یکان

۸

مجلّه ریاضیات

در این شماره :

موسسه ریاضیات

سال یکم ـ شمارهٔ هشتم

مهرماه ۱۳۴۳

بها : ۲۰ ریال

تقاضا از اشخاصی که برای مجله مطلب یا مسأله میفرستند

۱ـ مطالب فقط دریك روی صفحهٔ کاغذ و با خط خوانا نوشته شود .

۲ـ مطالب مختلف دراوراق جداگانه نوشته شود

۳ . باهرمسأله حل آن بهمراه باشد

٤ـ برای هرمساله ذکرشود که طرح فرستنده است یا اینکه ازجای دیگراخذ شده است ومأخذآن معرفی گردد

٥ـ ازحل المسائل‌ها وکتابهای درسی چاپ ایران‌مسأله ارسال نشود .

٦ـ مشخصات فرستندهٔ مطلب یا مسأله ذکرشود .

۷ . اشخاصی که نخواسته‌باشند نام‌آنها ذیل مطلب‌یامسألهٔ ارسالی ایشان ذکرشود تذکردهند اما در هرحال باید نام و نشانی‌آنها درنامهٔ ارسالی ذکرشده باشد .

۸ـ ادارهٔ مجله ازقبول پاکت‌هائی که به‌آنهاکسر تمبر تعلق گرفته باشد معذوراست .

۹ـ مطالب ومسائل بترتیبی که دریافت میشود و با توجه به‌مناسبت‌موضوع باموقعیت سال‌تحصیلی‌وبارعایت‌ملاحظات‌فوق در مجله درج می گردد .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

شمارهٔ هشتم ـ سال اول

مهرماه ۱۳۴۳

هرماه یك بار منتشرمی‌شود

صاحب امتیاز ، مدیر وسردبیر

عبدالحسین مصحفی

جای ادارهٔ موقت : تهران ـ میدان زندان قصر

خیابان سرباز شمارهٔ ۳۵۳

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن ۷۵۸۵۷۰ عصرها

اشتراك سالانه ۲۰۰ ریال ـ ششماهه ۱۰۰ ریال

حساب بانکی : حساب جاری شمارهٔ ٦٨٦٣ شعبهٔ فردوسی بانك‌صادرات

مقاله‌های وارده مسترد نمیشود

چاپخانه محمد علی علمی

پیام استاد دکتر محسن هشترودی

آقای مدیر محترم مجلهٔ یکان خواهشمندم اجازه فرمایند که این چند سطر در صفحات آن مجله برای اطلاع دانش‌آموزان درج گردد وضمناً باعرض پوزش به جوانانیکه بامکاتبه‌گاهی جویای مطلبی ازمن بوده اند بعنوان جواب تقدیم شود .

ریاضیات جدید بر مفاهیم جدیدی بنیان می گیرد که طرف توجه دانشمندان پیشین نبود یا لااقل آنگونه که اکنون مورد بررسی قرارمیگیرد ازطرف پیشینیان بررسی نمیشد . بنیان اساسی در ریاضیات جدید **نظریهٔ مجموعه‌ها** وبکار بستن آن در مباحث دیگر علوم است . **توپولوژی** و **جبرمجرد** دو دیسیپلین ریاضی است که مستقیماً از نظریهٔ مجموعه‌ها مشتق میشود یعنی در واقع قواعد منضبط راجع بافراد مجموعه و کیفیت ترکیب و آمیزش آنها توپولوژی وجبرمجرد رابوجود میآورد .

دربرنامهٔ دبیرستانها این دیسیپلین‌های خاص منظور نگردیده است ولی ازطرف استادان ومعلمین ریاضی کتابهائی برای مطالعهٔ دانش آموزان تألیف میگردد که مطالعهٔ آنهادر کشورهای غربی به دانش آموزان توصیه میگردد . یك سلسله ازاین انتشارت کتابهای کوچکی است که درسالهای اخیر ازطرف بنگاه **وبستر** و **ماك گروهیل** درممالك متحدهٔ آمریکا بچاپ رسیده است وشاید درنوع خود کم نظیراست . اخیراً بنگاه **ایران- ماك گروهیل** توسط معلمین مجرب وکار- آزمودهٔ ریاضی به ترجمه و نشر این کتابها بزبان فارسی اقدام کرده است و در همین ایام جلد اول این انتشارات بنام **توپولوژی** دردسترس عامه قرار می گیرد . برای معرفی ونوشتن مقدمه‌ای ناشر ومترجم نسخهٔ این کتاب وترجمهٔ آن رادراختیار من گذاشتند . زحمت مترجم دربر گرداندن مطالب کتاب بزبانی ساده بهمان روانی اصل که ازطرف مؤلفان منظورشده است زحمتی بسزا ومأجور واقدام ناشر اقدامی پسندیده‌است.غالباً ازطرف جوانان دانشجو ودانش آموز که‌طالب اطلاع بر جریان جدید علوم اند از من سؤالاتی میشود که امکان جواب بوسیلهٔ پست فراهم نمیشود و استغراق وقت و اشتغال خاطر اجازهٔ کتابت نمیدهد . انتشار این کتابها جوابگوی این احتیاجها و این سؤالهااست . طالبان علم را به مطالعهٔ این کتابها و تعمق در آن دعوت می کنم و یقین دارم که با مطالعهٔ آنها ذهن‌ها تشویق و تشحیذ میشوند و چه بسا راهجوئی و گامسپری طالب علمی در کوشش خود با این مطالعه ها مطمئن‌تر وثمربخش‌تر میگردد واین بهترین اجر وپاداشی است که مؤلف ومترجم بهنیت آن به خدمت برخاسته اند . بین کتابهای خواندنی در ایران کتاب علمی بمعنی اخص کمتر نشرمیشود یاشاید اصلاً منتشر نمیشود. این اقدام ناشروزحمت مترجمان این سلسله کتابهادرخور قدرشناسی وسپاسگزاری است وامیداست که درخدمت خود موفق وکامیاب ونزد اهل علم روسفید وسرفراز باشند و از کار دلسرد نشوند وروزبروز قدم آنان دراین راه استوارتر وپایاتر گردد .

دکتر محسن هشترودی

۱٤٤۳/۷/٤

علم و منطق

ترجمهٔ : احمد بیرشك

درس منطق در کلاسهای ششم ریاضی و طبیعی ما خیلی کمتر از آنچه لازم است مورد عنایت است . نه تنها بیشتر دانش‌آموزان آنرا زاید می‌دانند ، یا برخی از دبیران وقتی را که صرف تعلیم آن می‌شود تلف شده تلقی می‌کنند ، بلکه دستگاه تعلیماتی وزارت فرهنگ نیز آن را جدی تلقی نمی‌کند و برای امتحان آن اهمیتی قائل نمی‌شود .

اما حقیقت جز آن است که بصورتی که گفتم تجلی کرده است . منطق از ضروریتر و مهمتر درسهای دبیرستانی است و نه تنها در دورهٔ تحصیلی بلکه در سراسر زندگی بکار می‌آید .

بدینمناسبت در اینجا ترجمهٔ مقاله‌ای را که **سسیل فیلیپس** ، معلم **دانشگاه تنسی** ، تحت عنوان علم و منطق نوشته است . بخوانندگان محترم «یکان» ، بویژه دانش‌آموزان جوان ، تقدیم می‌دارم . **ب.**

۱ـ مقدمه ـ چون می‌بینیم که از علم چگونه استفاده می‌شود اهمیت آن جای گفتگو باقی نمی‌ماند . علم کلیدی است که بشر امیدوار است با آن رازهای جهان را بگشاید . در پرتو علم ، جهان ممکن است بجای آنکه بزیان آدمی کار کند در خدمت او باشد . برای تغییر زندگی برروی سیارهٔ ما ، هیچ نیروئی با علم قابل مقایسه نیست .

جهانی که شما در آن قدم بعرصهٔ ظهور گذاشته‌اید با روز تولدشما تفاوت بارز کرده است . جهانی که همهٔ ما در آن زندگی می‌کنیم بسرعت زیاد تغییر می‌کند .

دربارهٔ آنکه در آینده چه خواهد شد پارا از حدود حدس نمی‌توان فراتر گذاشت .

درزمان حاضر آینده را بیکی از این دو صورت درپیش داریم : یا آینده‌ای که در آن علم با همین سرعت بسط و توسعه یابد ، یا جهانی که پیشرفتهای جدید علم برایش فرجامی بد و عاقبتی شوم داشته باشد .

برنامه‌های مدارس زیر تأثیر این گونه عاملهای خارجی دگرگون می‌شود و برای آنکه نسل آینده برای روبرو شدن با وضع زمان آماده گردد به‌بعضی از دروس توجه بیشتری می‌شود ، به‌محتویات برخی از آنها افزوده می‌گردد و مواد تازه‌ای هم جای خودرا در برنامه‌های تحصیلی باز می‌کنند .

در توجه جدی به‌علوم منطق هم مورد توجه خاص واقع گردیده است و ما در این سطور خواهیم دید که چگونه علم و منطق با هم کار می‌کنند .

غالباً منطق بکمك ریاضیات عملی در علوم دیگر مداخله داده می‌شود ؛ گاهی هم درخود ریاضی بکار می‌رود تا شاخه‌ای از ریاضیات محض ، بخاطر خود آن ، بوجود آید . اما برروی هم طرز استفادهٔ از منطق در شاخه‌های مختلف علم یکسان است .

۲ـ علم ـ غالباً پرسیده می‌شود «علم چیست؟» .

اگر بجای علم کل شاخه‌های مختلف آن را مورد مطالعه قرار دهیم جواب این سؤال را بهتر و آسانتر می‌توان داد . برای آنکه جنگلی را خوب بشناسیم باید یکایك درختانش را بررسی کنیم .

درجدول شمارهٔ ۱ برخی از مهمترشاخه‌های علم را نام می‌بریم . شاخه‌های دیگری را هم می‌توان باین فهرست افزود و ، شاید ، برخی از علوم مندرج درفهرست را به‌قسمتهای جزء تقسیم کرد . این جدول فقط بعنوان نمونه ومثال ذکر می‌شود .

جدول شمارهٔ ۱

ریاضیات	روانشناسی
نجوم	اقتصاد
فیزیك	علوم سیاسی
شیمی	علوم اجتماعی
زیست‌شناسی	طب

علم ، یا یك **شاخهٔ علم** ، عبارت است از یك جزء **متشکل** از **معارف** بشری . دو کلمهٔ متشکل و معارف مفتاح موضوع بشمار می‌روند . بنابراین علوم اجتماعی وعلوم سیاسی وسایر اجزاء متشکل معارف هم مانند ریاضیات وفیزیك و شیمی علم شمرده می‌شوند . وجه امتیاز بین دودسته علومی که درجدول شمارهٔ ۱ مقابل‌هم قرارداده‌ایم نحوهٔ تشکل آنهااست . **علم قیاسی** آن است که کاملاً بر پایه‌های منطقی استوار باشد **وعلم تجربی** آن است که مبنایش برمشاهده و تجربه باشد .

عملاً ، تا جائی که می‌دانیم ، همهٔ علوم ترکیبی ازهردو

نمونه هستند، اگر درعرف اصطلاح یکی را علمی‌تر ازدیگری بدانیم نتیجهٔ آن است که اصول آن بیشتر برمنطق مبتنی هستند. در حقیقت ما تمایل داریم که علوم را برحسب مقدار استدلال قیاسی که برآنها جاری است طبقه‌بندی کنیم.

باین ترتیب خود منطق وچند شاخهٔ علوم ریاضی درصدر جدول علوم قرارمی‌گیرند وآخرجدول‌جای علوم اجتماعی‌است. با کمال تعجب متوجه می شویم که طب نیز در این مرحله قرار دارد.

ازبررسی بیشتری به‌نتیجهٔ دیگری می‌رسیم: طبقه‌بندی علوم برحسب مقدار منطقی که درآنهااست عیناً مانند آن است که آنهارا برحسب مقدار ریاضیاتی که برای رسیدن آنها به نتیجه لازم باشد طبقه‌بندی کرده باشیم.

این امراهمیت فوق‌العادهٔ ریاضیات وتوجه روزافزونی را که به‌تعلیم آن می‌شود نمایان می‌سازد. مهارت یک‌نفر درتسلط یافتن بررشته‌های مختلف علوم بستگی دارد بمقدار ریاضیاتی که می‌داند.

درمورد علومی که مستقیماً اما درکمترین‌حد از ریاضیات استفاده می کنند روش آماری، که برمبنای قوانین احتمالات بناشده است، جانشین ریاضیات می‌شود. مثلاً علم طب، یاعلوم دیگر، نمی‌توانند بدرستی پیشگوئی کنندکه طول عمر یک فرد آدمی‌چقدر خواهد بود، اما ممکن‌است جدولهای مرگ‌ومیری (مورتالیته) ساخت که ادامهٔ حیات افراد راتامدت معینی‌باحتمال نشان بدهد. ارقامی که دراین جدولهااست تاآن حدقابل اعتماد است‌که قراردادهای بیمهٔ عمر مانند اسناد مالی معتبر با عدهٔ زیادی ازمردم منعقد ومبادله می‌شوند.

۳ـ منطق : تمثیل - پس‌از نگاه کوتاهی که به علم افکندیم به منطق عطف توجه می‌کنیم. در آغاز چنین می‌نماید که منطق فقط در ریاضیات وفلسفه مورد پیدا می کند؛ اما این امربطورکامل ومطلق درست نیست ومنطق ممکن است درهرعلمی وارد شود. درحقیقت ماشینهایی ساخته شده‌است که باآنهامسائل ساده منطق را می‌توان حل کرد.

روشهای‌استدلال منطقی برسه گونه‌اند که‌به‌ترتیب‌ازضعیفتر به‌قویتر عبارتند از **تمثیل، استقراء وقیاس**

کار منطق آن است که دربارهٔ اشیاء **تصدیق یا حکم** صادرکند و روابط بین تصدیقها را مطالعه نماید. تصدیق را می‌توان ازجهتی، بدوگونه تقسیم کرد: تصدیق جزئی، دربارهٔ چیزهای‌خاص، وتصدیق کلی دربارهٔ جنس و نوع چیزها.

مثلاً «این‌زاویه قائمه است» تصدیق جزئی است و «همهٔ زوایای قائمه متساویند» تصدیق کلی. یا «این حیوان قورباغه است» تصدیق‌جزئی و «قورباغه‌ها زندگی را بصورت‌دگردیسی آغاز می‌کنند» تصدیق کلی است.

روشهای استدلال رامی‌توان از راههای گوناگون بکاربرد وممکن است ازتصدیقی از یک‌گونه به‌تصدیقی از همان گونه یابه تصدیقی ازگونهٔ دیگر انتقال یافت(یعنی مثلاً ازتمثیل به‌تمثیل‌یا از تمثیل به استقراء یاقیاس). مثالهایی چند درک مطلب را آسانتر خواهندکرد.

تمثیل‌استدلالی است‌که درآن‌ذهن ازیک‌تصدیق جزئی‌بیک تصدیق جزئی دیگر می‌رسد. مثلاً اگر شما خانواده‌ای‌رابشناسید که درآن نام‌پدربزرگ وپدریکی، یعنی مثلاً هر دومحمد، باشد بوسیلهٔ تمثیل ممکن است فکرکنیدکه نام پسربزرگتر راهم‌باید محمدگذاشته باشند. اماچون احتمال می‌رودکه نام وی‌محمد نباشدشما ازمقدمات(صغری وکبری)صحیح‌به‌نتیجهٔ غلط‌رسیده‌اید

بنا بر این روش تمثیل را باید با احتیاط مورد استفاده قرارداد.

باوجود نقصی‌که گفتیم روش تمثیل در حالتهای گوناگون بکار رفته‌است. وقتی‌که ارسطاطالیس نهنگ و دلفین را جزء ماهیان شمرد ازتمثیل استفاده‌کرد. بعدکه اطلاعات بعد بیشتر شد نهنگ ودلفین بوسیلهٔ تمثیل جزء پستانداران قرارداده‌شدند.

تمثیل روشی است‌که باید درتعلیم مورد استفاده واقع‌شود هرجا شاید مثالی می‌آوریم تمثیل بکار می‌بریم. استعاره وتشبیه از ارکان ادبیات وهر دو از نوع تمثیل هستند. در حقیقت اگر تمثیل بکار نبریم هیچگاه پا از حدود تجربیات خود فراتر نخواهیم گذاشت وانتقال معلومات تحقق نخواهد یافت.

در ریاضیات بین عددهای حقیقی ونقاط واقع بریک خط یابین‌عددهای مختلط (کمپلکس) ونقاط واقع دریک‌صفحه‌می‌توان مشابهتی برقرارکردکه همان تمثیل منطق است، پس استدلال ازراه تمثیل اغلب به‌نتیجهٔ صحیح می‌رسد.

درحوزهٔ فیزیک تمثیل ازحد معینی‌که بگذریم دیگرکامل وصادق نیست. مثلاً درمقایسهٔ بین جریان‌آب درلوله و جریان برق درسیم جدول شمارهٔ ۲ تنظیم گردیده است.

جدول شمارهٔ ۳

آب	برق
لوله	سیم
شیر	کلید
منبع آب	باتری
اصطکاک مایع بالوله	مقاومت
...	...
	حوزهٔ مغناطیسی در
؟	اطراف سیم ناقل
	جریان

درقسمت آخر مشابهت قطع میشودودرمقابل حوزهٔ مغناطیسی درجریان برق چیزی درجریان آب وجود ندارد .

ازاین مثال ومثالهای متعدد ومشابه دیگرمیتوان پاره‌ای نتایج کلی بدست آورد : تاوقتیکه مشابهت وجود دارد یك نوع ریاضیات درهردومورد صحیح است ووقتی که مشابهت ازمیان میرود نوع ریاضیات تفاوت می کند. مثلاً معادلات « ماکس‌ول » عمل حوزهٔ مغناطیسی را تعیین می کنند اما این معادلات هیچگاه بدستگاه مایعات قابل تطبیق و اطلاق نیستند . در هروضع تازه ریاضیات تازه‌ای لازم است و این امر به تنوع بیحد ریاضیات منتهی می‌شود .

زیردستی دربازشناختن تشابهات (البته درصورت وجود) غالباً بمثابهٔ هوش زیادوقابلیت تعلیمی است وبهمین سبب ازآن در تستهای مدرسه ونظایرآن استفاده میشود .

۴ ـ منطق : استقراء ـ روش دیگر استدلال استقراء است وآن شیوه‌ایست که ذهن را ازامور جزئی ومورد مثالهای خاص بقوانین و اصول کلی رهبری کند . دربحثی که جلوتر کردیم ازاین روش استفاده نموده‌ایم ومثال آب وبرق نمونه‌ایست ازآن .

امااستقراء هم، مانند تمثیل، روش مطمئنی برای استدلال نیست. مثلاً فرض کنید که چهارعدد فرد ۱، ۳، ۵، ۷ را بنویسیم. این هرچهار عدد اول هستند . اما ازاین امرنمی‌توان نتیجه گرفت که همهٔ عددهای فرد اول‌اند، زیراکه عددهای ۹ و ۱۵ دومثال ساده‌اند بربطلان چنین ادعائی .

اماهمچنان که تمثیل برای تعلیم ضروری بود استقراء هم باهمهٔ نقصش ، جزء لازمی از چیزی است که « روش علمی » نام دارد . این روش جوابی برای این سئوال که « چگونه ممکن است چیزی را مورد مطالعهٔ علمی قرار داد ؟» فراهم می کند . درهمهٔ تلاشهایی که برای توضیح علمی جهان ونمودهای گوناگون آن شده استقراء تأثیری شایان داشته است . این روش مستلزم قدم های متوالی متعددی است که لزوماً بقدم آخر منتهی نمی گردد .

درهمهٔ احوال درقدم اول استدلال لازم است همهٔ اطلاعات مربوط بموضوع و نتایج مطالعاتی راکه در بارهٔ آن شده است جمع آوری کرد. فی‌المثل درنجوم ممکن است این مطالعات طی چند قرن بعمل آمده باشند .

پس ازآنکه اطلاعات ومعلومات فراهم شد استدلال کننده آمادهٔ برداشتن قدم دوم می‌شود وآن دریافت یك نتیجه و اصل کلی است که درپشت این مقدمات براثر درك وفهم یاالهام بنظر برسد. این نتیجه و اصل کلی ممکن است مطلبی ساده و پیش پا افتاده باشد مانند آن که کودکی کشف کند که مانام ایام هفته را مکرر درمکرر بکار میبریم، یانتیجه‌ای عمیق ومهم باشد ازقبیل مفهوم منظومهٔ شمسی یافرضیهٔ تکامل .

پس ازدریافت وبیان اصل کلی قدم سوم آزمودن درستی آن است . آیاصحیح است ؟ یعنی آیا بهتر ازتصدیق‌هایی که قبلاً شده است باواقعیات معلوم و مشهود سازگار است ؟ فرضیه‌های متعددومختلف دربارهٔ منظومهٔ شمسی نمونه‌ای ازاین وضع است .

پس از آزمودن سازگاری اصل نوین باآنچه روی داده است باید امتحان کرد که آیا این اصل قادر به پیشگوئی نیز هست ؟ اگرقدرت پیشگوئی نداشته باشد فایده‌ای برآن مترتب نیست واگربتواند پیشگوئی کند باید پیشگوئیهایش راباآزمایش سنجید. پیشگوئی منحرف شدن شعاع نوراز خط مستقیم درفرضیهٔ نسبیت رامی‌توان بعنوان مثال ذکر کرد .

اعمال تجدید نظر باتغییروحتی تعویض پایانی‌ندارد . این است یك روش علمی .

حاضر بودن برای تغییر دادن یاطردکردن نظریه‌ای که مورد قبول است نشانهٔ صداقت ودرستی مرددانشمند است. برخی دربعضی‌احوال این کاررابسختی‌انجام میدهند وبیشترسعی می کنند واقعیات را بافرضیهٔ خودتوجیه نکنند تافرضیهٔ خودرا بامشاهدهٔ واقعیات صحیح نمایند .

۵ ـ منطق ـ قیاس ـ درمرحله‌ای ازروش علمی نتایج راازفرضیات بکمك استدلال قیاسی بیرون میکشند. دراین روش از کلی بکلی یاازکلی بجزئی میرسیم . هرجاکه بطور مطلق ازمنطق صحبت شود مراداستدلال قیاسی درمنطق است .

هر علمی که بطور مطلق قیاسی باشد ، یا هر جزء قیاسی ازعلم ، ازچهار جزء تشکیل شده است : مفاهیم اصلی، تعریف، فرض وقضیه . غرض سه جزء اول بوجودآوردن جزء چهارم، یعنی قضیه ، است .

درست همانطورکه ممکن نیست خوشهٔ گندمی را بوجود آورد مگرآنکه دانهٔ گندمی بجای تخم بکاررفته باشد نمی‌توان یك دستگاه قیاسی ساخت بی‌آنکه یك مفهوم اصلی وجود داشته باشد که بحث را ازآن آغاز کنیم، باید چیزی باشد تادراطراف آن بشود صحبت کرد .

درك مفاهیم یا درنتیجه آزمایش است ویا درنتیجهٔ تمثیل‌هائی ازآزمایشهای دیگر. گاهی زمانی درازومطالعه‌ای دقیق لازم است تا مفاهیم بخوبی درك شوند . در نتیجهٔ همین وضع است که‌مردم عادی معنی‌کامل اوضاع علمی‌راخوب درك نمیکنند

اندازهٔ رشد هوشی یك نفر را تا حدی میتوان مناسب با مقدار مفاهیمی دانست که وی باآنهاآشناست ، اگرکسی که با چنین نیروی درکی مجهزاست قوانین منطق را بداند و مایل به

بکارانداختن آنها باشد آمادگی دارد که شروع بمطالعهٔ دستگاه قیاسی کند .

نمونی‌هائی ازمفاهیم را می‌توان دررشته‌های مختلف‌یافت درهندسه نقطه وخط وسطح ازاین نوع‌اند و درفیزیك الکترون را می‌توان ازمفاهیم اصلی بشمارآورد زیرا برخی ازخواص آن معلوم هستند . درشیمی نامهای عناصر ودرزیست‌شناسی زندگی مفهوم اصلی بشمارمیروند . زندگی را میتوان تعریف کرد امانا وقتی‌دانشمندان موفق نشوند که آن‌را درآزمایشگاه بوجود آورند بناچار بایدآنرا مفهومی دانست که باید بی چون‌وچرا پذیرفته شود .

برخی اصطلاحات را میتوان بکمك مفهوم‌های اصلی یا اصطلاحاتی که‌قبلاتعریف‌شده‌اندتوصیف کرد . این گونه‌اصطلاحات را **تعریف** مینامیم . برای شناختن یك تعریف خوب و جامع معیارهایی وجود دارد . اما دراین مقاله مختصر جای بحث از آنها نیست .

دراین‌جا باید اشاره کرد که وجود تعاریف منطقاً الزامی نیست زیرا که آنها ازمفاهیم اصلی نتیجه و بکمك‌آنها توصیف میشوند، پس تعاریف را ذهن بشر برای‌آسانتر کردن کار خود اختراع کرده‌است وموجب صرفه‌جوئی دروقت ووسیلهٔ کمك‌بفکر آدمی هستند. برخی‌ازجانوران، بعقیدهٔ بعضی از روانشناسان ، نیروی استدلال دارند اماچون فاقد قدرت تکلم هستنداز**تعریف** عجز دارند .

هریك از اقسام‌کلمه ، جز ضمایر واصوات ، ممکن است برای‌بیان مفاهیم اصلی یاتعاریف بکاربروند. فعل اهمیت‌مخصوص دارد وحالت را میرساند. برخی‌ازحروف‌اضافه مانند **بر** و **در** نیز بدینگونه‌اند .

فرضها جزء سوم یك دستگاه قیاسی را تشکیل میدهند و رابط بین سه‌جزء دیگرهستند. مثلاً «دونقطه یك‌خط رامشخص میسازند» تصدیقی‌است که رابطهٔ بین دونقطه‌وخط را بیان‌میکند درزیست‌شناسی. لااقل تا باین زمان . عقیده‌براین بوده و هست که «زندگی همیشه نتیجهٔ وجود یك موجود زنده است »

همه شنیده‌ایم که دربارهٔ مطلبی استدلال میشود و برهان اقامه میگردد . اما استدلال فقط وقتی مورد پیدا میکندکه دو نفر یا بیشتر با استفاده ازفرضها یا مقدمات مختلف شروع به‌آوردن دلیل کنند، تا وقتی که فرضها بتصدیق منجر نشود استدلال بی‌نتیجه بوده است . اما ممکن است دربارهٔ فرضها تصدیق‌هائی بشود ودرموردآنها اختلاف‌نظر وعدم توافق باشد . عدم توافق هست اما دیگردلیلی درکار نمی‌تواند بود

بنابراین‌روی بحث دریك دستگاه قیاسی‌وبسط‌آن‌لازم‌است که دربارهٔ فرضهای‌آن اتحادنظرباشد. این فرضها باید شرط‌های متعدد داشته باشند که مهمتر از همهٔ شرطها اینست که در فرض‌ها تناقض وجود نداشته‌باشد .

۶ ـ منطق ـ قضیه چهارمین جزء یك دستگاه قیاسی قضیه‌است وآن عبارت‌است ازاینکه باکمك قوانین منطق‌روابطی بین چیزهائی که درفرض ازآنها گفتگومیشود بیان گردد.وجود قضیه ضامن وجود دستگاه استدلال قیاسی است . در یك دستگاه وسیع تعداد قضایا بسیار متعدد و مانند تجارب وتصورات شخص بسیار متنوع است .

راه مشخصی‌نیست که بتوان‌همهٔ قضایای‌مربوط بیك‌دستگاه را بیان‌کرد. اگر گمان برودکه تصدیقی قضیه‌ایست برای‌اثبات صحت این گمان وسیله‌ای نیست . این قسمت از علم بستگی به مهارت، ذوق، قوه تصور وتجربهٔ کسی‌دارد که درآن‌کارمیکند

کشف‌حقایق جدید وبدست‌آوردن استدلال منطقی‌یاتحقیق صحت امری ازراه تجربه، اینها را تحقیق می‌نامیم کسی که‌روزها و ساعت‌ها برای کشف حقیقتی تلاش مینماید پس‌ازرسیدن به آن لذتی احساس میکندکه بهترین پاداش کوششهای اواست .

تاریخ حساب

اطلاع بر کوششهائی که گذشتگان ازمتفکرین‌دربنیان‌بنای عظیم دانش بشری بعمل‌آورده‌اند، برای آنان که میکوشند دراین بنا سهمی داشته باشند یااقلاً راهی بسوی‌آن پیدا کنند از جملهٔ واجب‌ترین ومؤثرترین وظایف ووسایل است . کاخ باعظمت علم برپایه واساس ریاضیات استوار است و ریاضیات خود از حساب شروع میشود . تاریخ حساب یعنی تاریخ اولین جوانه‌های اندیشهٔ بشری وسیرتکاملی این جوانه‌ها .

تنظیم تاریخ علم‌حساب‌فنی است که علاوه بروقوف‌براسناد و تبحر کافی دراین علم‌مستلزم استعداد مخصوص میباشد بخصوص اگر مقصود نگارش‌کتاب بزبان ساده و قابل فهم عموم طبقات باشد . **تاریخ حساب تألیف رنه‌تاتون** که در مجموعهٔ کتب علمی برای عموم انتشار یافته است و چاپ دوم ترجمهٔ‌آن‌اولین کتاب از سری **«کتابهای سیمرغ»** مجموعهٔ کتابهای علمی، تاریخی و فلسفی ازانتشارات **«مؤسسهٔ امیر کبیر»** منتشرشده است علاوه برآنکه اطلاعات‌کافی درهمهٔ رشته‌های ریاضی را در اختیار خواننده میگذارد ساده و روان و موجز نوشته شده است بطوریکه خواننده در عین حال که یك مطلب علمی را مطالعه میکند احساس خستگی و کسالت نمی‌نماید . آنان که حتی‌بایکی از مطبوعات علمی ایران آشنائی دارند **پرویز شهریاری** را میشناسند لذا اطلاع براینکه مترجم تاریخ حساب ، **پرویز شهریاری** است بهترین معرف آن خواهد بود . م

فصلی از تاریخ علوم ریاضی

تألیف: موریس دوکانی - ترجمهٔ: باقر امامی

-۳-

ریاضی دانان خالص و مکتب اسکندریه

اولین دوره‌ای که اجمالاً از نظر گذراندیم و در آن دوره در یونان هر ریاضی دانی یک شخصیت فیلسوفی نیز بهمراه داشت بدنبالش دورانی را پیش آورد که آقای « ژینولوریا Ginoloria » آنرا «دوران طلائی هندسهٔ یونانی» نامیده است . در این دوران ریاضی دانان خالص و بزرگترین دانشمندانی که بدانش ریاضی شکل دکتر ینال قطعی آن را بخشیده‌اند ظاهر گشته‌اند و پرچمداران این دسته عبارتند از : **اقلیدس** Euclide ، **ارشمیدس** Archiméde و **آپولونیوس** Apollonius که کارهای سرشار از نبوغ آنها ما را به تحسین وامیدارد .

در این دوران جدید بگفتهٔ آقای ژینولوریا : «کانونی که اشعهٔ دانش ریاضی از آنجا ساطع می گردید، از **آتن** به **اسکندریه** منتقل گردید .

شهر **اسکندریه** (بسال ۳۲۲- توسط **اسکندر** بنا شده است) در دوران حکومت **بطلمیوس سوتر** Ptolèmée Soter (یکی از جانشینان اسکندر که وارث حکومت مصر شده بود) از مؤسسه‌هائی با جنبه‌های علمی برخوردار می گردید و این مؤسسه‌ها در کانونی که باصطلاح «موزه» نامیده می‌شد جمع آمده بودند و این موزه بسرعت بمرکز نیرومند جذب دانشمندان تبدیل گردید و بدین ترتیب مشعل دانش از آتن به اسکندریه انتقال یافت و از آنجا است که اسم «**مکتب اسکندریه**» بوجود آمده است .

اقلیدس Euclide

این مکتب در اوان فعالیتش شخصیتی بنام **اقلیدس** را پذیره شد که تدوین کننده و نظم دهندهٔ هندسه بود . او میخواست مجموعهٔ نتایج پراکنده‌ای که قبل از او بدست آمده بود در ترکیب وسیعی وارد کند و آنها را با مقدار زیادی از استنباط های شخصی خویش استنتا بخشد و بوسیلهٔ استنتاجهای متوالی آنها را مانند حلقه‌های زنجیر طبق یک نظم و ترتیب منطقی بهمدیگر وصل کند و آنها را با روشهای او نیرومند تر با دقت و استحکامی که تا آنزمان سابقه نداشت اثبات نماید .

اقلیدس بدون واهمه و با کوشش مداوم و خستگی ناپذیری این وظیفهٔ سترک را با مشکلات بسیار بزرگی که بر سر راهش قرار داشت باموفقیت بانجام رسانید.

نبوغ **اقلیدس** با آنچنان تفوق خیره کننده‌ای امکان انجام این وظیفه را آفرید که کتاب او در طول ۲۳ قرن راهنمای منحصر بفرد آموزش هندسهٔ مقدماتی در سرتاسر جهان گردیده است .

وانگهی شخصیتهای بزرگی مانند **دکارت** ، **پاسکال** ، **نیوتن** و **لاگرانژ** در بارهٔ لزوم استفاده از چنین راهنمائی سفارش و اصرار ورزیده‌اند .

لاگرانژ حتی گفته است : کسی که بخواهد هندسه را بدون مطالعهٔ آثار **اقلیدس** یاد بگیرد مانند کسی است که زبانهای یونانی و لاتین اصلی را از روی کتابهای مدرنی که در این روزگار بآن زبانها نوشته شده است یاد می گیرد .

کتاب اعجاز آمیز اقلیدس ، نمونهٔ بی همتائی در دنیای دانش است که بیشتر از دو هزار سال در کومک به فرماسیون عقلی جوانان دانش آموز سهم بسزائی داشته است .

راجع بزندگی **اقلیدس** اطلاع زیادی در دست نیست تصور می‌شود که بسال ۳۱۵- متولد شده و بسال ۲۵۵- درگذشته است بنظر **پاپوس** Pappus ، او یک متفکر ساده ، با کاراکتر ملایم و دربارهٔ اشخاصی که در اعتلاء دانش ریاضی می کوشیدند نیکوکار و مهربان بوده است . گمان میرود « در دوران حکومت **لاژیدها** Lagides زندگی آرامی را بسر برده است » و این آرامش در زندگی بیشتر از آنجا استنباط می گردد که او بی هیچ زحمتی توانسته است این وظیفهٔ شگرفی را که بعهده گرفته بود بپایان برساند .

شاهکار اقلیدس که بیشتر معروفیتش را مدیون آنست کتاب «Eléments» است که درحقیقت بمثابهٔ قرآن هندسهٔ مقدماتی است . این کتاب بسیزده باب تقسیم میشود که بترتیب زیر طبقه بندی گردیده است .

از I تا IV هندسهٔ مسطحه و از V تا X نظریهٔ اعداد و از XI تا XIII هندسهٔ فضائی است .

برای اینکه تصوری از عظمت کار **اقلیدس** بدست آید کافی است یادآور شویم که این کتاب شامل ۳۷۲ قضیه و ۹۳ مسئله است . کتابهای I و II شامل آن اشکال هندسی است که منحصراً از خطوط تشکیل یافته‌اند و اصل معروف خطوط متوازی در کتاب

(I) است و بیشتر به جهت همین اصل است که هندسهٔ کلاسیک‌را هندسهٔ اقلیدسی می‌نامند. کتاب (III) حصر به مطالعهٔ دایره شده که تاآن‌زمان هیچکس تحقیق در خواص آنرا اینقدرتوسعه نبخشیده بود وکتاب IV وقف مطالعهٔ چند ضلعی های منتظم و بخصوص چند ضلعی‌های محاطی و محیطی دایره شده است .

هر چند که کتاب‌های V تا X دربارهٔ خواص اعداد بحث می‌کند ولیکن این بحث‌ها نیز مایهٔ هندسی دارند بقسی که این خواص (مخصوصاً درکتاب V) همانقدرکه از نقطهٔ نظر حساب جالب است از نقطهٔ‌نظر هندسی نیز جالب هستند . یادآورشویم که درکتاب IX است که **اقلیدس** برای اولین بار « بی‌پایان بودن سلسلهٔ اعداد اول » راکه قبل از او اکثریت خلاف آنرا باور داشتند اثبات نموده است. وبالاخره کمیت‌های سنجش‌ناپذیر Incommensurable که منشاء مفهوم آن مقایسهٔ ضلع و قطر مربع است درکتاب X مورد مطالعه قرار گرفته است .

اشکال فضائی مرکب از خطوط و صفحات درکتاب XI و اندازه‌گیری حجم منشور و هرم و استوانه و مخروط وکره که بااستفادهٔ از نظریهٔ سنجش ناپذیری (مربوط به‌کتاب X) تعمیم‌کلی یافته است درکتاب XII طرح‌ریزی شده‌است . کتاب XIII به مثابهٔ ضمیمه‌ای فقط اختصاص به چند وجهی‌های منتظم دارد .

بغیر ازکتاب Elements اثرقابل‌توجه **اقلیدس** کتاب **مفروضات** Données است که شامل ۹۵ حکم مربوط به روش‌های حل مسائل است . که حداقل تاازمان **نیوتن** مورد استفادهٔ علاقمندان بوده است . بگفتهٔ ژینولوریا «مفروض نوعی از قضیهٔ ناقص است که ازآنجاتأیید این مطلب که تحت شرایطی یك شکل برحسب فرم و وضع و اندازه معین می‌گردد نتیجه می‌شود »

کتاب **تقسیم اشکال** Division des figures که نسخهٔ اصلی آن از بین رفته است واز روی ترجمهٔ عربی‌اش برمامعلوم گردیده است احتمالاً قسمتی از مجموعه‌ای است که شامل کتاب Porisme است که بعدها توسط **شال** Chasles تجدید بناشد ودرحقیقت متمم Elements بشمارمی‌آید .

کتاب تقسیم‌اشکال شامل ۳۶ حکم مربوط به تقسیم‌ساحت های مستوی به قسمتهائی است که بین آنها نسبت‌های معینی وجود داشته باشد . اما در بارهٔ Porisme باید بگوئیم که عبارت ازقضایائی است که امکان گذر از تعریف یك مکان هندسی بیك تعریف دیگر از همین مکان هندسی را بدست میدهد و یا بطورکلی تر برای «عبور از شرایط تعیین کنندهٔ یك سیستم اشیاء متغیر به شرایط معادل دیگر» .

بطوریکه **شال** تأیید کرده است این کتاب شامل حالت جنینی مفهوم تقسیم توافقی و خواص تصویری و اساس هندسهٔ مدرن می‌باشد . و این خود، کاربسیارقابل‌توجهی است .

کتابهای دیگری نیز به **اقلیدس** منسوب است که بدست مانرسیده است ولی مؤلفین قدیمی‌ازآنها اسم برده‌اند وبنابراین روایات این کتاب‌ها در بارهٔ مقاطع مخروطی؛ سطوح خمیده (احتمالا مخروط واستوانه)، نور، کاتوپتریك Catoptrique (این یکی مشکوك بنظر می‌رسد) نجوم هندسی و حتی در بارهٔ اجزاء موسیقی که آنوقت جزئی از ریاضیات محسوب می‌شده نوشته شده‌اند .

(ریاضیات شامل : حساب ، هندسه، نجوم و موسیقی بوده است که حتی در قرون وسطی بنام Quadrivium نامیده می‌شده‌اند)

تمام‌اینها گواه اطلاعات دائرةالمعارفی **اقلیدس** وباروری فوق‌العادهٔ ذهن اواست ولی معروفیت **اقلیدس** بخصوص در هنرتدریس بی‌نظیراو است که درعین‌حال‌متد یك و اورگانیزاتور است و می‌توان گفت که او « بیش از آنچه محقق باشد معلم بوده است»

***

ارشمیدس Archimède

ارشمیدس نیزمانند**اقلیدس** ازاستعداد خارق‌العاده‌ای منتها از نوع دیگر برخوردار بود . درخشندگی او بیشتر در نوآوری و اختراع روش‌های بسیار ماهرانه در هندسه است . او آفریدگار حقیقی ستاتیك و هیدروستاتیك و نظریهٔ اجسام مواج است و بدین‌جهت او را بدون شك بزرگترین ریاضی‌دان دوران باستان باید بحساب آورد . بعلاوه او بوجود آورندهٔ انواع واقسام اختراعات‌عملی است که بنظرخودش ارزش کمتری در مقابل‌کارهای نظری خالص داشتند .

در نظر ماالویك مهندس سیویل ویك‌مهندس‌نظامی ومخترع حیرت‌آورترین ماشین‌ها است .

ارشمیدس بسال ۲۸۷ـ درشهر**سیراکوز** Syracuse چشم به دنیاگشوده است وگویا با پادشاه **هیرون** Hieron نسبتی داشته است . هرچند که وجود این نسبت را **سیسرون** Cicéron مورد تردید قرار داده است (قسمت پنجم کتاب Qnaestiones Tusclanae)

در سنین جوانی در **مصر** وارد حوزهٔ تدریس **اقلیدس**

گردید و با دو نفر از بهترین شاگردان استاد یعنی **کانون** Canon و **اراتستن** Eratosthéne طرح دوستی ریخت و این دوستی بعدها نیز ادامه داشت . غالب بیوگرافی‌نویسان این مسافرت را تنها مسافرت او به **مصر** دانسته‌اند و بعقیدهٔ یکی از آنها احتمالا بعدها بنا بدعوت خدیو مصر از نقطهٔ نظر کارهای مهندسی مسافرت دیگری به مصر کرده است .

از شروع لشکرکشی رومی‌ها به **سیراکوز**، **ارشمیدس** از تمام منابع نبوغ اختراعی خویش به منظور دفاع از شهر استفاده نمود بطوریکه موفق گردید در مقابلهٔ با رومی‌ها متجاوز ازسه‌سال مقاومت نماید. بالاخره وقتیکه بسال ۲۱۲ — با مساعدت هوا رومی‌ها توانستند شهر را تسخیر کنند با وجود توصیه‌های سرشار از تحسین کنسول روم **مارسلوس** Marcellus مبنی براینکه حتی رفاه چنین دشمنی باید تأمین گردد سربازان رومی که ابزار و ادوات علمی را بجای اشیاء طلائی فابریکی تصور نموده بودند ودرآنها قوت حرص وآز فزونتر از حس احترام به دستورهای صادره بود شمع عمرش را خاموش کردند .

بااین وصف **مارسلوس** باحترام شهیدعالیقدر، آرامگاهی برای اوترتیب داد که بالای آن کرهٔ محاط دریك استوانه (این جسم مرکب آرم خود ارشمیدس بود) قرار داده شده بودوپس ازیك قرن‌ونیم بسال ۷۵- از روی‌همین آرم بود که **سیسرون** که در آن زمان در سیسیل مسئولیتی داشت توانست قبر نهان شدهٔ زیر خار و خاشاك را پیدا و آنرا مرمت نماید .

یکی از جالب‌ترین قسمتهای **سیراکوزی کبیر** عبارت از قسمتی است که مربوط به هندسه و بخصوص مربوط بهاندازه‌گیری منحنی‌ها ،سطوح واحجام است . با روشی سرشار ازدقت و استحکام‌وجدا از روش‌های‌حساب جامعهٔ امروزی **ارشیمیدس** پیش از هرکس در بدست آوردن آنچه‌که امروزه **تربیع** Quadrature نامیده می‌شود توفیق حاصل کرده است .

این روش‌که به Exhaution موسوم است بوسیلهٔ **اودکس** Eudexe نیز عمل شده بود ولی **ارشمیدس** آنرا بالاستقلال آفریده وتکمیل کرده است .

این روش مبتنی برقراردادن مقدار محاسبه بین‌دوسری مقادیر است که بطرف همان مقدار مجهول متقارب می‌شوند بطوریکه تفاضل این دوسری مقادیر را از هرمقدار دلخواهی بتوان کوچکتر اختیار کرد .

اولین **تربیع** که از طرف **ارشمیدس** بدین ترتیب‌عمل گردید مربوط به محاسبهٔ قطعهٔ مساحت محدود بین یك‌سهمی‌و وترآن است و بعلاوه **ارشمیدس** آنرا از دوراه بدست آورده است یکی طریقه‌ای که متکی به بعضی نوسیون‌های ستاتیك است ودیگری راه هندسی خالص باظرافت فوق‌العاده است. بااستفادهٔ از همین روش و با شروع از قطاع دایره **ارشمیدس** توانست قطاع‌سپیرالی راکه‌باسم او معروف است ومعادلهٔ قطبی‌آن بصورت $\rho = a\omega$ است‌تربیع نماید و بعلاوه او ثابت کرد که «تحت‌مماس» این منحنی مقداری است ثابت وبرابر **a** است و از روی همین منحنی‌او توانست تقسیم یك زاویه به‌قسمتهای متساوی را به‌تقسیم خط به قسمت‌های متساوی منجر نماید .

اجسامی که‌بوسیلهٔ **ارشمیدس** به‌شبه کره Sphéroïde و شبه‌مخروط Conoïde موسوم گشته‌اند عبارتند ازسطح‌های تولید شدهٔ از دوران بیضی درحالت اول و از دوران سهمی و هذلولی درحالت‌دوم و این اولین‌باری است که این‌نوع سطوح در هندسه پدیدار گشته‌اند .. **ارشمیدس** تحقیقات دامنه‌داری روی این سطوح بعمل آورد و با روش Exhaution حجم محصورین قسمتی ازآنها و یك صفحه را با مشخص‌کردن وضع قاعدهٔ این قطعات ومحور این سطوح محاسبه نمود .

بعلاوه **ارشمیدس** در محاسبهٔ حجم مشترك دو استوانهٔ دواربا محورهای متمامد وهمچنین درتعیین مقاطع مستوی‌مخروط مستدیرالقاعده توفیق حاصل نمود.

کتاب«کره واستوانه» بخاطر مشکلات موجودش وبخاطر توفیقی‌که **ارشمیدس** درحل این مشکلات بدست آورده بود کتاب محبوب او بحساب میآمده است .

ارشمیدس در این‌کتاب محاسبهٔ سطح وحجم اجسام مشتق‌از استوانه ومخروط‌دوار وکره وبخصوص قطاع‌ها وقطعات کروی را موردمطالعه قرارداده است . این مطلب امروزه بنظر ما بسیارآسان می‌نماید ولی نباید ازنظر دور داشت‌که در آن روزگارحتی گمان‌این‌هم‌نمی‌رفت‌که بتوان‌آنها را با فرمول‌های درست یعنی با جمله‌ای محدود بقسمی‌که معلومات بشکل منطق دراین فرمول‌ها واردشوند بیان‌کرد .

درجریان این تحقیقات **ارشمیدس** متوجه شد که حجم مساوی $\frac{2}{3}$ حجم استوانهٔ محیطی‌آن و مساحت‌کره‌برابر مساحت جانبی استوانه وهردو مساحت مساوی چهاربرابر مساحت‌دایرهٔ عظیمهٔ‌کره است و او از درك این‌مطلب بقدری‌راضی وخوشحال بودکه استوانه‌وکرهٔ محاطی‌آنرا آرم خویش قرار داده بود .

ارشمیدس توانسته بود مسئلهٔ تقسیم حجم‌کره بدوقسمت به‌نسبت معین بوسیلهٔ یك صفحه راکه به‌حل معادلهٔ درجهٔ سوم منجر می‌گردد به تعیین یك نقطه روی پاره خطی منجر بکند که بتواند خط را به‌طرز معین تقسیم نماید . (بقیه دارد)

***

خدمات ریاضی دانان ایرانی

گرد آورنده : حسین هاشمی دبیر ریاضی دبیرستانهای آبادان

مدارکی که اخیراً ازخرابه‌های بابل بدست آمده این نظریه را مسلم ساخته‌است که اولین گهواره های دانش بشری نواحی فرخنده **مصر** و **بین‌النهرین** بوده‌اند.

مطابق این اسناد که قدیمیترین آنها مربوط به ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد میباشد مصریها وبابلیها مقدماتی از علم‌حساب، مختصری ازهندسه و کمی‌هم جبر میدانسته‌اند.

این کشورها به‌ترتیب درسالهای ۵۲۹ و ۵۲۳ قبل از میلاد بدست **کوروش کبیر** و **کمبوجیه** بتصرف ایران درآمدند وعلم ودانش آنها درتمدن ایران حل‌شد وچون پس‌ازآنهم این کشورها هرگز روی استقلال به خود ندیدند علم ودانش نیز درآن نواحی نشوونمائی نکرد. وارث تمدن ملل فوق **یونانیها** بودند . مردمان این کشور که برای تجارت وخرید وفروش بکشورهای مشرق زمین رفت وآمد میکردند ضمن حشر ونشر باساکنین آنجا مطالب‌ومسائلی نیز میآموختند وبکشورخود ارمغان‌میبردند. این‌حاملین علم ودانش که گاهی افراد مطلعی مانند **تالس** و**فیثاغورس** بودند اطلاعات علمی این کشور هارا به یونان منتقل کردند ودرنتیجهٔ همتی که از طرف دانشمندان این سرزمین بعمل آمد درعرض چند قرن اطلاعات ناقص ومختصر مردمان‌مصروبابل به‌سرچشمه‌های فیاض دانش تبدیل گردید وافرادی مانند **ارشمیدس** پیدا شدند که حد اعلای هوش وذکاوت انسانی را بظهور رسانیدند . واگر روزی ارزش ملل مختلفهٔ جهان بـه نسبت خدمات آنـان بتمدن بشری باشد بدون هیچ شك و تـردیدی یونانیان برهمهٔ جهانیان تفـوق و برتری دارند .

ناگفته نماند که تنها عامل پیشرفت یونانیها همین وسیلهٔ تماس بامشرق زمین نبود . نبوغ و استعداد مردم یونان، وجود حکومت دموکراسی ، موقعیت جغرافیائی ، کمبود خرافات واوهام مهمترین عامل پیشرفت آنان‌شد.

متأسفانه مقارن بااین احوال ازوضع دانش ریاضی درایران هیچ اطلاع صحیحی در دست نیست زیرا که در موقع حملهٔ عرب به‌ایران کلیهٔ کتب موجود در کتابخانهٔمعظم تیسفون طعمهٔ آتش‌شد وبزرگترین گنجینهٔدانش‌ایرانیان برباد رفت . بااین حال قرائن وشواهد چنین نشان میدهد که اگر درایران قبل ازاسلام دانشمندانی نظیر **ارشمیدس** ومعلمینی مانند **اقلیدس** وجود نداشته درمقابل بعلت مراودات موجود بین ایران و کشورهای فوق‌الذکـر ایرانیان نیز ازدانش آنروزی اطلاعاتی داشته‌اند بخصوص که وجود دانشگاهی مانند **جندی‌شاپور** و بناهائی نظیر **تخت‌جمشید** و **شوش** نیز مؤید آنست بعلاوه چنانکه از نوشته‌های **افلاطون** مستفاد میشود یونانیان خودمتأثر از تمدن ایرانی بوده‌اند. و امایونانیان هم پس ازایجاد این بنای معظم علم‌ودانش در حفظ وحراست آن کوششی ننمودندعلی‌الخصوص که دین مسیحیت رفته رفته با پیدایش فرق ومذاهب مختلفه تعالیم اساسی مسیح را فراموش کرده بترویج سحروجادو و عقاید سخیف روحانیون عصر مشغول بود ـ رواج بازار فلسفهٔ **ارسطو** و عقاید سخیف پیروان **فیثاغورس** راجع به اعداد ـ قتل و خونریزیهای بیشمار بین طوایف مختلف ـ مردم را چنان مشغول کرده بود که کسی بفکر علم و دانش نبود .

خوشبختانه قبل از اینکه چراغهای دانش بکلی‌خاموش گردد ستارهٔ پرنوری ازسمت مشرق درخشیدن گرفت که سیر تاریخ بشریت وبخصوص سرنوشت کشور ما را بکلی‌دگرگون ساخت . این حادثهٔ پرثمر ظهور اسلام است.

از شرح این واقعه خیلی بسرعت میگذرم چون یقین دارم همه خوانندگان ازجزئیات آن اطلاعات کافی دارندهمینقدر اشاره میکنم که بفاصلهٔ کمی از هجرت **حضرت محمد (ص)** از مکه به مدینه اعراب بدوی شمشیر بدست و قرآن در سینه میلیونها نفراز ملل مختلفه‌جهان را در کورهٔ پرحرارت اسلام‌بایکدیگر ممزوج کرده و امپراطوری عظیمی‌تشکیل دادند که مدت هفت قرن دانش بشری را از گزند بادهای مخالف اروپای قرون وسطی مصون داشت . و اما سهم ما ایرانیان در ایجاد تمدن درخشان اسلامی بیش از همهٔ ملل‌جهان است و در این مقاله فقط هفت تن از بزرگترین آنها معرفی خواهد شد .

اولین ریاضی دان بزرگ ایرانی **محمدابن موسی خوارزمی** است که درایام جوانی در دربار **مأمون** خلیفهٔ عباسی میزیسته و سپس درقرن نهم برای تحصیل‌به **هند** اعزام شده‌است.وپس‌از بازگشت مسئول کتابخانهٔ مأمون بوده است . وی کتابی در جبر وحساب تألیف کرده که ترجمهٔ لاتین قسمت مربوط به حساب آن در سال ۱۸۵۷ کشف گردیده است . در این کتاب برای اولین بار ارقام هندی یعنی ارقام متداول امروزی در محاسبات بکار برده شده که در اثر ترجمهٔ آن اروپائیان نیز ارقام فوق را مورد استفاده قرار داده‌اند و چون در ترجمهٔ به‌لاتین اسم خوارزمی الگاریتمی نوشته شده کلمهٔ الگوریتم که‌بمعنای‌محاسبه است اصطلاحی شده برای محاسبهٔ باپایهٔ ده .

آنهائیکه باداشتن ده رقم قادر بنوشتن بزرگترین اعداد هستند قدر وموهبت این خدمت خوارزمی را هرگز نمیدانند . توجه بدو سطر زیر که یکی مربوط به‌قدیمیترین اثر خطی اروپائیان درسال ۹۷۶ ودیگری کهنترین‌ارقام مسلمین بسال ۹۷۰ میلادی است دوموضوع مهم را برای ما روشن میسازد .

نخست آنکه ارقام فعلی اروپائیان همان ارقام مأخوذاز کتاب **خوارزمی** است که فقط دراثرمرورزمان کمی تغییرشکل پیدا کرده است دوم اینکه استفاده از صفر در عددنویسی تاسال ۹۷۶ میلادی در بین آنان معمول نبوده و در نتیجهٔ ترجمهٔ آثار **خوارزمی** و دانشمندان اسلامی دیگر معرفت توجه به اصل ارزش ارقام در آنها پیدا شده است .

و اما در قسمت جبر کتاب **خوارزمی** برای اولین مرتبه لفظ **جبرو مقابله** تظاهر میکند که منظور از جبر نقل جملات از یکطرف بطرف دیگر و قصد از مقابله جمع جملات متشابه است . بدون شك این کتاب بزرگترین و مهمترین کتابی است که تا آن زمان در جبر نوشته شده است . البته بابلیها و هندیان و حتی یونانیان نیز چیزی شبیه بجبر داشتند ولی آنها هرگز بیش از یك ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم را بحساب نمی‌آوردند و بعلاوه از علائم اختصاری که اساس علم جبراست استفاده نمیکردند . کتاب فوق که کلمهٔ جبر را برای این علم درمیان اروپائیان معمول کرد هفت قرن ونیم مهمترین کتاب جبردر دنیا بود .

اواخر قرن دوازدهم جبر **خوارزمی** وسیلهٔ **ژرارد ایتالیائی** بزبان لاتین ترجمه گردید و مدت چهارصدسال برنامهٔ عمدهٔ جبر و مقابلهٔ دانشگاههای اروپا شد . پس از آنهم کتاب خوارزمی در قرن نوزدهم در **رم** و **لندن** و در قرن بیستم در **نیویورك** بچاپ رسیده است .

یکی دیگر از افتخارات ایرانیان **ابوالوفاء بوزجانی** است که در سال ۹۴۰ میلادی در شهر **بوزجان** از توابع **نیشابور** بدنیا آمد پس از تحصیل ریاضی ونجوم بدربار **عضدالدوله دیلمی** باریافت و به‌تألیف و تصنیف کتب متعددی در علوم عصر خویش بپرداخت از جملهٔ آنها کتابی است در جبر وحساب که در آنها کتب ریاضی دانان سلف خود مانند **دیوفانتس** یونانی و **خوارزمی** را تفسیر کرده و بعضی از قضایائی را که‌دانشمندان فوق‌الذکر بدون اثبات ذکر کرده‌اند بطرق جالبی اثبات کرده است .

دقت او در تنظیم جدولی برای جیب‌وظل (سینوس‌وتانژانت) که مقادیر آنها را دقیقه بدقیقه تا نه رقم اعشار محاسبه کرده است مورد تحسین کلیهٔ دانشمندان ریاضی است بعلاوه وی واضع دونسبت قطر ظل وقطرظل تمام (سکانت و کسکانت) نیز میباشد. ولی شهرت وعظمت **ابوالوفاء** بیشتر در علم‌نجوم است. او در نتیجهٔ مطالعات خود بجزحرکات وضعی وانتقالی ماه یك حرکت جالب دیگر وی را که فعلاً واریاسیون میگویند کشف نمود ولی هزار افسوس که کشف او به اطلاع مغرب زمین نرسید و بهمین جهت این ابداع را به **تیکوبراهه** منجم هلندی که ششصدسال بعد ازاو این نظریه را اظهار کرده است نسبت میدهند. مناسبت دارد که علل مطالعات نجومی را در ایران قدیم به اجمال مورد بحث‌قراربدهد؛ مشاهدات روزمرهٔ بشر دربارهٔ خورشید و ماه وستارگان همواره او را بتفکر وتعمق در بارهٔ این‌اجرام سماوی واداشته است و از این رو مقدمات علم هیئت و نجوم ازدوران پیدایش بشر شروع میشود ودر نتیجهٔ اعتقادمردم به تأثیر تغییرات سماوی درسرنوشت انسان بازار علم نجوم رونق گرفت و افراد بیشماری بتحقیق و تتبع در این‌رشته پرداختند علی‌الخصوص پس از آنکه مشعل دانش به دست اعراب افتاد بدان علت که تقویم اسلامی براساس حرکت ماه بود و همچنین بجهت تعیین قبله این رشته از دانش ریاضی اهمیت فراوانی پیدا کردتا آنجائیکه امروز همهٔ‌دانشهای بشری را تحت‌الشعاع قرارداده ودر حال‌حاضر فکر وذکر مردم جهان دستیابی بر کرات سماوی شده است.

بین ستاره‌شناسان ایرانی و دانشمندان نجوم قرن بیستم فاصلهٔ بسیاراست بهتر است وقایع را به ترتیب‌اتفاق بیان کنیم. بنابراین بسراغ یکی‌دیگر از دانشمندان نجوم ایرانی که **بیژن‌ابن‌رستم** نام دارد میرویم. این منجم‌ایرانی که اعراب آنرا **الکوهی** مینامند از اهالی **کوهستان‌طبرستان** است وقتی که **شرف‌الدوله دیلمی** بربرادر خود **صمصام‌الدوله** مستولی گشت **الکوهی** را باخود به **بغداد** برد و رصدخانه‌ای با ابزار و آلات نسبةً دقیق در اختیار او قرار داد و وی مدت سی سال برصد کردن ستارگان مشغول بود ودر این مدت چنان دقت و مهارتی از خود نشان داد که برخلاف رسم زمان منجمین عصر بارها جهت اعمال وارصاد او را تعیین و تأیید کردند و ترجمهٔ دو شهادت نامه هم‌اکنون در نامهٔ دانشوران مضبوط‌استولی اگر این شهادتنامه‌ها دلیل بردقت وموشکافی **کوهی** باشد چه دلیلی بهتر از این که **کوهی** شرط ریشهٔ مضاعف داشتن معادلهٔ درجهٔ سوم را بیان داشته است. حال آنکه تاآن زمان این موضوع بمغز هیچ یك از افراد بشر خطور نکرده بود و تاقرن هفدهم نیز کسی ارزش آنرا درك نکرد علاوه براین **کوهی** شش جلد کتاب مهم دیگر در رشته‌های مختلفهٔ ریاضی تألیف کرده است که نسخ اکثر آنها هم‌اکنون در کتابخانه‌های **پاریس** و **لندن** موجود است.

(ناتمام)

ازجمله نامه های رسیده: (جهت‌یابی بااستفاده ازسایهٔ شاخص)

آقای حسن سعادتی دانشجوی پلی‌تکنیك ضمن نامهٔ خود چنین نوشته‌اند.

درحدود یکسال ونیم پیش، دریکی ازایالات آمریکا دانش‌آموزی ضمن مطالعهٔ حرکت خورشید نوع جدیدی جهت‌یابی پیدا کرد که بااستفادهٔ ازآن میتوان جهات را با اشتباه حداکثر شش درجه بآسانی پیداکرد. باین ترتیب که یك‌میله یایك چوب‌باطول درحدود سی‌سانتیمتر بطور قائم ودر سطح‌کاملا افقی‌نصب مینمائیم ومحل سایهٔ نوك چوب علامت میگذاریم‌آنگاه چنددقیقه تأمل‌می‌کنیم تا سایه‌کمی تغییر کند ومجدداً محل سایهٔ نوك چوب علامت دوم را می‌گذاریم. خطی که دوعلامت را بهم وصل می‌کند امتدادمشرق ومغرب وخطی که برآن عمود شود امتداد شمال وجنوب را میرساند.

باطلاع آقای سعادتی میرساندکه طریقهٔ فوق طریقهٔ جدید نبوده بلکه ازقرنها قبل بدان عمل میشده است وبا ترتیبی که ذیلا مذکور میشودعمل مینموده وبدان وسیله وبطور دقیق جهات را می‌یافته‌اند واین طریقه راکه درکتاب‌های هیأت قدیم درج است‌بعضی ازهیویون طریقهٔ دائره هندی نامیده‌اند ونوع کاملترآن ساعت آفتابی میباشد. ترتیب‌کارآن است که درسطح کاملا افقی دایره‌ای‌رسم نمود وچوب یا میله را (دراصطلاح شاخص گفته میشود) درمرکز دایره وبطورکاملا قائم نصب نمود (شعاع دایره باید درحدودطول شاخص باشد) یك دفعه قبل ازظهر ویك دفعه بعداز ظهرسایهٔ نوك شاخص درست بر محیط دایره واقع میشود این دو نقطه را علامت گذاشته ونیمساز زاویهٔ مرکزی مقابل به‌کمان بین دوعلامت رسم میشودکه‌امتداد شمال وجنوب محل می‌باشد.

علامت های جدید ریاضی

علامت	تلفظ ـ اصطلاح	مثال
$\Longrightarrow$	نتیجه میدهد ـ نتیجه میشود (حکم سمت راست علامت ازحکم سمت چپ نتیجه میشود)	$a=b \Longrightarrow a^2=b^2$
$\Longleftrightarrow$	هم نتیجه میشود وهم نتیجه میدهد ـ لازم وکافی است (احکام طرفین علامت ازیکدیگرنتیجه میشوند)	$a=b \Longleftrightarrow a+c=b+c$
$\not\Longrightarrow$	نمیتوان نتیجه گرفت (حکم سمت راست ازسمت چپ)	$a=\sqrt{x^2} \not\Longrightarrow a=x$
$\not\Longleftrightarrow$	نمیتوان ازیکدیگرنتیجه گرفت (احکام طرفین علامت)	$a>b \not\Longleftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
E	مجموعه = یک دسته عناصر (اجزاء) مشخص	مجموعه اعداد صحیح مجموعهٔ نقاط یک خط
$\emptyset$	مجموعهٔ تهی = مجموعه‌ای که شامل هیچ جزء نیست	
$\in$	متعلق به تعلق دارد به	a تعلق دارد به E a جزئی است از E $\Big\}\ a\in E$
$\notin$	متعلق نیست به تعلق ندارد به	a متعلق به E نیست) $a\notin E$
$\supset$	شامل است	(Z شامل N میباشد) $Z\supset N$
$\subset$	مشمول است	(N مشمول در Z است) $N\subset Z$
$\not\supset$ $\not\subset$	شامل یا مشمول نیست	
$\forall$	هرچه باشد	$\forall x$ (هرچه باشد x بازاء همه مقادیر x)
$\cap$	تقاطع وجه اشتراک فصل مشترک مقطع	$\left\{\begin{array}{l} x\in A \\ x\in B \end{array}\right. \Longleftrightarrow x\in A\cap B$
$\cup$	اجتماع (مجموع)	$A\cup\emptyset=A$
$[a,b]$	فاصلهٔ a و b درضمن شامل a و b	$a\leqslant x\leqslant b \Longleftrightarrow x\in[a,b]$
$]a,b[$	فاصلهٔ a و b اما بدون a و b	$a<x<b \Longleftrightarrow x\in]a,b[$
$[a,b[$	فاصلهٔ a و b شامل a اما بدون b	$a\leqslant x<b \Longleftrightarrow x\in[a,b[$
$]a,b]$	فاصلهٔ a و b شامل b اما بدون a	$a<x\leqslant b \Longleftrightarrow x\in]a,b]$
$a\mid b$	a میشمرد (عاد میکند) b را ـ a مقسوم‌علیه b است	$9\mid a \Longrightarrow 3\mid a$
$a\nmid b$	a نمیشمرد (عاد نمیکند) b را ـ a مقسوم علیه b نیست	$u=2k+1 \Longleftrightarrow 2\nmid \overline{du}$
$\simeq$	تقریباً مساویست با (#)	$\pi \simeq 3{,}14$

دانش آموز رتبهٔ اول رشتهٔ ریاضی امتحانات ورودی دانشگاه

آقای **پرویز رفیع نژاد** در امردادماه ۱۳۴۳ بین هزاران جوان داوطلب ورود به **دانشگاه تهران** مقام اول را بدست آورده است . این جوان با استعداد که دورهٔ دوم تحصیلات متوسطه را در **دبیرستان هدف شمارهٔ ۱** بپایان رسانیده است از خانواده‌ای است که فرزندانش همه در تحصیل مقامی ارجمند حائز هستند . ازآن جائی که مدرسه نمونهٔ کوچکی است ازجامعهٔ بزرگ باید امیدوار بود جوانانی که درمدرسه برجستگی پیدا می‌کنند در زندگی اجتماعی نیز افرادی کاردان ومتشخص ومفید باشند . ماهم برای آقای رفیع نژاد توفیق کامل در بقیهٔ دوران تحصیل وسراسر زندگی آرزو می‌کنیم .

ترسیمات هندسی فقط بکمک پرگار

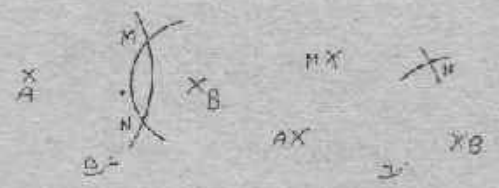
تهیه و تنظیم از : حبیب‌الله عبداللهی

-۲-

مسألهٔ ۵ـ قطعه خطی بوسیلهٔ دو نقطه‌اش داده شده است از نقطه مفروضی غیرواقع براین خط عمودی بر آن رسم کنید.

حل ـ طریقهٔ ترسیم ـ خط (A و B) و نقطه M غیر واقع براین خط را در نظر می‌گیریم منظور تعیین نقطه‌ایست که با نقطه M تشکیل خطی را دهد که بر AB عمود گردد. برای اینکار بمرکز A و بشعاع MA و بمرکز B و بشعاع MB دوکمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه دیگری مانند N قطع کنند نقطه N جواب مسأله است (شکل ۵)

اثبات : در دودایرهٔ متقاطع خط‌المرکزین عمود منصف وتر مشترکشان میباشد.



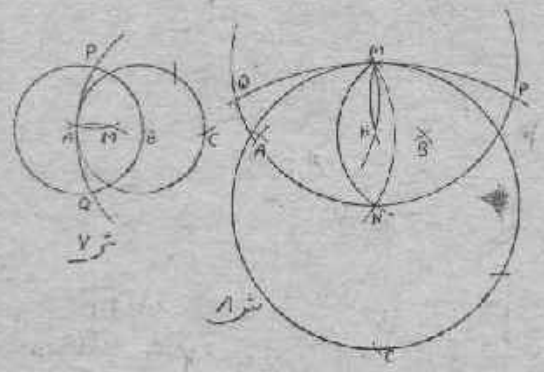
مسألهٔ ۶ـ قطعه خطی بوسیله دو نقطه‌اش داده شده است از نقطه مفروضی غیر واقع براین خط خطی بموازات آن رسم کنید.

حل ـ طریقهٔ ترسیم : خط (A و B) و نقطه M غیرواقع براین خط را درنظر می‌گیریم منظور تعیین نقطه دیگری است که با نقطه M تشکیل خطی را دهد که با AB موازی گردد برای اینکار بمرکز A و بشعاع MB و بمرکز B و بشعاع MA دوکمان رسم می‌کنیم تایکدیگر را در نقطه N قطع کنند نقطه N جواب مسأله است (شکل ۶) بدلیل اینکه چهارضلعی ABNM ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

مسألهٔ ۷ـ قطعه‌خطی بوسیلهٔ دو نقطه‌اش نمایش داده‌شده است مطلوبست تعیین نقطهٔ وسط آن.

حل ـ طریقه ترسیم ـ قطعه خط (A و B) را در نظر می‌گیریم بمراکز A و B و بشعاع AB دوایری رسم‌می‌کنیم وبعد (مانند مسأله ۳) نقطه C را چنان بدست میآوریم که AB = BC باشد اکنون بمرکز C و بشعاع AC دایره‌ای رسم کرده تا دایرهٔ بمرکز A وبشعاع AB را درنقاط P و Q قطع کندسپس بمراکز P و Q و بشعاع PA دوکمان رسم‌می‌کنیم تا در نقطه‌دیگری مانند M یکدیگر را قطع کنند نقطه M جواب مسأله است (شکل ۷).

اثبات : مثلث‌های متساوی‌الساقین ACQ و AQM که در زاویه A مشترک میباشند متشابهند در نتیجه داریم $AM = \frac{AQ}{2} = \frac{AB}{2}$ از طرفی AM عمود منصف PQ بوده و از C خواهد گذشت پس نقطه M بر AB واقع است.



مسألهٔ ۸ـ پاره خطی بوسیلهٔ دونقطه‌اش نشان داده شده است ازنقطهٔ غیرواقع براین خط عمودی‌بر آن فرودآورده‌موقع عمود را تعیین کنید.

حل ـ طریقه ترسیم : قطعه خط (A و B) و نقطه M درخارج آن دردست است مانند (مسألهٔ ۵) نقطه N را بدست میآوریم دراینصورت MN بر AB عمودخواهد بود موقع‌عمود وسط MN است سپس بطریقهٔ (مسألهٔ ۷) این نقطه را بدست میآوریم درشکل موقع عمود نقطه H میباشد. (شکل ۸)

از فرمول‌های من درآوردی

پیرامون بیضی = نصف قطر بزرگ + نصف‌قطر کوچک × ۳/۱۴۱۶

از یک‌کتاب هندسه با هشت فرمول‌ف

(اثبات : المعنی فی‌جان‌الشاعر)

مباحث جدید در ریاضیات متوسطه

همنهشت‌ها (Congruences) درجبر

از : پرویز شهریاری

(با استفاده از نوشتهٔ امیل بورل ریاضی دان معاصر فرانسوی)

درشماره‌های اول ودوم مجلهٔ یکان ضمن گفتگو از «اصول هندسی» دربارهٔ کنگروآنسها در هندسه صحبت کردیم اینك همین مفهوم را درجبر مورد مطالعه قرارمیدهیم .

این نکته راهم یاد آوری می‌کنیم که درمقالات گذشته کنگروآنس‌رابه «همساز» ترجمه کردیم ولی باصلاحدیه دانشمند محترم آقای احمدآرام آنرا به «هم‌نهشت» تغییر دادیم .

***

گویند دوعدد صحیح a وb برحسب مدول p هم‌نهشت هستند وقتی‌که تفاضل $a-b$ برp قابل‌قسمت باشدوآنرا چنین نمایش میدهند :

$$(1) \qquad a \equiv b \pmod{p}$$

ومیخوانند : a هم‌نهشت است باb (مدول p) . عدد p یك عدد صحیح غیرمشخص‌است ولی‌ما اغلب ازحالتی‌صحبت‌میکنیم که درآنجا p عددی اول باشد .

میدانیم درجبر ، معادله عبارتست از یك نوع تساوی‌که درآن یك یا چند حرف‌را بعنوان مجهول نمایش دهند. تساوی معادله برقرار نخواهد بود مگراینکه بجای مجهولات مقادیری راکه ریشه‌های معادله گویند قراردهیم ، ولی درنظریهٔ اعداد لازم‌نیست برای مواردی‌که هم‌نهشت شامل‌یك حرف (که‌نمایندهٔ مجهول است) ویامواردی‌که شامل مجهول نیست دوجمله و دو نام مختلف بکاربرده شود .

وقتی‌که مجهول ازدرجهٔ اول یادوم وغیره باشد هم نهشت را درجه اول یا درجه دوم وغیره گویند همچنین میتوان تعداد مجهولات رانیز ذکر کرد .

اگر r باقیماندهٔ تقسیم عدد صحیح a برعدد p باشد داریم :

$$(2) \qquad a \equiv r \pmod{p}$$

و r راباقیماندهٔ (résidu) a نسبت به مدول p گویند

این رزیدو میتواند p مقدار مختلف را اختیار کند یعنی : $p = 1, 2, 3, \ldots, 1000000$.

اکنون $f(x)$ راکثیرالجمله‌ای باضرایب صحیح فرض می‌کنیم :

$$(3) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

بسادگی میتوان نشان دادکه اگر هم‌نهشت :

$$(4) \qquad x \equiv y \pmod{p}$$

برقرارباشد ، هم‌نهشت زیر نیز برقرارخواهد بود :

$$(5) \qquad f(x) \equiv f(y) \pmod{p}$$

وبنابراین نتیجه میشود که اگر هم‌نهشت :

$$(6) \qquad f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

برای بعضی ازمقادیر صحیح x برقرار باشد ، برای‌تمام مقادیر y که در هم‌نهشت (٤) صدق می‌کند نیزبرقرار خواهد بود . ریشه‌های x وy نبایستی بعنوان ریشه‌های مختلفی درنظر گرفته شوند ومیتوان آنهارا بعنوان تمام ریشه‌های هم‌نهشت(٦) بحساب‌آورد، وقتی‌که هریك‌از p عدد $p = 1, 2, 1000000$ راموردآزمایش قراردهیم که کدامیك درهم‌نهشت صدق‌می‌کنند.

ابتدا دربارهٔ هم‌نهشت های درجه اول‌یك مجهولی‌صحبت می‌کنیم وقتی‌که مدول اول p راداشته باشند ، این هم‌نهشتدا چنین نمایش می‌دهند :

$$(1) \qquad ax \equiv b \pmod{p}$$

b رامخالف صفر فرض می‌کنیم ، یعنی b نسبت به مدول p با صفر هم‌نهشت نیست. اگر b صفرباشد بایستی ax قابل قسمت بر p باشد واگر a صفرنباشد (یعنی بر p قابل قسمت نباشد) بایستی x برp قابل‌قسمت باشد،یعنی نسبت به‌مدول p صفرباشد.

همینقدر یادآوری می‌کنیم که درنظریهٔ هم‌نهشتها، تنهادر حالت **مدول اول** است که‌میتوان‌ازاین خاصیت صحبت کردکه حاصل ضرب دوعامل نمیتواند صفر باشد مگروقتی‌که لااقل یکی از دوعامل صفر باشد .

اکنون حاصل ضربهای $p = 1, 2, 1000000$ رادر a

(بقیه درپائین‌صفحهٔ بعد)

مباحث جدید در ریاضیات

هندسه های جدید

از : عارف قلی‌نیا

دراواخرقرن هیجدهم تحول بزرگی در ریاضیات بوجود آمد. این تحول که ریشهٔ اصلی آن‌را باید درحل برخی ازمسائل فیزیکی جستجو کرد آغاز شگفتی‌های نوی است که ازموفقیت اولر دانشمند وریاضی دان بزرگ فرانسوی دربارهٔ توسعه و تکامل معادلات دیفرانسیل ، سرچشمه میگیرد . وی علاوه بر گامهای بلندی که درپیشرفت حساب فاصل برداشت ، درحساب جامع (انتگرال ها) که تاآن موقع روی صفحه و بوسیلهٔ تابع یک متغیری $y=f(x)$ انجام میگرفت موفقیت‌هائی احراز کرده وآنرا درفضا وتوابع دو متغیری $f(x,y)$ نیز معمول داشت .

درخلال همین احوال ، با مقایسهٔ هندسه های تصویری و متریک کوشش های ریاضیدانان منجر به پیدایش هندسه های متراقلیدسی، محاسبهٔ برداری وتوپولوژی گردید وبدین ترتیب شاخه‌های چندی برپیکر عظیم ریاضیات اضافه شد .

پیدایش هندسه‌های جدید راههای تازه‌ای در حل برخی ازمسائل فیزیک پدیدآورد که با ریاضیات عادی امکان حل آنها فوق‌العاده مشکل ودربرخی‌ازموارد اصلاً غیرممکن بود

از شاخه های جدید، میتوان دترمینانها ، ماتریس ها و تانسورها رانام برد وچون‌مطالعه درهریک‌ازآنهامستلزم‌اطلاعات ریاضی کافی است ونمیتوان دراین مختصراز هریک‌ازآنهابتفصیل گفتگو کرد، فقط برای روشن شدن‌اهمیت این شاخه‌های جدید بطور اختصاربذکر برخی از فایده های دترمینان وماتریس و خواص آنها اکتفا میشود .

چنانکه میدانیم حاصل دترمینان عدد است که از بسط دترمینان به جمل یک ستون یا یک سطر حاصل میشود . ازجمع وتفریق دترمینانها صرف‌نظرمینمائیم، لکن ضرب آنها فوق‌العاده جلب‌توجه میکندکه بطورمثال حاصل ضرب‌دو دترمینان A وB برابر دترمینان C است :

$$A \times B = C$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

شك نیست که اگر مقادیر عددی هریک از دترمینانهای A و B را جداگانه حساب کرده ودرهم ضرب نمائیم حاصل همان جواب دترمینان C خواهد بود . پس این سؤال پیش می آید که چرا بجای‌این عمل ساده تن به‌چنین حل‌مشکل میدهیم، وضرب دو دترمینان را باین شکل تعریف میکنیم. درجواب‌باید گفت که منظوراز‌ضرب دو دترمینان پیداکردن‌حاصلضرب عددی آنها نیست . خاصه آنکه این ضرب فقط در موردی وجود دارد که دو دترمینان دارای رتبه های مساوی باشند ، درصورتیکه حاصلضرب عددی دو دترمینان از هر درجه‌که باشند همواره عددیست معین . پس در حقیقت آنچه‌که ازضرب دو دترمینان انتظارداریم شکل دترمینان حاصلضرب است .

برای روشن شدن مطلب یکی از مواردداستعمال این نوع

درنظرمی گیریم . اگر x و y دوعدد مختلف از این اعداد باشند وداشته باشیم :

$$ax \equiv ay \pmod{p}$$

خواهیم داشت :

$$a(x-y) \equiv 0 \pmod{p}$$

وبالاخره :

$$x-y \equiv 0 \pmod{p}$$

که بافرض مامبنی بر اینکه x و y کوچکتر از p هستند مخالف است

$(p-1)$ حاصل‌ضرب :

$$(P-1)a, \ldots\ldots, 3a, 2a, a$$

نسبت‌به‌مدول p باهم مخالفاند واین بمعنای آنست که این رز یدوها باهم مخالف اند وجزاعداد :

$$P-1, \ldots\ldots, 3, 2, 1$$

که بترتیب معینی منظم شده‌اند ، چیز دیگری نمیتوانند باشند .

این همان پدیده‌ای است که با استناد بآن میتوان گفت : همنهشت درجهٔ اول (1) تنهادارای یک جواب است وقتی که a و b مخالف صفر باشند .

اگر b به‌تنهائی صفر باشد ، جواب هم صفر خواهد بود اگر a به‌تنهائی صفر باشد، همنهشت جواب ندارد و اگر a و b هردوه صفر باشند ، همنهشت تبدیل بیک اتحاد میشود یعنی بازاء همهٔ مقادیر x صادق خواهد بود .

در عبارهٔ آینده دربارهٔ همنهشت های درجه دوم بحث خواهیم کرد

ضرب را ذکر میکنیم .

اگر مختصات یك نقطه دردستگاه کارتزین درفضای دوبعدی xoy فرض شود این مختصات در اثر یك دوران محوری بشکل زیر درمیآید :

$$X = a_{11}x + a_{12}y$$
$$Y = a_{21}x + a_{22}y$$

وبا یك دوران دیگر مختصات xoy بصورت جدید زیر مختصات آن نقطه بدست میآید :

$$X_1 = b_{11}X + b_{22}y$$
$$Y_1 = b_{21}X + b_{12}y$$

ازروی این دو دستگاه میتوان مقادیر X_1 و Y_1 را برحسب xoy حساب کرد . ولی این محاسبه اگر مستقیماً انجام شود ، خیلی مفصل وبخصوص اگر همین تبدیل درفضای بیش ازدوبعدی انجام گیرد ، محاسبه خیلی سنگین وعمل غیرممکن خواهدبود. ولی در بررسی خواص این دو دترمینان نشان داده میشود که میتوان این دوتبدیل رادریك دستگاه خلاصه کرده بصورت زیر نوشت:

$$X_1 = A_{11}x \quad A_{12}y$$
$$Y_1 = A_{21}x \quad A_{22}y$$

که درآن ضرایب $A_{11}, A_{12}, \ldots\ldots$ جمل دترمینان حاصلضرب دو دترمینان تشکیل شده ازضرایب جمل تبدیل قبل است:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

این ضرایب را میتوان درمورد دوماتریس که جمل سطور یکی از آنها مساوی جمل سطور ستونهای دیگری است ، تعمیم داد .(فرق دترمینان با ماتریس دراین است که دترمینان همیشه دارای n^2 جمله بوده وعددی رانشان میدهد ، درصورتیکه در ماتریس ممکن است تعداد جمله‌های سطرها وستونها مساوی نباشد وبعلاوه ماتریس فقط یك عامل بوده ومفهوم عددی ندارد .)

ازنکات دیگری که درضرب دترمینانها بیشتر موردتوجه است این است که در این ضرب خاصیت توالی حفظ نمیشود و ریاضیات دیگر یك ضرب Cemmutative نیست . یعنی چنانکه جای عوامل ضرب را عوض کنیم درحاصلضرب نیز تغییر حاصل میشود . بعبارت ساده تر درضرب دو عدد جبری داریم $a \cdot b = b \cdot a$ وحال آنکه در مورد دو دترمینان رابطه‌ای نظیر رابطهٔ فوق صحیح نیست . این خاصیت در ضرب دو بردار نیز دیده میشود . با این تفاوت که در ضرب دو بردار با تغییر جای عوامل فقط علامت حاصلضرب عوض میشود. در صورتیکه درحاصلضرب دو دترمینان حاصل ضرب بکلی عوض میگردد . این است هندسه ای که فقط بااعداد ساده علم جدیدی میآفریند.

دانش آموزان رتبهٔ اول امتحانات ششم طبیعی خرداد ۱۳۴۳

اصفهان

دوشیزه پروین دانشجو

در سال ۱۳۲۵ در اصفهان متولد شده است . تحصیلات ابتدائی ومتوسطه را دردبستان ودبیرستان بهشت آئین اصفهان بپایان رسانیده و در تمام کلاسها شاگرداول بوده است درامتحانات آخرسال تحصیلی ۴۳-۴۲ در رشتهٔ طبیعی شرکت نموده وبین ۹۵۰ نفر دانش آموزان رشتهٔ طبیعی (پسرودختر) حوزهٔ استان دهم اصفهان بامعدل **۱۸/۷۴** حائز رتبهٔ اول گردیده است.

این دانش آموز گذشته از درس از لحاظ اخلاق و رفتار و همچنین در قسمت ورزش وکارهای دستی پیوسته از شاگردان ممتاز بوده است . بخواست خداوند متعال وبا رویه وجدیتی که تاکنون داشته است امید قطعی داریم که آتیهٔ درخشان وموفقیت شایان توجهی نصیب اوخواهد شد .

توفیق او گذشته از استعداد ذاتی وکوشش دائمی خودش مرهون علاقه مندی و توجه پدرفاضلش **آقای حسین دانشجو** دبیر مبرز وبا سابقهٔ فرهنگ میباشد . بدیهی است که زحمات و مراقبتهای دبیران محترم و اولیای دبیرستان بهشت آئین را در این موفقیت شایان دقت نمیتوان نادیده گرفت .

رئیس دبیرستان بهشت آئین ـ تدین

یزد

آقای کاظم ایاصوفی

درسال ۱۳۲۴ دریزد متولد شده تحصیلات ابتدائی را در دردبستان مالمیر ودورهٔ اول متوسطه را دردبیرستان رکنیه و دورهٔ دوم را دردبیرستان ایرانشهر گذرانده است .

نامبرده در امتحانات نهائی ششم طبیعی خرداد ۴۳ در بین تمام شرکت کنندگان شهرستان یزد با معدل کتبی **۱۸/۷۹** مقام اول را بدست آورده است و اکنون دانشجوی دانشگاه تهران میباشد . وی در همهٔ دروس بخصوص درزبان انگلیسی تسلط کامل دارد . توفیق بیشتر اورا آرزومندیم .

رضا ملك ـ خبرنگار و نمایندهٔ یکان دریزد

فرستندهٔ خبر: **کتابفروشی امیدنمایندگی یکان دراصفهان**

دربارهٔ ریاضیات متوسط

قضایائی دربارهٔ نامساویها

(ترجمهٔ: محمد شریف‌زاده دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۲)

تعریف: نصف مجموع دو عدد را واسطهٔ عددی وجذر حاصلضرب آنهارا واسطهٔ هندسی آندو عدد گویند.

قضیه ۱ : واسطهٔ عددی دوعدد از واسطهٔ هندسی آندو بزرگتر است بطور کلی اگر a و b دوعدد مثبت باشند نامساوی (۱) برقرار است.

$$(1)\quad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

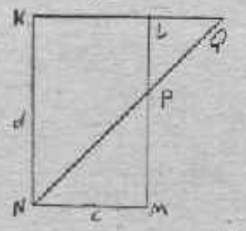
اثبات: فرض میکنیم $a=c^2$ و $b=d^2$ حال نامساوی (۱) باینصورت درمیاید.

$$\frac{c^2+d^2}{2} \geqslant cd \text{ یا } c^2+d^2-2cd \geqslant 0 \text{ یا } (c-d)^2 \geqslant 0 \quad (2)$$

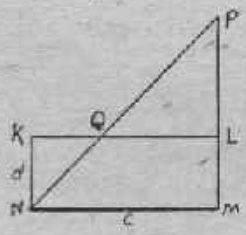
ومیدانیم که نامساوی (۲) همیشه برقرار است پس نامساوی (۱) نیز ثابت است.

تبصرهٔ ۱- اگر a و b مختلف‌العلامت باشند طرف دوم نامساوی بی‌معنی است واگر هردو منفی باشند طرف اول منفی وطرف دوم مثبت خواهد بود درنتیجه نامساوی صحیح نیست.

تبصرهٔ ۲- هرگاه $a=b$ باشد واسطهٔ عددی و هندسی برابرند.



اثبات هندسی قضیه - مربع مستطیل KLMN را به ابعاد $MN=c$ و $KN=d$ رسم مینمائیم و بر ضلع ML یا امتداد آن نقطهٔ P را تعیین میکنیم بطوریکه $MP=MN=c$ باشد اگر Q نقطهٔ تلاقی NP و KL باشد داریم $KQ=d$ و



مساحت KLMN > مساحت NQK + مساحت NMP

$$\frac{c^2}{2}+\frac{d^2}{2}=\frac{c^2+d^2}{2} \geqslant cd$$

تساوی وقتی برقرار است که مساحت مثلث PLQ برابر صفر باشد و این در موقعی است که P بر Q منطبق یعنی $c=d$ باشد.

قضیهٔ ۳ : واسطهٔ عددی سه‌عدد از واسطهٔ هندسی آن ها بزرگتر است بطور کلی اگر a و b و c سه‌عدد مثبت باشند داریم

$$(3)\quad \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$$

اثبات : فرض میکنیم $a=x^3$ و $b=y^3$ و $c=z^3$ هرگاه این مقادیر را در نامساوی (۳) قرار دهیم نامساوی زیر حاصل میشود.

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz \text{ یا } x^3+y^3+z^3-3xyz \geqslant 0 \quad (4)$$

هرگاه نامساوی (٤) را ثابت کنیم نامساوی (۳) نیز ثابت میشود. برای اثبات نامساوی (٤) را بصورت زیر تجزیه میکنیم:

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) \geqslant 0$$

چون a و b و c مثبت بودند ریشهٔ سوم آنها یعنی x و y و z نیز مثبت خواهد بود در نتیجه $x+y+z$ مثبت میباشد مگر $x=y=z=0$ باشد پس کافی است که ثابت کنیم طرف چپ عبارت بالا نیز مثبت است برای اثبات سه نامساوی زیررا نوشته وباهم جمع میکنیم.

$$x^2+y^2 \geqslant 2yx$$
$$y^2+z^2 \geqslant 2yz$$
$$x^2+z^2 \geqslant 2xz$$
$$2(x^2+y^2+z^2 \geqslant 2(xy+yz+xz) \text{ یا}$$
$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geqslant 0$$

بازاء $x=y=z$ طرفین نامساوی (۳) برابرند.

قضیهٔ (۳) واسطهٔ عددی چند عدد از واسطهٔ هندسی آنها بزرگتر است بطور کلی بین n عدد مثبت a_1 و $a_2 \ldots\ldots a_n$ نامساوی زیر برقرار است.

$$(5)\quad \frac{a_1+a_2\ldots\ldots a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots\ldots a_n}$$

بازای $a_1=a_2\ldots\ldots=a_n$ دوطرف مساوی خواهند بود.

حل: برای حل قضیهٔ فوق ابتدا قضیه را درحالتیکه n قوهٔ صحیحی از ۲ باشد ($n=2K$) حل نموده و سپس بااستفاده ازآن قضیه را درحالت کلی حل میکنیم. فرض میکنیم $K=1$ باشد بنابرقضیه (۱) خواهیم داشت

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

حال فرض میکنیم $a=\frac{a_1+a_2}{2}$ و $b=\frac{a_3+a_4}{2}$ (a_1 و a_2 و a_3 و a_4 مثبت هستند) حال این مقادیر را درنامساوی بالا قرار میدهیم

نتیجه میشود .

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)} \quad (6)$$

حال بااستفاده ازقضیهٔ(۱) دونا مساوی‌زیررا مینویسیم

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2} \quad \text{و} \quad \frac{a_3+a_4}{2} \geq \sqrt{a_3a_4}$$

طرفین این دونامساوی رانظیر به‌نظیر درهم ضرب میکنیم حاصل میشود

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right) \geq \sqrt{a_1a_1a_3a_4}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

از مقایسهٔ نامساوی اخیر بانامساوی(۶) حاصل میشود

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \quad (7)$$

بازاء $\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{a_3+a_4}{2}$ دوطرف برابرند

حال همین عمل راتکرار کرده مینویسیم

$$a_1=\frac{b_1+b_2}{2} \quad \text{و} \quad a_2=\frac{b_3+b_4}{2} \quad \text{و} \quad a_3=\frac{b_5+b_6}{2}$$

$$\text{و} a_4=\frac{b_7+b_8}{2}$$

که $(b_1 \text{ و } b_2 \ldots b_8)$ مثبت هستند) وباقرار دادن این مقادیر در نامساوی(۷) حاصل میشود

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_8}{8} \geq$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3+b_4}{2}\right)\cdots\left(\frac{b_7+b_8}{2}\right)}$$

حال با استفاده از نامساویهای

$$\frac{b_1+b_2}{2} \geq \sqrt{b_1b_2} \quad \text{و} \quad \frac{b_3+b_4}{2} \geq \sqrt{b_3b_4} \quad \text{و}$$

$$\ldots \text{و} \frac{b_7+b_8}{2} \geq \sqrt{b_7b_8}$$

وانجام عملیاتی نظیر حالت قبل نتیجه‌میشود

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_8}{8} \geq \sqrt[8]{b_1 \cdot b_2 \cdots b_8}$$

در حالت $b_1=b_2\cdots=b_8$ طرفین‌مساوی خواهند بود . بااستفاده و ادامه دادن این روش میتوان نامساوی را در تمام مواقعیکه nقوهٔ صحیحی از ۲ باشد حل نمود

تبصره : همانطور که‌دیده‌شدنامساوی رابازای $n=2^K$ میتوان حل نمود حال ثابت میکنیم که میتوان قضیه را موقعیکه $n=2^K+1$ یعنی تعداد جمل $2n$ باشد نیز ثابت‌نمود .

فرض میکنیم

$$a_n=\frac{b_{2n-1}+b_{2n+1}}{2} \quad \text{و} \ldots \text{و}$$

$$a_2=\frac{b_3+b_4}{2} \quad \text{و} \quad a_1=\frac{b_1+d_2}{2}$$

باقرار دادن این مقادیر درنامساوی(۵) واستفادهٔ از همان روش سابق نتیجه‌میشود

$$\frac{b_1+b_2\cdots b_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{2n}}$$

و مانند حالت قبل موقعیکه $b_1=b_2=\cdots=b_{2n}$ باشد طرفین برابرند

اثبات قضیه در حالت کلی : قبلا ثابت شدکه هرگاه $n=2^k$ باشد قضیهٔ ۳ صحیح است حال ثابت میکنیم که هرگاه نامساوی برای n جمله $(n=2^k)$ صحیح‌باشدبرای $n-1$ جمله نیز صحیح خواهد بود برای‌اینکار فرض میکنیم:

$$a_1=b_1 \quad \text{و} \quad a_2=b_2 \quad \text{و} \quad \ldots \quad \text{و} \quad a_{n-1}=b_{n-1}$$

حال a_n را از رابطهٔ زیرحساب میکنیم

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}$$

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+a_n}{n}=$$

$$=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}$$

$$a_n=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}$$

حال مقادیر a_n و ... و a_2 و a_1 رادرنامساوی(۵)قرار میدهیم نتیجه میشود

$$\frac{b_1+b_2\cdot\cdots\cdot b_{n-1}}{n-1}>$$

$$>\sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_{n-1}\left(\frac{b_1+b_2\cdot\cdots\cdot b_{n-1}}{n-1}\right)}$$

حال طرفین نامساوی اخیر را بقوهٔ n رسانیده و ساده میکنیم حاصل میشود

$$\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}>b_1.b_2\ldots b_{n-1}$$

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}>\sqrt[n-1]{b_1.b_2\ldots b_{n-1}}$$

بااستفاده از همین روش میتوان ثابت نمود که مسئله برای $n+1$ جمله نیز صحیح است درنتیجه قضیهٔ (۳) در حالت کلی ثابت شد .

تعمیم نامساوی

در بعضی موارد خاص میتوان نا مساوی واسطهٔ عددی و هندسی را تعمیم داد ابتدا نامساوی زیررا می‌نویسیم .

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}>\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

حال فرض میکنیم

$$x_1=x_2=\cdots=x_m=x$$

$$x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=y$$

با قراردادن این مقادیر در نامساوی نتیجه میشود

$$\frac{mx+(n-m)y}{n}>(x^m y^{n-m})^{\frac{1}{n}}$$

یا

$$\frac{m}{n}x+\left(1-\frac{m}{n}\right)y>x^{\frac{m}{n}}y^{1-\frac{m}{n}} \quad (8)$$

حال فرض میکنیم $\frac{m}{n}=p$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right.$ p و q مثبت هستند)

وچون $\frac{m}{n}<1$ بود پس $p>1$ است . و از رابطهٔ بالا نتیجه میشود $1-\frac{m}{n}=\frac{1}{q}$

حال نامساوی (۸) باینصورت در میآید :

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}>x^{\frac{1}{p}}\cdot y^{\frac{1}{q}}$$

فرض میکنیم $x=a^p$ و $y=b^q$ در نتیجه

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}>ab \quad (9)$$

که a و b مثبت هستندو p و q رابطهٔ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ را تشکیل میدهند .

***

چند نامساوی مشهور

I ـ نامساوی کوشی

بازاء جمیع مقادیر a و b و c و d نامساوی زیر ثابت است

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2 \quad (10)$$

اثبات :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+$$
$$+b^2d^2=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

بنابراین معلوم شد که طرف اول نامساوی برابر طرف دوم نامساوی بعلاوهٔ یك مقدار مثبت است بنابراین نا مساوی همیشه صحیح است ومشاهده میشود که شرط اینکه طرفین برابر باشند این است که :

$$bc-ad=0 \text{ یا } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

اثبات بطریق هندسی: نقاط $P(a,b)$ و $Q(c,d)$ را در نظر گرفته و مطابق شکل صفحهٔ بعد داریم

$$OP=\sqrt{a^2+b^2} \text{ و } OQ=\sqrt{c^2+d^2} \quad \text{و}$$

$$PQ=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

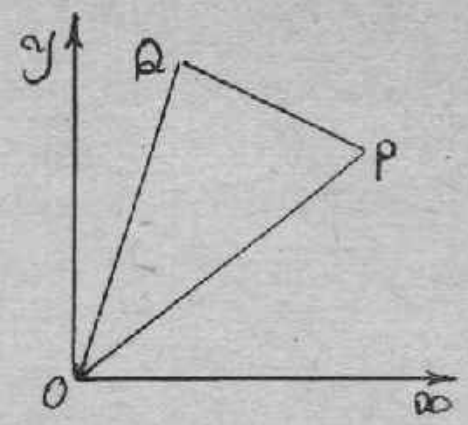
زاویهٔ بین OP و OQ را α مینامیم در مثلث OPQ رابطهٔ زیر را مینویسیم

$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2OP\times OQ\times\cos\alpha$$

که از این رابطه نتیجه میشود

$$\cos\alpha=\frac{OP^2+OQ^2-PQ^2}{2OP\times OP}=$$

$$=\frac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$$



$$\cos^2\alpha = \frac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \leq 1$$ یا

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$$

وواضح است که موقعی طرفین نامساوی اخیر برابر خواهندبود که $\cos^2\alpha = 1$ باشد واین موقعی است که OP و OQ یا برهم منطبق باشند ویا درامتداد یکدیگر باشند ودر این حالت نیز با شرط $C \neq d \neq 0$ بسادگی نتیجه میشود $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

نامساوی کوشی را میتوان برای تعداد مقادیر بیشتر نیز ثابت نمود مثلاً بازاء تمام مقادیر a_1 و a_2 و a_3 و b_1 و b_2 و b_3 نامساوی زیررا خواهیم داشت

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \quad (11)$$

برای اثبات این نامساوی اتحاد زیررا مینویسیم

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 =$$
$$(a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2)+(a_1^2b_3^2+a_3^2\cdot b_1^2)+(a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2)-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_2b_2a_3b_3 =$$
$$(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_2) \quad (12)$$

چون طرف دوم اتحاد اخیر از مجموع مربعات چند مقدار تشکیل شده است بنابراین مثبت است طرف اول اتحاد نیزمثبت است ونامساوی (۱۱) محقق میباشد

موقعی طرفین برابرند که هر کدام از پرانتزها صفر باشد یعنی : $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

اتحاد (۱۲) رامیتوان بصورت زیر تعمیم داد : برای هر مقدار حقیقی از a_i و b_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} (a_ib_i)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (a_ib_j - a_jb_i)^2$$

این اتحاد مشهور **کوشی لاگرانژ** میباشد که از این اتحاد نامساوی **کوشی** درحالت کلی نتیجه میشود :

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

بهمان دلیل که قبلا ذکر شد موقعی طرفین نامساوی برابرند که

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

***

II - نامساوی هلدر

بازاء جمیع مقادیر مثبت a_1 و a_2 ... a_n و b_1 و b_2 ... b_n نامساوی زیر برقرار است

$$(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+b_2^q+\cdots b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

که درآن p و q در رابطه $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ صدق میکنند و $P > 1$ است

درحالت $q=p=2$ نامساوی **هلدر** تبدیل به نامساوی **کوشی** میشود . برای اثبات نامساوی **هلدر** ابتدا نامساوی زیررا که قبلا ثابت شد درنظرمیگیریم

$$(13) \quad \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geq ab$$

حال فرض میکنیم :

$$a = \frac{a_1}{(a_1^p a_2^p \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{d}}} \quad \text{و}$$

$$b = \frac{b_1}{(b_1^q \times b_2^q + \cdots + b_q)^{\frac{1}{q}}}$$

سپس فرض میکنیم :

$$a = \frac{a_2}{(a_1^p a_2^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{q}}} \quad \text{و}$$

$$b = \frac{b_2}{(b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}$$

وهمچنین الی آخر

.
.
.

$$a = \frac{a_n}{(a_1^p + a_2^p + \cdots a_n^p)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{و}$$

$$= b \frac{b_n}{(b_1^q + b_2^q + \cdots b_n^q)^{\frac{1}{q}}}$$

حال این مقادیر از a وb را بترتیب درنامساوی (۱۳) قرار داده سپس نامساویهای حاصل را باهم جمع میکنیم نتیجه میشود

$$\frac{1}{P}\left(\frac{a_1^P+a_2^P+\dots+a_n^P}{a_1^P+a_2^P+\dots+a_n^P}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{b_1^q+b_2^q+\dots+b_n^q}{b_1^q+b_2^q+\dots+b_n^q}\right)\geq$$

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n}{(a_1^P+a_2+\dots+a_n^P)^{\frac{1}{P}}\times(b_1^q+b_2^q+\dots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}}$$

وچون داشتیم $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ پس

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n}{(a_1^P+a_2^P+\dots+a_n^P)^{\frac{1}{P}}\times(b_1^q+\dots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}}\leq 1$$

$$(a_1^P+a_2^P+\dots+a_n^P)^{\frac{1}{P}}\times(b_1^q+b_2^q\dots b_n^q)^{\frac{1}{q}}\geq a_1b_1+a_2b_2+\dots a_nb_n$$

موقعی طرفین برابر خواهند بود که

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$$ باشد

***

III - نامساوی مثلث

نقاط $P(x_1 \text{ و } y_1)$ و $R(x_1+x_2 \text{ و } y_1+y_2)$ درنظر گرفته P و R را به O وصل میکنیم نامساوی زیر راکه درهندسه ثابت میشود مینویسیم

$$OP+PR\geq OR$$

وبا قراردادن مقادیر مربوط خواهیم داشت .

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geq\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

نامساوی اخیررامیتوان بدون استفاده ازهندسه ازراه جبرحل نمود وسپس ازآن نتیجه کلی گرفت ابتدا اتحاد زیر را در نظر میگیریم .

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=x_1(x_1+x_2)+y_1(y_1+y_2)+x_2(x_1+x_2)+y_2x(y_1+y_2)$$

دونامساوی زیر راکه نامساوی کوشی میباشند مینویسیم

$$(x_1^2+y_1^2)[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]\geq[x_1(x_1+x_2)+y_1(y_1+y_2)]^2$$

$$(x_2^2+y_2^2)[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]\geq[x_2(x_1+x_2)+y_2(y_1+y_2)]^2$$

حال ازطرفین دو نامساوی اخیر جذرگرفته سپس آنها راجمع میکنیم نتیجه میشود .

$$[(x_1^2+y_1^2)^{\frac{1}{2}}+(x_2^2+y_2^2)^{\frac{1}{2}}][(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{\frac{1}{2}}\geq(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$$

طرفین نامساوی را بر $[(x_2+x_1)^2+(y_2+y_1)^2]^{\frac{1}{2}}$ تقسیم میکنیم حاصل میشود

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geq\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

وموقعی طرفین این نامساوی برابرند که $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ باشد و بعبارت دیگر نقاط O و P و Q بریك استقامت بوده و P و Q دریکطرف O باشند. باهمین روش نامساوی مثلث رابصورت زیر میتوان تعمیم داد

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2}\geq\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_1+y_2)^2+\dots+(x_n+y_n)^2}$$

موقعی طرفین برابرخواهندبود که $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\dots=\frac{x_n}{y_n}$ باشد

***

نامساوی مینکوفسکی

$$(x_1^P+y_1^P)^{\frac{1}{P}}+(x_2^P+y_2^P)^{\frac{1}{P}}\geq[(x_1+x_2)^P+(y_1+y_2)^P]^{\frac{1}{P}}$$

که درآن x_2 و y_2 و x_1 و y_1 مقادیر مثبت هستند و $P>1$ ودرحالت مخصوص $P=2$ نامساوی مینکوفسکی همان نامساوی مثلث است . برای اثبات این نامساوی اتحاد زیر را در نظر میگیریم .

$$(x_1+x_2)^P+(y_1+y_2)^P=[x_1(x_1+x_2)^{P-1}+y_1(y_1+y_2)^{P-1}][x_2(x_1+x_2)^{P-1}+y_2(y_1+y_2)^{P-1}]$$

حال دو نامساوی زیر را که نامساوی **هلدر** هستند می‌نویسیم :

$$(x_1^P+y_1^P)^{\frac{1}{P}}\left[(x_1+x_2)^{(P-1)q}+(y_1+y_2)^{(P-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\geq x_1(x_1+x_2)^{P-1}+y_1(y_1+y_2)^{P-1}$$

$$(x_2^P+y_2^P)^{\frac{1}{P}}\left[(x_1+x_2)^{(P-1)q}+(y_1+y_2)^{(P-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\geq x_2(x_1+x_2)^{P-1}+y^2(y_1+y_2)^{P-1}$$

حال با درنظر گرفتن شرط $\frac{1}{P}+\frac{1}{q}=1$ دونامساوی را جمع میکنیم نتیجه میشود :

$$\left[(x_1+x_2)^P+(y_1+y_2)^P\right]^{\frac{1}{q}}\left[(x_1^P+y_1^P)^{\frac{1}{P}}+(x_2^P+y_2^P)^{\frac{1}{P}}\right]\geq(x_1+x_2)^P+(y_1+y_2)^P$$

طرفین نامساوی جدید را بر $\left[(x_1+x_2)^P+(y_1+y_2)^P\right]^{\frac{1}{q}}$ تقسیم کرده و بجای $1-\frac{1}{q}$ مقدار $\frac{1}{P}$ را قرار میدهیم نتیجه میشود .

$$(x_1^P+y_1^P)^{\frac{1}{P}}+(x_2^P+y_2^P)^{\frac{1}{P}}\geq\left[(x_1+x_2)^P+(y_1+y_2)^P\right]^{\frac{1}{P}}$$

موقعی طرفین برابر خواهند بود که $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ باشد

همانطور که نامساویهای **کوشی** و **هلدر** و **مثلث** تعمیم داده شد نامساوی **مینکوفسکی** را نیز بصورت زیر میتوان تعمیم داد .

$$\left[(x_1^P+x_2^P+\dots+x_n^P\right]^{\frac{1}{P}}+\left[y_1^P+y_2^P+\dots+y_n^P\right]^{\frac{1}{P}}\geq\left[(x_1+y_1)^P+(x_2+y_2)^P+\dots+(x^n+y^n)^P\right]^{\frac{1}{P}}$$

که در آن تمام xها و yها مثبت هستند و $P>1$ میباشد

نامساویهای واسطه عددی و هندسی ـ کوشی ـ هلدر ـ مثلث ـ مینکوفسکی نامساویهای کلاسیك آنالیز ریاضی می‌باشند جدول زیر صورت خلاصه نامساویهای کلاسیك را نشان میدهد.

نام نامساوی	صورت نامساوی
واسطهٔ عددی وهندسی	$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\geq(a_1\cdot a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$
کوشی	$(a_1^2+a_2^2\dots+a_n^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)^{\frac{1}{2}}\geq a_1b_1+a_2b_2\dots a_nb_n$
هلدر	$(a_1^P+a_2^P\dots+a_n)^{\frac{1}{P}}(b_1^q+b_2^q+\dots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}\geq a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$
مثلث	$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)^{\frac{1}{2}}+(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)^{\frac{1}{2}}\geq[(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\dots+(a_nb_n)^2]^{\frac{1}{2}}$
مینکوفسکی	$(a_1^P+a_2^P+\dots+a_n^P)^{\frac{1}{P}}+(b_1^P+b_2^P+\dots b_n^P)^{\frac{1}{P}}\geq\left[(a_1+b_1)^P+(a_2+b_2)^P+\dots(a_n+b_n)^P\right]^{\frac{1}{P}}$

(مسائل مربوط به نامساویهای فوق در بخش «مسائل برای حل» درج میشود .

حل مسائل متفرقهٔ شماره های ۶ و ۷

حل مسألهٔ ۱۲۰۳ ـ تعیین حاصل ضرب زیر

$$P=(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)\cdots\times(1-x^{2^n}+x^{2^{n+1}})$$

عبارت طرف دوم را یك دفعه در $1+x+x^2$ ضرب و یکدفعه بر آن تقسیم می‌نمائیم وباتوجه باینکه

$$(1+x+x^2)(1-x+x^2)=1+x^2+x^4$$

$$(1+x^2+x^4)(1-x^2+x^4)=1+x^4+x^8$$

. . . . . .

$$(1+x^{2^n}+x^{2^{n+1}})(1-x^{2^n}+x^{2^{n+1}})=$$

$$=1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}$$

نتیجه خواهد شد

$$P=\frac{1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}}{1+x+x^2}$$

(حافظی ـ دبیر دبیرستان درخشانی بنس)

پاسخ های رسیده از : مرتضی رودگری آملی ـ مسلم امیرقلی ـ عبدالعلی رفتی جهرمی ـ احمد فربود ـ محمد علی کاویانی ـ محمد حسین هوشدار تهرانی ـ خسرو موحد ـ محمد شریف زاده ـ رضا منصوری ـ اسماعیل واعظقاسمی ـ محمد رضا طبیب زاده ـ بهمن طاهری ـ منصور معتمدی ـ ناصر توفیق مسعودیراتی ـ فرامرز رهبر ـ فیروز بایرامی ـ سیدمحمدقریشی

حل مسأله ۱۲۰۴ ـ شخصی که هفت پسر داشت وصیت کرد پس ازمرگش دارائی اوراکه شامل چند شتربود بترتیب زیر بین پسرانش تقسیم کنند : نصف عدهٔ شترها بعلاوهٔ نصف یك شتر سهم اولی باشد . نصف بقیه شترها بعلاوهٔ نصف یك شتر سهم دومی باشد ... بهمین ترتیب تا آخر . بعداز مرگ شخص طبق وصیت اوعمل شدعلاوه‌بر آنکه همهٔ شترها تقسیم شدهیچگاه مجبور نشدند که شتری را نصف نمایند. دارائی شخص چندشتر بوده‌است؟

فرض میکنیم عدهٔ شترها x باشد : داریم :

اولین باقیمانده $=\frac{x-1}{2}=\frac{x+1}{2}-x$ و سهم اولی $=\frac{x+1}{2}$

دومین باقیمانده $=\frac{x-3}{4}$ وسهم دومی $=\frac{x+1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{x-1}{4}$

. . . . . .

آخرین باقیمانده $=\frac{x-127}{128}$ و سهم هفتمی $=\frac{x+1}{27}$

و چون آخرین باقیمانده برابر صفراست پس

$x-127=0$ و $x=127$

(ایرج همت همراه)

یادآوری ـ نظیر مسألهٔ فوق با شمارهٔ ۱۴ در شمارهٔ اول مجله مطرح وحل آن درشمارهٔ دوم مجله درج شده است .

پاسخ های رسیده از: فرخنده نفیسی ـ عبدالعلی‌رفتی جهرمی ـ داود دانشور سعد آبادی ـ حسین اسد پور ـ محسن ـ آبشاری ـ مجید خرمی ـ رضادلاوریان ـ شاهرخ‌طاهری‌آشتیانی رضاکافی ـ بهروزرضوانی ـ یدالله ارضی ـ خسروموحد ـ محمد شریف زاده ـ محمدعلی کاویانی ـ رضا منصوری ـ اسماعیل‌واعظ قاسمی ـ محمد جواد غفوری ـ فرزاد امان پور ـ یوسف قانع کورش محسن‌زادگان ـ فرهاد مالی ـ فرهادکهن‌صدق ـ مسعود براتی ـ فرامرزرهبر ـ محمد مهدی‌صراف‌زاده ـ رحیم خیردوست فیروز بایرامی .

حل مسألهٔ ۱۲۰۵ تعیین x از معادلهٔ زیر .

$$(\sqrt[4]{x})^{\log_8 x+2}=8$$

(درشمارهٔ۶ مجله طرف دوم تساوی اشتباهی ۷چاپ‌شده است) از طرفین درمبنای ۸ لگاریتم میگیریم :

$$(\log_8 x+2)\log_8\sqrt[4]{x}=\log_8 8=1$$

$$\frac{1}{2}\log_8 x(\log_8 x+2)=1$$

با فرض $\log_8 x=y$ وپس از ساده‌کردن نتیجه میشود :

$$y^2+2y-3=0 \quad y=1 \text{ و } -3$$

$$\log_8 x=1 \text{ و } x=8 \quad \log_8 x=-3 \text{ و } x=\frac{1}{512}$$

(ضرت‌اله جنلو ـ دبیرستان‌دارالفنون)

پاسخ‌های رسیده از : سیدعلیرضا فاضلی ـ جمال لاله پرور ـ علی‌اصغرعرب ـ احمدفربود ـ محمدعلی کاویانی ـ محمد شریف زاده ـ رضا منصوری ـ فریبرز بهزومی ـ بهمن طاهری فرزاد امان پور ـ مجیدخرمی ـ کورش محسن‌زادگان ـ فرامرز محیط ـ سید حسن مشکین ـ مسعود براتی ـ فیروز بایرامی .

حل مسألهٔ ۱۲۰۶ ـ حل‌دستگاه دومعادلهٔ‌دومجهولی‌زیر:

$$\begin{cases}(0.2)^{2x-2y}=(\sqrt[4]{25})^{xy}\\(0.125)^{x^2+y^2}=\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2\times y+24}\end{cases}$$

با توجه به :

و $۲^{-۳}=۰٫۱۲۵$ و $\sqrt[۳]{۲۵}=۵^{\frac{۲}{۳}}$ و $۵^{-۱}=\frac{۱}{۵}=۰٫۲$

$$۴\sqrt{۲}=۲^{\frac{۵}{۲}}$$

و پس از اختصار دستگاه بصورت زیر درخواهد آمد

$$\begin{cases} ۵^{۲y-۲x}=۵^{\frac{۲xy}{۳}} \\ ۲^{-۳(x^۲+y^۲)}=۲^{-۵(xy+۱۲)} \end{cases}$$

و از آنجا نتیجه خواهد شد

$$\begin{cases} y-x=\frac{xy}{۳} \\ ۳(y-x)^۲+۶xy=۵xy+۶۰ \end{cases}$$

با حذف $y-x$ ازدو معادله بدست خواهد آمد

$x^۲y^۲+۳xy-۱۸۰=۰$ و $xy=۱۲$ و -۱۵

و بالاخره از دستگاههای

$$\begin{cases} xy=۱۲ \\ y-x=۴ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} xy=-۱۵ \\ y-x=-۵ \end{cases}$$

جوابهای $(x=۲ و y=۶)$ و $(x=-۶ و y=-۲)$ بدست میآید

(حسن تاهباز صالحی - دبیرستان هدف ۱)

پاسخ‌های صحیح رسیده از : داوود دانشور سمد آبادی - حمید قابوسی - حسین اسد پور - محمد فضل اللهی - علی اصغر عرب - احمد فریود - محمد علی کاویانی - محمد آگاه - محمد شریف زاده - حمید صبری - رضا منصوری - اسماعیل واعظ قاسمی - مجید خرمی - غلامحسین طاهری افشار - حسین رزاقی - حبیب پوردشتی - منصور معتمدی - فرزاد امان پور - کورش محسن زادگان - مسعود براتی - رحیم خیر دوست - فرامرز رهبر .

حل مسألهٔ ۱۲۰۷ـ با فرض $log۲=۰٫۳۰۱۰۳$ و $log۳=۰٫۴۷۷۱۲$ تعیین حاصل عبارت زیر

$$P=log\,sin۱۰^\circ+log\,sin۲۰^\circ+log\,sin۳۰^\circ+\cdots+$$
$$+log\,sin۸۰^\circ$$

$$P=log\,sin۱۰\cdot sin۲۰^\circ\,sin۳۰^\circ\cdots sin۸۰^\circ$$

$$sin۲۰^\circ sin۴۰^\circ\,sin۶۰^\circ sin۸۰^\circ=\frac{۱}{۲}(cos۲۰^\circ-cos۶۰^\circ)\times$$

$$sin۸۰^\circ sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(cos۲۰^\circ sin۸۰^\circ-\frac{۱}{۲}sin۸۰^\circ)=$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۸}(sin۱۰۰^\circ+sin۶۰^\circ-sin۸۰^\circ)=$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۸}(sin۸۰^\circ+sin۶۰^\circ-sin۸۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۸}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۱۶}$$

و بترتیب مشابه ثابت میشود که

$$sin۱۰^\circ sin۳۰^\circ sin۵۰^\circ sin۷۰^\circ=\frac{۱}{۱۶}$$

بنابراین $P=log\frac{۳}{۲۵۶}=log۳-۸log۲=\bar{۲}٫۰۶۸۸۸$

(بیژن طاهری - دبیرستان صنعتی سمنان)

پاسخ های رسیده از : مرتضی رودگری آملی - کاوه افرا - جمال لاله پرور - علی اصغر عرب - محمد حسین هوشدار تهرانی - رضا عندلیب - حمید صبری - رضا منصوری - محمدجواد غفوری - احمد سالك زمانخانی - ناصر توفیق - یدالله ارضی - کورش محسن زادگان - فرامرز رهبر .

حل مسألهٔ ۱۲۰۸ ـ اثبات اینکه بین تابع $y=\frac{k}{x}$ ومشتقات متوالی آن رابطهٔ زیر برقراراست .

$$y(x+۱)+y'(x+۲)+y''(x+۳)+\cdots+$$
$$+y^{(n-۱)}(x+n)+y^{(n)}x=k$$

تابع بصورت $xy=k$ نوشته میشود وچنانچه از طرفین این رابطه بتوالی مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$xy=K$$
$$y+xy'=۰$$
$$۲y'+xy''=۰$$
$$\cdots\cdots$$
$$ny^{(n-۱)}+xy^{(n)}=۰$$

طرفین تساویهای فوق را نظیر بنظیر باهم جمع میکنیم و چون $xy+y=y(x+۱)$ ودرجمع جملهٔ دوم هرتساوی با جملهٔ اول تساوی بعد میتوان ازمشتق‌های هم مرتبه فاکتور گرفت لذا در مجموع جملهٔ $xy^{(n)}$ بصورت منفرد باقی مانده و عبارت مطلوب بدست میآید .

(بیژن برهامی)

پاسخ‌های رسیده از : مسلم امیرقلی - جمال لاله‌پرور شاهرخ طاهری آشتیانی - احمدفردبود - عبدالعظیم ایزدی - خسرو موحد - رضا منصوری - اسماعیل واعظ قاسمی - احمد سالك زمانخانی - یدالله ارضی - فرامرز رهبر .

حل مسألهٔ ۱۲۰۹ـ تعیین عددی بصورت $\overline{cdu}$ بقسمی که

$$\overline{cdu}=\overline{cd}+\overline{du}+\overline{uc}$$

چون طرف دوم رابطه از $۳\times۹۹=۲۹۷$ متجاوز نیست پس یا $C=۱$ ویا $C=۲$. درازاء $C=۱$ داریم

$$۱۰۰+\overline{du}=۱۰+d+\overline{du}+۱۰u+۱$$

$۱۰u+d=۸۹$ یا $ud=۸۹$ و $u=۸$ و $d=۹$

وعدد مطلوب $\overline{cdu}=۱۹۸$ میباشد و چنانچه $C=۲$ باشد نتیجه خواهد شد $۱۰u+d=۱۷۸$ که قابل‌قبول نیست

(بهروز پرهامی)

پاسخ‌های رسیده از : احمدفربود ـ حمید صبری ـ رضاعندلیب ـ شاهرخ طاهری آشتیانی ـ رضادلاوریاز ـ رحیم محمدی قنبده‌ای ـ محسن آبشاری ـ محمدجواد غفوری ـ یعقوب سلامت ابراهیمی ـ حسین اسدپور ـ جمال لاله پرور ـ مظفر افقهی ـ مسلم امرقلی ـ مسعود برانی ـ مرتضی‌رودگری‌آملی یدالله ارضی ـ بیوك مددوی ـ عبدالعلی رفعتی ـ خسروموحد ـ احمد علی‌نیاکان ـ رضامنصوری ـ احمدسالك زمانخانی ـ ناصر توفیق ـ یوسف قانع ـ دیمیتری آواکیمیان ـ فیروز بایرامی ـ کیوان پورقاسمی مقدم .

حل مسألهٔ ۱۲۱۰ ـ اثبات اینکه منحنی‌های نمایش تابع $y=(x^۲-۷)^m$ درازاء جمیع مقادیر m ازچهار نقطهٔ ثابت میگذرند .

ازطرفین رابطهٔ تابع لگاریتم گرفته وحاصل رانسبت به m مرتب میکنیم :

$$m\log(۲x^۲-۷)-\log y=۰$$

برای اینکه مختصات یك نقطهٔ ثابت درازاء همهٔ مقادیر m دراین‌رابطه صدق کند لازم وکافیست که عبارت نسبت به m متحد باصفرباشد یعنی :

$$\begin{cases}\log(۲x^۲-۷)=۰\\ \log y=۰\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}۲x^۲-۷=۱\\ y=۱\end{cases}$$

وازاین دستگاه نتیجه خواهد شد $(x=\pm ۲ \text{ و } y=۱)$

ازطرف دیگر درازاء $y=۰$ داریم

$$(۲x^۲-۷)^m=۰ \text{ یا } ۲x^۲-۷=۰ \text{ و } x=\pm\sqrt{\frac{۷}{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۱۴}}{۴}$$

بنابراین مختصات چهارنقطهٔ ثابت بشرح زیر است :

$$\begin{vmatrix}x=۲\\ y=۱\end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix}x=-۲\\ y=۱\end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix}x=\frac{\sqrt{۱۴}}{۴}\\ y=۰\end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix}x=-\frac{\sqrt{۱۴}}{۴}\\ y=۰\end{vmatrix}$$

(خسروموحد ـ دبیرستان ادیب)

پاسخ‌های رسیده از : شاهرخ طاهری آشتیانی ـ حسین اسدپور ـ حمید قابوسی ـ محمدجواد غفوری ـ محسن آبشاری ـ حمید صبری ـ احمد فربود ـ رضاعندلیب ـ رضا منصوری ـ دیمیتری آواکیمیان ـ فرامرزدهیر ـ فیروزبایرامی .

حل مسألهٔ ۱۲۱۱ ـ رسم مثلثی که از آن یك رأس ، امتدادضلع گذرنده براین رأس ، طول ضلع مقابل باین رأس وشعاع دایرهٔ محاطی (داخلی یاخارجی نظیر رأس معلوم) در دست باشد .

اگر O و O' مراکزدوایرمحاطی‌داخلی‌ومحاطی‌خارجی داخل زاویه A ازمثلث ABC و T و T' نقاط تماس آنها با ضلع BC باشد .

$$\widehat{BOC}=\frac{\pi}{۲}+\frac{A}{۲} \text{ و } \widehat{BO'C}=\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}$$

بنابراین وقتی که اندازهٔ زاویهٔ A معلوم باشد اندازهٔ زاویه‌های BOC و BO'C معلوم خواهد بود . برای رسم مثلث بامعلومات داده شده ، ابتدا ضلع BC راکه معلوم است رسم مینمائیم آنگاه کمان درخورزاویهٔ برابر BOC یا BO'C وارسم مینمائیم تاخطی راکه بموازات BC وبفاصلهٔ برابر با شعاع دایره محاطی معلوم ازآن رسم میشود درنقطهٔ O یا O' قطع نماید . بامعلوم شدن مرکزدایره محاطی‌ورسم این دایره دوضلع دیگرمثلث بسادگی رسم میشود (سیدمحمدحسینی حق‌نواز)

پاسخ‌های رسیده از : عبدالعلی رفعتی‌جهرمی ـ جمال لاله پرور ـ حمید قابوسی ـ محسن آبشاری ـ علی اصغر عرب احمدفربود ـ محمدعلی‌کاویانی ـ محمدآگاه ـ محمد شریف‌زاده فرزاد امان‌بود .

حل مسألهٔ ۱۲۱۲ ـ حل‌دستگاه مثلثاتی زیر .

$$\begin{cases}\sin^۴x+\cos^۴y=\frac{۱}{۴}\\ \cos^۴x-\sin^۴y=\frac{۳}{۴}\end{cases}$$

طرفین دومعادله را یك دفعه باهم جمع ویك دفعه ازهم کم مینمائیم پس ازاختصارحاصل خواهد شد :

$$\begin{cases}۲\cos۲y=\sin^۲۲x\\ ۲\cos۲x+\sin^۲۲y=۳\end{cases}$$

$$\begin{cases}۲\cos۲y=۱-\cos^۲۲x\\ ۶\cos۲x+۱-\cos^۲۲y=۳\end{cases}$$

که چون درمعادلهٔ دوم بجای $\cos۲y$ مقدار آنرا از معادلهٔ اول قرار دهیم معادله ای نسبت به $\cos۲x$ بدست میآید که پس از تجزیهٔ آن خواهیم داشت :

$$(\cos۲x-۱)(\cos۲x-۷)=۰$$

واین معادله‌فقط دارای جواب $\cos۲x=۱$ یا $x=k\pi$ میباشد .

(احمد سالك زمانخانی)

پاسخ‌های رسیده از: محسن آبشاری ـ رضاعندلیب بیوك مددی احمد علی نیاکان ـ رضامنصوری ـ سیدجعفروفابخش

حل مسألهٔ ۱۲۱۳ ـ تعیین مجموع n جمله از رشتهٔ زیر

$$S=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$$

تساوی‌های زیررا در نظر میگیریم :

$$1\times2=1^2+1$$
$$2\times3=2^2+2$$
$$3\times4=3^2+3$$
$$\cdots\cdots$$
$$n(n+1)=n^2+n$$

از جمع طرفین تساویها نتیجه خواهد شد

$$S=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+$$
$$+(1+2+3+\cdots+n)$$

مجموع جمله‌های پرانتز اول برابر است با $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

و مجموع جمله‌های پرانتز دوم برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$

بنابراین:

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+$$
$$+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{3}\,n(n+1)(n+2)$$

(کامران پور مرادی ـ دبیرستان البرز)

پاسخ‌های رسیده از: زهرامعینی ـ محمد جوادغفوری عبدالعلی رفعتی ـ جمال لاله پرور ـ داود دانشور سعدآبادی حسین اسدپور ـ مجیدخرمی ـ خلیل فضل‌اللهی ـ شاهرخ طاهری آشتیانی ـ احمد حاج عظیم ـ بهروز رضوانی ـ عبدالعظیم ایزدی محمدآگاه ـ محمدحسین هوشدار تهرانی ـ محمد شریف‌زاده محمدعلی کاویانی ـ رضا منصوری ـ اسماعیل واعظ قاسمی یدالله ارضی ـ فرهادکهن صدق ـ فیروز بابرامی ـ منصورافقهی سید محمد قریشی.

حل مسألهٔ ۱۳۱۴ـ اثبات اینکه ریشه‌های دو معادلهٔ زیر عکس یکدیگرند

$$(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+\cdots+(x-n)^2=0$$
$$(x-1)^2+(2x-1)^2+(3x-1)^2+\cdots+$$
$$+(nx-1)^2=0$$

پس از بسط پرانتزها و مرتب نمودن معادلات خواهیم داشت .

$$(1)\ nx^2-2(1+2+3+\cdots+n)x+1^2+2^2+$$
$$+3^2+\cdots+n^2=0$$
$$(2)\ (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)x^2-2(1+2+$$
$$+2+\cdots+n)x+n=0$$

ضریب جملهٔ درجهٔ دوم و جملهٔ معلوم معادلهٔ اول بترتیب جملهٔ معلوم و ضریب جملهٔ درجهٔ دوم معادلهٔ دوم میباشد بنابر این ریشه‌های دو معادله عکس یکدیگرند

(ابوالقاسم محمدی ـ دبیرستان خوارزمی)

پاسخ‌های رسیده از : مجید خرمی ـ مسلم امیرقلی عبدالعلی رفعتی ـ کاوه افرا ـ جمال لاله پرور ـ داود دانشور سعدآبادی ـ احمد حاج عظیم ـ محمد جواد غفوری ـ شاهرخ طاهری آشتیانی ـ بهروز رضوانی ـ احمد فربود ـ عبدالعظیم ایزدی ـ بیوك مددی ـ خسرو موحد ـ محمد شریف زاده ـ محمدعلی کاویانی ـ رضامنصوری ـ اسماعیل واعظ قاسمی ـ بهمن طاهری ـ احمد سالك زمانخانی ـ ناصر توفیق ـ یدالله ارضی یوسف قانع ـ فرامرز رهبر ـ فیروز بابرامی منصور افقهی .

حل مسألهٔ ۱۳۱۵ـ حل معادلهٔ زیر :

$$(a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x^2+x^4)$$

باتوجه باینکه

$$1+x^2+x^4=(1+x^2)^2-x^2=$$
$$(1+x+x^2)(1-x+x^2)$$

معادله بصورت زیر ساده خواهد شد

$$(a-1)(1+x+x^2)=(a+1)(1-x+x^2)$$

وپس از اختصار خواهد شد

$$x^2-ax+1=0 \text{ و } x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$$

(آقا محمد آبادی ـ دبیرستان طاهری طهران)

پاسخ‌های رسیده‌از: فیروزبابرامی ـ فرزادامان پور رحیم خیر دوست ـ محمد مهدی صرافزاده ـ فرامرز محیط کورش محسن‌زادگان ـ ناصرتوفیق ـ منصور معتمدی ـ حسن ـ رزاقی ـ حبیب پوردشتی ـ احمدسالك زمانخانی ـ مهدی‌مقدسیان عبدالعلی رفعتی ـ کاوه افرا ـ جمال لاله پرور ـ حمید قاپوسی محمد جواد غفوری ـ محسن آبشاری ـ رحیم محمدی قنبده‌ای خلیل فضل‌اللهی ـ شاهرخ طاهری آشتیانی ـ حمید صبری احمد حاج عظیم ـ بهروز رضوانی ـ محمد رضا طبیب زاده اسماعیل واعظ قاسمی ـ رضامنصوری ـ احمدعلی‌نیاکان ـ محمد علی کاویانی ـ محمد شریف‌زاده ـ خسروموحد ـ بیوك مددی محمد حسین هوشدار طهرانی ـ یدالله ارضی ـ عبدالعظیم‌ایزدی احمد فربود .

حل مسألهٔ ۱۳۱۶ـ تبیین اینکه بین ساعت‌های ٤ و ٥ چه موقع عقربهٔ دقیقه شمار ۱۳ دقیقه از عقربهٔ ساعت شمار جلوتر است.

درهردقیقه از زمان عقربهٔ دقیقه شمار کمانی برابر با ٦ درجه می پیماید پس ١٣ دقیقهٔ آن معادل خواهد شد با $٧٨ = ٦ \times ١٣$ درجه. اگر x تعداددرجه‌هائی باشد که عقربهٔ ساعت شمار پس ازساعت٤ باید بپیماید تا عقربهٔ دقیقه شمار ٧٨ درجه ازآن جلوبیفتد با توجه باینکه درزمانی که ساعت شمار x درجه را می پیماید دقیه شمار یك کمان ١٢٠ درجه (از١٢ تا ٤) و یك کمان x درجه و بعلاوه کمان ٧٨ درجه را خواهد پیمود وباتوجه باینکه درزمانهای متساوی دقیقه شمار ١٢ برابرساعت شمار دوران میکند خواهیم داشت .

$$١٢٠ + x + ٧٨ = ١٢x \text{ و } x = ١٨$$

و چون عقربهٔ ساعت شمار هر یك درجهٔ دایرهٔ ساعت را درمدت ٢ دقیقه طی میکند بنابراین ١٨ درجه را درمدت ٣٦ دقیقه پیموده وساعت مطلوب عبارتست ازساعت ٤ و ٣٦ دقیقه .

(آقا محمدآبادی)

پاسخ های رسیده از : عبدالعلی رفعتی ـ کاوه افرا حمید قابوسی ـ احمد حاج عظیم ـ بهروز رضوانی ـ اسماعیل واعظ قاسمی ـ محمدعلی کاویانی ـ یدالله ارضی ـ سیدرضا کافی محمد شریف‌زاده ـ رضا منصوری ـ یوسف قانع ـ فیروز بایرامی

حل مسألهٔ ١٢١٧ ـ حل معادلهٔ زیر

$$(x-a-b)^٢(a-b)^٢+(x-b-c)^٢(b-c)^٢+$$
$$+(x-a-c)^٢(c-a)^٢=٠$$

با توجه باینکه

$$(x-a-b)^٢(a-b)^٢=[(x-a-b)(a-b)]^٢=$$
$$=[a(x-a)-b(x-b)]^٢$$

و با استفاده از اتحاد

$$(a-b)^٢+(b-c)^٢+(c-a)^٢=٢(a-b)\times$$
$$\times(b-c)(c-a)$$

معادله بصورت زیر نوشته میشود

$$٢(a-b)(x-a-b)(b-c)(x-b-c)(c-a)\times$$
$$\times(x-c-a)=٠$$

اگرداشته باشیم $a=b$ یا $b=c$ و یا $c=a$ تساوی فوق نسبت به x اتحاد خواهد بود و چنانچه $a\neq b\neq c$ باشد جوابهای زیر برای x بدست میآید .

$$x=a+b \text{ و } x=b+c \text{ و } x=c+a$$

(عبدعلی کرم زاده)

پاسخ های رسیده از : مسلم امیر قلی ـ احمد فربود محمد حسین هوشدار تهرانی ـ محمد شریف زاده ـ رضامنصوری احمد سالك زمانخانی ـ رحیم خیردوست ـ فرزاد امان پور فیروز بایرامی .

حل مسألهٔ ١٢١٨ ـ حل دستگاه دو معادلهٔ زیر

$$\begin{cases} x^y.y^y=٤^x \\ y^x.x^x=٤^y \end{cases}$$

از ضرب طرفین دومعادله دریکدیگر خواهیم داشت :

$$x^{x+y}y^{x+y}=٤^{x+y} \text{ یا } (xy)^{x+y}=٤^{x+y}$$

چون $x+y\neq ٠$ است (زیرا x و y مختلف‌العلامت نمیتوانند باشند) لذا $xy=٤$ واز معادلهٔ اول دستگاه داریم :

$$xy^y=٤^x \text{ یا } ٤^y=٤^x \text{ و } y=x$$

$$\begin{cases} xy=٤ \\ x=y \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=٢ \\ y=٢ \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=-٢ \\ y=-٢ \end{cases}$$

(داود حسینی)

پاسخهای رسیده از : زهرا معینی ـ کیوان‌پورقاسمی فیروز بایرامی ـ فرزاد امان‌پور ـ رحیم خیردوست ـ مسعودبراتی سید حسن مشکین ـ فرهادکهن صدق ـ دیمیتری آواکیمیان ـ فرامرز محیط ـ کورش‌محسن زادگان ـ یدالله ارضی ـ ناصر توفیق ـ سید حسن مرتضوی ـ منصور معتمدی ـ احمد سالك زمانخانی ـ محمد جواد غفوری ـ غلامحسین طاهری افشار ـ محمدرضا طبیب زاده ـ اسماعیل واعظ قاسمی ـ رضا منصوری حمیدصبری ـ محمدعلی کاویانی ـ محمد شریف‌زاده ـ بیوك مددی رضا عندلیب ـ احمد فربود ـ بهروز رضوانی ـ منصور حابری خلیل فضل‌اللهی ـ محسن آبشاری ـ یعقوب سلامت ابراهیمی احمد حاج عظیم ـ داود دانشور سعد آبادی ـ جمال لاله پرور مظفر افقهی ـ کاوه افرا ـ فرامرز قائمی ـ شاهرخ طاهری عبدالعلی رفعتی‌جهرمی ـ علی‌اصغرمنتظرحقیقی ـ مهدی مقدسیان مرتضی رودگری آملی ـ سید علیرضا فاضلی .

حل مسألهٔ ١٢١٩ ـ اگرطولهای اضلاع مثلثی جمل متوالیه از یك تصاعد هندسی باشند ثابت کنید که قدر نسبت این تصاعد تابع شرط زیر است .

$$\frac{١}{٢}(\sqrt{٥}-١)<q<\frac{١}{٢}(\sqrt{٥}+١)$$

(یادآوری ـ در چاپ صورت مسأله جمله طرف چپ از قلم افتاده است) .

چنانچه a طول ضلع و q قدر نسبت تصاعد باشد اضلاع مثلث بصورت a و aq و $aq^٢$ بوده و لازم وکافیست که داشته باشیم

$$|a-aq|<aq^٢<a+aq$$

که از این نامساوی مضاعف دو دستگاه زیرنتیجه میشود

$$\begin{cases} q>١ \\ q^٢-q+١>٠ \\ q^٢-q-١<٠ \end{cases} \text{ و } \begin{cases} q<١ \\ q^٢+q-١>٠ \\ q^٢-q-١<٠ \end{cases}$$

وبعداز تعیین ریشه‌های مشترک نامساوی‌های هردستگاه ، رابطهٔ کلی زیر نتیجه خواهد شد .

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)<q<\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

(احمد حاج علیم دبیرستان طاهری
فرامرز رهبر دبیرستان شرق)

پاسخ‌های رسیده از : فیروز بایرامی ـ فرزادامان‌پور ـ دیمیتری آواکیمیان ـ فرهاد مالی ـ فرامرز محیط ـ کورش محسن‌زادگان ـ یدالله ارضی ـ حبیب پور دشتی ـ حسین رزاقی ـ منصور معتمدی ـ ـ محمد جواد غفوری ـ بهمن طاهری ـ محمدرضا طبیب زاده‌نوری ـ رضا منصوری ـ محمد شریفزاده ـ احمد فربود ـ محمدعلی کاویانی ـ بهروزرضوانی ـ رضا عندلیب ـ محسن آبشاری ـ حمیدقابوسی ـ جمال‌لاله‌پرور حسین اسدپور ـ شاهرخ طاهری آشتیانی ـ مسعود براتی .

حل مسألهٔ ۱۳۲۰ـ چهارخط که یکدیگررا درحدود صفحهٔ نقشه‌قطع نمی‌کنند مفروض است مطلوبست رسم اقطارچهار ضلعی حاصل ازچهار خط .

نقطه‌ای مانند S درنظر می‌گیریم . بمرکزS و با نسبت $k<1$ مجانس خطوط‌مفروض را تعیین میکنیم تا یک‌چهارضلعی بدست آید . مجانس‌های اقطار این چهار ضلعی در تجانس $(S$ و $\frac{1}{k})$ اقطار مطلوب میباشند .

(سید محمدحسین حق‌نواز ـ بابل)

پاسخ‌های رسیده از : کورش محسن‌زادگان ـ رضا منصوری ـ خسرو موحد ـ احمدحاج علیم .

حل مسألهٔ ۱۳۲۱ـ چون‌درچاپ صورت مسأله اشتباه رخ داده است‌دربخش «مسائل برای‌حل» مجله مجدداً این‌مسأله با صورت صحیح‌مطرح خواهدشد .

حل مسألهٔ ۱۳۲۲ـ بفرض $f(x)=\frac{1}{1-x}$ تحقیق اینکه $fff(x)=y$ است

$$fff(x)=ff\left(\frac{1}{1-x}\right)=f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right)=$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}}=\cdots=x$$

(محمد محروق علوی دانشجوی فنی)

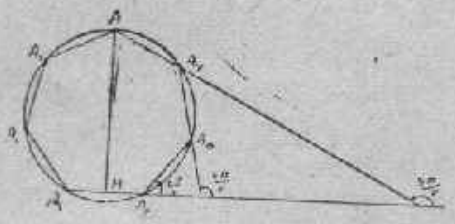
پاسخ‌های رسیده از : دیمیتری آواکیمیان ـ یدالله ارضی ـ ناصرتوفیق ـ بهمن‌طاهری ـ رضا منصوری ـ خسروموحد ـ احمد فربود ـ عبدالعظیم ایزدی ـ رضا عندلیب ـ علی‌اصغرعرب ـ جمال‌لاله‌پرور ـ حسین اسدپرور ـ مسلم امیرقلی ـ فرهادکهن ـ صدق ـ فرامرزرهبر ـ فیروز بایرامی .

حل مسألهٔ ۱۳۲۳ـ تعیین نقطه‌ای مانند M بر دایرهٔ مفروض O بطوریکه مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ داده شده می‌نیمم باشد .

برای جلب توجه بیشتر خوانندگان به‌این مسألهٔ جالب مجدداً برای‌حل مطرح‌خواهد شدویادآوری مینمایدکه تاکنون پاسخ صحیحی برای‌آن دریافت نشده است .

حل مسألهٔ ۱۳۲۴ـ اثبات رابطهٔ زیر .

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$



راه اول ـ کثیرالاضلاع منتظم $2n+1$ ضلعی $A_1A_2\cdots A_{2n}$ با ضلع به‌طول a را در نظرمیگیریم چنانچه H وسط ضلع A_nA_{n+1} (ضلع مقابل به‌رأس A) باشدداریم

$$\overrightarrow{HA_{n+1}}+\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}+\cdots+\overrightarrow{A_{2n}A}+\overrightarrow{AH}=0$$

چنانچه حاصلهای فوق‌را روی امتداد حامل $\overrightarrow{HA_{n+1}}$ تصویر کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{a}{2}+a\cos\frac{2\pi}{2n+1}+a\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+a\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=0$$

و از تقسیم طرفین تساوی‌بر a رابطهٔ مطلوب بدست‌میآید

مثال ـ برای هفت‌ضلعی منتظم (مطابق شکل) داریم

$$\overrightarrow{HA_4}+\overrightarrow{A_4A_5}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_6A}+\overrightarrow{AH}=0$$

و بعداز تصویر بر امتداد $\overrightarrow{HA_4}$ نتیجه میشود

$$\frac{a}{2}+a\cos\frac{2\pi}{7}+a\cos\frac{4\pi}{7}+a\cos\frac{6\pi}{7}=0$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

(مهندس عباس سعیدی)

راه دوم ـ چنانچه O مرکز $2n+1$ ضلعی منتظم باشد داریم :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{2n}}=0$$

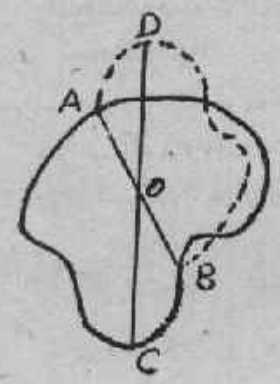
برای اینکه حاملهای $\overrightarrow{OA_1}$ و $\overrightarrow{OA_{2n}}$ نسبت به OA قرینه بوده مجموع هندسی آنها در امتداد $\overrightarrow{OA}$ میباشد همچنین مجموع هندسی دوحامل $\overrightarrow{OA_2}$ و $\overrightarrow{OA_{2n-1}}$ نیزدر امتداد $\overrightarrow{OA}$ است و حاملهای دیگریعنی مجموع هندسی تمام حاملهاحاملی‌است درامتداد OA و بهمین‌ترتیب ثابت‌میشود که این‌مجموع هندسی درامتداد OA_1 و OA_2 و... نیزواقع است پس بناچار صفراست) .

از تصویرحاملهای فوق بر امتداد OA رابطهٔ مطلوب حاصل خواهد شد .

راه سوم ـ طرفین را در $2\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب‌نموده وحاصل‌ضربهارا تبدیل به‌حاصل جمع‌مینمائیم. پس از حذف جمله‌های متشابه طرفین با یکدیگر مساوی شده صحت رابطه محقق میشود.

پاسخ‌های رسیده از : احمد سالك زمانخانی ـ مسلم امیر قلی ـ شاهرخ طاهری آشتیانی ـ جمال لاله‌پرور ـ رضا منصوری ـ اسماعیل واحد قاسمی ـ بهمن طاهری ـ پرویز ابراز اصل .

حل مسألهٔ ۱۲۲۵ـ خم (منحنی) بسته‌ای بدون هیچ نقطهٔ تقاطع وبطول 2l واقع دریك صفحه داده شده است نقطه‌ای چنان بیابید که فاصلهٔ آن ازهر نقطهٔ خم کمتر از l و یا مساوی با آن باشد .



نقطهٔ A را روی خم اختیار میکنیم . اگر نقطهٔ B نقطه‌ای از خم باشد که طول خم AB برابر با l باشدنقطهٔ O وسط AB جواب مسأله‌است‌زیرا اگرفرض کنیم C نقطه‌ای ازخم باشد که $OC>l$ و D قرینهٔ C نسبت به O باشدداریم $CD>2l$ حال اگر قرینهٔ خم ACB را نسبت به O رسم کنیم خواهیم داشت $\widehat{DBC}=2l$ وچون $DC<\widehat{DBC}$ پس‌روابط $\widehat{DBC}=2l$ و $DC=2l$ محال‌اند بنابراین نقطهٔ C با شرط $OC>l$ وجود ندارد .

(مهدی بهزاد ـ دانشگاه میشیگان)

***

مسائل متفرقهٔ شمارهٔ ۷

حل مسألهٔ ۱۴۴۲ـ متأسفانه درچاپ صورت‌مسأله اشتباه رخ‌داده است که ذیلاصورت صحیح‌مسأله وحل‌آن درج میشود.

معادله زیررا حل کنید :

$$\log_2 x \log_3 x + \log_2 x \log_5 x + \log_3 x \log_5 x = \frac{1}{\log_x 2 \log_x 3 \log_x 5}$$

طرفین معادله را در مخرج طرف دوم ضرب مینمائیم با توجه باینکه $\log_b a \cdot \log_a b = 1$ خواهیم داشت :

$$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 = 1$$

$$\log_x 30 = 1 \text{ و } x = 30$$

(محمدرضا آلهی ـ دبیرستان دارالفنون)

پاسخ‌های رسیده از: رضا منصوری ـ رسول‌حسین‌زاده ـ فرامرز پورقلی‌زاده .

حل مسألهٔ ۱۴۴۳ـ بفرض $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

اثبات رابطهٔ زیر

$$\sqrt[3]{\frac{3a^2c-2ace}{3b^2d-2bdf}}=\sqrt{\frac{a^2-ac+e^2}{b^2-bd+f^2}}$$

میتوانیم بنویسیم :

$$a=bK \text{ و } c=dK \text{ و } e=fK$$

$$\sqrt[3]{\frac{3a^2c-2ace}{3b^2d-2bdf}}=\sqrt[3]{\frac{3K^2b^2d-2K^2bdf}{3b^2d-2bfd}}=$$

$$\sqrt[3]{K^3}=K \text{ و } \sqrt{\frac{a^2-ac+e^2}{b^2-bd+f^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{K^2b-K^2bd+K^2f^2}{b^2-bd+f^2}}=\sqrt{K^2}=K$$

لذا طرفین رابطه با یکدیگربرابرند .

(ترجمهٔ : ناصر خیرخواه)

پاسخ‌های رسیده از : رضا منصوری ـ غلامحسین طاهری افشار ـ فرامرز رهبر ـ علی‌اکبرخاکی ـ محمدشریف‌زاده ـ مهدی‌فائق ـ فیروزبایرامی ـ بهمن‌طاهری ـ محمدجواد غفوری ـ فیروز ایمانی ـ حسین‌اسدپور ـ قاسم اخوان ـ ناصر نصیری ـ مرتضی رودگری آملی .

حل مسألهٔ ۱۴۴۴ـ اگرداشته باشیم :

$$\frac{A}{E}=\frac{B}{F}=\frac{C}{G}=\frac{H}{D}$$ اثبات

$$\sqrt{AE}+\sqrt{BF}+\sqrt{CG}+\sqrt{DH}=$$
$$\sqrt{(A+B+C+D)(E+F+G+H)}$$

فرض میکنیم :

$$A=E\cdot K \text{ و } B=FK \text{ و } C=GK \text{ و } D=HK$$

خواهیم داشت :

$$A+B+C+D=K(E+F+G+H)$$
$$(A+B+C+D)^2=K(E+F+G+H)(A+B+C+D)$$
$$\frac{A+B+C+D}{\sqrt{K}}=\sqrt{(E+F+G+H)(A+B+C+D)}$$

کسر طرف اول را بصورت زیر تبدیل مینمائیم

$$\frac{A}{\sqrt{K}}+\frac{B}{\sqrt{K}}+\frac{C}{\sqrt{K}}+\frac{D}{\sqrt{K}}=\sqrt{AE}+\sqrt{BF}+\sqrt{CG}+\sqrt{DH}$$

و طرفین رابطهٔ مفروض با یکدیگر مساویند

(مصطفی گودرزی دانشجوی علوم)

پاسخ‌های رسیده از : بیوك مددی ـ رضا منصوری ـ جمال‌لاله‌پرور ـ عبدالعلی رفعتی ـ ناصر محمدی ـ کاوه افرا ـ خسرو ظهور ـ غلامحسین طاهری افشار ـ علی‌اکبر خاکی ـ مسعودمنصوری ـ رحیم خیردوست ـ رحیم‌محمدی فتیده‌ای ـ حسین نادمپور ـ محمد شریف‌زاده ـ مرتضی رودگری آملی ـ مهدی فائق ـ فیروز بایرامی ـ یعقوب سلامت ابراهیمی ـ حسین‌اسدپور ـ محمدجواد غفوری ـ رضانوروزی ـ قاسم اخوان ـ ناصر نصیری.

حل مسأله ۱۴۴۵ـ بفرض $\alpha^9=1$ و $\alpha\neq 1$ اثبات

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^4}+\frac{\alpha^3}{1+\alpha^6}+\frac{\alpha^4}{1+\alpha^8}=K$$

$$\alpha^9-1=(\alpha-1)(\alpha^8+\alpha^7+\cdots+\alpha+1)=0$$

و چون $\alpha\neq 1$ است پس عبارت داخل پرانتز دوم برابر با صفر میباشد وبا توجه باینکه $\alpha^{9+n}=\alpha^9.\alpha^n=\alpha^n$ مخرج مشترك عبارت $f(\alpha)$ بصورت زیر تبدیل میشود .

$$(1+\alpha^8)(1+\alpha^6)(1+\alpha^4)(1+\alpha^2)=$$
$$=(1+\alpha^8)(1+\alpha^2+\alpha^4+2\alpha^6+\alpha^8+\alpha^{10}+\alpha^{12})=$$
$$=(1+\alpha^8)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+2\alpha^6+\alpha^8)=$$
$$=(1+\alpha^8)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^8)+\alpha^6-\alpha^7-\alpha^5$$
$$=(1+\alpha^8)(\alpha^6-\alpha^7-\alpha^5)=-(\alpha^4+\alpha^7)$$

و عبارت صورت کسر $f(\alpha)$ پس از ساده شدن و استفاده از فرض برابر خواهد شد $\alpha^4+\alpha^7$ بنابراین خواهیم داشت :

$$f(\alpha)=-1$$

(مجید بهمنش دانشجوی فنی)

حل مسألهٔ ۱۴۴۶ـ بفرض اینکه باقیماندهٔ تقسیم $J(x)$ بر $x-a$ برابر A وبر $x-b$ برابر b و بر $x-c$ برابر C باشد تعیین باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)(x-b)(x-c)$. نظیر مسألهٔ ۱۰۸۵ که‌حل‌آن در مجلهٔ شمارهٔ ۷ درج شده است عمل نموده وخواهیم داشت :

$$R=A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+$$
$$+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

(علی شیعه بیگی دانشجوی فنی)

پاسخ‌های رسیده از : فرامرز پورقلی‌زاده ـ محمد کریم همیری ـ محمد شریف‌زاده ـ فرامرز رهبر ـ کاوه افرا ـ حسین اسدپور ـ فرزاد امان‌پور ـ رمضانعلی صفائی .

حل مسألهٔ ۱۴۴۷ـ اولا اثبات اینکه‌بازاء جمیع‌مقادیر n عبارت زیر بر $(x-1)^4$ بخش‌پذیر است . ثانیاً تعیین مقدار n برای اینکه عبارت بر $(x-1)^5$ نیز بخش‌پذیر باشد(صورت مسأله اصلاح شده است) .

$x=1$ در عبارت فوق و مشتقات اول و دوم و سوم آن صدق میکند بنابراین عبارت بر $(x-1)^4$ بخش پذیر است و برای اینکه بر $(x-1)^5$ نیز بخش پذیر باشد کافیست که $x=1$ در مشتق چهارم آن صدق نماید که نتیجه خواهد شد .

$$2n(n^2-7n+6)=0 \text{ و } n=0 \text{ و } 1 \text{ و } 6$$

(علی شیعه بیگی دانشجوی فنی)

پاسخ‌های رسیده از: فرامرزپورقلی‌زاده ـ محمدکریم همیری ـ محمد شریف‌زاده ـ خسروظهور ـ ناصرمحمدی ـ حسین اسدپور ـ هدایت شجاعی ـ بیوك مددی .

حل مسألهٔ ۱۴۴۸ـ (صورت مسأله با اضافه نمودن‌یك تذکراصلاح شده است) بفرض اینکه

$$\frac{\varphi(x)}{x-a_1}=A_1 \text{ و } \frac{\varphi(x)}{x-a_2}=A_2 \text{ و } \frac{\varphi(x)}{x-a_m}=A_m \quad (1)$$

و $f(x)$ حاصل تقسیم $\varphi(x)$ برحاصلضرب

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m) \quad (2)$$

بوده وبعلاوه حاصل $A_1A_2\cdots A_m$ برابر مقدار ثابت باشد صحت رابطهٔ زیررا تعیین کنید .

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{(1-m)A_1A_2\cdots A_m}{[\varphi(x)]^m}$$

از ضرب روابط (۱) دریکدیگرخواهیم داشت :

$$\frac{[\varphi(x)]^m}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)}=A_1A_2\cdots A_m$$

دانش آموزان رتبهٔ اول ششم طبیعی

کرمانشاه

آقای مسعود آزموده

در کرمانشاه متولدشده دورهٔ ابتدائی را با معدل ۱۹/۲۵ در دبستان اسلامی با مقام رتبه اول بپایان رسانیده وتحصیلات متوسطه را در دبیرستان رازی گذرانده و درخرداد ۴۳ با معدل **۱۹** بین شرکت کننده گان رشتهٔ طبیعی حائز رتبهٔ اول شده است .

خبرنگار یکان ـ بهادری

تویسرکان

آقای علاءالدین اعظمی

دانش آموز دبیرستان شاهپور تویسرکان درامتحانات ششم طبیعی خرداد ۴۳ با معدل **۱۴/۵** رتبهٔ اول راحائز گردیده است . نامبرده در سال ۱۳۲۵ درهمدان متولد شده تحصیلات ابتدائی را در همدان شروع نموده وتحصیلات متوسطه رادردبیرستان شاهپور تویسرکان بپایان رسانده است

اکبر حسنی

و با توجه به (۲) نتیجه خواهد شد

$$f(x)=\frac{A_1A_2\cdots A_m}{[\varphi(x)]^{m-1}}$$

ازطرفین مشتق میگیریم وچون صورت کسر طرف دوم ثابت است لذا

$$f'(x)=\frac{-A_1A_2\cdots A_m(m-1)\varphi'(x)[\varphi(x)]^{m-2}}{[\varphi(x)]^{2m-2}}$$

وبالاخره بدست خواهدآمد که

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{(-m)A_1A_2\cdots A^m}{[\varphi(x)]^m}$$

تبصره ـ بایك تابع اولیه گرفتن تابع $\varphi(x)$ بشکل زیر معین میشود

$$\varphi(x)=K\sqrt[m]{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)}$$

(منصور تعلمی ـ دبیرستان دارالفنون)

پاسخهای رسیده از : فیروزپایرامی ـ مهدی فائق ـ محمدجواد غفوری ـ خسروظهوری ـ کاوه افرا

حل مسألهٔ ۱۴۴۹ ـ بفرض

$$u_n=(\sqrt{a^2x^2+b}+ax)^n+(\sqrt{a^2x^2+b}-ax)^n$$

$$v_n=(\sqrt{a^2x^2+b}+ax)^n-(\sqrt{a^2x^2+b}-ax)^n$$

اثبات روابط زیر

۱) $u_nu_m-v_nv_m=2b^mu_{n-m}$

۲) $u_nu_m+v_nv_m=2u_{n+m}$

۳) $\frac{u'_n}{v'_n}=\frac{v_n}{u_n}$

۴) $\frac{u_n-v_n}{u_n+v_n}+\frac{u_n+v_n}{u_n-v_n}=\frac{u_{2n}}{b_n}$

اثبات روابط (۱) و(۲) ، فرض میکنیم .

$$(\sqrt{a^2x^2+b}+ax)=A \text{ و } (\sqrt{a^2x^2+b}-ax)=B$$

$$B=\sqrt{a^2x^2+b}-ax=\frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+a}=\frac{b}{A}$$

وبهمین ترتیب $A=\frac{b}{B}$

$$u_nu_m=(A^n+B^n)(A^m+B^m)=A^{n+m}+B^{n+m}$$

$$+A^mB^n+A^nB^m=u_{n+m}+\frac{b^m}{B^m}B^n+\frac{b^m}{A^m}A^n=$$

$$u_{n+m}+b^mu_{n-m}$$

و بهمین ترتیب نتیجه خواهد شد .

$$V_nV_m=u_{n+m}-b^mu_{n-m}$$

از جمع وتفاضل دو رابطهٔ فوق روابط (۱) و(۲) حاصل خواهد شد .

$$(u_n)^2=A^{2n}+B^{2n}+2b^n$$

$$(V_n)^2=A^{2n}+B^{2n}-2b^n$$

$$(u_n)^2-(V_n)^2=4b^m$$

$$2u'_nu_n-2V'_nV_n=0 \text{ و } \frac{u'_n}{V'_n}=\frac{V_n}{v_n}$$

$$\frac{u_n}{V_n}=\frac{A^n+B^n}{A^n-B^n}\rightarrow\frac{u_n-V_n}{u_n+V_n}=\frac{B^n}{A^n}$$

$$\frac{u_n+V_n}{u_n-V_n}=\frac{A^n}{B^n}$$

$$\frac{u_n-V_n}{u_n+V_n}=\frac{n_n+V_n}{u_n-V_n}=\frac{A^{2n}+B^{2n}}{A^nB^n}=\frac{u_{2n}}{b^n}$$

(سیروس فخریاسری دانشجوی فنی)

پاسخهای رسیده از : فیروزپایرامی ـ مهدی فائق ـ محمدکریم همیری ـ فرامرز رهبر ـ خسرو ظهور ـ شاهرخ طاهری آشتیانی .

راهنمای ریاضیات متوسطه

حل جبری مسائل فکری

ترجمهٔ از : F.G.M.

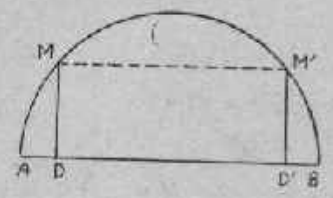
توسط : هوشنگ شریف‌زاده دبیر فیزیك دبیرستانهای نی‌ریز

درحل جبری مسائل فکری که منجر بحل معادلات میگردد چهار مرحلهٔ زیر رعایت میشود :

۱- انتخاب مجهول یا مجهولات ۲- تشکیل معادلات ۳- حل معادلات ٤- بررسی نتایج

۱- انتخاب مجهولات : اغلب کمیتی‌را که بایدبعنوان مجهول انتخاب نمود درمسأله بیان شده است ولی اگر مشخص نشده باشد بایدآنرا طوری انتخاب نمودکه بسادگی به نتیجه رسیده و ابهام وتناقضی درحل مسأله پیش نیاید .

مثلاً فرض‌میکنیم ، منظورتعیین نقطهٔ M روی نیم‌دایره‌ای بقطر AB باشد : نباید MD را بعنوان مجهول انتخاب نمود ، زیرا بامعلوم شدن این فاصله ، نقطهٔ M کاملا مشخص نشده است. زیرا نقطهٔ دیگر M' نیز میتوان یافت که فاصله‌اش از قطر برابر فاصلهٔ نقطهٔ M از قطر دایره باشد بنابراین بهتر است AD را بعنوان مجهول انتخاب کرد ، زیرا با معلوم‌بودن نقطهٔ D مکان نقطهٔ M نیز بطور کامل مشخص میشود .مجهولاتی که انتخاب میشوند با حروف x و y و z و .... نمایش داده میشوند .



۲- تشکیل معادلات : یعنی نوشتن معادلاتی که حاصل از روابط بین معلومات و مجهولات مسأله است ، این روابط براساس توضیحات مسأله ویا براساس خواص هندسی یا جبری بیان میشوند . باید در نظر داشت که همیشه باید تعدادمعادلاتی که تشکیل میدهیم برابر تعداد مجهولات باشد.

۳- حل معادلات : مطابق آنچه درجبر معمول است عمل میشود .

۴- بررسی نتایج : مسأله ممکن است طوری طرح شده باشد که شامل‌شرایط خاصی‌برای جواب باشد از قبیل‌حدود مقدار ، علامت وعدد صحیح بودن. در اینصورت خود معادلات از تفسیر جوابها عاجز میباشند.

اگر معلومات مسأله عددی باشند ، جوابها را بسادگی میتوان با شرایط موجود تطبیق کرد و نتیجه را از نظر صحت وسقم بررسی نمود و اگر مسأله بصورت حرفی مطرح شده‌باشد باید روابطی را پیدا کرد که بین معلومات موجود باشد تا حل مسأله امکان پذیر باشد وحالات مختلف راکه در ازاء مقادیر حروف پیش میآید مورد مطالعه قراردارد (بحث نمود) .

اگرمسأله هیچگونه جوابی نداشته باشد **غیرممکن** و درصورتیکه‌تعداد جوابهای آن نامحدودباشد **مبهم** نامیده‌میشود

چند مثال :

۱۴۶۷- عددی‌را بین ٤۰۰ و ۵۰۰ پیدا کنید که‌مجموع ارقام‌آن ۹ باشد و اگر ارقام آنرا بعکس ترتیب بنویسیم ، عدد حاصل $\frac{۳۶}{٤۷}$ عدد اولیه باشد .

حل : چون عددی که درجستجوی آن میباشیم بین ٤۰۰ و ۵۰۰ قرارگرفته بنابراین رقم صدگان آن برابر ٤میباشد ومجموع دو رقم دیگره خواهد بود . این دورقم را به x و y نمایش میدهیم بنابراین $x+y=۵$ (۱)

و از فرض دیگر مسأله باید نوشت

$$۱۰۰y+۱۰x+٤=\frac{۳۶}{٤۷}(۱۰۰\times ٤+۱۰x+y)$$

ویا $٤٦٦٤\,y+۱۱۰y=۱٤۲۱۲$ (۲)

از حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) حاصل میشود ، $x=۲$ و $y=۳$ بنابراین عدد مطلوب ٤۲۳ میباشد .

۱۴۶۸- کدام عدد است که اگرازنصف‌آن ۸ واحد کم شود چهار برابر $\frac{۱}{۸}$ آن منهای ۲واحد گردد .

حل : عدد مطلوب را به x نمایش میدهیم بنابراین‌طبق فرض مسأله میتوان نوشت $\frac{x}{۲}-۸=٤\left(\frac{x}{۸}-۲\right)$

و یا $8x-8x=64-64$ وبالاخره $x\times 0=0$

بحث : چون معادلهٔ فوق بازاء کلیهٔ مقادیر x قابل قبول است بنابراین مسأله **مبهم** میباشد .

۱۴۶۹ـ ابعاد مستطیلی را پیدا کنید که اگر بقاعدهٔ آن ۲ متر وبارتفاع آن ۶ متر اضافه شود ، بمساحت آن ۹۶ مترمربع افزوده شود و اگر ۵ متر از قاعده و ۱۵ متر از ارتفاع بکاهیم مساحت آن ۱۳۵ مترمربع کم شود .

حل ـ قاعدهٔ مستطیل را به x وارتفاع آنرا به y نمایش میدهیم بنابراین طبق فرضیات مسأله میتوان نوشت:

$$(I)\begin{cases}(x+2)(y+6)=xy+96\\(x-5)(y-15)=xy-135\end{cases}$$

و یا پس از ساده کردن

$$(II)\begin{cases}3x+y=42\\3x+y=42\end{cases}$$

بحث : درحقیقت برای حل مسأله که شامل دو مجهول میباشد بیش ازیك معادله نداریم . سیستم I **مبهم** میباشد ،ولی تمام مقادیری از x و y که در معادلهٔ I صدق میکنند نمیتوانند جواب مسأله باشند . زیرا اگر معادلهٔ سیستم II را طبق زیر بنویسیم $y=42-3x$ و یا $y=3(14-x)$ و چون x و y ابعاد مستطیل بوده باید مثبت باشند $x<14$ و از طرفی طبق مفروضات مسأله x نمیتواند از ۵ کمتر باشد بنابراین $5<x<14$ یعنی x میتواند مقادیری بین ۵ و ۱۴ داشته باشد وچون $y>15$ بنابراین طبق معادلهٔ سیستم II باید $3x<27$ و یا $x<9$ ، پس بطورکلی مقادیری که x میتواند اختیار کند بین ۵ و ۹ میباشد که برای y نیزمقادیری بین ۱۵ و ۲۷ بدست خواهد آمد .

۱۴۷۰ـ ابعاد مستطیلی را پیدا کنید که اگر ۴ متر بقاعده و ۱۲ متر بارتفاع آن بیافزائیم ۶۰ مترمربع مساحت آن زیاد میشود و اگر یك متر از قاعده و ۳ متر از ارتفاع آن کم کنیم ۸ متر مربع ازمساحت آن کم شود .

حل : قاعده را به x و ارتفاع را به y نمایش میدهیم

بنابراین

$$\begin{cases}(x+4)(y+12)=xy+60\\(x-1)(y-3)=xy-8\end{cases}$$

وپاس از ساده کردن

$$\begin{cases}3x+y=3\\3x+y=11\end{cases}$$

این معادلات ممتنع بوده و حل مسأله **غیر ممکن** است

***

تعبیر جوابهای منفی

اغلب دربعضی از مسائل جوابهای منفی قابل قبول بدست میآید که بایستی تعبیر شود بمثال زیرتوجه شود .

۱۴۷۱ـ سن پدری ۳۹ سال وسن پسرش ۱۵ سال میباشد، چند سال دیگر سن پدر سه برابر سن پسر خواهد شد ؟

حل : فرض میکنیم x زمانی باشد که در جستجوی آن میباشیم و میدانیم بعد از x سال سن پدر $39+x$ و سن پسر $15+x$ سال میباشد و طبق فرض مسأله

$39+x=3(15+x)$ وازآنجا $x=-3$

تعبیر جواب منفی ـ در ابتدا چنین بنظر میرسد که مسأله **غیرممکن** باشد یعنی هرگز درآینده زمانی یافت نخواهد شد که سن پدر سه برابر سن پسر گردد ولی این موضوع دلیل این نیست که درگذشته چنین امری اتفاق نیافتاده باشد واگر مسأله بصورت زیرطرح شده بود این اشکال پیش نمیآمد : سن پدری ۳۹ و سن پسرش ۱۵ سال میباشد ، درچه زمانی سن پدر سه برابر سن پسر بوده است .

وحل مسأله بطریق زیر انجام میگرفت

$39-x=3(15-x)$ و ازآنجا $x=3$ یعنی سه سال پیش چنین امری اتفاق افتاده است .

***

مسائلی که بعضی از معلومات آن بصورت حروف بیان شده است

۱۴۷۲ـ روی محور $X'X$ که از دونقطهٔ معلوم A و B میگذرد ، نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که $\frac{MA}{MB}$ مساوی مقدار معلوم k باشد .

حل : نقطه o را مبداء واز X' بطرف X را جهت مثبت

$X \quad M \quad A \quad o \quad B \quad X'$

اختیار میکنیم و طول نقاط A و B و M را به a و b و x نمایش میدهیم طبق قضیه شال میتوان نوشت :

$$\overline{MA}=\overline{OA}-\overline{OM}=a-x \quad \text{و}$$

$$\overline{MB}=\overline{OB}-\overline{OM}=b-x$$

بنابراین $\frac{a-x}{b-x}=k$ و یا $x(k-1)=kb-a$

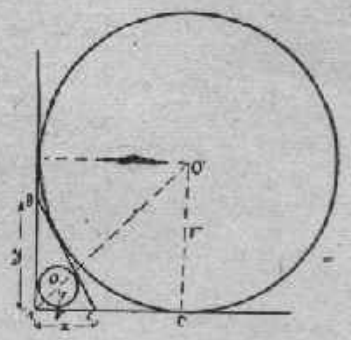
بحث : اگر $k\neq 1$ باشد برای x مقداری بدست میآید که برابر است با $x=\frac{kb-a}{k-1}$

ولی اگر $k=1$ باشد دراینصورت $x\times 0=b-a$ ، درصورتیکه a و b مختلف باشند مسأله جواب نخواهد داشت

***

مسائلی که حل آنها منجر بحل وبحث معادلات یك مجهولی درجه دوم میگردد

۱۴۷۳ـ فرض میکنیم r شعاع دایره محاطی مثلث قائم‌الزاویه ABC و r' شعاع دایره محاطی خارجی نظیر وتر



(که مماس بروتر وبرامتدادهای اضلاع مجاور با وترمیباشد).

با فرض آنکه وتر $BC=a$ و نسبت $\frac{r'}{r}=m$ معلوم باشد ، مطلوبست محاسبهٔ اضلاع دیگر مثلث ، و بحث درجوابها

حل : فرض میکنیم O و O' مراکز دوایرمماس بروتر باشند و $AC=x$ و $AB=y$ اضلاع مجاور وتر مثلث.

خط OO' منصف‌الزاویهٔ $\hat{A}$ میباشد وبنابراین مثلثهای AOF و AO'D متساوی‌الساقین میباشند و لذا

$AD=r'$ و $AF=r$

در مثلث ABC میتوان نوشت $x^2+y^2=a^2$ (۱)

وازدو مثلث متشابه ADO' و AFO نتیجه میگیریم:

$$\frac{r'}{r}=\frac{AD}{AF}=\frac{P}{P-a} \quad (2)$$

(P نصف محیط مثلث میباشد . فرمول بالارا در هندسه دیده‌اید) .

و بالاخره چون داریم :

$$\frac{P}{P-a}=\frac{\frac{x+y+a}{2}}{\frac{x+y-a}{2}}=\frac{x+y+a}{x+y-a} \text{ و } \frac{r'}{r}=m$$

میتوانیم اینها را درراطهٔ (۲) قرار دهیم :

پس $m=\frac{x+y+a}{x+y-a}$ ویا $x+y=a\frac{m+1}{m-1}$ (۳) واگر

طرفین این رابطه را بتوان ۲ برسانیم خواهیم داشت

$x^2+y^2+2xy=\frac{a^2(m+1)^2}{(m-1)^2}$ با توجه برابطه (۱)

میتوان نوشت : $xy=\frac{2a^2m}{(m-1)^2}$ (٤)

معادلات (۳) و (٤) مجموع و حاصلضرب x و y میباشد که میتوانند ریشه‌های معادله زیرباشند :

$$Z^2-\frac{a(m+1)}{m-1}Z+\frac{2a^2m}{(m-1)^2}=0$$

بحث : برای اینکه ریشه‌های معادلهٔ فوق‌جوابهای‌مسأله باشند کافیست در معادله (۱) مقادیر x و y مثبت باشند . با فرض مثبت‌بودن x و y روابط‌زیرمحقق است : $a>x$ و $a>y$

و بنابراین $a>|y-x|$

وهم‌چنین $a^2<x^2+y^2+2xy$ یا $a^2<(x+y)^2$

وبنابراین $a<x+y$

شرایط هندسی‌برای اینکه بتوان مثلثی باضلاع a و b و x تشکیل داد نیز همانها میباشد یعنی باید وتر از مجموع دوضلع کوچکتر واز قدر مطلق تفاضل دوضلع بزرگتر باشد .

ریشه‌های‌معادله $x=Z'$ و $y=Z''$ هنگامی مثبت‌میباشند

که $\Delta\geq 0$ و $f(0)>0$ و $\frac{S}{2}>0$ (٥)

و چون $\Delta=\frac{a^2(m+1)^2}{(m-1)^2}-\frac{8a^2m}{(m-1)^2}$ ویا

$\Delta=\frac{a^2(m^2-6m+1)}{(m-1)^2}$ و $f(0)=\frac{2a^2m}{(m-1)^2}$

و $\frac{S}{2}=\frac{a(m+1)}{2(m-1)}$ و نتیجه میگیریم که $\Delta\geq 0$ است وقتی که $m\leq 3-2\sqrt{2}$ و $m\geq 3+\sqrt{2}$ و $f(0)>0$ وقتی که $m>0$ و $\frac{S}{2}>0$ وقتی که $m<-1$ و $m>1$

بنابراین نامعادلات (٥) هنگامی صادق است که

$m\geq 3+2\sqrt{2}$

تبصره ـ عدد m که برابرنسبت $\frac{r'}{r}$ میباشد نمیتواند منفی باشد . بنابراین کافیست درنامعادلات (٥) فقط جوابهای مثبت m را درنظر گرفت .

حالت مخصوص : برای $m=3+2\sqrt{2}$ مقادیر x و y مساوی برابرند با $x=y=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ یعنی‌مثلث ABC متساوی‌الساقین خواهد بود

۱۴۷۴ـ روی محور x'x که ازدونقطه A و B میگذرد نقطه M را چنان تعیین‌کنید که داشته باشیم :

$\overline{AM}^2=\overline{AB}.\overline{MB}$

حل : جهت مثبت را از x' بطرف x انتخاب میکنیم . A را مبداء طولها فرض کرده و طول AB را به d نمایش میدهیم ، جای نقطه M برابر است با طول $\overline{AM}=x$

$x' \quad M \quad A \quad B \quad x$

میتوانیم بنویسیم

$\overline{AB}=d$ و $\overline{MB}=\overline{MA}+AB=-x+d$ بنابراین طبق فرض مسأله $x^2=d(d-x)$

و یا $x^2+dx-d^2=0$. البته تمام نقاط روی محور میتوانند محل M باشند . وکافیست معادله اخیر دارای ریشه باشد. این معادله همیشه دارای ریشه است زیرا $\frac{c}{a}=-d^2$ منفی است . این ریشه‌ها عبارتند از $x'=\frac{d(\sqrt{5}-1)}{2}$ و $x''=\frac{-d(\sqrt{5}+1)}{2}$ ، بنابراین دو نقطه M میتوان روی محور پیدا کرد که دارای شرط فوق باشد . یکی نقطه M_1 بفاصله $\frac{d(\sqrt{5}-1)}{2}$ در طرف راست نقطه A و دیگری نقطه M_2 بفاصله $-\frac{d(\sqrt{5}+1)}{2}$ در طرف چپ نقطه A

تمرین : دومسأله فوق را بروش هندسی حل کنید .

***

تمرین مربوط به مطالب فوق

۱۴۷۵ـ حوضی میتواند توسط یك شیر درمدت ۸ ساعت پرشود و با شیردیگر درمدت ۱۲ ساعت میتواند پرشود . واگر حوض پرباشد و زیرآب آنرا بازکنیم درمدت ٤ ساعت و ٤٨ دقیقه خالی میشود . تعیین کنید درموقعیکه حوض خالیست اگر هردو شیر وهمچنین زیرآب بازباشند درچه مدت پرمیشود .

جواب : اگر لازم‌زمان را به x نمایش دهید نتیجه میگیرید که $\frac{1}{x}\times 0$. بنابراین مسأله غیرممکن است یعنی حوض باشرایط فوق نمیتواند پرشود .

۱۴۷۶ـ دومتحرك یکی با سرعت ۱۰ کیلومتر درساعت و دیگر با سرعت ۸ کیلومتر درساعت دریك زمان بترتیب ازنقاط A و B و روی خط $x'x$ ودر یك جهت شروع بحرکت کرده و هدف آنها نقطه C میباشد که بفاصله ۱۳۰ کیلومتر از نقطه A و ۱۰۰ کیلومتر از نقطه B قرار گرفته است ، تعیین کنید درچه فاصله از نقطه C دومتحرك یکدیگر را ملاقات میکنند .

جواب : ابتدا فرض میکنیم در نقطه R نرسیده به نقطه C با یکدیگر برخوردکنند نتیجه میشود که این فاصله برابر ۲۰ ـ کیلومتر است بنابراین R حتماً در طرف دیگر نقطه C قرار گرفته است یعنی دو متحرك پس از عبور از نقطه C وپس از طی ۲۰ کیلومتر یکدیگر را ملاقات خواهند کرد . توجه کنید که اگر $x'x$ را محور فرض کرده وفواصل را با توجه بجهت درنظر بگیرید ، درهمان ابتدا جواب مسأله بدست خواهد آمد.

۱۴۷۷ـ عدد ۲٥٤ را بدو قسمت طوری تقسیم کنید که ربع قسمت اول بعلاوهٔ ثلث قسمت دوم برابر عدد معلوم a گردد .

جواب : پس از حل قسمت اول $x=1016-12a$ خواهد شد و باید $\frac{762}{12}<a<\frac{1016}{12}$ باشد

۱۴۷۸ـ در مثلث ABC که طول قاعدهٔ آن b وطول ارتفاع آن h میباشد ، مستطیلی به‌محیط $2p$ محاط میکنیم ، طول وعرض مستطیل چقدر است .

جواب : عرض مستطیل $y=\frac{h(b-p)}{b-h}$ میباشد و شرط صحت جواب آنست که $0<\frac{h(b-p)}{b-h}<h$ و هم چنین $p-\frac{h(b-p)}{b-h}>0$ باشد و در دوحالت باید درمسأله بحث کرد یکی $b-h>0$ و دیگری $b-h<0$ و همچنین در حالت ($b=h$ و $p\neq b$ و $p\neq h$) که مشاهده میشود مسأله **غیر ممکن** است و در حالت $p=b=h$ که مسأله **مبهم** خواهد شد یعنی درمثلثی که قاعدهٔ آن برابر ارتفاعش میباشد ، نصف محیط مستطیل محاطی برابر طول قاعده مستطیل است .

۱۴۷۹ـ بر کره‌ای بمرکز O وبشعاع R مخروط SAB طوری محیط کنید که سطح کل مخروط برابر $Rm\pi$ گردد درفاصلهٔ مرکز کره تا رأس مخروط برحسب پارامتر m بحث کنید .

جواب : فاصلهٔ مرکز کره تا رأس مخروط از معادلهٔ $x^2+(2R-m)x+R(m+R)=0$ بدست میآید . البته همیشه $x>R$ میباشد و چون $f(R)>0$ است نمیتواند فقط یك ریشه قابل قبول داشته باشد و بازاء $m>8R$ مسأله دارای دوریشه قابل قبول است و بازاء $m=8R$ یك ریشه مضاعف برابر $3R$.

۱۴۸۰ـ در دایره‌ای بقطر $AE=2R$ مثلث ABC را محاط میکنیم بطوریکه بین قاعده و ارتفاع AD مثلث رابطهٔ $3AD+2BC=l$ موجود باشد ، AD را بدست آورید (l مقدار معلومی است و D بر AE واقع است) .

جواب : طول $x=AD$ از معادلهٔ $25x^2-x(32R+6l)+l^2=0$ بدست میآید و از بحث مسأله نتیجه میشود که اگر $0<l<6R$ باشد فقط یك جواب

دانش آموزان رتبهٔ اول امتحانات نهائی ششم ریاضی خرداد ۴۳

سنندج

آقای کیومرث ناظمی

در سال ۱۳۲۴ درشهر سنندج متولد شده است تحصیلات ابتدائی را دردبستان عرفان سنندج ومتوسطه رادردبیرستان هدایت سنندج بپایان رسانده است . وی در تمام دوران تحصیلی از دانش آموزان ممتاز و جدی بوده و در رشته‌های ورزشی نیز موفقیت هائی بدست آورده است . درخرداد ۴۳ بامعدل **۱۸٫۸۶** دربین کلیه دانش آموزان ششم ریاضی استان کردستان رتبهٔ اول را حائز گردیده است .

نمایندگی یکان درسنندج ــ ایازی

کرمان

آقای حمید ذکریائی

فارغ التحصیل ششم ریاضی که سال گذشته در دبیرستان شاهپور تحصیل میکرده است با معدل کتبی **۱۶٫۲۳** در استان کرمان حائز رتبه اول شده است .

نمایندگی یکان در کرمان : **مؤسسهٔ انتشارات دین وفرهنگ**

اراك

آقای عباسعلی کثیرائی

متولد سال ۱۳۲۵ دورهٔ ابتدائی رادردبستان شاهپور و متوسطه را در دبیرستان پهلوی اراك بپایان رسانده و با معدل کل **۱۸٫۹۲** اولین نفر ششم ریاضی دبیرستانهای اراك شناخته شده است . وی در درك مطالب علمی و سرعت انتقال در مسائل غامض نمونه بوده بعلاوه با شعروادب هم زیاد سروکار دارد و خود اشعاری میسراید. اولیاء دبیرستان پهلوی اراك آیندهٔ درخشانی رابرای وی پیش‌بینی وآرزو میکنند .

رئیس دبیرستان پهلوی اراك ــ خلیل‌داعی

فرستندهٔ خبر ــ اصغر بنائی خبرنگار یکان

تویسرکان

آقای منوچهر ترکمان

متولدسال ۱۳۲۳ قریهٔ سرابی که تحصیلات ابتدائی را در همین قریه و متوسطه را در دبیرستانهای شاهپور و امیرکبیر تویسرکان گذرانده است با معدل **۱۵٫۴** در امتحانات ششم ریاضی رتبهٔ اول را بدست آورده است .

اکبر حسنی نمایندهٔ یکان

و اگر $6R<l<8R$ مسأله دارای دو جواب و $l>8R$ مسأله جواب ندارد و در حالتیکه $l=6R$ شود در اینصورت $BC=0$ یعنی مثلث به‌خط مبدل میشود ودر حالتیکه $l=8R$ باشد دراینصورت $BC=\frac{8R}{5}$ و $AD=\frac{8R}{5}$ یعنی قاعده و ارتفاع مثلث برابرند .

۱۴۸۱ــ نیم‌دایره‌ای بقطر $AB=2R$ مفروض است ، نقطه P را روی محیط نیم‌دایره طوری پیدا کنید که داشته باشیم $2AM-AP=l$ (M تصویر نقطه P روی قطر AB میباشد و l مقدار معلومی است) .

جواب : $AM=x$ از معادله $4x^2-2(2l+R)x+l^2=0$ بدست‌میآید وازبحث مسأله نتیجه میشود که در صورتیکه $l<-\frac{R}{4}$ مسأله جواب ندارد ودر صورتیکه $0>l>-\frac{R}{4}$ مسأله دارای دو جواب است و اگر $2R>l>0$ مسأله دارای یك جواب و در صورتیکه $l>2R$ مسأله جواب ندارد و درصورتیکه $l=-\frac{R}{4}$ ریشه‌ها مضاعف و برابر $\frac{R}{8}$ و درصورتیکه $l=0$ دوریشه یکی برابر صفر ودیگری $\frac{R}{2}$ و درصورتیکه $l=2R$ باشد دراینصورت یك ریشه و برابر $2R$ میباشد .

حل مسائل نمونه

کلاس چهارم

قاعدهٔ کلی ساده کردن کسرها

برای ساده کردن کسری که صورت ومخرج آن دو عدد و یا دو عبارت جبری باشد روش معمولی آن است که صورت و مخرج کسر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه نموده سپس عامل‌های مشترك صورت و مخرج را حذف نمود اما تجزیهٔ صورت ومخرج همیشه بسادگی میسر نیست . قاعدهٔ زیر رامیتوان برای ساده کردن کسرها بکار برد :

قاعده ـ بزرگترین مقسوم علیه مشترك صورت و مخرج را تعیین کرد (عموماً از راه خط نردبانی) آنگاه هر یك از دو عبارت صورت و مخرج کسر را بر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان تقسیم نمود خارج قسمتهای حاصل صورت و مخرج کسری را تشکیل میدهند که ساده شدهٔ غیرممکن التحویل کسر اول میباشد .

مثال عددی ـ ساده کردن کسر $\frac{۳۳۶۴۷۲}{۲۰۲۱۲۸۸}$

	۶	۱۳۷
۲۰۲۱۲۸۸	۳۳۶۴۷۲	۲۴۵۶
۲۴۵۶	۹۰۸۷	
	۱۷۱۹۲	
	.....	

بزرگترین مقسوم علیه‌دو جملهٔ کسر برابر است با۲۴۵۶ و خارج قسمت صورت براین عدد مساویست با ۱۳۷ و خارج قسمت مخرج براین عددبرابر است با ۸۲۳ = ۱ + ۱۳۷ × ۶ و در نتیجه :

$$\frac{۳۳۶۴۷۲}{۲۰۲۱۲۸۸}=\frac{۱۳۷}{۸۲۳} \rightarrow \text{غیرممکن التحویل}$$

۱۴۸۲ ـ کسرزیر را ساده کنید .

$$\frac{a^۳-۵a^۲+۷a-۳}{a^۳-۳a+۲}$$

	۱	$-\frac{۱}{۵}a$	$-\frac{۵}{۲}$
$a^۳-۵a^۲+۷a-۳$	$a^۳-۳a+۲$	$-۵a^۲+۱۰a-۵$	$۲a^۲-۴a+۲$
$-۵a^۲+۱۰a-۵$	$۲a^۲-۴a+۲$		

بزرگترین مقسوم علیه مشترك عبارتهای صورت ومخرج عبارت شد از $۲a^۲-۴a+۲$ و خارج قسمت تقسیم عبارت مخرج کسر براین بزرگترین مقسوم علیه مشترك عبارت است از :

$$\left(-\frac{۱}{۵}a\right)\left(-\frac{۵}{۲}\right)+۱=\frac{۱}{۲}a-۱$$

و خارج قسمت تقسیم صورت بر آن برابراست با :

$$\left(\frac{۱}{۲}a+۱\right)+\left(-\frac{۵}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}a-\frac{۳}{۲}$$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{a^۳-۵a^۲+۷a-۳}{a^۳-۳a+۲}=\frac{\frac{۱}{۲}a+۱}{\frac{۱}{۲}a-\frac{۳}{۲}}=\frac{a+۲}{a-۳}$$

***

مسألهٔ هندسه نقل ازمجلهٔ «تربیت ریاضی» چاپ پاریس

۱۴۸۳ ـ بفرض اینکه P نقطه‌ای اختیاری از قطر BD مربع ABCD و E و F بترتیب پای عمودهای مرسوم از P براضلاع AB و AD باشد .

۱) ثابت کنید که قطعه خطهای CE و BF ازیك طرف و قطعه خطهای CF و DE از طرف دیگر باهم مساوی بوده و بریکدیگر عمودند .

۲) ثابت کنید که EF و PC نیز بایکدیگر مساوی‌بوده و متعامد هستند .

۳) ثابت کنید که CP و BF و DE متقارنند .

٤) ثابت کنید هرگاه P برقطر BD حرکت کند ، نقطهٔ I وسط EF برخط ثابتی باقی میماند .

حل ـ ۱) مثلثهای قائم الزاویهٔ DFP و PEB متساوی‌الساقین بوده و داریم

$$DF=FP=AE \text{ و } BE=EP=AF$$

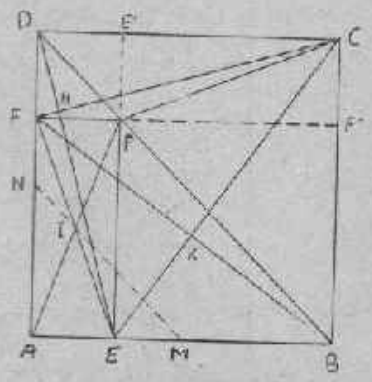
مثلثهای قائم‌الزاویهٔ CBE وBAF در حالت تساوی دوضلع متساوی بوده و نتیجه میشود اولا $CE=BF$ و ثانیاً

$\widehat{BCE}=\widehat{ABF}=۹۰^\circ-\widehat{CBF}$ یعنی دو زاویهٔ BCK و

CBK از مثلث BKC متمم یکدیگر بوده و زاویهٔ BKC قائمه میباشد .

همچنین از تساوی مثلثهای CDF و DAE نتیجه میشود که $CF = \perp DE$ و

۲) امتداد PF ضلع BC را در F' و امتداد EP ضلع CD را در E' قطع میکند دو مربع مستطیل AEPF و PF'CE' با یکدیگر مساویند پس قطرهای آنها یعنی EF و PC نیز متساوی میباشند. از طرف دیگر میتوانیم بنویسیم :



$$\widehat{EFC}=180^\circ-\widehat{AFE}-\widehat{DFC}=180^\circ-\widehat{PCD}-$$
$$-(90^\circ-\widehat{DCF})=180^\circ-\widehat{PCF}-\widehat{FCD}-90^\circ+$$
$$+\widehat{DCF}=90^\circ-\widehat{PCF}$$

یعنی دو زاویه از مثلث FLC متمم یکدیگر بوده و این مثلث قائم‌الزاویه است که PC بر EF عمود است .

۳) خطوط CP و BF و DE ارتفاعات مثلث CEF اند در نتیجه در یك نقطه متقارب هستند .

٤) در مربع مستطیل AEPF نقطهٔ I وسط قطر EF وسط قطر AP نیز میباشد و چنانچه از نقطهٔ M وسط ضلع AB به نقطهٔ I وصل کنیم درمثلث ABP خط MI که اوساط دو ضلع را بهم وصل کرده است باضلع BP موازی میباشد و چون امتداد BP و نقطهٔ M ثابت است. نتیجه میشود که امتداد MI نیز ثابت میباشد یعنی هرگاه P بر قطر BD حرکت کند نقطهٔ I برخط ثابت MN که اوساط AB و AD را بهم وصل میکند حرکت مینماید .

کلاس پنجم ریاضی

۱۴۸۴ ـ حل و بحث دستگاه زیر

$$(1)\quad \begin{cases} xy+x+y=2a+1 \\ x^2y^2+x^2+y^2=2a^2+1 \end{cases}$$

دستگاه نسبت به دومجهول x و y متقارن است پس میتوان آنرا نسبت به مجهول معاون‌های $x+y$ و xy مرتب نمود .

معادلهٔ دوم دستگاه را میتوان بصورت زیر نوشت .

$$(xy+x+y)^2-2xy(x+y)-2xy=2a^2+1$$

و با استفاده از معادله اول دستگاه نتیجه میشود .

$$(2a+1)^2-2xy(x+y+1)=2a^2+1$$

و بعد از ساده کردن :

$$xy(x+y+1)=a(a+2)$$

و دستگاه (۱) معادل خواهد بود بادستگاه زیر

$$(2)\quad \begin{cases} xy+(x+y+1)=2(a+1) \\ xy(x+y+1)=a(a+2) \end{cases}$$

فرض میکنیم $xy=p$ و $x+y+1=s$ پس :

$$\begin{cases} p+s=2(a+1)=a+(a+2) \\ ps=a(a+2) \end{cases}$$

بسادگی مشاهده میشود که جوابهای دستگاه عبارتست از

$$\begin{cases} p=a \\ s=a+2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} p=a+2 \\ s=a \end{cases}$$

و در نتیجه دستگاه (۲) به دو دستگاه زیر تجزیه میشود

$$(3)\quad \begin{cases} xy=a \\ x+y=a+1 \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} xy=a+2 \\ x+y=a-1 \end{cases}$$

جوابهای دستگاه (۳) عبارتند از

$$(x=a \text{ و } y=1) \quad \text{و} \quad (x=1 \text{ و } y=a)$$

و جوابهای دستگاه (٤) ریشه‌های معادلهٔ زیرهستند .

$$u^2-(a-1)u+a+2=0 \qquad (1)$$
$$\Delta=(a-1)^2-4(a+2)=a^2-6a-7=$$
$$=(a+1)(a-7)$$

۱) چنانچه $-1<a<7$ باشد $\Delta<0$ بوده و معادلهٔ (۱) و در نتیجه دستگاه (٤) جواب ندارد .

۲) چنانچه $a<-1$ ویا $a>7$ باشدمعادلهٔ (۱) دارای دوریشهٔ $x=\dfrac{a-1\pm\sqrt{(a+1)(a-7)}}{2}$ بوده وبرای دستگاه (٤) جوابهای زیر بدست میآید

$$\begin{cases} x=\dfrac{a-1-\sqrt{(a+1)(a-7)}}{2}=u' \\ y=\dfrac{a-1+\sqrt{(a+1)(a-7)}}{2}=u'' \end{cases}$$

و $x=\dfrac{a-1+\sqrt{(a+1)(a-7)}}{2}=u''$

$$y=\frac{a-1-\sqrt{(a+1)(a-7)}}{2}=u'$$

اگر $a=-1$ باشد دودسته جواب فوق یکی شده و عبارت خواهدبود از $(x=y=-1)$ ونیز اگر $a=7$ باشد خواهیم داشت $(x=y=3)$

خلاصهٔ بحث ـ اگر $-1<a<7$ باشددستگاه‌مفروض دارای دودسته جواب $(x=a \text{ و } y=1)$ و $(x=1 \text{ و } y=a)$ میباشد.

اگر $a<-1$ ویا $a>7$ باشد دستگاه مفروض دارای چهاردسته جواب بشرح زیراست:

$$\begin{cases}x=a\\y=1\end{cases} \text{و} \begin{cases}x=1\\y=a\end{cases} \text{و} \begin{cases}x=u'\\y=u''\end{cases} \text{و} \begin{cases}x=u''\\y=u'\end{cases}$$

چنانچه $a=-1$ باشد جوابهای دستگاه مفروض‌عبارت است از

$$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases} \text{و} \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases} \text{و} \begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$$

وچنانچه $a=7$ باشد جوابهای دستگاه مفروض عبارت خواهد بود از

$$\begin{cases}x=7\\y=1\end{cases} \text{و} \begin{cases}x=1\\y=7\end{cases} \text{و} \begin{cases}y=3\\y=3\end{cases}$$

(نقل‌از: Exer. et prob. math. par A. Combes)

***

۱۴۸۵ ـ درازاء چه مقادیراز m کسرزیر، هرچه باشد x، برابر باسینوس کمان حاده‌ای مانند α خواهدبود

$$y=\frac{x^2-mx+1}{3(x^2+x+1)}$$

شرط لازم وکافی برای اینکه درازاء جمیع مقادیر x داشته‌باشیم $y=\sin\alpha$ و α زاویهٔ حاده‌باشدآن‌است‌که نامساوی مضاعف زیر همواره برقرارباشد

$$0<\frac{x^2-mx+1}{3(x^2+x+1)}<1$$

سه جمله ای مخرج کسری دارای ریشه نبوده وهمواره مثبت است بنابراین نامساوی مضاعف فوق هم ارز دونامساوی زیر می‌باشد

$$\begin{cases}x^2-mx+1>0\\x^2-mx+1<3(x^2+x+1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-mx+1>0\\-2x^2-(m+3)x-2<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-mx+1>0 & (1)\\2x^2+(m+3)x+2>0 & (2)\end{cases}$$

یا

میدانیم که نامساوی $ax^2+bx+c>0$ وقتی در ازاء جمیع مقادیر x برقراراست که داشته باشیم

$$\begin{cases}a>0\\\Delta<0\end{cases}$$

بنابراین نامعادلهٔ (۱) وقتی همواره برقراراست که:

$$\Delta=m^2-4<0 \implies -2<m<2$$

ونامعادلهٔ (۲) وقتی همواره برقرار خواهد بود که

$$\Delta=(m+3)^2-16<0 \implies -7<m<1$$

درنتیجه برای اینکه دستگاه دو نامعادلهٔ فوق همواره بر قرار باشد باید دستگاه دونامساوی زیر برقرار باشد

$$\begin{cases}-2<m<2\\-7<m<1\end{cases}$$

که نتیجه میشود:

$$-2<m<1$$

(نقل ازکتاب سابق‌الذکر)

***

۱۴۸۶ ـ (هندسهٔ فضائی) ـ پنج‌نقطهٔ فضائی‌مفروض است بطوریکه هیچ سه‌تای آنها بریك امتداد نیستند و همچنین هیچ چهارتای آنها دریك صفحه واقع نمی‌باشند.

۱) ثابت‌کنید که تعداد خطوط وتعداد صفحه‌هائی که این پنج نقطه مشخص میکنند مساویست (یك‌عدد مانند $\equiv$ میباشد) ـ عدد n راتعیین‌کنید ومعلوم کنید برهر نقطه چند صفحه از این صفحات میگذرد.

۲) ثابت‌کنید که هردو صفحه از n صفحه ای که بوسیله نقاط مشخص میشوند متقاطعند. تعداد فصل مشترکهائی راکه برهریك ازپنج نقطه‌میگذرد تعیین‌کنید وعدد N تعداد همه فصل مشترکها رابدست‌آورید

۳) چنانچه بجای پنج نقطهٔ فضائی، شش نقطه یا بیشتر انتخاب شود آیا میتوان بقیاس حالت پنج نقطه نتایج رابدست آورد؟

حل ـ قبلا یادآور میشویم که هردو نقط فقط وفقط یك خط و هرسه نقطه فقط وفقط یك صفحه‌را مشخص میسازد.

۱) در برابر هردونقطه ازپنج نقطهٔ فوق ، سه نقطهٔ آن قرار دارد بنابر این در برابر هرخطی که بر دو نقطه میگذرد یك صفحه‌وجود دارد که برسه نقطهٔ دیگر میگذرد پس اگر n تعداد خطوطی باشد که بردو بدوی نقاط داده شده میگذرد n صفحه نیز وجود خواهد داشت که بر سه بسهٔ این نقاط مرور میکند .

محاسبهٔ n ـ نقاط داده شده راباشماره‌های ۱ و۲ و۳ و ٤ و٥ مشخص‌میکنیم وهریك ازخطوط حاصل را باعددی شامل دو شماره از شماره‌های فوق و هر صفحه را باعددی شامل سه شماره مینمائیم مثلا خط مار برنقاط ۱ و ۲ را با ۱۲ یا ۲۱ و صفحهٔ مار برسه نقطهٔ ۱ و ۲ و۳ را با ۱۲۳ یا ۱۳۲ یا ۲۳۱ و . . . . ویا ۳۱۲ نمایش میدهیم .

برهر نقطه از نقاط داده شده چهار خط میگذرد که آن نقطه را به چهار نقطهٔ دیگر وصل میکند مثلا خطوطی که بر نقطهٔ ۱ میگذرند عبارتند ازخطوط۱۲ و۱۳ و۱٤ و۱٥ و رویهم میشود ۲۰ = ٤ × ٥ خط اما در این محاسبه هر خط دو دفعه حساب شده است (مثلا خطی که نقاط۱ و۲ را بهم وصل میکند یك دفعه برای نقطه ۱ حساب شده است ۱۲، ویك دفعه برای نقطهٔ ۲ ، ۲۱) پس تعداد خطوط برابر است با

$$n=\frac{٥\times ٤}{٢}=١٠$$

برای تعیین تعداد صفحاتیکه برهریك از نقاط میگذرد یکی ازآنها مثلا نقطهٔ ۱ را در نظرمی‌گیریم چهارنقطهٔ ۲و۳و ٤ و٥ شش خط تشکیل میدهند (۲۳ و۲٤ و۲٥ و۳٤ و۳٥ و ٤٥) بنابراین شش صفحه یافت میشود که بر نقطه ۱ و این شش خط میگذرد . یعنی برهریك ازنقاط پنجگانه شش صفحه از ده صفحه میگذرد .

۲) هردوصفحه ازصفحات ده‌گانهٔ ماربر نقاط داده شده یا دو دونقطه از این نقاط مشترکند یا حداقل در یك نقطه بنا بر این هردوتای آنها در یك خط مستقیم مشترکند .

محاسبهٔ تعدادفصل‌مشترکهای ماربریکی ازنقاط ـ چون هردو صفحه از ده صفحه یا در دونقطه و یا حداقل دریك نقطه از نقاط پنجگانه مشترکند بنابراین فصل مشترکهائی که بریك نقطه (مثلا نقطهٔ ۱) میگذرند به دودسته تقسیم میشوند :

دستهٔ اول ـ فصل مشترکهائی که براین نقطه وچهارنقطهٔ دیگر میگذرندکه تعداد آنهاچنانچه قبلاحساب شده‌است برابر ٤ میباشد (۱۲و۱۳و۱٤و۱٥)

دستهٔ دوم ـ فصل مشترکهائی که‌فقط‌براین نقطه میگذرند که تعدادآنها برابراست‌باتعدادصفحاتی‌ازصفحات ده‌گانه‌که فقط دریکی ازنقاط‌پنجگانه مشترکند و برای نقطهٔ ۱ این صفحات عبارت خواهند بود از (۱۲۳ و ۱٤٥) و (۱۲٤ و ۱۳٥) و (۱۳٥ و۱۳٤) یعنی برنقطهٔ ۱ بجز چهار فصل مشترك دستهٔ اول سه فصل مشترك‌از دستهٔ دوم وجود دارد .

نتیجه آنکه برهریك ازنقاط داده شده ۷ = ۳ + ٤ فصل مشترك از تقاطع دو بدوی صفحات میگذرد .

محاسبهٔ N ـ تعداد فصل مشترکهای دستهٔ اول برابر است با ۱۰ = $\frac{٥\times ٤}{٢}$ (زیرا برهریك‌ازنقاط ،چهارعددمیگذرد که میشود٤ × ٥ اماچون هرکدام آنها بردونقطه گذشته و در این محاسبه دو دفعه بحساب آمده است بنابراین تعدادکل‌آنها ۱۰ است) . و تعداد فصل مشترکهای دسته دوم برابر است با ۱٥ = ۳ × ٥ بنابر این ۲٥ = ۱٥ + ۱۰ = N

۳) حالتی که تعدادنقاط داده شده بیش از پنج نقطه باشد نمیتوان بقیاس‌حالت پنج نقطه نتایج مطلوب را بدست‌آورد برای اینکه صفحاتیکه برسه به سهٔ نقاط میگذرند ممکن است دو بدو متقاطع یامتوازی باشندیا اینکه هرسه تای‌آنها دریکی ازخطوط حاصل از دو نقطه مشترك باشند .

مثلا در مورد شش نقطه ۱ و ۲ و ۳ و٤ و٥ و ٦ ممکن است‌که مثلا دو صفحهٔ ۱۲۳ و ٤٥٦ با یکدیگر موازی باشند و در مورد هفت نقطه ۱ و ۲ و ۳ و ٤ و ٥ و ٦ و ۷ ممکن است مثلاصفحات۱۲۳ و۱٤٥و۱٦۷ هر سه بریك خط بگذرند.

(نقل از کتاب سابق‌الذکر)

کلاسهای پنجم ریاضی‌وطبیعی

۱۴۸۷ ـ (مثلثات) ـ دو نقطهٔ A وB واقع بردایرهٔ جهت دار (C) مفروض است مطلوبست تعیین M براین دایره بطوریکه بین $\widehat{MA}$ یکی ازاندازه های کمان جهت دار MA و $\widehat{MB}$ یکی از اندازه های کمان جبری MB رابطهٔ :

$\widehat{MA}+\lambda\widehat{MB}=0$ برقرارباشد . λ عددی است‌مثبت .

حالات خاص ـ بفرض ۲ = λ مواضع نقاط M را در دوحالت زیرتعیین کنید

۱) A وB دوسرقطری ازدایرهٔ (C) باشند

۲) دوشعاع OA وOB بریکدیگر عمود باشند

حل ـ نقطهٔ A رامبداء کمانها ویکی ازاندازه‌های کمان $\widehat{AM}$ را x و اندازهٔ کمان AB را a فرض‌میکنیم . تمام اندازه های کمان های $\widehat{MA}$ و $\widehat{MB}$ عبارت خواهد شد از

$$\widehat{MA}=-x+2k\pi$$

$$\widehat{MB}=\widehat{AB}-\widehat{AM}+2k'\pi=a-x+2k'\pi$$

که k و k' اعداد صحیح دلخواهند .

رابطهٔ داده شده بصورت زیر نوشته میشود

$$-x+2k\pi+\lambda(\alpha-x+2k'\pi)=0$$

$$-(1+\lambda)x+\lambda\alpha+2(k+\lambda k')\pi=0$$

اگر $k+\lambda k'=K$ اختیارنمائیم نتیجه میشود :

$$(1+\lambda)x=\lambda\alpha+2K\pi$$

K نمایش عدد صحیح دلخواه است وچون $1+\lambda$ مخالف صفراست پس

$$x=\frac{\lambda\alpha}{1+\lambda}+\frac{2K\pi}{1+\lambda}$$

حالات خاص ـ چنانچه $\lambda=2$ باشد مقدار x عبارت خواهد شد از

$$x=\frac{2\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3}$$

۱) وقتی که A و B دوسریك قطر باشند $\alpha=\pi$ بوده و

$$x=\frac{2\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$$

و در ازاء مقادیر مختلف k خواهیم داشت :

$$k=0 \quad x=x_0=\widehat{AM_0}=\frac{2\pi}{3}$$

$$k=1 \quad x=x_1=\widehat{AM_1}=\frac{4\pi}{3}$$

دونقطه M_0 و M_1 نسبت به AB متقارن بوده و دو رأس از مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ (C) به رأس A میباشند و نقطه‌های دیگر M که در ازاء مقادیر مختلف K بدست میآیند براین نقاط (A و M_0 و M_1) واقع خواهندبود

۲) وقتیکه OA بر OB عمودباشد $\alpha=\frac{\pi}{2}$ است و

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$$

$$K=0 \quad x=x_0=\widehat{AM_0}=\frac{\pi}{3}$$

$$K=1 \quad x=x_1=\widehat{AM_1}=\pi$$

و نقطهٔ M_1 انتهای قطری ازدایره (C) خواهد بودکه یك سرآن نقطهٔ A است .

$$K=2 \quad x=x_2=\widehat{AM_2}=\frac{5\pi}{3}$$

سه نقطهٔ M_0 و M_1 و M_2 سه ضلعی منتظمی در دایرهٔ مثلثاتی تشکیل میدهند و نقاط دیگر M که بدست آید بر این سه نقطه منطبق خواهند بود .

***

۱۴۸۸ـ (هندسهٔ تحلیلی) ـ دونقطهٔ A (۱ و ۳) و B (۵ و ۱ـ) مفروض است درصفحهٔ محورهای مختصات نقطه‌ای مانند M بیك فاصله ازدومحور چنان تعیین کنید که زاویهٔ AMB قائمه باشد. مسأله دارای چند جواب است ؟ ونتیجه‌را ازلحاظ هندسی بررسی نمائید .

حلـ شرط لازم وکافی برای‌اینکه نقطه‌ای مانند M از دومحور بیك فاصله باشد آن است که $|x_M|=|y_M|$ ویا $x_M=\pm y_M$ پس‌اگرطول نقطهٔ M راباً α بنمائیم(که α ممکن است مثبت یامنفی باشد) عرض آن $\mp\alpha$ خواهد بود .

برای اینکه مثلث AMB در زاویه M قائمه باشد لازم وکافی است که بین‌اندازه‌های اضلاع‌آن رابطهٔ فیثاغورس برقرار باشد (یااینکه اندازهٔ میانهٔ ضلع AB بانصف اندازهٔ AB برابر باشد) و خواهیم داشت

$$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=\overline{AB}^2$$

$$[(1-\alpha)^2+(3\mp\alpha)^2]+[(5-\alpha)^2+(-1\mp\alpha)^2]=(1-5)^2+(3+1)^2$$

اولا عرض نقطهٔ M را α اختیار کنیم در این صورت معادله بالا پس از ساده شدن چنین میشود .

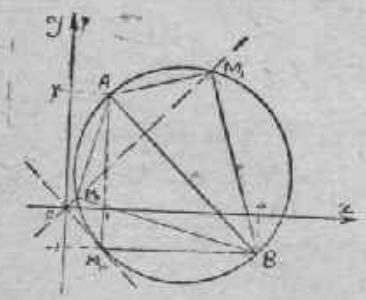
$$\alpha^2-4\alpha+1=0 \quad \text{و} \quad \alpha=2\mp\sqrt{3}$$

دو جواب $M_1(2+\sqrt{3}$ و $2+\sqrt{3})$ و $M_2(2-\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3})$ بدست میآیدکه هردودر ربع اول محورها واقع‌اند

ثانیاً عرض نقطهٔ M را $-\alpha$ اختیار مینمائیم در این صورت معادله پس از ساده شدن چنین میشود

$$\alpha^2-2\alpha+1=0 \quad \text{و} \quad \alpha=1$$

برای α ریشهٔ مضاعف ۱ بدست میآیدویك جواب $M_3(1$ و $-1)$ واقع در ربع چهارم محورها حاصل میشود . مسأله مجموعاً دارای‌سه جواب میباشد.



تعبیر هندسی ـ مکان هندسی نقاطی که از محورهای $x'x$ و $y'y$ بیك فاصله‌اند خطوط D_1 و D_2 نیمسازهای زاویه‌های دومحورمیباشد ومکان هندسی نقطه‌هائی مانند M برای آنکه زاویه AMB قائمه باشد،دایرهٔ بقطر AB میباشد . دایرهٔ بقطر AB خط D_1 را در دونقطهٔ M_1 و M_3 قطع می‌کند و برخط D_2 درنقطه M_2 مماس میشود ومساله دارای سه جواب M_1 و M_2 و M_3 میباشد

کلاس ششم طبیعی و ریاضی

۱۴۸۹ - بفرض اینکه y تابعی از x باشد

اولا مشتق y را برحسب x و y مختصات یك نقطهٔ منحنی به معادلهٔ زیر بدست آورید

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

ثانیاً مقادیر p و q و r را چنان تعیین کنید که منحنی به معادلهٔ

$$x^2+y^2+px+qy+r=0 \qquad (2)$$

ازنقاط A(۱ و ۱−) و B (۳ و ۵) گذشته مماس در نقطهٔ A برمنحنی ازمبداء مختصات بگذرد

حل ـ اولاً ازطرفین رابطهٔ (۱) نسبت به متغیر x مشتق میگیریم باتوجه باینکه اگر u تابعی از y و y تابعی از x باشد مشتق u نسبت به x برابراست باحاصل ضرب مشتق u نسبت به y درمشتق y نسبت به x خواهیم داشت :

$$2ax+2byy'+c(y+xy')+d+ey'=0$$

ونتیجه خواهد شد

$$y'=\frac{-2ax-cy-d}{2by+cx+e}$$

ثانیاً ضریب زاویهٔ خطی که برنقطهٔ A وبرمبداء میگذرد یعنی ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی درنقطهٔ A برابراست با

$$m_{oA}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1}{1}=-1$$

مشتق y را نسبت به x ازمعادلهٔ (۲) بدست میآوریم

$$2x+2yy'+p+qy'=0$$

$$y'=\frac{-2x-p}{2y+q}$$

بجای x و y مختصات نقطهٔ A (نقطهٔ تماس) وبجای y' ضریب زاویهٔ خط مماس یعنی ۱− راقرارمیدهیم نتیجه میشود

$$-1=\frac{-2-p}{2y+q} \qquad \text{یا} \qquad p=q-4$$

ودرمعادلهٔ (۲) یك دفعه مختصات A ویك دفعه مختصات B راقرار میدهیم ومعادلات حاصل را سادهٔ میکنیم و بالاخره دستگاه زیر نتیجه میشود

$$\begin{cases} p-q+r=-2 \\ 5p+3q+r=-34 \\ p=q-4 \end{cases}$$

ازحل دستگاه مقادیر $p=-6$ و $q=-2$ و $r=2$ بدست میآید

۱۴۹۰ - اولا تابع زیررا بساده ترین صورت خود بنویسید

$$y=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)\cos\left(\frac{5\pi}{2}-3x\right)+tg\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)\sin(5\pi+3x)$$

ثانیاً مختصات نقاط ماکزیمم ومینیمم تابع y راتعیین کنید

حل : اولا داریم

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)=\sin 3x \text{ و } \cos\left(\frac{5\pi}{2}-3x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sin 3x \text{ و } tg\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)=-cotg\,3x \text{ و}$$

$$\sin(5\pi+3x)=-\sin 3x$$

ومقدارتابع برابرخواهدشد با

$$y=\sin^2 3x+cotg\,3x\,\sin 3x=\sin^2 3x+\cos 3x$$

ثانیاً مشتق تابع راتعیین میکنیم

$$y'=2\cos 3x\sin 3x-\sin 3x$$

مشتق رابرابرصفرقرارداده معادلهٔ حاصل مقادیر x یعنی طولهای نقاط ماکزیمم ومینیمم را بدست میآوریم

$$2\cos 3x\sin 3x-\sin 3x=0$$

$$\sin 3x(2\cos 3x-1)=0$$

$$\sin 3x=0=\sin 0 \text{ و } 3x=k\pi \text{ و } x=\frac{k\pi}{3}$$

$$2\cos 3x-1=0 \text{ و } \cos 3x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \text{ و}$$

$$3x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \text{ و } x=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9} \text{ و}$$

درازاء $x=\frac{k\pi}{3}$ داریم

$$y=\sin^2 k\pi+\cos k\pi=\pm 1$$

(اگر k زوج باشد $\cos k\pi=1$ واگر k فرد باشد $\cos k\pi=-1$) ودرازاء $x=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}$ داریم

$$y=\sin^2\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y=\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

کلاس ششم ریاضی

۱۴۹۱ - (جبر) نسبت بمحورهای متعامد Ox و Oy معادلهٔ منحنی (C) عبارتست از

$$ax^2+by^2+cx+dy+e=0 \quad (1)$$

که در آن $ab\neq 0$ است

اولا ثابت کنید که منحنی (C) دارای دو محور تقارن بموازات محورهای مختصات میباشد که نقطهٔ تلاقی آنها نیز مرکز تقارن منحنی است

ثانیاً قائم در یك نقطهٔ $M(x و y)$ بر منحنی (C) محور های تقارن افقی و قائم آن را بترتیب در نقاط P و Q قطع می کند ثابت کنید که

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MP}}=K \quad (ثابت) \qquad (2)$$

ومقدار ثابت K را تعیین کنید

ثالثاً برعکس ثابت کنید که اگر برای یك منحنی خاصیت قسمت ثانیاً برقرار باشد معادلهٔ منحنی ازفرم معادلهٔ (۱) میباشد

حل - اولا فرض میکنیم خطوط بمعادلات $x=\alpha$ و $y=\beta$ محورهای تقارن منحنی باشند که در این صورت $\omega(\alpha و \beta)$ مرکز تقارن منحنی میباشد.

محورهای مختصات را انتقال میدهیم بطوریکه ω مبداء جدید باشد. داریم $x=X+\alpha$ و $y=Y+\beta$ ومعادلهٔ منحنی (C) نسبت به مبداء ω عبارت خواهد شد از

$$a(X+\alpha)^2+b(Y+\beta)^2+c(X+\alpha)+d(Y+\beta)+e=0$$

وپس از ساده کردن خواهیم داشت

$$aX^2+bY^2+(2a\alpha+c)X+(2b\beta+d)Y+\cdots=0$$

برای اینکه محور $Y'Y$ محور تقارن منحنی باشد لازم کافیست که

$$2a\alpha+c=0 \quad یا \quad \alpha=-\frac{c}{2a}$$

برای اینکه محور $X'X$ محور تقارن منحنی باشد لازم وکافیست که

$$2b\beta+d=0 \quad یا \quad \beta=-\frac{d}{2b}$$

بنابر این خطوط به معادلات $y=-\frac{d}{2b}$ و $x=-\frac{c}{2a}$

محورهای تقارن ونقطه تلاقی این دو خط یعنی $\omega\left(-\frac{c}{2a} و \frac{d}{2b}\right)$ مرکز تقارن منحنی (C) میباشد

ثانیاً - مرکز تقارن منحنی مبداء مختصات اختیار میشود دراین صورت معادلهٔ منحنی بصورت زیر خواهد بود

$$ax^2+by^2+C=0$$

ازطرفین رابطه نسبت بمتغیر x وتابع y مشتق میگیریم

$$2ax+2by'y=0 \quad و \quad y'=-\frac{ax}{by}$$

اگر $M(x و y)$ نقطه‌ای از منحنی (C) باشد معادلهٔ قائم برمنحنی (C) در نقطهٔ M عبارتست از

$$Y-y=\frac{by}{ax}(X-x)$$

که چون دراین معادله $Y=0$ قرارداده شود مقدار X که بدست میاید طول نقطهٔ P خواهد بود:

$$X=x_p=\frac{(b-a)x}{b}$$

اگر M' تصویر M برمحور طول (محور تقارن افقی منحنی) باشد داریم

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}=\frac{\overline{M'P}}{\overline{M'O}}=\frac{\overline{PM'}}{\overline{OM'}}=\frac{x_{M'}-x_p}{x_{M'}}=$$

$$=\frac{x-\frac{b-a}{b}x}{x}=\frac{a}{b}=k \quad (ثابت)$$

ثالثاً - فرض میکنیم قائم بر یك منحنی (C) در نقطهٔ $M(x و y)$ ازآن، محورهای متعامد مختصات Ox و Oy رادر P و Q قطع کند وداشته باشیم

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}=K$$

معادلهٔ قائم بصورت زیر خواهد بود

$$Y-y=\frac{-1}{y'}(X-x)$$

$$Y=0 \quad و \quad X-x_p=x+yy'$$

واگر M' تصویر M برمحور Ox باشد

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}=\frac{\overline{M'P}}{\overline{M'O}}=\frac{\overline{PM'}}{\overline{OM'}}=\frac{x-(x+yy')}{x}=-\frac{yy'}{x}$$

و نتیجه میشود $\frac{-yy'}{x}=k$ یا $2yy' \quad -2kx$

یاتوجه باینکه $2yy'$ مشتق y^2+a_1 و $-2kx$ مشتق $-kx^2+a_2$ است خواهیم داشت

$$y^2+a_1=-Kx^2+a_2$$

فرض میکنیم $a_2-a_1=a$ پس معادلهٔ منحنی بصورت منحنی زیر میباشد

$$Kx^2+y^2=a \quad (3)$$

که معادله ای است از قرم معادلهٔ (۱)

تبصره - منحنی (C) بامعادلهٔ (۱) یا بامعادلهٔ (۳) یکی ازمنحنی های دایره ، بیضی و یا هذلولی است که خواص آنها در مخروطات مورد مطالعه واقع میشود .

***

۱۴۹۲ - بفرض اینکه ABCDE یك پنج ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مثلثاتی و A مبداء کمانها در این دایره باشد.

۱) ثابت کنید که

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=0$$

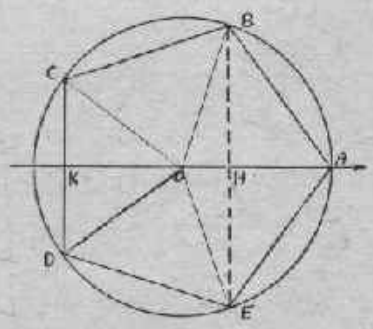
واز آن نتیجه بگیرید که

$$1+2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\right)=0 \qquad (1)$$

وبازهم از این رابطه نتیجه بگیرید که :

$$1+4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=0$$

۲) اندازه‌های عددی $\cos\frac{2\pi}{5}$ و $\cos\frac{4\pi}{5}$ را حساب کنید .



حل-۱) حاملهای $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OE}$ و همچنین $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ نسبت به OA قرینه هستند بنابر این مجموع هندسی $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}$ و همچنین $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ بر محمل OA واقع میشوند ودر نتیجه محمل $\overrightarrow{OS}$ نیز بر OA واقع است . و بترتیب فوق میتوان نتیجه گرفت که محمل $\overrightarrow{OS}$ بر هریك از خطوطی که O را به یکی از دو رأس چند ضلعی وصل میکند قرار خواهد داشت درنتیجه S بر O منطبق بوده و $\overrightarrow{OS}=0$ میباشد .

حاملهای فوق ومجموع هندسی آنها را بر محور محمل OA تصویر میکنیم

$$\text{proj}\,\overrightarrow{OA}=\overline{OA}=1 \text{ و } \text{proj}\,\overrightarrow{OB}=\text{proj}\,\overrightarrow{OE}=\overline{OH}=\cos\frac{2\pi}{5} \text{ و } \text{proj}\,\overrightarrow{OC}=\text{proj}\,\overrightarrow{OD}=\overline{OK}=\cos\frac{4\pi}{5} \text{ و}$$

ونتیجه میشود

$$1+2\left(\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\right)=0 \qquad (1)$$

چنانچه مجموع دوجملهٔ داخل پرانتز را به حاصل ضرب تبدیل نمائیم بدست میآید که :

اما

$$1+4\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=0$$

و

$$\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\frac{4\pi}{5}$$

وحاصل میشود

$$1+4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=0 \qquad (2)$$

۲) ازروابط (۱) و (۲) دستگاه زیر تشکیل میشود

$$\begin{cases}\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}\\ \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

و $\cos\frac{2\pi}{5}$ و $\cos\frac{4\pi}{5}$ ریشه‌های معادلهٔ زیر خواهند بود

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0 \quad \text{یا} \quad 4x^2-2x-1=0$$

وچون $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ و $\cos\frac{4\pi}{5}<0$ است پس

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ و } \cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

(Exer. et prob. math. Combes)

***

۱۴۹۳ - (**حساب استدلالی**) معلوم کنید در نوشتن اعداد صحیح از ۱ تا ۲۵۴۷ رقم ۳ چند دفعه بکار برده میشود

حل : در نوشتن اعداد از ۱ تا ۹ یك دفعه و بعد در نوشتن هرده عدد فقط یك دفعه رقم ۳ در مرتبه یکان بکار میرود. وچون عدد ۲۵۴۷ شامل ۲۵۴ دهه کامل ویك دههٔ ناقص (از ۲۵۴۱ تا ۲۵۴۷) میباشد واین دههٔ ناقص نیز شامل رقم ۳ در مرتبهٔ یکان میباشد پس در نوشتن اعداد فوق رقم ۳ برابر با ۲۵۵ دفعه در مرتبه یکان بکار رفته است .

در نوشتن اعداد از ۱ تا ۹۹ ده دفعه (از ۳۰ تا ۳۹) و بعد از آن نیز در نوشتن هر صد عدد ده دفعه رقم ۳ در مرتبهٔ دهگان بکار میرود وعدد ۲۵۴۷ شامل ۲۵ سدهٔ کامل و یك سدهٔ ناقص (از ۲۵۰۱ تا ۲۵۴۷) است وچون این سدهٔ ناقص نیز شامل ده دفعه رقم ۳ واقع در مرتبهٔ دهگان است (از ۲۵۳۰ تا ۲۵۳۹) بنابراین دوبهم برابر با ۲۶۰ = ۱۰ × ۲۶ دفعه رقم ۳ در مرتبهٔ دهگان بکار رفته است .

عدد ۲۵۴۷ شامل ۲ هزارهٔ کامل ویك هزارهٔ ناقص (از ۲۰۰۱ تا ۲۵۴۷) است و چون در هرهزاره برابر باسد دفعه

رقم ۳ درمرتبهٔ سدگان بکارمیرود (از ۳۰۰ تا ۳۹۹) وهزارهٔ ناقص نیزشامل این تعدادمیباشد پس رویهم برابر با $۳۰۰ = ۱۰۰ \times ۳$ دفعه رقم ۳ در مرتبهٔ سدگان بکار رفته است .

درنوشتن اعدادفوق چون عدد ۳۰۰۰ وبعد ازآن نوشته نشده است پس رقم ۳ در مرتبهٔ هزار (ومرتبه‌های بعد ازآن) اصلا بکار نرفته است . نتیجه کلی آنکه در نوشتن اعداد از ۱ تا ۲۵۴۷ برابر با $۸۱۵ = ۲۰۰ + ۲۶۰ + ۲۵۵$ دفعه رقم ۳ بکار رفته است ،

***

۱۴۹۴ـ (هندسهٔ مسطه) ـ دو دوران $(O_1 \text{ و } \theta_1)$ و $(O_2 \text{ و } \theta_2)$ را در نظر میگیریم وفرض میکنیم یك نقطه M با دوران اول به M_1 تبدیل شود وبعد M_1 بادوران دوم به M_2 تبدیل گردد .

۱) ثابت کنید که عمود منصف MM_2 بر نقطهٔ ثابتی مانند O میگذرد

۲) هرگاه M برخط یادایرهٔ مفروضی حرکت کند مکان M_2 را بدست آورید

۳) مکان M را تعیین کنید برای اینکه M_1M_2 برابر باطول مفروض l باشد

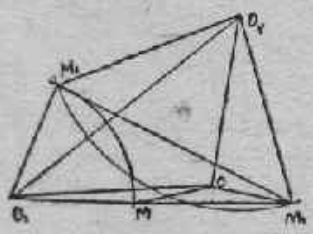
۴) مکان M را تعیین کنید برای اینکه نسبت $\frac{MM_1}{MM_2}$ برابر مقدار مفروض K باشد

۵) مکان M را تعیین کنید برای اینکه $(\overrightarrow{M_1M} \text{ و } \overrightarrow{M_1M_2}) = \alpha + 2k\pi$ باشد(αزاویهٔ مفروض است)

حل ـ ۱) تبدیل M به M_2 نتیجهٔ دو دوران بازاویه‌های θ_1 و θ_2 است و درنتیجه خوددورانی است بازاویهٔ $\theta = \theta_1 + \theta_2$ و بیك مرکز ثابت O پس $OM = OM_2$ بوده وعمود منصف MM_2 از O میگذرد .

۲) وقتیکه M خط یادایرهٔ مفروضی را بپیماید چون M_2 نظیر M در دوران $(O \text{ و } \theta)$ میباشد بنابراین مکان M_2 خط یا دایرهٔ مبدل خط ودایرهٔ مفروض در دوران $(O \text{ و } \theta)$ است.

۳) وقتی که $M_1M_2 = l$ باشدمثلث متساوی‌الساقین $M_1O_2M_3$ همواره مساوی باخودش باقی میماندزیرا طول قاعده و اندازهٔ زاویهٔ رأس



آن مقدارثابت است و دراین حال M_1 دایره‌ای بامرکز O_2 را می‌پیماید و مکان M دایرهٔ مبدل مکان M_1 در دوران $(O_1 \text{ و } -\theta_1)$ میباشد

۴) داریم

$$MM_1 = 2O_1M\sin\frac{\theta_1}{2} \quad \text{و} \quad MM_2 = 2OM\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{O_1M\sin\frac{\theta_1}{2}}{OM\sin\frac{\theta}{2}} = K$$

و نتیجه میشود

$$\frac{O_1M}{OM} = \frac{K\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_1}{2}} = K'$$

پس مکان M عبارتست ازمکان نقاطی که نسبت فواصلشان از دونقطهٔ ثابت O_1 و O برابر بامقدار ثابت K' باشد . در حالتیکه $K' = 1$ باشد این مکان خط مستقیم خواهد بود .

۵) داریم

$$(\overrightarrow{M_1O_1} \text{ و } \overrightarrow{M_1O_2}) = (\overrightarrow{M_1O_1} \text{ و } \overrightarrow{M_1M}) + (\overrightarrow{M_1M} \text{ و } \overrightarrow{M_1O_2}) + (\overrightarrow{M_1M_2} \text{ و } \overrightarrow{M_1O_2}) + 2K\pi$$

و چون در مثلث های متساوی‌الساقین MO_1M_1 و $M_1O_2M_2$ اندازهٔ زاویهٔ رأس برابر مقدار ثابت $(\theta_1 \text{ و } \theta_2)$ است وبنابرفرض $(\overrightarrow{M_1M} \text{ و } \overrightarrow{M_1M_2}) = \alpha + 2K\pi$ و مقدار ثابت است پس طرف دوم با تقریب $2K\pi$ برابر بامقدار ثابت است وداریم

$$(\overrightarrow{M_1O_1} \text{ و } \overrightarrow{M_1O_2}) = h + 2k\pi$$

یعنی نقطهٔ M_1 از دونقطهٔ O_1 و O_2 به زاویهٔ ثابت دیده میشود ومکان آن کمان درخور زاویهٔ h است که بر دو نقطهٔ O_1 و O_2 گذشته باشد ودرنتیجه مکان M کمان مبدل کمان مکان M_1 در دوران $(O_1 \text{ و } -\theta_1)$ میباشد .

(نقل ازحل المسائل هندسهٔ G.P.B.)

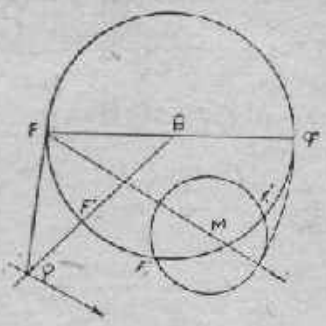
***

۱۴۹۵ـ (مخروطات) دسته بیضی‌های (E) را درنظر میگیریم که درآنها یك کانون F ورأس قطر اقصر B ثابت میباشد .

۱) مکان کانون F' را تعیین کنید .

۲) بفرض اینکه BF' درنقطه‌ای مانند P بیضی نظیر F' را قطع کند ثابت کنید هرگاه F' مکان خودرا بپیماید مکان P یك بیضی (E') است که در P بر بیضی (E) مماس است .

۳) کانونهای F' را تعیین کنید که بیضی های نظیر از نقطهٔ مفروض M واقع درصفحهٔ آنها بگذرد بحث کنید.



حل ـ ۱) برای اینکه B رأس قطر اقصر از یك بیضی با کانونهای F و F' باشد لازم و کافیست که $BF=BF'$ باشد و هرگاه B و F نقاط ثابت باشند مکان F' دایره‌ای خواهد بود با مرکز B و بشعاع BF.

۲) داریم $BF=BF'=a$ و $PF+PF'=2a$ و چون B و P بالاجبار طرفین F' واقع‌اند پس $PF+PB=2a$ بوده ونقطهٔ P بر بیضی (E') باکانونهای F و B وطول قطر اطول $2a$ واقع است و چون بیضی های (E) و (E') در نقطهٔ P دارای شعاع حاملهای مشترك هستند (ومماس در هر نقطه بر بیضی نیمساز زاویهٔ خارجی شعاع های حامل آن نقطه‌است) لذا بیضی های (E) و (E') در P مماس مشترك داشته وبر یکدیگر مماسند.

۳) برای اینکه بیضی با کانونهای F و F' از نقطهٔ M بگذرد لازم وکافیست که $MF+MF'=2a$ باشد که نتیجه میشود $MF'=2a-MF$ ونقطهٔ F' بردایرهٔ بمرکز M وبشعاع $2a-MF$ واقع است. برای اینکه مسأله دارای جواب باشد لازم و کافیست دایره های (B) و (M) متقاطع باشند یعنی:

$$|a-(2a-MF)| \leqslant BM \leqslant a+(2a-MF)$$

یا

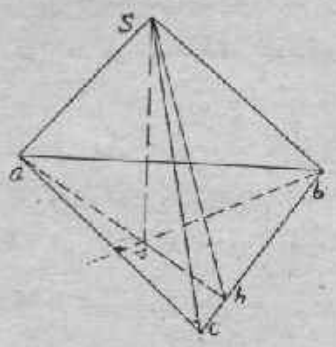
$$|MF-a| < BM < 3a-MF$$

در مثلث BMF داریم

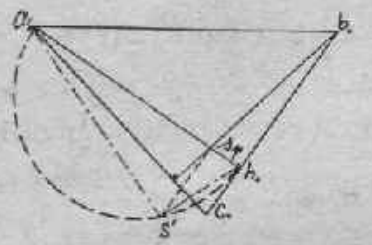
$$|MF-a| < BM \text{ یا } |ME-BF| < BM$$

بنابراین شرط امکان جواب آن است که $BM<3a-MF$ یا $MB+MF<3a$ باشد یعنی نقطهٔ M داخل بیضی (E') ویا روی آن واقع باشد درحالتیکه M روی (E') واقع است $MB+MF=3a$ یا $MF-BF=BM$ بوده و نقطهٔ M برنیم خط FB واقع است ودر این حالت دو دایره درنقطهٔ φ بر یکدیگر مماسند و بیضی نظیر عبارت از یك قطعه خط میباشد. (نقل از G.P.B)

۱۴۹۶ـ یالهای کنج سه‌قائمهٔ S صفحهٔ مقایسه را درنقاط a و b و c قطع کرده و طولهای $ab=l$ و $bc=m$ و $ca=n$ معلوم است ملخص رأس S را که بالای صفحهٔ مقایسه است از راه ترسیم و ازراه محاسبه تعیین کنید.



حل ـ ۱ تصویر S برنقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث abc واقع است (هندسهٔ فضائی سال پنجم) ورقوم آن عبارتست از طول ارتفاع نظیر وتر ah ازمثلث قائم‌الزاویهٔ ash



ترسیم: مثلث abc رابا معلوم بودن سه‌ضلع رسم کرده و نقطه تلاقی ارتفاعات آن را تعیین می‌کنیم به‌قطر ah دایره‌ای رسم میکنیم تاعمودمرسوم درو بر ah رادر S' تلاقی کند. $S's=|p|$ برابر با رقوم نقطهٔ S میباشد که چون S بالای صفحه مقایسه است. $p>0$ اختیار میشود.

محاسبه: اگرطول یالهای Sa و Sb و Sc رابترتیب x و y و z اختیار نمائیم از حل دستگاه

$$\begin{cases} x^2+y^2=l^2 \\ y^2+z^2=m^2 \\ z^2+x^2=n^2 \end{cases}$$

نتیجه میشود:

$$x=\sqrt{\frac{l^2+n^2-m^2}{2}} \text{ و } y=\sqrt{\frac{l^2+m^2-n^2}{2}} \text{ و}$$

$$z=\sqrt{\frac{m^2+n^2-l^2}{2}}$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ bsc طول ارتفاع Sh حساب میشود

$$Sh=\frac{yz}{m}=\sqrt{\frac{m^4+(l^2-n^2)^2}{2m}}$$

ودرمثلث abc بامعلوم بودن طولهای اضلاع طول ارتفاع ah محاسبه می‌شود.

$$ah=\frac{1}{2m}\times$$

$$\sqrt{(l+m+n)(l+m-n)(l+n-m)(m+n-l)}$$

و بالاخره در مثلث قائم‌الزاویهٔ ash خواهیم داشت:

$$Ss=\frac{x\cdot sh}{ah}=\cdots$$

و رقوم مثبت نقطهٔ S برحسب l و m و n بدست‌میاید

فارغ‌التحصیلان ششم ریاضی

۱۴۹۷ـ محورهای مختصات متعامد $x'ox$ و $y'oy$ و

دونقطهٔ F و F' با طولهای $a>0$ و $-a$ واقع برمحور $x'x$ مفروض است .

۱) معادلهٔ مجموعهٔ (L) از نقاطی واقع درصفحه را تعیین کنید که حاصلضرب فواصل آنها از دونقطهٔ F و F' برابر با a^2 باشد .

۲) باکمك این معادله معلوم کنید :

الف ـ مقادیر مختلف h ، تعداد نقاط مشترك (L) و خط $y=h$ را

ب ـ بازاء مقادیر مختلف k ، تعداد نقاط مشترك (L) و خط $x=k$ را .

ج ـ بازاء مقادیر مختلف t ، تعداد نقاط مشترك (L) و خط $y=tx$ را .

۳) با استفاده از قسمت ۲) شکل منحنی نمایش (L) را تعیین کنید (برای رسم منحنی $a=3$ سانتیمتر اختیار شود)

حل : ۱) $M(x,y)$ یکی از نقاط متعلق به مجموعهٔ (L) خواهد بود اگر ، و فقط اگر ، داشته باشیم

$MF.MF'=a^2$ یا $MF^2.MF'^2=a^4$

یا اینکه $[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]=a^4$

$(x^2+y^2+a^2-2ax)(x^2+y^2+a^2+2ax)=a^4$

$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=a^4$

و بالاخره معادلهٔ (L) بصورت زیر بدست میآید

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(a^2-y^2)=0 \qquad (1)$$

تبصره ـ از معادلهٔ (۱) معلوم میشود که محورهای $x'x$ و $y'y$ محورهای مختصات محورهای تقارن و نقطهٔ O مبداء مختصات مرکز تقارن (L) میباشد .

۲) الف ـ طولهای نقاط مشترك (L) و خط $y=h$ عبارتست از ریشه‌های معادلهٔ زیر .

$$(x^2+h^2)^2-2a^2(x^2-h^2)=0$$

که چنانچه $x^2=u$ اختیار شود معادلهٔ شرطی زیر حاصل میشود

$$\begin{cases} f(u)=u^2+2(h^2-a^2)u+h^2(h^2+2a^2)=0 \\ u\geq 0 \end{cases}$$

این دستگاه وقتی دارای جوابهای قابل قبول است که داشته باشیم :

$$\begin{cases} \Delta'=(h^2-a)^2-b^2(h^2+2a^2)\geq 0 \\ h^2-a^2<0 \end{cases}$$

و نتیجه خواهد شد

$$h^2\leq\frac{a^2}{4} \quad \text{یا} \quad -\frac{a}{2}<h<\frac{a}{2}$$

چنانچه $-\frac{a}{2}<h<\frac{a}{2}$ باشد خط (D) با معادلهٔ $y=h$ درچهار نقطهٔ دوبدو متقارن نسبت به $y'y$ منحنی نمایش (L) را قطع می‌کند .

اگر $h=-\frac{a}{2}$ باشد خط (D) در دونقطهٔ $A(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\text{ و }-\frac{a}{2})$ و $A'(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\text{ و }-\frac{a}{2})$ بر منحنی نمایش (L) مماس خواهد بود و اگر $h=\frac{a}{2}$ باشد خط (D) در دونقطهٔ B و B' قرینه‌های A و A' نسبت به $x'x$ برمنحنی (L) مماس میباشد .

بازاء مقادیر $h>\frac{a}{2}$ و $h<-\frac{a}{2}$ خط (D) ومنحنی (L) نقطهٔ مشترکی نخواهد داشت

ب ـ عرضهای نقاط مشترك خط (Δ) با معادلهٔ $x=k$ و منحنی (L) ریشه‌های معادلهٔ زیر میباشند :

$$(y^2+k^2)^2-2a^2(k^2-y^2)=0$$

که با انتخاب $y^2=v$ خواهیم داشت

$$\varphi(v)=v^2+2(a^2+k^2)v+k^2(k^2-2a^2)=0 \text{ و } v\geq 0$$

دستگاه وقتی دارای جواب (و فقط یك جواب) قابل قبول است که :

$k^2-2a^2\leq 0$ یا $-a\sqrt{2}\geq k\leq a\sqrt{2}$

اگر $-a\sqrt{2}<k<a\sqrt{2}$ باشد معادله $\varphi(v)=0$ دارای یك جواب مثبت است وخط (Δ) در دونقطه متقارن نسبت به $x'x$ منحنی (L) را قطع می‌کند.

اگر $k=a\sqrt{2}$ باشد خط (Δ) درنقطهٔ $C(a\sqrt{2}\text{ و }0)$ برمنحنی (L) مماس میشود واگر $k=-a\sqrt{2}$ باشد خط (Δ) در $C'(-a\sqrt{2}\text{ و }0)$ بر (L) مماس میگردد .

چنانچه $k>a\sqrt{2}$ یا $k<-a\sqrt{2}$ باشد (Δ) و (L) نقطهٔ مشترك نخواهند داشت .

ج ـ طولهای نقاط مشترك خط (T) بامعادلهٔ $y=tx$ با منحنی (L) عبارت از ریشه‌های معادلهٔ زیر میباشد

$$x^4(1+t^2)^2-2a^2x^2(1-t^2)=0$$

باحذف ریشه مضاعف $x=0$ خواهیم داشت

$$x^2(1+t^2)^2=2a^2(1-t^2)$$

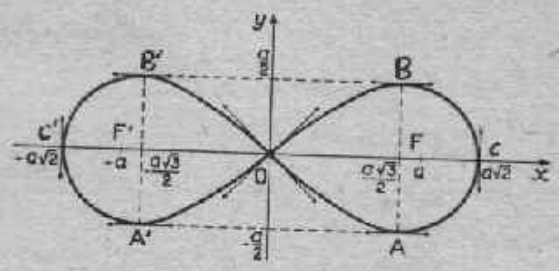
این معادله وقتی دارای جواب (دوجواب متقارن) خواهد بود که $-1\leq t\leq 1$

اگر $-1<t<1$ باشد خط (T) منحنی (L) راعلاوه بر مبداء در دونقطه متقارن نسبت به O قطع می‌کند .

اگر $t=\pm 1$ باشدخط (T) در O بر (L) مماس میباشد.

وبازاء مقادیر $t>1$ یا $t<-1$ خط (T) ومنحنی (L) بجز نقطهٔ O نقطهٔ مشترك دیگری نخواهند داشت .

۳) با توجه به آنچه گذشت منحنی (L) مطابق شکل زیر خواهد بود .



تبصره ـ منحنی فوق موسوم است به **لمنیسکات (Lemniscate)**

(ترجمه از مجله « ریاضیات مقدماتی » چاپ پاریس)

***

۱۴۹۸ـ مطلوب است تعیین تغییرات و نمایش هندسی تابع $y=x^2E(\frac{1}{x})$ وقتی که x از صفر تا $+\infty$ تغییر کند

[$E(\frac{1}{x})$ بزرگترین عدد صحیح موجود در $\frac{1}{x}$ را مشخص میکند]

مورد استعمال ـ مطلوبست تعیین عدد مثبتی که چهار برابر بزرگترین عدد صحیح موجود درعکس آن برابر باشد بامکعب عکس آن عدد .

حل ـ وجود عامل $E(\frac{1}{x})$ ایجاب میکند که تغییرات تابع بجای فاصله ($+\infty$ و ۰) در فاصله‌های جزئی زیر مورد بررسی واقع شود :

اگر $x>1$ باشد $\frac{1}{x}<1$ و $E(\frac{1}{x})=0$ بوده و تابع بصورت $y=0$ میباشد .

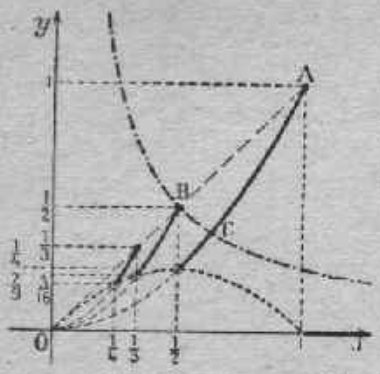
اگر $\frac{1}{2}<x<1$ باشد $2<\frac{1}{x}<3$ و $E(\frac{1}{x})=1$ بوده تابع بصورت $y=x^2$ است

اگر $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ باشد $3<\frac{1}{x}<4$ و $E(\frac{1}{x})=2$ بوده تابع بصورت $y=2x^2$ است

. . . . . .

اگر $\frac{1}{m+1}<x<\frac{1}{m}$ باشد $m<\frac{1}{x}<m+1$ و $E(\frac{1}{x})=m$ بوده تابع بصورت $y=mx^2$ میباشد.

بنابراین نمایش هندسی تابع تشکیل شده است اولا ازیك قسمت محور Ox (در فاصله $+\infty$ و ۱) و یك عده کمانهای مربوط به سهمی‌های به معادله‌های $y=x^2$ و $y=2x^2$ و ... و $y=mx^2$ و ...



منتهی‌الیه این کمانها (روی شکل با دایره‌های سیاه کوچك مشخص شده است) مربوط به نمایش هندسی تابع میباشد درصورتی که نقطهٔ ابتدائی آنها (روی شکل با دایره‌های کوچك توخالی نشان داده شده است) مربوط به نمایش تابع نیست.

تبصره ـ منتهی‌الیه کمان mام که به سهمی $y=mx^2$ مربوط است دارای مختصات $(x=\frac{1}{m}$ و $y=m\frac{1}{m^2}=\frac{1}{m})$ میباشد که در ازاء همهٔ مقادیر m بر خط OA واقع است که مختصات A عبارت از (۱و۱) میباشد .

مختصات نقطهٔ ابتدائی کمان فوق‌الذکر عبارتست از

$$x=\frac{1}{m+1} \text{ و } y=\frac{m}{(m+1)^2}$$

و یا یك محاسبه مختصر معلوم خواهد شد که بین این مختصات رابطهٔ $y=-x^2+x$ برقرار است یعنی نقاط ابتدائی کمانهای نمایش تابع بر سهمی به معادله $y=-x^2+x$ واقع‌اند که از دو نقطهٔ (۰ و ۰) و (۰ و ۱) گذشته و رأس آن به مختصات $(\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4})$ میباشد.

مورد استعمال ـ بفرض اینکه x عدد مثبت مطلوب باشد بزرگترین عدد صحیح موجود درمعکوس آن عبارتست از $E(\frac{1}{x})$ و x درمعادله زیر صدق خواهد کرد $4E(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^3}$ یا $x^2E(\frac{1}{x})=\frac{1}{4x}$. ریشه‌های این معادله طولهای نقاط تلاقی نمایش هندسی مرسوم درفوق با منحنی نمایش تابع $y=\frac{1}{4x}$ میباشد . منحنی نمایش تابع اخیر با توجه باینکه $x>0$ است شاخه هذلولی بامجانبهای Ox و Oy و واقع در بخش اول میباشد (که بصورت خط و نقطه رسم شده است)

مشاهده میشود که مسالهٔ فقط دارای دو جواب میباشد .

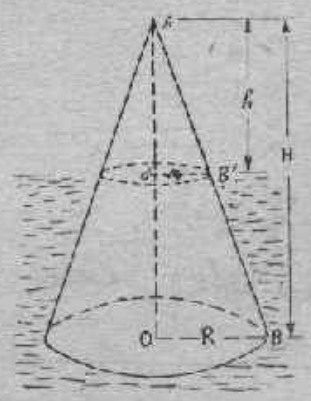
یك جواب آن بوضوح $x=\frac{1}{2}$ (طول نقطهٔ B) میباشد . جواب دیگر ، طول نقطهٔ C ، $\frac{1}{2}<x<1$ میباشد که نتیجه میشود $1<\frac{1}{x}<2$ و از آنجا $E(\frac{1}{x})=1$ بوده ومعادلهٔ مربوطه عبارت میشود از $\frac{1}{x^3}=4$ که از روی آن دومین جواب عدد مطلوب $x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ بدست میآید .

(ترجمه از Exe. et preb. math. Combes)

فیزیك و شیمی

۱۴۹۹ـ از جسمی بوزن مخصوص D مخروط قائم‌دوار و توپری بارتفاع H ساخته‌اند. آنرا در داخل مایعی بوزن مخصوص d رهامیسازیم، قسمتی ازآن بصورت مخروطی بارتفاع h بیرون از مایع دیده میشود ثابت کنید که :

$$h=H\sqrt[3]{1-\frac{D}{d}}$$



حل: طبق فرمول اجسام شناور میتوان نوشت $P=R$ که درآن P وزن جسم میباشد وآن عبارتست از

$$P=\pi R^2\frac{H}{3}\cdot D$$

و R وزن مایع هم حجم قسمت غوطه‌ور میباشد که برابر است با :

$$R=(\pi R^2\frac{H}{3}-\pi r^2\frac{h}{3})d$$

جملهٔ داخل پرانتز حجم قسمت غوطه‌ور جسم است. بنابر این با تساوی جمل فوق

$$\pi\frac{R^2HD}{3}=\pi\frac{(R^2H-r^2h)d}{3}$$

و یا

$$r^2hd=R^2H(d-D) \qquad (1)$$

از طرفی از تشابه دومثلث AOB و AO'B' میتوان نوشت $\frac{r}{R}=\frac{h}{H}$ و بنا براین

$r^2=R^2\frac{h^2}{H^2}$ که بابکار بردن این مقدار در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت

$$h^2=H^2(1-\frac{D}{d})$$

و بالاخره

$$h=H\sqrt[3]{1-\frac{D}{d}}$$

واضح است مسأله هنگامی صحیح است که $1-\frac{D}{d}>0$ یعنی $D<d$ باشد درصورتیکه $D\geq d$ باشد جسم درداخل مایع غوطه‌ور میگردد

(طرح و حل از هوشنگ شریفزاده)

۱۵۰۰ـ با n پیل متشابه که نیروی محرکهٔ هریك E ولت ومقاومت داخلی هرکدام r اهم است ، میخواهیم درسیمی بمقاومت R اهم حداکثر شدت ممکنه را جاری سازیم ، بدین منظور تعین کنید بهترین طریقهٔ بستن پیلها چگونه است و جریان چقدر است .

مقادیر عددی :

$$R=0.6\Omega\ ,\ r=0.5\Omega\ ,\ E=1.26V\ ,\ n=24$$

حل : فرض میکنیم پیلها را بطورمختلط به‌بندیم بطوریکه ار P' انشعاب که درانشعاب n' پیل بطور سری قرار گرفته‌اند بنابراین میتوان نوشت :

$$I=\frac{n'E}{R+\frac{n'r}{P'}}=\frac{n'P'E}{P'R+n'r}$$

وچون $n=n'P'$ بنابراین

$$I=\frac{n'E}{P'R+\frac{n}{P'}r}$$

برای اینکه ماکزیمم شدت جریان (I) را بدست‌آوریم از تابع فوق نسبت‌به متغیر P' مشتق میگیریم :

$$\frac{dI}{dP'}=-\frac{nE(R-\frac{nr}{P'^2})}{(P'R+\frac{n}{P'}r)^2}$$

شدت جریان هنگامی ماکزیمم است که مشتق فوق برابر صفرشود یعنی $R-\frac{nr}{P'^2}=0$ و بنابراین تعداد انشعاب $P'=\sqrt{n\frac{r}{R}}$ و بالاخره تعداد پیلهای هر سری

$$n'=\sqrt{n\frac{R}{r}}$$

و مقدارشدت جریان

$$I=\frac{E}{2}\times\frac{\sqrt{nRr}}{Rr}$$

با بکاربردن مقادیرعددی $P'=\sqrt{20}$ خواهد شد یعنی از ٤ انشعاب بیشتر واز ٥ انشعاب کمتر است وچون بایدتعداد انشعاب ضریبی از ٢٤ باشد بنابراین تعداد انشعاب ٤میباشد و لذا $n'=6$ و بالاخره $I=5.5A$

(طرح وحل مسأله از هوشنگ شریفزاده)

۱۵۰۱ـ محلولی با وزن مخصوص ۱٫۰۰۱۷ که درهر لیترش ۷ گرم نمك با وزن ملکولی $M=۷۴٫۵$ وجود دارد کاملاً تجزیه‌شده است و ۷۲٪ ملکول‌ها دیسوسیه شده و هر ملکول دیسوسیه دو ایون تولید میکند درجهٔ حرارت انجماد محلول را تعیین کنید . ضریب ثابت رائولت ۱۸۵۰ میباشد .

حل : $D=\frac{M}{v} \longrightarrow M=v\cdot D$

$M=۱۰۰۰\times ۱٫۰۰۱۷=۱۰۰۱٫۷$

گرم وزن یك لیتر محلول

گرم وزن حلال $۱۰۰۱٫۷-۷=۹۹۴٫۷$

میدانیم که اگر ملکولی به ین تجزیه شود هرین مستقیماً کار یك ملکول را انجام میدهد . در اینجا تعداد ملکولهای دیسوسیه شده $\frac{۷}{۷۴٫۵}\times ۷۲٫۰$ و تعداد یونها :

$\frac{۲\times ۷\times ۰٫۷۲}{۷۴٫۵}$ میباشد .

باقیمانده که بصورت یونیزه است $\frac{۷\times ۰٫۲۸}{۷۴٫۵}$ میباشد :

$$\Delta t=\frac{۱۸۵۰\times ۷(۲\times ۰٫۷۲+۰٫۲۸)}{۷۴٫۵+۹۹۴٫۷}=۰٫۳$$

پس عمل انجماد در ۰٫۳ـ درجه انجام گرفته . زیرا

$\Delta t=t_۱-t_۲$ یا $۰٫۳=۰-t_۲$ یا $t_۲=-۰٫۳$

(ترجمهٔ حسین جواهری دبیر دبیرستانهای کازرون)

***

۱۵۰۲ـ مسئلهٔ شیمی ریاضی

مخلوطی از بخارات متانل و اتانل را درلوله احتراق با اکسید سیاه مس ترکیب کرده و گازهای تولید شده را از ظرفهای اسید سولفوریك و آب آهك عبور داده‌ایم پس از ختم واکنش کاهش‌وزن اکسید مس K گرم و افزایش وزن اسید K' گرم میشود . معلوم کنید نسبت K به K' چه باید باشد تا حل مسئله امکان پذیرد .

حل : وزن متانل و اتانل را بترتیب a گرم و b گرم فرض نموده و مقادیرهریك را حساب می‌کنیم .

$۲CuO \longrightarrow Cu_۲O+O$

$HCH^۲OH+۳O \rightarrow CO^۲+۲H^۲O$

$CH^۳-CH^۲OH+۳O^۲ \quad ۲CO^۲+۳H^۲O$

$$\frac{HCH^۲OH}{۳۲} \qquad \frac{۳O}{۳\times ۱۶} \qquad \frac{۲H^۲O}{۲\times ۱۸}$$

$$a \qquad x=\frac{۳}{۲}a \qquad y=\frac{۹}{۸}a$$

$$\frac{CH^۳-CH^۲OH}{۴۶} \qquad \frac{۳O^۲}{۳\times ۳۲} \qquad \frac{۳H^۲O}{۳\times ۱۸}$$

$$b \qquad x'=\frac{۴۸b}{۲۳} \qquad y'=\frac{۲۷}{۲۳}b$$

با استفاده ازدومعادلهٔ مجهولی زیرمقادیر a و b را حساب می‌کنیم

$$\begin{cases} \frac{۳}{۲}a+\frac{۴۸b}{۲۳}=k \\ \frac{۹}{۸}a+\frac{۲۷}{۲۳}b=k' \end{cases} \qquad \begin{cases} a=۳۲\frac{(۱۶k'-۹k}{۱۴۴} \\ b=\frac{۴۶}{۷۲}(۳k-۴k') \end{cases}$$

نسبت $\frac{a}{b}$ را تشکیل داده و ساده مینمائیم که میشود .

$$\frac{a}{b}=\frac{۸(۱۶-۹x)}{۲۳(۳x-۴)}$$

و چون $\frac{a}{b}>۰$ است پس $\frac{۸(۱۶-۹x)}{۲۳(۳x-۴)}>۰$

بوده و از حل این نامساوی نتیجه خواهد شد .

$$\frac{۴}{۳}<x=\frac{K}{K'}<\frac{۱۶}{۹}$$

(طرح وحل از : محمد رسول‌زاده

دبیر شیمی دبیرستان تربیت تبریز)

دانش آموز رتبهٔ اول

امتحانات نهائی ششم طبیعی استان گیلان

اینجانب **محمدحسن اخوان آذری** شاگرد اول کلاس ششم رشتهٔ طبیعی گیلان میباشم و بنابرسفارش صاحب **کتابخانهٔ طاعتی نمایندهٔ فروش یکان در رشت** مطالبی از سابقهٔ تحصیلی خودرامینویسم: در امرداد ماه ۱۳۲۵ متولد شدم . دورهٔ ابتدائی را در دبستان صائب هشتپر گذراندم و در امتحان نهائی ششم ابتدائی حوزه طوالش اول شدم . ۵ سال اول متوسطه را در دبیرستان رضاشاه کبیر رشت وکلاس ششم طبیعی را در دبیرستان شاهپور رشت گذراندم و در خرداد ۴۳ با معدل **۱۸٫۶۵** بین کلیهٔ شرکت‌کنندگان رشتهٔ طبیعی گیلان شاگرد اول شدم . در کنکوردانشگاه تهران قبول شده با احراز رتبهٔ ۳۹ دردانشکدهٔ مورد علاقهٔ خود پزشکی ثبت نام نمودم .

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۱۵۰۳ ـ حاصل عبارت زیررا بدست آورید

$$[x-x^2+x^3-x^4+\dots+(-1)^{n-1}x^n]\times$$
$$\times(1+x)+(-1)^{n-1}x^{n+1}$$

محمود غفوریان ـ پنجم ریاضی دبیرستان مرآت

۱۵۰۴ ـ عبارت زیررا بصورت مجموع دو مربع تبدیل نموده آنگاه معلوم کنید بازاء چه مقادیر از x و y مقدار عبارت برابر صفر خواهد بود

$$x^2+y^2-4x-4y+8$$

محمد روزبه ـ ششم ریاضی دبیرستان راهنما

۱۵۰۵ ـ کسر زیررا ساده نمائید

$$\frac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$$

۱۵۰۶ ـ اولاً هریك ازدوعبارت زیررا بحاصلضرب عوامل تجزیه کنید

$$x^2-4x+3 \text{ و } 2x^2-9x+9$$

ثانیاً هریك ازکسرهای زیررا ساده نموده آنگاه مجموع $A+B+C$ راتعیین وساده کنید

$$A=\frac{(2x+3)^2-x^2}{x^2-9} \text{ و } B=\frac{x^2-(2x-1)^2}{x^2-4x+3} \text{ و}$$

$$C=\frac{(2x-3)^2}{2x^2-9x+9}$$

کلاس چهارم ریاضی

۱۵۰۷ ـ ثابت کنید که اگر $a+b+c=0$ باشد داریم

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$$

حسن تاهبازصالحی ـ پنجم ریاضی دبیرستان هدف ۱

۱۵۰۸ ـ کسر زیررا ساده ترین صورت تبدیل نمائید

$$\frac{x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$$

(منوچهر فنائی ـ سال پنجم دبیرستان)

۱۵۰۹ ـ مطلوبست تعیین x ازرابطهٔ :

۱۵۱۰ ـ سه کسر زیر مفروض است

$$A=\frac{4bc-a^2}{bc+2a^2} \text{ و } B=\frac{4ca-b^2}{ca+2b^2} \text{ و } C=\frac{4ab-c^2}{ab+2c^2}$$

ثابت کنید که اگر داشته باشیم $a+b+c=0$ خواهیم داشت :

$$A+B+C=3 \text{ و } ABC=1$$

(مجلهٔ تربیت ریاضی)

۱۵۱۱ ـ اگر m عدد صحیح مثبت فرد باشد ثابت کنید

$$(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$$

بر $(a+b)(b+c)(c+a)$ بخش پذیراست

(ترجمهٔ : بهروز پرهامی)

۱۵۱۲ ـ بفرض اینکه

$$x=a+b+c+d \text{ و } y=a+b-c-d$$
$$z=a-b+c-d \text{ و } t=a-b-c+d$$

باشد ثابت کنید که اگر $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$ باشد خواهیم داشت

$$xy(x^2+y^2)=zt(z^2+t^2)$$

۱۵۱۳ ـ اولاً عبارت زیررا بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

$$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$$

ثانیاً بفرض

$$x=\frac{a}{b+c} \text{ و } y=\frac{b}{c+a} \text{ و } z=\frac{c}{a+b}$$

حاصل عبارت زیررا حساب کنید

$$P=yz+zx+xy+2xyz$$

(متمم حساب)

۱۵۱۴ ـ هواپیمائی درامتدادی ازسطح زمین برمیخیزد اگر درهرثانیه $\frac{200}{7}$ متربه ارتفاع آن افزوده شود

اولا مطلوبست ارتفاع هواپیما در ۸ ثانیه بعدازپرواز

ثانیاً اگرسرعت هواپیما ۱۰۰ متردرثانیه باشد زاویهٔ میل امتداد پروازهواپیما باسطح افق چند درجه است.

متوالی از یك تصاعد حسابی باشند ثابت کنید که عبارت $abcd+(b-a)^4$ کامل است .

۱۵۱۷ ـ متوازی‌الاضلاع ABCD که درآن زاویهٔ A حاده بوده و $AB>AD$ میباشد مفروض است . برضلع AD نقطه‌ای مانند E انتخاب مینمائیم . تحقیق کنید که برضلع CD نقطه‌ای مانند F میتوان تعیین کرد که $AF=CE$ باشد واگر I نقطهٔ تلاقی AF با CE باشد ثابت کنید که BI نیمساز یکی ازاوایه‌های دوخط AF و CE میباشد .(مجلهٔ تربیت ریاضی)

۱۵۱۸ ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که درآن زاویهٔ A قائمه بوده و $AB=c$ و $AC=b$ میباشد مفروض است دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABD و ACE را باوترهای AB و AC ودرخارج مثلث میسازیم

۱) ثابت کنید سه نقطهٔ D و A و E براستقامت یك خط مستقیم واقع اند

(۲ ثابت کنید که چهارضلعی BDEC ذوزنقهٔ قائم بوده ومساحت آنرا برحسب b و c حساب کنید

۳) اگر M نقطهٔ وسط BC و R نقطهٔ تلاقی AC با ME و P نقطهٔ تلاقی AB با MD باشد ثابت کنید چهار ضلعی ARMP مستطیل است (مجلهٔ تربیت ریاضی)

۱۵۱۹ ـ خط xy ونقاط A و B درخارج آن مفروض اند . نقطهٔ C رابر xy چنان بدست‌آورید که یکی ازمیانه‌های مثلث ABC باخط xy زاویه‌ای به‌اندازهٔ معلوم α بسازد

(محمدآگاه ـ دبیرستان دارالفنون)

۱۵۲۰ ـ دوخط متوازی $x'x$ و $y'y$ ونقطهٔ A واقع بر $x'x$ داده شده‌است ازنقطهٔ مفروض O خطی مرورده‌ید که $x'x$ رادر B و $y'y$ رادر C قطع کند و $AB=AC$ باشد

(محمدآگاه)

کلاس پنجم طبیعی و ریاضی

۱۵۲۱ ـ برمحور $x'x$ به مبداء O دو نقطهٔ A و B راباطولهای ۱ ـ و ٤ انتخاب میکنیم وفرض میکنیم A' قرینهٔ A نسبت به O و B' قرینهٔ B نسبت بهٔ O و P وسط AB' و P' وسط $A'B$ باشد

۱) طولهای نقاط A' و B' و P و P' رابدست‌آورید

۲) تحقیق کنید $\overline{PP'}=\frac{\overline{AA'}+\overline{B'B}}{2}$

۱۵۲۲ ـ سه نقطهٔ A (۰ و ۱) و B (۳و۰) و $M(a+1 و 3a-1)$ رادرنظرمیگیریم

۱) تحقیق کنید که a هرچه باشد مثلث AMB متساوی‌الساقین است

۲) بازاء چه‌مقدارازa نقطهٔ M وسط قطعه خط AB میباشد

۳) بازاء دومقدارازa مثلث AMB قائم‌الزاویه میباشد این دومقدار a راتعیین کنید

٤) بازاء دومقدار ازa نقطهٔ M ازدومحور مختصات بیك فاصله است . این دومقدار a را پیدا کنید

٥) AB و PQ دوقطرازلوزی APBQ میباشندکه رأس P ازآن برمحور $y'y$ واقع است مختصات نقاط P و Q ومساحت این لوزی رابدست‌آورید

۱۵۲۳ ـ درمثلث ABC قائمه‌درزاویهٔ A اندازهٔ زاویه C بحسب درجه برابر است با $\frac{18}{5}$ اندازهٔ زاویه B بحسب گراد اندازه‌های زاویه‌های B و C را ابتدا برحسب گراد وبعد بر حسب درجه بدست‌آورید

۱۵۲۴ ـ دردایرهٔ جهت داربه مبداء A نقاط M_1 و M_2 و M_3 انتهای کمانهای بااندازه‌های زیررا تعیین کنید

$AM=1540^\circ$ و $AM_1=-1750gr$ و $AM_2=-\frac{649\pi}{12}$

تحقیق کنید که نقاط M و M_1 و M_2 یك سه‌ضلعی‌منتظم تشکیل می‌دهند. برحسب رادیان فرمول اندازهٔ کلی کمانی را بنویسید که شامل هرسه کمان فوق باشد

کلاس پنجم ریاضی

۱۵۲۵ ـ معادلهٔ $ax^2+bx+C=0$ (۱) که درآن x مجهول بوده و $a\neq 0$ مفروض است

۱) معلوم کنید اگر $ac<0$ باشد معادلهٔ (۱) دارای دوریشهٔ متقارن است

۲) اگر $ac>0$ و $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد درتعداد ریشه‌های معادلهٔ (۱) بحث کنید

۳) دردوحالت $c=0$ و $\Delta=0$ نوع ریشه‌های معادله‌راتعیین کنید

۱۵۲۶ ـ مطلوبست حل وبحث معادلهٔ زیر

$$\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}=1$$

۱۵۲۷ ـ مطلوبست حل وبحث نامعادلهٔ زیر

$$mx^2+(m-1)x+m-1<0$$

۱۵۲۸ ـ دستگاه زیرراحل کنید

$$\begin{cases} 2x^2-3x=2y^2-3y \\ x^4-2x^2=y^4-2y^2 \\ x\neq y \end{cases}$$

۱۵۲۹ ـ مطلوبست حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} xy+xy^3+xy^2=280 \\ x+xy^4+xy^5=980 \end{cases}$$

۱۵۳۰ـ مطلوبست حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=13\sqrt{2} \end{cases}$$

(بهرام داها ـ دبیرستان ناصرخسرو)

۱۵۳۱ـ حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} x^2=7x+3y \\ y^2=3x+7y \end{cases}$$

۱۵۳۲ـ حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^3+y^3+a^3}+\sqrt[3]{(x-y+a)^3}=2\sqrt[3]{4xy} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{a}=0 \end{cases}$$

حل المسائل رضا مهندس

۱۵۳۳ـ بفرض $0<u<2\pi$ و $c=5tg u$ و

$a=3\cos u+4\sin u$ و $b=3\sin u-4\cos u$

$y=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

مقادیر مختلف y را از روی مقادیر u بدست آورید

۱۵۳۴ـ بفرض

$$x=\frac{1}{\cos a\cos b} \text{ و } y=\frac{tg a}{\cos b} \text{ و } z=tg b$$

مقدار عبارت $p=x^2-y^2-z^2$ را بساده‌ترین صورت بدست آورید.

۱۵۳۵ـ اگر داشته باشیم

$$x=\frac{a}{\cos u}+b\,tg u \text{ و } y=a\,tg u+\frac{b}{\cos u}$$

رابطه‌ای مستقل از u بین x و y بدست آورید.

۱۵۳۶ـ مثلث ABC ونقطهٔ S واقع در خارج صفحه آن مفروض است. بر خطوط SA و AB و SC نقاط A' و B' و C' را چنان تعیین میکنیم که داشته باشیم

$$\frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}}=\frac{1}{3} \text{ و } \frac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{SB}}=\frac{\overrightarrow{SC'}}{\overrightarrow{SC}}=\frac{1}{2}$$

۱) خط (Δ) فصل مشترك صفحات مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ را تعیین کنید. اگر β و γ بترتیب نقاط تلاقی AB و AC با (Δ) باشد نسبت‌های $\dfrac{\overrightarrow{\gamma C}}{\overrightarrow{\gamma A}}$ و $\dfrac{\overrightarrow{\beta B}}{\overrightarrow{\beta A}}$ را حساب کنید. چه نسبت بین $\overrightarrow{\beta\gamma}$ و $\overrightarrow{BC}$ برقرار است.

۲) اگر G مرکز ثقل مثلث ABC و G' نقطهٔ تلاقی SG باصفحهٔ $A'B'C'$ باشد نسبت بین $\overrightarrow{SG'}$ و $\overrightarrow{SG}$ را بدست آورید.

(Combes)

۱۵۳۷ـ سه محور ثابت متوازی و متحد الجهت وغیر واقع در یك صفحه مفروض‌اند، سه نقطهٔ ثابت A و B و C بترتیب برسه‌محور واقع‌اند و سه‌نقطهٔ متغیر A' و B' و C' بترتیب بر سه محور چنان حرکت می‌کنند که مجموع جبری $\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}$ (۱) برابر بامقدار ثابت k باقی‌میماند. ثابت کنید G' مرکز ثقل مثلث $A'B'C'$ نقطهٔ ثابتی است. و برعکس یعنی اگر G' ثابت فرض شود رابطهٔ (۱) برقرار خواهد بود.

۱۵۳۸ـ سه‌نیم خط Sx و Sy و Sz غیر واقع در یك صفحه مفروض است سه‌نقطهٔ ثابت A و B و C بترتیب بر Sx و Sy و Sz انتخاب میشود، یك صفحهٔ متغیر که‌بموازات صفحهٔ ABC حرکت می‌کند خطوط Sx و Sy و Sz را بترتیب در نقاط A' و B' و C' قطع میکند

۱) فصل مشترکهای دوبدوی صفحات BCA' و CAB' و ABC' و نقطهٔ مشترك هرسه‌صفحه را تعیین کنید

۲) مکان هندسی این نقطهٔ مشترك را بدست آورید.

(Combes)

کلاسهای ششم طبیعی و ریاضی

۱۵۳۹ـ توابع زیر مفروض است

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$F(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{(x-b)(x-c)}+\frac{1}{(x-c)(x-a)}+$$

$$+\frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

$f'(x)$ و $f''(x)$ مشتق‌های اول ودوم تابع $f(x)$ را تعیین کرده وتحقیق کنید که روابط زیر برقرار است

$$F(x)=\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ و } \varphi(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(x)}{f(x)}$$

۱۵۴۰ـ تابع $y=\frac{1}{8}(x^2-2x+17)$ مفروض است.

۱) منحنی (c) نمایش هندسی تابع را رسم کنید

۲) معادلهٔ مماس برمنحنی را در نقطهٔ بطول ۹ از آن بنویسید .

۳) خط بمعادلهٔ $y=2x-8$ محور $x'x$ را درنقطهٔ P و خط بمعادلهٔ $x=1$ را درنقطهٔ M قطع میکند . ازنقطهٔ P مماسهای PT و PT' و از نقطهٔ M مماسهای MS و MS' برمنحنی (c) رسم میشود .

الف ـ معادله‌های خطوط PT و PT' و MS و MS' و مختصات نقطه‌های T و T' و S و S' را بدست آورید .

ب ـ تحقیق کنید که $MS=MS'$ و زاویهٔ TPT' قائمه است .

۱۵۴۱ـ معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x = 1+\sin 3x$ را حل کرده جوابهای کلی آنرا بدست آورید ومعلوم کنید که معادله دارای پنج جواب واقع در فاصلهٔ $(0 \text{ و } 2\pi)$ میباشد که یك پنج ضلعی منتظم رادر دایرهٔ مثلثاتی مشخص میسازند .

کلاس ششم ریاضی

تعریف ـ مماس وقائم در نقطهٔ M برمنحنی (c) نمایش هندسی تابع $y=f(x)$ محور $x'x$ را بترتیب در T وN قطع می‌کنند اگر P تصویر M بر $x'x$ باشد بنا برتعریف PT را تحت مماس ، PN را تحت قائم ، MT را طول مماس و MN را طول قائم نظیر نقطهٔ M از منحنی (c) مینامند .

۱۵۴۲ـ ثابت کنید که برمنحنی نمایش تابع $y=ax^2+bx+c$ فقط دونقطه یافت میشود که درآن نقاط تحت مماس با تحت قائم مساویست و مختصات این نقاط را بدست آورید .

۱۵۴۳ـ مسألهٔ فوق را برای تابع $y^2=2px$ حل کنید

۱۵۴۴ـ منحنی (c) با معادلهٔ زیرمفروض است .

$$x^2+y^2-2xy-2x-2y=0$$

۱) ثابت کنید که منحنی (c) دارای یك محور تقارن است ومعادلهٔ این محور را بدست آورید .

۲) ثابت کنید که برمنحنی (c) هیچ نقطه‌ای نمیتوان یافت که درآن تحت مماس با تحت قائم مساوی باشد .

۳) مکان هندسی نقاطی را پیدا کنید که ازآن نقاط میتوان دومماس عمود برهم برمنحنی (c) رسم نمود .

۴) معادلات خطوطی راکه ازنقطهٔ $M(\frac{3}{4} \text{ و } \frac{3}{4})$ قائم بر منحنی (c) میتوان رسم کرد بدست آورید .

۱۵۴۵ـ تابع $y=ax^2$ مفروض است ثابت کنید درازاء هردوعدد متمایز دلخواه α و β یك عدد وفقط یك عدد مانند γ وجود دارد بطوریکه رابطهٔ زیر برقرار باشد .

$$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\gamma)$$

مورد استعمال ـ اگر A وB دونقطهٔ دلخواه ازمنحنی (c) نمایش تابع $y=ax^2$ باشدثابت کنید که بر کمان AB یك نقطه و فقط یك نقطه مانند C وجود دارد بطوریکه مماس بر (c) در C با خط AB موازی باشد وچنانچه I وسط AB باشد خط CI بامحور تقارن منحنی (c) موازیست . (محورهای مختصات متعامد اختیارشده‌اند) (ترجمه از فرانسه E.P.M.C)

۱۵۴۶ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی که پارامتر m تغییر کند بدست آورید بنابرآنکه :

$$M\left(x=\frac{a-b-2mc}{1+m^2} \text{ و } y=\frac{(a-b)m-m^2c+c}{1+m^2}\right)$$

حسن یوسفی آذری نژاد دانشجوی ریاضی)

۱۵۴۷ـ تابع $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ مفروض است ثابت کنید که بین y' و y'' مشتق‌های اول ودوم تابع y رابطهٔ زیربرقرار است .

$$4(1+x^2)y''+4xy'-y=0$$

(عبدالرحیم ایزدی نجف‌آبادی دانشجوی فنی)

مثلثات

۱۵۴۸ـ ثابت کنید که اگر $\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\lambda^2\cos 2\alpha=\lambda^2$ باشد خواهیم داشت :

$$(1+tg^2\alpha)(1\pm\lambda tg\alpha)=2$$

(حسن مولائی دبیرستان رهنما)

۱۵۴۹ـ هرگاه a وb وc سه جملهٔ متوالی ازیك تصاعد حسابی با قدر نسبت d باشد ثابت کنید که :

$$\cos a+\cos c=2\cos b\cos d$$

(حسن مولائی)

۱۵۵۰ـ مطلوبست محاسبهٔ مجموع زیر :

$$S_n=\sin^3\frac{x}{3}+3\sin^3\frac{x}{9}+\dots+3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n}$$

(ترجمهٔ علی شیعه‌بیگی دانشجوی فنی)

۱۵۵۱ـ اگر $a_1>0$ و a_2 و . . . و a_n جملات تصاعد هندسی با قدر نسبت $q>0$ باشد مجموع زیر را حساب کنید .

$$S_n = \mathrm{Arc}\,tg\,\frac{q-1}{\frac{1}{a_1}+a_2} + \mathrm{Arc}\,tg\,\frac{q-1}{\frac{1}{a_2}+a_3} + \cdots + \mathrm{Arc}\,tg\,\frac{q-1}{\frac{1}{a_n}+a_{n+1}}$$

(طرح سیروس فخریاسری دانشجوی فنی)

۱۵۵۲ ـ ثابت کنید که ازروابط (۱) رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود :

$$(1)\ A_1 tg(\alpha+\varphi_1) = A_2 tg(\alpha+\varphi_2) = \cdots = A_n\, tg(\alpha+\varphi_n)$$

$$(2)\ \frac{A_1+A_2}{A_1-A_2}\sin^2(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{A_2+A_3}{A_2-A_3}\sin^2(\varphi_2-\varphi_3) + \cdots + \frac{A_n+A_1}{A_n-A_1}\sin^2(\varphi_n-\varphi_1) = 0$$

(طرح سیروس فخریاسری)

(حساب استدلالی)

۱۵۵۳ ـ دردستگاه شمار باچه پایه تساوی زیر برقرار است

$$122 \times 103 = 13121$$

۱۵۵۴ ـ دردستگاه شمار باچه پایه داریم

$$132^2 = 21054$$

۱۵۵۵ ـ دوعدد (صحیح ومثبت) چنان تعیین کنید که اگر یك واحد باولی ودو واحد به دومی اضافه کنیم حاصلضرب آنها دوبرابر گردد .

۱۵۵۶ ـ خارج قسمت و باقیماندهٔ تقسیم $a-1$ بر b معلوم است . خارج قسمت وباقیماندهٔ تقسیم $ab^n - 1$ رابر b^{n+1} بدست آورید .

(ترجمه ازفرانسه)

۱۵۵۷ ـ حاصلضرب $1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$ را با $n!$ نمایش داده (فاکتوریل n) میخوانند . ثابت کنید هر عدد صحیح مانند N رامیتوان بشکل زیرنوشت

$$N = a_1 + a_2\times 2! + a_3\times 3! + \cdots + a_n\times n!$$

که درآن عاملهای a_i اعداد صحیح بوده ومشروط به شرط $0 < a_i < i$ میباشد بعلاوه $a_n \neq 0$ است . مثال عددی $N = 31457$

(نقل از E . P . Combes)

(هندسه ومخروطات)

۱۵۵۸ ـ نقاط P_1 و P_2 و ... و P_n رأسهای متوالی یك n ضلعی منتظم محدب محاط دردایرهٔ بشعاع r وبمرکز o و M نقطه‌ای دلخواه ازاین دایره میباشد .

۱) ثابت کنید :

$$\overrightarrow{op_1} + \overrightarrow{op_2} + \cdots + \overrightarrow{op_n} = \Sigma\overrightarrow{op_i} = 0$$

۲) مطلوبست محاسبهٔ مجموع زیر برحسب r و n

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} (MP_i)^2 = \overline{MP_1}^2 + \overline{MP_2}^2 + \cdots + \overline{MP_n}^2$$

۱۵۵۹ ـ اولاثابت کنید که‌شرط لازم وکافی برای‌اینکه G مرکز ثقل یك مثلث ABC باشدآنست که :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ باشد

ثانیاً ـ مثلث ABC که درآن G مرکزثقل ، A' و B' و C' بترتیب اوساط اضلاع BC و CA و AB ، a و b و c بترتیب طولهای اضلاع BC و CA و AB می‌باشد مفروض است . $A'x$ و $B'y$ و $C'z$ عمود منصف‌های اضلاع مثلث را ابتدا ازاوساط اضلاع ودرجهت خارج مثلث رسم کرده وبرآنها نقاط A_1 و B_1 و C_1 را بترتیب چنان تعیین میکنیم که : $\overline{A'A_1} = Ka$ و $\overline{B'B_1} = Kb$ و $\overline{C'C_1} = Kc$ باشد (K عددی‌است جبری). ثابت کنید که $\overrightarrow{A'A_1} + \overrightarrow{B'B_1} + \overrightarrow{C'C_1} = 0$ بوده و نتیجه بگیرید که G مرکز ثقل مثلث $A_1B_1C_1$ نیز میباشد .

(نقل از E . p . Combes)

۱۵۶۰ ـ صفحهٔ P ونقطهٔ o واقع درآن مفروض‌است. دوحامل $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را غیرواقع در صفحهٔ P دریك طرف ویا طرفین‌آن فرض میکنیم بطوریکه هیچ یك از آنها برصفحهٔ P عمود نباشد . اگر OA' و OB' تصویرهای OA و OB برصفحهٔ P باشد.

۱) رابطه‌ای راکه بین دوحاصلضرب اسکالر $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}$ وجود دارد بدست آورید.

۲) بترتیب یکی از دوزاویهٔ AOB و $A'OB'$ قائمه فرض میشود نوع دیگری رادراوضاع مختلفی که حاملهای OA و OB نسبت بصفحه P میتوانند داشته باشند تعیین کنید

(نقل از E . P . C .)

۱۵۶۱ ـ دایرهٔ (D) به مرکز F و به شعاع R مفروض است و A نقطه‌ای واقع در داخل دایره میباشد . بیضی‌هائی‌در نظر میگیریم که از نقطهٔ A گذشته و دایرهٔ (D) دایرهٔ هادی آنها باشد .

۱) مکان هندسی 'F کانون دیگر این بیضی‌ها را تعیین کنید .

۲) اگر 'F نقطه‌ای‌ازاین مکان باشد، 'AF بیضی‌نظیر را در نقطهٔ دیگری مانند B قطع میکند . مکان نقطهٔ B را تعیین کنید وقتی که 'F مکان خود را بپیماید .

۱۵۶۲ ـ (رقومی) تصویر لوزی ABCD بر صفحهٔ مقایسه مربع abcd میباشد بافرض‌اینکه $AC=2$ و $BD=8$ و رقوم نقاط a و c هر دو برابر ۲ باشد رقوم نقاط b و d را از راه ترسیم و از راه محاسبه تا ۱/۱۰ تقریب بدست آورید بنا بر آنکه رقوم d از رقوم b بیشتر باشد .

مسائل متفرقه

۱۵۶۳ ـ اگر عبارت x^4-px+q بر $(x-c)^2$ قابل قسمت باشد ثابت کنید : $27q^4=256q^3$

(ترجمهٔ منصور معتمدی ـ آبادان)

۱۵۶۴ ـ ضرایب a و b و c را تعیین کنید برای اینکه اتحاد زیر برقرار باشد.

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1}=a\sin x+b\cos x+c$$

(فرستنده : مرتضی سهرابی دانشجوی دانشگاه)

۱۵۶۵ ـ معادلهٔ درجهٔ سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ مفروض است . معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش بترتیب برابر مربع ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد .

(سعید وهاب‌زادگان)

۱۵۶۶ ـ ثابت کنید اگر $2\cos\alpha=a+a^{-1}$ باشد، $2\cos 3\alpha=a^3+a^{-3}$ خواهد بود .

(کورش محسن‌زادگان)

۱۵۶۷ ـ اگر داشته باشیم :

$$x=by+cz+dt \quad \text{و} \quad y=ax+cz+dt \quad \text{و}$$
$$z=ax+by+dt \quad \text{و} \quad t=ax+by+cz$$

ثابت کنید که :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=3$$

(فرستنده ـ حسن‌پور رضائی‌دبیرستان رضاشاه‌کبیر تبریز)

۱۵۶۸ ـ اگر رابطهٔ زیر وجود داشته باشد چه رابطهٔ بین a و b و c وجود دارد .

$$\log b+c^{a+\log c-b^a}=2\log b+c^{a\log c-b^a}$$

(رضا عندلیب ـ دبیرستان سعدی اصفهان)

۱۵۶۹ ـ ثابت کنید کسر زیر تحویل ناپذیر است .

$$\frac{\frac{1}{1\times 2n}+\frac{1}{2\times 3n}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n^2}}{\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}$$

(علی‌بنی‌هاشم ـ دبیرستان جلوه تهران)

۱۵۷۰ ـ اگر n عددصحیح مثبت و x عددمثبت‌مخالف یك باشد صحت نامساوی زیر را تحقیق کنید .

$$nx^{n+1}+1>nx^n+x^n$$

(منوچهر قمصری ـ دبیرستان سعدی اصفهان)

۱۵۷۱ ـ مثلث غیرمشخص ABC را در نظرمیگیریم و فرض میکنیم A_1 و B_1 و C_1 مراکز دوایر محاطی خارجی مثلث ABC و A_2 و B_2 و C_2 مراکزدوایر محاطی خارجی مثلث $A_1B_1C_1$ و بالاخره A_n و B_n و C_n مراکز دوایرمحاطی خارجی مثلث $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ باشد اولا اندازهٔ زوایای مثلث $A_nB_nC_n$ را برحسب اندازه‌های زوایای مثلث ABC حساب کنیدثانیاً اگر $n\to\infty$ نوع مثلث $A_nB_nC_n$ را معلوم کنید .

(فرستنده : عباس وفائی دبیرستان ادب اصفهان)

***

چهار مسأله مربوط به نامساویها

(ترجمهٔ محمد شریفزاده)

۱۵۷۲ ـ ثابت کنید که

$$\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

۱۵۷۳ ـ هرگاه y_1 و y_2 و ... و y_k مقادیر مثبت و m_1 و m_2 و ... m_k اعداد صحیح ومثبت باشند نامساوی زیر را ثابت کنید .

$$\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ky_k}{m_1+m_2+\cdots+m_k}>$$
$$(y_1^{m_1}\times y_2^{m_2}\times\cdots\times y_k^{m_k})^{\frac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_k}}$$

۱۵۷۴ ـ هرگاه R_1 و R_2 و ... و R_k مقادیر کسری باشند بطوریکه $R_1+R_2+\dots+R_k=1$ باشد نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$R_1y_1+R_2y_2+\dots+R_ky_k\geq y_1^{R_1}\times y_2^{R_2}\times\dots\times y_k^{R_k}$$

۱۵۷۵ ـ در ذوزنقهٔ ABCD فرض میکنیم طول قاعدهٔ $AB=a$ و طول قاعدهٔ $CD=b$ باشد.

اولا: ۱) خط MN را موازی دو قاعده چنان رسم کنید که MN واسطهٔ حسابی بین a و b باشد.

۲) خط KL را بموازات دو قاعده چنان رسم کنید که KL واسطهٔ هندسی بین a و b باشد.

۳) خط PQ را بموازات دو قاعده چنان رسم کنید که PQ واسطهٔ توافقی بین a و b باشد.

۴) خط RS را موازی با دو قاعده چنان رسم کنید که طول RS برابر باشد با $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

ثانیاً از وضع خطوط فوق نسبت بیکدیگر نامساویهای بین اقسام واسطه‌های a و b را نتیجه بگیرید.

۱۵۷۶ ـ بفرض اینکه x و y و z مقادیر مثبت باشند ثابت کنید.

$$\log_y x+\log_z y+\log_x z\geq 3$$

(حسن پوررضائی دبیرستان رضاشاه‌کبیر تبریز)

۱۵۷۷ ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را با معلوم بودن AB ضلع زاویهٔ قائمه و CH تصویر ضلع AC بر وتر BC رسم کنید.

(منصور تعلمی ششم ریاضی)

۱۵۷۸ ـ چهار نقطهٔ A و B و C و D بترتیب بریک خط قرار داشته و $AB=CD$، دو دایرهٔ متحدالمرکز چنان رسم کنید که نسبت شعاعهای آنها برابر عدد معلوم k بوده‌اولی بر A و D و دومی بر C و B بگذرد.

(خسرو موحد دبیرستان ادیب)

۱۵۷۹ ـ بااستفاده از قضیهٔ «سمسن» ثابت کنید دوایر محیطی چهار مثلثی که از چهار خط دوبدو متقاطع تشکیل میشود همه در یك نقطه مشترکند.

مورد استعمال ـ سهمی را مشخص کنید که از آن چهار مماس در دست است.

(فرستنده : حسن سعادتی دانشجوی پلی‌تکنیك)

۱۵۸۰ ـ در مربع ABCD نقطهٔ M را بر BC و نقطهٔ N را بر CD چنان انتخاب میکنیم که BM نصف BC و DN ثلث DC باشد ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ MAN برابر 45° است.

۱۵۸۱ ـ ثابت کنید در هرمثلث بین ارتفاعات و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\frac{h_b h_c}{(h_a-h_b)(h_a-h_c)h_a}+\frac{h_c h_a}{(h_b-h_a)(h_b-h_c)h_b}+\frac{h_a h_b}{(h_c-h_a)(h_c-h_b)h_c}=\frac{1}{r}$$

(سیروس فخریاسری دانشجوی فنی)

۱۵۸۲ ـ ثابت کنید که درهرمثلث بین شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی وخارجی ومساحت رابطهٔ زیر برقراراست

$$\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r}\right)\times\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r}\right)=\frac{-1}{S^2}$$

سیروس فخر یاسری

دانش‌آموز رتبه‌اول ششم طبیعی دبیرستانهای رودسر

دوشیزه **ربابه میرابی** درسال ۱۳۲۳ درسورکوه‌از توابع رودسر متولد شده تحصیلات ابتدائی خودرا در دبستان تربیت‌نسوان رودسر بپایان‌رسانیده ودر کلاس‌ششم ابتدائی با معدل ۱۶٫۱۶ شاگردممتازشناخته شده‌سپس برای ادامه تحصیلات متوسط وارد دبیرستان تربیت نسوان رودسر شده ودر سال تحصیلی ۴۲-۱۳۴۳، بین‌کلیه دانش‌آموزان رشته طبیعی دبیرستانهای رودسر بامعدل **۱۷٫۶۴** رتبهٔ اول را احراز نموده‌است، ضمناً مشارالیها درتمام دوران تحصیلی کلاسهای دبیرستانی، شاگرد اول بوده است.

کفیل دبیرستان تربیت نسوان رودسر

حمید تراب‌زاده

فرستندهٔ خبر: علیرضا منجمی‌گیلانی ـ نماینده مجله یکان در رودسر

مسائل ریاضی امتحان نهائی

کلاسهای ششم دبیرستانهای فرانسه (مطابق باخرداد ۴۲)

I ـ رشتهٔ ریاضی :

۱۵۸۴ ـ (تمرین، ۵ نمره) اولاعبارت زیررا ساده کنید

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$$

ثانیاً فواصلی راکه تابع زیر معین است تعیین کنید .

$$y=\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$$

ثالثاً آیا این تابع مقدار صفر ومقدار یك‌را قبول میکند

۱۵۸۵ ـ مسأله (۱۵ نمره)ـ دستگاه محورهای مختصات $x'ox$ و $y'oy$ وبر محور $x'ox$ دونقطهٔ ثابت A و B داده شده است : $\overline{oA}=a$ و $\overline{OB}=-a$ و $a>0$ دو نقطهٔ متغیر M و P برمحور $x'ox$ بارابطهٔ $\overline{AM}\cdot\overline{BP}=-4a^2$ مشخص میباشند وفرض میکنیم $\overline{AM}=x$ و $\overline{MP}=z$

۱) z رابرحسب a و x بدست آورید؛ واگر x متغیرمستقل باشد تغییرات z رابررسی نموده ومنحنی نمایش‌آن رارسم کنید بدون محاسبه‌تعداد نقاط M را تعیین کنید که فاصلهٔ MP برابر باعدد حسابی مفروض d باشد .

۲) برنیم محور oy نقطهٔ ثابت C ($\overline{OC}=b>0$) رادر نظر میگیریم . ضریب‌زاویهٔ خطوط CM و CP رابرحسب a و b و x وهمچنین تانژانت زاویهٔ خطوط

$$(CM \text{ و } CP)=\varphi+K\pi \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

را بدست آورید. ثابت کنید که یك‌نقطه وفقط‌یك‌نقطهٔ C یافت میشود برای‌اینکه φ مستقل ازx باشد ودراین‌صورت‌مقدار زاویهٔ φ را تعیین کنید .

۳) بفرض اینکه‌مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، دایرهٔ محیطی آن‌را(Ω) ومرکزش راه‌ه مینامیم . خطوط CM و CP دایرهٔ (Ω)را بترتیب‌در نقاط M' و P' قطع‌میکنند پوش (E) خط $M'P'$ را وقتی‌که M بر $x'ox$ حرکت کند تعیین کنید .

درانعکاس به‌قطب C که (Ω) و $x'ox$ رابیکدیگر تبدیل می‌کند منعکس (E) ومنعکس دایرهٔ (Γ) دایرهٔ محیطی مثلث CMP راتعیین کرده و ازآن مکان مرکزدایرهٔ (Γ) را نتیجه بگیرید .

تذکر ـ همهٔ اشکال بادقت و وضوح کامل و با واحد $a=2Cm$ رسم شوند .

II ـ رشتهٔ فلسفه

۱۵۸۶ ـ (۹ نمره) تابع $y=2x-3-\frac{1}{x}$ مفروض است .

۱) تغییرات این تابع راتعیین کنید .

۲) منحنی (C) نمایش هندسی آنرا رسم کنید (واحدرا سانتیمتر اختیار کنید) بعدازآنکه مجانب‌هایش راتعیین کرده‌اید

۱۵۸۷ ـ (۵ نمره) توکیو ولوس‌آنجلس بترتیب درقاچ‌های‌ساعتی شماره‌های ۹ و ۱۶ واقع‌اند .

۱) عبارت فوق‌الذکر را تشریح کنید

۲) ساعت وتاریخ‌هریك ازاین دوشهر راتعیین کنیدبنابر‌آنکه درگرینویچ :

الف ـ ساعت ۳ روز ۴ ژوئیه‌باشد .

ب ـ ساعت ۲۰ روز ۴ ژوئیه باشد .

۱۵۸۸ ـ (۶ نمره) مبداء کمان‌ها رادریك دایرهٔ جهت‌دار A می‌نامیم

۱) نقاط M و N انتهای کمان‌های به مبداء A و با اندازه‌های 1560° و -2025° را تعیین کنید .

۲) اندازه‌های کمان‌های به‌مبداء M وبه انتهای N را بحسب رادیان حساب کنید

II ـ رشتهٔ طبیعی :

۱۵۸۹ ـ (مسألهٔ اول، ۱۲ نمره) ـ بررسی تابع زیررا که در آن x اندازهٔ یك کمان بحسب رادیان میباشد در نظر میگیریم

$$y=\cos 2x+2\cos x+1$$

۱) تغییرات این تابع رادر فاصلهٔ [۰ و π] تعیین کرده‌و منحنی (γ) نمایش هندسی آنرا در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید و واحد راسانتیمتر اختیار کنید (بقیه‌پائین‌صفحهٔ بعد)

مسائل برای دانش آموزان

از :استاد دکتر محسن هشترودی

۱۵۹۴ ـ معادلات زیر را حل کنید:

$$x^4-x^3+(2a-1)x^2-(a-1)x+a(a+1)=0$$

$$(x^2-a)^2-2x^2+4x-2a=0$$

$$x^4+2x^3-2(a-1)x^2-2ax+a^2-2a=0$$

$$x^3-(2a+1)x^2+a^2(x+1)=0$$

$$x^3-(2a+1)x^2+a^2(x+1)-4=0$$

$$x^3-2(a-2)x^2+(a^2-6a+3)x+2a(a-1)=0$$

$$a^2x^4+3a^2x^3+a(2a^2+a+2)x^2+3a(a^2-a+1)x+(a^2+1)(a+1)=0$$

$$a^2x^4-a(2a^2-a+2)x^2-2a^2x+(a^2+1)(a-1)^2=0$$

$$a^2x^4-a(2a^2-a-2)x^2-2a^2x+(a^2-1)(a^2-2a-1)=0$$

$$4x^4+12x^3+(4a+9)x^2+2(3a+1)x+a(a+2)=0$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+f=0\ (ad^2=b^2f)$$

۱۵۹۵ ـ ۱) ضلع BC مثلثی درصفحه ثابت‌است وبین اضلاع AB و AC ومیانهٔ AD رابطهٔ $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AD}^2+h^2$ که درآن h طول ثابتی است همواره برقرار است . مکان‌هندسی رأس A مثلث راتعیین کنید بحث در وجود مکان بحسب h و a

۲) ازمثلثی ضلع a وزاویهٔ A دردست است ومیدانیم که بین‌دوضلع دیگر مثلث ومیانهٔ‌ضلع a رابطه مذکور برقرار است مثلث را رسم کنید .

۱۵۹۶ ـ از مثلثی اضلاع b و c دردست است و میدانیم که زاویهٔ $\hat{B}$ سه‌برابر زاویهٔ C می‌باشد مثلث را رسم کنید

۲) سطح محصور بین منحنی (γ) ومحور طولها راکه زیر Ox قراردارد حساب کنید

۳) چگونه میتوان بکمك منحنی (γ) که رسم شده است منحنی (Γ) نمایش تغییرات تابع را وقتی که x تمام مقادیر را قبول کند رسم‌نمود

۱۵۹۰ ـ (مسألهٔ دوم، ۸ نمره) عدد شش‌رقمی N را که‌در دستگاه‌شمار به‌مبنای ده‌بصورت $N=\overline{aacabc}$ نوشته شده‌است. درنظر میگیریم ($a\neq 0$)

۱) ثابت کنید که N برابر است با حاصل‌ضرب عددصحیح $\overline{abc}$ دریك عددصحیح K ونتیجه بگیرید :

الف ـ N بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ قابل‌قسمت است

ب ـ N نمیتواند مربع کامل باشد

۲) N را معلوم کنید که دوشرط زیر باهم برقرارباشند

الف ـ N بر ۵ قابل قسمت‌باشد

ب ـ عددصحیح $\overline{bc}$ دوبرابر a باشد

عدد بدست‌آمده را به‌حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کنید

IV رشتهٔ صنعت و اقتصاد

(استفادهٔ ازجدول‌های لگاریتم وجدول‌های اعدادبشرطی مجاز است که فرمول‌نباشد . استفادهٔ ازخط‌کش ودایرهٔ محاسبه کاملا مجاز است)

(تمرینات ، ۷ نمره) :

۱۵۹۱ـ ثابت کنید که عبارت

$$y=\cos^6x+\sin^6x+3\sin^2x\cos^2x$$

مستقل از x است ، همین نتیجه را با محاسبهٔ مشتق y بدست‌آورید .

۱۵۹۲ـ بدون استفادهٔ ازجدول، مقدار هریك ازعبارت های زیررا تعیین کنید.

$$\mathrm{Log}_e e^{-3}\ ,\quad e^{2\mathrm{Log}_e 5}\ ,\quad \mathrm{Log}\sqrt{e^2}\ \text{و}\ \mathrm{Log}_e 5^{\frac{1}{5}}$$

که در آن مقصود از علامت Log لگاریتم نیری (با پایهٔ e) میباشد .

(بقیه درپائین صفحهٔ بعد)

مسائل برای دانشجویان

از: استاد دکتر محسن هشترودی

۱۵۹۷ ـ اولا معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم $(1+\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}+(\alpha\sin\theta-\beta\cos\theta)\frac{d\varphi}{d\theta}+\varphi=0$ را با اشتقاق نسبت به θ بمعادلهٔ مرتبهٔ سوم خطی تبدیل کنید. ازاین تبدیل حل معادلهٔ مرتبهٔ دوم را بدست دهید. بطور کلی برای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی که این قبیل انتگراسیون ممکن است نظریهٔ انتگراسیون را معلوم کنید.

ثانیاً منحنی‌هائی تعیین کنید که اگر R شعاع انحناء درنقطهٔ M و ξ و η مختصات مرکز انحناء در همان نقطه باشند همواره رابطهٔ $R=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma$ برای منحنی محقق باشد. α و β و γ مقادیر ثابتی هستند (تعیین منحنی به معادلهٔ دیفرانسیل قبل منجر میشود)

۱۵۹۸ ـ ۱) میدانیم که شعاع انحناء منحنی ومختصات مرکز انحناء آن مرتباً

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \text{ و } \xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''} \text{ و } \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

میباشند. اگر مشتق این عبارات را نسبت به x تعیین کنیم اتحادی بصورت زیر:

$$X\frac{d\xi}{dx}=Y\frac{d\eta}{dx}=Z\frac{dR}{dx}$$

بدست خواهد آمد (X و Y و Z توابعی از x و y و y' و y'' میباشند) بقسمی که معادلات دیفرانسیل $\frac{d\xi}{dx}=0$ و $\frac{d\eta}{dx}=0$ و $\frac{dR}{dx}=0$ معادل میباشند وجواب عمومی آنها دوایر کلی $x+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0$ میباشد، این مطلب را مدلل کنید.

۲) ازمقدمهٔ بالا نتیجه بگیرید که منحنی‌هائی که دوایر انحناء آنها دایرهٔ ثابتی را بزاویهٔ قائمه (یا درامتداد قطر) قطع می‌کنند (البته حالات خاص هم منظوراست مانند دوایری که بریك نقطه میگذرند یا دسته اشعهٔ دوایر وغیره) وجود ندارند یعنی منحنی‌هائی که دوایر انحناء آنها دایرهٔ ثابتی را بزاویهٔ قائمه قطع می‌کند همین دوایر میباشند.

۳) معادلهٔ دیفرانسیل دوایری که دارای یك پارامتر می‌باشند تعیین کنید. این معادلهٔ دیفرانسیل حتماً از مرتبهٔ دوم است، آیا ممکن است پارامتر دوم انتگراسیون را از روی پارامتر اول چنان تعیین کرد که جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل با پوش خود تماس مرتبهٔ دوم داشته باشد. حالاتی که این امر ممکن نیست مشخص کنید.

مسائل (۱۳، نمره)

۱۵۹۳ ـ x'ox و y'oy دو محور مختصات عمود برهم وبرای هردومحور واحد یکی وبرابر باسانتیمتر میباشد. بفرض اینکه a و b دو عدد صحیح مثبت دلخواه باشند. نظیر کسر $\frac{a}{b}$ نقطهٔ M را درصفحهٔ محورهای x'ox و y'oy درنظر میگیریم که a عبارتست ازطول نقطهٔ M و b عبارتست ازعرض آن، M نمودار کسر $\frac{a}{b}$ خوانده میشود.

۱) نمودارهای کسرهای معادل با کسر $\frac{a}{b}$ چه مکانی را تشکیل میدهند

۲) خطوط مثلثاتی زاویهٔ حاده‌ای را که امتداد oM بامحور x'ox میسازد برحسب a و b بدست آورید.

۳) اگر M' نمودار کسر $\frac{a'}{b'}$ واین کسر کوچکتر از $\frac{a}{b}$ باشد، خطوط مثلثاتی زاویهٔ MOM' را برحسب a و b و a' و b' بدست آورید

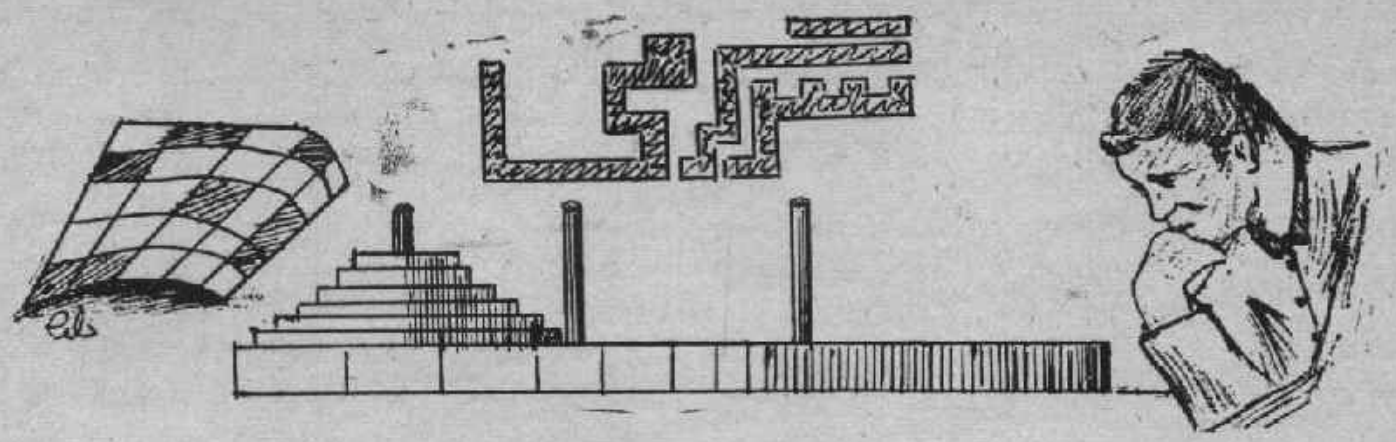
۴) فرض میکنیم مقادیر مفروض a و b نسبت بیکدیگر اول و $a>b$ باشد. همهٔ کسرهائی را تعیین کنید که نمودار آنها M' باشد بقسمی که $\widehat{MOM'}=\frac{\pi}{4}$

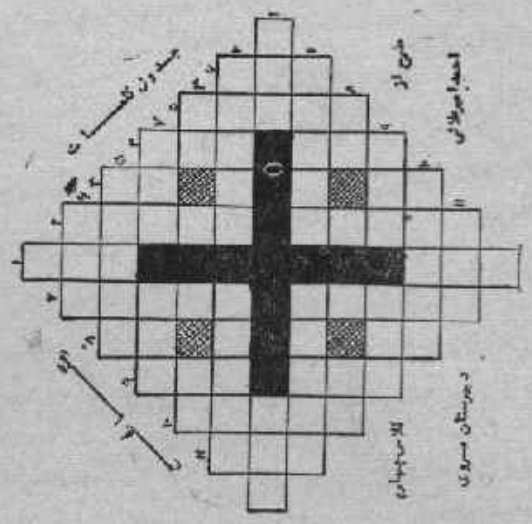
محاسبهٔ عددی: $a=7$ و $b=3$

۵) اگر اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ MOM' دلخواه و کسر $\frac{a'}{b'}$ ازکسر $\frac{a}{b}$ کوچکتر باشد، S مساحت مثلث MOM' را برحسب a و b و a' و b' بدست آورید.

۶) تحقیق کنید که اگر S برابر با نیم واحد سطح باشد. کسرهای $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ تحویل ناپذیرند

۷) اگر M نمودار کسر $\frac{7}{3}$ باشد، تمام کسرها با نمودار M' را تعیین کنید بنابرآنکه مساحت مثلث MOM' برابر با نیم واحد سطح باشد.





افقی و قائم :

۱ ـ یکان که پایان ندارد ـ عددی که نه صحیح است و نه کسری . ۲ ـ آغاز شمارش ـ عددی که از دو رقم متساوی تشکیل شده و چون در مبنای ۹ نوشته شود فقط یك واحد به آن افزوده شود . ۳ ـ دو ثلث از د ـ جهت در جهت معکوس .

٤ ـ نوع زاویه‌ای که شامل امتداد اضلاعش میباشد ـ از تقاطع دو بدوی چندین صفحه که در یك نقطه مشترکند بوجود میآید.

٥ ـ فیلسوف و ریاضی دان فرانسوی واضع هندسهٔ تحلیلی .

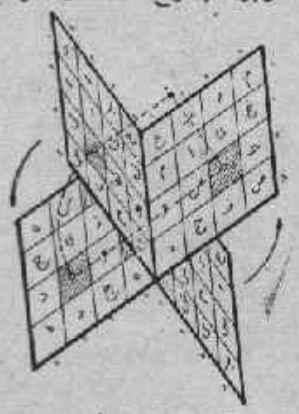
٦ ـ اولین عدد ترتیبی . ۷ ـ در این نوع تقارن شکل و مبدلش مستقیماً متساویند ـ مسائل مربوط به‌نوع اول آنها هنوز از غوامض علم ریاضی است .

۸ـ واحدی برای وزن. معکوس عددی که ارقام را خاتم است.

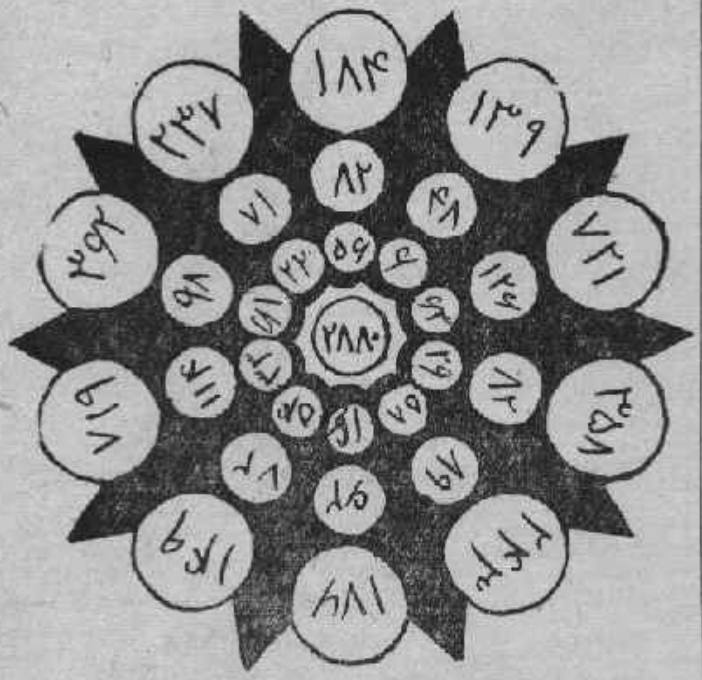
۹ ـ معکوسش فرد نیست ـ یك واحد از مرتبهٔ دوم .

۱۰ـ مرتبهٔ سوم بااملاء صحیح.

۱۱ ـ اگر ۳ براولش افزوده شود کشوری راسه برابر میکند واگر به آخرش اضافه شود علمی را میرساند .



حل جدول شماره ۷



شکل مرموز

بعضی خواص شکل بالا بیان میشود، خواص دیگر آنرا بدست آورید.

I ـ تفاضل مجذورات هردوعدد مقابل و متساوی‌الفاصله از مرکز برابراست باعدد وسط

$۱۸٤^۲ - ۱۷٦^۲ = ۲۸۸۰$ و $۷۲^۲ - ٤۸^۲ = ۲۸۸۰$

II ـ مجموع مجذورات هر دو عدد مجاور وواقع بریك محیط برابر است با مجموع مجذورات دو عدد متقابل آنها

$۱۳۹^۲ + ۷۲۱^۲ = ۱٤۹^۲ + ۷۱۹^۲$

فرستنده : شاهرخ طاهری آشتیانی
(دبیرستان امیرخیزی ـ تبریز)

مسأله

n کیسه هر کدام محتوی $p > n$ سکهٔ از لحاظ ظاهر کاملاً متشابه میباشد . در $n-۱$ کیسه وزن هریك از سکه ها A گرم و فقط در یك کیسهٔ دیگر وزن هریك از سکه‌ها $B < A$ گرم میباشد. چگونه فقط با یك مرتبه توزین یك کیسهٔ اخیر شناخته میشود

(فرستنده : علی شیعه بیگی دانشجوی فنی)

فرهنگ انگلیسی به فارسی اصطلاحات علمی

SCIENTIFIC WORDS

(تنظیم از: ایرج ارشاقی دانشجوی فنی)

مقدمه- منظور از تنظیم این بخش آشنا نمودن تدریجی دانش آموزان عزیز به اصطلاحات علمی زبان انگلیسی است باشد که از این راه به مطالعهٔ کتب علمی زبان انگلیسی راغب شوند واطلاعات خویش را بسط دهند.

ترتیب تنظیم لغات واصطلاحات موضوعی است و پس از اتمام بحث‌های مقدماتی حساب، جبر وهندسه ودرج اصطلاحات اساسی آنها بخش ریاضیات دانشگاهی شروع میشود و بالاخره لغات واصطلاحات مربوط به فیزیك وشیمی بیان خواهدشد.

درپایان هربحث تمرین‌هائی تهیه‌شده‌است وهدف از این تمرین‌ها صرفاً وسیله‌ای برای مرور اصطلاحات ولغات میباشدوبتدریج مسائل فکری ریاضی نیز مطرح خواهدشد.

امیداست که با استقبال خوانندگان گرامی این کار ادامه یابد ودرپایان، مجموعهٔ لغات واصطلاحات بصورت یك فرهنگ علمی در اختیار علاقمندان قرار گیرد.

***

I- اعداد و چهار عمل اصلی

The Number and the Four Simple Rules

Arithmetic	اریتمتیك	حساب
Number	نامبر	عدد-شمار
Digit	دی جیت	رقم
Odd	اد	فرد
Even	ئی ون	زوج
Integer	این تی جر	عدد صحیح
Units	یونیتز	یکان
Tens	تنز	دهگان
Hundreds	هاندردز	صدگان
Equal	ئی کوآل	مساوی
Addition	ادی شن	جمع
Sum	سام	مجموع
Plus	پلاس	بعلاوه
Subtraction	ساب تراکشن	تفریق
Minus	مای نس	منها
Minuend	مای نند	مفروق منه
Subtrahend	ساب تراهند	مفروق
Remainder	ری مایندر	باقیمانده
Multiplication	مالتی پلی کی شن	ضرب
Multiplicand	مالتی پلی کند	مضروب
Multiplier	مالتی پلایر	مضروب فیه
Product	پروداکت	حاصلضرب
Division	دی وی ژن	تقسیم
Dividend	دی وای دند	مقسوم
Divisor	دی وای زر	مقسوم علیه
Quotient	کشنت	خارج قسمت

EXERCISE

Read the following Expressions:

$5+3=8$: {5 Plus 3 {is 8 / is equal to 8

$18-15=3$: {18 minus 15 is 3 / 15 from 18 leaves 3

$6\times 7=42$: {6 Multiplied by 7 is 42 / 6 times 7 equals 42

$30 : 6=5$: {30 divided by 6 is 5 / 30 » » » equals 5

تمرین‌های متفرقه

Miscellaneous Exercises

1) By what must 375 be multiplied to get 0.003 and by what must be 375 divided to get 0.025?

2) The product of two numbers is 0.1 and Their difference is 1.95. Find Their ratio

3) If the quotient is 37 the divisor 35 and the remainder 29 what is the dividend

بررسی کتب درسی

از هوشنگ شریف‌زاده

مدیر مجلهٔ گرامی یکان

باعرض معذرت ازمؤلفان گرامی کتب درسی فیزیک، گرچه کتابهای مذکورمورد بررسی استادان دانشمند قرارگرفته وجای ایرادی برای امثال بنده باقی نمانده است معهذا بامطالعهٔ سطحی این کتب مطالبی بنظرم رسید که لازم دانستم آنها را نه بعنوان انتقاد بلکه بمنظور رفع اشتباه خودم بآن مجلهٔ گرامی ارسال دارم : باشدکه بادرج آن اربابان دانش مرا راهنمائی وبخطایم واقف سازند.

الف: دربارهٔ بعضی جملات ومطالب کتاب

۱ ـ در تعریف گرمای ویژه (فیزیک چهارم صفحه۱۵۱) مینویسد : «مقدار گرمائی است که باید به یک گرم از این جسم داد تادمای آن یکدرجهٔ سانتیگراد بالاروده . عبارت فوق لازم هست ولی کافی نیست زیرا اگرمطابق تعریف فوق بخواهیم گرمای ویژهٔ یخ صفر درجه را در فشار معمولی حساب کنیم برابر ۸۱ خواهد شد ؛ آیا بهتر نیست آنرا طبق جملهٔ زیر تعریف کنیم: مقدارگرمائی است که باید به یک گرم از این جسم دادتابدون **تغییرحالت فیزیکی یاشیمیائی** دمای آن یکدرجهٔ سانتیگراد بالا رود .

البته جملهٔ فوق برای شاگردکلاس چهارم تولید اشکال نخواهدکرد زیرا حالات فیزیکی و شیمیائی اجسام را شناخته و تغییر حالات جسم را بخوبی درک میکند .

۲ ـ در تعریف گرمای ذوب یک جسم مینویسد (فیزیک چهارم صفحهٔ ۱۹۴) : «عبارت است از مقدارگرمائی که به یک گرم جامد آن باید بدهیم تاکاملاً ذوب شود بدون اینکه دمایش تغییرکند» آیا بهتر نیست بنویسیم: عبارت است ازمقدارگرمائی که به یک گرم جامد **در حال ذوب** باید بدهیم تاکاملاً ذوب شود بدون اینکه دمایش تغییرکند . و همچنین در مورد عبارت مربوط به گرمای انجماد .

۳ ـ در تعریف گرمای تبخیر (صفحهٔ ۲۰۸ فیزیک چهارم) مینویسد : «گرمای تبخیر مقدار گرمائی است که باید به یک گرم مایع داد تا تبدیل به بخار گردد بدون آنکه دمای آن تغییرکند» . با توجه بفرمول دینو $L=۶۰۶٫۵-۰٫۶۹۵t$ جملهٔ فوق ناقص بنظر میرسد زیرا حرارت تبخیر یک مایع تابع درجهٔ حرارت تبخیر و در نتیجه تابع فشاری است که بر روی مایع وارد میشود بطوریکه گرمای تبخیر آب ۱۰۰ درجه تحت فشارجو ۵۳۵ کالری و گرمای تبخیر آب ۲۰۰ درجه ۴۷۰ کالری میباشد بنابراین فکر نمیکنم اگر جملهٔ «**در درجه حرارت معین**» را به عبارت کتاب اضافه میکردیم مرتکب گناهی میشدیم .

البته همانطور که در ابتدا نوشتم هدف من انتقادنیست چون هرچه که باشد معلمی جوان و بی‌تجربه میباشم وبرمؤلفان کار آزموده و دانشمند فرض است که مامعلمین جوان وبی‌تجربه را راهنمائی فرمایند .

ب : درباره علائم اختصاری واحدها

هدف از بکار بردن واحدهای بین‌المللی و علائم آنها یکنواخت شدن این سیستم است تابرای پژوهندگان علم اشکالات تازه‌ای فراهم نکند .

تاآنجائیکه اطلاعات ناقص من که مربوط به‌قرارداد سوم مهٔ ۱۹۶۱ میباشداجازه میدهد علامت کالری cal (هرسه‌حرف کوچك) میباشد نه C (حرف بزرك یا کوچك) که در صفحات ۸۹ و ۹۶ فیزیك ششم طبیعی و درصفحات ۱۳۷ و ۱۴۴ فیزیك ششم ریاضی نوشته‌شده است. علامت نیوتن در همین فصل یعنی دستگاه واحد (فیزیك ششم طبیعی ـ فیزیك ششم ریاضی) بصورت n (کوچك) نوشته شده که غلط است و صحیح آن N (بزرك) میباشد . علامت وات که در همین فصل بصورت w (کوچك) نشان داده شده غلط است و صحیح آن W میباشد و طبق همان قرارداد علامت اسب بخار بجای c.v به ch (هر دو حرف کوچك) نوشته میشود . اشکالات فوق بعلت تکرار در صفحات مختلف کتاب نمیتوانند چاپی باشند : ؟

در کتاب فیزیك پنجم صفحهٔ ۲۴۷ واحد مقاومت مخصوص را اهم ذکر میکند سپس در داخل پرانتز مینویسد «به‌بیان‌درست اهم X سانتی متر» و معلوم نیست چرا درصفحات بعدی ازبکار بردن واحد صحیح احتراز مینمایند . باید توجه داشت که‌واحد صحیح مقاومت‌مخصوص طبق‌قراردادفوق‌الذکر اهم‌متر وعلامت اختصاری آن Ωm است.

ج : غلطهای چاپی

البته من فرصت نکردم که کتاب را دقیقاً بررسی کنم ولی امیدوارم در ضمن تدریس بغلطهای چاپی و بخصوص در مسائل برنخوریم زیرا شاگردان مطالب کتاب وجواب مسائل را وحی منزل دانسته و اگر معلم مربوطه بگوید جواب ۱۷٫۷ مسألهٔ اول صفحهٔ ۱۵۷ فیزیك‌چهارم صحیح نیست‌وباید ۱۷٫۷ـ باشد آنهاباتردید تلقی خواهندکرد.

***

(دنباله‌درصفحه‌بعد)

ضمن ورقزدن **حساب‌سوم** دبیرستان صفحهٔ ۵۸ چشم به تصویر چکی افتاد و برای اینکه طرز درست نوشتن چك را فراگیرم درآن دقت کردم وتازه متوجه شدم که منظور ازاینکه نوشته‌اند تاریخ بتمام حروف نوشته شود بقول معروف یعنی « کشك » زیرا تاریخ در آن تصویر بصورت«۱۵ فروردین ماه ۱۳۴۳»نوشته شده ودر زیر آن نوشته‌اند « تاریخ بتمام حروف نوشته شود».

یکبار دیگر ازکلیهٔ مؤلفین محترم کتب درسی فوق‌معذرت خواسته وامیدوارم باراهنمائی‌های مفید خودمراهم موردمرحمت قرار دهند .

هوشنگ شریف‌زاده دبیرفیزیك شهرستان تبریز

از جمله‌نامه‌های رسیده

آقای **رضا منصوری** دانش‌آموز پنجم ریاضی‌دبیرستان رهنما نوشته‌اند

در شمارهٔ ۷ مجلهٔ ریاضیات نظریات جدیدی ابراز شده بودکه تذکر نکته‌ای را در موردآن لازم میدانم

طبق نظرآقای محمدی علت تفاوت شعاع استوائی‌وقطبی زمین تابش‌عمودی خورشید بر استوا است. چون مناطق‌استوائی نور بیشتری دریافت میکنند ماده‌ای که بدین‌طریق بزمین‌اضافه میشود باعث این تفاوت میگردد .

برای‌اینکه معلوم گردد این نظریه تا چه‌اندازه بی‌اساس است به محاسبهٔ زیر میپردازیم :

انرژی اشعه آفتاب‌که بریك سانتیمتر مربع درمدت یك ثانیه بتابد معادل ۱۳۵۰۰۰۰ ارك تخمین شده‌است ولی زمین تنها مختصری از این انرژی راجمع میکند. مقدار عمده وشاید تمام این انرژی درزمین بصورت انرژی‌های مختلف درآمده و بصورت‌های مختلف مصرف میشود، حال با صرف‌نظر از این موضوعات با فرض‌اینکه تمام این انرژی بماده تبدیل شده و به جرم زمین اضافه گردد محاسبهٔ زیر را انجام میدهیم .

طبق فرمول انیشتاین داریم:

$$m=\frac{E}{C^2}$$

$$E=1350000 \text{ و } C^2=9\times10^{20}$$

$$m=\frac{E}{C^2}=\frac{1350000}{9\times10^{20}}=15\times10^{-16}$$

یعنی درهرثانیه 15×10^{-16} گرم بریك سانتیمترمربع زمین اضافه میشود .

عمرزمین را درحدود ٤ میلیارد سال تخمین میزنند. حال ببینیم در این مدت چه مقدار ماده بریك سانتیمتر مربع زمین اضافه شده است (فرض کرده ایم که درابتدای عمر زمین، زمین بصورت کرهٔ کامل بوده است) .

دانش‌آموزان رتبه‌اول امتحانات نهایی خرداد ۴۳

تنکرود

آقای **سیدهادی فصیحی** لنگرودی متولد ۱۳۲۵ ششم ریاضی دبیرستان امیرکبیر معدل ۱۶/۳۱

آقای **حسین‌خیری** متولد ۱۳۲٤ ششم طبیعی دبیرستان امیرکبیر معدل ۱۶/۸۵

۱۰ قاسمی- خبرنگار تنکان در لنگرود

بروجرد

آقای **محمودبارافکنده** متولد ۱۳۲۳ ششم ریاضی دبیرستان بحرالعلوم معدل ۱۷/٤۲

کتابفروشی خیام -نمایندگی تنکان

تفرش

آقای **حمزه‌فضای خانی** متولد ۱۳۲۳ ششم طبیعی دبیرستان حکیم نظامی .

از اسباب ملکی دبیر فرهنگ تفرش

بختیاری و چهار محال

آقای **رحیم حسینی** که در تمام دوران تحصیل شاگرد اول بوده است و فارغ‌التحصیل دبیرستان‌های شهرکرد میباشد معدل کتبی ۱۸٫۰۲

احمد رئیسی- دانشجو

از جمله نامه‌های رسیده

بقیه از صفحهٔ ٦٦

$$M=(4\times10^{9}\times365\times24\times3600)\times15\times10^{-16}$$

$$M=6\times31576\times10^{-3}=189.216\neq190\,gr$$

وزن مخصوص زمین بطورمتوسط ۵٫۵ است

$$D=\frac{P}{V} \quad \text{یا} \quad 5.5=\frac{190}{V} \quad \text{و} \quad V\neq35\ Cm^{3}$$

این مقدار ماده بااین حجم حداکثرمیتواند شعاع زمین را ۳۵ سانتیمترزیادتر کند . بافرض اینکه دراین مدت بمواد قطبی اضافه نشده باشد نتیجه میگیریم که تفاوت شعاع استوائی وقطبی حداکثرمیتواند ۳۵ سانتیمتر باشد وحال آنکه در حقیقت این اختلاف ۲۱ کیلومتراست .

این یك محاسبهٔ باتقریب اضافی بسیار زیادی بود ، در صورتیکه ارژی خورشید شاید دراین‌مدت نتوانسته باشدکسری ازآنگشترم برشعاع زمین بیفزاید .

علت حقیقی تفاوت شعاع استوائی و قطبی زمین حرکت بدورمحورقطبی است وزمین نیزباید درآن هنگام که هنوزدرحال مایع بوده است تغییرشکل داده باشد .

***

آقای **عبدالله فتاحی** فارغ‌التحصیل وشاگرد اول رشتهٔ ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران نوشته‌اند که در دفتر دانشکدهٔ علوم جزوه‌ای مشاهده نموده‌اندکه از کشور ترکیه توسط یکی ازاعضاء جامعهٔ مهندسین آن‌کشور بعنوان دانشگاه تهران ارسال شده ودرآن شخص فوق‌الذکر طریقهٔ تثلیث یك زاویه را بیان واثبات نموده است. آقای فتاحی ضمن نامهٔ‌خود طریقهٔ اثبات مذکوررا نیزشرح داده‌اندکه درشماره های بعدی مجله‌که مسائل ثلاثهٔ لاینحل مورد بحث واقع خواهد شد ، این روش اثبات ارائه خواهد شد .

***

آقای **عباس وفائی** دانش آموز ششم ریاضی دبیرستان ادب اصفهان ضمن نامهٔ خود درانتقاد ازکتاب ۲۵۰۰ مسئله مثلثات تألیف‌آقای شیخان وجنده نفردیگرنوشته‌اندکه درعبارت مسئلهٔ شمارهٔ ۱۲۲ صفحهٔ ۴۹۵ کتاب و همچنین درعبارت مسئلهٔ شمارهٔ ۱۹۳ صفحهٔ ۳۳ کتاب « تصاعد هندسی » اشتباه بوده و صحیح‌آن « رابطهٔ توافقی » میباشد . آقای وفائی با نقل متن انگلیسی مأخذ مسئله تذکرداده‌اندکه اشتباه ناشی ازترجمهٔ‌کلمهٔ "Harmonical progrenion" بمعنی رابطهٔ توافقی است‌که درکتاب بمعنی تصاعد هندسی ترجمه شده است .

***

آقای **باقر نشوادیان** راجع به اپور رقومی صفحهٔ ۵۹ شمارهٔ ۳ و ٤ وآقای **علی ملا حسنی** راجع به بحث معادلهٔ امتحان ششم ریاضی دبیرستانها مندرج در شمارهٔ پنجم تذکراتی داده‌اندکه بعد ازرسیدگی دقیق درموقع مناسب در مجله مطرح خواهد شد .

***

آقای **محمد فردوسی** ازاصفهان راجع به‌حل‌مسئله‌های ۱۱٤ و ۱۱۵ وآقای **فرامرز رهبر** ازدبیرستان شرف تهران راجع به مسئلهٔ ۱۲۹ ایرادهائی گرفته‌اند امید است با عطف توجه به ریشه‌های موهومی معادلات رفع ایراد ایشان بشود .

***

آقای **غلامحسین راستگو** ازتبریزاشتباه شکل مسألهٔ مسافرت اسب صفحهٔ ۵۷ شمارهٔ ۵ را یادآوری نموده و صورت صحیح شکل این مساله وچهارجواب دیگرآنرا به نقل ازمجلهٔ «علوم امریکا» ارسال داشته‌اندکه بموقع خود در مجله چاپ خواهد شد .

***

پاسخ به پرسش های خوانندگان

در دو ماه اخیربسیاری ازخوانندگان پرسشهائی نموده بودندکه پاسخ‌آنها برای چاپ درمجله تهیه شده بود اما بعلت تراکم مطالب این شماره چاپ این قسمت به شمارهٔ بعدموکول شد .

***

ارائهٔ فرمولها وروشهای جدید

ازبسیاری از دانش‌آموزان فرمولها و روشهای جدیدی در بعضی ازمبحث‌های ریاضی ارائه شده است کـه بعداً چـاپ خواهد شد . چندین نفـ ازخوانندگان روشهای کاملا مشابهی برای تعیین ماندهٔ تقسیم اعداد براعداد ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ بیان داشته‌اند .

***

مسائل مسابقهٔ ممتاز

پاسخ بسیاری راجع به دو مسألهٔ مسابقهٔ ممتاز تا آخـر مردادماه ٤۳ واصل شده است‌که بعد ازرسیدگی‌کامل همهٔ‌آنهـا پاسخ‌های صحیح بتدریج درمجله چاپ شده ودرپایان بـرندهٔ مسابقه تعیین میشود .

***

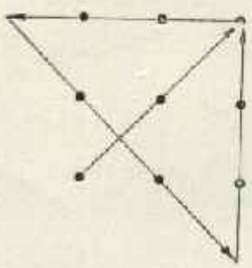
صد وبیست مسئله با راهنمای حل

راجع به ریاضیات متوسطه

از : استاد دکترمحسن هشترودی

آمادهٔ چاپ است

***



حل مسألهٔ رسم خط
صفحهٔ سرگرمی شمارهٔ ۷