



دوره هفتم، شماره ۲

آبان ۱۳۴۹

شماره مسلسل : ۶۹

### در این شماره :

۶۵	دک عمیق ریاضیات مستلزم دانستن زبان است	مصحّحی
۶۶	-	-
۶۷	-	استاد هشتودی در بهشهر
۶۸	جعفر آقایانی چاوشی	ابن هیثم و مسائل او
۷۲	داوید ریحان	پژوهی کتاب «در قلمرو ریاضیات»
۷۴	-	کتابخانه بکان
۷۵	ترجمه: باقر مظفرزاده	بزین و عدد اکتائی
۸۱	ترجمه: هوشیگش شریفزاده	البات قضیه فرما
۸۳	ترجمه: داوید ریحان	محاسبات عددی و خطاهای
۸۶	ترجمه: مقصود عین اللهی	ریاضیات و ترافیک
۸۷	قوام نحوی	تعمیم چند مسئله حساب
۸۹	ترجمه: فتح اللہ ذرگری	بعضی از انواع توابع
۹۱	مصحّحی	درباره قدر مطلق
۹۵	ترجمه از فرانسه	چکوونگی حل ساده مسائل ریاضی
۹۷	»	روش حل مسائل مکان، پوش و ترسیمات هندسی
۱۰۱	ترجمه: داوید ریحان	صد مسئله جالب و حل آنها
۱۰۶	-	حل مسائل بکان شماره ۶۸
۱۱۸	-	مسائل برای حل
۱۲۱	-	تستهای ریاضی
۱۲۵	ترجمه: داوید ریحان	دانستهای ریاضی، هر آنچه که می‌درخشد
۱۲۷	یوسف حاج محمدی	جلد ۱ اعداد
۱۲۸	-	Problems & Solutions

# میهمان جیب خود

## قابل توجه دبیران ریاضی

پیشنهاد می شود که به منظور تجدید دیدار دبیران ریاضی با یکدیگر و همچنین با استادان ریاضی، هر ماه یک باریک عصر آنها شام دسته جمعی در یکی از باشگاهها یا هتل های مناسب ترتیب داده شود و هر کس، کم شرکت می کند میهمان جیب خودش باشد. احتمالاً اولین جلسه عصر پنجشنبه ۱۲ آذر از ساعت ۱۹ به بعد تشکیل خواهد شد. از همکاران محترم دبیران ریاضی که با این پیشنهاد موافق هستند تقاضا می شود مراتب را با ذکر نشانی خود به دفتر مجله یکان اطلاع دهند.

محصفي

## نمونه درس هن

برخی از دبیران ریاضی اظهار تعایل کرده اند که نمونه ای از تدریس همکاران خود را ملاحظه دیگران ارائه دهند. صفحات مجله یکان در اختیار همه همکارانی است که مایل هستند در این زمینه همکاری کنند. در این میان عالیترین بهره ها نصیب دانش آموزان خواهد شد.

بخشنامه سازمان کتابهای درسی ایران

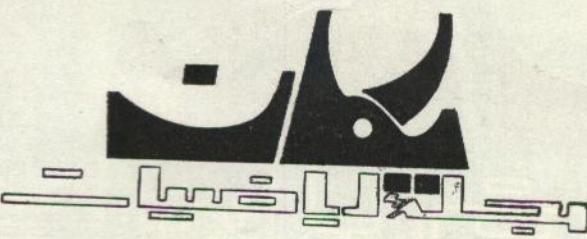
## درباره کتاب درسی رسم فنی

شماره: ۳۶۳۶

تاریخ: ۴۹/۸/۳

اداره کل آموزش و پرورش شهرستان

بطوری که اطلاع دارند تاکنون کتاب درسی واحدی برای رسم فنی وجود نداشت و دانش آموزان از جزو ها و پلی کپی هایی که توسط دبیران سربو ط تهیه می شد یا از کتابهای غیر رسمی استفاده می کردند. چون اخیراً رسم فنی جزء برنامه سال ششم ریاضی شده و ممکن بود به علت طرح سوالات واحد



تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال ده شماره منتشر می شود

دوره هفتم - شماره دوم - شماره سلسل: ۶۹

آبان ۱۳۴۹

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول، عبد الحسین مصطفی

مدیر داخلی: بانو نصرت ملک یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیک شاهزاده، شماره ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۳۳۱۸۱

**YEKAN**

Mathematical Magazine

Volume VII, number 2. Nov. 1970

subscription: 3\$

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

امتحانی، اشکالاتی برای دانش آموزان این کلاس پیش آید، از طرف این سازمان کتاب درسی جدیدی برای رسم فنی تهیه شده که بوسیله میرکت سهامی طبع و نشر کتابهای درسی ایران جزو کتابهای درسی رسمی چاپ و به بهای ۲۷ ریال در دسترس کتابفروشان سراسر کشور قرار گرفته است. خواهشمند است در اجرای ماده ۳ قانون کتابهای درسی لزوم استفاده از این کتاب درسی واحد را به دبیرستانهای آن حوزه تأکید فرمایند.

رئیس سازمان کتابهای درسی ایران جهانگیر شمس آوری

## درک عمیق ریاضیات

# مستلزم دانستن زبان اسدت

بیاد دارم که در یکی از جلسات درس دانشگاه، استاد هشتودی ضمن بحث درباره مسئله‌ای که اساساً ریاضی بود اما در صورت ظاهر آن از علائم و قالبهای متدالوی ریاضی خبری نبود، خطاب به ما دانشجویان اظهار داشت که: «شما ریاضی نمی‌دانید چونکه فارسی و دستور زبان نمی‌دانید».

علت عقب ماندگی بسیاری از محصلین ما در ریاضیات و سایر علوم، بی‌توجهی آنان به زبان فارسی و قواعد دستوری آن است. اما در این مورد تقصیر متوجه محصلین نیست؛ بی‌توجهی آنان از یک جهت مولود روش آموزش فارسی است و از جهت دیگر به خاطر ولنگاری و بی‌بند و باری است که در نوشهای امروزی فارسی مشاهده می‌شود. در مدارس ما نه تنها آموزش زبان و ادبیات فارسی بر اساس صحیح استوار نیست بلکه ارزشیابی آن نیز به صورت صحیح انجام نمی‌گیرد و آنطور که شاید و باید جدی

در اقسام نوشه‌ها و گفتارهایی که توسط روزنامه‌ها، مجلات و کتابها و ازراه سینما، رادیو و تلویزیون بر دانش آموزان عرضه می‌شود، چه در قواعد دستوری و چه در رسم الخط فارسی، چنان تفاوت‌های فاحش مشاهده می‌شود که برای دانش آموز و برای هر فرد دیگر این تصویر بیشتر می‌آید که زبان فارسی، دارای همچنین نه قاعده و ضایعه‌ای نیست.

دانش آموز رشته ریاضی، یا رشته دیگر، به هر ترتیب تاریخ ولادت و وفات چند شاعر را حفظ می کند و در امتحان نهایی حد نصاب نمره قبولی را در ادبیات فارسی بدست می آورد، اما باز هم فارسی بلد نخواهد بود.

ذراین باره آنچه که در درجه اول اهمیت باید مورد توجه قرار گیرد تجدید نظر اساسی در روش آموزش و ارزشیابی زبان فارسی در مدارس، و استاندارد کردن قواعد دستوری و رسم الخط فارسی در سطح تمام کشور می باشد .

در نظر است که از این به بعد ، در هر شماره مجله ، ضمن چاپ شرح حال مختصر یکی از شخصیت‌های معلمان ریاضی ، نظراتی از ایشان را در باره مسائل مختلف آموزش ریاضی استفسار کرده به نظر خوانندگان برسانیم . با فراهم شدن مقدمات لازم، ترتیبی اتخاذ خواهد شد که در این مورد حق شخصیت‌های مقیم شهرستان در مقام خود رعایت بشود.

### آشنایی بیشتر با

## حسین مجدوب زنجانی

در این قبیل موارد، اغلب برای شاگردان قدیم ایشان فرصتی پیش می‌آید که با استاد سابق خودهم صحبت شوند .

\*\*\*

با همه تلاشی که کردیم نتوانستیم موافقت آقای مجدوب را در اظهار بعضی از نظرات بدست آوریم . تنها این توفیق را داشتیم که ایشان بیوگرافی مختصر خود را در اختیار ما گذاشتند که عیناً درزیر چاپ می‌شود .

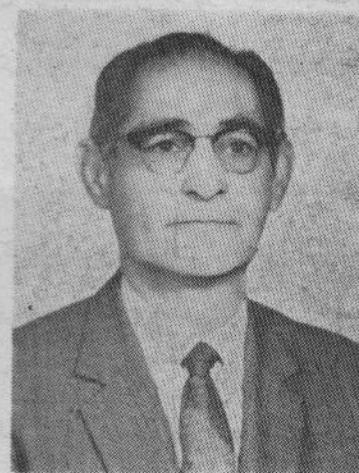
\*\*\*

- ۱- تحصیلات متوسطه را در دبیرستانهای علمیه و پهلوی و دارالفنون به پایان رسانیده‌ام .
- ۲- تحصیلات عالیه را در دانشسرای عالی (رشته ریاضیات) به پایان رسانیده‌ام

۳- در سال ۱۳۲۵ از طرف وزارت آموزش و پژوهش مأموریتی برای مطالعات تربیتی به مدت یک سال در فرانسه داشته‌ام و ضمن انجام این مأموریت ، دریک سمعنار سه ماهه تربیتی که از طرف یوفسکو در Sèvres (حومه پاریس) با شرکت قریب‌هشتمان نفر دبیر از ملیت‌های مختلف تشکیل یافته بود شرکت داشته‌ام ، و بعلوه مطالعاتی در بعضی از رشته‌های علوم ریاضی بخصوص هندسه کرده‌ام .

۴- از اساتید خود که مرا به علوم ریاضی علاقمند ساخته‌اند ، بخصوص از برخوم **غلامحسین رهنما** که در کلاس‌های پنجم و ششم دارالفنون و کلاس اول دانشسرای عالی M.Louis Long در فرانسوی استاد ریاضیات کلاس‌های دوم و سوم دانشسرای عالی با احترام عمیق یاد می‌کنیم .

در آغاز کار ، درخواست خود را با آقای حسین مجدوب در میان گذشتیم «نه تنها بسیاری از استادان و دبیران بر جسته امروز ، بلکه بسیاری از آنان که فعلاً مقامات عالی و حساس



کشور را بعهده دارند زمانی دانش‌آموز‌کلاس آقای مجدوب بوده‌اند .

غیر از آینان ، دیگران که دست‌اندر کار آموزش ریاضی اند ، آقای مجدوب را از راه تألیفات وی مخصوصاً هندسه ترسیمی می‌شناسند . این کتاب از سال ۱۳۱۴ تا سالها

بعد از آن ، کتاب درسی

منحصر و بی رقیب هندسه ترسیمی بود و بعد هم که رقیبهایی پیدا کرد باز کتاب منتخب دبیران در این رشته بود .

آقای مجدوب فعلای در سازمان کتابهای درسی ایران به کار بررسی کتابهای درسی ریاضی اشتغال دارند . بسیاری از کتابهای ریاضی که فعلایه عنوان کتابهای واحد درسی و ازمولفان مختلف چاپ می‌شود در مواردی توسط ایشان و سایر همکارانشان چنان حک و اصلاح شده‌اند که گویا کتابهای تازه‌ای تالیف شده است . ایشان نه تنها متن کتابهای درسی ریاضی ، بلکه نظریاتی را که درباره این کتابها و اصل می‌شود با دقت و موشکافی خاص خود مورد بررسی قرار داده در کتابهای منعکس می‌سازند . گاهی هم صاحبان این نظریات را برای بحث و مذاکره دعوت می‌کنند .

circles and since the area of a circular region is proportional to the square of its diameter, the pythagorean relation  $a^2 + b^2 = c^2$  implies that the area of the large circular region is equal to the sum of the areas of the small circular regions.

The area of the shaded region is equal to the sum of the areas of the small semicircular regions minus the difference of the area of the large semicircular region and the area of the triangular region.

Therefore, the area of the shaded region is equal to the area of the triangular region or 2 square feet.

۵- از سال ۱۳۰۹ تا ۱۳۴۳ با سمت‌های زیر به انجام خدمات فرهنگی مشغول بوده‌ام: دبیر و راهنمای تعلیماتی دیسترانهای تهران - ناظر امتحانات نهایی مرکز و شهرستانها دبیر و راهنمای تعلیماتی فرهنگ اهواز - ریاست فرهنگ اهواز - معاونت و کفالت فرهنگ خوزستان - دبیر و راهنمای تعلیماتی فرهنگ آبادان.

۶- ضمن انجام خدمات فرهنگی در تهران، کتابهایی به شرح زیر تألیف و در دسترس دانش آموزان گذاشته‌ام:

- الف - هندسه رقومی .
- ب - هندسه ترسیمی .
- ج - هندسه متمم مسطحات .
- د - کتاب دستی مثلثات .

۷- از سال ۱۳۰۹ تا ۱۳۲۹ که در تهران انجام وظیفه می‌کرد در غالب سالها عهده دار طرح سؤالات ریاضی امتحانات نهایی دیسترانهای و داوطلبان متفرقه کشور بوده‌ام.

۸- از مهرماه ۱۳۴۳ تاکنون در سازمان کتابهای درسی ایران با سمت ادیتور کتابهای درسی انجام وظیفه می‌کنم.

حسین مجذوب ۱۳۴۹/۷/۱۴

## پرفسور هشت رو دی در بهشهر



با به دعوت آقای عرفانی و انجمن معلمان ریاضی شهرستان بهشهر جناب دکتر هشت رو دی و بانوروز پنجشنبه ۱۶ مهر به بهشهر وارد و مورد استقبال پرشور رئیس آموزش و پرورش و عموم فرهنگیان و قاطبه اهالی قرار گرفتند.

طبق برنامه تنظیمی روز جمعه ۱۷ مهر استاد در تالار ششم بهمن دیستران سعدی تحت عنوان «معرفت و شناسائی علمی» سخنرانی ایراد فرمودند و به

سوالات مطرح شده جواب دادند. روز شنبه ۷/۱۸ توسط آقای محمد حسین احمدی از ایشان پذیری شد و بعد از ظهر آن روز به تهران مراجعت فرمودند.

سفر استاد به بهشهر خاطره قراموش ناشدنی برای فرهنگیان و اهالی این شهرستان بوده است و آمیدواریم تجدیدنشود.

محمد پاشائی کارمند دبیرخانه دانشسرای عالی

# ابن هیثم و مسائل او

ترجمه و تنظیم از ، جعفر آقایانی چاوشی

منابع و مأخذ : مجله مکتب اسلام شماره مسلسل ۱۲۰

تاریخ تمدن اسلام و عرب تألیف : گوستاولوین

تاریخ ریاضی ضمیمه جبر و مقابله خیام تألیف : دکتر غلامحسین مصاحب

مقاله «ابن هیثم پدر فیزیک» از مجله نسل جوان شماره ۱۸

مجله راهنمای کتاب شماره ۸ سال یازدهم

خیام به عنوان عالم جبر تألیف دکتر غلامحسین مصاحب

اعلام المهندين فی الاسلام تألیف احمد تمیمور پاشا

الحسن ابن الهیثم (جلد اول و ثانی) تألیف : مصطفی نصیف بک

LEGENDS, MATH. & NOVELIES, Dr. Ali R. Moéz

LECTURE NOTES ON GEOMETRIC TRANSFORMATIONS ON THE PLANE,

Dr. Ali R. Moéz

موافق و مخالف آشکار است ابن هیثم یکی از درخششته ترین ستارگان فروزان آسمان علم بوده که جهان اسلام نظریش را کمتر بیاد دارد .

مقام علمی ابن هیثم - از القاب و عناوینی از قبیل:  
پدر فیزیک ، پدر مناظر و مرایا ، اعلم المهندين ،  
منجم زبردست ، ریاضیدان بزرگ ، پژوهشک توانا ، که در کتابهای  
فارسی و عربی در وصف ابن هیثم آمده صرف نظر می کنیم و  
 فقط خلاصه ای از آنچه را که علماء و مستشرقین غربی در باره  
 وی گفته اند نقل می کنیم :

دکتر هاکس میرهوف در کتاب «میراث اسلام»  
 می نویسد : «راجح بیکن و تمام دانشمندانی که در قرون  
 وسطی در مبحث نور کار کرده اند آزمایشها خود را از روی  
 کتاب ابن هیثم انجام داده اند . کتابهای ابن هیثم دانشمندانی  
 مانند لتووارد ودا ، نیسی ، جان کپلر را نیز تحت نفوذ  
 خود قرار داده اند .

مستشرق معروف ویدمان که بسیاری از کتب و رسالات  
 علمای اسلامی را به آلمانی برگردانده از ابن هیثم مکرراً  
 نام برده است .

اول ماه رمضان سال جاری (نوامبر ۱۹۷۵) جشن هزاره  
 دانشمند بزرگ جهان اسلام ابن هیثم برگزار می شود . این  
 مقاله به همین مناسب تنظیم شده است .

ابن هیثم یکی از بزرگترین رجال علمی است که بانبوغ  
 و ابتكارات خود ، در عصر خویش در علوم و فنون تحولی  
 شگرف ایجاد نمود و از حیث تمواج فکری و قریحة سیال  
 علمی و معلومات وسیع کم نظیر و بدون مبالغه در تألیف و  
 تصنیف و کثرت کار و فعالیتهای علمی یکی از نوادر روزگار بوده است  
 و تنها چیزی که او را در پرده خفا و خمول نگاهداشتند بدون  
 شک انتشار و نوشتن کتب جدید (فیزیک و طبیعی و ریاضی و  
 غیره) در سرمهین غرب بوده است که نویسنده کان غربی ، آنجا  
 که پای علمای اسلامی به میان می آید روی تعصبات و هدفهای  
 مغرضانه ، از روی عمد بر تکب تعریف شده و به سکوت  
 برگزار می کنند و مترجمان شرقی نیز بدون اینکه اعتراضی  
 به این وضع نمایند روی نداشتن اطلاع از آن می گذرند . با  
 اینهمه هنوز نام ابن هیثم یا عناوین مختلف در لابلای کتابهای  
 دانشمندان خود نمایی کرده و علمای حق شناس بر بزرگداشت  
 این نایخنجه مکتب اسلام کوشیده اند . چنانکه از داوری علمای

اصول اقليدس ، مخروطات آپولونيوس، مقالات ارشميدس در باره مراكز انتقال و مرايا ، نظريات بطليموس در مناظر و كتاب مجسطي بطليموس را در نجوم بدقت مطالعه کرد و برای هر يك حواشي نوشته است . طب جالينوس و فلسفة ومنطق ارسسطو را نيز فراگرفته است .

بطورکلى از انبوه تأليفات او چنین برمى آيد که زندگى سراسر علمی داشته است .

ابن هيشم يکي از اشخاصی است که به بررسی رسائل اخوان الصفا پرداخته است . تأليفات ابن هيشم از ۱۰۵ تجاوز می کند اما متأسفانه جز معدودی آنهم ترجمه های لاتینی آن در دست نیست ، و اما هر مطلب یا مقاله ای که از او دربطون کتابها و بعضی تذکره ها باقی مانده و به دست ما رسیده است در کمال وضوح نمایان ذخیره ای است به غایت بزرگوار شاهکاری است ، شاهوار از علوم و معارف پهناور اسلام . «ابن اصبعه» در كتاب طبقات الاطباء صورت تأليفات رياضي او را آورده است از آن جمله :

- تلخيص مقالات آپولونيوس در قطوع مخروطات، مقاله در حساب هندسي، مقاله در اصول مسائل عددی و تحليل آنها، رساله در برهان شکلی که از ارشميدس در تثليث زاويه بدون برهان ذکر کرده، مقاله در هيئت عالم ، مقاله در شرح مصادرات كتاب اقليدس ، مقاله در استخراج ضلع مکعب (شاید شامل حل هندسي معادله درجه سوم باشد) مقاله در نورکواكب و ...  
اما مهمترین اثر ابن هيشم كتاب «المناظر والمرايا» است. اين كتاب مدتها درخفا و فراموشی بوده تا آنکه **كمال الدين فارسي** نورشناس و رياضي دان ايراني آنرا تلخيص و تنقيح نموده و تحت عنوان : «تنقيح المناظر لذوالبصر والبصر» موسوم ساخت. نام اين كتاب مدتها علمای غربی را به خود معطوف داشت اما از آن اثری نبود تا بالاخره دلالان اروپائی آنرا یافته و از ممالك اسلامی پيرون بردن. يك نسخه اين كتاب را **راموس** فيلسوف قرن شانزدهم یافته و آنرا به **رايشر** داد. او پس از زحمت زياد توانيست آنرا در سال ۱۵۷۲ ميلادي در شهر بال به لاتين ترجمه نماید و به **كاترين دو مدليس** ملکه فرانسه اهدانماید .

این كتاب انقلاب بزرگی در اروپا در مباحث نور و روئیت بوجود آورد ، چنانکه تاقرقن هفدهم كتاب درسي دانشگاه های متبر اروپا بشمار می رفت و حاوی مطالب بسیاره نور بود. در الواقع اساس فيزيك نور کتونى را تشکيل می داد و معلوم نیست که اگر اين كتاب نبود فيزيك نور جديده و موضعی داشت.

**جوج سارتن** در كتاب «دخل تاریخ علوم»،  
بیکو در مقاله خود به نام «مسئله الحسن» بد در مقاله خود در باره الحسن، **هو گنز و سلوز** در مقاله «حل مسئله الحسن» و **بیکن** در آثار خود مکرر از ابن هيشم نام برده اند .

**شاسل** فيزيکدان می گوید : «مأخذ معلومات اروپا در اين رشتہ (فيزيك) كتاب ابن هيشم است .»

عدد دیگری از خاور شناسان و دانشمندان به بررسی آثار ابن هيشم پرداخته اند که عبارتند از :

وستنفلد ، لوکلرک ، سوتور ، ژویه ، کراوی واکس ، ناردو کچی ، شناس ، درایه ، بوئر ، اشمن شیدر ، بالدى ، جرلند .

کسانی که به بررسی کارهای ریاضی ابن هيشم پرداخته اند عبارتند از : وپکه ، بیکر ، بومان ، ...

دو تن از علمای مصری که در باره ابن هيشم مطالع نوشته اند و نگارنده از کتب آنها استفاده کرده است عبارتند از : **مصطفی نصیف بك** که دو كتاب تحت عنوان «بحوثه و کشوفه، الحسن ابن الهیشم» نوشته و به بحث پیرامون کارهای علمی ابن هيشم پرداخته است و اين دو كتاب مجموعاً در ۸۵۰ صفحه از طرف دانشگاه پلی تکنیک مصر انتشار یافته است .

دیگری **احمد قيمور پاشا** علامه و محقق مصری است که شرح حال ابن هيشم را در كتاب «اعلام المهنديين - في الإسلام» بيان کرده است . بسياري از ايرانيان در كتابها و يا مقالات خود به ابن هيشم اشاره نموده اند از جمله : **دكتور خلامحسين مصاحب ، دكتور محسن هشتروodi ، دكتور عليرضا امير معز** که شخص اخير علاوه بر دو كتاب در مجلات رياضي چاپ آمريكا مقالاتی در باره ابن هيشم به زبان انگلسي به چاپ رسانده است .

**خلاصة زندگی نامه ابن هيشم .**  
اسم كامل او :

**الحسن ابو على محمد بن الحسن بن الهیشم .**

در سال ۳۵۴ هجری (۹۶۵ م) در بصره متولد شد ، از جوانی تا هایان عمرش (۱۰۳۹ م) فعالیت علمی داشت، فلسفة، علوم طبیعی و ریاضی از قبیل هندسه و مخروطات و جبر و حساب و مثلثات و ارشماتیقی (خواص اعداد) و مرايا و مجرقه و نجوم و مکانیک عصر خود را مطالعه و تحصیل کرد. کتب گردآوری شده از هند و فارس و یونان را مورد بررسی قرارداده و برای هر یک به نوشتن شرح و حواشی و اضافات اقدام نمود.

و مرایا» خوانده‌اند. گرچه شرح کارهای ابن هیثم از حوصله این مقال خارج و احتیاج به کتاب بزرگی دارد، اما همینقدر باید گفت که: قدمًا مخصوصاً **بِطْلَمِيُوس** موضوع انکسار و شکست نور توجه کرده بودند اما قادر به مطالعه عمیق در این مورد نشدند. سالهای پس از آنها **الكندي** و چند دانشمند دیگر تحقیقات بطلمیوس را دنبال نمودند اما هیچکدام نتوانستند در این کار پیشرفت قابل توجه بدست آورند تا اینکه ابن هیثم موفق شد تحقیقات آنها را در این باب تکمیل کرده و به اتمام برساند و قانون انکسار که هم اکنون در فیزیک نور پا بر جاست همان قانون ابن هیثم می‌باشد و یکی از مباحث کتاب **المناظر** هم به همین مطلب اختصاص دارد.

تقسیم بندی اجسام به سه دسته: کدر، شفاف و نیمه‌شفاف هم که در فیزیک موجود است از اکتشافات ابن هیثم است.

قوانین انکاس که اکنون بخش سهم فیزیک نور را تشکیل می‌دهند از اکتشافات این هیثم است، وی در این باب آزمایشها و تحقیقات فراوان نمود و نظریات ابتکاری بیان داشته که اکنون به اثبات رسیده است و حاکم از نبوغ خارق العاده است. مخصوصاً قانون انکاس را روی کرده و استوانه و سطح مستوی صیقلی آزمایش کرد و دو قانون معروف انکاس نور از اوست.

در باره رؤیت نیز نظریه جالبی ارائه داده و نظریه گذشتگان را در این مورد باطل ساخته است. همچنین تحقیقات وسیعی درباره ساختمندان و عمل چشم انجام داده و یکی از مباحث کتاب **المناظر** نیز به همین مطلب اختصاص دارد.

در مورد عدسیهای مقعر و محدب و همچنین خاصیت اطاق تاریک و رصد ستارگان تحقیقات عمیق نموده و **گالیله** و بسیاری دیگر از دانشمندان پس از او اساس کارهای این هیثم را مورد تحقیق قرار داده و در واقع خوش چین و توشه بردار خرمن علمی او می‌باشد.

در باره نورستارگان و همچنین عکاسی و بسیاری دیگر از مسائل نور نظریات جالبی دارد که اکنون به اثبات رسیده‌اند. ابن هیثم در باره ماهیت نور نیز تئوری مخصوصی ارائه داده و می‌گوید: نور از نوع «انزی و نیر» محسوب می‌شود که این تئوری اکنون مورد تأیید علمی نور شناس است. بحث در این مورد زیاد می‌شود و ما به همین مختصر اکتفا می‌کنیم و علاقمندان را به **مطالمه کتاب عربی** «بحوث و کشوفه، الحسن بن الهیثم» دعوت می‌نمائیم.

اما باز جای تأسف است که اروپائیان بعضی از مباحث این کتاب را هم مانند کارهای دیگر ریاضی دانان اسلامی به علمای غربی نسبت می‌دهند.

**گالیله** را مخترع دورین می‌دانند در حالی که اختراع دورین از این هیثم است و اول در کتاب مناظر خود انواع عدسمی‌های مقعر و محدب را شرح می‌دهد و خواص فیزیکی آنها را بیان می‌کند.

در بیشتر کتب فیزیک مذکور است که **دکارت** اولین کسی بود که قوانین انکسار نور را با آزمایش‌های ساده پیدا کرد و بیشتر مباحث نورهندسی را حل کرده است.

در حالی که حقیقت غیر از این است و این هیثم بوده است که برای اولین بار نظریه‌های جالب و حقیقی داده و اغلب مباحث فی مسائل نور را حل کرده است.

بسیاری دیگر از مباحث کتاب مناظر را به علمای اروپا نسبت می‌دهند از جمله احکام زیر که به **لئوناردو** و **ینچی** نقاش ایتالیائی نسبت می‌دهند:

۱- در فواصل دور اشیائی که رنگ تند دارند مدتی سرئی می‌باشند در حالی که آنها که خاکستری هستند دیده نمی‌شوند.  
۲- اشیائی که دارای رنگ قندھیستند، در نور ضعیف خاکستری و در نور قوی درخشان و برآق دیده می‌شوند.

۳- هر گاه جسمی که رنگ تند دارد، در نور خورشید قرار گیرد و جسم سفیدی که در تاریکی یا نور ضعیف واقع است به آن نزدیک کنیم رنگ اول به دومی ظاهر می‌گردد.

نکته دیگری که باید اضافه کرد این است که علمای غربی **الحسن رابه صورت الحاذن**، ابن هیثم **الحاذنی** یا **الحاذن معرفی** کرده‌اند که گاهی با اسم **ابو جعفر الخاذن** مؤلف کتاب **زیج الصفات** و کتاب **المسائل العددیه** «اشتباه شده است. برخی دیگر به غلط کتابهای نظریه کتاب «الذخیره» رابه ابن هیثم نسبت داده‌اند در حالی که از او نیست.

خلافه اینکه، کتاب **«المناظر»** بزرگترین یادگار علمی این هیثم تا قرن هفدهم میلادی است که در دانشگاه‌های مهم اروپا تدریس می‌شد و جزء کتب رسمی دانشگاه بود. بطور کلی می‌توان آثار و افکار و نظریات علمی ابن هیثم رابه چهار دسته تقسیم کرد:

ریاضی، هیئت و نجوم، طب، نورشناسی.  
**الف-نورشناسی**- بیشتر بقالات و کتابهای این هیثم به این رشته اختصاص دارد و روی این اصل اورا «پدر مناظر و

شیخاً به پیشواز و خیر مقدم گوئی به دروازه مصر روان کشت و در محلی به نام خندق اورا ملاقات نموده با احترام فراوان به مصرا وارد کرده پس از استراحت کوتاهی حاکم ازاوخواست که درباره ادعایش وارد عمل شود. این هیثم به اتفاق چند تن از عماران واهل فن وارد آن مکانی شدند که سالهای پیش بوسیله مهندسان قبل ساخته شده بود این هیثم ضمن معاینه ای که از این مکان بعمل آورد از سبک و نقشه معماری آن متوجه و متعجب شده و در شگفت آمد و برایش یقین شد آنچه ادعا کرده غیر عملی است، و با خود گفت کسانی که چنین شاهاکاری ساخته اند که من از آن دربهت و حیرتمن اگر امکان داشت توائی آن راهم داشتند تا آن چیزی را که من قصد دارم سازند. در این موقع همتش شکست و مهر سکوت بر لب نهاد. آمدند تا رسیدند به جایی که معروف به «شلال» بود و از آنجاهم به مکان دیگری نزول کردند به نام «اسوان» که آب نیل از آن جاری می شد. با معاینه این مکان از دو طرف رود نیل متوجه شد که به خط رفته و نقشه اش محقق نمی شود، در حالی که خجل و افسرده شده بود موضوع رابه حاکم گفت. حاکم هم منصبی به او داد و او را جزو کارمندان خود قرارداد، اما این هیثم پس از مدتی کوتاه متوجه شد که این حاکم ثابت قدم نبوده بی جهت خون مردم را می ریزد. روی این موضوع از این کار پشیمان شده و تظاهر به جنون نمود.

و با این وسیله توائی از دست حاکم نجات یابد. پس از اینکه خلیفه مردمتی از این قضیه گذشت این هیثم از مخفی-گاه خود خارج شده در جنب دانشگاه «جامع الازهر» متوطن گشت و به تالیف و تصنیف کتاب پرداخت.

دانشجویان این دانشگاه از وجود او استفاده و افری نمودند تا اینکه در سال ۳۴۰ وفات کرد.

به قول نویسنده مصری، این هیثم در منحنی تفکر و در طریق بحث، تنها مردی است که در میدان علم شایسته لقب «علامه» می باشد و او از علمای طراز اول اسلامی است که نظریاتش تا قرن نوزدهم بیلادی بر افکار دانشمندان حکومت می کرده است. بعضی از دانشمندان افکار اورا شبیه افکار دکارت دانسته اند و برخی دیگر کارهای اورا در تورشناسی همانند کارهای نیوتن در مکانیک می دانند.

(در شماره بعد مجله درباره مسائل این هیثم بحث خواهد شد)

**ب-نجوم و جغرافیا**- این هیثم مقالاتی نیز به این رشته‌ها اختصاص داده است. از حمله:

شرح مجسٹری و تلخیص آن، مقاله در استخراج فاصله دو شهر، مقاله در هیئت، مقاله در صورت کسوف، مقاله در استخراج خط نصف النهارات، مقاله در نور کواکب وغیره، سارتن در کتاب مدخل تاریخ علوم می گوید:

ابن هیثم و خواجه نصیر الدین طوسی افلاک مربوط به مدارس اسیارات را متماس می پنداشتند. قطب الدین شیرازی اظهار نظر می کند که ممکن است فضای بین آنها وجود داشته باشد.

**ج-هندسه**- در این رشته از علوم گامهای مؤثری برداشت چنانکه اورا قیام کننده در علم هندسه و مهندس علام لقب داده اند و او کسی بود که اشکالات هندسی را به آسانی حل می نمود. از مقالاتش در این باره صرف نظر کرده همینقدر متذکر می شویم که مسئله ارشمیدس را بوسیله تقاطع مقاطع مخروطی حل نمود و آنرا در مقاله ای زیر عنوان: «قول فی قسمة الخط الذى استعمله ارشمیدس فی كتاب الكرة والاستوانة» گنجانید و پکه این مقاله را به انگلیسی ترجمه کرده ضمیمه ترجمه رساله جبر خیام کرد.

**د-جبر و حساب**- در جبر و حساب و ارثما طبق نیز نوشه هایی دارد، از جمله حل اینکه معادله  $x^5 = 2$  به این هیثم منسوب است.

از اینها که بگذریم ماجراهی این هیثم و حاکم را که در اغلب کتابها مذکور است به نظر خواندن گان می رسانیم:

ابن هیثم اولین کسی بود که درباره اقتصاد روی رودخانه نیل فکر کرد و ادعا نمود که: «من قادر هستم وسیله ای بسازم که در همه حال آب رودخانه نیل مورد استفاده قرار گیرد» این ادعای بزرگی بود، از طرفی شهرت این هیثم که در همه جا پیچیده بود سبب شد که خلیفه فاطمی الحاکم بامر الله این هیثم را به سوی خود جلب نماید. این هیثم دانسته بود که آب رود نیل از محلی جاری می شود که در یک طرف مصر واقع است و پیش خود فرمولی ساخته بود، و مدعی بود که اگر در مصر بود کاری می کرد که نفع و افری عاید مردم مصر شود، این شایعات التفات حاکم را نسبت به این هیثم افزون کرد، تا اینکه مخفیانه برای او ثروتی فرستاد و ازاو برای انجام نقشه اش به مصر دعوت نمود. این هیثم از این دعوت استقبال کرده و به مصر عزیمت کرد. حاکم



## در قلمرو ریاضیات

مؤلف : الکساندر پتروویچ دو موریاد

مترجم : پرویز شهریاری

ناشر : شوکت سهامی انتشارات خوارزمی

اندیشی و نظم فکری باشد ، به وسیله‌ای تبدیل شده است که از یک جهت دانشآموز را می‌آزارد و از جهت دیگر در خراب کردن ذهن و آندیشه اونتش اساسی دارد . رابطه ریاضیات با عمل ، که اساسی ترین نیروی محركه پیشرفت آنست ، بکلی فراموش می‌شود و این تصور قوت می‌گیرد که این علم به ظاهر انتزاعی ، چیزی جزبازی با عالم‌ها نیست و راهی است که بشر برای سرگرمی ذهنی خود پیدا کرده است . . .

و هدف مؤلف را در تحریر این کتاب چنین تشریح می‌کند :

... در این کتاب ، مؤلف کوشیده است تا مسائل ماده مربوط به بازیها ، سرگرمیها ، نقشه‌ها ... را از نظر ریاضی بررسی کند و خواننده را وارد تا در همه زمینه‌هایی که در زندگی خود می‌بیند و درباره همه حوادثی که در اطراف او جریان دارد ، با نقطه نظر علمی و ریاضی بنگرد و این قدرت را بدست آورد که از هر مطلب ساده‌ای مسئله‌ای ریاضی بسازد و راهی برای جستجوی قوانین طبیعت ، و آنچه که نظم نامیده می‌شود ، پیدا کند .

در ابتدای کتاب و در مقدمه کتاب ، مؤلف «سرگرمیهای کلاسیک» را که قسمی از مطالب «بازیها و سرگرمیهای ریاضی» است ، به سه‌دسته تقسیم کرده است .

۱- سرگرمیهای مربوط به جستجوی راه حل‌های اصلی مسائلی که در عمل مجموعه جوابهای آنها پایان ناپذیر است .

۲- بازیهای ریاضی ، یعنی بازیهایی که در آنها «حرکتها» طبق قواعد معلومی انجام می‌گیرد و منتهی به شکل معین می‌گردد .

یکان دوره هفتم

مفهوم ریاضیات برای برخی از محصلین و یا آنان که بغیر از ریاضیات دیبرستانی ایده دیگری از این علم ندارند ، در فرمولهای خشک و به ظاهر بلا استفاده خلاصه می‌شود . ظاهرآ هم باید اینطور باشد ! اینگونه فراگیری خشک برای علمی که هر جزء آن از چاشنی بخصوصی بهره‌وراست ، خسته‌کننده بمنظر می‌رسد . حدود ده سال پیش کتابهای مؤید غنای کاربرد این علم ، در کشور ما انگشت شمار بود و محتوای تعداد محدود این کتابها بیشتر غیر از آن چیزی بود که باید از آن انتظار رود . موضوع مواد جدید و واردشدن مباحث به اصطلاح تو(هر چند که در برخی از کشورها ، از خیلی قبل مورد توجه قرار گرفته است) نیاز روز افزون کتابهایی را که ایده‌ای نوین در تفکر ریاضی و بسط آن بدهد ، آشکار ساخت .

ریاضیات تنها به مطالبی که در بیشتر کتابهای درسی دیبرستانی یادانشگاهی مثبت شده است ، اختصاص ندارد . هدف اصلی چگونگی استفاده از آن است . به عنوان مثال ، مسائل مطرحه درباره حرکت مهره‌ها در صفحه شطرنج ، تماماً جنبه ریاضی دارد و درباره آن مسائلی می‌توان مطرح ساخت که شامل ودة انشعابات دیگری از این علم را تشکیل دهد .

\*\*\*

کتاب در قلمرو ریاضیات که توسط آقای پرویز شهریاری ترجمه شده است ، کتابی است که جوابگوی بیشتر این خواسته‌ها بوده و می‌توان گفت که بیشتر مطالب آن اختصاص دارد به سرگرمیهای ریاضی و بررسی جنبه‌های ریاضی یک مسئله عملی . قسمتی از مقدمه مترجم ذیلانقل می‌شود :

... « ریاضیات ، که خود باید عاملی برای درست

مثال فوق ، جوابگوی آن عده از کسانی است که شاید پس از اتمام تحقیقات خود هم مبنای محاسبه لگاریتم‌هاراندازند. در این کتاب ، جنبه‌های تاریخی مسائل تا آنجاکه لازم بوده ، مورد بررسی قرار گرفته است.

مسائل قدیمی در کنار مسائل مطروحة در مورد مطالب به اصطلاح نو (از قبیل منحنیهای باقدار مطلق و منحنیهای تصنیعی و غیره...) جلوه خاصی به کتاب بخشیده است. دریکی از فصول جالب این کتاب (فصل ۱۹) به مسائلی از صفحه شترنبع از قبیل مسائلی در مورد حرکت رخ ، وزیر اسب و پس از آن به مسائلی برای فکر کردن ، برمی‌خوریم. فصل ۲۸ به منحنی گلها تخصیص داده شده است. در این مبحث توسط مختصات قطبی و با معادلاتی به صورت کلی

$$r = a + b \sin \frac{m\varphi}{n}$$

«بر گل منفی»، «بر گل‌های ناتمام» وغیره مشاهده می‌شود در صفحه ۲۶۸ ، معادلات دور «بر گل‌یاس» و «بر گل‌گزنه» با معادلات زیر مشخص شده است:

$$r = 5 + 2 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi$$

$$r = 5 + 2 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi - \sin^2 18 \varphi \cos^4 \frac{\varphi}{2}$$

در ضمن طریقه ترسیم اینگونه منحنیها را ذکر کرده است در همین بخش به منحنیهای مخصوص دیگری برخوردمی کنیم که نمایش آن تنها از نقاط منفرد تشکیل شده است. به عنوان مثال شکل نمایش هندسی  $y = 1 + \sqrt{\log \sin 2\pi nx}$  از عده‌ای نقاط مجزا تشکیل شده که مجموعه آنها با محور  $x$  ها موازی است. از ضرب هرتابع دیگری مانند  $(x) = f(x)$  در این تابع ، تابعی بدست می‌آید که نمایش هندسی آن مجموعه‌ای از نقاط مجزا است. در همین بخش طریقه نمایش ترسیمی معادلات از قبیل  $[x] = y$  داده شده است.

پس از این به زیستهای ریاضی و دستگاه معادلات آنها می‌رسیم.

کتاب از لحاظ مطالب غنی و از لحاظ مبک نگارش و ترجمه مطالب بسیار شیواست. ولی در این کتاب مواردی دیده می‌شود که لازم به توضیح است:

\* در صفحه ۹۷ کتاب سطر سوم از آخر رابطه:

-۳- سرگرمیهایی که در آنها ، بوسیله یک رشته عملیات و کمترین تعداد حرکت به نتیجه‌ای که از قبل داده شده است ، می‌توان رسید.

\*\*\*

کتاب در قلمرو ریاضیاتدارای ۳۸ فصل است که فصل آخر آن به جواب مسائل اختصاص داده شده است. در هر فصل از این کتاب چندین مسئله طرح و حل شده است و یا اینکه حل آن در آخر کتاب داده شده است. در فصول اولیه کتاب ، مسائلی چند در نظریه اعداد ، هم نهشتی‌ها ، دستگاههای مختلف عدد شماری ، کسرهای مسلسل و سرگرمیهای سربوط به حساب وغیره داده شده است. در فصل هشتم ، به روشنی بر می‌خوریم که مربوط به محاسبات لگاریتمی هر عدد به کمک جدول مکعبات اعداد است ، و برای بدست آوردن  $\log x$  آنرا به صورت زیر نمایش می‌دهد.

$$\log x = C_0 + \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{3^2} + \dots$$

یعنی لگاریتم عدد مفروض را به صورت کسری در مبنای ۳ در نظر می‌گیرد. برای عدد ۱۳ عمل بدین صورت است (برطبق تعریف لگاریتم) .

$$C_0 + \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{3^2} + \dots = 13$$

و برای  $C_0 = 1$  بدست می‌آید و پس اربعش طرفین بر  $C_0 = 10$  به رابطه زیر می‌رسد.

$$C_1 + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3^2} = 1/13^2 = 2/197$$

و برای  $C_1$  مقدار صفر بدست می‌آید. برای بدست آوردن بقیه ثوابت از جدولی استفاده شده است که حدود بالایی و پایینی محاسبات را می‌دهد. نتیجه عملیات چنین است:

$$1 + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^6} + \frac{2}{3^{11}} + \frac{1}{3^{16}} < \log 13 < 1 +$$

$$+ \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^6} + \frac{1}{3^{10}} + \dots$$

روش فوق کلیت دارد و می‌توان در باره تمام اعداد مشت بکار برد.

\* در صفحه ۹۷ کتاب، فرم سعیلیک یک عبارت ریاضی به صورت  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^n} = \infty$  چاپ شده که باید به صورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^n} = \infty \quad \text{اصلاح شود.}$$

\* هر چند غلطهای چاپی کتاب از انگشتان دست هم تعاظز نمی‌کند، ولی لازم می‌بود که کتاب دارای غلطنامه باشد. اغلاط چاپی بیشتر در او اخیر کتاب مشاهده می‌شود مثلاً بمادگی باشیم، قسعه، نمطه؛ به جای بسادگی، باشیم، قطعه و نقطه، چاپ شده است (بترتیب در صفحات ۳۸۳ و ۳۹۰، ۳۹۴ و ۳۹۳).

\* در صفحه ۸۱ کتاب و در تمام مطالب بعد از آن از کلمه چوتکه استفاده شده است، ولی با مراجعه به فرنگی لغات به کلمه چرتکه بر می‌خوریم که گویا مقصود مترجم همین کلمه اخیر بوده است.

\*\*\*

نکته جالب این کتاب و کتابهایی تغییر آن که از طرف مؤسسه انتشارات خوارزمی تهیه می‌شود، پاکیزگی اشکال و مطابقت آنها با شکل اصلی است و در ضمن رعایت ارقام فارسی روی اشکال هم، بعمل آمده است. مراجعه به این کتاب و مطالعه مطالب آن به تمام پژوهشگرانی که در این راه قدم نهاده‌اند، پیشنهاد می‌شود و مطمئناً هر کس با خواندن این کتاب به کلیت مطالب آن پی خواهد برد.

$\log_e N = \log N$  نوشته شده است که باید اصلاح شده و به صورت  $\log_e N = \text{Log} N$  نوشته شود. در سطر آخر همین صفحه برای تبدیل لگاریتم‌نیزی به اعشاری رابطه:

$\text{Log} N = 2,3025851 \times \log N$  را داشته است، که معلوم نیست، کدامیک از این لگاریتم‌ها در پایه اعشاری و کدامیک در مبنای تپیزی است. رابطه فوق نیز باید چنین اصلاح شود:

$$\text{Log} N = 2,3025851 \times \log N$$

\* در صفحه ۱۶۵ کتاب، در تمام مسائل مربوط به سرگرمی با دو مینو از کلامه سنگ دومین استفاده شده است و لی در صفحه ۳۷۶ و در جواب همین مسئله و در پایان آن ناگهان از کلمه استخوان به جای سنگ استفاده شده است.

\* در صفحه ۲۵۸ کتاب، سیکلوئید و هیپوسیکلوئید چنین تعریف شده است:

«وقتی که یک دایره به شعاع ۳ روی خط راست بغلتد، سیکلوئید و وقتی که روی یک دایره به شعاع R و در بیرون آن بغلتد اپیسیکلوئید و بالاخره وقتی که روی یک دایره به شعاع R و در داخل آن بغلتد هیپوسیکلوئید و وجود می‌آید باید تذکر داد که این تعریف دقیق نیست و باید چنین اصلاح شود:

«مکان هر نقطه از یک دایره به شعاع ۳ که روی خط راست بغلتد، سیکلوئید و وقتی که روی یک دایره به شعاع R و در بیرون آن بغلتد اپیسیکلوئید و ...».

\* در صفحه ۱۶۲ و در مسئله مربوط به ساختن مربع اولر مفاهیم طبقه و مقوله روش نیست.



## ۱۵۰۰ مسئله جبر

(درس - مسئله - تست)

تهیه شده از منابع خارجی

برای دانش آموزان دوره دوم دبیرستانها و داوطلبان متفرقه و شرکت کنندگان در مسابقات ورزشی دانشگاهها و مدارس عالی تالیف و ترجمه:

مصطفی گودرزی طائمه .. محمود کلانتری  
 مؤسسه مطبوعاتی مروج - بها: ۱۲۰ ریال

## قضایا و مسائل هندسه

برای داوطلبان کنکور - دانش آموزان دوره دوم دو دبیرستان

دانشجویان رشته ریاضی

تألیف: یاسی پور

بها: ۱۸۵ ریال

## نظریه و روش تحقیق آماری

در علوم و مهندسی

تألیف: ک. ا. براآنلی دانشیار دانشگاه شیکاگو

ترجمه و اقتباس: عباس بازرگان

معلم مؤسسه آموزش عالی آمار

نشریه شماره ۳۶ مؤسسه آموزش عالی آمار

در ۵۱۴ صفحه چاپ ۱۳۴۹

## مسائل جبر (هندسه تحلیلی)

برای داوطلبان کنکور، دانشجویان ریاضی

دانش آموزان دوره دوم

ترجمه: یاسی پور

بها: ۷۵ ریال

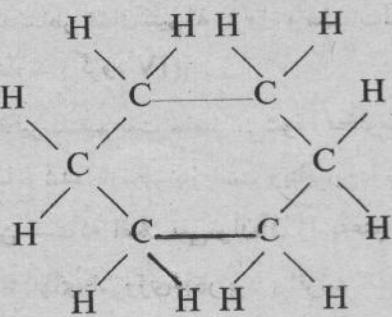
# بنزین و عدد اکتانی

• دنباله از شماره قبل •

ترجمه: باقر مظفرزاده

سوخت با عدد اکتانی عالی تبدیل کرد.  
در جدول زیر رابطه بین ساخته‌ان یولکولی ترکیب و  
عدد اکتانی به خوبی پیداست.

آیا بین خاصیت ضد انفجاری ترکیب و ساخته‌ان یولکولی آن رابطه‌ای وجود دارد؟ امروزه ثابت شده است که چنین رابطه‌ای وجود دارد. به کمک بعضی روشها و با افزودن موادی به سوخت، سوخت با خاصیت ضدانفجاری بد را می‌توان به

عدد اکتانی	فرمول	ترکیب
۱۰۲	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$	پروپان
۹۲	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$	بوتان نرمال
۶۲	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$	هبتان نرمال
۲۶	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$	هگزان نرمال
۰	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$	هبتان نرمال
۲۶	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2$	هگزان نرمال
۷۳	$\text{CH}_3 - \text{CH}(\text{CH}_3) - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2$	۲- متیل پنتان
۹۲	$\text{CH}_3 - \text{C}(\text{CH}_3)_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2$	۲- دی متیل بوتان
۰	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2$	هبتان نرمال
۵۴	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH} = \text{CH}_2$	هبتن ۱-
۷۰	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH} = \text{CH} - \text{CH}_2$	هبتن ۲-
۸۴	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH} = \text{CH} - \text{CH}_2 - \text{CH}_2$	هبتن ۳-
۲۶	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2$	هگزان نرمال
۷۸	$\begin{array}{c} \text{H} & \text{H} & \text{H} \\ & \diagdown & \diagup \\ & \text{C} & \text{C} \\ & \diagup & \diagdown \\ \text{H} & & \text{H} \end{array}$ 	سیکلو هگزان

عدد اکتانی	فرمول	ترکیب
۱۰۲	$\begin{array}{ccccc} & \text{H} & & \text{H} & \\ &   & &   & \\ \text{C} & - & \text{C} & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ \text{HC} & & & & \text{CH} \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & \text{C} & = & \text{C} & \\ &   & &   & \\ & \text{H} & & \text{H} & \end{array}$	بنزول
۱۰۵	$\begin{array}{ccccc} & \text{H} & & \text{H} & \\ &   & &   & \\ \text{C} & - & \text{C} & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ \text{HC} & & & & \text{C} - \text{CH}_3 \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & \text{C} & = & \text{C} & \\ &   & &   & \\ & \text{H} & & \text{H} & \end{array}$	تولوئول

اکتانی به دو طریق میسر است.

اولاً ماده‌ای به سوخت بیفزائیم که یا فرایند سوختن را تنظیم کند، یا دارای عدد اکتانی عالی باشد و درجه اکتانی مخلوط را بالا ببرد. ثانیاً کیفیت بنزین حاصل از تقطیر مستقیم نفت را می‌توان به کمک واکنشهای شیمیایی گوناگون بهتر کرد. در این مورد اجزای مخلوط با خاصیت ضد انفجاری بدین‌جا زاید با عدد اکتانی عالی تبدیل می‌شوند. این تبدیل معمولاً بخارتر حلقوی شدن نیدروکربنهای ردیف چرب صورت می‌گیرد. ابتدا افزودن مواد دیگر به سوخت را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تترا اتیل سرب مایع پیرنگ، ترکیبی از سرب با چهار بنیان اتیل به فرمول  $(\text{C}_2\text{H}_5)_4\text{Pb}$  است. با افزودن ۵٪ درصد تترا اتیل سرب، عدد اکتانی به مقدار قابل ملاحظه بالا می‌رود. بر اثر واکنشهایی که در میلیوندر صورت می‌گیرد با سرب فلزی که از تترا اتیل سرب جدا می‌شود، فرایند سوختن را تنظیم می‌کند. خاصیت ضد انفجاری تترا اتیل سرب ظاهرآ بر اثر این است که در سطح بزرگ ذرات ظرف سرب فلزی که بر اثر تجزیه تولید می‌شود، اتمها در رادیکالهای فعال بسیار که هنوز نسوخته‌اند و در مخلوط باقی مانده‌اند، جذب می‌شوند و در

ترکیبات گروه اول نشان می‌دهند که عدد اکتانی در نیدروکربنهای اشباع شده با زنجیر بازیا افزایش طول زنجیر کاهش می‌یابد. گروه دوم نشان می‌دهد که عدد اکتانی در ترکیبات بازنجیر کربنی شاخه دار زیاد می‌شود. این تفاوت مخصوصاً در مورد هگزان و ایزوپر آن بطور آشکار به چشم می‌خورد. وجود پیوند دو گانه نیز در خاصیت ضد انفجاری نیدروکربن اثر می‌گذارد، بدین معنی که در الفینها خاصیت ضد انفجاری به مراتب بیشتر از ترکیبات اشباع شده نظری است. بعلاوه موقعیت پیوند دو گانه در مولکول نیز مؤثر است. هر چه پیوند دو گانه به وسط مولکول نزدیکتر باشد، عدد اکتانی آن بیشتر است (گروه III). بهم پیوستن زنجیرهای کربنی و تشکیل حلقه نیز خاصیت ضد انفجاری ترکیب را افزایش می‌دهد. این مطلب در مقایسه هگزان نرمال با سیکلو هگزان آشکار می‌شود و بالاخره باید خاطر نشان کنیم که بنزول و مشتقات آن درجات اکتانی عالی دارند (گروه IV)

بنزینی که از تقطیر مستقیم نفت حاصل می‌شود، مخلوطی از نیدروکربنهای اشباع شده بازنجیر باز است و بنابراین درجه اکتانی آن آنقدر پایین است که اصلاح نمی‌توان آن را به عنوان سوخت در موتور ماشینهای امروزی بکار برد. افزایش عدد

کرد. این کار البته ما را به هدف دلخواه می‌رساند اما همه‌این مواد نسبتاً گران‌بها هستند و چون باید ۳۵ تا ۵۵ درصد سوخت را تشکیل دهند، قیمت بنزین بهتر شده خیلی گران می‌شود.



بنزول را که گاهی به مقدار کم در سوختها یافت می‌شود، به عنوان ماده ضد انفجاری بکار برده‌اند. کوششها در راه تبدیل بعضی اجزای بنزین به ترکیباتی با خاصیت ضد انفجاری مناسب‌تر و در نتیجه بهتر کردن کیفیت بنزین موفقیت آمیز بوده است. امروزه روشهای گوناگون وجود دارد. مقدار بنزین حاصل از تقطیر نفت زیاد نیست و بطور متوسط بیشتر از ۱۵-۲۰ درصد آن را تشکیل نمی‌دهد. تازه با عدد اکтанی ناچیز که دارد مستقیماً به عنوان سوخت قابل استفاده نیست، بنزین حاصل از تقطیر مستقیم نفت چه از نظر کیفیت و چه از نظر کمیت نیازمندی‌های امروزی ما را تأمین نمی‌کند. از تقطیر نفت، روغن سنگین به مقدار زیاد بدست می‌آید. چگونه می‌توان این نسبت را به سود اجزای بنزین تغییر داد؟



در سال ۱۸۲۵ فاراده طبیعی دان انگلیسی در مایعی که بر اثر تراکم بخارات حاصل از گرما دادن روغنهای تازه تولید شده بود، کمی بنزول پیدا کرد. این کشف واقعه‌ای هیجان‌انگیز نبود، با وجود این به روشنی نشان می‌داد که گرما

نتیجه فعالیت آنها کاهش می‌یابد. فرایند سوختن آرامتر می‌شود و تا موقعی که جبهه شعله به نزدیکی سوخت نرسیده خود سوزی سوخت باقی‌مانده صورت نمی‌گیرد.

این طریقه بالا بردن عدد اکтанی رویه مرتفه مناسب است، لکن عیوبی خطرناک دارد. تنرا اتیل سرب ترکیبی بسیار سمعی است. تنفس طولانی بنزین «سمی شده» به وسیله تنرا اتیل سرب موجب پایین آمدن فشار خون و بیماری‌های عصبی می‌شود. در زندگی روزمره در موقع استفاده از چنین سوختی اتخاذ تدبیر احتیاطی از واجباب است. بنزین نباید روی پوست بریزد. در هیچ موردی نباید دست، اشیا یا موتور آلوده به روغن را با آن شست. آن را نباید در چراغهای فتیله‌ای و پریموس ریخت. برای جلوگیری از اشتباه رسم براین است که سوخت دارای ترکیبات سربی را با رنگهای مختلف رنگ می‌کنند.



باید توجه داشت که ذرات ظرفی سرب فلزی تولید شده بر اثر تجزیه تنرا اتیل سرب فقط دریک آن ظاهر می‌شود و آن‌ا به اکسید سرب یعنی ترکیب جامد غیر فرار تبدیل می‌شود و جزئی از آن در اطاق سوخت رسوب کند که فوق العاده خطرناک است. بهمین جهت به سوخت دمی برم اتان اضافه می‌کنند تا اکسید سرب به برومور سرب فرار تبدیل شود و به آسانی خارج شود.

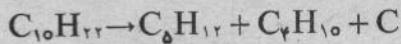
افزایش مقدار ناچیز تنرا اتیل سرب عدد اکтанی رابطه محسوس بالا می‌برد اما حتی این مقدار ناچیز نیز برای سلامتی بی خطر نیست. شیمی

دانان کوشش زیاد بخرج  
دادند تا مواد ضد  
انفجاری با سمیت کمتر  
بدست آورند. تحقیقات  
آنها موفقیت آمیز بود  
اما این مواد مانند

تنرا اتیل آهن و تنرا اتیل نیکل از طرفی اثر تنرا اتیل سرب را ندارند و از طرف دیگر مانند آن اکسیدهای غیر فرار در اطاق سوخت بر جا می‌گذارند.

به منظور رهایی از تنرا اتیل سرب و در عین حال بالا بردن عدد اکтанی مخلوط، چه خوب است به بنزین مایعات ضد انفجاری دیگر مانند ایزو اکتان، بنزول یا تولوئول اضافه

کوچکتر شکسته می‌شوند. مثلاً مولکول دکان  $C_{10}H_{22}$  ممکن است به شکل زیر شکسته شود:



از این معادله شیمیایی برمی‌آید که از یک مولکول دکان نمی‌توان دومولکول پنتان بدست آورد زیرا عده اتمهای تیدروژن دکان ۲۲ است در صورتی که دومولکول پنتان ۲۴ اتم هیدروژن دارد، بهمنین جهت این تجزیه منجر به جدا شدن کردن به صورت عنصری می‌شود که روی دیوارهای دستگاه کراکینگ می‌نشیند و باید به تدریج پاک شود. ایک کار نه تنها نیرویی زیاد رابه هدر می‌دهد، بلکه با تعطیل بوقت دستگاه، مقدار محصول کاهش می‌باید.

البته ممکن است ضمن تجزیه تیدروکربن ترکیبات اشبع نشده هم تشکیل شود. این فرایند را برای دکان می‌توان چنین نشان داد:



با تشکیل پنتن کردن آزاد نمی‌شود اما عملکرد کراکینگ نفت نه کاملاً به صورت اول و نه کاملاً به صورت دوم جریان پیدا نمی‌کند. کل نفتی و تیدروکربن اشبع نشده هم‌زمان با هم تشکیل می‌شوند. با وجود این نتیجه خوب در تشکیل مقدار نسبی محصولات است.

همانطور که دیدیم کل نفتی و ترکیبات اشبع نشده کراکینگ بر اثر کمبود تیدروژن تشکیل می‌شوند، اگر تیدروژن در اطاق واکنش وارد کنند، تشکیل کردن و اولفینها تقویتاً قطع می‌شود. در این مورد می‌گویند تیدروژن‌ناسیون مخرب انجام گرفته است.

یکباره دیگر جدول ارتباط بین عدد اکتانی و ساختمان مولکولی را از نظر بگذرانیم. از این جدول چنین برمی‌آید که عدد اکتانی تیدروکربنهای اشبع نشده از عدد اکتانی الکانهای مربوط بیشتر است. طبیعتاً این تصور بیش می‌آید که تشکیل مقداری زیاد از اولفینها فوق العاده مفیدتر است و چنین بنزین قاعده‌تاً باید دارای خواص ضد انفجاری عالی باشد. اما اولفینها به تشکیل صحن تمايل نشان می‌دهند که بی‌اندازه نامطلوب است،

زیرالولهای کاربوراتور  
سوراخهای خیلی کوچک  
دارند و به آسانی مسدود  
می‌شوند. بنابر این یا  
باید اولفینها را از  
بنزین جدا کرد یا با



دادن روغن سبب تبدیل شیمیایی می‌شود، زیرا در محصولات نهایی موادی جدید پیدا شده بود.

در نیمه دوم قرن ۱۹ دانشمندان این مشاهدات را تأیید کردند. بر تلو نشان داد که بر اثر تجزیه تیدروکربنها به وسیله گربه می‌توان ترکیبات معطره مانند بنزول را بدست آورد. در همین زمان یونگ از روغنهای سنگین تحت فشار و گرما روغنهای سبک تهیه کرد.

بنابر این با بکار بردن گرما و فشار می‌توان مولکولهای بزرگ روغنهای سنگین را به مولکولهای کوچکتر تجزیه کرد و از این راه روغنهای سبک بدست آورد. چنین تجزیه به کمک فشار و حرارت را کراکینگ نامیده‌اند. این کلمه انگلیسی و به معنی شکستن است.

در سال ۱۸۶۵ تهیه نفت چراغ از روغنهای سنگین اهمیت زیاد کسب کرد. در آن زمان چراغهای نفتی مرسوم بود و احتیاج به سوخت هم برای این چراغها زیاد بود. نتایج یونگ با استقبال روبرو شد و به ساختن دستگاههای ساده و ابتدائی برای کراکینگ پرداختند. البته از کراکینگ نه تنها نفت چراغ بلکه اجزایی با نقطه جوش پایین مانند بنزین هم بدست می‌آوردند که در آن زمان موردی برای مصرف آن نمی‌شناختند و بسادگی آن را می‌سوزاندند.

بعد از گاز روشنایی و الکتریسیته به میان آمد و بازار چراغهای نفتی کساد شد. بنا بر این نیاز به سوخت برای چراغ نفتی کاهش یافت. دیگر کراکینگ روغنهای سنگین سودی در برنداشت و دستگاههای ایکی پس از دیگری تعطیل شدند. اما وقتی اتومبیل ظهر کرد، احتیاج به بنزین سال به سال افزایش یافت.

دوباره بیدار اجزای با نقطه جوش پایین که قبل از کراکینگ بدست می‌آمد، افتادند. این بار دستگاههای جدید مجهز کراکینگ برای تهیه بنزین بکار افتاد و معلوم شد که این سوخت از بنزین تقطیر مستقیم نفت بهتر است و فرایند کراکینگ بطور قطع مقام خود را بدست آورد. امروزه بنزین را بیشتر در دستگاههای کراکینگ تهیه می‌کنند. با استفاده از کراکینگ مقدار بنزین

نفت خام از ۱۵-۲۰

درصد به ۴۵-۶۰ درصد رسیده است.



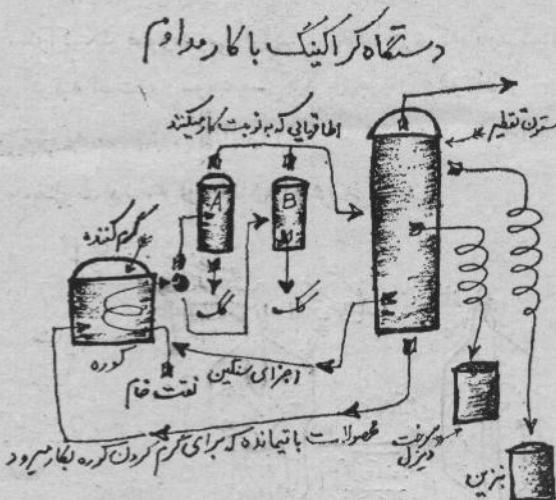
بر اثر حرارت دادن تیدروکربنها تا ۶۰۰-۶۵۰ درجه تحت فشار ۵ تا ۸۵ اتمسفر، مولکولهای بزرگ به مولکولهای

در جریان این واکنشها در کوره لوله‌ای شکل گک تشکیل می‌شود. بهمین جهت پس از مدتی باید دستگاه را از کار انداخت و کک را از لوله جدا کرده کاری آسان نیست.

امروزه کوره‌های اطاق واکنش یک واحد را تشکیل نمی‌دهند. مخلوط گرم شده را به یکی از دو اطاق کراکینگ وارد می‌کنند. کراکینگ در طول مدتی معین صورت می‌گیرد. هنگامی که یک

اعمال بعدی آنها را به سایر ترکیبات تبدیل کرد.

درست است که وجود ترکیبات اشباع نشده در سوخت نامطلوب است اما شیمیدانان به آنها احتیاج دارند - از آنها به آسانی می‌توان محصولات گرانبهای تهیه کرد. بطور یکه معلوم است امتیاز اولفینها بخاطر قابلیت شدیدتر کردن آنها در واکنش‌های شیمیابی است. در بعضی موارد مخصوصاً چنان شرایطی برای کراکینگ بوجود می‌آورند تا اولفینها از نوع پروپیلن تشکیل شوند. تا حال ما در باره کراکینگ حرارتی یعنی شکستن پیدروکربن بر اثر گرما و فشار صحبت می‌کردیم. همین نوع کراکینگ بود که برای نخستین بار در مقیاس صنعتی عملی شد. در سال ۱۹۱۳ اجزای نفت گاز را در اطاق واکنش در حرارت ۴۰۰-۴۷۵ درجه و فشار ۷ اتمسفر به ملاتیت تقطیر کردند. این فرایند به نام بورتن نامیده شده است. در این عمل راهکاری کنند (برای جلوگیری از سوختن و سوراخ شدن دیوارهای) بنابراین دستگاه موقتاً تعطیل می‌شد. اندکی بعد دستگاهی کاملتر باز آمد و بیشتر ساختند. در این دستگاه حرارت را تا ۶۰۰-۵۰۰ درجه و فشار را تا ۷۰-۲۰ اتمسفر افزایش دادند.

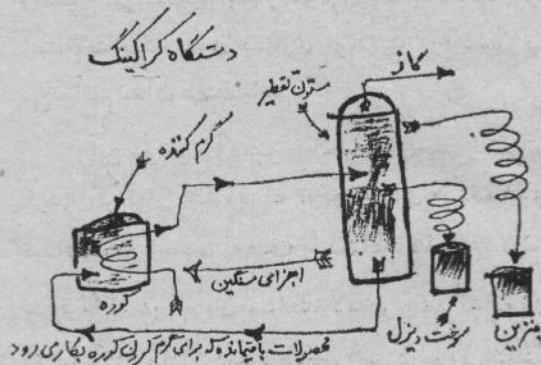


اطاق کار می‌کند، دیگری را تمیز می‌کنند. این دستگام می‌تواند مدام کار کند. در اینجا نیز جدا کردن محصولات کراکینگ در ستون تقطیر انجام می‌شود. در این دستگاهها با قیمانده روغن سنگین را هم می‌توان به روش‌های سبک و بنزین تجزیه کرد که از نظر اقتصادی بسیار با صرفه است.

امروزه بیشتر کراکینگ کاتالیزوری موسوم است که به وسیله

گودری در سال ۱۹۳۴ پیشنهاد شده است. کاتالیزور معمولاً مخلوطی از ترکیبات آلومینیم، منیزیم و سیلیسیم همراه با کمی از اکسیدهای فلزات سنگین است. کراکینگ کاتالیزوری بیشتر در ۵۰۰ درجه حرارت و فشار ۲ اتمسفر صورت می‌گیرد. مدت لازم برای اجرای فرایند کراکینگ کاتالیزوری به مراتب کمتر از کراکینگ حرارتی است. در این طریقه مقدار محصولات گازی واکنش اولفینها کاهش پیدامی کند زیرا این پیدروکربنها یا به ایزومرها تبدیل می‌شوند و یا پولیمریزه می‌شوند و بهمین جهت عدد اکتانی اجزای بنزین بالا می‌رود. کاتالیزور ممکن است ثابت باشد. در این صورت پس از مدتی کوتاه از یک لایه کک پوشیده می‌شود که اثر کاتالیزور را بشدت کم می‌کند. بهمین جهت

این فرایند در اصل به این صورت جریان پیدا می‌کند: نفت به داخل گرم کننده لوله‌ای شکل وارد می‌شود. در ۵۰۰ درجه حرارت و ۲۵ اتمسفر فشار کراکینگ جزئی صورت می‌گیرد و سپس جدا کردن مخلوط در ستون تقطیر بعمل می‌آید. بخارات بنزین در قسمت فوقانی ستون متراکم می‌شود. روغن‌های سنگین همراه با کربن در قسمت تحتانی ستون جمع می‌شود. این



روغن‌های می‌توان به عنوان سوخت بکار برد. اجزای واسطه از نووارد دستگاه کراکینگ می‌شود.

را درستون تقطیر از بنزین رفورمینگ جدا می‌کنند . نوع بنزین حاصل از فرایند رفورمینگ حرارتی بدون کاتالیزور که در فشار ۵۰ اتمسفر و حدود ۵۵۰ درجه حرارت بدست می‌آید از بنزین حاصل از فرایند رفورمینگ کاتالیزور که در حضور ترکیبات مولیدن یا پلاتین صورت می‌گیرد ، متمایز است . برای هر یک از این دونوع رفورمینگ روش‌های وجود دارد که در جزئیات تفاوت دارند . در هر یک از این روشها اصولاً کیفیت بنزین بهتر می‌شود و در اغلب موارد موفق شده‌اند عدد اکтанی را بددو برابر افزایش دهنند . اگر عدد اکтанی بنزین اولیه ۴۵-۴۶ باشد در آن صورت سوخت با عدد اکтанی ۸۸-۸۹ بدست می‌آید که جوابگوی اکثر نیازمندی‌های امروزی است .

از آنچه گفته شد چنین بر می‌آید که مخلوط نیتروکربنها می‌باشد .

به نام بنزین را نمی‌توان تنها از راه تقطیر مستقیم نفت خام

## عدد اکтанی ۱۱



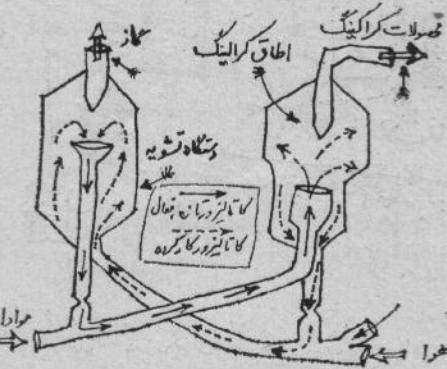
بدست آورد بلکه باید در آن اصلاحاتی بعمل آورد و برای این کار به مهارت فنی و دستگاه‌های پیچیده تر نیاز است . فقط از این راه می‌توان سوختی بدست آورد که برای موتورهای امروزی مناسب باشد و قابلیت گرمادهی حداقل داشته باشد .

### خطاهای (بقیه از صفحه ۵۸)

« چندین اندازه بد به ارزش یک اندازه خوب نمی‌باشد » . وانگهی این یک نتیجه بسیار عمومی است که نه تنها بدون استعمال احتمالات بلکه بدون بسیاری از دقتها در قانون قبول شده ، می‌توانیم به آن دست یابیم .

این موضوع را جز با احتیاط‌های بسیار نمی‌توان تأیید کرد . اگر قرار باشد که یک توپچی برای هدف‌گیری حداقل تعداد ممکن اصابت به هدف را مشاهده کند قبل لازم است که چیزی را که در جریان مشاهده لایتیغیر باشد نشانه روی کند . روشی را که بیان کردیم فقط می‌توانیم در مورد اشیائی بکار ببریم که دوام کامل آنها برای ما شخص است . نجوم و زمین - شناسی تقریباً از جمله دامنه‌های طرد کننده قانون گوس بشمار می‌آیند .

کاتالیزور را به منظور تجدید حیات منظم تشویه می‌کنند و پس از تقریباً یک سال آنرا عوض می‌کنند . در روش کاسلا جدید کاتالیزور را به شکل ذراتی ظرفی لاینقطع در اطاق کاتالیزور وارد می‌کنند و سپس برای تجدید حیات خارج می‌کنند . در این روش کاتالیزور مستحرک است . به این فرایند، فرایند با کاتالیزور احیا شده ، فرایند دور و همچنین فرایند در قشر جوشان نام داده‌اند . همانطور که در طرح دیده می‌شود ، کاتالیزور فعال همراه با مخلوط اولیه گرم وارد اطاق واکنش می‌شود . در اینجا کراکینگ صورت می‌گیرد . کاتالیزور که مورد استفاده قرار گرفته است ، رسوب می‌کند و جریان هوای آن را به دستگاه تشویه می‌برد . کاتالیزور بر اثر تشویه از نفعال شده و با مخلوط اولیه وارد اطاق واکنش می‌شود .



با بکار بردن کراکینگ کاتالیزور می‌توان عدد اکтанی بنزین را حدود ۱۱ واحد در مقایسه با کراکینگ حرارتی افزایش داد . بنابراین بدون خرج اضافی و بدون اعمال تکمیلی بکاره سوخت عالی بدست می‌آید .

با این ترتیب بنزین کراکینگ دارای درجه اکтанی رضایت-بخش است در صورتی که اجزای حاصل از تقطیر مستقیم نفت را بعلت داشتن عدد اکтанی ناچیز نمی‌توان به عنوان سوخت در موتور بکار برد . برای افزایش خاصیت ضد انفجاری بنزین تقطیر مستقیم نفت از فرایند رفورمینگ استفاده می‌کنند .

فرایند رفورمینگ شبیه فرایند کراکینگ است . در این عمل بخارات در حضور کاتالیزور تحت فشار قرار می‌گیرند . در این شرایط نیتروکربنها به مولکلرهای سنتی کوچک تجزیه نمی‌شوند بلکه مولکولهای بازنگیر نرم‌ال اتمهای کرین به مولکولهای بازنگیر شاخه دار تبدیل می‌شوند ، یعنی ایزو مریزا سیون صورت می‌گیرد و یا ترکیبات معطره تشکیل می‌شود .

در هر حال عدد اکтанی سوخت بالا می‌رود . البته فرایند تجزیه نیز به مقدار کم صورت می‌گیرد . گازهای حاصل از این عمل

## آیا ادعای فرما راست بوده است؟

I- اثبات قضیه فرما برای توانهای  $n$ - که  $n$  عدد فرد بزرگتر از ۳ است.

ترجمه: هوشنگ شریف زاده

بنابر این، اگر رابطه پیشنهادی (۱) درست باشد، نتیجه می‌شود که:

$$\text{مضرب } n = 2$$

که غیر ممکن است، پس رابطه (۱) نیز غیر ممکن است.  
فرض می‌کنیم که  $y$  بر  $n$  قابل قسمت باشد، و  $x$  و  $z$  بر  $n$  قابل قسمت نباشند. می‌توان رابطه (۱) را به صورت زیرنوشت:

$$\begin{aligned} y^{n-1} &= z^{n-1} - x^{n-1} \\ &= \left( z^{\frac{n-1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}} \right) \left( z^{\frac{n-1}{2}} + x^{\frac{n-1}{2}} \right) \end{aligned}$$

و نیز  $z$  بنایه فرض فرد و  $x$  زوج است.

فرض می‌کنیم  $y = u \cdot v$  است، که در آن  $u$  و  $v$  دو عدد صحیح فرد و نسبت به هم اول هستند، و فقط یکی از آنها مثلاً  $u$  بر  $n$  قابل قسمت است.

همیشه می‌توان  $u$  و  $v$  رادر  $y$  طوری انتخاب کرد که:

$$u^{n-1} = z^{\frac{n-1}{2}} + x^{\frac{n-1}{2}}$$

$$v^{n-1} = z^{\frac{n-1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}$$

و  
یا بر عکس؟

$$2z^{\frac{n-1}{2}} = u^{n-1} + v^{n-1}$$

$$v^{n-1} = \text{مضرب } n + 1$$

$$u^{n-1} = n \quad \text{مضرب } n$$

بنابر این:

$$2z^{\frac{n-1}{2}} = n + 1 \quad \text{مضرب } n + 1$$

$$4z^{n-1} = n + 1 \quad \text{مضرب } n + 1$$

از طرفی سنتیقاً داریم:

$$z^{n-1} = n + 1$$

قضیه فرما در باره عدم امکان  $x^n + y^n - z^n = 0$  که در آن  $x, y, z$  اعداد صحیح هستند و دو به دو نسبت به هم اولند نمی‌توانسته است با ملاحظات مقدماتی ثابت شود، و بسیاری به این نتیجه رسیده‌اند که شاید فرما هم نتوانسته باشد واقع آن را ثابت کند.

کار خود را با بررسی توانهای  $n$  که  $n$  نخستین عدد فرد است شروع می‌کنیم و روشی را پیروی می‌کنیم که عکس روشنی است که همیشه، همیشه بدون شک، موردنحقیق قرار گرفته است. خواهید دید چرا چنین روشنی را اتخاذ می‌کنیم. برای این منظور اشکالات کار را در چند مرحله بررسی می‌کنیم:  
۱- فرض می‌کنیم که در رابطه پیشنهادی:

$$(1) \quad x^{n-1} + y^{n-1} = z^{n-1}$$

$x$  و  $y$  اعداد صحیح و دو به دو نسبت به هم اول باشند، نیز هیچ یک از آنها بر  $n$  قابل قسمت نباشند.

برطبق قضیه مشهور دیگر فرما داریم:

$$x^{n-1} - 1 = n = \text{مضرب } n$$

$$y^{n-1} - 1 = bn$$

$$z^{n-1} - 1 = cn$$

که  $a, b, c$  اعداد صحیح هستند.

اگر رابطه پیشنهادی (۱) درست باشد، نتیجه می‌شود که:

$$-1 = (a + b - c)n$$

و این رابطه غیرممکن است، پس رابطه (۱) نیز غیرممکن است.

فرض می‌کنیم که  $z$  بر  $n$  قابل قسمت باشد، و  $x$  و  $y$  هیچ‌کدام بر  $n$  قابل قسمت نباشند. می‌توان نوشت:

$$x^{n-1} - 1 = an$$

$$y^{n-1} - 1 = bn$$

$$z^{n-1} - 1 = cn$$

پس

$$4z^{n-1} = n + 4$$

$$3 = n \cdot \text{مضرب}$$

بنابر این باید

$$n - 1 = 2$$

باشد. در نتیجه  $n = 3$  است. یعنی  $n - 1 = 2$  ممکن است.

در حقیقت رابطه (۱) به ازای  $n - 1 = 2$  ممکن است.

برای تمام مقادیر دیگر  $n$ ، جز  $n = 3$ ، با این فرض که  $y$  عددی فرد و مضرب  $n$  باشد، غیرممکن است.

- II- اگر  $n$  فرض می‌کنیم که  $x$  زوج و قابل تقسیم بر

است. در این صورت فرض می‌کنیم:

$$\frac{n-1}{2} = \frac{\alpha(n-1)}{2} \frac{\beta(n-1)}{n} \frac{n-1}{u} \frac{n-1}{v} = \\ = 2st$$

$u$  و  $v$  دو عدد صحیح هستند که در هیچ‌یک از مضارب آنها نه عدد ۲ وجود دارند عدد  $n$ ، و می‌توانند عدد یک یا هر عدد صحیح دیگری که موافق با این شرط است باشند.  $s$  و  $t$  دو عدد صحیح هستند و در صورتی که  $u$  و  $v$  نسبت بهم اول باشند، نسبت بهم اولند.

اگر رابطه (۱) ممکن باشد، نمی‌تواند محقق باشد، مگر اینکه، همانطور که می‌دانیم، با اعدادی به شکل زیر:

$$\frac{n-1}{y} = s - t$$

$$\frac{n-1}{z} = s + t$$

$s$  و  $t$  را هر طور که بخواهیم می‌توانیم انتخاب کنیم.

بر حسب اینکه اعداد ۲ و  $n$  هردو یا هم در یکی از اعداد  $s$  و  $t$  وجود دارند، یا اینکه بطور مجزا وجود دارند، می‌توان

امکانات مختلف را به دو دسته تقسیم کرد.  $\frac{n-1}{x}$  راهنمایش می‌توان طوری اختیار کرد که شامل  $u$  و  $v$  باشد.

مسکن است چنین باشد:

$$\begin{cases} s = \frac{\alpha(n-1)}{2} - \frac{n-1}{u} \\ t = n \frac{\beta(n-1)}{2} \frac{n-1}{v} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s' = \frac{\alpha(n-1)}{2} - \frac{\beta(n-1)}{n} \frac{n-1}{u} \\ t' = v^{\frac{n-1}{2}} \end{array} \right.$$

با اینکه چنین باشد:

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{z} &= \frac{\alpha(n-1)}{2} - \frac{\beta(n-1)}{n} \frac{n-1}{u} + n \cdot \text{مضرب} \\ &= n + \frac{\alpha(n-1)}{2} - 2 \end{aligned}$$

اما برطبق رابطه پیشنهادی (۱)، چنین نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} z^{n-1} - x^{n-1} &= y^{n-1} = \\ &= (z^{\frac{n-1}{2}} + x^{\frac{n-1}{2}})(z^{\frac{n-1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}) \end{aligned}$$

و از آنجا:

$$z^{\frac{n-1}{2}} + x^{\frac{n-1}{2}} = y^{n-1}$$

$$z^{\frac{n-1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}} = y^{n-1}$$

که  $y_1$  و  $y_2$  نسبت بهم اولند و  $y_1, y_2 = y$  است.

$$y_1^{n-1} = n \cdot x^{\frac{n-1}{2}} + 1 \quad \text{مضرب}$$

نیز  $+ 1$  مضرب  $y_2^{n-1} = n$  است نتیجه می‌شود:

$$z^{\frac{n-1}{2}} = n + 1 \quad \text{مضرب}$$

در نتیجه:

$$\frac{\alpha(n-1)}{2} - 1 = n \cdot \text{مضرب}$$

$$\frac{\alpha(n-1)}{2} - 4 = n \cdot \text{مضرب}$$

$$\frac{\alpha(n-1)}{2} - 1 = n \cdot \text{مضرب} \quad \text{و چون}$$

است، نتیجه می‌شود که مضرب  $n = 3$  و از آنجا  $n = 3$  با  $n - 1 = 2$ ، و این در واقع همان حالتی است که برای رابطه پیشنهادی (۱) ممکن است.

دنبله دارد

# محاسبات عددی و خطاهای

ترجمه: داوید ریحان

از کتاب: Les Mathématiques Utiles

## III - خطای در فیزیک

خطای تعویض می‌باشد. می‌توانیم برای راحتی و بدون آنکه سوجه باشد فرض کنیم که مقداری واقعی وجود دارد، خطای تعریف مربوط به آنرا که در نظر بگیریم در حکم خطای تخمینی در محاسبه محض می‌باشد. با این فرض لائق می‌توانیم پدیده‌ها را تقریباً صحیح، امانه کامل، به حساب بیاوریم. با این ترتیب قبول کرده‌ایم که هر خطای مربوط به مقدار عدد که محسوس‌آزاد این خطای تعریف کمتر باشد قابل چشم‌پوشی است.

**۲- تکرار اندازه‌ها** موارد ایراد دار را کنار می‌گذاریم. برای هیچ کس جای شکی باقی نیست که یک کمیت فیزیکی را بالاندازه گیریهای مکرر نمی‌توان اصلاح کرد.

چه مقداری را باید انتخاب کرد؟ تقریباً عموم مردم کما- بیش موافقند که باید میانگین حسابی را برگزید: در اینجا موضوع اندازه گیری مستقیم مطرح است. در مورد اندازه گیریهای غیرمستقیم، که در آنجا عمدتاً توجه بر روی نتایج تابعی است، بعد آن بحث خواهد شد. اما انتخاب میانگین مسائلی را مطرح می‌سازد که قبل از آنها پاسخ داد. اولاً اینکه آیا این موضوع محقق شده است؟ این خود داستانی است که آنرا برای بعد نگاه می‌داریم. دیگر اینکه چگونه برای اندازه های مختلف اعتبارهایی در خور آنها قائل شویم. مفهوم وزن را در نظر می‌گیریم؛ وقتی می‌گوئیم وزنی به اندازه ۲ است به این معنی است که در آن دو دفعه مقدار وزن یک وجود دارد. بنابراین در میانگین اندازه های دارای ضریب ۲ می‌باشد؛ می‌توانیم بطور کلی وزنهای بالاندازه های غیر صحیح را در نظر بگیریم. معذلک، انتخاب این وزنهای (به مناسب تشابه محاسبه میانگین با تعیین مرکز ثقل) بسیار اختیاری است. از این جهت اغلب ترجیح دارد که اندازه مشکوک را کنار بگذاریم.

فقط مسئله تحقیق میانگین حسابی باقی می‌ماند که مسئله خطاهای اندازه گیری را کلا به میان می‌کشد.

باید بگوئیم که خود مسئله پیچیده و مورد بحث و مجادله است. ما هم ابداً قصد تهیه پاسخ مسئله را نداریم. اشخاص صلاحیتداری در این باره مشغول مطالعه می‌باشند. در اینجا فقط عناصر مسئله را معرفی می‌کنیم:

**۱- خطای تعریف** - قبل یادآوری می‌کنیم که هر- گونه مراجعة به نظریه خطاهای مربوط به محاسبه محض، اختیاری است: در حساب، مقدار واقعی همیشه معلوم است اما نباید گفت که آنرا می‌شناسیم؛ در آنجا اگر عددی به صورت کسر اعشار یا متعارفی باشد شناخته شده و معلوم است.

اما با این شرایط ممکن است که عددی کاملاً شناخته شده نباشد که اعداد اصم از این نوع اند، اما چون تعریف آن مشخص است، کلمه خطای دارای معنی واضح می‌باشد. در آنجا موضوع خطای عبارت است از میزان اختلاف بین مقدار واقعی عدد و مقدار آن که به عدد اعشاری تو شده است. می‌توانیم همواره عددی ساده را انتخاب کنیم که بطور حتم بزرگتر از مقدار خطای باشد.

در فیزیک تجربی، تنها بوسیله مجموعه‌ای از اندازه‌ها که باید تعیین شوند یک مقدار مشخص می‌شود. مقدار واقعی از قبل داده نشده است تا بتوانیم ذر رباره مقدار این اندازه‌ها قضاویت کنیم. موضوع مهمتر آنکه، از مطالعه عمیق مسائل مربوط به علم مقیاسات بر می‌آید که این مقادیر واقعی رانمی‌توانیم به صورت عدد ناشناخته تلقی کنیم که در هر حال وجود خواهد داشت. مثلاً با همه دقیقی که در ساختن متر نمونه بکار رفته است دارای خطوط مستقیم به معنی ریاضی نمی‌باشد؛ خطوط آن در زیر میکریسک پرازبر آمد گیها و تورفتگیها است، برای این خطوط نمی‌توان عددی به عنوان اندازه به معنی دقیق ریاضی تعریف کرد. به این ترتیب، هر اندازه فیزیکی از ابتدا شامل خطایی است که

مسئله انتخاب بهترین مقدار باشد . می توانیم اینطور تصور کنیم که نتیجه یک اندازه گیری با یک واحد تقریب معین شده باشد ، اما خطاهای حداکثر عموماً بیشتر از خطاهای حداقل باشند . در این حالت چه مقداری را باید برگزینیم ؟ در موارد دیگر نظیر این ، مثلاً وقتی که خطا نسبت به خطاهای دیگر کاملاً بارز است دچار شک و تردید می شویم . اینگونه مقادیر مشکوک را کنار می گذاریم ، اما تمیز آنها از مقادیر واقعی مجهول متضمن بکاربردن قانونی از احتمالات است . این موضوع حائز اهمیت است و طرفداران احتمالات با استفاده از آن ثابت می کنند که چگونه می توان از یک قانون تصحیح گذاشت کرد ، هر چند که این تجزیه مقادیر متضمن قانونی باشد که بدشخاص شده باشد .

اما کاربرد قانون احتمالات در نظریه خطاهای مشاهده ای همیشه سودمند نیست . بدون بحث درباره انتخاب این قانون ، بفهم احتمالات به خود خود کاملاً مشکوک است . احتمالات را اینطور تعریف می کنند : نسبت تعداد حالات مساعد به تعداد حالات ممکن . از این تعریف تعیین تجربی احتمال میسر نمی باشد . در صورتی که بخواهیم احتمالات را از روی آمار تعریف کنیم به اشکالات زیادی بر می خوریم که بحث آن در اینجا موردی ندارد . بهترین موارد استعمال احتمالات در فیزیک سولکولی (گازها) می باشد که نتایج آن در آنجا به صورت همه جانبه ای تحقیق یافته است . اما این بوقتی را نمی توان به حساب خطاهای گذاشت زیرا در اینجا تحقیقات آن کمتر به نتیجه رسیده است .

**قانون گوس** - علی رغم بحثهایی که در باره امکان قبول سایر قوانین وجود دارد ، این یکی تنها قانونی است که عملاً پذیرفته شده است - در اینجا توجیه این قانون و همچنین موارد نادر نادرست آن مورد ندارد .

برطبق قانون گوس اگر اندازه  $\alpha$  بست آمده باشد احتمال اینکه مقدار قابل قبول بین  $x + \alpha$  و  $x - \alpha$  محصور باشد برابر است با :

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 x^2 / \pi}$$

از روی این قانون می توانیم مقدار میانگین مربع خطای (خطای مربعی میانگین) ، خود خط ، مکعب آن و غیره را حساب کنیم . وقتی که تعداد اندازه ها زیاد باشد ، قضیه به نام «اعداد بزرگ» خوانده می شود ، برای این مقادیر که از روی

**خطای تربیعی** - اگر مقدار واقعی را با  $x$  و مقادیر تقریبی مختلف آنرا با  $x_1$  ،  $x_2$  ، ... ،  $x_n$  نشان دهیم ، باید میانگین به عنوان بهترین مقدار چنان انتخاب شود که مجموع زیر حداقل باشد .

$$(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$$

محاسبه مربوط به تعیین یکی از روی دیگری در سطح برنامه کلاس آخر دیرستان است . اما تحقق این موضوع چه ارزشی را دارد ؟ نمی توانیم بگوییم که این کمال مطلوب است ، اما به غیر از اختیار میانگین حسابی مقادیر مورد نظر را دیدیگری که بتواند می نیم مجموع مربعات خطاهارا بدست دهد وجود ندارد . در این صورت شکی باقی نمی ماند که انتخاب مزبور طبیعی است .

وقتی می گوییم که مجموع مربعات رامی نیم کنیم (که این روش به نام **روش کمترین مربعات** مشهور می باشد) ، به آن معنی است که مقداری را انتخاب کنیم که در عین حال به همه مشاهدات نزدیکترین فاصله را داشته باشد .

در اینجا هم ایرادها کم نیستند . چرا باید مربع اختلافها را انتخاب کنیم و مقادیر مطلق آنها در نظر نگیریم ، و چرا تو ان زوج دیگری از آنها را اختیار نکنیم ؟ بنظر می رسد که پاسخ به این پرسشها عملاً امکان دارد : این مقدار را به این خاطر انتخاب می کنیم که محاسبات مربوط به آن به راحتی انجام می گیرد و از فرمولهای کلی بسیار ساده استفاده می شود . اگر مربعات را بمقادیر مطلق جانشین کنیم باید به جای میانگین حسابی تابعی را حساب کنیم که غیر جبری و بسیار پیچیده می باشد و چنانچه از تو انها بالاتر استفاده کنیم به توابع مختلط بر می خوریم ، و همچنین تعیین آن به اندازه های غیر مستقیم تقریباً به صورت غیر ممکن در می آید .

باید گفت که این نظریه که بر مبنای مقدار انحرافات بین مقدار واقعی و مقادیر اندازه گیری شده بناسه و گاهی **نظريه دقت** نامیده می شود ، آنقدرها محقق نیست : از مجموع مربعات به میانگین حسابی رسیدیم که خیال می کردیم محقق می باشد . این موضوع مطرح نبود اگر مقدار واقعی در آن دخالت نداشت ، مقداری که نه تنها شناخته شده نیست بلکه معین هم نمی باشد .

**احتمالات** - اکنون مانند **گوس** بیتکر بزرگ این طریقه تفکر ، از مقادیر اندازه گیری شده شروع می کنیم . واضح است که یک عدد معلوم به تنها یعنی نمی تواند موضوع

باید اندازه میانه را انتخاب کنیم که تعداد اندازه‌های بزرگتر از آن با تعداد اندازه‌های کوچکتر از آن برابر باشد. در صورتی که مقدار تمام اندازه‌ها فرد باشد اندازه وسطی انتخاب می‌شود و اگر مقدار اندازه‌ها زوج باشد این اندازه از بین تمام اندازه‌های واقع در فاصلهٔ وسط انتخاب می‌شود؛ توجیه این نتایج در روی شکل بسیار آسان است. وقتی اندازه‌گیریها خوب باشند به دو گروه بزرگتر و کوچکتر تقسیم می‌شوند و هر دو روش نتایجی بسیار نزدیک بهم بدست می‌دهند. روش‌کمترین انحراف‌ها همواره نتیجهٔ واحد بدست نمی‌دهد اما این مهم نیست. روش کمترین مجددرات که کالایی آماده برای مصرف در اختیار می‌گذارد کار را آسان می‌کند بدون آنکه آسایش‌خاطر بیاورد. مقداری به یک بار انتخاب می‌شود، اختلاف آن با مقادیر مختلف به سادگی محاسبه می‌شود و میانگین آنها ایده‌ای برای تشخیص بدست می‌دهد، اما در راهی خطرناک گام نهاده‌ایم که آنرا در مورد روش گوس تشریح خواهیم کرد.

**۳- اندازهٔ تصحیح شده - اکنون همه چیز تباشده است.** قانون گوس در بندهیک ضریب  $k$  است. اثبات احتمال آنکه خطای مربوط به اندازه‌گیری اگرین  $kb$  و  $ka$  محصور باشد فقط به  $a$  و  $b$  بستگی دارد بسیار آسان است. اگر  $k$  را به برابر کنیم برای خطایی که ده مرتبه بزرگتر است همان احتمال را بدست خواهیم آورد، به عبارت دیگر همان خط حاصل خواهد شد و احتمال این بسیار کم است. بنابراین می‌توانیم  $k$  را به عنوان معیار دقت در یک سری اندازه‌ها در نظر بگیریم. مقدار میانگین خطاهای با  $k$  متناسب است، مربعات آنها با  $k^2$  و بهمین ترتیب توانهای دیگر آنها. گاهی این خطای مربعی میانگین را به عنوان ایده‌ای از خطای ارتکابی در نظر می‌گیرند، یعنی می‌توان به سادگی در عبارت آنرا در مورد مفهوم معمولی دقت که بسیار طبیعی و در اینجا از نظر مخفی است بکار برد.

اگر میانگین حسابی  $n$  اندازه را معین کنیم که همه از روی قانون گوس و با یک دقت از  $k$  بدست آمده‌اند معلوم خواهد شد که این میانگین نیز از قانون گوس تعیت می‌کند بلکه ارتباط آن بیشتر است و ضریب آن از تقسیم  $k$  بر  $\sqrt{n}$  بدست می‌آید. این موضوع حائز اهمیت است: با بکار بردن قانون گوس قاعدة بسیار دقیقی جهت تخمین اندازه تازه بدست می‌آوریم. اما بسیاری از فیزیکدانها این آخرین نتیجه را رد کرده‌اند.

دنباله در صفحه ۸۵

فرمول محاسبه می‌شوند شناس بسیاری وجود دارد تا با میانگینهای نظری که از روی اندازه گیری بدست آمده‌اند نزدیک باشند، در عمل هم، چنین است؛ و ضمناً این وسیله‌ای است برای اطمینان از اندازه و همچنین اطمینان از صحبت جدولی از اندازه‌ها، و انگهی مشاهدهٔ تعداد حالاتی که این مطابقت وجود داشته باشد بهترین تحقیق برای توجیه قانون گوس می‌باشد. از این راه اندازهٔ دقیق «علوم» از روی اندازه‌هایی بسیار دقیق‌تر از آنچه که مایل به اثبات آن بوده‌ایم بدست می‌آید.

خود گوس قانون خود را به دو وسیلهٔ دیگر توجیه کرده است: یکی از آنها مبتنی بر اصول موضوع اطمینان به تطبیق بامانگین حسابی و فرضیه‌های دیگر است (قارن، پیوستگی...)، برخی از اینها طبیعی است و برخی دیگر ناپذیر فتنی می‌باشند. دیگری که شاید قاطعتر باشد خطای را به برد یک بازیکن شبیه می‌کند.

نتیجهٔ یک برد جزیی را می‌توانیم به خطای اندازه گیری شبیه کنیم که مجموع خطاهای کوچک پیش‌بینی نکردنی و جمع کردنی می‌باشد. این موضوع این گمان را پیش می‌آورد که آنها نه در علت و نه در مقدار بريکدیگر اثر نمی‌کنند؟ (در صورتی که خطای با مقدار اندازه گیری شده متناسب باشد خطای نسبی ثابت است و در این صورت قانون روی لگاریتم اندازه مورد دارد نه روی خود اندازه)؛ در اینجا خطاهای متعدد و هم‌مرده مطرح می‌شود. همه این فرضیه‌ها با تصوری که از خطای اتفاقی داشتیم سازگار می‌باشند. معهذا قانون گوس که پا عبور از حد بدست آمده و در حساب احتمالات متعارفی است خطاهای بسیار بزرگ‌کرای با احتمال بسیار ضعیف، اما غیر صفر، بنظر می‌رساند و این موضوع ناراحت‌کننده است. اینکه بین ناممکن و احتمال بسیار ضعیف عمل تفاوتی وجود ندارد، حقیقت می‌باشد.

فعلاً چند کلمه‌ای دربارهٔ روش کمترین انحراف صحبت کنیم: این موضوع مبتنی بر انتخاب مقداری است که مجموع انحراف‌های از مقادیر ازلحاظ قدر مطلق کمترین مقدار باشد (در صورتی که گوس مجموع مربعات این انحرافها را حداقل می‌سازد) این ملاحظه طبیعی بنظر می‌رسد: گفتیم که در این مورد بسط اندازه‌های غیر مستقیم که روش گوس درباره آن قابل اجرا است با اشکال مواجه می‌شود، بدعلاوه کمترین انحرافات را نمی‌توانیم با قانون ساده‌ای از احتمالات مربوط سازیم. در مورد یک رشته از اندازه‌های مستقیم نتیجه بسیار ساده است:

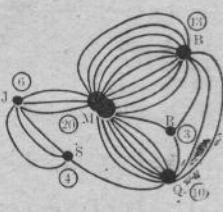
# • ریاضیات و مسئلهٔ ترافیک •

ترجمه: مقصود عین‌اللهی

برونکس، استیتن‌ایلند و نیوجرسی را بکارگیر وصل می‌کنند. دوباره متذکر می‌شویم که مسئلهٔ ممکن است فقط چندتا از اینها را در نظر گرفته باشد که این امر بستگی به هدف نویسنده دارد. شکل ۲ شبکه خطی مسئله را نشان می‌دهد با مرکز M، S، Q، J، B، S، M و Q که به ترتیب به جای مانهاتان، استیتن‌ایلند، بروونکس، نیوجرسی و بروکلین کوئینز در نظر گرفته شده است.



شکل ۱



شکل ۲

چون کمتر از سه گرده وجود دارد مسئله قابل حل است و از خواننده خواسته می‌شود که راه حلی برای آن پیدا کند. فهرست پلها و تونل‌های بکار رفته (شمال به جنوب)

- نیوجرسی به مانهاتان
- پل جرج واشنگتن
- تونل لینکلن
- تونل هولاند
- استیتن‌ایلند به بروکلین
- پل ورازانوتاروس
- مانهاتان به بروونکس
- پل هندرنی‌هودسن
- پل برادوی
- پل توهاندروسونت استریت
- پل واشنگتن
- کراس بروونکس اکسپرس‌وی
- پل جروم اوینو
- پل هاندزدفورتی فیفت استریت

بقیه در صفحه ۹۶

مسئلهٔ ترافیک همیشه یک مشکل اساسی بوده است و این مشکل مگر بر اساس ریاضیات دقیق قابل حل نیست. در این مقاله مسئلهٔ ترافیک در مراکز بزرگ مورد بررسی کوتاه قرار گرفته است.

شهر نیویورک یکی از بزرگترین شهرهای دنیا می‌باشد و جمعیت آن بالغ بر ۸ میلیون نفر است. در این شهر اتومبیل که یکی از معمولی‌ترین وسایل نقلیه می‌باشد آنقدر فراوان است که اختراق سیستمی برای مبارزه با ترافیک سنگین این شهر امری است الزامی. پل‌تری بوروگ و تونل اوتوریتی راههای منطقی برای تقلیل حجم ترافیک در این شهر بوجود آورده‌اند، پل‌ها و تونل‌های شهر نیویورک طوری ساخته می‌شوند که بنحوی ترافیک سنگین این شهر را تقلیل دهند، همانطور که نشانه این ناحیه نشان می‌دهد پلها و تونل‌ها هماهنگ و متناسب با شهر ام‌های اصلی ساخته شده‌اند، بنابراین جابجا شدن در شهر بسرعت امکان پذیر است و بهترین راه برای ساختن پل، تونل، جاده و شاهراه طرح ریزی و استدلال براساس اصول ریاضی می‌باشد. مسائل جالبی می‌توان در باره شبکه امروزی پلها و تونل‌های حوزه نیویورک مطرح کرد، یک سؤال که می‌توان در این باره ذکر کرد این است که: آیا یک توریست می‌تواند از تمام تونل‌ها و پل‌های این شهر بگذرد، بدون آنکه از روی یک پل یا تونل پیش ازیک دفعه عبور نکرده باشد؟ البته این مسئله متکی به این نکته می‌باشد که نویسنده چه پلها و تونل‌هایی را در نظر داشته است. فرضیه شبکه **لئوناراد اولو** از نظر توپولژی یک چهار چوب علمی برای بحث درباره سوالات نظیر بودن‌می‌آورد. برای توپولژی ذکر یک تعریف و یک قضیه لازم می‌باشد.

**تعریف:** یک گرده فرد از یک شبکه نقطه‌ای است که در آن چند خط که تعداد آنها عدد دارد است به یکدیگر می‌پیونددند. **قضیه:** اگر شبکه خطی مسئله بیش از دو گرده فردد آشته باشد عبور از آن بدون اینکه از یکی دوباره گذشته باشیم غیر ممکن است.

شکل ۱ پلها و تونل‌های زیادی از شهر نیویورک را نشان می‌دهد که این پلها و تونل‌ها مانهاتان، بروکلین کوئینز

## «تعهدیم چند مسئله حساب استدلالی»

فرستنده: قوام - نحوی

همانطور که ملاحظه می شود جواب مسئله:

$$\text{است که ارقامش بستگی به } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ خود عدد ندارد.}$$

اگر مسئله را مانند مسئله بالا به مبنای ده فرض کنیم

$$\text{جواب آخر می شود: } (1089)$$

اما اگر مثلاً مینما را ۶ فرض کنیم خواهیم داشت:

$$(351) = (135)_6$$

$$(154)_6 + (451)_6 = (1045)_6$$

و بطور کلی برای هر عدد به فرم  $(abc)_x$  صادق است.

اگر مینما ۱۲ باشد درباره عدد  $(a24)_{12}$  که  $a = 10$

عمل کنیم می شود:

$$(a24)_{12} - (42a)_{12} = (5\beta6)_{12}$$

$$(5\beta6)_{12} + (6\beta5)_{12} = (10a\beta)_{12}$$

شرط صحیح مسئله آنست که  $a - c > 1$  باشد زیرا اگر

$$a - c = 1 \text{ باشد در تفاضل عدد و مقلوبش رقم سوم } 1$$

صفر شده و عدد تفاضل دو رقمی می شود به فرم:

$$\left[ \frac{1}{(x-1)(x-1)} \right]_x \text{ و وقتی آنرا با مقلوب خودش که}$$

مساوی آنست جمع کنیم می شود:

$$\left[ \frac{1}{(x-1)(x-1)} \right]_x + \left[ \frac{1}{(x-1)(x-1)} \right]_x = \left[ \frac{1}{1(x-1)(x-2)} \right]_x$$

که عددی است سه رقمی و به فرم بالا نیست مثلاً در مبنای ده داریم:

مسئله ۱ - در صفحه ۲۳ کتاب حساب استدلالی سال ششم

ریاضی مسئله زیر عنوان شده است:

«عددی سه رقمی را از مقلوب آن کم کرده ایم و تفاضل

و با مقلوب خودش جمع کرده ایم مطلوب است نتیجه آخر»

مقصود این مسئله عدد سه رقمی در مبنای (ده) می باشد.

ما این مسئله را به فرم کلی زیر حل می کنیم:

از عددی سه رقمی به فرم  $(abc)_x$  مقلوب آن را کم کردیم

و تفاضل را با مقلوب خودش جمع کرده ایم، به فرض آنکه

$a - c > 1$  باشد مطلوب است جواب آخر:

حل - چون  $c > a$  است و ما باید تفاضل.

$(abc)_x - (cba)_x$  را پیدا کنیم باید  $a$  را از  $x$  کم کنیم

پس رقم اول تفاضل می شود  $c + x - a$  بعداً یک واحد به

$b$  عدد کوچکتر اضافه می کنیم می شود  $1 + b + x$  آنرا از  $b + x - a$  کم می کنیم می شود  $(1 - x)$  و بالاخره یک واحد به  $c$  اضافه

کرده از  $a$  کم می کنیم می شود  $(a - c - 1)$ . به این ترتیب

تفاضل عدد منه رقمی زیر می شود:

$$\left[ \frac{1}{(a - c - 1)(x - 1)(c + x - a)} \right]_x$$

و مقلوب این عدد می شود:

$$\left[ \frac{1}{(c + x - a)(x - 1)(a - c - 1)} \right]_x$$

این دو عدد را در مبنای  $x$  جمع می کنیم می شود:

$$\left[ \frac{1}{10(x - 2)(x - 1)} \right]_x$$

می بینیم که برای جمع رقم دوم  $2x - 2$

از  $2 - 2x$  مبنای  $x$  را کم می کنیم می شود  $2 - x$  که نوشته

و یک واحد به رقم بعدی اضافه می کنیم.

می کنیم می شود:

$$\begin{aligned} & [a^{a-3} \times 1 + a^{a-4} \times 2 + a^{a-5} \times 3 + \dots] \\ & a \times (a-3) + (a-1)] \times (a-1) \\ & = [a^{a-1} + 2a^{a-2} + 3a^{a-3} + 4a^{a-4} + \dots] \\ & (a-3)a^1 + (a-1)a - [a^{a-3} + 2a^{a-4} + \\ & 3a^{a-5} + \dots (a-3)a + (a-1)] = a^{a-1} + a^{a-2} + \\ & + a^{a-3} + \dots a^1 + a + 1 = (111\dots 1)_a \end{aligned}$$

که عدد  $(111\dots 1)$  حاصل می شود و تعداد ارقام آن  $(a-1)$  را در  $(a-1)$  مضرب اولیه  $(a-1)$  ضرب کنیم ارقام مساوی بوده و برابر  $3^a - 1$  خواهد بود.

مثال - تحقیق کنید اگر عدد  $(12346)_7$  را در ۶ مضرب اولیه ۶ در مبنای ۷ ضرب کنیم حاصل ضرب از ارقام مساوی تشکیل می شود.

در مبنای ۷ ضرب می کنیم:

$$(12346)_7 \times 6 = 111111$$

$$\begin{aligned} (12346)_7 \times (15)_7 &= 222222 \quad (15)_7 = (15)_7 \\ (12346)_7 \times (24)_7 &= 333333 \quad (24)_7 = (24)_7 \\ \text{مثال ۲ -} \quad \text{کوچکترین عددی را پیدا کنید که اگر آنرا در } (12346)_7 \text{ به مبنای ۷ ضرب کنیم حاصل ضرب در مبنای ۷ از ارقام مساوی ۲ تشکیل شود.} \end{aligned}$$

جواب  $(15)_7$

مسئله ۴ - ثابت کنید رابطه زیر برقرار است:

$$[\overline{nn44}]_{(x+3)} = [\overline{(n+1)(n+1)}]_{(n+3)}$$

$$\begin{aligned} \text{برای حل این مسئله دو طرف را بسط می دهیم:} \\ n(n+3)^2 + n(n+3)^1 + 4(n+3)^0 + 4 = \\ = [(n+3)(n+1) + (n+1)]^2 \\ \text{پس از ساده کردن دو طرف مساوی می شوند.} \\ \text{مثال ۱ - داریم:} \end{aligned}$$

$$(3344)_6 = (44)_6$$

$$(5544)_8 = (66)_8$$

$$(8844)_{11} = (99)_{11}$$

مثال ۲ - عددی در مبنای ۶ به صورت  $\overline{aabb}$

(دبنه در صفحه ۹۳)

$$352 - 253 = 99 \quad 99 + 99 = 198$$

و به فرم مخصوص دیگری در آمده است.

مسئله ۳ - عددی ۴ رقمی به فرم  $\overline{abcd}$  پیدا کنید که

اگر آنرا در ۹ ضرب کنیم مقلوب شود.

حل - در اینجا داریم  $\overline{abcd} \times 9 = \overline{dcba}$  پیداست که باید  $a = 1$  باشد و بالنتیجه  $d = 9$  و اگر عدد را بسط دهیم معلوم می شود که  $b = 8$  و  $c = 8$  و عدد می شود  $(1089)$

فرم کلی این مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \left[ \overline{10(m-2)(m-1)} \right]_m \times (m-1) = \\ & = \left[ \overline{(m-1)(m-2)01} \right]_m \end{aligned}$$

برای حل این مسئله می نویسیم:

$$\begin{aligned} & [1 \times m^3 + (m-2)m + (m-1)] \times (m-1) = \\ & = [(m-1)m^3 + (m-2)m^2 + 1] \end{aligned}$$

که پس از عملیات لازم دو طرف مساوی می شوند.

مثال - عددی ۴ رقمی به فرم  $\overline{abcd}$  در مبنای ۶ پیدا کنید که اگر آنرا در ۵ ضرب کنیم مقلوب شود.

حل -

$$\begin{aligned} \text{پیداست } 1 &= a, 5 = d \quad \text{و پس از بسط داریم:} \\ 29b &= c - 4 \quad b = 0 \quad c = 4 \end{aligned}$$

و عدد می شود  $(1045)$  و داریم:

$$(1045)_6 \times 5 = (5401)_6$$

و به همین ترتیب مثلا می توان نوشت:

$$(1034)_5 \times 4 = (4301)_5$$

مسئله ۳ - در صفحه ۳۷ کتاب حساب استدلالی مسئله

زیر نوشته شده است:

ثابت کنید هر گاه عدد  $N = 12345679$  را در یکی از نه مضرب اولیه ۹ ضرب کنیم عددی بدست می آید که ارقام آن مساوی هستند.

این مسئله را در حالت کلی زیر حل می کنیم:

ثابت کنید که هر گاه عدد  $(a-2)$  رقمی:

$$\left[ \overline{1234\dots(a-3)(a-1)} \right]_a$$

را در یکی از  $(a-1)$  مضرب اولیه  $(a-1)$  ضرب کنیم

حاصل ضرب از ارقام مساوی تشکیل می شود.

حل - ابتدا این عدد را بسط داده در  $(a-1)$  ضرب

# بعضی از انواع توابع

ترجمه: فتح الله ذرگری

از مجله روسی «ریاضیات در دبیرستان»

★ قبل از شماره دنباله \*

باشد؟ آیا می‌تواند زوج باشد؟ آیا می‌تواند فرد باشد؟ آیا می‌تواند کلایکنو باشد؟

۷- یک تابع متناوب  $\omega$  در فاصله  $[a \dots b]$  چند صفر می‌تواند داشته باشد؟ روی محور اعداد چندتا؟  
۸- یک تابع متناوب در چند نقطه از محور اعداد می‌تواند مقداری مساوی با  $a$  داشته باشد؟

۹- ثابت کنید که تابع  $y = \cos x + \cos(x\sqrt{2})$  متناوب نیست.

۱۰- به فرض اینکه  $f(x)$  تابع متناوب باشد نوع هر یک از تابعهای زیر را معلوم کنید:

$$y = f(x+a) + b$$

$$y = f(kx)$$

$$y = kf(x)$$

$$y = f(x^*)$$

$$y = f'(x)$$

$$y = af'(x) + bf(x) + c$$

$$y = |f(x)|$$

$$y = g(f(x))$$

[ $x$ ] در تمام محور اعداد معین است.

## ۶- توابعی که ماسیم و مینیم دارند

**تعریف**- نقطه  $a$  را نقطه ماسیم (یا نقطه مینیم) تابع  $f$  گویند هر گاه در اطراف  $a$  نقطه ماسیم (یا نقطه مینیم) تابع در این نقاط معین بوده و مقدار آن در این نقاط کوچکتر (یا بزرگتر) از  $f(a)$  باشد. مقدار تابع را در نقطه ماسیم (یا مینیم)، ماسیم (یا مینیم) تابع می‌نامند.

تمرینات

۱- اگر تابعی در یک حدی معین باشد، آیا می‌تواند

## ۵- توابع متناوب

تابع  $f$  در مجموعه  $X$  تعریف شده است. اگر عدد  $\omega \neq 0$  وجود داشته باشد بقسمی که وقتی  $X$  به مجموعه  $X + \omega$  تعلق دارد  $f(x + \omega) = f(x)$  باشد تابع  $f$  را متناوب و  $\omega$  را دوره تناوب آن می‌نامند.

تمرینات

۱- آیا حدود تغییرات یک تابع متناوب ممکن است که متناهی باشد؟

۲- منحنی نمایش تابع متناوب چه خصوصیتی دارد؟

۳- ثابت کنید که اگر تابعی متناوب دارای دوره تناوب  $\omega$  باشد، این تابع دارای بینهایت دوره تناوب  $\omega/2, \omega/3, \dots$  و  $\omega - 2\omega, \omega - 3\omega, \dots$  خواهد بود.

**تعریف**- کمترین دوره تناوب مثبت از یک تابع متناوب را دوره تناوب اصلی آن می‌نامند.

۴- اگر تابعی متناوب و دوره تناوب اصلی آن  $\omega$  باشد، ثابت کنید که هر دوره تناوب دلخواه آن مضری از  $\omega$  است.

۵- تناوبی بودن هر یک از تابعهای زیر را بررسی کرده و دوره تناوب اصلی هر یک را معین کنید:

$$y = \cos t \quad y = \cos(\pi x - \frac{\pi}{3})$$

$$y = x - [x] \quad y = \sin^3 x - \cos^3 x$$

$$y = (x - [x])^2 \quad y = \sin x \cos x$$

$$y = \sin^4 x - 3 \quad y = \sin \sqrt{x}$$

۶- یک تابع متناوب، آیا می‌تواند دارای تابع معکوس

تابع  $f$  را در فاصله مذکور مقعر گویند هر گاه داشته باشیم :

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

### تمرینات

-۱- مفهوم هندسی توابع محدب و مقعر را شرح دهید.

-۲- تحدب و تقریب هر یک از تابعهای زیر را تعیین کنید :

$$y = x^2$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = x^3$$

$$y = x^4$$

-۳- آیا تابع زوجی وجود دارد که در تمام حدود تغییرات محدب (یا مقعر) باشد؟ تابع فرد چطور؟

-۴- اگر تابع  $f(x)$  در فاصله  $[a, b]$  محدب و

$a < x_1 < x_2 < b$  باشد ثابت کنید که :

$$\frac{1}{3}f(x_1) + \frac{2}{3}f(x_2) < f\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)$$

این موضوع را در روی شکل نشان دهید.

-۵- تابع  $f(x)$  در تمام محور اعداد معین بود و محدب

(یا مقعر) است. نوع هر یک از تابعهای زیر را تعیین کنید :

$$y = -f(x) \quad y = cf(x), \quad c \neq 0$$

$$y = f(x+a) \quad y = f(-x)$$

$$y = f(kx), \quad k \neq 0 \quad y = f(x) + b$$

$$y = f(kx+a) + b$$

-۶- در فاصله  $[a, b]$  توابع  $f$  و  $g$  محدب و توابع  $\varphi$  و  $\psi$

مقعرند. نوع هر یک از تابعهای زیر را تعیین کنید :

$$f \pm g \quad f \pm \varphi \quad \varphi \pm \psi$$

$$f \cdot g \quad f \cdot \varphi \quad \varphi \cdot \psi$$

-۷- روی تمام محور اعداد دو تابع  $f$  و  $g$  محدب و دو

تابع  $\varphi$  و  $\psi$  مقعر می‌باشند، ثابت کنید که :

الف - اگر تابع  $f$  صعودی باشد تابع  $f(g(x))$  محدب

است و اگر تابع  $f$  نزولی باشد تابع  $f(\varphi(x))$  محدب است.

ب - اگر تابع  $\varphi$  صعودی باشد تابع  $(\varphi(x))\psi$  مقعر است

و اگر تابع  $\varphi$  نزولی باشد تابع  $(\psi(x))\varphi$  مقعر است.

در این حد ماقسیم و مینیموم نداشته باشد؟ آیا می‌تواند بیش

از یک ماقسیم داشته باشد؟

-۳- آیا ممکن است که مقدار مینیموم تابع بیشتر از مقدار

ماقسیم آن باشد؟

-۴- آیا یک تابع یکنوا می‌تواند ماقسیم و مینیموم داشته باشد؟

-۵- آیا یک تابع زوج می‌تواند فقط یک ماقسیم یا

مینیموم داشته باشد؟ تابع فرد چطور؟ تابع متناوب چطور؟

-۶- آیا تابعی که ماقسیم و مینیموم دارد می‌تواند دارای

تابع معکوس باشد.

-۷- مقادیر ماقسیم و مینیموم هر یک از تابعهای زیر را معین کنید :

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = |x|^n$$

$$y = |2x - 1| - |4 + 5x|$$

$$y = \frac{1}{2 - x + x^2}$$

$$x = \frac{1}{3 - \sin x}$$

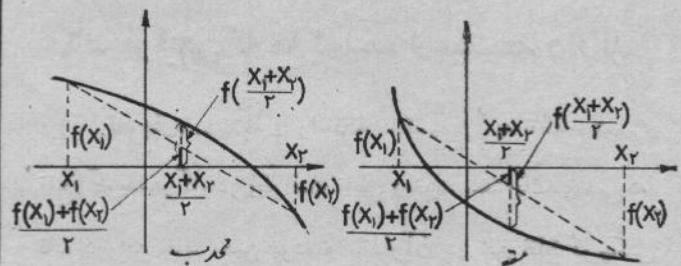
## ۷- توابع محدب و مقعر

تعریف - تابع  $f$  را در فاصله  $[a, b]$  محدب گویند

هر گاه برای مقادیر دلخواه  $x_1$  و  $x_2$  و  $a < x_1 < x_2 < b$  که

داشته باشیم :

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$



## راهنمای ریاضیات متوسطه

### قدر مطلق

عبدالحسین مصطفی

خواهد شد با : | $2a$ |

**تعریف** - عدد حسابی مندرج در یک عدد جبری راقدرت مطلق این عدد جبری می‌نامند و آنرا به این ترتیب نمایش می‌دهند که عدد جبری را بین دو خطکوتاه قائم قرار می‌دهند. بنایه قرارداد ، قدر مطلق صفر برابر صفر است .

$$|+12|=12, \quad |-6|=6$$

$$|-\frac{2}{3}|=\frac{2}{3}, \quad |1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$$

در آخرین مثال چون  $\sqrt{2}$  از یک بزرگتر است و « $\sqrt{2}-1$ » عددی منفی است قدر مطلق آن به صورت « $1-\sqrt{2}$ » که مشتب است نوشته شد .

فرض می‌کنیم که  $X$  عددی جبری باشد ، در صورتی که  $X$  مشتب باشد داریم  $X=|X|$  و در صورتی که  $X$  منفی باشد داریم  $-X=|X|$  و در حالت  $0=X$  نیز داریم  $X=|X|$  و بطورکلی چنین می‌نویسیم :

$$|X|=X \quad \text{اگر } X>0$$

$$|X|=-X \quad \text{اگر } X<0$$

عدد « $a-2$ » را در نظر می‌گیریم . این عدد وقتی مشتب است که  $a>2$  باشد و وقتی منفی است که  $a<2$  باشد و در ازاء  $a=2$  برابر با صفر است . پس چنین داریم :

$$|a-2|=a-2 \quad \text{اگر } a>2$$

$$|a-2|=2-a \quad \text{اگر } a<2$$

در حساب اعدادی را بکار می‌بریم که نتیجه سنجش یک کمیت با واحد انتخابی آن می‌باشد ؛ طول یک قطعه خط عددی است حسابی ، مساحت یک شکل عددی است حسابی ، جمعیت یک کشور عددی حسابی است ...

در جبر اعداد نسبی یعنی اعداد مشتب و منفی و بعلاوه حروف را بکار می‌بریم . هر حرف که در محاسبات جبری بکار می‌رود معروف یک عدد جبری است . وقتی مثلاً از  $4a^2$  صحبت می‌کنیم یعنی یک عدد را در نظر داریم که این عدد ممکن است مشتب باشد یا منفی یا اینکه برابر با صفر باشد .

مساحت مربعی برابر است با  $16$  ، طول ضلع آن چقدر است ؟ اگر داشته باشیم  $X^2=16$  خواهیم داشت  $X=\pm 4$  اما وقتی که  $X$  طول ضلع یک مربع باشد چون طول ضلع مربع عددی است حسابی نه جبری پس خواهیم داشت  $X=4$  .

مساحت مربعی برابر با  $4a^2$  است . طول ضلع آن چقدر است ؟ شاید بسیاری از دانشآموزان بدون تأمل جواب دهنده که طول ضلع این مربع برابر با  $2a$  است . اما این دانشآموزان متوجه یک نکته نیستند و آن اینکه  $a$  که نشان دهنده یک عدد جبری است ممکن است منفی باشد و قبول عدد منفی  $2a$  به عنوان طول ضلع مربع یمورد است . وقتی مساحت مربعی برابر با  $4a^2$  باشد طول ضلع آن برابر است با عدد حسابی مندرج در  $2a$  . این عدد حسابی را قدر مطلق  $2a$  می‌گوئیم و به صورت  $|2a|$  نمایش می‌دهیم . بنابر این اگر  $a$  عددی جبری و مساحت مربعی برابر با  $4a^2$  باشد طول ضلع آن برابر

در حالت اخیر که  $\frac{5}{2}x$  می‌باشد جواب  $\frac{4}{3}$  قابل قبول نیست.

-۳ معادله زیر را حل کنید:

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

این معادله جواب ندارد زیرا  $x^2$  همواره مثبت یا اقل از صفر است و  $|5x - 6|$  نیز همواره مثبت یا اقل از صفر است و دو مقدار  $x^2$  و  $|5x - 6|$  با هم صفر نمی‌شوند بنابراین طرف اول معادله همواره مقداری است مثبت و هیچگاه صفر نمی‌شود.

-۴ معادله زیر را حل کنید:

$$x^2 - |5x - 6| = 0$$

حالت اول - اگر  $x^2 - 5x + 6 > 0$  یعنی  $x < \frac{6}{5}$  باشد داریم:

$$|5x - 6| = 5x - 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad , \quad (x - 3)(x - 2) = 0$$

هر دو جواب قابل قبول:  $x = 3$  یا  $x = 2$

حالت دوم - اگر  $x^2 - 5x + 6 < 0$  یا  $x > \frac{6}{5}$  باشد داریم:

$$|5x - 6| = -5x + 6$$

$$x^2 - (-5x + 6) = 0 \quad \text{یا} \quad x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x + 6)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -6 \quad \text{یا} \quad x = 1$$

این دو جواب هم هر دو قابل قبولند.

معادله مفروض رویهم چهار جواب دارد.

-۵ نامعادله زیر را حل کنید:

$$|5+x| < 2x - 4$$

قبل از توجه داریم که چون طرف اول نامساوی منفی نیست پس

طرف دوم آن نیز نباید منفی باشد یعنی لازم است که:

$$x > 2 \quad \text{یا} \quad 2x - 4 > 0$$

وقتی  $x > 2$  باشد داریم  $2x - 4 > 5 + x$  و درنتیجه  $x > 5$  باشد.

بوده نامعادله چنین می‌شود:

$$5 + x < 2x - 4 \Rightarrow x < -9 \quad \text{یا} \quad -x < -9 \Rightarrow x > 9$$

-۶ سه قطعه خط به طولهای:

$$x + 2 \quad 3x - 1 \quad \text{و} \quad 2x - 2$$

مفروض است. حدود  $x$  را تعیین کنید برای آنکه با سه چهار خط مزبور بتوان یک مثلث ساخت.

### چند مثال

-۱ حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$$P = |x + 2| + |x - 2|$$

بر حسب اینکه « $x - 2$ » و « $x + 2$ » هریک چه علامتی را داشته باشند حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

الف - اگر  $x - 2$  مثبت یا اقل از صفر باشد یعنی  $x > 2$

باشد، در این صورت واضح است که  $x - 2 < x + 2$  است یعنی « $x + 2$ » نیز مثبت است و داریم:

$$|x - 2| = x - 2 \quad \text{و} \quad |x + 2| = x + 2$$

$$P = x + 2 + x - 2 = 2x$$

ب - اگر  $x < -2$  - باشد یعنی « $x - 2$ » منفی باشد و « $x + 2$ » مثبت یا صفر باشد داریم:

$$|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x \quad \text{و} \quad |x + 2| = x + 2$$

$$P = x + 2 + 2 - x = 4$$

ج - اگر  $-2 < x < 2$  باشد « $x + 2$ » و « $x - 2$ » همچنین « $x - 2$ » منفی است و داریم:

$$|x - 2| = 2 - x \quad \text{و} \quad |x + 2| = -x - 2$$

$$P = -x - 2 + 2 - x = -2x$$

-۳ معادله زیر را حل کنید:

$$4x - 3 + |5 - 2x| = 0$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف - اگر  $x < 2.5$  مثبت یا صفر یعنی  $x < \frac{5}{2}$  باشد

داریم  $|5 - 2x| = 5 - 2x$  و معادله چنین می‌شود:

$$4x - 3 + 5 - 2x = 0$$

$$2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

جواب  $x = -1$  قابل قبول است چون از  $\frac{5}{2}$  کوچکتر می‌باشد

ب - اگر  $x > 2.5$  باشد داریم  $|5 - 2x| = 2x - 5$  و

معادله چنین می‌شود:

$$4x - 3 + 2x - 5 = 0$$

$$6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

غیر قابل قبول:

بنابراین پنج حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف - اگر  $x > 2$  باشد داریم:

$$A = x^2 - 4 + x^2 - 1 + x - 2 = 2x^2 + x - 7$$

ب - اگر  $1 < x < 2$  باشد داریم:

$$A = 4 - x^2 + x^2 - 1 + 2 - x = -x + 5$$

ج - اگر  $1 < x < 2$  باشد داریم:

$$A = 4 - x^2 + 1 - x^2 + 2 - x = -2x^2 - x + 7$$

د - وقتی  $1 < x < 2$  باشد داریم:

$$A = 4 - x^2 + x^2 - 1 + 2 - x = -x + 5$$

ه - وقتی  $2 < x$  باشد داریم:

$$A = x^2 - 4 + x^2 - 1 + 2 - x = 2x^2 - x - 3$$

۸ - عبارت زیر را ساده کنید:

$$y = \frac{|x| - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - |x|}{x^2 - 2|x| + 1}$$

حالت اول - اگر  $x > 0$  باشد داریم:

$$y = \frac{x - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{x(x - 1)}{(x - 1)^2}$$

$$y = \frac{1}{x + 1} - \frac{x}{x - 1} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

حالت دوم - اگر  $x < 0$  باشد داریم:

$$y = \frac{-x - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$$

$$y = \frac{-x - 1}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{x(x + 1)}{(x + 1)^2}$$

$$y = \frac{-1}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

۹ - صحت رابطه زیر را محقق کنید:

$$\frac{|xy|}{xy} + \frac{|x-y|}{x-y} \left[ \frac{|x|}{x} - \frac{|y|}{y} \right] = 1$$

حالت اول - اگر  $x$  و  $y$  هم علامت باشند  $x > 0$  بوده

و عبارت بالا چنین می‌شود:

$$\frac{|xy|}{xy} + \frac{|x-y|}{x-y} \left[ \frac{x}{x} - \frac{y}{y} \right] = 1$$

اولاً لازم است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 2x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

ثانیاً برای آنکه با سه پاره خط مزبور بتوان یک مثلث ساخت لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$(x + 2) - (2x - 2) | < 3x - 1 < (x + 2) + (2x - 2)$$

$$|4 - x| < 3x - 1 < 3x$$

نامساوی  $x < 1 < 3x$  همواره برقرار است پس باید داشته باشیم:

$$|4 - x| < 3x - 1$$

چون  $x < 1$  است پس طرف دوم نامساوی مقداری است مشبّت و دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول - اگر  $x < 1$  باشد نامساوی چنین می‌شود:

$$4 - x > 5 \quad \text{با } x < 1 - \frac{5}{4}$$

در این حالت جوابهای نامعادله عبارت می‌شوند از:

$$\frac{5}{4} < x < 4$$

حالت دوم - اگر  $x < 1$  باشد نامساوی چنین می‌شود:

$$x - 4 < 3x - 1 \quad \text{با } x < \frac{3}{2}$$

در این حالت جواب نامعادله همان  $x < 1$  است.

نتیجه کلی آنکه باید  $x < \frac{5}{4}$  باشد.

۷ - حاصل عبارت زیر را پیدا کنید:

$$A = |x^2 - 4| + |1 - x^2| + |x - 2|$$

قبل از علامت هر یک از عبارتهای داخل علامتهای قدر مطلق را تعیین می‌کیم:

$x^2 - 4$  وقتی مثبت است که  $x < 2$  یا  $x > 2$

- باشد.

$1 - x^2$  به ازاء  $x < 1$  یا  $x > 1$  منفی و به ازاء

$x < 1$  مثبت است.

$x^2 - 2$  در حالت  $x < 2$  مثبت و در حالت  $x > 2$  منفی است.

برای  $x$  مقادیر  $-2 < x < 1$  و  $1 < x < 2$  بدست آمد

## درسی از حساب (بقیه از صفحه ۸۸)

نوشته شده و مجزور کامل است، این عدد را پیدا کنید:

$$\overline{(aab)}_6 = m^r \quad \text{بسیار نویسیم:}$$

$$7b + 252a = m^r \quad 7(b + 36a) = m^r$$

$$m = 7m' \quad b + 36a = 7m'^r$$

$$36 < b + 36a < a + 180 \quad \frac{36}{7} < m'^r < \frac{180}{7}$$

$$2 < m' < 5$$

$$\text{به ازاء } 3 \quad m' = 63, \quad b + 36a = 63 \quad \text{که جواب ندارد}$$

$$\text{به ازاء } 4 \quad m' = 4, \quad b + 36a = 112, \quad b = 112 - 36a \quad \text{با } b = 4 \quad a = 3$$

$$(3344)_6 = (44)_6 \quad \text{و عدد می‌شود:}$$

## ریاضیات و ترافیک (بقیه از صفحه ۸۶)

پل هاندرد تر تی نیست استریت

پل ترداوینو

پل فرست اوینو

- مانهاتان به الاندر آیلند

پل تریبورو

- الاندر آیلند به بروونکس

پل تریبورو

- الاندر آیلند به بروکلین کوئینز

پل تریبورو

- استیتن ایلند به نیوجرسی

پل بايون

پل گواتالاس

کواتر بریج کراسینک

- مانهاتان به بروکلین کوئینز

پل کوئینز بورو

تونل کوئینز میتدتاون

پل ویلیامزبورگ

پل مانهاتان

- پل بروکلین

- تونل بروکلین با تری

مقدار داخل کروشه صفر است و در نتیجه مقدار طرف اول برابر می‌شود یعنی یک.

حالت دوم - اگر  $x$  و  $y$  مختلف العلامت باشند داریم:

$$|xy| = -xy \Rightarrow \frac{|x|}{x} = -\frac{y}{|y|} \Rightarrow \frac{|x|}{x} = -\frac{|y|}{y}$$

$$|x - y| = |x| + |y|$$

$$\frac{|x|}{x} = \frac{|y|}{-y} = \frac{|x| + |y|}{x - y} = \frac{|x - y|}{x - y}$$

عبارت مفروض چنین می‌شود.

$$\frac{|xy|}{xy} + \frac{|x|}{x} \times 2 \frac{|x|}{x} = \frac{|xy|}{xy} + 4 \times \frac{|x|}{x}$$

$$= -1 + 4 \times 1 = 1$$

(دنباله در شماره‌های بعد)

## تمرینات

۱- حاصل عبارت  $A = |x - y|$  را به ازاء مقادیر داده

شدۀ زیر حساب کنید.

$$1) \quad x = \frac{5}{2}, \quad y = \sqrt{4} \quad 2) \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \quad x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad y = 3(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

۲- حاصل هریک از عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$A = a + 2 + |a - 2|$$

$$B = 2x - 2 - x + |2x + 2|$$

$$C = a^r - b^r + a^r - b^r + 1$$

$$D = |x^r - 4| + |y^r - 1|$$

$$E = \frac{|x+1|}{x+1} + \frac{|x-1|}{x^r-1} + \frac{|x|+1}{x^r+|x|}$$

۳- معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید:

$$2x + |x| = 2$$

$$x - 3 + 3x - 4 = 0$$

$$|x - 5| = x - 6$$

$$x^r + 4|x| - 5 = 0$$

$$2x + 3 < 3x - 4$$

# چگونه می‌توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

لایهف: René Boitel

## چگونگی استفاده صحیح از حل المسئله‌ها

داناله از شماره گذشته

یک طرف کار جستجو را با تصفیه آن ساده می‌سازد و این امکان را بوجود می‌آورد که راه حل‌های آسان و قشنگ کشف شود. نه از آن راه حل‌های دست و پاگیر و خارج از عملیات و در باطن بی فایده. در صورتی که از اقدامات واقعی در روح مسئله احتراز شود و به جای آن مستقیماً در خود مسئله عمل شود. یک چنین راه حل‌هایی حاصل می‌شود. در مثال بالا، راه حل مسئله هر چند که مبتنی بر مفهوم عمود بودن است اما به حالت مخصوصی از آن بستگی دارد. مساهای بردو دایره در نقطه تلاقی آنها بایکدیگر زاویه‌ای می‌سازند، درحالی که این زاویه قائم باشد دو دایره عمود بر هم نامیده می‌شوند. دانش آموزی که از روی این زاویه کلید حل مسئله را در می‌یابد چگونه تحواهد توانست به قول پوانکاره به کشف «لطف ریاضی» نایل آید و در اثر اشتباه آموزشی خاصی خیال خود را مصروف به چیزهایی سازد که هیچگاه برای وی مورد پیدا نمی‌کند؟

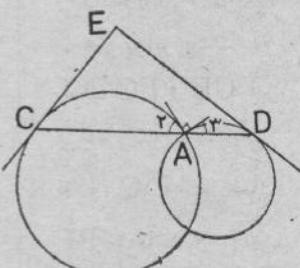
تشریح دو جانبه عملی مسئله، از طرف دیگر باعث می‌شود که اغلب به یک نظر امکان تعمیم مسئله فراهم آید، به این ترتیب که با درنظر گرفتن ساختمان عمومی و معجزاً از ساختمان خاص معلومات، مسئله را به صورت کلیتر حل کرد. یک چنین عملی چون در مورد مثال بالا انجام گیرد ساختمانی اساسی را به سادگی پدیدار می‌سازد: چون زاویه E مکمل مجموع دو زاویه C و D از مثلث CED است و چون زاویه بین مساهای بر دو دایره در نقطه تلاقی آنها نیز مکمل دو زاویه‌ای است که این مساهایا با هر قاطع ماربر نقطه مذکور می‌سازند پس مسئله از حالت خاص خود (عمود بودن دایره‌ها)

### مسئله

دو دایره عمود برهم مفروض است. قاطعی رسم می‌کنیم که از A نقطه تلاقی آنها بگذرد و دایره‌ها را در نقاط D و C قطع کند. در نقاط C و D مساهایی بر دایره‌های نظیر رسم می‌کنیم. ثابت کنید که این دو مساه برهمن عمودند.

از بسط تحرک عملی مسئله معلوم می‌شود که:

برای اثبات اینکه زاویه E قائم است کافی است ثابت کرد که مجموع دو زاویه دیگر از مثلث CED برابر ۹۰ درجه است.

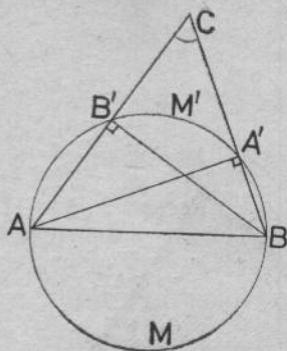


از بسط تحرک عملی ساختمان مسئله معلوم می‌شود که: وقتی دو دایره در نقطه A برهم عمود باشند مساهای بر دو دایره در این نقطه بر هم عمودند و در نتیجه مجموع دو زاویه A<sub>1</sub> و A<sub>2</sub> برابر ۹۰ درجه است.

با توجه به آنچه گذشت حل مسئله عبارت از این می‌شود که قبل ثابت کنیم زاویه C با زاویه A<sub>1</sub> و زاویه D با زاویه A<sub>2</sub> برابر است.

\*\*\*

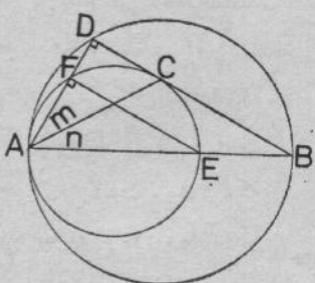
از این مسئله به وضوح معلوم می‌شود که تشریح دو جانبه مسئله از نقطه نظر عملی، یعنی بسط تحرک عملی مسئله و بسط تحرک عملی ساختمان آن، دارای امتیاز مضاعف می‌باشد: باز



مقدار ثابت است.  
از بسط تحرك عملی ساختمان مسئله مستقیماً نتیجه می شود که چون  $AA'$  و  $BB'$  ارتفاع هستند پس  $A'A'$  بر  $AB$  دایره به قطر  $AB$  واقعند. چون اندازه زاویه  $C$  ثابت است و اندازه این زاویه برابر است با نصف تفاضل اندازه های دو کمان  $A'M'B$  و  $AMB$  و چون کمان  $AMB$  برابر با نیم دایره است پس اندازه کمان  $A'M'B'$  ثابت است و در نتیجه طول وتر  $A'B'$  نیز ثابت می باشد.

#### مسئله

دو دایره در  $A$  مماس داخل آند. قطر  $AB$  از دایره بزرگتر را رسم کرده و از  $B$  مماس  $BC$  را بر دایره کوچکتر رسم می کنیم و امتداد می دهیم تا دایره بزرگتر را در  $C$  قطع کند. ثابت کنید که  $AC$  نیمساز زاویه  $BAD$  است.  
از بسط تحرك عملی مسئله مستقیماً معلوم می شود که:

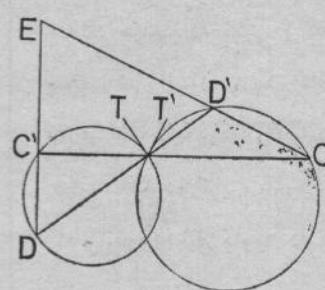


وقتی دوزاویه  $m$  و  $n$  با هم برابر باشند دو کمان  $CE$  و  $FC$  نیز با هم برابرند یعنی نقطه  $C$  وسط کمان  $EF$  می باشد و در این حال وتر  $EF$  با مماس در نقطه  $C$  یعنی با  $BD$  موازی می باشد. نتیجه می شود که دوزاویه  $D$  و  $F$  برابرند و چون  $D$  قاولد است پس زاویه  $F$  نیز قائم است و این هم واضح است. بدین ترتیب راه حل مسئله مشخص می شود.

در این چند تمرین که راه حل مسئله از تحرك عملی خود مسئله یا معلومات آن مستقیماً نتیجه می شود نه تنها یک چنین راه حل هایی را می آموزید بلکه به استعداد خود در حل مسائل اطمینان بیشتری پیدا می کنید. دیگر از این به بعد با مطالعه راه حل هایی که به نظر شما مبتنی بر هوش سرشار و کاملاً شناسی می باشد در خود احساس حقارت نخواهید کرد: از این به بعد که می دانید هر راه حلی بطور منطقی بدست می آید و شما هم قابلیت بدست آوردن آنرا دارید خوشحال خواهید بود.

خارج شده و به صورت گلیتر زیر بیان می شود: هر گاه دو دایره در  $A$  مشترک باشند و قاطعی از  $A$  گذشته آنها را در  $C$  و  $C'$  قطع کند، زاویه بین مماسهای بر دو دایره در نقطه  $A$ . ما از روی خواص یک شکل در حالت خاص تو انسنتیم مسئله را تعمیم دهیم.  
اما هنوز هم می توان تعمیم مسئله را به پیش برد. تا اینجا مسئله را به این ترتیب تعمیم دادیم که معلومات بیفاایده را معین کردیم (قائمه بودن زاویه بین مماسها) و صورت مسئله را از آنها پاک کردیم. این بار می توانیم از راه بسط تحرك عملی سازمان معلومات مسئله را کلیت دهیم: مماسهای  $EC$  و  $ED$  هر کدام حد قاطعی هستند که دو نقطه تقاطع آنها با دایره به سمت یکدیگر میل کرده اند. بنابراین خاصیت زاویه  $E$  در حالتی که  $EC$  و  $ED$  نسبت به دایره قاطع باشند باید محفوظ بماند و مسئله چنین می شود:

هر گاه دو دایره در  $A$  متقاطع باشند و از  $A$  دو قاطع رسم



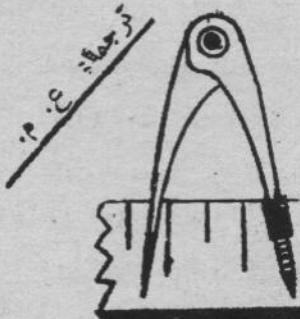
کنیم که دایره ها را در  $D$  و  $D'$  و  $C$  و  $C'$  قطع کنند زاویه بین دو خط  $CD$  و  $CD'$  را در  $T$  و  $T'$  بر این خاصیت باز از دایره که مماسهای بر دو دایره در نقطه  $A$  با یکدیگر می سازند (زاویه  $TAT'$ )

\*\*\*

گاهی پیش می آید که حل یک مسئله مستقیماً از سلطنهایی تحرك عملی "مسئله" یا از بسط تنهایی تحرك عملی معلومات نتیجه می شود. نمونه زیر را در نظر بگیرید.

#### مسئله

در مثلث  $ABC$  دور اس  $A$  ثابت می باشد و رأس  $C$  چنان تغییر می کند که اندازه زاویه  $ACB$  ثابت می باشد. اگر  $AA'$  و  $BB'$  ارتفاعهای این مثلث باشند ثابت کنید که طول



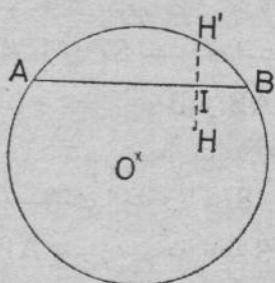
## روش حل مسائل مکان ، پوش و ترسیمات هندسی

تألیف : Louis LONG دکترای ریاضی، معلم ممتاز مدارس فرانسه

### پوش - II

قرینه  $F$  نسبت به  $D$  همان تصویر  $A$  بر  $\triangle$  می‌باشد و مکان دایره  $C$  به قطر  $AB$  می‌باشد. بنابراین مکان  $F$  دایره  $C$  است که قرینه دایره  $C$  نسبت به خط  $D$  می‌باشد. از طرف دیگر می‌دانیم که هرگاه از  $B$  دو مماس بر سهمی رسم شده باشد، خط واصل بین نقاط تماس بر  $BF$  عمود است. بنابراین پودر این خط نسبت به نقطه ثابت  $B$  یک دایره است. پس پوش  $D$  یک مقطع مخروطی مرکزدار است که  $B$  یک کانون آن می‌باشد و چون  $B$  خارج دایره است پس پوش مطلوب یک هذلولی است.

**مسئله ۳** - کلیه مثلثهای  $ABC$  محاط در یک دایره مفروض را در نظر می‌گیریم که مرکز ارتفاعی آنها نقطه معلوم  $H$  باشد. پوش مثلثهای این مثلثها را تعیین کنید. این مسئله قبلاً با روش دیگر حل شده است. فرض



می‌کنیم  $AB$  ضلعی از مثلثها باشد. خط  $OH$  محور تقارن پوش  $H$  است و  $AB$  روى این پوش مشاهده نمی‌شود؛ پس ممکن است که  $H$  یک کانون از پوش باشد.

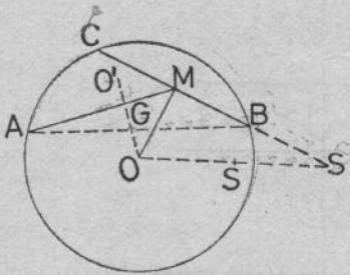
قرینه  $H'$  نسبت به ضلع  $AB$  بر دایرة  $O$ ، دایره محیطی مثلث واقع است و  $I$  تصویر  $H$  بر  $AB$  در تجانس

فصل دوم  
پوش‌هایی که از روی پودر کانونها نتیجه می‌شوند.  
هرگاه به این نتیجه رسیده باشیم که مکان تصاویر یک نقطه ثابت  $F$  بر یک خط  $\triangle$  عبارت از خط  $D$  است بی‌درنگ نتیجه می‌گیریم که پوش خط  $\triangle$  سهمی است که کانون  $F$  مماس بر این آن می‌باشد. در صورتی که معلوم شده باشد که پودر خط  $\triangle$  نسبت به  $F$  یک دایره  $C$  است، در این صورت پوش خط  $\triangle$  یک مقطع مخروطی است که  $C$  دایرة اصلی آن می‌باشد. این مقطع بیضی است هرگاه  $F$  داخل دایرة  $C$  باشد، هذلولی است هرگاه  $F$  خارج دایرة  $C$  باشد. با شناختن دایرة  $C$ ، منحنی و همچنین نوع آن، محورها و مرکز و کانون دیگر آن کلا معین می‌شود.

هرچند این روش خیلی سهل است و جواب را به سرعت بدست می‌دهد اما بیشتر از روشی که قبلاً بیان شد شانسی می‌باشد. عموماً نمی‌توان پیش‌بینی کرد که کدام نقطه از شکل را باید کانون انتخاب کرد. البته معلوم است که  $F$  روی مکان نباید باشد اما بر محور تقارن شکل باید قرار داشته باشد.

**مسئله ۱** - خط  $D$ ، نقطه  $A$  روی آن و نقطه  $B$  در خارج آن مفروض است. سهمی متغیر  $P$  را در نظر می‌گیریم

که در  $A$  بر  $D$  مماس باشد و خط هادی آن از  $B$  بگذرد. از  $B$  دو مماس براین سهمی رسم می‌کنیم، پوش خط واصل بین نقاط تماس را تعیین کنید. اگر  $\triangle$  خط هادی سهمی باشد، نقطه  $I$



محور تقارن OG پوش است. اگر نقطه‌ای از دایره O باشد و قسمی AG را از طرف G به اندازه نصف محول خود امتداد دهیم

تا M بست آید و در M خطی عمود بر OM رسم کنیم تا دایره را در B و C تلاقی کند یکی از مثلثهای ABC بست، می‌آید. نقطه A یک درجه آزادی دارد پس خط AB و همچنین پوش آن E نیزدارای یک درجه آزادی می‌باشد. به سادگی معلوم می‌شود که E بر O و همچنین بر G نمی‌گذرد و اگر G را مرکز تجانس و نسبت آن را  $\frac{1}{2}$  اختیار کنیم

نقطه M مجанс نقطه A می‌باشد پس M بر دایره O قرار دارد که در تجانس مذبور مجанс دایره O می‌باشد. O' مرکز این دایره به این ترتیب پادست می‌آید که OG را از طرف G به اندازه نصف خود امتداد دهیم. بدیهی است که شعاع دایره O' نصف شعاع دایره O می‌باشد.

تصویر نقطه ثابت O بر خط متغیر BC، دلیلرde: O' را می‌پیمایید پس پوش خط BC مقطع مخروطی انتخاب که O' دایره اصلی و O یک کانون آن می‌باشد. دویین کانون آن قرینه O نسبت به O' خواهد بود.

دایره O نسبت به هریک از ضلعهای مثلث وضع یکسان دارد پس هر سه ضلع مثلث دارای همان پوش می‌باشند. تبصره - می‌توان چنین عمل کرد: تعداد خطوطی استغیر BC را تعیین کرد که بر نقطه معلوم S می‌گذرند. در این صورت M وسط BC عبارت خواهد شد او نقطه تقاطع دایره O' و دایره "O به قطر OS. اگر S مرکز دایره "O باشد برای اینکه دو دایره O' و "O مماس باشند یکی از روابط زیر لازم است:

$$O'S_1 = \frac{R}{2} + OS_1, \quad O'S_1 = OS_1 - \frac{R}{2}$$

$$O'S_1 = \frac{R}{2} - OS$$

هریک از این شرطها می‌رساند که S<sub>1</sub> باید بر مقطع مخروطی به کانونهای O و O' واقع باشد و چون S<sub>1</sub> در تجانس به مرکز O و به نسبت ۲ است پس مکان S<sub>1</sub> یک مقطع مخروطی است که یکی از کانونهای آن O و دیگری قرینه O نسبت به O' می‌باشد. همین مقطع مخروطی پوش مطلوب می‌باشد.

(H) مجانس نقطه H است پس مکان I دایره O است که در تجانس مذبور مجانس دایره O می‌باشد. دایره O همان دایره نه نقطه مثلث ABC است و چون مرکز آن وسط OH ثابت است و شعاع آن نصف شعاع دایره O بوده و ثابت است پس دایره مذبور ثابت است. بنابراین پوش خط AB بر AB دایره ثابت O است. بنابراین پوش خط مقطع مخروطی است که O دایره اصلی و H یک کانون آن است و چون O و H نسبت به مرکز O قرینه‌اند پس H کانون دیگر مقطع مذبور می‌باشد. خوانده از روی وضع H نسبت به دایره، نوع منحنی را تعیین خواهد کرد.

**مسئله ۳** - سهمی متغیر P در نقطه معلوم A بر خط معلوم LL' مماس است و X' محور تقارن این سهمی خط

LL' را در نقطه معلوم B قطع می‌کند، پوش خط هادی سهمی را تعیین کنید.

از قبل مشاهده می‌شود که AB محور تقارن پوش است و A بر پوش واقع نیستند. مکان تصویر A را بر خط هادی تعیین می‌کنیم. کانون که از A و B متساوی الفاصله است بر y' عمود منصف AB واقع است. اگر رسم مماس بریک نقطه از سهمی را در نظر بگیریم مشاهده می‌کنیم که در مورد یکی از سهمیها SZ خط هادی آن به این ترتیب بست می‌آید که از A به یک نقطه S از y' وصل کرده و SZ را عمود بر SA اخراج کنیم. بنابراین تصویر نقطه ثابت A بر خط هادی متغیر SZ خط ثابت y' را می‌پیماید. نتیجه می‌شود که پوش SZ سهمی است که AB محور آن و A کانون آن و خطی که در B بر AB عمود شود خط هادی آن می‌باشد.

تبصره - از قبل می‌توان ملاحظه کرد که B نقطه‌ای از خط هادی است و اگر S را نقطه تلاقی y' با دایره به قطر AB اختیار کنیم دو نقطه S و دو خط عمود بر SA وجود خواهد داشت که در B متقاطع می‌باشند و می‌دانیم که رأس هر زاویه قائم محيط بریک سهمی روی خط هادی واقع است.

**مسئله ۴** - دایره O و نقطه G داخل آن بفرض است بینهایت مثلث محاط در دایره وجود دارد که G مرکز ثقل آنها باشد، پوش ضلعهای این مثلثها را پیدا کنید.

-۸ از نقطه ثابت خطی قائم برمقطع مخروطی متغیر رسم می کنیم و از پای این قائم مماسی بر منحنی رسم می کنیم . پوش این خط مماس را پیدا کنید .

-۹ پوش قطبی نقطه ثابتی را نسبت به یک مقطع مخروطی متغیر تعیین کنید در صورتی که کانونهای آن ثابت باشند .

-۱۰ یک سری مقاطع مخروطی در نظر می گیریم که در یک کانون و در خط هادی نظیر آن مشترک باشند . در نقاط تلاقی این مقاطع با خطی ثابت مماسی بر هر یک از آنها رسم می کنیم . پوشهای این مماسها را پیدا کنید .

### فصل سوم

پوشهایی که مستقیماً از تعاریف یا قضایان توجه می شوند . جستجوی نقاطی که از آنها دو مماس عمود بر هم بر پوش رسم می شود .

**مسئله ۱** - همه وترهای  $AB$  از یک دایره را در نظر می گیریم که از نقطه  $I$  به زاویه قائم دیده می شوند . پوش این وترها را پیدا کنید .

اگر  $O$  مرکز دایره باشد  $OI$  محور تقارن پوش خواهد بود .  $I$  و  $O$  روی پوش نیستند . اگر قرار باشد که این دو نقطه کانونهای یک مقطع مخروطی باشند

کافی است که ثابت کنیم حاصل ضرب فواصل آنها از وتر متغیر  $AB$  مقدار ثابت است . در مثلث قائم الزاویه  $AIB$  به فرض آنکه  $S$  تصویر  $I$  بر  $AB$  و  $U$  وسط  $AB$  باشد داریم :

$$IS^r = AS \cdot SB = AU^r - SU^r$$

در مثلث  $OUB$  داریم :

$$OU^r = R^r - UB^r = R^r - AU^r$$

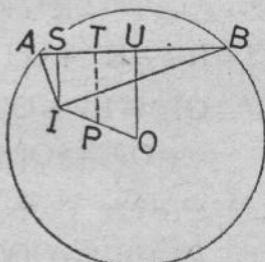
نتیجه خواهد شد که :

$$IS^r + OU^r + SU^r = R^r$$

از طرف دیگر داریم :

$$\begin{aligned} IO^r &= SU^r + (OU - IS)^r = IS^r + OU^r + \\ &+ SU^r - 2OU \cdot IS = R^r - 2OU \cdot IS \end{aligned}$$

$$\text{ثابت} = \frac{R^r - IO^r}{2}$$



**مسئله ۵** - دو خط متوالی  $\Delta$  و  $\Delta'$  مفروض است .

از نقطه معلوم  $B$  واقع در صفحه آنها خط متغیری رسم می کنیم که  $\Delta$  را در  $M$  و  $\Delta'$  را در  $M'$  قطع می کند و دایرة  $C$  به قطر  $MM'$  را در نظر می گیریم . پوش  $D$  قطبی نقطه  $B$  را نسبت به دایرة  $C$  معلوم کنید .

اگر  $I$  پای قطبی  $B$  نسبت به دایرة  $C$  باشد چون  $I$  مزدوج توافقی  $B$  نسبت به  $M$  و  $M'$  است مکان آن خط "  $\Delta$  " است که قطبی  $B$  نسبت به دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  می باشد و با آنها موازی است .

**I** تصویر نقطه ثابت  $B$  بر خط  $D$  خط ثابت "  $\Delta$  " را می بینماید پس پوش  $D$  سهمی است که  $B$  کانون آن و "  $\Delta$  " مماس بر رأس آن می باشد .

### تمرینات

-۱ زاویه با اندازه ثابت حول یک نقطه  $F$  می چرخد . یک ضلع زاویه خط ثابت  $D$  را در  $M$  و ضلع دیگر آن خط ثابت  $D'$  را در  $M'$  قطع می کند . پوش خط  $MM'$  را پیدا کنید .

-۲ زاویه قائم‌های حول کانون  $F$  از یک مقطع مخروطی می چرخد و ضلعهای آن این مقطع را در  $A$  و  $B$  قطع می کنند . پوش خط  $AB$  را پیدا کنید .

-۳ کلیه وترهایی از کره معلوم را در نظر می گیریم که از نقطه ثابت  $S$  به زاویه قائم دیده می شوند . پوش وترهایی را که در یک صفحه ثابت واقعند پیدا کنید .

-۴ خط متغیر  $D$  از یک نقطه داخله دایره ای می گزرد و با خطی که نقطه مذبور را به نقطه داخلی و ثابت  $F$  وصل می کند زاویه ثابت می سازد . پوش خط  $D$  را پیدا کنید .

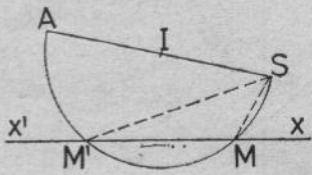
-۵ پوش خط متغیر  $D$  را پیدا کنید که دو دایرة معلوم دو قطعه خط به نسبت معین از آن جدا می کنند .

-۶ ضلعهای زاویه قائم‌های بر دو نقطه ثابت  $A$  و  $B$  می گذرند و نیمساز زاویه خارجی آن بر نقطه ثابت  $C$  می گذرد . پوش نیمساز داخلی زاویه را پیدا کنید .

-۷ مقطع مخروطی متغیری را در نظر می گیریم که کانونهای آن ثابت باشند . از نقطه‌ای ثابت مماسی بر آن رسم می کنیم و در نقطه تماس قائم بر منحنی را رسم می کنیم . پوش این قائم را پیدا کنید .

نتیجه می‌گیرند که پوش E یک مقطع مخروطی است که دایره C دایرة موثر آن می‌باشد. هرگاه مکان S یک خط D باشد پوش E یک سهمی است که D خط هادی آن می‌باشد. نمونه‌ای از حل یک مسئله با این روش را ارائه می‌دهیم. این مسئله قبل با روش دیگر حل شده است.

**مسئله ۳** - رأس زاویه قائم‌های برخط ثابت  $X'X$  حرکت می‌کند و یک ضلع آن از نقطه ثابت A می‌گذرد. پوش ضلع دیگر آنرا پیدا کنید.



اگر S نقطه عالمی باشد مساهای SM و SM' که برپوش E و SM شوند عبارت می‌شوند از خطوطی که

S را به نقاط M و M' نقاط تلاقی  $X'X$  با دایرة به قطر AS وصل می‌کنند. برای آنکه SM و SM' بر هم عمود باشند لازم و کافی است که I مرکز دایره بر  $X'X$  واقع باشد که در این صورت S برخط D قرار خواهد داشت که با  $X'X$  موازی است بقسمی که  $X'X$  از A و از خط D به یک فاصله است. پوش سهمی می‌باشد که D خط هادی آن است.

### تمویلات

**EF-1** یک وتر و G یک نقطه از یک سهمی است. از E و F به موازات محور سهمی رسم می‌کنیم که FG و EG قطع می‌کنند. هرگاه EF ثابت و G بر سهمی متحرک باشد پوش خط HK را پیدا کنید.

**۲** - همه مقطاعات مخروطی را در نظر می‌گیریم که نقطه معلوم F کانون آنها و خط معلوم D خط هادی نظیر آنها می‌باشد. خط دلخواه L و نقطه دلخواه M از آنرا در نظر می‌گیریم. یک منحنی از مقطاعات مخروطی مذبور وجود دارد که بر M می‌گذرد. اگر  $\triangle$  مماس بر منحنی مذبور در نقطه M باشد وقتی که M خط D را پیماید پوش خط  $\triangle$  را پیدا کنید.

**۳** - پوش قطبیهای نقطه معلوم را نسبت به دایره‌های مumas بردو دایرة معلوم تعیین کنید.

**۴** - مثلث ABC را در نظر می‌گیریم که رأس A از آن ثابت و ضلع BC از آن برخط ثابت  $\triangle$  می‌لغزد بقسمی که اختلاف زاویه‌های B و C ثابت می‌باشد. پوش ارتقاعهای وارد از رأسهای B و C را پیدا کنید. (دباله در صفحه ۱۰۵)

نتیجه می‌شود که پوش AB عبارتست از مقطع مخروطی به کانونهای O و I.

تصبره - نقطه P و میانه OI مرکز مقطع مخروطی است و می‌توان ثابت کرد که S و U تصویرهای I و O بر AB بر یک دایرة به مرکز P واقعند.

**مسئله ۴** - دو دایرة O و O' مزروغ است. همه قاطعهای L رادر نظر می‌گیریم که بوسیله دو دایرة مذبور به توافق تقسیم می‌شوند. پوش خطوط L را تعیین کنید.

قبل از لاحظه می‌کنیم که OO' محور تقارن پوش است. نقاط تلاقی L را با دایره‌های O و O' به ترتیب A و B و C و D و میانه AB را I و میانه CD را I' می‌نامیم. حاصل ضرب فواصل نقاط ثابت O و O' را از خط متغیر L حساب می‌کنیم؛ بنابراین فرض داریم:

$$IB' = IC \cdot ID$$

چنانچه R و R' شعاعهای دایره‌های O و O' باشد داریم:

$$R^2 - OI^2 = II'^2 - IC^2 = II'^2 - R'^2 + OI^2$$

$$OO'^2 = II'^2 + (O'I' - OI)^2 = II'^2 + OT'^2 + OI'^2 - 2OI \cdot OT'$$

از دو رابطه بالا نتیجه می‌شود که:

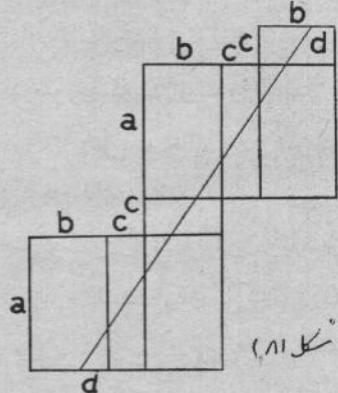
$$2OI \cdot OT' = R^2 - OO'^2 = R'^2 - R^2 + OI^2$$

چون حاصل ضرب دونقطه ثابت O و O' از خط L مقدار ثابت است پس پوش خط L یک مقطع مخروطی مركزدار به کانونهای O و O' می‌باشد.

پادداشت - اگر U و V نقاط تلاقی دو دایره باشد مکان I از U و V می‌گذرد و با توجه به بفروضات معلوم می‌شود که مکان I از نقاط سیکلیک می‌گذرد پس این مکان یک دایره خواهد بود. از این راه معلوم خواهد شد که پوش L مقطع مخروطی به کانون O می‌باشد. به همین ترتیب معلوم خواهد شد که O' نیز یک کانون از مقطع مخروطی مذبور است. هرگاه از طریق ترسیمات ساده‌ای بتوان خطوط متحرکی را که بر نقطه S می‌گذرند تعیین کرد، در صورتی که تعداد این خطوط ۲ باشد مکان S را تعیین می‌کنند برای آنکه این دو خط بر هم عمود باشند و چنانچه این مکان یک دایرة C شد آنگاه

# — | صد مسئله جالب و حل آنها | —

ترجمه: داویدریحان



**حل - روی**  
شش وجه جعبه‌شکلاتها  
اثر روبان را مشخص  
می‌کنیم. اگر جعبه  
را بریده و روی صفحه‌ای  
بگسترانیم (ش. ۸۱)، که  
در آن وجود بزرگ  
دو مرتبه نمایانده  
شده‌اند، اثر روبان

به صورت خطی راست درخواهد آمد. از روی شکل به مادگی  
دیده می‌شود که:

(۱) طول روبان برابر است با:

$$2V(a+c)^2 + (b+c)^2$$

(۲) تانژانت زاویه‌ای که روبان تحت آن اضلاع را

می‌برد برابر است با:

$$\frac{b+c}{a+c} \text{ یا } \frac{a+c}{b+c}$$

(۳) می‌توانیم روبان را در امتداد جعبه بلغزانیم،  
بدون آنکه آنرا دراز کرده باشیم (درشکل ۸۱، این موضوع  
مربوط به انتقال خط معرف روبان می‌شود).

(۴) طول روبان وقتی حداقل ممکن است که روبان دو  
دفعه از بزرگترین وجوده جعبه عبور کند؛ اگر  $c < b < c < a$  و  
باشد عبارت از ارتفاع جعبه باشد، این وجوده معرف کف و  
در جعبه هستند.

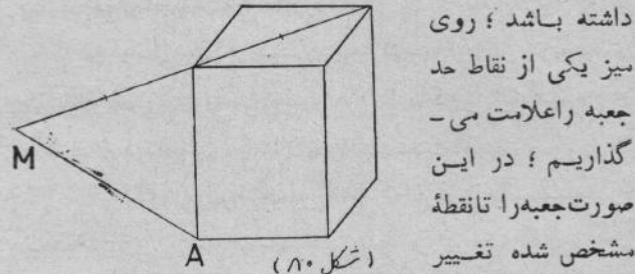
## ۶۷ - دستگاه مقدماتی

ترازویی خیلی ساده می‌تواند به طریق زیر ساخته شود:  
ترازو مشتمل بر میله‌ای چوبی با ضخامت ثابت است که از ماده‌ای  
یکنواخت تشکیل شده و دریک انتهایش وزنی نسبتاً سنگین  
قراردارد؛ در انتهای دیگر شنگک کوچکی قراردارد که به آن  
اشیاء را برای توزین می‌آویزیم، روی میله شکافهایی وجود  
دارد که برای درجه‌بندی بکار می‌روند و از آن می‌توانیم وزن

## ۶۵ - قطر متوازی السطوح چوبی

قطر یک متوازی السطوح چوبی یعنی فاصله‌ما بین دورترین  
رأسهای آنرا ممکن است بوسیله یک خطکش اندازه بگیریم. یک  
راه عملی برای اندازه گیری این قطر را که می‌توانیم مثلا در  
یک کارگاه مورد استفاده قراردهیم، ذکر کنید (از قضیه فیثاغورس  
نایاب استفاده کنید).

**حل - جعبه چوبی** را روی میز طوری قرار می‌دهیم که  
بالش در امتداد یال میز و یکی از گوشه‌هایش در گوش میز قرار

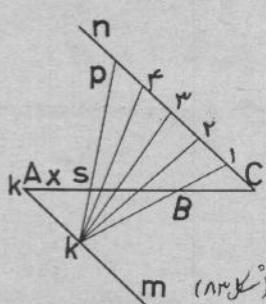


داشته باشد؛ روی  
میز یکی از نقاط حد  
جعبه راعلامت می-  
گذاریم؛ در این  
صورت جعبه را تا نقطه  
مشخص شده تغییر

مکان داده و در هوا فاصله مابین گوش میز و گوش فوکانی از  
جعبه واقع در بالای نقطه مزبور را اندازه گیریم.  
راه دیگر: لبه خطکشی رادر امتداد قطر قاعده فوکانی  
جعبه چوبی قرار می‌دهیم، خطکش رادر امتداد قطر و به اندازه  
این قطر امتداد می‌دهیم و فاصله AM را (ش. ۸۰) اندازه  
می‌گیریم.

## ۶۶ - روبانها و جعبه‌ها

فروشنده‌گان قنادیها، جعبه‌های شکلات را به طریق  
زیر می‌بندند: روبان جعبه را به صورت مورب احاطه می‌کندو  
شکلی هشت ضلعی مسدود و غیر مسطح را تشکیل می‌دهد.  
روی در جعبه مانند زیر آن می‌توانیم دو قطعه موازی از روبان  
را بینیم. باداشتن ابعاد جعبه، ثابت کنید که طول روبان و  
زاویه‌ای را که با اضلاع می‌سازد می‌توانیم محاسبه کیم.  
بالآخره ثابت کنید که نه فقط می‌توانیم روبان را روی خودش  
بلغزانیم بلکه می‌توانیم آنرا روی جعبه تغییر مکان دهیم.



$$(2) \quad k = \frac{a}{1-a}$$

معروف طول  $k$   
است (ا بزرگتر از  $a$ )  
است).

حال با نقطه دید  
K، اندازه های واقع  
بر نیم خط n را

روی قطعه خط AC تصویر می کنیم. در صورتی که  $CP = p$  باشد، فرض می کنیم که  $S$  تصویر نقطه  $P$  باشد. مشاهدات  $AKS$  و  $CPS$  مشابهند و داریم:

$$\frac{p \cdot AS}{a} = \frac{1 - AS}{1 - a}$$

از مقایسه این نتیجه با تساوی (1)، می بینیم که  $x = AS$  است؛ بنابراین  $S$  نقطه تعادل مطلوبست و با توجه به این مطلب می توانیم میله را مدرج کنیم.

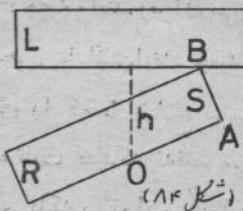
چگونگی مدرج کردن میله را دیدیم؛ با نقل درجه بندی نسبتاً طریق روی  $n$  می توانیم هر آندازه که مایل باشیم روی میله قبان درجه بندی با همان ظرافت بدست آوریم.  
استدلال فوق نشان می دهد که فرض تجانس میله لازم نبوده است.

#### ۶۸- کوتاه ترین فاصله

خطکش L به میزی وصل شده و ضلع خطکش دیگر R همواره با میخی که در میز فرو رفته در تماس است؛ خطکش خیر طوری می لغزد که انتهای B آن روی ضلع خطکش L باشد (ش ۸۴). A انتهای ضلعی است که با O در تماس است. در یکی از اوضاع خطکش R و با اختصار تکانی، فاصله AO به حداقل خود می رسد. این موضوع را پیدا کرده وحداقل AO را با دردست داشتن فاصله مینیم از خطکش ثابت و عرض خطکش متحرک را بدست آورید.

**حل:** چنانکه از شکل ۸۴ دیده می شود، داریم:

$$AO = \sqrt{OB^2 - AB^2}$$



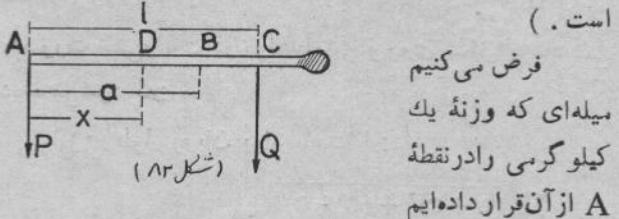
چون AB عرض  $s$   
خطکش متحرک است  
و OB فاصله  $h$  میخ  
از خطکش می باشد،  
می نیم  $AO$  برابر  
است با:  $\sqrt{h^2 - s^2}$

هر شیء آویخته به چنگک را بر حسب کیلو درم بخوانیم.  
برای این منظور باید نقطه ای را بیاییم که اگر میله را روی  
انگشت یاروی لبه چاقوئی در این نقطه قرار دهیم، در حالت  
تعادل باشد، عدد خوانده شده روی میله مدرج وزن مطلوب  
را بدست می دهد. بسادگی می توانیم بادردست داشتن یک دسته  
وزنه مشخص، این میله را بطور تجربی مدرج نمائیم. هر  
قدر این وزنه ها بیشتر باشد، دقت بیشتر خواهد بود.

چگونه می توانیم باروشی هندسی میله را مدرج کنیم،  
در صورتی که بیش از یک وزنه مثلاً یک کیلو گرمی نداشته باشیم؟

**حل:** - حالتی را در نظر می گیریم که وزنه ای یک کیلو-  
گرمی داشته باشیم. فرض می کنیم  $AC = l$  (ش ۸۲) فاصله  
مرکز ثقل C میله بدون وزنه و نقطه A که در آن وزنه قرار  
دارد، باشد؛ فرض می کنیم وزن میله Q باشد (مرکز ثقل بطور

تجربی معین شده  
است.)



روی تیغه ای که از B می گزند در حال تعادل باشد. فاصله AB را به  $a$  نمایش می دهیم. فرض می کنیم D نقطه تعادل مربوط به وزنه غیر مشخص P کیلو گرم واقع در A باشد و فاصله AD را به  $x$  می ناییم.

شرط تعادلی که در فوق به آن اشاره شد، تساوی گشتاورها را موجب می شود:

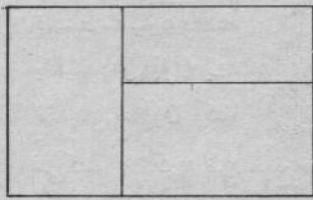
$$a = Q(1 - a), \quad Px = Q(l - x)$$

$$(1) \quad \frac{Px}{a} = \frac{1-x}{1-a} \quad \text{از آنجا:}$$

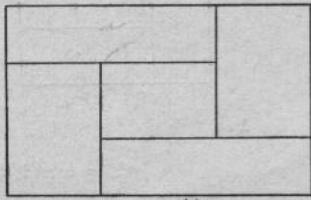
برای مدرج نمودن میله، قطعه خط AC را رسم کرده و روی آن نقطه B را اختیار می کنیم و دو نیم خط موازی و مختلف الجهت  $ngm$  از نقاط A و C (ش ۸۳) ترسیم می نمائیم. روی  $n$  ابتدا از C نقطه به فواصل  $1, 2, \dots, p$  را مشخص می کنیم. از نقطه B و نقطه L که به فاصله واحد از C قرار گرفته است، خطی رسم می کنیم، این خط  $m$  را در K قطع می کند. مشاهدات CLB و AKB مشابهند و داریم:

جدامی کند، بنابراین قسمتهای هاشورخورده طرف راست می‌تواند به طریقه غیر مشخصی تقسیم شود.

از این تذکر نتیجه می‌گیریم که تقسیم ابتدائی به سه قسم وجود ندارد (ش. ۸۷) زیرا در هر تقسیم سه تائی حداقل یکی از اضلاع مستطیل تماس پیدا نخواهد کرد، در نتیجه تقسیم ابتدائی نخواهد بود.

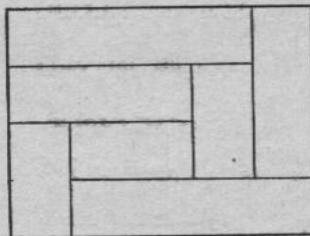


(شکل ۸۷)

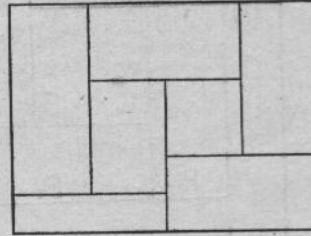


شکل ۸۸

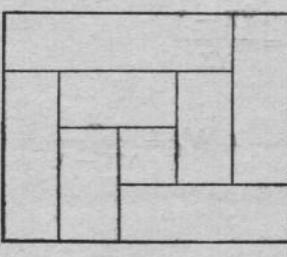
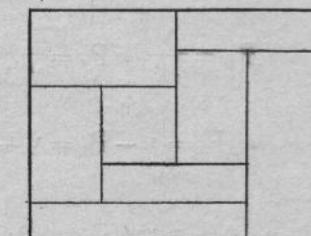
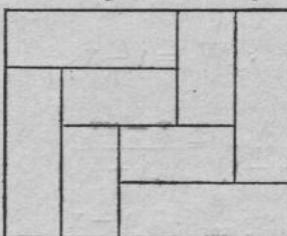
همچنین به سادگی دیده می‌شود که تقسیم ابتدائی چهار قسمتی وجود ندارد.  
بطوریکه از شکل ۸۸ دیده می‌شود، تقسیم ابتدائی پنج قسمتی ممکن می‌باشد. همچنین امکان تقسیمی به هفت قسمت یابیشتر وجود دارد. ولی در اینجا چون تعداد زیادی تقسیمات



(شکل ۸۹)



اولیه ممکن برای یک عدد بخش وجود دارد، جواب پیچیده می‌شود. مثلاً، در شکل ۸۹ دو تقسیم اولیه متفاوت قسمتی و در شکل ۹۰ چهار تقسیم هشت قسمتی را ملاحظه می‌کنید.



(شکل ۹۳)

## ۶۹- تقسیم قطعات زمین

قطعات زمین بعمولاً به شکل مستطیل هستند؛ فرض کنیم که تمام این زمین‌ها مستطیل شکل باشند. می‌دانیم که تقسیمات متواالی این قسمتها نتیجه‌ای از تقسیماتی که برای وارثین یک مالک متوفی بدست می‌آید. هر وقت قطعه زمین به شکل مستطیل و همچنین حدی با خاصیتی که آنرا به دو قسم تقسیم کند، می‌بینیم، واضح است که این شکل نتیجه یک تقسیم است، و راه دیگری برای بدست آوردن آن وجود ندارد. بر عکس، اگر زمین اولیه به سه قسمت مستطیلی شکل تقسیم شده باشد، هیچکس که به محل آشنا نداشته باشد (مستقیماً یا از روی آرشیو تقسیمات اراضی) نمی‌تواند بگوید که چنین شکلی نتیجه یک تقسیم ابتدائی مابین سه وارث است، یا ابتدا به دو قسمت شده و می‌پسیکی از این مساحت‌ها باید بخش کوچکتر تقسیم کرده‌ایم.

تقسیم به دو قسمت را ابتدائی و تقسیم به سه قسمت را غیر ابتدائی می‌خوانیم. به بیان واضح‌تر، تقسیمی را ابتدائی گوئیم که تواند از تقسیمات متواالی (از کجا آمدنش کم اهمیت است) بدست بیاید. این تعریف توسط توز ابرازشده است. شخص اخیر خاطر نشان کرده است که تقسیمات دو، پنج، هفت، هشت، ... قسمتی ابتدائی وجود دارد. (خواننده خود تحقیق خواهد کرد که تقسیمات ابتدائی سه تائی و چهار تائی وجود ندارد و خواهد توانست تقسیمات ابتدائی پنج و هفت قسمتی را بیاید. **نحوه ذکری ثابت کرده است که تقسیمات ابتدائی شش قسمتی وجود ندارد.**)

(۱) تقسیم ابتدائی یک مربع را به پنج قسمت متساوی ارائه دهید.

(۲) تقسیم ابتدائی یک مربع را به هفت قسمت متساوی بدست آورید.

(۳) تقسیم ابتدائی یک مربع را به هشت قسمت متساوی بدست آورید.

**حل-** تقسیم ابتدائی یک مستطیل به دو قسمت واضح است (ش. ۸۵).

حال تقسیمی ابتدائی به بیش از دو قسمت را در نظر می‌گیریم؛

هر ضلع از مستطیل باید

بو میله خط محدوده‌ای

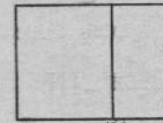
بریده شود؛ همچنین

نمایش شکل ۸۶ تقسیمی

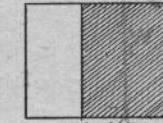
ابتدائی نیست، زیرا

خط تقسیم قائم از همیه،

مستطیل چیزی را که داخلش هیچ خط محدوده‌ای وجود ندارد،



شکل ۸۵



شکل ۸۶

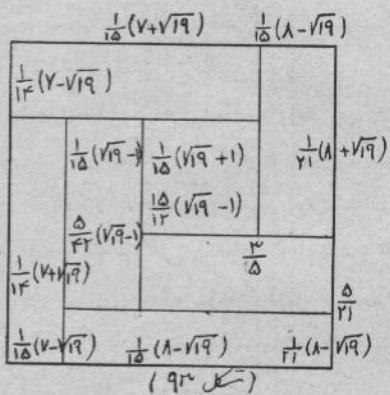
$$W_5 = W_1 - W_4 = x - \frac{x}{VX-1} = \frac{x(VX-2)}{VX-1}$$

$$P_5 = P_4 - P_5 = \frac{VX-1}{VX} - \frac{VX-1}{VX(VX-2)} =$$

$$= \frac{(VX-1)(VX-3)}{VX(VX-2)}, \quad W_6 = \frac{x(VX-2)}{(VX-1)(VX-3)}$$

چون  $W_2 + W_4 + W_6 = 1$  است داریم :

$$\frac{1-x}{VX-1} + \frac{x}{VX-1} + \frac{x(VX-2)}{(VX-1)(VX-3)} = 1$$



معادله فوق پس از اختصار به صورت  $196x^2 - 294x^2 + 128x - 15 = 0$  در می آید.

یکی از ریشه های این معادله  $\frac{1}{2}$  است، ولی این مقدار جواب

مسئله نیست، زیرا اگر  $x = \frac{1}{2}$  باشد،  $W_2 = W_1$  و  $P_2 = P_1$

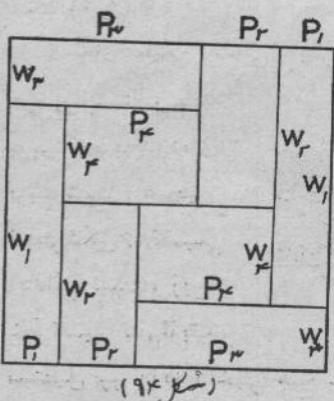
می باشد و در چنین حالتی تقسیم اولیه نمی باشد.  
ریشه های دیگر این معادله عبارتند از :

$$x > \frac{3}{7} = \frac{6}{14} \quad \text{و} \quad \frac{7 + \sqrt{19}}{14}$$

باشد زیرا در غیر این صورت  $P_2$  منفی خواهد بود. عدد  $\frac{7 + \sqrt{19}}{14}$  جوابگوی مسئله است. شکل ۹۳ مربوط به این جواب است

که توسط ژ- میکوزینسکی ارائه شده است.

می توانیم ثابت کنیم که به غیر از شکل طرف راستی ۹۱ تقسیم اولیه به هفت قسمت متساوی وجود ندارد. ولی شاید



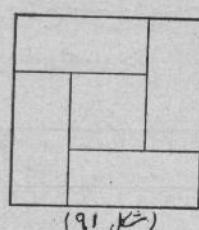
تقسیمات اولیه

با هفت قسمت متساوی از نوع دیگر وجود داشته باشد.

- III  
هشت قسمت متساوی -  
فرض می کنیم که چنین تقسیمی مطابق باشکل

اکنون به حل مسئله مطلق یعنی به تقسیمات متواالی به بخش‌های با ساحتها متساوی می پردازیم.

I - تقسیم اولیه به پنج قسمت متساوی - مریع به ضلع

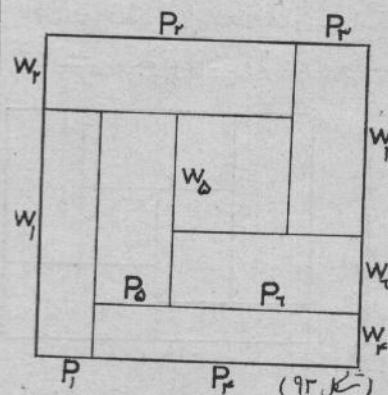


واحد را در نظر می گیریم  
و فرض می کنیم که از آن تقسیم اولیه به پنج قسمت متساوی داشته باشیم (ش ۹۱). به تقسیمی متقاضی اکنفا می کنیم.

اگر  $x$  ضلع مریع مرکزی باشد، داریم:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{با} \quad \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad \text{و} \quad \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$



- II - تقسیم اولیه  
به هفت قسمت متساوی -  
مانند قبل، مریع به ضلع واحد را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که از آن تقسیم اولیه ای با هفت قسمت متساوی مطابق با شکل ۹۲ داشته باشیم.

با فرض  $x = W_1$  به ترتیب داریم:

$$P_1 = \frac{1}{VX}, \quad P_r = \frac{1}{V(1-x)}, \quad W_r = 1-x$$

$$P_r = 1 - P_r = 1 - \frac{1}{V(1-x)} = \frac{V-1}{V(1-x)}$$

$$W_r = \frac{1-x}{V-1}$$

$$P_4 = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{VX} = \frac{VX-1}{VX}$$

$$W_4 = \frac{x}{VX-1}$$

$$P_5 = \frac{VX-1}{VX(VX-2)}$$

$$W_2 = 1 - x, \quad P_2 = \frac{1}{\lambda(1-x)}$$

$$W_4 = x - \frac{1}{2}, \quad P_4 = \frac{1}{\lambda(x - \frac{1}{2})}$$

و چون داریم  $P_4 = P_2 - P_1$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{\lambda(x - \frac{1}{2})} = \frac{1}{\lambda(1-x)} - \frac{1}{\lambda x}$$

در می‌آید. ریشه‌های این معادله عبارتند از

$$x > \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

باشد، تنها ریشه  $x_2$  قابل قبول است.

شکل ۹۵ تقسیم اولیه بهشت قسمت متساوی مربوط به این جواب را می‌دهد و ابعاد مستطیل‌ها در آن مشخص شده‌اند. غیر از این جواب، جواب دیگری وجود دارد که به طریق مشابه (شکل ۹۶) بدست می‌آید.

(دباله از صفحه ۱۰۰)

**۵**- مثلث متساوی الساقین ABC و نقطه متغیر M مفروض است بقسمی که  $AB = AC$  و نقطه A بر نیمساز زاویه BMC قرار دارد. نیمسازهای داخلی زاویه‌های KAM و ACM دایره محیطی مثلث ABC را در I و K قطع می‌کنند. پوش خط IK را پیداکنید.

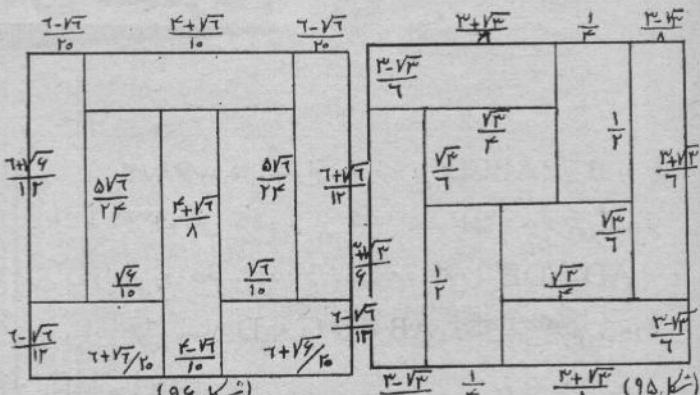
**۶**- یک منحنی مقطع مخروطی و نقطه‌ای در داخل آن مفروض است. از این نقطه دو خط مزدوج دلخواه رسم می‌کنیم و چهار ضلعی در نظر می‌گیریم که دو خط مزبور قطرهای آن بوده و در منحنی مزبور محاط باشد. پوش ضلعهای این چهارضلعی را پیداکنید.

**۷**- وتری از یک دایره بقسمی تغییر می‌کند که همواره به طول ثابت می‌باشد. دو سر این وتر را بر دو خط متوازی معلوم تصویر می‌کنیم. پوش خط واصل بین نقاط حاصل را پیداکنید.

**۸**- دایره متغیر C همواره بر دو دایره ثابت  $C_1$  و  $C_2$  مماس است. اگر  $\triangle$  محوراصلی دایره C با دایره ثابت S باشد پوش خط  $\triangle$  را پیداکنید.

**۹**- کره متغیر  $\Sigma$  همواره بر سه کره ثابت مماس می‌باشد اگر  $\pi$  صفحه اصلی کره  $\Sigma$  با کره ثابت  $\pi_1$  باشد پوش صفحه  $\pi$  را پیداکنید.

متقارن ۹۴، ممکن باشد. مساحت هر مستطیل برابر با  $\frac{1}{\lambda}$  باشد.



ش ۹۵

به سبب تقارن باید  $W_2 = \frac{1}{2}$  باشد. با فرض  $x =$

داریم :

$$P_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad P_2 = \frac{1}{4}$$

### روش حل مسائل ...

**۱**- دایرة C در Oy ضلع زاویه قائمه xoy مماس می‌باشد. اگر M نقطه‌ای از دایره و M' قرینه آن نسبت به قطر OX و OX' نقطه‌ای باشد که مماس در نقطه M بر دایره خط Oy را قطع می‌کند، پوش خط MT را پیداکنید.

**۲**- دو دایره O و O' به مرکزهای O و O' و به شعاعهای R و R' را در نظر می‌گیریم. در دایره O و تر AB را در نظر می‌گیریم که بر نقطه ثابت P می‌گذرد و در دایره O' و ترها A'B' را بقسمی رسم می‌کنیم که :

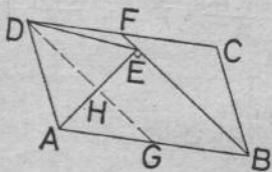
$\frac{A'B'}{AB} = K$  باشد که K عدد ثابت می‌باشد. پوش خط A'B' را پیداکنید.

**۳**- مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و B' و C' قرینه‌های مرکز ارتقای را نسبت به ضلعهای AC و AB بدست می‌آوریم. به فرض آنکه نقاط B و C و اندازه زاویه A ثابت باشد پوش خط B'C' را پیداکنید.

**۴**- از نقطه I واقع بر یک دایره سه وتر IA، IB و IC و بعد دایره‌های به قطرهای وترها مزبور را رسم می‌کنیم که دو به دو یکدیگر را در M و N و P قطع می‌کنند. اگر A نقطه ثابت و BC به طول  $l$  باشد پوش خط MN را پیداکنید.

# حل مسائل یکان شماره: ۶۸

۶۸/۲ - در متوازی الاضلاع ABCD از B به F وسط CD وصل کرده و از A بر خط BF عمود می کنیم که  $AD = DE$  آن را در E قطع می کند . ثابت کنید که  $AD = DE$  و متساوی باشیم . چون



و  $BG = DE$   
ومتوازی اند چهارضلعی  
متوازی  $BFDG$   
الاضلاع است و

با  $BF$  موازی می باشد . بنابراین  $DG$  بر  $AE$  عمود است .  
در مثلث  $ABE$  چون  $G$  وسط  $BE$  با  $GH$  و  $AB$  موازی است پس  $H$  وسط  $AE$  است . در مثلث  $ADE$  خط  $DH$  ارتقای  $AE$  است . هم میانه است پس این مثلث متساوی الساقین است یعنی  $DA = DE$  است .

## حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۶۸/۳ - فرستنده : قوام نحوی

اگر داشته باشیم :

$$f(x) = \frac{ax^r + bx + c}{cx^r + bx + a}$$

تحقیق کنید که :

$$f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

حل - داریم :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a\left(\frac{1}{x}\right)^r + b\left(\frac{1}{x}\right) + c}{c\left(\frac{1}{x}\right)^r + b\left(\frac{1}{x}\right) + a} = \frac{a + bx + cx^r}{c + bx + ax^r}$$

حاصل  $\left(\frac{1}{x}\right)$  کسری است وارونه کسر  $f(x)$  بنابراین

## حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۶۸/۱ - به فرض اینکه داشته باشیم :

$$A = a + b + c + d$$

$$B = a + b - c - d$$

$$C = a - b + c - d$$

$$D = a - b - c + d$$

صحت اتحاد زیر را محقق کنید :

$$AB(A^r + B^r) - CD(C^r + D^r) \equiv$$

$$16ab(a^r + b^r) - 16cd(c^r + d^r)$$

حل - به ترتیب داریم :

$$AB = (a + b + c + d)(a + b - c - d) =$$

$$(a + b)^r - (c + d)^r$$

$$A^r + B^r = [(a + b) + (c + d)]^r +$$

$$+ [(a + b) - (c + d)]^r = 2(a + b)^r + 2(c + d)^r$$

$$AB(A^r + B^r) = 2[(a + b)^r - (c + d)^r][(a + b)^r$$

$$+ (c + d)^r] = 2[(a + b)^r - (c + d)^r]$$

اگر در عبارتها مفروض  $A$  و  $B$  حرفهای  $b$  و  $d$  را

به ترتیب به  $-b$  و  $-d$  تبدیل کنیم عبارتهای  $C$  و  $D$

حاصل می شوند بنابراین داریم :

$$CD(C^r + D^r) = 2[(a - b)^r - (c - d)^r]$$

$$AB(A^r + B^r) - CD(C^r + D^r) =$$

$$2[(a + b)^r - (a - b)^r] - 2[c + d]^r - (c - d)^r$$

$$= 2[(a + b)^r + (a - b)^r][(a + b)^r - (a - b)^r]$$

$$- 2[(c + d)^r + (c - d)^r][(c + d)^r - (c - d)^r]$$

$$= 2(2a^r + 2b^r)(4ab) - 2(2c^r + 2d^r)(4cd)$$

$$= 16ab(a^r + b^r) - 16cd(c^r + d^r)$$

حاصل ضرب  $(\frac{1}{X})$  و  $f(x)$  برابر با یک است.

#### ۶۸/۴ - فرستنده: قوام نحوی

اگر داشته باشیم:

$$f(n) = 2^n + \frac{1}{2^n}$$

تحقیق کنید که داریم:

$$f(n) \cdot f(1) = f(n+1) + f(n-1)$$

حل - داریم:

$$f(n+1) + f(n-1) =$$

$$= 2^{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} + 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 2 \times 2^n + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} + \frac{2^n}{2} + 2 \times \frac{1}{2^n}$$

$$= 2(2^n + \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{2}(2^n + \frac{1}{2^n})$$

$$= (2^n + \frac{1}{2^n})(2 + \frac{1}{2}) = f(n) \cdot f(1)$$

#### ۶۸/۵ - از رابطه زیر مقدار $y$ را حساب کنید:

$$\log_2 \frac{1}{2^7} = \log_{\frac{1}{16}} y$$

حل - به ترتیب داریم:

$$\log_2 \frac{1}{2^7} = \log_{\frac{1}{16}} 3^{-3} = -3$$

$$\log_{\frac{1}{16}} y = 2^{-2} = \frac{1}{4} \rightarrow y = (\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{2}$$

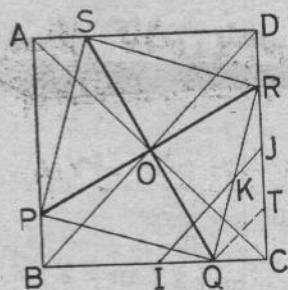
#### ۶۸/۶ - از نقطه O مرکز مربع ABCD دو خط عمود

بر هم رسم می کنیم که اولی ضلعهای AB و CD را در P و R و دومی ضلعهای BC و DA را در Q و S قطع می کند.

اولا ثابت کنید که چهارضلعی PQRS مربع است. ثانیا اگر

I وسط BC و J وسط CD و K وسط QR و L وسط DA باشد ثابت کنید که سه نقطه I و J و L بر یک استقامت واقعند.

حل - از تساوی دو مثلث AOS و COQ نتیجه



می شود که QS وسط O دارد. همچنین O وسط PR است. دو زاویه SOA و POB با یکدیگر برابرند زیرا ضلعهای آنها نظیر به نظر برهم عمود

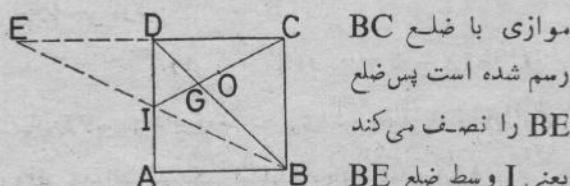
می باشند. دو مثلث BOP و AOS در حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین با هم برابر می شوند و نتیجه می شود که OS = OP دو خط PR و QS متساویند، منصف یکدیگرند و بريکدیگر عمودند پس چهارضلعی PQRS مربع است. ثانیا از تساوی دو مثلث COQ و DOR نتیجه می شود

که IQ = JR و CQ = DR از Q چون  $CQ = DR$  پس ضلع  $CD$  موازی با  $IJ$  رسم می کنیم که ضلع  $CD$  را در T قطع می کند. چون مثلث CIJ متساوی الساقین است  $IQ$  با  $JT$  برابر می شود یعنی  $J$  وسط RT است. در مثلث RQT خط JT موازی با RQ است و ضلع QT را نصف کرده است پس ضلع  $RT$  را نیز نصف می کند. بنابراین  $IJ$  از K وسط QR می گذرد. به عبارت دیگر سه نقطه I و K و J بريک استقامت واقعند.

#### ۶۸/۷ - در مربع ABCD ضلع CD را از طرف D

به اندازه خودش امتداد می دهیم تا نقطه E بدمست آید و از B وصل می کنیم که ضلع AD را در I قطع می کند. دو خط BD و CI یکدیگر را در G قطع می کنند. اگر O وسط CI باشد ثابت کنید که طول OG برابر با یک ششم طول CI است.

#### حل - در مثلث EBC خط DI از وسط ضلع CE



موازی با ضلع BC رسم شده است پس ضلع BE را نصف می کند. BE وسط ضلع CI یعنی I وسط ضلع CI است. در مثلث مذبور G نقطه تلاقی دو میانه BD و CI است. بنابراین GI یک سوم CI می باشد و داریم:

$$OG = OI - GI = \frac{CI}{2} - \frac{CI}{3} = \frac{CI}{6}$$

## حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

رادیان و یکنی از اندازه‌های کمان  $AM$  درجهت مثلثاتی برابر

$$\text{می‌شود با } \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} - 2\pi \text{ و داریم:}$$

$$\begin{aligned}\widehat{MN} &= \widehat{AN} - \widehat{AM} = 2K\pi + \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right) = \\ &= 2K\pi - \frac{11\pi}{12}\end{aligned}$$

### مسائل کلاس پنجم ریاضی

**۶۸/۱۰** برای  $m$  شش مقدار وجود دارد که در ازاء آنها معادله زیر دارای ریشه مضاعف می‌باشد. این شش مقدار  $m$  را حساب کنید:

$$[x^2 - (m+1)x - 2m][x^2 + (2m-1)x + m] = 0$$

به ازاء  $2m = m$  ریشه‌های معادله بالارا پیدا کنید.

**حل** - برای اینکه معادله مفروض حداقل دارای یک ریشه مضاعف باشد کافی است که یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

الف - سه جمله‌ای داخل کروشه اول ریشه مضاعف داشته باشد.

ب - سه جمله‌ای داخل کروشه دوم ریشه مضاعف داشته باشد.

ج - دو سه جمله‌ای مزبور دارای ریشه مشترک باشند.

برای برقراری شرط الف باید داشته باشیم:

$$x^2 - (m+1)x - 2m = 0$$

$$\Delta = (m+1)^2 + 8m = m^2 + 10m + 1 = 0$$

$$m_1 = -5 + 2\sqrt{6} \quad m_2 = -5 - 2\sqrt{6}$$

شرط ب وقتی برقرار است که:

$$x^2 + (2m-1)x + m = 0$$

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4m = 4m^2 - 8m + 1 = 0$$

$$m_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, \quad m_4 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

برای اینکه شرط ج برقرار باشد یعنی دو معادله:

$$x^2 - (m+1)x - 2m = 0$$

$$x^2 + (2m-1)x + m = 0$$

**۶۷/۸** معادله درجه دوم زیر مفروض است:

$$mx^2 + (2m+1)x + m + 1 = 0$$

به فرض  $m \neq 0$  اولاً ثابت کنید که این معادله همواره دارای دوریشة  $x'$  و  $x''$  می‌باشد.

ثانیاً بر معور  $x'$  به مبدأ  $O$  دو نقطه  $P$  و  $Q$  را با طولهای  $x'$  و  $x''$  اختیار می‌کنیم. در صورتی که  $M$  وسط  $PQ$  باشد آیا ممکن است که  $\overline{OM} = -1$  باشد؟ با فرض  $m$  مقدار  $m$  و همچنین مقادیر  $x'$  و  $x''$  نظری آنرا حساب کنید.

**حل** - اولاً داریم:

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 1$$

مبین معادله مستقل از  $m$  و همواره مثبت و معادله از درجه دوم ایست پس برای آن همواره دو ریشه  $x'$  و  $x''$  وجود دارد ثانیاً داریم:

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OP} + \overline{OQ}}{2} = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{2m+1}{2m}$$

با فرض  $1 = -\overline{OM}$  داریم:

$$-\frac{2m+1}{2m} = -1 \Rightarrow -1 = 0$$

که غیر ممکن است.

با فرض  $2 = \overline{OM}$  خواهیم داشت:

$$-\frac{2m+1}{2m} = 2 \Rightarrow 6m = -1 \quad m = -\frac{1}{6}$$

چون این مقدار از  $m$  را در معادله مفروض قرار داده ساده کنیم نتیجه می‌شود:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \quad x' = 5 \quad x'' = -1$$

**۶۸/۹** در دایرة جهتداری سه نقطه  $A$  و  $M$  و  $N$

چنان واقع شده‌اند که یکی از اندازه‌های کمان  $AM$  برابر با  $(45^\circ)$  گراد و یکی از اندازه‌های کمان  $AN$  برابر با

$\frac{5\pi}{6}$  رادیان است. فرمول کلی اندازه‌های کمان  $MN$  را بدست آورید.

**حل** - اولاً  $45^\circ$  گراد معادل است با  $\frac{\pi}{4} - 2\pi$ .

$$\begin{cases} x+y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x-y = 360k^\circ - 30^\circ \end{cases}$$

حل - دستگاه به صورت زیر نوشته می شود :

$$\begin{cases} x+y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x-y = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

از جمع و تفکیق طرفین معادلات حاصل خواهد شد :

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{24}$$

$$y = \frac{k\pi}{4} - k\pi + \frac{5\pi}{24}$$

با توجه به اینکه مقادیر  $\frac{k\pi}{4}$  شامل مقادیر  $\pm k\pi$  می باشد

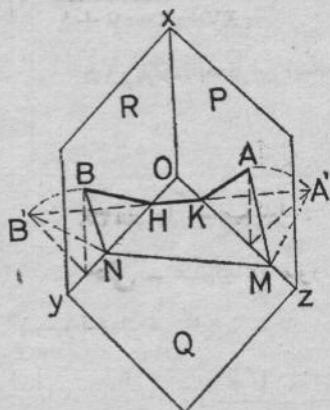
جوابهای دستگاه عبارتند از :

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{24} \quad \text{و} \quad y = \frac{k\pi}{4} + \frac{5\pi}{24}$$

### ۶۸/۱۳ - سه صفحه QP و RQ و PR دو به دو متقاطع می باشند

بعضی که فصل مشترکهای آنها در O متقاربند. نقطه A بر صفحه P و نقطه B بر صفحه R واقع است. کوتاهترین مسیر بین A و B را تعیین کنید بعضی که این مسیر خارج از صفحات نبوده و صفحه Q را نیز شامل باشد.

حل - اگر P، Q در Oz، R در Oy و A در Ox متقاطع باشند



و P در Ox متقاطع باشند باید نقطه n را بر Oz و نقطه N را بر Oy چنان انتخاب کنیم که طول خط شکسته AMNB می نیمم باشد. صفحه P را حول Oz می چرخانیم تا بر صفحه Q منطبق شود. در این حال A به وضع' A' آید و A'M با

شود. در این حال A به وضع' A' در می آید و A'M با صفحه Q منطبق شود. در این حال B به وضع' B' در آمد و

دارای ریشه مشترک باشند باید داشته باشیم :

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb') \\ (m + 2m)^2 = (2m - 1 + m + 1)(-m' - m + 4m' - 2m)$$

$$9m^2 = 3m(3m' - 2m) = 9m'(m - 1)$$

$$9m'(m - 2) = 0 \Rightarrow m_1 = 0 \quad \text{و} \quad m_2 = 2$$

- معادله زیر را حل کنید :

$$(3x^2 - 30ax + 11a^2)^2 - 256a(a - x)^2 = 0$$

حل - چون عبارت معادله نسبت به a و x متجانس

است فرض می کنیم  $x = am$  و خواهیم داشت :

$$(3a^2m^2 - 30a^2m + 11a^2)^2 - 256a(a - am)^2 = 0$$

$a = 0$  در معادله صدق نمی کند پس  $a \neq 0$  است و از تقسیم

طرفین معادله آنرا بر  $a^2$  نتیجه خواهد شد :

$$(3m^2 - 30m + 11)^2 - 256(1 - m)^2 = 0$$

$$9m^4 + 76m^2 + 198m^2 + 108m - 135 = 0$$

با توجه به ضرایب معادله معلوم می شود که ریشه های معادله

از یک کوچکترند.

اگر این معادله دارای ریشه صحیح باشد مضرب ۳

می باشد زیرا تمام جمله های غیر از  $76m^2$  مضربی از ۹ می باشند.

با آزمایش ۳ - معلوم می شود که یک ریشه معادله است و با حذف

آن خواهیم داشت :

$$9m^2 + 49m^2 + 51m - 45 = 0$$

این معادله نیز اگر جواب صحیح داشته باشد مضرب ۳ است و باز معلوم می شود که ۳ - ریشه این معادله نیز می باشد و

بالآخره نتیجه خواهد شد که معادله مفروض به صورت زیر

در می آید :

$$(9m - 5)(m + 3)^2 = 0 \Rightarrow m = -3 \quad \text{یا} \quad m = \frac{5}{9}$$

$$x = -3a \quad \text{یا} \quad x = \frac{5}{9}a$$

۶۸/۱۴ - به فرض اینکه x و y اندازه های دو کمان از

دایره جهت دار باشد از روابط زیر مقادیر این کمانها را

تعیین کنید .

$$\cos 2X = \frac{1 - \tan^2 X}{1 + \tan^2 X} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\sin 4X = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

## حل مسائل کلاس ششم ریاضی

**۶۸/۱۶** - تابع  $f(x)$  مفروض است. در صورتی که عددی مانند  $a$  وجود داشته باشد بقسمی که  $f(a - x)$  و  $f(x) = f(a - x)$  ، ثابت کنید که معین بوده و داشته باشیم

خط به معادله  $x = \frac{a}{2}$  محور تقارن منحنی نمایش تابع  $y = f(x)$  می باشد.

**حل** - محورهای مختصات را انتقال می دهیم تا  $(0, 0)$  و  $O'(a, 0)$

مبداً جدید باشد. نسبت به دستگاه محورهای جدید :

$$y = f(x) = f(X + \frac{a}{2})$$

$$f(a - x) = f(a - X - \frac{a}{2}) = f(\frac{a}{2} - X)$$

$$f(x) = f(a - x) \Rightarrow f(X + \frac{a}{2}) = f(\frac{a}{2} - X)$$

با تبدیل  $X$  به  $X'$  - مقدار تابع فرق نمی کند بنابراین محور

$$x = \frac{a}{2} Y'Y$$

محور تقارن منحنی است.

**۶۸/۱۷** - ثابت کنید که دو منحنی  $C_1$  و  $C_2$  نمایشها

هندرسی دو تابع :

$$(C_1): y - x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(C_2): y^2 - 4y - x + 3 = 0$$

نسبت به خطی که آنرا تعیین خواهد کرد قرینه یکدیگرند.

**حل** - قلمار معلوم می کنیم که دو منحنی نقطه مشترک

دارند یا نه

$$\begin{cases} y - x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y^2 - 4y - x + 3 = 0 \end{cases}$$

برابر است. طول  $AMNB$  با طول  $B'N$  است و طول اخیر که تمام آن در یک صفحه می باشد وقتی می نیم است که به صورت خط مستقیم  $A'B'$  باشد . بنابراین اگر  $Oy$  و  $H$  به ترتیب نقاط تلاقی  $A'B'$  با  $Oz$  باشد مسیر  $AKHB$  عبارت می شود از  $J$ .

## حل مسائل کلاس ششم طبیعی

**۶۸/۱۴** - به فرض اینکه  $x$  متغیر مستقل و  $y$  تابع آن باشد از رابطه زیر مشتق  $y$  را نسبت به  $x$  بدست آورید :

$$x' \cos^2 y + y' \sin^2 x - 2xy \sin y \cos x + x - y = 0$$

حل - از طرفین رابطه مشتق می گیریم ، با توجه به اینکه مشتق  $x$  برابر با یک و مشتق  $y$  برابر با  $y'$  است خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} & (x')' \cos^2 y + (\cos^2 y)' x' + (y')' \sin^2 x + \\ & (\sin^2 x)' y' - 2(x' y \sin y \cos x + y' x \sin y \cos x \\ & + (y')' x y \cos x + (\cos x)' x y \sin y + x' - y')' = 0 \\ & 2x \cos^2 y - 2y' x' \sin y \cos y + 2y' \sin^2 x + \\ & 2y' \cos x \sin x - 2y \sin y \cos x - 2y' x \sin y \cos x \\ & + y' x y \cos y \cos x - x y \sin x \sin y + 1 - y' = 0 \\ & y' = \frac{2x \cos^2 y + 2y' \sin x \cos x - 2y \sin y \cos x -}{2x' \sin y \cos y - 2y \sin^2 x + 2x \sin y \cos x -} \\ & - x y \sin x \sin y + 1 \\ & - x y \cos x \cos y + 1 \end{aligned}$$

**۶۸/۱۵** - به فرض اینکه داشته باشیم :

$$\tan 34^\circ + \sin 26^\circ \\ \cos 49^\circ + \cos 41^\circ$$

مقدار  $\sin 4X$  را حساب کنید.

**حل** - عبارتهای صورت و مخرج کسر را به حاصل -

ضرب تبدیل می کنیم :

$$\tan X = \frac{2 \sin 30^\circ \cos 4}{4 \cos 45^\circ \cos 4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 4X = 2 \sin 2X \cos 2X$$

$$\sin 4X = \frac{2 \tan X}{1 + \tan^2 X} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دوکمان غیر مشخص باشند داریم :

$$-\pi < \sin \alpha + \sin \beta < \pi$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \pi \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \text{ و } \sin \beta = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = -\pi \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{2} \text{ و } \sin \beta = -\frac{1}{2}$$

بنابراین رابطه وقتی برقرار است که یا داشته باشیم :

$$\begin{cases} \sin(a+b) = 1 \\ \sin(a-b) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ a-b = 2k'\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$a = k_1\pi + \frac{\pi}{2} \text{ و } b = k_2\pi$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = -1 \\ \sin(a-b) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 2K\pi - \frac{\pi}{2} \\ a-b = 2K'\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$a = K_1\pi - \frac{\pi}{2} \text{ و } b = K_2\pi$$

ثانیاً پنا به روابط بالا یا داریم :

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = K_1\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{3}x - \frac{\pi}{5} = K_2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3K_1\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{14} \\ x = 3K_2\pi + \frac{3\pi}{5} \end{cases}$$

$$\frac{3K_1\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{14} = 3K_2\pi + \frac{3\pi}{5}$$

$$70K_1 = 140K_2 + 3$$

چون  $K_1$  و  $K_2$  عدهای صحیح می‌باشند این رابطه هیچگاه برقرار نیست زیرا دو جمله آن مضرب ۷۰ است و یک جمله آن مضرب ۷۵ نیست. پس دستگاه (I) دارای جواب نیست.

از جمع طرفین دو معادله نتیجه می‌شود :

$$y' - x' - 3y - 3x = 0$$

$$(y+x)(y-x-3) = 0$$

$$\begin{cases} y+x=0 \\ y-x-3=0 \end{cases}$$

جواب ندارد

$$\begin{cases} y-x-3=0 \\ y-x'-2x-3=0 \end{cases} \Rightarrow A \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}, B \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

درصورتی که دو منحنی متقارن باشند محور تقارن آنها خط AB خواهد بود. برای اینکه تحقیق کنیم دو منحنی نسبت به قرینه یکدیگرند به خاطر سادگی محاسبات یکی از نقاط تلاقی دو منحنی مثلاً B را مبدأ جدید فرض می‌کنیم. نسبت به این مبدأ محورهای موازی با محورهای قبلی داریم.

$$x = X - 1 \text{ و } y = Y + 2$$

$$(C_1) : Y = X'$$

$$(C_2) : Y' = X$$

$$(AB) : Y = X$$

چون از تبدیل  $X$  و  $Y$  به  $X'$  و  $Y'$  به معادله  $C_1$  و  $C_2$  و بر عکس معادله  $C_1$  تبدیل می‌شود پس دو منحنی  $C_1$  و  $C_2$  نسبت به نیمساز محورهای  $X$  و  $X'$  و  $Y$  و  $Y'$  قرینه یکدیگرند و چون معادله  $AB$  عبارتست از  $Y = X$  پس خط  $AB$  محور تقارن دو منحنی  $C_1$  و  $C_2$  نسبت به یکدیگر می‌باشد.

۶۸/۱۸ - از اصغر کوامت ششم ریاضی دبیرستان فردوسی رضائیه.

اولاً اگر داشته باشیم :

$$\sin^2 a - \tan^2 b = 1$$

رابطه‌ای بین  $a$  و  $b$  بدست آورید.

ثانیاً معادله زیر را حل کنید :

$$\sin^2(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4}) - \tan^2(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{5}) = 1$$

حل - اولاً داریم :

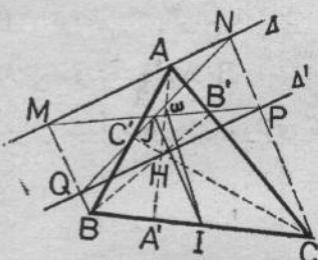
$$\sin^2 a = 1 + \tan^2 b = \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$\sin^2 a \cos^2 b = 1 \text{ یا } \sin a \cos b = \pm 1$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = \pm 2$$

را رسم می کنیم و نقطه تقارب آنها را  $H$  می نامیم . از  $A$  خط  $\triangle$  و از  $H$  خط  $\triangle$  را موازی با  $\triangle$  رسم می کنیم .  
رأسهای  $C$  و  $B$  را در نقاط  $M$  و  $N$  بر  $\triangle$  و در نقاط  $Q$  و  $P$  بر  $\triangle$  تصویر می کنیم .

- ۱) اگر  $\omega$  مرکز مربع مستطیل  $MNPQ$  باشد وقتی که حول  $A$  می چرخد مکان  $\omega$  را تعیین کنید و ثابت کنید که دایره محیطی مستطیل مذبور بر  $A'$  می گذرد .
- ۲) ثابت کنید که خطوط  $MP$  و  $NQ$  به ترتیب بر  $B'$  و  $C'$  می گذرنند .



حل - اگر  $J$  وسط  $BC$  و  $I$  وسط  $BCNQ$  باشد چون  $AH$  و همچنین  $MP$  و  $NQ$  است در ذوزنقه  $BCNQ$  خط  $BC$  و  $NQ$  متساوی هستند .  
با  $MN$  و  $PQ$  متساوی است . پس  $J\omega$  و  $I\omega$  بر هم عمودند  
یعنی زاویه  $I\omega J$  قائمه است و  $\omega$  بر دایره به قطر  $IJ$  قرار دارد . وقتی حول  $A$  تمام صفحه را بپیماید نقطه  $\omega$  تمام دایره به قطر  $IJ$  را می پیماید و مکان آن همین دایره می باشد .  
چون چهارضلعی  $AA'CN$  محاطی است پس ذوزایه  $AA'CN$  و  $ACN$  متساویند . چهارضلعی  $A'BQH$  نیز محاطی است و ذوزایه  $HBQ$  و  $HA'Q$  متساویند . در چهارضلعی  $A'BM$  و  $B'BM$  مکمل یکدیگرند و چون در مثلث  $ANC$  زاویه  $CAM$  برابر است با  $ACN + 90^\circ$  پس مجموع دو زاویه  $B'BM$  و  $ACN$  برابر با  $90^\circ$  درجه بوده و در نتیجه آن مجموع ذوزایه  $AA'N$  و  $AA'Q$  یعنی زاویه  $QA'N$  برابر با  $90^\circ$  درجه است و دایره به قطر  $NQ$  بر  $A'$  می گذرد .

- ۲) در چهارضلعی محاطی  $AB'BM$  ذوزایه  $BB'M$  و  $BAM$  با یکدیگر برابرند . همچنین در چهارضلعی محاطی  $PB'B$  زاویه  $CPB'H$  مکمل می باشد . اما ذوزایه  $MAB$  و  $PCH$  متساویند زیرا ضلعهای آنها نظیر به نظر نیافریده اند . بنابر این ذوزایه  $MB'B$  و  $PB'B$  مکمل یکدیگرند یعنی خط  $MP$  از  $B'$  می گذرد . به همین ترتیب ثابت می شود که خط  $NQ$  بر  $C'$  می گذرد .

یا باید داشته باشیم :

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = K_1\pi - \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{3}x - \frac{\pi}{5} = K_2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3K_1\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{14} \\ x = 3K_2\pi + \frac{3\pi}{5} \end{cases}$$

$$70K_1 = 140K_2 + 73$$

این رابطه هم هیچگاه برقرار نیست . پس معادله مفروض دارای جواب نمی باشد .

#### ۶۸/۱۹ - از مجله «دانش آموز ریاضی»

اگر  $\frac{1}{A}$  از  $20$  برابر با  $\frac{3}{4}$  باشد  $\frac{1}{A}$  از  $5$  چقدر خواهد بود ؟

حل - مبنای عدد نویسی  $20$  را  $x$  فرض می کنیم پس:

$$8 \times 3 = 24 = (20)_x$$

$$2x = 24 \Rightarrow x = 12$$

$$(10)_{12} = 12 = 6 \times 2$$

جواب مسئله عدد  $2$  است .

#### ۶۸/۲۰ - از سید ابوالحسن تقوی

عدد چهار رقمی تعیین کنید که در رابطه زیر مصدق کند :

$$mcdu \times 481 = \text{aaaaaa}$$

حل - با فرض  $mcdu = N$  داریم :

$$481N = 111111a \Rightarrow N = 231a$$

بدیهی است که  $a < 10$  است و چون  $N$  چهار رقمی است پس  $231a$  از هزار بزرگتر است و  $a > 4$  می باشد . جوابهای مسئله عبارت می شوند از :

$$N = 231 \times 5 = 1155 \quad 231 \times 6 = 1386$$

$$N = 231 \times 7 = 1617 \quad 231 \times 8 = 1848$$

$$N = 231 \times 9 = 2079$$

#### ۶۸/۲۱ - ترجمه از فرانسه

در مثلث  $ABC$  ارتفاعهای  $AA'$  و  $BB'$  و  $CC'$  در

## حل مسائل فیزیک

ترجمه و انتخاب توسط: هوشنگ شریفزاده

### برای کلاس‌های پنجم

#### برای کلاس‌های ششم

**۶۸/۲۵** - شخصی قایقی را در یک رودخانه در جهت جريان آب در ۲۰ دقیقه ۲ کیلومتر جلو می‌برد و همان راه را در بر گشت در ۴۵ دقیقه طی می‌کند . سرعت متوسط را ، (۱) درجهت جريان آب ، (۲) در خلاف جهت جريان آب ، (۳) برای یک رفت و برگشت تعیین کنید .

**حل - ۱)** سرعت متوسط درجهت جريان آب :

$$2: \frac{20}{60} = 6 \text{ km/h}$$

**۲)** سرعت متوسط در خلاف جهت جريان آب :

$$2: \frac{40}{60} = 3 \text{ km/h}$$

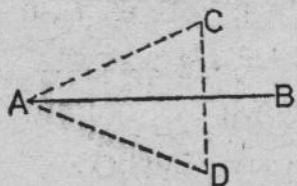
**۳)** سرعت متوسط در یک رفت و برگشت :

$$2: \frac{20+40}{60} = 2 \text{ km/h}$$

**۶۸/۲۶** - اگر صوت با سرعت یکنواختی تقریباً برابر ۳۳۰ m/s در هوا منتشر شود ، نشان دهید که صدای حاصل از انفجار در نقطه A پس از تقریباً ۱۲/۱ ثانیه به نقطه B که در ۴ کیلومتری نقطه انفجار قرار دارد می‌رسد . اگر صدای انفجار درست در یک لحظه به نقاط C و D برسد ، نقطه A نسبت به CD چگونه خواهد بود ؟

**حل - مدت لازم برای طی مسافت AB :**

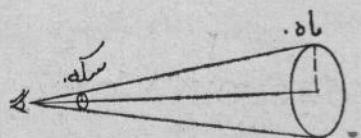
$$t = \frac{x}{v} = \frac{4000}{330} = 12/18$$



چون صدا در یک لحظه به نقاط C و D می‌رسد پس  $AC = AD$  یعنی  $CD$  بر عمود منصف A قرار دارد .

**۶۸/۲۷** - یک علامت رادیویی که بطور قائم به طرف بالا در هوا فرستاده شده است ، پس از برخورد به یک لایه

**۶۸/۲۲** - با قرار دادن یک سکه ۵ ریالی در فاصله ۱۸۰ سانتیمتری چشم می‌توان کره ماه را از دید چشم پوشانید . قطر ۵ ریالی ۲/۵ cm و فاصله زمین تا ماه برابر ۳۸۴۰۰۰ کیلومتر است . قطر تقریبی کره ماه چقدر است ؟



**حل - از تشابه مثلثهادرایم :**

$$\frac{2/5 \text{ cm}}{(\text{km})} = \frac{280 \text{ cm}}{384000 \text{ km}}$$

$$= \frac{384000 \times 2/5}{280} \# 3430 \text{ km}$$

**۶۸/۲۳** - نوری که در سال ۱۴۸۵ میلادی از ستاره

قطبی (ستاره آلفای دب اصغر) صادر شده بود در سال ۱۹۴۵ میلادی به ما رسید . فاصله تقریبی ستاره قطبی را از زمین تعیین کنید . سرعت نور ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در هر ثانیه است .

**حل - داریم :**

$$\text{سال } 1945 - 1485 = 460$$

مسافت مطلوب :

$$480 \times 360 \times 86400 \times 300000 \text{ km}$$

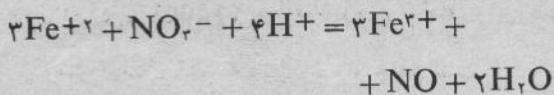
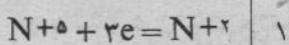
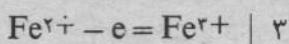
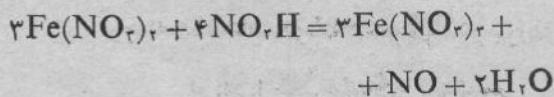
$$\# 4200 \times 10^{12} \text{ km}$$

**۶۸/۲۴** - پروکسیمای قنطروس ، نزدیکترین ستاره ثابت به ما ، در ۴۱ بیلیون کیلومتری زمین است (یک بیلیون  $= 10^{12}$ ) . اگر این ستاره ناگهان محو شود ، درخشش آن در زمین تا چه مدت دیگر ادامه خواهد داشت ؟

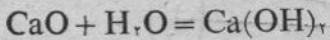
**حل - مدت دوام درخشش بر حسب ثانیه :**

$$\frac{41 \times 10^{12}}{3 \times 10^5} = 137 \times 10^8 \text{ s}$$

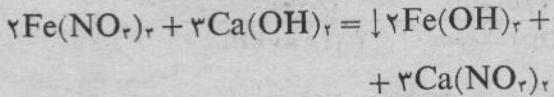
سپس نیترات فرو را با عمل جوشاندن با اسید نیتریک غلیظ به نیترات فریک تبدیل می کنیم :



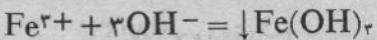
هیدراکسید کلسیم هم از اکسید کلسیم به محورت زیر بدست می آید :



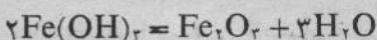
از اثر این هیدراکسید با نیترات فریک هیدراکسید فریک حاصل می شود :



که صورت یونی آن چنین است :



بالاخره از تکلیس هیدراکسید فریک، اکسید فریک بدست می آید :



**۶۸/۲۹** - شیشه هایی بدون برچسب محتوی نمکهای

زیر موجود است :

کلور کلسیم  $\text{ClNa}$  ، یدور سدیم  $\text{INa}$  ، کربنات سدیم  $\text{CO}_3\text{Na}_2$  ، سولفات سدیم  $\text{SO}_4\text{Na}_2$ . معادلات واکنشهای به صورت یونی را بنویسید که به کمک آنها نمکهای بالا شناخته می شوند.

**حل** - تمام این نمکها دارای کاتیون  $\text{Na}^+$  و آنیون ها

مختلف هستند. بنابراین هر یک از نمکها را می توان توسط خواص آنیون مربوط به آن نمک تشخیص داد. برای این کار مقداری از هریک از نمکهای ادرآب حل کرده و بروی محلولهای حاصل اعمال زیر را انجام می دهیم.

اگر به هریک از محلولهای نیترات نقره بیفزاییم، در لوله محتوی محلول  $\text{ClNa}$  رسوب سفید رنگ  $\text{ClAg}$  کلور نقره خواهیم داشت و در نتیجه می توانیم محلول مذبور را

یونیزه جو به طرف پائین منعکس شده است. اگر این علامت

**۱/۵۰۰** ثانیه پس از ارسال، دریافت شده باشد، ارتفاع لایه

مذکور را پیدا کنید. (امواج رادیو با سرعت پکتواخت ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در هر ثانیه حرکت می کنند). اگر علامت مذکور، از کره ماه، که در ۳۸۴۰۰۰ کیلومتری زمین است، منعکس شده باشد، چه مدت پس از ارسال در زمین دریافت خواهد شد؟

**حل** - مدت زمان رسیدن نور به لایه یونیزه:

$$\frac{1}{500} : 2 = \frac{1}{1000}$$

فاصله لایه یونیزه:

$$x = vt = 300000 \times 0/1001 = 300 \text{ km}$$

فاصله رفت و برگشت امواج رادیو به ماه:

$$x = 2 \times 384000 = 768000 \text{ km}$$

مدت رفت و برگشت:

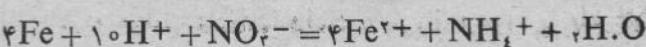
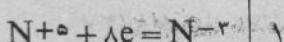
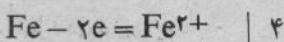
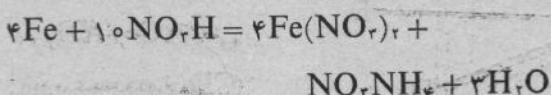
$$t = \frac{x}{v} = \frac{768000}{300000} = 2.56 \text{ s}$$

## حل مسائل شیمی

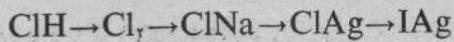
ترجمه فتح الله ذرگری از مجله «علم و زندگی»

**۶۸/۲۸** - معلوم کنید که چگونه می توان با اجسام آهن، اکسید کلسیم، آب و اسید نیتریک غلیظ، اکسید آهن  $(\text{Fe}_2\text{O}_3)$  را بدست آورد؟ معادلات واکنشهای لازم را بنویسید.

**حل** - از اثر نیترات فریک  $\text{Fe}(\text{NO}_3)_2$  بر هیدراکسید کلسیم  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  هیدراکسید فریک  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  بدست می آید. پس ابتدا باید نمک  $\text{Fe}(\text{NO}_3)_2$  را بدست آوریم و چون اسید نیتریک غلیظ بر آهن اثر نمی کند ابتدا آب بدآن اضافه می کنیم تا رقیق شود. واکنش به صورت زیر انجام می گیرد:

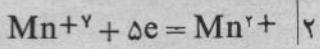
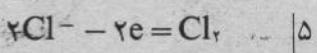
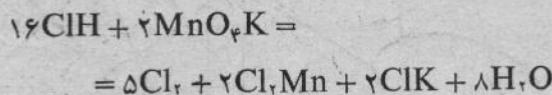


۶۸/۳۵ - مسیر شیمیائی زیرا بوسیله معادلات شیمیائی  
نشان دهید:

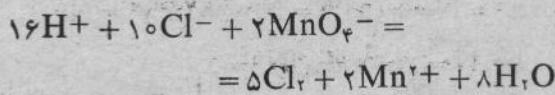


(با واکنشهای شیمیایی از اسید کلریدریک به دور نقره برسید).

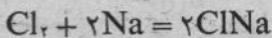
حل - کلر را می توانیم از اثر اسید کلریدریک بر پرمنگنات پتاسیم بدست آوریم.



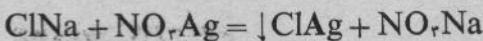
و یا به صورت یونی آن داریم:



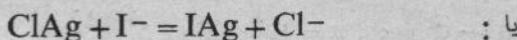
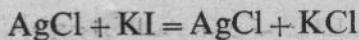
و از ترکیب  $\text{Cl}_2$  و  $\text{Na}$  کلرور سدیم حاصل می شود:



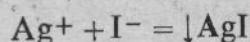
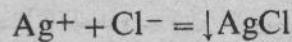
با افزودن  $\text{NO}_3^- \text{Ag}$  نیترات نقره بر  $\text{ClNa}$  حاصل تولید  $\text{ClAg}$  کلرور نقره می شود:



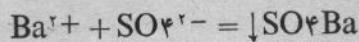
و چون حلایت  $\text{ClAg}$  از  $\text{IAg}$  بیشتر است می توان  $\text{IAg}$  را از اثر  $\text{ClAg}$  بر  $\text{IK}$  بدست آورد:



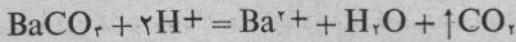
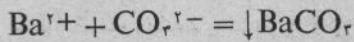
بسنامیم و اگر در شیشه‌ای رسوب زرد حاصل شد مشخص کننده این است که در لوله مزبور یدور سدیم بوده که در اثر افزایش نیترات نقره تولید رسوب زرد یدور نقره  $\text{IAg}$  کرده است و معادله یونی این دو واکنش به صورت زیر است:



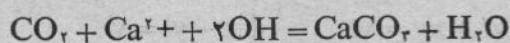
و با کمک کلرور باریم (یون  $\text{Ba}^{+2}$ ) آنیون  $\text{SO}_4^{2-}$  مشخص می شود.



سولفات باریم رسوبی است سفید که در اسیدها غیر محلول است. یون  $\text{Ba}^{+2}$  را می توان با یون کربنات  $\text{CO}_3^{2-}$  هم رسوب داد ولی نمک حاصل در مقابل اسیدها و گاز  $\text{CO}_2$  حاصل می شود:



که در این آزمایش می توان با عبور دادن گاز از درون محلول  $\text{Ca(OH)}_2$  و تشکیل رسوب  $\text{CO}_3 \text{Ca}$  وجود گاز  $\text{CO}_2$  را تشخیص داد.



یون کربنات  $\text{CO}_3^{2-}$  را می توان با افزودن جوهernمک

و مشاهده  $\text{CO}_2$  تشخیص داد و بدین ترتیب کربنات سدیم مشخص می شود.

## ≡ پاسخ تست‌های ریاضی ≡

نسبت به  $x$  و  $y$  متقابن است زیرا  $x$  و  $y$  را با یکدیگر جایجا کنیم عبارت فرق نمی کند. این عبارت نسبت به  $x$  و  $y$  متعابن نیست زیرا چهار جمله آن از درجه ۳ اما یک جمله آن از درجه صفر است.

۶۸/۳۴ - (د) اگر  $n$  عدد صحیح باشد عدد  $A = 10^n + n$  به شرط  $n < 9 \times 10^n < n+1$  رقم است.

۶۸/۳۵ - (الف) برای اینکه بتوانیم خط شکسته با

۶۸/۳۱ - (ب) چون در رابطه  $1 - 2x = y$  دو حرف  $x$  و  $y$  هم درجه‌اند عبارت  $x^2 - (1 - 2x)y^2$  که نسبت به  $x$  از درجه ۱۲ است نسبت به  $y$  نیز از درجه ۱۲ است.

۶۸/۳۲ - (ب) برای اینکه با سه پاره خط به طولهای  $a$ ,  $b$  و  $c$  بتوان یک مثلث ساخت شرط  $a < b+c$  لازم است اما کافی نیست.

۶۸/۳۳ - (ب) چند جمله‌ای  $4x^3 - x^2y - xy^2 + 4y^3 - 11$

اگر از  $I$  به وسط  $BE$  وصل کنیم خط حاصل با  $BC$  موازی است و چون  $BC$  بر  $AB$  عمود نیست پس خطمز بور نیز تسبت به  $AB$  مایل است یعنی خطی که از  $I$  بر  $AB$  عمود کنیم از وسط  $BE$  نمی‌گذرد. چون  $I$  وسط ساق  $AD$  است پس خطی که از  $I$  موازی با قاعده‌ها رسم کنیم از وسط ساق  $BC$  نمی‌گذرد.

-۶۸/۴۰-(ب) معادله درجه دوم :

$$(m-1)x^2 - (m-1)x + m = 0$$

وقتی ریشه مضاعف دارد که :

$$\begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)(-3m-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

-۶۸/۴۱-(ب) در معادله درجه دوم :

$$(1-m)x^2 - (m+1)x + m - 1$$

حاصل ضرب ریشه‌های به شرط  $m \neq 1$  برابر است با  $1 - m$  زیرا براین با این شرط معادله همواره دو ریشه مختلف العلامت دارد.

-۶۸/۴۲-(الف) دو دستگاه معادلات :

$$\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ y^2 + xy = 15 \end{cases}, \quad \begin{cases} |x+y| = 5 \\ |x-y| = 1 \end{cases}$$

معادل می‌باشد زیرا اگر طرفین معادلات دستگاه اول را یک بار باهم جمع و یک بار از یکدیگر تفریق کنیم دستگاه معادلات دوم بدست می‌آیدند.

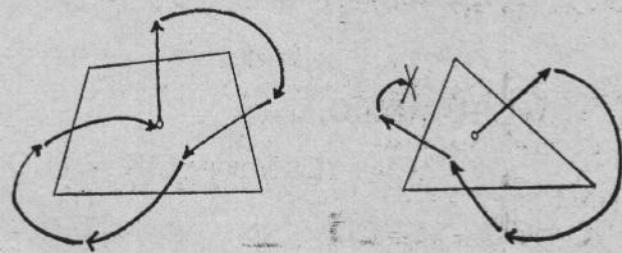
-۶۸/۴۳-(الف) برای اینکه معادله :

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = a$$

دارای جواب باشد، چون طرف اول آن در هر حال مثبت است پس لازم است که طرف دوم آن یعنی  $a$  مثبت باشد اما این شرط کافی نیست.

-۶۸/۴۴-(د) اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  سه خط متناصر باشند برای اینکه از یک نقطه  $M$  واقع بر  $A$  خطی رسم کنیم که دو خط  $W$  و  $CB$  را قطع کند بر  $M$  و خط  $B$  صفحه  $P$  را می‌گذرانیم که اگر خط  $C$  را در  $N$  قطع کند دو خط  $MN$  و  $B$  که در یک صفحه واقع اندیا متقاطعندویا متوالی. در حالت اول مسئله دارای جواب است اما در حالت دوم مسئله جواب ندارد یعنی از  $M$  نمی‌توان خطی رسم کرد که دو خط  $W$  و  $CB$  را قطع کند. امکان

منحنی مسدودی رسم کنیم که هر یک از ضلعهای چندضلعی مفروض  $P$  را در یک و فقط یک نقطه قطع کند و در ضمن از هیچیک از رأسهای چندضلعی نگذرد لازم و کافی است که تعداد ضلعهای چندضلعی زوج باشد.



-۶۸/۴۵-(ب) چون داریم :

$$a^x = N \Rightarrow (a^x)^n = N^n \Rightarrow (a^n)^x = N^n$$

$$\log_a N = x \Rightarrow \log_a^n N^n = x$$

-۶۸/۴۷-(ج) تعداد کلیه قطرهای  $n$  ضلعی محدب

$$\text{برابر است با } \frac{n(n-3)}{2} \text{ زیرا هر رأس با } 2-n \text{ رأس دیگر}$$

غیر همجاور است پس از رأس  $3-n$  قطر رسم می‌شود و هر قطر از دو رأس می‌گذرد.

-۶۸/۴۸-(د) تساوی

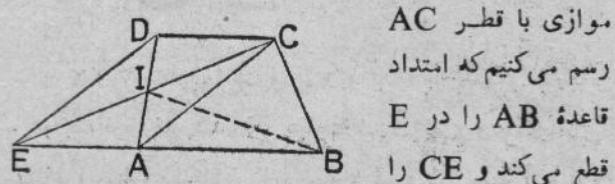
$$(ax+b)^2 - (cx+d)^2 = 4x$$

$$\text{با : } (a^2 - c^2)x^2 + 2(ab - cd)x + b^2 - d^2 = 4x$$

نسبت به  $x$  وقتی اتحاد است که شرایط زیر با هم برقرار باشند

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 0 \\ ab - cd = 2 \\ b^2 - d^2 = 0 \end{cases}$$

-۶۸/۴۹-(ج) در ذوزنقه غیر قائم  $ABCD$  از  $D$



موازی با قطر  $AC$

رسم می‌کنیم که امتداد

قاعده  $AB$  را در  $E$  در

قطع می‌کند و  $CE$  را

رسم می‌کنیم که در  $I$  با  $AD$  متقاطع است. چهارضلعی  $ACDE$  متوازی‌الاضلاع است پس دو قطر آن یکدیگر را نصف می‌کنند یعنی  $I$  وسط  $AD$  و همچنین وسط  $CE$  است. در مثلث  $BCE$  میانه  $BI$  است اما  $CA$  میانه نیست پس  $BI$  و  $CA$  یکدیگر را به نسبت یک بر دو تقسیم نمی‌کنند.

حال دوم - اگر  $x < 1$  باشد خواهیم داشت :

$$\begin{cases} 2x^2 < -x + x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x < 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ یا } x > \frac{1}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

در این حال جواب دستگاه عبارت می شود از :

$$\frac{1}{2} < x < 1$$

(ج) عبارت  $\cos x(tg x - 1)$  به ازاء - ۶۸/۴۹

$$0 < x < \infty \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \cos x = 0 \quad \text{در می آید}.$$

- ۶۸/۵۰ (ب) وقتی  $x$  زاویه منفرجه باشد  $x < 0$

منفی است و داریم :

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = -\frac{1}{\cos x}$$

- ۶۸/۵۱ (ج) در حالتی که  $x < 1$  باشد داریم :

$$y = \frac{|x-1|}{x+1} = \frac{-x+1}{x+1} \quad \text{و} \quad y' = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

در حالتی که  $x < 1$  باشد داریم :

$$y = \frac{|x-1|}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{و} \quad y' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

وقتی  $x$  به ازاء مقادیر کوچکتر از یک به سمت یک میل کند مشتق تابع به سمت  $\frac{1}{2}$  - میل می کند و وقتی  $x$  به ازاء مقادیر

بزرگتر از یک به سمت یک میل کند مشتق تابع به سمت  $\frac{1}{2}$  میل می کند . بنابراین مشتق تابع به ازاء  $x = 1$  نامعین است.

- ۶۸/۵۲ (ج) تابع  $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2}$  وقتی

معین است که هر یک از دو تابع  $\sqrt{x-1}$  و  $\sqrt{x-2}$  به تنهایی معین باشند یعنی  $x > 2$  باشد .

- ۶۸/۵۳ (د) اگر داشته باشیم

خواهیم داشت :

$$y'' + y = (a - b)x \sin bx + 2ab \cos bx$$

(دلیل پایین صفحه ۱۲۴)

دارد که صفحه  $P$  با خط  $C$  موازی باشد که در این حالت هم از

$M$  نمی توان خطی رسم کرد که با دو خط  $B$  و  $C$  متقاطع باشد.

- ۶۸/۴۹ (ج) اگر  $A$  و  $B$  سه خط دو بعدی متناظر باشند و صفحه  $P$  شامل خط  $C$  نخواهد بود و با آن یا متقاطع است و یا موازی .

- ۶۸/۴۶ (ب) اگر  $A$  و  $N$  و  $M$  نقاطی از دایره

جهت دار باشند و  $P$  وسط کمان  $MN$  باشد داریم :

$$\widehat{AP} = \frac{\widehat{AM} + \widehat{AN}}{2} + 2K\pi \Rightarrow$$

$$\widehat{AN} = (2\widehat{AP} - \widehat{AM}) + 2k\pi$$

$$\widehat{AP} = 510^\circ = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\widehat{AN} = \frac{5\pi}{3} - 2k\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

- ۶۸/۴۷ (ب) در صورتی که  $x$  مثبت باشد داریم :

$$\sqrt{x^2} = x \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2}}{x} - 1 = 0$$

اگر  $x$  منفی باشد داریم :

$$\sqrt{x^2} = -x \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2}}{x} - 1 = -2$$

- ۶۸/۴۸ (د) می دانیم که :

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, & (x^2 - x > 0) \\ -x^2 + x, & (x^2 - x < 0) \end{cases}$$

$$x^2 - x = x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ یا } x < 0$$

$$x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

حال اول - فرض می کنیم که  $x > 1$  یا  $x < 0$  باشد

در این صورت نامعادله  $|x^2 - x| < 2x^2$  چنین می شود :

$$\begin{cases} 2x^2 < x^2 - x \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x < 0 \\ x > 1 \text{ یا } x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \text{ یا } x < -1 \\ x > 1 \text{ یا } x < 0 \end{cases}$$

در این حال جوابهای دستگاه عبارت می شود از :

$$x < -1 \text{ و } x > 1$$

## مسائل پرائی حل

$$x + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = x + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n - 1}}}$$

**۶۹/۵**- ثابت کنید که در ازاء هر عدد مثبت  $U$  یک و تنها یک عدد مثبت  $V$  وجود دارد بقسمی که در هر مبنای دلخواه

داشته باشیم:

$$\log(u+v) = \log u + \log v$$

۶۹- از سعید فرشاد

از رابطه زير مقدار  $X$  را بدست آوريد:

$$\log \sqrt{r}^x = rx - r$$

۶۹/۷ فتح الله زرگری : ترجمه

چهارضلعی ABCD مفروض است . متوازی الاضلاع DBCM را می سازیم . ثابت کنید که مساحت مثلث با مساحت چهارضلعی ABCD برابر است .

۶۹/۸ - ترجمہ : فتح اللہ زرگوی

دایره به مرکز O در نقاط A و B بر پردهای F و E دایره محااطه، مثلث ADF برداشته شده است. ثابت کنید که مرکز BC و AC از مثلث ABC بیرون است.

کلاس پنجم طبیعی

۶۹/۹ - با استفاده از مختصات نقطه ثابت کنید که در هر ذوزنقه اوساط دو ساق و اوساط دو قطر بر یک خط مستقیم به ازی بادو قاعده واقعند و طول قطعه خط واصل بین اوساط

## کلاس چهارم طبیعی

۶۹، ۱ - از کاظم حافظی

در صورتی که داشته باشیم :

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k} \\ x + y + a = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$$

مقدار  $a$  را بر حسب  $k$  بدست آورید.

۵۹/۳ فرستنده: عیدالرضاعورمهدي کسمائي

دایرة  $\Gamma$  و دونقطة A و B واقع برآن مفروض است .

دایره  $\omega$  را بر دو نقطه  $A$  و  $B$  چنان می‌گذاریم که کمان  $AB$  از آن دایره،  $\Gamma$  را به دو قسمت معادل (با مساحت‌های متساوی) تقسیم کند. ثابت کنید که طول این کمان  $AB$  از طول قطر دایره بزرگتر است.

کلاس چهارم ریاضی

۶۹ / ۳ - فرستنده: محمد دادسرشت

اگر داشته باشیم :

$$f[(a-b), (b-c), (c-a)] = 0$$

مقدار  $(c \cdot ab)$  را پیدا کنید.

۶۹/۴ - از جواد چمشیدی

ثابت کنید که عبارت  $1 + 2^n$  بر عبارت زیر بخش پذیر

امتحان

### ۶۹/۱۳ - ترجمه: فتح الله ذرگوی

از یک نقطه مفروض حداکثر چند نیم خط در فضای توان رسم کرد که دو به دو با یکدیگر زاویه منفرجه بساویند.

## کلاس ششم طبیعی

۶۹/۱۴ -تابع درجه سوم  $f(x)$  را معین کنید بنابر آنکه  $f(x) = -f(-x)$  بوده و درازاء  $\pm x = \pm$  دارای ماسکیمیم یا مینیمیم باشد.

۶۹/۱۵ - معادله مثلثاتی کلاسیک از نوع:

$$a\sin x + b\cos x = c$$

تشکیل دهید بنابر آنکه ریشه های آن عبارت باشند از:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

## کلاس ششم ریاضی

### ۶۹/۱۶ - فرستنده: سلامان نور آذر دانشجوی

پلی تکنیک تهران.

ثابت کنید که اگر تابعی زوج باشد مشتق آن تابعی است فرد و اگر تابعی فرد باشد مشتق آن تابعی است زوج.

۶۹/۱۷ - تابع زیر مفروض است.

$$y = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x - a}$$

ثابت کنید که اگر منحنی نمایش این تابع دارای مرکز تقارن I باشد، نقطه I همان نقطه تلاقی منحنی با مجانب افقی آن بی باشد. مقدار a را پیدا کنید برای آنکه منحنی نمایش تابع مرکز تقارن داشته باشد.

### ۶۹/۱۸ - از علی ظرافت جو

مطلوبست حل و بحث معادله زیر:

$$4\sin 2x - m[(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x] + 2 = 0$$

### ۶۹/۱۹ - فرستنده: مصطفی گودرزی طائمه

عددی شش رقمی تعیین کنید که رقمیک آن یک باشد و اگر رقم یک را از سمت راست آن برداشته آنرا در سمت چپ عدد بگذاریم، عدد حاصل ثلت عدد مورد نظر باشد.

دو ساق وین اوساط دو قطر به ترتیب برابر با نصف مجموع و نصف تفاضل دو قاعده بی باشد.

### ۶۹/۲۰ - از جواد فیض دانشجوی دانشکده فنی

دانشگاه تبریز.

در صورتی که  $x'' = \cos \alpha$  و  $x' = \sin \alpha$  ریشه های معادله:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

باشند رابطه ای بین a و b و c پیدا کنید.

## کلاس پنجم ریاضی

### ۶۹/۲۱ - ترجمه از مجله تربیت ریاضی.

در صفحه محورهای مختصات متعامد  $Ox'$  و  $Oy'$  نظیر هر عدد صحیح و مثبت کوچکتر از صد نقطه ای بر صفحه محورها چنان انتخاب می کنیم که طول آن برابر با رقم یکان و عرض آن برابر با رقم دهگان آن عدد باشد.

(۱) ثابت کنید که همه نقاط در یک مریع محدود می شوند. این مریع را مشخص کنید.

(۲) گروههایی از این نقاط وجود دارند که هر کدام از آنها بر یک خط ماربر مبدأ واقعند. از این گروهها آنرا مشخص کنید که بیشترین عضور ادادشته باشد و همچنین آنرا مشخص کنید که شامل کمترین عضو است.

(۳) نقاطی که نظیر اعداد مضرب ۳ هستند به چه ترتیب واقع شده اند؟ همچنین نقاط نظیر اعداد مضرب ۹؟

(۴) ثابت کنید که هشت نقطه نظیر اعداد ۳۲، ۲۵، ۲۳، ۳۶، ۵۲، ۵۶، ۶۳ و ۶۵ بر یک دایره واقعند. مختصات مرکز و طول شعاع این دایره را حساب کنید.

(۵) نقاطی را پیدا کنید که بر یک دایره به مرکز دایره قبلی واقعند و یکی از آنها ۱۶ است.

### ۶۹/۲۲ - از محمد داوری دانشجوی دانشگاه آریامهر.

با استفاده از رابطه زیر نسبتهای مثلثاتی زاویه حاده  $\alpha$  را بر حسب m حساب کنید.

$$\sin \alpha = 2m \operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$$

به از اعچه مقدار m داریم:

### ۶۹/۳۰- فرستنده: قوام نحوی

عددی دورقمی پیدا کنید که برابر با ثلث مجموع مکعبات رقمها باشد.

### ۶۹/۳۱- ترجمه از فرانسه

بر دایره به مرکز O سه کمان AB و CD و EF هم جهت بوده و اندازه هر یکی از آنها ۶۵ درجه است. اگر 'B' وسط OB و OE و N و M و PMN و PB'E و DE و BC و FA باشد ثابت کنید که هر یک از مثلثهای' PMN و PB'E و DE و BC و FA باشد.

### ۶۹/۳۲- ترجمه از فرانسه

دایرة C به قطر ثابت AA مفروض است. در A مماس Ax را بر دایره رسم می کنیم و روی آن نقطه متغیر M را در نظر می گیریم. از M را بر دایره رسم می کنیم. خط' MA با عمودی که از T بر AA رسم شود در P بتلاقی می شود. وقتی M بر Ax حرکت کند مکان نقطه P را تعیین کنید.

## مسائل فیزیک

ترجمه و انتخاب توسط: هوشنگ شریفزاده

### ۶۹/۳۳- برای کلاس چهارم

دایره ای است به قطر  $AB = 8\text{cm}$ . فرض می کنیم بردار  $\vec{AB}$  معرف نیروی  $\vec{f} = \vec{AB}$  باشد. نقطه A را به نقطه C از دایره وصل می کنیم که کمان AC یک سوم نیم دایره می باشد. بزرگی نیروی  $\vec{AC}$  و همچنین بزرگی نیروی  $\vec{CB}$  را تعیین کنید (مقیاس: هر  $2\text{cm}$  برابر یک نیوتون).

### ۶۹/۳۴- برای کلاس چهارم

به طریقہ ترسیم بزرگی برآیند سه نیروی متقارب  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  و  $\vec{F}_3$  را تعیین کنید، با فرض آنکه:

$$F_1 = 2N, F_2 = 3N, F_3 = 5N$$

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = 45^\circ \text{ و } (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = 60^\circ$$

### ۶۹/۳۵- برای کلاس پنجم

فاصله کانونی آینه‌ای مقعر برابر  $20\text{cm}$  است. سوزنی

به طول  $10\text{cm}$  بطور افقی در مقابل این آینه قرار می گیرد بطوری که فاصله نزدیکترین سر آن به آینه  $5\text{cm}$  است. طول تصویر سوزن در این آینه چقدر است؟

### ۶۹/۳۶- برای کلاس پنجم

جسم نورانی P بر اثر انعکاس در دو آینه AB و BC در Q دیده می شود و شعاعهای PR و SQ متوازیند. زاویه ABC را تعیین کنید.

### ۶۹/۳۷- برای کلاس ششم

قطاری که باشتا بیکنواخت حرکت می کند دونیم کیلومتر متواالی را به ترتیب در  $20$  ثانیه و  $30$  ثانیه طی می کند. معلوم کنید که اگر شتاب همچنان بکنواخت باقی بماند، قطار چه مسافتی طی خواهد کرد تا بایستد.

### ۶۹/۳۸- برای کلاس های ششم

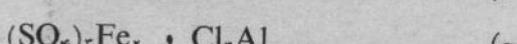
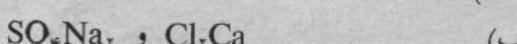
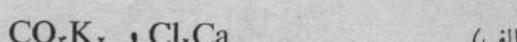
قطاری از حال سکون به راه می افتد و پس از  $4$  دقیقه و طی  $3$  کیلومتر متوقف می شود. بزرگترین سرعت قطار  $67/5\text{km/h}$  بوده است. شتاب مشبت و شتاب منفی بکنواخت بوده است. مسافتی را که قطار با حداقل سرعت پیموده است تعیین کنید.

## مسائل شیمی

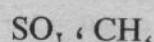
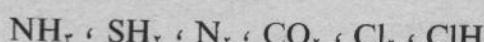
ترجمه: فتح الله زرگری از مجله «علم و زندگی»

۶۹/۲۹- گازهای مخلوط متان، اتیلن و استیلن را چگونه از هم جدا کنیم؟

۶۹/۳۰- آیا می توان محلولهایی تهیه کرد که در عین حال شامل نمکهای زیر باشند:



۶۹/۳۱- کدامیک از گازهای زیر را می توان با اسید سولفوریک غلیظ خشک کرد:



# مسئلہ ریاضی

ج - پاره خطوط MQ و HP به ترتیب با AC و AB معکوساً متناسبند.

د - هیچکدام

۶۹/۳۶ - از نقطه A واقع در خارج دایره O دو مسas AT و AS را برآن رسم می کنیم . بر کمان کوچکتر از این دایره نقطه داخله M را انتخاب کرده و در این نقطه مماسی بر دایره رسم می کنیم که AT را در B و AS را در C قطع می کند. هر گاه نقطه M بر کمان ST جا بجا شود؛  
 الف - محیط مثلث ABC تغییر می کند و حد اکثر آن وقتی است که M بر رأس کمان ST واقع باشد .  
 ب - محیط مثلث ABC تغییر نمی کند

ج - محیط مثلث ABC تغییر می کند و حداقل آن وقتی است که M بر رأس کمان ST واقع باشد .  
 د - هیچکدام .

۶۹/۳۷ - در صورتی که a عددی منفی باشد حاصل عبارت :

$$P = |a + 2| - |a|$$

الف - در هر حال مستقل از a است .

ب - وقتی مستقل از a است که  $-2 < a < 0$  باشد

ج - وقتی مستقل از a است که  $0 < a < 2$  باشد  
 د - هیچکدام

۶۹/۳۸ - اگر  $b > a$  دو عدد ثابت باشند و داشته باشیم  $a < b$  در این صورت :

الف - در هر حال داریم  $\log a < \log b$

ب - فقط وقتی داریم  $a < b < 1$  که  $\log a < \log b$  باشد .

ج - فقط وقتی داریم  $1 < a < b$  که  $\log a < \log b$  باشد .

د - هیچکدام

۶۹/۳۹ - در صورتی که a مثبت بوده و داشته باشیم:

## کلاس چهارم ریاضی

۶۹/۳۲ - مساحت دایره ای برابر است با :

$$S = \pi(1 - \sqrt{3})^2$$

شعاع این دایره برابر است با :

$$R = 1 - \sqrt{3}$$

$$R = \pm(1 - \sqrt{3})$$

$$R = 1 - \sqrt{3}$$

د - هیچکدام

۶۹/۳۳ - در صورتی که  $f(x)$  یک چند جمله ای صحیح

از درجه یک باشد عبارت  $fff(x) :$

الف - چند جمله ای است از درجه یک

ب - چند جمله ای است از درجه سه

ج - چند جمله ای است مستقل از x

د - هیچکدام

۶۹/۳۴ - در صورتی که داشته باشیم:

$$f(x) = ax + b \quad fff(x) = 2x + 1$$

الف - مقادیر a و b عبارتند از :

$$a = \sqrt[3]{2} - 1 \quad b = \sqrt[3]{2} - 1$$

ب - برای تعیین مقادیر a و b شرایط لازم وجود ندارد .

ج - برای a و b به تعداد نامحدود مقادیر وجود دارد .

د - هیچکدام

۶۹/۳۵ - در مثلث ABC که ضلع AC از ضلع AB

بزرگتر است ارتفاع AH و میانه AM را رسم می کنیم و

از H به P و سطح AB واز M به Q و سطح AC وصل می کنیم؛

الف - طول پاره خط MQ از طول پاره خط HP

بزرگتر است .

ب - پاره خطوط MQ و HP به ترتیب با AC و

AB مستقیماً متناسبند .

الف - انتهای کمان  $x$  منحصر آ در ربع اول دایره مثلثاتی واقع است.

ب - انتهای کمان  $x$  در ربع چهارم دایره مثلثاتی واقع است.

ج - انتهای کمان  $x$  یا در ربع اول یا در ربع دوم دایره مثلثاتی واقع است.

د - هیچکدام

**۶۹/۴۴** در صورتی که داشته باشیم :

$$\sqrt{1+2\sqrt{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}} = \sin x - \cos x$$

الف - انتهای کمان  $x$  در ربع دوم دایره مثلثاتی واقع است.

ب - انتهای کمان  $x$  در ربع چهارم دایره مثلثاتی واقع است

ج - انتهای کمان  $x$  هر جاکه واقع باشد رابطه برقرار است.

د - هیچکدام

**۶۹/۴۵** سه نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  غیر واقع بر پریک صفحه مفروضند. از  $A$  خط  $\triangle$  را موازی با خط  $BC$  رسم می کنیم

الف - غیر از خط  $\triangle$  خط دیگری وجود ندارد که از  $C$  و  $B$  به یک فاصله باشد؟

ب - غیر از خط  $\triangle$  تنها یک خط دیگر وجود دارد که از  $B$  و  $C$  به یک فاصله است؟

ج - غیر از خط  $\triangle$  بینهایت خط دیگر یافت می شود که هر کدام از آنها از  $B$  و  $C$  به یک فاصله اند؟

د - هیچکدام

**۶۹/۴۶** برای اینکه تصویریک مثلث متساوی الاضلاع بر پریک صفحه  $P$  یک مثلث متساوی الساقین باشد لازم و کافی است که:

الف - صفحه  $P$  اقلالا با یک ضلع مثلث موازی باشد،

ب - صفحه  $P$  اقلالا با یک ارتفاع مثلث موازی باشد؛

ج - صفحه  $P$  اقلالا یا با یک ضلع یا با یک ارتفاع مثلث موازی باشد؛

د - هیچکدام

**۶۹/۴۷** هر یک از دو کمان  $\alpha$  و  $\beta$  بین صفر و  $90^\circ$  محسوزند و می دانیم که  $\cos \alpha > \cos \beta$ . در این صورت وقتی

است که:

الف - هر یک از دو کمان  $\alpha$  و  $\beta$  منحصر آ خاده باشند.

$$a^{\log x} = 4^{\log a}$$

الف - به شرط  $a \neq 1$  خواهیم داشت  $x = 4$

ب - در هر حال داریم  $x = 4$

ج - فقط وقتی  $x = 4$  است که  $a = 4$  باشد

د - هیچکدام

**۶۹/۴۸** در مثلث  $ABC$  اندازه زاویه  $A$  برابر با

$45^\circ$  درجه و اندازه زاویه  $B$  برابر با  $60^\circ$  درجه است. ارتفاع  $CH$  از مثلث را رسم می کنیم و از  $H$  عمود  $HK$  را برعکس فرود می آوریم:

الف - خط  $BK$  برعکس  $AC$  عمود است.

ب - خط  $BK$  پاره خط  $CH$  را به نسبت یک و دو تقسیم می کند.

ج - خط  $BK$  نیمساز زاویه  $B$  است.

د - هیچکدام

## کلاس پنجم ریاضی

**۶۹/۴۹** برمحور  $X'$  دو نقطه  $A$  و  $B$  به فاصله ۷

از یکدیگر قرار دارند و طول نقطه  $A$  برابر با  $(1-x)$  می باشد.

الف - طول نقطه  $B$  منحصر آ برابر با  $+6$  می باشد.

ب - طول نقطه  $B$  برابر با  $-8$  است.

ج - طول نقطه  $B$  با  $+6$  و  $-8$  است

د - هیچکدام

**۶۹/۵۰** دو نقطه  $A$  و  $B$  در صفحه محورهای مختصات

قرار دارند و  $'A$  و  $'B$  تصویرهای آنها برمحور  $X'$  می باشد.

در صورتی که مختصات  $A$ ، طول  $AB$  و طول  $'B$  معلوم و مختصات  $B$  مجهول باشد:

الف - حداقل دونقطه  $B$  بدست می آید.

ب - حداقل چهار نقطه  $B$  بدست می آید.

ج - فقط یک نقطه  $B$  بدست می آید:

د - هیچکدام.

**۶۹/۵۱** در صورتی که داشته باشیم:

$$\cos \alpha = \frac{x}{x+2} \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \frac{x+1}{x}$$

و  $x \neq 0$  باشد نتیجه خواهد شد که:

الف - هیچگاه خط  $\triangle$  بر منحنی C معناس نمی‌شود.  
ب - خط  $\triangle$  حداکثر در یک نقطه بر منحنی C معناس می‌شود.

ج - خط  $\triangle$  حداکثر در سه نقطه بر منحنی C معناس می‌شود.  
د - هیچکدام

۶۹/۵۲ - دو منحنی C و C' به معادله‌های:

$$(C) : y = \frac{2x-2}{x-2} \quad (C') : y = -2x^2 + 2x$$

در نقطه به طول یک

الف - بر یکدیگر مماسند و در این نقطه از یکدیگر می‌گذرند.

ب - بر یکدیگر مماسند و در این نقطه یکی از آنها در یک طرف دیگری واقع است

ج - ها یکدیگر متقاطعند بدون آنکه مماس باشند

د - هیچکدام

۶۹/۵۳ - منحنیهای C و C' به معادله‌های:

$$(C) : y = \frac{ax^2}{(x-1)^2} \quad (C) : y = \frac{b(x-1)^2}{x^2}$$

و خط  $\triangle$  به معادله  $x = k$  را در نظر می‌گیریم. منحنی C خط  $\triangle$  و محور  $x'$  را به ترتیب در M و O و منحنی C' خط  $\triangle$  و محور  $x'$  را به ترتیب در N و A قطع می‌کند؛  
الف - به ازاء جمیع مقادیر k عموماً چهار ضلعی OAMN محاطی است.

ب - فقط به ازاء یک مقدار k چهار ضلعی OAMN محاطی است.

ج - چهار ضلعی OAMN هیچگاه نمی‌تواند محاطی باشد.

د - هیچکدام

۶۹/۵۴ - دو معادله:

$$\sin 3x + \cos 3x = 0$$

$$\sin 4x + \cos 2x = 0$$

الف - بایکدیگر هم ارزند.

ب - مستقل از یکدیگرند.

ج - دارای جوابهای مشترک و جوابهای غیر مشترک می‌باشند.

د - هیچکدام

ب - کمان  $\beta$  حاده و کمان  $\alpha$  یا حاده یا منفرجه باشد.

ج - نامساوی  $\beta > \alpha$  در هر حال برقرار است.

د - هیچکدام:

۶۹/۴۸ - بر محور  $X'$  سه نقطه A و B و C به ترتیب به طولهای

۱ و ۴ و ۶ - و نقطه متغیر M به طول x واقع شده است.

به فرض اینکه داشته باشیم:

$$MA + MB + MC = k$$

الف - حداقل مقدار k برابر است با ۷

ب - حداقل مقدار k برابر است با ۵

ج - حداقل مقدار k برابر است با ۸

د - هیچکدام

۶۹/۴۹ - در صفحه محورهای مختصات نقطه P را بر

$x'$  و نقطه Q را بر  $y'$  و نقطه M در یکی از نواحی

محورهای  $x'$  و  $y'$  چنان انتخاب کرده‌ایم که چهار ضلعی

OPMQ مربع می‌باشد. درصورتی که مساحت این مربع

برابر با  $4a^2$  و a عددی جبری باشد.

الف - طول نقطه P برابر با  $2a$  است.

ب - طول نقطه P برابر با  $\pm 2a$  است.

ج - طول نقطه P برابر با  $|2a|$  است.

د - هیچکدام

۶۹/۵۰ - دو نقطه A و B در یک طرف صفحه P

واقع شده‌اند.

الف - در هر حال می‌توان نقطه C را بر صفحه P چنان انتخاب کرد که زاویه ACB قائم باشد.

ب - به شرط آنکه فاصله M وسط AB تا صفحه P بزرگتر از نصف طول AB نباشد حداکثر دونقطه C بر صفحه

P یافت می‌شود بقسمی که زاویه ACB قائم باشد.

ج - اگر بیش از یک نقطه C بر صفحه P یافت شود که زاویه ACB قائم باشد در این صورت بینهایت نقطه C در صفحه P وجود خواهد داشت که برای همه آنها زاویه ACB قائم باشد.

د - هیچکدام

## کلاس ششم ریاضی

۶۹/۵۱ - منحنی C به معادله  $y = \sqrt[3]{x^2} + x$  و خط

به معادله  $x = a$  مفروض است؟

**۶۹/۵۵ - معادله مثلثاتی :**

$$2\cos 2X - 4\cos \varphi \cos X + 4\cos^2 \varphi - 1 = 0$$

الف - درازاء مقادیری از  $\varphi$  دارای جواب و درازاء مقادیر دیگری از  $\varphi$  دارای جواب نیست .

ب - درازاء همه مقادیر  $\varphi$  دارای جواب است .

ج - هیچگاه جواب ندارد .

د - هیچکدام .

**۶۹/۵۹ - دو دایره متعدد المركز C و C' و نقطه A**

بردايره بزرگتر بفرض است . می خواهیم از A قاطع  $\triangle$  را رسم کنیم که موثر حادث در دایره بزرگتر سه برابر و تراحدت در دایره کوچکتر باشد ؟

الف - قاطع  $\triangle$  با این خاصیت وجود ندارد .

ب - قاطع  $\triangle$  منحصر بهیکی است .

ج - از قاطع مزبور حداقل دو عدد وجود دارد .

د - هیچکدام .

**۶۹/۶۰ - در یک دایره بینهایت مثلث متساوی الاضلاع**

می توانیم محاط کنیم که مرکز ثقل همه آنها بر مرکز دایره واقع است . اما در یک یپضی ؟

الف - نیز می توانیم بینهایت مثلث متساوی الاضلاع محاط کنیم که مرکز ثقل آنها بر مرکز یپضی واقع باشد .

ب - تنها دو مثلث از نوع مزبور و با خاصیت مذکور می توانیم محاط کنیم .

ج - اصلاح چنین مثلثی با این خاصیت را نمی توانیم محاط کنیم .

د - هیچکدام .

**۶۹/۵۶ - معادله مثلثاتی :**

$$N = N' \text{ عدد دورقمی است و عدد } N' \text{ مقلوب عدد}$$

است و  $N^2$  و  $N''$  نیز مقلوب یکدیگرند .

الف - تنها یک عدد N وجود دارد .

ب - از نوع عدد N شش عدد وجود دارد .

ج - از نوع عدد N فقط سه عدد وجود دارد .

د - هیچکدام .

**۶۹/۵۷ - عدد چهار رقمی که چهار برابر مقلوب خودش باشد ؟**

الف - منحصر به یک عدد است .

ب - وجود ندارد .

ج - بیش از یک عدد از آن وجود دارد .

د - هیچکدام .

**۶۹/۵۸ -  $cdc'd'$  و  $aba'b'$  دو خط نیمیرخ می باشند**

که وضع تصاویر آنها نسبت بهم معین نیست . برای اینکه این دو خط نیمیرخ متوازی باشند تقاطع یا توافقی دو خط  $a c a' c'$  و  $b d b' d'$  .

**حل مسائل (بقیه از صفحه ۱۱۷)**

برای اینکه عبارت طرف دوم برابر با  $2008X$  باشد لازم و کافی است که :

$$\begin{cases} a - b' = 0 \\ ab = 1 \\ b = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

**۶۸/۵۴ - (ب) عدد چهار رقمی abcd با رقمهای**

متفاوت که اگر آنرا در رقم یکان خود d ضرب کنیم حاصل برای  $dcba$  باشد منحصر به عدد ۱۰۸۹ است .

**۶۸/۵۵ - (ج) برای اینکه منحنی نمایش هندسی تابع:**

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + 1, a \neq 0$$

دارای محور تقارن باشد لازم است که n زوج باشد اما این شرط کافی نیست .

**۶۸/۵۶ - (ج) اگر در یک صفحه دو لوزی متساوی  $A'B'C'D'$  و  $ABCD$  بقسمی واقع باشند که قطرهای  $AC$  و  $C'A$  از آنها در امتدادهای عمود بر هم قرار داشته باشند برای تبدیل یکی از آنها به دیگری یک انتقال و یک دوران متواالاً لازم و کافی است . ابتدا با یک دوران به زاویه  $90^\circ$  درجه دو قطر را در یک امتداد قرار می دهیم و بعد با یک انتقال آنها را برهم منطبق می سازیم .**

**۶۸/۵۷ - (ج) اگر M نقطه ای از منحنی C به معادله**

$ax^r + by^r = c$  باشد و مماس و قائم بر منحنی C در نقطه MTN محو  $x^r$  را در  $N^r T$  قطع کنند ، وقتی مثلث MTN متساوی الساقین است که هر یکی از زاویه های MTN و MNT  $45^\circ$  درجه باشند . یعنی مماس بر منحنی با محو  $x^r$  زاویه  $45^\circ$  یا  $135^\circ$  درجه بسازد . معادله منحنی از درجه دوم

زبانه پایین صفحه ۱۲۶

## داستانهای ریاضی

ترجمه و تنظیم از، داویدریحان

( Rhind ) نوشته ریند

### هر آنچه که می درخشد...

این سرزمهین از منافع همه دفاع کنند...

- ... و از منافع توهمند، اینطور نیست؟

- خودم را تحت عنایت اعلیحضرت می‌سپارم.

- کاملاً حق باتست. قبل از آنکه لطف من شامل حالت شود باید امتحانی را که حاکی از صلاحیت تو در این کار است، پشت سر بگذاری...

می‌دانم که تو یکی از نماینده‌گان بسیار درخشنan و باهوش در سینیستری هستی، ولی موضوع مکده‌های هم‌صدا و هم وزن در میان است و تو می‌دانی که با مشاهده نظری محض نمی‌توانیم آنان را از یکدیگر تشخیص بدهیم.

- شاهان، مشاهدات نظری که برایه واقعیات روزنباشد، شایسته یک‌دانشمند نیست. علم خادم‌بهر و بخصوص اعلیحضرت است. می‌توانید درباره محفوظات علمی من قضاوت بعمل آورید...

- درست همین است. ای عمر، بی اطلاع نیستی که بعضی اشخاص بواسطه حرص و مال پرستی خود با ضرب سکه‌های تقلبی می‌خواستند که گنجینه مرا سرق کنند. این سارقین با چنان مهارتی این عمل را انجام داده‌اند که سکه‌ها و مدالهای رایج بوسیله آنان را نمی‌توانیم با سکه‌های رسمی تشخیص بدیم، مگر در یک‌مورد: وزن آنها. آنچه که از تو می‌خواهیم آنست که سکه‌های تقلبی و سکه‌های رسمی را در دو حالت مشخص که به تو خواهم گفت، از هم جدا کنی.

سلطان بدست متوجه حاصل خود می‌چرخد:

- آن دو کیسه‌را که گفته بودم تهیه کنی، حاضر کن.

و مجدداً رو به داشتمند می‌کند:

- در این کیسه، نه سکه که به ظاهر باهم متشابه‌ند ولی یکی از آنها تقلبی است و وزنش از همه سبقتر است، وجود دارد. حکم می‌کنم که به تو ترازوی بادوکنه دقیق بدهند (ولی این ترازو دارای هیچگونه وزنه مشخصی نیست) و تو باید با آن،

با آن شکم گنده و باقدرت کامل با چشم‌اندازیک طرف مملو از بدبختی و از طرف دیگر نماینده بی‌رحمی است، با شمشیری بر هنره که در دست دارد و با لبخندی محو نشدنی و ثابت که از زیر ریش سفیدش بخدمت دیده می‌شود، ابو بصال پنجم، سلطان سینیستری Sinistrie سه حاجب خوبش حکم می‌کند:

- شیخ‌العمر را وارد کنید.

شیخ با وجود آنکه تقاضامندی پیراست و یکی از فضلای بر جسته و در ضمن ریاضیدان، منجم، فیزیکدان و شیمیدان است و همچنین میراث‌دانش قدما: یونانی‌ها، کلدانی‌ها و هندی‌هارا در دنیا رواج داده است، درحالی که تاکمر خم شده است مانند محکومی به حضور سلطان می‌رسد.

\* \*

پس از ختم سلام و علیک، سلطان موضوع را مطرح می‌کند:



- بنظر می‌رسد که کارهای تو، هر چند که در اطرافشان چیزهای شنیده‌ام، ترا برای کارهای روزانه‌ات کفايت نمی‌کند و تمایل شدیدداری که جای وزیر مالیه را هر کنی.

- شاهان، عین واقعیت است. زمان برای آنها یکی که بجز کارهای فکری مشغله‌ای ندارند بسیار سخت می‌گذرد.

- و تو فکر می‌کنی که با مدیریت کارگاهی که سکه و مدالهایی از تمثال من تهیه می‌کند، روسفید در آیی؟

- فکر کنم که آشنايان متواضع من خواهند توانت در

برای دومین توزین، سکه‌های E,D,C می‌خوانیم . قبل از مباردت به سومین توزین ، ملاحظه می‌کنیم که دو حالت ممکن است رخ دهد. حالت اول :

$p' = 3p$  ، یعنی اینکه پنج سکه مورد استفاده باهم متشابهند؛ بنابراین سکه تقلیل ششمی یعنی F است، و کار دیگری نداریم جز آنکه تنها F را وزن کنیم . واضح است که وزن سکه‌های حقیقی ربع "p" یا ثلث "p'" است .

حالت دوم:  $3p'$  مخالف با  $4p$  است. در این صورت فرض می‌کنیم: "A + C = p'" . حالتی ممکن به قرار زیرند.

$$p' = 2p' : (a)$$

$A + C = B + D$  یا  $A + B + C + D = 2A + 2C$  (با حذف جواب F) ، سکه تقلیلی نمی‌تواند بجز E باشد و وزنش "p'" می‌باشد .

$$(b) : p' - p'' = p'''$$

$A + 2B = C + 2E$  ، نتیجه می‌گیریم که سکه تقلیلی D است و وزنش از تفاضل "p'" (A + C) یا  $(E + C)$  از  $p''$  بدست می‌آید .

$$(c) : p'' + p''' = 2p'$$

مساوی است با:  $p' - p'' = 2(p' - p''' = 2p')$  . سکه تقلیلی A با وزن  $p' - p''$  است .

محاسبه وزن سکه حقیقی در این پنج مورد با دانستن وزن سکه تقلیلی، مقدماتی است .

در اینجا ( یا در موقع سده عبور ) ، یادآوری می‌کنیم که می‌توانیم با توزین یک‌پاره سکه‌ها زودتر به نتیجه برسیم . شناس اینکه سکه تقلیلی در سه میان توزین مشخص شود دو روی سه بی‌باشد ولی در آن موقعیت چه جای بازی است ؟

### باقی حل مسائل

است و در هر امتداد خداکثر دو نمایم می‌توانیم بر آن رسم کنیم و در دو امتداد حد اکثر چهار نمایم .

**۶۸/۵۸**- (ج) حاصل جمع دو عدد سه رقمی  $cba$  و  $abc$  اگر از چهار رقم متساوی تشکیل شده باشد این حاصل جمع ۱۱۱۱ است و این در صورتی است که اولاً  $b = 0$  و ثانیاً  $a + c = 11$  باشد . با توجه به اینکه a و c صفر و یک نمی‌توانند باشند مسئله هشت جواب دارد .

$$68/59 - (ج) چون \cos X = \cos^2 X + \sin^2 X$$

صدق می‌کند اگر طرفین معادله را بر  $\cos X$  تقسیم کنیم بعضی جوابهای معادله حذف می‌شوند . دنباله در پایین صفحه بدهد

سکه تقلیلی را بیابی . ولی این کار را باید فقط بواسطه دو توزین انجام دهی و این عمل نباید کورکورانه ، بلکه با نظری قاطع انجام پذیرد .

- سورین، خوب درک کردم و اگر جسارت نشود، فکر نمی‌کنم که این نوع آزمایشها ممکن توافق توانائی من باشد .

- خواهیم دید... به دو مسئله می‌پردازیم. موضوع از این قرار است که با ترازویی یک‌کفه‌ای ( ولی با صفحه‌ای که دارای یک عقر بُعد مشخص کننده اوزان است) بواسطه سه توزین، ونه بیشتر، سکه تقلیلی را که در کیسه دومی است، بیابی . در این کیسه شش سکه وجود دارد و با همین موقعیت توباید اوزان سکه‌های تقلیلی و رسمی را بدھی . اگر مایلی می‌توانی به سرای مجاور بروی و تحت نظر شخص حاجب من، شروع به عمل کنی ...

\* \* \*

کمتر از بیست دقیقه بعد، شیخ‌العمر به حضور سرور خویش باریافت . وی فاتحانه دو آزمایش را پشت سر گذاشته بود . وی چگونه عمل کرده بود؟

یادآوری می‌کنیم که در اولین مسئله، ترازویی دو کفه‌ای و فاقد اوزان مشخصه، به منظور تعیین سکه تقلیلی ( سیکتر ) مخلوط با سکه‌های حقیقی، در دسترس داریم . کافی است سه فال سه سکه‌ای درست کنیم . دو تا از این فالهارا بطور اتفاقی انتخاب کرده و روی کفه‌های ترازو و قرار می‌دهیم . اگر یکی از کفه‌های پایانی آمد، این معنای آنست که سکه تقلیلی در کفه دیگر است . اگر کفه‌ها به حالت تعادل باقی مانندند، می‌فهمیم که سکه مطلوب در فال سوم قرار دارد . به طریق اولی، مسئله مبتنی بر تعیین سکه تقلیلی از میان فال شناخته شده است . عملیات مانند قبل است . روی هر کفه سکه‌ای را قرار می‌دهیم: در صور عدم تعادل، سکه تقلیلی آنست که سیکتر است؛ در حالت تعادل، سکه تقلیلی آن است که در توزین دوم مورد استفاده قرار نگرفته است . آن است که در توزین دوم مورد استفاده قرار نگرفته است .

در دوین آزمایش، با دسترسی داشتن به ترازویی که تنها دارای یک‌کفه است باید مانند قبل عمل کنیم . در عوض، این امکان وجود دارد که بتوانیم اوزان یک‌پاره سکه‌ها و یا فالها را بشناسیم .

نکته دیگری که حائز اهمیت است: نمی‌دانیم که سکه تقلیلی سیکتر یا سنگیتراز سکه‌های دیگر است، چه کنیم؟ بسیار خوب، شش سکه را با حروف F,E,D,C,B,A مشخص می‌کنیم . در اولین توزین، به عنوان مثال سکه‌های D,C,B,A را انتخاب می‌کنیم . وزن کل آنها را به  $p$  نمایش می‌دهیم .

# ج د و ل ا ع د ا د

طرح از : یوسف حاج محمدی

از عدد ۱۵ افقی . ۱۵ - رقم دهگانش متم حسابی مجموع دو رقم دیگرش است . ۱۴ - مقلوب عدد ۸ افقی - یک واحد کمتر از حاصل ضرب عدد ۱۵ افقی در مقلوب عدد ۲ قائم . ۱۷ - رقمایش زوج و متوالی آند و مضرب ۳۶ است . ۱۸ - تکرار بزرگترین رقمی که در رابطه  $x^2 = 2*$  صدق می کند .

۲	۱	۵	۶		۲	۱
۰		۴	۸	۳		۰
۲	۵		۸	۰	۰	۸
۵	۶	۸	۹		۲	۹
	۷	۱		۲	۷	
۸		۱	۱		۷	۵
۱	۴	۲	۸	۵	۷	

## حل جدول شماره قبل

### باقی حل مسائل

: ۶۸/۶۰ (ج) تساوی مثلثاتی :

$$\cos a + \cos c = 2 \cos b \cos d$$

به صورت زیر نوشته می شود :

$$2 \cos \frac{a+c}{2} \cos \frac{a-c}{2} = 2 \cos b \cos d$$

این تساوی وقتی برقرار است که :

$$\begin{aligned} a+c &= 2b \\ \Rightarrow a &= b+d \quad c = b-d \\ a-c &= 2d \end{aligned}$$

یعنی  $a$  و  $b$  سه جمله متوالی از تصاعد حسابی با قدر نسبت  $d$  باشند .

۱	۲			۳	۴	۵
۶			۷			
		۸			۹	
	۱۰			۱۱		
۱۲				۱۳	۱۴	
	۱۵			۱۶	۱۷	
۱۸		۱۹				
			۲۰	۲۱		

افقی : ۱- اگر با دو برابر رقم یکان خود جمع شود عددی توان هشتم بdest آید . ۳- بزرگترین عدد چهار رقمی که عدد سه برابر از رقمهای متوالی تشکل شده است . ۶- توان پنجم است . ۷- دو برابر مجذور عدد ۱۵ افقی . ۸- صد واحد بیشتر از عدد ۷ افقی . خودش توان سوم و ثلث آن مجذور کامل است . ۱۰- حاصل ضرب رقمایش با هریک از این رقمها برابر است . ۱۱- توان سوم و با مقلوب خودش برابر است . ۱۲- مقلوب سه برابر عدد ۳ افقی . ۱۳- مقلوب عدد ۹ افقی . ۱۵- مجموع رقمهایش با حاصل ضرب آنها برابر است . ۱۶- شماره دهگان عدد ۷ افقی . ۱۹- مقلوب عدد ۱۲ افقی . ۲۰- ده برابر مقلوب عدد ۱۶ افقی . ۲۱- مجذور عدد ۱۵ افقی .

قائم : ۱- هفت برابر مجموع عددهای ۱۰ افقی و ۱۵ افقی . ۲- مقلوب آن یک واحد کمتر از نصف آن است . ۳- سه برابر عدد به فرم  $aa(4a)$  . ۴- همان عدد ۱۵ افقی . ۵- حاصل ضرب عددهای ۱۰ افقی و ۹ افقی . ۷- همان عدد ۱۶ افقی . ۸- مجموع رقمهایش ۲۳ است . ۹- شش واحد بیشتر

# PROBLEMS AND SOLUTIONS

**Problem 71 :** Find the least integer which is one-half of a perfect square, one-third of a perfect cube, one-fifth of a fifth power, and one-seventh of a seventh power . How many digits are there in the solution ?

**Solution :** If the answer is to be one-half of a perfect square, twice the answer is a perfect square and contains 2 as a factor . However when 2 is a factor in a square number , 2 must be a factor more than once . Similar reasoning indicates that the number in question contains 2,3,5, and 7 as factors . Call the number  $2^w \cdot 3^x \cdot 5^y \cdot 7^z$  .

For this number to be one-half of a perfect square,  $x, y$ , and  $z$  must be multiples of 2, and  $w$  must be one less than a multiple of 2. For this number to be one-third of a perfect cube,  $w, y$ , and  $z$  must be multiples of 3, and  $x$  must be one less than a multiple of 3. Similar reasoning holds for 5 and 7 .

Thus,  $w$  must be a multiple of 3,5, and 7, and one less than a multiple of 2. 105 is divisible by 2, 5, and 7, and is an odd number .

$\therefore w=105$ . 140 is divisible by 2,5, and 7, and is one less than a multiple of 3.  $\therefore 5x=140$  .

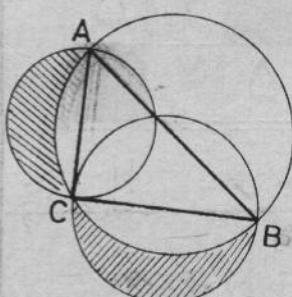
While 42 is a multiple of 2,3, and 7, it is not one less than a multiple of 5 . Since 84 meets all of these requirements,  $y=84$  .

90 meets all of the requirements for  $z$  since it is a multiple of 2,3, and 5, and is one less than a multiple of 7.  $\therefore z=90$

Therefore the least integer that fits all of the stated requirements is  $2^{105} \cdot 3^{140} \cdot 5^{84} \cdot 7^{90}$  . By using logarithms, the number of digits in  $2^{105} \cdot 3^{140} \cdot 5^{84} \cdot 7^{90}$  . is 234 .

**Problem 72:**Coplanar circles are constructed on each of the three sides of right triangle ABC (see Fig.) . The center of

each circle is on the midpoint of a side of  $\triangle ABC$  , and the length of the radius of a circle is equal



to one-half the length of the side of  $\triangle ABC$  . If the area of triangular region ABC equals 12 sq . ft., what is the combined area of the smaller circular regions which are not intersected by the largest circular region ? (See shaded regions in Fig.)

**Solution :** Since the sides of the triangle form the diameters of the three

توزیع و پوزش

در شماره گذشته در صفحه ۲ از مجله چاپ شکل مربوط به بقیه مقاله «بنزین» فراموش شده است. همچنین شکل مربوط به مسائل به زبان انگلیس مندرج در صفحه ۶۴ اشتباهی چاپ شده است. ضمن پوزش از خوانندگان گرامی شکلهای مزبور در اینجا چاپ می‌شود.



## آموزش رسم فنی از طریق مکاتبه

نظر به اینکه امسال رسم فنی یکی از مواد سال ششم ریاضی است و امتحان آن به صورت نهایی انجام می‌گیرد و از طرف دیگر برای بعضی از دانش آموزان سال ششم ریاضی، مخصوصاً داوطلبان متفرقه، امکان فراگیری درس رسم بطور آزاد فراهم نیست، وسیله تدریس این درس از طریق مکاتبه فراهم شده است. روش تدریس چنان است که حتی دانش آموزانی که کوچکترین اطلاعی از رسم فنی ندارند آمادگی لازم برای موفقیت در امتحان نهایی را بدست خواهند آورد.

تدریس رسم از طریق مکاتبه بوسیله گروهی از مهندسان که تدریس این درس را در دانشکده‌ها و دیورستانهای معروف بهدهدارند، انجام می‌گیرد. مکاتبه هفتگی است. هر دفعه تمرینهای انجام شده تصحیح می‌شود و به کلیه سوالهای در زمینه رسم فنی پاسخ داده می‌شود.

هر یک از داوطلبان برای یک دوره کامل مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب جاری ۶۵۹۰ بانک ملی ایران شعبه  
دانشگاه، تهران، به نام مهندس عبدالله فرنو واریز نمایند و عین رسید یا فتوکپی آنرا همراه با نشانی کامل خود  
به نشانی زیر بفرستند:

تهران - خیابان شاهروضا - خیابان اردبیلهشت - طبقه فوقانی دفتر استناد رسمی شماره ۵۳ - آتلیه نیما

انتشارات ارگنون معروفی می‌کند:

### ۳- خودآموز فیزیک حديث

با استفاده از آخرين کتابها درسي آمريكا راي سال پنجم طبیعی و ریاضی و داوطلبان کنکور دانشگاهها ترجمه و تأليف : ماشاء الله ورمنصوری - نصرالله پور جعفری بهای : ۵۰ ریال

۲- خودآموز

با استفاده از آخرین کتابهای  
درسی شورودی و آمریکا  
برای سال پنجم طبیعی و ریاضی  
و داوطلبان کنکور دانشگاهها  
ترجمه و تألیف :

## ۱- لگاریتم و تصاعد

مسائل کنکور دانشگاههای  
ایران، شوروی، آمریکا و فرانسه  
ترجمه و تأثیف:  
محمد هادی بکناشی  
بها با جلد سلوفان:  
۱۵۰ ریال

#### ۴- دستور پارسی در صرف و نحو زبان فارسی

برای دیروستانها و کمکور دانشگاهها

جای دوم با تجدید نظر کلی .. بها با جلد شمیز : ۱۵۰ ریال ، با جلد سلوفان : ۱۸۰ ریال

## انتشارات بکان

روش ساده

### حل مسائل شیمی

ترجمه: عطاء الله بزرگ نیا

۲۰ ریال

### مجموعه علمی

شامل مقالات ریاضی، فیزیک و شیمی  
حل مسائل معماز ریاضی و مطالعه دیگر

۶۰ ریال

### راهنمای ریاضیات متوسطه

تألیف: عبدالحسین مصطفی

چاپ چهارم: ۱۲ ریال

### سرگرمیهای جبر

ترجمه: پرویز شهریاری

با جلد شمیز: ۶۰ ریال - با جلد سلیفون: ۱۰۰ ریال

تمرینات  
ریاضیات مقدماتی  
تألیف: استاد هشتروودی  
فعال نایاب

مقدمه بر  
تئوری مجموعه‌ها  
تألیف: علی اصغر هومانی  
فعال نایاب

معماهای ریاضی  
ترجمه: محمد رکنی قاجار  
فعال نایاب

### مسائلی از حساب استدلالی

تألیف: محمود کاشانی

تجدید چاپ جلد های اول و دوم و سوم در شرف انجام است. برای اوایل آذرماه در  
دسترس علاقمندان قرار خواهد گرفت

### مبادی منطق و ریاضی جدید

بهای: ۲۴۰ ریال

تألیف: غلامرضا عجمی