلمان هم‌آنرا از یونانیان آموخته بودند همه رااز پایه و اساس منهدم و ویران ساخت و اساس هیئت قدیم را قبل از**کوپرنیك** و**گالیله** فرو ریخت و این موضوع اظهارات بعضی از خاورشناسان مانند **رنان** را که می‌گفت « فلسفهٔ اسلامی همان فلسفهٔ یونانی است نهایت با حروف عربی نوشته شده»! پایمال ونقض می‌کند.

بارون کارول‌دوو در بارهٔ خواجه نصیر و تأسیس رصدخانهٔ مراغه‌ودقت ابزار وآلات نجومی‌که درآن رصدخانه بکار رفته بود و اکتشافات گوناگون‌که دراین علم نصیب او گردیده است به تفصیل سخن می‌راند و تصریح می‌کندکه : «آلات نجومی‌که در مراغه ساخته می‌شد فوق‌العاده قابل تحسین بود»

طوسی روش‌تازهٔ استفاده ازساعت‌آفتابی را برای‌تحقیقات فضایی‌کشف‌کرد، ازجمله ابراز وآلات نجومی رصدخانهٔ‌مراغه که بدون شك یکی ازدو سه رصدخانهٔ بسیار مهم عالم‌اسلامی ودر واقع درحکم یك‌آکادمی علوم بوده است عبارتند از :

ذات‌الحلق بزرگ .

ذات‌السموت‌که مشابه آنرا **تیکوبراهه** بعداً مورد استعمال قرارداد .

ربع‌مجیب‌متحرك، کرهٔ‌فلکی، کرهٔ‌زمین وانواع‌اسطرلابها.

سدیو می‌گوید ـ سوراخی درگنبد بزرگ تعبیه شده بودکه ازآن اشعهٔ‌آفتاب روی دیوار داخل رصدخانه می‌افتاد وبدین‌وسیله ارتسام‌اشعه‌آفتاب ، درجه‌ها ودقایق حرکت‌یومیهٔ آن وارتفاع آن در مراسم مختلف و تسلسل ساعات بیرون می‌آمد. این رصدخانه یکی ازمجهزترین مراصد قبل ازکشف دوربین بود ، طوسی تمام معلومات نجومی راکه اکنون‌بدون دوربین حاصل می‌گردد بدست‌آورده بود .

محاسبات تقریبی

نوشتهٔ : محمد رکنی قاجار

فصل اول ـ تقریبات عددی

تعریف ـ مقدار تقریبی هرعدد عددیست که تفاضل آن ازعدد مطلوب بقدرکفایت کوچك باشد .

فرض می‌کنیم P عددی باشدکه مقدارصحیح آن دردست نباشد، دراین‌صورت گویندکـه p مقدار تقریبی P است اگـر $\lambda = |P - p|$ مقداری باشد خیلی‌کوچك .

هرقدر λ کوچکتر باشد p به P نزدیکتر است.

هرگاه مقدار تقریبی ازعدد مطلوب‌کوچکتر باشد آن‌را **تقریبی نقصانی** ولی اگـر از عدد مطلوب بـزرگتر باشد **تقریبی اضافی** گویند .

مثلا ۲۵/۸۷۴۳ مفروض است و این عدد بین‌دوعدد دیگر که به‌طریق غیر معینی بدست آمده واقع است؛

۲۵/۸۶ < ۲۵/۸۷۴۳ < ۲۵/۸۸

تقریبی نقصانی — عدد — تقریبی اضافی

عدد ۲۵/۸۶ تایکصدم تقریب نقصانی وعدد ۲۵/۸۸ تا یکصدم تقریب اضافی به ۲۵/۸۷۴۳ نزدیك می‌باشند.

تعریف ـ تفاضل $P - p = \lambda$ را **خطا** گویند. هرگاه دو خطا هر دو نقصانی و یا هردو اضافی باشند آنهارا متحد ـ الجهته گویند ولی اگریکی اضافی و دیگری نقصانی باشدآنها را مختلف‌الجهته گویند .

ارقام صحیح ـ گویندکه یك مقدار تقریبی دارای m رقم صحیح است درصورتی‌که m رقم ازسمت چپ‌آن مساوی m رقم ازسمت چپ عدد مطلوب باشد .

مثلا عدد ۲۵/۸۶ عددی‌است تقریبی با ۳ رقم صحیح زیرا۳رقم سمت چپ‌آن با سه‌رقم‌ازسمت چپ‌عدد۲۵/۸۷۴۳ مساوی است.

صفرهایی‌که درسمت چپ ارقـام با معنی واقعند جـزو ارقـام صحیح محسوب نمی‌شونـد . مثلا ۰/۰۰۰۰۴۳۷ کـه مقدار تقریبی عـدد ۰/۰۰۰۰۴۳۸۵۲ است دارای دو رقـم صحیح است.

درمحاسبات عددی همیشه دومسئلهٔ ذیل پیش می‌آید :

۱ـ اگر دریك محاسبهٔ عددی هریك از اعداد تاتقریب معینی‌داده شده باشند می‌خواهیم بدانیم‌که جواب مسئله تاچه تقریبی بدست می‌آید (تاچند رقم صحیح می‌باشد) .

۲ـ اعدادمعلوم دریك‌مسئله را تاچه تقریبی فرض‌نمائیم که جواب مسئله تاتقریب معینی صحیح باشد (دارای m رقم صحیح باشد).

حل دومسئلهٔ فوق به دوطریق صورت مـی گیرد : اول طریقهٔ خطاهای مطلق، دوم طریقهٔ خطاهای نسبی.

تعریف خطای مطلق ـ تفاضـل بین مقدار صحیح ازمقدار تقریبی آنرا خطای مطلق گویند.

اگـر N مقدار صحیح عدد مفروض بـاشد و n مقدار تقریبی همان عدد باشد ، خطای مطلق یا e عبارتست از :

$e = n - N$ یا $e = N - n$

بنـا بر آنکه خطـای تقـریبی نقصانی و یـا خطـای تقـریبی اضافی باشد. پس اگرمقدارصحیح عددی دردست باشد می‌توانیم به‌سهولت مقدار خطائی راکه در محاسبهٔ عدد تقریبی مرتکب شده‌ایم بدست‌آوریم. اما همیشه مقدارخطا صحیحاً معلوم‌نیست و عموماً حدود خطا برای‌ما معلوم می‌باشدکه غالباً عبارتست از یك واحد اعشاری‌که تجاوز خطا ازآن ممکن نیست.

مثلا اگر $\pi = ۳/۱۴۵۹۲$ فرض شود و مقدار تقریبی π را۳/۱۴ بگیریم، خطانقصانی‌است وکوچکتر از $\frac{۱}{۲۰۰}$ واگر $\pi = ۳/۱۵$ فرض‌شود خطا اضافی ومقدارآن از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچکتر است .

قضیه ـ اگر دریك عدد تقریبی نقصانی از طرف چپ تمام ارقـام صحیح را نگهداشته و بقیه را حذف نمائیم و یـك

واحدبه‌اولین‌رقم‌سمت راست بیفزائیم واحدخطا تغییرنمی‌کند. مثلا ۴۳/۶۶۹۵۷ عددی است تقریبی نقصانی‌که مقدارصحیح آن ۴۳/۶۷۹۴ است و خطای مطلق‌کوچکتر است از ۰/۰۱ حال اگر به‌جای عدد تقریبی ۴۳/۶۷ را اختیار نمائیم بازحد خطا از ۰/۰۱ کمتر است.

اگر در عدد تقریبی بالا ۰/۰۰۹۵۷ را حذف نمائیم خطای جدیدی مرتکب شده‌ایم‌که از ۰/۰۱ کمتر است وچون فرضاًهم خطا از۰/۰۱ کمتربود اگر ۴۳/۶۶ را اختیار نمائیم خطای‌کلی‌کمتر از ۰/۰۲ می‌شود اما اگر یك واحد به‌آخرین رقم اضافه نمائیم ۴۳/۶۷ می‌شود وخطا به‌اندازهٔ ۰/۰۱ کمتر می‌شود. درنتیجه باز خطا از ۰/۰۱ کمتر است پس ۴۳/۶۷ مقدارتقریبی ۴۳/۶۷۹۴ است تا ۰/۰۱ تقریب نقصانی. بطور کلی جهت خطا معلوم نیست (یعنی نمی‌دانیم که خطا نقصانی است و یا اضافی) .

جمع

قضیه ـ خطای مطلق مجموع p عدد تقریبی از p برابر بزرگترین خطاکمتراست.

اگر n_1 و n_2 و n_p.... اعداد تقریبی مفروضی باشند و خطاهای مطلق آنها e_1 و e_2... و e_p باشند (تمام اعدادتقریبی نقصانی یا اضافی‌اند) دراین‌صورت:

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots e_p$$

e خطای مطلق‌مجموع $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ است.

۱ـ نتیجه می‌شودکه خطای مطلق مجموع. چندین عدد تقریبی (نقصانی یا اضافی) متحدالجهت مساوی مجموع‌خطاهای آن اعداد است .

۲ـ اگر بعضی اضافی و بعضی نقصانی باشند خطای مطلق مجموع‌آن اعداد کوچکتر از مجموع تمام آن خطاها است پس:

$$e < e_1 + e_2 + \cdots + e_p$$

و اگر e_k ازهمهٔ خطاها بزرگتر باشد $e < p.e_k$

مسئلهٔ۱ـ باچه تقریبی می‌توان مجموع p عدد تقریبی را بدست‌آورد وقتی‌که حداعلای خطای هریك از آن اعداد معلوم باشد.

فرض می‌کنیم‌که بزرگترین خطای مطلق‌کوچکتر باشداز $\frac{1}{10^m}$ دراین‌صورت برطبق قضیهٔ قبل $e < \frac{p}{10^m}$

اگر $p < 10$ باشد دراین‌صورت $e < \frac{1}{10^{m-1}}$

اگر $10 < p < 100$ در این‌صورت $e < \frac{1}{10^{m-2}}$ در هرصورت حد اعلای خطای‌مطلق معلوم است.

مثال ـ اعداد ۳/۱۴۱۵۹۱۹۲ و ۱/۶۳۶۳۲۷۱ و ۱/۷۳۲۰۲۱۷ به‌ترتیب مقادیرتقریبی‌نقصانی π و $\frac{18}{11}$ و $\sqrt{3}$ می‌باشند تا $\frac{1}{10^6}$ و $\frac{1}{10^5}$ و $\frac{1}{10^4}$ تقریب ومجموع آنهایعنی ۶/۵۰۹۹۷۶۳۳ تا $\frac{1}{10^3}$ تقریب به مجموع $\pi + \frac{18}{11} + \sqrt{3}$ نزدیك می‌باشد .

مسئلهٔ ۲ ـ باچه تقریبی باید p عدد مفروض را اختیار کرد تا اینکه خطای مطلق مجموع آنها از $\frac{1}{10^m}$ کمترباشد.

اگر عدهٔ آن اعداد بیش از۱۰ نباشد مقدار تقریبی آنها را تا $\frac{1}{10^{m+1}}$ حساب‌کرده ومجموع‌آنها را می‌گیریم در این‌صورت برحسب قضایای قبل‌مقدارتقریبی مجموع تا $\frac{1}{10^m}$ خواهد بود و اگرعدهٔ آنها از ۱۰۰ بیشتر نباشد مقدارتقریبی نقصانی را تا $\frac{1}{10^{m+2}}$ باید حساب‌کرد.

مثال ـ می‌خواهیم‌بدانیم اعداد ۴/۳۲۹ و ۷/۲۵۶۱ و۳۲/۵۴۸راتاچه‌تقریبی‌اختیارکنیم‌تااینکه تقریب‌مجموع‌آنها از۰/۰۱ کمتر باشد. چون باید مجموع این اعداد تا دورقم اعشاری صحیح باشد پس مجموع آنها را تا سه رقم اعشاری حساب‌می‌کنیم که‌می‌شود۴۴/۱۳۳وتا۰/۰۱تقریب‌صحیح‌است.

تفریق

قضیه ـ خطای مطلق تناضل دوعدد تقریبی‌کمتر است از دوبر بزرگترین خطا.

اگر n_1 و n_2 اعداد تقریبی باشند و e_1 و e_2 خطاهای مطلق‌آنها بوده و N_1 و N_2 هم مقادیر صحیح باشند وخطای مطلق تفاضل را به e بنمایانیم ؛

۱ـ فرض می‌کنیم‌که اعداد تقریبی دریك‌جهت باشند(هر دو اضافی باشند) .

$$n_1 - n_2 = (N_1 + e_1) - (N_2 + e_2) =$$
$$= N_1 - N_2 + (e_1 - e_2) \quad , \quad e = e_1 - e_2$$

(یا اینکه هردونقصانی باشند)

$$n_1 - n_2 = (N_1 - e_1) - (N_2 - e_2) = (N_1 - N_2)$$
$$e = e_2 - e_1$$

درهرصورت خطای مطلق تفاضل دوعدد تقریبی که در

دنباله درصفحهٔ ۱۸۹

بررسی نیمساز یك گوشه (روش برداری)

علیرضا امیرمعز ـ دانشگاه تگزاس تك

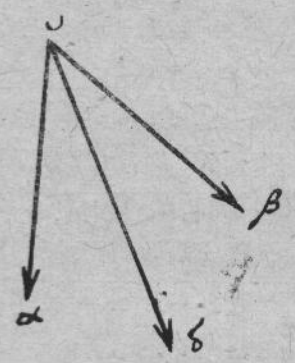
هرگاه نیمساز زاویه‌ای در مسئله‌ای وارد شود مسئله دشوار می‌شود. پاره‌ای ازمسائل ساختن مثلث که درآن نیمساز گوشه‌ای داده‌شده باخط‌کش و پرگار حل‌ندارند. دراین مقاله بعضی از خواص منصف‌الزاویه را با روش برداری بررسی می‌کنیم.

در این یادداشت بردارها را باحروف یونانی نمایش‌می‌دهیم حاصل‌ضرب‌داخلی دوبردار α و β با (α, β) نمایش‌داده می‌شود وآن عبارتست‌از:

$$(\alpha, \beta) = \|\alpha\| \, \|\beta\| \cos t$$

که درآن، مثلا، $\|\alpha\|$ نمایش طول بردار α و t زاویهٔ بین دوبردار است.

قضایای جبربرداری نیزدراین مقاله به‌کارخواهد رفت. تمام بردارها دریك‌صفحهٔ اقلیدسی گرفته شده‌اند [۱].



شکل۱

۱ ـ نیمساز ـ

فرض کنیم مجموعهٔ $\{\alpha, \beta\}$ بطور خطی مستقل باشد (شکل ۱). $\delta \neq \vec{0}$ را روی‌نیمساز زاویهٔ بین α و β می‌گیریم.

ازآنجا نتیجه می‌شودکه:

$$(1) \quad \left(\frac{\delta}{\|\delta\|}, \frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right) = \left(\frac{\delta}{\|\delta\|}, \frac{\beta}{\|\beta\|}\right)$$

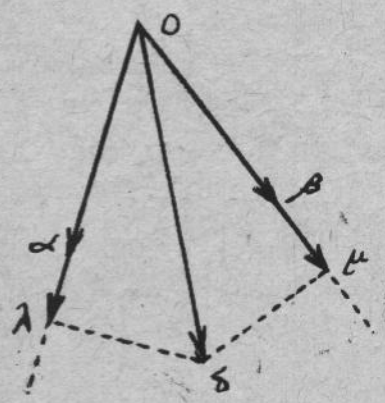
ازاین تساوی بدست می‌آیدکه:

$$(2) \quad \left(\delta, \frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right) = \left(\delta, \frac{\beta}{\|\beta\|}\right)$$

به معنی آنکه تصاویر جبری δ بر دو محور $\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right)$ و $\left(\frac{\beta}{\|\beta\|}\right)$ برابرند (شکل ۲).

این موضوع را چنین می‌توان‌بیان‌کرد. فرض کنیم که:

$$\lambda = \left(\delta, \frac{\beta}{\|\beta\|}\right)\frac{\beta}{\|\beta\|}$$



شکل۲

و

$$\lambda = \left(\delta, \frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right)\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$$

پس

$$\|\lambda\| = \|\mu\|$$

ملاحظه می‌شود که از (۱) نتیجه می‌شودکه:

$$(3) \quad \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} = \frac{(\alpha, \delta)}{(\beta, \delta)}$$

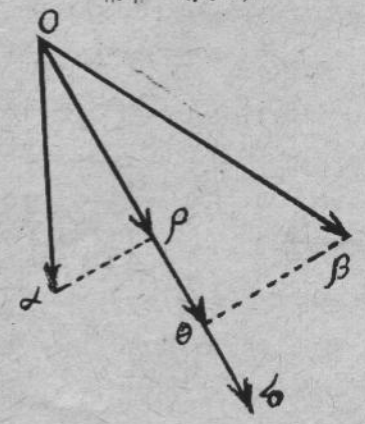
برای تعبیر هندسی(۳) فرض می‌کنیم‌که:

$$\theta = \left(\beta, \frac{\delta}{\|\delta\|}\right)\frac{\delta}{\|\delta\|}$$

و

$$\rho = \left(\alpha, \frac{\delta}{\|\delta\|}\right)\frac{\delta}{\|\delta\|}$$

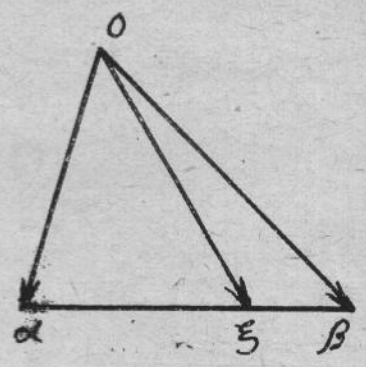
به معنی آنکه ρ و θ به‌ترتیب تصاویر α و β بر آسهٔ $\left(\frac{\delta}{\|\delta\|}\right)$ می‌باشند(شکل۳). ازآنجابدست می‌آیدکه:



شکل۳

$$(4) \quad \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} = \frac{\|\rho\|}{\|\theta\|}$$

۲ـ پوشهٔ محدب دو بردار ـ فرض کنیم که $\{\alpha, \beta\}$ بطور خطی مستقل باشد (شکل ۴). فرض کنیم که:



شکل ۴

$$\xi = a\alpha + b\beta,\ a+b=1,\ a>0,\ b>0$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که انتهای ξ روی پاره‌خط بازی‌است که دوانتهای α و β را به‌هم می‌پیوندد. این پاره‌خط بازراپوشهٔ محدب (Convex full) دوبردار α و β گویند. ملاحظه می‌شودکه:

$$\xi - \alpha = a\alpha + b\beta - \alpha = b(\beta - \alpha)$$

همچنین:

$$\xi - \beta = a(\alpha - \beta)$$

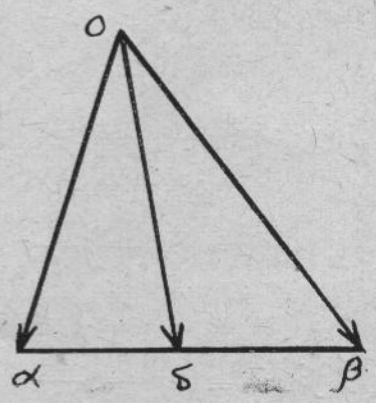
بنابراین:

$$\frac{\|\xi-\alpha\|^2}{\|\xi-\beta\|^2} = \frac{b^2\|\beta-\alpha\|^2}{a^2\|\alpha-\beta\|^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

ازآنجا نتیجه می‌شود:

$$(5)\quad \frac{\|\xi-\alpha\|}{\|\xi-\beta\|} = \frac{b}{a}$$

۳ـ نیمساززاویهٔ یك سه‌بر ـ فرض کنیم که $\{\alpha, \beta\}$ بطور خطی مستقل باشد و δ نیمساز زاویهٔ بین α و β در سه‌بری که این دو بردار تشکیل می‌دهند باشد (شکل ۵).



شکل ۵

بنابراین:

$$\delta = a\alpha + b\beta,\ a+b=1,\ a>0,\ b>0,$$

$$\frac{(\delta,\alpha)}{\|\alpha\|} = \frac{(\delta,\beta)}{\|\beta\|}$$

ازآنجا نتیجه‌می‌شود:

$$\frac{(a\alpha+b\beta,\alpha)}{\|\alpha\|} = \frac{(a\alpha+b\beta,\beta)}{\|\beta\|}$$

$$\frac{a\|\alpha\|^2 + b(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|} = \frac{a(\alpha,\beta) + b\|\beta\|^2}{\|\beta\|}$$

از این تساوی بدست می‌آیدکه:

$$(6)\quad \frac{b}{a} = \frac{\|\alpha\|(\alpha,\beta) - \|\alpha\|^2\|\beta\|}{\|\beta\|(\alpha,\beta) - \|\alpha\|\|\beta\|^2} = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$$

ازاین رابطه و(۵) نتیجه می‌شودکه:

$$(7)\quad \frac{\|\delta-\alpha\|}{\|\delta-\beta\|} = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$$

۴ـ درازای نیمساز ـ فرض‌کنیم‌که δ همان باشدکه‌در بخش ۳ بیان شد. یعنی‌که:

$$\delta = a\alpha + b\beta,\ a+b=1,\ a>0,\ b>0$$

$$\frac{(\delta,\alpha)}{\|\alpha\|} = \frac{(\delta,\beta)}{\|\beta\|}$$

به‌آسانی دیده می‌شودکه $\frac{b}{a} = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ است. اکنون ملاحظه می‌شودکه:

$$\|\delta\|^2 = a^2\|\alpha\|^2 + 2ab(\alpha,\beta) + b^2\|\beta\|^2$$

می‌توان نوشت‌که:

$$\frac{1}{a^2}\|\delta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2\frac{b}{a}(\alpha,\beta) + \frac{b^2}{a^2}\|\beta\|^2$$

بادرنظر گرفتن (۶) نتیجه می‌شودکه:

$$(8)\quad \frac{1}{a^2}\|\delta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}(\alpha,\beta)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$(9)\quad \frac{1}{b^2}\|\delta\|^2 = 2\|\beta\|^2 + 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}(\alpha,\beta)$$

اکنون a و b راحساب می‌کنیم:

$$a = \|\delta\|\sqrt{\frac{\|\beta\|}{2\|\alpha\|[\|\alpha\|\|\beta\| + (\alpha,\beta)]}}$$

$$b = \|\delta\|\sqrt{\frac{\|\alpha\|}{2\|\beta\|[\|\alpha\|\|\beta\| + (\alpha,\beta)]}}$$

ازآنجا نتیجه می‌شودکه:

$$a+b=1 = \frac{\|\delta\|}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\|\alpha\|\|\beta\| + (\alpha,\beta)}}\left(\frac{\|\alpha\|+\|\beta\|}{\sqrt{\|\alpha\|\|\beta\|}}\right)$$

بالنتیجه:

$$(10)\quad \|\delta\|^2 = \frac{2\|\alpha\|\|\beta\|[\|\alpha\|\|\beta\| + (\alpha,\beta)]}{(\|\alpha\|+\|\beta\|)^2}$$

دنباله در صفحهٔ ۱۸۹

دربارهٔ بیضی‌نگار آقای کیومرث طوفا

از احمد شرف‌الدین

در مجلهٔ یکان ، دورهٔ هشتم شمارهٔ ۲، شرحی دربارهٔ پرگار بیضی نگارآقای کیومرث طوفا ذکر شده است.موفقیت آقای کیومرث طوفا را صمیمانه به ایشان تبریک می‌گویم و خدمت پرارج مجلهٔ یکان را در معرفی کارهای خلاق جوانان به مدیر آن تبریک می‌گویم و ذیلا سه طریقه برای اثبات آنکه دستگاهی‌که توسط آقای طوفا ساخته شده است بیضی نگار است ارائه می‌دهم .

حروفی‌که در این مقاله بکار می‌رود همان حروفی است که در مقالهٔ «پرگار بیضی‌نگار» مشروح دریکان شمارهٔ قبل استعمال شده است.

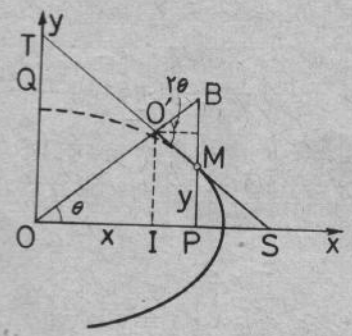
طریقهٔ اول ـ این طریقه متعلق به این جانب است و از دوطریقه دیگری‌که بعداً ذکر می‌شود آسان‌تر است .

قطعه خط $O'M$ را امتداد می‌دهیم تا خط OP را در نقطه S وخط OQعمودبرOPرادرنقطهٔ T قطع‌کند. به‌آسانی می‌توان‌اثبات‌کردکه :

$$OO' = O'S = O'T$$

ولذا :

$$ST = ۲OO' = \text{ثابت}$$



دوانتهای قطعه‌خط ST به‌طول ثابت ، بر دوخط عمودبرهم OP وOQ حرکت می‌کنند پس مکان هرنقطه ازاین قطعه‌خط مانند M یك بیضی است (یکی از قضایای مخروطات)

طریقهٔ دوم ـ این‌طریقه در پاره‌ای ازکتابهای هندسه مذکور است.

مکان نقطهٔ B یك دایره است زیرا :

$$OB = OO' + O'B = OO' + O'M = \text{ثابت}$$

اگر I تصویر O' برخط OP باشد، دومثلث SPMو SIO' باهم و نیز دو مثلث $OO'I$ و OBP با یکدیگر متشابه‌اند. روابط تشابه چنین است:

$$\frac{IO'}{PB} = \frac{OO'}{OB} \quad \text{و} \quad \frac{PM}{IO'} = \frac{SM}{SO'}$$

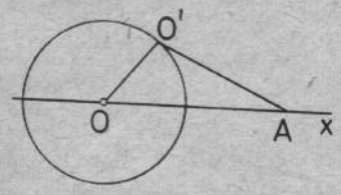
ازضرب روابط فوق با رعایت آنکه $OO' = SO'$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{PM}{PB} = \text{ثابت}$$

پس مکان M یك‌بیضی است.

طریقهٔ سومـ این طریقه در بعضی ازکتابهای مکانیك مشروح است .

درپاره‌ای‌ازکتابهای مکانیك‌دربارهٔ مسئلهٔ زیربرای تبدیل حرکت مستقیم‌الخط به حرکت دورانی و بالعکس صحبت می‌شود :



میلهٔ OO' درحول نقطهٔ O می‌چرخد . میلهٔ $O'A$ در O' با میلهٔ OO' مفصل‌شده است ، انتهای دیگر آن A روی خط OX می‌لغزد . منظور مطالعهٔ این دستگاه است.

اگر درمعادلات این‌مسئله $OO' = O'A$ گرفته شود نتیجه می‌شودکه مکان هرنقطه ازخط $O'A$ یك‌بیضی است .

به‌شکل اول مراجعه‌کنید . می‌توان نوشت:

$$OM = OO' + O'M$$

رابطهٔ فوق‌را روی دومحور OX و OY تصویر می‌کنیم ،حاصل می‌شود:

$$x = (R + r)\cos\theta$$
$$y = (R - r)\sin\theta$$

از حذف θ در دورابطهٔ فوق حاصل می‌شود:

$$\frac{x^۲}{(R+r)^۲} + \frac{y^۲}{(R-r)^۲} = ۱$$

پس مکان M یك بیضی است.

درسی از حساب

مجموع دو مربع

ترجمهٔ : محمود تویسرکانی دانشجوی دانشکدهٔ فنی

لم ۱: هیچ‌عدد صحیحی به‌صورت $4m+3$ وجودندارد که مجموع دومربع باشد.

اثبات: اگرعدد صحیح x را درنظر بگیریم داریم:

$$x \equiv 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \pmod 4$$

وازاین همنهشتی نتیجه می‌شود:

$$x^2 \equiv 0 \text{ یا } 1 \pmod 4$$

بنابراین برای دوعدد صحیح x و y می‌توان نوشت:

$$x^2+y^2 = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \pmod 4$$

یعنی مجموع دومربع مضربی‌از ۴ بعلاوهٔ ۳ نیست.

لم ۲: اگرعوامل اول‌عدد n رابتوان‌به‌صورت‌مجموع دومربع‌نوشت‌خود عدد n نیزمجموع دومربع خواهدبود.

اثبات: صحت اتحادزیررا می‌توان به‌سادگی تحقیق‌کرد:

$$(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2) = (aa_1+bb_1)^2+(ab_1-ba_1)^2 .$$

از اتحاد فوق‌می‌توان نتیجه گرفت که لم۲ صحیح‌است.

تعریف : اگرهمنهشتی $x^2 \equiv a \pmod p$ دارای‌جواب باشد a را ماندهٔ مربعی x به‌مدول p می گویند.

اگرعدد صحیح a ماندهٔ‌مربعی به‌مدول p باشد ، تابعی درتئوری اعداد موسوم‌به **تابع لژاندر** به صورت زیرتعریف شده و به‌شکل $(\frac{a}{p})$ نمایش می‌دهند:

$$(\frac{a}{p}) = +1 \text{ و } a \neq 0 \pmod p$$

تمرین ۱: ثابت‌کنید وقتی وفقط وقتی $(-\frac{1}{p}) = +1$ است‌که p به‌صورت $p = 4K+1$ باشد.

لم۳: اگر p عددی اول‌به‌صورت $4K+1$ باشدمعادلهٔ $x^2+y^2 = mp$ که درآن $0<m<p$ است‌نسبت به x، y و m دارای جواب صحیح می‌باشد.

اثبات : درتمرین فوق گفته شداگر $p = 4K+1$ باشد داریم $(-\frac{1}{p}) = +1$ بنابراین عددصحیحی مانند y موجود است به‌قسمی‌که $1+y^2 \equiv 0 \pmod p$.

می‌توان عددصحیح Y رایافت‌که $Y \equiv \pm y \pmod p$ چنانکه داشته باشیم $|Y| < \frac{p}{2}$ بنابراین

$$0 < mp = 1+Y^2 < 1+\frac{p^2}{4} < p^2$$

(و در نتیجه $0<m<p$ صدق می‌کند).

نتیجه می گیریم اعدادصحیح ۱، Y و m در لم۳صادق می‌باشند.

لم ۴ : اگر p عددی اول به صورت $4K+1$ و $x^2+y^2 = mp$ باشرط $1<m<p$ باشداعدادصحیح x_1 و y_1 و M موجودند به‌قسمی که $x_1^2+y_1^2 = Mp$ با شرط $1<M<p$ است.

اثبات : اگر m زوج باشد باید داشته باشیم $x \equiv y \pmod 2$ ومعادلهٔ‌فرض رامی‌توان به‌صورت‌زیرنوشت:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{m}{2}p$$

دیده می‌شود که $x_1 = \frac{x+y}{2}$ و $y_1 = \frac{x-y}{2}$ و $M = \frac{m}{2}$

درلم ۴ صدق می‌کند.

اگر m فردباشدبااستفاده‌ازفرمول‌تقسیم می‌توان‌نوشت:

$$x = am+a_1 \ , \ |a_1| < \frac{m}{2};$$

$$y = bm + b_1, \quad |b_1| < \frac{m}{2}$$

اگر در معادلهٔ مفروض عبارات اخیر را قرار دهیم با فرض $A = aa_1 + bb_1$ داریم:

$$a_1^2 + b_1^2 + 2Am + (a^2 + b^2)m^2 = mp$$

بنابراین نتیجه می‌شود عدد صحیح نامنفی M چنان وجود دارد که $a_1^2 + b_1^2 = Mm$ و می‌توانیم بنویسیم:

$$M + 2A + (a^2 + b^2)m = p$$

$$M^2 + 2AM + (a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) =$$
$$= (M + A)^2 + B^2 = Mp$$

$$B = ab_1 - ba_1$$

اگر $M = 0$ باشد خواهیم داشت $a_1 = b_1 = 0$ در نتیجه m^2، $x^2 + y^2 = mp$ را خواهد شمرد و در نتیجه m نیز p را می‌شمرد. ولی طبق فرض p عدد اول بوده و داریم $1 < m < p$ و مشاهده می‌شود $M = 0$ نمی‌تواند باشد پس $M \neq 1$. همچنین داریم $Mm = a_1^2 + b_1^2 < \frac{m^2}{2} < m^2$ بنابراین $M < m$.

پس $x_1 = M + A$ و $y_1 = B$ و M اعداد صحیحی می‌باشند که در لم ۴ صادقند.

قضیه: هر عدد اول به صورت $4K + 1$ را به صورت مجموع دو مربع می‌توان نوشت.

اثبات: با کمک لم ۳ می‌توان اعداد صحیح x و y را چنان یافت که $x^2 + y^2 = mp$، $1 < m < p$ باشد.

در حالت $m > 1$ با استفاده از لم ۴ و تعداد محدودی عدد $(m > M = M_1 > M_2 > \ldots > M_k = 1)$ به رابطهٔ $x_k^2 + y_k^2 = p$ می‌توانیم بنویسیم.

مجموع دو مربع:

در لم ۱ نشان دادیم که هیچ عدد اول به صورت $4K + 3$ مجموع دو مربع نمی‌باشد. حال عددی مانند n در نظر می‌گیریم که حاصل ضرب دو عدد اول به صورت مذکور باشد یعنی: $n = (4K + 3)(4K_1 + 3)$ پس n به صورت $4T + 1$ می‌باشد. سؤال این است که آیا یک چنین عدد n را می‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت؟

بطور کلی عدد n را می‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت اگر و فقط اگر دو عدد صحیح x و y موجود باشد بطوری که $(x, y) = 1$ و $x^2 + y^2 = n$.

قضیهٔ ۱: اگر n بر عدد اول p که به صورت $4K + 3$ است بخش‌پذیر باشد n را به صورت مجموع دو مربع نمی‌توان نوشت.

اثبات: اثبات توسط برهان خلف است. فرض می‌کنیم عدد n را بتوان به صورت مجموع دو مربع نوشت یعنی:

$$n = x^2 + y^2 \text{ و } (x, y) = 1$$

باید $(x, p) = 1$ باشد. زیرا در غیر این صورت p عدد x و n در نتیجه y را خواهد شمرد و در این حال رابطهٔ $(x, y) = 1$ برقرار نخواهد بود. ولی از $(x, p) = 1$ می‌توان $xu \equiv y \pmod{p}$ را نسبت به u حل نمود:

از $n \equiv 0 \pmod{p}$ نتیجه می‌شود.

$$x^2 + y^2 \equiv x^2(1 + u^2) \equiv 0 \pmod{p}$$

چون $(x, p) = 1$ است با اجرای قانون حذف خواهیم داشت:

$$1 + u^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

و رابطهٔ اخیر خلاف فرض ما است. زیرا طبق (تمرین ۱) نتیجه می‌شود $p = 4K + 1$ حال آنکه طبق فرض $p = 4K + 3$ است.

قضیه ۲: اگر $n = P^c m$ و p عدد اول به صورت $4K + 3$ و c عدد فرد و $(p, m) = 1$ باشد عدد n را به صورت مجموع دو مربع نمی‌توان نوشت.

اثبات: اثبات توسط برهان خلف است. اگر n را به صورت مجموع دو مربع بتوان نوشت داریم $n = x^2 + y^2$ اگر $(x, y) = d$ و $x = Xd$، $y = Yd$ باشد خواهیم داشت $(X, Y) = 1$ و $n = Nd^2$. چون p^c عدد n را می‌شمرد و c فرد است نتیجه می‌شود p عدد N را خواهد شمرد. ولی داریم $N = X^2 + Y^2$ و $(X, Y) = 1$ و این بدین معنی است که عدد N که مضربی از عدد اول $p = 4K + 3$ است به صورت مجموع دو مربع می‌توان نوشت و خلاف قضیهٔ ۱ می‌باشد.

قضیهٔ ۳: یک عدد صحیح و مثبت را می‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت اگر و فقط اگر هریک از عوامل اول آن که به صورت $4K + 3$ می‌باشند دارای توان زوج باشند.

اثبات: (الف) برای واحد داریم $1 = 1^2 + 0^2$، برای ۲ داریم $2 = 1^2 + 1^2$. قبلا دیدیم هر عدد اول به صورت $4K + 1$ را می‌توان به مجموع دو مربع تبدیل نمود.

اگر عدد اول $4K + 3 = p$ باشد توان زوج آن یعنی p^{2s} را می‌توان به صورت $p^{2s} = (p^s)^2 + 0^2$ نوشت که مجموع دو مربع است.

از لم ۲ نتیجه می‌شود عدد n را که عوامل اول آن به صورت $4K + 3$ بوده و دارای توان زوج می‌باشند می‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت. این مطلب در حالتی که یک چنین عوامل اولی موجود نباشد باز به صحت خود باقی است. زیرا می‌توان به جای عوامل مذکور $p^0 = 1$ را قرار داد که توان صفر زوج است.

(ب) اگر حتی یکی از عوامل اول به صورت $4K + 3$ توان فرد داشته باشد n قابل تبدیل به مجموع دو مربع نخواهد بود.

مثلا $351 = 3^3 \times 13$ را نمی‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت زیرا عامل اول ۳ دارای توان فرد است $(3 = 4 \times 0 + 3)$ در عوض مثالهایی از قبیل دو مثال زیر وجود دارد:

$$117 = 3^2 \times 13 = 9^2 + 6^2$$

$$65 = 5 \times 13 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2) = 8^2 + 1^2$$

حل مسائل نمونه

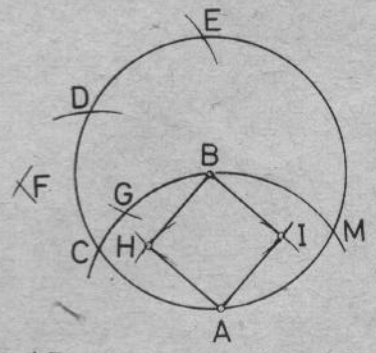
مسائل
«ناپلئون - ماسکرونی»

تنظیم از داوید ریحان

● **دو رأس متقابل یك مربع مفروض است ، دو رأس دیگر مربع را فقط به‌کمك پرگار بدست آورید (ماسکرونی)**

مسئلهٔ فوق، بوا مطهٔ آنکه بوسیلهٔ ترسیم نه‌کمان‌دایره رسم می‌شده است ، به نام مسئلهٔ نه کمانی ماسکرونی معروف است. طریقهٔ ترسیم تعیین دو نقطهٔ قطری دیگر از مربع به صورت زیراست :

فرض می‌کنیم A و B نقاطی باشندکه در اختیارداریم. به‌مرکز B و به‌شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم.دهانهٔ پرگار را به‌همان اندازهٔ قبلی‌نگاه می‌داریم و به مرکز A کمانی رسم می‌کنیم تا نقطهٔ C بدست‌آید ، سپس به مرکز C کمانی رسم می‌کنیم تا نقطهٔ D حاصل گردد و متعاقب آن به‌مرکز D دایره‌ای رسم می‌کنیم تا نقطهٔ E بدست آید (درتمام این حالات اشعهٔ دوایر رسم شده برابرند و مساوی باطول AB هستند). به شعاع CE و مراکز A و E دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در F قطع کنند. به‌مرکز E وبه شعاع BF کمانی رسم می‌کنیم تا اولین کمان را در G قطع کند . (کمانی که به مرکز A و به شعاع AB رسم شده و دایره را درC قطع‌کرده است) .



به‌شعاع BG و مراکز A و B کمانهایی رسم‌می‌کنیم تا یکدیگر را در H و I قطع نمایند. در این‌صورت رأسهای مربع مطلوب A ، H ، B و I خواهند بود . بطوری که ملاحظه شد برای یافتن دو رأس دیگرمربع از ۹ دایره‌استفاده کردیم واثبات مربع بودن شکل حاصل ، با استفاده ازخاصیت مثلثهای قائم‌الزاویه و قضیهٔ فیثاغورس بسیار ساده است .

فرض می‌کنیم‌که $AB = a\sqrt{2}$ باشد . دراین‌صورت خواهیم داشت :

$AE = 2a\sqrt{2}$ (E و A متقاطر هستند)

و $AC = CD = DE = a\sqrt{2}$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACE داریم :

$EC^2 = AE^2 - AC^2 = 8a^2 - 2a^2 = 6a^2$

و درنتیجه : $EC = a\sqrt{6}$

و با توجه به‌نحوهٔ ترسیم داریم :

$EF = FA = EC = a\sqrt{6}$

مثلث AEF متساوی‌الساقین‌است و B پای‌میانه‌است، بنابراین مثلث FBE قائم‌الزاویه خواهد بود و داریم :

$BF^2 = EF^2 - BE^2 = 6a^2 - 2a^2 = 4a^2$

$\Longrightarrow BF = 2a$

در نتیجه چون $EG = BF$ است داریم :

$EG = 2a$

در مثلث EGA ، BG میانه است و بطوری که در ضمن ترسیم بیان‌کردیم باید برابر با BH یعنی طول ضلع‌مربع باشد. باتوجه به‌فرمول میانه‌ها داریم :

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$BH^2 = BG^2 = \frac{2(EG^2 + AG^2) - AE^2}{4} =$$

$$= \frac{2(4a^2 + 2a^2) - 8a^2}{4} = a^2$$

بدین ترتیب خواهیم داشت :

$BH = HA = AI = IB = a$

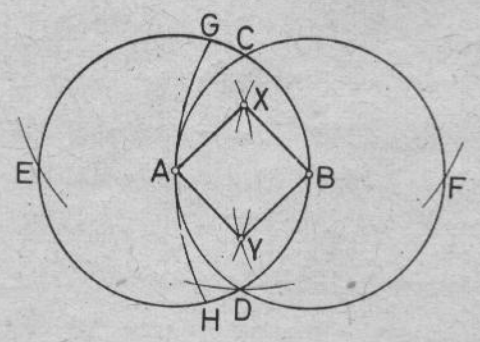
و شکل حاصل مربع است.

با درنظر گرفتن یك نکته باید خاطرنشان ساخت‌که این مسئله را باترسیم فقط ۸ کمان می‌توان حل کرد.

با مختصر توجهی می‌توان ثابت کرد که اگر دایرهٔ به مرکز A و به شعاع BA دایرهٔ (BA و B) را غیر از C در نقطهٔ دیگری مانند M قطع نماید طول BM برابر با CE و مساوی با $a\sqrt{6}$ خواهد بود و دراین‌صورت بدون اینکه نقطهٔ D را بدست آوریم می‌توانیم نقطهٔ E را بیابیم ومسئلهٔ نه کمانی را به مسئلهٔ هشت‌کمانی تبدیل کنیم .

اخیراً راه حل بسیار زیبایی برای این مسئله کشف شده است که فقط از شش‌کمان استفاده می‌شود و تازه‌ترین راه حلی است که برای این‌مسئله ارائه شده است . نحوهٔ عمل به قرار زیراست :

A و B نقاط مفروضند . ابتدا به‌مراکز A و B و به شعاع AB دو دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C و D قطع کنند. به‌مرکز C و به‌شعاع CD کمان EDF را رسم می‌کنیم. به مرکز F و به‌شعاع AF کمان HAG را رسم



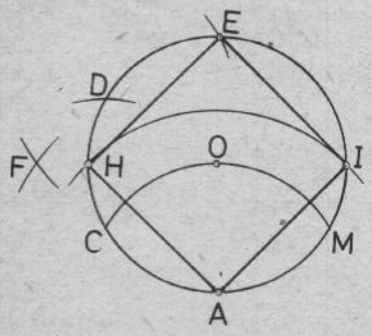
می‌کنیم . به مراکز E و F و به‌شعاع EG دو کمان رسم می‌کنیم تا از تقاطعشان نقاط X و Y بدست آیند . اثبات مربع بودن AXBY مشکل نیست .

* * *

● دایرهٔ به مرکز O و به‌شعاع معلوم مفروض است ، رأسهای یکی از مربعهای محاط در آنرا تنها به کمك پرگار بدست آورید (مسئلهٔ ناپلئون).

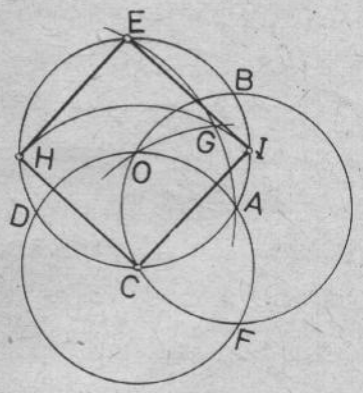
مسئلهٔ فوق به‌مسئلهٔ ناپلئون مشهوراست و چون‌برای ترسیم آن از شش‌کمان استفاده می‌شود ، گاهی « مسئلهٔ شش کمانی‌ناپلئون » نیزنامیده میشود . درضمن مطالعهٔ آثارترسیمی ماسکرونی ملاحظه‌کرده‌اندکه راه حل این‌مسئله حقیقتاً از آن ماسکرونی است. درهرحال برای یافتن رأسهای مربع ، یکی ازآنها را A می‌نامیم و موضع آنرا بطور اختیاری روی‌دایره انتخاب می‌کنیم . به مرکز A و به شعاع AD دایره‌ای می‌زنیم تا نقاط M و C بدست‌آید ، سپس به‌مرکز C و به همان‌شعاع D را بدست می‌آوریم و در مرحلهٔ بعدی نقطهٔ E راکه محل برخورد دایره‌ای به مرکز D و به‌همان شعاع قبلی است ، با دایرهٔ مفروض بدست می‌آوریم. به مراکز A وE و به شعاع AD دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در F قطع کنند ، به‌مرکز A و به شعاع OF دایره‌ای می‌زنیم‌تا دایرهٔ مفروض را در I و H قطع کند ، به سادگی می‌توان ثابت کرد که AIEH مربع است .

باید توجه داشت که این مسئله را می‌توان با پنج کمان نیزحل کرد ، زیرا بدون اینکه نقطهٔ D رابدست آورده باشیم می‌توانیم نقطهٔ E را بیابیم (کافی است به مرکز C و به شعاع CM دایره‌ای رسم کنیم‌تاE حاصل گردد)



راه دیگری برای این مسئله درسال۱۹۵۳ درمجلهٔ «ریاضیات معلم» منتشر شده است که این مسئله فقط با پنج‌کمان حل گرده است . این‌راه‌حل چنین است.

نقطه‌ای مانند A را روی دایره انتخاب کنید ، به مرکز این نقطه و به شعاع AO دایرهٔ دیگری رسم‌کنید تا دایرهٔ مفروض رادر C و B قطع کند ، به مرکز C و با همان شعاع دایرهٔ سوم را



رسم می‌کنیم تا دایرهٔ اولیه را در D قطع نماید. به مرکز D و به‌شعاع DA کمانی رسم می‌کنیم‌که دایرهٔ مفروض‌را درE قطع‌کند. به مرکز F و به‌شعاع FO کمانی رسم می‌کنیم تا کمان اخیررا در G قطع نماید. به مرکز C و به شعاعCG کمانی رسم می‌کنیم‌که دایرهٔ اولیه را در H قطع کند ، E ، I ، C و H رأسهای مربع مطلوبند .

یادداشت ، ماسکرونی (لورنزو) دانشمند و شاعر ایتالیایی است‌که در سال ۱۷۵۰ در کاستانیتا (برگام) متولد وبه سال ۱۸۰۰ درپاریس وفات یافت . وی‌استاد جبر وهندسه در **پاوی** (۱۷۸۶) شد و بین سالهای (۱۷۸۹-۱۷۹۳) ، عنوان رئیس دانشگاه این شهررا به‌خود تخصیص داد.

یکی از آثار علمی او هندسهٔ پرگار (۱۷۹۷) نام دارد که آنرا به ناپلئون اول هدیه‌کرده است .

۳ـ کسر اعشاری متناوب

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری

یکی از افرادی که برای اولین بار با کسرهای متناوب روبرو شد ریاضیدان ایتالیائی به‌نام **کاوالیری** (۱۶۴۷-۱۵۹۸) بود. او در موقع تبدیل کسر متعارفی به اعشاری با این نوع کسرها مواجه شد. کاوالیری بدون توجه به متناوب بودن کسرها به مقدار تقریبی آنها قناعت کرد.

مطالعهٔ مفصل دربارهٔ کسرهای متناوب توسط ریاضیدان معروف انگلیسی **والیس** (۱۷۰۳-۱۶۱۶) که استاد اکسفورد بود انجام گرفت. او در سال ۱۶۹۳ رساله‌ای انتشار داد دربارهٔ جبر که در یکی از فصلهای این رساله خواص مهم کسرهای متناوب مورد بررسی قرار گرفته بود و تأکید شده بود که در تعیین آنها از پیشینیان استفاده نشده است. والیس به این موضوع پرداخته بود که وقتی صورت یک کسر بدون باقیمانده بر مخرج بخش‌پذیر است که مخرج شامل عاملهای ۲ و ۵ باشد. و اگر مخرج شامل عاملهای ۲ و ۵ نباشد تناوب از مرتبهٔ اول شروع می‌شود. او با قضایای ساده دربارهٔ تعداد ارقام در تناوب نیز آشنایی داشت. تحقیق و بررسیهای وسیع در تئوری کسرهای متناوب در نیمهٔ دوم قرن هیجدهم شروع شد. در این مورد ریاضیدان و ستاره‌شناس سوئیسی **لامبرت** (۱۷۷۷-۱۸۲۸) کوشش زیادی کرد.

باید توجه داشت که لامبرت پسر یک خیاط فقیر بود و ریاضیات را خود یاد گرفته بود. او ابتدا معلم و سپس دانشمند مشهور و نامدار و عضو آکادمی برلین شد.

دربارهٔ کسرهای متناوب ریاضیدان معروف **ل‌اولر** نیز مقالاتی انتشار داد. برای اولین بار ریاضیدانی به‌نام **روبنسون** علامتی برای کسرهای متناوب پیشنهاد کرد. به این ترتیب که کسرهای اعشاری متناوب ۰/۳۳۳.... و ۰/۲۳۲۳... و ۰/۷۸۴۷۸۴.... را به صورت ساده‌تر و کوتاهتر $0/\overline{3}$ و $0/\overline{23}$ و $0/\overline{784}$ نوشت. او کسرهای هم‌تناوب (دوره) را کسرهای مشابه نامگذاری کرد و با ضرب و تقسیم کسرهای متناوب کسرهای ساده‌ای بدست آورد.

تئوری کسرهای متناوب در ابتدای قرن نوزدهم به کوشش ریاضیدان بزرگ آلمانی **گوس** که در تئوری اعداد کار می‌کرد تکمیل شد.

٤ـ تناسب و مقادیر متناسب

مفهوم تناسب به‌معنی تساوی نسبت‌های دو عدد، برای اعداد درست (صحیح) از خیلی پیش از این در قدیم رایج بوده است. پیش از این زمان بابلیهای قدیم از مقایسهٔ اضلاع مثلثهای متشابه به‌مفهوم تناسب اضلاع آنها که به صورت اعداد صحیح بودند رسیده بودند. اولین تئوریهای تناسب حسابی توسط دانشمند قدیم یونانی **«فیثاغورس»** و شاگردان او بیان شد. فیثاغورس در سالهای ۵۰۰-۵۸۰ قبل از میلاد زندگی می‌کرده است. آنان سه صورت مختلف تناسبهای زیر را بررسی کردند:

تناسب حسابی یا عددی :

$$a-b=c-d$$

تناسب هندسی:

$$a : b = c : d$$

تناسب توافقی:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$$

نان همچنین مفهوم تناسب غیرمنفصل و تناسب با واسطین مساوی را توجیه کردند.

در قرن چهارم قبل از میلاد دانشمند یونانی **ادکس** که بین سالهای ۳۵۵-۴۰۸ قبل از میلاد زندگی می‌کرد روش منظمی برای بررسی تناسبها نه‌تنها با اعداد صحیح بلکه با اعداد

غیرصحیح پیشنهادکرد. باید دانست که ادکس بحرالعلوم زمان خودبوده است. اوتخصصهای زیادی داشت. مثلا ستاره‌شناس مکانیسین، ریاضیدان وپزشك معتبربوده است .

تئوری‌کامل تناسب درقرن سوم قبل‌از میلاد توسط هندسه‌دان یونانی **اقلیدس** درتألیف معروف اوبه نام «اصول» که شامل سیزده مقاله بود بیان شد. اومقالهٔ پنجم را برای بیان این تئوری اختصاص داده است .

اقلیدس مطالعات ادکس را پایهٔ تئوری خودقرار داده است. تئوری تناسب درزمان حال با تئوری ادکس - اقلیدس فرق بسیارکمی دارد .

تناسب اقلیدس به‌صورت زیرفرموله می‌شود: چهارعدد a و b و c و d با تناسب :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

چنین تعریف می‌شوندکه اگر به ازاء اعداد صحیح ودلخواه m و n ، $ma>nb$ باشد داریم : $mc>nd$

۵- جبر وعلائم حرفی آن

حل معادلات باعث گسترش وپیشرفت جبر مانند سایر علوم شده است .

درزمانهای بسیارقدیم‌مصریان، بابلیان‌وهندیان‌با اصول ابتدائی جبرآشنا بودند وبرای حل مسائل معادلاتی بر طبق فرضهای مسئله ساخته وبه‌کمك آنها مسئله راحل‌می‌کردند.

البته آنهانمایش‌حرفی‌مقادیررا نمی‌دانستندوبه‌همین‌جهت نمی‌توانستند فرمولهای عمومی برای حل مسائل درست‌کنند.

کلمهٔ «الجبر» (جبر) برای اولین‌بار در قرن نهم در کارهای ریاضیدان ومنجم خوارزمی به‌نام « **محمدبن‌موسی الخوارزمی**» پیدا شد.

خوارزمی رساله‌یی به‌نام «حساب الجبروالمقابله» که دربارهٔ ساختن وحل معادلات جبری است انتشارداد. وازهمین کلمهٔ «الجبر» کلمهٔ جبرحاصل شد. در رسالهٔ «حساب الجبرو المقابله»که معرف جبرشفاهی است ازحروف‌وعلامات استفاده نشده وهمهٔ عملیات باکلمات بیان ونوشته شده است .

اصطلاحات «الجبر» و«المقابله» دوعمل بسیاراساسی و ساده هستندکه به‌کمك آنها معادله به‌صورت معادلهٔ با عناصر مثبت درطرفین راست وچپ آن تبدیل می‌شود . عمل «جبر» (به‌معنی تجدیدساختمان) عبارتست ازبردن عناصر منفی ازیك طرف معادله به‌طرف دیگرآن به‌منظور تبدیل معادله‌به‌صورت معادلهٔ با عناصرمثبت است .

عمل « مقابله » (به‌معنی تطبیق ومقایسه) عبارتست ازآوردن عناصرمشابه به‌طرف راست وچپ به منظور ساده‌تر کردن معادله . بزرگترین موفقیت برای جبر شکل حرفی آن است‌که نوشتن‌وبررسی‌را ساده می‌کند. جبرحرفی‌کنونی‌بتدریج به‌این‌صورت درآمده است .

این صورت ابتدا بین اعراب متداول‌شد. به‌این‌ترتیب که درقرن یازدهم ریاضیدان اسلامی به نام **کرجی** علاماتی برای بعضی ازمقادیرجبری درنظر گرفت مثلا او مجهول را با علامت ~ نشان می‌داد .

نمایش حرفی دراروپا درقرون پانزدهم وشانزدهم‌رواج پیداکرد. ابتدا برای مجهول وسپس برای‌کمیات حروف رابکار بردند. نمایش حرفی عدددلخواه را درقرن شانزدهم«**ویت**» پیشنهادکرد به این ترتیب که هرعدد مجهول دلخواهی را او باحرف N نمایش می‌داد .

و بالاخره‌کار انتخاب حرف واستفاده آنها در جبر و فیزیك را ریاضیدان آلمانی «**لایب‌نیز**» (۱۷۱۶-۱۶۴۶) و ریاضیدان‌وفیزیکدان انگلیسی«**نیوتن**» ومخصوصاً ریاضیدان فرانسوی «**دکارت**» (۱۶۵۰-۱۵۹۵) بپایان رسانده و تکمیل کردند . در قرن شانزدهم برای اولین‌بار ریاضیدان انگلیسی «**رکورد**» علامت تساوی‌را به‌صورت‌دوخط‌موازی (=) پیشنهادکرد .

دربارهٔ انتخاب این علامت خودرکورد می گوید: «هیچ دوچیزی نمی‌توانند بیش‌ازدوقطعه خط مساوی باشند» (منظور ازبرای دوقطعه خط همشکل وهم طول‌بودن آنهاست).

٦- اعداد منفی

مفهوم اعداد ومقادیر منفی اولین‌بار درقرن اول قبل از میلاد مورد بحث قرار گرفت .

این مفاهیم درآن‌زمان درعمل حل معادلات جبری پیش می‌آمدند. به‌این ترتیب‌که درحین حل معادله ویا آخر سر پس‌ازحل‌آن به مقادیرمنفی برخوردمی‌کردند. (ریشه‌های‌منفی) خیلی ازدانشمندان اروپائی قرون شانزده وهفده‌فکرمی کردند که مقادیرمنفی درست وحقیقی نیستند ومعنی ندارند .

مقادیرمنفی وقتی شناسایی یافتندکه به‌آنها تفسیرواقعی نسبت دادند .

معلوم است‌که دانشمندان آن زمان به آسانی به چنین تفسیری‌نرسیدند .

دراین راه باید یك سری موانع را برطرف می‌کردند.

اولین تفسیرطبیعی‌که بین اعداد مثبت ومنفی بعمل‌آمد توسط ریاضیدانان هندی انجام شد .

آنان مقادیرمثبت ومنفی را به‌صورت دارائی وبدهکاری تفسیرکردند وبدون درنظر گرفتن اساس دقیقتری برای این موضوع مسائل خودرا با تفسیربالا بررسی و حل می‌کردند. مثلا ریاضیدان ومنجم بزرگ‌هندی به‌نام **«براهماگوپتا»** (۶۶۰-۵۹۸) درکتاب نجوم خودکه شامل بیست باب است (دوازده باب حساب و۱۸ باب جبر) ودرسال ۶۲۸ انتشار داده می‌نویسید :

«مجموع دو دارائی، دارائی است ومجموع‌دوبدهکاری بدهکاری ومجموع دارائی وبدهکاری مساوی تفاضل آنها ویا درصورت مساوی‌بودن برابر صفراست .

مجموع‌صفروبدهکاری‌بدهکاری‌است‌ومجموع‌دارائی‌وصفر دارائی است، ومجموع‌دوصفر، صفراست» وسپس می‌افزاید:

«کوچکترازبزرگتر کم‌می‌شود، دارائی‌ازدارائی‌وبدهکاری ازبدهکاری. اما درصورتی‌که بزرگتر را ازکوچکتر کم‌کردی علامت نتیجه عوض می‌شود. اگر بدهکاری از صفرکم شود دارائی می‌شود ودارائی به بدهکاری بدل می‌شود »

ریاضیدان‌ومنجم دیگرهندی به‌نام **«بهاسکاراآکاریا»** (متولد۱۱۱۴، تاریخ مرگش معلوم نیست) توجه زیادی به اعدادمنفی مبذول داشته است. پسوندآکاویاکه بعدازنام او آمده به‌معنی استاد ودانشمنداست. اودرحدود سال ۱۱۵۰ کتابی را انتشاردادکه درآن بابهایی به‌نام «لیلاواتی» به‌معنی «عالی»که دربارهٔ حساب است و«ویجاگانیتا» به‌معنی «محاسبهٔ ریشه‌ها»که دربارهٔ جبراست دیده‌می‌شود. دراین‌کتاب بهاسکارا می‌نویسد :

«حاصل‌ضرب دودارائی یا دو بدهکاری دارائی است . حاصل‌ضرب دارائی وبدهکاری ضرراست. همین‌ترتیب برای تقسیم وجود دارد. توان دوم دارائی یا بدهکاری دارائی‌است دارائی دارای دوریشه است. اولی هستی ودومی بدهکاری»

ریاضیدانان ایتالیائی **«پاچیولا، تارتالیا، فیررو»**درقرن شانزدهم با اینکه از علامت منفی استفاده کرده‌اند اما ازآن به‌عنوان علامت منفی یك‌عدد منفی استفاده نکرده بلکه فقط‌به عنوان علامت تفریق بکاربرده‌اند .

اولین ریاضیدان اروپائی‌که ریشهٔ منفی معادله را نیز مانند ریشهٔ مثبت آن موردبررسی قرارداد ریاضیدان‌ایتالیائی **«کاردان»** (۱۵۷۶-۱۵۰۱) بود. اوریشه‌های منفی‌راجعلی یا اضافی می‌خواند. با این حرف اومی‌خواست بگویدکه ریشه‌های منفی تفسیرمعمولی ندارند. درهمان زمان درقرن شانزدهم ریاضیدانان آلمانی نیزشروع به استفاده ازاعدادمنفی کردند. مثلا **«استیفل»** درکتاب «حساب‌آلمانی» خود«اصول علامات» را برای تکمیل اعمال جبری واستفادهٔ وسیع ازاعداد منفی گنجانیده است. درهمین زمینه استیفل می‌نویسد :

«... اعمال‌جبری، که طبق اینها انجام می‌شوندبه‌کشف حقیقت عجیبی منجرمی‌شوند» سپس می‌افزاید: « ... ما اعداد پایین‌ترازصفر را بدون استفاده نمی‌گذاریم» .

تفسیرکنونی اعدادمنفی در قرن هفدهم به‌کوشش دو دانشمند وریاضیدان تکمیل شد. این دوعبارت بودند از : ریاضیدان هلندی **«ژیرار»** (۱۶۳۴-۱۵۹۵) و ریاضیدان و فیلسوف معروف فرانسوی **«دکارت»** .

بعدها ازاعداد مثبت ومنفی برای رسم منحنی‌ها استفاده شد،که هرنقطه ازآن توسط اعداد مثبت یا منفی روی محور اعداد تعیین می‌شد.

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۷۹

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۷۹/۱- از سید قاسم همایونی پنجم ریاضی دبیرستان؟

ثابت کنید که هرگاه

$$A+B+C+D=0$$

باشد خواهیم داشت:

$$A^3+B^3+C^3+D^3=3(C+D)(AB-CD)$$

حل - از رابطهٔ فرض نتیجه می‌شود:

$$A+B=-(C+D) \text{ یا } (A+B)^3=$$
$$=-(C+D)^3$$

$$A^3+B^3+3AB(A+B)=-C^3-D^3-$$
$$-3CD(C+D)$$

$$A^3+B^3+C^3+D^3=-3AB(A+B)-$$
$$-3CD(C+D)$$

$$A^3+B^3+C^3+D^3=3AB(C+D)-$$
$$-3CD(C+D)$$

ونتیجه خواهد شد:

$$A^3+B^3+C^3+D^3=3(C+D)(AB-CD)$$

۷۹/۲ - فرستنده: محمود تویسرکانی دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

با فرض $x^2+x+1=0$ مطلوبست محاسبهٔ مقدار

$$P=x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$$

حل - از رابطهٔ $x^2+x+1=0$ نتیجه می‌شود:

$$x+\frac{1}{x}=-1 \Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=-1$$

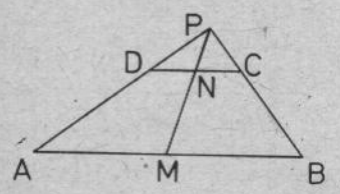
و یا

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \Longrightarrow x^3=1 \Longrightarrow x^{12}=1$$

$$x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=x^{12}.x^2+\frac{1}{x^{12}.x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=-1$$

۷۹/۳- فرستنده: علیرضا علیپور دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

در ذوزنقهٔ ABCD دو زاویهٔ A و B متمم یکدیگرند به فرض آنکه $AB=p$ و $CD=q$ باشد طول پاره خط MN که وسط AB را به وسط CD وصل می‌کند برحسب p و q چقدر است؟



حل - هرگاه P نقطهٔ تلاقی دو ساق AD و BC باشد، چون دوزاویهٔ A و B متمم یکدیگرند پس مثلث APB و همچنین مثلث PCD قائم‌الزاویه است. می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وتر نصف وتر است. پس داریم:

$$PM=MA=MB \text{ و } PN=ND=NC$$

هر یک از دو مثلث NPC و MPB متساوی‌الساقین است و در نتیجه زاویهٔ NPC بازاویهٔ NCP و زاویهٔ MPB با زاویهٔ MBP برابر است. اما دو زاویهٔ MBP و NCP متساویند، پس دو زاویهٔ MPC و NPC نیز متساویند ودر نتیجه سه نقطهٔ M و N و P بریک استقامتند و داریم:

$$MN=PM-PN=\frac{AB}{2}-\frac{CD}{2}=\frac{p-q}{2}$$

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۷۹/۴- از جلیل بصیریان پنجم ریاضی دبیرستان خواجه نصیر جهرم

به فرض:

$$S=a^2+b^2+c^2 \text{ و } P=a+b+c$$

صحت تساوی زیررا تحقیق کنید:

$$(S-2a^2)(S-2b^2)+(S-2b^2)(S-2c^2)+$$

$$+(S-2c^2)(S-2a^2)=$$
$$=P(P-2a)(P-2b)(P-2c)$$

حل ـ باتوجه به‌مقدار S عبارت طرف اول می‌شود :

$$(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)+$$
$$+(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)+$$
$$+(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)=$$
$$=c^4-(a^2-b^2)^2+a^4-(b^2-c^2)^2+b^4-$$
$$-(c^2-a^2)=-(a^4+b^4+c^4)+$$
$$+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=-(a^2-b^2-c^2)^2+$$
$$+4b^2c^2=[2bc+(a^2-b^2-c^2)][2bc-$$
$$-(a^2-b^2-c^2)]=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]$$
$$=(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)=$$
$$=P(P-2a)(P-2b)(P-2c)$$

۷۹/۵ ـ فرستنده **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تبریز

ثابت‌کنیدکه هرگاه $f(x^n)$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد بر x^n-1 نیز بخش پذیر است.

حل ـ اگر $f(x^n)$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد پس : $f(1)=0$ بوده و $f(x)$ بر $x-1$ قابل قسمت است. نتیجه می‌شودکه $f(x^n)$ بر x^n-1 بخش پذیر است .

۷۹/۶ ـ فرستنده **جواد فیض**

هرگاه m و n و p عددهای مثبت باشند ثابت کنیدکه $S=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ بر x^2+x+1 بخش پذیر است .

حل ـ عبارت S رابه صورت زیر می‌نویسیم :

$$S=(x^3)^m+x.(x^3)^n-x^2(x^3)^p$$

باقیماندهٔ تقسیم این عبارت بر x^3-1 برابر می‌شود با:

$$(1)^m+x(1)^n+x^2(1)^p=1+x+x^2$$

پس می‌توانیم بنویسیم :

$$S=(x^3-1)P(x)+1+x+x^2=$$
$$=(x-1)(1+x+x^2)P(x)+1+x+x^2$$
$$S=(1+x+x^2)[(x-1)P(x)+1]$$

۷۹/۷ ـ فرستنده **ژیان حبیب‌الله زاده** چهارم ریاضی دبیرستان لامعی

از رابطهٔ زیر مقدار x را بدست‌آورید:

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^x=$$
$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x$$

حل ـ بافرض :

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^x=A \text{ و } \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x=B$$ خواهیم داشت :

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^x=\frac{1}{A} \text{ و } \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x=\frac{1}{B}$$

بنابراین داریم :

$$A+\frac{1}{A}=B+\frac{1}{B}$$
$$\Rightarrow A^2B+B-AB^2-A=0$$
$$(A-B)(AB-1)=0$$
$$A=B\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^x\Rightarrow x=0$$
$$AB=1\Rightarrow\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right]^x=0$$
$$\Rightarrow x=0$$

در هر حال مقدارx برابر صفر است .

۷۹/۸ ـ فرستنده : **محمود تویسرکانی**

از دستگاه زیر مقادیر x و y را بدست آورید:

$$\begin{cases}\log\sqrt{(x+y)^2}=1\\ \log y-\log|x|=\dfrac{1}{\log_4 100}\end{cases}$$

حل ـ باتوجه به اینکه $\log_4 100=\log_2 10=\frac{1}{\log 2}$: است خواهیم داشت :

$$|x+y|=10 \text{ و } y=2|x|$$

چون $y=2|x|>0$ بنابراین :

$$x+y=x+2|x|>0$$

پس $|x+y|=x+y$ و دو دستگاه زیر بدست می‌آید :

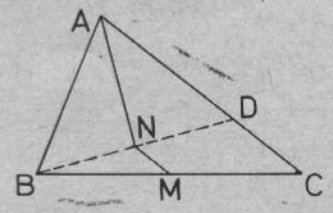
$$\begin{cases}x+y=10\\ y=2x\end{cases}\Rightarrow\left(x=\frac{10}{3} \text{ و } y=\frac{20}{3}\right)$$

$$\begin{cases}x+y=10\\ y=-2x\end{cases}\Rightarrow(x=-10 \text{ و } y=20)$$

۷۹/۹ ـ فرستنده : **جواد فیض**

درمثلث ABC ضلع $AC=b$ ازضلع $AB=c$ بزرگتر است. از M وسط ضلع BC موازی‌باضلع AC رسم می‌کنیم

که نیمساز زاویهٔ A را در N قطع می‌کند. طول پاره خط MN را برحسب b و c حساب کنید.



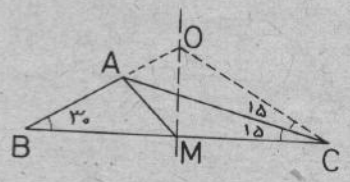
حل ـ خط BN را رسم می‌کنیم که ضلع AC را در D قطع می‌کند. در مثلث BDC چون M وسط BC و MN با CD موازی است پس N وسط BD است. در مثلث ABD خط AN میانه و نیمساز است پس این مثلث متساوی‌الساقین است و داریم:

$$DC = AC - AD = AC - AB = b - c$$

$$MN = \frac{DC}{۲} = \frac{b-c}{۲}$$

۷۹/۱۰ـ از احمد نبوی دبیرستان البرز

در مثلث ABC اندازه زاویه‌های B و C به ترتیب °۳۰ و °۱۵ است. زاویهٔ میانهٔ AM با ضلع BC چقدر است؟



حل ـ از N وسط BC عمودی بر آن اخراج می‌کنیم تا امتداد BA را در O قطع کند. از O به C وصل می‌کنیم. مثلث BOC متساوی‌الساقین بوده و بنابراین زاویهٔ $OCA = ۱۵^\circ$ بوده و AC نیمساز زاویهٔ OCB می‌باشد. در نتیجه:

$$\frac{CO}{CB} = \frac{AO}{AB}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMC داریم $OC = ۲OM$ و نیز $BC = ۲MB$ پس:

$$\frac{CO}{CB} = \frac{۲OM}{۲MB} = \frac{MO}{MB} = \frac{AO}{AB}$$

در نتیجه:

$$\frac{MO}{MB} = \frac{AO}{AB}$$

بنابراین AM نیمساز زاویهٔ BMO بوده و نتیجه می‌گیریم که زاویهٔ AMB برابر °۴۵ است.

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۷۹/۱۱ـ ضلعهای مربع ABCD با محورهای مختصات متوازیند و رأس A از آن برخط △ به معادلهٔ:

$$x - ۲y + ۲ = ۰$$

و رأس B از آن برخط $\triangle_۱$ به معادلهٔ:

$$۳x - ۲y = ۶$$

واقع است. هرگاه AB موازی $x'x$ و A به‌طول یك باشد؛ اولا مختصات رأسهای دو مربع را که جواب مسئله‌اند حساب کنید.

ثانیاً هرگاه P و Q مرکزهای دومربع و M نقطهٔ تلاقی دو خط △ و $\triangle_۱$ باشد نسبت دوضلع MP و MQ ازمثلث MPQ چقدر است؟

حل ـ از معادلهٔ △ درازاء $x = ۱$ نتیجه می‌شود $y = ۱/۵$ پس $A(۱ و ۱/۵)$ ودر نتیجه B به‌عرض ۱/۵ است. از معادلهٔ $\triangle_۱$ درازاء $y = ۱/۵$ نتیجه می‌شود $x = ۳$ پس $B(۳ و ۱/۵)$. چون AB موازی $x'x$ است پس:

$$AB = |x_B - x_A| = |۳ - ۱| = ۲$$

ضلع AD با $y'y$ موازی است پس:

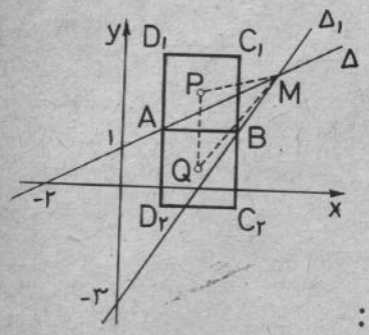
$$x_D = x_A = ۱ \text{ و } AD = |y_D - y_A| = ۲$$

$$y_D - ۱/۵ = \pm ۲ \Longrightarrow y_D = ۳/۵ \text{ یا } -۰/۵$$

$$D_۱(۱ و ۳/۵) \text{ و } D_۲(۱ \text{ و } -۰/۵)$$

رأس C با B همطول وبا D همعرض است، پس:

$$C_۱(۳ و ۳/۵) \text{ و } C_۲(۳ \text{ و } -۰/۵)$$



دومربع $ABC_۱D_۱$ و $ABC_۲D_۲$ جوابهای مسئله‌اند واگر $I^۲$ مرکز مربع اولی و Q مرکز مربع دومی باشد، چون P وسط $AC_۱$ و Q وسط $AC_۲$ است پس:

$$P(۲ و ۲/۵) \text{ و } Q(۲ و ۰/۵)$$

$$M\begin{cases} x - ۲y + ۲ = ۰ \\ ۳x - ۲y = ۶ \end{cases} \longrightarrow M\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۳ \end{matrix}\right.$$

$$MP = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۳ - ۲/۵)^۲} = \sqrt{۴/۲۵}$$

$$MQ = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۳ - ۰/۵)^۲} = \sqrt{۱۰/۲۵}$$

$$\frac{MP}{MQ} = \sqrt{\frac{۴/۲۵}{۱۰/۲۵}} = \sqrt{\frac{۱۷}{۴۱}}$$

۷۹/۱۲ـ هرگاه درصفحهٔ محورهای مختصات نقطهٔ $A(tg\alpha$ و $cotg\alpha)$ برخط به معادلهٔ :

$$3x-6y+7=0$$

قرار داشته باشد مقدار $tg\alpha$ واز روی‌آن مقدار $sin\alpha$ راحساب کنید .

حل ـ مختصات A درمعادلهٔ داده شده صدق می‌کند ، پس :

$$3tg\alpha-6cotg\alpha+7=0$$

با توجه به اینکه $cotg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$ خواهیم داشت :

$$3tg^2\alpha+7tg\alpha-6=0 \Longrightarrow tg\alpha=-3 \text{ یا } \frac{2}{3}$$

$$sin\alpha=\frac{\pm tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ یا } \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۷۹/۱۳ـ فرستنده : **همایون مرادی** دبیرستان بحرالعلوم بروجرد

معادلهٔ خطی را بنویسیدکه ازنقطهٔ $A(3$ و $2)$ گذشته و محورهای مختصات‌رادرنقاط B و C قطع کند بقسمی‌که مختصات این دونقطه عددهای صحیح‌باشند .

حل ـ بافرض $B(a$ و $0)$ و $C(0$ و $b)$ معادلهٔ خط BC می‌شود :

$$bx+ay=ab$$

مختصات A دراین معادله صدق می‌کند، پس :

$$3b+2a=ab$$

$$a=\frac{3b}{b-2}=3+\frac{6}{b-2}$$

چون a عدد صحیح است پس:

$$b-2=\pm1 \text{ یا } \pm2 \text{ یا } \pm3 \text{ یا } \pm6$$

درازاء $b-2=1$ داریم $b=3$ و $a=9$ ومعادلهٔ BC می‌شود :

$$3x+9y=27 \text{ یا } x+3y=9$$

درازاء سایر مقادیر $b-2$ معادلهٔBC به‌ترتیب عبارت‌خواهد شد از :

$$2x+3y=12 \qquad x-3y+3=0 ،$$

$$x+y=5 \qquad 2x-3y=0 ،$$

$$2x+y=8 \qquad x-y=1 ،$$

$$2x-y=4$$

۷۹/۱۴ـ در صفحهٔ محورهای مختصات شش ضلعی ABCDEF را درنظرمی گیریم بقسمی‌که ضلعهای متقابل‌آن باهم موازی وقطر AD برضلعهای AF و CD عمود باشد هرگاه $A(2$ و $0)$ و $B(6$ و $0)$ و $E(0$ و $5)$ و $F(0$ و $1)$ باشد ؛

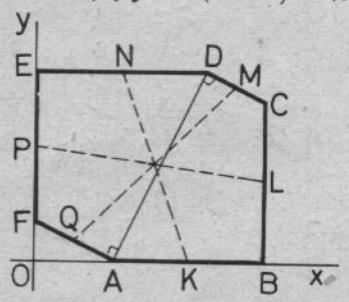
اولا ـ مختصات رأسهای دیگر شش ضلعی را حساب کنید .

ثانیاً ـ معادلات خطوط واصل بین‌اوساط ضلعهای متقابل را بنویسیدو محقق‌کنیدکه این سه خط متقاربند .

حل ـ داریم :

$$m_{AF}=-\frac{1}{2}\Longrightarrow m_{AD}=2$$

$$(AD): y=2(x-2)=2x-4$$



ضلع ED باضلع AB موازی است و چون AB بـ $x'x$ واقع‌است پس D و E همعرضند یعنی عرض D برابربا ۵است وازمعادلهٔAD درازاء $y=5$ داریم $x=4/5$ یعنی $D(4/5$ و $5)$. ضلع CD باضلع AF موازی است‌پس:

$$m_{CD}=-\frac{1}{2} \text{ و } (CD): y-5=-\frac{1}{2}(x-\frac{9}{2})$$

$$(CD): \ y=-\frac{1}{2}x+\frac{29}{4}$$

نقطهٔ C همطول‌نقطهٔ B است وازمعادلهٔ CD درازاء $x=6$ داریم $y=4/25$ یعنی$C(6$ و $4/25)$.ثانیاً اگر K،L،M،N، P، Q به‌ترتیب اوساط AB، BC، CD، DE، EF وFA باشد خواهیم داشت :

$$K(4 \text{ و } 0) ، L(6 \text{ و } \frac{17}{8}) ، M(\frac{21}{4} \text{ و } \frac{37}{8})$$

$$N(\frac{9}{4} \text{ و } 5) ، P(0 \text{ و } 3) ، Q(1 \text{ و } \frac{1}{2})$$

$$\begin{cases}(KN): 20x+7y=80\\(LP): 7x+48y=144\\(MQ): 33x-34y=16\end{cases}$$

ازمعادله‌های‌اول ودوم نتیجه می‌شود:

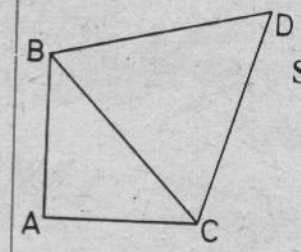
$$x=\frac{2832}{911} \text{ و } y=\frac{2320}{911}$$

این مقادیر درمعادلهٔ سوم دستگاه صدق می‌کنند پس سه خط KN و LP و MQ متقاربند.

۷۹/۱۵- از جواد فیض

روی وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، مثلث متساوی‌الاضلاع DBC را می‌سازیم. هرگاه مساحت این مثلث n برابر مساحت مثلث ABC باشد، حدود n و مقدار $tg ABC$ را حساب کنید.

حل- اگر طولهای $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ باشد:



$$S_{DBC} = a \times \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= (b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b.c$$

$$S_{DBC} = nS_{ABC} \Longrightarrow (b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4} = n.\frac{1}{2}b.c$$

این رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2n}{\sqrt{3}} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

با فرض $\frac{b}{c} = x$ به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2\sqrt{3} - 2nx + \sqrt{3} = 0$$

$$\Delta' = n^2 - 3 > 0 \Longrightarrow n \geqslant \sqrt{3}$$

$$tg ABC = \frac{b}{c} = x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 3}}{\sqrt{3}}$$

۷۹/۱۶- در صفحهٔ محورهای مختصات هرگاه فاصلهٔ دو نقطهٔ

$A(tg\alpha \text{ و } 2cotg\alpha)$ و $B(-3cotg\alpha \text{ و } 3tg\alpha)$

برابر با $\sqrt{17}$ باشد، مقدار عددی مختصات دو نقطهٔ A و B را معلوم کنید.

حل- داریم:

$$\overline{AB}^2 = (tg\alpha + 3cotg\alpha)^2 + (2cotg\alpha - 3tg\alpha)^2$$

$$\overline{AB}^2 = 10tg^2\alpha + 13cotg^2\alpha - 6 = 17$$

با تبدیل $cotg x$ به $tg x$ خواهیم داشت:

$$10tg^4\alpha - 23tg^2\alpha + 13 = 0$$

$$\Longrightarrow tg\alpha = \pm 1 \text{ یا } \pm\sqrt{\frac{13}{10}}$$

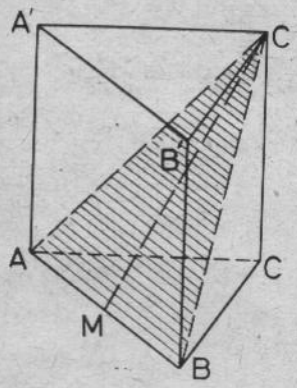
واز آنجا مختصات A و B به ترتیب برابر است با:

$$A(\pm 1 \text{ و } \mp 2) \text{ و } (B \mp 3 \text{ و } \pm 1)$$

$$A\left(\pm\sqrt{\frac{13}{10}} \text{ و } \pm 2\sqrt{\frac{10}{13}}\right)$$

$$B\left(\mp 3\sqrt{\frac{10}{13}} \text{ و } \pm 3\sqrt{\frac{13}{10}}\right)$$

۷۹/۱۷- درمنشور منتظم مثلث‌القاعدهٔ $ABCA'B'C'$ طول ضلع هریک ازمثلث‌های متساوی‌الاضلاع قاعده a است. بر یال AB ازقاعدهٔ پایین و رأس C' از قاعدهٔ بالا صفحه‌ای می‌گذرانیم که مقطع آن با منشور مثلث $C'AB$ است. هرگاه مساحت این مثلث $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ باشد طول یال‌جانبی منشور برحسب a چقدر است؟



حل- مطابق با شکل داریم:

$$S_{AC'B} = \frac{1}{2}AB.MC'$$

$$= \frac{1}{2}a.MC'$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}a.MC'$$

$$\Longrightarrow MC' = a\sqrt{3}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $MC'B$:

$$BC'^2 = MC'^2 + MB^2$$

$$BC'^2 = \frac{13a^2}{4} \Longrightarrow BC' = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $BC'C$:

$$CC'^2 = BC'^2 - BC^2 = \frac{13a^2}{4} - a^2 = \frac{9a^2}{4}$$

$$CC' = \frac{3a}{2}$$

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۸۹/۱۸- هرگاه مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع:

$$y = a\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

برابر باشند با $\frac{\sqrt{5} \pm 2}{4}$ مقدار a را حساب کنید.

حل- با تبدیل حاصل‌ضرب دو سینوس به مجموع خواهیم داشت:

$$y=a[\cos\frac{\pi}{۴}-\cos(۲x+\frac{\pi}{۴})]$$

حداکثر وحداقل مقدار $\cos(۲x+\frac{\pi}{۴})$ برابر است با ۱ + و ۱ − پس حداقل و حداکثر مقدار تابع می‌شود:

$$a[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\pm ۱]=\frac{a(\sqrt{۲}\pm ۲)}{۲}$$

$$\frac{a(\sqrt{۲}\pm ۲)}{۲}=\frac{\sqrt{۵}\pm ۲}{۴}\Longrightarrow a=\frac{\sqrt{۵}\pm ۲}{۲(۲\pm\sqrt{۲})}$$

۷۹/۱۹- دوتابع زیر مفروض است

$$y_۱=۳\cos(۲x+۱) \quad و \quad y_۲=۳\sin(۳x-۱)$$

اولا- طولهای نقاط مشترك دو منحنی را حساب کنید.

ثانیاً- در نقطهٔ به طول $\frac{\pi}{۲}+۲$ مماسی برمنحنی نمایش هندسی هریك ازدوتابع رسم می‌کنیم. نسبت ضریب زاویه ایهای این دومماس را پیداکنید.

حل- اولا داریم :

$$۳\sin(۳x-۱)=۳\cos(۲x+۱)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+۱-۳x)=\cos(۲x+۱)$$

$$۲x+۱\pm(\frac{\pi}{۲}+۱-۳x)=۲k\pi$$

$$x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۲ \quad یا \quad x=\frac{۲k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}$$

ثانیاً داریم :

$$y_۱'=-۶\sin(۲x+۱) \quad و \quad y'_۲=۹\cos(۳x-۱)$$

$$m_۱=-۶\sin\pi+۵)=۶\sin ۵$$

$$m_۲=۹(\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۵)=۹\sin ۵$$

$$\frac{m_۱}{m_۲}=\frac{۶\sin ۵}{۹\sin ۵}=\frac{۲}{۳}$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۷۹/۲۰- ترجمهٔ **فتح‌اله زرگری**

اولا منحنی نمایش تابع زیررا رسم کنید:

$$y=x^۲+x+\sqrt{(x^۲+۱)^۲-۴x^۲}$$

ثانیاً- در نقطهٔ تلاقی نمایش هندسی تابع با محور y′y خطی قائم برآن رسم می‌کنیم. معادلهٔ این خط و نقطه یا نقاط تلاقی آنرا با منحنی نمایش هندسی تابع بدست‌آورید.

حل- اولا داریم :

$$y=x^۲+x+\sqrt{(x^۲-۱)^۲}=x^۲+x+|x^۲-۱|$$

هر گاه $x^۲-۱\leqslant ۰$ یعنی $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ باشد داریم:

$$y=x^۲+x-(x^۲-۱)=x+۱$$

نمایش هندسی این تابع قطعه‌ای از خط به‌معادلهٔ $y=x+۱$ است که طولهای آن بین ۱ و ۱ − محصورند.

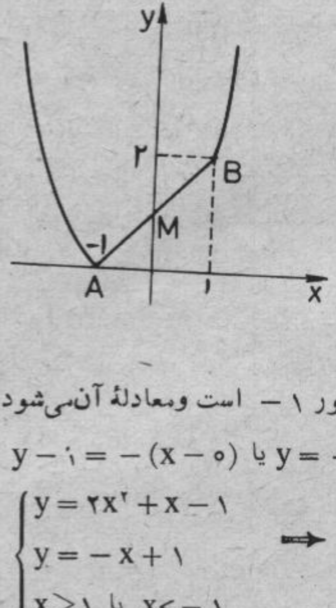
هر گاه $x^۲-۱\geqslant ۰$ یعنی $x\geqslant ۱$ یا $x<-۱$ باشد داریم :

$$y=x^۲+x+(x^۲-۱)=۲x^۲+x-۱$$

$$y'=۴x+۱=۰\Longrightarrow x=-\frac{۱}{۴}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y′		−				+	
y	$+\infty$	↘	۰		۲	↗	$+\infty$

نمایش هندسی تابع مفروض به‌شکل زیر است که از دو نیم منحنی ویك‌پاره خط تشکیل شده‌است.



ثانیاً اگر M نقطهٔ تلاقی نمایش هندسی تابع بامحور y′y باشد داریم M(۰ و ۱) و دراین نقطه‌قائم برمنحنی عمودی‌است که برخط AB رسم می‌شود. ضریب زاویه‌ای AB برابر یك است پس ضریب زاویه‌ای قائم مزبور ۱ − است ومعادلهٔ آن‌می‌شود :

$$y-۱=-(x-۰) \quad یا \quad y=-x+۱$$

$$\begin{cases}y=۲x^۲+x-۱\\ y=-x+۱\\ x\geqslant ۱ \quad یا \quad x<-۱\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x^۲+x-۱=۰\\ x\geqslant ۱ \quad یا \quad x<-۱\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x=\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

نتیجه خواهد شدکه قائم مورد نظر علاوه‌بر M در نقطهٔ دیگر

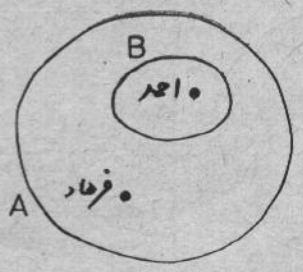
دنباله درصفحهٔ ۱۶۳

۳۵

مجموعهٔ حرفهای صدادار الفبای لاتن‌را با V ومجموعهٔ تمام حرفهای الفبای لاتن را با L نشان می‌دهیم .

آیا همهٔ عضوهای مجموعهٔ V به مجموعهٔ L تعلق دارند؟.....

آیا همهٔ عضوهای مجموعهٔ L به مجموعهٔ V تعلق دارقد ؟.....

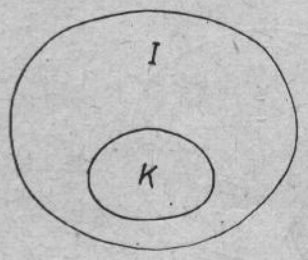


۳۹

مجموعهٔ B جزئی از مجموعهٔ A است ، به عبارت دیگر B زیر مجموعهٔ A است.

این مفهوم را چنین نشان می‌دهیم : $B \subset A$

علامت $\subset$ یعنی : ....



۴۳

K مجموعهٔ دهستانهای خوزستان است.

A مجموعهٔ دهستانهای اهواز است .

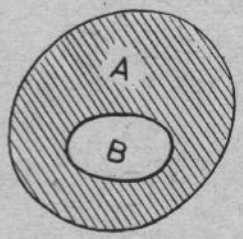
کدامیك از دو مجموعهٔ A و K زیر مجموعهٔ دیگری است؟ آن‌را با علامت بنویسید .

.....

زیر مجموعهٔ

۴۷

در شکل روبرو نمودار A مجموعهٔ تمام‌دانش‌آموزان‌دبیرستان و B مجموعهٔ دانش‌آموزان عینکی دبیرستان رسم‌شده‌است.



خاصهٔ مشترك‌تمام‌عضوهای مجموعهٔ B این‌است‌که دانش‌آموز دبیرستان می‌باشند وعینك می‌زنند .

خاصهٔ مشترك عضوهای A که روی نمودار درناحیهٔ هاشورخورده واقعند چیست ؟.....

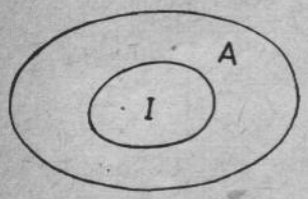
B نسبت به A

کل

۵۱

A مجموعهٔ دانش آموزان دبیرستان است.

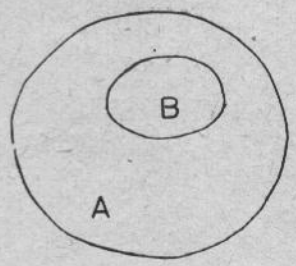
I زیرمجموعه‌ای از دانش‌آموزان دبیرستان است‌که شبانه‌روزی هستند .



در روی شکل ناحیهٔ مربوط به $C_A I$ (یعنی متمم I نسبت به A) را هاشور بزنید .

۳۸

این نمودار مجموعه های A و B است.



احمددانش‌آموز دبیرستان است وعینك می‌زند.

فرهاد دانش‌آموز دبیرستان است وعینکی نیست.

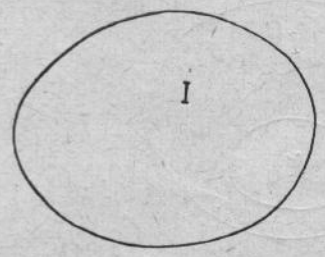
روی‌شکل، نقطهٔ نمایندهٔ احمدو نقطهٔ نمایندهٔ فرهادرا نشان‌دهید.

بلی

نه

۴۲

شکل‌مقابل‌نمودار مجموعهٔ I، دهستانهای ایران، است.



نمودارK،مجموعهٔ دهستانهای خوزستان را روی آن رسم‌کنید

زیر مجموعهٔ

۴۶

علامت $\subset$ یعنی . . . .

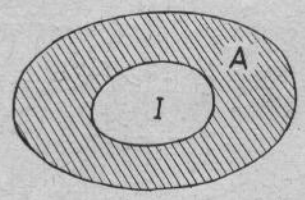
$A \subset K$

۵۰

مجموعهٔ A را **مجموعهٔ کل** می‌نامیم.

$C_A B$ها خوانده می‌شود: متمم . . . .

A مجموعهٔ . . . . است.



دانش‌آموز دبیرستان می‌باشند و عینك نمی‌زنند.

۳۶

هرگاه تمام عضوهای یك مجموعه بـه مجموعهٔ دیگر نیزتعلق داشته‌باشند، می گوئیم که مجموعهٔ اول **زیرمجموعهٔ** مجموعهٔ دوم است .

مجموعهٔ حروف صدادار الفبای لاتن ..... ای‌ازمجموعهٔ حروف الفبای لاتن است.

۴۰

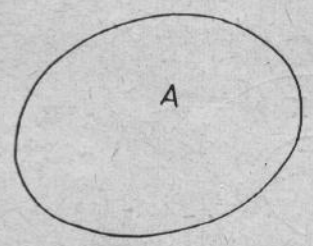
V مجموعهٔ حروف صدادار و L مجموعـهٔ تمام حروف الفبای لاتن است .

یکی ازدو مجموعهٔ V و L زیرمجموعهٔ دیگری است .

این مفهوم را با علامت بنویسید :

.....

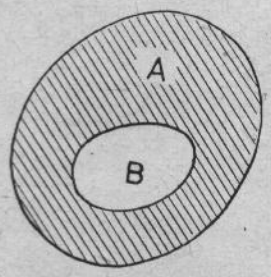
۴۴



شکل مقابل نمودار A مجموعهٔدهستانهای اهواز است .

روی این شکـل ، نمودار K ، مجـموعـهٔ دهستانهای خـوزستان را رسم‌کنید .

۴۸



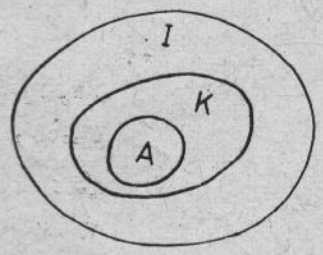
درنمودار مقابـل ، آن نـاحیه از A کـه هاشور خورده است ، **متمم مجموعـهٔ B نسبت به مجموعـهٔ** A نامیده می‌شود.

متمم مجموعهٔ B نسبت به‌مجموعهٔ A یا نشانهٔ $C_A B$ نشان داده می‌شود .

نشانهٔ C یعنی.....

زیـر مجموعه

$K \subset I$



B

۵۲

A مجموعهٔ تمام دانش‌آموزان دبیرستان است .

I زیر مجموعه‌ای ازدانش‌آمـوزان دبیرستان است‌کـه شبانه‌روزی می‌باشند .

متمم I نسبت‌به A ، مجموعهٔدانش‌آموزانی‌ازدبیرستان است‌که . . . . .

۳۷

مجموعهٔ دانش‌آموزان دبیرستان را با A و مجموعهٔ دانش‌آموزانی ازدبیرستان‌راکه عینک‌می‌زنندباB نشان‌می‌دهیم.

B یك .....ازA است.

زیر مجموعه

۴۱

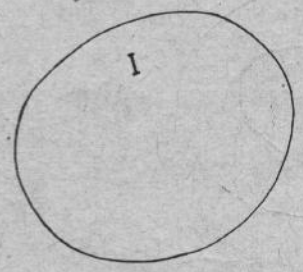
هرگاه I مجموعهٔدهستانهای‌ایران وKمجموعهٔدهستانهای خوزستان باشد، چگونه‌باید بنویسیم:

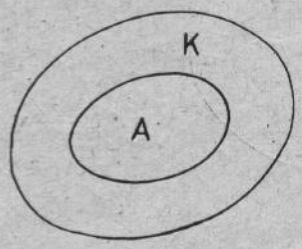
$K \subset I$ یا اینکه $I \subset K$

$V \subset L$

۴۵

شکل‌مقابل‌نمودار I،مجموعهٔدهستانهای ایران‌است. روی‌این شکل نمودارهای K وA ، مجموعه‌های دهستانهای‌خوزستان واهواز را رسم‌کنید.

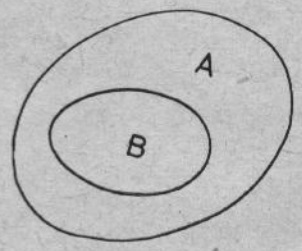




۴۹

مجموعهٔB زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است .

متمم B نسبت به A شامل عضوهایی از A است که عضو ..... نیستند.



متمم

شبانه‌روزی نیستند

دنباله در شمارهٔ بعد

$N\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ نمایش هندسی تابع را قطع می‌کند.

۷۹/۲۱ـ به فرض آنکه a و b عددهای مخالف صفر باشند، معادلات مجانبهای موازی محور $x'x$ منحنی نمایش هندسی تابع زیررا معلوم کنید:

$$y=\frac{\sqrt[3]{a^3x^3+px^2+qx+r}}{\sqrt[4]{b^4x^4+mx^2+n}}$$

حل ـ هرگاه به فرض، $x\to+\infty$ دراین صورت حدتابع برابر می شود باحد:

$$y=\frac{\sqrt[3]{a^3+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}+\frac{r}{x^3}}}{\sqrt[4]{b^4+\frac{m}{x^2}+\frac{n}{x^4}}}$$

که این حد برابراست با

$$y=\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[4]{b^4}}=\frac{a}{|b|}$$

هرگاه $x\to-\infty$ دراین صورت حد تابع برابرمی‌شود با حد:

$$y=\frac{\sqrt[3]{a^3+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}+\frac{r}{x^3}}}{-\sqrt[4]{b^4+\frac{m}{x^2}+\frac{n}{x^4}}}$$

که این حد برابر می‌شود با:

$$y=\frac{\sqrt[3]{a^3}}{-\sqrt[4]{b^4}}=\frac{-a}{|b|}$$

به فرض آنکه تابع در فاصلهٔ $x>N_1$ و $x<N_2$ معین باشد یعنی x بتواند به سمت $\pm\infty$ معین کند، منحنی نمایش تابع دو مجانب موازی $x'x$ دارد به معادله‌های $y=\pm\frac{a}{b}$

۷۹/۲۲ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

هرگاه داشته باشیم:

$$\cos^2a+\cos^2b+\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c=1$$

رابطهٔ بین کمانهای a و b و c را بدست آورید.

حل ـ رابطهٔ مفروض را به صورتهای زیر تبدیل می‌کنیم.

$$1+\cos2a+1+\cos2b+2\cos^2c+4\cos a\cos b\cos c=2$$

$$2\cos(a+b)\cos(a-b)+2\cos^2c+2\cos c[\cos(a+b)+\cos(a-b)]=0$$

$$[\cos(a-b)+\cos c][\cos(a+b)+\cos c]=0$$

$$\cos\frac{a-b+c}{2}\cos\frac{a-b-c}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}\times\cos\frac{a+b+c}{2}=0$$

چون هریك از چهار عامل را برابر باصفر قرارداده کمان آن را تعیین کنیم نتیجه خواهد شد که بین a و b و c یکی از چهار رابطهٔ زیر برقرار است:

$$a\pm b\pm c=2k\pi+\pi$$

۷۹/۲۳ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$2t\sin x+(t^2-1)\cos x=(t^2+1)\cos ax$$

حل ـ معادله را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{2t}{1+t^2}\sin x+\frac{t^2-1}{t^2+1}\cos x=\cos ax$$

با فرض $t=tg\frac{\varphi}{2}$ خواهیم داشت:

$$\sin\varphi\sin x+\cos\varphi\cos x=\cos ax$$

$$\cos(x-\varphi)=\cos ax$$

$$ax\pm(x-\varphi)=2k\pi$$

$$x=\frac{2k\pi+\varphi}{a+1} \quad \text{یا} \quad x=\frac{2k\pi-\varphi}{a-1}$$

۷۹/۲۴ـ از **سعید فرشاد**

عددی را تعیین کنید که مجذور باشد وجذرآن درمبنای ۷ به صورت $\overline{(a+4)(a-2)}$ نوشته شود.

حل ـ هر رقم عددنویسی حداقل برابر صفر است واز مبنای عددنویسی کوچکتر است. پس:

$$\begin{cases}7>a-2\geq0\\7>a+4\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geq2\\a<3\end{cases}\Rightarrow a=2$$

$$(60)_7=42 \quad \text{و} \quad 42^2=1764$$

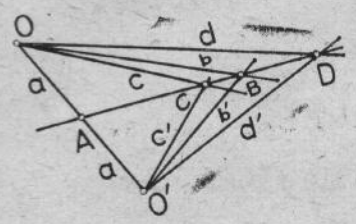
۷۹/۲۵ـ در تقسیم زیرهرحرف نمایندهٔ یك رقم است و حروف متفاوت نمایندهٔ رقمهای متفاوت می‌باشند. این ارقام را پیدا کنید.

AABB	CDE
DEB	DG
FBB	
HEB	
EB	

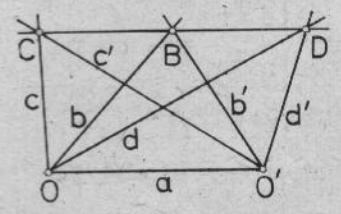
حل- از تفریق $B - B = B$ نتیجه می‌شود $B = ۰$ حاصل‌ضرب D در E و همچنین G در E به‌رقم صفر ختم‌شده است وچون حروف نمایندهٔ رقمهای متفاوتند پس $E = ۵$ و D و G رقمهای زوجند. چون حاصل‌ضرب $\overline{C۴۵}$ در ۴ برابر با ۴۵۰ نیست پس $D \neq ۴$ و همچنین $D \neq ۶$ و $D \neq ۸$ است. اما حاصل‌ضرب $\overline{C۲۵}$ در ۲ می‌شود ۲۵۰ پس $C = ۱$ و $D = ۲$ از تفریق $\overline{AA۰} - ۲۵۰ = \overline{F۰}$ نتیجه می‌شود که $A = ۳$ و $F = ۸$. بالاخره از تقسیم ۸۰۰ بر ۱۲۵ نتیجه می‌شود که: $G = ۶$ و $H = ۷$

۷۹/۲۶- ترجمهٔ از فرانسه

دو دسته شعاعهای توافقی $O(a, b, c, d)$ و $O'(a', b', c', d')$ در شعاع a مشترکند. هرگاه دو شعاع b و b' در B، دوشعاع c و c' در C، دوشعاع d و d' در D متقاطع باشند، ثابت‌کنیدکه سه نقطهٔ B و C و D بر یك استقامتند.



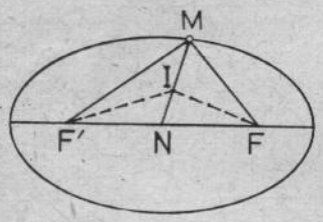
حل- اگر A نقطهٔ تلاقی شعاع a باخط BC باشد و شعاعهای d و d' خط BC را به ترتیب در D' و D'' قطع کنند D' مزدوج توافقی C نسبت به A و B و نیز D'' مزدوج توافقی C نسبت به A و B است پس D' و D'' دریك نقطه برهم منطبقند یعنی D نقطهٔ تلاقی دوشعاع d و d' برخط BC واقع است. هرگاه BC با a موازی باشد. پاره‌خط CD باید بوسیله سه‌شعاع c و b و d وهمچنین بوسیلهٔ سه شعاع c' و b' و d' به دوقسمت برابر تقسیم‌شود. یعنی D' نقطهٔ تلاقی BC با d قرینهٔ C نسبت به B است ونیز D'' نقطهٔ تلاقی BC با d' قرینهٔ C نسبت به B است. پس D' و D'' در D واقع بر BC



بریکدیگر منطبقند.

۷۹/۲۷- ترجمهٔ از فرانسه

هرگاه M نقطه‌ای از بیضی به‌کانونهای F و F' و I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث MFF' و N نقطهٔ تلاقی MI با FF' باشد نسبت $\frac{IN}{IM}$ برابر با چه مقداری است؟



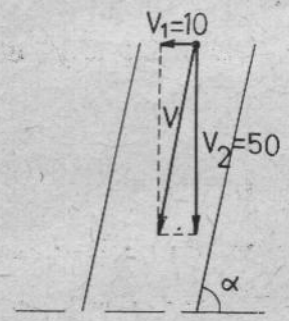
حل- I نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی زاویه‌های مثلث MFF' است. در مثلثهای MFN و MF'N داریم

$$\frac{IN}{IM} = \frac{FN}{FM} \text{ و } \frac{IN}{IM} = \frac{F'N}{F'M}$$

$$\frac{IN}{IM} = \frac{FN}{MF} = \frac{F'N}{MF'} = \frac{FN + NF'}{MF + MF'} = \frac{۲c}{۲a} = \frac{c}{a}$$

۷۹/۲۸- فرستنده: **مجید عرفانیان شیشه** دانشجوی دانشگاه مشهد

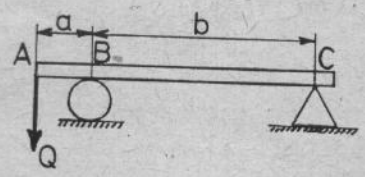
یك لوله روی اتومبیلی نصب شده است. اتومبیل با سرعت ۱۰ متربرثانیه حرکت می‌کند. یك قطرهٔ باران وارد لوله شده وباسرعت ۵۰ متربرثانیه سقوط می‌کند. زاویهٔ محور لوله با افق چقدر باشد تا اینکه قطرهٔ باران ضمن سقوط در داخل لوله به بدنهٔ آن برخورد نکند؟



حل- مطابق با شکل، برقطرهٔ باران دردهانهٔ لوله‌دونیرو واردمی‌شودکه قطره درامتداد برآیند آنها حرکت می‌کند. پس باید برآیند نیروها (سرعتها) موازی با دیوارهٔ لوله باشد یعنی با افق زاویه‌ای بسازد که برابر باشد با زاویه‌ای که محور لوله با افق می‌سازد. اگر این‌زاویه α باشد برابر است با:

$$\alpha = \text{Arc}tg \frac{۵۰}{۱۰} = \text{Arc}tg\ ۵$$

۷۹/۲۹- فرستنده : رسول آژیری دبیر دبیرستانهای گچساران .



میلهٔ AB مطابق بشکل نگهداشته شده ودرنقطهٔ A وزنهٔ Q به‌آن آویزان است . به فرض $b = ۴a$ مقدار وجهت عکس العمل نقاط B و C را تعیین کنید.

حل- گشتاور نیروها نسبت به‌نقطهٔ C می‌شود با :

$$Q(a+b) - R_B \times b = ۰ \Longrightarrow R_B = \frac{۵}{۴}Q$$

که به طرف بالاست. گشتاور نیروها نسبت به‌نقطهٔ B که به طرف پایین است می‌شود:

$$Q.a + R_C.b = ۰ \Longrightarrow R_C = \frac{۱}{۴}Q$$

حل مسائل شیمی

۷۹/۳۰- فرستنده : احمد رضا

جسم A به فرمول $C_۵H_{۱۲}O$ با سدیم فلزی تولید هیدرژن می‌کند. اگراین جسم را ازروی $Al_۲O_۳$ عبوردهیم به اولفین تبدیل می‌شودکه از اکسیداسیون آن دو محصول نتیجه می‌شودکه یکی ازآنها خنثی و دیگری اسیدی است بااکی‌والان گرم ۱ ± ۶۰. فرمول ساختمانی A را پیداکنید .

حل- الف: چون فرمول A بافرمول کلی الکلها و اترهای اشباع شده مطابقت می‌کند پس A یا الکل یا اتراست اما چون جسم A با سدیم فلزی هیدرژن تولید می‌کند پس الکل است وفرمول نیم گستردهٔ آن به‌صورت $C_۵H_{۱۱}OH$ است

ب- هنگام آب گیری ازالکلها عامل الکلی از روی یك کربن وهیدرژن ازروی کربن مجاوری که هیدرژن کمتر دارد برداشته شده وتولید مولکول آب می‌کندکه از این عمل الفین (هیدروکربورهای اتیلن) تولید می‌کند.

ج- از اکسیداسیون الفینها اگر ساختمان قرینه نداشته باشند هنگامی استن تولید می‌شودکه دریك سر مولکول دوبنیان $CH_۳$ متصل به‌کربنی که دارای اتصال دوگانه است باشد .

د- فرمول اسید را تعیین می‌کنیم. چون اسید یك ظرفیتی است پس اکی والان گرم آن با جرم ملکولی یکسان است . فرمول کلی اسیدهای یك ظرفیتی اشباع شده:

$$C_nH_{۲n}O_۲ = ۶۰ \pm ۱$$

$$۱۴n + ۳۲ = ۶۰ \pm ۱ \Longrightarrow n = ۲$$

پس: اسید استیك $CH_۳ - COOH$

باتوجه به‌مطالب گفته‌شده. فرمول الکل:

$$\begin{array}{l} CH_۳ - CH - CHOH - CH_۳ \\ \quad\quad\;\; | \\ \quad\quad CH_۳ \end{array}$$

۳ متیل‌بوتان ۲

واکنشهای گفته شده:

$$\begin{matrix} CH_۳ \\ CH_۳ \end{matrix}\!\!>CH - CHOH - CH_۳ \xrightarrow[-H_۲O]{Al_۲O_۳}$$

$$\begin{matrix} CH_۳ \\ CH_۳ \end{matrix}\!\!>C = CH - CH_۳ + H_۲O$$

۲ - متیل‌بوتن ۲

$$\begin{matrix} CH_۳ \\ CH_۳ \end{matrix}\!\!>C = CH - CH_۳ + ۳[O] \rightarrow$$

$$\begin{matrix} CH_۳ \\ CH_۳ \end{matrix}\!\!>C = O + CH_۳ - COOH$$

اسیداستیك ، استن

۷۹/۳۱- فرستنده : احمدرضا

ترکیب A به فرمول $C_۴H_۸O$ در مجاورت کاتالیز مناسب با هیدرژن اشباع می‌شود و به جسم B به فرمول $C_۴H_{۱۰}O$ تبدیل می‌گردد . جسم A محلول پرمنگنات اسیدی را بیرنگ می‌کند و ترکیب B هنگامی که با HBr ترکیب شود جسم C را تولید می‌کند . جسم C می‌تواند معرف گرنیارد تولیدکند وهنگامی‌که این جسم(معرف گرنیارد) را باآب ترکیب کنیم گازی تولید می‌کندکه ۱/۵ گرم از آن ۱/۱۲ لیتر حجم دارد . ساختمان A را مشخص کنید .

حل- در دوجسم A وB به تعداد مساوی اکسیژن می‌باشد وجسم B بافرمول کلی الکلها واترها مطابقت دارد . باتوجه به‌صورت مسئله معلوم می شودکه جسم A اتری است غیر اشباعی بنابراین فرمول جسم A رابه‌ترتیب زیر مشخص می‌کنیم

$$(B): R - O - R' + HBr \xrightarrow{\triangle} R - OH + R'Br$$

$$R'Br + Mg \rightarrow R'MgBr$$ ، معرف گرینیارد

$$R'MgBr + H_۲O \rightarrow R'H + Mg\begin{matrix} Br \\ OH \end{matrix}$$

$$M_{R'H} = \frac{۲۲/۴}{۱/۱۲} \times ۱/۵ = ۳۰$$

$R' = C_2H_5 -$ بنیان اتیل

$B : C_2H_5 - O - C_2H_5$ دی اتیل اتراکسید

$A : C_2H_5 - O - CH = CH_2$ ونیل اتیل اتراکسید

پاسخ تستهای ریاضی

۷۹/۳۲ـ (ب) به‌فرض آنکه داخل جعبه‌های شکلات کارتهایی باشدکه درمقابل تسلیم هر ۱۰ کارت یك جعبهٔ شکلات تحویل شود، اگر a بهای شکلات داخل جعبه و x ارزش یك کارت باشد داریم:

$$10x = a + x \Longrightarrow x = \frac{1}{9}a$$

بهای کل جعبه برابر است با $A = a + x$ و $x = 0/1A$ است.

۷۹/۳۳ـ (ج) حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی یك واحد کمتر از عددی است که مربع کامل است:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= n(n+3) \times (n+1)(n+2) = (n^2+3n)[(n^2+3n)+$$

$$+2] = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) = (n^2+3n+1)^2 - 1$$

۷۹/۳۴ـ (ب) به‌فرض آنکه a و b مثبت باشند داریم:

$$S = \frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}} = \frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{(a-b)^2}}$$

$$S = \frac{|a| - |b|}{|a-b|}$$

هرگاه $a > b > 0$ باشد داریم:

$$|a| = a \text{ و } |b| = b \text{ و } |a-b| = a-b$$

$$S = \frac{a-b}{a-b} = 1$$

درحالت $0 < a < b$ داریم:

$$S = \frac{a-b}{-(a-b)} = -1$$

۷۹/۳۵ـ (الف) معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(3^{2x} + 3^{-2x} - 2) + 3(3^{-x} - 3^{x}) - 4 = 0$$

بافرض $3^{x} - 3^{-x} = Z$ داریم:

$$Z^2 + 3Z - 4 = 0 \text{ یا } (Z+4)(Z-1) = 0$$

$$Z = -4 \text{ یا } 1$$

بافرض $3^{x} = A$ داریم $3^{-x} = \frac{1}{A}$ و:

$$-A + \frac{1}{A} = -4 \text{ یا } A^2 - 4A - 1 = 0$$

$$A^2 - 4A + 4 - 5 = 0 \text{ یا } (A-2)^2 = 5$$

$$A = 2 \pm \sqrt{5}$$

3^{x} مثبت است پس:

$$3^{x} = 2 + \sqrt{5} \Longrightarrow x = \log_3(2+\sqrt{5})$$

$$-A + \frac{1}{A} = 1 \text{ یا } A^2 + A - 1 = 0$$

$$A^2 + A + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = 0 \text{ یا } (A + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

$$A = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$3^{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow x = \log_3 \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

۷۹/۳۶ـ (د) ازرابطهٔ

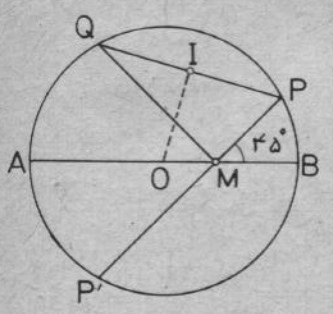
$$x = \sqrt[3]{5a+2b} \times \sqrt[7]{\frac{b}{(b+1)^3}}$$

نتیجه خواهدشدکه:

$$N = \log x =$$

$$\frac{1}{3}\log(5a+2b) + \frac{1}{7}[\log b - 3\log(b+1)] + 1$$

۷۹/۳۷ـ (د) در دایرهٔ به‌قطر AB و به‌مرکز O نقطهٔ M برAB حرکت می‌کند و PP′ ازM گذشته با AB زاویهٔ ۴۵° می‌سازد وMQ بر PP′ عموداست. در این‌صورت داریم:



$$\frac{\widehat{PB} + \widehat{P'A}}{2} = 45^\circ \Longrightarrow \widehat{PB} + \widehat{P'A} = 90^\circ$$

چون MA نیمساز زاویهٔ QMP′ است پس $\widehat{P'A} = \widehat{AQ}$ و

$$\widehat{QA} + \widehat{PB} = 90^\circ \Longrightarrow \widehat{PQ} = 90^\circ$$

چون اندازهٔ کمان PQ ثابت است پس طول وتر PQ ثابت است وفاصلهٔ آن ازمرکز دایره نیز ثابت است. یعنی مکان I وسطPQ دایره‌ای است به‌مرکز O.

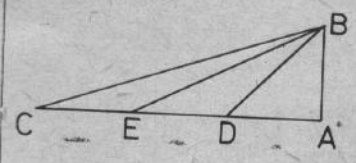
۷۹/۳۸ـ (ج) هرگاه مثلث ABC درزاویهٔ A قائمه و $AC = 3AB$ ونقاط D و E برAC چنان انتخاب‌شوند که $AD = DE = CE$ باشد، بافرض $AB = a$ داریم:

$$AD = a \text{ و } BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$AE = 2a \text{ و } BE = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

$$AC = 3a \text{ و } BC = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$$

$$\frac{BC}{BE}=\frac{a\sqrt{10}}{a\sqrt{5}}=\sqrt{2}$$



$$\frac{CD}{BD}=\frac{2a}{a\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{DB}{ED}=\frac{a\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$\frac{BC}{BE}=\frac{CD}{BD}=\frac{BD}{DE}=\sqrt{2}$$

دومثلث BDE وBDC متشابهند ونسبت تشابه آنها $\sqrt{2}$ است.

۷۹/۳۹- (د) می‌توانیم محورهای مختصات راچنان انتخاب کنیم که اگر ABC مثلث متساوی‌الاضلاع و مختصات رأسهای B وC عددهای گویا باشند داشته باشیم $B(a\ و\ 0)$ و $C(a\ و\ 0)$ دراین‌صورت خواهیم‌داشت $A(0\ و\ \frac{a\sqrt{3}}{2})$ هرگاه a عدد گویا باشد $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ عدد گنگ است. بنابراین هرگاه مختصات دورأس ازیك مثلث متساوی‌الاضلاع عددهای گویا باشند اقلاً یکی از مختصات رأس سوم عددی گنگ می‌باشد.

۷۹/۴۰- (الف) اگر d فاصلهٔ نقطهٔ $A(1\ و\ -3)$ ازخط متغیر △ به‌معادلهٔ $(m+1)x-2my+4=0$ باشد، این معادله‌ها به‌صورت $(x-2y)m+x+4=0$ نوشته شده ونتیجه می‌شود که خط △ همواره‌ازنقطهٔ ثابت $P(-2\ و\ -1)$ می‌گذرد. به‌عبارت‌دیگر خط △ حول‌نقطهٔ ثابت P می‌چرخد. اگر $AH=d$ عمودی‌باشدکه ازA بر △ رسم‌می‌شود در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHP داریم:

$$0<d=AH<AP$$

d دارای حداقلی برابر باصفرودارای‌حداکثری برابر با طول AP است.

۷۹/۴۱- (ب) به‌فرض $A(4\ و\ 4)$ و$B(-2\ و\ -4)$ هرگاه △ خطی باشدکه‌درB باAB زاویهٔ 30° بسازد و AH عمودی‌باشدکه ازA بر △ عمودباشد طول AH نصف طول AB است وطول AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(4+2)^2+(4+4)^2}=10$$

پس $AH=5$ یعنی فاصلهٔ خط △ ازمرکز دایره بیش‌ازشعاع دایره است وبادایره متخارج است.

۷۹/۴۲- (ج) طرف اول تساوی:

$$\cot g\,x+\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{1}{\sin x}$$

به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{|\sin x|}{|1+\cos x|}$$

عبارت $1+\cos x$ همواره مثبت است وهرگاه انتهای کمان x در بخش‌اول یا بخش دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد مقدار $\sin x$ مثبت است یعنی $|\sin x|=\sin x$ وحاصل‌عبارت بالا می‌شود:

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\cos^2 x+\cos x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=$$

$$=\frac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{1}{\sin x}$$

۷۹/۴۳- (الف) عبارت:

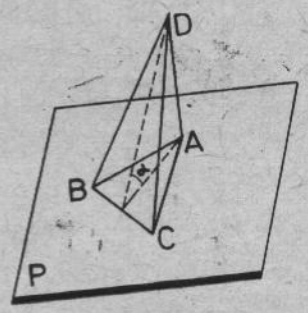
$$S=6\sin^2 x\cos^2 x+a(\sin^6 x+\cos^6 x)$$

را به‌ترتیب زیر عمل‌می‌کنیم:

$$S=6\sin^2 x\cos^2 x+a[(\sin^2 x+\cos^2 x)\times(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)]=6\sin^2 x\cos^2 x+a[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x]=a+3(a-2)\sin^2 x\cos^2 x$$

برای آنکه‌این‌عبارت‌به‌x بستگی نداشته‌باشدباید $a=2$ باشد.

۷۹/۴۴- (ب)



هرگاه ABC مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a واقع درصفحهٔ P و DA برصفحهٔ P عمودبوده ومساحت‌مثلث ABC برابربا $\frac{3a^2\sqrt{10}}{10}$ باشدچون مساحت مثلث ABC برابر $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است‌پس‌اگر α زاویهٔ مسطحهٔ دو صفحهٔ DBC وABC باشد داریم:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{10}}{10}\cos\alpha\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{30}}{12}$$

$$\frac{\sqrt{30}}{12}<\frac{1}{2}\Longrightarrow\alpha>60^\circ$$

۷۹/۴۵- (الف) هرگاه‌ابعادقاعدهٔ مکعب مستطیل a و b ومساحت‌سطح جانبی آن $2(a+b)\sqrt{3a^2+3b^2}$ باشد ارتفاع این‌مکعب مستطیل می‌شود: $\sqrt{3a^2+3b^2}$ و در نتیجه طول قطر مکعب‌مستطیل برابراست‌با:

$$d=\sqrt{a^2+b^2+3a^2+3b^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$$

طول قطرقاعدهٔ مکعب‌مستطیل‌برابر است با $\delta=\sqrt{a^2+b^2}$ واگرα زاویهٔ‌میل قطرمکعب‌مستطیل نسبت به‌صفحهٔ قاعده‌باشدداریم:

$$d\cos\alpha=\delta\ \text{یا}\ 2\sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha=2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\Longrightarrow\alpha=60^\circ$$

۷۹/۴۶- (ب) تابع‌مفروض می‌شود:

$$y=\frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^2-4x}}=\frac{2x+1}{\sqrt{(x-1)^2}}=$$

$$=\frac{2x+1}{|x-1|}$$

دنباله درصفحهٔ ۱۷۳

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۸۰/۱ - ترجمهٔ **فتح‌الله‌زرگری**

حاصل عبارت زیررا به ساده‌ترین صورت بدست‌آورید:

$$S = \frac{\sqrt{60a^2b^3}}{b} + 2a\sqrt{\frac{5b}{3a}}$$

۸۰/۲- ترجمهٔ **فتح‌الله‌زرگری**

به فرض $a > b > 0$ هرگاه داشته باشیم:

$$x = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$$

حاصل عبارت زیررا به ساده‌ترین صورت بدست‌آورید:

$$P = \frac{1 - ax}{1 + ax}\sqrt{\frac{1 + bx}{1 - bx}}$$

۸۰/۳ - ترجمه از فرانسه

پاره خط AB ونقطهٔ C واقع برآن مفروض است بقسمی که C از O وسط AB متمایزاست. به‌قطرهای AB وAC و BC و دریك طرف AB سه نیمدایره رسم می‌کنیم و در نقطهٔ C عمودی بر AB اخراج می‌کنیم که نیمدایرهٔ به قطر AB را در P قطع می‌کند. خطوط PA و PB را نیز رسم می‌کنیم که نیمدایره‌های به‌قطرهای AC و BC را در A'و B' تلاقی می‌کنند. ثابت کنید که $A'B'$مماس مشترك نیمدایره‌های به‌قطرهای AC و BC است وخطی که در P برنیمدایرهٔ به قطر AB مماس باشد با $A'B'$ موازی‌است.

کلاس چهارم ریاضی

۸۰/۴ - فرستنده: **محمود تویسرکانی** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

ثابت‌کنید که به‌ازاء مقادیر صحیح و مثبت k عبارت $x^{3k} + x^{32} + x^{28}$ برعبارت $x^2 + x + 1$ بخش‌پذیر است.

۸۰/۵ - فرستنده: **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تبریز

ثابت‌کنید به‌ازاء مقادیرصحیح $n > 2$ داریم:

$$(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)^2 > n^n$$

۸۰/۶ - ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

به‌فرض $a \neq b$ و $ab > 0$ در ازاء:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

حاصل عبارت زیررا به ساده‌ترین صورت بدست‌آورید:

$$S = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

۸۰/۷ - ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

ازمعادلهٔ زیر مقدار x را بدست‌آورید:

$$\sqrt[x+1]{\sqrt[3]{23x-1}} - \sqrt[3x-7]{320/6x - 1/8} = 0$$

۸۰/۸ -ازعبدالوهاب فخریاسری

روی دایرهٔ مفروض دو نقطهٔ ثابت A و B ونقطهٔ‌متغیر M را در نظر می‌گیریم. خطوط MA و MB رابه‌ترتیب تا نقاط P و Q امتداد می‌دهیم بقسمی که A وسط MP و B وسط MQ باشد. هرگاه G نقطهٔ تلاقی دو خط AQ و

BP باشد. مکان نقطهٔ G را تعیین کنید.

۸۰/۹ - ترجمه از مجلهٔ تربیت ریاضی

پاره‌خط ثابت AB را که O وسط آن است درنظر می‌گیریم. در A و B عمودهای Ax و By را دریك طرف AB عمود بر AB رسم می‌کنیم. زاویهٔ قائمهٔ UOV رادرنظر می‌گیریم که رأس O ازآن ثابت و ضلعهای OU و OV حول نقطهٔ O دوران می‌کنند بقسمی که OU با Ax در D و OV با By در E متلاقی است. ثابت کنید که خط متغیر DE همواره بر دایرهٔ به قطر AB مماس است.

کلاس پنجم طبیعی

۸۰/۱۰ - نقطهٔ $P(2 \text{ و } -1)$ مرکز متوازی‌الاضلاع ABCD است که رأس A ازآن به‌طول ۵ برمحور $x'x$ قرار دارد وزاویهٔ قطر BD ازآن با محور $x'x$ برابر 45° بوده و رأس D برمحور $y'y$ واقع است.

۸۰/۱۱ - فرستنده: **جواد فیض**

ثابت کنید برای آنکه دوخط به معادله‌های:

$$lx + my = n \quad \text{و} \quad bx\cos\theta + ay\sin\theta = ab$$

برهم منطبق باشند بایدداشته باشیم:

$$a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$$

کلاس پنجم ریاضی

۸۰/۱۲ - از **علیرضا علیپور** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

نقطهٔ $A(1 \text{ و } 3)$ یك رأس از مربع ثابت ABCD است که ω مرکز آن برخط متغیر $\triangle$ به معادلهٔ

$$(m+1)x - (m-1)y = 4$$

قراردارد. مختصات رأسهای دیگر مربع را پیداکنید.

۸۰/۱۳ - هرگاه a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند به‌فرض $x \neq b$ اولا نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y = \frac{a\sqrt{(x-b)^2}}{x-b}$$

ثانیاً خط متغیر $\triangle$ را درنظر می‌گیریم که از مبدأ مختصات می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای آن m است. از روی شکل درازاء مقادیر مختلف m در تعداد نقاط تلاقی $\triangle$ با نمایش هندسی تابع بحث کنید.

۸۰/۱۴ - **ازجواد فیض**

هرگاه $\alpha \pm \beta \neq 2k\pi$ و α و β در معادلهٔ

$$a\cos^2 x + 2b\cos x + c = 0$$

صدق کنند به‌فرض $\cos\alpha + 4\cos\beta = 2$ اولاثابت کنید که:

$$4(a+2b)^2 + a(9c+4b) = 0$$

ثانیاً مقادیر $tg\alpha$ و $tg\beta$ را بدست آورید.

۸۰/۱۵ - ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

هرگاه درمثلث ABC داشته باشیم $tgA\,tgB < 1$، ثابت کنید که مثلث منفرج‌الزاویه است.

۸۰/۱۶ - در صفحهٔ P مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC را درنظر می‌گیریم که طول وتر BC ازآن 2a باشد. صفحهٔ Q را بر نقطهٔ A بگذرانید که با خط BC موازی و برصفحهٔ P عمود باشد و در این صفحه نقطهٔ M را چنان بیابید که از صفحهٔ P به‌فاصلهٔ k باشد واگر عمودهای MA' و MB' را به‌ترتیب بر BC و AC رسم کنیم: $MA' = MB'/2$ باشد. درازاء مقادیر k بحث کنید.

کلاس ششم طبیعی

۸۰/۱۷ - اولا ثابت کنید که مماس بردایرهٔ به‌معادلهٔ:

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

در مبدأ مختصات به‌معادلهٔ $ax + by = 0$ است.

ثانیاً معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که ازنقطهٔ $A(3 \text{ و } 4)$ می‌گذرد و درمبدأ مختصات برخط به معادلهٔ $3x + 2y = 0$ مماس است.

۸۰/۱۸ - به‌ازاء چه مقدار از x متعلق به فاصلهٔ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ تابع:

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{10} + 3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{20} - 3x\right)$$

کمترین مقدار را دارد؟

کلاس ششم ریاضی

۸۰/۱۹ - منحنی نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y = \frac{x^2+1}{|x|}$$

۸۰/۲۰ - اولا منحنی C را رسم کنید که مختصات نقاط آن در رابطهٔ زیر صدق کنند :

$$(y-x^3)(y-\sqrt{x})=0$$

ثانیاً - از روی شکل در تعداد نقاط تلاقی منحنی C با خط △ به‌معادلهٔ $y=x+h$ برحسب مقادیر مختلف h بحث کنید .

۸۰/۲۱ - ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

اگر در مثلث ABC داشته باشیم:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=q$$

به‌ازاء چه‌مقادیر q ، مثلث ABC قائم‌الزاویه، منفرج‌الزاویه یا حادالزوایا است ؟

۸۰/۲۲ - ترجمهٔ : زرگری

اولا مقادیر a و b را تعیین کنید برای آنکه دو دستگاه معادلات زیر هم‌ارز یکدیگر باشند:

$$\text{I}\begin{cases}4\sin x\sin y=3\\ tg\,x\,tg\,y=3\end{cases}\quad \text{و}\quad \text{II}\begin{cases}\cos(x-y)=a\\ \cos(x+y)=b\end{cases}$$

ثانیاً جوابهای دستگاه I را بدست آورید:

۸۰/۲۳ - از جهانشاه کریمی بیرگانی دانشجو

هرگاه x و y عددهای سه‌رقمی باشند مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم x و y را از رابطهٔ زیر بدست آورید .

$$\frac{150}{x}=\left(\frac{40+y}{880}\right)^2$$

۸۰/۲۴ - فرستنده : جواد فیض

ثابت کنید که هرگاه x و y عددهای صحیح باشند و عبارت $2x+3y$ مضرب ۱۷ باشد ، عبارت $9x+5y$ نیز مضرب ۱۷ است.

۸۰/۲۵ - ترجمهٔ ازفرانسه

دوخط ثابت D و D′ در O متقاطعند و نقطهٔ ثابت A درصفحهٔ آنها مفروض است. خط متغیر △ بر A می‌گذرد و D و D′ را به‌ترتیب در B و B′ قطع می‌کند. خطی که از B به I وسط OA وصل شود خط D′ را در P تلاقی می‌کند و خطی که از P موازی با OA رسم شود خط △ را در M قطع می‌کند .

اولا مکان نقطهٔ M را تعیین کنید.

ثانیاً اگر Q نقطهٔ تلاقی MI با خط D′ باشد نوع چهارضلعی BMPQ را معلوم کنید .

۸۰/۲۶ - ترجمهٔ ازفرانسه

سه نقطهٔ ثابت A و B و C به همین ترتیب واقع بر خط △ مفروضند. دایرهٔ متغیر Γ را درنظر می‌گیریم که در C بر △ مماس باشد. از A و B مماسهای AT و BT′ ، غیراز △ ، را بردایرهٔ Γ رسم می‌کنیم. ثابت کنید که عمود منصف TT′ بر بیضی ثابتی که آن‌را مشخص خواهید کرد مماس است .

یك مسئلهٔ شیمی

انتخاب توسط : باقر مظفرزاده

۸۰/۲۷ - فرستنده : احمدرضا

۰/۰۱۵۲ گرم ازیك ترکیب x رادر ۰/۵ گرم از کامفر حل می‌کنیم . نقطهٔ ذوب کامفر ۸°C پایین می‌آید . تجزیه نشان می‌دهد که x شامل ۷۰/۶٪ کربن و ۱۳/۷٪ هیدرژن است. همچنین x با کلر و راستیل ترکیب شده و با سدیم فلزی نیز تولید هیدرژن می‌کند. هنگامی که x را از روی Cl_2O_2 درحرارت ۳۵۰°C بگذرانیم تولید جسم y می‌کند و اگر y را با O_2 (ازن) ترکیب کنیم وجسم حاصل را هیدرولیز نمائیم دوجسم تولید می‌کند که یکی خنثی و دیگری اسیدی است باجرم ملکولی ۱±۷۴. فرمول x را پیدا کنید.

تستهای ریاضی

کلاس چهارم ریاضی

۸۰/۲۸ - حاصل عبارت $2^{|x-1|+x}$ وقتی برابر با ۲ است که :

الف - فقط $x=1$ باشد.

ب - داشته باشیم $x<1$

ج - داشته باشیم $x>1$

د - x هرچه باشد.

۸۰/۲۹ - جوابهای نامعادلهٔ $|x+3|<2$ عبارتنداز:

الف - $x<-1$ ب - $x>-5$

ج - $x>-1$ یا $x<-5$

د - $-5<x<-1$

۸۰/۳۰ - به فرض $a\geqslant 0$ و $b\geqslant 0$ نامساوی یا تساوی:

$$a^5+b^5\geqslant a^4b+ab^4$$

الف - همواره برقرار است.

ب - هیچگاه برقرار نیست.

ج - وقتی برقرار است که $a\geqslant b$ باشد.

د - وقتی برقرار است که $a<b$ باشد.

۸۰/۳۱ - نامساوی $\log_2\log_3\frac{3x}{x-2}>0$ وقتی برقرار است که:

الف - $x>2$ ب - $x<2$

ج - x هرچه باشد.

د - نامساوی هیچگاه برقرار نیست.

۸۰/۳۲ - معادلهٔ $\log_x 3\log_{3x}3=\frac{1}{6}$

الف - جواب ندارد.

ب - تنها یك جواب $x=9$ دارد.

ج - دوجواب دارد: $x=9$ و $x=27$

د - دوجواب دارد: $x=9$ و $x=\frac{1}{27}$

۸۰/۳۳ - درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که زاویهٔ A قائمه و $BC=2AB$ است، نیمسازداخلی زاویهٔ B وعمودمنصف ضلع AC یکدیگر را در D قطع می‌کنند. اندازهٔ زاویهٔ ADC:

الف - بیش از ۱۲۰ درجه است.

ب - کمتر از ۱۲۰ درجه‌است.

ج - برابر با ۱۲۰ درجه‌است.

د - قابل محاسبه نیست.

۸۰/۳۴ - روی پاره‌خط AB نقطهٔ M را بقسمی انتخاب می‌کنیم که $BM=2AM$ باشد ودریك طرف AB دومثلث قائم‌الزاویه‌ومتساوی‌الساقین AMC و BMD رامی‌سازیم که به‌ترتیب در زاویه‌های A و B قائمه‌اند. دو خط AD و BC در I و دو خط AB و CD در P متلاقی می‌شوند و PI خط BD را در E قطع می‌کند:

الف - $BE=ED$ ب - $BE>ED$

ج - $BE<ED$ د - $BE\neq ED$

کلاس پنجم ریاضی

۸۰/۳۵ - درصفحهٔ محورهای مختصات ناحیه‌ای که مختصات نقاط آن در نامعادلهٔ $x^2-y^2>0$ صدق می‌کنند؛

الف - شامل نیم‌محورهای Ox و Oy است.

ب - فقط نیم‌محور Ox را دربردارد.

ج - تمام محور $y'y$ را دربردارد.

د - تمام محور $x'x$ را دربردارد.

۸۰/۳۶ - تابع $y=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}$ وقتی معین است که:

الف - $x>1$ باشد.

ب - $x>1$ یا $x<-2$ باشد.

ج - $-2<x<1$ باشد.

د - $x\geqslant -2$ باشد.

۸۰/۳۷ - خط $\triangle$ به معادلهٔ $3x-4y+5=0$ و نقطهٔ P به طول x واقع برنیمساز ربع اول و سوم محورهای مختصات را درنظر می‌گیریم. اگر d فاصلهٔ نقطهٔ P از خط $\triangle$ باشد، این فاصله تابعی است از x مثلا $d=f(x)$. خط D به معادلهٔ $y=1$ نمایش هندسی تابع $d=f(x)$ را:

الف - قطع نمی‌کند.

ب - فقط دریك نقطه قطع می‌کند.

ج - دریك نقطهٔ غیرعادی قطع می‌کند.

د - در دو نقطه قطع می‌کند.

۸۰/۳۸ - هرگاه I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی‌مثلث ABC بوده و $\sin A=\sin BIC$ باشد؛

الف - زاویهٔ A منفرجه‌است.

ب - زاویهٔ A حاده است.

ج - زاویهٔ A قائمه است.

د - چنین رابطه‌ای ممکن نیست.

۸۰/۳۹ - هرگاه داشته‌باشیم:

$$\cos x=\frac{a^2+b^2}{2ab}\ ،\ a\neq 0 \text{ و } b\neq 0$$

دراین صورت مقدار تابع $y=\cos 5x-\cos 3x$ درازاء مقادیر مختلف a و b:

الف - برابرصفراست.

ب - برابر مقدار ثابت مثبت است.

ج - برابر مقدار ثابت منفی است .

د - متغیراست و تغییر علامت می‌دهد .

۸۰/۴۰ - در چهار وجهی منتظم ABCD به طول یال a هرگاه I وسط AB و J وسط CD باشد طول IJ ،

الف - قابل محاسبه نیست .

ب - برابر $a\sqrt{2}$است.

ج - برابر $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ است.

د - برابر $\frac{a}{2}$ است.

۸۰/۴۱ - درچهار وجهی منتظم ABCD هرگاه I وسط AB و J وسط CD بوده و صفحهٔ عمود بر IJ یالهای AC و AD و BC و BD را به‌ترتیب در نقاط E و F و G و H قطع کند ، چهارضلعی EFGH ؛

الف - متوازی‌الاضلاعی است‌که هیچیك اززاویه‌هایش قائمه نیست .

ب - لوزی است‌که مربع نیست .

ج - محاطی غیرمشخص است.

د - مربع مستطیل است.

کلاس ششم ریاضی

۸۰/۴۲ - هرگاه خط به‌معادلهٔ $x = 4y$ مجانب‌منحنی به‌معادلهٔ

$$2ax^2y^2 - ax^2y + x^3 - a^2 = 0$$

باشد، مقدار a برابر است با :

الف - -8 ب - $\frac{1}{8}$

ج - 8 د - ± 8

۸۰/۴۳ - منحنی به معادلهٔ

$$y^3 + x^2y - ax^2 = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

الف - دومجانب افقی دارد .

ب - یك مجانب افقی دارد .

ج - مجانب افقی ندارد.

د - مجانب افقی‌آن همان محور $x'x$ است.

۸۰/۴۴ - منحنی نمایش هندسی تابع

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x}$$

الف - بامحور $y'y$ مجانب است.

ب - برمحور $y'y$ در مبدأ مختصات مماس است .

ج - با محور $x'x$ مجانب است .

د - برمحور $x'x$ درمبدأ مختصات مماس‌است .

۸۰/۴۵ - دستگاه دو معادلهٔ

$$\begin{cases} \cos y(\sin x + \cos x) = a \\ \cot g\, y \cos x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

الف - در ازاء همهٔ مقادیر a دارای جواب است.

ب - هیچگاه ممکن نیست .

ج - وقتی جواب داردکه $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$

د - وقتی جواب داردکه : $-\sqrt[4]{2} < a < \sqrt[4]{2}$

۸۰/۴۶ - هرگاه x و y در فاصلهٔ $(0 \text{ و } 2\pi)$ تغییر کنند دستگاه :

$$\begin{cases} tg^2 x = \sin^2 x + \cos^2 y \\ tg^2 y = \sin^2 y + \cos^2 x \end{cases}$$

الف - دو دسته جواب دارد.

ب - چهار دسته جواب دارد.

ج - جواب ندارد.

د - بیش‌ازچهار دسته جواب دارد.

۸۰/۴۷ - هریك ازعددهای A و B سه رقمی‌ومجذور کامل است وتفاضل $A - B$ عدد سه رقمی $\overline{aaa}$ است .

الف - چنین چیزی ممکن نیست.

ب - a می‌تواند برابر باهریك از رقمهای از یك تا ۹ باشد .

ج - a برابر با ۲ نیست .

د - a غیراز ۲ و صفرمی‌تواند برابرباهریك ازرقمهای دیگرباشد.

۸۰/۴۸ - هرگاه مجموع دوکسر با حاصل‌ضرب آنها برابر باشد ؛

الف - هریك از دوکسر بزرگتر از واحدند.

ب - هریك ازدوکسرکوچکتر از واحدند .

ج - یکی ازآنها بزرگتر ازواحد و دیگری‌کوچکتر از واحد است .

د - دوکسر باچنین خاصیت وجود ندارد .

۸۰/۴۹ - در ذوزنقهٔ ABCD دو رأس A و Bثابت و رأسهای C و D متغیرند بقسمی‌که طول‌ساق AD برابربا مقدارثابت m وطول قاعدهٔ‌کوچکتر CD برابر بامقدار ثابت b است. مکان نقطهٔ P محل تلاقی‌دوقطر ذوزنقه ؛

الف ـ خطی است موازی با AB.

ب ـ خطی است که از وسط AB می‌گذرد .

ج ـ یك دایره است .

د ـ یك بیضی است .

۸۰/۵۰ ـ درمثلث ABC دو رأس B و C ثابت و رأس A متغیراست . هر گاه خطی که مرکز دایرهٔ محیطی را به‌مرکز ثقل مثلث وصل می‌کند با ضلع BC موازی باشد ، مکان A :

الف ـ خطی است‌موازی با BC.

ب ـ دایره است.

ج ـ بیضی است.

د ـ هذلولی است.

حل مسائل (دنباله از صحفهٔ ۱۶۷)

وقتی $x<1$ باشد $y=\frac{2x+1}{-x+1}$ ومجانب افقی آن $y=-2$ است. وقتی $x>1$ باشد داریم $y=\frac{2x+1}{x-1}$ ومجانب‌افقی‌آن $y=2$ است. خط $y=1$ درهرحال مجانب قائم تابع است . پس‌تابع مفروض دومجانب افقی ویك‌مجانب قائم دارد .

۷۹/۴۷ـ (د) هر گاه $f(x)$ تابع فرد باشد :

$f(-x)=-f(x)$ است وتابع:

$$y+|y=f(x)+|f(x)|$$

درازاء مقادیر منفی از x و y چنین‌می‌شود:

$$y-y=f(x)-f(x) \quad \text{یا} \quad 0\times y=0\times f(x)$$

مختصات تمام نقاط بخش سوم محورهای مختصات دراین‌رابطه صدق‌می‌کند، یعنی تمام این‌بخش‌جزء نمایش‌هندسی تابع‌است.

۷۹/۴۸ـ (الف) معادلهٔ مثلثاتی

$$\cos^2 x(1-3\sqrt{3}\,tg^3 x)=0$$

به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\cos^3 x-3\sqrt{3}\,tg^3 x}{\cos x}=0$$

پس $\cos x\neq 0$ وجواب معادله می‌شود $tg x=\frac{\sqrt{3}}{9}$ که درفاصلهٔ صفر و π فقط یك‌کمان نظیرآن است.

۷۹/۴۹ـ (د) نامساوی $\frac{ctg x-\cos x}{\sin x-tg x}>a^2$ هیچگاه ممکن نیست زیرا کسر طرف اول آن به صورت $-cotg^2 x\times\frac{1-\sin x}{1-\cos x}$ در می‌آید که درازاء جمیع مقادیر x منفی است و a^2 مثبت یاصفراست و همواره بزرگتر ازهرمقدار منفی است.

۷۹/۵۰ـ (الف) هر گاه عددی درپایهٔ عددنویسی $2n$ به‌صورت $N=\overline{(a+n)(a-n+1)}$ نوشته شود داریم:

$$\begin{cases}2n>a-n+1\geqslant 0\\ 2n>a+n\geqslant 0\end{cases}\Longrightarrow n>a\geqslant n-1$$

فقط $a=n-1$ قابل قبول است‌که دارزاء آن‌برای N فقط‌یك‌عدد وجود دارد ومجذور N نیزمنحصر به‌فرداست.

۷۹/۵۱ ـ (ب) به فرض آنکه n عدد صحیح و $A=625+4n$ و $B=625-4n$ باشد داریم:

$$N=A^2-B^2=(A+B)(A-B)=$$
$$=1250\times 8n=10000n$$

عدد N درازاء جمیع مقادیر صحیح n به‌چهار رقم صفر ختم می‌شود.

۷۹/۵۲ ـ (الف) هر گاه دو رأس B و C از مثلث ABC ثابت‌ورأس A ازآن‌متغیر باشد به‌قسمی‌که $AB+AC$ مقدار ثابت باشد، مکان A بیضی است به کانونهای B و C. نیمساز خارجی زاویهٔ A براین بیضی مماس است ومی‌دانیم‌که حاصل‌ضرب فواصل کانونهای بیضی ازهرمماس‌آن مقدار ثابت است.

استدلال در ریاضیات(دنباله ازصفحهٔ ۱۳۸)

درترتیب طبیعی قرار می‌دهیم. چندوجهی دارای سه بعداست وجوه آن دو بعدی است ویالهایش دارای یك بعد و رأسهایش (نقاط) دارای صفربعد هستند. حال می‌توانیم مجدداً معادلات خودمانرا با جایگزاری اعداد در ترتیب صعودی ابعادمربوط بنویسیم . رابطهٔ با ارزش برای چند ضلعیها که به صورت $S-A+1=1$ نوشته می‌شود ، در مقایسهٔ با رابطهٔ‌مربوط به‌چندوجهیها به‌صورت $S-A+F-1=1$ نوشته‌می‌شود. عدد یك‌که دراولین عضو معادلهٔ مربوط به چند ضلعیهانوشته شده ، معرف تنها عنصر۲ بعدی است‌که دارای یك چندضلعی (داخلی) است. عدد یك در اولین عضو معادلهٔ مربوط به‌چند-وجیها معرف تنها عنصر ۳ بعدی است‌که دارای یك‌چندوجهی (داخلی) است. اعداد طرف اول به‌ترتیب مربوط به مقادیر ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ بعدی هستند و دراین ترتیب طبیعی ولی با علامتهای متناوب قرار می‌گیرند. دومین عضو نیز در هردو حالت بهمین صورت‌است ؛ مشابهتی‌کامل بنظر می‌رسد.اولین معادله‌که مربوط به چند ضلعیهاست محققاً صحیح است و این مشابهت افزایندهٔ اعتماد ما به دومی است که همانا مربوط به چندوجهیهاست.

دنباله دارد

مسائل انتخابی از

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

تلث اول، سال تحصیلی ۴۹ - ۵۰ (آذر ۱۳۴۹)

(دنباله از شمارهٔ گذشته)

هندسهٔ رقومی و ترسیمی

دبیرستانهای : آریا - امیرخیزی - زاگروس

دبیر : مهندس محمود خوئی - فرستنده : غلامرضاعالیشاه

الف- هندسهٔ رقومی:

مسئله : واحد سانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز بنامید. (کادر ۲۰ × ۲۵).

۱- نقطهٔ b_8 را به‌فاصلهٔ ۳ زیرمحور اقصر برروی محوراطول کاغذ انتخاب نموده ازاین نقطه خط a_5b_8 را به‌شیب $p=\frac{1}{2}$ به‌قسمی‌مرور دهیدکه نقطهٔ a_5 برروی محور اقصر وسمت‌چپ مرکزکاغذ قرارگیرد.

۲- برخط AB صفحهٔ P را به‌شیب $p=1$ مرور داده و یك‌مقیاس‌شیب‌آن را سمت چپ‌کنارکاغذ رسم‌کرده به‌قسمی که ترقی رقومش ازبالا به‌پائین باشد.

۳- برروی‌قطعه‌خط AB درصفحهٔ P مستطیل ABCD را به‌قسمی بناکنید که رأس c_4 سمت راست ضلع a_5b_8 قرار گیرد، مساحت حقیقی مستطیل را درسمت پائین کاغذ روی صفحهٔ افقی رقوم ۸ نشان دهید.

۴- ازنقطهٔ a_5 خط a_5s_2 را به‌قسمی مروردهید که s_2 روی محوراطول‌کاغذ واقع گردیده وزاویهٔ SAB درفضابرابر ۹۰ درجه‌باشد.

۵- هرم SABC را رسم وآن‌را مرئی‌ومخفی نمائید.

۶- ارتفاع هرم SABC راروی شکل رسم نموده‌وپای ارتفاع و اندازهٔ حقیقی‌آن رانشان دهید.

۷- عمود مشترك خط‌الرأس SB وافقیهٔ رقوم ۵ صفحهٔ P راروی شکل‌رسم‌کنید.

ب - هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱- فاصلهٔ‌نقطهٔ A از خط زمین برابر ۵ و بیك فاصله ازصفحهٔ‌نیمسازاول‌وقائم تصویراست. نقطه را درربع‌اول نشان دهید.

مسئلهٔ ۲- خط‌غیر مشخص DD' مفروض است. آثار آن، راتعیین‌کنید ونقطهٔ aa' را روی‌آن به‌قسمی تعیین‌کنیدکه فاصله‌اش از اثرقائم دوبرابر ارتفاعش باشد.

مسئلهٔ ۳- برروی‌نیمرخ‌مفروض $aba'b'$ نقطه‌ای‌بیابید که به‌فاصلهٔ ۲ زیرنیمساز اول باشد.

دبیرستان ابن‌سینا

دبیر: جعفرزاده - فرستنده : قاسم جبارزاده

۱- روی خط مدرج D نقطه‌ای پیدا کنید که ازدوسر پاره‌خط a_1b_5 به‌یك فاصله باشد.

۲- صفحهٔ P به‌شیب ۱ مفروض‌است. صفحه‌ای‌موازی باصفحهٔ P وبه‌فاصلهٔ $3\sqrt{2}$ ازآن رسم‌کنید.

۳- پاره‌خط a_0d_2 $(ad=6)$ مفروض‌است. اولا شیب واساس وطول حقیقی‌خط AD راحساب‌کنید. ثانیاً برپاره خط a_0d_2 دوصفحهٔ P و Q راطوری مروددهیدکه باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ 45° بسازد. ثالثاً برنقطهٔ d_2 صفحهٔ R راعمودبر a_0d_2

بگذرانید واثر آنرا پیدا کنید. آثار سه صفحهٔ P و Q و R دوبدو یکدیگر را در سه نقطهٔ a_0 و b_0 و c_0 قطع می‌کنند. مثلث $a_0b_0c_0$ را مشخص نمائید.

۴- روی خط نیمرخ $aba'b'$ نقطه‌ای پیدا کنید که از خط مواجه مفروض dd' به فاصلهٔ معلوم l باشد.

۵- از نقطهٔ aa' به بعد ۳ وارتفاع ۲ خطی چنان رسم کنید که باصفحهٔ افقی تصویر زاویهٔ °۳۰ بسازد وبعد اثر افقی اش برابر ۱ باشد.

۶- از نقطهٔ aa' به بعد ۴ وارتفاع ۲ خطی موازی با نیمساز ربع اول طوری رسم کنید که خط مفروض dd' را نیز قطع کند.

۷- از نقطهٔ ee' به بعد یك وارتفاع ۳ خطی رسم کنید که نیمرخ مفروض $aba'b'$ وخط الارض را قطع کند.

دبیرستان البرز

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف - هندسهٔ رقومی:

مسئله : واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محور اقصر واطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها مرکز وکادر کاغذ ۲۰ × ۲۵ می‌باشد.

۱- نقطهٔ b_6 را به فاصلهٔ ۲ سمت راست مرکز کاغذ روی محور اقصر انتخاب نموده خط b_6d_2 را به شیب $p=\frac{1}{2}$ به قسمی رسم کنید که تصویرش برمحور اقصر منطبق بوده و d سمت چپ b قرار گیرد. نقطهٔ c را به فاصلهٔ ۶ بالای مرکز روی محور اطول انتخاب نمائید. رقوم c را به قسمی بدست آورید که مثلث BCD درفضا متساوی الساقین بوده و $\overline{CB}=\overline{CD}$ باشد.

۲- بزرگترین شیب صفحهٔ P از مثلث $b_6c_0d_2$ را در سمت چپ کاغذ رسم کرده وسعت حقیقی مثلث BCD را روی صفحهٔ افقی رقوم ۲ به قسمی نشان دهید که B_1 درسمت بالای کاغذ قرار گیرد.

۳- مثلث قائم الزاویهٔ CBA را به قسمی رسم نمائید که ba بر محور اقصر منطبق بوده و $ba=bc$ وزاویهٔ $CBA=90°$ ورقوم a از b کمتر باشد. رقوم a را با ۰/۱ تقریب عدد صحیح انتخاب نمائید وآنرا تعیین کنید.

۴- منشور مثلث القاعدهٔ ABCDEF را که ABC قاعده وخط CD یال جانبی آن باشد رسم ومرئی ومخفی نمائید.

۵- صفحهٔ R را به قسمی رسم کنید که منشور فوق را در یك مثلث قطع نموده و فاصلهٔ C ازآن پنج برابر فاصلهٔ هریك ازنقاط A و B و F ازآن باشد (F مربوط به یال BF از منشور می‌باشد).

۶- مقطع منشور فوق را باصفحهٔ قائمی که اثرش موازی محور اقصر بوده وبروسط یال جانبی AE می گذرد یافته ووسعت حقیقی آن را با تسطیح درسمت پائین کاغذ نشان دهید.

ب - هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱- فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط زمین ۵ و مجموع فواصل آن ازصفحه افق ونیمساز اول ۳/۶۵. نقطه راکه به نیمساز ربع اول نزدیکتر است نشان دهید.

مسئلهٔ ۲- خط DD' مفروض است. روی آن نقطه‌ای تعیین کنید که فاصله‌اش از نیمساز اول وقائم تصویر برابر باشد.

مسئلهٔ ۳- برروی نیمرخ مفروض $aba'b'$ نقطهٔ cc' را به قسمی تعیین کنید که نسبت فواصل آن ازدو نیمساز $\frac{1}{3}$ باشد وبالای نیمساز اول واقع شود.

دبیرستانهای: انوشیروان دادگر وجعفری اسلامی

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف - هندسهٔ رقومی:

مسئله : واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها مرکز کاغذ وکادر ۲۰ × ۲۵ انتخاب شود.

۱- نقطهٔ o_4 برمرکز کاغذ مفروض است. از این نقطه خط e_8f_0 راکه تصویرش برمحور اطول کاغذ منطبق بوده و e درسمت بالای کاغذ واقعست به قسمی رسم کنید که شیب خط EF برابر $\frac{1}{2}$ گردد. صفحهٔ عمود منصف این خط را رسم نموده و یك مقیاس شیب آن راسمت چپ کنار کاغذ نشان داده وآن را P بنامید.

۲- درصفحهٔ P ازنقطهٔ o_4 خط o_4a_2 را به شیب $p=1$ به نحوی رسم کنید که a سمت چپ o واقع شود.

۳- در صفحهٔ P لوزی ABCD را که O مرکز و A رأس آن بوده و رأس b_1 سمت راست محور قائم کاغذ واقع است رسم کرده ملخص لوزی را نشان دهید. AC قطر لوزی می‌باشد. مساحت حقیقی لوزی رادرسمت پائین کاغذ روی صفحهٔ افقی رقوم ۸ نشان دهید.

۴- تصاویر دوهرم EABCD و FABCD را رسم کرده وهشت وجهی حاصل را مشخص کنید (بدون مرئی ومخفی).

۵- دوصفحهٔ R و Q را به موازات صفحهٔ P درطرفین

آن به‌فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ ازصفحهٔ P رسم‌کرده مقیاس‌شیب آن‌ها را در دوطرف کاغذ نشان دهید.

۶- مقطع هشت‌وجهی فوق‌را بادوصفحهٔ R و Q بدست آورده و جسم حاصل راپس از حذف قسمتهائی که خارج دو صفحهٔ R و Q می‌باشد ویك‌ده‌وجهی خواهد بود درنظر گرفته وآن را مرئی ومخفی نمائید.

۷- مقطع جسم حاصل راباصفحهٔ قائمی‌که اثرش برمحور اطول‌کاغذ منطبق است یافته و وسعت حقیقی آن را مشخص کنید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ اول : فاصلهٔ نقطهٔ A ازنیمساز اول برابر ۲ و نسبت بعد به‌ارتفاع آن $\frac{1}{2}$ است. بطریق رسم نقطه‌را دربالای نیمسازاول نشان دهید.

مسئلهٔ دوم : نیمرخ $aba'b'$ مفروض‌است. برروی‌آن نقطه‌ای مانند cc' به‌قسمی تعیین‌کنیدکه فاصله‌اش از اثرافقی $\frac{3}{4}$ فاصله‌اش ازاثر قائم باشد.

مسئلهٔ‌سوم : ازنقطهٔ aa' به‌بعد ۵ و ارتفاع ۳ دوخط دلخواه DD' و $\triangle\triangle'$ را مرور داده نیمساز زاویهٔ حقیقی دوخط رارسم‌کنید.

دبیرستانهای بهمن قلهك وپیشاهنگ

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی:

مسئله : واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول‌کاغذرا رسم‌کرده محل تلاقی‌آن‌ها را مرکز بنامید. کادر ۲۰ × ۲۵ می‌باشد.

۱- صفحهٔ P را به‌شیب $p = 1$ به‌قسمی رسم کنید که افقیهٔ رقوم ۴ آن برمحور اقصرکاغذمنطبق بوده و ترقی‌رقوم مقیاس‌شیب‌آن از پائین به‌بالا بوده و در سمت چپ‌کنارکاغذ به‌فاصلهٔ ۱ ازآن رسم‌شده است.

۲- ازنقطهٔ a_4 واقع درصفحهٔ P که بـه فاصلهٔ ۵ سمت چپ محورکاغذ واقع‌است خطی درصفحهٔ P به‌شیب $p = \frac{2}{3}$ رسم‌نموده ونقطهٔ b_0 را روی‌آن‌سمت‌راست a انتخاب‌نمائید.

۳- درصفحهٔ P مثلث متساوی‌الساقین ABD راکه در آن $DA = DB$ بوده ورقوم رأس D برابر ۵ می‌باشد رسم نموده و ملخص متوازی الاضلاع ABCD راکه BD قطر آنست نشان‌داده وسعت حقیقی متوازی‌الاضلاع را سمت پائین کاغذ مشخص‌نمائید.

۴- برروی ABCD هرم SABCD راکه رأس‌آن s_1 روی محوراطول واقع ومثلث قائم‌الزاویهٔ SAB یکی ازوجوه جانبی‌آن بوده‌که در زاویهٔ A قائمه می‌باشد بسازید و ملخص هرم مزبور را رسم نموده وآن رامرئی ومخفی‌کنید.

۵- مقطع‌هرم SABCD را باصفحهٔ افقی‌رقوم ۳ یافته وآن رانسبت به‌جسم مرئی ومخفی‌نمائید.

۶ - زاویهٔ مسطحهٔ نظیر فرجهٔ بین صفحهٔ مثلث SAB راباصفحهٔ P مشخص‌کرده واندازهٔ حقیقی‌این‌زاویه راروی‌شکل نشان دهید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی :

مسئلهٔ ۱ـ فاصلهٔ‌نقطهٔ A ازخط زمین‌برابر ۵ونسبت‌فواصل آن از دونیمساز $\frac{1}{3}$ است. نقطهٔ A را درربع اول نشان دهید.

مسئلهٔ ۲ـ خط DD' را رسم‌کرده آثارآن‌را نشان‌داده و برروی آن نقطهٔ cc' را به فاصلهٔ حقیقی ۳ از اثر افقیش نشان دهید.

مسئلهٔ ۳ـ نیمرخ $aba'b'$ مفروض است. روی‌آن‌نقطهٔ cc' را به قسمی تعیین کنید که فـاصله‌اش از نیمساز اول $\frac{1}{2}$ بعدش باشد.

دبیرستان پهلوی همدان

دبیر: ازگمی ـ فرستنده : حسین اسدی

هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ است.

محورهای اطول‌واقصرکاغذ را رسم نموده ومرکزکاغذ را O بنامید.

۱- مقیاس‌شیب صفحهٔ P راکه باصفحهٔ مقایسه زاویـهٔ ۴۵ درجه می‌سازد سمت‌چپ‌کاغذ طوری رسم کنیدکه اثر آن ازمحور اقصرکاغذ بگذرد وترقی رقوم ازپائین به‌بالا باشد.

۲- روی محور اطول در قسمت پائین نقطهٔ A راچنان انتخاب‌کنیدکه $OA = 3\sqrt{2}$ باشد. اگرنقطهٔ A متعلق بـه صفحهٔ P باشدآنرا ترفیع کنید.

۳- ازنقطهٔ A خط AB رادرصفحهٔ P چنان رسم کنید که زاویهٔ حقیقی‌خط AB بااثرصفحه ۳۰درجه و ارتفاع نقطهٔ B برابر ۶ باشد (b راسمت چپ a بگیرید).

۴- ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD را در این صفحه چنان رسم‌کنیدکه $B = 60^\circ$ وقطر $AC = 7/5$ ورقوم c از b بیشتر گردد.

۵- ازنقطهٔ H مرکز متوازی‌الاضلاع عمودی برصفحهٔ

P اخراج کرده روی این عمود نقطهٔ S راچنان انتخاب کنید که تصویرش براثرصفحهٔ P قرار گیرد و پس ازآن ملخص هرم SABCD راکامل نموده مرئی ومخفی نمائید.

۶ـ وسعت حقیقی فصل مشترك این جسم را با صفحهٔ قائمی که اثر آن محور اطول کاغذ فرض می‌شود پیداکرده و هاشور بزنید.

دبیرستان دکتر نصیری (شبانه)

دبیر: بنائی ـ فرستنده : محمود قرشی

الف ـ هندسهٔ رقومی :

محورهای اطول واقصر کاغذ را رسم کنید ومحل تلاقی آنهارا مرکز کاغذبنامید. واحد سانتیمتر ومقیاس ۱:۱ می‌باشد.

۱ـ ملخص نقطهٔ a_0 را برمرکز کاغذ ونقطهٔ b_0 راسمت چپ کاغذ و روی محور اقصر کاغذ طوری انتخاب کنید که $AB = 5cm$ باشد.

۲ـ برخط a_0b_0 صفحهٔ P را به‌اساس $i = 0/5$ طوری رسم کنید که ترقی رقومش ازپایین به‌بالا باشد ومقیاس شیب آنرا سمت چپ کاغذ رسم کنید.

۳ـ ملخص لوزی ABCD رادرصفحهٔ P طوری رسم کنید که خط AB یك ضلع آن ونقطهٔ o_2 مرکزآن باشد. از دو جواب o آنرا انتخاب کنید که به‌نقطهٔ a نزدیکتر باشد.

۴ـ ازنقطهٔ a_0 خط △ رابرصفحهٔ P عمودکنید وبراین خط صفحهٔ Q را به‌اساس یك رسم کنید ومقیاس شیب صفحهٔ Q را دربالا وسمت راست کاغذرسم کنید درصورتی که افقیهٔ (۱ ـ) آن محور اقصر را سمت چپ مرکز قطع کند.

۵ـ از نقطهٔ a_0 خط $AS = 10cm$ به اساس $i = \sqrt{3}$ را درصفحهٔ Q رسم کنید در صورتی که رقوم نقطهٔ S منفی و تصویر s بالای a قرار دارد.

۶ـ ملخص هرم $s_{-5}a_0b_0c_4d_4$ را بدست آورید وآنرا مرئی ومخفی نمائید.

۷ـ اندازهٔ زاویه (مسطحه) دوصفحهٔ P و Q را بدست آورید وثابت کنید P بر Q عمود است.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی :

۱ـ قرینهٔ نقطهٔ $A(e = 3$ و $h = 2)$ رانسبت به‌صفحهٔ نیمساز ربع اول بدست آورید.

۲ـ آثارصفحهٔ $P\alpha Q'$ راطوری بدست آورید که از نقطهٔ $A(e = 1$ و $h = 1)$ وخط نیمرخ $cdc'd'$ بگذرد. رابط نقطهٔ aa' به‌فاصلهٔ ۳ سانتیمتر سمت چپ رابط خط نیمرخ است.

۳ـ خط $\triangle\triangle'$ راطوری رسم کنید که خط غیر مشخص dd' وخط منتصب zz' وخط منتصب vv' وخط‌الارض (xy) را درنقاط cc' و aa' و bb' و mm' قطع کند.

۴ـ ملخص نقاط $C(e = 0$ و $h = 0)$ و $B(e = 1$ و $h = 0)$ و $A(e = 2$ و $h = 2/5)$ را در صفحهٔ $P\alpha Q'$ بدست آورید. سپس اگر سه نقطهٔ A و B و C سه رأس متوالی یك متوازی‌الاضلاع ABCD باشد ملخص نقطهٔ dd' رادر صفحهٔ $P\alpha Q'$ بدست آورید.

۵ـ ملخص دونقطهٔ $A(e = 2$ و $h = 3)$ و $C(e = 1$ و $h = 1)$ راطوری بدست آورید که فاصلهٔ رابط aa'، ۳ سانتیمتر سمت راست رابط cc' باشد. سپس ملخص لوزی ABCD راطوری بدست آورید که قطر $BD = 2cm$ خط افقی باشد.

دبیرستان رازی

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی:

مسئله : واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها رامرکز بنامید کادر کاغذ ۲۰ × ۲۵ اختیار شود .

۱ـ نقطهٔ a_6 به‌فاصلهٔ ۳ زیرمحور اقصر و به‌فاصلهٔ ۳/۵ سمت چپ محوراطول کاغذ مفروض است. ازاین نقطه خط افقی رقوم ۶ را به‌موازات محور اقصر رسم نمائید. از a_6 به نقطهٔ O مرکز کاغذ وصل کنید وخط a_6O را به‌قسمی مدرج نمائید که زاویهٔ حقیقی AO درفضا باافقیهٔ مزبور برابر ۵۰ درجه باشد و رقوم O از A کمتر گردد. رقوم O را با ۰/۱ تقریب اندازه گیری کنید.

۲ـ برخط AO صفحه‌ای مانند P به‌قسمی مرور دهید که افقیه‌های آن موازی محور اقصر کاغذ بوده یك مقیاس شیب صفحه راکنار چپ کاغذ رسم کنید.

۳ـ بر روی صفحهٔ P شش‌ضلعی منتظم ABCDEF راکه OA شعاع دایرهٔ محیطی آن می‌باشد رسم نمائید به‌قسمی که نقطهٔ b سمت راست a ورقومش ازآن بیشتر باشد. ملخص شش‌ضلعی را رسم و وسعت حقیقی آن را نشان دهید.

۴ـ شش‌ضلعی مزبور قاعدهٔ منشور قائمی است که طول حقیقی یال آن برابر ۸/۵ بوده ودربالای صفحهٔ P واقع است. ملخص منشور را رسم و مرئی ومخفی نمائید.

۵ـ منشور دیگری که قاعدهٔ آن درصفحهٔ P و مرکزش همان O و متشابه باشش ضلعی ABCDEF است در نظر گرفته به‌قسمی که ضلع آن نصف ضلع AB باشد ارتفاع دو منشور بیك اندازه بوده و متداخل می‌باشند . حجمی که بین دو منشور قرارگرفته به‌فرض آنکه جسم مجوف فرض شود مرئی ومخفی نمائید.

۶ـ مقطع حجم اخیررا با صفحهٔ قائمی که اثرش برمحور

اطول کاغذ منطبق است یافته وسعت حقیقی آنرا روی صفحهٔ افقی رقوم ۵ نشان دهید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱ ـ بعد نقطهٔ A برابر ۳ ومجموع فواصل آن ازخط زمین وافقی تصویر برابر ۸ به‌طریق رسم نقطه رادرربع اول نشان دهید.

مسئلهٔ ۲ـ از نقطهٔ aa' به‌بعد ۵ و ارتفاع ۳ خطی رسم کنیدکه‌نیمرخ مفروض $cdc'd'$ را قطع کرده با نیمسازدوم موازی باشد.

مسئلهٔ ۳ ـ از نقطهٔ aa' واقع بر خط زمین خطی رسم کنیدکه با افق زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد و تصویر قائمش باخط زمین زاویهٔ °۴۵ تشکیل دهد.

دبیرستانهای کوروش وسپاس (دارالفنون)

دبیر: بنائی ـ فرستنده : محمد تقی ایلاتی

الف ـ هندسهٔ رقومی:

محورهای اطول واقصر کاغذرا رسم کنید ومحل تلاقی آنهارا مرکز کاغذ بنامید. واحد سانتیمتر، مقیاس ۱:۱است.

۱ـ صفحهٔ P را به اساس $i = ۱$ سمت چپ کاغذ طوری رسم کنیدکه افقیهٔ صفر آن برمحور اقصر کاغذ بوده و ترقی رقومش ازپائین به‌بالا باشد . سپس نقطه $o_۲$ را دراین صفحه و بر روی محور اطول انتخاب کنید.

۲ـ ملخص مستطیل $a_۰b_۲c_۶d_۴$ را درصفحهٔ P رسم کنید در صورتی که‌نقطهٔ $o_۲$ مرکزآن‌وقطر $AC = ۸\sqrt{۲}$ cm بوده و a و b سمت چپ محور اطول است و وسعت حقیقی ABCD را نشان دهید.

۳ـ نقطهٔ S را زیر صفحهٔ P طوری بدست آورید که $SA = SB = SC = SD = ۸^{cm}$ باشد (برای فرض‌بعداگر نتوانستید $s_{-۱}$ را روی محور اطول وبالای مرکز بفاصلهٔ ۷^{cm} از مرکز انتخاب کنید).

۴ـ ازنقطهٔ $s_{-۱}$ صفحهٔ R را به موازات صفحهٔ P رسم کنید ومقیاس شیب آنراسمت راست رسم کنید .

۵ـ مقیاس‌شیب صفحهٔ Q راکه‌ازنقطهٔ $s_{-۱}$ وخط $a_۰b_۲$ می گذرد درپائین وسمت چپ کاغذ رسم کنید .

۶ـ قرینه‌های نقاط $d_۴$ و $c_۶$ را نسبت به صفحهٔ R که نقاط $n_{-۴}$ و $m_{-۲}$ است بدست‌آورید وتحقیق کنیدکه نقاط N وM درصفحهٔ Q قراردارند .

۷ـ فصل مشترك صفحهٔ Rرابا منشور $a_۰d_۴n_{-۴}b_۲c_۶m_{-۲}$ که‌مستطیل EEGH است‌بدست‌آورید.

۸ـ ملخص منشور ناقص ABCDEFGH را بدست آورید وآنرا مرئی ومخفی کنید .

۹ـ زاویهٔ حقیقی دوصفحهٔ P و Q (مسطحه) را با α نمایش دهید .

۱۰ـ عمودمشترك دوخط FH و CM را بدست‌آورید.

$f_۰h_۰ \perp c_۶m_{-۲}$

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ ملخص نقطهٔ aa' را بدست‌آورید درصورتی‌که به فاصلهٔ ۵ cm از خط‌الارض بوده و نسبت فواصلش از صفحهٔ نیمساز اول وصفحهٔ افق تصویر $\frac{۲}{۳}$ باشد .

۲ـ ملخص‌نقطهٔ aa' رابدست‌آورید درصورتی‌که‌مجموع بعد وارتفاعش برابر ۸cm وحاصل ضرب بعد وارتفاعش‌برابر ۱۲cm باشد (از راه ترسیم حل شود)

دبیرستان فردوسی تبریز

دبیر : میرزافرهنج ـ فرستنده : غلامرضا جوانشیر

محورهای اطول واقصر کاغذ را رسم کنید و مرکز کاغذ را ω واحدسانتیمترمقیاس $\frac{۱}{۱}$ است :

۱ـ صفحهٔ P راکه باصفحهٔ افق زاویهٔ °۴۵ می‌سازد و افقیهٔ ۲ آن‌محوراقصر کاغذاست درنظر گرفته ومقیاس شیب آنرا درکنار چپ کاغذ رسم وروی محور اطول O' را به فاصلهٔ ۶ زیرمحور انتخاب کنید (ترقی‌رقوم صفحه به طرف بالاست)

۲ـ اگر O' تسطیح نقطه‌ای از صفحهٔ P حول افقیهٔ ۲ باشدآنرا ترفیع کرده و فاصلهٔ آنرا از افقیه ۲ تا یکدهم تقریب حساب کنید (رقوم O' بیشتراز۲است)

۳ـ ملخص متوازی‌الاضلاعی را تکمیل کنیدکه مرکزش O روی صفحه بوده وشعاع دایرهٔ محیطی‌آن ۴ وامتداد قطر AC با افقیهٔ صفحه زاویهٔ °۴۵ بسازد و زاویهٔ $ACB = ۶۰°$ باشد. A سمت چپ Cورقوم Bکمتر از رقوم D می‌باشد .

۴ـ مساحت این متوازی‌الاضلاع را حساب کنید .

۵ـ اقصر فاصلهٔ $\omega_۲ox$ از صفحهٔ P را با افقیهٔ $l_۶$ که تصویرش موازی محور اقصر به‌فاصلهٔ ۲ بالای آنست رسم کنید .

۶ـ ازDخطی چنان رسم کنیدکه‌تصویرش‌دربالای محور اقصرزاویهٔ ۳۰ بسازد وبر DC عمود باشد و $y_۰$ را روی‌آن پیداکنید .

۷ـ منشوری را تکمیل کنید وتعیین مرئی‌ومخفی نمائید که ABCD قاعده و DG یالش باشد .

۸ـ بریال AE منشور صفحهٔ Q را به فراز یك مرور دهیدکه مقیاس شیب‌آن طرف راست باشد .

۹ـ زاویهٔ صفحات P و Q را مشخص کنید .

دبیرستان فیروز بهرام

دبیر : جلالی ـ فرستنده : پرویز روانی

هندسه رقومی :

واحد سانتیمتر ومقیاس ۱:۱ است. محورهای اطول و اقصر کاغذکه محل تقاطع آنها مرکز کاغذ است رسم کنید .

۱ـ مقیاس شیب صفحهٔ P راکنار چپ کاغذ به موازات محور اطول رسم کنید بقسمی که شیب آن۲ وترقی رقوم روی آن از پائین به بالا وافقیهٔ رقوم ۵ آن محوراقصر کاغذ باشد، آن را مدرج کنید .

۲ـ نقطهٔ a_1 را روی‌محور اطول کاغذ واقع دراین‌صفحه انتخاب کرده و از این نقطه خط a_1b_5 را در این صفحه بقسمی رسم کنیدکه شیب آن $\frac{2}{3}$ و نقطه b_5 طرف چپ a_1 باشد .

۳ـ ازنقطهٔ b_5 خط b_5c_9 (c طرف راست b) را در این صفحه طوری رسم کنیدکه طول حقیقی پاره خط b_5c_9 برابر $4\sqrt{2}$ باشد.

۴ ـ ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم و رقوم D راپیداکنید.

۵ـ از نقطهٔ a_1 خطی برصفحهٔ P عمودکرده وروی آن نقطهٔ e_{-2} را انتخاب نمائید.

طول حقیقی پاره خط AE وشیب و اساس‌آن رابدست آورید.

۶ـ ملخص منشور قائم کامل ABCDEFGH راکه ملخص یك بال‌آن a_1e_{-2} رارسم‌کرده و با فرض کدربودن جسم خطوط مرئی را از مخفی تمیزدهید.

۷ـ طول‌حقیقی قطرFHراازطریق محاسبه‌بدست‌آورید.

دبیرستان‌کریم فاطمی اهواز

دبیر: سنجدی گاوچران ـ فرستنده : خداسراد بهزیز

هندسهٔ رقومی :

۱ـ صفحهٔ P به‌شیب $\frac{1}{2}$ مفروض است. مقیاس‌شیب‌آنرا به‌موازات محور اطول در کنار چپ‌کاغذ چنان رسم‌کنید که افقیهٔ رقوم ۲آن ازمرکزکاغذ بگذرد. نقطهٔ o_2 را روی‌محور اطول اختیارکنید. از o_2 خطی درصفحهٔ P رسم‌کنیدکه با اثر صفحه زاویهٔ‌حقیقی 45° بسازد و آنرا درچپ محور اطول قطع کند. این خط را D می‌نامیم. از o_2 عمودی برخط D رسم وروی‌آن a_4 را اختیارکنید. مطلوبست رسم ملخص یك مربع که a_4 یك رأس آن و o_2 مرکزآن وخط D یك‌قطرآن‌باشد.

۲ـ صفحهٔ P به‌شیب $\frac{2}{3}$ مفروض است واثرآن از مرکز کاغذ می گذرد. مقیاس‌شیب‌آنرا درکنارچپ‌کاغذ رسم کنید و ترقی رقوم ازپایین به‌بالا می‌باشد. نقطهٔ o_2 روی محوراطول کاغذ مرکز یك شش‌ضلعی منتظم است‌که شعاع دایرهٔ محیطی آن۴ است. یکی‌ازاقطار شش‌ضلعی‌افقی است. ملخص‌شش‌ضلعی را رسم‌کنید.

دبیرستان‌کوشش ـ ارامنه‌پسران

دبیر : مهندس محمود خوئی ـ فرستنده : گارنیك آبراهامیان

الف : هندسهٔ رقومی :

مسئله : واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ ـ محورهای اقصر و اطول‌کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز بنامید (کادرکاغذ ۲۰ × ۲۵).

۱ـ صفحهٔ P را به‌شیب $p = 1$ به‌وسیلهٔ مقیاس‌شیب‌آن درسمت‌چپ‌کنارکاغذ موازی محور اطول به‌قسمی رسم نمائید که ترقی‌رقوم‌آن‌ازپائین به‌بالا بوده و نقطهٔ o_9 را دراین‌صفحه منطبق برمرکزکاغذ انتخاب کنید.

۲ـ ازنقطهٔ o_9 خط o_9b_6 را به‌قسمی رسم نمائیدکه با افقیه‌های صفحهٔ P در فضا زاویهٔ ۵۰ درجه بسازد و نقطهٔ b سمت راست o قرارگیرد.

۳ـ قطعه‌خط OB شعاع دایرهٔ محیطی‌شش‌ضلعی منتظم ABCDEF واقع درصفحهٔ P می‌باشد که a سمت راست b و رقومش ازآن بیشتراست. ملخص شش‌ضلعی را رسم‌نمائید . ضمناً وسعت حقیقی نصف شش‌ضلعی را در سمت پائین کاغذ نشان دهید.

۴ـ صفحهٔ دیگر Q را سمت راست کاغذ موازی صفحهٔ P و به‌فاصلهٔ ۱۰ زیرآن نشان دهید.

۵ـ شش‌ضلعی ABCDEF قاعدهٔ فوقانی هرم ناقص منتظمی است‌که‌قطرقاعدهٔ تحتانی‌آن‌که در صفحهٔ Q واقع‌است نصف قطرقاعدهٔ فوقانی‌می‌باشد.ملخص هرم ناقص مزبوررارسم ومرئی ومخفی نمائید.

۶ـ مقطع هرم ناقص فوق را با صفحهٔ قائمی که اثرش برمحور اطول کاغذ منطبق است یافته و وسعت حقیقی آن را با تسطیح روی صفحهٔ افقی رقوم ۵ نشان دهید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱ـ ملخص خط AB را به‌قسمی رسم کنید که A به‌بعد ۲ وارتفاع ۳ و B به‌بعد ۴ و $ab = 4$ و $AB = 6$ باشد.

مسئلهٔ ۲ـ بر روی خط مفروض DD' نقطه‌ای پیدا کنیدکه به‌فاصلهٔ یك واحد بالای صفحهٔ نیمساز اول باشد.

دبیرستان محمد طبری

دبیر: بنائی

هندسهٔ رقومی:

محورهای اطول‌واقصرکاغذ را رسم کنید. محل تلاقی

آنهارا مرکز کاغذ بگیرید. مقیاس ۱:۱ واحد سانتیمتر.

۱- نقطهٔ o_4 رابرمرکز کاغذ انتخاب کنید و از این نقطه صفحهٔ P را به‌اساس $i = 1$ طوری رسم کنیدکه افقیهٔ ۴ آن بر محور اقصر بوده وترقی رقوم آن ازپائین به‌بالا ومقیاس‌شیب آنرا درسمت چپ‌کاغذ رسم نمائید.

۲- ازنقطهٔ o_4 صفحهٔ Q را به شیب $p = \frac{1}{2}$ طوری رسم کنیدکه افقیه‌های آن با محور اطول موازی باشد وترقی رقوم‌آن از راست به چپ باشد و خط بزرگترین شیب صفحهٔ Q را دربالای کاغذ رسم نمائید.

۳- فصل‌مشترك‌دوصفحهٔ Q و P راکه خط a_8c_0 است بدست آورید.

۴- صفحهٔ عمودمنصف خط a_8c_0 را R نامیده دربالا و سمت راست‌کاغذ رسم کنید.

۵- ملخص لوزی ABCD رابدست‌آورید درصورتی‌که تصویرقطر bd روی‌محور اقصرکاغذ منطبق بوده وخط AB افقی‌باشد.

۶- مقیاس‌شیب صفحهٔ لوزی ABCD را Z نامیده در سمت راست رسم کنید و وسعت حقیقی مثلث قائم‌الزاویهٔ $o_4d_0c_0$ را با استفاده ازتسطیح صفحهٔ Z حول لولای H_{-4} صفحهٔ Z درپائین‌کاغذ نشان دهید.

۷- خط بزرگترین‌شیب صفحهٔ V را به‌اساس $i = \frac{1}{2}$ در سمت راست‌کاغذ رسم کنید در صورتی‌که افقیهٔ رقوم ۲۶ — آن برمحور اقصرکاغذ بوده وترقی‌رقومش از پائین‌به‌بالاباشد.

۸- ازنقطهٔ o_4 خطی‌برصفحهٔP عمودکنید وفصل‌مشترك این خط رابا صفحهٔV که نقطهٔ s_{-6} است بدست‌آورید. سپس طول حقیقی OS را بدست آورید.

۹- ملخص هرم SABCD را بدست‌آورید ومرئی و مخفی آنرا تمیز دهید.

۱۰- زاویهٔ حقیقی دوصفحهٔ V و P را بدست‌آورید.

هندسهٔ ترسیمی:

۱- ملخص نقطهٔ aa' را بدست‌آورید در صورتی‌که به‌فاصلهٔ 5cm از خط‌الارض بوده ونسبت فواصلش ازنیمسازربع اول وصفحهٔ قائم تصویربرابر $\frac{2}{3}$ باشد.

۲- ملخص‌نقطهٔ aa' رابدست‌آورید درصورتی‌که‌مجموع بعد وارتفاع برابر۶ وحاصل‌ضرب بعد وارتفاع برابر۴ باشد (هردومسئله ازراه ترسیمی‌حل شود).

دبیرستان مهرباختر

دبیر: بنائی

هندسه رقومی:

۱- نقطهٔ o_0 را روی محور اطول و بالای مرکز به فاصلهٔ 3cm ازمرکز انتخاب‌کنید وازنقطهٔ o_0 خطی به‌اساس $i = 2$ طوری رسم‌کنیدکه تصویرش بامحور اقصر زاویهٔ $30°$ بسازد وترقی رقومش‌ازچپ به‌راست و ازپائین به بالا باشد و روی این‌خط نقاط a_{-3} و c_3 را بدست آورید (a سمت چپ مرکز).

۲- صفحهٔ عمودمنصف خط AC را Q نامیده و مقیاس شیب آنرا درپائین و سمت راست رسم‌کنید.

۳- برخط $a_{-3}c_3$ صفحهٔ P را به‌اساس $i = 1$ طوری مرور دهیدکه مقیاس شیبش با محور اطول موازی باشد وآنرا سمت چپ رسم‌کنید.

۴- ملخص لوزی ABCD را درصفحهٔP بدست‌آورید درصورتی‌که نقطه o_0 مرکز وAC قطر لوزی و اضلاع AD و CB خطوط افقی باشند.

۵- وسعت‌حقیقی لوزی ABCD را در زیرمحوراقصر نشان دهید.

۶- ازنقطهٔ o_0 خط o_0m_{-7} را بر صفحه P عمود کنید وتحقیق‌کنیدکه سه نقطهٔ M و B و D در صفحهٔ Q قرار دارند وطول حقیقی OM را بدست آورید.

۷- ملخص منشور قائم ABCDEFGH را بدست آورید درصورتی‌که لوزی ABCD قاعده فوقانی آن بوده و اندازه حقیقی ارتفاع آن برابر OM و نقطهٔ M مرکز قاعده تحتانی لوزی EFGH باشد ومرئی ومخفی آنرا تمیز دهید.

۸- سه نقطه M و O و A نمایش صفحهٔ R بوده مقیاس شیب‌آنرا درپائین و سمت چپ نمایش دهید.

۹- ثابت‌کنیدکه زاویهٔ حقیقی (مسطحه) دو صفحهٔ P و R برابر $90°$ است ($P \perp R$).

۱۰- وسعت حقیقی مقطع‌قائم منشور را در تسطیح‌نشان دهید درصورتی‌که اثرصفحهٔ قائم محور اطول باشد.

دبیرستان مهر تبریز

دبیر: حسینی - فرستنده: سیدحسین حسینی

هندسهٔ رقومی:

۱- محور اقصر کاغذ افقیهٔ صفر صفحهٔ P به شیب ۱ می‌باشد. اولا اگر ترقی رقومهای مقیاس شیب‌آن از پایین‌به بالاباشد یك مقیاس شیب ازصفحهٔPرا به‌اختیار رسم‌کنید. ثانیاً مطلوبست رسم ملخص مستطیل $a_0b_2c_6d_4$ واقع درصفحهٔ P بطوری‌که a روی‌محوراطول و b طرف‌چپ‌آن و $AB = 5/5$ ثالثاً این مستطیل قاعدهٔ منشور قائمی است به ارتفاع $4/2$

اگر قاعدهٔ EFGH زیر صفحهٔ P باشد ملخص جسم را رسم و به‌فرض کدر بودن سطح جسم خطوط مرئی را از مخفی تمیز دهید.

۲ـ محور اقصر کاغذ تصویر افقیه ۱۰ صفحهٔ P به شیب یك می‌باشد. اولا اگر ترقی رقومهای مقیاس شیب آن از پائین به بالا باشد یك مقیاس شیب از P را در سمت چپ کاغذ رسم کنید ثانیاً مطلوبست رسم مخلص مثلث $a_{۰}b_{۲}c_{۴}$ واقع در صفحهٔ P بطوری که a روی محور اطول و شیب خط AB برابر $\frac{۱}{۲}$ و b سمت چپ a و شیب خط BC برابر $\frac{۱}{۳}$ و c سمت راست b. ثالثاً مطلوبست رسم ملخص هرم S.ABC بطوری که یال SC بر صفحهٔ قاعده عمود بوده و شیب وجه SAB یك باشد.

۳ـ پاره خط $a_{۰}b_{۴}$ به‌شیب ۱ یك یال از مکعب ABCDEFGH می‌باشد که a منطبق برمرکز کاغذ و b روی محور اقصر و طرف راست مرکز می‌باشد. اگر شیب یال AD از آن $\frac{۱}{۲}$ و d زیر محور اقصر و طرف چپ محور اطول و جسم بالای صفحهٔ مقایسه باشد ملخص جسم را رسم کنید.

۴ـ محور اقصر کاغذ افقیهٔ $h_{۰}$ فرض می‌شود اولا ملخص نقاط $a_{۶}$ و $b_{۰}$ را چنان بگیرید که a منطبق بر مرکز کاغذ و b طرف راست محور اطول به‌فاصلهٔ ۸ ازآن و بالای محور اقصر به‌فاصلهٔ ۶ از آن باشند. ثانیاً ملخص عمود مشترك دو خط $h_{۰}$ و $a_{۶}b_{۰}$ را رسم و طول حقیقی عمود مشترك را محاسبه کنید.

دبیرستان نظام

دبیر: بنائی ـ فرستندگان: رحیم جلالی، مهرداد نائیجی

هندسهٔ رقومی:

محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کنید و محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ قرار داده واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱.

۱ـ ملخص نقطهٔ $a_{۰}$ را بر مرکز کاغذ انتخاب کنید و از این نقطه خط $AB = ۵\sqrt{۲}$ cm را به‌اساس $i = ۱$ طوری رسم کنید که b روی محور اقصر و سمت راست a قرار گیرد و ارتفاع B از رقوم A بیشتر است.

۲ـ از نقطهٔ $a_{۰}$ صفحهٔ P را بر خط $a_{۰}b_{۵}$ عمود کنید و مقیاس شیب P را بالای کاغذ رسم کنید.

۳ـ ملخص مستطیل ABCD را بدست آورید درصورتی‌ـ که طول حقیقی ضلع $AD = ۵\sqrt{۳}$ و قطر BD خط افقی می‌باشد و d بالا وسمت چپ a قرار گیرد. (برای فرض بعد اگر نتوانستید $c_{۱}$ را بالای مرکز و روی محور اطول به‌فاصلهٔ ۵cm ازمرکز انتخاب کنید.)

۴ـ مقیاس شیب صفحهٔ مستطیل ABCD را R نامیده و درسمت چپ و بالا رسم کنید. وسعت حقیقی مستطیل ABCD را حول خط افقی ۱۰ صفحهٔ R در بالای کاغذ نشان دهید. وثابت کنید که شیب صفحهٔ R برای $p = \sqrt{۵}$cm است.

۵ـ خط بزرگترین شیب صفحهٔ Q به‌اساس یك (۱) را سمت راست کاغذ طوری رسم کنید که افقیهٔ ۱۲ صفحه Q بر محور اقصر کاغذ بوده و ترقی رقومش از پائین به بالا باشد.

۶ـ نقطه M را به ارتفاع ۵ درصفحهٔ Q و سمت چپ محور اطول طوری بدست آورید که طول حقیقی $AM = \sqrt{۸۳}$cm (اگر نتوانستید $m_{۵}$ را به‌فاصله ۳cm سمت چپ محور اطول در صفحهٔ Q انتخاب کنید.)

۷ـ ملخص منشور مایل ABCDEFGH را بدست آورید درصورتی که مستطیل ABCD قاعده و مرکز قاعده دیگر نقطهٔ $m_{۵}$ باشد و سپس آنرا مرئی و مخفی کنید.

۸ـ فصل مشترك صفحهٔ Q را با منشور ABCDEFGH که یك متوازی‌الاضلاع IJKL است بدست آورید.

۹ـ زاویه حقیقی (مسطحه) دوصفحه P و Q را با β نشان دهید.

هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} e = ۳ \\ h = ۴ \end{matrix}\right.$ را نسبت به صفحهٔ نیمساز ربع اول و دوم بدست آورید.

۲ـ ملخص نقطهٔ aa′ را بدست آورید درصورتی که بعدش $e = ۲$cm بوده و فاصله‌اش از خط‌العرض ۳ برابر ارتفاع باشد. (ازراه ترسیم حل شود).

دبیرستان هدف شمارهٔ ۲

دبیر: مهندس محمود خوئی ـ فرستنده: مسعود نصرالله

الف ـ هندسه رقومی:

مسئله ـ واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز بنامید کادر کاغذ ۲۵ × ۲۰ اختیار شود. رقوم کلیهٔ رئوس اعداد صحیح می‌باشند.

۱ـ نقطهٔ $a_{۱۶}$ برمرکز کاغذ منطبق است. ازاین نقطه صفحهٔ P را بقسمی مرور دهید که افقیه‌های آن موازی محور اقصر کاغذ بوده و با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ $\alpha = ۴۵°$ درجه بسازد. یك مقیاس شیب صفحهٔ P را سمت چپ به‌فاصلهٔ یك از کادر کاغذ رسم نمائید. جهت ترقی رقوم آن ازبالا به‌پائین می‌باشد. از نقطه $a_{۱۶}$ در این صفحه خط $a_{۱۶}b_{۱۲}$ را به‌شیب $p = \frac{۲}{۳}$ بقسمی مرور دهید که b سمت چپ a قرار گیرد.

۲- ازنقطهٔ a_{16} خط AD را بقسمی مرور دهیدکه $ad = ۸$ وزاویهٔ $bad = ۱۲۰^\circ$ (درتصویر) و $BAD = ۹۰$ (درفضا) بوده و d سمت راست ab وبالای محور اقصر قرار گیرد. رقوم d را بیابید.

۳- اگررقوم d برابر ۱۰ باشد ملخص مستطیل ABCD راکه BD قطر آنست رسم نموده و وسعت حقیقی آن را با تسطیح روی صفحهٔ افقی رقوم ۱۰ نشان دهید بقسمی که تسطیح a_{16} درست بالای کاغذ واقع گردد.

۴- مکعب مستطیل ABCDEFGH را بر روی مستطیل ABCD فوق بقسمی بناکنیدکه رأس G ازیال جانبی CG درصفحهٔ مقایسه قرارگیرد. تصویر مکعب مستطیل را رسم نمائید.

۵- ازگوشه‌های هشت گانه مکعب مستطیل فوق هرم‌های مثلث‌القاعده‌ای که طول خط‌الرأس‌های جانبی هریك برابر نصف اضلاع مجاور هرکنج باشدجدا می‌کنیم. ملخص باقیمانده جسم راکه یك چهارده وجهی است مشخص نموده مرئی و مخفی کنید.

ب- هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱- خط غیر مشخص DD′ مفروض است. آثار افقی و قائم آن را مشخص نموده نقطهٔ CC′ را روی آن بقسمی نشان دهیدکه در فضا بیك فاصلهٔ از اثرقائم خط و افق تصویر باشد.

مسئلهٔ ۲- ازنقطه aa′ ببعد ۱ و ارتفاع ۴ خطی رسم کنید که نیمرخ مفروض cdc′d′ را درنقطهٔ B که بعدش ۳ می‌باشد قطع کند.

دبیرستان هدف-شمارهٔ ۳

دبیر: ذوالقدر اصلی - فرستنده: سعید قهرمانی

هندسهٔ رقومی:

محورهای کاغذ را رسم کرده محل برخورشان (ω) را مرکز کاغذ بنامید. واحدسانتیمتر، مقیاس ۱:۱ است.

۱- از نقطهٔ a_1 که تصویرش بر محور اقصر و بفاصلهٔ $3\sqrt{2}$ سمت راست مرکز واقع است خط △ راکه باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۳۵° می‌سازد چنان رسم کنیدکه خط قائم V را که اثرش برمحور اطول و به‌فاصلهٔ ۳ بالای مرکز واقع‌است‌در نقطهٔ O قطع نماید وترقی رقومش بطرف بالا باشد ملخص △ را رسم‌کرده و رقوم O را پیداکنید.

۲- بر △ صفحهٔ P را به‌شیب $p = ۱$ بقسمی بگذرانید که ترقی رقومش به‌طرف بالاباشد. مقیاس شیب صفحهٔ P رادر کنار چپ کاغذ بکشید.

۳- نقطهٔ o_4 مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC واقع درصفحهٔ P است‌که درآن شعاع دایره $r = ۱/۵$ بوده و OB افقی و تصویر B_4 سمت چپ محور اطول واقع است. ملخص مثلث را رسم کنید.

۴- A وB وC سه رأس متوالی متوازی‌الاضلاع ABCD است ملخص متوازی‌الاضلاع راکامل کنید.

۵- صفحهٔ Q را موازی P وبه‌فاصلهٔ $5\sqrt{2}$ ودرپائین آن رسم نموده و یك مقیاس شیب از آنرا درکنار چپ کاغذ رسم نمائید.

۶- متوازی‌الاضلاع ABCD یك‌قاعدهٔ متوازی‌السطوح ABCDEFGH است‌که درآن یالهای جانبی بر △ عمود بوده وتصویرشان با محور اطول موازیست و نقطهٔ F متعلق به‌یال BF در صفحهٔ Q واقع می‌باشد. ملخص متوازی‌السطوح راکامل کرده بافرض کدربودن سطح آن مخفی و مرئی آنرا تعیین کنید (صفحهٔ مقایسه حاکی ماوراء است)

۷- عمود مشترك یال BF و افقیهٔ به‌رقوم یك صفحهٔ p را رسم کنید.

دبیرستان هدف- شمارهٔ ۴

فرستنده: مسعود نصرالله

محورکوچك وبزرگ کاغذ را رسم کنید - واحدسانتیمتر مقیاس ۱:۱ است.

۱- مقیاس‌شیب صفحهٔ P با اساس یك‌راکه اثرش محور اقصرکاغذ و ترقی رقومش از پائین به‌بالا می‌باشد درکنارچپ کاغذ رسم‌کنید. دراین صفحه نقطهٔ a_0 را به‌فاصلهٔ ۲ چپ‌مرکز اختیارکرده ازاین‌نقطهٔ خط a_0b_2 را درصفحه چنان رسم‌کنیدکه زاویهٔ حقیقی‌آن با اثرصفحه ۴۵° بوده و b طرف راست‌محور اطول قرارگیرد.

۲- صفحهٔ عمودمنصف‌پاره‌خط AB را رسم‌کنیدوملخص مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را که فقط یك ضلع آن a_0b_2 در صفحهٔ P واقع است طوری رسم‌کنیدکه ضلع BC آن افقیه بوده و C بالای محور اقصر کاغذ باشد.

۳- صفحهٔ دیگر P′ راکه اثرش همان اثر صفحه P بوده و برصفحه P عمود باشد درنظرگرفته یك مقیاس شیب ازآن را در طرف راست‌کاغذ بکشید.

۴- قرینهٔ نقطه C را نسبت‌به‌صفحهٔ P′ بدست‌آورده و آنرا D بنامید.

۵- منشوری راکه قاعده‌اش مثلث ABC و یك یالش پاره خط CD باشد درنظرگرفته ملخص آنرا رسم‌کنید و خطوط مرئی و مخفی را در ملخص تعیین نمائید.

۶ـ مقطع صفحهٔ قائمی‌را که‌اثرش‌مربرتصویر افقیه رقوم (۱ ـ) صفحهٔ P منطبق است در منشور معین کرده و اندازهٔ حقیقی آنرا با تسطیح نشان دهید .

مسائل هندسه و مخروطات

دبیرستان‌ابن‌سینا همدان

دایرهٔ C وخط △ ونقطهٔ A غیرواقع برآنهامفروضند. از نقطهٔ A دایره‌ای چنان رسم‌کنید که خط △ محور اصلی این دایره ودایرهٔ C باشد.

دبیرستان امیرکبیریزد

دبیر: استوار ـ فرستنده : محمدعلی اخوان بهابادی

بریك هذلولی‌که مرکزآن O و دو کانونش F_1 و F_2 می‌باشد مماسی‌رسم نموده‌اندکه دو مجانب هذلولی را درنقاط A و B قطع‌کرده است.اولا: ثابت‌کنیدچهارضلعی F_1AF_2B محاطی‌است. ثانیاً با استفاده ازحکم اول ثابت‌کنیدکه مساحت مثلث OAB مقدار ثابتی است وآن‌مقدار ثابت راتعیین‌کنید.

دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۳

دبیر. احسانی ـ فرستنده: سعید قهرمانی

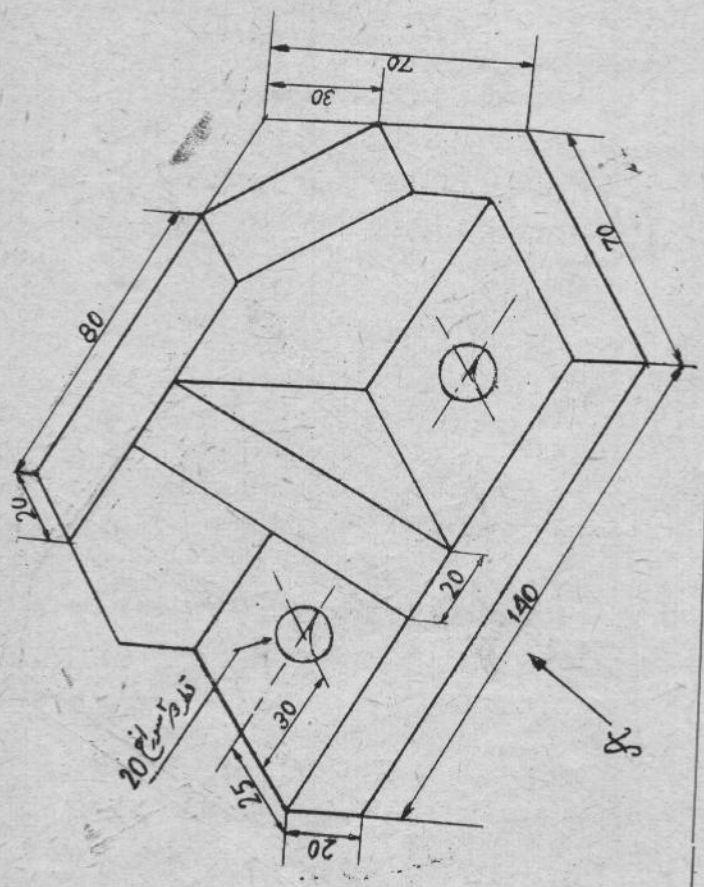
دایرهٔثابت O ، نقطهٔ ثابت A وخطثابت △ مفروضند. نقطهٔ متغیر M روی دایرهٔ O حرکت می‌کند. MA را رسم کرده واز نقطهٔ A برآن عمودی‌رسم‌کرده و $M'A = MA$ را روی‌آن عمود پیدا می‌کنیم . سپس برامتداد $M'A$ نقطهٔ M'' را طوری بدست می‌آوریم‌که $AM'.AM'' = k$ باشد. حال‌از M'' عمود $M''H$ را بر △ فرودآورده و وسط $M''H$ را D می‌نامیم. مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ D وقتی‌که M بر دایرهٔ O حرکت می‌کند.

رسم فنی

دبیرستان ایرانشهر یزد

دبیر: حیدری - فرستنده : مهدی ملك‌یزدی

مطلوبست : ۱ـ نمای‌اصلی ازدید A. ۲ـ نمای جنبی چپ. ۳ـ نمای‌سطحی.

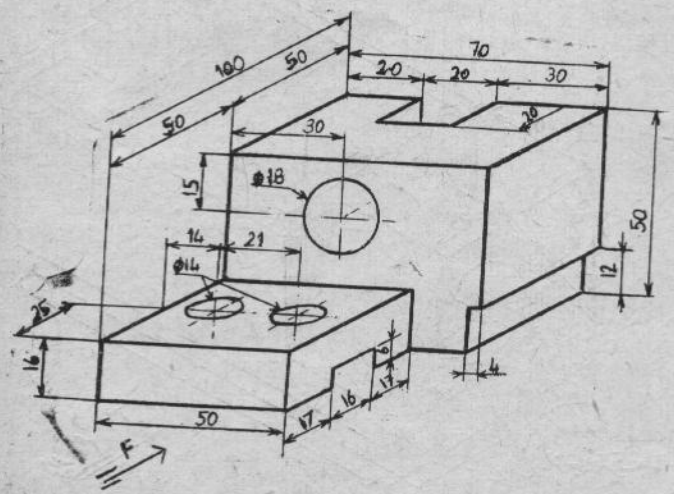


دبیرستان دارالفنون

دبیر : شهنائی ـ فرستنده : علی هاشمی‌زاده

مطلوبست رسم تصاویر زیر با مقیاس ۱:۱ و اندازه ـ گذاری کامل . کاغذ A_4 می‌باشد.

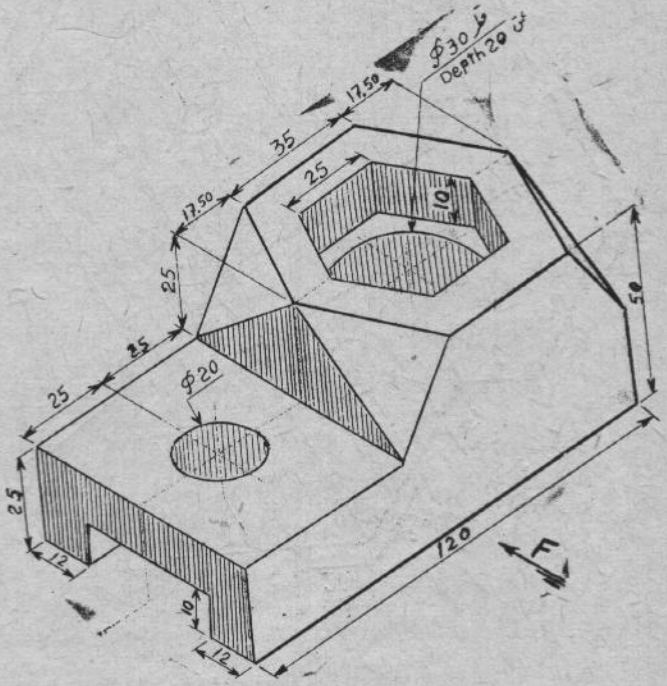
۱ـ تصویرقائم‌ازدید F. ۲ـ تصویر افقی. ۳ـنیمرخ چپ .



دبیرستانهای: دکتر حکیم الهی ، دکتر
داورپناه ، زاگروس ، مدائن

دبیر : مهندس محمود خوئی

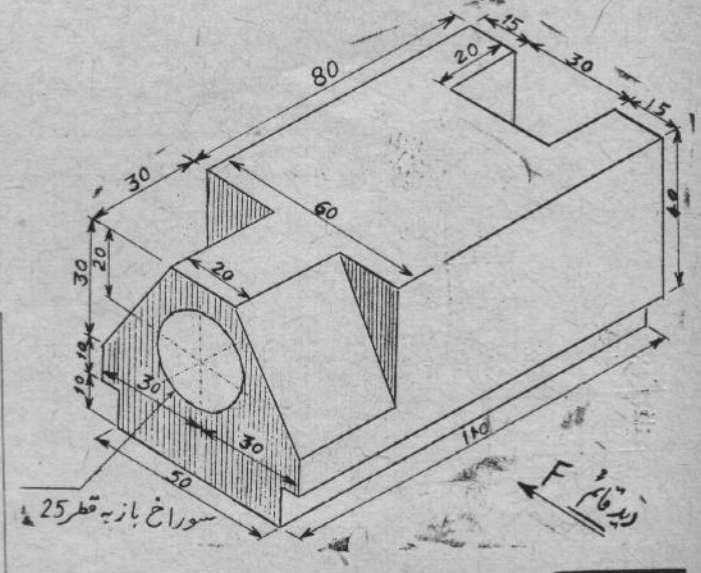
مطلوبست رسم تصویر قائم از دید F و تصاویر افقی و نیمرخ چپ در ناحیهٔ اول فضا با اندازه گذاری کامل و رسم محورها روی کاغذ A_4. واحد میلیمتر و مقیاس ۱:۱ است.



دبیرستان رهنما

دبیر : مهندس محمود خوئی

مطلوبست رسم تصویر قائم از دید F و تصاویر افقی و نیمرخ چپ جسم در ناحیهٔ اول فضا با رسم محورها و اندازه گذاری کامل روی کاغذ A_4. مقیاس ۱:۱ و واحد میلیمتر است.

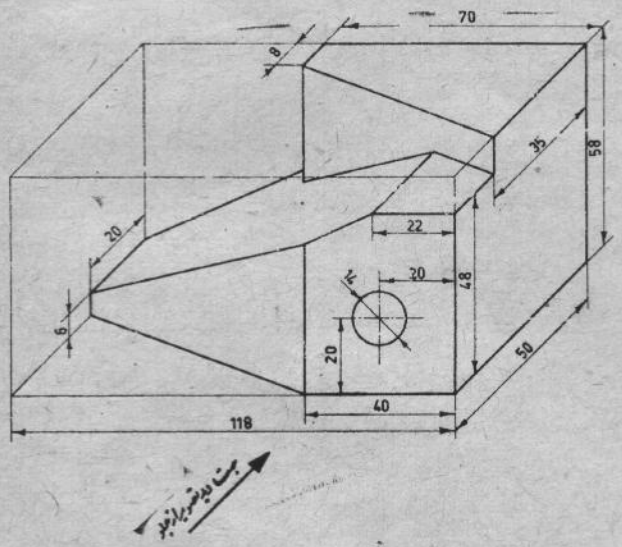


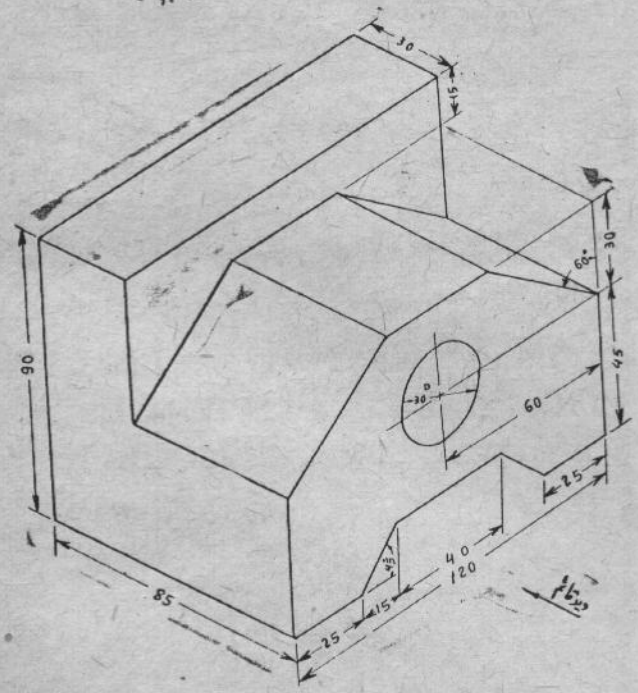
دبیرستانهای سپاس و طبری و مهرباختر

دبیر: بنائی - فرستنده : محمدتقی ابدائی

مطلوبست : ۱- رسم نمای قائم. ۲- رسم نمای افقی. ۳- رسم نمای جانبی (نیمرخ چپ). ۴- رعایت قواعد ترسیم و ظرافت خطوط و نظافت رسم و اندازه گذاری (ابعاد به میلیمتر می باشد).

در هردو شکل خواسته‌های بالا مورد نظر است.

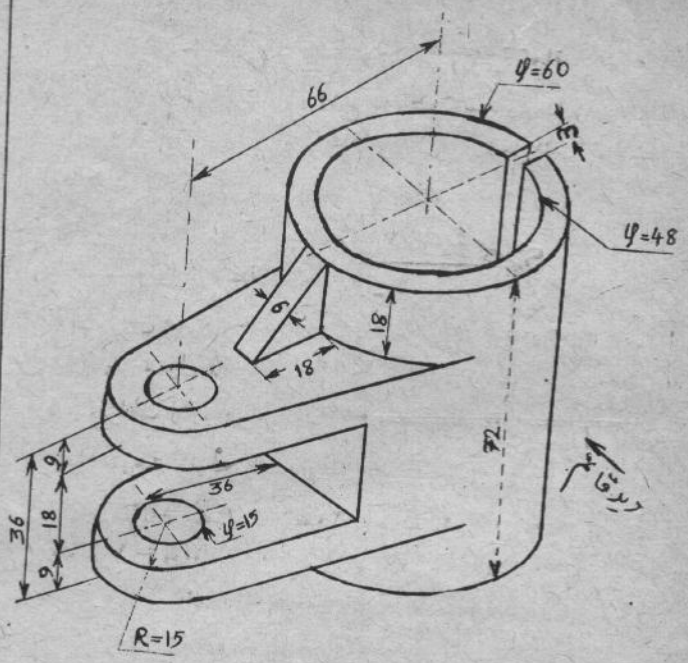




دبیرستان سعدی شیراز

دبیر: پیرویان - فرستنده : اردشیر دیلمی

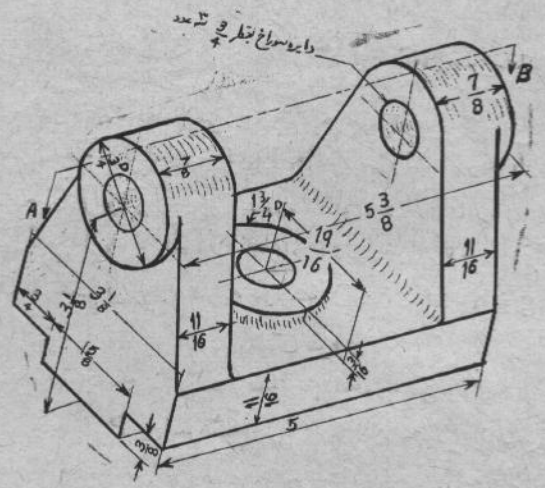
مطلوبست رسم تصاویر قائم ، افقی و نیمرخ چپ با اندازه گذاری کامل. واحد میلیمتر و مقیاس ۱:۱ است.



دبیرستان کورش کبیر نهاوند

دبیر : آذری ـ فرستنده : کیقباد شمس‌اسحاق

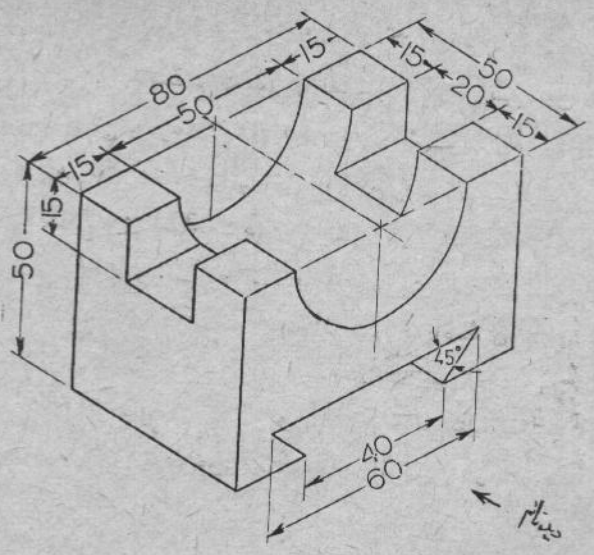
مطلوبست مقطع کامل AB درتصویر قائم ـ تصویرافقی و تصویر نیمرخ چپ.



دبیرستان مروی

فرستنده : مسعود نصرالله

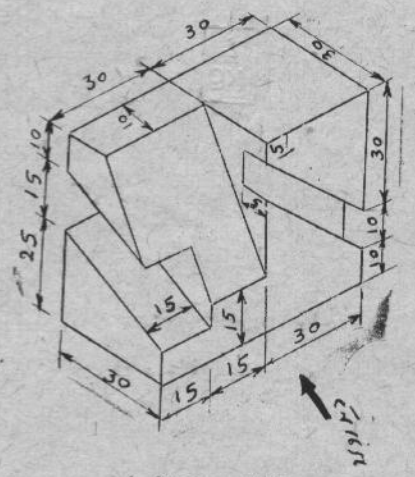
مطلوبست: ۱ـ تصویر ازجلو(تصویرقائم). ۲ـ تصویر ازبالا (تصویرافقی). ۳ـ تصویرازچپ (تصویرجانبی).



دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۱

دبیر: شالچیان ـ فرستنده: مسعود نصرالله

مطلوبست : ۱ ـ تصویر قائم (روبرو) . ۲ـ تصویر افقی (بالا). ۳ـ تصویر نیمرخ چپ.



مسائل مکانیک

دبیرستان ابن‌سینا رضائیه

دبیر: فاتحی ـ فرستنده : قاسم‌جبارزاده

گلولهٔ A راازچه ارتفاعی رها کنیم تا در دوثانیه $\frac{5}{9}$ مسافت کل راطی‌کند.

دبیرستان ارمگان

دبیر : حمیدی ـ فرستنده : مهران‌کشاورزیان

متحرکی باشتاب $1/2 m/s^2$ ازحال سکون از نقطهٔ A شروع به‌حرکت می‌کند. ده‌ثانیه باهمین شتاب‌وسپس ۲۰ ثانیه باسرعت ثابت وپس‌ازآن باشتاب‌کندشونده $2/4 m/s^2$ حرکت می‌کندودرنقطهٔ B متوقف می‌شود. فاصلهٔ A تاBراتعیین‌کنید.

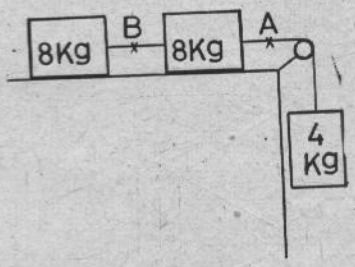
دبیرستان حکمت

دبیر: کبیری ـ فرستنده : جوادبرقعی رضوی

در روی سطح شیبداری به‌شیب ۰/۰۸ اتومبیل A به‌جرم ۵ تن باسرعت‌ثابت ۳۶km/h به‌طرف بالاواتومبیل B به‌جرم۷/۵تن‌باسرعت ثابت ۵۴km/h به‌طرف‌پائین‌درحرکت هستند. نیروی اصطکاك برای‌اتومبیل A برابر ۱۰۰۰نیوتن است. اولا نیروی‌موتور اتومبیلA ونیروی‌ترمز اتومبیل B راپیداکنید. ثانیاً در حالتی‌که دواتومبیل به‌فاصلهٔ ۷۲/۵ متر درمقابل یکدیگر می‌رسند به‌وسیلهٔ علامت چراغ قصد توقف می‌کنند. اتومبیل A فقط موتور راخاموش می‌کند، اتومبیلB چقدر به‌نیروی ترمزخود بیفزاید تا دواتومبیل درست درکنار هم توقف‌کنند.

دبیرستان دارالفنون

دبیر: تبریزی ـ فرستنده : علی‌هاشمی‌زاده

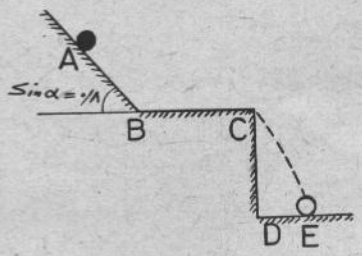


در شکل مقابل شتاب‌حرکت دستگاه و کشش نخ‌را برای نقاط A و B حساب‌کنید و اگرنخ ازنقطهٔ B قطع شودکشش نخ رادراین حالت برای‌نقطهٔ Aتعیین‌کنید. ضریب‌اصطکاك سطح‌افقی‌برای هرجسم ۰/۲ می‌باشد. $g=10m/s^2$

دبیرستان شهریارقلهك

دبیر: رهبر ـ فرستنده : سعیدمحبی

گلوله‌ای ازنقطهٔ A بدون سرعت اولیه رها می‌شود.



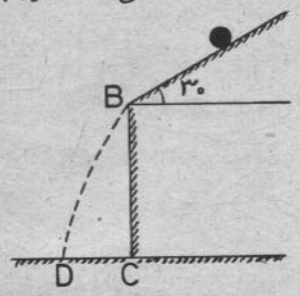
پس از طی مسافت $AB=3m$ واردسطح افقی $BC=5m$ می‌گردد ودر نقطهٔ C از سطح جداشده ودرنقطهٔ E به زمین می رسد. $DC=2/4m$است.اگرضریب‌اصطکاك‌سطح‌شیبدار $K_1=\frac{1}{3}$ و ضریب اصطکاك سطح افقی $K_2=\frac{2}{10}$ باشد مطلوبست :

a) سرعت‌گلوله درموقع برخورد به زمین درنقطهٔ E. b) طول DE چقدر است؟ $g=10m/s^2$

دبیرستان کورش‌کبیر نهاوند

دبیر: سلماسی ـ فرستنده : کیقباد شمس‌اسحاق

گلوله‌ای ازنقطهٔ A واقع درسطح شیبداری‌که زاویهٔ‌آن باافق°۳۰ است‌بطورآزاد به‌طرف‌پایین حرکت‌می‌کند. ضریب اصطکاك سطح ۰/۴ است. گلوله در B پرتاب شده و در نقطهٔ D به زمین می‌رسد. پیدا کنید طول CD را وتانژانت زاویه‌بین امتداد سرعت‌گلوله بامحور افقی درنقطهٔ D.

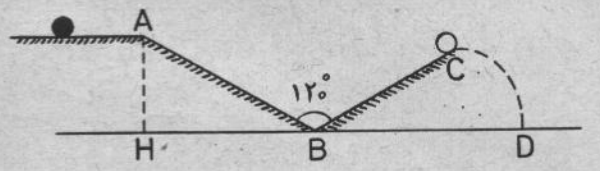


($AB=5m$ و $BC=24m$ و $\sqrt{3}=1/7$ و $g=10m/s^2$).

دبیرستان‌کوشش ـ پسران ارامنه

دبیر : رهبر ـ فرستنده : گارنیك‌آبراهامیان

گلوله‌ای باسرعت اولیهٔ ۲۰m/s روی‌یك سطح‌افقی‌در حال حرکت است.ناگهان وارد سطح شیب‌دار بدون‌اصطکاك $AB=50m$، بازاویهٔ°۳۰ می گرددودرامتدادآن‌پایین‌می‌رود



پس‌از طی این سطح وارد سطح $BC=\frac{125}{3}$ متر مطابق‌شکل شده درامتدادآن بالامی‌رود وبالاخره پس‌ازطی این‌سطح از آن جدا شده ودرنقطه‌ای مانندD به‌زمین می‌رسد. ضریب‌اصطکاك سطح BC برابر با ۰/۱ است مطلوبست: ۱ـ زمان حرکت این گلوله‌ازA تا D (D نقطه‌ای روی‌زمین). ۲ـ مقدارHD. ۳ـ سرعت برخورد گلوله درنقطهٔ D. $g=10m/s^2$

دبیرستان مروی

دبیر: آیتی ـ فرستنده : محمدحسن‌نوری

جسم P راباسرعت اولیهٔ ۵۰m/s به‌بالا پرتاب‌می‌کنیم ۵ ثانیه بعدجسم دیگری را با سرعت اولیهٔ V_0 به بالا پرتاب می‌کنیم. محاسبه‌کنیدسرعت اولیهٔ جسم دوم‌را درصورتی‌که‌در ارتفاع ۹۴/۷۵ متر به‌یکدیگر می‌رسند. ثانیاً سرعت هردودر این لحظه راحساب‌کنید.

دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۳

دبیر : آیتی اصفهانی ـ فرستنده : سعیدقهرمانی

جسمی‌به‌جرم۵۰۰gr ازبالای‌سطح‌شیبداری پایین‌می‌آید. زاویهٔ سطح باافق‌برابر α است، به‌طوری که $\sin\alpha=0/8$

می‌باشد . نیروی اصطکاك سطح نصف نیرویی است که بطور عمودبرسطح واردمی‌شود. مقاومت‌هواازرابطهٔ $R = ۰/۰۱V^۲$ در M. K. S. قدیم بدست‌می‌آید. معین کنید سرعت‌حدمتحرك را ازاین‌سطح که به‌استخرآبی ختم می‌شود وتعیین کنید تا چه عمقی درآب فرومی‌رود ودرچه نقطه‌ازآن خارج می‌شود. جرم مخصوص جسم ۰/۷۵ است.

دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۴

فرستنده : مسعود نصرالله

آونگی به‌طول ۵ متروبه‌جرم۱کیلوگرم رابه‌اندازهٔ °۶۰ ازوضع تعادل‌منحرف وبدون‌سرعت‌اولیه رهامی‌کنیم. اولامعلوم کنید سرعت‌آونگ راموقع عبور ازوضع تعادل. ثانیاً اگروزنه آونگ هنگام عبور ازوضع تعادل به‌وزنهٔ دیگری به جرم ۵۰۰ گرم که روی لبهٔ میزی قراردادهشده برخورد کرده و متوقف شود معلوم‌کنید وزنهٔ ۵۰۰ گرمی چه‌سرعتی پیدا خواهدکرد. ثانیاً اگر فاصلهٔ وزنه ۵۰۰ گرمی ازسطح زمین ۹۰ سانتیمتر باشد معلوم‌کنید پس ازبرخورد وزنه ۵۰۰ گرمی چقدر جلوتر به‌سطح زمین‌برخورد خواهدکرد. $g = ۹/۸m/s^۲$

مسائل فیزیك

دبیرستان ارمگان

دبیر: حمیدی ـ فرستنده : مهران‌کشاورزیان

معادلهٔ ارتعاشی‌نقطهٔ O ازمحیط قابل ارتجاع به‌صورت $x = ۵sin(۵۰\pi t + \frac{\pi}{۶})$ می‌باشدکه x برحسب‌سانتیمتراست. اولا طول‌موج وبعدحرکت رادرلحظهٔ $t = \frac{۱}{۱۰}$ ثانیه تعیین کنید درصورتی‌که سرعت انتشار ارتعاشات درمحیط $۱۰m/s$ باشد. ثانیاً فاصلهٔ نزدیکترین نقطهٔ M را تا O طوری تعیین کنید که معادلهٔ‌آن به صورت $x_M = ۵sin(۵۰\pi t - \frac{\pi}{۶})$ باشد .

دبیرستان خوارزمی

دبیر: نیرویی ـ فرستنده : روح‌الله‌رهبر

ذره‌ای حرکت نوسانی ساده دارد. در اولین ثانیه بعد ازشروع حرکت مسافت b ودرثانیهٔ بعد مسافت c را درهمان جهت می‌پیماید. ثابت کنید دامنهٔ حرکت $a = \frac{۲b^۲}{۳b - c}$ می‌باشد (در موقع شروع حرکت متحرك از نقطهٔ به فاصلهٔ a از مرکزنوسان شروع به‌حرکت می‌کند).

دبیرستان دارالفنون

دبیر: تبریزی ـ فرستنده: علی‌هاشمی‌زاده

درمحیط قابل ارتجاع موج باسرعت $۱۷۰m/s$ منتشر می‌شود . معادلهٔ ارتعاش نقطهٔ O در لحظهٔ t به صورت $x = ۲sin(\omega t + \frac{\pi}{۶})$ می‌باشد؛ پریود ارتعاشات ۰/۰۲ ثانیه است. معادلهٔ ارتعاش نقطه‌ای مانند A راکه به‌فاصلهٔ ۸۵cm از O واقع است و بعد از O به‌ارتعاش در آمده در لحظهٔ t بنویسید.

دبیرستان زاگرس

دبیر: قلی‌پور ـ فرستنده : غلامرضا عالی‌شاه

تار مرتعشی‌به‌طول ۲متر وبه‌جرم۶ گرم بین‌دونقطه‌ثابت شده است. نیروی کشش تار بوسیلهٔ وزنه‌ای به وزن ۱۲kgf تأمین می‌شود. تار راطوری به‌ارتعاش درمی‌آوریم‌که در طول آن ۷ گره ایجاد شود. تواتر تار و سرعت انتشار ارتعاشات عرضی را درتار حساب‌کنید. $g = ۱۰m/s^۲$

دبیرستان‌فیروز بهرام

دبیر: شاه‌اسبلو ـ فرستنده : پرویز روانی

دومنبع $O_۱$ و $O_۲$ ازیك‌محیط همگن‌هریك بافرکانس ۲۰۰ هرتز امواج هم‌امتداد درمحیط پخش می‌کنند. سرعت انتشار $V = ۳۲۰m/s$ و دامنهٔ‌ارتعاش $O_۱$ و $O_۲$ به‌ترتیب ۵cm و ۴cm است؛

اولا ـ معادلهٔ‌ارتعاش هریك ازدومنبع رابنویسید.

ثانیاً ـ نقطهٔ M به فاصلهٔ ۲۰cm از $O_۱$ و ۴۰cm از $O_۲$ درهمان‌محیط واقع‌است. معادلهٔ ارتعاش‌نقطهٔ M رانسبت بهریك ازدومنبع به‌طور جداگانه بنویسید.

ثالثاً ـ معادلهٔ تداخل امواج‌دومنبع رادرنقطهٔ M دست آورده وبااندازه‌های تقریبی واشل مناسب با روش رسم فرنل دامنهٔ A نقطهٔ M واختلاف‌فازآنرا بادومنبع بدست‌آورید.

دبیرستان مروی

دبیر: آیتی ـ فرستنده : محمدحسن نوری

یك منبع ارتعاشی به معادلهٔ $x = ۴sin\pi t$ محیط قابل ارتعاشی را مرتعش می‌کند. در یك لحظهٔ معین تغییرمکان ذرهٔ مرتعشی‌که درفاصلهٔ ۲۰cm ازمنبع‌قرارگرفته ۴cm وتغییرمکان‌ذرهٔ مرتعش دیگری‌که درفاصلهٔ ۴۰cm ازمنبع قرارگرفته $۲\sqrt{۲}cm$ است. درصورتی‌که جهت هردوذره ارتعاش یکی‌باشد طول‌موج ارتعاش را درمحیط پیداکنید ومعادلهٔ ارتعاشی‌ذره‌ای که درفاصلهٔ ۸۰cm ازمبدأ قرارگرفته به‌چه‌صورت است وبعد ارتعاش این‌نقطه را درلحظهٔ $t = \frac{۱}{۲۰۰}$ حساب‌کنید.

مسائل شیمی

دبیرستان ارمگان

دبیر: نعمت ـ فرستنده: مهران کشاورزیان

۰/۲ گرم ازیك ئیدروکربور خطی‌استیلنی رابطور کامل می‌سوزانیم ۰/۱۸ گرم آب بدست می‌آید. فرمول مولکولی وفرمول گستردهٔ آن چیست؟

دبیرستان دارالفنون

دبیر: کوشا ـ فرستنده : علی هاشمی‌زارده

مخلوطی از گازهای اتیلن و استیلن داریم . این‌مخلوط با ۱/۲۵ برابرحجمش گـاز ئیدروژن اشباع می‌شود (حجمها تحت شرایط یکسان) . اولا ـ درصدحجمی مخلوط را حساب کنید .ثانیاً - چه جرمی ازاین مخلوط را انتخاب‌کنیم‌که تحت شرایط متعارفی ۲۲/۴ لیتر حجم داشته باشد .

دبیرستان زاگرس

دبیر: آیت‌اللهی ـ فرستنده : غلامرضا عالی‌شاه

بنزن خالص در۸۰ درجه می‌جوشد و اگر ۹/۲ گرم‌از جسمی به‌فرمول C_7H_8 را در۱۰۰ گرم بنزن حل‌کنیم محلول حاصل در ۸۵ درجه می‌جوشد.دریك آزمایش ۱/۸۶ گـرم از یك جسم‌آلی‌را در ۲۰۰ گـرم بنزن حل کردیـم نقطهٔ جـوش محلول‌حاصل ۸۰/۵ درجه شده است.وزن ملکولی جسم‌اخیر را پیداکنید.

دبیرستان فیروزبهرام

دبیر : علویان ـ فرستنده : پرویز روانی

مخلوطی ازاستیلن ، پروپیلن و اتان به‌حجم ۵۰ml با ۱۸۰ml اکسیژن به‌طورکامـل می‌سوزد و $115cm^3$ گـاز کربنیك تولید می‌کند. نسبت درصد حجمی مخلوط را پیداکنید و چگالی مخلوط را نسبت به گازهیدرژن پیداکنید.

دبیرستان‌کریم فاطمی اهواز

دبیر: علوی ـ فرستنده: خدا مراد بهزیز

از حل x گرم جسم‌آلـی در ۵۰ گرم بنزن نـزول نقطهٔ انجماد ۱/۲۵ درجه شده‌است. اگر x گرم الکل‌متیلیك را (CH_3OH) در۱۰۰ گرم بنزن حل‌کنیم نزول نقطهٔ‌انجماد ۲/۵ درجه می گردد . جرم ملکولی‌جسم‌آلی‌را حساب‌کنید.

دبیرستان‌کورش کبیر نهاوند

دبیر : کابلی ـ فرستنده : کیقباد شمس‌اسحاق

نسبت سدیـم بـه ملح سدیم یك اسید آلـی دوظرفیتی ۳۵٪ است. الف ـ جرم مولکولـی اسید را پیداکنیدمی‌آب‌ـ فرمول گستردهٔ جسم را رسم‌کنید.

دبیرستان‌کوشش ـ پسران ارامنه

فرستنده : گارنیك آبراهامیان

ازئیدرژناسیون یك‌کربور اتیلنی‌کربوری بدست می‌آید که ۸۱/۸٪ کربن دارد. فرمول ئیدروکربور اتیلنی را بدست آورید .

(On the page 192)

pondingly equal 10 plus some integral multiple of 98.

Since the original c eck was for less than $ 100.00, the only correct answer is $ 10.21.

Problem 89- Find the smallest natural number which has the following properties:

(a) In its decimal representation the last digit is 6.

(b) If the last digit, 6, is removed and then placed as the first digit (without changing the remaining digits), the new number is four times as large as the original number.

Solution : We establish that the original number is a b c d 6 (as many digits as are needed can be added to the left), and that 4 times this number is equal to 6 a b c d. Since $4 \times 6 = 24$ we must have d equal to 4. Now $4 \times 46 = 184$ and we must have c equal to 8. Our number is now a b 8 4 6. We continue in this manner until the result would put a 6 in the solution. The required number is 153,846.

$$615,384 = (4)(153,846)$$

محاسبات تقریبی (دنبالهٔ صفحهٔ ۱۴۲)

یك‌جهت‌باشندمساوی تفاضل خطای مطلق آن اعداد است.

۲- اعداد تقریبی مختلف‌الجهتند مثلا اگر اولی تقریبی اضافی و دومی تقریبی نقصانی باشد چنین می‌شود:

$$n_1 - n_2 = (N_1 + e_1) - (N_2 - e_2) =$$
$$= (N_1 - N_2) + (e_1 + e_2)$$
$$e = e_1 + e_2$$

تفاضل اضافی است

ولی اگر اولی نقصانی و دومی‌اضافی باشد:

$$n_1 - n_2 = (N_1 - e_1) - (N_2 + e_2) =$$
$$= (N_1 - N_2) - (e_1 + e_2)$$
$$e = e_1 + e_2$$

تفاضل نقصانی است

و ازآنجا چنین نتیجه می‌شودکه خطای مطلق اختلاف دوعدد تقریبی که در جهت مخالف باشند مساوی مجموع خطاهای مطلق‌آن دوعدد است.

بطور عموم خطای مطلق تفاضل دوعدد تقریبی کوچکتر است از دوبرابر بزرگترین خطا.

اگرخطای بزرگترکمتر از $\frac{1}{10^m}$ باشد $e < \frac{2}{10^m}$ ویا

به‌طریق اولی $e < \frac{1}{10^{m-1}}$

مسئلهٔ ۱- باچه تقریبی ممکن است اختلاف دو عدد تقریبی را بدست‌آورد درصورتی‌که حداعلای خطاهای مفروق و مفروق منه داده شده است. اعداد ۳/۱۴۱۵۹۱۹۲ و ۱/۷۳۲۰۲۱۷ اعداد تقریبی نقصانی π و $\sqrt{3}$ تا $\frac{1}{10^6}$ و $\frac{1}{10^4}$ می‌باشند.

برحسب قضیهٔ فوق $e < \frac{2}{10^4}$ و یا $e < \frac{1}{10^3}$ یعنی ۰/۰۰۱ پس تفاضل ۱/۴۰۹۵۷۰۲۲ تا ۴ رقم صحیح است.

مسئلهٔ ۲- اعداد را باید باچه تقریبی گرفت‌برای اینکه تفاضل‌آنها تاتقریب معینی بدست‌آید.

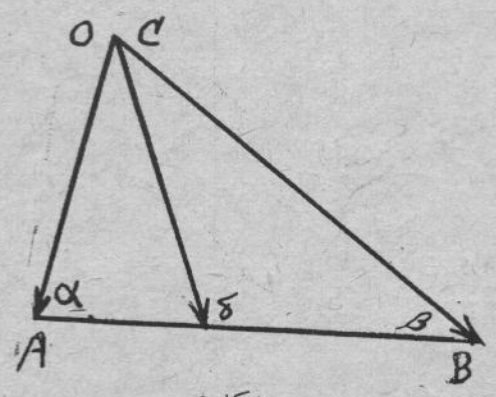
برای‌این‌عمل کافی است‌که اعدادرا باهمان تقریب‌تفاضل حساب نمائیم. دراین‌صورت خطای تفاضل‌کمتراست ازخطای مطلق یکی ازآنها.

مثال - می خواهیم اختلاف $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ را تا ۰/۰۰۱ تقریب نقصانی حساب‌کنیم ابتدا $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ را تا ۰/۰۰۱ تقریب حساب می‌کنیم:

$$2/236 - 1/732 = 0/504$$

بررسی نیمساز (دنبالهٔ‌صفحهٔ ۱۴۴)

اکنون این تساوی را به حسب اضلاع وزوایای‌مثلث می‌نویسیم. فرض‌کنیم‌که A و B به‌ترتیب انتهاهای α و β باشند. ازآنجا C مبدأ می‌شود (شکل۶). بنابراین:



شکل۶

$$\|\delta\| = v_c, \quad \|\alpha\| = b, \quad \|\beta\| = a \text{ و}$$
$$(\alpha, \beta) = ab\cos C$$

ازاینرو (۱۰) بدل‌می‌شود به:

$$v_c^2 = \frac{2ab[ab(1+\cos C)]}{(a+b)^2} = \frac{4a^2b^2\cos^2\frac{C}{2}}{(a+b)^2}$$

چون $C < \pi$ نتیجه می‌شود که $\frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$ و از آنجا $\cos\frac{C}{2} > 0$. بنابراین:

$$v_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

فرمول‌بالا به‌زاویه بستگی دارد. اکنون فرمولی‌بدست می‌آوریم‌که به اضلاع بستگی داشته باشد. واضح‌است‌که:

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2(\alpha, \beta).$$

مقدار (α, β) رابدست‌آورده و درتساوی (۱۰) قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شودکه:

$$(12) \quad \|\delta\|^2 = \frac{\|\alpha\|\,\|\beta\|\,[(\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 - \|\alpha-\beta\|^2]}{(\|\alpha\| + \|\beta\|)^2}$$

این‌فرمول به حسب اضلاع چنین می‌شود:

$$v_c^2 = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}$$

مسائل دیگررا به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

مراجعه

[۱] A.R.Amir-Moéz, Matrix Techniques, Trigonometry, and analyticGeometry, Edwards Brothers, Inc.Ann Arbor Michigan

داستانهای ریاضی

نوشتهٔ ریند (Rhind)

ترجمه و تنظیم از : داوید ریحان

تخته نرد

وقت خواب بود ، فرهاد تمایلی به‌خوابیدن نداشت و خسرو هم‌کم وبیش وضعی مشابه با اوداشت . فرهاد پیشنهاد می‌کند :

- با چند دست بازی تخته نرد موافقی؟

- چراکه نباشم ؟ ولی من‌ترا خوب می‌شناسم ، با این عشقی‌که به‌این بازی داری ، فکرکنم‌که تافردا صبح همین‌جا باشیم ، پیشنهادمی‌کنم‌که حداکثر ده دست بازی‌کنیم .

- هرچه میل‌تواست ، ولی من نخودی بازی نمی‌کنم.

- مثل اینکه سرعقل آمده‌ای ، سرچی‌بازی‌کنیم ؟

- برای بازی اول یك ریال وسط می‌گذاریم ، برای بازی دوم ، بازی سردوبرابر این مقدار انجام می‌گیرد و به همین منوال برای بازی سوم ۴ ریال و همینطور تاآخر.

- موافقم.

خسرو جیبهایش را گشت وتمام پولهایی‌راکه درجیبش بود روی میز خالی‌کرد . دقیقاً ۶ تومان و یك‌ریال بود .

- بیا! این‌همهٔ پولی است‌که می‌توانم ببازم.

بازی شروع شد و ادامه یافت تا آنجاکه خسرو بلند شد وگفت :

- تمام‌شد ، ته‌جیبم را بالاآوردی و تا شاهی آخرم‌را باختم. تلافی این‌کار را فردا سرت درخواهم آورد.

حال ، خوانندهٔ عزیز حل دو مسئلهٔ زیر را به شما واگذار می‌کنیم. دوبازیکن ما چند دست‌بازی‌کرده‌اند ؟ و در کدامشان خسرو برده‌است ؟ پس ازآنکه به‌این پرسشها پاسخ گفتید-که فکر می‌کنم بتوانید چنین‌کنید - می‌توانید پاسخ خودتانرا با جواب زیر مطابقت دهید .

پاسخ - فرض‌می‌کنیم‌که درتمام بازیها ، خسرو باخته باشد ، دراین‌صورت تعداد بازیها چقدر خواهد بود؟ دربازی اول $۱ = ۲^{۰}$ ریال ؛ دربازی دوم $۲ = ۲^{۱}$ ریال ؛ درسومی، $۴ = ۲^{۲}$ ریال و همینطور الی آخر. اگر به‌همین منوال ادامه دهیم ، ملاحظه می‌شودکه دراین‌بازی که بدشانسی متوجه خسرو است ، اگربازی تا ۹ نوبت برسد ، باخت این نوبت ۲/۵۶ تومان وتمام پولهای باخته شده تا اینجا ۵/۱۱تومان خواهدبود. پول باقی‌مانده برای خسرو برابر خواهد بودبا $۶/۰۱ - ۵/۱۱ = ۰/۹۰$ تومان، درنتیجه وی اجازهٔ ادامهٔ بازی‌را نخواهدداشت. ازطرفی دیگرمی‌دانیم‌که دربازی‌آخر، وی تمام پولهایی راکه دریك نوبت قبل از آن داشته است، باخته است . نتیجه می‌گیریم‌که خسرو ، همیشه بازنده نبوده است ، زیراکه وی تصمیم‌گرفته است‌که تا نفس‌آخر به‌بازی ادامه دهد و در نتیجه درآخرین بازی‌که دهمی باشد ، نیز شرکت‌کرده است.

مقدارکل برد وباختها چقدر است؟

$$۲^{۰} + ۱^{۱} + ۲^{۲} + \dots + ۲^{۹} = ۱۰۲۳$$

اگر در توالی بازیها ، فرهاد x ریال و خسرو y ریال برده باشد ، داریم : $x + y = ۱۰۲۳$

درضمن ، چون فرهاد تمام پول اولیهٔ خسرو را برده است داریم : $x - y = ۶۰۱$

از آنجا بدست می‌آید $x = ۸۱۱$ و $y = ۲۱۱$

رشتهٔ زیر را می‌نویسیم :

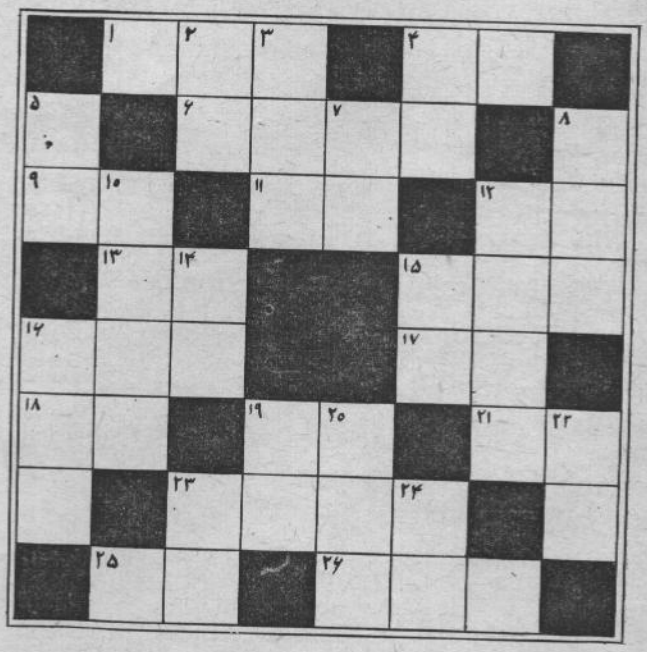
۱ ، ۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶ ، ۳۲ ، ۶۴ ، ۱۲۸ ، ۲۵۶ ، ۵۱۲

تمام این اعداد بجز اولی زوجند . چون بردهای (ذخیره‌ای) خسرو فردند ، نتیجه می‌گیریم وی در دفعهٔ‌اول برده‌است. وانگهی ، واضح‌است‌که وی دودفعهٔ آخر راباخته است زیرا جمع آنها از ۲۱۱ ریال بیشتر است. باقی می‌ماند این مسئله‌که با اعداد باقی‌مانده در رشتهٔ ۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶، ۳۲ ، ۶۴ و ۱۲۸ عدد ۲۱۰ را تشکیل دهیم .

جمع شش‌عدد اولیه ، بسیارکم است ؛ پس عدد ۱۲۸ که برد یا باخت هشتمین بازی است ، وارد معرکه می‌شود. باقی می‌ماند $۲۱۰ - ۱۲۸ = ۸۲$. بازمانند حالت اخیر ، ایجاب می‌کندکه ۶۴ (هفتمین بازی) راکنار بگذاریم. باقی می‌ماند $۸۲ - ۶۴ = ۱۸$. دیده می‌شودکه ۱۸ مجموع‌عدد ۲ (دومین‌بازی)و۱۶ (پنجمین‌بازی) است. بدین‌ترتیب‌خسرو دراولین،دومین،پنجمین،هفتمین وهشتمین بازی یعنی درنصف تعداد بازیها برده است ولی چیزی‌که قطعی است این‌است‌که: جوجه راآخرپائیز می‌شمارند!

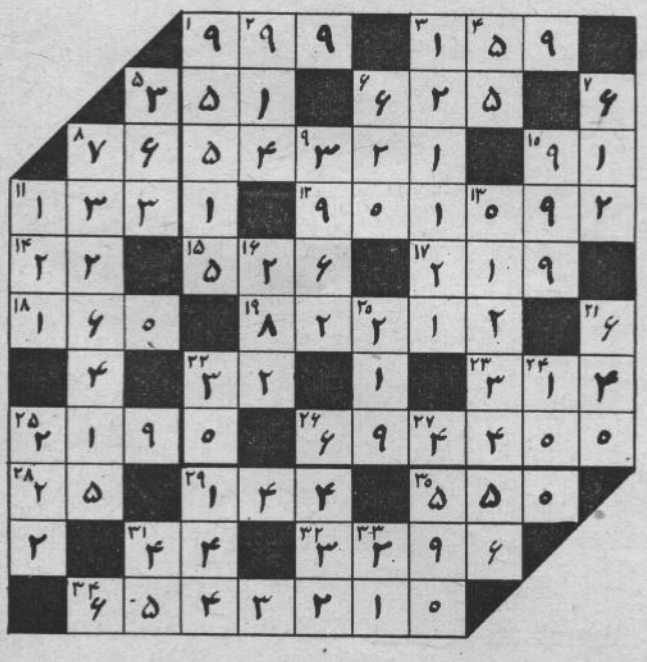
جدول اعداد

طرح از : یوسف رضازاده ، رشت



افقی : ۱- جذرآن وهمچنین جذر جذرآن مجذور کامل است .۴- دو برابر عدد۱۹افقی . ۶- بیست برابرکوچکترین عددی که رقمهایش تصاعد حسابی می‌سازند . ۹- مجذور مجموع رقمهایش است.۱۱- عددی‌فردکه۲واحدکمترازمجذور مجموع رقمهایش است. ۱۲- مقلوب عدد۹افقی. ۱۳- مجذور کامل است ویك رقمش دوبرابر رقم دیگراست . ۱۵- مقلوب عدد۲۶ افقی . ۱۶- مجذور عدد ۲۱ افقی . ۱۷- همان عدد ۱۱ افقی . ۱۸- یك واحدکمتر از نه برابر عدد ۱۹ افقی . ۱۹- تکرار یك رقم . ۲۱- یك واحد بیشتراز عدد۱۹ افقی. ۲۳- عددی چهار رقمی‌که اگربا ۸۰۳۰ جمع شود عددی با رقمهای متساوی بدست آید . ۲۵- جذر عـدد ۱ افقی ۲۶- بزرگترین عددسه رقمی‌که رقمهایش تصاعد هندسی می‌سازند.

قائم: ۲-مقلوبش‌مجذوررقم‌یکان‌خوداست.۳-مقلوب‌یکدهم عدد۶افقی. ۴-مقلوب ستمم‌حسابی‌عدد۱۸ افقی. ۵-هشت‌برابر عدد۱۹افقی۷-مقلوب‌عدد۱۳افقی. ۸-مقلوبش‌بزرگترین‌عددسه رقمی است‌که رقمهایش تصاعد حسابی می‌سازند. ۱۰- سالی که درپایان‌آن دوسال دیگر به پایان نیمهٔ اول قرن‌چهاردهم باقی مانده است . ۱۲- توان سوم‌عدد ۱۹ افقی . ۱۴-توان سوم ریشهٔ چهارم عدد ۱ افقی . ۱۵- همان عدد ۲۱ افقی . ۱۶- حاصل ضرب عدد ۱۹ افقی در عدد ۱۲ افقی. ۱۹- یك واحدکمتراز عدد ۴ قائم . ۲۰- مجذور تعداد دهمای موجود در عدد ۱۵افقی. ۲۲-کوچکترین عدد دورقمی‌که حاصل‌ضرب دوعدد زوج متوالی است. ۲۳- همان‌عدد ۲۵ افقی ۲۴- رقم دهگان آن سه برابر رقم یکان آن است و ثلث‌آن نیز همین خاصیت را دارد .



حل جدول شمارهٔ گذشته

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 87- If

$$\frac{1}{x^3-13x+12}$$

is expressed as the sum of fractions of the form

$$\frac{a}{bx+c},$$

where a, b, and c are all integers with $b>0$, what will be the sum of the denominators of these fractions?

Solution: Since

$$x^3-13x+12=(x-1)(x-3)(x-4)$$

we know that the required fractions must be of the form

$$\frac{a}{(x-1)},\ \frac{b}{(x-3)} \text{ and } \frac{c}{(x-4)}$$

To find a, b, and c we combine the above fractions and obtain

$$\frac{(a+b+c)x^2+(a+3b-4c)x+(-12a-4b+3c)}{x^3-13x+12}$$

Thus, since the numerator is equal to one, we obtain the following system of equations:

$$a+b+c=0$$
$$a+3b-4c=0$$
$$-12a-4b+3c=1$$

Solving simultaneously gives

$$a=\frac{-1}{10},\ b=\frac{1}{14},\ c=\frac{1}{35}$$

Substituting and simplifying we obtain

$$\frac{-1}{(10x-10)}+\frac{1}{(14x-42)}+\frac{1}{(35x+140)}$$

Therefore the sum of the denominators is

$$59x+88$$

Problem 88- When Mr. Smith cashed a check for lessthan \$ 100, the bank clerk accidentally mistook the number of dollars for the number of cents, and conversely. After Mr. Smith had spent 68 cents, he discovered that he had twice as much money as the check was written for. For how much was the check written? Is your answer unique?

Solution : Let x be the number of dollars and y the number of cents which the check originally called for. Then $100x+y$ is the real value of the check, and $100y+x$ is what Mr. Smith received.

$$100y+x-68=2(100x+y)$$

and

$$98y=68+199x$$

The last equation can be expressed as

$$98y\equiv 68 \pmod{199}$$

Also, since we know that

$$199y\equiv 199 \pmod{199}$$

We have

$$199y-(2)(98y)\equiv[199-(2)(68)] \pmod{199}$$

and thus

$$3y\equiv 63 \pmod{199}$$
$$y\equiv 21 \pmod{199}$$

Thus y is equal to 21 plus some integral multiple of 199 and x will corres-

(On the page 188)

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ هشتم - شمارهٔ سوم - شمارهٔ مسلسل : ۸۰

دی ۱۳۵۰

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : بانونصرت ملک‌یزدی

نشانی اداره :

تهران ، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیک شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۹۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VIII, number 3. Dec. 1971

subscription : 3$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر- تلفن:۸۲۵۹۲۸

یکان ۱۳۵۰

مقدمات چاپ یکان سال ۱۳۵۰ از هم اکنون فراهم شده است .

ازعلاقمندانی که‌سؤالهای امتحانهای ورودی دانشکده‌ها و مدارس عالی را در اختیار دارند و مایلند که برای چاپ در یکان سال ۱۳۵۰ بفرستند تقاضامی‌شود که این سؤالهارا طوری ارسال کنند که قبل از پایان‌دی‌ماه سال جاری به دفتر مجله‌واصل شود .

آموزش سادهٔ

نظریهٔ مجموعه‌ها

با روش برنامه‌ای

مربوط به‌صفحه‌های ۱۵۹ ، ۱۶۰ ، ۱۶۱ ، ۱۶۲

به‌دنبال آخرین‌موضوع مجلهٔ‌قبل، اولین موضوع این مجله رادردفترچه بنویسید. یك‌بار به‌دقت آنرابخوانید. به‌سادگی خواهید فهمید که جای خالی را باچه چیزباید پر کنیدیااگرپرسشی شده است پاسخ آن‌چیست. بعداز آنکه این پاسخ را درزیرپرسش نوشتید ، یاجای خالی را باموضوع مربوط پر کردید، آنگاه‌صفحهٔ مجله رابرگردانید و درست درپشت محل همان موضوع، پاسخ‌آن را مشاهده کنید. اگرپاسخی که‌شمانوشته‌ایددرست بوده‌است، آنگاه موضوع شمارهٔ بعدرایافته به‌ترتیب بالاآنرا دردفترچهٔ خودبنویسید وپاسخ آن رامعلوم کنید. اما اگرپاسخ‌شمادرست نبوده است، موضوع‌قبلی رامجدداًوبادقت بیشتربخوانیدتا پاسخ درست‌آنرا دریابید. بعد ازاطمینان‌ازدرست بودن پاسخ هرموضوع، موضوع شمارهٔ بعدآن را بنویسید وپاسخ دهید .

توجه داشته باشید که‌قبل از آنکه پاسخ هرموضوع‌راشخصاً معلوم نکرده‌اید به‌پشت‌صفحه‌مراجعه‌نکنید. با این‌روش، بدون نیاز به معلم ویابه‌کتاب دیگر، مفاهیم تازه‌ای را به سادگی و به‌آسانی خواهیدآموخت .

انتخاب اصطلاحات جدید فعلا تابع سلیقهٔ شخصی است

دربرگردان اصطلاحات جدید ریاضی از زبانهای خارجی به فارسی، تشتت آراء و اختلاف سلیقه وجود دارد . هم‌اکنون بـرای بعضی از مفاهیم ریاضی چندین اصطلاح بکارمی‌رود .

هریك از استادان دانشگاه‌وهریك‌ازمترجمان یانویسندگان کتابهای‌جدیدریاضی، که هرکدام درکارخود صاحب صلاحیتند ، برای یك مفهوم جدید اصطلاحی مطابق باسلیقهٔ شخصی خود بکار برده‌اند . شاید این اختلاف سلیقه درسطح دانشگاه اخلالی ایجادنکند، اما درسطح‌دبیرستان‌ومخصوصاًدردورهٔ‌راهنمایی‌تحصیلی،لازم‌است که‌برای‌یك‌مفهوم‌درتمام کشور اصطلاح واحد بکار رود. نویسندگان کتابهای درسی ناچارند که درمقابل یك‌مفهوم جدید تنهایکی ازاصطلاحات بکار رفته را انتخاب کنند و همه‌جا فقط همان را بکارببرند.

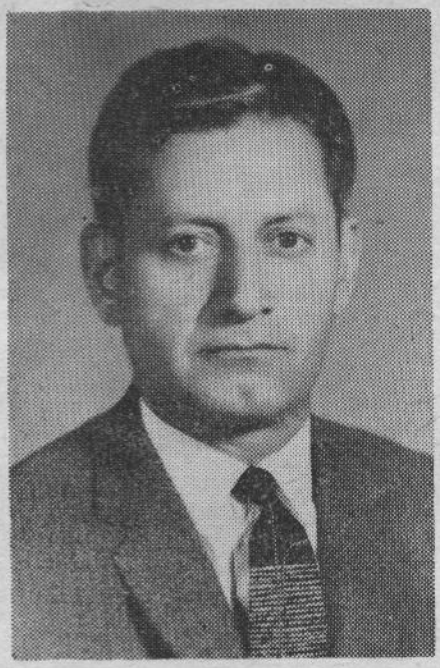
فعلا مأخذ یا مرجع‌رسمی برای وضع یا انتخاب اصطلاحات جدید ریاضی وجود ندارد یا اگر هست در این مورد خاص اقدامی نکرده است . پس ، نویسندگان کتابها در انتخاب اصطلاحات آزاد خواهند بودکه به سلیقهٔ شخصی عمل کنند .

نویسندهٔ یك کتاب جدید ریاضی ، اعم ازدرسی یاغیردرسی ، همچنین نویسنده یا مترجم یك مقاله ، نباید به خاطر انتخاب اصطلاحی که نـزد بعضیها متداول است و بعضی دیگرآن را نمی‌پسندند، مورد ایراد واقع شود .

عبدالحسین مصحفی

آشنای گرامی

حسین آزرم



نوشتهٔ : عبدالحسین مصحفی

سالها قبل از اقدام به انتشار یکان ، حسین‌آزرم برایم چهره‌ای آشنا بود ، هرچندکه اورا ندیده بودم . هرسال ، سؤالهای بخش عمدهٔ مواد ریاضی امتحانات نهایی طرح حسین‌آزرم بود ، و ازاین راه به‌عنوان‌فردی که درکارخودبصیرت‌کامل و درعلوم ریاضی اطلاعات وسیع و دقیق داشت، طرف آشنای دبیران ریاضی سرتاسرکشور و مورد احترام‌همهٔ آنان بود.

نخستین بار در کنگرهٔ بزرگ‌دبیران ریاضی به دیدارش نایل آمدم . دراین‌کنگره ، ادارهٔ گروهی را عهده‌دار بود که عضو آن بودم . درطی جلسات گروه ، جر وبحثهای مختلف پیش می‌آمد ودربیشتر مواردداختلاف آراء وجود داشت ، اما آنچه‌که مشهود بود شخصیت علمی و اجتماعی حسین‌آزرم و رفتار صمیمی و بی‌شائبهٔ وی بود ، و بخوبی معلوم بودکه به همهٔ اشکالات‌کار آموزش ریاضی درایران وقوف دارد .

چندسال‌پس ازآن‌تاریخ ، زمانی‌که مقدمات انتشاراولین شماره از یکان فراهم می‌شد ، بار دیگر به دیدار آزرم رفتم . در این موقع مدیریت کل تعلیمات متوسطه را بعهده داشت. با صمیمیت‌خارج از انتظار با من به‌گفتگو نشست و از نو- آوریهای برنامه‌های ریاضی‌کشورهای پیشرفته و راه یافتن نظریهٔ مجموعه‌ها در آموزش ریاضی سخن گفت ، و مقاله‌ای تحت عنوان « از اقلیدس تاکانتور» در اختیارم گذاشت. این مقاله درنخستین شمارهٔ یکان چاپ شد و سرآغازی گردیدبرای بحثها و مقالات مربوط به تجدید نظر دربرنامه‌های ریاضی و گرایش به‌سمت ریاضی جدید .

آزرم درمدتی‌که عهده‌دار مدیریت‌کل تعلیمات متوسطه بود ، همهٔ تلاش خودرا در اصلاح برنامه‌های ریاضی ونو- آوری‌آن بکار برد . می‌توان گفت‌که درآن روز تنها فردی از مسئولان اداری آموزش وپرورش بودکه به‌تحول جهانی‌روش و آموزش ریاضی آگاهی داشت. برای وقوف بیشتر به این تحول ، به بلژیك رفت و درآنجا با **پاپی** ، پیشروطرفداران ریاضی جدید ، ملاقات و گفتگوکرد . در مراجعت به‌ایران مقامات وزارت آموزش وپرورش را واداشت تا از پاپی برای سفر به‌تهران و آشنا ساختن دبیران ریاضی ایران با ریاضی جدید دعوت شود وجهت تأمین هزینهٔ مربوط ، شخصاً با ریاست هیئت مدیره ومدیرعامل شرکت ملی‌نفت ایران‌ملاقات کرد. دراین ملاقات ، که باید اواخر سال ۱۳۴۲ یا اوایل سال ۱۳۴۳ باشد ، وقوف **جناب دکتر اقبال** بر تحولات روشهای ریاضی و تأثیر نظریهٔ مجموعه‌ها برآن ، برای‌آزرم بسیار جالب بوده است ، وازهمین لحاظ موفق می‌شودکه در همان جلسه چك مربوط به هزینهٔ دعوت از پاپی و تشکیل کلاسهای کارآموزی ریاضی جدید را دریافت دارد . متأسفانه ابتلای به بیماری‌کلیه و لزوم سفربه خارج از کشور به‌منظور معالجه واستراحت بعد ازآن ، موجب قطع فعالیتهای اداری آزرم شد ودعوت ازپاپی و تشکیل‌کلاسهای کارآموزی‌ریاضی جدید در بوتهٔ‌فراموشی افتاد.

کنار رفتن آزرم از ادارهٔ تعلیمات متوسطه ، اورا از فعالیتهای در زمینهٔ ریاضی جدید باز نداشت . اولین مقالهٔ مربوط به مفاهیم مقدماتی‌نظریهٔ مجموعه‌ها را درمجلهٔ‌آموزش وپرورش بچاپ‌رساند. چاپ این مقاله محتاج به‌علامتهای‌جدید بودکه چاپخانه‌های ایران تا آن‌زمان فاقد آن بودند.آزرم نزدیك به شش‌ماه تلاش‌کرد تاموافقت وزارت آموزش‌وپرورش را برای تقبل هزینهٔ ساختن علامتهای چاپی ریاضی جدید بدست آورد. در نتیجهٔ این‌تلاش این علامتها ساخته شد وبین چاپخانه‌ها پخش گردیدکه فعلا مورد استفاده است.

در شروع کار انجمن معلمان ریاضی ، آزرم بـه ادارهٔ هیئت مدیرهٔ موقت بـرای تنظیم اساسنامه انتخاب شد . بـا علاقهٔ کامل درتمام جلسات شرکت می‌کرد. سعی وی همواره برآن بود تاانجمنی به معنی واقعی ، از معلمان ریاضی‌بوجود آید بقسمی‌که وسیله‌ای باشد بـرای بهبود و اعتلای وضع و مقام اجتماعی و معنوی معلمان ریاضی ، و بعدهاکه می‌دیدبر خلاف ایـدهٔ او ، انجمن در دامان دسته‌هـای معین افتاده و وسیله‌ای برای پیشبرد غرضهای خصوصی‌شده‌است رنج‌می‌برد.

آزرم دربـرقراری نظام جدید آموزشی در ایران و در تنظیم‌برنامه‌های‌جدید ریاضی ، سهم مؤثرداشت. اما عقیده‌اش آن بودکه باید قبل ازپیاده کردن برنامه‌های جدید ، معلمان آماده شده باشند .

نظر وی آن بودکه درکلاسهای کار آمـوزی ، معلمان مستقیماً زیر نظر متخصصان شایسته، از قبیل پاپـی ، فعالیت کنند ، نه‌اینکه ادارهٔ کلاس به شخصی واگذار گرددکه‌خودش هم از موضوع بحث اطلاعی نداشته باشد .

آزرم بعد ازبازنشستگی در وزارت آموزش و پرورش، مدتی عهده‌دار دبیرخانهٔ دانشگاه ملی شد و پس‌از آن تدریس ریاضی جدید را در دانشسرای عالی بعهده گرفت .

اکنون بیش ازیك سال است‌که حسین آزرم به دنبال دو عارضهٔ قلبی متوالی از فعالیتهای اجتماعی و علمی بازمانـده است. زیرنظر پزشکان و تحت مراقبت همسر شایستهٔ خود ، **بانو طاهر نیا**که خود ازدبیران باسابقه وممتاز دبیرستانهای تهران است، مجبور به استراحت مداوم است.

حسین آزرم نـزدیك بـه نیم قرن فعالیتهای فرهنگـی داشته‌است. تـاقبل از ابتلای به بیماری ، درتمام احـوال و موقعیتها و با وجود همهٔ مشاغل ، کارتدریس در دبیرستان‌را کنار نگذاشته‌است . به گفتهٔ یکی از دوستان، تنها بیش ازچهل سال در دبیرستان نظام ریاضیات تدریس‌کرده است.

برای‌آزرم، با وجود سالها فعالیتهای فرهنگی وتصدی مشاغل فنی ومخصوصاً شرکت مؤثردر برنامه‌ریزیهای‌درسی، خاطرات ونظرات زیاد وجوددارد، وبی‌شك برای‌مجلهٔ یـکان بهترین فرصت بود اگر بـه‌درج این‌نظرات نایل می‌آمد. امـا افسوس‌که فعلاتحریروتقریرمناسب حال‌آزرم نیست.خاطراتی راکه شخصاً ازاوداشتم بازگوکردم وبه‌اتفاق همهٔ دوستان و ارادتمندانش‌وهمهٔ آنان که‌ازپرتوعلمش ودرسش بهره گرفته‌اند ، آرزو می‌کنم تاهرچه زودتر سلامتیش رابازیابد.

بیوگرافی آزرم رادرخواست‌کرده‌بودم. باوجودکسالت درخواستم راپاسخ گفته وتاآنجاکه توانائیش اجازه داده‌شرحی راتقریرکرده است‌که درزیردرج می گردد.

* * *

اینجانب درسال ۱۲۹۱ شمسی **در نجف اشرف** بدنیا آمدم . تحصیلات ابتدائی خود را در **بابل** باتمام رسانیدم . برای‌تحصیلات متوسطه عازم **تهران**شدم. دورهٔ اول‌دبیرستان را در **مدرسهٔ ادب** و دورهٔ دوم رادر **مدرسهٔ دارالفنون** رشتهٔ علمی طی‌نمودم ودر ۱۳۱۰ به‌دریـافت دیپلم متوسطه نائل شدم. بعدوارد رشتهٔ ریاضی دانشسرایعالی گردیدم و در سال۱۳۱۳ به‌اخذلیسانس‌موفق گشتم. درهمان‌سال واردخدمت وزارت فرهنگ شدم. ابتدا در کتابخانهٔ ملی به‌عنوان معاون آن‌کتابخانه به‌انجام‌وظیفه‌پرداختم. ضمناًدردبیرستان‌دارالفنون چند ساعتی نیزبه‌تدریس ریاضی‌مسغول‌بودم. در۱۳۱۶به‌دایرهٔ مطبوعات ادارهٔ‌کل نگارش منتقل گشتم . در۱۳۱۷ به خدمت دبیری پرداختم. درسال ۱۳۲۱ به‌بازرسی فنی مشغول گشتم. درسال۱۳۲۵به‌ریاست فرهنگ مازندران منصوب‌وپس‌ازمدتی به‌تهران احضارشدم. چندسالی به‌تدریس‌وتألیف‌اشتغال داشتم. درسال ۱۳۲۷دربازرسی فنی‌مشغول‌شدم. بعدازمدتی‌به‌ریاست ادارهٔ‌کل‌بازرسی منصوب شدم. در۱۳۳۹ به‌ریاست ادارهٔ‌کـل تعلیمات متوسطه وپس‌ازسه‌سال به‌مدیریت‌کل‌تعلیماتی‌منصوب گردیدم . بعداز یك‌دوره بیماری در ۱۳۴۳ به ریاست‌شورای عالی اداری و درسال ۱۳۴۴ به افتخار بازنشتگی نائل شدم. بعد ازچندماه در تشکیلات دانشگاه ملی به مدیریت‌کل دبیرخانه و قائـم مقام رئیس دانشگاه در امور مالـی‌آن دانشگاه مشغول‌کار شدم. ضمناً در تمام طـول خدمت خود نیز تدریس می‌کردم کما اینکه تا سال ۱۳۴۹ در دانشسرای عالی تهران به تدریس ریاضی مشغول بودم. به‌تألیف کتابهای زیر نائـل آمده‌ام :

۱ـ ریاضی دورهٔ اول دبیرستان	۵ جلد
۲ـ جبر سال چهارم	۱ «
۳ـ هندسهٔ ترسیمی ورقومی سال ششم‌ریاضی	۱ «
۳ـ جبرومثلثات ششم طبیعی	۱ «
۵ـ حل‌المسائل ترسیمی ورقومی ششم	۱ «
۶ـ حل‌المسائل مثلثات ششم‌ریاضی	۱ «
۷ـ ریاضی جدید	۱ «

حسین آزرم

«نمونه‌ای از ابتکارات خواجه نصیر طوسی»

تنظیم از : جعفر آقایانی چاوشی

دریکان شمارهٔ ۷۴، مختصری دربارهٔ شرح احوال و آثار خواجه نصیرالدین طوسی درج گردید . در دنبالهٔ آن مقاله به چندکار علمی او اشاره می‌شود.

الف ـ ریاضیات :

۱ـ مثلثات ـ پروفسور **ویلهم شوایزر** ریاضیدان آلمانی در تاریخچهٔ مثلثات خود می‌نویسد : «برای اولین بار مسلمین درقرن نهم میلادی قوانین و اصول مسائل تانژانت و کوتانژانت را وضع کرده و برای طرز کار و استعمال آنها جدولهای حساب کرده‌ای ترتیب دادند .

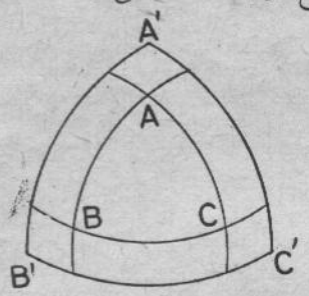
بزرگترین خدمت مسلمین کشف سینوس و دلائل آن بود و اولین دانشمندی که اثبات قضایا و دلائل آنرا بیان کرد ، **ابونصر فارابی** بود . **وخواجه نصیرالدین طوسی** اولین دانشمند اسلامی است که مثلثات را به عنوان یك علم مستقل معرفی کرده‌است، برای اولین بار مسلمین کسینوس را کشف کردند؛ **ابوریحان بیرونی** اولین دانشمندی است که ازکسینوس صحبت کرده ومسائل آنرا طرح نموده‌است؛ **رژیومونتانوس** و **یوهانس مولر** براثر مطالعهٔ آثار خواجه نصیر طوسی (= کشف القناع عن اسرار شکل القطاع) توانستند کتابی در این باره تألیف کنند که اساس تکامل وپایهٔ پیشرفت در مغرب زمین گردید .»

همانطور که قبلا نیز متذکر شدیم این کتاب نفیس ، به زبانهای مختلف ازجمله لاتین ، فرانسه ، انگلیسی ، وروسی ترجمه گردیده است .

طوسی اولین کسی است که حالات ششگانهٔ مثلث کروی قائم الزاویه را بکاربرده وآنرادرکتاب مذکور واردنموده‌است.

جالبترین موضوع این کتاب تعیین اضلاع مثلث کروی است ، وقتی که زوایای آن معلوم باشد. مسئله‌ای که درهندسهٔ مسطحه نمونه‌ای ندارد .

طوسی برای حل این مسئله مفهوم مثلث قطبی را وارد می‌کند . دونقطه ازکره را قطبهای دایرهٔ عظیمه‌ای از این کره می‌نامیم ووقتی این دونقطه همان وضع قطبهای کرهٔ زمین رانسبت به خط استوا داشته باشند ، دراین صورت مثلثی را قطبی مثلث مفروض گوئیم، وقتی که رئوس آن قطبهای اضلاع مثلث مفروض باشند ، طوسی رابطهٔ بین اضلاع وزوایای دومثلثی راکه متقابلا قطبی یکدیگرند پیدا می‌کند ،به این ترتیب اضلاع مثلثی که قطبی مثلث ABC است برابر است با :



$R(\pi - A)$ و $R(\pi - B)$ و $R(\pi - C)$

به‌کمك این مطلب ، تعیین اضلاع مثلث کروی از روی زوایای آن منجر به حل مسئله قبل یعنی تعیین زوایای مثلث کروی از روی اضلاع آن می‌شود .

۲ـ هندسه ـ آقای پروفسور محسن هشترودی ضمن سخنرانی خود، دربارهٔ «الرسالة الشافیة عن الشك فی الخطوط المتوازیة» درکنگرهٔ خواجه نصیر چنین گفته است :

«درآخرین نامه که خواجه به **علم الدین قیصر** نوشته است به این جمله برمی‌خوریم :

و اکنون گویم که من این حکمرا شکلی از اشکال کتاب قرار ندادم. بلکه من حکم به اینکه دوزاویه که پیدا می‌شوند میان دوعمود متساوی بوسیلهٔ خطی که ازکنار آندومی گذرد ، قائمه هستند شکلی قراردادم وآنرا با خلف بیان کردم پس بدین حکم منتهی شد وخلف ظاهر گشت . واین بیان نظیر آن بیانی است

که درشکل چهارم‌ازمقالهٔ اول گفته می‌شودکه اگرهنگام‌تطبیق دومثلث دو قاعدهٔ‌آن برهم منطبق نشوند ، احاطه به سطحی پیدا می‌کنند واین محال‌است زیرا حکم دراین بحث وحکم‌بر امتناع احاطهٔ دوخط‌مستقم‌به‌یك‌سطح دراینکه هردوضروری‌اند ومبدأ برای مسائل هندسی می‌باشند یکی است واگرنیازمندی به بیان پیدا شودجای بیانش علم دیگری است غیر از هندسه که درآنجا ماهیت خطوط مستقیم واعراض ذاتی‌آنها بیان شود وبکاربردن‌آنها درهندسه فقط برسبیل مصادره است ».

شکلی‌که خواجه نصیر اختیار می‌کند همان چهار ضلعی متساوی‌الساقین ذوقائمتین **ساکری** است و نتایجی‌که بدست می‌آوردهمان‌خوارق عادات‌ومشهودات هندسی است‌که‌ساکری ممتنع می‌پندارد .

مطلبی‌که شایان توجه است اشاره‌ای است‌که در پایان نامه‌به علمی می‌شودکه‌ازماهیات وعوارض ذاتی خطوط‌مستقیم یا اشکال هندسی بحث می‌کند و این نکته وسع نظر و قدرت منطقی خواجه نصیر را روشن می‌کند.

چنانکه گوئی دراندیشهٔ ژرف نگراو مفهوم بنا وتأسیس دستگاههای قیاسی منطق جدید مبهماً صورت پذیر بوده و این عجب نیست ، چه‌استاد درمنطق‌صاحب نظربوده وخودمکتبی خاص داشته است .

امروزه‌می‌دانیم‌که در دستگاههای قیاسی اساس براین است‌که ازمعلوماتی‌که خارج ازحوزهٔ مفروضات است استفاده نگردد ودرنتیجه‌حداقل احکام ومفروضات وتعاریف دربنای‌یك دستگاه قیاسی بکار رود چنانکه درهندسهٔ نظری :

(Gêométrie rationnelle)

هیلبرت آلمانی و شاگردان و پیروان مکتب علمی او چنین تأسیس را تعقیب‌می‌کنند. اشاره‌ای‌که خواجه به دستگاه بنای هندسه می‌کند به صورت مبهم بیان چنین نکته‌ای است ومعلوم می‌کندکه فکردقیق اوباین نکتهٔ باریك پی برده بود و شاید اگرعمر او وفا می‌کرد و درکار پیشین خود در رسالهٔ شافیه تجدید نظری بعمل می‌آورد به حل مشکل فائق می‌شد وکشفی‌که قریب شش قرن بعد از او صورت گرفت درعصر و زمان حیات او انجام می‌گرفت .»

دربحثی‌که طوسی دربارهٔ رسالهٔ **ارشمیدس** دربارهٔ کره واستوانه انجام داده توجه اصلی خود را به اثبات چهار اصل اول ارشمیدش دربارهٔ مقایسهٔ خطوط منحنی و سطوح منحنی معطوف داشته است . درحقیقت ، طوسی‌اصول ارشمیدس رابا یك تعریف جدید عوض می‌کند که طبق‌آن خط ازاجزاء خطی تشکیل شده است‌که دوانتهای هریك ازآنها دونقطه بینهایت نزدیك به‌هم‌می‌باشنداین نقطه‌نظر ، به‌همان اندازه‌که‌به‌طرفداران نظریهٔ اتمی قدیم نزدیك است ، به‌کاشفین حساب دیفرانسیل وانتگرال دراروپای غربی هم نزدیك می‌باشد . طوسی باتکیه به این تعریف اصول ارشمیدس را به‌طریق زیر ثابت می‌کند[۹]:

برای اثبات اینکه از دو خط منحنی محدب واقع بریك صفحه‌که دارای دوانتهای مشترك هستند ، خط منحنی داخلی کوچکتر از خارجی است .

ابتداآنرا برای خطوط شکسته‌ای‌که از وترهای این دو خط منحنی بوجود آمده‌اند ثابت می‌کند ، سپس آنرا برای خطوط منحنی‌تعمیم می‌دهد، زیراخط منحنی جزیك خط‌شکسته که تعداد اضلاع‌آن‌بینهایت است چیز دیگری‌نیست . دراینجا بیش از خود اثبات اصول ارشمیدس ، فکر و نحوهٔ اثبات‌آن ارزش دارد. واضح است‌که این «اتمی بودن ریاضی»که برای این اثبات مورد استفاده قرارگرفته ، بایستی به هدف برسد. از این قبیل افکار می‌شد برای توسعهٔ ریاضی استفاده‌کرد ، همانطورکه ریاضیدانان اروپایی بعداً این‌کار راکردند . ولی خواجهٔ طوسی به مسائل جدیدی از این نوع پرداخت وتنها نظرخود رابه اساس منطقی‌هندسه‌متوجه‌کرد. دربحثی‌که‌طوسی دربارهٔ‌کتاب «کره واستوانه»ارشمیدس‌می‌کند ،به نظریهٔ نسبتها هم تکامل‌بیشتری‌می‌دهد وبخصوص نظریهٔ نسبتهای نامساوی را توسعه می‌دهد. طوسی درابتدای اثر خود۱۱قضیه‌دربارهٔ نسبتهای نامساوی‌ثابت می‌کندتابه‌کمك‌آن به مطالب‌ارشمیدس استحکام منطقی بدهد .

خواجه نصیر باکمك این قضایا توابع :

$y = x(a-x)^2$ و $y = x(a-x)$

را مطالعه می‌کند وماکسیمم و می‌نیمم آنها را پیدا می‌کند . این‌توابع‌به طوسی‌امکان دادکه بتواندرکره‌روابط‌مشکل‌تری‌که به نظر ارشمیدس نرسیده بود مورد مطالعه قراردهد .

طوسی دربحثی‌که دربارهٔ ارشمیدس می‌کند بطوروسیعی ازمفهوم حرکت استفاده‌کرده است . طوسی امکان مقایسه خطوط مستقیم وخطوط منحنی ، سطوح مستوی ومنحنی رابه کمك حرکت نشان می‌دهد .

ب ـ هیئت و نجوم

خواجه‌نصیردرتذکرهٔ‌نصیریه، به‌بحث‌دربارهٔ‌نجوم‌پرداخته وآنرا بطرزمشکلی تنظیم نموده است،که بعدآشرحهایی‌برآن نوشته‌اند .

وی همچنین در آثار خود ، حجم بعضی از کواکب و ابعادآنها را هم واردکرده است .

سارتون چنین اعتراف می‌کند : انتقادی‌که « خواجه

دنباله در صفحهٔ ۱۴۰

نوشتهٔ : C. PO'LYA وابستهٔ آکادمی علوم و استاد افتخاری
مدرسهٔ پلی‌تکنیك فدرال زوریخ ودانشگاه استانفورد

ترجمهٔ : داویدریحان

فصل III- استقراء درهندسهٔ فضایی

در علوم ریاضی هم ، استقراء و تمثیل طرق اصلی نیل به مقصودند .

لاپلاس

I- چند وجهیها- «یك چندوجهی پیچیده دارای تعدادزیادی‌وجه، رأس ویال است». تعریف مبهمی ازاین‌نوع به‌فکرهرکسی‌که ازهندسهٔ فضائی اطلاعات‌کمی داشته باشد، خطورمی‌کند. ولی‌کم هستندکسانی‌که برای تعمق در این تعریف،کوشش بخرج‌داده‌واطلاعات مشخصی‌را ازآن‌استخراج کنند. کاری‌که بایدکرد، عبارت از تشخیص واضح مقادیری است‌که درآن دخالت‌کرده و مطرح ساختن سؤالی‌کاملاً معین است. بنابراین تعداد وجوه، رأسها ویالهای یك‌چندوجهی را به‌ترتیب به‌A،S،F نمایش می‌دهیم و سؤال روشنی به‌طریق ذیل را مطرح می‌کنیم: «آیا درست است‌که درحالت‌کلی ، تعداد وجوه با عدهٔ رأسهازیاد می‌شود؟ آیا F الزاماً با S زیاد می‌شود؟»

برای شروع به‌عمل، طبیعی است‌که چندمثال یعنی‌چند چندوجهی مخصوص‌را بایدامتحان‌کرد. مثلا درموردیك‌مکعب (I شکل۱) داریم :

$F=۶$ ، $S=۸$ ، $A=۱۲$

درموردمنشورمثلث‌القاعده (II شکل۱) داریم :

$F=۵$ ، $S=۶$ ، $A=۹$

برای قدم‌نهادن دراین‌راه می‌بایست چندین جسم صلب راکه درشکل۱ تصویرشده‌اند، امتحان‌کرده وباهم‌مقایسه‌کنیم، این اجسام بغیرازIوII عبارتنداز: منشورمخمس‌القاعده (III)، اهرام‌مربع‌القاعده ، مثلث‌القاعده ومخمس‌القاعده (IV،V،VI) هشت‌وجهی (VII)، برجی‌که در بالای آن یك بام نهاده شده است، یعنی هرمی‌که دربالای‌یك‌مکعب قرار گرفته‌استVIII، ویك «مکعب‌ناقص» IX. کمی قوهٔ‌تجسم خودرابکارمی‌اندازیم واین اجسام صلب را یکی‌بعدازدیگری، به طریقهٔ کاملا روشنی نمایش می‌دهیم، تابتوانیم وجوه ، رأسها ویالها را بشماریم. اعدادبدست آمده به‌صورت جدول زیرند:

شماره	نام چندوجهی	F	S	A
I	مکعب	۶	۸	۱۲
II	منشور مثلث‌القاعده	۵	۶	۹
III	« مخمس‌القاعده	۷	۱۰	۱۵
IV	هرم مربع‌القاعده	۵	۵	۸
V	« مثلث‌القاعده	۴	۴	۶
VI	« مخمس‌القاعده	۶	۶	۱۰
VII	هشت وجهی	۸	۶	۱۲
VIII	«برج»	۹	۹	۱۶
IX	مکعب ناقص	۷	۱۰	۱۵

شکل۱ کمی با جدول انواع بلورها مشابهت دارد و جدول فوق معرف مشابهتهایی با دفترچهٔ یاداشتهایی است‌که یك نفر فیزیکدان نتایج تجربیات خود را در آن ثبت می‌کند. اشکال واعدادگردآوری شده را امتحان‌کرده وباهم مقایسه می‌کنیم و به مثابهٔ معدن‌شناس یا فیزیکدانی که نمونه‌ها و نتایج را به‌قیمت‌کوششهای بزرگی گردآوری می‌کند، عمل

می‌کنیم. حال عواملی دراختیارداریم که می‌توانند جوابگوی سؤال‌مطرح‌شده درقسمت‌اول باشند: «آیا S باF زیادمی‌شود؟» پاسخ «منفی» است؛ مقایسهٔ مکعب وهشت‌وجهی (I وVII) به‌ما نشان دادکه تعداد رأسهای اولی بیشتراز دومی وتعداد وجوه دومی بیشترازاولی است. بدین‌ترتیب، اولین‌کوشش ما برای‌کشف یك‌قانون با شکست مواجه شد.

مع‌الوصف می‌توانیم سعی‌دیگری بکنیم. آیا A با F زیادمی‌شود؟ یابا S؟ قبل‌ازآنکه به‌این‌پرسشها، پاسخی‌بدهیم، به‌جدول‌خودمان‌بازمی‌گردیم. چندوجهیهارا درترتیب‌صعودی ازA قرار می‌دهیم:

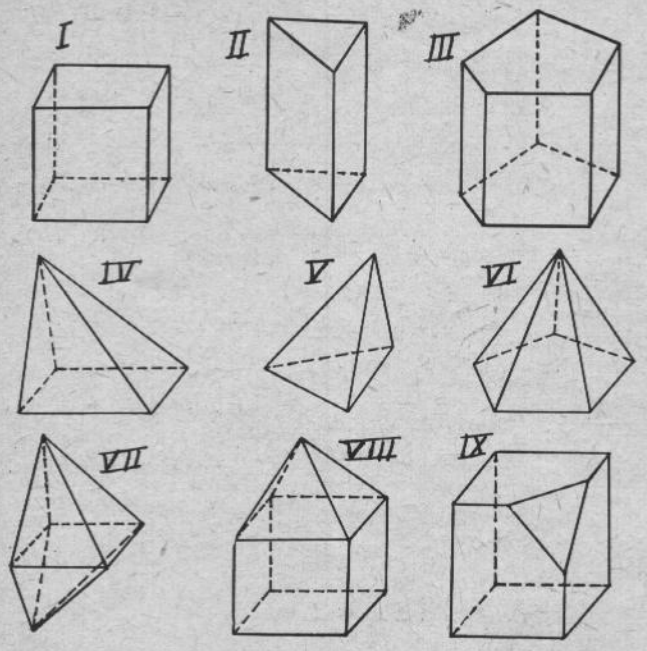
چند وجهیها	F	S	A
هرم مثلث‌القاعده	۴	۴	۶
« مربع‌القاعده	۵	۵	۸
منشور مثلث‌القاعده	۵	۶	۹
هرم مخمس‌القاعده	۶	۶	۱۰
مکعب	۶	۶	۱۰
هشت‌وجهی	۸	۶	۱۲
منشور مخمس‌القاعده	۷	۱۰	۱۵
«مکعب ناقص»	۷	۱۰	۱۵
«برج»	۹	۹	۱۶

اگربه مفروضات طریقهٔ‌جدید بنگریم، بسادگی می‌بینیم که هیچ قاعده‌ای ازنوع طرح‌شده وجود ندارد.

وقتیA از۱۵ به۱۶ ترقی می‌کند، S از۱۰ به۹ تنزل می‌کند. همینطوروقتی ازهشت‌وجهی به منشورمخمس‌القاعده عبورمی‌کنیم A از۱۲به۱۵ ترقی می‌کند، درصورتی‌که F از۸ به۷ تنزل می‌کند. بنابراین، هم F و هم S بطورمنظم با A ترقی نمی‌کنند.

بنابراین، برای‌بار جدیدی در تدوین یك قانون‌کلی با شکست مواجه شدیم. باوجوداین بازهم بزحمت می‌توانیم قبول‌کنیم‌که ایدهٔ اولیهٔ ماکاملا غلط بوده است. این ایده،اگر بطورشایسته‌ای توجیه شده‌باشد، می‌تواند صحیح باشد. اگر درست باشدکه هم F و هم S باA ترقی‌نمی‌کنند، بنظرمی‌رسد که «درمجموعهٔ خودشان» ترقی‌کنند. امتحان مفروضات نشان می‌دهدکه اگرچند وجهیها را درترتیبی که دسته‌بندی کرده‌ایم، اختیارکنیم، مجموع F + S **صعود** می‌کند. همچنین‌می‌توانیم یك رابطهٔ‌دقیق‌را بنویسیم؛ زیرا درتمام‌حالات اشاره‌شده‌داریم:

$$F + S = A + ۲$$



شکل ۱ــ

رابطهٔ فوق درموردنه حالتی‌که درلیست داشتیم،صادق است. بدیع بنظرمی‌رسدکه چنین نظم ثابتی اتفاقی بوده باشد. همچنین می‌توانیم **فرض کنیم** که نه‌فقط درحالات مشاهده‌شده بلکه درتمام چندوجهیها؛ **عدهٔ‌وجوه بعلاوهٔ عدهٔ‌رأسها برابربا تعداد وجوه بعلاوهٔ دواست.**

II ــ تحقیقات اولیه ــ یك‌طبیعی‌دان با تجربه هیچگاه به‌سادگی یك فرضیه را نمی‌پذیرد. حتی اگراین فرضیه درچند حالت قابل‌قبول بنظربرسد وتحقیق‌شود، باز وی‌برآن خرده می‌گیردوملاحظات جدیدی راگردآوری‌کرده وتجارب‌تحقیقی جدیدی را مجسم می‌کند. ماهم می‌توانیم همین‌کاررا بکنیم.

چندوجهیهای جدید را آزمایش می‌کنیم ووجوه، رأسها ویالهایشان را محاسبه‌کرده و F + S را با A + ۲ مقایسه می‌کنیم.

اعدادی راکه بدست می‌آوریم ازدوحال خارج نیستندیا مساویند ویا مساوی نیستند. این خود، نکتهٔ بسیارمهمی‌است که بایدروشن شود.

اگرشکل۱ را ببینیم ملاحظه می‌کنیم‌که قبلا سه چندوجهی منتظم ازقبیل مکعب، چهاروجهی وهشت‌وجهی (I،V وVII) را امتحان‌کرده‌ایم. آخرین چندوجهیهای‌منتظم یعنی بیست‌وجهی ودوازده وجهی را می‌آزمائیم.

بیست وجهی دارای بیست‌وجه است‌که همگی مثلث‌اند

ودرنتیجه $F = ۲۰$ است. این ۲۰مثلث‌دارای $۳ \times ۲۰ = ۶۰$ ضلعندکه دوبه‌دو دریك‌یال مشترکند. بنابراین تعداد یالها ۳۰ است. به‌طریق مشابهی می‌توانیم S را بیابیم. می‌دانیم‌که در حول هررأس بیست‌وجهی، ۵وجه گرد آمده‌اند. بیست مثلث دارای $۳ \times ۲۰ = ۶۰$ زاویه‌اندکه ۵تا ۵تا دریك رأس گرد آمده‌اند. درنتیجه تعداد رأسها:

$$\frac{۶۰}{۵} = ۱۲ = S$$

می‌باشد.

دوازده‌وجهی دارای ۱۲وجه است که‌همگی‌پنج ضلعی‌اند ودرهر رأس آن ۳تا ازاین پنج ضلعیها گرد آمده‌اند. بنابراین نتیجه می گیریم‌که:

$$F = ۱۲ \text{ ، } S = \frac{۱۲ \times ۵}{۳} = ۲۰ \text{ ،}$$

$$A = \frac{۱۲ \times ۵}{۲} = ۳۰$$

اکنون می‌توانیم دو سطر جدید به لیست خودمان بیفزائیم:

چند وجهی	F	S	A
بیست‌وجهی	۲۰	۱۲	۳۰
دوازده وجهی	۱۲	۲۰	۳۰

دراین دوحالت نیز، فرض $F + S = A + ۲$ باز هم محقق است.

III- تحقیقات جدید- تحقیقات اخیر، فرضیهٔ ما را محسوساً قابل‌قبول قلمدادکردند؛ ولی آیا این فرضیه برای سایرموارد‌نیز صادق است؟ واضح است‌که ممکن است چنین نباشد. درشرایط مشابهی، یك‌طبیعی‌دان ازتوفیق آزمایشهای خود مسرور خواهد شد ولی اقلا به تجسم حالات جدیدی نمی‌پردازد. ولی، اکنون‌کدام چندوجهی راآزمایش‌کنیم؟

فرضیهٔ ما تاکنون چنان‌خوب محقق بوده‌است‌که یك تحقیق جدید، خیلی‌کم به اعتماد ما نسبت به‌این فرضیه، می‌افزاید، آنقدر ناچیزکه انتخاب‌یك چندوجهی جدیدوشمارش عوامل آن بزحمتش نمی‌ارزد. آیا اثبات جالبتری وجود دارد که بتوانیم با آن فرضیهٔ خودرا برکرسی بنشانیم؟

شکل۱ را نگاه می‌کنیم، می‌بینیم‌که اجسام نشان داده شدهٔ درروی اولین‌سطر، همطبیعتند؛ همه منشورند. همینطور دومین سطرمتعلق به اهرام است. فرضیهٔ ما برای سه‌منشورو سه‌هرم شکل۱ با ارزش است؛ ولی آیا این فرضیه برای تمام منشورها وتمام هرمها با ارزش است؟

اگرمنشوری دارای n وجه‌جانبی باشد، جمعاً $n + ۲$ وجه، $۲n$ رأس و $۲n$ یال خواهد بود. هرمی‌که دارای n وجه‌جانبی است‌کلا دارای $n + ۱$ وجه، $n + ۱$ رأس و $۳n$ ریال است، بدین‌ترتیب می‌توانیم دوسطر جدیدبه‌لیست‌خود اضافه‌کنیم:

چند وجهی	F	S	A
منشوربا n وجه‌جانبی	$n + ۲$	$۲n$	$۳n$
هرم با n وجه‌جانبی	$n + ۱$	$n + ۱$	$۲n$

پس فرضیهٔ $F + S = A + ۲$ نه‌تنها برای یك یادوچند وجهی جدید درست است، بلکه برای مجموعهٔ نامحدودی از چندوجهیها صادق‌است.

IV- آزمایش مشکل- یادآوریهای اخیر به‌صورت قابل‌توجهی به اعتمادی‌که درمورد فرضیهٔ خود داشتیم افزود ولی طبیعی است‌که اثباتی را ارائه نداد. چه بایدکرد؟ آیا بایدبه‌آزمایشهای خود درموردچندوجهیهای خاص جدیدادامه دهیم؟ بنظرمی‌رسدکه درمورد این فرضیه نتوانیم تحقیقات ساده‌ای را با توفیق انجام دهیم. همینطور می‌توانیم تحقیق دامنه‌داری‌کنیم، بلکه بتوانیم آنرا مواجه با شکست‌کنیم.

مجدداً مجموعهٔ چندوجهیهای (شکل۱) رانگاه می‌کنیم. چندوجهیهای موجودعبارتند ازمنشورها(I، II، III)، هرمها (IV،V،VI) وچندوجهیهای منتظم (I،V،VII)؛ولی ماتمام آنها را موردبررسی قرارداده‌ایم. چه باقی می‌ماند؟ درشکل ۱یك «برج» (VIII) را نشان می‌دهدکه ازگذاردن یك «بام» برروی یك مکعب بدست‌آمده است. دراینجا امکان تعمیم را مشاهده می‌کنیم. به‌جای مکعب، یك‌چندوجهی غیرمشخص‌را اختیار می‌کنیم، یکی‌ازوجوه آنرا انتخاب می‌کنیم ویك «بام» روی آن قرارمی‌دهیم. فرض می‌کنیم‌که A،S،F به ترتیب عدهٔ وجوه، رأسها ویالهای چندوجهی اولیه بوده و n عدهٔ اضلاع وجه انتخاب شده‌باشد. روی این‌وجه یك هرم با n وجه‌جانبی قرارمی‌دهیم، بدین‌ترتیب یك‌چندوجهی‌جدیدبدست می‌آوریم. تعدادوجوه، رأسها ویالهای‌آن چقدراست؟ یك‌وجه (همانی‌که انتخاب‌کرده‌ایم) مخفی شده است وn وجه جدید (n وجه‌جانبی‌هرم) بقسمی ظاهرشده‌اندکه چندوجهی جدید دارای $F - ۱ + n$ وجه است. تمام رأسهای چند وجهی‌اولیه متعلق به‌چندوجهی جدیدند ولی‌یك رأس اضافی وجود داردکه

دراین صورت می‌شود $S+1$ رأس. همینطور، تمام یالهای چندوجهی قدیم متعلق به جدیدهستند ولی n یال را اضافه کرده‌ایم (یالهای جانبی هرم)، ازآنجا تعدادیالهای چندوجهی جدید $A+n$ می‌شود.

این نتایج را خلاصه می‌کنیم. چندوجهی اولیه دارای Fوجه، Sرأس و A یال است، درصورتی که‌چندوجهی مجهزبه «بام» دارای $F+n-1$ وجه، $S+1$ رأس و $A+n$ یال است. آیا این‌نتایج بافرضیهٔ‌ما متوافقند؟

اگر رابطهٔ:

$$F+S=A+2$$

درست باشد رابطهٔ:

$$(F+n-1)+(S+1)=(A+n)+2$$

نیز درست است. به بیانی دیگر، درصورتی‌که فرضیه برای اولی محقق شود برای حالتی‌که چندوجهی مجهز به‌بام‌می‌شود نیزمحقق است.

بنابراین، فرضیهٔ ماکه درموردچندوجهیهاانجام دادیم از یك‌آزمایش مشکل نیزپیروزمندانه بیرون آمد. تعداد بسیار زیادی چندوجهی وجودداردکه‌می‌توانیم ازروی‌چندوجهیهایی که قبلاآزمایش‌کردیم، توسط الصاق متوالی «بامها» بدست آوریم؛ فرضیهٔ ما برای تمام‌آنها محقق است.

ملاحظهٔ آخرین چندوجهی شکل۱ یعنی «مکعب‌ناقص» جادهٔ مشابهی را برروی ما می‌گشاید. به‌جای تکیه برروی مکعب، این عمل را برروی یك چندوجهی غیرمشخص و با حذف یك‌رأس‌که بطوردلخواه انتخاب‌شده‌است، انجام‌می‌دهیم. فرض می‌کنیم که‌F،Sو A به‌ترتیب عدهٔ وجوه، رأسهاویالهای چندوجهی جدیدباشد و n معرف تعداد یالهایی باشدکه‌ازرأس انتخاب شده منشعب می‌شوند. اگراین رأس راحذف کنیم، به‌چندوجهی اولیه، یك‌وجه (nضلعی)، n یال‌جدید وهمچنین n رأس جدیداضافه‌می‌کنیم ودرعوض‌یك‌رأس را ازدست‌می‌دهیم بطورخلاصه چندوجهی «ناقص» به‌ترتیب‌دارای $F+1$ وجه، $S+n-1$ رأس و$A+n$ یال است. رابطهٔ:

$$F+S=A+2$$

رابطهٔ:

$$(F+1)+(S+n-1)=(A+n)+2$$

را بهمراه دارد.

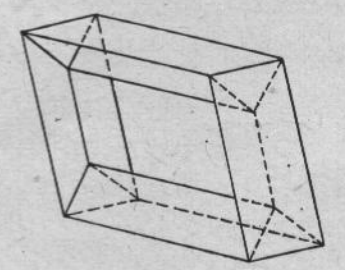
بنابراین، فرضیهٔ ما برای انجام عملیاتی‌که‌درمورد چند وجهیها انجام دادیم، نسبتاً محکم است وازیك آزمایش مشکل پیروز بیرون آمده است.

مواردداخیرالذکررا می‌توانیم به‌عنوان براهین قطعی بسیارقوی درنظر بگیریم. همچنین ممکن است چیزهای‌دیگری را پیش‌بینی‌کنیم: چاشنی اثبات‌راباعزیمت ازیك‌چندوجهی‌ساده مانند چهاروجهی یا مکعب، که فرضیهٔ ما برای آن با ارزش است، می‌توانیم بوسیلهٔ حذف‌یا الصاق «بامها» تعدادبیشماری ازچندوجهیهای جدید را بدست‌آوریم‌که قضیه برای‌آن‌صادق باشد. آیا بدین منوال می‌توانیم **تمام** چندوجهیهارا بدست آوریم؟ درصورتی‌که این موضوع صحت داشته‌باشد ما دارای یك اثبات‌کلی هستیم. ازطرفی دیگر، آیا عملیات‌دیگری‌وجود داردکه مانند حذفها والصاقهای «بامها»، صحت فرضیهٔ ما را دگرگون نکند.

۷ـ تحقیق و بازهم تحقیقـ روشن‌فکری طبیعدان مجرب اساساً با روشن‌فکری منکرمتفاوت نیست ولی کامل‌تر ازآنست. هرکدام پس‌ازچند مشاهده فرضیهٔ خودرا پایه‌ریزی می‌کنند و تمام هم خودرا مصروف تأیید ویاردفرضیهٔ خود می‌کنند. یك تأییدیه برای یك فرضیه، آنرا حقیقی‌تر جلوه می‌دهد، درصورتی‌که انکارآن، آنراواژگون می‌نمایدواختلاف اساسی همین‌جاست: منکرحالات نوع‌اول را جستجومی‌کند درصورتی‌که عالم درپی حالت دوم است. لازم به توضیح‌است که‌هرکدام ازمنکران ویا عالمان دارای نوعی بی‌ثباتی هستند که آنرا روی چیزهای متفاوتی اعمال می‌کنند. هرکس‌حتی‌پیش خودش هم، دوست ندارد اقرارکندکه اشتباه کرده است؛ حتی مایل نیست‌که به‌حالاتی برخوردنمایدکه فرضیه‌اش را ردنماید وازآنها فرارمی‌کند، حتی اگراین حالات خودی نشان دهند، وی سعی می‌کندکه‌آنها راکناربگذارد. برعکس، عالم، آماده است‌که بداندکه فرضیه‌اش ناصحیح است، ولی دوست ندارد که یك مسئله را پادرهوا نگاهدارد. یك تأییدیه را نمی‌توان مانند انکار، برای تدوین قانون قطعی بکاربرد. عالم درپی مقصد قطعی خود، حالاتی راکاوش می‌کندکه منتهی به نفی فرضیه شود واین‌خود نکتهٔ بسیارمهمی است. درصورتی‌که‌به حالاتی برخوردکنیم‌که قبلا نامساعد فرض می‌شد و درخاتمه به‌یك تأییدیه بینجامد، فرضیه ازآزمایش مربوط پیروز بیرون می‌آید. هرقدرمشکلات عظیمترباشد، پیروزی مفهومترخواهد بود؛ درصورتی‌که فرضیه‌ای از امتحان مشکلی پیروز بیرون بیاید، به‌آن اعتمادزیادی می‌کنیم‌وآنرا قویاً موردتأییدتجربی قرارمی‌دهیم. درهر موقعیتی می‌بایست تحقیقات زیادی انجام داد. ازهرموقعیتی‌که بتوان به‌مشکلات برخوردکرد، می‌توان به‌هرطریقی به‌هدف قطعی نزدیك شد واین خودمبین‌ارجحیت عالم است.

حال به مسئلهٔ مخصوص خود برمی‌گردیم و می‌بینیم که چگونه تبصره‌های پیشین می‌توانند درمورد «کاوشهای تجربی دربارهٔ چندوجهیها»یی که موردنظر ماست، بکاربرده شوند. هرحالت جدیدی که برای آن رابطهٔ $F+S=A+۲$ صادق باشد، افزایندهٔ اعتمادی است که به‌حقیقت فرضیه در حالت کلی داریم. ولی پس‌از یك‌رشته تحقیقات متشابه خسته می‌شویم. یك حالت مساعد فرضیه وکمی متفاوت با حالت آزمایش شده فقط‌کمی به اعتماد ما می‌افزاید. زیرا، حتی‌قبل از اینکه دست به آزمایش بزنیم، مشاهده‌کردیم‌که این حالت کمی متفاوت هم به‌همان طریق موجود است. خواست ماتنها یك تحقیق متمم نیست بلکه **تحقیقی به‌گونهٔ دیگر** است. درصورتی‌که مراحل مختلف کاوش خودرا بازبین کنیم (بخش II و III و IV) مشاهده خواهیم‌کردکه هرکدامشان ازنوعی تحقیق برخوردار است‌که ارزش آن خیلی بیشتر از ارزش و تحقیق قبلی است. درهر مرحله، فرضیه در مورد دیگردستهٔ **حالات وسیعتر** مورد تحقیق قرار می‌گیرد.

VI - امتحان حالت خیلی متفاوت - چون خواستار تنوع هستیم، چندوجهیهایی را جستجو می‌کنیم‌که با حالاتی‌که اخیراً آزمودیم، بسیار متفاوت باشند. می‌توانیم قاب یك تابلورابه‌عنوان یك چندوجهی درنظر بگیریم. چوب طویل با قاعدهٔ مثلثی را اختیار می‌کنیم و آنرا به چهار پاره تقسیم می‌کنیم و این اجزاء را در انتهایشان طوری پهلوی هم قرار می‌دهیم تا یك قاب بدست بیاید، شکل۲. ایجاب می‌کندکه این قاب‌را روی میزی قرار دهیم به‌نحوی‌که‌یالهای متعلق به‌چوب اولیه، افقی باشند. چهارسه‌تا یعنی ۱۲ یال افقی و همچنین چهارسه‌تا یال غیرافقی طوری وجوددارندکه تعدادکل یالها $A=۱۲+۱۲=۲۴$ باشد. درصورتی که وجوه و رأسها را محاسبه‌کنیم مقادیر $F=۴\times۳=۱۲$ و $S=۴\times۳=۱۲$ بدست می‌آید. بنابراین $F+S$ برابر با ۲۴ و مخالف با:



$A+۲=۲۶$

است. فرضیهٔ ماکه در منتهای‌کلیت خود قرارگرفته بود، غلط از آب درآمد!

واضح است‌که هرگزقصدنداشته‌ایم‌که‌به‌گزارهٔ خودمان چنین‌کلیتی بدهیم، چراکه همواره به‌چند وجهیهای محدب‌یا به بیانی دیگر، چند وجهیهای مشابه باکره، و نه به چند وجهیهای مشابه‌باحلقه‌که‌قاب نوعی‌ازآن‌است، می‌اندیشیده‌ایم ولی این عذرها موجه نیستند، پس باید موقعیت خودراتغییر دهیم و گزارهٔ نخستین خودرا توجیه‌کنیم. بسیار ممکن است که این ضربهٔ ناگهانی راکه برما وارد آمد به نفع ما باشد و ما را به فرم توجیه شده و مشخصتر فرضیه راهنمایی‌کند. به هرحال دراینجا به اعتماد ماخلل وارد شده است.

VII- مشابهت - مثال «قاب» ضربه‌ای‌سهلك برفرضیهٔ به‌صورت اولیه وارد ساخت ولی به‌راحتی می‌توانیم‌آنرا به صورت اصلاح شده‌ای (که امیداست‌که بهتر نیز شده باشد)با قیود مهمی عمر دوباره ببخشیم.

چهاروجهی، جسمی محدب‌است، همینطوراست‌مکعب وسایرچندوجهیهای مجموعهٔ شکل۱ و همینطورچندوجهیهایی که می‌توان بوسیلهٔ حذفها و الصاقهای «محتاطانهٔ» بامها (با قراردادن بامهای به حدکافی مسطح روی وجوه مختلف) بدست‌آورد. به‌هیچ طریقی نمی‌توانیم این عملیات را از روی چندوجهیهای محدب یا ازنوع «کروی» درمورد اجسام‌صلب «مشابه با حلقه» اعمال‌کنیم.

پس ازاین مشاهده، توضیح بسیار مفیدی می‌دهیم بدین نحوکه فرض می‌کنیم‌که رابطهٔ $F+S=A+۲$ که مابین وجوه، رأسها و یالها برقرار است، برای هرچند وجهی **محدب** قابل اجراست. (بدون شك ارجح است که به چند وجهیهای ازنوع «کروی» قناعت‌کنیم ولی مایل نیستیم‌که بحث خودرا برای تشریح تعریف دقیق این‌عبارت قطع‌کنیم.)

شانس زیادی وجود داردکه این فرضیهٔ جدید صحیح باشد. معذالك، به اعتماد ما خلل وارد شده است و برهان جدیدی راکه درخور آن باشد، باید جستجو کنیم. بنظر می‌رسدکه چشمه‌های بسیارساده ته‌کشیده است ولی می‌توانیم امیدوار باشیم‌که از استدلال مشابهی، استفاده‌کنیم. آیا حالت مشابه و ساده‌تری‌وجود داردکه بتواند این موضوع را روشن سازد.

چندضلعیها باچندوجهیها متماثلند. یك چندضلعی‌قسمتی از صفحه است، همچنانکه چندوجهی قسمتی ازفضاست. چند ضلعی دارای تعدادی رأس S (رأس زاویه) و تعدادی یال (یاضلع) A است. واضح است‌که $S=A$ است.

باوجود این رابطه‌که برای چند ضلعیهای محدب قابل ارزش است، بسیار ساده بنظر می‌رسد و می‌توانیم ازآن‌برای مطالعهٔ بسیار پیچیدهٔ $F+S=A+۲$ که فرض می‌کنیم که برای تمام چندوجهیهای محدب با ارزش است، استفاده‌کنیم.

درصورتی‌که این‌موضوع برای ما بسیار جالب باشد، سعی می‌کنیم‌که به‌این دورابطه شکلهای نزدیکی بدهیم. برای نیل به‌این نتیجه روشی ماهرانه وجوددارد. ابتدا اعداد را

دنباله در صفحهٔ ۱۷۳

مکانیك کوانتم چیست؟

نوشتهٔ : و. ای. ری‌دنیك

ترجمهٔ : علیرضا توکلی صابری
دانشجوی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

دنباله از شمارهٔ قبل

«دنیای نامرئی وغیرمحسوس»

فیزیکدانان به‌سختی گام برمی‌داشتند. پیشتر گامهایی به‌دنیای جدید برداشته‌بودند، ودرتمام این مدت مطمئن بودند که فقط درجزئیات اختلافاتی وجوددارد نه در اصول کلی. لیکن اکنون آنان درپهنه‌ای ازکشفیات قرار گرفته بودندکه احتمال وقوع هرچیزی امکان‌داشت؛ ازجانورهای عجیب‌تا هیولاهاو انسانهای وحشی.

حدودی‌برای تصورات مغزی کنجکاو وپرسشگرنمی‌توان قائل شد.

فیزیکدانها حتی بیشترازکاشفین دروضع نامعقولی قرار گرفته بودند، زیراکاشفین ازکشف عوامل طبیعی وبطورعموم عینی‌مانند قاره‌ها، کوهها ودریاهاکه دراطراف زمین‌پراکنده بودند، مأیوس وناامید می‌شدند. دردنیای‌جدید، دانشمندان‌با موجودات عجیب وغریبی روبرو می‌شدند که حتی نامی که بیان‌کنندهٔ‌کیفیت این‌موجودات باشد نمی‌توانستند برایشان‌پیدا نمایند. حتی‌تفکرات دربارهٔ این‌موجودات نمی‌توانست تصویر روشنی ازاین‌دنیای جدیدوغیرعادی اتمها بدست‌دهد.

اما باگسترش علوم‌لازم بودکه تصوراتی تکمیل شوند، اهمیتی نداشت‌که این‌تصورات غیرمتعارفی وناسازگار باشند. دشوارمی‌نمودکه‌مکانیك‌کوانتم‌ساخته‌شود، لیکن این کار بایستی عملی می‌شد.

مطمئناً ساختن نظریه‌هایی از روی مدلهای تصورکردنی دنیای اطراف‌ما آسانتربود، ولی‌راجع به‌ساختن مدلهایی برای دنیای بینهایت‌کوچکهاکه‌درساختمانشان‌اختلافات‌شگرفی‌وجود داشت چه‌می‌گویید؟ چه، این‌نوع‌مدلها نمی‌توانستندهیچگونه خدمتی‌به‌ما بکنند وبلااستفاده می‌ماندند.

خوب، حال‌اگر اندیشیدن دربارهٔ مدل برای‌راهنمایی تصورات فکری‌ما غیرممکن بود، به‌ناچار با مدلهایی سروکار داشتیم‌که به‌هیچ روی‌قابل تصور نبودند. سالها گذشت‌ومدلها مشکلات‌فراوانی‌ببارآورده‌وبیش‌ازحد غیرقابل‌تصورشده‌بودند، برای فیزیکدانها نیزگران تمام می‌شد، چون‌کسی نمی‌خواست ازاین مدلها دست‌بکشد. واین‌به‌غایت ناراحت‌کننده‌بود، زیرا وقتش سر می‌رسید ـ اگردر این داستان‌کمی به جلو برویم ـ به‌وقتی می‌رسیم‌که اجباراً تمام‌این‌مدلها دورریخته شده وجای آنها رامدلهایی پیچیده‌تر وغیرعادی‌ترکه حتی‌برای تصورشان مشکلات فراوانی وجود داشت، پرمی‌کند. این‌امرچگونگی پیشرفت علم رابیان‌می‌دارد.

عامل مهم‌پیشرفت‌علم‌وجود فیزیکدانهای مشهوری‌بود که دراین قرن‌زندگی می‌کردند. آنان قادربودندکه ازراههای پرپیچ وخم‌تجریدات و مدلها عبورنموده وبه‌هدف خودبرسند، آنان باموفقیت توانستند نظریهٔ بسیطی را ارائه‌دهندکه‌دنیای جدید بینهایت کوچکها را توجیه می‌نمود. خلاصه آنکه آنان توانستند براین مبنا به‌درخشانترین‌کشفیات درتاریخ تمدن‌بشر نایل‌آیند. آنان رازانرژی هسته‌ای راکه مانندمشروبی سالیان دراز درشیشه‌ای نگهداری می‌شدکشف‌کردند.

صنعت نیروی اتمی والکترونیك امروزه بدون وجود مکانیك‌کوانتم نمی‌توانست هستی‌داشته باشد.

«دشوار لیکن جالب»

ماهیت‌غیرطبیعی‌ذرات‌مکانیك‌کوانتمی و واقعیت‌غیرقابل تصوربودن‌این‌ذرات، موضوع‌رابرای‌تشریح دشوارمی‌ساخت. شاید اشتباهاتی‌درخودمکانیك‌کوانتم‌وجودداشت. مامی‌دانستیم که مشکل بتوان راجع به‌چیزی‌که درحال توسعه وتغییرات پی‌درپی است صحبت کرد، بخصوص یك‌چنین گسترش سریعی که خالق نظریه‌های محکمی بوده است. نه فقط به خاطر این موضوع، بلکه خود فیزیکدانها نیزتا به‌امروز دربارهٔ معانی مختلف مکانیك‌کوانتم وسیماهای ویژهٔ‌دنیای خرد که این‌مکانیك

آن راتشریح کرده است، به‌بحث ومجادله می‌پردازند.

حال‌ما به‌عصرفضا قدم گذارده‌ایم، جایی که دوباره‌فیزیك را برای فرش‌نمودن این راه فراخوانده‌اند. فیزیك مربوط به‌فضای عالم هستی بافیزیکی که «زمینی» است ودنیای بینهایت کوچکهامحوراصلی آن است، اختلافات اساسی‌دارد.

عقایدباستانی مبنی براینکه برخوردهای‌بزرگ‌وکوچکی در فضا صورت می‌گیرد، تصدیق وتأییدشدند. ستارگان‌عظیم و اتمهای خرد نه فقط به‌یکدیگر نزدیك هستند بلکه به‌عنوان واحدهایی مکمل‌یکدیگرند.

اغلب‌مشکل‌وغیرممکن‌است که‌بدون‌مراجعه به‌نمودهای بصری راجع‌به‌علوم چیزی بدرستی نوشته شود. بنابراین‌برای درك مکانیك‌کوانتم، اگرهیچ‌مدلی هم درطبیعت وجودنداشته باشد، باید تلاش‌کردکه قیاسها وشباهتهایی را برای درك آن پیداکنیم. به‌هرحال، چنین قیاسهایی دقیق وظریف نبوده وفقط کمك می‌کنندکه به‌سادگی تصوری‌کلی ازاشیاء بدست‌آوریم.

برای مثال، معنای این‌جملهٔ «الکترونها روی مداری به‌دور هسته‌ای اتمی می‌گردند» در نظر ما مانند جملهٔ «برف چیزی‌سفید، تقریباً شبیه نمك است وازآسمان فرو می‌ریزد» برای ساکنین‌مناطق حارهٔ‌آفریقا است. ایجاد حرکت‌یك‌الکترون در اتم و وجود الکترونی‌که غیرقابل اندازه‌گیری است‌خیلی پیچیده‌تراز تصورکردن آنها ومعرفت امروزی مانسبت به‌آنها است. نه‌فقط امروزه‌بلکه‌فردا و هزاران سال‌پس ازاین نیز این کار مشکل است.

در حقیقت تکامل مکانیك‌کوانتم اصلاحاتی رادر زمینهٔ گونه‌گونی بی‌حد وبیشمار خواص الکترون وهمچنین‌چیزهای دیگر بوجودآورده است.

امروزه‌ما دانشی ناقص‌دربارهٔ دنیای اطراف خودداریم. تازه‌شروع کرده‌ایم‌که به‌ژرفنای زمین، اقیانوسها و جو دست‌اندازی‌کنیم. هنوز برای درك آثار حیات در دشتها، جنگلها، کوهها، رودخانه‌ها وبیابانها دراول کاریم.

اگرچنین است، چطور باید انتظار داشته‌باشیم که‌دربارهٔ دنیای اتمها، هستهٔ اتمی و ذرات بنیادی، که هنوز مشاهدهٔ بصری و عمل شبیه بدیدن آنها مشکل است، چیزی بدانیم. پژوهشهای مفصلی در این‌علم برای‌صدها وهزاران سال‌پس از این‌بایدانجام گیرد. چه‌اکنون ما درسرچشمه رودخانهٔ‌قوی و پرزورعلم‌قرار گرفته‌ایم.

حتی چیزهای بهت‌آوری ازاین دنیای جدید کشف‌شده برای پژوهشگران آشکار شده است. درحقیقت‌آنچه راکه این علم جدیدبه‌روی تکنولوژی، صنعت، کشاورزی وطب گشوده است، افقهای خیالی‌ای هستندکه الهام‌دهنده وروح‌بخش می‌باشند. ایستگاههای نیروی‌هسته‌ای، ایزوتوپهای رادیواکتیو، ومولدهای خورشیدی، تعدادکمی ازاین افقها هستند. ما در آستانهٔ مهارکردن‌آزمایشهای گرمازای هسته‌ای ونفوذبه‌فضای خارج هستیم. تمام این‌فضیلتها وآیندهٔ خیره‌کننده‌اش درعصرما توسط دانه‌های ریزی‌که ۶۰ سال پیش به‌روی خاك حاصلخیز دانش توسط **ماکس پلانك**پاشیده شده بود، روییده‌اند، و هنوز توسط گروهی از دانشمندان برجسته بدقت‌کشت‌کاری و آمادهٔ بهره‌برداری‌می‌شوند.

پایان فصل‌اول

تحقیقاتی ... (دنباله صفحهٔ ۱۳۳)

نصیرالدین طوسی» برمجسطی وارد ساخته ، دلالت‌برنبوغ و تبحر اودر علم نجوم دارد و می‌توان انتقاد او را اولین گام‌در ایجاد اصلاحات «کوپرنیکی» دانست.»

خواجه نصیرنظریه‌ای‌که پایهٔ افسانه‌های خرافی یونان بود و گروهی از فلاسفهٔ مسلمان هم‌آنرا از یونانیان آموخته بودند همه رااز پایه و اساس منهدم و ویران ساخت و اساس هیئت قدیم را قبل از**کوپرنیك** و**گالیله** فرو ریخت و این موضوع اظهارات بعضی از خاورشناسان مانند **رنان** را که می‌گفت « فلسفهٔ اسلامی همان فلسفهٔ یونانی است نهایت با حروف عربی نوشته شده»! پایمال ونقض می‌کند.

بارون کارول‌دوو در بارهٔ خواجه نصیر و تأسیس رصدخانهٔ مراغه‌ودقت ابزار وآلات نجومی‌که درآن رصدخانه بکار رفته بود و اکتشافات گوناگون‌که دراین علم نصیب او گردیده است به تفصیل سخن می‌راند و تصریح می‌کندکه : «آلات نجومی‌که در مراغه ساخته می‌شد فوق‌العاده قابل تحسین بود»

طوسی روش‌تازهٔ استفاده ازساعت‌آفتابی را برای‌تحقیقات فضایی‌کشف‌کرد، ازجمله ابراز وآلات نجومی رصدخانهٔ‌مراغه که بدون شك یکی ازدو سه رصدخانهٔ بسیار مهم عالم‌اسلامی ودر واقع درحکم یك‌آکادمی علوم بوده است عبارتند از :

ذات‌الحلق بزرگ .

ذات‌السموت‌که مشابه آنرا **تیکوبراهه** بعداً مورد استعمال قرارداد .

ربع‌مجیب‌متحرك، کرهٔ‌فلکی، کرهٔ‌زمین وانواع‌اسطرلابها.

سدیو می‌گوید ـ سوراخی درگنبد بزرگ تعبیه شده بودکه ازآن اشعهٔ‌آفتاب روی دیوار داخل رصدخانه می‌افتاد وبدین‌وسیله ارتسام‌اشعه‌آفتاب ، درجه‌ها ودقایق حرکت‌یومیهٔ آن وارتفاع آن در مراسم مختلف و تسلسل ساعات بیرون می‌آمد. این رصدخانه یکی ازمجهزترین مراصد قبل ازکشف دوربین بود ، طوسی تمام معلومات نجومی راکه اکنون‌بدون دوربین حاصل می‌گردد بدست‌آورده بود .

محاسبات تقریبی

نوشتهٔ : محمد رکنی قاجار

فصل اول ـ تقریبات عددی

تعریف ـ مقدار تقریبی هرعدد عددیست که تفاضل آن ازعدد مطلوب بقدرکفایت کوچك باشد .

فرض می‌کنیم P عددی باشدکه مقدارصحیح آن دردست نباشد، دراین‌صورت گویندکـه p مقدار تقریبی P است اگـر $\lambda = |P - p|$ مقداری باشد خیلی‌کوچك .

هرقدر λ کوچکتر باشد p به P نزدیکتر است.

هرگاه مقدار تقریبی ازعدد مطلوب‌کوچکتر باشد آن‌را **تقریبی نقصانی** ولی اگـر از عدد مطلوب بـزرگتر باشد **تقریبی اضافی** گویند .

مثلا ۲۵/۸۷۴۳ مفروض است و این عدد بین‌دوعدد دیگر که به‌طریق غیر معینی بدست آمده واقع است؛

۲۵/۸۶ < ۲۵/۸۷۴۳ < ۲۵/۸۸

تقریبی نقصانی — عدد — تقریبی اضافی

عدد ۲۵/۸۶ تایکصدم تقریب نقصانی وعدد ۲۵/۸۸ تا یکصدم تقریب اضافی به ۲۵/۸۷۴۳ نزدیك می‌باشند.

تعریف ـ تفاضل $P - p = \lambda$ را **خطا** گویند. هرگاه دو خطا هر دو نقصانی و یا هردو اضافی باشند آنهارا متحد ـ الجهته گویند ولی اگریکی اضافی و دیگری نقصانی باشدآنها را مختلف‌الجهته گویند .

ارقام صحیح ـ گویندکه یك مقدار تقریبی دارای m رقم صحیح است درصورتی‌که m رقم ازسمت چپ‌آن مساوی m رقم ازسمت چپ عدد مطلوب باشد .

مثلا عدد ۲۵/۸۶ عددی‌است تقریبی با ۳ رقم صحیح زیرا۳رقم سمت چپ‌آن با سه‌رقم‌ازسمت چپ‌عدد۲۵/۸۷۴۳ مساوی است.

صفرهایی‌که درسمت چپ ارقـام با معنی واقعند جـزو ارقـام صحیح محسوب نمی‌شونـد . مثلا ۰/۰۰۰۰۴۳۷ کـه مقدار تقریبی عـدد ۰/۰۰۰۰۴۳۸۵۲ است دارای دو رقـم صحیح است.

درمحاسبات عددی همیشه دومسئلهٔ ذیل پیش می‌آید :

۱ـ اگر دریك محاسبهٔ عددی هریك از اعداد تاتقریب معینی‌داده شده باشند می‌خواهیم بدانیم‌که جواب مسئله تاچه تقریبی بدست می‌آید (تاچند رقم صحیح می‌باشد) .

۲ـ اعدادمعلوم دریك‌مسئله را تاچه تقریبی فرض‌نمائیم که جواب مسئله تاتقریب معینی صحیح باشد (دارای m رقم صحیح باشد).

حل دومسئلهٔ فوق به دوطریق صورت مـی گیرد : اول طریقهٔ خطاهای مطلق، دوم طریقهٔ خطاهای نسبی.

تعریف خطای مطلق ـ تفاضـل بین مقدار صحیح ازمقدار تقریبی آنرا خطای مطلق گویند.

اگـر N مقدار صحیح عدد مفروض بـاشد و n مقدار تقریبی همان عدد باشد ، خطای مطلق یا e عبارتست از :

$e = n - N$ یا $e = N - n$

بنـا بر آنکه خطـای تقـریبی نقصانی و یـا خطـای تقـریبی اضافی باشد. پس اگرمقدارصحیح عددی دردست باشد می‌توانیم به‌سهولت مقدار خطائی راکه در محاسبهٔ عدد تقریبی مرتکب شده‌ایم بدست‌آوریم. اما همیشه مقدارخطا صحیحاً معلوم‌نیست و عموماً حدود خطا برای‌ما معلوم می‌باشدکه غالباً عبارتست از یك واحد اعشاری‌که تجاوز خطا ازآن ممکن نیست.

مثلا اگر $\pi = ۳/۱۴۵۹۲$ فرض شود و مقدار تقریبی π را۳/۱۴ بگیریم، خطانقصانی‌است وکوچکتر از $\frac{۱}{۲۰۰}$ واگر $\pi = ۳/۱۵$ فرض‌شود خطا اضافی ومقدارآن از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچکتر است .

قضیه ـ اگر دریك عدد تقریبی نقصانی از طرف چپ تمام ارقـام صحیح را نگهداشته و بقیه را حذف نمائیم و یـك

واحدبه‌اولین‌رقم‌سمت راست بیفزائیم واحدخطا تغییرنمی‌کند. مثلا ۴۳/۶۶۹۵۷ عددی است تقریبی نقصانی‌که مقدارصحیح آن ۴۳/۶۷۹۴ است و خطای مطلق‌کوچکتر است از ۰/۰۱ حال اگر به‌جای عدد تقریبی ۴۳/۶۷ را اختیار نمائیم بازحد خطا از ۰/۰۱ کمتر است.

اگر در عدد تقریبی بالا ۰/۰۰۹۵۷ را حذف نمائیم خطای جدیدی مرتکب شده‌ایم‌که از ۰/۰۱ کمتر است وچون فرضاًهم خطا از۰/۰۱ کمتربود اگر ۴۳/۶۶ را اختیار نمائیم خطای‌کلی‌کمتر از ۰/۰۲ می‌شود اما اگر یك واحد به‌آخرین رقم اضافه نمائیم ۴۳/۶۷ می‌شود وخطا به‌اندازهٔ ۰/۰۱ کمتر می‌شود. درنتیجه باز خطا از ۰/۰۱ کمتر است پس ۴۳/۶۷ مقدارتقریبی ۴۳/۶۷۹۴ است تا ۰/۰۱ تقریب نقصانی. بطور کلی جهت خطا معلوم نیست (یعنی نمی‌دانیم که خطا نقصانی است و یا اضافی) .

جمع

قضیه ـ خطای مطلق مجموع p عدد تقریبی از p برابر بزرگترین خطاکمتراست.

اگر n_1 و n_2 و n_p.... اعداد تقریبی مفروضی باشند و خطاهای مطلق آنها e_1 و e_2... و e_p باشند (تمام اعدادتقریبی نقصانی یا اضافی‌اند) دراین‌صورت:

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots e_p$$

e خطای مطلق‌مجموع $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ است.

۱ـ نتیجه می‌شودکه خطای مطلق مجموع. چندین عدد تقریبی (نقصانی یا اضافی) متحدالجهت مساوی مجموع‌خطاهای آن اعداد است .

۲ـ اگر بعضی اضافی و بعضی نقصانی باشند خطای مطلق مجموع‌آن اعداد کوچکتر از مجموع تمام آن خطاها است پس:

$$e < e_1 + e_2 + \cdots + e_p$$

و اگر e_k ازهمهٔ خطاها بزرگتر باشد $e < p.e_k$

مسئلهٔ۱ـ باچه تقریبی می‌توان مجموع p عدد تقریبی را بدست‌آورد وقتی‌که حداعلای خطای هریك از آن اعداد معلوم باشد.

فرض می‌کنیم‌که بزرگترین خطای مطلق‌کوچکتر باشداز $\frac{1}{10^m}$ دراین‌صورت برطبق قضیهٔ قبل $e < \frac{p}{10^m}$

اگر $p < 10$ باشد دراین‌صورت $e < \frac{1}{10^{m-1}}$

اگر $10 < p < 100$ در این‌صورت $e < \frac{1}{10^{m-2}}$ در هرصورت حد اعلای خطای‌مطلق معلوم است.

مثال ـ اعداد ۳/۱۴۱۵۹۱۹۲ و ۱/۶۳۶۳۲۷۱ و ۱/۷۳۲۰۲۱۷ به‌ترتیب مقادیرتقریبی‌نقصانی π و $\frac{18}{11}$ و $\sqrt{3}$ می‌باشند تا $\frac{1}{10^6}$ و $\frac{1}{10^5}$ و $\frac{1}{10^4}$ تقریب ومجموع آنهایعنی ۶/۵۰۹۹۷۶۳۳ تا $\frac{1}{10^3}$ تقریب به مجموع $\pi + \frac{18}{11} + \sqrt{3}$ نزدیك می‌باشد .

مسئلهٔ ۲ ـ باچه تقریبی باید p عدد مفروض را اختیار کرد تا اینکه خطای مطلق مجموع آنها از $\frac{1}{10^m}$ کمترباشد.

اگر عدهٔ آن اعداد بیش از۱۰ نباشد مقدار تقریبی آنها را تا $\frac{1}{10^{m+1}}$ حساب‌کرده ومجموع‌آنها را می‌گیریم در این‌صورت برحسب قضایای قبل‌مقدارتقریبی مجموع تا $\frac{1}{10^m}$ خواهد بود و اگرعدهٔ آنها از ۱۰۰ بیشتر نباشد مقدارتقریبی نقصانی را تا $\frac{1}{10^{m+2}}$ باید حساب‌کرد.

مثال ـ می‌خواهیم‌بدانیم اعداد ۴/۳۲۹ و ۷/۲۵۶۱ و۳۲/۵۴۸راتاچه‌تقریبی‌اختیارکنیم‌تااینکه تقریب‌مجموع‌آنها از۰/۰۱ کمتر باشد. چون باید مجموع این اعداد تا دورقم اعشاری صحیح باشد پس مجموع آنها را تا سه رقم اعشاری حساب‌می‌کنیم که‌می‌شود۴۴/۱۳۳وتا۰/۰۱تقریب‌صحیح‌است.

تفریق

قضیه ـ خطای مطلق تناضل دوعدد تقریبی‌کمتر است از دوبر بزرگترین خطا.

اگر n_1 و n_2 اعداد تقریبی باشند و e_1 و e_2 خطاهای مطلق‌آنها بوده و N_1 و N_2 هم مقادیر صحیح باشند وخطای مطلق تفاضل را به e بنمایانیم ؛

۱ـ فرض می‌کنیم‌که اعداد تقریبی دریك‌جهت باشند(هر دو اضافی باشند) .

$$n_1 - n_2 = (N_1 + e_1) - (N_2 + e_2) =$$
$$= N_1 - N_2 + (e_1 - e_2) \quad , \quad e = e_1 - e_2$$

(یا اینکه هردونقصانی باشند)

$$n_1 - n_2 = (N_1 - e_1) - (N_2 - e_2) = (N_1 - N_2)$$
$$e = e_2 - e_1$$

درهرصورت خطای مطلق تفاضل دوعدد تقریبی که در

دنباله درصفحهٔ ۱۸۹

بررسی نیمساز یك گوشه (روش برداری)

علیرضا امیرمعز ـ دانشگاه تگزاس تك

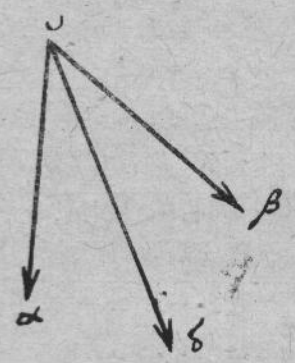
هرگاه نیمساز زاویه‌ای در مسئله‌ای وارد شود مسئله دشوار می‌شود. پاره‌ای ازمسائل ساختن مثلث که درآن نیمساز گوشه‌ای داده‌شده باخط‌کش و پرگار حل‌ندارند. دراین مقاله بعضی از خواص منصف‌الزاویه را با روش برداری بررسی می‌کنیم.

در این یادداشت بردارها را باحروف یونانی نمایش‌می‌دهیم حاصل‌ضرب‌داخلی دوبردار α و β با (α, β) نمایش‌داده می‌شود وآن عبارتست‌از:

$$(\alpha, \beta) = \|\alpha\| \, \|\beta\| \cos t$$

که درآن، مثلا، $\|\alpha\|$ نمایش طول بردار α و t زاویهٔ بین دوبردار است.

قضایای جبربرداری نیزدراین مقاله به‌کارخواهد رفت. تمام بردارها دریك‌صفحهٔ اقلیدسی گرفته شده‌اند [۱].



شکل۱

۱ ـ نیمساز ـ

فرض کنیم مجموعهٔ $\{\alpha, \beta\}$ بطور خطی مستقل باشد (شکل ۱). $\delta \neq \vec{0}$ را روی‌نیمساز زاویهٔ بین α و β می‌گیریم.

ازآنجا نتیجه می‌شودکه:

$$(1) \quad \left(\frac{\delta}{\|\delta\|}, \frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right) = \left(\frac{\delta}{\|\delta\|}, \frac{\beta}{\|\beta\|}\right)$$

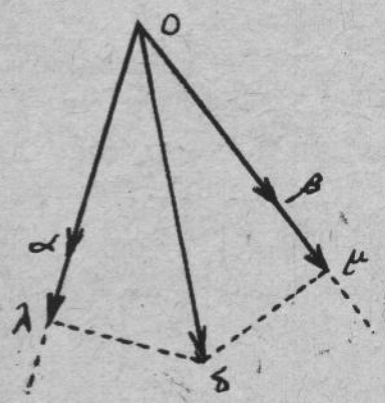
ازاین تساوی بدست می‌آیدکه:

$$(2) \quad \left(\delta, \frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right) = \left(\delta, \frac{\beta}{\|\beta\|}\right)$$

به معنی آنکه تصاویر جبری δ بر دو محور $\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right)$ و $\left(\frac{\beta}{\|\beta\|}\right)$ برابرند (شکل ۲).

این موضوع را چنین می‌توان‌بیان‌کرد. فرض کنیم که:

$$\lambda = \left(\delta, \frac{\beta}{\|\beta\|}\right)\frac{\beta}{\|\beta\|}$$



شکل۲

و

$$\lambda = \left(\delta, \frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right)\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$$

پس

$$\|\lambda\| = \|\mu\|$$

ملاحظه می‌شود که از (۱) نتیجه می‌شودکه:

$$(3) \quad \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} = \frac{(\alpha, \delta)}{(\beta, \delta)}$$

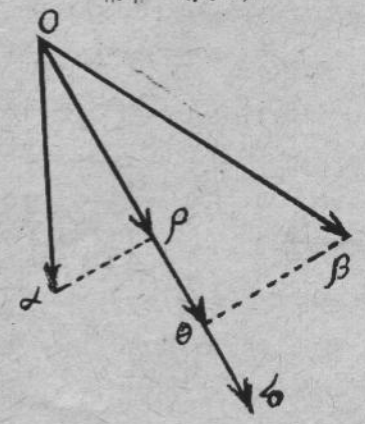
برای تعبیر هندسی(۳) فرض می‌کنیم‌که:

$$\theta = \left(\beta, \frac{\delta}{\|\delta\|}\right)\frac{\delta}{\|\delta\|}$$

و

$$\rho = \left(\alpha, \frac{\delta}{\|\delta\|}\right)\frac{\delta}{\|\delta\|}$$

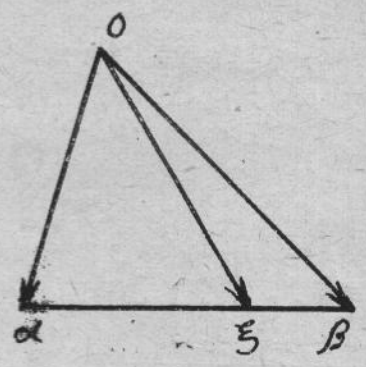
به معنی آنکه ρ و θ به‌ترتیب تصاویر α و β بر آسهٔ $\left(\frac{\delta}{\|\delta\|}\right)$ می‌باشند(شکل۳). ازآنجابدست می‌آیدکه:



شکل۳

$$(4) \quad \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} = \frac{\|\rho\|}{\|\theta\|}$$

۲ـ پوشهٔ محدب دو بردار ـ فرض کنیم که $\{\alpha, \beta\}$ بطور خطی مستقل باشد (شکل ۴). فرض کنیم که:



شکل ۴

$$\xi = a\alpha + b\beta,\ a+b=1,\ a>0,\ b>0$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که انتهای ξ روی پاره‌خط بازی‌است که دوانتهای α و β را به‌هم می‌پیوندد. این پاره‌خط بازراپوشهٔ محدب (Convex full) دوبردار α و β گویند. ملاحظه می‌شودکه:

$$\xi - \alpha = a\alpha + b\beta - \alpha = b(\beta - \alpha)$$

همچنین:

$$\xi - \beta = a(\alpha - \beta)$$

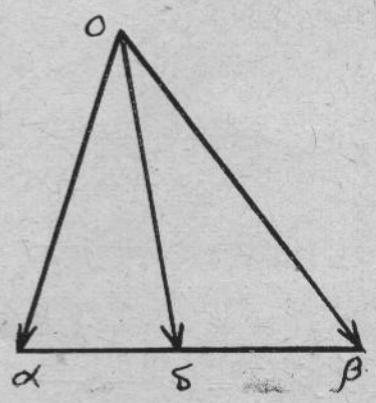
بنابراین:

$$\frac{\|\xi-\alpha\|^2}{\|\xi-\beta\|^2} = \frac{b^2\|\beta-\alpha\|^2}{a^2\|\alpha-\beta\|^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

ازآنجا نتیجه می‌شود:

$$(5)\quad \frac{\|\xi-\alpha\|}{\|\xi-\beta\|} = \frac{b}{a}$$

۳ـ نیمساززاویهٔ یك سه‌بر ـ فرض کنیم که $\{\alpha, \beta\}$ بطور خطی مستقل باشد و δ نیمساز زاویهٔ بین α و β در سه‌بری که این دو بردار تشکیل می‌دهند باشد (شکل ۵).



شکل ۵

بنابراین:

$$\delta = a\alpha + b\beta,\ a+b=1,\ a>0,\ b>0,$$

$$\frac{(\delta,\alpha)}{\|\alpha\|} = \frac{(\delta,\beta)}{\|\beta\|}$$

ازآنجا نتیجه‌می‌شود:

$$\frac{(a\alpha+b\beta,\alpha)}{\|\alpha\|} = \frac{(a\alpha+b\beta,\beta)}{\|\beta\|}$$

$$\frac{a\|\alpha\|^2 + b(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|} = \frac{a(\alpha,\beta) + b\|\beta\|^2}{\|\beta\|}$$

از این تساوی بدست می‌آیدکه:

$$(6)\quad \frac{b}{a} = \frac{\|\alpha\|(\alpha,\beta) - \|\alpha\|^2\|\beta\|}{\|\beta\|(\alpha,\beta) - \|\alpha\|\|\beta\|^2} = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$$

ازاین رابطه و(۵) نتیجه می‌شودکه:

$$(7)\quad \frac{\|\delta-\alpha\|}{\|\delta-\beta\|} = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$$

۴ـ درازای نیمساز ـ فرض‌کنیم‌که δ همان باشدکه‌در بخش ۳ بیان شد. یعنی‌که:

$$\delta = a\alpha + b\beta,\ a+b=1,\ a>0,\ b>0$$

$$\frac{(\delta,\alpha)}{\|\alpha\|} = \frac{(\delta,\beta)}{\|\beta\|}$$

به‌آسانی دیده می‌شودکه $\frac{b}{a} = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ است. اکنون ملاحظه می‌شودکه:

$$\|\delta\|^2 = a^2\|\alpha\|^2 + 2ab(\alpha,\beta) + b^2\|\beta\|^2$$

می‌توان نوشت‌که:

$$\frac{1}{a^2}\|\delta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2\frac{b}{a}(\alpha,\beta) + \frac{b^2}{a^2}\|\beta\|^2$$

بادرنظر گرفتن (۶) نتیجه می‌شودکه:

$$(8)\quad \frac{1}{a^2}\|\delta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}(\alpha,\beta)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$(9)\quad \frac{1}{b^2}\|\delta\|^2 = 2\|\beta\|^2 + 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}(\alpha,\beta)$$

اکنون a و b راحساب می‌کنیم:

$$a = \|\delta\|\sqrt{\frac{\|\beta\|}{2\|\alpha\|[\|\alpha\|\|\beta\| + (\alpha,\beta)]}}$$

$$b = \|\delta\|\sqrt{\frac{\|\alpha\|}{2\|\beta\|[\|\alpha\|\|\beta\| + (\alpha,\beta)]}}$$

ازآنجا نتیجه می‌شودکه:

$$a+b=1 = \frac{\|\delta\|}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\|\alpha\|\|\beta\| + (\alpha,\beta)}}\left(\frac{\|\alpha\|+\|\beta\|}{\sqrt{\|\alpha\|\|\beta\|}}\right)$$

بالنتیجه:

$$(10)\quad \|\delta\|^2 = \frac{2\|\alpha\|\|\beta\|[\|\alpha\|\|\beta\| + (\alpha,\beta)]}{(\|\alpha\|+\|\beta\|)^2}$$

دنباله در صفحهٔ ۱۸۹

دربارهٔ بیضی‌نگار آقای کیومرث طوفا

از احمد شرف‌الدین

در مجلهٔ یکان ، دورهٔ هشتم شمارهٔ ۲، شرحی دربارهٔ پرگار بیضی نگارآقای کیومرث طوفا ذکر شده است.موفقیت آقای کیومرث طوفا را صمیمانه به ایشان تبریک می‌گویم و خدمت پرارج مجلهٔ یکان را در معرفی کارهای خلاق جوانان به مدیر آن تبریک می‌گویم و ذیلا سه طریقه برای اثبات آنکه دستگاهی‌که توسط آقای طوفا ساخته شده است بیضی نگار است ارائه می‌دهم .

حروفی‌که در این مقاله بکار می‌رود همان حروفی است که در مقالهٔ «پرگار بیضی‌نگار» مشروح دریکان شمارهٔ قبل استعمال شده است.

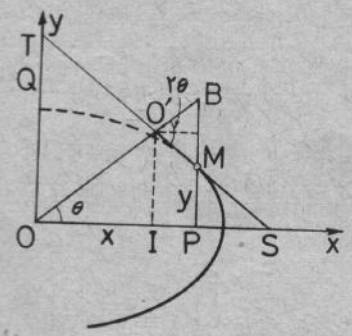
طریقهٔ اول ـ این طریقه متعلق به این جانب است و از دوطریقه دیگری‌که بعداً ذکر می‌شود آسان‌تر است .

قطعه خط $O'M$ را امتداد می‌دهیم تا خط OP را در نقطه S وخط OQعمودبرOPرادرنقطهٔ T قطع‌کند. به‌آسانی می‌توان‌اثبات‌کردکه :

$$OO' = O'S = O'T$$

ولذا :

$$ST = ۲OO' = \text{ثابت}$$



دوانتهای قطعه‌خط ST به‌طول ثابت ، بر دوخط عمودبرهم OP وOQ حرکت می‌کنند پس مکان هرنقطه ازاین قطعه‌خط مانند M یك بیضی است (یکی از قضایای مخروطات)

طریقهٔ دوم ـ این‌طریقه در پاره‌ای ازکتابهای هندسه مذکور است.

مکان نقطهٔ B یك دایره است زیرا :

$$OB = OO' + O'B = OO' + O'M = \text{ثابت}$$

اگر I تصویر O' برخط OP باشد، دومثلث SPMو SIO' باهم و نیز دو مثلث $OO'I$ و OBP با یکدیگر متشابه‌اند. روابط تشابه چنین است:

$$\frac{IO'}{PB} = \frac{OO'}{OB} \quad \text{و} \quad \frac{PM}{IO'} = \frac{SM}{SO'}$$

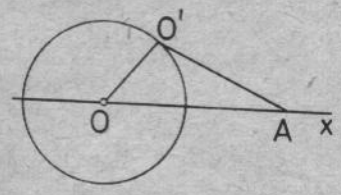
ازضرب روابط فوق با رعایت آنکه $OO' = SO'$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{PM}{PB} = \text{ثابت}$$

پس مکان M یك‌بیضی است.

طریقهٔ سومـ این طریقه در بعضی ازکتابهای مکانیك مشروح است .

درپاره‌ای‌ازکتابهای مکانیك‌دربارهٔ مسئلهٔ زیربرای تبدیل حرکت مستقیم‌الخط به حرکت دورانی و بالعکس صحبت می‌شود :



میلهٔ OO' درحول نقطهٔ O می‌چرخد . میلهٔ $O'A$ در O' با میلهٔ OO' مفصل‌شده است ، انتهای دیگر آن A روی خط OX می‌لغزد . منظور مطالعهٔ این دستگاه است.

اگر درمعادلات این‌مسئله $OO' = O'A$ گرفته شود نتیجه می‌شودکه مکان هرنقطه ازخط $O'A$ یك‌بیضی است .

به‌شکل اول مراجعه‌کنید . می‌توان نوشت:

$$OM = OO' + O'M$$

رابطهٔ فوق‌را روی دومحور OX و OY تصویر می‌کنیم ،حاصل می‌شود:

$$x = (R + r)\cos\theta$$
$$y = (R - r)\sin\theta$$

از حذف θ در دورابطهٔ فوق حاصل می‌شود:

$$\frac{x^۲}{(R+r)^۲} + \frac{y^۲}{(R-r)^۲} = ۱$$

پس مکان M یك بیضی است.

درسی از حساب

مجموع دو مربع

ترجمهٔ : محمود تویسرکانی دانشجوی دانشکدهٔ فنی

لم ۱: هیچ‌عدد صحیحی به‌صورت $4m+3$ وجودندارد که مجموع دومربع باشد.

اثبات: اگرعدد صحیح x را درنظر بگیریم داریم:

$$x \equiv 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \pmod 4$$

وازاین همنهشتی نتیجه می‌شود:

$$x^2 \equiv 0 \text{ یا } 1 \pmod 4$$

بنابراین برای دوعدد صحیح x و y می‌توان نوشت:

$$x^2+y^2 = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \pmod 4$$

یعنی مجموع دومربع مضربی‌از ۴ بعلاوهٔ ۳ نیست.

لم ۲: اگرعوامل اول‌عدد n رابتوان‌به‌صورت‌مجموع دومربع‌نوشت‌خود عدد n نیزمجموع دومربع خواهدبود.

اثبات: صحت اتحادزیررا می‌توان به‌سادگی تحقیق‌کرد:

$$(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2) = (aa_1+bb_1)^2+(ab_1-ba_1)^2 .$$

از اتحاد فوق‌می‌توان نتیجه گرفت که لم۲ صحیح‌است.

تعریف : اگرهمنهشتی $x^2 \equiv a \pmod p$ دارای‌جواب باشد a را ماندهٔ مربعی x به‌مدول p می گویند.

اگرعدد صحیح a ماندهٔ‌مربعی به‌مدول p باشد ، تابعی درتئوری اعداد موسوم‌به **تابع لژاندر** به صورت زیرتعریف شده و به‌شکل $(\frac{a}{p})$ نمایش می‌دهند:

$$(\frac{a}{p}) = +1 \text{ و } a \neq 0 \pmod p$$

تمرین ۱: ثابت‌کنید وقتی وفقط وقتی $(-\frac{1}{p}) = +1$ است‌که p به‌صورت $p = 4K+1$ باشد.

لم۳: اگر p عددی اول‌به‌صورت $4K+1$ باشدمعادلهٔ $x^2+y^2 = mp$ که درآن $0<m<p$ است‌نسبت به x، y و m دارای جواب صحیح می‌باشد.

اثبات : درتمرین فوق گفته شداگر $p = 4K+1$ باشد داریم $(-\frac{1}{p}) = +1$ بنابراین عددصحیحی مانند y موجود است به‌قسمی‌که $1+y^2 \equiv 0 \pmod p$.

می‌توان عددصحیح Y رایافت‌که $Y \equiv \pm y \pmod p$ چنانکه داشته باشیم $|Y| < \frac{p}{2}$ بنابراین

$$0 < mp = 1+Y^2 < 1+\frac{p^2}{4} < p^2$$

(و در نتیجه $0<m<p$ صدق می‌کند).

نتیجه می گیریم اعدادصحیح ۱، Y و m در لم۳صادق می‌باشند.

لم ۴ : اگر p عددی اول به صورت $4K+1$ و $x^2+y^2 = mp$ باشرط $1<m<p$ باشداعدادصحیح x_1 و y_1 و M موجودند به‌قسمی که $x_1^2+y_1^2 = Mp$ با شرط $1<M<p$ است.

اثبات : اگر m زوج باشد باید داشته باشیم $x \equiv y \pmod 2$ ومعادلهٔ‌فرض رامی‌توان به‌صورت‌زیرنوشت:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{m}{2}p$$

دیده می‌شود که $x_1 = \frac{x+y}{2}$ و $y_1 = \frac{x-y}{2}$ و $M = \frac{m}{2}$

درلم ۴ صدق می‌کند.

اگر m فردباشدبااستفاده‌ازفرمول‌تقسیم می‌توان‌نوشت:

$$x = am+a_1 \ , \ |a_1| < \frac{m}{2};$$

$$y = bm + b_1, \quad |b_1| < \frac{m}{2}$$

اگر در معادلهٔ مفروض عبارات اخیر را قرار دهیم با فرض $A = aa_1 + bb_1$ داریم:

$$a_1^2 + b_1^2 + 2Am + (a^2 + b^2)m^2 = mp$$

بنابراین نتیجه می‌شود عدد صحیح نامنفی M چنان وجود دارد که $a_1^2 + b_1^2 = Mm$ و می‌توانیم بنویسیم:

$$M + 2A + (a^2 + b^2)m = p$$

$$M^2 + 2AM + (a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) =$$
$$= (M + A)^2 + B^2 = Mp$$

$$B = ab_1 - ba_1$$

اگر $M = 0$ باشد خواهیم داشت $a_1 = b_1 = 0$ در نتیجه m^2، $x^2 + y^2 = mp$ را خواهد شمرد و در نتیجه m نیز p را می‌شمرد. ولی طبق فرض p عدد اول بوده و داریم $1 < m < p$ و مشاهده می‌شود $M = 0$ نمی‌تواند باشد پس $M \neq 1$. همچنین داریم $Mm = a_1^2 + b_1^2 < \frac{m^2}{2} < m^2$ بنابراین $M < m$.

پس $x_1 = M + A$ و $y_1 = B$ و M اعداد صحیحی می‌باشند که در لم ۴ صادقند.

قضیه: هر عدد اول به صورت $4K + 1$ را به صورت مجموع دو مربع می‌توان نوشت.

اثبات: با کمک لم ۳ می‌توان اعداد صحیح x و y را چنان یافت که $x^2 + y^2 = mp$، $1 < m < p$ باشد.

در حالت $m > 1$ با استفاده از لم ۴ و تعداد محدودی عدد $(m > M = M_1 > M_2 > \ldots > M_k = 1)$ به رابطهٔ $x_k^2 + y_k^2 = p$ می‌توانیم بنویسیم.

مجموع دو مربع:

در لم ۱ نشان دادیم که هیچ عدد اول به صورت $4K + 3$ مجموع دو مربع نمی‌باشد. حال عددی مانند n در نظر می‌گیریم که حاصل ضرب دو عدد اول به صورت مذکور باشد یعنی: $n = (4K + 3)(4K_1 + 3)$ پس n به صورت $4T + 1$ می‌باشد. سؤال این است که آیا یک چنین عدد n را می‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت؟

بطور کلی عدد n را می‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت اگر و فقط اگر دو عدد صحیح x و y موجود باشد بطوری که $(x, y) = 1$ و $x^2 + y^2 = n$.

قضیهٔ ۱: اگر n بر عدد اول p که به صورت $4K + 3$ است بخش‌پذیر باشد n را به صورت مجموع دو مربع نمی‌توان نوشت.

اثبات: اثبات توسط برهان خلف است. فرض می‌کنیم عدد n را بتوان به صورت مجموع دو مربع نوشت یعنی:

$$n = x^2 + y^2 \text{ و } (x, y) = 1$$

باید $(x, p) = 1$ باشد. زیرا در غیر این صورت p عدد x و n در نتیجه y را خواهد شمرد و در این حال رابطهٔ $(x, y) = 1$ برقرار نخواهد بود. ولی از $(x, p) = 1$ می‌توان $xu \equiv y \pmod{p}$ را نسبت به u حل نمود:

از $n \equiv 0 \pmod{p}$ نتیجه می‌شود.

$$x^2 + y^2 \equiv x^2(1 + u^2) \equiv 0 \pmod{p}$$

چون $(x, p) = 1$ است با اجرای قانون حذف خواهیم داشت:

$$1 + u^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

و رابطهٔ اخیر خلاف فرض ما است. زیرا طبق (تمرین ۱) نتیجه می‌شود $p = 4K + 1$ حال آنکه طبق فرض $p = 4K + 3$ است.

قضیه ۲: اگر $n = P^c m$ و p عدد اول به صورت $4K + 3$ و c عدد فرد و $(p, m) = 1$ باشد عدد n را به صورت مجموع دو مربع نمی‌توان نوشت.

اثبات: اثبات توسط برهان خلف است. اگر n را به صورت مجموع دو مربع بتوان نوشت داریم $n = x^2 + y^2$ اگر $(x, y) = d$ و $x = Xd$، $y = Yd$ باشد خواهیم داشت $(X, Y) = 1$ و $n = Nd^2$. چون p^c عدد n را می‌شمرد و c فرد است نتیجه می‌شود p عدد N را خواهد شمرد. ولی داریم $N = X^2 + Y^2$ و $(X, Y) = 1$ و این بدین معنی است که عدد N که مضربی از عدد اول $p = 4K + 3$ است به صورت مجموع دو مربع می‌توان نوشت و خلاف قضیهٔ ۱ می‌باشد.

قضیهٔ ۳: یک عدد صحیح و مثبت را می‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت اگر و فقط اگر هریک از عوامل اول آن که به صورت $4K + 3$ می‌باشند دارای توان زوج باشند.

اثبات: (الف) برای واحد داریم $1 = 1^2 + 0^2$، برای ۲ داریم $2 = 1^2 + 1^2$. قبلا دیدیم هر عدد اول به صورت $4K + 1$ را می‌توان به مجموع دو مربع تبدیل نمود.

اگر عدد اول $4K + 3 = p$ باشد توان زوج آن یعنی p^{2s} را می‌توان به صورت $p^{2s} = (p^s)^2 + 0^2$ نوشت که مجموع دو مربع است.

از لم ۲ نتیجه می‌شود عدد n را که عوامل اول آن به صورت $4K + 3$ بوده و دارای توان زوج می‌باشند می‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت. این مطلب در حالتی که یک چنین عوامل اولی موجود نباشد باز به صحت خود باقی است. زیرا می‌توان به جای عوامل مذکور $p^0 = 1$ را قرار داد که توان صفر زوج است.

(ب) اگر حتی یکی از عوامل اول به صورت $4K + 3$ توان فرد داشته باشد n قابل تبدیل به مجموع دو مربع نخواهد بود.

مثلا $351 = 3^3 \times 13$ را نمی‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت زیرا عامل اول ۳ دارای توان فرد است $(3 = 4 \times 0 + 3)$ در عوض مثالهایی از قبیل دو مثال زیر وجود دارد:

$$117 = 3^2 \times 13 = 9^2 + 6^2$$

$$65 = 5 \times 13 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2) = 8^2 + 1^2$$

حل مسائل نمونه

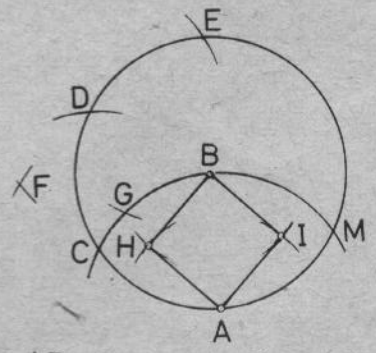
مسائل
«ناپلئون - ماسکرونی»

تنظیم از داوید ریحان

● **دو رأس متقابل یك مربع مفروض است ، دو رأس دیگر مربع را فقط به‌کمك پرگار بدست آورید (ماسکرونی)**

مسئلهٔ فوق، بوا مطهٔ آنکه بوسیلهٔ ترسیم نه‌کمان‌دایره رسم می‌شده است ، به نام مسئلهٔ نه کمانی ماسکرونی معروف است. طریقهٔ ترسیم تعیین دو نقطهٔ قطری دیگر از مربع به صورت زیراست :

فرض می‌کنیم A و B نقاطی باشندکه در اختیارداریم. به‌مرکز B و به‌شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم.دهانهٔ پرگار را به‌همان اندازهٔ قبلی‌نگاه می‌داریم و به مرکز A کمانی رسم می‌کنیم تا نقطهٔ C بدست‌آید ، سپس به مرکز C کمانی رسم می‌کنیم تا نقطهٔ D حاصل گردد و متعاقب آن به‌مرکز D دایره‌ای رسم می‌کنیم تا نقطهٔ E بدست آید (درتمام این حالات اشعهٔ دوایر رسم شده برابرند و مساوی باطول AB هستند). به شعاع CE و مراکز A و E دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در F قطع کنند. به‌مرکز E وبه شعاع BF کمانی رسم می‌کنیم تا اولین کمان را در G قطع کند . (کمانی که به مرکز A و به شعاع AB رسم شده و دایره را درC قطع‌کرده است) .



به‌شعاع BG و مراکز A و B کمانهایی رسم‌می‌کنیم تا یکدیگر را در H و I قطع نمایند. در این‌صورت رأسهای مربع مطلوب A ، H ، B و I خواهند بود . بطوری که ملاحظه شد برای یافتن دو رأس دیگرمربع از ۹ دایره‌استفاده کردیم واثبات مربع بودن شکل حاصل ، با استفاده ازخاصیت مثلثهای قائم‌الزاویه و قضیهٔ فیثاغورس بسیار ساده است .

فرض می‌کنیم‌که $AB = a\sqrt{2}$ باشد . دراین‌صورت خواهیم داشت :

$AE = 2a\sqrt{2}$ (E و A متقاطر هستند)

و $AC = CD = DE = a\sqrt{2}$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACE داریم :

$EC^2 = AE^2 - AC^2 = 8a^2 - 2a^2 = 6a^2$

و درنتیجه : $EC = a\sqrt{6}$

و با توجه به‌نحوهٔ ترسیم داریم :

$EF = FA = EC = a\sqrt{6}$

مثلث AEF متساوی‌الساقین‌است و B پای‌میانه‌است، بنابراین مثلث FBE قائم‌الزاویه خواهد بود و داریم :

$BF^2 = EF^2 - BE^2 = 6a^2 - 2a^2 = 4a^2$

$\Longrightarrow BF = 2a$

در نتیجه چون $EG = BF$ است داریم :

$EG = 2a$

در مثلث EGA ، BG میانه است و بطوری که در ضمن ترسیم بیان‌کردیم باید برابر با BH یعنی طول ضلع‌مربع باشد. باتوجه به‌فرمول میانه‌ها داریم :

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$BH^2 = BG^2 = \frac{2(EG^2 + AG^2) - AE^2}{4} =$$

$$= \frac{2(4a^2 + 2a^2) - 8a^2}{4} = a^2$$

بدین ترتیب خواهیم داشت :

$BH = HA = AI = IB = a$

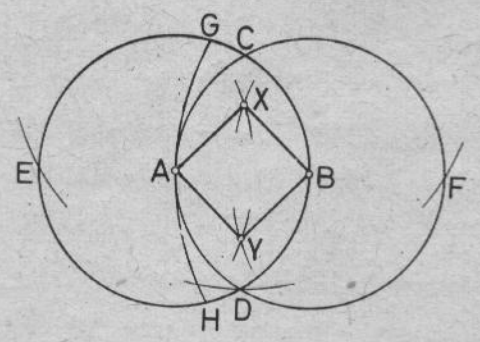
و شکل حاصل مربع است.

با درنظر گرفتن یك نکته باید خاطرنشان ساخت‌که این مسئله را باترسیم فقط ۸ کمان می‌توان حل کرد.

با مختصر توجهی می‌توان ثابت کرد که اگر دایرهٔ به مرکز A و به شعاع BA دایرهٔ (BA و B) را غیر از C در نقطهٔ دیگری مانند M قطع نماید طول BM برابر با CE و مساوی با $a\sqrt{6}$ خواهد بود و دراین‌صورت بدون اینکه نقطهٔ D را بدست آوریم می‌توانیم نقطهٔ E را بیابیم ومسئلهٔ نه کمانی را به مسئلهٔ هشت‌کمانی تبدیل کنیم .

اخیراً راه حل بسیار زیبایی برای این مسئله کشف شده است که فقط از شش‌کمان استفاده می‌شود و تازه‌ترین راه حلی است که برای این‌مسئله ارائه شده است . نحوهٔ عمل به قرار زیراست :

A و B نقاط مفروضند . ابتدا به‌مراکز A و B و به شعاع AB دو دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C و D قطع کنند. به‌مرکز C و به‌شعاع CD کمان EDF را رسم می‌کنیم. به مرکز F و به‌شعاع AF کمان HAG را رسم



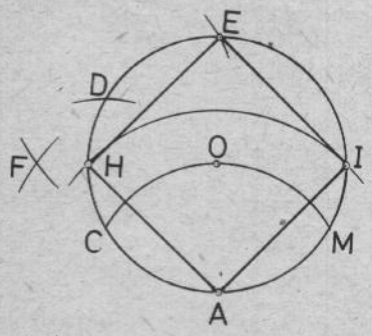
می‌کنیم . به مراکز E و F و به‌شعاع EG دو کمان رسم می‌کنیم تا از تقاطعشان نقاط X و Y بدست آیند . اثبات مربع بودن AXBY مشکل نیست .

* * *

● دایرهٔ به مرکز O و به‌شعاع معلوم مفروض است ، رأسهای یکی از مربعهای محاط در آنرا تنها به کمك پرگار بدست آورید (مسئلهٔ ناپلئون).

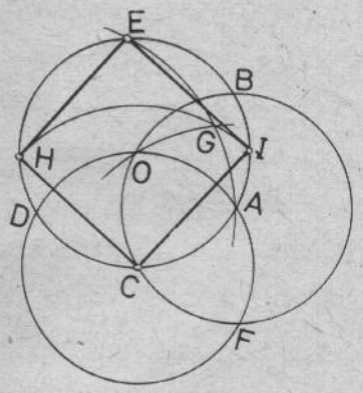
مسئلهٔ فوق به‌مسئلهٔ ناپلئون مشهوراست و چون‌برای ترسیم آن از شش‌کمان استفاده می‌شود ، گاهی « مسئلهٔ شش کمانی‌ناپلئون » نیزنامیده میشود . درضمن مطالعهٔ آثارترسیمی ماسکرونی ملاحظه‌کرده‌اندکه راه حل این‌مسئله حقیقتاً از آن ماسکرونی است. درهرحال برای یافتن رأسهای مربع ، یکی ازآنها را A می‌نامیم و موضع آنرا بطور اختیاری روی‌دایره انتخاب می‌کنیم . به مرکز A و به شعاع AD دایره‌ای می‌زنیم تا نقاط M و C بدست‌آید ، سپس به‌مرکز C و به همان‌شعاع D را بدست می‌آوریم و در مرحلهٔ بعدی نقطهٔ E راکه محل برخورد دایره‌ای به مرکز D و به‌همان شعاع قبلی است ، با دایرهٔ مفروض بدست می‌آوریم. به مراکز A وE و به شعاع AD دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در F قطع کنند ، به‌مرکز A و به شعاع OF دایره‌ای می‌زنیم‌تا دایرهٔ مفروض را در I و H قطع کند ، به سادگی می‌توان ثابت کرد که AIEH مربع است .

باید توجه داشت که این مسئله را می‌توان با پنج کمان نیزحل کرد ، زیرا بدون اینکه نقطهٔ D رابدست آورده باشیم می‌توانیم نقطهٔ E را بیابیم (کافی است به مرکز C و به شعاع CM دایره‌ای رسم کنیم‌تاE حاصل گردد)



راه دیگری برای این مسئله درسال۱۹۵۳ درمجلهٔ «ریاضیات معلم» منتشر شده است که این مسئله فقط با پنج‌کمان حل گرده است . این‌راه‌حل چنین است.

نقطه‌ای مانند A را روی دایره انتخاب کنید ، به مرکز این نقطه و به شعاع AO دایرهٔ دیگری رسم‌کنید تا دایرهٔ مفروض رادر C و B قطع کند ، به مرکز C و با همان شعاع دایرهٔ سوم را



رسم می‌کنیم تا دایرهٔ اولیه را در D قطع نماید. به مرکز D و به‌شعاع DA کمانی رسم می‌کنیم‌که دایرهٔ مفروض‌را درE قطع‌کند. به مرکز F و به‌شعاع FO کمانی رسم می‌کنیم تا کمان اخیررا در G قطع نماید. به مرکز C و به شعاعCG کمانی رسم می‌کنیم‌که دایرهٔ اولیه را در H قطع کند ، E ، I ، C و H رأسهای مربع مطلوبند .

یادداشت ، ماسکرونی (لورنزو) دانشمند و شاعر ایتالیایی است‌که در سال ۱۷۵۰ در کاستانیتا (برگام) متولد وبه سال ۱۸۰۰ درپاریس وفات یافت . وی‌استاد جبر وهندسه در **پاوی** (۱۷۸۶) شد و بین سالهای (۱۷۸۹-۱۷۹۳) ، عنوان رئیس دانشگاه این شهررا به‌خود تخصیص داد.

یکی از آثار علمی او هندسهٔ پرگار (۱۷۹۷) نام دارد که آنرا به ناپلئون اول هدیه‌کرده است .

۳ـ کسر اعشاری متناوب

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری

یکی از افرادی که برای اولین بار با کسرهای متناوب روبرو شد ریاضیدان ایتالیائی به‌نام **کاوالیری** (۱۶۴۷-۱۵۹۸) بود. او در موقع تبدیل کسر متعارفی به اعشاری با این نوع کسرها مواجه شد. کاوالیری بدون توجه به متناوب بودن کسرها به مقدار تقریبی آنها قناعت کرد.

مطالعهٔ مفصل دربارهٔ کسرهای متناوب توسط ریاضیدان معروف انگلیسی **والیس** (۱۷۰۳-۱۶۱۶) که استاد اکسفورد بود انجام گرفت. او در سال ۱۶۹۳ رساله‌ای انتشار داد دربارهٔ جبر که در یکی از فصلهای این رساله خواص مهم کسرهای متناوب مورد بررسی قرار گرفته بود و تأکید شده بود که در تعیین آنها از پیشینیان استفاده نشده است. والیس به این موضوع پرداخته بود که وقتی صورت یک کسر بدون باقیمانده بر مخرج بخش‌پذیر است که مخرج شامل عاملهای ۲ و ۵ باشد. و اگر مخرج شامل عاملهای ۲ و ۵ نباشد تناوب از مرتبهٔ اول شروع می‌شود. او با قضایای ساده دربارهٔ تعداد ارقام در تناوب نیز آشنایی داشت. تحقیق و بررسیهای وسیع در تئوری کسرهای متناوب در نیمهٔ دوم قرن هیجدهم شروع شد. در این مورد ریاضیدان و ستاره‌شناس سوئیسی **لامبرت** (۱۷۷۷-۱۸۲۸) کوشش زیادی کرد.

باید توجه داشت که لامبرت پسر یک خیاط فقیر بود و ریاضیات را خود یاد گرفته بود. او ابتدا معلم و سپس دانشمند مشهور و نامدار و عضو آکادمی برلین شد.

دربارهٔ کسرهای متناوب ریاضیدان معروف **ل‌اولر** نیز مقالاتی انتشار داد. برای اولین بار ریاضیدانی به‌نام **روبنسون** علامتی برای کسرهای متناوب پیشنهاد کرد. به این ترتیب که کسرهای اعشاری متناوب ۰/۳۳۳.... و ۰/۲۳۲۳... و ۰/۷۸۴۷۸۴.... را به صورت ساده‌تر و کوتاهتر $0/\overline{3}$ و $0/\overline{23}$ و $0/\overline{784}$ نوشت. او کسرهای هم‌تناوب (دوره) را کسرهای مشابه نامگذاری کرد و با ضرب و تقسیم کسرهای متناوب کسرهای ساده‌ای بدست آورد.

تئوری کسرهای متناوب در ابتدای قرن نوزدهم به کوشش ریاضیدان بزرگ آلمانی **گوس** که در تئوری اعداد کار می‌کرد تکمیل شد.

٤ـ تناسب و مقادیر متناسب

مفهوم تناسب به‌معنی تساوی نسبت‌های دو عدد، برای اعداد درست (صحیح) از خیلی پیش از این در قدیم رایج بوده است. پیش از این زمان بابلیهای قدیم از مقایسهٔ اضلاع مثلثهای متشابه به‌مفهوم تناسب اضلاع آنها که به صورت اعداد صحیح بودند رسیده بودند. اولین تئوریهای تناسب حسابی توسط دانشمند قدیم یونانی **«فیثاغورس»** و شاگردان او بیان شد. فیثاغورس در سالهای ۵۰۰-۵۸۰ قبل از میلاد زندگی می‌کرده است. آنان سه صورت مختلف تناسبهای زیر را بررسی کردند:

تناسب حسابی یا عددی :

$$a-b=c-d$$

تناسب هندسی:

$$a : b = c : d$$

تناسب توافقی:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$$

نان همچنین مفهوم تناسب غیرمنفصل و تناسب با واسطین مساوی را توجیه کردند.

در قرن چهارم قبل از میلاد دانشمند یونانی **ادکس** که بین سالهای ۳۵۵-۴۰۸ قبل از میلاد زندگی می‌کرد روش منظمی برای بررسی تناسبها نه‌تنها با اعداد صحیح بلکه با اعداد

غیرصحیح پیشنهادکرد. باید دانست که ادکس بحرالعلوم زمان خودبوده است. اوتخصصهای زیادی داشت. مثلا ستاره‌شناس مکانیسین، ریاضیدان وپزشك معتبربوده است .

تئوری‌کامل تناسب درقرن سوم قبل‌از میلاد توسط هندسه‌دان یونانی **اقلیدس** درتألیف معروف اوبه نام «اصول» که شامل سیزده مقاله بود بیان شد. اومقالهٔ پنجم را برای بیان این تئوری اختصاص داده است .

اقلیدس مطالعات ادکس را پایهٔ تئوری خودقرار داده است. تئوری تناسب درزمان حال با تئوری ادکس - اقلیدس فرق بسیارکمی دارد .

تناسب اقلیدس به‌صورت زیرفرموله می‌شود: چهارعدد a و b و c و d با تناسب :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

چنین تعریف می‌شوندکه اگر به ازاء اعداد صحیح ودلخواه m و n ، $ma>nb$ باشد داریم : $mc>nd$

۵- جبر وعلائم حرفی آن

حل معادلات باعث گسترش وپیشرفت جبر مانند سایر علوم شده است .

درزمانهای بسیارقدیم‌مصریان، بابلیان‌وهندیان‌با اصول ابتدائی جبرآشنا بودند وبرای حل مسائل معادلاتی بر طبق فرضهای مسئله ساخته وبه‌کمك آنها مسئله راحل‌می‌کردند.

البته آنهانمایش‌حرفی‌مقادیررا نمی‌دانستندوبه‌همین‌جهت نمی‌توانستند فرمولهای عمومی برای حل مسائل درست‌کنند.

کلمهٔ «الجبر» (جبر) برای اولین‌بار در قرن نهم در کارهای ریاضیدان ومنجم خوارزمی به‌نام « **محمدبن‌موسی الخوارزمی**» پیدا شد.

خوارزمی رساله‌یی به‌نام «حساب الجبروالمقابله» که دربارهٔ ساختن وحل معادلات جبری است انتشارداد. وازهمین کلمهٔ «الجبر» کلمهٔ جبرحاصل شد. در رسالهٔ «حساب الجبرو المقابله»که معرف جبرشفاهی است ازحروف‌وعلامات استفاده نشده وهمهٔ عملیات باکلمات بیان ونوشته شده است .

اصطلاحات «الجبر» و«المقابله» دوعمل بسیاراساسی و ساده هستندکه به‌کمك آنها معادله به‌صورت معادلهٔ با عناصر مثبت درطرفین راست وچپ آن تبدیل می‌شود . عمل «جبر» (به‌معنی تجدیدساختمان) عبارتست ازبردن عناصر منفی ازیك طرف معادله به‌طرف دیگرآن به‌منظور تبدیل معادله‌به‌صورت معادلهٔ با عناصرمثبت است .

عمل « مقابله » (به‌معنی تطبیق ومقایسه) عبارتست ازآوردن عناصرمشابه به‌طرف راست وچپ به منظور ساده‌تر کردن معادله . بزرگترین موفقیت برای جبر شکل حرفی آن است‌که نوشتن‌وبررسی‌را ساده می‌کند. جبرحرفی‌کنونی‌بتدریج به‌این‌صورت درآمده است .

این صورت ابتدا بین اعراب متداول‌شد. به‌این‌ترتیب که درقرن یازدهم ریاضیدان اسلامی به نام **کرجی** علاماتی برای بعضی ازمقادیرجبری درنظر گرفت مثلا او مجهول را با علامت ~ نشان می‌داد .

نمایش حرفی دراروپا درقرون پانزدهم وشانزدهم‌رواج پیداکرد. ابتدا برای مجهول وسپس برای‌کمیات حروف رابکار بردند. نمایش حرفی عدددلخواه را درقرن شانزدهم«**ویت**» پیشنهادکرد به این ترتیب که هرعدد مجهول دلخواهی را او باحرف N نمایش می‌داد .

و بالاخره‌کار انتخاب حرف واستفاده آنها در جبر و فیزیك را ریاضیدان آلمانی «**لایب‌نیز**» (۱۷۱۶-۱۶۴۶) و ریاضیدان‌وفیزیکدان انگلیسی«**نیوتن**» ومخصوصاً ریاضیدان فرانسوی «**دکارت**» (۱۶۵۰-۱۵۹۵) بپایان رسانده و تکمیل کردند . در قرن شانزدهم برای اولین‌بار ریاضیدان انگلیسی «**رکورد**» علامت تساوی‌را به‌صورت‌دوخط‌موازی (=) پیشنهادکرد .

دربارهٔ انتخاب این علامت خودرکورد می گوید: «هیچ دوچیزی نمی‌توانند بیش‌ازدوقطعه خط مساوی باشند» (منظور ازبرای دوقطعه خط همشکل وهم طول‌بودن آنهاست).

٦- اعداد منفی

مفهوم اعداد ومقادیر منفی اولین‌بار درقرن اول قبل از میلاد مورد بحث قرار گرفت .

این مفاهیم درآن‌زمان درعمل حل معادلات جبری پیش می‌آمدند. به‌این ترتیب‌که درحین حل معادله ویا آخر سر پس‌ازحل‌آن به مقادیرمنفی برخوردمی‌کردند. (ریشه‌های‌منفی) خیلی ازدانشمندان اروپائی قرون شانزده وهفده‌فکرمی کردند که مقادیرمنفی درست وحقیقی نیستند ومعنی ندارند .

مقادیرمنفی وقتی شناسایی یافتندکه به‌آنها تفسیرواقعی نسبت دادند .

معلوم است‌که دانشمندان آن زمان به آسانی به چنین تفسیری‌نرسیدند .

دراین راه باید یك سری موانع را برطرف می‌کردند.

اولین تفسیرطبیعی‌که بین اعداد مثبت ومنفی بعمل‌آمد توسط ریاضیدانان هندی انجام شد .

آنان مقادیرمثبت ومنفی را به‌صورت دارائی وبدهکاری تفسیرکردند وبدون درنظر گرفتن اساس دقیقتری برای این موضوع مسائل خودرا با تفسیربالا بررسی و حل می‌کردند. مثلا ریاضیدان ومنجم بزرگ‌هندی به‌نام **«براهماگوپتا»** (۶۶۰-۵۹۸) درکتاب نجوم خودکه شامل بیست باب است (دوازده باب حساب و۱۸ باب جبر) ودرسال ۶۲۸ انتشار داده می‌نویسید :

«مجموع دو دارائی، دارائی است ومجموع‌دوبدهکاری بدهکاری ومجموع دارائی وبدهکاری مساوی تفاضل آنها ویا درصورت مساوی‌بودن برابر صفراست .

مجموع‌صفروبدهکاری‌بدهکاری‌است‌ومجموع‌دارائی‌وصفر دارائی است، ومجموع‌دوصفر، صفراست» وسپس می‌افزاید:

«کوچکترازبزرگتر کم‌می‌شود، دارائی‌ازدارائی‌وبدهکاری ازبدهکاری. اما درصورتی‌که بزرگتر را ازکوچکتر کم‌کردی علامت نتیجه عوض می‌شود. اگر بدهکاری از صفرکم شود دارائی می‌شود ودارائی به بدهکاری بدل می‌شود »

ریاضیدان‌ومنجم دیگرهندی به‌نام **«بهاسکاراآکاریا»** (متولد۱۱۱۴، تاریخ مرگش معلوم نیست) توجه زیادی به اعدادمنفی مبذول داشته است. پسوندآکاویاکه بعدازنام او آمده به‌معنی استاد ودانشمنداست. اودرحدود سال ۱۱۵۰ کتابی را انتشاردادکه درآن بابهایی به‌نام «لیلاواتی» به‌معنی «عالی»که دربارهٔ حساب است و«ویجاگانیتا» به‌معنی «محاسبهٔ ریشه‌ها»که دربارهٔ جبراست دیده‌می‌شود. دراین‌کتاب بهاسکارا می‌نویسد :

«حاصل‌ضرب دودارائی یا دو بدهکاری دارائی است . حاصل‌ضرب دارائی وبدهکاری ضرراست. همین‌ترتیب برای تقسیم وجود دارد. توان دوم دارائی یا بدهکاری دارائی‌است دارائی دارای دوریشه است. اولی هستی ودومی بدهکاری»

ریاضیدانان ایتالیائی **«پاچیولا، تارتالیا، فیررو»**درقرن شانزدهم با اینکه از علامت منفی استفاده کرده‌اند اما ازآن به‌عنوان علامت منفی یك‌عدد منفی استفاده نکرده بلکه فقط‌به عنوان علامت تفریق بکاربرده‌اند .

اولین ریاضیدان اروپائی‌که ریشهٔ منفی معادله را نیز مانند ریشهٔ مثبت آن موردبررسی قرارداد ریاضیدان‌ایتالیائی **«کاردان»** (۱۵۷۶-۱۵۰۱) بود. اوریشه‌های منفی‌راجعلی یا اضافی می‌خواند. با این حرف اومی‌خواست بگویدکه ریشه‌های منفی تفسیرمعمولی ندارند. درهمان زمان درقرن شانزدهم ریاضیدانان آلمانی نیزشروع به استفاده ازاعدادمنفی کردند. مثلا **«استیفل»** درکتاب «حساب‌آلمانی» خود«اصول علامات» را برای تکمیل اعمال جبری واستفادهٔ وسیع ازاعداد منفی گنجانیده است. درهمین زمینه استیفل می‌نویسد :

«... اعمال‌جبری، که طبق اینها انجام می‌شوندبه‌کشف حقیقت عجیبی منجرمی‌شوند» سپس می‌افزاید: « ... ما اعداد پایین‌ترازصفر را بدون استفاده نمی‌گذاریم» .

تفسیرکنونی اعدادمنفی در قرن هفدهم به‌کوشش دو دانشمند وریاضیدان تکمیل شد. این دوعبارت بودند از : ریاضیدان هلندی **«ژیرار»** (۱۶۳۴-۱۵۹۵) و ریاضیدان و فیلسوف معروف فرانسوی **«دکارت»** .

بعدها ازاعداد مثبت ومنفی برای رسم منحنی‌ها استفاده شد،که هرنقطه ازآن توسط اعداد مثبت یا منفی روی محور اعداد تعیین می‌شد.

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۷۹

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۷۹/۱- از سید قاسم همایونی پنجم ریاضی دبیرستان؟

ثابت کنید که هرگاه

$$A+B+C+D=0$$

باشد خواهیم داشت:

$$A^3+B^3+C^3+D^3=3(C+D)(AB-CD)$$

حل - از رابطهٔ فرض نتیجه می‌شود:

$$A+B=-(C+D) \text{ یا } (A+B)^3=$$
$$=-(C+D)^3$$

$$A^3+B^3+3AB(A+B)=-C^3-D^3-$$
$$-3CD(C+D)$$

$$A^3+B^3+C^3+D^3=-3AB(A+B)-$$
$$-3CD(C+D)$$

$$A^3+B^3+C^3+D^3=3AB(C+D)-$$
$$-3CD(C+D)$$

ونتیجه خواهد شد:

$$A^3+B^3+C^3+D^3=3(C+D)(AB-CD)$$

۷۹/۲ - فرستنده: محمود تویسرکانی دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

با فرض $x^2+x+1=0$ مطلوبست محاسبهٔ مقدار

$$P=x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$$

حل - از رابطهٔ $x^2+x+1=0$ نتیجه می‌شود:

$$x+\frac{1}{x}=-1 \Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=-1$$

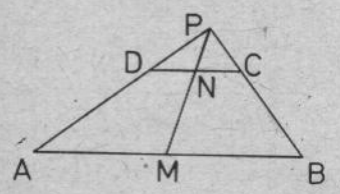
و یا

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \Longrightarrow x^3=1 \Longrightarrow x^{12}=1$$

$$x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=x^{12}.x^2+\frac{1}{x^{12}.x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=-1$$

۷۹/۳- فرستنده: علیرضا علیپور دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

در ذوزنقهٔ ABCD دو زاویهٔ A و B متمم یکدیگرند به فرض آنکه $AB=p$ و $CD=q$ باشد طول پاره خط MN که وسط AB را به وسط CD وصل می‌کند برحسب p و q چقدر است؟



حل - هرگاه P نقطهٔ تلاقی دو ساق AD و BC باشد، چون دوزاویهٔ A و B متمم یکدیگرند پس مثلث APB و همچنین مثلث PCD قائم‌الزاویه است. می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وتر نصف وتر است. پس داریم:

$$PM=MA=MB \text{ و } PN=ND=NC$$

هر یک از دو مثلث NPC و MPB متساوی‌الساقین است و در نتیجه زاویهٔ NPC بازاویهٔ NCP و زاویهٔ MPB با زاویهٔ MBP برابر است. اما دو زاویهٔ MBP و NCP متساویند، پس دو زاویهٔ MPC و NPC نیز متساویند ودر نتیجه سه نقطهٔ M و N و P بریک استقامتند و داریم:

$$MN=PM-PN=\frac{AB}{2}-\frac{CD}{2}=\frac{p-q}{2}$$

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۷۹/۴- از جلیل بصیریان پنجم ریاضی دبیرستان خواجه نصیر جهرم

به فرض:

$$S=a^2+b^2+c^2 \text{ و } P=a+b+c$$

صحت تساوی زیررا تحقیق کنید:

$$(S-2a^2)(S-2b^2)+(S-2b^2)(S-2c^2)+$$

$$+(S-2c^2)(S-2a^2)=$$
$$=P(P-2a)(P-2b)(P-2c)$$

حل ـ باتوجه به‌مقدار S عبارت طرف اول می‌شود :

$$(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)+$$
$$+(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)+$$
$$+(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)=$$
$$=c^4-(a^2-b^2)^2+a^4-(b^2-c^2)^2+b^4-$$
$$-(c^2-a^2)=-(a^4+b^4+c^4)+$$
$$+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=-(a^2-b^2-c^2)^2+$$
$$+4b^2c^2=[2bc+(a^2-b^2-c^2)][2bc-$$
$$-(a^2-b^2-c^2)]=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]$$
$$=(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)=$$
$$=P(P-2a)(P-2b)(P-2c)$$

۷۹/۵ ـ فرستنده **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تبریز

ثابت‌کنیدکه هرگاه $f(x^n)$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد بر x^n-1 نیز بخش پذیر است.

حل ـ اگر $f(x^n)$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد پس : $f(1)=0$ بوده و $f(x)$ بر $x-1$ قابل قسمت است. نتیجه می‌شودکه $f(x^n)$ بر x^n-1 بخش پذیر است .

۷۹/۶ ـ فرستنده **جواد فیض**

هرگاه m و n و p عددهای مثبت باشند ثابت کنیدکه $S=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ بر x^2+x+1 بخش پذیر است .

حل ـ عبارت S رابه صورت زیر می‌نویسیم :

$$S=(x^3)^m+x.(x^3)^n-x^2(x^3)^p$$

باقیماندهٔ تقسیم این عبارت بر x^3-1 برابر می‌شود با:

$$(1)^m+x(1)^n+x^2(1)^p=1+x+x^2$$

پس می‌توانیم بنویسیم :

$$S=(x^3-1)P(x)+1+x+x^2=$$
$$=(x-1)(1+x+x^2)P(x)+1+x+x^2$$
$$S=(1+x+x^2)[(x-1)P(x)+1]$$

۷۹/۷ ـ فرستنده **ژیان حبیب‌الله زاده** چهارم ریاضی دبیرستان لامعی

از رابطهٔ زیر مقدار x را بدست‌آورید:

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^x=$$
$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x$$

حل ـ بافرض :

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^x=A \text{ و } \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x=B$$ خواهیم داشت :

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^x=\frac{1}{A} \text{ و } \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x=\frac{1}{B}$$

بنابراین داریم :

$$A+\frac{1}{A}=B+\frac{1}{B}$$
$$\Rightarrow A^2B+B-AB^2-A=0$$
$$(A-B)(AB-1)=0$$
$$A=B\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^x\Rightarrow x=0$$
$$AB=1\Rightarrow\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right]^x=0$$
$$\Rightarrow x=0$$

در هر حال مقدارx برابر صفر است .

۷۹/۸ ـ فرستنده : **محمود تویسرکانی**

از دستگاه زیر مقادیر x و y را بدست آورید:

$$\begin{cases}\log\sqrt{(x+y)^2}=1\\ \log y-\log|x|=\dfrac{1}{\log_4 100}\end{cases}$$

حل ـ باتوجه به اینکه $\log_4 100=\log_2 10=\frac{1}{\log 2}$: است خواهیم داشت :

$$|x+y|=10 \text{ و } y=2|x|$$

چون $y=2|x|>0$ بنابراین :

$$x+y=x+2|x|>0$$

پس $|x+y|=x+y$ و دو دستگاه زیر بدست می‌آید :

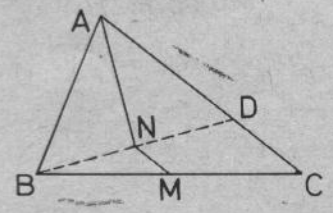
$$\begin{cases}x+y=10\\ y=2x\end{cases}\Rightarrow\left(x=\frac{10}{3} \text{ و } y=\frac{20}{3}\right)$$

$$\begin{cases}x+y=10\\ y=-2x\end{cases}\Rightarrow(x=-10 \text{ و } y=20)$$

۷۹/۹ ـ فرستنده : **جواد فیض**

درمثلث ABC ضلع $AC=b$ ازضلع $AB=c$ بزرگتر است. از M وسط ضلع BC موازی‌باضلع AC رسم می‌کنیم

که نیمساز زاویهٔ A را در N قطع می‌کند. طول پاره خط MN را برحسب b و c حساب کنید.



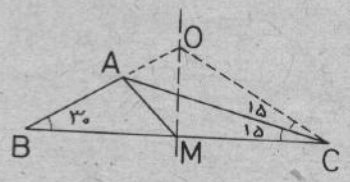
حل ـ خط BN را رسم می‌کنیم که ضلع AC را در D قطع می‌کند. در مثلث BDC چون M وسط BC و MN با CD موازی است پس N وسط BD است. در مثلث ABD خط AN میانه و نیمساز است پس این مثلث متساوی‌الساقین است و داریم:

$$DC = AC - AD = AC - AB = b - c$$

$$MN = \frac{DC}{۲} = \frac{b-c}{۲}$$

۷۹/۱۰ـ از احمد نبوی دبیرستان البرز

در مثلث ABC اندازه زاویه‌های B و C به ترتیب °۳۰ و °۱۵ است. زاویهٔ میانهٔ AM با ضلع BC چقدر است؟



حل ـ از N وسط BC عمودی بر آن اخراج می‌کنیم تا امتداد BA را در O قطع کند. از O به C وصل می‌کنیم. مثلث BOC متساوی‌الساقین بوده و بنابراین زاویهٔ $OCA = ۱۵^\circ$ بوده و AC نیمساز زاویهٔ OCB می‌باشد. در نتیجه:

$$\frac{CO}{CB} = \frac{AO}{AB}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMC داریم $OC = ۲OM$ و نیز $BC = ۲MB$ پس:

$$\frac{CO}{CB} = \frac{۲OM}{۲MB} = \frac{MO}{MB} = \frac{AO}{AB}$$

در نتیجه:

$$\frac{MO}{MB} = \frac{AO}{AB}$$

بنابراین AM نیمساز زاویهٔ BMO بوده و نتیجه می‌گیریم که زاویهٔ AMB برابر °۴۵ است.

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۷۹/۱۱ـ ضلعهای مربع ABCD با محورهای مختصات متوازیند و رأس A از آن برخط △ به معادلهٔ:

$$x - ۲y + ۲ = ۰$$

و رأس B از آن برخط $\triangle_۱$ به معادلهٔ:

$$۳x - ۲y = ۶$$

واقع است. هرگاه AB موازی $x'x$ و A به‌طول یك باشد؛ اولا مختصات رأسهای دو مربع را که جواب مسئله‌اند حساب کنید.

ثانیاً هرگاه P و Q مرکزهای دومربع و M نقطهٔ تلاقی دو خط △ و $\triangle_۱$ باشد نسبت دوضلع MP و MQ ازمثلث MPQ چقدر است؟

حل ـ از معادلهٔ △ درازاء $x = ۱$ نتیجه می‌شود $y = ۱/۵$ پس $A(۱ و ۱/۵)$ ودر نتیجه B به‌عرض ۱/۵ است. از معادلهٔ $\triangle_۱$ درازاء $y = ۱/۵$ نتیجه می‌شود $x = ۳$ پس $B(۳ و ۱/۵)$. چون AB موازی $x'x$ است پس:

$$AB = |x_B - x_A| = |۳ - ۱| = ۲$$

ضلع AD با $y'y$ موازی است پس:

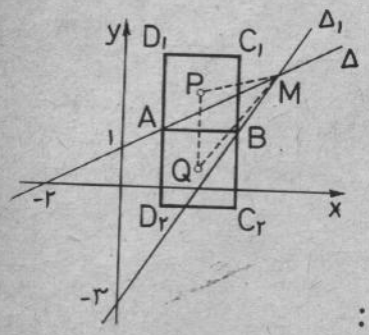
$$x_D = x_A = ۱ \text{ و } AD = |y_D - y_A| = ۲$$

$$y_D - ۱/۵ = \pm ۲ \Longrightarrow y_D = ۳/۵ \text{ یا } -۰/۵$$

$$D_۱(۱ و ۳/۵) \text{ و } D_۲(۱ \text{ و } -۰/۵)$$

رأس C با B همطول وبا D همعرض است، پس:

$$C_۱(۳ و ۳/۵) \text{ و } C_۲(۳ \text{ و } -۰/۵)$$



دومربع $ABC_۱D_۱$ و $ABC_۲D_۲$ جوابهای مسئله‌اند واگر $I^۲$ مرکز مربع اولی و Q مرکز مربع دومی باشد، چون P وسط $AC_۱$ و Q وسط $AC_۲$ است پس:

$$P(۲ و ۲/۵) \text{ و } Q(۲ و ۰/۵)$$

$$M\begin{cases} x - ۲y + ۲ = ۰ \\ ۳x - ۲y = ۶ \end{cases} \longrightarrow M\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۳ \end{matrix}\right.$$

$$MP = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۳ - ۲/۵)^۲} = \sqrt{۴/۲۵}$$

$$MQ = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۳ - ۰/۵)^۲} = \sqrt{۱۰/۲۵}$$

$$\frac{MP}{MQ} = \sqrt{\frac{۴/۲۵}{۱۰/۲۵}} = \sqrt{\frac{۱۷}{۴۱}}$$

۷۹/۱۲ـ هرگاه درصفحهٔ محورهای مختصات نقطهٔ $A(tg\alpha$ و $cotg\alpha)$ برخط به معادلهٔ :

$$3x-6y+7=0$$

قرار داشته باشد مقدار $tg\alpha$ واز روی‌آن مقدار $sin\alpha$ راحساب کنید .

حل ـ مختصات A درمعادلهٔ داده شده صدق می‌کند ، پس :

$$3tg\alpha-6cotg\alpha+7=0$$

با توجه به اینکه $cotg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$ خواهیم داشت :

$$3tg^2\alpha+7tg\alpha-6=0 \Longrightarrow tg\alpha=-3 \text{ یا } \frac{2}{3}$$

$$sin\alpha=\frac{\pm tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ یا } \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۷۹/۱۳ـ فرستنده : **همایون مرادی** دبیرستان بحرالعلوم بروجرد

معادلهٔ خطی را بنویسیدکه ازنقطهٔ $A(3$ و $2)$ گذشته و محورهای مختصات‌رادرنقاط B و C قطع کند بقسمی‌که مختصات این دونقطه عددهای صحیح‌باشند .

حل ـ بافرض $B(a$ و $0)$ و $C(0$ و $b)$ معادلهٔ خط BC می‌شود :

$$bx+ay=ab$$

مختصات A دراین معادله صدق می‌کند، پس :

$$3b+2a=ab$$

$$a=\frac{3b}{b-2}=3+\frac{6}{b-2}$$

چون a عدد صحیح است پس:

$$b-2=\pm1 \text{ یا } \pm2 \text{ یا } \pm3 \text{ یا } \pm6$$

درازاء $b-2=1$ داریم $b=3$ و $a=9$ ومعادلهٔ BC می‌شود :

$$3x+9y=27 \text{ یا } x+3y=9$$

درازاء سایر مقادیر $b-2$ معادلهٔBC به‌ترتیب عبارت‌خواهد شد از :

$$2x+3y=12 \qquad x-3y+3=0 ،$$

$$x+y=5 \qquad 2x-3y=0 ،$$

$$2x+y=8 \qquad x-y=1 ،$$

$$2x-y=4$$

۷۹/۱۴ـ در صفحهٔ محورهای مختصات شش ضلعی ABCDEF را درنظرمی گیریم بقسمی‌که ضلعهای متقابل‌آن باهم موازی وقطر AD برضلعهای AF و CD عمود باشد هرگاه $A(2$ و $0)$ و $B(6$ و $0)$ و $E(0$ و $5)$ و $F(0$ و $1)$ باشد ؛

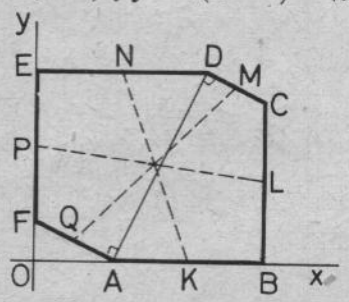
اولا ـ مختصات رأسهای دیگر شش ضلعی را حساب کنید .

ثانیاً ـ معادلات خطوط واصل بین‌اوساط ضلعهای متقابل را بنویسیدو محقق‌کنیدکه این سه خط متقاربند .

حل ـ داریم :

$$m_{AF}=-\frac{1}{2}\Longrightarrow m_{AD}=2$$

$$(AD): y=2(x-2)=2x-4$$



ضلع ED باضلع AB موازی است و چون AB بـ $x'x$ واقع‌است پس D و E همعرضند یعنی عرض D برابربا ۵است وازمعادلهٔAD درازاء $y=5$ داریم $x=4/5$ یعنی $D(4/5$ و $5)$. ضلع CD باضلع AF موازی است‌پس:

$$m_{CD}=-\frac{1}{2} \text{ و } (CD): y-5=-\frac{1}{2}(x-\frac{9}{2})$$

$$(CD): \ y=-\frac{1}{2}x+\frac{29}{4}$$

نقطهٔ C همطول‌نقطهٔ B است وازمعادلهٔ CD درازاء $x=6$ داریم $y=4/25$ یعنی$C(6$ و $4/25)$.ثانیاً اگر K،L،M،N، P، Q به‌ترتیب اوساط AB، BC، CD، DE، EF وFA باشد خواهیم داشت :

$$K(4 \text{ و } 0) ، L(6 \text{ و } \frac{17}{8}) ، M(\frac{21}{4} \text{ و } \frac{37}{8})$$

$$N(\frac{9}{4} \text{ و } 5) ، P(0 \text{ و } 3) ، Q(1 \text{ و } \frac{1}{2})$$

$$\begin{cases}(KN): 20x+7y=80\\(LP): 7x+48y=144\\(MQ): 33x-34y=16\end{cases}$$

ازمعادله‌های‌اول ودوم نتیجه می‌شود:

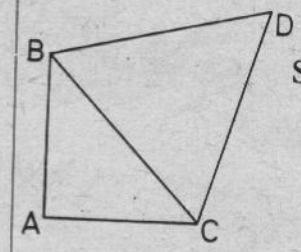
$$x=\frac{2832}{911} \text{ و } y=\frac{2320}{911}$$

این مقادیر درمعادلهٔ سوم دستگاه صدق می‌کنند پس سه خط KN و LP و MQ متقاربند.

۷۹/۱۵- از جواد فیض

روی وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، مثلث متساوی‌الاضلاع DBC را می‌سازیم. هرگاه مساحت این مثلث n برابر مساحت مثلث ABC باشد، حدود n و مقدار $tg ABC$ را حساب کنید.

حل- اگر طولهای $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ باشد:



$$S_{DBC} = a \times \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= (b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b.c$$

$$S_{DBC} = nS_{ABC} \Longrightarrow (b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4} = n.\frac{1}{2}b.c$$

این رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2n}{\sqrt{3}} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

با فرض $\frac{b}{c} = x$ به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2\sqrt{3} - 2nx + \sqrt{3} = 0$$

$$\Delta' = n^2 - 3 > 0 \Longrightarrow n \geqslant \sqrt{3}$$

$$tg ABC = \frac{b}{c} = x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 3}}{\sqrt{3}}$$

۷۹/۱۶- در صفحهٔ محورهای مختصات هرگاه فاصلهٔ دو نقطهٔ

$A(tg\alpha \text{ و } 2cotg\alpha)$ و $B(-3cotg\alpha \text{ و } 3tg\alpha)$

برابر با $\sqrt{17}$ باشد، مقدار عددی مختصات دو نقطهٔ A و B را معلوم کنید.

حل- داریم:

$$\overline{AB}^2 = (tg\alpha + 3cotg\alpha)^2 + (2cotg\alpha - 3tg\alpha)^2$$

$$\overline{AB}^2 = 10tg^2\alpha + 13cotg^2\alpha - 6 = 17$$

با تبدیل $cotg x$ به $tg x$ خواهیم داشت:

$$10tg^4\alpha - 23tg^2\alpha + 13 = 0$$

$$\Longrightarrow tg\alpha = \pm 1 \text{ یا } \pm\sqrt{\frac{13}{10}}$$

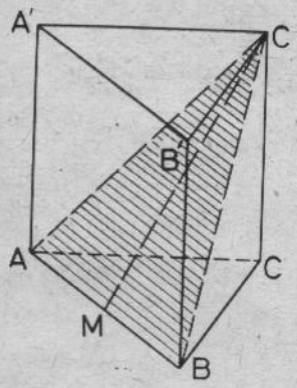
واز آنجا مختصات A و B به ترتیب برابر است با:

$$A(\pm 1 \text{ و } \mp 2) \text{ و } (B \mp 3 \text{ و } \pm 1)$$

$$A\left(\pm\sqrt{\frac{13}{10}} \text{ و } \pm 2\sqrt{\frac{10}{13}}\right)$$

$$B\left(\mp 3\sqrt{\frac{10}{13}} \text{ و } \pm 3\sqrt{\frac{13}{10}}\right)$$

۷۹/۱۷- درمنشور منتظم مثلث‌القاعدهٔ $ABCA'B'C'$ طول ضلع هریک ازمثلث‌های متساوی‌الاضلاع قاعده a است. بر یال AB ازقاعدهٔ پایین و رأس C' از قاعدهٔ بالا صفحه‌ای می‌گذرانیم که مقطع آن با منشور مثلث $C'AB$ است. هرگاه مساحت این مثلث $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ باشد طول یال‌جانبی منشور برحسب a چقدر است؟



حل- مطابق با شکل داریم:

$$S_{AC'B} = \frac{1}{2}AB.MC'$$

$$= \frac{1}{2}a.MC'$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}a.MC'$$

$$\Longrightarrow MC' = a\sqrt{3}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $MC'B$:

$$BC'^2 = MC'^2 + MB^2$$

$$BC'^2 = \frac{13a^2}{4} \Longrightarrow BC' = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $BC'C$:

$$CC'^2 = BC'^2 - BC^2 = \frac{13a^2}{4} - a^2 = \frac{9a^2}{4}$$

$$CC' = \frac{3a}{2}$$

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۸۹/۱۸- هرگاه مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع:

$$y = a\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

برابر باشند با $\frac{\sqrt{5} \pm 2}{4}$ مقدار a را حساب کنید.

حل_ با تبدیل حاصل‌ضرب دو سینوس به مجموع خواهیم داشت:

$$y = a[\cos\frac{\pi}{۴} - \cos(۲x + \frac{\pi}{۴})]$$

حداکثر وحداقل مقدار $\cos(۲x + \frac{\pi}{۴})$ برابر است با ۱+ و ۱- پس حداقل و حداکثر مقدار تابع می‌شود:

$$a[\frac{\sqrt{۲}}{۲} \pm ۱] = \frac{a(\sqrt{۲} \pm ۲)}{۲}$$

$$\frac{a(\sqrt{۲} \pm ۲)}{۲} = \frac{\sqrt{۵} \pm ۲}{۴} \Longrightarrow a = \frac{\sqrt{۵} \pm ۲}{۲(۲ \pm \sqrt{۲})}$$

۷۹/۱۹_ دوتابع زیر مفروض است

$y_۱ = ۳\cos(۲x + ۱)$ و $y_۲ = ۳\sin(۳x - ۱)$

اولا_ طولهای نقاط مشترك دو منحنی را حساب‌کنید.

ثانیاً_ در نقطهٔ به طول $\frac{\pi}{۲} + ۲$ مماسی برمنحنی نمایش هندسی هريك‌ازدوتابع‌رسم‌می‌کنیم. نسبت‌ضریب‌زاویه‌ایهای‌این دومماس را پیداکنید.

حل_ اولا داریم:

$$۳\sin(۳x - ۱) = ۳\cos(۲x + ۱)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} + ۱ - ۳x) = \cos(۲x + ۱)$$

$$۲x + ۱ \pm (\frac{\pi}{۲} + ۱ - ۳x) = ۲k\pi$$

$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۲$ یا $x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۱۰}$

ثانیاً داریم:

$y_۱' = -۶\sin(۲x + ۱)$ و $y'_۲ = ۹\cos(۳x - ۱)$

$$m_۱ = -۶\sin(\pi + ۵) = ۶\sin ۵$$

$$m_۲ = ۹(\cos(\frac{۳\pi}{۲} + ۵) = ۹\sin ۵$$

$$\frac{m_۱}{m_۲} = \frac{۶\sin ۵}{۹\sin ۵} = \frac{۲}{۳}$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۷۹/۲۰_ ترجمهٔ **فتح‌اله زرگری**

اولا منحنی نمایش تابع زیررا رسم‌کنید:

$$y = x^۲ + x + \sqrt{(x^۲ + ۱)^۲ - ۴x^۲}$$

ثانیاً_ در نقطهٔ تلاقی نمایش هندسی تابع با محور y'y خطی قائم برآن رسم می‌کنیم. معادلهٔ این خط و نقطه یا نقاط تلاقی آنرا با منحنی نمایش هندسی تابع بدست‌آورید.

حل_ اولا داریم:

$$y = x^۲ + x + \sqrt{(x^۲ - ۱)^۲} = x^۲ + x + |x^۲ - ۱|$$

هرگاه $x^۲ - ۱ < ۰$ یعنی $-۱ < x < ۱$ باشد داریم:

$$y = x^۲ + x - (x^۲ - ۱) = x + ۱$$

نمایش هندسی این تابع قطعه‌ای از خط به‌معادلهٔ $y = x + ۱$ است‌که طولهای آن بین ۱ و ۱- محصورند.

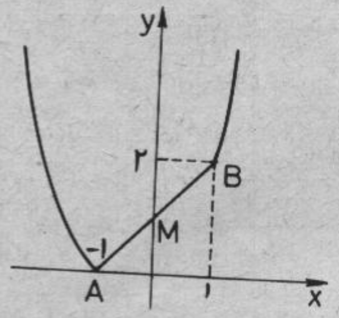
هرگاه $x^۲ - ۱ > ۰$ یعنی $x > ۱$ یا $x < -۱$ باشد داریم:

$$y = x^۲ + x + (x^۲ - ۱) = ۲x^۲ + x - ۱$$

$$y' = ۴x + ۱ = ۰ \Longrightarrow x = -\frac{۱}{۴}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		−				+	
y	$+\infty$	↘	۰		۲	↗	$+\infty$

نمایش هندسی تابع مفروض به‌شکل زیر است که از دو نیم منحنی ويك‌پاره خط تشکیل شده‌است.



ثانیاً اگر M نقطهٔ تلاقی نمایش هندسی تابع بامحور y'y باشد داریم M(۰و۱) و دراین نقطه‌قائم برمنحنی عمودی‌است‌که برخط AB رسم می‌شود. ضریب زاویه‌ای AB برابر یک است پس ضریب زاویه‌ای قائم مزبور ۱- است ومعادلهٔ آن‌می‌شود:

$y - ۱ = -(x - ۰)$ یا $y = -x + ۱$

$$\begin{cases} y = ۲x^۲ + x - ۱ \\ y = -x + ۱ \\ x \geqslant ۱ \text{ یا } x < -۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^۲ + x - ۱ = ۰ \\ x \geqslant ۱ \text{ یا } x < -۱ \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{-۱ - \sqrt{۵}}{۲}$$

نتیجه خواهد شدکه قائم مورد نظر علاوه‌بر M در نقطهٔ دیگر

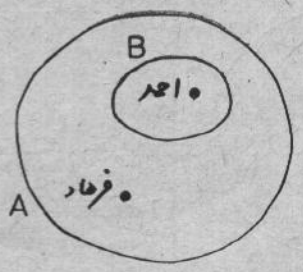
دنباله درصفحهٔ ۱۶۳

۳۵

مجموعهٔ حرفهای صدادار الفبای لاتن‌را با V ومجموعهٔ تمام حرفهای الفبای لاتن را با L نشان می‌دهیم .

آیا همهٔ عضوهای مجموعهٔ V به مجموعهٔ L تعلق دارند؟.....

آیا همهٔ عضوهای مجموعهٔ L به مجموعهٔ V تعلق دارقد ؟.....

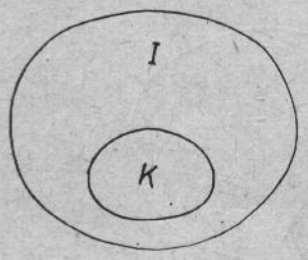


۳۹

مجموعهٔ B جزئی از مجموعهٔ A است ، به عبارت دیگر B زیر مجموعهٔ A است.

این مفهوم را چنین نشان می‌دهیم : $B \subset A$

علامت $\subset$ یعنی : ....



۴۳

K مجموعهٔ دهستانهای خوزستان است.

A مجموعهٔ دهستانهای اهواز است .

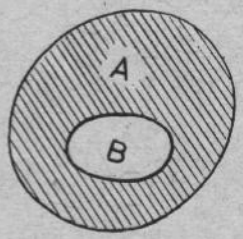
کدامیك از دو مجموعهٔ A و K زیر مجموعهٔ دیگری است؟ آن‌را با علامت بنویسید .

.....

زیر مجموعهٔ

۴۷

در شکل روبرو نمودار A مجموعهٔ تمام‌دانش‌آموزان‌دبیرستان و B مجموعهٔ دانش‌آموزان عینکی دبیرستان رسم‌شده‌است.



خاصهٔ مشترك‌تمام‌عضوهای مجموعهٔ B این‌است‌که دانش‌آموز دبیرستان می‌باشند وعینك می‌زنند .

خاصهٔ مشترك عضوهای A که روی نمودار درناحیهٔ هاشورخورده واقعند چیست ؟.....

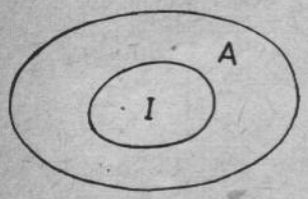
B نسبت به A

کل

۵۱

A مجموعهٔ دانش آموزان دبیرستان است.

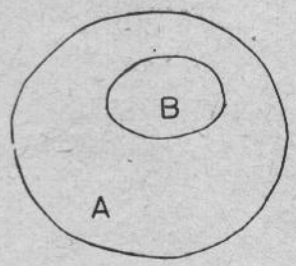
I زیرمجموعه‌ای از دانش‌آموزان دبیرستان است‌که شبانه‌روزی هستند .



در روی شکل ناحیهٔ مربوط به $C_A I$ (یعنی متمم I نسبت به A) را هاشور بزنید .

۳۸

این نمودار مجموعه های A و B است.



احمددانش‌آموز دبیرستان است وعینك می‌زند.

فرهاد دانش‌آموز دبیرستان است وعینکی نیست.

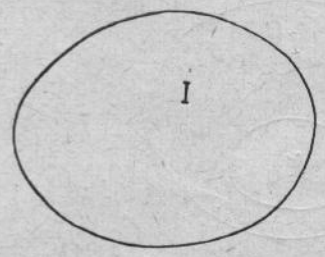
روی‌شکل، نقطهٔ نمایندهٔ احمدو نقطهٔ نمایندهٔ فرهادرا نشان‌دهید.

بلی

نه

۴۲

شکل‌مقابل‌نمودار مجموعهٔ I، دهستانهای ایران، است.



نمودارK،مجموعهٔ دهستانهای خوزستان را روی آن رسم‌کنید

زیر مجموعهٔ

۴۶

علامت $\subset$ یعنی . . . .

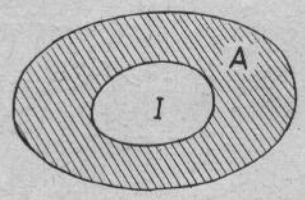
$A \subset K$

۵۰

مجموعهٔ A را **مجموعهٔ کل** می‌نامیم.

$C_A B$ها خوانده می‌شود: متمم . . . .

A مجموعهٔ . . . . است.



دانش‌آموز دبیرستان می‌باشند و عینك نمی‌زنند.

۳۶

هرگاه تمام عضوهای یك مجموعه بـه مجموعهٔ دیگر نیزتعلق داشته‌باشند، می گوئیم که مجموعهٔ اول **زیرمجموعهٔ** مجموعهٔ دوم است .

مجموعهٔ حروف صدادار الفبای لاتن ..... ای‌ازمجموعهٔ حروف الفبای لاتن است.

۴۰

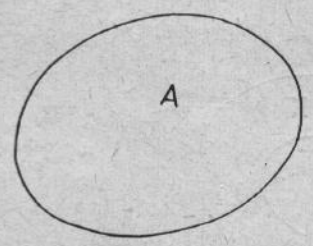
V مجموعهٔ حروف صدادار و L مجموعـهٔ تمام حروف الفبای لاتن است .

یکی ازدو مجموعهٔ V و L زیرمجموعهٔ دیگری است .

این مفهوم را با علامت بنویسید :

.....

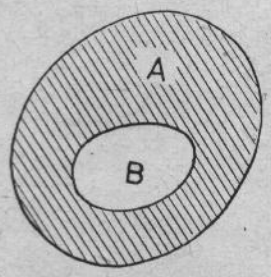
۴۴



شکل مقابل نمودار A مجموعهٔدهستانهای اهواز است .

روی این شکـل ، نمودار K ، مجـموعـهٔ دهستانهای خـوزستان را رسم‌کنید .

۴۸



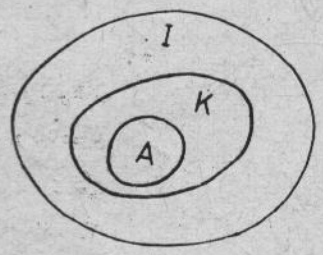
درنمودار مقابـل ، آن نـاحیه از A کـه هاشور خورده است ، **متمم مجموعـهٔ B نسبت به مجموعـهٔ** A نامیده می‌شود.

متمم مجموعهٔ B نسبت به‌مجموعهٔ A یا نشانهٔ $C_A B$ نشان داده می‌شود .

نشانهٔ C یعنی.....

زیـر مجموعه

$K \subset I$



B

۵۲

A مجموعهٔ تمام دانش‌آموزان دبیرستان است .

I زیر مجموعه‌ای ازدانش‌آمـوزان دبیرستان است‌کـه شبانه‌روزی می‌باشند .

متمم I نسبت‌به A ، مجموعهٔدانش‌آموزانی‌ازدبیرستان است‌که . . . . .

۳۷

مجموعهٔ دانش‌آموزان دبیرستان را با A و مجموعهٔ دانش‌آموزانی ازدبیرستان‌راکه عینک‌می‌زنندباB نشان‌می‌دهیم.

B یك .....ازA است.

زیر مجموعه

۴۱

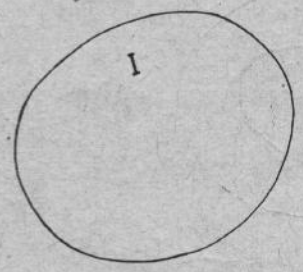
هرگاه I مجموعهٔدهستانهای‌ایران وKمجموعهٔدهستانهای خوزستان باشد، چگونه‌باید بنویسیم:

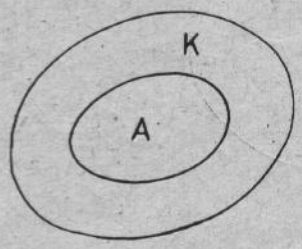
$K \subset I$ یا اینکه $I \subset K$

$V \subset L$

۴۵

شکل‌مقابل‌نمودار I،مجموعهٔدهستانهای ایران‌است. روی‌این شکل نمودارهای K وA ، مجموعه‌های دهستانهای‌خوزستان واهواز را رسم‌کنید.

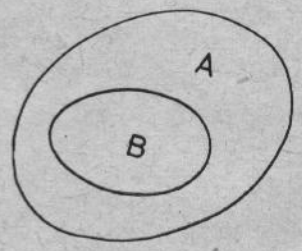




۴۹

مجموعهٔB زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است .

متمم B نسبت به A شامل عضوهایی از A است که عضو ..... نیستند.



متمم

شبانه‌روزی نیستند

دنباله در شمارهٔ بعد

$N\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ نمایش هندسی تابع را قطع می‌کند.

۷۹/۲۱ـ به فرض آنکه a و b عددهای مخالف صفر باشند، معادلات مجانبهای موازی محور $x'x$ منحنی نمایش هندسی تابع زیررا معلوم کنید:

$$y=\frac{\sqrt[3]{a^3x^3+px^2+qx+r}}{\sqrt[4]{b^4x^4+mx^2+n}}$$

حل ـ هرگاه به فرض، $x\to+\infty$ دراین صورت حدتابع برابر می شود باحد:

$$y=\frac{\sqrt[3]{a^3+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}+\frac{r}{x^3}}}{\sqrt[4]{b^4+\frac{m}{x^2}+\frac{n}{x^4}}}$$

که این حد برابراست با

$$y=\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[4]{b^4}}=\frac{a}{|b|}$$

هرگاه $x\to-\infty$ دراین صورت حد تابع برابرمی‌شود با حد:

$$y=\frac{\sqrt[3]{a^3+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}+\frac{r}{x^3}}}{-\sqrt[4]{b^4+\frac{m}{x^2}+\frac{n}{x^4}}}$$

که این حد برابر می‌شود با:

$$y=\frac{\sqrt[3]{a^3}}{-\sqrt[4]{b^4}}=\frac{-a}{|b|}$$

به فرض آنکه تابع در فاصلهٔ $x>N_1$ و $x<N_2$ معین باشد یعنی x بتواند به سمت $\pm\infty$ معین کند، منحنی نمایش تابع دو مجانب موازی $x'x$ دارد به معادله‌های $y=\pm\frac{a}{b}$

۷۹/۲۲ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

هرگاه داشته باشیم:

$$\cos^2a+\cos^2b+\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c=1$$

رابطهٔ بین کمانهای a و b و c را بدست آورید.

حل ـ رابطهٔ مفروض را به صورتهای زیر تبدیل می‌کنیم.

$$1+\cos2a+1+\cos2b+2\cos^2c+4\cos a\cos b\cos c=2$$

$$2\cos(a+b)\cos(a-b)+2\cos^2c+2\cos c[\cos(a+b)+\cos(a-b)]=0$$

$$[\cos(a-b)+\cos c][\cos(a+b)+\cos c]=0$$

$$\cos\frac{a-b+c}{2}\cos\frac{a-b-c}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}\times\cos\frac{a+b+c}{2}=0$$

چون هریك از چهار عامل را برابر باصفر قرارداده کمان آن را تعیین کنیم نتیجه خواهد شد که بین a و b و c یکی از چهار رابطهٔ زیر برقرار است:

$$a\pm b\pm c=2k\pi+\pi$$

۷۹/۲۳ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$2t\sin x+(t^2-1)\cos x=(t^2+1)\cos ax$$

حل ـ معادله را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{2t}{1+t^2}\sin x+\frac{t^2-1}{t^2+1}\cos x=\cos ax$$

با فرض $t=tg\frac{\varphi}{2}$ خواهیم داشت:

$$\sin\varphi\sin x+\cos\varphi\cos x=\cos ax$$

$$\cos(x-\varphi)=\cos ax$$

$$ax\pm(x-\varphi)=2k\pi$$

$$x=\frac{2k\pi+\varphi}{a+1} \quad \text{یا} \quad x=\frac{2k\pi-\varphi}{a-1}$$

۷۹/۲۴ـ از **سعید فرشاد**

عددی را تعیین کنید که مجذور باشد وجذرآن درمبنای ۷ به صورت $\overline{(a+4)(a-2)}$ نوشته شود.

حل ـ هر رقم عددنویسی حداقل برابر صفر است واز مبنای عددنویسی کوچکتر است. پس:

$$\begin{cases}7>a-2\geq0\\7>a+4\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geq2\\a<3\end{cases}\Rightarrow a=2$$

$$(60)_7=42 \quad \text{و} \quad 42^2=1764$$

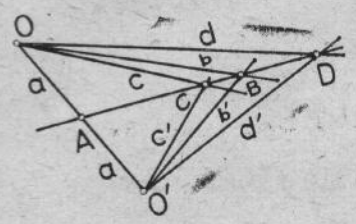
۷۹/۲۵ـ در تقسیم زیرهرحرف نمایندهٔ یك رقم است و حروف متفاوت نمایندهٔ رقمهای متفاوت می‌باشند. این ارقام را پیدا کنید.

AABB	CDE
DEB	DG
FBB	
HEB	
EB	

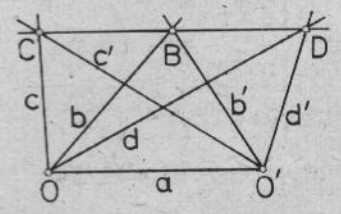
حل- از تفریق $B - B = B$ نتیجه می‌شود $B = ۰$ حاصل‌ضرب D در E و همچنین G در E به‌رقم صفر ختم‌شده است وچون حروف نمایندهٔ رقمهای متفاوتند پس $E = ۵$ و D و G رقمهای زوجند. چون حاصل‌ضرب $\overline{C۴۵}$ در ۴ برابر با ۴۵۰ نیست پس $D \neq ۴$ و همچنین $D \neq ۶$ و $D \neq ۸$ است. اما حاصل‌ضرب $\overline{C۲۵}$ در ۲ می‌شود ۲۵۰ پس $C = ۱$ و $D = ۲$ از تفریق $\overline{AA۰} - ۲۵۰ = \overline{F۰}$ نتیجه می‌شود که $A = ۳$ و $F = ۸$. بالاخره از تقسیم ۸۰۰ بر ۱۲۵ نتیجه می‌شود که: $G = ۶$ و $H = ۷$

۷۹/۲۶- ترجمهٔ از فرانسه

دو دسته شعاعهای توافقی $O(a, b, c, d)$ و $O'(a', b', c', d')$ در شعاع a مشترکند. هرگاه دو شعاع b و b' در B، دوشعاع c و c' در C، دوشعاع d و d' در D متقاطع باشند، ثابت‌کنیدکه سه نقطهٔ B و C و D بر یك استقامتند.



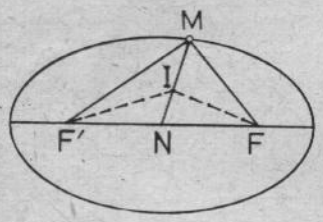
حل- اگر A نقطهٔ تلاقی شعاع a باخط BC باشد و شعاعهای d و d' خط BC را به ترتیب در D' و D'' قطع کنند D' مزدوج توافقی C نسبت به A و B و نیز D'' مزدوج توافقی C نسبت به A و B است پس D' و D'' دریك نقطه برهم منطبقند یعنی D نقطهٔ تلاقی دوشعاع d و d' برخط BC واقع است. هرگاه BC با a موازی باشد. پاره‌خط CD باید بوسیله سه‌شعاع c و b و d وهمچنین بوسیلهٔ سه شعاع c' و b' و d' به دوقسمت برابر تقسیم‌شود. یعنی D' نقطهٔ تلاقی BC با d قرینهٔ C نسبت به B است ونیز D'' نقطهٔ تلاقی BC با d' قرینهٔ C نسبت به B است. پس D' و D'' در D واقع بر BC



بریکدیگر منطبقند.

۷۹/۲۷- ترجمهٔ از فرانسه

هرگاه M نقطه‌ای از بیضی به‌کانونهای F و F' و I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث MFF' و N نقطهٔ تلاقی MI با FF' باشد نسبت $\frac{IN}{IM}$ برابر با چه مقداری است؟



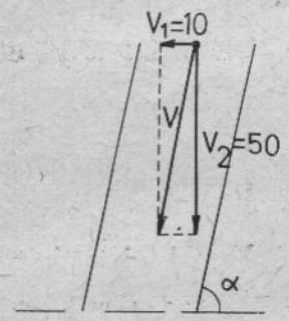
حل- I نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی زاویه‌های مثلث MFF' است. در مثلثهای MFN و MF'N داریم

$$\frac{IN}{IM} = \frac{FN}{FM} \text{ و } \frac{IN}{IM} = \frac{F'N}{F'M}$$

$$\frac{IN}{IM} = \frac{FN}{MF} = \frac{F'N}{MF'} = \frac{FN + NF'}{MF + MF'} = \frac{۲c}{۲a} = \frac{c}{a}$$

۷۹/۲۸- فرستنده: **مجید عرفانیان شیشه** دانشجوی دانشگاه مشهد

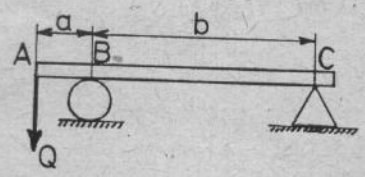
یك لوله روی اتومبیلی نصب شده است. اتومبیل با سرعت ۱۰ متربرثانیه حرکت می‌کند. یك قطرهٔ باران وارد لوله شده وباسرعت ۵۰ متربرثانیه سقوط می‌کند. زاویهٔ محور لوله با افق چقدر باشد تا اینکه قطرهٔ باران ضمن سقوط در داخل لوله به بدنهٔ آن برخورد نکند؟



حل- مطابق با شکل، برقطرهٔ باران دردهانهٔ لوله‌دونیرو واردمی‌شودکه قطره درامتداد برآیند آنها حرکت می‌کند. پس باید برآیند نیروها (سرعتها) موازی با دیوارهٔ لوله باشد یعنی با افق زاویه‌ای بسازد که برابر باشد با زاویه‌ای که محور لوله با افق می‌سازد. اگر این‌زاویه α باشد برابر است با:

$$\alpha = \text{Arc}tg \frac{۵۰}{۱۰} = \text{Arc}tg\ ۵$$

۷۹/۲۹- فرستنده : رسول آژیری دبیر دبیرستانهای گچساران .



میلهٔ AB مطابق بشکل نگهداشته شده ودرنقطهٔ A وزنهٔ Q به‌آن آویزان است . به فرض $b = ۴a$ مقدار وجهت عکس العمل نقاط B و C را تعیین کنید.

حل- گشتاور نیروها نسبت به‌نقطهٔ C می‌شود با :

$$Q(a+b) - R_B \times b = ۰ \Longrightarrow R_B = \frac{۵}{۴}Q$$

که به طرف بالاست. گشتاور نیروها نسبت به‌نقطهٔ B که به طرف پایین است می‌شود:

$$Q.a + R_C.b = ۰ \Longrightarrow R_C = \frac{۱}{۴}Q$$

حل مسائل شیمی

۷۹/۳۰- فرستنده : احمد رضا

جسم A به فرمول $C_۵H_{۱۲}O$ با سدیم فلزی تولید هیدرژن می‌کند. اگراین جسم را ازروی $Al_۲O_۳$ عبوردهیم به اولفین تبدیل می‌شودکه از اکسیداسیون آن دو محصول نتیجه می‌شودکه یکی ازآنها خنثی و دیگری اسیدی است بااکی‌والان گرم ۱ ± ۶۰. فرمول ساختمانی A را پیداکنید .

حل- الف: چون فرمول A بافرمول کلی الکلها و اترهای اشباع شده مطابقت می‌کند پس A یا الکل یا اتراست اما چون جسم A با سدیم فلزی هیدرژن تولید می‌کند پس الکل است وفرمول نیم گستردهٔ آن به‌صورت $C_۵H_{۱۱}OH$ است

ب- هنگام آب گیری ازالکلها عامل الکلی از روی یك کربن وهیدرژن ازروی کربن مجاوری که هیدرژن کمتر دارد برداشته شده وتولید مولکول آب می‌کندکه از این عمل الفین (هیدروکربورهای اتیلن) تولید می‌کند.

ج- از اکسیداسیون الفینها اگر ساختمان قرینه نداشته باشند هنگامی استن تولید می‌شودکه دریك سر مولکول دوبنیان $CH_۳$ متصل به‌کربنی که دارای اتصال دوگانه است باشد .

د- فرمول اسید را تعیین می‌کنیم. چون اسید یك ظرفیتی است پس اکی والان گرم آن با جرم ملکولی یکسان است . فرمول کلی اسیدهای یك ظرفیتی اشباع شده:

$$C_nH_{۲n}O_۲ = ۶۰ \pm ۱$$

$$۱۴n + ۳۲ = ۶۰ \pm ۱ \Longrightarrow n = ۲$$

پس: اسید استیك $CH_۳ - COOH$

باتوجه به‌مطالب گفته‌شده. فرمول الکل:

$$\begin{array}{l} CH_۳ - CH - CHOH - CH_۳ \\ \quad\quad\;\; | \\ \quad\quad CH_۳ \end{array}$$

۳ متیل‌بوتان ۲

واکنشهای گفته شده:

$$\begin{matrix} CH_۳ \\ CH_۳ \end{matrix}\!\!>CH - CHOH - CH_۳ \xrightarrow[-H_۲O]{Al_۲O_۳}$$

$$\begin{matrix} CH_۳ \\ CH_۳ \end{matrix}\!\!>C = CH - CH_۳ + H_۲O$$

۲ - متیل‌بوتن ۲

$$\begin{matrix} CH_۳ \\ CH_۳ \end{matrix}\!\!>C = CH - CH_۳ + ۳[O] \rightarrow$$

$$\begin{matrix} CH_۳ \\ CH_۳ \end{matrix}\!\!>C = O + CH_۳ - COOH$$

اسیداستیك ، استن

۷۹/۳۱- فرستنده : احمدرضا

ترکیب A به فرمول $C_۴H_۸O$ در مجاورت کاتالیز مناسب با هیدرژن اشباع می‌شود و به جسم B به فرمول $C_۴H_{۱۰}O$ تبدیل می‌گردد . جسم A محلول پرمنگنات اسیدی را بیرنگ می‌کند و ترکیب B هنگامی که با HBr ترکیب شود جسم C را تولید می‌کند . جسم C می‌تواند معرف گرنیارد تولیدکند وهنگامی‌که این جسم(معرف گرنیارد) را باآب ترکیب کنیم گازی تولید می‌کندکه ۱/۵ گرم از آن ۱/۱۲ لیتر حجم دارد . ساختمان A را مشخص کنید .

حل- در دوجسم A وB به تعداد مساوی اکسیژن می‌باشد وجسم B بافرمول کلی الکلها واترها مطابقت دارد . باتوجه به‌صورت مسئله معلوم می شودکه جسم A اتری است غیر اشباعی بنابراین فرمول جسم A رابه‌ترتیب زیر مشخص می‌کنیم

$$(B): R - O - R' + HBr \xrightarrow{\triangle} R - OH + R'Br$$

$$R'Br + Mg \rightarrow R'MgBr$$ ، معرف گرینیارد

$$R'MgBr + H_۲O \rightarrow R'H + Mg\begin{matrix} Br \\ OH \end{matrix}$$

$$M_{R'H} = \frac{۲۲/۴}{۱/۱۲} \times ۱/۵ = ۳۰$$

$R' = C_2H_5 -$ بنیان اتیل

$B : C_2H_5 - O - C_2H_5$ دی اتیل اتراکسید

$A : C_2H_5 - O - CH = CH_2$ ونیل اتیل اتراکسید

پاسخ تستهای ریاضی

۷۹/۳۲ـ (ب) به‌فرض آنکه داخل جعبه‌های شکلات کارتهایی باشدکه درمقابل تسلیم هر ۱۰ کارت یك جعبهٔ شکلات تحویل شود، اگر a بهای شکلات داخل جعبه و x ارزش یك کارت باشد داریم:

$$10x = a + x \Longrightarrow x = \frac{1}{9}a$$

بهای کل جعبه برابر است با $A = a + x$ و $x = 0/1A$ است.

۷۹/۳۳ـ (ج) حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی یك واحد کمتر از عددی است که مربع کامل است:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= n(n+3) \times (n+1)(n+2) = (n^2+3n)[(n^2+3n)+$$

$$+2] = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) = (n^2+3n+1)^2 - 1$$

۷۹/۳۴ـ (ب) به‌فرض آنکه a و b مثبت باشند داریم:

$$S = \frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}} = \frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{(a-b)^2}}$$

$$S = \frac{|a| - |b|}{|a-b|}$$

هرگاه $a > b > 0$ باشد داریم:

$$|a| = a \text{ و } |b| = b \text{ و } |a-b| = a-b$$

$$S = \frac{a-b}{a-b} = 1$$

درحالت $0 < a < b$ داریم:

$$S = \frac{a-b}{-(a-b)} = -1$$

۷۹/۳۵ـ (الف) معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(3^{2x} + 3^{-2x} - 2) + 3(3^{-x} - 3^{x}) - 4 = 0$$

بافرض $3^{x} - 3^{-x} = Z$ داریم:

$$Z^2 + 3Z - 4 = 0 \text{ یا } (Z+4)(Z-1) = 0$$

$$Z = -4 \text{ یا } 1$$

بافرض $3^{x} = A$ داریم $3^{-x} = \frac{1}{A}$ و:

$$-A + \frac{1}{A} = -4 \text{ یا } A^2 - 4A - 1 = 0$$

$$A^2 - 4A + 4 - 5 = 0 \text{ یا } (A-2)^2 = 5$$

$$A = 2 \pm \sqrt{5}$$

3^{x} مثبت است پس:

$$3^{x} = 2 + \sqrt{5} \Longrightarrow x = \log_3(2+\sqrt{5})$$

$$-A + \frac{1}{A} = 1 \text{ یا } A^2 + A - 1 = 0$$

$$A^2 + A + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = 0 \text{ یا } (A + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

$$A = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$3^{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow x = \log_3 \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

۷۹/۳۶ـ (د) ازرابطهٔ

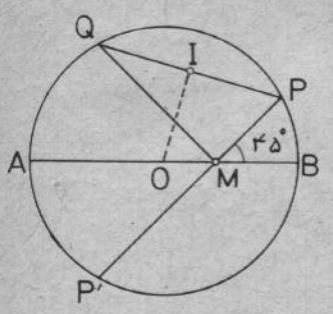
$$x = \sqrt[3]{5a+2b} \times \sqrt[7]{\frac{b}{(b+1)^3}}$$

نتیجه خواهدشدکه:

$$N = \log x =$$

$$\frac{1}{3}\log(5a+2b) + \frac{1}{7}[\log b - 3\log(b+1)] + 1$$

۷۹/۳۷ـ (د) در دایرهٔ به‌قطر AB و به‌مرکز O نقطهٔ M برAB حرکت می‌کند و PP′ ازM گذشته با AB زاویهٔ ۴۵° می‌سازد وMQ بر PP′ عموداست. در این‌صورت داریم:



$$\frac{\widehat{PB} + \widehat{P'A}}{2} = 45^\circ \Longrightarrow \widehat{PB} + \widehat{P'A} = 90^\circ$$

چون MA نیمساز زاویهٔ QMP′ است پس $\widehat{P'A} = \widehat{AQ}$ و

$$\widehat{QA} + \widehat{PB} = 90^\circ \Longrightarrow \widehat{PQ} = 90^\circ$$

چون اندازهٔ کمان PQ ثابت است پس طول وتر PQ ثابت است وفاصلهٔ آن ازمرکز دایره نیز ثابت است. یعنی مکان I وسطPQ دایره‌ای است به‌مرکز O.

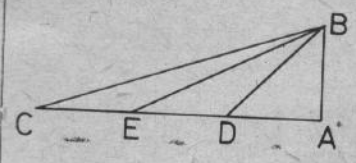
۷۹/۳۸ـ (ج) هرگاه مثلث ABC درزاویهٔ A قائمه و $AC = 3AB$ ونقاط D و E برAC چنان انتخاب‌شوند که $AD = DE = CE$ باشد، بافرض $AB = a$ داریم:

$$AD = a \text{ و } BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$AE = 2a \text{ و } BE = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

$$AC = 3a \text{ و } BC = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$$

$$\frac{BC}{BE}=\frac{a\sqrt{10}}{a\sqrt{5}}=\sqrt{2}$$



$$\frac{CD}{BD}=\frac{2a}{a\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{DB}{ED}=\frac{a\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$\frac{BC}{BE}=\frac{CD}{BD}=\frac{BD}{DE}=\sqrt{2}$$

دومثلث BDE وBDC متشابهند ونسبت تشابه آنها $\sqrt{2}$ است.

۷۹/۳۹- (د) می‌توانیم محورهای مختصات راچنان انتخاب کنیم که اگر ABC مثلث متساوی‌الاضلاع و مختصات رأسهای B وC عددهای گویا باشند داشته باشیم $B(a\ و\ 0)$ و $C(a\ و\ 0)$ دراین‌صورت خواهیم‌داشت $A(0\ و\ \frac{a\sqrt{3}}{2})$ هرگاه a عدد گویا باشد $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ عدد گنگ است. بنابراین هرگاه مختصات دورأس ازیك مثلث متساوی‌الاضلاع عددهای گویا باشند اقلاً یکی از مختصات رأس سوم عددی گنگ می‌باشد.

۷۹/۴۰- (الف) اگر d فاصلهٔ نقطهٔ $A(1\ و\ -3)$ ازخط متغیر △ به‌معادلهٔ $(m+1)x-2my+4=0$ باشد، این معادله‌ها به‌صورت $(x-2y)m+x+4=0$ نوشته شده ونتیجه می‌شود که خط △ همواره‌ازنقطهٔ ثابت $P(-2\ و\ -1)$ می‌گذرد. به‌عبارت‌دیگر خط △ حول‌نقطهٔ ثابت P می‌چرخد. اگر $AH=d$ عمودی‌باشدکه ازA بر △ رسم‌می‌شود در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHP داریم:

$$0<d=AH<AP$$

d دارای حداقلی برابر باصفرودارای‌حداکثری برابر با طول AP است.

۷۹/۴۱- (ب) به‌فرض $A(4\ و\ 4)$ و$B(-2\ و\ -4)$ هرگاه △ خطی باشدکه‌درB باAB زاویهٔ 30° بسازد و AH عمودی‌باشدکه ازA بر △ عمودباشد طول AH نصف طول AB است وطول AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(4+2)^2+(4+4)^2}=10$$

پس $AH=5$ یعنی فاصلهٔ خط △ ازمرکز دایره بیش‌ازشعاع دایره است وبادایره متخارج است.

۷۹/۴۲- (ج) طرف اول تساوی:

$$\cot g\,x+\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{1}{\sin x}$$

به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{|\sin x|}{|1+\cos x|}$$

عبارت $1+\cos x$ همواره مثبت است وهرگاه انتهای کمان x در بخش‌اول یا بخش دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد مقدار $\sin x$ مثبت است یعنی $|\sin x|=\sin x$ وحاصل‌عبارت بالا می‌شود:

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\cos^2 x+\cos x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=$$

$$=\frac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{1}{\sin x}$$

۷۹/۴۳- (الف) عبارت:

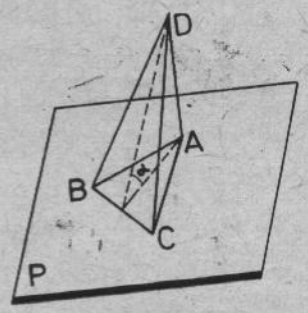
$$S=6\sin^2 x\cos^2 x+a(\sin^6 x+\cos^6 x)$$

را به‌ترتیب زیر عمل‌می‌کنیم:

$$S=6\sin^2 x\cos^2 x+a[(\sin^2 x+\cos^2 x)\times(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)]=6\sin^2 x\cos^2 x+a[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x]=a+3(a-2)\sin^2 x\cos^2 x$$

برای آنکه‌این‌عبارت‌به‌x بستگی نداشته‌باشدباید $a=2$ باشد.

۷۹/۴۴- (ب)



هرگاه ABC مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a واقع درصفحهٔ P و DA برصفحهٔ P عمودبوده ومساحت‌مثلث ABC برابربا $\frac{3a^2\sqrt{10}}{10}$ باشدچون مساحت مثلث ABC برابر $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است‌پس‌اگر α زاویهٔ مسطحهٔ دو صفحهٔ DBC وABC باشد داریم:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{10}}{10}\cos\alpha\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{30}}{12}$$

$$\frac{\sqrt{30}}{12}<\frac{1}{2}\Longrightarrow\alpha>60^\circ$$

۷۹/۴۵- (الف) هرگاه‌ابعادقاعدهٔ مکعب مستطیل a و b ومساحت‌سطح جانبی آن $2(a+b)\sqrt{3a^2+3b^2}$ باشد ارتفاع این‌مکعب مستطیل می‌شود: $\sqrt{3a^2+3b^2}$ و در نتیجه طول قطر مکعب‌مستطیل برابراست‌با:

$$d=\sqrt{a^2+b^2+3a^2+3b^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$$

طول قطرقاعدهٔ مکعب‌مستطیل‌برابر است با $\delta=\sqrt{a^2+b^2}$ واگرα زاویهٔ‌میل قطرمکعب‌مستطیل نسبت به‌صفحهٔ قاعده‌باشدداریم:

$$d\cos\alpha=\delta\ \text{یا}\ 2\sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha=2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\Longrightarrow\alpha=60^\circ$$

۷۹/۴۶- (ب) تابع‌مفروض می‌شود:

$$y=\frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^2-4x}}=\frac{2x+1}{\sqrt{(x-1)^2}}=$$

$$=\frac{2x+1}{|x-1|}$$

دنباله درصفحهٔ ۱۷۳

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۸۰/۱ - ترجمهٔ **فتح‌الله‌زرگری**

حاصل عبارت زیررا به ساده‌ترین صورت بدست‌آورید:

$$S = \frac{\sqrt{60a^2b^3}}{b} + 2a\sqrt{\frac{5b}{3a}}$$

۸۰/۲- ترجمهٔ **فتح‌الله‌زرگری**

به فرض $a > b > 0$ هرگاه داشته باشیم:

$$x = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$$

حاصل عبارت زیررا به ساده‌ترین صورت بدست‌آورید:

$$P = \frac{1 - ax}{1 + ax}\sqrt{\frac{1 + bx}{1 - bx}}$$

۸۰/۳ - ترجمه از فرانسه

پاره خط AB ونقطهٔ C واقع برآن مفروض است بقسمی که C از O وسط AB متمایزاست. به‌قطرهای AB وAC و BC و دریك طرف AB سه نیمدایره رسم می‌کنیم و در نقطهٔ C عمودی بر AB اخراج می‌کنیم که نیمدایرهٔ به قطر AB را در P قطع می‌کند. خطوط PA و PB را نیز رسم می‌کنیم که نیمدایره‌های به‌قطرهای AC و BC را در A'و B' تلاقی می‌کنند. ثابت کنید که $A'B'$مماس مشترك نیمدایره‌های به‌قطرهای AC و BC است وخطی که در P برنیمدایرهٔ به قطر AB مماس باشد با $A'B'$ موازی‌است.

کلاس چهارم ریاضی

۸۰/۴ - فرستنده: **محمود تویسرکانی** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

ثابت‌کنید که به‌ازاء مقادیر صحیح و مثبت k عبارت $x^{3k} + x^{32} + x^{28}$ برعبارت $x^2 + x + 1$ بخش‌پذیر است.

۸۰/۵ - فرستنده: **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تبریز

ثابت‌کنید به‌ازاء مقادیرصحیح $n > 2$ داریم:

$$(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)^2 > n^n$$

۸۰/۶ - ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

به‌فرض $a \neq b$ و $ab > 0$ در ازاء:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

حاصل عبارت زیررا به ساده‌ترین صورت بدست‌آورید:

$$S = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

۸۰/۷ - ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

ازمعادلهٔ زیر مقدار x را بدست‌آورید:

$$\sqrt[x+1]{\sqrt[3]{23x-1}} - \sqrt[3x-7]{320/6x - 1/8} = 0$$

۸۰/۸ -ازعبدالوهاب فخریاسری

روی دایرهٔ مفروض دو نقطهٔ ثابت A و B ونقطهٔ‌متغیر M را در نظر می‌گیریم. خطوط MA و MB رابه‌ترتیب تا نقاط P و Q امتداد می‌دهیم بقسمی که A وسط MP و B وسط MQ باشد. هرگاه G نقطهٔ تلاقی دو خط AQ و

BP باشد. مکان نقطهٔ G را تعیین کنید.

۸۰/۹ - ترجمه از مجلهٔ تربیت ریاضی

پاره‌خط ثابت AB را که O وسط آن است درنظر می‌گیریم. در A و B عمودهای Ax و By را دریك طرف AB عمود بر AB رسم می‌کنیم. زاویهٔ قائمهٔ UOV رادرنظر می‌گیریم که رأس O ازآن ثابت و ضلعهای OU و OV حول نقطهٔ O دوران می‌کنند بقسمی که OU با Ax در D و OV با By در E متلاقی است. ثابت کنید که خط متغیر DE همواره بر دایرهٔ به قطر AB مماس است.

کلاس پنجم طبیعی

۸۰/۱۰ - نقطهٔ $P(2 \text{ و } -1)$ مرکز متوازی‌الاضلاع ABCD است که رأس A ازآن به‌طول ۵ برمحور $x'x$ قرار دارد وزاویهٔ قطر BD ازآن با محور $x'x$ برابر 45° بوده و رأس D برمحور $y'y$ واقع است.

۸۰/۱۱ - فرستنده: **جواد فیض**

ثابت کنید برای آنکه دوخط به معادله‌های:

$$lx + my = n \quad \text{و} \quad bx\cos\theta + ay\sin\theta = ab$$

برهم منطبق باشند بایدداشته باشیم:

$$a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$$

کلاس پنجم ریاضی

۸۰/۱۲ - از **علیرضا علیپور** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

نقطهٔ $A(1 \text{ و } 3)$ یك رأس از مربع ثابت ABCD است که ω مرکز آن برخط متغیر $\triangle$ به معادلهٔ

$$(m+1)x - (m-1)y = 4$$

قراردارد. مختصات رأسهای دیگر مربع را پیداکنید.

۸۰/۱۳ - هرگاه a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند به‌فرض $x \neq b$ اولا نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y = \frac{a\sqrt{(x-b)^2}}{x-b}$$

ثانیاً خط متغیر $\triangle$ را درنظر می‌گیریم که از مبدأ مختصات می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای آن m است. از روی شکل درازاء مقادیر مختلف m در تعداد نقاط تلاقی $\triangle$ با نمایش هندسی تابع بحث کنید.

۸۰/۱۴ - **ازجواد فیض**

هرگاه $\alpha \pm \beta \neq 2k\pi$ و α و β در معادلهٔ

$$a\cos^2 x + 2b\cos x + c = 0$$

صدق کنند به‌فرض $\cos\alpha + 4\cos\beta = 2$ اولاثابت کنید که:

$$4(a+2b)^2 + a(9c+4b) = 0$$

ثانیاً مقادیر $tg\alpha$ و $tg\beta$ را بدست آورید.

۸۰/۱۵ - ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

هرگاه درمثلث ABC داشته باشیم $tgA\,tgB < 1$، ثابت کنید که مثلث منفرج‌الزاویه است.

۸۰/۱۶ - در صفحهٔ P مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC را درنظر می‌گیریم که طول وتر BC ازآن 2a باشد. صفحهٔ Q را بر نقطهٔ A بگذرانید که با خط BC موازی و برصفحهٔ P عمود باشد و در این صفحه نقطهٔ M را چنان بیابید که از صفحهٔ P به‌فاصلهٔ k باشد واگر عمودهای MA' و MB' را به‌ترتیب بر BC و AC رسم کنیم: $MA' = MB'/2$ باشد. درازاء مقادیر k بحث کنید.

کلاس ششم طبیعی

۸۰/۱۷ - اولا ثابت کنید که مماس بردایرهٔ به‌معادلهٔ:

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

در مبدأ مختصات به‌معادلهٔ $ax + by = 0$ است.

ثانیاً معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که ازنقطهٔ $A(3 \text{ و } 4)$ می‌گذرد و درمبدأ مختصات برخط به معادلهٔ $3x + 2y = 0$ مماس است.

۸۰/۱۸ - به‌ازاء چه مقدار از x متعلق به فاصلهٔ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ تابع:

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{10} + 3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{20} - 3x\right)$$

کمترین مقدار را دارد؟

کلاس ششم ریاضی

۸۰/۱۹ - منحنی نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y = \frac{x^2+1}{|x|}$$

۸۰/۲۹ - جوابهای نامعادلهٔ $|x+3|<2$ عبارتنداز:

الف - $x<-1$ ب - $x>-5$

ج - $x>-1$ یا $x<-5$

د - $-5<x<-1$

۸۰/۳۰ - به فرض $a\geqslant 0$ و $b\geqslant 0$ نامساوی یا تساوی:

$$a^5+b^5\geqslant a^4b+ab^4$$

الف - همواره برقرار است.

ب - هیچگاه برقرار نیست.

ج - وقتی برقرار است که $a\geqslant b$ باشد.

د - وقتی برقرار است که $a<b$ باشد.

۸۰/۳۱ - نامساوی $\log_2\log_3\frac{3x}{x-2}>0$ وقتی برقرار است که:

الف - $x>2$ ب - $x<2$

ج - x هرچه باشد.

د - نامساوی هیچگاه برقرار نیست.

۸۰/۳۲ - معادلهٔ $\log_x 3\log_{3x}3=\frac{1}{6}$

الف - جواب ندارد.

ب - تنها یك جواب $x=9$ دارد.

ج - دوجواب دارد: $x=9$ و $x=27$

د - دوجواب دارد: $x=9$ و $x=\frac{1}{27}$

۸۰/۳۳ - درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که زاویهٔ A قائمه و $BC=2AB$ است، نیمسازداخلی زاویهٔ B وعمودمنصف ضلع AC یکدیگر را در D قطع می‌کنند. اندازهٔ زاویهٔ ADC:

الف - بیش از ۱۲۰ درجه است.

ب - کمتر از ۱۲۰ درجه‌است.

ج - برابر با ۱۲۰ درجه‌است.

د - قابل محاسبه نیست.

۸۰/۳۴ - روی پاره‌خط AB نقطهٔ M را بقسمی انتخاب می‌کنیم که $BM=2AM$ باشد ودریك طرف AB دومثلث قائم‌الزاویه‌ومتساوی‌الساقین AMC و BMD رامی‌سازیم که به‌ترتیب در زاویه‌های A و B قائمه‌اند. دو خط AD و BC در I و دو خط AB و CD در P متلاقی می‌شوند و PI خط BD را در E قطع می‌کند:

الف - $BE=ED$ ب - $BE>ED$

ج - $BE<ED$ د - $BE\neq ED$

کلاس پنجم ریاضی

۸۰/۳۵ - درصفحهٔ محورهای مختصات ناحیه‌ای که مختصات نقاط آن در نامعادلهٔ $x^2-y^2>0$ صدق می‌کنند؛

الف - شامل نیم‌محورهای Ox و Oy است.

ب - فقط نیم‌محور Ox را دربردارد.

ج - تمام محور $y'y$ را دربردارد.

د - تمام محور $x'x$ را دربردارد.

۸۰/۳۶ - تابع $y=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}$ وقتی معین است که:

الف - $x>1$ باشد.

ب - $x>1$ یا $x<-2$ باشد.

ج - $-2<x<1$ باشد.

د - $x\geqslant -2$ باشد.

۸۰/۳۷ - خط $\triangle$ به معادلهٔ $3x-4y+5=0$ و نقطهٔ P به طول x واقع برنیمساز ربع اول و سوم محورهای مختصات را درنظر می‌گیریم. اگر d فاصلهٔ نقطهٔ P از خط $\triangle$ باشد، این فاصله تابعی است از x مثلا $d=f(x)$. خط D به معادلهٔ $y=1$ نمایش هندسی تابع $d=f(x)$ را:

الف - قطع نمی‌کند.

ب - فقط دریك نقطه قطع می‌کند.

ج - دریك نقطهٔ غیرعادی قطع می‌کند.

د - در دو نقطه قطع می‌کند.

۸۰/۳۸ - هرگاه I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی‌مثلث ABC بوده و $\sin A=\sin BIC$ باشد؛

الف - زاویهٔ A منفرجه‌است.

ب - زاویهٔ A حاده است.

ج - زاویهٔ A قائمه است.

د - چنین رابطه‌ای ممکن نیست.

۸۰/۳۹ - هرگاه داشته‌باشیم:

$$\cos x=\frac{a^2+b^2}{2ab}\ ،\ a\neq 0 \text{ و } b\neq 0$$

دراین صورت مقدار تابع $y=\cos 5x-\cos 3x$ درازاء مقادیر مختلف a و b:

الف - برابرصفراست.

ب - برابر مقدار ثابت مثبت است.

ج - برابر مقدار ثابت منفی است .

د - متغیراست و تغییر علامت می‌دهد .

۸۰/۴۰ - در چهار وجهی منتظم ABCD به طول یال a هرگاه I وسط AB و J وسط CD باشد طول IJ ،

الف - قابل محاسبه نیست .

ب - برابر $a\sqrt{2}$است.

ج - برابر $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ است.

د - برابر $\frac{a}{2}$ است.

۸۰/۴۱ - درچهار وجهی منتظم ABCD هرگاه I وسط AB و J وسط CD بوده و صفحهٔ عمود بر IJ یالهای AC و AD و BC و BD را به‌ترتیب در نقاط E و F و G و H قطع کند ، چهارضلعی EFGH ؛

الف - متوازی‌الاضلاعی است‌که هیچیك اززاویه‌هایش قائمه نیست .

ب - لوزی است‌که مربع نیست .

ج - محاطی غیرمشخص است.

د - مربع مستطیل است.

کلاس ششم ریاضی

۸۰/۴۲ - هرگاه خط به‌معادلهٔ $x = 4y$ مجانب‌منحنی به‌معادلهٔ

$$2ax^2y^2 - ax^2y + x^3 - a^2 = 0$$

باشد، مقدار a برابر است با :

الف - -8 ب - $\frac{1}{8}$

ج - 8 د - ± 8

۸۰/۴۳ - منحنی به معادلهٔ

$$y^3 + x^2y - ax^2 = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

الف - دومجانب افقی دارد .

ب - یك مجانب افقی دارد .

ج - مجانب افقی ندارد.

د - مجانب افقی‌آن همان محور $x'x$ است.

۸۰/۴۴ - منحنی نمایش هندسی تابع

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x}$$

الف - بامحور $y'y$ مجانب است.

ب - برمحور $y'y$ در مبدأ مختصات مماس است .

ج - با محور $x'x$ مجانب است .

د - برمحور $x'x$ درمبدأ مختصات مماس‌است .

۸۰/۴۵ - دستگاه دو معادلهٔ

$$\begin{cases} \cos y(\sin x + \cos x) = a \\ \cot g\, y \cos x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

الف - در ازاء همهٔ مقادیر a دارای جواب است.

ب - هیچگاه ممکن نیست .

ج - وقتی جواب داردکه $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$

د - وقتی جواب داردکه : $-\sqrt[4]{2} < a < \sqrt[4]{2}$

۸۰/۴۶ - هرگاه x و y در فاصلهٔ $(0 \text{ و } 2\pi)$ تغییر کنند دستگاه :

$$\begin{cases} tg^2 x = \sin^2 x + \cos^2 y \\ tg^2 y = \sin^2 y + \cos^2 x \end{cases}$$

الف - دو دسته جواب دارد.

ب - چهار دسته جواب دارد.

ج - جواب ندارد.

د - بیش‌ازچهار دسته جواب دارد.

۸۰/۴۷ - هریك ازعددهای A و B سه رقمی‌ومجذور کامل است وتفاضل $A - B$ عدد سه رقمی $\overline{aaa}$ است .

الف - چنین چیزی ممکن نیست.

ب - a می‌تواند برابر باهریك از رقمهای از یك تا ۹ باشد .

ج - a برابر با ۲ نیست .

د - a غیراز ۲ و صفرمی‌تواند برابرباهریك ازرقمهای دیگرباشد.

۸۰/۴۸ - هرگاه مجموع دوکسر با حاصل‌ضرب آنها برابر باشد ؛

الف - هریك از دوکسر بزرگتر از واحدند.

ب - هریك ازدوکسرکوچکتر از واحدند .

ج - یکی ازآنها بزرگتر ازواحد و دیگری‌کوچکتر از واحد است .

د - دوکسر باچنین خاصیت وجود ندارد .

۸۰/۴۹ - در ذوزنقهٔ ABCD دو رأس A و Bثابت و رأسهای C و D متغیرند بقسمی‌که طول‌ساق AD برابربا مقدارثابت m وطول قاعدهٔ‌کوچکتر CD برابر بامقدار ثابت b است. مکان نقطهٔ P محل تلاقی‌دوقطر ذوزنقه ؛

الف ـ خطی است موازی با AB.

ب ـ خطی است که از وسط AB می‌گذرد .

ج ـ یك دایره است .

د ـ یك بیضی است .

۸۰/۵۰ ـ درمثلث ABC دو رأس B و C ثابت و رأس A متغیراست . هر گاه خطی که مرکز دایرهٔ محیطی را به‌مرکز ثقل مثلث وصل می‌کند با ضلع BC موازی باشد ، مکان A :

الف ـ خطی است‌موازی با BC.

ب ـ دایره است.

ج ـ بیضی است.

د ـ هذلولی است.

حل مسائل (دنباله از صحفهٔ ۱۶۷)

وقتی $x<1$ باشد $y=\frac{2x+1}{-x+1}$ ومجانب افقی آن $y=-2$ است. وقتی $x>1$ باشد داریم $y=\frac{2x+1}{x-1}$ ومجانب‌افقی‌آن $y=2$ است. خط $y=1$ درهرحال مجانب قائم تابع است . پس‌تابع مفروض دومجانب افقی ویك‌مجانب قائم دارد .

۷۹/۴۷ـ (د) هر گاه $f(x)$ تابع فرد باشد :

$f(-x)=-f(x)$ است وتابع:

$$y+|y=f(x)+|f(x)|$$

درازاء مقادیر منفی از x و y چنین‌می‌شود:

$$y-y=f(x)-f(x) \quad \text{یا} \quad 0\times y=0\times f(x)$$

مختصات تمام نقاط بخش سوم محورهای مختصات دراین‌رابطه صدق‌می‌کند، یعنی تمام این‌بخش‌جزء نمایش‌هندسی تابع‌است.

۷۹/۴۸ـ (الف) معادلهٔ مثلثاتی

$$\cos^2 x(1-3\sqrt{3}\,tg^3 x)=0$$

به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\cos^3 x-3\sqrt{3}\,tg^3 x}{\cos x}=0$$

پس $\cos x\neq 0$ وجواب معادله می‌شود $tg x=\frac{\sqrt{3}}{9}$ که درفاصلهٔ صفر و π فقط یك‌کمان نظیرآن است.

۷۹/۴۹ـ (د) نامساوی $\frac{ctg x-\cos x}{\sin x-tg x}>a^2$ هیچگاه ممکن نیست زیرا کسر طرف اول آن به صورت $-cotg^2 x\times\frac{1-\sin x}{1-\cos x}$ در می‌آید که درازاء جمیع مقادیر x منفی است و a^2 مثبت یاصفراست و همواره بزرگتر ازهرمقدار منفی است.

۷۹/۵۰ـ (الف) هر گاه عددی درپایهٔ عددنویسی $2n$ به‌صورت $N=\overline{(a+n)(a-n+1)}$ نوشته شود داریم:

$$\begin{cases}2n>a-n+1\geqslant 0\\ 2n>a+n\geqslant 0\end{cases}\Longrightarrow n>a\geqslant n-1$$

فقط $a=n-1$ قابل قبول است‌که دارزاء آن‌برای N فقط‌یك‌عدد وجود دارد ومجذور N نیزمنحصر به‌فرداست.

۷۹/۵۱ ـ (ب) به فرض آنکه n عدد صحیح و $A=625+4n$ و $B=625-4n$ باشد داریم:

$$N=A^2-B^2=(A+B)(A-B)=$$
$$=1250\times 8n=10000n$$

عدد N درازاء جمیع مقادیر صحیح n به‌چهار رقم صفر ختم می‌شود.

۷۹/۵۲ ـ (الف) هر گاه دو رأس B و C از مثلث ABC ثابت‌ورأس A ازآن‌متغیر باشد به‌قسمی‌که $AB+AC$ مقدار ثابت باشد، مکان A بیضی است به کانونهای B و C. نیمساز خارجی زاویهٔ A براین بیضی مماس است ومی‌دانیم‌که حاصل‌ضرب فواصل کانونهای بیضی ازهرمماس‌آن مقدار ثابت است.

استدلال در ریاضیات(دنباله ازصفحهٔ ۱۳۸)

درترتیب طبیعی قرار می‌دهیم. چندوجهی دارای سه بعداست وجوه آن دو بعدی است ویالهایش دارای یك بعد و رأسهایش (نقاط) دارای صفربعد هستند. حال می‌توانیم مجدداً معادلات خودمانرا با جایگزاری اعداد در ترتیب صعودی ابعادمربوط بنویسیم . رابطهٔ با ارزش برای چند ضلعیها که به صورت $S-A+1=1$ نوشته می‌شود ، در مقایسهٔ با رابطهٔ‌مربوط به‌چندوجهیها به‌صورت $S-A+F-1=1$ نوشته‌می‌شود. عدد یك‌که دراولین عضو معادلهٔ مربوط به چند ضلعیهانوشته شده ، معرف تنها عنصر۲ بعدی است‌که دارای یك چندضلعی (داخلی) است. عدد یك در اولین عضو معادلهٔ مربوط به‌چند-وجیها معرف تنها عنصر ۳ بعدی است‌که دارای یك‌چندوجهی (داخلی) است. اعداد طرف اول به‌ترتیب مربوط به مقادیر ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ بعدی هستند و دراین ترتیب طبیعی ولی با علامتهای متناوب قرار می‌گیرند. دومین عضو نیز در هردو حالت بهمین صورت‌است ؛ مشابهتی‌کامل بنظر می‌رسد.اولین معادله‌که مربوط به چند ضلعیهاست محققاً صحیح است و این مشابهت افزایندهٔ اعتماد ما به دومی است که همانا مربوط به چندوجهیهاست.

دنباله دارد

مسائل انتخابی از

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

تلث اول، سال تحصیلی ۴۹ - ۵۰ (آذر ۱۳۴۹)

(دنباله از شمارهٔ گذشته)

هندسهٔ رقومی و ترسیمی

دبیرستانهای : آریا - امیرخیزی - زاگروس

دبیر : مهندس محمود خوئی - فرستنده : غلامرضاعالیشاه

الف- هندسهٔ رقومی:

مسئله : واحد سانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز بنامید. (کادر ۲۰ × ۲۵).

۱- نقطهٔ b_8 را به‌فاصلهٔ ۳ زیرمحور اقصر برروی محوراطول کاغذ انتخاب نموده ازاین نقطه خط a_5b_8 را به‌شیب $p=\frac{1}{2}$ به‌قسمی‌مرور دهیدکه نقطهٔ a_5 برروی محور اقصر وسمت‌چپ مرکزکاغذ قرارگیرد.

۲- برخط AB صفحهٔ P را به‌شیب $p=1$ مرور داده و یك‌مقیاس‌شیب‌آن را سمت چپ‌کنارکاغذ رسم‌کرده به‌قسمی که ترقی رقومش ازبالا به‌پائین باشد.

۳- برروی‌قطعه‌خط AB درصفحهٔ P مستطیل ABCD را به‌قسمی بناکنید که رأس c_4 سمت راست ضلع a_5b_8 قرار گیرد، مساحت حقیقی مستطیل را درسمت پائین کاغذ روی صفحهٔ افقی رقوم ۸ نشان دهید.

۴- ازنقطهٔ a_5 خط a_5s_2 را به‌قسمی مروردهید که s_2 روی محوراطول‌کاغذ واقع گردیده وزاویهٔ SAB درفضابرابر ۹۰ درجه‌باشد.

۵- هرم SABC را رسم وآن‌را مرئی‌ومخفی نمائید.

۶- ارتفاع هرم SABC راروی شکل رسم نموده‌وپای ارتفاع و اندازهٔ حقیقی‌آن رانشان دهید.

۷- عمود مشترك خط‌الرأس SB وافقیهٔ رقوم ۵ صفحهٔ P راروی شکل‌رسم‌کنید.

ب - هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱- فاصلهٔ‌نقطهٔ A از خط زمین برابر ۵ و بیك فاصله ازصفحهٔ‌نیمسازاول‌وقائم تصویراست. نقطه را درربع‌اول نشان دهید.

مسئلهٔ ۲- خط‌غیر مشخص DD' مفروض است. آثار آن، راتعیین‌کنید ونقطهٔ aa' را روی‌آن به‌قسمی تعیین‌کنیدکه فاصله‌اش از اثرقائم دوبرابر ارتفاعش باشد.

مسئلهٔ ۳- برروی‌نیمرخ‌مفروض $aba'b'$ نقطه‌ای‌بیابید که به‌فاصلهٔ ۲ زیرنیمساز اول باشد.

دبیرستان ابن‌سینا

دبیر: جعفرزاده - فرستنده : قاسم جبارزاده

۱- روی خط مدرج D نقطه‌ای پیدا کنید که ازدوسر پاره‌خط a_1b_5 به‌یك فاصله باشد.

۲- صفحهٔ P به‌شیب ۱ مفروض‌است. صفحه‌ای‌موازی باصفحهٔ P وبه‌فاصلهٔ $3\sqrt{2}$ ازآن رسم‌کنید.

۳- پاره‌خط a_0d_2 $(ad=6)$ مفروض‌است. اولا شیب واساس وطول حقیقی‌خط AD راحساب‌کنید. ثانیاً برپاره خط a_0d_2 دوصفحهٔ P و Q راطوری مروددهیدکه باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ 45° بسازد. ثالثاً برنقطهٔ d_2 صفحهٔ R راعمودبر a_0d_2

بگذرانید واثر آنرا پیدا کنید. آثار سه صفحهٔ P و Q و R دوبدو یکدیگر را در سه نقطهٔ a_0 و b_0 و c_0 قطع می‌کنند. مثلث $a_0b_0c_0$ را مشخص نمائید.

۴- روی خط نیمرخ $aba'b'$ نقطه‌ای پیدا کنید که از خط مواجه مفروض dd' به فاصلهٔ معلوم l باشد.

۵- از نقطهٔ aa' به بعد ۳ وارتفاع ۲ خطی چنان رسم کنید که باصفحهٔ افقی تصویر زاویهٔ °۳۰ بسازد وبعد اثر افقی اش برابر ۱ باشد.

۶- از نقطهٔ aa' به بعد ۴ وارتفاع ۲ خطی موازی با نیمساز ربع اول طوری رسم کنید که خط مفروض dd' را نیز قطع کند.

۷- از نقطهٔ ee' به بعد یك وارتفاع ۳ خطی رسم کنید که نیمرخ مفروض $aba'b'$ وخط الارض را قطع کند.

دبیرستان البرز

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف - هندسهٔ رقومی:

مسئله : واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محور اقصر واطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها مرکز وکادر کاغذ ۲۰ × ۲۵ می‌باشد.

۱- نقطهٔ b_6 را به فاصلهٔ ۲ سمت راست مرکز کاغذ روی محور اقصر انتخاب نموده خط b_6d_2 را به شیب $p=\frac{1}{2}$ به قسمی رسم کنید که تصویرش برمحور اقصر منطبق بوده و d سمت چپ b قرار گیرد. نقطهٔ c را به فاصلهٔ ۶ بالای مرکز روی محور اطول انتخاب نمائید. رقوم c را به قسمی بدست آورید که مثلث BCD درفضا متساوی الساقین بوده و $\overline{CB}=\overline{CD}$ باشد.

۲- بزرگترین شیب صفحهٔ P از مثلث $b_6c_0d_2$ را در سمت چپ کاغذ رسم کرده وسعت حقیقی مثلث BCD را روی صفحهٔ افقی رقوم ۲ به قسمی نشان دهید که B_1 درسمت بالای کاغذ قرار گیرد.

۳- مثلث قائم الزاویهٔ CBA را به قسمی رسم نمائید که ba بر محور اقصر منطبق بوده و $ba=bc$ وزاویهٔ $CBA=90°$ ورقوم a از b کمتر باشد. رقوم a را با ۰/۱ تقریب عدد صحیح انتخاب نمائید وآنرا تعیین کنید.

۴- منشور مثلث القاعدهٔ ABCDEF را که ABC قاعده وخط CD یال جانبی آن باشد رسم ومرئی ومخفی نمائید.

۵- صفحهٔ R را به قسمی رسم کنید که منشور فوق را در یك مثلث قطع نموده و فاصلهٔ C ازآن پنج برابر فاصلهٔ هریك ازنقاط A و B و F ازآن باشد (F مربوط به یال BF از منشور می‌باشد).

۶- مقطع منشور فوق را باصفحهٔ قائمی که اثرش موازی محور اقصر بوده وبروسط یال جانبی AE می گذرد یافته ووسعت حقیقی آن را با تسطیح درسمت پائین کاغذ نشان دهید.

ب - هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱- فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط زمین ۵ و مجموع فواصل آن ازصفحه افق ونیمساز اول ۳/۶۵. نقطه راکه به نیمساز ربع اول نزدیکتر است نشان دهید.

مسئلهٔ ۲- خط DD' مفروض است. روی آن نقطه‌ای تعیین کنید که فاصله‌اش از نیمساز اول وقائم تصویر برابر باشد.

مسئلهٔ ۳- برروی نیمرخ مفروض $aba'b'$ نقطهٔ cc' را به قسمی تعیین کنید که نسبت فواصل آن ازدو نیمساز $\frac{1}{3}$ باشد وبالای نیمساز اول واقع شود.

دبیرستانهای: انوشیروان دادگر وجعفری اسلامی

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف - هندسهٔ رقومی:

مسئله : واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها مرکز کاغذ وکادر ۲۰ × ۲۵ انتخاب شود.

۱- نقطهٔ o_4 برمرکز کاغذ مفروض است. از این نقطه خط e_8f_0 راکه تصویرش برمحور اطول کاغذ منطبق بوده و e درسمت بالای کاغذ واقعست به قسمی رسم کنید که شیب خط EF برابر $\frac{1}{2}$ گردد. صفحهٔ عمود منصف این خط را رسم نموده و یك مقیاس شیب آن راسمت چپ کنار کاغذ نشان داده وآن را P بنامید.

۲- درصفحهٔ P ازنقطهٔ o_4 خط o_4a_2 را به شیب $p=1$ به نحوی رسم کنید که a سمت چپ o واقع شود.

۳- در صفحهٔ P لوزی ABCD را که O مرکز و A رأس آن بوده و رأس b_1 سمت راست محور قائم کاغذ واقع است رسم کرده ملخص لوزی را نشان دهید. AC قطر لوزی می‌باشد. مساحت حقیقی لوزی رادرسمت پائین کاغذ روی صفحهٔ افقی رقوم ۸ نشان دهید.

۴- تصاویر دوهرم EABCD و FABCD را رسم کرده وهشت وجهی حاصل را مشخص کنید (بدون مرئی ومخفی).

۵- دوصفحهٔ R و Q را به موازات صفحهٔ P درطرفین

آن به‌فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ ازصفحهٔ P رسم‌کرده مقیاس‌شیب آن‌ها را در دوطرف کاغذ نشان دهید.

۶- مقطع هشت‌وجهی فوق‌را بادوصفحهٔ R و Q بدست آورده و جسم حاصل راپس از حذف قسمتهائی که خارج دو صفحهٔ R و Q می‌باشد ویك‌ده‌وجهی خواهد بود درنظر گرفته وآن را مرئی ومخفی نمائید.

۷- مقطع جسم حاصل راباصفحهٔ قائمی‌که اثرش برمحور اطول‌کاغذ منطبق است یافته و وسعت حقیقی آن را مشخص کنید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ اول : فاصلهٔ نقطهٔ A ازنیمساز اول برابر ۲ و نسبت بعد به‌ارتفاع آن $\frac{1}{2}$ است. بطریق رسم نقطه‌را دربالای نیمسازاول نشان دهید.

مسئلهٔ دوم : نیمرخ $aba'b'$ مفروض‌است. برروی‌آن نقطه‌ای مانند cc' به‌قسمی تعیین‌کنیدکه فاصله‌اش از اثرافقی $\frac{3}{4}$ فاصله‌اش ازاثر قائم باشد.

مسئلهٔ‌سوم : ازنقطهٔ aa' به‌بعد ۵ و ارتفاع ۳ دوخط دلخواه DD' و $\triangle\triangle'$ را مرور داده نیمساز زاویهٔ حقیقی دوخط رارسم‌کنید.

دبیرستانهای بهمن قلهك وپیشاهنگ

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی:

مسئله : واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول‌کاغذرا رسم‌کرده محل تلاقی‌آن‌ها را مرکز بنامید. کادر ۲۰ × ۲۵ می‌باشد.

۱- صفحهٔ P را به‌شیب $p = 1$ به‌قسمی رسم کنید که افقیهٔ رقوم ۴ آن برمحور اقصرکاغذمنطبق بوده و ترقی‌رقوم مقیاس‌شیب‌آن از پائین به‌بالا بوده و در سمت چپ‌کنارکاغذ به‌فاصلهٔ ۱ ازآن رسم‌شده است.

۲- ازنقطهٔ a_4 واقع درصفحهٔ P که بـه فاصلهٔ ۵ سمت چپ محورکاغذ واقع‌است خطی درصفحهٔ P به‌شیب $p = \frac{2}{3}$ رسم‌نموده ونقطهٔ b_0 را روی‌آن‌سمت‌راست a انتخاب‌نمائید.

۳- درصفحهٔ P مثلث متساوی‌الساقین ABD راکه در آن $DA = DB$ بوده ورقوم رأس D برابر ۵ می‌باشد رسم نموده و ملخص متوازی الاضلاع ABCD راکه BD قطر آنست نشان‌داده وسعت حقیقی متوازی‌الاضلاع را سمت پائین کاغذ مشخص‌نمائید.

۴- برروی ABCD هرم SABCD راکه رأس‌آن s_1 روی محوراطول واقع ومثلث قائم‌الزاویهٔ SAB یکی ازوجوه جانبی‌آن بوده‌که در زاویهٔ A قائمه می‌باشد بسازید و ملخص هرم مزبور را رسم نموده وآن رامرئی ومخفی‌کنید.

۵- مقطع‌هرم SABCD را باصفحهٔ افقی‌رقوم ۳ یافته وآن رانسبت به‌جسم مرئی ومخفی‌نمائید.

۶ - زاویهٔ مسطحهٔ نظیر فرجهٔ بین صفحهٔ مثلث SAB راباصفحهٔ P مشخص‌کرده واندازهٔ حقیقی‌این‌زاویه راروی‌شکل نشان دهید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی :

مسئلهٔ ۱ـ فاصلهٔ‌نقطهٔ A ازخط زمین‌برابر ۵ونسبت‌فواصل آن از دونیمساز $\frac{1}{3}$ است. نقطهٔ A را درربع اول نشان دهید.

مسئلهٔ ۲ـ خط DD' را رسم‌کرده آثارآن‌را نشان‌داده و برروی آن نقطهٔ cc' را به فاصلهٔ حقیقی ۳ از اثر افقیش نشان دهید.

مسئلهٔ ۳ـ نیمرخ $aba'b'$ مفروض است. روی‌آن‌نقطهٔ cc' را به قسمی تعیین کنید که فـاصله‌اش از نیمساز اول $\frac{1}{2}$ بعدش باشد.

دبیرستان پهلوی همدان

دبیر: ازگمی ـ فرستنده : حسین اسدی

هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ است.

محورهای اطول‌واقصرکاغذ را رسم نموده ومرکزکاغذ را O بنامید.

۱- مقیاس‌شیب صفحهٔ P راکه باصفحهٔ مقایسه زاویـهٔ ۴۵ درجه می‌سازد سمت‌چپ‌کاغذ طوری رسم کنیدکه اثر آن ازمحور اقصرکاغذ بگذرد وترقی رقوم ازپائین به‌بالا باشد.

۲- روی محور اطول در قسمت پائین نقطهٔ A راچنان انتخاب‌کنیدکه $OA = 3\sqrt{2}$ باشد. اگرنقطهٔ A متعلق بـه صفحهٔ P باشدآنرا ترفیع کنید.

۳- ازنقطهٔ A خط AB رادرصفحهٔ P چنان رسم کنید که زاویهٔ حقیقی‌خط AB بااثرصفحه ۳۰درجه و ارتفاع نقطهٔ B برابر ۶ باشد (b راسمت چپ a بگیرید).

۴- ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD را در این صفحه چنان رسم‌کنیدکه $B = 60^\circ$ وقطر $AC = 7/5$ ورقوم c از b بیشتر گردد.

۵- ازنقطهٔ H مرکز متوازی‌الاضلاع عمودی برصفحهٔ

P اخراج کرده روی این عمود نقطهٔ S راچنان انتخاب کنید که تصویرش براثرصفحهٔ P قرار گیرد و پس ازآن ملخص هرم SABCD راکامل نموده مرئی ومخفی نمائید.

۶ـ وسعت حقیقی فصل مشترك این جسم را با صفحهٔ قائمی که اثر آن محور اطول کاغذ فرض می‌شود پیداکرده و هاشور بزنید.

دبیرستان دکتر نصیری (شبانه)

دبیر: بنائی ـ فرستنده : محمود قرشی

الف ـ هندسهٔ رقومی :

محورهای اطول واقصر کاغذ را رسم کنید ومحل تلاقی آنهارا مرکز کاغذبنامید. واحد سانتیمتر ومقیاس ۱:۱ می‌باشد.

۱ـ ملخص نقطهٔ a_0 را برمرکز کاغذ ونقطهٔ b_0 راسمت چپ کاغذ و روی محور اقصر کاغذ طوری انتخاب کنید که $AB = 5cm$ باشد.

۲ـ برخط a_0b_0 صفحهٔ P را به‌اساس $i = 0/5$ طوری رسم کنید که ترقی رقومش ازپایین به‌بالا باشد ومقیاس شیب آنرا سمت چپ کاغذ رسم کنید.

۳ـ ملخص لوزی ABCD رادرصفحهٔ P طوری رسم کنید که خط AB یك ضلع آن ونقطهٔ o_2 مرکزآن باشد. از دو جواب o آنرا انتخاب کنید که به‌نقطهٔ a نزدیکتر باشد.

۴ـ ازنقطهٔ a_0 خط △ رابرصفحهٔ P عمودکنید وبراین خط صفحهٔ Q را به‌اساس یك رسم کنید ومقیاس شیب صفحهٔ Q را دربالا وسمت راست کاغذرسم کنید درصورتی که افقیهٔ (۱ ـ) آن محور اقصر را سمت چپ مرکز قطع کند.

۵ـ از نقطهٔ a_0 خط $AS = 10cm$ به اساس $i = \sqrt{3}$ را درصفحهٔ Q رسم کنید در صورتی که رقوم نقطهٔ S منفی و تصویر s بالای a قرار دارد.

۶ـ ملخص هرم $s_{-5}a_0b_0c_4d_4$ را بدست آورید وآنرا مرئی ومخفی نمائید.

۷ـ اندازهٔ زاویه (مسطحه) دوصفحهٔ P و Q را بدست آورید وثابت کنید P بر Q عمود است.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی :

۱ـ قرینهٔ نقطهٔ $A(e = 3$ و $h = 2)$ رانسبت به‌صفحهٔ نیمساز ربع اول بدست آورید.

۲ـ آثارصفحهٔ $P\alpha Q'$ راطوری بدست آورید که از نقطهٔ $A(e = 1$ و $h = 1)$ وخط نیمرخ $cdc'd'$ بگذرد. رابط نقطهٔ aa' به‌فاصلهٔ ۳ سانتیمتر سمت چپ رابط خط نیمرخ است.

۳ـ خط $\triangle\triangle'$ راطوری رسم کنید که خط غیر مشخص dd' وخط منتصب zz' وخط منتصب vv' وخط‌الارض (xy) را درنقاط cc' و aa' و bb' و mm' قطع کند.

۴ـ ملخص نقاط $C(e = 0$ و $h = 0)$ و $B(e = 1$ و $h = 0)$ و $A(e = 2$ و $h = 2/5)$ را در صفحهٔ $P\alpha Q'$ بدست آورید. سپس اگر سه نقطهٔ A و B و C سه رأس متوالی یك متوازی‌الاضلاع ABCD باشد ملخص نقطهٔ dd' رادر صفحهٔ $P\alpha Q'$ بدست آورید.

۵ـ ملخص دونقطهٔ $A(e = 2$ و $h = 3)$ و $C(e = 1$ و $h = 1)$ راطوری بدست آورید که فاصلهٔ رابط aa'، ۳ سانتیمتر سمت راست رابط cc' باشد. سپس ملخص لوزی ABCD راطوری بدست آورید که قطر $BD = 2cm$ خط افقی باشد.

دبیرستان رازی

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی:

مسئله : واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها رامرکز بنامید کادر کاغذ ۲۰ × ۲۵ اختیار شود .

۱ـ نقطهٔ a_6 به‌فاصلهٔ ۳ زیرمحور اقصر و به‌فاصلهٔ ۳/۵ سمت چپ محوراطول کاغذ مفروض است. ازاین نقطه خط افقی رقوم ۶ را به‌موازات محور اقصر رسم نمائید. از a_6 به نقطهٔ O مرکز کاغذ وصل کنید وخط a_6O را به‌قسمی مدرج نمائید که زاویهٔ حقیقی AO درفضا باافقیهٔ مزبور برابر ۵۰ درجه باشد و رقوم O از A کمتر گردد. رقوم O را با ۰/۱ تقریب اندازه گیری کنید.

۲ـ برخط AO صفحه‌ای مانند P به‌قسمی مرور دهید که افقیه‌های آن موازی محور اقصر کاغذ بوده یك مقیاس شیب صفحه راکنار چپ کاغذ رسم کنید.

۳ـ بر روی صفحهٔ P شش‌ضلعی منتظم ABCDEF راکه OA شعاع دایرهٔ محیطی آن می‌باشد رسم نمائید به‌قسمی که نقطهٔ b سمت راست a ورقومش ازآن بیشتر باشد. ملخص شش‌ضلعی را رسم و وسعت حقیقی آن را نشان دهید.

۴ـ شش‌ضلعی مزبور قاعدهٔ منشور قائمی است که طول حقیقی یال آن برابر ۸/۵ بوده ودربالای صفحهٔ P واقع است. ملخص منشور را رسم و مرئی ومخفی نمائید.

۵ـ منشور دیگری که قاعدهٔ آن درصفحهٔ P و مرکزش همان O و متشابه باشش ضلعی ABCDEF است در نظر گرفته به‌قسمی که ضلع آن نصف ضلع AB باشد ارتفاع دو منشور بیك اندازه بوده و متداخل می‌باشند . حجمی که بین دو منشور قرارگرفته به‌فرض آنکه جسم مجوف فرض شود مرئی ومخفی نمائید.

۶ـ مقطع حجم اخیررا با صفحهٔ قائمی که اثرش برمحور

اطول کاغذ منطبق است یافته وسعت حقیقی آنرا روی صفحهٔ افقی رقوم ۵ نشان دهید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱ ـ بعد نقطهٔ A برابر ۳ ومجموع فواصل آن ازخط زمین وافقی تصویر برابر ۸ به‌طریق رسم نقطه رادرربع اول نشان دهید.

مسئلهٔ ۲ـ از نقطهٔ aa' به‌بعد ۵ و ارتفاع ۳ خطی رسم کنیدکه‌نیمرخ مفروض $cdc'd'$ را قطع کرده با نیمسازدوم موازی باشد.

مسئلهٔ ۳ ـ از نقطهٔ aa' واقع بر خط زمین خطی رسم کنیدکه با افق زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد و تصویر قائمش باخط زمین زاویهٔ °۴۵ تشکیل دهد.

دبیرستانهای کوروش وسپاس (دارالفنون)

دبیر: بنائی ـ فرستنده : محمد تقی ایلاتی

الف ـ هندسهٔ رقومی:

محورهای اطول واقصر کاغذرا رسم کنید ومحل تلاقی آنهارا مرکز کاغذ بنامید. واحد سانتیمتر، مقیاس ۱:۱است.

۱ـ صفحهٔ P را به اساس $i = ۱$ سمت چپ کاغذ طوری رسم کنیدکه افقیهٔ صفر آن برمحور اقصر کاغذ بوده و ترقی رقومش ازپائین به‌بالا باشد . سپس نقطه $o_۲$ را دراین صفحه و بر روی محور اطول انتخاب کنید.

۲ـ ملخص مستطیل $a_۰b_۲c_۶d_۴$ را درصفحهٔ P رسم کنید در صورتی که‌نقطهٔ $o_۲$ مرکزآن‌وقطر $AC = ۸\sqrt{۲}$ cm بوده و a و b سمت چپ محور اطول است و وسعت حقیقی ABCD را نشان دهید.

۳ـ نقطهٔ S را زیر صفحهٔ P طوری بدست آورید که $SA = SB = SC = SD = ۸^{cm}$ باشد (برای فرض‌بعداگر نتوانستید $s_{-۱}$ را روی محور اطول وبالای مرکز بفاصلهٔ ۷^{cm} از مرکز انتخاب کنید).

۴ـ ازنقطهٔ $s_{-۱}$ صفحهٔ R را به موازات صفحهٔ P رسم کنید ومقیاس شیب آنراسمت راست رسم کنید .

۵ـ مقیاس‌شیب صفحهٔ Q راکه‌ازنقطهٔ $s_{-۱}$ وخط $a_۰b_۲$ می گذرد درپائین وسمت چپ کاغذ رسم کنید .

۶ـ قرینه‌های نقاط $d_۴$ و $c_۶$ را نسبت به صفحهٔ R که نقاط $n_{-۴}$ و $m_{-۲}$ است بدست‌آورید وتحقیق کنیدکه نقاط N وM درصفحهٔ Q قراردارند .

۷ـ فصل مشترك صفحهٔ Rرابا منشور $a_۰d_۴n_{-۴}b_۲c_۶m_{-۲}$ که‌مستطیل EEGH است‌بدست‌آورید.

۸ـ ملخص منشور ناقص ABCDEFGH را بدست آورید وآنرا مرئی ومخفی کنید .

۹ـ زاویهٔ حقیقی دوصفحهٔ P و Q (مسطحه) را با α نمایش دهید .

۱۰ـ عمودمشترك دوخط FH و CM را بدست‌آورید.

$f_۰h_۰ \perp c_۶m_{-۲}$

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ ملخص نقطهٔ aa' را بدست‌آورید درصورتی‌که به فاصلهٔ ۵ cm از خط‌الارض بوده و نسبت فواصلش از صفحهٔ نیمساز اول وصفحهٔ افق تصویر $\frac{۲}{۳}$ باشد .

۲ـ ملخص‌نقطهٔ aa' رابدست‌آورید درصورتی‌که‌مجموع بعد وارتفاعش برابر ۸cm وحاصل ضرب بعد وارتفاعش‌برابر ۱۲cm باشد (از راه ترسیم حل شود)

دبیرستان فردوسی تبریز

دبیر : میرزافرهنج ـ فرستنده : غلامرضا جوانشیر

محورهای اطول واقصر کاغذ را رسم کنید و مرکز کاغذ را ω واحدسانتیمترمقیاس $\frac{۱}{۱}$ است :

۱ـ صفحهٔ P راکه باصفحهٔ افق زاویهٔ °۴۵ می‌سازد و افقیهٔ ۲ آن‌محوراقصر کاغذاست درنظر گرفته ومقیاس شیب آنرا درکنار چپ کاغذ رسم وروی محور اطول O' را به فاصلهٔ ۶ زیرمحور انتخاب کنید (ترقی‌رقوم صفحه به طرف بالاست)

۲ـ اگر O' تسطیح نقطه‌ای از صفحهٔ P حول افقیهٔ ۲ باشدآنرا ترفیع کرده و فاصلهٔ آنرا از افقیه ۲ تا یکدهم تقریب حساب کنید (رقوم O' بیشتراز۲است)

۳ـ ملخص متوازی‌الاضلاعی را تکمیل کنیدکه مرکزش O روی صفحه بوده وشعاع دایرهٔ محیطی‌آن ۴ وامتداد قطر AC با افقیهٔ صفحه زاویهٔ °۴۵ بسازد و زاویهٔ $ACB = ۶۰°$ باشد. A سمت چپ Cورقوم Bکمتر از رقوم D می‌باشد .

۴ـ مساحت این متوازی‌الاضلاع را حساب کنید .

۵ـ اقصر فاصلهٔ $\omega_۲ox$ از صفحهٔ P را با افقیهٔ $l_۶$ که تصویرش موازی محور اقصر به‌فاصلهٔ ۲ بالای آنست رسم کنید .

۶ـ ازDخطی چنان رسم کنیدکه‌تصویرش‌دربالای محور اقصرزاویهٔ ۳۰ بسازد وبر DC عمود باشد و $y_۰$ را روی‌آن پیداکنید .

۷ـ منشوری را تکمیل کنید وتعیین مرئی‌ومخفی نمائید که ABCD قاعده و DG یالش باشد .

۸ـ بریال AE منشور صفحهٔ Q را به فراز یك مرور دهیدکه مقیاس شیب‌آن طرف راست باشد .

۹ـ زاویهٔ صفحات P و Q را مشخص کنید .

دبیرستان فیروز بهرام

دبیر : جلالی ـ فرستنده : پرویز روانی

هندسه رقومی :

واحد سانتیمتر ومقیاس ۱:۱ است. محورهای اطول و اقصر کاغذکه محل تقاطع آنها مرکز کاغذ است رسم کنید .

۱ـ مقیاس شیب صفحهٔ P راکنار چپ کاغذ به موازات محور اطول رسم کنید بقسمی که شیب آن۲ وترقی رقوم روی آن از پائین به بالا وافقیهٔ رقوم ۵ آن محوراقصر کاغذ باشد، آن را مدرج کنید .

۲ـ نقطهٔ a_1 را روی‌محور اطول کاغذ واقع دراین‌صفحه انتخاب کرده و از این نقطه خط a_1b_5 را در این صفحه بقسمی رسم کنیدکه شیب آن $\frac{2}{3}$ و نقطه b_5 طرف چپ a_1 باشد .

۳ـ ازنقطهٔ b_5 خط b_5c_9 (c طرف راست b) را در این صفحه طوری رسم کنیدکه طول حقیقی پاره خط b_5c_9 برابر $4\sqrt{2}$ باشد.

۴ ـ ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم و رقوم D راپیداکنید.

۵ـ از نقطهٔ a_1 خطی برصفحهٔ P عمودکرده وروی آن نقطهٔ e_{-2} را انتخاب نمائید.

طول حقیقی پاره خط AE وشیب و اساس‌آن رابدست آورید.

۶ـ ملخص منشور قائم کامل ABCDEFGH راکه ملخص یك بال‌آن a_1e_{-2} رارسم‌کرده و با فرض کدربودن جسم خطوط مرئی را از مخفی تمیزدهید.

۷ـ طول‌حقیقی قطرFHراازطریق محاسبه‌بدست‌آورید.

دبیرستان‌کریم فاطمی اهواز

دبیر: سنجدی گاوچران ـ فرستنده : خداسراد بهزیز

هندسهٔ رقومی :

۱ـ صفحهٔ P به‌شیب $\frac{1}{2}$ مفروض است. مقیاس‌شیب‌آنرا به‌موازات محور اطول در کنار چپ‌کاغذ چنان رسم‌کنید که افقیهٔ رقوم ۲آن ازمرکزکاغذ بگذرد. نقطهٔ o_2 را روی‌محور اطول اختیارکنید. از o_2 خطی درصفحهٔ P رسم‌کنیدکه با اثر صفحه زاویهٔ‌حقیقی 45° بسازد و آنرا درچپ محور اطول قطع کند. این خط را D می‌نامیم. از o_2 عمودی برخط D رسم وروی‌آن a_4 را اختیارکنید. مطلوبست رسم ملخص یك مربع که a_4 یك رأس آن و o_2 مرکزآن وخط D یك‌قطرآن‌باشد.

۲ـ صفحهٔ P به‌شیب $\frac{2}{3}$ مفروض است واثرآن از مرکز کاغذ می گذرد. مقیاس‌شیب‌آنرا درکنارچپ‌کاغذ رسم کنید و ترقی رقوم ازپایین به‌بالا می‌باشد. نقطهٔ o_2 روی محوراطول کاغذ مرکز یك شش‌ضلعی منتظم است‌که شعاع دایرهٔ محیطی آن۴ است. یکی‌ازاقطار شش‌ضلعی‌افقی است. ملخص‌شش‌ضلعی را رسم‌کنید.

دبیرستان‌کوشش ـ ارامنه‌پسران

دبیر : مهندس محمود خوئی ـ فرستنده : گارنیك آبراهامیان

الف : هندسهٔ رقومی :

مسئله : واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ ـ محورهای اقصر و اطول‌کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز بنامید (کادرکاغذ ۲۰ × ۲۵).

۱ـ صفحهٔ P را به‌شیب $p = 1$ به‌وسیلهٔ مقیاس‌شیب‌آن درسمت‌چپ‌کنارکاغذ موازی محور اطول به‌قسمی رسم نمائید که ترقی‌رقوم‌آن‌ازپائین به‌بالا بوده و نقطهٔ o_9 را دراین‌صفحه منطبق برمرکزکاغذ انتخاب کنید.

۲ـ ازنقطهٔ o_9 خط o_9b_6 را به‌قسمی رسم نمائیدکه با افقیه‌های صفحهٔ P در فضا زاویهٔ ۵۰ درجه بسازد و نقطهٔ b سمت راست o قرارگیرد.

۳ـ قطعه‌خط OB شعاع دایرهٔ محیطی‌شش‌ضلعی منتظم ABCDEF واقع درصفحهٔ P می‌باشد که a سمت راست b و رقومش ازآن بیشتراست. ملخص شش‌ضلعی را رسم‌نمائید . ضمناً وسعت حقیقی نصف شش‌ضلعی را در سمت پائین کاغذ نشان دهید.

۴ـ صفحهٔ دیگر Q را سمت راست کاغذ موازی صفحهٔ P و به‌فاصلهٔ ۱۰ زیرآن نشان دهید.

۵ـ شش‌ضلعی ABCDEF قاعدهٔ فوقانی هرم ناقص منتظمی است‌که‌قطرقاعدهٔ تحتانی‌آن‌که در صفحهٔ Q واقع‌است نصف قطرقاعدهٔ فوقانی‌می‌باشد.ملخص هرم ناقص مزبوررارسم ومرئی ومخفی نمائید.

۶ـ مقطع هرم ناقص فوق را با صفحهٔ قائمی که اثرش برمحور اطول کاغذ منطبق است یافته و وسعت حقیقی آن را با تسطیح روی صفحهٔ افقی رقوم ۵ نشان دهید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱ـ ملخص خط AB را به‌قسمی رسم کنید که A به‌بعد ۲ وارتفاع ۳ و B به‌بعد ۴ و $ab = 4$ و $AB = 6$ باشد.

مسئلهٔ ۲ـ بر روی خط مفروض DD' نقطه‌ای پیدا کنیدکه به‌فاصلهٔ یك واحد بالای صفحهٔ نیمساز اول باشد.

دبیرستان محمد طبری

دبیر: بنائی

هندسهٔ رقومی:

محورهای اطول‌واقصرکاغذ را رسم کنید. محل تلاقی

آنهارا مرکز کاغذ بگیرید. مقیاس ۱:۱ واحد سانتیمتر.

۱- نقطهٔ o_4 رابرمرکز کاغذ انتخاب کنید و از این نقطه صفحهٔ P را به‌اساس $i = 1$ طوری رسم کنیدکه افقیهٔ ۴ آن بر محور اقصر بوده وترقی رقوم آن ازپائین به‌بالا ومقیاس‌شیب آنرا درسمت چپ‌کاغذ رسم نمائید.

۲- ازنقطهٔ o_4 صفحهٔ Q را به شیب $p = \frac{1}{2}$ طوری رسم کنیدکه افقیه‌های آن با محور اطول موازی باشد وترقی رقوم‌آن از راست به چپ باشد و خط بزرگترین شیب صفحهٔ Q را دربالای کاغذ رسم نمائید.

۳- فصل‌مشترك‌دوصفحهٔ Q و P راکه خط a_8c_0 است بدست آورید.

۴- صفحهٔ عمودمنصف خط a_8c_0 را R نامیده دربالا و سمت راست‌کاغذ رسم کنید.

۵- ملخص لوزی ABCD رابدست‌آورید درصورتی‌که تصویرقطر bd روی‌محور اقصرکاغذ منطبق بوده وخط AB افقی‌باشد.

۶- مقیاس‌شیب صفحهٔ لوزی ABCD را Z نامیده در سمت راست رسم کنید و وسعت حقیقی مثلث قائم‌الزاویهٔ $o_4d_0c_0$ را با استفاده ازتسطیح صفحهٔ Z حول لولای H_{-4} صفحهٔ Z درپائین‌کاغذ نشان دهید.

۷- خط بزرگترین‌شیب صفحهٔ V را به‌اساس $i = \frac{1}{2}$ در سمت راست‌کاغذ رسم کنید در صورتی‌که افقیهٔ رقوم ۲۶ — آن برمحور اقصرکاغذ بوده وترقی‌رقومش از پائین‌به‌بالاباشد.

۸- ازنقطهٔ o_4 خطی‌برصفحهٔP عمودکنید وفصل‌مشترك این خط رابا صفحهٔV که نقطهٔ s_{-6} است بدست‌آورید. سپس طول حقیقی OS را بدست آورید.

۹- ملخص هرم SABCD را بدست‌آورید ومرئی و مخفی آنرا تمیز دهید.

۱۰- زاویهٔ حقیقی دوصفحهٔ V و P را بدست‌آورید.

هندسهٔ ترسیمی:

۱- ملخص نقطهٔ aa' را بدست‌آورید در صورتی‌که به‌فاصلهٔ 5cm از خط‌الارض بوده ونسبت فواصلش ازنیمسازربع اول وصفحهٔ قائم تصویربرابر $\frac{2}{3}$ باشد.

۲- ملخص‌نقطهٔ aa' رابدست‌آورید درصورتی‌که‌مجموع بعد وارتفاع برابر۶ وحاصل‌ضرب بعد وارتفاع برابر۴ باشد (هردومسئله ازراه ترسیمی‌حل شود).

دبیرستان مهرباختر

دبیر: بنائی

هندسه رقومی:

۱- نقطهٔ o_0 را روی محور اطول و بالای مرکز به فاصلهٔ 3cm ازمرکز انتخاب‌کنید وازنقطهٔ o_0 خطی به‌اساس $i = 2$ طوری رسم‌کنیدکه تصویرش بامحور اقصر زاویهٔ $30°$ بسازد وترقی رقومش‌ازچپ به‌راست و ازپائین به بالا باشد و روی این‌خط نقاط a_{-3} و c_3 را بدست آورید (a سمت چپ مرکز).

۲- صفحهٔ عمودمنصف خط AC را Q نامیده و مقیاس شیب آنرا درپائین و سمت راست رسم‌کنید.

۳- برخط $a_{-3}c_3$ صفحهٔ P را به‌اساس $i = 1$ طوری مرور دهیدکه مقیاس شیبش با محور اطول موازی باشد وآنرا سمت چپ رسم‌کنید.

۴- ملخص لوزی ABCD را درصفحهٔP بدست‌آورید درصورتی‌که نقطه o_0 مرکز وAC قطر لوزی و اضلاع AD و CB خطوط افقی باشند.

۵- وسعت‌حقیقی لوزی ABCD را در زیرمحوراقصر نشان دهید.

۶- ازنقطهٔ o_0 خط o_0m_{-7} را بر صفحه P عمود کنید وتحقیق‌کنیدکه سه نقطهٔ M و B و D در صفحهٔ Q قرار دارند وطول حقیقی OM را بدست آورید.

۷- ملخص منشور قائم ABCDEFGH را بدست آورید درصورتی‌که لوزی ABCD قاعده فوقانی آن بوده و اندازه حقیقی ارتفاع آن برابر OM و نقطهٔ M مرکز قاعده تحتانی لوزی EFGH باشد ومرئی ومخفی آنرا تمیز دهید.

۸- سه نقطه M و O و A نمایش صفحهٔ R بوده مقیاس شیب‌آنرا درپائین و سمت چپ نمایش دهید.

۹- ثابت‌کنیدکه زاویهٔ حقیقی (مسطحه) دو صفحهٔ P و R برابر $90°$ است ($P \perp R$).

۱۰- وسعت حقیقی مقطع‌قائم منشور را در تسطیح‌نشان دهید درصورتی‌که اثرصفحهٔ قائم محور اطول باشد.

دبیرستان مهر تبریز

دبیر: حسینی - فرستنده: سیدحسین حسینی

هندسهٔ رقومی:

۱- محور اقصر کاغذ افقیهٔ صفر صفحهٔ P به شیب ۱ می‌باشد. اولا اگر ترقی رقومهای مقیاس شیب‌آن از پایین‌به بالاباشد یك مقیاس شیب ازصفحهٔPرا به‌اختیار رسم‌کنید. ثانیاً مطلوبست رسم ملخص مستطیل $a_0b_2c_6d_4$ واقع درصفحهٔ P بطوری‌که a روی‌محوراطول و b طرف‌چپ‌آن و $AB = 5/5$ ثالثاً این مستطیل قاعدهٔ منشور قائمی است به ارتفاع $4/2$

اگر قاعدهٔ EFGH زیر صفحهٔ P باشد ملخص جسم را رسم و به‌فرض کدر بودن سطح جسم خطوط مرئی را از مخفی تمیز دهید.

۲ـ محور اقصر کاغذ تصویر افقیه ۱۰ صفحهٔ P به شیب یك می‌باشد. اولا اگر ترقی رقومهای مقیاس شیب آن از پائین به بالا باشد یك مقیاس شیب از P را در سمت چپ کاغذ رسم کنید ثانیاً مطلوبست رسم مخلص مثلث $a_{۰}b_{۲}c_{۴}$ واقع در صفحهٔ P بطوری که a روی محور اطول و شیب خط AB برابر $\frac{۱}{۲}$ و b سمت چپ a و شیب خط BC برابر $\frac{۱}{۳}$ و c سمت راست b. ثالثاً مطلوبست رسم ملخص هرم S.ABC بطوری که یال SC بر صفحهٔ قاعده عمود بوده و شیب وجه SAB یك باشد.

۳ـ پاره خط $a_{۰}b_{۴}$ به‌شیب ۱ یك یال از مکعب ABCDEFGH می‌باشد که a منطبق برمرکز کاغذ و b روی محور اقصر و طرف راست مرکز می‌باشد. اگر شیب یال AD از آن $\frac{۱}{۲}$ و d زیر محور اقصر و طرف چپ محور اطول و جسم بالای صفحهٔ مقایسه باشد ملخص جسم را رسم کنید.

۴ـ محور اقصر کاغذ افقیهٔ $h_{۰}$ فرض می‌شود اولا ملخص نقاط $a_{۶}$ و $b_{۰}$ را چنان بگیرید که a منطبق بر مرکز کاغذ و b طرف راست محور اطول به‌فاصلهٔ ۸ ازآن و بالای محور اقصر به‌فاصلهٔ ۶ از آن باشند. ثانیاً ملخص عمود مشترك دو خط $h_{۰}$ و $a_{۶}b_{۰}$ را رسم و طول حقیقی عمود مشترك را محاسبه کنید.

دبیرستان نظام

دبیر: بنائی ـ فرستندگان: رحیم جلالی، مهرداد نائیجی

هندسهٔ رقومی:

محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کنید و محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ قرار داده واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱.

۱ـ ملخص نقطهٔ $a_{۰}$ را بر مرکز کاغذ انتخاب کنید و از این نقطه خط $AB = ۵\sqrt{۲}$ cm را به‌اساس $i = ۱$ طوری رسم کنید که b روی محور اقصر و سمت راست a قرار گیرد و ارتفاع B از رقوم A بیشتر است.

۲ـ از نقطهٔ $a_{۰}$ صفحهٔ P را بر خط $a_{۰}b_{۵}$ عمود کنید و مقیاس شیب P را بالای کاغذ رسم کنید.

۳ـ ملخص مستطیل ABCD را بدست آورید درصورتی‌ـ که طول حقیقی ضلع $AD = ۵\sqrt{۳}$ و قطر BD خط افقی می‌باشد و d بالا وسمت چپ a قرار گیرد. (برای فرض بعد اگر نتوانستید $c_{۱}$ را بالای مرکز و روی محور اطول به‌فاصلهٔ ۵cm ازمرکز انتخاب کنید.)

۴ـ مقیاس شیب صفحهٔ مستطیل ABCD را R نامیده و درسمت چپ و بالا رسم کنید. وسعت حقیقی مستطیل ABCD را حول خط افقی ۱۰ صفحهٔ R در بالای کاغذ نشان دهید. وثابت کنید که شیب صفحهٔ R برای $p = \sqrt{۵}$cm است.

۵ـ خط بزرگترین شیب صفحهٔ Q به‌اساس یك (۱) را سمت راست کاغذ طوری رسم کنید که افقیهٔ ۱۲ صفحه Q بر محور اقصر کاغذ بوده و ترقی رقومش از پائین به بالا باشد.

۶ـ نقطه M را به ارتفاع ۵ درصفحهٔ Q و سمت چپ محور اطول طوری بدست آورید که طول حقیقی $AM = \sqrt{۸۳}$cm (اگر نتوانستید $m_{۵}$ را به‌فاصله ۳cm سمت چپ محور اطول در صفحهٔ Q انتخاب کنید.)

۷ـ ملخص منشور مایل ABCDEFGH را بدست آورید درصورتی که مستطیل ABCD قاعده و مرکز قاعده دیگر نقطهٔ $m_{۵}$ باشد و سپس آنرا مرئی و مخفی کنید.

۸ـ فصل مشترك صفحهٔ Q را با منشور ABCDEFGH که یك متوازی‌الاضلاع IJKL است بدست آورید.

۹ـ زاویه حقیقی (مسطحه) دوصفحه P و Q را با β نشان دهید.

هندسهٔ ترسیمی:

۱ـ قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} e = ۳ \\ h = ۴ \end{matrix}\right.$ را نسبت به صفحهٔ نیمساز ربع اول و دوم بدست آورید.

۲ـ ملخص نقطهٔ aa′ را بدست آورید درصورتی که بعدش $e = ۲$cm بوده و فاصله‌اش از خط‌العرض ۳ برابر ارتفاع باشد. (ازراه ترسیم حل شود).

دبیرستان هدف شمارهٔ ۲

دبیر: مهندس محمود خوئی ـ فرستنده: مسعود نصرالله

الف ـ هندسه رقومی:

مسئله ـ واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز بنامید کادر کاغذ ۲۵ × ۲۰ اختیار شود. رقوم کلیهٔ رئوس اعداد صحیح می‌باشند.

۱ـ نقطهٔ $a_{۱۶}$ برمرکز کاغذ منطبق است. ازاین نقطه صفحهٔ P را بقسمی مرور دهید که افقیه‌های آن موازی محور اقصر کاغذ بوده و با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ $\alpha = ۴۵°$ درجه بسازد. یك مقیاس شیب صفحهٔ P را سمت چپ به‌فاصلهٔ یك از کادر کاغذ رسم نمائید. جهت ترقی رقوم آن ازبالا به‌پائین می‌باشد. از نقطه $a_{۱۶}$ در این صفحه خط $a_{۱۶}b_{۱۲}$ را به‌شیب $p = \frac{۲}{۳}$ بقسمی مرور دهید که b سمت چپ a قرار گیرد.

۲- ازنقطهٔ a_{16} خط AD را بقسمی مرور دهیدکه $ad = ۸$ وزاویهٔ $bad = ۱۲۰^\circ$ (درتصویر) و $BAD = ۹۰$ (درفضا) بوده و d سمت راست ab وبالای محور اقصر قرار گیرد. رقوم d را بیابید.

۳- اگررقوم d برابر ۱۰ باشد ملخص مستطیل ABCD راکه BD قطر آنست رسم نموده و وسعت حقیقی آن را با تسطیح روی صفحهٔ افقی رقوم ۱۰ نشان دهید بقسمی که تسطیح a_{16} درست بالای کاغذ واقع گردد.

۴- مکعب مستطیل ABCDEFGH را بر روی مستطیل ABCD فوق بقسمی بناکنیدکه رأس G ازیال جانبی CG درصفحهٔ مقایسه قرارگیرد. تصویر مکعب مستطیل را رسم نمائید.

۵- ازگوشه‌های هشت گانه مکعب مستطیل فوق هرم‌های مثلث‌القاعده‌ای که طول خط‌الرأس‌های جانبی هریك برابر نصف اضلاع مجاور هرکنج باشدجدا می‌کنیم. ملخص باقیمانده جسم راکه یك چهارده وجهی است مشخص نموده مرئی و مخفی کنید.

ب- هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱- خط غیر مشخص DD′ مفروض است. آثار افقی و قائم آن را مشخص نموده نقطهٔ CC′ را روی آن بقسمی نشان دهیدکه در فضا بیك فاصلهٔ از اثرقائم خط و افق تصویر باشد.

مسئلهٔ ۲- ازنقطه aa′ ببعد ۱ و ارتفاع ۴ خطی رسم کنید که نیمرخ مفروض cdc′d′ را درنقطهٔ B که بعدش ۳ می‌باشد قطع کند.

دبیرستان هدف-شمارهٔ ۳

دبیر: ذوالقدر اصلی - فرستنده: سعید قهرمانی

هندسهٔ رقومی:

محورهای کاغذ را رسم کرده محل برخورشان (ω) را مرکز کاغذ بنامید. واحدسانتیمتر، مقیاس ۱:۱ است.

۱- از نقطهٔ a_1 که تصویرش بر محور اقصر و بفاصلهٔ $3\sqrt{2}$ سمت راست مرکز واقع است خط △ راکه باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۳۵° می‌سازد چنان رسم کنیدکه خط قائم V را که اثرش برمحور اطول و به‌فاصلهٔ ۳ بالای مرکز واقع‌است‌در نقطهٔ O قطع نماید وترقی رقومش بطرف بالا باشد ملخص △ را رسم‌کرده و رقوم O را پیداکنید.

۲- بر △ صفحهٔ P را به‌شیب $p = ۱$ بقسمی بگذرانید که ترقی رقومش به‌طرف بالاباشد. مقیاس شیب صفحهٔ P رادر کنار چپ کاغذ بکشید.

۳- نقطهٔ o_4 مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC واقع درصفحهٔ P است‌که درآن شعاع دایره $r = ۱/۵$ بوده و OB افقی و تصویر B_4 سمت چپ محور اطول واقع است. ملخص مثلث را رسم کنید.

۴- A وB وC سه رأس متوالی متوازی‌الاضلاع ABCD است ملخص متوازی‌الاضلاع راکامل کنید.

۵- صفحهٔ Q را موازی P وبه‌فاصلهٔ $5\sqrt{2}$ ودرپائین آن رسم نموده و یك مقیاس شیب از آنرا درکنار چپ کاغذ رسم نمائید.

۶- متوازی‌الاضلاع ABCD یك‌قاعدهٔ متوازی‌السطوح ABCDEFGH است‌که درآن یالهای جانبی بر △ عمود بوده وتصویرشان با محور اطول موازیست و نقطهٔ F متعلق به‌یال BF در صفحهٔ Q واقع می‌باشد. ملخص متوازی‌السطوح راکامل کرده بافرض کدربودن سطح آن مخفی و مرئی آنرا تعیین کنید (صفحهٔ مقایسه حاکی ماوراء است)

۷- عمود مشترك یال BF و افقیهٔ به‌رقوم یك صفحهٔ p را رسم کنید.

دبیرستان هدف- شمارهٔ ۴

فرستنده: مسعود نصرالله

محورکوچك وبزرگ کاغذ را رسم کنید - واحدسانتیمتر مقیاس ۱:۱ است.

۱- مقیاس‌شیب صفحهٔ P با اساس یك‌راکه اثرش محور اقصرکاغذ و ترقی رقومش از پائین به‌بالا می‌باشد درکنارچپ کاغذ رسم‌کنید. دراین صفحه نقطهٔ a_0 را به‌فاصلهٔ ۲ چپ‌مرکز اختیارکرده ازاین‌نقطهٔ خط a_0b_2 را درصفحه چنان رسم‌کنیدکه زاویهٔ حقیقی‌آن با اثرصفحه ۴۵° بوده و b طرف راست‌محور اطول قرارگیرد.

۲- صفحهٔ عمودمنصف‌پاره‌خط AB را رسم‌کنیدوملخص مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را که فقط یك ضلع آن a_0b_2 در صفحهٔ P واقع است طوری رسم‌کنیدکه ضلع BC آن افقیه بوده و C بالای محور اقصر کاغذ باشد.

۳- صفحهٔ دیگر P′ راکه اثرش همان اثر صفحه P بوده و برصفحه P عمود باشد درنظرگرفته یك مقیاس شیب ازآن را در طرف راست‌کاغذ بکشید.

۴- قرینهٔ نقطه C را نسبت‌به‌صفحهٔ P′ بدست‌آورده و آنرا D بنامید.

۵- منشوری راکه قاعده‌اش مثلث ABC و یك یالش پاره خط CD باشد درنظرگرفته ملخص آنرا رسم‌کنید و خطوط مرئی و مخفی را در ملخص تعیین نمائید.

۶ـ مقطع صفحهٔ قائمی‌را که‌اثرش‌مربرتصویر افقیه رقوم (۱ ـ) صفحهٔ P منطبق است در منشور معین کرده و اندازهٔ حقیقی آنرا با تسطیح نشان دهید .

مسائل هندسه و مخروطات

دبیرستان‌ابن‌سینا همدان

دایرهٔ C وخط △ ونقطهٔ A غیرواقع برآنهامفروضند. از نقطهٔ A دایره‌ای چنان رسم‌کنید که خط △ محور اصلی این دایره ودایرهٔ C باشد.

دبیرستان امیرکبیریزد

دبیر: استوار ـ فرستنده : محمدعلی اخوان بهابادی

بریك هذلولی‌که مرکزآن O و دو کانونش F_1 و F_2 می‌باشد مماسی‌رسم نموده‌اندکه دو مجانب هذلولی را درنقاط A و B قطع‌کرده است.اولا: ثابت‌کنیدچهارضلعی F_1AF_2B محاطی‌است. ثانیاً با استفاده ازحکم اول ثابت‌کنیدکه مساحت مثلث OAB مقدار ثابتی است وآن‌مقدار ثابت راتعیین‌کنید.

دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۳

دبیر. احسانی ـ فرستنده: سعید قهرمانی

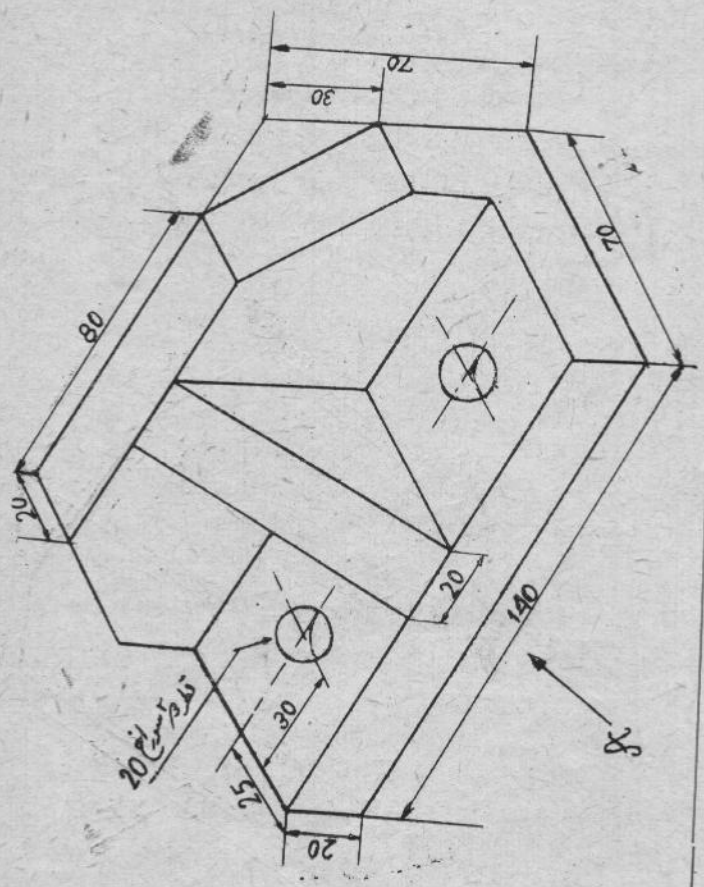
دایرهٔثابت O ، نقطهٔ ثابت A وخطثابت △ مفروضند. نقطهٔ متغیر M روی دایرهٔ O حرکت می‌کند. MA را رسم کرده واز نقطهٔ A برآن عمودی‌رسم‌کرده و $M'A = MA$ را روی‌آن عمود پیدا می‌کنیم . سپس برامتداد $M'A$ نقطهٔ M'' را طوری بدست می‌آوریم‌که $AM'.AM'' = k$ باشد. حال‌از M'' عمود $M''H$ را بر △ فرودآورده و وسط $M''H$ را D می‌نامیم. مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ D وقتی‌که M بر دایرهٔ O حرکت می‌کند.

رسم فنی

دبیرستان ایرانشهر یزد

دبیر: حیدری - فرستنده : مهدی ملك‌یزدی

مطلوبست : ۱ـ نمای‌اصلی ازدید A. ۲ـ نمای جنبی چپ. ۳ـ نمای‌سطحی.

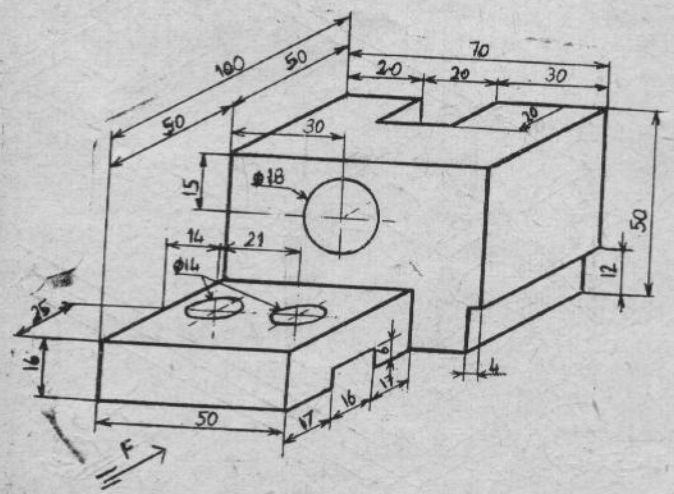


دبیرستان دارالفنون

دبیر : شهنائی ـ فرستنده : علی هاشمی‌زاده

مطلوبست رسم تصاویر زیر با مقیاس ۱:۱ و اندازه ـ گذاری کامل . کاغذ A_4 می‌باشد.

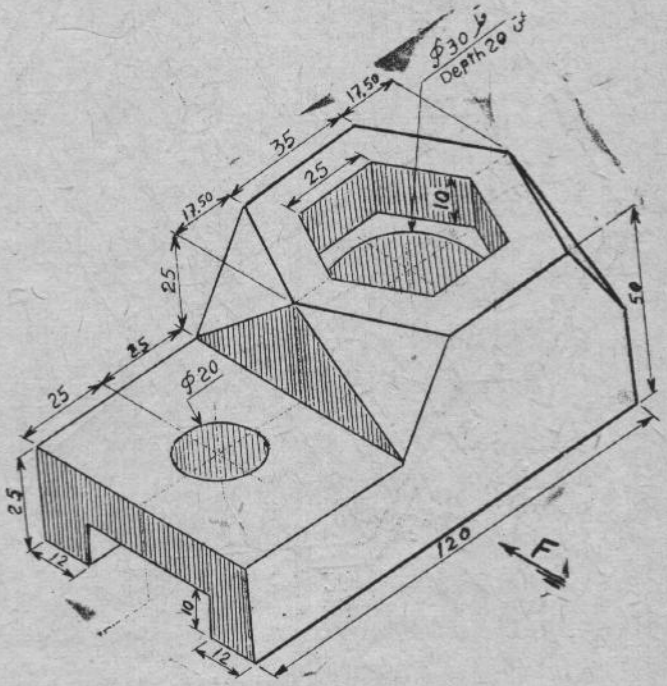
۱ـ تصویرقائم‌ازدید F. ۲ـ تصویر افقی. ۳ـنیمرخ چپ .



دبیرستانهای: دکتر حکیم الهی ، دکتر
داورپناه ، زاگروس ، مدائن

دبیر : مهندس محمود خوئی

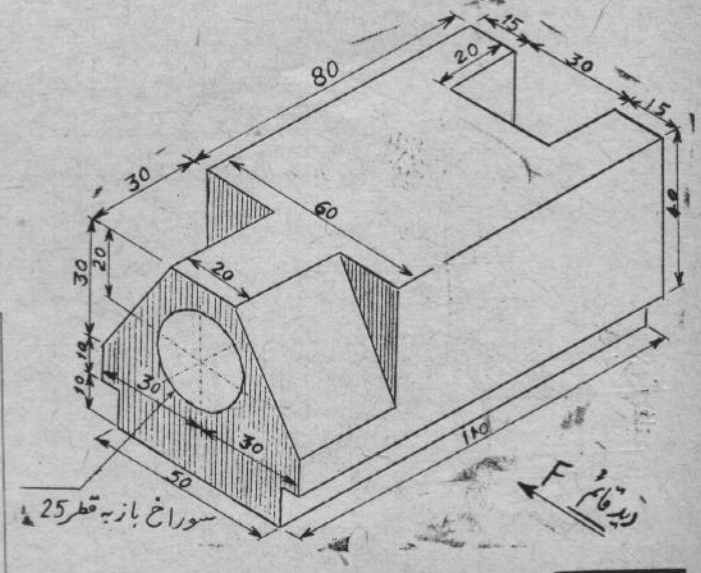
مطلوبست رسم تصویر قائم از دید F و تصاویر افقی و نیمرخ چپ در ناحیهٔ اول فضا با اندازه گذاری کامل و رسم محورها روی کاغذ A_4. واحد میلیمتر و مقیاس ۱:۱ است.



دبیرستان رهنما

دبیر : مهندس محمود خوئی

مطلوبست رسم تصویر قائم از دید F و تصاویر افقی و نیمرخ چپ جسم در ناحیهٔ اول فضا با رسم محورها و اندازه گذاری کامل روی کاغذ A_4. مقیاس ۱:۱ و واحد میلیمتر است.

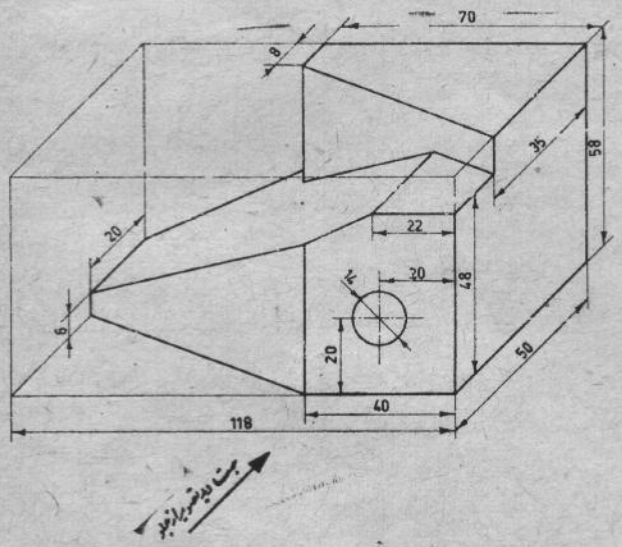


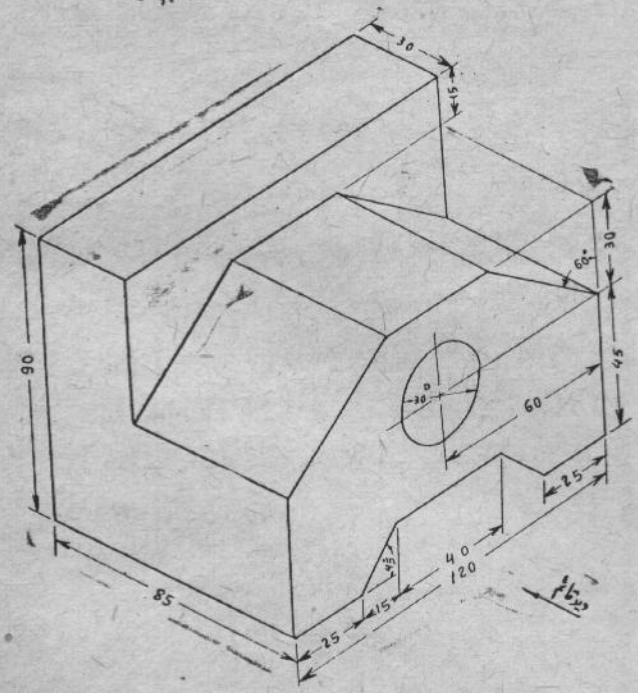
دبیرستانهای سپاس و طبری و مهرباختر

دبیر: بنائی - فرستنده : محمدتقی ابدائی

مطلوبست : ۱- رسم نمای قائم. ۲- رسم نمای افقی. ۳- رسم نمای جانبی (نیمرخ چپ). ۴- رعایت قواعد ترسیم و ظرافت خطوط و نظافت رسم و اندازه گذاری (ابعاد به میلیمتر می باشد).

در هردو شکل خواسته‌های بالا مورد نظر است.

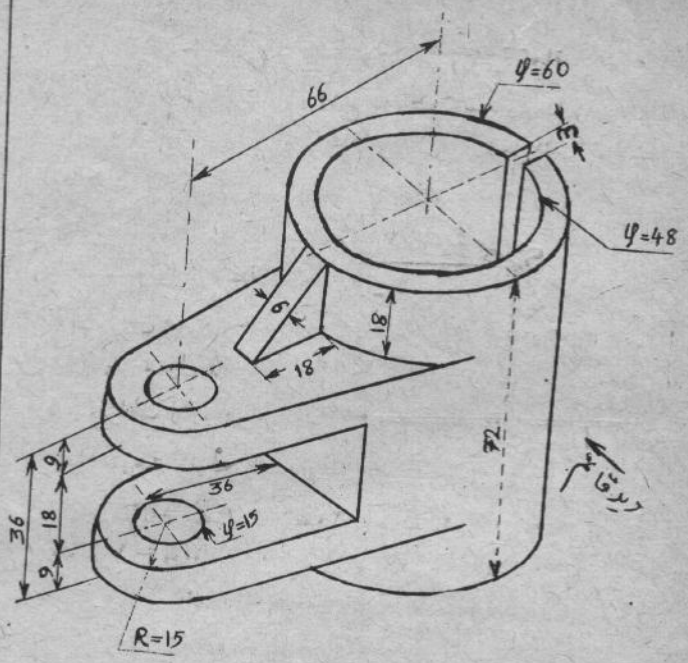




دبیرستان سعدی شیراز

دبیر: پیرویان - فرستنده : اردشیر دیلمی

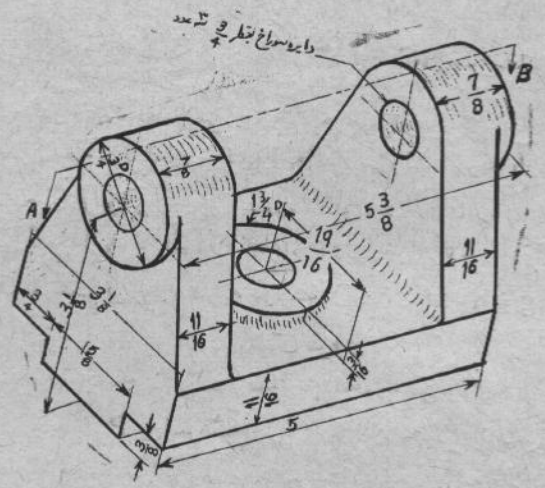
مطلوبست رسم تصاویر قائم ، افقی و نیمرخ چپ با اندازه گذاری کامل. واحد میلیمتر و مقیاس ۱:۱ است.



دبیرستان کورش کبیر نهاوند

دبیر : آذری ـ فرستنده : کیقباد شمس‌اسحاق

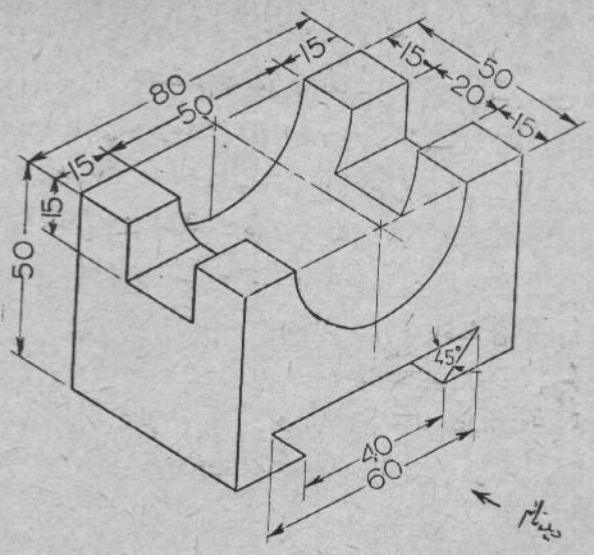
مطلوبست مقطع کامل AB درتصویر قائم ـ تصویرافقی و تصویر نیمرخ چپ.



دبیرستان مروی

فرستنده : مسعود نصرالله

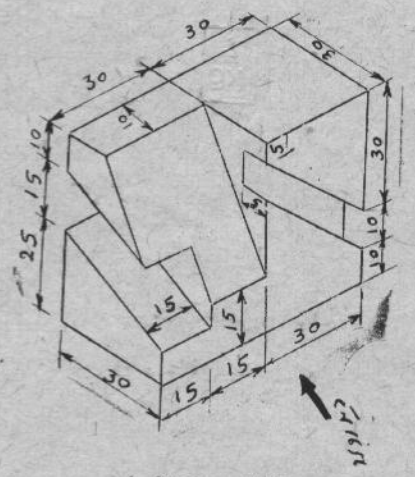
مطلوبست: ۱ـ تصویر ازجلو(تصویرقائم). ۲ـ تصویر ازبالا (تصویرافقی). ۳ـ تصویرازچپ (تصویرجانبی).



دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۱

دبیر: شالچیان ـ فرستنده: مسعود نصرالله

مطلوبست : ۱ ـ تصویر قائم (روبرو) . ۲ـ تصویر افقی (بالا). ۳ـ تصویر نیمرخ چپ.



مسائل مکانیک

دبیرستان ابن‌سینا رضائیه

دبیر: فاتحی ـ فرستنده : قاسم‌جبارزاده

گلولهٔ A راازچه ارتفاعی رها کنیم تا در دوثانیه $\frac{5}{9}$ مسافت کل راطی‌کند.

دبیرستان ارمگان

دبیر : حمیدی ـ فرستنده : مهران‌کشاورزیان

متحرکی باشتاب $1/2 m/s^2$ ازحال سکون از نقطهٔ A شروع به‌حرکت می‌کند. ده‌ثانیه باهمین شتاب‌وسپس ۲۰ ثانیه باسرعت ثابت وپس‌ازآن باشتاب‌کندشونده $2/4 m/s^2$ حرکت می‌کندودرنقطهٔ B متوقف می‌شود. فاصلهٔ A تاBراتعیین‌کنید.

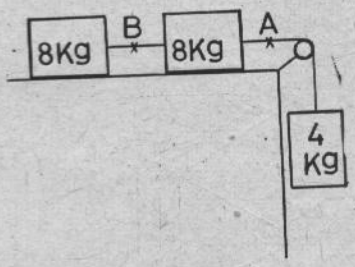
دبیرستان حکمت

دبیر: کبیری ـ فرستنده : جوادبرقعی رضوی

در روی سطح شیبداری به‌شیب ۰/۰۸ اتومبیل A به‌جرم ۵ تن باسرعت‌ثابت ۳۶km/h به‌طرف بالاواتومبیل B به‌جرم۷/۵تن‌باسرعت ثابت ۵۴km/h به‌طرف‌پائین‌درحرکت هستند. نیروی اصطکاك برای‌اتومبیل A برابر ۱۰۰۰نیوتن است. اولا نیروی‌موتور اتومبیلA ونیروی‌ترمز اتومبیل B راپیداکنید. ثانیاً در حالتی‌که دواتومبیل به‌فاصلهٔ ۷۲/۵ متر درمقابل یکدیگر می‌رسند به‌وسیلهٔ علامت چراغ قصد توقف می‌کنند. اتومبیل A فقط موتور راخاموش می‌کند، اتومبیلB چقدر به‌نیروی ترمزخود بیفزاید تا دواتومبیل درست درکنار هم توقف‌کنند.

دبیرستان دارالفنون

دبیر: تبریزی ـ فرستنده : علی‌هاشمی‌زاده

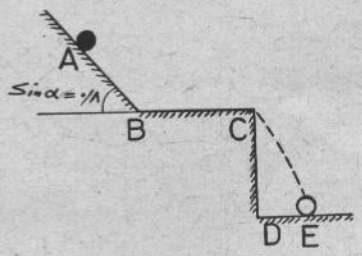


در شکل مقابل شتاب‌حرکت دستگاه و کشش نخ‌را برای نقاط A و B حساب‌کنید و اگرنخ ازنقطهٔ B قطع شودکشش نخ رادراین حالت برای‌نقطهٔ Aتعیین‌کنید. ضریب‌اصطکاك سطح‌افقی‌برای هرجسم ۰/۲ می‌باشد. $g=10m/s^2$

دبیرستان شهریارقلهك

دبیر: رهبر ـ فرستنده : سعیدمحبی

گلوله‌ای ازنقطهٔ A بدون سرعت اولیه رها می‌شود.



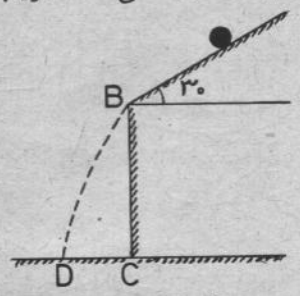
پس از طی مسافت $AB=3m$ واردسطح افقی $BC=5m$ می‌گردد ودر نقطهٔ C از سطح جداشده ودرنقطهٔ E به زمین می رسد. $DC=2/4m$است.اگرضریب‌اصطکاك‌سطح‌شیبدار $K_1=\frac{1}{3}$ و ضریب اصطکاك سطح افقی $K_2=\frac{2}{10}$ باشد مطلوبست :

a) سرعت‌گلوله درموقع برخورد به زمین درنقطهٔ E. b) طول DE چقدر است؟ $g=10m/s^2$

دبیرستان کورش‌کبیر نهاوند

دبیر: سلماسی ـ فرستنده : کیقباد شمس‌اسحاق

گلوله‌ای ازنقطهٔ A واقع درسطح شیبداری‌که زاویهٔ‌آن باافق°۳۰ است‌بطورآزاد به‌طرف‌پایین حرکت‌می‌کند. ضریب اصطکاك سطح ۰/۴ است. گلوله در B پرتاب شده و در نقطهٔ D به زمین می‌رسد. پیدا کنید طول CD را وتانژانت زاویه‌بین امتداد سرعت‌گلوله بامحور افقی درنقطهٔ D.

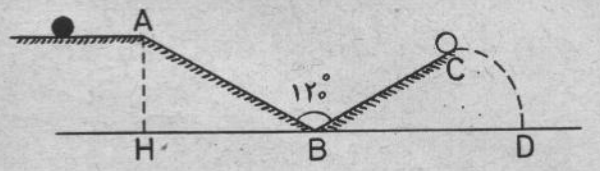


($AB=5m$ و $BC=24m$ و $\sqrt{3}=1/7$ و $g=10m/s^2$).

دبیرستان‌کوشش ـ پسران ارامنه

دبیر : رهبر ـ فرستنده : گارنیك‌آبراهامیان

گلوله‌ای باسرعت اولیهٔ ۲۰m/s روی‌یك سطح‌افقی‌در حال حرکت است.ناگهان وارد سطح شیب‌دار بدون‌اصطکاك $AB=50m$، بازاویهٔ°۳۰ می گرددودرامتدادآن‌پایین‌می‌رود



پس‌از طی این سطح وارد سطح $BC=\frac{125}{3}$ متر مطابق‌شکل شده درامتدادآن بالامی‌رود وبالاخره پس‌ازطی این‌سطح از آن جدا شده ودرنقطه‌ای مانندD به‌زمین می‌رسد. ضریب‌اصطکاك سطح BC برابر با ۰/۱ است مطلوبست: ۱ـ زمان حرکت این گلوله‌ازA تا D (D نقطه‌ای روی‌زمین). ۲ـ مقدارHD. ۳ـ سرعت برخورد گلوله درنقطهٔ D. $g=10m/s^2$

دبیرستان مروی

دبیر: آیتی ـ فرستنده : محمدحسن‌نوری

جسم P راباسرعت اولیهٔ ۵۰m/s به‌بالا پرتاب‌می‌کنیم ۵ ثانیه بعدجسم دیگری را با سرعت اولیهٔ V_0 به بالا پرتاب می‌کنیم. محاسبه‌کنیدسرعت اولیهٔ جسم دوم‌را درصورتی‌که‌در ارتفاع ۹۴/۷۵ متر به‌یکدیگر می‌رسند. ثانیاً سرعت هردودر این لحظه راحساب‌کنید.

دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۳

دبیر : آیتی اصفهانی ـ فرستنده : سعیدقهرمانی

جسمی‌به‌جرم۵۰۰gr ازبالای‌سطح‌شیبداری پایین‌می‌آید. زاویهٔ سطح باافق‌برابر α است، به‌طوری که $\sin\alpha=0/8$

می‌باشد . نیروی اصطکاك سطح نصف نیرویی است که بطور عمودبرسطح واردمی‌شود. مقاومت‌هواازرابطهٔ $R = ۰/۰۱V^۲$ در M. K. S. قدیم بدست‌می‌آید. معین کنید سرعت‌حدمتحرك را ازاین‌سطح که به‌استخرآبی ختم می‌شود وتعیین کنید تا چه عمقی درآب فرومی‌رود ودرچه نقطه‌ازآن خارج می‌شود. جرم مخصوص جسم ۰/۷۵ است.

دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۴

فرستنده : مسعود نصرالله

آونگی به‌طول ۵ متروبه‌جرم۱کیلوگرم رابه‌اندازهٔ °۶۰ ازوضع تعادل‌منحرف وبدون‌سرعت‌اولیه رهامی‌کنیم. اولامعلوم کنید سرعت‌آونگ راموقع عبور ازوضع تعادل. ثانیاً اگروزنه آونگ هنگام عبور ازوضع تعادل به‌وزنهٔ دیگری به جرم ۵۰۰ گرم که روی لبهٔ میزی قراردادهشده برخورد کرده و متوقف شود معلوم‌کنید وزنهٔ ۵۰۰ گرمی چه‌سرعتی پیدا خواهدکرد. ثانیاً اگر فاصلهٔ وزنه ۵۰۰ گرمی ازسطح زمین ۹۰ سانتیمتر باشد معلوم‌کنید پس ازبرخورد وزنه ۵۰۰ گرمی چقدر جلوتر به‌سطح زمین‌برخورد خواهدکرد. $g = ۹/۸m/s^۲$

مسائل فیزیك

دبیرستان ارمگان

دبیر: حمیدی ـ فرستنده : مهران‌کشاورزیان

معادلهٔ ارتعاشی‌نقطهٔ O ازمحیط قابل ارتجاع به‌صورت $x = ۵sin(۵۰\pi t + \frac{\pi}{۶})$ می‌باشدکه x برحسب‌سانتیمتراست. اولا طول‌موج وبعدحرکت رادرلحظهٔ $t = \frac{۱}{۱۰}$ ثانیه تعیین کنید درصورتی‌که سرعت انتشار ارتعاشات درمحیط $۱۰m/s$ باشد. ثانیاً فاصلهٔ نزدیکترین نقطهٔ M را تا O طوری تعیین کنید که معادلهٔ‌آن به صورت $x_M = ۵sin(۵۰\pi t - \frac{\pi}{۶})$ باشد .

دبیرستان خوارزمی

دبیر: نیرویی ـ فرستنده : روح‌الله‌رهبر

ذره‌ای حرکت نوسانی ساده دارد. در اولین ثانیه بعد ازشروع حرکت مسافت b ودرثانیهٔ بعد مسافت c را درهمان جهت می‌پیماید. ثابت کنید دامنهٔ حرکت $a = \frac{۲b^۲}{۳b - c}$ می‌باشد (در موقع شروع حرکت متحرك از نقطهٔ به فاصلهٔ a از مرکزنوسان شروع به‌حرکت می‌کند).

دبیرستان دارالفنون

دبیر: تبریزی ـ فرستنده: علی‌هاشمی‌زاده

درمحیط قابل ارتجاع موج باسرعت $۱۷۰m/s$ منتشر می‌شود . معادلهٔ ارتعاش نقطهٔ O در لحظهٔ t به صورت $x = ۲sin(\omega t + \frac{\pi}{۶})$ می‌باشد؛ پریود ارتعاشات ۰/۰۲ ثانیه است. معادلهٔ ارتعاش نقطه‌ای مانند A راکه به‌فاصلهٔ ۸۵cm از O واقع است و بعد از O به‌ارتعاش در آمده در لحظهٔ t بنویسید.

دبیرستان زاگرس

دبیر: قلی‌پور ـ فرستنده : غلامرضا عالی‌شاه

تار مرتعشی‌به‌طول ۲متر وبه‌جرم۶ گرم بین‌دونقطه‌ثابت شده است. نیروی کشش تار بوسیلهٔ وزنه‌ای به وزن ۱۲kgf تأمین می‌شود. تار راطوری به‌ارتعاش درمی‌آوریم‌که در طول آن ۷ گره ایجاد شود. تواتر تار و سرعت انتشار ارتعاشات عرضی را درتار حساب‌کنید. $g = ۱۰m/s^۲$

دبیرستان‌فیروز بهرام

دبیر: شاه‌اسبلو ـ فرستنده : پرویز روانی

دومنبع $O_۱$ و $O_۲$ ازیك‌محیط همگن‌هریك بافرکانس ۲۰۰ هرتز امواج هم‌امتداد درمحیط پخش می‌کنند. سرعت انتشار $V = ۳۲۰m/s$ و دامنهٔ‌ارتعاش $O_۱$ و $O_۲$ به‌ترتیب ۵cm و ۴cm است؛

اولا ـ معادلهٔ‌ارتعاش هریك ازدومنبع رابنویسید.

ثانیاً ـ نقطهٔ M به فاصلهٔ ۲۰cm از $O_۱$ و ۴۰cm از $O_۲$ درهمان‌محیط واقع‌است. معادلهٔ ارتعاش‌نقطهٔ M رانسبت بهریك ازدومنبع به‌طور جداگانه بنویسید.

ثالثاً ـ معادلهٔ تداخل امواج‌دومنبع رادرنقطهٔ M دست آورده وبااندازه‌های تقریبی واشل مناسب با روش رسم فرنل دامنهٔ A نقطهٔ M واختلاف‌فازآنرا بادومنبع بدست‌آورید.

دبیرستان مروی

دبیر: آیتی ـ فرستنده : محمدحسن نوری

یك منبع ارتعاشی به معادلهٔ $x = ۴sin\pi t$ محیط قابل ارتعاشی را مرتعش می‌کند. در یك لحظهٔ معین تغییرمکان ذرهٔ مرتعشی‌که درفاصلهٔ ۲۰cm ازمنبع‌قرارگرفته ۴cm وتغییرمکان‌ذرهٔ مرتعش دیگری‌که درفاصلهٔ ۴۰cm ازمنبع قرارگرفته $۲\sqrt{۲}cm$ است. درصورتی‌که جهت هردوذره ارتعاش یکی‌باشد طول‌موج ارتعاش را درمحیط پیداکنید ومعادلهٔ ارتعاشی‌ذره‌ای که درفاصلهٔ ۸۰cm ازمبدأ قرارگرفته به‌چه‌صورت است وبعد ارتعاش این‌نقطه را درلحظهٔ $t = \frac{۱}{۲۰۰}$ حساب‌کنید.

مسائل شیمی

دبیرستان ارمگان

دبیر: نعمت ـ فرستنده: مهران کشاورزیان

۰/۲ گرم ازیك ئیدروکربور خطی‌استیلنی رابطور کامل می‌سوزانیم ۰/۱۸ گرم آب بدست می‌آید. فرمول مولکولی وفرمول گستردهٔ آن چیست؟

دبیرستان دارالفنون

دبیر: کوشا ـ فرستنده : علی هاشمی‌زارده

مخلوطی از گازهای اتیلن و استیلن داریم . این‌مخلوط با ۱/۲۵ برابرحجمش گـاز ئیدروژن اشباع می‌شود (حجمها تحت شرایط یکسان) . اولا ـ درصدحجمی مخلوط را حساب کنید .ثانیاً - چه جرمی ازاین مخلوط را انتخاب‌کنیم‌که تحت شرایط متعارفی ۲۲/۴ لیتر حجم داشته باشد .

دبیرستان زاگرس

دبیر: آیت‌اللهی ـ فرستنده : غلامرضا عالی‌شاه

بنزن خالص در۸۰ درجه می‌جوشد و اگر ۹/۲ گرم‌از جسمی به‌فرمول C_7H_8 را در۱۰۰ گرم بنزن حل‌کنیم محلول حاصل در ۸۵ درجه می‌جوشد.دریك آزمایش ۱/۸۶ گـرم از یك جسم‌آلی‌را در ۲۰۰ گـرم بنزن حل کردیـم نقطهٔ جـوش محلول‌حاصل ۸۰/۵ درجه شده است.وزن ملکولی جسم‌اخیر را پیداکنید.

دبیرستان فیروزبهرام

دبیر : علویان ـ فرستنده : پرویز روانی

مخلوطی ازاستیلن ، پروپیلن و اتان به‌حجم ۵۰ml با ۱۸۰ml اکسیژن به‌طورکامـل می‌سوزد و $115cm^3$ گـاز کربنیك تولید می‌کند. نسبت درصد حجمی مخلوط را پیداکنید و چگالی مخلوط را نسبت به گازهیدرژن پیداکنید.

دبیرستان‌کریم فاطمی اهواز

دبیر: علوی ـ فرستنده: خدا مراد بهزیز

از حل x گرم جسم‌آلـی در ۵۰ گرم بنزن نـزول نقطهٔ انجماد ۱/۲۵ درجه شده‌است. اگر x گرم الکل‌متیلیك را (CH_3OH) در۱۰۰ گرم بنزن حل‌کنیم نزول نقطهٔ‌انجماد ۲/۵ درجه می گردد . جرم ملکولی‌جسم‌آلی‌را حساب‌کنید.

دبیرستان‌کورش کبیر نهاوند

دبیر : کابلی ـ فرستنده : کیقباد شمس‌اسحاق

نسبت سدیـم بـه ملح سدیم یك اسید آلـی دوظرفیتی ۳۵٪ است. الف ـ جرم مولکولـی اسید را پیداکنیدمی‌آب‌ـ فرمول گستردهٔ جسم را رسم‌کنید.

دبیرستان‌کوشش ـ پسران ارامنه

فرستنده : گارنیك آبراهامیان

ازئیدرژناسیون یك‌کربور اتیلنی‌کربوری بدست می‌آید که ۸۱/۸٪ کربن دارد. فرمول ئیدروکربور اتیلنی را بدست آورید .

(On the page 192)

pondingly equal 10 plus some integral multiple of 98.

Since the original c eck was for less than $ 100.00, the only correct answer is $ 10.21.

Problem 89- Find the smallest natural number which has the following properties:

(a) In its decimal representation the last digit is 6.

(b) If the last digit, 6, is removed and then placed as the first digit (without changing the remaining digits), the new number is four times as large as the original number.

Solution : We establish that the original number is a b c d 6 (as many digits as are needed can be added to the left), and that 4 times this number is equal to 6 a b c d. Since $4 \times 6 = 24$ we must have d equal to 4. Now $4 \times 46 = 184$ and we must have c equal to 8. Our number is now a b 8 4 6. We continue in this manner until the result would put a 6 in the solution. The required number is 153,846.

$$615,384 = (4)(153,846)$$

محاسبات تقریبی (دنبالهٔ صفحهٔ ۱۴۲)

یك‌جهت‌باشندمساوی تفاضل خطای مطلق آن اعداد است.

۲- اعداد تقریبی مختلف‌الجهتند مثلا اگر اولی تقریبی اضافی و دومی تقریبی نقصانی باشد چنین می‌شود:

$$n_1 - n_2 = (N_1 + e_1) - (N_2 - e_2) =$$
$$= (N_1 - N_2) + (e_1 + e_2)$$
$$e = e_1 + e_2$$

تفاضل اضافی است

ولی اگر اولی نقصانی و دومی‌اضافی باشد:

$$n_1 - n_2 = (N_1 - e_1) - (N_2 + e_2) =$$
$$= (N_1 - N_2) - (e_1 + e_2)$$
$$e = e_1 + e_2$$

تفاضل نقصانی است

و ازآنجا چنین نتیجه می‌شودکه خطای مطلق اختلاف دوعدد تقریبی که در جهت مخالف باشند مساوی مجموع خطاهای مطلق‌آن دوعدد است.

بطور عموم خطای مطلق تفاضل دوعدد تقریبی کوچکتر است از دوبرابر بزرگترین خطا.

اگرخطای بزرگترکمتر از $\frac{1}{10^m}$ باشد $e < \frac{2}{10^m}$ ویا

به‌طریق اولی $e < \frac{1}{10^{m-1}}$

مسئلهٔ ۱- باچه تقریبی ممکن است اختلاف دو عدد تقریبی را بدست‌آورد درصورتی‌که حداعلای خطاهای مفروق و مفروق منه داده شده است. اعداد ۳/۱۴۱۵۹۱۹۲ و ۱/۷۳۲۰۲۱۷ اعداد تقریبی نقصانی π و $\sqrt{3}$ تا $\frac{1}{10^6}$ و $\frac{1}{10^4}$ می‌باشند.

برحسب قضیهٔ فوق $e < \frac{2}{10^4}$ و یا $e < \frac{1}{10^3}$ یعنی ۰/۰۰۱ پس تفاضل ۱/۴۰۹۵۷۰۲۲ تا ۴ رقم صحیح است.

مسئلهٔ ۲- اعداد را باید باچه تقریبی گرفت‌برای اینکه تفاضل‌آنها تاتقریب معینی بدست‌آید.

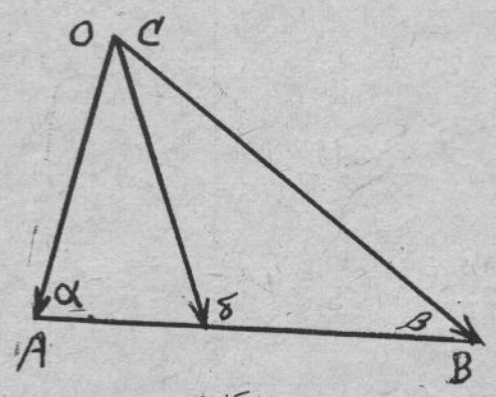
برای‌این‌عمل کافی است‌که اعدادرا باهمان تقریب‌تفاضل حساب نمائیم. دراین‌صورت خطای تفاضل‌کمتراست ازخطای مطلق یکی ازآنها.

مثال - می خواهیم اختلاف $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ را تا ۰/۰۰۱ تقریب نقصانی حساب‌کنیم ابتدا $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ را تا ۰/۰۰۱ تقریب حساب می‌کنیم:

$$2/236 - 1/732 = 0/504$$

بررسی نیمساز (دنبالهٔ‌صفحهٔ ۱۴۴)

اکنون این تساوی را به حسب اضلاع وزوایای‌مثلث می‌نویسیم. فرض‌کنیم‌که A و B به‌ترتیب انتهاهای α و β باشند. ازآنجا C مبدأ می‌شود (شکل۶). بنابراین:



شکل۶

$$\|\delta\| = v_c, \quad \|\alpha\| = b, \quad \|\beta\| = a \text{ و}$$
$$(\alpha, \beta) = ab\cos C$$

ازاینرو (۱۰) بدل‌می‌شود به:

$$v_c^2 = \frac{2ab[ab(1+\cos C)]}{(a+b)^2} = \frac{4a^2b^2\cos^2\frac{C}{2}}{(a+b)^2}$$

چون $C < \pi$ نتیجه می‌شود که $\frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$ و از آنجا $\cos\frac{C}{2} > 0$. بنابراین:

$$v_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

فرمول‌بالا به‌زاویه بستگی دارد. اکنون فرمولی‌بدست می‌آوریم‌که به اضلاع بستگی داشته باشد. واضح‌است‌که:

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2(\alpha, \beta).$$

مقدار (α, β) رابدست‌آورده و درتساوی (۱۰) قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شودکه:

$$(12) \quad \|\delta\|^2 = \frac{\|\alpha\|\,\|\beta\|\,[(\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 - \|\alpha-\beta\|^2]}{(\|\alpha\| + \|\beta\|)^2}$$

این‌فرمول به حسب اضلاع چنین می‌شود:

$$v_c^2 = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}$$

مسائل دیگررا به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

مراجعه

[۱] A.R.Amir-Moéz, Matrix Techniques, Trigonometry, and analyticGeometry, Edwards Brothers, Inc.Ann Arbor Michigan

داستانهای ریاضی

نوشتهٔ ریند (Rhind)

ترجمه و تنظیم از : داوید ریحان

تخته نرد

وقت خواب بود ، فرهاد تمایلی به‌خوابیدن نداشت و خسرو هم‌کم وبیش وضعی مشابه با اوداشت . فرهاد پیشنهاد می‌کند :

- با چند دست بازی تخته نرد موافقی؟

- چراکه نباشم ؟ ولی من‌ترا خوب می‌شناسم ، با این عشقی‌که به‌این بازی داری ، فکرکنم‌که تافردا صبح همین‌جا باشیم ، پیشنهادمی‌کنم‌که حداکثر ده دست بازی‌کنیم .

- هرچه میل‌تواست ، ولی من نخودی بازی نمی‌کنم.

- مثل اینکه سرعقل آمده‌ای ، سرچی‌بازی‌کنیم ؟

- برای بازی اول یك ریال وسط می‌گذاریم ، برای بازی دوم ، بازی سردوبرابر این مقدار انجام می‌گیرد و به همین منوال برای بازی سوم ۴ ریال و همینطور تاآخر.

- موافقم.

خسرو جیبهایش را گشت وتمام پولهایی‌راکه درجیبش بود روی میز خالی‌کرد . دقیقاً ۶ تومان و یك‌ریال بود .

- بیا! این‌همهٔ پولی است‌که می‌توانم ببازم.

بازی شروع شد و ادامه یافت تا آنجاکه خسرو بلند شد وگفت :

- تمام‌شد ، ته‌جیبم را بالاآوردی و تا شاهی آخرم‌را باختم. تلافی این‌کار را فردا سرت درخواهم آورد.

حال ، خوانندهٔ عزیز حل دو مسئلهٔ زیر را به شما واگذار می‌کنیم. دوبازیکن ما چند دست‌بازی‌کرده‌اند ؟ و در کدامشان خسرو برده‌است ؟ پس ازآنکه به‌این پرسشها پاسخ گفتید-که فکر می‌کنم بتوانید چنین‌کنید - می‌توانید پاسخ خودتانرا با جواب زیر مطابقت دهید .

پاسخ - فرض‌می‌کنیم‌که درتمام بازیها ، خسرو باخته باشد ، دراین‌صورت تعداد بازیها چقدر خواهد بود؟ دربازی اول $۱ = ۲^{۰}$ ریال ؛ دربازی دوم $۲ = ۲^{۱}$ ریال ؛ درسومی، $۴ = ۲^{۲}$ ریال و همینطور الی آخر. اگر به‌همین منوال ادامه دهیم ، ملاحظه می‌شودکه دراین‌بازی که بدشانسی متوجه خسرو است ، اگربازی تا ۹ نوبت برسد ، باخت این نوبت ۲/۵۶ تومان وتمام پولهای باخته شده تا اینجا ۵/۱۱تومان خواهدبود. پول باقی‌مانده برای خسرو برابر خواهد بودبا $۶/۰۱ - ۵/۱۱ = ۰/۹۰$ تومان، درنتیجه وی اجازهٔ ادامهٔ بازی‌را نخواهدداشت. ازطرفی دیگرمی‌دانیم‌که دربازی‌آخر، وی تمام پولهایی راکه دریك نوبت قبل از آن داشته است، باخته است . نتیجه می‌گیریم‌که خسرو ، همیشه بازنده نبوده است ، زیراکه وی تصمیم‌گرفته است‌که تا نفس‌آخر به‌بازی ادامه دهد و در نتیجه درآخرین بازی‌که دهمی باشد ، نیز شرکت‌کرده است.

مقدارکل برد وباختها چقدر است؟

$$۲^{۰} + ۱^{۱} + ۲^{۲} + \dots + ۲^{۹} = ۱۰۲۳$$

اگر در توالی بازیها ، فرهاد x ریال و خسرو y ریال برده باشد ، داریم : $x + y = ۱۰۲۳$

درضمن ، چون فرهاد تمام پول اولیهٔ خسرو را برده است داریم : $x - y = ۶۰۱$

از آنجا بدست می‌آید $x = ۸۱۱$ و $y = ۲۱۱$

رشتهٔ زیر را می‌نویسیم :

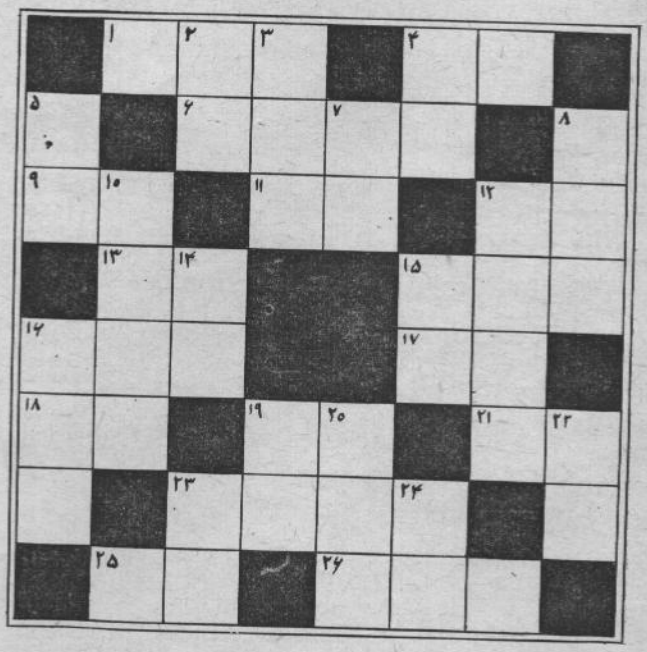
۱ ، ۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶ ، ۳۲ ، ۶۴ ، ۱۲۸ ، ۲۵۶ ، ۵۱۲

تمام این اعداد بجز اولی زوجند . چون بردهای (ذخیره‌ای) خسرو فردند ، نتیجه می‌گیریم وی در دفعهٔ‌اول برده‌است. وانگهی ، واضح‌است‌که وی دودفعهٔ آخر راباخته است زیرا جمع آنها از ۲۱۱ ریال بیشتر است. باقی می‌ماند این مسئله‌که با اعداد باقی‌مانده در رشتهٔ ۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶، ۳۲ ، ۶۴ و ۱۲۸ عدد ۲۱۰ را تشکیل دهیم .

جمع شش‌عدد اولیه ، بسیارکم است ؛ پس عدد ۱۲۸ که برد یا باخت هشتمین بازی است ، وارد معرکه می‌شود. باقی می‌ماند $۲۱۰ - ۱۲۸ = ۸۲$. بازمانند حالت اخیر ، ایجاب می‌کندکه ۶۴ (هفتمین بازی) راکنار بگذاریم. باقی می‌ماند $۸۲ - ۶۴ = ۱۸$. دیده می‌شودکه ۱۸ مجموع‌عدد ۲ (دومین‌بازی)و۱۶ (پنجمین‌بازی) است. بدین‌ترتیب‌خسرو دراولین،دومین،پنجمین،هفتمین وهشتمین بازی یعنی درنصف تعداد بازیها برده است ولی چیزی‌که قطعی است این‌است‌که: جوجه راآخرپائیز می‌شمارند!

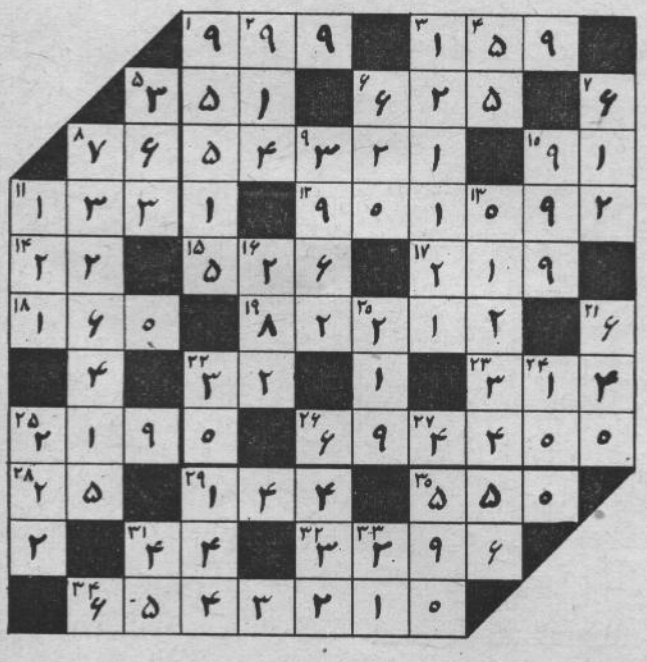
جدول اعداد

طرح از : یوسف رضازاده ، رشت



افقی : ۱- جذرآن وهمچنین جذر جذرآن مجذور کامل است .۴- دو برابر عدد۱۹افقی . ۶- بیست برابرکوچکترین عددی که رقمهایش تصاعد حسابی می‌سازند . ۹- مجذور مجموع رقمهایش است.۱۱- عددی‌فردکه۲واحدکمترازمجذور مجموع رقمهایش است. ۱۲- مقلوب عدد۹افقی. ۱۳- مجذور کامل است ویك رقمش دوبرابر رقم دیگراست . ۱۵- مقلوب عدد۲۶ افقی . ۱۶- مجذور عدد ۲۱ افقی . ۱۷- همان عدد ۱۱ افقی . ۱۸- یك واحدکمتر از نه برابر عدد ۱۹ افقی . ۱۹- تکرار یك رقم . ۲۱- یك واحد بیشتراز عدد۱۹ افقی. ۲۳- عددی چهار رقمی‌که اگربا ۸۰۳۰ جمع شود عددی با رقمهای متساوی بدست آید . ۲۵- جذر عـدد ۱ افقی ۲۶- بزرگترین عددسه رقمی‌که رقمهایش تصاعد هندسی می‌سازند.

قائم: ۲-مقلوبش‌مجذوررقم‌یکان‌خوداست.۳-مقلوب‌یکدهم عدد۶افقی. ۴-مقلوب ستمم‌حسابی‌عدد۱۸ افقی. ۵-هشت‌برابر عدد۱۹افقی۷-مقلوب‌عدد۱۳افقی. ۸-مقلوبش‌بزرگترین‌عددسه رقمی است‌که رقمهایش تصاعد حسابی می‌سازند. ۱۰- سالی که درپایان‌آن دوسال دیگر به پایان نیمهٔ اول قرن‌چهاردهم باقی مانده است . ۱۲- توان سوم‌عدد ۱۹ افقی . ۱۴-توان سوم ریشهٔ چهارم عدد ۱ افقی . ۱۵- همان عدد ۲۱ افقی . ۱۶- حاصل ضرب عدد ۱۹ افقی در عدد ۱۲ افقی. ۱۹- یك واحدکمتراز عدد ۴ قائم . ۲۰- مجذور تعداد دهمای موجود در عدد ۱۵افقی. ۲۲-کوچکترین عدد دورقمی‌که حاصل‌ضرب دوعدد زوج متوالی است. ۲۳- همان‌عدد ۲۵ افقی ۲۴- رقم دهگان آن سه برابر رقم یکان آن است و ثلث‌آن نیز همین خاصیت را دارد .



حل جدول شمارهٔ گذشته

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 87- If

$$\frac{1}{x^3-13x+12}$$

is expressed as the sum of fractions of the form

$$\frac{a}{bx+c},$$

where a, b, and c are all integers with $b>0$, what will be the sum of the denominators of these fractions?

Solution: Since

$$x^3-13x+12=(x-1)(x-3)(x-4)$$

we know that the required fractions must be of the form

$$\frac{a}{(x-1)},\ \frac{b}{(x-3)} \text{ and } \frac{c}{(x-4)}$$

To find a, b, and c we combine the above fractions and obtain

$$\frac{(a+b+c)x^2+(a+3b-4c)x+(-12a-4b+3c)}{x^3-13x+12}$$

Thus, since the numerator is equal to one, we obtain the following system of equations:

$$a+b+c=0$$
$$a+3b-4c=0$$
$$-12a-4b+3c=1$$

Solving simultaneously gives

$$a=\frac{-1}{10},\ b=\frac{1}{14},\ c=\frac{1}{35}$$

Substituting and simplifying we obtain

$$\frac{-1}{(10x-10)}+\frac{1}{(14x-42)}+\frac{1}{(35x+140)}$$

Therefore the sum of the denominators is

$$59x+88$$

Problem 88- When Mr. Smith cashed a check for lessthan \$ 100, the bank clerk accidentally mistook the number of dollars for the number of cents, and conversely. After Mr. Smith had spent 68 cents, he discovered that he had twice as much money as the check was written for. For how much was the check written? Is your answer unique?

Solution : Let x be the number of dollars and y the number of cents which the check originally called for. Then $100x+y$ is the real value of the check, and $100y+x$ is what Mr. Smith received.

$$100y+x-68=2(100x+y)$$

and

$$98y=68+199x$$

The last equation can be expressed as

$$98y\equiv 68 \pmod{199}$$

Also, since we know that

$$199y\equiv 199 \pmod{199}$$

We have

$$199y-(2)(98y)\equiv[199-(2)(68)] \pmod{199}$$

and thus

$$3y\equiv 63 \pmod{199}$$
$$y\equiv 21 \pmod{199}$$

Thus y is equal to 21 plus some integral multiple of 199 and x will corres-

(On the page 188)