ریحان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ هفتم ، شمارهٔ : ۵ شمارهٔ مسلسل : ۷۲ بهمن ۱۳۴۹

در این شماره :

بها : ۲۵ ریال

سومین جلسهٔ دیدار

سومین جلسهٔ دیداراستادان و دبیران ریاضی از ساعت ۱۹ تا ساعت ۲۱ روز پنجشنبه ۶ اسفند ماه آینده ، تشکیل می‌شود. بنابه تصمیمی که‌در دومین جلسه اتخاذ شد **«ریاضی چیست؟»** موضوع بحث‌جلسهٔ سوم خواهد بود. محل‌تشکیل جلسه بعداً به اطلاع همکاران محترم خواهدرسید .

دومین کنفرانس ریاضی ایران

از طرف بخش‌ریاضی دانشگاه صنعتی آریامهر اعلام‌شده است که دومین کنفرانس ریاضی ایران از نهم تا دوازدهم فروردین ۱۳۵۰ در محل‌دانشگاه مزبوربرگزارمی‌شود . غیر از استادان و ریاضیدانان ایرانی، از چهار ریاضیدان معروف جهان‌دعوت شده است که درکنفرانس مزبور شرکت‌کنند .

درجلساتی ازکنفرانس در بارهٔ آموزش ریاضی درمدارس ایران بحث‌خواهد شد .

دبیران ریاضی‌تهران‌وشهرستانها که‌به‌شرکت درکنفرانس مزبورعلاقمندباشندوهنوز دعوتنامهٔ مربوط رادریافت‌نداشته‌اند بابخش‌ریاضی دانشگاه آریامهر مکاتبه‌فرمایند .

توجه

از عموم مشترکان یکان مقیم تهران تقاضا می‌شود تا قبل از پایان سال جاری شمارهٔ منطقهٔ پستی مربوط به محل خود را به دفتر مجله اطلاع دهند .

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال ده شماره منتشر می‌شود

دورهٔ هفتم ـ شمارهٔ پنجم ـ شمارهٔ مسلسل : ۷۲

بهمن ۱۳۴۹

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول ، عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : بانونصرت ملک‌یزدی

نشانی اداره :

تهران ، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیک شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۹۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VII, number 5. Jan. 1971

subscr pti n ; 3$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

توجه

وجوهی به حساب بانکی مجله واریز شده که معلوم نیست از طرف چه اشخاصی بوده است . همچنین بعضی حواله‌های بانکی و تقاضاهای‌اشتراك واصل شده است که‌فاقد نشانی می‌باشد . بعضیها نشانی‌رانوشته اما اسم شهررافراموش کرده‌اند بنویسند .

از همهٔ اشخاصی که برای اشتراك مجله‌نامه می‌نویسند تقاضا می‌شودنام‌ونشانی‌وشهرخودرا به‌صراحت‌درنامه‌بنویسند. همچنین از همهٔ اشخاصی که وجهی به حساب بانکی مجله حواله‌کرده‌اند یا حواله می‌کنند تقاضا می‌شود رسید بانکی را باذکرنام ونشانی‌کامل خودبه دفتر مجله ارسال دارند.

به‌مناسبت سالگرد انتشار یکان

هفت سال کامل از انتشار اولین شمارهٔ یکان می‌گذرد . در این مدت تلاش کامل بکار رفته است تا مجله مرتباً وبدون وقفه و آنگونه که لازمهٔ آن است در اختیار علاقمندان قرار گیرد . آنچه در این مدت امکان انتشار مرتب مجله را فراهم داشته توجه خواستاران آن بوده است . اما باید اعتراف کرد که لازمهٔ توجه افراد یك کشور ، مخصوصاً طبقهٔ جوان آن، به یك مجلهٔ صرفاً علمی ، وجود امنیت فکری و ثبات سیاسی است .

آرزومنداست کماکان توفیق ادامهٔ خدمات را داشته باشد.

عبدالحسین مصحفی

استقراء - تراجع

فرامرز عدالتی‌حقیقت

ازمدتی‌پیش در شماره‌های مختلف یکان مقالاتی به‌عناوین «استقراء ریاضی، قاعدهٔ برگشت (وعدم کفایت‌آن) ، استقراء درهندسه،وغیره ...»منتشر می گردیدکه البته بغیر ازاشتباهات چاپی ، نقایص و اغلاط دیگری نیز در آنها مشاهده می‌شد . حال به اختصار استقراء یا تراجع را تعریف وبه شرح بعضی از قضایای‌آن می‌پردازم‌وسپس به استناد بعضی از اهم خواص «نسب یاروابط» ایرادهایی راکه به مقالات مذکور وارداست توضیح خواهم داد .

در تهیهٔ این مختصر هرجا غیر ازکتاب آنالیز ریاضی تألیف غلامحسین مصاحب‌کتابی دیگرنیز مورد استفاده قرار گرفت صریحاً بدان اشاره‌خواهم‌کرد .

***

مقدمه ـ نخستین‌کسی که‌تئوری اعدادطبیعی را مستقلا به روش اصل موضوعی بنانهاد**پئانو** بود. درتئوری‌وی حدود اولیه چنین‌اند ؛ مجموعه‌ای غیر خالی (N) و عضوی از آن موسوم به ۱ و تابعی مانند S بر N بتوی N موسوم به تالی بلافصل .

اصول موضوعهٔ پئانو به این شرح است :

(۱) $1 \in N$ ، یعنی ۱ متعلق به مجموعهٔ اعداد طبیعی است .

(۲) اگر $x \in N$ آنگاه $S(x) \in N$ ، یعنی تالی‌هرعدد طبیعی یك عدد طبیعی است .

(۳) به‌ازاء هر x از N همواره $S(x) \neq 1$ ، یعنی‌هیچ عددی طبیعی نیست‌که ۱ تالی‌آن باشد .

(۴) اگر $S(x) = S(y)$ آنگاه $x = y$ ،یعنی‌اگرتالیهای دوعدد برابر باشد آن دو عدد مساویند .

(۵) اگرزیر مجموعه‌ای از N مانند A در شرایطزیر صدق‌کندآنگاه $A = N$.

(الف) $1 \in A$

(ب) همواره اگر $x \in A$ آنگاه $S(x) \in A$ ، یعنی هر زیر مجموعه‌ای از N که یکدار و موروثی باشد با N برابر است .

توضیح : مجموعهٔ A از اعداد موروثی است‌اگربه‌ازاء هر x از A داشته باشیم $(x+1) \in A$ و اگر $1 \in A$ و A موروثی باشدگوئیم A یکدار وموروثی است .

تمرین ۱ـ مجموعهٔ $\{x | 1 \leq x\}$ یکدارو‌موروثی‌است.

تمرین ۲ـ قضیه : N زیر مجموعهٔ هرمجموعهٔ‌یکدار وموروثی است(این‌قضیه نتیجهٔ مستقیم تعریف‌N می‌باشد).

تعریفات استقرائی یاتراجعی

روش خاصی مبتنی بر اصل استقراء برای تعریف بعضی از توابع که حوزهٔ تعریفشان N می‌باشد وجود دارد . مثال زیر موضوع را روشن می‌کند .

مثال ـ فرض می‌کنیم‌در مورد تابع f بر N می‌دانیم‌که:

$$(1) \qquad f(1) = -2$$

$$(2) \qquad f(n+1) = 2f(n) + 1 \qquad (n \in N)$$

یعنی بوسیلهٔ(۱) مقدار تابع در ۱ مشخص شده است و رابطهٔ (۲) مقدار تابع رادرهر عدد طبیعی دیگر به مقدارآن درسابق بلافصل این‌عدد بازمی‌گرداند . از همین جهت است‌که رابطهٔ (۲) را یك رابطهٔ تراجعی می‌نامند (مقصود از رابطهٔ تراجعی رابطه‌ای است که به‌ازاء هرعدد طبیعی بزرگتر از ۱ مانند n مقدار $f(n)$ را برحسب $f(n-1)$ واحیاناًnمشخص‌می‌سازد) اینك به محاسبهٔ تدریجی مقادیر f در بعضی از اعداد طبیعی توجه کنید :

$$f(2) = f(1+1) = 2f(1) + 1 = -3$$

$$f(3) = f(2+1) = 2f(2) + 1 = -5$$

$f(۴) = f(۳+۱) = ۲f(۳) + ۱ = -۹$

بنابررابطهٔ (۱) و رابطهٔ(۲) تابع f بر N کاملا مشخص‌است.

حال دو سؤال مطرح می‌شود ؛

اول ـ آیا تابعی که در شرایط (۱) و (۲) صدق کند وجود دارد یا نه ؟

دوم ـ این تابع در صورت وجود منحصر به فرد است یا نه ؟

قضیهٔ کلی‌زیر که در اینجا دلیل‌آن نخواهدآمدجوابگوی دوسؤال فوق است .

قضیه : فرض کنیم A مجموعه‌ای و a عضوی معین از آن باشد ، همواره یك و تنها یك تابع مانند f بر N بتوی A وجود داردکه درشرایط ذیل صدق می‌کند :

(I) $f(۱) = a$

(II) f در رابطهٔ تراجعی مفروضی صدق می‌کند .

تعریف : بر طبق قضیهٔ فوق تعریف تابع f را تعریف تابع به استقراء یا به تراجع خوانند .

مثال ـ فرض‌کنیم a عددی حقیقی باشد ، روابط زیر تابعی راکه f نامیده می‌شود بتوی R تعریف می‌کند .

(۱) $f(۱) = a$

(۲) $f(n+۱) = f(n).a \quad (n \in N)$

بعضی از مقادیر این تابع را حساب می‌کنیم :

$f(۲) = f(۱).a = a.a$

$f(۳) = f(۲).a = (a.a).a$

$f(۴) = f(۳).a = [(a.a).a].a$

این تابع از مهمترین توابع ریاضیات مقدماتی و موسوم است‌به تابع قوهٔ طبیعی عدد حقیقی a ومقدارش را در n (که‌قوهٔnام a خوانند)به a^n نام ونشان کرده‌اند. بنابراین،تعریف قوای طبیعی یك‌عدد حقیقی چنین است :

قوهٔ nام عددحقیقیa که آنرا a^n نامند به استقراء چنین تعریف می‌شود :

(۱) $a^۱ = a$

(۲) $a^{n+۱} = a^n.a$

پرسش ـ آیا برطبق آنچه که گذشت می‌توان a^n را «حاصل‌ضرب a در خودش n مرتبه» تعریف کرد؟

تمرین ـ درهریك از توابع ذیل که به استقراء بر N بتوی R تعریف شده‌اند $f(۵)$ و$f(۸)$ را حساب‌کنید :

(I) $f(۱) = a$ و $f(n+۱) = f(n) + d \quad (n \in N)$

(II) $f(۱) = ۲$ و

$f(n+۱) = nf(n) - n^۲ + ۲ \quad (n \in N$ و $n > ۱)$

III- حال وقت‌آنست‌که به شرح قضایایی بپردازیم که وسایلی توانا هستند در اثبات احکامی از این قبیل :

(۱) ثابت‌کنیدهمهٔ اعداد طبیعی دارای خاصیت‌مفروضی مانند F می‌باشند .

(۲) ثابت‌کنید همهٔ اعداد طبیعی ناکمتر ازعدد طبیعیm دارای خاصیت مفروض F هستند .

(۳) ثابت‌کنید همهٔ اعداد طبیعی نا بیشتر ازعدد طبیعیٔ m دارای خاصیت F هستند .

(البته ممکن است خاصیتی در زیر مجموعه‌ای از N برقرار باشد. مثلا واضح است‌که همهٔ اعضاء Nبرعدد ۲بخش پذیر نیستند وغیره ...)

قضیهٔ ۱ـ (استقراء ابتدا از عدد طبیعی m). اگر m عدد طبیعی مفروضی و F خاصیتی تابع شرایط ذیل باشدآنگاه همهٔ اعداد طبیعی ناکمتر از m خاصیت F دارند :

(I) $F(m)$ (یعنی خاصیت مفروض به ازاء m برقرار است) .

(II) به‌ازاء هر عدد طبیعی اگر $m<n$ و $F(n)$ آنگاه $F(n+۱)$

برهان (خلف) . مجموعهٔ اعداد طبیعی ناکمتر از m را M می‌نامیم وفرض می‌کنیم‌که (I) و (II) برقرار باشند اما همهٔ اعضاء M خاصیت F نداشته باشند پس اگر A مجموعهٔ اعضایی از M باشد که فاقد خاصیت Fاند A ابتدا دارد (چون ثابت کرده‌اندکه هرزیر مجموعه‌ای از N ابتدا دارد) و اگر k ابتدای‌آن باشد بنابر (I)،$k \neq m$ و بنابر تعریف M ، $k > m$ و چون $k > ۱$ پس عدد $n = k - ۱$ عددی طبیعی است . اما چون $m < k = n + ۱$ ، $m<n$ بالنتیجه $m<n<k$ پس از طرفی‌بنابر (II)، $n + ۱$ یعنی k خاصیت F دارد و ازطرف دیگر بنابرتعریف k ، k خاصیت F ندارد با این تناقض برهان تمام است .

نکتهٔمهم ـ برای اینکه به استقراء ابتدا ازعدد طبیعی m ثابت‌کنیم‌که همهٔاعداد طبیعی‌ناکمتر از m خاصیت Fدارند ثابت می‌کنیم که F تابع شرایط (I) و (II) قضیهٔ فوق است صحت (I) را با عمل واضح می‌کنیم و برای اثبات (II)فرض می‌کنیم n عدد طبیعی دلخواهی باشد بطوری که $m<n$ و

$F(n)$ و ازاین مفروضات (فرض استقراء) نتیجه می گیریم که: $F(n+1)$.

قضیهٔ۲ (اصل استقراء) . اگر F خاصیتی تابع شرایط دوگانهٔ ذیل باشد جمیع اعداد طبیعی خاصیت F دارند (این اصل را اصل استقراء ضعیف نیز می گویند) :

(I)- $F(1)$

(II)- به‌ازاء هر عدد n اگر $F(n)$ آنگاه $F(n+1)$

یعنی اگر ۱ واجد خاصیت مفروضی باشد واگر به‌ازاء هر عدد طبیعی n خاصیت مفروض برقرار باشد آنگاه $n+1$ نیز دارای آن خاصیت باشد پس همهٔ اعداد دارای آن خاصیت هستند .

برهان ـ فرض کنیم A مجموعهٔ جمیع اعداد طبیعی واجد خاصیت F باشد بنابر (I)، $1\in A$ و بنابر (II) همواره اگر $n\in A$ آنگاه $n+1\in A$ پس A مجموعه‌ای یکدار و موروثی از اعداد طبیعی است بالنتیجه $A=N$.

می‌توان اثبات این قضیه را به روش خلف مانند قضیهٔ قبل شروع وبه‌پایان‌رساند. توجه‌کنیدکه درصفحهٔ ۲۷۶شمارهٔ ۵ از دورهٔ ششم یکان با علائم جدید ریاضی ولی به‌صورت نارسا این‌دوقضیه در دو سطرتحت عنوان فرمول‌قاعدهٔبرگشت که نمی‌توان آنرا اثبات نمود مسطور است. مایك‌بار دیگر به این صفحهٔ مجله باز خواهیم گشت البته برای اثبات کفایت و توانایی و فواید بیحد و حساب استقراء و تراجع و نه برای مطالعهٔامثلهٔ متعددر عدم‌کفایت‌قاعدهٔ برگشت (این‌امثله بیشتر شبیه پارا دوکسها هستند که باید خواننده نقاط ضعف این مغالطات راکشف‌کند)

قضیهٔ ۳ـ (استقراء قوی ابتدا از m) ـ اگر m عددی طبیعی و F خاصیتی تابع شرایط ذیل باشد جمیع اعداد طبیعی‌ناکمتر از m خاصیت F دارند .

(I)- $F(m)$

(II)- به ازاء هر عدد طبیعی n اگر $m<n$ و همهٔ اعداد طبیعی ناکمتر از m و نا بیشتر از n خاصیت F داشته باشند $n+1$ نیز خاصیت F دارد .

اثبات به برهان خلف مانند قضیهٔ ۱آسان است .

توجه کنید . در اثبات هر حکم به صورت « هر عدد طبیعی خاصیت F دارد » به استقراء قوی باید اولا $F(1)$را ثابت‌کرد و ثانیاً از این فرض‌که همهٔ اعداد طبیعی نابیشتر از n خاصیت F دارند (فرض استقراء) نتیجه گرفت‌که $n+1$ نیزخاصیت F دارد . درواقع فرض‌استقراء در اینجاعبارتست‌از:

$F(n)$ و $F(n-1)$ و...و $F(2)$ و $F(1)$

البته استخراج $F(n+1)$ از این مقدمات آسانتر از استخراج آن تنها از $F(n)$ درروش استقراء عادی (قضیهٔ۲) می‌باشد و هکذا وقتی استقراء از عددی طبیعی جز ۱ آغـاز گردد. قید «قوی» درقضیهٔ ۳ ناظر به همین امر است‌و در مقابل،قضایای ۱و۲ راگاه مقید به قید ضعیف می‌کنند .

با اینهمه این قید عدم‌کفایت آنرا باعث نمی‌شود .

تمرین۱ـ روابط ذیل هریك از مرتبه‌ای‌به بعدهمواره برقرار است این مرتبه‌را تعیین وحکم را به استقراءثابت‌کنید:

(I) $n^2<2^n$ (II) $n^2<3^n$

تمرین۲ـ هرعدد بزرگتراز ۱۵ را می‌توان‌به‌صورت $3k+5l$ نوشت که در آن k و l دوعدد طبیعی‌اند .

مثال ۱ـ ثابت‌کنیدبه‌ازاء هر عدد صحیح نامنفی (صفر نیز جز این اعداد است) مانند n عدد $6^{n+2}+7^{2n+1}$ بر ۴۳ بخش پذیر است .

حل ـ گزاره نمای (۱) $43|6^{n+2}+7^{2n+1}$ را $F(n)$ می‌نامیم $a|b$ یعنی a عاد می‌کند b را) وحکم را به استقراء ابتدا از صفـر ثابت مـی‌کنیم ؛ $F(0)$ یعنی $43|6^2+7$ یا $43|43$ می‌باشدکه‌راست‌است.حال فرض می‌کنیم $n\geq 0$ و (۱) را مفروض می گیریم و $F(n+1)$ یعنی

(۲) $43|6^{n+3}+7^{2n+3}$ راثابت‌می‌کنیم. برای این منظور ملاحظه‌می‌کنیم‌که :

$$(3)\quad 6^{n+3}+7^{2n+3}=6(6^{n+2}+7^{2n+1})+$$
$$+(7^{2n+3}-6\times 7^{2n+1})=6(6^{n+2}+7^{2n+1})+$$
$$+43\times 7^{2n+1}$$

بنابر (۱) وبا توجه به این رابطه عددی صحیح مانند q هست‌که $6^{n+2}+7^{2n+1}=43q$ پس به موجب (۳)

$$6^{n+3}+7^{2n+3}=43(6q+7^{2n+1})$$

و بالنتیجه (۲) برقرار است .

مثال ۲ـ ثابت کنیدکه هر تعداد متناهی (حداقل ۲) مربع‌راهمواره می‌توان چنان بریدکه با قراردادن قطعات‌حاصل درکنار یکدیگر به طریق مناسب مربعی‌حاصل شود .

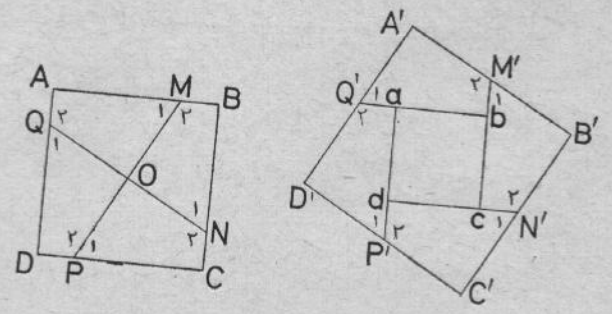
(توجه‌کنیدبه‌کاربرد استقراء) .

اثبات به‌استقراء ابتدا از ۲ است . اثبات حکم درمورد دو مربع آسان . فرض می‌کنیم ABCD و abcd دو مربع

به اضلاع x و y مفروض باشند (مطابق شکل) و $y<x$ و :

$$AM = BN = CP = DQ = \frac{x+y}{۲}$$

به‌آسانی دیده می‌شود که خطوط MP و QN درمرکز مربع ABCD تلاقی می‌کنند و برهم عمودند. اینك مربع ABCD را در امتداد این‌خطوط به‌چهارپاره تقسیم می‌کنیم و این‌پاره‌ها را در اطراف مربع abcd قرار می‌دهیم تا مربع A'B'C'D' حاصل شود.



اینك فرض می‌کنیم حکم در مورد هر دسته n مربع $(n>۲)$ برقرار باشد و S دسته‌ای از $n+۱$ مربع باشد، این مربعات را بوسیلهٔ شماره‌گذاری می‌توان $S_۱$ و $S_۲$ و... و S_n و $S_{n+۱}$ نامید بنابر فرض استقراء n مربع $S_۱$ و $S_۲$ و... و S_n را می‌توان‌چنان برید که اگرقطعات حاصل را به‌طریقی‌مناسب درکنار هم قرار دهیم مربعی مانند S' بدست‌آیدبعلاوه، بنابر آنچه ثابت شددو مربع S' و $S_{n+۱}$ را نیز می‌توان به همان گونه برید. پس‌چون در این‌برش نهایی قطعات حاصل از مربع S' قطعاتی حاصل ازبریدن مربعات $S_۱$ و... و S_n هستندحکم در مورد $n+۱$ مربع مذکور بر قرار است.

تمرین۳ـ به‌استقراء ثابت‌کنید که به‌ازاء هر عدد صحیح نامنفی n:

(I) $۶۴ \mid ۹(۹^n - ۱) - ۸n$

(II) $۹ \mid ۵^{۲n} + ۳n - ۱$

(III) $۱۳۳ \mid ۱۱^{n+۲} + ۱۲^{۲n+۱}$

تمرین ۴ـ $\sum_{i=m}^{n} a_i$ چند جمله دارد؟ ادعای خودرا به استقراء ثابت‌کنید.

حال با این مختصر آشنایی‌که نسبت به مفهوم استقراء بدست‌آمده است‌می‌توان به‌آسانی تمیز دادکه مسئلهٔ مفروضی آیا درحوزهٔ عمل و کاربرد استقراء هست یا خیر و اگرهست بهتر آنست‌که‌کدامیك‌از قضایا را بکار گرفت. ولی در بکاربستن این‌روش جزئی‌سهل‌انگاری و تسامح باعث نتیجه گیریهای‌غلط و بدست‌آوردن نتایج‌غیر عادی و شاید هم مضحك خواهدشد. (مراجعهٔ به صفحهٔ ۲۶ شمارهٔ ۱ از دورهٔ چهارم یکان برای پی بردن به بعضی از این مشکلات‌که درنهایت‌ایجازواستحکام بیان شده است بسیار مفید خواهد بود).

خواص نسب ـ (نسبت = Relation). بعضی از نسبتهاخواص‌مهمی دارند مثلا نسبت‌کوچکتری درمجموعهٔ اعداد صحیح دارای این خاصیت است‌که هیچ عدد صحیح این نسبت را به خود ندارد. برخلاف نسبت (بخش پذیری) و نسبت = (مساوی‌بودن) درهمان مجموعه دارای این‌خاصیت است‌که هرعدد صحیح این نسبت را به خود دارد. ذیلا اهم خواصی راکه‌نسبتهای‌مهم ریاضی به تفاوت واجد بعضی‌ازآنها هستند خواهدآمد.

تعریفات ـ فرض کنیم A مجموعه‌ای و f نسبتی‌در A باشد $(f \subseteq A \times A)$

I-f را در A **منعکس** یا **انعکاسی** (Reflexive) خوانیم درصورتی‌که هرعضو A این نسبت را به خود داشته باشد. یعنی به ازاء هر x از A داشته‌باشیم xfx یا به‌عبارت دیگر $(x,x) \in f$.

II-f را در A **متعدی** خوانیم در صورتی‌که به ازاء هر x،y،z از A اگر xfy و yfz آنگاه xfz (تعدی = Tsansitivity)

III-f را در A **متقارن** گویند درصورتی‌که همواره اگر از یك طرف بین‌دوعضو A برقرار باشد از طرف دیگرنیز برقرار باشد یعنی به ازاء هر x و y از A اگر xfy آنگاه yfx به‌عبارت دیگر f وقتی در A متقارن است‌که فقط و فقط به ازاء هر زوج مرتب از اعضای A و مقلوب آن زوج یاهر دوزوج عضو f باشند یا هیچ یك عضو f نباشند (**نامتقارن** assymmetric) درصورتی‌که به ازاء هر x و y از A اگر xfy آنگاه $\sim(yfx)$ نسبت f را در A نامتقارن گویند.

IV-f را در A **قناس** (قناس antisymmetric) خوانیم درصورتی که بین هیچ دوعضو متمایز A از دو طرف برقرار نباشد یعنی به ازاء هر x و y از A اگر $x \neq y$ آنگاه $\sim(xfy)$ یا $\sim(yfx)$ یعنی $(x,y) \notin f$ یا $(y,x) \notin f$ یا به عبارت دیگر f را در A قناس گویند وقتی‌که به ازاء هر x و y از A اگر xfy و yfx آنگاه $x=y$.

V-f را در A **مرتبط** (Connected =) خوانیم در صورتی‌که بین هر دو عضو A حداقل از یك طرف برقرار

باشد یعنی به ازاء هر x و y از A ، xfy یا yfx

VI- f رادر A تابع **اصل تثلیث** (trichotomy) ضعیف خوانند درصورتی‌که به‌ازاء هر x و y از A حداقل یکی از سه رابطهٔ $x=y$ ، xfy ، yfx برقرار باشد . اگر به‌ازاء هر x و y از A همواره یکی و تنها یکی از این سه رابطه برقرار باشد f را در A تابع اصل تثلیث قوی نامیم(هر جا اصل تثلیث گفته شود مقصود اصل تثلیث قوی است)

اینك چند مثال .

۱- فرض‌کنیم a،b و c دو به دو متمایز باشند و

$$A=\{a\,،\,b\,،\,c\}$$

$$f=\{(a\circ a)\,،\,(a\circ b)\,،\,(b\circ b)\,،\,(c\circ c)\}$$

واضح است‌که f در A منعکس ، متعدی و قناس است اما متقارن نیست زیرا $(a\circ b)\in f$ ولی $(b\circ a)\notin f$. همچنین f مرتبط نیست زیرامثلا نه $(b\circ c)\in f$ ونه $(c\circ b)\in f$.بالاخره f تابع اصل تثلیث ضعیف نیست .

۲- فرض کنیم Aمجموعهٔ جمیع خطوط مستقیم واقع در صفحهٔ مفروضی باشند و متغیرهای‌فردی $\triangle$ و $\triangle'$ و $\triangle''$ و... مقیدبهA باشند. در A نسبت‌توازی ($\parallel$) را با گزاره نمای $\triangle \parallel \triangle'$ یعنی $\triangle$ بر $\triangle'$ منطبق است یاباآن نقطهٔ مشترك ندارد تعریف می‌کنیم .

معلوم است‌که همواره (۱) $\triangle \parallel \triangle$ (۲) اگر $\triangle \parallel \triangle'$ آنگاه $\triangle' \parallel \triangle$ ، (۳) اگر $\triangle \parallel \triangle'$ و $\triangle' \parallel \triangle''$ آنگاه $\triangle \parallel \triangle''$ بالنتیجه نسبت توازی در A انعکاسی ، متقارن و متعدی است .

۳- در مثال قبل نسبت عمود بودن ($\perp$) نا منعکس ، متقارن است ولی متعدی نیست .

۴- هرگاه f نسبتی در A و نامتقارن باشد نامنعکس‌نیز هست چون در غیر این صورت A عضوی دارد مانند x که $(x\circ x)\in f$ پس $(x\circ x)$ و مقلوبش به f تعلق دارند و این با فرض نا متقارن بودن f متناقض است

توجه‌کنید . اگر f نسبتی باشد xfy را علی‌الرسم «x نسبت f به y دارد» می‌خوانیم اگر f متقارن باشد هرگاه x نسبت f به y داشته باشد y هم نسبت f به x دارد بدین‌جهت رابطهٔ xfy را در موردنسبتهای متقارن خاص اغلب با عبارت «x و y نسبت f به یکدیگر دارند» می‌خوانند مانند «x و y با هم مساویند (یا موازیند)»

تمرین :

الف : $A=\{$۶ و ۳ و ۲ و ۱$\}$ و نسبت f در مجموعهٔ A با ضابطهٔ «xfy یعنی x بر y قابل قسمت است» تعریف‌شده است . نسبت f کدام یك از خواص سابق‌الذکر را دارد .؟

ب - نسبتی بسازیدکه تابع اصل تثلیث ضعیف باشد ولی تابع اصل تثلیث نباشد .

ج - دریکی ازکتابهای دبیرستانی برای اثبات اینکه دو کمیت l و l' با هم مساویند ثابت‌کرده‌اند (!)که $l<l'$ و $l'<l$ سپس گفته‌اند :

«و این ممکن نیست‌که l هم بزرگتر از l' وهم‌کوچکتر از l' باشد پس l' با l مساوی است» نقص و عیب استدلال را پیداکنید .

**

در خاتمه ذهن خوانندگان عزیز را به صفحهٔ ۲۷۶ از یکان شمارهٔ ۵ دورهٔ ششم و به مثالهایی چند در مورد عدم کفایت قاعدهٔ برگشت‌که درآن است معطوف می‌دارم .

(بی‌گفته معلوم است‌که در ستون اول این صفحه دو سطر فرمول با علائم جدید دیده می‌شودکه اگر هر یك را جداگانه و واضح بنویسیم چنین خواهد شد

۱- قضیه : استقراء ابتدا از m

$$m \text{ و } n\in N\begin{cases}(I)\quad P(m)\\(II)\ \forall n\ ،n\geq m \text{ و } P(n)\Longrightarrow P(n+1)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall n\ ،n\geq m\ ،p(n)$$

ایراد و اشکال آنجاست‌که خاصیت مفروض P به ازاء همهٔ‌اعداد طبیعی ناکمتر از m برقرار است نه آنطور که در مجله دیده می‌شود $\forall n$

۲- قضیه : استقراء ابتدا از ۱ :

$$\begin{cases}I.\ P(1)\\II.\ \forall n\in N \text{ و } n\geq 1 \text{ و } P(n)\Longrightarrow P(n+1)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall n\ n\in N\ P(n)$$

بنابراین شرایط دوگانهٔ مذکور در قضایای ۱ و ۲و... را خواهیم داشت واین قضایا را می‌توان اثبات نمود)

در این مقام مثالهای «آدم ریشو وجود ندارد و وضع عادی شهرورامین» راکنار می‌گذارم .چون ضابطهٔ دقیق‌ریاضی اینکه ریش داشتن یعنی چه و عادی بودن وضع شهر ورامین

دنباله درصفحه۳۴۲

احتمالات

Notions de

PROBABILITÉ

par : M HAGE'GE

ترجمهٔ : مصحفی

فصل اول ـ شمارش حالات

٤ ـ موارد استعمال

الف ـ مسائل حل شده :

۱ـ درکلاسی‌که شامل ۱۰ دانش آموز است بـه چند نحو می‌توان ۳ دانش آموز را برای مـواظبت ازکتابخـانـه انتخاب‌کرد ؟

پاسخ : موضوع مسئله تعیین تعداد ترکیبات ۳ فرد در یك مجموعهٔ ۱۰ فرد می‌باشد و عبارتست از :

$$C_{10}^{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$$

۲ـ در یك‌کلاس شامل ۱۰ دانش‌آموز بـه چند نحـو می‌توان ۳ دانش آموز را انتخاب‌کـرد تا به‌ترتیب نقشهـای اول ، دوم و سوم یك نمایشنامه را ایفاکنند ؟

پاسخ : باید تعداد ترتیبهای ۳ فرد را از بین ۱۰ فرد معلوم‌کرد :

$$A_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

۳ـ کلاسی مرکب است از ۱۰ دانش‌آمـوز پسر و ۷ دانش آموز دختر ؛ دراین‌کلاس ، به‌چند نحو می‌توان ۳ پسر و ۲ دختر را انتخاب‌کرد تا به ترتیب نقشهای معینی از یك نمایشنامه را اجراکنند ؟

پاسخ : برای انتخاب‌پسرها ۷۲۰ وبرای‌انتخاب‌دخترها

$$A_{7}^{2} = 7 \times 6 = 42$$

نحو انتخاب وجود دارد . چون هر سه‌تایی از پسرها می‌تواند نظیر یك جفت از دخترهـا بـاشد ، بنابراین رویهم $720 \times 42 = 30240$ حالت برای انتخاب ۳ پسر و۲ دختر وجود دارد .

۴ـ به‌چند قسم می‌توان ۳ کارت‌ازبین ۳۲ کارت‌انتخاب کرد ؟

پاسخ :

$$C_{32}^{3} = \frac{32 \times 31 \times 30}{1 \times 2 \times 3} = 4960$$

۵ـ دریك بازی با ۳۲ کارت، به چند نحو می‌توان ۳ کارت را انتخاب‌کرد بقسمی‌که :

الف ـ دو کارت از این سه‌کارت قرمز و یکی دیگر سیاه باشد .

ب ـ ازاین سه‌کارت دوعدد شاه و یك عدد دیگر خشت باشد .

پاسخ : الف ـ برای‌انتخاب دو کارت قرمز C_{16}^{2}وبرای انتخاب یك‌کارت سیاه C_{8}^{1} حـالت وجـود دارد . پس تعداد حالتها برابر می‌شودبا :

$$C_{16}^{2} \times C_{8}^{1} = 120 \times 8 = 960$$

ب ـ حالتهایی را مشخص می‌کنیم‌که :

ـ شاه خشت بین سه‌کارت وجود نداشته باشد : در این حالت دوکارت شاه از بین ۳ شاه و یك‌کارت خشت ازبین ۷ کارت خشت انتخاب می‌شود و عدد مطلوب برابراست با:

$$C_{3}^{2} \times C_{7}^{1} = 3 \times 7 = 21$$

ـ شاه خشت دربین سه‌کارت وجود داشته باشد ؛در این حالت یك شاه خشت ، یك شاه از خال دیگر و یك‌کارت داریم که نه شاه است ونه خشت . برای انتخاب شاه خشت یك‌قسم برای انتخاب شاه از خال دیگر ۳ قسم و بـرای انتخـاب یك کارت دیگر ۲۱ قسم انتخاب از بین ۲۱ کارت‌که نه شاه هستند و نه خشت وجود دارد .

تعداد این حالتها برابر است با $1 \times 3 \times 21 = 63$ و

تعداد حالتهای مطلوب برابر است با $۸۴ = ۶۳ + ۲۱$

***

ب ـ تعداد زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ n عضوی

مجموعهٔ دوعضوی زیر را درنظر می‌گیریم :

$$E_۲ = \{a ، b\}$$

این مجموعه دارای چهار زیر مجموعهٔ زیر می‌باشد :

$$\emptyset ، \{a\} ، \{b\} ، \{a ، b\}$$

از بین زیر مجموعه‌های مجموعهٔ $E_۳ = \{a ، b ، c\}$ آنهایی‌که شامل عضو c نیستند عبارتنداز‌همان زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $E_۲$ یعنی :

$$\emptyset ، \{a\} ، \{b\} ، \{a ، b\}$$

وچون به هریك از این زیر مجموعه‌ها عضو c را بیفزائیم‌زیر مجموعه‌های دیگر مجموعهٔ $E_۳$ که شامل عضو c می‌باشند بدست می‌آیند :

$$\{c\} ، \{a ، c\} ، \{b ، c\} ، \{a ، b ، c\}$$

ملاحظه می‌شودکه تعداد عضوهای مجموعهٔ $E_۳$ دو برابر تعداد عضوهای مجموعهٔ $E_۲$ است . به‌عبارت دیگر ، با افزودن یك عضوبرعضوهای‌یك‌مجموعه ،تعدادزیرمجموعه‌های آن دوبرابر می‌شود. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $E_۲$برابر با ۴ و تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ $E_۳$ برابر با :

$۸ = ۲^۳ = ۲ \times ۴$ است . با تکرار استدلال نتیجه خواهد شد که تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ چهار عضوی :

$E_۴ = \{a ، b ، c ، d\}$ برابر است با : $۲^۴ = ۱۶$. با تعمیم استدلال معلوم خواهد شدکه تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ شامل n عضو برابر است با ۲^n.

این ۲^n زیر مجموعهٔ مجموعهٔ n عضوی چگونه توزیع شده‌اند ؟ می‌دانیم‌که بنا به‌تعریف ، تعداد زیر مجموعه‌های p عضوی یك مجموعهٔ n عضوی‌برابراست با C_n^p ،بنابراین توزیع زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ n عضوی طبق جدول زیر است :

جمع	۰	۱	۲	...	p	...	n	تعداد عضوها
۲^n	$C_n^۰$	$C_n^۱$	$C_n^۲$		C_n^p		C_n^n	فراوانی

از این جدول اتحاد زیر نتیجه می‌شود :

$$C_n^۰ + C_n^۱ + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n = ۲^n$$

مثلا داریم :

$$C_۰^۰ = ۱ = ۲^۰$$

$$C_۱^۰ + C_۱^۱ = ۱ + ۱ = ۲^۱$$

$$C_۲^۰ + C_۲^۱ + C_۲^۲ = ۱ + ۲ + ۱ = ۲^۲$$

$$C_۳^۰ + C_۳^۱ + C_۳^۲ + C_۳^۳ = ۱ + ۳ + ۳ + ۱ = ۲^۳$$

***

ج ـ فرمول دو جمله‌ای

بسط غیر ساده شدهٔ حاصل‌ضرب

$$(۱ + x)^۲ = (۱ + x)(۱ + x)$$

عبارتست از مجموع چهار جمله‌که هریك از ضرب یکی از جمله‌های پرانتز اول در هریك از جمله‌های پرانتز دوم بدست می‌آیند :

$$۱ \times ۱ + x \times ۱ + ۱ \times x + x \times x$$

بسط $(۱ + x)^۳$ به‌این‌ترتیب بدست‌می‌آیدکه هریك‌ازجمله‌های بسط بالا را در هر یك از جمله‌های $(۱ + x)$ ضرب‌کنیم‌که $۲^۳ = ۲ \times ۴$ جمله حاصل می‌شود :

$$۱ \times ۱ \times ۱ + x \times ۱ \times ۱ + ۱ \times x \times ۱ + x \times x \times ۱$$
$$+ ۱ \times ۱ \times x + x \times ۱ \times x + ۱ \times x \times x + x \times x \times x$$

بطورکلی بسط غیر ساده شدهٔ $(۱ + x)^n$ مجموع ۲^n جمله است‌که هریك از این جمله‌ها ازضرب یکی از جمله‌های اولین پرانتز $(۱ + x)$ درهریك از جمله‌های دومین پرانتز $(۱ + x)$ و ... ودرهریك ازجمله‌های n امین پرانتز$(۱ + x)$ بدست می‌آید . اختصار این مجموع عبارتست از تحویل‌جمل متشابه (که در اینجا با هم برابرند) : ضریب x^p عبارتست از فراوانی جملهٔ مزبور در عبارت حاصل ضرب ، یعنی تعداد جمله‌های برابر با x^p ؛ هریك از این جمله‌های x^p به‌این ترتیب بدست می‌آیدکه از p پرانتز عامل x و از $n - p$ پرانتز دیگر عامل یك را اختیارکرده درهم ضرب‌کنیم . اما به C_n^p قسم می‌توانیم ازبین n پرانتز ، p پرانتز را انتخاب کنیم . پس ضریب x^p می‌شود C_n^p و جدول زیر را خواهیم داشت :

جملهٔ	1	x	x^2	$\dots$	x^p	$\dots$	x^n
ضریب	C_1^0	C_n^1	C_n^2		C_n^p		C_n^n

از جدول بالا اتحاد زیر برای بسط دو جمله‌ای نتیجه می‌شود که به «دو جمله‌ای نیوتن» مشهوراست :

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^p x^p + \dots + x^n$$

مثال :

$$(1+x)^3 = 1 + C_3^1 x + C_3^2 x^2 + C_3^3 x^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

تمرینات :

۱ـ از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4\}$ روی مجموعهٔ $\{a, b, c, d\}$ چند گسترش دو سویه وجود دارد ؟ تعمیم دهید .

۲ـ تعداد گسترشهای دوسویه ازمجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4\}$ روی مجموعهٔ $\{a, b, c, d, e\}$ چقدر است ؟ تعمیم دهید.

۳ـ چند گسترش از مجموعهٔ $\{a, b\}$ روی مجموعهٔ $\{c, d, e\}$ وجود دارد؟

۴ـ تعداد عددهای چهار رقمی با رقمهای متفاوت ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷ چقدر است ؟

۵ـ در یك جمعیت مرکب از ۵ مرد و ۳ زن چندکمیته می‌توان تشکیل دادکه هریك مرکب باشد از :

الف ـ ۳ مرد و ۲ زن .

ب ـ ۵ شخص‌که حداقل سه نفر از آنان مرد باشند .

۶ـ جعبه‌ای محتوی ۵ گلولهٔ سفید و ۳ گلولهٔ قرمز است . به چند نحو می‌توان دو گلوله انتخاب‌کرد که :

الف ـ هردو سفید باشند .

ب ـ هر دو قرمز باشند .

ج ـ با رنگهای متفاوت باشند .

۷ـ اگر در فرمول بسط دو جمله‌ای x را با یك وبعد با ۱ ـ جانشین سازیم ، چه اتحادی بدست می‌آید ؟

۸ـ به‌چند نحومی‌توانیم از بین ۳۲ کارت بازی ۵ کارت انتخاب‌کنیم بقسمی‌که این ۵ کارت شامل :

الف ـ چهار آس ،

ب ـ ۲ آس و ۲ شاه ،

ج ـ حداقل یك آس ،

باشد .

۹ـ جعبه‌ای‌محتوی۵ گلولهٔ سفید و۳ گلولهٔ‌قرمزاست.

الف ـ به چند نحو می‌توانیم ۳ گلوله انتخاب‌کنیم که دوعدد ازآنها سفید و یکی دیگر قرمز باشد ؟

ب ـ به چند نحو می‌توانیم ازجعبه به ترتیب یك گلولهٔ سفید ، یك گلولهٔ قرمزو یك گلولهٔ سفید خارج سازیم ؟

۱۰ـ تعداد $n+1$ نقطهٔ A، B، K...، L درنظرمی گیریم بقسمی‌که هیچ سه نقطه‌ای ازآنها بریك‌خط راست واقع نباشند. تعداد خطهای واصل بین هر دونقطه از نقاط مزبور از دو راه شمرده می‌شوند :

الف ـ نقطهٔ A را به B، C، K...، L ،بعد نقطهٔ B را به C، L... و غیره وصل می‌کنیم . تعداد خطوط حاصل‌چقدر خواهد بود ؟

ب ـ هرنقطه را متوالیاً به n نقطهٔ دیگر وصل می‌کنیم. تعداد خطوط متمایز حاصل چقدر خواهد بود ؟

ج ـ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل مسائل (بقیه از صفحهٔ ۳۳۵)

۱۲ـ یك انگشتانهٔ طلائی

۱۳ـ چون $AP = AY$ و $BP = BX$ پس پیرامون مثلث ABC برابراست‌بادوبرابر CXیعنی برابر است با۲۰.

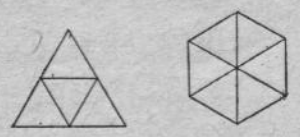
۱۴ـ همان سه‌سیبی‌که برداشته‌اید .

۱۵ـ چون دوازده صد می‌شود هزارودویست پس عدد مورد نظر ۱۳۲۱۲ است .

۱۶ـ هشتاددقیقه همان یك‌ساعت و۲۰دقیقه است .

۱۷ـ ازهردونواریك‌نوارمسطح‌مربع‌شکل‌بدست‌می‌آید.

۱۸ ـ مساحت شش‌ضلعی‌یك‌برابرونیم مساحت مثلث و برابر با۳واحدسطح‌خواهدبود.



۱۹ـ با ۲۷ آجربه ابعاد ۱و۲و۴ نمی‌توان مکعبی به طول یال۶ ساخت .

۲۰ـ مشتری قبل از یافتن مگس مرده ، در قهوه‌اش شکر ریخته بود .

«حالت کلی مسئلهٔ فرما»

از : جهانگیر ملک‌پور ـ علی فیاض
دانشجویان پلی تکنیک وفنی تهران

بدون شك خوانندگان عزیز با مسئلهٔ فرما (نقطه‌ای چنان بیابید که مجموع فواصلش از سه رأس یك مثلث می‌نیمم باشد) آشنائی دارند . حالت‌کلی این مسئله و نتایجی از آن درزیر می‌آید .

۱ـ مثلث ABC مفروض است . برای نقطهٔ متغیر M عبارت زیر را درنظر می‌گیریم :

$$L_M = p.MA + q.MB + r.MC$$

نقطهٔ M کجا باشد تا L_M می‌نیمم باشد؟ (p وq وr اندازه‌های اضلاع مثلث PQR هستندکه بین زوایاروابط :

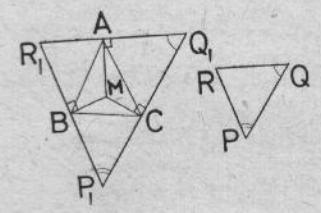
$$(A+P) \text{ و } (B+Q) \text{ و } (C+R) < \pi$$

نیز برقرار می‌باشند)

حل ـ مثلث PQR را با اضلاع :

$$PR = q \text{ و } PQ = r \text{ و } RQ = p$$

ساخته و زوایای آنرا P وQ وR می‌نامیم . حال در مثلث ABC کمانهای در خور زاویه‌های $(\pi - P)$ و $(\pi - Q)$ را به‌ترتیب برای دو نقطهٔ (BوC) و (CوA) رسم می‌کنیم.این دوکمان با شرایط مسئله همدیگر را در نقطهٔ M که داخل‌مثلث ABC است قطع می‌کنند(اثبات این موضوع در قسمت ۲ می‌آید). نقطهٔ M طبق اثبات زیر جواب مسئله است . در نقاط AوBوC عمودهایی به ترتیب بر MA و MB و MC اخراج می‌کنیم تا مثلث $P_1Q_1R_1$ بوجودآید. این‌مثلث بامثلث PQR متشابه است(به‌دلیل: درچهارضلعی



محاطی MBP_1C :

$$P_1 + BMC = \pi \implies P_1 + \pi - P = \pi \implies$$
$$P_1 = P$$

وبه همین‌ترتیب $(Q_1 = Q)$ و مطابق شکل داریم:

$$P_1Q_1.MC + P_1R_1.MB + R_1Q_1.MA = 2S_{P_1Q_1R_1} \qquad (1)$$

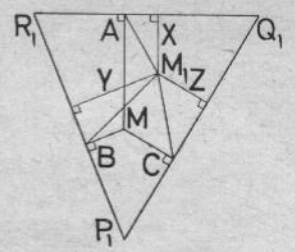
اگر نسبت تشابه دو مثلث PQR و $P_1Q_1R_1$ را d بگیریم داریم :

$$(2) \quad \begin{cases} S_{P_1Q_1R_1} = d^2 S_{PQR} \\ R_1Q_1 = dp \text{ و } P_1Q_1 = dr \text{ و } P_1R_1 = dq \end{cases}$$

با درنظر گرفتن این روابط رابطهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$p.MA + q.MB + r.MC = 2dS_{PQR} = L_M \qquad (3)$$

حال نقطهٔ دیگر M_1 را در نظر می‌گیریم و ازآن‌بر R_1Q_1 و R_1P_1 و P_1Q_1 به ترتیب عمودهای X وY وZ رافرودمی‌آوریم.داریم :



$$R_1Q_1.M_1A > R_1Q_1.X$$
$$R_1P_1.M_1B > R_1P_1.Y$$
$$P_1Q_1.M_1C > P_1Q_1.Z$$

با جمع روابط :

$$R_1Q_1 . M_1A + R_1P_1 . M_1B + P_1Q_1 . M_1C > R_1Q_1 . X + R_1P_1 . Y + P_1Q_1 . Z$$

$$R_1Q_1 \cdot M_1A + R_1P_1 \cdot M_1B + P_1Q_1 \cdot M_1C > 2S_{P_1Q_1R_1}$$

بادرنظر گرفتن روابط (۲) داریم :

$$p.M_1A + q.M_1B + r.M_1C \geq 2dS_{PQR}$$

طرف اول این نامساوی برابر L_{M_1} وطرف دوم طبق رابطهٔ (۳) برابر L_M می‌باشد پس $L_{M_1} \geq L_M$. در حالتی که نقطهٔ M_1 خارج مثلث $P_1Q_1R_1$ باشدمثل‌بالا نتیجه می‌شود:

$$R_1Q_1 \cdot M_1A + R_1P_1 \cdot M_1B + P_1Q_1 \cdot M_1C > R_1Q_1.X + R_1P_1.Y + P_1Q_1.Z \qquad (4)$$

منتها در این حالت طرف دوم رابطهٔ بالا بزرگتر از $2S_{P_1Q_1R_1}$ می‌باشد یعنی :

$$R_1Q_1 \cdot X + R_1P_1 \cdot Y + P_1Q_1 \cdot Z > 2S_{P_1Q_1R_1}$$

باجمع این‌نامساوی ونامساوی (۴) داریم :

$$R_1Q_1 \cdot M_1A + R_1P_1 \cdot M_1B + R_1Q_1 \cdot M_1C > 2S_{P_1Q_1R_1}$$

بادرنظر گرفتن این رابطه درست مثل حالت اول داریم :

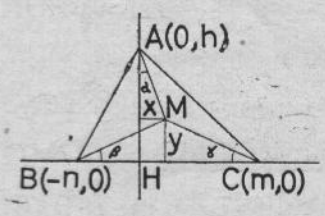
$$L_{M_1} \geq L_M$$

مسئله دارای یك جواب است زیرا کمانهای درخور زوایا در یك نقطه مشترك‌بوده و حداکثر همدیگر را در یك نقطهٔ دیگر قطع می‌کنند .

۲ـ برای اینکه مسئلهٔ بالا جواب داشته باشد بایداولا p و q و r اضلاع مثلثی مانند مثلث PQR باشند و ثانیاً بین‌زوایا نامساویهای :

$$(A+P) \text{ و } (B+Q) \text{ و } (C+R) < \pi$$

بر قرار باشد .



اثبات ـ برای اینکه قسمت اولا را ثابت کنیم از دستگاه مختصات استفاده می‌نمائیم. مطابق شکل داریم :

$$L_M = p.MA + q.MB + r.MC =$$

$$p\sqrt{x^2+(y-h)^2} + q\sqrt{(x+n)^2+y^2} + r\sqrt{(x-m)^2+y^2} = Z$$

برای اینکه L_M می‌نیمم باشد باید مشتق آن نسبت به x و نسبت به y صفر باشد یعنی :

$$Z'_x = \frac{px}{\sqrt{x^2+(y-h)^2}} + \frac{q(x+n)}{\sqrt{(x+n)^2+y^2}} + \frac{r(x-m)}{\sqrt{(x-m)^2+y^2}} = 0$$

$$Z'_y = \frac{p(y-h)}{\sqrt{x^2+(y-h)^2}} + \frac{qy}{\sqrt{(x+n)^2+y^2}} + \frac{ry}{\sqrt{(x+m)^2+y^2}} = 0$$

بادرنظر گرفتن شکل روابط بالا به صورت زیردرمی‌آیند :

$$\begin{cases} p\sin\alpha + q\cos\beta - r\cos\gamma = 0 \\ -p\cos\alpha + q\sin\beta + r\sin\gamma = 0 \end{cases}$$

از این روابط نتیجه خواهدشد :

$$p^2 + q^2 + 2pq\sin(\alpha-\beta) = r^2$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{r^2-p^2-q^2}{2pq}$$

برای درستی رابطهٔ بالا باید :

$$-1 < \frac{r^2-q^2-p^2}{2pq} < +1$$

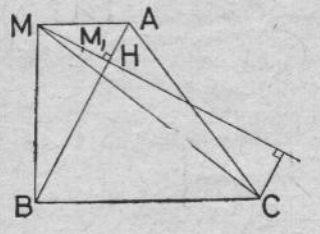
$$r^2 < (p+q)^2 \text{ و } r^2 > (p-q)^2$$

چون اعداد p وq و r مثبتند داریم :

$$r < p+q \text{ و } r > p-q$$

یعنی p و q و r باید اضلاع مثلثی باشند .

ثانیاً ـ نقطهٔ M وقتی می‌تواند جواب مسئله باشد که داخل مثلث ABC یا روی اضلاع آن قراربگیرد . زیرا اگر M خارج مثلث قراربگیرد به دلیل زیرجواب مسئله نیست :

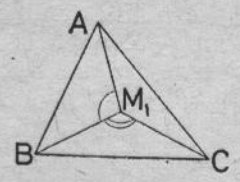


از M بریکی‌از اضلاع مثلثABC که‌بین‌نقطهٔ M و یکی از رأسهای مثلث قرار گرفته‌عمود MH رارسم می‌کنیم. نقطهٔ M_1 را روی‌خط MH و بین دونقطهٔ H و M درنظر می‌گیریم . روابط زیر به‌آسانی نتیجه می‌شوند :

$$p.M_1A < MA.p$$
$$q.M_1B < q.MB$$
$$r.M_1C < r.MC$$
$$p.M_1A + q.M_1B + r.M_1C < p.MA + q.MB + r.MC$$
$$L_{M_1} < L_M$$

واین‌رابطه بدان‌معنی است‌که M نمی‌تواند جواب‌مسئله‌باشد.

دوکمان درخور زاویه‌های مسئلهٔ ۱ همدیگر را در نقاط M و C قطع می‌کنند (گاهی ممکن‌است M بر C منطبق‌شود) برای اینکه M داخل‌یا روی اضلاع مثلث قرار گیرد باید شرایطی راکه نقاط داخل مثلث‌یا نقاط‌اضلاع مثلث دارند داشته باشد. این‌شرایط عبارتند از:



$$BM_1C < A + B + C = \pi$$
$$(1)\quad \begin{cases} CM_1A < B + A + C = \pi \\ AM_1B < \pi = A + B + C \end{cases}$$
$$AM_1B + CM_1A + BM_1C = 2\pi$$
$$(2)\quad \begin{cases} BM_1C > A \\ CM_1A > B \\ AM_1B > C \end{cases}$$

می‌بینیم‌که اگر M به جای M_1 قرار گیرد دارای شرایط (۱) بوده و شرایط (۲) درآن به‌شکل:

$$-(\pi - P) < -A \implies (A + P) < \pi$$

و $(B + Q) < \pi$ و $(C + R)$ درمی‌آید.

آشکارست‌که با وجود شرایط بالا نقطهٔ M حتماً در داخل یا روی اضلاع مثلث ABC قرار گرفته و جواب‌مسئله خواهدبود. زیرا درصورت‌خارج‌از مثلث قرار گرفتن M شرایط (۱) و (۲) درآن صادق نیست. روابط (۲) را نیز می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{P}{2} \implies tg\,\frac{A}{2} < cotg\,\frac{P}{2}$$

$$\frac{S}{P(P-a)} \cdot \frac{S_1}{P_1(P_1-p)} < 1$$

(که درآن S_1 و P_1 به‌ترتیب مساحت و نصف محیط مثلث PQR است)

به‌همین ترتیب:

$$\frac{S}{P(P-b)} \cdot \frac{S_1}{P_1(P_1-q)} < 1$$
$$\frac{S}{P(P-c)} \cdot \frac{S_1}{P_1(P_1-r)} < 1$$

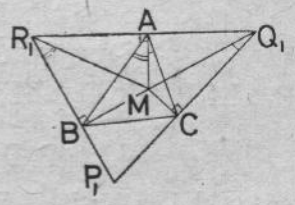
۳ـ مسئلهٔ فرما ـ مطلوبست تعیین نقطه‌ای که‌مجموع فواصلش از سه رأس یك مثلث می‌نیمم باشد.

حل ـ این مسئله حالت خاص مسئلهٔ ۱ است‌که در آن $p = q = r = 1$ بوده‌ودرنتیجه مثلث PQR متساوی‌الاضلاع می‌گردد. دراین حالت زوایای $(\pi - P)$ و $(\pi - Q)$ هر-یك‌مساوی $\frac{2\pi}{3}$ خواهند بود.

۴ـ محاسبهٔ مقدار عبارت:

$L_M = p.MA + q.MB + r.MC$ درحالت‌می‌نیمم.

حل ـ مطابق‌مسئلهٔ ۱ مقدار L_M درحالت می‌نیمم برابراست با:



$$L_M = 2dS_{PQR}$$

و می‌دانیم

$$\frac{R_1Q_1}{RQ} = d \Longrightarrow \frac{R_1Q_1}{p}.d$$

دردو چهارضلعی محاطی MAQ_1C و MAR_1B

$$MAB = MR_1B$$
$$MAC = MQ_1C$$
$$A = MR_1B + MQ_1C \quad (\alpha)$$

درچهار ضلعی $MR_1P_1Q_1$ داریم:

$$MR_1B + MQ_1C + P_1 + (2\pi - R_1MQ_1) = 2\pi$$

(منظور از زاویهٔ R_1MQ_1 زاویهٔ محدب است). با در نظر گرفتن رابطهٔ (α) وتساوی‌دوزاویهٔ P_1 و P (ازمثلث PQR است) رابطهٔ بالا چنین می‌شود:

$$A + P = R_1MQ_1 \quad (\alpha')$$

در مثلث R_1MQ_1 داریم:

$$R_1Q_1^2 = MQ_1^2 + MR_1^2 - 2MQ_1.MR_1 \cos(R_1MQ_1)$$

(β) در دوچهار ضلعی‌محاطی MCQ_1A و MBR_1A داریم

$$\frac{c}{\sin R_1} = MR_1 \text{ و } \frac{b}{\sin Q} = MQ_1$$

با در نظر گرفتن این روابط و رابطهٔ (α') رابطهٔ (β) به‌شکل زیر در می‌آید:

$$R_1Q_1^2 = \frac{c^2}{\sin^2 R_1} + \frac{b^2}{\sin^2 Q_1} - \frac{2bc}{\sin R_1 \sin Q_1}\cos(A+P)$$

ولی‌می‌دانیم $R_1 = R$ و $Q_1 = Q$ و $\frac{\sin R}{\sin Q} = \frac{r}{q}$ پس رابطهٔ بالاچنین می‌شود:

$$R_1Q_1^2 = \frac{1}{q^2 \sin^2 R}(r^2b^2 + q^2c^2 - 2bcrq\cos(A+P))$$

$$d = \frac{R_1Q_1}{p}$$

$$= \frac{1}{pq\sin R}\sqrt{r^2b^2 + q^2c^2 - 2bcrq\cos(A+P)}$$

$$L_M = 2dS_{PQR} = 2\sqrt{r^2b^2 + q^2c^2 - 2bcrq\cos(A+P)}$$

مثال ـ برای مسئلهٔ فرما داریم:

$$p = q = r = 1 \Longrightarrow S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$P = Q = R = \frac{\pi}{3}$$

پس :

$$L_M = 2dS_{PQR} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + \frac{\pi}{3})}$$

۵ـ تعمیم‌مسئلهٔ فرما در n ضلعی منتظم

نقطه‌ای چنان بیابیدکه مجموع فواصلش از رأسهای یك n ضلعی منتظم می‌نیمم باشد .

حل ـ نقطهٔ M مرکزدایرهٔ محیطی و محاطی n ضلعی منتظم‌جواب‌مسئله‌است.زیرا در n ضلعی‌منتظم $A_1A_2\ldots A_n$ برای نقطهٔ M چنین داریم :

$$L_M = MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n = n.MA_1$$

حال نقطه‌ای مانند M_1 را در نظر می گیریم . درنقاط A_1 و A_2 و... A_n به‌ترتیب بر MA_1 و MA_2 و... MA_n عمودهایی اخراج می‌کنیم‌تا n ضلعی منتظم $A'_1A'_2\ldots A'_n$ بوجود آید . واضح است‌که MA_1 ارتفاع این n ضلعی‌است. درست مانند مسئلهٔ ۱ اگر از M_1 به ترتیب عمودهای b_1 و b_2 و... b_n را براضلاع این n ضلعی وارد نمائیم داریم :

$$M_1A_1 + M_1A_2 + \ldots + M_1A_n > b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$$

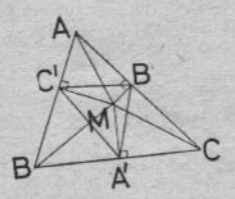
طرف دوم‌نامساوی بالادر n ضلعی‌منتظم‌برابر $n.MA_1$ است پس:

$$L_{M_1} > n.MA_1$$

۶ـ نقطهٔ M را در مثلث ABC چنان بیابیدکه اگر تصاویر آنرا بر BC و AC و AB به ترتیب A' و B' و C' بنامیم عبارت زیر می‌نیمم باشد:

$$P_M = l.B'C' + h.C'A' + k.A'B'$$

(l و h و k اعدادی مثبتندکه همچنین $l\sin A$ و $h\sin B$ و $k\sin C$ می‌توانند اضلاع مثلثی باشند)



حل ـ مطابق‌شکل در چهار ضلعی محاطی $MB'AC'$ داریم :

$$\frac{B'C'}{MA} = \sin A \Longrightarrow$$

$$l.B'C' = l.\sin A.MA$$

به‌همین ترتیب

$$h.C'A' = h\sin B.MB \quad \text{و} \quad k.A'B' = k\sin C.MC$$

$$l.B'C' + h.C'A' + k.A'B' = l\sin A.MA + h\sin B.MB + k\sin C.MC$$

برای اینکه طرف اول تساوی بالا می‌نیمم باشد باید طرف دوم می‌نیمم باشد و این موضوع در مسئلهٔ ۱ حل شده است . پس برای یافتن نقطهٔ M از راه حل مسئلهٔ ۱ استفاده می‌کنیم . (البته شرط زاویه‌ای مسئلهٔ ۱ باید در این مسئله برقرار باشد) .

تمرینات

۱ـ ثابت‌کنید درحالتی‌که نقطهٔ M جواب مسئلهٔ ۱ است سینوس زوایای (AMB) و (BMC) و (AMC) متناسب‌با r و p و q می‌باشد.

۲ـ درهر مثلث نامساویهای زیر را ثابت‌کنید (M نقطهٔ غیر مشخصی است)

(۱) $a.MA + b.MB + c.MC \geqslant 4S$

(۲) $\frac{MA}{h_a} + \frac{MB}{h_b} + \frac{MC}{h_c} \geqslant 2$

(۳) $a.MA + c.MB + b.MC \geqslant a(b^2 + c^2 + 2bc\cos A)^{\frac{1}{2}}$

فیزیك ریاضی

نوشتهٔ : G. P'OLYA وابستهٔ آکادمی علوم و استاد افتخاری
مدرسهٔ پلی‌تکنیك فدرال زوریخ ودانشگاه استانفورد

ترجمهٔ: داوید ریحان

فیزیك تنها به‌ما(به ما ریاضیدانان) فرصت‌حل‌مسائل‌را نمی‌دهد؛ بلکه‌ما رادر یافتن راه حلها به دو طریق یاری می کند : جواب را محسوس می کند ؛ و متعاقب آن ما را وادار به استدلال می کند .

هانری پوانکاره

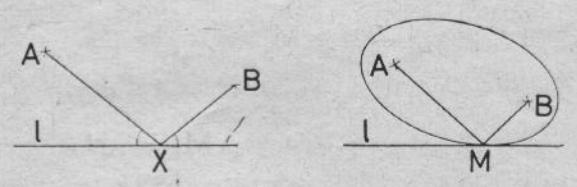
I- تعبیر فیزیکی - مسائل‌ریاضی اغلب توسط‌طبیعت ویا علوم‌فیزیکی‌که مبتنی برتعبیرات ماازطبیعت است، مطرح می‌شود. حل یك مسئلهٔ ریاضی را نیزمی‌توانیم‌از طبیعت‌الهام بگیریم ؛ فیزیك چاشنی جوابهایی راکه‌شانس بدست آوردن آنها برای ماخیلی‌کم باشد،مهیا می‌سازد . همچنین اگرمسائل ریاضی راکه ازتحقیقات فیزیکی بدست‌آمده و به‌کمك تعبیرات فیزیکی حل می‌شوند، مورد مطالعه قرارندهیم ،نقطهٔدیدمان محدود خواهد شد . مسئلهٔ زیر یکی از ساده ترین مسائل از این‌نوع است .

۱- طبیعت‌مسئله می‌آفریند - کمترین فاصلهٔ مابین دونقطهٔ مفروض ، یك خط راست است.نور منتشر شده از یك نقطه به نقطهٔ بعدی ، چنین مسیرکوتاهی را انتخاب می‌کند، این یکی از تجاربی است که همواره تأیید شده بنظر می‌رسد . اگر نور در موقع نشر از یك نقطه به نقطهٔ دیگر راهی غیر مستقیم را طی‌کند، یعنی از برخورد با آینه‌ای‌که‌در مسیرآن قرارگرفته است ، منعکس شود ، چه اتفاقی رخ می‌دهد ؟ در این‌صورت‌کوتاهترین‌مسیر چقدر است؟ انتشارنور مارابه‌مسئلهٔ زیرکه‌کاملاً هندسی است ، راهنمایی می‌کند : درصفحه‌ای یك خط ودونقطه‌که دریك طرف این خط واقعند ، مفروض‌است . روی خط نقطه‌ای بدست‌آوریدکه مجموع فواصلش ازدونقطه می‌نیمم باشد .

شکل ۱ را درنظرمی گیریم :

A و B نقاط مفروضند ؛ l خط مفروض و X نقطهٔ متغیری روی خط l است .

مجموع AX + XB ازفواصل و یا اینکه طول‌مسیری راکه‌از A به X سپس‌از X به B می‌رود ، درنظرمی گیریم. باید روی خط‌مفروض l موضع X را بقسمی بدست آوریم‌که طول این مسیر می‌نیمم باشد. مسئلهٔ دیگری‌که مشابه باهمین مسئله است ، عبارت ازیافتن X است‌بطوری‌که دونقطه تحت زاویهٔ ماکزیممی دیده شود . این مسائل دقیقاً دارای‌مفروضات همسانند وماهیت‌مجهول هردونیز یکی است : در این‌دوحالت روی خط داده‌شده ، موضع نقطه‌ای را بدست می‌آوریم که به ازای‌آن اکسترمم بدست‌آید . تفاوت دو مسئله تنها در مورد این اکسترمم است : درحالت مورد بحث ما ، باید مجموع طولها را می‌نیمم‌کنیم و در دیگری می‌بایست زاویهٔ ماکزیممی راکه این دونقطه تحت‌آن دیده می‌شوند ، بدست‌آوریم .



شکل ۲ شکل ۱

این مسائل چنان بهم وابسته‌اندکه هردو را باید بایك روش حل نمود . برای حل این مسائل باید ازخطوط مرجع استمداد بجوئیم .

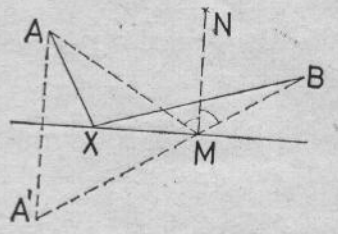
نقطهٔ X راکه‌فرض‌می‌کنیم روی خط l نیست‌و می‌تواند

هرموضع غیر مشخصی ازصفحه را اشغال کند ، درنظرمی گیریم. درصورتی که مقدار $AX + XB$ (که‌می‌خواهیم می‌نیمم‌شود) دارای اندازهٔ معلومی‌بود ، X چگونه می‌توانست تغییر کند؟ می‌توانست روی‌یك بیضی‌به کانونهای A و B تغییرمکان‌دهد. در این شرایط خطوط مرجع بیضیهای هم کانون می‌باشند ، یعنی بیضیهایی کـه دارای کانونهای (AوB) هستند.می‌نیمم مطلوب نقطهٔ تماس خـط داده شدهٔ l بایك بیضی است کـه کانـونهایش نقاط مفروض A وB مـی‌باشند (شکل ۲)

۲ - طبیعت راه حل می‌آفریند - مطمئناً جواب مسئله راباوجودآنکه‌برخی‌خواص هندسی‌بیضی‌رانمی‌دانستیم، بدست‌آوردیم ، ولی این جواب زیاد به‌درد مانمی خورد . از جایی‌جدیدشروع می‌کنیم‌وجوابی درخور راکه بتوانداطلاعات صریحی بدهد ، جستجومی‌کنیم .

شرایط فیزیکی داخل مسئله را معرفی می‌کنیم ، نقطهٔ A یك منبع نورانی است ، B چشم‌ناظر و l معرف موضع یك سطح منعکس کننده است ؛ می‌توانیم سطح افقی را دریاچه‌ای آرام (سطح عمود بر صفحهٔ شکل که‌این صفحه را در خط l می‌برد) درنظر بگیریم. درصورتی‌که X را صحیح انتخاب‌کرده باشیم ، خط شکستهٔ AXB معرف مسیر نور است . ما این مسیر رابخوبی می‌شناسیم واذعان داریم‌که طول خط شکستهٔ AXB وقتی می‌نیمم‌است‌که معرف مسیرنور بازتاب نیزباشد.

چشم را در B قرار مـی‌دهیم و نگـاه خود رابه سمت دریاچهٔ منعکس‌کننده معطوف می‌کنیم تا تصویر A راببینیم . مشاهده‌می‌شود که‌شعاع‌نورانی‌مستقیماًازجسم A نمی‌آید،بلکه بنظرمی‌رسدکه ازنقطه‌ای‌که‌در زیرسطح دریاچه‌است ، می‌آید. از چه نقطه‌ای می‌آید ؟ از نقطهٔ A^* ، تصویـر جسم A ، قرینهٔ A نسبت به l . در شکل ، نقطهٔ A^* را که توسط‌تجربه بدست‌آمده است،وارد می‌کنیم.این‌نقطه‌صورت ظاهر مسئله را تغییر می‌دهد . تعداد زیادی روابط جدید (شکل ۳) پدیدار می‌شود که هم اکنون‌آنهارامرورکرده و بـه سرعت از آنها بهره برداری می‌کنیم.واضح است که :



شکل ۳

$$AX = A^*X$$

(A^*X تصویر AX است . همچنین می‌توانیم تساوی‌مثلثهای ACX و A^*CX را بدست‌آوریم ؛ خط l عمود منصف‌قطعه خط AA^* است) درنتیجه‌داریم :

$$AX + XB = A^*X + XB$$

طرف‌اول این‌تساوی برای یك وضع X می‌نیمم است . واضح است‌که طرف دوم نیز می‌نیمم است اگر ، A^* ، X و B بریك استقامت باشند . خط راست کوتاهترین‌مسیر است.

راه حل بدین صورت‌بدست‌می‌آید (شکل۳) ونقطهٔ M، وضع X مربوط به می‌نیمم ، از تقاطع خط l با خط واصل بین A^* و B حاصل‌می‌گردد .آشکاراست‌که AM و MB نسبت به l دارای میلهای متساویند. خط MN ، قائم بر l (موازی با A^*A) را مداخله می‌دهیم ، می‌بینیم که زوایای AMN و BMN متساویند .تساوی این دوزاویه شاخص‌کوتاهترین راه است . ولی‌همین تساوی :

زاویهٔ تابش = زاویهٔ بازتاب

شاخص مسیر حقیقی نور است کـه بنابه تجربه آنرا مـی‌دانیم . بنابر این ، شعاع بـازتاب برای رسیدن از جسم به چشم ناظر ، کوتاهترین راه را طی می‌کند. (این‌کشف‌متعلق به **هرون** اسکندرانی است).

۳- مقایسهٔ دوراه حل - اغلب اوقات‌آزمایش‌مجدد جوابها مفید بنظر می‌رسد .درحالت کنونـی ، فایده دوبرابر است زیرادوجواب در اختیار داریم‌که می‌خواهیم‌آنها راباهم مقایسه کنیم . هر دو روش‌حل مسئله (شکل۲ وشکل۳) باید منتهی‌به‌یك‌نتیجه شوند (دوشکل موردبحث رابرای خودمجسم کنید). می‌توانیم نقطهٔ M یعنی جواب مسئلهٔ می‌نیمم را به کمك یك بیضی مماس بر l به کمك دو شعاع که نسبت به l دارای میلهای‌متساویند ، بدست‌آوریم . ولی این دوساختمان باید به‌ازاء هرموضع عناصر داده شده (نقاط A و B وخط l) مطابقت‌کند . تطبیق بین دو ساختمان خاصیت هندسی بیضی‌را بمیان می‌کشد:دوشعاع حامل‌هر نقطه از بیضی نسبت به‌مماس بربیضی در این نقطه میلهای متساوی دارند .

درصورتی که‌بیضی راسطحی‌منعکس‌کننده در نظر بگیریم واگرقانون انعکاس‌راملحوظ داریم(که‌هم‌اکنون تجربه‌کردیم)، می‌توانیم این خاصیت هندسی را به صورت یك تعبیر فیزیکی بیان‌کنیم : هرشعاع‌نورانی خارج شده ازکانون آئینهٔ‌بیضوی،

پس از انعکاس ، ازکانون دیگر می گذرد .

۴ ـ مورد استعمال ـ کشف هرون با وجود همهٔ سهولتش ، شایستهٔ مقامی در تاریخ‌علم است . این اولین مثال مورد استفادهٔ اصل می‌نیمم در توصیف یك‌پدیدهٔ فیزیکی است و مثالی از ارتباط بین‌نظریه‌های ریاضی و تئوریهای فیزیکی است. اصول می‌نیمم بسیار کلیتری نیز توسط هرون کشف شد و وابستگی‌های بین سایر تئوریهای ریاضی وفیزیك ایجادشد، ولی‌اینها اولین‌و ساده‌ترین‌مثالهائی‌هستندکه دربرخی ازجنبه‌ها مؤثرتر نیزهستند .

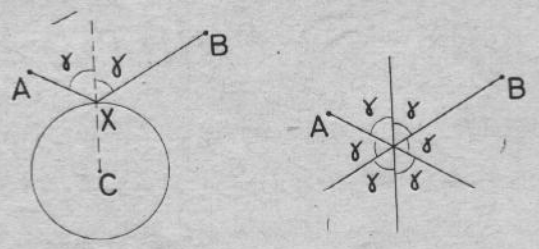
اگر به‌راه حل ۲ برگردیم ، از این‌عمل موفقیت آمیز وچنین شایان توجهی ، ازخود می‌پرسیم که آیا می‌توانیم از آن استفاده‌کنیم : از این نتیجه چه نصیبی خواهیم برد ؟ آیا می‌توانیم‌این روش را درمورد حالات جدید نیز بکار ببندیم؟ در واقع راههای ممکن بسیاری وجود دارد. می‌توانیم انعکاس نوررا روی یك‌آئینهٔ منحنی‌یا انعکاسهای متوالی روی یك‌رشته آئینه‌های مسطح، یا ترکیب‌نتایج‌را به‌کمك روشهایی‌که تاقبل از این بدانها برخورده‌ایم ، درنظر بگیریم .

تنها یك مثال‌راکه همانا مسئلهٔ «تقاطع جاده‌ها» است ، مورد بررسی قرار می‌دهیم . سه‌شهر می‌خواهند سه جادهٔ منتهی به‌یك مرکز ترافیك مشترك را چنان بسازند که نرخ ساختمان‌کل‌می‌نیمم باشد. اگر این‌عبارت‌را روی‌کاغذبه‌صورت شکل تصویرکنیم ، به مسئلهٔ هندسی محض زیر می‌رسیم : سه نقطه مفروض است ، نقطهٔ چهارمی چنان بیابید که مجموع فواصلش از سه‌نقطهٔ اول می‌نیمم باشد .

فرض می‌کنیم‌که A،B،C سه‌نقطهٔ مفروض (شهرها)و X نقطهٔ‌متغیر صفحهٔ‌نقاط A،B وC باشد.می‌مینمم $AX + BX + CX$ را جستجو می‌کنیم .

بنظرمی‌رسدکه این مسئله به مسئلهٔ هرون بستگی‌داشته باشد . می‌بایست دومسئله را بهم نزدیك‌کرده و رابطهٔ بسیار نزدیکی‌بین‌آنها برقرارکنیم. درصورتی‌که برای یك لحظه‌فرض کنیم‌که فاصلهٔ CX ثابت‌باشد (که‌ما آنرا p می‌نامیم) ،رابطهٔ نزدیك‌حاصل می‌شود : مانند حالت پیشین ، می‌بایست‌می‌نیمم $AX + BX$ یعنی مجموع فواصل یك نقطهٔ متغیر از دونقطهٔ ثابت را بدست آوریم . تنها اختلاف در این است‌که‌در اینجا X باید روی‌یك دایره (به‌شعاع r و به‌مرکز C) حرکت‌کند و مانند مسئلهٔ پیشین روی خط راست حرکت نمی‌کند . اولین مسئله برمبنای انعکاس‌برروی یك‌سطح صاف بود و مسئلهٔ‌جدید مبتنی بر انعکاس برروی یك آئینهٔ دایره‌ای است .

این عمل را با نور انجام می‌دهیم: یافتن‌کمترین‌راهی‌که از A به B با برخورد با آئینه می‌رود به‌کمك شعاع نورانی نسبتاً ماهرانه است .نور طوری منعکس می‌شودکه زاویهٔ‌تابش برابر با زاویهٔ بازتاب باشد . همچنین درتصورمربوط‌به‌می‌نیمم مطلوب، زاویهٔ AXB بایدتوسط خط ماربر C وX(شکل۴) به‌دوقسمت متساوی‌تقسیم‌شود . درصورتی‌که از اصل‌تغییرات



شکل ۴ شکل ۵

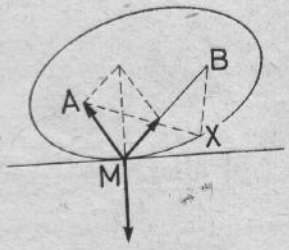
جزئی استفاده‌کرده و با درنظر گرفتن تقارن مجموعه ،می‌بینیم که‌زاویهٔ AXC و BXC نیز بهمین طریقه باید به دوقسمت تقسیم شوند . خطوط راست واصل X به A،B وC صفحه را به‌شش قطاع با رأس مشترك X تقسیم می‌کنند . درصورتی‌که به دقت زوایای شکل ۵را درنظربگیریم ، به سهولت می‌بینیم که شش زاویه با هم‌متساویند و درنتیجه هرکدامشان برابر با 60° می‌باشند .سه جاده‌ای‌که از مرکز ترافیك‌منشعب‌می‌شوند با یکدیگر زوایای متساوی می‌سازند ؛ بنابراین زاویهٔ تشکیل شده بین هردو جاده برابر با 120° است .

(اگرروش تغییرات جزئی‌که بکار بردیم مقید به‌محدود- یتهایی باشد؛لازم می‌آیدکه‌آزمایش جدیدی برای جواب‌مسئله درنظر بگیریم) .

II- تعبیر مکانیکی ـ مسائل ریاضی وحل آنها را نیز می‌توانیم از شاخه‌ای از آزمایشهای مربوط به پدیده‌های اپتیك، مکانیك یا غیره بدست آوریم . حال می‌خواهیم ببینیم که‌چگونه می‌توان از اصول سادهٔ مکانیك برای‌کشف راه حل استمداد جست .

۱ ـ از یك نخ ، که دو انتهایش ثابتند حلقه‌ای وزین گذرانده‌ایم ، وضعیت تعادل حلقه را پیداکنید. قبول می‌کنیم که‌نخ‌کاملا نرم است و خاصیت کشسانی ندارد ووزنش قابل اغماض است وحلقه درطول نخ بدون اصطکاك حرکت می‌کند وابعادش‌آنقدر کوچکندکه می‌توانیم آنرا مانند نقطه‌ای‌ریاضی درنظر بگیریم .

فرض می‌کنیم A و B دو انتهای ثابت نخ و × وضع غیرمشخصی از حلقه باشد. بطوری که در شکل ۶ دیده می‌شود، نخ به‌صورت خط شکستهٔ AXB است.



شکل ۶

مسئلهٔ مطروحه را می‌توان با دو روش گوناگون حل کرد. حلقه باید در پائین ترین وضع ممکن باشد. (حلقه وزین است؛ و «مایل» است که تا حد ممکن به سطح زمین، با مرکز زمین نزدیك شود.) دو قطعه نخ AX و BX که دارای خاصیت گشسانی نیستند، کشیده شده‌اند و همچنین حلقهٔ لغزان در طول نخ، درروی یك بیضی به‌کانونهای A و B قراردارد. واضح است که وضعیت تعادل در پائین ترین نقطهٔ بیضی که در آنجا مماس بر آن افقی است، قراردارد.

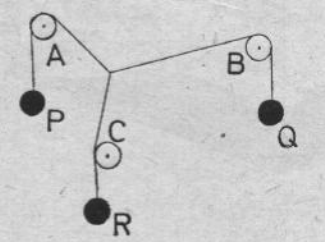
همچنین می‌توانیم بگوئیم که نیروهای وارد برنقطهٔ M از نخ باید متعادل باشند، یعنی تعال باید بین وزن حلقه و کششهای نخ وارد بر M برقرار باشد. کششهای روی دو قطعهٔ MA و MB با هم مساوی و هم جهتند ودر طول نخ و به‌ترتیب به سمت A و B متمایلند. برایند آنها زاویهٔ AMB را به دو قسمت متساوی تقسیم می‌کند وچون باوزن حلقه متقابل است، پس عمودی است.

دو جواب باید یك نتیجه را بدهند. همچنین خطوط MA و MB که با تمایل مساوی نسبت به خط قائم بر بیضی قراردارند، نسبت به مماس افقی نیز دارای تمایل مساویند: خطوط واصل دو کانون بیضی به‌نقطهٔ غیر مشخص M ازآن، روی مماس در M دارای شیبهای متساویند. (با حفظ طول AB ولی با تغییر زاویهٔ میل آن نسبت به افق، می‌توانیم M رابه‌هرنقطه ازنیم بیضی که می‌خواهیم، ببریم)

حال می‌خواهیم نتیجه‌ای را که قبلا حاصل شد (قسمت ۳-I)، با روش جدید و باکاربردهای دیگری، مجدداً بدست آوریم.

۲- بنظر می‌رسد که ما دارای معلومات زیادی بوده‌ایم. بدون مطالعهٔ زیاد مکانیك، مشاهده می‌شود که نه تنها برای یافتن راه حل یك مسئلهٔ پیشنهاد شده، بلکه برای یافتن دو راه‌حل، که براساس دو اصل متفاوت قرار گرفته‌اند، بقدر کفایت می‌دانیم. مقایسهٔ بین این دو راه‌حل ما رابه‌یك عمل هندسی قابل توجه راهنمائی می‌کند. آیا می‌توانیم از این معلومات اضافی مکانیکی بهره برداری کنیم.

باکمی شانس می‌توانیم مکانیسمی را درنظر بگیریم که قادر به‌حل مسئلهٔ تقاطع جاده‌های فوق‌الذکر باشد (قسمت ۴-I): سه قرقره می‌توانند حول سه میخ ثابت شده برروی یك دیوار قائم در A، B، C بچرخند (شکل ۷).



شکل ۷

بطوری که درشکل ۷ دیده می‌شود، سه نخ XAP، ABQ و XCR به ترتیب از روی قرقره‌های A، B و C می‌گذرند، این نخها توسط انتهای مشترك X خود به هم متصل شده ودر انتهای هرکدامشان وزنه‌ای آویزان است. این وزنه‌ها به ترتیب با P، Q و R معرفی شده‌اند و با هم متساویند. مطلوب مسئله، یافتن وضع تعادل مجموعه است.

طبیعتاً، تسهیلات معمول را در نظر گرفته‌ایم: نخها کاملا نرمند و دارای خاصیت کشسانی نیستند، از اصطکاك، وزن نخها و ابعاد قرقره‌ها صرف‌نظر شده است (قرقره‌ها را با نقطه اشتباه کرده‌ایم). مانند مسئلهٔ ۱ مسئله را می‌توانیم به دوروش مختلف حل کنیم.

در مجموعهٔ دستگاه، سه وزنه باید در پائین ترین وضع ممکن قرار گیرند. یعنی باید مجموع فواصلشان از یك صفحهٔ افقی داده شده (زمین) می‌نیمم باشد. (انرژی پتانسیل دستگاه باید می‌نیمم باشد ووزن هرسه‌وزنه با هم‌مساویست.) پس باید $AP + BQ + CR$ می‌نیمم باشد. در نتیجه، چون طول هرنخ غیر قابل تغییراست، $AX + BX + CX$ بایدمی‌نیمم باشد ومسئله تبدیل به مسئلهٔ تقاطع جاده‌ها می‌شود که درقسمت ۴-I مورد بررسی قراردادیم (شکل ۴ وشکل ۵).

همچنین می‌توانیم بگوئیم که نیروهای وارد بر X باید متعادل باشند. سه وزنهٔ مؤثربه هر نخ مربوط، نیروهای با شدتهای مساویند و این نیروها بدون نقصان توسط قرقره‌های بدون اصطکاك منتقل می‌گردند.

این نیروهایی که با شدتهای مساوی به‌ترتیب درامتدادهای XA، XB و XC روی X اثر کرده‌اند، باید متعادل باشند. به‌علت تقارن، واضح است که این نیروها باید دارای میلهای ثابتی نسبت به‌یکدیگر باشند؛ زاویهٔ تشکیل شده توسط دونخ غیر مشخص متلاقی در X باید برابر با ۱۲۰° باشد. (مثلث تشکیل شده توسط نیروها، متساوی‌الاضلاع است و زوایای خارجی‌اش ۱۲۰° است).

این موضوع مؤید راه حل داده شده در قسمت ۴ - I است (تعبیر مکانیکی می‌تواند لزوم قیود مربوط به‌مواضع متوالی نقاط A، B و C را آشکار سازد).

دنباله دارد

راهنمای ریاضیات متوسطه

|قدر مطلق|

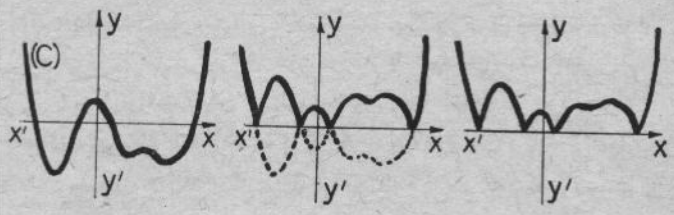
دنباله ازشمارهٔ قبل

عبدالحسین مصحفی

نمایش هندسی توابع با قدر مطلق

I- تابع $y=|f(x)|$

الف ـ نمایش هندسی تابع $y=|f(x)|$ به این ترتیب بدست‌می‌آید که ابتدانمایش‌هندسی تابع $y=f(x)$ را رسم‌کنیم، آنگاه قسمتهایی ازاین نمایش‌هندسی راکه زیر محور $x'x$ واقع است از روی‌شکل حذف‌کرده و به‌جای هریك ازآنها قرینه‌اش را نسبت به محور $x'x$ به شکل اضافه‌کنیم .



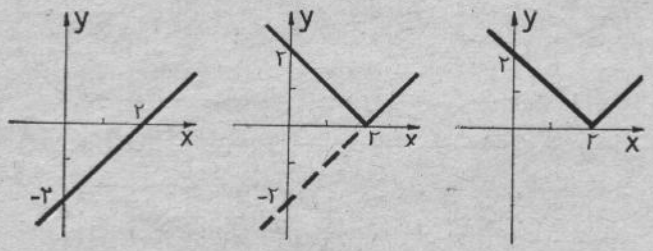
شکل (۱ـc) شکل (۱ـb) شکل(۱ـa)

اگر شکل (۱ـa) نمایش هندسی تابع $y=f(x)$ باشد، شکل (۱ـc) نمایش هندسی تابع $y=|f(x)|$ خواهد بود . چگونگی تبدیل‌شکل (۱ـa) به شکل (۱ـc) درشکل (۱ـb) نموده شده است .

دلیل عمل بالا واضح است زیرا می‌دانیم که در ازاء مقادیری از x که $f(x)$ مثبت باشد داریم $|f(x)|=f(x)$ و در ازاء مقادیر مزبور نمایش هندسی تابع $y=|f(x)|$ همان‌نمایش هندسی تابع $y=f(x)$ می‌باشد . در ازاء مقادیری از x که $f(x)$منفی‌باشدداریم $|f(x)|=-f(x)$ وچون $f(x)$و$-f(x)$ دو مقدار قرینه‌اند پس در ازاء مقادیری از x که $f(x)$ منفی باشد نمایش هندسی تابع $y=|f(x)|$ عبارتست از قرینهٔ نمایش هندسی تابع $y=f(x)$ نسبت به‌محور $x'x$.

تابع $y=|f(x)|$ در ازاء مقادیری از x که $f(x)=0$ باشد می‌نیمم است اما مشتق تابع در ازاء مقادیر مزبور عموماً معین نیست .

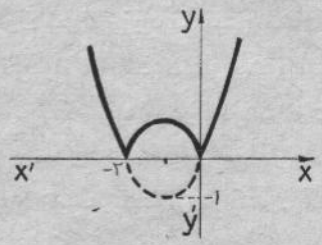
مثال ۱ـ برای رسم نمایش‌هندسی تابع $y=|x-2|$ ابتدا نمایش هندسی $y=x-2$ را که‌یك‌خط‌مستقیم‌است رسم می‌کنیم (شکل ۲ـa) آنگاه قسمتی از این خط راکه زیرمحور



شکل (۲ـc) شکل (۲ـb) شکل (۲ـa)

$x'x$ حذف کرده و قرینهٔ آنرا نسبت به $x'x$ به‌شکل اضافه می‌کنیم (شکل ۲ـb)، به‌این‌ترتیب‌شکل (۲ـc) بدست‌می‌آید که‌نمایش هندسی تابع $y=|x-2|$ است . این تابع چنانچه‌از روی شکل هم معلوم است در ازاء $x=2$ می‌نیمم می‌باشد .

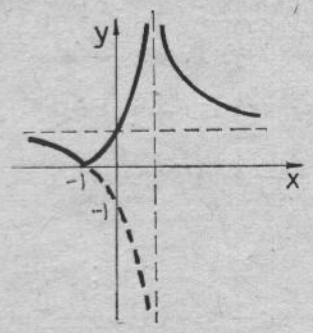
مثال ۲ـ نمایش هندسی‌تابع $y=|x^2+2x|$ بنابرآنچه که گفته شد مطابق با شکل ۳ بدست خواهد آمد . تابع‌مزبوردارای دومی‌نیمم ویك‌ماکسیمم است . (توجه خواهد شدکه‌قسمتی که‌نقطه‌چین



شکل ۳

رسم شده جزء نمایش هندسی تابع نیست.)

مثال۳ـ نمایش هندسی تابع $y=\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ مطابق با شکل ۴ بدست خواهد آمد. این تابع درازاء $x=-1$ می‌نیمم است.



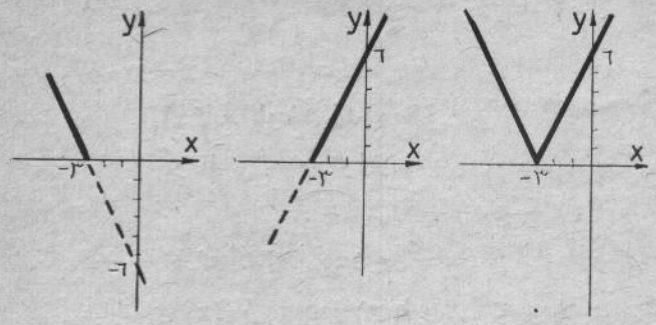
شکل ۴

ب ـ برای رسم نمایش هندسی تابع $y=|f(x)|$ می‌توان چنین عمل کرد: ابتدا علامت $f(x)=0$ را تعیین می‌کنیم. اگر $f(x)$ در تمام فاصله‌ای که معین است علامت ثابت داشته باشد در صورتی که $f(x)$ همواره مثبت باشد داریم: $y=|f(x)|=f(x)$ و کافی است نمایش هندسی تابع $y=f(x)$ را رسم کنیم. درصورتی که $f(x)$ همواره منفی باشد داریم $y=|f(x)|=-f(x)$ و نمایش هندسی تابع $y=-f(x)$ را رسم می‌کنیم. هرگاه عبارت $f(x)$ در ازاء مقادیر x_1 و x_2 و... و x_n تغییر علامت دهد به فرض: $x_1<x_2<\ldots<x_n$ در هریك از فاصله‌های ($-\infty$ و x_1) و (x_1 و x_2) و...و(x_n و $+\infty$) علامت $f(x)$ و در نتیجه مقدار $|f(x)|$ را معلوم کرده نمایش هندسی هر یك از تابعهای حاصل را درفاصلهٔ مربوط رسم می‌کنیم.

مثال ۴ـ رسم نمایش هندسی تابع $y=|2x+6|$. از حل معادلهٔ $2x+6=0$ یك‌جواب $x=-3$ بدست‌می‌آید. در فاصلهٔ ($-\infty$ و -3) مقدار عبارت $2x+6$ منفی است و مقدار این عبارت در فاصلهٔ (-3 و $+\infty$) مثبت است. بنابراین تابع مفروض به دو تابع‌زیر تجزیه می‌شود:

$$(1)\quad \begin{cases} y=-(2x+6) \\ x<-3 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} y=2x+6 \\ x>-3 \end{cases}$$

نمایش هندسی تابع (۱) عبارتست از نیمی از خط به معادلهٔ $y=-2x-6$ که‌طول‌نقاط‌آن‌از -3 کمتراست(شکل۵ـa) نمایش هندسی تابع (۲) مطابق با شکل (۵ـb) نیمی از خط به معادلهٔ $y=2x+6$ است که طولهای نقاط آن از -3 بیشترند. مجموعهٔ شکلهای (۵ـa) و (۵ـb) شکل (۵ـc) را تشکیل می‌دهدکه نمایش هندسی تابع $y=|2x+6|$ است.



شکل (۵ـc) شکل (۵ـb) شکل (۵ـa)

این تابع در ازاء $x=-3$ می‌نیمم است.

مثال ۵ـ رسم نمایش هندسی تابع $y=\left|\frac{2x-4}{x+2}\right|$

از معادله‌های $2x-4=0$ و $x+2=0$ دو مقدار $x=2$ و $x=-2$ بدست می‌آید و خواهیم داشت:

$$(1)\quad \begin{cases} y=\frac{2x-4}{x+2} \\ x<-2 \text{ یا } x>2 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} y=\frac{-2x+4}{x+2} \\ -2<x<2 \end{cases}$$

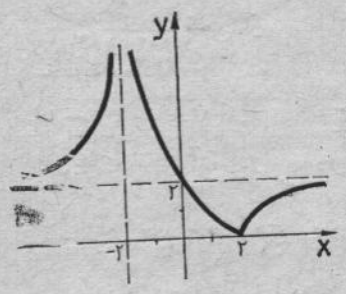
در مورد تابع (۱) داریم $y'=\frac{8}{(x+2)^2}$ و جدول تغییرات آن چنین است:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+				+	
y	2	↗	$+\infty$		0	↗	2

درموردتابع(۲)داریم: $y'=\frac{-8}{(x+2)^2}$ و:

x		-2		0		2	
y'				−			
y			$+\infty$	↘ 2 ↘	0		

منحنی تابع (۱) با دو خط $x=-2$ و $y=2$ و منحنی تابع (۲) فقط باخط $x=-2$ مجانب می‌باشد. منحنیهای نمایش دو تابع (۱) و (۲) را در یك شکل رسم می‌کنیم تا نمایش



شکل ۶

هندسی تابع $y=\left|\frac{2x-4}{x+2}\right|$ بدست‌آید .(شکل۶).تابع بالا در ازاء $x=2$ می‌نیمم است .

II- تابع باچند قدرمطلق

اگر تابعی به‌صورت زیر باشد :

$$y=|f(x)|+|g(x)|+|h(x)|+\dots$$

ابتدا مقادیری از x را تعیین می‌کنیم‌که به ازاء آنها هریك از عبارتهای $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ و ... تغییرعلامت می‌دهند و مقادیر حاصل را مرتب می‌کنیم تا مثلافاصله‌های $(-\infty$ و $x_1)$ و $(x_1$ و $x_2)$ و... و $(x_n$ و $+\infty)$ بدست‌آید. درهریك ازاین‌فاصله‌ها مقدار تابع را بدون‌قدرمطلق تعیین‌کرده نمایش هندسی‌آنرا مشخص می‌کنیم . مجموعهٔ همهٔ این نمایشهای هندسی‌که دریك شکل رسم شوند نمایش‌هندسی تابع مفروض خواهد بود .

مثال ۶- رسم نمایش هندسی تابع :

$$y=|x-2|+|x+2|+|x+1|$$

به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

$x-2=0$ و $x=2$

$x+2=0$ و $x=-2$

$x+1=0$ و $x=-1$

$x<-2 \Longrightarrow x-2<0$ و $x+2<0$ و $x+1<0$

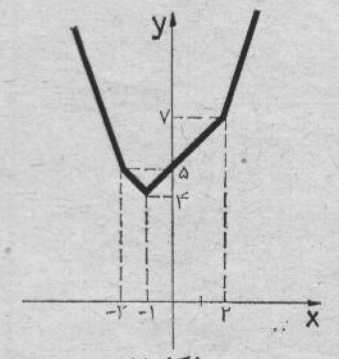
$y=-(x-2)-(x+2)-(x+1)=-3x-1$

$x<-2 \Longrightarrow y=-3x-1$

$-2<x<-1 \Longrightarrow y=-x+3$

$-1<x<2 \Longrightarrow y=x+5$

$x>2 \Longrightarrow y=3x+1$



شکل ۷

نمایش هندسی تابع مفروض (شکل ۷) از چهار جزء به شرح‌زیر تشکیل می‌شود :

الف - نیمی از خط به معادلهٔ $y=-3x-1$ که طولهای نقاط آن در نامساوی $x<-2$ صدق می‌کنند .

ب -پاره‌ای‌از خط به‌معادلهٔ $y=-x+3$ که‌طولهای نقاط آن در نامساوی $-2<x<-1$ صدق می‌کنند .

ج - پاره‌ای از خط به معادلهٔ $y=x+5$ که طولهای نقاط‌آن درنامساوی $-1<x<2$ صدق می‌کنند.

د - نیمی از خط به‌معادلهٔ $y=3x+1$ که طولهای نقاط‌آن در نامساوی $x<2$ صدق می‌کنند .

مثال ۷- رسم نمایش هندسی تابع :

$$y=|x^2+3x|+|x-1|$$

داریم :

$x^2+3x\geq 0 \Longleftrightarrow x\geq 0$ یا $x\leq -3$

$x^2+3x<0 \Longrightarrow -3<x<0$

$x-1\geq 0 \Longrightarrow x\geq 1$

$x-1<0 \Longrightarrow x<1$

$x<-3 \Longrightarrow y=x^2+3x-x+1$

(۱) $x<-3 \Longrightarrow y=x^2+2x+1$ و $y'=2x+2$

(۲) $-3<x<0 \Longrightarrow y=-x^2-4x+1$ و $y'=-2x-4$

(۳) $0<x<1 \Longrightarrow y=x^2+2x+1$ و $y'=2x+2$

(۴) $x>1 \Longrightarrow y=x^2+4x-1$ و $y'=2x+4$

برای حالتهای (۱) و (۳) جدول تغییرات چنین است :

x	$-\infty$		-3		-1		0		1	
y'		$-$						$+$		
y	$+\infty$	↘	۴					۱ ↗	۴	

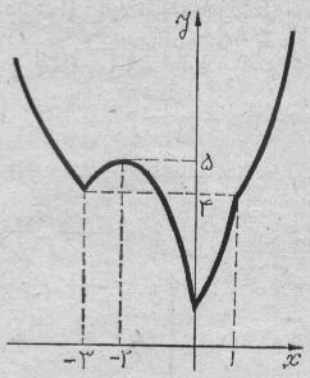
در مورد حالت (۲) داریم :

x		-3		-2		0
y'			$+$	0	$-$	
y			۴ ↗	۵	↘ ۱	

برای حالت (۴) داریم :

x		-2		1		$+\infty$
y'				$+$		
y				۴	↗	$+\infty$

با توجه به جدولهای بالا نمایش هندسی تابع مفروض مطابق با شکل ۸ بدست می‌آید که از چهار قطعه منحنیهای به‌معادله‌های مختلف تشکیل شده دارای یك نقطهٔ ماکسیمم دو نقطهٔ می‌نیمم و یك نقطهٔ شکست است .



شکل ۸

III- تابعهای شامل قدر مطلق وعبارتهای بدون قدرمطلق

برای رسم تابعهایی به‌صورت:

$$y = |f(x)| + g(x)$$

$$y = |f(x)| + |g(x)| + \dots + p(x)$$

$$y = \frac{|f(x)|}{g(x)}$$

و از این قبیل مانند حالت II عمل می‌کنیم .

مثال ۸- رسم منحنی تابع :

$$y = x^2 + |2x - 8|$$

عبارت $2x - 3$ در ازاء $x = 4$ تغییر علامت می‌دهدو داریم:

$$x < 4 \Longrightarrow 2x - 8 < 0$$

$$x > 4 \Longrightarrow 2x - 8 > 0$$

و نتیجه خواهد شد :

$$(1) \quad x < 4 \Longrightarrow y = x^2 - 2x + 8$$

$$y' = 2x - 2$$

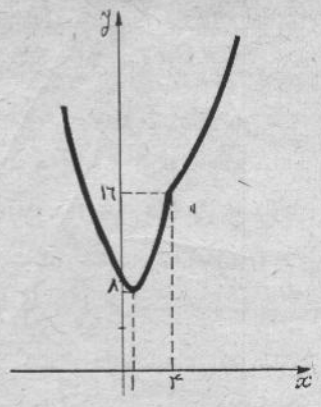
x	$-\infty$		۰		۱		۴	
y'		−			۰	+		
y	$+\infty$	↘	۸	↘	۷	↗	۱۶	

$$(2) \quad x > 4 \Longrightarrow y = x^2 + 2x - 8$$

$$y' = 2x + 2$$

x	۴		$+\infty$
y'		+	
y	۱۶	↗	$+\infty$

با توجه به جدولهای بالا منحنی نمایش تابع مفروض مطابق باشکل ۹ است که ازدو نیم‌منحنی با معادله‌های مختلف تشکیل شده است . منحنی دارای یك نقطهٔ می‌نیمم ویك نقطهٔ شکست است .



شکل ۹

مثال ۹- رسم منحنی تابع :

$$y = \frac{x+1}{|x-1|}$$

با توجه‌به‌علامت عبارت $x - 1$ خواهیم داشت :

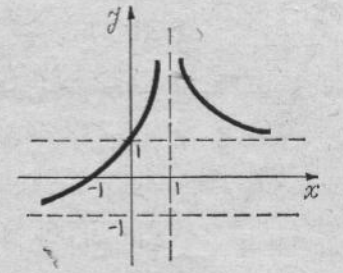
$$(1) \quad x < 1 \Longrightarrow y = \frac{x+1}{-x+1} \text{ و } y' = \frac{2}{(-x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		۰		۱
y'			+				
y	-1	↗	↗	۰	↗	۱	↗ $+\infty$

$$(2) \quad x > 1 \Longrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \text{ و } y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

x	۱		$+\infty$
y'		−	
y	$+\infty$	↘	۱

از جدولهای بالا نتیجه خواهد شد که منحنی نمایش تابع مفروض مطابق باشکل ۱۰ است. این منحنی دارای یك مجانب قائم ودومجانب افقی است .



شکل ۱۰

IV- قدرمطلق شامل دومتغیر است

می‌دانیم که‌یك نامعادلهٔ شامل دو مجهول x و y معرف

ناحیه یا ناحیه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات است . اگر معادلهٔ تابعی شامل اجزایی به صورت $|f(x \text{ و } y)|$ باشد ، قبلا نمایش هندسی $f(x \text{و} y)$ را رسم کرده و معلوم می‌کنیم به‌ازاء مختصات هر ناحیه از صفحه‌که توسط این نمایش هندسی پدید می‌آید $f(x \text{و} y)$ چه علامتی را دارد . در ناحیه‌ای که عبارت مزبور مثبت باشد داریم $|f(x \text{و} y)| = f(x \text{و} y)$ ونمایش هندسی تابعی‌را که با فرض‌اخیر بدست می‌آید فقط در ناحیهٔ مزبور رسم می‌کنیم . در ناحیه‌ای که عبارت $f(x \text{و} y)$ منفی باشد در تابع مفروض به‌جای $|f(x \text{ و } y)|$ قرار می‌دهیم : $-f(x \text{ و } y)$ و نمایش‌هندسی تابعی راکه بدست می‌آید در ناحیهٔ مزبوررسم می‌کنیم .

مثال ۱۰ ـ مطلوبست رسم‌نمایش هندسی تابع :

$$|x+y-۴| + x - ۲ = ۰$$

در صورتی‌که $x+y-۴ \geqslant ۰$ باشد داریم :

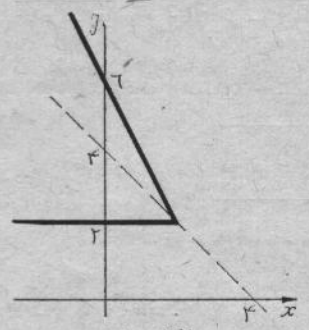
$$x+y-۴+x-۲=۰ \quad \text{یا} \quad y+۲x-۶=۰$$

درصورتی‌که $x+y-۴ < ۰$ باشد داریم :

$$-(x+y-۴)+x-۲=۰ \quad \text{یا} \quad y-۲=۰$$

بنابراین تابع مفروض به دو تابع زیر تجزیه می‌شود :

$$(۱) \begin{cases} y+۲x-۶=۰ \\ x+y-۴ \geqslant ۰ \end{cases} \qquad (۲) \begin{cases} y-۲=۰ \\ x+y-۴<۰ \end{cases}$$



شکل ۱۱

برای‌رسم‌نمایش‌هندسی تابع مفروض ابتدا خط △ به معادلهٔ $x+y-۴=۰$ را رسم می‌کنیم وعلامت مربوط به هر یك از ناحیه‌های آنرا تعیین می‌کنیم . ناحیه‌ای که شامل مبدأ مختصات‌است منفی و ناحیهٔ‌دیگر مثبت است .

نمایش‌هندسی‌تابع $y+۲x-۶=۰$ خطی است‌مستقیم اما فقط قسمتی از این خط را رسم می‌کنیم که در ناحیهٔ مثبت خط △ واقع است (نیم خط Au از شکل ۱۱).

نمایش هندسی تابع $y-۲=۰$ نیز خطی است مستقیم که‌فقط قسمتی ازآن‌که در ناحیهٔ منفی خط △ واقع است‌رسم می‌شود (نیم خط Av)

خط شکستهٔ uAv نمایش هندسی تابع مفروض می‌باشد که در شکل ۱۱ سیاهتر از خطوط دیگر مشخص شده است .

مثال ۱۱ـ رسم نمایش هندسی تابع :

$$y-۳x^۲+۶x|+|۲y-۳x+۶=۶$$

بعد ازبرداشتن قدرمطلقها در حالات مختلف و اختصار تابع بالا به چهار دستگاه زیر تبدیل می‌شود :

$$(۱) \begin{cases} y-۳x^۲+۶x \geqslant ۰ \\ ۲y-۳x+۶ \geqslant ۰ \\ y=x^۲-x \end{cases} \qquad (۲) \begin{cases} y-۳x^۲+۶x<۰ \\ ۲y-۳x+۶ \geqslant ۰ \\ y=-۳x^۲+۹x \end{cases}$$

$$(۳) \begin{cases} y-۳x^۲+۶x<۰ \\ ۲y-۳x+۶<۰ \\ y=x^۲-x-۴ \end{cases}$$

$$(۴) \begin{cases} y-۳x^۲+۶x \geqslant ۰ \\ ۲y-۳x+۶<۰ \\ y=-۳x^۲+۹x-۱۲ \end{cases}$$

برای رسم نمایش هندسی تابع مفروض ابتدا نمایش هندسی هر یك از تابعهای :

$$y-۳x^۲+۶x=۰$$

$$۲y-۳x+۶=۰$$

رارسم‌کرده علامت‌ناحیه‌های مربوط به‌هریك را تعیین‌می‌کنیم.

در مورد تابع اول داریم :

$$y=۳x^۲-۶x \quad \text{و} \quad y'=۶x-۶$$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y′		−	۰			+			
y	$+\infty$	↘	۰	↘	−۳	↗	۰	↗	$+\infty$

منحنی نمایش این تابع یك سهمی است‌که آنرا C می‌نامیم.

درمورد تابع دوم داریم :

$$(x=۰ \text{ و } y=-۳) \text{ و } (x=۲ \text{ و } y=۰)$$

نمایش هندسی این تابع خط مستقیم △ است .

منحنی C و خط △ در شکل ۱۲ به‌صورت نقطه چین رسم شده وعلامت ناحیه‌های مربوط به‌آنها با علامتهای + و − مشخص شده است .

نمایش هندسی دستگاه (۱) قسمتی از منحنی تابع $y=x^۲-x$ است‌که در ناحیهٔ مثبت از منحنی (C) وهمچنین

در ناحیهٔ مثبت از خط $\triangle$ واقع است . در مورد تابع اخیر داریم:

$$y' = 2x - 1$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$				
y		0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{15}{4}$	

نقاط $(0,0)$ و $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$ نقاط تلاقی منحنی این تابع با منحنی C می‌باشد .

برای دستگاه (۲) داریم :

$$\begin{cases} y - 3x^2 + 6x = 0 \\ y = -3x^2 + 9x \end{cases} \Longrightarrow$$

$$(x = 0 \text{ و } y = 0) \text{ یا } \left(x = \frac{5}{2} \text{ و } y = \frac{15}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 2y - 3x + 6 = 0 \\ y = -3x^2 + 9x \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{4} \text{ و } y = \frac{-9 \pm 3\sqrt{41}}{8}$$

$$y = -3x^2 + 9x \text{ و } y' = -6x + 9$$

با توجه به اینکه قسمتی از این منحنی باید رسم شودکه در ناحیهٔ منفی از سهمی C و در ناحیهٔ مثبت از خط $\triangle$ واقع است داریم :

x	$-\infty$	$\frac{5-\sqrt{41}}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5+\sqrt{41}}{4}$	$+\infty$
y'		$+$		0	$-$		
y		$\nearrow$	0		$\frac{15}{4}$	$\searrow$	
		$\frac{-9-3\sqrt{41}}{8}$				$\frac{-9+3\sqrt{41}}{8}$	

برای دستگاه (۳) داریم :

$$\begin{cases} y - 3x^2 + 6x = 0 \\ y = x^2 - x - 4 \end{cases}$$ جواب ندارد

$$\begin{cases} 2y - 3x + 6 = 0 \\ y = x^2 - x - 4 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{4} \text{ و } y = \frac{-9 \pm 3\sqrt{41}}{8}$$

$$y = x^2 - x - 4 \text{ و } y' = 2x - 1$$

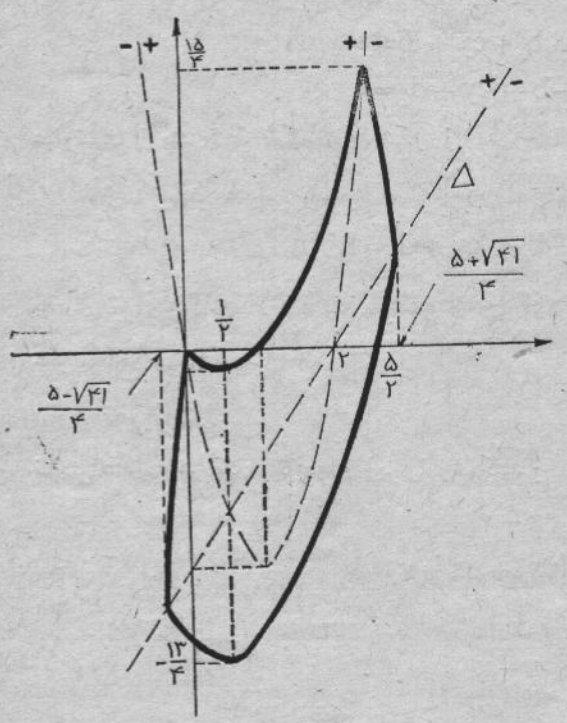
x	$-\infty$	$\frac{5-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5+\sqrt{41}}{4}$	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$		
y		$\frac{-9-3\sqrt{41}}{8}$	$\searrow$	$-\frac{13}{4}$	$\nearrow$	$\frac{-9+3\sqrt{41}}{8}$	

برای دستگاه (۴) داریم :

$$\begin{cases} y - 3x^2 + 6x = 0 \\ y = -3x^2 + 9x - 12 \end{cases}$$ جواب ندارد

$$\begin{cases} 2y - 3x + 6 = 0 \\ y = -3x^2 + 9x - 12 \end{cases}$$ جواب ندارد

اگر منحنی تابع $y = -3x^2 + 9x - 12$ رسم شود تمام آن در ناحیهٔ منفی از سهمی C و در ناحیهٔ منفی از خط $\triangle$ واقع می‌شود . اما چون قسمتی از این منحنی باید رسم شودکه در ناحیهٔ مثبت از سهمی C واقع باشد پس هیچ جزئی از منحنی نمایش تابع اخیر نباید رسم شود .



شکل ۱۲

نمایش هندسی تابع مفروض مطابق با شکل ۱۲ ازچهار قطعه سهمی تشکیل شده است .

یاد آوری ـ از خواننده دعوت می‌شود که مقالهٔ «نمایش هندسی تابع قدر مطلق» مندرج در یکان شمارهٔ ۵۰ ، مقالهٔ «معادلهٔ متوازی‌الاضلاع» مندرج در یکان شمارهٔ ۵۱ ، مقالهٔ «معادلهٔ چهار ضلعی» مندرج دریکان شمارهٔ ۵۲ رامطالعه فرمایید . دراین مقاله‌ها ثابت شده است که :

۱ـ نمایش هندسی تابع به‌شکل :

$$|ax+by+c|+|a'x+b'y+c'|+$$
$$+a''x+b''y+c''=0$$

درحالت کلی یك **چهارضلعی** است .

۲ـ نمایش هندسی تابع به‌شکل

$$|ax+by+c|+|a'x+b'y+c'|=k^2$$

الفـ درحالت کلی یك **متوازی‌الاضلاع** است.

ب ـ با شرط $aa'+bb'=0$ یك‌لوزی است .

ج ـ با شرط زیر یك **مستطیل** است :

$$\alpha^2-a'^2=b'^2-b^2$$

د ـ با وجود شرطهای زیر یك **مربع** است :

$(a'=b$ و $b'=-a)$ یا $(a'=-b$ و $b'=a)$

هـ نمایش هندسی تابعهای به‌صورت:

$$|ax+b|+cy+d=0$$
$$ax+b+|cy+d|=0$$

عبارتست از یك **خط شکسته** به شکل زاویه

و ـ نمایش هندسی تابع

$$|ax+b|\pm|cy+d|=k^2$$

یا یك **متوازی‌الاضلاع** و یا **مجموعه‌ای ازدو زاویه** غیر متقاطع می‌باشد .

تمرینات

نمایش هندسی هر یك از تابعهای زیر را رسم کنید :

$$y=|3x-4|+2$$
$$y=|2x^2+5x-7|$$
$$y=\left|\frac{x}{1-x}\right|$$
$$y=|x-2|+|5-x|+|2x+7|$$
$$y=|5x-2|-|2x-5|$$
$$y=|x+1|+|x^2-1|+|x-1|$$
$$y=\frac{|x-1|+x}{x+2}$$
$$|x|+|y|=4$$
$$5|x|-3|y|=4$$
$$|3x-4y+12|+|4x+3y-12|=1$$
$$3x-2y+|x+y+1|=0$$
$$|y+x^2|-|y-2x^2+4|=4$$

حالت کلی... (بقیه از صفحهٔ ۲۹۳)

(۴) $m_a.MA+m_b.MB+m_c.Mc>(\Sigma m_a^2bc\cos A+6S^2)^{\frac{1}{2}}$

(۵) $\Sigma\cos\frac{A}{2}.MA>P$

(۶) $\Sigma\sin 2A.MA>\frac{8S^2}{abc}$

۳ـ تصاویر نقطهٔ غیر مشخص M را روی BCوAC و AB اضلاع‌مثلث ABC به‌ترتیب A' و B' و C' می‌نامیم. نامساویهای زیر را ثابت نمائید :

(۱) $B'C'+A'B'+A'C'>\frac{8S^2}{abc}$

(M داخل مثلث است)

(۲) $\frac{MA}{h_a}+\frac{MB}{h_c}+\frac{MC}{h_b}>\frac{1}{h_a}(b^2+c^2+2bc\cos A)^{\frac{1}{2}}$

(۳) $\Sigma\frac{MA\sin A}{\sin\frac{A}{2}}=\Sigma\frac{B'C'}{\sin\frac{A}{2}}>2P$

(۴) $\Sigma\cos A.B'C'>\frac{4S^2}{abc}$

(۵) $\Sigma\frac{B'C'}{h_a\sin A}>2$

اشتباههایی که در اوراق کنکور مشاهده شده است

ترجمهٔ از روسی توسط : **فتح‌الله زرگری**

*** دنباله ازشمارهٔ قبل ***

قسمت عمدهٔ اشتباهها درعملیات لگاریتمی بوده‌است. مثلا:

۱) ازمعادلهٔ

$$\log_4 4 + \frac{\log_4(10-x)}{\log_4 x} = \frac{2\log_4 4}{\log_4 x}$$

رابطهٔ زیر را بدست آورده‌اند :

$$4[(10-x)-x] = 16-x$$

دراینجا خارج‌قسمت لگاریتمها با تفاضل آنها اشتباه‌شده‌است.

۲) معادلهٔ $\log_3 x . \log_3(3x) = \log_3(81x)$

به صورت‌زیر حل‌شده است :

$$\log_3(3x^2) = \log_3(81x)$$

$$3x^2 = 81x \longrightarrow x = 27$$

درحل معادله دواشتباه بزرگ شده است .

اولا: حاصل ضرب لگاریتمها با حاصل‌ضرب اعداد آنها اشتباه شده ودرثانی درحل معادلهٔ $3x^2 = 81x$ جواب $x = 0$ فراموش شده‌است. درست است‌که $x = 0$ جواب معادلهٔ اصلی نیست اما متأسفانه دانشجویان به‌این موضوع توجه ندارند. حل معادلهٔ فوق باید به‌صورت زیرباشد : حوزهٔ مقادیر قابل قبول مجهول $x > 0$ است .

$$\log_3 x(\log_3 3 + \log_3 x) = \log_3 81 + \log_3 x$$

$$\log_3 x(1 + \log_3 x) = \log_3 3^4 + \log_3 x$$

$$\log_3 x + \log_3^2 x = 4\log_3 3 + \log_3 x$$

$$\log_3^2 x = 4 \quad \text{و} \quad \log_3 x = \pm 2$$

$$x_1 = 3^2 = 9 \quad \text{و} \quad x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

۳) معادلهٔ :

$$\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$$

به صورت زیر نوشته شده است :

$$2 + 4^{x-2} + 9 = 10 + 2^{x-2} + 1$$

در این مورداعداد به جای لگاریتم‌آنها قرار گرفته و معلوم است‌که اشتباه بزرگی است .

معادلهٔ مزبور به‌صورت زیر حل می‌شود :

$$\log[2(4^{x-2} + 9)] = \log[10(2^{x-2} + 1)]$$

$$2(4^{x-2} + 9) = 10(2^{x-2} + 1)$$

۴) حل معادلهٔ $4^x - 5^x = 0$ به صورت زیر انجام گرفته است .

$$\log(4^x - 5^x) = 0 \quad \text{و} \quad x\log 4 - x\log 5 = 0$$

$$x(\log 4 - \log 5) = 0$$

$$x = 0$$

جواب درست بدست‌آمده است اما راه‌حل غلط است .

« می‌توان این سؤال راکردکه چرا درصورتی‌که راه حل غلط است جواب درست درآمده است؟ »

درحل مسئله دواشتباه مهم شده است. اول‌اینکه‌با گرفتن لگاریتم‌ازطرفین‌رابطهٔ $4^x - 5^x = 0$، $\log 0$ مساوی‌صفر گرفته شده درصورتی‌که وجودندارد. درثانی‌درموردلگاریتم $4^x - 5^x$ مانند لگاریتم حاصل‌ضرب بازشده است و صحیح نیست. یك اشتباه،اشتباهِ دیگر را خنثی‌کرده ودرنتیجه‌جواب‌درست‌درآمده است. حالا راه حل صحیح را درزیر می‌بینیم :

$$4^x = 5^x \Longrightarrow \frac{4^x}{5^x} = 1$$

تقسیم معادله به 5^x ممکن است زیرا بـه ازاء جمیع مقادیر x داریم $x^5 \neq 0$

بنابراین :

$$\left(\frac{۴}{۵}\right)^x = ۱ \Longrightarrow \left(\frac{۴}{۵}\right)^x = \left(\frac{۴}{۵}\right)^۰ \Longrightarrow x = ۰$$

معادله را ممکن بود با استفاده ازلگاریتم حل کنیم.در این‌صورت خواهیم داشت :

$$۴^x = ۵^x$$

$$x\log ۴ = x\log ۵ \Longrightarrow x(\log ۴ - \log ۵) = ۰$$

$$\Longrightarrow x = ۰$$

* * *

اغلب درامتحانات ورودی عملیات پیچیده‌ای ازلگاریتم درمبناهای مختلف پیش می‌آیدکه یادانش‌آموزان نمی‌دانند ویا نمی‌توانند ازروابط زیرکه مربوط‌به‌تغییرمبنا است استفاده‌کنند.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \qquad (۱)$$

که در آن :

$$b \neq ۱ \text{ و } a \neq ۱ \text{ و } N > ۰ \text{ و } b > ۰ \text{ و } a > ۰$$

$$\log_a b = \frac{۱}{\log_b a} \qquad (۲)$$

رابطهٔ (۲) حالت خاصی از رابطهٔ (۱) است. شرکت‌کنندگانی‌که با این‌روابط آشنائی نداشته‌اند اشتباههای بزرگی کرده‌اند.درزیر بعضی ازآنهارا می‌توانید مشاهده‌کنید .

مثال۱) معادلهٔ زیر را حل‌کنید .

$$\log_۲ ۵ \log_۵ x \log_۳ x - (۲ - \log_۵ ۲)\log_۲ x \log_۲ ۵ = ۰$$

حل: خوزهٔمقادیر قابل قبول‌برای‌مجهول $x > ۰$ است.

با استفاده ازرابطهٔ (۱) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_۲ ۵ . \frac{\log_۲ x}{\log_۲ ۵} \cdot \frac{\log_۲ x}{\log_۲ ۳} -$$

$$-\left(۲ - \frac{\log_۲ ۲}{\log_۲ ۵}\right)\log_۲ x . \frac{\log_۲ ۵}{\log_۲ ۳} = ۰$$

پس از ساده‌کردن خواهیم داشت :

$$\log_۲^۲ x + \log_۲ x(۱ - ۲\log_۲ ۵) = ۰$$

$$\log_۲ x(\log_۲ x + ۱ - ۲\log_۲ ۵) = ۰ \Longrightarrow$$

$$\log_۲ x = ۰ \Longrightarrow x_۱ = ۲^۰ = ۱$$

$$\log_۲ x + ۱ - ۲\log_۲ ۵ = ۰$$

$$\log_۲ x = \log_۲ ۲۵ - \log_۲ ۲ = \log_۲ \frac{۲۵}{۲} \Longrightarrow x_۲ = ۱۲/۵$$

مثال ۲) معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$(\log_x ۵ + ۲)\log_۵^۲ x = ۱$$

حل : حوزهٔ قابل قبول برای مجهول $x > ۰ (x \neq ۱)$ است.

با استفاده از رابطهٔ (۲) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\log_x ۵ + ۲) \times \frac{۱}{\log_۵^۲ x} = ۱ \Longrightarrow \log_x ۵ + ۲ = \log_x^۲ ۵$$

$$\log_x^۲ ۵ - \log_x ۵ - ۲ = ۰$$

$$\log_x ۵ = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \text{ و } (\log_x ۵)_I = ۲ \text{ و } (\log_x ۵)_{II} = -۱$$

خواهیم داشت :

$$I)\ x^۲ = ۵ \Longrightarrow x_۱ = \sqrt{۵}$$

(بادرنظر گرفتن حوزهٔ قابل قبول برای x مقدار مثبت راگرفته و از منفی‌آن صرف‌نظرمی‌کنیم).

$$II)\ x^{-۱} = ۵ \Longrightarrow x_۲ = \frac{۱}{۵}$$

می‌بینیم‌که هر دو جواب درمعادلهٔ اصلی صدق می‌کنند پس :

$$\text{جواب} \equiv x_۱ = \sqrt{۵} \text{ و } x_۲ = \frac{۱}{۵}$$

درحل معادلات لگاریتمی اغلب پیش می‌آیدکه از فرمول زیر استفاده کنیم :

$$\log_a N = \log_{a^m} N^m \qquad (۳)$$

مثال ۳) معادلهٔ زیر راحل‌کنید :

$$\log_{۸۱} x - ۲\log_۳ x + ۵\log_۹ x = ۱/۵$$

حل : حوزهٔ قابل قبول برای مجهول $x > ۰$ است .با استفاده از فرمول (۳) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\log_{۸۱} x - ۲\log_{۸۱} x^۴ + ۵\log_{۸۱} x^۲ = ۱/۵$$

$$\log_{۸۱} x - ۸\log_{۸۱} x + ۱۰\log_{۸۱} x = ۱/۵ \Longrightarrow$$

$$۳\log_{۸۱} x = \frac{۳}{۲} \text{ و } \log_{۸۱} x = \frac{۱}{۲}$$

جواب : $x = ۹$

اغلب دیده شده است که درحل معادلات لگاریتمی که دارای مبناهای مختلف هستند با تمام سادگی مسئله،دانش آموزان لگاریتمهارابه یك مبنا تبدیل کرده‌و بعدراآن‌حل‌کرده‌اند.مثلا تعدادزیادی از شرکت‌کنندگان این عمل را در مورد دستگاه زیر انجام داده بودند :

$$\begin{cases} \log_۲(xy) = ۵ \\ \log_{\frac{۱}{۲}} \frac{x}{y} = ۱ \end{cases}$$

در این مثال مثلالازم نیست لگاریتمها را به یك مبنا بدل‌کرد. در این مورد به ترتیب زیر عمل‌می‌کنیم .

از معادلهٔ دوم داریم :

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\Longrightarrow y=2x$$

با قرار دادن در رابطهٔ اول خواهیم داشت :

$$\log_2 2x^2=5\Longrightarrow 2x^2=2^5\Longrightarrow x^2=16$$

$$x=\pm 4 \quad و \quad y=\pm 8$$

باکمی دقت جوابهای مشترك را بدست می‌آوریم :

جوابها = (۴و۸) و (۸ و ۴ −)

* * *

معادلات ودستگاه معادلات اغلب باروشهای غیرمعقول حل می‌شوند :

مثال ۱) برای حل دستگاه معادلات زیر :

$$\begin{cases} x^y=9 \\ \sqrt[y]{324}=2x^2 \end{cases}$$

شرکت‌کنندگان روش زیر را بکاربرده‌اند :

$$\begin{cases} x^y=9 \\ 324^{\frac{1}{y}}=2x^2 \end{cases}$$

سپس از طرفین لگاریتم گرفته بودند :

$$\begin{cases} y\log x=\log 9 \\ \frac{1}{y}\log 324=\log 2+2\log x \end{cases}$$

از معادلهٔ اولی $y=\frac{\log 9}{\log x}$ را بدست آورده و در معادلهٔ دوم قرار داده و رابطهٔ زیر بدست‌آمده بود:

$$\frac{\log x\log 324}{\log 9}=\log 2+2\log x$$

$$\frac{\log x\log(2\times 9)^2}{\log 3^2}=\log 2+2\log x$$

$$\frac{\log x.2(\log 2+2\log 3)}{2\log 3}=\log 2+2\log x\Longrightarrow$$

$$\log x(\log 2+2\log 3)-2\log 3\log x=\log 2\log 3$$

$$(\log 2+2\log 3-2\log 3)\log x=\log 2\log 3$$

$$\log 2\log x=\log 2\log 3 \quad و \quad \log x=\log 3\Longrightarrow x=3$$

و از آنجا پیداکرده بودندکه :

$$y=\frac{\log 9}{\log 3}=\frac{\log 3^2}{\log 3}=\frac{2\log 3}{\log 3}=2$$

جواب : $x=3$ و $y=2$

بهتراست دستگاه معادله را به صورت زیر حل‌کنیم :

باید $\frac{y}{x}>0$ $(x\neq 1)$ و $y\neq 0$ عدد دلخواه حقیقی‌می‌تواند باشد.معادلهٔ دوم دستگاه را به‌صورت زیرمی‌نویسیم :

$$(2x^2)y=324$$

به‌جای $x^y=9$ قرار می‌دهیم،خواهیم داشت :

$$2^y\times(x^y)^2=324$$

$$2^y\times 9^2=324\Longrightarrow 2^y=4=2^2\Longrightarrow y=2$$

با قرار دادن در معادلهٔ اول بدست می‌آوریم :

$$x^2=9\Longrightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

جواب $x=-3$ قابل قبول نیست .

بنابراین $x=3$ و $y=2$ است .

خواننده می‌تواند قضاوت‌کندکه راه دوم خیلی‌باصرفه‌تر است .

۲) دستگاه : $\begin{cases} 3^{x-y-1}=1 \\ 9^{x+y}=729 \end{cases}$ با لگاریتم گرفتن از طرفین معادلات حل شده بود :

$$\begin{cases} (x-y-1)\log 3=\log 1 \\ x+y\log 9=\log 729 \end{cases}$$

البته این دستگاه را بایدبا دو لگاریتم گیری از طرفین حل‌کنیم . دستگاه را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\begin{cases} 3^{x-y-1}=3^0 \\ 9^{x+y}=9^3 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y=3 \end{cases}\Longrightarrow\left|\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right.$$

* * *

چنانکه تجربهٔ درامتحانات‌ورودی نشان‌می‌دهد،دانشجویان ازلحاظ امتحان‌کردن جواب معادلات‌به دودسته‌تقسیم‌می‌شوند. عده‌ای‌که اصلا امتحان‌کردن جوابها را لازم نمی‌دانند و عدهٔ دیگر آنرا لازم دانسته وهمیشه جوابها را در معادلهٔ اصلی گذاشته وامتحان‌می‌کنند. درحقیقت باید گفت‌که امتحان‌جوابها دربعضی مواقع ضروری ودربعضی مواقع اصلا لزوم ندارد.

امتحان‌کردن جوابها اکثراً برای جدا کردن ریشه‌های

غیرقابل قبول انجام می‌شود . این ریشه‌های غیر قابل قبول اغلب درنتیجهٔ دگرگونیهای زیر بوجود می‌آیند .

a) دراثر ضرب‌کردن صورتهای چندکسر (دریك‌معادله) درمخرج مشترك این‌کسرها که دارای مجهول باشد . مثلا با ضرب عناصرمعادلهٔ :

$$\frac{x-5}{x-1}+\frac{5+3x}{x^2-1}=0$$

در (x^2-1) جواب غیرقابل قبول $x=1$ حاصل می‌شود .

b) ساده‌کردن صورت و مخرج‌کسربه عاملی‌که دارای مجهول باشد نیز باعث بوجود آمدن جوابهای غیر قابل‌قبول می‌شود . مثلا با ساده‌کردن‌کسر $\frac{x^2-81}{x-9}$ در معادلهٔ

$\frac{x^2-81}{x-9}-2x=0$ به $(x-9)$ جواب غیر قابل قبول $x=9$ پدید می‌آید .

c) با حذف عناصر مساوی‌که دارای مجهول باشد. (در مخرج ، زیر رادیکال ، زیرلگاریتم) .مثالها :

۱) در معادلهٔ: $4x^2-\frac{2}{3x^2}-x^3+\frac{2}{3x^2}=0$ جملات دوم و چهارم را اگر حذف‌کنیم خواهیم داشت :

$$4x^2-x^3=0 \Longrightarrow x_1=x_2=0 \quad و \quad x_3=4$$

ریشه‌های $x_1=x_2=0$ غیر قابل قبولند .

۲) با حذف جملات دوم و چهارم درمعادلهٔ زیرخواهیم داشت :

$$x+3\sqrt{x+2}+5-3\sqrt{x+2}=0$$

$$x+5=0 \Longrightarrow x=-5$$

می‌بینیم‌که ریشهٔ $x=-5$ غیر قابل قبول است .

۳) با حذف جملات دوم و پنجم در معادلهٔ

$$x^2+\frac{1}{4}\log x+x-6-\frac{1}{4}\log x=0$$

خواهیم داشت :

$$x^2+x-6=0 \Longrightarrow x_1=-3 \text{ و } x_2=2$$

ریشهٔ $x_1=-3$ غیر قابل قبول است .

d) به توان زوج رساندن طرفین معادله . مثلا با مجذورکردن‌طرفین معادلهٔ $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$ ریشهٔ غیر قابل قبول $x=165$ بدست می‌آید .

e) جمع‌کردن لگاریتمها . مثلا در معادلهٔ :

$\log(x+1)+\log(x-1)=0$ اگراز قانون جمع‌لگاریتمها استفاده‌کنیم‌خواهیم داشت :

$$\log(x^2-1)=0 \Longrightarrow x^2-1=1 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

با امتحان جوابها متوجه می‌شویم‌که جواب $x=-\sqrt{2}$ غیرقابل قبول است .

دراثر هریك از دگرگونیهای فوق ممکن است حوزهٔ مقادیر قابل قبول برای مجهول گسترش یابدکه درنتیجه باعث بوجودآمدن جوابهای غیرقابل قبول شود .

بعضی‌مواقع‌پیش‌می‌آیدکه‌امتحان‌کردن‌جواب‌غیرقابل‌قبول یعنی قراردادن آن‌درمعادله مستلزم انجام عملیات بسیارمشکل وبعضی مواقع غیرممکن است. دراین‌صورت نگاه می‌کنیم‌ببینیم آیا این‌جواب درحوزهٔ قابل‌قبول برای مجهول هست‌یانه‌ودر صورت‌نبودن دراین‌حوز ه آنرانادیده می‌گیریم وبدون امتحان کردن آن،آنراکنار می‌گذاریم .

متأسفانه بیشتر دانش‌آموزان به‌این موضوع‌توجه‌ندارند واغلب‌حوزهٔ مقادیرقابل‌قبول برای‌مجهول‌را مشخص‌نمی‌کنند. بد ترازهمه متوجه نمی‌شوندکه ریشهٔ بدست‌آمده درمعادله صدق نمی‌کند .

لازم است‌بدانیم‌که اگرناحیهٔ مقادیرقابل قبول برای مجهول تعیین شد وریشه‌های بدست‌آمده دراین ناحیه بودند لازم نیست آنها را درمعادلهٔ اصلی‌گذاشته امتحان کنیم.

اگر دراثردگرگونیهائی‌درمعادله، حوزهٔ قابل‌قبول‌برای مجهول تغییری نکرد اما تساوی دراثر آن یا عامل دیگری بهم خورد دراین‌صورت درموقع حل ممکن‌است جواب غیر قابل قبول ظاهر شود و یا برعکس ممکن است ریشه‌هایی حذف شوند .

مثال : معادلهٔ $\log^2 x-\log x=0$ (۱) را در نظر می‌گیریم .

حوزهٔ مقادیرقابل‌قبول برای مجهول $x>0$ است. پس از ساده‌کردن معادله خواهیم داشت :

$$\log x-1=0 \qquad (2)$$

$$\log x=1 \Longrightarrow x=10$$

درموقع رسیدن ازمعادلهٔ (۱) به معادلهٔ (۲) ریشهٔ $x=1$ حذف شده است درصورتی‌که حوزهٔ قابل قبول تغییری نکرده وهمان حوزهٔ قبلی باقی مانده‌است .

اگرتمام‌عناصر معادلهٔ (۲) را در $\log x$ ضرب‌کنیم‌معادلهٔ (۱) بدست می‌آید .

(دنباله در صفحهٔ ۳۱۲)

چگونه می‌توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

تألیف : René Boirel

دنباله از شمارهٔ قبل

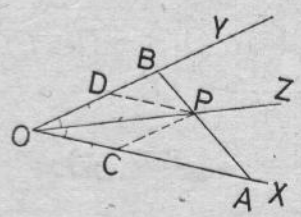
مسئله

زاویهٔ XOY مفروض‌است. نقطهٔ A خط OX ونقطهٔ B خط OY را چنان می‌پیمایدکه داریم :

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{l}$$

که l طول معلوم می‌باشد. ثابت‌کنیدکه خط AB نیمساززاویهٔ XOY را درنقطهٔ ثابت قطع می‌کند .

راه حل ـ اگر P نقطهٔ تلاقی AB با OZ نیمساز زاویهٔ XOY باشد ، باید ثابت کنیم‌که P نقطهٔ ثابت است. برای این‌کار PC و PD را به ترتیب موازی با OY وOX رسم‌می‌کنیم.



چهارضلعی OCPD لوزی است زیرا ضلعهای آن دو به دو متوازیند وقطر OP ازآن نیمساززاویهٔ O می‌باشد . از طرفی از تشابه مثلثهای APC و ABO داریم :

$$\frac{CP}{OB}=\frac{CA}{OA}$$

$$CA=OA-OC=OA-CP$$

$$\frac{CP}{OB}=\frac{OA-CP}{OA}=1-\frac{CP}{OA}$$

$$\frac{CP}{OA}+\frac{CP}{OB}=1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{CP}$$

با مقایسهٔ این رابطه با فرض نتیجه می‌شود که $CP=l$ یعنی نقطهٔ P ثابت است .

روش‌منطقی ـ بایدثابت‌کنیم‌که P نقطهٔ ثابت است. برای این کارکافی است‌که ثابت‌کنیم طول OP یا اینکه‌فاصلهٔ P از هریك از ضلعهای زاویهٔ XOY مقدار ثابت است . اما فعلا باید معلوم‌کنیم‌که این موضوع را چگونه با فرض مسئله مربوط‌کنیم .

اما چون طولهای OA و OB در رابطه‌ی مفروض صدق می‌کنند ، پس بایدراهی‌بیابیم تادر رابطهٔ داده‌شده طولی شامل P دخالت داده شود . از اینجا این فکر بوجود می‌آید که متوازی‌الاضلاع OCPD را بسازیم ودرنتیجه طبق قضیهٔ تالس خواهیم داشت :

$$\frac{CP}{OB}=\frac{CA}{OA}$$

از طرف‌دیگر ازروی متوازی‌الاضلاع مزبور معلوم می‌شودکه اگرطول OP ثابت‌باشدطولهای $OC=CP$ نیز ثابت‌خواهند بود . پس رابطهٔ بالا را باید بقسمی‌تبدیل‌کنیم‌که درآن‌طولهای OC و CP وجود داشته باشند ، یعنی طولهای موجود در رابطه را برحسب OC و CP بنویسیم :

$$CA=OA-OC=OA-CP$$

$$\frac{CP}{OB}=\frac{CA}{OA}=\frac{OA-CP}{OA}$$

و چون بنابه فرض داریم $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{l}$ پس رابطهٔ اخیر را چنین می‌نویسیم :

$$\frac{CP}{OB}=1-\frac{CP}{OA} \quad \text{یا} \quad \frac{CP}{OA}+\frac{CP}{OB}=1$$

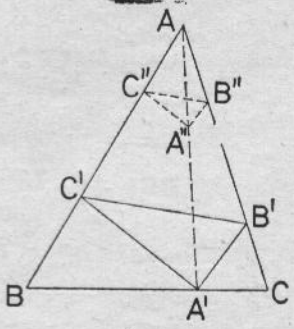
$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{CP}$$

با بدست‌آمدن‌این رابطه وبا مقایسهٔ‌آن با رابطهٔ مفروض‌نتیجه می‌شودکه $CP=1$ یعنی نقطهٔ P ثابت است .

مسئله

در مثلث ABC مثلثی چنان محاط‌کنیدکه هرضلع آن‌در امتداد معین باشد .

راه حل- فرض می‌کنیم مسئله حل شده و $A'B'C'$ مثلث مطلوب باشد ، خط $B''C''$ را موازی با $B'C'$ و محصور بین دو ضلع AB و AC به دلخواه رسم کرده از B'' موازی با $B'A'$ واز C'' موازی‌با



$C'A'$ رسم می‌کنیم تا مثلث $A''B''C''$ بدست آید . در دو مثلث $A'B'C'$ و $A''B''C''$ چون ضلعها نظیربه‌نظیرمتوازیند پس خطوط $A'A''$ و $B'B''$ و $C'C''$ متقاربند یعنی خط AA' از A رأس مثلث مفروض می‌گذرد و راه حل زیرنتیجه می‌شود :

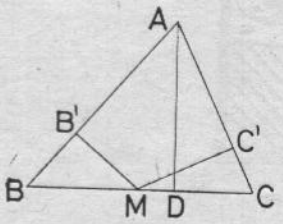
ابتدا $B''C''$ را در امتداد معلوم و محصوربین AB و AC رسم‌می‌کنیم‌وبعد خطوط $B''A''$ و $C''A''$ را درامتداد‌های داده شده رسم می‌کنیم . خط AA'' ضلع BC را در A' قطع‌می‌کندکه یك‌رأس مثلث مطلوب‌است و از روی‌آن‌رأسهای دیگر این مثلث را معین می‌کنیم .

روش منطقی - هرگاه یك رأس یا یك ضلع از مثلث مطلوب تعیین شودتمام‌آن معین‌خواهد شد. همواره می‌توانیم $B''C''$ را چنان رسم‌کنیم که در امتداد معین بوده وبین AB و AC محصور باشد ، اگر از B'' و C'' به ترتیب موازی با امتدادهای داده شده رسم‌کنیم نقطهٔ تلاقی‌آنها معلوم‌نیست که بر BC واقع باشد. هرگاه این مثلث راکه مثلث مطلوب نیست با مثلثی که‌دلخواه ماست مقایسه‌کنیم از اینکه ضلعهای آنها با هم‌موازیند نتیجه‌می‌گیریم‌که خطوط واصل بین‌رأسهای متناظرآنها باید متقارب باشند و AB و AC دو عدد از این خطوط هستندپس خطی‌که از A به A'' وصل کنیم ازرأس A' از مثلث مطلوب می‌گذرد و چون A' باید بر BC واقع باشد پس ازتلاقی AA'' با BC نقطهٔ A' و ازروی‌آن سایررأسهای مثلث مطلوب بدست‌می‌آید .

مسئله

ثابت‌کنیدکه در هرمثلث فواصل وسط هرضلع از دوضلع دیگر معکوسا با این دوضلع متناسب است .

راه حل - در مثلث ABC از M وسط BC عمودهای MB' و MC' را بر ضلعهای AB و AC رسم می‌کنیم. بایدثابت کنیم که :



$$\frac{MB'}{MC'}=\frac{AC}{AB}$$

ارتفاع AD از مثلث را رسم می‌کنیم. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ BMB' و BAD متشابهند و نتیجه می‌شودکه :

$$\frac{MB'}{AD}=\frac{MB}{AB}$$

از تشابه دو مثلث CMC' و CAD نیز نتیجه می‌شود :

$$\frac{MC'}{AD}=\frac{MC}{AC}$$

چون طرفین دو تناسب‌بدست‌آمده را نظیربه‌نظیر بر هم تقسیم کنیم و با توجه به اینکه $MB=MC$ نتیجه می‌شودکه:

$$\frac{MB'}{MC'}=\frac{MB\times AC}{MC\times AB}=\frac{AC}{AB}$$

روش منطقی - باید ثابت‌کنیم‌که :

$$\frac{MB'}{MC'}=\frac{AC}{AB}$$

چون جمله‌های نسبت اول به دو مثلث $BB'M$ و $CC'M$ تعلق دارندکه در ضمن قائم‌الزاویه‌اند ، برای تعیین مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای که‌دو جملهٔ نسبت دوم به‌آنها تعلق داشته‌باشند باید این مثلثها را رسم کنیم که درضمن با مثلثهای فوق‌الذکر متشابه باشند . از اینجا فکر رسم ارتفاع AD پیش می‌آید . بعد ملاحظه‌می‌کنیم‌که دو مثلث ABD و $BB'M$ باهم ودو مثلث ACD و CMC' با هم متشابهند و داریم :

$$\frac{MB'}{AD}=\frac{MB}{AB} \text{ و } \frac{MC'}{AD}=\frac{MC}{AC}$$

ملاحظه می‌کنیم که‌نسبتهای‌اول دوتناسب‌اخیر شامل‌جمله‌های نسبت اول تناسب مطلوب بوده و به علاوه AD مخرج

مشترك آنها است. چنانچه این دونسبت برهم تقسیم شوندنسبت طرف اول تناسب مطلوب حاصل می‌شودو خواهیم داشت:

$$\frac{MB'}{MC'}=\frac{MB\times AC}{MC\times AB}$$

چون M وسط BC است پس $MB=MC$ وتناسب مطلوب محقق می‌شود .

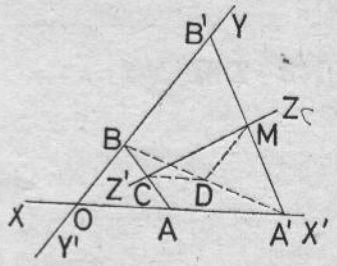
مسئله

دو خط متقاطع XOX' و $YO'Y'$ وروی اولی دونقطهٔ A و A' و روی دومی دو نقطهٔ B و B' مفروض است . نقاط A و B ثابتند، امانقاط A' و B' تغییر می‌کنند بقسمی که همواره در یك طرف خط AB واقع است و داریم :

$$\frac{AA'}{BB'}=\frac{m}{n}=\text{مقدار معلوم}$$

مکان هندسی نقطهٔ M وسط $A'B'$ را پیداکنید .

راه حل ـ اگر C وسط AB و D وسط AB' باشد



چون CD با AA' موازی و با نصف آن مساوی است وهمچنین DM موازی با BB' و مساوی با نصف آن است پس زاویهٔ CDM بازاویهٔ XOY برابر بوده و داریم :

$$\frac{CD}{DM}=\frac{AA'}{BB'}=\frac{m}{n}$$

نقطهٔ M تغییر می‌کند اما همواره زاویهٔ CDM مقدار ثابت دارد و چون نسبت بین دوضلع CD و DM همواره ثابت است پس مثلث CDM همواره متشابه با خود باقی می‌ماندو چون دو ضلع CD و DM به ترتیب با $X'X$ و $Y'Y$ موازیند پس CM نیزامتداد ثابت‌دارد اما نقطهٔ C ثابت‌است پس خط CM ثابت بوده مکان M خط $Z'Z$ است که از C و یکی از نقاط M می گذرد .

روش منطقی ـ معلوم مسئله عبارتست از $\frac{AA'}{BB'}=\frac{m}{n}$ واین رابطه به همین‌شکل برای ماقابل استفاده نیست زیرا مثلثهای متشابهی که AA' و BB' ضلعهایی ازآنها باشند روی شکل مشاهده نمی‌شود . پس باید پاره خطهایی بیابیم که با پاره خطهای AA' و BB' متناسب باشند .

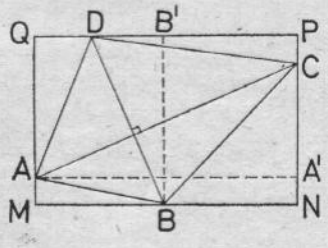
مهم اصلی مسئله نقطهٔ M وسط $A'B'$ است . برای آنکه مکان این نقطه را پیداکنیم بایدآنرا به‌نقطهٔ C وسط AB که ثابت است مربوط سازیم. یك خاصیت که‌به فکر مامی‌رسد این است که خط و اصل بین اوساط دوضلع مثلث با ضلع‌سوم موازی و مساوی با نصف آن است ، از اینجا توجه مابه‌رسم خط BA' جلب‌می‌شود وچون از C و M به D وسط BA' وصل‌کنیم نسبت $\frac{AA'}{BB'}$ تبدیل می‌شود به‌نسبت $\frac{DC}{DM}$

از طرف دیگر از تساوی دو زاویهٔ CDM و XOY نتیجه می گیریم که هر گاه M تغییر کند مثلث CDM متشابه با خودش‌باقی می‌ماندرنتیجه زاویهٔ DCM اندازهٔ ثابت‌دارد و چون امتداد CD ثابت است پس امتداد CM نیز ثابت است وباثابت‌بودن‌نقطهٔ C نتیجه می‌شودکه‌مکان M خط‌ثابت $Z'Z$ است.

مسئله

ثابت کنیدتمام‌مستطیلهایی که بریك‌چهار ضلعی وقطرهای متعامد محیط باشند با یکدیگر متشابهند .

راه حل ـ فرض می‌کنیم ABCD چهارضلعی باشد



که درآن دوقطر AC و BD بر یکدیگر عمودند و مستطیل MNPQ براین چهار ضلعی‌محیط باشد. برای اینکه ثابت کنیم همهٔ مستطیلهای محیط بر چهار ضلعی با هم متشابهند کافی است که ثابت کنیم نسبت دو ضلع مجاور آنها یعنی $\frac{MN}{MQ}$ مقدار ثابت است .

AA' و BB' را به ترتیب عمود بر NP و PQ رسم می‌کنیم . زاویه‌های CAA' و DBB' متساویند زیرا ضلعهای آنها نظیربه‌نظیر برهم عمودند. مثلثهای CAA' و DBB' متشابهند وداریم :

$$\frac{AA'}{BB'}=\frac{AC}{BD}\ \text{یا}\ \frac{MN}{MQ}=\frac{AC}{BD}$$

یعنی نسبت $\frac{MN}{MQ}$ مقدار ثابت است و مستطیل MNPQ همواره متشابه با خودش باقی می‌ماند .

روش منطقی ـ برای اثبات اینکه مستطیلهای از قبیل MNPQ با هم متشابهند کافی است ثابت کنیم که نسبت $\frac{MN}{MQ}$ برابر با مقدار ثابت است .

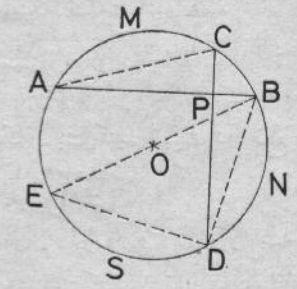
روی شکل به دنبال نسبتها یا قطعاتی می گردیم که ثابت باشند . ضلعها و قطرهای چهار ضلعی ABCD همه ثابت می‌باشند . پس باید بین ضلعهای مجاور مستطیل یعنی MN و MQ با قطعات ثابت مربوط بـه چهار ضلعی رابطه‌ای بدست آوریم. درفرض قید شده که قطرهای چهارضلعی بر هم عمودند وچون دوضلع مجاور مستطیل نیز بر هم عمودند بنابراین پیش بینی می‌شود که بین ضلعهای مستطیل وقطرهای چهارضلعی رابطه‌ای برقرار باشد. اگر AA' و BB' را موازی با ضلعهای مستطیل رسم کنیم نسبت $\frac{MN}{MQ}$ به نسبت $\frac{AA'}{BB'}$ تبدیل می‌شود . ازراه مثلثهای $AA'C$ و $BB'D$ قطعات AA' و BB' با قطعات AC و BD مربوط می‌شوند . به سادگی در می‌یابیم که این دومثلث باهم متشابهند و ازآنجا نتیجه خواهدشد که :

$$\frac{MN}{MQ}=\frac{AC}{BD}= \text{ثابت}$$

مسئله

در دایرهٔ به شعاع R دو وتر AB و CD در نقطهٔ P برهم عمودند . ثابت کنید که :

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=4R^2$$



راه حل ـ در مثلثهای قائم الزاویـهٔ PAC و PBD داریم:

$$PA^2+PC^2=AC^2$$
$$PB^2+PD^2=BD^2$$

از جمع نظیـر بـه نظیر طرفین این تساویها نتیجه می‌شود که :

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=AC^2+BD^2$$

اندازهٔ زاویهٔ قائمهٔ APC برابر است با نصف مجموع اندازه‌های دوکمان AMC و BNC پس مجموع این دوکمان 180° است و اگر قطر DE از دایره را رسم کنیم چون مجموع دوکمان BND و DSE برابر با 180° است پس دوکمان AMC و DSE و در نتیجه دو وتر AC و BD با یکدیگر برابرند و نتیجه می‌شود :

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=DE^2+BD^2=$$
$$=BE^2=4R^2$$

روش منطقی ـ بـرای اثبات رابطهٔ مطلوب قبلا ملاحظه می‌شود که داریم :

$$PA^2+PC^2=AC^2 \quad \text{و} \quad PB^2+PD^2=BD^2$$

مسئله به اینجا منجر می‌شود که ثابت کنیم $AC^2+BD^2=4R^2$ است . یعنی باید ثابت کنیم که AC و BD ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای هستند که وتر آن قطری از دایره است .

قطر BE ازدایره را رسم می‌کنیم . مثلث BDE قائم‌الزاویه است که وترش قطر دایره و یك ضلعش BD است . پس باید ثابت کنیم که DE با AC برابر است و برای این کار کافی است که ثابت کنیم کمانهای نظیر آنها با یکدیگر برابرند . برای اثبات تساوی این دو کمان یك راه آنست که ثابت کنیم مجموع هریك از آنها با یك کمان دیگر برابر مقدار ثابت است. مجموع دوکمان DSE و DNB برابر نیمدایره است پس باید ثابت کنیم که مجموع دوکمان AMC و DNB نیز برابر 180° است. این موضوع هم با توجه به اینکه زاویهٔ داخلی مقابل به دوکمان مزبور یعنی زاویهٔ APC قائمه است محقق می‌شود:

$$\widehat{AMC}+\widehat{BND}=2\times\widehat{APC}=180^\circ$$

$$\widehat{ESD}+\widehat{BND}=180^\circ$$

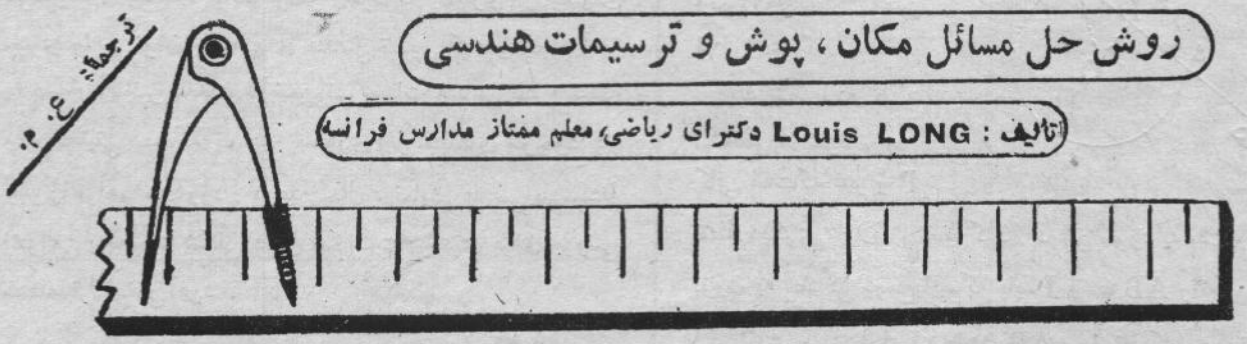
$$\widehat{DSE}=\widehat{AMC}\Longrightarrow AC=DE$$

اشتباههای .. (بقیه از صفحهٔ ۳۰۸)

دراثر این عمل ریشهٔ $x=1$ ظاهر می‌شود که در معادلهٔ (۲) صدق نمی‌کند .

گاهی تعیین حوزهٔ مقادیر قابل قبول برای مجهول مشکل است. اما درموقع حل بطور وضوح تساوی بهم می‌خورد. دراین صورت ازامتحان جواب اجتناب نمی‌شود کرد.

باید بدانیم که چنین دگرگونیهائی مانند لگاریتم گیری وهمچنین ضرب وتقسیم معادله درعنصری که دارای مجهول باشد می‌توانند باعث منقبض شدن حوزهٔ قابـل قبول شده ودرنتیجه تعدادی ازریشه‌ها دراثر این عمل ازبین می‌روند .



روش حل مسائل مکان، پوش و ترسیمات هندسی

تألیف : Louis LONG دکترای ریاضی، معلم ممتاز مدارس فرانسه

ترجمهٔ: ع. م.

III- ترسیمات هندسی

مسائل ترسیمات هندسی عموماً به مسائل مربوط به مکان یا پوش منجر می‌شوند. برای حل مسائل ترسیمی هندسی روشی که ارجحیت دارد این است که ابتدا بااین فرض که مسئله حل شده است شکلی برای آن رسم شود وبعد روی این‌شکل بررسی لازم انجام گیرد . قبلا باید دقت کرد که آیا برای شکل محورهای‌تقارن‌یامرکزتقارن‌وجوددارد‌یانه،درصورت‌وجودتقارن ترسیم ساده‌تر خواهد شد .

در بسیاری از حالتها ، تمام مسئله عبارت می‌شود از تعیین یك یا چند نقطه. برای تعیین یك نقطهٔ A ، تمام شرایط به استثنای یکی از آنها را دخالت می‌دهند تا به این ترتیب برای نقطهٔ A یك درجه آزادی وجود داشته مکانی مانند L_1 داشته باشد . آنگاه همهٔ شرایط به استثنای یکی دیگر ازآنها رادخالت می‌دهندومکان‌دیگری‌برای A مانند L_2 پیدامی‌شود. دراین صورت نقطهٔ A عبارت خواهد بود از نقطهٔ مشترك دو مکان L_1 و L_2.

منطقاً نتیجه می‌شودکه تعیین یك خط عبارت می‌شود از تعیین مماس مشترك دو پوش . اما می‌توان یك خط را یا با تعیین دونقطه و یا با تعیین یك نقطه وامتدادآن مشخص‌کرد. این طریقه هم حالت خاصی از تعیین مماس مشترك دو پوش است، زیرایك نقطه حالت خاصی است ازدایره ، یعنی‌دایره‌ای است به شعاع صفر . وقتی خطی تحت یك شرط قرار داشته باشد ، باید معلوم‌کردکه آیا بر نقطهٔ ثابت می گذرد یا اینکه آیا امتداد ثابت دارد ؟ واین نقطه یا این امتداد را معین‌کرد.

برای تعیین یك نقطهٔ P روی یك خط D می‌توان این نقطه را محل تلاقی D با یك منحنی ثابت Γ انتخاب‌کرد ،که منحنی Γ یك مکان P خواهد بود و البته باید قبلا تعیین شود . هرگاه خط D یك منحنی را در دو نقطهٔ M و N قطع‌کند، تقریباً دربیشتر موارد امکان داردکه به خاطر تقارن نقطهٔ P در وسط MN قرار داشته باشد .

تعیین یك دایره از راه تعیین مرکز و شعاع آن انجام می گیرد ؛ درصورتی‌که مرکز و یك نقطهٔ آن مشخص شود خود دایره نیز معین شده است .

وقتی‌بامعلوماتی پراکنده مقصود ترسیم یك شکل‌مرکب باشد مثلا یك چهار ضلعی و غیره ، قبلاسعی می‌شودکه‌بخشی از شکل‌که معلومات مربوط به آن مجتمع هستند رسم شود (دربیشتر موارد مثلثهایی از شکل رسم می‌شوند) . بالاخره یك شکل از راه تعیین نقاط آن مشخص می‌شود . مثلا یك‌چند ضلعی با تعیین رأسهایش معین می‌شود .

در ترسیمات هندسی استفاده از تبدیلات هندسی‌ازقبیل: انتقال ، دوران ، تجانس ، انعکاس ... اهمیت اساسی دارد .

وقتی‌که روش یك ترسیم معین شد باید دربارهٔ آن‌بحث کرد ، یعنی معلوم‌کردکه این ترسیم ازروی معلومات مفروض با وجود چه شرایطی امکان پذیر است و در صورت امکان چند شکل می‌توان رسم‌کردکه شرایط مطلوب را داشته باشد .

علاوه برمسائل ترسیمی که هندسی محض می‌باشندبعضی از مسائل جبری نیز هست که به یك ترسیم هندسی ساده منجر می‌شوند . بالاخره نباید فراموش کرد که بسیاری از بحثهای جبری را می‌توان به بحثهای هندسی تبدیل کرد و انجام آنها را بسیار آسانتر ساخت.درضمن ترسیمات هندسی یك وسیلهٔ مهم تحقیقی است که تصحیح بسیاری از خطاهای موجود در جبر را فراهم می‌آورد . درعین حال ، نمایش هندسی یك‌مسئلهٔ انتزاعی به‌صورت شکلی دقیق امکانات بیشتری برای بررسی مسئله فراهم می‌آورد .

فصل یکم

مسائلی که ظاهراً عبارتند از تعیین نقاط

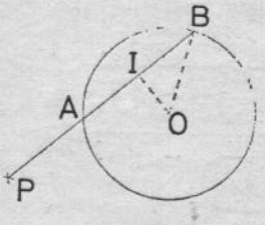
مسئلهٔ ۱ـ نقطهٔ P را چنان تعیین کنید که نسبت فواصلش از دوخط معلوم $\triangle_1$ و $\triangle_2$ به‌نسبت معلوم $\frac{m}{n}$ بوده و از نقطهٔ معلوم O و خط معلوم $\triangle_2$ به یك فاصله باشد .

درصورت مسئله دوشرط کاملا واضح ملاحظه می‌شود . اگر از شرط دوم صرف نظرکنیم مکان P عبارتست از مکان نقاطی که نسبت فواصل آنها ازدوخط ثابت $\triangle_1$ و $\triangle_2$ برابربا $\frac{m}{n}$ است . این مکان از دوخط D_1 و D_2 تشکیل می‌شود که از نقطهٔ تلاقی $\triangle_1$ و $\triangle_2$ می گذرند و رویهم یك‌دسته شعاعهای توافقی تشکیل می‌دهند .

حال اگر فقط شرط دوم را درنظر بگیریم ، مکان P عبارت خواهد بود از یك سهمی (P) که O کانون و $\triangle_2$ خط هادی آن می‌باشد .

مسئلهٔ مفروض منجر می‌شود به مسئلهٔ زیر : نقاط تلاقی خط معلوم D_1 (یا D_2) را با سهمی مفروض (P) پیداکنید. هریك از دوخط سهمی را حد اکثر در دو نقطه و رویهم در چهار نقطه قطع می‌کنند . حال باید معلوم کرد که معلومات مسئله چگونه باشند تا هر این چهار نقطه وجود داشته باشند، یا اینکه تعداد آنها سه باشد (یك خط برسهمی مماس و خط دیگر با آن متقاطع باشد) ، یا اینکه فقط دو نقطهٔ P وجود داشته باشد (یکی از دوخط سهمی را قطع نکند و دیگری با آن در دو نقطه متلاقی باشد ، یا اینکه هردو خط بر سهمی مماس باشند ، یا اینکه هر یك از دو خط سهمی را فقط در یك نقطه قطع کند) ، یا اینکه فقط یك نقطهٔ P وجود داشته باشد ، یا اینکه مسئله اصلا دارای جواب نباشد .

مسئلهٔ ۲ـ از نقطهٔ معلوم P خط D را چنان رسم کنید که از دایرهٔ معلوم وتر AB به‌طول معین $2l$ را جداکند .



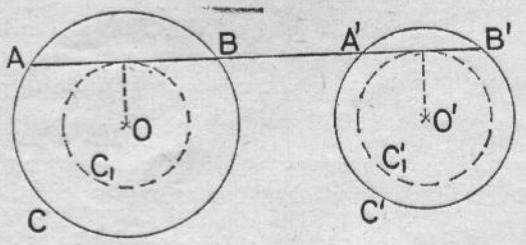
یك خط با دو نقطه مشخص می‌شود . پس کافی است که غیراز P نقطهٔ دیگری از D را تعیین کرد . دراین مورد به‌علت وجود تقارن به سادگی درمی‌یابیم که باید I وسط AB راتعیین کنیم. اگر از شرط به طول $2l$ بودن AB صرف‌نظر کنیم ، وقتی‌خط D حول نقطهٔ P دوران‌کند چون زاویهٔ PIO در هرحال قائمه است نقطهٔ I بردایرهٔ به قطر PO واقع است .

حال از این شرط صرف نظر می‌کنیم که خط D باید از P بگذرد و فقط این شرط رادرنظر می گیریم که وتر AB به طول $2l$ باشد ؛ دراین‌صورت از مثلث OIB نتیجه می‌شود که $OI = r = \sqrt{R^2 - l^2}$ و نقطهٔ I بردایرهٔ به مرکز O و به شعاع r قرار دارد .

پس نقطهٔ I عبارت می‌شود از نقطهٔ مشترك دو دایره یکی به‌قطر PO و دیگری به مرکز O و به شعاع r. مسئله حداکثر دو جواب دارد و برای امکان مسئله لازم است که $l<R$ باشد .

مسئلهٔ ۳ـ خط D را چنان رسم کنید که از دو دایرهٔ معلوم C و C' دو وتر به‌طولهای $2l$ و $2l'$ جداکند .

اگر C دایرهٔ به مرکز O و به‌شعاع R و C' دایرهٔ



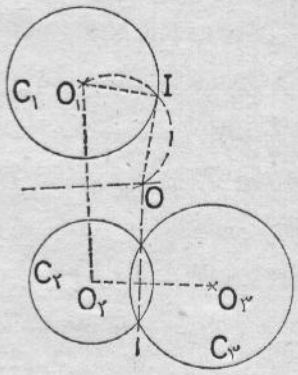
به مرکز O' و به‌شعاع R' باشد ، با فرض اینکه فقط این شرط برقرار باشدکه AB وتری از دایرهٔ C و به‌طول $2l$ باشد نتیجه خواهیم گرفت که AB بر دایرهٔ C_1 به مرکز O و به شعاع $r = \sqrt{R^2 - l^2}$ مماس است .

همچنین برای اینکه $A'B'$ وتری از دایرهٔ C' وبه‌طول $2l'$ باشد لازم وکافی است‌که $A'B'$ بردایرهٔ C'_1 بـه مرکز O' وبه‌شعاع $r' = \sqrt{R'^2 - l'^2}$ مماس باشد .

بنابراین خط مطلوب D عبارتست از مماس مشترك دو دایرهٔ C_1 و C'_1.

برای اینکه مسئله ممکن باشد اولا باید مقادیر r و r′ معین باشند یعنی باید داشته باشیم $l<R$ و $l'<R'$ و ثانیاً دو دایرهٔ C_1 و C'_1 متداخل نباشند . برحسب اوضاع نسبی دو دایرهٔ C_1 و C'_1 تعداد جوابهای مسئله متفاوت است و حداکثر تعدا آنها ۴ می‌باشد .

مسئلهٔ ۴ـ دایرهٔ C را چنان رسم‌کنیدکـه برسه دایرهٔ مفروض C_1 و C_2 و C_3 عمود باشد .



کافی است‌که O مرکز دایرهٔ C ویك نقطه از آن را تعیین کنیـم . می‌دانیم‌که برای آنکه دایرهٔ C بر دو دایرهٔ C_1 و C_2 عمود باشد باید O برمحور اصلی دو دایـرهٔ C_1 و C_2 قرارداشته‌باشد. همچنین برای آنکه دایرهٔ C بردو دایرهٔ C_2 و C_3 عمود باشد بایدO بر محوراصلی‌این دودایره‌واقع باشد. بنابراین نقطهٔ O عبارتست از مرکز اصلی سه دایرهٔ مفروض. حال برای تعیین دایرهٔ C کافی است‌که یك نقطهٔ I از آن را تعیین‌کنیم . نقطهٔ I رافصل مشترك دایرهٔ C بادایرهٔ C_1 انتخاب می‌کنیم . چون دودایرهٔ C و C_1 برهم‌عمودند زاویهٔ OIO_1 قائمه است و I بردایرهٔ به قطر OO_1 قرار دارد . از تلاقی دایرهٔ به قطر OO_1 با دایرهٔ C_1 نقطهٔ I مشخص می‌شود .

مسئله حـداکثر یك جواب دارد و ایـن جواب وقتی وجود دارد که مرکز اصلی‌سه‌دایره وجود داشته و در خارج آنها واقع باشد .

تمرینات

۱ـ ازراه ترسیم نقطه‌ای را پیداکنیدکه مجموع‌مربعات فواصل آن از دونقطهٔ ثابت A و B برابر بـا مقدار معلـوم k^2 بوده و مجموع فواصل آن از دوخط ثابت برابر با طول معلوم l باشد .

۲ـ دایره‌ای رسم‌کنیدکه برنقطهٔ معلوم بگذرد وبر دو دایرهٔ مفروض عمود باشد .

۳ـ روی یك خط نامعین $X'X$ یك نقطهٔ O و درخارج آن یك نقطهٔ A درنظربگیرید . روی خط مزبور دو نقطهٔ B و C را طرفین O و به یك فاصله از آن بقسمی تعیین‌کنیدکه نسبت AB بر AC برابر با مقدار معلوم k باشد.

۴ـ در دایرهٔ معلوم C وتری در امتداد معین وبه‌طول معلوم l رسم‌کنید .

۵ـ در دایرهٔ معلوم مثلث BAC را چنان‌محاط‌کنیدکه ضلع BC از آن به طول معلوم a بوده و میانهٔ نظیراین ضلع برنقطهٔ معلوم S گذشته و امتداد معین داشته باشد .

صدمسئله .. (بقیه‌ازصفحهٔ ۳۱۹)

یك رخ را قرار می‌دهیم ، آخرین رخ را همیشه در ستونی‌که فقط از خانه‌های سفید تشکیل شده است و یا در ستونی کـه دارای‌موانع(ثانویه‌یاغیرازآن)ویادارای‌آن‌نباشد،قرارمی‌دهیم.

درواقع ، اگر ، مانعی وجودنداشته باشد ، درلحظه‌ای $n-1$ رخ روی‌صفحهٔ شطرنج‌باقی خواهد ماند (صفحهٔ‌شطرنج دارای n سطر و n ستون است) ، تمام رخها در سطرهـا و ستونهای مختلف قرار دارند . بنابراین فقط یك سطرویك‌ستون آزادوجوددارد . دراین‌صورت روی‌صفحهٔ شطرنج n رخ‌وجود خواهدداشت‌که تمام‌آنها روی سطرها و ستونهای مختلفی‌قرار دارندکه تهدید نمی‌شوند . تمام‌خانه‌هایی‌که دارای رخ‌نیستند بطور افقی وعمودی تهدید می‌شوند . شرایط مسئله در این حالت برقرار خواهند بود .

برعکس ، اگر ، به‌مانعی بربخوریم ، با حذف سطرهاو ستونهایی‌که دارای مانعند، صفحهٔ مستطیلی شطرنجی رابدست می‌آوریم‌که تعداد سطرهایش از تعداد ستونهایش‌کمتر نیست. باقراردادن آخرین رخ در ستون سفید ، هیچیك از ستونهای باقیمانده‌را محاصره‌نمی‌کنیم‌زیرا تمام‌آنها دارای‌یك‌رخ‌می‌باشند؛ بدین ترتیب هرخانهٔ‌حذف‌نشده و اشغال نشده بوسیلهٔ یك رخ، بطور عمودی تهدید می‌شود .

ممکن نیست‌که ستون سفید محاصره شده باشد؛ زیراقبل ازآنکه درآنجا رخی را قرار دهیم ، حداکثر $n-1$ رخ قرار دهیم‌که بطور افقی خواهند توانست‌حداکثر $n-1$ خانه ازاین ستون را تهدیدکنند ؛ بنابراین می‌توانیم آخرین رخ رادر n امین خانه‌ای‌که تهدید، نشده است، قراردهیم .

ذکر این‌مطلب جالب توجه است‌که راه حل‌مزبوربرای هرصفحهٔ‌شطرنج مستطیل شکلی‌که‌اقلا تعداد سطرهایش‌مساوی ستونهایش باشد و درضمن در شرایط مفروض صدق‌کند قابل اجرا است .

صد مسئلهٔ جالب وحل آنها

فصل پنجم ـ شطرنج ، والیبال ، تعقیب

۷۷ـ صفحهٔ شطرنج

صفحه‌ای شطرنجی به شکل مربع یا مستطیل که تعداد خانه‌های آن عددی فرد (مثلا ۴۹یا ۶۳) می‌باشند ، درنظر می گیریم. خانه‌هایی راکه‌دارای ضلع‌مشترکند مجاورمی گوئیم. خانه‌های مجاور را توسط رنگهای سفید و سیاه از هم متمایز می‌سازیم .

درهرخانه مهره‌ای قرار می‌دهیم و سپس تمام آنها را برداشته ومجدداً روی صفحهٔ شطرنج بطوراتفاقی‌قرارمی‌دهیم.

آیا ممکن است‌که اکنون هرمهره خانهٔ مجاوربه‌خانه‌ای راکه بار اول اشغال‌کرده بود، اشغال‌کند ؟

حل ـ هرخانهٔ سفیدمجاوربه خانهٔ سیاه‌است وبرعکس. درصفحهٔ شطرنجی که‌تعداد خانه‌هایش فرداست، تعدادخانه‌های سفیدبرابر تعدادخانه‌های‌سیاه‌نیست؛ بنابراین‌پاسخ به‌مسئله‌منفی‌است.

۷۸ـ بازهم دربارهٔ صفحهٔ شطرنج

درهرخانهٔ صفحهٔ شطرنج یك مهره قرارمی‌دهیم؛ آنهارا برداشته ومجدداً روی صفحه می گذاریم، بطوری‌که مهره‌های گوشه‌های چپ صفحهٔ شطرنج به‌جای یکدیگر قرارگیرند و همچنین همین عمل دربارهٔ مهره‌های مجاور (یعنی آنهایی‌که خانه‌های مجاور را اشغال‌کرده‌اند) انجام شود .

آیا حالا امکان داردکه یك مهره وضعیتی غیراز وضعیت اولیه‌اش داشته‌باشد ؟

حل ـ پاسخ به پرسش فوق‌منفی است. هیچ مهره‌ای خانه‌ای غیرازخانهٔ اولیه‌اش را اشغال نمی‌کند. فرض می‌کنیم که $(i ، k)$ خانهٔ واقع درمحل تقاطع i امین سطر و k امین ستون باشد ؛ صفحهٔ شطرنج دارای n^2 خانه است $(n>2)$ ؛ فرض می‌کنیم‌که $F(i ، k)$ خانه‌ای باشدکه درآن‌مهره‌ای را که قبلا درخانهٔ $(i ، k)$ بوده است، قرار داده‌باشیم. با فرض اینکه $F(1،1)=(1 ، 1)$ و $F(n،1)=(n،1)$ باشد و به شرط آنکه تبدیل F «مجاورت» خانه‌ها را حفظ‌کند، بایدثابت کنیم‌که به ازای ... و ۲ و ۱ $=i$ و... و۲ و۱ $=k$ داریم

$$F(i ، k)=(i ، k)$$

فوراً درمی‌یابیم که‌تعدادخانه‌های مجاوریك‌خانهٔ‌مفروض وقتی‌که این خانهٔ مفروض درگوشه قرار داشته‌باشد از خانهٔ دیگری که‌درکنار صفحهٔ شطرنج قرارگرفته است‌کمتراست‌واین تعداد وقتی‌که خانه درکنارصفحهٔ شطرنج قرار داشته باشد از وقتی‌که داخل قرارگیردکوچکترخواهدبود. چون هیچ‌مهره‌ای درموضع جدید، تعداد مجاورینش کمترازقبل نیست ، خانه‌های $(i ، k)$ و $F(i ، k)$ با هم یا درداخل،کنار، یا درگوشه‌های صفحهٔ شطرنج خواهند بود .

$(1،1)$ ، $(2،1)$ ، .... $(n،1)$ رشته‌ای از خانه‌های مجاور به‌هم‌کنارهٔ صفحهٔ شطرنج است، رشتهٔ $F(1،1)$ ، $F(2،1)$ ، ....، $F(n،1)$ نیز باید دارای چنین خاصیتی باشد . پس $F(1،1)=(1،1)$ و (اگر$n>2$) این خانه فقط با $(1،2)$ و $(2،1)$ مجاور است. بنابراین $F(2،1)$ می‌تواندفقط یکی‌ازاین دوخانه باشد. دوحالت را درنظر می گیریم :

الف: $F(2،1)=(2،1)$؛ دراین‌صورت $F(3،1)$ خانهٔ کناره‌ای مجاور به $F(2،1)$ یعنی $(1،2)$ ومخالف با $(1،1)$ نمی‌تواند بجز $(1،3)$ باشد. همچنین‌داریم $F(4،1)=(1،4)$ وغیره ... درخاتمه به تساوی $F(n،1)=(1،n)$ می‌رسیم که‌با فرض $F(n،1)=(n،1)$ متناقض است . در این‌صورت داریم :

(ب) : $F(2،1)=(2،1)$ ؛ با استدلالی متشابه ثابت می‌شود که $F(3،1)=(3،1)$ ، $F(4،1)=(4،1)$ ، ... $F(n،1)=(n،1)$ واین امرمؤید این است‌که خانه‌های‌اولین ستون جای اولیهٔ خودرا حفظ‌کرده‌اند .

ازمعادلات $F(i،1)=(i،1)$ $(i=1،2 ، ... ، n)$

نتیجه می‌گیریم که : $F(i,2)=(i,2)$ $(i=1,2,\dots,n)$ درواقع خانهٔ $F(i,2)$ خانهٔ کناری مجاوربه $(1,1)$ و مخالف با $(2,1)$ است، پس این خانه $(1,2)$ می‌باشد؛ $F(2,2)$ مجاور به $F(2,1)$ و $F(1,2)$ یعنی مجاوربه $(2,1)$ و $(1,2)$ ومخالف با $(1,1)$ می‌باشد پس این خانه $(2,2)$ می‌باشدوغیره ...

به همین‌طریق رابطهٔ $F(i,k)=(i,k)$ برای سایر ستونهای نزدیك به‌هم تحقیق خواهد شد .

تعمیم : نتیجهٔ فوق مارا برآن می‌دارد که تبدیلات شطرنجی راکه مجاورت خانه‌ها را حفظ می‌کنند مورد مطالعه قرار دهیم .

ازاین چنین تبدیلاتی می‌توانیم به‌عنوان مثال، یکسانی (یعنی تبدیلی‌که هرخانه را درجای خود قرار می‌دهد)، تقارن نسبت به هریك ازچهار محور تقارن صفحهٔ شطرنجی که از دورانهای 90°، 180°، 270° نسبت به مرکزصفحهٔشطرنجی بدست می‌آیند، نام ببریم .

ثابت می‌کنیم‌که هرتبدیل F ازخانوادهٔ موردمطالعه‌یکی ازهشت‌تائی است‌که ذیلا ذکر می‌کنیم .

زیرا اگرF تبدیلی‌ازاین‌نوع باشد؛ بطوری‌که می‌دانیم؛ گوشه‌ها مبدل به گوشه‌ها می‌شوند، بنابراین تنها حالات زیر می‌توانند رخ دهند .

I- تبدیل F گوشهٔ $(1,1)$ را ثابت‌نگه می‌دارد؛دراین صورت یکی ازاین موارد را داریم :

a) خانهٔ $(n,1)$ ثابت است؛ چنانکه دربالا ثابت شد، Fتبدیلی یکسان است .

b) خانهٔ $(n,1)$ تبدیل به یك گوشهٔ دیگر شده است ؛ با توجه به استدلالی‌که قبلا نمودیم این گوشه نمی‌تواند بجز $(1,n)$ باشد (رشتهٔ $F(1,1)$ ، $F(2,1)$ ،...، $F(n,1)$ را درنظر بگیرید). دربارهٔF تقارن S_1 را نسبت به قطر اصلی ماربر $(1,1)$ و (m,n) معمول می‌داریم . ترکیب (*) $F.S_1$ تبدیلی ازنوع مطالعه شده‌است‌که $(1,1)$ و $(n,1)$ را ثابت نگه می‌دارد؛ بنابراین این ترکیب یکسان I است :

$$F.S_1=I$$

این‌معادلهٔ خطی‌رادر S_1 ضرب می‌کنیم، بدست‌می‌آوریم: $(F.S_1).S_1=I.S_1$ یا $F.S_1^2=S_1$ وچون $S_1^2=I$ است، ازآن رابطهٔ $F=S_1$ را نتیجه می‌گیریم .

بنابراین F نسبت به‌قطر اصلی متقارن است .

II - F تبدیلی‌ازخانه $(1,1)$ به (n,n) است. در این صورت فرض می‌کنیم که S_2 نسبت به دومین قطر صفحهٔ شطرنج متقارن باشد ؛ S_2 ، (n,n) را به $(1,1)$ تبدیل می‌کند؛ پس‌تبدیل $F.S_2$ به‌صورت تغییرناپذیر $(1,1)$ درمی‌آید: دراین صورت $F.S_2$ ترکیب یکسان I یا تقارن S_1 است .

c) درحالتی‌که $F.S_2$ یکسان‌است یعنی وقتی $F.S_2=I$ باشد، با ضرب‌این معادلهٔخطی در S_2 رابطهٔ $F=S_2$ را بدست می‌آوریم وF نسبت به‌قطر $(n,1)$ - $(1,n)$ متقارن‌است.

d) درموردی‌که $F.S_2$ تقارن S_1 است یعنی وقتی که $F.S_2=S_1$ باشد، با ضرب این معادلهٔ خطی در S_2 رابطهٔ $F=S_1S_2$ را بدست می‌آوریم. بنابراین F غیراز دورانی به اندازهٔ 180° حول مرکز صفحهٔ شطرنج ، یعنی تقارن نسبت به این نقطه نیست .

III - F تبدیلی از خانه $(1,1)$ به $(n,1)$ است ؛ در این‌صورت اگر S_3 معرف تقارن نسبت‌به محور تقارن‌افقی‌باشد، ترکیب $F.S_3$ به صورت ثابت $(1,1)$ باقی می‌ماند وبازهم‌دو امکان وجود دارد :

e) $F.S_3=I$ ازآنجا $F=S_3$ ؛

f) $F.S_3=S_1$ ازآنجا باضرب خطی این معادله در S_3 داریم : $F=S.S_3$ ، رابطهٔ اخیر معرف‌این است‌که‌Fدورانی به اندازهٔ 90° حول مرکزصفحهٔ شطرنج است .

IV - اگرF تبدیلی از $(1,1)$ به $(n,1)$ و همچنین

---

* فرض می‌کنیم‌که A ، B تبدیلات مجموعه‌ای درخودش باشد. دراین‌صورت A . B تبدیلی است‌که به طریق زیر حاصل می‌شود: ابتدا دراین مجموعه تبدیل A را عمل می‌نمائیم سپس تبدیل B را انجام می‌دهیم؛ مثلا ، اگرA نسبت به یك خط (در صفحه) متقارن باشد، دراین صورت $A.A$ یا A^2 یك تبدیل یکسان است؛ اگر A و B تقارنهای نسبت به خطوط متقاطع a و b باشند ، در این‌صورت $A.B$ دورانی است‌که مرکزش نقطهٔ تقاطع a و b و زاویه‌اش دوبرابرزوایهٔ جهت‌دار a و b است. اگر I تبدیلی یکسان و A تبدیل غیرمشخصی‌باشد،داریم: $A.I=I.A=A$. ترکیب تبدیلات شرکت‌پذیر است:

$$(A.B).C=A.(B.C)$$

اگر S_4 تقارنی نسبت به محور تقارن قائم باشد ، همیشه دو امکان وجود دارد :

$$F = S_4 \qquad (g$$

$F = S_1 . S_4$ (h : بنابراین F دوران °۲۷۰ درجه‌ای حول مرکز است .

بدین‌ترتیب ثابت‌کردیم‌که هر تبدیلی ازصفحهٔ شطرنجی که خانه‌های مجاور را به‌خانه‌های مجاور تبدیل می‌کند یکی ازهشت تبدیل زیر است .

$$I، S_1، S_2، S_3، S_4، S_1S_2، S_1 . S_3، S_1S_4$$

این تبدیلات تشکیل یك گروه می‌دهند .

به مسئله اولیه برمی‌گردیم، می‌توانیم نتیجهٔ کلیتر زیر را بیان‌کنیم: اگر تمام مهره‌ها را روی صفحهٔ شطرنجی طوری قراردهیم‌که حداقل یك مهره‌که روی محور تقارن واقع‌نیست، وضعیت اولیه را بازیابد، دراین‌صورت این خاصیت برای تمام مهره‌ها برقرار خواهد بود .

۷۹ـ رخها را چگونه قرار دهیم ؟

صفحهٔ شطرنج موردنظر ما دارای یك‌مقدار تعدادسطر و ستون است ولی تنها فرقش با یك صفحهٔ شطرنج معمولی در توزیع خانه‌های سیاه و سفید است؛ این صفحهٔ شطرنجی باید که: درهرستون حداقل یك خانهٔ سفید داشته باشد و درضمن حداقل یکی‌ازستونها فقط ازخانه‌های سفید تشکیل نشده‌باشد.

هر گاه شرایط زیر برقرار باشند، گوئیم‌که رخها بطور مناسبی روی صفحهٔ شطرنج قرار گرفته‌اند (فرض خواهیم کرد که همیشه بقدرکافی مهره داشته باشیم) .

(۱) رخها فقط درخانه‌های سفید یافت شوند ،

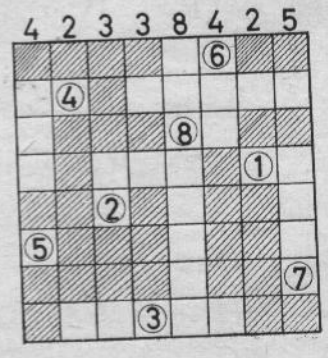
(۲) حداقل یك رخ روی صفحهٔ شطرنج باشد،

(۳) رخها یکدیگرراتهدید نکنند (یعنی‌طوری‌قرار گرفته شده‌باشندکه امکان گرفتن آنها وجود داشته باشد).

(۴) هرخانهٔ سفیدی‌که دارای رخ نیست، درجهت‌افقی بوسیلهٔ یك‌رخ ودرجهت عمودی بوسیلهٔ رخ دیگرتهدیدشود.

ثابت‌کنیدکه همواره می‌توانیم رخها را مطابق باشرایط (۱) ، (۲) ، (۳) و (۴) قرار دهیم .

حل ـ اگرراهی برای قراردادن رخها ، مقیدبه شرایط (۱) ، (۲) ، (۳) و(۴) بیابیم، مسئله حل خواهد شد. برای تسهیل، بعضی روابط را دخالت می‌دهیم . هرسطر یا ستونی‌که حداقل دارای‌یك‌خانهٔ سفیدباشد وبطورافقی بوسیلهٔ‌هیچ رخی‌تهدید نشود، آزادمی‌خوانیم.



هرسطر یا ستونی‌که دارای یك‌رخ بوده و بوسیلهٔ هیچ رخ دیگری تهدید نشود، اشغال شده می‌نامیم .

روی صفحهٔ شطرنج خالی، به تعداد ستونهای آزاد ، سطرهای آزاد وجود دارد. دربالای هرستون تعداد خانه‌های سفید آن ستون را نوشته ورخها را بطور زیر قرار می‌دهیم : یك‌رخ را درستونی آزادکه تعداد خانه‌هایش‌که در جهت افقی تهدید نمی‌شوند ازتعدادی‌که مربوط به هرکدام از ستونهای آزاد باقیمانده می‌شوند، بزرگتر نباشد. اگر بتوانیم رخها را به‌این طریقه قراردهیم، مسئله حل خواهد بود، زیرا شرطهای (۱) ، (۲) ، (۳) و (۴) محقق خواهند بود. شکل ۱۰۸ مثالی ازاین تنظیم را نشان می‌دهد. دوایر واقع در خانه‌های سفید معرف رخها هستند واعداد آنها معرف ترتیبی است‌که آنها را قرار داده‌ایم. واضح است‌که جوابهای دیگری برای این صفحهٔ شطرنجی وجود دارد .

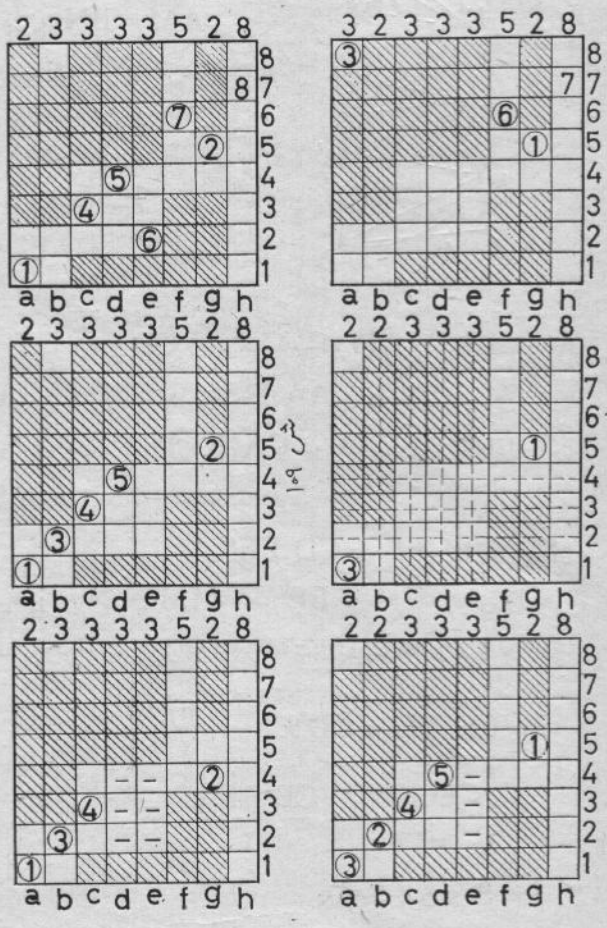
با وجوداین، روش مذکور مواجه با بعضی‌ازموانع زیر خواهد شد :

a) درضمن‌اینکه می‌خواهیم یك رخ را قرار دهیم، در خواهیم یافت‌که تمام خانه‌های سفید یك‌ستون (یا چند تا) که دارای رخ نیستند بطور افقی تهدید می‌شوند. درچنین ستونی نمی‌توانیم بدون نقض شرط (۳) ، رخی را قرار دهیم و می‌بایست‌که شرط (۴) را بکاربریم. سعی می‌کنیم‌که موضع یك رخ را با نقل مکان عمودی آن درستون مربوط به خودش، تغییردهیم: اگرچنین چیزی امکان داشته باشد ، سعی می‌کنیم که ازموضع جدیدکارخودمان را ادامه‌دهیم. مثالی ازاین‌امکان درشکل ۱۰۹ نمایانده شده است. می‌بینیم‌که پس‌از آنکه چهار رخ مطابق با روش مفروض جایگزین شوند (اولین صفحهٔ شطرنجی) تمام خانه‌های سفید ستونهای d و e بطور افقی اشغال می‌شوند. ستونی را جستجومی‌کنیم‌که‌درآن‌رخی وجود داشته باشد، ولی درآنجا یك خانهٔ سفید آزاد موجود باشدکه بطور افقی بوسیلهٔ سایررخها تهدید نشود: مثلا ستون g‌دارای چنین خاصیتی است . رخ ۲ را از g۴ به g۵ (دومین صفحهٔ شطرنجی) : حال می‌توانیم رخ ۵ را در d۴ قرار دهیم ؛ به‌همین ترتیب، رخ ۳ را از b۲ به b۸ برده وسپس رخ۶ را در e۲ قرار می‌دهیم. بدین‌ترتیب می‌توانیم‌مانع را از جلوی خود برداشته وبه قراردادن رخها (سومین صفحهٔ شطرنجی) ادامه دهیم .

ممکن است‌که‌تمام موانعی راکه به‌آن برخوردمی‌کنیم،

بتوانیم بااین‌روش برطرف‌سازیم. دراین‌صورت‌می‌توانیم به‌ترتیب رخها را مطابق‌باشرایط مسئله‌قرار دهیم .

b) دراین حالت، ممکن‌است‌که دریکی یا چند ستون ، تمام خانه‌های سفیدبطورافقی تهدیدشوند ودرضمن، سایرستونها دارای هیچ خانهٔ سفید آزاد نباشند. این ستونها را محاصره شده می‌نامیم. با توجه به‌شرط (۳) نمی‌توانیم رخها را در ستونهای محاصره شده قرار دهیم؛ همچنین دیگر نمی‌توانیم رخهایی راکه ازهم‌اکنون روی صفحهٔ شطرنج قرار دارند ، تغییرمکان دهیم، زیرا دیگر خانه‌های سفید آزاد در سایر ستونها وجود ندارد .



ش ۱۱۰

با یك مثال چگونگی‌حذف این‌مانع را نشان می‌دهیم . روی اولین شطرنج شکل۱۱۰ ، می‌بینیم که ستون e محاصره شده است، تمام خانه‌های سفید این ستون بوسیلهٔ رخهای ۲، ۴، ۵ مورد مهاجمه قرارگرفته‌اند و در ضمن در هیچیك از ستونهائی‌که بوسیلهٔ این رخها اشغال شده‌اند، خانهٔ سفیدآزاد وجود ندارد. پس رخهای ۲، ۴، ۵ را حذف می‌کنیم ودراین صورت همانطورکه درسطرها و ستونهائی‌که رخها محاصره می‌کردند، دیگر رخهایی وجودنخواهدداشت، درموردرخهای ستونهای محاصره‌شده نیز همین امربرقرارخواهندبود. در اینجا ستونهای b ، c ، d و e وسطرهای ۲، ۳ و۴ خواهدبود . به سادگی می‌بینیم‌که تعدادسطرهای حذف شده همیشه‌ازتعداد ستونهای حذف شده‌کمتر است و خانه‌هایی‌که درمحل تقاطع ستونهای حذف شده وسطرهای آزاد واقعند، سیاه رنگند . همچنین اگر درموقع قراردادن سایررخها، درستونهای حذف شده خانه‌هایی ظاهر شوندکه بطور افقی تهدید نشوند ، نباید واهمه‌کنیم .

ممکن است‌که درخانه‌های حذف شده خانه‌های سفیدی باقی بماندکه بطورافقی بوسیلهٔ رخهایی که هنوز برقرارند و حذف نشده‌اند ، مورد تهدید قرارگیرند . شرط (۴) ایجاب می‌کندکه این خانه‌ها بطورقائم نیز تهدید شوند ولی ما نباید رخ را دریك ستون حذف‌شده قرار دهیم. این چنین وضعیتی را مانع ثانویه می‌نامیم .

درمثال شکل۱۱۰، خانهٔ b۱ ازستون‌حذف‌شدهٔ b بطور افقی بوسیلهٔ رخ ۳ تهدید می‌شود؛ دو راه برای حذف چنین مانع ثانویه‌ای وجود دارد. ابتدا امتحان می‌کنیم ببینیم که آیا درستون رخهایی‌که محاصره شده‌اند، خانه‌های سفیدآزادی در سطرهای حذف نشده وجود دارد؛ اگرجواب مثبت است ، رخ محاصره شده را به یکی‌ازاین خانه‌ها منتقل می‌کنیم ودر این صورت به‌قرار دادن رخها ادامه می‌دهیم . ولی‌اگراین ستون خانهٔ سفید واجدشرایط نداشته باشد، باید سطرها وستونهای رخهایی راکه محاصره می‌شوند، حذف‌کنیم. درمثال خودمان ، رخ ۳را می‌توانیم به a۸ ببریم ومانع ثانویه را حذف نمائیم. اگر a۸ سیاه می‌بود، می‌بایست ستون a و سطر۱ را حذف می‌کردیم. درهردوحالت مانع بعدی وجود ندارد .

پس‌ازحذف موانع ثانویه، به قرار دادن رخها ادامه می‌دهیم. ممکن‌است‌که به موانع دیگرثانویه یا غیراز آن برخوریم؛ دراین‌صورت آنها را نیز حذف می‌کنیم .

بازهم‌باید ثابت‌کنیم‌که این روش به ما اجازه می‌دهدکه روی صفحهٔ‌شطرنج حداقل‌یك رخ راکه در شرایط مفروض‌محقق است، قراردهیم . ابتدا ملاحظه می‌کنیم‌که اگر در تمام‌ستونی که اقلا ، به‌اندازهٔ ستونهای آزاد ، خانهٔ سفید داشته باشد ،

دنباله در صفحهٔ ۳۱۵

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۷۱

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۷۱/۱ـ مقادیر x را پیداکنیدکه نامساوی زیر برقرار باشد :

$$۴^{x^۲-۳x} < \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶-x-x^۳}$$

حل ـ نامساوی رابه‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$(۲^۲)^{x^۲-۳x} < (۲^{-۱})^{۶-x-x^۳}$$

$$۲^{۲x^۲-۶x} < ۲^{-۶+x+x^۳}$$

$$۲x^۲-۶x < -۶+x+x^۳$$

$$x^۳-۷x+۶<۰$$

$$x^۳-x-۶x+۶<۰$$

$$x(x+۱)(x-۱)-۶(x-۱)<۰$$

$$(x-۱)(x^۲-x-۶)<۰$$

$$(x-۱)(x-۳)(x+۲)<۰$$

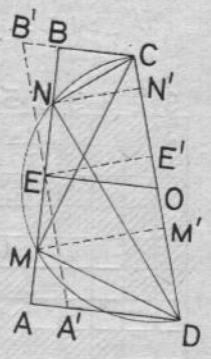
x		−۲		۱		۳	
x−۱	−		−	۰	+		+
x−۳	−		−		−	۰	+
x+۲	−	۰	+		+		+
P	−	۰	+	۰	−	۰	+

جواب عبارت می‌شود از :

$x<-۲$ یا $۱<x<۳$

۷۱/۲ـ در ذوزنقهٔ‌قائم ABCD که‌درآن‌زاویه‌های A وB قائمه‌انددایرهٔ به‌قطر CD را رسم‌می‌کنیم‌که ساق AB را درM وN قطع‌می‌کند. ثابت‌کنیدکه مساحت ذوزنقه برابراست بامجموع‌مساحتهای دومثلث MCD و NCD .

حل ـ از O وسط CD بر AB عمود می‌کنیم . E پای عموددروسط AB واقع است . از طرفی چون $AM=BN$ پس E وسط MN نیز واقع است . عمودهای MM′و NN′و EE′ رابر CD رسم‌می‌کنیم که E′ وسط M′N′ خواهد بود .



از E موازی‌با CD رسم می‌کنیم‌که AD و BC را در A′و B′ قطع می‌کند . دو مثلث AA′E و BB′E مساویند پس متوازی‌الاضلاع A′B′CD با ذوزنقهٔ مفروض معادل است‌و اگر S مساحت‌ذوزنقه باشد داریم :

$$S=A'B'\cdot EE'=CD.EE'$$

در ذوزنقهٔ MM′N′N خط EE′ اوساط دو ساق را به هم وصل‌کرده‌است. بنابراین‌برابر است‌با نصف مجموع‌دوقاعده‌پس:

$$S=CD.EE'=CD\times\frac{NN'+MM'}{۲}$$

$$S=\frac{CD.NN'}{۲}+\frac{CD.MM'}{۲}$$

$$S=S_{CMD}+S_{CDN}$$

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۷۱/۳ـ از ابراهیم‌ذوالقدری

مجموع ضرایب جمله‌های بانمای فرد از بسط زیر را بدست آورید :

$$(۱+x+x^۲+x^۳+x^۴)^n$$

حل ـ چنین می‌نویسیم :

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^n = 1+C_1x+C_2x^1+C_2x^2+\dots$$

$$(1-x+x^2-x^3+x^4)^n = 1-C_1x+C_2x^2-C_2x^3+\dots$$

طرفین دو رابطه را نظیربه‌نظیر از هم کم می‌کنیم :

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^n-(1-x+x^2-x^3+x^4)^n=2(C_1x+C_2x_2+\dots)$$

طرف دوم رابطه درازاء $x=1$ برابر است با مجموع ضرایب جمله‌های فرد بسط عبارت مفروض و اگر در طرفین رابطه $x=1$ قرار دهیم نتیجه می‌شود :

$$5^n-1=2S \Longrightarrow S=\frac{5^n-1}{2}$$

۷۱/۴ـ از **طاهر شفیع نورمحمدی**

به فرض اینکه داشته باشیم :

$$f(x)=1+\operatorname{colog} x$$

و $f(x)$ و $ff(x)$ و $fff(x)$ سه جملهٔ متوالی از یك تصاعد حسابی باشند مقدار x را پیداکنید .

حل ـ با فرض $\log x=y$ داریم :

$$f(x)=1=\frac{1}{\log x}=1-\frac{1}{y}=\frac{y-1}{y}$$

$$ff(x)=\frac{\frac{y-1}{y}-1}{\frac{y-1}{y}}=\frac{-1}{y-1}$$

$$fff(x)=\frac{-1}{\frac{y-1}{y}-1}=y$$

$$f(x)+fff(x)=2ff(x)$$

$$\frac{y-1}{y}+y=\frac{-2}{y-1} \longrightarrow y^2=-1$$

$$y=-1 \text{ یا } \log x=-1 \Longrightarrow x=0/1$$

۷۱/۵ـ از **سعید فرشاد** دانشجوی‌فنی دانشگاه‌تبریز نامعادلهٔ زیررا حل‌کنید :

$$\log_a 3 \log_{3a} 3 \log_2 81a \geq 1$$

حل ـ با توجه به رابطهٔ $\log_a x=\frac{1}{\log_x a}$ خواهیم داشت :

$$\frac{\log_2 81a}{\log_2 a \log_2 3a}-1>0$$

$$\frac{4+\log_2 a}{\log_2 a(1+\log_2 a)}-1>0$$

با فرض $\log_2 a=x$ خواهیم داشت :

$$\frac{4-x^2}{x(1+x)}>0 \quad \text{یا} \quad \frac{4+x-x-x^2}{x(1+x)}>0$$

$$\frac{(2-x)(2+x)}{x(1+x)}>0$$

بعد از تعیین ریشهٔ هر عامل و تشکیل جدول نتیجه خواهد شد :

$$-2\leq x<-1 \text{ یا } 0<x\leq 2$$

$$-2<\log_2 a<-1 \Longrightarrow \frac{1}{9}\leq a<\frac{1}{3}$$

$$0<\log_2 a\leq 2 \Longrightarrow 1<a\leq 9$$

۷۱/۶ـ فرستنده : **حسن همراهی** ششم ریاضی دبیرستان خوارزمی ۱

دستگاه زیر را حل‌کنید :

$$\begin{cases} 9^{-1}\sqrt[y]{9^x}-27\sqrt[x]{27^y}=0 \\ \log(x-1)-\log(1-y)=0 \end{cases}$$

حل ـ دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\begin{cases} 9^{\frac{x}{y}-1}-27^{\frac{y}{x}+1}=0 \\ \log\frac{x-1}{1-y}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9^{\frac{x}{y}-1}=9^{3(\frac{y}{x}+1)} \\ \frac{x-1}{1-y}=1 \text{ و } x>1 \text{ و } y<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y}-1=\frac{3y}{x}+3 \\ x-1=1-y \\ x>1 \text{ و } y<1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

۷۱/۷ـ ازمحمدمحسنی ششم‌ریاضی‌دبیرستان‌سروی

در مثلث ABC به‌ضلعهای a، b و c دایره‌های محاطی خارجی نظیر ضلعهای b و c را رسم می‌کنیم . طولهای مماس مشترك خارجی ، مماس مشترك داخلی و خط‌المرکزین این‌دو دایره را حساب‌کنید .

حل‌ـ مطابق باشکل وطبق فرمولهای مربوط داریم:

$AF = p - c$ و $AE = p - b$

$$EF = 2p - b - c = a + b + c - b - c = a$$

$$BN = BE = p - a$$

$$CM = CK = p - a$$

$$MN = NB + BC + CM = 2p - 2a + a = b + c$$

عمود O_1H رابر O_2M رسم‌می‌کنیم . در مثلث قائم‌الزاویهٔ O_1O_2H با فرض $O_1O_2 = d$ داریم :

$$d^2 = O_1H^2 + O_2H^2 = MN^2 + (r_1 - r_2)^2$$

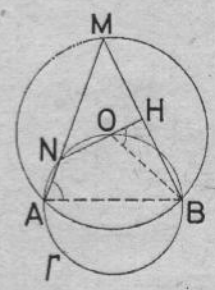
$$d^2 = (b + c)^2 + \left(\frac{S}{p - b} - \frac{S}{p - c}\right)^2$$

$$d = \sqrt{\frac{p(b - c)^2}{(p - b)(p - c)} + (b + c)^2}$$

۷۱/۸ـ ازاحمدرادمردرحمانی دبیرستان‌شاهرضامشهد

در دایرهٔ به مرکز O دونقطهٔ ثابت A و B و نقطهٔ‌متغیر M را در نظر می‌گیریم و دایرهٔ محیطی مثلث AOB رارسم کرده Γ می‌نامیم. عمود منصف وتر BM دایرهٔ Γ را در دو نقطهٔ O و N قطع می‌کند . ثابت‌کنیدکه سه نقطهٔ A و M و N بر یك خط راست واقعند .

حل‌ـ از N و M به A وصل می‌کنیم. کافی است که ثابت کنیم دو زاویهٔ MAB و NAB با یکدیگر برابرند . اگر اندازهٔ کمان BM برابر با 2α باشد در دایرهٔ مفروض اندازهٔ زاویهٔ



MAB که برابربانصف‌کمان BM است‌برابر با α می‌شود.

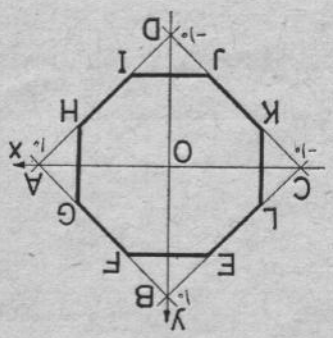
چهارضلعی ANOB در دایرهٔ Γ محاط است پس دو زاویهٔ NAB و BON مکمل‌یکدیگرند ودر نتیجه دوزاویهٔ NAB و BOH با یکدیگر برابرند . در دایرهٔ O اندازهٔ زاویهٔ‌مرکزی HOB برابر با نصف اندازهٔ کمان BM یعنی برابر با α است . پس اندازهٔ زاویهٔ NAB نیز برابر با α بوده‌و این زاویه بازاویهٔ MAB برابر است و ازآنجا دوخط AM و AN بریکدیگر منطبق بوده سه‌نقطهٔ A و N و M بریك استقامت می‌باشند .

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۷۱/۹ـ از مصطفی گودرزی طائمه

معادلهٔ خطی‌را تعیین کنید که‌از تلاقی‌آن با محورهای مختصات مثلثی متساوی‌الساقین با مساحت ۵۰ واحد سطح بدست آید . چهار جواب بدست می‌آیدکه از تلاقی آنها با محورها یك مربع حاصل‌می‌شود . خطوطی موازی با محورهای مختصات رسم می‌کنیم‌بقسمی‌که از تلاقی آنهاباضلعهای مربع مزبور یك هشت‌ضلعی منتظم پدیدآید . معادله‌های این‌خطوط را تعیین‌کنید .

حل ـ با فرض $\overline{OA} = x$ و $\overline{OB} = y$ داریم :



$$\begin{cases} \left|\frac{xy}{2}\right| = 50 \\ x = y \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} |xy| = 100 \\ x = y \end{cases}$$

$$x^2 = 100 \Longrightarrow x = y = \pm 10$$

نتیجه خواهد شد :

$A(10,0)$ و $B(0,10)$ و $C(-10,0)$ و $D(0,-10)$

خط مطلوب‌که بر دونقطه ازچهار نقطهٔ بالا می‌گذرد به‌معادلهٔ زیر خواهد بود :

$$x \pm y = \pm 10 \text{ یا } \mp 10$$

برحسب اینکه کدامیك از علامتهای + یا − انتخاب شود چهار معادله خواهیم داشت :

$$x+y=10 \ ، \ x-y=10$$
$$x+y=-10 \ ، \ x-y=-10$$

خطموازی با $x'x$ را به معادلهٔ $y=b$ و خط موازی با $y'y$ را به معادلهٔ $x=a$ فرض می‌کنیم . داریم :

$$\begin{cases} x=a \\ x\pm y=\pm 10 \end{cases} \Longrightarrow G\begin{vmatrix} a \\ 10-a \end{vmatrix} \text{ و } H\begin{vmatrix} a \\ a-10 \end{vmatrix} \text{ و...}$$

$$\begin{cases} y=b \\ x\pm y=\pm 10 \end{cases} \Longrightarrow F\begin{vmatrix} 10-b \\ b \end{vmatrix} \text{ و } E\begin{vmatrix} b-10 \\ b \end{vmatrix} \text{ و...}$$

$$EF=FG=GH=\dots$$

$$|20-2b| = \sqrt{(a+b-10)^2+(10-a-b)^2}$$
$$=|20-2a|$$

$$|20-2b|=|a+b-10|\sqrt{2}=|20-2a|$$
$$a=b=\pm 5\sqrt{2}$$

معادلهٔ خطوط مطلوب عبارت می‌شود از :

$$x=\pm 5\sqrt{2} \text{ و } y=\pm 5\sqrt{2}$$

۷۱/۱۰ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

اگر اندازه‌های ضلعهای مثلثی به ترتیب برابر باشند با :

$$tg15^\circ \text{ و } tg75^\circ \text{ و } \sqrt{14}$$

مساحت این مثلث را حساب کنید .

حل‌ـ قبلا مقادیر $tg15^\circ$ و $tg75^\circ$ را حساب می‌کنیم:

$$tg15^\circ = tg(60^\circ-45^\circ)=\frac{tg60-tg45}{1+tg60\,tg45}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

$$tg75^\circ=cotg15^\circ=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم که :

$$(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2=14$$

پس مثلث به ضلعهای $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ و ۱۴ قائم‌الزاویه است و مساحت آن می‌شود :

$$S=\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2}=\frac{1}{2}$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۷۱/۱۱ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

درصفحهٔ محورهای مختصات ناحیه‌هایی را معین کنید که مختصات نقاط آنها درنامعادلهٔ زیر صدق کنند:

$$||x|-1|+||y|-1|<1$$

حل‌ـ اگر به تنهایی x را به x− یا y را به y− تبدیل کنیم یا اینکه هم x را به x− و هم y را به y− تبدیل کنیم در هر حال معادله یا نامعادلهٔ مفروض فرق نمی‌کند پس محورهای مختصات محورهای تقارن و مبدأ مختصات مرکز تقارن شکل می‌باشد و می‌توانیم قسمتی ازآنراکه درربع اول محورهای مختصات واقع است رسم کرده از روی آن با استفاده از تقارن تمام شکل را بدست آوریم . بنابراین فرض می‌کنیم $x\geq 0$ و $y\geq 0$ و خواهیم داشت :

$$|x-1|+|y-1|-1<0 \qquad (1)$$

قبلا نمایش هندسی تابع زیر را معلوم می‌کنیم :

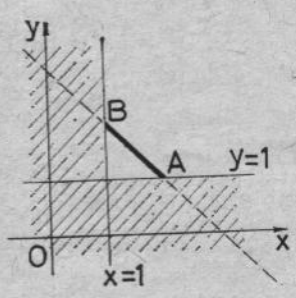
$$|x-1|+|y-1|-1=0 \qquad (2)$$

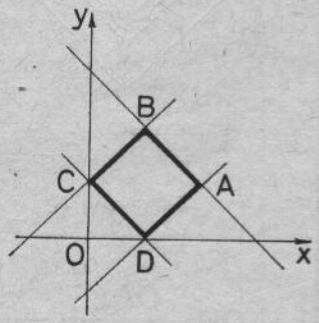
بر حسب اینکه $x-1$ و $y-1$ مثبت یا منفی باشند چهار حالت زیر را خواهیم داشت :

$$(1)\ \begin{cases} x-1\geq 0 \\ y-1\geq 0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x-1<0 \\ y-1\geq 0 \\ -x+y-1=0 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x-1\geq 0 \\ y-1<0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} x-1<0 \\ y-1<0 \\ -x-y+1=0 \end{cases}$$

نمایش هندسی دستگاه (۱) قسمتی از خط به معادلهٔ $x+y-3=0$ است که در آن $x\geq 1$ و $y\geq 1$ باشد. این نمایش هندسی عبارت می‌شود ازقطعه خط AB. به همین ترتیب





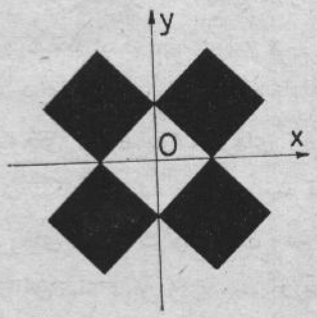
نتیجه خواهد شدکه نمایش هندسی دستگاه (۲) قطعه خط BC،

نمایش هندسی دستگاه (۳) قطعه‌خط AD و نمایش هندسی دستگاه (۴) قطعه‌خط CD است. بنابراین نمایش هندسی تابع به‌معادلهٔ (۲) عبارت می‌شود از مربع ABCD.

مقدار طرف اول رابطهٔ (۲) به‌ازاء ($x=0$ و $y=0$) می‌شود:

$$|-1|+|-1|-1=1>0$$

پس ناحیه‌ای خارجی مربع مزبور در نامعادلهٔ (۱) صادق نیست و ناحیهٔ مربوط به نامعادلهٔ مزبور ناحیهٔ داخلی مربع مزبور می‌باشد.



چون قرینهٔ مربع ABCD را نسبت به هر یك از محورها و نسبت به مبدأ مختصات تعیین کنیم چهار مربع حاصل می‌شود که خود این مربعها و ناحیهٔ داخلی هر کدام از آنها جوابهای نامعادلهٔ داده شده باشند. تمام ناحیهٔ مربوط به‌نامعادلهٔ داده شده مطابق باشکل بالااست که بارنگ سیاه مشخص شده است.

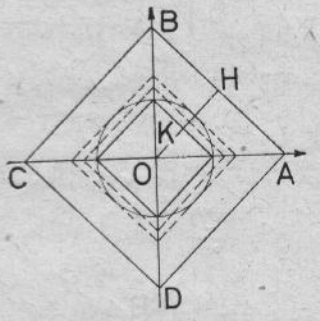
۷۱/۱۲- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

با استفاده از نمودار هندسی در تعداد جوابهای دستگاه زیر به ازاء مقادیر مختلف a بحث کنید:

$$\begin{cases}|x|+|y|=a\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

حل - نمایش هندسی تابع:

$$|x|+|y|=a$$



به فرض $a>0$ مربعی است که قطرهایش بر محورهای مختصات منطبق و طول شعاع آن a است. مانند مربع ABCD به‌فرض آنکه داشته باشیم:

$$OA=OB=OC=OD=a$$

درصورتی‌که $a<0$ باشد تابع بالا نامعین است.

سهم این مربع برابر می‌شود با:

$$OH=\frac{OA\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

نمایش هندسی تابع:

$$x^2+y^2=1$$

دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع یك. این دایره و مربع را در یك شکل رسم می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که:

الف - اگر داشته باشیم:

$$OH>1 \text{ یا } \frac{a\sqrt{2}}{2}>1 \Longrightarrow a>\sqrt{2}$$

مربع درخارج دایره واقع است و با آن نقطهٔ مشترك ندارد. پس دستگاه مفروض دارای جواب نیست.

ب - درحالت $OH=1$ یا $a=\sqrt{2}$ مربع در چهار نقطه بردایره مماس می‌شود که مختصات این نقاط عبارتند از:

$$x=y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دراین حالت دستگاه مفروض دارای چهار جواب به مقادیر بالا می‌باشد.

ج - در حالت $OK<OH<1$ یا

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{a\sqrt{2}}{2}<1 \Longrightarrow 1<a<\sqrt{2}$$

مربع و دایره درهشت نقطه متقاطعند و دستگاه مفروض دارای هشت دسته جواب می‌باشد.

د - هرگاه $a=1$ باشد مربع در دایره محاط می‌شود یعنی باآن درچهار نقطه مشترك است. در این حال دستگاه مفروض چهار دسته جواب داردکه عبارتند از:

$$(x=\pm 1 \text{ و } y=0) \text{ و } (x=0 \text{ و } y=\pm 1)$$

ه - وقتی‌که $a<1$ باشد مربع در داخل دایره واقع می‌شود و دستگاه مفروض جواب ندارد.

۷۱/۱۳- ترجمهٔ زرگری

بدون استفاده از جدول ثابت کنیدکه:

$$\cos 36^\circ > tg\, 36^\circ$$

آیا نامساوی بالا فقط برای کمان 36° صادق است یا اینکه کمانهای حادهٔ دیگری هم درآن صدق می‌کنند؟ این کمانها رامشخص کنید.

حل - اولا نامساوی بالا را چنین می‌نویسیم:

$$\cos^2 36 > \sin 36 \quad \text{یا} \quad 1+\cos 72 > 2\sin(30+6)$$

$$1+\sin 18 < 2\sin 30\cos 6 + 2\cos 30\sin 6$$

$$1 + 2\sin 9 \cos 9 > \cos 6 + 2\cos 30 \sin 6$$

این نامساوی محقق است زیرا که دو نامساوی زیر محقق می‌باشند :

$$1 > \cos 6^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin 9^\circ > \sin 6^\circ \\ \cos 9^\circ > \cos 30 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2\sin 9 \cos 9 > 2\cos 30 \sin 6$$

ثانیاً ـ کمان حادهٔ α را تعیین می‌کنیم برای آنکه داشته باشیم :

$$\cos\alpha = tg\alpha \Longrightarrow \cos^2\alpha - \sin\alpha = 0$$

$$\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

چون تابع $\cos x$ درفاصلهٔ $(0 \text{ و } \frac{\pi}{2})$ نزولی و تابع $tg x$ در این فاصله صعودی است. برای آنکه $\cos\beta > tg\beta$ باشد لازم و کافی است که $0 < \beta < \alpha$ باشد.

یعنی به‌ازاء تمام کمانهای β که درنامساوی

$$0 < \beta < \text{Arc}\sin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

صدق کنند نامساوی $\cos\beta > tg\beta$ برقرار می‌باشد.

۷۱/۱۴ـ فرستنده : **سلمان نورآذر** دانشجوی پلی تکنیك تهران

درچهار وجهی OABC داریم :

$$OA = OB = OC = \frac{2a}{3}$$

وقاعدهٔ ABC مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌باشد .

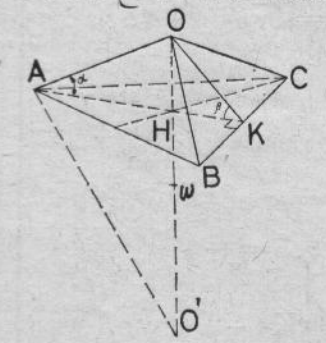
مطلوبست محاسبهٔ :

الف ـ اندازهٔ زاویهٔ یالهای جانبی با صفحهٔ قاعده

ب ـ اندازهٔ زاویهٔ وجوه جانبی باصفحهٔ قاعده

ج ـ اندازهٔ شعاع کرهٔ محیطی چهار وجهی و فاصلهٔ مرکز این کره تا صفحهٔ قاعده

حل ـ چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و یالهای جانبی نیز متساویند پس تصویر O بر صفحهٔ ABC همان نقطهٔ H مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است.



الف - زاویهٔ یال جانبی چهار وجهی با صفحهٔ قاعده عبارتست از زاویهٔ $\alpha = OAH$ وداریم :

$$\cos\alpha = \frac{AH}{OA}$$

$$AH = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} : \frac{2a}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = 30^\circ$$

ب ـ زاویهٔ هر وجه جانبی با صفحهٔ قاعده یعنی زاویهٔ $\beta = OKH$ از رابطهٔ زیر حساب می‌شود :

$$tg\beta = \frac{OH}{HK}$$

$$HK = \frac{AK}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$OH = AH.tg\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3}$$

$$tg\beta = \frac{a}{3} : \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\beta = \text{Arc}tg\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ج ـ اگر در صفحهٔ OAH در نقطهٔ A عمودی بر AO اخراج کنیم امتداد OH را در O' قطع می‌کند و OO' قطر کرهٔ محیطی چهار وجهی می‌باشد . در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAO' داریم :

$$OA^2 = OO' \times OH \quad \text{یا} \quad \frac{4a^2}{9} = OO' \times \frac{a}{3}$$

$$OO' = \frac{4a}{3} \quad \text{و} \quad R = \frac{2a}{3}$$

چون شعاع کره از OH بزرگتر است ω مرکز کره در خارج OH واقع است و فاصلهٔ آن تا صفحهٔ ABC برابر است با :

$$\omega H = \omega O - HO = \frac{2a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3}$$

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۷۱/۱۵ـ اولا دایرهٔ به معادلهٔ زیر را مشخص کرده رسم کنید :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

ثانیاً اگر PQ قطری از این‌دایره باشدکه‌با محور x'x موازی است‌مختصات PوQ را حساب‌کنید .

ثالثاً معادلهٔ بیضی را بنویسیدکه P و Q کانونهای آن بوده و از دایرهٔ بالا وتری به طول ۲ موازی با محور x'x جدا کند .

رابعاً معلوم کنیدکه چهار نقطه بر بیضی مزبور وجود داردکه درآنها شعاعهای حامل بریکدیگر عمودند و این نقاط را مشخص کنید .

حل ـ اولا معادله‌به‌صورت زیر در می‌آید:

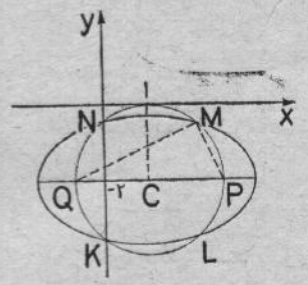
$$(x-1)^2+(y+2)^2=4$$

$$C(1\text{و}-2) \quad \text{و} \quad R=2$$

ثانیاً داریم :

$$P(x=1+2=3 \quad \text{و} \quad y=-2)$$

$$Q(x=1-2=-1 \quad \text{و} \quad y=-2)$$



ثالثاً چون‌قطر بیضی در امتداد قطر PQ از دایره است پس وتر مشترك دایره و بیضی با قطر PQ یعنی با محورx'x موازی‌است.

معادلهٔ این وتر را $y=k$ فرض می‌کنیم و در معادلهٔ دایره‌قرار می‌دهیم؛

$$x^2+k^2-2x+4k+1=0$$

$$x^2-2x+k^2+4k+1=0$$

طول وتر عبارت می‌شود از تفاضل دو جواب این معادله ، پس بایدداشته باشیم:

$$|x'-x''|=\frac{2\sqrt{\Delta'}}{a}=2 \quad \text{یا} \quad \frac{\Delta'}{a^2}=1$$

$$1-k^2-4k-1=1 \Longrightarrow k=-2\pm\sqrt{3}$$

$$x^2-2x=0 \Longrightarrow x=0 \quad \text{و} \quad 2$$

دووتر در دایره به‌طول ۲ وموازی با x'xبدست‌می‌آید که اگر MN و KL باشند داریم :

$$K(0\text{و}-2-\sqrt{3}) \quad \text{و} \quad L(2\text{و}-2-\sqrt{3})$$

$$M(2\text{و}-2+\sqrt{3}) \quad \text{و} \quad N(0\text{و}-2+\sqrt{3})$$

مرکز بیضی عبارتست از $C(1\text{و}-2)$ و فاصلهٔ کانونی آن برابر است با $c=CP=2$ و این بیضی از هریك‌ازچهار نقطهٔ بالا می‌گذرد . یکی از این نقاط مثلا M را در نظر می‌گیریم ، داریم :

$$2a=MQ+MP$$

$$MQ=\sqrt{(2+1)^2+(-2+\sqrt{3}+2)^2}=2\sqrt{3}$$

$$MP=\sqrt{(2-3)^2+(-2+\sqrt{3}+2)^2}=2$$

$$2a=2\sqrt{3}+2 \quad \text{و} \quad a=\sqrt{3}+1$$

$$b^2=a^2-c^2=4+2\sqrt{3}-4=2\sqrt{3}$$

معادلهٔ بیضی مطلوب می‌شود :

$$\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2}+\frac{(y+2)^2}{2\sqrt{3}}=1$$

رابعاً بیضی از چهار نقطهٔ MوNوK وL می‌گذرد و این چهار نقطه بردایرهٔ به‌قطر PQ واقعند پس هریك از چهار زاویهٔ PMQ و PNQ و PKQ و PLQ قائمه‌اند و چون PوQ کانونهای بیضی می‌باشند پس در نقاط مزبور شعاعهای حامل بریکدیگر عمودند .

۷۱/۱۶ـ نقطهٔ M با مختصات :

$$M(x=1+2\sin\alpha \quad \text{و} \quad y=1+2\cos\alpha)$$

را چنان تعیین‌کنیدکه فاصلهٔ‌آن تا مبدأ مختصات مینیمم باشد .

حل ـ اگر d فاصلهٔ نقطهٔ M تا مبدأ مختصات باشد داریم :

$$d^2=x^2+y^2=(1+2\sin\alpha)^2+(1+2\cos\alpha)^2$$

$$d^2=4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha+4\sin\alpha+4\cos\alpha+2$$

$$d^2=4\sin\alpha+4\cos\alpha+6$$

$$d^2=4(\sin\alpha+\cos\alpha)+6$$

عبارت d^2 وقتی‌می‌نیمم است‌که $\sin\alpha+\cos\alpha$ می‌نیمم باشد. اما داریم :

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+tg45^\circ\cos\alpha$$

$$=\frac{\cos45\sin\alpha+\sin45\cos\alpha}{\cos45^\circ}=\sqrt{2}\sin(\alpha+45^\circ)$$

$$-1<\sin(\alpha+45^\circ)<1 \Longrightarrow$$

$$-\sqrt{2}<\sqrt{2}\sin(\alpha+45)<\sqrt{2}$$

پس عبارت d^2 وقتی می‌نیمم است‌که داشته باشیم :

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+45^\circ)=-\sqrt{2}$$

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=-1 \Longrightarrow \alpha=2K\pi-\frac{3\pi}{4}$$

$$M\begin{cases} x = 1 + 2\sin(2K\pi - \frac{3\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 + 2\cos(2K\pi - \frac{3\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۷۱/۱۷ـ ازمرتضی عطار دانشجوی دانشکدهٔ فنی تهران

منحنی نمایش هندسی تغییرات تابع زیر را رسم کنید :

$$y = |x| + |x^2 - 1| \pm \sqrt{2 - x^2}$$

حل ـ تابع وقتی معین است که $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ باشد.

با تبدیل x به $-x$ تابع فرق نمی‌کند پس محور yها محور تقارن منحنی است و می‌توانیم جدول تغییرات را فقط درفاصلهٔ ($\sqrt{2}$ و ۰) معین کرده با استفاده از تقارن تمام منحنی رارسم کنیم .

با فرض $x > 0$ داریم $|x| = x$ و می‌دانیم که

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x < -1 \Rightarrow$$
$$|x^2 - 1| = x^2 - 1$$
$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow |x^2 - 1| = -x^2 + 1$$

بنابراین در فاصلهٔ ($\sqrt{2}$ و ۰) داریم :

$$0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} y = x - x^2 + 1 + \sqrt{2 - x^2} & \text{(I)} \\ y = x - x^2 + 1 - \sqrt{2 - x^2} & \text{(II)} \end{cases}$$

$$1 < x < \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} y = x + x^2 - 1 + \sqrt{2 - x^2} & \text{(III)} \\ y = x + x^2 - 1 - \sqrt{2 - x^2} & \text{(IV)} \end{cases}$$

برای چهار تابع بالا به ترتیب داریم :

$$\text{I)}\quad y' = -2x + 1 - \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$2x^3 - 2x + x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x - 1)(2x^2 + 3x - 1) = 0$$
$$x = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

تنها جواب $\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ قابل قبول است .

$$y = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$(x^2 - 1)(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ غیرقابل قبول

x	۰		$\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$		۱
y′	‖	+	۰	−	‖
y	‖	$1 + \sqrt{2}$ ↗	$-1 + \sqrt{17}$	↘ ۲	‖

$$\text{II)}\quad y' = -2x + 1 + \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

از معادلهٔ $y' = 0$ فقط یك جواب قابل قبول $x = 1$ بدست می‌آید . معادلهٔ $y = 0$ نیز یك جواب $x = 1$ دارد.

x	۰		۱
y	‖	+	۰ ‖
y	‖	$1 - \sqrt{2}$ ↗	۰ ‖

$$\text{III)}\quad y' = 2x + 1 - \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

جواب قابل قبول $y' = 0$ عبارت می‌شود از $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

معادلهٔ $y = 0$ در فاصلهٔ ($\sqrt{2}$ و ۱) جواب‌ندارد .

x	۱		$\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$
y′	‖	+	۰	−	∞ ‖
y	‖	۲ ↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$1 + \sqrt{2}$ ‖

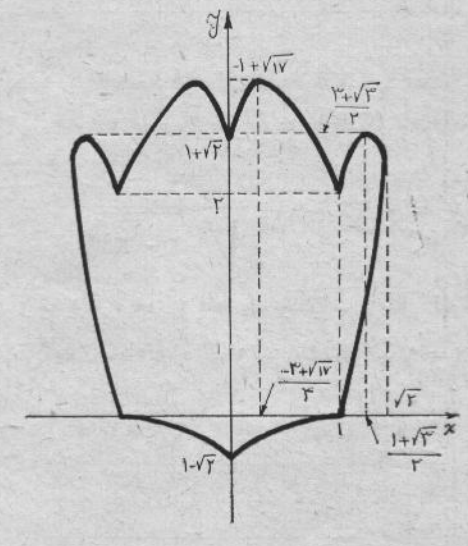
$$\text{IV)}\quad y' = 2x + 1 + \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

$$1 < x < \sqrt{2} \Rightarrow y' > 0$$
$$x = \sqrt{2} \Rightarrow y' = \infty$$

برای معادلهٔ $y = 0$ یك‌جواب‌قابل قبول $x = 1$ بدست می‌آید :

x	۱		$\sqrt{2}$
y′	‖	+	∞ ‖
y	‖ ۰	↗	$1 + \sqrt{2}$ ‖

با توجه به چهار جدول تغییرات چهار تابع و با درنظر گرفتن اینکه محور yها محور تقارن منحنی است منحنی نمایش تابع مفروض به‌شکل زیر است :



۷۱/۱۸ـ ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

نامعادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\frac{2+\sqrt{2}-4\cos^2 x}{2\sin^2 x+\sin x-1}>2$$

حل ـ با فرض $\sin x = t$ خواهیم داشت :

$$\frac{4t^2-2+\sqrt{2}}{2t^2+t-1}>2$$

$$\frac{-2t+\sqrt{2}}{2t^2+t-1}>0 \Longrightarrow \frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2K\pi+\frac{\pi}{6}<x<2K\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$2K\pi+\frac{3\pi}{4}<x<2K\pi+\frac{5\pi}{6}$$

۷۱/۱۹ـ ترجمهٔ فتح‌الله‌زرگری

مطلوبست تعیین کلیهٔ مقادیر مثبت a که به‌ازاء آنها تمام جوابهای معادلهٔ زیریك تصاعد عددی تشکیل دهند.

$$\cos(9a-7)x=\cos(17a+13)x$$

حل ـ قبلا جوابهای معادله را معلوم می‌کنیم :

$$(9a-7)x\pm(17a+13)x=2K\pi$$

برای معادله دو دسته جواب بدست می‌آید :

$$x=\frac{K\pi}{13a+3} \quad \text{و} \quad x=\frac{K\pi}{4a+10}$$

به‌ازاء مقادیر صحیح K هریك ازدودسته جوابها تصاعدی حسابی تشکیل می‌دهند با قدر نسبتهای :

$$d_1=\frac{\pi}{13a+3} \quad \text{و} \quad d_2=\frac{\pi}{4a+10}$$

ویك جمله ازهریك ازاین دوتصاعد $x=0$ می‌باشد. جمله‌های دوتصاعد مزبور وقتی مشترکا به تصاعد حسابی خواهند بود که یکی از قدر نسبتها مضرب دیگری باشد . بنابراین یکی از دوعدد $\frac{d_1}{d_2}$ یا $\frac{d_2}{d_1}$ باید عدد صحیح باشد . پس دوحالت I و II درنظر می گیریم :

$$\text{I)} \quad \frac{d_1}{d_2}=n \Longrightarrow \frac{13a+3}{4a+10}=n$$

$$a=\frac{10n-3}{13-4n}$$

چون a عدد مثبت است پس باید داشته باشیم :

$$\frac{3}{10}<n<\frac{13}{4}$$

و چون n عدد صحیح است پس داریم :

$$n=1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \Longrightarrow a=\frac{7}{9} \text{ و } \frac{17}{5} \text{ و } 27$$

$$\text{II)} \quad \frac{d_2}{d_1}=n \Longrightarrow \frac{4a+10}{13a+3}=n$$

$$a=\frac{10-3n}{13n-4}>0 \Longrightarrow \frac{4}{13}<n<\frac{10}{3}$$

$$n=1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \Longrightarrow a=\frac{7}{9} \text{ و } \frac{2}{11} \text{ و } \frac{1}{35}$$

رویهم برای a پنج جواب بدست می‌آید .

۷۱/۲۰ـ ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

ثابت کنید که به‌ازاء جمیع مقادیر اعداد طبیعی N عدد N^9-N^5 بر ۳۰ بخش پذیر است .

حل ـ عدد مفروض به‌صورت زیر تجزیه‌می‌شود :

$$N^4(N-1)N(N+1)(N^2+1)$$

حاصل‌ضرب سه عدد متوالی $(N-1)N(N+1)$ بر ۶ بخش پذیر است . اگر N مضرب ۵ نباشد باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۵ یکی از اعداد ± 1 یا ± 2 می‌باشد . درحالتی‌که باقیماندهٔ تقسیم $+1$ باشد عدد $N-1$ ودرحالتی‌که‌باقیماندهٔ تقسیم -1 باشد عدد $N+1$ بر ۵ بخش پذیراست .درحالتی

که باقیماندهٔ تقسیم ۲ ± باشد باقیماندهٔ تقسیم N^2 بر ۵ برابر با ۴ بوده و N^2+1 بر ۵ بخش پذیر است . چون ۵ و ۶ نسبت به‌هم اولند پس عدد مفروض مضرب ۳۰ است .

۷۱/۲۱- ترجمهٔ زرگری

مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را مشخص کنید که اندازه‌های اضلاع آنها عددهای صحیح بوده و یك ضلع زاویهٔ قائمهٔ آنها برابر با ۱۵ باشد.

حل - اگر x و y به‌ترتیب طول وتر و طول ضلع دیگر مثلث مزبور باشد باید داشته باشیم :

$$x^2 - y^2 = 15^2$$

$$(x-y)(x+y) = 1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

با توجه به اینکه $x-y < 15 < x+y$ است داریم :

$$\begin{cases} x+y=25 \\ x-y=9 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x+y=75 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x+y=45 \\ x-y=5 \end{cases}$$

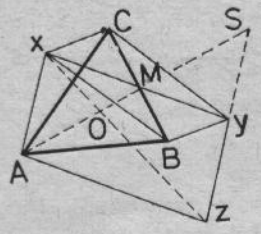
$$\text{یا} \quad \begin{cases} x+y=225 \\ x-y=1 \end{cases}$$

از حل چهار دستگاه بالا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x=17 \\ y=8 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=25 \\ y=20 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=39 \\ y=36 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=113 \\ y=112 \end{cases}$$

۷۱/۲۲ ترجمهٔ زرگری

مثلث ABC و نقطهٔ x را در صفحهٔ آن درنظر می‌گیریم. متوازی‌الاضلاع BxCy سپس متوازی‌الاضلاع yxAz را رسم می‌کنیم . اگر نقطهٔ x متغیر باشد ثابت کنید که تجانس ثابتی وجود دارد که در آن z مجانس x می‌باشد .



حل - از A به M وسط BC وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا zy را در S قطع کند و xz را رسم می‌کنیم که AM را در O تلاقی می‌کند .از تشابه دومثلث SMy و SAz داریم :

$$\frac{Sz}{Sy} = \frac{Az}{My} = \frac{xy}{My} = 2$$

از تشابه دو مثلث OSz و OxA داریم :

$$\frac{Oz}{Ox} = \frac{Sz}{xA} = \frac{Sz}{yz} = \frac{Sz}{Sy} = 2$$

در تجانس به‌مرکز ثابت O و به‌نسبت ثابت ۲ نقطهٔ z مجانس نقطهٔ x است .

۷۱/۲۳- نقاطی از بیضی یا هذلولی مفروضی را تعیین کنید که در آنها مماس بر منحنی باشعاعهای حامل آن نقطه زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد .

حل - چون در بیضی یا هذلولی مماس در هر نقطه نیمساز یکی از زاویه‌های شعاعهای حامل آن نقطه است ، وقتی زاویهٔ مماس با یکی از شعاعهای حامل ۴۵ درجه باشد زاویهٔ بین دو شعاع حامل ۹۰ درجه است . برای تعیین این نقاط به قطر FF′ (F و F′ کانونهای منحنی است) دایره‌ای رسم می‌کنیم که نقاط مشترك آن با منحنی نقاط مطلوب می‌باشند .

در هذلولی دایرهٔ به قطر FF′ همواره هذلولی را در چهار نقطه قطع می‌کند . اما در بیضی وقتی این دایره با بیضی نقطهٔ مشترك دارد که $c>b$ باشد .

حل مسائل فیزیك

ترجمه وانتخاب توسط : هوشنگ شریفزاده

۷۱/۲۴- برای کلاسهای چهارم

در یکی از دو کفهٔ ترازوئی وزنه‌ای ثابت قرار می‌دهیم و در کفهٔ دیگر یك لیوان می‌گذاریم . برای آنکه تعادل ترازو برقرار شود باید در کفه‌ای که لیوان هست وزنه‌ای قرار دهیم که جرم آن :

اگر لیوان خالی باشد m_1 است؛ اگر لیوان پر از آب باشد m_2 است؛ اگر لیوان پر از ساچمهٔ سربی باشد m_3 است؛ اگر لیوان پر از ساچمهٔ سربی بوده و فاصلهٔ بین ساچمه‌ها پر از آب باشد m_4 است .

چگالی نسبی سرب را تعیین کنید .

مقادیر عددی :

$m_1 = 285$ ، $m_2 = 260$ ، $m_3 = 30/75$ و

$m_4 = 28/25$

حل - حجم داخلی لیوان را V ، حجم فضایی را که ساچمه‌ها اشغال می‌کنند v ، جرم لیوان را m فرض می‌کنیم. جرمی که در کفهٔ دوم قرار دارد در حالات مختلف به‌شرح زیر است :

درحالتی‌که لیوان خالی است : $m+m_1$ است .

در حالت دوم $m+V+m_2$ است ، زیرا V معرف جرم آبی است‌که لیوان را پرکرده است .

درحالت سوم $m+vd+m_3$ است .

درحالت چهارم $m+vd+V-v+m_4$ است،زیرا $V-v$ که معرف حجم فضای خالی بین‌ساچمه‌هاست ، درواقع جرم‌آبی است‌که برای پرکردن این خلاء لازم است.

اما چون جرمی‌که در حالات مختلف درکفهٔ دوم قرار دارد تغییری نکرده است می‌توانیم جرم را درهمهٔ این حالات مساوی بگیریم. با حذف m از طرفین تساویها حاصل‌می‌شود:

$$m_1=V+m_2=vd+m_3=vd+V-v+m_4$$

که نتیجه می‌شود :

$$V=m_1-m_2$$

$$vd=m_1-m_3$$

$$v=m_1-m_2-m_3+m_4$$

$$d=\frac{m_1-m_3}{m_1-m_2-m_3+m_4}$$

با بکار بردن مقادیرعددی :

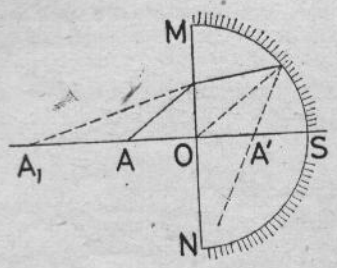
$$d=11/3$$

۷۱/۲۵- برای کلاسهای پنجم

فرستنده: **علی‌نمدی** ازدبیرستان‌ابن سینارضائیه

طرف محدب یك‌نیمکرهٔ شیشه‌ای به‌شعاع R نقره اندود شده است . یك نقطهٔ نورانی A روی محوراصلی به فاصلهٔ d از سطح‌مستوی قراردارد . تصویرحاصل بوسیلهٔ سطح‌مستوی برتصویری‌که از شعاعهای ورودی وبرخورد در سطح کروی حاصل می‌شودمنطبق است. ثابت‌کنیدکه اگر n ضریب‌شکست شیشه باشد داریم :

$$n=\frac{R}{R-2d}$$



حل - تصویر حاصل از انعکاس نقطهٔ نورانی A را در سطح مستوی به A' نمایش می‌دهیم . فاصلهٔ این نقطه از رأس نیمکرهٔ شیشه‌ای $SA'=R-d$ است . تصویر ظاهری A دردیوپتر مستوی MN نقطهٔ A_1 است ، بطوری‌که می‌توان نوشت :

$A_1O=nAO=nd$. برطبق صورت مسئله تصویرحاصل از انعکاس A_1 در آینهٔ مقعر MSN نقطهٔ A' است ، اما $SA_1=R+nd$. برطبق خاصیت آینه‌هامی‌توان نوشت:

$$\frac{1}{SA_1}+\frac{1}{SA'}=\frac{2}{SO}$$

$$\frac{1}{R+nd}+\frac{1}{R-d}=\frac{2}{R}$$

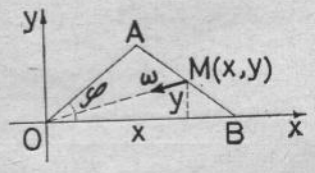
$$\frac{1}{R+nd}=\frac{2}{R}-\frac{1}{R-d}=\frac{R-2d}{R(R-d)}$$

$$n(R-2d)=R\Longrightarrow n=\frac{R}{R-2d}$$

۷۱/۲۶- برای کلاسهای ششم

فرستنده : **غلامحسین آموسی** دانشجوی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

مطلوبست معادلهٔ حرکت ، سرعت و شتاب نقطهٔ M وسط میلهٔ AB در صورتی که $AB=OA=2a$ و زاویهٔ $\varphi=BOA$ نسبت به زمان تغییرکند بقسمی‌که $\varphi=\omega t$ باشد.



حل - اگر x و y مختصات نقطهٔ M باشد داریم :

$$x=2a\cos\varphi+$$

$$+a\cos\varphi=3a\cos\varphi$$

$$y=a\sin\varphi$$

$$x=3a\cos\omega t$$

$$y=a\sin\omega t$$

$$\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1\Longrightarrow\frac{x^2}{9a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

مسیر M بیضی است به قطرهای 3a و a

برای تعیین معادلهٔ سرعت :

$$V_x=x'=-3a\omega\sin\omega t$$

$$V_y=y'=a\omega\cos\omega t$$

$$V=a\omega\sqrt{9\sin^2\omega t+\cos^2\omega t}$$

$$\gamma_x=V'_x=-3a\omega^2\cos\omega t=-\omega^2x$$

$$\gamma_y=V'_y=-a\omega^2\sin\omega t=-\omega^2y$$

$$\gamma=\sqrt{\omega^4(x^2+y^2)}=\omega^2r$$

چند تمرین شیمی

ترجمه و انتخاب توسط : باقرمظفرزاده

۷۱/۲۷- جرم مخصوص اسیدسولفوریک ۹۵/۶ درصد $1/84 g/cm^3$ است . مولاریته و نرمالیتهٔ آن را معین کنید.

۷۱/۲۸ - از تأثیر اسیدسولفوریک برکلرور پتاسیم ، ۰/۱۰۹۵ گرم کلرورئیدروژن حاصل شده است . این مقدار HCl را در سه‌لیتر آب حل می‌کنیم . PH محلول حاصل‌را حساب کنید .

۷۱/۲۹- فرمولهای ساختمانی ونام ئیدروکربورهای اتیلنی‌راکه ازونیدهای آنها براثر تجزیه‌به وسیلهٔ آب ترکیبات زیر را می‌دهند ، بنویسید :

الف - CH_2O و $CH_3-CH_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CHO$

ب- $CH_3-CO-CH_3$ و CH_3-CH_2-CHO

پ- CH_2O و $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CO-CH_3$

۷۱/۳۰- استیلن مادهٔ اولیه برای تهیهٔ بسیاری از مشتقات‌کلردار ازجمله تتراکلراتیلن (پولی‌کلراتیلن) وتری‌کلراتیلن‌است. این‌موادآتشگیرنیستند و حلال روغنها وچربیها هستند و بهمین جهت‌آنها را درخشک‌شویی لباس‌بکار می‌برند . معادلهٔ‌واکنشهای‌تبدیل استیلن به تری‌کلراتیلن و تتراکلراتیلن را بنویسید .

پاسخ چند تمرین شیمی

۷۱/۲۷-

$$1000 \times 1/84 \times \frac{95/6}{100} = 1759/04\ g/l\ H_2SO_4$$

$$1759/04 : 98 = 17/95\ mol/l$$

$$N = 17/95 \times 2 = 35/9$$

۷۱/۲۸-

$$0/1095 : 3 = 0/0365\ g/l\ HCl$$

$$N = 0/0365 : 36/5 = 0/001 = 10^{-3}$$

$$PH = -\log 10^{-3} = 3$$

۷۱/۲۹- الف : ۳- متیل پنتن -۱

$$CH_3-CH_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH=CH_2$$

ب : ۲ - متیل پنتن - ۲

$$CH_3-CH_2-CH=\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}-CH_3$$

پ : ۳،۲ - دی متیل بوتن - ۱

$$CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}=CH_2$$

۷۱/۳۰- استیلن باکلر ابتدا تتراکلراتان می‌دهد :

$$C_2H_2 + 2Cl_2 \rightarrow C_2H_2Cl_4$$

تتراکلراتان‌راباآهك حرارت‌می‌دهندتری‌کلراتیلن‌تولیدمی‌شود:

$$2CHCl_2-CHCl_2 + Ca(OH)_2 \rightarrow$$

$$2CHCl=CCl_2 + CaCl_2 + 2H_2O$$

ازترکیب اضافی‌تری‌کلراتیلن باکلر، پنتاکلراتان تولیدمی‌شود:

$$CHCl=CCl_2 + Cl_2 \rightarrow CHCl_2-CCl_2$$

وبالاخره از حرارت دادن پنتاکلراتان بـا آهك تتراکلر اتیلن (پولی‌کلراتیلن) بدست می‌آید :

$$2CHCl_2-CCl_2 + Ca(OH)_2 \rightarrow$$

$$2CCl_2=CCl_2 + CaCl_2 + 2H_2O$$

پاسخ تستهای ریاضی

۷۱/۳۲- (ب) با فرض $f(x) = ax^n$ داریم :

$$ff(x) = a(ax^n)^n$$

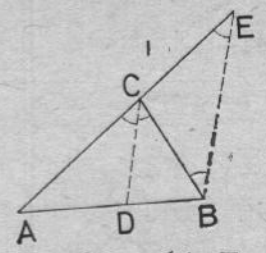
$$a^{n+1}x^{n^2} = 3x^2$$

$$n^2 = 2 \Longrightarrow n = \pm\sqrt{2} \text{ و } a = 3^{\pm\sqrt{2}-1}$$

$$y = \frac{1}{3}(3x)^{\pm\sqrt{2}}$$

۷۱/۳۳- (ج) اگـر CD نیمساز داخلـی مثلث غیر

مشخص ABC باشدو داشته باشیم :



$$\frac{1}{CD}=\frac{1}{CA}+\frac{1}{CB}$$

چون از B موازی با CD رسم کنیم که امتداد AC را در E قطع کند $CE=CB$ بوده و رابطهٔ بالا چنین می‌شود :

$$\frac{1}{CD}=\frac{1}{CA}+\frac{1}{CE}=\frac{CE+CA}{CA.CE}$$

$$\frac{CE}{CD}=\frac{AE}{CA} \quad (1)$$

ازطرف دیگر چون BE با CD موازی است داریم :

$$\frac{BE}{CD}=\frac{AE}{CA} \quad (2)$$

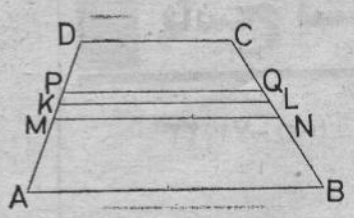
از مقایسهٔ دو تناسب (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$BE=CE$ و چون $CE=CB$ پس مثلث CBE متساوی‌الاضلاع بوده و اندازهٔ زاویهٔ C ازمثلث ABC برابر 120° می‌باشد .

در حالتی‌که اندازهٔ زاویهٔ A برابر با ۶۰ درجه باشد اندازهٔ زاویهٔ C نمی‌تواند ۱۲۰ درجه باشدو درنتیجه درچنین مثلثی رابطهٔ داده شده برقرار نیست .

۷۱/۳۴- (الف)-اولا وقتی MN موازی با دوقاعدهٔ AB و CD از ذوزنقه و واسطهٔ حسابی آنها باشد M وسط AD و N وسط BC خواهد بود .

ثانیاً به فرض $AB=a$ و $CD=b$ داریم :



$$MN=\frac{a+b}{2}$$

$$KL=\sqrt{ab}$$

$$PQ=\frac{2ab}{a+b}$$

اما با توجه به اینکه $a>b$ است داریم :

$$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$$

$$(a+b)^2-4ab>0 \Longrightarrow a+b>2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab} \Longrightarrow MN>KL$$

$$(a+b)^2>4ab \Longrightarrow ab(a+b)^2>4a^2b^2$$

$$ab>\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \Longrightarrow \sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b} \Longrightarrow KL>PQ$$

$$a>b \Longrightarrow \frac{2a}{a+b}>1 \Longrightarrow \frac{2ab}{a+b}>b \Longrightarrow PQ>CD$$

بنابراین داریم :

$$AB>MN>KL>PQ>CD$$

یعنی وضع قرار گرفتن خطوط مطابق با شکل بالاست .

۷۱/۳۵- (ب)- وقتی عبارت x^4-px+q بر $(x-a)^2$ بخش پذیر باشد داریم :

$$x^4-px+q\equiv(x-a)^2(x^2+rx+s)$$

$$x^4-px+q\equiv x^4-(2a-r)x^2+$$

$$+(a^2-2ar+s)x^2-(2as-a^2r)x+a^2s$$

$$\begin{cases} 2ar-r=0 \\ a^2-2ar+s=0 \\ 2as-a^2r=p \\ a^2s=q \end{cases}$$

این دستگاه شامل چهار معادله و پنج مجهول است بنابراین نمی‌توان مقدار مستقل هر یك از مجهولها را تعیین کرد اما می‌توان چهار مجهول را برحسب مجهول پنجم بدست‌آورد. دراین صورت اگر مجهولهای معادله را برحسب q حساب‌کنیم مقدار p برحسب q بدست می‌آیدکه درحقیقت یك رابطه است فقط شامل p و q .

از دستگاه بالا خواهیم داشت :

$$p=4a^2 \text{ و } q=3a^4 \Longrightarrow 27p^4=256p^3$$

۷۱/۳۶- (ج) معادله‌به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=0$$

مجموع دو مقدار غیر منفی فقط وقتی صفر است‌که هرکدام از آنها صفر باشند :

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}=0 \\ y-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Longrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ و } y=\frac{1}{2}$$

۷۱/۳۷- (ب) بنابه‌فرض داریم:

$$\frac{2}{c+a}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$$

از این رابطه بعد ازختصار نتیجه می‌شود :

$$2b^2 = a^2 + c^2$$

۷۱/۳۸- (ب) از رابطهٔ داده شده بعداز اختصارنتیجه می‌شود:

$$x^n z^n = y^{2n}$$

وهرگاه داشته باشیم $xz = y^2$ رابطهٔ بالا و درنتیجه رابطهٔ مفروض برقرار خواهدبود.

۷۱/۳۹- (ج) وقتی دو خطبه معادلات:

$$y = ax + b - 4 \quad \text{و} \quad y = (a-2)x + b + 2$$

برهم عمود باشند داریم :

$$a(a-2) = -1 \Longrightarrow a = 1$$

$$y = x + b - 4 \quad \text{و} \quad y = -x + b - 2$$

$$x + b - 4 = -x + b - 2 \Longrightarrow x = 3$$

در ازاءهمهٔ مقادیر b دوخط درنقطهٔ به‌طول ۳ (وبه‌عرض‌غیر-مشخص) متقاطعند پس طول نقطهٔ‌تلاقی آنها ۲ نمی‌باشد.

۷۱/۴۰- (الف) داریم :

$$\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Longrightarrow \cos 2x = 2 \times \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} - 1 =$$

$$= \frac{-\sqrt{5}-1}{4} \Longrightarrow \cos 4x = 2 \times \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} - 1$$

$$\cos 4x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Longrightarrow \cos x = \cos 4x$$

$$3x = 2K\pi \Longrightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \text{غیرقابل قبول}$$

$$5x = 2K\pi \Longrightarrow x = \frac{2\pi}{5} = 72^\circ$$

۷۱/۴۱- (ج) - اگر بریالهای‌کنج سه وجهی Sxyz سه نقطهٔ A وB وC راچنان انتخاب‌کنیم‌که $SA = SB = SC$ باشد چون مثلث ASB متساوی‌الساقین است نیمساز خارجی زاویهٔ S با ضلع AB موازی است . به‌همین ترتیب معلوم می‌شودکه نیمساز خارجی زاویهٔ BSC با BC و نیمساززاویهٔ خارجی CSA با CA موازی است‌سه‌نیمساززاویه‌های‌خارجی دوبه‌دوی‌یالها با صفحهٔ ABC موازیند، پس‌دریك صفحه قرار دارند .

۷۱/۴۲- (الف)- معادلهٔ داده شده به صورت زیر درمی‌آید :

$$3\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{23}}{6}$$

$$\frac{1+\sqrt{13}}{6} = \cos\alpha \Longrightarrow x = \alpha \quad \text{یا} \quad 2\pi - \alpha$$

$$\frac{1-\sqrt{13}}{6} = \cos\beta \Longrightarrow x = \beta \quad \text{یا} \quad 2\pi - \beta$$

۷۱/۴۳- (ب)-با فرض (b و ه لا b را تعیین می‌کنیم.برای آنکه یکی اززاویه‌های دوخط و PBبرابر ۴۵° یا ۱۳۵° باشد ؛

$$m_{PA} = \frac{b-1}{2} \quad \text{و} \quad m_{PB} = \frac{-b}{5}$$

$$\frac{\frac{b-1}{2} + \frac{b}{5}}{1 - \frac{b(b-1)}{10}} = \pm 1 \Longrightarrow \begin{cases} b = -3 \pm \sqrt{24} \\ b = 4 \pm \sqrt{21} \end{cases}$$

از چهار مقدارکه برای b بدست آمده دومقدار آن مربوط به وقتی است‌که زاویهٔ APB برابر ۴۵ درجه و دومقدار دیگر مربوط به‌وقتی است‌که زاویهٔ APB برابر ۱۳۵ درجه باشد. چون رأس زاویهٔ ۱۳۵° از رأس زاویهٔ ۴۵ درجه به خط AB نزدیکتر است ، برای آنکه زاویهٔ APB برابر ۱۳۵° باشد باید داشته باشیم :

$$b = -3 + \sqrt{24} \quad \text{یا} \quad b = 4 - \sqrt{21}$$

۷۱/۴۴- (ج) - اگر △ به‌معادلهٔ $y = ax + b$ یا $ax - y + b = 0$ فرض شود برای آنکه △ ازسه نقطهٔ A(۳و۴) و B(−۱و−۶) و O(۰و۰) به‌یك فاصله‌باشد باید داشته باشیم :

$$\frac{|3a - 4 + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|-a + 6 + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\begin{cases} 3a + b - 4 = \pm(-a + b + 6) \\ 3a + b - 4 = \pm b \end{cases}$$

از چهار دستگاه بالا یك دستگاه آن غیر ممکن است و از سه دستگاه دیگر نتیجه می‌شود :

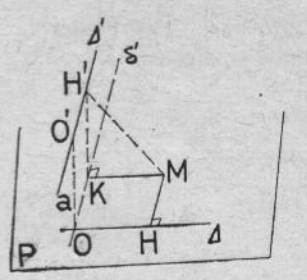
$$a = 6 \quad \text{و} \quad b = -7 \quad \text{یا} \quad a = \frac{4}{3} \quad \text{و} \quad b = -\frac{7}{3} \quad \text{یا}$$

$$a = \frac{5}{2} \quad \text{و} \quad b = -\frac{7}{4}$$

۷۱/۴۵- (ب)- حاصل‌ضرب ریشه‌های‌معادلهٔ‌مفروض به‌شرط $m \neq -1$ برابر با ۱ − است پس برای $tg x$ همواره

دو مقدار مختلف‌العلامت وجود دارد. در ازاء $m=-1$ یك جواب tgx برابر با صفر و جواب دیگر آن برابر با $\pm\infty$ است که مقدار کمان x برابر با صفر و 90° می‌شود.

۷۱/۴۶- به شرط اینکه دو خط متنافر $\triangle$ و $\triangle'$ بر هم عمود باشند (که در چاپ صورت مسئله این شرط از قلم افتاده است) جواب «ب» درست خواهد بود؛ اگر $\triangle$ و $\triangle'$ دو خط متنافر عمود برهم، P صفحهٔ



ماربر $\triangle$ و موازی با $\triangle'$ و M نقطه‌ای از صفحهٔ P باشد بقسمی که اگر MH را عمود بر $\triangle$ و MH' را عمود بر $\triangle'$ رسم کنیم داشته باشیم:

$$MH^2+MH'^2=k^2$$

چون δ' تصویر $\triangle'$ بر صفحهٔ P را رسم کنیم و K تصویر H' را نیز بدست آوریم، با فرض اینکه فاصلهٔ $\triangle'$ از صفحهٔ P برابر با a باشد خواهیم داشت:

$$MH^2+MH'^2=MH^2+MK^2+H'K^2=$$
$$=MH^2+MK^2+a^2=OM^2+a^2=k^2$$
$$OM^2=k^2-a^2$$

به‌شرط $k>a$ مکان دایره‌ای است به‌مرکز O که O پای عمود مشترك دوخط متنافر $\triangle$ و $\triangle'$ است.

تبصره- اگر $\triangle$ و $\triangle'$ برهم عمود نباشند مکان M درصورتی که وجود داشته باشد یك منحنی مقطع مخروطی می‌باشد.

۷۱/۴۷- (ب وج) اگر $M'(x'و y')$ و $M''(x''و y'')$ نقاط نظیر ماکسیمم ومی‌نیمم تابع زیر باشند:

$$y=\frac{x^2-ax}{x+a}\ ،\ a\neq 0$$

چون مشتق تابع را تعیین کرده مساوی صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$x^2+2ax-a^2=0$$

که x' و x'' ریشه‌های این معادله می‌باشند و داریم:

$$x'+x''=-2a \quad و \quad x'x''=-a^2$$
$$|x'-x''|=|a\sqrt{2}|$$

واگر معادلهٔ تابع را نسبت‌به x مرتب کرده مبین معادلهٔ حاصل را برابر با صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$y^2+6ay+a^2=0$$

که y' و y'' ریشه‌های این معادله‌اند:

$$y'+y''=-6a \quad و \quad y'y''=a^2$$
$$|y'-y''|=|2a\sqrt{2}|$$

روابط زیرا را داریم:

$$\frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''}=\frac{y'y''}{x'x''}=-1$$

$$m_{OM'}\cdot m_{OM''}=-1$$

دو خط OM' و OM'' همواره برهم عمودند یعنی $M'M''$ همواره از مبدأ مختصات به زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود. همچنین داریم:

$$\frac{|y'-y''|}{|x'-x''|}=\frac{|2a\sqrt{2}|}{|a\sqrt{2}|}=2$$

$$m_{M'M''}=2$$

یعنی خط $M'M''$ همواره امتداد ثابت دارد.

۷۱/۴۸- (هیچکدام) چون منحنی نمایش تابع را مرتب کنیم داریم:

$$y(\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x+5})^m+(x+1)=0$$

درازاء $x=-1$ داریم $y=0$ وعلاوه برآن؛

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x+5}=1 \Longrightarrow y+x+1=0$$

از دومعادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$x=3 \quad و \quad y=-4 \quad یا \quad x=-6 \quad و \quad y=5$$

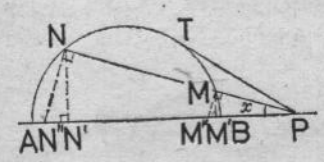
پس منحنی تابع مفروض همواره از سه نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

۷۱/۴۹- (الف) اگرزاویهٔ OPM برابر با x فرض شود داریم:

$$M'N'=MN.\cos x \quad و \quad MN=M''N''.\cos x$$

$$M'N'=M''N''.\cos^2 x \Longrightarrow k=\cos^2 x$$

اگر مماس PT را بر نیمدایره رسم کنیم و α زاویهٔ این مماس با PO باشد داریم:



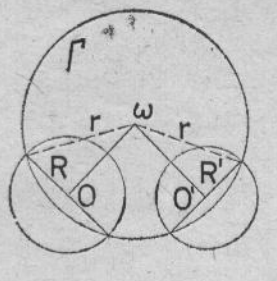
$$0<x<\alpha$$

$$1>\cos x>\cos\alpha$$

$$1>\sqrt{k}>\frac{R}{a\sqrt{2}} \Longrightarrow 1>k>\frac{R^2}{2a^2}$$

۷۱/۵۰-(ج)

اگر ω مرکز دایرهٔ Γ و r شعاع آن و R و R' شعاعهای دو دایرهٔ O و O' و $\omega O = d$ و $\omega O' = d'$ باشد به فرض $R' > R$ داریم:

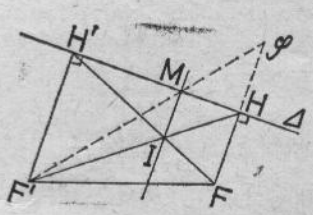


$$d^2 + R^2 = r^2 \quad \text{و} \quad d'^2 + R'^2 = r^2$$

$$d^2 - d'^2 = R'^2 - R^2 = k^2$$

تفاضل مربعات فواصل ω از دونقطهٔ ثابت O و O' مقدار ثابت است پس مکان ω خطی است عمود بر OO'.

۷۱/۵۱- (ج)- اگر F و F' کانونهای یك بیضی و M نقطه‌ای ازآن و $\triangle$ در این نقطه بر بیضی مماس بوده و H و H' تصویرهای F و F' بر $\triangle$ و I نقطهٔ تلاقی FH' و $F'H$ باشد امتداد $F'M$ با امتداد FH در φ متقاطع می‌شود که H وسط $F\varphi$ می‌باشد.



تناسبهای زیر را داریم:

$$\frac{MH}{MH'} = \frac{H\varphi}{H'F'} \quad \text{و} \quad \frac{IH}{HF'} = \frac{HF}{H'F'}$$

$$HF = H\varphi \Longrightarrow \frac{IH}{IF'} = \frac{MH}{MH'}$$

IM با $F'H'$ موازی است پس بر $\triangle$ عمود است و درنقطهٔ M قائم بربیضی است.

۷۱/۵۲- (ب)- دو دایرهٔ O و O' عمود برهم ویك نقطهٔ M درنظر می‌گیریم که مجموع قوتهای آن نسبت به‌دو دایره برابر با صفر باشد. پس داریم:

$$MO^2 - R^2 + MO'^2 - R'^2 = 0$$

$$MO^2 + MO'^2 = R^2 + R'^2 = OO'^2$$

مکان M دایره‌ای است به‌قطر OO'.

۷۱/۵۳- (الف)- درصورتی که عددسه‌رقمی $\overline{aaa}$ در مبنای ۷ با سه رقم متوالی نوشته شود داریم:

$$\overline{aaa} = \left[\overline{(b+2)(b+1)b}\right]_7$$

از بسط این رابطه نتیجه می‌شود:

$$57b - 111a = 105$$

از این معادله با توجه به اینکه $b + 2 < 7$ است تنهایك دسته جواب $a = 3$ و $b = 4$ بدست می‌آید.

۷۱/۵۴- (الف)- اگر a و r به ترتیب خارج قسمت و باقیماندهٔ تقسیم $a - 1$ بر b باشد داریم:

$$\begin{cases} a - 1 = bq + r \\ r < b - 1 \end{cases}$$

از این روابط نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} ab^n - b^n = b^{n+1}q + rb^n \\ rb^n < b^{n+1} - b^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab^n - 1 = b^{n+1}q + (rb^n + b^n - 1) \\ rb^n + b^n - 1 < b^{n+1} \end{cases}$$

ازدستگاه اخیر معلوم می‌شود که خارج قسمت تقسیم $ab^n - 1$ بر b^{n+1} برابر است با q.

۷۱/۵۵-(الف)- اگر عدد $\overline{ababa}$ مضرب ۹۹ باشد داریم:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 11k \\ 3a + 2b = 9k' \end{cases}$$

از این دستگاه فقطیك جواب $a = 6$ و $b = 9$ نتیجه‌می‌شود.

۷۱/۵۶-(ب)- یك کسر وقتی صفر می‌شود که یاصورت آن صفر یا مخرج آن ∞ باشد والبته کسر به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ نباشد. بنابر این:

$$\frac{1 - tg x}{1 + tg^2 x} = 0 \Longrightarrow 1 - tg x = 0 \text{ یا } 1 + tg^2 x = \pm\infty$$

$$0 < x < \pi \left| \begin{array}{ll} 1 - tg x = 0 & \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ 1 + tg^2 x = \pm\infty & \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

پاسخ مسائل کوتاه ومعمائی

۱۱- هرسه نقطهٔ واقع برکره بریك نیمکرهٔ ازآن واقعند. پس احتمال مربوط به‌آن یك می‌باشد.

بقیه پائین صفحهٔ ۲۸۹

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۷۲/۱ـ به فرض اینکه داشته باشیم :

$$x^2+\frac{1}{x^2}=7 \text{ و } x>1$$

اولا مقدار $x-\frac{1}{x}$ راحساب کنید. ثانیاًمقدار x رابدست آورید.

۷۲/۲ـ مربع ABCD به‌طول ضلع ۱۰ مفروض است. برضلع AB نقطهٔ M رادر نظر می‌گیریم که $AM=x$ باشد و عمودهای MI و MJ را بـه ترتیب برقطرهای AC و BD رسم می‌کنیم . همچنین در M عمودی بر AB اخراج می‌کنیم که AC را در E و BD را در F قطع می‌کند .مقدار هریك از دو نسبت $\frac{MI}{MJ}$ و $\frac{MF}{ME}$ را برحسب x حساب کنید و معلوم کنید که آیا می‌توان M را چنان تعیین کرد که دونسبت مزبور با هم برابر باشند ؟

کلاس چهارم ریاضی

۷۲/۳ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

ثابت کنید که اگر حداقل یکی از دو معادلهٔ :

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

$$a'x^2+b'x+c'=0 \qquad (2)$$

ریشهٔ حقیقی نداشته باشد ، دراین‌صورت معادلهٔ زیرریشهٔ حقیقی خواهد داشت :

$$(ab'-a'b)x^2+2(ac'-a'c)x+ \qquad (3)$$
$$+(bc'-b'c)=0$$

۷۲/۴ـ ترجمهٔ **مصطفی گودرزی طائمه**

اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند معادله‌ای تشکیل دهید که دارای چهارریشهٔ زیر باشد:

$$x' \text{ و } x'' \text{ و } \frac{1}{x'} \text{ و } \frac{1}{x''}$$

۷۲/۵ـ از **سعیدفرشاد** دانشجوی ریاضی دانشگاه تبریز

از معادلهٔ زیر مقدار x را بدست آوید :

$$\log_x(x+1)+\log_{x+1}x=\frac{3}{2}$$

۷۲/۶ـ ثابت کنید که اگردر ذوزنقه‌ای یك قطر واسطهٔ هندسی وقطر دیگر واسطهٔ حسابی بین دوقاعده باشد زاویهٔ بین دوقطر قائمه نیست .

۷۲/۷ـ ترجمهٔ **مصطفی گودرزی طائمه**

درمثلث متساوی‌الساقین ABC طول قاعدهٔ BC برابر با a وطول هریك از ساقهای AC و AB برابر با b واندازهٔ زاویهٔ A برابر ۲۰ درجه است . ثابت کنید که :

$$a^3+b^3=3ab^2$$

۷۲/۸ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

دایره‌ای به طول قطر d در ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین محاط شده است. ثابت کنید که طول قطر این ذوزنقه از $d\sqrt{2}$ بزرگتر است .

کلاس پنجم طبیعی

۷۲/۹ـ حدود m را معلوم کنید برای آنکه تابع زیر

همواره صعودی باشد :

$$y = mx^3 + x^2 + 2mx - 3m + 1$$

به ازاء کمترین مقدار m که بدست آورده‌اید ضریب زاویهٔ مماس‌بر منحنی را در نقطه‌ای از آن به طول $x = -8$ حساب کنید .

۷۲/۱۰ ـ از مجید عرفانیان شیشه دانشجوی دانشگاه مشهد

در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر 45° است و tgB و tgC ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ثابت کنید که $a = b + c$ می‌باشد .

کلاس پنجم ریاضی

۷۲/۱۱ـ از جهانشاه کریمی بیرگانی، مسجدسلیمان

اولا منحنیهای به معادلات زیر را دریك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید :

$$(C) : y = 2x^2 + 3x + 1$$

$$(C') : y = 4x^2 + 6x - 2$$

ثانیاً اگر S رأس منحنی C و S' رأس منحنی C' باشد منحنی Γ مکان نقطهٔ P از صفحه را تعیین کنید برای آنکه ضریب زاویه‌ای خط PS دو برابر ضریب زاویه‌ای خط PS' باشد .

ثالثاً منحنی Γ رادرهمان شکل منحنیهای C و C' رسم کنید ونقاطی از آنرا پیداکنیدکه ازآنها پاره خط SS' به‌زاویهٔ قائمه دیده می‌شود .

۷۲/۱۲ـ از اصغر کرامت ششم ریاضی دبیرستان فردوسی رضائیه

اولا اگر $tg\alpha = \frac{3}{7}$ و $tg\beta = 2\sqrt{7}$ باشدنسبتهای مثلثاتی دیگر کمانهای حادهٔ α و β را تعیین کنید .

ثانیاً جوابهای معادلهٔ زیررا برحسب α و β بدست آورید:

$$7\sin 7x - 3\cos 7x = 2\sqrt{14}\cos 3x + \sqrt{2}\sin 3x$$

۷۲/۱۳ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری**

بزرگترین قطریك منشور منتظم با قاعدهٔ شش‌ضلعی ، به طول d بوده و با یال جانبی زاویهٔ α می‌سازد. سطح جانبی و حجم این منشوررابرحسب d و α حساب کنید .

۷۲/۱۴ـ ترجمهٔ **زرگری**

درصورتی که مساحت سطح جانبی یك هرم منتظم مربع‌القاعده S و طول ارتفاع آن h باشد طول ضلع قاعدهٔ هرم را پیداکنید .

کلاس ششم طبیعی

۷۲/۱۵ـ بافرض $A(5,0)$ و $D(-5,0)$ اولا شش ضلعی منتظم ABCDEF رادرصفحهٔ محورهای مختصات رسم کنید و مختصات رأسهای دیگرآن را بدست‌آورید .

ثانیاً هذلولی درنظر می‌گیریم که A و D کانونهای آن بوده از چهار رأس دیگرشش ضلعی مزبور می‌گذرد .مشخصات این هذلولی و معادلهٔ آنرا معین کرده آنرا رسم کنید .

۷۲/۱۶ ـ در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ C برابر با ۶۰ درجه و زاویهٔ A حاده بوده $\sin A = \frac{2}{3}$ است . به فرض $a = BC = 8$ اولا $\sin B$ و ثانیاً اندازه‌های b و c را حساب کنید .

کلاس ششم ریاضی

۷۲/۱۷ـ ترجمهٔ از فرانسه

تابع زیر مفروض است :

$$y = x + \frac{4}{x^2}$$

۱) جدول تغییرات و منحنی C نمایش هندسی تابع را رسم کنید . اگر $\triangle$ مجانب مایل منحنی باشد خط متغیری‌در نظر می‌گیریم که همواره در امتداد $\triangle$ است و منحنی را در دونقطهٔ M_1 و M_0 قطع می‌کند .معادلهٔ مکان I وسط M_1M_2 را پیدا کنید .

۲) نقطهٔ M_0 به‌طول x_0 ازمنحنی را در نظرمی‌گیریم و در این نقطه مماس T_0 را بر منحنی رسم می‌کنیم که این مماس محور yها را در A_0 و خط $\triangle$ را در B_0 ومنحنی را مجدداً در N_0 قطع می‌کند . ثابت کنیدکه :

$$\frac{\overline{M_0A_0}}{\overline{M_0B_0}} = -2 \quad \text{و} \quad \overline{N_0A_0} = \overline{M_0B_0}$$

و از این‌راه طریقهٔ ترسیم هندسی مماس T_0 و همچنین مماس

دیگر T_1 راکه از M_0 بر منحنی رسم می‌شود بدست آورید .

۳) مساحت سطح محصور بین منحنی C و خط $\triangle$ ودو خط به معادلات $x=2$ و $x=\lambda>2$ را برحسب λ حساب کرده و حدآنرا وقتی $\lambda\to+\infty$ تعیین کنید .

۴) منحنی C_a نمایش هندسی تابع زیررا درنظر می گیریم:

$$y=x+\frac{4a^3}{x^2}\ ,\ a\neq 0$$

ثابت کنیدکه هر منحنی C_a ازروی منحنی C با یك تجانس به مرکز O بدست می‌آید . معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P از C_a را پیداکنیدکه مماس درآن نقطه بر منحنی با $x'x$ موازی است.

۷۲/۱۸- ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

مثلث ABC در دایرهٔ به‌مرکز O محاط است و اندازهٔ زاویهٔ A از آن ۵۰ درجه می‌باشد . خطوط CO و BO ضلعهای مقابل را به ترتیب در D و E قطع می‌کنند. اندازهٔ زاویهٔ ADE را حساب کرده نتیجه بگیرید که مثلث ADE متساوی‌الساقین است .

۷۲/۱۹- ترجمهٔ زرگری

در مثلث ABC نقاط M و N به‌ترتیب نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلعهای AC و BC است . خط MN نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و B را به ترتیب در X و Y قطع می‌کند . ثابت کنیدکه سه قطعه خط MX و NY و XY با ضلعهای مثلث متناسبند .

۷۲/۲۰- از اکبر آقا ابراهیمیان دانشجوی دانشگاه آریامهر

ثابت کنیدکه به فرض $y\neq 0$ و x معادلهٔ زیر جواب صحیح ندارد :

$$x^4+y^4=(x^2-y^2)^3$$

۷۲/۲۱- فرستنده: علی رئیس‌زاده ازدبیرستان غزالی رفسنجان

عدد صحیح x چگونه باشد تا عدد :

$$A=13^{2n+1}+5^{6n+2}+x$$

در ازاء جمیع مقادیر n مضرب ۷ باشد .

۷۲/۲۲- ترجمهٔ از فرانسه

در یك صفحه دو دایرهٔ به مرکزهای O و O' و به شعاعهای R و R' با طول خط‌المرکزین $OO'=d$ مفروض است . نقطهٔ M را در صفحهٔ دودایره در نظر گرفته قوت آنرا نسبت به دایرهٔ O با p و نسبت به‌دایرهٔ O' با p' و تصویر M را بر محور اصلی دو دایره با H و بر خط‌المرکزین دو دایره با K نشان می‌دهیم ؛

۱) مقادیر $p+p'$ و pp' را حساب کنید .

۲) به‌فرض $R=R'$ مکان M را تعیین کنید بنابرآنکه داشته باشیم : $pp'=d^2.MK^2$

۷۲/۲۳- ترجمهٔ از فرانسه

در یك صفحه دوخط عمود برهم $x'Ox$ و $y'Oy$ ونقطهٔ ثابت S بر $x'x$ و نقطهٔ متغیر M بر $y'y$ مفروض است.دایرهٔ Γ به‌قطر OM را رسم می‌کنیم و از S به I مرکز این دایره وصل می‌کنیم که آنرا در A و B قطع می‌کند . ثابت کنید با تغییر مکان M خطوط MA و MB بر سهمی ثابتی مماس باقی می‌مانند .

مسائل فیزیك

ترجمه و انتخاب توسط: هوشنگ شریفزاده

۷۲/۲۴- برای کلاسهای چهارم

ظرف استوانه‌ای شکلی به مساحت قاعدهٔ ۰/۲ مترمربع تا ارتفاع ۱/۲ مترآب دارد. جعبه‌ای سنگین به‌ارتفاع ۰/۶ متر وبا مساحت قاعدهٔ ۰/۱ مترمربع و به‌وزن ۲۰۰kgf در ته این ظرف داخل آب قرار دارد . برای بیرون آوردن این جعبه از داخل آب حداقل چه مقدارکار باید انجام داد ؟ از انواع مقاومتها صرف‌نظر می‌شود .

۷۲/۲۵- برای کلاسهای ششم ،فرستنده : **محمددادسرشت** دانشجوی دانشکدهٔ صنعتی

جسمی به جرم m به دیوارهٔ داخلی قیفی تکیه دارد . قیف حول محور تقارن خودکه به‌وضع قائم است با سرعت n دور در ثانیه می‌چرخد . دیوارهٔ قیف باافق زاویهٔ θ می‌سازد و ضریب اصطکاك بین جسم و دیوارهٔ قیف μ بوده مرکزجسم به فاصلهٔ r از محور می‌باشد . حداکثر و حداقل n چقدرباید باشد تا جسم روی دیوارهٔ قیف ساکن بماند.

مسائل شیمی

ترجمه و انتخاب توسط : باقر مظفر زاده

۷۲/۲۶- آب سنگین را بر ۷۳ گرم کلرور ئیدرژن اثر

می‌دهند . واکنش به‌این صورت جریان پیدا می‌کند :

$$HCl + D_2O \rightarrow DCl + HDO$$

پس از مدتی جرم‌کلرور ئیدرژن اولیه به ۷۳/۵ گرم افزایش پیدا می‌کند . معین کنید چه مقدار HCl به DCl تبدیل شده است .

۷۲/۲۷ـ آیا تمام مواد از مولکول تشکیل یافته‌اند .

۷۲/۲۸ـ ازترکیب دو عنصر A و B مادهٔ C تشکیل شده است . مادهٔ A جامد است و جریان برق را بخوبی هدایت می‌کند . مادهٔ B مایع است و جریان برق را هدایت نمی‌کند . مادهٔ C درآب حل می‌شود و محلول‌آن به‌رنگ‌آبی است و براثر عبور جریان برق از محلول آبی آن از نومواد A و B تولید می‌شود . مواد A و B را مشخص‌کنید .

۷۲/۲۹ـ از سوختن یك‌حجم ازیك ئیدرورکربور گازی شکل درکلر ، چهار حجم‌کلر بکار می‌رود . یکی از محصولات این واکنش‌کربن است . بر اثر سوختن یك حجم از همین ئیدروکربور در اکسیژن پنج حجم اکسیژن لازم می‌شود . حجمها در شرایط یکسان‌حرارت و فشاراندازه‌گیری شده‌است. این ئیدروکربور را مشخص‌کنید .

تستهای ریاضی

کلاس چهارم ریاضی

۷۲/۳۰ـ برای آنکه معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$mx^2 - (m+1)x - m + 1 = 0$$

دارای دوجواب مختلف‌العلامت باشد ، لازم و کافی است‌که :

الف ـ $m = 1$ باشد .

ب ـ $m \geq 1$ و $m \neq 0$ باشد .

ج ـ $m > 1$ یا $m < 0$ باشد.

د ـ $\triangle > 0$ و $m < 0$ باشد .

۷۲/۳۱ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که زاویهٔ C قائمه است نقطهٔ M را روی BC انتخاب‌کرده و زاویهٔ AM راباوتر AB به α نشان می‌دهیم . در صورتی‌که داشته‌باشیم:

$$tg A = 2tg(A - \alpha)$$

الف ـ خط AM نیمساز زاویهٔ A است .

ب ـ خط AM میانهٔ ضلع BC است .

ج ـ طول CM نصف طول MB است .

د ـ M نقطهٔ معینی از ضلع BC نمی‌تواند باشد.

۷۲/۳۲ـ اگراندازهٔ یك زاویه ازمثلثی α° واندازه‌های سه زاویه تصاعد حسابی بسازند ، اندازه‌های دو زاویهٔ‌دیگر:

الف ـ به‌ازاء همهٔ مقادیر α مشخص می‌شوند .

ب ـ وقتی مشخص می‌شوندکه $\alpha \neq 60^\circ$ و $0 < \alpha < 180^\circ$ باشد .

ج ـ با شرط $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ مشخص می‌شوند .

د ـ با شرط اینکه α حاده‌باشدمشخص می‌شوند.

۷۲/۳۳ـ AH ارتفاع مثلث ABC است . برای آنکه این مثلث در زاویهٔ A قائمه باشد ، شرط :

$$AH^2 = BH.HC$$

الف ـ به‌تنهائی کافی است .

ب ـ لازم است اما کافی نیست.

ج ـ لازم وکافی است .

د ـ نه لازم است و نه‌کافی .

۷۲/۳۴ـ کلیهٔ عددهای سه رقمی‌که رقم دهگان آنها واسطهٔ هندسی دورقم دیگر باشد عبارتند از :

الف ـ سه عدد. ب ـ شش‌عدد. ج ـ دوعدد.

د ـ چهار عدد .

۷۲/۳۵ـ قطر ذوزنقه‌ای برساق آن عمود بوده و اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ مقابل به این قطر ۴۰ درجه است و قاعدهٔ کوچکتر با یکی از ساقها برابر می‌باشد . در تعیین اندازه‌های زاویه‌های این ذوزنقه ؛

الف ـ فقط یك دسته جواب بدست می‌آید .

ب ـ دو دسته جواب بدست می‌آید .

ج ـ سه دسته جواب بدست می‌آید .

د ـ برای‌تعیین اندازه‌های زوایا شرایط کافی‌وجودندارد.

۷۲/۳۶ـ دو معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم :

$E_1 : \quad ax^2 + bx = 0$

$E_2 : \quad (x+k)(ax^2 + bx) = 0$

الف ـ به ازاء جمیع مقادیر k یکی ازجوابهای معادلهٔ E_2 غیر از جوابهای معادلهٔ E_1 است .

ب ـ به ازاء یك مقداراز k جوابهای معادلهٔ E_2 همان جوابهای معادلهٔ E_1 است .

ج ـ به ازاء دو مقدار از k جوابهای معادلهٔ E_2 همان جوابهای معادلهٔ E_1 است .

د ـ برای اینکه جوابهای معادلهٔ E_2 همان جوابهای معادلهٔ E_1 باشد برای k بیش از دو مقدار بدست می‌آید .

کلاس پنجم ریاضی

۷۲/۳۷ـ می‌دانیم که نمایش هندسی تابع : $y = ax^2 + bx + c$ سهمی نامیده می‌شود . اگرخط به‌معادلهٔ $y = mx$ منحنی نمایش هندسی‌تابع $y = x^2 - 4x + 4$ رادر M و N قطع کند، مکان نقطهٔ P وسط‌پاره‌خط MN عبارتست‌از:

الف ـ قطعه‌ای از یك سهمی . ب ـ یك سهمی کامل .

ج ـ یك خط مستقیم . د ـ یك پاره خط.

۷۲/۳۸ـ کدامیك ازسه تابع زیرهمواره صعودی‌است؟

$$y_1 = \frac{x+1}{-x+1} \quad \text{و} \quad y_2 = \frac{-1}{(2x-3)^3} \quad \text{و} \quad y_3 = (x+2)^3$$

الف ـ فقط y_1 و y_2 ب ـ فقط y_1

ج ـ فقط y_2 و y_3 د ـ هر سه تابع

۷۲/۳۹ـ در چهار وجهی ABCD داریم :

$AB = AC = AD = a$

و زاویهٔ ارتفاع AH از چهار وجهی با هریك ازیالهای‌جانبی برابر ۶۰ درجه است و مثلث BCD نیز متساوی‌الاضلاع است . اگر O نقطه‌ای باشدکه از چهار رأس چهار وجهی به یك فاصله باشد ؛

الف ـ نقطهٔ O بر AH بین A و H واقع است .

ب ـ نقطهٔ O برAH واقع نیست.

ج ـ نقطهٔ O برخط AH واقع است بقسمی‌که A بین O و H است .

د ـ نقطهٔ O بر خط AH واقع است بقسمی‌که H بین O و A است .

۷۲/۴۰ـ درمثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر 45° و $\sin B = \frac{2}{3}$ است . در تعیین اندازهٔ زاویهٔ C ؛

الف ـ تنها یك جواب قابل قبول بدست می‌آید .

ب ـ دو جواب قابل قبول بدست می‌آید .

ج ـ جواب قابل قبول بدست نمی‌آید .

د ـ برای‌تعیین زاویهٔ C معلومات دیگری‌نیزلازم‌است.

۷۲/۴۱ـ به‌فرض اینکه x حاده بوده و داشته باشیم :

$$tg\,y = \frac{1}{239} \quad \text{و} \quad tg(4x - y) = 1$$

مقدار $tg\,x$ برابر است با :

الف ـ ۵ یا $\frac{2}{3}$ ب ـ $\frac{1}{5}$ یا $\frac{2}{3}$

ج ـ ۵ یا $\frac{3}{2}$ د ـ $\frac{1}{5}$ یا $\frac{3}{2}$

۷۲/۴۲ـ اگر طول ارتفاع‌یك‌هرم منتظم مثلث‌القاعده h و طول یال جانبی آن l و زاویهٔ وجه جانبی‌با صفحهٔ قاعده φ باشد، مقدار$tg\varphi$ برابر است با :

الف ـ $\frac{2h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$ ب ـ $\frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$

ج ـ $\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2h}$ د ـ هیچکدام

۷۲/۴۳ـ منحنی C نمایش هندسی تابع:

$y = ax^2 + bx + c$

و نقطهٔ Mراواقع برآن در نظر می‌گیریم . در نقطهٔ M خط $\triangle$ را برمنحنی C مماس می‌کنیم که محور $x'x$ را در T قطع می‌کند و در نقطهٔ M خط $\triangle'$ را عمود بر $\triangle$ رسم می‌کنیم که محور $x'x$ را در N قطع می‌کند . به فرض اینکه مثلث MTN متساوی‌الساقین باشد ، نقطهٔ M ؛

الف ـ منحصر به‌فرد است. ب ـ اصلا وجودندارد.

ج ـ بیش از دو عدد است. د ـ منحصر به دوعدد است.

۷۲/۴۴ـ درصورتی‌که داشته باشیم :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = a$$

مقدار tgx برابر خواهد بود با :

الف - $\frac{a-1}{a+1}$ ب - $\frac{a}{a+1}$ ج - $\frac{a-1}{a+1}$

د - هیچکدام .

کلاس ششم ریاضی

۷۲/۴۵- برای آنکه منحنی و خط به معادله‌های

$$y=\frac{hx^2+1}{x^3-3} \quad \text{و} \quad y=x+h$$

بریکدیگر مماس باشند باید مقدار h برابر باشد با :

الف - ۱ یا ۱- ب - ۱ یا $-\frac{1}{3}$

ج - برای h جواب وجود ندارد د - هیچکدام

۷۲/۴۶- به‌شرط $4p^3+27q^2<0$ منحنی نمایش تابع

$$y=\sqrt[3]{x^3+px+q}$$

الف - یك ماکسیمم ، یك می‌نیمم وسه نقطهٔ عطف دارد.

ب - سه نقطهٔ عطف دارد و برای داشتن ماکسیمم یا می‌نیمم شرط دیگری لازم است .

ج -یك ماکسیمم داردویك می‌نیمم.اما نقطهٔ عطف ندارد.

د - هیچکدام

۷۲/۴۷- در مثلث ABC داریم :

$$A=30^\circ \quad \text{و} \quad a=5 \quad \text{و} \quad b=5\sqrt{2}$$

اندازهٔ زاویهٔ B برابر است با :

الف - 45° یا 135°.

ب - فقط 45°.

ج - فقط 135°.

د -هیچکدام.

۷۲/۴۸- مثلث ABC که درآن زاویهٔ A برابر 30° وبین اضلاع رابطهٔ زیر برقرار است:

$$2a=(b+c)(\sqrt{3}-1)$$

الف - قائم‌الزاویه است .

ب - متساوی‌الساقین است .

ج - نه قائم‌الزاویه است و نه متساوی‌الساقین .

د - نمی‌تواند وجود داشته باشد .

۷۲/۴۹- عددی که‌تعداد مقسوم علیه‌های آن ۱۵ باشد؛

الف - مربع کامل است و در تجزیهٔ آن غیر از یك فقط یك عامل اول وجوددارد .

ب - مربع کامل‌است و در تجزیهٔ آن غیر از یك حتماً دو عامل اول وجود دارد .

ج- مربع کامل است و در تجزیهٔ آن غیر ازیك حداکثر دوعامل اول وجوددارد .

د - هیچکدام.

۷۲/۵۰- اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد ۱۵ وکوچکترین مضرب‌مشترك آنها ۱۸۰ باشد ،ازاین‌دوعدد؛

الف - فقط یك دسته وجود دارد.

ب - فقط دودسته وجود دارد .

ج- بیش از دو دسته وجود دارد د- هیچکدام

۷۲/۵۱- دایرهٔ به‌شعاع‌معلوم R که برخط‌مفروض △ مماس وبر دایرهٔ مفروض O عمود باشد،اگروجودداشته‌باشد؛

الف - منحصر به‌یك‌عدداست .

ب - حداکثر ۲ عدد وجود است .

ج - حداکثر۴ عدد وجود دارد.

د - می‌تواند بیش از ۴ عدد باشد .

۷۲/۵۲- بردایرهٔ مفروض O دو نقطهٔ F و F′ داده شده است . اگر مقصود رسم‌بیضی باشد به‌کانونهای F و F′ بقسمی‌که در دایرهٔ O وتری به‌طول‌معین‌جداکند ؛

الف - رسم این‌بیضی درهرحال ممکن است‌وحداکثر دو عدد ازآن می‌توان رسم‌کرد .

ب- رسم این بیضی درهرحال ممکن‌نیست .

ج - رسم‌این‌بیضی‌در مواردی ممکن‌است‌و دراین‌صورت حداکثر دوعدد ازآن می‌توان رسم‌کرد .

د -رسم‌این بیضی درمواردی ممکن‌است‌و دراین‌صورت فقط یك عدد وجود دارد .

یعنی کدام، نه در اول این دو مثال آمده است ونه‌درجایی‌دیگر مشاهده می‌شود .

مثال سوم «تمام نقاط واقع بـریك صفحه روی یك خـط راست واقعند» را درنظر می گیریم.با توجه به‌اصل «همواره بر دو نقطه یك خط مستقیم مرور می‌کند»

و با توجه به اینکه حل این مثال باکمك استقراءوابتدا از ۲ شروع شده است مـی‌توان نقص استدلال را چنین توضیح داد:

درجبرشرط لازم وکافی برای واقع بودن بر یك راستا را تعریف می‌کنند . تعداد متناهی (حـد اقـل ۳) نقاط را اختیار کرده و بدست می‌آورند :

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\dots$$

یعنی دو نقطـه همـواره بر یـك راستا هستند و این کاری نیست‌که باامتحان نمودن در این مسئله بخصوص صحتش‌واضح شده باشد . و با امتحان می‌توان فهمیدکه این خاصیت ازمرتبهٔ معینی به‌بعد (از ۳ به‌بعد) برقرار نیست

در این مورداگر بخواهیم شرطاول از شرایطدوگانه‌را اسقاط‌کنیم این مثال‌کوتاهتر است .

فرض می‌کنیم (فرض استقراء) گزاره نمای $n=n+1$ را $F(n)$ نـامیده بـاشیم و آن صحیح بـاشد نتیجه مـی‌شود $n+1=(n+1)+1$ و این همان $F(n+1)$ پس بنابراین هرعدد با تالی بلافصل خود برابراست . در اینجا ما شرطاول را ندیده‌گرفتیم . در مثال مذکوردربالا نیزشرط اول به‌درستی آزمایش نشده است .

و اما در بارهٔ مقالهٔ «استقراء ریاضی در هندسه» صفحـهٔ ۵۶۱ از شمـارهٔ ۹ دورهٔ ششم یکان . عبارت را نقـل می‌کنم «... هرگاه عدد k متعلق به S بـاشد نتیجـه می‌شود عـدد $k+1$ هم متعلق به S است و...»

معلوم نیست‌که به‌چه دلیل وقتی $k\in S$ آنگاه :

$(k+1)\in S$ به‌هرحال شاید اشتباه چاپی یا از قلم افتادگی باشد .

ولی همانطورکه‌گذشت هر زیر مجموعه‌ای از N مانند S که یکدار و موروثی باشد با N برابر است یعنی اگر

(I) $1\in S$

(II) به‌ازاء هر n از S اگر تالی آن نیز متعلق به S باشد .

آنگاه $N=S$

* * *

ایراد این استدلال چیست ؟

مثال ... عده‌ای محصل در امتحانی شرکت می‌کنند . ثابت‌کنید جملگی یك نمره خواهندگرفت

حل ـ گزاره نمای (I) «اگرگـروهی از n محصل در امتحانی شرکت‌کنند جملگی یك نمـره مـی‌گیرنـد» را $F(n)$ می‌نامیم بالبداهه ، $F(1)$ صحیح است.اینك (I) را مفروض می‌گیریم و فرض می‌کنیم A مجموعـه‌ای از $n+1$ محصل باشد . دو محصل معین را از این مجموعه‌که a و b می‌نامیم درنظر می‌گیریم و فـرض می‌کنیم B مجموعـهٔ بقیهٔ محصلین باشد . $B\cup\{a\}$ مجمـوعـه‌ای است از n محصل و لهـذا بنابرفرض استقراء اگر این محصلین در امتحانی شرکت نمایند جملگی یك نمره می‌گیرند . پس نمرهٔ هرمحصل متعلق به B مساوی نمرهٔ a است. به همین قیاس بـاتوجـه بـه مجموعهٔ $B\cup\{b\}$ معلوم می‌شود که اگـر محصلین متعلق بـه این مجموعه در امتحانی شرکت‌کنند محصلین متعلق به B همـان نمره‌ای راکه b می‌گیرد خواهندگرفت . یعنی محصلین متعلق به A $(A=B\cup\{a\}\cup\{b\})$ اگر امتحان دهند همه‌یك نمره خواهندگرفت .

ایراد آنجاست‌که راست وصحیح بودن $F(1)$ موضوعی نبوده است‌که صحت آنرا عملا و در این مثال بخصوص واضح گردانیده باشند (بایدصحت $F(2)$ راآزمایش نمود) وبه‌عبارت بهتر چون «=» نسبتی منعکس است پس به ازاء هر شیء این شیء این نسبت «=» را بخود دارد .

مثال ـ ثابت‌کنیدهمهٔ‌خطوط‌غیرموازی‌صفحه‌ازیك‌نقطه‌می‌گذرند.

حل ـ (استقراء ابتدا از ۲) چون حکم به‌ازاء دو خط برقرار است پس فرض می‌کنیم حکم بـه‌ازاء n $(n\geq 2)$ خـط برقـرار باشد و D_1 و D_2 و... و D_n و D_{n+1} دسته‌ای از $n+1$ خط دوبه دو غیر موازی باشد بنا به‌فرض استقراء D_1 و... و D_n از یك نقطه M می‌گذرند . حـال از دستهٔ $n+1$ خط D_1 را حذف می‌کنیم دستهٔ متشکل از n خط D_2 و D_3 و ... و D_{n+1} خط نیز بنابه‌فرض باید از یك نقطه (که‌همان M می‌باشد) بگذرند بنابرایـن خـط D_{n+1} نیز از M مرور خواهدکرد .

نادرستی اثبات‌در آن است‌که صحت حکم به‌ازاء $n = ۲$ امری طبیعی است یعنی هر دوخط غیر موازی درصفحه در یك نقطه (لااقل) مشترك هستند و این خاصیت خاص این مسئلهٔ بخصوص نیست‌که آنرا با عمل تحقیق نموده باشیم . (عملا باید صحت حکم به‌ازاء ۳ = آزمایش می‌شد)

تمرینات

(۱) (استقراء محدود ۱. k عدد طبیعی مفروضی است‌و F خاصیتی می‌دانیم‌که :

(I) $F(۱)$

(II) به‌ازاء هرعددطبیعی n که $۱<n<k$ اگر $F(n)$ آنگاه $F(n+۱)$

ثابت‌کنیدکه هرعضو N_k خاصیت F دارد .

(تعریف : به‌ازاء عدد طبیعی k مجموعهٔ اعداد طبیعی نا بیشتر از k را قطعهٔ N در k یا N_k گویند یعنی

$$(N_k = \{ n | n \in N \& n < k \}$$

(۲) ـ ثابت‌کنید:

(I) $$\prod_{k=۲}^{n} (۱ - \frac{۱}{k}) = \frac{۱}{n}$$

(II) $$\prod_{k=۲}^{n} (۱ - \frac{۱}{k^۲}) = \frac{n+۱}{۲n}$$

(۳) ـ دستوری‌کلی برای محاسبهٔ این عبارات بیابید

(I) $۱ \times ۱! + ۲ \times ۲! + ۳ \times ۳! + \ldots + n \times n!$

(II) $\frac{۱}{۲!} + \frac{۲}{۳!} + \ldots + \frac{n}{(n+۱)!}$

(۴) ـ بعضی ازخواص‌رشتهٔ **فیبو ناچی** که به استقراء چنین تعریف می‌شود :

$(u_۱ = ۱$ و $u_۲ = ۱$ و $u_n = u_{n-۱} + u_{n-۲}$ $n \geq ۳$

(I) $u_۱ + u_۲ + \ldots + u_n = u_{n+۲} - ۱$

(II) $u_۱ + u_۳ + \ldots + n_{۲n-۱} = u_{۲n}$

(III) $u_۲ + u_۴ + \ldots + u_{۲n} = u_{۲n+۱} - ۱$

(IV) $u_۱ - u_۲ + u_۳ - u_۴ + \ldots + u_{۲n-۱} - u_{۲u} = ۱ - u_{۲n-۱}$

(V) $u_۱ - u_۲ + u_۳ - u_۴ + \ldots + (-۱)^{n+۱} u_n = (-۱)^{n+۱} u_{n-۱} + ۱$

(VI) $u_۱^۲ + u_۲^۲ + \ldots + u_n^۲ = u_n . u_{n+۱}$

(VII) $u_{n+۱}^۲ = u_n . u_{n+۲} + (-۱)^n$

(VIII) هردوجملهٔ‌متوالی رشتهٔ‌فیبوناچی باهم متباین‌اند

بقیه از صفحهٔ بعد

ـ ولی این عادی است !آخر ... عادی برای اینکه کیسه‌ها را دوتا دوتا در تمام ترکیباب ممکن‌وزن‌کرده‌ام .

با این حرف، دستهای بابا لوگرن خود بخود پائین افتاد و گفت :

ـ ترجیح می‌دهم‌که پا فشاری نکنم . به‌هرطریقه‌ای‌که شده ، با این کاغذ خواهم توانست وزن هرکدام ازکیسه‌ها را بدست آورم ...

بالاخره،بابا لوگرن مسائلی راکه شاگردش‌مطرح‌ساخته بود ، حل‌کرد . هیچ دلیلی نداردکه شما نیز چنین نکنید . مع‌الوصف اگر نتوانستید این دومسئله را حل‌کنید، می‌توانید به پاسخی‌که در زیر داده شده است ، مراجعه‌کنید .

پاسخ ـ ساده‌ترین طریقه برای استقرارکیسه‌ها به‌منظور بدست آوردن نتایج‌مطلوب به‌صورت زیر است :

۲ ، ۷۸ ، ۱۵۶ ، ۳۹ ، ۴

برای تحقق این استقرار ،کافی است ۵کیسه را جابجا کنیم . سه وضع دیگروجود داردکه دارای همین خاصیت‌باشند ولی چون‌مستلزم حرکت ۷کیسه می‌شود «اقتصادی» ترنیست.

۲	۷۸	۱۵۶	۳۹	۴
۶	۲۹	۱۷۴	۵۸	۳
۳	۵۸	۱۷۴	۲۹	۶

* * *

برای درك بهتر ،کیسه‌های قابل توزین را به a،b،c، e،d به ترتیب اوزان صعودی نمایش می‌دهیم . ده ترکیب کولا عبارتند از ؛

a+b ، a+c ، a+d ، a+e ، b+c
b+d ، b+c ، c+d ، c+e ، d+e

جمع اوزان بدست آمده‌توسط‌کولا ۱۱۵۶ kg می‌شود. چون هروزن چهار مرتبه دراین مجموع ظاهر شده است ، وزن پنج‌کیسه ۲۸۹ kg می‌شود . واضح است‌که‌کمترین‌وزن ثبت شده روی لیست‌کولا یعنی ۱۱۰kg ، مربوط به‌دوکیسهٔ سبکتر است ؛ بزرگترین وزن متعلق به‌دوکیسه است‌که بیشتر از همه وزن دارند و غیره . بطور خلاصه می‌توانیم‌بنویسیم:

$a+b=۱۱۰$ ، $a+c=۱۱۲$ ، $d+e=۱۲۱$ و $c+e=۱۲۰$. بنابراین ، $a+b+d+e=۲۳۱$ و از آنجا $c=۵۸$ بدست می‌آید .

پس ، وزن‌کیسه‌ها عبارتند از :

۵۴ ، ۵۶ ، ۵۸ ، ۵۹ ، ۶۲

داستانهای ریاضی

نوشتهٔ رینـد (Rhind)

ترجمه و تنظیم از: داویدریحان

آسیابان، مگر هنوز خوابی؟

بابا لوگرن، آسیابان محل، شاگردش را مخاطب‌قرار داده با تردید می‌گوید:

ـ کولا، بازهم‌که داری چرت می‌زنی!

حقیقت امر این بودکه‌کولای جوان اغلب تمایل داشت که با پرداختن به اموری‌که نتیجهٔ ذوق مجردش بود، خودرا سرگرم‌کند. برای معاملهٔ‌کیسه‌های آرد، اغلب ازگلوله‌های چرتکه استفاده می‌نمود، هرچند نتایج حاصل غیر ازآن‌چیزی بودکه اربابش انتظار داشت.

این دفعه، کولا درمقابل ۹کیسه قرار داشت. روی‌آنها شمارهٔ ترتیبشان را نوشته و به‌طریقهٔ مخصوصی قرارشان داده بود. چطور است‌که این ترتیب قرارگیری رابه‌صورت‌نمودار نشان دهیم؟

بابا لوگرن برای اینکه شاگردش را از بی‌خبری بدر آورد، فریاد می‌زند:

آسیابان، مگر هنوز خوابی؟

کولا از جای می‌پرد و با نشان دادن‌کیسه‌ها در یک ردیف می‌گوید:

ـ ارباب، چیزی جلب توجه شما را نمی‌کند؟

بابا لوگرن درحالی‌که دندانهایش‌رابهم‌می‌فشارد جواب می‌دهد:

آری، می‌بینم‌که کارهایت‌رابه‌طریقهٔ‌عجیبی انجام‌می‌دهی.. ولی چون‌مردبدجنسی نبود و در ضمن نسبت به‌ترکیبهایی‌که اعداد با هم تشکیل داده بود، بی‌تفاوت نبود، ارقام ثبت شده روی‌کیسه‌هارا از نظر گذرانید.

ـ بخوبی می‌بینم‌که‌عددوسطی، ۱۹۶، برابر باحاصل‌ضرب دوعدد اولی یعنی ۷ و ۲۸ است ولی برای دو عدد آخر، ۳۵ و ۵، چیز قابل توجهی نمی‌بینم.

ـ درست است، ارباب. وقتی داخل شدید، داشتم از خودم می‌پرسیدم که این کیسه‌ها را چگونه جابجا کنم تا عدد وسطی در عین حال‌که برابر با حاصل‌ضرب دو عدد اول است، برای دو عدد آخری هم همین خاصیت را داشته باشد. بدون شك چندین طریق وجود دارد و یکی ازآنها هم مستلزم کمترین جابجایی است و در نتیجه اقتصادی‌تر نیز هست.

ـ احسنت! کولا، با این‌کارت موافقم. بگذار ببینم...

عجباکه آسیابان توانست بهترین ترکیب را بیابد... و چندتای دیگرکه نسبتاً راه حلهای‌خوبی بودند.

* * *

بابا لوگرن، خشنود از عمل‌کولا، فراموش نکرده‌بود که برای چه به‌آنجا آمده است.

ـ کلا! باید پنج‌کیسه تحویل بدهیم. از تو می‌خواهم که آنها را وزن‌کنی.

بابا لوگرن، به‌طرفی رفته و مشغول‌کار خودمی‌شود، وکولا هم مطابق معمول به‌کار محوله‌اش می‌پردازد. هنگامی که بابا لوگرن برگشت، کولاکاغذی به طرفش درازکردکه روی آن ده عدد نوشته بود:

۱۱۰، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱

آرد فروش، دستها را به‌طرف آسمان بلند می‌کند:

ـ این‌کارها چیست؟ از تو خواستم‌که پنج‌کیسه راوزن کنی وتوبه من ده وزن می‌دهی! آنهم وزن‌هایی آنچنان‌عظیم و دور از فکر.