یکان

مجله ریاضیات

دورهٔ هفتم، شمارهٔ : ۹ شمارهٔ مسلسل : ۷۶ تیر ۱۳۵۰

در این شماره:

منظور از کلاسهای تقویتی	عبدالحسین مصحفی	۵۴۵
ریاضیات امروز	غلامرضا عسجدی	۵۴۶
سطح آموزش ریاضیات در دبیرستانهای شوروی	ترجمهٔ: محمدحسین احمدی	۵۵۰
ریاضیدانان اسلامی، ابوالوفای بوزجانی	جعفر آقایانی چاوشی	۵۵۳
ابو ریحان و محاسبهٔ وتر زاویه	ترجمهٔ: مقصود عین‌اللهی	۵۵۵
مقدمات احتمالات	ترجمهٔ : مصحفی	۵۵۶
حل جبری مسئلهٔ ابن هیثم	دکتر علیرضا امیرمعز	۵۶۰
کتابخانهٔ یکان	-	۵۶۱
اثبات قضیهٔ اولر	ترجمهٔ: فتح‌الله زرگری	۵۶۲
مطالبی دربارهٔ حد	سعید شماری نژاد	۵۶۳
دربارهٔ کسر متناوب	ترجمهٔ: مقصود عین‌اللهی	۵۶۷
مسائلی از المپیاد های ریاضی	ترجمهٔ: جعفر آقایانی چاوشی	۵۶۹
چگونگی حل سادهٔ مسائل ریاضی	ترجمه	۵۷۲
روش حل مسائل مکان، پوش، ترسیمات هندسی	«	۵۷۴
صد مسئلهٔ جالب و حل آنها	ترجمهٔ : داوید ریحان	۵۷۶
حل مسائل یکان شمارهٔ ۷۵	-	۵۸۱
مسائل برای حل	-	۵۹۱
تستهای ریاضی	-	۵۹۳
پاسخ به یک پرسش	باقر مظفرزاده	۵۹۶
داستانهای ریاضی ، مجلس دوستانه	ترجمهٔ: داوید ریحان	۵۹۷
جدول اعداد	جمال‌الدین فرزانه	۵۹۹
A Cours of Math.	-	۶۰۰

بها : ۲۵ ریال

اخطار

اخیراً مشاهده‌شده‌است که‌دربعضی از کتابهای حل‌المسئله یا راهنمای کنکور ، مسائل و مطالبی به نقل از مجله های شماره های گذشتهٔ یکان درج شده است . طبق قانون حقوق مؤلف و مصنف ، عمل مزبور غصب حقوق دیگران بشمار می‌آید و قابل تعقیب است ،که البته ازطریق مراجع قضائی تعقیب خواهد شد.

رفع اشتباه

آقای جعفرآقایانی چاوشی اطلاع داده‌اند که اولا درمقالهٔ «خواجه نصیر طوسی» نام «ریمان» به‌اشتباه «رولان» نوشته شده است.

ثانیاً درمقالهٔ «تعریف علوم عقلی» نام « حجاج بن یوسف» مترجم وریاضیدان اسلامی به اشتباه «یوسف‌بن حجاج» درج شده است.

مسائل پنج دورهٔ یکان

در نظر است مسائل پنج دورهٔ یکان ابتدااز نخستین‌شماره تا آخرین‌شمارهٔدورهٔ پنجم، ازنظر موضوعی تنظیم شده دریك یا چند کتاب به علاقمندان عرضه شود.در این باره‌درانتظار وصول نظرات خوانندگان‌و علاقمندان هستیم.

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال ده شماره منتشر می‌شود

دورهٔ هفتم ـ شمارهٔ نهم ـ شمارهٔمسلسل : ۷۶

تیر ۱۳۵۰

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول ، عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : بانونصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره :

تهران ، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۹۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VII, number 9. July. 1971

subscription : 3$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ‌آذر تلفن : ۸۲۵۹۲۸

تجدید چاپ

کتابهایی از انتشارات یکان که فعلا نایابند و خواستاران فراوان دارند، تا اوایل سال تحصیلی آینده تجدید چاپ خواهند شد.

قابل توجه

تلفن چاپ‌آذر

به

۸۲۵۹۲۸

تغییر یافته است

منظور از کلاسهای تقویتی

توسعهٔ روز افزون علوم و کشفیات تازه، تحولات متوالی را دربرنامه های آموزشی ایجاب می کند . اما هر برنامهٔ آموزشی را نمی‌توان با کمتر ازگذشت پنج سال زیرورو کرد. بناچار همواره مطالبی ازعلوم وجود داردکه در برنامه‌های آموزشی راه نیافته است. از طرف دیگر در هرتغییر برنامه ، به خاطر جایگزینی مطالب جدید . مطالبی که دردرجهٔ دوم اهمیت بنظر می‌رسد از برنامه حذف می گردد .

مسئلهٔ دیگری هم که در کشور ما مطرح است وابستگی بسیاری از سؤالها و مسائل امتحانات ورودی دانشکده ها و مدارس عالی به مباحثی خارج از برنامهٔ آموزشی دورهٔ دبیرستان است .

در کلاسهای تقویتی فرصت مناسب وجود دارد تا مباحث خارج از برنامه که بعد ها مورد احتیاج دانش‌آموز است وهمچنین آخرین تحولات وپیشرفتهای علمی درخور درك دانش آموزبه وی آموخته شود . به عبارت دیگر پایهٔ تحصیلات گذشته وآیندهٔ دانش‌آموز تقویت گردد . اما متأسفانه برای بعضیها منظور از کلاسهای تقویتی این است که خلاصهٔ فشرده و بی‌سر و ته دروس کلاس بالاتر را به دانش‌آموز گوشزد کنند ، دروسی را که دانش‌آموز باید در سال تحصیلی آینده در طول مدت هشت ماه فرا گیرد ، به صورت ناقص و نارسا به‌گوش وی می‌خوانند و چند مسئله‌ای هم برای وی حل می کنند. در پایان کلاس ودرآغاز سال تحصیلی بعد، دانش‌آموز مغرور از آنچه‌که آموخته چنین احساس می کند که دیگر به حضور منظم درکلاس و توجه به دروس معلم احتیاجی ندارد. چند ماه اول سال تحصیلی را بی‌اعتنا به درس و مدرسه سپری می‌سازد . اما در جریان امتحانات نوبت اول تازه متوجه می‌شودکه ازهمگنان عقب افتاده است. دراین وضع مجبور است بیش از دیگران بکوشد تا مافات را جبران کند .

کلاسهای تقویتی باید به معنای صحیح خود بنیهٔ تحصیلی جوانان را قوی سازد ، نه آنچنان باشدکه آنانرا حتی ازتحصیلات عادی نیز بازدارد .

عبدالحسین مصحفی

ریاضیات امروز

غلامرضا عسجدی

متن سخنرانی که در دانشکدهٔ افسری بیان شده است

جستجوی حقیقت

جستجوی حقیقت هدف کوششهای انسان است. این تنها غایت و نهایتی است که دارای ارزشی می‌باشد. بدیهی است که در ابتدا انسان آرزومند است که از آلام و سختیهای زندگی برهد و راحت زندگی کند، ولی چرا باید راحت بود و چرا نباید رنجید، آخر هدف زندگی چیست؟ اگر انسان می‌خواهد بر مسائل ومشکلات مادی غلبه کند و نعمت آزادی رابدست آورد و دراین کاردائماً تلاش وحتی جنگ وستیز می‌کند برای چیست؟ برای این است که بتواند آزادانه به درك حقیقت و تماشای جمال و مظاهر دلارام حقیقت بپردازد والا آزادی و خواب و خوراك راحت به تنهایی چه ارزشی دارد؟ حقیقت زیبا و درعین‌حال رعب‌آور وگاهی هم بیرحم است، چهره نشان می‌دهد و دور می‌شود ودر تعقیب آن باید رفت و بازهم رفت وهرگز به‌آن نرسید.

حقیقت گاهی قربانی می‌طلبد و پویندگان راه خود را به سختی امتحان می‌کند.

عشق اول سرکش و خونی بود تا گریزد هرکه بیرونی بود

درطلب حقیقت گاهی انسان به خطای باصره ویاخطای اندیشه گرفتار می‌شود. این خطا اگرچه، مانند چشمهٔ سراب است لیکن تسکین دهنده و بلکه تقویت‌کننده نیز می‌باشد. وقتی‌که اثرآن از بین رفت، نیروی تقویت کنندهٔ آن برای برداشتن گامهای بلند پابرجا می‌ماند و امید و اطمینان جای آنرا می‌گیرد. اگر این قبیل خطاها نبود تلاش بسیار مشکلتر و حتی غیرممکن می‌نمود. همچنانکه اسب عصارراکه لاینقطع محکوم به حرکت است چشم می‌بندند تا از ادامهٔ حرکت خودداری نکند.

اگربعضیها ازحقیقت می‌ترسند برای این‌است‌که تصور می‌کنند ضعف و ناتوانی آنها از ناحیهٔ حقیقت است، همچنین نارسائی خود را با کمال و رسائی آن می‌سنجد و دچار تحیر می‌شوند. درصورتی‌که ازحقیقت نباید ترسید زیرا که او تنها زیبا و عالی است.

حقیقت اگر بوسیلهٔ دانش درك شود حقیقت علمی است مانند ریاضیات و علوم طبیعی و اگر با حس لمس شود حقیقت اخلاقی است مانند عدالت و تقوی واین دوقسم اگرچه ممکن است با همدیگر تماس داشته باشند لیکن داخل هم واقع نمی‌شوند یعنی فصل مشترك ندارند. یا به عبارت دیگراخلاق بی‌دانش و دانش بی‌اخلاق امکان پذیر است ولی سرچشمهٔ هردو یکی است. اگر ما نباید ازحقیقت اخلاقی بترسیم به طریق اولی از حقیقت علمی هم نباید واهمه داشته باشیم. حقیقت اخلاقی‌هدایت می‌کندکه به‌کدام جهت بایدمتوجه‌باشیم ولی درحقیقت علمی جهت معلوم‌است، وسائلی می‌خواهیم که به‌سوی‌آن بشتابیم. حقیقت علمی و اخلاقی هرگز مخالف و معارض همدیگر نمی‌توانند باشند به دلیل اینکه چنانکه گفته شد فصل مشترك ندارند. حال به چه صورت باید به حقیقت رسید؟ هیچکس نمی‌تواند به حقیقت نزدیك ویا ازآن دورشود ولی حقیقت خود می‌تواند به همه جا برسد و نور خود را به هرگوشه و کناری بفرستد. از هر بالائی بالاتر و از هر پایینی پایینتر و از هردوری دورترواز‌هرنزدیکی‌نزدیکتراست. حقیقت لایتناهی و انسان‌متناهی است متناهی نمی‌تواند به لایتناهی برسد و لایتناهی متناهی را دربرمی‌گیرد.

افلاطونها و اینشتینها، بوعلی سیناها، در مقابل حقیقت با شخص عامی تفاوت ندارند وهیچکدام از دیگری به حقیقت نزدیکتر نیست. منتها تفاوت اشخاص دانشمند وممتاز بامردم معمولی فقط در این است‌که آنها توانسته‌اند خود را نسبت به حقیقت توجیه‌کنند. دراینجا منظور از توجیه جهت یابی مکانی نیست، به دلیل اینکه به هرطرف‌که روکنیم حقیقت در مقابل ما قراردارد وکسی نمی‌تواند به حقیقت پشت‌کند. منظور از

توجیه این‌است که انسان خود را مستعدکند ویا استعداد ذاتی داشته باشدکه بتواند حقیقت را درك کند ویا حس نماید . پس عوض‌اینکه بگوئیم ما به‌حقیقت برسیم بهتراست‌بگوئیم‌حقیقت عنایت‌فرماید وخود را به‌ما عرضه‌کند .

انسان برای اینکه بتواند انوارحقیقت را جلب‌کند به استعداد های ذاتی وکسبی نیازمند است و عدهٔ این استعدادها بقدری زیاد ومتنوع است‌که‌نمی‌توان‌آنها را محدودومحصور کرد ولی‌سه استعداد ویا سه دلیل زیربسیارمعروف است :

۱ـ دانش ـ راه دانش و تبعیت از اصول منطقی (Syllogisme) وزحمت‌کشیدن در راه‌کسب فضیلت محصل را به اخذ نتیجه موفق و نائل می‌کند .

۲ـ بینش ـ بینش‌احساس ودرك‌حقیقت است . بسیاری ازمشکلات علمی وریاضی قبل ازاثبات درك وفهمیده‌شده‌اند . تربیت بینش واستفاده ازاین‌استعداد الهام‌آمیزبرای هرجویندهٔ حقیقت لازم است.

۳ـتابش ـ منظورازتابش این است‌که انوارحقیقت‌خود مستقلا برفردی ازافراد بتابد ودراونبوغ ولیاقت ممتازبوجود آوردکه نظیرآن درمردم معمولی نباشد.

دراین‌صورت وظیفهٔ جامعه است‌که این قبیل مردم نادر ونابغه را درمأموریت ورسالتی‌که ازجانب حقیقت دارند یاری کنند، لیکن تاریخ‌نشان می‌دهدکه زندگی نوابغ اغلب با رنج وناکامی همراه بوده است .

ریاضیات چیست ؟آیابگویم کارریاضیات جمع وضرب اعداد و ارقام ورسم اشکال است که ریاضیدانها روزانه بدون احساس‌خستگی‌آنهارا انجام می‌دهند . آیا شمردن، محاسبه ـ کردن، کارباماشینهای محاسبه، کمپیوترها، تعیین ابعادواندازهٔ اشکال ونظایراین اعمال ریاضیات را بوجود میآورد ؟ یا اینکه ریاضیات عبارت است ازنحوهٔ فکرواستدلال واستنتاج منطقی؟ ویا اینکه ریاضیات یك زبانی است‌که دانشمندان برای‌مطالعهٔ عالم طبیعت مابین خود وضع کرده‌اند؟ یاریاضیات‌به‌منزلهٔ‌لباسی است‌که برقامت اندیشه دوخته و آنرا مجسم‌کرده باشند ؟ یا ریاضیات وسیلهٔ غیب‌گوئی علمی است‌که حوادث‌آتی را قبل ازوقوع پیشگوئی‌وپیش‌بینی می‌کند؟ یابالاخره ریاضیات همان فیزیك عملی است‌که قواعد مفید وقابل اجرای دانش‌فیزیك را به رشتهٔ دستورکشیده ومورد استفاده قرارمی‌دهد؟

علم جبربا این همه علائم وسمبولهای نظیر x و y و z و $\sqrt{}$ و $\int$ وغیره ,... به‌یك‌کشتی می‌ماندکه باابزار و آلات و ادوات خود داخل دریای بیکران تحقیق پیش می‌دود.

امروز ریاضیات در حدود هشتاد نوع مختلف دارد . کشفیات جدیدکه هرروز درمحیط ریاضیات می‌شودخیلی بیشتر ازآنست‌که یك نفرصلاحیت‌دار وواجد شرایط بتواند در همان روزآنها را بخواند و یا به تندی مطالعه‌کند . سابق براین کار ریاضیدان فقط تدریس درمدارس بود لیکن امروز، ریاضیدانها که درحرفه‌های دیگرازقبیل مهندسی ، علوم فیزیك و شیمی و طبیعی،هواشناسی، هواپیمائی،کشاورزی،آمار، علوم فضائی ، بانکداری ، حسابداری و بسیاری از حرفه‌های جدید فعالیت می‌کنند زیاد و عدهٔآنها نسبت به‌کسانی‌که به‌کارتدریس ریاضی می‌پردازند چند برابراست .

گفته می‌شودکه درکاریك سفینهٔ فضایی چهارتا پنج‌هزار کار ریاضی بزرگ‌و کوچك دخالت دارد ، البته بغیر از مغز الکترونیکی‌که‌آنهم خود محصول مغزهای ریاضی است.ممکن است‌گفته شود اینها مربوطبه دانش فیزیك است وبه ریاضیات چه ربطدارد؟ جواب این‌است‌که فیزیك معاصرخود به‌دوقسمت می‌شود نظری و عملی . فیزیك عملی در تحت اراده وکنترل ریاضیات عملی است ویا عین‌آن است .البته ریاضیات قدیم و قدما برای مطالعهٔ عالم طبیعی ناتوان بود به دلیل‌اینکه عدد درآن ثابت ولایتغیر بود و در نتیجهٔ آن ریاضیات با تغییرات دائمی طبیعت هماهنگ نبود . سه ایده ویافکربسیار بزرگ‌در قرن هیجدهم بوسیلهٔ **لیبنیز و نیوتن** بوجود آمدکه عبارت بودند از :

فکر متغیر وتابع ـ فکر بینهایت‌کوچك ـ فکرعبوربه بینهایت

با ظهوراین سه فکرجدید به قراری‌که درآنالیز ریاضی مشروحاً بیان می‌شود فیزیك جهش پیداکرد . وقتی‌که اندیشهٔ انسان‌متوجه بینهایت شد وخواست‌وتوانست ازآن نیروبگیرد دنیای ماشین و ماشینیزم روزبه روز پیشرفت کرد تا اینکه در اوائل قرن معاصرنابغهٔ معروف **آلبرت اینشتین** بار دیگر با استفاده ازافکارریاضیدانهایی نظیر **منکوسکی** ریاضیات را در دانش فیزیك مورد استفاده قرارداد و نظریهٔ نسبیت یا شاهکار قرن بیستم ازآن نتیجه شد تا اینکه انسان امروزتوانست راه کرات سماوی را پیش‌بگیرد وازاین مقام بالاترهم خواهدرفت. نباید تصورکردکه موارد استعمال ریاضیات همیشه در سطح بالاست . درمسائل جاری زندگی نیزازآن استفاده‌هامی‌کنند. یکی از شعب هشتادگانهٔ ریاضیات احتمالات وآماراست‌که در یك‌کتاب درسی خواندم که دیسنی‌لند یك تفریحگاه و تفرجگاه عمومی است‌که درامریکا درنزدیکی کالیفرنیا قراردارد. مؤسس این تفریحگاه چند سال قبل از فوتش تصمیم گرفت قریب ۱۷۰۰۰۰۰۰دلار خرج‌کند و جائی بسازدکه مورد استفاده و استقبال عمومی باشد ودرآمد ممتازداشته باشد ولی‌نمی‌دانست این میهمانخانه را درکجا بسازد . با متخصصین آمار مشورت کردآنها آماری از شرایط آب وهوا وکثرت مردم ودرآمد و

عدهٔ فرزندان آنها و نظائر این چیزها را تهیه‌کرده ودر قالب فرمولهای ریاضی واحتمالات قرارداده ومحل فعلی‌رابرای این بنای مجلل تعیین‌کردند و چنانچه مراجعه کنندگان گفته‌اند و نوشته‌اند نظیراین میهمانخانه ازلحاظ درآمد ومراجعه‌کننده و مرغوبیت دردنیا وجود ندارد.

این مثل می‌رساندکه ریاضیات رادرهر کارازساختن‌سوزن گرفته تاساختن میهمانخانه وموشك می‌توان وباید بکاربرد.

با تمام این تعریفات‌که دربارهٔ ریاضیات گفته شد به نظر اینجانب بازتعریف اساسی‌آن همان تحری وجستجوی حقیقت است‌که درابتدا به‌آن اشاره‌کردم.

ریاضیات یکی ازوسائلی است‌که انسان‌باآن خودرابرای درك حقیقت وفهم طبیعت توجیه ومجهزمی‌کند وبرای توسعه و پیشرفت آن دانش و بینش ونبوغ افراد انسانی بکار رفته و می‌رود.

اگر به کار ریاضیدانهای معروف و حتی ریاضیدانهای معمولی دقت وتوجه شود دوتمایل وغریزهٔ متفاوت درآنها مشاهده خواهد شد. مثل‌اینکه دونوع‌هوش ویا ذکاوت مابین آنها وجوددارد. بعضی ازآنهابه طرف منطق واستدلال منطقی کشیده می‌شوند، وقدم به قدم بااحتیاط پیش‌رفته ودائماً ازفکر خود نگهبانی می‌کنند، شبیه چوپانی عاقل وهوشیارکه گلهٔ گوسفندان خودرا درپناه ونزدیکی‌قلعهٔ محکم‌نگهداری‌می‌کند. اینها اندیشه را هراندازه خرد باشد درمعرض بیقیدی قرار نمی‌دهند.

دستهٔ دیگرخودرا درمقابل شهود ودرك بدون مقدمه واستدلال رهاکرده ودر پذیرش سخت‌گیرنیستند ودربادی امرنظیرسوار-کاران پیش‌تاز، شاهد فتح‌وظفررادرآغوش می‌کشند،ولی چه‌بسا ممکن است‌که ازبالای اسب سرنگون شوند.

می‌توان دستهٔاول راآنالیست‌ها ودستهٔ دوم رامهندس‌ها ویا به‌طورکلی دستهٔ اول رامنطقی‌ها و دستهٔ دوم راشهودی‌ها نامید.

اگرشخص منطقی کارهندسه بکند باز ازموشکافی وریزه-کاری دست برنمی‌دارد. همچنین اگردانشمند شهودی به کار آنالیزمجرد ریاضی بپردازد بازازبلندپروازی وآزادی‌برخوردار است. این‌خاصیت ذاتی و غریزی اشخاص است‌که منطقی و یا شهودی می‌باشد وزیاد به تربیت وعادت بستگی وارتباط‌ندارد. همانطورکه انسان روزتولد بایك سلسله استعدادها به دنیا می‌آید، شهودی ومنطقی بودن نیزدواستعداد است‌که ازطرف طبیعت به افراد عطا می‌شود تادرمواقع مناسب ظهور و بروز کند.

مثلا اگرشخصی منطقی باشد برای اینکه ثابت‌کند یك معادلهٔ درجهٔاول یك ریشه داردیایك زاویهٔ مفروض رامی‌توان به قسمتهای مساوی تقسیم‌کرد، ممکن است چند صفحه راسیاه کند. اما اگرشخص شهودی باشد برای اینکه نشان دهدمقطع یك صفحه باسطح مخروطی منحنی مخروطی است ممکن است یك بطری راکه تانصفه آب داردکج کند ومنحنی مخروطی را ظاهرکند.

وقتی‌که ریاضیدان بطورشهودی فکرکند و حرف بزند معمولا باژست وحرکت همراه است گویا اینکه می‌خواهد بایك دشمن خارجی نبردکند، گاهی شکل می‌کشد و گاهی با دست و قیافه‌آنچه را که می‌خواهد بگوید مجسم می‌کند. لیکن در مواردی‌که ریاضیدان منطقی‌فکروصحبت‌می‌کند معمولاچشمهای اوبه افق دوخته می‌شود وآرام است، مثل‌اینکه درداخل فکر وروح خود باحقیقت تماس دارد. البته این دوجنبه راکه ما در مورد ریاضیدان بیان می‌کنیم در مورد هرگویندهٔ متفکر می‌توان بررسی‌کرد. وما نیزدرمسیرزندگی خود بارهابااین دوطرزصحبت وقیافه روبرو شده‌ایم.

درشرح حال دودانشمند معروف ریاضی(**ورشتراس** و **ریمان**) که هردو از بنیانگذاران نظریهٔ توابع می‌باشند می‌خوانیم‌که ورشتراس ازدستهٔ متفکرین منطقی بوده وبررسی سریها رااز روی تشکیل تحلیلی‌آنهاانجام داده و یابه عبارت دیگرآنالیزرابه یك نوع دنبالهٔ حساب بدل‌کرده است، و در تمام نوشته‌های اوشکل وجودندارد. درصورتی‌که ریمان همه جا برای ادای فکرخود ازهندسه‌کمك‌گرفته وهرموضوع را همراه باشکلی بیان می‌کرده است بقسمی‌که اگرکسی‌آنرا یك دفعه یاد می‌گرفت دیگرفراموش نمی‌کرد. همچنین دانشمند دیگر **کلین** که شهودی بوده ومی‌خواسته ثابت‌کندکه روی‌یك سطح ریمانی‌تابعی‌وجود داردکه دارای خواص‌استثنایی‌مفروض است، سطح فلزی رادرنظرمی‌گرفت‌که‌ضریب هدایت‌الکتریکی آن درهرنقطه مختلف ومطابق قانون مخصوص می‌باشد. سپس دوسرپیل رابه دونقطه از این سطح وصل می‌کرد وجریان را عبورمی‌داد وتابع خواسته شده رانتیجه‌می‌گرفت.

هراستادآموزنده‌ای اگردرحال واحوال شاگردان خود دقیق شود ملاحظه خواهد کرد که این دو خصلت‌کم وبیش مابین‌آنها وجود دارد. بعضیها باشکل ومشاهده وبعضی دیگر بامحاسبهٔ مفصل به یك نتیجه می‌رسند و اگرآنها راهدایت و ارشادکنند چه‌بسا که استعداد آنها شکفته ودرآتیه دانشمندان نامداری شوند. اکنون این سؤال پیش می‌آیدکه‌کدام‌یك ازاین دواستعداد یادوروش بهتروبرای پیشرفت دانش بشری مفیدتر

است؟ جواب این است که هردو استعداد یکسان برای گسترش دانش مؤثراست . فرد منطقی می‌داندآنچه راکه فرد شهودی می‌بیند ، و شهودی می‌بیندآنچه را که فرد منطقی می‌داند. ریاضیات ازترکیب این دواستعدادکه هرکدام حق مشروع و قانونی خودرا حفظ‌می‌کنند بوجودآمده است.لیکن اگربه‌تاریخ ریاضی مراجعه‌کنیم جالب این است که کارگذشتگان به ترتیب شهودی طبقه‌بندی می‌شود. درصورتی‌که طبیعت انسان همیشه یکی بوده واحتمال اینکه مغزهای منطقی‌فقط درقرن اخیرپیدا شده بسیارضعیف است. منطق‌از زمان ارسطو وجود داشته‌ولی چرا باید درزمان اخیرشکفته شده باشد؟ اگرخودرا درجریان اندیشه‌های گذشته قراردهیم درمی‌یابیم‌که بسیاری ازمهندسین قدیم ازجمله خود اقلیدس بالذات آنالیست ومنطقی بوده‌اند . بنای هندسهٔ‌اقلیدسی‌اگرچه هر آجرآن‌بطورشهودی‌نصب شده ولی درمجموع‌بنای استوارمنطقی‌است. منتهادرزمانهای گذشته روش منطقی وشهودی مخلوط وباهم بوده ودرقرن اخیراست که مردم ومخصوصاً خوانندگان انحصارطلب شده‌اند. والا تفاوتی درنوع اندیشهٔ دانشمندان بوجود نیامده است . علت انحصارطلبی‌مردم‌این‌است که‌شهودمعمولاقدرت‌ویقین‌نمی‌بخشدو مردم عجول و زودباور ممکن است ازاین راه به خطا و اشتباه بیفتند .

مثلا می‌دانیم‌که توابع پیوسته عاری از مشتق وجود دارد ، واین موضوع بوسیلهٔ استدلال منطقی مسلم است ، و منحنی این قبیل توابع رانمی‌توان رسم‌کرد. لیکن این‌موضوع برای پدران ماروشن نبوده‌وبطورشهودی درگذشته چنین‌بیان می‌کردند: هرتابع پیوسته دارای مشتق است به دلیل‌اینکه هر منحنی دارای مماس است .

نظیراین خطا درتاریخ ریاضیات زیاد است ومی‌رساند که روش شهودی مخصوصاً اگرتوأم‌باعجله باشد اطمینان‌بخش نیست .

اکنون باید دیدکه بابکاربردن‌منطق‌درریاضیات می‌توان به‌مقصودرسید واثرشهودرا ازآن‌حذف‌کردونتایج اطمینان‌بخش بدست‌آورد یا خیر؟ گذشتگان درهرمرحله که بودند تصور می‌کردندکه درست فکرمی‌کنند ولی همیشه‌آیندگان اشتباهات گذشتگان را پیدا می‌کنند. آیا ما نیز دراین مرحله اشتباه نمی‌کنیم؟ آیا می‌توانیم ریاضیانی بوجودآوریم‌که درآن صد درصد قطعیت ویقین‌حکم‌فرما باشد یانه؟ فلاسفه به این سؤال جواب صددرصد مثبت نمی‌دهند. آنها نیزمی‌گویند که درمنطق یك دور وجود دارد. منطق توتولوژیك است و ازخود خارج نمی‌شود وبیشترازآنچه هست نتیجه‌ای ازآن عاید نمی‌گردد. برای بررسی ریاضیات مثلا حساب یا هندسه باید چیزدیگری غیرازمنطق اضافه‌کرد. این چیزها رابه نام اصول یا آکسیوم می‌نامند.

اصولی کردن ریاضیات یعنی وضع چندگزاره ازراه شهود وسپس مرتب‌کردن قضایا ویا مفاهیم بطوری‌که با اصول وضع شده‌موافق وسازگارباشند. قطع‌نظرازاینکه درطریقهٔ‌آکسیوماتیك نیزمفاهیم‌شهودی دخالت می‌کنند، بازمعلوم نیست تاچه‌اندازه این عمل امکان‌پذیروقابل ادامه دادن است .

دنباله دارد

سطح ریاضیات ... (بقیه از صفحهٔ ۵۵۲)

تبدیلات هندسی (قضیهٔ تالس درصفحه وفضا، تشابه در صفحه ، مفهوم یك گروه تبدیلات ، حل مسائل هندسه)

حل مسائل تمام بخشهای دورهٔ انتخابی

انتگرال (انتگرال به عنوان یك حد حاصل جمع ، کار بردآن در مکانیك وهندسه، انتگرال لگاریتم طبیعی وتابع‌نمائی به ازاءعدد حقیقی متغیر)

اعداد مختلط و مثلثات (شکل مثلثاتی اعداد مختلط و اعمال باآنها. قضیهٔ دموآور ، ریشه‌های واحد وامثالهم)

مباحث انتخابی ازجانب معلم :

ـ معادلات دیفرانسیل و کاربردشان در علوم. مباحث تکمیلی تئوری احتمالات. هندسه‌ها غیراقلیدسی وروش اصل موضوعی (آکسیوماتیك)که موضوعاتی ازقبیل قضایای‌انتخابی درموردکره (بااثبات‌آنها)وهندسهٔ لباچفسکی وهندسه‌های‌دیگر را دربرمی‌گیرد .

حل مسائل مربوط به‌تمام قسمتهای دروس فوق‌الذکر.

دوره‌های خصوصی (که‌دومین نوع دورهٔ پیشنهادی به دانش‌آموزان‌کلاسهای ۱۰ـ۷ است) رابطهٔ‌کمتری به محتوای دورهٔ‌اجباری داشته‌ومعمولا برحسب ذوق‌وسلیقهٔ دانش‌آمرزان درکلاسهای ۹و۱۰انتخاب می‌گردد .

تعداد دوره‌های اختصاصی بالغ برچهار بوده وهریك از نقطه‌نظرزمانی معادل۷۰ساعت می‌باشند وبرنامهٔ‌آنها اختصاراً شامل مطالب زیرین است:

برنامه‌نویسی کامپیوتر،فضاهای برداری ومسائل مربوط به برنامه نویسی‌خطی، اصول ریاضیات مجرد .

ابداع‌وپیاده‌کردن برنامه‌های جدیدنه‌تنها به‌آزمایشهای نوین وکمکهای متد لوژیکی معلمان محتاج است بلکه نیاز شدیدی به‌آموزش مجدد معلمان‌به معنای واقعی دارد واین‌امر وقتی ممکن‌الوصول خواهد بودکه تغییراتی مشخص و قطعی در برنامه‌های انستیتوهای تربیتی صورت‌گیرد . اما این نکته را هم هیچگاه نباید ازنظردورداشت‌که مسئلهٔ مذکور مسئله‌ای بسیارغامض وپیچیده بوده و حل‌آن احتیاج مبرمی به زمان وفرصت دارد .

پایان

سطح آموزش ریاضیات دردبیرستانهای اتحاد جماهیر شوروی سوسیالیستی

از مجلهٔ آمریکائی : The Mathematics Teacher
March 1969

ترجمهٔ : محمدحسین احمدی

دنباله از شمارهٔ قبل

در تهیهٔ برنامه‌های جدید ، مربیان شوروی نه تنها از تجربهٔ اولیهٔ مدارس‌شوروی، بلکه از تجربهٔ آموزش ریاضیات درمدارس غرب نیزاستفاده نموده‌اند ، ودر تبدیل ریاضیات به مجموعه‌ای از بازیهاکه براساس شرایط وقراردادهای انتخابی کمابیش دلخواهی طرح ریزی می گرددنسبت به تمایلات کاملا مدرنی که‌یحتمل منتهی به‌یك بی‌توجهی بیمورد نسبت به‌پایه‌های عملی نظریات ریاضی وهمبستگی آنها به واقعیت گردد،محافظه کار بوده‌اند .

حال مقدمهٔ ازمطلبی که دانش‌آموزان درمطالعهٔ ریاضیات باید به‌آن وقوف یافته وتوجه شایانی نمایندآغازمی کنیم،وآن اینکه برخی قسمتهای علم ودانش ، مهارتها و عادات زندگی روزانهٔ‌هرفردازجامعهٔ امروزی‌جهت مطالعهٔ سایرموادآموزشی وبخصوص به منظور ادامهٔ تحصیلات ، لازم وضروری است. هدف دیگرآموزش ریاضیات همانا توسعهٔ استعدادهای ذهنی دانش‌آموزان ، پرورش فکرمنطقی واستعداددرتجرید، سازمان دادن و تجزیه وتحلیل نمودن می‌باشد. دانش‌آموز دبیرستانی باید به قدرکافی اهمیت نقش ریاضیات را در سایرعلوم وفواید آنرا درحوزه های مختلف فعالیت بشری درك کند.

در برنامهٔ جدید توجهات خاصی نسبت به متحد کردن عقاید و نظریات مبذول شده است و ازاینرو افکار و تصورات متحد ویکسان بتدریج وبانهایت احتیاط معرفی می‌شوند . من باب مثال وقتی که ساده ترین و ابتدایی ترین نظریات تئوری مجموعه ها در تمام سطوح بکار برده می‌شوند هیچگاه مبحث خاصی را تدوین نکرده ودورهٔ ریاضیات را تدریجاً به درجه‌ای که مورد حاجت است وارد نمی‌کند . اولین برخورد دانش‌آموزان باتئوری مجموعه‌ها درکلاسهای۳-۱ - ورت می گیرد. درکلاس چهارم اجتماع واشتراك مجموعه‌ها آموخته‌می‌شود.

هرگاه تساوی و یا معادله‌ای یك مجموعهٔ صدق داشته باشد بدیهی است که حل یك دستگاه معادلات منجر به تعیین‌فصل‌مشترك مجموعه های صدق معادلات مذکور می گردد وهمین‌طور معادلاتی‌که فوقاً ذکر شد حل آنها احتیاج به آگاهی و استفاده از اجتماع مجموعه‌ها دارد (فی‌المثل ، مجموعهٔ صدق معادلهٔ $x^2 - y^2 = 0$ عبارتست از اجتماع مجموعه‌های‌صدق $x+y$ و $x-y$).

اصول تئوری مجموعه ها در هندسه نیز مورد استفاده قرارمی گیرد فی‌المثل: یك شکل معرف یك مجموعه نقاط است و غیره.

تئوری مجموعه‌ها وعلائم منطقی، کاملادقیق ومحتاطانه وضع شده‌اند بطوری‌که استعمال آنها بحث را ساده یا تلخیص و در عین حال واضح و مبرهن می‌سازد، و معتقدندکه دانستن نشانه های ریاضی به مقدار زیاد نباید یك امر ضروری برای تمام دانش‌آموزان باشد بلکه تنها ویژهٔ‌آنهایی است که مصمم شده‌اند خودشانرا وقف مطالعهٔ هرچه بیشتر ریاضیات‌کنند.

دقیق‌ترین توجه و رسیدگی نسبت به پیشرفت وتوسعهٔ افکار منطقی بعمل‌آمده است و انجام این امربا اتکا به ترکیب صحیحی ازطرق استقراء وقیاس درتمام سطوح‌تحصیل ومباحث ریاضی سهل‌الوصول بوده است . روشهای استقراء ریاضی در کلاسهای پایین موارد استفادهٔ عدیده‌ای درجهت‌اثبات وتوجیه مطالب دارد. حقایق منحصر به فرد و اختصاصی‌که قابل‌بحث نیستند وسیلهٔ دانش آموزان بدون اثبات پذیرفته می‌شود . روشهای قیاسی تنها درجاهایی‌که لزوم‌استفاده ازآنها از نقطه‌نظر دانش‌آموز بمورد دانسته شده بکار می‌رود. اهمیت وروش قیاسی تدریجاً توسعه و تقویت می‌یابد. فی‌المثل دانش‌آموزان اطلاعات اولیه خود درزمینهٔ نقش اصولی موضوع ، تعاریف

و قضایای مربوط به ساختمان منطقی ریاضیات را در هندسهٔ کلاس ششم که فهرستی از قضایا را بدون اثبات گردآوری و انتخاب نموده‌اندکسب می‌کنند .

این برنامه مسائلی از قبیل ایجاد عادات قوی به منظور انجام صحیح محاسبات و تبدیلات ونیزتوسعهٔ استعداد دانش‌آموزان جهت رساندن حل یك مسئله به نتیجهٔ عددی و کاربرد خطکش محاسبه را شامل می‌شود . مهارت درمحاسبه و انجام تبدیلات شهودی مورد نیاز کلیهٔ دانش آموزان بوده و ضمن تمرینات و مسائل متعدد توسعه می‌یابد.

یکی ازویژگیهای برنامه این است‌که متضمن کاربردهای زیادی است و تلویحاً می‌توان رابطهٔ بین ریاضیات و زندگی را که در آن تفهیم و منظور شده است نام برد . موادی که دارای هدف عملی وآموزشی زیاد بوده وجهت توسعهٔ برنامه به‌آن منظورنموده‌اند به اختصار عبارتند از: مشتق، انتگرال، مبحث معادلات دیفرانسیل تحت عنوان‌روشی‌کلی برای تفهیم واستدلال قوانین طبیعت و تکنولژی (معادلهٔ افزایش نمائی ، نوسانهای هارمونیکی)، بردارها، روش مختصاتی ، آشنایی با مسائل برنامه ریزی خطی و اصول کامپیوترهای الکترونیکی.

این برنامه تغییرات فاحشی راکه درزمینهٔ ادبیات وعلوم انسانی و هنرهای صنعتی است شامل می‌شود. آشنایی مقدماتی با طرز محاسبه بوسیلهٔ فرمولهای ریاضی،کمك بزرگی است به دانش‌آموزان در کار مطالعهٔ فیزیك کلاس ششم . (یك دورهٔ سیستماتیك فیزیك درکلاس هفتم به‌عنوان یك موضوع مستقل وجداگانه آمده‌است). مبحث بردارهاکه دانش آموزان برای اولین‌باردرکلاس هفتم در درس‌هندسه باآن مواجه می‌شوند در دورهٔ فیزیك (مکانیك)کلاس هشتم سخت بکارشان می‌آید. در این زمان برخی اطلاعات ضروری راجع به فیزیك را قبل از آشنایی باآنهادردروس ریاضیات ،کسب‌می‌کنند. این اطلاعات بی شك دانش‌آموزان را قادر می‌سازدکه نسبت به پدیده‌های فیزیکی‌که درآینده‌آنها را ازنقطه نظرریاضی مطالعه وبررسی خواهندکرد یك دیدکلی‌پیداکنند . من‌باب مثال، مبحث سرعت در فیزیك ، پیش ازمبحث مشتق درریاضیات به‌آنها تدریس می‌شود. وازآن‌جمله می‌توان‌تدریس حرکت نوسانی درفیزیك راکه قبل ازآشنایی باتابع $y'' = -k^2y$ درریاضیات، تدریس می‌شود نام‌برد .

این روش متضمن یك نکتهٔ بسیار اساسی ودرخورشایان توجه‌است وآن‌اینکه‌دانش‌آموزان قبل‌ازمطالعه وبررسی‌ریاضی مسائلی‌که‌فوقاً به‌آن اشاره شد فرصتی خواهند داشت‌که‌مفهوم فیزیکی‌آنها را دریابند .

نتایج‌منتج ازهندسهٔ‌ترسیمی وخصوصیات تصاویرعمودی که درساعات هندسهٔ کلاسهای ۴تا۶تدریس می‌شود برای‌دورهٔ رسم فنی فایده‌ای بس اساسی دارد . [دورهٔ رسم فنی دوره‌ای است‌انتخابی‌که درکلاسهای۸-۶ به‌دانش‌آموزان‌جهت‌انتخاب، توصیه می‌شود. دانش محصلین نسبت به وضع‌نسبی خطوط و صفحات وبرخی اشکال قضایی‌که درابتدای رسم فنی باآنها برخورد می‌کنند دردرس هندسه حتی قبل ازمعرفی وآشنایی‌با هندسهٔ فضایی سازمان وتکمیل می‌یابد].

رابطهٔ بین ریاضیات وزندگی‌حتی درطرزانتخاب مسائل نیزبخوبی مشهود است. درحل‌این قبیل مسائل دانش‌آموزان باید قدرت و استعداد تبدیل وضعیت عملی به زبان ریاضی ، ارائهٔ فرضهایی جهت ساده نمودن‌مسئله وردکردن جزئیاتی‌که درحل مسئله مورد حاجت نیست ، داشته باشند .

بدیهی است‌که مطالعهٔ موادجدیدی‌که دربرنامه گنجانده شده است نیازشدیدی به وقت اضافی دارد . واین حقیقت حائز کمال اهمیت است به اینکه در برنامهٔ نخستین شوروی دورهٔ تحصیلات مقدماتی چهارسال بوده‌ودر برنامهٔ‌کنونی به سه‌سال تقلیل یافته است. به‌عنوان یك نتیجه، یك‌سال‌آموزش اضافی به یکدورهٔ‌سیستماتیك‌ریاضیات‌درحالی‌که‌مجموع سالهای‌تحصیلی تغییری‌نمی‌پذیردتخصص‌داده‌شده‌است[فی‌المثل دورهٔ تحصیلات در اکثر مدارس شوروی ده سال است لیکن در جمهوریهای بالتیك یك سیستم یازده‌ساله طرح وتدوین نموده‌اند].

ازتوسعهٔ روشهای‌آموزشی مباحث جدید وحذف مباحثی ازبرنامه‌که ارزش‌آموزشی مستقلی را (ازقبیل قضیهٔ مربوط به تقاطع ارتفاعها و نیمسازهای مثلث وامثالهم) نداشته و یا این امکان‌وجودداشت‌که‌آنهارادرموادانتخابی(مانند اعدادمختلط). بدون‌هیچ‌خللی‌درکارآموزش عمومی، گنجاندفواید زیادی عاید شده است .

نتایج نهایی‌منتج ازتحقیقات‌تربیتی‌و روانشناسی،نتایج ناشی‌از تجربیاتی است‌که با هدایت ویژهٔ بخش ریاضیات انستیتوجهت آموزش عمومی وپلی تکنیك بعمل‌آمده ودر نوسازی برنامهٔ آموزشی شوروی سهم بسزایی داشته و از اینرو با اهمیت تلقی شده است .

همانطورکه فوقاًاشاره‌کردیم طبق طرح جدیدآموزشی، دورهٔ تحصیلات‌دبستانی به سه سال‌منحصر شده‌است.شاگردان مطالعهٔ ریاضیات را زیر نظر یك متخصص ریاضی درآغاز سن ۱۰سالگی (درکلاس چهارم) شروع کرده و دوره‌ای ازحساب‌و مبادی جبررا درکلاس ۵-۴ فرا می‌گیرند. هندسه نیزدر همین زمان بدون‌آنکه یك مادهٔ مستقل ومخصوص عنوان شود ، به آنها تدریس می‌شود .

هرساله بالغ بر۳۰تا۳۵ساعت ازاوقات‌آموزشی را به

درس هندسه اختصاص داده‌اند. دانش‌آموزان درکلاس چهارم با ساده ترین علائم‌وعبارات جبری، طرزاعمال باعبارات‌جبری وعددی ، حل تساویها ونامساویهای‌ساده ومقدماتی، منطق و مسائل‌ترکیبی ومحاسبات‌به‌کمك فرمول‌آشنا می‌شوند،از اینرو مفاهیم اصلی واساسی هندسه را درمی‌یابند .

مقدمات اولیهٔ مفهوم تابع‌که در کلاس ششم بااتکا بر اطلاعات کلاسهای پایین ، تدریس می‌شود موجب ایجاد پایهٔ لازم برای دورهٔ سه سالهٔ‌آخرجهت مقدمات مشتق (درکلاس۹) وانتگرال (درکلاس۱۰) می گردد .

این بخودی خود مطالعهٔ هرچه بیشتر توابع مقدماتی کاربرد مفهوم مشتق وروش‌کلی جهت محاسبهٔ احجام به‌کمك انتگرال را شامل شده ومهمترازهمه افزایش امکانات وسیعتری راجهت‌تهیهٔ‌وسایل‌آنالیزریاضی‌درعلوم‌وتکنولژی‌سبب‌می‌شود.

دورهٔ‌اصلی وسیستماتیك هندسهٔ مدرسهٔ‌هشت ساله‌بربنیاد تبدیلات هندسی بناشده و دراین‌سطح تبدیل اشکال کاملا مورد بررسی قرارمی گیرد.درکلاس پنجم‌دانش‌آموزان ضمن ترسیمات هندسی‌که بی‌شك باوسایل کاملا مدرن صورت می گیرد عملا با طرزکاراین وسایل‌آشنا می‌شوند. درکلاس هفتم مفاهیم تشابه را برای دانش‌آموزان روشن می سازند.

دورهٔ هندسهٔ‌کلاسهای بالاتر براساس یك روش برداری بنیان گرفته است ولیکن اولین‌آشنایی با بردارها (مانند تفریق وضرب‌اسکالر) درکلاس هفتم صورت می گیرد. درهندسه‌نسبت به امرتوسعهٔ عقاید ونظریات ویژه ، توجهی خاص شده است. دانش‌آموزان مبحث هندسهٔ فضایی، روابط موجود بین‌آموزش هندسه ورسم فنی را درمدرسهٔ هشت ساله وخاصیتهای تصویر موازی وکاربردش درساختمان‌تصاویر اشکال فضایی ونیزمقدمهٔ مختصات فضایی رادرکلاسهای پایینتربخوبی فرامی گیرند .

توابع مثلثاتی‌درکلاسهای بالاتردرجبر وآنالیزمقدماتی بطوراصولی موردمطالعه‌قرارمی گیرد. مبحث حل مثلث نیز به دورهٔ هندسه واگذار شده است .

در برنامه‌دورهٔ اجباری مفاهیمی ازقبیل گروه ، حلقه ، میدان و ساختمان فضای برداری حذف گردیده و بویژه مفهوم یك عدد مختلط ومباحثی از تئوری‌احتمالات وآمارهای ریاضی نیزدربرنامه ازقلم افتاده است.لیکن‌اکثراین مفاهیم ومباحث‌یا ازطریق نتایج ناشی ازمطالعهٔ‌موادی که‌دربرنامه گنجانیده‌شده ویا باانتخاب ضمیمه‌هایی‌که مفاهیم‌فوق‌الذکر درآن گردآوری شده وعنوان دروس اختیاری را بخود می گیرد می‌آموزند .

مسئلهٔ انتخاب‌فعالیتهای‌اختیاری (یادوره‌های انتخابی) درآغاز کلاس‌هفتم وسیلهٔ دانش‌آموزان به‌ضمیمهٔ دورهٔ‌اجباری صورت می گیرد.این‌دوره‌های‌انتخابی‌موضوع تعیین‌تمایل واستعدادهای دانش‌آموزان‌افزایش علاقهٔ‌آنان درمورد مواد درسی وپایداری در امرمطالعهٔ ریاضیات را سهل‌الوصول‌می‌سازد .

به دانش‌آموزانی‌که درکلاسهای ۱۰-۷ به تحصیل می‌پردازند و در صددآنندکه ریاضیات را به عنوان یکدورهٔ «اختیاری ودلخواه» انتخاب نمایند دو رشته پیشنهاد می‌شود که یك نوع‌آن به‌نام «دورهٔ مباحث ومسائل‌تکمیلی ریاضیات» مشهور است و نوع دوم خود شامل دوره‌های «مخصوص» دیگراست.

دورهٔ فوق یعنی دورهٔ انتخابی «مباحث تکمیلی»هفته‌ای دوساعت پیشنهاد شده است‌ودرآن مباحثی ازجانب معلم‌جهت آموزش انتخاب می گردد. ناگفته نماندکه‌فراگیری‌اغلب این مباحث دانش‌آموزان را دردرك‌مطالب دورهٔ‌اجباری به‌معیاری وسیع یاری می‌بخشد. درکلاسهای ۸-۷ نسبت‌به‌موضوعاتی از قبیل تبدیلات هندسی ، تعمیم و گسترش مفهوم تابع توجهی خاص شده است. درکلاسهای۱۰-۹ روی مقدمات‌آنالیزتئوری احتمالات ، روشهای حل معادلات و بسط مفهوم عدد تاکید زیاد شده است. یك مقدارمعینی از وقت به حل مسائل غامض اضافی اختصاص داده شده است .

مباحث تکمیلی زیر تازمانی‌که دانش‌آموزان‌کلاس نهم، آشنایی‌کاملی نسبت به برنامه جدید بیدا کنند جهت‌آموزش تعیین وتوصیه شده است :

مجموعه‌ها و اعمال باآنها ، حل معادلات ونامساویها ، حدیك تابع ، اتصال ، مشتق، انتگرال ، اعداد طبیعی وقاعدهٔ کلی‌استقراء ریاضی،روشهایی جهت‌حل‌معادلات،تبدیلات‌هندسی.

محتوای‌دورهٔ «مباحث ومسائل تکمیلی ریاضیات» زمانی که دورهٔ الزامی‌کلیهٔ کلاسهای مدرسه از طرح جدید پیروی نماید بالطبع تغییرفاحشی خواهدکرد .

برنامه‌ای‌که ذیلا شرح آن خواهدآمد حاکی محتویات یك دورهٔ انتخابی جهت‌کلاسهای ۱۰-۹ است :

اصول تئوری احتمالات (مفهوم‌احتمال ، آزمایشهای برنولی، مثلث پاسکال)

تعمیم مفهوم عدد ، اعداد مختلط (میدان اعداد منطق ، اعداد اصم ، میدان اعداد حقیقی ، اعداد مختلط و تعبیرهندسی‌آنها)

توابع جبری از درجهٔ دلخواه (قضیهٔ اصلی جبر (بدون اثبات) ، تجزیهٔ چند جمله‌ایها به ضرب عوامل ، حل مسائل وتعبیرمعادلات‌ودستگاه معادلات).

مسائل ومبحث اضافی حساب دیفرانسیل (مشتق یك‌تابع مرکب ، حل مسائل مربوط به مشتق)

دنباله در صفحهٔ ۵۴۹

ابوالوفای بوزجانی

ترجمه وتنظیم از : **جعفر آقایانی چاوشی**

خلاصهٔ زندگی نامهٔ بوزجانی :

ابوالوفا محمدبن یحیی بن اسماعیل بن العباس بوزجانی یکی ازدرخشانترین چهره‌های نجوم وریاضی دورهٔ اسلامی و از جملهٔ پیشقدمان تمدن بشری است، که اقوال وآرایش قرنها به عنوان حجت وبرهان قاطع برافکاردانشمندان حکمروائی می‌کرد. اورامی توان باریاضیدانهای درجهٔ اول اسلامی نظیر **ابوریحان بیرونی ، ابن هیثم ، ثابت بن قره** ، همتراز و دریك طبقه قرارداد .

ولادت اودرسال ۳۲۸ ه ق دربوزجان ازقراء نیشابور اتفاق افتاد. علوم ریاضی را نزدچند استادازجمله عمو ودائی خود«ابن عمروالمغازلی»و«ابی عبدالله محمدبن عنبسه»فرا گرفت . درسال ۳۴۸ ه ق عازم عراق گردید. هوش سرشارونبوغ شگفت‌انگیز او درامور مربوط به نجوم باعث گردیدکه خلیفهٔ وقت او را به ریاست رصدخانهٔ بغداد منصوب گرداند. بوزجانی در سال ۳۸۶ ه ق در ۵۸ سالگی ازدنیا درگذشت .

مقام علمی ابوالوفا

آثاربوزجانی آنچنان دانشمندان راتحت تأثیروسیطرهٔ خود قرارداده است که جملگی دراین قول متفقندکه :«اوازبزرگترین چهره‌ها درمیان متفکران ریاضی ونجوم اسلامی وازارکان علم وریاضیات است» ابوریحان بیرونی وخواجه نصیرالدین طوسی به فضیلت ابوالوفا درعلوم ریاضی اذعان و اعتراف کرده‌اند و خواجه نصیردرکتاب مثلثات وسایرآثارخود ازرسائل اواستفادهٔ زیادکرده است .

ابن خلکان می گوید : «بوزجانی یکی از مشاهیرعلم هندسه است ودراین فن به اکتشافات شگرف وخارق العاده‌ای نایل آمدکه دسترس هیچکس نبود» وعلامه **کمال الدین ابوالفتوح موسی بن یونس** که یکی ازاساتید هندسه و متبحر دراین علم است آثاربوزجانی را بسیارمی ستاید ودراکثرمطالعات ومباحث خود برآنها استناد می‌جوید» به غیرازعلمای اسلامی عدهٔ کثیری از دانشمندان غرب ازقبیل : **سارتون ، سمیث ، کارادوکس، سدیو ، وویکه** که برپاره‌ای ازبحثهای بوزجانی اطلاع دارندبه نبوغ وفضل او درپهنه‌های علوم بالاخص مثلثات اعتراف کرده‌اند.

ابوالوفااولین کسی است که ظل وقطرظل وتطرظل تمام راکشف نموده وآنهارادرحل مسائل ریاضی ونجومی استعمال کرده است.

جیب زاویهٔ ۳۰ درجه راتاهشت رقم اعشاراستخراج نمود. ونیزمعادلات وفرمولهائی ابداع واختراع کرده که تااین زمان اعجاب علما را برانگیخته است . مخصوصاً قوهٔ ابتکارو خلق راه‌حلهای مختلف مسائل مشکل‌تر سیمات هندسه ازمشخصات ویژه اوست.

کاراو درتقسیم دایره اساس کارعلمای دیگر در محاسبهٔ عدد π واقع گردید . اوشعاع دایره را مساوی واحد اختیار کرده وبااین فرض وترکمان نیم درجه را :

$$a = \frac{31}{(60)^2} + \frac{24}{(60)^3} + \frac{55}{(60)^4} + \frac{54}{(60)^5} + \frac{55}{(60)^6}$$

بدست آورد. ابوالوفا ازجمله علمائی است که در زمینهٔ هندسهٔ تحلیلی تحقیق نموده وبرخی ازمعادلات واعمال جبرعالی را به وجه هندسی حل کرده است . ازآثار اوچنین استنباط شده است که این ریاضیدان عالیقدر معادلات درجهٔ چهارم به‌صورت $x^4 = a$ و $x^4 + px^2 = q$ را حل کرده است ولی متأسفانه رساله‌اش که متضمن حل معادلهٔ اخیرالذکر است مفقودالاثر است، به رغم بعضی ازدانشمندان ابوالوفا این معادله را از تقاطع هذلولی $y^2 + axy + b$ وسهمی $x^2 = y$ حل کرده است .

نجوم- ابوالوفا اولین کسی است که حرکات ماه را با موشکافی وامعان نظرمورد مطالعه ومداقه قرارداده است .

آیا این برای مسلمین افتخاربزرگی نیست که :

کشف حرکت سوم ماه بوسیلهٔ ابوالوفای بوزجانی، در قرن نوزدهم متجاوز ازشش سال درآکادمی علوم فرانسه ذهن دانشمندان را بخود مشغول داشته و مورد بحث و گفتگو بوده است .

اوحرکتی راکه توسط بطلمیوس کشف شده بود ناقص و وبرخلاف واقع یافته وثابت نمودکه کرهٔ ماه، علاوه بردوحرکتی که تاآنروز شناخته شده بود حرکت سومی نیزدارد. ابوالوفا میل منطقهٔ البروج راآنچنان دقیق حساب کردکه دردقت واصابت بواقع نزدیکترین حسابی است که آلات متقن و کامل عصرجدیدبه آن رسیده است .

آثار بوزجانی به حدی علمای غربی را تسخیر کرد که محتویات رسالاتش را در کتابهای خود وارد کرده و به نام خود منتشر ساختند.

تیکوبراهه دانشمند و منجم دانمارکی یك رسالهٔ ابوالوفا را که شامل جدول مثلثاتی ذیقیمتی بود به نام خود منتشر نمود. نسخهٔ خطی این رساله هنوز هم در کتابخانه‌های مهم اروپا موجود است. با مقایسهٔ این رساله و کتاب تیکو براهه هر کس متوجه می‌شود که هر دو آنها یکی است فقط نام مؤلف آنها متفاوت است.

همچنین تیکو براهه در آثارش ادعا کرده بود که کشف حرکت سوم ماه از اوست به همین جهت در پیرامون این موضوع مناقشات و مباحثی در آکادمی علوم فرانسه در جریان بود. عده‌ای می‌خواستند این کشف را به تیکو براهه نسبت دهند و بعضی دیگر به مقابله علیه آن برخاسته بودند. زیرا آنها ابوالوفا را مکتشف آن می‌دانستند تا آنکه بر اثر پژوهش و کاوشهای دانشمندان مخصوصاً سدیو که نسخهٔ خطی رسالهٔ ابوالوفا را بدست آورده بود و مباحثات و تجربیات دقیق معلوم شد که حرکت سوم ماه از اکتشافات مسلم ابوالوفاست و ادعای تیکو براهه جز تحریف مصیبت بار حقیقت چیزی نبود.

در مقالهٔ خواجه نصیرالدین طوسی اشاره شد به اینکه مطالب کتاب مثلثات **رژیومونتانوس** از خود او نیست. بلکه اقتباس از مباحث دانشمندان اسلامی مخصوصاً خواجه نصیر است. اکنون نیز مختصری در این باره گفتگو می‌شود.

صالح زکی افندی دانشمند و محقق ترك و صاحب کتاب آثار الباقیه پس از مطالعهٔ دقیق کتابهای رژیو مونتانوس و ابوالوفای بوزجانی می گوید: اگر کسی ادعا کند که مطالب و مباحث این کتاب (= کتاب مثلثات رژیومونتانوس) از تراوشات فکری خود اوست به خطا رفته است زیرا فصل پنجم آن عیناً اقتباس از کتابهای علمای مسلمان بویژه ابوالوفاست. **فلوریان کاژری** مورخ عالیقدر ریاضیات نیز به این موضوع اعتراف کرده و می گوید: رژیو مونتانوس از آثار مسلمین اقتباس کرده است. بغیر از کارژی، **سمیث و سارتون و سدیو، و هانری سوتر**، نیز معترفند که اکثر نظریات و مطالب این کتاب در بدو امر به رژیو مونتانوس منسوب بود ولی پژوهشهای علما خلاف این مدعا را ثابت کرد.

در سال ۱۹۳۶ مقاله‌ای به قلم (Edger C.smith) در مجلهٔ (NATURE) شمارهٔ ۳۴۵۳ چاپ لندن به مناسبت حلول سال جدید نگارش یافته که در آن نویسنده به بحث پیرامون اکتشافات علمای متولد سالهای ۱۵۳۶، ۱۶۳۶، ۱۷۳۶، ۱۸۳۶، پرداخته بود. در مورد رژیو مونتانوس ضمن تعریف و تمجید از او نوشته بود که این شخص در ریاضیات تألیفاتی دارد که کتاب مثلثات مستقیم الخط و کروی او نمونه‌ای است از کتابهای منظم، که نتیجهٔ نبوغ و مجاهدت فکری اوست، استاد **قدری حافظ طوقان** که در تاریخ ریاضیات صاحب نظر و واقف می‌باشد در نامه‌ای که به این مجله ارسال نمود به این موضوع اعتراض کرده و اظهار نموده است که این عقیده‌ای باطل و دور از حقیقت است و رژیومونتانوس از خود اختراع و اکتشافی نکرده بلکه مطالب کتابش را از رسائل ریاضیدانهای اسلامی مخصوصاً خواجه نصیر و ابوالوفا اقتباس نموده است. ثانیاً کتاب شکل‌القطاع از نظر نظم و ترتیب در مثلثات دست کمی از این کتاب ندارد.

آثار قلمی بوزجانی:

۱- اقامة البرهان علی الدوایر من الفلك.
نسخه‌ای از آن در خزانهٔ بانکی فور مصر موجود است.

۲- کتاب الکامل (این کتاب شامل سه مقاله است)
نسخه‌ای از آن در کتابخانهٔ پاریس موجود است.

۳- تفسیر ابرخس. ۴- تفسیر کتاب خوارزمی. ۵- تفسیر دیوفنطس، در جبر و مقابله.

۶- کتاب فیما یحتاج الیه الصناع من اعمال الهندسه.
نسخه‌ای از آن در کتابخانهٔ ایاصوفیا در استامبول می‌باشد. احتمالا همان کتابی است که به فارسی در کتابخانهٔ پاریس می‌باشد.

۷- مایحتاج الیه العمال والکتاب من صناعة الحساب
که به هفت منزل تقسیم شده است.

۸- کتاب استخراج ضلع المکعب بمال مال

۹- زیج الواضح، دو کتاب اخیر بدست نیامده‌اند. از سایر تصانیف او متأسفانه اثری در دست نیست.

مسائل ابوالوفا

ابوالوفا مسائل جالبی در ریاضیات دارد که بعضی از آنها تاکنون هم لاینحل مانده و کسی نتوانسته است آنها را حل کند. مخصوصاً چند مسئله راجع به ترسیمات هندسی دارد که ما در این زمینه در آینده بحث خواهیم کرد.

نمونه‌ای از مسائل ترسیمی بوزجانی در یکان شمارهٔ ۶۲ مقالهٔ «برشهای معمائی» ترجمهٔ داود ریحان موجود است.

منابع

تراث العرب العلمی فی الریاضیات والفلك
تألیف: قدری حافظ طوقان - مصر ۱۳۶۰ هـ ق

اعلام المهندسین فی الاسلام
تألیف: احمد تیمور پاشا - مصر ۱۳۷۷ هـ ق

MOLANA MOHAMMED ABDUL ALEEM SIDIQUI:
«CULTIVATION OF SCIENCE BY MOSLIMS» TOKYO, 1938

ابوریحان بیرونی و محاسبهٔ اوتار زوایا

مجلهٔ: The Mathematics Teacher
Nov. 1970

ترجمهٔ: مقصود عین‌اللهی

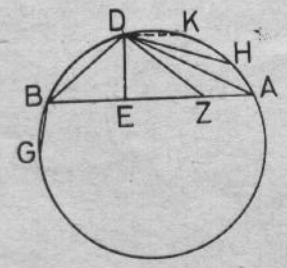
ریاضیدانان یونان باستان وترزوایای مرکزی را به‌عنوان یك تابع مثلثاتی بکارمی‌برده‌اند و **بطلمیوس** قضایای متعددی برای محاسبهٔ این وترها بیان کرده است که با استفاده از آنها می‌توان وترهای مربوط به زوایای از ′۳۰ تا °۱۸۰ رامحاسبه کرد. درحالی‌که نزدریاضیدانان اسلامی به جای وتر، جیب زاویه به عنوان تابع مثلثاتی بکاررفته است.

ابوریحان بیرونی (۹۷۳-۱۰۴۸) قضایای متعددی برای محاسبهٔ طول وترها بیان کرده است که اساس این قضایا قضیهٔ وترهای شکسته‌است. مطابق باشکل۱ اگر ABG وتری شکسته ازدایره و DE عمودی باشدکه ازوسط کمان AG بروتر بزرگتر فرودآمده‌است، خواهیم داشت: $AE = EB + BG$

ابوریحان اثبات این قضیه را ازبیست ودو راه‌بیان کرده است که سه طریق آنرا به **ارشمیدس** نسبت می‌دهند و چهار طریق ازآن خود اوست‌وبقیهٔ راهها از طرف دانشمندان دیگر ارائه شده است. روشی که به ارشمیدس‌نسبت می‌دهند به‌شرح زیراست: E و Z راطوری اختیارمی‌کنیم که $ZE = EB$ و $DH = DB$ بنابراین $\widehat{DH} = \widehat{DB}$ و $\widehat{BG} = \widehat{AH}$ وازتساوی $AZ = AH$ نتیجه می‌گیریم که $ZE = EB$ پس:

$$AE = EB + AH = EB + BG$$

در دایره‌ای به شعاع واحد هر زاویهٔ مرکزی دو برابر جیب نصف زاویهٔ مرکزی آن‌است.



شکل۱

بنابر این اگر:

$\widehat{AD} = 2\alpha$ باشد

$AD = 2\alpha$ وتر $= 2\sin\alpha$

باتوجه به قضیهٔ وترهای شکسته و فرض

$\widehat{AD} = 2\alpha$ و $\widehat{BD} = 2\beta$

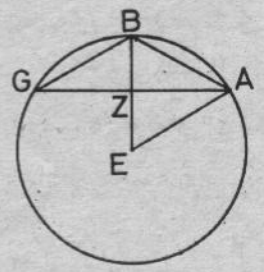
مقادیر $\sin(\alpha+\beta)$ و $\sin(\alpha-\beta)$ به‌ترتیب برابر با $(2\alpha+2\beta)$ و $(2\alpha-2\beta)$ است و به‌طریق زیر بسط $\sin(\alpha+\beta)$ و $\sin(\alpha-\beta)$ رامی‌توان بدست‌آورد:

$$AD = 2\sin\alpha$$
$$AE = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$DB = 2\sin\beta$$
$$EB = 2\sin\beta\cos\alpha$$
$$AB = 2\sin(\alpha+\beta)$$
$$BG = 2\sin(\alpha-\beta)$$
$$AB = AE + EB$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$BG = AE - BE$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

ابوریحان همچنین به سادگی تساوی

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

راثابت کرده است. در شکل۲



شکل۲

$$\widehat{AB} = \widehat{BG} = \alpha$$

پس $AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2BE.ZE$

و یا: $4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2 - 2\cos\alpha$

پس $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$

به طریق مشابهی می‌توان تساوی $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ را بدست آورد.

درتعمیم قضایای بطلمیوس وتر °۳۶ یاجیب °۱۸ رابدست می‌آوریم. برای بدست‌آوردن ضلع ده‌ضلعی منتظم محاطی لازم‌است که‌قضیهٔ دیگری دربارهٔ وترهای شکسته (شکل۱) بیان‌کنیم. به‌ترتیب زیر:

$$AD^2 = BD^2 + AB.BG$$

ابوریحان اثبات‌این قضیه راازنه طریق بیان‌کرده است که‌چهار

پائین صفحهٔ بعد

مقدمات

احتمالات

Notions de
PROBABILITÉ
par: M.HAGECE
ترجمهٔ : مصحفی

فصل دوم - اصول حساب احتمالات

۳- اصول موضوع حساب احتمالات

الف- در بیان اصولی حساب احتمالات ، احتمال یک پیشامد به عنوان مفهومی اولیه پذیرفته می‌شود ؛ اما از این جهت که در کاربرد حساب احتمالات ودرموارد محسوس، مفهوم تجربی احتمال، همچون تحقق فراوانی نسبی بنظر می‌رسد ، اصول موضوع حساب احتمالات باتوجه به‌خواص فراوانیهای نسبی وضع می‌شوند .

فرض می‌کنیم آزمایشی شانسی (شامل n رویداد e_1 و e_2 و...e_n) بوده و 2^n پیشامد در آن بوقوع پیوسته باشد [تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $E=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$] ،

نظیر هرپیشامد A ازآزمایش مزبورعدد $P(A)$ را به‌نام احتمال پیشامد A درنظرمی گیریم بقسمی که اصول موضوع زیر درآن صادق باشد ؛

۱) $0<P(A)<1$

۲) برای دوپیشامد ناهمسان A و B داریم :

$$P(A\text{«یا»}B)=P(A)+P(B)$$

۳) $P(E)=1$

تبصره - ازنظربالا، احتمال به عنوان گسترشی ازمجموعهٔ E درفاصلهٔ [۱و۰] خواهد بودکه اصول موضوع ۲و۳ درآن صادق باشد .

ب- نتایج : ازسه اصل موضوع بالانتایج زیربه‌سادگی بدست می‌آید :

از صفحهٔ قبل

طریق آن ازآن‌خود اوست و ساده‌ترین راهها یکی از راههای خودش است . درشکل۱، DK را موازی AB رسم‌می‌کنیم پس $\widehat{AD}=\widehat{DG}$ و $\widehat{AK}=\widehat{DB}$ ازاینرو $\widehat{KD}=\widehat{BG}$. قضیهٔ بطلمیوس‌رادربارهٔذوزنقهٔ‌متساوی‌الساقین AKDB می‌نویسیم:

$$AD.KB=AK.DB+KD.AB$$

پس: $AD^2=BD^2+AB.BG$

حال روشی راکه ابوریحان باآن روش وتر°۳۶ را بدست آورده است بیان‌می‌کنیم. درشکل۳ فرض‌می‌کنیم که‌کمان DB دردایره‌ای به شعاع AD وسرکزAبرابر°۳۶باشد. حال‌دایرهٔ محیطی مثلث ADB رارسم‌می‌کنیم و G وسط‌کمان AB رابدست می‌آوریم . اما در دایرهٔ کوچکتر $\widehat{BD}=72^\circ$ و $\widehat{AB}=\widehat{AD}=144^\circ$ و ABG یک وتر شکسته است پس

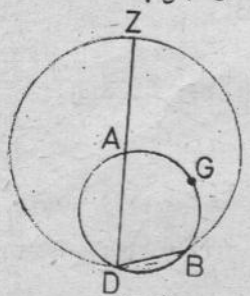
$$AD^2=BD^2+AB.BG$$

ویا $AD^2=BD^2+AD.DB=BD(AD+DB)$

پس :

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{BD}$$

دراین رابطه اگر شعاع دایره یعنی AD را واحد فرض‌کنیم $BD=x$ دوبرابرجیب°۱۸خواهد بود پس :



شکل۳

و یا $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\frac{1+x}{1}=\frac{1}{x}$$

با استفاده ازقضیهٔ‌فوق الذکر ابوریحان وتر °۷۲ووتر(°۶ - °۷۲) ووتر°۶ وهمچنین وتر°۳ را بدست‌می‌آورد و نشان می‌دهدکه می‌توان جدولی ازاندازهٔ وترهای مضرب°۳ تشکیل داد . اما ابوریحان روشی برای محاسبهٔ وتر°۱ بیان نکرده است وفقط بطور ضمنی متذکرشده‌است که‌بدست‌آوردن وتر°۱ قدری‌مشکل وپیچیده است .

۱) مجموعهٔ تهی عبارتست از پیشامد غیر ممکن ؛

$$P(\emptyset) = ۰$$

زیرا اگر A یك پیشامد نامشخص باشد $A «یا» \emptyset = A$

وچون A و $\emptyset$ ناهمسانند پس :

$$P(A «یا» \emptyset) = P(A)$$

$$P(A) + P(\emptyset) = P(A) \Longrightarrow P(\emptyset) = ۰$$

۲) هرگاه $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ سه پیشامد دوبه دوناهمسان باشد بقسمی که :

$$E = A_۱ «یا» A_۲ «یا» A_۳$$

خواهیم داشت :

$$P(E) = ۱ = P(A_۱) + P(A_۲) + P(A_۳)$$

این خاصیت غالباً «خاصیت احتمالات تام» نامیده‌می‌شوند .

مخصوصاً وقتی که A' پیشامد مخالف A باشد داریم:

$$E = A «یا» A' \Longrightarrow P(A) + P(A') = ۱$$

۳) هرگاه احتمالات اولیهٔ $P(e_۱)$ ، $P(e_۲)$ ، ...، $P(e_n)$ داده شده باشد ، احتمال هر پیشامدی‌که در آزمایش مفروض بوقوع بپیوند معین خواهد شد. مثلا اگر A پیشامد $\{e_۱ ، e_۲ ، e_۳\}$ باشد خواهیم داشت :

$$P(A) = P(e_۱) + P(e_۲) + P(e_۳)$$

۴) هرگاه $A \subset B$ باشددراین صورت : $P(A) < P(B)$

۴ـ حالت خاص وبسیار مهم مسائل مربوط به بازیها

هرگاه یك تاس بازی‌رابهترین ساخت‌رادرنظر بگیریم ، چون متقارن است حق‌داریم فکرکنیم‌که احتمالات مربوط به شش پیشامد اولیهٔ مربوط به‌آن متساویند . این امرنتیجه‌ای از مفهوم **کامل** است .

یك تاس (خیالی) **کامل** نامیده‌می‌شود هرگاه که فرض کنیم احتمالات مربوط به شش پیشامدآن باهم برابرند (این پیشامدهای اولیه‌هم‌احتمال نیزنامیده‌می‌شوند). ازروی‌آزمایش می‌توانیم معلوم‌کنیم‌که یك تاس حقیقی تاچه حدکم یا زیاد به وضع کامل‌بودن‌نزدیك‌است:اگردرجریان تعدادبسیار زیادی از آزمونها، فراوانیهای شش وجه خیلی بـه هم نزدیك باشند ، تاس‌موردآزمایش به حالت‌کامل نزدیك است. دراینجایادآوری می‌کنیم‌که درآزمایشی‌که توسط **بوفن** انجام‌گرفته شد ، در ۴۰۴۰ دفعه پرتاب یك سکه،۲۰۲۸مرتبه شیرآمدکه فراوانی نسبی‌آن ۰/۵۰۲ می‌شود؛ این عدد به عدد $\frac{۱}{۲}$ نزدیك است ، بنابراین سکهٔ موردآزمایش را می‌توان تقریباً کامل دانست .

مسائل مربوط‌به‌بازیها مسائلی نظری‌هستندکـه در آنها آزمایش شانسی عبارتست از: انداختن یك تاس ، انداختن یك سکه،بیرون‌کشیدن‌یك کارت‌ازمیان کارتهای‌بازی، بیرون‌کشیدن گلوله‌ای ازدرون یك‌کوزه، وازاین قبیل.این مسائل برمبنای این فرض قراردارندکه پیشامدهای اولیه هم احتمالند .

هرگاه n تعداد این پیشامدهای اولیهٔ :

$$\{e_n\}:\ldots،\{e_۲\}،\{e_۱\}$$

باشد داریم :

$$\begin{cases} P(e_۱) = P(e_۲) = \ldots = P(e_n) \\ P(e_۱) + P(e_۲) + \ldots + P(e_n) = ۱ \end{cases}$$

و نتیجه خواهد شد :

$$P(e_۱) = P(e_۲) = \ldots = P(e_n) = \frac{۱}{n}$$

هرگاه A پیش‌آمد نظیرزیر مجموعهٔ j عضوی :

$$A = \{e_{i_۱}، e_{i_۲}، \ldots، e_{i_j}\}$$

باشد (که حالت مساعد پیشامد A نام دارد)خواهیم داشت :

$$P(A) = P(e_{i_۱}) + P(e_{i_۲}) + \ldots + P(e_{i_j}) =$$

$$\frac{۱}{n} + \frac{۱}{n} + \ldots + \frac{j}{n} =$$

$$= \frac{\text{تعداد حالات مساعد پیشامد } A}{\text{تعداد حالات ممکن}}$$

هرچند که‌این رابطه ازروی نتایج مربوط به اصول موضوع‌و ازروی این فرض بدست‌آمدکه پیشامدهای اولیه هم‌احتمالند، اما از نظر تاریخی مدتها است‌کـه رابطهٔ مزبور برای تعریف احتمال یك پیشامد بکاررفته است .

۵ـ مثالهایی ازمسائل مربوط به بازیها

۱ـ تاسی را می‌اندازیم ، احتمال مربوط به‌آمدن‌هریك ازموارد زیر چقدر است :

الف ـ شمارهٔ۲

ب ـ شماره‌ای زوج

ج ـ شماره‌ای بیشتراز۴

پاسخ ـ پیشامدهای موردنظر عبارتنداز :

الف ـ $A = \{۲\}$ که‌یك پیشامد اولیه است :

$$P(A) = \frac{۱}{۶}$$

ب ـ $B = \{۲،۴،۶\}$ ،سه‌حالت‌مساعداز۶حالت‌ممکن:

$$P(B) = P\{۲،۴،۶\} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

ج ـ $C = \{۵،۶\}$ ، دوحالت مساعد :

$$P(C) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۲ـ از۳۲برگ بـازی یك برگ را بیرون می‌کشیم . احتمال مربوط به هریك از حالات زیرچقدر است :

الف ـ A = آس

ب ـ B = خشت

ج ـ C = سربازدل

پاسخ ـ دراینجا تعداد حالات ممکن ۳۲ است وداریم :

الف ـ حالات مساعد برای پیشامد A :

$$j(A) = ۴ \Longrightarrow P(A) = \frac{۴}{۳۲} = \frac{۱}{۸}$$

ب :

$$j(B) = ۸ \Longrightarrow P(B) = \frac{۸}{۳۲} = \frac{۱}{۴}$$

ج :

$$j(۳) = ۱ \Longrightarrow P(C) = \frac{۱}{۳۲}$$

۳ـ سه برگ از ۳۲ برگ بازی بیرون می‌کشیم . برای بوجودآمدن هریك ازحالتهای زیراحتمال چقدر است :

الف ـ ۳ آس (پیشامد A)

ب ـ ۲ شاه ویك بی‌بی (پیشامدB)

ج ـ حداقل یك سرباز (پیشامد C)

پاسخ ـ تعداد حالات ممکن عبارتست ازتعداد حالاتی که می‌توان ۳ برگ از ۳۲ برگ را انتخاب کرد وبرابر است با:

$$n = C^{۳}_{۳۲} = \frac{۳۲ \times ۳۱ \times ۳۰}{۱ \times ۲ \times ۳} = ۴۹۶۰$$

الف ـ تعداد حالات مساعد برای پیشامدA یعنی $j(A)$ برابراست با تعداد حالاتی که می‌توان ۳ برگ ازبین ۴ برگ آس انتخاب کرد :

$$j(A) = C^{۳}_{۴} = C^{۱}_{۴} = ۴$$

$$P(A) = \frac{۴}{۴۹۶۰} = \frac{۱}{۱۲۴۰}$$

ب ـ تعداد حالات انتخاب ۲ شاه از ۴ شاه برابر است با $C^{۲}_{۴} = ۶$ و تعداد حالات انتخاب یك بی‌بی از ۴ بی‌بی برابر است با $C^{۱}_{۴} = ۴$ پس :

$$j(B) = ۶ \times ۴ = ۲۴$$

$$P(B) = \frac{۲۴}{۴۹۶۰} = \frac{۳}{۶۲۰}$$

ج ـ روش اول : پیشامدهای زیررا درنظرمی گیریم :

$C_۱$: «ازبین سه برگ دقیقاً یك سربازداشته باشیم»

$C_۲$: «ازبین سه برگ دقیقاً دو سربازداشته باشیم»

$C_۳$: «ازبین سه برگ دقیقاً سه سربازداشته باشیم»

سه پیشامد بالا دو به دو ناسازگارند و :

$$C = C_۱ «یا» C_۲ «یا» C_۳$$

$$P(C) = P(C_۱) + (C_۲) + P(C_۳)$$

تعداد حالات انتخاب یك سرباز ازبین ۴ سرباز ۴ است وتعداد حالات انتخاب ۲ برگ دیگرازبین ۲۸ برگ دیگربرابر است با $C^{۱}_{۲۸} = ۳۷۸$ و :

$$j(C_۱) = ۴ \times ۳۷۸ \Longrightarrow P(C_۱) = \frac{۴ \times ۳۷۸}{۴۹۶۰}$$

به همین ترتیب داریم :

$$j(C_۲) = C^{۲}_{۴} \times C^{۱}_{۲۸} = ۶ \times ۲۸$$

$$P(C_۲) = \frac{۶ \times ۲۸}{۴۹۶۰}$$

$$j(C_۳) = C^{۳}_{۴} = C^{۱}_{۴} = ۴$$

$$P(C_۳) = \frac{۴}{۴۹۶۰}$$

$$P(C) = P(C_۱) + P(C_۲) + P(C_۳) = \frac{۴۲۱}{۱۲۴۰}$$

روش دوم : ساده‌تر آنست که پیشامد مخالف C یعنی C' به شرح زیررا درنظربگیریم :

C' : «دربین سه برگ هیچ برگ سربازنباشد» ؛

تعداد حالات انتخاب ۳ برگ از ۲۸ برگ می‌شود :

$$j(C') = \frac{۲۸ \times ۲۷ \times ۲۶}{۱ \times ۲ \times ۳} = ۲۸ \times ۱۳ \times ۹$$

$$P(C') = \frac{۲۸ \times ۹ \times ۱۳}{۴۹۶۰} = \frac{۸۱۹}{۱۲۴۰}$$

$$P(C) = ۱ - P(C') = \frac{۴۲۱}{۱۲۴۰}$$

۴ـ یك تاس قرمزویك تاس سفیدرا همزمان می‌اندازیم. احتمال مربوط به هریك ازموارد زیرچیست :

الف ـ یك جفت (دوشمارهٔ برابر) = پیشامد $A_۱$

ب ـ ۲و۵ = $A_۲$

ج ـ ۲ی قرمز و۵سفید = $A_۳$

د ـ مجموعی برابر ۷ = B

ه ـ مجموعی حداکثربرابر با۳ = C

و ـ مجموعی حداکثربرابر با۱۱ = D

پاسخ ـ هرحالتی ازتاس قرمزبرای تاس سفید پیش‌آید ،

پس ۳۶ = ۶ × ۶ حالت ممکن هم احتمال وجود دارد به ترتیب زیر :

(۱و۶)و(۱و۵)،(۱و۴)،(۱و۳)،(۱و۲)،(۱و۱)

(۲و۶)،(۲و۵)،(۲و۴)،(۲و۳)،(۲و۲)،(۲و۱)

(۳و۶)،(۳و۵)،(۳و۴)،(۳و۳)،(۳و۲)،(۳و۱)

(۴و۶)،(۴و۵)،(۴و۴)،(۴،۳)،(۴و۲)،(۴و۱)

(۵و۶)،(۵و۵)،(۵و۴)،(۵و۳)،(۵و۲)،(۵و۱)

(۶و۶)،(۶و۵)،(۶و۴)،(۶و۳)،(۶و۲)،(۶و۱)

نشانهٔ مثلا (۳و۲) به این معنی است که از تاس قرمز شمارهٔ۲واز تاس سفید شمارهٔ۳آمده است .

الف ـ درجدول بالا تعداد۶ جفت وجوددارد :

$$j(A_1) = ۶ \Longrightarrow P(A_1) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

ب ـ تعداد حالات مساعد برایA_2دوعدد است:(۵و۲) و (۲و۵)

$$A_2 = \{(۲و۵)،(۵و۲)\}$$

$$j(A_2) = ۲ \Longrightarrow P(A_2) = \frac{۲}{۳۶} = \frac{۱}{۱۸}$$

ج ـ $A_3 = \{(۲و۵)\}$ که یك پیشامد اولیه است :

$$P(A_3) = \frac{۱}{۳۶}$$

د ـ حالات مساعد برای پیشامد B عبارتند از

(۱و۶)،(۲و۵)،(۳و۴)،(۴و۳)،(۵و۲)،(۶و۱)

$$j(B) = ۶ و P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

هـ ـ داریم :

$$C = C_1 «یا» C_2$$

$C_1 =$ «مجموعی برابر با۲»

$C_2 =$ «مجموعی برابر با۳»

$$j(C_1) = ۱ ، P(C_1) = \frac{۱}{۳۶}$$

$$j(C_2) = ۲ ، P(C_2) = \frac{۲}{۳۶}$$

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) = \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

و ـ ساده‌تر بنظر می‌رسد که پیشامدمخالف‌رادرنظر بگیریم:

$D' =$ «مجموعی برابر با۱۲»

$$j(D') = ۱ ، P(D') = \frac{۱}{۳۶}$$

$$P(D) = ۱ - P(D') = \frac{۳۵}{۳۶}$$

۵ـ کوزه‌ای شامل ۵ مهرهٔ سفید و۳ مهرهٔ قرمزاست :

الف ـ دو مهره بیرون می‌آوریم ؛ احتمال اینکه هردو سفید باشند (پیشاید A) چیست ؟

ب ـ یك‌مهره‌بیرون‌می‌آوریم‌وپس‌ازمشاهدهٔ رنگ‌آن‌آن‌را مجدداً درکوزه‌می‌اندازیم،آنگاه مجدداً مهره‌ای‌ازکوزه‌بیرون آورده‌و رنگ‌آن‌رامشاهده‌می‌کنیم؛ احتمال‌اینکه هردومهره سفید باشند (پیشامد B) چیست؟

پاسخ - الف : تعداد حالات ممکن برابر است با تعداد حالاتی که می‌توان ۲ را از بین ۸ مهره انتخاب‌کرد و برابر است با $C^{۲}_{۸}$

$j(A) =$ تعداد حالات مساعد برابراست باتعداد حالات انتخاب۲مهره‌از۵مهره وبرابر است با $C^{۲}_{۵}$

$$P(A) = \frac{C^{۲}_{۵}}{C^{۲}_{۸}} = \frac{۵ \times ۴}{۱ \times ۲} : \frac{۸ \times ۷}{۱ \times ۲} = \frac{۵}{۱۴}$$

ب ـ برای انتخاب اولین مهره۸حالت وبرای انتخاب دومین مهره نیز۸حالت وجود دارد. پس تعداد حالات ممکن ۶۴ = ۸ × ۸است. برای انتخاب یك مهره ازبین۵مهرهٔ سفید ۵ حالت وبرای تکرارآن نیز۵ حالت وجود دارد پس :

$$j(B) = ۵ \times ۵ \Longrightarrow P(B) = \frac{۲۵}{۶۴}$$

۶ـ بعد ازسرشماری ۵۰ خانوار سری زیر برای تعداد فرزندان‌آنها بدست‌آمده است :

۳،۳،۱،۰،۴،۶،۵،۶،۲،۱،۱،۵،۰،۱،۰،۲،۳،۲،۲،۱،۴،۰،
۵،۱،۱،۰،۱۰،۳،۲،۱،۲،۲،۴،۸،۲،۱،۱،۰،۱،۱،۰،۰،۱،
۳،۴،۴،۰،۲

توزیع‌خانواده‌های‌بالاازنظر تعدادفرزندان طبق جدول‌زیراست:

تعداد فرزندان	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد خانوار	۱۰	۱۴	۹	۶	۵	۳	۲	۰	۱

یکی ازخانوارها را درنظرمی‌گیریم . احتمال مربوط به هریك ازپیشامدهای زیرچیست؟

الف ـ A : ۳ فرزند داشته باشد .

ب ـ B : ۱یا۲فرزند داشته باشد .

ج ـ C : ۷فرزند داشته باشد .

پاسخ ـ در اینجا پیشامدهای اولیه عبارتند از « اولین خانوار باشد» ، «دومین خانوار باشد» ،...، «پنجاهمین‌خانوار

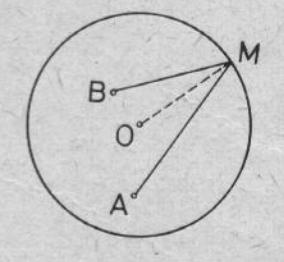
(بقیه در صفحهٔ ۵۹۸)

حل جبری مسئلهٔ ابن هیثم

دکتر علیرضا امیر معز
دانشگاه تك تكزاس

حل جبری مسئلهٔ دوم ابن هیثم مطالب جالب توجهی دارد. ازاین لحاظ آنرا بررسی می کنیم .

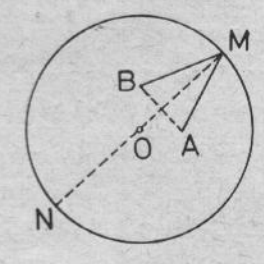
۱ـ مسئله :



دایره‌ای به‌مرکز O و به شعاع $r = ۱$ ودو نقطهٔ A و B درون آن داده شده است. نقطهٔ M را روی دایره چنان پیدا کنید که خط OM نیمساز زاویهٔ AMB شود .

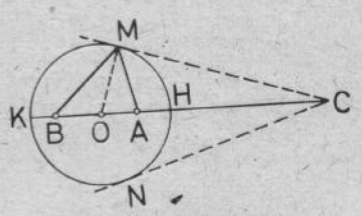
این مسئله درحالت کلی حل هندسی (باخط کش وپرگار) ندارد وحل جبری آن به حل معادله‌ای درجهٔ چهارم بدل می‌شود. مطلبی که قابل توجه است این است که بعضی از حالات خاص که حل هندسی دارند راه تجزیهٔ کثیر الجملهٔ درجهٔ چهارم مربوطه را نشان می‌دهند .

۲ـ حالت خاص I ـ فرض کنیم که $OA = OB$ باشد



در این صورت عمود منصف پاره خط AB دایره رادر دو نقطهٔ M و N قطع می کند. به‌سادگی می‌توان نشان داد که این دو نقطه هردو جوابهای مسئله‌اند .

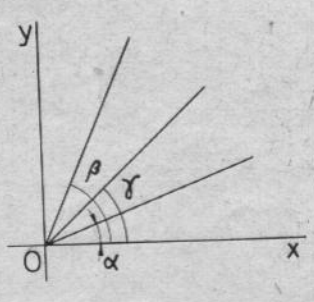
۳ـ حالت خاص II ـ فرض کنیم که سه نقطهٔ A، O و B بریك استقامت باشند. در این صورت C، مزدوج توافقی O نسبت به A و B رابدست می‌آوریم. از نقطهٔ C مماسهای CM و CN رابردایره



رسم می کنیم. به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که نقاط M و N جوابهای مسئله‌اند .

خط AB دایره را دردو نقطهٔ H و K قطع می کند. البته این دو نقطه هم جواب مسئله‌اند . البته این دو جواب زیاد جالب نیستند ولی در حل معادلهٔ درجهٔ چهارم که مربوط به این حالت می‌شود کاملا سودمندند. اکنون برای حالت کلی روش هندسهٔ تحلیلی بکار می‌بریم .

۴ـ ضریب زاویهٔ نیمساز ـ دو خط باضریب زاویه‌های m_1 و m_2 مفروضند . ضریب زاویهٔ نیمساز زاویهٔ بین این دو خط را پیدا کنید .



حل ـ چون زاویهٔ تحت انتقال ثابت می‌ماند می‌توان این خطوط را مار بر مبدأ مختصات گرفت . فرض کنیم که زوایای دو خط داده‌شده بامحور x به ترتیب α و β باشند. همچنین فرض کنیم که زاویهٔ منصف‌الزاویه بامحور x، γ باشد. بنابراین :

$$۲\gamma = \alpha + \beta$$

ازاینرو بدست می‌آید که :

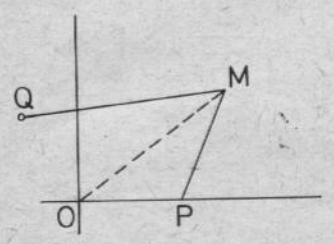
$$\frac{۲tg\gamma}{۱ - tg^{۲}\gamma} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{۱ - tg\alpha tg\beta}$$

با لنتیجه

$$\frac{۲m}{۱ - m^{۲}} = \frac{m_1 + m_2}{۱ - m_1 m_2}$$

واضح است که معادلهٔ بالا نسبت به m از درجهٔ دوم است وحل آن منجر به بدست‌آوردن ضریب زاویه‌های هردو منصف‌الزاویه می‌شود .

۵ـ مکان هندسی



فرض کنیم که P، Q و O سه نقطهٔ ثابت درصفحه باشند . مکان هندسی نقطهٔ M رابدست آورید بقسمی که خط MO نیمساز گوشهٔ PMQ باشد.

حل- دستگاه مختصاتی انتخاب می‌کنیم که O مبدأ آن ونقطهٔ P روی محور x باشد. به این ترتیب اگر هرنقطه را برابر مجموعهٔ مختصاتش بگیریم می‌توان فرض کرد که :

$M=(x,y)$ و $P=(h,O)$ و $Q=(l,k)$.

ضریب زاویه‌ایهای خطوط OM و PM و QM به ترتیب

$$\frac{y-k}{x-l} \quad \text{و} \quad \frac{y}{x-k} \quad \text{و} \quad \frac{y}{x}$$

است وبنا به قسمت ۴ رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\frac{2\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}=\frac{\frac{y}{x-h}+\frac{y-k}{x-l}}{1-\frac{y(y-k)}{(x-h)(x-l)}}$$

این تساوی به حقیقت معادلهٔ مکان هندسی است . ولی آنرا ساده می‌کنیم ومعادلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$kx^2-(l+h)y^2-(l+h)x^2y+kxy^2-hkx^2+hky^2+2lhxy=0$$

این معادله را می‌توان به صورت پارامتری زیردرآورد :

$$\begin{cases} x=\dfrac{hkt^2+2lht-hk}{(l+h)t^3-kt^2+(l+h)t-k} \\ y=\dfrac{hkt^3+2lht-hkt}{(l+h)t^3-kt^2+(l+h)t-k} \end{cases}$$

۶- حل مسئله- هرگاه دایره را به معادلهٔ $x^2+y^2=1$ بگیریم حل مسئلهٔ ابن‌هیثم به حل دستگاه زیر بدل می‌شود :

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ kx^3-(l+h)y^3-(l+h)x^2y+kxy^2-hkx^2+ \\ \qquad +hky^2+2lhxy=0 \end{cases}$$

حل این دستگاه منجر به حل معادلهٔ درجهٔ چهارم زیر می‌شود :

$$4h^2(k^2+l^2)x^4-4[lh(l+h)+hk^2]x^3$$
$$+[(l+h)^2-4l^2h^2+k^2-4h^2k^2]x^2$$
$$+[4lh(l+h)+2hk^2]x-(l+h)^2+h^2k^2=0$$

۷- بحث- هرگاه حالت خاص II را درنظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که $k=0$ است. ومعادلهٔ درجهٔ چهارم به

$$(x^2-1)[2lhx-(l+h)]^2=0$$

بدل می‌شود که چهارجواب مربوطه را می‌دهد. البته تجزیهٔ بالا ازروی حل هندسی نوشته‌شده وخواننده می‌تواند آنرا ثابت کند.

برای حالت I باید $h^2=l^2+k^2$ گرفت که آنرا به خواننده واگذار می‌کنیم.

البته بحث مسئله بطور کلی خیلی طولانی است ومنجر به بحث جوابهای یک معادلهٔ درجهٔ چهارم می‌شود. ازآن صرف نظر می‌کنیم.

چنانکه بنظر می‌رسد حل جبری مسئله قیدی بر نقاط A و B نمی‌گذارد. بنابراین بحث اینکه نقاط A و B کجا قرار داشته باشند نیزجالب توجه است .

«ساده ترین طریقهٔ اثبات قضیهٔ اولر»

ترجمهٔ ، فتح‌الله زرگری

قضیه : عـدد $4mn - m - n$ به ازاء هیچ مقدار صحیح و مثبت m و n نمی‌تواند مربع کامل باشد .

اثبات : فرض‌کنیم m و n اعداد طبیعی باشند . حاصل ضرب اعداد $4m - 1$ و $4n - 1$ را درنظر می گیریم ؛

$$(4m-1)(4n-1) = 16mn - 4m - 4n + 1 =$$
$$= 4(4mn - m - n) + 1$$

حال فرض‌کنیم

$$4mn - m - n = z^2$$

باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$(4m-1)(4n-1) = 4z^2 + 1 = x^2 + 1$$

که درآن $x = 2z$ است .

بنابراین :

$$(4m-1)(4n-1) = x^2 + 1$$

و معلوم است‌که x و یك نسبت به هم اولند. ازاینجا برمی‌آید که اعداد $4m - 1$ و $4n - 1$ باید مقسوم‌علیه های مجموع دو مربع یعنی $x^2 + 1$ باشند و بنا به قضیهٔ فرما این غیرممکن است .

[قضیهٔ فـرما : هیچ عدد صحیح بـه صورت $4a - 1$ نمی‌تواند مقسوم علیه‌مجموع دو مربع کامل باشد. زیرا عددی به صورت $4a - 1$ همیشه دارای مقسوم علیه صحیح به همان شکل است بنابراین مجموع دو مربع کامل برعددی به صورت $4a - 1$ بخش پذیر نیست.

اگر عددی به صورت $4a - 1$ دارای مقسوم علیـه صحیحی به‌همان‌شکل نباشددر این‌صورت دارای‌مقسوم‌علیهی‌فقط به‌صورت $4p + 1$ خواهدبود. به‌این‌ترتیب حاصل‌ضرب‌مقسوم‌علیه‌های‌عدد $4a - 1$ باید به صورت $4l + 1$ باشند و داریم :

$$4a - 1 = 4l + 1$$

و ازآنجا

$$4a - 4l = 2$$

ویا $a - l = \frac{1}{2}$ که به ازاء مقـادیر صحیح a و l غیـر ممکن است] .

می‌توان قضیه را به صورت زیرثابت‌کرد:

اگر $4m - 1$ و x هردو صحیح باشند عدد

$$4mn - mx^2 - n$$

به ازاء هیچ مقدار m و n و x نمی‌تواند مربع کامل باشد .

اثبات : فرض کنیم m و n و x اعداد طبیعی باشند . حاصل‌ضرب اعداد

$$4n - x^2 \text{ و } 4m - 1$$

راتشکیل می‌دهیم؛

$$(4m-1)(4n-x^2) = 4(4mn - mx^2 - n) + x^2$$

فرض می‌کنیم‌که

$$4mn - mx^2 - n = z^2$$

باشد در این صورت

$$(4m-1)(4n-x^2) = 4z^2 + x^2 =$$
$$= (2z)^2 + x^2 = x^2 + y^2$$

که درآن $y = 2z$ است. ازآنجا روشن است‌که عدد $4m - 1$ باید مقسوم علیه مجموع دو مربع $x^2 + y^2$ باشد. وچون عدد $4m - 1$ و x هردو صحیح‌اند بنابراین $4m - 1$ و y هر دو صحیح هستند. که از تساوی زیرپیداست:

$$(4m-1)(4n-x^2) = x^2 + y^2$$

که اعداد x و y بر $4m - 1$ ودرنتیجه $x^2 + y^2$ بر $4m - 1$ بخش پذیر نیستند. اگر $x = 1$ بگیریم دراین‌صورت به سادگی بدست می‌آوریم که :

$$4mn - m - n \neq z^2$$

مطالبی دربارهٔ حد

ترجمهٔ : سعید شعاری نژاد

I- قدر مطلق و خواص آن

قبل از شروع بحث دربارهٔ حد ، باید مطالبی دربارهٔ قدر مطلق وخواص آن ذکر کنیم .

۱- تعریف- قدر مطلق یك عدد جبری عدد حسابی موجود درآن است. اگر عدد مخالف صفر باشد قدر مطلق آن مثبت و اگر برابر صفر باشد قدر مطلق آن نیز برابر باصفر است .

یعنی؛ اگر $\alpha > ۰$ باشد $|\alpha| = \alpha$ و اگر $\alpha < ۰$ باشد $|\alpha| = -\alpha$ و برای $\alpha = ۰$ داریم $|\alpha| = ۰$ مثلا ؛ $|۰| = ۰$ و $|-۳| = ۳$ و $|۷| = ۷$

۲- خواص قدر مطلق

الف - قدر مطلق مجموع اعداد بزرگتر از جمع قدر مطلقهای آنها نیست ؛ یعنی :

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

اگر a و b هردو مثبت یا هر دو منفی باشند مجموع قدر مطلقهای آنها با قدر مطلق مجموع آنها برابر است یعنی:

$$ab > ۰ \Longrightarrow |a+b| = |a| + |b|$$

مثلا اگر $a = -۳$ و $b = -۷$ باشد داریم :

$$|(-۷)+(-۳)| = |-۷| + |-۳|$$

زیرا $|(-۷)+(-۳)| = |-۱۰| = ۱۰$

$$|-۷| + |-۳| = ۷ + ۳ = ۱۰$$

اگر a و b مختلف‌العلامت باشند ، قدر مطلق حاصل جمع آنها از حاصل جمع قدرمطلقهای آنهاکوچکتر است.

مثلا، $a = -۷$ و $b = ۳$ باشد داریم :

$$|-۷| + |۳| = ۷ + ۳ = ۱۰$$

$$|(-۷)+(+۳)| = |-۴| = ۴$$

پس می‌توان نوشت :

$$ab < ۰ \Longrightarrow |a+b| < |a| + |b|$$

تعمیم - درمورد چند عدد داریم :

$$|a+b+c+\ldots+k| \leqslant |a| + |b| + |c| + \ldots + |k|$$

ب - قدرمطلق تفاضل دوعدد بزرگتریامساوی باتفاضل قدر مطلقهای هریك ازآنها است؛ یعنی

$$|a-b| \geqslant |a| - |b| \quad \text{یا} \quad |a-b| \geqslant |b| - |a|$$

برای اثبات این رابطه فرض می‌کنیم‌که $a - b = c$ پس :

$$a = b + c \Longrightarrow |a| \leqslant |b| + |c|$$

ویا می‌توانیم بنویسیم:

$$|a| - |b| \leqslant |c|$$

یا

$$|a| - |b| \leqslant |a-b|$$

قدرمطلق جمع جبری دوعدد با تغییر علامت‌آنها تغییرنمی‌کند پس می‌توان نوشت:

$$|a-b| = |b-a| \quad \text{یا} \quad |b| - |a| \leqslant |b-a|$$

همینطور نامساوی زیرنیز محقق است :

$$|a-b| \geqslant |b| - |a|$$

اختلاف $|a| - |b|$ با $|b| - |a|$ فقط دریك علامت منفی است .

ج - قدرمطلق حاصل‌ضرب‌دوعدد مساوی‌باحاصل‌ضرب قدر مطلقهای‌آنها است؛ یعنی :

$$|a \times b| = |a| \times |b|$$

د - قدرمطلق یك‌کسرمساوی باخارج‌قسمت‌قدرمطلقهای صورت ومخرج آن‌است‌یعنی:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

ه - قدر مطلق عددی‌که به توان n برسد برابراست با قدر مطلق همان عدد به توان n :

$$|a^n| = |a|^n$$

II- حد یك مجموع جبری

قضیه - مجموع جبری چندین متغیرکه هرکدام ازآنها دارای حدی هستند؛

۱- دارای حداست .

۲- حد آن مساوی است با مجموع حدهای یك به یك متغیرها .

اثبات - قبول می‌کنیم‌که متغیرهای x و y و z دارای

حدهائی به ترتیب برابر با a و b و c هستند.

متغیرها را با α و β و γ که مقادیر فوق‌العاده کوچکی هستند جمع کرده و می‌نویسیم:

$$x = a + \alpha$$
$$y = b + \beta$$
$$z = c + \gamma$$

اول دو تساوی اولی و دومی را باهم جمع می‌کنیم و سپس سومی را ازمجموع آنهاکم می‌کنیم، چون مقدار $(\alpha + \beta - \gamma)$ بسیارکوچك است، بنابراین مقدار $(a + b - c)$ مساوی است با حد متغیر $(x + y - z)$ یعنی:

$$\lim(x + y - z) = a + b - c$$

یا

$$\lim(x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z$$

III ـ حد عبارتی به صورت حاصل ضرب

قضیهـ حاصل‌ضرب چند متغیرکه هرکدام ازآنهادارای حدی هستند؛

۱ـ دارای یك حداست.

۲ـ حدآن برابر است با حاصل‌ضرب حدهای متغیرها.

اثبات ـ ابتدا ما قضیه را برای‌دو متغیر x و y ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم‌که مقادیر x وy دارای حدهائی برابر a و b هستند.پس می‌توانیم بنویسیم:

$$x = a + \alpha$$
$$y = b + \beta$$

که α وβ مقادیر فوق‌العاده‌کوچك هستند.

یك طرف تساویهارا درهم ضرب می‌کنیم:

$$xy = ab + (\alpha b + a\beta + \alpha\beta)$$

چون مقدار $(\alpha b + \beta a + \alpha\beta)$ فوق‌العاده کوچك است پس:

$$\lim(xy) = a \times b$$

یا

$$\lim(xy) = \lim x \times \lim y$$

درمورد سه متغیر خواهیم داشت:

$$\lim(x \times y \times z) = \lim[(x \times y) \times z] =$$
$$= \lim(x \times y) \times \lim z = \lim x \times \lim y \times \lim z$$

نتیجهٔ ۱ـ اگرc مقدار ثابت باشد $\lim c = c$ وداریم

$$\lim(c \times x) = \lim c \times \lim x = c \lim x$$

نتیجهٔ ۲ـ اگر متغیری‌دارای حد باشد هرتوان صحیح ومثبت‌آن نیزدارای حداست واین حدبرابراست باتوان مزبور ازحدمتغیر:

$$\lim(x^n) = \lim(\underbrace{x \times x \times x \ldots \times x}_{n \text{ مرتبه}}) =$$
$$= \underbrace{\lim x \times \lim x \times \ldots \times \lim x}_{n \text{ مرتبه}} = (\lim x)^n$$

که n عدد صحیح مثبت است.

IV ـ حد خارج قسمت دومتغیر

قضیهٔ ۱ـ اگر متغیری مانند x دارای حدی برابر باa باشد درصورتی‌که a مخالف صفر باشددرآن صورت عکس x یعنی $\frac{1}{x}$:

۱ـ دارای حد است.

۲ـ حدآن برابر با $\frac{1}{a}$ یعنی عکس حد متغیر است.

اثبات ـ اگر $a \neq 0$ باشد $a > 0$ یا $a < 0$ است. اگر a مثبت باشد دراین صورت داریم:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a - x}{ax}$$

اختلاف $a - x$ مقدار بینهایت کوچکی است و درنتیجه:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a - x}{ax} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{ax} \times a$$

و می‌توان نوشت:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$$

زیرا $\frac{1}{ax} \times a$ مقدار فوق‌العاده‌کوچکی می‌باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim \frac{1}{x} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim x}$$

قضیهٔ ۲ـ اگر مقسوم علیه ومقسوم هردو متغیر باشند ودارای حد باشند وحد مقسوم علیه مساوی با صفر نباشد، درآن صورت:

۱ـ خارج قسمت دارای حد است.

۲ـ حد خارج قسمت مساوی است با خارج قسمت حد مقسوم برحدمقسوم علیه.

اثبات ـ ابتدا عبارت $\frac{y}{x}$ را به صورت $\frac{1}{x} \times y$ می‌نویسیم بنا به قضیهٔ قبل داریم:

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right) = \lim\left(\frac{1}{x} \times y\right) = \lim\frac{1}{x} \times \lim y =$$
$$= \frac{1}{\lim x} \times \lim y = \frac{\lim y}{\lim x}$$

مثالها :

۱ـ حد عبارت زیررا بدست‌آورید:

$$\lim_{x\to ۲}\left[\frac{x^۲-۳x+۲}{۲x^۲-۵x+۲}\right]=?$$

حل ـ مقدار x را درعبارت قرار می‌دهیم؛

$$\lim_{x\to ۲}\left[\frac{x^۲-۳x+۲}{۲x^۲-۵x+۲}\right]=\frac{۴-۶+۲}{۸-۱۰+۲}=\frac{۰}{۰}$$

چون $\frac{۰}{۰}$ به صورت مبهم است می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to ۲}\left[\frac{x^۲-۳x+۲}{۲x^۲-۵x+۲}\right]=\lim_{x\to ۲}\left[\frac{(x-۲)(x-۱)}{۲(x-۲)(x-\frac{۱}{۲})}\right]$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left[\frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(۲x-۱)}\right]=\lim_{x\to ۲}\left[\frac{x-۱}{۲x-۱}\right]=$$

$$=\frac{۲-۱}{۴-۱}=\frac{۱}{۳}$$

۲ـ حد عبارت زیررا تعیین کنید:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-۵}{x+۸}\right]$$

حل ـ وقتی x فوق‌العاده بزرگ می‌شود دو عبارت $(x-۵)$ و $(x+۸)$ فوق‌العاده بزرگ می‌شوند در نتیجه داریم :

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-۵}{x+۸}\right]=\frac{\infty}{\infty}$$

می‌توانیم بنویسیم :

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-۵}{x+۸}\right]=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{۱-\frac{۵}{x}}{۱+\frac{۸}{x}}\right|=$$

$$=\frac{۱-۰}{۱+۰}=۱$$

۳ـ حد مجموع جبری زیر را بدست‌آورید.

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{۱}{x-\alpha}+\frac{x-۳\alpha}{x^۲-\alpha^۲}\right]$$

حل ـ اگر $x\to\alpha$ آن وقت $x-\alpha\to ۰$ و :

$x^۲-\alpha^۲\to ۰$ و $x-۳\alpha\to -۲\alpha$

درنتیجه

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{۱}{x-\alpha}+\frac{x-۳\alpha}{x^۲-\alpha^۲}\right]=\frac{۱}{۰}+\frac{-۲\alpha}{۰}=\infty+\infty$$

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{۱}{x-\alpha}+\frac{x-۳\alpha}{x^۲-\alpha^۲}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{x+\alpha+x-۳\alpha}{(x-\alpha)(x+\alpha)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{۲(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x+\alpha)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{۲}{x+\alpha}=\frac{۲}{\alpha+\alpha}\right]=\frac{۱}{\alpha}$$

تمرینات

حد عبارات زیررا بدست‌آورید.

۱- $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲\sqrt{۲}}$ و $\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}$ و ....

۲- ۰/۲ و ۰/۲۳ و ۰/۲۳۳ و ۰/۲۳۳۳ و ...

۳- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n^۲}+\frac{۲}{n^۲}+\frac{۳}{n^۲}+\dots+\frac{n-۱}{n^۲}\right)$

۴- $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{۱+۳+۵+۷+\dots+(۲n-۱)}{n+۱}-\frac{۲n+۱}{۲}\right]$

۵- $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{n^۳}\right]$

۶- $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+(-۱)^n}{n-(-۱)^n}\right]$

۷- $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{۲^{n+۱}+۳^{n+۱}}{۲^n+۳^n}\right]$

۸- $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+۱)^۲}{x^۲+۱}\right]$

۹- $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{۱۰۰۰x}{x^۲-۱}\right]$

۱۰- $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^۲-۵x+۱}{۳x+۷}\right]$

۱۱- $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{۲x+۳}{x+\sqrt{x}}\right]$

۱۲- $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right]$

۱۳- $\lim\limits_{n\to 7}\left[\dfrac{2-\sqrt{n-3}}{n^2-49}\right]$

۱۴- $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}\right]$

۱۵- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right]$

۱۶- $\lim\limits_{x\to 4}\left[\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\right]$

۱۷- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}\right]$

۱۸- $\lim\limits_{x\to \alpha}\left[\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}\right]$

۱۹- $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$

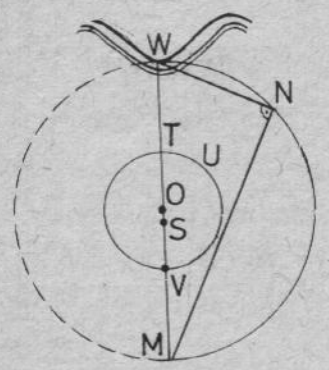
۲۰- $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\,n\pi}{x+2}$

۲۱- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc}tg\,2x}{\sin 3x}$

۲۲- $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,tg\dfrac{\pi x}{2}$

صد مسئله ... (بقیه از صفحهٔ ۵۸۰)

زاویهٔ قائمهٔ MNW محاط در دایرهٔ به قطر MW را بپیماید. چون این مسیر باید حداقل ممکن باشد ، زاویهٔ WMN نیز باید کوچکترین مقدار ممکن باشد. همچنین باید که کشتی بتواند از دست نگهبان فرار کند؛ بنا براین مسیرش نباید دایرهٔ TuV را قطع کند، دایرهٔ اخیر مکان هندسی نقاطی مانند P است بطوری که کشتی و نگهبان که به ترتیب از M و S باسرعت ماکزیمشان



حرکت کرده‌اند بتوانند در P به‌هم برسند. مرکز این دایره نقطهٔ O است که موضعش در روی MN بوسیلهٔ روابط زیر مشخص می‌شود: $OT = OV$، $MV = 3SV$، $MT = 3ST$ و از آنجا: $MO = \dfrac{9MV}{16}$، وشعاع این دایره برابر با $\dfrac{3MV}{16}$ است .

اگر قطعه خط MN مماس بر دایرهٔ TuV باشد، طول راه کشتی قاچاقچی برابر بود با: $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{3}MV$ اگر MN با دایرهٔ TuV نقطهٔ مشترکی نداشته باشد، طول مسیر بزرگتر از $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{3}MV$ خواهد بود. بازهم باید تحقیق کنیم که اگر MN بقدر کافی به دایرهٔ TuV نزدیک شود ، نگهبان دیگر نمی‌تواند به کشتی در روی قطعه خط NW برسد . این اثبات را به خواننده واگذار می‌کنیم .

در بارهٔ کسر متناوب (بقیه از صفحهٔ ۵۶۸)

گردش آن عدد خواهد بود که از رابطهٔ « $10^i \equiv 1 \pmod{c}$ » بدست می‌آید .

[توضیح: «$10^i \equiv 1 \pmod{c}$» یعنی باقیماندهٔ تقسیم 10^i بر c برابر ۱ است] چنانکه ملاحظه می‌شود پیدا کردن عدد i بخصوص برای کسرهایی که دورهٔ گردش آنها طولانی است خیلی مشکل می‌باشد وحتی ماشینهای حساب معمولی ازعهدهٔ انجام این کار برنمی‌آیند .

بنابراین روشی که ما قبلا برای بدست‌آوردن تعداد ارقام دورهٔ گردش کسرهای اول بیان کردیم بهتر از روشی است که در کتاب نظریهٔ اعداد آورده شده است .

خلاصه

۱- نمای ۲ یا ۵ هرکدام که بزرگتر است نشان دهندهٔ تعداد رقمهای جزء غیر گردش است .

۲- جمله‌های ۲ و ۵ دخالتی در تعیین تعداد ارقام دورهٔ گردش کسر متناوب ندارند .

۳- تعداد ارقام دورهٔ گردش کسر $\left(\dfrac{1}{A}\right)^B$ برابر است با:

$$A^{(B-1)}\cdot P\left(\frac{1}{A}\right)$$

که در آن A عدد اولی غیر از ۲ و ۳ و ۵ و $B>1$ است .

۴- تعداد ارقام دورهٔ گردش قوای ۳ از رابطهٔ $3^{(B-2)}$ باشرط $B\geqslant 2$ بدست می‌آید .

۵- تعداد ارقام دورهٔ گردش یك کسر کوچکترین مضرب مشترك تعداد ارقام دوره‌های گردش عوامل اول آن می‌باشد .

۶- تعداد ارقام دورهٔ گردش کسر اول $\dfrac{1}{z}$ برابر $\dfrac{z-1}{N}$ می‌باشد که در آن N عددی صحیح ومثبت است

درسی از حساب

دربارهٔ کسر اعشاری متناوب

ترجمه و تنظیم از : **مقصود عین‌اللهی**

دراین مقاله کسرهای اعشاری متناوب را بررسی می‌کنیم و فرمولی برای تعیین دورهٔ گردش کسرها ارائه خواهیم داد. قبل ازبیان این فرمول معنی چند اصطلاح راکه دراین مقاله بکار خواهیم بردبیان می‌کنیم. درنمایش اعشاری کسرمتعارفی مجموعهٔ اعدادی که تکرار می‌شوند **دورهٔ گردش** خوانده می‌شود و مقصوداین مقاله تعیین تابعی ازPاست که نمایندهٔ دورهٔ گردش کسرباشد. در ضمن مجموعهٔ رقمهایی که بین ممیزواولین دورهٔ گردش قرار گرفته **جزء غیر گردش**، کسری راکه دورهٔ گردش آن صفرباشد «کسرمولد اعشاری تحقیقی»، کسری که پس از ساده شدن مخرج آن عدداول باشد «کسراول» ونیز کسرهایی که مخرجشان قوای عوامل اول باشد «کسرمرکب» خوانده می‌شوند. مخرج هرکسر به‌صورت حاصل‌ضرب چند عامل اول نشان داده خواهد شدکه هرعدد اول یك «عامل» و هرعامل بانمای آن یك «جمله» نامیده می‌شود. مثال :

اعشاری تحقیقی $\frac{1}{8} = 0/125$

(تکرار می‌شود) $\frac{1}{6} = 0/16666\ldots = 1/\overline{6}$

کسراول $\frac{2}{7}$

کسرمرکب $\frac{5}{6}$

دورهٔ گردش کسرمرکب

هدف این بررسی تعیین رابطه‌ای بین دورهٔ گردش کسر متناوب وعوامل اول آن می‌باشد. باتوجه به این نکته که صورت کسردخالتی دردورهٔ گردش کسر ندارد ودورهٔ گردش کسرتنها به مخرج آن وابسته است، ابتداکسرهایی راکه تحقیقی خواندیم بررسی می‌کنیم. هرکسری مولد اعشاری تحقیقی خواهدبوداگر وفقط اگرمخرج آن عاملی جز۲و۵ نداشته باشد، وتوان۲یا۵، آنکه بزرگتراست، نشان دهندهٔ تعداد رقمهای جزء غیر گردش است. حال دورهٔ گردش کسری را بررسی می‌کنیم که مخرج آن عامل اولی جز۲و۵ داشته‌باشد. البته تعداد رقمهای جزءغیر گردش این کسر نیزبرابر باتوان۲ یا ۵ می‌باشد. با تجسسات طولانی ومتعددی که برای تعیین دورهٔ گردش کسرمتناوب انجام‌شده این نتیجه بدست آمده که ظاهراً تعدادارقام دورهٔ گردش هرکسربرابر است باتعدادارقام دورهٔ گردش عامل اولی ازمخرج آن که رقمهای دور گردشش بیش ازرقمهای دورهٔ گردش دیگرعوامل اول باشد. واین نتیجه دربارهٔ معکوسات اعدادصحیح متوالی تا۲۶ صدق می‌کرد. امادرمورد ۲۷ طبق نتیجه بدست آمده وباتوجه به اینکه $27 = 3 \times 3 \times 3$ بایدتعدادارقام دورهٔ گردش این کسر برابر با تعداد ارقام دورهٔ گردش $\frac{1}{3}$ یعنی برابر ۱ باشد در صورتی که با توجه به تساوی $\frac{1}{27} = 0/0370\overline{37}$ متوجه می‌شویم که تعداد رقمهای دورهٔ گردش آن ۳ است. پس نتیجهٔ بدست آمده غلط است.

در ادامهٔ این تجربیات که عموماً توسط ماشین حساب انجام شده، ازجمله نتیجهٔ زیر بدست آمده است.

$$\frac{1}{14} = 0/0714285 : (1)، (6)$$

که اعداد داخل پرانتزها به ترتیب نشان دهندهٔ تعداد ارقام جزءغیر گردش ودورهٔ گردش می‌باشند. باتوجه به جدول زیر:

تعداد ارقام دورهٔ گردش	توانهای سه
۱	$۳^{۱}$
۱	$۳^{۲}$
۳	$۳^{۳}$
۹	$۳^{۴}$
۲۷	$۳^{۵}$

می‌توان فرمول (۱) رابرای تعیین تعداد ارقام دورهٔ گردش توانهای عدد۳نتیجه گرفت :

$$P\left[\left(\frac{۱}{۳}\right)^{B}\right] = ۳^{(B-۲)} \text{ ، } B \geqslant ۲ \qquad (۱)$$

و باتوجه به جدول‌دوم فرمول زیر بدست می‌آید .

تعداد ارقام دورهٔ گردش	توانهای اعداد اول
۶	$۷^{۱}$
۴۲	$۷^{۲}$
۲۹۴	$۷^{۳}$
۲	$۱۱^{۱}$
۲۲	$۱۱^{۲}$
۶	$۱۳^{۱}$
۷۸	$۱۳^{۲}$

$$P\left[\left(\frac{۱}{A}\right)^{B}\right] = A^{(B-۱)} . P\left(\frac{۱}{A}\right) \text{ ، } B \geqslant ۱$$

که درآن A عدد اولی غیراز۲و۳و۵ می‌باشد .

بنابراین ظاهراً با فرمول مذکور می‌توان تعداد ارقام دورهٔ گردش کسراعشاری متناوب رابدست‌آورد،اما مثال‌متقابل دیگری می‌آوریم ؛ دورهٔ گردش $\frac{۱}{۱۱۹}$ را تعیین کنید . طبق فرمول بدست‌آمده و با توجه به اینکه $۱۱۹ = ۷ \times ۱۷$ و

$$P\left(\frac{۱}{۱۷}\right) = ۱۶ > P\left(\frac{۱}{۷}\right) = ۶$$

می‌باشد تعداد ارقام دورهٔ تناوب این‌کسر برابر ۱۶ است در صورتی‌که درحقیقت برابر۴۸می‌باشد. با تجربیات متعدددیگر بالاخره این نتیجه بدست می‌آید که تعداد ارقام دورهٔ گردش کسرهای متناوب برابر باکوچکترین مضرب مشترك دوره‌های تناوب عوامل‌اول‌آن می‌باشد .

مثالها :

۱) $\frac{۱}{۲۰۰}$ ، $۲۰۰ = ۲^{۳} \times ۵^{۲}$

وچون۲ < ۳است‌دورهٔ‌غیر گردش این‌کسر۳رقم دارد.و $\frac{۱}{۲۰۰}$ مولد اعشاری تحقیقی است .

۲) $\frac{۱}{۱۲۱}$ ، $۱۲۱ = ۱۱^{۲}$ و $P\left(\frac{۱}{۱۱}\right) = ۲$

$$P\left(\frac{۱}{۱۱}\right)^{۲} = P\left(\frac{۱}{۱۱}\right) . ۱۱^{(۲-۱)} = ۲۲$$

۳) $\frac{۱}{۵۶۷}$ ، $۵۶۷ = ۳^{۴} \times ۷$ و $P\left(\frac{۱}{۷}\right) = ۶$

$$P\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴} = ۳^{(۴-۲)} = ۹$$

ك .م.م. (۶و۹) = ۱۸

$$P\left(\frac{۱}{۵۶۷}\right) = ۱۸$$

۴) $\frac{۱}{۳۰۶۰}$ ، $۳۰۶۰ = (۲^{۲} \times ۵^{۱})(۳^{۲} \times ۱۷^{۱})$

$$P\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲} = ۱ \text{ و } P\left(\frac{۱}{۱۷}\right) = ۱۶$$

ك .م.م. (۱و۱۶) = ۱۶

$$P\left(\frac{۱}{۳۰۶۰}\right) = ۱۶$$

۱ < ۲ پس جزء غیر گردش ۲ رقم دارد .

دورهٔ گردش کسر اول

نتیجهٔ مطالعاتی که دراین مورد انجام گرفته بدین‌صورت است که $P\left(\frac{۱}{z}\right)$ عاملی از $z - ۱$ یعنی $\frac{z-۱}{N}$ است که‌درآن z عدد اول و N عددی صحیح ومثبت است . کوششهایی که‌برای‌ارتباط دادن N و z انجام شده به نتیجه‌ای نرسیده است،بنابر این ازفرمول مذکورنمی‌توان کاملاً برای تعیین دورهٔ گردش‌استفاده کرد . مطالعات‌خودرا در این مبحث بانقل قضیه‌ای ازکتاب «نظریهٔ اعداد» خاتمه می‌دهیم .

قضیه : هرگاه a و b دوعدد صحیح مثبت باشند و b دارای حداقل یك عامل اول غیر از ۲ و ۵ باشد یعنی $b = ۲^{u} \cdot ۵^{v} \cdot c$ باشد [c عامل اول غیراز۲و۵که نسبت‌به‌عدد نیزاول است] $\frac{a}{b}$ مولدیك کسراعشاری متناوب‌خواهدبودکه‌تعداد ارقام جزء غیر گردش آن ماکسیمم u یاv و تعداد ارقام دورهٔ

بقیه در صفحهٔ ۵۶۶

نمونهٔ مسائل المپیادها و مسابقات ریاضی

ترجمهٔ: **جعفر آقایانی چاوش**

۱ـ یك مسأله از المپیاد ریاضی کشور **رومانی** درسال ۱۹۶۰.

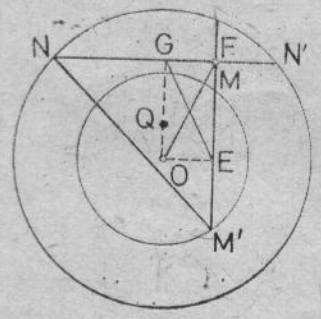
بین دودایرهٔ متحدالمرکز به‌شعاعهای R و r $(R > r)$ نقطهٔ ثابت F را درنظر گرفته فرض می‌کنیم (d) خط مستقیمی باشدکه از F بگذرد ودایرهٔ به شعاع r را در نقاط M و M′ قطع کند. خط دیگر (d_1) را که درنقطهٔ F بر FM عمودباشد درنظر می گیریم. این خط دایرهٔ به شعاع R را در نقاط N و N′ قطع می‌کند. ثابت‌کنید:

۱) $\overline{MN'}^2 + \overline{NN'}^2 =$ ثابت

۲) $\overline{FM}^2 + \overline{FM'}^2 + \overline{FN}^2 + \overline{FN'}^2 =$ ثابت

۳) وضع F چگونه باشد تا M مرکز ارتفاعی مثلث M′N′N گردد؟

۴) ثابت‌کنید مکان هندسی اوساط قطعه خطهای MN و MN′ و M′N′ دایره‌ای است که مرکز آن بروسط OF واقع است.



حل‌ـ اوساط قطعه خطوط MM′ و NN′ را به E و G نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل داریم:

$$\frac{\overline{NM'}^2}{4} = r^2 - \overline{OE}^2$$

$$\frac{\overline{NN'}^2}{4} = R^2 - \overline{OG}^2$$

$$\overline{MM'}^2 + \overline{NN'}^2 = 4[R^2 + r^2 - (\overline{OG}^2)] =$$

$$4(R^2 + r^2 - \overline{OF}^2) = \text{ثابت}$$

زیرا در مستطیل OEFG اقطار متساویند.

۲) چنین می‌نویسیم:

$$S = (\overline{FM'} - \overline{FM})^2 + (\overline{FN} + \overline{FN'})^2 +$$
$$+ 2\overline{FM}.\overline{FM'} - 2\overline{FN}.\overline{FN'} =$$
$$\overline{MM'}^2 + \overline{NN'}^2 + 2(\overline{FM}.\overline{FM'} - \overline{FN}.\overline{FN'})$$

با توجه به رابطهٔ (۱) داریم:

$$\overline{FM}.\overline{FM'} = \overline{FO}^2 - r^2$$

و:

$$\overline{FN}.\overline{FN'} = R^2 - \overline{OF}^2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$S = 2(R^2 + r^2) = \text{ثابت}$$

۳) هرگاه M مرکز ارتفاعی مثلث NN′M′ باشد، E و G روی دایرهٔ اولر (دایرهٔ نه‌نقطه) واقع خواهد بود و GE قطر این‌دایره می‌باشد. پس هرگاه s شعاع دایرهٔ محیطی مثلث NN′M′ باشد، داریم:

$$\overline{GE} = \overline{OF} = s$$

فرض می‌کنیم Q مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث باشد. ملاحظه خواهیم‌کرد:

$$\overline{QG} = \frac{1}{2}\overline{M'M}$$

و از مثلث QGN خواهیم داشت:

$$s^2 = \frac{1}{4}\overline{NN'}^2 + \overline{QG}^2 = \frac{\overline{NN'}^2 + \overline{MM'}^2}{4}$$

ویا با استفاده از رابطهٔ(۱)؛

$$s^2 = R^2 + r^2 - \overline{OF}^2$$

همچنین داریم:

$$s = OF \implies s = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}} = \text{ثابت}$$

پس F باید روی دایرهٔ متحدالمرکز با دوایر مفروض وبه شعاع $\sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$ باشد.

۴) فرض‌می‌کنیم I وسط M′N′ باشد، OI میانهٔ‌مثلث

$OM'N'$ خواهد بود و:

$$\overline{OI}^2 = \frac{2(R^2+r^2)-\overline{M'N'}^2}{4}$$

از طرف دیگر در مثلث $FM'N'$ داریم:

$$\overline{FI} = \frac{1}{2}\overline{M'N'}$$

$$\overline{OI}^2+\overline{IF}^2 = \frac{1}{2}(R^2+r^2) = \text{ثابت}$$

بنابراین I روی دایره‌ای است که مرکزش دروسط OF قرار دارد.

۲ـ یك مسئله از چهارمین المپیاد ریاضی **انگلستان**

دوکره به‌شعاعهای a و b مماس خارج بوده هر دو بر صفحه‌ای در دو نقطهٔ متمایز مماس می‌باشند. شعاع بزرگترین کره‌ای راکه بتواند در بین دو کره وصفحهٔ مذکور محاط شود معین کنید.

حل‌ـ این مسئله در واقع همان مسئلهٔ معروف تعیین شعاع دایرهٔ مماس بر سه دایرهٔ مفروض است. برای حل آن هرگاه معکوس شعاعهای دوایر مورد نظر را α و β و γ و δ بنامیم،طبق قضیه‌ای که بعداً در باره‌اش بحث خواهیم کرد داریم:

$$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$$

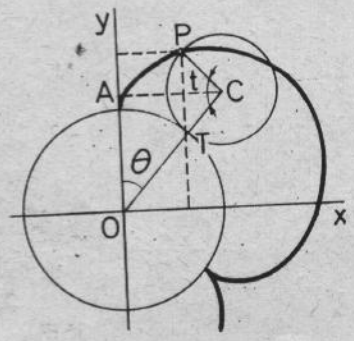
حال اگر یکی از دایره‌ها تبدیل به خط مستقیم شود، در اینجا $R=\infty$ و $\delta=\frac{1}{R}=0$ خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

که از این رابطه با معلوم بودن α و β که به ترتیب عکس a و b هستند، γ مشخص‌می‌شود.

۳ـ مسئلهٔ دیگر از چهارمین المپیاد ریاضی **انگلستان**

دایرهٔ C بدون لغزش درروی دایرهٔ دیگری‌که مرکزش مبدأ مختصات وشعاعش۲ است می‌غلتد. نقطهٔ ثابت P ازدایرهٔ C مختصاتش در هنگام شروع حرکت (۲ و ۰) می‌باشد.



با انتخاب پارامتر مناسب θ معادلهٔ مکان هندسی P را تعیین کرده نمایش‌هندسی آنرا رسم کنید وتمام مماسهایی را که براین منحنی به موازات محورهای مختصات می‌توان رسم کرد مشخص کنید.

حل‌ـ برای سهولت شعاع دایرهٔ ثابت را a و شعاع دایرهٔ متغیر را b می گیریم؛پس معادلهٔ دایرهٔ ثابت می‌شود:

$$x^2+y^2=a^2$$

اما ملاحظه می‌شودکه کمان AT (P در ابتدا منطبق بر A بوده است) مساوی است باکمان TP بنابراین:

$$a\theta = bt$$

که درآن θ و t به ترتیب زوایای AOT و TCP می‌باشند اما با ملاحظات هندسی داریم:

$$DCP = t-(\frac{\pi}{2}-\theta) = t+\theta-\frac{\pi}{2}$$

بنابراین مختصات P در هرلحظه چنین خواهد بود:

$$\begin{cases} y=(a+b)\cos\theta+b\sin(t+\theta-\frac{\pi}{2}) \\ x=(a+b)\sin\theta-b\cos(t+\theta-\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

ویا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} y=(a+b)\cos\theta-b\cos(\frac{a}{b}\theta+\theta) \\ x=(a+b)\sin\theta-b\sin(\frac{a}{b}\theta+\theta) \end{cases}$$

بقیهٔ ترسیمات به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

معادلهٔ فوق معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P است که به منحنی اپیسیکلوئید در شکل نمایش داده شده است.

۴ـ از جملـه مسائل المپیاد ریـاضی **چکسلواکی** (۱۹۶۶-۶۷).

اگر d_1 و d_2 و d_3 سه عدد مثبت باشند بقسمی‌که:

$$d_1<d_2<d_3$$

بوده و c_1 و c_2 و c_3 سه عدد غیرمنفی باشند ثابت‌کنید:

$$(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\frac{c_3}{d_3}\right)<$$

$$<(c_1+c_2+c_3)^2\frac{(d_1+d_3)^2}{4d_1d_3}$$

حل‌ـ ما این نامساوی را در حالت کلی زیر ثابت می‌کنیم:

هرگاه $0<a<d_i<b$ و $c_i>0$ و n و ... و۲ و۱ $=i$ باشد نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i d_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{d_i}\right) < \frac{(a+b)^2}{4ab}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2$$

برهان: داریم:

$$ac_i<c_id_i<bc_i \quad \text{و} \quad i=1 \text{ و } 2 \text{ و } \ldots n$$

وبنابراین:

$$(c_i d_i - ac_i)(c_i d_i - bc_i) \leq 0 \qquad (1)$$

و: $i = 1$ و 2 و ... و n

که تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $d_i = a$ و یا $d_i = b$ باشد. ازرابطهٔ (۱) حاصل می‌شود:

$$c_i^2 d_i^2 - c_i^2 d_i (a+b) + abc_i^2 \leq 0$$

$$c_i d_i \leq (a+b)c_i - ab\,\frac{c_i}{d_i} \qquad (2)$$

و: $i = 1$ و 2 و ... و n

هرگاه نامساوی فوق را برای مقادیر مختلف i نوشته سپس طرفین نظیر به نظیرآنها را با هم جمع نماییم خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i d_i \leq (a+b)\sum_{i=1}^{n} c_i - ab\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{d} \qquad (2')$$

که تساوی برای حالتی است که عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد که $1 \leq N < n$ و:

$$\begin{cases} d_1 = d_2 = \ldots = d_N = a \\ d_{N+1} = d_{N+2} = \ldots = d_n = b \end{cases} \qquad (3)$$

در رابطهٔ (۲′) اگر فرض کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{d_i} = X > 0$$

خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{d_i}\sum_{i=1}^{n} c_i d_i \leq (a+b)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)X - abX^2 \qquad (4)$$

وچون چند جمله‌ای:

$$P_2(X) = (a+b)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)X - abX^2$$

دارای ماکسیممی به‌قرار زیر است:

$$P_2(X) \leq P_2\left[\frac{a+b}{2ab}\sum_{i=1}^{n} c_i\right] = \qquad (5)$$

$$= \frac{(a+b)^2}{4ab}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2$$

بنابراین نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{d_i}\sum_{i=1}^{n} c_i d_i \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2 \qquad (\alpha)$$

و چون در نامساوی (۵) تساوی وقتی حاصل می‌شود که فقط وفقط:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{d_i} = \frac{a+b}{2ab}\sum_{i=1}^{n} c_i \qquad (3')$$

پس از (۳) و (۳′) نتیجه می گیریم که درنامساوی (α) تساوی وقتی برقرار خواهد بودکه فقط و فقط داشته باشیم:

$$\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{N} c_i + \frac{1}{b}\sum_{i=N+1}^{n} c_i = \frac{1}{2b}\sum_{i=1}^{N} c_i +$$

$$+ \frac{1}{2b}\sum_{i=N+1}^{n} c_i + \frac{1}{2a}\sum_{i=1}^{N} c_i + \frac{1}{2a}\sum_{i=N+1}^{n}$$

و: $$\sum_{i=1}^{N} c_i = \sum_{i=N+1}^{n} c_i$$

پس برای نامساوی (α) تساوی هنگامی میسر است که داشته باشیم:

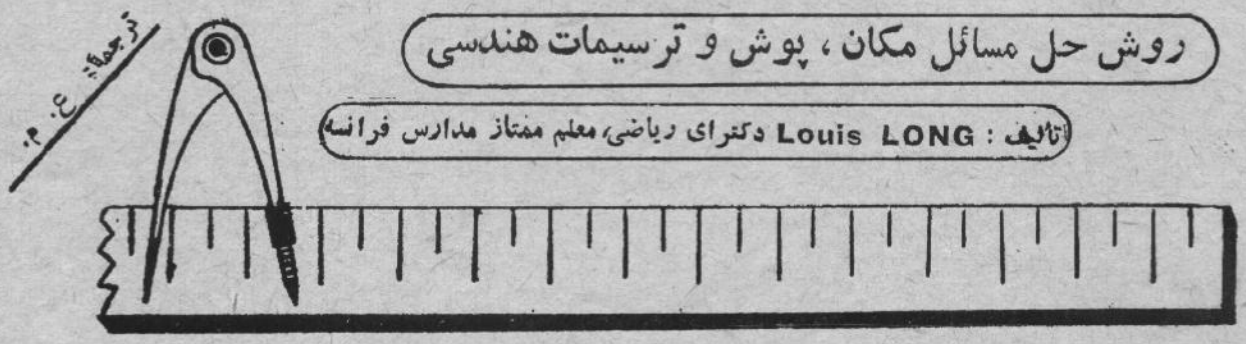
$$\begin{cases} d_1 = d_2 = \ldots = d_N = a \\ d_{N+1} = d_{N+2} = \ldots = d_n = b \\ \sum_{i=1}^{N} c_i = \sum_{i=N+1}^{n} c_i \end{cases}$$

همچنین نامساوی (α) را می‌توان به‌شکل زیرنوشت:

$$1 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{d_i}\sum c_i d_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2} \leq \left(\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}}{2}\right)$$

که نامساوی طرف چپ به **نامساوی کوشی** موسوم است.

دنباله دارد



روش حل مسائل مکان، پوش و ترسیمات هندسی

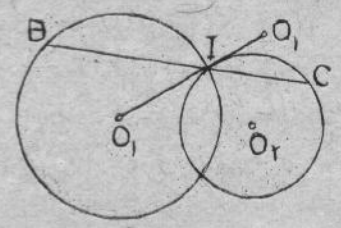
تالیف : Louis LONG دکترای ریاضی، معلم ممتاز مدارس فرانسه

ترجمهٔ: ع. م.

III- ترسیمات هندسی

فصل چهارم ـ استفاده از تجانس

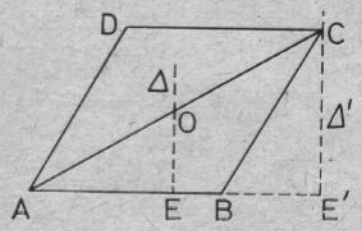
مسئلهٔ ۱ـ از I یکی از نقاط تلاقی دودایرهٔ O_1 و O_2 خطی رسم کنید که O_1 رادر B و O_2 رادر C قطع کند بقسمی که $\frac{\overline{IC}}{\overline{IB}} = -\frac{m}{n}$ باشد که m و n دوعدد مثبت معلومند.



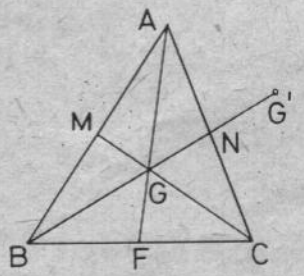
I یك نقطه از خط مطلوبست و کافی است که نقطهٔ دومی از آن را تعیین کنیم. به تعیین C می‌پردازیم که یك مکان آن دایرهٔ O_2 است. از رابطهٔ داده شده معلوم می‌شود که مکان دیگر C دایرهٔ O'_1 مجانس دایرهٔ O_1 به مرکز I و به نسبت $-\frac{m}{n}$ است. برخط O_1I نقطهٔ O'_1 رابقسمی تعیین می‌کنیم که $\frac{\overline{IO'_1}}{\overline{IO_1}} = -\frac{m}{n}$ باشد. نقطهٔ O'_1 مرکزدایرهٔ O'_1 است وچون I ثابت است پس $O_1'I$ شعاع این دایره است واگر به مرکز O'_1 دایره‌ای رسم کنیم که بر I بگذرد دایرهٔ O_2 رادرنقطهٔ دیگر C قطع می‌کند وخط مطلوب مشخص می‌گردد.

مسئلهٔ ۲ـ متوازی‌الاضلاع ABCD راچنان رسم کنید که اضلاع AB و BC ازآن به طولهای معلوم a و b بوده واگراز O نقطهٔ تلاقی اقطارعمود OE رابر AB رسم کنیم $AE = ۳EB$ باشد.

هرگاه مثلث ABC رسم شود متوازی‌الاضلاع نیز مشخص شده‌است. ضلع AB را رسم‌می‌کنیم. یك مکان C دایرهٔ به مرکز B وبه شعاع b است. ازطرف دیگربنابه فرض نقطهٔ E معلوم است. O بر خط △ واقع است که در E عمود بر AB اخراج شود وچون AC دو برابر AO است پس مکان دیگر C خط △′ مجانس خط △ در تجانس به مرکز A وبه نسبت ۲ است. برای تعیین △′ ابتدا E′ مجانس E رامعلوم می‌کنیم وآنگاه از E′ خط △′ راعمود بر AE′ اخراج می‌کنیم. ازتلاقی △′ بادایرهٔ به مرکز B وبه شعاع b نقطهٔ C مشخص می‌شود. چون دونقطهٔ E وجود دارد، یکی بین A و B ودیگری درخارج AB، مسئله دوجواب دارد.



مسئلهٔ ۳ـ مثلثی را با معلوم بودن طولهای سه میانهٔ آن رسم کنید.

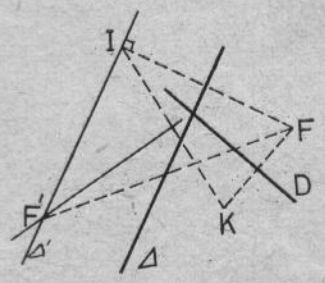


اگر G نقطهٔ تلاقی میانه‌های AE و BN و CM از مثلث ABC باشد هرگاه مثلث BGA معین گردد مثلث BCA نیزمعین می‌شود زیرا M وسط AB و GC دوبرابر GM است.

طول BG که $\frac{۲}{۳}$ طول BN است معلوم است وهرگاه BG را رسم کنیم کافی است که A را تعیین کنیم. یك مکان A دایرهٔ به مرکز G وبه شعاع $GA = \frac{۲}{۳}AE$ است. از طرف دیگر چون $BA = ۲BM$ و M بردایرهٔ O_1 به مرکز

G و به شعاع $\frac{CM}{3}$ واقع است، مکان دیگر A مجانس دایرهٔ O، درتجانس به مرکز B و به نسبت ۲ است. برای تعیین این مکان ابتدا G′ مجانس G رادرتجانس مزبور بدست می‌آوریم آنگاه به مرکز G′ و به شعاع $\frac{2}{3}CM$ دایره‌ای رسم می‌کنیم که ازتلاقی آن بادایرهٔ به مرکز G و به شعاع $\frac{2}{3}AE$ نقطهٔ A بدست می‌آید.

مسئلهٔ ۴ـ هذلولی را رسم کنیدکه یك کانون F و یك مماس D ویك مجانب △ ازآن معلوم است.



هرگاه F′ کانون دیگرهذلولی معین‌شود هذلولی مشخص می گردد. چون △ بر O مرکز هذلولی می گذرد ونیز O وسط FF′ است پس یك مکان F′ خط △′ است که درتجانس به مرکز F و به نسبت ۲ مجانس خط △ است. ازطرف دیگر I تصویر F روی △′ یکی از نقاط دایرهٔ هادی نظیر کانون F′ است و K قرینهٔ F نسبت به‌مماس D نیزنقطه‌ای ازهمین دایره است. پس عمود منصف پاره خط KI مکان دیگر F′ است. نقطهٔ F′ بامعلوم بودن دومکان آن معین می‌شود.

تمرینات

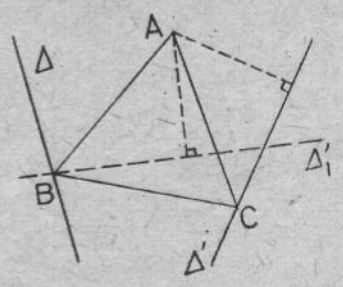
۱ـ مثلث ABC را رسم کنیدکه ضلع BC ، نسبت دو ضلع AC و AB وطول میانهٔ CM ازآن معلوم است.

۲ـ کانون F ، رأس A و ۲a و ۲b طولهای دوقطر بزرگ وکوتاه یك بیضی معلوم است. مرکزآنرا تعیین کنید.

۳ـ دایرهٔ C به مرکز F وبه شعاع ۲a معلوم است. شعاع ثابت FD ازاین دایره و TT′ عمودمنصف FD رارسم می‌کنیم. مقطع مخروطی رامشخص کنیدکه دایرهٔ C دایرهٔ هادی و TT′ مماس برآن ونقطهٔ معلوم M نقطه‌ای ازآن باشد.

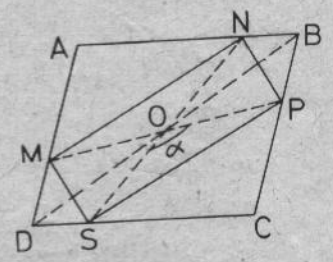
فصل پنجم ـ استفاده ازدوران

مسئلهٔ ۱ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنید که رأس A ازآن‌معلوم بوده ودورأس دیگر آن بردوخط‌معلوم △ و △′ واقع باشند.



یك مکان B خط △ است. مکان دیگر B خط △′₁ است که مبدل خط △′ دردوران به مرکز A وبه زاویهٔ ۶۰ درجه‌است. ازتلاقی دوخط △ و △′₁ نقطهٔ B وبعد ازآن نقطهٔ C معین می‌شود.

مسئلهٔ ۲ـ درمتوازی‌الاضلاع معلوم ABCD مستطیل MNPS راچنان محاط کنیدکه زاویهٔ بین دوقطر آن به اندازهٔ معلوم α باشد.



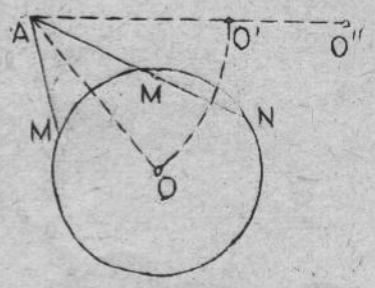
هرگاه مسئله را حل شده فرض کنیم، از تساوی دومثلث DMS و BNP نتیجه می‌شود که DS = BN و از تساوی دومثلث DOS و BON برمی‌آید که O مرکزمتوازی‌الاضلاع مرکزمستطیل هم است.

پس O مرکزمستطیل معلوم است وهرگاه S راحول O به اندازهٔ α دوران دهیم بر P منطبق می‌شود، به عبارت‌دیگر △ مبدل خط CD در دروان به مرکز O وبه زاویهٔ α از P می گذرد وترسیم مستطیل مطلوب چنین می‌شود:

ضلع CD راحول O به زاویهٔ α دوران می‌دهیم تامبدل آن ضلع BC رادر P قطع کند وازروی P رأسهای دیگرمستطیل به‌آسانی بدست می‌آیند.

مسئلهٔ ۳ـ دایرهٔ C به مرکز O وبه شعاع R ویك نقطهٔ A واقع درصفحهٔ آن معلوم است. وتر MN ازدایره را چنان رسم کنیدکه داشته باشیم:

$$\frac{AM}{MN}=\frac{m}{n} \quad و \quad \frac{AN}{MN}=\frac{p}{q}$$

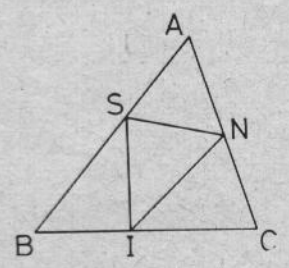


که m و n و p و q مقادیرمعلومند.

چون نسبت بین اضلاع مثلث AMN معلوم است پس اندازهٔ زاویهٔ MAN = α و همچنین نسبت $\frac{AN}{AM}=\frac{pn}{qm}$ معلوم است. یك مکان N دایرهٔ مفروض‌است.

مکان دیگرآن عبارتست ازمبدل مکان M درتبدیل مرکب از دوران به مرکزA وبه زاویهٔ α وتجانس به مرکزA وبه‌نسبت $\frac{pn}{qm}$ وچون M بردایرهٔ C واقع است ابتدا O مرکز این دایره راحول A وبه زاویهٔ α دوران می‌دهیم تا O' بدست آید ، آنگاه O'' را در امتداد AO' تعیین می‌کنیم که $\frac{AO''}{AO'} = \frac{pn}{qm}$ باشد وبه مرکزO'' وبه شعاع $R \times \frac{pn}{qm}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم که ازتلاقی‌آن بادایرهٔ C نقطهٔ N بدست می‌آید وازروی‌آن، نقطهٔ M معلوم‌می گردد.

مسئلهٔ ۴ـ مثلث ABC ونقطهٔ I واقع برضلع BC از آن معلوم است . مثلث ISN رادرمثلث ABC چنان محاط کنیدکه بامثلث معلوم متشابه باشد .



ازمثلث ISN اندازهٔ زاویهٔ $SIN = \alpha$ و همچنین‌نسبت $\frac{IN}{IS} = \frac{m}{n}$ معلوم است . اگرضلع AB راحول I به‌اندازهٔ α دوران دهیم تا خط D حاصل شود وبعد درتجانس‌به مرکز I وبه نسبت $\frac{m}{n}$ خط $\triangle$ مجانس خط D رامعلوم‌کنیم، ازتلاقی $\triangle$ با AC نقطهٔ N و ازروی‌آن نقطهٔ S بدست می‌آید.

تمرینات

۱ـ مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم‌کنیدکه سه رأس‌آن بر سه خط متوازی مفروض واقع باشند .

۲ـ مربعی چنان رسم‌کنیدکه سه رأس‌آن برسه دایرهٔ مفروض متحدالمرکزواقع باشد.

۳ـ دودایره چنان رسم‌کنیدکه اولی برنقطهٔ معلوم A و دومی برنقطهٔ معلوم B بگذرد و درنقطهٔ معلوم C برهم عمود باشند .

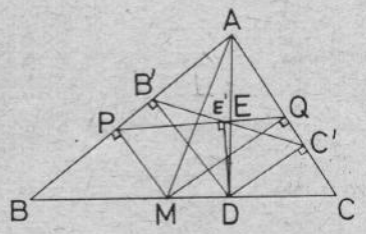
بقیه از صفحهٔ بعد

مسئله

مثلث ABC و نقطهٔ متغیر M واقع بر BC مفروض است. هرگاه P و Q تصویرهای M روی AB و AC باشد ثابت‌کنیدکه خط PQ برسهمی ثابتی مماس است.

راه حل ارائه شده

ارتفاع AD را رسم می‌کنیم. دایرهٔ به قطر AM بر P و Q و D می‌گذرد . بنا به قضیهٔ سمسن B' و C' و E' تصاویر D روی AB و AC و PQ بر یك خط راست واقعند.هرگاه M ضلع BC را بپیماید زاویهٔ قائمهٔ $PE'D$ بقسمی تغییر



مکان می‌دهد که رأس آن خط ثابت $B'C'$ را می‌پیماید وضلع $E'D$ ازآن برنقطهٔ ثابت D می گذرد ، دراین‌صورت $E'P$ یا PQ ضلع دیگرآن برسهمی مماس است‌که D کانون و $B'C'$ مماس رأس آن می‌باشد .

راه حل منطقی

برای آنکه ثابت‌کنیم که PQ بریك سهمی مماس است کافی است زاویهٔ قائمه‌ای پیداکنیم‌که این خط یك ضلع آن‌بوده وضلع دیگرش برنقطهٔ ثابتی بگذرد و رأس‌آن نیز برخط ثابتی تغییرمکان دهد. این زاویه را چگونه پیداکنیم ؟

درحقیقت باید مکان پای عمودی را جستجوکنیم . یکی ازاین مکانها خط سمسن است. می‌دانیم‌که تصاویر هر نقطه از دایرهٔ محیطی مثلث روی ضلعهای‌آن بریك خط راست به‌نام خط سمسن واقعند . ازاینجا به این نتیجه می‌رسیم‌که مثلثی‌به ضلع PQ پیداکنیم‌که یك خط ثابت خط سمسن‌آن باشد ودایرهٔ محیطی آن برنقطهٔ ثابتی بگذرد. هرگاه دوضلع از مثلث ثابت باشند و دایرهٔ محیطی‌آن ازنقطهٔ ثابتی بگذرد خط سمسن نظیر این نقطه‌ثابت خواهدبود.پس باید مثلثی پیداکنیم‌که PQ یك ضلع‌آن بوده ودوضلع دیگرش دوخط ثابت باشند. مثلث APQ این چنین خاصیتی را دارد و دایرهٔ محیطی‌آن به قطر AM است. اما دایرهٔ به قطر AM برنقطهٔ D پای ارتفاع AD از مثلث نیزمی گذرد و D که نقطهٔ ثابت است همان نقطهٔ مطلوب است: E' پای عمود مرسوم ازD بر PQ برخط ثابت $B'C'$ یعنی خط سمسن نظیر نقطهٔ D از مثلث APQ واقع است . زاویهٔ $PE'D$ قائمه است‌که رأس‌آن برخط ثابت $B'C'$ تغییر مکان می‌دهد وضلع $E'D$ ازآن برنقطهٔ ثابت D می گذرد پس ضلع $E'P$ ازآن بر سهمی مماس است‌که D کانون و $B'C'$ مماس رأس‌آن است .

چگونه می‌توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

تألیف: René Boinel

چگونگی استفادهٔ صحیح از کتابهای حل‌المسئله

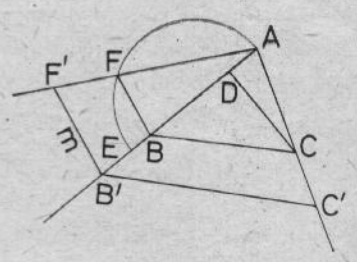
دنباله از شماره های گذشته

مسئله

مثلثی رسم کنید که با مثلث مفروض متشابه و با مربع معلوم معادل باشد.

راه حل ارائه شده

مثلث ABC ومربع به‌طول ضلع m را درنظرمی گیریم.



برای رسم مثلثی که با مثلث‌مزبورمتشابه وبا مربع‌مزبورمعادل‌باشد، کافی است که $B'C'$ را موازی با BC ومحدود به AB و AC چنان رسم‌کنیم‌که مساحت مثلث $AB'C'$ برابر با m^2 باشد ، یعنی داشته باشیم :

$$\frac{AB'^2}{AB^2} = \frac{m^2}{\text{مساحت } ABC}$$

عمود CD را بر AB رسم می‌کنیم و AB را تا E امتداد می‌دهیم بقسمی‌که BE نصف CD باشد ودر B عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا نیمدایرهٔ به‌قطر AE رادر F قطع کند . خواهیم داشت :

$$BF^2 = AB.BE = \frac{AB.CD}{2} = \text{مساحت } ABC$$

$$\frac{AB'^2}{AB^2} = \frac{m^2}{BF^2} \quad \text{یا} \quad \frac{AB'}{AB} = \frac{m}{BF}$$

درصورتی‌که $B'F'$ عمود بر AB' رسم شود از تناسب بالا معلوم می‌شودکه $B'F' = m$ است یعنی برای تعیین B' کافی است‌که $B'F'$ به طول m را موازی با BF و محصور بین AB و AF رسم‌کنیم . بعد از تعیین B' نقطهٔ C' بسادگی معلوم می‌شود .

راه حل منطقی

مثلث مطلوب به این ترتیب بدست می‌آیدکه $B'C'$ را موازی با BC ومحصور بین AB وAC بقسمی رسم‌کنیم‌که مساحت $AB'C'$ برابر m^2 باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{AB'^2}{AB^2} = \frac{m^2}{\text{مساحت } ABC}$$

اگر CD ارتفاع مثلث ABC باشد مساحت این مثلث برابر است با $\frac{AB \times CD}{2}$ و نتیجه می‌شودکه :

$$\frac{AB'^2}{AB^2} = \frac{2m^2}{AB.CD}$$

چون مخرج کسر طرف دوم حاصل ضرب دوپاره خط است و می‌دانیم‌که در مثلث قائم‌الزاویه مجذور ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب دو قطعهٔ وتر از این جهت مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم‌که AB یك قطعه و $BE = \frac{CD}{2}$ قطعهٔ دیگر از آن باشد ، به این ترتیب که AB را به اندازهٔ BE نصف AD امتداد می‌دهیم و در B عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تانیمدایرهٔ به‌قطر AE را در F قطع کندکه BF^2 با $\frac{AB.CD}{2}$ برابر است و خواهیم داشت :

$$\frac{AB'^2}{AB^2} = \frac{m^2}{BF^2} \Longrightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{m}{BF}$$

در تناسب اخیر سه جزء AB و m وBF معلوم است.برای تعیین جزء چهارم یعنی AB' پاره خط $B'F'$ به طول m را موازی با BF ومحصور بین AB وAF رسم می‌کنیم. به این ترتیب که خطی موازی با AB و به فاصلهٔ m از آن رسم می‌کنیم تاAF را در F' قطع کند وازF' موازی با FB رسم می‌کنیم تا AB را در B' قطع کند . بارسم $B'C'$ موازی با BC مثلث مطلوب $AB'C'$ مشخص می گردد.

بقیه در صفحهٔ قبل

صد مسئلهٔ جالب و حل آنها

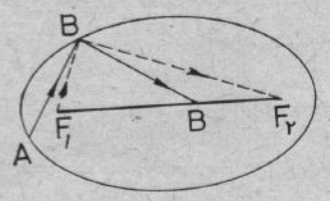
ترجمهٔ : داوید ریحان

دنباله از شماره‌های گذشته

۸۰- بیلیارد بیضوی

بیلیاردی به شکل بیضی مفروض است . گلولهٔ A در کنار باند قرار گرفته و گلولهٔ دیگر B روی قطعه خط S که کانونهای بیضی را به‌هم وصل می‌کند، قرار دارند . باید به A طوری ضربه وارد کنیم که پس از جدا شدن از باند، به گلولهٔ B اصابت کند بدون آنکه قبل از برخورد با باند از S عبور کند. ثابت کنید که این امر غیر ممکن است .

حل- از خاصیت زیر استفاده می‌کنیم : مماس بر بیضی در نقطهٔ غیر مشخص با شعاعهای حامل این نقطه زوایای متساوی می‌سازد. اگر به گلولهٔ واقع در F_1 ضربه‌ای وارد کنیم، این گلوله از F_2 (مسیر با خط منقطع در شکل) خواهد گذشت.



خط AB خارج F_1B واقع است پس منعکس آن در خارج BF قرار داشته و هیچگاه از نقطهٔ واقع بر S نخواهد گذشت .

۸۱- ورزشکاران

کلاسی شامل ۲۵ محصل است. بین آنان، ۱۷ نفر دوچرخه سواری ، ۱۳ نفر شنا و ۸ نفر اسکی بازی می‌دانند و هیچکدامشان سه ورزش را باهم نمی‌دانند. در ریاضیات دوچرخه سواران ، شناگران و اسکی بازان نمره‌هایی مابین ده و شانزده (نمره از بیست است) دارند و ۶ محصل کلاس نمره‌ای کمتر از ده دارند. مطلوبست :

a) نمرهٔ ریاضی چند محصل بیش از شانزده است ؟

b) چند نفر از شناگران، اسکی بازی هم می‌دانند ؟

حل.- در کلاس کلا ۲۵ محصل وجود دارد ؛ چون ۶ نفر از آنها در ریاضیات نمرهٔ کمتر از ۱۰ دارند، ۱۹ نفر بقیه نمره‌ای بیش از ۱۰ خواهند داشت، در این صورت تعداد ورزشکاران از ۱۹ نفر متجاوز نخواهد بود .

برای هر محصل که به یک ورزش اشتغال داشته باشد «یک امتیاز» قائل می‌شویم؛ کلا $۱۷ + ۱۳ + ۸ = ۳۸$ امتیاز در کلاس وجود دارد؛ چون هیچ محصلی به سه ورزش نمی‌پردازد پس دقیقاً ۱۹ ورزشکار وجود دارد که هر کدام به دو ورزش می‌پردازند . حال می‌توانیم به سادگی به سؤالهای مطرح شده جواب دهیم ؛

a) هیچکدام از شاگردان در ریاضیات نمره‌ای بیش از ۱۶ ندارد .

b) در بین ۱۹ ورزشکار، ۱۷ دوچرخه سوار وجود دارد بنابر این بیش از دو نفر باقی نمی‌ماند که شنا و اسکی بلد باشند یعنی دو نفر شنا گر وجود دارند که اسکی بازی نیز بلند می‌باشند.

۸۲- بازهم دربارهٔ ورزشکاران

سه دوندهٔ A، B، C با روش منظمی باهم ۲۰۰ متر را می‌دوند و پس از هر مسابقه ، ترتیب رسیدن خود را یادداشت می‌کنند . در آخر موعد مشاهده می‌کنند که در اکثر مسابقات، A از B سبقت گرفته است ؛ حداکثر مسابقات B از C برده است و در مجموع مسابقات، C در بیشتر حالات از A جلوتر بوده است .

چگونه چنین چیزی ممکن است ؟

حل- سه مسابقه را در نظر می‌گیریم بطوری که اولین بار دوندگان در ترتیب A، B، C باشند؛ و در حالت دوم به صورت B، C، A برسند و در حالت سوم در ترتیب C، A، B باشند . در این صورت A دو مرتبه از C جلو زده است و B، A را فقط یک مرتبه مغلوب کرده است؛ در سه مسابقه C دو بار از A برده است و همچنین B دو مرتبه از C بوده است .

سؤال: آیا ممکن است که این نتایج اقلا در سه مسابقه از

هرچهار مسابقه، یعنی در ۷۵٪ حالات، بدست آید؟

۸۳- طبقه بندی بازیکنان

باشگاه شطرنج بازان دکتر سیلوستر براگادابردارای ۱۰ عضو است. در هرسال طی مسابقه‌ای بازیکنان را طبقه بندی می‌کنند. هربازیکن باهمهٔ بازیگران دیگر بازی می‌کندوهربازی باید منتهی به مات شود.

اگر درمسابقه A ازB ببرد، گوئیم که «A،Bرا می‌زند» درآخرمسابقه، ۴۵ نتیجه از این نوع وجود دارد و بازیکنان به دستجات مختلفی تقسیم می‌شوند: مثلاآنهایی‌که از۸ نفریا ۷ نفر و غیره برده‌اند. (یادآ ری می‌کنیم که ممکن است در حالتی A، B را بزند، C،B را بزند و C نیز A را بزند)

طبقه بندی‌های مختلف را مطالعه‌کنید. درحالت خاص، آیا ممکن است‌که باشگاه به سه طبقه تقسیم شود؟

حل- چون تعداد مسابقات (۴۵) بر ۱۰ بخش پذیر نیست، بنابراین ممکن نیست‌که تمام اعضاء در یك طبقه قرار گیرند، یعنی نمی‌توانند دارای پیروزیهای مساوی باشند.

همچنین غیرممکن است‌که ۹ طبقه داشته باشیم. زیرا، اگر۹ دسته وجود می‌داشت، دریکی ازاین دسته ها دوبازیکن ودر دیگر دسته ها هرکدام یك بازیکن وجود می‌داشت و این موضوع مخالف با شرایط مسئله است ؛

به هرکدام از بازیکنان برای هرمسابقه‌ای راکه می‌برد، یك امتیاز می‌دهیم . نه نفر بازیکنی کـه معرف نـه دسته‌اند نمی‌توانند مجموعاً $۰ + ۱ + \ldots + ۸ = ۳۶$ و یا :

$$۱ + ۲ + \ldots + ۹ = ۴۵$$

امتیاز داشته باشند، زیراآخری باید به ترتیب ۹ یا صفرامتیاز داشته باشد ودراین صورت ۱۰طبقه بندی خواهیم داشت. ولی این نه بازیکن نمی‌توانند :

$$۰ + ۱ + \ldots + i + (i + ۲) + \ldots ۹ = ۴۵ - i$$

امتیاز داشته‌باشند زیرا آخری باید $i + ۱$ امتیاز داشته باشد و دراین صورت همیشه ۱۰ طبقه بندی داریم .

ولی‌می‌توانیم ۱۰، ۸، ۷، ۶،۵، ۴، ۳ و۲ طبقه بندی داشته باشیم .

مثالی برای تقسیم ۷ دسته بندی می‌زنیم و مثالی دیگر برای تقسیم ۳طبقه‌ای می‌آوریم. بازیکنان را با حروف نشان می‌دهیم؛ عدد ۱ واقع درمحل سطر i وستون k به معنای آن است‌که بازیکن سطر i ، بازیکن سطرk را زده است و صفر به معنای‌آن است‌که زده شده است.

نمایش هفت طبقه بندی

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
B	۰		۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
C	۰	۰		۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
D	۰	۰	۰		۱	۱	۱	۱	۱	۱
E	۰	۰	۰	۰		۰	۱	۱	۱	۱
F	۰	۰	۰	۰	۱		۰	۱	۰	۱
G	۰	۰	۰	۰	۰	۱		۰	۱	۰
H	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱		۰	۱
I	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱		۰
J	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	

نمایش سه طبقه بندی

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰
B	۰		۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰
C	۱	۰		۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
D	۰	۰	۱		۱	۱	۱	۱	۱	۱
E	۰	۰	۰	۰		۱	۰	۰	۱	۱
F	۰	۰	۰	۰	۰		۰	۱	۱	۱
G	۰	۰	۰	۰	۱	۱		۰	۰	۱
H	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱		۰	۱
I	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱		۱
J	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	

پیداکردن مثالها در حالات ۱۰ ، ۸ ، ۶، ۵، ۴ و ۲ طبقه بندی به خواننده واگذار می‌شود.

۸۴- گروهی راجع به والیبال

بهترین تیمهای والیبال گروهی تشکیل می‌دهند و در جریان‌فصل‌مسابقاتی‌راترتیب‌می‌دهند؛ هرتیم‌با هریك ازتیمهای دیگر یك بار درمقابل هم قرار می‌گیرند . ممکن است‌که تیمی تمام تیمهای دیگر را بزند ولی همیشه اینطور نیست . تیمی که‌تمام‌تیمهای دیگررا مستقیماً یا بوسیلهٔ‌تیم ثالثی‌بزند «رهبر» می‌نامیم .

به بیانی دیگر، اگر A، B رازده باشد، ویاتیم C که از A خورده و B را زده باشد، وجود داشته باشد، گوئیم که A بر B برتری دارد. دراین صورت اگر حداقل دوواسطه داشته باشیم، یعنی A، C را بزند که D را زده و B، D را زده باشد گوئیم که A بر B برتری دارد.

ثابت کنید که:

۱) همیشه، حداقل یك گروه «رهبر» وجود دارد.

۲) گروهی که مستقیماً در بیشتر مسابقات برده باشد همیشه «رهبر» است.

حل ـ بوسیلهٔ استقراء ثابت می‌کنیم که همیشه یك گروه «رهبر» وجوددارد. فرض می‌کنیم که n تیم در گروه وجود داشته باشد. تمام کاپیتن‌ها را دراطاقی جمع می‌کنیم و به‌یکی ازآنها (که آنرا K می‌نامیم) حکم می‌کنیم که با کاپیتن‌های تمام تیمهایی که مستقیماً ازتیم وی شکست خورده‌اند، خارج شوند؛ دراین صورت n' کاپیتن وجود خواهد داشت و $n' < n$ است، اگر قضیه برای n' که کوچکتر از n است، برقرار باشد، دراطاق، کاپیتن تیمی باقی خواهدماند که رهبر خواهد بود و این درصورتی است که فقط تیمهایی که کاپیتنهای آنها خارج نشده‌اند، وجودداشته باشد. چون وی باقی‌مانده است، K را مستقیماً ویاتمام آنهائی راکه خارج شده‌اند بطورغیرمستقیم (به استثنای K) زده‌است؛ بنابراین تیم وی رهبر n تیم است ونتیجه محقق شد.

بسادگی می‌توانیم دومین نتیجه را نیزثابت کنیم: تیمها را D_1، D_2، ...، D_n می‌نامیم، فرض می‌کنیم D_1 تیمی باشد که تعداد بیشتری پیروزی مستقیم (یا یکی از این تیمها، اگر تعدادبردهایشان باهم‌مساوی وبیشترین‌مقدارباشد) داشته‌باشد. فرض می‌کنیم D_2، ...، D_n تیمهایی باشندکه از D_1 شکست خورده‌اند.

باید ثابت کنیم که D_1 غیرمستقیم تیمهای D_{m+1}، ...و D_n رازده‌است. فرض می‌کنیم چنین نباشد، یعنی تیمی مانند D_{m+1} باشدکه مستقیماً هم از D_2، هم از D_3، ...، وهم از D_m شکست نخورده باشد؛ از این موضوع نتیجه می‌شودکه D_{m+1} مستقیماً D_2، ...، D_n رازده است. چون D_1 مستقیماً D_{m+1} را نمی‌زد دراین صورت D_1، D_{m+1} را می‌زند؛ پس D_{m+1} مستقیماً D_1، D_2، ...، D_m را می‌زند وتعداد بردهایش بیشتر از D_1 است. این امر بافرض متناقض است و حکم متحقق می‌گردد.

۸۵ـ مسابقات

روش معمول برای تعیین قهرمان (مثلادرتنیس) ازهشت بازیکن بدین‌صورت است که این گروه رابوسیلهٔ قرعه به‌دسته‌های دوتائی تقسیم می‌کنیم. با چهارمسابقه، چهار برنده خواهیم داشت که دوبه دوباهم مسابقه می‌دهند.

دوبرندهٔ این دسته‌ها درفینال بازی می‌کنند. برندهٔ فینال، اولین جایزه را دریافت می‌کند ودومین جایزه نصیب حریفش می‌شود. فرض می‌کنیم که هربازیکن قدرتی کاملا محدودداشته باشد، همانطورکه هرشیء دارای وزنی است وهمیشه قویتر، شخص ضعیف ترراً می‌زند (همچنین بین‌دوشیء، شیءسنگینتر کفهٔ ترازو را پائین می‌آورد). اگر اینطور باشد روش مزبور قهرمان را بطورمنصفانه تعیین می‌کند زیرا این قهرمان قویتر از همه است. ولی برای دومین قهرمان اینطورنیست.

احتمال اینکه‌فینالیست شکست خورده استحقاق دومین رتبه‌را داشته باشد، چقدر است؟

حل ـ برای درك مطلب، صورت مسئلهٔ را به طریق زیرمورد بررسی قرارمی‌دهیم: دراین دسته مسابقات، ممکن است دومین بازی‌کنی که‌مستحق جایزهٔ دوم است، یعنی‌شخصی که ازهمه‌بجز قهرمان، قویتراست، قبل ازفینال‌شکست‌بخورد، یعنی درحالتی که ۸ بازیکن‌داریم دریك‌چهارم فینال یانیمهٔ‌فینال شکست بخورد. دراین صورت فینالیست دومین جایزه رابدون آنکه استحقاقش را داشته باشد، دریافت می‌کند، این موضوع وقتی اتفاق می‌افتدکه درمورد ۸ بازیکن آنکس که مستحق جایزهٔ دوم است درگروه چهارتایی‌که قهرمان نیز در آنست باشد؛ فرض می‌کنیم C قهرمان و D دومی باشد؛ چون درگروه C سه جای باقی می‌ماندکه D بایدباآنها روبروشود، کلابرای D هفت جای وجود داردکه سه تایشان برای وی زیان بخشند.

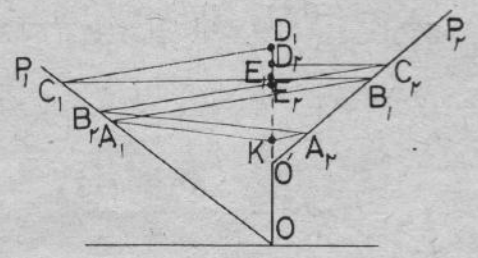
پس احتمال اینکه D دومین جاراشغال‌کند.. $\frac{۴}{۷} = ۰/۵۷۱۴$ می‌باشد، این مقدارکمی ازاز۵۷٪ بیشتر است.

۸۶ـ دوچرخه سوار و پیاده‌ها

رئیس مؤسسه‌ای دو مأمور پیاده، یکی را برای بردن نامه به پست ودومی را یك ربع بعد برای بردن پیغامی به یك فروشگاه فرستاد. رئیس‌بزودی دریافت‌که دونامه را اشتباه داده است؛ پس دوچرخه سواری را به دنبال دوپیاده فرستاد تارفع اشتباه‌کند. دوچرخه سوار می‌داندکه سرعت دو نامه‌بر با هم مساویست وازخودمی‌پرسدکه ابتداباید به‌کدامیك‌برسد. دوچرخه سوار برای انجام مأموریتش ازیکی ازدوطریق، به سرعتش می‌افزاید. بهترین راه حل کدامست؟

اگررئیس نامه‌هارا اشتباه نمی‌داد وفقط فراموش می‌کرد که به‌نامه‌برهاپول بدهد، راه حل‌چگونه بود؟

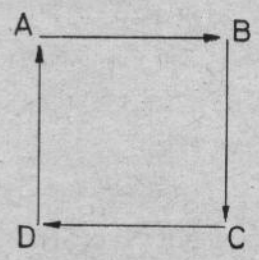
حل ـ در روی‌خط افقی راه پست (بسمت چپ) وراه فروشگاه (بسمت راست) را مشخص می‌کنیم؛ روی خط قائم‌در،



O زمان را مشخص می‌کنیم ؛ خطوط OP_1 و $OO'P_2$ نمایش مسیرهای نامه‌برهاست. اگر ابتدا دوچرخه سوار برای رسیدن به آنکس که اول حرکت کرده است، برود، دراین صورت مسیرش بوسیلهٔ $KA_1B_1C_1D_1$ نمایش داده می‌شود؛ اگر ابتدا خودش را به دیگری برساند. مسیرش بوسیلهٔ $K'B_2C_2D_2$ نمایش داده می‌شود. مطابق با شکل، نفع دوچرخه سوار درانتخاب دومین راه حل است؛ این امر درمورد وقتی که فقط باید به نامه‌رسانها پول بدهیم، یعنی اگر مسیرها منتهی به E_1 یا E_2 می‌شدند نیز قابل اجرا است .

۸۷- چهارسگ

چهارسگ A، B، C، D درچهار گوشهٔ مزرعهٔ مربع‌شکلی واقعند و ناگهان مطابق باپیکانهای شکل ، به دنبال یکدیگر می‌دوند. هرسگ دنبال سگ مجاورش می‌دود (A به دنبال B، B به دنبال C، C به دنبال D و D به دنبال A) .



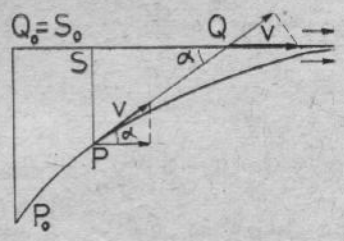
طول ضلع مزرعه ۱۰۰ متراست وسگها باسرعت ۱۰ متردرثانیه می‌دوند. پس از چه مدتی این سگها به هم می‌رسند؟ راهشان چه موقع باهم تلاقی می‌کند و کجا؟ طول مسیرشان چقدر خواهد بود ؟

حل- چون هرسگ درهرلحظه مسیری عمود برمسیر سگی که وی را تعقیب ویاوی آنرا تعقیب می‌کند، می‌پیماید ، هرکدام به سگ مجاورش باسرعت ۱۰ متردرثانیه نزدیک شده و پس از ۱۰ ثانیه به آن خواهد رسید. بنابراین هرسگ ۱۰۰ متر می‌پیماید. درهرلحظه ، سگها تشکیل مربعی را می‌دهند؛ این مربع درضمن کم‌شدن مساحتش ، می‌چرخد و اضلاعش منظماً با سرعت ۱۰ متردرثانیه کم می‌شوند. این خطوط درمرکزمزرعه با هم تلاقی می‌کنند ؛ این منحنی‌ها به (مارپیچ‌های لگاریتمی) موسومند. این منحنی‌ها زودتر ازاین مدت باهم تلاقی نمی‌کنند زیرا اگرسگی مسیرسگ دیگر رادرنقطه‌ای قطع کند، این به معنای آن خواهد بود که سگ اخیر قبلا دراین نقطه بوده است و این غیر ممکن است زیراکه فواصل سگها از مرکز بطور ثابت کم می‌شود .

۸۸- اولین داستان تعقیب

کشتی P، کشتی Q راکه بطورعمود بر PQ (درلحظه‌ای که P آنرا مشاهده می‌کند) حرکت می‌کند، مشاهده می‌نماید و برای کشتی امتدادثابتی را حفظ می‌کند. P به تعقیب Q پرداخته ومسیرش همیشه به سمت Q است . در هر لحظه، سرعت دو کشتی متساوی است (ولی می‌توانند درنعضی مواقع سرعتشان را تغییر دهند). بدون محاسبه دیده می‌شود که P مسیری منحنی الخطرا می‌پیماید. اگر تعقیب بقدر کافی طول بکشد، راه P تقریباً باراه Q فراری، منطبق می‌شود. پس ازمدتی نسبتاً زیاد، فاصلهٔ PQ چقدر است، درصورتی که کشتی اخیر باسرعت ۱۰ میل دریائی حرکت کند ؟

حل.- فرض می‌کنیم α زاویه‌ای باشد که درلحظهٔ مفروض امتداد PQ باراه کشتی Q می‌سازد، وفرض می‌کنیم که v سرعت P و Q دراین لحظه باشد. نزدیکی دو کشتی بستگی دارد به سرعت v که باآن P به سمت Q می‌رود و به مؤلفهٔ v از Q روی خط PQ واین مقدار $v\cos\alpha$ است ، این دو مقدار v و $v\cos\alpha$ مثبت‌اند. دراین صورت کشتی‌ها با سرعت $v(1-\cos\alpha)$ به هم نزدیک می‌شوند. تصویر S از نقطهٔ P روی مسیر Q این راه راباسرعت $v\cos\alpha$ می‌پیماید و Q باسرعت v دورمی‌شود؛ دراین صورت فاصلهٔ SQ باسرعت $v(1-\cos\alpha)$ زیاد می‌شود. چون فاصلهٔ PQ بااین سرعت کم می‌شود، مجموع $PQ+SQ$ ثابت ومقدارش برابربالحظهٔ اولیه ومساوی با ۱۰ میل است.



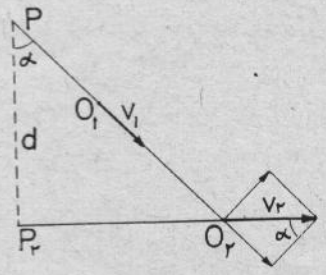
پس ازمدت مدیدی، P عملا بر S منطبق شده و خواهیم داشت $PQ+SQ=2PQ=10$ میل، ازآنجا $PQ=5$ میل.

۸۹- دومین داستان تعقیب

کشتی O_1، کشتی O_2 راکه درلحظهٔ مشاهده درامتدادی عمود برخط O_1O_2 حرکت می‌کرد می‌بیند. کشتی O_2 علامات O_1 را دریافت نمی‌کند وبا محفوظ داشتن سرعت v_1 وبدون تغییر دادن مسیر به راه خود ادامه می‌دهد . کشتی O_1 می‌خواهد جلب توجه کرده وکمك بخواهد وبا بیشترین سرعت ممکن v_1 جلو می‌رود وامتدادی را برمی‌گزیند بطوری که تا حداکثر ممکن به O_2 نزدیك شود . این امتداد چیست؟ کمترین فاصله چقدر است در صورتی که فاصلهٔ اولیه $O_1O_2=d$ بوده و نسبت

سرعتها $\frac{v_1}{v_2} = k < 1$ باشد .

حل- فرض می‌کنیم P_1، P_2 و O_1، O_2 به ترتیب موضع کشتی‌ها درلحظهٔ اولیه (وقتی که اولین کشتی، دومی را مشاهده می‌کند) ودرلحظه‌ای که‌فاصلهٔ آنها حداقل است، باشد. در این صورت اولین کشتی به‌صورت خط مستقیم از P_1 به O_1 در امتداد P_1O_2 رفته است. درضمن ، وقتی که فاصله حداقل است، مؤلفه‌های سرعتهای دو کشتی روی O_1O_2 باید باهم مساوی باشند ،یعنی ،اگر α زاویهٔ O_1O_2 با P_2O_2 باشد :



$$v_1 = v_2 \sin\alpha$$

بوده‌واز آنجا $\sin\alpha = k$ می‌باشد .

چون دو کشتی دریك لحظه به O_1 و O_2 می‌رسند داریم :

$$\frac{P_1O_1}{P_2O_2} = \frac{v_1}{v_2} = \sin\alpha$$

و چون $P_1O_2 = \frac{d}{\cos\alpha}$ ، $P_2O_2 = d\,tg\alpha$ است ، کوتاهترین فاصله برابراست با :

$$O_1O_2 = \frac{d}{\cos\alpha} - \frac{d\sin\alpha}{\cos\alpha} = d\cos\alpha = d\sqrt{1-k^2}$$

۹۰- مفروضات غیر کافی

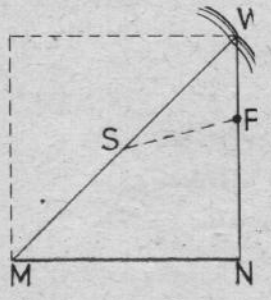
شخصی که مسئلهٔ قبل را بابی دقتی خوانده بود ، آنرا به دکتر براکادابرداد تاآنرا بامفروضات مسئله حل نماید اما بدبختانه این شخص فراموش کرده بودکه کدامیك ازکشتی‌ها سرعتش بیشتربوده است. بخاطرمی‌آوردکه نسبت سرعتهاداده شده و کوچکتر از واحد است، ولی نمی‌داند که این نسبت $\frac{v_1}{v_2}$ بود یا $\frac{v_2}{v_1}$. با ملاحظهٔ اینکه‌آقای دکتر راه حل مسئله را بااین مفروضات غیر کافی یافته است، نتوانست از تعجب خودداری کند! دکتربراکادابر چگونه عمل کرد؟

حل- اگر k به معنای مقدار قبلی باشد ، امتدادکشتی اولی بوسیلهٔ زاویهٔ α (شکل قبل) مشخص می‌شود و $\sin\alpha = k = \frac{v_1}{v_2}$ است. اگر، برعکس، k معرف نسبت $\frac{v_2}{v_1}$ بوده و امتدادکشتی بوسیلهٔ $\sin\alpha = k$ مشخص شود، کشتی‌هادر O_2 به هم خواهند رسید ، زیرا داریم $\frac{tg\alpha}{v_2} = \frac{1}{v_1\cos\alpha}$ ، واین به معنای آنست که $\frac{P_1O_2}{v_1} = \frac{P_2O_2}{v_2}$ ؛ امتداد تعقیب برای اولین کشتی، بوسیلهٔ همین تساوی که درحالت قبل نیز بدست آمده‌است، مشخص می‌شود .

۹۱- بازهم یك کشتی

یك قاچاقچی دارای کشتی است که‌سرعتش از کشتی نگهبان ساحلی سه مرتبه زیادتر است. این نگهبان درنیمهٔ راه مابین قاچاقچی ونقطه‌ای که شخص اخیر می‌خواهد نزدیك شود می‌باشد. قاچاقچی مصمم است که برای الحاق به‌ساحل، درامتداد جاده‌ای متشکل از دو ضلع یك مربع حرکت کند . قسمت خطرناك این مسیر کجا خواهد بود .

حل- نگهبان کشتی ساحلی ، در لحظهٔ اولیه در S است وکشتی قاچاقچی در M قرار دارد .



شخص اخیر درامتداد اضلاع MN و NW ازمربع تغییر مکان می‌دهد. نگهبان برای دستگیری قاچاقچی روی MN ، آهسته‌تر حرکت می‌کند؛

فرض می‌کنیم a طول ضلع مربع، v سرعت نگهبان و سرعت کشتی قاچاقچی $3v$ باشد. نقطهٔ P ازقطعه خط NW برای قاچاقچی خطرناك خواهد بود، اگر نگهبان قبل ازوی به‌آن رسیده‌باشد، یعنی اگر $\frac{MN+NP}{3v} > \frac{SP}{v}$ ، یا $a + NP > 3SP$ یا $(a+NP)^2 \geqslant 9(SP)^2$ باشد؛ نامساوی فوق معادل است با:

$$16(NP)^2 - 22a.NP + 7a^2 \leqslant 0$$

نامساوی اخیر به‌ازای $\frac{a}{2} \leqslant NP \leqslant \frac{7a}{8}$ محقق خواهدشد، دراین صورت $\frac{3}{16}$ طول مسیر خطرناك است ؛ منطقهٔ خطرناك از $\frac{3}{4}$ مسافرت شروع وبه $\frac{15}{16}$ ختم می‌شود .

۹۲- بازهم کشتی

فرض کنیم که درمسئلهٔ قبل ، قاچاقچی راهی را بیابدکه فقط یك‌بار به اندازهٔ 90° تغییرجهت دهد. چه‌راهی‌را بایدانتخاب کند بطوری که مطمئن باشدکه به ساحل‌درکمترین مدت ممکن رسیده واز تعقیبهای نگهبان ساحلی رهایی پیداکند ؟

حل- در لحظهٔ اولیه قاچاقچی در M و نگهبان در S است. قاچاقچی می‌خواهد به W نزدیك شود و S دروسط MW واقع است. صورت مسئله مشخص کرده است که کشتی بایددوضلع

بقیه در صفحهٔ ۵۶۶

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۷۵

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۷۵/۱- از: ا. آقا ابراهیمیان دانشجوی دانشگاه آریامهر

اولا معادلهٔ درجهٔ سومی با ضرایب گویا تشکیل دهید که یك جواب آن عبارت باشد از:

$$x = ۲ + \sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۲}$$

ثانیاً مقدار کسر زیر را به ازاء مقدار بالا حساب کنید:

$$\frac{x^۳ - ۲}{x^۲ - x}$$

حل- اولا از رابطهٔ داده شده داریم:

$$x - ۲ = \sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۴}$$

$$(x - ۲)^۳ = (\sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۴})^۳$$

$$(x - ۲)^۳ = ۲ + ۴ + ۳ \times \sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳]{۴}(\sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۴})$$

$$(x - ۲)^۳ = ۶ + ۶(x - ۲)$$

$$x^۳ - ۶x^۲ + ۶x - ۲ = ۰$$

ثانیاً از معادلهٔ اخیر داریم:

$$x^۳ - ۲ = ۶x(x - ۱)$$

$$\frac{x^۳ - ۲}{x^۲ - x} = \frac{۶x(x - ۱)}{x(x - ۱)} = ۶$$

۷۵/۲- از جوادفیض دانشجوی دانشگاه تبریز

درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که طول‌وتر آن $AB = ۲\sqrt{۵}$ وطولهای دو ضلع دیگر آن $AC = b$ و $BC = a$ و زاویهٔ حادهٔ BAC برابربا α است داریم:

$$۴(a\,tg\,\alpha + b)(b\,cotg\,\alpha + a) = ۲۵ab$$

مقادیر a و b را حساب کنید.

حل- با توجه به‌اینکه $tg\alpha = \frac{a}{b}$ و $cotg\alpha = \frac{b}{a}$ داریم:

$$\begin{cases} ۴(\frac{a^۲}{b} + b)(\frac{b^۲}{a} + a) = ۲۵ab \\ a^۲ + b^۲ = (۲\sqrt{۵})^۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۴(a^۲ + b^۲)^۲ = ۲۵a^۲b^۲ \\ a^۲ + b^۲ = ۲۰ \end{cases}$$

از این دستگاه با توجه به اینکه a و b مقادیر مثبتند نتیجه می‌شود $ab = ۸$ و خواهیم داشت:

$$a^۲ + b^۲ = (a + b)^۲ - ۲ab$$

$$۲۰ = (a + b)^۲ - ۱۶$$

$$\begin{cases} a + b = ۶ \\ ab = ۸ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = ۲ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۴ \end{cases}$$

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۷۵/۳- فرستنده: **جواد فیض**

هرگاه داشته باشیم:

$$ax^۲ + bx + c = A(x - x')^۲ + B(x - x'')^۲$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$۲ax'x'' + b(x' + x'') + ۲c = ۰$$

حل- طرف‌دوم رابسط داده نسبت‌به x مرتب می‌کنیم:

$$ax^۲ + bx + c =$$

$$= (A + B)x^۲ - ۲(Ax' + Bx'')x + Ax'^۲ + Bx''^۲$$

$$\begin{cases} A + B = a \\ -۲(Ax' + Bx'') = b \\ Ax'^۲ + Bx''^۲ = c \end{cases}$$

طرفین‌رابطهٔ اول را در $۲x'x''$ و ازرابطهٔ دوم را در $x' + x''$ و از رابطهٔ سوم‌را در ۲ ضرب‌کرده و روابط حاصل را با هم

جمع می‌کنیم، بعد از اختصار رابطهٔ مطلوب حاصل می‌شود .

۷۵/۴ـ فرستنده : جواد فیض

به فرض آنکه x و y عددهای مثبت باشند عدد های حقیقی m و n درچه شرطی صدق‌کنند تا دستگاه زیر جواب داشته باشد :

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^n \\ y^{x+y} = x^m \end{cases}$$

حل‌ـ داریم :

$$\begin{cases} (x+y)\log x = n\log y \\ (x+y)\log y = m\log x \end{cases}$$

$$(x+y)^2 \log x \log y = mn \log x \log y$$

اگر $\log x \log y = 0$ باشد نتیجه می‌شود $x = y = 1$ ودرغیر آن داریم :

$$(x+y)^2 = mn$$

برای آنکه این تساوی ممکن باشد لازم است‌که $mn > 0$ یعنی m و n دو عدد همعلامت باشند .

۷۵/۵ـ ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} + 3)$$

حل‌ـ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} + 3)$$

$$= \log_2 2^x(12^{x+1} + 3)$$

با فرض $2^x = X$ خواهیم داشت :

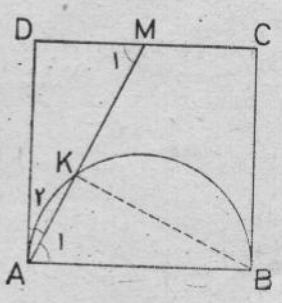
$$X^2 + 4 = X(2X + 3)$$

$$X^2 + 3X - 4 = 0 \implies X = 1 \text{ یا } -4$$

$$2^x \neq -4 \text{ و } 2^x = 1 \implies x = 0$$

۷۵/۶ـ از جواد فیض

درمربع ABCD به طول ضلع a خطی‌که رأس A را به M وسط ضلع CD وصل می‌کند نیمدایرهٔ به قطر AB را در K قطع می‌کند . طول پاره خط MK را برحسب a حساب کنید .



حل‌ـ از B به K وصل می‌کنیم. زاویهٔ K قائمه است وزاویهٔ A_1 بازاویهٔ M_1 برابر است چون هر دو متمم زاویهٔ A_2 می‌باشند ، دو مثلث ABK و AMD متشابهند و چون DM نصف AD است پس AK نصف BK است و داریم :

$$AK^2 + BK^2 = AB^2 \text{ یا } AK^2 + 4AK^2 = a^2$$

$$AK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

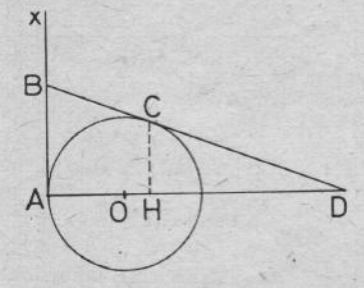
$$AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$MK = AM - AK = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

۷۵/۷ـ ازعبدالوهاب فخریاسری، چهارریاضی خ.ارزمی ۱

ازنقطهٔ A واقع بردایرهٔ به مرکزO مماسAx را برآن رسم‌کرده وارنقطهٔ اختیاری B واقع بر Ax مماس دیگر BC را بردایره رسم می‌کنیم وامتداد می‌دهیم تا امتداد AO رادر D قطع‌کند. اگر H تصویر C برAD باشد ثابت‌کنیدکه :

$$\frac{1}{CH} = \frac{1}{CB} + \frac{1}{CD}$$



حل‌ـ چون CH موازیABاستداریم:

$$\frac{AB}{CH} = \frac{BD}{CD}$$

$$AB = BC \implies \frac{BC}{CH} = \frac{BD}{CD}$$

$$\frac{1}{CH} = \frac{BC + CD}{BC \cdot CD} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{BC}$$

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۷۵/۸ـمنحنیهای C و C′ به معادلات زیرمفروضند:

$$(C): y = ax^2 + bx + c \text{ و } (C'): y = \frac{x+4}{x-2}$$

هرگاه رأس منحنی C برنقطهٔ تلاقی مجانب قائم‌منحنی C′ با محورطولها واقع بوده ونقطهٔ تلاقی منحنیC بامجانب افقی منحنیC′ به‌طول یك‌باشد ضرایب a وb وc را معین‌کرده

ودومنحنی را دریك دستگاه محورها رسم کنید .

حل- معادله‌های مجانبهای منحنی C' عبارتنداز $x=2$ و $y=1$ پس $S(2 \text{ و } 0)$ رأس و $M(1 \text{ و } 1)$ یك نقطه‌ازمنحنی C است و بایدداشته باشیم:

$$\begin{cases} 0=4a+2b+c \\ 1=a+b+c \\ 4a+b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{|l} a=1 \\ b=-4 \\ c=4 \end{array}$$

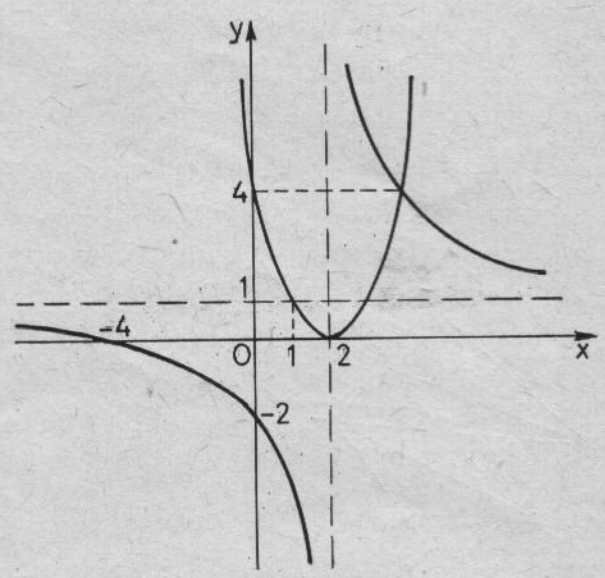
$$(C) : y=x^2-4x+4 \quad \text{و} \quad y'=2x-4$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'			$-$		0	$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↘	0	↗	$+\infty$

$$(C') : y=\frac{x+4}{x-2} \quad \text{و} \quad y'=\frac{-6}{(x-2)^2}$$

x	$-\infty$		-4		0		2		$+\infty$
y'			$-$				|		$-$
y	1	↘	0	↘	-2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1

دو منحنی به شکل زیر می‌باشند و یکدیگر را در یك نقطهٔ (۴ و ۴) قطع می‌کنند .



۷۵/۹- معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{tg4x+tg2x}{tg4x-tg2x}=2$$

حل- بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$tg4x-3tg2x=0$$

$$\frac{2tg2x}{1-tg^2 2x}-3tg2x=0$$

$$tg2x(3tg^2 2x-1)=0$$

$$tg2x=0 \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

$$3tg^2 2x-1=0 \Longrightarrow tg2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۷۵/۱۰- منحنی C نمایش‌هندسی تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ و مجانبهای آن محورطولها را در A و B ومحورعرضها را در C و D قطع می‌کند. اولاثابت‌کنید برای آنکه $AB=CD$ باشد لازم و کافی است‌که ω مرکز تقارن منحنی برنیمساز یکی از زوایای محورها واقع باشد .

ثانیاً به فرض‌آنکه $AB=CD=1$ و ω دربخش اول محورها واقع بوده و A وسط OB باشد منحنی C را مشخص کرده ورسم‌کنید. آیا وقتی منحنی C مشخص باشد معادلهٔ‌آن نیز مشخص است یا نه ؟

حل- مختصات نقاط مورد نظرعبارتنداز:

$$A(-\frac{b}{a} \text{ و } 0) \text{ ، } B(-\frac{d}{c} \text{ و } 0)$$

$$\text{، } C(0 \text{ و } \frac{b}{d}) \text{ ، } D(0 \text{ و } \frac{a}{c})$$

$$AB=\left|\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right|=\left|\frac{bc-ad}{ac}\right|$$

$$CD=\left|\frac{b}{d}-\frac{a}{c}\right|=\left|\frac{bc-ad}{dc}\right|$$

$$AB=CD \Longleftrightarrow \left|\frac{bc-ad}{ac}\right|=\left|\frac{bc-ad}{dc}\right|$$

اگر $bc - ad = 0$ باشد نتیجه می‌شود $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ و تابع برابر مقدار ثابت می‌گردد . پس $bc - ad \neq 0$ است و داریم:

$$AB = CD \iff ac = dc \iff a = \pm d$$

مرکز تقارن منحنی $\omega\left(-\frac{d}{c} \text{ و } \frac{a}{c}\right)$ است و برای آنکه ω بر نیمساز یکی از زوایای محورها واقع باشد لازم و کافی است که $a = \pm d$

ثانیاً- چون $AB = CD$ و ω در بخش اول واقع است یعنی $-\frac{d}{c} = \frac{a}{c}$ پس $a = -d$ بوده و داریم :

$$y = \frac{ax + b}{cx - a}$$

از تقسیم عبارات صورت و مخرج بر c تابع به شکل زیر بدست می‌آید :

$$y = \frac{px + q}{x - p}$$

چون A بین O و B است پس

$$A\left(-\frac{q}{p} \text{ و } 0\right) \text{ و } B(p \text{ و } 0)$$

$$AB = p + \frac{q}{p} = \frac{p^2 + q}{p} = 1$$

$$\Longrightarrow p^2 + q = p$$

$$OB = 2OA \text{ و } AB = 1 \Longrightarrow OA = 1$$

$$OA = 1 \Longrightarrow -\frac{q}{p} = 1 \text{ یا } q = -p$$

$$p^2 - 2p = 0 \text{ و } p \neq 0 \Longrightarrow p = 2 \text{ و } q = -2$$

$$y = \frac{2x - 2}{x - 2} = \frac{2cx - 2c}{cx - 2c}$$

در ازاء مقادیر مختلف c برای ضرایب معادله مقادیر مختلف بدست می‌آید اما همهٔ معادلات حاصل یك تابع ویك منحنی را مشخص می‌کنند .

۷۵/۱۱- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

ثابت کنید که تساوی زیر به ازاء هیچ مقداری از α ممکن نیست .

$$5\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha = 4$$

حل- تساوی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$5\sin 2\alpha(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) = 8$$

$$5\sin 4\alpha - 10\sin 2\alpha\cos 4\alpha = 16 \qquad (I)$$

نامساویهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$-5 < 5\sin 4\alpha < 5$$

$$-10 < -10\sin 2\alpha\cos 4\alpha < 10$$

از آنجا نتیجه می‌شود که :

$$-15 < 5\sin 4\alpha - 10\sin 2\alpha\cos 4\alpha < 15$$

بنا بر این تساوی (I) غیر ممکن است .

۷۵/۱۲- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

بدون استفاده از مشتق مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم عبارت زیر را تعیین کنید :

$$\varphi(x) = 2\sin^2 x + 4\cos^2 x + 6\sin x\cos x$$

حل- داریم :

$$\varphi(x) = 1 - \cos 2x + 2 + 2\cos 2x + 3\sin 2x$$

$$\varphi(x) = 3\sin 2x + \cos 2x + 3$$

اگر α کمانی باشد که $tg\alpha = \frac{1}{3}$ خواهیم داشت :

$$\varphi(x) = 3\left(\sin 2x + \frac{1}{3}\cos 2x\right) + 3$$

$$= 3(\sin 2x + tg\alpha\cos 2x) + 3$$

$$= \frac{3}{\cos\alpha}(\cos\alpha\sin 2x + \sin\alpha\cos 2x) + 3$$

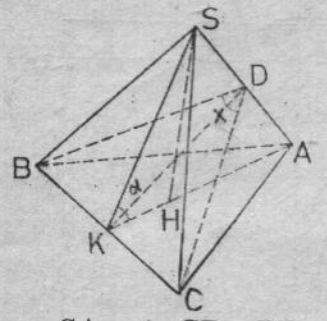
$$= \frac{3\sin(2x + \alpha)}{\cos\alpha} + 3$$

باتوجه به اینکه $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ماکسیمم و می‌نیمم عبارت فوق وقتی است که $\sin(2x + \alpha)$ برابر با یك یا -1 باشد که در این حالت ماکسیمم و می‌نیمم $\varphi(x)$ به ترتیب عبارتند از : $3 + \sqrt{10}$ و $3 - \sqrt{10}$

۷۵/۱۳- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

SABC هرم منتظمی است که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است. اگر α زاویهٔ یکی از وجوه جانبی با صفحهٔ قاعده معلوم باشد مقدار زاویهٔ مسطحهٔ فرجه‌ای که از دووجه جانبی تشکیل می‌شود برحسب α چقدر خواهد بود؟

حل- ارتفاع AK از قاعدهٔ ABC را رسم می‌کنیم.



SK بر BC عمود و زاویهٔ SKA مسطحهٔ فرجه‌ای است که بین وجه SBC و صفحهٔ قاعده تشکیل می‌شود که بنا به فرض برابر با α است . از B و C عمودهای BD و CD را بر SA رسم

می‌کنیم. زاویهٔ $x = BDC$ مسطحهٔ فرجهٔ بین دو وجه جانبی است . چون هرم منتظم است پس H پای ارتفاع آن درمرکز قاعده واقع است و اگر $R = HA$ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث قاعده باشد داریم :

$$KH = \frac{R}{۲} \quad و \quad BC = R\sqrt{۳}$$

$$\cos\alpha = \frac{KH}{SK} \Longrightarrow SK = \frac{R}{۲\cos\alpha}$$

$$SA = SC = \sqrt{SK^۲ + KC^۲} =$$

$$= \sqrt{\frac{R^۲}{۴\cos^۲\alpha} + \frac{۳R^۲}{۴}} = \frac{R}{۲\cos\alpha}\sqrt{۱ + ۳\cos^۲\alpha}$$

$$CD \cdot SA = BC \cdot SK$$

$$CD = \frac{BC \cdot SK}{SA} = \frac{R\sqrt{۳}}{\sqrt{۱ + ۳\cos^۲\alpha}}$$

$$\sin\frac{x}{۲} = \frac{KC}{CD} = \frac{\sqrt{۱ + ۳\cos^۲\alpha}}{۲}$$

$$x = ۲\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{۱ + ۳\cos^۲\alpha}}{۲}$$

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۷۵/۱۴ـ برسهمی به معادلهٔ $y^۲ = ۲x$ نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که اگر از M موازی با محور y ها رسم کنیم تا سهمی را مجدداً در N قطع کند، عددحجم حاصل ازدوران سطح محصور بین سهمی وخط MN حول محورطولها π برابرعدد مساحت سطح مزبور باشد .

حل ـ اگر α طول نقطهٔ M و V و S به‌ترتیب حجم و سطح مورد نظر باشد داریم :

$$g(x) = ۲x \Longrightarrow G(x) = x^۲ + c$$

$$V = \pi\alpha^۲$$

$$y = \sqrt{۲x} = \sqrt{۲}\, x^{\frac{۱}{۲}}$$

$$Y = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + C = \frac{۲\sqrt{۲x}\sqrt{x}}{۳} + C =$$

$$= \frac{۲x\sqrt{۲x}}{۳} + C$$

مساحت سطح مورد نظر دو برابر مساحت سطح محصور بین سهمی و محور طولها و خط MN است پس :

$$S = \frac{۴\alpha\sqrt{۲\alpha}}{۳}$$

$$V = \pi S \Longrightarrow ۳\alpha^۲ = ۴\alpha\sqrt{۲\alpha}$$

$$\alpha \neq ۰ \quad و \quad ۳\alpha = ۴\sqrt{۲\alpha}$$

$$۹\alpha^۲ - ۳۲\alpha = ۰ \Longrightarrow \alpha = \frac{۳۲}{۹}$$

۷۵/۱۵ـ تابع اولیهٔ تابع زیر را تعیین کنید بقسمی که به ازاء $x = \frac{\pi}{۲}$ برابر با $\frac{\pi}{۲}$ گردد .

$$y = \frac{\sin^۴ x + ۱}{\sin^۲ x}$$

حل ـ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$y = \sin^۲ x + \frac{۱}{\sin^۲ x}$$

$$y = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۲x + \frac{۱}{\sin^۲ x}$$

$$Y = \frac{x}{۲} - \frac{۱}{۴}\sin ۲x - \operatorname{cotg} x + C$$

$$x = \frac{\pi}{۲} \quad و \quad Y = \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow C = \frac{\pi}{۴}$$

$$Y = \frac{x}{۲} - \frac{۱}{۴}\sin ۲x - \operatorname{cotg} x + \frac{\pi}{۲}$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۷۵/۱۶ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دایرهٔ ثابت C به مرکز O وبه شعاع یك وروی نیم‌خط Ox نقطهٔ A به‌فاصلهٔ $OA = x$ از O مفروض است. دایره‌های Γ و Ω را درنظرمی گیریم که اولی به مرکز A است و بر O می‌گذرد ودومی به مرکز O است وبر A می‌گذرد .

۱) اگر H پای $\triangle$ محوراصلی دایره‌های C و Γ باشد طول OH را برحسب x حساب کنید. مقادیری از x را تعیین کنید که به ازاء آنها $\triangle$ با Ω متقاطع باشد. اگر M نقطهٔ تلاقی $\triangle$ با Ω باشد طول HM را برحسب x حساب کنید .

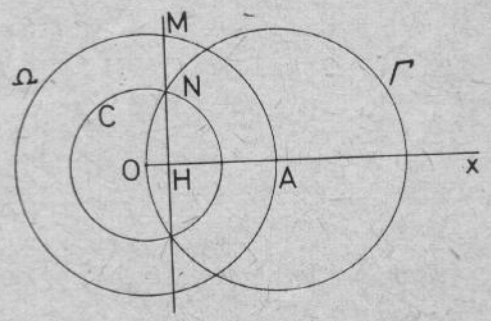
۲) به‌فرض آنکه N نقطهٔ تلاقی $\triangle$ با دایرهٔ C بوده و N و M دریك طرف H واقع باشند. نسبت زیررا برحسب x بدست آورید :

$$y = \frac{HM}{HN}$$

تغییرات y را معین کرده منحنی نمایش آنرا رسم کنید .

۳) محور $x'x$ را منطبق بر Ox ومحور $y'y$ راعمودبر $x'x$ در O انتخاب می‌کنیم. هرگاه P وسط کمان AM ازدایرهٔ Ω باشد معادلهٔ مکان P را نسبت به‌محورهای انتخابی بدست آورده نوع منحنی این مکان را معین کنید .

حل-۱) اگر I وسط OA باشد داریم :



$$IH = \frac{1 - x^2}{2OA} = \frac{1 - x^2}{2x}$$

$$\overline{OH} = OI + IH = \frac{x}{2} + \frac{1 - x^2}{2x} = \frac{1}{2x}$$

چون x مثبت است پس $OH = \frac{1}{2x}$

برای آنکه $\triangle$ با Ω متقاطع باشد لازم و کافی است که :

$$OH < OA \text{ یا } \frac{1}{2x} < x \Longrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$HM^2 = OM^2 - OH^2 = x^2 - \frac{1}{4x^2} = \frac{4x^4 - 1}{4x^2}$$

$$HM = \frac{\sqrt{4x^4 - 1}}{2x}$$

۲) وقتی $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد مسلماً $x > \frac{1}{2}$ بوده و $\triangle$ دایرهٔ C را در N قطع می‌کند وداریم :

$$HN^2 = ON^2 - OH^2 = 1 - \frac{1}{4x^2} = \frac{4x^2 - 1}{4x^2}$$

$$HN = \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{2x}$$

$$y = \frac{HM}{HN} = \sqrt{\frac{4x^4 - 1}{4x^2 - 1}}$$

تابع به ازاء $x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ معین واتصالی است .

$$y' = \frac{4x(4x^4 - 2x^2 + 1)}{(4x^2 - 1)^2}\sqrt{\frac{4x^4 - 2}{4x^2 - 1}}$$

معادلهٔ $4x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ ریشهٔ حقیقی ندارد پس علامت y' همان علامت x است وداریم :

x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

اکنون معلوم می‌کنیم که منحنی مجانب دارد یانه؟

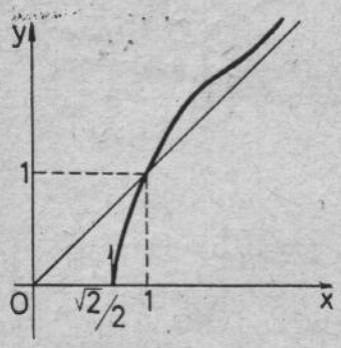
$$m = \lim\frac{y}{x} = \lim\sqrt{\frac{4x^4 - 1}{x^2(4x^2 - 1)}} = 1$$

$$h = \lim(y - x) = \lim\left[\sqrt{\frac{4x^4 - 1}{4x^2 - 1}} - x\right]$$

$$h = \lim\frac{x^2 - 1}{\sqrt{4x^2 - 1}\,(\sqrt{4x^4 - 1} + x\sqrt{4x^2 - 1})}$$

$$x \to +\infty \Longrightarrow h \to 0$$

خط $y = x$ مجانب منحنی است وعلاوه برآن در نقطهٔ (۱و۱) منحنی را قطع می‌کند و منحنی نمایش هندسی تابع به شکل مقابل است .



۳) اگر $OA = R > \frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاویهٔ POA برابر با θ فرض شود داریم :

$$OH = \frac{1}{2R} = OM\cos 2\theta$$

$$\frac{1}{2R} = R\cos 2\theta$$

$$2R^2\cos 2\theta = 1$$

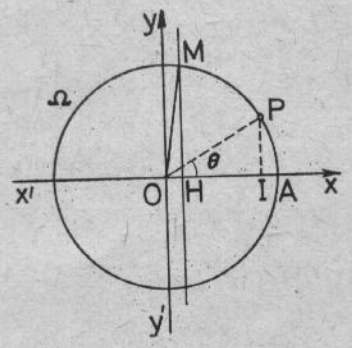
$$2R^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$$

اگر $P(x \text{ و } y)$ باشد داریم :

$$\cos\theta = \frac{OI}{OP} = \frac{x}{R}, \quad y = \frac{IP}{OP} = \frac{y}{R}$$

$$2R^2\left(\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2}\right) \quad 1$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$$



با توجه به اینکه $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ است مکان P شاخه‌ای از هذلولی متساوی القطرین به مرکز O است که داخل زاویهٔ xoy واقع است. رأس این هذلولی بر Ox و به فاصلهٔ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ از O قرار دارد.

۷۵/۱۷ـ متأسفانه درچاپ صورت مسئله عبارت تابع از قلم افتاده است و ازاین جهت این مسئله دراین شماره در بخش مسائل برای حل به صورت کامل تکرار می‌شود.

۷۵/۱۸ـ از جواد فیض

ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر صحیح و مثبت n عدد زیر بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است.

$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

حل ـ عبارت را به ترتیب زیر تبدیل می‌کنیم:

$$A_n = 121 \times 11^n + 12 \times 144^n$$
$$= 121 \times 11^n + 12(133 + 11)^n$$
$$= 121 \times 11^n + 12 \times 11^n + 133k$$
$$= 133 \times 11^n + 133k = \text{مضرب } 133$$

۷۵/۱۹ـ ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

هرگاه مقصود از $[f(x)]$ بزرگترین عدد صحیح موجود در $f(x)$ باشد، معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3}$$

حل ـ بافرض $\frac{2x-1}{3} = y$ داریم:

$$\left[y\right] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = \frac{5y-1}{2}$$

بنا به تعریف $\left[y\right] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = \left[2y\right]$ و داریم:

$$\left[2y\right] = \frac{5y-1}{2}$$

بافرض $\frac{5y-1}{2} = k$ داریم:

$$\left[\frac{4k+2}{5}\right] = k$$

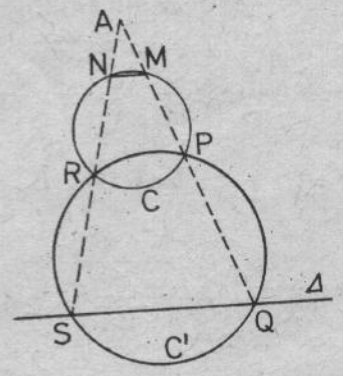
از این رابطه معلوم می‌شود که k عددی است صحیح و در نتیجه داریم:

$$k \leq \frac{4k+2}{5} < k+1$$
$$5k \leq 4k+2 < 5k+5$$
$$-3 < k \leq 2$$
$$k = -2, -1, 0, 1, 2$$
$$y = \frac{-3}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1$$
$$x = \frac{-2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2$$

۷۵/۲۰ـ ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

دایرهٔ ثابت C و خط ثابت △ مفروض است. نقطهٔ ثابت P را بردایرهٔ C و نقطهٔ ثابت Q را بر خط △ انتخاب می‌کنیم. دایرهٔ دلخواه C_1 را چنان رسم می‌کنیم که از P و Q بگذرد وغیرازآن دایرهٔ C را در R و خط △ رادر S قطع کند. ثابت کنید که خط RS دایرهٔ C را دریک نقطهٔ ثابت قطع می‌کند.

(درچاپ صورت مسئله درشمارهٔ قبل عبارت «از P و Q بگذرد وغیرازآن» ازقلم افتاده است)



حل ـ QP و SR یکدیگر رادر A و دایرهٔ C را به ترتیب در M و N قطع می‌کنند. بادرنظر گرفتن قوت A نسبت به دودایره داریم:

$$AM.AP = AN.AR$$
$$AP.AQ = AR.AS$$

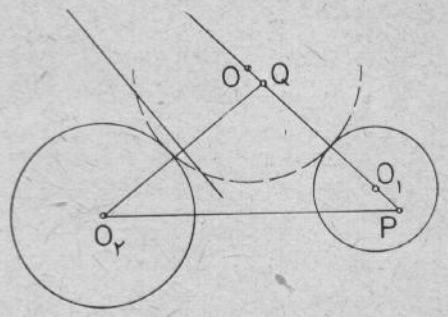
ازاین دورابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{AM}{AQ} = \frac{AN}{AS}$$

بنابه عکس قضیهٔ تالس MN با QS یعنی با △ موازی است وچون △ ونقطهٔ M ودایرهٔ C ثابت می‌باشند پس نقطهٔ N نیز ثابت است.

۷۵/۲۱ـ ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

دو دایرهٔ متخارج غیرمتساوی ونقطهٔ A روی یکی ازآنها مفروض است. دایرهٔ سوم را طوری رسم کنید که از A گذشته بردو دایرهٔ مفروض مماس باشد.



حلـ اگر O_1 و O_2 مراکز دوایر مفروض و R_1 و R_2 شعاعهای آنها و O مرکز دایرهٔ مطلوب و R شعاع آن باشد O بر خط O_1A واقع است و داریم : $|OO_1 - OA| = R_2$

O برهزلولی واقع است که A و O_2 کانونهای آن و R_2 فاصلهٔ دو رأس آن است .

تعیین نقطهٔ O موکول می‌شود به تعیین نقطهٔ تلاقی خط O_1A با هذلولی مزبور. اما راه حل سادهٔ مسئله به این ترتیب است که بر خط O_1A دو نقطهٔ P و Q را چنان انتخاب می کنیم که $AP = AQ = R_2$ باشد. از تلاقی عمود منصف O_2P و همچنین عمود منصف O_2Q با خط O_1A نقاط O و O′ مراکز دوایر مطلوب بدست می‌آیند.

پاسخ تستهای ریاضی

۷۵/۲۲ـ(د)؛ چون بین سه کسر مخرج مشترک بگیریم وآنرا حذف کنیم بعداز اختصار خواهیم داشت :

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0$$

$$a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 = 0$$

$$a^2 - (b \pm c)^2 = 0$$

$$(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) = 0$$

۷۵/۲۳ـ(ب)؛ در مثلث قائم‌الزاویهٔ MTO′ طول ضلع MO′ ثابت اما طول وتر MO′ متغیر است پس طول ضلع MT نیز تغییر می‌کند. طول MT وقتی بیشترین یا کمترین مقدار خود را دارد که طول MO′ بیشترین یا کمترین مقدار خود را داشته باشد واین امر وقتی حاصل است که M در A یا B یعنی درامتداد OO′ واقع شود.

۷۵/۲۴ـ (الف) ؛ در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ APT و AQS داریم :

$$\sin\alpha = \frac{AT}{PA} = \frac{r}{a - 2r}$$

$$\sin\beta = \frac{AS}{QS} = \frac{r}{a + 2r}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{2ar}{a^2 - 4r^2} = 1$$

$$4r^2 + 2ar - a^2 = 0$$

از این معادله باتوجه به اینکه r مثبت است نتیجه می‌شود :

$$r = \frac{-a + \sqrt{5a^2}}{4} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{4}$$

۷۵/۲۵ـ (الف)؛ هرگاه x و y طولهای ضلعهای زاویهٔ قائمه و z طول وتر باشد داریم :

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ xy = 2m^2 \end{cases}$$

$$z^2 = (x-y)^2 + 2xy = (x-y)^2 + 4m^2$$

ازاین رابطه برمی‌آید که z^2 ودرنتیجه z وقتی کمترین مقدار را دارد که $x - y = 0$ باشد ودراین حالت داریم :

$$z^2 = 4m^2 \Longrightarrow z = 2m$$

اگر h ارتفاع مثلث باشد داریم :

$$2m.h = 2m^2 \Longrightarrow h = m$$

۷۵/۲۶ـ(ج) ؛ اولا چون عبارت طرف اول معادله مثبت است m باید مثبت باشد، ثانیاً با توجه به اینکه

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} \times \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}} = 1$$

است با فرض $A = \left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)^x$ (!) داریم:

$$A + \frac{1}{A} = m$$

$$A^2 - mA + 1 = 0$$

$$\Delta = m^2 - 4 > 0 \text{ و } m > 0 \Longrightarrow m > 2$$

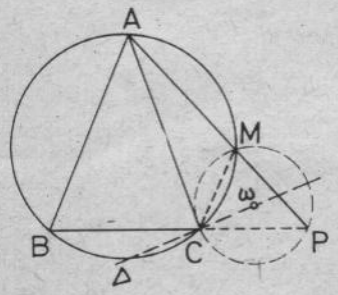
۷۵/۲۷ـ(ج) نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث ABC داریم:

$$jP = \frac{1}{2}\left(\widehat{AB} - \widehat{MC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\widehat{AC} - \widehat{MC}\right) = \frac{1}{2}\widehat{AM}$$

$$j\,ACM = \frac{1}{2}\widehat{AM}$$

$$j\,P = j\,ACM$$



خط AC درنقطهٔ C بر دایرهٔ محیطی مثلث MCP مماس است و ω برخط Δ واقع است که درنقطهٔ C بر AC عمود است. وقتی M

محیط‌دایره رابپیماید ω تمام خط $\triangle$ را خواهد پیمود .

۷۵/۲۸-(د)؛ معادلهٔ دوم دستگاه راچنین می‌نویسیم:

$$(xy+x+y)^2-2xy(x+y+1)=2a^2+1$$

با فرض $x+y+1=S$ و $xy=P$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} P+S=2a+2 \\ PS=a^2+2a \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه خواهد شد :

$$\begin{cases} P=a \\ S=a+2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} P=a+2 \\ S=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=a \\ x+y=a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a \\ y=1 \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x=1 \\ y=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=a+2 \\ x+y=a-1 \end{cases}$$

$$z^2-(a-1)z+a+2$$

$$\triangle=(a-1)^2-4(a+2)>0$$

$$a^2-6a-7\geqslant 0 \Longrightarrow a>7 \text{ یا } a<-1$$

۷۵/۲۹-(د)؛ ازحذف y بین دومعادله وبعد اختصار خواهیم داشت :

$$(x+2)^2(x-2m)=0$$

این معادله درازاء جمیع مقادیر m دارای ریشهٔ‌مضاعف $x=-2$ است پس خط ومنحنی درازاء همهٔ مقادیرm درنقطهٔ به طول ۲- بریکدیگر مماسند .

۷۵/۳۰-(الف)؛ ازبسط‌واختصار عبارت طرف اول، عبارت طرف دوم بدست می‌آید ورابطهٔ داده شده اتحاداست .

۷۵/۳۱-(ج)؛ از رابطهٔ مفروض داریم :

$$a=\frac{\cos y-\cos x}{1-\cos y\cos x}$$

$$\frac{1+a}{1-a}=\frac{(1+\cos y)(1-\cos x)}{(1-\cos y)(1+\cos x)}=$$

$$=tg^2\frac{x}{2}\ cotg^2\frac{y}{2}$$

۷۵/۳۲-(الف)؛ با توجه به مفروضات داریم :

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)x-c)+$$
$$+(x-a)(a-b)$$

$$S=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+$$
$$+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

مجموع سه‌کسر اخیربعد ازاختصار برابر باصفر می‌شود .

۷۵/۳۳-(د)؛ عبارت داده شده بعد از اختصار چنین می‌شود :

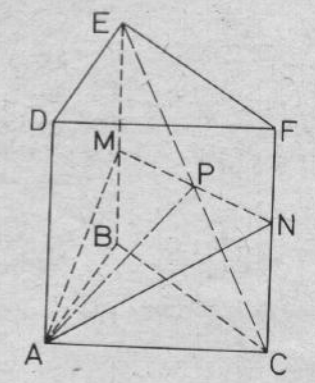
$$y=tg\,ax$$

$$y'=a(1+tg^2ax)=a(1+y^2)$$

$$y''=a(2yy')$$

۷۵/۳۴-(ج)؛ اگرhارتفاع دوات و S مساحت‌سطح قاعدهٔ‌آن وx ارتفاع مخروط دهانهٔ آن باشد ، حجم مرکب $S(h-x)$ است که باید برابر باشد با حجم قسمت خالی دوات یعنی :

$$S(h-x)=\frac{2}{3}Sx \Longrightarrow \frac{x}{h}=\frac{3}{5}$$



۷۵/۳۵-(الف)؛قطر CEازمتوازی‌الاضلاع BCFE خط MN را درP قطع می‌کند و از تساوی‌دومثلثPME و PNC لازم می‌آید کهP وسط هریك ازدو پاره خط CE و MN واقع باشد. چون CE ثابت‌است‌پس‌Pثابت بوده وخط AP ازصفحهٔ AMN نیزثابت است :

۷۵/۳۶-(ب)؛معادلهٔ خط $\triangle$ می‌شود$y=m(x-1)$ واز حل این معادله بامعادلهٔ تابع حاصل می‌شود :

$$x^2-2x-3=\frac{1}{m^2}$$

این معادله همواره دارای دوجواب است. برای‌آنکه خطدایرهٔ به قطرMN برمنحنی مفروض مماس باشدکافی است‌که $\triangle$ در نقاط MوN قائم برمنحنی باشد :

$$y'=\frac{-4}{(x^2-2x-3)\sqrt{(x^2-2x-3)}}=-\frac{1}{m}$$

$$(x^2-2x-3)^2=16m^2$$

$$\left(\frac{1}{m^2}\right)^2=16m^2 \text{ و } m>0 \Longrightarrow m=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۵/۳۷-(ج)؛ از حل معادلهٔ $y = mx$ با معادلهٔ مفروض نتیجه می‌شود :

$$x^2 + 3mx + m^2 - m = 0$$

$$4p^2 + 27q^2 = 27m^2(m+1)^2 = 0$$

$$m = 0 \text{ یا } -1$$

۷۵/۳۸-(ج)؛ هرگاه $A = 2B$ باشد داریم :

$$\frac{a}{\sin 2B} = \frac{a}{\sin B} = \frac{c}{\sin 3B}$$

$$a = 2b\cos B \quad \text{و} \quad c = b(3 - 4\sin^2 B)$$

$$b(b+c) = b^2(1 + 3 - 4\sin^2 B) = 4b^2\cos^2 B = a^2$$

برعکس از رابطهٔ $a^2 = b(b+c)$ داریم :

$$\sin^2 A = \sin B(\sin B + \sin C)$$

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin(A+B)$$

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin B \sin(A+B)$$

$$\sin(A-B) = \sin B \Longrightarrow A = 2B$$

۷۵/۳۹-(د)؛ داریم :

$$S = pr = \frac{1}{2}h_a a$$

$$pr = 2mr^2 \Longrightarrow p = 2mr$$

$$tg\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{r}{2mr - mr} = \frac{1}{m}$$

$$A = 30^\circ \Longrightarrow \frac{1}{m} = 2 - \sqrt{3} \Longrightarrow m = 2 + \sqrt{3}$$

۷۵/۴۰-(ج)؛ با فرض $u = ab$ و $v = \overline{cd}$ داریم :

$$100u + v = uv + 10u$$

v بر u قابل قسمت است و با فرض $v = uq$ از رابطهٔ بالا داریم:

$$q = \frac{90}{u-1}$$

$$u - 1 = 10 ، 15 ، 18 ، 30 ، 45 ، 90$$

از روی u مقداری v و از آنجا عدد مطلوب تعیین می‌شود :

$$N = 1199 ، 1696 ، 1995 ، 3193 ، 4692 ، 9191$$

۷۵/۴۱-(د)؛ چون مخرجهای دو کسر نسبت به هم اولند پس یکی 5^2 و دیگری 2^2 است و داریم .

$$\frac{a}{25} + \frac{b}{4} = \frac{87}{100}$$

$$4a + 25b = 87$$

$$a = 21 - 6b + \frac{3-b}{4}$$

$$3 - b = 4k \text{ و } b < 4 \Longrightarrow b = 3 \text{ و } a = 3$$

۷۵/۴۲-(ج) ؛ مجموع تمام مقسوم علیه‌های N عبارتست از :

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + p + 2p + \ldots + 2^n p$$

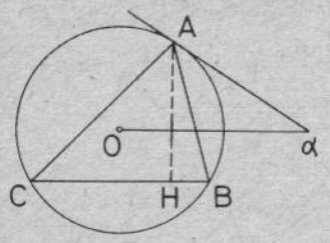
$$S = (1+p)(1 + 2 + 2^2 + \ldots = 2^n)$$

$$S = (1+p)(2^{n+1} - 1)$$

$$p \times 2^n = (1+p)(2^{n+1} - 1) - p \times 2^n$$

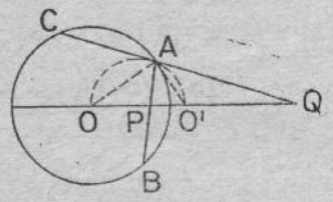
$$p = 2^{n+1} - 1$$

۷۵/۴۳-(د) ؛



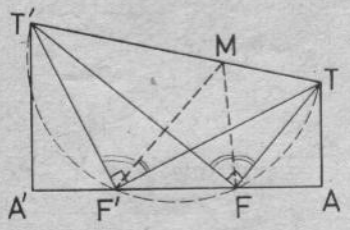
مطابق با شکل قطبی نقطهٔ α نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاع AH از مثلث است . همچنین قطبیهای دو نقطهٔ دیگر دو ارتفاع دیگر مثلث است. چون سه ارتفاع مثلث متقاربند پس قطبهای آنها بریک خط مستقیم واقعند .

۷۵/۴۴-(ج) ،



وقتی دو وتر AB و AC متساوی باشند نیمساز زاویهٔ BAC از O می‌گذرد و اگر O' نقطهٔ تلاقی نیمساز زاویهٔ خارجی BAC با PQ باشد O و O' نسبت به P و Q مزدوج توافقی‌اند. برای رسم وترهای مطلوب ابتدا O' مزدوج توافقی O را نسبت به P و Q تعیین می‌کنیم، آنگاه دایرهٔ به قطر OO' را رسم می‌کنیم تا از تلاقی آن با دایرهٔ مفروض نقطهٔ A بدست آید. دو دایره حداکثر در دو نقطه متقاطعند پس مسئله حداکثر دوجواب دارد .

۷۵/۴۵-(ب)؛ اگر M نقطهٔ تماس TT' با بیضی باشد



بنا به قضیهٔ پونسله FT و FT' به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های AFM و $A'FM$ هستند. در نتیجه زاویهٔ TFT' نصف زاویهٔ AFA' است و قائمه می‌باشد. به همین ترتیب معلوم خواهد شد که زاویهٔ $TF'T'$ نیز قائمه است پس دایرهٔ به قطر TT' از F و F' می‌گذرد .

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۷۶/۱- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$$

۷۶/۲- ترجمه از فرانسه

دایرهٔ به مرکز O و به‌قطر $AB=2R$ مفروض‌است. شعاع OC را عمود بر AB و در نقطهٔ B مماس Bx را بر دایره‌رسم کرده‌وروی OC نقطهٔ دلخواه M را درنظرمی گیریم. خط AM دایره را در N و مماس Bx را در I قطع می‌کند. درنقطهٔ N مماسی بردایره رسم می‌کنیم که Bx را در P تلاقی می‌کند. اولا ثابت کنید که:

۱) P وسط BI و M وسط AI است.

۲) چهارضلعی AMPO متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPO ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. ثانیاً به فرض اینکه M وسط OC باشد طولهای پاره خطهای AN و BN و مساحت چهار ضلعی OMNP را برحسب R حساب کنید.

کلاس چهارم ریاضی

۷۶/۳- فرستنده: جواد فیض دانشجوی دانشکدهٔ فنی تبریز

ثابت کنید که هرگاه $p\neq 1$ باشد معادلهٔ:

$$\frac{x^2-x}{x^2+x-1}=p$$

دارای دو ریشهٔ حقیقی α و β است و دو مقدار $\alpha(\alpha-1)$ و $\beta(\beta-1)$ مختلف‌العلامتند.

۷۶/۴- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\left(\frac{x+a}{x+}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$$

۷۶/۵- از مصطفی گودرزی طائمه

هرگاه S_2 و S_3 ... و S_n به ترتیب مجموع دوجمله، سه جمله و... و n جملهٔ اولیه ازتصاعد حسابی با جملهٔ‌اول $S_1=a$ و با قدر نسبت d باشد حاصل جمع زیر را بدست آورید:

$$A=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n$$

۷۶/۶- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

دایرهٔ C به مرکز O و خط $\triangle$ در خارج آن و نقطهٔ A روی $\triangle$ مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که بردایرهٔ C وهمچنین در A بر $\triangle$ مماس باشد.

مسئله را برای حالتی‌که A به‌جای $\triangle$ بردایرهٔ C واقع باشد نیز حل کنید.

۷۶/۷- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

دایرهٔ C و دو نقطهٔ ثابت A و B واقع برآن مفروض است. نقطهٔ متغیر M را بر دایره در نظر گرفته و در امتداد AM و درخارج دایره نقطهٔ N را بقسمی انتخاب می‌کنیم که MN با MB برابرباشد. وقتی M روی دایرهٔ C تغییرمکان دهد مکان N چیست؟

کلاس پنجم طبیعی

۷۶/۸- هرگاه تابع y و مشتق‌آن y' عبارت باشنداز:

$$y=\frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+d}}$$

$$y'=\frac{(3+4x)\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2}$$

مقادیر a و b و c و d را معلوم کنید.

۷۶/۹- در مثلث ABC داریم:

$$\cos A=\frac{7}{9} \quad \text{و} \quad \sin B+\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

مقدار $\cos\frac{B-C}{2}$ را حساب کنید.

کلاس پنجم ریاضی

۷۶/۱۰ـ از رابطهٔ زیر تابع y را برحسب x بدست آورده نمایش هندسی آنرا رسم کنید. اگر نقاطی وجود دارد که در آنها منحنی از خودش عبور می‌کند تانژانت زاویهٔ مماسهای برمنحنی را در این نقاط حساب کنید.

$$(x^2 - x - 2)y^2 - (3x^2 - x - 1)y + 2x^2 - x = 0$$

۷۶/۱۱ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

تابع $f(x) = A\cos x + B\sin x$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه به ازاء دو مقدار متمایز α و β که $\alpha - \beta \neq k\pi$ است $f(\alpha) = 0$ و $f(\beta) = 0$ باشد ثابت کنید که در این صورت $A = B = 0$ می‌باشد.

۷۶/۱۲ـ از **عبدالحسین ایمانی** دانشجوی دانشکدهٔ فنی

اولا ثابت کنید که:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

ثانیاً مجموع زیر را حساب کنید:

$$S = \frac{\sin^2\alpha}{\cos 3\alpha} + \frac{\sin^2 3\alpha}{\cos 9\alpha} + \dots + \frac{\sin^2 3^{n-1}\alpha}{\cos 3^n\alpha}$$

۷۶/۱۳ـ ترجمهٔ از فرانسه

کنج سه قائمهٔ Oxyz و روی Ox و Oz به ترتیب نقاط A و C رادرنظر می‌گیریم بقسمی که $OA = \alpha$ و $OC = c$ باشد. در صفحهٔ xOz در نقطهٔ C عمودی بر Oz اخراج می‌کنیم که عمود منصف OA را در B قطع می‌کند و درصفحهٔ xOy دایرهٔ Γ به قطر OA و از B خط $\triangle$ را موازی با Oy رسم می‌کنیم. هرخط که Oy و $\triangle$ و Γ را قطع می‌کند G می‌نامیم.

۱ـ اگر I نقطهٔ معلومی از Oz باشد خطوط G را که بر I می‌گذرند تعیین کرده و در تعداد آنها برحسب مواضع نقطهٔ I روی Oz بحث کنید. ثابت کنید که ازهر نقطهٔ K ازدایرهٔ Γ یك وفقط یك خط G می‌گذرد به استثنای یك نقطه که آنرا معلوم خواهید کرد.

۲ـ اگر ω نقطه‌ای از Oz غیرازC باشد و P صفحه‌ای باشد که در ω بر Oz عمود بوده و ωu خطی از صفحهٔ P باشد، ثابت کنید که یك وفقط یك خط G یافت می‌شود که ωu را در M متمایز از ω قطع می‌کند و اگر M_1 و M_2 به‌ترتیب نقاط تلاقی خط ωu با صفحهٔ دوخط Oy و $\triangle$ و با سطح مخروطی به رأس C و به‌قاعدهٔ Γ باشد داریم:

$$\overline{\omega M} = \overline{\omega M_1} + \overline{\omega M_2}$$

۳ـ فرض می‌کنیم π صفحه‌ای باشد که بر Oy می‌گذرد وشامل $\triangle$ نیست. نقطهٔ N محل تلاقی صفحهٔ π را با خط دلخواه G غیر مار بر O تعیین کنید و همچنین n نقطهٔ تلاقی CN را با صفحهٔ xOy بدست آورید. ثابت کنید با تغییر خط G مکان نقاط n یك دایره است و ازآن نتیجه بگیرید که مکان نقاط N عبارتست ازفصل مشترك صفحهٔ π بایك سطح مخروطی که آنرا تعیین خواهید کرد.

کلاس ششم طبیعی

۷۶/۱۴ـ سهمی به معادلهٔ $y^2 = 2px$ و نقطهٔ M به طول a از آن را در نظر می‌گیریم. اگر N نقطهٔ به طول $-a$ ازمحور $x'x$ باشدثابت کنید که خط MN بر سهمی مماس است. مقدار a را معلوم کنید برای آنکه خط MN با محور $x'x$ زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد.

۷۶/۱۵ـ به ازاء چه مقادیر n دورهٔ تناوب تابع زیر برابر با 3π است:

$$y = \cos nx \sin\frac{5x}{n}$$

کلاس ششم ریاضی

۷۶/۱۶ـ ترجمهٔ از فرانسه

درصفحهٔ محورهای متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ نیم خط Oz با $x'x$ زاویهٔ α می‌سازد. روی $x'x$ دو نقطهٔ A و A' با طولهای a و $-a$ و روی Oz نقطهٔ M را در نظر می‌گیریم که $OM = x$ باشد.

۱ـ تابع زیر را برحسب a و α و x مشخص کنید و جدول تغییرات ومنحنی نمایش هندسی آنرا رسم کنید.

$$y = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MA'}^2}$$

۲ـ اوضاعی ازنقطهٔ M را تعیین کنید که در ازاء آنها $y = k^2$ باشد و نتایج حاصل‌را از روی‌شکل‌نیز بدست‌آورید.

۳ـ با فرض اینکه دو وضع M_1 و M_2 از M وجود داشته باشد بقسمی که $y = k^2$ باشد، دراین‌حال اگر ω و ω' مراکزدایره های γ و γ' دایره‌های محیطی‌مثلثهای AM_1M_2 و $A'M_1M_2$ باشد مکان ω و ω' را تعیین کنید هرگاه:

الف ـ α ثابت و k تغییر کند.

ب ـ k ثابت و α تغییر کند.

۴ـ هر گاه B و B' نقاط تلاقی دیگردایره های γ و γ' با دایرهٔ به قطر AA' باشد ، ثابت‌کنیدکه P نقطهٔ تلاقی دو خط AB و $A'B'$ روی Oz واقع است و Q نقطهٔ تلاقی AB' با $A'B$ یکی از مراکز تجانس دودایرهٔ γ و γ' است و R نقطهٔ تلاقی BB' با $x'x$ مرکز دیگر تجانس دو دایرهٔ مزبور است.

۷۶/۱۷ـ از جهانشاه کریمی‌بیرگانی، مسجدسلیمان

منحنیهای نمایش هندسی دو تابع زیررا در فاصلهٔ (2π و 0) رسم کرده سطح محصور بین دو منحنی را در فاصلهٔ مزبور تعیین‌کنید. برمنحنیهای مزبور نقاطی با طولهای برابر راتعیین کنیدکه قائمهای بردو منحنی دراین‌نقاط بریکدیگر عمودباشند:

$$y = \pm \sin x + \cos x$$

۷۶/۱۸ـ فرستنده : کامران پارسای قمی

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طولهای دو ضلع زاویهٔ قائمه عددهای منطق وطول وتر عدد اول است . ثابت‌کنید که در این‌مثلث طول ارتفاع وارد بروترنمی‌تواند عدد صحیح باشد .

۷۶/۱۹ـ فرستنده: کامران پارسای قمی

به ازاء چه مقدار ازعدد صحیح N، عدد$(N^2 - 71)$ برعدد $(7N + 55)$ بخش پذیر است؟

۷۶/۲۰ـ ترجمهٔ از فرانسه

مثلث ABC محاط دردایرهٔ به‌مرکزO ومثلث$A'B'C'$ محیط براین دایره را درنظر می گیریم بقسمی‌که $B'C'$ در A و$C'A'$ درB و$A'B'$ در C بردایره مماس‌باشد. نقطهٔ دلخواه M را بردایره اختیارکرده در آن مماس $\triangle$ را بر دایره رسم می‌کنیم‌که خطوطی راکه از O موازی باBC و CA وAB رسم می‌شوند به ترتیب در A'' و B'' و C'' قطع می‌کند. ثابت‌کنیدکه خطوط $A'A''$ و $B'B''$ و $C'C''$ متقاربند.

۷۶/۲۱ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دایرهٔ به مرکز O را درصفحهٔ P ونقطهٔ S را در خارج صفحه ونقطهٔM راروی‌دایرهٔ مزبوردرنظر می گیریم.صفحه‌ای که در S بر SM عمود شود عموماً صفحهٔ P را در خط $\triangle$ قطع می‌کند . ثابت کنید که با تغییر M روی دایره خط $\triangle$ همواره بریك منحنی مقطع مخروطی مماس می‌باشد و در نوع این منحنی بحث کنید .

تستهای ریاضی

کلاس چهارم ریاضی

۷۶/۲۲ـ هر گاه یکی از ریشه های معادلهٔ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

برابربا یك باشد، در این‌صورت حاصل عبارت

$$S = a^3 + b^3 + c^3$$

برابر است با :

الف ـ صفر　　ب ـ یك

ج ـ $6abc$　　د ـ $3abc$

۷۶/۲۳ـ هر گاه $f(x)$ چندجمله‌ای‌صحیح به صورت :

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + 1$$

باشد و عبارت حاصل

$$f(x) - f(x+\alpha)$$

به صورت کاملا مشخص داده شده باشد ، در این صورت :

الف ـ همهٔ ضرایب a و b و ... و l معلوم می‌شوند.

ب ـ عموماً همهٔ ضرایب a و b و . . . و k معلوم می‌شوند اما l را نمی‌توان معلوم‌کرد .

ج ـ هیچیك از ضرایب a و b و ... و l را نمی‌توان معلوم‌کرد .

د ـ غیر از a و l بقیهٔ ضرایب را می‌توان تعیین‌کرد.

۷۶/۲۴ـ معادلهٔ

$$\frac{x}{x+\sqrt{x}} + a^2\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right] = 2a$$

الف ـ درازاء همهٔ‌مقادیر a دارای جواب است.

ب ـ وقتی دارای جواب است‌که $0<a<1$ باشد .

ج ـ وقتی دارای جواب است که $a<0$ یا $a>1$ باشد.
د ـ به ازاء هیچ مقدار از a جواب ندارد .

۷۶/۲۵ـ هرگاه داشته باشیم:

$$x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

$$y=\frac{\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}}$$

$$S=(x+y)+(x+y)^2+\ldots+(x+y)^n$$

مقدار S برابر است با :

الف ـ $2(2^n-1)$ ب ـ $2(2^n+1)$

ج ـ $2^{n+1}-1$ د ـ هیچکدام

۷۶/۲۶ـ به‌فرض آنکه داشته باشیم:

$$A=1+2+3+\ldots+n$$

$$B=1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

$$C=2+4+6+\ldots+2n$$

و مقصود تعیین عدد صحیح ومثبت n باشد تا یکی از مقادیر A وB وC واسطهٔ هندسی دومقدار دیگر باشد :

الف ـ برای n فقط یك جواب بدست می‌آید.

ب ـ برای n دو جواب بدست می‌آید .

ج ـ برای n بیش از دو جواب بدست می‌آید .

د ـ برای n جوابی بدست نمی‌آید .

۷۶/۲۷ـ مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصل آنها ازدونقطهٔ ثابت A و B برابر بامقدار ثابت k^2 باشد؛

الف ـ خطی است عمود بر AB.

ب ـ دایره‌ای است به مرکز O وسط AB.

ج ـ دایره‌ای است به قطرAB.

د ـ دایره‌ای است که مرکز آن بر O وسط AB واقع نیست .

۷۶/۲۸ـ در مربع ABCD نقطهٔ E را بـه دلخواه روی ضلع BC انتخاب کرده و نیمساز زاویهٔ DAE را رسم می‌کنیم که ضلع CD را درF قطع می‌کند . مجموع طولهای DF و BE :

الف ـ از AE کوچکتر است .

ب ـ از AE بزرگتر است .

ج ـ با AE برابر است.

د ـ قابل مقایسه با AE نیست .

۷۶/۲۹ـ از نقطهٔ ثابت A واقع در خارج دایرهٔ ثابت T مماس AT و قاطع ABC را نسبت به دایره رسم می‌کنیم بقسمی که B بین A و C است . درنقطهٔ B عمودی بر AB اخراج می‌کنیم و روی آن نقطهٔ Dرا چنان‌تعیین می‌کنیم که مساحت مثلث ACD برابربا $\overline{AT}^2$ باشد. هرگاه قاط ABC حول A حرکت‌کند، مساحت مثلثABD:

الف ـ ثابت باقی می‌ماند .

ب ـ تغییر می‌کند و در حالتی‌که قاطع بر مرکز دایره بگذرد کمترین مقدار را دارد .

ج ـ تغییرمی‌کند و درحالتی‌که قاطع برمرکزدایره بگذر بیشترین مقدار را دارد .

د ـ تغییر می‌کند اما درحالتی‌که قاطع بر مرکـز دایره می‌گذرد نه بیشترین مقدار را دارد ونه‌کمترین مقدار را .

کلاس پنجم ریاضی

۷۶/۳۰ـ مستطیل ABCD را در نظر می‌گیریم که رأسهای A وB ازآن برمنحنی نمایش هندسی تابع $y^2=2ax$ و رأسهای C وD ازآن برخط به معادلهٔ $x=h$ واقع باشند. هرگاه x طول نقطهٔ A تغییرکند، مساحت مستطیل مزبور:

الف ـ برابر با مقدار ثابت باقی می‌ماند.

ب ـ تغییر می‌کند و وقتی ماکسیمم است که $x=\frac{h}{3}$ باشد .

ج ـ تغییر می‌کند و در ازاء $x=\frac{h}{3}$ می‌نیمم است.

د ـ تغییر می‌کند اما درازاء $x=\frac{h}{3}$ نه ماکسیمم‌است‌ونه می‌نیمم.

۷۶/۳۱ـ به فرض آنکه $x^2+y^2=k^2$ و k مقـدار ثابت باشد تابع $z=x+y$ وقتی‌ماکسیمم یا می‌نیمم است‌که:

الف ـ $x=y=\pm\frac{k\sqrt{2}}{2}$

ب ـ $x=\frac{k\sqrt{2}}{2}$ و $y=-\frac{k\sqrt{2}}{2}$

ج ـ $x=y=\pm\sqrt{2}$

د ـ تابع ماکسیمم یا می‌نیمم ندارد .

۷۶/۳۲ـ زاویهٔ xOy به اندازهٔ ۶۰ درجه را درنظر گرفته روی ضلع Ox ازآن نقطهٔ M و روی ضلع Oy ازآن دو نقطهٔ P و Q را انتخاب می‌کنیم که :

$OQ=2OP=2a$ و $OM=x$

باشد . وقتی x تغییرکند تابع $y=\overline{MP}^2+\overline{MQ}^2$

الف ـ تغییر می‌کند و درازاء $x = \frac{3a}{4}$ می‌نیمم است .

ب ـ تغییر می‌کند و در ازاء $x = \frac{3a}{4}$ ماکسیمم است.

ج ـ تغییر می‌کند اما درازاء $x = \frac{3a}{4}$ نه ماکسیمم است و نه می‌نیمم .

د ـ همواره برابر مقدار ثابت است .

۷۶/۳۳ـ به فرض آنکه داشته باشیم :

$$\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 3x}{b} = \frac{\sin 5x}{c}$$

در این صورت بین a و b و c رابطهٔ زیر برقرار است :

الف ـ $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = -1$

ب ـ $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = 1$

ج ـ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = 1$

د ـ هیچکدام

۷۶/۳۴ـ معادلهٔ زیررا درنظرمی گیریم:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin x$$

این معادله درفاصلهٔ (2π و 0) دارای چهارجواب‌است وانتهای کمانهای مربوط به این جواب در دایرهٔ مثلثاتی :

الف ـ چهار رأس یك مربع هستند .

ب ـ چهار رأس یك مستطیل هستندکه یك ضلع آن دو برابر ضلع دیگر است .

ج ـ چهار رأس یك مستطیل هستندکه نسبت بین دوضلع مجاورآن $\sqrt{2} + 1$ است .

د ـ معادله در فاصلهٔ (2π و 0) فقط سه جواب دارد .

۷۶/۳۵ـ دوتساوی زیررا درنظر می گیریم :

$$1)\quad \cos\theta = \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha}$$

$$2)\quad tg\frac{\theta}{2} = \pm tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\beta}{2}\, tg\frac{\gamma}{2}$$

الف ـ از رابطهٔ (۱) رابطهٔ(۲) بدست می‌آید امارابطهٔ (۱) ازرابطهٔ (۲) بدست نمی‌آید.

ب ـ رابطهٔ (۱) از رابطهٔ (۲) بدست می‌آید درحالی که رابطهٔ (۲) از رابطهٔ (۱) بدست نمی‌آید.

ج ـ دو رابطه مستقل ازیکدیگرند .

د ـ هریك از دو رابطه ازدیگری بدست می‌آید .

۷۶/۳۶ـ زاویهٔ قائمهٔ AOB را درنظر می گیریم و درنقاط A و B به ترتیب عمودهای AP و BQ را بر صفحهٔ AOB و دریك طرف آن اخراج می‌کنیم . در این صورت داریم :

الف ـ $\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2AP.BQ$

ب ـ $\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + 2AP.BQ$

ج ـ $\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + AP.BQ$

د ـ هیچکدام

۷۶/۳۷ـ در صفحهٔ P مربع ABCD به طول ضلع $2a$ را در نظر می گیریم . اگر I وسط AD و J وسط BC باشد در صفحهٔ Q که بر I و J می گذرد و برصفحهٔ P عمود است نیمدایرهٔ به قطر IJ را رسم‌کرده و برآن نقطهٔ S راانتخاب می‌کنیم . درصورتی‌که α زاویهٔ SIJ و β زاویهٔ مسطحهٔ وجه SAB با صفحهٔ P باشد در این صورت رابطهٔ $tg\beta = \sin 2\alpha$:

الف ـ وقتی‌که S در رأس نیمدایره باشد برقرار است .

ب ـ وقتی برقرار است‌که تصویر S روی صفحهٔP در ثلث طول IJ واقع باشد .

ج ـ S درهرنقطه ازنیمدایره که باشد برقرار است.

د ـ هیچگاه برقرار نیست .

کلاس ششم ریاضی

۷۶/۳۸ـ منحنی نمایش هندسی تابع :

$$y = |x\sqrt{x-1}|$$

الف ـ ماکسیمم و می‌نیمم ندارد.

ب ـ یك ماکسیمم و یك می‌نیمم دارد.

ج ـ یك ماکسیمم دارد و می‌نیمم ندارد.

د ـ هیچکدام.

۷۶/۳۹ـ حد سطح محصوربین منحنی نمایش تابع:

$$y = \frac{3x^2 + 1}{2x^2}$$

و مجانب‌مایل‌آن و دوخط $x = 1$ و $x = k$ وقتی $k \to +\infty$ برابر است با :

الف ـ $\frac{1}{2}$ ب ـ ۱

ج ـ ۲ د ـ ∞

۷۶/۴۰ـ در مثلث ABC هرگاه داشته باشیم :

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2}$$

الف ـ مرکز دایرهٔ محیطی برمرکز دایرهٔ محاطی منطبق است .

ب ـ مرکزدایرهٔ محیطی روی یکی ازدایره های محاطی خارجی واقع است .

ج ـ مرکز دایرهٔ محیطی روی دایـرهٔ محاطی داخـلی قرار دارد .

د ـ رابطهٔ داده شده هیچگاه برقرار نیست .

۷۶/۴۱ـ معادلهٔ: $tgx + a\,tg3x = (a+1)\,tg2x$ غیر از $x = k\pi$ وقتی جواب داردکه :

الف ـ $a \geq 1$ یا $a < -3$ ب ـ $-3 < a \leq 1$

ج ـ a هرچه باشد جواب وجود دارد .

د ـ به ازاء هیچ مقداری از a غیر از $x = k\pi$ جواب دیگری برای معادله وجود ندارد .

۷۶/۴۲ـ هرگاه عدد سه رقمی $\overline{abc}$ بـر ۳۷ قـابل قسمت باشد ؛

الف ـ هر یك از عددهای $\overline{bca}$ و $\overline{cab}$ نیز بر ۳۷ قابل قسمتند .

ب ـ عدد $\overline{bca}$ بر۳۷ قابل قسمت است اما $\overline{cab}$ بـر آن قابل قسمت نیست .

ج ـ عدد $\overline{cab}$ مضرب ۳۷ است اما $\overline{bca}$ مضرب‌آن نیست .

د ـ هیچیك از عـدد های $\overline{bca}$ و $\overline{cab}$ مضـرب ۳۷ نیستند .

۷۶/۴۳ـ هرگاه N عددی صحیح و غیرمشخص ، u رقم یکان و S مجموع ارقام‌آن باشد عدد :

$$T = N + 2S + 3u$$

الف ـ درهرحال بر۶ بخش پذیر است.

ب ـ وقتی بر۶ بخش‌پذیر است‌که u زوج باشد .

ج ـ وقتی بر۶ بخش پذیر است‌که u مضرب ۳ باشد .

د ـ هیچگاه بر۶ بخش‌پذیر نیست .

۷۶/۴۴ـ دو دایرهٔ متغیر ω و ω' برهم عمودند و هردو از O مرکـز دایرهٔ ثابت به شععا R گـذشته و براین دایره مماسند. هرگاه C نقطهٔ تلاقی دیگر این دو دایـره و C' منعکس C در انعکاس (R^2 و O) باشد، مکان C' :

الف ـ دایره‌ای است عمودبردایرهٔ O.

ب ـ دایره‌ای است به مرکز O و به شعاع $2R$.

ج ـ دایره‌ای است به مرکزO و به شعاع $R\sqrt{2}$.

د ـ دایره‌ای است‌که از O می گذرد .

۷۶/۴۵ـ دو خط ثابت و متوازی D و D' مفروض است. دایرهٔ به مرکز ثابت O و به شعاع متغیر R خط Dرا در M و M' و خط D' را در N و N' قطع می‌کند. خطوط MN و MN' و $M'N$ و $M'N'$:

الف ـ بربیضی ثابتی مماسند.

ب ـ بر هذلولی ثابتی مماسند.

ج ـ برسهمی ثابتی مماسند .

د ـ همه‌باهم برمنحنی ثابتی‌ازمقاطع‌مخروطی‌مماس‌نیستند.

پاسخ به یك پرسش :

دربارهٔ حل تستهای شیمی کنکور سراسری ۱۳۴۹

مندرج دریکان شمارهٔ ۷۵

علت انتخاب شمارهٔ ۲ در تست شمارهٔ ۳۹ ازسؤالهای شیمی گروه ریاضی.

ترکیب $CH_2 - CH(OH)_2$ که دارای دو مجموعهٔ OH روی یك اتم‌کربن است، پایدار نیست و با خارج شدن یك مولکول آب (ازتأثیر متقابل H^+ و OH^- دومجموعهٔ OH) به‌صورت $CH_2 - CHO$ درمی‌آید. ترکیب

$$CH_2 - CH = CH - OH$$

که دارای‌مجموعهٔ OH روی اتم‌کربن بااتصال دوگانه است نیز پایدار نیست . پیوند دوگانهٔ بین‌کربن ـ کربن جای خود را تغییر می‌دهد و بین‌کربن ـ اکسیژن قرارمی گیرد ومولکول به صورت $CH_2 - CH_2 - CH_2 = O$ درمی‌آید.

ترکیب $CH_2 - C \equiv C - OH$ نیز پایدار نیست ومولکول به‌صورت $CH_2 - CH = C = O$ درمی‌آید. اماخصوصیات موجود درسه ترکیب بالا در ترکیب

$$HO - CH_2 - CH = CH_2$$

وجود ندارد ، یعنی یك مجموعـهٔ OH روی‌کربن با پیونـد ساده قرارگرفته است وبنابراین ترکیب پایدار است.

***

ویسکوزیته ـ می‌دانیم‌که اگرجسمی در سطح جسمی دیگر بلغزد یا بغلتد، نیروی اصطکاك ایجاد می‌شودکه سرعت متحرك‌راکم‌می‌کند. امااگرهردوجسم که‌درحال تماسند،متحرك باشند، درآن‌صورت نیروی اصطکاك سرعت جسمی راکه تندتر حرکت می‌کند،کم می‌کند وسرعت دیگری‌را زیاد می‌کند .

گازها و مایعات را می‌توان لایه لایه درنظر گـرفت . وقتی‌که مایع (یاگاز) درحال حرکت است ، سرعت حـرکت لایه‌های متفاوت یکسان نیست . علت این است‌که بین لایه‌ها نیروی اصطکاك ایجاد می‌شود که سرعت لایه هایی را که تند حرکت می‌کنند،کم می‌کند و سرعت لایه‌هایی راکه‌کند حرکت می‌کنند، زیاد می‌کند. اصطکاکی‌که بین لایه‌های مایع (یاگاز) براثرحرکت نسبی‌آنهاپیدامی‌شود،اصطکاك‌درونی یاویسکوزیته نامیده می‌شود.

باقرمظفرزاده

داستانهای ریاضی

نوشتهٔ رینه (Rhind)

ترجمه و تنظیم از داوید ریحان

مجلس دوستانه

دیروقت بود. صاحب مغازهٔ خواربارفروشی که درضمن مشروب نیز می‌فروخت با آخرین مشتریان خود به صحبت نشسته بود. نمی‌دانم موضوع ازکجا شروع شدکه منتهی به پاکدامنی و درستکاری اشخاص شد. مطالبی دربارهٔ بدی فروش اجناس پیش‌آمد ودراین بین فروشنده گفت:

- اخیرا فهمیده‌ام‌که ترازوی من غلط است.

(این ترازوازآن‌دستگاههای‌دو کفه‌ای‌بود که‌به‌آن‌ترازوی ربروال‌می گویند).

- بعداز بررسی‌آن معلوم شد تیغه‌ای‌که شاهین‌روی‌آن تکیه داردرست دروسط قرارنگرفته‌است. برای‌آنکه درفروش جنس رعایت انصاف شده باشد چنین عمل می‌کنم: به عنوان مثال وقتی می‌خواهم یك‌کیلوبرنج یاهرچیز دیگری رابفروشم، وزنه‌را یکدفعه دریك‌کفه، دفعهٔ دیگر درکفهٔ دیگر قرار می‌دهم یعنی جنس را دوبار و هربار با یکی از کفه ها می‌کشم. بدین ترتیب، حداعتدال را رعایت‌کرده‌ام و خیالم راحت است.

ازمیان حاضرین، بازرس شهرداری صدایش درآمد:

- آره ...

- به درستکاری من شك دارید؟

فروشنده کلمات فوق را درحالی که رنگ‌عوض کرده و رنجیده خاطر بنظر می‌رسید اداکرد.

- به هیچ وجه، اصلا اینطور نیست. نظر من این است که هر توزین به ضررشماست. درتمام توزینها شما می‌بازید! خواسته باشید توضیح بیشتر می‌دهم. دراینجا بازرس گفت:

«به نظرم این درس ارزش یك لیوان آبجو را داشته باشد ...»

فروشنده چاره‌ای جزقبول این پیشنهادرا نداشت. دربارهٔ توزین، مسئلهٔ دیگری را عنوان‌کرد:

- ببینید اگر یکی از شما بتواند مسئلهٔ زیرراکه هرروزه باآن دست به‌گریبانم حل‌کند، به همهٔ شما سور می‌دهم. این یك بشکهٔ پرازآبجو به ظرفیت ده لیتر است. واین‌هم دوبشکهٔ کوچك است‌که ظرفیت یکی پنج لیتر و دیگری سه لیتراست. روی هیچکدام از این بشکه ها درجهٔ شاخصی وجود ندارد. خرسند می‌شوم اگریکی ازشما بتواند درهرکدام‌از این ظروف یك لیترآبجو بریزد. این گوی و این میدان!

بازهم، بازرس باکمی تفکر جواب مسئله را داد. وی آبجوی موجود را اختیارکرد و پس از چندبار جا بجا کردن محتوای ظروف، توانست در هرکدام‌از ظروف دقیقاً یك لیتر بریزد.

وی چگونه عمل‌کرد؟ وچگونه به فروشنده قبولاندکه توزین وی اشتباه بوده‌است؟ چگونگی اعمال را می‌توانید در زیر ملاحظه بفرمایید:

طولهای دوبازوی شاهین ترازورا a وb و وزنهٔ‌نشانه‌دار را به x نشان می‌دهیم. حال اگر وزنهٔ x دریکی ازکفه ها و یا کفهٔ دیگر قرارگیرد، وزن اجناس وزن شده y و z باشد، برطبق‌قانون ارشمیدس، شرایط تعادل ترازو به‌صورت معادلات زیر نوشته می‌شوند:

$$ax = by \text{ ، } az = bx$$

بنابراین اوزان حقیقی اجناس وزن شده عبارتند از:

$$z = \frac{b}{a}x \quad \text{و} \quad y = \frac{a}{b}x$$

در این صورت وزن کل دوتوزین متوالی عبارتست از :

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)x$$

ولی، این وزن درتمام حالات بزرگتر از $2x$ است زیراکه:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$$

می‌باشد . چرا؟ اولین جملهٔ این نامساوی‌را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2-2ab+2ab}{ab}=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{ab}+2$$

طرف دوم که مجموع ۲ ویك عدد مثبت است از ۲ بزرگتر است. وقتی فروشنده فکرمی‌کندکه ۲ کیلو برنج فروخته است درواقع کمی بیشتر ازاین مقدار برنج تحویل داده است.

●

عملیات لازم برای بدست آوردن یك لیتر آبجو درهر ظرف به صورت زیراست. برای سهولت چلیك بزرگ‌را با B ، و ظروف پنج لیتری وسه لیتری را به C و T نمایش می‌دهیم.

پس از بازکردن شیرB، ظروف C و T را پرمی‌کنیم و شیررا باز می‌گذاریم تاB خالی شود . سپس شیررا می‌بندیم وT را درB خالی‌کرده وبازآن را با محتوای C پرمی‌کنیم . مجدداً T را درB خالی می‌کنیم، بالاخره ۲ لیتر باقی‌مانده در C را درون T می‌ریزیم و C را بااستفاده از B پر می‌کنیم بدین‌ترتیب درB فقط یك لیتر باقی می‌ماند. T را با سرازیر کردن مقدار لازم از C پرمی‌کنیم؛ محتوای T راکه سه لیتر است به حاضرین تعارف می‌کنیم (بهتراست‌که‌کنار بگذاریم)؛ سپس T را با استفاده از C پرمی‌کنیم به نحوی‌که یك لیتردر C باقی بماند؛ مجدداً محتوای T را می‌نوشیم ویك لیتری را که در B باقی بود درآن خالی می‌کنیم .

فکر کنم که این چنین عملی شایستهٔ یك سور عمومی باشد !

احتمالات (بقیه از صفحهٔ ۵۵۹)

باشد» که هم احتمال می‌باشند.

الف ـ داریم :

$$n=50 \text{ و } j(A)=6$$

$$P(A)=\frac{6}{50}=\text{فراوانی نسبی خانواده‌های دارای ۳ فرزند}$$

ب ـ داریم

$$j(B)=14+9=23$$

$$P(B)=\frac{23}{50}$$

ج ـ داریم :

$$j(C)=0 \Longrightarrow P(C)=0$$

۷ـ ۲۰۰ تاکسی را ازنظر مسافتی‌که تاکنون پیموده‌اند سرشماری کرده‌ایم که توزیع آنها طبق جدول زیرشده است :

مسافت برحسب هزار کیلومتر	۷۵-۸۰	۸۰-۸۵	۸۵-۹۰	۹۰-۹۵	۹۵-۱۰۰
تعداد تاکسیها	۴	۶	۱۸	۲۸	۳۶

۱۲۰-۱۲۵	۱۱۵-۱۲۰	۱۱۰-۱۱۵	۱۰۵-۱۱۰	۱۰۰-۱۰۵
۴	۸	۱۴	۳۲	۵۰

یکی ازتاکسیها راتصادفی درنظرمی گیریم. احتمال آنکه‌مسافت پیموده شدهٔ توسط تاکسی مزبور یکی از موارد زیر باشد چقدر است :

الف ـ ۸۰ تا ۱۰۰

ب ـ ۸۵ تا ۸۸

پاسخ ـ پیشامدهای اولیه‌که هم احتمالند شماره ردیف تاکسیها است : تاکسی اول،تاکسی دوم ... تاکسی دویستم. و تعداد حالات ممکن ۲۰۰ است.

الف ـ تعداد حالات مساعد مساوی است با تعداد تاکسیهایی‌که مسافتی بین ۸۰ و ۱۰۰ پیموده‌اند و برابر است با :

$$n(80<X<100)=88$$

$$P(80<X<100)=\frac{28}{200}$$

که‌برابراست با مساحت هیستوگرام فراوانیهای نسبی محصور بین طولهای ۸۰و ۱۰۰.

ب ـ تعداد حالات مساعد برابر است با :

$$n(85<X<88)$$

یعنی برابر است با تعداد تاکسیهایی‌که مسافتی بین ۸۵ و ۸۸ پیموده‌اند . با فرض اینکه پخش مقادیر هر رده‌یکنواخت باشد نتیجه خواهد شدکه :

$$n(85<X<88)=10/8$$

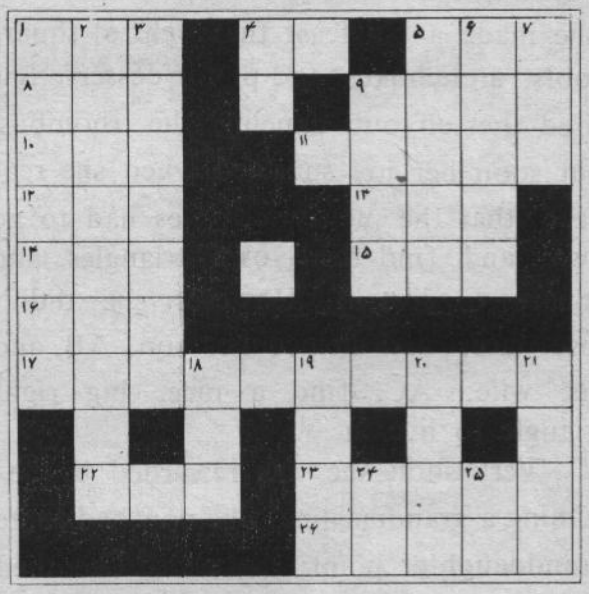
$$P(85<X<88)=\frac{10/8}{200}$$

که برابراست‌با مساحت هیستوگرام فراوانیهای نسبی‌محصور بین‌طولهای ۸۵ و ۸۸.

دنباله دارد

جدول اعداد

طرح از: جمال‌الدین فرزانه

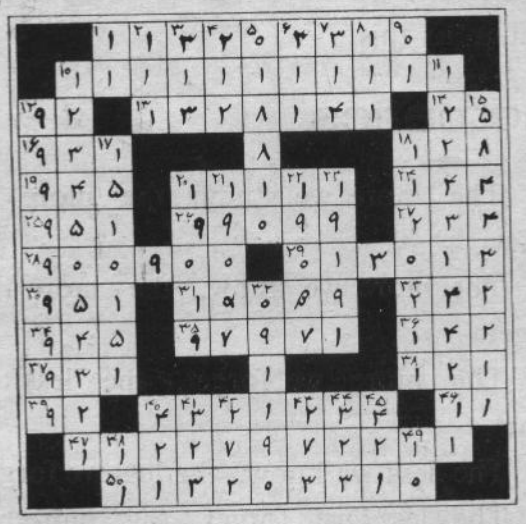


افقی: ۱ـ عددی سه‌رقمی با رقمهای متشابه که تعداد مقسوم‌علیه هایش ۴ است. ۴ـ عدهٔ دههای عدد ۱ افقی. ۵ـ جملهٔ سوم از تصاعد هندسی که جملهٔ اولش یک و جملهٔ چهارمش ۶۸۵۹ است. ۸ـ یکدهم آن توان پنجم است. ۹ـ تعداد کلیهٔ اعداد چهاررقمی که درآنها رقم یك وجود ندارد. ۱۰ـ عدد به صورت $\overline{abc}$ بقسمی که این عدد وهریك ازعددهای a و $\overline{ab}$ و c و $\overline{cba}$ مجذور کاملند. ۱۱ـ برابر است با $log\frac{5^{105}}{10^{6}}$ به فرض آنکه $log 2 = 0/30103$. ۱۲ـ جذر مقلوب عدد ۱۰ افقی. ۱۳ـ لگاریتم این عدد دو برابر لگاریتم ۱۷ است. ۱۴ـ هرگاه باحاصل‌ضرب عددهای ۴ افقی و ۴ قائم جمع شود عدد ۵ افقی بدست آید. ۱۵ـ نه برابر عدد ۱ افقی. ۱۶ـ همان عدد ۸ افقی. ۱۷ـ کوچکترین عدد ده رقمی بارقمهای متفاوت. ۲۲ـ بزرگترین عدد سه رقمی که رقمهایش تصاعد حسابی می‌سازند بقسمی که قدرنسبت این تصاعد همان رقم یکان عدد است. ۲۳ـ مجذور است و جذرآن ریشهٔ معادلهٔ

$$x^2 - 179x - 180 = 0$$

است. ۲۶ـ به صورت $\overline{aabcc}$ است که $b = a^2 = 4c$ است.

قائم: ۱ـ به صورت $\overline{aba0aba}$ است بقسمی که $\overline{ba}$ همان عدد ۱۲ افقی است. ۲ـ هرگاه از رقم سدگان آن صرف نظر شود عدد هشت رقمی حاصل بزرگترین مقسوم‌علیهی ازعدد ۱۷ افقی است که مضرب ۹ نیست. ۳ـ به‌صورت $\overline{abcdefg}$ است بقسمی که تفاضل $\overline{abcd}$ بر $\overline{defg}$ برابر عدد ۱ افقی است. ۴ـ جذرعدد ۵ افقی. ۵ـ متمم حسابی ۶۱۱۱۱ ۶ـ یك واحد کمتر از مکعب عدد $\overline{a0}$ که a نیز مجذور کامل است. ۷ـ مجذور عدد ۴ افقی. ۹ ـ مجذور هفت برابر عدد ۴ افقی. ۱۸ـ سه برابر عدد ۱ افقی. ۱۹ـ مکعب یکدهم جذر عدد ۲۳ افقی. ۲۰ـ عدد به صورت $\overline{aa1b}$ که مجذور کامل است. ۲۱ـ مجذور نه‌برابر عدد ۴ افقی. ۲۴ـ دوبرابر عدد ۴ افقی. ۲۵ـ همهٔ اعداد را عاد می‌کند.



حل جدول شمارهٔ قبل

A Fantasy

One upon a time there was a mama-line. This mama-line was so large that she extended endlessly. This mama-line had a lot of little segments, and these segment soon became extended and got married. My, what joy mama-line had watching her line segments get connected. She made a big feast that night of square roots, arctichokes, and pi for dessert. She tired herself out dancing the rhombus, but soon her joy subsided when she realized that the newlywed lines had to go away and find their own triangles and squares to live in. However she didn't lose face, and helped her son, $\overline{AB}$, and his wife, $\overline{AC}$, find a nice, big right triangle to live in.

Very soon she was rewarded by becoming a grandma-line. She now had acute granddaughter point; but alas, she died because she was $<90°$. But grandma-line's spirit lifted when she got three handsome grandson points. As they extended, it became apparent that they were big trouble-makers. Even in the first grade they threw ice cream cones at their subsetute in school. As they entered teenage-hood, they joined rioters using ray-guns, and burned down a police line's parallelogram . $\overline{AB}$ heard about the riot on his transistor ratio, and upon hearing that many were taken to prism, he rushed over and brought them straight home to their triangle, locking them up in their angles of depression. the points started to cry; and angry $\overline{AB}$ told them to shut their trapezoids, which they did immediately.

Well, the three little points were so angry at papa-line that they ran off in a tangent and plotted themselves in the midpoint of Graphwich Village. Soon they got homesick and used the distance formula and the Pythgorean theorem to find their way home.

Now we're sure you won't find anyone with an experience even slightly similar to this.

Fun with Mathematics

Teacher: Now we find that x is egual to zero.

Student: Gee! All that work for nothing.

***

Student: I've added these figures ten times.

Teacher: Good boy!

Student: And here are the ten answers.

***

The more we study, the more we know.

The more we know, the more we forget.

The more we forget, the less we know.

The less we know, the less we forget.

The less we forget, the more we know?

So why study?

تقاضا

ازدانش‌آموزان یادانشجویانی که به خاطر علاقهٔ به مجلهٔ یکان سؤالهای امتحانات ورودی دانشکده‌ها و مؤسسات عالی تهران و شهرستانها را برای درج در یکان سال ارسال می‌دارند، تقاضا می‌شود که حتی‌الامکان سعی کنند متن اصلی ورقهٔ سؤال را ارسال دارندودرغیر آن،درموقع استنساخ‌سؤالها ومسائل سعی‌فرمایندکه‌اشتباهی بوجود نیاید و بین نوشتهٔ ایشان واصل سؤالها تفاوتی وجود نداشته باشد.