کیهان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ هفتم،شمارهٔ : ۱۰ شمارهٔ مسلسل : ۷۷ مرداد-شهریور ۱۳۵۰

در این شماره :

ریاضیات جدیدحای خودرا در برنامه‌های درسی باز کرده‌است	عبدالحسین مصحفی	۶۰۱
ریاضیات امروز	غلامرضا عسجدی	۶۰۲
ریاضیدانان نامی‌اسلامی، کرخی (یاکرجی)	جعفر آقایانی چاوشی	۶۰۵
مقدمات احتمالات	ترجمهٔ : مصحفی	۶۰۸
کتابخانهٔ یکان	-	۶۱۱
مقاطع مخروطی با روش برداری	دکترامیر معز	۶۱۲
اعداد کامل	ترجمهٔ: مقصودعین‌اللهی	۶۱۵
تعیین ریشهٔ سوم اعداد	« «	۶۱۷
مسائل المپیادهای ریاضی	ترجمهٔ: جعفر آقایانی چاوشی	۶۱۸
چگونگی حل سادهٔ مسائل ریاضی	ترجمه	۶۲۱
روش حل مسائل مکان، پوش، ترسیمات هندسی	«	۶۲۴
صد مسئلهٔ جالب و حل آنها	ترجمهٔ : داوید ریحان	۶۲۷
حل مسائل یکان شمارهٔ ۷۶	-	۶۳۳
مسائل برای حل	-	۶۴۷
تستهای ریاضی	-	۶۴۹
داستانهای ریاضی، کیک برای چهارپنج‌نفر	ترجمهٔ: داوید ریحان	۶۵۲
جدول اعداد	علی اصغری	۶۵۳
A Cours of Math.	-	۶۵۴
فهرست مندرجات دورهٔ هفتم	-	۶۵۵

بها : ۲۵ ریال

پایان دورهٔ هفتم مجله

با انتشار این شماره از مجله، دورهٔ هفتم آن پایان می‌یابد. اولین شمارهٔ دورهٔ هشتم مجله ، بنابه معمول ، در نیمهٔ دوم مهرماه آینده به علاقمندان تقدیم خواهد شد .

برای جلوگیری از زیان مجله ، که قبلا نیز به اطلاع خوانندگان رسید، عده‌ای پیشنهاد کرده‌اند که صفحات مجله کم نشود و بر بهای آن افزوده گردد، اما عدهٔ دیگر خواسته‌اند که بهای مجله ثابت بماند. واگر صفحات مجله کم می‌شود از مقالات سودمند مخصوصاً بخش مسائل کم نشود .

ازدورهٔ آینده بهای مجله بازهم ثابت می‌ماند وحتی‌الامکان ازشمارهٔ صفحات آن کم نمی‌شود. اما هردورهٔ اشتراك مجله فقط شامل هشت شماره خواهد بود. البته یکان سال بازهم به‌رایگان برای مشترکان ارسال خواهد شد .

از سال آینده ازچاپ مجله درماههای تابستان خودداری می‌شود . زیرا در این فصل فروش مجله کم است وانتشار آن موجب زیان کلی می‌باشد .

برای مسؤولان مجله نیز فرصتی خواهد بود تا دریك فترت سه ماهه ، به تهیهٔ مقالات ومسائل سودمند بپردازند ومقدمات بهتر ساختن مجله را ، مطابق با خواست خوانندگان آن ، فراهم سازند .

اخطار

اخیراً مشاهده شده است که در بعضی از کتابهای حل‌المسئله یا راهنمای کنکور ، مسائل و مطالبی به نقل از مجله های شماره های گذشتهٔ یکان درج شده است . طبق قانون حقوق مؤلف و مصنف ، عمل مزبور غصب حقوق دیگران بشمار می‌آید و قابل تعقیب است ،که البته ازطریق مراجع قضائی تعقیب خواهد شد.

قابل توجه

تلفن چاپ‌آذر

به

۸۲۵۹۲۸

تغییر یافته است

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال ده شماره منتشر می‌شود

دورهٔ هفتم ـ شمارهٔ دهم ـ شمارهٔ مسلسل : ۷۷

مرداد ـ شهریور ۱۳۵۰

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول ، عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : بانونصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره :

تهران ، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۹۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VII, number 10. Augu. 1971

subscription : 3$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ‌آذر تلفن : ۸۲۵۹۲۸

تقاضا

ازدانش‌آموزان یا دانشجویانی که به‌خاطر علاقهٔ به مجلهٔ یکان ، سؤالهای امتحانات ورودی دانشکده‌ها ومؤسسات عالی تهران وشهرستانها را برای درج دریکان سال ارسال می‌دارند، تقاضا می‌شود که حتی‌الامکان متن اصلی ورقهٔ سؤال را ارسال دارند و در غیر آن ، در موقع استنساخ سؤالها ومسائل سعی فرمایند که اشتباهی بوجود نیاید وبین نوشتهٔ ایشان و اصل سؤالها تفاوتی وجود نداشته باشد .

ریاضیات جدید جای خود را در برنامه‌های درسی باز کرده است

چندین سال پیش که تازه صحبت از تغییر برنامه‌های درسی بود ، به قیاس با گذشته چنین پیش‌بینی می‌شد که این بار هم ، این تغییر به جابجا کردن موادی از برنامهٔ معمول و یا حذف قسمتهایی از آن خاتمه می‌پذیرد ، و از این جهت گمان نمی‌رفت که معلمان به مطالعات جدید نیاز داشته باشند . اما آنگاه که برنامه‌های جدید ارائه شد و کتابهای درسی نوی که براساس آن تدوین شده بود عرضه گردید ، مسلم شد که این دفعه ، برخلاف گذشته ، تحول اساسی در برنامه‌ها صورت گرفته است . کتابهای درسی دورهٔ ابتدایی که در پنج سال گذشته یکی پس از دیگری نشر یافت ، با همهٔ تازگیهایی که داشت و با همهٔ شگفتیهایی که ایجاد کرد ، مطابق با استعداد نوجوانان و هماهنگ با پیشرفتهای علمی روز تشخصیص داده شد و این نکته محرز گشت که اگر از آموزش این کتابها نتیجهٔ مطلوب حاصل نشود فقط به خاطر غفلت در آماده کردن معلمان با پیشرفتها و با روشهای جدید آموزشی است .

مسئلهٔ آماده نبودن معلمان در تدریس کتابهای درسی جدید ، که ضمن اجرای برنامه‌های جدید دورهٔ ابتدایی برای دستگاههای آموزشی پیش آمد ، موجب شد که در مورد برنامه‌های درسی دورهٔ راهنمای تحصیلی قبلا به فکر چاره باشند و معلمان را برای تدریس در این دوره از پیش آماده سازند . کتاب ریاضیات سال اول دورهٔ راهنمایی که فعلا منتشر شده است از لحاظ محتوی و از نظر طرح مسائل بدیع موجب شگفتی است اما در عین حال از این نظر که معلمان برای تدریس آن آمادگی قبلی دارند جای نگرانی نیست .

بررسی کتابهای ریاضی دورهٔ ابتدایی و کتاب ریاضی سال اول دورهٔ راهنمایی این نکته را مسلم می‌سازد که ریاضیات جدید جای خود را در برنامه‌های درسی کاملا باز کرده است .

بدون شك در برنامهٔ تحصیلات متوسطه که بعد از سه سال دیگر اجرا می‌شود ، برنامهٔ ریاضیات کلا براساس جدید خواهد بود .

معلمان ریاضی دورهٔ متوسطه در آن درجه از تحصیلات و اطلاعات هستند که می‌توانند با صرف اندك وقت ، از راه مطالعات شخصی همهٔ آنچه را که ریاضی جدید عنوان می‌شود فراگیرند . برای اینان توقع به شرکت در کلاس کار آموزی شاید بی مورد باشد .

بسیاری از دبیران ریاضی هم اکنون در آموزش برخی از مواد ریاضی موقعیت ممتاز دارند. سه سال فرصت است تا با صرف کمی وقت برای مطالعات و کسب اطلاعات جدید ، این موقعیت ممتاز باز هم محفوظ بماند ؛ زیرا بسیاری از موادکه هم اکنون قسمت عمدهٔ برنامهٔ ریاضی دورهٔ دبیرستان را تشکیل می‌دهند ، در برنامه‌های درسی آینده جای خود را به مواد جدید واگذار می‌کنند یا اینکه با روشهای دیگر ارائه می‌شوند .

هرگاه وزارت آموزش و پرورش از هم اکنون ریز مواد درسی دورهٔ تحصیلات متوسطه را در دسترس دبیران قرار دهد ، اینان خواهند دانست که در چه جهت باید خود را آماده سازند .

عبدالحسین مصحفی

ریاضیات امروز

غلامرضا عسجدی
متن سخنرانی که در دانشکدهٔ افسری ایراد شده‌است

(دنباله از شمارهٔ قبل)

در ابتدای قرن معاصر دو نوع فلسفه تقریباً در مقابل هم قرار گرفته بود. یکی فلسفهٔ علمی که معتقدین آن اغلب در زوریخ تشکیل کنگره داده و از این تز که فلسفه باید شیوهٔ علوم دقیق را داشته باشد دفاع می‌کردند. لیکن این فلسفا با وجود اینکه فلسفهٔ علمی نام داشت در مباحث و مسائل مخصوص علوم دقیق وارد نمی‌شد بلکه تنها متد و شیوهٔ آنها را بکار می‌بست.

یکی دیگر فلسفهٔ ماتریالیسم دیالکتیک بود که علم را دخیل در تجربه و تجربه را دخیل در علم و این دور الازم و ملزوم هم می‌دانست و از فلسفهٔ علمی زوریخ انتقاد می‌کرد و آنرا زنده کنندهٔ فلسفهٔ اصالت کهنه می‌خواند که به‌طور من لدن و خالی از ملاك قضاوت می‌کند

در این میان افکار **برتراند راسل** پایه گذار منطق ریاضی جدید نیز منتشر می‌شد. فکر اینکه ریاضیات و سایر علوم دقیق آکسیوماتیزه بشود مابین متفکرین قوت پیدا کرد و اینکه بتوان ریاضیات را در یك واحد قرارداد جلب نظر می‌نمود. مخالفین این نظر نه تنها سایر علوم حتی ریاضیات را نیز قابل اینکه آکسیوماتیزه شود نمی‌دانستند. به‌زعم آنها برای اینکه هندسهٔ ریمانی و یا لاباچوفسکی آکسیوماتیزه یعنی اصولی بشود لازم است که هندسهٔ اقلیدسی اصولی بشود و برای این منظور باید حساب آکسیوماتیزه شود و این ممکن نیست که علم حساب کاملا اصولی گردد. علاوه براین اگر به فرض تمام ریاضیات مانند یك نظریهٔ مستقل آکسیوماتیزه شده و دریك واحد قرار گیرد لازم است که آکسیومهای آن از همدیگر مستقل بوده و با همدیگر تضاد نداشته باشند.

ثابت کردن اینکه این آکسیومها باهم تضاد ندارند امکان پذیر نیست. بالاخره باید متذکر شد که تمام آکسیومها از یك مقولهٔ شهودی بدست نیامده‌اند که بتوان آنهارا باهم سنجیدو نتیجه گرفت که متضاد هستند یا متوافق. مثلا چهار اصل ریاضی زیررا در نظر بگیریم:

۱ـ دو چیز مساوی با چیز سوم باهمدیگر مساوی هستند.

۲ـ اگر قضیه‌ای برای عدد (۱) صحیح باشد وصحیح بودن آن برای عدد (n) مستلزم صحیح بودن آن برای عدد (n + ۱) باشد در این صورت برای تمام اعداد صحیح خواهد بود.

۳ـ اگر روی خط مستقیم دو نقطهٔ A و B و نقطهٔ C میان آنها و نقطهٔ D مابین A و C مفروض باشد نقطهٔ D مابین B و A خواهد بود.

A ——— D ——— C ——— B

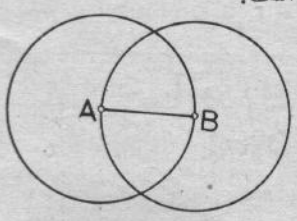
۴ـ از یك نقطه فقط یك خط موازی با خط مفروض می‌توان رسم کرد.

هرچهار اصل شهودی هستند و استدلال ندارند معذالك باهم بسیار فرق دارند. اولی بیان یك منطق رسمی و صریح است و دومی یك قضاوت جدی است که حتی بعضیها آنرا قضیه کرده‌اند و اساس استقراء ریاضی است. سومی مربوط به تصور ذهن است و چهارمی در واقع یك تعریف عوض شده و یا معکوس می‌باشد.

در چنین وضعی ریاضیات رشد دائمی خود راادامه داده‌است.

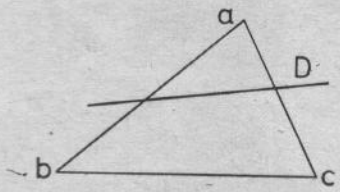
ریاضیات مدرن ـ نامگذاری ریاضیات مدرن نگرانی فوق العاده در میان میلیونها خانواده که نسبت به تحصیل بچه‌های خود علاقمند ولی از برنامهٔ دروس آنها بی‌اطلاع ویاکم اطلاع هستند فراهم کرده است و در تمام کشورها توجه خارج از حد لزوم مردم به این موضوع جلب شده وسبب

انتشار مقالات و اظهار نظرهای متعدد شده است . چه بسا محصلین تصورکرده‌اندکه بهتر است از تعقیب رشته‌های‌علمی صرف نظرکنند و چه بسا معلمین لازم دانسته‌اندکه خود آنها باید این ریاضیات را تحصیل‌کنند. همهٔاین نگرانی اغراق‌آمیز و خالی از وجه بوده است و شاید از اینکه صفت مدرن به کلمهٔ ریاضیات داده شده چنین تأثیرحاصل شده است. گویادر ابتدا بهتر بود عوض ریاضیات مدرن، آموزش مدرن ریاضیات گفته می‌شد.به هرحال باید دانست‌که این ریاضیات نه مدرن است و نه جدید، بلکه‌همان ریاضیات معمولی است‌که باروش امروزی تدریس می‌شود و با ریاضیات دیروز ارتباط مستقیم دارد. بدیهی است‌که پیشرفت هرچیز و مخصوصاً دانش بطور پیوسته و به صورت‌تغییرات‌آهسته صورت‌می گیرد. هرتازه یقیناً ازگذشته نصیب و بهره‌ای دارد. می‌توان گفت پدر ریاضیات مدرن همان ریاضیدان معروف یونان **اقلیدس** است که در سه قرن پیش از میلاد روش آکسیوماتیک‌را در مقدمات‌هندسهٔ خود واردکرده است و دانشمندان قرن اخیر باوجود فاصلهٔ زمان از او الهام گرفته‌اند. در هندسهٔ اقلیدسی اصل بدیهی (Axiome) واصل‌موضوع (Postulat) ازهم متمایزنبوده ولی بعدها چون تفاوت آنها مبهم بوده حذف شده‌است.برای تشکیل یک‌نظریهٔ ریاضی‌مفاهیم‌اولیه و بعد دستگاه آکسیومها و سپس قضایا و تعاریف پشت سر همدیگر ردیف می‌شوند . لیکن باید آکسیومهای یک نظریه به اندازهٔ کافی باشند ، نه زیادتر ازحد لازم و نه‌کمترازآن. همچنین این آکسیومهاباید از همدیگر مستقل باشند و باهمدیگر تضاد نداشته‌باشند . دستگاه آکسیوماتیک اقلیدس‌ضعیف بود و در استدلالهای آن منطق و شهود هردو دخالت داشته‌و نارسائی آنهادربعضی از کتابهای هندسه مشهود شده است.



مثلا نوشته‌شده‌اگر دو محیط دایره‌طوری رسم شودکه مرکزیکی برمحیط دیگری واقع شود این دومحیط همدیگر رادر دو نقطه قطع خواهندکرد.

ویا در جای دیگربه‌عنوان اصل ذکر شده است :



اگر خط D پاره خط ab را مابین a و b قطع کند حتماً باید bc را مابین b و c و یا ac را مابین a و c قطع کند. معلوم است‌که این دوبیان‌چه اندازه ضعیف‌ونارساهستند.

نباید زیاد انتقادکرد، زیرا روش استدلال روزبه روز پیشرفت می‌کند و استدلال در هر سطح باشد خالی از عیب نخواهد بود. باوجود این باید به **اقلیدس** احترام زیاد قائل شد مثل اینکه **اینشتن** نسبت به‌**نیوتن** درحالی‌که اورا خلع‌یدمی‌کرد و عیب کارش را مشخص می‌نمود احترام فوق‌العاده قائل بود. اقلیدس نسبت به‌دیگران کار بیشتر و پرثمرترکرده منتها زمان او مساعد برای اقدام‌کارهای امروزی‌نبوده است. کار اقلیدس بوسیلهٔ بعضی جانشینها حتی درک نمی‌شدبه‌قسمی که باوسواس و تسلیم محض از او پیروی می‌کردند و تا این اواخر هندسهٔ اقلیدسی بدون استثناء مورد قبول عموم واقع می‌شد. تااینکه ریاضیدانهای ایتالیائی آکسیومهائی در مورد اعداد مختلط $x + iy$ تشکیل دادند و مسلم شدکه‌اصول‌اقلیدس برای این کار واقعاً مناسب نیست و سد اقلیدسی شکسته شد. ترمیم لیست آکسیوماتیک اقلیدس از دو راه متفاوت به وقوع پیوست؛ در سال ۱۸۹۸ **هیبرت** آلمانی ۲۷ آکسیوم برای ترمیم و تکمیل هندسهٔ کلاسیک پیشنهادکرد و نشان دادکه لیست او قابل‌کاسته شدن نیست یعنی از همدیگر مستقل‌هستند و باهمدیگر متضاد نمی‌باشند و این اصول برای بنای هندسه ضروری هستند . از آن به بعد واقعاً سقوط اهمیت اقلیدس معلوم و مبرهن شد و باوجود این کار بعضی ازکتابها کارهیبرت را وارد نکردند شاید دلیل آن تعصب باشد. بالعکس بعضی ازکتابها در حدود ۴۰ آکسیوم واردکردند. بدون اینکه‌ثابت کرده‌باشنداین آکسیومهااز همدیگر مستقل‌هستند یاخیر.بعضی دیگر جای قضایا و آکسیومها را بی‌سبب عوض‌کرده و برخی هرجاگیرکردند یکی دوآکسیوم بی‌پروا افزوده و به اصطلاح اشکال را از میان برده‌اند. باید مقامات صلاحیت داردرمقابل چنین اعمال مخالف تعلیم‌وتربیت عرض‌اندام‌کرده وایستادگی کنند .

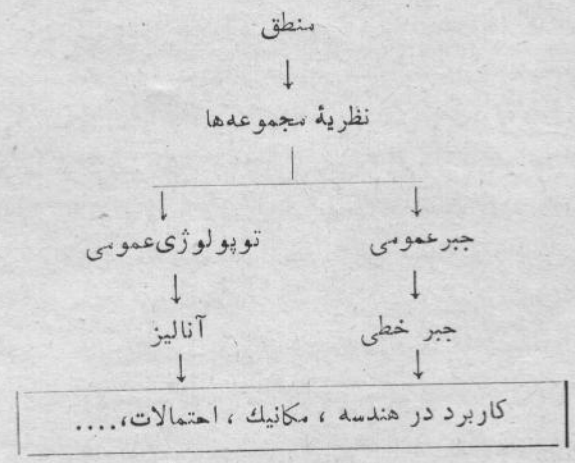
باید دانست‌که قبل از هیبرت هم چند دانشمند ریاضی از قبیل **(لامبر-گوس - لاباچوفسکی - ریمان)** کوشش کرده بودندکه رمز اصل اقلیدس را دریابند. کار و کوشش‌آنها بالاخره به این نتیجه رسیده‌که با تغییر دادن این اصل و وضع اصول مناسب می‌توان هندسه‌های‌دیگر باقضایای دیگرمتفاوت باهندسهٔ اقلیدسی بوجود آورد. **هانری پوانکاره** ثابت‌کرد که هرتضاد در هندسهٔ ریمانی‌که در آن خط موازی با خط دیگر وجود ندارد و همچنین درهندسهٔ لاباچوفسکی‌که‌بینهایت خط موازی از یک نقطه باخط دیگر وجود دارد منجربه‌تضاد در هندسهٔ اقلیدسی می‌شود.

بنابراین می‌توان گفت بااینکه ریاضیات مبین حقائق‌است خود واجد حقیقت مطلق نیست یعنی صحیح آن چیزی است

که بادستگاه آکسیوماتیك سازگار باشد و غلط چیزی است که باآن دستگاه سازگار نباشد و به‌غیر ازاین مفهوم‌معنی‌دیگری برای صحیح و غلط بودن در ریاضیات وجود ندارد .

ریاضیات هندسهٔ اقلیدسی را برای معمارها و هندسه ریمانی را برای کسانی‌که درکارهای خود نظریهٔ نسبی عمومی را به‌کار می برند صحیح و مناسب می‌داند. اکنون یادآور می‌شویم‌که روش آکسیوماتیك باالهام از اقلیدس در زمانهای اخیر بوسیلهٔ دانشمندانی نظیر (**برتراندراسل** و **کارتان** و **شواتز**) غلبه و استیلاء خود را در تمام ریاضیات پیش‌برده‌و واردکلاسهای درس دبستان ودبیرستان و دانشکده‌ها می‌شود. زحمات وکوششهای **نیکولابورباکی** را نیزبایدیادآورشویم. ریاضیات معاصر براساس منطق‌و نظریهٔ مجموعه‌هاوتوپولوژی و آنالیز و جبر و موارد استعمال آنها بنا می‌شود و سازمان بندیهای مختلف ریاضی در آن بوجود می‌آید. امروزکسی‌که علوم دقیق‌را تعقیب می‌کند باید و ناچار است در این قسمتها کم یابیش اطلاعاتی داشته باشد والا نخواهد توانست‌که از کتابهایی که مرتباً در علوم و مهندسی نوشته می‌شود استفاده کافی بکند.

در دیاگرام زیر خیلی مختصر انشعاب ریاضی‌معاصررا نشان داده‌ایم:



باوجود این ریاضیات مدرن نه در اساس بلکه ازلحاظ مسئلهٔ آموزش و پرورش مخالفانی نیز دارد و ما خلاصه نظر دودستهٔ موافق و مخالف را در اینجا ذکر می‌کنیم.

۱- موافقین و یا دستهٔ ریاضیون اصولی‌که ما آنها را پیروان ریاضیات معقول می‌نامیم عقیده دارند که از ابتدا باید بچه‌ها را با اصول صحیح و منطقی بار بیاوریم و چرا اجازه بدهیم‌که آنها باروشهای دیگرکه اگر غلط نباشند ولی حتماً ضعیف است ، تحصیل‌کنند و بعدها مجبور باشندکه راه خود راعوض‌کنند و به طرف منطق راهنمائی شوند . چرا دانش آموزان و دانشجویان از همان اوان تحصیل با قدمهای بلند داخل ریاضیات و تحقیقات آن نشوند . اگر در ریاضیات کفهٔ ترازو به طرف آکسیوماتیك مایل است چرا در آموزش و پرورش نباشد.؟

۲- مخالفین که آنها را دستهٔ اخباریها و یا پیروان ریاضیات منقول می‌نامیم می گویند:

واردکردن ریزه‌کاریها و دقتهای به اصطلاح نچسب روش آکسیوماتیك به مسائل جاری ریاضی آنها را نسبی می‌کند و این عمل زود رس به تربیت هوش وذکاوت فطری دانش‌آموز جوان آسیب می‌رساند و فراست آنها را ازرشد و نمو طبیعی باز می دارد و نیزآنها را برای فراگرفتن‌خواص ساده و معمولی اعداد و اشکال‌که درحدود مقدمات لازم و ضروری است ناتوان می‌کند.

اگرکسانی می‌خواهند بعدها ریاضیدان بشوندریاضیات مدرن را در سنین بالاتر فراخواهند گرفت.

باهمهٔ این حرفها ریاضیات مدرن در بعضی از کشورها از جمله فرانسه وآمریکا داخل برنامهٔ مدارس شده‌است. یکی از اساتید دانشگاه‌کمبریج انگلستان که اخیراً در تهران بود اظهار نظرمی‌کردکه ۴۵ درصد مدارس انگلستان ریاضیات مدرن را تدریس می‌کنند . کتابهای درسی ابتدائی کشورمانیز اخیراً از ریاضیات مدرن متأثر و به نحو شایسته‌ای عرضه‌شده است . و این ریاضیات راه خود را به سوی کلاسهای دورهٔ راهنمایی دبیرستان بتدریج بازمی‌کند و در شعب‌ریاضی‌دانشگاه ها نیز تدریس می‌شود.

امیدوار و آرزومندم ملت رشید و دانش پرورمااز قافلهٔ تمدن عقب نماند و در تحت رهبری شاهنشاه تراقی‌خواه و دانشمند خودگامهای بلند به سوی تعالی و تکامل بردارد .

غلامرضا عسجدی

دانش آموز رتبهٔ اول ششم ریاضی استان گیلان

نیما اجتماعی

از دبیرستان شاهپور رشت

معدل کتبی:

۱۸/۳۲

خبر از: کتابفروشی طاعتی

کرخی (کرجی) و ابتکارات او

تنظیم از: جعفر آقایانی چاوشی

شیخ‌الامام ابوبکـر محمد بن حسن (حسین) حاسب کرخی یکی از بزرگترین ریـاضیدانان قرن چهـارم و اوایل قرن پنجم هجری است. بااینکه معلومات واطلاعات او جامع و تحقیقات علمی او درنهایت تعمق بوده ودرپیشرفت علم جبر مقـام و پایگـاه ارجمندی داشته است ، مع‌الوصف پرده‌ای از ابهـام و تاریکی برزندگی او سایه افکنده است ، به حدی‌که سال ولادت او برما مجهول و نامعلوم است . و بعضی از مورخین اصل اورا از **کرخ** بغداد وبرخی دیگر او راکرجی منسوب به **کرج** تهران‌کنونی نامیده‌اند.

از تعلم و تحصیل وکیفیت زندگی او اطلاعات صحیحی دردست نیست،فقط ازمدارکی چند می‌توان استنباط‌کردکه او برای ادامهٔ تحقیقات علمی از جائی به بغدادکه درآن روزگار مرکز علمی اسلامی بوده عزیمت کرده است . خودش نیز در اثرش (انباط المیاه‌الخفیه) به این موضوع تصریح‌کرده است. او دراین شهر مورد احترام **فخر الملك محمد بـن علی خلف** وزیر بهاء الدوله و سلطان الدولهٔ دیلمی‌کـه بر عراق حکومت می‌کرده‌اند بوده است وکتاب فخری خود را به نام او تألیف‌کرده است. بعد ازسرگ‌وزیر مذکور (۴۰۷ هجری) کرخی به زادگاهش مراجعت و نزد **ابی غانم معروف بن محمد** وزیر مکانت بسیار یافته و کتاب (انباط المیاه‌الخفیه) را به درخواست او تألیف‌کرده ودر مقدمهٔ این‌کتاب با احترام و تجلیل ازاین وزیر یادکرده است. سال وفات کرخی را ۴۲۰ هـ. ق. نوشته‌اند.

درسال ۱۹۳۳ پروفسور **«جورجیولوی دلاویدا»** در مقاله‌ای‌که دربارهٔ کرجی در مجلهٔ «تحقیقات شرقی» انتشار داد (رجوع شود به م ۱) با ارائهٔ مدارکی نسبت او را بـه کرخ بغداد دور از حقیقت و اشتباه محض نامیده و او را اهل **کرج تهران** دانسته است.

به هرحال کرجی (یا کرخی) درعصر خـود یکی از شخصیتهای عظیم علمی بوده است و با همین جهت است کـه آثار اورا در ریاضیات بالاخص جبر باارج وقدر می‌شناسند و بحق می‌توان اورا بعداز **محمد بن موسی خوارزمی و ابو کامل شجاع بن اسلم مصری** یکی‌ازبنیانگذاران علم جبرنامید وهمین‌آثارمهم اوست‌که دانشمندانی نظیر**«سمیت»** را وادارکرده‌که بگوید:

کرخی از ریاضیدانان برجسته‌ای است که آثارش در پیشرفت علم ریاضی تأثیر بسزائی داشته است.

آثار کرجی

آثار کرجی مخصوصاً دربارهٔ زمین شناسی به انـدازه‌ای دقیق و علمی است‌که امروزه در دانشگاههای اروپائی‌تدریس می‌شود. ازکرخی آثار محدودی باقی مانده‌که مهمترین آنهـا عبارتند از :

۱ـ کتاب فخری در جبر ،

این‌کتاب‌از باارزشترین‌کتابهای جبری دورهٔ اسلامی‌است. یك نسخهٔ خطی از این‌کتاب درکتابخانهٔ پاریس موجود است.

وپکه دانشمندآلمانی منتخباتی ازآنرا به فرانسه‌ترجمه کرده با مقدمه‌ای دربارهٔ حل معادلات سیال در دورهٔ اسلامی درسال ۱۸۵۳ درپاریس چاپ و منتشر نموده است . وپکه در مقدمهٔ این کتاب‌این‌نکته را یادآوری می‌کندکه کارهای علمای اسلامی‌در موردمعادلات‌سیاله‌مبتنی‌بر کارهای**دیوفانتوس**عالم یونانی است با این تفـاوت کـه جامعتر و بهتـر از آنست و ریاضیدانان اسلامی راههای‌ابتکاری وتازه‌ای‌برای حل‌معادلات سیاله‌کشف کرده و معادلات‌ازدرجات‌بالاتررا‌طرح‌وحل‌کرده‌اند وکارهای **فیبوناچی** دراروپا اکثراً اقتباس ازآثار ریاضیدانان اسلامی‌بویژه‌کتاب فخری‌کرخی است.

۲ـ الکافی فی‌الحساب،

این‌کتاب را یکی دیگر او خاور شناسـان آلمانی به‌نام **آدولف هوخهایم** به‌آلمانی ترجمه‌کرده ودرسالهای۱۸۷۸ و ۱۸۸۰ در سه جلد چاپ ومنتشر نموده است.

۳ـ «البدیع فی‌الحساب»

نسخه‌ای ازآن درکتابخانهٔ واتیکان موجود است.

۴ـ علل حساب الجبر و المقابله

نسخه‌ای از آن در کتابخانهٔ بادلیان در اکسفورد انگلستان موجود است .

۵ـ انباط المیاه الخفیه

این کتاب برای اولین بار در حیدر آباد دکن هند به‌چاپ رسیده ودرآن از کوهها وسنگها و زمینها و گیاهانی که دلالت بروجودآبهای زیرزمینی دارند بحث کرده است و حاوی مطالب ومسائل مهمی درزمین شناسی و احداث قنات و کاریز است .

یك نسخه از این کتاب درکتابخانهٔ ملی تهران موجود است این کتاب بوسیلهٔ **حسین خدیو جم** به فارسی ترجمه ودر تهران به‌چاپ رسیده است.

۶ـ کتاب مختصر فی الحساب و المساحة

یك نسخهٔ خطی ازآن درکتابخانهٔ شهرداری اسکندریهٔ مصر موجود است.

سایر تألیفات کرجی که تاکنون بدست نیامده عبارتنداز:

۷ـ کتاب العقود الابنیه

این کتاب دربارهٔ ساختن خانه و پل وقلعه وکندن کاریز وغیره است.

۸ـ کتاب فی حساب الهند

۹ـ المدخل فی علم النجوم

ابتکارات کرخی ـ در آثارکرخی به مطالب قابل توجهی برمی‌خوریم کـه ذکر بعضی از آنها سودمند به نظـر می‌رسد :

۱ـ دستور تقریبی استخراج جذر عدد m به صورت :

$$m : a^2 + r \Longrightarrow \sqrt{m} = a + \frac{r}{2a+1}$$

اگر $r<a$،خواهیم داشت :

$$\sqrt{m} = a + \frac{r}{2a}$$

۲ـ حل معادلات دو مجذوری به صورت :

$$x^4 + ax^2 = b$$

۳ـ ل معادلات از درجات بالاتر به صورت :

$$ax^{2n+m} + bx^{n+m} = cx^m$$

ازراه تبدیل آنها به معادلهٔ درجهٔ دوم.

۴ـ اثبات هندسی **دستور هرون** در مـورد مساحت مثلث :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۵ـ تحقق روابطی از قبیل :

$$\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{50}$$

$$\sqrt{54} - \sqrt{2} = \sqrt{16}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

۶ـ اثبات هندسی روابط زیر:

$$\sum_1^n n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_1^n n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_1^n n^3 = (\Sigma n)^2$$

$$\sum_1^n n(n+1) = \frac{1}{3}[(n+1)^3 - (n+1)]$$

و از جمله معادلات سیال کتاب فخری عبارتند از:

$$x^3 + y^3 = z^2 \qquad x^2 - y^2 = z^3$$

$$x^3 + y^2 = z^3 \qquad x^2 - y^3 = z^2$$

$$x^2 y^3 = z^2 \qquad x^3 + 10x^2 = y^2$$

کرخی و استقراء

دربارهٔ استقراء ریاضی که امروزه اهمیت زیـادی کسب کرده کرخی فصلی ازکتاب فخری‌را به این موضوع اختصاص داده وسی گوید :

«الاستقراء فی الحساب ان ترد علیك جمله من نوع او من نوعین اوثلثة انواع متوالیه و تکون تلك الجملة غیرمربعة ما یدل علیه‌اللفظ و تکون فی‌المعنی و القـوه مربعـة و انت ترید ان تعرف جذرها »

سپس کرخی براساس این تعریف معادلهٔ سیالهٔ

$$x^2 + 4x = y^2$$

را حل می‌کند.

در اینجا دونمونه از کارهای کرخی را شرح می‌دهیم .

۱ـ محاسبهٔ Σn^3 ـ از اکتشافات کـرخی یکی ارائهٔ رابطهٔ زیراست:

$$\Sigma n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

این رابطه درکتاب چند قضیهٔ هندسی تألیف احمد شرف‌الدین به صورت:

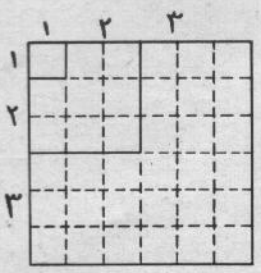
$$(\sum_1^n n)^2 = \sum_1^n [3n(\sum_1^n n)^2 - 2n^3] =$$

$$= \sum_1^n [3n\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2n^3]$$

تعمیم داده شده است.

روش کرخی در اثبات رابطهٔ بالا:

اعداد ۱و۲و۳ را که هرکدام به ترتیب نمایندهٔ یك و دو وسه مربع هستند روی خطی درنظر می‌گیریم، سپس روی این خط مربعی رسم می‌کنیم. مساحت این مربع : $(۳+۲+۱)^۲$ است.



از طرف دیگر اندازهٔ سطحی که زیر هر عدد تشکیل می‌شود مساوی است با مکعب آن عدد، مثلا سطحی که زیر ۳ است از نظر مقدار برابر است با دو برابر مستطیل به مساحت :

$$۳(۱+۲+۳)$$

منهای $۳^۲$؛ یعنی :

$$۲[۳(۱+۲+۳)]-۳^۲=۳^۳$$

این سطح در شکل هاشور خورده است.

اکنون شکل را برای n رسم می‌کنیم ، باز ملاحظه می‌کنیم که سطح اشغال شدهٔ زیر n برابر است با دو برابر مستطیل به مساحت :

$$n(۱+۲+\ldots+n)$$

منهای $n^۲$؛ یعنی :

$$۲[n(۱+۲+\ldots n)]-n^۲=$$

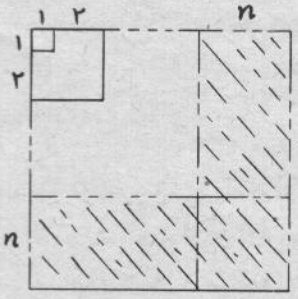
$$=۲n[\frac{n(n+۱)}{۲}]-n^۲=n^۳$$

از طرفی مساحت تمام این مربع که ضلعش :

$$۱+۲+۳+\ldots+n)$$

است مساوی است با :

$$(۱+۲+\ldots+n)^۲$$



بنابراین از طرفی مساحت مربع مجموع قطعاتی است که در فوق ملاحظه و محاسبه شده و نیز برابر مقداری است که اخیراً ذکر کردیم ، پس خواهیم داشت :

$$۱^۳+۲^۳+\ldots+n^۳=(۱+۲+\ldots+n)^۲$$

مثال ۲ـ اثبات هندسی رابطهٔ

$$(۱\times۲)+(۲\times۳)+(۳\times۴)+\ldots+$$

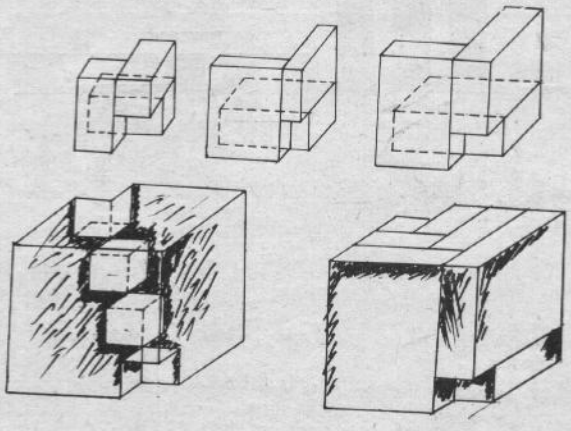
$$+[n(n+۱)]=\frac{۱}{۳}[(n+۱)^۳-(n+۱)]$$

ما اکنون فقط برای حالت:

$$(۱\times۲)+(۲\times۳)+(۳\times۴)=\frac{۱}{۳}(۴^۳-۴)$$

برهان هندسی ارائه می‌دهیم :

سه خشت (آجر) به ابعاد ۲ و ۱ و ۱ درنظر می‌گیریم. آنها را روی هم قرار می‌دهیم مقدار حجمی که شکل حاصل اشغال می‌کند برابر است با : $۲^۳-۲=۳(۱\times۲)$



اکنون سه خشت دیگر به ابعاد ۲ و ۱ و ۱ رویهم قرار می‌دهیم، فضای اشغال شده بوسیلهٔ این شکل مساوی است با :

$$۳(۲\times۳)$$

به همین ترتیب سه خشت دیگر به ابعاد ۴و۳و۱ اختیار کرده، مطابق شکل رویهم قرار می‌دهیم، حجم حاصل مساوی است با $۳(۴\times۳)$. اکنون سه نمونه شکل خواهیم داشت که اگر آنها را بخواهیم به یك وضع واحدی درآوریم شکل سمت راست را خواهیم داشت: و حجم شکل اخیر برابر است با $۴-۴^۳$ زیرا مکعبی است به بعد ۴ چون درطول قطر آن ۴ مربع به حجم واحد تشکیل می‌شوند.

بنابراین داریم :

$$۴^۳-۴=۳[(۱\times۲)+(۲\times۳)+(۳\times۴)]$$

$$(۱\times۲)+(۲\times۳)+(۳\times۴)=\frac{۴^۳-۴}{۳}$$

***

منابع : مقاله : کرجی ـ ریاضی‌دان بزرگ ایرانی از مجلهٔ سخن علمی و فنی شمارهٔ ۸۹، سال ۱۳۴۴ ه.ش

۲ـ حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر

تألیف دکتر غلامحسین مصاحب تهران ۱۳۳۹ ه. ش.

۳ـ تراث العرب العلمی فی الریاضیات والفلك

تألیف: قدری حافظ طوقان، مصر

A . R . AMIR-MOEZ : LEGENDS, MATHEMATICS, and NOVELTIES U.S.A 1966

Notions de
PROBABILITÉ
par M. HAGECE
ترجمهٔ : مصحفی

احتمالات

فصل دوم - اصول حساب احتمالات

۶ـ مفهوم احتمال مرکب

الف ـ فرض می‌کنیم که پیشامدهای اولیه هم احتمالند. هرگاه دو پیشامد A و B معلوم باشند، آیا رابطهٔ ساده‌ای بین احتمالهای پیشامدهای

$$A \text{ ، } B \text{ ، } A \text{ و } B$$

وجود دارد ؟

تعداد حالات مطلوب مربوط به پیشامدهای :

$$A \text{ ، } B \text{ ، } A \text{ و } B$$

ازبین n حالات ممکن را به ترتیب با :

$$j(A) \text{ ، } j(B) \text{ ، } j(A \text{ و } B)$$

نشان می‌دهیم و می‌دانیم که :

$$P(A)=\frac{j(A)}{n} \text{ ، } P(B)=\frac{j(B)}{n} \text{ ،}$$

$$P(A \text{ و } B)=\frac{j(A \text{ و } B)}{n}$$

با فرض ، $j(A)>0$ می‌توانیم بنویسیم :

$$P(A \text{ و } B)=\frac{j(A \text{ و } B)}{n}=\frac{j(A \text{ و } B)}{j(A)}\times\frac{j(A)}{n}$$

نسبت $\frac{j(A)}{n}$ برابر با $P(A)$ است و در نسبت :

$$\frac{j(A \text{ و } B)}{j(A)}$$

$j(A)$ تعداد حالاتی است که A بوقوع پیوسته ،

$j(A \text{ و } B)$ عبارتست از تعداد آن حالاتی از حالات وقوع A که B نیز بوقوع پیوسته است . بنابراین نسبت :

$$\frac{j(A \text{ و } B)}{j(A)}$$

عبارتست از احتمال پیشامد B هرگاه فرض کنیم که A بوقوع پیوسته باشد و آن را به صورت $P(B|A)$ نوشته و چنین می‌خوانیم: «احتمال B اگر A» و داریم :

$$P(A \text{ و } B)=P(A)\times P(B|A)$$

با محاسبهٔ $P(A \text{ و } B)$ از رابطهٔ بالا ، گفته می‌شود که $P(A \text{ و } B)$ از روی احتمالات مرکب بدست آمده است .

مثال : کوزه‌ای محتوی ۵ گلولهٔ سفید و ۳ گلولهٔ قرمز است. دو گلوله را متوالیاً از کوزه بیرون می‌آوریم، احتمال اینکه هر دو سفید باشند چیست ؟

پیشامد «اولین گلوله که بیرون آورده می‌شود سفید باشد» را با A و پیشامد «دومین گلوله که بیرون آورده می‌شود» را با B نشان می‌دهیم ؛ پس $P(A \text{ و } B)$ عبارتست از پیشامد «هر دو گلوله سفید باشند». برای $P(A)$ چون تعداد حالات ممکن ۸ و تعداد حالات مطلوب ۳ است پس :

$$P(A)=\frac{5}{8}$$

است .

$P(B|A)$ یعنی احتمال آنکه اگر گلولهٔ اول سفید باشد، گلولهٔ دوم نیز سفید باشد؛ چون یك گلولهٔ سفید بیرون کشیده شده است، پس در کوزه ۴ گلولهٔ سفید و ۳ گلولهٔ قرمز باقی مانده است و داریم :

$$P(B|A)=\frac{4}{7}$$

و بنا براین :

$$P(A \text{ و } B)=P(A)\times P(B|A)=$$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$$

ب ـ پیشامدهای مستقل ازهم

دو پیشامد A و B مستقل ازهم نامیده می‌شوند هر گاه داشته باشیم :

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \times P(B)$$

برای آن ، لازم و کافی است که داشته باشیم :

$$P(B|A) = P(B)$$

به عبارت دیگر ،وقوع پیشامد A دراحتمال B تغییری نمی‌دهد.

مثال ۱ـ از ۳۲ برگ بازی یك کارت بیرون می‌کشیم. هر گاه A این پیشامد باشد که برگ سربور «شاه» باشد و B این پیشامد باشد که برگ سربور «دل» باشد، داریم:

$$P(A) = \frac{۴}{۳۲} = \frac{۱}{۸} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{۸}{۳۲} = \frac{۱}{۴}$$

اکنون $P(B|A)$ را حساب می‌کنیم . هر گاه بدانیم که برگ بیرون کشیده شده شاه باشد ، احتمال آنکه این برگ نیز دل باشد $\frac{۱}{۴}$ است (حالات ممکن ۴ وحالت مطلوب یك است) پس داریم:

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \times P(B) = \frac{۱}{۸} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۳۲}$$

درحقیقت می‌دانیم که یك پیشامد اولیهٔ «شاه دل» داریم که برابر است با «شاه و دل» .

مثال ۲ـ درون کوزه‌ای ۵ گلولهٔ سفید و ۳ گلولهٔ قرمز ریخته شده‌است. یك گلوله ازکوزه بیرون می‌آوریم و پس از آنکه رنگ آنرا مشاهده کردیم آن را مجدداً به درون کوزه می‌اندازیم. پیشامدهای زیر را درنظر می‌گیریم :

A = اولین گلولهٔ بیرون کشیده شده سفید باشد .

B = دومین گلولهٔ بیرون کشیده شده سفید باشد .

تحقق پیشامد A دراحتمال وقوع B تأثیری ندارد . پیشامدهای A و B مستقل ازهم‌هستند وبنابراین احتمال آنکه هر دو گلوله که متوالیاً بیرون آورده می‌شوند سفید باشند برابر است با :

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \times P(B) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۵}{۸} = \frac{۲۵}{۶۴}$$

ج ـ چند تمرین

۱ـ در کوزه‌ای که ۵ گلولهٔ سفید و ۳ گلولهٔ قرمز وجود دارد ، دو گلوله را متوالیاً بیرون می‌آوریم بدون آنکه هریك را مجدداً در کوزه بیندازیم . اگر A این پیشامد باشد که دو گلوله بارنگهای مختلف باشند، احتمال وقوع A چقدراست؟

پیشامدهای زیر را درنظر می‌گیریم :

$B_۱$ = اولین گلوله سفید باشد ،

$B_۲$ = دومین گلوله قرمز باشد ،

$C_۱$ = اولین گلوله قرمز باشد ،

$C_۲$ = دومین گلوله سفید باشد،

$B = (B_۱ \text{ و } B_۲)$ و $C = (C_۱ \text{ و } C_۲)$

B و C ناسازگارند پس :

$A = (B \text{ یا } C)$

$P(A) = P(B) + P(C)$

$$B = (B_۱ \text{ و } B_۲) \Longrightarrow P(B) = P(B_۱) \times P(B_۲|B_۱) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۱۵}{۵۶}$$

$$C = (C_۱ \text{ و } C_۲) \Longrightarrow P(C) = P(C_۱) \times P(C_۲|C_۱) = \frac{۳}{۸} \times \frac{۵}{۷} = \frac{۱۵}{۵۶}$$

بنا براین :

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{۱۵}{۵۶} + \frac{۱۵}{۵۶} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

۲ـ تاسی را ۴ دفعهٔ پیاپی می‌اندازیم . احتمال آنکه پیشامد $A = (۶ \text{ یا } ۵)$ به تعداد دفعات زیر بوقوع بپیوندد ، چقدراست ؟

I ـ ۰ دفعه $(B_۰)$

II ـ ۱ دفعه $(B_۱)$

III ـ ۲ دفعه $(B_۲)$

IV ـ ۳ دفعه $(B_۳)$

V ـ ۴ دفعه $(B_۴)$

به عنوان مثال $A_۲$ را این پیشامد می‌گیریم که دردومین بار انداختن تاس ،A بوقوع آید و $A'_۳$ این پیشامد دربار سوم ، پیشامد متضاد A پیش‌آید. دریك بارانداختن تاس داریم:

$$P(A) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} \quad \text{و} \quad P(A') = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

I ـ داریم :

$$B_۰ = A'_۱ \text{ و } A'_۲ \text{ و } A'_۳ \text{ و } A'_۴$$

چون این پیشامدها مستقل ازهم هستند پس :

$$P(B_۰) = P(A'_۱) \times P(A'_۲) \times P(A'_۳) \times P(A'_۴) = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۴$$

II ـ پیشامد $B_۱$ می‌تواند به چهارنوع ناسازگاربوقوع آید : «۵ یا ۶» ممکن است در بار اول ، بار دوم ، بارسوم ، بارچهارم پدیدآید :

$$B_۱ = (A_۱ \text{ و } A'_۲ \text{ و } A'_۳ \text{ و } A'_۴) \text{ یا}$$

یا $(A'_1$ و A_2 و A'_3 و $A'_4)$
یا $(A'_1$ و A'_2 و A_3 و $A'_4)$
$(A'_1$ و A'_2 و A'_3 و $A_4)$

پیشامدهای داخل پرانتزها هم احتمالند و احتمال هریك از آنها برابر است با :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

پس :

$$P(B_0) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

III- پیشامد B_2 به چندنوع ناسازکار ممکن است که روی دهد ؟ تعداد این چند نوع عبارتست از تعدادحالتهایی که‌در چهار بار انداختن تاس می‌توان دوبار را انتخاب کرد که

برابر است با $C^2_4 = 6$

$B_2 = (A_1$ و A_2 و A'_3 و $A'_4)$ یا ... یا $(A'_1$ و A'_2 و A_3 و $A_4)$

شش پیشامد داخل پرانتزها هم احتمالند و احتمال هریك برابر است با اینکه دریك ترتیب وضع شده A دو دفعه و A' دو دفعه روی دهد و برابر است با :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

پس :

$$P(B_2) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

IV و V- بااستدلالی مشابه نتیجه می‌شود :

$$P(B_3) = C^3_4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$P(B_4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

ملاحظه می‌کنیم که پیشامد :

B_4 یا B_3 یا B_2 یا B_1 یا B_0

یك پیشامد حتمی و B_0 ،...، B_4 دو به دو ناسازگارند . پس باید داشته باشیم :

$$1 = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)$$

که به سادگی محقق می‌باشد :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 + C^1_4\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} + C^2_4\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + C^3_4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^4 = 1$$

تمرینات

۱- از ۳۲ برگ‌بازی یك‌کارت بیرون‌می‌کشیم ؛ احتمال اینکه این برگ، تك یا صورت باشد چیست ؟

۲- دوسکه می‌اندازیم ، احتمال‌آنکه از اولی یك یا ۲ واز دومی نمره‌ای غیراز۶ بیاید چیست ؟

۳- دریك بخت‌آزمائی با ۱۰۰ بلیط که سه عدد آن برنده می‌باشد ، هرگاه ۵ بلیط خریده باشیم ، چه احتمال وجود دارد تا :

I- یك بلیط برنده داشته باشیم ،

II- حداقل‌یك بلیط برنده داشته باشیم .

۴- ازبین ۳۲ برگ‌بازی سه برگ‌را پی درپی بیرون می‌کشیم. چه احتمال وجود دارد تا دومین برگ؛ وفقط‌همان یکی ، تك‌خال باشد .

۵- از ۳۲برگ‌بازی ۸ برگ‌را می‌کشیم. برای اینکه دراین ۸ برگ۴ برگ‌شاه داشته باشیم احتمال مربوط به‌آن چیست ؟

۶- از۳۲ برگ بازی۸ برگ‌رامی‌کشیم.این‌احتمالات را حساب‌کنید :

I- برای‌آنکه ۵ برگ‌از این ۸ برگ، وفقط ۵ برگ، دل باشد .

II- برای آنکه حداقل ۵ برگ دل داشته باشیم .

۷- درکوزه‌ای ۶ گلولهٔ سفیدو۴ گلولهٔ‌قرمز هست . سه گلوله متوالیاًبیرون می‌آوریم. چه احتمال هست تا اینکه :

I-اولین گلوله گلوله‌دوسفید. دومی‌قرمزوسومی‌سفیدباشد.

II- ازبین سه گلوله‌دو گلولهٔ سفید ویکی قرمزباشد .

۸- از ۳۲برگ‌بازی سه برگ‌را متوالیاً می‌کشیم . چه احتمال هست تا این برگها به ترتیبی‌که کشیده شده‌اند ، آس دل ، شاه دل ، بی‌بی سیاه باشد .

۹-کوزه‌ای حاوی ۶ گلولهٔ سفید و۳ گلولهٔ قرمزاست ؛ سه گلوله را متوالیاًبیرون می‌آوریم بقسمی‌که هر گلوله راپس ازبیرون‌آوردن مجدداًبه درون گلوله می‌اندازیم. چه احتمال هست برای‌آنکه ازبین این سه گلوله دوعدد سفید (و دیگری قرمز) باشد .

۱۰- اولا هرگاه A و B دو پیشامد مربوط به یك آزمایش شانسی‌باشند ثابت‌کنیدکه :

$$P(A \text{ یا } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$$

ثانیاً- احتمال‌اینکه دانش‌آموزی مسئله‌ای راحل‌کند $\frac{1}{2}$ است واحتمال اینکه دانش‌آموز دیگر همان مسئله را حل کند $\frac{2}{3}$ است. چه احتمال هست تا این مسئله بوسیلهٔ یکی ازاین‌دو دانش‌آموزیا دیگری حل شود هرگاه‌آنان‌مستقل ازهم‌کارکنند.

۱۱ـ کوزهٔ A شامل ۶ گلولهٔ سفید و ۵ گلولهٔ سیاه‌است. کوزهٔ دیگر B شامل ۹ گلولهٔ سفیدو ۴ گلولهٔ سیاه است. زهرکوزه‌یك گلوله بیرون می‌آوریم ؛ چه احتمال هست تاهر ادوی این گلوله‌ها ازیك رنگ‌باشند ؟

همچنین‌چه‌احتمال هست‌تااین دو گلوله‌بارنگهای مختلف باشند ؟

۱۲ـ سه تاس‌را می‌اندازیم . چه احتمال هست‌تااینکه:

اولا ازهرسه تاس ۶ روشود .

ثانیاً شماره‌های مربوط به سه تاس برابرباشند .

ثالثاً دوشماره ۶ ودیگری مخالف ۶ باشد.

رابعاً دوشماره از شماره‌های سه تاس برابر باشند .

۱۳ـ دوتاس‌را چهاردفعهٔ متوالی می‌اندازیم. چه‌احتمال هست تا اینکه حداقل درسه دفعه مجموع شماره‌ها برابر ۸ باشد؟

۱۴ـ دریك آزمایش مهره‌هایی که‌توسطیك‌ماشین‌ساخته‌شده‌اند، معلوم شدکه ازهر ۱۰ مهره یکی معیوب است. از این مهره‌ها ۴ عدد را تصادفی ومتوالیاً بیرون می‌کشندبقسمی‌که هردفعه‌که مهره‌ای برداشته شد مجدداً بین مهره‌ها انداخته می‌شود . چه احتمال هست تابین این ۴ مهره :

اولا هیچ مهرهٔ معیوب نداشته باشیم ؟

ثانیاً یك مهرهٔ معیوب داشته باشیم ؟

ثالثاً بیش ازیك مهرهٔ معیوب داشته باشیم؟

۱۵ـ دانشجویی‌بایدکتابی‌راامتحان‌بدهدکه‌شامل ۱۰ فصل است. این دانشجوبیش‌از ۵ فصل ازکتاب رانتوانست یادبگیرد. بافرض اینکه درامتحان فقط سه سؤال مطرح می‌شود. حساب کنید :

الف ـ چه احتمال هست تا این هرسه سؤال ازفصلهایی باشدکه وی فراگرفته است .

ب ـ دانشجو حداقل چند فصل را باید یادبگیرد تااین احتمال حداقل برابر با $\frac{1}{2}$ باشد ؟

۱۶ـ هریك از دومینوهای یك بازی به دوقسمت تقسیم شده‌وبا صفرتا۶نقطه نشانه گذاری‌شده‌است.دوقسمت‌هردومینو ممکن‌است‌شامل‌نشانه‌های برابریا نابرابر باشند.تمام‌دو مینوها مختلف هستند ؛

الف ـ ثابت‌کنیدکه تعداد دومینوهای این بازی اجباراً ۲۸ عدد است .

ب ـ برای‌هریك ازبازیکنهاچه احتمال هست تاسه‌جفت داشته باشد ؟

ج ـ چه احتمال هست‌تا هیچیك ازبازیکنها نه جفت‌شش، نه جفت پنج ونه جفت چهار داشته باشد ؟

د ـ مسئله را مجدداً بااین فرض حل‌کنیدکه هر دومینو ازصفرتا ۷ نشانه بتواند داشته باشد .

۱۷ـ الف : کوزه‌ای شامل ۱۰ گلوله است‌که روی هر کدام ازآنها یکی از شماره‌های از ۰ تا ۹ نوشته شده اما این شماره‌ها از راه لمس گلوله‌ها مشخص نمی‌شوند . از این کوزه یك گلوله‌بیرون می‌آوریم. چه احتمال هست تااین گلوله شمارهٔ ۲ یا اینکه شمارهٔ ۶ داشته باشد ؟

ب ـ دوکوزهٔ A و B که هرکدام همانندکوزهٔ فوق‌الذکر است پهلوی هم گذاشته شده‌اند. یك گلوله از A ویك گلوله‌از B بیرون می‌آوریم وعددی دورقمی تشکیل می‌دهیم‌که شمارهٔ گلولهٔ‌کوزهٔ A رقم دهگان و شمارهٔ گلولهٔ کوزهٔ B رقم یکان آن باشد. چه احتمال است تا این عدد بر ۳ بخش‌پذیرباشد؟

کتابخانهٔ یکان

کاشی نامه

تحقیق دراحوال وآثار

غیاث‌الدین جمشید کاشانی

ریاضیدان و منجم بزرگ ایرانی

نگارش : ابوالقاسم قربانی

بامعرفی ۸۵ منبع ومأخذ

در ۲۷۶ صفحه ـ بها : ۱۶۰ ریال

از انتشارت دانشگاه تهران

مقاطع مخروطی (روش برداری)

دکتر علیرضا امیرمعز

دانشگاه تکزاس تک

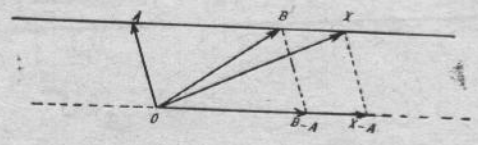
برهانهای بیشماری، چه هندسی و چه تحلیلی ، بـرای قضیهٔ مشهور « **صفحه مخروط قائم دوار را در یك منحنی درجهٔ دوم قطع می‌کند**» موجود است. این مقاله برهان با روش جبر برداری‌آنرا به عرض خوانندگان می‌رساند.

۱ـ **اصطلاحات** ـ آغاز همهٔ بردارهـا نقطه‌ای ثابت درفضا است‌که مبدأ نامیده می‌شود . بنابراین بردارها بوسیلهٔ نقطهٔ انجام‌آنها نامیده می‌شوند. طول حاصل A را با $\| A \|$ نمایش می‌دهیـم . حـاصل ضرب داخلی دو بـردار **A** و **B** عبارت است از :

$$(A \text{ و } B) = \| A \| \cdot \| B \| \cos\theta$$

که θ مقدار زاویهٔ بین دوبردار است. دراین مقاله از قضایای جبر برداری استفاده می‌کنیم [۱]. نقطه‌ها و حاصلها هر دو با حروف‌بزرگ‌لاتینی نمایش داده می‌شوند. ازاینرودقت‌مختصری برای تشخیص‌آنها لازم است.

۲ـ **معادلهٔ برداری خط مستقیم** ـدونقطهٔ‌مشخص



A و B داده شده‌اند (شکل ۱) . نقطهٔ O را مبدأ گـرفته و بردارهای A وB را درنظرمی گیریم . فرض‌کنیم‌کـه X نقطهٔ متحرکی روی خط AB باشد. ملاحظه می‌شودکه بردارهـای $B-A$ و $X-A$ هردوباخط AB موازیند. بنابراین‌عددی حقیقی مانند t وجود دارد بقسمی‌که :

$$X-A=t(B-A)$$

از اینجا نتیجه‌می‌شودکه :

$$X=tB+(1-t)A$$

معادلهٔ بالارا چنین می‌توان‌نوشت:

$$X=pA+qB \quad \text{و} \quad p+q=1$$

واضح است که :

$$p=(1-t) \quad \text{و} \quad q=t$$

است. این معادلهٔ برداری خط AB است. بحقیقت می‌تـوان دیدکه این‌معادله به بعد فضا ربطی ندارد. ولی‌دراین‌مقاله‌فقط بردارهای فضارا درنظر گرفته‌ایم .

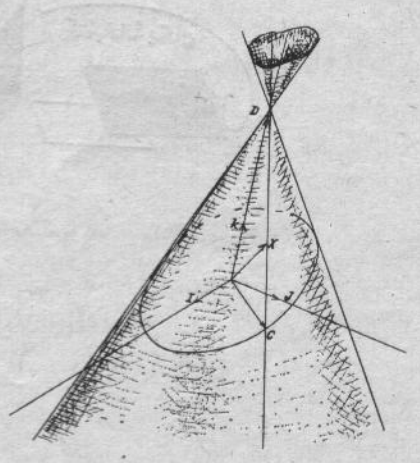
۳ ـ **مخروط دوار قائم**ـ دستگاه مختصات قائم [IوJوK] را درنظرمی گیریم. بردارI واحد محورx ، Jواحد محورy وK واحد محور z است.بردار Cرا درصفحهٔxyبقسمی می گیریم‌که $\| C \| = a > 0$ باشد.بنابراین مکان نقطهٔ C دایره‌ای به مرکز O و به شعاع a درصفحهٔ xy است. نقطهٔ D را روی محور z می گیریم بقسمی‌که:

$$D=bK \quad \text{و} \quad b>0$$

خواننده باید متوجه باشدکه مقادیر a و b ثابتند ـ لذا معادلهٔ خط CD عبارتست از

$$X=pC+qD \quad \text{و} \quad p+q=1 \qquad (1)$$

چنانچه‌در مبحث ۲ دیدیم انجام بردارX روی خط CD است. اکنون اگرXوC تمام موقعیتهایشانرا اتخاذکنند، مکان نقطهٔ



X مخروط قائم دوار به‌رأسD است‌که محورآن همان محور z است (شکل ۳).

حال فرض کنیم که زاویهٔ بین بردار C و I (عکس حرکت ساعت) t باشد. سپس:

$$C=(a\cos t)I+(a\sin t)J$$

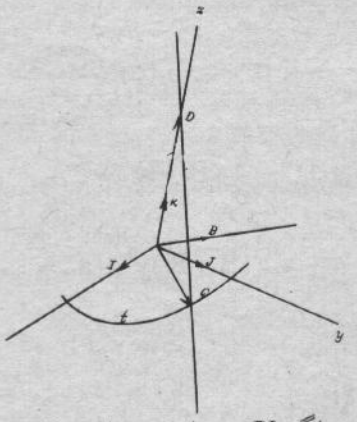
هر گاه در تساوی (۱) مقادیر D و C را بحسب I و J و K بکار بریم حاصل می‌شود:

$$X=(pa\cos t)I+(pa\sin t)J+qbK$$

و $p+q=1$

معادلهٔ بالا معادلهٔ برداری مخروط است.

۴- مقاطع مسطح یك مخروط - بدون اینکه حالت کلی را ازدست بدهیم، صفحه‌را شامل محورx می گیریم.



در این صفحه دستگاه مختصات قائم را چنان انتخاب می‌کنیم که محور x آن همان محورx باشد ومحور y′ را طوری انتخاب می‌کنیم که بردار B واحدآن باشد. واضح است که بردار B در صفحهٔ yz است (شکل ۲). اگر X برداری در این صفحه باشد، درمعادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$X=xI+y'B$$

چون B در صفحهٔ yz است، نتیجه می‌شودکه

$$B=(B\text{و}J)J+(B\text{و}K)K \quad \text{و} \quad \|B\|=1$$

بنابراین بردار X درمعادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$X=xI+y'(B\text{و}J)J+y'(B\text{و}K)K$$

و $\|B\|=1$

اکنون برای اینکه X در محل تلاقی صفحه و مخروط ختم شود باید دردستگاه زیرصدق کند:

$$\begin{cases} X=(pa\cos t)I+(pa\sin t)J+qbK \\ \qquad\qquad \text{و} \quad p+q=1 \\ X=xI+y'(B\text{و}J)J+y'(B\text{و}K)K \\ \qquad\qquad \text{و} \quad \|B\|=1 \end{cases}$$

این دستگاه دو معادله،متعادل دستگاه زیر است:

$$(۲)\quad \begin{cases} x=pa\cos t \\ y'(B\text{و}J)=pa\sin t \\ y'(B\text{و}K)=qb \quad \text{و} \quad p+q=1 \end{cases}$$

دراین دستگاه مقادیر t، p وq پارامترند. برای اینکه معادلهٔ منحنی محل تلاقی دو سطح را بشناسیم، پارامترها را حذف می‌کنیم. فرض کنیم که

$$\cos t\neq 0 \quad \text{و} \quad \sin t\neq 0$$

در این صورت:

$$p=\frac{x}{a\cos t} \quad \text{یا} \quad p=\frac{y'(B\text{و}J)}{a\sin t}$$

و

$$q=\frac{y'(B\text{ و }K)}{b}$$

با ملاحظهٔ $p+q=1$ بدست می‌آیدکه:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a\cos t}+\dfrac{y'(B\text{ و }K)}{b}=1 \\ \dfrac{y'(B\text{ و }J)}{a\sin t}+\dfrac{y'(B\text{ و }K)}{b}=1 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم که :

$$b-y'(B\text{ و }K)\neq 0$$

باشد،بدست می‌آوریم که :

$$\frac{a}{b}\cos t=\frac{x}{b-y'(B\text{و}K)}$$

$$\frac{a}{b}\sin t=\frac{y'(B\text{ و }J)}{b-y'(B\text{و}K)}$$

ازاین دستگاه نتیجه می‌شودکه

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{x^2+y'^2(B\text{ و }J)^2}{[b-y'(B\text{و}K)]^2}$$

و بالنتیجه معادلهٔ محل تلاقی چنین بدست می‌آید:

$$b^2x^2+[b^2(B\text{ و }J)^2]y'^2= \qquad (۳)$$
$$=a^2[a-y'(B\text{و}K)]^2$$

ملاحظه می‌شود که این معادله نسبت به x و y′ از درجهٔ دوم است.

۵- حالات خصوصی - در مبحث ۴ برای بدست آوردن‌معادلهٔ‌محل تلاقی،شرایط مختلفی درنظر گرفتیم. اکنون این شرایط را بررسی می‌کنیم:

(i) فرض کنیم که $\cos t=0$ باشد ، در این صورت

$$\sin t=\pm 1$$

ودستگاه (۲) چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x=0 \\ y'(B\text{و}J)=\pm pa \\ y'(B\text{ و }K)=qb \quad \text{و} \quad p+q=1 \end{cases}$$

هر گاه t ، p و q را حذف کنیم، معادله‌ای‌که بدست‌می‌آید همانست‌که در معادلهٔ (۳) مقدار x را صفربگیریم. در این

حالت محل تلاقی مقطع مخروطی بامحور y' بدست می‌آید .

(ii) فرض کنیم که $sint = 0$ باشد. دراین‌صورت

$$cost = \pm 1$$

و دستگاه (۲)می‌شود:

$$\begin{cases} x = \pm pa \\ y'(B \text{ و } J) = 0 \\ y'(B \text{ و } K) = qb \text{ و } p+q=1 \end{cases}$$

تساوی دوم دوحالت را ایجاب می‌کند :

(a) اگر $y' = 0$ باشد، ازمعادلهٔ سوم نتیجه می‌شودکه $q = 0$ است زیرا $b > 0$. دراین‌صورت $p = 1$ است ومعادلهٔ $x = \pm a$ بدست می‌آید که محل تلاقی مقطع مخروطی را با محور x بدست می‌دهد.

(b) اگر $(J \text{ و } B) = 0$ باشد ، نتیجه می‌شودکه بردار B بر J عمود است. دراین‌صورت:

$$p = \pm\frac{x}{a} \quad \text{و} \quad q = \frac{y'(B \text{ و } K)}{b}$$

بالنتیجه معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\pm\frac{x}{a} + \frac{y'(B \text{ و } K)}{b} = 1 \qquad (۴)$$

ودراین حالت مقطع مخروطی دوخط متقاطع است. چون B بر J عمود است صفحه تبدیل به صفحهٔ xz می‌شود. برای حذف $\pm$ دررابطهٔ (۴) آنرا به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$[1 - \frac{y'(B \text{ و } K)}{b}]^2 = \frac{x^2}{a^2}$$

این معادله را می‌توان با درنظر گرفتن $(J \text{ و } B) = 0$ از (۳) بدست‌آورد.

(iii) اکنون فرض کنیم که $b - y'(B \text{ و } K) = 0$ باشد. در این صورت دستگاه (۲) به صورت زیردرمی‌آید :

$$\begin{cases} x = pa\,cost \\ y'(B \text{ و } J) = pa\,sint \\ b = qb \text{ و } p+q=1 \end{cases}$$

از معادلهٔ سوم نتیجه‌می‌شودکه $q = 1$ و بنابراین $p = 0$است. یعنی‌که X را برابر D قرار داده‌ایم یا نقطهٔ X را روی رأس مخروط گذاشته‌ایم. تنها امکان این آنست‌که $(J \text{ و } B) = 0$ و $(B \text{ و } K) = 1$ باشد. دراین صورت حاصل می‌شودکه $x = 0$ و $y' = b$. یعنی که‌محل تلاقی مقطع مخروطی با محور y' رأس مخروط است:

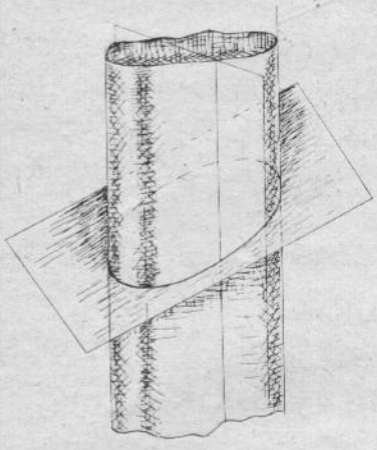
۶- **بحث** - ملاحظه می‌شودکه معادلهٔ (۳) رامی‌توان چنین‌نوشت:

$$(۵) \quad b^2x^2 + [b^2(B \text{ و } J)^2 - a^2(B \text{ و } K)^2]y'^2 + 2a^2b(B \text{ و } K)y' - b^2 = 0$$

حالات مختلف را می‌توان به‌آسانی بررسی‌کردکه چه وقت مقطع بیضی،هذلولی، سهمی‌یااشکال دیگراست.اینرا به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

اکنون حالت خاص دیگری را بررسی می‌کنیم؛ نخست طرفین معادلهٔ (۵) را به b^2 تقسیم می‌کنیم تا معادلهٔ زیر بدست‌آید:

$$(۶) \quad x^2 + [(B \text{ و } J)^2 - \frac{a^2}{b^2}(B \text{ و } K)]y'^2 + 2\frac{a^2}{b^2}(B \text{ و } K)y' - a^2 = 0$$



هرگاه b به سمت بینهایت برود مخروط به استوانهٔ دواری بدل‌می‌شود (شکل۴) در این‌صورت معادلهٔ (۶) بدل می‌شود به $x^2 + (B \text{ و } J)^2y'^2 = a^2$

بنابراین تنها مقاطع که ممکن‌است بدست آید عبارتند از:

(i) بیضی، هرگاه $(J \text{ و } B) \neq 0$ و $(B \text{ و } J) \neq \pm 1$ باشد.

(ii) دایره، هنگامی‌که $(B \text{ و } J) = \pm 1$ یا $B = \pm J$ باشد.

(iii) هرگاه $(J \text{ و } B) = 0$ باشد، نتیجه می‌شودکه $B = \pm K$

است. چون B برهردوی I و J قائم است، در این صورت دو خط موازی $x = \pm a$ یا $x^2 = a^2$ بدست می‌آید.

[1] A. R. Amir-Moez, Matrix techniques, trigonometry, and analytic geometry, Edwards Brother, Inc., Ann Arbor, Michigan (1964)

اعداد کامل، زائد و ناقص

ترجمهٔ: مقصود عین‌اللهی

اگر مجموع مقسوم علیه های یك عدد از جمله عدد ۱ اما به استثنای خود عدد برابر باآن‌عدد گردد، آن عددرا **عدد کامل** می‌خوانند اگر این مجموع از خود عددکوچکتر شود عددرا **عدد ناقص** و اگر از خود عدد بزرگتر شود عدد را **زائد** می گویند. برای‌مثال ۶ عددی است کامل زیرا :

$$۱+۲+۳=۶$$

و ۸ عددی است ناقص زیرا $۱+۲+۴<۸$

و ۱۲ عددی است زائد زیرا :

$$۱+۲+۳+۴+۶>۱۲$$

تمام اعداد زائد به سریها مربوط می‌شوند. هر سری از یك عدد اصلی که‌آنرا جملهٔ اول می‌خوانیم و ضرایبی ازاعداد کامل تشکیل شده است. تعداد اعداد کامل هرسری نامحدود است. ۱۷ سری از اعداد زائد وجود دارندکه جمله های اول آنها از ۱۰۰۰ کوچکتر است. به‌ترتیب زیر:

سری A: ۱۲و۱۸و۲۴و۳۰

» B: ۲۰و۴۰و۶۰و۸۰

» C: ۵۶و۸۴و۱۱۲و۱۴۰

» D: ۷۰و۱۴۰و۲۱۰و۲۸۰

» E: ۸۸و۱۷۶و۲۶۴و۳۲۵

» F: ۱۰۴و۲۰۸و۳۱۲و۴۱۶

» G: ۲۷۲و۵۴۴و۸۱۶و۱۰۸۸

» H: ۳۰۴و۶۰۸و۹۱۲و۱۲۱۶

» M: ۳۶۸و۷۳۶و۱۱۰۴و۱۴۷۲

» N: ۴۶۴و۹۲۸و۱۳۹۲و۱۸۵۶

» O: ۹۹۲و۱۴۸۸و۱۹۸۴و۲۴۸۰

» P: ۵۵۰و۱۱۰۰و۱۶۵۰و۲۲۰۰

» Q: ۵۷۲و۱۱۴۴و۱۷۱۶و۲۲۸۸

» R: ۶۵۰و۱۳۰۰و۱۹۵۰و۲۶۰۰

» S: ۷۴۸و۱۴۹۶و۲۲۴۴و۲۹۹۲

» T: ۸۳۶و۱۶۷۲و۲۵۰۸و۳۳۴۴

سری U: ۹۴۵و۱۸۹۰و۲۸۳۵و۳۷۸۰

سریهای A و C و O ضرایبی از۶ و ۲۸ و ۴۹۶ می‌باشند. اگر ۶، ۲۸ و۴۹۶ را به عنوان‌اعداد اصلی اختیارکنیم، اعداد سریهای دیگر به صورت زیرنمایش داده خواهند شد :

$۶=۲\times۳$	$۴۶۴=۲^۴\times۲۹$
$۱۰=۲^۲\times۵$	$۴۹۶=۲^۴\times۳۱$
$۲۸=۲^۲\times۷$	$۵۵۰=۲\times۵^۲\times۱۱$
$۷۰=۲\times۵\times۷$	$۵۷۲=۲^۲\times۱۱\times۱۳$
$۸۸=۲^۳\times۱۱$	$۶۵۰=۲\times۵^۲\times۱۳$
$۱۰۴=۲^۳\times۱۳$	$۷۴۸=۲^۲\times۱۱\times۱۷$
$۲۷۲=۲^۴\times۱۷$	$۸۳۶=۲^۲\times۱۱\times۱۹$
$۳۰۴=۲^۴\times۱۹$	$۹۴۵=۳^۲\times۵\times۷$
$۳۶۸=۲^۴\times۲۳$	

چنانکه دیده می‌شود هرکدام ازده جملهٔ اول مضربی ازیك عدد اول و ۲ می‌باشند بغیراز ۷۰ . بعلاوه باکمی دقت درمی‌یابید که این اعداد اول به ترتیب از۳ تا ۳۱ می‌باشند، پس اگر عدد ۲ ویا قوه‌ای از عدد ۲ را دراعداد اول‌ضرب‌کنیم اولین جمله‌های سریهای زائد بدست خواهند آمد. البته عدداولی‌که در ۲^n ضرب می‌شود باید از ۲^n بزرگتر واز $۲^{n+۱}$ کوچکتر باشد. اگر عدد اول از۲^n کوچکتر باشد عدد حاصل عددی زائدو اگرعدداول از$۱+۲^n$ بزرگتر باشد عدد حاصل ناقص خواهد بود . در جدول زیر اعداد اول بزرگتر از ۳ در ۲^n ضرب شده‌اند و علاوه برخود عدد مجموع مقسوم علیه های آن و نیز تفاضل این دو نشان داده شده‌است.

عوامل	عدد اصلی	مجموع عوامل	تفاضل
۲×۳	۶	۶	۰
$۲^۲\times۵$	۲۰	۲۲	۲
$۲^۲\times۷$	۲۸	۲۸	۰
$۲^۳\times۱۱$	۸۸	۹۲	۴

۲	۱۰۶	۱۰۴	$۲^۲ \times ۱۳$
۱۴	۲۸۴	۲۷۲	$۲^۴ \times ۱۷$
۱۲	۳۱۶	۳۰۴	$۲^۴ \times ۱۹$
۸	۳۷۶	۳۶۸	$۲^۴ \times ۲۳$
۲	۴۶۶	۴۶۴	$۲^۴ \times ۲۹$
۰	۴۹۶	۴۹۶	$۲^۴ \times ۳۱$
۲۶	۱۲۱۲	۱۱۸۴	$۲^۵ \times ۳۷$
۲۲	۱۳۳۴	۱۳۱۲	$۲^۵ \times ۴۱$
۲۰	۱۳۹۶	۱۳۷۶	$۲^۵ \times ۴۳$
۱۶	۱۵۲۰	۱۵۰۴	$۲^۵ \times ۴۷$
۱۰	۱۷۰۶	۱۶۹۶	$۲^۵ \times ۵۳$
۴	۱۸۹۲	۱۸۸۸	$۲^۵ \times ۵۹$
۲	۱۹۵۴	۱۹۵۲	$۲^۵ \times ۶۱$
۶۰	۴۳۴۸	۴۲۸۸	$۲^۶ \times ۶۷$
. .	. . .	. . .	. . .

این جدول بنا به قوهٔ عدد ۲ خود به بخشهایی تقسیم شده است ودرهریك‌ازاین‌بخشها ستونی‌که بانام‌تفاضل مشخص شده نشان می‌دهدکه هرقدرعدد اول بزرگترمی‌شود این‌تفاضل کوچکتر می‌گردد. به‌آسانی‌ثابت می‌شودکه مقدار تنزل اعداد تفاضل با مقدار ترقی اعداد اول برابر است . به فرض اینکه $P_۱$ و $P_۲$ دوعدد اول باشند و در ۲^nضرب شوند اعداد $۲^nP_۱$ و $۲^nP_۲$ به‌عنوان جمله‌های اول دوسری زائد بدست می‌آید. مجموع ضرایب این دوعدد به صورت :

$$(۲^{n+۱}-۱)+(۲^n-۱)P_۲ \quad \text{و} \quad (۲^{n+۱}-۱)+(۲^n-۱)P_۱$$

خواهد بود پس تفاضل‌آنها به صورت

$$(۲^{n+۱}-۱)+(۲^n-۱)P_۱-۲^nP_۱ = ۲^{n+۱}-۱-P_۱$$

$$(۲^{n+۱}-۱)+(۲^n-۱)P_۲-۲^nP_۲ = ۲^{n+۱}-۱-P_۲$$

خواهدبودکه مقدارتنزل‌آن $P_۱-P_۲$ می‌باشدکه برابرباترقی اعداد اول از $P_۱$ به $P_۲$ است.

بنابراین اگربخواهیم عددکاملی بدست‌آوریم می‌توانیم راه ساده‌تری انتخاب‌کنیم بدین ترتیب که می‌دانیم $۲^۴ \times ۱۷$ تفاضلی برابر با ۱۴ دارد پس ۱۴ را به ۱۷ اضافه کرده و عدد کامل $۲^۴ \times ۳۱ = (۱۷+۱۴)۲^۴$ یا ۴۹۶ را بدست می‌آوریم . والبته باید آگاه بودکه اگر مجموع این دو عدد (۱۷ + ۱۴)عدد اولی نباشد حاصل عددی کامل نخواهد بود.

چون $۲^۵ \times ۳۷$ تفاضلی برابر ۲۶ دارد و اگر ۲۶ رابا ۳۷ جمع‌کنیم عدد غیر اول ۶۵ بدست می‌آید پس $۲^۵ \times ۶۵$ عددکامل نخواهد بود ویا به عبارت دیگر هیچ مضربی از $۲^۵$ نمی‌تواند عددکامل باشد .

ونیز $۲^۶ \times ۶۷$ تفاضلی برابر ۶۰ داردکه با افزودن‌آن به ۶۷ عدد اول ۱۲۷ بدست می‌آید پس:

$$۲^۶ \times ۱۲۷ \text{ ، } ۸۱۲۸ \text{ ، } ۸۱۲۸$$

و بدین‌گونه چهارمین عددکامل پیدا می‌شود.

برای بدست‌آوردن عددکامل بعدی باید عدد اول ۱۳۱ و بزرگترازآن در $۲^۷$ ضرب شوند :

۱۲۴	۱۶۸۹۲	۱۶۷۶۸	$۲^۷ \times ۱۳۱$
. .	. . .	. . .	. . . .

برای ادامهٔ عمل با توجه به اینکه مجموع ۱۲۴ + ۱۳۱ عدد غیراول ۲۵۵ است اعداد اول بزرگتر از ۲۵۵ را در $۲^۸$ ضرب می‌کنیم:

$$۲۵۴ \text{ ، } ۶۶۰۶۴ \text{ ، } ۶۵۷۹۲ \text{ ، } ۲۵۷ \times ۲^۸$$

بااضافه‌کردن ۲۵۴ به۲۵۷ عدد غیراول ۵۱۱ حاصل‌می‌شود پس عدد اول بعد از آن یعنی ۵۲۱ را در قوهٔ نهم ۲ ضرب می‌کنیم :

$$۵۰۲ \text{ ، } ۲۶۷۲۵۴ \text{ ، } ۲۶۶۷۵۲ \text{ ، } ۵۲۱ \times ۲^۹$$

و با افزودن ۵۰۲ به عدد ۵۲۱ عدد غیر اول ۱۰۲۳ نتیجه می‌شود پس:

$$۱۰۱۶ \text{ ، } ۱۰۵۶۷۶۰ \text{ ، } ۱۰۵۵۷۴۴ \text{ ، } ۱۰۳۱ \times ۲^{۱۰}$$

واگر۱۰۳۱ را به ۱۰۱۶ بیفزائیم عدد غیراول ۲۰۴۷بدست می‌آید پس

$$۲۰۴۲ \text{ ، } ۴۲۰۶۵۸۶ \text{ ، } ۴۲۰۴۵۴۴ \text{ ، } ۲۰۵۳ \times ۲^{۱۱}$$

و با افزودن ۲۰۴۲ به ۲۰۵۳ عدد غیر اول ۴۰۹۵ بدست می‌آید وباز در ادامهٔ عمل

$$۴۰۹۲ \text{ ، } ۱۶۷۹۳۵۹۶ \text{ ، } ۱۶۷۸۹۵۰۴ \text{ ، } ۴۰۹۹ \times ۲^{۱۲}$$

واگر ۴۰۹۹ را با ۴۰۹۲ جمع‌کنیم عدد اول ۸۱۹۱ نتیجه می‌شود پس:

$$۳۳۵۵۰۳۳۶ \text{ ، } ۳۳۵۵۰۳۳۶ \text{ ، } ۸۱۹۱ \times ۲^{۱۲}$$

و با این روش پنجمین عددکامل بدست می‌آید.

برای بدست‌آوردن پنجمین عددکامل۶ عمل اضافی‌انجام شد. برای بدست‌آوردن ششمین عددکامل تنها ۴ عمل اضافی لازم است و بعدازآن با دوعمل اضافه هفتمین عددکامل و با ۱۲ عمل اضافی هشتمن عدد کامل بدست می‌آید:

ششمین عددکامل $۲^{۱۶} \times ۱۳۱۰۷۱ = ۸۲۸۹۸۶۹۰۵۶$

هفتمین عدد کامل

$$۲^{۱۸} \times ۵۲۴۲۸۷ = ۱۳۷۴۳۸۶۹۱۳۲۸$$

هشتمین عددکامل

$$۲^{۳۰} \times ۲۱۴۷۴۸۳۶۴۷ = ۲۳۰۵۸۴۳۰۰۸۱۳۹۹۲۵۱۲۸$$

دنباله در صفحهٔ ۶۳۲

تخمین ریشهٔ سوم یك عدد

ترجمهٔ : مقصود عین‌اللهی

برای تخمین ریشهٔ دوم یك عدد روشی وجود دارد . این روش بدین ترتیب است که نزدیکترین عدد صحیح به ریشهٔ عدد مفروض را انتخاب کرده وآنرا باخارج قسمت عددمفروض برعدد تخمین زده شده جمع کرده بردو بخش می‌کنیم. به‌عبارت ریاضی اگرp تخمین اول برای $\sqrt{n}$ باشد :

$$\sqrt{n} \neq \frac{p+\frac{n}{p}}{2}$$

اگردقت بیشتری لازم‌باشد این عمل را تکرارمی‌کنیم. دردفعهٔ دوم جواب حاصل ازدفعهٔ اول‌را تخمین‌دوم بشمار می‌آوریم. یعنی اگرحاصل‌کسربالا p' باشد:

$$\sqrt{n} \neq \frac{p'+\frac{n}{p'}}{2}$$

درست به روشی مشابه با این عمل می‌توان ریشهٔ سوم اعداد را باهر تقریب بدست‌آورد . بدین‌ترتیب که اگر :

$$p=q=r \quad \text{و} \quad p.q.r=n$$

باشد ، $\sqrt[3]{n}$ برابر خواهد بود با p(یاqیا r) . (به فرض‌اینکه $n\neq 0$ وبنابراین $r\neq 0$ و q و p باشد) . اگرعدد p را به عنوان جواب $\sqrt[3]{n}$ حدس بزنیم خواهیم داشت :

$$q.r=\frac{n}{p}$$

حال هیچکدام از اعداد r و q و p که تنها یك تخمین است نمی‌تواند جواب واقعی $\sqrt[3]{n}$ باشند . با اینکه هنوز این امکان وجود داردکه $p=q=r$ باشد ولی در صورتی هم‌که $p\neq r$ و $p\neq q$ باشد q و r می‌توانند بایکدیگر برابر باشند.

پس اگر $q=r$ باشد می‌توان نوشت $q^2=\frac{n}{p}$.که با جذر گرفتن از طرفین رابطه خواهیم داشت :

$$q=\sqrt{\frac{n}{p}}$$ و چون $q=r$ است پس سه تقریب برای $\sqrt[3]{n}$ داریم :

$$p \quad ، \quad \sqrt{\frac{n}{p}} \quad ، \quad \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{n}{p}}+p}{2}}$$

میانگین این سه مقدار نزدیکترین جواب به جواب حقیقی خواهد بود بنابراین :

$$\sqrt[3]{n} \neq \frac{\sqrt{\frac{n}{p}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{n}{p}}+p}{2}}+p}{3}$$

پس از ساده‌کردن :

$$\sqrt[3]{n} \neq \frac{2\sqrt{\frac{n}{p}}+p}{3}$$

(که دراین رابطه $\sqrt{\frac{n}{p}}$ را می‌توان با یك بارتخمین به‌روشی که قبلا ذکر شد بدست‌آورد.)

توضیحی که دراینجاآورده‌می‌شودبکار بردن این راه راآسانتر خواهد نمود. بدست‌آوردن ریشهٔ سوم اعداد بین :

$$+1000 \text{ و } -1000$$

ساده‌تر از دیگر اعداد است و بکار بردن این روش نیز برای اعدادی‌که ریشهٔ سوم آنها بین $+10$ و -10 قرار دارد ساده‌تر خواهد بود .

پس برای بدست‌آوردن ریشهٔ سوم یك عدد انرا به صورت حاصل ضرب عددی ما بین $+1000$ و -1000 در عدد ده به قوه‌ای قابل قسمت برسه می‌نویسیم تاجواب‌عددی مابین $+10$ و -10 ضرب درعدد صحیحی باشد . مثال :

$$17310 = 17/31 \times 10^3 \Rightarrow \sqrt[3]{17310} =$$
$$= \sqrt[3]{17/31} \times \sqrt[3]{10^3} = \sqrt[3]{17/31} \times 10$$

که حدس زدن ریشهٔ سوم $17/31$آسانتراز حدس زدن ریشهٔ سوم۱۷۳۱۰می‌باشد.وهمچنین می‌توان‌اعداد مابین$+1$ و-1 را به صورت حاصل ضرب عددی مابین :

$$+1000 \text{ و } -1000$$

در عدد ده به قوه‌ای منفی و قابل قسمت برسه نوشت تاریشهٔ سوم‌آن حاصل‌ضرب عددی مابین $+10$ و -10 در عدد صحیحی باشد. برای مثال :

$$0/03 = 30 \times 10^{-3} \Rightarrow \sqrt[3]{0/03} = \sqrt[3]{30 \times 10^{-3}} =$$
$$= \sqrt[3]{30} \times \sqrt[3]{10^{-3}} = \sqrt[3]{30} \times 10^{-1} = \frac{\sqrt[3]{30}}{10}$$

نمونهٔ مسائل المپیادها و مسابقات ریاضی

ترجمهٔ: جعفر آقایانی چاوشی

دنباله از شمارهٔ قبل

۵ـ المپیاد چکسلواکی

ربع دایرهٔ SBC به مرکز S و به شعاع :

$$SC = SB = r$$

را درنظر می‌گیریم . نقطهٔ A را برکمان BC چنان تعیین می‌کنیم که اندازهٔ زاویهٔ BSA برابر با ۶۰ درجه باشد و X نقطه‌ای از SC می‌باشد ؛

الف ـ مساحت سطح P محصور بین AX و BX و کمان AB را برحسب $x = SX$ حساب کنید.

ب ـ به ازاء چه مقدار x مساحت P برابر خواهد شد با نصف مساحت ربع دایره ؟ این مقدار x را باطول کمان BC مقایسه کنید.

حل: مساحت را با $\triangle$ نمایش می‌دهیم.

اولا :

$$\triangle(P) = \triangle(SCAB) - \triangle(SXB) - \triangle(XCA)$$

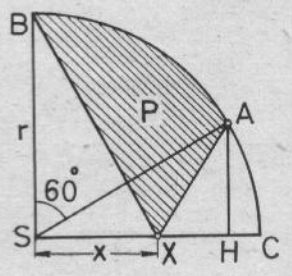
$$= \triangle(SCAB) - \triangle(SXB) - \triangle(SCA) +$$

$$+ \triangle(SXA) = \frac{\pi}{۴} r^۲ - \frac{r}{۲} x - \frac{۱}{۲} r^۲ \frac{\pi}{۶} +$$

$$+ \frac{۱}{۲} r x \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۴} r^۲ - \frac{r}{۲} x - \frac{\pi}{۱۲} r^۲ + \frac{r}{۴} x$$

$$= \frac{\pi}{۶} r^۲ - \frac{r}{۴} x$$

ثانیاً :



$$\triangle(P) =$$

$$\frac{۱}{۲}\triangle(SCAB) =$$

$$= \frac{\pi}{۸} r^۲$$

$$\frac{\pi}{۶} r^۲ - \frac{r}{۴} x = \frac{\pi}{۸} r^۲ \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۶} r$$

ثالثاً :

$$\overset{\frown}{BC} : x = (\frac{۱}{۴} ۲\pi r) : (\frac{\pi}{۶} r) = ۳$$

۶ـ المپیاد چکسلواکی

تابع y از متغیر x به شکل :

$$y = a|x| + b|x - k|$$

را چنان مشخص کنیدکه در ازاء $x = -۱$ و $x = ۳$ مقدار تابع صفر شده و ماکسیمم تابع برابر با $y = ۲$ باشد . بعد از تعیین ضرایب a و b و k نمایش هندسی تابع را نیز رسم کنید.

حل :

$$f(-۱) = a|-۱| + b|-۱ - k| = ۰$$

$$\longrightarrow a + b|k + ۱| = ۰$$

$$f(۳) = a|۳| + b|۳ - k| = ۰$$

$$\Longrightarrow ۳a + b|k - ۳| = ۰$$

از این دو معادله a را حذف می‌کنیم، خواهیم‌داشت :

$$b[|k - ۳| - ۳|k + ۱|] = ۰$$

بنابراین یا $b = ۰$ ویا

$$|k - ۳| - ۳k + ۱ = ۰$$

اگر $b = ۰$ باشد پس $a = ۰$ است بنابراین $y = ۰$ و y ثابت است. اما چون ماکسیمم y مساوی ۲ و مخالف صفراست بنابراین :

$$|k - ۳| - ۳|k + ۱| = ۰ \Longrightarrow k = -۳ \text{ و } k = ۰$$

k مساوی صفرقابل قبول نیست چه به ازاء $k = ۰$ تابع صفر خواهد بود پس :

$$k = -۳ \Longrightarrow a + ۲b = ۰ \Longrightarrow a = -۲b$$

$$y = b[|x + ۳| - ۲|x|]$$

اگر $x<-3$ باشد داریم:

$$y_1 = b(-x-3+2x) = b(x-3)$$

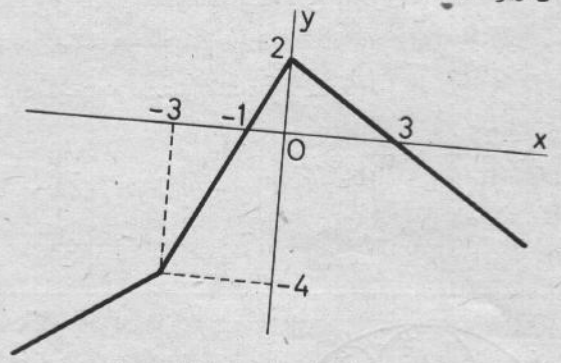
هرگاه $-3<x<0$ باشد داریم:

$$y_2 = b(x+3+2x) = b(3x+3)$$

و درازاء $x\geqslant 0$ داریم:

$$y_3 = b(x+3-2x) = b(-x+3)$$

نمایش تابع y_1 نیم خطی است که سمت چپ خط $x=-3$ واقع است. نمایش تابع y_2 پاره خطی است که ازنقطهٔ به طول -1 از $x'x$ می‌گذرد و بین دو خط $x=-3$ و $x=0$ محصور است. نمایش y_3 نیم خطی است که سمت راست خط $x=0$ واقع است و ازنقطهٔ به طول ۳ از $x'x$ می‌گذرد. چون ماکسیمم تابع ۲ است پس نقطهٔ مشترك y_1 و y_2 به عرض ۲ است و از آنجا $b=\frac{2}{3}$ بدست می‌آید ونمایش تابع مفروض به شکل زیر است.

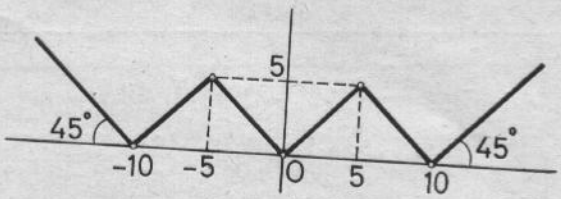


۷ـ مسابقهٔ ریاضی کالیفرنیا

نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید:

$$y = |5-|5-|x||\,|$$

جواب:



المپیاد ۱۹۶۹

۷ـ هرگاه k_1 و k_2 و k_n $(n\geqslant 2)$ اعداد طبیعی باشند ثابت کنید:

$$k_1!k_2!\ldots k_n! = \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n$$

که در آن $k = k_1+k_2+\ldots+k_n$ و $[x]$ نمایش قسمت صحیح عدد x است.

۸ـ ثابت کنید معادلهٔ زیر جواب صحیح ندارد:

$$\sqrt{x^3+y+z^3} = 1969$$

مسابقهٔ ریاضی ایالات متحدهٔ آمریکا

۹ـ مطلوبست تعیین می‌نیمم تابع زیر:

$$F(\lambda) = \int_0^1 \left[x^2-(x+\lambda)\right]^2 dx$$

۱۰ـ بدون استفاده از قانون حد هوپیتال ثابت کنید که اگر

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^8} \quad \text{و} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)}$$

باشد $I_1 = I_2$ خواهد بود.

۱۱ـ تمام مقادیر مثبت a را بیابید تا رشتهٔ زیر همگرا باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$$

۱۲ـ هرگاه a و b و c و d، عکس شعاعهای چهار دایرهٔ دوبه‌دو مماس خارج باهم‌باشند ثابت کنید:

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b+c+d)^2$$

۱۳ـ هرگاه معادلات:

$$x^2+bx+ca=0 \quad \text{و} \quad x^2+ax+bc=0$$

$(c\neq 0$ و a و $b)$ دارای یك ریشهٔ ساده مشترك باشند ثابت کنید ریشهٔ دیگر این معادلات در معادلهٔ:

$$x^2+cx+ab=0$$

صدق می‌کند.

۱۴ـ ثابت کنید $n+1$امین جمله ازرشتهٔ فیبوناچی از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots$$

۱۵ـ پیدا کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = ?$$

۱۶ـ پیدا کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}} = ?$$

۱۷ـ درمثلث ABC به اضلاع a و b و c، مطلوبست تعیین زاویهٔ C درصورتی که رابطهٔ زیر بین اضلاع آن برقرار باشد.

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = c^2$$

۱۸ـ هر گاه :

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{1(n)}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(1)}}$$

باشد ثابت‌کنید برای جمیع مقادیر مختلف n : $A_n < \pi$

۱۹ـ ثابت‌کنید :

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{2km\pi}{n} \cot g \frac{k\pi}{n}$$

۲۰ـ هر گاه x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

باشند ثابت کنید :

$$S_n = x_1^n + x_2^n$$

عددی صحیح پی‌باشدکه درآن n عددی است طبیعی.

حل‌ـ با روش استقراء ریاضی :

برای $n = 1$ داریم :

$$S_1 = x_1 + x_2 = 6$$

همچنین برای $n = 2$ و $n = 3$، به‌آسانی دیده می‌شود که S_2 و S_3 عددهای صحیحند .

فرض‌می‌کنیم به ازاء k نیز S_k عدد صحیح باشد، ثابت می‌کنیم به ازاء $k+1$، نیز S_{k+1} عددی صحیح است.

$$S_{k+1} = x_1^{k+1} + x_2^{k+1} = (x_1 + x_2)(x_1^k + x_2^k) - x_1x_2(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) = 6S_k - S_{k-1}$$

۲۱ـ ثابت‌کنید :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^r + 2^r + \dots + n^r}{n^{r+1}} = \frac{1}{r+1}$$

که درآن n و r هردو اعداد مثبت و صحیح می‌باشند.

۲۲ـ هر گاه داشته باشیم :

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = L$$

ثابت‌کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} = L$$

۲۳ـ ثابت‌کنید :

$$\sum_{k=1}^{n} \sec^4 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{8n(n+1)(n^2+n+1)}{3}$$

۲۴ـ هر گاه a و x و y و z اعداد مثبت و صحیح باشند ثابت‌کنید :

$$x^a(x-y)(x-z) + y^a(y-x)(y-z) + z^a(z-x)(z-y) \geqslant 0$$

تساوی درچه حالت برقرار است؟

۲۵ـ هر گاه a و b و c سه عدد صحیح باشند نمی‌توانند در رابطهٔ :

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$$

صدق نمایند مگر آنکه $a = b = c = 0$ باشد.

۲۶ـ فقط به‌کمك خط‌کش وپرگار مثلثی رسم‌کنیدکه از آن زوایای A و B معلوم بوده و محیط آن مقدار 2p نیز مفروض باشد.

۲۷ـ ثابت‌کنید برای $n \geqslant 5$، حاصل‌ضرب

$$n^2(1 - \frac{1}{P_1^2})(1 - \frac{1}{2^2})\dots(1 - \frac{1}{P_k^2})$$

بر ۲۴ قابل قسمت است. که درآن P_1 و P_2 و ... P_k اعداد متمایز و نسبت به‌مقسوم علیه‌های n اول می‌باشند.

۲۸ـ هر گاه a_1 و a_2 و ... a_n و b_1 و b_2 و ... b_n اعداد حقیقی و مثبتی باشند ثابت‌کنید :

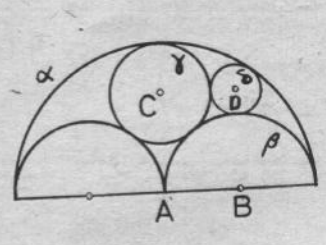
یا :

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant n$$

یا:

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \geqslant n$$

۲۹ـ دوایر α و β و γ و δ به مراکز A و B و C و D و شعاعهای a و $b = \frac{a}{2}$ و c و d مفروضند . d و c را برحسب a حساب‌کنید .



دانش‌آموز رتبهٔ اول ششم طبیعی استان گیلان

سیدشهریار شاهنگیان

از دبیرستان شاهپور رشت

مجموع نمرات کتبی :

۱۶۸/۰۸

خبر از : کتابفروشی طاعتی رشت

چگونه می‌توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

تألیف : René Boirel

آخرین توصیه : متن دروس را با روش منطقی فراگیرید

درفصل قبل بیان شدکه برای ورزیدگی درحل‌مسائل، می‌توان ازکتابهای حل‌المسئله استفاده‌کرد باشرط آنکه هریك از راه حلهای ارائه‌شده با روش منطقی بررسی گردد ومعلوم شودکه آن راه‌حل چگونه بدست آمده است .

بسیاری ازقضیه‌هاویا قاعده‌هایی‌که درمتن‌کتابهای‌درسی ارائه شده است خود نوعی مسئله می‌باشند. نه‌تنها دانستن‌این قضیه‌ها وقاعده‌ها برای حل مسائل لازم است ، بلکه بررسی آنها با روش منطقی، به همان‌گونه‌که قبلا درمورد راه‌حلهای مسائل بیان شد، به ورزیدگی شما درحل‌مسائل کمك‌می‌کند.

درزیر به‌عنوان نمونه ابتدا چند قضیه و قاعده آنگونه که درکتابهای‌درسی‌مندرج‌است بازگومی گردد، سپس‌چگونگی بررسی آنها با روش منطقی شرح داده می‌شود. امید است‌که عادت‌کنید وهمهٔ متون‌کتابهای درسی را به همین‌نحو بررسی و مطالعه‌کنید. اگردرسابق به‌حفظ‌کردن‌متن‌درسهاعمل‌می‌کرده‌اید ازاین به بعد این روش راکنارگذارید .

مثال ۱ـ قضیه: هرگاه دوضلع ازمثلثی با دو ضلع از مثلث دیگرمساوی اما زاویهٔ بین‌آنها نامساوی باشد، ضلعهای سوم‌دومثلث‌نامتساویندوضلع بزرگتررو‌برو‌به‌زاویهٔ‌بزرگتراست.

اثبات مندرج درمتن‌کتاب ؛

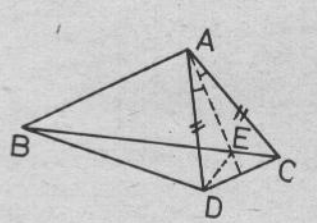
دومثلث ABC و $A'B'C'$ مفروض‌است بقسمی‌که :

$AB = A'B'$ و

$AC = A'C'$ و

$\angle BAC > \angle B'A'C'$

باید ثابت‌کنیم‌که :



$BC > B'C'$

برای اثبات مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC چنان قرار می‌دهیم که $A'B'$ برمساویش AB واقع شود ، چون زاویهٔ A' از زاویهٔ A کوچکتر است پس ضلع $A'C'$ داخل زاویهٔ BAC واقع شده مثلث $A'B'C'$ به وضع BAD قرار می‌گیرد که $AD = AC$ و $BD = B'C'$. نیمساززاویهٔ CAD را رسم می‌کنیم‌که BC را درE قطع می‌کند. چون مثلث CAD متساوی‌الساقین است پس نیمساز مزبورعمود منصف CD نیز هست ودرنتیجه $EC = ED$. امادر مثلث BDE داریم :

$BD < BE + EC$ یا $BD < BE + ED$

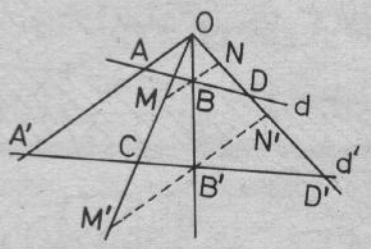
$B'C' < BC$ یا $BD < BC$

بررسی منطقی

برای مقایسهٔ سومین ضلع دومثلث که بعضی از اجزاء آنها متساویند، لازم‌است‌که ازاین تساوی اجزاء استفاده گردد وبرای این کار انطباق آنها مناسب بنظر می‌رسد. اما وقتی $A'B'$ را بر AB منطبق‌کنیم دومثلث منطبق نمی‌شوند زیرا زاویهٔ نامساوی دارند ودرنتیجه مثلث $A'B'C'$ به‌وضع‌مثلث ABD در می‌آید . اکنون باید ثابت‌کنیم که BD از BC کوچکتر است، برای این‌کار باید ثابت‌کنیم‌که BD با قطعه‌ای از BC برابر است یا اینکه دوپاره خط پیداکنیم که مجموع آنها با BC برابر وازBD بزرگترباشد. می‌دانیم‌که هرضلع مثلث ازمجموع‌دوضلع دیگرکوچکتراست. پس اگرمثلثی‌بیابیم که یك ضلع آن BD ومجموع دو ضلع دیگرش با BC برابر باشد مقصود برآورده شده است. BD وBC درB مشترکند، پس باید E را برBC چنان انتخاب‌کنیم‌که $ED = EC$باشد. دراین‌صورت E برعمودمنصف CD واقع است و چون مثلث CAD متساوی‌الساقین است پس عمود منصف CD از A می‌گذرد وزاویهٔ CAD را نصف می‌کند. از اینجا فکر رسم نیمساز زاویهٔ CAD حاصل شده است .

مثال ۲ـ قضیه : هر خط که دسته اشعهٔ توافقی را قطع کند به توافق تقسیم می‌شود .

اثبات مندرج درمتن کتاب :



فرض می‌کنیم که O(ABCD) دستگاه اشعهٔ توافقی باشد و قاطع 'd آنرا در 'A'B'C'D قطع کرده باشد. ازB و 'Bدوخط موازی با OAرسم می‌کنیم که OCرا درM و 'M وODرا در N و 'N قطع می‌کنند. ازتشابه دومثلث COA و CMB وهمچنین‌ازتشابه دومثلث DOA و DNB نتیجه‌می‌شودکه:

$$\frac{CA}{CB}=\frac{OA}{MB}\text{ و }\frac{DA}{DB}=\frac{OA}{NB}$$

چون تقسیمABCD توافقی است پس

$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$$

پس نتیجه می‌شود که $MB=NB$ ، یعنی B وسط MN است. اما تقسیمهای MBN و 'M'B'N متجانسند و نتیجه می‌شودکه 'B وسط 'M'N است ودرضمن ازتشابه دو مثلث 'C'OA و 'C'M'Bوهمچنین دومثلث'D'OA و 'D'N'B نتیجه می‌شود :

$$\frac{C'A'}{C'B'}=\frac{OA'}{M'B'}\text{ و }\frac{D'A'}{D'B'}=\frac{OA'}{N'B'}$$

چون $M'B'=N'B'$ پس ازدوتناسب اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{C'A'}{C'B'}=\frac{D'A'}{D'B'}$$

یعنی تقسیم 'A'B'C'D توافقی است .

بررسی‌منطقی

مسئله ازاین قراراست‌که بافرض $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ ثابت کنیم که تناسب $\frac{C'A'}{C'B'}=\frac{D'A'}{D'B'}$ نیز برقراراست. پس باید رابطه‌ای بین این دو تناسب برقرار سازیم . برای تعیین رابطه‌ای بین دوتناسب باید مثلثهای متشابهی پیداکنیم که اجزاء تناسبهای مزبور در تناسبهای مربوط به اضلاع آنها وجود داشته‌باشند. وبرای پیداکردن مثلثهای متشابه باید از انتهای خطوط مهم‌شکل، خطوطی موازی باهم یا عمود برهم رسم‌کنیم. ازاینجا این فکر بوجود می‌آیدکه ازB موازی با OA رسم‌کنیم‌که درنتیجه مثلثهای متشابه COA وCMBو همچنین DOA وDNB روی شکل ظاهر می‌شودکه ازروی آنها تناسبهایی بدست می‌آیدکه هرکدام با یك نسبت‌ازتناسب فرض مشترکند. از راه مشابهت معلوم می‌شودکه از 'B نیز باید موازی با OA رسم‌کنیم وازآنجا به خاطرتجانس،وجود بین نسبتهای دوخط متوازی وپدیدآمدن مثلثهای‌متشابه جدید تناسب مطلوب نتیجه می‌شود .

مثال ۳ـ روش حل معادلهٔ درجهٔ دوم

روش مندرج درکتاب: معادلهٔ زیررا در نظر می‌گیریم

$$ax^2+bx+c=0$$

که درآن a مخالف صفراست. پس می‌توانیم طرفین را ـر a تقسیم‌کنیم‌که نتیجه می‌شود :

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

چون $x^2+\frac{bx}{a}$ دوجملهٔ اول ازبسط $(x+\frac{b}{2a})^2$ است پس معادله را به صورت‌زیر می‌نویسیم :

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

عبارت طرف اول مجذوراست پس درازاء همهٔ مقادیر x مثبت یا اقلا صفراست بنابراین برحسب آنکه عبارت‌طرف‌دوم مثبت ، منفی یا صفر باشد سه حالت درنظرمی‌گیریم؛ اماچون $4a^2$ مثبت است پس علامت عبارت طرف دوم همان علامت b^2-4ac است. اگر

$$b^2-4ac=0$$

باشد خواهیم داشت :

$$(x+\frac{b}{2a})^2=0 \quad\text{یا}\quad x+\frac{b}{2a}=0$$

دراین حالت معادله تنها یك جواب دارد : $x=-\frac{b}{2a}$

اگر $b^2-4ac>0$ باشد خواهیم داشت :

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

اگر $b^2-4ac<0$ باشد طرف دوم منفی است که نمی‌تواند باطرف اول برابر باشد ومعادله جواب ندارد.

بررسی‌منطقی

معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ازدرجهٔ دوم است وظاهراً

نمی‌توان برای حل آن ازقاعدهٔ مربوط به حل معادلات درجهٔ اول‌استفاده‌کرد. اما این‌سؤال مطرح می‌شود: آیا راهی‌وجود داردکه آنرا به معادله یا معادلاتی ازدرجهٔ اول تبدیل‌کرد ؟ اگربتوانیم آنرا به شکل حاصل ضرب دوعبارت درجهٔ اول‌در بیاوریم (که حل هریك‌ازاین عبارتها را می‌دانیم) یا اینکه‌آنرا به صورت یك مربع کامل یك عبارت درجهٔ اول تبدیل‌کنیم،در نتیجه می‌توانیم ریشه‌های آن را تعیین‌کنیم. در اینجا این‌فکر پیش می‌آیدکه درعبارت داده شده ، مربع کامل عبارتی را بوجود آوریم .

دست یافتن به چنین‌فکری کاملا طبیعی بنظر می‌رسد و یك روش کاملا منطقی است. اما ممکن است‌که ضمن آزمایش فرضهای مختلف،راه‌حل یك‌مسئله پیدا شود .مثلا این راه‌حل: «فرض‌کنیم مقصود حل‌معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^2+px+q=0$$

باشد، به آزمایش می‌پردازم: اگر x را با یك‌جمله‌ای مثلا a عوض کنم، عبارت تغییری نمی‌کند؛ حال فرض می‌کنم $x=a+b$ که چون درعبارت معادله‌قراردهم نتیجه می‌شود:

$$a^2+b^2+2ab+ap+bq+q=0$$

دراینجا دومجهول پیش‌می‌آید،سعی‌می‌کنم آنرابه‌صورت مناسبتری بکاربیرم. چنین می‌نویسم :

$$(2a+p)b+a^2+b^2+ap+q=0$$

هرگاه $a=-\frac{p}{2}$ اختیارشودخواهم‌داشت:

$$b^2=\frac{p^2}{4}-q \quad و \quad b=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

ونتیجه خواهد شد :

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

چنانچه ازفرض $x=a+b$ به نتیجه نرسیده بودم آنگاه‌فرض دیگری را آزمایش می‌کردم».

ممکن است‌که روش بالا برای یك‌فرد ورزیده مناسب باشد اما هیچگاه به‌فکریك مبتدی نخواهد رسید. بهترین روش همان روش منطقی است‌که به‌فکربسیاری ازافراد می‌رسد؛کسی که منطقی فکرکند می‌کوشد تا هرمسئلهٔ تازه را به مسائلی برگرداندکه قبلا راه حل آنها را بدست‌آورده است . بنابراین پدیدارساختن مربعی کامل درعبارت داده شده روشی‌مناسب‌و مفید است وبرای آن اولا ازتقسیم طرفین بر a معادلهٔ زیر نتیجه می‌شودکه یك جملهٔ آن مربع کامل است :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

جملهٔ $\frac{b}{a}x$ حاصل x یعنی جذر x^2 است در $\frac{b}{a}$ پس $\frac{b}{a}$ دو برابر جذر جملهٔ دوم است پس مجذور جملهٔ دوم می‌شود $\frac{b^2}{4a^2}$ و در نتیجه چنین می‌نویسیم:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

وازاینجا x به سادگی بدست می‌آید .

مثال ۴- تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم.

روش مندرج درمتن‌کتاب : برای تعیین علامت سه‌جمله‌ای‌درجهٔ دوم:

$$y=ax^2+bx+c$$

چنین عمل می‌کنیم :

$$y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

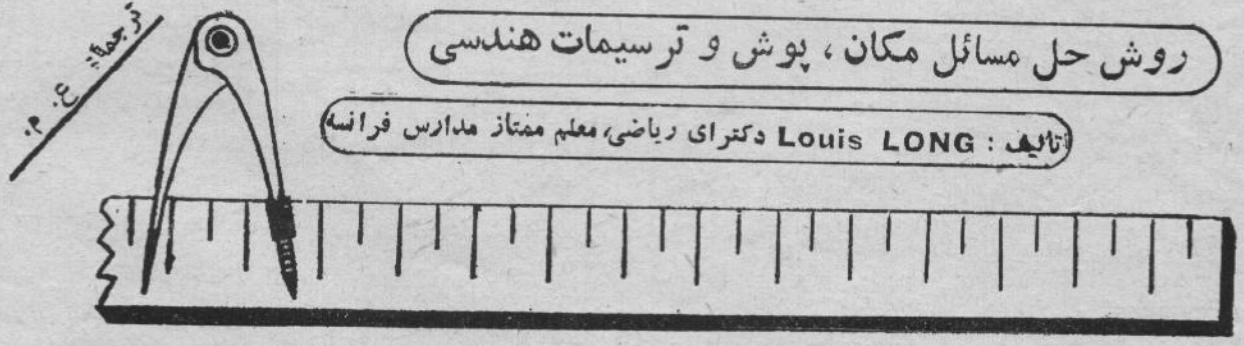
عبارت داخل‌کروشه مجموع دوعبارت است‌که اولی‌مربع کامل است‌که یا مثبت است یا صفر پس عبارت کروشه بستگی پیدا می‌کند به‌علامت عبارت دیگر یعنی به عبارت

$$\frac{4ac-b^2}{4a^2} \quad و \quad \ldots$$

بررسی‌منطقی

برای تعیین علامت یك عبارت جبری مناسب است‌که جمله‌ها را چنان گروه‌بندی‌کنیم تا جملات با علامت ثابت‌باهم واقع شوند. درسه‌جمله‌ای درجهٔ دوم مفروض یك‌جمله شامل x^2 ویك جمله شامل x وجود دارد، پس اگر مربعی کامل در عبارت ظاهرسازیم،که علامت آن ثابت است، به مقصود نزدیك شده‌ایم. برای این‌کار قبلا از a فاکتور می‌گیریم و به دنبال آن لازم می‌آیدکه جملهٔ $\frac{b^2}{4a^2}$ را درعبارت داشته‌باشیم‌و بالاخره به نتیجهٔ بالا می‌رسیم .

این روش‌که حل هرمسئله یا اثبات هرقضیه را به آنچه که قبلا می‌دانیم برگردانیم روش اساسی ریاضیات است . هرگاه متن‌کتاب درسی‌را، نه به صورت حفظ آن، بلکه با بررسی منطقی جزء به جزء آن فراگیرید،دراین‌صورت‌امیدوار باشیدکه مهمترین توشه را در راه‌حل مسائل فراهم آورده‌اید.



روش حل مسائل مکان، پوش و ترسیمات هندسی

تألیف: Louis LONG دکترای ریاضی، معلم ممتاز مدارس فرانسه

ترجمهٔ: ع. پ.

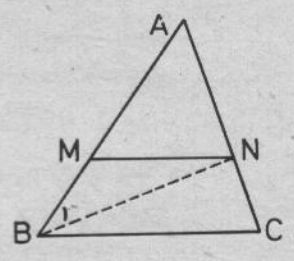
III ـ ترسیمات هندسی

فصل ششم ـ استفاده از تشابهات

مسئلهٔ ۱ـ در مثلث مفروض ABC خط MN را موازی با ضلع BC چنان رسم کنید که:

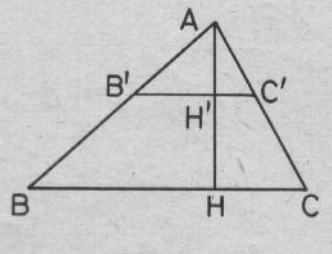
$$\frac{MN}{MB}=\frac{m}{n}$$

باشد که m و n دو عدد صحیح معلومند.



با معلوم شدن نقطهٔ N مسئله کاملا حل شده است. یک مکان N ضلع AC است. از مثلث BMN نسبت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها یعنی زاویهٔ BMN که مکمل زاویهٔ ABC است معلوم است. بنابراین می‌توانیم مثلثی متشابه با این مثلث بسازیم و در نتیجه اندازهٔ زاویهٔ MBN از آن معلوم می‌شود. اکنون از B خطی رسم می‌کنیم که با BA زاویه‌ای مساوی زاویهٔ مزبور بسازد. از تلاقی این خط با AC نقطهٔ N و از روی آن نقطهٔ M بدست می‌آید.

مسئلهٔ ۲ـ مثلثی را با معلوم بودن سه ارتفاع آن رسم کنید.



اگر S مساحت و a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلث و h_a و h_b و h_c اندازه‌های ارتفاعات آن باشد، داریم:

$$2S=ah_a=bh_b=ch_c$$

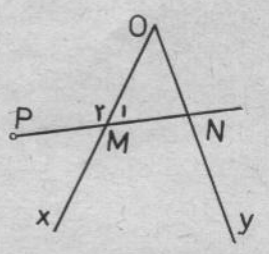
$$\frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a}\quad\text{و}\quad\frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b}$$

نسبت بین اضلاع مثلث ABC معلوم است پس می‌توان مثلثی متشابه با آن رسم کرد. اگر $AB'C'$ این مثلث باشد، ارتفاع AH' از آن را رسم کرده و بر آن نقطهٔ H را تعیین می‌کنیم که AH به اندازهٔ معلوم h_a باشد و چون از H موازی با $B'C'$ رسم کنیم تا امتداد اضلاع AB' و AC' را قطع کند مثلث مطلوب ABC مشخص می‌شود.

مسئلهٔ ۳ـ از نقطهٔ معلوم P خط D را چنان رسم کنید که اضلاع زاویهٔ معلوم xOy را در M و N قطع کند بقسمی که

$$\frac{OM}{ON}=\frac{m}{n}$$

باشد. m و n عددهای معلومند.



نسبت دو ضلع از مثلث OMN و زاویهٔ بین این دو ضلع معلوم است پس می‌توان مثلثی متشابه با آن رسم کرد و از روی آن اندازهٔ زاویهٔ OMN را معلوم ساخت. اکنون کافی است که از P خطی چنان رسم کنیم که با ضلع Ox زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ مزبور بسازد.

تمرینات

۱ـ مثلث ABC را با معلوم بودن طول ضلع BC، اندازهٔ

زاویهٔ A و نسبت دوضلع دیگر رسم کنید.

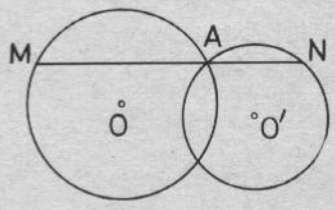
۲ـ مربعی رسم کنید که مجموع (یاتفاضل) قطروضلع آن معلوم است.

۳ـ مثلث ABC را رسم کنید که اندازهٔ زاویهٔ A، طول ارتفاع h_a و نسبت بین دو قطعه خطی که این ارتفاع روی BC پدید می‌آورد معلوم است.

۴ـ در چهار ضلعی معلوم ABCD لوزی محاط کنید که اضلاعش باقطرهای چهار ضلعی موازی باشند.

فصل هفتم ـ انعکاس، دوران حول لولا

مسئلهٔ ۱ (انعکاس) ـ از A نقطهٔ مشترك دودایرهٔ معلوم O و O′ خطی رسم کنید که دایره‌ها را در M و N قطع کند بقسمی که $AM.AN = k^2$ باشد.

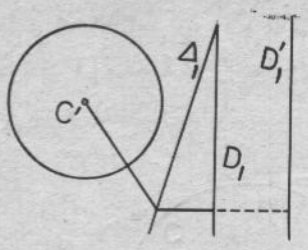


برای تعیین قاطع کافی است که نقطهٔ N را آن را تعیین کنیم. یك مکان N دایرهٔ O′ است. مکان دیگر آن باتوجه به مفروضات منعکس دایرهٔ O است در انعکاس به قطب A و به قوت k^2 که خطی است عمود بر OA. اگر این خط دایرهٔ O′ را قطع کند نقطهٔ N و از آنجا قاطع مطلوب مشخص می‌شود.

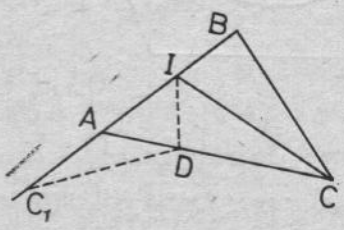
مسئلهٔ ۲ (انعکاس) ـ دایرهٔ C را رسم کنید که برنقطهٔ معلوم I بگذرد و بردو دایرهٔ مفروض C_1 و C_2 مماس باشد. در انعکاس به قطب I دایره‌های C_1 و C_2 به دودایرهٔ C'_1 و C'_2 و دایرهٔ مطلوب به مماس مشترك این دودایره تبدیل می‌گردد. بعد از رسم مماس مشترك دایره های C'_1 و C'_2 مبدلهای نقاط تماس معلوم شده و ازروی آنها دایرهٔ مطلوب مشخص می‌گردد.

مسئلهٔ ۳ ـ سه دایرهٔ C_1 و C_2 و C_3 که C_1 با C_2 در A متقاطع است مفروضند. دایرهٔ O را رسم کنید که برسه دایرهٔ مزبور مماس باشد.

در انعکاس به قطب A دایره‌های C_1 و C_2 به دوخط D_1 و D_2 و دایرهٔ C_3 به دایرهٔ C' تبدیل می گرددومسئله به اینجا می‌انجامدکه دایره‌ای رسم کنیم که بردو خط D_1 و D_2 و همچنین بردایرهٔ C' مماس باشد. چون این دایره بر دوخط D_1 و D_2 مماس است پس مرکز آن روی Δ_1 یا Δ_2 نیمساز زاویهٔ دوخط D_1 و D_2 واقع است. اگر D'_1 خطی موازی با D_1 وبه فاصلهٔ R از آن باشدکه R شعاع دایرهٔ C' است، مرکز دایرهٔ مطلوب از مرکزدایرهٔ C' و از خط D'_1 به‌یك فاصله است. پس برای تعیین آن باید نقطهٔ تلاقی Δ_1 باسهمی به کانون C' وبه خط هادی D'_1 تعیین گردد که یك مسئلهٔ کلاسیك است.



مسئلهٔ ۴ (دوران حول لولا) ـ نقطهٔ D برضلع AC از مثلث مفروض ABC داده شده است. روی AB نقطهٔ I را چنان تعیین کنیدکه ID نیمساز زاویهٔ AIC باشد.



اگر صفحه‌را حول لولای ID تاکنیم نقطهٔ C به وضع C_1 برBA در می‌آید که $DC_1 = DC$ پس هرگاه به مرکز D وبه شعاع DC دایره‌ای رسم کنیم از تلاقی آن با BA نقطهٔ C_1 بدست می‌آید و چون $IC = IC_1$ است پس عمود منصف CC_1 را رسم می‌کنیم تا BA را در I قطع کند.

تمرینات

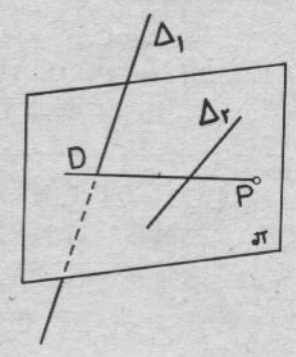
۱ـ دایرهٔ C و خط D مفروض است. قطری از دایره راکه عمود بر D است رسم می‌کنیم. از یکی از دو سر این قطر قاطعی چنان رسم کنیدکه دایره را در M و خط D رادر N قطع کند و MN به طول معین l باشد.

۲ـ هرگاه H پای ارتفاع نظیر ضلع AB از مثلث ABC باشد، بافرض آنکه طول ضلع BC اندازهٔ زاویهٔ A و حاصل ضرب $BH.BA = m^2$ معلوم باشد، مثلث را رسم کنید.

۳ـ مثلث ABC را رسم کنیدکه از آن طول ضلع BC طول ضلع AC وتفاضل اندازه‌های دوزاویهٔ A و B معلوم است.

فصل هشتم ـ مسائل ترسیمی فضایی

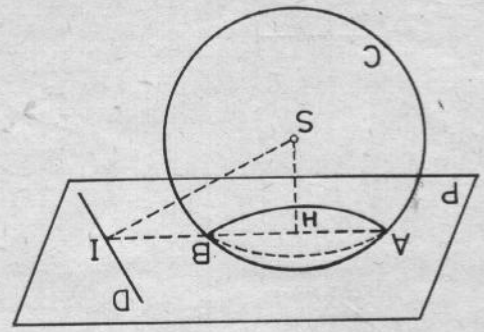
مسئلهٔ ۱ ـ از نقطهٔ معلوم P خطی رسم کنیدکه دو خط متنافر مفروض Δ_1 و Δ_2 را قطع کند.



کافی است که نقطهٔ دیگری از خط مطلوب D را تعیین کنیم تااین خط مشخص شود. برای این منظور نقطهٔ تلاقی D را با Δ_1 پیدا می‌کنیم. این نقطه فصل مشترك خط Δ_1

است با صفحهٔ π که برنقطهٔ P و خط $\triangle_2$ می‌گذرد .

مسئلهٔ۲ـ کرهٔ (S) به مرکز S وخط D مفروض است. برخط D صفحهٔ P را چنان بگذرانید که کرهٔ (S) را قطع کند و مقطع آن دایرهٔ به‌شعاع معلوم r باشد .

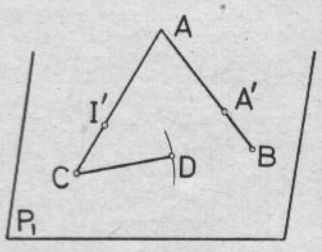


اگر مسئله را حل شده فرض کنیم و H مرکز دایرهٔ مقطع و I پای عمود مرسوم از S بر D باشد چون SH برصفحهٔ P عمود است پس بنابه قضیهٔ سه عمود HI نیز بر خط D عمود است و در نتیجه صفحهٔ SHI برخط D و همچنین بر صفحهٔ P عمود است. پس برای حل مسئله ابتدا صفحه‌ای بر S می‌گذرانیم که بر خط D عمود گردد. این صفحه کره را دریک دایرهٔ عظیمهٔ C و خط D را درنقطهٔ I قطع می‌کند. در همین صفحه از I قاطعی چنان رسم می‌کنیم که از دایرهٔ C وتر AB به طول معین ۲r را جدا کند. صفحهٔ دوخط D و IAB صفحهٔ مطلوبست. مسئله حداکثر دو جواب دارد.

مسئلهٔ۳ـ از نقطهٔ I صفحه‌ای بگذرانید که بردو کرهٔ مفروض که در دایرهٔ C مشترکند مماس باشد.

نقطهٔ A از دایرهٔ فصل مشترک دو کره را درنظر می‌گیریم در انعکاس به قطب A این دو کره به دو صفحهٔ P_1 و P_2 و صفحهٔ مطلوب π به کرهٔ S مار بر A ومار بر I' مبدل I تبدیل می‌گردد. آنگاه با مسئلهٔ زیر مواجه هستیم :

کرهٔ S را بر دو نقطهٔ A و I' چنان بگذرانید که بردو صفحهٔ P_1 و P_2 مماس باشد.



هرگاه C اثر خط AI' روی صفحهٔ P_1 و D نقطهٔ تماس این صفحه باکره باشد داریم:

$$\overline{CD}^2 = CI'.CA$$

پس D روی دایرهٔ به مرکز C و به شعاع $\sqrt{CI'.CA}$ واقع است . از طرف دیگر ، اگر π_1 یکی از صفحات منصف‌الفرجهٔ دو صفحهٔ P_1 و P_2 باشد، مرکز کرهٔ S در این صفحه واقع است. پس این صفحه ، صفحهٔ تقارن کره است و در نتیجه A' قرینهٔ A نسبت به این صفحه روی کره است. اگر B اثر خط AA' روی صفحهٔ P_1 باشد ، به همان ترتیب که در بالا ثابت شد ، نقطهٔ D روی دایرهٔ به مرکز B و به شعاع $\sqrt{BA'.BA}$ قراردارد . بارسم دو دایرهٔ مذکور در صفحهٔ P_1 نقطهٔ D بدست می‌آید و چون در D عمودی برصفحهٔ P_1 اخراج کنیم ، از تلاقی آن با صفحهٔ π_1 مرکز کره بدست می‌آید.

باتوجه به اینکه دودایره حداکثر دردو نقطه متقاطعند و فرجهٔ دو صفحهٔ P_1 و P_2 دو صفحهٔ نیمسازدارد ،مسئله حداکثر دارای چهارجواب است.

تمرینات

۱ـ در امتداد مفروض دو خط متکی به دو خط متنافر مفروض رسم کنید .

۲ـ از نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید که خط و دایرهٔ مفروض غیرواقع در یك صفحه را قطع کند .

۳ـ صفحه‌ای رسم کنید که تصاویر قائم دو خط متنافر مفروض روی آن دو خط متوازی باشد.

۴ـ صفحهٔ P، دوخط غیرموازی $\triangle$ و $\triangle'$ و امتداد $\triangle''$ و دو نقطهٔ A و B خارج صفحهٔ P مفروض است. نقطهٔ S را چنان تعیین کنید که SA با خط $\triangle$ در A' و SB با خط $\triangle'$ در B' متقاطع بوده و A'B' درامتداد $\triangle''$ باشد.

۵ـ چهار ضلعی چپ MNPS را چنان رسم کنید که اضلاع آن به طولهای معین بوده و زاویه‌های MNP و NPS از آن به اندازه‌های معلوم باشند .

۶ ـ چهار ضلعی چپ MNPS را با معلوم بودن اندازه‌های اضلاع و اندازهٔ زاویهٔ NMS و اندازهٔ فرجهٔ SMNP رسم کنید .

۷ـ برنقطهٔ مفروض M صفحه‌ای رسم کنید که از تقاطع آن باکنج سه وجهی مفروضی مثلثی پدید آید که M مرکز ثقل آن باشد.

۸ـ برنقطهٔ مفروض صفحه‌ای بگذرانید که سه کرهٔ معلوم را در دایره‌هایی قطع کند که شعاعهای این دایره‌ها با شعاعهای کره‌ها نظیر متناسب باشند.

۹ـ بردو نقطهٔ مفروض کره‌ای بگذرانید که برد و کرهٔ معلوم مماس باشد.

۱۰ـ دو خط ثابت و متنافر D و D' و نقطهٔ ثابت A روی D مفروض است. کره‌های S و S' را در نظر می‌گیریم که اولی بر A بگذرد و مرکزش روی D باشد و دومی مرکزش روی D' باشد. ازکره‌های S آنهایی را مشخص کنید که بریکی ازکره‌های معلوم S' مماس باشند.

پایان کتاب

صد مسئلهٔ ریاضی وحل آنها

ترجمهٔ : داوید ریحان

فصل ششم ـ اکتشافات ریاضی دکتر براکادابر

۹۳ ـ یك عدد بسیار عجیب

دکتر براکادابرعادت دارد که نوشتجات ریاضی رااصلاح کند. وی دربسوردی درمی‌یابدکه عددی معروف وجود داردکه تمام جوانها آنرا می‌شناسند و غیراز نشانهٔ عادی خودش ، دارای نشانهٔ دیگری است‌که این بچه‌ها سالهابعدآنرامی‌شناسند، و مومبن نشانهٔ آنرا بازهم سالهای بعدیاد می‌گیرند. عجیب آنکه هیچکس به‌آنها نمی‌گویدکه این همان عدداست . فقط دکتر براکادابر وچندتن ازدوستانش ازچنین رازی باخبرند.این عدد عجیب‌کدام است ؟

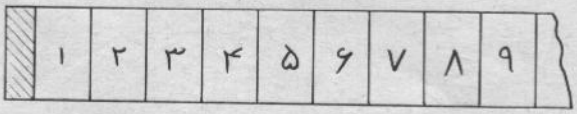
جواب ـ این عدد عجیب«۱» است‌که‌به‌صورتهای زیر نوشته می‌شود :

(۱رادیان = ۸۰۰۰۰و″۴۴و′۱۷و°۵۷)

و ۱ و ۱۰۰٪

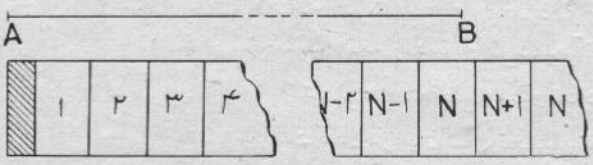
۹۴ ـ وسیلهٔ اندازه‌گیری خیاط

دکتر براکادابر دارای یك متر خیاطی است (این به‌خودش مربوطاست)که باتمام مترهای سادهٔ بشر فرق می‌کند. درشکل زیر تصویرش رامی‌توانید ببینید .



درابتدای‌آن، یك تیکهٔ فلزی نیم‌سانتیمتری وجوددارد. دکتر براکادابر مدعی است‌که متروی عالیتر از مترهای دیگر است . چرا ؟

حل ـ با این متر خیاطی، خطائی‌که مرتکب می‌شویم مانند مترهای قدیمی۰/۵ سانتیمتراست . تنها این نکته نیست که می‌خواهیم توجه شمارابه‌آن جلب‌کنیم. وقتی‌طولی مانند AB رااندازه می‌گیریم، معمولاانتهای B مابین دوخطمتوالی که فاصلهٔ آنها یك سانتیمتر است قرار می‌گیرد . با متر جدید (شکل پایین)، اگر N معرف عددواقع مابین دوخطاخیر باشد



گوئیم‌که طول AB برابر N است ، درصورتی‌که با مترهای قدیمی،اگر B به خط طرف چپ یا به خططرف راست نزدیکتر بود می‌بایست عددی مابین N و N + ۱ را انتخاب می‌کردیم؛ برای متر جدید تنها یك حالت خاص وجود دارد و آن وقتی‌است‌که B روی خط مرز N با N + ۱ بیفتد؛ در-این صورت داریم :

$$AB = \left(N + \frac{۱}{۲}\right)cm$$

۹۵ ـ پیشگوئی یك کلمه

دکتر براکادابر ادعاکردکه می‌تواند هرآممی را درقبال بیست سؤال حدس‌بزند، بااین شرط‌که‌کلمهٔ مفروض درفرهنگ لغات وجود داشته باشد. آقای دکتر چگونه می‌تواند ادعای خودرا ثابت‌کند ؟

حل ـ هیچ فرهنگ‌لغتی شامل بیش‌ازیك میلیون لغت نیست . مثلا،اگر درفرهنگ‌لغتی ۵۰۰ صفحه‌ای، صفحهٔ۲۵۰ رابازکرده وآخرین لغت ازاین صفحه رابخوانیم: مثلا نسترن، اولین سؤال این است که لغت مطلوب درترتیب الفبائی‌اش ، بعداز نسترن است؟ اگرجواب مثبت است صفحهٔ ۳۷۵ را و اگرجواب منفی‌است صفحهٔ۱۲۵ را باز می‌کنیم وبازهم‌آخرین لغت ازاین صفحه را می‌خوانیم و غیره . اگر به شماره‌ای از صفحه‌که عدد صحیحی نیست(مثلا ۶۲/۵) برخوردکردیم،آنرا سرراست‌کرده وعدد صحیح مجاور آنراکه بزرگتر است (۶۳) انتخاب می‌کنیم. پس‌از۹سؤال ازاین نوع، صفحه‌ای راکه لغت درآن است، می‌یابیم. اگر درهرصفحه دوستون وجود داشته باشد، دهمین سؤال، نوع‌ستون رانیز مشخص می‌کند. هرستون بیش‌از۶۴ لغت ندارد ، بنابراین لغت مربوطه را می‌توانیم با

۱۶ سؤال بیابیم. فرهنگ لغتی که این مثال را ازآن آوردیم بیش‌از ۶۴۰۰۰ = ۵۰۰ × ۱۲۸ لغت ندارد ؛ اگر لغاتش ۱۶ مرتبه بیش ازاین مقدار یعنی بیش ازیك میلیون بود، ۴ سؤال بیشتر لازم خواهد بود (۱۶ = ۲⁴) ، دراین صورت کلا بیست سؤال برای یافتن لغت مطلوب کفایت می‌کند (۱۰۴۸۷۵۶ = ۲²⁰) دراین روش هرسؤال متکی برجواب «آری» یا «خیر» است و هرپاسخی باید قاطع باشد .

۹۶ - قرض محصلین

هفت محصل منزلی را اجاره می‌کنند . در طی سال ، هرکدام دو به دو به‌یکدیگرپول قرض‌می‌دهند .دکتربراکادابر به‌آنها توصیه کردکه‌هرکس‌حساب آنچه راکه‌قرض‌می‌دهدوآنچه را که قرض‌می گیرد داشته‌باشد ولی نام شخصی راکه‌وام‌داده‌یا وام گرفته لازم نیست یادداشت‌کند. درپایان سال تحصیلی قبل ازعزیمت به شهرهای خود خواستندکه حسابهای فی‌مابین را برسندولی درایّ کار در ماندند .

آیا روش دکتر براکادابر برای رسیدگی حسابها کافی است؟ در نامساعدترین موارد چند پرداخت لازم خواهد بود (به رد و بدل‌کردن پول از هر یك نفر به نفر دیگر پرداخت می گوئیم) ؟

حل - هرکدام ازاین اشخاص باید مجموع آنچه را که قرض می‌دهد (با عددی مثبت) وآنچه راکه قرض می گیرد (با یك عدد منفی) یادداشت کند . بیلان مجموع تمام مبالغ یادداشت شده درآخرسال برای هرنفر مثبت یامنفی خواهدبود ولی مجموع این بیلانها برابر باصفر است .

این موضوع برای تسویهٔ حسابها کفایت می کند وبیش‌از شش پرداخت لازم نیست. به طریقهٔ زیر عمل می‌کنیم : آنکه ازهمه‌کمتر بدهی دارد باید به‌کسی‌که ازهمه بیشترطلبکار است پرداخت‌کند؛پس‌ازاین‌اولین پرداخت، گروه بدهکاران‌وطلبکاران ازشش‌نفرتجاوزنخواهدکرد. پس‌از۵پرداخت‌ازاین‌نوع ،این گروه فقط از دو نفر تشکیل خواهد شد . بدین‌ترتیب، تمام قرضها پس‌از۶ عمل تأدیه خواهند شد . مطمئناً ، ممکن‌است‌که پس‌از چند پرداخت، یك طلبکار، بدهکار شود ولی این موضوع هیچ تغییری درتعداد طلبکاران وبدهکاران نمی‌دهد .

۹۷ - یك گروه بسیار عجیب

شخصی تعریف می‌کردکه روزی دردسته‌ای داخل شده بودکه (باوی)شامل‌دوازده‌نفروبه دسته‌های زیرتقسیم شده‌بود:

(a) هرکس دقیقاً پنج عضودیگر از دسته را می‌شناخت.

(b) هرکس دردسته‌ای سه‌نفری بودکه افرادش دوبه‌دو باهم آشنا بودند .

(c) هیچ دستهٔ چهارتایی وجود نداشت‌که افرادش دو به دو باهم آشنا باسند .

(d) هیچ دستهٔ‌چهارتایی‌وجودنداشت‌که‌افرادش یکدیگر را نشناسند .

(e) هرکس متعلق به‌دسته‌ای‌سه‌نفری بودکه همدیگررا نمی‌شناختند .

(f) هرکس‌می‌توانست دربین‌اشخاصی که‌نمی‌شناسدفردی را بیابد که او هم با وی آشنای مشترکی نداشته باشد .

دکتر براکادابر پس‌از استماع این موضوع تصدیق‌کرد که دسته‌ای را یافته است‌که درشرایط (b) ، (c)، (d)، (e) صدق‌کند و درآن هرکس دقیقاً شش شخص دیگر را بشناسد و دارای آشنائی باشدکه بتواند وی را به‌دیگران معرفی نماید.

این اعمال راشرح دهید .

حل - چنین دسته‌ای رامی‌توانیم به‌این طریق بدست آوریم؛ به هرکدام ازدوازده شخص یکی‌ازوجوه‌دوازده وجهی منتظم رامنسوب می‌کنیم وبا فرض اینکه هرکدام همسایه‌اش‌را یعنی آنچه‌که مربوط به‌پنج ضلعیهای مجاور می‌شود، بشناسد (دوپنج ضلعی وقتی مجاورندکه، دارای یال مشترکی باشند). شرط (f) برقرار است ، زیرا وجوه مقابل دارای وجه مجاور مشترك نیستند .

دسته‌ای‌که بوسیلهٔ دکتر براکادابر ذکر شده‌است بازهم بوسیلهٔ یك دوازده وجهی منتظم نمایش داده می‌شود ، ولی مطابق به‌قاعدهٔ مخالف باآن عمل می‌کند: هرکس هیچکدام از همسایه‌هایش رانمی‌شناسند ولی بادیگران آشناست .

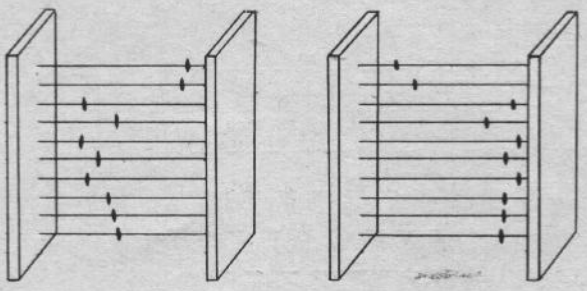
۹۸ - چرتکه

چرتکه‌ای را درنظر می گیریم‌که ازده سیم‌افقی تشکیل شده باشد وهرسیم‌آن شامل یك‌گلوله باشد. فرض می‌کنیم‌که این گلوله‌ها با سرعت ثابت حرکت کرده (سرعت برای تمام گلوله‌ها یکسان است)، ازراست به چپ و از چپ به راست بروند وباتماس برلبه‌های چرتکه جهت خود را عوض‌کنند . مواضع اولیهٔ گلوله‌ها را نمی‌دانیم کجاست . محور تقارن‌عمود برسیم‌ها چرتکه را به دونیمهٔ راست وچپ تقسیم‌می‌کند.فرض می‌کنیم‌که‌حرکت طوری‌باشدکه هیچگاه‌بیش‌ازهفت گلوله‌درنیمهٔ راستی وجود نداشته باشد .

دکتر براکادابر تصدیق می‌کندکه درنیمهٔ راستی‌کمتر از سه‌گلوله وجود ندارد. آیا حق باوی‌است؟

حل - حق بادکتربراکادابر است. فرض می‌کنیم‌که اینطور نباشد، یعنی درلحظه‌ای‌کمتر ازسه‌گلوله درنیمهٔ راستی

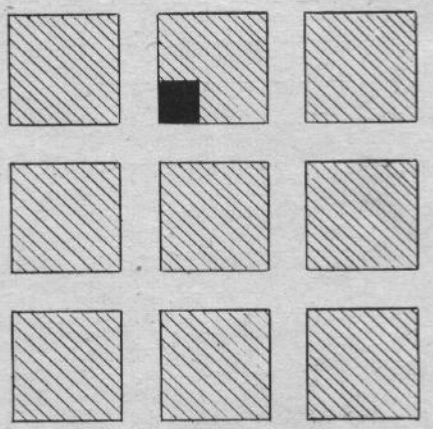
(شکل چپ) وجود داشته باشد. بعد اززمان لازم برای آنکه یك گلوله‌طول سیم را بپیماید، موضع به صورت قرینه (شکل



راست) درمی‌آید. درنیمهٔ چپ چرتکه‌کمتر از سه گلوله وجود دارد، بنابراین در نیمهٔ طرف راست بیش از هفت گلوله موجود است واین مغایر برفرضی است‌که درصورت مسئله بدان‌اشاره شده است .

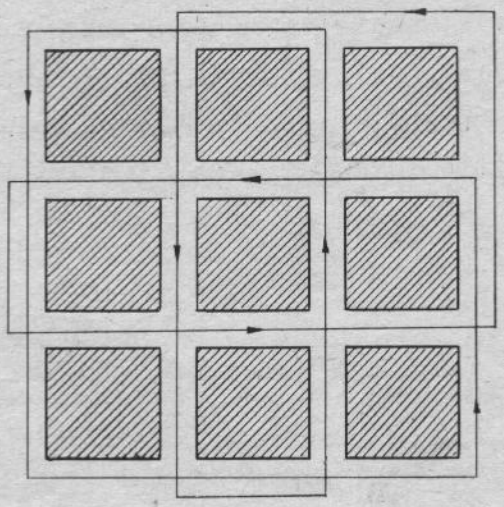
۹۹ ـ نظافت کوچه‌ها

مأمور نظافت شهر دکتربراکادابر دارای چند ارابه‌است ولی گاراژی نداردکه‌آنها راجای بدهد. شهرداری نقشهٔ شهر را (که در شکل زیر چاپ شده است) به دکتر براکادابر نشان می‌دهد وازوی می‌خواهدکه‌بهترین‌مکان‌را برای گاراژ انتخاب کند یعنی این گاراژ باید درجایی باشدکه ازآن ارابه‌ها بتوانند تمام‌کوچه‌هاراطی‌کرده وبه گاراژ بازگردندودرضمن‌کوتاهترین مسیر ممکن را نیز بپیمایند. دکتر براکادابر خانه‌اش راکه در



نقشه به صورت چهارگوش سیاه مشخص شده است ، انتخاب می‌کند. آیا وی حق دارد ؟

دکتر براکادابر درهرخانه‌ای‌که باشد، تصمیمش درمورد انتخاب مکان موردنظر صحیح است. درواقع شکل پایین نشان می‌دهدکه چگونه تمام خیابانهای شهر را طی‌کرده و به نقطهٔ عزیمت (درهرجایی‌که باشد) بازگردیم. کوتاهترین مسیرممکن از ۱۶/۷٪ طول‌کل خیابانهای شهر تجاوز می‌کند.



۱۰۰ ـ شهرهای فرانسه

دکتر براکادابر درجنگ‌جهانی‌اول فرماندهٔ‌ارتش بودودر ۱۹۴۰ جغرافیای‌صحنهٔ‌عملیات‌درفرانسه‌رامطالعه‌می‌کرد. دراین هنگام بامسئلهٔ زیر مواجه شد :

فاصلهٔ (باپرواز پرنده)«شالون» تا«ویرتی» ۳۰ کیلومتر، از «ویرتی» تا «شومون» ۸۰ کیلومتر، از «شومون» تا «سن‌ـ کانتین» ۳۶ کیلومتر، از«سن‌کانتین» تا «رمس» ۸۶ کیلومتر واز «رمس» تا«شالون» ۴۰ کیلومتر است .

دراین شبکه، فاصلهٔ «رمس» راازشومون»بدست‌آورید. تنها دکتر براکادابر بود که توانست این عمل را بدون نقشه انجام دهد !

حل ـ پنج شهر شالون، ویرتی، شومون، سن‌کانتین ورمس‌تشکیل یك پنج ضلعی‌می‌دهندکه یکی‌ازاضلاعش(شومون‌ـ سن‌کانتین) برابر باسجموع چهارتای دیگراست

$$(۲۳۶ = ۸۶ + ۴۰ + ۳۰ + ۸۰)$$

این امرممکن نیست مگرآنکه رأسهای پنج‌ضلعی بریك‌استقامت باشند. شهرها به‌ترتیب زیر بایکدیگررابطه دارند: سن‌کانتین، رمس، شالون، ویرتی وشومون. بنابراین فاصلهٔ رمس‌ازشومون برابر است با

$$۴۰ + ۳۰ + ۸۰ = ۱۵۰ \text{ km}$$

فصل هفتم ـ مسائل بدون حل

بعضی ازمسائلی‌که ذیلا مطرح می‌شوند ، حل شده‌اند ولی راه‌حل بسیاری ازآنها هنوز ناشناخته مانده است . دراین فصل، مسائل ساده ودشواروجود دارد ولی‌حل هرکدام‌ازآنها گواهی براستعداد فکری شخصی است‌که آنرا حل‌کرده‌است .

I ـ علامتهای مثبت ومنفی

شکل زیر شامل ۱۴ علامت مثبت و ۱۴ علامت منفی است‌وبطوری دسته‌بندی شده‌اندکه علامت مثبت زیردوعلامت موافق هم و علامت منفی زیر هر زوج از علامتهای مخالف یکدیگر قرار می گیرد .

+ + − + − + +

+ − − − − +

− + + + −

− + + −

− + −

− −

+

اگر اولین سطر شامل n علامت باشد ، شکل مربوطه دارای $\frac{1}{2} n (n+1)$ علامت خواهد بود؛ مثال فوق مربوط به حالت $n = 7$ است ؛ چون $\frac{1}{2} n (n+1)$ به ازای $n = 3$ و ۴ و ۷ و ۸ و ۱۱ و ۱۲ و ... زوج است ، می‌توانیم از خود بپرسیم‌که آیا ممکن است‌که بتوانیم چنین شکلی را با n علامت واقع در اولین سطر بسازیم. درحالت مخصوص، این عمل برای $n = 12$ امکان دارد ؟

راه حل عمومی شناخته نشده است . یك جواب برای حالت ۱۲ و جوابی دیگر برای حالت $n = 20$ در زیر درج می‌شود؛باحذف اولین سطرازهرکدام جواب برای $n = 11$ و $n = 19$ بدست می‌آید .

− + + − − + − − + + + −

− + − + − − + − + + −

− − − − + − − − + −

+ + + − − + + − −

+ + − + − + − +

+ − − − − − −

− + + + + +

− + + + +

− + + +

− + +

− +

−

+ + + + − − + − − − + + + + − − − − + +

+ + + − + − − + + − + + + − + + + + − +

+ + − − − + − + − − + + − − + + + − +

+ − + + − − − − + − + − + − + + −

− − + − + + + − − − − − − − + −

+ − − − + + − + + + + + + − −

− + + − + − − + + + + + − +

− + − − − + − + + + + − −

− − + + − − − + + + − +

+ − + − + + − + + − −

− − − − + − − + − +

+ + + − − + − − −

+ + − + − − + +

+ − − − + − +

− + + − − −

− + − + +

− − − +

+ + −

+ −

−

II ـ مثلثی را درمثلث دیگر قراردهید

دومثلث به‌اضلاع به ترتیب

a، b، c و a′، b′، c′

مفروضند . رابطه‌ای بین a، b، c، a′، b′، c′ بدست آورید تا بتوانیم اولین مثلث را دردومی قراردهیم(بطوری‌که رأسهایش روی اضلاع دیگری قرارگیرد) .

III ـ تقسیم یك دایره

روی دایره‌ای به پیرامون واحد ، نقطهٔ P را مشخص می‌کنیم. از P کمانهای متوالی به طول v را رسم می‌کنیم ، v عددی اصم است. با این طریق نقاط P_1 ، P_2 وغیره را بدست می‌آوریم وهمواره طول کمان $P_k P_{k+1}$ برابر با v است . اگر این عمل را درنقطهٔ P_{n-1} متوقف کنیم، دایره به n کمان تقسیم شده است . ثابت کنید که P_n دربزرگترین کمانها یافت خواهد شد .

IV- نیم خطوط درفضا

سه نیم خط فضائی دارای یك مبدأ هستند و با یدیگر زوایای a، b و c می‌سازند (وجوه یك سه وجهی) . از بین نامساویهای (۱) تا (۵) که درزیر نوشته شده‌اند، درحالت کلی کدامیك صحیح و کدامیك غلطند ؟

$$a + b > c \qquad (۱)$$

$$\sin a + \sin b > \sin c \qquad (۲)$$

$$\sin\frac{a}{۲} + \sin\frac{b}{۲} > \sin\frac{c}{۲} \qquad (۳)$$

$$\sin^۲ a + \sin^۲ b > \sin^۲ c \qquad (۴)$$

$$\sin^۲\frac{a}{۲} + \sin^۲\frac{b}{۲} > \sin^۲\frac{c}{۲} \qquad (۵)$$

V-صفحهٔ شطرنج نامحدود

مطلوبست رسم یك چند ضلعی درصفحهٔ شطرنجی نامحدود، که شامل ۱۰۰ خانهٔ شطرنجی بوده و قطر این چندضلعی کوتاهترین مقدار ممکن باشد. (قطر یك منحنی بزرگترین فاصلهٔ مابین دو نقطه ازمنحنی مفروض است.) مقدار این قطر را حساب کنید. قطر کوچکترین دایره‌ای را که شامل ۱۰۰ خانه است بدست آورید .

VI- بازهم دربارهٔ چرتکه

گلوله‌هایی راکه ازشمارهٔ ۹۸ از آنها بحث بمیان آوردیم درنظر می‌گیریم و آنها را با حروف a، b، c، d، e، f، g، h، i، j نمایش می‌دهیم. گلوله‌ها درهروضعیتی که باشند، تصویرشان روی قاعدهٔ چرتکه، نمایش دهندهٔ یکی از تبدیلات ممکن حروف a تا j است. مانند شمارهٔ ۹۸ که گلوله‌ها با سرعت ثابت تغییر مکان می‌کردند، ولی حالا فرض می‌کنیم سرعت تمامشان باهم فرق کند. سرعت هر کدامشان برحسب cm/s عددی است صحیح. آیا می‌توانیم سرعتها راچنان اختیار کنیم که به‌ازاء هروضعیت اولیهٔ گلوله‌ها، درجریان حرکت، تمام تبدیلات ممکن را بدست آوریم؟ دکتر براکادابر یادآوری کرد که وی می‌تواند سرعتهایی را انتخاب کند که هیچکدام ازتبدیلات قبل از آنکه تمام تبدیلات بوجود نیامده باشند، تکرار نشود .

VII ـ کشو مملو ازجعبه‌های کنسرو

کشوئی به‌شکل مستطیل و به ابعاد ۱۸۶ میلیمتر در ۲۸۶ میلیمتر داریم و می‌توانیم ۱۶ قوطی کنسرو استوانه‌ای یکجور راکه‌هم ارتفاع باکشواست درآن بافشارقراردهیم. ولی اگر قطرشان به هراندازهٔ جزئی ، بزرگتر باشد نمی‌توانیم تمام آنها را درکشو جای دهیم. قطر قوطی‌ها چقدر است ؟

VIII ـ تکثیر موجودات ذره‌بینی

دکتر براکادابر نوعی باکتری به شکل لوله‌های کوچك کشف کرده است که بطورعجیبی تکثیر پیدا می‌کنند. قسمتی از یك باکتری جدامی‌شود و باکتری مستقلی بوجود می‌آید؛ باکتری اخیر کوتاهتر از قسمت باقی مانده است . بنابراین دو موجود با قامتهای مختلف داریم . باکتری جدیدی که هم اندازه با کوتاهترین باکتری است ازجدا شدن بزرگترین باکتری بوجود می‌آید واین موجود ذره‌بینی تاقبل از آنکه باکتری اولیه کوچکتر ازقسمت جداشده ازآن باشد، دوام پیدامی‌کند. سپس باجداشدن از بزرگترین باکتری موجود ، باکتری جدیدی هم قامت با کوتاهترین باکتری که وجود دارد، شکل می‌گیرد.

این قاعده تنها(مربوط به عمل اولین تقسیم به دوجزء نامتساوی)برای تشریح تکثیرموجودات ذره‌بینی که بعداً تولید می‌شوند، کفایت می‌کند؛ ولی باید یادآوری کنیم که در لحظهٔ مفروض تنها یك باکتری به دو قسمت تقسیم می‌شود ثابت کنید که .

(۱) هیچگاه بیش ازسه طول مختلف دراین موالید وجود ندارد .

(۲) اگرنسبت طولها ازهمان اولین لحظه اصم باشد ، دربعضی ازلحظات باکتریهای باسه طول مختلف و دربرخی دیگر بادو طول مختلف داریم.

(۳) ممکن است که ازاولین تقسیم نسبت طولها درجریان تقسیمات بعدی محفوظ بماند .

IX ـ رسیدن سیرك

بچه‌ها درچمن‌زاری که ازجاده چندان دور نیست، درحال بازیند . ناگهان درمکانی که جاده ازجنگل خارج می‌شود، دلقکی سوار براسب رامشاهده می‌کنند: سیرك دارد می‌آید!

بچه‌ها مایلند که برای مشاهدهٔ دلقك ازنزدیکترین فاصله

به‌طرف جاده بدوند. آنهایی‌که ازجاده به‌دورند مهلت‌نخواهند داشت‌که به آن برسند ولی می‌خواهندکه آنرا از نزدیکترین نقطهٔ ممکن ببینند. تمام بچه‌ها باسرعتهای مساوی هم‌می‌دوند ولی سرعت دلقك ازآنها بیشتر است .

ازخواننده می‌خواهیم‌که :

(a) خطوطی راکه جدا کننده قسمتی از چمنزاراست و امکان رسیدن به دلقك را دارد، رسم‌کند وهمچنین خطوطی را که دراستداد آنها این امکان وجود ندارد ترسیم نماید .

(b) جاده‌ای راکه بچه‌های واقع برروی این خطوط‌باید دنبال‌کنند، مشخص نماید.

(c) به بچه‌هایی‌که نخواهند توانست به دلقك برسند، جاده رانشان دهد،یعنی آنها بتوانند قبل‌از آنکه دلقك از جلو ایشان گذشته‌باشد، به‌آن رسیده باشند .

X ـ سه‌گاوچران

سه گاوچران گله‌ای رادرچراگاهی وسیع‌محافظت‌می‌کنند ومی‌خواهند چراگاه را به سه قسمت طوری تقسیم‌کنندکه :

(۱) سهم هرکدام یك سوم از سطح‌کل باشد .

(۲) فاصلهٔ جداکننده هر گاوچران از دورترین‌سهمیه‌اش اززمین، برای هرسه برابر باشد .

(۳) گاوچران نزدیکتر به نقطه‌ای مفروض همواره در منطقه‌ای‌که این نقطه در آن وجود دارد ، باشد. ثابت‌کنیدکه این مسئله‌لاینحل است. با اضافه‌کردن یك یادوشرط ، یکی از جوابهای ممکن را بدست آورید .

XI ـ بازپرسی

قاضی ـ شاهد آتش را دیده است ؟ در حوالی آتش‌چه می‌کرده است ؟

شاهد ـ ازوسط مزارع عبور می‌کردم .

قاضی ـ دردهکدهٔ شما ، خطوط محدودهٔ مزارع چگونه ترسیم شده‌اند ؟

شاهد ـ به موازات وعمود برجاده .

قاضی ـ شاهد بدون قصد می‌رفته است ؟

شاهد ـ خیر. پس‌ازعزیمت ازجاده‌من از وسط مزارع‌راه می‌رفتم ومزرعهٔ مجاورم رانگاه می‌کردم؛ بدون‌آنکه دودفعه ازیك جاده گذشته باشم، خودم رادرکنار جاده‌یافتم.

قاضی ـ آیا شاهد دومرتبه ازیك نقطهٔ عبور رده‌است.

شاهد ـ خیر.ولی‌بخاطر می‌آورم‌که دودفعه طول‌مزرعهٔ جو را طی‌کرده‌ام؛ اولین‌بار مزرعه درطرف راستم بود و خانه را می‌دیدم؛ دفعهٔ دوم، درطرف چپم بود. درهمین موقع‌شنیدم که‌کسی فریاد می‌زد :

«آتش !»

درهمین موقع قاضی دستور به توقیف شاهد داد . چرا؟

XII- پیکانهای واقع برروی دوازده‌وجهی

مدلی از یك دوازده وجهی منتظم را در نظر می گیریم . روی هریك ازوجوه‌آن پیکانی رسم می‌کنیم. ثابت‌کنید دوپیکان همسایه وجود خواهد داشت ، یعنی دوپیکانی‌که روی دوازده وجهی واقعند ، بایدیگر زاویه‌ای بزرگتر از ۹۰° می‌سازند .

پایان کتاب

اعداد کامل (بقیه از صفحهٔ ۶۱۶)

البته یادآورمی‌شویم‌که تنها یك‌راه برای بدست‌آوردن اعداد کامل وجود ندارد بلکه با استفاده ازفرمول اقلیدس

$$۲^{n-۱}(۲^n - ۱)$$

که درآن $(۲^n - ۱)$ باید عدد اولی باشد نیز می‌توان اعداد کامل را بدست‌آورد.

بین سومین و چهارمین ، چهارمین و پنجمین عدد کامل اعداد زیادی وجود دارندکه می‌توانند جمله‌های اول سریهای اعداد زائد باشند.

ممکن‌است‌اعداد اصلی به صورتهای‌دیگری بیان شوند. مثلا به صورت زیر:

$$۵۷۲ = ۲^۲ \times ۱۱ \times ۱۳$$
$$۷۴۸ = ۲^۲ \times ۱۱ \times ۱۷$$
$$۸۳۶ = ۲^۲ \times ۱۱ \times ۱۹$$

که ازآن این سؤال مطرح می‌شود که آیا حاصل‌ضرب اعداد اول بزرگتر از ۱۳ در ۱۱×۲^۲ اعداد زائد تولید می‌کند ؟ جواب این سؤال را به خوانندگان محول می‌کنیم و نیز نظر ایشان را به عوامل اول ۵۵۰ و ۶۵۰ جلب می‌کنیم.

کمال‌الدین صفوی

دانش‌آموز رتبهٔ اول

کلاس ششم ریاضی

دبیرستان فروزی مراغه

خبر از : کتابفروشی‌بیژن ، مراغه

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۷۶

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۷۶/۱ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{x^۲}{۳}+\frac{۴۸}{x^۲}=۱۰\left(\frac{x}{۳}-\frac{۴}{x}\right)$$

حل ـ با انتخاب مجهول معین $X=\frac{x}{۳}-\frac{۴}{x}$ داریم:

$$\frac{x^۲}{۹}+\frac{۱۶}{x^۲}-\frac{۸}{۳}=X^۲$$

ومعادله چنین می‌شود:

$$۳X^۲+۸=۱۰X \text{ یا } ۳X^۲-۱۰X+۸=۰$$

$$X=۲ \text{ یا } \frac{۴}{۳}$$

$$\frac{x}{۳}-\frac{۴}{x}=۲ \Rightarrow x^۲-۶x-۱۲=۰$$

$$x=۳\pm\sqrt{۲۱}$$

$$\frac{x}{۳}-\frac{۴}{x}=\frac{۴}{۳} \Longleftrightarrow x^۲-۴x-۱۲=۰$$

$$x=۶ \text{ یا } -۲$$

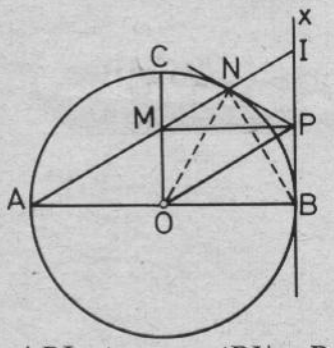
۷۶/۲ـ ترجمه از فرانسه

دایرهٔ به مرکز O و به‌قطر $AB=۲R$ مفروض‌است. شعاع OC را عمود بر AB و در نقطهٔ B مماس Bx را بر دایره‌رسم کرده‌وروی OC نقطهٔ دلخواه M را درنظرمی گیریم. خط AM دایره را در N و مماس Bx را در I قطع می‌کند. درنقطهٔ N مماسی بردایره رسم می‌کنیم‌که Bx را در P تلاقی می‌کند. اولا ثابت‌کنیدکه:

۱) P وسط BI و M وسط AI است.

۲) چهارضلعی AMPO متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPO ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. ثانیاً به فرض اینکه M وسط OC باشد طولهای پاره خطهای AN و BN و مساحت چهار ضلعی OMNP را برحسب R حساب‌کنید.

حل ـ دو مماس PN و PB که ازنقطهٔ P بردایره رسم‌شده‌اند متساویند و چون $ON=OB$ پس OP عمودمنصف BN است. زاویهٔ ANB قائمه‌است پس OP با AN موازی است وچون O وسط AB است پس P وسط BI است. درمثلث ABI چون O وسط AB و OM با BI موازی است پس M وسط AI است.



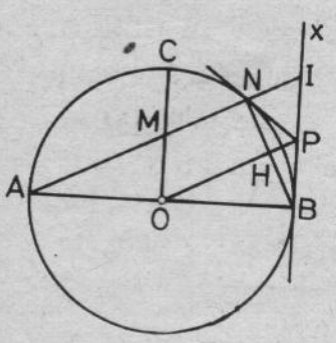
۲) خط MP که اوساط دوضلع ازمثلث AIB را به‌هم وصل کرده باضلع سوم موازی و با نصف‌آن مساوی است. پس MP و AO با هم مساوی وموازیند وچهارضلعی AMPO متوازی الاضلاع است. چهارضلعی OMNP ذوزنقه است زیرا ثابت‌شدکه OP با AI موازی است. ازطرفی ON و MP دوقطراین چهارضلعی متساویندبنابراین ذوزنقهٔ مزبورمتساوی‌الساقین است.

ثانیاً درمثلث AMO داریم

$$OM=\frac{R}{۲} \text{ و } AM^۲=R^۲+\frac{R^۲}{۴}=\frac{۵R^۲}{۴}$$

و:

$$AM=\frac{R\sqrt{۵}}{۲}$$



دومثلث قائم‌الزاویهٔ AMO و ANB متشابهند وداریم

$$\frac{AN}{AO}=\frac{AB}{AM} \quad \text{یا} \quad AN=\frac{AB.AO}{AM}$$

$$AN=\frac{۲R.R.۲}{R\sqrt{۵}}=\frac{۴R}{\sqrt{۵}}=\frac{۴R\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\frac{BN}{MO}=\frac{AB}{AM} \Longleftrightarrow BN=\frac{۲R\sqrt{۵}}{۵}$$

NH ارتفاع ذوزنقهٔ OMNP نصف NB است ؛

$$NH=\frac{BN}{۲}=\frac{R\sqrt{۵}}{۵}$$

نصف مجموع دوقاعدهٔ این ذوزنقه می‌شود :

$$\frac{OP+MN}{۲}=\frac{AM+AN-AM}{۲}=\frac{AN}{۲}=\frac{۲R\sqrt{۵}}{۵}$$

$$S=\frac{(OP+MN)NH}{۲}=\frac{۲R^{۲}}{۵}$$

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۷۶/۳ـ فرستنده: **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی تبریز

ثابت کنید که هر گاه $p\neq ۱$ باشد معادلهٔ:

$$\frac{x^{۲}-x}{x^{۲}+x-۱}=p$$

دارای دو ریشهٔ حقیقی α و β است و دو مقدار $\alpha(\alpha-۱)$ و $\beta(\beta-۱)$ مختلف‌العلامتند.

حل‌ـ معادله به صورت زیر مرتب می‌شود :

$$(۱-p)x^{۲}-(p+۱)x+p=۰$$

$$\triangle=(p+۱)^{۲}-۴p(۱-p)=۵p^{۲}-۲p+۱>۰$$

معادله دوریشهٔ حقیقی αوβ داردو داریم:

$$\alpha(\alpha-۱)\times\beta(\beta-۱)=\alpha\beta(\alpha\beta-\alpha-\beta+۱)$$

$$=a\beta[\alpha\beta-(\alpha+\beta)+۱)]=$$

$$\frac{p}{۱-p}\left[\frac{p}{۱-p}-\frac{p+۱}{۱-p}+۱\right]$$

$$=-\left(\frac{p}{۱-p}\right)^{۲}<۰$$

حاصل‌ضرب دومقدار منفی است پس آن دومقدار مختلف‌العلامتند

۷۶/۴ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\left(\frac{x+a}{x+}\right)^{۲}+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{۲}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^{۲}-a^{۲}}{x^{۲}-b^{۲}}$$

حل‌ـ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{۲}-\frac{a}{b}\times\frac{x^{۲}-a^{۲}}{x^{۲}-b^{۲}}+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{۲}-\frac{b}{a}\times\frac{x^{۲}-a^{۲}}{x^{۲}-b^{۲}}=۰$$

$$\frac{x+a}{x+b}\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{a}{b}\times\frac{x-a}{x-b}\right)+\frac{x-a}{x-b}\left(\frac{x-a}{x-b}-\frac{b}{a}\times\frac{x+a}{x+b}\right)=۰$$

$$\frac{x+a}{x+b}\left[\frac{(b-a)x^{۲}-(b^{۲}-a^{۲})x-ab(b-a)}{b(x^{۲}-b^{۲})}\right]+$$

$$+\frac{x-a}{x-b}\left[\frac{(a-b)x^{۲}-(a^{۲}-b^{۲})x-ab(a-b)}{a(x^{۲}-b^{۲})}\right]=۰$$

$$x^{۲}-\left[\frac{x+a}{x+b}-\frac{x-a}{x-b}\right]=۰$$

$$\left[x^{۲}-(b-a)x-ab\right]$$

$$\times\left[\frac{x+a}{b(x+b)}-\frac{x-a}{a(x-b)}\right]=۰$$

ازاین معادله بعد ازاختصارخواهیم داشت :

$$[x^{۲}-(a+b)x-ab][x^{۲}+(a+b)x-ab]=۰$$

دومعادلهٔ درجهٔ دوم حاصل می‌شودکه ازروی‌آنها جوابهای x بدست می‌آید .

۷۶/۵ـ از **مصطفی گودرزی طائمه**

هر گاه $S_۲$ و $S_۳$... و S_n به ترتیب مجموع دوجمله، سه جمله و... و n جملهٔ اولیه ازتصاعد حسابی با جملهٔاول $S_۱=a$ و با قدر نسبت d باشد حاصل جمع زیر را بدست آورید:

$$A=S_۱+S_۲+S_۳+\ldots+S_n$$

حل‌ـ طبق فرمول مربوط داریم :

$$S_۲=\frac{۲}{۲}[۲a+d]$$

$$S_۳=\frac{۳}{۲}[۲a+۲d]$$

. . . .

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

از جمع نظیربه‌نظیر طرفین روابط بالا باتوجه به‌اینکه$S_۱=a$ خواهیم داشت:

$$A=a(۱+۲+۳+\ldots+n)+$$

$$+\frac{d}{۲}[۲+۶+\ldots+n(n-۱)]$$

$$۱+۲+۳+\ldots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$۲+۶+\ldots+n(n-۱)=(۱-۱)+(۴-۲)+$$
$$+(۹-۳)+\ldots+(n^۲-n)=$$
$$=(۱+۴+۹+\ldots+n^۲)-(۱+۲+۳+\ldots+n)$$
$$=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}-\frac{n(n+۱)}{۲}$$
$$A=\frac{۱}{۶}n(n+۱)[۳a+(n-۱)d]$$

۷۶/۶ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

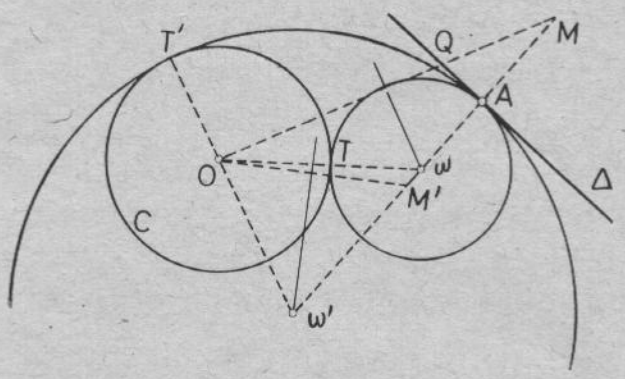
دایرهٔ C به مرکز O و خط △ در خارج آن و نقطهٔ A روی △ مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که بردایرهٔ C وهمچنین در A بر △ مماس باشد.

مسئله را برای حالتی‌که A به‌جای △ بردایرهٔ C واقع باشد نیز حل‌کنید.

حل‌ـ درنقطهٔ A عمودی بر △ اخراج می‌کنیم وروی آن دونقطهٔ M و M′ را چنان‌تعیین می‌کنیم که :

$$AM=AM'=R$$

باشد. عمودمنصفهای پاره‌خطهای OM و OM′ خط MM′ را در ω و ω′ قطع می‌کنند. ω مرکزدایره‌ای است‌که درA بر △ مماس است وبادایرهٔ C مماس خارجی‌است و ω′ مرکزدایره‌ای

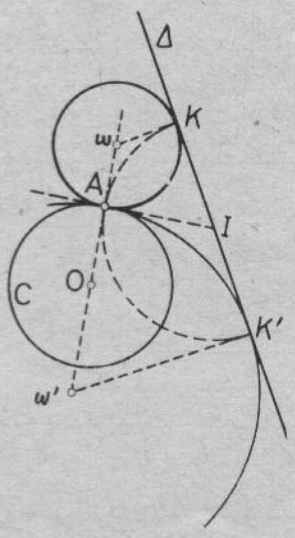


است‌که درA بر △ مماس‌است وبا دایرهٔ C مماس داخلی‌است.

زیرا $\omega O=R+\omega A$

و $\omega' O=\omega' A-R$

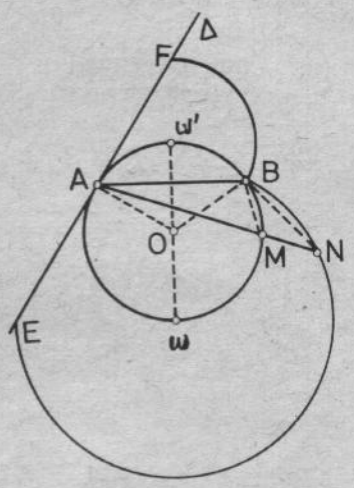
درحالتی‌که A به جای △ بردایرهٔ C واقع باشد، درA مماسی بردایرهٔ C رسم می‌کنیم تا △ را در I قطع کند. به مرکز I وبه شعاع IA دایره‌ای رسم می‌کنیم که △ را در دونقطه تلاقی می‌کند. در نقاط K و K′ عمودهایی بر △ اخراج می‌کنیم که OA را در ω و ω′ قطع



می‌کنند. دایره‌های به مرکزهای ω و ω′ و به شعاعهای ωA و ω′A دایره‌های مطلوبند که یکی از آنها با دایرهٔ C مماس خارجی‌و دیگری با آن مماس داخلی است. زیرا $\omega A=\omega K$ و $\omega' A=\omega' K'$ و ωK و ω′K′ بر △ عمودند.

۷۶/۷ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

دایرهٔ C و دو نقطهٔ ثابت A و B واقع برآن مفروض است. نقطهٔ متغیر M را بر دایره در نظر گرفته و در امتداد AM و درخارج دایره نقطهٔ N را بقسمی انتخاب می‌کنیم که MN با MB برابرباشد. وقتی M روی دایرهٔ C تغییرمکان دهد مکان N چیست؟



حل‌ـ خط △ رادر A مماس بر دایرهٔ C رسم می‌کنیم. نقطهٔ N همواره دریك طرف‌خط △ واقع است. چون بنا به فرض مثلث BMN متساوی‌الساقین است و درنتیجه زاویهٔ BNA منصف زاویهٔ BMA است. حال‌اگر M روی‌کمان بزرگتر AB ازدایره‌باشدزاویهٔ BMA نصف زاویهٔ BOA است ودرنتیجه زاویهٔ BNA یك چهارم زاویهٔ BOA می‌شود مکان N کمان درخورزاویهٔ α برابربایك چهارم‌زاویهٔ BOA است‌که بر A و B می‌گذرد ودریك طرف خط △ واقع است. مرکزاین دایره ω وسط‌کمان بزرگتر AB ازدایرهٔ C است بنابراین در این حالت مکان N کمان دایرهٔ BE به‌مرکز ω ومحدود به‌نقاط B و خط △ است.

در حالتی‌که M بر کمان‌کوچکتر AB واقع باشد، زاویهٔ BNA مکمل یك چهارم‌زاویهٔ BOA است ودراین حال‌مکان N کمان BF از دایرهٔ به مرکز ω′ محصوربین B وخط △ است که ω′ وسط‌کمان‌کوچك AB است.

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۷۶/۸ـ هرگاه تابع y و مشتق‌آن y′ عبارت باشنداز:

$$y=\frac{ax+b}{\sqrt{cx^۲+d}}$$

$$y' = \frac{(3+4x)\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)}$$

مقادیر a و b و c و d را معلوم کنید.

حل- y' مشتق تابع y را حساب کرده و ساده می‌کنیم:

$$y' = \frac{a\sqrt{cx^2+d} - \frac{cx(ax+b)}{\sqrt{cx^2+d}}}{cx^2+d}$$

$$y' = \frac{acx^2+ad-acx^2-bcx}{(cx^2+d)\sqrt{cx^2+d}}$$

$$y' = \frac{ad-bcx}{(cx^2+d)\sqrt{cx^2+d}} =$$

$$= \frac{(ad-bcx)\sqrt{cx^2+d}}{(cx^2+d)^2}$$

عبارت اخیر باید همان عبارت y' باشدکه در فرض داده شده است پس:

$$\begin{cases} ad=3 \\ bc=-4 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$$

۷۶/۹- در مثلث ABC داریم:

$$\cos A = \frac{7}{9} \quad و \quad \sin B + \sin C = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

مقدار $\cos\frac{B-C}{2}$ را حساب کنید.

حل- داریم:

$$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \quad و \quad \cos A = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cos\frac{B-C}{2} \Rightarrow \cos\frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{B-C}{2} = \frac{\pi}{6} \quad و \quad B-C = \frac{\pi}{3}$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۷۶/۱۰- از رابطهٔ زیر تابع y را برحسب x بدست آورده نمایش هندسی آنرا رسم کنید. اگر نقاطی وجود دارد که در آنها منحنی از خودش عبور می‌کند تانژانت زاویهٔ مماسهای برمنحنی را در این نقاط حساب کنید.

$$(x^2-x-2)y^2-(3x^2-x-1)y+2x^2-x=0$$

حل- رابطهٔ بالا نسبت به y معادله‌ای است از درجهٔ دوم وداریم:

$$\triangle = (3x^2-x-1)^2-4(x^2-x-2)(2x^2-x)$$

$$\triangle = x^4+6x^3+7x^2-6x+1$$

هرگاه این عبارت مجذور کامل باشد، جذرآن عبارتی است از درجهٔ دوم وداریم:

$$x^4+6x^3+7x^2-6x+1 \equiv (x^2+bx+1)^2$$

$$\equiv x^4+2bx^3+(b^2-2)x^2-2bx+1$$

ازاین اتحاد نتیجه می‌شود $b=3$ ودرنتیجه:

$$\triangle = (x^2-3x+1)^2$$

$$y = \frac{3x^2-x-1\pm(x^2-3x+1)}{2(x^2-x-2)}$$

$$y_1 = \frac{2x-1}{x-2} \quad و \quad y_2 = \frac{x}{x+1}$$

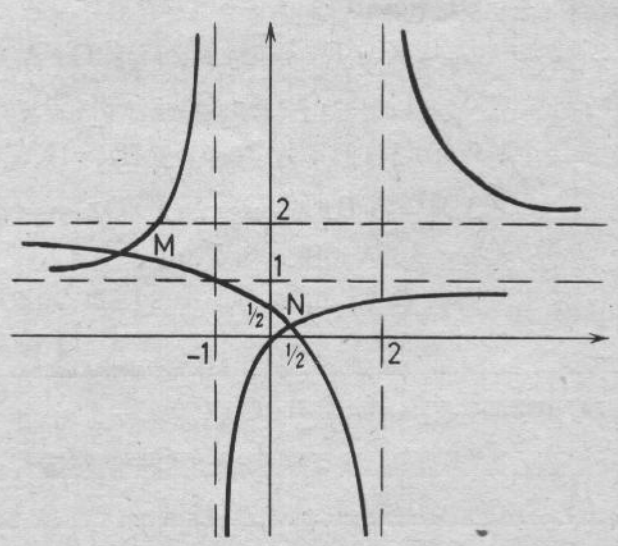
منحنی نمایش تابع مفروض عبارتست از مجموعهٔ منحنیهای نمایشهای هندسی دوتابع بالا وبرای رسم آن جدول تغییرات هریك ازدوتابع را جداگانه تنظیم کرده منحنیها را دریك‌شکل رسم می‌کنیم:

$$y'_1 = \frac{-3}{(x-2)^2} \quad و \quad y'_2 = \frac{+1}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'_1		—		—		—		—	
y_1	2	↘	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	2

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'_2		+		+		+	
y_2	1	↗	$+\infty$		0	↗	1
			$-\infty$	↗			

منحنی زیر در دو نقطهٔ M و N از خودش گذشته است که



این دو نقطه عبارتند ازنقاط تلاقی منحنیهای توابع y_1 و y_2 و داریم :

$$\frac{2x-1}{x-2}=\frac{x}{x+1}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

برای ضریب‌زاویه‌ایهای مماسهای‌بردومنحنی درنقطهٔMداریم:

$$m_1=\frac{-6}{31+7\sqrt{13}} \quad \text{و} \quad m_2=\frac{2}{7+\sqrt{13}}$$

$$tg\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm''}\right|=\dots$$

بـرای زاویـهٔ بین مماسها در نقطـهٔ N نیزبه طریق مشابـه عمل می‌شود .

۷۶/۱۱ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

تـابع $f(x)=A\cos x+B\sin x$ را در نظر می گیریم. هرگاه به ازاء دو مقدار متمایز α و β کـه $\alpha-\beta\neq k\pi$ است $f(\alpha)=0$ و $f(\beta)=0$ باشد ثابت‌کنیدکه در این صورت $A=B=0$ می‌باشد.

حل‌ـ فرض

$$\frac{A}{B}=tg\varphi$$

داریم :

$$f(x)=B(\sin x+\frac{A}{B}\cos x)$$

$$f(x)=B(\sin x+tg\varphi\cos x)$$

$$f(x)=\frac{B}{\cos\varphi}(\sin x\cos\varphi+\sin\varphi\cos x)$$

$$tg\varphi=\frac{A}{B}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$f(x)=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi)$$

$f(x)$ دردو مورد می‌تواند صفر باشد یکی اینکه

$$\sqrt{A^2+B^2}=0$$

باشد ودیگر اینکه

$$\sin(x+\varphi)=0$$

باشد . اگر

$$\sin(x+\varphi)=0$$

باشد

$$x=k\pi-\varphi$$

بوده وهمهٔ مقادیری‌که به ازاء مقادیر مختلف k برای xبدست می‌آید دارای تفاضلی برابر $k\pi$ می‌باشند و چون به‌فرض

$$\alpha-\beta\neq k\pi$$

است پس روابط $f(\alpha)=0$ و $f(\beta)=0$ از شرط $\sin(x+\varphi)=0$ بدست نمی‌آیند بلکـه روابط مزبـور وقتی برقرارندکه $\sqrt{A^2+B^2}=0$ باشد و ایـن تساوی فقط وقتی است‌که $A=B=0$ باشد .

۷۶/۱۲ـ از **عبدالحسین ایمانی** دانشجوی‌دانشکدهٔ فنی

اولا ثابت‌کنیدکه:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos3\alpha}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos3\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

ثانیاً مجموع زیر را حساب‌کنید:

$$S=\frac{\sin^2\alpha}{\cos3\alpha}+\frac{\sin^2 3\alpha}{\cos9\alpha}+\dots+\frac{\sin^2 3^{n-1}\alpha}{\cos3^n\alpha}$$

حل‌ـ اولا داریم :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos3a}=\frac{\sin^2 a\cos a}{\cos3a\cos a}=\frac{\cos a-\cos^3 a}{\cos3a\cos a}=$$

$$=\frac{\cos a+3\cos a-4\cos^3 a}{4\cos3a\cos a}=\frac{\cos a-\cos3a}{4\cos3a\cos a}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos3a}-\frac{1}{\cos a}\right)$$

ثانیاً ـ با توجه به اتحادبالا داریم:

$$\frac{\sin^2 a}{\cos3a}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos3a}-\frac{1}{\cos a}\right)$$

$$\frac{\sin^2 3a}{\cos 9a} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 9a} - \frac{1}{\cos 3a}\right)$$

. . . . . .

$$\frac{\sin^2 3^{n-1}a}{\cos 3^n a} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3^n a} - \frac{1}{\cos 3^{n-1}a}\right)$$

ازجمع‌نظیر به نظیرطرفین روابط بالانتیجه می‌شود:

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3^n a} - \frac{1}{\cos a}\right)$$

۷۶/۱۳- ترجمهٔ از فرانسه

کنج سه قائمهٔ Oxyz و روی Ox و Oz بـه ترتیب نقاط A و C رادرنظر می گیریم بقسمی‌که $OA = a$ و $OC = c$ باشد. در صفحهٔ xOz در نقطهٔ C عمودی بر Oz اخراج می‌کنیم که عمود منصف OA را در B قطع می‌کند و درصفحهٔ xOy دایرهٔ Γ بـه قطر OA و از B خط Δ را موازی با Oy رسم می‌کنیم. هرخط‌که Oy و Δ و Γ را قطع می‌کند G می‌نامیم.

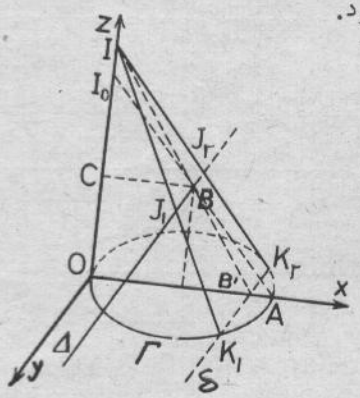
۱ـ اگر I نقطهٔ معلومی از Oz باشد خطوط G را که بر I می گذرند تعیین کرده و در تعداد آنها برحسب مواضع نقطهٔ I روی Oz بحث‌کنید. ثابت‌کنیدکه ازهرنقطهٔ K ازدایرهٔ Γ یك رفقط یك خط G می گذرد به استثنای یك نقطه‌که آنرا معلوم خواهیدکرد.

۲ـ اگرω یك نقطه‌ای از Oz غیرازC باشد و P صفحه‌ای باشد که در ω بر Oz عمود بوده و ωu خطی از صفحهٔ P باشد، ثابت‌کنیدکه یك وفقط یك خط G یافت می‌شودکه ωu را درM متمایز ازω قطع می‌کند و اگر M_1 و M_2 به‌ترتیب نقاط تلاقی خط ωu با صفحهٔ دوخط Oy و Δ و بـا سطح مخروطی به رأس C وبه‌قاعدهٔ Γ باشد داریم:

$$\overline{\omega M} = \overline{\omega M_1} + \overline{\omega M_2}$$

۳ـ فرض می‌کنیم π صفحه‌ای باشدکه بر Oy می گذرد وشامل Δ نیست. نقطهٔ N محل تلاقی صفحهٔ π را بـا خط دلخواه G غیر مار بر O تعیین‌کنید و همچنین n نقطهٔ تلاقی CN را با صفحهٔ xOy بدست آورید. ثابت‌کنید با تغییر خط G مکان نقاط n یك دایره است و ازآن نتیجه بگیریدکه مکان نقاط N عبارتست‌ازفصل مشترك صفحهٔ π بایك‌سطح مخروطی که آنرا تعیین خواهیدکرد.

حل- صفحهٔ I و Δ



صفحهٔ xOy را در خط δ قطع می‌کند. ایـن خط با Oy موازی است و Ox را در B′ قطع می‌کندکه B′ در امتداد IB واقع است. برای آنکه خط δ با دایرهٔ Γ متقاطع باشدلازم و کافی است‌که B′ بین O و A باشد ودراین صورت I خـارج OI_0 واقع خـواهد بودکه I_0 نقطهٔ تلاقی AB با Oz است. هرگاه I خارج OI_0 باشد، B′ بین A و O بوده و δ در دونقطهٔ K_1 و K_2 دایره را قطع می‌کند. دراین‌حال درخط G وجود داردکه برI می گذرند. این‌دوخط IK_1 و IK_2 بوده‌که Δ را در J_1 و J_2 تلاقی‌کرده و نسبت به صفحهٔ xOz قرینهٔ یکدیگرند وB وسط J_1J_2 است.

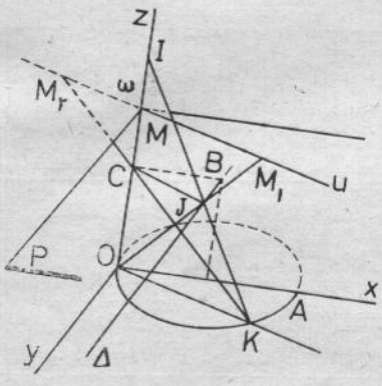
هرگاه I بر I_0 باشد، B′ برA بوده وخط δ در A بر Γ مماس است. دراین حال فقط یك خط G وجود دارد که همان I_0B یا I_0A است.

اگرI بین I_0 وO واقع باشد ،خط δ دایـرهٔ Γ را قطع نمی‌کند وخطG وجود ندارد.

هرگاه I برO قرارگیرد، هرخط که برO بگذرد و در صفحهٔ O و Δ باشد ازجمله خطوط G است.

برعکس اگرK نقطه‌ای ازدایرهٔ Γ باشد، خطی‌ازخطوط G که باید ازK بگذرد عبارت خواهد بودازفصل مشترك‌صفحهٔ I و Δ با صفحهٔ K وOz وچون این دوصفحه فقط دریك خط مشترکند پس فقط یكG وجود داردکـه ازK می گذرد، مگر اینکه K برO انتخاب شودکه دراین حالت تعداد خطوط G بینهایت است.

۲ـ خطی‌ازخطوط G که ωu را قطع‌کند ناگزیردرصفحهٔ



Oz و Ou واقع است و Γ را درK وOu را در M و Δ را در J تلاقی می‌کندکه CJ و OK با ωu موازیند و چون هرخط کـه از O موازی ωu رسم شود Γ را فقط در یك نقطهٔ K قطع می‌کند. پس فقطیك خط G وجود داردکه با ωu متقاطع‌است. هرگاه ωu با Oy موازی باشد.خط Oz تنهاخطی خواهدبودکه برIمی گذاردو Γ وωu را قطع می‌کند. صرف‌نظر ازاین حالت خـاص، M نقطهٔ تلاقی ωu وJK درفاصلهٔ محدود واقع است. M_1 کـه نقطهٔ تلاقی ωu با صفحهٔ Oy و Δ است درامتداد OJ قراردارد و M_2 نقطهٔ تلاقی ωu با سطح مخروطی با رأسC و به قاعدهٔ Γ درصفحه Oz وωu درنتیجه درامتداد CK واقع است.

ازتشابه دومثلث OCJ و $O\omega M_1$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{\omega M_1}}{\overline{CJ}} = \frac{\overline{O\omega}}{\overline{OC}}$$

و ازتشابه دومثلث KCJ و KMM_2 نتیجه می‌شود :

$$\frac{\overline{M_2M}}{CJ} = \frac{\overline{KM}}{\overline{KJ}}$$

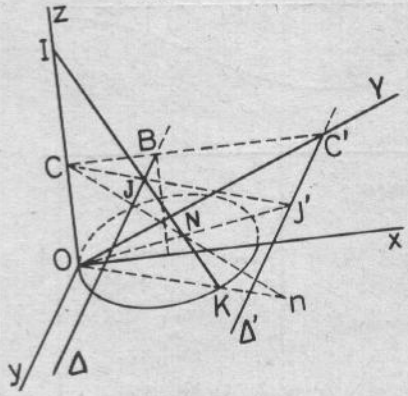
اما داریم :

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{KJ}} = \frac{\overline{O\omega}}{\overline{OC}} \quad , \quad \frac{\overline{\omega M_1}}{\overline{CJ}} = \frac{\overline{M_2M}}{\overline{CJ}}$$

یعنی $\overline{\omega M_1} = \overline{M_2M}$ و یا :

$\overline{\omega M_1} = \overline{\omega M} - \overline{\omega M_2}$ یا $\overline{\omega M} = \overline{\omega M_1} + \overline{\omega M_2}$

۳- صفحهٔ π صفحهٔ xOz را در OY قطع می‌کند .



اگر IJK یکی از خطوط G باشد که بر O نگذرد، صفحهٔ π با صفحه‌ای که در C بر Oz عمود شود درخط Δ' متقاطعند که Δ' از C' نقطهٔ تلاقی CB با OY می گذرد و با Oy موازی است .

خط CJ خط Δ' در J' تلاقی می‌کند که J' در دوصفحهٔ π و (Oz و IK) قرار خواهد داشت. بنابراین N عبارتست از نقطهٔ تلاقی IK با OJ' و n عبارت خواهد بود از نقطهٔ تلاقی OK و CN.

خطوط Cn و JK و OJ' در N متقاربند و دو خط متوازی CJ' و OK را قطع کرده‌اند پس :

$$\frac{\overline{On}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{J'C}}{\overline{J'J}}$$

وازتشابه‌دومثلث CBJ و $CC'J'$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{\overline{J'C}}{\overline{J'J}} = \frac{\overline{C'C}}{\overline{C'B}} = \text{ثابت} = k$$

$$\frac{\overline{On}}{\overline{OK}} = k$$ و n مجانس نقطهٔ K در تجانس (O و k)

است وچون k بر دایرهٔ Γ واقع است پس n بردایرهٔ Γ' مجانس دایرهٔ Γ درتجانس مزبور، قرار خواهد داشت که بر O می گذرد و بر Oy مماس است. دراین حال CN مولد سطح مخروطی به رأس C و به قاعدهٔ Γ' است ، پس مکان N عبارت می‌شود ازمنحنی فصل مشترك این سطح مخروطی با صفحهٔ π.

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۷۶/۱۴- سهمی به معادلهٔ $y^2 = 2px$ و نقطهٔ M به طول a از آن را در نظر می گیریم. اگر N نقطهٔ به طول $-a$ ازمحور $x'x$ باشدثابت کنیدکه‌خط MN بر سهمی مماس است . مقدار a را معلوم کنید برای آنکه خط MN با محور $x'x$ زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد.

حل- مختصات نقاط M و N و ضریب زاویه‌ای خط MN چنین است :

$$M(a \text{ و } \pm\sqrt{2pa}) \text{ ، } N(-a \text{ و } 0)$$

$$m = \frac{\pm\sqrt{2pa}}{a+a} = \frac{\pm\sqrt{2pa}}{2a}$$

ضریب زاویه‌ای مماس بر سهمی در نقطهٔ M :

$$2yy' = 2p \quad \text{یا} \quad y' = \frac{p}{y} \text{ و } m = \frac{p}{\pm\sqrt{2pa}}$$

$$m = \frac{\pm p\sqrt{2pa}}{2pa} = \frac{\pm\sqrt{2pa}}{2a}$$

بنابراین خط MN در نقطهٔ M برسهمی مماس است . برای آنکه این مماس با $x'x$ زاویهٔ ۳۰ درجه‌بسازد ؛

$$m = \frac{\pm\sqrt{2pa}}{2a} = tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$18pa = 12a^2 \text{ ، } a \neq 0 \Longrightarrow a = \frac{3p}{2}$$

۷۶/۱۵- به ازاء چه مقادیر n دورهٔ تناوب تابع زیر برابر با 3π است:

$$y = \cos nx \sin\frac{5x}{n}$$

حل- وقتی 3π دورهٔ تناوب تابع باشد داریم :

$$\cos n(x+3\pi)\sin\frac{5}{n}(x+3\pi) = \cos nx \sin\frac{5x}{n}$$

این رابطه به ازاء هر مقدار از x برقرار است؛ به ازاء $x=0$ داریم :

$$\sin\frac{15\pi}{n} = 0 \Longrightarrow n = \pm 1 \text{ یا } \pm 3 \text{ یا } \pm 5 \text{ یا } \pm 15$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۷۶/۱۶ـ ترجمهٔ از فرانسه

درصفحهٔ محورهای متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ نیم خط Oz با $x'x$ زاویهٔ α می‌سازد. روی $x'x$دو نقطهٔ A و A' با طولهای a و $-a$ و روی Oz نقطهٔ M را در نظر می گیریم که $OM=x$ باشد.

۱ـ تابع زیر را برحسب a و α و x مشخص‌کنید و جدول تغییرات ومنحنی نمایش هندسی آنرا رسم‌کنید.

$$y=\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MA'}^2}$$

۲ـ اوضاعی ازنقطهٔ M را تعیین‌کنیدکه در ازاء آنها $y=k^2$ باشد و نتایج حاصل‌را از روی‌شکل‌نیز بدست‌آورید.

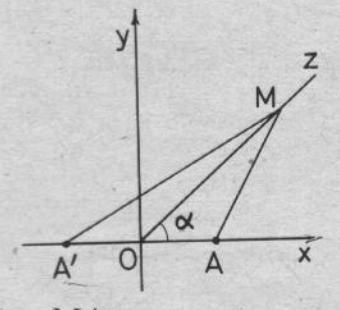
۳ـ با فرض اینکه دو وضع M_1 و M_2 از M وجود داشته باشد بقسمی‌که $y=k^2$ باشد، دراین‌حال اگر ω و ω' مراکزدایره های γ و γ' دایره‌های محیطی‌مثلثهای AM_1M_2 و $A'M_1M_2$ باشدمکان ωوω'راتعیین‌کنید هر گاه:

الف ـ α ثابت و k تغییرکند.

ب ـ k ثابت و α تغییرکند.

۴ـ هر گاه B و B' نقاط تلاقی دیگردایره های γ و γ' با دایرهٔ به قطر AA' باشد ، ثابت‌کنیدکه P نقطهٔ تلاقی دو خط AB و $A'B'$ روی Oz واقع است و Q نقطهٔ تلاقی AB' با $A'B$ یکی از مراکز تجانس دودایرهٔ γ و γ' است و R نقطهٔ تلاقی BB' با $x'x$ مرکز دیگر تجانس دو دایرهٔ مزبور است .

حل ـ در مثلثهای OAM و $OA'M$ داریم :



$$MA^2=OA^2+OM^2-2OA\cdot OM\cos\alpha$$

$$MA^2=a^2+x^2-2ax\cos\alpha$$

$$MA'^2=OA'^2+OM^2-2OA.OM\cos(\pi-\alpha)$$

$$MA'^2=a^2+x^2+2ax\cos\alpha$$

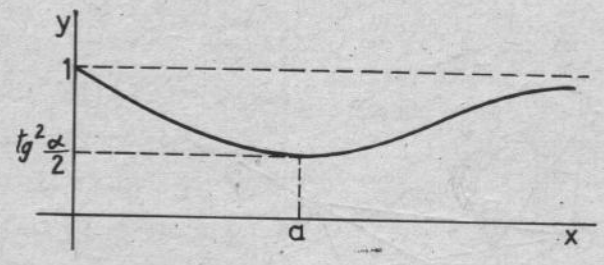
$$y=\frac{x^2-2ax\cos\alpha+a^2}{x^2+2ax\cos\alpha+a^2}$$

چون MA' یعنی مخرج کسر بالا مخالف صفراست پس تابع به ازاء همهٔ مقادیر x معین و اتصالی‌است. مشتق تابع بعد از اختصار چنین می‌شود :

$$y'=\frac{4a(x^2-a^2)\cos\alpha}{(x^2+2ax\cos\alpha+a^2)^2}$$

مشتق درازاء $x=a$ صفر شده وتغییر علامت می‌دهد . جدول تغییرات وشکل منحنی چنین است :

x	0	a	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$1\searrow$	$tg^2\frac{\alpha}{2}$	$\nearrow 1$



۲ـ با فرض $y=k^2$ داریم :

$$\frac{MA}{MA'}=k$$

نسبت فواصل M از A و A' برابر k است پس مکان M دایره‌ای است به‌قطر IJکه I و J مزدوج توافقی یکدیگرنسبت به A و A' می‌باشند. از طرفی قوت نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ مزبور برابر با a^2 است. اگر $k>1$ باشد I و J هر دو بر Ox' واقعند ودراین حال Oz دایرهٔ مزبور را قطع نمی‌کند. پس معادلهٔ $y=k^2$ جواب ندارد .

اگر $k<1$ باشد I و J هر دو بر Ox واقعند. دراین حال مقدار k_1 ازkjz وجود دارد که دایرهٔ Γ به قطر IJ بر Oz مماس است وبه‌فرض‌آنکه T نقطهٔ تماس‌آنها باشدداریم $OT^2=a^2$ و $OT=a$ ونتیجه خواهد شد :

$$K_1=tg\frac{\alpha}{2}$$

هر گاه $tg\frac{\alpha}{2}<k<1$ باشد دایرهٔ Γ در دو نقطهٔ M_1 و M_2 خط Oz را قطع می‌کند. اگر $k<tg\frac{\alpha}{2}$ باشد خط Oz در خارج دایرهٔ Γ قرار می گیرد و با آن نقطهٔ‌مشترك ندارد.

از روی شکل با توجه به اینکه خط $y=k^2$ موازی

$x'x$ است نیز ملاحظه می‌شود که $y = k^2$ وقتی جواب دارد که :

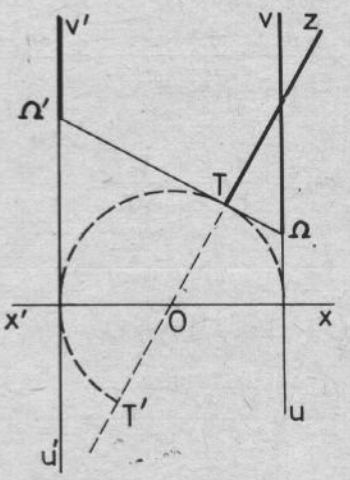
$$tg^2\frac{\alpha}{2} < k^2 < 1 \implies tg^2\frac{\alpha}{2} < k < 1$$

۳- وقتی دایرهٔ Γ خط Oz را دردونقطهٔ M_1 و M_2 قطع کند داریم :

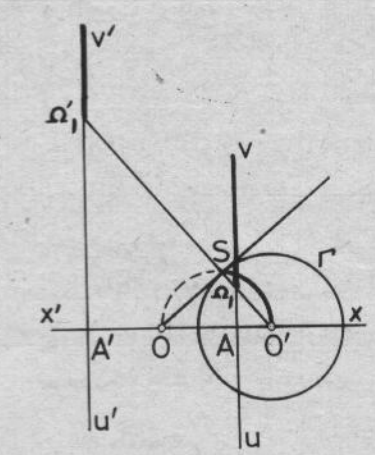
$$\overline{OM_1} \cdot \overline{OM_2} = \overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2$$

از این رابطه نتیجه می‌شودکه دایرهٔ ماربرسه نقطهٔ Aو M_1 وM_2 درA ودایرهٔ ماربرسد نقطهٔ A' و M_1 و M_2 در A' بر$x'x$ مماس است ودرنتیجه ω وω' مرکزهای آنها به ترتیب برخطهای uv و $u'v'$ قرار دارندکه درA و A' بر $x'x$ عمودند. اکنون حالتهای زیررا درنظر می گیریم:

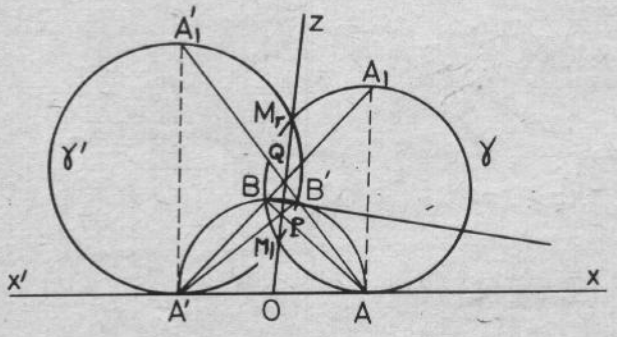
الف- α ثابت و k تغییرکند. دراین حال نیم خط Oz ثابت است ونقاط M_1 و M_2 براین خط حرکت می‌کندبقسمی که همواره نسبت بهT وT'مزدوج توافقی یکدیگرندکهTوT' نقاط تلاقی دایرهٔ به قطرAA' با Oz می‌باشند. دراین‌حالH وسط M_1M_2 نیم‌خط Tz را می‌پیماید و هرگاه درT مماسی بر دایرهٔ به قطر AA' رسم‌کنیم‌که uv را در Ω و $u'v'$ را در Ω' قطع‌کند مکان ω نیم خط Ωv و مکان ω' نیم خط $\Omega'v'$ خواهد بود .



ب- k ثابت بماند وα تغییرکند. در این حال دایرهٔ Γ ثابت است وO' مرکز آن نقطهٔ ثابتی ازOx است. هرگاه مماس OS را بر Γ رسم کنیم برای آنکه M_1 وM_2وجودداشته باشند باید Oz داخل زاویهٔxOS واقع باشد. در این حال H وسط M_1M_2 که در ضمن تصویرO' بر M_1M_2 است، برکمانی ازدایرهٔ به قطرOO' قراردارد که داخل دایرهٔΓ واقع‌است. چون ω وω' نقطهٔ تلاقی uv و $u'v'$ با عمود منصف M_1M_2 می‌باشند واین عمودمنصف از O'می گذرد، اگرΩ_1وΩ'_1نقاط‌تلاقی OS باuv و$u'v'$باشند، مکان ω نیم‌خط $\Omega_1 v$ ومکان ω' نیم‌خط $\Omega'_1 v'$ خواهد بود.



۴- خطوط AB و $A'B'$ به‌ترتیب محورهای اصلی دایرهٔ به قطر AA' با دایره‌های γ وγ' می‌باشند وP نقطهٔ تلاقی آنها برمحور اصلی دو دایرهٔ γ وγ' یعنی بر Oz قرار خواهد داشت .



خطوط AB' و$A'B$ برهم عمودند پس AB' بر A'_1 انتهای قطر $A'A'_1$ ازدایرهٔ γ'' می گذرد. همچنین $A'B$ باγ درA_1 متقاطع است که AA_1 قطری از γ است. بنابراین Q مرکزتجانس معکوس دودایرهٔ γ وγ' است .

R نقطهٔ تلاقی BB' با $x'x$ است وداریم :

$$\overline{RB} \cdot \overline{RB'} = \overline{RA} \cdot \overline{RA'}$$

درانعکاس به قطب R وبه قوت $\overline{RA} \cdot \overline{BA'}$ دایرهٔγ که برB می گذرد و در A بر $x'x$ مماس است به دایره‌ای تبدیل می‌شودکه برB' می گذرد ودرA' بر $x'x$ مماس است، یعنی‌دایرهٔ γ به دایرهٔ γ' تبدیل‌می گردد. پسR قطب‌انعکاس دو دایرهٔ γ وγ' ودرنتیجه مرکز تجانس مستقیم آنها است.

۷۶/۱۷- ازجهانشاه کریمی‌بیرگانی، مسجدسلیمان

منحنیهای نمایش هندسی دو تابع زیررا در فاصلهٔ $(2\pi$ و $0)$ رسم کرده سطح محصور بین دو منحنی را در فاصلهٔ مزبور تعیین‌کنید. برمنحنیهای مزبور نقاطی با طولهای برابر راتعیین کنیدکه قائمهای بردو منحنی دراین‌نقاط بریکدیگر عمودباشند:

$$y = \pm|\sin x + \cos x|$$

حل- دومنحنی نسبت به $x'x$ قرینه‌اند پس به رسم جدول تغییرات یکی‌ازآنها اکتفا می‌کنیم :

$$y = |\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

اکنون دو حالت در نظر می گیریم :

الف- هرگاه $\quad 2k\pi + \pi \geqslant x + \frac{\pi}{4} \geqslant 2k\pi$

یا $\quad 0 < x \leqslant \frac{3\pi}{4}$ و $2\pi \geqslant x \geqslant \frac{7\pi}{4}$

$$y=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) \quad و \quad y'=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

x	۰	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$	2π
y′		+	۰	−			+
y	۱	↗ $\sqrt{2}$	↘	۰		۰ ↗	۱

ب- هر گاه

$$2k\pi+\pi\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+2\pi$$

یعنی

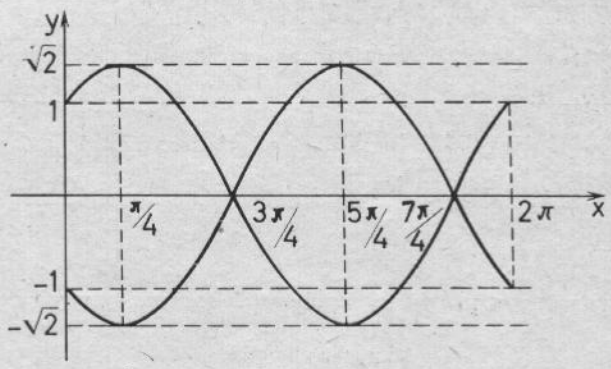
$$\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}$$

باشد داریم :

$$y=-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) \quad و \quad y'=-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

x		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$	
y′			+	۰	−		
y	۰	↗	$\sqrt{2}$	↘	۰		

با توجه به دو جدول بالا واینکه x′x محور تقارن منحنی تابع مفروض است شکل منحنی چنین است :



برای تعیین مساحت سطح محصور بین دو منحنی مساحت سطح بین منحنی بالا و محور x′x را حساب می‌کنیم و دو برابر آن را بدست می‌آوریم :

$$y=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) \quad ، \quad Y=-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+C_1$$

$$y=-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) \quad ، \quad Y=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+C_2$$

$$S=2\left\{\left[-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})\right]_0^{\frac{3\pi}{4}}+\left[\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}+\left[-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})\right]_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\right\}$$

واحد سطح $S=8\sqrt{2}$

برای آنکه قائمهای بردو منحنی درنقاط همطول برهم عمود باشند کافی است که حاصل ضرب معکوسات مشتقهای دو تابع برابر ۱- باشد وچون دو منحنی درهرحال مربوط به دو تابع مختلف‌العلامتند پس :

$$\frac{-1}{-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})}\times\frac{-1}{\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})}=-1$$

$$2\cos^2(x+\frac{\pi}{4})=1 \quad یا \quad \cos(x-\frac{\pi}{4})=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=0 \quad یا \quad \frac{\pi}{2} \quad یا \quad \pi \quad یا \quad 2\pi$$

۷۶/۱۸- فرستنده : کامران پارسای قمی

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طولهای دو ضلع زاویهٔ قائمه عددهای منطق وطول وتر عدد اول است . ثابت کنید که در این مثلث طول ارتفاع وارد بروتر نمی‌تواند عدد صحیح باشد .

حل- اگر c طول وتر، a و b طولهای دوضلع دیگر و h طول ارتفاع وارد بروتر ازمثلث قائم‌الزاویه باشدداریم:

$$ch=ab \quad یا \quad h=\frac{ab}{c}$$

چون c عدد اول و a وb عددهای کوچکتر از c هستند پس حاصل‌ضرب آنها برc بخش پذیر نیست و در نتیجه h عدد صحیح نیست .

۷۶/۱۹- فرستنده: کامران پارسای قمی

به ازاء چه مقدار ازعدد صحیح N، عدد(N^2-71) برعدد $(7N+55)$ بخش پذیر است؟

حل- اگر N^2-71 بر $7N+55$ بخش پذیر باشد دراین صورت عددصحیح M وجود دارد که :

$$N^2-71=M(7N+55)$$

$$N^2 - 7MN - (55M + 71) = 0$$

چون M و N عددهای صحیحند پس مبین این معادله یعنی:

$$\Delta = 49M^2 + 210M + 284$$

باید مجذور کامل باشد، اولاداریم :

$$(7M + 15)^2 < 49M^2 + 210M + 284 < (7M + 17)^2$$

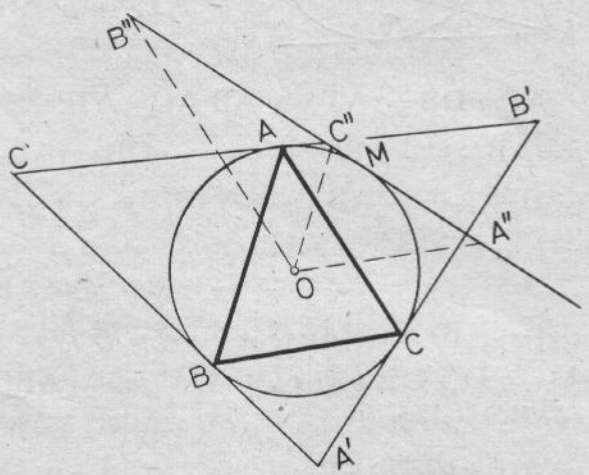
$$49M^2 + 210M + 284 = (7M + 16)^2 \Longrightarrow M = 7$$

در ازاء $M = 7$ برای N دومقدار ۵۷ یا ۸- بدست می‌آید.

۷۶/۲۰- ترجمهٔ از فرانسه

مثلث ABC محاط دردایرهٔ به‌مرکزO ومثلث $A'B'C'$ محیط براین دایره را درنظر می‌گیریم بقسمی‌که $B'C'$ در A و $C'A'$ درB و $A'B'$ در C بردایره مماس‌باشد. نقطهٔ دلخواه M را بردایره اختیارکرده در آن مماس $\triangle$ را بر دایره رسم می‌کنیم‌که خطوطی راکه از O موازی با BC و CA وAB رسم می‌شوند به ترتیب در A'' و B'' و C'' قطع می‌کند. ثابت‌کنیدکه خطوط $A'A''$ و $B'B''$ و $C'C''$ متقاربند.

حل- در تبدیل قطب وقطبی معکوس نسبت به دایرهٔ O خط $A'A''$ بهα قطب تبدیل می‌شود. اما α عبارتست از

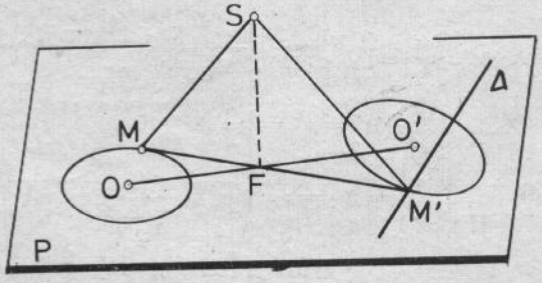


فصل مشترك قطبیهای نقاط A' و A''که قطب A' خط BC وقطب A^* خطی است‌که ازM عمودبر OA'' رسم شود . پس α عبارتست ازتصویر نقطهٔ M برضلع BC. همچنینβوγ قطبهای $B'B''$ و $C'C''$ به ترتیب تصویرهای M برضلعهای CA و AB می‌باشند. بنابه قضیهٔ سمسن تصاویرM براضلاع مثلث یعنی سه‌نقطهٔ α و β وγ بر یك خط مستقیم واقعند پس قطبیهای این نقاط سه‌خط متقارب می‌باشندکه نقطهٔ تقارب‌آنها قطب خط‌سمسن‌نظیرM نسبت به دایرهٔ O است .

۷۶/۲۱- ترجمهٔ ازفرانسه

دایرهٔ به مرکز O را درصفحهٔ P ونقطهٔ S را در خارج صفحه ونقطهٔM راروی‌دایرهٔ مزبوردرنظر می‌گیریم. صفحه‌ای که در S بر SM عمود شود عموماً صفحهٔ P را در خط $\triangle$ قطع می‌کند . ثابت کنید که با تغییر M روی دایره خط $\triangle$ همواره بریك منحنی مقطع مخروطی مماس می‌باشد و در نوع این منحنی بحث کنید .

حل- عمودSF را برصفحهٔ P رسم می‌کنیم. خطMF



در M' خط $\triangle$ را قطع می‌کند. مثلث MSM' در زاویهٔ S قائمه است ودر نتیجه :

$$\overline{FM} \cdot \overline{FM'} = -\overline{FS}^2$$

یعنی مکان M' عبارتست ازمبدل مکان M درانعکاس‌به‌قطب F وبه قوت $-FS^2$ - مکان M دایرهٔ O است. حال اگر F روی دایرهٔ O نباشد مکان M' دایرهٔ O' است. اگرF روی دایرهٔ O باشد مکان M' یك خط D است درحالت اول که تصویر F بر$\triangle$روی یك دایره واقع است .

اگرF داخل دایرهٔ O باشد خط $\triangle$ بریك بیضی مماس است‌که دایرهٔ O' دایرهٔ اصلی آن است. اگرF خارج دایرهٔ O باشد $\triangle$ بر هذلولی مماس است‌که دایرهٔ O' دایرهٔ اصلی آن است واگرF روی دایرهٔ O باشد خط $\triangle$ برسهمی مماس است‌که خطD مکان M'، مماس در رأس آن است .

پاسخ تستهای ریاضی

۷۶/۲۶ - (د):هر گاه یك ریشهٔ معادلهٔ :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

باشد داریم :

$$a + b + c = 0$$

واز آنجا نتیجه می‌شود که :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$$

۷۶/۲۳ - (ب) : هر گاه داشته باشیم :

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + 1$$

دراین صورت خواهیم داشت :

$$f(x)-f(x+\alpha)=ax^n-a(x+\alpha)^n+\ldots$$
$$+bx^n-b(x+\alpha)^n+\ldots+1-1$$

عبارت $f(x)-f(x+\alpha)$ ازدرجهٔ $n-1$ است وشامل‌جملهٔ 1 نیست. پس‌ازروی آن‌همهٔ ضرایب به‌غیراز 1 مشخص‌می‌شوند.

۷۶/۲۴ - (ج) : پس‌از ساده‌کردن‌کسراول و انتخاب مجهول معین $X=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ نتیجه می‌شود :

$$X^2-aX+a^2=0 \Longrightarrow X=a$$
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=a \Longrightarrow \sqrt{x}=\frac{\alpha}{1-a}$$

ازمعادلهٔ اخیر وقتی x بدست می‌آیدکه :

$$\frac{a}{1-a}\geqslant 0 \Longrightarrow a<0 \text{ یا } a>1$$

۷۶/۲۵ - (الف) : چون طرفین تساویهای داده‌شده را مجذورکرده وساده‌کنیم نتیجه می‌شود: $x^2=1$ و $y^2=1$ و چون هم x وهم y مثبت است پس :

$$x=1 \text{ و } y=1 \text{ و } x+y=2$$
و
$$S=2+2^2+2^3+\ldots+2^n$$
$$S=2(2^n-1)$$

۷۶/۲۶ - (د) : طبق فرمول به تصاعدحسابی‌داریم:

$$A=\frac{n(n+1)}{2} \text{ و } B=n^2 \text{ و } C=n(n+1)$$
$$A^2=BC \Longrightarrow n^2(n+1)^2=4n^2(n+1)$$
$$n=0 \text{ یا } n=-1 \text{ یا } n=\frac{1}{3}$$

هیچکدام ازاین مقادیرقابل قبول‌نیستند.

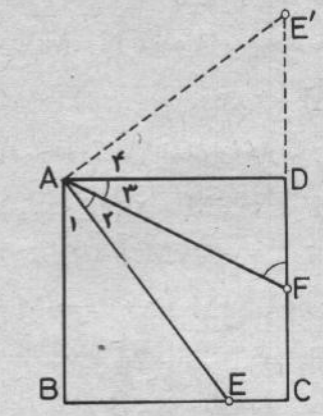
$$B^2=AC \Longrightarrow 2n^4=n^2(n+1)^2$$
$$n=0 \text{ یا } n=\sqrt{2}+1 \text{ یا } n=-\sqrt{2}+1$$

این مقادیر نیز قابل قبول نیستند .

$$C^2=AB \text{ یا } 2n^2(n+1)^2=n^2(n+1)$$
$$n=0 \text{ یا } n=-1 \text{ یا } n=-2$$

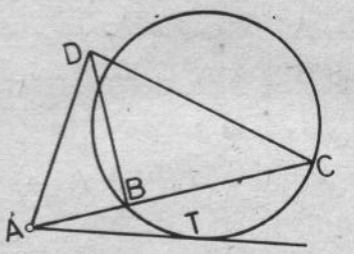
این مقادیر نیز قابل‌قبول نیستند .

۷۶/۲۷ - (ب) : مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصل آنها ازدونقطهٔ ثابت A وB مقدارثابت است با فرض $AB=2a$ دایره‌ای است به مرکزO وسط AB وبه شعاع $\sqrt{\frac{k^2-2a^2}{2}}$



۷۶/۲۸ - (ج) : هرگاه E نقطه‌ای از ضلع BC از مربع ABCD وAF نیمساز زاویهٔ EAD باشد ، چون ضلع CD را به اندازهٔ $DE'=BE$ امتداد دهیم دومثلث ADE وABE متساویند و در نتیجه زاویهٔ A_4 با زاویهٔ A_1 برابر است و چون $A_2=A_3$ پس $FAB=FAE'$ اما $FAB=E'FA$ پس $E'AF=E'FA$ یعنی‌مثلث $E'AF$ متساوی‌الساقین است و از آنجا :

$$AE'=FE' \Longrightarrow AE=BE+DF$$



۷۶/۲۹ - (ب) : هرگاه AT بر دایره مماس و DB بر AB عمود و مساحت مثلث ACD برابر AT^2 باشد داریم :

$$AC\cdot DB=2\overline{AT}^2 \text{ و } AB.AC=\overline{AT}^2$$

پس $DB=2AB$ و مساحت مثلث ABD می‌شود $S=\overline{AB}^2$ با تغییر قاطع حول نقطهٔ A طول AB تغییر می‌کندووقتی قاطع بر مرکز دایره بگذرد ، AB و در نتیجه مساحت مثلث ABD کمترین مقدار را خواهد داشت .

۷۶/۳۰ - (ب) : هرگاه رأسهای A وB از مستطیل ABCD برمنحنی $y^2=2ax$ و رأسهای C و D بر خط خط $x=h$ واقع باشند داریم :

$$A(x \text{ و } \sqrt{2px}) \text{ و } B(x \text{ و } -\sqrt{2px})$$
$$C(h \text{ و } -\sqrt{2px}) \text{ و } D(h \text{و} \sqrt{2px})$$
$$AB=2\sqrt{2px} \text{ و } BC=h-x$$
$$S=2(h-x)\sqrt{2px}$$

با تعیین S' مشتق S معلوم خواهد شدکه در ازاء $x=\frac{h}{3}$ صفرشده ازمثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد .

۷۶/۳۱ - (الف) : بافرض

$$z=x+y \text{ و } x^2+y^2=k^2$$

داریم :

$$z=x\pm\sqrt{k^2-x^2}$$

$$z' = 1 \pm \frac{-x}{\sqrt{k^2 - x^2}}$$

$$z' = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{k^2 - x^2} = \pm x$$

$$x = \pm \frac{k\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow y = \pm \frac{k\sqrt{2}}{2}$$

۷۶/۳۲ـ(الف): اگر M نقطه‌ای ازضلع Ox وQ وP دونقطه ازضلع Oy از زاویهٔ $xOy = 60^\circ$ باشد با فرض

$$OM = x \quad و \quad OQ = 2OP = 2a$$

داریم

$$y = MP^2 + MQ^2 =$$

$$(x^2 + a^2 - ax) + (x^2 + 4a^2 - 2ax)$$

$$y = 2x^2 - 3ax + 5a^2$$

y'مشتق این تابع درازاء $x = \frac{3a}{4}$ صفرشده ازمنفی به‌مثبت‌تغییر علامت می‌دهد

۷۶/۳۳ـ(ب) : از رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{\sin x + \sin 5x}{\sin 3x} = 2\cos 2x$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 3x}{\sin x} = 3 - 4\sin^2 x = 1 + 2\cos 2x$$

$$\frac{b}{a} - \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = 1$$

۷۶/۳۴ـ (ج) : معادلهٔ داده شده به صورت زیر ساده می‌شود :

$$\cos^2 x(\sin x + \cos x) = 0$$

$x = 90^\circ$ یا 135° یا 270° یا 315°

انتهای‌این کمانها چهار رأس مستطیلی هستندکه زاویهٔ بین‌دوقطر آن 45° ودرنتیجه نسبت بین دوضلع مجاور آن برابر است با $\cot g 22/5^\circ = \sqrt{2} + 1$

۷۶/۳۵ـ (د) : چون رابطهٔ (۱) را درطرفین تفضیل وترکیب کنیم می‌شود :

$$\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\beta)(1 - \cos\gamma)}{(1 + \cos\alpha)(1 + \cos\beta)(1 + \cos\gamma)}$$

که این رابطه به رابطهٔ (۲) تبدیل می‌شود برعکس می‌توان رابطهٔ (۲) را به ترتیب عکس به رابطهٔ (۱)تبدیل‌کرد .

۷۶/۳۶ـ (الف) : هرگاه از P موازی با AB رسم کنیم تا BQ را در M قطع‌کند خواهیم داشت :

$$\overline{PQ}^2 = \overline{QM}^2 + \overline{PM}^2$$

$$\overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$$

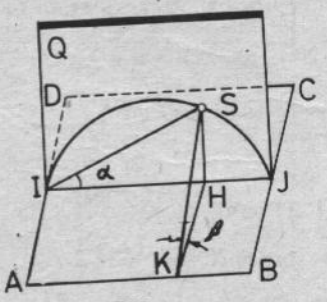
$$\overline{QM}^2 = (AP - BQ)^2$$

$$= \overline{AP}^2 + \overline{BQ}^2 - 2A \ . \ BQ$$

$$\overline{AP}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 \text{ و } \overline{BQ}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OQ}^2$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2AP \ . \ BQ$$

۷۶/۳۷ـ (ج) : مطابق شکل داریم:



$$tg\beta = \frac{SH}{HM} = \frac{SH}{a}$$

$$\sin\alpha = \frac{SH}{SI}$$

و

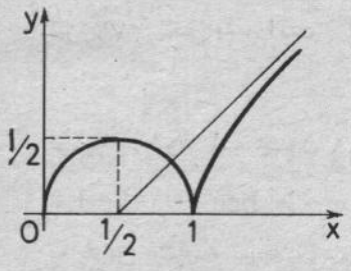
$$\cos\alpha = \frac{IH}{SI}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2SH \ . \ IH}{SI^2}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2SH \ . \ IH}{IJ \ . \ IH} = \frac{2SH}{2a} = \frac{SH}{a}$$

$$\sin 2\alpha = tg\beta$$

۷۶/۳۸ـ (ب)



منحنی تابع مفروض به شکل مقابل است و یك ماکسیمم و یك می‌نیمم دارد .

۷۶/۳۹ـ(الف)

معادلهٔ مجانب مایل تابع $y = \frac{3x}{2}$ است و داریم :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{2x^2} - \frac{3x}{2} = \frac{1}{2x^2}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2x} + C$$

$$S = F(k) - F(1) = \left| \frac{-1}{2k} + \frac{1}{2} \right| = \frac{-1 + k}{2k}$$

$$k \to +\infty \ , \ \lim S = \frac{1}{2}$$

۷۶/۴۰ـ ج) :رابطهٔ‌داده‌شده به صورت زیرنوشته می‌شود:

$$۴\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}+۱=\sqrt{۲}$$

ازضرب طرفین این رابطه درRرابطهٔ $r+R=R\sqrt{۲}$ نتیجه می‌شودکه چون‌آن را در رابطهٔ اولر :

$$d^۲=R^۲-۲Rr$$

منظورکنیم خواهیم داشت $d=r$ و چون d فاصلهٔ مرکزهای دایره‌های محیطی و محاطی داخلی‌است پس مرکز دایرهٔ‌محیطی روی دایرهٔ‌محاطی‌داخلی واقع است.

۷۶/۴۱ـ (ب) : معادلهٔ مفروض بعد از اختصار چنین می‌شود :

$$\sin x\cos x(-۴\cos^۲x+۳+a)=۰$$

ریشهٔ $\sin x\cos x=۰$ عبارتست از $x=k\pi$ و عبارت داخل پرانتزوقی می‌تواند صفر شودکه :

$$۰<\frac{a+۳}{۴}<۱ \Longrightarrow -۳<a<۱$$

۷۶/۴۲ـ (الف) : هرگاه عدد $\overline{abc}$ بر۳۷بخش پذیر باشد باقیماندهٔ تقسیم عدد $۱۰۰a+\overline{bc}$ بر۳۷ برابرباصفراست و چون ۱۰ نسبت به ۳۷ اول است پس عدد :

$$۱۰۰۰a+۱۰\overline{bc}$$

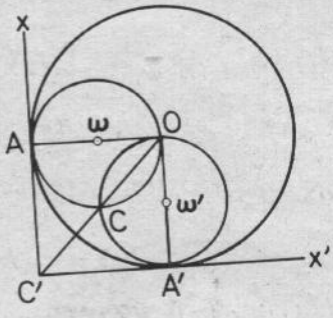
نیز بر۳۷ بخش پذیر است . امااین‌عدد به‌صورت :

$$۹۹۹a+۱۰\overline{bc}+a$$

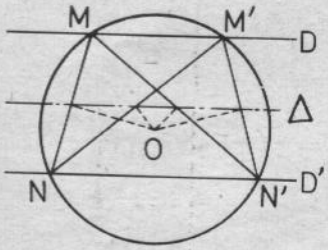
نوشته می‌شود که چون ۹۹۹ مضرب ۳۷ است پس عدد $\overline{bca}$یعنی$۱۰\overline{bc}+a$ نیز مضرب ۳۷ است . ازروی این عدد به طریق مشابه نتیجه می‌شود که عدد $\overline{cab}$ نیز مضرب ۳۷ است .

۷۶/۴۳ـ (الف) : باقیماندهٔ تقسیم عدد N بر ۲ با باقیماندهٔ تقسیم رقم‌یکان‌آن بر۲ برابر است پس‌عدد $N+۳u$ و در نتیجه عدد $T=N+۳u+۲S$ مضرب ۲ است . از طرف دیگرباقیماندهٔ تقسیم N بر۳ با باقیماندهٔ تقسیم مجموع رقمهای آن بر ۳ برابراست‌پس$N+۲S$مضرب ۳ است‌وچون $۳u$ نیز مضرب ۳ است‌پس‌عدد T مضرب ۳ هست و درنتیجه بر۶بخش پذیر است .

۷۶/۴۴ـ(ج) : اگرنقاط تماس دایره‌های ω وω' رابا دایرهٔ O به ترتیب A وA' بنامیم ، در انعکاس ($R^۲$ و O)



دایرهٔ ω به مماس Ax ودایرهٔω'به‌مماس$A'x'$ بردایرهٔ O تبدیل می‌شود . پس مبدل C یعنیC'در نقطهٔ تلاقی این دومماس واقع است. اما دودایرهٔ ωو ω' بر هم عمودند پس زاویهٔ $\omega O\omega'$قائمه‌است ودرنتیجه‌زاویهٔ $AC'A'$ نیز قائمه و چهارضلعی $OAC'A'$ مربع است و $OC'=R\sqrt{۲}$ می‌باشد. پس مکان C' دایره‌ای است به‌مرکز O وبه شعاع $R\sqrt{۲}$.



۷۶/۴۵ـ(ج): اگر از O بر خطوط گفته شده عمودکنیم ، پاهای‌عمودهاروی یك خط مستقیم △ قرار دارند. زیراهردونقطه ازآنها اوساطدوضلع ازمثلثی هستندکه‌ضلع سوم‌آنMM'یا NN' است. بنابراین‌خطوط‌مزبور بر سهمی‌به کانون O که △ مماس در رأس آن است مماس می‌باشند .

دانش‌آموزان رتبهٔ اول خرداد ۵۰
استان اصفهان

رسول جعفر پیشه
ششم ریاضی
دبیرستان ملی فروغ
مجموع نمرات کتبی:
۲۳۱/۹۱

بهادر سعیدآبادی
ششم طبیعی
دبیرستان ملی حکیم سنائی
مجموع نمرات کتبی :
۱۶۳/۸۳

خبراز : کتابفروشی امید ، اصفهان

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۷۷/۱ـ ترجمهٔ: **فتح‌الله زرگری**

فاصلهٔ بین دوشهرA و B برابر۳۶کیلومتراست. سه‌نفر باهم ازشهرA به طرف شهرB حرکت می‌کنند. یکی‌ازاین‌سه نفریك دوچرخه دارد وحداکثر می‌تواند یك‌نفردیگررا با خود ببرد. درخروج ازشهرA، دوچرخه‌سوار یکی ازدونفر را بر ترك خود می‌نشاند وبعدازطی مسافتی اورا درنقطهٔ C پیاده کرده خود برمی‌گرددودرنقطهٔ D به‌نفر دیگرمی‌رسد. دراینجا اورا سوارکرده به سمت شهرB حرکت می‌کند. این‌دونفر ونفر دیگرباهم به شهرB می‌رسند. هرگاه هیچیك ازنفرات دربین‌راه توقف نکرده وسرعت دوچرخه‌سوار سه‌برابر سرعت هر پیاده باشد،فاصله‌های AC و AD را حساب‌کنید .

۷۷/۲ـ ترجمه ازمجلهٔ «تربیت ریاضی»

مثلث متساوی‌الساقینAOB به رأسO مفروض است. به مرکز O وبه شعاعی‌کمتراز ارتفاعOH از مثلث، دایره‌ای رسم می‌کنیم و از نقاط A وB مماسهای AC و BD را براین دایره رسم می‌کنیم بقسمی‌که نقاط C وD دریك طرف ارتفاع OH واقع شوند. این دومماس یکدیگررا درMتلاقی می‌کنند. ثابت‌کنیدکه :

الف‌ـ نقطهٔM بردایرهٔ محیطی مثلث OAB واقع‌است.

ب‌ـ دومثلث AOB وCOD متشابهند .

ج‌ـ سه نقطهٔ D و C و H بریك‌خط مستقیم واقعند .

کلاس چهارم ریاضی

۷۷/۳ـ ترجمهٔ:**فتح‌الله زرگری**

مقادیر حقیقی x وy وz را ازدستگاه زیربدست آورید :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$$

۷۷/۴ـ ترجمهٔ:**فتح‌الله زرگری**

معلوم‌کنید به‌ازاء چه مقدارa ازدستگاه زیربرای هر یك ازمقادیر x و y و z فقط یك‌جواب حقیقی بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=a \end{cases}$$

۷۷/۵ـ فرستنده : **کامران پارسای قمی**

ثابت کنیدکه هرگاه تعداد جمله‌های x نامحدود باشد داریم :

$$x=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\dots}}}$$

۷۷/۶ـ از **ا . آقا ابراهیمیان** دانشجوی دانشگاه آریامهر

ثابت‌کنیدکه اولا محیط هرمثلث از هشت برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن بزرگتر است. ثانیاً اگرp نصف‌محیط وr شعاع دایرهٔ محاطی داخلی یك مثلث باشد :

$$\frac{p}{r}+\frac{r}{p}>\frac{17}{4}$$

۷۷/۷ـ ترجمهٔ: **فتح‌الله‌زرگری**

ثابت‌کنید هرگاه اعداد مخالف‌صفر a_1 ، a_2 ،...، a_n تصاعد حسابی تشکیل دهند، داریم :

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

۷۷/۸ـ ترجمهٔ: **فتح‌الله زرگری**

از نقطهٔ A به دو نقطهٔ B و C ازکمان BC دایره‌ای وصل می‌کنیم بقسمی‌که وترBC داخل شکل حاصل قرارداشته باشد. خطی‌چنان رسم‌کنیدکه مساحت سطح محصور بین کمان BC ودوخط AB وAC را به دوقسمت برابرتقسیم کند.

کلاس پنجم طبیعی

۷۷/۹ـ اولا منحنیهای C و C' نمایش هندسی‌دوتابع زیر را دریك شکل رسم‌کنید:

$$(C): y=x^2-1 \quad و \quad (C'): y=\frac{-x-2}{x+1}$$

ثانیا خط $x=k$ منحنی C را درM ومنحنی C' را در N قطع می‌کند. در هریك‌از نقاط، مماسی برمنحنی نظیر رسم می‌کنیم. هرگاه این دومماس برهم عمود باشند مقدار k را بدست آورید.

۷۷/۱۰ـ بدون استفاده از مشتق، حداکثر و حداقل مقدار تابع زیررا پیداکنید:

$$y=sin^6x+cos^6x$$

کلاس پنجم ریاضی

۷۷/۱۱ـ معادلهٔ خطی را تعیین‌کنیدکه هر دو منحنی توابع زیررا به زاویهٔ قائمه قطع کند:

$$y=x^2+2x \quad و \quad y=-x^2+5$$

۷۷/۱۲ـ منحنیهای C وC' نمایش هندسی‌دوتابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$(C): y=ax^2+bx+c$$

$$(C'): y=\frac{px+q}{x+r}$$

اولاـ حداکثرچند خط وجوددارد‌که برهردومنحنیC و C' مماس است؟

ثانیاًـ حداکثر چندخط وجود داردکه هردومنحنی C و C' را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کند؟

۷۷/۱۳ـ فرستنده: **جوادفیض** دانشجوی‌دانشکدهٔ فنی دانشگاه تبریز

ثابت‌کنیدکه اگر داشته باشیم:

$$tg\theta tg(\theta+\alpha)=k$$

خواهیم داشت:

$$(k+1)cos(2\theta+\alpha)=(1-k)cos\alpha$$

سپس معادلات زیررا حل‌کنید:

$$tgxtg(x+\frac{\pi}{3})=2$$

$$tg\alpha tg(\alpha+x)=-1$$

۷۷/۱۴ـ ترجمهٔ: **فتح‌الله‌زرگری**

درقاعدهٔ مخروطی دوار، مربعی به ضلع a محاط شده است. فصل مشترك صفحهٔ مار بررأس مخروط و یك ضلع این مربع با مخروط،مثلث متساوی‌الساقینی است‌که‌زاویهٔ رأس آن α است. سطح‌کل‌وحجم‌مخروط را برحسب a و α حساب‌کنید.

کلاس ششم طبیعی

۷۷/۱۵ـ دایرهٔ به معادلهٔ

$$x^2+y^2-2\alpha x-R^2=0$$

محور $x'x$ را درنقطهٔ A و B قطع می‌کندکه ازاین دو نقطه، A به O مبدأ مختصات نزدیکتر است. از O مماس OT رابراین‌دایره رسم‌کرده‌ایم. هرگاه مثلثOTBمتساوی‌الساقین باشد مقدارα را برحسب R حساب‌کنید.

۷۷/۱۶ـ در تعداد نقاط تلاقی خط $y=k$ با منحنی نمایش تابع زیربحث‌کنید:

$$y=sin2x+sinx+cosx-1$$

کلاس ششم ریاضی

۷۷/۱۷ـ ترجمه ازفرانسه

درصفحهٔ محورهای مختصات متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ دایرهٔ C به مرکزO وبه شعاع R را درنظرمی‌گیریم. اگرP یکی ازنقاط تقاطع خط $\triangle$ به معادلهٔ $x=\frac{R}{2}$ با دایرهٔ C وM نقطهٔ به طول x از $x'x$ و M' نقطهٔ تلاقی دیگر خط $\triangle$ با دایرهٔ C باشد؛

الفـ تابع زیررا برحسب x وR مشخص‌کنید:

$$y=\frac{\overline{MM'}}{\overline{MP}}$$

جدول تغییرات آن را معلوم‌کنید ومنحنی نمایش تغییرات آن را درازاء $x=R$ رسم‌کنید.

هر گاه k عدد جبری معلوم باشد با فرض $y=k$ در وجود نقطهٔ M بحث کنید .

ب- برخط PM نقطهٔ Q را درنظر می گیریم که :

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}=k$$

باشد. ثابت کنید که مقدار این نسبت مستقل از x است ومکان Q را تعیین کنید و با استفاده ازآن مجدداً در وجودنقطهٔ M بر - حسب مقادیر k بحث کنید .

ج- هر گاه k درفاصله‌ای تغییر کند که مسئله ممکن باشد، همواره دونقطهٔ M متناظر وجود دارند که نسبت به دو نقطهٔ ثابت که آنها را تعیین می کنید مزدوج توافقی می‌باشند.

۷۷/۱۸- از: ا. آقا ابراهیمیان

مثلث ABC مفروض است. خط متغیر △ ضلعهای AB وAC را در M و N قطع می کند بقسمی که مساحت چهار - ضلعی BMNC ، n برابر مساحت مثلث AMN است . △ درچه وضعی باشد تا طول MN می‌نیمم باشد و این مقدار می‌نیمم را برحسب n و A و b و c طولهای AC و AB بدست آورید .

۷۷/۱۹- ترجمهٔ: فتح‌الله زرگری

ثابت کنید که هر جمله ازرشتهٔ اعداد زیر مجذور کامل است:

۱ - n مرتبه n مرتبه

۴۹ ، ۴۴۸۹ ، ۴۴۴۸۸۹ ، ... ۴۴ ... ۸۸ ... ۸۹

۷۷/۲۰- ترجمهٔ: فتح‌الله زرگری

ثابت کنید که مکعب هرعدد طبیعی برابراست با تفاضل مجذورات دوعدد طبیعی دیگر .

۷۷/۲۱- ترجمه ازفرانسه

دو دایرهٔ O و O′ درA و B متقاطعند. دایرهٔ متغیر C بردایرهٔ O′ عمود وبردایرهٔ O مماس است. ثابت کنید که دایرهٔ C بردایرهٔ ثابت دیگری که آنرا تعیین خواهید کرد نیز همواره مماس است .

۷۷/۲۲- ترجمه ازفرانسه

برهذلولی مفروض نقطهٔ M را درنظر می گیریم. به‌مرکز M دایره‌ای رسم می کنیم که برF کانون هذلولی بگذرد. این دایره خط هادی نظیر کانون F رادرنقطهٔ P و Q قطع می کند. ثابت کنید هر گاه M هذلولی را بپیماید خطوط MP و MQ درامتدادهای ثابت تغییر می کنند .

تستهای ریاضی

کلاس چهارم ریاضی

۷۷/۲۳- برای آنکه عبارت ax^4+bx^3+1 بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد، برای a وb :

الف- مقداری بدست نمی‌آید .

ب- یك دسته جواب وجود دارد .

ج- بیش‌ازیك دسته جواب وجود دارد .

د - برای تعیین a و b معلومات بالا کافی نیست .

۷۷/۲۴- معادلهٔ

$$\sqrt{x+3a}+\sqrt{x-a}=2\sqrt{a}$$

الف- همواره دوجواب قابل قبول دارد .

ب- همواره یك جواب قابل قبول دارد .

ج- به شرط $a\geq 0$ یك جواب قابل قبول دارد.

د - جواب قابل قبول ندارد .

۷۷/۲۵- دستگاه دومعادلهٔ زیر :

$$\begin{cases}\sqrt{2(2+\sqrt{3})^{x-y}}=1-\sqrt{3}\\ \sqrt{2(5-2\sqrt{6})^{x^2-2y+2}}=2+\sqrt{6}\end{cases}$$

الف- یك دسته جواب دارد .

ب- دودسته جواب دارد .

ج- بیش‌از دودسته جواب دارد .

د - جواب ندارد .

۷۷/۲۶ - a ، b دوعدد مثبتند و $a+2b$ ، $2a+b$ به همین ترتیب تصاعد حسابی و $(b+1)^2$ ، $ab+5$ ، $(a+1)^2$ به‌همین‌ترتیب، تصاعد هندسی تشکیل

می‌دهند. هرگاه آخرین جملهٔ هریك ازاین تصاعدها کوچکتر از ۱۰۰۰۰ باشد، دراین صورت n تعدادجمله‌های تصاعد حسابی و m تعداد جمله‌های تصاعد هندسی برابرند با:

الف- $n=5001$ و $m=13$

ب- $n=4001$ و $m=26$

ج- $n=4901$ و $m=12$

د- $n=4999$ و $m=12$

۷۷/۲۷- با معلوم بودن :

$log3=0/47712$ و $log2=0/30103$

$log7=0/84510$

تعداد رقمهای عدد 42^{42}

الف- برابر ۸۴ است .

ب- برابر ۴۹ است .

ج- برابر ۵۰ است .

د- قابل محاسبه نیست .

۷۷/۲۸- دو دایرهٔ متساوی مماس خارجند. دایره‌ای رسم کرده‌ایم که برهریك ازاین دودایره وبرمماس مشترك خارجی آنها مماس است. اگر S مساحت هریك از دایره‌های مفروض باشد، مساحت دایرهٔ سوم برابراست با :

الف- $\frac{S}{2}$ ب- $\frac{S}{4}$

ج- $\frac{S}{16}$ د- $\frac{S}{8}$

۷۷/۲۹- درمثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ B برابر است با مجموع ۹۰ درجه واندازهٔ زاویهٔ C. عمود منصف ضلع BC ضلع AC را در M قطع می‌کند. هرگاه :

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=p$ و $2AC\cdot AM=q$

باشد، دراین صورت :

الف- $p>q$ ب- $p<q$

ج- $p=q$ د- $2p=q$

کلاس پنجم ریاضی

۷۷/۳۰- خط متغیر $\triangle$ موازی محور $y'y$ منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ را در A و منحنی نمایش تابع $y=x+f(x)$ را در B قطع می‌کند. درنقاط A و B مماسهایی برمنحنیهای نظیررسم می‌کنیم. این دومماس :

الف- با هم موازیند .

ب- یکدیگر را روی محور $y'y$ قطع می‌کنند.

ج- یکدیگر را روی محور $x'x$ قطع می‌کنند .

د- گاهی موازیند و گاهی متقاطع .

۷۷/۳۱- به فرض آنکه $-4<m<4$ نباشد، نمایش هندسی تابع

$$y=\sqrt{x^2-mx+4}$$

الف- درهرحال یك منحنی است .

ب- به ازاء دومقدار از m خط شکسته است .

ج- به ازاء یك مقدار از m خط شکسته است.

د- وجود ندارد زیرا تابع نامعین است .

۷۷/۳۲- محیط مستطیلی مقدارثابت $2p$ است. هرگاه حجم حادث‌ازدوران مستطیل‌حول یك ضلع آن ماکسیمم‌باشد. طول ضلع مستطیل‌که برمحور دوران‌عموداست‌برابر است‌با :

الف- $\frac{2p}{3}$ ب- $\frac{p}{2}$

ج- $\frac{3p}{4}$ د- p

۷۷/۳۳- هرگاه داشته باشیم :

$$tg\frac{b}{2}=\frac{1}{3} \quad و \quad cosa=\frac{12}{13}$$

مقدار S از رابطهٔ :

$$S=cos2a+tg(a-b)-cos(a+b)$$

برابراست با :

الف- صفر ب- $-\frac{33}{65}$

ج- $\frac{119}{169}$ د- $\frac{-3062}{53235}$

۷۷/۳۴- هرگاه داشته باشیم:

$$y_1=(cosx-sinx)(2sin2x+1)$$

$$y_2=sin3x+cos3x$$

و y'_1 و y'_2 به‌ترتیب‌مشتقهای این توابع باشندخواهیم‌داشت:

الف- $y'_1=y'_2$

ب- $y'_1+y'_2=0$

ج- $y'_1=3y'_2$

د- بین y'_1 و y'_2 رابطهٔ مستقل ازx وجود ندارد .

۷۷/۳۵- کنج سه‌وجهی Sxyz ونقطهٔ A برSx ونقطهٔ B برSz ودایرهٔ Γ دروجه Sxy مفروض است. مثلث ABC رادر نظرمی گیریم که رأس C ازآن‌روی دایرهٔ Γ تغییرمکان‌دهد. مکان G مرکزثقل این مثلث :

الف- خطی است که از S می گذرد .

ب- خطی است موازی با وجه Sxy

ج- دوخط است که یکی با Sx و دیگری با Sy موازی است.

د- یك دایره است .

۷۷/۳۶- صفحهٔ P و خط D که با آن در S متقاطع است وبر آن عمود نیست مفروض است. خط متعیر Sx را در نظر می گیریم بقسمی که قرینهٔ خط D نسبت به آن بر صفحهٔ P واقع باشد. مکان خط Sx:

الف- سطح مخروطی دوار است .

ب- سطح مخروطی مستدیر است .

ج- دوصفحهٔ عمود برهم است .

د- سطحی است غیر مخروطی .

کلاس ششم ریاضی

۷۷/۳۷- برای آنکه منحنیهای C و C′ نمایش هندسی دوتابع :

$$(C) : y = \frac{1}{x^2}$$

$$(C') : y = \lambda(x-a)^2 - \frac{2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}$$

بریکدیگر مماس باشند ؛

الف- برای هریك ازپارامترهای a و λ فقط یك مقدار وجود دارد .

ب- برای a یك مقداروجود دارد اما λ می‌تواند برابر هر مقدار باشد .

ج- برای λ یك مقدار وجود دارد اما a می‌تواند برابر با هرمقدار باشد.

د- a و λ می‌توانند برابرباهرمقدارباشند .

۷۷/۳۸- درنقطهٔ غیرمشخص M واقع برمنحنی نمایش هندسی تابع $y = \frac{1}{x^2}$ مماسی برمنحنی رسم می کنیم که منحنی را درنقطهٔ دیگر N قطع می کند ؛

الف- عرض نقطهٔ N دوبرابر عرض نقطهٔ M است.

ب- عرض نقطهٔ N نصف عرض نقطهٔ M است .

ج- عرض نقطهٔ N چهاربرابرعرض نقطهٔ M است .

د- بین عرضهای دونقطهٔ M و N نسبت معینی برقرار نیست.

۷۷/۳۹- هرگاه درمثلثی دورابطهٔ زیر برقرارباشد؛

$$\begin{cases} \sin A + \cos B + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \cos A + \cos B + \cos C = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

این مثلث :

الف- قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است .

ب- قائم‌الزاویهٔ غیرمتساوی‌الساقین است.

ج- متساوی‌الاضلاع است .

د- دارای یك زاویهٔ ۱۲۰ درجه است .

۷۷/۴۰- تابع :

$$y = \frac{\sin^2 x + 6\sin x + 8}{\sin x(\sin x - 2)}$$

درفاصلهٔ صفر و 2π :

الف- دوماکسیمم دارد ویك می‌نیمم .

ب- دوماکیسمم دارد ودومی‌نیمم .

ج- ماکسیمم ومی‌نیمم ندارد .

د- یك ماکسیمم دارد ویك می‌نیمم .

۷۷/۴۱- باقیماندهٔ تقسیم عدد $۷۰۷۷^{۲۷۷}$ بر ۱۱ برابر است با :

الف- ۴ ب- ۱ ج- ۹ د- ۵

۷۷/۴۲- عدد

$$A = ۱۰^{۶n+۲} + ۱۰^{۳n+۱} + ۲$$

الف- همواره بر ۱۱۱ بخش‌پذیراست .

ب- وقتی بر ۱۱۱ بخش‌پذیراست که n فردباشد .

ج- وقتی بر ۱۱۱ بخش‌پذیراست که n زوج باشد.

د- هیچگاه بر ۱۱۱ بخش‌پذیر نیست .

۷۷/۴۳- درمثلث ABC ، H تصویر A برضلع BC و D و E به‌ترتیب تصویرهای H برضلعهای AB و AC بوده و P نقطهٔ تلاقی DE با BC است. رابطهٔ :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{HB^2}}{\overline{HC^2}}$$

الف- فقط وقتی برقراراست که هریك اززاویه‌های B و C حاده باشند .

ب- فقط- وقتی برقراراست که زاویهٔ A قائمه باشد .

ج- هیچگاه برقرارنیست .

د- همواره برقرار است .

۷۷/۴۴- هذلولی باکانونهای F و F′ مفروض‌است. ازنقطهٔ P واقع برمحور غیرقاطع مماسهای PT و PT′ و از نقطهٔ Q واقع برمحورقاطع مماسهای QS و QS′ رابرهذلولی رسم کرده‌ایم. دایره‌های محیطی دومثلث PTT′ و QSS′:

الف- بریکدیگر مماسند .

ب- بریکدیگر عمودند .

ج- گاهی بریکدیگرمماس و گاهی بریکدیگرعمودند.

د- نه برهم مماسند ونه‌برهم عمودند .

نوشتهٔ رایند (Rhind)

ترجمه و تنظیم از داوید ریحان

مربعهایی برای چهار، پنج نفر

به مناسبت چهل و نهمین سالگرد تولد عمو سام، برادرزاده هایش یک کیک هدیه آورده بودند. این کیک بقدری مربع شکل بود که با دیدن آن، عمو با فکر افتاد که آنرا بطور ریاضی ببرد، پس خطاب به برادرزاده ها گفت:

ـ فرزندان من، از همهٔ شما از صمیم قلب متشکرم، هم اکنون آنرا می‌خوریم (توجه کنید، کیک را، نه قلب مرا). واضح است که با دو ضرب چاقو به شکل صلیب کیک را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم که نه فقط باهم مساوی باشند بلکه مانند کیک اولیه مربع شکل باشند.

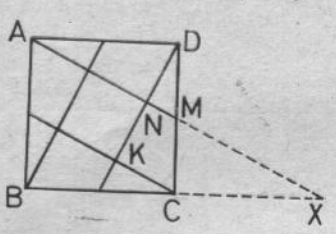
هنوز حرف خودرا به اتمام نرسانده بود که زنگ در به صدا درآمد، دررا بازکرد. چهارمین برادرزاده اش بود که غفلتاً سررسیده بود. در این حال عمو سام مسئله را به‌طریق دیگری مطرح ساخت:

ـ باید گفت که کیک را می‌باید به پنج قسمت متساوی تقسیم کنیم. تقسیم کیک به پنج قسمت کسان بسیارساده است و برای این منظور چهار ضرب چاقو کافی است. ولی بمناسبت هنردوستی‌ام مایلم که هرکدام از ما قسمتی مربع شکل داشته باشد حتی اگر این مربع از کنارهم گذاردن دوقطعه بدست آمده باشد. و من قول می‌دهم که می‌توان با چهار برش کارد به این نتیجه رسید و باید اضافه کنم که قطعات کیک را درحین عملیات نباید جابجا کرد چرا که دراین‌صورت نمی‌توان دو قشر رویهم نهاده شده را بایک ضربه برید. آیا می‌توانید بگوئید چگونه می‌توان عمل کرد؟

خوانندهٔ عزیز، مسئله را شما باید حل کنید. باکمی استدلال وباکمی موشکافی می‌توانید به حل مسئلهٔ عمو سام نائل شوید، در غیر این صورت می‌توانید راه حل زیر را ببینید.

درکروکی زیر چگونگی برش کیک را ملاحظه می‌کنید. هرکدام از خطوط تقسیم، یک راس را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند. بدین ترتیب یک مربع مرکزی، چهار مثلث و چهار ذوزنقه قائم‌الزاویه بدست می‌آید. باچسباندن یک مثلث و یک ذوزنقه، مربعی معادل با مربع مرکزی که مساحتش $\frac{1}{5}$ مساحت مربع اولیه است، بدست می‌آید.

چگونه به این راه حل رسیدیم؟ درنتیجهٔ آنکه اگر اضلاع مربع اولیه را واحد بگیریم، مساحت هرکدام از مربعهای کوچک مطلوب باید $\frac{1}{5}$ واضلاعشان برابر با $\frac{1}{\sqrt{5}}$ یا $\frac{\sqrt{5}}{5}$ باشد. بنابراین برای بدست آوردن طول مساوی $\sqrt{5}$ روش بسیار ساده‌ای موجود است: به عنوان مثال BC را تا X امتداد می‌دهیم به نحوی که $CX = BC$ باشد؛ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABX، $AB = 1$، $BX = 2$ است ودرنتیجه وتر $AX = \sqrt{5}$ خواهد بود. محل تقاطع AX و DC یعنی M، وسط DC است و کمی موشکافی نشان می‌دهد که اگر سایر رأسها را به وسط اضلاع مقابل وصل کنیم، تا وضعیتی مشابه با AM بدست آید، به چیزی می‌رسیم. زیرا که ...



باقی ماند اثبات اینکه مساحاتی که این چنین بدست آمده‌اند جوابگوی مسئله‌اند. مثلث ADM را که DN ارتفاع آن باشد، درنظر می‌گیریم. چون $AM = \frac{\sqrt{5}}{2}$ است،

$$DN \times \frac{\sqrt{5}}{2} = AD \times DM = 1 \times \frac{1}{2}$$

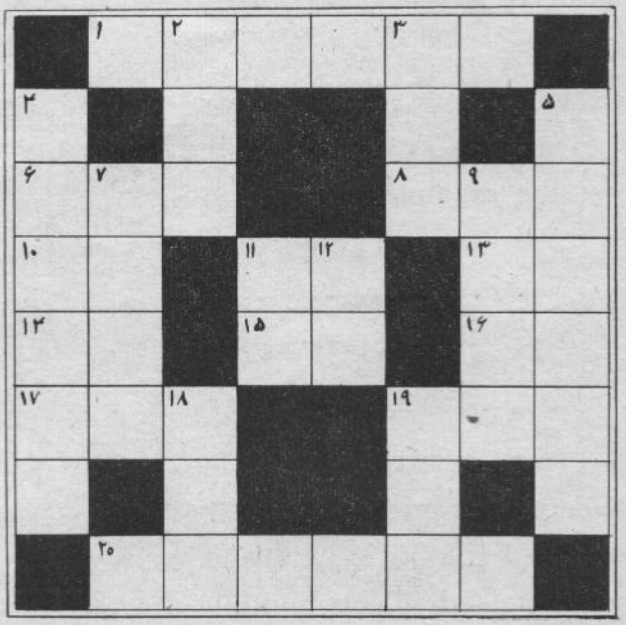
و از آنجا $DN = \frac{1}{\sqrt{5}}$ است. حال مثلث DCK را درنظر می‌گیریم. چون M وسط DC است، MN موازی با OK است و N وسط DK می‌باشد وضلع NK مربع مرکزی هم اندازه با DN است که برابر با $\frac{1}{\sqrt{5}}$ مطلوب می‌باشد.

با بیان این مطلب بسادگی دیده می‌شود که از مجاور هم گذاشتن DNM و NMCK مربعی به ضلع $\frac{1}{\sqrt{5}}$ بدست می‌آید؛ مساحت DCK را حساب می‌کنیم:

$$DK = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad ; \quad KC = \frac{1}{\sqrt{5}} \longrightarrow DK \times \frac{KC}{2} = \frac{1}{5}$$

جدول اعداد

طرح از : علی اصغری



افقی: ۱- مجموع کوچکترین دوعدد پنج رقمی که چون هرکدام را در ۷ ضرب کنیم عددی بارقمهای یکسان حاصل شود. ۶- عدد سه رقمی به شکل $\overline{aba}$ که برابر باشد با $(\overline{ab}-a)^2$. ۸- بزرگترین عدد سه رقمی که رقمهایش زوج بوده و تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند. ۱۰- سه برابرش توان چهارم است. ۱۱- نه برابر نصف عدد ۱۵ افقی. ۱۳- یك واحد کمتر از عدد ۱۰ افقی. ۱۴- کوچکترین عدد اول دورقمی که تفاوت رقمهایش یك واحد است. ۱۵- تکراریك رقم. ۱۶- تفاضل مجذورات این عدد وعدد ۱۳ افقی صفر است. ۱۷- خودش، یك سومش وسه برابرش عددهای سه رقمی هستند که هرکدام با رقمهای یکسان نوشته می‌شوند. ۱۹- کعبش ثلث جذرش است. ۲۰- چون با عدد ۹ قائم جمع شود عدد ۱ افقی بدست آید.

قائم: ۲- نصف عدد ۸ افقی. ۳- به صورت $\overline{abb}$ و مضرب ۷ است. ۴- عدد به شکل $\overline{aabbcc}$ بقسمی که :

$$a^2+b^2+c^2=a+2b+3c$$

۵- به شکل $\overline{aabbcc}$ است که :

$$a=\frac{b}{3}=\frac{2c}{9}$$

۷- ۱۴۰۰ واحد بیشتر از عدد ۱۷ افقی. ۹- اگر رقم هزارگانش نصف شود عدد حاصل از دوبرتبه تکرار عدد ۱۵ افقی بدست آید. ۱۱- چهار برابر عدد ۱۴ افقی. ۱۲- همان عدد ۱۱ قائم. ۱۸- همان عدد ۱۷ افقی. ۱۹- ۴۵۰ واحد بیشتر از عدد ۱۸ قائم.

Let :

$$a=b+c$$

Then:

$$a(a-b)=(b+c)(a-b)$$
$$a^2-ab=ab+ac-b^2-bc$$
$$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc$$
$$a(a-b-c)=b(a-b-c)$$
$$a=b$$

* * *

Let:

$$x=a+b$$

Then

$$\frac{x+1}{a+b+1}=\frac{x-1}{a+b-1}$$
$$\frac{x+1}{a+b+1}-1=\frac{x-1}{a+b-1}-1$$
$$\frac{x-a-b}{a+b+1}=\frac{x-a-b}{a+b-1}$$
$$a+b+1=a+b-1$$
$$1=-1$$

* * *

$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$
$$(n+1)^2-(2n+1)=n^2$$
$$(n+1)^2-(2n+1)-n(2n+1)=$$
$$=n^2-n(2n+1)$$
$$(n+1)^2-(n+1)(2n+1)+\frac{1}{4}(2n+1)^2=$$
$$=n^2-n(2n+1)+\frac{1}{4}(2n+1)^2$$
$$\left[(n+1)-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2=\left[n-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2$$
$$(n+1)-\frac{1}{2}(2n+1)=n-\frac{1}{2}(2n+1)$$
$$n+1=n$$
$$1=0$$

RAPID MULTIPLICATION

There is a well known method for squaring a number that ends in 5. Look at the examples below.

$15 \times 15 = 225$

$25 \times 25 = 625$

$35 \times 35 = 1225$

$45 \times 45 = 2025$

The answers all end in 25. The numbers in front of 25 are 2,6,12,20. These are 1×2, 2×3, 3×4, and 4×5. These are obtained if you multiply the tens digit by the number 1 larger than itself. For example, to find 75×75, you take the tens digit, which is 7, and multiply it by the number 1 larger, which is 8. This gives 7×8, or 56. We write 56 in front of 25 and get the result $75 \times 75 = 5625$.

This type of method could be used to multiply numbers such as 68×62, which have the same tens digit, and unit digits which add up to 10. The product is 4216 . The first part of this answer is 42, which is 6×7 and is found from the tens digit, 6, just as in with 16 which is 8×2, the product of the digits in the units column. If this method is used to find 69×61, you have to be careful to write the product of the digits in the units column as oq, to obtain the correct answer.

Proof for the correctness of the method : Let a = first digit. (Both numbers have the same first digit. In the example 68×62, a would be 6.) Let b = first number, second digit. Then $10 - b$ = the second digit in the second number. Multiplying together $10a + b$ and $10a + (10 - b)$ the product is found to be $100a^2 + 100a + 10b - b^2$; this equals $100a(a + 1) + b(10 - b)$, which is the answer given by the method

FALLACIES

we have seen in the preceding note how seemingly illegal methods sometimes yield correct results.

On the other hand, it may happen that seemingly legal methods lead to impossible results. When this happens, of course, some rule of algebra has been violated, though the violation maybe well concealed.

Can you discover the par ticular violation in each of the following situation?

On the page 623

فهرست مندرجات مجله‌های یکان دورهٔ هفتم

سرمقاله‌ها

کتابهای درسی نو، نمودار عالیترین پیشرفت ۱
درك عمیق ریاضیات مستلزم دانستن زبان‌است ۶۵
چرا برنامهٔ مصوب مواد ریاضی دورهٔ دوم دبیرستانهاازاعتبار افتاده است ۱۲۹
کشف‌کنید ! ۲۱۷
به مناسبت سالگرد انتشار یکان ۲۸۱
انتظار ازکنفرانسهای ریاضی ۳۴۵
گفتگویی باطراحان سؤالهای امتحانی ۴۱۷
نظری اجمالی به عبارات متن سؤالهای امتحانی ۴۸۹
منظور ازکلاسهای تقویتی ۵۴۵
ریاضیات جدید جای خود را در برنامه‌های آموزشی باز کرده است . ۶۰۱

آشنائی بیشتر با دبیران و استادان ریاضی

حسین مجذوب ۶۶
دکتر علی افضلی‌پور ۳۴۶

مباحث آموزشی

پیشرفت آموزش ریاضیات دردانشسرای عالی ۱۳۱-۲
سطح آموزش ریاضیات دردبیرستانهای شوروی ۵۵۰-۴۹۵

مقالات تحقیقی

روشهای جدید درریاضی ۴۱۸
گرایش ریاضیات به‌سمت یگانگی ۴۹۰
ریاضیات امروز ۶۰۲-۵۴۶

تحقیقات تاریخی ـ معرفی ریاضیدانان

ابن‌هیثم ومسائل او ۱۴۱-۶۸
ژرژ کانتور ۱۳۰
تاریخچهٔ علائم ریاضی ۱۴۸
خواجه نصیرطوسی ۴۲۰
ابوالوفای بوزجانی ۵۵۳
ابوریحان ومحاسبهٔ و ترزاویه ۵۵۵
حل جبری مسئلهٔ‌ابن‌هیثم ۵۶۰
کرخی (یاکرجی) ۶۰۵

کلیات و روشهای ریاضی

محاسبات عددی وخطاها ۸۳-۱۹
زبان ریاضی ۲۱۸-۱۳۴
آغازتوپولژی ۱۳۹
استقراء ، تراجع ۲۸۲
فیریك ریاضی ۳۵۴-۲۹۴
یادداشتی دربارهٔ تعریف علوم عقلی ۴۹۳

بررسی و نقدکتاب

تقریظ‌کتاب مبادی منطق‌وریاضی جدید ۲
بررسی‌کتاب درقلمرو ریاضیات ۷۲
یادداشتی دربارهٔ‌کتاب ریاضیدانان نامی ۴۲۴
کتابخانه یکان (= معرفی‌کتاب) ۸-۷۴-۱۴۷-۳۴۴ + ۱-۴۱۶ + ۱-۴۸۶-۵۲۲-۵۶۱-۶۱۲

در حاشیهٔ برنامهٔ ریاضیات‌د بیرستان

انواع توابع ۲۳
اثبات قضیهٔ فرما ۱۴۴-۸۱
بعضی ازانواع توابع ۸۹
استفاده ازتوابع درحل معادلات ونامعادلات ۲۳۳
حالت‌کلی مسئلهٔ فرما ۲۹۰
بررسی مختصر اعداد کامل ۲۳۱
حجم چند وجهیهای منتظم ۴۹۷
محیط مثلث ارتفاعیه ۴۹۹
اثبات قضیهٔ اولر ۵۶۲
مطالبی دربارهٔ حد ۵۶۳
دربارهٔ‌کسر متناوب ۵۶۷
اعداد کامل ۶۱۵
مقاطع مخروطی (روشهای برداری) ۶۱۲
تعیین ریشهٔ سوم اعداد ۶۱۷

راهنمای ریاضیات متوسطه

مفهوم f(x) ومسائلی دربارهٔ آن ۲۶
دربارهٔ قدرمطلق ۹۱-۱۴۵-۲۴۳-۲۹۸

اشتباهاهایی که در اوراق کنکور مشاهده شده است

۲۲۶-۳۰۵-۳۵۸-۴۳۴-۵۰۱

چگونگی حل سادهٔ مسائل ریاضی

۳۰-۹۵-۲۴۵-۳۰۹-۴۳۷-۵۰۴-۵۷۲-۶۲۱

روش حل مسائل مکان، پوش وترسیمات هندسی

۳۲-۹۷-۲۴۹-۳۱۳-۴۳۹-۵۰۶-۵۷۴-۶۲۴

مقاله‌های گوناگون

دستگاه به مبنای ۲ ومسابقهٔ n سؤالی ۵

نقاط فیزیکی ۹

حساب فوتبالی ۱۷

ریاضیات وترافیك ۸۶

آغاز توپولژی ۱۳۹

خط بادونقطهٔ پیوائی ۲۳۰

اعداد اتومرفیك ۴۳۰

مقاطع مخروطی باروشهای برداری ۶۱۲

احتمالات

۶-۲۲۴-۲۸۷-۳۵۲-۴۲۹-۵۵۶-۶۰۸

علوم تجربی

بنزین وعدداکتانی ۸۰ ۱۴-۷۵

درسی‌ازفیزیك، ضربهٔ نیرو ۲۳۷

اصول پروازهای کیهانی ۳۵۰

نسبیت ۴۲۵

ازمیان نامه‌های رسیده

۲۶۸-۵۰۳

داستانهای ریاضی

دونردبان ۶۲

هرآنچه‌که می‌درخشد ۱۲۵

چهارنسل ۲۱۴

کادوهای بابانوئل ۲۷۷

آسیابان مگر هنوز خوابی ۳۴۴

درمجاورت زیزانی ۴۱۴

برسنگهای مزار ۴۸۴

مجلس دوستانه ۵۹۷

کیك برای چهار، پنج نفر ۶۵۲

جدول اعداد

۶۳-۱۲۷-۲۱۵-۲۷۸-۴۱۵-۴۸۷-۵۴۳-۵۹۹-۶۵۳

مسائل

صد مسئلهٔ جالب وحل آنها

۳۵-۱۰۱-۲۵۳-۳۱۶-۵۷۶-۶۲۷

حل مسئلهٔ نمونه

تعمیم چند مسئلهٔ حساب ۸۷

رسم مثلث قائم‌الزاویه بامعلوم بودن وترونیمساز ۴۳۳

مسائل المپیادهای ریاضی

۵۶۹-۶۱۸

مسائل کوتاه ومعمائی

۲۱۳-۲۷۵

مسائل انتخابی از مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

۱۴۹-۳۶۱-۴۴۱

مسائل برای حل

۵۵-۱۱۸-۲۰۷-۲۶۹-۳۳۶-۴۰۸-۴۷۹-۵۳۷-۵۹۱-۶۴۷

تستهای ریاضی

۵۸-۱۲۱-۲۰۹-۲۷۲-۳۳۹-۴۱۰-۴۸۲-۵۳۹-۵۹۳-۶۴۹

حل مسائل

یکان شمارهٔ ۶۷ ۴۱

« « ۶۸ ۱۰۶

« « ۶۹ ۱۹۵

« « ۷۰ ۲۵۷

« « ۷۱ ۳۲۰

« « ۷۲ ۳۹۴

« « ۷۳ ۴۶۵

« « ۷۴ ۵۲۳

« « ۷۵ ۵۸۱

« « ۷۶ ۶۳۳

حل مسائل کنکور مندرج دریکان سال ۴۹

۵۰۷

Problems & Solutions

۶۴-۱۲۸-۲۱۶-۲۸۰-۴۱۶-۴۸۸

A cours of mathematics

۵۴۴-۶۰۰-۶۵۴

مندرجات یکان سال ۴۹

بررسی راههای مختلف جواب دادن تستهای ریاضی ۱
سؤالهای کلاس ششم طبیعی ۳-۴
سؤالهای کلاس ششم ریاضی ۷-۱۱
سؤالهای کنکور سراسری ۱۷
نمونهٔ سؤالهای دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تهران ۴۴
دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تبریز ۴۶
دورهٔ شبانهٔ دانشگاه مشهد ۵۲
نمونهٔ سؤالهای دانشگاه پهلوی، شیراز ۵۲
دانشکدهٔ نفت آبادان ۵۳
دورهٔ شبانهٔ هنرسرای عالی ۵۶
نیروی دریائی ۵۷
مدرسهٔ عالی پارس ۵۸
مؤسسهٔ عالی حسابداری ۶۰
مدرسهٔ عالی بیمهٔ تهران ۶۱
انستیتوتکنولژی تبریز ۶۳
انستیتوتکنولژی مشهد ۶۴
مدرسهٔ عالی علوم اقتصادی واجتماعی ۶۵
دانشسرای دوسالهٔ راهنمائی ۶۷
حل مسائل امتحانات کلاسهای ششم ۶۸
پاسخهای صحیح کنکور سراسری ۹۵
نمونهٔ مسائل امتحانات نهایی کشور فرانسه ۹۷
امتحانات G.C.E. انگلستان ۱۳۲
مسائل کنکور دانشکده‌های اتحاد جماهیرشوروی ۱۴۲
انستیتوتکنولژی اسرائیل ۱۵۴

مندرجات ضمیمهٔ یکان سال ۴۹
برای دانش‌آموزان کلاسهای سوم دبیرستانها

دانستنیها ازریاضی جدید، عمل دوتایی ۱
عمل ضرب اعداد باروش جمشید کاشانی ۵
دربارهٔ بینهایت ۷
عددنویسی علمی ۸
ریاضیات درزندگی روزمره ۹
تستهای ریاضی ۱۲
مسائل کوتاه ومعمائی ۱۶
مسائل انتخابی ازمسائل امتحانات داخلی دبیرستانها ۱۷
نمونه‌ای ازمسائل معمول هفتاد سال قبل ۳۰
جدول اعداد ۳۲

ضمیمه‌های یکان سال

برای دانش‌آموزان کلاسهای سوم‌دبیرستانها

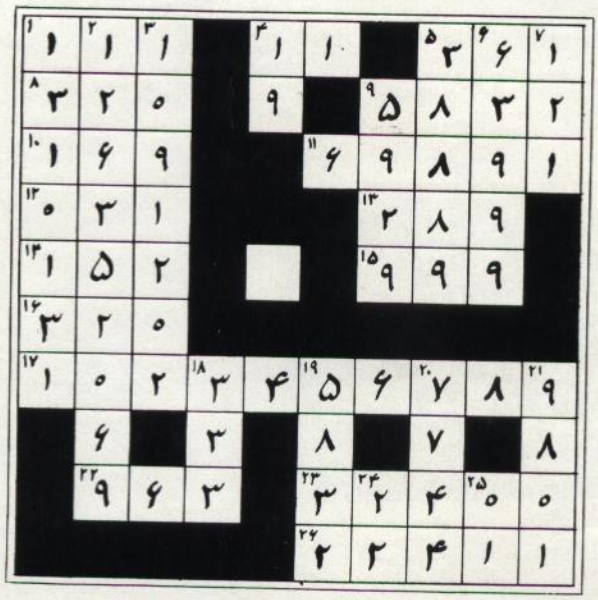
شامل مطالب گوناگون ومسائل امتحانات

داخلی دبیرستانها

جزوهٔ سال ۱۳۴۶ - جزوهٔ سال ۱۳۴۷ - جزوهٔ سال ۱۳۴۸

جزوهٔ سال ۱۳۴۹

بهای هر جزوه : ۱۲ ریال



حل جدول شماره قبل

انتشارات یکان

مجموعهٔ علمی

شامل مقالات ریاضی ، فیزیك و شیمی
حل‌مسائل ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

۶۰ ریال

روش سادهٔ

حل‌مسائل شیمی

ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا

فعلا نایاب

راهنمای ریاضیات متوسطه

تألیف ، عبدالحسین مصحفی

چاپ‌چهارم : ۱۲ ریال

سرگرمیهای جبر

ترجمهٔ: پرویز شهریاری

۶۰ ریال

معماهای ریاضی

ترجمهٔ : محمدرکنی‌قاجار

فعلا نایاب

مقدمه بر تئوری مجموعه‌ها

تألیف : علی اصغر هومانی

فعلا نایاب

تمرینات ریاضیات مقدماتی

تألیف : استاد هشترودی

فعلا نایاب

مسائلی از حساب استدلالی

تألیف : محمود کاشانی

جلد اول	جلد دوم	جلد سوم
۱۲ ریال	۱۵ ریال	۱۵ ریال

مبادی منطق و ریاضی جدید

تألیف: غلامرضا عجدی

بها : ۲۴۰ ریال