یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ هفتم ، شمارهٔ : ۱ شمارهٔ مسلسل : ۶۸ مهر ۱۳۴۹

در این شماره :

کتابهای درسی نو ، نمودار پیشرفت عالی	عبدالحسین مصحفی	۱
تقریظ کتاب	دکتر فیلسوفی	۲
پیشرفت آموزش ریاضیات در دانشسرای عالی	محمد حسین احمدی	۳
دستگاه به‌مبنای ۲ ومسابقهٔ n سؤالی	حقیقت	۵
احتمالات	ترجمهٔ : مصحفی	۶
کتابخانهٔ یکان		۸
نقاط فیزیکی	ترجمهٔ : مقصودعین‌اللهی	۹
بزرین‌وعدد اکتانی ۸۰	ترجمهٔ:باقر مظفرزاده	۱۴
حساب فوتبالی	ترجمهٔ : عین‌اللهی	۱۷
محاسبات عددی و خطاها	ترجمهٔ : داوید ریحان	۱۹
انواع توابع	ترجمهٔ:فتح‌الله زرگری	۲۳
مفهوم $f(x)$ و مسائلی دربارهٔ آن	مصحفی	۲۶
چگونگی حل سادهٔ مسائل ریاضی	ترجمه	۳۰
روش حل مسائل مکان ، پوش وترسیمات‌هندسی	«	۳۲
صد مسئلهٔ جالب وحل آنها	ترجمهٔ : داوید ریحان	۳۵
حل مسائل یکان شمارهٔ ۶۷	—	۴۱
مسائل برای حل	—	۵۵
تستهای ریاضی	—	۵۸
داستانهای ریاضی ، دونردبان	ترجمهٔ : داوید ریحان	۶۲
جدول اعداد	نوراللهی‌ننه‌کران	۶۳
Problems & Solutions	—	۶۴

بها : ۲۵ ریال

دربارهٔ رسم فنی

عده‌ای از دانش‌آموزان در بارهٔ درس رسم فنی ونوع امتحان آن پرسش کرده‌اند . بنابه نامه‌ای که از وزارت آموزش وپرورش دریافت شده است :

طبق رأی جلسهٔ مورخ ۴۸/۶/۳۰ شورای عالی آموزش و پرورش که مفاد آن طی بخشنامهٔ شمارهٔ ۳۵۱۲-۴۸/۷/۲۰ به کلیهٔ ادارات آموزش وپرورش ابلاغ شده‌است تدریس رسم فنی درکلاس ششم‌ریاضی و به‌جای آن‌تدریس‌هیئت درکلاس پنجم ریاضی انجام می گیرد .

امتحان‌رسم فنی مانند سایر مواد ریاضی سال ششم‌کتبی و نهایی می‌باشد.

همچنین ازطرف سازمان‌کتابهای‌درسی، کتاب‌وزارتی رسم فنی تهیه‌و چاپ‌شده‌است‌که در نیمهٔ دوم ماه مهر توسط شرکت سهامی طبع‌ونشر کتابهای‌درسی‌توزیع‌می‌شود.

به‌قرار اطلاع ، بهای این‌کتاب حدود ۲۷ ریال است .

توجه

وجوهی به حساب بانکی مجله واریز شده‌که معلوم نیست ازطرف‌چه‌اشخاصی‌بوده‌است.همچنین بعضی‌حواله‌های بانکی و تقاضاهای اشتراك واصل شده است‌که فاقد نشانی می‌باشد . از همهٔ اشخاصی که‌برای‌اشتراك مجله‌نامه‌می‌نویسند یا وجهی به حساب‌بانکی مجله حواله می کنند تقاضا می‌شود مراتب را با ذکر نشانی کامل خود به‌دفترمجله اطلاع دهند.

یکان
مجله ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال ده شماره منتشر می‌شود

دورهٔ هفتم ـ شمارهٔ یکم ـ شمارهٔ مسلسل : ۶۸

مهر ۱۳۴۹

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول ، عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : بانونصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره :

تهران ، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VII, number 1. Sept. 1970

subscripti n ; $

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

زیر چاپ

جزوه‌های اول و دوم و سوم « مسائلی از حساب استدلالی » تألیف محمود کاشانی که نایاب‌شده‌بودآمادهٔ تجدیدچاپ است وبرای اواخر ماه مهر منتشرمی‌شود

کتابهای درسی نو،

نمودار عالیترین پیشرفت

پیشرفت کاملا مشهود در زمینهٔ تهیهٔ کتابهای درسی جدید ، یکی ازمواردی است که کشور ما رادر زمرهٔ پیشرفته‌ترین کشورهای جهان قرار داده‌است؛ کتابهای دورهٔ ابتدایی که بر اساس نظام جدید آموزشی تهیه‌شده است تاکنون در چندکنفرانس بین‌المللی عرضه شده که چه از نظر محتوی و سبك ارائهٔ مطالب ، و چه از لحاظ شکل ظاهری ، موجبات تحیر کارشناسان بین‌المللی را فراهم آورده است . در این کنفرانسها ، ایران از جمله چندکشور معدودی شناخته شده است که موفق شده‌اندکتابهای درسی ابتدایی ، مخصوصاً در زمینهٔ ریاضی را بر پایهٔ آخرین تحولات علمی و آموزشی تهیه کنند .

کتاب حساب و هندسهٔ پنجم ابتدایی که در سال تحصیلی جاری منتشر شده است مانند چهار کتاب پایه‌های قبل ، ازلحاظ مفاهیم بسیار غنی وازنظرروش ارائهٔ این مفاهیم کاملا ممتاز می‌باشد . یکی‌از همکاران که خود ازپیشکسوتان معلمان ریاضی است‌می‌گفت که به فرزندانش غبطه می‌خورد ؛ آنان اکنون در دبستان مطالبی را فرا می‌گیرند که وی بعد از تحصیلات متوسطه متوجه آنها شده است .

همهٔ آنان که دست اندرکار آموزش ریاضی هستند و از تحولات جهانی که در روش و آموزش ریاضی پدید آمده آگاهی دارند ، کتابهای فعلی حساب و هندسهٔ ابتدایی را تأییدوتحسین می کنند . اما همینان نگران آنند که آموزگاران نتوانند روش تدریس خود را با روش این کتابها مطابقت دهند .

کتابهای درسی جدید از تحولی متأثر می‌باشندکه در آموزش آنها نیز این تحول باید بکار رود . اگر آموزگاری بخواهد این کتابها را با همان روشی که در سابق داشته بیاموزد زحمت بیهوده کشیده و اجر خود را ضایع ساخته است .

یکی از مدیران دبستانها اظهار می‌داشت که هر آموزگاری تدریس کتابهای‌جدید حساب را به سادگی قبول نمی کندو از این بابت واهمه دارد . تاکنون در مورد هریك از کتابها فقط یك بار یك کلاس کار آموزی کوتاه مدت ضمن کار ، برای آموزگاران تشکیل

داده‌اند که به هیچ وجه کافی نبوده است . چه بسیار معلمانی که تغییر کلاس و دبستان داده‌یا جدیداً استخدام شده‌اند و در هیچ کلاس کارآموزی مربوط به این کتابها شرکت نداشته‌اند. وانگهی این کلاسها توسط اشخاصی اداره شده است که با یك واسطهٔ دیگر از مؤلفان کتابها کارآموزی دیده‌اند و احیاناً خود آنان به عمق تحولی که در آموزش ریاضی پدید آمده و در کتابها منعکس شده است واقف نبوده‌اند .

برای اینکه برنامهٔ جدید آموزشی و کتابهایی که بر اساس آن نوشته شده است در مرحلهٔ اجرایی با موفقیت توأم باشد ، تشکیل کلاسهای کارآموزی مداوم و ایجاد ارتباط مستقیم بین مؤلفان و آموزگاران ضروری می‌باشد .

عبدالحسین مصحفی

تقریظ کتاب

جناب آقای غلامرضا عسجدی

کتاب «مبادی منطق‌وریاضی‌جدید» تألیف آن دوست دانشمند به دستم رسید . الحق که اصطلاحات ومفاهیم‌منطق و ریاضی با بیانی روشن وشیرین تشریح‌شده‌است.

مطالعهٔ این‌کتاب نه‌فقط برای دانشجویان رشته‌های فنی فیزیك وریاضی دانشگاهها بسیار مفید است ، برای مدرسین دروس مذکور نیز سودمندمی‌باشد .

به نظر اینجانب روش جنابعالی در بیان مطالب این کتاب منطبق با برنامهٔ جدید تدریس علوم فیزیك وریاضی در کشورهای مترقی است‌که ازچندین‌سال بدین طرف در اکثر دبیرستانها و دانشگاههای آن‌ممالك معمول‌شده‌است .

اطمینان دارد ،مهندسین کشورکه باید طرحهای مهم فنی را با زبان ریاضی بیان کنند از این کتاب‌سودهای معنوی خواهند برد و برای مطالعهٔ مجلات علمی که غالباً با ریاضیات جدید نوشته می‌شود ، از تعاریف و توصیفات کتاب«مبادی منطق وریاضی جدید»استفاده‌خواهندکرد.

امیدوار است در ادامهٔ خدمات‌علمی‌همواره‌موفق‌باشید.

تهران،۱۲ شهریورماه ۱۳۴۹

دکتر اسمعیل فیلسوفی

استاد دانشگاه وعضوفرهنگستان تولوز
عضو آکادمی علوم نیویورك
لرآی آکادمی علوم پاریس
پروفسور کار شناس در سازمان ملل متحد

بنزین (دنبالهٔ ازصفحهٔ ۱۶)

انفجاری بنزین با عدد اکتانی ۷۰ با خاصیت ضد انفجاری مخلوطی از ۷۰ درصد ایزواکتان و ۳۰ درصد هپتان نرمال یکسان است . هرچه درجهٔ اکتانی بالاتر باشد خاصیت ضد انفجاری سوخت بیشتر است .

از هپتان وایزواکتان‌می‌توان مخلوطهایی باعدد اکتانی ازصفرتا ۱۰۰ تهیه‌کرد . اگر چنین مخلوطهایی را در موتور آزمایشی بسوزانیم ، هر چه درصد ایزواکتان مخلوط بیشتر باشد ، یعنی عدد اکتانی سوخت موردنظر بالاترباشد ، تق‌تق درمیزان‌تراکم بیشتر مثبت‌می‌شود. در موقع تعیین عدداکتانی سوختی نامعلوم در موتورآزمایشی،میزان تراکم را درآن لحظه که تق‌تق کاملا روشن شنیده می‌شود،تشخیص می‌دهند .

امروزه‌عدداکتانی تمام سوختهای مایع که می‌توانند از اجزای سوخت بحساب آیند ، عملا معین شده است . دربعضی‌موارد این عدد از عدد اکتانی ماده‌ای که برای بالاترین نقطهٔ مقیاس درنظر گرفته شده (۱۰۰) ، بیشتر است .

(دنباله دارد)

«پیشرفت آموزش ریاضیات در دانشسرای عالی»

ماخذ: { I- راهنمای دانشجویان دورهٔ لیسانس ریاضیات
II- راهنمای داوطلبان تحصیل در دورهٔ مدرسی ریاضیات

نوشتهٔ : محمدحسین احمدی

دانشسرای عالی که حد اقل از پیشکسوتان آموزش ریاضیات نوین در ایران می‌باشد از دیرباز در این فکر بوده است که برنامهٔ ریاضیات دورهٔ لیسانس را دگرگون ساخته و با مدرنترین برنامه های ریاضی دانشگاههای پیشرفتهٔ جهان هماهنگ سازد. بااتکاء براین اصل اگرچه در سال تحصیلی ۱۳۴۰-۴۱ برای اولین بار در ایران ، کرسی منطق جدیدرا در دانشسرای عالی دایر وازهمان زمان عدهٔ کثیری راکه‌هم اکنون در اقصی نقاط کشور به تدریس اشتغال دارند با ریاضیات جدید آشنا ساخت ولی آن تحول ودگرگونی که مطلوب مسؤولان گروه آموزشی ریاضیات بودصورت نگرفت زیرا در این‌راه فقری‌بزرگ ،احساس می‌شد وآن‌فقر دروجود افراد کاردان وآشنا با ریاضیات زنده بود،افرادی‌که قادر به تقبل و اجرای برنامه‌های نوین ومترقی باشند . از اینرو دانشسرای عالی درآبان‌ماه۱۳۴۴ با تصویب شورای‌مرکزی دانشگاهها به تأسیس یک‌دورهٔ دو سالهٔ ریاضیات محض‌به‌نام «دورهٔ مدرسی ریاضیات» جهت تربیت مدرسین رشتهٔ مذکور اقدام نمود و این مؤسسه کارخودرا از اول مهرماه ۱۳۴۵ آغاز کرد .

در این زمان که دانشسرای عالی تحت نظارت مستقیم وزارت آموزش وپرورش اداره می‌شد درست دوسال از عمر طرح تحصیل دو مرحله‌ای می گذشت . این طرح مبتنی‌براین بود که دانشجویان تمام گروهها (اعم ازگروه ریاضی ، تجربی وتربیت بدنی)، دورهٔ چهارسالهٔ‌لیسانس را باید دردو دورهٔ دوسالهٔ منفك ازهم‌بگذرانند. بدین معنی که پس از گذراندن اولین دورهٔ دوساله به اخذ درجهٔ‌فوق‌دیپلم نائل‌شده وبه مدت دوسال در سیکل اول متوسطه به‌عنوان کار آموز به تدریس اشتغال ورزند وپس‌ازاتمام‌این دورهٔ کار آموزی ، اگر احیاناً به‌کمبود دبیر در سطح سیکل دوم بیش از سیکل اول احساس شودآنگاه افرادی‌که علاقمند به ادامه و تکمیل تحصیلات عالی‌خود باشند می توانند در یك امتحان‌ورودی که به همین منظور برگزار می‌شود شرکت جسته ودرصورت احراز موفقیت به مرحلهٔ دوم (یعنی دومین دورهٔ دوساله) دورهٔ لیسانس راه یابند و پس از گذراندن دورهٔ اخیرالذکر به اخذ درجهٔ لیسانس نائل گردند . امااین طرح همانگونه که انتظار می‌رفت چندان دوامی‌نیاورد زیرا پس از فارغ التحصیلی اولین گروه دورهٔ دوسالهٔ اول ، دانشسرای عالی ازوزارت آموزش وپرورش منفك ووابسته به وزارت علوم و آموزش عالی گردید ، وطی تجدیدنظری که درمورد طرح فوق‌الذکر در وزارت علوم بعمل آمد آنرا منسوخ و طرح دورهٔ چهار سالهٔ متوالی لیسانس را تصویب‌کردو این طرح که‌می بایست از اول مهرماه ۱۳۴۷ به مرحلهٔ اجرا در آید مصادف‌بازمانی شد که اولین گروه محصلین دورهٔ مدرسی ریاضیات ازتحصیل فراغت یافتند لهذا مسئلهٔ فارغ‌التحصیلی دانشجویان اولین دورهٔ مدرسی از یك‌طرف و موضوع متوالی شدن دورهٔ چهار سالهٔ لیسانس از طرف دیگر زمینه را از هرجهت برای ایجاد تحولی عمیق در برنامه‌های ریاضی و اجرای برنامه‌های مدرن و مترقی آماده ساخت . دیری نپائید که طرح جدید در دانشسرای عالی پیاده شد و از سال تحصیلی ۱۳۴۷ - ۴۸به مرحلهٔ اجرا در آمد و اکنون سه سال است‌که از عمراجرای طرح مذکور می گذرد و نتایج حاصل از اجرای برنامه های جدید کاملا مورد رضایت اولیاء ومسؤولان گروه آموزشی ریاضیات بوده است . در خردادماه سال تحصیلی ۱۳۴۸-۴۹ اولین گروه دانشجویان دورهٔ لیسانس ریاضیات جدید که بر اساس مدرنترین برنامه‌ها دردانشسرای عالی تحصیل‌کرده‌اند فارغ‌التحصیل شدند وقدر مسلم این گروه در اشاعهٔ مبادی و اصول ریاضیات زنده در سراسرکشورونیز درتحول برنامه‌های

ریاضی به گونهٔ جدید اثری فوق‌العاده داشته و به اولی سهم بسزائی خواهند داشت .

برنامهٔ دروس دورهٔ لیسانس ریاضیات

دانشجویان ریاضی در دانشسرای عالی با گذراندن ۱۴۴ واحد درسی که شرح آن ذیلا خواهد آمد به اخذدرجهٔ لیسانس نائل می‌شوند .

۱ ـ دروس اصلی ریاضی : ۶۸ واحد

۲ ـ دروس وابستهٔ ریاضی: ۳۲واحد

۳ ـ دروس عمومی : ۴۴واحد

I ـ دروس اصلی ریاضی

دروس اصلی ریاضی که در طی دورهٔ چهارساله تدریس می شود به‌شرح زیر است :

ریاضیات عمومی ـ هندسه ـ حساب دیفرانسیل و انتگرال ـ آنالیزمقدماتی ومتمم‌جبر ـ جبرمدرن ـ توپولوژی ـ تئوری اعداد ـ آنالیز ـ توابع تحلیلی ـ معادلات دیفرانسیل

II ـ دروس وابستهٔ ریاضی

دروس وابستهٔ ریاضی خود شامل دوقسمت‌است:

الف ـ دروس فیزیك .ب ـ دروس‌ریاضیات کاربسته.

الف ـ دروس‌فیزیك ۱۲ واحد به‌شرح زیراست:

الکتریسیته ـ مبانی فیزیکی‌مکانیك ـ فیزیك ذره‌ای و ترمودینامیك ـ فیزیك اتمی

ب ـ دروس ریاضیات کاربسته ۲۵ واحد و مشتمل بر مواد ذیل است :

مکانیك‌استدلالی ـ آمار و احتمالات ـ جغرافیای‌ریاضی ـ رسم فنی

III ـ دروس عمومی :

دروس عمومی شامل دوقسمت است :

الف ـ دروس زبان فارسی.ب ـ دروس زبان خارجی (انگلیسی)

پ ـ دروس علوم تربیتی وروانشناسی

الف ـ دروس زبان فارسی ۱۵ واحد به شرح زیر است :

متون نثر ساده ـ متون نظم ساده ـ قواعد جمله بندی زبان فارسی با تمرین ـ برخی از متن های نثر فنی ـ آئین نگارش و سخنرانی و مطالعه در ادبیات معاصر .

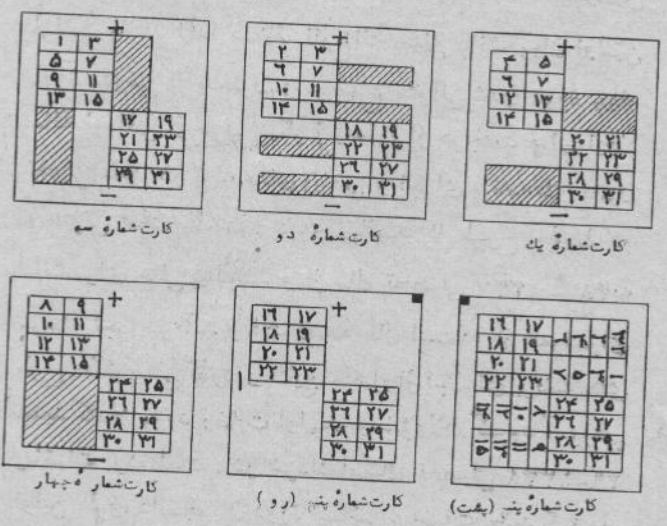
ب ـ دروس زبان خارجی (انگلیسی) ۱۵ واحدبه‌شرح زیر است :

زبان انگلیسی عمومی ـ مطالعهٔ متون علمی

پ ـ دروس علوم تربیتی و روانشناسی ۲۴ واحد و شامل مواد زیر است :

روانشناسی عمومی ـ فلسفه و اصول‌آموزش وپرورش ـ تاریخ آموزش‌و پرورش ـ روانشناسی رشد و بلوغ ـ آموزش و پرورش تطبیقی ـ آمار و سنجش ـ سازمان و ادارهٔ آموزش و پرورش ـ روانشناسی تربیتی ویادگیری ـ تاریخ علوم و متدولوژی ـ تهیه و استفاده از وسایل سمعی وبصری ـ تاریخ فلسفه ـ تمرین دبیری

دستگاه به‌مبنای ۲ (بقیه ازصفحه ۵)



قسمتهای هاشورزده را باقیچی ببرید

این ۵ کارت می‌توان از میان 2^5 عدد ابتدا از یك‌عدد، عدد مورد نظر راکشف نمود (پنج سؤالی) می‌توان کارتها را برای 2^n عددیعنی n سؤالی نیز طرح وتنظیم نمود .

حال به ترتیب کارتهای یك ودوو ... را نشان داده و بنابرآنکه در پاسخ سؤال « آیا عدد مورد نظر در این‌کارت وجود دارد » آری یاخیر شنیده باشیدباید کارتهاراکه‌به‌شکل مربعهای قابل انطباق‌هستند رویهم چنان قرار دهید که جهتی که‌کلمات آری (+) وخیر (−) نوشته شده است‌باجوابهای آری یاخیر متوافق باشد. بالاخره وقتی کارت‌شمارهٔ۵ نیز روی سایر کارتها قرارگرفت تمام کارتها را برگردانید و ازتنها پنجره‌ای‌که می‌توان یك مستطیل ۱ × ۲ را مشاهده نمود عدد موردنظر را بخوانید. برای پی‌بردن به سرعت محاسبهٔ این ماشین حساب باید اولین سؤال را باکارت شمارهٔ ۵ انجام‌دهید وسپس طوری عمل‌کنیدکه سایرکارتها پشت‌کارت شمارهٔ۵واقع شود و همواره بتوانید پشت کارت ۵ را از میان پنجره ها مشاهده نمائید.

دستگاه شمار به‌مبنای ۲ و مسابقهٔ n سؤالی

انگیزهٔ مؤثر در فراهم آوردن این مقاله مطالعهٔ کتاب «در قلمرو ریاضیات» ترجمهٔ آقای پرویز شهریاری خاصه بخشی که مرتبط به دستگاههای شمار می‌گردید بوده است.

فرامرز حقیقت

خوانندگان عزیز یکان درشماره های گذشته ملاحظه فرموده‌اندکه چگونه می‌توان ازمیان 2^n عدد متوالی ابتدااز یك ، فقط با n سؤال (باجوابهای آری‌یاخیر) عدد مفروضی را مشخص ومعلوم نمود . ذیلا به‌شرح دوروش که‌بسیاردقیق وسریع می‌باشد می‌پردازد.

روش‌اول (در قلمرو ریاضیات صفحهٔ ۲۰) چنانکه می‌دانیدمی‌توان هرعددرابه‌صورت‌مجموعی ازقوای‌مختلفهٔ‌عدد ۲ درآورد. پس‌اگرجدولی با n ستون(مثلا جدول زیرباچهار ستون برای چهار سؤال) تنظیم شده‌باشد بقسمی که‌دربالای

چهارم	سوم	دوم	اول
$۳^۲ = ۸$	$۲^۲ = ۴$	$۲^۱ = ۲$	$۲^۰ = ۱$
۸	۴	۲	۱
۹	۵	۳	۳
۱۰	۶	۶	۵
۱۱	۷	۷	۷
۱۲	۱۲	۱۰	۹
۱۳	۱۳	۱۱	۱۱
۱۴	۱۴	۱۴	۱۳
۱۵	۱۵	۱۵	۱۵

ستونها به ترتیب اعداد $۲^۰ = ۱$ و $۲^۱ = ۲$ و $۲^۲ = ۴$ و $۲^۳ = ۸$ و... نوشته شده باشند،می‌توان اعداد از یك‌تا$۲^۴$(از یك تا۱۶)را چنین‌دسته بندی‌کرد: درستون اول اعدادی‌که در مبنای ۲رقم یکانشان۱می‌باشدنوشته‌شده‌باشند. در ستون دوم اعدادی‌که در مبنای ۲ رقم دهگانشان ۱ می‌باشد و به همین ترتیب در ستونهای سوم وچهارم فقط اعدادی که در مبنای۲ سدگان یکان‌هزار آنها۱می‌باشدنوشته‌شده باشند(البته‌می‌توان این جدول رابرای۳۲و۶۴و ... عدد تعمیم دادوحتی می‌توان با جایگزین‌کردن حروف وکلمات سرگرمی‌رابه شکل دیگری ارائه داد. حال‌اگر عددی مورد نظرباشدکه مثلا درستونهای دوم‌وچهارم جدول‌بالا وجود داشته باشدبغیر از عدد$۲^۳ + ۲^۱$ یعنی ۱۰ = ۸ + ۲ عدد دیگری نمی‌تواند باشد ؛ واضح است که باید چهار سؤال را باین ترتیب انجام داد:

آیا عدد مورد نظر درستون اول هست؟ آیا در ستون دوم و سوم و ... وجود دارد ؟ البته جوابها کلماتی غیراز آری وخیر نخواهند بود ، در این روش احتیاج به‌نگاه‌کردن ستونها ویا حتی احتیاج به نوشتن اعداد بالای ستونهانیست‌و نیز واضح است‌که اگر همهٔ جوابها خیر باشند عدد مفروض متناظر عدد ۳۲ خواهد بود .

روش دوم (Maghic house of numbers)

در این روش که‌سرعت عمل آن بی حد وحساب است‌حتی‌عمل جمع بسیار آسان آخرکار نیز به عهدهٔ همان چند عدد صفحهٔ کاغذ یا مقوا می‌باشدکه قبلا تهیه شده است(کارتهای شمارهٔ ۱و۲و۳و۴و۵ برای پنج سؤال شکل پائین).

بی گفته واضح است‌که درکارت شمارهٔ ۱ اعدادی‌که‌در مبنای ۲ به‌رقم ۱ ختم می‌شوند نوشته شده‌اند ، ودرکارتهای دوم وسوم و... اعدادی که رقمهای دوم وسوم و... (از سمت راست) آنها درمبنای ۲ یك می‌باشدنوشته شده‌اند.

توجه‌کنید پشت کارت شمارهٔ ۵ نیز اعدادی نوشته شده است‌که برای نوشتن‌ارقام پشت آن‌اندك‌دقتی‌کافی‌است. باکمك

بقیه درپایین صفحهٔ قبل

مقدمات

احتمالات

Notions de

PROBABILITÉ

par : M HAGE'GE

ترجمهٔ : مصحفی

فصل اول - شمارش حالات

۱- تبدیل (Permutation)

الف - مفهوم تبدیل : چهار اسب A و B و C و D در یك مسابقه شرکت دارند . به چند ترتیب ممکن است که مسابقه را بپایان رسانند ؟

اولا می‌توانیم چنین استدلال کنیم : رویهم چهار اسب در مسابقه شرکت دارند ، پس برحسب اینکه کدام یك ازآنها زودتر به خط پایان برسد چهار حالت امکان دارد . غیر از اسبی که زودتر رسیده است ، سه اسب دیگر باقی می‌ماند که برحسب اینکه کدام آنها زودتر برسد سه حالت وجود دارد. برای تعیین اسب اول چهار امکان وجود داشت پس برای تعیین اسب دوم ۳ × ۴ امکان وجود دارد :

A و B	A و C	A و D
B و A	B و C	B و D
C و A	C و B	C و D
D و A	D و B	D و C

وقتی اسبهای اول ودوم معین‌شده باشند دو اسب‌دیگر باقی خواهد ماند که برحسب اینکه کدامیك زودتر برسد دو حالت وجود دارد و چون برای اسب دوم ۳ × ۴ امکان وجود داشت پس برای تعیین اسب سوم ۲ × ۳ × ۴ امکان وجود دارد و بعد از آن یك اسب باقی‌می‌ماند پس تعداد ترتیبهایی که در پایان مسابقه امکان دارد برابر می‌شود با :

۴ × ۳ × ۲ × ۱

کلیهٔ ترتیبهای مزبور را می‌توانیم به صورت زیرنشان دهیم :

اسب اول	اسب دوم	اسب سوم	اسب چهارم
A	B	C	D
		D	C
	C	B	D
		D	B
	D	B	C
		C	B
B	A	C	D
		D	C
	C	A	D
		D	A
	D	A	C
		C	A
C	A	B	D
		D	B
	B	A	D
		D	A
	D	A	B
		B	A
D	A	B	C
		C	B
	B	A	C
		C	A
	C	A	B
		B	A

ثانیاً می‌توانیم چنین استدلال کنیم : اگر فقط دو اسب A و B در مسابقه شرکت داشتند برحسب اینکه کدام آنها اول وکدام آنها دوم شود دو حالت امکان دارد :

A و B یا B و A

وقتی اسب دیگر C به آنها اضافه شود اگر وضع A و B نسبت به هم معین باشد برحسب اینکه C قبل از A ، بعد از A و قبل از B یا بعد از A و B واقع شود سه حالت امکان دارد و چون A و B هم‌نسبت به هم دووضع می‌توانند داشته باشند پس A و B و C نسبت بـه هـم ۳ × ۲ وضع می‌توانند داشته باشند :

BوAوC	AوCوB	AوBوC
CوBوA	CوAوB	BوCوA

وقتی وضع سه‌اسب A و B و C معین شده باشداسب چهارم D که به آنها اضافه شود نسبت بـه‌وضع مـزبور در چهاروضع می‌تواند واقع شودو در نتیجه تعداد تمام وضعهای ممکن می‌شود ۴ × ۳ × ۲ و با توجه به اینکه وقتی فقط یك اسب در مسابقه بـاشد فقط یك حالت وجـود دارد می‌توانیم تعداد تمام وضعهای ممکن را به صورت زیر بنویسیم :

$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$

ب ـ تعریف ـ هر یك از ترتیبهای مختلفی راکه n شیء نسبت به یکدیگر می‌توانند داشته باشند **تبدیل n شیء** می‌نامیم. تعدادتمام تبدیلهای n شیءرا به P_n نشان‌می‌دهیم. در مثالی که گذشت تعداد تبدیلهای چهار حرف A و B و C و D را معین کردیم .

ج ـ تعداد تبدیلهای n شیء : یکی از دو روش استدلالی راکه در مورد چهار شیء بکار بـردیم در مورد n شیء تعمیم می‌دهیم و نتیجه خواهد شدکه تعداد تبدیلهای n شیء برابر است با حاصل‌ضرب تمام اعداد از یك تا n ؛

$P_n = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times n$

د ـ فاکتوریل : حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از یك تا n را فاکتوریل n می‌نامیم و به‌صورت !n نشان می‌دهیم ؛

$n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times n$

مثلاً :

$۳! = ۱ \times ۲ \times ۳ = ۶$

$۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰$

بنا به قرار داد قبول می‌کنیم که :

$۰! = ۱$

با تعریف اخیر می‌توانیم بگوئیم‌که تعداد تبدیلهای n شیء برابر است با فاکتوریل n ؛

$P_n = n!$

۲ـ ترتیب (Arrangement)

الف ـ مفهوم ترتیب : پنج اسب A،B،C،D،E در یك مسابقه شرکت دارند . اگر مقصود تعیین اسبهایی‌باشد که در این مسابقه اول ، دوم و سوم می‌شونـد ، چند حالت ممکن است ؟ (به عبارت دیگـر دربین پنج اسب چند ترتیب سه تایی مختلف وجود دارد ؟)

اول	دوم	سوم	اول	دوم	سوم
A	B	C	B	A	C
		D			D
		E			E
	C	B		C	A
		D			D
		E			E
	D	B		D	A
		C			C
		E			E
	E	B		E	A
		C			C
		D			D
C	A	B	D	A	B
		D			C
		E			E
	B	A		B	A
		D			C
		E			E
	D	A		C	A
		B			B
		E			E
	E	A		E	A
		B			B
		D			C

اول	دوم	سوم
E	A	B
		C
		D
	B	A
		C
		D
	C	A
		B
		D
	D	A
		B
		C

در ابتدای مسابقه پنج اسب شرکت دارند . یکی ازاین اسبها مقام اول را بدست می‌آورد ، باقی می‌ماند چهاراسب دیگرکه یکی از آنها باید مقام دوم را بدست‌آورد . برحسب اینکه‌کدام یك از این چهار اسب به مقام دوم برسد ۵×۴ حالت ممکن است . بعد از آن سه اسب دیگر باقی می‌ماند و برحسب اینکه‌کدام آنها مقام سوم را بدست‌آورد $۵ \times ۴ \times ۳$ حالت وجود خواهد داشت .

حالتهای مختلف این ترتیبهای سه تایی را می‌توانیم به صورت بالا نشان دهیم .

ب ـ تعریف : با فرض $p<n$ تعداد ترتیبهای‌مختلف p شیء راکه می‌توان در بین n شیء تشکیل داد ترتیب n شیء p به p نامیده شده وبه‌صورت A^p_n نشان داده می‌شود. در مثال بالا تعداد ترتیبهای سه به سهٔ ۵ شیء حساب شد.

ج ـ تعداد ترتیبهای p به p از n شیء

روش محاسبه‌ای راکه در مثال بالا بکار بردیم تعمیم می‌دهیم : ما باید در p مقام از ۱ تا p به ترتیب یکی از n شیء معلوم را قرار دهیم . برای تعیین شیء نظیر مقام اول ، n راه مختلف وجود دارد . با انتخاب اولین مقام $n-۱$ شیء باقی می‌ماندکه برای انتخاب یکی از آنها $n-۱$ راه مختلف وجود دارد . برای انتخاب اولین شیء n راه وجود داشت و نظیر هرکدام از این راهها $n-۱$ راه مختلف برای انتخاب دومین شیء وجود دارد . پس برای انتخاب دومین شیء از بین n شیء رویهم $n(n-۱)$ راه مختلف وجوددارد. حال فرض‌کنیم‌که شیء $(p-۱)$ ام انتخاب شده باشد، تعداد $n-(p-۱)$ شیء دیگر باقی ماندکه برای انتخاب یکی از آنها $n-(p-۱)$ راه مختلف‌وجود دارد و اگرتعدادراههای مختلف انتخاب شیء قبلی را درنظرداشته باشیم نتیجه‌می‌شود که برای انتخاب مقام p ام از بین n شیء تعداد راههای مختلف عبارتست از :

$$A^p_n = n(n-۱)(n-۲)\dots(n-p+۱)$$

این رابطه را می‌توانیم چنین بنویسیم :

$$A^p_n = \frac{n(n-۱)(n-۲)\dots(n-p+۱)\dots \times ۲ \times ۱}{(n-p)(n-p-۱)\dots \times ۲ \times ۱}$$

نتیجه خواهد شد :

$$A^p_n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

مثلا در مورد انتخاب ترتیبهای سه‌تایی از بین ۵ اسب داریم :

$$A^۳_۵ = \frac{۵!}{۲!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۲ \times ۱} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

نقاط فیزیکی

ترجمهٔ : مقصود عین‌اللهی

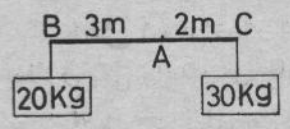
ارشمیدس تفاوت موجود بین چگونگی کشف و اثبات ریاضی یك قضیه را تشخیص داده است . اکنون هم بسیاری از ریاضیدانها این تفاوت را مشاهده می‌کنند اما اغلب از چگونگی کشف یك قضیه سرباز می‌زنند وفقط با بیان استدلال ریاضی آن خود را قانع می‌کنند . این موضوع به این علت است‌که روش‌کشف یك قضیه در بیشتر موارد فیزیکی (مادی) است نه ریاضی .

اغلب اتفاق می‌افتدکه یك‌مشاهده فیزیکی پایه‌ای‌برای کشف یك قضیهٔ ریاضی می‌باشد . در این مقاله یك چنین مشاهده‌ای‌که توسط ارشمیدس انجام گرفته تشریح می‌شود . ارشمیدس درروش خودبرای سطح ، حجم، مرکز ثقل، گشتاور که مفاهیمی فیزیکی و به اشیاء مادی مربوط می‌باشند جرم‌بکار برده است .

مثالی از فیزیك

مطلب را با یك مفهوم فیزیکی شروع می‌کنیم . در شکل ۱ ، دو وزنهٔ ۲۰کیلوگرمی و ۳۰کیلوگرمی به ترتیب در نقاط B و C دو انتهای یك تختهٔ ۵ متری‌آویزان شده‌اند و تمام دستگاه در نقطهٔ A آویزان شده است . فیزیکدانها بر این عقیده‌اندکه دستگاه تنها موقعی در حال تعادل است که A به فاصلهٔ ۳ متری از B (یا ۲ متری از C) واقع شده‌باشد و تخته‌کاملا یکنواخت باشد . تعادل دستگاه نتیجهٔ تساوی ۳ × ۲۰ و ۲ × ۳۰ می‌باشد .

احتمالا شما این نتیجه را می‌دانید و نیز می‌دانستید که A مرکز ثقل دستگاه می‌باشد و برای اینکه دستگاه را بلند کنیم و دستگاه درحال تعادل باشد بایدنیروئی برابر ۵۰کیلوگرم در A به دستگاه واردکنیم .



شکل۱

تحلیل ریاضی مثال بالا

حال ما به تشریح چند استنتاج ریاضی‌که براثرمشاهدهٔ این پدیده فیزیکی بوجود آمده است می‌پردازیم .

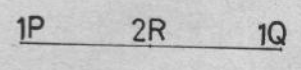
اول اینکه نقاط بریك استقامت واقع شده‌اند ، دو نقطه طرفین تخته و سومی بین آنها.دوم اینکه هر نقطه به یك ضریب وابسته است ، B با ۲۰ و C با ۳۰ و A با ۵۰ ، از این به‌بعد هرنقطه و ضریب مربوط به آنرا یك‌نقطهٔ‌فیزیکی می‌خوانیم . ضرایب مربوط به نقاط منحصر به اعداد مثبت و حقیقی می‌شوند . برای جلوگیری ازاتلاف وقت در بارهٔ‌نقاطی صحبت خواهیم کردکه برروی یك‌خط واقع باشند ولی‌چنانکه بعداً خواهیم دید در بارهٔ نقاط دیگر نیز بحث خواهد شد . اکنون نقطهٔ فیزیکی B را به صورت B ۲۰ ، نقطهٔ فیزیکی C را به صورت C ۳۰ ونقطهٔ فیزیکی A را به‌صورت A۵۰ نشان می‌دهیم . بطور کلی نقطهٔ فیزیکی X با ضریب x را به صورت xX نشان می‌دهیم . ضریب x را سنگینی در نقطهٔ X می‌خوانیم و وابستگی آنها را اینطور شرح می‌دهیم که‌در نقطهٔ X وزنه‌ای به وزن x آویزان است ، یا نیروئی برابر x به نقطهٔ X وارد می‌شود . دو نشانهٔ xX و yY اگر و فقط اگر $x=y$ و $X=Y$ باشد معرف یك نقطهٔ فیزیکی می‌باشند . درمثال بالا نقطهٔ A۵۰ ازدو نقطهٔ B ۲۰ و C۳۰ بدست آمده،این موضوع یك رابطه بوجود می‌آوردکه ماآنرا جمع نقاط فیزیکی‌می‌خوانیم‌وبه‌صورت $۲۰B + ۳۰C = ۵۰A$ نشان می‌دهیم ،که درآن علامت + به این معنی است‌که ما نقاط فیزیکی را باهم جمع می‌بندیم نه ضرایب را . نقطهٔ Aبه فاصلهٔ ۳ متر از B (یا ۲ متر از C) واقع شده است و حتی اگر نمی‌دانستیم‌که طول BC برابر ۵ متر است ، با دانستن اینکه نقطهٔ A روی BC طوری واقع شده است‌که تناسب $\frac{BA}{AC} = \frac{۳۰}{۲۰}$ برقرار است‌که در آن ۳۰ و ۲۰ وزنه‌های مربوط به نقاط B و C هستند ، می‌توانستیم نقطهٔ A را روی BC تعیین‌کنیم .

بطورکلی ما می‌توانیم دونقطهٔ aA و bB راکه درآن A و B دو انتهای قطعه چوب و a و b اعداد مثبت حقیقی می‌باشد، جمع کنیم و در نتیجهٔ آن cC را بدست آوریم که در آن $c = a + b$ بوده‌و نقطهٔ C بر روی BA طوری‌واقع است که $\frac{AC}{CB} = \frac{b}{a}$ می‌باشد. توجه‌کنیدکه در تناسب بالا وزنه‌های a و b به‌صورت $\frac{b}{a}$ (عکس‌نسبت‌طولها) نوشته‌شده‌اند.

نقطهٔ C را مرکز فیزیکی A و B می‌نامیم.

این تعریف جمع نقاط فیزیکی شامل ۵ اصل است‌که ذیلا ذکر می‌گردد.

۱ـ اگر وزنهٔ ۱ در هر یك از دو انتهای PQ مطابق شکل ۲ آویزان شده باشد، خواهیم داشت:

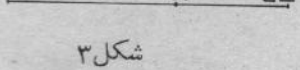


شکل۲

$۱P + ۱Q = ۲R$ و

R روی PQ طوری واقع‌است‌که داریم $\frac{PR}{RQ} = \frac{۱}{۱}$. یا به عبارت دیگر R وسط PQ است و به‌وزنهٔ ۲ مربوط می‌شود.

۲ـ اگر مطابق شکل ۳ وزنه‌های ۱ و ۲ به‌ترتیب در D و E دو انتهای DE آویزان شده باشند، خواهیم داشت

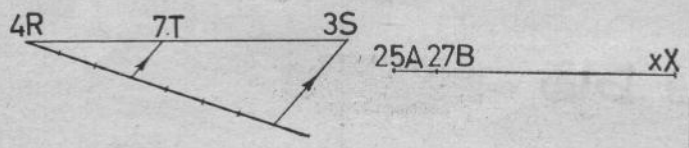


شکل۳

$۱D + ۲E = ۳F$ و F طوری روی DE واقع است که‌داریم $\frac{DF}{FE} = \frac{۲}{۱}$، یا F به فاصلهٔ $\frac{DE}{۳}$ از E واقع شده است.

فرض‌کنیدکه ما جای جمله‌ها را به‌صورت $۲E + ۱D$ عوض‌کنیم آیا نتیجه باز هم ۳F خواهد بود؟

۳ـ فرض‌کنید منظور ما بررسی نقطهٔ T از خط RS باشد بطوری‌که $\frac{RT}{TS} = \frac{۳}{۴}$ باشد (شکل ۴). بنابراین tT مجموع نقاط فیزیکی R و S خواهد بود هرگاه وزنه‌های ۴ و۳رابه‌ترتیب‌درRوSآویزان‌کنیم‌وهمچنین‌اگربه‌جای‌وزنه‌های مزبور به ترتیب وزنه‌های ۴۰ و ۳۰ را در R و S آویزان کنیم محل T برروی خط RS تغییرنخواهدکرد. در واقع اگر در نقاط R و S به‌ترتیب وزنه‌های ۴m و ۳m آویزان کنیم، که درآن m یك عدد صحیح مثبت است، محل نقطهٔ T را می‌توان مطابق شکل ۴ برروی RS معین‌کرد.



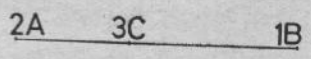
شکل۴ شکل۵

۴ـ فرض‌کنید $۲۵A + xX = ۲۷B$ و نقاط A و B معین باشند (شکل ۵) در این‌صورت می‌توانیم x و X رامعین کنیم. داریم:

$$\frac{AB}{BX} = \frac{x}{۲۵} \quad و \quad ۲۵ + x = ۲۷$$

از تساوی اول داریم $x = ۲$ و با قرار دادن در تساوی دوم داریم $\frac{AB}{BX} = \frac{۲}{۲۵}$ که با داشتن این رابطه می‌توان نقطهٔ X را تعیین‌کرد.

۵ـ فرض‌کنید سه نقطهٔ A و B و C روی یك خط



شکل۶

واقع باشند (شکل ۶) وبخواهیم $۲A + ۳C + ۱B$ را بدست آوریم. از آنجائی‌که جمع دو نقطهٔ فیزیکی را یاد گرفته‌ایم با جمع $(۲A + ۳C)$ شروع می‌کنیم و به مجموع آن ۱B را می‌افزائیم یا می‌توانیم $(۳C + ۱B)$ را با هم جمع‌کرده و ۲A رابا مجموع‌آن‌جمع‌کنیم. همچنین می‌توان $(۲A + ۳C)$ را با هم جمع‌کنیم و ۱B را به آن بیفزاییم. ولی آیا نتایج با هم برابرند؟

می‌توان خواه از راه ترسیم خواه از طریق استدلال نشان دادکه نتیجه در هر حال یکسان است.

چند اصل

در شرح جمع نقاط فیزیکی به چند خاصیت برخورد کردیم. اکنون این خواص‌را به عنوان اصل در زیر ذکر می‌کنیم و نیزحتی ممکن است‌که شما آنها را بوسیلهٔ استدلال ریاضی اثبات‌کنید.

اصل ۱ـ برای هر دو نقطهٔ فیزیکی aA و bB یك نقطهٔ فیزیکی واحد وجود دارد (خاصیت بسته بودن).

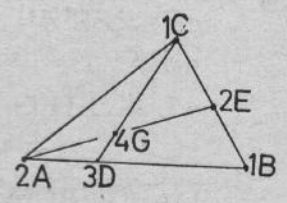
اصل ۲ـ برای هر دونقطهٔ فیزیکی aA و bB داریم $aA + bB = bB + aA$ (جابجا پذیری)

اصل ۳- برای هر سه نقطهٔ فیزیکی معین aA ، bB و cC داریم :

$$(aA+bB)+cC=aA+(bB+cC)$$

(شرکت پذیری)

در اصل سوم احتیاج به این نیست که سه نقطه روی یك خط واقع باشند . در این‌صورت ممکن است شما مدعی باشید که این خاصیت (شرکت پذیری) به‌هیچ وجه بدیهی نیست . در بارهٔ این موضوع ما هم با شما موافقیم . به هرصورت باید متوجه مفهوم اصل ۳ باشید. برای کمك به شما به‌تشریح آن بر اساس شکل ۷ و مفروضات زیر ، می‌پردازیم .



شکل۷

۱- $۲A+۱B=۳D$. که در آن D در روی AB طوری واقع است که:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{۱}{۲}$$

۲- $۳D+۱C=۴G$. محل نقطهٔ G را چگونه تعیین می‌کنید ؟

۳- بنابراین $(۲A+۱B)+۱C=۴G$.

۴- به‌طریق دیگر $۱B+۱C=۲E$. نقطهٔ E کجا واقع است ؟

۵- $۲A+۲E=۴H$. نقطهٔ H کجا واقع است؟

مفهوم اصل سوم دربارهٔ این مسئله چنین می‌شود که $۴G=۴H$ یا $G=H$. این نتیجه را به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد : اگر درمثلث ABC نقطهٔ D به فاصلهٔ $\frac{AB}{۳}$ از A و E وسط BC باشد و CD خط AE را در G قطع کند خواهیم داشت :

$$\frac{CG}{GD}=\frac{۳}{۱} \quad و \quad \frac{AG}{GE}=\frac{۱}{۱}$$

یك نتیجه مهم که می‌توان از اصل سوم بدست آورد این است که :

برای هرسه نقطهٔ فیزیکی معین aA ، bB و cC ،اگر $aA+bB=(a+b)D$ و $bB+cC=(b+c)E$ و $cC+aA=(c+a)F$ باشد، خطوط CD ، AE و BF یکدیگر را در نقطهٔ G قطع می‌کنند که این نقطه را مرکز فیزیکی نقاط A و B و C می‌خوانند .

از این نتیجه نیز می‌توان نتیجهٔ زیر را گرفت : اگر سنگینی در نقطهٔ A برابر a و در نقطهٔ E برابر $b+c$ باشد خواهیم داشت :

$$\frac{AG}{GE}=\frac{b+c}{a}$$

و اگر سنگینی در B برابر b و در F برابر $a+c$ باشد خواهیم داشت :

$$\frac{BG}{GF}=\frac{a+c}{b}$$

و به همین طریق :

$$\frac{GC}{GD}=\frac{a+b}{c}$$

یا به صورت دیگر :

$$\frac{AF}{GE}=\frac{a+b+c}{a}$$

$$\frac{BF}{GF}=\frac{a+b+c}{b}$$

$$\frac{CD}{GD}=\frac{a+b+c}{c}$$

اگر در حالت خاصی $a=b=c$ باشد ، نقاط D و E و F به‌ترتیب اوساط AB و BC و CA بوده و سه خط CD ، AE و BF درنقطهٔ G متقارب خواهند بود ، علاوه براین :

$$\frac{CG}{GD}=\frac{BG}{GF}=\frac{AG}{GE}=\frac{۲}{۱}$$

بنابراین ثابت کردیم که میانه‌های مثلث دریك نقطه متقاربند.

ازنقاط فیزیکی برای اثبات اینکه سه ارتفاع وسه‌نیمساز مثلث در یك نقطه متقاربند نیز می‌توان استفاده کرد . در اینجا منظور ما بدست آوردن عکس روابط بالا است. اگر سه نقطهٔ فیزیکی $۱A$ ، $۲B$ و $۳C$ سه‌رأس مثلث ABC باشند وداشته باشیم $۱A+۲B=۳D$ و $۲B+۳C=۵E$ و خطوط AE و CD یکدیگر را در G قطع کنند ، منظور تعین این نکته می‌باشد که آیا محل تلاقی BG و AC یعنی نقطهٔ F مرکز فیزیکی نقاط A و C می‌باشد یا نه ؟

فرض می‌کنیم $۱A+۳C=۴K$.پس اگر ثابت کنیم که $K=F$ مسئله حل شده‌خواهد بود.

طبق اصل سوم داریم :

$$(۱A+۲B)+۳C=۱A+(۲B+۳C)=۶G$$

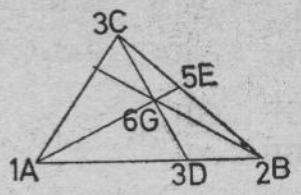
و نیز طبق اصل دوم

$$۱A+۲B=۲B+۱A$$

بنابراین :

$$(۲B+۱A)+۳C=۶G$$

و طبق اصل سوم :



شکل۸

$2B + (1A + 3C) = 6G$ یعنی $2B + 4K = 6G$

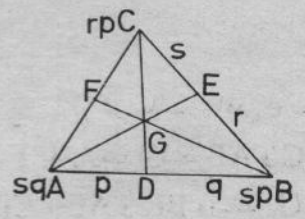
B و G و K برروی یك خط واقعند و نیز B و G و F هم برروی یك خط واقعند و همچنین دو نقطهٔ K و F در روی خط AC قرار دارند و چون دو خط یکدیگر را در بیش ازیك نقطه قطع نمی‌کنند پس K بر F منطبق است ، یعنی $K = F$

ازاین‌موضوع‌می‌توان برای‌اثبات **قضیهٔ‌سوا** استفاده‌کرد.

قضیهٔ سوا : در مثلث ABC اگر D و E و F به ترتیب‌برروی اضلاع AB و BC و AC واقع باشند وداشته باشیم :

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

ثابت‌کنیدکه‌سه خطAE و BF و CD متقاربند(شکل۹)



شکل۹

برای‌اثبات‌این قضیه از خواص نقاط فیزیکی استفاده می‌کنیم .فرض می‌کنیم $AD = p$ و $DB = q$ و $BE = r$ و $CE = s$ باشد .

نیروهای وارد بر A و B و C را به ترتیب sq و sp و rp می‌نامیم،پس داریم : $SqA + SpB = (Sq + Sq)D$

به‌همین ترتیب؛ $sqA + rpC = (sp + rp)E$.اگر AE و CD یکدیگر را در G قطع‌کنند نقطهٔ F برروی BG خواهد بود اگر و فقط اگر $sqA + rpC = (sq + rp)F$ باشد .

اما این‌امرمستلزم‌آن‌است‌که $\frac{CF}{FA} = \frac{sq}{rp}$ باشد . اکنون حاصل‌ضرب $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA}$ را درنظر می‌گیریم ، این‌حاصل‌ضرب برابر است با $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} \times \frac{sq}{rp}$ که برابر است با یك . پس قضیه درست است .

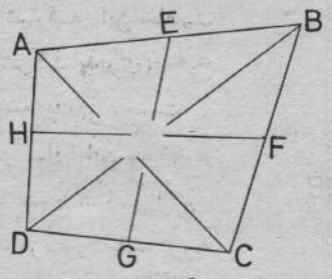
اگر G نقطهٔ تلاقی AE و BF و CD باشد ، به آسانی می‌توان کسرهای $\frac{AG}{GE}$ ، $\frac{BG}{GF}$ و $\frac{CG}{GD}$ را محاسبه‌کرد و نیز می‌توان کسرهای $\frac{GE}{AE}$ ، $\frac{GF}{BF}$ و $\frac{GD}{CD}$ را حساب‌نمود.

تمرین : ثابت‌کنید مجموع سه‌کسر آخر برابر یك می‌باشد یعنی :

$$\frac{GD}{CD} + \frac{GF}{BF} + \frac{GE}{AE} = 1$$

چهار ضلعی‌ها

فرض می‌کنیم ABCD یك چهار ضلعی محدب باشدو به رئوآن س وزنهٔ ۱ را آویزان‌کرده باشیم (شکل ۱۰). اگرE ، F،G،H،J،K، L و M به ترتیب اوساط $\overline{AB}$،$\overline{BC}$،$\overline{CD}$،$\overline{DA}$ $\overline{AC}$،$\overline{BD}$،$\overline{EG}$و$\overline{HF}$



شکل۱۰

باشند با بکار بردن توأم اصول ۲و۳ به راههای مختلفی‌که در زیر ذکر می‌شود می‌توان $1A + 1B + 1C + 1D$ را محاسبه‌کرد ؛

۱) $(1A + 1B) + (1C + 1D)$

۲) $(1A + 1D) + (1B + 1C)$

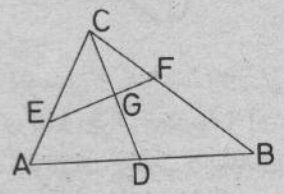
۳) $(1A + 1C) + (1B + 1D)$

با بکار بردن رابطهٔ (۱) به این نتیجه می‌رسیم‌که : $2E + 2G = 4L$ و باید از روابط (۲) و (۳) نیز به این نتیجه برسیم. بنابراین از رابطهٔ (۲) $2H + 2F = 4L$ ، و از رابطهٔ (۳) $2J + 2K = 4L$. پس خطوطی‌که اوساط AB و CD اوساط AD و BC ، اوساط AC و BD را به یکدیگر وصل می‌کنند منصف‌یکدیگرند یعنی چهارضلعیهای HEFG ، HJFK و GJEK متوازی‌الاضلاع می‌باشند. البته درصورتی‌که سه نقطه از رؤس متوازی‌الاضلاعها بر یك خط قرارنگیرند. در صورت تمایل،نمودارچهارضلعیABCD را بطور کامل رسم‌کنید ودرستی نتایج حاصل را تحقیق‌کنید .

تجزیهٔ نقاط فیزیکی

اگر ما در بارهٔ تجزیهٔ نقطهٔ فیزیکی مانند 5A به دو نقطهٔ فیزیکی مثلا 2A و 3A ، در همان نقطه ، فکر می‌کنیم، علت این است‌که از این موضوع می‌توان در حل گروهی از مسائل استفاده‌کرد . تجزیهٔ نقاط فیزیکی ، به نتایج صحیح می‌رسدکه با اصولی‌که قبلا ثابت شده مغایرتی ندارد . پس‌به سهولت می‌توان نوشت :

اصل چهارم - برای هرنقطهٔ A و اعداد حقیقی و صحیح a و b داریم: $(a+b)A = aA + bA$. به یك‌مسئله که شامل این اصل می‌شود توجه‌کنید. در مثلث ABC خط CD میانهٔ نظیر رأس C می‌باشد و E برروی AC چنان‌واقع است که $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{x}$ و F برروی BC به‌نسبت $\frac{CF}{FB} = \frac{1}{y}$ قرار دارد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرارباشد تا EF و CD منصف یکدیگر باشند.



شکل۱۱

برای حل وزنهٔ ۱ را به A و B آویزان می‌کنیم بنابراین $1A + 1B = 2D$ بعلاوه وزنهٔ $(x+y)$ را در نقطهٔ C آویزان می‌کنیم ولی نقطهٔ فیزیکی $(x+y)C$ را به عنوان دو نقطهٔ فیزیکی xC و yC تلقی می‌کنیم. پس: $1A + xC = (1+x)E$ و $1B + yC = (1+y)F$ حال می‌توانیم $1A + 1B + (x+y)C$ را یا به صورت: $(1A + 1B) + (x+y)C$ یا به صورت: $(1A + xC) + (1B + yC)$ تلقی‌کنیم‌که در هر دوصورت جواب $(2+x+y)G$ می‌باشد (G محل تلاقی CD و EF است). اما $2D + (x+y)C = (2+x+y)G$ یا: $\frac{GD}{GC} = \frac{x+y}{2}$. پس برای‌اینکه $GC = GD$ باشد باید $x + y = 2$ باشد و نیز:

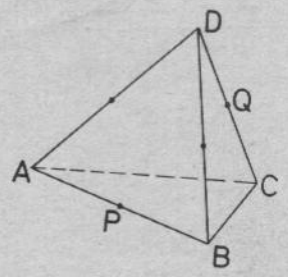
$$(1+x)E + (1+y)F = (2+x+y)G$$

و یا: $\frac{EG}{GF} = \frac{1+y}{1+x}$. پس برای اینکه G وسط EF باشد باید داشته باشیم $1 + y = 1 + x$ بنابراین شرط اینکه EF و CD منصف یکدیگر باشند برقرار بودن دو تساوی بالااست.

توجه‌کنیدکه تعمیم این مسئله برای یافتن روابطی بین x و y به منظور اینکه $\frac{GD}{GC} = \frac{m}{n}$ باشدآسان است (m و n اعداد حقیقی و مثبت هستند) و نیز می‌توان x و y را طوری تعیین کرد که $\frac{EG}{GF} = \frac{p}{q}$ باشد (p و q اعداد حقیقی و مثبت می‌باشند).

نقاط فیزیکی در فضا

در آخرین مثال، چهار نقطهٔ فیزیکی راچهاررأس یك چهار وجهی فرض می‌کنیم (شکل ۱۲) وزنهٔ ۱ را به هررأس چهار وجهی آویزان



شکل۱۲

می‌کنیم. حال می‌توانیم بابکار بردن خواص جابجا پذیری، شرکت پذیری وجمع نقاط فیزیکی، $1A + 1B + 1C + 1D$ را محاسبه‌کنیم. و نیز باید بدانیم‌که تمام راهها به یك‌جواب بایدبرسند. برای‌مثال‌درپیداکردن $(1A + 1B + 1C) + 1D$ ما می‌دانیم‌که $(1A + 1B + 1C) = 3G$ (G محل تلاقی میانه‌های مثلث می‌باشد) سپس $3G + 1D = 4H$ (H روی CD طوری‌است‌که $\frac{GH}{HD} = \frac{1}{3}$) و نیز:

$1A + (1B + 1C + 1D)$ و $(1A + 1B + 1D) + 1C$ و $(1A + 1C + 1D) + 1B$

همگی به جواب $4H$ می‌رسند. از اینرو خطوطی‌که هررأس را به محل تلاقی میانه‌های وجه مقابل وصل می‌کنند یکدیگر را در یك نقطه به‌نسبت $\frac{3}{1}$ قطع می‌کنند.

همچنین $(1A + 1B) + (1C + 1D) = 4H$. پس اگر P وسط AB و Q وسط CD باشد خواهیم داشت $2P + 2Q = 4H$ یعنی PQ هم از H می‌گذردو بعلاوه H وسط PQ می‌باشد. و با مطالعه روی

$(1A + 1C) + (1B + 1D)$ و $(1A + 1D) + (1B + 1C)$

به این نتیجه می‌رسیم، خطوطی‌که اوساط یالهای متقابل چهار وجهی را به هم وصل می‌کنند از یك نقطه‌که در وسط هریك از آنها واقع است می‌گذرند.

تمرین

با استفاده از نقاط فیزیکی ثابت‌کنیدکه ۳ نیمسازداخلی مثلث در یك نقطه یکدیگر راتلاقی می‌کنند (راهنمائی: به‌هر رأس وزنه‌ای به سنگینی طول ضلع مقابل آویزان‌کنید.)

مبحثی از شیمی

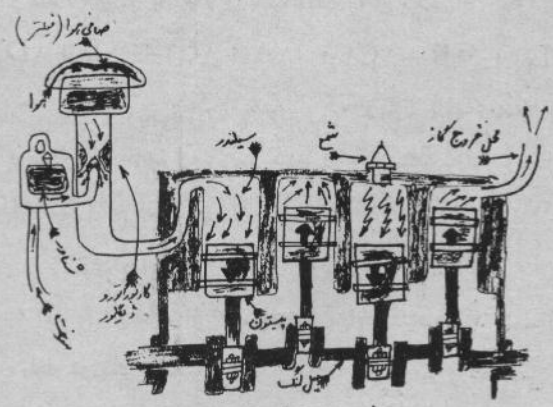
بنزین و عدد اکتانی

بنزین به عنوان سوخت در موتورهای درونسوز مانند اتومبیل و هواپیما بکار می‌رود. بنزین را از نفت بدست می‌آورند . اما چگونه‌آن را بعمل می‌آورند و چرا مخصوصاً آن را به عنوان سوخت انتخاب کرده‌اند ، ضد انفجارها کدامند ، کراکینگ و رفرمینگ چیست و بسیاری مطالب دیگر در این زمینه را در این مقاله که از کتاب «سیری درجهان شیمی آلی» تألیف اشپائوسوس ترجمه‌شده است ، می‌خوانید .

باقر مظفرزاده

شاید این تصور پیش‌آید که در زمان حاضر ارزش ندارد که بتفصیل از بنزین سخن به‌میان‌آید . هرکودکی می‌داند که مخزن اتومبیل را از بنزین پرمی‌کنند تا موتورآن رابه‌حرکت درآورد یا به‌عبارت‌ساده‌تر ، ماشین به‌راه بیفتد . با وجوداین گاهی مردم در بارهٔ ماه مصنوعی یاکارخانهٔ برق اتمی خیلی بیش از این مادهٔ ساده و عادی یعنی بنزین اطلاع دارند. البته هر راننده‌ای می‌داند که قیمت بنزین چند است و چگونه به‌کار می‌رود ، اما دانستنیهای راننده به‌همین جا ختم می‌شود .

بهتر است داستان خود را از اطلاعات کلی ولی خیلی لازم‌آغازکنیم . بنزین بیشتر به‌عنوان سوخت در موتورهای درونسوز به‌کار می‌رود . سوخت مایع درکاربوراتور با هوا مخلوط‌می‌شود، سپس‌درحالی که به‌صورت مخلوطی‌بآسانی قابل‌اشتعال در می‌آید ، پاشیده می‌شود .



طرح موتور درونسوز

مخلوط به داخل سیلندر مکیده می‌شود و براثر حرکت پیستون تا $\frac{1}{6}$ یا $\frac{1}{8}$ حجم اولیه‌فشرده می‌شود و سپس براثرجرقهٔ الکتریکی شمع شعله‌ور می‌شود . مخلوط می‌سوزد . براثر سوختن و افزایش‌ناگهانی درجهٔ‌جرارت (تا°۲۲۰۰-۱۵۰۰) گازها بسرعت‌منبسط می‌شوندو به‌دیواره‌های سیلندروپیستون نیرویی معادل با ۴۰-۳۰ اتمسفر ، فشار می‌آورند . پیستون متحرك پایین می‌رود و انرژی بوسیلهٔ میل اتصال ، میل‌لنك، دستگاههای ناقل حرکت ودیفرنسیل به چرخها منتقل‌می‌شود. چرخها می‌گردند و ماشین را به‌جلو می‌رانند .

هر ماده نمی‌تواند به‌عنوان سوخت موتور بکار رود . برای این منظورشرایطی لازم است‌که باختصار شرح می‌دهیم.

قبل از هر چیز ، سوخت باید برای حمل و نقل ، نگهداری و اندازه‌گیری مناسب‌باشد و در این مورد فقط‌مایع می‌تواند بهترین جوابگو باشد . با اینکه بکار بردن پروپان به‌عنوان سوخت،موتور را ازکاربوراتور بی‌نیاز می‌کند ، اما پروپان گاز است و برای این کار مناسب نیست .

این مایع طبیعتاً باید بسوزد و تا حد امکان نیز انرژی زیادتر تولید شود ، یعنی مصرف سوخت با مسافتی که‌اتومبیل طی می‌کند ، مناسب و با صرفه باشد . بعلاوه مواد حاصل از سوختن باید در درجهٔ حرارتی که در سیلندر ایجاد می‌شود ، گازی شکل باشند و موجب خرابی اجزای فلزی سیلندر هم

نشوند . مایعاتی راکه به مقدار زیاد ترکیبات گوگردی دارند نمی‌توان به عنوان سوخت بکار برد زیرا بر اثر سوختن آنها بی اکسید گوگرد تشکیل می‌شودکه دیواره‌های سیلندر وسطح پیستون را بشدت فاسد می‌کند .

درجهٔ حرارت جوش سوخت هم باید واجد شرایطی خاص باشد . نقطهٔ جوش نباید زیاده از حد بالا باشد تا مایع در هر موقع سال ، حتی در زمستان هم بطور یکسان بوسیلهٔ کاربوراتور پخش شود . اما نقطهٔ جوش نباید پایین‌تر ازحدی معین باشد . سوختی‌که درحدود ۲۵ درجه می‌جوشد ، برای شروع به سوختن به‌خوبی‌آمادگی‌دارد اما گازهای تشکیل‌شده بآسانی منفجر می‌شود ، طوری‌که سیگارکشیدن در ماشین خطرناك خواهد شد و بعلاوه انسان درآن محیط نمی‌تواند زنده بماند . از طرف دیگر بر اثر تبخیر بیش ازاندازهٔ سوخت در تابستان ، مقداری زیاد ازآن بیهوده تلف‌می‌شود وبالاخره سوخت بسیار فرار در دستگاه مانع گازی ایجاد می‌کندکه از جریان یکنواخت سوخت از مخزن به‌کاربوراتور جلوگیری می‌کند .

خلاصه هرمایع سوختنی را نمی‌توان به عنوان سوخت در موتور بکار برد . در عین حال عده‌ای زیاد از مایعات را می‌توان نام بردکه همهٔ این خواص را دارا باشند . ولی اگر فقط بنزین را در موتور بکار می‌برند به این علت است‌که آن را می‌توان آسانتر و به مقدار زیاد بدست آورد و در نتیجه خیلی ارزان است. مایعی‌که هرلیترآن حدود پانصدریال ارزش دارد ، حتی اگرواجد تمام شرایط باشد، برای سوخت‌مناسب نیست . چنین سوختی را می‌توان فقط برای مقاصد خاص بکار برد اما آن را به هیچ وجه در مراکز بنزین گیری‌به‌رانندگان اتومبیل عرضه نمی‌کنند .

چیزی‌که ما آن را بنزین می‌نامیم ، از نظر شیمیایی ماده‌ای یکدست نیست . در واقع بنزین ازچند ده ئیدروکربن مایع‌که در مولکول خود از ۵ تا ۸ اتم‌کربن دارند ، تشکیل یافته است . صحبت بر سر پنتان ، هگزان ، هپتان و اکتان است . مقدار پنتان در بنزین خیلی ناچیز است و بیشتر از ۵ درصد نیست . از آنجاکه بنزین مخلوط است بنابراین نقطهٔ جوش معین ندارد . جوش درفاصلهٔ ۴۰ تا ۲۰۰ درجه صورت می‌گیرد . مایعاتی‌که در درجهٔ حرارت پایین‌تر می‌جوشند در لوله‌هایی‌که سوخت از آنها می‌گذرد ، مانع گازی نامطلوب ایجاد می‌کنند . مایعات بانقطهٔ جوش بالاتر از ۲۰۰ درجه‌هم نباید به مقدار زیاد در سوخت موجود باشند . در غیر این صورت ، مایعات در سیلندر تماماً نمی‌سوزند و بعلاوه قشر روغنی محافظ سطح دیواره‌های سیلندر را می‌شویند .

مخلوط مناسب ئیدروکربنها یعنی بنزین را می‌توان از تقطیر مستقیم نفت بدست آورد . این بنزین را نمی‌توان در موتورهای درونسوز بکار برد . هر چندکه نقطهٔ جوش آن واجد تمام شرایط لازم است ، اما بدون شك هر راننده‌که این بنزین را در موتور اتومبیل خود بکارمی‌برد ،سخنان ملامت‌بار نثار آن خواهدکرد . عدد اکتابی این بنزین بین ۴۰ تا ۶۵ است. این عداداکتانی برای‌موتورهای‌امروزی اندك است و براثر سوختن این سوخت در سیلندر ضربه‌های واضح به گوش می‌رسد .

خواص ضد انفجاری و عدد اکتانی دو مفهومی هستند که به طرزی قاطع ارزش سوخت را معین می‌کنند . شرح مفصلتر در این باره نه تنها برای رانندگان بلکه برای‌همگان‌جالب است .

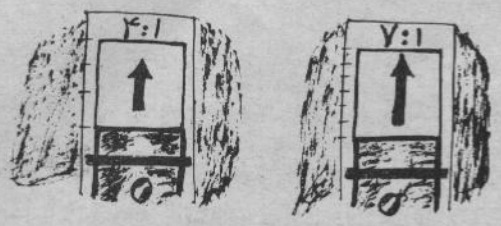
همانطورکه‌می‌دانیم مخلوط بنزین وهوا در بازگشت‌پیستون‌فشرده می‌شود . هنگامی‌که پیستون به‌بالاترین موقعیت خود می‌رسد، در شمع جرقه تولید می‌شود و در نتیجه مخلوط شعله‌ورمی‌شود . فرایند سوختن‌بسادگی جریان پیدا نمی‌کند . ابتداخاطر نشان‌می‌کنیم که عمل سوختن آناً صورت نمی‌گیرد بلکه برای این‌کار مدت زمان معین (هرچند ناچیز) یعنی $\frac{1}{300}$ ثانیه لازم‌است . در طول این مدت ، شعله ازشمع تانقطهٔ مقابل سیلندر انتشار می‌یابد . در همان موقع‌که جبههٔ شعله درمخلوط به پیش می‌رود ، فشار و درجهٔ حرارت در قسمت سوخته شده بشدت بالا می‌رود . فشار وحرارت در مخلوط از شعله تندتر

منتشر می‌شود . دراین عمل احتمالا ئیدروکربنهای باقی‌مانده بطور ناقص اکسید می‌شوند ـ فرایندی‌که در جریان آن‌درجهٔ حرارت شعله ور شدن بنزین کاهش می‌یابد .

براثر فشارکافی در سیلندر ، سوختن باقی‌ماندهٔ مخلوط پیش ازموقع صورت می گیرد و مخلوط آناً با انفجار می‌سوزد. این سوختن‌که با افزایش شدید فشار همراه است ، موجب ضربه‌های‌کوتاه و شدید در قسمتهای جداگانه سیلندر می‌شود. بنظر می‌رسدکه‌کسی با چکش به دیواره‌های اطاقك سوخت می‌کوبد و صداهایی به‌گوش می‌رسد . جزئیات فرایندی‌که ضربه‌ها به سبب آن پیدا می‌شوند ، هنوز تحقیق و بررسی نشده است . معهذا این صداها نشانه‌های جدی است‌که فرایند سوختن بطورنامساعد جریان دارد، به سیلندر و به‌دستگاههای ناقل حرکت‌بار زیادتر از حد لازم تحمیل می‌شود . پیستون انرژی آزاد شده بیش از اندازه سریع را تحمل نمی‌کند،قدرت موتور به مقدار قابل توجه‌کاهش می‌یابد و بالاخره انرژی سوختن بجای به حرکت درآوردن پیستون ، دیواره‌های‌سیلندر را می‌لرزاند . درجهٔ حرارت بیش از اندازه نیز به سیلندر و پیستون آسیب‌می‌رساند . بعلاوه مصرف روغن بالا می‌رود و روغن‌اغلب درریگ‌پیستون سفت می‌شود . تمام این پدیده‌ها نا مساعد است .

رهایی از این وضع اولا با ساختن سیلندر درونسوز مناسب‌امکان پذیراست مثلا شمع را می‌توان در داغترین‌محل، نزدیك سوپاپ خروج گاز قرارداد. ثانیاً خاصیت ضد انفجاری سوخت‌را بالابرد. هرچه‌خاصیت‌ضدانفجاری‌بیشتر باشد میزان تراکم‌را می‌توان بالاتر برد . بنابراین‌موتوردرحالی‌که همان مقدار سوخت را مصرف می‌کند ، قدرت‌بیشترکسب می‌کند .

درسال ۱۹۱۰ میزان تراکم در موتور اتومبیلهای‌باری عموماً ازنسبت۱:۴ تجاوزنمی‌کرد یعنی خاصیت ضد انفجاری بنزین آن زمان اندك‌بود، به‌همین دلیل ظرفیت سیلندرکمتراز ۲۰۰۰cm³ نمی‌توانست باشد و طبق معمول مصرف بنزین نیز زیاد بود .



موتوراتومبیلهای امروزی بامیزان تراکم ۱:۷ وبیشتر کار می‌کند و به‌همین جهت با وجود حجم‌کمترسیلندر ومصرف سوخت‌کمتر قدرت آنها به مراتب بیشتر است . در عوض این موتورها به سوختهایی نیاز دارندکه از نظر خاصیت ضد انفجاری بشدت ازبنزین حاصل در تقطیرمستقیم نفت‌متمایزند.

برای تعیین خاصیت ضد انفجاری سوخت البته ممکن نیست شامه را ملاك عمل قرار داد . این خاصیت به‌طرق گوناگون در موتورهای مختلف تظاهر می‌کند. شکل فضای سوختن ، درجهٔ حرارت اشتعال ، میزان تراکم و سایرعوامل مانندنحوهٔ رانندگی راننده می‌تواند تعیین‌کنندهٔ میزان تق تق در هنگام مصرف سوخت مورد نظر باشد . پس لازم است شرایطی معین بوجود آوردکه درآن شرایط ارزشیابی سوخت به نحوی مطمئن‌تر عملی گردد . برای این کاراولا باید دستگاه دقیق اندازه‌گیری در اختیار داشت . مقیاس اندازه‌گیری در این مورد عدد اکتانی است‌که مبین خاصیت‌ضد انفجاری‌سوخت است . ثالثاً شرایطی معین برای آزمایش لازم است‌که در آن شرایط نتایجی روشن‌وقابل تجدید نظر بدست آید . برای این منظور موتورهای آزمایشی ساخته‌اند که سوخت درآنها در شرایطی کاملا دقیق و مشخص می‌سوزد . موتور آزمایشی دارای نوعی سیلندر با اندازهٔ مشخص است . بعلاوه میزان تراکم در آن را می‌توان باکوتاه کردن یادراز کردن پیستون تغییرداد .شروع تق‌تق در سیلندر را باگوش معین نمی‌کنند بلکه بوسیلهٔ دستگاه اندازه‌گیری قابل اطمینان ثبت می‌کنند بنزینی را که می‌خواهند آزمایش کنند ، با سوختی که‌خاصیت ضد انفجاری آن از قبل معلوم شده است ، مقایسه می‌کنند.

خاصیت ضد انفجاری را با عدد اکتانی بیان می‌کنند اما چون سخن در بارهٔ کمیت مطلق نیست، بایدمبنایی برای تعیین‌آن پیداکرد. در بسیاری موارد دیگر نیز به همین طریق عمل‌کرده‌اند . مثلا برای تعیین درجهٔ حرارت .

بین ئیدروکربنهای معروف هپتان نرمال را انتخاب کرده‌اند که تمایلی آشکار به انفجار دارد و عدد اکتانی آن‌را بطور دلخواه مساوی باصفر گرفته‌اند . همچنین بدلخواه ایزواکتان یا دقیق‌تر ۲،۲،۴- تری‌میتل‌نپتان به‌فرمول :

$$CH_3 - C(CH_3)_2 - CH_2 - CH(CH_3)_2$$

را انتخاب‌کرده‌اند وخاصیت ضد انفجاری یعنی عدد اکتانی آن را بالاتر از همه یعنی ۱۰۰ گرفته‌اند . با مخلوط‌کردن این‌دو ئیدروکربن ، اعداد اکتانی میانی بدست‌آورده‌اند . خاصیت ضد

(دنبالهٔ درصفحه۲۰)

حساب فوتبالی

ترجمهٔ: مقصود عین اللهی

ما تصور می‌کنیم وقتی اعداد واعمال مربوط به‌آن ها را فرا گرفتیم پیروی کورکورانه از اصول و قوانین آن اجباری است .

مثلاحاصل $\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۳}$ اگرآسمان به زمین بیاید یا زمین به آسمان برود باید برابر با $\frac{۱۷}{۱۲}$ باشد. اماما می‌توانیم روابط دیگری را به دلخواه خود تعریف کنیم ، درحقیقت حسابهای مختلفی را بوجود آوریم .

موردی را مثال می‌زنیم که محتاج به اطلاعات عمیق ریاضی نیست وهزاران نفر از مردم با آن آشنایی دارند. بنظر می‌رسد که تماشاچیان فوتبال در دانستن نسبت تعدادشوتهای آزاد به تعداد گلهای بثمررسیده راغب باشند. فرض کنیم یك بازیکن در یك دور ۳ شوت آزاد و در دوربعد ۴ شوت آزاد داشته باشد . دردودور جمعاً چند شوت آزاد خواهدداشت ؟ بدون تأمل وبدون آنکه اشکالی درکار باشد جواب خواهید داد : ۷ شوت. حال فرض کنیم که این بازیکن دردور اول۲ گل و در دوردوم۳ گل بثمررسانده باشد و بخواهیم که‌تعداد گلهای بثمر رساندهٔ وی را دردو دور تعیین کنیم . خیلی‌ساده است وجواب ۵ می‌باشد .

اما آنچه که بدان راغب هستیم نسبت تعداد گلهای بثمر رسیده به‌تعداد شوتهای آزاد است . این‌نسبت‌دردوراول $\frac{۲}{۳}$ودر دوردوم $\frac{۳}{۴}$ می باشد . این‌نسبت در دودورروبهم‌چقدر است ؟

در اینجا اگر دو نسبت را طبق قاعده جمع کسرها باهم جمع کنیم خواهیم‌داشت:

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}=\frac{۱۷}{۱۲}$$

اما این جواب بی معنی است زیرا چطور ممکن است که شخصی۱۲ شوت بکند و از آن ۱۷ گل بزند !؟دراینجا قاعدهٔ معمولی جمع کسرها جواب مطلوب رابدست نمی‌دهد.

برای تعیین جواب مطلوب‌چه قاعده‌ای را باید بکار ببریم . می‌دانیم که‌بازیکن مزبور دردودور رویهم۷ شوت‌آزاد داشته که از آن ۵ گل را بثمر رسانده است ، یعنی نسبت مطلوب برابر است با $\frac{۵}{۷}$ و این نسبت برابر است با $\frac{۲+۳}{۳+۴}$.

ملاحظه می‌کنیم که برای پیداکردن جواب باید صورتهای‌دو کسر را با هم ومخرجهای آنها را نیز باهم جمع کنیم .یعنی باید چنین بنویسیم :

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۷}$$

این روش جمع کسرها در موارد دیگری نیز مفیداست، شخصی که بنگاه معاملات ملکی دارد ، دریك روز ۵ ملك‌را به مشتری ارائه داده که ازبین آنها معاملهٔ ۳ملك سرگرفته است . روزدیگر در ۷ ملکی که نشان‌داده‌معاملهٔ ۴ عددآنها انجام گرفته است .

این شخص در دو روز رویهم ۱۲ ملك را نشان داده که برای ۷ عدد آنها معامله انجام گرفته است. به‌این‌ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{۴}{۷}+\frac{۳}{۵}=\frac{۷}{۱۲}$$

یك مثال متداول دیگر : اتومبیلی‌مسافت ۵۰ کیلومتر را در ۲ ساعت و مسافت ۱۰۰ کیلومتر دیگر را در ۳ ساعت طی کرده است . سرعت متوسط آن‌چقدر بوده است ؟ ممکن است بگوئیم‌که ۱۵۰کیلو متر را در۵ساعت طی‌کرده است‌پس سرعت متوسط آن ۳۰کیلومتر درساعت بوده است . اما می توانیم سرعتهای متوسط آن را برای هردفعه حساب کنیم و حاصل‌جمع آنهارا ،منتهی بنابه‌قانونی که دربالا وضع کرده‌ایم، تعیین کنیم ؛ سرعت اتومبیل در دفعهٔ اول $\frac{۵۰}{۲}$ ودردفعهٔ‌دوم $\frac{۱۰۰}{۳}$ کیلومتر درساعت بوده است. بنابراین :

$$\frac{۵۰}{۲}+\frac{۱۰۰}{۳}=\frac{۱۵۰}{۵}=۳۰$$

در چند مثال بالا یك حساب نوین را بکار بـردیم . در مورد قاعدهٔ جمع این حساب بطورکلی داریم :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

می توانیم از روی‌قاعده‌ای که برای جمع‌وضع کرده‌ایم تفریـق و اعمال دیگر را نیز تعریف کنیم . مثلا در مورد تفریق :

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$$

ممکن است برای بعضی از این عملیات بویژه وقتی که اعداد منفی را دخالت دهیم در جهان فیزیکی مثالی نـداشته باشیم ، اما از لحاظ ریاضی هیچ اشکالی درپیش نخواهدبود.

این عملیاتی که تعریف می‌کنیم دارای‌خواصی‌می‌باشند که این خواص ممکن است با خواص عملیات متداول همسان باشد یا اینکه در مواردی غیر از آن‌باشد . خاصیت جابجائی را در نظر می گیریم، ملاحظه می کنیم که‌این خاصیت‌درمورد قانون جمع ما صادق است :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

زیرا داریم :

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c+a}{d+b}$$

خاصیت شرکت پذیری‌نیزصادق است

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$$

خاصیت پخشی عمل ضرب معمولی نسبت به‌جمع بالا:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf}=\frac{ac+ae}{bd+bf}$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c+e}{d+f}\right)=\frac{ac+ae}{bd+bf}$$

از جمله تفاوتهایی که ملاحظه می‌کنیم یکی این است که در مورد کسرهامثلا داریم $\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$ اما مشاهده می‌کنیم که:

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۵}=\frac{۵}{۸} \text{ و } \frac{۴}{۶}+\frac{۳}{۵}=\frac{۷}{۱۱}$$

$$\frac{۵}{۸}\neq\frac{۷}{۱۱}$$

در حساب معمولی کسرهای $\frac{۵}{۱}$ و $\frac{۷}{۱}$ درست‌مانندعدد-های صحیح ۵و۷ عمل می‌کنند یعنی داریم :

$$\frac{۵}{۱}+\frac{۷}{۱}=۵+۷=۱۲$$

در صورتی که طبق قانون جمع خودداریم :

$$\frac{۵}{۱}+\frac{۷}{۱}=\frac{۱۲}{۲}=۶\neq۵+۷$$

از آنچه گذشت معلوم می شود که ما می‌توانیم‌روابط و عملیات مختلفی‌را تعریف کنیم که‌باآنچه در حساب‌معمولی مرسوم است متفاوت باشد .درحقیقت حسابهای مختلفـی در ریاضیات وجود دارد و ریاضیدانانی که آنها را می آفرینندبه خاطر ارضای هوسهای خود نیست ؛هرحسابی به منظورنشان دادن یك‌نوع پدیده‌های‌طبیعی طرح ریزی می‌شود وتعریف-های مربوط به آن متناسب با این نوع‌پدیده‌هاانجام‌می گیرد. مثلا حسابی که ما وضع کردیم و آنرا حساب فوتبالی‌نامیدیم درچند مورد قابل اعمال بود.باید توجه داشت که‌همین‌حساب فوتبالی دارای مفهومی عمیقتر ووسیعتر می‌باشد.

امروزه هرقانونی راجع به اعدادکه وضع می‌شودشامل کلیهٔ خواص «جابجایی»، شرکت‌پذیری و پخشی مـی باشد و بعد آن‌را برای اعداد نسبی ، اعداد منطق و اعداد مختـلط تعمیم می‌دهند .

فعلا احساس می‌شود که انسان با اعداد آشناوبه‌آنها نزدیك شده‌است و این‌امرمنطقی‌بنظر می‌رسد ،ولی‌روح‌واقعی و هدف ریاضیات چطور؟

انواع اعدادی که تعریف می‌کنیم و روابط و خواصی که برای آنها وضع می‌کنیم تنها از راه استدلالها و استنتاج-های ریاضی قابل تعیین نیستند ، بلکه می‌توان‌آنهارابه‌منظور موارد استعمالشان در مـوقعیتهای فیزیکـی تعریف کـرد . نکات منطقی استدلالهـای ریاضی کامـلا تابع مـوارد استفادهٔ فیزیکی آنهامی‌باشد .

محاسبات عددی و خطاها

از کتاب : Les Mathématiques Utiles

ترجمهٔ : داوید ریحان

I - اعداد

ارجحیت عددنویسی دهگانی (= به‌پایهٔ ده) ، مشهور به‌هندی - عربی ، مسلم است، بدون این حساب و همهٔ زحماتی که پیشینیان دربارهٔ آن متحمل شده‌اند، همهٔ صناعت یك مهندس تقریباً غیرممکن می‌نمود . بااستفادهٔ ازاین روش می‌توان هرعدد بسیاربزرك را بااستفادهٔ تعدادکمی ازعلامات وکلمات نوشت یا خواند . به‌کمك قواعد ساده‌ای مربوط به‌ارقام (ارثماطیق = Algorithme) عملیات انجام می گیرند .

پیوستگی اعداد اعشاری - دستگاه دهگانی دارای مزیت دیگری است: به‌کمك ممیز ،که درحدود قرن پانزدهم ابداع شد، می‌توان باهمان ارقام اعداد بسیار کوچك را نیز نشان داد. این گسترش عدد نویسی موجب می شود که نامساویهای بسیار جزئی‌را تشخیص دهیم،که این عمل بازهم بااستفادهٔ اعداد صحیح انجام‌می گیرد . روش مزبور تنهاوسیلهٔ عملی‌مقایسهٔ کسرها و مخصوصاً اعداد اصم می‌باشد (کدامیك از دو عدد $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ و $\sqrt{13}-\sqrt{2}$ بزرگتر است ؟) . بطورخلاصه ، ممیز جای پای وسیعی‌را درزمینهٔ پیوستگی باز کرده است . فرزندان ما مقادیر $\sqrt{2}$ و π را به‌کمك‌ممیز بدون واهمه به‌بازی‌می گیرنددرصورتی که‌بزرگان نوابغ‌زمانهای‌قدیم در بکار بردن این‌مقادیر درتحیر بودند . بدون اغراق‌می‌توان عدد اعشاری‌را به‌عنوان‌یك دوران از اندیشهٔ ریاضی نام برد.

مقادیر اعشاری - مورد استعمال مقادیر اعشاری به‌اندازه‌ای طبیعی است که‌از اینکه زودتر به‌فکرآن نبوده‌اند درشگفت می‌مانیم . به‌کمك واحد های دهگانی،ارقام اعشاری مفهوم محسوسی می‌یابندکه درعمل به‌صورت سادهٔ تغییرواحد بیان می‌شود . این موضوع کاملا مشهود است ، اما برای آنکه‌باتمام آن مجموعه‌ای کلا همگن تشکیل دهیم ، بازهم ناچاریم بین آنها واحدهای مختلف فیزیکی را دخالت دهیم . به‌کمك یك‌چنین انتخابی بسیاری‌از فرمولهای مربوط به‌تبدیل مقادیر به یکدیگر (طول به‌سطح یابه حجم ، جرم و سرعت به انرژی جنبشی ، و غیره) شامل ضرایب بسیار ساده‌ای می‌شوند (واحد برای حجم متوازی السطوح ، $\frac{1}{3}$ برای حجم هرم) . در این‌مورد لازم می‌نمودکه دربارهٔ مسئله واحدهای الکتریکی بحث می‌کردیم که درآنها دوجنبه‌ای بودن نقطهٔ‌نظر (الکتریسیته ومغناطیس)یك‌برقراری کامل‌راغیر ممکن می‌سازد، اما این مسئله به‌فیزیك محض مربوط می‌شود وازموضوع‌مقالهٔ ما خارج است .

توضیح : طبق قوانین بین‌المللی برای‌هرواحد نشانه‌ای انتخاب شده است ، این نشانه‌ها بعداز هراندازه واقع می‌شود ونوشتن آنها دربین ارقام غلط است مثلا ۴۵ g / ۳۳ درست است اما ۴۵/ ، g ۳۳غلط می‌باشد.

II - خطا در محاسباتِ محض

بدنیست که قبلا محاسبه را دقیقاً تعریف کنیم ، بدست آوردن مقداری تازه یایك نتیجه از روی مقادیر عددی ومعلوم که از راه عملیات اساسی موسوم به«چهار عمل اصلی» انجام می گیرد ،به‌این‌اعمال می‌توانیم جذرگیری،محاسبات‌لگاریتمی مربوط‌به‌توانهای‌کسری‌را اضافه‌کنیم. این معلومات ، که‌فعلا آنهارادقیق‌درنظرمی گیریم،درفیزیك‌وبطورکلی‌درموارد‌مختلف استعمال،به‌یك‌وضع نیستند ودراین‌باره بعداً صحبت‌خواهیم‌کرد.

چرا خطا وجود دارد ؟ برای اینکه در مقایسهٔ اعداد بایکدیگر ناچاریم رادیکالها واعداد اصم را با مقادیر اعشاری تقریبی جانشین‌کنیم، درمورد کسرها هم این جانشینی قابل

استفاده‌است زیرابطور قابل ملاحظه‌ای‌عملیات را تقلیل‌می‌دهد. حتی وقتی هم‌که‌عمل جانشینی مزبور دقیقاً میسر باشد (مثلا کسرهای قابل تبدیل‌به‌اعشاری) بازهم ناچاریم‌به‌خاطر احتراز از طولانی بودن اعداد، که عملا هم مفید فایده نیست ، از بعضی ارقام صرف نظر کنیم.

وقتی حاصل یك‌عمل به درستی معلوم نیست بایدبتوانیم که برای خطای مرتکب شده حد اعلایی قائل شویم(این‌حد غالباً بطور ساده« خطا» عنوان می‌شود) در غیرآن ، نتیجهٔ تقریبی بدون ارزش‌می‌باشد، مثلا چرا نمی‌توانیم‌برای π مقدار تقریبی ۱۰ رادرنظر بگیریم؟ بویژه‌آنکه اگرمقادیرتقریبی به وجه ناشایست حساب شده باشند در مقایسهٔ اعداد نتایج نادرست بدست می‌آید . ازاین جهت ، تخمین‌خطای بکار رفته‌موضوع اولیهٔ مقاله می‌باشد.

خطای مربوط به‌یك عمل ـ عملهای جمع وضرب شامل خطانمی‌شوند ، پس موضوع اصلی عبارت‌می‌شوداز تقسیم وغالباً ریشهٔ دوم.

یك چنین عملی‌که مثلا دردورقم بعداز سمیز متوقف‌شده باشد ، بزرگترین تعدادی از یکصدمها را بدست می‌دهد که از نتیجهٔ واقعی‌تجاوز نمی‌کند (مقدار تقریبی با ۰/۰۱ اشتباه)؛ اگر ۴/۵۶ بدست آورده باشند می‌توانیم بگوئیم که‌نتیجهٔ‌واقعی بین ۴/۵۶ و ۴/۵۷ واقع‌است،ازاولی بیشتراست‌وبه‌دومی‌نمی‌رسد. نتیجهٔ مزبور را می‌توان‌یك فرم تقریبی کامل دانست‌که درآن درعین‌حال هم نتیجه وهم‌خطای مربوط معین می‌باشد . قسمت اعظم بررسی خطاها تحقیق این موضوع است‌که مقادیرحاصل وقتی‌که باروش دیگری بدست‌آیندهمان مزیت‌را،مخصوصاًنزد فیزیکدانها،بتوانند داشته باشند.

اما از نظر محاسبه سود درآن‌است‌که یك‌خطا به حسب قدر مطلق معلوم شده‌باشد . وقتی می‌گوئیم ۴/۵۶ مقداری بایکصدم تقریب است‌به‌آن معنی‌است‌که مقدار واقعی‌بین ۴/۵۵ و ۴/۵۷ محصور است ؛ برای تعیین فاصلهٔ حقیقی خطا ، باید مقداررا برابربا ۴/۵۶۵ اختیارکردکه‌درآن صورت‌خطا ۰/۰۰۵ خواهد بود. از اینجا این موضوع روشن می‌شود که مقصود محاسب باآنچه مطلوب بکار برنده می‌باشد متفاوت می‌باشد . مقادیری‌که از راه یك عمل اصلی بدست می‌آید از نظردومی کافی است اما برای اولی اینچنین نیست.

خطاهای حاصل از عملیات‌زنجیری ـ اصطلاح عملیات زنجیری که مخصوصاً بعد از بررسی اصولی‌ماشینهای حساب‌بدست‌آمده مبین‌یك‌سلسله عملیات است‌که‌نتیجهٔ هر عمل سندی برای عمل دیگر می‌باشد . در اینجا نوع تازه‌ای از خطا ظاهر می‌شود ، خطائی‌که از عملیات ثانوی روی مقادیر تقریبی صاصل می‌شود. این‌نوع خطا را غالباً باکلمهٔ«اصولی» معین‌می‌کنند که‌خیلی‌کم معین است و خطای تخمینی مناسبتر بنظر میرسد؛ درواقع می‌توانیم قبل از آغاز محاسبه ، خطای حاصل ازعملیات را تخمین بزنیم . مفهوم‌خطای تخمینی کاملا نسبی است: برای عملی‌که‌انجام گرفته خطایی است قطعی و برای عملی بعدی‌که باید انجام بگیرد خطای تخمینی‌می‌باشد. فعلااین موضوع ر که ازچه‌راههایی می‌توان از خطای‌تخمینی به‌نتیجهٔ قطعی رسید کنار می‌گذاریم . اما در نظر گرفتن این اصل شایان اهمیت‌است‌که‌هریك ازخطاهای‌تخمینی ومحاسبه‌ای را جداگانه معلوم‌کرده باهم جمع کرد.این‌عمل بطورکلی‌صحیح نیست . بدون وارد شدن به‌جزئیات درك ایق موضوع خیلی ساده‌است که ممکن‌است دوخطای مزبور دریکدیگر تأثیرداشته باشند . یك خطا روی خطای دیگر وجودداردکه ازآن‌صرف‌نظرمی‌کنیم . این قراردادرا، که عملا قابل قبول است،**اصل جمع خطاها** یا **اصل استقلال خطاها** می‌نامیم . باین ترتیب قبول‌می‌کنیم‌که دوخطا روی یکدیگر اثر ندارند ومی‌توانیم‌آنهارا بی‌قید وشرط باهم جمع کنیم .

این عمل ازنظر سهولت قبول شده است . گاهی‌بوسیلهٔ آن‌می‌توانیم خطائی راکاهش دهیم ، اما نباید فراموش‌کرد که امکان عکس آن نیز وجود دارد مخصوصاً وقتی‌که عددی رابا عددی ساده‌تر جانشین می‌سازیم (مثلاوقتی‌که خطای ۰/۴۳۴۷ را با ۰/۵ جانشین می‌کنیم). به‌هرترتیب ، جمع خطاهامورد قبول واقع می‌باشد.

این استدلال عمومی است ومعلوم می‌کند عملا امکان داردکه خطای‌کوچکی را در مقابل‌خطای‌بزرگتر نادیده‌بگیریم (مثلا از یك خطا دربرابر خطایی‌که ده برابر آن است صرف‌نظرکنیم) . درفیزیك هم از ملاحظات‌نظری همین نتیجه‌حاصل می‌شود . اما در موردی‌که مطلوب مسئله اندازه‌گیری خاص خطای‌بکار رفته‌است این قاعده مستثنی است.

دقت ونشانه ها ـ قبلا گفتیم که ازروی عملیات اصلی (تقسیم وجذر) نتایجی بدست می‌آید که دقت آنها از روی خودشان معین می‌شود ، اما در مورد محاسبات زنجیری و عملیات دیگر (مثلالگاریتمها) اینچنین نیست. اگر مثلا نیتجهٔ واقعی‌یك‌محاسبه ۱/۹۹۹ باشد، ممکن‌است‌که به‌خاطر اولین‌خطا (مربوط به‌اولین‌عمل)درصددبدست‌آوردن ۲/۰۰۱۵ باشیم؛ در این‌موردخطای‌تخمینی ۰/۰۰۳ کفایت‌می‌کند. اگردر دومین‌عمل درجستجوی‌مقداری‌با ۰/۰۰۱ تقریب‌باشیم ۲/۰۰۱ بدست‌می‌آید.

مجموع خطای انجام گرفته عبارتست از:

$$0/003 + 0/001 = 0/004 < 0/01$$

دراین حالت به‌علت اشتباه، مقدار مطلوب را با ۰/۰۱ تقریب که ۱/۹۹ باشد بدست نیاورده‌ایم. بنابراین دراین حالت باید دقت نتیجه را علیحده تعیین کنیم؛ وانگهی اگر بدانیم که خطا برابر با ۰/۰۱ است دراین صورت بی‌فایده‌است که عملیات را مثلا روی ۲/۷۲۶۴۸۵ انجام دهیم: وقتی که «دو رقم کفایت می‌کند» چرا اینهمه ارقام را بکار ببریم.

اما یادآوری می‌کنیم که اگر تصور کنیم چون عدد تعیین شده باتقریب ۰/۰۱ است می‌توانیم بقیهٔ ارقام بعداز رقم دوم راکنار بگذاریم اشتباه کرده‌ایم. وقتی می گوئیم عدد بالا با ۰/۰۱ تقریب معین شده به‌آن معنی است که مقدار واقعی آن بین ۲/۷۱۶۴۸۵ و ۲/۷۳۶۴۸۵ محصور است. اگر رقمهای بعد از رقم دوم راکنار بگذاریم به‌آن معنی خواهد بود که مقدار واقعی عدد بین ۲/۷۱ و ۲/۷۳ واقع است. بسیار امکان دارد که این فاصلهٔ جدید شامل مقدار واقعی، مثلا ۲/۷۳۲ نباشد. برای پرهیز ازاین اشتباه، باید بگوئیم که خطای جدید کوچکتر از ۰/۱۶۴۸۵ می‌باشد؛ وچون خطاها را بااعداد ساده مشخص می‌کنند باید بگوئیم که از ۰/۰۰۲ کمتر است. دراین صورت حذف ارقام بعداز رقم دوم موجب افزایش خطا شده است.

بنابراین حذف ارقام اعشاری، خودمسئلهٔ دیگری ازخطا است: هرگاه مقادیر مورد محاسبه بادقتی کاملا استثنائی منظور نظر باشند دراین صورت فقط همه‌ارقام لازم بنظرمی‌رسد؛ اما این امر مؤید آن نیست که‌خطای مربوط کمتراز واحد آخرین مرتبه می‌باشد.

درمحاسبات‌محض، مسئلهٔ حذف به‌صورت‌ساده‌ای درمی‌آید: درکاربردها به‌غیراز بعضی موارد مثلادرمسابقات که‌بزرگترین وقت ممکن مورد نظر است، عموماً اگر در حاصل‌عمل بعضی وقتها راکنار بگذاریم اشکالی پدید نمی‌آید. این موضوع را هم‌اکنون‌توضیح می‌دهیم. درصورتی خواسته باشند خطای حاصل از مقدار معینی کمتر باشد، حذف برخی ارقام اعشاری درضمن محاسبات تولید اشکالی نمی‌کند. از این راه می‌توان محاسبات را بسیار ساده‌کرد. مثلا اگر مقدار عکس π تا ۱/۰ تقریب‌موردنظر باشدانتخاب‌مقدار ۳/۱۴ برای π کفایت‌می‌کند.

درصورتی که اگر مقدار ۳/۱۴۱۵۹ را انتخاب کنیم فقط بی‌کفایتی خودرا بروز داده ایم.

آیا همواره می‌توان باهرطرز ساده‌ترین نگارش یك‌عدد، دقت مربوط به آنرا تعیین کرد؟ فرض‌می‌کنیم ε_1 خطایی باشد که درپایان محاسبهٔ روی عدد بوجودآمده است (خطای قطعی): اگرارقام اعشاری بعدازمرتبهٔ nام را حذف‌کنیم، خطایی اضافی بکار برده‌ایم که حد اکثر آن برابر با $\frac{1}{10^n}$ است؛ در این صورت مسئله چنین می‌شود: آیا می‌توان n را چنان انتخاب کردکه داشته باشیم:

$$\varepsilon_1 + 10^{-n} < 10^{-n}$$

ملاحظه می‌کنیم که در چنین صورتی مسئله غیر ممکن است. اما درواقع اگر u اولین رقم حذف شده باشد، خطای ناشی از حذف آن از $\frac{u+1}{10^{n+1}}$ کوچکتر است و تساوی چنین می‌شود:

$$\varepsilon_1 < \frac{9-u}{10^{n+1}}$$

که درحالت $u<9$ ممکن است. اگر $u=9$ باشدباید آخرین رقم را بزرك کنیم که از راه جانشینی u با $(9-u)$ انجام می گیرد. می‌دانیم که دراین صورت $u \geq 5$ است، اما این عمل تنها وقتی لازم بنظرمی‌رسدکه آخرین رقم ۹ باشد. نامساوی بالا وقتی محقق است که $\varepsilon_1 < 10^{n+1}$ باشد و می‌توانیم قاعدهٔ به‌صورت زیررابیان‌کنیم، وقتی‌که خطاکمتر از واحد مرتبهٔ n ام اعشار باشد، می‌توان ارقام اعشار ابتدا از مرتبهٔ $(n-1)$ امرا حذف‌کرد، دراین صورت، خطای جدید از یك واحدآخرین مرتبهٔ نگاهداری‌شده کوچکتر خواهدبود. به‌این ترتیب می‌توان درعین انتخاب ساده‌ترین طرز نوشتن دقت مورد نظررا نیز مشخص‌کرد.

این قاعده را درموردی‌که خطا از مرتبهٔ واحدیابزرگتر باشد نمی‌توانیم بکار بریم: اگر بخواهیم ارقام قسمت صحیح عددرا حذف‌کنیم باید به‌جای‌آنها صفربگذاریم، وبرای‌تشخیص معنای خاص این صفرها وسیله‌ای درکار نیست. هرگاه یك نتیجهٔ فیزیکی مورد نظر باشد، می‌توان یك تغییر واحد را چاره‌جویی کردکه‌شایسته نیست. همچنین می‌توان عددنویسی را به‌نوع دیگری تفسیرکردوارقام «معنی‌دار» را متمایزکرد ونشانه‌های «عملیاتی» را تغییرداد تابه‌این ارقام، که غیرازصفر چیز دیگری نیستند، ارزش داد. می‌توان از علائم‌نمائی استفاده‌کرد. مثلا حاصل یك عمل راکه ۷۵۰۰۰ کیلومتر است، اگر باتقریب یك‌کیلومتر است، اگرباتقریب یك‌کیلر متر است به‌صورت 75×10^3 کیلومترنوشت، واگرباتقریب‌یك‌هکتومتر است به‌صورت 750×10^2 کیلومتر نوشت. اگرمتررا واحد

انتخاب کنیم درحالت اول $۱۰^۶ \times ۷۵$ ودرحالت دوم $۱۰^۵ \times ۷۵۰$ خواهیم داشت . استعمال واحدهای بالاتر از کیلومتر بااستفادهٔ ازنمای منفی میسر می‌باشد. روش دیگری که درمورد لگاریتمها بکار می رود ، تعیین تعداد ارقام قبل از ممیز از روی مفسر لگاریتم می‌باشد (مفسر یك واحد کمتر از تعداد ارقام صحیح است).

به هرترتیب، این عدد نسبت بین مقدار بدست آمده و خطای بکاررفته را تثبیت می کند. اگر تعداد ارقام واقعی ۳ باشد نسبت بین حد اعلای خطا ومقدار اندازه گیری شده از مرتبهٔ ۰/۰۰۱ است (بین ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۰۱ واقع است). چون این نسبت کوچکتر از ۰/۱ است می‌توانیم بدون واهمه آنرا بانسبت خطای بکار رفته به مقدار واقعی اشتباه کنیم.

به این ترتیب **خطای نسبی** تعریف می‌شود: نسبت بین حداعلای خطای ممکن به مقدار واقعی ، دراین نسبت به‌جای مقدار واقعی که نامعلوم است، مقدار محاسبه‌شده اختیار می‌شود. این مفهوم راهنمای روشهای محاسبه‌ای خاصی برای خطاهای مربوط به عملهای ضرب وتقسیم می‌باشد که بعداً از آن صحبت خواهد شد .

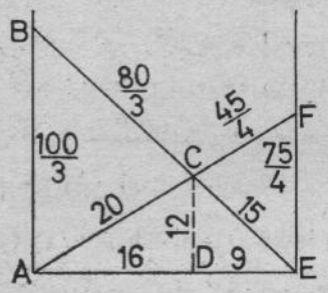
توجیه کاربرد این خطای نسبی مخصوصاً مبتنی برمعنای آن درفیزیك است . وقتی یك عدد معرف یك اندازه باشد، اگر واحدرا تغییر دهیم چنانچه خطا برحسب میلیمتر اندازه گرفته شده، مثلا ۰/۱ باشد برحسب سانتیمتر ۰/۰۱ خواهد شد درصورتی که نسبت آن به اندازه تغییر نکرده است.

برای مجموعه‌ای از اندازه‌های مربوط به مقادیر همنوع وکاملا قابل مقایسه ، خطای مزبور محسوساً ثابت می‌ماند . در مورد مقادیر از مرتبه های بسیار متفاوت نیز چنین وضعی پیش می‌آید: دراندازه گیری جرم یك کیلوگرمی بایك گرم تقریب همان اشکالاتی در کار هست که دراندازه گیری جرم یك گرمی باتقریب یك میلیگرم وجود دارد. این موضوع شایان اهمیت است که در فعالیتهای هم درجه‌ای که مقادیر مختلف دخالت دارند دقت نسبی به‌یك میزان باقی بماند : دقت ۰/۰۱ برای صنعت متداول ، ۰/۰۰۱ برای صنایع دقیق، ۰/۰۰۰۱ و بالاتر برای اندازه گیری درآزمایشگاهها، این دقت درزمینهٔ علم مقیاسات درحدود ۰/۰۰۰۰۱ می‌باشد . گاهی پیش می‌آید که خطای نسبی هیچ معنایی ندارد: درمورد هراندازه‌ای ازکمیتی که باتقریب ثابت معین شده است (آنتروپی، انرژی فیزیك کلاسیك وغیره)، که درآنها تغییرات منحصرودریك جهت است؛ برای طول مدت یك پدیده می‌توان خطایی نسبی را تعریف کرد اما برای یك لحظه یا تاریخی مشخص از آن ممکن نیست.

دنباله دارد

داستانهای ریاضی (بقیه از صفحه ۶۲)

قائم‌الزاویه وبزرگترین ضلع زاویهٔ قائمه مثلث دیگر است . برای اینکه CD صحیح باشد ، باید که تواماً مضارب ۳ و ۴ باشد و حد اقل آن ۱۲ می‌باشد . از این مقدار ، سایرطولها به سادگی محاسبه می‌شوند . AD برابر $\frac{۴}{۳}$ از ۱۲ یعنی ۱۶ و AC برابر با $\frac{۵}{۳}$ از ۱۲ که ۲۰ است وغیره .تمام این مقادیر در شکل ۳ نموده شده‌اند.



واضح است ، شرط اینکه تمام این اعداد صحیح باشند، بایدکه تمام این مقادیر را در ۱۲ ضرب نمائیم . در این صورت مشاهده خواهیم کرد که بزرگترین نردبان ۵۰۰ وجب ونردبان کوچکتر ۳۷۵ وجب طول خواهد داشت و دیوار ها درفاصلهٔ ۳۰۰ وجبی ازیکدیگر واقعند . همچنین ملاحظه می‌کنیم که مثلث ACE قائم‌الزاویه است (بااضلاع ۱۵، ۲۰، ۲۵)، در نتیجه دونردبان بایکدیگر زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهند .(به‌ریاضیدانان یادآوری می‌کنیم که این مسئله از یکی از مسائل کلاسیك اخذ شده است: طول دونردبان معلوم است ، همچنین فاصلهٔ نقطهٔ تقاطعشان اززمین دردست است ، مطلوب مسئله، فاصلهٔ دودیوار است. معمولا به راه‌حلی از درجهٔ چهارم برمی‌خوریم . که حل آن دیگر بازیچه نیست .)اماچرا آب از انتهای دیگر لوله جریان پیدانکرد؟ زیرا به‌محض اینکه از اولین دور مارپیچ عبور کرد(یااولین مارپیچ‌های مفروض) ، آب در قسمت تحتانی مارپیچ های متوالی می‌افتد وتولید یك یاچند بالش هوائی باتراکم مختلف می‌شود. این موضوع ، برای متعادل کردن فشارآب درلولهٔ پهلوی قیف کفایت می‌کند. اگرلوله به فلکه بسته می‌شد، این امر اتفاق نمی افتاد، فشار آب در موقع خروج از فلکه برای « راندن» آب در لوله و سرازیرکردن آن در سطل ، می‌توانست نسبتاً زیاد باشد.

بعضی از انواع توابع

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری
از مجلهٔ روسی «ریاضیات در دبیرستان»

۱- سری‌ها (تابعهای رشته‌ای)

تابعی راکه فقط درمجموعهٔ اعداد طبیعی معین باشدتابع رشته‌ای یا سری می‌نامند . مقدار چنین تابعی را به ازاء عدد طبیعی غیر مشخص n ، جملهٔ nام ، یا جملهٔ عمومی سری می‌گویند و به a_n نشان می‌دهند و خود سری را با $\{a_n\}$ نمایش می‌دهند .

تمرین : ۱) در هر یك از سریهایی که جملهٔ عمومی آنها در زیر نوشته شده است ، چند جملهٔ اول را معلوم کنید و آنها را برمحور اعداد یا در صفحهٔ مختصات نمایش دهید ؛

$$a_n = \frac{3n-1}{n+1} \qquad a_n = (-1)^n$$

$$a_n = n^2 - 3n - 4 \qquad a_n = n + (-1)^n n$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$a_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$

$$a_n = 1.2.3.4\ldots n = n!$$

$$a_n = 3a_{n+1} \text{ و } a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = 2^{a_n} \text{ و } a_1 = 1$$

$$a_n = \sin \pi n + \cos \frac{\pi n}{2}$$

a_n ، (a عددی است اول)

۲) در هریك ازرشته‌های زیر جملهٔ عمومی رابنویسید:

رشتهٔ :

۱ و ۴- و ۹ و ۱۶- و ...

رشته‌ای‌که جمله‌های مرتبهٔ زوج آن برابر با صفر و جمله‌های مرتبهٔ فرد آن برابر با یك باشد ؛

رشته‌ای‌که پنج جملهٔ اول آن برابر با صفر و بقیهٔ جمله‌ها مخالف صفر باشند ؛

رشته‌ای‌که بین جمله‌های n ام و n + ۱ ام آن رابطهٔ $a_{n+1} = a_n - 3$ برقرار بوده و $a_1 = 8$ است .

۳) مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد مفروض‌است. دایرهٔ محاطی داخلی آن و مماسی‌موازی قاعدهٔ مثلث بر این دایره رسم می‌کنیم‌که ازمثلث مفروض،مثلث متساوی‌الاضلاع جدیدی پدید می‌آورد . عمل مزبور را نسبت‌به‌مثلث جدید تکرار می‌کنیم و به همین ترتیب آنرا ادامه می‌دهیم . جملهٔ عمومی رشتهٔ $\{r_n\}$ از شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای مزبور را بنویسید .

۲- توابع محدود و نامحدود

قبلا یادآوری می‌کنیم‌که مجموعهٔ عددی X محدود نامیده می‌شود هرگاه دو عدد a و b بتوان یافت‌که اگر $x \in X$ باشد داشته باشیم : $a<x<b$ درصورتی‌که فقط یك‌عدد a داشته باشیم‌که $x>a$ باشد می‌گوئیم مجموعهٔ X از پائین محدود است و اگر فقط یك عدد b داشته باشیم‌که $x<b$ می‌گوئیم مجموعهٔ X از بالا محدود است .

اگر تابع f در مجموعهٔ X معین باشد و $X_1 \subset X$ بوده و $f(X_1)$ ، یعنی مجموعهٔ مقادیر تابع در X_1 ، محدود باشد تابع f را محدود می‌نامیم .

ممکن است‌که یك تابع از بالا یا از پائین محدود باشد .

تمرین : ۱) چند مثال ازتوابع (وهمچنین از رشته‌ها) محدود و نامحدود ذکرکنید .

۲) آیا توابع $y = ax + b$ و $y = ax^2 + bx + c$ در روی تمام محور اعداد محدودند ؟ در یك ناحیهٔ مفروض چگونه‌اند ؟

۳) تابع $y = ax^2 + bx + c$ در حوزهٔ تمام اعداد به چه شرط از بالا (یا از پائین) محدود است ؟

۴) تابع $y=\frac{1}{x}$ درچه حوزه‌هایی از اعداد

الف ـ از بالا محدود و از پائین نامحدود است ؟

ب ـ از بالا و ازپائین‌محدود است ؟

ج ـ از بالا و از پائین نامحدود است ؟

۵) تابع $y=\frac{3x}{x^2-4}$ درچه حوزه‌هایی‌ازاعدادمحدود است ؟

۶) محدود یا نا محدود بودن هر یك از تابعهای زیر را بررسی‌کنید :

$$y=\frac{3x+2}{x-1} \qquad y=\frac{x^2}{x^2+2}$$

$$y=\frac{2}{1+x^2} \qquad y=\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$y=\sin(2^x) \qquad a_n=(-1)^n.\frac{n^2+1}{n}$$

۷) تابع f در حوزهٔ اعداد طبیعی محدود است و g یك تابع غیر مشخص است . آیا می‌توان محدودیت توابع : $f(g(x))$ و $g(f(x))$ را تحقیق‌کرد ؟

تابع یکنوا

تابع f در مجموعهٔ X معین است و x_1 و x_2 به X تعلق دارند و غیر مشخص می‌باشند ؛

درصورتی داشته باشیم :

$$x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

تابع f را درحوزهٔ X ، صعودی می‌نامیم .

در صورتی‌که داشته باشیم :

$$x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

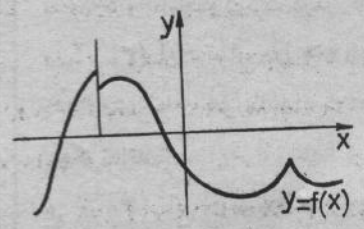
تابع f در حوزهٔ X نزولی نامیده می‌شود .

تابعی‌که در تمام حوزهٔ تعریف خودکلا صعودی یا کلا نزولی باشد یکنوا نامیده می‌شود .

تابعی‌که دربخشی از حوزهٔ خود صعودی و در بخشی دیگر نزولی یا ثابت باشد چند نوا نامیده می‌شود .

تمرین : ۱)

مطلوبست‌تعبیرهندسی تابع یکنوا. درمنحنی شکل مقابل معلوم کنیدکه تابع نظیر در چه قسمتهایی‌صعودی



و درچه قسمتهایی نزولی است .

۲) معلوم‌کنیدکه از توابع زیر کدامها یکنوا هستند و حدود آنرا مشخص‌کنید :

$$y=kx+b \quad k\neq 0 \qquad y=x-[x]$$

$$y=ax^2+bx+c \ ، \ a\neq 0 \qquad y=[x]$$

$$y=x^2 \qquad a_n=\sin\frac{1}{n} \qquad a_n=\cos\frac{\pi}{n}$$

$$a_n=(-1)^n.\frac{1}{n} \qquad y=x^3+x^2$$

$$y=|2x-x^2+3| \qquad y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$$

$$y=x+\sin x$$

۳) مطلوبست شرط‌آنکه تابع غیر مشخص f درمجموعهٔ X کلا صعودی نباشد .

۴) آیا تابعی‌که در تمام حوزهٔ اعداد معین بوده و فقط مقادیر مختلف مجموعهٔ محدودی را قبول می‌کند می‌تواند کلا یکنوا باشد ؟

۵) ضرایب a ، b و c در چه شرایطی باید صدق‌کنند تا تابع $y=ax^2+bx+c$ در فاصلهٔ [۲ و ۰] یکنوا باشد .

۶) ثابت‌کنیدکه هر تابع کلا یکنوا دارای معکوسی‌است که صعودی یا نزولی بودن آن همسان با تابع مفروض است .

۷) آیا شرط لازم برای یکنوا بودن یك تابع ، وجود تابع معکوس برای آن است ؟

۸) آیا یك تابع چند نوا می‌تواند دارای تابع معکوس باشد ؟

۹) در مجموعهٔ X ، دو تابع f و g صعودی و دو تابع φ و ψ نزولی می‌باشند . آیا توابع زیر یکنوا می‌باشند.شرط لازم برای یکنوا بودن هر یك از آنها را بیان‌کنید.

$$-f \text{ و } -\varphi \quad f\pm g \quad \varphi\pm\psi \quad f\cdot\varphi$$

$$af \ ، \ a\neq 0 \quad f.g \ ، \ \varphi.\psi \quad f.\varphi$$

$$f(g(x)) \quad f(\varphi(x)) \quad \varphi(f(x)) \quad \varphi(\psi(x))$$

۱۰) تابع f در تمام حوزهٔ تعریف خود یکنوا است . معلوم‌کنیدکدام یك از توابع :

$$y=kf(x-a)+b \qquad y=f(kx)$$

$$y=f(-x) \quad y=|f(x)| \quad y=f(|x|)$$

الف ـ نظیر هرتابع $f(x)$ یکنوا است .

ب ـ نظیر هر تابع $f(x)$ چند نوا است .

ج - نظیر بعضی از توابع $f(x)$ یکنوا و نظیر بعضی دیگر از توابع $f(x)$ چند نوا است .

٤ - تابع زوج ، تابع فرد

مجموعهٔ عددی X متقارن‌نامیده می‌شود هر گاه نظیرهر x متعلق به X عدد $(-x)$ نیزبه X تعلق داشته باشد .

تابع f در مجموعهٔ متقارن X معین است ، اگر به ازاء هر x از X داشته باشیم :

$$f(-x)=f(x)$$

f یك تابع زوج می‌باشد و اگر داشته باشیم :

$$f(-x)=-f(x)$$

f تابعی فرد می‌باشد .

تمرین : ۱) زوج و فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید :

$$y=x^k \ ، \ k\in C \qquad y=|x|$$

$$y=\frac{|x|}{x} \qquad y=x.|x| \qquad y=[x]$$

$$y=\sin^2 x \qquad y=\frac{\sin x}{x} \qquad y=\frac{\cos x}{x}$$

$$y=\frac{1}{x-2} \qquad y=\frac{1-x^3}{x-x^5}$$

$$y=\begin{cases} 2x-x^2+5 \ ، & x<0 \ \text{به ازاء} \\ 5-2x-x^2 \ ، & x\geq 0 \ \text{به‌ازاء} \end{cases}$$

۲) آیا یك تابع زوج در تمام حوزهٔ اعداد می‌تواند یکنوا باشد ؟ تابع فرد چطور ؟

۳) مقدار تابع فرد در ازاء $x=0$ چه می‌تواندباشد؟

۴) آیا تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ می‌تواند زوج باشد ؟ فرد باشد ؟ این امر در ازاء چه مقادیر از a و b و c میسر می‌باشد ؟

۵) آیا تابعی وجود داردکه در عین حال هم زوج وهم فرد باشد؟

۶) آیا ممکن‌است‌که تابع‌زوج دارای‌تابع‌معکوس‌باشد؟

۷) آیا همیشه برای تابع‌فرد ، تابع معکوس وجوددارد؟

۸) به فرض اینکه تابع $f(x)$ در مجموعهٔ متقارن X معین باشد معلوم‌کنیدکه هریك از توابع زیر چه موقع زوج‌و چه موقع فرد می‌باشند.

$$y=f(x)+f(-x) \qquad y=f(|x|)$$

$$y=f(x)-f(-x) \qquad y=f(x^2)$$

۹) ثابت‌کنیدکه یك تابع‌غیرمشخص راکه درمجموعه‌ای متقارن معین باشد می‌توان به‌صورت مجموع توابع زوج‌وفرد درآورد و ثابت‌کنیدکه این عمل تنها به یك‌صورت ممکن‌است. عمل مزبور را برای توابع زیر انجام دهید :

$$y=x^4-5x^3+2x^2+1$$

$$y=\frac{3x^5-1}{2+x^4} \qquad y=\frac{1-2x^2}{x+5}$$

۱۰) به‌فرض اینکه تابع $f(x)$ زوج (یا فرد) باشدزوج و فرد بودن هریك از توابع زیر را معلوم‌کنید :

$$y=-f(x) \qquad y=f(x)+b \qquad y=f(kx)$$

$$y=f(-x) \qquad y=kf(x) \qquad y=f^2(x)$$

$$y=\frac{1}{f(x)}$$

۱۱) دوتابع f و g زوج ودو تابع φ و ψ فرد می‌باشند و همهٔ این توابع در یك مجموعه معین می‌باشند . معلوم‌کنید که از توابع زیرکدامها زوج وکدامهافرد می‌باشند :

$$f\pm g \qquad f.g \qquad f\pm\varphi \qquad f.\varphi$$

$$\varphi\pm\psi \qquad \varphi.\psi \qquad f(\varphi(x))$$

$$\varphi(\psi(x)) \qquad F(g(x))$$ ، F تابعی غیر مشخص

(دنباله دارد)

راهنمای ریاضیات متوسطه

برای دانش آموزان کلاس چهارم ریاضی

مفهوم f(x) و مسائلی در بارهٔ آن

عبدالحسین مصحفی

می‌توانیم قانونهای مختلف وضع کنیم تا از روی هر عدد داده شده ، عددی دیگر را بدست‌آوریم .مثلا اگرقانون «دوبرابرکردن» را در نظر بگیریم ؛ از روی عدد یك عدد ۲ بدست می‌آید ، ازروی عدد ۲ عدد ۴ نتیجه می‌شود ،از روی عدد ۳ عدد ۶ حاصل می‌شود واز روی عدد ۱۲۷ — عدد ۲۵۴ — بدست می‌آید و غیره . . .

۱ — [قانون‌دو برابر کردن] → ۲

۲ — [قانون دوبرابر کردن] → ۴

۱۲۷ — [قانون دوبرابر کردن] → ۲۵۴ —

قانونی‌که در این مثال در نظر گرفتیم تنها از یك‌عمل سادهٔ دو برابرکردن یا «ضرب‌در۲» تشکیل می‌شد . اماممکن است قانونی‌که درنظر می‌گیریم ازچندین عمل مختلف‌تشکیل شده باشد . مثلا از روی هر عدد ، عدد دیگررا باین ترتیب بدست‌آوریم که عدد اولی را سه برابر کنیم و از حاصل ، ۲ واحد بکاهیم :

$$۱ \to ۳ \times ۱ - ۲ = ۱$$

$$۲ \to ۳ \times ۲ - ۲ = ۴$$

$$۳ \to ۳ \times ۳ - ۲ = ۷$$

. . . . . .

$$۶۴ \to ۳ \times ۶۴ - ۲ = ۱۹۰$$

. . . . . .

$$\frac{۵}{۱۱} \to ۳ \times \frac{۵}{۱۱} - ۲ = -\frac{۷}{۱۱}$$

. . . . . .

برای اینکه یك قانون را که دربارهٔ اعداد بکار می‌بریم به‌صورت کلی بیان‌کنیم ، اولا برای « هرعدد » ، یعنی برای عدد غیر مشخصی‌که درنظر می‌گیریم ، یك حرف‌الفباء لاتین، معمولا حرف x ، رابکار می‌بریم . درحقیقت این حرف x ، و همچنین هریك از حرفهای‌دیگری‌راکه در جبر بکار می‌بریم ، نمایندهٔ یك عدد غیر مشخص می‌باشد . وقتی می‌گوئیم «x» یعنی یك عدد که ممکن‌است صحیح باشد یاکسری، منطق باشد یا اصم ، مثبت باشد یا منفی وغیره ...

ثانیاًبرای قانونی‌که‌درنتیجهٔ‌آن از روی عدد غیرمشخص x بتوانیم عددی دیگر را معین کنیم نشانه یا سمبل f را بکار می‌بریم . در مورد مثال اول داریم :

f= دو برابر کردن

x — [f] → ۲ × x = ۲x

در مورد مثال دوم داریم :

f= ۲ واحدکمتر از سه برابر

x — [f] → ۳x − ۲

ثالثاً عددی راکه ازروی عدد x و با بکار بردن‌قانون f بدست‌می‌آیدبا f(x) نشان‌می‌دهیم[f(x)خوانده‌می‌شود:اف'x]؛

در مثال اول که داشتیم : « دو برابر = f » داریم :

$$۱ \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(۱) = ۲$$

$$-۷ \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(-۷) = -۱۴$$

$$\frac{۳}{۵} \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(\frac{۳}{۵}) = \frac{۶}{۵}$$

و بطور کلی داریم :

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x) = ۲x$$

در مورد مثال دوم داریم :

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x) = ۳x - ۲$$

بنابر این :

f(x) یعنی عددی که با بکار بستن قانون f از روی عدد x بدست می‌آید .

توجه ـ f(x) را نباید با حاصل ضرب f.x اشتباه کرد.

تبصره ـ دو نشانهٔ f(x) و f از یکدیگر متفاوت می‌باشند ؛ f(x) برابر با یك عدد است درصورتی که f قانون یا قاعده‌ای را می‌رساند که در نتیجهٔ آن می‌توان f(x) را از روی x بدست آورد . به عبارت ساده‌تر ، f یك عمل یا مجموعه‌ای از چند عمل است درصورتی که f(x) نشانهٔ عددی است که نتیجهٔ عمل یا اعمال مزبور می‌باشد .

حتی ممکن است که f عبارت از عملی غیر از عملیات جبری باشد . مثلا اگر در ازاء هر عدد که فرض شود تعداد ارقام صحیح آنرا اختیار کنیم :

$$۸ \to ۱ \ ، \ ۴۷ \to ۲ \ ، \ -۹۸ \to ۲$$

$$\frac{۳}{۵} = ۰/۶ \to ۰ \ ، \ -\frac{۲}{۷} = -۰/۲۸۰۰۰ \to ۰$$

$$\sqrt{۲۴۸} \neq ۱۵/۷ \to ۲$$

***

عموماً وقتی که مقدار کلی f(x) برحسب x (عدد غیر مشخص) تعیین شده‌باشد از روی آن f (یعنی مجموعهٔ عملیاتی که باید انجام داد) معین‌شده و می‌توان در ازاء هرمقدار از x مقدار نظیر آن از f(x) را بدست آورد . برای این کار کافی است که درفرمول کلی f(x) عدد مورد نظر را به‌جای x قرار داد و حاصل را محاسبه کرد . مثلا اگر داشته باشیم : $f(x) = x^۲ - x$ خواهیم داشت :

$$f(۱) = ۱^۲ - ۱ = ۰$$

$$f(-۵) = (-۵)^۲ - (-۵) = ۳۰$$

$$f(\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲})^۲ - (\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۴}$$

. . . . . .

وقتی f(x) معلوم شده باشد حتی می‌توانیم مقدار آنرا بر حسب مقدار کلی دیگری تعیین کنیم . یعنی در فرمول کلی f(x) می‌توانیم به جای حرف x یك حرف دیگر یا یك عبارت دیگر را قراردهیم. مثلا فرض می‌کنیم که داشته‌باشیم :

$$f(x) = \frac{۱ - x}{۱ + x}$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$f(a) = \frac{۱ - a}{۱ + a} \qquad f(p) = \frac{۱ - p}{۱ + p}$$

$$f(۲m) = \frac{۱ - ۲m}{۱ + ۲m} \qquad f(x^۲) = \frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲}$$

$$f(\frac{۱}{x}) = \frac{۱ - \frac{۱}{x}}{۱ + \frac{۱}{x}} = \frac{\frac{x - ۱}{x}}{\frac{x + ۱}{x}} = \frac{x - ۱}{x + ۱}$$

$$f(۳x - ۴) = \frac{۱ - (۳x - ۴)}{۱ + (۳x - ۴)} = \frac{۵ - ۳x}{۳x - ۳}$$

$$f(\frac{۱ - x}{۱ + x}) = \frac{۱ - \frac{۱ - x}{۱ + x}}{۱ + \frac{۱ - x}{۱ + x}} = \frac{۲x}{۲} = x$$

***

اگردر f(x) به‌جای x خود f(x) را قرار دهیم حاصل رابه‌صورت f[f(x)] یابه صورت ساده‌تر ff(x) نشان می‌دهیم. مثلا وقتی $f(x) = ۳x - ۲$ باشد داریم :

$$ff(x) = ۳f(x) - ۲ = ۳(۳x - ۲) - ۲ = ۹x - ۸$$

اگر $f(x) = \frac{x}{x^۲ + ۱}$ باشد داریم :

$$ff(x) = \frac{f(x)}{[f(x)]^۲ + ۱} = \frac{\frac{x}{x^۲ + ۱}}{\left(\frac{x}{x^۲ + ۱}\right)^۲ + ۱} = \frac{x(x^۲ + ۱)}{x^۴ + ۳x^۲ + ۱}$$

وقتی $ff(x)$ را حساب کرده حاصل آنرا در $f(x)$ به جای x قراردهیم نتیجه‌رابه‌صورت $fff(x)$ نشان‌می‌دهیم . بطورکلی:

مقصود از $fff...f(x)$ یعنی اینکه ابتدا در $f(x)$خود $f(x)$ را به‌جای x قراردهیم ، آنگاه آنچه را حاصل می‌شود باز در $f(x)$ به‌جای x قرار دهیم و مجدداً حاصل عمل رادر $f(x)$ قرار دهیم و این عمل را تا آنجا که مورد نظر باشد تکرار کنیم .

مثال ـ فرض‌کنیم‌که $f(x)=2x+1$ در این‌صورت:

$$ff(x)=2(2x+1)+1=4x+3$$

$$fff(x)=2(4x+3)+1=8x+7$$

$$ffff(x)=2(8x+7)+1=16x+15$$

. . . . . .

حل چند مسئلهٔ نمونه

مسئلهٔ ۱ ـ اگر داشته باشیم :

$$f(x+1)=x^2-x$$

$f(x)$ را مشخص کنید .

برای تعیین $f(x)$ کافی است که عبارت x^2-x را برحسب $x+1$ مرتب کنیم . برای این‌کار فرض می‌کنیم‌که $x+1=y$ که نتیجه می‌شود $x=y-1$ و خواهیم‌داشت:

$$f(y)=(y-1)^2-(y-1)=y^2-3y+2$$

x رابه جای y قرار می‌دهیم :

$$f(x)=x^2-3x+2$$

مسئلهٔ ۲ـ در صورتی‌که داشته باشیم :

$$f(x)=2x^2-6x+5$$

مقدار y را برحسب x تعیین کید بنابر آنکه $f(y)=f(x)$ باشد .

باید داشته باشیم :

$$2y^2-6y+5=2x^2-6x+5$$

$$2y^2-2x^2-6y+6x=0$$

$$2(y-x)(y+x)-6(y-x)=0$$

$$2(y-x)(y+x-3)=0$$

$$y-x=0 \Longrightarrow y=x$$

$$y+x-3=0 \Longrightarrow y=-x+3$$

مسئلهٔ ۳ـ به فرض اینکه داشته باشیم :

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \text{ و } f(1-x)=\frac{3-x}{1-2x}$$

$f(x)$ را مشخص کنید .

$f(1-x)$ را تعیین می‌کنیم و با عبارت داده شدهٔ آن متحد قرار می‌دهیم :

$$f(1-x)=\frac{a(1-x)+b}{c(1-x)+d}=\frac{a+b-ax}{c+d-cx}$$

$$\frac{a+b-ax}{c+d-cx}=\frac{3-x}{1-2x}$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -a=-1 \\ c+d=1 \\ -c=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=2 \\ c=2 \\ d=-1 \end{matrix}$$

$$f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$$

مسئلهٔ ۴ـ اگر داشته باشیم :

$$f(x)=8x^3-2x^2-5x+\frac{5}{4}$$

تحقیق‌کنید که عبارت $f(\frac{x^4}{2})$ بر $\sqrt{2}x^2+1$ بخش پذیر است .

(امتحان ورودی دانشگاه مشهد در سال ۱۳۴۷)

به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

$$f(\frac{x^4}{2})=8(\frac{x^4}{2})^3-2(\frac{x^4}{2})^2-5(\frac{x^4}{2})+\frac{5}{4}$$

$$f(\frac{x^4}{2})=x^{12}-\frac{x^8}{2}-\frac{5x^4}{2}+\frac{5}{4}$$

$$f(\frac{x^4}{2})=\frac{x^8}{2}(2x^4-1)-\frac{5}{4}(2x^4-1)$$

$$f(\frac{x^4}{2})=\frac{1}{4}(2x^4-1)(2x^8-5)$$

$$f(\frac{x^4}{2})=\frac{1}{4}(\sqrt{2}x^2+1)(\sqrt{2}x^2-1)(2x^8-5)$$

مسئلهٔ ۵ـ اگر A و B مقادیر ثابتی باشند و داشته باشیم:

$$f(x) = A \times ۳^x + B(-۲)^x$$

تحقیق کنید که خواهیم داشت :

$$f(x) = ۶f(x-۲) + f(x-۱)$$

و به کمك این رابطه به فرض $f(۲) = ۲$ و $f(۱) = ۱$ مقدار $f(۴)$ را حساب کنید .

(امتحان ورودی دانشسرای عالی در سال ۱۳۴۷)

به ترتیب چنین خواهیم داشت :

$$f(x-۲) = A \times ۳^{x-۲} + B(-۲)^{x-۲} =$$

$$= \frac{A \times ۳^x}{۳^۲} + \frac{B(-۲)^x}{(-۲)^۲} = \frac{A \times ۳^x}{۹} + \frac{B(-۲)^x}{۴}$$

$$f(x-۱) = A \times ۳^{x-۱} + B(-۲)^{x-۱} =$$

$$= \frac{A \times ۳^x}{۳} + \frac{B(-۲)^x}{-۲}$$

$$۶f(x-۲) + f(x-۱) = \frac{۲}{۳}(A \times ۳^x) +$$

$$+ \frac{۳}{۲}[B(-۲)^x] + \frac{۱}{۳}(A \times ۳^x) - \frac{۱}{۲}[B(-۲^x)]$$

$$= (\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳})(A \times ۳^x) + (\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲})[B(-۲)^x]$$

$$= A \times ۳^x + B(-۲)^x = f(x)$$

ثانیاً دررابطهٔ اخیر با فرض $x = ۴$ و $x = ۳$ داریم :

$$f(۴) = ۶f(۲) + f(۳)$$

$$f(۳) = ۶f(۱) + f(۲)$$

از جمع طرفین این دورابطه نتیجه می‌شود :

$$f(۴) = ۷f(۲) + ۶f(۱) = ۷ \times ۲ + ۶ \times ۱ = ۲۰$$

تمرین

۱ـ در هریك از تمرینهای زیر مقدار $f(x)$ را به‌ازاء مقدار یا مقادیر داده شدهٔ برای x حساب کنید :

$$f(x) = x^۲ - ۴x + ۵$$

$$x = ۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۴ \text{ و } -۲$$

$$f(x) = \frac{x^۲ - x}{x^۲ + ۲} \qquad x = ۷ \text{ و } \frac{۱}{۲} \text{ و } -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{۱ + x^۲}}{x + \sqrt{۱ + x^۲}}$$

$$x = \frac{۱}{۲}\left[\sqrt{\frac{۳}{۴}} - \sqrt{\frac{۴}{۳}}\right]$$

۲ـ در هر یك از تمرینهای زیر مقادیر $ff(x)$ و $fff(x)$ را بدست آورید :

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = \frac{x}{x+۱}$$

$$f(x) = \frac{x-۱}{x+۱}$$

۳ ـ در هر یك از تمرینهای زیر مقدار نوشته شده را تعیین کنید :

$$f(x) = ax^۲ + bx + c \text{ ، } f(x+۱) = ?$$

$$f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - x + ۱ \text{ ، } f(x-۱) = ?$$

$$f(x+۲) = x^۲ - ۴x + ۱ \text{ ، } f(x) = ?$$

$$f(۲x-۳) = \frac{۲x-۱}{x+۲} \text{ ، } f(x) = ?$$

$$f(۱-x) = x^۲ - ۲ \text{ ، } f(۱+x) = ?$$

$$f(x) = ۳ \times ۲^x - ۳^{-x} \text{ ، } f(x-۲) = ?$$

۴ـ ساده‌ترین فرم $f(x)$ را تعیین کنید که داشته باشیم:

$$f(۱) = ۲ \text{ ، } f(۲) = ۳ \text{ ، } f(۳) = ۴۲ \text{ ، } \ldots$$

۵ ـ چند جمله‌ای $f(x)$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$f(x) - f(x-۱) = x^n \text{ و } f(۰) = ۰$$

چگونه می‌توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

تألیف: René Boirel

چگونگی استفادهٔ از مجموعه‌های حل‌المسائل

دانش آموزان مجموعه‌های حل‌المسائل‌رامطالعه‌می کنند تا استعداد خود را درحل مسائل پرورش دهند. اما لازم‌است که روش صحیح استفادهٔ ازاین عمل را بدانند. بسیاری‌ازآنان به این قناعت می‌کنند که مسائل و حل آنهـا را بخوانند و حفظ کنند ، حتی اگر آنها را نفهمند ، تا به این وسیله از انواع مختلف مسائلی که در امتحانات داده می‌شود نمونه‌هایی مشاهده‌کرده باشند و بتوانند در موقع خودراه حلی را تکرارکنند. بدیهی است‌که این روش‌در ریاضی‌مردودمی‌باشد.

بهره‌وری از روی معرفت کتابهای حـل‌المسائل خـود هنری است‌که سعی می‌شود به شما آموخته‌گردد .

مطالعهٔاین کتابها برای شما موقعیتهای مناسبی‌رابوجود می‌آورد تا آنچه راکه دربارهٔ چگونگی حل مسائل‌قبلابه شما توصیه شده است بازشناسید وبکاربردن آنها را عملاً مشاهده کنید . اما دربیشتر این‌کتابها، حل مسئله به صورت نهایی و خلاصه شده نوشته‌شده ودربارهٔ اینکه با چه‌روشی بدست‌آمده است توضیحی ندارد .

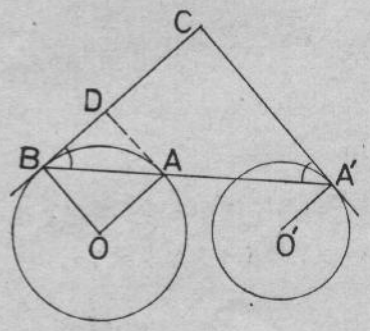
بازهم یادآوری می‌کنیم که دراستفادهٔ از حل‌المسائـل خود را مقید کنید که در هر راه‌حلی کـه شرح داده شده همهٔ توجه خود را به تحرك عملی مسئله و مفروضات آن آنچنان معطوف داریدکه تصورکنید شخصـاً مصمم هستید مسئله را برطبق روش حل کنید . به عبارت دیگـر ، هر راه حـل را تشریح کنید و معلوم کنید کـدام اجـزاء آن از تحرك عملی مسئله وکدامها ازتحرك عملی مفروضات حاصل شده‌اند .

برای اینکه این موضوع را بهتر فرا گیریـد مثالهایی ذکر می‌شودودرهرکدام‌از آنها نوعی راه حل تشریح‌می‌شود.

شما هم ازاین به‌بعد راه‌حلهای مندرج درکتابهای حل‌المسائل را به همین طریق بررسی خواهید کرد . به این وسیلـه هـم حل‌المسائل را از روی معرفت مطالعه کرده‌ایـد و هم اینکه مطمئن می‌شوید امکان عملی حل‌مسائل برای شمافراهم‌است.

این مسئله را درنظرمی گیریم :

دو دایره با مرکزهـای O و O′ مفروض است . دو شعاع متوازی OA و O′A′را ازآنها درنظرمی گیریم. خط AA′ دایرهٔ O را درنقطهٔ دیگر B قطع می‌کند. درنقطهٔ B بر دایرهٔ O و در نقطهٔ A′ بر دایرهٔ O′ مماسی‌رسم می‌کنیم که این دومماس‌در C متلاقی می‌شوند. ثابت‌کنیدکه $CA' = CB$



بسط تحرك عملی مسئله چنین‌است: اثبات تساوی $CB = CA'$ یعنی‌اینکه ثابت‌کنیم مثلث $CA'B$ متساوی الساقین است یعنی‌اینکه ثابت کنیم دو زاویهٔ B وA′ متساویند.

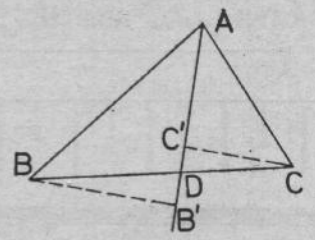
بسط تحرك عملی مفروضات چنین است: وقتی‌شعاعهای OA و O′A′ متوازی باشند مماسهای درنقاط A وA′ بردو دایره نیزمتوازی می‌باشند .

با توجه به دو بسط مزبور در می‌یابیم که قبلاً ثابت می‌کنیم مثلث DBA متساوی‌الساقین است و از آنجا نتیجه خواهد شد که زاویهٔ A با زاویهٔ B و در نتیجه زاویهٔ A′ با

زاویهٔ B برابر است .

مسئلهٔ دیگر

مثلث ABC مفروض است . عمودهای BB' و CC' را بر AD نیمساز زاویهٔ A رسم می‌کنیم . ثابت کنید که نقاط A و D نسبت به B' و C' مزدوج توافقی می‌باشند .



بسط تحرك عملی مسئله: اثبات اینکه A و D نسبت به B' و C' مزدوج توافقی‌اند یعنی اینکه ثابت کنیم :

$$\frac{AB'}{AC'}=\frac{DB'}{DC'}$$

بسط تحرك عملی مفروضات : وقتی AD نیمساز زاویهٔ A باشد داریم :

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

مثلثهای ABB' و ACC' متشابهند وداریم :

$$\frac{AB'}{AC'}=\frac{AB}{AC}$$

مثلثهای $BB'D$ و $CC'D$ نیز متشابهند وداریم :

$$\frac{DB'}{DC'}=\frac{DB}{DC}$$

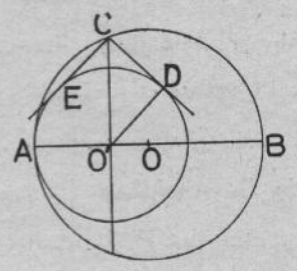
توجه به مراتب بالا راه حل را بدست می‌دهد :

$$\frac{AB'}{AC'}=\frac{AB}{AC} \text{ و } \frac{DB'}{DC'}=\frac{DB}{DC} \text{ و } \frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$$

$$\Longrightarrow \frac{AB'}{AC'}=\frac{DB'}{DC'}$$

مسئلهٔ دیگر

دو دایرهٔ مماس داخل با شعاعهای ۲a و ۳a مفروض است. ازمرکز دایرهٔ کوچکتر برخط المرکزین دو دایره عمود می‌کنیم وازنقطهٔ تلاقی این عمود با دایرهٔ بزرگتر مماسهایی بر دایرهٔ کوچکتر رسم می‌کنیم . ثابت کنید که این مماسها بر ـ هم عمودند .



بسط تحرك عملی مسئله : اگر CD و CE مماسهای موردنظر باشند، این دومماس وقتی برهم عمودندکه زاویهٔ ECD قائمه باشد وچون $O'C$ نیمساز زاویهٔ C است پس باید ثابت کنیم که زاویهٔ $O'CD$ برابر با ۴۵ درجه است و درنتیجه باید ثابت کنیم که مثلث $O'CD$ متساوی‌الساقین است یعنی ثابت کنیم که $DC=DO'$

بسط تحرك عملی مفروضات : در مثلث قائم الزاویهٔ ACB داریم :

$$O'C^2=O'A.O'B \quad \text{یا} \quad O'C^2=2a.4a=8a^2$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ $O'DC$ داریم :

$$CD^2=O'C^2-O'D^2=8a^2-4a^2=4a^2$$

$$\Longrightarrow CD=2a \Longrightarrow CD=O'D$$

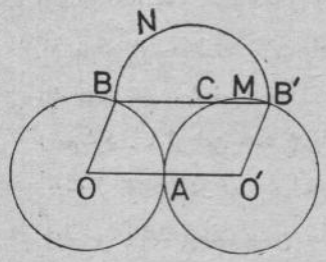
مسئلهٔ دیگر

دو دایرهٔ متساوی به مرکزهای O و O' که در A مماس خارجند مفروض است . شعاعهای OB و $O'B'$ را متوازی وهم‌جهت رسم می‌کنیم وبه قطر BB' نیمدایره‌ای در خارج‌دایره‌ها رسم می‌کنیم. ثابت‌کنیدکه‌مساحت سطح‌محصور بین این نیمدایره وکمانهای AB و AB' بامساحت‌متوازی‌ـ الاضلاع $OBB'O'$ برابراست .

اولین اقدام را برای‌محاسبهٔ‌سطح انجام نمی‌دهیم، زیرا:

بسط تحرك عملی مسئله: موضوع مسئله اثبات تساوی بین دو مساحت است . اگر بر طرفین یك تساوی جمله‌ای را اضافه‌کنیم ، یا از طرفین آن ، جمله‌ای را حذف کنیم ، تساوی بازهم برقرار است .

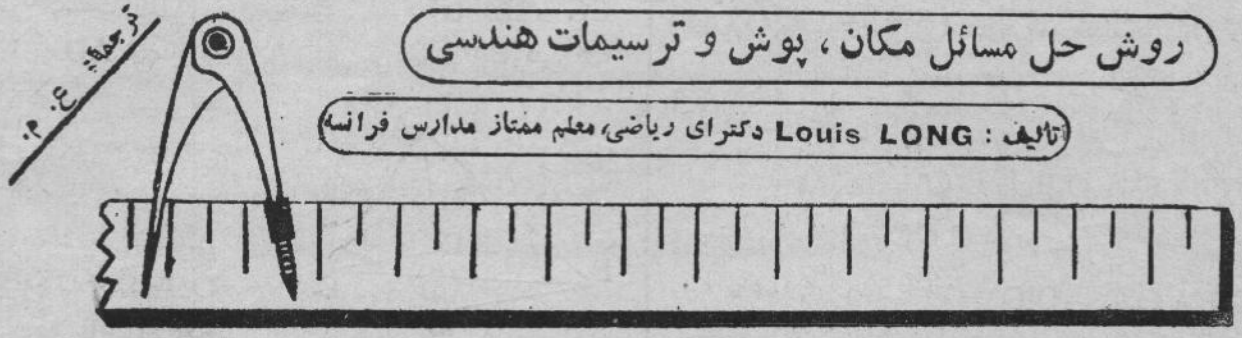
بسط تحرك عملی مفروضات: مساحتهای $OBB'O'$ و $ABNB'MCA$ درمساحت ABC مشترکند ،



پس باید ثابت کنیم که‌مساحت $CBNB'MC$ برابر است با مجموع مساحتهای OAB و $O'ACB'$

مساحت $CBNB'MC$ از مساحت نیمدایرهٔ BNB' به‌اندازهٔ مساحت قطعهٔ CMB' کمتر است . همین مساحت که‌برمساحت $O'ACB'$ اضافه شود مساحت قطاع $O'AB'$ را بدست می‌دهد .

از توجه به دوبسط بالا نتیجه می‌شود که باید ثابت کنیم: مساحت‌نیمدایرهٔ BNB' برابراست بامجموع‌مساحتهای قطاع OAB و قطاع $O'AB'$



روش حل مسائل مکان، پوش و ترسیمات هندسی

تألیف : Louis LONG دکترای ریاضی، معلم ممتاز مدارس فرانسه

ترجمهٔ: ع. م.

II - پوش

مسائل مربوط به‌پوش نسبت به‌مسائل مربوط به‌مکان، از لحاظ مشکل بودن شهرت بیشتری دارند . سعی ما بر این است تاخواننده را مطمئن سازیم که بر خلاف آنچه که گمان می‌کنند این مسائل را نیز می‌توان طبق قاعده‌وروش‌حل‌کرد. راههای مناسبی را ارائه خواهیم داد که مسائل پوش‌به‌مسائل مکان تبدیل شوند و در نتیجه صورت مسئله به شکل تازه‌ای مطرح گردد .

فصل اول

پوشهایی که عبارتند از مکان نقاطی که‌از آنهادوممماس منطبق برهم رسم‌می‌شود.

در ابتدای مطالعهٔ یك مسئلهٔ پوش ،بایدملاحظه‌کردکه آیا شکل مربوط دارای محور یا مرکز تقارن‌می‌باشد یانه.بعد از آن مماسهای مهم شکل را تعیین کرد وبالاخره معلوم‌کرد که پوش ازچه طبقه‌ای می‌باشد ،به این‌معنی‌که معلوم کرد از یك نقطهٔ غیر مشخص حد اکثر چند مماس می توان بـر پوش رسم‌کرد . اگر این عدد ۲ باشد طبقه با درجهٔ پـوش مساوی است (درجهٔ پوش حد اکثر تعداد نقاط آن واقع بـر یك خط می باشد) ؛ درچنین حالتی‌پوش‌یك مقطع مخروطی‌است.

قسمت عمدهٔ پوشهایی که در مسائل امتحانـی باید بدست‌آورد از مقاطع مخروطی می‌باشند.

این حدس که پوش مطلوب یك مقطع مخروطی است‌راه حل را کوتاه و خلاصه می کند امـا روش مطمئنی نمی‌تواند باشدو اتکاء به‌آن‌بی احتیاطی‌است . امکان‌دارد که پوش‌مطلوب منعکس یك مقطع مخروطی باشد ،یعنی منحنی باشد که عموماً از درجهٔ چهارم است.

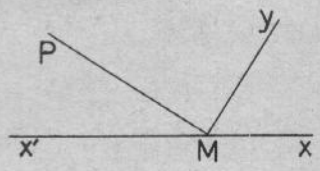
تعیین طبقهٔ پوش با انتخاب نقطهٔ M روی یك مماس مهم T گاهی بسیار ساده است . اگر تعداد مماسهای غیراز T که از M می‌توان رسم‌کرد p باشد ، در صورتی‌که Tیك مماس ساده باشد طبقهٔ پوش $p+1$ خواهدبود .تقریباًدربیشتر موارد شرط اخیر عملا محقق می‌باشد .

فرض کنیم که پوش E یك مقطع مخروطی باشد . اگر یکی از مماسهای بر آن خط بینهایت باشد، Eیك سهمی‌است و در غیر آن مرکز دار خواهد بود .برای تعیین o مرکزآن می‌توان دو مماس متوازی بر آن رسم کـردکـه o برخطـی متساوی‌الفاصله از این دو مماس واقع‌است .با تکرارعمل‌مکان دیگری از o بدست می آید و در نتیجه‌کاملا مشخص می‌شود .

پوش E مکان هندسی نقاط Mاست که از آنها دومماس منطبق برهم رسم‌می‌شود . تعیین این مکان غالباً میسر است‌و پوش E بوسیلهٔ نقاط و مماسها مشخص می‌شود.این روش‌که دربسیاری از حالات قابل استفاده است مسئلهٔ مفروض را به مسئله‌ای بسیار ساده تر تبدیل می‌کند ودرحقیقت کلیـد حـل مسائل بسیار غامض می باشد . از نظـر کلی بـدست آوردن نتایج مطلوب هندسی با استفادهٔ از همین روش یعنی تبدیل‌یك مسئله به مسئله‌ای ساده‌تر انجام می گیرد .

مسئلهٔ ۱ - خط $x''x$ و نقطهٔ Pدر خارج‌آن مفروض است . از P خطی متغیرمی گذرانیم که $x'x$ را درM قـطع

می کند ودر M عمود My را برPM اخراج‌می کنیم. پوش خط My را پیدا کنید .

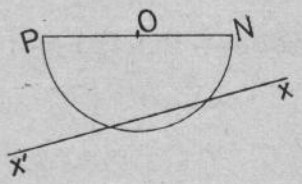


ملاحظه می‌شودکه M تصویر P بـر خط My و خط x'x را می پیماید . نتیجه‌می گیریم کـه پـوش خط My یك سهمی است که P کانون آن وx'xمماس در رأس آن‌می‌باشد .

راه حل به این‌سادگی به‌خاطر خاصیتی بود که ملاحظه شد . در اینجا چنین ملاحظه‌ای تصادفی بود . غالباً خاصیتی که به‌راه حل ساده و سریع بینجامد تشخیص داده‌نمی‌شود.

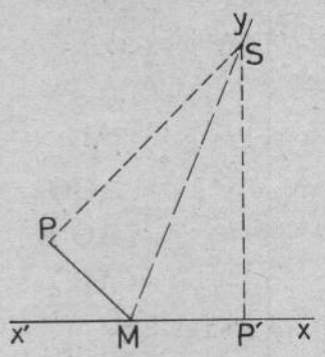
روشی که در زیرمطرح می‌شود به راه حلی می انجامد که تصادفی نیست : خواننده از مثال سادهٔ بالا دریافته است کـه تحـرك عملی صورت مسئله را کاملا باید در نظر داشته باشد .

معلوم می کنیم‌که از یك نقطهٔ معین N چنـد مماس بر پوش E رسم می‌شود . تعداد این مماسها برابر است باتعداد مماسهایی که از نقاط M نظیر آن رسم می شود . نقـاط M عبارتند از فصل مشترك x'x با دایرهٔ به قطرPN وتعدادآن‌ها حد اکثر برابر با ۲ است . پس E منحنی‌است از طبقهٔدوم ویك‌مقطع مخروطی‌می‌باشد .



برای اینکه این‌دو نقطه برهم منطبق شوند لازم و کافی است کـه دایرهٔ مـزبور بـر x'x مماس باشد ، یعنی فاصلهٔ O مرکز آن از x'x برابر با فاصلهٔ O تا نقطهٔ ثابت P باشد . باین ترتیب مکان O یـك سهمی است کهP کانون و x'x خط هـادی آن می‌باشد . چون N مجانس O در تجانس به مرکز P و به‌نسبت ۲ است پس‌مکان N سهمی است به کانون P که x'x مماس در رأس آن مـی باشد : همین مکان عبارتست از پوش E خـط My کـه N نقطهٔ تماس‌آن‌می‌باشد.

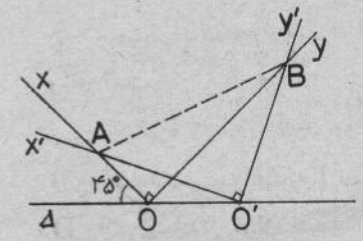
مسئلهٔ ۲ ـ خط x'x و نقطهٔ P در خارج آن مفروض است . از P خطی متغیرمی گذرانیم که x'x را در M قطع‌می کند و My نیمساز زاویهٔ PMx را رسم می کنیم ، پوش‌خط My چیست ؟



قبلا معلوم می کنیم که از یك نقطـهٔ S چند مماس‌می‌توانیم بر پوش Eرسم کنیم . اگرروی x'x طول MP'رابرابر با طول MP جدا کنیم SP = SP'خواهد بود، با توجه باینکه نظیر هر نقطهٔ P' یـك خط MS وجوددارد که عمود منصف PP' می‌باشد ملاحظه می کنیم‌که طبقهٔ پوش E برابر است با حد اکثر تعداد نقاط مشترك x'x با دایرهٔ به مرکز S و به شعاع SP یعنی برابر است‌با۲

این دو نقطهٔ فصل مشترك وقتی منطبق خواهند بودکه دایرهٔ مزبور بر x'x مماس باشد یعنـی S ازP و از x x به یك فاصله باشد . در این صورت مکان S سهمی است کـه P کانون و x'x خط هادی آن است و همچنین مـکان ، پوش مطلوب می‌باشد.

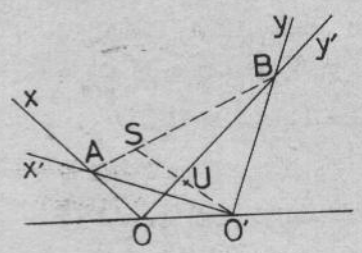
مسئلهٔ۳ ـ خط ثابت △ و زاویهٔ قائمهٔ xOyرادرنظر می گیریم‌که O رأس آن نقطهٔ ثابتی از △ است و ضلعهـای آن با △ زاویه‌های ۴۵ درجه می‌سازند . زاویهٔ قائمهٔ دیگر x'O'y' را در نظرمی گیریم که حول O' رأس‌خودمی‌چرخد بقسمی‌که O' نیز نقطهٔ ثابتی از △ می‌باشد. خطوط Ox و O'x' در A و خطوط Oy و O'y'در B متقاطع می‌شوند



پوش خط AB را پـیدا کنید .

قبلا مـلاحظـه می کنیم که Ox وOy بر پوش E مماس می‌باشند و هر گاه O'A با Ox موازی باشد مماس نظیر آن بر E خط بی‌نهایت می‌باشد.

از طرف دیگر ، نظیر هر نقطهٔ A واقع بـر مماس Ox تنها یك خط AO' و تنها یك نقطهٔ B و در نتیجه تنهـا یك مماس AB غیـر ازOx وجود دارد . پس پوش E از طبقهٔ ۲ بوده یك سهمی‌می‌باشد.



نقطهٔ غیرمشخصS رابر AB اختیارمی کنیم

کنیم .

چون زاویه‌های AOB و AO'B قائمه‌اند پس چهار ضلعی AOO'A محاطی است که AB قطر دایرهٔ محیطی آن می‌باشد. در این چهار ضلعی زاویهٔ ABO' که مکمل زاویهٔ AOO' است برابر با ۴۵ درجه می باشد و درنتیجه مثلث AO'B متساوی الساقین است و اگر I وسط AB باشد O'I بر AB عمودمی‌باشد .

یك مکان I دایرهٔ C_1 به‌قطر SO' است و مکان دیگر آن خط D است که بروتر OO' در وسط‌آن عمود می‌باشد بنا براین تعداد نقاط I (ودرنتیجه تعداد مماسهایی که از S بر E رسم می‌شود) برابر است با تعداد نقاط مشترك D و C_1 که حد اکثر ۲ است و در نتیجه پوش E یك مقطع مخروطی خواهد بود .

نقطهٔ S وقتی بر E واقع خواهد بود که دایرهٔ C_1 بر خط D مماس باشد . برای این کار لازم و کافی است که U مرکز C_1 که در وسط O'S است از O' و از D به یك‌فاصله باشد ، یعنی بر سهمی π_1 واقع باشد که O' کانون آن و D خط هادی آن باشد . چون در تجانس به‌مرکز O' و به‌نسبت ۲ نقطهٔ S مجانس نقطهٔ U است پس مکان S سهمی π است که O' کانون آن است و خط هادی آن خطی است که‌در O بر △ عمود شود و همین مکان پوش‌مطلوب می‌باشد.

تبصرهٔ ۱ ـ از همان موقعی که معلوم شد پوش مطلوب سهمی است که OA و OB دو مماس عمود بر هم بر آن هستند می‌توان‌نتیجه گرفت که O نقطهٔ‌تلاقی آنها برخط هادی واقع است .

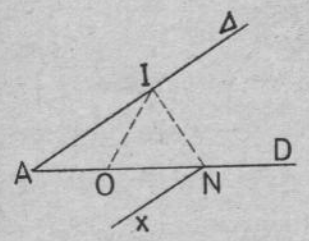
تبصرهٔ ۲ ـ از همان موقعی که معلوم‌شد O'I برمماس AB عمود است و اینکه I تصویر O' روی این مماس خط D را می‌پیمایدمی‌توان نتیجه گرفت که پوش AB سهمی است که O' کانون و D مماس در رأس بر آن است.

یاد داشت ـ این مسئلهٔ ساده‌ای‌نیست : از قبل محور‌های آن ملاحظه نمی‌شود ؛ در آن خطوط بسیاری وجود دارد . راه حلی غیر از آنچه گذشت مگر اینکه اتفاقی‌باشد . اما انتخاب راه حل گذشته که بر طبق روش انجام گرفت و به سادگی به نتیجه‌ای کاملا دقیق انجامید .

مسئلهٔ ۴ ـ دایرهٔ متغیر C را در نظر می گیریم که بر نقطهٔ ثابت F می گذرد و خط معلوم D را در نقطهٔ‌ثابت O قطع می کند . درنقطهٔ تلاقی دیگر این دایره و خط‌مماسی بر آن رسم می‌کنیم. پوش این مماس چیست؟

شکل مربوط به صورت مسئله خطوط متعددی را دربر دارد . بدون ترس از اشکالی می‌توان دایره ونقطهٔ F راکنار گذاشت ؛ با توجه به اینکه I مرکز دایره بر △ عمود‌منصف وتر OF واقع است که‌این‌خط‌با D در A متلاقی‌است می‌توان مسئله را چنین بیان کرد :

دو خط D و △ که در A متقاطع اند ونقطهٔ ثابت O واقع بر D مفروض است . روی △ نقطهٔ متغیر I وروی D نقطهٔ N را بقسمی که IN = IO باشد در نظر می گیریم .

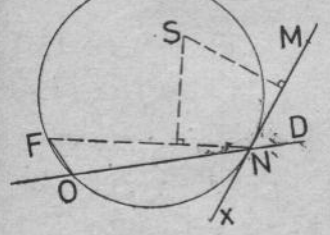


اگر Nx بر IN عمود باشد پوش Nx راتعیین کنید .

اگر I برخطی‌واقع باشد که در O بر D عمود است IN بر IO منطبق بوده و D یك مماس بر پوش E می‌باشد.

فرض می‌کنیم که N نقطهٔ غیر مشخصی از D باشد عمود منصف ON با △ تنها در یك نقطهٔ I متلاقی است‌و نظیر آن تنها یك خط Nx عمود بر IN وجود دارد .از این جهت که از هر نقطهٔ N واقع بر مماس D جز یك مماس‌متمایز از D بر E نمی‌توان رسم‌کرد پس E یك‌مقطع‌مخروطی‌است. وانگهی هر گاه N روی D در بینهایت باشد Nx خط‌بینهایت می شود ، بنا براین E یك‌سهمی‌است.

اگر M نقطهٔ غیر مشخصی از Nx باشد،دو زاویهٔ FNM و FON متساوی بوده و دارای‌اندازهٔ‌ثابت‌می‌باشند.



حال اگر M را درنقطهٔ دلخواهی از صفحه در نظر بگیریم نقاط N نظیر آن عبارتند از فصل مشترك D با مکان‌نقاطی که از آنها قطعه خط FM با زاویهٔ ثابت برابر با FON دیده می‌شود [این مکان مجموعهٔ دو کمان دایره است که Γ یکی از آنها D را دردو نقطهٔ I و I' قطع می‌کند ، البته هر گاه M در همان طرفی از D باشد که F واقع است] .

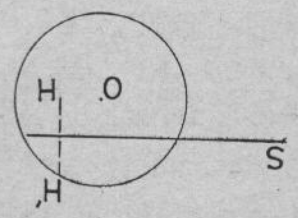
برای اینکه I و I' منطبق باشند لازم وکافی‌است که Γ بر D مماس باشد یعنی S مرکز این کمان از F و D به‌یك‌فاصله باشد . پس S بر سهمی واقع خواهد بود که F کانون و D خط هادی آن است .

ملاحظه می‌کنیم که

$FSM = ۲(\pi - FNM) = ۲(\pi - FON) =$ ثابت

نتیجه می‌شود که مثلث متساوی الساقین FSM شکل ثابت دارد . پس مکان M ازروی مکانS بایك‌تجانس به‌مرکز F بدست‌می‌آیدودرنتیجه‌این‌مکان‌یك‌سهمی‌به‌کانون F‌می‌باشد.

مسئلهٔ ۵ ـ مثلثهای ABC محاط در دایرهٔ معلوم‌Oرا در نظر می‌گیریم‌که مرکز ارتفاعی همهٔ آنها نقطهٔ مفروض‌H باشد . پوش ضلعهای این مثلث را پیداکنید.



می‌دانیم که قرینهٔ مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به هرضلع آن بر دایرهٔ محیطی مثلث واقع است . یکی از ضلعهای‌مثلث را درنظر می‌گیریم وE پوش آنرا تعیین می‌کنیم .

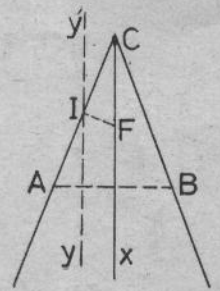
قبلا معلوم‌می‌کنیم‌که از یك‌نقطهٔ S چند مماس‌می‌گذرد. اگر H' قرینهٔ H نسبت به ضلع مزبور باشد تعداد مماسها برابرباتعداد نقاط H'است. برای‌تعیین‌آنهااز Sبر HH' عمود می‌کنیم‌زیرا H' فصل مشترك‌دایرهٔ O با دایرهٔ O_1 به‌مرکزS و به شعاع SH می‌باشد.

برای اینکه دودایره مماس باشند(یعنی شرط لازم‌وکافی برای انطباق دونقطهٔ H' نظیر S برقرار باشد) لازم و کافی است که‌فاصلهٔ S از O برابر باشد با مجموع‌یا تفاضل شعاعها که اگر R شعاع دایرهٔ O باشدباید داشته باشیم:

$SO = SH + R$ یا $SO = SH - R$ یا $SO = R - SH$

در همهٔ حالتها ملاحظه می‌شودکه مکانS ، یعنی پوش E ، یك مقطع مخروطی به‌کانونهای O وHمی‌باشد. وچون دراستدال بالا از ضلع مشخصی استفاده‌نکردیم پس‌پوش هریك از ضلعها همان یك مقطع مخروطی می‌باشد .

مسئلهٔ ۶ ـ مثلث‌متساوی‌الساقین$ABC(AB = BC)$ مفروض است. سهمی به‌کانونF درنظر می‌گیریم‌که‌درAوB برضلعهای AC وBC مماس باشد.اگر I تصویرF روی‌AC وA وB ثابت‌بوده‌رأس‌Cتغییرمکان دهد پوشFI را پیداکنید.



C x عمود منصف AB محور تقارن سهمی است وF روی این عمود منصف تغییر مکان می‌دهد . چون ضلعACدر Aبرسهمی مماس است و محور آنرا در C قطع می‌کند پس $FA = FC$ بوده و نتیجه می شود که F بر نقطهٔ تلاقی Cx با عمود منصف AC قرار دارد و I وسط AC می‌باشد . اگر از I خط y'yرابر AB عمودکنیم این خط در نقطهٔ ثابت AB را قطع می‌کند ودرنتیجه ثابت می‌باشد. یعنی I برخط موازی با Cx ومتساوی الفاصله از A و Cx ، تغییر مکان می‌دهد. از این‌موضوع‌نتیجه می‌شودکه FI برسهمی‌مماس‌است‌که‌A کانون وy'y مماس دررأس ودرنتیجهCx خط هادی آن می‌باشدیعنی این سهمی پوش خط FI می‌باشد .

این مسئله را می‌توان برطبق‌روش کلی حل‌کرد ومعلوم کردکه‌از یك نقطهٔ‌معین چندخط FI می گذرد. دراین‌صورت‌باید صورت مسئله را به‌ترتیب زیر بیان کرد:

ضلع زاویهٔ قائمه‌ای برA می گذرد وI رأس زاویهٔ‌قائمهٔ آن برخط ثابت y'y تغییر مکان می‌دهد . پوش ضلع دیگرآن را پیداکنید.

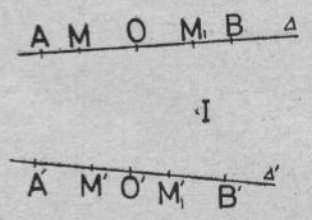
مسئلهٔ ۷ ـ دوقطعه خط AB و $A'B'$ که به‌ترتیب بردو خط متعامد △و'△ تکیه دارند مفروض است. روی △ دونقطهٔM‌وM_1 وروی '△دونقطهٔ M'وM'_1رابقسمی‌انتخاب می‌کنیم‌که :

$$\frac{M'A'}{M'B'} = \frac{MA}{MB} \quad \text{و} \quad \frac{M'_1A'}{M'_1B'} = \frac{M_1A}{M_1B}$$

مکان مرکزکرهٔSکه برچهار نقطهٔ مزبور می گذرد وقتی که M و'M ثابت و M' و M'_1 متغیر باشند یك خطاست. هرگاهM و'M نیزمتغیر باشند پوش این خط را تعیین‌کنید.

درفصلهای قبلی این کتاب مکان مرکزکرهٔ Sتعیین شده است که عبارتست از D فصل مشترك صفحهٔ P_2 با صفحهٔ P_1عمودمنصف MM'.

واضح است‌که هرگاه Mو M' تغییر کنند ، خط D فصل مشترك صفحهٔثابت P_2 باصفحهٔ P_1 به یك پارا متربستگی داشته درصفحهٔ P_2 دارای یك درجهٔ آزادی است ودرنتیجه دارای یك منحنی پوش می‌باشد . وقتی صفحهٔ P_1 در بینهایت باشد خط D نیزدربینهایت‌خواهد بود . بنابراین پوش خط D که از درجهٔ دوم است یك سهمی خواهد بود.



معلوم کنیم که از یك‌نقطهٔI از صفحهٔ P_2 چند خطD می گذرد . اگر O‌وسط MM_1 و O' وسط $M'M'_1$ باشد و I مرکز کرهٔ S باشد که بر چهار نقطهٔ

M و M′ و M_1 و M_1' می گذرد O I و IO′ به ترتیب بر △ و △′ عمود بوده و داریم:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{M'A'}{M'B'} \quad و \quad \frac{M_1A}{M_1B}=\frac{M_1'A'}{M_1'B'}$$

ونتیجه می‌شود که :

$$OM.A'B' = O'M'.AB \qquad (1)$$

اگر I ثابت باشد باتوجه به‌اینکه طولهای IO و IO′ معلوم‌اند خواهیم‌داشت:

$$OM^2 - O'M'^2 = OI^2 - O'I^2 = \text{ثابت} \quad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) برای OM دو مقدار متساوی ومختلف العلامت بدست می‌آید و نتیجه می‌شود که تنها یك کرهٔ S به مرکز معلوم I وجود دارد. نظیر این کره دو صفحهٔ P_1 وجود داردکه یکی ازآنها عمود منصف MM′ و دیگری عمود منصف M_1M_1' است . بنابراین بر نقطهٔ I عموماً دوخط متمایز D می گذرد که هریك ازآنها فصل‌مشترك صفحهٔ P_2 بایکی ازصفحات P_1 می‌باشد.

برای اینکه بر I تنها یك خط D بگذرد لازم وکافی است که‌دوصفحهٔ P_1 منطبق باشند که‌درنتیجهٔ آن دوقطعهٔ MM′ و M_1M_1' منطبق‌بوده کرهٔ S بر △ و △′ مماس‌باشد. بنابراین مکان I یعنی پوش E عبارتست از مکان مرکز کره‌ای که‌بر △ و △′ مماس‌است و عبارت خواهد بود از یك سهمی که محورآن باعمود مشترك دوخط △ و △′ موازی است. I نقطهٔ تماس خط D با پوش خودمی‌باشد.

تمرینات

۱ ـ دایرهٔ C به شعاع معلوم حول یکی از نقاطش‌می ـ چرخد. پوش قطبی یك نقطهٔ ثابت را نسبت به‌این دایره معلوم کنید .

۲ ـ دایرهٔ C به شعاع معلوم روی خط معلوم D می‌غلتد . پوش قطبی یك نقطهٔ ثابت را نسبت به این دایره معلوم کنید.

۳ ـ هذلولی H ودونقطهٔ ثابت A و B از آن مفروض است. از این دونقطه‌موازی بایك خط D رسم می کنیم که‌هذلولی را در α و β قطع می‌کنند . هرگاه D تغییر کند پوش خط αβ را پیدا کنید .

۴ ـ △ محور اصلی دایرهٔ ثابت با دایره‌هایی است که بریك نقطهٔ معلوم‌می گذرد و برخط معلوم مماس می‌باشند. پوش △ را پیداکنید.

۵ ـ دایرهٔ ثابت O و دایرهٔ متغیر O′ به شعاع ثابت مفروض است . هرگاه مرکز O′ یك خطیا یك دایره‌را بپیماید پوش محور اصلی دایره‌های O و O′ را پیدا کنید .

۶ ـ پوش قطبیهای یك نقطهٔ ثابت‌را نسبت به‌دایره‌هایی که برنقطهٔ معلوم می گذرند و بر خط معلوم مماس می‌باشند تعیین کنید .

۷ ـ دایرهٔ ثابت O ونقطهٔ ثابت A درصفحهٔ آن‌ودایرهٔ متغیر به مرکز I که همواره بر A می گذرد مفروض است . هرگاه I بردایرهٔ O جابجا شودپوش خط D محور اصلی دو دایرهٔ O و I را پیدا کنید.

۸ ـ کرهٔ S ویك نقطهٔ P مفروض است . کرهٔ Σ بر P می گذرد ومرکزآن روی S قراردارد . هرگاه مرکز Σ دریك صفحهٔ π ثابت بماند پوش صفحهٔ اصلی دوکرهٔ S و Σ را پیدا کنید .

۹ ـ مخروط مایل به‌رأس S که قاعدهٔ آن دایرهٔ C است مفروض است . یك مولد غیر مشخص Sa از این مخروط را درنظر می گیریم‌وصفحهٔ P را بر S وعمود بر Sα می گذرانیم که دایرهٔ C را درنقطهٔ b و C قطع می‌کند . پوش خط bc را پیداکنید .

دانش‌آموز رتبهٔ اول امتحانات نهایی خرداد ۴۹

ششم ریاضی استان کرمان

مهدی نمازیان

از دبیرستان شاهپور کرمان

جمع نمرات کتبی : ۱۸۸/۸۳ ـ معدل کل : ۱۹/۴۷

صد مسئلهٔ جالب و حل آنها

ترجمهٔ: د یدر ن

۶۰ـ آلفاها و بتاها

کلاسی با شاگردان متعددرا به‌دودسته تقسیم کرده‌ایم، شاگردان بخش A را به‌نام « آلفاها » وشاگردان بخش B را به‌نام «بتاها» میخوانیم. آلفاها ازاینکه بزرگتر از بتاها هستند مباهات می‌کنند، در صورتی که بتاها از اینکه در ریاضیات عالی‌اند به‌خودمی‌بالند. روزی که‌یك آلفایك بتارا باحالت خصمانه می‌نگریست، بتا از وی پرسیدکه: «منظورشماازاینکه‌می گوئید بزرگتر از ما هستید چیست؟ آیا این به‌معنای اینست‌که:

۱) هرآلفا بزرگتر ازهربتاست؟

۲) بزرگترین آلفا از بزرگترین بتا بزرگتر است ؟

۳) هرآلفا بزرگتر از یك بتاست؟

۴) هربتا از یك آلفا کوچکتر است؟

۵) به ازای هرآلفا بتایی وجود دارد (و متقابلا برای هربتا) که ازآن کوچکتر باشد ؟

۶) به‌ازای هر بتا آلفایی وجود دارد (و متقابلا برای هرآلفا) که ازآن بزرگتر باشد؟

۷) کوچکترین بتاکوچکتر ازکوچکترین آلفاست؟

۸) عدهٔ آلفاهای کوچکتر ازکوچکترین بتا از عدهٔ بتاهای کوچکتر از بزرگترین بتا بیشتراست؟

۹) مجموع قدهای آلفاهاازمجموع قدهای بتاها بیشتراست؟

۱۰) قد متوسط آلفاها از قد متوسط بتاها بیشتر است؟

۱۱) تعدادآلفا های بزرگتر از بتای مفروض، بیشتر از تعداد بتاهای بزرگتر ازآلفای معلوم می‌باشد ؟

۱۲) تعدادآلفاهایی که قدشان بلندترازقدمتوسط بتاهاست بیشتر از تعداد بتاهایی است‌که قدشان بیشتر از قامت متوسط آلفاها نیست؟

۱۳) اگرآلفاها و بتاها را به‌ترتیب مرتب کنیم، قدآن کسی‌که در وسط صف آلفاهاست بزرگتر از قدآن کسی است‌که در وسط صف بتاها قرار دارد؟»

(اگردرصفی تعداد شاگردان زوج باشد، واسطهٔ حسابی قدهای دوشاگرد وسطی را حساب می‌کنیم.)

این سیل سؤالات آلفا را ازکوره بدرکرد و اورا مات و متحیر ساخت.

اکنون این مسئله را برای خواننده مطرح می‌کنیم : از بین این سئوالات کدامها از یکدیگر مستقل می‌باشند وکدامها اینچنین نیستند ؟

به‌بیانی دیگر، دسته های دو سؤالی را طوری بیابید که جواب «آری» برای اولین سؤال ، مستلزم جواب «آری» برای دومی باشد؛ آیا سؤالات معادل هم، یعنی جفتهایی از سؤالات وجود دارد که جواب هردو یکی باشد ؟ آیا جفت پرسشهایی وجود داردکه نه‌مستقل و نه‌معادل‌هم باشند ؟

جواب ـ امکانات مختلف را درنظر گرفته وعملی راکه پاسخ « آری » برای p لازمهٔ پاسخ « آری » به q می‌باشد به $P \to q$ نمایش می‌دهیم، در این صورت داریم:

۱→۲، ۱→۳، ۱→۴، ۱→۷، ۱→۸، ۱→۱۰، ۱→۱۱، ۱→۱۲

۱→۱۳، ۲→۴، ۳→۴، ۵→۲، ۴→۷، ۶→۲، ۶→۴،

۶→۹، ۷→۳، ۸→۳، ۸→۷،

سؤالهای۲و۴ وهمچنین سؤالهای۳و۷ معادل‌می‌باشند .

۶۱ـ آمار

روزی‌آمارگری خواست درمورد تمام‌کشورها، استفادهٔ کوپه‌های قطار را برای اشخاص دودی واشخاص غیر دودی مورد مطالعه قرار دهد. امکانات زیر را درنظر گرفت:

(a) اغلب اوقات دودیها به‌کوپهٔ مخصوص دودیها می‌روند .

(a′) نفی (a) (منظور از « نفی (a) » مخالف با (a) است) .

(b) اغلب‌اوقات غیر دودیها به‌کوپهٔ مخصوص دودیها می‌روند .

(b′) نفی (b)

(c) کوپه‌های مخصوص‌دودیهافقط بوسیلهٔ دودیها مورد استفاده واقع‌می‌شود.

(c′) نفی (c)

(d) کوپه های مخصوص به غیردودیها فقط مورداستفادهٔ دودیها قرار می گیرد.

(d′) نفی (d).

ممکن است که هرکشوری را بایکی ازحرف d،c،b،a بدون زبر یا با زبر مشخص نمائیم ؛ واضح است که هیچکدام از حروف نمی‌تواند تواماً با زبر و بدون زبر باشد، زیرا هر تأکید با زبر در مقام نفی تأکید بدون زبر نظیر است بنابراین شانزده نشانه وجود دارد.

آیا می‌توانیم مسافرین را در شانزده‌ترن طوری تقسیم کنیم که ترنهای مختلف با نشانه‌های متفاوت نظیر باشد؟

حل -

نشانه های مورد بحث عبارتنداز :

۱) abcd ۲) abcd′ ۳) abc′d

۴) ab′cd ۵) a′bcd ۶) abc′d′

۷) ab′c′d ۸) a′b′cd ۹) ab′c′d′

۱۰) a′bc′d ۱۱) a′bcd′ ۱۲) ab′c′d′

۱۳) a′bc′d′ ۱۴) a′b′cd′ ۱۵) a′b′c′d

۱۶) a′b′c′d′

ثابت می‌کنیم که مابین این نشانه ها دوتای ab′c′d و a′bcd′ وجود داردکه با هیچکدام از ترنها مطابقت نمی کند. تعداد دودیهایی که به کوپهٔ دودیها می‌روند به P_p وتعداد دودی هائی راکه به کوپه غیردودیها می‌روند به P_n نمایش می‌دهیم، همچنین تعدادغیردودیهائی راکه به کوپه‌های دودیها وغیردودیها می‌روند به‌ترتیب به N_p و N_n نمایش می‌دهیم .

با توجه به‌معنی حروف a،b′،c′،d، نشانهٔ ab′c′d به‌معنای آنست که :

(۱) $P_P > P_n$ ، $N_p < N_n$ ، $P_P < N_P$ و $P_n > N_n$

از سه نا مساوی اول دستگاه (۱) داریم

$N_n > N_p > P_p > P_n$ و از آنجا $N_n > P_n$ رابطه اخیر با چهارمین عضو از نامساویهای دستگاه (۱) متناقض است.

در نشانهٔ ab′c′d نیز تضاد وجود دارد ونمی‌تواند در هیچ ترنی یافت شود.

در نشانهٔ a′bcd′ نیز تضاد وجود دارد زیراکه این نشانه معرف نا مساویهای زیر است :

(۲) $P_p < P_n$، $N_p > N_u$، $P_p > N_p$، $P_n < N_n$

و درآن سه‌تای اول با چهارمی متناقضند.

مطابق با جدول زیر می‌توانیم با۱۴ نشانه دیگر، ترن‌های ممکن را معرفی نمائیم (P معرف دودیها و N شاخص غیر دودیهاست).

شمارهٔ ترن	نشانه	پخش مسافرین درکوپه‌ها	
		برای دودیها	برای غیر دودیها
۱	abcd	PPP NN	PP N
۲	abcd′	PPPP NNN	P NN
۳	abc′d	PPP NNNN	PP N
۴	ab′cd	PPPP N	PPP NN
۵	a′bcd	PPP NN	PPPP N
۶	abc′d′	PP NNN	P NN
۸	a′b′cd	PP N	PPP NN
۹	ab′cd′	PP N	P NN
۱۰	a′bc′d	P NN	PP N
۱۲	ab′c′d′	PP NNN	P NNNN
۱۳	a′bc′d′	P NNNN	PP NNN
۱۴	a′b′cd′	PP N	PPP NNNN
۱۵	a′b′c′d	P NN	PPPP NNN
۱۶	a′d′c′d′	P NN	PP NN

۶۲- گروههای خون

طبق آزمایشهای لاندشتینر، ژانسکی، موس و غیره می‌دانیم که هرکس دارای‌یکی‌ازگروه خونهای O،A،B،AB می‌باشد ؛ از این دسته بندی می توانیم بدانیم که آیا فردی می‌تواند بدون آنکه خطری متوجه باشد خونش را به‌دیگران بدهد یاخیر. نشانهٔ $X \to Y$ به معنای‌آنست‌که فردی ازگروه X همیشه می‌تواند خونش رابه‌فرد دیگری ازگروه Y بدون در برداشتن خطراتی برای شخص اخیربدهد. قوانین‌کشف شده بوسیلهٔ دانشمندان فوق را می‌توانیم به‌صورت زیر بیان‌کنیم:

I- X هرکه باشد: $X \to X$

II- X هرکه باشد: $O \to X$

III- X هرکه باشد: $X \to AB$

IV- هر رابطهٔ $X \to Y$ که‌باجانشین‌کردن x به‌توسط O،A، B،AB از I و II و III نتیجه نشود غلط است .

ثابت‌کنیدکه :

(۱) دستگاه قوانین I-IV متناقض نیست.

(۲) بافرض صحت‌قوانین I-IV نتیجه خواهد شدکه x وy وz هرچه باشد $x \to y$ و $y \to z$ که ایجاب می کند $x \to z$

(۳) دستگاه I-IV موجب می‌شود « نفی $A \to B$» را

دقت: عبارت « هرچه باشدX» که در I ، II ، III دیده

می‌شود، به‌معنای آنست که روابط مفروض وقتی که X معرف AB،B،A،O باشد قابل قبول است. تبصره‌ای متشابه برای (۲) بکارمی‌رود.

حلـ نشانه‌های معرف گروههای خون را در سطرها و ستونها می‌نویسیم، خون دهنده‌ها در ستونها و خون گیرنده‌ها در سطرها قرار داده شده‌اند:

خون دهنده‌ها	خون گیرنده‌ها: O	A	B	AB
O	+	+	+	+
A	−	+	−	+
B	−	−	+	+
AB	−	−	−	+

برای خواندن جدول، سطر غیرمشخصی (مثلادومی) و همچنین ستونی غیر مشخص (مثلاسومی) را انتخاب‌می‌کنیم اگر درمحل تقاطعشان علامت + وجود داشت، دهندهٔ نظیر سطر می‌تواند خونش رابه گیرندهٔ نظیرستون بدهد بدون آنکه خطری برای شخص اخیر وجود داشته باشد. اما اگر درمحل تقاطع علامت − وجود داشته باشد این کار خطرناك است. مثلا A نمی‌تواندخونش رابه B بدهد. جدول‌فوق‌انتقال گروه خونهای ممکن رانشان می‌دهد. می‌توانیم ثابت‌کنیم که‌قانون I محقق‌است؛ زیرا، این‌قانون‌ایجاب‌می‌کندکه‌قطرجدول فقط‌شامل علامت + باشد وازروی جدول‌این‌موضوع‌مشاهده می‌شود. قانون II ایجاب می‌کند که سطر نظیر O شامل علاماتی غیر از + نباشد، این موضوع نیزمحقق می‌شد. قانون III ایجاب می‌کندکه ستون نظیر AB شامل علاماتی غیر از + نباشد؛ این موضوع نیز از روی جدول محقق شده است. اگر در جملات‌قوانین I،II وIII به‌ترتیب‌به‌جای X علامات A،O، AB،B را قرار دهیم، دقیقاً نه‌رابطه بدست می‌آوریم، این روابط‌بوسیلهٔ علامت + درجدول مشخص شده‌اند. سایرموارد دیگر (۷تا وجود دارد) بوسیلهٔ علامتهای − ثبت شده‌اند. این علامات درمحل تقاطع سطرها وستونهایی است که‌نمی‌توانند به‌ازای جانشینی هیچیك ازنشانه‌های A،O،B وAB درقوانین I،II، III دارای علامت + باشند؛ این دقیقاً آن چیزیست که قانون IV را موجب می‌شود.

می‌بینیم که این جدول معادل با دستگاه قوانین I-IV است و این امر (۱)را مبرهن می‌کند.

(۲) می‌تواندرجدول صدق‌کند: مثلاً $A \to B$، $O \to A$ ازآنجا $O \to AB$ این‌موضوع درجدول صادق‌است؛ این امر می‌تواند در تمام موارد محقق باشد.

(۳) از IV و این موضوع که هیچکدام از جانشینی‌های نشانه‌های مختلف به‌جای X در قوانین I-III رابطهٔ $A \to B$ را نمی‌دهد، نتیجه می‌گیریم که این رابطهٔ $A \to B$ غلط است

۶۳- بازهم درباره گروههای خون

فلیکس برنشتین (که نامش با نظریه مجموعه‌ها همراه است) اولین کسی‌بودکه‌قوانین وراثت رابرای گروههای خون به‌صورت فرمول درآورد. مثلا، فرض‌می‌کنیم که پدر، متعلق‌به گروه A و مادر وابسته به گروه AB باشد. به‌نشانهٔ A که فقط شامل یك حرف است، حرف O رابه‌معاونت می‌گماریم، در این صورت گروه پدر به‌صورت AO نوشته‌می‌شود. بدین ترتیب گروههای والدین AO و AB خواهند شد. تشابه گروه فرزند باید شامل یك حرف ازحروف گروه پدر وهمچنین یك حرف ازحروف گروه مادرباشد. پس نشانه‌های ممکن‌برای فرزندان به‌صورت AA،AB،OA،OB است.

این نشانه‌ها باید ساده شوند و برای این منظور بجای دوحروف AA، A را یك‌مرتبه می‌نویسیم و هربار که به‌یك نشانه دوتائی ازآنها برخوردیم یك O آنرا برمی‌داریم. بدین ترتیب A، AB،A،B را خواهیم داشت. در نتیجه، درمثال ما، فرزند می‌تواند متعلق به‌یکی ازگروههای A،B،AB باشد وبه O متعلق نیست.

قواعدی‌که مربوط به‌اضافه‌کردن O، گرفتن یك نشانه از هریك ازوالدین و اختصارآن تاحد ممکن می‌شود ونشانه‌های حاصل، بطور کلی (و نه فقط در مثال فوق) نظریهٔ فنوتیپیك از وراثت گروههای خون را مشخص می‌کنند. قوانین مربوط به‌انتقال خون درمسئلهٔ ۶۲ داده شده است.

دوبرادرکه‌قوانین‌انتقال خون رامی‌شناختند، می‌دانستند که هیچکدامشان نمی‌تواندبه‌دیگری خون بدهد، ولی هرکدام می‌توانند خون مادرشانرا دریافت‌کنند. آیا ممکن است برای این منظور خواهرشانرا جانشین مادر کنند؟

حل ـ فرض می‌کنیم که X وY نشانه‌های‌شاخص گروه‌های خون دو برادر باشند و همچنین دو برادر را با همین نشانه‌ها نمایش می‌دهیم. چون X نمی‌تواند خونش را به Y بدهد، جدول قبلی در محل تقاطع سطر X وستون Y دارای علامت منفی خواهد بود؛ چون Y نمی‌تواند خونش را به X بدهد، در محل تقاطع سطر Y و ستون X نیز علامت منفی وجود دارد. دوعلامت نسبت به‌قطرجدول قرینه‌اند واین‌امکان

ندارد مگر آنکه یکی از برادران به گروه A و دیگری به گروه B تعلق داشته‌باشد. جدول نشان می‌دهدکه A می‌تواند از خون A یا O بپذیرد و B می‌تواند از خون B یا O دریافت‌کند. چون دو برادر می‌توانند خون مادرشانرا قبول کنند، خون مادر از گروه O است. قوانین وراثت ایجاب می‌کنندکه به‌نشانه های یك حرفی والدین O را اضافه کنیم، نشانهٔ مادر را به‌صورت OO می‌نویسیم. به‌موجب قانونی که هرکدام از فرزندان، حرفی از هریك از والدین می‌پذیرند، برادران حروف A و B را از پدرکسب کرده‌اند، درصورتی‌که مادر صاحب A و B نیست بنابراین پدر AB است؛ والدین AB و OO نمی‌توانند به‌غیراز AO وBOویاپس ازاختصار A و B، فرزندان دیگری داشته‌باشند. بنابراین خواهران دو برادر از A یا B هستند.

با توجه به جدول، خواهر می‌تواند فقط به‌یکی از برادران و نه به‌دیگری خون‌بدهد. درخانواده هیچکس نمی‌تواند از خون پدر دریافت کند، ولی همه می‌توانند خون مادر را مورد قبول قرار دهند.

۶۴ـ کار بیهوده

هرگاه‌بخواهیم میخهای چوبی‌رادرنقاط‌متساوی الفاصله ازجاده‌ای درزمین فروکنیم، بهترآنست‌که ازاولین نقطهٔ مورد نظر شروع کنیم و به آخرین آنها ختم نمائیم. ولی چگونه می‌توانیم این‌کارا به‌بدترین طریق ممکن انجام دهیم، یعنی این جاده را هرچه طولانی‌تر بپیمائیم.

حل ـ اگر موضع مورد نظر M واقع مابین دو موضع L وN باشد، راه ABC...LMN....T کوتاهتر از ABC...LN....TM است و اختلافشان TM است. ازاین امرنتیجه‌می گیریم که‌راه ABC ...LM...T نمی‌تواند با تغییرجهت مسیر برای هرمیخ چوبی، درازتر گردد و این طول از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$d = \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{BE} + \dots$$

اگر تعداد میخها فرد باشد داریم:

$$d' = \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DE} + \dots + \overline{RS} - ST$$

و اگر تعداد میخها زوج باشد داریم:

$$d'' = \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DE} + \dots - \overline{RS} + ST..$$

طولهای A،B،C، ... و T را به x_0،x_1،x_2،.... و x_n نمایش‌می‌دهیم. مطابق باآنچه که‌درفوق به‌آن‌اشاره‌کردیم داریم:

$$x_0 < x_1 , x_1 > x_2 \text{ و } x_2 < x_3 , x_3 > x_4 , \dots$$

مواضع متساوی‌الفاصله‌اند، می‌توانیم رشتهٔ (۱) را مانند بعضی از تبدیلات اعداد ۰،۱،۲،... m فرض‌کنیم.

$$(1) \quad x_0 , x_1 , x_2 , \dots , x_n$$

از تساویهای

$$\overline{AB} = x_1 - x_0 , \overline{BC} = x_2 - x_1 , \overline{CD} = x_3 - x_2$$

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نتیجه می گیریم که به‌ازای مقادیر زوج و فرد n داریم:

$$d' = n(n+1) - 4(x_2 + x_4 + x_6 + \dots x_n) - 3(x_0 + x_n)$$

I- اگر تعداد میخها فرد (n زوج) باشد، مجموعهٔ اعداد ۰، ۱،...،n را به‌سه‌بخش تقسیم می‌کنیم:

C_1شامل $\frac{n}{2} - 1$ عدد: $0, 1, 2, \dots, \frac{n-4}{2}$ ،

C_2شامل ۲ عدد: $\frac{n-2}{2}$ ، $\frac{n}{2}$

C_3 شامل $\frac{n}{2}$عدد: $\frac{n+2}{2}$ ، $\frac{n+4}{2}$ ، $\frac{n+6}{2}$ ،...،m؛

فرض می‌کنیم که:

$x_2, x_4, x_6, \dots, x_{n-2}$ تبدیل غیرمشخصی از C_1 باشد، x_0, x_n، تبدیل غیرمشخصی‌از C_2 باشد، $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-1}$تبدیل‌غیرمشخصی‌از$C_3$باشد، دراین‌صورت،

$$d' = n(n+1) - 4\frac{\frac{n-4}{2}\left(\frac{n-4}{2} - 1\right)}{2} - 3 \times \left(\frac{n-2+n}{2}\right) = \frac{n^2 + 2n - 2}{2}$$

و d' بزرگترین فاصله‌ایست که در ضمن نصب میخها می‌توانیم طی‌کنیم؛ این فاصله را می‌توانیم به‌طریق زیر توجیه کنیم. ابتداازنقطه‌ای از C_2 شروع کرده‌ومتناوبازC_1می گذریم، سپس از C_3 و بعدازآن از C_1 وغیره و،... و در خاتمه از دومین نقطهٔ C_2 عبور می‌کنیم. فاصله به‌ترتیبی‌که نقاط C_1 و C_2 را می‌پیمائیم بستگی ندارد.

II- اگر تعداد میخها زوج (n فرد) باشد، تبدیل غیر مشخصی از اعداد ۰، ۱، ۲،... $\frac{n-3}{2}$ را به $x_2, x_4, \dots, x_{n-1}$ و تبدیل غیر مشخصی‌از اعداد $\frac{n+3}{2}$ ، $\frac{n+5}{2}$ ،...،n را به $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-2}$ نشان می‌دهیم فرض می‌کنیم که:

$$x_0 = \frac{n-1}{2} , x_n = \frac{n+1}{2}$$

در این‌صورت داریم:

$$d'' = n(n-1) - 4\frac{\frac{n-3}{2}\left(\frac{n+3}{2} + 1\right)}{2} - 3\frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n^2 + 2n - 1}{2}$$

و d'' بزرگترین مسیری است که می‌توانیم برای نصب میخها طی‌کنیم ومی‌توانیم این طی طریق‌رابه‌صورمختلف‌انجام دهیم.

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۶۷

۶۷/۱- بزرگترین عددی را پیدا کنیدکه چون هریك ازعددهای ۱۱۶۶ و ۱۵۵۸ و ۲۲۴۴ را بر آن تقسیم کنیم باقیمانده‌های سه‌تقسیم بایکدیگر برابر باشند.

حل - اگر a عدد مطلوب و r باقیماندهٔ تقسیمها باشد داریم:

$$۱۱۶۶ = aq_۱ + r$$
$$۱۵۵۸ = aq_۲ + r$$
$$۲۲۴۴ = aq_۳ + r$$

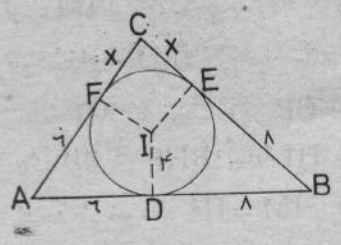
طرفین هر یك از این رابطه‌ها را دوبه‌دو از هم کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$۳۹۲ = a(q_۲ - q_۱)$$
$$۶۸۶ = a(q_۳ - q_۲)$$
$$۱۰۷۸ = a(q_۳ - q_۱)$$

عدد مطلوب بزرگترین مقسوم علیه مشترك سه عدد ۳۹۲ و ۶۸۶ و ۱۰۷۸ است که برابر با ۹۸ می‌باشد.

۶۷/۲- شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی ۴ است و دو قطعه‌ای که توسط این دایره روی یك ضلع مثلث جدا می‌شود به‌طولهای ۶ و ۸ می‌باشند. اندازه‌های ضلعهای مثلث را حساب کنید.

حل - مطابق باشکل داریم:



$$AD = AF = ۶$$
$$BD = BE = ۸$$
$$r = ID = IF = IE = ۴$$

بافرض $CF = CE = x$ خواهیم داشت:

$$a = ۸ + x \text{ و } b = ۶ + x \text{ و } c = ۱۴$$
$$p = ۱۴ + x \text{ و } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S = \sqrt{(۱۴+x)(x)(۶)(۸)} = \sqrt{۴۸x(۱۴+x)}$$
$$S = pr \Longrightarrow \sqrt{۴۸x(۱۴+x)} = ۴(۱۴+x)$$

از حل معادلهٔ اخیر $x = ۷$ بدست می‌آید و داریم:

$$a = ۱۵ \text{ و } b = ۱۳ \text{ و } c = ۱۴$$

۶۷/۳- کوچکترین عددی را پیدا کنیدکه نصف آن توان دوم، ثلث آن توان سوم، خمس آن توان پنجم و سبع آن توان هفتم باشد. این کوچکترین عدد چند رقمی خواهد بود.

حل - چون عدد مطلوب برهر یك از عددهای ۲و۳و۵و۷ قابل قسمت است پس به‌صورت کلی زیر می‌باشد:

$$N = ۲^u \times ۳^x \times ۵^y \times ۷^z$$

نصف N مربع کامل‌است پس u فرد بوده و هر یك از عددهای x و y و z زوج می‌باشند. ثلث عدد مکعب کامل است پس x به‌صورت $۳a + ۱$ بوده‌و هر یك‌از عددهای u و y و z مضرب۳ می‌باشند. به همین ترتیب y به‌صورت $۵b + ۱$ بوده هریك ازعددهای u و x و z مضرب ۵ می‌باشند و همچنین داریم: $z = ۷c + ۱$ وهریك از عددهای u و x و y مضرب ۷می‌باشند. u عددی است‌فردکه در عین‌حال مضرب ۳و۵و۷ است. کوچکترین مقدار u برابر است با:

$$u = ۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷ = ۱۰۵$$

x مضربی از $۲ \times ۵ \times ۷ = ۷۰$ است و اگر بر ۳ تقسیم شود باقیماندهٔ تقسیم برابر با یك است و چون:

$$۷۰ = ۳ \times ۲۳ + ۱ \text{ پس } x = ۷۰$$

y مضربی است از $۲ \times ۳ \times ۷ = ۴۲$ و چون بر ۵ تقسیم شود باید باقیماندهٔ یك بدست آیدکه خواهیم داشت:

$$y = ۱۲۶$$

z مضرب $۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰$ بوده وچون بر ۷ تقسیم شود باقیماندهٔ‌تقسیم‌یك می‌باشدکه در نتیجه $z = ۱۲۰$ می‌باشد.

عدد مطلوب برابر است با :

$$N = ۲^{۱۰۵} \times ۳^{۷۰} \times ۵^{۱۲۶} \times ۷^{۱۲۰}$$

برای تعیین تعداد ارقام N چنین عمل می‌کنیم :

$$\log N = ۱۰۵ \log ۲ + ۷۰ \log ۳ + ۱۲۶ \log ۵ + \\ + ۱۲۰ \log ۷$$

$$\log N = ۳۱/۶۰۸۱۵ + ۳۳/۳۹۸۴۰ + ۸۸/۰۷۰۲۲ + \\ + ۱۰۱/۴۱۲۰۰ = ۲۵۴/۴۸۸۷۷$$

مفسر $\log N$ برابر است با ۲۵۴ پس عدد N دارای ۲۵۵ رقم می‌باشد.

۶۷/۴ـ حاصل جمع n عدد زیر را که در دستگاه به مبنای x نوشته شده است پیدا کنید :

$$S_n = (a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \ldots + \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ مرتبه}}})_x$$

حل ـ مجموع بالا را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$S_n = \frac{a}{x-۱}[(x-۱) + \overline{(x-۱)(x-۱)} + \ldots + \\ + \overline{(x-۱)(x-۱)\ldots(x-۱)}]$$

$$S_n = \frac{a}{x-۱}[(x-۱) + (x^۲-۱) + (x^۳-۱) + \\ + \ldots + (x^n-۱)]$$

$$S_n = \frac{a}{x-۱}[x + x^۲ + x^۳ + \ldots + x^n) - n]$$

$$S_n = \frac{a}{x-۱}\left[\frac{x(x^n-۱)}{x-۱} - n\right]$$

۶۷/۵ـ اگر a و b و c اندازه‌های ضلعهای یك مثلث باشند و داشته باشیم :

$$a' = \frac{a}{۱+a} \text{ ، } b' = \frac{b}{۱+b} \text{ ، } c' = \frac{c}{۱+c}$$

ثابت کنید که a' و b' و c' نیز اندازه‌های ضلعهای یك مثلث می‌باشند .

حل ـ داریم :

$$a > b \Longrightarrow a + ab > b + ab$$

$$a(۱+b) > b(۱+a) \Longrightarrow \frac{a}{۱+a} > \frac{b}{۱+b}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که :

$$a > b > c \Longleftrightarrow a' > b' > c'$$

باید ثابت کنیم که :

$$a < b + c \Longrightarrow a' < b' + c'$$

ملاحظه می‌کنیم که :

$$a < b + c \Longrightarrow a + a(b+c) < b + c + a(b+c)$$

$$a(۱+b+c) < (b+c)(۱+a)$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{۱+a} < \frac{b+c}{۱+b+c}$$

$$\frac{b+c}{۱+b+c} = \frac{b}{۱+b+c} + \frac{c}{۱+b+c} < \\ < \frac{b}{۱+b} + \frac{c}{۱+c}$$

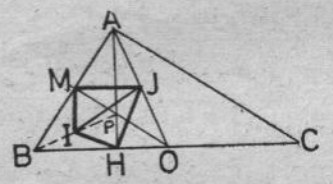
$$a < b + c \Longrightarrow \frac{a}{۱+a} < \frac{b}{۱+b} + \frac{c}{۱+c}$$

$$a < b + c \Longrightarrow a' < b' + c'$$

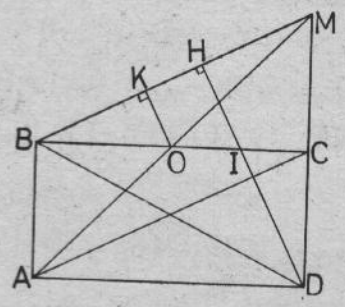
وچون $a' > b' > c'$ است پس a' و b' و c' اندازه‌های ضلعهای یك مثلث می‌باشند .

۶۷/۶ـ مثلث ABC قائمه درزاویهٔ A مفروض است. از A عمود AH را بر BC رسم می‌کنیم و از O وسط BC عمود OM را برضلع AB رسم می‌کنیم. اگر P نقطهٔ تلاقی AH و OM و I وسط PB و J وسط AO باشد ثابت کنید که چهارضلعی IHJM محاطی است ومرکزدایرهٔ محیطی آنرا تعیین کنید .

حل ـ چون O وسط BC و OM با AC موازی است پس M وسط AB می‌باشد . J وسط AO است بنابراین JM با OB موازی است . I وسط PB است پس IM با AH موازی است . AH بر BO عمود است پس IM بر JM عمود بوده زاویهٔ IMJ قائمه است . در مثلث قائم‌الزاویهٔ BMP میانهٔ MI با نصف وتر BP برابر است . همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHP میانهٔ HI با نصف وتر BP برابراست. نتیجه می‌شود که $IM = IH$. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMO و AHO در وتر AO مشترکند پس میانه‌های آنها یعنی JM و JH با هم برابرند . دو مثلث IMJ و IHJ در سه ضلع برابرند پس زاویهٔ IHJ بازاویهٔ IMJ برابر بوده وقائمه است. بنابراین چهارضلعی IMJH محاطی است و دایرهٔ محیطی آن به قطر IJ می‌باشد .



۶۷/۷- مربع مستطیل ABCD به ضلعهای $AB = ۲a$ و $AD = ۴a$ مفروض است. ضلع DC را از طرف C تا M امتداد می‌دهیم که C وسط DM باشد. خطوط AM و BC یکدیگر را در O قطع می‌کنند. اگر I وسط OC و H نقطهٔ تلاقی DI با BM باشد ثابت کنید که H بر دایرهٔ محیطی مستطیل مفروض واقع است و O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث BDH می‌باشد. شعاع این دایره را برحسب a حساب کنید.



حل - چون CM با AB مساوی و موازی است پس چهار ضلعی ABMC متوازی الاضلاع بوده و O وسط BC می‌باشد و چون I وسط OC است پس:

$$\frac{IC}{CD} = \frac{CM}{BC} = \frac{۱}{۲}$$

نتیجه می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BMC و DIC متشابهند و دو زاویهٔ MBC و CDI با یکدیگر برابرند. از تساوی این دوزاویه، تشابه دو مثلث BMC و DHM نتیجه شده و معلوم می‌شود که زاویهٔ MHD قائمه است. بنابراین دایرهٔ به‌قطر BD، یعنی دایرهٔ محیطی مستطیل مفروض، بر نقطهٔ H می‌گذرد.

در مثلث MBC خط BC عمود منصف ضلع MD است پس نیمساز زاویهٔ MBD می‌باشد. چون $OC = CD$ است پس زاویهٔ ODC برابر ۴۵ درجه بوده و DO نیمساز زاویهٔ ADC است. دوزاویهٔ IDC و BDA با هم برابرند در نتیجه دو زاویهٔ BDO و ODI متساوی بوده خط DO نیمساززاویهٔ BDI است ودرنتیجه O محل تلاقی نیمسازهای زاویه‌های مثلث BDH یعنی مرکز دایرهٔ محاطی این مثلث می‌باشد. شعاع این دایره‌عبارتست از $r = OK$ که‌بر BM عمود است و از تشابه دو مثلث BOK و BCM نتیجه می‌شود که:

$$\frac{OK}{CM} = \frac{BO}{BM} \text{ یا } \frac{r}{۲a} = \frac{۲a}{BM}$$

$$BM = \sqrt{۱۶a^۲ + ۴a^۲} = ۲a\sqrt{۵}$$

$$r = \frac{۴a^۲}{۲a\sqrt{۵}} = \frac{۲a\sqrt{۵}}{۵}$$

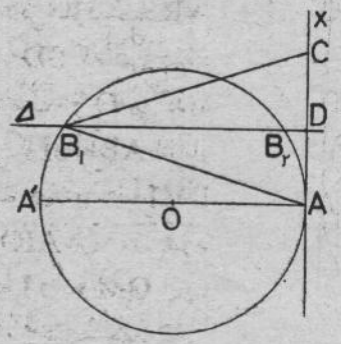
۶۷/۸- دایرهٔ (O) به‌مرکز O وبه‌شعاع R مفروض است. نقطهٔ A را بر آن در نظر گرفته و مماس Ax را بر آن رسم می‌کنیم. برمماس Ax نقطهٔ C را به‌فاصلهٔ l از A انتخاب می‌کنیم.

۱- نقطهٔ B را بردایره چنان انتخاب کنید که مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد $(AB = BC)$. درازاء مقادیر مختلف l دروجود وتعداد جوابها بحث کنید.

۲- مقدار l را برحسب R حساب کنید برای آنکه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع یااینکه درزاویهٔ B قائمه ومتساوی‌الساقین باشد.

۳- اگر M مرکزدایرهٔ محیطی مثلث ABC باشدنوع چهارضلعی AOBM را تعیین کنید.

حل - ۱) اگر △ عمود منصف AC باشد نقطهٔ B عبارتست از فصل مشترک △ بادایرهٔ O. برای اینکه △ با دایرهٔ O نقطهٔ مشترک داشته باشند لازم و کافی است که $AD \leq R$ باشد زیرا AD برابر با فاصلهٔ O از △ است.



اگر داشته باشیم:

$$AD < R \text{ یا } ۲AD < ۲R \text{ یا } l < ۲R$$

خط △ در دو نقطه دایرهٔ O را قطع می‌کند و دونقطهٔ $B_۱$ و $B_۲$ بردایره‌وجود داردکه هریك ازمثلثهای $B_۱AC$ و $B_۲AC$ متساوی‌الساقین می‌باشد.

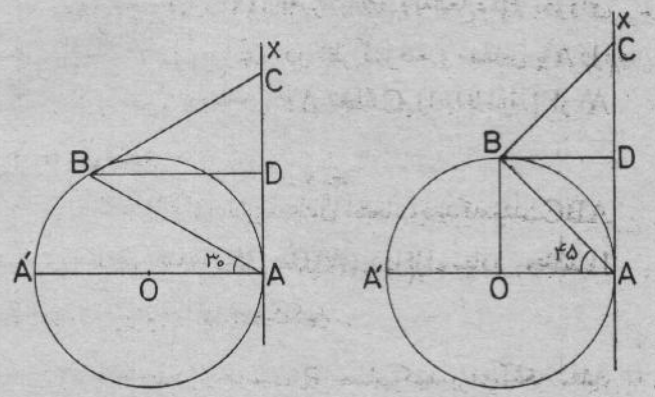
درحالت $l = ۲R$ خط △ بر دایره مماس است و تنها یك نقطهٔ B وجود دارد.

درحالت $l > ۲R$ خط △ دایرهٔ O را قطع نمی‌کند و مسئله جواب ندارد.

۲) برای‌اینکه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشدلازم وکافی است‌که زاویهٔ BAO برابر با ۳۰ درجه باشد. دراین صورت کمان AB از دایره برابر با ۱۲۰ درجه بوده و $AB = R\sqrt{۳}$ است و داریم:

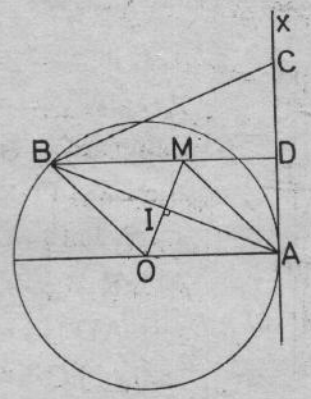
$$l = AC = AB = R\sqrt{۳}$$

برای اینکه زاویهٔ ABC قائمه باشد لازم و کافی است



که زاویهٔ BAO برابر ۴۵ درجه باشد . در این صورت کمان AB برابر با ۹۰ درجه بوده و $OB = AD$ می‌باشد یعنی داریم $l = ۲R$

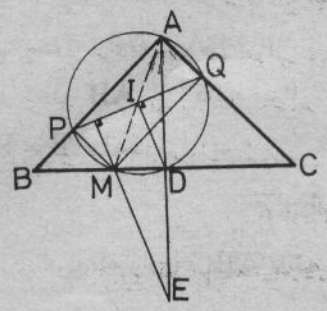
۳) در حالتی که زاویهٔ ABC حاده اختیار شود M عبارت می‌شود از نقطهٔ تلاقی عمود منصف AB با BD که این عمود منصف از O می گذرد و اگر I وسط AB باشد از تساوی دو مثلث BMI و AIO نتیجه می‌شود که I وسط OM است و در نتیجه چهارضلعی AOBM لوزی می‌باشد .



درحالتی که زاویهٔ ABC منفرجه اختیار شود وضع به همین منوال خواهد بود .

۶۷/۹ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC که درزاویهٔ A قائمه‌است مفروض‌است. نقطهٔ متغیر M را برضلع BC درنظر می گیریم و عمودهای MP و MQ را به ترتیب برضلعهای AB و AC رسم می کنیم . ثابت کنید که عمود منصف PQ و همچنین عمودی که از M بر PQ رسم شود هریك برنقطهٔ ثابتی می گذرند .

حل ـ ارتفاع AD از مثلث را رسم می‌کنیم . چهارضلعی APMQ مستطیل است و دایرهٔ به قطر AM برنقاط P و Q و D می گذرد و PQ نیز قطری ازاین دایره‌است و چون AD نیمساز زاویهٔ PAQ است پس D وسط کمان PMQ

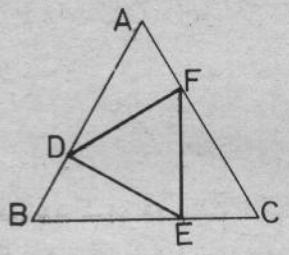


از دایرهٔ مزبور بوده و ID عمود منصف PQ می‌باشد . پس عمود منصف PQ از نقطهٔ D وسط ضلع BC می گذرد .

عمودی که از M بر PQ رسم شود امتداد AD را در E قطع می‌کند . چون I وسط ضلع AM از مثلث AME و ME با ID موازی است پس D وسط AE است . نقاط A و D ثابت هستند پس E نیز نقطهٔ ثابتی است .

۶۷/۱۰ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض‌است. برضلع AB نقطهٔ D را چنان تعیین کنید که اگر در D عمودی بر AB اخراج کنیم تا BC را در E قطع کند و در E عمودی بر BC اخراج کنیم تا AC را در F تلاقی کند، FD بر AC عمود باشد .

حل ـ درمثلث BDE چون زاویهٔ D قائمه و زاویهٔ B برابر ۶۰ درجه‌است پس BD نصف BE بوده وزاویهٔ DEB برابر ۳۰ درجه‌است . همچنین درمثلث FEC ضلع CE نصف ضلع CF است وزاویهٔ EFC برابر ۳۰ درجه‌است. درصورتی که FD بر AC عمود باشد AF نصف AD و زاویهٔ ADF برابر ۳۰ درجه می‌باشد و در چنین صورتی هر یك اززاویه‌های مثلث DEF برابر ۶۰ درجه بوده این مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشد و سه مثلث BDE و CEF و AFD با یکدیگر برابر بوده و نتیجه می‌شود :



$$AD = BE = CF \text{ و } BD = CE = AF$$

نقطهٔ D در ثلث طول ضلع AB ابتدا از B قرار دارد .

۶۷/۱۱ـ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو معادلهٔ زیردارای ریشه‌های مشترك باشند :

$$(a+b)x^۲ - (a+۴)x + ۲b = ۰$$

$$(a+b)^۲x^۲ + (b-۵)x + ۵b = ۰$$

حل ـ شرط لازم و کافی برای آنکه هم‌ارز باشند یعنی در تمام ریشه‌ها مشترك باشند آنست که داشته باشیم :

$$\frac{a+b}{(a+b)^۲} = \frac{-(a+۴)}{b-۵} = \frac{۲b}{۵b}$$

اولا اگر $a+b \neq ۰$ باشد اولین کسر ساده شده و

نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} -(a+b)(a+۴)=b-۵ \\ ۲b(a+b)=۵b \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم اگر $b=۰$ باشد چون در معادلهٔ اول منظور کنیم خواهیم داشت :

$$a^۲+۴a-۵=۰ \Longrightarrow a=۱ \text{ یا } -۵$$

در این صورت دو دسته جواب ($a=۱$ و $b=۰$) و ($a=-۵$ و $b=۰$) را داریم .

از معادلهٔ دوم اگر $b\neq ۰$ باشد خواهیم داشت :

$$۲(a+b)=۵ \text{ یا } a+b=\frac{۵}{۲}$$

که چون در معادلهٔ اول منظورکنیم نتیجه می‌شود :

$$-\frac{۵}{۲}(a+۴)=\frac{۵}{۲}-a-۵ \Longrightarrow a=-۵ \text{ و } b=\frac{۱۵}{۲}$$

ثانیاً اگر $a+b=۰$ باشد معادله‌های مفروض چنین می‌شوند :

$$(a+۴)x+۲a=۰$$
$$(a+۵)x+۵a=۰$$

باید داشته باشیم :

$$\frac{۲a}{a+۴}=\frac{۵a}{a+۵} \Longrightarrow a=۰ \text{ یا } a=-\frac{۱۰}{۳}$$

دراین حالت دو دسته جواب بدست می‌آید :

$$(a=۰ \text{ و } b=۰) \text{ یا } (a=-\frac{۱۰}{۳} \text{ و } b=\frac{۱۰}{۳})$$

تبصره ـ در ازاء مقادیر ($a=-۵$ و $b=\frac{۱۵}{۲}$) دو معادله هم‌ارز هستند اما ریشهٔ حقیقی ندارند .

۶۷/۱۲ـ معادلهٔ درجهٔ دوم زیرمفروض است :

$$(۱+a)x^۲+۲bx+۱-a=۰$$

درحالتی‌که این معادله دارای دوریشهٔ حقیقی x' و x'' باشد اولا معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش عبارت باشند از :

$$y'=\frac{x'+۱}{x'-۱} \text{ و } y''=\frac{x''+۱}{x''-۱}$$

ثانیاً درصفحهٔ محورهای $a'a$ و $b'b$ مکان نقطهٔ $M(a,b)$ را تعیین کنید برای آنکه داشته باشیم:

$$\frac{x'}{x'-۱}+\frac{x''}{x''-۱}=\frac{y'}{y'-۱}+\frac{y''}{y''-۱}$$

حل ـ برای اینکه معادلهٔ مفروض دارای دو ریشهٔ حقیقی x' و x'' باشد لازم و کافی است که :

$$\Delta'=b^۲-(۱+a)(۱-a)\geqslant ۰ \Longrightarrow a^۲+b^۲\geqslant ۱$$

نقطهٔ M باید در خارج یا روی دایرهٔ به مرکز O و به شعاع یك، غیر از نقاط (۰و۱ ـ) و (۰و۱) واقع باشد.

با فرض اینکه شرط بالا برقرار باشد فرض می‌کنیم که:

$$y=\frac{x+۱}{x-۱} \Longrightarrow x=\frac{y+۱}{y-۱}$$

$$(۱+a)(\frac{y+۱}{y-۱})^۲+۲b(\frac{y+۱}{y-۱})+۱-a=۰$$

بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$(۲+b)y^۲+۲ay+۱-b=۰$$

ثانیاً ـ رابطهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{۲x'x''-(x'+x'')}{x'x''-(x'+x'')+۱}=\frac{۲y'y''-(y'+y'')}{y'y''-(y'+y'')+۱}$$

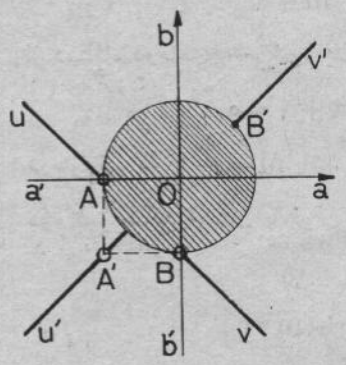
این رابطه با توجه به معادلات مربوط چنین می‌شود :

$$\frac{۲(۱-a)+۲b}{۱-a+۲b+۱-a}=\frac{۲(۱-b)+۲a}{۱-b+۲a+۱-b}$$

$$\frac{۱-a+b}{۱+b}=\frac{۱-b+a}{۱+a}$$

$$(a-b)(a+b+۱)=۰$$

با توجه به‌اینکه $a\neq -۱$ و $b\neq -۱$ ونقطهٔ M نباید داخل دایرهٔ (۱ و o) باشد مکان نقاط M مطابق باشکل است .



۶۷/۱۳ـ به‌ازاء مقادیرمختلف عدد صحیح طبیعی n باقیماندهٔ تقسیم $A=n^۲-n+۱$ را بر ۷ تعیین کنید و معلوم کنید به‌ازاء چه مقادیر n عدد A بر ۷ بخش‌پذیر است.

حل ـ نسبت به تقسیم بر ۷ داریم :

$n\equiv ۰$ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶

$n^۲\equiv ۰$ یا ۱ یا ۴ یا ۲ یا ۲ یا ۴ یا ۱

$n^۲-n\equiv ۰$ یا ۰ یا ۲ یا ۶ یا ۵ یا ۶ یا ۲

$A\equiv ۱$ یا ۱ یا ۳ یا ۰ یا ۶ یا ۰ یا ۳

باقیماندهٔ تقسیم A بر عدد ۷ یکی از عددهای ۰ ، ۱ ، ۳و۶ است . عدد A وقتی بر ۷ بخش پذیر است که $n\equiv ۳$ یا $n\equiv ۵$ باشد یعنی داشته باشیم :

$n=۷K+۳$ یا $n=۷K+۵$

۶۷/۱۴ـ دستگاه زیررا حل وبحث کنید :

$$\begin{cases} x^۲+y=mxy \\ x+y^۲=mxy \end{cases}$$

حل ـ طرفین دو معادله را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم ؛ نتیجه می‌شود :

$$(x^۲-y^۲)-(x-y)=۰ \Longrightarrow$$
$$(x-y)(x+y-۱)=۰$$

درنتیجه دستگاه مفروض با دودستگاه زیر هم‌ارز است :

$$\begin{cases} x-y=۰ \\ x+y^۲=mxy \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x+y-۱=۰ \\ x+y^۲=mxy \end{cases}$$

از دستگاه اول بعد ازحذف y خواهیم داشت :

$$(m-۱)x^۲-x=۰$$

درصورتی‌که $m=۱$ باشد این معادله تنها یك جواب $x=۰$ دارد ونظیرآن‌داریم $x=y=۰$ اگر $m\neq ۱$ باشد معادله دو جواب داشته‌و خواهیم داشت :

$$x=y=۰ \quad \text{و} \quad x=y=\frac{۱}{m-۱}$$

از دستگاه دوم نتیجه می‌شود :

$$(m+۱)x^۲-(m+۱)x+۱=۰$$

درصورتی که $m=-۱$ باشد این معادله‌و در نتیجه دستگاه دوم غیر ممکن است . با فرض $m\neq -۱$ داریم :

$$\triangle=(m+۱)^۲-۴(m+۱)$$
$$\triangle\geqslant ۰ \Longleftrightarrow m<-۱ \text{ یا } m\geqslant ۳$$

با این شرایط این معادله دو ریشه دارد :

$$x'\text{و}x''=\frac{m+۱\pm\sqrt{(m+۱)(m-۳)}}{۲(m+۱)}$$

وبرای دستگاه دوم جوابهای زیر وجود دارد :

$x=x'$ و $y=۱-x'=x''$

$x=x''$ و $y=۱-x''=x'$

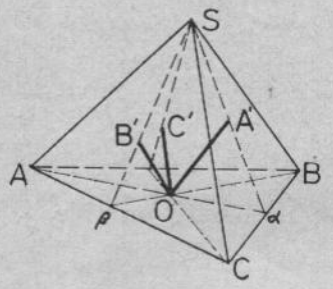
خلاصه‌ـ اگر $m<-۱$ یا $m>۳$ باشددستگاه‌مفروض چهار دسته جواب دارد .

اگر $-۱<m<۳$ و $m\neq ۱$ باشد دستگاه مفروض دو دسته‌جواب‌دارد.

اگر $m=۱$ باشد دستگاه مفروض فقط یك دسته‌جواب دارد .

۶۷/۱۵ـ در چهار وجهی غیرمشخص SABC نقطهٔ O را داخل مثلث ABC درنظرمی‌گیریم و ازآن خطوطی موازی با SA و SB و SC رسم می‌کنیم‌که به‌ترتیب وجوه SBC و SCA و SAB را در A' و B' و C' قطع می‌کند . ثابت کنیدکه :

$$\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=۱$$



حل ـ صفحهٔ SA و OA' خط BC را در α قطع می‌کند . دو مثلث $OαA'$ و $AαS$ متشابهند و نتیجه می‌شود :

$$\frac{OA'}{SA}=\frac{Oα}{Aα}$$

دو مثلث OBC و ABC در قاعدهٔ BC مشترکند بنابراین :

$$\frac{\text{مساحت } OBC}{\text{مساحت } ABC}=\frac{Oα}{Aα}=\frac{OA'}{SA}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{\text{مساحت } OCA}{\text{مساحت } ABC}=\frac{OB'}{SB}$$

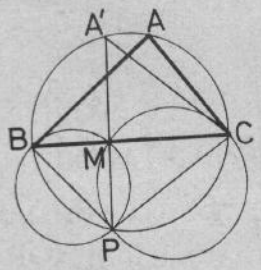
$$\frac{\text{مساحت } OAB}{\text{مساحت } ABC}=\frac{OC'}{SC}$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین سه رابطهٔ بالا با توجه به اینکه مساحات سه مثلث OBC و OCA و OAB برابر است با مساحت مثلث ABC ، خواهیم داشت :

$$\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=۱$$

۶۷/۱۶ـ نقطهٔ M برضلع BC ازمثلث ABC تغییر مکان می‌دهد. دو دایره‌که بر M می‌گذرند واولی در B بر AB و دومی در C بر AC مماس است یکدیگررا درنقطهٔ

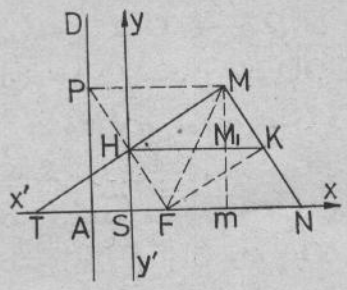
دیگر P قطع می‌کنند . مکان نقطهٔ P را تعیین کنید و ثابت کنید که PM برنقطهٔ ثابتی که آنرا تعیین خواهیدکرد می گذرد .



حل ـ زاویهٔ محاطی BPM بازاویهٔ ظلی ABC برابر است . همچنین زاویهٔ CPM با زاویهٔ ACB برابر بوده و نتیجه می‌شودکه زاویهٔ BPC با مجموع دو زاویهٔ ABC و ACB برابر بوده مکمل زاویهٔ A می‌باشد . بنابراین چهار ضلعی ABPC محاطی بوده مکان نقطهٔ P کمان BPC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد .

خط PM دایرهٔ محیطی مثلث را در A' قطع می‌کند . در این دایره دو زاویهٔ $A'CB$ و $A'PB$ با یکدیگر برابرند و چون زاویهٔ $A'PB$ با زاویهٔ ABC برابر است پس زاویهٔ $A'CB$ با زاویهٔ ABC برابر بوده و در نتیجه امتداد CA' ثابت بوده A' نقطهٔ ثابت می‌باشد .

۶۷/۱۷ـ نقطهٔ M برسهمی به کانون معین F وبه‌خط هادی معلوم D تغییرمی‌کند . مماس و قائم برسهمی درنقطهٔ M محور سهمی را به‌ترتیب در T و N قطع می‌کنند . اگر H و K به‌ترتیب تصاویر F بر MT و MN و M_1 تصویر M برخط HK باشد، اولا ثابت‌کنیدکه HK با محورسهمی موازی است ثانیاً مکان نقطهٔ M_1 و همچنین مکان نقطهٔ K را تعیین کنید .



حل ـ می‌دانیم که اگر P تصویر M برخط هادی D باشد مماس برسهمی در نقطهٔ M عبارتست‌ازعمود منصف FP و H تصویر F براین‌مماس دروسط FP وهمچنین‌دروسط MT وبالاخره بر $y'y$ مماس‌در رأس‌سهمی‌قرار دارد. در مثلث MTN چون H وسط MT و FH با MN موازی است پس F وسط TN است و چون FK با MT موازی است‌پس K وسط MN می‌باشد و ازآنجا نتیجه می‌شودکه HK با $x'x$ محور سهمی موازی است .

نسبت به‌محورهای $x'x$ و $y'y$ معادلهٔ سهمی عبارتست از $y^2 = 2px$ و چنانچه $M(x$ و $y)$ باشد داریم :

$$M_1(x_1 = x \text{ و } y_1 = \frac{y}{2})$$

و از آنجا نتیجه خواهد شدکه :

$$(y_1)^2 = 2(\frac{p}{4})x_1$$

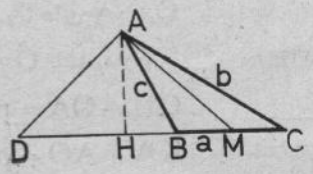
پس مکان M_1 سهمی است‌که S رأس و $x'x$ محور آن بوده و پارامتر آن یك چهارم پارامتر سهمی مفروض می‌باشد. یعنی F_1 کانون در یك چهارم طول SF نزدیکتر به S قرار دارد .

اگر m تصویر M بر $x'x$ باشد دو مثلث MmN و PAF متساویند و در نتیجه طول M_1K برابر با فاصلهٔ H ازخط D یعنی برابر با $\frac{p}{2}$ می‌باشد . به عبارت دیگر نقطهٔ K از روی نقطهٔ M_1 با یك انتقال موازی با $x'x$ و به طول $\frac{p}{2}$ بدست می‌آید و مکان K سهمی است‌که در انتقال مزبورمبدل سهمی مکان M_1 می‌باشد .

۶۷/۱۸ـ مثلث ABC که درآن $AC > AB$ است مفروض است. ثابت‌کنیدکه اگر میانهٔ AM با نیمساز خارجی AD' برابر باشد داریم :

$$a = (b-c)\sqrt{2}$$

$$tg\frac{B}{2} = (\sqrt{2}+1)^2 tg\frac{C}{2}$$



حل ـ ارتفاع AH از مثلث‌رارسم می‌کنیم می‌دانیم که:

$$b^2 - c^2 = 2a.MH$$

مثلث $AD'M$ متساوی‌الساقین است و H وسط MD' می‌باشد پس :

$$b^2 - c^2 = a.MD'$$

اما می‌دانیم‌که :

$$D'C = \frac{ab}{b-c} \text{ و } D'B = \frac{ac}{b-c}$$

$$D'M = \frac{D'B + D'C}{2} = \frac{a(b+c)}{2(b-c)}$$

$$b^2 - c^2 = \frac{a^2(b+c)}{2(b-c)} \Longrightarrow 2(b-c)^2 = a^2$$

$$a = (b-c)\sqrt{2}$$

ثانیاً می‌دانیم که :

$$tg\,\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b} = \frac{2r}{a-(b-c)} =$$

$$\frac{2r}{(b-c)\sqrt{2}-(b-c)} = \frac{2r}{(b-c)(\sqrt{2}-1)}$$

$$tg\,\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c} = \frac{2r}{a+(b-c)} = \frac{2r}{(b-c)(\sqrt{2}+1)}$$

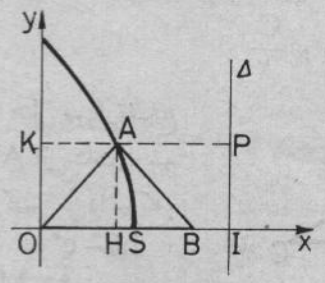
$$\frac{tg\,\frac{B}{2}}{tg\,\frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$$

۶۷/۱۹ـ محورهای متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ و مثلث متساوی‌الساقین OAB به محیط ثابت $2p$ را درنظرمی گیریم که $OA = AB$ بوده و B بر Ox تغییرمکان می‌دهد و A در زاویهٔ xOy واقع است .

۱ـ مکان A ومعادلهٔ آنرا تعیین کنید.

۲ـ اگر M تصویر A روی نیمساز زاویهٔ AOB باشد مکان M را مشخص کنید .

۳ـ اگر M' تصویر A روی نیمساززاویهٔ AOx' باشد مکان M' چه می‌باشد ؟



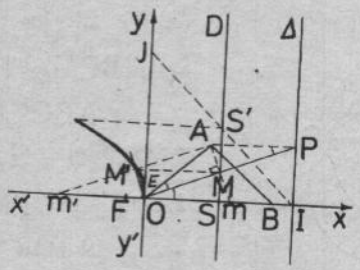
حل ـ ۱) اگر H و K به ترتیب تصویرهای A بر Ox و Oy باشد داریم :

$$OH + OA = p$$
$$KA + AO = p$$

KA را از طرف A به اندازهٔ $AP = AO$ امتداد می‌دهیم ، خواهیم داشت :

$$KP = KA + AP = KA + AO = p$$

نقطهٔ P از Oy به فاصلهٔ ثابت p واقع است و اگر از P خط Δ را بر $x'x$ عمودکنیم آنرا در نقطهٔ ثابت I قطع می‌کند. نقطهٔ Aازنقطهٔ O وازخط Δ متساوی‌الفاصله‌است پس‌بر سهمی به‌کانون O و به خط هادی Δ قرار دارد و چون A فقط در زاویهٔ xOy واقع‌است پس مکان آن‌کمان SJ ازسهمی مزبور می‌باشدکه J بر Oy به فاصلهٔ p از O و S بر Ox در وسط OI قرار دارد .



۲) چون مثلث OAP متساوی‌الساقین است پس زاویه‌های AOP و APO متساوی‌بوده‌و نیمساز زاویهٔ AOB از P می‌گذرد . خط AM که بر OP عمود است منصف OP است و وقتی A بر سهمی به‌کانون O و به خط هادی Δ حرکت‌کند M بر D مماس در رأس بر این سهمی تغییر خواهدکرد و اگر S' نقطهٔ تلاقی IJ با خط D باشد با توجه به اینکه مکان A کمان سهمی SJ است مکان M قطعه خط SS' می‌باشد .

۳) اگر m و m' نقاط تلاقی AM و AM' با $x'x$ باشد M وسط Am و M' وسط Am' بوده خط MM' با $x'x$ موازی است و اگر E نقطهٔ تلاقی این خط با Oy باشد در مثلث قائم‌الزاویهٔ MOM' داریم :

$$\overline{OE}^2 = -\overline{EM} \cdot \overline{EM'}$$

اگر x' و y' مختصات نقطهٔ M' باشد باتوجه به‌رابطهٔ اخیر خواهیم داشت :

$$y'^2 = -\frac{p}{2}x'$$

نقطهٔ M' بر سهمی قرار داردکه Oy مماس در رأس آن و کانون‌آن‌نقطهٔ F' از Ox' است بقسمی‌که $\overline{OF'} = -\frac{p}{8}$ می‌باشد . اگر Q نقطهٔ تلاقی این سهمی با PA باشد.مکان نقطهٔ M' عبارتست ازکمان OQ از سهمی مزبور.

۶۷/۲۰ـ دونقطهٔ ثابت I و I' به فاصلهٔ معلوم $2R$ از یکدیگرمفروض است. مثلث متغیرABC را درنظر می گیریم که I مرکزدایرهٔ محاطی داخلی، I' مرکزدایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A ازآن بوده و O مرکز دایرهٔ‌محیطی آن بر دایرهٔ ω به‌قطرII' واقع باشد .

۱ـ ثابت‌کنید که زاویهٔ A، ضلع BC و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث اندازه‌های ثابت دارند و این اندازه‌ها را تعیین کنید .

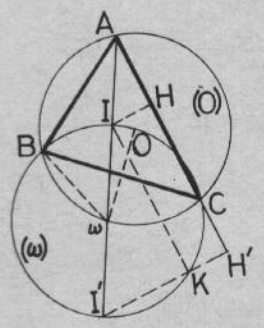
۲ـ مکان هریك ازنقاط O و A و B و C را مشخص کنید .

۳ـ ثابت کنید که بین r و r′ شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی وخارجی داخل زاویهٔ A ازمثلث و R رابطهٔ ساده‌ای وجود دارد . مقادیر ماکسیمم r و r′ را بدست آورید .

۴ـ مثلث ABC باشرایط مزبوررا بامعلوم بودن:

$$AB+AC=l\sqrt{3}$$

رسم وبرحسب مقادیر l بحث کنید .

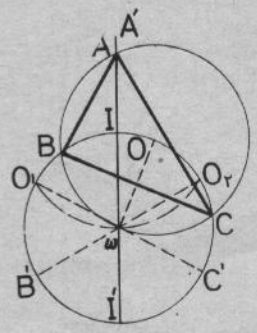


حل) ۱ـ چون زاویه‌های IBI′ و ICI′ قائمه‌اند پس نقاط B و C بردایرهٔ ω واقعند . دردایرهٔ ω عمود منصف وتر BC ازω مرکزدایره می‌گذرد و چون در هرمثلث نیمسازّزاویه و عمود منصف ضلع مقابل به آن یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی قطع می‌کنند پس ω بردایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد و Oω عمودمنصف‌ضلع BC می‌باشد. نتیجه‌می‌شودکه:

اولاـ دایره‌های O و ω با یکدیگر برابرند و شعاع هر یك از آنها برابر R می‌باشد .

ثانیاً ـ ضلع BC عمود منصف‌شعاع Oω است ودرنتیجه اندازهٔ زاویهٔ OωB برابر ۶۰ درجه بوده و $BC=R\sqrt{3}$ می‌باشد .

ثالثاً ـ از اینکه زاویهٔ BωC برابر ۱۲۰ درجه است نتیجه می‌شودکه زاویهٔ A برابر با ۶۰ درجه می‌باشد.



۲ـ چون نقطهٔ I داخل مثلث ABC واقع است پس داخل دایرهٔ O قرار داشته و $OI<O\omega$ یعنی $IO<I\omega$ می‌باشد . اگر به مرکز I و به شعاع Iω دیره‌ای رسم کنیم تا دایرهٔ ω را در O_1 و O_2 قطع کند نقطهٔ O خارج کمان O_1O_2 از دایرهٔ ω نمی‌تواند واقع باشد.مکان نقطهٔ O کمان O_1O_2 مزبور می‌باشد .

اگر A′ قرینهٔ ω نسبت به I باشد چون $OA=O\omega$ نقطهٔ A برخط II′ قرار داشته و وقتی O برکمان O_1O_2 حرکت کند نقطهٔ A قطعه خط IA′ را می‌پیماید و همین قطعه خط مکان A می‌باشد .

نقاط B و C نسبت به خط Oω قرینهٔ یکدیگرند واگر B′ و C′ نقاط تلاقی $O_1\omega$ و $O_2\omega$ با دایرهٔ ω باشد مکان B کمان IB′ و مکان C کمان IC′ می‌باشد .

۳ـ اگر H و H′ تصاویر قائم I و I′ بر AC و K تصویر I بر I′H باشد (شکل اول) ، در مثلث II′K زاویهٔ K قائمه و زاویهٔ KII′ برابر ۳۰ درجه است و داریم :

$$I'K=\frac{II'}{2}=R$$

$$I'K=I'H'-KH'=I'H'-IH=r'-r$$

$$r'-r=R$$

مقادیر r و r′ وقتی ماکسیمم هستندکه A بر A′ یعنی O بر I واقع باشدکه در این صورت مثلث ABC متساوی‌ـ الاضلاع بوده و داریم :

$$r=\frac{R}{2}\ ،\ r'=\frac{3R}{2}$$

۴ـ می‌دانیم که AH′ برابربا نصف‌محیط مثلث ABC است پس :

$$AH'=\frac{1}{2}(l\sqrt{3}+R\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}(l+R)$$

$$r'=AH'tg30^\circ=\frac{1}{2}(l+R)$$

$$r=r'-R=\frac{1}{2}(l-R)$$

بامعلوم بودن مقادیر r و r′ دایره‌های محاطی‌داخلی وخارجی نظیر زاویهٔ A از مثلث ABC رسم می‌شوند و از روی آنها ترسیم زیر نتیجه می‌شود :

دایره‌های به مرکزهای I و I′ و به شعاعهای r و r′ را رسم می‌کنیم . مماسهای مشترك خارجی این دایره را رسم می‌کنیم که II′ را در A و دایرهٔ ω را در چهار نقطهٔ B_1 و B_2 و C_1 و C_2 قطع می‌کنند . مثلثهای AB_1C_1 و AB_2C_2 که نسبت به II′ قرینه‌اند مثلثهای مطلوب می‌باشند .

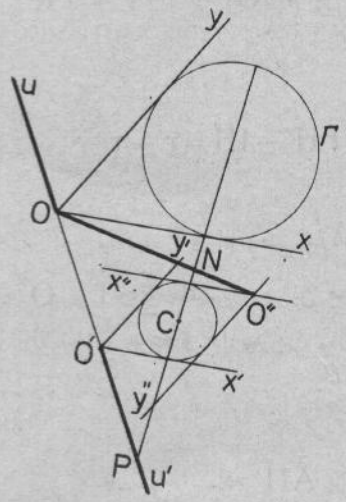
مسئله وقتی جواب دارد که دایره‌های (I و r) و (I′ و r′) متخارج یا مماس خارج باشند یعنی داشته باشیم :

$$\frac{l-R}{2}+\frac{l+R}{2}<2R \quad \text{یا} \quad l<2R$$

در این صورت خواهیم داشت $IA\leqslant IA'$ ومثلث‌مطلوب

وجود دارد . در حالت $l = 2R$ مثلث متساوی‌الاضلاع به رأس A' می‌باشد .

۶۷/۲۱- زاویهٔ ثابت xOy ودایرهٔ ثابت C واقع در یك صفحه مفروض است . دایرهٔ متغیر Γ همواره بر Ox و Oy مماس می‌باشد. اگر P و N به‌ترتیب مراکز تجانسهای مستقیم و معکوس دایره‌های C و Γ باشد مکان نقاط P و N را مشخص کنید .



حل ـ اگر $O'x'$ و $O'y'$ مماسهای بر دایرهٔ C و موازی و هم جهت با Ox و Oy باشد و $O''x''$ و $O''y''$ نیز مماسهای بر دایرهٔ C موازی و مختلف‌الجهت با Ox و Oy باشد وقتی تجانس مستقیم به‌مرکز P وجود داشته باشد نقاط O و O' نظیر یکدیگرند و در نتیجه مکان P نیم خطهای Ou و $O'u'$ از خط OO' می‌باشد .

به‌طریق مشابه ثابت می‌شود که مکان N قطعه خط OO'' است .

۶۷/۲۲- مجموع زیررا درنظر می‌گیریم :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

که درآن هریك ازجمله‌های u_1 و u_2 و ... و u_n تابعی ازعدد صحیح طبیعی n می‌باشند .

۱ـ اگر داشته باشیم :

$$S_n = n\left(\frac{n^2}{3} - an + b\right)$$

جملهٔ u_n را برحسب n و a و b مشخص کنید.

۲ـ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که S_n به ترتیب برابر باشد با :

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$
$$S' = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1)$$

واین‌دومجموع را برحسب n تعیین کنید .

حل) ۱ ـ داریم :

$$u_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n) - (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1})$$

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

$$u_n = \frac{n^3}{3} - an^2 + bn - \left[\frac{(n-1)^3}{3} - a(n-1)^2 + b(n-1)\right]$$

$$u_n = n^2 - (2a+1)n + a + b + \frac{1}{3}$$

۲) وقتی $S_n \equiv S$ باشد داریم :

$$n^2 - (2a+1)n + a + b + \frac{1}{3} \equiv n^2$$

$$\begin{cases} 2a + 1 = 0 \\ a + b + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = -\frac{1}{2} \ ، \ b = \frac{1}{6}$$

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n\left(\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

وقتی $S_n \equiv S'$ باشد داریم :

$$n^2 - (2a+1)n + a + b + \frac{1}{3} \equiv n^2 + n$$

$$\begin{cases} 2a + 1 = -1 \\ a + b + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = -1 \text{ و } b = \frac{2}{3}$$

$$S' = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = n\left(\frac{n^2}{3} + n + \frac{2}{3}\right)$$

$$S' = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

۶۷/۲۳- دونیم‌خط متنافر Ax و By متعامد بوده و هردو بر AB عمود می‌باشند . نقطهٔ M بر Ax و نقطهٔ N بر By چنان تغییر مکان می‌دهند که :

$$AM \cdot BN = \frac{AB^2}{2}$$

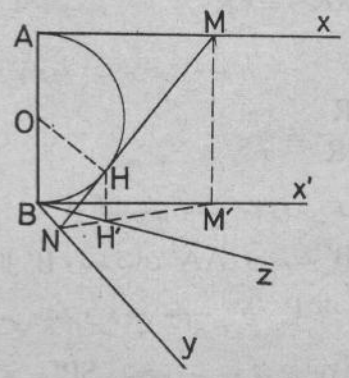
می‌باشد .

۱- ثابت کنید که : $MN = AM + BN$

۲- اگر H تصویر O وسط AB روی MN باشد ثابت کنید که :

$$MH = MA \quad و \quad NH = NB$$
$$OH = OA = OB$$

۳- نیم‌خط Bx' را موازی وهم‌جهت با Ax رسم‌می‌کنیم. اگر H' تصویر H روی صفحهٔ yBx' باشدثابت کنید که BH' نیمساززاویهٔ yBx' است و از آنرو مکان نقطهٔ H را نتیجه بگیرید.



حل) ۱ - اگر Bx' موازی با Ax باشد صفحهٔ yBx' بر AB عمود بوده و تصویر M بر این صفحه روی خط Bx' واقع است . در مثلث قائم‌الزاویهٔ $MM'N$ داریم :

$$MN^2 = M'N^2 + M'M^2 = M'N^2 + AB^2 =$$
$$= M'N^2 + 2AM.BN$$

مثلث NBM' در زاویهٔ B قائمه است و داریم :

$$M'N^2 = BM'^2 + BN^2 = AM^2 + BN^2$$

از این رابطه و رابطهٔ قبل نتیجه می‌شود :

$$MN^2 = AM^2 + BN^2 + 2AM.BN$$
$$MN^2 = (AM + BN)^2 \quad یا \quad MN = AM + BN$$

۲- در مثلث OMN داریم :

$$ON^2 = OM^2 + MN^2 - 2\overline{MN} \cdot \overline{MH}$$
$$OB^2 + BN^2 = OA^2 + AM^2 + (AM + BN)^2 -$$
$$- 2\overline{MN} \cdot \overline{MH}$$

بعد از اختصار نتیجه خواهد شد :

$$AM^2 + AM.BN - \overline{MN} \cdot \overline{MH} = 0$$
$$AM(AM + BN) - \overline{MN} \cdot \overline{MH} = 0$$
$$AM.MN = \overline{MN} \cdot \overline{MH}$$

از این رابطه معلوم می‌شودکه MN و MH در یك جهت هستند و $AM = MH$ می‌باشد و از روی رابطه‌های قبلی نتیجه می‌شودکه H بر MN بوده و $NH = NB$ و از مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH نتیجه می‌شود :

$$OH^2 = OM^2 - MH^2 =$$
$$= OA^2 + AM^2 - MA^2 = OA^2$$
$$OH = OA = OB$$

۳- چون H بر MN واقع است پس H' تصویر آن برصفحهٔ yBx' روی $M'N$ قرار خواهد داشت و HH' با MM' موازی است و داریم :

$$\frac{\overline{H'M'}}{\overline{H'N}} = \frac{\overline{HM}}{\overline{HN}} = -\frac{AM}{BN} \Longrightarrow$$
$$\frac{\overline{H'M'}}{\overline{H'N}} = -\frac{BM'}{BN}$$

نتیجه می‌شودکه BH' نیمساز زاویهٔ yBx' می‌باشد .

نقطهٔ H در صفحهٔ ABz واقع است که Bz نیمساز زاویهٔ yBx' است ،به عبارت دیگر صفحهٔ ABz صفحهٔ نیمساز فرجه‌ای که AB یال آن بوده و وجوه آن به ترتیب Ax و By را شامل می‌باشندامست. از رابطهٔ $OH = OA = OB$ نتیجه می‌شودکه H بر نیمدایرهٔ به قطر AB واقع در صفحهٔ ABz قرار دارد و داریم :

$$\frac{HH'}{MM'} = \frac{NH}{NM'} \quad یا \quad \frac{HH'}{AB} = \frac{BN}{AM + BN}$$

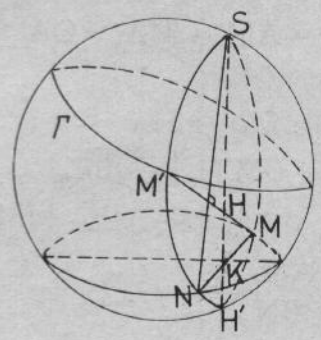
$$HH' = AB\left(\frac{1}{\frac{AM}{BN} + 1}\right)$$

نسبت $\frac{AM}{BN}$ تمام مقادیر از صفر تا بینهایت را قبول می‌کند پس HH' مقادیر از صفر تا AB را قبول‌کرده مکان H تمام نیمدایرهٔ فوق‌الذکر می‌باشد .

۶۷/۲۴- کرهٔ Σ و روی آن دایرهٔ C ونقطهٔ S غیر واقع بردایرهٔ C وغیرواقع برمحور این دایره مفروض است . نقطهٔ K تصویر S برصفحهٔ دایرهٔ C است ودراین صفحه خطی متغیر حول نقطهٔ K می‌چرخد و دایرهٔ C را در M و N قطع می‌کند .

ثابت‌کنیدکه H مرکزارتفاعی مثلث SMN ثابت است وازآن نتیجه بگیریدکه سطح مخروطی به‌رأس H و به دایرهٔ هادی C کرهٔ Σ را دردایرهٔ دیگر Γ قطع می‌کند .

حل - صفحه‌ای که برمرکزکره می‌گذرد و شامل SK است صفحهٔ شکل انتخاب می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی دیگر SK را باکره به H' نشان می‌دهیم . نقطهٔ H' بر دایرهٔ محیطی



مثلث SMN یعنی بر دایرهٔ مقطع این صفحه‌باکره قراردارد و ثابت است . از طرف دیگر می‌دانیم که‌قرینهٔ‌مرکزارتفاعی هر مثلث بر دایرهٔ محیطی آن واقع است . پس H' قرینهٔ H نسبت به K است و چون H' و K ابت هستند پس H نیز ثابت می‌باشد.

مولد HM از سطح مخروطی گفته شده کرهٔ Σ را در M' قطع می‌کند . چون M' درصفحهٔ SMN واقع‌است‌پس بر دایرهٔ محیطی مثلث SMN قرار دارد و قرینهٔ H نسبت به ضلع SN می‌باشد. بنابراین طول $SM' = SH$ برابر بامقدار ثابت می‌باشد . یعنی M' به دایرهٔ Γ تعلق داردکه برکرهٔ Σ واقع است و S مرکز آن‌بوده و شعاع آن با SH برابراست. وقتی M دایرهٔ C را بپیماید خط HM یك سطح مخروطی رسم می‌کند ونظیر آن ، نقطهٔ M' تمام دایرهٔ Γ رامی‌پیماید یعنی دایرهٔ مزبور فصل مشترك کرهٔ Σ و سطح مخروطی گفته شده می‌باشد .

۶۷/۲۵- روی مخروط دوار Σ به‌شعاع قاعدهٔ R و به‌ارتفاع $SO = 2R\sqrt{2}$ دومولد SA و SB واقع در یك صفحهٔ نصف‌النهاری وروی SB نقطهٔ P رابه‌فاصلهٔ $SP = x$ از S درنظر می‌گیریم :

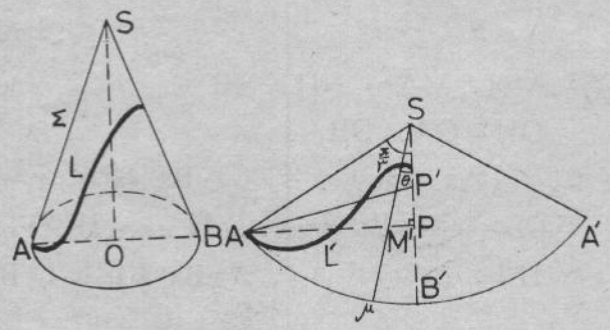
۱- اگر L مسیری باشدکه روی سطح مخروطی از A به P رسم شده‌باشدکوتاهترین طول این مسیررا برحسب R و x تعیین‌کنید .

۲- وضع P_0 از P را تعیین‌کنیدکه درآن مسیر L به‌نوبهٔ خودکمترین مقداررا داشته باشد. این وضع از L را L_0 می‌نامیم .

۳- M نقطه‌ای از L_0 است و m تصویرآن روی‌صفحهٔ قاعدهٔ Σ می‌باشد . طول Om را برحسب R و زاویهٔ $BOm = \varphi$ حساب کنید . وضع M_1 از M را تعیین‌کنیدکه مسیر AM_1 طولی برابر با $\frac{2}{3}$ طول مسیر AP_0 داشته‌باشد.

حل - سطح جانبی مخروط را در طول مولد SA برش داده و آنرامی‌گسترانیم تا به وضع قطاع SAA' درآید.

شعاع این قطاع برابر است با :



$$SA = \sqrt{R^2 + 8R^2} = 3R$$

و زاویهٔ آن برابر است با :

$$ASA' = 2\pi \times \frac{R}{3R} = \frac{2\pi}{3}$$

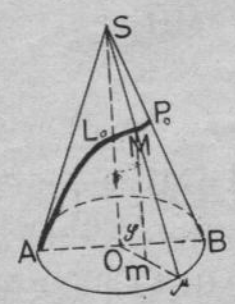
درگسترش سطح مخروطی وضع‌جدید نقطهٔ B عبارتست از B' وسط‌کمان AA' و خط SB' نیمساز زاویهٔ ASA' می‌باشد و وضع جدید نقطهٔ P نقطهٔ P' از SB' است‌که با $SP' = x$ مشخص می‌شود. دراین گسترش منحنی L به‌صورت منحنی L' رسم می‌شودکه مسلماً طول آن با طول L برابر است . واضح است‌که از بین مسیرهای L' آنکه مستقیم است یعنی خط مستقیم AP' از همه‌کوتاهتراست و L_P طول این‌مسیر برابر است با :

$$L_P = AP' = \sqrt{SA^2 + SP'^2 - 2SA.SP'.\cos 60^\circ}$$

$$L_P = \sqrt{9R^2 + x^2 - 3Rx}$$

۲- از بین طولهای مستقیم AP' آنکه در وضع AP_0 بر SB' عمود است از همه‌کوتاهتر می‌باشدکه طول این‌مسیر برابر است با :

$$L_0 = SA.\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3R\sqrt{3}}{2}$$



۳- اگر μ پای مولد SM و μ' وضع آن درگستردهٔ سطح مخروطی باشدبافرض $B'S\mu' = \theta$ داریم $SM = SM' = \frac{SP'_0}{\cos\theta} = \frac{3R}{2\cos\theta}$

نقطهٔ m بر $O\mu$ واقع است و داریم :

$$\frac{Om}{SM}=\frac{O\mu}{S\mu}=\frac{1}{3}$$

$$Om=\frac{SM}{3}=\frac{R}{2\cos\theta}$$

$$B\mu=B'\mu'\Longrightarrow R\varphi=3R\theta\Longrightarrow\varphi=3\theta$$

$$Om=\frac{R}{2\cos\frac{\varphi}{3}}$$

اگر M'_1 وضع جدید M_1 بعد از گسترش سطح باشد داریم :

$$AM'_1=\frac{2}{3}AP'_0 \quad \text{یا} \quad P'_0M'_1=\frac{AP'_0}{3}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$$

با فرض $P'_0SM_1=\theta_1$ داریم :

$$tg\theta_1=\frac{P'_0M'_1}{SP'_0}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Longrightarrow\theta_1=\frac{\pi}{6} \text{ و } \varphi_1=\frac{\pi}{2}$$

نقطهٔ M_1 بر مولد $S\mu_1$ قرار دارد که زاویهٔ $BO\mu_1$ قائمه می‌باشد و داریم :

$$\frac{SM_1}{Om_1}=\frac{S\mu_1}{O\mu_1}=\frac{1}{3} \quad \text{یا} \quad SM_1=\frac{Om_1}{3}$$

$$Om_1=\frac{R}{2\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{R\sqrt{3}}{3}\Longrightarrow SM_1=R\sqrt{3}$$

یك مسئله برای دانش آموزان

پیشنهاد شده بود که داوطلبان حل این مسئله را با ذکر نام و نشانی و پایهٔ تحصیلی تا قبل از پایان مرداد ماه به نشانی دفتر مجله ارسال دارند . ذیلا ابتدا راه حل مسئله و بعد اسامی دانش‌آموزانی که حل آنرا فرستاده‌اند درج می‌شود.

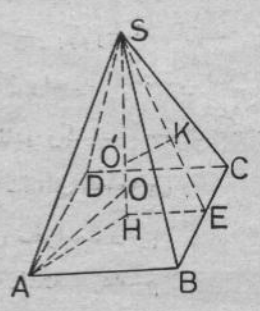
هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای را در نظر می‌گیریم . اولا ثابت‌کنیدکه اگر ضلع مربع قاعده واسطهٔ هندسی باشد مابین اقطارکره‌های محیطی ومحاطی هرم ، مراکز این دوکره بر یکدیگر منطبق می‌باشند و بالعکس اگر مراکز این دوکره بریکدیگر منطبق باشند ضلع مربع قاعده واسطهٔ هندسی مابین دوقطرکره است (شرط لازم وکافی) وضمناً با بکاربردن نسبت $\frac{R}{r}$ (Rشعاع کرهٔ محیطی و r شعاع کرهٔ محاطی هرم نامبرده است) وبامعلوم بودن ضلع مربع $AB=2a$ یك راه ترسیم هندسی ساده برای یافتن طولهای R و r بدست‌آورید .

ثانیاً فرض می‌کنیم $\frac{R}{r}=K$ (۱) باشد ثابت کنید به‌ازاء $K>\sqrt{2}+1$ وقتی‌که $AB=2a$ مقداری است ثابت دوهرم موجود است‌که برای هر دوی آنها رابطهٔ (۱) محقق است و ضمناً تحقیق‌کنید که حالت فعلی مسئله مورد $K=\sqrt{2}+1$ بوده است .

مثال عددی ـ به‌ازاء $K=\frac{5}{2}$ دومقدار R ودومقدار r را برحسب a محاسبه کنید .

(م . ح . ر . خ)

حل ـ واضح است که‌مراکزکره‌های محیطی و محاطی‌هرم روی‌ارتفاع $SH=h$ قرار دارند ، اگر O و O' مراکز این کره‌ها باشند خواهیم داشت :



$$OA=OP=R$$
$$O'H=O'K=r$$

برای محاسبهٔ R از مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA نتیجه می‌شود :

$$(h-R)^2+2a^2=R^2$$

و ازآنجا :

$$R=\frac{h^2+2a^2}{2h}$$

وبرای محاسبهٔ r دو مثلث قائم‌الزاویهٔ O'KS و SHE متشابهند و داریم :

$$r=\frac{a(\sqrt{h^2+a^2}-a)}{h}\quad \frac{r}{a}=\frac{h-r}{\sqrt{h^2+a^2}}$$

و ازآنجا :

اکنون بین روابط R و r یك بار h و بار دیگر a را حذف می‌کنیم‌وبه نتایج زیر می‌رسیم :

$$a^4-2Rra^2+2Rr^3+r^4=0$$

$$h^2-2(R+r)h+4Rr+2r^2=0$$

و یا :

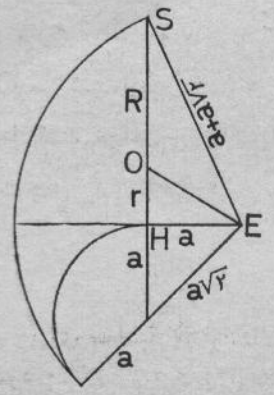
$$(1)\quad a^2=Rr\pm r\sqrt{R^2-2Rr-r^2}$$

$$(2)\quad h=R+r\pm\sqrt{R^2-2Rr-r^2}$$

اولاشرط لازم است ـ فرض می‌کنیم‌که ضلع مربع قاعده $AB=2a$ واسطهٔ هندسی باشد مابین‌اقطار دوکره یعنی داشته باشیم $a^2=Rr$ باید ثابت‌کنیم‌که مراکز دوکره بر یکدیگر منطبق هستند یعنی داریم $h=R+r$ با توجه‌به رابطهٔ (۱) چون برحسب فرض $a^2=Rr$ می‌باشد پس لزوماً رادیکال‌صفر است و در نتیجه در رابطهٔ (۲) نیزرادیکال صفر خواهد بود و داریم $h=R+r$ یعنی مراکزدوکره‌بریکدیگرمنطبق‌می‌باشند.

ثانیاً شرط کافی‌است ـ اگرفرض‌کنیم‌کره‌ها متحدالمرکزند یعنی $h=R+r$ باشد پس لزوماً در رابطهٔ (۲) رادیکال صفر بوده و در نتیجه در رابطهٔ (۱) نیز رادیکال صفر است وداریم $a^2=Rr$. بطوری‌که ملاحظه می‌شود لزوم وکفایت شرط‌هر دو درآن واحد اثبات می‌گردد و این در مسائل هندسه از موارد نادر وکمیاب است و نکته جالب مسئله‌در همین‌جاست.

ساختمان‌هندسی



رادیکال صفراست وقتی که داشته باشیم

$$\frac{R}{r}=\sqrt{2}+1$$

و در این حال‌دونقطهٔ O و O' روی‌نیمساز زاویهٔ مسطحهٔ SEH واقعند و می‌نویسیم .

$$\frac{ES}{a}=\frac{R}{r}=\sqrt{2}+1$$

و یا $ES=a\sqrt{2}+a$ و برای یافتن طولهای R و r پس‌از ساختن مثلث قائم‌الزاویهٔ SEH نیمساز زاویهٔ SEH را رسم می‌کنیم .

حالت کلی ـ هرگاه در روابط (۱) و (۲) قراردهیم $\frac{R}{r}=K$ ،خواهیم داشت :

$$a^2=r^2(K\pm\sqrt{K^2-2K-1})$$

$$h=r(K+1\pm\sqrt{K^2-2K-1})$$

چون K مقداری است مثبت باید داشته باشیم :

$$K^2-2K-1>0 \text{ و } K-\sqrt{K^2-2K-1}>0$$

و

$$K+1-\sqrt{K^2-2K-1}>0$$

این شرایط وقتی محقق هستندکه $K>\sqrt{2}+1$ بوده باشد .

به ازاء $K=\sqrt{2}+1$ داریم :

$$a^2=Rr$$

$$h=R+r$$

دراین حال فقط یك هرم موجود بوده و خواهیم داشت :

$$h=a\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$$

$$R=a\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

$$r=a\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

در مورد $K=\frac{5}{2}$ دو هرم داریم :

$$h=a\sqrt{2}\quad R=\frac{5a}{2\sqrt{2}}\quad r=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

و

$$h=a\sqrt{3}\quad R=\frac{5a}{2\sqrt{3}}\quad r=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

راه حل دیگر ـ همانطوری‌که گفته شد راه حل‌ممتاز در این مسئله راه حلی است‌که درآن لزوم وکفایت شرط هر

دنباله‌درصفحهٔ ۶۱

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۶۸/۱- به فرض اینکه داشته باشیم :

$$A = a + b + c + d$$

$$B = a + b - c - d$$

$$C = a - b + c - d$$

$$D = a - b - c + d$$

صحت اتحاد زیر را محقق کنید :

$$AB(A^2 + B^2) - CD(C^2 + D^2) \equiv$$
$$16ab(a^2 + b^2) - 16cd(c^2 + d^2)$$

۶۸/۲ - در متوازی‌الاضلاع ABCD از B به F وسط CD وصل کرده و از A بر خط BF عمود می‌کنیم که آن را در E قطع می‌کند . ثابت کنید که $AD = DE$

کلاس چهارم ریاضی

۶۸/۳- فرستنده : **قوام نحوی**

اگر داشته باشیم :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}$$

تحقیق کنید که :

$$f(x).f(\frac{1}{x}) = 1$$

۶۸/۴- فرستنده : **قوام نحوی**

اگر داشته باشیم :

$$f(n) = 2^n + \frac{1}{2^n}$$

تحقیق کنید که داریم :

$$f(n).f(1) = f(n+1) + f(n-1)$$

۶۸/۵- از رابطهٔ زیر مقدار y را حساب کنید :

$$2^{\log_2 \frac{1}{27}} = \log_{\frac{1}{16}} y$$

۶۸/۶- از نقطهٔ O مرکز مربع ABCD دو خط عمود بر هم رسم می‌کنیم که اولی ضلعهای AB و CD را در P و Q ودومی ضلعهای BC و DA را در Q و S قطع می‌کند. اولا ثابت کنید که چهارضلعی PQRS مربع است . ثانیاً اگر I وسط BC و J وسط CD و K وسط QR باشد ثابت کنید که سه نقطهٔ I و J و K بر یك استقامت واقعند.

۶۸/۷- در مربع ABCD ضلع CD را از طرف D به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ E بدست آید و از E به B وصل می‌کنیم که ضلع AD را در I قطع می‌کند . دو خط BD و CI یکدیگر را در M قطع می‌کنند . اگر O وسط CI باشد ثابت کنید که طول OG برابر با یك ششم طول CI است .

کلاس پنجم طبیعی

۶۷/۸- معادلهٔ درجهٔ دوم زیر مفروض است :

$$mx^2 + (2m+1)x + m + 1 = 0$$

به فرض $m \neq 0$ اولا ثابت کنید که این معادله همواره دارای دوریشهٔ x' و x'' می‌باشد .

ثانیاً بر محور $x'x$ بـه مبدأ O دو نقطهٔ P و Q را با طولهای $\overline{OP}=x'$ و $\overline{OQ}=x''$ اختیار می‌کنیم . درصورتی که M وسط PQ باشد آیا ممکن است کـه $\overline{OM}=-1$ باشد ؟ بافرض $\overline{OM}=2$ مقدار m و همچنین مقادیر x' و x'' نظیر آنرا حساب کنید .

۶۸/۹- در دایرهٔ جهت‌داری سه نقطهٔ A و M و N چنان واقع شده‌اند که یکی از اندازه‌های کمان AM برابر با (-400) گراد و یکی از اندازه‌های کمان AN برابر بـا $\frac{5\pi}{6}$ رادیان است. فرمول کلی اندازه‌های کمان MN را بدست آورید.

کلاس پنجم ریاضی

۶۸/۱۰- برای m شش مقدار وجود دارد که در ازاء آنها معادلهٔ زیر دارای ریشهٔ مضاعف می‌باشد . این شش مقدار m را حساب کنید :

$$[x^2-(m+1)x-2m][x^2+$$
$$+(2m-1)x+m]=0$$

به ازاء $m=2$ ریشه‌های معادلهٔ بالا را پیدا کنید .

۶۸/۱۱- معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$(3x^2-30ax+11a^2)^2-256a(a-x)^3=0$$

۶۸/۱۲- به فرض اینکه x و y اندازه‌های دو کمان از دایـرهٔ جهت‌دار باشد از روابط زیر مقادیر ایـن کمانها را تعیین کنید .

$$\begin{cases} x+y=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ x-y=360k^\circ-30^\circ \end{cases}$$

۶۸/۱۳- سه صفحهٔ P و Q و R دو به دو متقاطع می‌باشند بقسمی که فصل مشترکهای آنها در O متقاربند. نقطهٔ A بر صفحهٔ P و نقطهٔ B بر صفحهٔ R واقع است . کوتاهترین مسیر بین A و B را تعیین کنید بقسمی که این مسیر خارج از صفحات نبوده و صفحهٔ Q را نیز شامل باشد .

کلاس ششم طبیعی

۶۸/۱۴- به فرض اینکه x متغیر مستقل و y تابع آن باشد از رابطهٔ زیر مشتق y را نسبت به x بدست آورید :

$$x^2\cos^2 y+y^2\sin^2 x-2xy\sin y\cos x+x-y=1$$

۶۸/۱۵- به فرض اینکه داشته باشیم :

$$tg\,x=\frac{\sin 34^\circ+\sin 26^\circ}{\cos 49^\circ+\cos 41^\circ}$$

مقدار $\sin 4x$ را حساب کنید .

کلاس ششم ریاضی

۶۸/۱۶- تابع $f(x)$ مفروض است . درصورتی کـه عددی مانند a وجود داشته باشد بقسمی که $f(a)$ و $f(a-x)$ معین بوده و داشته باشیم $f(x)=f(a-x)$ ، ثابت کنید که خط به معادلهٔ $x=\frac{a}{2}$ محور تقارن منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ می‌باشد .

۶۸/۱۷- ثابت کنید که دو منحنی C_1 و C_2 نمایشهای هندسی دو تابع :

$$(C_1):\ y-x^2-2x-3=0$$
$$(C_2):\ y^2-4y-x+3=0$$

نسبت به خطی که آنرا تعیین خواهید کرد قرینهٔ یکدیگرند .

۶۸/۱۸- از **اصغر کرامت** ششم ریاضی دبیرستان فردوسی رضائیه .

اولا اگر داشته باشیم :

$$\sin^2 a-tg^2 b=1$$

رابطه‌ای بین a و b بدست آورید .

ثانیاً معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^2\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{7}\right)-tg^2\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{5}\right)=1$$

۶۸/۱۹- از مجلهٔ «دانش آموز ریاضی»

اگر $\frac{1}{8}$ از ۲۰ برابـر با ۳ باشد $\frac{1}{6}$ از ۱۰ چقدر خواهد بود ؟

۶۸/۲۰- از **سیدابوالحسن نقدی**

عدد چهاررقمی تعیین کنید که در رابطهٔ زیر صدق کند :

$$\overline{mcdu}\times 481=\overline{aaaaaa}$$

۶۸/۲۱- ترجمهٔ از فرانسه

در مثلث ABC ارتفاعهای AA' و BB' و CC' را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تقارب آنها را H می‌نامیم . از A خط △ و از H خط $\triangle'$ را موازی با △ رسم می‌کنیم . رأسهای B و C را در نقاط M و N بر △ ودر نقاط Q و P بر $\triangle'$ تصویر می‌کنیم .

۱) اگر ω مرکز مربع مستطیل MNPQ باشد وقتی که △ حول A می‌چرخد مکان ω را تعیین کنید و ثابت کنیدکه دایرهٔ محیطی مستطیل مزبور بر A' می گذرد .

۲) ثابت کنیدکه خطوط MP و NQ به ترتیب بر B' و C' می گذرند .

مسائل فیزیك

ترجمه و انتخاب توسط : هوشنگ‌شریفزاده

برای کلاسهای پنجم

۶۸/۲۲- با قرار دادن یك سکهٔ ۵ ریالی در فاصلهٔ ۱۸۰ سانتیمتری چشم می‌توان‌کرهٔ ماه را ازدید چشم‌پوشانید. قطر ۵ ریالی ۲/۵cm و فاصلهٔ زمین تا ماه برابر ۳۸۴۰۰۰ کیلومتر است . قطر تقریبی‌کرهٔ ماه چقدر است ؟

۶۸/۲۳- نوری‌که در سال ۱۴۸۵ میلادی از ستارهٔ قطبی (ستارهٔ آلفای دب اصغر) صادر شده بود درسال ۱۹۴۵ میلادی به ما رسید . فاصلهٔ تقریبی ستارهٔ قطبی را از زمین تعیین‌کنید . سرعت نور ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در هر ثانیه‌است.

۶۸/۲۴- پروکسیمای قنطورس ، نزدیکترین ستارهٔ ثابت به ما ، در ۴۱ بیلیون کیلومتری زمین است (یك بیلیون = 10^9) . اگر این ستاره ناگهان محو شود ، درخشش آن در زمین تا چه مدت دیگر ادامه خواهد داشت؟

برای کلاسهای ششم

۶۸/۲۵- شخصی قایقی را در یك رودخانه در جهت جریان آب در ۲۰ دقیقه ۲کیلومتر جلو می‌برد و همان راه‌را دربر گشت در ۴۰ دقیقه طی می‌کند . سرعت متوسط را ،(۱) درجهت جریان آب ، (۲) در خلاف جهت جریان آب ، (۳) برای یك رفت و برگشت تعیین‌کنید .

۶۸/۲۶- اگر صوت با سرعت یکنواختی تقریباً برابر ۳۳۰m/s در هوا منتشر شود ، نشان دهیدکه صدای حاصل از انفجار در نقطهٔ A پس از تقریباً ۱۲/۱ ثانیه به نقطهٔ B که در۴کیلومتری نقطهٔ انفجار قرار دارد می‌رسد . اگرصدای انفجار درست دریك‌لحظه‌به‌نقاط C و D برسد، نقطهٔ A نسبت به CD چگونه خواهد بود ؟

۶۸/۲۷- یك علامت رادیویی‌که بطور قائم به‌طرف بالا در هوا فرستاده شده است ، پس از برخورد به یك لایهٔ یونیزهٔ جو به طرف پائین منعکس شده است . اگر این‌علامت $\frac{1}{500}$ ثانیه پس از ارسال ، دریافت شده باشد ، ارتفاع لایهٔ مذکور را پیداکنید . (امواج رادیو با سرعت یکنواخت ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در هر ثانیه حرکت می‌کنند .) اگرعلامت مذکور ، ازکرهٔ ماه ،که در ۳۸۴۰۰۰ کیلومتری زمین است، منعکس شده باشد ، چه مدت پس از ارسال در زمین دریافت خواهد شد ؟

مسائل شیمی

ترجمهٔ فتح‌الله زرگری از مجلهٔ «علم و زندگی»

۶۸/۲۸- معلوم‌کنیدکه چگونه می‌توان با اجسام : آهن ، اکسیدکلسیم ، آب و اسید نیتریك غلیظ ، اکسید آهن (Fe_2O_3)رابدست آورد؟ معادلات‌واکنشهای لازم‌را بنویسید.

۶۸/۲۹- شیشه‌هایی بدون برچسب محتوی نمکهای زیر موجود است :

کلرورکلسیم ClNa ، یدورسدیم INa ،کربنات‌سدیم CO_3Na_2 ، سولفات سدیم SO_4Na_2. معادلات واکنشهای به صورت یونی را بنویسیدکه به‌کمك آنهانمکهای بالا شناخته می‌شوند .

۶۸/۳۰- مسیر شیمیائی زیررا بوسیلهٔ معادلات‌شیمیائی نشان‌دهید:

$$ClH \rightarrow Cl_2 \rightarrow ClNa \rightarrow ClAg \rightarrow IAg$$

(باواکنشهای‌شیمیایی‌ازاسیدکلریدریك‌به‌یدورنقره‌برسید).

تستهای ریاضی

قابل استفادهٔ داوطلبان امتحانات ورودی دانشکده‌ها و امتحانات استخدامی

کلاس چهارم ریاضی

۶۸/۳۱- عبارت $8[(x^2-1)^2-x]^3$ را چون نسبت به $y=2x-1$ مرتب کنیم ، عبارت حاصل نسبت به y :

الف ـ از درجهٔ ۷ است

ب ـ از درجهٔ ۱۲ است

ج ـ از درجهٔ ۶ است

د ـ هیچکدام

۶۸/۳۲- اگر a و b و c طولهای سه پاره خط باشند و شرط :

$a<b+c$

برقرار باشد ، برای‌اینکه بااین سه‌پاره خط بتوان یك مثلث ساخت :

الف ـ شرط بالا لازم و کافی است

ب ـ شرط بالا لازم است

ج ـ شرط بالا کافی است

د ـ هیچکدام

۶۸/۳۳- چند جمله‌ای:

$4x^3-x^2y-xy^2+4y^3-11$

الف ـ نسبت‌به x و y متجانس از درجهٔ ۳ است

ب ـ نسبت به x و y متقارن است

ج ـ نسبت به x و y هم متجانس وهم متقارن است

د ـ هیچکدام

۶۸/۳۴- به فرض اینکه n عددصحیح مثبت باشد،عدد

$A=10^n+n$

الف ـ درهرحال n رقمی است .

ب ـ در هر حال $(n+1)$ رقمی است .

ج ـ با شرط $n\leq 9\times 10^n$ دارای $n+1$ رقم است .

د ـ هیچکدام .

۶۸/۳۵- برای اینکه بتوانیم خط شکسته یا منحنی مسدودی رسم کنیم که هر یك ازضلعهای چند ضلعی مفروض P را در یك و فقط در یك نقطه قطع کند و در ضمن از رأسهای چند ضلعی نگذرد لازم و کافی است که :

الف ـ تعداد ضلعهای چند ضلعی P زوج باشد

ب ـ تعداد ضلعهای چند ضلعی P فرد باشد

ج ـ تعدادضلعهای چند ضلعی P به‌صورت 2^n+1 باشد

د ـ هیچکدام

۶۸/۳۶- اگر لگاریتم عدد N در پایهٔ a برابر با x باشد ، لگاریتم عدد N^n در پایهٔ a^n برابر است با :

الف ـ x^n

ب ـ x

ج ـ nx

د ـ هیچکدام

۶۸/۳۷- تعدادکلیهٔ قطرهای n ضلعی محدب برابر است با :

الف ـ $2n$

ب ـ $n(n-3)$

ج ـ $\frac{n(n-3)}{2}$

د ـ هیچکدام

۶۸/۳۸- تساوی

$(ax+b)^2-(cx+d)^2=4x$

نسبت به x وقتی یك اتحاد است که :

الف ـ $ab-cd=2$ باشد

ب ـ $b=d$ و $a=c$ باشد

ج ـ $b=-d$ و $a=c$ باشد

د ـ هیچکدام

۶۸/۳۹- در ذوزنقهٔ غیر قائم ABCD که در آن AB با CD موازی است از D موازی با قطر AC رسم

می‌کنیم که امتداد قاعدهٔ AB را در E قطع می‌کند و CE را رسم می‌کنیم ؛

الف ـ دو خط BI و CA یکدیگر را به نسبت یك و دو تقسیم می‌کنند

ب ـ اگر از I بر BE عمودکنیم پای عمود در وسط BE واقع است .

ج ـ اگر از I موازی با AB رسم‌کنیم از وسط BC می‌گذرد .

د ـ هیچکدام

کلاس پنجم ریاضی

۶۸/۴۰ـ معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(m-1)x^2-(m-1)x+m=0$$

وقتی ریشهٔ مضاعف داردکه :

الف ـ $m=1$ یا $m=-\frac{1}{3}$ باشد

ب ـ $m=-\frac{1}{3}$ باشد

ج ـ $m=1$ باشد

د ـ هیچکدام

۶۸/۴۱ـ معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(1-m)x^2-(m+1)x+m-1=0$$

الف ـ همواره دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد

ب ـ به شرط $m\neq 1$ همواره دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد .

ج ـ به شرط $m\neq 1$ دو ریشه داردکه عکس‌یکدیگرند

د ـ هیچکدام

۶۸/۴۲ـ دو دستگاه معادلات :

$$\begin{cases} x^2+xy=10 \\ y^2+xy=15 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} |x+y|=5 \\ |x-y|=1 \end{cases}$$

الف ـ معادل می‌باشند

ب ـ مستقل از یکدیگرند

ج ـ دارای ریشه‌های مشترك و ریشه‌های غیر مشترك می‌باشند .

د ـ هیچکدام

۶۸/۴۳ـ برای‌اینکه معادلهٔ :

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=a$$

دارای‌جواب باشد:

الف ـ لازم است‌که a مثبت باشد

ب ـ لازم و کافی است‌که a مثبت باشد

ج ـ کافی است‌که a مثبت باشد

د ـ هیچکدام

۶۸/۴۴ـ سه خط A و B و C دوبه دو متنافرند

الف ـ همواره از هر نقطهٔ خط A می‌توان خطی رسم کردکه دو خط B و C را قطع کند

ب ـ همواره برخط A نقطه‌ای وجود داردکه از آن نمی‌توان خطی متقاطع با خطوط B و C رسم‌کرد

ج ـ بطورکلی نمی‌توان خطی رسم‌کردکه هر سه خط A و B و C راقطع کند

د ـ هیچکدام

۶۸/۴۵ـ سه خط A و B و C دوبه دو متنافرند . بر خط A صفحهٔ P را می‌گذرانیم‌که با خط B موازی‌باشد .

الف ـ صفحهٔ P در هر حال با خط C موازی است

ب ـ صفحهٔ P در هرحال با خط C متقاطع است

ج ـ صفحهٔ P با خط C یا موازی یا متقاطع است

د ـ هیچکدام

۶۸/۴۶ـ بردایرهٔ جهت دار به مبدأ A سه نقطهٔ M و N و P بقسمی واقع شده‌اندکه P وسط‌کمان هندسی MN می‌باشد . درصورتی‌که داشته باشیم:

$$\widehat{AM}=2K\pi+\frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad \widehat{AP}=510^\circ$$

فرمول‌کلی اندازه‌های‌کمان AN برابر است با :

الف ـ $2K\pi+\frac{4\pi}{3}$

ب ـ $2K_1\pi+\frac{4\pi}{3}$

ج ـ $2K\pi-\frac{2\pi}{3}$

د ـ هیچکدام

۶۸/۴۷ـ حاصل عبارت

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x}-1$$

الف ـ همواره برابر با صفر است

ب ـ به شرط اینکه x مثبت باشد برابر با صفراست

ج ـ اگر x منفی باشد بی‌معنی است

د ـ هیچکدام

۶۸/۴۸ـ نامعادلهٔ

$$2x^2 < |x^2 - x|$$

فقط وقتی برقرار است که :

الف ـ $-1 < x < 0$

ب ـ $0 < x < \frac{1}{3}$

ج ـ یا $-1 < x < 0$ یا $0 < x < \frac{1}{3}$

د ـ هیچکدام

کلاس ششم ریاضی

۶۸/۴۹ـ ریشه‌های معادلهٔ $\cos x(tg x - 1) = 0$ عبارتند از :

الف ـ $x = K\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x = 2K\pi \pm \frac{\pi}{2}$

ب ـ $x = \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

ج ـ $x = K\pi + \frac{3}{4}$

د ـ هیچکدام

۶۸/۵۰ـ به‌فرض اینکه xزاویهٔ منفرجه باشدازرابطهٔ:

$$y = \frac{1}{\cos x} + \sqrt{1 + tg^2 x}$$

نتیجه می‌شودکه :

الف ـ $y = \frac{2}{\cos x}$

ب ـ $y = 0$

ج ـ $\frac{2}{\cos x}$ یا $y = 0$

د ـ هیچکدام

۶۸/۵۱ـ مشتق تابع :

$$y = \frac{|x - 1|}{x + 1}$$

در ازاء $x = 1$

الف ـ برابر است با $\frac{1}{2}$

ب ـ برابر است با صفر

ج ـ نامعین است

د ـ هیچکدام

۶۸/۵۲ـ تابع $y = \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x - 2}$ وقتی معین است که :

الف ـ $x \leq 1$ و $x \geq 2$ باشد

ب ـ $x > 2$ باشد

ج ـ $x \geq 2$ باشد

د ـ هیچکدام

۶۸/۵۳ـ برای اینکه‌بین تابع $y = ax \sin bx$ ومشتق دوم آن رابطهٔ $y'' + y = 2\cos x$ برقرار باشد لازم و کافی است که :

الف ـ $a = 0$ باشد

ب ـ $a = 0$ و $b = 0$ باشد

ج ـ $a = b = \pm 1$ باشد

د ـ هیچکدام

۶۸/۵۴ـ عدد چهار رقمی $\overline{abcd}$ با رقمهای متفاوت که‌اگر آنرا در رقم یکان خود d ضرب کنیم حاصل به‌صورت $\overline{dbca}$ بدست آید ؛

الف ـ وجود ندارد

ب ـ منحصربه ۱۰۸۹ است

ج ـ منحصر به دوعدد است

د ـ هیچکدام

۶۸/۵۵ـ برای اینکه منحنی‌نمایش هندسی تابع:

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + 1 \quad , \quad a \neq 0$$

دارای محور تقارن باشد ؛

الف ـ لازم وکافی است‌که n زوج باشد

ب ـ کافی است‌که n زوج باشد

ج ـ لازم است‌که n زوج باشد

د ـ هیچکدام

۶۸/۵۶ـ در یك صفحه دولوزی متساوی ABCD و A'B'C'D' را درنظر می‌گیریم بقسمی‌که قطرهای AC و A'C' از دولوزی در امتدادهای عمودبر یکدیگر قرارداشته

باشند . درهرحال‌برای تبدیل یکی از این دولوزی به‌دیگری:

الف ـ تنها یك انتقال کافی است

ب ـ تنها یك دوران کافی است

ج ـ کافی است که یك انتقال و یك دوران متوالیاً انجام گیرد

د ـ هیچکدام

۶۸/۵۷ـ منحنی C به معادلهٔ زیر را درنظرمی گیریم:

$$ax^2 + by^2 = c$$

مماس و قائم برمنحنی C در یك نقطهٔ M ازآن محور $x'x$ را به ترتیب در T و N قطع می‌کنند . به‌فرض‌اینکه مثلث MTN به رأس M متساوی‌الساقین باشد :

الف ـ نقطهٔ M منحصربه‌فرد است

ب ـ حداکثر دو نقطهٔ M بر منحنی C وجوددارد

ج ـ حداکثر چهار نقطهٔ M برمنحنی وجوددارد

د ـ هیچکدام

۶۸/۵۸ـ عددی‌سه رقمی که‌چون بامقلوب خودش‌جمع شود حاصل جمع ازچهاررقم متساوی تشکیل شده‌باشد ؛

الف ـ منحصر به‌یك‌عدد است

ب ـ به تعداد خیلی زیادجود دارد

ج ـ منحصر به‌هشت عدد است

د ـ هیچکدام

۶۸/۵۹ـ دانش آموزی برای‌حل معادلهٔ :

$$\sin^3 x + \cos x = \cos^3 x + \sin x$$

طرفین آنرا بر $\cos^3 x$ تقسیم کرده و به ترتیب زیرعمل کرده است :

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x}{\cos^3 x} = 1 + \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$tg^3 x + 1 + tg^2 x = 1 + tg x(1 + tg^2 x)$$

$$tg^2 x - tg x = 0 \implies tg x = 0 \text{ یا } 1$$

$$x = k\pi \text{ یا } x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

این دانش‌آموز :

الف ـ معادله را به صورت‌کامل حل‌کرده است

ب ـ جوابهای اضافی بدست‌آورده است

ج ـ جوابهایی از معادله رابدست نیاورده است

د ـ هیچکدام

۶۸/۶۰ـ تساوی مثلثاتی:

$$\cos a + \cos c = 2\cos b \cos d$$

بر قرار است اگر :

الف ـ a و b و c و d جمله‌های متوالی یك تصاعد حسابی باشند

ب ـ $a+b$ با $c+d$ برابر باشد

ج ـ a و b و c سه جمله از تصاعد حسابی با قدرنسبت d باشند

د ـ هیچکدام

حل مسائل (دنباله از صفحهٔ ۵۴)

دو در آن واحداثبات می‌شود . به‌عنوان نمونه راه حل‌دیگری از این مسئله ارائه می‌شودکه در آن محاسبات اندکی طولانی است ولی نتیجه نهایی عالی است ـ اگر در روابط $a^2 = Rr$ و $h = R + r$ به جای R و r مقادیرشان را قراردهیم هردو رابطه‌منجرمی‌شود به رابطهٔ واحد $h^4 - 4a^2h^2 - 4a^4 = 0$ و این خود لزوم وکفایت شرط را ثابت می‌کند و در مورد حالت‌کلی به معادلهٔ پارامتری زیر می‌رسیم:

$$h^4 - 2(K^2 - K - 1)a^2h^2 + 4(2K + 1)a^4 = 0$$

که نتیجه بحث در آن عیناً همان نتیجه بحث قبلی است .

محمد حسن رزاقی خمسی شهریور ۱۳۴۹

پاسخهای رسیده به ترتیب تاریخ وصول ازآقایان :

مصطفی شیخ غلامحسین قندهاری کلاس پنجم ریاضی دبیرستان البرز تهران

مسعود محزون کلاس پنجم ریاضی دبیرستان خرد شیراز

علی رئیس زاده کلاس پنجم ریاضی دبیرستان‌غزالی رفسنجان

علیرضا هدایتی کلاس پنجم ریاضی دبیرستان هدف شمارهٔ یك

منوچهر محمودیان کلاس پنجم ریاضی دبیرستان بزرگمهر اهواز

نوشتهٔ ریند (Rhind)

ترجمهٔ : داویدریحان

دو نردبان و لوله‌ای که شاید بسته است

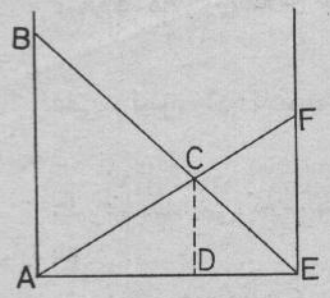
آقای سرژان ماکینتوش درحین گردش درملکی که بتازگی خریده بود داخل انبار شد و دیری نگذشت که نگاهش روی دو نردبان بزرك ثابت ماند . یکی از این نردبانها پایه‌اش درپائین یك دیوار ورأسش بردیوار مقابل تکیه‌داشت؛ دیگری، پایه‌اش در پائین دیواردوم وسرش روی دیوار اول متکی بود . از مکانی که سرژان بود، دونردبان باهم به‌تشکیل صلیب ناقصی دیده می‌شدند، ناقص ازآن جهت که طولشان باهم تفاوت داشت.

سرژان دستهایش را به هم می‌مالد : دراینجا عجب چیزهائی پیدامی‌شود که به‌درد آدم می‌خورد، همین نردبانهارا نیز مورد استفاده قرارمی‌دهم. خودم دراواخر این هفته به‌جای دیگر انتقالشان خواهم داد . چون وی اسکاتلندی و در نتیجه مرد عمل بود، تصمیم گرفت که اندازه‌های لازم را بگیرد. از جیبش متری قابل انحنا، بیخشید، روبانی که با واحد وجب تقسیم بندی شده‌است، خارج می‌کند.

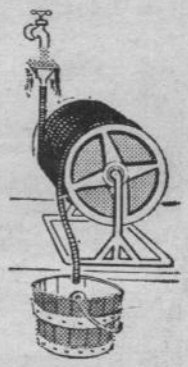
ازاینکه تمام طولهای اندازه گیری شده (برحسب وجب) توسط وی اعدادی صحیح‌اند، وی کاملا متعجب شد . درواقع وی ۹ اندازه را یادداشت می‌کند (مربوط به‌مقادیر :

AB، AC، AD، AE، AF، BC، BE، CD و EF

از شکل ۱ که AF و BE معرف دونردبان هستند، این شکل بامقیاس متناسب کشیده‌نشده است) . مجدداً نردبانها رانگاه می‌کند واین‌دفعه می‌بیند که زاویهٔ آنها حائز کیفیت مخصوصی است . پس‌از پی گیری افکارش ، درمی‌یابد که برای محاسبهٔ فاصلهٔ دیوار هادانستن کیفیت دیگری که همان اندازه‌های اعدادصحیح است ،کفایت می‌کند.



کمی آنطرفتر، سرژان شیء دیگر بامورد استعمال فراوان پیدامی‌کند، این‌شیء عبارت ازیك لولهٔ آبیاری است که روی قرقره‌ای با قطرتقریبی یك پا قرار دارد و این قرقره روی محور افقی متکی بریك میز قرار گرفته است و درکنارش فلکهٔ آب‌وجود دارد. اولین عکس‌العمل سرژان ، تحقیق در صحت لوله بود. در یکی از دوسر لوله‌قیفی‌راقرارمی‌دهد، در انتهای دیگرش سطلی را مطابق‌شکل ۲ می‌گذارد. چندثانیه‌ای ازبازکردن‌فلکه نگذشته بودکه آب از قیف بیرون ریخت بدون آنکه حتی یك قطره از انتهای دیگرلوله‌خارج شده باشد .



سرژان باخود می‌گوید که مطمئناً لوله مسدود است درغیراینصورت می‌بایست که‌آب ازآن عبور می‌کرد وسطل‌را پرمی‌نمود . مگر اینکه وی اشتباه کرده باشد .

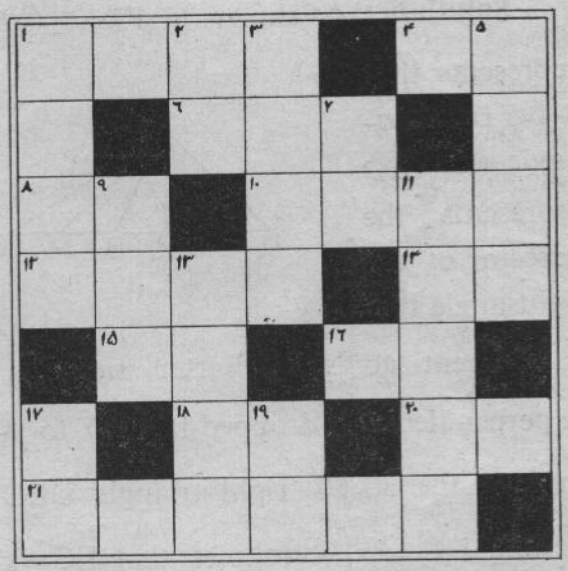
بلی، خواننده عزیز ، سرژان‌اشتباه‌می‌کرد: اگرآب‌ازیك‌سرلوله به‌سردیگرش جریان‌پیدانمی‌کرد، بواسطهٔ‌مسدودبودن‌لوله‌نبوده است. پس ممکن‌است چطورباشد؟ طول‌نردبانهاچقدربوده‌است؟

جواب . ـ از فرض نتیجه می‌گیریم که‌اضلاع مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ACD و CDE بوسیلهٔ اعداد صحیح مشخص می‌شوند . متعارفترین مثلث قائم الزاویه که پاسخگوی چنین شرایطی باشد مثلثی است‌که اضلاعش ۳و۴و۵ واحدباشند (این موضوع از دورهٔ مصر قدیم شناخته شده‌بوده‌است). دونردبان هم طول نیستند، CD کوچکترین ضلع یکی از این مثلثهای

«دنبالهٔ درصفحه۲۲»

جدول اعداد

طرح از : محمد نوراللهی ننه‌کران

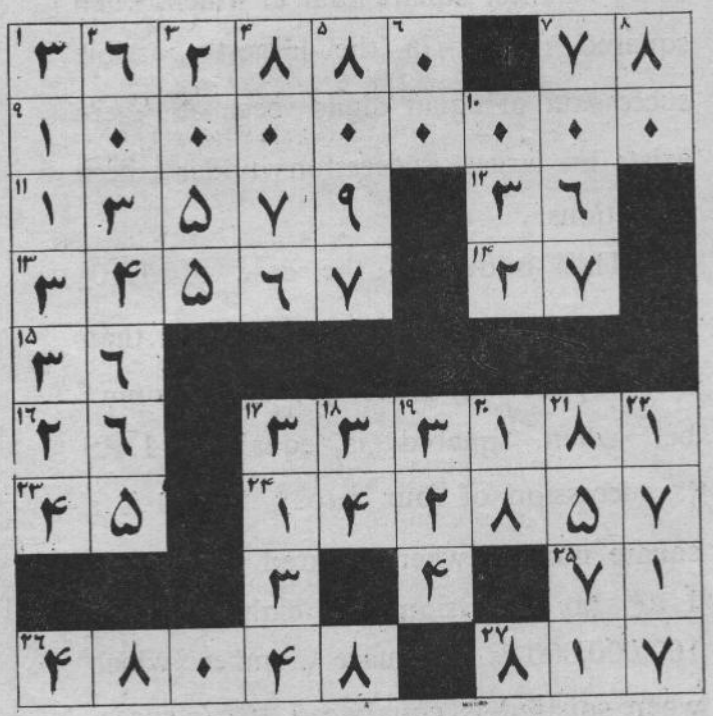


افقی : ۱- عدد چهار رقمی‌که برابر است با ۱۱برابر مربع مجموع ارقامش . ۴- شش واحدکمتر از عدد ۱۶افقی. ۶- مربع دو برابر عدد ۱۸ افقی . ۸- چون آنرا با یك‌جمع کنیم و حاصل را دوبرابرکنیم مقلوب آن بدست آید . ۱۰- عددی است به صورت $\overline{abba}$ که‌مجموع‌رقمهایش توان‌چهارم است و علاوه برآن اگر آنرا با دو برابر $\overline{aa}$ جمع کنیم‌عددی با چهاررقم متساوی‌بدست‌آید . ۱۲- تعداد دفعاتی که‌رقمهای ده‌گانه در نوشتن صفحات‌کتابی‌که ۱۶۹۹ صفحه دارد بکار می‌روند . ۱۴- متمم حسابی عدد ۴ افقی . ۱۵- ده واحد کمتر از عدد ۱۷ قائم . ۱۶- سه برابرآن توان چهارم است. ۱۸- عدد اول با رقمهای متساوی . ۲۰- متمم حسابی عدد۸ افقی . ۲۱- اگر رقم یکان آنرا برداریم و در سمت چپ آن قرار دهیم عدد حاصل پنج برابر عدد اولی باشد .

قائم : ۱- در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^2$$

۲- دو برابر عدد ۱۶ افقی . ۳- مجموع رقمهایش ۳۱است و درضمن مجذورکامل است . ۵- چون آنرا در رقم یکان‌خود ضرب‌کنیم مقلوبش بدست می‌آیدکه از خودش‌بزرگترمی‌باشد. ۷- دوثلث متمم حسابی خود می‌باشد . ۹- رقمهایش متوالیند و مجموع آنها ۱۸ است . ۱۱- چون با ۲۲۲۲ جمع شود بزرگترین عدد چهار رقمی بدست آید . ۱۳- از عدد ۱۱قائم ۳۳۵واحد بیشتر است. ۱۷- مجذور مجموع ارقامش است . ۱۹- مقلوب عدد ۱۷ قائم .

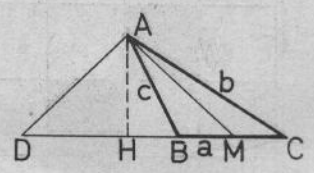


حل جدول شمارهٔ قبل

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 68– In a 3-4-5 right triangle What is the length of the trisector of the right angle that is adjacent to the shorter side ?

Solution : As shown in Fig., $\triangle ABC$ represents the 3-4-5 right triangle and $\overline{CD}$ represents the trisector of the right angle that is adjacent to the shorter side $\overline{CB}$.



A perpendicular is dropped from D to $\overline{AC}$ forming the 30–60 right triangle DEC . Letting $DC = 2x$, it follows that $EC = x$, and $DE = x\sqrt{3}$. Since

$$\triangle AED \sim \triangle ACB, \quad \frac{4-x}{x\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

and

$$x = \frac{12}{3+4\sqrt{3}}$$

By substitution ($DC = 2x$) and rationalizing we obtain

$$DC = \frac{32\sqrt{3}-24}{13}$$

Problem 69 – How many prime numbers are in the following infinite series where the digits are arranged in descending order ? 9;98;987;9876;98765;987654; 9876543;98765432;987654321;9876543219; 98765432198;...etc .

Solution : There are no prime numbers in the infinite series since all of the numbers are divisible by 2,3, or 5 .

The divisors form a repeating cycle, $\{3,2,3,2 \text{ or } 3,5,2 \text{ or } 3,3,2,3,\ldots\}$

Problem 70 – What is the smallest square number which, when squared , results in the largest possible succession of equal digits ?

Solution : Technically speaking, there is no smallest square number which, when squared, results in the largest possible succession of equal digits because there exists no largest succession under these conditions .

This is due to the case of 1.10^x where x is an even integer greater than zero. Specifically : 100 is a square number when squared is equal to 1.10^4 (a succession of four zeros); 10,000 is a square number when squared is equal to 1.10^8 (a succession of eiqht zeros) ; 100,000,000 is a square number which when squared is equal to 1.10^6 (a succession of sixteen zeros); and so on .