یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ هشتم، شمارهٔ : ۲ شمارهٔ مسلسل : ۷۹ آبان ۱۳۵۰

در این شماره:

بها: ۳۵ ریال

پوزش

از اینکه به علتهای فنی در انتشار شمارهٔ آبان‌ماه مجله تأخیر روی داده است از همهٔ دوستداران و علاقمندان پوزش می‌خواهیم .

۶ آذر ۱۳۵۰

بخشنامهٔ وزارت آموزش وپرورش مبنی برمنع استفاده از کتابهای راهنما یا حل‌المسائل کتابهای درسی .

سازمان کتابهای درسی ایران

شماره ۲۷۰۵ تاریخ ۱۳۵۰/۷/۲۴

اداره کل آموزش‌وپرورش استان / شهرستان . . . .

ازجمله هدفهای‌مهم برنامه‌های‌جدید نظام نوین‌آموزش و پرورش یکی آن است‌که دانش آموزان بدانگونه آموزش ببینندکه دارای فکری خلاق‌و انتقادی باشند و ازکشف‌حقایق لذت ببرند ، مغزآنها انباری ازمحفوظات بی‌ثمر نباشد وچنان تحرکی داشته باشدکه خود بتوانند پاسخ مجهولها را بیابند. کتابهای درسی که براساس برنامه‌های نوین تألیف و انتشار یافته است ملهم از این هدف مهم بوده و براساس جدیدترین شیوه‌های تدریس «یعنی روش مکاشفه‌ای» تنظیم یافته است. بنا براین روش ، دانش‌آموز بطور فعال در امر یادگیری شرکت می‌جوید وخودبه‌کشف حقایق و روابط می‌پردازد و به‌واقعیات پی‌می‌برد. بدیهی‌است که‌دراین‌روش تدریس‌تفکروبحث‌و گفتگو اساس امریادگیری را تشکیل می‌دهد.

اخیراً کتابهایی به‌نامهای:«اطلاعات‌عمومی» ، «معلومات عمومی» ، «راهنما» و مانندآنها بدون اجازه بوسیلهٔ ناشران مختلف منتشرمی‌شودکه‌مانع اجرای‌درست برنامه‌های آموزشی می‌شوند. نشانهٔ بارزاین‌کتابها آن‌است‌که مطالب هریك‌اقتباس کاملی از یك‌کتاب درسی است که جملات کتاب‌درسی در آن کتاب به‌صورت‌جمله‌های پرسشی درآمده و پاسخ‌آن به‌صورت صحیح یاناصحیح بلافاصله پس‌ازپرسش چاپ شده است . بدیهی است که‌این گونه‌کتابها موجب می‌شوندکه دانش‌آموزان بدون تفکر و استدلال و بدون توجه به شرح و توضیح و نتیجه گیری‌هایی‌که لازمهٔ یادگیری درست یك مطلب آموزشی است به حفظ‌کردن پاسخها و یادگیری طوطی وار بپردازند . کار این ناشران علاوه برآنکه طبق قانون حمایت حقوق مؤلفان و مصنفان و هنرمندان ، مصوب دیماه ۴۸ ، تجاوز به‌حقوق تألیف وزارت آموزش وپرورش است ، مخل آموزش صحیح نیزمی‌باشد. گرچه این وزارت ازطریق مراجع قانونی‌به‌تعقیب اینگونه ناشران پرداخته است ، ولی از آنجاکه به هرطریق ممکن باید برای متوقف ساختن این عمل غیرقانونی و غیر آموزشی اقدام‌کرد مقتضی است اکیداً توصیه فرمایندکه‌دانش آموزان مدارس آن حوزه ازاین‌گونه‌کتابها استفاده نکنند و معلمان دانش‌آموزان را واداریا تشویق‌به تهیهٔ آنها ننمایند . راهنمایان تعلیماتی مدارس را موظف‌کنند که دقیقاً به این امر رسیدگی نموده معلمان را به‌خطرات ناشی از استفادهٔ از این کتابها آگاه نمایند.

وزیر آموزش وپرورش

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ هشتم ـ شمارهٔ دوم ـ شمارهٔ‌مسلسل : ۷۹

آبان ۱۳۵۰

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : بانونصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره :

تهران ، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۹۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VIII, number 2. Nov. 1971

subscription : 3$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ‌آذر ـ تلفن:۸۲۵۹۲۸

دربارهٔ بخشنامهٔ وزارت آموزش وپرورش

متن بخشنامهٔ وزارت آموزش وپرورش درمورد منع استفاده از کتابهای راهنما یا حل‌المسائل کتابهای درسی، در صفحهٔ مقابل چاپ شده است. به اینکه آیا اولین بار است که وزارت آموزش و ـ پرورش در این‌باره بخشنامه صادر می‌کند یا قبلا هم به این عمل مبادرت کرده است ، کارنداریم . اما آنچه که مسلم است ، معلمان ریاضی که به حرفهٔ خود علاقه دارند تاکنون بارها درهرمورد که‌زمینه فراهم بوده است، اعتراض خودرا به‌چاپ وانتشار کتابهای حل‌المسائل کتابهای‌درسی اعلام‌داشته‌اند؛ هرکنگره یا سمیناری که ازدبیران ریاضی تشکیل شده، قطعنامهٔ آن بازگو کنندهٔ این اعتراض‌بوده‌است. در دوره‌های گذشتهٔ مجلهٔ یکان نیز بارها این اعتراضات منعکس گردیده است.

تألیف کتابهای جنب درسی یا حل‌المسائل غیراز مسائل متن کتابهای درسی، که به گسترش میزان معلومات و اطلاعات دانش‌آموزان کمك کند امری است مفیدکه در بسیاری از کشورها بدان عمل می‌شود . حتی در بعضی ازاین کشورهامؤسسات آموزش عالی به این امر مبادرت می‌کنند . اما غیر از ایران شاید در هیچ کشور دیگر حل‌المسائل کتاب درسی در اختیار دانش‌آموز قرار نداشته باشد .

عجیب این است که‌آن عدهٔ قلیل از معلمان ریاضی که دست‌اندر کار تألیف حل‌المسائل کتابهای درسی بوده یا می‌باشند، معترفندکه در این مورد آلت دست ناشران سودجو بوده‌اند و به‌اینکه نتیجهٔ غایی کارآنان زایل ساختن استعدادهای دانش‌آموزان بوده است اقرار می‌کنند .

این نکته‌را هم نباید ناگفته‌گذاشت که اکثریت به‌اصطلاح مؤلفان حل‌المسائل کتابهای‌درسی اشخاصی هستندکه از درس و مدرسه بی‌اطلاعند . اینان جزوه‌های تکالیف دانش‌آموزان را بدست می‌آورند و آنها را چاپ و با نام ساختگی منتشر می‌کنند، بدون آنکه حتی از این تألیفات (!) خود سررشته‌ای داشته باشند .

کتابهای حل‌المسائل کتابهای درسی نه تنها مغایر با هدفهای آموزشی است بلکه بیشتر آنها معجونی است از غلطهای فاحش علمی و کجرویهای ناشیانه و گمراه‌کننده . دانش‌آموزانی که‌ندانسته این کتابها را مورد استفاده قرار می‌دهند ، آنگاه به بیهودگی این کار خود پی می‌برند که برای جبران مافات خیلی دیر شده است .

عبدالحسین مصحفی

کمال‌الدین فارسی

تنظیم از: جعفر آقایانی چاوشی

محمدبن حسن فارسی ملقب به **کمال‌الدین فارسی**، یکی از بزرگترین ریاضیدانان و فیزیکدانان اسلامی در نیمهٔ دوم قرن هفتم و اوایل قرن هشتم هجری است. او در سال ۶۶۵ ه.ق در شیراز متولد گردید. بعد از تحصیلات مقدماتی به علت علاقه‌ای که به علم مناظر داشت در حلقهٔ شاگردان **قطب‌الدین شیرازی** در آمده واز اعاظم تلامیذ او گردید و بوسیلهٔ قطب‌الدین بودکه کمال‌الدین فارسی با کتاب «المناظر» **ابن هیثم** آشنا وکتاب «تنقیح‌المناظر» رادر شرح و تفسیر آن نوشت. درمقدمهٔ این‌کتاب نیز با کمال تجلیل و تقدیر از استاد خود قطب‌الدین شیرازی یاد نموده است، وی در۱۹ذیقعدهٔ ۷۱۸ در۵۳سالگی از دنیادر گذشت.

آثار کمال‌الدین فارسی

معروفترین اثر او کتاب «تنقیح‌المناظر» است و همین اثرنفیس نشان دهندهٔ عمق دانش و غور او در مسائل‌علمی و درك معضلات و مشکلات علوم‌است. زیرا، گفته‌اند، اگر شرح او برکتاب «المناظر» ابن هیثم نبود مطالب‌کتاب ابن هیثم نافهمیده می‌ماند.

جورج سارتون می‌گوید: کتاب «تنقیح‌المناظر لذوی الابصار و البصائر» کمال‌الدین فارسی تفسیری است جامع و بدیع ازکتاب «المناظر» ابن هیثم، زیرا علم مناظردر قرون وسطی دامنه‌ای وسیع داشته، و شامل مباحث نور. هوا شناسی، فیزیولوژی، پرسپکتیو و غیره بوده است، این کتاب حاوی نکات ظریفی در بارهٔ پرسپکتیو نقاشی و آثار رنگها وغیره است. که برخی‌ازافکار **لئونارد دوداوینچی** را به‌خاطر انسان می‌آورد. نظریهٔ‌کمال‌الدین دربارهٔ قوس و قزح (رنگین‌کمان) قابل مقایسه با نظریهٔ معاصر او دراروپا **«دیتریش آو فرایبرگ»** در این باره است بلکه بهتر از آن می‌باشد ....» کمال‌الدین دربارهٔ خطای چشم نظریه‌ای براساس نظریهٔ ابن‌هیثم ارائه داده وعلت آنرا در تنقیح‌المناظر شرح می‌دهد و برای توجیه نظریه‌اش به مثالهائی متوسل می‌شود و شاید او اولین‌کسی است که نظریهٔ ابن هیثم را دربارهٔ خطای چشم به وجه عالمانه ترشیح‌کرده است.

«کمال‌الدین برای آنکه از نقص انحرافی عدسیهای کروی‌که تصویررا مبهم می سازند جلوگیری کند به‌جای آنها عدسیهای (هذلولیوار) قرار داد.»

روش بکار بردن اطاق تاریك که ابن هیثم آنرا شروع کرده بود، بوسیلهٔ کمال‌الدین، بسیار پیشرفت‌کرد. او ثابت نمودکه تصاویری‌که در یك مکان تاریك بدست می‌آید به‌قطر سوراخی‌که نور ازآن داخل آن مکان می‌شود بستگی ندارد. وهرچه سوراخ تنگترباشد تصویرروشن‌تر و واضحترمی‌شود.

وی خسوف و کسوف و حرکات ابرها را توجیه‌کرده و به این موضوع توجه داشته است‌که تصاویر معکوس‌بوده و امتدادها درخلاف جهت تصویر می‌شوند.

از تحقیقات «**ویدمان**» دانشمند آلمانی چنین مستفاد می‌شودکه کمال‌الدین فارسی برای کشف علت قوس و قزح، ظرف‌کروی مجوفی از جنس شیشه را پرازآب‌کرده و آنرابه منزلهٔ قطره باران انگاشته و در اطاق تاریکی آویزان نموده است. سپس یك شعاع نورانی خورشید را از سوراخی طوری وارد اطاق تاریك‌کرده است‌که به‌کره مذکور بتابد و نشان داده است‌که‌کمان اصلی قوس و قزح نتیجهٔ دو انکسار و یك انعکاس‌شعاع نورانی درقطرهٔ آب است در صورتی‌که‌کمانهای فرعی از دو انعکاس حاصل می‌شوند.

مقایسه تنقیح المناظر با کتابهای فیزیك جدید در مورد تئوری موجی نور.

هنگامی‌که تمدن عظیم اسلامی به انحطاط می گرائیدو

نور معرفت به تدریج در ممالك اسلامی خاموش می گشت ، کاوشگران و محققین غربی فرصت‌را مغتنم شمرده‌کتب متعلق به علمای مسلمین را از ممالك اسلامی خارج کرده و زینت بخش کتابخانه‌های خود نمودند و در اثر استفادهٔ از آنها به تمدن چشمگیری نایل گشتند و در این میان نه فقط ما را از گذشته پرافتخار خود بی‌خبر گذاشتند ، بلکه سعی بلیغ نمودند که همه‌جا آثار دانشمندان گذشته و حالیهٔ خودشانراکه اکثر آنها پایه و اساس معلومات خودرا از کتابهای علمی اسلامی و افکار دانشمندان اسلام اقتباس و اخذ نموده و به صورت نوین و به‌مقتضای زمان درآورده بودند . به رخ جهانیان بکشند و گاهی هنگام تعریف و تمجید از مسلمانان آنها را به‌عنوان پلی !! برای انتقال علوم یونان به غرب یعنی (از غرب به‌غرب!) معرفی‌می کنند. اماباتمام این‌اعمال وتعصبهای دور از منطق و تحریفهای نا روا و زننده نتوانسته‌اند چهرهٔ حقایق مسلم تاریخی را بپوشانند. تحقیق در آثار علمی اسلام بسیاری ازحقایق را روشن ساخته و پرده از روی بسیاری از اسرار برداشته است.

تئوری موجی نور

در تمام کتابهای فیزیك **هویگنس** را واضع تئوری موجی نور معرفی‌کرده‌اند . اساس گفته‌های هویگنس درمورد تئوری موجی در دومطلب خلاصه می‌شود ، ماهیت وطبیعت نور و دیگری طرز انتشار نور.

ماهیت نورـ نظریهٔ هویگنس درکتاب فیزیك تألیف **بتانکور** چنین نقل شده است :

«هویگنس معتقد است که نور از جنس آتش است ومی‌گوید در زندگی روزانه می‌بینیم که از شعله و آتش نور تولید می‌شود و همچنین مشاهده می‌کنیم که اگر نور را در آئینه مقعر بتابانیم و آنرا دریك نقطه جمع کنیم مانند آتش می‌سوزد.»

عین همین مطلب در تنقیح المناظر ، صفحهٔ ۴۵۱ جلد ۲ ، موجود است بدین مضمون :

«ان‌الضوء المشرق عن‌المضی من ذاته هو حرارةنارية تكون فی‌المضی من ذاته لانهم وجدوا ان ضوء الشمس اذا انعكس عن المراة المقعره و اجتمع عند نقطة واحدة وكان عندها جسم بقبل الاحتراق احرقة وانه اذا اشرق علی‌الهواء او جسم اخر و ثبت علیه زمانا اسخنه »

یعنی : نوری‌که از جسم نورانی خارج می گردد ذاتاً از جنس حرارت و آتش است . زیرا اگر نور آفتاب را به آئینهٔ مقعر بتابانیم در یك نقطه جمع شده و هر گاه درآن‌نقطه جسم قابل احتراق باشد آنرا می‌سوزاند و نیز اگرنورآفتاب مدتی به هوا یا جسمی دیگر بتابد آنراگرم می کند.»

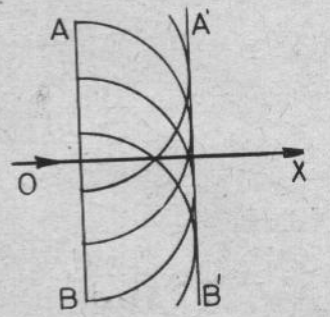
انتشار نور ـ هویگنس می گوید آتش وشعله‌که عامل تولید نور هستند بدون شك دارای حرکات سریعی هستند و این حرکات در محیط مادی‌که مجاور جسم نورانی قرار دارد تأثیرکرده آنرا بحرکت در می‌آورد و این حرکت از جزئی به جزء دیگر ماده موجود درفضا انتقال‌یافته و به‌این‌ترتیب نور انتشار پیدا می‌کند ، بنابراین انتشار نور شبیه انتشار صوت است زیرا انتشار صوت نیز بواسطهٔ انتقال حرکت از جزئی به جزء دیگر هوا صورت می گیرد .

اما راجع به انتشار نور به این کیفیت درکتاب تنقیح‌المناظر چنین آمده است:

« وكيفية نفوذ الضوء فی‌المشف المجاور للمضی هو علی ما تقررانه‌يمتدالضوء من‌كل نقطة منه علی‌سموت خطوط مستقيمه امتداد اكريا الی حيث ينتهی و المعنی من‌الامتداد هوعلی ما تقرر ان الجزء الذی يليه يوجد فيه ضوء شبيه بما فی‌الجزء الاول و هكذا بتدرج الی ان يضمحل او يثبت علی كثيف» .

یعنی : «طرز انتشار نور در محیط شفافی‌که مجاور با منبع نور می‌باشد اینطور است‌که نور از هریك از نقاط جسم نورانی بطور خطوط مستقیم ولی در امتداد کروی منتشر می گردد تا جایی‌که پایان یابد و دیگر قادر به‌انتشار نباشدو مقصود از امتداد این است‌که جزء مجاور منبع نور شبیه به خود جسم نورانی شده و حکم منبع نور را پیداکند و جزئی که بلافاصله پس ازآن قرار گرفته شبیه به جزء اول می‌شود به‌همین نحو این عمل ادامه دارد تا بتدریج نور از بین‌برود یا اینکه به جسم‌کدر جذب شود» .

باتوجه به عبارات اخیر بخوبی متوجه می‌شویم که هویگنس نه تنها خواص موجی نور را از روی همین مطلب شرح داده بلکه امواج جزئی را نیز از عبارت «جزء مجاور منبع نور شبیه به خود جسم نورانی شده و حکم منبع نور را پیدا می‌کند» بیان کرده و همین مطلب اکنون در کتابهای فیزیك تحت‌عنوان «اصل‌هویگنس» به‌شرح زیرتدریس می گردد



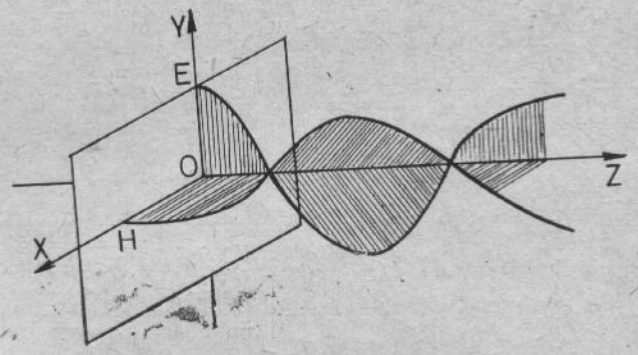
محور Ox را مطابق شکل در نظر گرفته خط AB را عمود برآن رسم‌می‌کنیم. اکنون صفحهٔ مار بر AB و عمود بر صفحهٔ شکل را به

منزلهٔ سطح موج درلحظهٔ t تصور می‌کنیم و فرض می‌نمائیم که سرعت انتشار نور V بوده و درلحظهٔ $\triangle t$ سطح موج $A'B'$ را داشته باشیم ، هریك از نقاط سطح AB رامی‌توان درحکم منبع نور فرض‌کرده کراتی به مرکزآن نقاط و شعاع $r = V.\triangle t$ رسم‌کرد . محیط این‌کرات مماس با سطح $A'B'$ خواهند بود ، بنابراین سطح موج $A'B'$ به منزلهٔ پوش یا لفاف برای امواج جزئی خواهند بود .

اصل هویگنس متکی براین فرض است‌که هر نقطه از سطح موج‌را می‌توان درحکم یك‌چشمهٔ کوچك ثانوی‌دانست که اشعه‌را به‌همه‌طرف با همان سرعتی‌که سطح موج اولیه حرکت می‌کرده می‌فرستد و سطح موج ثانوی سطحی است مماس به تمام سطوح موج مربوط به نقاط مختلفه سطح‌موج اولیه ، و چنانکه قبلا نیز اشاره کرده‌ایم او این فکر را از حکمای اسلامی گرفته است.

ماکسول درسال ۱۸۶۰ تئوری الکترومانیتیك‌خود را بعداز تجربیاتی به‌شرح زیر انتشار داد :

نوری‌که ما می‌بینیم عبارتست از دوبردار الکتریکی و مغناطیسی عمودبرهم و عمود برشعاع نورانی‌که دائماً در ارتعاش هستند. چنین شعاع نورانی را نور طبیعی گویند که عمل دیدن خود عبارت از حرکت الکترونهای چشم در اثر بردار الکتریکی موج است .



همانطورکه ملاحظه می‌شود تئوری ماکسول براساس تجزیه و ترکیب نیروها بناشده است که این موضوع نیز از تراوشات فکری فیزیکدانهای اسلام است ، و درتنقیح‌المناظر صفحهٔ ۱۳۱ بدان تصریح شده است.

« ولان الحرکة المفروضة هی علی خط مایل علی سطح المشف فهی مرکبة من حرکة فی‌العمود النافذ و حرکة فی‌جهةالعمودالثانی علی‌العمود الاول عند مبداءالنفوذ ...»

یعنی : هرگاه نور بطور مایل از محیطی داخل محیط شفاف دیگری شود می‌توان حرکت آنرا مرکب ازدو حرکت دانست ، یك حرکت در جهت عمود نافذ وحرکت دیگر در جهتی‌که عمود است بر عمود اول از مبدأ نفوذ . »

* *

آثار دیگرکمال‌الدین فارسی به‌قرار زیراست :

۲- «کتاب البصائر فی علم‌المناظر» این کتاب نیز راجع به‌نورشناسی است.

نسخه‌ای از آن درکتابخانهٔ مدرسه عالی سپهسالار موجود است.

۳- «تذکرةالاحباب فی‌بیان التحاب»

این کتاب دربارهٔ استخراج اعداد متحابه می‌باشد ، یك نسخهٔ خطی از آن درکتابخانهٔ استامبول می‌باشد .

۴- «اساس القوائد فی‌اصول الفوائد»

۵- حاشیه‌ای بر تذکرهٔ نصیریهٔ خواجه نصیرطوسی.

منابع و مآخذ

۱-**ابوالقاسم قربانی**: دوریاضیدان ایرانی و شمه‌ای دربارهٔ عددهای متحاب »

۲- متن سخنرانی **دکتر جلال مصطفوی** درکنگرهٔ خواجه نصیرالدین طوسی درتهران (۱۳۳۵ ه. ش)

۳- استاد **مصطفی نظیف بك** : الحسن بن‌الهیثم ، بحوثة الکشوفة البصریهٔ .

۴- **شیخ‌آقابزرگ طهرانی** : الذریعة الی تصانیف الشیعه .

5 : **Dr. R.W- DITCHBURN** : LIGHT , The Student's Physics.

استدلال در ریاضیات (دنباله از صفحهٔ ۷۶)

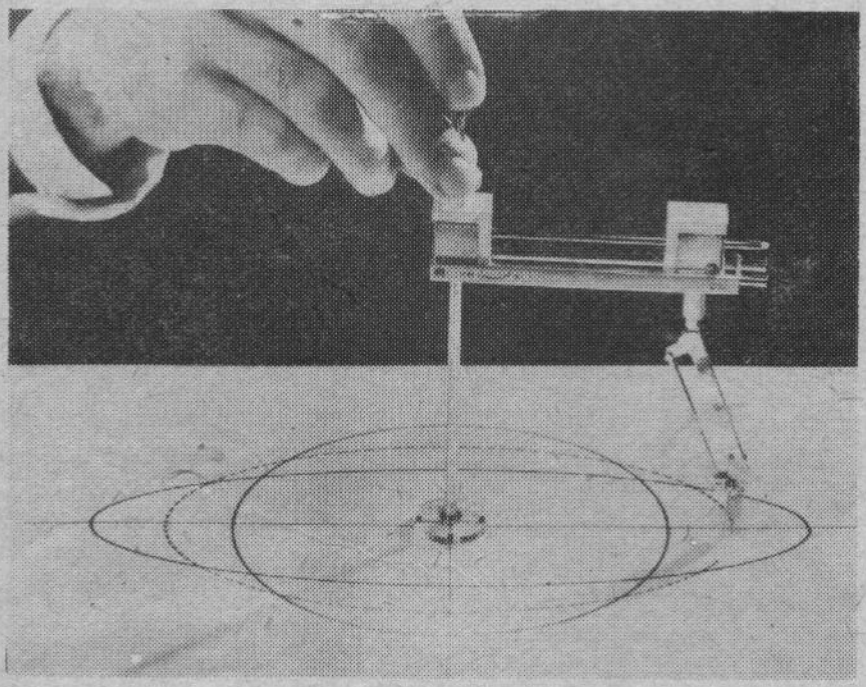
استقرائی می گوئیم. درکاوشهای علمی مانند زندگی روزمره، به‌یك فرضیه و نتایج مشاهده شدهٔ‌آن به‌همان اندازه‌ای ارزش قائل می‌شویم و باید ارزش قائل شویم‌که با عمل در توافق باشند.

بطور خلاصه ، اولر نیز شبیه همان‌کاری را می‌کردکه اشخاص استدلالی ، دانشمند یا غیردانشمند می‌کنند. بنظر می‌رسدکه دربرخی اصول باهم باید موافق بود: **صحت هر نتیجهٔ جدید یك فرضیه افزایندهٔ‌اعتماد به این فرضیه است. اعتماد به‌یك فرضیه همزمان با اطمینان به یك فرضیهٔ مشابه افزون می‌گردد .**

آیا اصولی‌که مبنای پیکرهٔ استقرائی را تشکیل‌می‌دهند از این نوعند؟

پرگار بیضی نگار

از جمله اختراعات جوان مخترع ایرانی: کیومرث طوفا



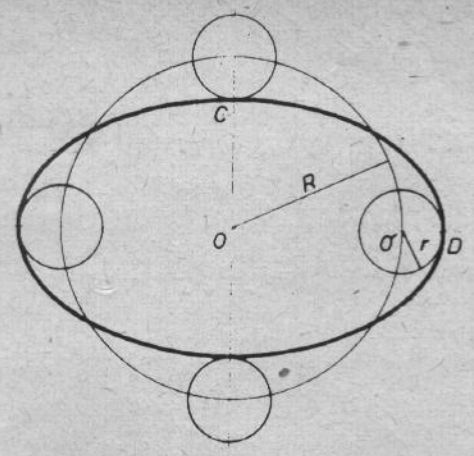
چندین ماه قبل، عکس روبرو توسط یکی از همکاران برای معرفی وچاپ در مجله به این جانب تسلیم شد. آنگونه که در عکس مشاهده می‌شود، با ابزاری تقریباً همسان پرگار، چند بیضی رسم شده است. در روی شاخهٔ افقی ابزار در سمت راست «ایران» و در سمت چپ «۳۰ مهر ۱۳۴۷» مشاهده می‌شود.

در ابتدا که عکس را دریافت کردم گمان بردم همان ابزاری‌است که شنیده بودم درچندین سال پیش، توسط یکی از دانش‌آموزان‌آن روز دبیرستان دارالفنون و گویا فعلا سرگرد ژاندارمری، ساخته شده و سازندهٔ‌آن توسط **استادهشترودی** که درآن موقع ریاست‌دانشکدهٔ‌علوم‌دانشگاه تهران را بعهده داشته‌اند، ازجهات مختلف تشویق و حمایت شده است.

اما آن همکار ارجمند که عکس را تسلیم داشت توضیح داد که این ابزار غیر از آن است و سازندهٔ آن، **کیومرث طوفا**، در زمینه‌های دیگر نیز اختراعات فراوان دارد. از جمله آنکه یکی از اختراعاتش را سال گذشته یکی از بانکهای خصوصی به مبلغ نیم میلیون ریال خریده است.

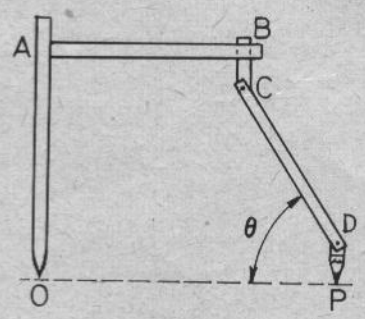
بالاخره، هفتهٔ گذشته با مخترع ابزار ملاقات شد. جوانی است‌که تحصیلات دبیرستانی‌را دردبیرستانهای **ادیب** و **مروی** گذرانده و بعد از فراغت از تحصیلات دبیرستان، تمام وقت خود را به اختراعات و اکتشافات در زمینه‌های مختلف مصروف می‌دارد. با همهٔ اشکالات مادی و موانع‌دیگر ناشی ازآن، به‌تلاش خود ادامه داده است وحتی به خاطر ادامهٔ‌کار ذوقی خود از بورسهای تحصیلی‌که به وی واگذار شده صرف‌نظر کرده است. خاطرهٔ مشکلاتی را که باآنهاروبرو بوده از یاد نمی‌برد و چون اطمینان داردکه تنها نیست‌وافراد دیگری نظیر وی هستندکه اختراع یا اختراعاتی را طرح‌کرده اما به‌علت عدم امکانات مادی وسیلهٔ آزمایش وساختن آنها را ندارند، از این جهت وجوه مختصری راکه اخیراً از فروش اختراعات خود بدست آورده در راه ایجاد مؤسسه‌ای‌به‌منظور تشویق نوآوران‌کنار گذاشته است. جوانانی که درزمینه‌های علمی فکری‌نو به‌خاطرشان رسیده باشد و به وی مراجعه‌کنند وسایل تحقیق آنان را تا آنجاکه مقدورش باشد فراهم‌می‌کند.

درگفتگوی باکیومرث طوفا، معلوم شدکه وی از راه **کشف و شهود** به ساختن بیضی‌نگار توفیق یافته است؛ وی ابتدا یك بیضی به‌طول قطر اطول $2a$ و طول قطر اقصر $2b$ در نظر می‌گیرد. درطرفین هریك ازقطرها دایره‌ای‌به‌شعاع $r=\frac{a-b}{2}$ مماس بربیضی رسم می‌کند بقسمی که دایره‌های واقع در طرفین قطر اطول مماس داخل و دایره‌های واقع در طرفین قطرکوتاه مماس خارج باشند. بعداز رسم این دایره‌ها ملاحظه می‌کند که مرکزهای آنها روی دایرهٔ به مرکز O، مرکز بیضی، و به شعاع R قرر دارند که:



$$R = a - \frac{a-b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

طوفا با این ملاحظه این نتیجه را می‌گیرد که هرگاه دایرهٔ به شعاع r چنان حرکت کند که O′ مرکز آن بر دایرهٔ O به‌شعاع R قرار داشته و یك نقطهٔ M از آن حول O′ بقسمی دوران کند که هر دوران کامل آن بعد از نیم دوران O′ حول O انجام پذیرد، مکان M یك بیضی خواهد بود. براین اساس، طرح بیضی‌نگار را بنا می‌کند که اسکلت ساختمان آن مطابق با شکل روبرو است.



بازوی OA در وضع قائم‌چنان قرارمی‌گیرد که نوك سوزن آن، O، بر مرکز بیضی واقع‌شود. ضمن‌دوران ابزار حول محورOA مکان‌تصویرB دایره‌ای است‌به‌شعاع $R = AB$ و به‌مرکز O، در B چرخ دنده‌ای بکار رفته است که ضمن دوران ابزار حول OA، بازوی BC حول محور قائم‌دوران می‌کند بقسمی‌که هرگاه B یك دوران کامل کند، BC حول خود دو دوران کامل‌کرده باشد، بازوی CD در نقطهٔ C به BC وصل است و نسبت به آن مایل است. هرگاه θ زاویهٔ میل بازوی CD باشد، مکان P تصویر D دایرهٔ به شعاع $r = CD\cos\theta$ خواهد بود که مرکز این دایره که تصویر B است خود دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R را می‌پیماید. پس بنابه‌آنچه‌که قبلا ملاحظه شده است مکان P بیضی خواهد بود که O مرکز آن و $2a$ و $2b$ طولهای اقطارآن ازروابط زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{cases} a + b = 2R = 2AB \\ a - b = 2r = 2CD\cos\theta \end{cases}$$

$$a = B + r = AB + CD\cos\theta$$

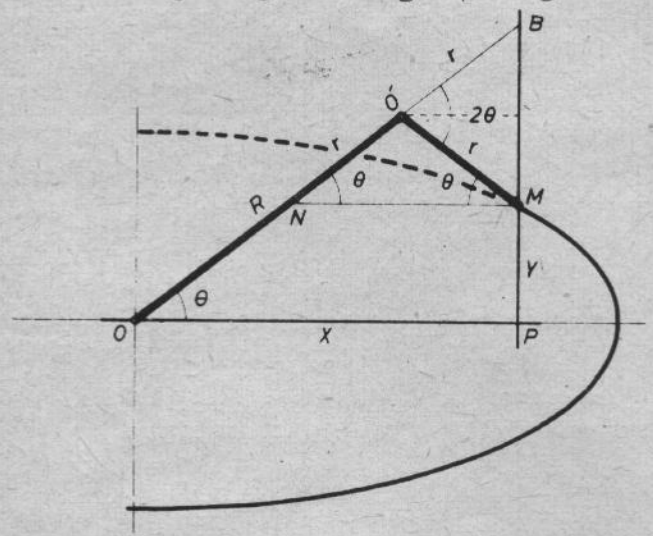
و

$$b = R - r = AB - CD\cos\theta$$

هرگاه $\theta = 90^\circ$ باشد $b = a$ است و بیضی مکان P به دایرهٔ (R و O) تبدیل می‌شود. هرگاه $AB = CD\cos\theta$ باشد $b = 0$ است و مکان P پاره‌خط به طول $2a$ خواهدبود.

موافقت می‌شود که طوفا برای ساختن ابزار با طرح بالا از کارگاههای هنرسرای عالی استفاده کند. وی ابزار را می‌سازدا مادراولین‌بارمشاهده‌می‌کندکه توسط آن به‌جای‌بیضی منحنی به شکل گل چهاربرگ رسم می‌شود. طوفا مجدداً دست‌بکار می‌شود و این‌بار چرخ‌دندهٔ B را چنان مستقرمی‌کند که جهت دوران نقطهٔ P حول محور BC مخالف با جهت حرکت دوران B حول محور OA باشد و چون ابزار را آزمایش می‌کند (در تاریخ ۳۰ مهر ۱۳۴۷) منحنی بیضی را رسم می‌کند.

طوفا ابزار را به چند نفر از استادان ریاضی ومهندسان ارائه می‌دهد. از وی می‌خواهند که با استدلال ریاضی ثابت کند منحنی که توسط این ابزار رسم می‌شود بیضی است، زیرا ممکن است منحنی شبه‌بیضی باشد. در این‌باره آقای **مهندس قندهاریان** طوفا را یاری می‌کند و به شرح زیر ثابت‌می‌کند که منحنی مرسوم بیضی است؛ مطابق با شکل:



$$r = NO' = O'B = O'M \quad \text{و} \quad R = OO'$$

$$x = OP = (R + r)\cos\theta$$

$$y = PM = (R - r)\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{R+r} = \frac{x}{a} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{y}{R-r} = b$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

کیومرث‌طوفا اکنون برای نیل به‌یك هدف عالی تلاش می‌کند: ایجاد مؤسسه‌ای با امکانات مالی و علمی بسیاروسیع به منظور تشویق و حمایت از جوانان نوآور ایران.

عبدالحسین مصحفی

استدلال در ریاضیات

نوشتهٔ : G. PO'LYA وابستهٔ آکادمی علوم و استاد افتخاری
مدرسهٔ پلی‌تکنیك فدرال زوریخ و دانشگاه استانفورد

ترجمهٔ : داوید ریحان

فصل II - تعمیم ، تخصیص ، مشابهت

مشابهات را والاتر از همه می‌پندارم چراکه بهترین راهنمایان من بوده‌اند . اینان بـ تمام رازهای طبیعت وبخصوص از هندسه که نباید از آن صرف‌نظر کرد ، واقفند. **کپلر**

I - تعمیم ، تخصیص ، مشابهت و استقراء -

به مثال استدلال استقرائی‌که چند حالت آنرا (درفصل اول) مطالعه‌کردیم ، باز می‌گردیم . ابتدا باتذکر مشابهتی که بین سه رابطهٔ زیرموجود است ، شروع کردیم :

$$۳+۷=۱۰ \quad و \quad ۳+۱۷=۲۰ \quad و \quad ۱۳+۱۷=۳۰$$

با عبور از ۳ ، ۷ ، ۱۳ و ۱۷ به‌تمام اعداد اول و از ۱۰ ، ۲۰ ، ۳۰ به‌تمام اعداد زوج آنرا **تعمیم** دادیم و سپس با آزمودن تمام اعداد زوج مخصوص مانند ۶ ، ۸ یا ۶۰ به حالات خاص بازگشتیم .

این‌اولین مثال بسیار ساده است وبه‌طریق بسیارصحیحی نقشهای تعمیم ، تخصیص و مشابهت را در استدلال استقرائی معین می‌کند. معهذا می‌بایست چند مثالی‌راکه کمتر مطرح شده‌اند و غنی‌تر نیزمی‌باشند ، بررسی‌کنیم ؛ ولی قبل از این کار، باید این بزرگترین‌سرچشمه‌های اکتشافات راکه همانا تعمیم ، تخصیص‌و مشابهتند ، مورد مطالعه قرار دهیم.

II - تعمیم یعنی عبور از ملاحظهٔ یك مجموعهٔ داده شده از اشیاء به ملاحظاتی و سیعترکه شامل خود مجموعهٔ داده شده است. مثلا عبور از مثلثها به چندضلعیهایی که‌دارای اضلاع نامشخصی‌اند یك‌تعمیم است. همین‌طور اگر ازمطالعهٔ توابع‌مثلثاتی یك زاویهٔ حاده به‌توابع‌مثلثاتی زاویهٔ‌غیرمشخصی برسیم ، گوئیم‌که مطلب را تعمیم داده‌ایم .

باید توجه داشت‌که دراین دومثال ، تعمیم به دوگونهٔ مختلف صورت‌گرفته است. در اولی ، در عبور از مثلثها به n ضلعیها ، به‌جای یك‌مقدار ثابت ، مقدار متغیر n را قرار داده‌ایم یعنی عدد n را جایگزین عدد ۳ کرده‌ایم (که تنها تحت شرط $n \geqslant ۳$ قرارگرفته است). دردومی ، درعبور از زوایای حاده‌به‌زوایای‌غیرمشخصα،بادانستن $۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ یك شرط را حذف‌کرده‌ایم .

غالباً ، عبور از یك شیء واحد را به مجموعه‌ای کلی که شامل این شیء باشد تعمیم می‌گوئیم .

III - تخصیص یعنی گذشتن از ملاحظهٔ یك مجموعهٔ داده شده از اشیاء به مجموعه‌ای‌کم وسعت تر که جزئی از آن مجموعه باشد . بنابراین در عبور از چند ضلعیها به چند ضلعیهای منتظم و درعبورازn ضلعیهای منتظم به‌مثلث‌منتظم یعنی‌مثلث متساوی‌الاضلاع آنرا تخصیص می‌دهیم .

این دوعبور متوالی به دوطریقهٔ مختلف صورت گرفته است. دراولین عبور ، از چند ضلعیها به‌چند ضلعیهای منتظم، شرط تساوی تمام اضلاع و تمام زوایای چند ضلعی را مداخله‌داده‌ایم. در دومین عبور، یك شیء مشخص‌راجایگزین یك شیء متغیر کرده‌ایم ، در اینجا به‌جای عدد صحیح p عدد صحیح ۳ را قرار داده‌ایم .

غالباً ، در موقع عبورازیك مجموعهٔ اشیاء به‌یك شیء واحد مشمول‌دراین‌مجموعه عمل تخصیص را انجام می‌دهیم. همچنین ، اگر صحت یك‌گزارهٔ کلی مربوط به اعداد

اول را در مورد یک‌عدد اول مخصوص مثلا ۱۷ بررسی کنیم و معلوم کنیم که آیا این گزاره در مورد این حالت بخصوص صحیح است یا خیر عمل تخصیص را انجام داده‌ایم .

IV- مشابهت- چیز قابل ذکری در مورد مفاهیم تعمیم و تخصیص وجود ندارد. ولی درصورتی که مطالعهٔ مشابهت را پی گیری کنیم خودرا روی زمینی حس می کنیم که هنوز محکم نیست .

مشابهت نوعی همانندی است و می‌توانیم بگوئیم نوعی همانندی است که به‌طریقهٔ مشخص و درسطحی قابل درك در نظر گرفته شده است. ولی می‌توانیم آنرا بطور صحیحتری نیز بیان کنیم. اختلاف اساسی مابین مشابهت و سایر انواع همانندیها ، به‌عقیدهٔ من ، در مقاصدیست که‌شخص درملاحظهٔ اشیاء دارد . این اشیاء به‌عنوان نقطهٔ دیدی بنظر می‌رسند و اگر بخواهیم این تشابه را با مفاهیم دقیقی بیان کنیم ، گوئیم‌که این اشیاء مشابهند . و اگر موفق به یافتن چنین مفهوم روشنی شدیم ، گوئیم که مشابهت آشکار شده است.

وقتی‌شاعری‌یك‌زن‌را به گلی تشبیه‌می کند، تصور می کنم که وی‌نوعی تشابه‌حس‌می کندولی‌عموماً به‌مشابهت‌نمی‌اندیشد. زیرا به‌هیچ وجه قصد نداردکه از احساسات خود دست بکشد یا اینکه نمی‌خواهدکه این مقایسه به چیزی قابل اندازه گیری و یا کاملا وصف شدنی اطلاق شود .

هنگامی که درموزهٔ‌تاریخ‌طبیعی به‌اسکلتهای پستانداران مختلف نگاه می کنید ، آنهارا مخوف می‌یابید . درصورتی که این تنها تشابهی باشدکه شما ملاحظه می کنید ، در این‌صورت نمی‌توانید دربارهٔ مشابهت حرفی بمیان آورید. درصورتی پی به مشابهت خواهید بردکه ترکیبی ازقسمتهای متشابه راباهم درنظربگیریدکه بطور مشابه باهم وابسته‌اند مثلا ، دست انسان ، پای گربه ، زانوی اسب ، آلت شنای بالن و بال خفاش ، اعضایی هستندکه به‌طریق مختلف‌مورد استفاده قرار می گیرند .

این آخرین مثال ، یکی از انواع مشابهت آشکار را می‌نمایاند: **دو دستگاه را مشابه گوئیم هرگاه بین عناصر متناظر آنها ، رابطهٔ مشخص و همانندی بتوانیم ایجاد کنیم.**

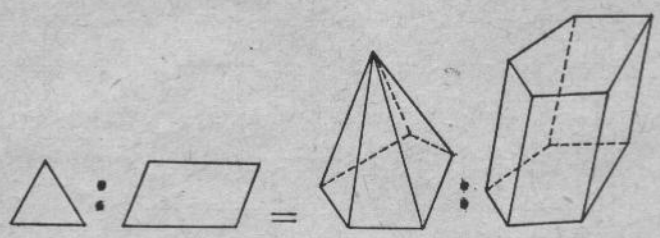
درچنین صورتی ، مثلث واقع درصفحه مشابه با چهار وجهی واقع درفضاست . دریك صفحه ، ۲خط نمی‌توانند یك شکل محدود را مشخص کنند ولی ۳ خط می‌توانند تشکیل یك مثلث بدهند . در فضا با ۳ صفحه نمی‌توان یك شکل محدود بدست آورد ولی با ۴ صفحه یك چهاروجهی بدست می آید ، رابطهٔ بین مثلث وصفحه همان رابطهٔ بین چهاروجهی و فضا است ، بدین معنی که هرکدام از مثلث و چهار وجهی باتعداد می‌نیمم عناصر ساده محدود شده‌اند .

یکی از مفاهیم کلمهٔ یونانی « آنالوگیا » که کلمهٔ «آنالوژی = مشابهت» ازآن گرفته شده‌است، «نسبت» می‌باشد. درواقع ، دستگاه دوتایی ۶ و ۹ «مشابه» با دستگاه دوتایی ۱۰ و ۱۵ است‌زیرا درنسبت جملات‌نظیرخود باهم مشترکند:

$$۶ : ۹ = ۱۰ : ۱۵$$

تناسب یا تساوی دو نسبت از عناصر نظیری که‌می‌توان روی اشکال هندسی متشابه ببینیم ، یك‌حالت از مشابهت تلقینی است.

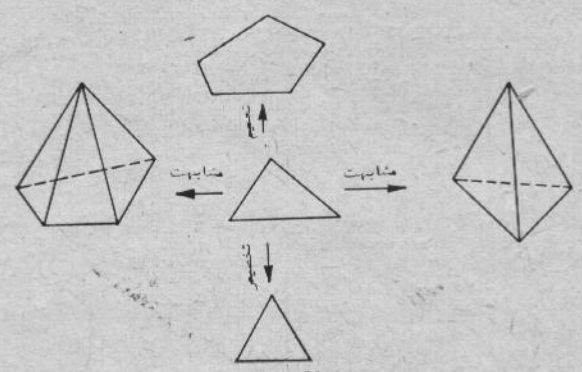
مثال دیگری می‌زنیم. می‌توانیم یك مثلث و یك هرم‌را اشکال مشابهی درنظربگیریم. ازیك‌طرف قطعه خط و ازطرفی دیگر چندضلعی را درنظر می گیریم . درصورتی‌که نقاط‌قطعه خط را به نقطه‌ای خارج از آن خط وصل‌کنیم ، یك مثلث بدست می‌آید. اگر نقاط چند ضلعی را به‌نقطه‌ای خارج از صفحه‌اش وصل‌کنیم ، یك هرم بدست می‌آید . همین‌طور می‌توانیم متوازی‌الاضلاع و منشور را اشکال مشابه بنامیم . درواقع ، اگر یك قطعه خط یا یك چند ضلعی را به موازات خود ربطور مورب با خط یاصفحه‌ای‌که شامل آن‌است تغییر مکان دهیم ، یکی تولید متوازی‌الاضلاع و دیگری تولیدیك منشور می‌کند. می‌توانیم این روابط را مابین اشکال دوبعدی و سه‌بعدی بوسیلهٔ نوعی نسبت بدست آوریم و اگر درمقابل وسوسه پایداری نکنیم، شکل ۱ بدست می‌آید . در این‌شکل، مفهوم عادی برخی از نشانه‌ها (: و =) به‌کمك تحویل زبان شناسی درکلمهٔ «آنالوگیا» درموقع عبور ازمعنی«نسبت» به معنی «مشابهت» ، توجیه می‌شود.



شکل ۱

آخرین مثال ، از نقطه نظر دیگری آموزنده است . مشابهت و خصوصاً مشابهتی غیرآشکار می‌تواند دوطرفه‌باشد، بدین صورت که با مقایسهٔ هندسهٔ مسطحه با هندسهٔ فضائی ، مشاهده‌کردیم که یك مثلث با چهار وجهی ، و یك مثلث با

یك‌هرم مشابه است . این مشابهتها عموماً مستدل هستند و هرکدام در موقعیت مربوط به‌خود قابل استفاده است. چندین نوع مشابهت بین هندسهٔ مسطح و هندسهٔ فضائی وجود دارد که هیچکدام بر دیگری ارجحیت ندارد .



شکل ۲

شکل ۲ نشان می‌دهدکه چگونه می‌توان از تعمیم یك مثلث به یك چند ضلعی و از تخصیص‌آن بـه مثلث متساوی الاضلاع به‌کمك مشابهت‌به‌اشکال فضایی متفاوتی رسید .

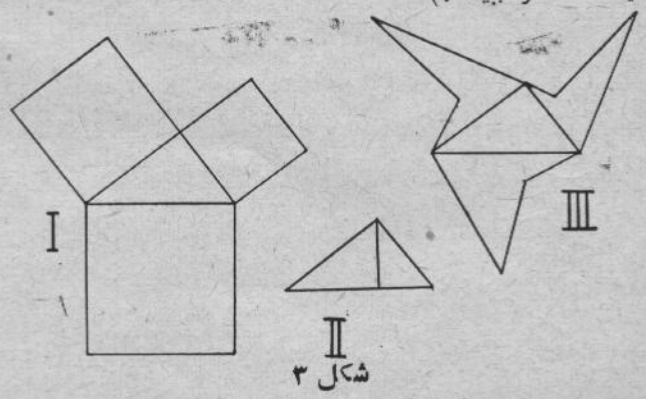
مشابهتهای غیر صریح را نباید فراموش‌کـرد . معهذا حالاتی پیش می‌آیدکه برای برخی ملاحظات بایداین‌مشابهتها را آشکارسازیم .

۷ـ تعمیم ، تخصیص و مشابهت اغـلب بـرای حـل مسائل پیچیده با یکدیگرمتحد می‌گردند . به‌عنوان مثال‌اثبات مشهورترین قضیهٔ هندسهٔ مقدماتی ، **قضیهٔ فیثاغورس** ، را اختیار می‌کنیم . اثباتی که هم اکنون امتحان می‌شود جـدید نیست بلکه از آن خود **اقلیدس** است.

۱ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ به اضلاع a ، b ، c راکـه a وترآن است ، در نظر می‌گیریم . می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که :

$$(A) \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

این هدف‌مارا وامی‌داردکه مربعهایی روی اضلاع مثلث بسازیم . بدین ترتیب به عنصر مأنوس I از شکل انشایـی می‌رسیم. (ازخوانندگان دعوت‌می‌شودکه‌عناصررا به‌اندازه‌ای که در شکل داده شده است ترسیم کنند تا طریقهٔ برپا داشتن یك مسئله را ببینند.)



شکل ۳

۲ـ مشاهدات هرچند ناچیزهم ، چندین رابطه راآشکار می‌سازند. می‌توانیم با مشاهدهٔ مشابهت مابین‌عنصرمأنوس I ازشکل انشائی و عنصرکم‌آشنای II ، اثبات مطلوب رابدست آوریم : همین مثلث به‌کمك ارتفاع وارد بروتر به دو قسمت شده است.

۳ـ شاید مشابهت مابین I و II را نبینید. باوجود این ممکن است‌که این‌مشابهت‌رابه‌کمك تعمیم یکسرهٔ I و II کـه توسط III نموده شده است ، واضح سازید . در شکـل III همین مثلث قـائم‌الزاویـه را می‌بینیم‌که روی اضلاعش چند‌ضلعیهای مشابـه بـا هم ولـی با شکلهای مختلف ، ساخته شده‌اند.

۴ـ در I ، مساحت مربع ساخته شده برروی وتـر a^2 است. در III مساحت چند ضلعی غیر منتظم ساخته شده بـر روی وتر را می‌توانیم مساوی با λa^2 فرض‌کنیم ؛ ضریب λ توسط نسبت دوسطح مفروض ، بیان‌گردیده است. از تشابـه سه چند ضلعی ساخته شده برروی اضلاع a ، b و c ازمثلث III نتیجه می‌شودکه مساحاتشان بـه ترتیب برابر با λa^2 ، λb^2 و λc^2 است .

اگررابطهٔ (A) درست‌باشد (که قضیه‌ای‌که می‌خواهیم ثابت کنیم ، مؤید آن است) ، رابطهٔ زیـرین نیز باید صحیح باشد :

$$(B) \qquad \lambda a^2 = \lambda b^2 + \lambda c^2$$

درواقع برای تبدیل (B) به (A) کمی جبر مقدماتـی کفایت می‌کند. (B) معرف تعمیم قضیهٔ اولیهٔ فیثاغورس‌است:

اگر سه چند ضلعی متشابه روی سه ضلع یك مثلث قـائم ـ الزاویه ساخته شوند ، مساحت آن چند ضلعی‌که روی وتر ساخته می‌شود برابر با مجموع دوتای دیگر است .

یادآوری اینکه این تعمیم معادل بابیان حالتی است‌که نقطهٔ شروع ما بود و آموزنده است .

در واقع می‌توانیم هرکدام از تساویهای (A) و (B) را به‌کمك ضرب یا تقسیم توسط λ به یکدیگر تبدیـل‌کنیم . (λ برابر با نسبت دومساحت است و مخالف صفر می‌باشد) .

۵ـ قضیهٔ‌کلی‌که توسط (B) بیان شد ، نه‌فقط معادل با حالت خاص (A) است بلکه با سایر حالات خاص نیز معادل است. در این‌صورت ، اگر یکی از این حالات خاص بـدیهی باشد ، حالت‌کلی اثبات خواهد شد.

بنابراین ، اکنون بـه‌کمك تخصیص مفید ، یـك حالت خاص مناسب را جستجو می‌کنیم . مسلماً حالتی ازایـن‌نوع وجود دارد. بطوری‌که می‌دانیم و دیدن‌آن بسیار ساده‌است،

مثلث قائم‌الزاویه‌ای که روی وترش ساخته می‌شود بادومثلث دیگری که روی دوضلع دیگرش ساخته می‌شود ، متشابه‌است. بعلاوه واضح است که مساحت مثلث کامل برابر با مجموع مساحات قسمتهای متشکلهٔ آن است. بنابراین قضیهٔ فیثاغورث بدین گونه اثبات شد.

استدلال اخیربسیار آموزنده است . مثالی را آموزنده گوئیم که بتوان از آن چیزهائی استخراج نمودکه در مورد سایر امثله قابل اجرا باشد ، و این مثالها آنقدر زیاد باشندکه حوزهٔ کاربردهای ممکن را بسیار وسیع سازد. مثال اخیر مورد استعمال عملیات فکری اساسی را مانند تعمیم ، تخصیص و درك مشابهتها را نشان داد. بدون شك در ریاضیات مقدماتی یا عالی و در نتیجه درسایر قلمروها ، کشفی وجود نداردکه بدون‌کمك از این عملیات و بخصوص بدون یاری از مشابهت بتواند انجام گیرد.

مثال اخیرنشان‌دادکه چگونه می‌توانیم بوسیلهٔ‌تعمیم، ازحالت خاصی مانند I به‌حالت کلیتر III برسیم و سپس با تخصیص‌آن به‌حالت مشابه II برسیم . مثال اخیربرای افراد مبتدی وحتی‌برای فیلسوفی‌که به مبتدی نمی‌اندیشد ، روشن ساخت که یك حالت‌کلی می‌تواند بطور منطقی معادل با یك حالت خاص باشد. مثال ما بسادگی نشان داد که چگونه تعمیم ، تخصیص و مشابهت بطور طبیعی دست به‌دست هم داده وکوششهای مارا در یافتن جواب مسئله یاری‌کردند . مشاهده می‌کنیم‌که برای درك‌کامل استدلال اخیر ، حداقل معلومات مقدماتی‌کفایت می‌کند.

VI ـ کشف‌ازراه مشابهت ـ درتمام‌کشفها،مشابهت نقشی بعهده دارد ولی دربرخی از آنها نقش عمده برعهدهٔ‌آن است. می‌خواهیم این موضوع را با مثالی غیرمقدماتی که دارای ارزش تاریخی است ، روشن سازیم ؛ این مثال فصیحتر ازسایر مثالهایی است‌که می‌توانند به‌فکر من خطورکنند.

ریاضیدان سوئیسی **ژاك برنولی** (۱۷۰۵-۱۶۵۴) ، معاصر با **نیوتن** و **لیب نیز** ، مجموع بسیاری از سری‌هارا کشف‌کرد ولی نتوانست مجموع جملات سری متشکل از عکس مجذورات اعداد صحیح را بدست‌آورد :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\dots$$

برنولی نوشت : «اگرکسی بتواند این‌مسئله را که در مقابل‌کوششهای من مقاومت‌کرده است ، حل‌کند و یا در حل آن سهمی داشته باشد ، به‌وی بسیار مدیون خواهیم‌بود».

این‌مسئله توجه ریاضیدان دیگر سویسی **لئونارد اولر** (۱۷۸۳-۱۷۰۷)راکه مانندژاك‌برنولی در **بال** بدنیاآمده‌بود و شاگرد**ژان برنولی** ، برادر ژاك (۱۷۴۸-۱۶۶۷) بود، به‌خود معطوف داشت . وی طرق مختلفی را برای مجموع مطلوب کشف کرد (انتگرال‌های محدود ، سایر سری‌ها) ، ولی هیچکدام اورا راضی نکرد . وی یکی از این عبارات را برای محاسبهٔ‌مجموعی‌باشش‌رقم‌اعشار، بکاربرد(۱/۶۴۴۹۳۴) ولی این مقداری تقریبی بود و هدف وی یافتن‌مقدار صحیح آن بود . بالاخره این مقدار صحیح راکشف‌کرد . مشابهت راهنمای وی در تدوین یك فرضیهٔ جسورانه بود .

۱ـ نتایجی چند ازجبر مقدماتی‌راکه درکشف اولرمؤثر بوده‌اند ، دوره می‌کنیم . درصورتی‌که معادلهٔ درجهٔ n ام :

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=0$$

دارای n ریشهٔ متمایز α_1 ، α_2 ، .... ، α_n باشد ، چند جمله‌ای طرف اول را می‌توانیم به‌صورت حاصل‌ضرب n عامل درجهٔ اول نمایش دهیم :

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=$$
$$=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

از مقایسهٔ جملات همدرجهٔ x در طرفین این اتحاد ، روابط بسیار مشهور مابین ضرایب و ریشه‌های یك معادله بدست می‌آید : ساده‌ترین آنها یعنی :

$$\alpha_{n-1}=-\alpha_n(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)$$

از مقایسهٔ جملات x^{n-1} بدست می‌آید.

نوع دیگری از نمایش تجزیهٔ به عوامل درجه اول وجود دارد. اگر هیچکدام از ریشه‌های α_1 و α_2 ، ...، α_n مساوی صفر نباشد ، یا (که همان مفهوم را می‌رساند) اگر a_0 مخالف صفرباشد ، بازهم داریم :

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=$$
$$=a_0\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)$$

و

$$a_1=-a_0\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

بازهم نوع دیگری وجود دارد . فرض می‌کنیم که معادله‌ای از درجهٔ 2n به‌صورت زیر :

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\dots+(-1)^nb_nx^{2n}=0$$

مفروض بوده و دارای 2n ریشهٔ متفاوت β_1 ، $-\beta_1$ ، β_2 ، $-\beta_2$ ، ...، β_n ، $-\beta_n$ باشد. دراین‌صورت :

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4+\dots+(-1)^nb_nx^{2n}=$$
$$=b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right)$$

و :

$$b_1 = b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \dots + \frac{1}{\beta_n^2}\right)$$

۲- اولر ، معادلهٔ $\sin x = 0$ یا :

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\times2\times3} + \frac{x^5}{1\times2\times3\times4\times5} - \frac{x^7}{1\times2\times3\times\dots\times7} + \dots = 0$$

را درنظر گرفت .

اولین عضو این معادله دارای بینهایت جمله است و معادله از «درجهٔ بینهایت» است.

اولر می گوید که نباید تعجب کرد که این معادله دارای بینهایت ریشهٔ زیر است:

$$0 ، \pi ، -\pi ، 2\pi ، -2\pi ، 3\pi ، -3\pi ، \dots$$

اولر ریشهٔ صفر را کنار گذاشت. برای این منظور عضو طرف اول را بو x تقسیم کرد (عاملی که مربوط به ریشهٔ صفر بود) و معادلهٔ زیر را بدست آورد :

$$1 - \frac{x^2}{2\times3} + \frac{x^4}{2\times3\times4\times5} - \frac{x^6}{2\times3\times4\times5\times6\times7} + \dots = 0$$

که ریشه‌های آن عبارتند از :

$$\pi ، -\pi ، 2\pi ، -2\pi ، 3\pi ، -3\pi ، \dots$$

نوعی مشابهت بین این معادله‌ای که در قسمت I در آخرین نوع تجزیه به عوامل درجه اول نشان دادیم ، وجود دارد. اولر بوسیلهٔ مشابهت نتیجه گرفت که :

$$\sin x = 1 - \frac{x^2}{2\times3} + \frac{x^4}{2\times3\times4\times5} - \frac{x^6}{2\times3\times\dots\times7} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots ،$$

بنابراین :

$$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots$$

و بالاخره :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

این همان سری بود که در مقابل کوششهای ژاك برنولی مقاومت می کرد . ولی این یك نتیجه گیری متهورانه بود.

اولر آنرا بخوبی می‌دانست و ده سال بعد نوشت :

«روش جدیدی بود و هرگز برای چنین هدفی بکار برده نشده بود». وی در سرراه خود موانعی دید و موانع دیگری توسط سایر دوستان ریاضیدانش که به اولین کار شگفت و قابل تحسین خود نظر کرده بودند ، ایجاد شد.

مع الوصف ، اولر به دلایل خود اعتماد کافی داشت.

مقدار تقریبی مجموع سری که قبلا محاسبه شده بود تا آخرین رقم اعشار با $\frac{\pi^2}{6}$ مطابقت می کرد. با مقایسهٔ ضرایب جدید در عبارت $\sin x$ که به‌صورت ضرب درآمده است، مثلا از مقایسهٔ عکس قوای چهارم اعداد صحیح ، رابطهٔ زیر را بدست آورد :

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

مجدداً مقدار عددی تقریبی را امتحان کرد و بازهم توافقی بین آنها دید.

۴- اولر روش خود را برای سایر امثله نیز بکار برد. درحین عمل ، بوسیلهٔ روشهای مختلف و نزدیك به اولی ، مجدداً مجموع $\frac{\pi^2}{6}$ را برای سری ژاك برنولی بدست آورد. وی با این طریقه توانست مجموع یکی از مهمترین سریهایی راکه متعلق به لیب نیز بود بدست آورد .

این نکتهٔ اخیر را آزمایش می کنیم . به کمك اولر ، معادلهٔ $1 - \sin x = 0$ را درنظر می گیریم. این معادله دارای ریشه‌های :

$$\frac{\pi}{2} ، -\frac{3\pi}{2} ، \frac{5\pi}{2} ، -\frac{7\pi}{2} ، \frac{9\pi}{2} ، \frac{11\pi}{2} \dots$$

است .

هرکدام ازاین ریشه‌ها مضاعف است. منحنی $y = \sin x$ خط $y = 1$ را درنقاطی که طولشان برابر با مقادیر اخیراست، قطع نمی کند ، بلکه در این نقاط با این خط مماس است. مشتق اول ، و نه مشتق دوم ، اولین عضو به ازای این مقادیر x صفر می‌شود. همچنین معادلهٔ

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\times2\times3} - \frac{x^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \dots = 0$$

دارای ریشه‌های

$$\frac{\pi}{2} ، \frac{\pi}{2} ، -\frac{3\pi}{2} ، -\frac{3\pi}{2} ، \frac{5\pi}{2} ، \frac{5\pi}{2} ، -\frac{7\pi}{2} ، -\frac{7\pi}{2} \dots$$

است .

واستدلال تشابهی اولرمنتهی به‌تجزیهٔ به عوامل درجهٔ اول می‌شود :

$$1 - \sin X = 1 - \frac{X}{1} + \frac{X^3}{1\times 2\times 3} - \frac{X^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} + \cdots$$

$$= \left(1-\frac{2X}{\pi}\right)\left(1+\frac{2X}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2X}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2X}{7\pi}\right)\cdots$$

بامقایسهٔ ضرایب X دردوطرف‌معادله، بدست می‌آوریم:

$$-1 = -\frac{4}{\pi} + \frac{4}{3\pi} - \frac{4}{5\pi} + \frac{4}{7\pi} - \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

این سری معروف لیب نیز است ؛ روش‌متهورانهٔ اولر به‌نتیجه‌ای مشهورمنتهی شد. اولرمی گوید «یك چنین تأییدیهٔ مهمی از روش ماکه در برخی حالات نباید بدان اعتمادنمود، بدین گونه به درخشش درآمد. بنابراین نباید درمورد نتایجی که باهمین‌روش حاصل شده‌است، شکی به دل راه دهیم».

باوجود این ، اولر بازهم به شکاکی خویش ادامه‌داد. وی تحقیقات عددی ذکر شده در ۳ را با سریهای جدید و اعشارهای جدید امتحان‌کرد و ملاحظه‌کردکه تمام حالات‌باهم مطابقت دارند . وی بازهم سایر راههای تقریبی را آزمایش نمود و نه فقط موفق به‌تحقیق به طریقهٔ تقریبی شد ، بلکه به‌طریقه‌ای وصف ناپذیر مقدار $\frac{\pi^2}{6}$ منسوب به مجموع سری ژاك برنولی را بدست‌آورد .

وی اثبات جدیدی‌کشف نمود . این اثبات ، که‌بسیار ظریفانه و دوراز نظر و برمبنای ملاحظاتی بسیار مألوف‌بود، کاملا غیر مترقبه مورد ملاحظه قرار گرفت . بدین گونه ، مؤثرترین استنتاج ازکشف اولربطورخوشایندی تصدیق شد.

بنظر می‌رسدکه این براهین موفق شدند که اولررا در پایه‌ریزی روش خود یاری‌کنند (*).

۷ـ مشابهت و استقراء ـ هدف ما رسوخ به طبیعت استدلال مکاشفه‌ای و استقرایی است. مثال اخیر چه‌چیزی می‌تواند در بارهٔ این‌موضوع به‌ما یاد بدهد ؟

۱ـ روش قطعی استدلال اولر متهورانه‌بود . باتمام منطق‌آن ، بایك خطای فاحش تعقیب می‌شد : وی قانونی را برای حالتی بکار می‌بردکه برای‌آن‌کار ساخته نشده بود ، قانونی‌راکه مربوط به‌معادلات جبری بود ، درمورد معادلاتی بکاربردکه جبری نبودند. منطقاً روش اولر محقق نبود ، ولی بواسطهٔ مشابهت وبوسیلهٔ تشابهی تأیید شده توسط ترقی یك علم‌زاده شده‌که خودش‌آنرا بعدها به‌نام «آنالیزبینهایت»نامید، این رابطه محقق بود. سایرریاضیدانان قبل از اولر ، از تفاوتهای محدود به تفاوتهای بینهایت‌کوچکها و از مجموعی که دارای تعداد محدودی است به مجموعی با تعدادنامحدود جملات ، و ازضرب با تعداد محدود عوامل به ضربهای نامحدود ، عبورکردند.

بدین سان اولر از معادلات بادرجهٔ محدود (معادلات جبری) به معادلات با درجهٔ نامحدودی که قوانین داده شده برای معادلات محدود درموردشان در بینهایت صادق است ، عبور نمود.

این مشابهت (عبور از محدود به نامحدود) مملو از خطرات است. برای اجتناب ازآن ، اولر چه‌کرد ؟ برخی می گویندکه وی نبوغ‌داشت ولی واضح است‌که این پاسخ سؤال مانیست.

اولر دلایل ظریفی برای تأییدکشف خود داشت. می‌توانیم باکمی تیزهوشی و بدون هیچگونه احتیاجی به تعمق خصوصی ، مخصوص نابغه‌ها ، دلایل وی‌را درك‌کنیم .

۲ـ دلایلی‌که اولر برای تأییدکشف خود داشت و در بالا بطور خلاصه بیان‌گردید ، ازنوع اثباتی نیستند. اولر پایه‌های فرضیهٔ خود (**) وعبور متهورانهٔ ازمحدود به نامحدود را مورد ملاحظه قرار نمی‌داد بلکه تحقیق تمام‌نتایج از این قبیل راکه به‌عنوان برهانی به‌نفع فرضیه‌اش بکار رود ، درنظر داشت. وی اثباتهای تقریبی و اثباتهای دقیق را باهم مورد قبول قرار داد ولی بنظر می‌رسدکه به دومی اهمیت بیشتری می‌داد. همچنین ، نتایج فرضیه‌های مشابهتی (***) را درحالات مجاورآن امتحان‌کرد وتحقیق آنها را به‌عنوان براهین مساعد ، مورد ملاحظه قرارداد .

درواقع دلایل اولر از نوع استقرائی هستند. امتحان نتایج یك فرضیه و قضاوت روی مبنای این امتحان‌را فرضیهٔ

دنباله در صفحهٔ ۶۸

* چندسال بعد قریب ده‌سال پس از اولین کشف خود ، اولر به مطالعهٔ آن پرداخت ، به ایرادها پاسخ داد و برخی از نکات روش اولیهٔ خود را تکمیل کرد و اثبات جدید کاملا متفاوتی را ارائه داد .

** نمایش $\sin X$ بوسیلهٔ حاصل‌ضرب نامحدود .

*** خصوصاً نمایش $1 - \sin X$ برحسب حاصل‌ضرب نامحدود .

مکانیك کوانتم چیست؟

نوشتهٔ ، و. ای. ری‌دنیك

ترجمهٔ ، علیرضا لوکلی صابری

وی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

دنباله ازشمارهٔ قبل

تامدتی ازاین‌که کلیهٔ کشفیات جدیدی که انجام می‌پذیرفت، با قالبهای ارائه‌شدهٔ توسط فیزیك‌سازگار می‌نمودند، دانشمندان خرسند بودند.

اما درهمان‌حال که کاخ فیزیك کلاسیك ساخته و برعظمتش افزوده‌می‌شد، شکافها و ترکهای هولناکی درآن پدیدار می‌شدند و اسکلت ساختمان را خطر سقوط و ویرانی تهدید می‌نمود. تا بالاخره باسواجه‌شدن باحقایق جدیدی این اسکلت فروریخت.

یکی از این‌حقایق مهم واساسی ثبات قابل‌توجه سرعت نور بود. دقیقترین آزمایشها نشان دادندکه ماهیت نور باآنچه که‌ما درزمینه‌های مختلف‌مشاهده‌کرده بودیم، اختلافات‌اساسی دارد.

برای‌وفق‌دادن ماهیت‌نور درچهارچوب فیزیك کلاسیك، دانشمندان‌ناگزیر به‌اندیشیدن واسطه‌ای به‌نام «اتر(= اثیر)» شدند، که بنابه‌قوانین فیزیك کلاسیك، می‌بایست‌خواص‌شگفت‌آوری رادربرداشته‌باشد. مابعداً دربارهٔ این‌اترفرضی به‌تفصیل بحث می‌کنیم. لیکن این‌مادهٔ فرضی هم نمی‌توانست گرههای فیزیك رابگشاید.

مانع دیگری درراه فیزیك کلاسیك، تشعشع حرارتی از اجسام گرمازا بود. وبالاخره کشف رادیواکتیویته.

کشف رادیواکتیویته مهمترین عامل خردکنندهٔ فیزیك کلاسیك درمدت سالهای اخیری‌بودکه فیزیك کلاسیك ازقوانین ثابت و پایداری تشکیل شده بود، زیرافرآیندهای مرموز رادیواکتیویته‌نه‌فقط هستهٔ‌اتم را شکست، بلکه اکثرقوانین‌پایه ومهم فیزیك‌را لغوکرده وبه‌دور ریخت ـ قوانین و اصولی را که‌ازدیدگاه ادراك‌عموم به‌غایت واضح وآشکاربودند. در بین شکافهاوترکهایی که کاخ فیزیك کلاسیك راتهدید به‌سقوط کردند دونظریه یکی نسبیت ودیگری کوانتم جلوهٔ بیشتری‌داشتند.

«نام‌گذاری نظریهٔ جدید»

مکانیك کوانتم دراواخر قرن‌نوزدهم واوائل قرن بیستم پابه‌عرصهٔ وجود گذاشت. ولی چرابدین نام؟ در واقع، این اصطلاحی بیش‌نبود ومفهوم‌آنچه راکه‌فیزیك جدیدبدان‌آویخته بود به‌دشواری بیان می‌کرد.

محتملااین‌تنها شاخه‌ای‌ازفیزیك‌نبودکه ازگیراصطلاحات علمی گویافرارکرده ومبهم‌وگنگ بنظرمی‌رسید. دلایل‌متعددی برای این‌نامگذاری وجود داردکه اغلب آنها ریشه‌ای‌تاریخی دارند.

اولا، چرا مکانیك؟ درنظریهٔ جدید چیزی‌مکانیکی وجود نداشت وچنانکه بعداً نیز خواهیم‌دید، نمی‌توانست وجود داشته باشد. کلمهٔ «مکانیك» فقط برای درك‌کلی این نظریه‌بکار می‌رفت، مانند این‌است‌که ماازمکانیك‌یك ساعت» گفتگونمائیم که غرض اصول تعمیرات آن‌است. تفهیم مکانیك‌کوانتم را بهتراست‌که خودفیزیك‌باتشریحات دقیق‌وظریف‌منحصربه‌خود، بعهده بگیرد.

ثانیاً، چراکوانتم(۱)؟ کوانتم‌درلاتین به‌معنای«بخش‌منفرد وجدا ویامقدار» است. بعلاوه درآینده خواهیم‌دیدکه‌علم‌جدید درمطالعهٔ خواص دنیای اطراف خود واقعاً به «تجرید»بستگی کامل‌دارد. واین یکی ازپایه‌های اساسی علم جدید است. از طرف دیگرهمانطورکه خواهیم دید، این‌تجرید عمومی‌نبوده و همیشه ودرهمه‌جا صادق‌نیست.

۱ـ کوانتوم که جمعش کوانتا است درلغت به‌معنی «مقدار» ویا «بخش منفردوجدا» است وواحدی است که درنظریهٔ کوانتوم برای انرژی (کارمایه) به‌کار می‌رود. درنظریهٔ کوانتوم صدور یا جذب انرژی ازطرف اتمها یا مولکولها به‌صورت منقطع روی‌می‌دهد ودرهر مرحله مقدارمعینی «کوانتوم» انرژی جذب ویاصادر می‌شود».

بعلاوه، این یك روی سکه است. بااین حال سیمای ویژه‌ای که درخواص ماده مشاهده گردیده است دوگانگی این خواص است. دوگانگی ماهیت ماده ازاین حقیقت ناشی شده است که جوهر «شیء» دارای خواص ذره‌ای وموجی است.

درته‌غربال علم جدید مکانیك موجی باقی‌مانده‌بود. و در اینجا دانسته‌های ما ناقص بود ـ وازکوانتا نامی برده نشده‌بود.

ماچنین نتیجه گرفتیم که هیچ‌یك از اساسی نظریهٔ فیزیکی جدید گویا و قاطع نیستند. اماآیا نام دیگری می‌توان تصور نمودکه محتویات واقعی این نظریه‌رابتوان ازآن برداشت نمود؟ درعلم، آشناسازی اصطلاحات جدید کار پرزحمت و دشواری است. این اصطلاحات به‌مرورداخل شده و خیلی زود تغییر می‌یابند. فیزیکدانهامفاهیم جدید این اصطلاحات رادرك می‌کنند بنابراین برعهدهٔ ماست که آنها را بیاموزیم.

«فیزیکدانها مدل می‌سازند»

توپی راتصور نمائیدکه در روی طنابی که شما به‌دورسر خود می‌چرخانید حرکت کند. این تصوری آشکار است زیراشما هرعملی رامی‌توانید باچشمهایتان ببینید . واین مشاهدهٔ بصری فیزیك کلاسیك ـ که خارج از بینش ما از اشیاء ونمودهایی است که اطراف مارا احاطه کرده بود ، موضوع دیگری را مورد مطالعه قرار نمی‌داد، باعث پیشرفت وتکامل علم فیزیك شد.

توپی راروی میزی صاف و صیقلی بغلتانید. غلتش توپ بعدازاینکه درست ازحرکت ایستاد، به‌عبارت بهتر، وقتی نیرویی که ازدست به‌توپ واردشده ازبین رفت، باز ادامه دارد. این ابتدایی‌ترین بینشی بودکه «قانون اینرسی» یا «اصل بقاء مقدار حرکت» ازآن برخاست ونیوتن آن را قانون اول مکانیك نامید.

یك توپ، تاوقتی که بادست ویا توپی دیگر ضربه‌ای به آن نزنیم بحرکت نمی‌افتد. توپی که در روی میزصافی حرکت می‌کند و توپی که روی میزساکن است مشترکاً یك چیز را بیان می‌کنند: آنها تحت تأثیرهیچ نیرویی قرار نگرفته‌اند.

درروی طناب، توپ درتمام مدت تحت اثر نیرویی قرار گرفته که مسیرتوپ راتغییر داده وآن را ازمسیر مستقیمی که درحرکت آزاد برروی میزمی‌توانست داشته باشد، بازمی‌دارد. همان توپ درحال سکون برروی میز، با نیروی دست شروع بحرکت کرده ودارای سرعت می‌شود (هرچه نیرو بیشتر باشد، سرعت بیشتراست). این بینش منجر به‌قانون دوم نیوتن شد.

پژوهشگر ما ـ نیوتن ـ این بار نظرش را بـه آسمان می‌افکندوسراغ «نظام کرات آسمانی» راکه فیلسوفهای باستانی دربارهٔ آنها به منبر رفته‌اند، می‌گیرد. چه باعث می‌شود که سیارات طبق فرمولهای خاصی به دور خورشید بگردند؟

لغت «نظام» جلوه گردستگاه منظمی می‌باشدکه ازقوانینی حاکم برحرکت اجرام نتیجه شده است. این نظام مشمول یکی ازکرات به‌تنهایی نیست. ولی باید قانونی وجود داشته باشد که برحرکت سیارات وزمین ما به‌دور خورشیه وحرکت اقمار به‌دورسیارات، حاکم باشد.

دوباره حرکت توپ‌را روی طناب چرخنده بیادمی‌آوریم. این حرکت توپ خیلی شبیه به‌حرکت سیارات به‌دور خورشید است، گرچه حرکت توپ به‌غایت کندتر بوده و نیز در مورد سیارات طناب وجود خارجی ندارد. خلاصه، اگر نیرویی در حالتی مؤثرافتد، برای توجیه مقیاسهای بزرگتری نیزاین نیرو مؤثر می‌باشد.

البته راهی برای رسیدن مستقیم به‌نیرویی که بر حرکت سیارات حکمفرماست وجود ندارد. لیکن این نیرو درآنجانهفته است. ونیوتن آن راکشف کرد. مامی‌دانیم که این نیرو، نیروی جاذبه‌ای است که اجسام به‌یکدیگر وارد می‌آورند. نیوتن با نبوغ خود ازروی رازی که درحرکت توپ به‌دورطناب وحرکت مداری یك سیاره نهفته‌بود، پرده‌برداشت.

اما، نکتهٔ مهم درنظرما این است که طناب وتوپ یکی از مدلهای اولیهٔ فیزیك بودند. مطالعهٔ نمودهای عظیم طبیعت مانند حرکت سیارات ومقایسهٔ آنـها بانمودهایی که بـه‌مقیاس خیلی کوچکتری هستند، این فرض رابدست می‌دهدکه این نمودهاهمگی ازقوانین مشابهی پیروی می‌کنند.

چون این قوانین درهمه‌وقت وهمه‌جا صادق بودندسؤالی مطرح شد: آیاصحیح است که قوانین مربوط به‌یك نمود رابسط و تعمیم داده و برای نمودی کوچکتر و یابزرگتر آن را توجیه نماییم؟

درزمان نیوتن جواب این سؤال آسان بود: چون مشاهدات بصری و بینشها بسط بعضی از نمودهای مقیاس بزرگ راکه توسط نمودهایی بامقیاس کوچکتر ویابالعکس، محاسبه‌شده‌بودند تأییدمی‌نمود، همه‌چیز به‌حقیقت می‌پیوست (این قوانین سازگار ازآب درمی‌آمدند).

تقریباً همان جواب را امروزه می‌توانیم بشنویم. منتها باکمی اختلاف درطرز بیان. اولانیوتن معتقدبودکه جهان دارای وحدت است وثانیاً قوانین حاکم برزندگی بشروجهان پهناور سیارات وستارگان یکی هستند.

از چشم‌انداز علم جدید، ما با فرض اول کاملاموافقیم. وبرای فرض دوم، نمی‌توان نتیجه گرفت که قوانین حاکم بر درون یك نمود ازنمودی بیرونی متشابه پیروی می‌کنند.

یك طوطی حرفهای انسان راتقلید می‌کند، ولی احمقانـه است که تصورکنیم حیوان درهنگام ادای کلمات فکرمی‌کند.

پیچیدگی این تصور در این حقیقت گنجانیده شده است که قوانین کاملا متفاوتی در سلسله مراتب دنیای اشیاء، دنیای بینهایت کوچکها، دنیای معمولی و بینهایت بزرگها مؤثرند و محدودیتهای بسیار بزرگی برای بسط قوانین دنیای معمولی به مقیاسهای دیگر وجود دارد.

فیزیکدانها وقتی که با ماهیت سرکش دنیای بینهایت کوچکها روبرو شدند و از تجزیه و تحلیل آن عاجز ماندند، کارها و زحماتشان نقش بر آب شده و از آگاهی مبهم فراتر نرفت. یك بار متقاعد شدند که ذرات ذره‌بینی از اینکه خود را با قالب تصورات معمولی تطابق دهند سرپیچی می‌کنند و صحبت هرج و مرج و اغتشاشی را به پیش کشیدند که حاکی از طبیعتی بدون قانون بود. لیکن طبیعت تصادفی و بدون قانون همچنانکه بعداً خواهیم دید، واقعیت نداشت.

ساختن مدل و نمایش آنها به میان آمد و به عنوان اصل مهمی در توسعه و تکمیل علوم طبیعی بشمار رفت. بعضی از کشفیات مهم در پرتو مدلهایی که ساختهٔ دست بشر بود، یا اغلب مدلهایی که در مغز بشر تصویر می‌شدند، زیرا وجود خارجی نداشتند، به حصول می‌پیوست.

توپی که در روی طناب می‌لغزید نمایانگر مدلی ساده بود. و با گذشت زمان، طرح مدلهای کاملتری ریخته می‌شد. مدلهایی که هرروزه غریبتر و ناآشناتر می‌شدند. اما بیگانگی این مدلها بطور کلی سهیم بودن در یك خصیصه بود. آنها از عناصری که در اطراف دنیای معمولی ما وجود داشت، دنیایی که در آن زندگی کرده، حس می‌کنیم و می‌بینیم، متشکل شده بودند.

این خوی طبیعی فکر بشر است. تجریدهای ناشناس و خیالی و نتایج کلی اغلب از عینیات سرچشمه گرفته‌اند.

«هرچیزی نمی‌تواند مدل قرار گیرد»

از اواخر قرن حاضر به بعد، مدل آشنایی مانند اتر که برای پژوهش دنیاهای جدید در طبیعت از آن استفاده می‌شد همیشه با موفقیت روبرو نبوده است. خالق اتر آن را منجی فیزیك کلاسیك می‌دانست، ولی این اتر قادر نبود که ثبات قابل توجه سرعت نور را توضیح دهد.

حال ببینیم تصویر این اتر چیست. چیزی کاملا سخت و جامد و به همان اندازه شفاف روشن. آیا می‌توان آن را گیلاسی نشکن تصور نمود؟ و تازه، علی‌رغم سختی و سفتی، تمام اجسام گوناگون و پرشمار آزادانه می‌توانند در آن حرکت کنند. به عبارت گویاتر، این اجسام قادرند که اتر را به همراه خود برده و چیزی شبیه به او بسازند؛ بادی از اتر حقیقی.

مدت زمان درازی فیزیکدانها تلاش می‌کردند که این خواص عجیب را به اتر نسبت دهند، ولی موفق نمی‌شدند. اتر ترکیبی فرضی بود که هیچ واقعیتی در آن مفهوم نمی‌شد.

تصور اتر تنها ماهیت بدون ریشه و اصل نبود. حتی مدل جداگانه‌ای در فیزیك کلاسیك برای اتم نمی‌توانست انرژی سرموزی را که از اورانیم، رادیم و سایر عناصر شیمیائی آزاد می‌شدند، پیشگویی کند ـ تابشی از انرژی را که بدون وجود منبع خارجی برای هزاران و میلیونها سال بدون قطع شدن، دوام داشت.

فرضیهٔ فوتون **اینشتین** ضربهٔ دیگری بود که به مدلهای قدیمی وارد آمد. گرچه کمی پیچیده و بغرنج، لیکن هنوز امکان داشت که نور را به عنوان امواج الکترومنیتیکی که در تمام جهات از منابع خود منتشر شده‌اند تصور نموده، و در قالب مدلهای کلاسیك بریزیم.

تصور ما در بارهٔ موج همیشه حرکت ماده‌ای متوسط بوده است: مانند آب برای امواج اقیانوسها و هوا برای امواج صوتی. ولی امواج الکترومنیتیك دارای این استعدادند که در کلیهٔ فضاهای تهی منتشر می‌شوند.

بدین طریق آسان است که تصویر نور را بکشیم، همانطور که نیوتن این کار را کرد و آن را منبعی از ذرات نورانی بسیار ریز دانست. این ذرات توسط اجسامی درخشان منتشر شده و وقتی که به چشم می‌خورند عصب بینائی را تحریك نموده و احساس روشنایی را در ما بوجود می‌آورند. حال دیگر تصور چگونگی حرکت این ذرات در فضای تهی مشکل نیست.

تصور نور با خواص موجی و ذره‌ای باهم از عهدهٔ ما خارج است لیکن اینشتین از عهدهٔ این مهم برآمد.

درمدل اتمی که **بوهر** و **رادرفورد** پیشنهاد کردند الگویی قابل درك در اختیار ما گذاشته شد. ذرات بسیار ریز ـ الکترونها ـ در مدارهای معینی به دور هسته‌ای بسیار خرد می‌گردند. ابعاد این مدارات دهها هزار مرتبه بزرگتر از ابعاد الکترونها و هسته است.

با کمی اندیشه ژرفتر می‌توان اتم را ساختمانی «تهی» درنظر گرفت، زیرا ما درنظام سیاراتی خود جایی که ابعاد «الکترونها (یا سیارات) هزاران بار کوچکتر از مدارات به دور «هسته» (یا خورشید) است، زندگی می‌کنیم.

به هرحال، چندسال بعد **بر کلی** تصویری از الکترونها، هسته و تمام موادی که «استخوان‌بندی ساختمان» دنیای ما را می‌ساختند، یعنی همان خواص دوگانه‌ای را که توسط اینشتین برای فوتونها بیان شده بود، در هم آمیخته و بیان کرد که ذرات هم دارای خواص ذره‌ای و هم موجی می‌باشند. در نتیجه، ذرات مواد شامل اتمهایی که پیشتر برای نور گفته شد، نمی‌توانستند تصور کردنی باشند.

دنباله دارد

تاریخچهٔ عدد « π »

ترجمهٔ : فتح‌الله‌زرگری

تاریخچهٔ عدد π تاریخچهٔ محاسبهٔ محیط ومساحت‌دایره است .

مصریان قدیم برای محاسبهٔ محیط ومساحت دایره‌مقدار π رابرابر ۳ می‌گرفتند واین درموردی بودکه دقت زیادلازم نبود. اما باپیشرفت علم‌که این تقریب برای π کافی نبود ، مصریان برای محاسبهٔ مساحت دایره از فرمول زیر استفاده می‌کردندکه درآن D قطردایرهٔ مورد نظر است .

$$S=\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2$$

از این فرمول مقدار π چنین می‌شود :

$$\pi=\frac{256}{81}\#3/1605$$

این موضوع ازپاپیروس مربوط به نوزده قرن قبل ازمیلادکه درمسکو نگاهداری می‌شود نتیجه می‌شود .

دقیقترین مقدار πرا درسه قرن‌قبل‌ازمیلاد **ارشمیدس** بدست‌آورده بود .

طبق محاسبهٔ او $\pi=\frac{22}{7}$ (عدد ارشمیدس) بدست‌آمده بود . طبق محاسبهٔ **اقلیدس** نزدیکترین مقدار π در حدود

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

قرار دارد .

نزدیکترین وبه اندازهٔ کافی دقیقترین مقدارعدد πرا دو ریاضیدان یونانی به‌نامهای **آپالونیوس** (سه‌قرن‌قبل ازمیلاد) و **بطلمیوس** (دوقرن قبل ازمیلا[illegible] بکار بردند .

ریاضیدان دوم برای π مق[illegible]

$$\pi=\frac{1[illegible]}{1}$$

را بدست آورد .

بزرگترین پیروزی درمحاسبهٔ دقیق [illegible]πرا دانشمندان اسلامی بدست‌آوردند . محرك این موضوع تنظیم جدولهای نجومی‌ومثلثاتی‌بود. به‌این‌ترتیب‌که درقرن نهم«**خوارزمی**» سه مقدار زیر را برای π درنظر گرفت :

$$\pi=\sqrt{10} \quad و \quad \pi=3\frac{1}{7} \quad و \quad \pi=\frac{62832}{20000}$$

چندقرن بعداز «خوارزمی» ، «**کاشانی**» دررسالهٔ‌خود در بارهٔ دایره برای عدد π مقداری بـا شانـزده رقم اعشار بدست‌آورد .

درقرن هفتم ریاضیدان هندی «**براهماگوپتا**» برای π مقدار $\pi\#\sqrt{10}$ رادرنظر گرفت.درقرن‌سیزدهم **فیبوناچی** اهل پیزان روش اقلیدس را ساده‌کرد و برای π حدود زیر را بدست‌آورد :

$$1400:458\frac{1}{5}<\pi<1440:458\frac{4}{5}$$

درقرن شانـزدهم **ویت** عـدد π را با ده رقم اعشاربـه‌کمك کثیرالاضلاع ۲۵۱۶۵۸۲۴۰ ضلعی بدست‌آورد. طبق محاسبهٔ او مقدار π بدست‌آمده درحدود مقدارزیر است :

$$3/141592653<\pi<3/141592654$$

درهمین قرن **رومین** هلندی مقدار π رابا پانزده رقم اعشار از کثیرالاضلاع ۲۵۱۶۵۸۲۴۰ ضلعی بـدست آورد . سپس **رودلف** ازکلن مقدار π را با ۲۰ رقم اعشار وحتی تا۳۵رقم هم بدست‌آورد. مقداری‌که او برای π پیداکرد چنین است

$$\pi\#3/14159265358979323846264338327950288$$

بنابه وصیت«رودلف» این عدد به عنوان یاد بود روی سنگ قبراوکنده شده است و به نام «عدد رودلف» گفته می‌شود .

ریاضیدانان‌قرون‌هجدهم‌ونوزدهم‌مقدار π را باتقریبهای بسیار خوب واعشار بسیار زیاد بدست‌آوردند .

در پایان باید توجه داشته باشیم که ریاضیدان آلمانی **لامبرت** (۱۷۷۷-۱۷۲۸) در۱۷۶۱ برای اولین بارثابت‌کرد که π عددی است اصم. بعدها ریاضیدان فرانسوی **لوژاندر** (۱۸۳۳ - ۱۷۵۲) نشان دادکه مربع π نیزعددی است اصم وبالاخره ریاضیدان‌آلمانی **لیندمان** ثابت‌کردکهπ عددی است غیر جبری یعنی نمی‌تواند ریشهٔ معادله‌ای جبری با ضرایب گویا باشد .

روشهای مختلف گنگ بودن $\sqrt{2}$

ترجمهٔ : محمدرکنی قاجار

عددی را **گویا** می‌نامیم هرگاه برابر باشد باکسری که صورت و مخرج آن عددهای صحیح باشند . مثل $\frac{5}{1}=5$ و $\frac{2}{3}$ و غیره . عددی را که گویا نباشد **گنگ** می‌نامیم. نخستین عدد گنگی که شناخته شده $\sqrt{2}$ است و از زمان **فیثاغورس** تاکنون از راههای مختلف ، گنگ بودن آن ثابت شده‌است. بعضی از این روشها چنین است:

۱ـ اگرفرض‌کنیم‌که $\sqrt{2}$ گویاباشد پس آنرامی‌توانیم به شکل‌کسر $\frac{a}{b}$ نمایش دهیم ، یعنی $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ ویا $a^2=2b^2$ که a و b مثبت ونسبت به هم اولند. حال می‌دانیم‌که رقم آخرهرمجذور یکی ازاعداد ۰ و ۱ و ۴ و ۵ و ۶ و ۹خواهد بود و اگر اعداد مجذور را دوبرابرکنیم به ۰ و ۲ و ۸ختم می‌شوند. یعنی a^2 به‌یکی‌ازاعداد ۰ و ۱ و ۴ و ۵ و ۶ و ۹ ختم شده است درصورتی‌که $2b^2$ به اعداد ۰ و ۲ و ۸ ختم می‌شود یعنی رابطهٔ $a^2=2b^2$ برقرار نمی‌شود، مگراینکه a^2 به صفر ختم شود و $2b^2$ هم رقم آخرش صفرباشد. یعنی‌رقم آخر b^2 باید ۵ یا ۰ باشد در این‌صورت ۵ مقسوم‌علیه‌مشترك a و b خواهد بود و این خلاف فرض است زیرا بنا به‌فرض صورت و مخرج کسر با یکدیگر متباین بودند. پس $\sqrt{2}$ را نمی‌توان به‌صورت $\frac{a}{b}$ نمایش داد، یعنی گنگ است .

۲ـ بازفرض می‌کنیم $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ باشد . (a و b مثبت ونسبت به‌هم اولند) پس $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ و یا $a^2=2b^2$ و یا $b^2=\frac{a^2}{2}$ که می‌توان‌نوشت :

$$b^2=a\times\frac{a}{2} \qquad (1)$$

$b>1$ است زیرا اگر $b=1$ باشد در این صورت $a=\sqrt{2}$ صحیح نیست . پس:

۱ـ هرعدد بزرگتر از واحد یا عدد اول است و یا از حاصل‌ضرب اعداد اول تشکیل شده‌است.

۲ـ اگرعدداول p حاصل‌ضرب sr راعادکنداجبارآمساوی یکی از دوعامل r یاs خواهد بود.

اکنون اگر p عددی باشدکه b را عاد کند پس طرف دوم تساوی (۱) یعنی a را نیز عاد خواهد کرد و $\frac{a}{2}$ راهم‌عاد می‌کند. پس p مقسوم علیه مشترك صورت‌ومخرج است واین مخالف فرض‌است. دراین‌صورت $\sqrt{2}$ اصم خواهدبود .

۳ـ فرض می‌کنیم $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ و یا $a^2=2b^2$ باشد که a و b مثبت و نسبت به‌هم متباین‌اند پس می‌توان نوشت $b^2=a^2-b^2$ و یا : $b^2=(a+b)(a-b)$ و $b>1$

اولا ـ هرعدد بزرگتر ازیك یا عدد اول است و یا از حاصل‌ضرب اعداد اول تشکیل‌شده است.

ثانیاً ـ اگر عددی مانند p حاصل ضرب rs را عاد کند با یکی از آن دوعامل مساوی است.

ثالثاً ـ اگرp عددr و $s+r$ یا $s-r$ را عادکند پس s را هم عاد می‌کند .

حال مانند طریقهٔ دوم اگر p عدد b را عاد کند پس $a+b$ یا $a-b$ را نیز عاد می‌کند و در نتیجه a را نیزعاد خواهدکرد یعنی p مقسوم‌علیه مشترك صورت و مخرج کسر $\frac{a}{b}$ است و این مخالف‌فرض‌است.

۴ـ بازفرض می‌کنیم $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ و $a^2=2b^2$ (a و b نسبت به‌هم متباین اند)

ازتساوی $a^2=2b^2$ نتیجه‌می‌شودکه a^2 زوج‌است‌یعنی a

نیز زوج است. پس می‌توان نوشت $a = 2c$ حال اگر a را در تساوی قراردهیم می‌شود : $4c^2 = 2b^2 \Longrightarrow 2c^2 = b^2$

حال لازم می‌آید که b^2 نیز زوج باشد یعنی b زوج باشد اما به‌فرض a و b مقسوم‌علیه مشترکی نداشتند اماحالا دیدیم‌که هردو زوجند و این مخالف فرض است.

۵ـ به فرض $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و $a^2 = 2b^2$ مانند طرق قبل $b > 1$ و $\sqrt{2} > 1$ نتیجه می‌شودکه $a > 1$

هرعدد بزرگتر از یك را می‌توان به‌شکل حاصل ضرب چند عدد اول نوشت. بنابراین :

$$a = p_1^{r_1} \times p_2^{r_2} \times \dots \times p_n^{r_n}$$

$$b = q_1^{s_1} \times q_2^{s_2} \times \dots \times q_n^{s_n}$$

حال مقادیرa و b رادررابطهٔ $a^2 = 2b^2$ قرارمی‌دهیم:

$$p_1^{2r_1} \times p_2^{2r_2} \times \dots \times p_n^{2r_n} =$$

$$= 2^1 \times q_1^{2s_1} \times q_2^{2s_2} \times \dots \times q_n^{2s_n}$$

چنانکه دیده می‌شود در سمت چپ تمام نماینده‌های اعداد اول زوج می‌باشند در صورتی‌که درطرف راست یکی‌از اعداد اول یعنی ۲ نماینده‌اش فرد است یعنی طرف چپ فرد و طرف‌راست زوج می‌باشد و چنین چیزی ممکن نیست پس $\sqrt{2}$ اصم است.

۶ـ کسرمسلسل ـ فرض می‌کنیم $a = \sqrt{2}$ یا $a^2 = 2$ باشد پس $a^2 - 1 = 1$ یا $(a+1)(a-1) = 1$ و یا $a - 1 = \frac{1}{a+1}$ و $a = 1 + \frac{1}{a+1}$ دراین رابطه باز بجای a طرف ثانی را قرار می‌دهیم :

$$a = 1 + \frac{1}{1+a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+a}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}$$

می‌بینیم‌که به‌یك‌کسرمسلسل برخورد کردیم که تمام صورتها ۱ و تمام مخرجها ارقام مثبت می‌باشندکه اصم‌اند یعنی نمی‌توان آنرا رابه‌شکل یك‌کسر نمایش داد.

۷ـ طریقهٔ فرما : نزول لایتناهی ـ به فرض $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ که a و b دو عددمثبت‌اند. می‌توان نوشت:

$$\sqrt{2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

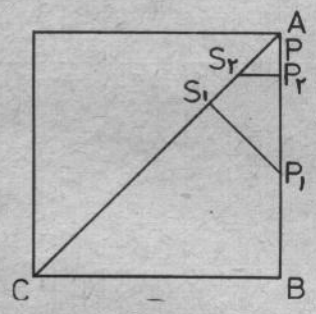
$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{b}{a-b}$$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} - 1 = \frac{2b-a}{a-b} = \frac{a_1}{b_1}$$

که $a_1 = 2b - a$ و $b_1 = a - b$. چون $1 < \sqrt{2} < 2$ پس $b < a < 2b$ و $0 < 2b - a = a_1 < a$

به‌همین طریق می‌توان عمل را ادامه داد و اعداد a و a_1 و a_2 ... را بدست‌آوردکه : $a > a_1 > a_2 > \dots$. تمام این‌اعدادمثبت‌اندولی همیشه‌یك‌عده‌اعداد معینی‌ازعددمفروضی کوچکترند. اما دربالا می‌شود عمل را بینهایت بار ادامه داد پس غیرممکن است‌که یك عده محدود از اعداد به تعداد بینهایت باشند.

۸ـ طریقهٔ هندسی ـ می‌دانیم در مربعی به‌ضلع واحد قطر مساوی $\sqrt{2}$ است.



فرض‌می‌کنیم‌که AB و AC باواحدی قابل سنجش باشند یعنی $\frac{AC}{AB}$ دارای مقدار مشخصی باشد دراین صورت قطعه خطی مانند AP می‌توان یافت‌که درAC وAB به دفعات صحیح بگنجد یعنی صورت و مخرج کسر $\frac{AC}{AB}$ هر کدام مضربی از AP باشند.

دنباله در صفحهٔ ۹۴

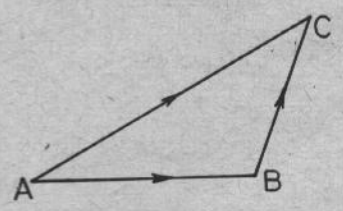
هوشنگ شریف‌زاده

درسی از فیزیك و مکانیك

شتاب

تغییر بردار سرعت

چون بردار سرعت هم دارای بزرگی است وهم‌دارای جهت ، هرکدام‌ازاینها را تغییر دهیم ، بردار سرعت تغییر خواهد کرد.



شکل ۱

پس ، فرض می‌کنیم AB (شکل ۱) بردار سرعت یك نقطهٔ مادی را دریك لحظهٔ معین نشان دهد ، و AC بردار سرعت آن نقطه درلحظهٔ بعد باشد. دراین‌صورت برطبق مثلث‌بردارهای سرعت ، می‌دانیم‌که BC ، هم‌ازحیث جهت وهم‌ازحیث بزرگی ، تغییر بردارسرعت را درفاصلهٔ زمانی موردنظرنشان می‌دهد .

اگر $AC = AB$ باشد ، دراین صورت بزرگی‌سرعت ثابت باقی می‌ماند ، اما دربردار سرعت تغییری حاصل‌می‌شود که با BC نشان داده می‌شود . درحرکت مستقیم‌الخط فقط باید به‌تغییرات بزرگی سرعت توجه‌کرد ، اما وقتی‌که مسیر به صورت منحنی است باید توجه‌کردکه جهت بردار سرعت دائماً تغییر می‌کند ، هرچند ممکن است بزرگی سرعت ثابت باقی بماند. این حالت دربخش بعدی مورد توجه قرارخواهد گرفت .

شتاب

این اصطلاح برای نشان دادن میزان تغییر سرعت‌بکار می‌رود. شتاب یك‌کمیت‌برداری است ، وممکن است‌یکنواخت یا متغیر باشد. اگریك نقطهٔ مادی چنان حرکت‌کندکه در زمانهای مساوی ، وفوق‌العاده‌کوچك، **تغییرات بردارسرعت همجهت و بزرگی آنها مساوی یکدیگر باشند ، شتاب را یکنواخت می‌گویند . تغییر بردار سرعت درهرواحد زمان بزرگی شتاب را نشان می‌دهد.**

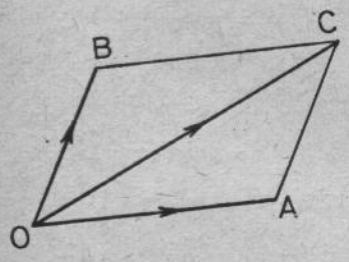
اگرشتاب یکنواخت باشد ، نقطهٔ مادی باید مسیری مستقیم یا سهمی طی‌کند .

وقتی که در زمانهای مساوی تغییرات بردار سرعت از نظر بزرگی برابر نباشند ، یا جهت‌آنها یکسان نباشد، شتاب را متغیر گوییم. وقتی‌که شتاب متغیر باشد ، شتاب درهرلحظه عبارت از تغییر بردار سرعتی خواهد بود که اگر شتاب از حیث بزرگی و جهت در واحد زمان بعدی ثابت می‌ماند، در آن فاصلهٔ زمانی‌روی می‌داد. مسیرنقطهٔ مادی ممکن است‌یك خط مستقیم باشد ، اما بطورکلی هرنوع منحنی‌می‌تواندباشد.

بزرگی واحدشتاب ، شتاب نقطه‌ای مادی است‌که‌چنان حرکت‌کندکه بردار سرعتش در هرواحد زمان به اندازهٔ واحد بردار سرعت تغییرکند ، مثلا $1 m/s$ در هرثانیه‌که‌غالباً به‌صورت $1 m/s^2$ نوشته می‌شود . یا $1 cm/s$ در هرثانیه‌که صورت $1 cm/s^2$ نوشته می‌شود.

متوازی‌الاضلاع شتابها

اگر یك نقطهٔ مادی دارای دو شتاب باشدکه از نظر بزرگی و جهت با خطوط مستقیم OA و OB نمایش داده می‌شوند ، دارای شتاب برآیندی خواهد بودکه‌باOC قطر متوازی‌الاضلاع



شکل ۲

OACB نمایش داده می‌شود .

این قضیه را می‌توان از قانون جمع بردارها یا از متوازی الاضلاع بردارهای سرعت نتیجه گرفت. بنابراین شتابها رامی‌توان ، مانند بردارهای سرعت ، ترکیب یاتجزیه کرد ، وقضایایی از قبیل مثلث و چند ضلعی بردارهای سرعت برای شتابها نیز صادق است .

شتاب نسبی

اگر $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ (شکل ۳) شتابهای دو نقطهٔ مادی P و Q دریك لحظهٔ معین باشند ، شتاب نسبی یکی از آنها نسبت به دیگری،تفاضل برداری بین $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است .

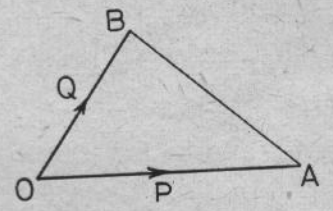
شتاب P نسبت به Q

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

است ، وشتاب Q نسبت به P برابراست با:

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

بنابراین شتاب‌نسبی را نیز می‌توان‌به‌همان طریقی‌که بردار سرعت نسبی را پیدا می‌کنندبا رسم مثلث OAB تعیین کرد.



شکل ۳

اگر دونقطهٔ مادی دارای شتابهایی باشندکه ازحیث بزرگی باهم برابر باشند و جهت آنها یکسان باشد ، شتاب نسبی‌آنها برابر صفراست و حرکت نسبی آنها طوری است‌که مثل اینکه یکی از آنها شتابی ندارد.

این موضوع مارا قادر می‌سازدکه مسئلهٔ‌حرکت‌اجسامی راکه دارای شتاب مشترکی می‌باشند با حذف‌آن شتاب ساده‌تر کنیم .

بایستی توجه داشت‌که یك نقطهٔ مادی درسکون‌لحظه‌ای ممکن است دارای‌شتاب باشد، ونیزدونقطهٔ مادی‌که بردارهای سرعت آنها در هرلحظه باهم برابر و متوازی است (یعنی بردار سرعت نسبی ندارند) ممکن است شتاب نسبی نسبت به یکدیگر داشته باشند .

حرکت مستقیم‌الخط

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم‌که نقطهٔ مادی‌باشتاب یکنواخت دریك مسیرمستقیم حرکت می‌کند. اگربردارسرعت افزایش یابد می‌گویندکه شتاب مثبت است ؛ اگربردارسرعت کاهش یابد ، می‌گویندکه شتاب منفی‌است

معادلات حرکت باشتاب یکنواخت

اگر یك نقطهٔ مادی‌که درامتداد یك خط مستقیم‌حرکت می‌کند ، درابتدا ، یعنی درلحظهٔ $t = 0$ ، دارای بردارسرعت v_0 باشد ، بردار سرعت‌آن ، v ، درلحظهٔ معین بعدی t به‌این طریق بدست می‌آید :

افزایش بردارسرعت درمدت‌زمان t $v = v_0 + t$

اگر شتاب یکنواخت و مساوی γ باشد ، افزایش بردار سرعت درمدت زمان t برابراست با γt و بنابراین

$$v = v_0 + \gamma t \qquad (1)$$

بعلاوه اگر x مسافتی باشد که نقطهٔ مادی درمدت tاز نقطهٔ شروع حرکت طی‌کرده است ، دراین صورت وقتی که $t = 0$ است $x = 0$ خواهد بود وخواهیم داشت :

$x =$ بردار متوسط سرعت $\times t$

حال اگرشتاب یکنواخت باشد ، بردار سرعت‌به‌میزان ثابتی افزایش می‌یابد و بنابراین بردار متوسط سرعت در هر فاصلهٔ زمانی بین ۰ و t برابر بردار سرعت در لحظهٔ $\frac{1}{2}t$ خواهد بود ، یعنی برابر معدل بردارهای سرعت متحرك در شروع و پایان فاصلهٔ زمانی مورد نظر می‌باشد.

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}(v_0 + v)\, t = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + \gamma t)t$$

$$\therefore \quad x = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (2)$$

می‌توان t را به‌طریق زیر ازمعادلات (۱) و (۲)حذف کرد :

$$v^2 = v_0^2 + 2v_0\gamma t + \gamma^2 t^2 = v_0^2 + 2\gamma(v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2)$$

$$= v_0^2 + 2\gamma x$$

و از معادلهٔ (۲) ،

$$\therefore \quad v^2 = v_0^2 + 2\gamma x \qquad (3)$$

این معادلات را می‌توان به طریق زیرنیزبدست‌آورد:

با توجه به علامتهای مشتق ، داریم :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma$$

چون γ ثابت است باگرفتن تابع اولیه داریم :

$$\frac{dx}{dt} = \gamma t + A$$

چون وقتی‌که $t=0$ باشد $\frac{dx}{dt}=v_0$ است ، $A=v_0$ خواهد بود :

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=v_0+\gamma t$$

اما $\frac{dx}{dt}=v$ یعنی برابر بردارسرعت درلحظهٔ t است وبنابراین:

$$v=v_0+\gamma t \qquad (1)$$

با گرفتن تابع اولیه داریم :

$$x=v_0t+\frac{1}{2}\gamma t^2+B$$

وچون‌وقتی‌که $t=0$ است، $x=0$ است، $B=0$ خواهدبود.

$$\therefore \quad x=v_0t+\frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (2)$$

این سه معادلهٔ (۱) و (۲) و (۳) معادلات حرکت نقطه‌ای مادی است‌که برمسیری مستقیم با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند. اگرشتاب متغیرباشد ، این معادلات بکارنمی‌آیند. بایستی توجه‌کردکه درهریك از این معادلات γ وجود دارد وازچهارکمیت v_0 ، v ، t ، x ، درهریك ازاین‌معادلات سه‌تای آنها وجود دارد و یکی از آنها وجود ندارد . این معادلات دارای اهمیت بسیار می‌باشند و باید بخاطر سپرده شوند. فقط دوتای ازآنها مستقل از یکدیگرند و از هردو معادله می‌توان معادلهٔ دیگر را بدست آورد. درحل مسائل، معادلاتی را انتخاب می‌کنیم‌که شامل کمیتهایی باشندکه به ما داده شده ونیز شامل‌کمیت مجهول باشند.

باوجود این ، گاهی استفاده از معادلهٔ $x=\frac{1}{2}(v_0+v)t$ ، که دربالا ضمن اثبات معادلهٔ (۲) به‌آن اشاره‌کردیم ، بسیار مناسب است.

به‌منظور یادآوری این‌چهار معادله را باهم در اینجا می‌نویسیم :

$$\boxed{\begin{aligned} v&=v_0+\gamma t\\ x&=v_0t+\frac{1}{2}\gamma t^2\\ v^2&=v_0^2+2\gamma x\\ x&=\frac{1}{2}(v_0+v)t \end{aligned}}$$

مثال ۱ـ قطاری‌که با شتاب یکنواخت حرکت‌می‌کند دونیم کیلومتر متوالی را به‌ترتیب در ۲۰ ثانیه و ۳۰ ثانیه طی می‌کند . معلوم‌کنیدکه ، اگر شتاب همچنان یکنواخت باقی بماند ، قطار چه مسافتی طی خواهدکرد تا بایستد.

حل ـ ما نمی‌دانیم‌که سرعت اولیهٔ قطار چقدر بوده است ، اما دومسافت و دوزمان‌را می‌دانیم. قطار نیم‌کیلومتر یعنی ۵۰۰ متررا در ۲۰ ثانیه طی می‌کند ؛

$$\therefore \quad 500=20v_0+\frac{1}{2}\gamma\times 400 \qquad (1)$$

که درآن v_0 برحسب m/s سرعت قطار درشروع نیم کیلومتر اول است و γ برحسب m/s^2 شتاب حرکت‌است.

نیز یك‌کیلومتر را درمدت ۵۰ ثانیه طی می‌کند؛

$$\therefore \quad 1000=50v_0+\frac{1}{2}\gamma+2500 \qquad (2)$$

$$\therefore \quad 2v_0+20\gamma=50$$

و

$$v_0+25\gamma=20$$

که ازآن

$$\gamma=-\frac{1}{3}m/s^2$$

$$v_0=\frac{85}{3}m/s$$

اکنون می‌توانیم مساقت کلی راکه قطار پیش‌از ایستادن طی می‌کند (وشامل دونیم‌کیلومتر نیز هست) حساب‌کنیم ، زیرا اگر آن مسافت برابر x متر باشد ،

$$0=\left(\frac{85}{3}\right)^2-2\times\frac{1}{3}x$$

$$\therefore \quad x=\frac{7225}{9}\times\frac{3}{2}=1204/1m$$

در نتیجه مسافتی‌که پس از دونیم کیلومتر مفروض طی می‌شود $1204/1-1000=204/1m$ است.

توجه ـ در حالاتی شبیه حالات فوق که درآن مدت زمانهایی راکه برای طی مسافات متوالی لازم است داده شده، برای مسافت اول معادله‌ای بنویسید و معادلهٔ دوم رابرای **مجموع** دو مسافت بنویسید. اگر نیم‌کیلومتربعدی راجداگانه درنظر می‌گرفتیم ، می‌بایستی برای سرعت اولیه مقدار دیگری در نظر می‌گرفتیم و نمی‌توانستیم همان مقدار راکه در شروع نیم‌کیلومتر اول داشت منظورکنیم .

مثال۲ـ قطاری ازحال سکون به راه می‌افتد و پس از ۴ دقیقه و طی ۳کیلومتر متوقف می‌شود. بزرگترین سرعت قطار $67/5km/h$ بوده است . شتاب مثبت و شتاب منفی یکنواخت بوده است. مسافتی راکه قطار با حداکثر سرعت

پیموده است تعیین کنید.

حل ـ باید توجه‌داشت که در مسئله نگفتیم که شتاب مثبت برابرشتاب منفی‌است.

فرض‌کنیم‌که x_1 مسافتی باشدکه با شتاب مثبت γ_1 در مدت t_1 طی‌شده است.

نیز x_2 مسافتی باشدکه با شتاب منفی γ_2درمدتt_2 طی شده‌است. و x مسافتی باشدکه با سرعت یکنواخت در مدت t طی شده‌است.

با بکاربردن واحدهای متر وثانیه داریم:

$$x_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 t_1^2 = \frac{75}{8} t_1 \quad \text{و} \quad \frac{75}{4} = \gamma_1 t_1$$

و به‌همین ترتیب:

$$x_2 = \frac{75}{4} t_2 - \frac{1}{2}\gamma_2 t_2^2 \quad \text{و} \quad \frac{75}{4}\gamma_2 t_2$$

یا

$$x_2 = \frac{75}{4} t_2 - \frac{75}{8} t_2 = \frac{75}{8} t_2$$

$$x = \frac{75}{4} t$$

$$\therefore \quad x_1 + x + x_2 = \frac{75}{8} t_1 + \frac{75}{4} t + \frac{75}{8} t_2 = 3000$$

$$\therefore \quad t_1 + 2t + t_2 = \frac{3000 \times 8}{75} = 320$$

نیز

$$t_1 + t + t_2 = 240$$

$$\therefore \quad t = 80 \text{ s}$$

پس مسافتی‌که با حداکثر سرعت پیموده شده است برابراست‌با $\frac{75}{4} \times 80\text{m}$ یعنی برابراست با ۱/۵ کیلومتر.

معلومات مسئله برای تعیین جداگانهٔ t_1 و t_2 کافی نیست.

مثال۲ـ قطار سریع‌السیری با طی۸۰۰ متر، سرعتش را از98km/hبه 24km/h می‌رساند. چه مدت ترمزکرده است وچه‌مسافت دیگری طی خواهدشد تا قطار بایستد.

حل ـ البته بایدفرض‌کردکه شتاب منفی‌ناشی ازترمز، یکنواخت بوده است. این‌شتاب منفی‌را $\gamma\text{cm/s}^2$ می‌گیریم.

با استفاده از $v^2 = v_0^2 + 2\gamma x$

داریم:

$$\left(\frac{20}{3}\right)^2 = \left(\frac{80}{3}\right)^2 + 1600\gamma$$

$$\therefore \quad \gamma = -\frac{6400 - 400}{9 \times 1600} = -\frac{5}{12}$$

با بکاربردن $v = v_0 + \gamma t$

داریم:

$$\frac{20}{3} = \frac{80}{3} - \frac{5}{12} t$$

$$\therefore \quad t = 48 \text{ s}$$

برای تعیین t' مدت زمانی‌که پس از آن طی می‌شودتا قطار بایستد، داریم:

$$0 = \frac{20}{3} - \frac{5}{12} t'$$

$$t' = \frac{20}{3} \times \frac{12}{5} = 16 \text{ s}$$

مثال۴ـ دوچرخه سواری باسرعت 18km/h از اتومبیلی‌که درحال شروع به‌حرکت درهمان جهت است‌می‌گذرد و باهمان سرعت به حرکت خود ادامه می‌دهد. اتومبیل به‌مدت ۲۰ ثانیه باشتاب $0/4\text{m/s}^2$ حرکت می‌کند و سپس با سرعت یکنواخت به‌حرکت خودادامه می‌دهد. معین‌کنید، اتومبیل پس از طی چه مسافتی از شروع حرکت به‌دوچرخه سوار خواهد رسید.

حل ـ مسافتی‌که اتومبیل در ۲۰ ثانیه طی می‌کند به این طریق بدست می‌آید:

$$x = \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} \times 400 = 80 \text{ m}$$

سرعت اتومبیل در انتهای این مدت

$$v = \frac{4}{10} \times 20 = 8\text{m/s}$$

و مسافتی‌که دوچرخه سوار دراین مدت طی می‌کند برابراست با:

$$\frac{18000}{3600} \times 20 = 100\text{m}$$

سرعت اتومبیل نسبت به‌دوچرخه

$$8 - 5 = 3\text{m/s}$$

درنتیجه برای آنکه اتومبیل ۸۰ − ۱۰۰ یعنی ۲۰متر دیگر را طی‌کند$\frac{20}{3}$ ثانیه طول می‌کشد و دراین مدت‌مسافتی برابر $\frac{20}{3} \times 8 = 53/3\text{m}$ طی‌خواهدکرد. یعنی، رویهم‌رفته اتومبیل مسافتی برابر ۱۳۳/۳ متر طی خواهد کرد تا به دوچرخه سوار برسد.

تمرین

۱ـ قطاری از یك ایستگاه ازحال سکون به‌راه می‌افتد وبا شتاب یکنواخت $0/5\text{m/s}^2$ حرکت می‌کند. سرعت‌قطار

پس از ۳۰ ثانیه چقدراست ، و در این مدت قطار چه‌مسافتی طی‌می‌کند؟

۲ـ جسمی ازحال سکون باشتاب یکنواخت به‌راه می‌افتد ودرمدت ۱۵ثانیه به سرعت $67/5km/h$ می‌رسد . شتاب این‌جسم چقدر بوده است ودرمدت ۱۰ ثانیه چه‌مسافتی طی‌کرده است؟

۳ـ اتومبیلی‌که با سرعت $48km/h$ حرکت می‌کندبا شتاب منفی یکنواخت پس از ۵/۵ ثانیه متوقف می‌شود . شتاب منفی اتوموبیل و نیز مسافتی‌راکه در این مدت طی کرده است پیداکنید .

۴ـ تندی اولیهٔ جسمی‌که با شتاب منفی $0/6m/s^2$ حرکت می‌کند $30m/s$ است . درچه زمانی تندی جسم‌صفر می‌شود، و تا آن موقع جسم چه مسافتی طی‌کرده است؟

۵ـ اتوموبیلی ازحال سکون به‌راه می‌افتد و باشتاب یکنواخت ، درمدت ۱۰ ثانیه از هنگام شروع ۱۹ مترطی می‌کند . شتاب اتوموبیل و مسافتی راکه اتوموبیل در مدت ۵ ثانیه پس از شروع حرکت‌پیموده‌است تعیین‌کنید.

۶ـ جسمی ۳ ثانیه با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند و ۲۷ مترطی می‌کند ، سپس با تندی یکنواخت به‌حرکت‌خود ادامه می‌دهد و در مدت ۵ ثانیه با این حرکت مسافتی برابر $60m$ می‌پیماید . سرعت اولیه و شتاب حرکت اتوموبیل را پیداکنید .

۷ـ اتوموبیلی‌باشتاب یکنواخت‌سرعتش‌را از$16km/h$ با طی$242m$ به $64km/h$ می‌رساند . شتاب اتوموبیل‌ونیز سرعت اتوموبیل‌را پس ازآنکه ۱۰۰ متر از مسافت مذکوررا طی‌کرد تعیین‌کنید.

۸ـ قطاری در نزدیک‌شدن به‌یك ایستگاه ، دونیم‌کیلومتر متوالی را به‌ترتیب در ۱۶ و ۲۰ ثانیه طی می‌کند. به فرض آنکه شتاب منفی قطار یکنواخت باشد ، ثابت‌کنیدکه قطار پیش از توقف‌کامل ۵۴ ثانیه دیگر حرکت می‌کند ودر این مدت $531m$ می‌پیماید .

۹ـ قطاری با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند و از «کیلومتر»های متوالی ، به‌ترتیب با سرعتهای $10km/h$ و $20km/h$می‌گذرد . حساب‌کنید وقتی‌که قطار به«کیلومتر» بعدی می‌رسد تندی آن چقدر است ، و مدت زمان لازم برای طی هریك از این دو فاصلهٔ یك‌کیلومتری چقدر است؟

۱۰ـ قطاری ازنقاط متوالی A وB وC که هریك به فاصلهٔ یك‌کیلومتر از نقطهٔ بعدی است عبور می‌کند. اگربرای طی از A تا B مدتی برابر ۶۶ ثانیه و برای طی از B تا C مدتی برابر ۹۹ ثانیه لازم باشد ، به‌فرض آنکه شتاب حرکت در مسیر از A به بعد یکنواخت باشد ، آن‌را تعیین کنید . نیز حساب‌کنیدکه قطار پس از عبور از C پس ازطی چه مسافتی متوقف خواهد شد.

۱۱ـ بر یك مسیر مستقیم ، نقطه‌ای مادی با سرعت اولیه و شتاب یکنواخت حرکت می‌کند . به‌فرض آنکه در۶ ثانیهٔ اول $72m$ طی‌کند و در ۲ ثانیهٔ بعد $48m$ طی‌کند ، درمدت ۱۲ ثانیهٔ اول چه مسافتی طی می‌کند ؟ نیز سرعت اولیه‌را تعیین‌کنید .

۱۲ـ نقطه‌ای مادی ازحال سکون شروع به حرکت می‌کند و باشتاب یکنواخت پیش می‌رود. در اواسط حرکت وقتی‌که به‌آن توجه می‌شود ، دیده می‌شودکه درمدت ۴ثانیه مسافت ۱۲ متر طی می‌کند و در ۵ ثانیهٔ بعدی مسافتی برابر ۲۸/۵ متر می‌پیماید. تعیین‌کنید : (الف) شتاب ؛ (ب)تندی متحرك هنگامی‌که به آن توجه شده‌است ؛ (پ) مسافتی‌که‌از آن پس‌طی‌کرده است.

۱۳ـ عمق چاه معدنی ۷۵۰ متراست . آسانسوری از ته چاه بالامی‌آید. ربع‌اول مسافت را باشتاب ثابت‌یکنواخت و ربع آخر مسافت را باشتاب منفی یکنواخت طی می‌کند . این دوشتاب از حیث قدر مطلق برابر بوده‌اند. در صورتی‌که وسط راه را با سرعت یکنواخت طی کرده باشد ، این سرعت یکنواخت را تعیین‌کنید.

۱۴ـ قطاری ازحال سکون از یك ایستگاه به‌راه می‌افتد و ۴۰۰ متر اولیه را با شتاب یکنواخت طی می‌کند و ۱۲۰۰ متربعدی را باحرکت یکنواخت و ۲۰۰ متر بقیه راباشتاب منفی یکنواخت طی می‌کند تا به ایستگاه دیگر برسد. طول مدت مسافرت ۵ دقیقه است. شتاب مثبت و شتاب منفی حرکت را بدست‌آورید.

۱۵ـ برمسیری مستقیم ، نقطه‌ای مادی ازحال سکون به‌راه می‌افتد و تا مدتی با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند . سپس تا مدت ۱۰ ثانیه با سرعت یکنواخت $4/5m/s$ به حرکت خود ادامه می‌دهد ، و سپس باشتاب یکنواخت چنان حرکت می‌کندکه پس از مدتی بایستد . اگر از شروع‌حرکت تاهنگام توقف ۱۶ثانیه طول‌کشیده باشد ، ثابت‌کنیدکه‌متحرك روی‌هم مسافتی برابر $58/5m$ طی‌کرده است. اگر شتاب ابتدایی $1/5m/s^2$ باشد ، شتاب نهایی‌راکه به منظورتوقف احرازکرده است بدست‌آورید .

۱۶ـ بر مسیری مستقیم ، جسمی با شتاب یکنواخت فواصل a و b و c را پی‌درپی و درزمانهای متساوی t طی می‌کند. ۱ـ رابطهٔ بین a و b و c را پیدا کنید. ۲ـ شتاب حرکت جسم را بدست‌آورید. ۳ـ سرعت اولیهٔ حرکت جسم

دنباله در صفحهٔ ۹۱

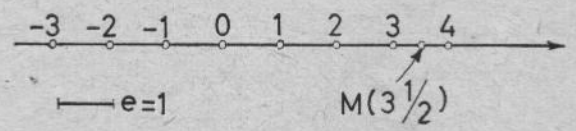
ترجمهٔ از روسی توسط : **فتح الله زرگری**

تنظیم و نگارش مجدد با اضافات توسط : **عبدالحسین مصحفی**

I - مختص نقطه روی یك خط راست

۱- محور اعداد

روی خط، نقطه‌ای را به‌عنوان **مبدأ** و پاره خطی را به‌عنوان **واحد** در نظر می‌گیریم ویکی از دو جهت خط را **جهت مثبت** اختیار می‌کنیم . خطی را که مبدأ ، واحد و جهت مثبت آن مشخص شده باشد **محور اعداد** می‌نامیم . در شکل زیر یك محور اعداد مشاهده می‌شود.



که O مبدأ آن و پاره‌خط به‌طول e واحدآن است‌وجهت‌مثبت آن‌با پیکان مشخص‌شده است.

نظیر هرعدد حقیقی یك نقطه روی محور یافت می‌شود. مثلا نظیر عدد ۵+ نقطه‌ای از محور در نظر گرفته می‌شود که فاصلهٔ آن از مبدأ ۵ برابر واحد و نسبت به مبدأ درجهت مثبت واقع است. نظیر عدد $-\sqrt{۱۳}$ نقطه‌ای ازمحورمنظور است که فاصلهٔآن از مبدأ $\sqrt{۱۳}$ برابر واحد و نسبت به‌مبدأ در جهت منفی‌قرار دارد. نظیر عدد صفر، مبدأ اختیارمی‌شود.

برعکس، نظیرهر نقطه از محور اعداد، یك عدد حقیقی وجود دارد؛ اگرMنقطه‌ای ازمحور باشد طول پاره خطOM با واحد انتخابی اندازه می‌گیریم که یك عدد حسابی بدست می‌آید. حال اگر M نسبت به O درجهت مثبت باشد این عدد حسابی را به‌صورت یك عدد حقیقی مثبت درنظر می‌گیریم و اگر M نسبت به O درجهت منفی باشد ، عدد حسابی مزبور را به صورت عدد حقیقی منفی در نظر می‌گیریم. در شکل بالا نقطهٔ M نظیر عدد ۳/۵+ نموده شده است.

با روش بالا، بین مجموعهٔ نقاط خط راست و مجموعهٔ اعداد حقیقی **تناظریکبیك** برقرار کردیم. در این تناظر، عدد حقیقی نظیر هرنقطه از محور را **مختص** آن نقطه یا **طول** (= **خفت**) آن نقطه می‌گوئیم. اگر عدد a مختص نقطهٔM باشد چنین می‌نویسیم: M(a) ومی‌خوانیم «M به‌مختص a» مثلا(۷ −)M خوانده می‌شود «M به‌مختص ۷ − ».

[ظاهراً بنظر می‌رسدکه قبول تناظریکبیك بین مجموعهٔ اعداد حقیقی و مجموعهٔ نقاط یك خط راست بسیار ساده است. اما این موضوع دارای نکات پیچیده‌ای است‌که از قدیم الایام ریاضیدانان را به‌خود مشغول داشته است. مثلا از جمله‌نکاتی که در این مورد مطرح می‌باشد آن است که ثابت کنند بین هردو عدد حقیقی، هرچقدرکه به هم نزدیك باشند، عدد حقیقی دیگری وجود دارد. یا اینکه عددهایی که نظیر بعضی نقاط وجود دارند اما گویا نیستند چگونه باید مشخص شوند . از همه مقدماتی‌تر، عدد چیست؟ مفهوم نقطه یعنی‌چه؟ این‌نکات در نظریهٔ اعداد و در نظریهٔ هندسهٔ مختصاتی به‌صورت‌مفصل ودقیق بررسی می‌شوند.]

ترتیب روی محور اعداد - وجود تناظر یکبیك بین مجموعهٔ اعداد حقیقی و مجموعهٔ نقط یك خط راست به آن معنی است که اگر دو عددمتفاوت باشند ، نقطه‌های نظیر آنها از هم متمایزند. اگرعدد a از عدد b کوچکتر باشد می‌گوئیم که نقطهٔ M(a) **مقدم** برنقطهٔ N(b) است. حال اگر محور اعداد را به‌صورت افقی وجهت مثبت آن راجهت از چپ به راست اختیار کرده باشیم ، نقطهٔ M(a) سمت چپ نقطهٔ N(b)قرار خواهدداشت. اما اگرمحور را مثلابه‌صورت قائم و جهت مثبت آن را جهت از پایین به بالا گرفته باشیم نقطهٔ M(a) زیر نقطهٔ N(b) واقع خواهد بود. وقتی‌که روی یك محور نقطهٔ M مقدم بر نقطهٔ N باشد چنین می‌نویسیم : «M < N» می‌گوئیم که نشانهٔ < (تقدم) بین نقاط محور اعداد یك **ترتیب** به‌وجود می‌آورد :

$$a<b \iff M(a) < N(b)$$

مثلا روی یك محور اعداد نقطهٔ به مختص ۷ − مقدم برنقطهٔ به مختص ۱ + است : $M(-۷) < N(+۱)$

روی محور اعداد به مبدأ O؛ هر نقطهٔ با مختص منفی مقدم بر O است، O مقدم برهر نقطهٔ با مختص مثبت است ،

هر نقطهٔ بامختص منفی مقدم بر هرنقطهٔ با مختص مثبت است. اگر نقطهٔ M مقدم‌بر نقطهٔ N و نقطهٔ N مقدم بر نقطهٔ P باشد، نقطهٔ M مقدم بر نقطهٔ P خواهد بود.

برای آنکه معلوم شود آنچه‌راکه‌تا کنون گفته شد به‌خوبی فراگرفته‌اید تمرینهایی مطرح می‌شود. هرگاه در مورد یکی از تمرینها به‌اشکال برخوردید یا نتوانستید آنراحل‌کنید، متن بالا را مجدداً و با دقت بیشتر بررسی‌کنید.

تمرینها:

۱ـ نقاط $A(-۲)$، $B(\frac{۱۳}{۳})$ و $K(۰)$ را روی محور اعداد مشخص کنید.

۲ـ نقطهٔ $M(۲)$ را روی محور اعداد مشخص کنید. روی این محور دو نقطه به‌فاصلهٔ ۳ از M یافت می‌شود. این دو نقطه را مشخص‌کنید و مختص هرکدام را معلوم‌کنید.

۳ـ هرگاه روی یك محور $B(b)$ مقدم بر $A(a)$ باشد از دوعدد a و b کدام بزرگتر است؟

۴ـ بدون تعیین نقاط زیر در هر یك از حالات بگوئید که‌کدام نقطه مقدم بردیگری است.

الف: $A(-۳)$ و $B(-۴)$ ب: $A(۳)$ و $B(۴)$

ج: $A(-۳)$ و $B(۴)$ د: $A(۳)$ و $B(-۴)$

۵ـ روی یك محور از دونقطهٔ $A(a)$ و $B(-a)$ کدام مقدم بردیگری است؟

[به‌این پرسش بطور قاطع نمی‌توان پاسخ داد؛ زیرا a عددی است حقیقی و ممکن است مثبت، صفر یا منفی باشد. اگر a مثبت باشد در این صورت B مقدم بر A است. اگر a منفی باشد دراین صورت A مقدم بر B است. اگر a صفر باشد A و B برهم منطبقند.]

۶ـ در هر یك از حالتهای زیر کدام یك از دو نقطهٔ A و B مقدم بردیگری است؟

الف: $A(x)$ و $B(۲x)$ ب: $A(x)$ و $B(x+۲)$

ج: $A(x)$ و $B(x^۲)$ د: $A(x)$ و $B(x-a)$

[همانند تمرین ۵ باید برای x حالتهای مختلف را در نظر بگیرید.]

۷ـ اگر C نقطهٔ وسط پاره خط AB و $A(-۵)$ و $B(۷)$ دونقطه از یك محور باشند، از روی شکل معلوم کنید که مختص C چقدر است.

۸ـ نقطهٔ $A(x)$ را در نظر می‌گیریم. برای هریك از حالتهای زیر یك محوررسم‌کنید و قسمتی‌ازآن راکه موضع A است با خط قرمز مشخص‌کنید:

$x>۰$ ، $x\geqslant ۰$ ، $x<۲$ ، $x\geqslant ۵$

$۲<x<۵$ $-۳/۷۵<x<۰$ ، $x-۳<۵$ ، $x^۲<۱$

۹ـ قبلا یادآوری می‌کنیم که قدر مطلق عدد حقیقی a که به صورت $|a|$ نشان داده می‌شود به‌این معنی است که‌اگر a مثبت باشد $|a|=a$ است، اگر a منفی باشد $|a|=-a$ و اگر $a=۰$ باشد $|a|=۰$ است. مثلا: $|+۷/۵|=۷/۵$ و $|-۴|=۴$ و $|۱-\sqrt{۳}|=\sqrt{۳}-۱$ در مورد مثلا $|x+۳|$ هرگاه $x\geqslant -۳$ باشد می‌نویسیم $|x+۳|=x+۳$ و هرگاه $x<-۳$ باشد می‌نویسیم $|x+۳|=-x-۳$.

با توجه به‌این یادآوری، مکان نقطهٔ $A(x)$ را در هر یك از حالتهای زیر روی محور اعداد با خط قرمز مشخص کنید:

$۳<|x|<۵$ ، $|x|<۵$ ، $|x|>۳$ ، $|x|=۲$

۱۰ـ هرگاه x مخالف صفرباشد نقطهٔ $A\left(\frac{|x|}{x}\right)$ راروی محوراعداد مشخص‌کنید. (دوجواب)

۱۱ـ به‌فرض $|x-۲|=۲-x$ مکان $M(x)$ را روی محور اعداد مشخص‌کنید.

۱۲ـ در هر یك از معادله‌های زیر مقدار x را حساب کرده ونقطهٔ $M(x)$ نظیرآن را روی محور اعداد نشان دهید.

$|x-۲|=۳$

$|x+۱|+|x+۲|=۲$

$|x+۱|+|x+۲|=۱$

[معادلهٔ اخیر دارای بینهایت جواب است و مکان M قطعه‌ای از محور اعداد است که باید آن را مشخص کنید.]

۱۳ـ کدام یك از نقاط $A(x)$ و $B(x+a)$ مقدم بر دیگری است؟ فاصلهٔ این دو نقطه چقدر است؟

[برای تعیین تقدم و تأخر دو نقطه بر حسب اینکه a مثبت، صفر، منفی باشد باید سه حالت در نظر بگیرید. فاصلهٔ دونقطه برابر با $|a|$ است.]

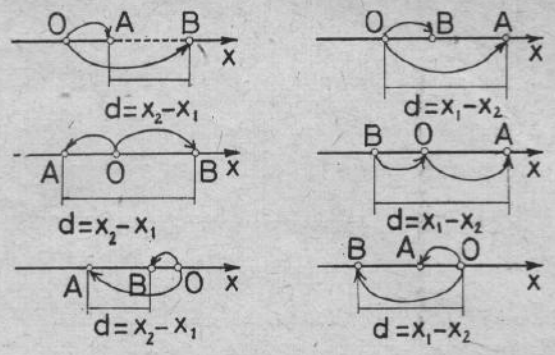
فاصلهٔ دونقطه روی محور اعداد

قبلایادآوری‌می‌کنیم که فاصلهٔ‌دونقطهٔ A و B عبارتست از طول پاره خط AB = طول پاره خط BA. طول پاره خط AB **عددی‌است‌حسابی** (توجه‌کنید که‌عددی است‌حسابی نه جبری) و برابر است با نسبت پاره‌خط AB به پاره‌خطی که به‌عنوان واحد طول انتخاب شده است. هرگاه C نقطه‌ای از پاره‌خط AB باشد داریم:

$$AC+CB=BC+CA=AB$$

فاصلهٔ‌دونقطهٔ A و B رابه $d(A$ و $B)$ نشان می‌دهیم. فرض‌می‌کنیم A و B دونقطه ازمحور اعداد بامختصهای

به ترتیب x_1 و x_2 باشند. مطابق با شکل زیر سه نقطهٔ A و



B و O مبدأ محور نسبت به‌هم شش‌وضع می‌توانند داشته باشند.

۱) O مقدم بر A و A مقدم بر B یعنی $x_2 > x_1 > 0$ باشد. در این حالت A بین O و B است و داریم:

$$OA + AB = OB \Longrightarrow AB = OB - OA$$

$$d(A \text{ و } B) = |x_2| - |x_1| = x_2 - x_1$$

۲) داشته باشیم $x_1 < 0 < x_2$ در این حالت A مقدم بر O و O مقدم بر B است و داریم:

$$AO + OB = AB \Longrightarrow AB = |x_1| + |x_2|$$

چون $x_1 < 0$ است پس $|x_1| = -x_1$ و چون $x_2 > 0$ است $|x_2| = x_2$ بنابراین:

$$d(A \text{ و } B) = x_2 - x_1$$

۳) داشته باشیم: $x_1 < x_2 < 0$ که A مقدم بر B و B مقدم بر O است و داریم:

$$AB + BO = AO \Longrightarrow AB = OA - OB$$

$$d(A \text{ و } B) = |x_1| - |x_2| = -x_1 - (-x_2)$$

$$d(A \text{ و } B) = x_2 - x_1$$

۴) داشته باشیم $0 < x_2 < x_1$ یعنی O مقدم بر B و B مقدم بر A باشد و خواهیم داشت:

$$OB + BA = OA \Longrightarrow AB = OA - OB$$

$$d(A \text{ و } B) = |x_1| - |x_2| = x_1 - x_2$$

۵) داشته باشیم $x_2 < 0 < x_1$ یعنی B مقدم بر O و O مقدم بر A باشد و خواهیم داشت:

$$BO + OA = BA \Longrightarrow AB = OA + OB$$

$$d(A \text{ و } B) = |x_1| + |x_2| = x_1 - x_2$$

۶) آخرین وضع آن است که $x_2 < x_1 < 0$ یعنی B مقدم بر A و A مقدم بر O باشد که خواهیم داشت:

$$BA + AO = BO \Longrightarrow AB = OB - OA$$

$$d(A \text{ و } B) = |x_2| - |x_1| = -x_2 - (-x_1)$$

$$d(A \text{ و } B) = x_1 - x_2$$

نتیجهٔ کلی آن می‌شود که درهمهٔ حالتها هرگاه $x_2 > x_1$ باشد $d(A \text{ و } B) = x_2 - x_1$ و هرگاه $x_1 > x_2$ باشد $d(A \text{ و } B) = x_1 - x_2$ است. بنابراین می‌توانیم دستور کلی زیر را برای هرحالتی به‌کار ببریم:

$$\boxed{d(A \text{ و } B) = |x_1 - x_2|}$$

مثال ۱ـ فاصلهٔ دونقطهٔ $A(-7)$ و $B(-2)$ برابر است با:

$$d[A(-7) \text{ و } B(-2)] = |-7-(-2)| = 5$$

مثال ۲ـ داریم:

$$d[A(-3) \text{ و } B(4)] = |-3-4| = 7$$

مختص نقطهٔ وسط دونقطه

هرگاه $A(x_1)$ و $B(x_2)$ دو نقطه از محور اعداد و M وسط پاره خط AB باشد داریم:

$$AM = MB \Longrightarrow d(A \text{ و } M) = d(B \text{ و } M)$$

بافرض آنکه x_3 مختص نقطهٔ M باشد داریم:

$$|x_1 - x_3| = |x_2 - x_3|$$

برای تعیین x_3 از این معادله برحسب اینکه A مقدم بر B یا B مقدم بر A باشد دوحالت در نظر می‌گیریم:

اولا اگر A مقدم بر B باشد داریم: $x_1 < x_3 < x_2$ و در نتیجه:

$$x_1 - x_3 < 0 \Longrightarrow |x_1 - x_3| = x_3 - x_1$$

$$x_2 - x_3 > 0 \Longrightarrow |x_2 - x_3| = x_2 - x_3$$

$$x_3 - x_1 = x_2 - x_3 \Longrightarrow x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ثانیاً اگر B مقدم بر A باشد داریم: $x_2 < x_3 < x_1$ ونتیجه خواهد شد:

$$x_1 - x_3 = x_3 - x_2 \Longrightarrow x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

بنابراین در هرحال مختص نقطهٔ وسط پاره خط واقع بر محور اعداد برابر است با نصف مجموع مختصهای نقاط دو سرآن پاره‌خط.

مثال ۱ـ هرگاه $M(x)$ وسط پاره‌خط AB ومختصهای A و B به‌ترتیب ۳ و ۸ − باشد داریم:

$$x = \frac{3-8}{2} = -\frac{5}{2}$$

مثال ۲ـ روی یك محور اعداد دونقطهٔ $A(a)$ و $B(b)$ مفروض است. روی پاره‌خط AB نقطهٔ P را بقسمی انتخاب می‌کنیم که AP ثلث AB باشد. مختص P برحسب a و b چقدر است؟

برای حل می‌توانیم دو روش به‌کار ببریم:

روش اول ـ هرگاه Q وسط PB باشد P وسط AQ است و با فرض x_1 مختص P و x_2 مختص Q باشد داریم:

$$x_1 = \frac{a + x_2}{2} \quad و \quad x_2 = \frac{x_1 + b}{2}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = a \\ 2x_2 - x_1 = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 2a \\ 2x_2 - x_1 = b \end{cases}$$

$$3x_1 = 2a + b \Longrightarrow x_1 = \frac{2a + b}{3}$$

روش دوم- چون $AB = 3AP$ پس داریم:

$$3|a - x_1| = |a - b|$$

اولا اگر $a < b$ باشد داریم $a < x_1 < b$ و:

$$3(x_1 - a) = b - a \Longrightarrow x_1 = \frac{2a + b}{3}$$

ثانیاً اگر $b < a$ باشد داریم $b < x_1 < a$ و :

$$3(a - x_1) = a - b \Longrightarrow x_1 = \frac{2a + b}{3}$$

تمرینها :

۱ـ هرگاه $d(A \text{ و } B) < 3$ و B به مختص ۷ باشد، مکان A(x) را روی محور اعداد مشخص کنید.

۲ـ روی محور اعداد، هرگاه x_1 مختص A و x_2 مختص B باشد و داشته باشیم:

$$|x_1 - 2| > 1 \quad و \quad |x_2 + 3| = 3$$

در این صورت x مختص M وسط AB درچه نامساوی یا نامساویهایی صدق می‌کند؟

۳ـ روی محور اعداد مختص نقطه‌یی را تعیین کنید که فاصلهٔ آن از A نصف فاصلهٔ آن از B باشد. [دوجواب باید بدست آورید.]

۴ـ هرگاه A(a) و B(b) دو نقطه از محور اعداد و M(x) نقطهٔ دیگری از محور اعداد باشد بقسمی که با فرض $k \neq 1$ داشته باشیم : $AM = k.MB$، مقدار x رابرحسب a و b و k حساب کنید.

[برحسب اینکه M بین A و B یا خارج پاره‌خط AB و برحسب اینکه $k < 1$ یا $k > 1$ باشد باید حالتهای مختلف را در نظر بگیرید.]

۵ـ روی محور اعداد نقطهٔ C را تعیین کنید بقسمی که مجموع فواصل آن از A(−۳) و B(۱) برابر باشد بایکی از عددهای ۵ یا ۴ یا ۳.

نقطهٔ C را تعیین کنید برای آنکه تفاضل فاصلهٔ آن تا B از فاصلهٔ آن‌تا A با یکی از اعداد ۵ یا ۴ یا ۳ برابرباشد.

۶ـ روی محور اعداد مختص قرینهٔ نقطهٔ A(x) نسبت به نقطهٔ B(b) را معلوم کنید.

۷ـ هرگاه M(x) و A(−۳) و B(۱) و C(۵) نقاطی از محور اعداد باشند مقدار:

$$y = MA + MB + MC$$

را برحسب x در اوضاع مختلف بدست آورید.

شتاب (دنباله از صفحهٔ ۸۷)

را هنگامی‌که فاصلهٔ a را شروع به‌طی‌کردن می‌کند بدست آورید.

۱۷ـ متحرکی ازحال سکون به‌راه می‌افتد و قسمتی‌از مسیرخود را باشتاب یکنواخت γ و بقیهٔ مسیررا باشتاب‌منفی یکنواخت 2γ طی می‌کند تا بایستد. درصورتی‌که این مسیر را در t ثانیه طی کرده باشد ، ثابت‌کنید که طول مسیر $h = \frac{1}{2}\gamma t^2$ است

۱۸ـ متحرکی با شتاب یکنواخت γ بر مسیری مستقیم حرکت می‌کند . سرعت این متحرك وقتی‌که از نقطهٔ معینی می‌گذرد u است . برهمین مسیر متحرکی دیگربا شتاب $\frac{4}{3}\gamma$ حرکت می‌کند. این‌متحرك ۳ ثانیه بعد ازمتحرك اول به‌نقطهٔ مذکور می‌رسد و در این لحظه سرعتش $\frac{1}{3}u$ است. پس ازمدتی متحرك دوم خودرا به متحرك اول می‌رساند . دراین لحظه سرعت متحرك اول ۲۷m/s و سرعت متحرك دوم ۳۱m/s است. γ و u و همچنین فاصلهٔ دو متحرك را دراین لحظه از نقطهٔ مذکور پیداکنید.

۱۹ـ ترمزهای قطاری قادرند که شتاب منفی $1/05 m/s^2$ ایجادکنند . اگرقطار باسرعت ۹۶km/h به ایستگاه نزدیك شود ، درچه فاصله‌ای از ایستگاه باید ترمز بگیرد تا درست درایستگاه متوقف شود؟ اگر در فاصله‌ای برابرنصف فاصلهٔ مذکور ترمز بگیرد ، با چه سرعتی به ایستگاه می‌رسد؟

۲۰ـ نقاط P و Q بریك خط مستقیم واقعند . دریك لحظه Q با شتاب یکنواخت $3 m/s^2$ شروع به‌حرکت می‌کند. دراین لحظه P که با شتاب ثابت $1/8 m/s^2$ حرکت می‌کند دارای سرعتی برابر ۸/۷m/s است و ۱۵ متر از Q عقبتر است. ثابت‌کنیدکه دو ثانیه بعد ، P به Q می‌رسد ، اما ۱۰/۵ ثانیه پس ازاین واقعه Q خودرا به P می‌رساند.

عبدالحسین مصحفی

شما از کدام راه حل می کردید؟

مسئلهٔ ۵ ـ کنکور تیرماه ۱۳۴۶ دانشکدهٔ علوم دانشگاه مشهد

اگر x_1 ، x_2 ، x_3 ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^3 - 5x^2 + 7 = 0$$

باشند ، معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن

$$1 + 2x_1 \ ، \ 1 + 2x_2 \ ، \ 1 + 2x_3$$

باشند .

راه‌حل اول ـ اگر x ریشهٔ غیرمشخص معادلهٔ مفروض و X ریشهٔ غیرمشخص معادلهٔ مطلوب باشد ، ازروابط داده شده نتیجه می‌شود که :

$$X = 1 + 2x \longrightarrow x = \frac{X-1}{2}$$

$$\left(\frac{X-1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{X-1}{2}\right)^2 + 7 = 0$$

$$X^3 - 13X^2 + 23X + 45 = 0$$

راه حل دوم ـ فرض می‌کنیم که معادلهٔ مطلوب به صورت :

$$X^3 + aX^2 + bX + c = 0$$

و ریشه‌های آن X_1 ، X_2 ، X_3 باشد. به‌فرض داریم :

$$X_1 = 1 + 2x_1 \ ، \ X_2 = 1 + 2x_2 \ ؛ \ X_3 = 1 + 2x_3$$

بنابه‌روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله داریم :

$$a = -(X_1 + X_2 + X_3) = -3 - 2(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$b = X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_1 =$$

$$= 3 + 4(x_1 + x_2 + x_3) + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

$$c = -X_1X_2X_3 = -1 - 2(x_1 + x_2 + x_3) -$$

$$- 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 8x_1x_2x_3$$

اما از روی معادلهٔ مفروض داریم :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$$

$$x_1x_2x_3 = -7$$

پس داریم :

$$a = -3 - 10 = -13$$

$$b = 3 + 20 = 23$$

$$c = -1 - 10 + 56 = 45$$

$$X^3 - 13X^2 + 23X + 45 = 0$$

مسئلهٔ ۶ـ کنکور سال ۱۳۴۷ دانشگاه صنعتی آریامهر

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که کثیرالجملهٔ

$$a(x^4 - x^2 + 1) + b(x-1)^2x^2 + x^4$$

بر $x^2 - x - 2$ قابل قسمت باشد .

راه حل اول ـ سه جمله‌ای $x^2 - x - 2$ دارای دو ریشهٔ ۲ و ۱ ـ است و این دومقدار باید ریشه‌های کثیر ـ الجملهٔ مفروض باشند ، یعنی باید داشته‌باشیم :

$$\begin{cases} a(16 - 4 + 1) + b(2-1)^2 \times 4 + 16 = 0 \\ a(1 - 1 + 1) + b(-1-1)^2 \times 1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13a + 4b + 16 = 0 \\ a + 4b + 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow a = -\frac{5}{4} \text{ و } b = \frac{1}{16}$$

راه‌حل دوم ـ عبارت مفروض که نسبت به x ازدرجهٔ ۴ است اگر بر $x^2 - x - 2$ قابل قسمت باشدخارج‌قسمت‌از درجهٔ ۲ خواهد بود. بنابراین داریم :

$$a(x^4 - x^2 + 1) + b(x-1)^2x^2 - + x^4 =$$

$$= (x^2 - x - 2)(px^2 + qx + r)$$

بعداز انجام عملیات خواهیم داشت :

$$(a + b + 1)x^4 - 2bx^3 + (b - a)x^2 + a =$$

$$= px^4 + (q - p)x^3 + (r - 2p - q)x^2 -$$

$$- (2q + r)x - 2r$$

$$\begin{cases} a+b+1=p \\ -2b=q-p \\ b-a=r-2p-q \\ 0=2q+r \\ a=-2r \end{cases} \Longrightarrow \quad a=-\frac{5}{4} \quad b=\frac{1}{16}$$

مسئلهٔ ۷ـ کنکور ۱۳۴۸ کلاسهای شبانهٔ دانشگاه تهران

بین مستطیلهایی که مساحت آنها برابر a^2 است، ابعاد مستطیلی را بدست آورید که محیط آن می‌نیمم باشد.

راه حل اول ـ اگر x و y ابعاد مستطیل باشند مساحت آن $xy=a^2$ و محیط آن $p=2(x+y)$ است. با توجه به اتحاد :

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

نتیجه می‌شود که :

$$\frac{p^2}{4}=4a^2+(x-y)^2$$

می‌نیمم p^2 و درنتیجه می‌نیمم p وقتی است که $x=y$ باشد و دراین حال داریم $x=y=a$.

راه حل دوم ـ اگر x یك بعد مستطیل و y محیط آن فرض شود ، بعد دیگر مستطیل $\frac{a^2}{x}$ است و داریم :

$$y=2\left(x+\frac{a^2}{x}\right)$$

$$y'=2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)=\frac{2(x^2-a^2)}{x^2}$$

$$y'=0 \Longrightarrow x=a$$

مشتق تابع درازاء $x=a$ صفر شده از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد. پس تابع y درازاء $x=a$ می‌نیمم است که دراین حال ، مستطیل مفروض مربعی به ضلع a است.

مسئلهٔ ۸ـ کنکور ۱۳۴۸ هنرستان نوشیروانی بابل

با فرض $x=by+cz$ و $y=ax+cz$ و $z=ax+by$ ثابت کنید که رابطهٔ زیر محقق است:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$$

راه حل اول ـ دستگاه سه معادلهٔ مفروض را نسبت به سه مجهول a و b و c حل می‌کنیم. به این ترتیب که طرفین دو معادلهٔ اول ودوم را از هم کم می‌کنیم ، معادلهٔ $x-y=by-ax$ بدست می‌آید. اکنون طرفین این معادله و معادلهٔ سوم را از هم کم می‌کنیم می‌شود :

$$z-x+y=2ax \Longrightarrow a=\frac{y+z-x}{2x}$$

$$a+1=\frac{y+z-x}{2x}+1=\frac{y+z+x}{2x}$$

$$\frac{1}{a+1}=\frac{2x}{x+y+z}$$

به‌همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{1}{b+1}=\frac{2y}{x+y+z} \text{ و } \frac{1}{c+1}=\frac{2z}{x+y+z}$$

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{2x+2y+2z}{x+y+z}=2$$

راه حل دوم ـ طرفین سه‌معادله را نظیر به نظیر باهم جمع می‌کنیم ، می‌شود :

$$x+y+z=2(ax+by+cz) \qquad (1)$$

به طرفین معادلهٔ اول ax اضافه می‌کنیم ، می‌شود:

$$x+ax=ax+by+cz$$

ازاین رابطه با توجه به رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$x(1+a)=\frac{x+y+z}{2} \Longrightarrow \frac{1}{a+1}=\frac{2x}{x+y+z}$$

به‌ترتیب مشابه خواهیم داشت .

$$\frac{1}{b+1}=\frac{2y}{x+y+z} \text{ و } \frac{1}{c+1}=\frac{2z}{x+y+z}$$

و رابطهٔ مورد نظر محقق می‌باشد .

مسئلهٔ ۹ـ کنکور سراسری ۱۳۴۹

به ازاءکدام مقدار A و B رابطهٔ زیر یك اتحاداست:

$$\frac{5x+2}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

راه حل اول ـ طرف دوم را عمل می‌کنیم :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}=$$

$$=\frac{(A+B)x+2A-B}{x^2+x-2}$$

پس باید اتحاد زیررا داشته باشیم :

$$(A+B)x+2A-B\equiv 5x+2$$

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 2A-B=2 \end{cases} \Longrightarrow A=\frac{7}{3} \text{ و } B=\frac{8}{3}$$

راه حل دوم ـ وقتی تساوی‌یك اتحاد باشد به ازاء همهٔ مقادیر x برقرار است پس به‌ازاء $x=0$ وهمچنین $x=2$ نیزبرقرار است. درازاء این دومقدار از x داریم :

$$\begin{cases} -A+\frac{B}{2}=-1 \\ A+\frac{B}{4}=3 \end{cases} \Longrightarrow A=\frac{7}{3} \text{ و } B=\frac{8}{3}$$

توجه ـ راه‌حل اخیروقتی قابل اطمینان است که تعداد اعدادی که درتساوی‌صدق می‌کنند ازدرجهٔ چندجمله‌ای‌تساوی بیشترباشد.

اگرتساوی $P(x)=Q(x)$ که‌درآن بزرگترین درجهٔ x برابر n است درازاء بیش‌از n مقدار ازx برقرارباشددراین صورت نسبت به x یك‌اتحاد خواهد بود.

آموزش سادهٔ

نظریهٔ مجموعه‌ها

باروش برنامه‌ای

به دنبال آخرین موضوع مجلهٔ قبل، اولین موضوع این مجله رادردفترچه بنویسید. یك بار به‌دقت آنرا بخوانید. به‌سادگی خواهید فهمید که جای خالی را باچه چیزباید پر کنیدیااگرپرسشی شده است پاسخ آن چیست. بعدازآنکه این پاسخ را درزیرپرسش نوشتید، یاجای خالی را باموضوع مربوط پر کردید، آنگاه صفحهٔ مجله رابرگردانید و درست درپشت محل همان موضوع، پاسخ آن را مشاهده کنید. اگرپاسخی که‌شمانوشته‌ایددرست بوده‌است، آنگاه موضوع شمارهٔ بعدرایافته به‌ترتیب بالاآنرا دردفترچهٔ خودبنویسید وپاسخ آن رامعلوم کنید. اما اگرپاسخ‌شمادرست نبوده است، موضوع‌قبلی رامجدداًوبادقت بیشتربخوانیدتا پاسخ درست آنرا دریابید. بعد ازاطمینان‌ازدرست بودن پاسخ هرموضوع، موضوع شمارهٔ بعدآن را بنویسید وپاسخ دهید.

توجه داشته باشید که‌قبل ازآنکه پاسخ هرموضوع‌راشخصاً معلوم نکرده‌اید به‌پشت‌صفحه‌مراجعه‌نکنید. بااین روش، بدون نیاز به معلم ویابه‌کتاب دیگر، مفاهیم تازه‌ای را به سادگی و به‌آسانی خواهیدآموخت.

دنباله‌ازصفحه ۸۲

در روی AC از نقطهٔ C طول AB را جدا میکنیم تا نقطهٔ S_1 بدست‌آید و ازآنجا عمودی اخراج می‌کنیم که AB را در P_1 قطع کند آن‌وقت:

$$AP_1 = AB - P_1B = AB - AS_1$$

همچنین AP_1 و AS_1 باز با AP قابل سنجش اند. باز روی AP_1 طول P_1P_2 مساوی AS_1 را جدامی‌کنیم و P_2S_2 را عمود بر AB رسم می‌کنیم آن‌وقت AP_2 و AS_2 با AP قابل سنجش می‌باشند وهمین عمل را ادامه می‌دهیم تا AP_n و AS_n بدست آیندکه آنها هم بایدبا AP قابل سنجش باشند ولی $AP_n < AP$ و این غیر ممکن است. بنابراین $\sqrt{2}$ اصم است.

۹ـ نظریهٔ معادلات ـ اگر $a = \sqrt{2}$ فرض شود در این صورت a رشهٔ معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ است. حال اگر:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

معادله‌ای باشد باضرایب a_0 و a_1 و ... و a_n دراین صورت $x = \frac{s}{r}$ یك‌جواب گویا است که باید r ضریب a_n و s_1 ضریب a_0 را عاد نماید اما $x^2 - 2 = 0$ یك جوابش $x = \frac{a}{b}$ است یعنی $b = 1$ که خلاف فرض است زیرا در این‌صورت $a = \sqrt{2}$ خواهد شدکه درست‌نیست پس $\sqrt{2}$ اصم است.

عجایب اعداد

ترجمهٔ: **فتح‌الله زرگری**

* عدد $(444)_x$ که درپایهٔ دلخواه $x > 5$ نوشته شده است دارای این خاصیت‌است که‌اگربه‌مبنای فرد $t = 2x - 1$ برده شود، همیشه باسه رقم ۱، ۴ و ۷ نوشته می‌شود. مثلا:

$$444_5 = 147_9 \quad , \quad 444_6 = 147_{11} \quad , \quad 444_7 = 147_{13} \quad , \dots$$

بطورکلی تساوی $(444)_x = (147)_{2x-1}$ درازاء همهٔ مقادیر $x \geqslant 5$ صادق است.

* عدد $(\overline{aaaa})_5$ اگربه مبنای ۱۲ برده شود به صورت $(\overline{aa0})_{12}$ درمی‌آید. مثلا:

$$1111_5 = 110_{12} \quad , \quad 2222_5 = 220_{12} \quad , \quad 3333_5 = 330_{12} \quad , \dots$$

۱۸

مجموعهٔ روزهای هفته را با J می‌نمائیم.
تمام عضوهای این مجموعه عبارتند از :
شنبه ، یکشنبه ، دوشنبه ، سه‌شنبه ، چهارشنبه ، پنجشنبه
جمعه
همهٔ این عضوها این‌خاصیت را دارندکه .....

خیر

۲۲

مجموعهٔ V حروف صدا دار الفبای لاتن یک مجموعهٔ **متناهی** است.
مجموعهٔ N اعداد طبیعی یك مجموعهٔ **نامتناهی** است .
مجموعهٔ J روزهای هفته یك مجموعهٔ ..... است .
مجموعهٔ مضربهای ۵ یك مجموعهٔ ..... است.

عدد اصلی

۲۶

هر گاه داشته باشیم :
E={۱۰ ، ۲۰ ، ۳۰ ، ۴۰ ، ۵۰}
عدد اصلی مجموعهٔ E برابر است با .....

هیچ

۳۰

چند فصل از سال وجود داردکه هرکدام شامل دو جمعه است ؟....
مجموعهٔ فصلهای سال‌که هرکدام شامل دوجمعه باشد مجموعه‌ای ..... است

هیچ

۳۴

نشانهٔ Ø یعنی.....

Ø

۲۱

در مجموعهٔ :

$V=\{a, e, i, o, u, y\}$

می‌توانیم **همهٔ** عضوها را داخل یك آکولاد قراردهیم.

هرگاه N مجموعهٔ عددهای طبیعی باشد:

$N=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ...\}$

آیا می‌توانیم همهٔ عضوهای آن را در داخل آکولاد بنویسیم؟...

روز هفته‌اند

۲۵

مجموعهٔ فصلهای سال را با S می‌نمائیم:

$S=\{$زمستان، پائیز، تابستان، بهار$\}$

۴ عبارتست از . . . مجموعهٔ S

متناهی

نامتناهی

۲۹

مجموعهٔ ماههای۳۲ روزه بدون عضو است. می‌گوئیم که این مجموعه تهی است.

مجموعهٔتهی مجموعه‌ای است‌که . . . عضو ندارد

۵

۳۳

۱، ۳، ۵، ۷، و غیره، همچنین ۱۷، ۱۹، و غیره عددهای فرد می‌باشند.

مجموعهٔ عددهای فردراکه درضمن بر ۲ بخش‌پذیر باشند با H می‌نمائیم.

مجموعهٔ H چند عضو دارد؟...

علامت طرف دوم تساوی زیر را بنویسید:

$H=....$

هیچ

تهی

مجموعهٔ تهی

(دنباله درشمارهٔ بعد)

۱۹

J مجموعهٔ روزهای هفته است .

در دوسطر زیرعلامتهای مربوط را قراردهید :

J .... دوشنبه

J .... اردیبهشت

آکولادها فراموش شده‌اند :

$V = \{a ، e ، i ، o ، u ، y\}$

۲۳

V مجموعهٔ حرفهای صدادار لاتن است :

$V = \{a ، e ، i ، o ، u ، y\}$

این مجموعه چند عضودارد ؟

.....

۷

۲۷

F مجموعه‌ای است‌که ۱۲ عضودارد .

می گوئیم‌که ۱۲ عبارتست از ... مجموعهٔ F

هیچ

۳۱

مجموعهٔ فصلهایی از سال راکه هرکدام فقط شامل ۲ جمعه هستند با D می‌نمائیم .

D یك مجموعهٔ تهی است .

این موضوع را با علامت چنین می‌نویسیم :

$D = \emptyset$

علامت $\emptyset$ یعنی مجموعهٔ ....

$\emptyset$

۲۰

مجموعهٔ J را می‌توانیم به‌صورت زیرنشان دهیم :

J = { شنبه ، یکشنبه ، دوشنبه ، سه‌شنبه ، چهارشنبه ، پنجشنبه ، جمعه }

همهٔ عضوهای مجموعهٔ J **داخل دو آکولاد** گردآوری شده‌اند تامعلوم شودکه آنها مجموعه‌ای تشکیل داده‌اند.

اگر V مجموعهٔ حرفهای صدا دار الفبای لاتن باشد و چنین نوشته‌باشیم :

V = a ، e ، i ، o ، u ، y

چه چیزرافراموش‌کرده‌ایم؟ آنرا درجای خودبنویسید.

∈

∉

۲۴

می‌گوئیم که ۶ **عدداصلی** مجموعهٔ V است . عدد اصلی مجموعهٔ J، مجموعهٔ روزهای هفته، چند است ؟

۶

۲۸

چندماه ۳۲ روزه وجود دارد ؟

. . . . . .

عدد اصلی

۳۲

اگر K یك مجموعهٔ تهی باشد ،

می‌توانیم چنین بنویسیم :

K = ...

تهی

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۷۸

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۷۸/۱ـ از عبدالوهاب فخریاسری

اولا عبارت P به شرح زیررا به ضرب دوعامل تجزیه کنید :

$$P = ax^2 + by^2 + cz^2 + xy(a+b) + yz(b+c) + zx(c+a)$$

ثانیاً هر گاه x و y و z هرسه مثبت و a و b و c هرسه منفی باشند ، ثابت کنید که P منفی است .

حل ـ اولا به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

$$P = ax(x+y+z) + by(y+x+z) + cz(z+y+x)$$

$$P = (x+y+z)(ax+by+cz)$$

ثانیاً چون x و y و z هر سه مثبتند پس عامل $x+y+z$ از P مثبت است و چون a و b و c هرسه‌منفی‌اند پس ax و by و cz نیز هرسه منفی‌اند و عامل $ax+by+cz$ منفی است . بنابراین P حاصل‌ضرب دوعامل مختلف‌العلامت است‌ومنفی است .

۷۸/۲ـ از همایون مرادی ، دبیرستان بحرالعلوم بروجرد .

عبارت زیررا به‌مجموع چند مربع تبدیل کنیدومعلوم کنید که به‌ازای چه مقادیری از x و y و z کمترین‌مقدارخودرادارد :

$$P = 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2yz + 2x + 12$$

حل ـ عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

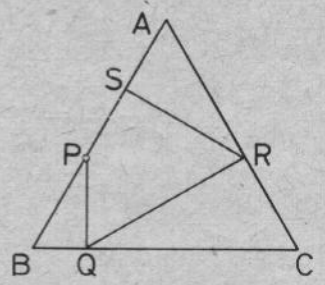
$$P = (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2yz + z^2) + 11$$

$$P = (x+y)^2 + (x-z)^2 + (x+1)^2 + (y+z)^2 + 11$$

عبارت P برابر است باحاصل جمع عدد ۱۱ باچهارمقدار نامنفی وکمترین مقدارP وقتی است که این‌هرچهار مقداربرابر صفر باشند ، یعنی :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \\ x+1=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

۷۸/۳ـ مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع a مفروض است. برضلع AB نقطهٔ P را به فاصلهٔ $AP = x$ از A درنظر می‌گیریم وازآن عمود PQ را برضلع BC واز Q عمود QR را برضلع CA وبالاخره از R عمود RS را برضلع AB رسم می‌کنیم. طول AS رابرحسب a و x حساب کنیدومقدار x رابرحسب a معلوم کنید برای آنکه S بر P منطبق باشد.



حل ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ PBQ اندازهٔ زاویهٔ P برابر ۳۰ درجه است پس BQ نصف BP است و داریم :

$$BQ = \frac{BP}{2} = \frac{AB - AP}{2} = \frac{a-x}{2}$$

همچنین در مثلثهای CRQ و ARS داریم:

$$CR = \frac{QC}{2} \text{ و } AS = \frac{AR}{2}$$

$$CQ = BC - BQ = a - \frac{a-x}{2} = \frac{a+x}{2}$$

$$CR = \frac{a+x}{4} \text{ و } AR = a - \frac{a+x}{4} = \frac{3a-x}{4}$$

$$AS = \frac{CR}{2} = \frac{3a - x}{8}$$

برای‌آنکه S بر P منطبق باشد باید داشته باشیم :

$$AS = AP \Longrightarrow x = \frac{3a - x}{8} \Longrightarrow x = \frac{a}{3}$$

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۷۸/۴- از سعید فرشاد

هرگاه داشته باشیم :

$$x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \ldots + \frac{1}{x^{2n}} = 2n$$

نتیجه بگیرید که : $x = \pm 1$

حل- رابطهٔ داده شده را چنین می‌نویسیم :

$$(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2) + (x^4 + \frac{1}{x^4} - 2) + \ldots + (x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}} - 2) = 0$$

$$(x - \frac{1}{x})^2 + (x^2 - \frac{1}{x^2})^2 + \ldots + (x^n - \frac{1}{x^n})^2 = 0$$

این تساوی‌وقتی‌صادق است که داشته باشیم :

$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{و} \quad x^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{و} \ldots$$

$$\text{و} \quad x^n - \frac{1}{x^n} = 0$$

از این تساویها خواهیم داشت :

$$x = \frac{1}{x} \quad \text{یا} \quad x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

۷۸/۵- فرستنده : **جواد فیض** از دانشگاه تبریز

به فرض آنکه :

$$x_n = an^2 + bn + c$$

باشد مقادیر a و b و c را معلوم‌کنیدکه داشته باشیم :

$$x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = -n^2$$

حل- بنابه فرض، رابطهٔ داده شده چنین می‌شود:

$$(an^2 + bn + c) - [a(n-1)^2 + b(n-1) + c] - [a(n-2)^2 + b(n-2) + c] = -n^2$$

$$-an^2 + (6a - b)n - 5a + 3b - c = -n^2$$

$$\begin{cases} -a = -1 \\ 6a - b = 0 \\ -5a + 3b - c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 13 \end{cases}$$

۷۸/۶- مقادیر عددی x و y را از رابطهٔ زیر بدست آورید :

$$9^{x^2} \times 25^{y^2} = 27 \times 3^{-x} \times 5^y$$

حل- رابطه‌را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$3^{2x^2} \times 5^{2y^2} = 3^3 \times 3^{-x} \times 5^y$$

$$3^{2x^2 + x - 3} = 5^{y - 2y^2}$$

این تساوی تنها وقتی ممکن است که :

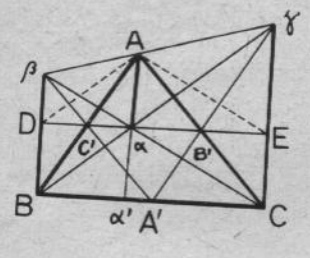
$$\begin{cases} 2x^2 + x - 3 = 0 \\ y - 2y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} (x-1)(2x+3) = 0 \\ y(1 - 2y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۷۸/۷- ازمجلهٔ تربیت ریاضی

درمثلث غیرمشخص ABC هرگاه A' وسط BC و B' وسط CA و C' وسط AB و α نقطهٔ دلخواهی از $B'C'$ باشد ، دوخط $A'C'$ و $C\alpha$ یکدیگر را در β ودوخط $A'B'$ و $B\alpha$ یکدیگر رادر γ قطع می کنند. ثابت کنید که‌اولا سه‌خط $A\alpha$ و $B\beta$ و $C\gamma$ متوازیند . ثانیاً سه نقطهٔ A و β و γ بر یک خط مستقیم واقعند .

حل- خط $B'C'$ را امتداد می‌دهیم تا $B\beta$ را در D و $C\gamma$ را در E قطع کند. چون B' وسط AC و C' وسط AB است پس DE با BC موازی است. خط $A'\gamma$ میانهٔ مثلث γBC است پس αE موازی با BC را نصف می‌کند یعنی B' وسط αE است. دو خط AC و αE منصف‌یکدیگرندپس چهار ضلعی $A\alpha CE$ متوازی‌الاضلاع است و $A\alpha$ با $C\gamma$ موازی است.



همچنین C' وسط αD است و چهار ضلعی $A\alpha BD$ متوازی‌الاضلاع و BD یعنی $B\beta$ با $A\alpha$ موازی است .

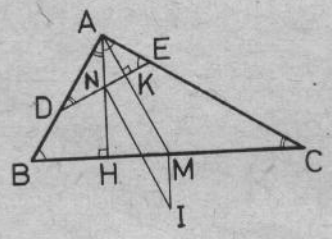
ثانیاً هرگاه نقطهٔ تلاقی $A\alpha$ را با خط $\beta\gamma$ به A'' وبا خط BC به α' نشان دهیم چون α نقطهٔ تلاقی دوقطرذوزنقهٔ $B\beta\gamma C$ و $A''\alpha'$ از α گذشته با دوقاعدهٔ ذوزنقه موازی وبین دوساق محصوراست پس α وسط $A''\alpha'$ است یعنی $A''\alpha = \alpha\alpha'$. از طرف دیگر درمثلث $AB\alpha'$ چون C' وسط AB و $C'\alpha$ با $B\alpha'$ موازی است پس α وسط $A\alpha'$ است یعنی $A\alpha = \alpha\alpha'$. بنابراین $A''\alpha = A\alpha$ و A'' بر A منطبق است . به‌عبارت دیگر نقطهٔ A برخط $\beta\gamma$ قرار دارد .

۷۸/۸- ازمجلهٔ تربیت ریاضی

مثلث ABC قائمه در زاویهٔ A مفروض است. نقطهٔ D را برضلع AB درنظر می گیریم وازآن خطی چنان رسم می کنیم که AC را درE قطع کند بقسمی که زاویهٔ ADE با زاویهٔ ACB برابر باشد .

۱) ثابت کنید که ارتفاع و میانهٔ نظیر وتر هریك از دو مثلث ABC و ADE به‌ترتیب میانه وارتفاع نظیر وتر مثلث دیگر است .

۲) اگر I نقطهٔ تلاقی عمودمنصف BC با عمودمنصف DE باشد ، ثابت کنید که فاصلهٔ I از BC برابر بانصف DE و فاصلهٔ آن از DE برابربانصف BC است. نقطهٔ D راچگونه انتخاب کنیم تا فاصلهٔ I از BC برابر بانصف ارتفاع AH ازمثلث ABC باشد .



حل-۱) ارتفاع AH از مثلث ABC و میانهٔ AM از این مثلث خط DE را به ترتیب در N و K قطع می کنند . اولا چون AH بر BC عمود است پس زاویه‌های B و CAH باهم و همچنین زاویه‌های C و BAH با هم برابرند . از طرف دیگر بنابه‌فرض زاویهٔ C با زاویهٔ ADE برابر است پس زاویهٔ B با زاویهٔ AED برابر است و نتیجه می‌شود که $ADE = DAH$ و $AED = EAH$ پس هر یك ازدومثلث ADN و ANE متساوی‌الساقین است و داریم :

$$DN = NA \text{ و } NE = NA \Longrightarrow DN = NE$$

یعنی AN ، که همان AH است ، میانهٔ ضلع DE از مثلث ADE است .

ثانیاً چون AM میانهٔ ضلع BC از مثلث ABC است پس بانصف وتر برابر است و مثلث AMC متساوی الساقین است و $ACM = MAC$ اما $ACM = ADE$ پس $ADE = KAE$ و چون KAE متمم KAD است پس ADK متمم KAD است و زاویهٔ DKA قائمه است یعنی AK ، که همان AM است ، بر DE عمود است .

۲) دو خط AM و NI که هردو بر DE عمودند باهم موازیند . همچنین دوخط MI و AN که هردو بر BC عمودند با هم موازیند . بنابراین چهارضلعی ANIM متوازی‌الاضلاع است و IM با NA و IN با MA برابراست . اما NA نصف DE و MA نصف BC است پس IM نصف DE و IN نصف BC است .

برای آنکه IM نصف AH باشد باید N وسط AH باشد . دراین حالت برای تعیین D از وسط AH خطی چنان رسم می کنیم که بر AM عمود باشد . از تلاقی این خط با AB نقطهٔ D بدست می آید .

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۷۸/۹- در صفحهٔ محورهای مختصات ، سه نقطهٔ A(-۱و۲) و B(۳و۰) و C(۵ و ۴) داده شده است . اولا نقطهٔ M را تعیین کنید برای آنکه داشته باشیم :

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 \quad \text{و} \quad \overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = \overline{BC}^2$$

ثانیاً مقدار :

$$\overline{MC}^2 - \overline{MA}^2$$

را حساب کنید .

حل- بافرض M (xوy) داریم :

$$[(x+1)^2 + (y-2)^2] - [(x-3)^2 + y^2] = (-1-3)^2 + 2^2$$

$$[(x-3)^2 + y^2] - [(x-5)^2 + (y-4)^2] = (5-3)^2 + 4^2$$

از این روابط بعد از ساده‌کردن نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + 2y = 13 \end{cases} \Longrightarrow x = 5 \text{ و } y = 4$$

داریم M-(۵ و ۴) یعنی نقطهٔ M بر نقطهٔ C منطبق است .

ثانیاً داریم :

$$\overline{MC}^2 - \overline{MA}^2 = 0 - \overline{CA}^2 = -[(5+1)^2 + (4-2)^2] = -40$$

۷۸/۱۰ - فرستنده **کامران پارسای قمی**

هرگاه α و β کمانهای حاده باشند ثابت کنید که :

$$2 + tg\alpha + tg\beta < \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{2}{\cos\beta}$$

حل- داریم :

$$1 + tg\alpha = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} < \frac{2}{\cos\alpha}$$

$$1 + tg\beta = \frac{\sin\beta + \cos\beta}{\cos\beta} < \frac{2}{\cos\beta}$$

از جمع طرفین دونامساوی نتیجه می‌شود :

$$2 + tg\alpha + tg\beta < \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{2}{\cos\beta}$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۷۸/۱۱- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

به فرض‌آنکه a و b دو عدد حقیقی و $a \neq 0$ باشد و داشته باشیم :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + \frac{1}{xy} = a \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 - \frac{1}{x^2y^2} = b^2 + 2 \end{cases}$$

ثابت‌کنیدکه در ازاء هر مقدار حقیقی یا موهومی از x و y ، مقدار $x^2 + y^2$ عددی است حقیقی .

حل- دستگاه را به‌صورت‌زیر می‌نویسیم :

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - a)^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2 \\ (x^2 + y^2)^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + b^2 + 2 \end{cases}$$

از تفریق نظیر به‌نظیر طرفین دو معادله نتیجه می‌شود :

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2 - a)^2 = b^2$$

$$2a(x^2 + y^2) = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2a}$$

چون a و b عددهای حقیقی‌اندپس $\frac{a^2 + b^2}{2a}$ یعنی $x^2 + y^2$ عدد حقیقی است .

۷۸/۱۲- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$\sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}$$

حل- بافرض $\sqrt{2x - 5} = t \geq 0$ داریم

$$x = \frac{t^2 + 5}{2}$$

و خواهیم داشت :

$$\sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 + 6t + 9} = 14$$

$$\sqrt{(t + 1)^2} + \sqrt{(t + 3)^2} = 14$$

$$|t + 1| + |t + 3| = 14$$

چون t مثبت است پس $t + 1$ و همچنین $t + 3$ مثبت است و داریم :

$$t + 1 + t + 3 = 14 \Longrightarrow t = 5$$

$$x = \frac{25 + 5}{5} = 6$$

۷۸/۱۳- از محمد زارعی

از معادلهٔ زیر مقدار x را بدست‌آورید :

$$3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$$

حل- معادله را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$3^{\sin^2 x} + 3^{1 - \sin^2 x} = 4$$

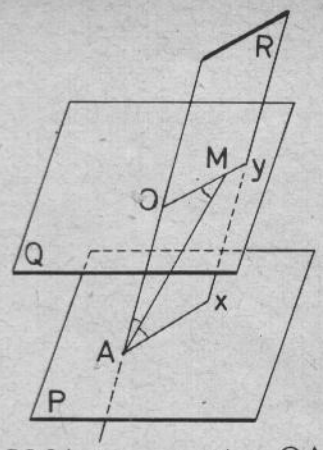
با فرض $3^{\sin^2 x} = t$ داریم :

$$t + \frac{3}{t} = 4 \Longrightarrow t = 1 \text{ یا } 3$$

$$3^{\sin^2 x} = 3 \Longrightarrow \sin^2 x = 1 \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$3^{\sin^2 x} = 1 \Longrightarrow \sin^2 x = 0 \Longrightarrow x = k\pi$$

۷۸/۱۴- صفحهٔ P وخط △ که در A باآن متقاطع‌است مفروض است. برخط △ نقطهٔ O را اختیار می‌کنیم و برآن صفحهٔ Q را موازی باصفحهٔ P می‌گذرانیم. صفحهٔ R که برخط △ بگذرد صفحهٔ P رادر Ax قطع می‌کند. هر گاه M نقطهٔ تلاقی نیمساز زاویهٔ OAx با صفحهٔ Q باشد وقتی که صفحهٔ R حول △ بچرخد مکان M چیست ؟



حل- اگر فصل مشترك صفحهٔ R با صفحهٔQخط Oy باشد نقطهٔ M بر Oy واقع است و چون OM با Ox موازی است دو زاویهٔOMAوMAx متساویند وچونOM نیمساززاویهٔ OMx است‌پس‌دوزاویهٔOMAوOAM متساویند . مثلث OMA متساوی‌الساقین است و $OM = OA$

هر گاه صفحهٔ R حول OA بچرخد طول OA ثابت است در نتیجه طول OM نیز ثابت است و مکان M در صفحهٔ Q دایره‌ای است به مرکز O و به شعاع برابربا OA .

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۷۸/۱۵- از سعید فرشاد

هر گاه :

$$y = \frac{\cos 2x}{\sin 4x}$$

و y' مشتق y و y'' مشتق y' باشد ثابت‌کنیدکه :

$$\frac{y''y - 2y'^2}{y^3} = 8\sin 2x$$

حل- داریم

$$\frac{1}{y} = \frac{2\sin 2x\cos 2x}{\cos 2x} = 2\sin 2x$$

از طرفین این رابطه مشتق می گیریم:

$$\frac{-y'}{y^2} = 4\cos 2x$$

بازهم از طرفین مشتق می گیریم :

$$\frac{y''y^2 - 2yy'^2}{y^4} = \frac{y''y - 2y'^2}{y^3} = 8\sin 2x$$

یکان- با توجه به اینکه

$$\frac{1}{y} = 2\sin 2x$$

است رابطهٔ اخیر به صورت زیر درمی‌آید :

$$y''y - 2y'^2 = 4y^2$$

۷۸/۱۶- کلیهٔ مقادیر x و y راکه در رابطهٔ زیرصدق می‌کنند بدست آورید:

$$\sin(x-y) + \cos(x+y) = 2$$

حل- با توجه به اینکه

$$\cos(x+y) \leq 1 \quad \text{و} \quad \sin(x-y) < 1$$

است‌نتیجه می‌شودکه :

$$\begin{cases} \sin(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y = 2k_1\pi + \frac{\pi}{2} \\ x + y = 2k_2\pi \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad y = k'\pi - \frac{\pi}{4}$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۷۸/۱۷- از مرتضی عطار دانشجوی دانشکدهٔ فنی تهران

تابع $f(x \text{ و } y) = 0$ را مشخص کنید بنابر آنکه منحنی نمایش هندسی‌آن ازمبدأ مختصات بگذرد و داشته باشیم :

$$y' = \frac{-3x^2 - 2y}{2x + 2y}$$

حل- باتوجه‌به‌اینکه‌از $f(x \text{و} y) = 0$ نتیجه‌می شودکه $y' = \frac{-f'_x}{f'_y}$ داریم :

$$f'_x = 3x^2 + 2y \quad \text{و} \quad f'_y = 2x + 2y$$

از اولین رابطه نتیجه می‌شودکه :

$$f = x^2 + 2xy + g(y)$$

از طرفین این رابطه نسبت به y مشتق می گیریم :

$$f'_y = 2x + g'(y) = 2x + 2y$$

$$g'(y) = 2y \Longrightarrow g(y) = y^2 + k$$

$$f(x \text{و} y) = x^2 + 2xy + y^2 + k$$

$$f(0 \text{و} 0) = 0 \Longrightarrow k = 0$$

$$f(x \text{و} y) = x^2 + 2xy + y^2$$

۷۸/۱۸- از داوید ریحان

شرطی را تعیین‌کنید تا مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع زیر با هم برابر باشند :

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

حل- تابع را نسبت به x مرتب می‌کنیم :

$$(a'y - a)x^2 + (b'y - b)x + c'y - c = 0$$

$$\triangle = (b'y - b)^2 - 4(a'y - a)(c'y - c) = 0$$

$$(b'^2 - 4a'c')y^2 + 2(a'c + ac' - bb')y + b^2 - 4ac = 0$$

مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع ریشه‌های این معادله‌اند. پس برای اینکه با هم برابر باشند باید داشته باشیم :

$$\triangle' = (a'c + ac' - bb')^2 - (b'^2 - 4a'c') \times (b^2 - 4ac) = 0$$

۷۸/۱۹- از داوید ریحان

معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M به مختصات پارامتری زیر را بدست‌آورید :

$$M \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a + (d-b)tg\varphi + c\,tg^2\varphi}{1 + tg^2\varphi} \\ y = \dfrac{d + (c-a)tg\varphi + b\,tg^2\varphi}{1 + tg^2\varphi} \end{array} \right.$$

حل- روابط بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\begin{cases} x = a\cos^2\varphi + (d-b)\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi \\ y = d\cos^2\varphi + (c-a)\sin\varphi\cos\varphi + b\sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+c}{2} + \dfrac{a-c}{2}\cos 2\varphi + \dfrac{d-b}{2}\sin 2\varphi \\ y = \dfrac{d+b}{2} - \dfrac{a-c}{2}\sin 2\varphi + \dfrac{d-b}{2}\cos 2\varphi \end{cases}$$

$$\left(\frac{a-c}{2}\cos 2\varphi + \frac{d-b}{2}\sin 2\varphi\right)^2 + \left(-\frac{a-c}{2}\sin 2\varphi + \frac{d-b}{2}\cos 2\varphi\right)^2 = \frac{(a-c)^2 + (d-b)^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{d+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2 + (d-b)^2}{4}$$

۷۸/۲۰- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

ثابت‌کنیدکه به ازاء جمیع مقادیر x داریم :

$$\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) < \frac{1}{4}$$

حل- خواهیم داشت :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}\sin x\cos 2x = \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x)$$

$$\left|\frac{1}{4}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin x\right| = \left|\frac{1}{4}\sin 3x\right|$$

$$|\sin 3x| < 1 \implies \left|\frac{1}{4}\sin 3x\right| < \frac{1}{4}$$

۷۸/۲۱- از سید جمال آشفته

درمبنای‌عدد نویسی $m < 10$ عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ راتعیین کنیدکه a واسطهٔ حسابی b و c بوده وداشته باشیم :

$$(\overline{abc})_m - (\overline{cba})_m = (\overline{aa})_m + (\overline{bb})_m$$

حل- ازبسط رابطهٔ مفروض نتیجه می‌شود :

$$(a-c)m^2 + (c-a) = (a+b)(m+1)$$

$$(a-c)(m-1) = a+b$$

با فرض :

$$a = x \quad \text{و} \quad b = x+1 \quad \text{و} \quad c = x-1$$

خواهیم داشت :

$$x = \frac{m-2}{2}$$

از این رابطه با توجه به اینکه : $x + 1 < m < 10$

نتیجه خواهد شدکه :

$$m = 4, 6, 8, 10 \text{ و } x = 1, 2, 3, 4$$

$$(\overline{abc})_m = (120)_4 \text{ یا } (231)_6 \text{ یا } (342)_8 \text{ یا } (453)_{10}$$

۷۸/۲۲- از داوید ریحان

تساوی زیررا ثابت‌کنید :

$$(1\underbrace{99\ldots9}_{n\text{مرتبه}}8)^2 = 3\underbrace{99\ldots9}_{n\text{مرتبه}}\underbrace{00\ldots0}_{n\text{مرتبه}}4$$

حل- طرف اول تساوی برابر است با :

$$[8 + 9(10 + 10^2 + \ldots + 10^n) + 10^{n+1}]^2$$

$$=[8+9\times\frac{10^{n+1}-10}{9}+10^{n+1}]^2=$$

$$=[2\times10^{n+1}-2]^2=4(10^{n+1}-1)^2$$

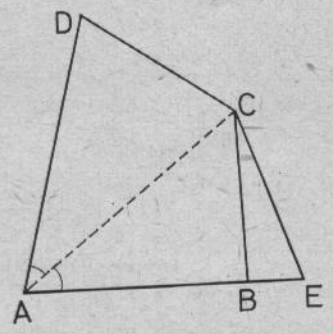
طرف دوم تساوی برابر است با :

$$4+2\times10^{n+1}+9\times10^{n+2}(1+10+10^{n-1})+$$
$$+3\times10^{2n+2}=4+2\times10^{n+1}+$$
$$+9\times10^{n+2}\times\frac{10^n-1}{9}+3\times10^{2n+2}=$$
$$=4+20\times10^n+10^{2n+2}-$$
$$10^{n+2}+3\times10^{2n+2}$$
$$=4+4\times10^{2n+2}-80\times10^n=$$
$$4(10^{2n+2}-2\times10^{n+1}+1)=4(10^{n+1}-1)^2$$

۷۸/۲۳- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

اندازه‌های چهارضلع چهارضلعی ABCD داده شده‌است و می‌دانیم که قطر AC زاویهٔ A را نصف می‌کند . مطلوبست ترسیم این چهارضلعی .

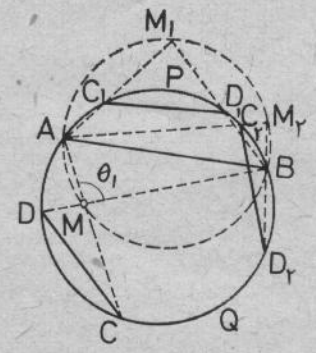
حل - ضلع AB را رسم می‌کنیم وروی آن ابتدا از A نقطهٔ E را جدا می‌کنیم که $AE=AD$ باشد. به ضلع BE مثلث BCE را می‌سازیم که $CE=CD$ و BC به اندازهٔ معلوم باشد و AC را رسم می‌کنیم . قرینهٔ E را نسبت به AC بدست می‌آوریم که D رأس دیگر چهارضلعی است. زیرا AC نیمساز زاویهٔ A و $CD=CE$ و $AD=AE$ خواهد بود .



۷۸/۲۴- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

دایرهٔ ثابت Γ ووتر ثابت AB به‌طول $2a$ ازآن‌مفروض است . دراین دایره وتر متحرك CD به طول ثابت $2b$ را درنظر می‌گیریم وخطوط AC و BD را رسم می‌کنیم که یکدیگر را در M قطع می‌کنند. مکان هندسی نقطهٔ M چیست

حل- وتر AB دایره را به دو کمان تقسیم می‌کند . کمان کوچکتر را با APB و دیگری را با AQB نشان می‌دهیم. نقاط C و D را چنان در نظر می‌گیریم که AB با CD



همواره دریك جهت باشد وفرض می‌کنیم :

$$\widehat{CD}=\beta \quad و \quad \widehat{APB}=\alpha$$

هرگاه C و D هردوروی AQB باشند اندازهٔ AMB برابر خواهد بود با :

$$\theta_1=\frac{\widehat{APB}+\widehat{CD}}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

دراین حال مکان M کمان در خور زاویهٔ θ_1 است که بر A و B می‌گذرد وداخل قطعهٔ AQB قراردارد .

هرگاه C و D هردو روی APB باشند (مثلا C_1 و D_1) دراین حال اندازه زاویهٔ M_1 برابر خواهد بود با :

$$\theta_2=\frac{\widehat{AQB}-\widehat{C_1D_1}}{2}=\frac{2\pi-\alpha-\beta}{2}=$$
$$=\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$$

زاویهٔ θ_2 متمم زاویهٔ θ_1 است پس M_1 بر دایرهٔ محیطی AM_1B قرار دارد .

هرگاه C و D در طرفین AB قرار داشته باشند (مثلا به وضع C_2 و D_2) در این صورت اندازهٔ زاویهٔ M_2 برابر است با :

$$\theta_2=\frac{\widehat{AQD_2}-\widehat{BC_2}}{2}=\frac{\widehat{AQB}-\widehat{BD_2}-\widehat{D_2C}}{2}$$
$$=\frac{\widehat{AQB}-\widehat{CD}}{2}=\theta_2$$

در این حال M_2 نیز بر همان دایرهٔ محیطی مثلث AMB قرار دارد .

بنابراین اگریك وضع خاص از CD را درنظر گرفته نقطهٔ M نظیر آن را تعیین کنیم ودایرهٔ γ دایرهٔ محیطی مثلث AMB را رسم کنیم ، این دایرهٔ γ مکان M است .

پاسخ تستهای ریاضی

۷۸/۲۵-(ج) هرگاه :

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad و \quad f(y)=f(x)$$

باشد داریم :

$$ay^2+by+c=ax^2+bx+c$$
$$a(y^2-x^2)+b(y-x)=0$$

$$(y-x)(ay+ax+b)=0$$

$$y=x \quad \text{یا} \quad y=-x-\frac{b}{a}$$

۷۸/۲۶- (ب) هرگاه :

$$d=x-y \quad \text{و} \quad S=x+y$$

باشد داریم :

$$S^2-d^2=(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

$$S^2-d^2=N \Longrightarrow xy=\frac{N}{4}$$

۷۸/۲۷- (الف) ازتساوی :

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$$

بعداز بسط طرف دوم نتیجه می‌شود :

$$2ab+2bc+2ca=0 \Longrightarrow b=\frac{-ac}{a+c}$$

۷۸/۲۸-(ج) هرگاه :

$$y=1-x \quad \text{و} \quad 10^x=2$$

باشد داریم :

$$10^{1-y}=2 \quad \text{یا} \quad \frac{10}{10^y}=2 \Longrightarrow 10^y=\frac{10}{2}=5$$

۷۸/۲۹- (ج) تساوی :

$$a^{x+1}=a^{2x-3}$$

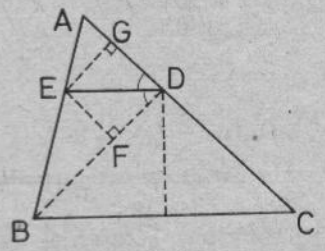
وقتی برقرار است که یا :

$$a=1 \quad \text{یا} \quad a=0$$

ویا غیرازآن داشته باشیم :

$$x+1=2x-3 \Longrightarrow x=4$$

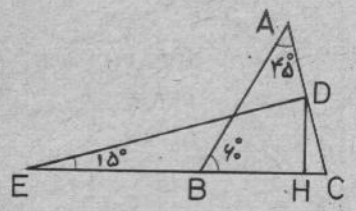
۷۸/۳۰- (ج) به فرض آنکه مثلث ABC درزاویهٔ A حاده‌ودرآن $AC>AB$ باشد ، چون عمود منصف ضلع BC رارسم کنیم که ضلع AC را در D تلاقی کند و ازD موازی با BC رسم کنیم تا AB رادر E قطع کند وعمودEF را بر BD رسم کنیم ؛



مثلث BDC متساوی‌الساقین است ودرنتیجه DE نیمساززاویهٔ ADB است. ازE عمود EG رابر ADرسم می‌کنیم. زاویهٔ A حاده است پس G بین A و D واقع می‌شود وچون E بر نیمساز زاویهٔ ADB واقع است پس :

$EF=EG$ اما $EG<EA$ پس $EF<EA$ است .

۷۸/۳۱- (د) اگر درمثلث ABC زاویهٔ A برابربا 45° وزاویهٔ B برابر با 60° باشد وD وسط AC و E نقطهٔ تلاقی عمودمنصف ضلع AC با امتداد ضلع BC باشد؛ اندازهٔ زاویهٔ C برابر با 75° بوده و در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC اندازهٔ زاویهٔ



E برابر با 15° می‌شود. می‌دانیم که اگردرمثلث قائم‌الزاویه یک‌زاویهٔ حاده 15° باشد ارتفاع‌وارد بروتر ربع‌وتر است‌یعنی:

$$DH=\frac{CE}{4}$$

۷۸/۳۲- (د) هرگاه α کمانی غیر مشخص از دایرهٔ مثلثاتی باشد برای‌آنکه در ازاء همهٔ مقادیر x داشته باشیم :

$$\sin\alpha=\frac{(m+2)x^2-mx-12}{5x^2+8x+13}$$

لازم و کافی است که‌کسر اخیر درازاء همهٔ مقادیرxمحصوربین ۱ و ۱- باشد. چون نامساوی مضاعف را ساده ومرتب‌کنیم نا مساویهای زیر حاصل می‌شودکه باید همواره برقرارباشند:

$$\begin{cases}(m-3)x^2-(m+8)x-25<0\\(m+7)x^2-(m-8)x+1>0\end{cases}$$

نظیراین نامساویها به ترتیب‌داریم :

$$\begin{cases}m-3<0\\\Delta=m^2+116m-236<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m+7>0\\\Delta=m^2-20m+36<0\end{cases}$$

پس ازتعیین جوابهای هردستگاه‌معلوم خواهد شد که $m=2$ تنها مقداری‌است که‌درهردو دستگاه صدق می‌کند .

۷۸/۳۳- (ب) به فرض :

$$f(x)=x^2+2px+q \quad \text{معادلهٔ} \quad [f(x)]^2-1=0$$

به صورت زیر تجزیه می‌شود :

$$(x^2+2px+q+1)(x^2+2px+q-1)=0$$

ازاین تساوی دومعادلهٔ درجهٔ دوم‌بدست می‌آید که‌ریشهٔ‌مشترک ندارند وهرگاه داشته باشیم :

$$\begin{cases}\Delta'_1=p^2-q-1>0\\\Delta'_2=p^2-q+1>0\end{cases} \Longrightarrow p^2-q>1$$

هریك از این معادله‌ها دو ریشه ومعادلهٔ مفروض چهار ریشهٔ متمایز خواهد داشت .

۷۸/۳۴-(د) معادلهٔ گنك

$$\sqrt{x^2+\sqrt{2x+1}}=x$$

وقتی می‌تواند ریشه داشته باشدکه داشته باشیم :

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2+\sqrt{2x+1}\geqslant 0 \\ 2x+1\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow x\geqslant 0$$

با این شرط چون طرفین را مجذور کرده وساده کنیم :

$x=-\frac{1}{2}$ حاصل می‌شود که با شرط بالا سازگار نیست .

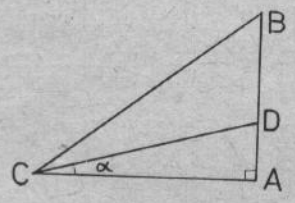
پس معادله‌ریشه ندارد .

۷۸/۳۵-(ب) هر گاه n عدد صحیح مثبت باشد ازرابطهٔ:

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{n}$$

نتیجه می‌شودکه برای $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مقادیر همعلامت وجود دارد پس انتهای کمان α یادربخش اول یادربخش سوم ازدایرهٔ مثلثاتی واقع است .

۷۸/۳۶-(ج)



درمثلث ABC زاویهٔ A قائمه و $AB=3$ و $AC=4$ است. ازC خط △ را رسم می‌کنیم که باCA زاویهٔ α بسازد.

هر گاه :

$$tg\alpha=\frac{1}{3}$$

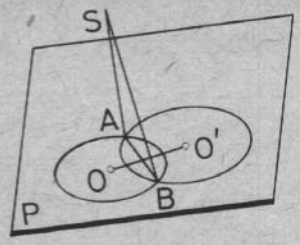
و D نقطهٔ تلاقی △ با AB باشد در مثلث ACD داریم :

$$tg\alpha=\frac{AD}{AC} \text{ یا } \frac{1}{3}=\frac{AD}{4} \Longrightarrow AD=\frac{4}{3}$$

$$\frac{AB}{2}=\frac{3}{2} \text{ و } \frac{4}{3}<\frac{3}{2} \Longrightarrow AD<\frac{AB}{2}$$

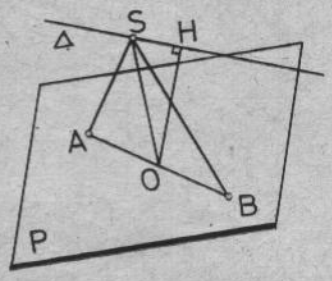
D به A نزدیکتر است تا به B . هر گاه △ را خارج زاویهٔ C رسم کنیم ، نقطهٔ D درامتداد BA وبازهم نزدیکتر به A قرار خواهد داشت .

۷۸/۳۷- (الف) درصفحهٔ P دودایره رسم می‌کنیم که



در A و B متقاطع باشند ودرA عمودی بر صفحهٔ P اخراج کرده روی آن نقطهٔ S را اختیار می‌کنیم و SB رارسم می‌کنیم. OO' خط المرکزین دو دایره بر AB وترمشترك دو دایره عمود است. وچون SA برصفحهٔ P عمود است پس برخط AB از این صفحه نیزعمود است . خط AB بردوخط متقاطع AB و AS از صفحهٔ SAB عمود است پس برهمهٔ خطوط این صفحه و از جمله بر SB عمود است .

۷۸/۳۸-(د) درصفحهٔ P دونقطهٔ A و B وخط △ غیر



واقع درصفحهٔ P مفروض است. هر گاه S نقطه‌ای از △ وزاویهٔ ASB قائمه باشد . در مثلث قائم‌الزاویهٔ ASB میانهٔ SO بانصف AB برابر است .

پس نقطهٔ S به این ترتیب بدست می‌آیدکه در صفحهٔ (△ و O) دایره‌ای به مرکز O وبه شعاع برابر بانصف AB رسم کنیم تا ازتلاقی آن با △ نقطهٔ S بدست آید .

هر گاه OH فاصلهٔ O از △ کوچکتر ازنصف AB باشد مسئله دوجواب خواهد داشت .

۷۸/۳۹-(ج) مشتق تابع :

$$x^2+x^2y+4y+4=0$$

عبارتست از :

$$y'=\frac{-3x^2-2xy}{x^2+4}$$

وضریب زاویه‌ای قائم برمنحنی نمایش تابع درنقطهٔ (۱ − و ۱) می‌شود :

$$m=\frac{-(1+4)}{-3+2}=5$$

و معادلهٔ قائم مزبور می‌شود :

$$y+1=5(x-1) \text{ یا } y=5x-6$$

۷۸/۴۰- (الف) برای آنکه معلوم کنیم منحنی به معادلهٔ

$$x^2+y^2-2xy-2x-2y=0$$

محور تقارنی سوازی با خط $y=x+1$ دارد یا نه ، خط متغیر △ عمود براین خط ، یعنی خط به معادلهٔ

$$y = -x + h$$

را درنظرمی گیریم‌واین معادله را با معادلهٔ‌منحنی حل‌می‌کنیم، نتیجه می‌شود :

$$4x^2 - 4(h+1)x + h^2 - 2h = 0$$

هرگاه M و N نقاط‌تلاقی △ بامنحنی‌باشد وقتی h تغییرکند اگرعمودمنصف MN ثابت بماند این عمودمنصف‌محورتقارن منحنی است. چون طولهای نقاطMوN ریشه‌های معادلهٔ بالا هستند پس طول نقطهٔ P وسط MN می‌شود :

$$x_P = \frac{h+1}{2}$$

واز روی معادلهٔ △ خواهیم داشت :

$$y_P = \frac{h-1}{2}$$

ازحذف h بین دو تساوی اخیر معادلهٔ مکان P به صورت :

$$y = x - 1$$

بدست می‌آید که چون بر △ عمود است پس محور تقارن منحنی است .

هرگاه به روش بالا خط موازی با :

$$y = x + 1$$

را با منحنی قطع دهیم نتیجه خواهد شدکه منحنی محورتقارنی عمودبرخط به معادلهٔ $y = x + 1$ ندارد .

۸۸/۴۱-(ج)

تابع :

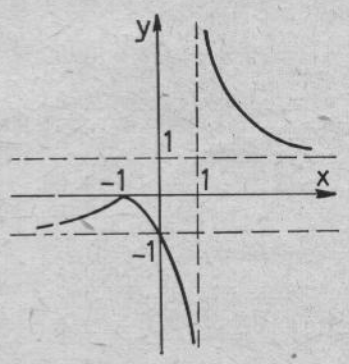
$$y = \frac{|x+1|}{x-1}$$

به دوتابع‌شرطی :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+1}{x-1} \\ x > -1 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} y = \dfrac{-x-1}{x-1} \\ x < -1 \end{cases}$$



درمی‌آید و در نتیجه منحنی نمایش هندسی آن به شکل بالا است که یك ماکسیمم دارد ومی‌نیمم ندارد .

۷۸/۴۲-(ب) اگر A و B و C زاویه‌های یك‌مثلث باشند ، رابطهٔ :

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$$

بعدازتبدیل به حاصل‌ضرب به صورت زیردرمی‌آید :

$$4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2} = 0$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که یکی از زاویه‌های مثلث برابر ۶۰ درجه است. اماهرسه‌زاویه‌باهم‌نمی‌توانند ۶۰ درجه‌باشند زیرا در این صورت رابطهٔ مفروض به صورت غلط $1 = 3 -$ درمی‌آید .

۷۸/۴۳-(ج) اگرزاویهٔ C ازمثلثی ۱۲۰درجه‌باشد. $A + B = 60^\circ$ و $3A + 3B = 180^\circ$است وداریم :

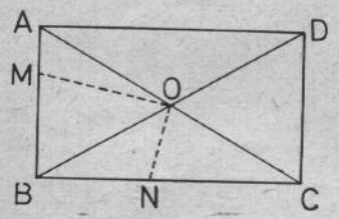
$$3A = 180^\circ - 3B \Longrightarrow tg3A = -tg3B$$ یا

$$tg3A + tg3B = 0$$

۷۸/۴۴-(د) تعداد تمام اعداد n رقمی که درنوشتن هیچیك ازآنها رقم صفربکار نرفته باشد برابر است با 9^nزیرا تعداد تمام اعدد n رقمی‌که رقم یك مرتبهٔ ازآنها صفر نباشد ۹ عدد است ، تعداد تمام اعداد n رقمی‌که رقم دو مرتبهٔ از آنها صفرنباشد 9^2 است و ....

۷۸/۴۵-(ب) تعداد تمام اعداد n رقمی‌که درنوشتن هیچك ازآنها رقم‌یك بکارنرفته باشد برابر است با$8 \times 9^{n-1}$ زیرا در هرمرتبهٔ غیراز مرتبه سمت چپ بجزیك ۹ رقم دیگر بکارمی‌رودکه یکی‌ازآنها رقم صفراست اما درمرتبهٔ سمت‌چپ غیرازیك فقط ۸ رقم دیگرمی‌تواند بکار رود زیرا رقم صفر در سمت چپ عدد بی معنی است .

۷۸/۴۶- (د)



هرمتوازی‌الاضلاع که داخل متوازی‌الاضلاع دیگر محاط شود مرکز آن برمرکزاولی‌منطبق است ، پس‌اگر مربعی قابل محاط شدن در مستطیلABCDباشد،مرکزآن‌برمرکزمستطیل‌منطبق‌خواهدبود

فرض‌کنیم M و N دورأس متوالی ازمربع MNPQ باشد، هرگاه این مربع در مستطیل ABCD محاط شده باشد بقسمی‌که M بر ABوNبرBC قرارداشته باشد چون‌دوقطر مربع متساوی ، متعامد ومنصف یکدیگرند پس هرگاه M را حول O به زاویهٔ ۹۰ درجه دوران‌دهیم‌بایدبرM منطبق شود

دنباله در صفحهٔ ۱۱۴

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۷۹/۱- از سید قاسم همایونی پنجم ریاضی دبیرستان؟
ثابت کنید که هر گاه

$$A+B+C+D=0$$

باشد خواهیم داشت:

$$A^2+B^2+C^2+D^3=3(C+D)(AB-CD)$$

۷۹/۲ - فرستنده : محمود تویسرکانی دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

با فرض $x^2+x+1=0$ مطلوبست محاسبهٔ مقدار

$$P=x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$$

۷۹/۳- فرستنده: علیرضا علیپور دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

در ذوزنقهٔ ABCD دو زاویهٔ A و B متمم یکدیگرند به فرض آنکه $AB=p$ و $CD=q$ باشد طول پاره خط MN که وسط AB را به وسط CD وصل می‌کند برحسب p و q چقدر است؟

کلاس چهارم ریاضی

۷۹/۴- از جلیل بصیریان پنجم ریاضی دبیرستان خواجه نصیر جهرم

به فرض :

$$S=a^2+b^2+c^2 \quad \text{و} \quad P=a+b+c$$

صحت تساوی زیررا تحقیق کنید :

$$(S-2a^2)(S-2b^2)+(S-2b^2)(S-2c^2)+$$
$$+(S-2c^2)(S-2a^2)=$$
$$=P(P-2a)(P-2b)(P-2c)$$

۷۹/۵ - فرستنده جواد فیض دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تبریز

ثابت کنید که هر گاه $f(x^n)$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد بر x^n-1 نیز بخش پذیر است.

۷۹/۶ - فرستنده جواد فیض .

هر گاه m و n و p عددهای مثبت باشند ثابت کنید که $S=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ بر x^2+x+1 بخش پذیر است .

۷۹/۷- فرستنده ژیان حبیب‌الله زاده چهارم ریاضی دبیرستان لامعی.

از رابطهٔ زیر مقدار x را بدست آورید.

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^x=$$
$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x$$

۷۹/۸- فرستنده : محمود تویسرکانی

از دستگاه زیر مقادیر x و y را بدست آورید:

$$\begin{cases} \log\sqrt{(x+y)^2}=1 \\ \log y-\log|x|=\dfrac{1}{\log_4 100} \end{cases}$$

۷۹/۹- فرستنده : جواد فیض

درمثلث ABC ضلع $AC=b$ ازضلع $AB=c$ بزرگتر است. از M وسط ضلع BC موازی باضلع AC رسم می‌کنیم که نیمساز زاویهٔ A را در N قطع می‌کند. طول پاره خط MN را برحسب b و c حساب کنید.

۷۹/۱۰- از احمد نبوی دبیرستان البرز

درمثلث ABC اندازه‌های زاویه‌های B و C به ترتیب 30° و 15° است. زاویهٔ میانهٔ AM با ضلع BC چقدراست؟

کلاس پنجم طبیعی

۷۹/۱۱ـ ضلعهای مربع ABCD با محورهای مختصات متوازیند و رأس A ازآن برخط △ به معادلهٔ :

$$x - 2y + 2 = 0$$

و راس B از آن برخط △، به معادلهٔ :

$$3x - 2y = 6$$

واقع است.

اولا مختصات رأسهای دو مربع را که جواب مسئله‌اند حساب کنید.

ثانیاً هرگاه P و Q مرکزهای دومربع و M نقطهٔ تلاقی دو خط △ و △، باشد نسبت دوضلع MP و MQ ازمثلث MPQ چقدر است؟

۷۹/۱۲ـ هرگاه درصفحهٔ محورهای مختصات نقطهٔ $A(tg\alpha$ و $cotg\alpha)$ برخط به معادلهٔ :

$$3x - 6y + 7 = 0$$

قرار داشته باشد مقدار $tg\alpha$ واز روی‌آن مقدار $sin\alpha$ راحساب کنید.

کلاس پنجم ریاضی

۷۹/۱۳ـ فرستنده : **همایون مرادی** دبیرستان بحرالعلوم بروجرد

معادلهٔ خطی را بنویسیدکه ازنقطهٔ $A(3$ و $2)$ گذشته و محورهای مختصات‌رادرنقاط B و C قطع کند بقسمی که مختصات این دونقطه عددهای صحیح باشند.

۷۹/۱۴ـ در صفحهٔ محورهای مختصات شش ضلعی ABCDEF را درنظرمی گیریم بقسمی که ضلعهای متقابل‌آن باهم موازی وقطر AD برضلعهای AF و CD عمود باشد هرگاه $A(2$ و $0)$ و $B(6$ و $0)$ و $E(0$ و $5)$ و $F(0$ و $1)$ باشد.

اولا ـ مختصات رأسهای دیگر شش ضلعی را حساب کنید.

ثانیاً ـ معادلات خطوط واصل بین‌اوساط ضلعهای متقابل را بنویسیدو محقق‌کنیدکه این سه خط متقاربند.

۷۹/۱۵ـ از **جواد فیض**

روی وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، مثلث متساوی‌الاضلاع DBC را می‌سازیم. هرگاه مساحت این‌مثلث n برابرمساحت مثلث ABC باشد، حدود n ومقدار $tgABC$ را حساب کنید،

۷۹/۱۶ـ در صفحهٔ محورهای مختصات هرگاه فاصلهٔ دو نقطهٔ

$A(tg\alpha$ و $2cotg\alpha)$ و $B(-3cotg\alpha$ و $3tg\alpha)$

برابر با $\sqrt{17}$ باشد، مقدار عددی مختصات دو نقطهٔ A و B را معلوم کنید.

۷۹/۱۷ـ درمنشورمنتظم‌مثلث‌القاعدهٔ $ABCA'B'C'$ طول ضلع هریك ازمثلث‌های متساوی‌الاضلاع قاعده a است. بر یال AB ازقاعدهٔ پایین و رأس C' از قاعدهٔ بالا صفحه‌ای می گذرانیم‌که مقطع آن با منشور مثلث $C'AB$ است. هرگاه مساحت این مثلث $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ باشد طول یال‌جانبی منشوربرحسب a چقدر است؟

کلاس ششم طبیعی

۸۹/۱۸ـ هرگاه مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع:

$$y = a\,sin x\,sin(x + \frac{\pi}{4})$$

برابرباشند با $\frac{\sqrt{5} \pm 2}{4}$ مقدار a را حساب‌کنید.

۷۹/۱۹ـ دوتابع زیر مفروض است

$$y_1 = 3cos(2x + 1) \quad و \quad y_2 = 3sin(3x - 1)$$

اولاـ طولهای نقاط مشترك دو منحنی را حساب‌کنید.

ثانیاًـ در نقطهٔ به طول $2 + \frac{\pi}{2}$ مماسی برمنحنی نمایش هندسی هریك‌ازدوتابع‌رسم‌می‌کنیم. نسبت‌ضریب‌زاویه‌ایهای‌این دومماس را پیداکنید.

کلاس ششم ریاضی

۷۹/۲۰ـ ترجمهٔ **فتح‌اله زرگری**

اولا منحنی نمایش تابع زیررا رسم‌کنید:

$$y = x^2 + x + \sqrt{(\ ^2 + 1)^2 - 4x^2}$$

ثانیاًـ در نقطهٔ تلاقی نمایش هندسی تابع با محور $y'y$ خطی قائم برآن رسم می‌کنیم. معادلهٔ این خط و نقطه یا نقاط

تلاقی آنرا با منحنی نمایش هندسی تابع بدست آورید.

۷۹/۲۱- به فرض آنکه a و b عددهای مخالف صفر باشند، معادلات مجانبهای موازی محور $x'x$ منحنی نمایش هندسی تابع زیررا معلوم کنید:

$$y = \frac{\sqrt[3]{a^3x^3 + px^2 + qx + r}}{\sqrt[4]{b^4x^4 + n_1x^2 + n}}$$

۷۹/۲۲- ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

هرگاه داشته باشیم:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1$$

رابطهٔ بین کمانهای a و b و c را بدست آورید.

۷۹/۲۳- معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$2t\sin x + (t^2 - 1)\cos x = (t^2 + 1)\sin x$$

۷۹/۲۴- از **سعید فرشاد**

عددی را تعیین کنید که مجذور باشد و جذر آن درمبنای ۷ به صورت $\overline{(a+4)(a-2)}$ نوشته شود.

۷۹/۲۵- در تقسیم زیرهر حرف نمایندهٔ یك رقم است و حروف متفاوت نمایندهٔ رقمهای متفاوت می‌باشند. این ارقام را پیدا کنید.

AABB	CDE
DEB	DG
FBB	
HEB	
EB	

۷۹/۲۶- ترجمهٔ از فرانسه

دو دسته شعاعهای توافقی $O(a, b, c, d)$ و $O'(a, b', c', d')$ در شعاع a مشترکند. هرگاه دو شعاع b و b' در B، دوشعاع c و c' در C، دوشعاع d و d' در D متقاطع باشند، ثابت کنید که سه نقطهٔ B و C و D بر یك استقامتند.

۷۹/۲۷- ترجمهٔ از فرانسه

هرگاه M نقطه‌ای از بیضی به کانونهای F و F' و I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث MFF' و N نقطهٔ تلاقی MI با FF' باشد نسبت $\frac{IN}{IM}$ برابر با چه مقداری است؟

مسائل فیزیك

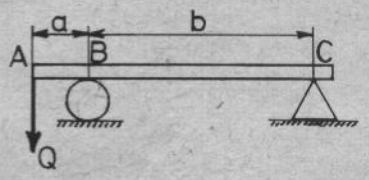
انتخاب توسط: هوشنگ شریفزاده

۷۹/۲۸- فرستنده: **مجید عرفانیان شیشه** دانشجوی دانشگاه مشهد

یك لوله روی اتومبیلی نصب شده است. اتومبیل با سرعت ۱۰ متربرثانیه حرکت می‌کند. یك قطرهٔ باران وارد لوله شده وباسرعت ۵۰ متربرثانیه سقوط می‌کند. زاویهٔ محور لوله با افق چقدر باشد تا اینکه قطرهٔ باران ضمن سقوط در داخل لوله به بدنهٔ آن برخورد نکند؟

۷۹/۲۹- فرستنده: **رسول آژیری** دبیردبیرستانهای گچساران.

میلهٔ AB مطابق باشکل نگهداشته شده ودرنقطهٔ A وزنهٔ Q به‌آن آویزان است. به فرض $b = 4a$ مقدار وجهت عکس‌العمل نقاط B و C را تعیین کنید.



مسائل شیمی

انتخاب توسط: باقرمظفرزاده

۷۹/۳۰- فرستنده: **احمد رضا**

جسم A به فرمول $C_5H_{12}O$ با سدیم فلزی تولید هیدرژن می‌کند. اگراین جسم را ازروی Al_2O_3 عبوردهیم به اولفین تبدیل می‌شودکه از اکسیداسیون آن دو محصول نتیجه می‌شودکه یکی ازآنها خنثی و دیگری اسیدی است بااکی‌والان گرم ۱ ± ۶۰. فرمول ساختمانی A را پیداکنید.

۷۹/۳۱- فرستنده: **احمدرضا**

ترکیب A به فرمول C_4H_8O در مجاورت کاتالیز مناسب با هیدرژن اشباع می‌شود و به جسم B به فرمول $C_4H_{10}O$ تبدیل می‌گردد. جسم A محلول پرمنگنات اسیدی را بیرنگ می‌کند و ترکیب B هنگامی که با HBr ترکیب شود جسم C را تولید می‌کند. جسم C می‌تواند معرف گرنیارد تولیدکند وهنگامی که این جسم (معرف گرنیارد) را باآب ترکیب کنیم گازی تولید می‌کندکه ۱/۵ گرم از آن ۱/۱۲ لیتر حجم دارد. ساختمان A را مشخص کنید.

تستهای ریاضی

کلاس چهارم ریاضی

۷۹/۳۲ـ یك کارخانهٔ شکلات‌سازی جعبه‌های شکلاتی به بازارفرستاده است که داخل هرکدام از آن‌ها یك کارت قرار دارد. فروشگاهها درمقابل هر ۱۰ کارت که بـه‌آنان تسلیم‌شود یك جعبه شکلات برایگان تحویل می‌دهند . ارزش هـر کارت برابر است با :

الف ـ ۰/۱ بهای شکلات داخل جعبه

ب ـ ۰/۱ بهای کل جعبه

ج ـ $\frac{1}{9}$ بهای کل جعبه

د ـ $\frac{1}{8}$ بهای شکلات‌داخل‌جعبه

۷۹/۳۳ـ حاصل ضرب چهار عدد متوالی:

الف ـ مربع کامل است.

ب ـ یك‌واحد بیشترازمربعی کامل است.

ج ـ یك‌واحدکمتر ازمربعی کامل است.

د ـ نه‌مربع کامل است ونه‌اینکه اختلاف‌آن بامربع کامل یك واحد است.

۷۹/۳۴ ـ به فرض آنکه a و b دو عدد مثبت باشند حاصل عبارت :

$$P = \frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}$$

الف ـ درهرحال برابراست بایك؛

ب ـ به‌شرط $a > b$ برابر است بایك؛

ج ـ به‌شرط $a < b$ برابر است بایك؛

د ـ درهرحال غیرازیك است.

۷۹/۳۵ـ معادلهٔ :

$$3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^{x} + 9^{-x} = 6$$

الف ـ دارای دوجواب است:

$$x = \log_3\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{و} \quad x = \log_3(2+\sqrt{5})$$

ب ـ چهار جواب دارد:

$$x = \log_3\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2} \quad \text{و} \quad x = \log_3(2\pm\sqrt{5})$$

ج ـ جواب ندارد؛ د ـ بیش ازچهار جواب دارد.

۷۹/۳۶ ـ به‌فرض‌آنکه داشته باشیم:

$$N = \frac{1}{3}\log(5a+2b) + \frac{1}{7}[\log b - 3\log(b+1)] + 1$$

$$x = \sqrt[3]{5a+2b} \times \sqrt[7]{\frac{b}{(b+1)^3}}$$

الف ـ $\log x > N$، ب ـ $\log x < N$؛

ج ـ $\log x \neq N$، د ـ $\log x = N$؛

۷۹/۳۷ ـ در دایرهٔ به‌مرکز O نقطهٔ M را روی‌قطر ثابت AB درنظر می‌گیریم و ازآن خطی رسم می‌کنیم که با AB زاویهٔ 45° ساخته‌دایره را در P و P' قطع کند. همچنین در M خطی عمود بر PP' اخراج می‌کنیم‌که دایره را درQ قطع کند به‌قسمی‌که P و Q در یك‌طرف AB باشند. هرگاه M بر AB حرکت‌کند مکان I وسط PQ:

الف ـ خطی‌است مستقیم‌که با AB زاویهٔ ثابت‌می‌سازد؛

ب ـ خطی است مستقیم‌که با AB موازی است.

ج ـ دایره‌ای است مماس بردایرهٔ مفروض؛

د ـ دایره‌ای هم‌مرکز با دایرهٔ مفروض.

۷۹/۳۸ـ مثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC را درنظرمی‌گیریم که درآن زاویهٔ A قائمه و $AC = 3AB$ باشد. برضلع AC نقاط D و E را انتخاب می‌کنیم‌که $AD = DE = EC$ باشد واز B به D و E وصل می‌کنیم. دومثلث BDE و BDC:

الف ـ دارای مساحتهای برابرند.

ب ـ متشابهند ونسبت تشابه آنها ۲ است.

ج ـ متشابهند ونسبت تشابه‌آنها $\sqrt{2}$ است؛

د ـ نمی‌توانند متشابه باشند.

کلاس پنجم ریاضی

۷۹/۳۹ـ هرگاه مختصات دو رأس از مثلث متساوی‌ـ

الاضلاعی عددهای گویا باشند، مختصات رأس دیگر آن :

الف ـ نیز اعدادی است گویا؛

ب ـ اعدادی است گویا یا گنگ؛

ج ـ با وجود شرط یا شرایطی اعداد گویا است؛

د ـ حتماً اعداد گنگ است.

۷۹/۴۰ـ اگر d فاصلهٔ نقطهٔ $A(1 \text{ و } -3)$ از خط متغیر △ به‌معادلهٔ $(m+1)x - 2my + 4 = 0$ باشد:

الف ـ d یك‌حداقل ویك حداکثر دارد؛

ب ـ d حداقل دارد اما می‌تواند تا هر اندازه بزرگ شود ؛

ج ـ d نه‌حداقل دارد و نه حداکثر؛

د ـ d حداکثردارد اما حداقل ندارد.

۷۹/۴۱ـ در صفحهٔ‌محورهای مختصات متعامد دونقطهٔ $A(4 \text{ و } 4)$ و $B(-2 \text{ و } -4)$ را درنظر می‌گیریم. ازنقطهٔ B خط △ را رسم می‌کنیم که با BA زاویهٔ 30° بسازد و به‌مرکز A و به‌شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره با خط △:

الف ـ مماس است، ب ـ متخارج است،

ج ـ متقاطع است، د ـ فقط یك نقطهٔ مشترك دارد.

۷۹/۴۲ ـ تساوی :

$$cotg x + \sqrt{\frac{1 - cos x}{1 + cos x}} = \frac{1}{sin x}$$

الف ـ به‌ازاء همهٔ مقادیر x برقرار است؛

ب ـ به‌ازاء مقادیری ازکمان x برقرار است‌که انتهای آنهایا دربخش اول یا در بخش سوم‌ازدایرهٔ مثلثاتی واقع باشد.

ج ـ به ازاء مقادیری ازکمان x برقرار است‌که انتهای آنها یا دربخش اول یا در بخش دوم از دایرهٔ مثلثاتی باشد.

د ـ هیچگاه برقرار نیست.

۷۹/۴۳ـ برای آنکه عبارت:

$$S = 6 sin^2 x cos^2 x + a(sin^6 x + cos^6 x)$$

به x بستگی نداشته باشد، مقدار a باید برابر باشد با :

الف ـ ۲، ب ـ ۲ ـ ، ج ـ $\frac{2}{3}$ ؛

د ـ عبارت همواره به x بستگی دارد.

۷۹/۴۴ ـ درصفحهٔ P مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع a را در نظر می‌گیریم . در A عمودی بر صفحهٔ P اخراج‌کرده و روی آن نقطهٔ D را انتخاب‌کرده‌ایم‌که مساحت مثلثDBC برابر با $\frac{3a^2\sqrt{10}}{10}$ است . اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ A(BC)D :

الف ـ برابر 60° است؛

ب ـ بیش از 60° است؛

ج ـ کمتراز 60° است؛

د ـ مخالف‌با 60°است.

۷۹/۴۵ـ در مکعب مستطیل مفروض ابعاد قاعده a و b ومساحت سطح‌جانبی برابر با $2(a+b)\sqrt{3a^2+3b^2}$ است. زاویهٔ میل قطرمکعب مستطیل نسبت به‌صفحهٔ قاعده :

الف ـ برابر 60° است، ب ـ بیش‌از 60° است؛

ج ـ کمتر از 60° است. د ـ مخالف با 60° است .

کلاس ششم ریاضی

۷۹/۴۶ ـ منحنی نمایش هندسی تابع :

$$y = \frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^2 - 4x}}$$

الف ـ دومجانب قائم ویك‌مجانب افقی دارد؛

ب ـ دومجانب افقی ویك مجانب قائم دارد.

ج ـ یك مجانب افقی دارد و مجانب قائم ندارد؛

د ـ دومجانب افقی دارد ومجانب قائم ندارد.

۷۹/۴۷ـ تابع زیررا در نظر می‌گیریم:

$$y + |y| = f(x) + |f(x)|$$

هرگاه f(x) نسبت به x تابع فرد باشد، دراین‌صورت:

الف ـ هیچ نقطه‌ای از بخش سوم محورهای مختصات جزء نمایش هندسی تابع نیست؛

ب ـ قسمتی از منحنی نمایش هندسی تابع به‌صورت یك خط منحنی در بخش سوم محورهای مختصات قرار دارد؛

ج ـ آن قسمت از نمایش هندسی تابع که در بخش سوم محورهای‌مختصات‌قراردارد‌ازچندخط‌متوازی تشکیل‌شده‌است؛

د ـ تمام‌بخش‌سوم‌محورهای مختصات جزء نمایش‌هندسی تابع است.

۷۹/۴۸ ـ معادلهٔ مثلثاتی :

$$cos^2 x(1 - 3\sqrt{3} tg^3 x) = 0$$

در فاصلهٔ صفر و π :

الف ـ فقط یك‌جواب دارد، ب ـ دوجواب دارد؛

ج ـ بیش ازیك جواب دارد، د ـ جواب ندارد.

۷۹/۴۹ـ بافرض‌آنکه a عدد حقیقی باشد، نامساوی:

$$\frac{cotg x - cos x}{sin x - tg x} > a^2$$

الف ـ به‌ازاء هرمقداری از x صحیح است.

ب ـ به‌ازاء یك مقدار از x که با تقریب $2k\pi$ مشخص می‌شود صحیح است؛

د ـ به‌ازاء هیچ مقداری از x صحیح نیست.

۷۹/۵۰ـ عددی مجذور کامل در دستگاه عدد نویسی دهگانی مفروض است . جذر آن را حساب کرده در دستگاه عددنویسی بـه پایهٔ معلوم $2n$ نوشته‌ایـم کـه بـه صورت $\overline{(a+n)(a-n+1)}$ شده است. به‌فرض آنکه a عددی‌طبیعی باشد، عدد مفروض:

الف ـ منحصر به‌یك عدد است؛

ب ـ بیش ازیك عدد است اما تعدادآن محدود است؛

ج ـ به تعداد نامحدود است.

د ـ وجود ندارد.

۷۹/۵۱ ـ بـه فـرض آنکه $A=625+4n$ و $B=625-4n$ و n عدد صحیح باشد، عدد $N=A^2-B^2$:

الف ـ در ازاء فقط یك مقدار از n به ۴ رقم صفر ختم می‌شود ؛

ب ـ در ازاء جمیع مقادیـر صحیح n به ۴ رقم صفر ختم می‌شود .

ج ـ هیچگاه به چهاررقم صفر ختم نمی‌شود؛

د ـ در ازاء مقادیر با تعداد بیش ازیك اما محدود از n به چهار رقم صفر ختم می‌شود.

۷۹/۵۲ـ مثلث ABC رادرنظر می گیریم که رأسهای B و C از آن ثابت و رأس A متغیر است بقسمی که مجموع $AB+AC$ ثابت است. حاصل‌ضرب فواصل رأسهای B و C از نیمساز خارجی زاویهٔ A :

الف ـ مقداری است ثابت؛

ب ـ متغیر است و به‌اندازهٔ زاویهٔ A بستگی دارد؛

ج ـ متغیر است اما به اندازهٔ زاویهٔ A بستگی ندارد؛

د ـ با وجود شرایطی مقداری است ثابت.

حل مسائل (دنباله از صفحهٔ ۱۰۸)

ودراین دوران مبدأ خط AB خطی خواهد بودکه باید از N بگذرد . اما چون AB بر BC عمود است خط AB بعداز دوران حول O وبه اندازهٔ 90° با BC موازی می‌شود وبا آن نقطهٔ مشترك ندارد . بنابراین محاط مربع درمستطیل(که مربع نباشد) غیرممکن است .

۷۸/۴۷ـ(ب) اگرP نقطه‌ای‌واقع دراستداد قطراطول بیضی وخارج بیضی واقع باشد ، چون مماس PT را بربیضی رسم‌کنیم ، دایرهٔ به مرکزP وبه شعاع PT بیضی را به‌زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. قائم بربیضی درنقطهٔ T که درهمین نقطه‌بر دایره مماس است ، محورکانون بیضی را درN قطع می‌کندکه N بین F و F′ کانونهای بیضی واقع است بقسمی‌که N و P مزدوج توافقی نسبت به F و F′ می‌باشند. چون NT بردایره مماس است پس N درهرحال در خارج دایره واقع است و F و F′ هیچگاه نمی‌توانند هردو درداخل دایره واقع شوند. اما برحسب آنکه PF(یا PF′)ازPT کوچکتریا ازآن‌بزرگترباشد، دوکانون یا هردو در خارج دایره یا یکی از آنها در داخل و دیگری درخارج دایره قرارخواهد داشت .

مسائل امتحانات ... (دنباله از صفحهٔ ۱۲۶)

دبیرستان فارابی کرج

فرستنده : محسن مصباح

عدد چهاررقمی به صورت $N=\overline{mcdu}$ راطوری‌تعیین کنید که

$$\overline{md}=u^2+1 \quad \text{و} \quad \overline{mc}=3(d-m)$$

دبیرستان فیروزبهرام

دبیر: مهماندوست بصیر ـ فرستنده : پرویز روانی

در یك عمل ضرب یکی از دو عامل، ضرب دو رقمی و دیگری سه رقمی است. اگر بر عدد سه رقمی ۴ واحدافزوده واز عدد دورقمی پنج واحد کم کنیم و مجدداً آنها را در هم ضرب کنیم حاصل‌ضرب حاصل ازحاصل‌ضرب اولی ۳۷۱ واحد کمتر می گردد و چنانچه بین ارقام عامل دو رقمی یـك صفر گذاشته‌عمل ضرب راانجام دهیم برحاصل‌ضرب ۵۱۷۵۰واحد افزوده‌می‌شود. هریك ازدو عامل ضرب را تعیین‌کنید.

دبیرستان‌کریم فاطمی اهواز

دبیر: شعاعی ـ فرستنده : خدامراد بهزیز

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع صحیح ، دایره‌ای به‌شعاع‌واحد محاط شده‌است. اضلاع این مثلث‌را تعیین‌کنید.

دبیرستان مهر تبریز

دبیر: طاووسی ـ فرستنده : سیدحسین حسینی

عـدد $\overline{mcdu}$ را طوری تعیین کنید که

$$2(\overline{mcdu})_7=(\overline{cdum})_7$$

دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۳

دبیر: ابوترابیان ـ فرستنده : سعید قهرمانی

اگر اعداد صحیح را ازیك تا عدد پنج رقمی A مرتباً ومتوالیاً در پی یکدیگر بنویسیم؛

اولا: رقم ۴۴۴۲۳امین‌را درسلسلهٔ مزبور مشخص‌کنید.

ثانیاً: درصورتی که مجموع ارقام سلسلهٔ مزبورمضربی از A باشد، عدد A را پیدا کنید.

(دنباله درشمارهٔ بعد)

مسائل انتخابی از

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث اول سال تحصیلی ۴۹-۵۰ (آذر ۱۳۴۹)

★ (دنباله از شمارهٔ گذشته) ★

کلاس پنجم طبیعی

جبر و مثلثات

گروه فرهنگی آرش

دبیر: بکتاشی ـ فرستنده: پروانه بکتاشی

ازنقطهٔ $A(-4 \text{ و } 0)$ خطی با ضریب‌زاویهٔ $\frac{1}{2}$ وازنقطهٔ $B(0 \text{ و } 4)$ خطی باضریب‌زاویهٔ (-2) رسم‌می‌کنیم تایکدیگر را در نقطهٔ C تلاقی کنند. اولا مختصات این نقطه را تعیین کنید ومثلث ABC را رسم نمائید اگر $C(0/8 \text{ و } 2/4)$ باشد.

ثانیاً مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

ثالثاً معادلهٔ میانهٔ m_a و ارتفاع h_a را بدست‌آورید.

رابعاً تحقیق‌کنیدکه سه عمودمنصف دریك نقطه‌متقاربند.

خامساً هر گاه محورهای مختصات را به موازات خود طوری انتقال‌دهیم‌که مبدأ جدید G محل تلاقی سه میانهٔ‌مثلث باشد مختصات جدید سه رأس مثلث را حساب‌کنید.

دبیرستان آزرم میاندوآب

دبیر: سعید فرشاد

ـخط △ به معادلهٔ $y = ax + 3$ و △′ به معادلهٔ $y = (a+1)x + 1$ مفروضند. a را طوری تعیین‌کنید که دو خط اولا موازی ثانیاً عمود برهم باشند.

ـ رابطه‌ای مستقل از x بین a و b بدست آورید:

$$\begin{cases} tg^2x + cotg^2x = a \\ tg^3x + cotg^3x = b \end{cases}$$

دبیرستان حافظ

دبیر: احمدی ـ فرستنده: جواد برقعی رضوی

اتحاد زیر راثابت‌کنید:

$$\frac{\sin^2 x\, tg^2 x}{1 + tg^2 x} + \frac{\cos^2 x\, cotg^2 x}{1 + cotg^2 x} = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

دبیرستان کورش‌کبیر

دبیر: باقری ـ فرستنده: روح‌الله رهبر

نقطه‌ای‌برروی محور y ها تعیین کنید که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $A(1 \text{ و } 3)$ برابر $\sqrt{26}$ باشد.

دبیرستان محمد رضاشاه نقده

دبیر: جوانی ـ فرستنده: سلیم‌خاوری

ـخط △ به‌معادلهٔ $y = 3x - 1$ مفروض است. الف‌ـ معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $M(-1 \text{ و } 2)$ به موازات خط △ رسم می‌شود بنویسید. ب ـ c را طوری بیابیدکه خط △′ به‌معادلهٔ $y = cx - 2$ و خط △ همدیگر را درنقطهٔ $B(1 \text{ و } 2)$ قطع نمایند.

ـ درستی تساوی زیررا تحقیق‌کنید:

$$3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$$

دبیرستان مسعودی دماوند

فرستنده: فیروزکرمانی

ـ به ازاء چه مقادیر λ نمایش هندسی تابع زیر به‌خط مستقیم تبدیل می‌شود؟

$$y = \frac{x^2 + (\lambda + 1)x + 2}{x - 1}$$

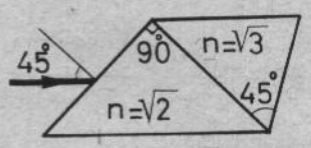
مشتق تابع زیر رابدست آورید:

$$y = \sqrt[6]{\left(\frac{2 - 3x}{1 - 4x}\right)^5}$$

مسائل فیزیك

دبیرستان البرز

زاویهٔ رأس‌منشوری 90° وضریب انکسارآن $\sqrt{2}$ می‌باشد. این منشور را به منشور دیگری که زاویهٔ رأس‌آن ۴۵درجه و ضریب انکسار آن $\sqrt{3}$ می‌باشد مطابق



شکل چسبانده‌اند. شعاع نورانی تك رنگی تحت زاویهٔ تابش 45° به منشور اول می‌تابد. تعیین کنید تحت چه زاویه‌ای از دستگاه دومنشور خارج می‌شود و زاویهٔ انحراف آن چه‌اندازه است.

گروه فرهنگی شهریار قم

دبیر : کبیری ـ فرستنده : جواد برقعی رضوی

جسم AB به‌طول ۴cm به‌فاصلهٔ ۱۰cm از یك آینهٔ کروی قرارگرفته است و تصویری مجازی بـه طول ۱۲cm تشکیل شده است. اولا نوع آینه و شعاع انحناء آنرا تعیین کنید. ثانیاً آینهٔ تختی‌رادرهرابر این‌آینه‌کروی به‌فاصله ۳۵cm و به موازات‌آن قرار می‌دهیم، تصویری که پس از دوانعکاس متوالی در آینه تخت بـه وجود می‌آید تا جسم AB چقدر فاصله دارد.

مسائل شیمی

گروه فرهنگی شهریار قم

دبیر : رادمنش ـ فرستنده : جواد برقعی رضوی

۵۰cc محلول پتاس ۰/۳ نرمال را به‌چند سانتیمترمکعب محلول سود ۰/۰۵ نرمال اضافه‌کنیم تا $PH = 12$ گردد. (تفکیك هردوکامل می‌باشد).

دبیرستان مسعودی دماوند

دبیر : فتحی ـ فرستنده : فیروزکرمانی

۲۵۰cc محلول بیکرومات پتاسیم را که دارای ۱۴/۷ گرم‌بیکرومات می‌باشد با ۱۵۰cc از محلول بیکرومات‌پتاسیم ۱۹/۶ گرم درلیتر مخلوط می‌کنیم. معین کنید اولا فاکتور و غلظت محلول را. ثانیاً ۵۰cc این مخلوط در محیط اسیدی‌با چه حجمی ازگاز SH_2 احیاء می‌شود.

کلاس پنجم ریاضی

جبر

دبیرستان دخترانه ارم تبریز

فرستنده : غلامرضا جوانشیر

نقطهٔ $A(2, -2)$ مفروض است. معادلـهٔ خطـی را بنویسیدکه مار بر A باشد ومجموع قطعاتی راکه ازمحورها و مبدأ مختصات جدا می‌کند برابر ۳ باشد.

دبیرستان البرز

ـ بین تابع زیر و مشتق اول آن رابطه‌ای تعیین‌کنیدکه به x بستگی نداشته باشد:

$$y = (x + \sqrt{x^2 + 2})^m$$

ـ نقطهٔ $A(6, 12)$ یك‌رأس ونقطهٔ $G(5, \frac{25}{3})$ محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC می‌باشد. درصورتی‌که زاویهٔ B مساوی 45° و معادلهٔ AB به صورت $y = 2x$ وزاویه‌ای‌که امتداد BC با محور $x'x$ می‌سازد حاده باشد مختصات‌رئوس B و C را حساب‌کنید.

دبیرستان پهلوی آذرشهر

دبیر : خلخالی ـ فرستنده : محمدعلی عباسپور

نمودار تغییرات تابع زیر را رسم‌کنید.

$$y = |2x - 4| + |3x - 6| - 2$$

گروه فرهنگی خوارزمی

دبیر: صدری ـ

فرستندگان: شاهرخ‌فولادوند، غلامرضا جوانشیر

ـ معادلهٔ یك دسته خط عبارتست از

$$A(2x - 3y + 4) + B(x + 2y - 5) = 0$$

۱ـ m را چنان تعیین کنیدکه خط $mx + y - 4 = 0$ متعلق به‌دسته‌خط نباشد.

۲ـ بدون محاسبهٔ نقطهٔ‌ثابت دسته خط، معادلهٔ خطی از ایـن دسته را بنویسید که با جهت مثبت محور طولها زاویـهٔ 45° بسازد.

ـ حد تابع زیر را وقتی $x \to 1$ پیداکنید.

$$y = \frac{x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$$

دبیرستان رازی شیراز

دبیر : صادقی ـ فرستنده : محمدرضا زنبق

نمایش هندسی تابع زیر را رسم‌کنید.

$$|y - x| + |2y + x - 4| = 2$$

دبیرستان سعدی شیراز

دبیر : پیرویان ـ فرستنده : اردشیر دیلمی

ـ محوری مانند $x'Ox$ رسم‌کنید (O مبدأ)، مکان‌نقاطی ازاین محور را پیداکنیدکه در رابطهٔ $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \leq 1$ صدق کنند.

ـ چهارنقطهٔ A وB و C و D بریك خط راست‌واقعند، در صورتی که $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k$ باشد، حاصل عبارتهای زیر را برحسب k تعیین‌کنید:

۱) $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = ?$ ۲) $\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} : \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} = ?$

گروه فرهنگی شهریار قم

دبیر : صدری ـ فرستنده : جواد برقعی رضوی

معادلهٔ زیر راحل کنید:

$$۴(۲x-۳)^۲ - ۷|۲x-۳| = ۲$$

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر : قمیصی

ـ اگر $M(\alpha \text{ و } \beta)$ نقطهٔ متغیری از صفحهٔ دستگاه محورهای مختصات باشد، بر حسب مواضع مختلفی که نقطهٔ M در صفحهٔ دستگاه انتخاب می‌کند ، معادلهٔ زیر را حل و بحث کنید:

$$x > \alpha(۱-x) - \beta(۱+x)$$

ـ نمایش هندسی معادلهٔ زیر را رسم کنید:

$$|x-۲| + ۳\sqrt{(y+۲)^۲} = ۴$$

دبیرستان فروزی مراغه

دبیر : مجتهدی ـ فرستنده : علی رحمتی

مقدار حقیقی عبارت زیر را به ازاء $x = ۰$ محاسبه کنید.

$$\frac{x\,tg\,x}{\sqrt{۱+tg^۲x}}$$

دبیرستان فکرت اسکو

دبیر : پشمینه آذر ـ فرستنده : بهروز علمداری‌میلانی

معادلات اضلاع مثلثی عبارتند از

$$AB \equiv ۲x-(۱-b)y-۲a = ۰$$
$$BC \equiv (b-۲)x+y-b = ۰$$
$$AC \equiv bx+ay-ab = ۰$$

به‌فرض اینکه معادلهٔ

$$(\lambda+۳)x+(۵-\lambda)y-۸ = ۰$$

معرف دسته خطوطی باشد که از نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC می گذرند، ضرایب a و b را بیابید.

دبیرستان محمد رضا شاه پهلوی رشت

دبیر : سلیمانی ـ فرستنده : محمدتقی‌عزیزی

نقاط $A(۱ \text{ و } ۳)$ و $B(-۱ \text{ و } -۳)$ مفروضند . نقطهٔ متغیری‌مانند C روی خطی با ضریب زاویه‌ای یك حرکت‌می‌کند. مطلوبست تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ G محل‌تلاقی میانه‌های‌مثلث ABC .

مثلثات

دبیرستان آرین

دبیر: موسوی ـ فرستنده : عابدین‌صادقی

ازدستگاه زیر رابطه‌ای مستقل از x بین a و b بدست آورید:

$$\begin{cases} \sin x - \frac{۱}{\sin x} = a \\ \cos x - \frac{۱}{\cos x} = b \end{cases}$$

دبیرستان اتحاد

دبیر : فصیحیان ـ فرستنده : منصور لؤلؤئیان

از دورابطهٔ زیر a را حذف کنید:

$$\begin{cases} x\,tg\,a + y\,cotg^۲a = x^۲ + y^۲ \\ y\,tg\,a + x\,cotg^۲a = ۲xy \end{cases}$$

دبیرستان البرز

ـ به‌کمك دایرهٔ مثلثاتی (ازطریق هندسی) ثابت‌کنید :

$$tg^۲\left(\frac{\pi}{۴}-\alpha\right) = \frac{۱-\sin ۲\alpha}{۱+\sin ۲\alpha}$$

ـ حاصل عبارت زیر را تعیین کنید :

$$x = \frac{\sin\left(\frac{۱۱\pi}{۲}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right) - tg(۵\pi-\alpha)\,cotg(۱۳\pi+\alpha)}{۱-\sin ۵\pi\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right)+\cos(-\alpha)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)}$$

دبیرستان پهلوی میاندوآب

دبیر: سعیدفرشاد ـ فرستنده:فاطمی

ازدستگاه زیر x را حذف کنید:

$$\begin{cases} \cos(a+x) = p \\ \cos(a-x) = q \end{cases}$$

دبیرستان ۲۵ شهریور مسجد سلیمان

دبیر: مجابی ـ فرستنده : علیرضا صالح‌جعفر

مقدار عددی A را بدست آورید:

$$A = \frac{\sin\frac{۱۳x}{۱۲} + \cos\frac{۷x}{۸} - tg\frac{۳x}{۴} + cotg\frac{۱۱x}{۶}}{tg\frac{۱۱x}{۱۲} + cotg\frac{۹x}{۸} - \sin\frac{۵x}{۴} + \cos\frac{۱۳x}{۶}}$$

دبیرستان پیشوا

دبیر: فخرعطار- فرستنده : محمدعلی فاطمی

جوابهای کلی معادلهٔ زیررا بدست آورید:

$$2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{19}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{21\pi}{38}-x\right)-3=0$$

دبیرستان حکمت قم

دبیر: امیدوار - فرستنده : جوادبرقعی رضوی

به‌شرط آنکه m عدد صحیح و اختیاری باشد صحت تساوی زیررا ثابت کنید :

$$\sin\frac{(2m+1)\pi}{7}+\sin\frac{(2m+1)2\pi}{7}+\sin\frac{(2m+1)3\pi}{7}+\sin\frac{(2m+1)8\pi}{7}+\sin\frac{(2m+1)9\pi}{7}+\sin\frac{(2m+1)10\pi}{7}=0$$

دبیرستان خرد شیراز

دبیر : سلطانی - فرستنده : غدیرصادقی

- وقتی k تمام مقادیر مختلف صحیح را اختیار کند عبارت $\cos\frac{2k\pi}{5}$ چند مقدار متمایز دارد.

- معادلهٔ زیررا حل‌کرده جوابهای کلی را تعیین کنید :

$$tg\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin x\right)=cotg\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos x\right)$$

گروه فرهنگی خوارزمی

دبیر: صداقت‌کیش- فرستنده : غلامرضا جوانشیر

-صحت تساوی‌زیر را تحقیق‌کنید:

$$\frac{a\,cotg^2 b+c}{a\cos^2 b+c\sin^2 b}=1+cotg^2 b$$

- معادله زیر را حل‌کرده جوابهای بین ۰ و 2π را بدست‌آورید :

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos 2x=0$$

گروه فرهنگی خوارزمی - دبیرستان شمارهٔ۲

دبیر : امینیان - فرستنده : فرهاد فرزان

درصورتی که بدانیم $a\sin x+b\cos x=p$ و $b\sin x+a\cos x=q$ و $tgx+cotgx=\frac{ab}{p+q}$

ثابت کنید:

$$\frac{p-4}{q}+\frac{q-4}{p}=\frac{a^2+b^2}{pq}$$

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر : ایزدی فر - فرستنده : نصرت‌الله تاجیان

مقادیر m و n و k را چنان تعیین کنید که به ازاء جمیع مقادیر x رابطهٔ زیر برقرارباشد:

$$\frac{m}{1+n\,tg^2 x}+\frac{n}{1+m\,cotg^2 x}=k$$

دبیرستان رازی‌شیراز

دبیر : صادقی - فرستنده : محمدرضا زنبق

اگر α زاویهٔ حاده باشد ثابت‌کنیدکه :

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}+1\right)\geqslant\left(1+\sqrt{2}\right)^2$$

گروه فرهنگی شهریار قم

دبیر : امیدوار - فرستنده : جواد برقعی رضوی

مقدار a و b را بقسمی کنیدکه به ازاء جمیع مقادیر x داشته باشیم :

$$\frac{(2a+1)\sin x+(b+1)\cos x}{(a+1)\cos x+(2b+1)\sin x}=k$$

دبیرستان مروی

دبیر : حبیبی - فرستنده : محمدحسن نوری

-بین ساعت ۱و۲وضع عقربه‌ها طوری است‌که خطی که مرکز ساعت‌رابه‌عدد۱۲وصل می‌کند نیمساز دوعقربه‌می‌باشد. زاویهٔ بین دوعقربه چندرادیان است ؟

- ازدستگاه زیر رابطه‌ای مستقل‌از a بین x و yبدست آورید :

$$\begin{cases}x=\sin a\cos^{3m}a\\ y=\sin^{3m}a\cos a\end{cases}$$

دبیرستان هدایت سنندج

دبیر : عطایی

در صورتی‌که :

$$\sin A+\sin B=\cos\left(\frac{\pi}{2}+C\right)$$

باشد ثابت‌کنیدکه رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{\sin^5 A+\sin^5 B+\sin^5 C}{5}=\frac{\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C}{3}+\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2}$$

مسائل هندسه

دبیرستان پهلوی آذرشهر

دبیر : فرشاد ـ فرستنده : محمدعلی عباسپور

خط $\triangle$ ونقطهٔ O وصفحهٔ P مفروض است . خطی چنان رسم کنید که ازنقطهٔ O گذشته وخط $\triangle$ وصفحهٔ P را قطع کند بطوری که اگرمحل تلاقی این خط رابا $\triangle$ نقطهٔ A وباصفحهٔ P نقطهٔ B بنامیم داشته باشیم :

$$\frac{OA}{OB}=\frac{۳}{۴}$$

گروه فرهنگی خوارزمی ـ دبیرستان شمارهٔ ۱

دبیر : وکیلی ـ فرستنده : شاهرخ فولادوند

چهار خط D_1 و D_2 و D_3 و D_4 که دو به‌دو متنافرند مفروضند . مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ را طوری رسم کنید که B روی D_1 ورأس C روی D_3 ونقطهٔ M پای میانهٔ AM روی D_2 ورأس A روی D_4 باشد .

دبیرستان دارالفنون

دبیر : شهنائی ـ فرستنده : محمود جدی

برصفحهٔ مفروض P نقطه‌ای تعیین کنید که از سه خط متقارب D_1 و D_2 و D_3 به یك فاصله باشد .

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر : علی‌آبادی ـ فرستنده : نصرت‌الله تاجیك

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A=۹۰^\circ)$ و $BC=۲a$ و $C=۳۰^\circ$ مفروض است،ازرئوس A و B و C عمودهای $AA'=CC'=x$ و $BB'=y$ را برصفحهٔ مثلث اخراج می‌کنیم. الف ـ ثابت کنید مثلث $A'B'C'$ در رأس A' قائمه است . ب ـ ارتفاع AH مثلث ABC را رسم می‌کنیم ثابت کنید $A'H$ بر BC عموداست. ج ـ به‌فرض آنکه صفحهٔ $A'BC$ باصفحهٔ ABC زاویهٔ ۶۰° بسازد طول x را برحسب a پیدا کنید. د ـ به‌فرض آنکه $C'=۴۵^\circ$ باشد کسینوس زاویهٔ بین صفحات ABC و $A'B'C'$ را حساب کنید دراین حالت طول y و x را برحسب a تعیین کنید .

دبیرستان رازی شیراز

دبیر : کهنگی ـ فرستنده : محمدرضا زنبق

دودایرهٔ C و C' در دوصفحهٔ غیرموازی اختیارشده‌اند، دو مماس متقاطع براین دو دایره طوری رسم کنید که اگر نقاط تماس را T و T' ونقطهٔ تلاقی دومماس را M بنامیم :

$$MT^۲+MT'^۲=k^۲$$

باشد (k معلوم است)

دبیرستان شاهپور اهواز

دبیر : گیوه‌چی ـ فرستنده : رضا خاکسار

دوخط راست متنافر D و D' صفحهٔ P را درنقاط A و B قطع کرده‌اند . قطعه خط MN را موازی با صفحهٔ P طوری رسم کنید که یك سرش روی D وسر دیگری روی D' وطولش برابر مقدار ثابت l باشد .

دبیرستان فردوسی تبریز

دبیر : حسینی ـ فرستنده : غلامرضا جوانشیر

دو رأس B و C ازمثلث ABC ثابت بوده ورأس A روی یك دایره که درصفحهٔ مثلث نیست تغییرمکان می‌دهد. مکان هندسی نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث راپیداکنید .

دبیرستان فکرت اسکو

دبیر : پشمینه‌آذر ـ فرستنده : بهروز علمداری میلانی

فرجهٔ (Q و P) مفروض ونقاط A و B به ترتیب‌در صفحات P و Q قرار دارند . روی یکی ازصفحات نقطه‌ای مانند M پیداکنید که‌مثلث BMA قائم‌الزاویهٔ‌متساوی‌الساقین باشد .

مسائل فیزیك

دبیرستان پهلوی نجف‌آباد

دبیر : معین ـ فرستنده : محسن طاهری

آینهٔ مقعری است به‌فاصلهٔ کانونی ۲۰ سانتیمتر. درفاصلهٔ ۲۵ سانتیمتری ازآن جسمی به طول ۳ سانتیمتر قرار می‌دهیم محل وبزرگی تصویرراحساب کنید. ثانیاً درفاصلهٔ ۹ سانتیمتر ازآن آینهٔ محدبی به فاصلهٔ کانونی ۱۵ سانتیمتر قرار می‌دهیم؛ محل وبزرگی آخرین تصویر راحساب کنید .

گروه فرهنگی خوارزمی

دبیر : پریان ، بصیری ـ فرستنده : غلامرضا جوانشیر

یك شعاع نورانی تحت زاویهٔ ۴۵° به‌یك سطح منشوری به زاویهٔ رأس ۶۰ درجه می‌تابد. دراین حالت منشور برای شعاع تابش درحال می‌نیمم انحراف است. اولازاویهٔ می‌نیمم انحراف وضریب شکست منشور را حساب کنید .

ثانیاًدرطرف‌دوم (همان طرف دیگر) روی‌سطح منشوری محیطی باچه ضریب شکست قرار دهیم تا شعاع تابش بالا انعکاس کلی پیداکند .

دبیرستان دارالفنون

دبیر : بهرامی ـ فرستنده : محمود جدی

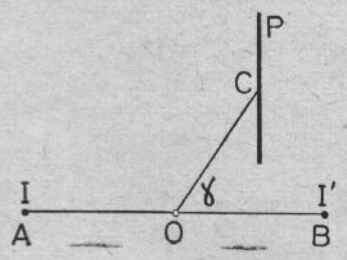
استوانه‌ای به عمق $۳\sqrt{۳}$ cm پر از مایعی به‌ضریب

شکست $\sqrt{3}$ است. چوب‌پنبه‌ای دایره‌شکل به‌قطر ۱۲cm روی مایع‌شناوراست. لامپی به‌فاصلهٔ $2\sqrt{3}$ روی خط‌عمود برمرکز چوب پنبه واقع است. سایهٔ چوب‌پنبه را درته استوانه‌بیابید.

دبیرستان دکتر نصیری

دبیر : حسن زاده ـ

فرستندگان : نصرت‌الله تاجیك ، ابوالقاسم امیری



درشکل‌مقابل‌داریم $OA = OB = OC$؛ درنقطهٔ C پردهٔ P چنان نصب شده که امتداد آن بر OA عموداست و می‌تواند حول نقطهٔ O دوران کند. زاویهٔ γ را چنان‌تعیین کنیدکه پردهٔ P ازدومنبع نورانی A و B روشنایی مساوی دریافت کند در صورتی که داشته باشیم :

$$\frac{I_A}{I_B} = \sqrt{3}$$

دبیرستان رازی شیراز

دبیر : فیروزمند ـ فرستنده : محمدرضا زنبق

نقطهٔ نورانی S وچشم A دریك امتدادوبه فاصلهٔ۲متر ازهم‌قرار دارند. بین چشم ومنبع نورانی تیغهٔ‌متوازی‌السطوحی عمود برSA قرار می‌دهیم ؛ فاصلهٔ‌چشم تا تصویر S' برابر ۱۹۰cm می گردد تعیین کنید :

الف ـ ضخامت‌تیغه‌رادرصورتی که‌ضریب‌شکست‌تیغه۱/۵ باشد.

ب ـ تیغه را برداشته‌وبه‌جای‌آن تیغه متوازی‌السطوح دیگری عمودبر SA قرار می‌دهیم معین کنید حداقل ضریب شکست تیغهٔ دوم را برای‌آنکه فاصلهٔ جسم تا تصویر برابر حالت الف گردد .

دبیرستان شاهپور شهرکرد

دبیر : میرزائیان ـ فرستنده : علیرضا صالح جعفر

عدسی تخت‌ومقعری‌است به‌همگرایی (۲ ـ) دیوپتری این عدسی بطور قائم طوری قراردارد که قسمت گودش روبه بالاست. شعاع طرف گود عدسی ۱۲cm است. قسمت بالا را پراز مایعی به ضریب شکست n نموده جسم روشنی را در ۲ متری از دستگاه قرار می‌دهیم . تصویری حقیقی به اندازهٔ جسم ایجاد می‌شود. معلوم‌کنید اولا ضریب شکست مایع را . ثانیاً اگر در قسمت گود مایعی بریزیم که ضریب شکست آن با ضریب شکست عدسی برابر باشد وضع تصویر چگونه خواهدبود ؟

دبیرستان مروی

دبیر : جباری ـ فرستنده : محمدحسن نوری

منشور ABC ازشیشهٔ به ضریب شکست $\sqrt{2}$ اختیار کرده‌که مقطع آن به صورت مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. ضلع BC افقی است. منشور ABD راکه از مایعی به ضریب شکست $\sqrt{3}$ است به منشور اولی می‌چسبانیم بطوری که ضلع BD درامتداد قائم قرارگیرد . یك شعاع نور عمود بر وجه BD می‌تابانیم ، آیا این شعاع وارد منشور دوم می گردد یا نه (چرا؟) ثانیاً ـزاویهٔ انحراف وزاویه‌ای‌که بین شعاع ورودی برمنشور ABD و شعاع خروجی از منشور ABC تشکیل می گردد چقدر است؟

$$\sin 57^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

دبیرستان هدایت سنندج

دبیر : نعمتی

یك دسته اشعهٔ باریك بطور مماس بروجه منشوری‌که زاویهٔ رأس‌آن A است‌می‌تابد. اشعه‌از وجه دیگرطوری‌خارج می‌شودکه با عمود بروجه ، زاویهٔ a می‌سازد. درصورتی‌که ضریب‌شکست منشور نسبت به هوا n باشدثابت‌کنیدرابطهٔ‌زیر بر قرار است :

$$\sqrt{n^2 - 1} = \frac{\cos A + \sin a}{\sin A}$$

مسائل شیمی

دبیرستان ۲۵ شهریور مسجد سلیمان

دبیر : رستم‌پور ـ فرستنده : علیرضا صالح جعفر

ـ نسبت وزن سولفات یك فلز دو ظرفیتی به کربنات همان فلز مساوی ۱/۳۶ است . وزن اتمی فلز را پیداکنیدو اگر عدد اتمی‌آن نصف وزن اتمی باشدآرایش الکترونی این اتم را بنویسید .

ـ ضریب تفکیك‌محلولی از اسید ارتوفسفر یك به‌غلظت ۹/۸ گرم درلیتر مساوی ۲۹است غلظت H^+ را حساب‌کنید .

دبیرستان پهلوی نجف‌آباد

دبیر : نیری ـ فرستنده : محسن طاهری

PH یك محلول اسید ۲ وضریب تفکیك‌آن ۰/۵است. ۲۰۰cc از محلول فوق‌با چند سانتیمتر مکعب بازی‌که‌ضریب تفکیك‌آن ۰/۸ و PH آن ۱۲ است خنثی می‌شود .

دبیرستان شاهپور شهرکرد

دبیر : هنری ـ فرستنده : علیرضا صالح جعفر

بالاترین و پایین‌ترین درجهٔ اکسیداسیون عنصری باهم

مساویست . در صورتی که در ترکیب اکسیژنهٔ عنصر مزبور ٪۵۳/۳۳ اکسیژن موجود باشد تعیین کنید کلر لازم برای تهیهٔ ۰/۲ ملکول گرم ترکیب کلر و عنصر فوق را از اثر چندسانتیمتر مکعب پرمنگنات $\frac{N}{۱۵}$ با اسید کلریدریك می‌توان بدست آورد

دبیرستان مروی

دبیر : ناصری ـ فرستنده : محمدحسن نوری

۰/۶۴ گرم گوگرد را با سولفیت سدیم می‌جوشانیم ، نمك بدست آمده را با ید ترکیب می‌نماییم ؛ برای تهیهٔ ید لازم مقداری آب اکسیژنهٔ ۵/۶ حجمی را با مخلوط اسید سولفوریك و یدور پتاسیم ترکیب می‌کنیم . حساب کنید حجم محلول آب اکسیژنهٔ مصرف شده را .

دبیرستان نادرشاه

دبیر : رنجبری ـ فرستنده : رضاغفاریان پناهی

مقداری آهن را در اسید سولفوریك رقیق حل کرده به آن در محیط اسید سولفوریك آب اکسیژنهٔ ۲/۸ حجمی اضافه کرده‌ایم، برای کامل شدن فعل و انفعال ۵۰cc آب اکسیژنه مصرف می‌شود تعیین کنید مقدار آهن را . ثانیاً همین مقدار آب اکسیژنه چند cc پرمنگنات پتاسیم دسی نرمال را در محیط اسید سولفوریك احیا می‌کند. فعل و انفعال را بنویسید .

کلاس ششم طبیعی

جبر و مثلثات

دبیرستان آزرم میاندوآب

دبیر : سعید فرشاد

معادلهٔ تابعی را تعیین کنید که خطوط $x = ۳$ و $y = ۲$ مجانبهای آن بوده واز نقطهٔ $A(۰و۱)$ بگذرد . سپس بر تابع

$$y = \frac{۲x - ۳}{x - ۳}$$

خطی چنان مماس کنید که برخط

$$y = -\frac{۱}{۳}x + ۲$$

عمود گردد وسپس خط وتابع هموگرافیك را رسم کنید .

دبیرستان پرنیانی

دبیر : حافظ قرآن ـ فرستنده : گوهری

معادلهٔ زیر را حل کرده وجوابهای بین ۰ و ۲π را بدست آورید :

$$\sin^۲ x - \left(\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}\right)\sin x + \frac{\sqrt{۳}}{۴} = ۰$$

دبیرستان حکیم نظامی قم

دبیر : امیدوار ـ فرستنده : جواد برقعی رضوی

مشتق تابع زیر را بدست آورید :

$$y = \sqrt{\log\sqrt{x} + tg^۲(a - ۲x)}$$

دبیرستان فردوسی گلپایگان

دبیر : جعفری

ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کرده و جوابهای محصور بین ۰ و ۲۱ آنرا برحسب درجه بدست آورید :

$$\sin ۲x + \sin ۳x + \sin ۴x = ۰$$

ـ سهمی P به معادلهٔ :

$$x^۲ - ۲x + y - ۱ = ۰$$

مفروض است . مطلوبست مختصات رأس ، کانون ، معادلهٔ خط هادی ، پارامتر ، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات و رسم آن .

دبیرستان کیوان

دبیر : مهرنور ـ فرستنده : مهری معنوی

تابع :

$$y = \frac{ax + ۶}{bx + c}$$

مفروض است. ضرایب تابع را چنان تعیین کنید که منحنی تابع نیمساز ربع سوم را درنقطه‌ای به‌طول ۲ ـ قطع کرده وخطوط $y = ۲$ و $x = -۱$ مجانبهای آن باشند. ثانیاً جدول ومنحنی نمایش تابع:

$$y = \frac{۲x + ۶}{x + ۱}$$

را رسم کنید. ثالثاً نقاطی از منحنی را تعیین کنید که مماس بر منحنی ازآن نقاط موازی خط :

$$y = -۴x + ۲$$

باشد ومعادلات خطوط مماس برمنحنی را دراین نقاط نوشته و آنها را در روی شکل منحنی رسم کنید .

دبیرستان مسعودی دماوند

دبیر : صبا ـ فرستنده : فیروزکرمانی

ثابت کنید که درمعادلهٔ

$$(m + ۳)x + (۵ - m)y + ۱ = ۰$$

به ازاء جمیع مقادیر m خط حاصل ازنقطهٔ ثابتی که مختصات آنرا حساب خواهید کرد می گذرد . ثانیاً مقدار m را چنان

تعیین کنید که تابع فوق برخطی به ضریب زاویهٔ (۱ −) عمود باشد .

دبیرستان مهرگان قم

دبیر : سعیدی ـ فرستنده : جواد برقعی رضوی

معادلهٔ زیر را حل کرده و جوابهای بین ۰ و 2π آنرا مشخص کنید :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)=\sqrt{3}$$

کلاس ششم ریاضی

جبر

دبیرستان ارمگان

دبیر :عبداللهی ـ فرستنده : مهران کشاورزیان

تابع زیرمفروض است :

$$y=a(x+\sqrt{x^2-1})^n+b(x-\sqrt{x^2-1})^n$$

ثابت کنید بین y' و y'' رابطهٔ زیر برقرار است :

$$(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$$

دبیرستان اروند رود

دبیر : مهماندوست بصیر ـ فرستنده : کیهان یزدانی

تابع $y=x^4+2ax^3$ مفروض است.

۱ـ مطلوبست تعیین a درصورتی که امتداد پاره خط واصل بین دونقطهٔ عطف منحنی تابع مزبور نیمساز ربع اول دستگاه مختصات باشد.

۲ـ به ازاء $a=1$ جدول تغییرات و منحنی نمایش این تابع را در دستگاه xOy رسم کنید.

۳ـ درنقطهٔ M محل تلاقی منحنی با محور طولها معادلات خطوط مماس و قائم برمنحنی را بنویسید .

۴ـ معادلات نیمسازهای زاویهٔ M را که اضلاع آن خطوط قائم و مماس مزبور می‌باشد تعیین کنید .

دبیرستان امیرکبیر یزد

دبیر: استوار ـ فرستنده : محمدعلی اخوان بهابادی

درتابع زیر اگر M' و M'' نقاط ماکزیمم و مینیمم این تابع باشند ثابت کنید که نقطهٔ M وسط $M'M''$ همواره بر خط ثابتی که معادلهٔ آنرا تعیین خواهید کرد حرکت می‌کند.

$$y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m}$$

دبیرستان بابک کرج

دبیر: اخترخاوری ـ فرستنده : محسن مصباح

درتابع $y=\frac{x^2+2x+a}{x^2-2x+b}$ مقادیر a و b را بقسمی تعیین کنید که اگر نقطهٔ A ماکزیمم و نقطهٔ B مینیمم منحنی تابع فوق باشند معادلهٔ خط AB به‌صورت $y=2x-4$ گردد.

دبیرستان بامداد

دبیر: بقائی

تابع زیرمفروض است :

$$y=2x-1\pm\sqrt{x^2-3x+1}$$

الف ـ معادلات مجانبهای منحنی نمایش تابع فوق را بدست آورید.

ب ـ معادلات مماس برمنحنی نمایش تابع فوق را درنقاط تلاقی آن بامحور طولها نوشته و مختصات نقطهٔ تلاقی این دو مماس را تعیین کنید.

دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر: علی‌اکبرجعفری

مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ M وقتی α تغییر می‌کند:

$$M\left(x=\frac{\cos\alpha+2}{\cos\alpha}\ \text{و}\ y=tg\alpha\right)$$

۱ـ مختصات مرکز تقارن منحنی (C) نمایش تابع زیر را تعیین کنید.

$$x^2-4y^2-2x-3=0$$

۲ـ مکان هندسی نقاطی را پیداکنید که از آن نقاط می‌توان دومماس عمود برهم برمنحنی (C) رسم کرد.

۳ـ مکان اخیردایره است (دایرهٔ مونژ). مختصات مرکز و طول شعاع این دایره راپیداکنید .

۴ـ ازمبدأ مختصات خطی باضریب زاویهٔ m می‌گذرانیم تا منحنی (C) را درنقاط A و B قطع کند. با توجه به‌حدود m مکان هندسی نقطهٔ P وسط AB را دقیقاً تعیین کنید.

دبیرستان دارالفنون

دبیر: وکیلی ـ فرستنده : علی هاشمی‌زاده

تابع $x^2-xy+my+m+1=0$ مفروض است:

الف ـ اگر x تابع و y متغیر باشد مشتق تابع فوق را حساب کنید .

ب ـ m را طوری تعیین کنید که مرکز تقارن منحنی تابع فوق روی خط $y=2$ باشد.

ج ـ m راطوری تعیین کنید که یکی از نقاط ماکزیمم و

می‌نیمم روی محور طولها باشد.

د ـ حدود m را طوری تعیین کنید که منحنی تابع همیشه دریك جهت سیر کند (همیشه صعودی ـ یاهمیشه نزولی باشد)

ه ـ اگر $m = ۱$ باشد نقطه‌ای روی محور عرضها تعیین کنید که ازآن نقطه بتوان دومماس عمود برهم نسبت به منحنی رسم کرد.

دبیرستان رازی شاهی

دبیر: حسینی ـ فرستنده: یونس ابراهیمی

اولا: درتابع $y = \frac{x^۲ + ax + b}{(a+۳)x^۲ - ۳x + ۲}$ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تا خط $y + ۲x = ۱$ درنقطه‌ای به‌عرض ۱ قائم برمنحنی تابع باشد.

ثانیاً: منحنی (C) نمایش تغییرات تابع

$$y = \frac{x^۲ - ۲x + ۲}{x^۲ - ۳x + ۲}$$

را رسم کنید.

ثالثاً: از روی منحنی C ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(m-۱)x^۲ - (۳m-۲)x + ۲(m-۱) = ۰$$

را با اعداد $(+۱)$ و (-۱) مقایسه نموده نتیجه را درجدولی بنویسید.

رابعاً: خط $y = m$ به‌ازای مقادیری از m که درجدول فوق تعیین گردید منحنی را در دونقطهٔ M و M′ قطع می‌کند اگر نقطهٔ A محل برخورد این خط بامحور عرضها باشد مطلوبست تعیین مختصات نقطهٔ A′ مزدوج توافقی نسبت به M و M′ ومکان هندسی A′ وقتی که m تغییرمی‌کند.

دبیرستان زاگرس

دبیر: محمدی ـ فرستنده: غلامرضا عالی‌شاه

با فرض $bb' = ۲(c + c')$ ثابت کنید لااقل یکی از معادلات درجهٔ دوم زیر دارای ریشه‌های حقیقی است:

$$x^۲ + bx + c = ۰ \quad و \quad x^۲ + b'x + c' = ۰$$

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر: قمیصی

تابع: $y = \frac{ax^۲ + x + a}{x^۲ - ۳x + b}$ مفروض است:

۱ـ پارامترهای a و b را چنان تعیین کنید که $(۳ - ۲\sqrt{۲})$ و $(-۳ - ۲\sqrt{۲})$ می‌نیمم و ماکسیمم تابع مفروض باشد.

۲ـ بافرض $b = \frac{۱ + ۲a}{a}$ پارامتر a را چنان معین کنید که تابع مفروض تبدیل به تابع هموگرافیك شود.

۳ـ مطلوبست تعیین جدول و رسم منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x}{x^۲ - ۳x + ۲}$ در یك صفحه دستگاه محورهای مختصات متعامد و تحقیق اینکه آیا منحنی (C) مرکز تقارن دارد یا خیر (توضیح مختصری برای قسمت اخیر لازمست).

۴ـ ازنقطهٔ O مبدأ مختصات خط (D) را باضریب زاویهٔ m می‌گذرانیم. درتعداد نقاط تلاقی این خط با منحنی (C) برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید و نشان دهید که وجود یکی از نقاط تقاطع بستگی به m ندارد وبه‌کمك این بحث (ویا به‌هرطریق که می‌توانید) معادلات مماسهای مرسوم از نقطهٔ O بر منحنی (C) را نوشته و مختصات نقاط تماس را نیز بدست آورید.

۵ـ به‌کمك بحث قسمت (۴) و یا به هرطریق که می‌توانید ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه نقاط $M_۱$ و $M_۲$ به‌طولهای $x_۱$ و $x_۲$ از منحنی (C) و نقطهٔ O بر یك استقامت باشند این است که داشته‌باشیم $x_۱ + x_۲ = ۳$ وبه‌کمك این رابطه مختصات k ($x_k \neq ۰$ است) نقطهٔ تماس مماس مرسوم از O برمنحنی (C) را بدست آورید (همراه توضیح)

۶ـ اگر $M_۱$ و $M_۲$ به‌طولهای $x_۱$ و $x_۲$ ($x_۱ و x_۲ \neq ۰$) هستند) دو نقطه از نقاط تلاقی خط (D) با منحنی (C) فرض شوند معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P وسط پاره خط $M_۱M_۲$ را با تغییرپارامتر m بدست آورید و معین کنید که چه قسمت از نمایش هندسی معادلهٔ حاصل متعلق به‌مکان P است.

دبیرستان فارابی کرج

فرستنده: محسن مصباح

اگر بین متغیر x و y رابطهٔ زیربرقرار باشد

$$y^۲ + ۲y = C_۱ \cos ۳x + C_۲ \sin ۳x$$

ثابت کنید که مشتقات اول‌ودوم y نسبت به x درمعادلهٔ

$$۲(y+۱)y'' + ۲y'^۲ + ۹y^۲ + ۱۸y = ۰$$

صدق می‌کند. $C_۱$ و $C_۲$ مقادیرثابتند و y' و y'' مشتقات اول و دوم تابع y نسبت به x می‌باشد.

دبیرستان کریم فاطمی اهواز

دبیر: عنایتی ـ فرستنده: خدا مراد بهزیز

ـ تابع درجهٔ سوم زیرمفروض است:

$$y = ax^۳ + bx^۲ + cx$$

اولا: ضرایب a و b و c راچنان بیابید که $C(۱ و ۱)$ مرکز تقارن منحنی بوده وطول نقطهٔ عطف منحنی مشتق تابع منحنی را صفرکند. ثانیاً جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع

زیر را رسم کنید:

$$y^2 = (x^3 - 3x^2 + 3x)^2$$

ـ مقدار حقیقی تابع زیررا به ازاء $x = \pi$ بدون استفاده از دستور هوپیتال بدست آورید:

$$y = \frac{\sin\frac{x}{2} + \cos x}{1 + \cos x + \sin^2 x}$$

دبیرستان کوشش ـ پسران ارامنه

دبیر: نحوی ـ فرستنده: گارنیک آبراهامیان

ـ حدود m را تعیین کنید به‌شرط آنکه یکی از دوریشهٔ معادلهٔ زیر

$$(m-1)x^2 - (2m+1)x + m + 3 = 0$$

بین اعداد (۲) و (۵) وریشهٔ دیگر بین اعداد (۲) و (۱ −) باشد.

ـ نقطهٔ A روی منحنی $y = x^3 - 3x$ واقع است. طول این نقطه را تعیین کنید به شرط آنکه مماس برمنحنی در این نقطه قائم برمنحنی در نقطهٔ دیگر باشد.

دبیرستان نمازی شیراز

دبیر: دباغ ـ فرستنده: احمد راد

مطلوبست رسم مکان نقطهٔ $M\left(a, \frac{b}{1-b}\right)$ در صورتی که تابع زیر بر محور xها مماس باشد.

$$y = \frac{x^2 - 2ax + b}{x - 2}$$

دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۳

دبیر: ابوترابیان ـ فرستنده: سعید قهرمانی

ـ تابع اولیهٔ تابع زیر را طوری بدست آورید که به‌ازاء $x = 1$ مقدارتابع $-\frac{57}{250}$ گردد:

$$y = \frac{3 - 2x}{\sqrt[3]{5x - 4}}$$

مثلثات

دبیرستان ارمگان

دبیر: سیف‌پور ـ فرستنده: مهران کشاورزیان

نامعادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} < 0$$

دبیرستان اروند رود

دبیر: مهماندوست بصیر ـ فرستنده: کیهان یزدانی

معادلهٔ زیررا حل کرده جوابهای بین $-\pi$ و $+\pi$ آنرا بدست آورید:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

دبیرستان امیرکبیر یزد

دبیر: استوار ـ فرستنده: محمدعلی اخوان

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$6\sin 3x + \cos 18x = 7$$

گروه فرهنگی بابک کرج

فرستنده: محسن مصباح

تساوی زیررا ثابت کنید:

$$\cos\frac{\pi}{2k+1}\cos\frac{2\pi}{2k+1}\cos\frac{3\pi}{2k+1}\cdots\cos\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{1}{2^k}$$

و با استفاده از دستور بالا. حاصل عبارت زیررا بدست آورید

$$A = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$$

گروه فرهنگی بامداد

فرستنده: محسن مصباح

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$2tg\pi x^2 - tg\pi x + tg\pi x\, tg^2\pi x^2 = 0$$

دبیرستان خرد شیراز

دبیر: سلطانی ـ فرستندگان: جمشید ودیعی، غلامعلی بیضائی

معادلهٔ زیر مفروض است:

$$(a-1)\sin 3x + a\sin 2x + (a+1)\sin x = 0 \qquad (1)$$

اولا معادله را به‌صورت زیر درآورید:

$$\sin x[2(a-1)\cos^2 x + a\cos x + 1] = 0$$

ثانیاً اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ باشد معادلهٔ (۱) را حل و بحث کنید.

گروه فرهنگی خوارزمی ـ دبیرستان سرجان

فرستنده: زهره شیخستانی

نامعادلهٔ زیررا درفاصلهٔ صفر و 2π حل کنید:

$$\frac{\sqrt{2}\cos 2x + \cos x - \sin x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} < 0$$

دبیرستان دارالفنون

دبیر: محمدی ـ فرستنده: علی هاشمی‌زاده

جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع زیررا درفاصلهٔ صفر و 2π رسم کنید:

$$y = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x - 1}$$

دبیرستان زاگرس

دبیر: بهنیا ـ فرستنده : غلامرضا عالی‌شاه

معادلهٔ زیرراحل کرده، جوابهای کلی وجوابهای محصور بین $(2\pi$ و $0)$ رابدست آورید :

$$(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos(\frac{\pi}{6} - 2x)$$

دبیرستان دانش بابل

دبیر: فتاحی ـ فرستنده : علی‌اکبراحسانی

تابع $y = (\sin x + \cos x)^m$ مفروض است. اولا ثابت کنید تابع فوق در فاصلهٔ یك دور تناوب ، از نقاط ثابتی که مختصات آنها را تعیین خواهید کرد می گذرد. سپس به ازاء $m = 3$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید.

دبیرستان رازی شیراز

دبیر: صادقی ـ

فرستندگان: جمشیدودیعی، غلامعلی بیضایی

ریشه‌های معادلهٔ زیررا قابل‌محاسبهٔ لگاریتمی نمائید و آنرا به‌ساده‌ترین صورت درآورید:

$$(1 - 3tg^2\alpha)x^2 - 8tg\alpha x + tg^2\alpha - 3 = 0$$

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر : قمیصی

در ازاء چه مقادیر x و y و z و λ معادلهٔ زیر صحیح است :

$$(2 + \sin 2x)(3 - 4\cos 3y)(4 + 5\sin^2 4z) =$$
$$= 63(2 + \frac{1}{\cos^6 \lambda})$$

دبیرستان فارابی کرج

فرستنده : محسن مصباح

معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$(\sec x + \operatorname{cosec} x)(\sin x + \cos x) + 2 = 0$$

دبیرستان فیروز بهرام

دبیر: آذرنوش ـ فرستنده : پرویز روانی

ـ عبارت زیر را قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم کنید:

$$S = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - \frac{3}{2}$$

ـ در معادلهٔ زیر حدود m را چنان پیدا کنید که $\frac{5\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{2}$ باشد .

$$m\sin 2x + 4\sin(x - \frac{\pi}{4}) + m - 4 = 0$$

دبیرستان کورش کبیر نهاوند

دبیر: آذری ـ فرستنده : کیقباد شمس اسحاق

دستگاه‌زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} tg x + tg y = 4 \\ \cos(x - y) - \cos(x + y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

دبیرستان کوشش ـ پسران ارامنه

دبیر: ایزدیار ـ فرستنده: گارنیك آبراهامیان

عبارت زیررا به‌حاصل‌ضرب تبدیل کنید :

$$tg(5x - \frac{\pi}{7}) - tg(3x - \frac{2\pi}{7}) - tg(2x + \frac{\pi}{7})$$

دبیرستان کیهان نو

دبیر: شیخان ـ فرستنده: محمدرضا رفیعی

اولاثابت کنید معادلهٔ

$$\sqrt{3}tg x + \sqrt{3}(m + 1)cotg x = m + 4$$

همواره دارای ریشه است. ثانیاً m راطوری تعیین کنید تا بین x_1 و x_2 و x_3 و x_4 ریشه‌های معادلهٔ فوق واقع بین صفر و 2π رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{8\pi}{3} + 2\operatorname{Arctg} 2\sqrt{3}$$

دبیرستان مدائن

دبیر : بهنیا ـ فرستنده : سیروس حیدری

حدود a راچنان‌تعیین کنید که‌معادلهٔ $\sin^6 x + \cos^6 x = a$ دارای جواب باشد، سپس به ازاء $a = \frac{13}{16}$ ریشه‌ها را بدست آورید.

دبیرستان مهرتبریز

دبیر : طاووسی ـ فرستنده : سید حسین حسینی

a راطوری بیابید تابین ریشه‌های معادلهٔ $\cos^2 x + \sin 2x = a$ که بین صفر و π قرار دارند رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$3\cos x' \sin x'' = \sin x' \cos x''$$

دبیرستان هدف ـ شمارهٔ ۳

دبیر: ابوترابیان ـ فرستنده : سعید قهرمانی

ریشه‌های معادلهٔ زیر را به‌دست‌آورده و بدون استفاده از قوس معین، آنها را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید وثابت کنید که هرکدام ازریشه‌ها یك مجذور کامل است:

$$x^2\cos^2\alpha - 2(1 - \sin\alpha\sin\beta)x + \cos^2\beta = 0$$

حساب استدلالی

دبیرستان ابن‌سینا همدان

دبیر : کاوه ـ فرستنده : حسین اسدی

ثابت کنید که حاصل‌ضرب $4n$ عدد صحیح متوالی همیشه بر 2^{3n} قابل‌قسمت است.

دبیرستان ارمگان

دبیر : عبداللهی ـ فرستنده : مهران کشاورزیان

عدد $A = 10^{2(n+1)} - 10^{n}$ مفروض است. n را بقسمی تعیین کنید که مجموع قدر مطلق ارقام برابر ۵۴ باشد.

دبیرستان امیرکبیر یزد

دبیر : استوار ـ فرستنده : محمدعلی اخوان بهابادی

دانش‌آموزی در تقسیم یك عدد بر ۱۵ باقیماندهٔ ۶ و در تقسیم همان عدد بر ۹۹۳ باقیماندهٔ ۳۸ بدست آورده است. ثابت کنید این دانش‌آموز دریکی از تقسیمها اشتباه کرده‌است.

گروه فرهنگی بابك کرج

فرستنده : محسن مصباح

عدد سه‌رقمی $N = \overline{cdu}$ را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\overline{cdu} = 12u + 1$$

گروه فرهنگی بامداد

فرستنده : محسن مصباح

عدد $N = \overline{abba}$ را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$N = \overline{abba} = a^{du} + b^{du} + me^{2}$$

دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر : جعفری

سلسلهٔ طبیعی اعداد را به‌طور مرتب وبدون فاصلهٔ لازم دنبال یکدیگر نوشته‌ایم؛

الف: معلوم کنید برای نوشتن کلیهٔ اعداد سه‌رقمی، چند دفعه رقم صفر و چند دفعه رقم ۵ بکار رفته است.

ب: اگر ارقام را از چپ به راست بشماریم ، عددی را پیدا کنید که شمارهٔ یکی از ارقامش عددی چهاررقمی و شمارهٔ رقم دیگرش عددی پنج‌رقمی باشد و این ارقام درچه مرتبه‌ای از عدد قرار گرفته‌اند؟

دبیرستان جوینی قوچان

دبیر: معمارزاده

فرستندگان : قربانعلی واحد ، مرتضی حاجی‌زاده

عدد $A = 999\ldots99$ ، n رقمی با ارقام مساوی ۹ مفروض است. ثابت کنید مجموع ارقام عدد A^{3} برابر $18n$ می‌باشد.

دبیرستان دارالفنون

دبیر: وکیلی ـ فرستنده : علی‌هاشمی‌زاده

دو رقم سمت راست مضروب ۳۲ و دورقم سمت‌راست حاصل‌ضرب ۵۲ است. در صورتی که محاسبهٔ ضرب درمبنای ۶ انجام شده باشد دو رقم سمت راست مضروب‌وفیه را تعیین کنید. یعنی

$$(\ldots\ 32)_6 \times (\ldots\ \overline{xy})_6 = (\ldots\ 52)_6$$

دبیرستان دانش بابل

دبیر: خیرخواه ـ فرستنده : علی‌اکبراحسانی

عدد چهاررقمی به صورت $N = \overline{mcdu}$ راطوری‌تعیین کنید که مجذورش به شکل $M = \ldots\ \overline{mcdu}$ باشد.

دبیرستان دانشگاه پهلوی شیراز

دبیر: صادقی ـ فرستندگان : جمشید ودیعی، غلامعلی‌بیضائی

مطلوبست تعیین اعداد n رقمی $N = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ بطوری‌که ارقام آن ریشه‌های معادلهٔ

$$x^n - A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} - A_3x^{n-3} + \ldots + (-1)^nA_n = 0$$

بوده و داشته باشیم

$$N = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

دبیرستانهای رضاشاه‌کبیر ونظام تبریز

دبیر: فرشاد ـ فرستندگان : ایرانی ومرادی

کتابی راکه دارای ۲۰۰ صفحه است درمبنای ۸ نمره‌گذاری می‌کنیم. تعیین کنید چند رقم بکار می‌رود.

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر : قمصی

عدد A را در مبنای $3x-2$ بر عدد $B = 27x^3 - 27x^2 + 6x$ که در مبنای ۱۰ نوشته شده تقسیم کرده‌ایم ، خارج قسمت $[1/52]_{3x-2}$ و باقیمانده $[2/(3x-6)]_{3x-2}$ شده‌است . (تقسیم در مبنای $3x-2$ انجام شده) مطلوبست اولا تعیین اعداد A و B در مبنای $3x-2$ و تعیین حدود x برای وجود این دوعدد.

ثانیاً : عدد $(1349)_{3x-2}$ را از مقلوب خوددرمبنای $3x-2$ کم کنید.

ثالثاً : اگر عدد $[\overline{16(2x-9)}]_{3x-2}$ مربع کامل باشد مطلوبست محاسبهٔ x و جذر این عدد را در این حالت هم در مبنای ۱۰ و هم درمبنای $3x-2$ بدست آورید.

رابعاً: حاصل‌ضرب $(1349)_{11} \times (1320)_{11}$ را درمبنای ۱۱ بدست آورید (عملیات در مبنای ۱۱ انجام گیرد).

دنباله درصفحهٔ ۱۱۴

نوشتهٔ ریند (Rhind)

ترجمه و تنظیم از : دوید ریحان

جزایر تریك و تراك

آیا هرگز دربارهٔ جزایر **دروغگوها** چیزی به گوشتان خورده است یاخیر؟ مع‌الوصف می‌بایست گفت که دراین مجمع‌الجزایر نکات جالبی وجود دارد که ذکرشان بی‌فایده نیست.

اولین‌بار، یك کشیش مبلغ مذهبی به‌نام **دن مك آرون** مؤلف «خاطرات دریانورد تنها» در بارهٔ این جزایر و قبایلی که در آنها زندگی می‌کنند نکاتی را ذکر کرده است. این قبایل کاملا بدوی هستند و کارهایشان کاملا تعجب‌انگیز است.

کشیش دربارهٔ برخی ازعادات معمول در تریك و تراك که دوجزیرهٔ اصلی این گروه هستند می‌نویسد که: درنظراول، خصوصیات نژادی و طبیعی آنها یکی است. اختلاف چشمگیر هنگامی ظاهرمی‌شودکه این اشخاص با خارجیها روبروشوند. پاسخهای ایشان به سؤالها از شیوهٔ بخصوصی پیروی‌می‌کند.

در جزیرهٔ تریك دوقبیلهٔ «سوك‌رس» و «اگریس» زندگی می‌کنند. قانون سوکرسها در این است که به سؤالها همیشه پاسخ صحیح را بدهند؛ در عوض اگریسها همیشه دروغ می‌گویند. مك‌آرون درخاطراتش صحبتهایی را که در این‌شرایط در تریك و تراك نموده بود و وی با ورزش فکری توانسته بود نوع این افراد را بشناسد، نوشته است.

یك مثال که مربوط به سه‌نفراز اهالی تریك به نامهای توم، دیك وهاری است، چنین است:

س- توم، بگو ببینم، آیا دیك ازقبیلهٔ سوکرس است؟

ج- بله

س- دیك، تو بگو، آیا توم و هاری به یك قبیله تعلق دارند؟

ج- خیر

س- هاری به عقیدهٔ تو، دیك از سوکرسها است؟

ج- بله

مك آرون ادامه می‌دهدکه با این طریقه توانسته است قبیلهٔ مربوط به هرکدام از این اشخاص را بداند.

درجزیرهٔ تراك، اوضاع کمی تغییر می‌کرد و به‌صورت پیچیده‌تری در می‌آمد، زیراکه در این جزیره به‌جای دوقبیله، سه قبیله زندگی می‌کند، سفیدها، قرمزها وصورتیها. اگر از این‌افراد پرسشی بشود؛ سفیدهاه یشه راست می‌گویند، قرمزها دروغ می‌گویند و صورتیها یك دفعه راست ودفعهٔ دیگردروغ می‌گویند. بدون آنکه کسی بداند که اول بار راست می‌گوید یا دروغ.

دون‌مك آرون روزی با یکی از همکارانش که یکی از مبلغین پیربودکه قبل از وی به‌آنجا آمده بود، گردش‌می‌کرد. در بین راه به سه نفراز بومیها برخوردکردند و وی خواست از یکی‌ازآنها موضوعی را بپرسد. همکارش، اورا بکناری‌کشید وبه وی اطلاع دادکه مخاطب وی را از روی تمسخررفیق صورتی ودوتای دیگری‌را رفیق سفید و رفیق قرمز می‌نامند. وی اضافه می‌کند که این اشخاص هر کدام متعلق به یکی از قبایل جزیره هستند بدون آنکه ارتباطی بین نام و قبیله‌شان وجود داشته باشد.

مك‌آرون از رفیق صورتی می‌پرسد:

س- رفیق‌صورتی، تو متعلق به‌کدام قبیله‌ای، صورتی، سفید یا قرمز؟

ج- من صورتی هستم.

س- ورفیق سفید؟

ج- او سفید است.

س- همانطوری‌که، رفیق قرمز هم قرمز است.

ج- مسلماً.

تمام مسئله بر سر همین «مسلماً» دور می‌زند. آیا رفیق قرمز ازقبیلهٔ قرمزها بود یا اینکه مربوط به قبیلهٔ دیگربودولی چه قبیله‌ای؟

و شما، خوانندهٔ عزیز، آیا می‌توانید این دومسئله را که‌مربوط به اهالی تریك‌وتراك است، حل‌کنید. ما خیلی‌مایلیم که شما راکمك‌کنیم، اگر نتوانستید خودتان پی‌به‌پاسخ‌مسئله ببرید، می‌توانید جواب را در دو صفحهٔ بعد ببینید.

Problem 84— Determine all real numbers, x, which satisfy the inequality

$$\frac{x-2}{x-1} < \frac{x+2}{x+1}$$

Solution : We rewrite the given expression as

$$\frac{x+2}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} > 0$$

and combining fractions we obtain

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} > 0$$

This expression is equal to zero at $x=0$, and is undefined for $x=1$ or $x=-1$. These values give us certain critical areas to test.

(1) $x < -1$

$2x$, $x+1$, and $x-1$ are all negative and the expression is also negative.

(2) $-1 < x < 0$

$2x$, and $x-1$ are negative while $x+1$ is positive. The exprssion is positive.

(3) $0 < x < 1$

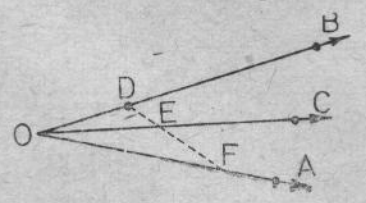
$2x$ and $x+1$ are positive while $x-1$ is negative. The expression is negative.

(4) $x > 1$

$2x$, $x+1$, and $x-1$ are all positive and the expression is also positive.

Thus we find that the given expression is true whenever $x > 1$ or $-1 < x < 0$.

Problem 85 — Given an angle AOB with angle bisector OC, let D be a given point on OB. Construct a line segment DEF with E on OC and F on OA such that DE : EF = 1:2. (Fig.)



Solution : Mark off point F on OA such that OF = 2OD . The segment connecting D to F will be the required segment.

PROOF : From geometry, we know that the bisector of a vertex angle of a triangle divides the base in a proportion equal to that of the other two sides of the triangle. Consider the triangle DOF. Since OD:OF = 1:2 by construction, OE divides the base in the same proportion as the sides of the triangle, that is, 1:2. So DE : EF = 1:2.

Problem 86 — Let

$$f(x) = \log_a x + \log_b x$$

Show that f satisfies the relation

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Solution : By the definition of f(x) we have:

$$f(xy) = \log_a xy + \log_b xy$$

and, since the logarithm of a product is equal to the sum of the logarithms of the factors, this expression may be rewriten as

$$f(xy) = (\log_a x + \log_a y) + (\log_b x + \log_b y)$$

Now, by applying the commutative and associative properties of addition, we obtain

$$f(xy) = (\log_a x + \log_b x) + (\log_a y + \log_b y)$$

and by definition of f(x) we see that

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

کتابهایی که در ماه گذشته برای معرفی به دفتر مجله واصل شده است .

گفتگوهای میز گرد
دومین کنفرانس ریاضی کشور

۹-۱۲ فروردین ۱۳۵۰

دانشگاه صنعتی آریامهر

گردآورنده : جواد همدانی‌زاده

به‌دوزبان فارسی وانگلیسی

نشریهٔ دانشگاه صنعتی آریامهر

به مناسبت سال کوروش بزرگ

پاسخ داستانهای ریاضی

دنباله ازصفحهٔ ۱۲۷

پاسخ ـ پرسشها و پاسخهای سه نفر از اهالی تریك نشان می‌دهد که :

۱ـ توم وهاری به یك سؤال یك نوع جواب داده‌اند، پس هردو متعلق به یك قبیله‌اند.

۲ـ پس نتیجه می‌شود که دیك با گفتن اینکه توم وهاری متعلق به یك قبیله نیستند، دروغ گفته است . پس دیك از اگریسها است.

۳ـ از طرف دیگر توم و هاری اظهار داشته‌اندکه دیك سوکرس بوده است که اظهاری دروغ است پس حالا می‌دانیم که اینها نیز دروغگو هستند.

۴ـ درجمع، نتیجه می‌شود که این سه نفر همگی اهل قبیلهٔ اگریس هستند.

اقیانوس را طی می‌کنیم و به تراك می‌رسیم. گفتگوی سه نفر دروغگو نشان دادکه :

۱ـ رفیق‌صورتی، سفیدنیست، زیرا اگربود، می گفت.

۲ـ رفیق صورتی، صورتی‌نیست، زیرا اگر یکی‌ازآنها بود، اولین گفته‌اش با حقیقت مطابقت می‌کرد وهمچنین سومی نیز چنین بود. در این حالت، دومین پاسخش نیز با حقیقت منطبق خواهد بود. و این غیرممکن است.

۳ـ نتیجه می گیریم که رفیق صورتی قرمز است. پس تمام جوابهایش غلط است یعنی رفیق سفید، یك صورتی است و رفیق قرمز، یك سفید است.

۴ ـ نتیجه : رفیق صورتی ، قرمز است رفیق سفید ، صورتی است و رفیق قرمز، سفید است.