یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ ششم ، شمارهٔ : ۱۰ شمارهٔ مسلسل : ۶۷ مرداد ۱۳۴۹

در این شماره :

بها : ۲۵ ریال

اطلاع

شمارهٔ بعد مجله یعنی اولین شماره از دورهٔهفتم، در اوایل مهرماه منتشر می‌شود .

قابل توجه مشترکان یکان

از مشترکانی‌که نشانی آنها دبیرستان یا دانشکده است تقاضا می‌شود نشانی تازهٔ خود را برای دریافت مجله های ماههای تیر ومرداد اطلاع دهند. درغیرآن ، از ارسال این مجله‌ها برای‌آنان‌تامهرماه خودداری خواهد شد .

یکان سال ۱۳۴۸

شامل :

سؤالها و حل مسائل امتحانات نهایی خرداد و شهریور ۱۳۴۸ کلاسهای ششم طبیعی وریاضی ،

سؤالها وحل مسائل امتحانات ورودی دانشکده‌های :

کنکور سراسری دانشگاه آریامهر ـ شبانهٔ دانشگاه تهران ـ دانشگاه ملی ـ دانشگاه پهلوی ـ دانشکدهٔ نفت ـ دانشکدهٔ افسری ـ هنرسرای عالی ـ آموزشگاه نقشه‌برداری ـ آموزشگاه کارتوگرافی ـ مدرسهٔ عالی بازرگانی رشت ـ انستیتو تکنولژی تهران ـ هنرسرای صنعتی بابل

نمونه‌ای ازمسائل امتحانات نهایی‌کشور فرانسه

امتحانات نهائی .G. C. E انگلستان

نمونه‌ای از مسائل المپیادهای ریاضی شوروی

بها : ۷۵ ریال

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال ده شماره منتشر می‌شود

دورهٔ ششم ـ شمارهٔ دهم ـ شمارهٔ مسلسل : ۶۷

مرداد ۱۳۴۹

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول ، عبدالحسین مصحفی

نشانی اداره :

تهران ، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VI, number 10. Aug. 1970

subscripti n ; $

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

ضمیمه‌های یکان سال

برای دانش آموزان کلاسهای سوم

جزوهٔ سال ۱۳۴۶ ـ جزوهٔ سال ۱۳۴۷ ـ جزوهٔ سال ۱۳۴۸

شامل مطالب گوناگون و مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

بهای هرجزوه : ۱۲ ریال

سخنی با خوانندگان

نزدیك به شش سال و شش ماه از زمان انتشار اولین شمارهٔ یکان می‌گذرد . در این مدت ، بدون آنکه درکار نشر مجله وقفه‌ای ایجادشود ، شصت و هفت شمارهٔ متوالی و علاوه بر آن چندین شمارهٔ مخصوص از مجلهٔ تقدیم علاقمندان شده است . آنان که به‌کار مطبوعاتی وارد باشند می‌دانند که برای تهیه و انتشار هر شمارهٔ از مجله ، چه تلاشها و کوششها باید انجام‌گیرد ، مخصوصاً اگر هر مقاله یا ترجمه قبل از تحویل به چاپخانه به دقت بررسی شود و در بسیاری از موارد لازم باشدکه از نو نوشته‌گردد .

شاید اگرکارتهیهٔ مجله به عهدهٔ هیئتی ازافراد می‌بود وکارها تقسیم می‌گشت ، یااینکه این‌کاربا اتکاء به دستگاه یا انجمنی فراهم می‌شد ، مجموعهٔ فعالیتهایی‌که انجام می‌گرفت کمتر ازآن می‌بودکه هم اکنون شخصاً و با دلسوزی تمام انجام می‌گیرد .

درکار تهیهٔ یکان آنچه مورد نظر است توجه و علاقهٔ خوانندگان است و همینان تنها متکا و حامی آن بوده و خواهند بود . اینان هستندکه از راه پرداخت بهای تکشماره یا وجه اشتراك سالانه مخارج مجله را تأمین می‌کنند (ودرآمد مجله منحصر به همین وجوه می‌باشد). با وجود چنین سطح اتکاء استوار و مداوم ، تلاش پیگیر برای نشر مجله ادامه خواهد داشت و شکی نیست‌که دراین باره ، مانندگذشته ، ازهمکاریهای بی شائبهٔ نویسندگان ومترجمان مقالات برخوردار خواهد بود .

عبدالحسین مصحفی

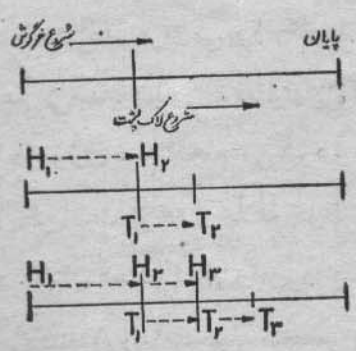
مسابقهٔ خرگوش و لاك‌پشت

ترجمهٔ : مقصود عین‌اللهی

تقریباً می‌توان گفت که امروز همه داستان خرگوش ولاك‌پشت رامی‌دانندویکی‌ازقدیمیترین ضرب‌المثلها که‌متضمن این نکته است این شعر فارسی است :

رهروآن نیست گهی‌تند گهی‌خسته رود
رهروآنست‌که آهسته‌وپیوسته‌رود.

در داستان مزبور ، پیروزی لاك‌پشت مبتنی بر ثبات عقیدهٔ او وشکست‌خرگوش نشان دهندهٔ غفلت و اطمینان زیاد از حد به خود می‌باشد . آشکار است که خرگوش به آسانی می‌توانست در مسابقه برنده باشد، حتی اگر در طول مسابقه یکنواخت قدم برمی‌داشت . اماثابت می‌کنیم‌که در هر مسابقهٔ بین خرگوش ولاك‌پشت ،اگر لاك‌پشت از یك تقدم برخوردار باشد ، یعنی‌زمانی که‌لاك‌پشت مسابقه‌را شروع می‌کندخرگوش در پشت سر او قرار گرفته باشد ، برندهٔ مسابقه در هر حال لاك‌پشت خواهد بود : اگر خرگوش بخواهد در مسابقه‌برنده شود باید از لاك‌پشت بگذرد وبرای گذشتن از لاك‌پشت اول باید از محل شروع لاك‌پشت‌بگذرد. اماوقتی که‌خرگوش‌به‌محل‌شروع لاك‌پشت می‌رسد،لاك‌پشت‌مسافتی‌راطی‌کرده‌و به‌نقطهٔ‌جدیدی‌رسیده‌است. پس‌خرگوش به منظور گذشتن‌از لاك‌پشت‌باید اول به این‌نقطه برسد وزمانی که خرگوش‌به این‌نقطه‌می‌رسدلاك‌پشت مسافت دیگری را طی کرده وبه نقطهٔ جدیدی رسیده است . به همین‌ترتیب می‌بینیم وقتی‌که لاك‌پشت به پایان مسابقه رسیده هنوز خرگوش به او نرسیده است .



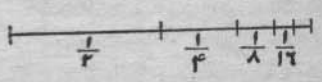
تقریباً این مسابقه شبیه مسابقهٔ بین دو اسب در روی یك چرخ‌فلك می‌باشد .

با این استدلال بنظر می‌رسد که ثابت می‌شود در هر مسابقهٔ بین خرگوش و لاك‌پشت که در آن لاك‌پشت از امتیاز تقدم برخوردار باشد ، لاك‌پشت برنده می‌باشد . یا در حقیقت در هر مسابقهٔ بین دو مخلوق (انسان‌یا حیوان) اگر یکی از آنها از امتیاز تقدم برخوردار باشد ، برنده خواهد بود اگر چه سرعت حریف خیلی بیشتراز او باشد .

خطای این استدلال چیست که در نتیجهٔ آن به‌یك‌چنین نتیجهٔ پارادوکسی می‌رسیم .

ممکن است این فکر را بکنید که رابطه‌ای بین تقدم و طول مسابقه وجودداردکه‌باعث می‌شودلاك‌پشت در این‌مسابقه پیروز شود ولی اگر دوباره‌استدلال‌را بخوانید متوجه‌می‌شوید که هرقدر هم تقدم ناچیز باشد خرگوش به نقاطی می‌رسد که قبلا لاك‌پشت‌آنهارا طی کرده است . یك بیان دیگرممکن‌است این نکته را متذکر شود که خرگوش از روی بعضی از نقاط می‌پرد ودرهمین حین از لاك‌پشت می‌گذرد ، اما باید متوجه بود که ؛ اگر چه پای خرگوش با زمین تماس پیدا نمی‌کند اما جثهٔ او مسلماًازروی‌هریك‌ازنقاط می‌گذرد . این‌پارادوکس ۴۵۰ سال قبل از میلادتوسطیك فیلسوف یونانی به‌نام**زنون** (Zenon) بیان شده است . این فیلسوف هوشیار پارا فراتر نهاد و ثابت کرد که حتی لاك‌پشت هم هرگز به خط پایان مسابقه نمی‌رسد .

استدلال اوبه شرح زیر است : قبل‌ازاینکه لاك‌پشت به خط پایان مسابقه برسد باید نیمهٔ طول مسابقه را بپیماید و برای اینکه نیمهٔ دیگر را بپیماید باید نیمهٔ آنرا طی‌کند وهمچنین هر دفعه باید نیمهٔ فاصلهٔ خودرا تاخط پایان بپیماید .



بنابراین مسافت مسابقه از بینهایت مسافتهای کوچك

تشکیل شده که هرکدام از آنها در زمان محدود و معینی طی می‌شود. اما زنون با استناد به‌اینکه مجموع بینهایت اعداداز زمانهای محدود نامحدود می‌باشد ثابت کرد که هیچ دونده‌ای درزمان محدود ، یعنی هرگز ، به خط پایان مسابقه نمی‌رسد. واکنش شما در مورد این مطالب ممکن است به این صورت تفسیر شود که چون بکار بردن جمله‌های متداول ریاضی‌مانند مسافت، نقطه ،حرکت‌وبینهایت ، ایجاد مباحث فلسفی‌مختلفی بین ریاضیدانهامی‌کنند پس‌این نکات درریاضیات واقعی چه‌کاری انجام می‌دهند یعنی اگر علم ما دربارهٔ نقاط واعداد مارابه‌یك نتیجهٔ منطقی برساند که تجربهٔ آن عجیب و غیر معقول باشد ممکن است این فکر درما بوجود آید که قواعد ریاضی نتایج غلط وخطرناك بوجود می‌آورند .

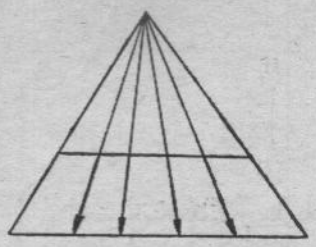
بهترین ریاضیدانها- دانشمندان و فیلسوفان درقرنهای بعداز زنون کوشیدند که‌این نتایج عجیب را توضیح دهند وبه پیشرفتهای نسبتاً مهمی هم در این مورد نائل آمدند تا اینکه **گالیله** در سال ۱۶۳۶دو پارادوکس‌دیگر مطرح‌کرد وباکشف جدید (ولی بازهم پارادوکسی) وی بصیرت تازه‌ای برای این مسائل بوجود آورد .

او اظهار داشت هر چند که هر عدد صحیح مثبت مربع عدد صحیح دیگری نیست (مثلا عدد صحیحی وجود ندارد که مربعش پنج باشد) ، اما هر عدد را می‌توان با عددی دیگر که مربع کامل آن است مقابل کرد :

۱	۲	۳	۴	۵	n
↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓
۱	۴	۹	۱۶	۲۵	n^2

ظاهرآبه‌نظرمی‌رسدکه { ۱،۴،۹،۱۶، ۲۵، ..... } دارای جملاتی کمتر از { ۱،۲،۳،۴،۵ .... } می‌باشند اما اگراین‌دومجموعه‌را مقابلهٔ یکبیك کنیم مجموعهٔ مربعهای‌کامل ته نخواهد کشید! با مجموعه‌های متناهی که به همین ترتیب باشند به‌هیچ وجه چنین مقابله‌ای نمی‌توان یافت ؛ سعی‌کنید { ۱،۲،۳،۴ } و { ۱،۲،۳،۴،۵ } رابك‌به‌یك‌مقابله‌نمائید؟!

اما در دنیای بینهایتها چیزهای عجیب اتفاق می‌افتد .



مهمتر از مسئلهٔ خرگوش ولاك پشت ، گالیله‌متذکرشدکه‌طول دوقطعه خطرانمی‌توان با شمردن تعداد نقاط در آنها مقایسه کرد ؛ درست‌به‌همان اندازه‌نقطه‌در یك‌خط ۲سانتیمتری وجود دارد که در خط ۳ سانتیمتری هست . نقاط دوقطعه خط‌به شکل مقابل در تناظر یکبیك می‌باشند .

با اعتراف به اینکه خطوط با طولهای متفاوت دارای یك اندازه نقطه می‌باشند ، پارادوکس خرگوش و لاك‌پشت را می‌توان‌به‌صورت قانع‌کننده‌تری بیان‌کرد .ازآنجائی‌که‌خرگوش باید با همان اندازه نقاط تماس پیدا کند که لاك‌پشت با آنها تماس می‌یابد.(حتی‌اگر مسافت مسابقهٔ‌خرگوش‌بیش ازلاك‌پشت باشد) این امر به او اجازه می‌دهد که مسافت بیشتری را طی کند ولی وجود جاه‌طلبی در خرگوش باعث ودلیل شکست‌او در این مسابقه می‌باشد . بینش گالیله در مفهوم بینهایت‌برای پارادوکسهای‌زنون‌تعریفی بوجود آورد که خود تعریف‌دارای یك پارادوکس می‌باشد .

یکی از قاعده‌های مسلم ریاضی‌این عقیده بودکه همیشه «کل بزرگتر ازهریك‌از اجزاء ش‌می‌باشد». درصورتی‌که گالیله نشان داد تعداد جملات‌قسمتی از اعداد صحیح و مثبت : { ۱،۴،۹،۱۶،.... } درست برابرتعداد جملات تمام‌اعداد صحیح‌ومثبت می‌باشد .او این انکار آشکار را بااستناد به اینکه مفاهیم تساوی ، بزرگتر وکوچکتر شامل بینهایت نمی‌شوند بیان کرد . وتا آخر قرن نوزدهم پارادوکسهای گالیله‌کاملا درك نشده بودند .

جرج کانتور آفرینندهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها بیان کردکه اگر دو مجموعهٔ (محدودیا نامحدود) را بتوان جمله به‌جمله با هم مقابله‌کرد تعداد جملات‌آن‌دومجموعه برابر است.برای مثال تعداد جملات { ۱،۲،۳ } برابرتعداد جملات { a،b،c } می‌باشد و همچنین (در حالتی‌که مجموعه‌های نامتناهی مطرح است) تعداد جملات مجموعهٔ‌اعدادصحیح‌مثبت برابرتعدادمجموعهٔ‌اعدادزوج می‌باشد زیرا :

$$\begin{array}{ccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & ۲n \end{array}$$

به‌محض اینکه کانتور نظریهٔ‌خودش را دربارهٔ مجموعه‌ها واعداد اصلی آنهابیان‌کرد، پارادوکسهای‌جدیدی‌دراعتراض به عقیدهٔ او ظاهر شد .

طبق تعریف او ،خیلی از مجموعه‌ها دارای همان‌تعداد ازجملات می‌باشندکه‌یکی اززیر مجموعه‌های‌آنهادارااست‌برای مثال مجموعهٔ{ ۱،۲،۳،۴،۵،..... } دارای‌جملاتی برابر با تعداد جملات هریك از مجموعه‌های{ ۲،۴،۶،۸،۱۰... } و { ۳،۶،۹،۱۲،۱۵،..... } و { ۱۵،۳۰،۴۵؛۶۰،۷۵،... } می‌باشد . درحقیقت‌کانتور گفت که یك مجموعه نامحدود است اگر و فقط اگر بتوان آن‌را در مقابلهٔ یکبیك بایکی اززیر مجموعه‌هایش قرار داد . اوثابت‌کردکه قاعدهٔ «کل‌بزرگتر ازهریك‌ازاجزاء خودمی‌باشد» فقط در مورد مجموعه‌های محدود و متناهی درست می‌باشد .

دو موضوعی که حقیقتی‌مسلم از زندگی ریاضی بشمار می‌رفت مباحثی بین دانشمندان قرن نوزدهم بوجود آورد .با همهٔ اعتراضهاکانتور چند مجموعهٔ نامحدودپیدا کردکه‌جملاتی بیشتر از مجموعهٔ اعداد صحیح دارند . او ثابت کرد که راهی برای مقابلهٔ یکبیك اعداد صحیح با اعداد حقیقی وجودندارد .

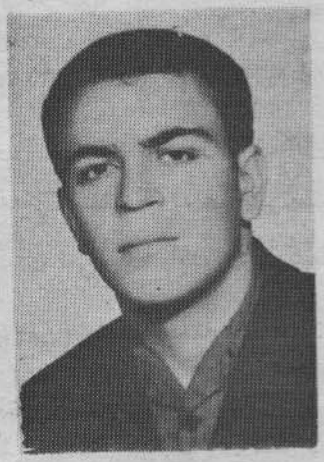
به عبارت دیگر نسبت به مجموعهٔ اعداد صحیح مجموعهٔ اعداد حقیقی بینهایتی از رتبهٔ بالاتر است . به علاوه کانتور ثابت‌کردکه بینهایت عدد از اعداد بینهایت وجوددارد!

درست مثل اینکه نظریهٔ‌کانتور نشانهٔ‌امیدی برای‌کشف اسرار دنیای‌بینهایت‌بود .زیراریاضیدانانی‌که به‌اینگونه‌مطالب بدگمان بودند درصدد برآمدند که پارادوکسهای جدیدی در موردموارداستعمال مجموعه‌ها مطرح کنند ؛ **برتراند راسل** فیلسوف شهیر معمای زیررا مطرح کرد : آرایشگر دهکده‌تمام افرادی راکه خودشان ، خودشان را اصلاح نمی‌کنند اصلاح می‌کند . چه کسی خود آرایشگر را اصلاح می‌کند ؟ آیا او از مجموعهٔ افرادی می‌باشدکه خودشان ، خودشان را اصلاح می‌کنند (وتوسط آرایشگر اصلاح نمی‌شوند) ویا از مجموعهٔ افرادی است که توسط آرایشگر اصلاح می‌شوند (و بنابراین توسط خودش) . بنابراین باید فکر خودمان‌را دربارهٔ کار با این مسائل تمرین‌دهیم . درحقیقت‌کانتور وقتی‌که گفت‌مجموعهٔ بزرگتری از بزرگترین مجموعهٔ ممکن وجود دارد سخنی در خلاف عقیدهٔ خودش‌بیان کرد! اینها وسایر نتایج حاصل‌ازنظریهٔ مجموعه‌ها ، ریاضیدانان را در بکاربردن مجموعه‌هامحتاط‌کرد.

وقتی‌که‌پارادوکسهای زنون مباحث مختلف فلسفی‌رادر مورد نقطه ، مسافت ، بینهایت‌بوجود آورد.علاقمندان‌تحریك شدند که پارادوکسهای جدیدتری‌در موردحقایق مسلم ریاضی مطرح کنند . ریاضیدانهای قرن بیستم نیز روی این مسائل مطالعه کردند وبسیاری از پارادوکسهای مربوط به مجموعه‌ها و بینهایتها را حل کردند اما در هر حال همینکه یك دسته از پارادوکسها حل می‌شود،انواع جدیدی از اینگونه معماها مطرح‌می گردد .

اگر دوست دارید که با یك پارادوکس مهم دست‌وپنجه نرم‌کنید این‌پارادوکس راکه به‌زنون (دانشمندی بافکرفعال‌ولی مزاحم) نسبت‌می‌دهند مطالعه کنید : یك‌تیر ظاهراً ازموقعی‌که از کمان رها می‌شود تا موقعی‌که به هدف می‌رسد درحرکت است،درصورتی‌که ؛ تیر در هر لحظه اززمان دریك نقطه‌واقع می‌باشد وبرای واقع بودن‌در یك نقطه تیر باید ساکن باشد در این‌صورت ؛ چون تیر درهرلحظه دریك نقطه واقع است وواقع بودن دریك‌نقطه یعنی ساکن بودن ، پس تیر درهر لحظه‌ساکن می‌باشد یعنی تیر درتمام مدت پروازش کاملا ساکن می‌باشد !

دانش‌آموز رتبه اول‌ششم ریاضی استان آذربایجان‌شرقی



جبار غفار زاده

از دبیرستان بزرگمهر تبریز

معدل کتبی: ۱۹/۲۷

معدل کل : ۱۹/۵۰

نمایندگی‌یکان‌در تبریز: ملازاده

تربیت معلم ریاضی در کشورهای مختلف

از مجلهٔ آمریکائی «معلم ریاضی»

ترجمهٔ: محمدحسین احمدی

۷ ـ انگلستان

در انگلستان بچه‌ها تحصیل را درهفت سالگی بعداز یك دورهٔ سه سالهٔ «کودکستانی» آغاز می‌کنند و تا سن یازده‌سالگی به ادامهٔ تحصیلات ابتدایی خود دردبستان می‌پردازند وآنگاه اجباراً تا سن ۱۵ سالگی برای تحصیلات بیشتر به دبیرستان می‌روند . در انگلستان چهار نوع دبیرستان وجود دارد :

الف ـ دبیرستانهای خصوصی (ملی) ـ این مدارس خصوصی بسیار متداول‌اند و شهریه اخذ می‌کنند .

ب ـ (Grammar School) که مخصوص آماده سازی دانش آموزان جهت تحصیلات دانشگاهی است .

ج ـ (Secondary Modern)

د ـ (Comprehensive)

دونوع اخیرالذکر ازدبیرستانهای بدون‌شهریه‌می‌باشد. هزینهٔ آنها توسط دولت تأمین شده و به‌دبیرستانهای آمریکائی شباهت دارند .

اولین دورهٔ چهار سالهٔ دبیرستانی برای سنین ۱۱ تا ۱۵ سال بوده و دارای‌کلاسهای از یك تا چهار می‌باشد . امتحانات فارغ‌التحصیلی این دوره‌که موسوم‌به«O ـ level» است در پایان دورهٔ مذکور یعنی در پایان سال چهارم از دانش آموزان بعمل می‌آید . در این امتحان دانش‌آموزان‌سه و یا حد اکثر چهار ماده راکه در طول مدت دورهٔ چهار ساله فراگرفته‌اند انتخاب می‌کنند ودراین مقام هیچ اجباروضرورتی در انتخاب مواد ریاضیات درکار نبوده و غالباً هم این مواد مورد انتخاب قرار نمی‌گیرد .

دومین دورهٔ دبیرستانی‌که درواقع دورهٔ اعلای‌دبیرستان برای سنین ۱۶ تا۱۹ سال است یك‌دورهٔ آماده سازی دانش‌آموزان جهت گذراندن دوره‌های دانشگاهی تلقی می‌گردد . این دوره‌کلاسهای پنجم و ششم راکه به‌ترتیب یکساله و دو ساله است شامل می‌شود. درپایان این دوره‌کلیهٔ دانش‌آموزان در امتحان «A ـ level» برای دو ویا حداکثرسه ماده‌شرکت می‌جویند . موفقیت دراین امتحان به منظور ورود به هر یك از دانشگاههای بریتانیا جزآکسفورد وکمبریج که امتحانات ورودی را مستقلا بعمل می‌آورند لازم و ضروری است .

معلمین داوطلب تدریس در دبستان باید امتحان «O ـ level» راگذرانده سپس برای مدت حداقل بیش از یك سال درکلاس‌پنجم‌دبیرستان(Grammar School)تحصیل وبعداز آن‌که۱۷سال دارند برای‌گذراندن یك دورهٔ سه ساله وارد دانشسرایعالی می‌شوند . برنامهٔ تحصیلی این دوره‌شامل چکیدهٔ حداقل مواد ریاضی است‌که درکار تفهیم و تفاهم‌آنچه که باید تدریس نمایند بکارشان می‌آید . اغلب پذیرفته‌شدگان امتحان ریاضیات «O ـ level» را حذف‌کرده‌اند . از اینرو آنچه راکه مطالعه می‌کنند درحدریاضیات O ـ level مدارس بوده و معادل ۳ تا ۶ واحد می‌باشد . اما هر معلم باید یك مادهٔ اختصاصی ویك مادهٔ غیراختصاصی از دروس راکه‌یحتمل ریاضیات باشد انتخاب‌کند . مواد اختصاصی ۱۸ واحد ومواد غیراختصاصی بالغ بر ۱۲ واحد است . پس معلمانی‌که‌ریاضیات را به‌عنوان مادهٔ اختصاصی خود انتخاب می‌کنندبسیارقلیل‌اند. بقیهٔ برنامهٔ‌آنها با روش تدریس وتمرین‌دبیری پایان‌می‌پذیرد. این افراد آماده‌اندکه در ۲۰ سالگی‌کار معلمی را آغازکنند .

برای تدریس در دبیرستان داوطلب باید در امتحان «O ـ level» و نیز امتحان ماده یا موادی‌که می‌خواهد

تدریس کند شرکت جسته و آنرا با موفقیت بگذراند . مضافاً به اینکه تحصیل درکلاس پنجم و اولین سال (از دورهٔ دو سالهٔ) کلاس ششم را دنبال کرده و با موفقیت بپایان رساند . آنگاه واردکالج تربیت معلم شده و به تحصیل و گذراندن یك برنامهٔ چهار ساله می‌پردازد . برنامه و امتحانات این دورهٔ تحصیلی تحت نظارت وکنترل دانشگاهی که کالج مذکوروابسته به‌آنست صورت می گیرد . کالج معلمان بایدمورد قبول‌وتأیید دانشگاه بوده و بوسیلهٔ آن بـه رسمیت شناخته شده باشد . معلمانی که‌درریاضیات تخصص پیداکردند می‌توانند‌در کلاسهای ۱و۲و۳ (دبیرستان) به تدریس بپردازند . امـا این نکته را نباید از نظر دور داشت‌که برای آنان امکان تدریس هریك از موادکلاسهای فوق‌الذکر وجود دارد. این امر در مورد سایر دروس اختصاصی نیز صادق است . فی‌المثل متخصص تربیت بدنی ممکن است در این‌کلاسها ریاضیات تدریس‌کند همانطور که متخصصان زبان و دیگر متخصصان غیر ریاضی نیز این‌کار را انجام می‌دهند .

در دبیرستانهای از نوع دوم‌که در ابتدا آمد گذرانـدن کلاسهای ۵ و ۶ جهت توفیق در امتحانات «A - level» و ورود به‌دوره‌های دانشگاهی واجب وضروری است . معلمان ریاضی پس از اتمام یك دورهٔ سه ساله دانشگاهـی و یك سال دورهٔ‌آموزش فنی تعلیم دریك کالج تربیت معلم، فارغ‌التحصیل خواهند شد. دوره‌های تکمیلی دردانشگاه تنها برای ریاضیات و برخی از دوره‌های وابسته به فیزیك وجود دارد . معلمان حرفهٔ خود را در سن ۲۳ سالگی آغاز می‌کنند .

اما در این‌کشور نیز مانند سایر ممـالك‌کمبود دبیران ورزیده و ذیصلاحیت وجـود دارد از اینرو در دبیرستانهـای جدید ، اکثریت قریب به اتفاق معلمان ، از فارغ‌التحصیلان دورهٔ سه سالهٔ‌کالج معلمان هستند . در تجدید نظرهای اخیر برنامهٔ ریاضی دبیرستان (Grammar School) دبیران شاغل مجرب وکارآزموده به مطالبی برخوردندکـه در دورهٔ تحصیلاتشان مطالعه نکرده بودند از اینرواکثردبیران‌علاقمند با هزینهٔ شخصی خود ، دوره‌های‌کوتاهی را جهت بیشترآماده ساختن خود می گذرانند .

VI - استنتاج

تا اینجا نظام آموزشی چند کشور پیشرفته‌به ایجاز و چگونگی تربیت معلمان آنها به تفصیل بیان شد . اینك ضمن استنتاج کلی از مقاله ، نظام آموزشی و نوع تربیت معلم‌در آمریکا مورد مقایسه واقع می‌شود :

الف ـ گروه معلمان مدارس ابتدائی :

با صرف‌کمی دقت‌و تأمل در امر تربیت معلمان‌مدارس ابتدایی (که ویژهٔ افراد به سنین ۱۳-۵ سال است) بالبداهه این حقیقت عاید می‌شود که دانش ریاضی معلمان مذکور جز عدهٔ معدودی (که بالغ بر ۱۰ درصدند) ناچیز بوده و تحقیقاً بالاتر از سطح برنامهٔ جبر دورهٔ اول دبیرستان نیست . حقیقت دوم آنکه دورهٔ تحصیلات‌بعداز دبیرستانی آنها رویهمرفته در حدود دو سال بوده و اغلب برنامه‌های آنها اختصاص به دروس عملی از قبیل روش‌تدریس بالاخص ، و متدلوژی‌بالاعم دارد . معلمان کشورهای نامبرده از سن حدود ۲۰ سالگی‌که از نقطه نظر زمانـی و تحصیلی دو سال زودتر از معلمان آمریکائی نظیر خود فارغ‌التحصیل می‌شوند کار تدریس در مدارس ابتدایی را آغاز می‌کنند . بدیهی است‌که حقوق این دسته‌از معلمان ازحقوق معلمانی‌که به‌کار تدریس دردبیرستانها اشتغال داشته وبخصوص دانشگاه دیده‌اند خیلی کمتر است . مشاهداتی‌که از کلاسشان بعمل آمده مبین این نکته است که آموزش آنها در مورد فعالیتهای تازه‌کـه مربوط به ریاضیات مشهور به«ریاضیات زنده» است ازروی اجبار بوده و مشتمل برعلم محاسبه است‌که‌کار بردآن منحصراً در مشاغل وامور اجتماعی می‌باشد .

معلمان مذکور (جز درآلمان) معمولا از دبیرستانهای

ممتاز و برگزیده‌ای چون Grammar school (۱) (در انگلستان) و Gymnasium (در آلمان) و Lycée (در فرانسه) فارغ‌التحصیل نمی‌شوند بلکه‌پس از اتمام سیکل اول متوسطه در این مدارس همانند سایر شاگردانی که وارد مدارس حرفه‌ای معین می‌شوند وارد مدرسهٔ حرفه‌ای خواهند شد و منصفانه است‌که اگر بگوئیم بطورکلی درکشورهایی‌که شرح نظام آموزشی و تربیت معلم آنها گذشت حرفهٔ معلمی، حرفه‌ای نیست‌که در سطح مشاغل معمولی جهان باشد.

بااتکا برآنچه‌که‌فوقاً آمد به‌سؤال‌اساسی‌زیر برمی‌خوریم: «آمریکا با ازدیاددو سال دورهٔ تربیت معلمان مدارس ابتدایی خود چه فواید ونتایجی‌در مقام مقایسه با معلمان سایرکشورها که دو سال کمتر دوره دیده‌اند عایدش می‌شود؟» مطمئناً در این دورهٔ اضافی چیزی که قابل توجه باشد بردانش ریاضی آنها افزوده نخواهد شد و اگر هم چنین باشد مطالب اضافی اکتسابی مورد توجه و استفادهٔ گروهی‌ازدانش‌آموزان‌آمریکائی قرار نخواهدگرفت.

ب ـ گروه معلمان دبیرستانها

موضوع تربیت معلمان ریاضی سیکل اول متوسطه (که ویژهٔ افراد به سنین ۱۵-۱۱ سال است) یکی از مسائل خطیر تعلیم و تربیت را در تمام کشورها اینطور مطرح می‌سازد که بطورکلی معلمان مذکور نیز همان دورهٔ‌آموزش «روش‌تدریس» راکه‌یك معلم دبستان می‌بیند می‌گذرانند با این تفاوت‌که در اغلب‌امور تعلیم‌وکارآموزی آنهادردبیرستانهابه‌مراتب‌بیشتر و در سطحی بالاتر انجام می‌گیرد. اگر احیاناً قرار باشد معلمی فقط و فقط ریاضیات تدریس نماید امکان انجام این امر برای او منوط به مطالعهٔ وسیعی است‌که باید درریاضیات‌آنهم در سطحی فوق‌برنامهٔ ریاضیات دبیرستانها داشته باشد.

اما کمبود معلمان مجرب و ذیصلاحیت در سطح سیکل اول متوسطه، زیاده ازحد و مافوق تصور است. ویکی از جمله دلایل موجد این امر آن‌است‌که معلمان کارآزموده و با تجربه عموماً به دنبال تحصیلات عالیه رفته و می‌روند و اقدامی‌که‌به‌منظور جبران این فقر در سطح‌آموزشی سیکل‌اول به مرحلهٔ اجرا درآمده عبارت از این است که دراین سطح هر کس‌که از نقطه نظر روش تدریس (فن تعلیم)، آموزش دیده باشد می‌تواند هرموادی‌راکه بخواهد بی‌آنکه تخصص کالجی و یا دانشگاهی‌درآن مواد بخصوص داشته باشد در دبیرستان تدریس‌نماید. علت غائی موجد این کمبود، برنامهٔ‌جدیدی‌است که در امر تعلیم ریاضیات در سطح مذکور تدوین شده‌است؛ طرحی‌که راه کاملا تازه‌ای را برای آموختن ریاضیات عرضه می‌کند و مشتمل بر مفاهیمی است که در ریاضیات دورهٔ دوم متوسطه و یا در ریاضیات کالج مورد توجه و ملاحظه قرار می‌گرفته است. معلمانی که‌شاغل خدمت‌وکارآزموده‌اندهنوز آماده و مجهز برای تدریس برنامه‌های جدید نشده‌اند ومسئلهٔ آموزش مجدد مادام که مشغول کارندبه‌علت فقدان کمکهای دولتی جهت چنین برنامه‌ها، مشکلتر از انجام آن درکشور آمریکاست.

بطورکلی معلمان مدارس متوسطه از فارغ‌التحصیلان دبیرستانهای برگزیده‌که‌نامشان فوقاً گذشت بوده و آنهاممکن است در ریاضیات تخصص داشته و یحتمل نداشته‌باشند. آنها رویهمرفته یك دورهٔ تحصیلی سه ساله کالج را به انضمام یك سال دورهٔ‌آموزشهای عملی می‌گذرانند و آنگاه بعد از اتمام این دوره‌هادرسن حدود ۲۲ سالگی یعنی زمانی‌که از هرجهت شرایط لازم‌را پیداکرده‌اند شغل مقدس معلمی را آغازمی‌کنند.

ج ـ گروه معلمان عالی رتبه دبیرستانها

معلمان ریاضی عالی رتبهٔ دبیرستانهای آمریکاکه بی‌شك

(دنباله‌درصفحهٔ۶۵۲)

(۱) Grammar school از دبیرستانهائی است‌که درآن علاوه برعلوم و زبانهای جدید زبانهای لاتین، یونانی، فلسفه وعلوم انسانی نیز تدریس می‌شود و اصولا سطح علمی این دبیرستانها از سایر دبیرستانهابه حد غیر قابل تصوری بالاتر است و معمولاکثرت قریب به اتفاق دانشجویان دانشگاههائی چون آکسفوردوکمبریج‌رافارغ‌التحصیلان دبیرستان مذکورتشکیل می‌دهند. نظیر این دبیرستان در فرانسه (به‌نام Lycée) و درآلمان نیز هست و مخصوصاً درآلمان به اینگونه دبیرستانها، دبیرستان‌علوم انسانی (Humanistic Gymnasium) می‌گویندوبرای فارغ‌التحصیلان اینگونه مدارس ارزش فوق‌العاده‌ای قائلند زیرا در این قبیل مدارس سختگیریها به حداعلای خودبوده و اکثراً هم با همکاری‌کلیساها اداره می‌شوند. (مترجم)

تعبیرات هندسی دترمینان

علیرضا امیرمعز «دانشگاه تکزاس تک»

تعبیرات هندسی موضوعهای ریاضی معمولا مطلب را روشن می‌کند. در این مقاله‌دترمینان (determinant) یك ماتریکس(matrix)بااعدادحقیقی‌راازنظرهندسی‌بررسی‌می‌کنیم.

۱ـ اصطلاحات : سعی می‌کنیم‌که اصطلاحات جبر خطی مقدماتی را بکار بریم . فضای اقلیدسی n بعدی را با R_n نمایش می‌دهیم . حروف یونانی نمایندهٔ بردارها خواهند بود . حاصل‌ضرب داخلی دو بردار ξ و η را با $(\xi ، \eta)$ نمایش می‌دهیم . سمبل detA به معنی دترمینان ماتریکس A است .

۲ـ مبنای دست راست : فرض‌کنیم‌که $\{\alpha_1 ، \alpha_2\}$ یك دستگاه مختصات‌قائم‌با واحدهای α_1 و α_2 در R_2 (صفحه) باشد . این دستگاه مختصات را مبنای دست راست : (right - handed) گویند هرگاه دوران به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ حامل α_1 رابدل‌به α_2 کند و α_2 را بدل به $-\alpha_1$. بنابراین ماتریکس‌این دوران‌چنین است :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

اکنون بردار $\xi = x\alpha_1 + y\alpha_2$ را در نظر می‌گیریم .

واضح است‌که معادلهٔ دوران این حامل عبارتست از :

$$(x ، y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-y ، x).$$

پس از دوارن ξ بدل می‌شود به :

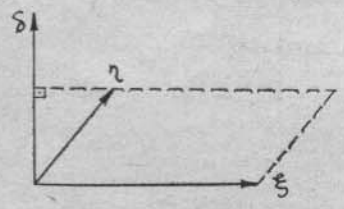
$$\delta = -y\alpha_1 + x\alpha_2$$

حامل δ را قائم دست راست ξ می‌نامیم . مبرهن است که برای هر بردار ξیك وفقط یك بردار δ موجود است .

۳ـ دترمینان ماتریکس دو به دو : فرض‌کنیم‌که :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

دستگاه مختصات دست راست $\{\alpha_1 ، x_2\}$ رادر R_2 (صفحه)چنان‌می‌گزینم که :



شکل ۱

$$\xi = x_1\alpha_1 + y_1\alpha_2 \quad \text{و} \quad \eta = x_2\alpha_1 + y_2\alpha_2$$

شود . سپس بردار δ یعنی قائم دست راست ξ را در نظر می‌گیریم (شکل ۱) . ملاحظه می‌شودکه تصویر η روی محوری‌که بردار واحد آن $\frac{\delta}{|\delta|}$ است از این قرار است :

$$(\eta \text{ و } \frac{\delta}{|\delta|}) = h.$$

اگر متوازی‌الاضلاعی‌که از دو حامل ξ و η ساخته می‌شود در نظر بگیریم وبردار ξ را روی قاعدهٔ آن قراردهیم $|h|$ برابرطول ارتفاع‌این متوازی‌الاضلاع است . به‌این‌ترتیب

$$(\eta ، \delta) = h|\delta| = h|\xi| .$$

چون $\delta = -y_1\alpha_1 + x_1\alpha_2$ ، نتیجه می‌شودکه :

$$(\eta ، \delta) = x_1y_2 - x_2y_1 .$$

بنابراین :

$$\det A = \det[\xi ، \eta] = x_1y_2 - x_2y_1$$

باید ملاحظه کرد که $[\xi ، \eta]$ یك زوج رتبه دار از حاملهاست و :

$$\det[\xi ، \eta] = f[\xi ، \eta]$$

تابعی حقیقی از زوج $[\xi ، \eta]$ است .

اکنون ماتریکس :

$$B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}$$

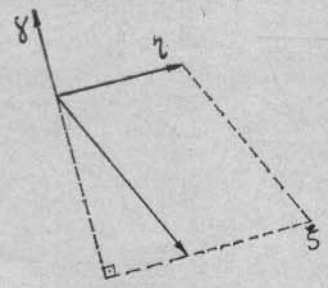
را درنظر می‌گیریم . در این حالت ، به‌حقیقت

$\det B = \det[\eta , \xi]$ را بررسی می‌کنیم . قائم دست راست η را γ می‌نامیم (شکل ۲) . پس :

$$\gamma = -y_2\alpha_1 + x_2\alpha_2$$

دو باره ملاحظه می‌شودکه :

$$(\xi , \frac{\gamma}{\|\gamma\|}) = k$$



شکل ۲

تصویر ξ روی محوری می‌باشدکه واحدآن $\frac{\gamma}{\|\gamma\|}$ است . در این حالت $|k|$ برابر ارتفاع متوازی‌الاضلاع قبل است‌که قاعدهٔ آنرا روی حامل η گذاشته‌ایم . بالنتیجه :

$$\det B = \det[\eta , \xi] = x_2y_1 - x_1y_2 = \pm \det A$$

در هر دوحالت قدر مطلق دترمینان ماتریکس برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است‌که روی حاملهای ξ و η بنا می‌شود .

باید ملاحظه شودکه تاکنون $\{\xi , \eta\}$ را بطورخطی مستقل گرفته‌ایم حالت دیگر را نیز باید بررسی‌کردکه دربخش زیر به آن می‌رسیم .

۴ـ بعضی خواص : فرض‌کنیم‌که A و ξ و η همان کمیات بخش ۳ باشند . در این صورت :

I ـ $\det[\eta , \xi] = -\det[\xi , \eta]$

II ـ اگر $\{\xi , \eta\}$ بطور خطی مستقل نباشد :

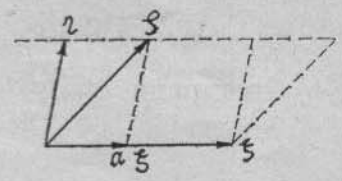
$$\det[\xi , \eta] = 0$$

III ـ ازخاصیت مساحت متوازی‌الاضلاع می‌توان‌نتیجه گرفت‌که :

$$\det[a\xi , \eta] = a\det[\xi , \eta]$$

باید حالات $a > 0$ و $a < 0$ را بررسی کرد .

IV ـ حامل $\zeta = a\xi + \eta$ را در نظرمی‌گیریم (شکل ـ ۳) .ملاحظه می‌شود



شکل ۳

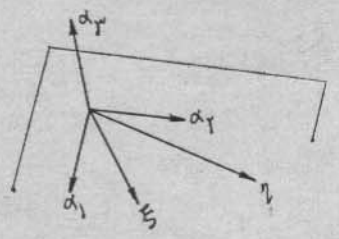
که مساحت متوازی‌الاضلاعی‌که روی ξ و ζ بنامی‌شودبرابر مساحت متوازی‌الاضلاعی‌است‌که روی ξ و η ساخته‌می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شودکه :

$$(\eta \text{ و } \frac{\delta}{\|\delta\|}) = (\zeta \text{ و } \frac{\delta}{\|\delta\|})$$

بردار δ همانست‌که در قسمت ۳ بیان شده . نتیجه می‌شودکه :

$$\det[\xi , \eta + a\xi] = \det[\xi , \eta]$$

۵ـ حاصل‌ضرب خارجی و دترمینان : دستگاه قائم دست راست $\{\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3\}$ را در R_3 (فضا) درنظر می‌گیریم (شکل ۴) برای‌این‌دستگاه‌روابط زیر برقرار است .



شکل ۴

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 = \alpha_3 \text{ و } \alpha_2 \wedge \alpha_3 = \alpha_1 \text{ و } \alpha_3 \wedge \alpha_1 = \alpha_2$$

حال‌کمیات A و ζ و η مبحث ۳ را در نظر می‌گیریم. در این صورت مجموعه‌های رتبه‌دار سه‌تایی $(x_1 \text{ و } y_1 \text{ و } 0)$ و $(x_2 \text{ و } y_2 \text{ و } 0)$ به‌ترتیب به ζ و η مرتبطند . ملاحظه می‌شودکه حاصل‌ضرب خارجی $\zeta \wedge \eta$ و دترمینان A دررابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\xi \wedge \eta = (\det A)\alpha_3$$

بنابراین به مجموعهٔ ماتریکسهای دوبه‌دو یك زیرفضای یکبعدی در R_3که با α_3 احداث می‌شود مربوط است .

اکنون ماتریکس سه به سه زیر را در نظر می‌گیریم .

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

سه بردار ξ و η و ζ را چنان می‌گیریم‌که

$$\xi = x_1\alpha_1 + y_1\alpha_2 + z_1\alpha_3 \text{ و } \eta = x_2\alpha_1 + y_2\alpha_2 + z_2\alpha_3$$
$$\zeta = x_3\alpha_1 + y_3\alpha_2 + z_3\alpha_3$$

حاصل‌ضرب خارجی $\eta \wedge \zeta = \delta$ را در نظر می‌گیریم . روشن است‌که حامل δ برهردوی η و ζ عمود است .هرگاه بنویسیم :

$$\delta = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$$

نتیجه‌می‌شود که:

$$x = \det\begin{pmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{pmatrix} \text{ و } y = -\det\begin{pmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

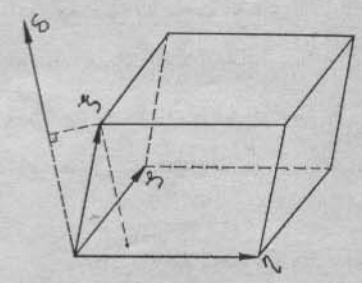
$$\text{و} z = \det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

معمولا x و y و z را کوفاکتورهای (cofactor) A که به ترتیب متعلق به x_1 و y_1 و z_1 اند ، می‌نامند . ولی منظورما تعبیر هندسی این مقادیر است .

ملاحظه‌می‌شودکه $\|\delta\|$ برابرمساحت‌متوازی‌الاضلاعی است‌که‌روی η و ξ بنا می‌شودو مثلا $|\delta|$ برابر مساحت‌تصویر این متوازی‌الاضلاع روی صفحهٔ xy است . اکنون متوازی‌السطوحی که روی ξ و η و ζ بنا می‌شود درنظر می گیریم. اگر متوازی الاضلاعی‌که بر η و ζ بنا می‌شود قاعده بگیریم ارتفاع مربوط قدر مطلق :

$$(1) \qquad \left(\xi, \frac{\delta}{\|\delta\|}\right) = h$$

می‌شود . البته h تصویر ξ روی‌محوری است که واحد آن $\frac{\delta}{\|\delta\|}$ وعمود برهر دوی η و ζ است (شکل ۵). از تساوی (۱) نتیجه می‌شودکه:



شکل ۵

$$(\xi \text{و} \delta) = h\|\delta\| = x_1x + y_1y + z_1z$$

به این ترتیب :

$$\det A = \det[\xi, \eta \text{ و } \zeta] = (\xi, \delta)$$

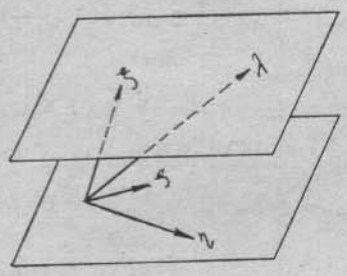
در این تساوی $[\xi, \eta, \zeta]$ یك سه‌تایی طبقه بندی شده از سه بردار ξوηوζ است . می‌توان گفت که detA حجم جبری (مقدار حجم با علامت) متوازی‌السطوحی است‌که‌روی ξوηوζ بنا می‌شود . خواصی‌که درقسمت ۴ بیان شد می‌توان در این حالت بررسی کرد،به‌ویژه :

I ـ مثلا

$$\det[\xi, \eta, \zeta] = -\det[\eta, \xi, \zeta]$$

یعنی اگردو خط ماتریکس راباهم‌ردوبدل‌کنیم‌ماتریکسی بدست‌می‌آیدکه‌دترمینان آن مقدارمنفی‌دترمینان A است .

II ـ اکنون صفحه‌ای که از انتهای بردار ξ می گذرد و موازی‌هردوی η و ζ است درنظر می گیریم (شکل۶) .هر بردار λ که انجامش در این صفحه است چنین نوشته می‌شود :



شکل ۶

$$\lambda = \xi + a\zeta + b\eta$$

ملاحظه می‌شودکه حجم جبری‌متوازی‌السطوحی که‌رویλوηوζ بنامی‌شود برابر حجم متوازی‌السطوحی است‌که بر ξ و η و ζ بنا می‌شود . بالنتیجه :

$$\det[\lambda, \eta, \zeta] = \det[\xi, \eta, \zeta].$$

خواص دیگر را به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم . آنچه‌در این بخش بررسی شد مربوط به حالتی بودکه $\{\xi, \eta, \zeta\}$ بطور خطی مستقل است . حالت دیگر نیز باید بررسی شود .

۶ ـ تعبیر هندسی دیگر : چنانچه در بخش ۵ ملاحظه شد در این مبحث هم‌می‌توان دستگاه قائم دست‌راست $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ رادر R_4 انتخاب کرد. فرض‌کنیم :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

حاملهای خطوط این ماتریکس را به ترتیب ξوηوζ می‌نامیم. به ترتیب به این بردارها مجموعه‌های طبقه بندی شدهٔ چهارتایی $(x_1$ و y_1 و z_1 و ۰) و $(x_2$ و y_2 و z_2 و ۰) و $(x_3$ و y_3 و z_3 و ۰) مربوط است . بنابه تعریف حاصل‌ضرب گراسمان (Grassmann) این سه حامل داریم:

$$\xi \wedge \eta \wedge \zeta = (\det A)\alpha_4$$

باید ملاحظه‌کردکه ترتیب بردارها را نمی‌توان عوض کرد . اینجا دو باره به مجموعهٔ ماتریکسهای سه‌به‌سه یك زیر فضای

یکبعدی R_4 مربوط است . از اینرو می‌توان آنچه در بخش ۵ مطالعه شده در بارهٔ A و ماتریکسهای چهار بـه چهار بررسی کرد .

۷ـ تعمیم: فرض کنیم که به‌طریق استقراء (induction) دترمینان ماتریکسهای $(n-1)$ به $(n-1)$ را تعریف کرده‌ایم و خواص هندسی آنرا بررسی کرده‌ایم . بردارهای خطهای ماتریکس :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

رابه‌ترتیب ξ_1و...وξ_n می‌نامیم . کوفاکتورهای مربوط‌به‌خط اول را درنظرمی گیریم. این کوفاکتورها مؤلفه‌های :

$$\delta=\xi_2\wedge\dots\wedge\xi_n$$

نسبت به دستگاه دست‌راست قائم $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ هستند . به‌آسانی می‌توان ثابت‌کردکه δ بر همهٔ حاملهای $\xi_2,\dots,\xi_n$ عمود است . یعنی :

$$(\xi_i,\delta)=0 \text{ و } i=2 \text{ و } \dots \text{ و } n.$$

ملاحظه می‌شودکه :

$$(\xi_1,\frac{\delta}{\|\delta\|})=h$$

صویر ξ_1 بر محوری است‌که واحدآن $\frac{\delta}{\|\delta\|}$ است و $|h|$ بر بر ارتفاع متو زی‌السطوح n بعدی‌است که بر $\xi_1,\dots,\xi_n$ می‌توان بناکرد وقاعدهٔ آن متوازی‌السطوح $(n-1)$ بعدی است‌که روی $\xi_2,\dots,\xi_n$ بنامی‌شود . بنابراین می‌توان گفت:

$$\det A=(\xi_1,\delta)=\det[\xi_1,\dots,\xi_n]$$

باید توجه‌کردکه $[\xi_1,\dots,\xi_n]$ یك مجموعهٔ طبقه‌بندی شده‌از حاملهاست .

در اینجا خواص هندسی detA را همانطوری کـه در بخش ۵ بررسی شد می‌توان مطالعه کرد . آنرا به‌خواننده واگذار می‌کنیم .

کتابها :

۱-Abraham, R. Linear and multilinear algebra, W.A. Benjamin Inc, N.Y (1966).

۲- Amir-moéz, A. R., Fass, A. L., Elements of linear spaces; Dergamen Press Inc.; N. Y. (1961).

۳- Amir-moéz, A. R., Elements of multilinear algebra Texas Tech Univ. Press (1969)

۴-Birkhoff, G., mac Lano, S.,Asurvey of modern algebra (P288)' Mecmillan Co., N.Y (1965)

۵- Gantmacher, F. R., Application of the theorey of matrixes, Translated from Russian by J. L. Brenner. New York Interscience (1959)

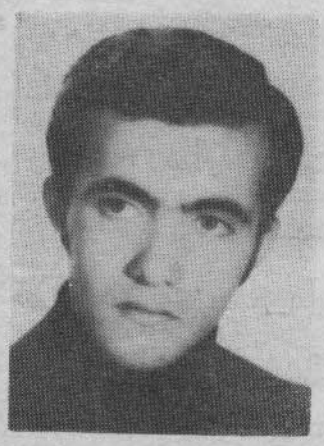
۶- Halras, P.R., Finite-Dimensional vector Spaces, D. Van Nostrand Co. Princeton (1958)

دانش آموزان رتبهٔ اول ششم ریاضی (خرداد ۴۹)

استان گیلان

شهرام شاهنگیان
از دبیرستان شاهپوررشت
معدل کتبی : ۱۸٫۳۶

محمد جواد قائدی
از دبیرستان محمد رضاشاه پهلوی رشت
معدل کتبی : ۱۸٫۳۶



نمایندگی یکان در رشت: طاعتی

از : ل. ت. ژوکوا (مسکو)
بخشی از کتاب مسایل دبیرستانهای ریاضی (شوروی)

ترجمهٔ : باقر امامی

آموزش مفهوم پیوستگی وحد تابع در کلاس نهم

(قسمت دوم)

§۳. اعمال حساب برروی توابع پیوسته

قضیهٔ مربوط به جمع توابع پیوسته در نقطهٔ x_0 برای دانش‌آموزان اشکالات بخصوصی ایجاد نمی‌نماید. اثبات قضیه مربوط به حاصل‌ضرب دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ پیوسته در نقطهٔ x_0 را که کمی پیچیده‌است مورد بررسی قرارمی‌دهیم:

فرض‌کنیم $\varepsilon > 0$ مفروض باشد. لازم است مجاورتی‌از x_0 بدست‌آوریم بقسمی‌که به‌ازای جمیع نقاط‌آن داشته‌باشیم:

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| < \varepsilon$$

تفاضل واقع درداخل علامت قدرمطلق را به‌ترتیب‌زیر تبدیل می‌کنیم :

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| = |f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)| =$$
$$= |g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]|$$

بنابه قضیه‌های مربوط به‌مقادیرمطلق داریم:

$$|g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]| \leq$$
$$\leq |g(x)| \cdot |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \cdot |g(x) - g(x_0)|$$

حال اگرهردوعامل کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ باشند مجموع کمتر از ε خواهد بود. معلوم است که‌آنچنان مجاورتی از نقطهٔ x_0 باید پیدا نمودکه درآن هرعامل کمتراز $\frac{\varepsilon}{2}$ باشد. این کاررادر سه‌مرحله انجام می‌دهیم .

۱- بنا به پیوستگی تابع $g(x)$ به‌ازای عدد مثبت $\frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|}$ آنچنان مجاورت αی نقطهٔ x_0 پیدا می‌شودکه به ازای جمیع نقاط آن :

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|}$$

باشد واضح است‌که به‌ازای جمیع نقاط این‌مجاورت داریم :

$$|f(x_0)| \times |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

۲- مجاورت به‌شعاع β ازنقطهٔ x_0 وجود دارد بقسمی که به‌ازای جمیع نقاط آن :

$$|g(x) - g(x_0)| < 1$$

باشد ، یعنی :

$$g(x_0) - 1 < g(x) < g(x_0) + 1$$

نامساوی اخیر بدین معنی است‌که به‌ازای جمیع نقاط مجاورت βی نقطهٔ x_0 : $|g(x)| < M$ است‌که درآنجا :

$$M = \max\left\{|1 + g(x_0)| \text{ و } |g(x_0) - 1|\right\}$$

۳- بنابه پیوستگی تابع $f(x)$ درنقطهٔ x_0 به ازای عدد مثبت $\frac{\varepsilon}{2M}$ مجاورت $(x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$ی نقطهٔ x_0 وجود دارد که درآنجا :

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

حال ازسه مجاورت $(x_0+\alpha$ و $x_0-\alpha)$ و $(x_0+\beta$ و $x_0-\beta)$ و $(x_0+\gamma$ و $x_0-\gamma)$ کوچکترین آنهارا انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم :

$$\delta=\min\left\{\alpha \text{ و } \beta \text{ و } \gamma\right\}$$

باشد در این صورت به‌ازای جمیع نقاط مجاورت $(x_0+\delta$ و $x_0-\delta)$ بطور همزمان داریم:

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2M} \quad ; \quad |g(x)|<M \quad ;$$

$$|f(x_0)\cdot|g(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

بنابراین به‌ازای جمیع نقاط این مجاورت:

$$|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)|\leq|g(x)|\cdot|f(x)-f(x_0)|+$$
$$+|f(x_0)|\cdot|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$$

از این قضیه وقضیهٔ مربوط به مجموع توابع پیوسته نتیجه می‌شود :

a) اگر c مقدار ثابت و $f(x)$ تابع پیوسته در نقطهٔ x_0 باشد تابع $y=cf(x)$ نیز درنقطهٔ x_0 پیوسته‌است .

b) تابع $y=x^2$ مانند حاصل‌ضرب تابع پیوستهٔ $y=x$ درخودش در هرنقطهٔ دلخواه x پیوسته است و بطور مشابهی توابع $y=x^2$ ، $y=x^4$ ،...، $y=x^n$ (...و۳و۲و۱ = n) پیوسته‌اند .

c) تابع $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ درهرنقطهٔ دلخواهی پیوسته‌است .

سپس به‌سادگی اثبات می‌شودکه تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ درهر نقطهٔ دلخواه x_0 که درآنجا $f(x)$ پیوسته و $f(x_0)\neq 0$ باشد پیوسته‌است . از این قضیه وقضیهٔ مربوط به حاصل‌ضرب دو تابع پیوسته، پیوستگی نسبت دوتابع پیوسته درهر نقطه‌ای‌که مخرج مساوی صفرنباشد نتیجه می‌شود .

وبدین‌ترتیب : درنتیجهٔ انجام اعمال حساب‌روی توابع پیوسته بازهم توابع پیوسته‌ای بدست می‌آید .

منتها در نتیجهٔ اعمال حساب روی توابع منفصل نه‌فقط توابع منفصل بلکه توابع پیوسته نیزممکن است‌بدست‌آید.

نمونه‌هایی ازاین نوع را درنظرمی‌گیریم. تابع:

$$\varphi(x)=x[1-2D(x)]$$

را که درهمه‌جا سوای $x=0$ منفصل بود قبلا تعریف‌کردیم.

فرض می‌کنیم :

$$f(x)=[\varphi(x)]^2=x^2[1-2D(x)]^2$$

به‌سادگی دیده می‌شودکه $f(x)=x^2$ است زیرا اگر x منطق باشد دراین صورت $f(x)=x^2(1-2)^2=x^2$ و درهرنقطهٔ اصم دلخواهی : $f(x)=x^2(1=0)^2=x^2$ ولی تابع $f(x)=x^2$ درهمه جا پیوسته‌است و بدین‌ترتیب حاصل‌ضرب دوتابع منفصل تابع پیوسته‌ای ازآب درآمد.

مجموع دوتابع $y=[x]$ و $y=\left\{x\right\}$ که درهمه‌جامنفصل هستند تابع $y=x$ است‌که همواره پیوسته‌است.

§ ۴- پیوستگی توابع مرکب

قضیه - فرض‌کنیم تابع $\varphi(y)$ درفاصلهٔ Y و تابع $f(x)$ درفاصلهٔ X پیوسته باشند وبه‌علاوه وقتی x فاصلهٔ X را می‌پیماید مقادیرتابع اخیر ازحدود Y خارج نمی‌شوند . اگر $f(x)$ درنقطهٔ x_0 از X پیوسته باشد ، $\varphi(y)$ درنقطهٔ نظیر $y_0=f(x_0)$ از Y پیوسته است و در نتیجه تابع مرکب $\varphi[f(x)]$ نیزدرنقطهٔ x_0 پیوسته خواهد بود.

اثبات ـ فرض کنیم $\varepsilon>0$ عدد دلخواهی باشد چون تابع $\varphi(y)$ در نقطهٔ $y=y_0$ پیوسته است پس عددی مانند $\delta>0$ پیدا می‌شود بقسمی که از $|y-y_0|<\delta$ نامساوی $|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$ نتیجه شود.

ازطرف دیگراز پیوستگی تابع $f(x)$ به‌ازای $x=x_0$ لازم می‌آیدکه به‌ازای $\delta>0$ می‌توان $\alpha>0$ را معلوم نمود بقسمی‌که به‌ازای جمیع مقادیر xکه $|x-x_0|<\alpha$ است

$$|f(x)-f(x_0)|=|y-y_0|<\delta$$

باشد ولی‌اگر $|y-y_0|<\delta$ باشد پس:

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|=|\varphi[f(x)]-\varphi[f(x_0)]|<\varepsilon$$

چون نامساوی $|x-x_0|<\alpha$ نامساوی :

$$|\varphi[f(x)]-\varphi[f(x_0)]<\varepsilon$$

را موجب می‌شود پس پیوستگی تابع مرکب نتیجه می‌شود.

به‌عنوان مثال‌بررسی پیوستگی رویهمی توابع انفصالی، خالی‌ازفایده نیست . مثلا :

۱- آیا تابع $y=f(u)$ که در آن $u=\varphi(x)$ است

در صورت :

$$f(u)=\begin{cases} u & ، \quad 0<u<1 \\ 2-u & ، \quad 1<u<2 \end{cases}$$

و

$$\varphi(y)=\begin{cases} x & ، \quad 0< \text{منطق } x<1 \\ 2-x & ، \quad 0< \text{اصم } x<1 \end{cases}$$

پیوسته خواهد بود ؟

۲ـ پیوستگی تابع $f[g(x)]$ و $g[f(x)]$ رادرحالت‌های زیر بررسی‌کنید :

a) $f(x)=\mathrm{Sgn}x$ و $g(x)=1+x^2$

b) $f(x)=\mathrm{Sgn}x$ و $g(x)=x(1-x^2)$

c) $f(x)=\mathrm{Sgn}x$ و $g(x)=1+x-[x]$

Sgnx (علامت x) به‌ترتیب زیرتعریف می‌شود:

$$\mathrm{Sgn}x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

۳ـ ثابت‌کنید اگر $f(x)$ درنقطهٔ $x=x_0$ تابع‌پیوسته‌ای باشد تابع : $F(x)=|f(x)|$ نیز در نقطهٔ $x=x_0$ تابع پیوسته‌ای است .

(راهنمایی : $F(x)=\varphi[f(x)]$ است که درآن $\varphi(Y)=|y|$ می‌باشد) .

II ـ حد توابع

§ ۱ـ تعریف حد تابع در یك نقطه

مفهوم تابع پیوسته پیش دانش‌آموزان عادتی به ترمینولژی ε و δ باهمان طرح و ترتیب سئوالها ایجاد می‌کند : مجاورتی پیدا کنیدکه به‌ازای جمیع نقاط آن فلان شرط برقرار باشد. بنابراین ، تعریف حدتابع دریك نقطه‌که به زبان ε،δ تنظیم گردد اشکالات جدی برنمی‌انگیزد . از ابتدا به وضوح دیده می‌شود که برای تابع پیوسته وفقط برای تابع پیوسته داریم :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

نکاتی چند دربارهٔ تعریف حد تابع متذکر می‌شویم :

حد تابع ، این‌عدد است. بنابراین دراوان کارلازم نیست بگوئیم : «حد برابربی‌نهایت است» وبنویسیم :

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

بهتراست بگوئیم‌که به‌ازای میل آوند x به‌سمت a مقدارنظیر تابع ازلحاظ قدرمطلق بینهایت، بزرگ می‌شود یعنی تابع در نقطهٔ $x=a$ متناهی نیست.

برای وجود حدتابع در نقطهٔ $x=a$ لازم است که تابع درمجاورت دلخواه به‌قدرکفایت‌کوچك نقطهٔ $x=a$ معین باشد (به‌عبارت دیگرنقطهٔ $x=a$ باید نقطهٔ حدی مجموعهٔ مقادیر آوند باشد) وحتی لازم نیست‌که مقدارتابع در خود نقطهٔ a وجود داشته باشد .

(یعنی حتماً لازم نیست‌که :

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

باشد) . آشنائی با سئوالهای زیرمفید است:

آیا می‌توان دربارهٔ حدتوابع زیردرنقاط معین‌شده صحبت کرد ؟ واگربلی، دراین صورت آیا این توابع درنقاط مفروض دارای حدی می‌باشند ؟

a) $\varphi(x)=x!$ درنقاط $x=2$ ، $x=0$ ، $x=-2$ ، $x=\sqrt{2}$

b) $f(x)=x+\sqrt{|x|-x}$ درنقاط $x=2$ ، $x=-2$ ، $x=0$

c) $f(x)=\frac{x}{x}$ درنقطهٔ $x=0$

d) $\varphi(x)=\frac{\sin x}{\sin x}$ درنقاط $x=K\pi$

e) $D(x)=\begin{cases} 0 & ، \text{اصم } x \\ 1 & ، \text{منطق } x \end{cases}$ درنقاط $x=-\sqrt{2}$ ، $x=\pi$ ، $x=\frac{3}{7}$

بهترین گواه درك مفهوم حد تابع عبارت از مهارت در تنظیم نفی حد است، دراین حالت ساختن تعریف نفی حد را فی‌المثل اینطور می‌توان نقل‌نمود : عدد A حدتابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ نمی‌باشد اگر به ازای $\varepsilon>0$ دلخواه ، نتوان

مجاورت δی نقطهٔ $x=a$ پیدا کردکه بـه‌ازای جمیع نقاط آن (شاید سوای خود نقطهٔ $x=a$) نامساوی :

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

برقرار باشد . واین بدان معنی است‌کـه عددی مانند $\bar{\varepsilon}>0$ وجود داردکه به‌ازای آن پیدا کردن چنین مجاورتی امکـان ندارد یعنی به ازای‌آن در مجاورت δی دلخواه نقطهٔ $x=a$ خواست $|f(x)-A|<\bar{\varepsilon}$ به‌ازای جمیع‌نقاط این مجـاورت عملی‌نیست . بنابراین به ازای $\bar{\varepsilon}>0$ در مجاورت‌دلخواه نقطهٔ $x=a$ شاید یك نقطهٔ $x_1\neq a$ پیدا شود بقسمی‌که درآنجـا نـامساوی $|f(x_1)-A|\geq\bar{\varepsilon}$ برقرار باشد.

درخاتمه داریم: عدد A حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ نمی‌باشد ، اگرچنان $\bar{\varepsilon}>0$ وجود داشته باشدکه به‌ازای آن در مجـاورت دلخـواه نقطهٔ $x=a$ نقطهٔ $x_1\neq a$ پیدا شود (شاید فقط یك نقطه) که در آن نامساوی :

$$|f(x)-A|\geq\bar{\varepsilon}$$

صادق باشد . می‌توان مسئلهٔ ساخت تعـریف منفی را با آشنا ساختن دانش‌آموزان با حـداقل آگاهی از منطق برای آنان سبکتر نمود .

§ ۲ - اعمال حساب روی تـوابعی که‌دارای حد می‌باشند

قضیه - اگرتوابع $f(x)$ و $g(x)$ درنقطهٔ $x=x_0$ به‌ترتیب دارای حدهای A و B باشند داریم:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x).g(x)]=A.B$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(\text{باشرط } B\neq 0)$$

اثبات این قضیه‌ها بااثبات مشابه قضیه‌های نظیرمربوط به توابع‌پیوسته‌کمی‌فرق‌دارد. بنابراین‌می‌توان به‌دانش‌آموزان پیشنهاد نمودکه خود این‌کار را انجام دهند ولی با یاد آوری قضایای قبل دربارهٔ پیوستگی مجموع و حاصل‌ضرب و نسبت در تابع پیوسته از نتایجی‌که قبلاً فراهم شده است نیزمی‌توان استفاده نمود . مادام‌که دربارهٔ شرایط پیوستگی $f(x)$ و $g(x)$ چیزی گفته نشده است به ترتیب زیر عمل می‌کنیم . فرض می‌کنیم :

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x) & x\neq x_0\\ A & x=x_0\end{cases};$$

$$g_1(x)=\begin{cases}g(x) & x\neq x_0\\ B & x=x_0\end{cases}$$

زیرا :

$$\lim_{x\to x_0}f_1(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=A=f_1(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}g_1(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=B=g_1(x_0)$$

(اگر مقدارتابع در نقطهٔ $x=x_0$ تغییرکند حد آن در این نقطه تغییر نمی‌کند)

پس توابع $f_1(x)$ و $g_1(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته‌اند وبدین جهت $f_1(x)\pm g_1(x)$ همچنین $f_1(x)g_1(x)$ وهمچنین $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ (با شرط $B\neq 0$ برای آخری) پیوسته‌اند .

بنابراین :

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\pm g_1(x)]=f_1(x_0)\pm g_1(x_0)=A\pm B$$

$$\lim_{x\to x_0}f_1(x)g_1(x)=f_1(x_0)g_1(x_0)=A.B$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f_1(x_0)}{g_1(x_0)}=\frac{A}{B}\quad(\text{باشرط } B\neq 0)$$

توابع $f_1(x)\pm g_1(x)$ ، $f_1(x).g_1(x)$ و $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

ممکن است در همان نقطهٔ $x=x_0$ با توابع $f(x)\pm g(x)$ و $f(x).g(x)$ و $\frac{f(x)}{g(x)}$ فرق داشته باشند . بنابراین :

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\pm g_1(x)]=$$
$$=A\pm B$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x).g(x)=\lim_{x\to x_0}f_1(x).g_1(x)=A.B$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{A}{B}\quad(\text{باشرط } B\neq 0)$$

در آموزش حد مجموع و حـاصل‌ضرب و نسبت بایـد

دقت دانش آموزان را به این نکته جلب کرد که وجود حد توابع عوامل جمع یا عوامل ضرب کافی و غیر لازم برای وجود حد مجموع و حاصل‌ضرب و غیره است .

§ ۳. تغییر متغیر زیر علامت حد

فرض کنیم می‌خواهیم حد تابع مرکب $F[\varphi(x)]$ را در نقطهٔ $x=x_0$ بدست‌آوریم . اگر به ازای آن ، تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ و تابع $F(y)$ در نقطهٔ نظیر $y_0=\varphi(x_0)$ پیوسته باشد درآن صورت بنا به‌قضیهٔ پیوستگی ، تابع‌مرکب $F[\varphi(x)]$ در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته است .

$$\lim_{x\to x_0} F[\varphi(x)]=F[\varphi(x_0)]=F(y_0)=\lim_{y\to y_0} F(y)$$

بدین ترتیب اگر تابع مرکب $E[\varphi(x)]$ ازتوابع‌پیوستهٔ $\varphi(x)$ و $F(x)$ بوجود آید در این صورت محاسبهٔ حد تابع $F[\varphi(x)]$ به‌ازای $x\to x_0$ به محاسبهٔ حد تابع $F(y)$ به‌ازای $y\to y_0$ منجر می گرددکه آنهم بسیار ساده است . دراکثریت قریب به اتفاق تمرینات دبیرستانی بخصوص با این حالت سر و کار داریم .

وقتی‌که تابع $\varphi(x)$ یا $F(y)$ و یا هر دو تابع منفصل باشند وضع ناجور است .

مثالی ازاین گونه را موردبررسی قراردهیم .فرض‌کنیم:

($\frac{p}{q}$ تحویل ناپذیر و $q>0$)

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & ، \quad x=\frac{p}{q}\\ 0 & ، \quad x \text{ اصم}\end{cases}$$

$$F(y)=\begin{cases}1 & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

تابع $\varphi(x)$ (تابع ریمن) همانطورکه قبلاً گفتیم در هر نقطهٔ اصم دلخواه پیوسته و در هر نقطهٔ دلخواه منطق‌منفصل است. درنقطهٔ $x=0$ تابع $\varphi(y)$ وجود ندارد ولی‌به‌سادگی ملاحظه می‌شودکه $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$ و تابع $F(y)$ فقط در مبدأ مختصات منفصل است .

$$\lim_{y\to 0} F(y)=1$$

حد تابع مرکب $F[\varphi(x)]$را به‌ازای $x\to 0$ جستجو می‌کنیم .

اگر در حالت مفروضی‌رابطهٔ زیر صادق بود :

$$\lim_{x\to x_0} F[\varphi(x)]=\lim_{y\to y_0}$$

در این صورت نتیجه می گرفتیم‌که :

$$\lim_{x\to 0} F[\varphi(x)]=\lim_{y\to 0} F(y)=1$$

در واقع ما داریم :

$$F[\varphi(x)]=\begin{cases}1 & ، \quad x=\frac{p}{q}\\ 0 & ، \quad x \text{ اصم}\end{cases}$$

به عبارت دیگر تابع $F[\varphi(x)]$ تابع دیریکله است که نه در نقطهٔ $x=0$ و نه در نقطهٔ به‌ازای آن عدد دارای حدی نیست .

§ ۴. حد یك طرفهٔ تابع

تمرینی به‌صورت:«مطلوبست محاسبهٔ حد $\frac{|x|}{x}$ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند» مستمسکی به دست می‌دهد تا در بارهٔ حد تابع از سمت راست و حد تابع از سمت چپ صحبت‌شود.

کنار گذاشتن این سؤال بطورکلی ممکن نیست چونکه بعداً درآموزش مشتق توابع ، توجه به‌مفهوم مشتق یك‌طرفه ضروری است .

مهم آن است‌که دانش آموزان حالی شوندکه‌که حد چیست ، حد راست چیست ، حد چپ‌کدام است و این سه‌حد باقضایای زیر با هم مربوطاند :

۱) اگر $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ باشد در این صورت :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

۲) اگر $\lim_{x\to x^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$

باشد در این صورت $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

این قضیه‌ها کمی امکان‌می‌دهند تا حد تابع راگونه‌ای دیگربه‌حساب آورد و مخصوص پیداکردن حد از سمت راست

وحد از سمت چپ را و مقایسه‌کردن نتایج نظیر آنها را. تابعی که در نقطه‌ای دارای حد نیست ممکن است حد راست یا حد چپ و یا هر دو را دارا باشد و یا هیچکدام را دارا نباشد. درهرکدام از این حالتهای ممکن باید مثالهای مناسبی آورده شود.

§ ۵. تابع بینهایت بزرگ و بینهایت کوچک در یک نقطه

حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ به علل مختلف ممکن است وجود نداشته باشد یکی از آنها ترقی نامتناهی مقدار تابع (از لحاظ قدر مطلق) است وقتی x به‌سمت a میل می‌کند.

در این حالت بطور قرار دادی می‌گوئیم که در نقطهٔ $x=a$ حدبینهایت بزرگ تابع $f(x)$ وجود دارد و تابع را در نقطهٔ $x=a$ بینهایت بزرگ می‌نامیم.

تعریف ـ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ بینهایت بزرگ نامیده می‌شود اگر به‌ازای $M>0$ دلخواه بتوان آنچنان مجاورت $\delta>0$ پیداکرد که به‌ازای جمیع $x\neq a$ که از a به فاصلهٔ کمتر از δ قرار گیرند شرط $|f(x)|>M$ برآورده شود و در این حالت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

حالت $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ را ازحالت $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ فرق می‌گذاریم.

در حالت اول مقادیر تابع از هر عدد مثبت دلخواه می‌توانند بزرگتر شوند و در حالت دوم از عدد منفی دلخواه می‌توانندکوچکتر شوند.

معلوم‌است‌که تابع بینهایت بزرگ‌درنقطه‌ای ازمجاورت دلخواه این نقطه نا متناهی است ولی عکس مطلب درست نیست. مثلا تابع:

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

درمجاورت دلخواه مبدأ مختصات نامتناهی است: درمجاورت دلخواه نقطهٔ $x=0$ نقاطی پیدا می‌شوندکه در آنها مقدارتابع از لحاظ قدر مطلق از عدد دلخواه $M>0$ بزرگتر است‌ولی در همان مجاورت تعداد بینهایت نقاط وجود دارندکه در آنها $\cos\frac{1}{x}=0$ است و بنابر این $f(x)=0$ است یعنی به‌ازای $x\to 0$ تابع $f(x)$ بینهایت بزرگ نیست.

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=0$ باشد دراین صورت $f(x)$ درنقطهٔ $x=a$ بینهایت‌کوچك نامیده می‌شود.

تنظیم تعریف تابع بینهایت‌کوچك درنقطهٔ $x=a$ بازبان ε و δ مفید است. در این تنظیم تعریف بینهایت‌کوچك‌را از تعریف حد تابع باید نتیجه گیری‌نمود.

§ ۶. حد نسبت سینوس به‌آوند

اثبات درستی رابطهٔ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

را در هرکتاب درسی می‌توان پیداکرد.

در اینجا توجه به مطلب زیر جالب است. اگرنسبت $\frac{\sin x}{x}$ را در نظر بگیریم‌که درآن x اندازهٔ درجه‌ای زاویه باشد، در این صورت حد این نسبت به‌ازای $x\to 0$ مساوی واحد نخواهد بود زیرا اگر x اندازهٔ درجه‌ای زاویه باشد در این صورت اندازهٔ رادیانی آن $\frac{\pi x}{180}$ خواهد بودوبه‌ازای $x\to 0$ نسبت $\frac{\sin x}{\frac{\pi x}{180}}$ به سمت واحد میل خواهد کرد یعنی:

$$\lim\frac{\sin x}{\frac{\pi x}{180}}=1$$

و از آنجا:

$$\lim\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{180}$$

III پیوستگی توابع ساده

§ ۱. پیوستگی توابع نمائی

از قضایای مربوط به پیوستگی مجموع و حاصل‌ضرب و نسبت پیوستگی تابع:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

در هر نقطهٔ حقیقی و پیوستگی تابع‌کسری

$$y=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n}$$

در جمیع نقاطی‌که در آنها مخرج مساوی صفر نمی‌شود نتیجه

می‌گردد. پیوستگی توابع مثلثاتی :

$y = \sin x$ و $y = \cos x$ و $y = tg x$ و $y = cotg x$

نیز قبلا اثبات شده است .

اثبات پیوستگی تابع نمائی در سه مرحله انجام می‌یابد.

در زیر این سه مرحله را به ازای $a > 1$ عنوان نموده‌ایم

(به‌ازای $0 < a < 1$ می‌توان $a = \frac{1}{b}$ فرض کرد که در آن $b > 0$ است)

(۱

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

اثبات : چون $a > 1$ است پس $\sqrt[n]{a} > 1$ است یعنی می‌توان نوشت :

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha \quad (\alpha > 0) \qquad (1)$$

از آنجا : $\alpha = a^{\frac{1}{n}} - 1$

بنا به نامساوی برنولی به ازای $\alpha > 0$:

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha \quad (2)$$

ولی : $(1 + \alpha)^n = a$

و $1 + n\alpha = 1 + n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$

اگر در (۲) قرار دهیم خواهیم داشت :

$$a > 1 + n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

از آنجا : $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n}$

وچون $\frac{a-1}{n}$ به قدرکفایت می‌تواند کوچکتر گردد

پس $a^{\frac{1}{n}} - 1$ با شروع از یك عدد غیر مشخص $N(\varepsilon)$ ازعدد دلخواه ε کمتر خواهدگردید .

درنتیجه: $\lim_{x \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$

(۲

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1$$

اثبات : هرگاه $\varepsilon > 0$ مفروض باشد بنابه قسمت قبل عددی مانند $N(\varepsilon)$ وجود داردکه با شروع از آن :

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

حال‌ثابت‌می‌کنیم که‌به‌ازای $|x| < \frac{1}{N}$ نامساوی : $|a^n - 1| < \varepsilon$ برآورده می‌شود .

اگر $x > 0$ باشد دراین صورت‌نامساوی $|x| < \frac{1}{N}$ به صورت $0 < x < \frac{1}{N}$ نوشته می‌شود و بنابه یکنواختی تابع نمائی $y = a^x$ $(a > 1)$:

$$1 < a^x < a^{\frac{1}{N}}$$

ازآنجا : $0 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon$

اگر $x < 0$ باشددر این‌صورت $|x| = -x$ و ازنامساوی

$$0 < -x < \frac{1}{N}$$

(بنابه یکنواختی تابع $y = a^x$) نتیجه می‌شود :

$$0 < a^{-x} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon$$

اکنون واضح است‌که :

$$0 < 1 - a^x < a^{-x} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon$$

پس اگر $|x| < \frac{1}{N}$ باشد هم به ازای $x > 0$ و هم‌به ازای $x < 0$: $|a^x - 1| < \varepsilon$

(۳

$$(3) \quad \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

اثبات :

$$|a^x - a^{x_0}| = |a^{x_0}(a^{x - x_0} - 1)| = a^{x_0}|a^{x - x_0} - 1|$$

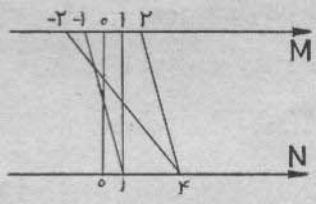
به‌ازای $x \to x_0$ ، کمیت $(a^{x - x_0} - 1)$ یك بینهایت کوچك است و بنابراین $a^{x_0}|a^{x - x_0} - 1|$ نیزکمیت بینهایت کوچکی خواهدبود (حاصل‌ضرب یك مقدار ثابت دریك‌بینهایت کوچك)

از رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شودکه تابع $y = a^x$ $(a > 1)$

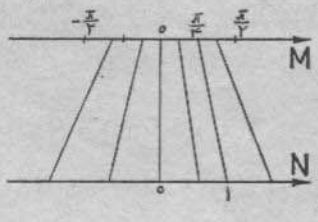
در هر نقطهٔ دلخواهی واقع در فاصلهٔ $(-\infty \; +\infty)$ پیوسته است .

§ ۲ـ مفهوم دربارهٔ توابع معکوس

یاد آورشویم که تابع $y=f(x)$ آن چنان تناظری بین دو مجموعه $M=\{x\}$ و $N=\{y\}$ را می‌نامند که به ازای هرجزء x از مجموعهٔ M یك جزء y فقط از مجموعهٔ N را نظیر قرار دهد .مثلا تابع $y=x^2$ ارتباط بین مجموعهٔ جمیع اعداد حقیقی M و مجموعهٔ جمیع اعداد غیر منفی(N) را بر قرار می‌سازد . این نوع ارتباط را با یك شکل هندسی نمایش‌می‌دهیم،درشکل ۱۶ پیکانهانشان می‌دهند که‌کدام مقدار $y_0 \in N$ نظیرعدد $x_0 \in M$ است و شکل ۱۷ تصویر تناظری است که تابع $y=tgx$ را در فاصلهٔ $(-\frac{\pi}{2} \text{ و } +\frac{\pi}{2})$ (مجموعهٔ M) با مجموعهٔ اعداد حقیقی مربوط می‌سازد .

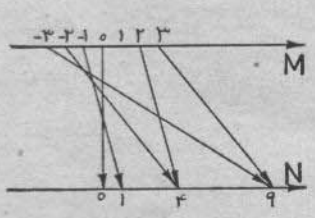


شکل ۱۶

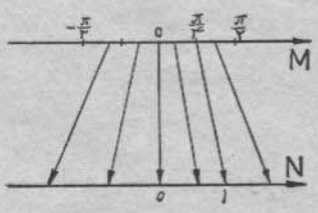


شکل ۱۷

حال عمل‌زیر را انجام می‌دهیم : درشکلهای ۱۶ و۱۷ جهت پیکانها را عوض می‌کنیم تا هر نقطهٔ $x \in M$ را به نقطهٔ $y \in N$ تنهادرجهت‌عکس وصل نماید . دراین صورت‌شکلهای ۱۸و۱۹ را نتیجه می گیریم .



شکل ۱۸



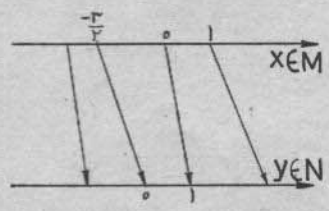
شکل ۱۹

حال‌هرجزء $y \in N$در تناظربا $x \in M$قرارداده شده‌است ولی اگر درحالت دوم (شکل ۱۹) هر جزء $y_0 \in N$ نظیر یك جزء $x_0 \in M$ بقسمی که $y_0 = tg\, x_0$ است در حالت اول هر جزء $y \in N$ (سوای $y=0$) نظیر دو جزء $x \in M$ می‌باشد بقسمی‌که $y=x^2$ است .

بنابراین‌درحالت دوم تابع $x=\varphi(y)$وجود دارد بطوری که‌هر مقدار حقیقی $y \in (-\infty \text{ و } +\infty)$ را در تناظر با یك مقدار فقط $x \in (-\frac{\pi}{2} \text{ و } +\frac{\pi}{2})$ قرار می‌دهد بقسمی که $y=tgx$ باشد این تابع را در مقابل $y=tgx$ تابع معکوس می‌نامندکه در فاصلهٔ $(-\frac{\pi}{2} \text{ و } +\frac{\pi}{2})$ معین است .

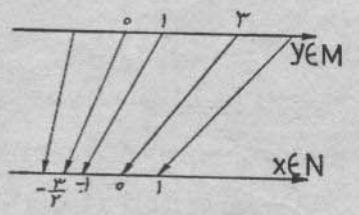
واضح‌است که تابع $y=x^2$که در مجموعهٔ‌جمیع اعداد حقیقی معین است تابع معکوس ندارد .

تعریف ـ فرض می‌کنیم N مجموعهٔ مقادیر تابع $y=f(x)$ معین در مجموعهٔ M باشد.اگر هر مقدار $y \in N$ نظیر یك مقدار فقط $x \in M$ باشد بطوری که $y=f(x)$ گرددراین صورت‌تابع $x=\varphi(y)$ که‌بدین‌ترتیب‌معین‌می‌شودتابع معکوس تابع $y=f(x)$ نامیده می‌شود .



شکل ۲۰

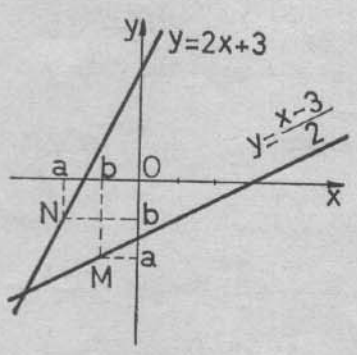
بدین ترتیب برای دو تابع عکس یکدیگر حوزهٔ معین بودن یکی به عنوان مجموعهٔ مقادیر تابع دیگر بکار می‌رودومجموعهٔ‌مقادیر تابع اولی حوزهٔ معین بودن تابع دومی است (شکلهای ۲۰ و ۲۱) برای مشاهدهٔ نمودار تابع معکوس $y=f(x)$ می‌توان به نمودار تابع $y=f(x)$ را در حالی که آنرا به اندازهٔ 90° چرخانده‌ایم از پشت نگاه کرد(بطوری که محور Ox قائم و محور Oy افقی‌باشد) ۰ اگر برای نوشتن تابع معکوس علامتهای‌معمولی را (یعنی x برای آوند و y برای متغیر) بکار بریم و هر دو نمودار را نسبت به یك دستگاه مختصات رسم‌کنیم واضح‌است که این نمودارها نسبت به نیمساز زوایای I وIII محورهای مختصات متقارن خواهند بود (شکل ۲۲) .



شکل ۲۱

از این مطالب برای رسم نمودار تابع معکوس یك

تـابع مفروض استفاده می‌شود، اگر این یکی وجودداشته‌باشد (رسم نمودارقرینهٔ یك‌نمودار مفروض‌نسبت‌به‌نیمساز زاویهٔ I وIII مختصات همواره‌مقدور است)



تمرین ۱ ـ برای توابع زیریاتابع‌معکوس بنویسید و یا ثابت‌کنیدکه چنین تابعی وجود ندارد .

a) $y=5$

b) $y=[x]$

c) $y=x+|x|$

d) $y=x^3$ $(x\leqslant 0)$

e) $y=\sqrt{1-x^2}$

f) $S(R)$ ، مساحت دایره به شعاع R

g) $D(x)$ ، تابع دیریکله

h) $f(x)=\begin{cases} x & \text{، منطق } x \\ -x & \text{، اصم } x \end{cases}$

۲ـ فرض‌کنیم حوزهٔ معین بودن تابع $y=f(x)$ عبارت از قطعه (فاصلهٔ) $[a,b]$ ومجموعه‌مقادیر این‌تابع قطعهٔ$[c,d]$ و $y=\varphi(x)$ تابع معکوس $f(x)$ باشد نمودارهای توابع $f[\varphi(x)]$ و $\varphi[f(x)]$ را رسم‌کنید . مثالی بیاورید .

۳ـ تابع $y=f(x)$ درتمام فاصلهٔ‌معین بودنش یکنواخت است . ثابت‌کنیدکه این تابع دارای تابع معکوس است . آیا تابع غیر یکنواخت دارای تابع معکوس است ؟ آیایکنواختی تابع $y=f(x)$ شرط لازم وجود تابع معکوس است ؟

۴ـ ثابت‌کنید اگر تابع $f(x)$ صعودی (یانزولی) باشد تابع معکوس صعودی (یانزولی) است .

§ ۳ـ قضایای وجود و پیوستگی توابع‌معکوس

قضیهٔ ۱ـ اگرتابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته‌باشد در این‌صورت شرط لازم و کافی وجود تابع معکوس عبارت از یکنواختی تابع است .

کافی بودن این شرط واضح‌است . یکنواختی تابع یك تناظر یك ارزشی دوسوئی بین دو مجموعه برقرار می‌سازد : حوزهٔ معین بودن تابع و مجموعهٔ مقادیرآن .

اثبات لزوم آن متکی به قضیه‌ای است که به موجب آن‌تابع $f(x)$ پیوسته در قطعهٔ $[a,b]$ هر مقدار دلخواه c واقع بین $f(a)$ و$f(b)$ را اختیار می‌نماید(قضیهٔ دوم‌بولزانو-کشی) واین قضیه نیز به نوبهٔ خود ازقضیهٔ اول بولزانو-کشی حاکی ازصفر شدن تابع پیوسته‌که در دو انتهای قطعه مقادیر مختلف‌العلامه‌اختیار کند نتیجه می‌شود . هر دوی این قضیه‌ها را درآموزش‌خواص تابع پیوسته در یك فاصله اثبات می‌کنیم. این دو قضیه‌و روش‌اثبات‌آنها (روش تقسیم فاصله به قسمتهای احتمالا نامتساوی) عـلاوه بر ارزش تئوریکی ، برای حل معادلات ونامعادلات نیز مورد استفاده قرارمی‌گیرند وهمچنین دارای تعبیر هندسی‌جالبی می‌باشند(به‌کتاب‌محاسبات‌دیفرانسیل تالیف ابی . ژاك.کروس مراجعه شود)

حال ثابت‌کنیم‌که یکنواختی تابع $f(x)$ پیوسته درفاصلهٔ $[a,b]$ شرط لازم وجود تابع معکوس است .

فرض‌کنیم $f(x)$ غیر یکنواخت باشد . در این‌صورت یا باید $f(x)=cte$ باشد وتابع معکوس وجودندارد ویاسه‌مقدار آوند $x_1<x_2<x_3$ وجود دارد بقسمی که :

$$f(x_2)>f(x_3) \text{ و } f(x_1)<f(x_2)$$

و یا

$$f(x_2)<f(x_3) \text{ و } f(x_1)>f(x_3)$$

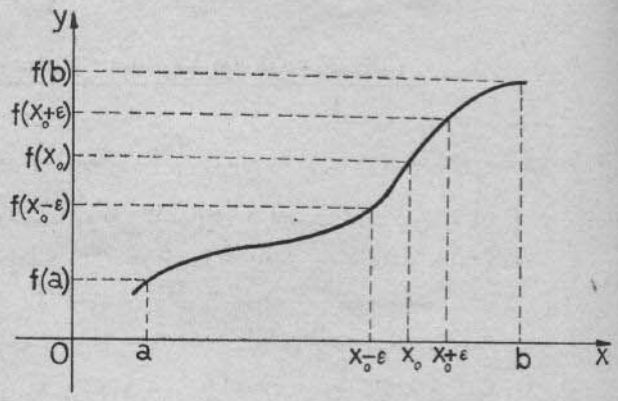
در حالت اول با تکیهٔ روی پیوستگی مقدار دلخواه c راکه با نامساویهای زیر سازگار است اختیار می‌کنیم :

$$f(x_1)<c<f(x_2) \text{ و } f(x_3)<c<f(x_2)$$

به جهت‌پیوستگی تابع $f(x)$ در قطعهٔ $[x_1,x_2]$ نقطه‌ای مانند x' پیدا می‌شودبقسمی‌که$f(x')=c$ و به‌طرزمشابهی درفاصلهٔ $[x_2,x_3]$ نقطهٔ x'' پیدا می‌شودکه $f(x'')=c$ بنابراین‌دومقدار مختلف x'وx'' آوند نظیر یك مقدار تابع قرار می‌گیرند $f(x')=f(x'')=c$ و در نتیجه $f(x)$ دارای تابع معکوس نمی‌باشد .

قضیهٔ۲ـ اگر $f(x)$ درقطعهٔ $[a,b]$ صعودی(یانزولی) و پیوسته باشد در این صورت تابع معکوس آن $x=\varphi(y)$در قطعهٔ نظیر $[f(a)$ و $f(b)]$ پیوسته خواهدبود. اثبات : فرض کنیم x_0 یك نقطهٔ اختیاری واقع در قطعهٔ $[a$ و $b]$ باشد در این‌صورت$f(a)<f(x_0)=y_0<f(b)$خواهدبودثابت‌می‌کنیم که تابع $x=\varphi(y)$ در نقطهٔ y_0 پیوسته است . برای این کار کافی است بـه ازای مقدار اختیاری $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ را

چنان پیدا کردکه از نامساوی $|y-y_0|<\delta$ نامساوی $|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$ نتیجه شود :



$\varepsilon>0$ را فقط با شرط : «نقاط $x_0+\varepsilon$ و $x_0-\varepsilon$ به قطعهٔ $[a,b]$ تعلق داشته باشند» انتخاب می‌کنیم . در این صورت به سبب یکنواختی تابع $f(x)$ از نامساویهای :

$$a<x_0-\varepsilon<x_0<x_0+\varepsilon<b$$

نتیجه می‌شود :

$$f(a)<f(x_0-\varepsilon)<f(x_0)<f(x_0+\varepsilon)<f(b)$$

یعنی نقاط $f(x_0-\varepsilon)$ و $f(x_0+\varepsilon)$ در فاصلهٔ $[f(a),f(b)]$ قرارمی‌گیرند. بزرگترین تفاضلهای :

$$f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)>0 \quad \text{و} \quad f(x_0)-f(x_0-\varepsilon)>0$$

را δ می‌نامیم و نشان می‌دهیم که با شرایط مطلوب سازگار است .

فرض می‌کنیم :

$$|f(x)-f(x_0)|<\delta \quad \text{یعنی} \quad |y-y_0|<\delta$$

یا :

$$f(x_0-\varepsilon)<f(x_0)-\delta<f(x)<f(x_0)+\delta<f(x_0+\varepsilon)$$

به سبب پیوستگی تابع $f(x)$ از این نامساویها نتیجه می‌شود:

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$$

یعنی

$$|x-x_0|<\varepsilon$$

و چون $x=\varphi(y)$ و $x_0=\varphi(y_0)$ است پس نامساوی آخری به صورت

$$|\varphi(y)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$$

نوشته می‌شود . بدین ترتیب به ازای هر y که به‌فاصلهٔ کمتر از δ از y_0 قرارگیرد نامساوی :

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$$

صادق و قضیه اثبات شده است .

مثال ـ تابع $f(x)=x^n$ $(x>0)$ (n عدد طبیعی) را در نظر می‌گیریم . $f(x)$ در سر تا سر حوزهٔ معین بودنش پیوسته است و بطور یکنواخت صعودی است بنابراین تابع معکوس وجود دارد و پیوسته است و بطور یکنواخت صعود می‌کند بدین ترتیب وجود ریشهٔ مرتبهٔ nام یك عدد مثبت اثبات می‌گردد .

بنابه‌پیوستگی تابع $y=\sqrt[n]{x}$ به‌ازای $x>0$ داریم :

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$$

§ ۴ـ تابع لگاریتمی و توابع مثلثاتی معکوس

۱ـ تابع $y=a^x$ که درآن $a>0$ و $a\neq 1$ است به ازای هر مقدار اختیاری $x=x_0$ از فاصلهٔ $(-\infty \text{ و } +\infty)$ پیوسته است و به علاوه این تابع در تمام فاصلهٔ معین بودنش یکنواخت می‌باشد. در نتیجه در مجموعهٔ مقادیر تابع نمائی یعنی در مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت تابع معکوس پیوسته و یکنواخت $x=\varphi(y)$ وجوددارد بقسمی‌که $y=a^x$ است .

این تابع را با $x=\lg_a y$ نمایش‌می‌دهیم .

اگرآوند را با x و تابع را با y نمایش دهیم توابع‌زیر راکه‌عکس یکدیگرند خواهیم داشت :

$$y=a^x(a>0 \text{ و } a\neq 1) \text{ و } y=\lg_a x\ (a>0 \text{ و } a\neq 1)$$

۲ـ تابع $y=\sin x$ که‌همواره پیوسته است در فاصلهٔ $(+\infty \text{ و } -\infty)$ یکنواخت‌نیست بنابراین دارای تابع‌معکوس نمی‌باشد . اگر تابع $y=\sin x$ راکه درآن :

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant +\frac{\pi}{2}$$

است در نظر بگیریم، این تابع با شرایط قسمت قبل سازگار است تابع معکوس تابع $y=\sin x$:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant +\frac{\pi}{2} ،$$

را آرك‌سینوس می‌نامند :

$$x=\arcsin y$$

این تابع نیز در فاصلهٔ $[-1 \text{ و } +1]$ پیوسته وبطوریکنواخت صعودی است .

بدین‌ترتیب بنابه تعریف :

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin y<\frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

$$\sin(\arcsin y)=y \qquad (2)$$

توابع $x=\arccos y$ و $x=\operatorname{arctg} y$ و $x=\operatorname{arccotg} y$ بطرز مشابهی تعریف می‌شوند و یکنواختی و پیوستگی آنها اثبات می‌شود .

نمودار توابع‌مثلثاتی‌معکوس را از روی قاعدهٔ‌کلی‌تقارن نسبت به‌نیمساز I و III نمودارهای توابع مستقیم رسم‌می‌کنیم.

«قضیهٔ جنسن و کار برد آن در حل مسائل نامساوی»

ترجمه و تنظیم از : عبدالرضا پور مهدی کسمالی

جنسن (J.L.V.W JENSEN) ریاضیدان دانمارکی و مدیر عامل شبکهٔ مهندسی تلفن دانمارك و عضو آکادمی علوم دانمارك بود .

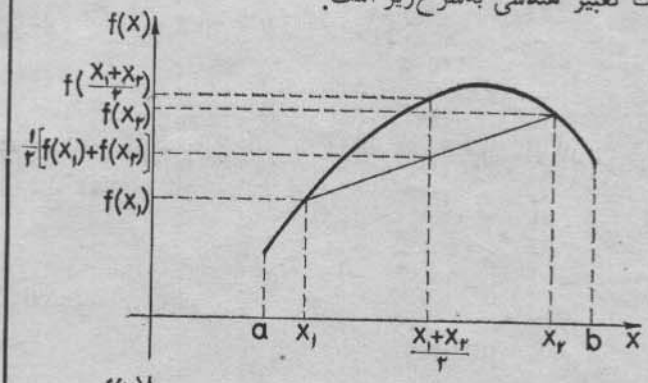
قضیه : اگر تابع $f(x)$ دارای چنان خاصیتی باشد که برای دو مقدار x_1 و x_2 متعلق به یك فاصله مانند $[a \text{ و } b]$ نامساوی زیر برقرار باشد :

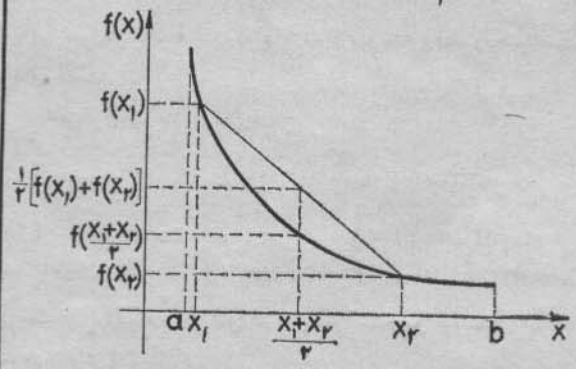
$$1)\quad f(x_1)+f(x_2)\leq xf\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

و اگر x_n و ... x_3 و x_2 و x_1 متعلق به همان فاصله باشد نامساوی زیر نیز برقرار است :

$$2)\quad f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_n)\leq$$
$$\leq xf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$$

اثبات قضیه : نامساوی ۱ یافرض قضیهٔ جنسن دارای یك تعبیر هندسی به‌شرح زیر است:





در شکل ۱ عرض نقطهٔ وسط وتری که دو نقطهٔ : $(x_1 \text{ و } f(x_1))$ و $(x_2 \text{ و } f(x_2))$ از نمودار تابع را به‌هم وصل می‌کند همواره کوچکتر ازمقدار تابع به ازای $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ می‌باشد ومسلماً موقعی نامساوی ۱ درست است که تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a \text{ و } b]$ تقعرش روبه پائین باشد و در حالتی که تقعر روبه بالا است درشکل ۲ نشان داده شده است .

برای $n=2^2=4$ قضیه راچنین اثبات می‌کنیم. نامساوی ۱ را برای x_1 و x_2 و سپس برای x_3 و x_4 نوشته و آنها را با هم جمع می‌کنیم و دوباره نا مساوی ۱ را بکار می‌بریم :

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\leq$$
$$\leq 2\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{1}\right)\right.$$
$$\leq 2\left[2f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)\right]$$

به‌همین ترتیب نامساوی را برای $n=2^k$ می‌توان ثابت کرد. نامساوی حاصل چنین خواهد بود .

$$3)\quad f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)+$$
$$+\underbrace{f(x_{n+1})+\ldots+f(x_{2k})}_{2^k-n}\leq$$
$$\leq 2^k f\left(\frac{x_1+x_2\ldots+x_n+\ldots+x_{2k}}{2^k}\right)$$

و برای یك مقدار اختیاری n به طریق زیر اثبات می‌کنیم در نامساوی ۳ فرض می‌کنیم :

$$x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=x_{2k}=x'=$$
$$=\frac{x_1+x_2+x_3\ldots+x_n}{n}$$

در این صورت :

$$f(x_{n+1})=f(x_{n+2})=\ldots=f(x_{2k})=f(x')$$

و نامساوی ۳ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$4)\quad f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)+(2^k-n)f(x')\leq$$
$$\leq 2^k f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+(2^k-n)x'}{2^k}\right)$$

اما :

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n+(2^k-n)x'}{2^k}=$$

$$\frac{x_1+x_2\ldots+x_n+2^kx'-(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{2^k}=x'$$

بنابراین نامساوی (۴) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)+2^kf(x')-nf(x')<$$
$$<2^kf(x')$$

و از آن نامساوی مطلوب نتیجه می‌شود :

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\leqslant nf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$$

کار برد قضیهٔ جنسن

۱) اگر x_1 و x_2 و x_3 ... و x_n اعداد مثبتی باشند نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$\log x_1+\log x_2+\log x_3+\ldots+$$
$$+\log x_n\leqslant n\log\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$$

حل : می‌دانیم : $x_1x_2\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$

و از آن نتیجه می‌شود :

$$\log x_1+\log x_2\leqslant 2\log\frac{x_1+x_2}{2}$$

و بنا به قضیهٔ جنسن :

$$\log x_1+\log x_2+\ldots+\log x_n\leqslant$$
$$\leqslant n\log\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

۲) اگر x از ۰ تا ۱۸۰ درجه تغییر کند نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$\log\sin x_1+\log\sin x_2+\ldots+\log\sin x_n\leqslant$$
$$\leqslant n\log\sin\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right)$$

حل : روابط زیر را داریم :

$$1)\quad \sin x\log x=\frac{1}{2}[\cos(x_1-x_2)-\cos(x_1+x_2)]$$

$$2)\quad \sin^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{1}{2}[1-\cos(x_1+x_2)]$$

رابطهٔ ۱ را از ۲ کم می‌کنیم :

$$\sin^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\sin x_1\sin x_2=$$
$$=\frac{1}{2}[1-\cos(x_1-x_2)]=\sin^2\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$$

و از اینجا :

$$\sin x_1\sin x_2=\sin^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$$

بنابر این :

$$\sin x_1\sin x_2\leqslant\sin^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

و

$$\log\sin x_1+\log\sin x_2\leqslant 2\log\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

و بوسیلهٔ قضیهٔ جانسن :

$$\log\sin x_1+\log\sin x_2+\log\sin x_3+\ldots+$$
$$+\log\sin x_n\leqslant n\log\sin\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

و از آن می‌توان نتیجه گرفت :

$$\sin x_1\sin x_2\sin x_3\ldots\sin x_n\leqslant$$
$$\sin^n\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right)$$

اگر $x_1+x_2+x_3=90^\circ$ باشد بنابراین x_1 و x_2 و x_3 نصف زوایای مثلث می‌باشد و از آن نامساوی زیر نتیجه می شود :

$$\sin x_1\sin x_2\sin x_3\leqslant\sin^3 30^\circ=\frac{1}{8}$$

۳) اگر x_1 و x_2 زوایای بین 0° و 180° باشد ثابت کنید :

$$\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\ldots+\sin x_n\leqslant$$
$$\leqslant n\sin\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$$

که درآن x_n و...x_3وx_2وx_1 زوایای بین صفرو ۱۸۰ درجه هستند .

حل :

$$\sin x_1+\sin x_2=2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}\leqslant$$
$$\leqslant 2\sin\frac{x_1+x_3}{2}$$

بنا به قضیه جانس :

$$\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\ldots+\sin x_n\leqslant$$
$$\leqslant n\sin\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$$

پرواز در هوای بادی

ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

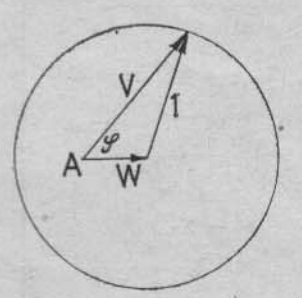
مسئلهٔ معمول درپروازازنقطه‌ای‌مفروض به‌نقطهٔ‌مفروض دیگر، عبارت ازتعیین مسیر پرواز است بطوری‌که مدت پرواز حداقل باشد .

به‌عبارت دیگر: هواپیمائی عازم پرواز از نقطه‌ای به ـ نقطهٔ دیگراست، خط مسیرچگونه‌باشد تا مدت پرواز می‌نیمم شود .

گرچه جواب مسئله غیر مترقبه نیست ، ولی جواب مقدماتی‌آن تاحدودی نامفهوم است ، دراینجا از روش هندسی تقریباًمقدماتی برای حل مسئله استفاده شده‌است‌که قابل‌درك می‌باشد ، در این روش فرض می‌کنیم سرعت باد مقدار ثابت W و مسیرش افقی باشد ، همچنین سرعت هواپیما مقدار ثابت $V = W + 1$ بوده و درصفحهٔ افق ماربر W باشد ، دیاگرام سرعتها درشکل ۱ نمایش داده شده‌است؛ بنابراین بحث ما درفضای دوبعدی خواهدبود.

بسیاری از خلبانان به تجربه درك کرده‌اند که برای مسئله ، پرواز بین دونقطه باید به‌خط مستقیم صورت گیرد ، درصورتی‌که واضح است‌که پرواز به خط مستقیم تنها جواب برای حداقل فاصله می‌باشد ومعلوم نمی‌کندکه‌آیا وقت هم در اینگونه پروازحداقل خواهد بود؟

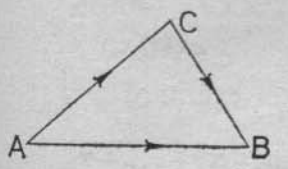
دراین مورد یکی‌از استادان دانشگاه ونیز یك خلبان‌که ما از او جهت تنظیم این مقاله سپاسگزاریم ، با بررسیهای خود به‌این نتیجه رسیده‌است‌که جواب همان مسیرمستقیم است



گرچه به‌آسانی‌می‌توان خط مسیررا با استفاده از **معادلات اولر ـ لانگرانژ** ، تعیین‌کرد، ولی‌آنچه‌که مسلم‌است آنست‌که‌شرط لازم‌وکافی برای جواب مسئله ، همان مسیرمستقیم‌الخط می‌باشد. درزیراز یك‌نامساوی‌برای‌حل مسئله استفاده می‌کنیم .

باید ثابت‌کنیم‌که پرواز به خط مستقیم علاوه براینکه کوتاهترین فاصله است ، جواب حداقل مدت پرواز را نیز شامل خواهد بود.

اگر بتوانیم ثابت‌کنیم‌که زمان پرواز از A به D در مسیر AD از زمان پرواز در مسیر



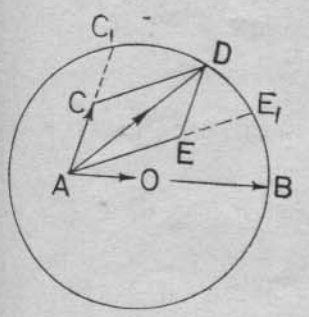
$AC + CD$

کمتراست، دلیل خوبی برای انتخاب مسیرها بااستفاده‌ازروش‌حد خواهد بود.

باتوجه به‌دیاگرام سرعتها درشکل ۱ مسئله منجر به ـ اثبات نامساوی هندسی زیرمی گردد :

فرض: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ و $ED \| AC$ و $AE \| CD$

حکم : $\frac{AC}{AC_1} + \frac{AE}{AE_1} \geq 1$



(مدت پرواز از A تا هر یك از نقاط C_1 و D و E_1 برابر با واحد زمان است، و دراین‌صورت‌زمان‌پرواز از A تا C برابراست با $\frac{AC}{AC_1}$ ، برای دوایرمجانس وبزرگ زمانهای تطابق متناسب یکدیگرند).

با بکار بردن اعداد مختلط ، کافی است که نامساوی $r + s \geq 1$ را ثابت‌کنیم‌که آدرن :

$$r(z_1 + w) + s(z_2 + w) = z + w$$

یا $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$

و $|z_1| = |z_2| = |z| = 1$

دراینجا $w = AO$ و $z = OD$ و $z_1 = DC_1$

و $r = \frac{AC}{AC_1}$ و $s = \frac{AE}{AE_1}$ می‌باشند ، ازکم‌کردن w از طرفین رابطهٔ فوق وباتوجه به‌نامساوی بین اضلاع مثلث خواهیم داشت :

$$r + s + |w| \cdot |r + s - 1| \geq 1$$

اگرفرض‌کنیم $r + s < 1$ که برخلاف فرض و متناقض باآن است. پس $r + s \geq 1$ است وتساوی برای حالتی است‌که C روی $\overrightarrow{AD}$ باشد.

«روندکردن یا سرراست نمودن اعداد صحیح و اعشاری و مورد استعمال آن برای تخمین‌زدن حاصل اعمال حسابی»

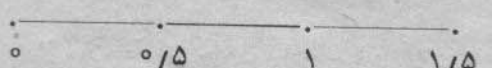
ترجمهٔ : قوام نحوی

اگر جمعیت کشوری ۳،۹۱۰،۸۱۷ نفر باشد، این جمعیت برحسب میلیون به ۴ میلیون نزدیک‌است، می گویند جمعیت این کشور به ۴ میلیون **روند** یا **سرراست** شده است . عدد ۴میلیون رایك عدد روند (a Round number)می گویند.

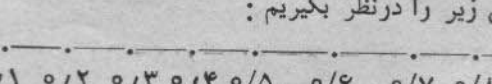
می‌توانیم هر عددی صحیح را به نزدیکترین مضرب (توان ده) که خواسته باشیم روندکنیم . مثلا عدد ۳،۵۷۸ را در نظرمی گیریم . این عدد به نزدیکترین مضرب ده یا مضرب صد یا مضرب هزار به‌ترتیب به ۳۵۸۰ و ۳۶۰۰ و ۴۰۰۰روند می‌شود. درروندکردن اعداد اگر رقم سمت‌راست ۱و۲و۳و۴ باشد از آن صرف‌نظر می‌کنیم و اگر ۵و۶و۷و۸ و۹ باشد به حد بالا روندمی‌کنیم . مثلا عدد ۸۴۹ را به ۸۵۰ و عدد ۷۴۲ را به ۷۴۰ تا مضرب ده روند می‌کنیم ـ همچنین عدد ۸۴۵ به ۸۰۰ تا مضرب ۱۰۰ روند می‌شود و تامضرب ده به ۸۵۰ روند شده است .

مثال ـ عدد ۸،۹۴۶،۵۰۹ را به ترتیب تا مضرب ۱۰ و ۱۰۰ و ۱۰۰۰ و ۱۰،۰۰۰ و صد هزار و میلیون روند کنید ـ به‌ترتیب به نزدیکترین مضرب اعداد بالا به‌صورت‌زیر روند می‌شود : ۸،۹۴۶،۵۱۰ و۸،۹۴۶،۵۰۰و۸،۹۴۷،۰۰۰ و ۸،۹۵۰،۰۰۰ و ۸،۹۰۰،۰۰۰ و ۹،۰۰۰،۰۰۰

روندکردن اعداداعشاری ـ می‌دانیم‌عدد ۰/۸۴ به ۰/۸ نزدیکتر است تا به ۰/۹ پس می گوئیم عدد ۰/۸۴ به ۰/۸ روند شده است یا تا نزدیکترین دهمها به ۰/۸ سر راست شده‌است.اگرخط و اعداد نوشته شدهٔزیررادرنظربگیریم



عدد ۰/۶به ۰/۵ نزدیکتر است تا به یك . پس ۰/۶ را به ۰/۵ روند می‌کنیم یا می گوئیم ۰/۶ تقریباً مساوی ۰/۵ است اما ۰/۹ به یك روند می‌شود ـ به‌همین ترتیب اگر شکل زیر را درنظر بگیریم :



که هر فاصله‌ای ۰/۱ است. عدد ۰/۷۶به ۰/۸ روند می‌شود و ۰/۹۲ به ۰/۹ روند شده است تا نزدیکترین ۰/۱ها

مثال ۱ـ عدد ۰/۵۸۴۵ رابه‌نزدیکترین **هزارم** یا **صدم** یا **دهم** روندکنید جواب به‌ترتیب می‌شود : ۰/۵۸۵و ۰/۵۸ و ۰/۶

مثال ۲ـ عدداعشاری ۰/۹۵۴۵ را به‌نزدیکترین‌هزارم یا صدم یا دهم روندکنید. جواب‌می‌شود :۰/۹۵۵ و۰/۹۵ و۱

مورد استعمال روندکردن اعداد برای‌تخمین زدن ـ برای تخمین زدن یا برآوردکردن (Estimate) حاصل عملیات حسابی سعی می‌کنیم اعداد داده شده را روند نموده سپس جواب را حدس می‌زنیم .

مثال ـ حاصل‌ضرب زیر را تخمین بزنید :

$$p = ۵۹ \times ۶۰۲$$

۹۵را به ۶۰ و ۶۰۲ رابه ۶۰۰ روند می‌کنیم‌پس حاصل‌ضرب تخمیناً می‌شود :

$$p_1 = ۶۰ \times ۶۰۰ = ۳۶،۰۰۰$$

مثال ۲ـ خارج قسمت تقسیم زیر را تخمین بزنید :

$$Q = \frac{۷۰۱۴}{۲۱}$$

صورت را به ۷۰۰۰ و مخرج رابه ۲۰ روندمی‌کنیم پس‌جواب Q تخمیناً می‌شود :

$$Q_1 = \frac{۷۰۰۰}{۲۰} = ۳۵۰$$

مثال ۳ـ مجموع زیر را تخمین‌بزنید :

$S = ۷۱۲۵ + ۴۹۱۹$ در اینجا می‌نویسیم :

جواب‌تخمینی : $S_1 = ۷۱۰۰ + ۴۹۰۰ = ۱۲۰۰۰$

رابطهٔ بین توانهای اعداد متوالی

ترجمهٔ : مقصود عین‌اللهی

دراین مقاله دوقاعدهٔ کلی برای محاسبهٔ x^n ارائه می‌شود که x یك عدد حقیقی و n عدد صحیح مثبت می‌باشد . این قاعده‌ها از ملاحظهٔ بعضی اتحادهای مربوط به‌اعداد متصاعدو تشکیل اتحادهای جدیدی نظیر آنها بدست‌آمده‌است .

قاعده‌ای‌که قبلا وجود داشته و **فردریك گوس** آنرا تعمیم داده این بوده‌است‌که مجذور هرعدد را ازراه جمع سلسلهٔ اعداد فرد بدست می‌آورده‌اند (مجذور n عدد فرد متوالی ابتدا از یك برابراست با مجذور n) . اگرشخصی $(x-1)^2$ را می‌دانست ومی‌خواست x^2 را بدست‌آورد، عدد فردی از سلسلهٔ اعداد فرد را که شمارهٔ آن x بود ، یعنی عدد فرد $(2x-1)$ را به $(x-1)^2$ می‌افزود:

$$x^2 \equiv (x-1)^2 + (2x-1)$$

اینك راه دیگری برای تعیین x^2 نموده می‌شود : برای مثال 8^2 را درنظر می‌گیریم . تفاضل بین 8^2 و 7^2 برابراست با ۱۵ وتفاضل بین 7^2 و 6^2 برابر با ۱۳ است ، و بالاخره اختلاف ۱۵ و ۱۳ برابر با ۲ است :

$$8^2 - 7^2 - [7^2 - 6^2] = 2$$

این رابطه را برای اعداد دیگر امتحان می‌کنیم . برای سادگی جدولی تشکیل می‌دهیم‌که در ستون اول آن مقادیر x ، درستون دوم‌آن مقادیر x^2 ، دوستون‌سوم مقادیر A برابر با تفاضل مربعات اعداد متوالی از ستون ۲ مثلا $4-1=3$ ، و در ستون چهارم مقادیر B برابر با تفاضل مقادیر اعداد متوالی واقع در ستون سوم را یادداشت می‌کنیم :

باتوجه به‌این جدول ، چنانچه x یك عدد طبیعی باشد خواهیم داشت :

$$x^2 - (x-1)^2 - [(x-1)^2 - (x-2)^2] \equiv 2$$

x	x^2	A	B
۰	۰		
		۱	
۱	۱		۲
		۳	
۲	۴		۲
		۵	
۳	۹		۲
		۷	
۴	۱۶		۲
		۹	
۵	۲۵		۲
		۱۱	
۶	۳۶		۲
		۱۳	
۷	۴۹		۲
		۱۵	
۸	۶۴		۲
		۱۷	
۹	۸۱		۲
		۱۹	
۱۰	۱۰۰		

که بعداز اختصار چنین می‌شود :

$$x^2 \equiv 2(x-1)^2 - (x-2)^2 + 2$$

برای تعیین اتحادی نظیر این اتحاد برای x^3 جدول زیر را تشکیل می‌دهیم‌که در آن مقادیر ستون اول : اعداد طبیعی ، ستون دوم : مکعبات اعداد طبیعی ، ستون سوم : مقادیرستونهای سوم‌وچهارم وپنجم به‌ترتیب تفاضل‌هردوعدد متوالی از ستون قبل راتشکیل می‌دهد: درضمن‌عددهای ستون B شش برابرعددهای ستون یك می‌باشند :

از ملاحظهٔ این جدول نتیجه می‌شودکه :

$$x^3 \equiv (x-1)^3 + [(x-1)^3 - (x-2)^3] + 6(x-1)$$

بعد از اختصار :

$$x^3 \equiv 2(x-1)^3 - (x-2)^3 + 6(x-1)$$

این اتحاد را بازهم می‌توانیم عمل‌کنیم؛ اگر مثلا در

x	$x^۲$	A	B	C
۰	۰			
		۱		
۱	۱		۶	
		۷		۶
۲	۸		۱۲	
		۱۹		۶
۳	۲۷		۱۸	
		۳۷		۶
۴	۶۴		۲۴	
		۶۱		۶
۵	۱۲۵		۳۰	
		۹۱		۶
۶	۲۱۶		۳۶	
		۱۲۷		۶
۷	۳۴۳		۴۲	
		۱۶۹		۶
۸	۵۱۲		۴۸	
		۲۱۷		۶
۹	۷۲۹		۵۴	
		۲۷۱		
۱۰	۱۰۰۰			

در نظر بگیریم که :

$$۷۲۹ = ۵۱۲ + ۲۱۷$$

$$۲۱۷ = ۱۶۹ + ۴۸$$

$$۴۲ = ۱۶۹ - ۱۲۷ \quad \text{و} \quad ۴۸ = ۴۲ + ۶$$

$$۱۲۷ = ۷^۳ - ۶^۳$$

خواهیم داشت :

$$۴۸ = [(x-۱)^۳ - (x-۲)^۳] - [(x-۲)^۳ - (x-۳)^۳] + ۶$$

بعدازساده‌کردن می‌شود $۴۸ = ۶(x-۱)$ که چون در رابطهٔ قبلی منظورکنیم چنین می‌شود:

$$x^۳ \equiv ۳(x-۱)^۳ - ۳(x-۲)^۳ + (x-۳)^۳ + ۶$$

برای $x^۴$ جدول زیررا تشکیل می‌دهیم :

x	$x^۴$	A	B	C	D
−۲	۱۶				
		−۱۵			
−۱	۱		۲۴		
		−۱		−۱۲	
۰	۰		۲		۲۴
		+۱		+۱۲	
۱	۱		۱۴		۲۴
		+۱۵		+۳۶	
۲	۱۶		۵۰		۲۴
		+۶۵		+۶۰	
۳	۸۱		۱۱۰		۲۴
		+۱۷۵		+۴۸	
۴	۲۵۶		۱۹۴		
		+۳۶۹			
۵	۶۲۵				

اگرمثلا $۳^۴ = ۸۱$ را درنظر بگیریم‌ملاحظه می‌کنیم که:

$$۳^۴ = ۲^۴ + ۶۵$$

$$۶۵ = ۲^۴ - ۱^۴ + ۵۰$$

$$۵۰ = ۲^۴ - ۱^۴ - (۱^۴ - ۰^۴) + ۳۶$$

$$۳۶ = ۱۲(۲ \times ۳ - ۳)$$

بافرض $x = ۳$ خواهیم داشت:

$$x^۴ \equiv (x-۱)^۴ + [(x-۱)^۴ - (x-۲)^۴] + \left\{[(x-۱)^۴ - (x-۲)^۴] - [(x-۲)^۴ - (x-۳)^۴]\right\} + ۱۲(۲x-۳)$$

$$x^۴ \equiv ۳(x-۱)^۴ - ۳(x-۲)^۴ + (x-۳)^۴ + ۱۲(۲x-۳)$$

اما ملاحظه می‌کنیم که :

$$۳۶ = ۱۲(۲ \times ۳ - ۳) = \left\{[(۱۶-۱) - (۱-۰)] - [(۱-۰) - (۰-۱)]\right\} + ۲۴$$

با فرض $x = ۳$ و منظورکردن در اتحاد بالا نتیجه خواهد شد :

$$x^۴ \equiv ۴(x-۱)^۴ - ۶(x-۲)^۴ + ۴(x-۳)^۴ - (x-۴)^۴ + ۲۴$$

یك سری اتحادهایی راکه برای $x^۲$ و $x^۳$ و $x^۴$ بدست آوردیم به‌صورت زیرمرتب می‌کنیم :

$$x^۲ \equiv ۱(۲) + ۲(x-۱)^۲ - ۱(x-۲)^۲$$

$$x^۳ \equiv ۱(۶) + ۳(x-۱)^۳ - ۳(x-۲)^۳ + ۱(x-۳)^۳$$

$$x^۴ \equiv ۱(۲۴) + ۴(x-۱)^۴ - ۶(x-۲)^۴ + ۴(x-۳)^۴ - ۱(x-۴)^۴$$

اگر در این اتحادها دقیق شویم ملاحظه می‌کنیم که ضرایب نظیر ضرایب بسط دو جمله‌ای می‌باشند و جمله‌های اول به‌ترتیب عبارتند از :

$$۲ = ۲ \times ۱ = ۲!$$

$$۶ = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۳!$$

$$۲۴ = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۴!$$

بنابراین می‌توانیم رابطهٔ کلی زیررا بنویسیم:

$$x^n = n! + n(x-۱)^n - \frac{n(n-۱)}{۲!}(x-۲)^n +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(x-3)^n-\ldots+$$

$$+(-1)^{n+1}(x-n)^n$$

تعداد جمله‌ها برابر است با : $n+1$

یك سری دیگر اتحادهایی را که بدست‌آورده‌ایم به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$x^2\equiv 1(2x-1)+1(x-1)^2$$

$$x^3\equiv 3(2x-2)+2(x-1)^2-1(x-2)^3$$

$$x^4\equiv 12(2x-3)+3(x-1)^4-3(x-2)^4+$$
$$+1(x-3)^4$$

ضریبها به‌ترتیب نصف مقادیر !۲ و !۳ و !۴ می‌باشند ومی‌توانیم اتحادکلی زیررا بنویسیم:

$$x^n=\frac{n!}{2}(2x-n+1)+(n-1)(x-1)^n-$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{2!}(x-2)^n$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}(x-3)^n+\ldots+$$

$$+(-1)^n(x-n+1)^n$$

تعداد جمله‌های این اتحاد برابر با n است.

ضمن اثبات اتحادهای بالا ، اتحاد زیر بدست آمده است :

$$x^n\equiv$$
$$x+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x)$$

تعداد جمله‌های داخل‌آخرین پرانتز برابر است با :

$n-1$

این رابطه با استدلال استقراء ریاضی به سادگی محقق می‌شود :

$$n=1\ :\ x\equiv x$$

$$n=2\ :\ x^2\equiv x+(x-1)x\equiv x+x^2-x\equiv x^2$$

. . . . . .

$$n=k\ :\ x^k\equiv x+(x-1)(x^{k-1}+$$
$$+x^{k-2}+\ldots+x)$$

$$n=k+1\ :\ x^{k+1}\equiv x^k+(x-1)x^k$$

$$\equiv[x+(x-1)(x^{k-1}+\ldots+x)]$$
$$+(x-1)x^k$$

$$\equiv x+(x-1)[(x^{k-1}+\ldots+\ +x)+x^k]$$

$$\equiv x+(x-1)(x^k+x^{k-1}+$$
$$+x^{k-2}+\ldots+x)$$

تربیت معلم (بقیه از صفحهٔ ۶۳۱)

مجرب و کار آزموده‌اند همانند معلمان دبستانی ، دورهٔ کارآموزی و تعلیمات بیشتری را نسبت به‌معلمان خارجی‌نظیر خود ، می‌بینند . مهمتر از همه ، این دبیران فارغ‌التحصیل دبیرستانهای برگزیده‌ای چون Grammar School ، Gymnasium یا Lycée که هم اکنون‌درآن تدریس‌می‌کنند می‌باشند . و این قدر مسلم آنانرا در قسمت فوقانی ۵ تا ۱۰ درصد قشر روشنفکر و انتلکتوئل‌کشور قرار می‌دهد . درثانی تحصیلات دانشگاهی آنها تمام در دروس ریاضیات و حداکثر دریك یا دو مواد وابسته خلاصه می‌شود . این دورهٔ تحصیلی متضمن چهار تا شش سال مطالعه وکسب دانش درسطحی‌بالاتر از درجهٔ فوق لیسانس درریاضیات محض دردانشگاههای‌درجهٔ اول آمریکاست . در این دوره به آموزش «روش تدریس» تا آن حدکه برای معلمان سطح پائین مورد حاجت و نهایت اهمیت است توجه نمی‌شود لکن به‌کلاس متدلوژی مربوطبه مواد تدریس شده نسبت به‌کلاس روش تدریس (فن تعلیم) عمومی اهمیت بیشتری قائلند . ازاینرودر این سطح آموزشی، مهارت و تسلط در مواد درسی به مراتب مهمتر و بااهمیت‌تر ازروش تعلیم‌تلقی می‌شود . درواقع در این مرحله‌کارآموزی یك معلم مجرب با بهترین‌آموزش عملی موردملاحظه وتوجه قرار می‌گیرد .

این معلمان نه تنها به‌تحصیلات و مطالعات بسیارزیادی می‌پردازند بلکه در آینده‌که عموماً در سن بیش از ۲۵سالگی است وارد حرفهٔ خود می‌شوند . حقوق و مزایای معلمان مزبورکلا بیشتر از معلمان پائین‌تر از سطح خود بوده و قابل مقایسه با حقوق و مزایای سایرمشاغل عالی است . درخاتمه ذکر این نکتهٔ اساسی و مهم ضروری به‌نظر می‌رسدکه‌اکنون دیگر مسئلهٔ آشنائی دانش آموزان با «ریاضیات زنده» در دبیرستانهای برگزیدهٔ خارجی به هیچ وجه وجود ندارد .

مضربهای شش

ترجمهٔ : مقصودعین‌اللهی

مضربهای عدد شش را میتوان از روی مکعب اعداد صحیح که مطابق جدول زیر تنظیم شده باشد بدست آورد .

۰	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶	۳۴۳
	۱	۷	۱۹	۳۷	۶۱	۹۱	۱۲۷
		۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶

این جدول با بدست آوردن اختلاف مکعب هر دو عدد متوالی‌و دوباره با بدست آوردن اختلاف این اختلافها نوشته شده است .

بنابراین اعداد ردیف‌اول مکعب اعداد متوالی می‌باشند و اعداد ردیف دوم به طریق زیر بدست‌آمده‌اند :

$$۱-۰=۱ \; ؛ \; ۸-۱=۷ \; ؛ \; ۲۷-۸=۱۹$$

و غیره و اعداد ردیف‌سوم به‌روش زیر پیدا می‌شوند:

$$۷-۱=۶ \; ؛ \; ۱۹-۷=۱۲ \; ؛ \; \ldots$$

به صورت جبری اعداد ردیف اول را میتوان به صورت زیر نوشت :

$$n^۳ \; ، \; (n+۱)^۳ \; ، \; (n+۲)^۳ \; ، \; (n+۳)^۳ \; ، \; \ldots$$

(در جدول بالا $n=۰$ می‌باشد). اگر این جملات ردیف‌اول را بسط دهیم خواهیم داشت :

$$n^۳ \; ، \; n^۳+۳n^۲+۳n+۱ \; ، \; n^۳+۶n^۲+۱۲n+۸ \ldots$$

از اینرواعداد ردیف دوم عبارت خواهند بود از :

$$(n^۳+۳n^۲+۳n+۱)-n^۳ \; ؛ \; (n^۳+۶n^۲+$$
$$+۱۲n+۸)-(n^۳+۳n^۲+۳n+۱) \; ؛$$
$$(n^۳+۹n^۲+۲۷n+۲۷)-(n^۳+۶n^۲+۱۲n+۸) \; ؛ \ldots$$

ردیف سوم با بدست آوردن اختلافهای زیر بدست می‌آید :

$$(۳n^۲+۹n-۷)-(۳n^۲+۳n+۱) \; ؛$$
$$(۳n^۲+۱۵n+۱۹)-(۳n^۲+۹n+۷) \; ؛ \ldots$$

پس از ساده‌کردن این عبارتها خواهیم داشت :

$$۶n+۶ \; ؛ \; ۶n+۱۲ \; ؛ \; \ldots$$

و یا با فاکتورگیری

$$۶(n+۱) \; ؛ \; ۶(n+۲) \; ؛ \; \ldots$$

اگر این‌راه را ادامه دهیم خواهیم‌دیدکه ردیف سوم از رشتهٔ زیر تشکیل شده است:

$$۶(n+۱) \; ؛ \; ۶(n+۲) \; ؛ \; ۶(n+۳) \; ؛ \; ۶(n+۴) \; ؛ \; \ldots$$

بنابر این مضربهای شش را می‌توان از جدولی که با مکعب اعداد صحیح متوالی شروع می‌شود پیدا کرد .

اگر بخواهیم که‌جدول مضربهای‌با عددشش شروع‌شود باید $n=۰$ باشد ، مثل جدول بالا . فرض‌کنید به هر صورت فهرست مضربها با عدد ۲۴ شروع شود ، $۲۴=۶\times۴$ و یا $۲۴=۶(۳+۱)$ بنابراین جدول باید با $۳^۳$ شروع گردد . به طریق متشابه‌اگر جدول با $۳۴۳=۷^۳$ شروع شودفهرستی ازمضربهای ۶ بدست خواهد آمدکه‌با $۶(۷+۱)$ ویا ۶×۸ و یا ۴۸ شروع می‌شود .

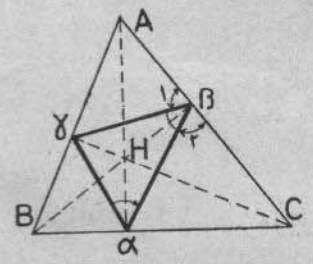
سؤال جالبی که‌می‌توان دراینجا مطرح کرد این‌است‌که اگرردیف اول‌به‌جای مکعب اعداد متوالی مربع اعداد متوالی باشد یا اینکه توان دیگری از اعداد صحیح متوالی باشد ، دراین صورت چه اتفاقی رخ خواهد داد ؟ آیا مضربهای عدد دیگری بدست خواهد آمد ؟

بعضی روابط در مثلث ارتفاعیه

تهیه و تنظیم از : ابوالفضل فتح‌الله‌زاده

مثلثی که رأسهای آن پاهای سه ارتفاع $A\alpha$ و $B\beta$ و $C\gamma$ از مثلث ABC باشد ، مثلث ارتفاعیهٔ مثلث ABC نامیده می‌شود. مثلث ABC و اجزاء آنرا معلوم فرض می‌کنیم و به محاسبهٔ اجزاء مثلث ارتفاعیه و بعضی روابط مربوط به آن می‌پردازیم .

۱ ـ از اینکه چهار ضلعی $BC\beta\gamma$ محاطی است نتیجه می‌شود که زاویهٔ β_1 با زاویهٔ B برابر است. از چهار ضلعی محاطی $AB\alpha\beta$ نیز بر می‌آید که زاویهٔ β_2 با زاویهٔ B برابر باشد بنابراین



اولا اندازهٔ زاویهٔ β از مثلث ارتفاعیه برابر است با :

$$\beta = 180^\circ - 2B$$

و به همین ترتیب :

$$\gamma = 180^\circ - 2C \quad \text{و} \quad \alpha = 180^\circ - 2A$$

ثانیاً از تساوی دوزاویهٔ β_1 و β_2 و با توجه به اینکه $B\beta$ بر AC عموداست نتیجه می‌شود که زاویه‌های $B\beta\alpha$ و $B\beta\gamma$ با هم برابرند یعنی $B\beta$ نیمساز زاویهٔ β از مثلث ارتفاعیه است . بطور کلی هر یك از ارتفاعهای مثلث ABC نیمساز زاویهٔ نظیر از مثلث ارتفاعیه می‌باشد .

۲ ـ اندازه‌های ضلعهای $\beta\gamma$ ، $\gamma\alpha$ و $\alpha\gamma$ از مثلث ارتفاعیه را به ترتیب x و y و z می‌نامیم . از تشابه دو مثلث $A\beta\gamma$ و ABC داریم :

$$\frac{\beta\gamma}{BC} = \frac{A\gamma}{AC} \Longrightarrow x = \frac{a.A\gamma}{b}$$

در مثلث قائم الزاویهٔ $A\gamma C$ داریم :

$$A\gamma = AC.\cos A = b\cos A$$

نتیجه می‌شود :

$$x = a\cos A = 2R\sin A\cos A = R\sin 2A$$

به‌همین ترتیب خواهیم داشت :

$$y = b\cos B = R\sin 2B$$

$$z = c\cos C = R\sin 2C$$

۳ـ اگر S' و $2p'$ مساحت و محیط مثلث ارتفاعیه باشد داریم :

$$S' = \frac{1}{2}yz\sin\alpha =$$

$$\frac{1}{2}R\sin 2B.R\sin 2C.\sin(180^\circ - 2A)$$

$$S' = \frac{1}{2}R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C$$

$$2p' = x + y + z = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

با تبدیل عبارت داخل پرانتز به‌حاصل ضرب نتیجه خواهد شد

$$2p' = 4R\sin A\sin B\sin C$$

۴ـ به فرض اینکه R' و r' شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی مثلث ارتفاعیه باشد داریم :

$$R' = \frac{xyz}{4S'} \Longrightarrow R' = \frac{R}{2}$$

(تبصره ـ دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه همان دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث است و از راه هندسی ثابت می‌شود که شعاع دایرهٔ نه نقطه نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث می‌باشد) .

$$r' = \frac{S'}{p'} \Longrightarrow r' = 2R\cos A\cos B\cos C$$

برای شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث ارتفاعیه داریم

$$r_x = \frac{S'}{p'-x} \Longrightarrow r_x = 2R\sin A\cos B\cos C$$

$$r_y = 2R\sin B\cos C\cos A$$

$$r_z = 2R\sin C\cos A\cos B$$

۵ـ با معلوم بودن اندازه‌های ضلعها و زاویه‌های مثلث ارتفاعیه می‌توان سایر اجزاء آن را به‌ترتیب بالابدست‌آورد

۶ـ می‌دانیم که در هر مثلث حاده‌الزوایا نامساوی یا تساوی زیر محقق است که تساوی فقط موقعی می‌باشد که مثلث متساوی‌الاضلاع است :

$$\sin 2A\sin 2B\sin 2C \leqslant \sin A\sin B\sin C$$

طرفین را در $2R^2$ ضرب می‌کنیم ، نتیجه می‌شود :

$$2S' \leqslant S \Longrightarrow S' \leqslant \frac{S}{4}$$

در مثلث حادالزوایا مساحت مثلث ارتفاعیه از یك چهارم مساحت مثلث کوچکتر است. حداکثر مساحت مثلث ارتفاعیه یك چهارم مساحت مثلث است و این در موقعی است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

۷ـ در هر مثلث حاده‌الزوایا داریم :

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \leqslant \frac{9}{4}$$

از این نامساوی و نامساوی :

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) \geqslant 9$$

نتیجه خواهد شد که :

$$\frac{1}{\sin B\sin C} + \frac{1}{\sin C\sin A} + \frac{1}{\sin A\sin B} \geqslant 4$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \geqslant 4\sin A\sin B\sin C$$

طرفین را در $2R$ ضرب می‌کنیم ، نتیجه می‌شود :

$$2p \geqslant 4p' \Longrightarrow 2p' \leqslant \frac{2p}{2}$$

در مثلث حاده‌الزاویا ، محیط مثلث ارتفاعیه از نصف محیط مثلث کوچکتر و حداکثر وقتی با آن برابر است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد .

۸ـ بنابه روابطی که قبلا بدست آوردیم داریم :

$$\frac{a}{bc}x + \frac{b}{ca}y + \frac{c}{ab}z =$$

$$= \frac{2R^2\sin A\sin 2A}{4R^2\sin B\sin C} + \frac{2R^2\sin B\sin 2B}{4R^2\sin C\sin A} + \frac{2R^2\sin C\sin 2C}{4R^2\sin A\sin B}$$

$$= \frac{\sin^2 A\sin 2A + \sin^2 B\sin 2B + \sin^2 C\sin 2C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\Sigma\sin 2A(1-\cos 2A)}{4\sin A\sin B\sin C} = \frac{\Sigma\sin 2A - \Sigma\sin 4A}{4\sin A\sin B\sin C}$$

$$\Sigma\sin 2A = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$$

$$\Sigma\sin 4A = 4\sin 2A\sin 2B\sin 2C = 32\sin A\sin B\sin C\cos A\cos B\cos C$$

و بالاخره خواهیم داشت :

$$\frac{a}{bc}x + \frac{b}{ca}y + \frac{c}{ab}z = 1 - 4\cos A\cos B\cos C$$

۹ـ به ترتیب بالا صحت دو رابطهٔ زیر نیز به سادگی محقق می‌شود :

$$x\cos^2 A + y\cos^2 B + z\cos^2 C = \frac{S}{R}(1 + 4\cos A\cos B\cos C)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

دانش آموز رتبهٔ اول ششم ریاضی شهرستان مراغه

مجید شنا سیفام

دبیرستان فروزی

معدل: ۱۸/۸۹

نمایندگی یکان :

بیژن زاده

صد مسئلهٔ جالب و حل آنها

ترجمهٔ : داویدریحان

فصل چهارم ـ مسائل عملی و تخیلی

۴۸ـ بازیچهٔ عجیب

روی قرص مدور مقوائی ، قرص مدور دیگری که کوچکتر از آن و محدود به دایره‌ای هم مرکز با قبلی است، قرار داده شده است . قرص مدور داخلی به هشت قسمت متساوی تقسیم شده است : چهار بخش آن سفید و چهاربخش دیگر سیاه است . حلقه ، یعنی قسمتی از قرص مدور مقوائی واقع در خارج دایرهٔ کوچکتر ، به ده قسمت ، متناوباً سفید و سیاه (از هر رنگ پنج خانه) بخش شده است . بازیچه‌ای را که بدین ترتیب ساخته شده است روی شیئی نوك تیز قرار داده وآنرا به سرعت می‌چرخانیم . ابتدا، رنگها با هم‌مخلوط شده و تشکیل رنگ خاکستری یکنواختی رامی‌دهند . هرچند که مجموعهٔ دستگاه فوق بدون بریدگی باشد ، معهذا پس از چند لحظه به‌نظر می‌رسدکه حلقه دریك جهت و قرص مدور داخلی در جهتی دیگر دوران می‌کند .

عمل این بازیچه فقط به نور الکتریکی بستگی دارد و به‌هیچ چیز دیگر مربوط نیست ، چرا ؟

حل ـ در اغلب شهرها ، الکتریسیته به‌صورت جریان متناوب با ۵۰ نوسان تهیه می‌شود : یك لامپ الکتریکی در هر ثانیه ۱۰۰ مرتبه خاموش و روشن می‌شود و مابین هردو لحظهٔ روشنائی حداکثر ۰/۰۱ ثانیه طول می‌کشد .

اگر قرص مدور ۲۵ دور در ثانیه در جهت عقربه‌های ساعت بچرخد ، هر قطاع داخلی ، یك ربع دور در ۰/۰۱ ثانیه می‌چرخد و در انتهای این مدت در موضع اشغال شده بوسیلهٔ قطاع قبلی با همین رنگ ، قرار می‌گیرد .

درنتیجه به‌نظر می‌رسدکه‌قرص مدورمرکزی، بی‌حرکت است . اگر سرعت دوران اندکی بیشتر از ۲۵ دور در ثانیه باشد ، به‌نظر خواهد رسیدکه قرص مدور در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد و اگر سرعت دوران‌کمترازمقدار اخیرباشد، قرص در خلاف جهت عقربه‌های ساعت خواهد چرخید .

برای قرص داخلی ، نحوهٔ عمل تغییر نمی‌کند ولی در این مورد سرعت حد ۲۰ دور در ثانیه است . فرض می‌کنیم که قرص مدوررا با سرعت خیلی زیادبچرخانیم . وقتی سرعت زیاد شده و به ۲۵ دور در ثانیه برسد ، به‌نظر می‌رسدکه قرص داخلی متوقف شده است و حلقه در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند . اگر سرعت قرص مدور مابین ۲۰ و ۲۵ دور در ثانیه باشد ، احساس می‌کنیم‌که قرص داخلی و حلقه در دو جهت مخالف هم حرکت می‌کنند . در ۲۰ دور ، حلقه متوقف خواهد شد،سپس به‌نظر می‌رسدکه حلقه و قرص مدور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخند .

این پدیده با نور فلوئورسان بهتر از لامپهای ملتهب مشاهده می‌شود ، زیرا فیلامان لامپهای اخیر دارای انرژی حرارتی زیادی است وجریان درنیم پریود بسیار ضعیفتراست.

۴۹ـ توزین گوشت

سه همسایه هرکدام بیست فرانك برای خرید گوشت‌یك تیکه (بدون پوست ، استخوان و چربی) می‌پردازند . یکی‌از آنها ،گوشت را به سه قسمت می‌کند و معتقد است که‌قسمتها متساویند. دومی اظهار می‌داردکه تنهابه ترازوی بقال‌سرگذر اعتماد دارد . با این ترازو توزین انجام می‌گیرد و مشاهده می‌شودقسمتهائی که‌مساوی پنداشته شده بود، به‌ترتیب‌بیست، پانزده ، و بیست و پنج فرانك ارزش دارد . سومین خانم می‌خواهدکه گوشت را روی ترازوی اختصاصی خودش وزن کند و بازهم نتیجهٔ دیگری عاید می‌شود . اولی مصر است‌که

فقط تقسیم وی منصفانه است ، دومی فقط بـه ترازوی بقال اطمینان دارد و سومی نیز تنها به ترازوی اختصاصی خودش مطمئن است و بین آنها منازعه پیش می‌آید .

چگونه می‌توانیم به این منازعه خاتمه دهیم و بدون آنکه سه‌تیکهٔ گوشت را مجدداً پاره‌کنیم بین آنان تقسیم کنیم بطوری‌که هرکدام از خانمها معتقد باشدکه بنا به دلایل‌مورد اعتمادش ، حداقل بیست فرانك گوشت نصیبش شده است؟

حل ـ به منازعهٔ فی‌مابین خانمها می‌توانیم به‌صورت زیر فیصله دهیم ، ابتدا سومین خـانم ، قطعهٔ گـوشت مورد قبولش‌رابرمی‌داردواضح است‌که وی قسمتی راکـه تـرازویش بیشتر نشان داده است ، یعنی قطعه‌ای راکـه وی معتقد است که حداقل بیست فرانك ارزش دارد، برمی‌دارد. چنین‌قطعه‌ای وجود دارد ، زیرا اگر هر چیز را به سه قسمت تقسیم‌کنیم، غیر ممکن است که هر کدام از تقسیمات کوچکتر از ثلث مجموع باشد .

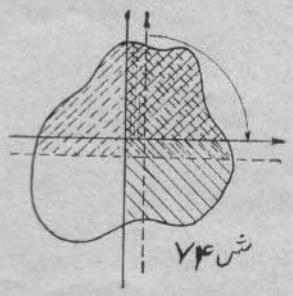
سپس دومین خانم قطعه‌گوشتش را انتخاب می‌کند .وی باز هم راضی خواهد بود ، زیرا پس از اولین انتخـاب ، اقلا قطعه‌ای می‌ماندکه به موجب تـرازوی بقال ، حداقل بیست فرانك بیرزد .

سومین خانم‌که باقیمانده را برمی‌دارد نیز راضی خواهد بود زیرا وی عقیده داشته‌که قطعات هم وزنند .

۵۰ـ برش نان شیرینی به چهار قسمت

هرنان شیرینی ، به هرشکلی‌که باشد ، می‌تواند به‌چهار قسمت متساوی بوسیلهٔ دو برش چاقو دردو امتداد عمودبرهم تقسیم شود . به بیان دیگـر ، ملکی مسطح ، بـه مساحت P مفروض است ، می‌توانیم دو خط عمود برهم طـوری بیابیم که هرکدام ازچهارقسمت‌ملك‌که محدودبه این خطوط‌می‌شوند، دارای سطحی برابر با $\frac{P}{۴}$ باشند، این موضوع را ثابت‌کنید. (ساده‌تر از اثبات چنین نتیجهٔ‌کلی آنست‌که مثلثی بـه اضلاع ۵،۴،۳ را به‌چهار قسمت تقسیم‌کنیم) .

حل ـ مجموعهٔ دوخط عمود برهم را«صلیب»می‌نامیم شکل ۷۴ شامل چنین صلیبی است‌که با خطوط منقطع نشان داده شده است؛ خط قائم‌شامل پیکانی‌است که متوجه بـه سمت بالا است . ملك بـه هرصورتی‌که باشد ، همیشه می‌توانیم این صلیب را تغییرمکان



شکل ۷۴

دهیم بدون آنکه آنرا دوران دهیم ، بقسمی‌که دو قطعه‌ای از ملك واقع در بالای خط افقی منقطع و واقع در طرفین خط‌قائم که شامل پیکان است ، دارای سطحی برابر با $\frac{P}{۴}$ باشند، P نمایندهٔ سطح‌کل ملك مزبورمی‌باشد . این ربع ملکهای‌فوقانی با خطوط منقطع هاشور زده شده‌اند . اگر دو ربع تحتانی نیز دارای مساحتهای متساوی باشند ، قضیه اثبات شده است.

فرض‌کنیم که چنین نباشد ،یعنی مثلا ربع تحتانی طرف چپ دارای مساحتی بیشتر از $\frac{P}{۴}$ ، یعنی مساحتش بیشتر از ربع تحتانی طرف راست‌باشد. صلیب را به طرف راست‌بطوری دوران می‌دهیم‌که ربعهای مجاور به خط پیکان همواره‌دارای مساحتی برابر با $\frac{P}{۴}$ باشند . پس از دورانی به اندازهٔ °۹۰ ، صلیب به صورت خط پر در شکل ۷۴ در می‌آید . برای‌آنکه مناطق‌ها شور خوردهٔ با خطوط منقطع دارای مساحتهای برابر با $\frac{P}{۴}$ باشند ، لازم است‌که خط قائم را به سمت چپ و خط افقی را به طرف بالا انتقال دهیم . در چنین وضعیت صلیب ، ربع تحتانی طرف‌چپ ، نسبت به خطی‌که دارای پیکان است، سطحی کمتر از $\frac{P}{۴}$ خواهدداشت، زیراآن‌در ملك به‌مساحت $\frac{P}{۴}$ واقع‌است‌که‌با خطوط منقطع‌هاشور زده شده است . به‌همین ترتیب ربع تحتانی طرف راست نیز مساحتش بیشتر از $\frac{P}{۴}$ است . چنین‌وضعیت جدیدی‌که برای صلیب درنظر گرفته‌ایم، تقسیمی مغایر با اولی به ما می‌دهد ، از این موضوع نتیجه می‌گیریم که در ضمن دوران ، موضعی باید وجودداشته باشد که تقسیم به چهار قسمت را حاصل کند .

این امکان تقسیم بدون محـاسبه ، اثبات شد . ولی محاسباتی ونه ساده ، لازم خواهد بود تا اثبات مطلب فوق برای مثلث مفروض بکار ببریم .

۵۱ ـ بازهم دربارهٔ نان شیرینی

پیروپل باید نان شیرینی مثلثی شکلی را بین خودشان تقسیم‌کنند . پل‌شرط زیررا تحمیل‌می‌کند : وی قسمت خودش را در امتداد خطی راست خواهد برید ، و پیر موافقت‌می‌کند ولی می‌خواهدکه امتیاز تعیین نقطهٔP راکه پل می‌بایست‌ضربهٔ

چاقویش را ازآن بگذراند ، داشته باشد . چون ضخامت نان شیرینی در همهٔ نقاط یکی است و طعم آن در تمام‌آن فرقی نمی‌کند ، مسئله تبدیل به سؤالی از هندسهٔ مسطحه می‌شود به این‌قرار :

پیرچه‌نقطه‌ای‌راانتخاب‌کندتابه بهترین وجه ممکن‌جلوی زیادجوئی پل را بگیرد ؟ مسئله‌ای دیگر : قسمت پل چقدر ازآن پیر بیشتر است‌اگرپیربه‌نحو صحیح نقطهٔ P را قرار داده باشد و در ضمن پل بزرگترین سهم خود بریده باشد ؟

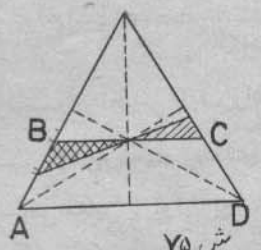
اگر پیر می‌توانست شکل نان شیرینی را انتخاب کند، می‌بایست شکلی راکه دارای مرکز تقارن است (دایره، مربع، بیضی وغیره) پیشنهادکند و نقطهٔ P را درآنجا تثبیت نماید. در این‌صورت برتری پل خودبه خود باطل می‌بود .

ولی مسئلهٔ جالبتری وجود دارد : فرم نان شیرینی به چه‌صورتی باشد (به شرطی‌که شرایط قبلی محفوظ مانده باشد) که پل را مطمئن به مهمترین برتری‌کند واگر می‌توانست‌این شکل را پیشنهادکند ، سهمش چقدر از آن پیر بیشتر بود.

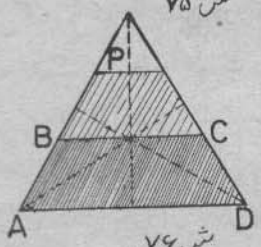
حل ـ ابتدا ملاحظه می‌کنیم‌که اگر پیر نقطهٔ P را روی مرکزثقل مثلث (ش ۷۵) انتخاب‌کند ، مساعدترین‌تقسیم برای پل آنست‌که مثلث را در امتداد یکی از اضلاعش ببرد. کافی است یادآوری‌کنیم‌که مثلث با هاشور دوگانه مساحتش بیشتر از مثلث دیگر است‌که بوسیلهٔ هاشور ساده پوشیده شده است . مساحت منطقهٔ ABCD برابر با $\frac{5}{9}$ مساحت‌کل است. بنابراین سهمها به‌نسبت ۵ به ۴ است .

به سادگی دیده می‌شودکه انتخاب مرکز ثقل برای پیر عالی است، زیرابرای سایر مواضع ، نه‌تنها سهمیهٔ‌پل‌شامل‌ذوزنقهٔ ABCD است بلکه از یك قسمت اضافی (ش ۷۶) نیز بهره‌مند خواهد شد .

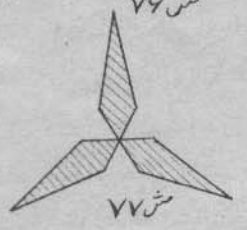
سایر موارد را به خوانندگان تیزهوش واگذار می‌کنیم . از همهٔ حالات ساده‌تر آنست‌که نان شیرینی به‌صورت‌عجیب شکل



ش ۷۵



ش ۷۶


ش ۷۷

۷۷ باشد ، هرکاری‌که پیر بکند ، پل خواهد توانست حداقل $\frac{2}{3}$ از آنرا بردارد .

بالاخره به‌خوانندگان پیشنهاد می‌کنیم‌که با استفاده از مسئلهٔ قبل (تقسیم به چهارقسمت) ثابت‌کنندکه ، شکل نان شیرینی به‌هرصورتی‌که باشد ، پیر می‌تواند طوری عمل‌کندکه پل نتواند بیش از $\frac{3}{4}$ از شیرینی‌ها رابردارد.

۵۲ـ مسئلهٔ توزین

پنج شیء با اوزان مختلف داریم و می‌خواهیم‌که آنها را به‌ترتیب اوزان نزولی مرتب‌کنیم . ترازویی ابتدائی‌داریم که شامل هیچ وزنهٔ علامتداری نیست و با آن فقط می‌توانیم این اشیاء را دو به دو مقایسه‌کنیم . برای مرتب‌کردن اشیاء با توجه به صورت مسئله چگونه باید عمل‌کنیم‌که سریعترین نوع ممکن باشد ؟ (یعنی تعداد مقایسه‌های انجام‌شده می‌نیمم باشد) . حداکثر چند مقایسه باید انجام دهیم ؟

حل ـ ابتدا اولین جفت اشیاء را مقایسه می‌کنیم و سپس در بارهٔ دومین آنها عمل می‌نمائیم . سپس سنگینترین شیء ازجفت اول را با سنگینترین شیءجفت دومی مقایسه می‌کنیم. نتیجهٔ‌این‌سه‌توزین‌را می‌توانیم به‌صورت زیربنویسیم:

$$\begin{array}{c} A<B<C \\ \vee \\ D \end{array}$$

که در آن $M<N$ به معنای « M سبکتر از N است » می‌باشد .

پنجمین شیء E را می‌توانیم در سطر ABC قرارداده و ابتدا با B و بعد برحسب اینکه سنگینتر یا سبکتر از B باشد با C یا A مقایسه کنیم . با دو توزین اضافی ، یکی از اوضاع زیررا خواهیم داشت :

$$(1)\quad \begin{array}{c} A<B<C<E \\ \vee \\ D \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{c} A<B<E<C \\ \vee \\ D \end{array}$$

$$(3)\quad \begin{array}{c} E<A<B<C \\ \vee \\ D \end{array} \qquad (4)\quad \begin{array}{c} A<E<B<C \\ \vee \\ D \end{array}$$

در حالت (۱) ، D را با A مقایسه می‌کنیم ؛ اگر $D<A$ باشد، نتیجهٔ مطلوب با شش توزین بدست‌آمده است ؛ ولی‌اگر

$D>A$ باشد، باید D را با B مقایسه کنیم و از هفتمین توزین نتیجهٔ زیر عاید می‌شود :

$A<B<D<C<E$ یا $A<D<B<C<E$

درحالت (۲) ، با دو توزین D را در سطر ABE قرار می‌دهیم ، ابتدا D را با B مقایسه می‌کنیم ؛ درمجموع هفت توزین انجام می‌شود . حالات (۳) و (۴) مانند (۲) اثبات می‌شوند .

بنابراین ، هفت توزین برای پنج شیء لازم است . به‌خواننده پیشنهاد می‌کنیم که غیرکافی بودن شش توزین را اثبات‌کند .

۵۳- سن خانم Z

خانم Z زیادسن نیست ، زیراوی پس از جنگ جهانی اول بدنیاآمده است ولی دوست ندارد به‌جوابهایی‌که مربوط به سن‌وی می‌شود جواب مستقیم بدهد .

وقتی چنین سؤالی را در ۲۷ ژوئیهٔ ۱۹۵۰ ازوی‌کردند پاسخ داد :«من‌تنها یك سال دارم ، زیرا تولدم را وقتی جشن می‌گیرم‌که در همان روز هفته‌ای‌که بدنیاآمده‌ام‌واقع‌شود،واین امر تنها یك بار درعمرم اتفاق افتاده است .»

حال می‌توانید بگوئیدکه سن خانم Z چقدر است ؟

حل - روزهای متوالی هفته را به I، II ، III ، IV، V، VI، VII نمایش می‌دهیم و جدولی رابا فرض اینکه روز هفتهٔ مربوطه در تاریخ معینی از ۱۹۱۱ برابر با I باشد ، تشکیل می‌دهیم .

ستون A معرف سال است (سالهای کبیسه را باحروف سیاه نوشته‌ایم) ؛ ستون B نمایندهٔ روزهای هفتهٔ مربوط به این تاریخ در سالهای مختلف است ، اگر این تاریخ مابین اول ژانویه و ۲۸ فوریه باشد ؛ ستون C نمایش دهندهٔ آنهاست.اگرتاریخ مربوطه مابین اول مارس وسی‌ویکم‌دسامبر باشد ؛ ستون D آنها را برای سالهای کبیسه ،که اگر تاریخ مفروض ۲۹ فوریه باشد مشخص می‌کند . می‌بینیم که قبل‌از اول مارس ، عدد معرف روز هفته ، پس از یك سال عادی یك واحد اضافه می‌شود و پس از یك سال کبیسه دو تا اضافه می‌شود و بعد از اول مارس ، این عدد یك واحد قبل از سال عادی و۲ واحدقبل از سال‌کبیسه اضافه می‌شود(فرض‌می‌کنیم که I بعد از VII بیاید).

A	B	C	D	A	B	C	D
۱۹۱۱	I	I		۱۹۳۱	V	V	
۱۹۱۲	II	III	I	**۱۹۳۲**	VI	VII	V
۱۹۱۳	IV	IV		۱۹۳۳	I	I	
۱۹۱۴	V	V		۱۹۳۴	II	II	
۱۹۱۵	VI	VI		۱۹۳۵	III	III	
۱۹۱۶	VII	I	VI	**۱۹۳۶**	V	V	III
۱۹۱۷	II	II		۱۹۳۷	VI	VI	
۱۹۱۸	III	III		۱۹۳۸	VII	VII	
۱۹۱۹	IV	IV		۱۹۳۹	I	I	
۱۹۲۰	V	VI	IV	**۱۹۴۰**	II	III	I
۱۹۲۱	VII	VII		۱۹۴۱	IV	IV	
۱۹۲۲	I	I		۱۹۴۲	V	V	
۱۹۲۳	II	II		۱۹۴۳	VI	VI	
۱۹۲۴	III	IV	II	**۱۹۴۴**	VII	I	VI
۱۹۲۵	V	V		۱۹۴۵	II	II	
۱۹۲۶	VI	VI		۱۹۴۶	III	III	
۱۹۲۷	VII	VII		۱۹۴۷	IV	IV	
۱۹۲۸	I	II	VII	**۱۹۴۸**	V	VI	IV
۱۹۲۹	III	III		۱۹۴۹	VII	VII	
۱۹۳۰	IV	IV		۱۹۵۰	I	I	

همچنین در این جدول می‌بینیم که اگر تاریخی به غیر از۲۹ فوریه در سال معینی روز دوشنبه باشد (به‌عنوان مثال) پس از ۵ یا۶ و یا ۱۱ سال بعد نیز روز دو شنبه خواهد بود (شرطی‌که این تناوب‌شامل‌سالی نباشدکه‌هزارگان آن بر۱۰۰ بخش‌پذیر بوده و بر۴۰۰ بخش پذیر نباشد) .

اگر خانم Z بغیراز ۲۹ فوریه بدنیاآمده باشد ،تولدش را قبل از ۲۷ ژوئیهٔ ۱۹۵۰ جشن گرفته است ، و در چنین تاریخی هنوز به سن ازدواج نرسیده بوده است ، وهیچ‌دلیلی نداردکه وی راخانم‌بدانند در صورتی‌که هنوز خردسال‌باشد.

در این صورت فرض می‌کنیم که وی در ۲۹ فوریه بدنیاآمده باشد . در هر ۲۸ سال ، ۲۹ فوریه در همان روز از هفته می‌افتد (اگر از سالی با هزارگان بخش پذیر بر۱۰۰ و غیر قابل تقسیم بر ۴۰۰ باشد) . اگر وی فقط یك دفعه

تولدش را جشن گرفته است ، نمی‌توانسته این جشن را قبل از ۱۹۲۴ و بعد از ۱۹۴۸ برگزارکرده باشد .

چون‌می‌دانیم‌که خانم Z بعد از جنك جهانی اول بدنیا آمده است ، وی اولین تولدش را در ۱۹۴۸ جشن گرفته است و تولدش ۲۹ فوریه ۱۹۲۰ بوده است .

۵۴ـ تعداد ماهیهای برکه چقدر است ؟

ماهی شناسی مایل بود بداند که تعداد ماهیهای قابل صید در یك برکه چقدر است . توری بـه آب می‌اندازد که بافته هایش اندازهٔ هم‌اند و پس از آنکه آنرا خارج می‌کند ، می‌بیندکه سی ماهی در تور است . هرکدام از ماهیها را با علامتی‌رنگی مشخص می‌کند وآنها را مجدداً به‌آب می‌اندازد. فردای آنروز ، تور خود را مجدداً به آب می‌افکند و چهل ماهی صید می‌کند ، در بین این‌ماهیها یك جفت دارای علامت بودند . وی‌چگونه می‌تواند (بطور تقریبی) تعداد ماهیهای برکه را محاسبه‌کند ؟

حل ـ فرض می‌کنیم‌که n تعداد ماهیهایی است‌که در برکه وجود دارد و حق صید آنرا داریم . در این صورت نسبت ماهیهای علامت دار به کل ماهیها برابر با $\frac{۳۰}{n}$ است.

دفعهٔدوم ، ماهی شناس ، ۴۰ ماهی صید می‌کند که یك جفت‌علامت دارند پس تعداد ماهیهای علامت دار به‌کل‌ماهیها $\frac{۱}{۲۰}=\frac{۲}{۴۰}$ است .

اگر فرض کنیم‌که ماهیهای علامت دار باماهیهای دیگر به طریقهٔ منظمی مخلوط شده باشند ، نسبتهای فوق باید با هم برابر باشند . در این صورت $\frac{۳۰}{n}=\frac{۱}{۲۰}$ واز آنجا $n=۶۰۰$

۵۵ـ قطر استوانه‌هارا چگونه اندازه بگیریم

یك موتورانفجار دارای‌قطعه‌ای به شکل استوانه‌است. برای‌اندازه‌گرفتن‌آن از صفحه‌ای فولادی که درآن ۱۵ردیف سوراخ با اندازه‌های معلوم تعبیه کرده‌اند ، استفاده می‌کنیم . اولین سوراخ دارای قطری برابر با ۱۰ میلیمتر است و حفره‌های‌بعدی۰/۰۴میلیمتربه۰/۰۴میلیمترقطرشان‌اضافه‌می‌شود. با عبور دادن‌استوانه‌ازاین‌سوراخها قطرش را اندازه‌می‌گیریم: برحسب اتفاق سوراخی را انتخاب کرده و قطرش را با قطر استوانه مقایسه می‌کنیم .

اگر استوانه نتواند از این سوراخ بگذرد ، قطرش از قطر سوراخ بیشتر است ؛ برعکس ، اگر بتواند ازآن عبور کند ، قطرش کمتر از آنست . بدین طریق ، می‌توانیم قطر استوانه را با تقریب۰/۰۴میلیمتر تعیین‌کنیم . استوانه‌هایی‌را کـه قطرشان کمتر از ۱۰ میلیمتر و یـا بیشتر از ۱۰/۵۶ میلیمتر باشد ،کنار می‌گذاریم و بقیه را از مقیاس ساخته شده به طریق مزبور می‌گذرانیم .

کارگرمأمور اندازه‌گیری اقطار باید طوری عمل‌کندکه هر استوانه با همین تعداد سوارخ سنجیده شود و در هردفعه از سوراخهایی که قبلا استفاده شده استفاده نشود . برای هر استوانه چندآزمایش باید انجام دهیم ؟ ترتیب این آزمایش‌ها چطور است ؟

حل ـ اگر به طریق زیرعمل کنیم چهار طریق درهر حالت‌کافی خواهد بود: ابتدا استوانه رابا سوارخ وسط صفحه یعنی هشتمی مقایسه می‌کنیم ؛ سپس با توجه به نتیجهٔ‌حاصل، از چهارمی یادوازدهمی و غیره عبور می‌دهیم . اگر استوانه از سوراخ بگذرد نتیجهٔ‌آزمایش «آری» است و درحالت‌مخالف باآن جواب « خیر » خواهد بود . بدین ترتیب ، بـا چهار آزمایش ، شانزده امکان را می‌توانیم بررسی کنیم یعنی با هر تعدادی که قطر وجود داشته باشد می‌توانیم به کمك وسایل آنها را به‌سنجیم .

۵۶ـ ۱۲۰ گلولهٔ بیلیارد

به کارگاهی سفارش ساختن ۱۲۰ گلوله به قطر دقیق ۶/۱ میلیمتر داده شده است ۱۲۰ گلوله ساخته شد و با اندازه‌گیری دقیق‌آنهامعلوم شدکه اقطارشان‌درقواعد موردنظر صدق نمی‌کند . نتیجهٔ‌اندازه‌گیری به‌صورت زیر بود :

۱۰	گلولهٔ	بیلیارد	باقطر	۶/۰۱	میلیمتر
۶	«	«	«	۶/۰۲	«
۴	«	«	«	۶/۰۳	«
۱۰	«	«	«	۶/۰۵	«
۱۹	«	«	«	۶/۰۷	«
۱۱	«	«	«	۶/۰۸	«
۶	«	«	«	۶/۱۰	«
۸	«	«	«	۶/۱۲	«
۱۰	«	«	«	۶/۱۴	«
۱۷	«	«	«	۶/۱۶	«
۶	«	«	«	۶/۱۷	«
۷	«	«	«	۶/۱۸	«

خوشبختانه کارگاه دیگری این گلوله‌ها را برای تـرمیم

پذیرفت مشروط برآنکه آنها را به دودسته تقسیم کند : اولی شامل بزرگترها ودومی حاوی کوچکترها ؛ درضمن، می‌بایست که قطرمتوسط نیزروی هریك از بسته‌ها ثبت‌شود .

مسئله به‌قرار زیراست: قطرمتوسط d را که تحت آن گلوله‌ها باید در بستهٔ A قرارگیرند بیابید (بطوری‌که آن تعداد گلوله‌هایی‌که قطرشان بزرگتراز d است در بستهٔ B قرارگیرند) ، وتعداد a و b را روی بسته‌ها بنویسید.اعداد d،b،a باید طوری باشندکه مجموع خطاهای مطلق حداقل ممکن باشد . دراینجا منظور از خطای مطلق ، مقدار مطلق تفاضل بین قطریك گلوله وقطر متوسط ثبت شده روی جعبهٔ مربوطه است.

حل ـ فرض می‌کنیم که $x_1, x_2, \ldots x_n$ تعداد $2n$ عدد به ترتیب بزرگی باشند . اگر x مابین x_m و x_{m+1} باشد مجموع خطاهای مطلق برابراست با :

$$(1) \quad (x-x_1)+(x-x_2)+\ldots+(x-x_m)+ \\ +(x_{m+1}-x)+\ldots(x_{2n}-x)$$

به‌سادگی دیده می‌شود که مجموع (۱) وقتی حداقل است‌که x را بوسیلهٔ y که واقع بین x_n و x_{n+1} است جانشین کنیم :

$$(2) \quad (y-x_1)+(y-x_2)+\ldots(y-x_n)+ \\ +(x_{n+1}-y)+\ldots+(x_{2n}-y)$$

فرض‌می‌کنیم‌که $m>n$ یعنی $x>y$ باشد،دراین‌صورت تفاضل (۱) و (۲) عبارتست از :

$$n(x-y)+[(x-x_{n+1})+\ldots+(x-x_m)]- \\ -[(x_{n+1}-y)+\ldots(x_m-y)]+ \\ +(2n-m)(y-x)>n(x-y)+0- \\ -(m-n)(x-y)+(2n-m)(y-x)=0$$

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت‌کنیم‌که اگر $4n$ عدد $x_1, x_2, \ldots x_{4n}$ به‌دودسته (پس‌از مرتب‌کردن‌آن به ترتیب بزرگی) $x_1, x_2, \ldots x_{2m}$ و $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots x_{4n}$ تقسیم شوند و خطاهای مطلق را برای اعداد دستهٔ اول به‌ازای عدد x' واقع بین x_m و x_{m+1} از یك‌طرف و از طرفی دیگر برای اعداد دستهٔ دوم به ازای عدد x'' واقع بین x_{2n+m} و x_{2n+m+1} محاسبه‌کنیم‌مجموع این خطاها وقتی حداقل است‌که $m=n$ باشد .

نتیجه می‌گیریم‌که قطر مطلوب۶/۰۹ میلمتر است (۶۰ گلوله قطرشان‌کمتر از ۶/۰۹ میلیمتر است و ۶۰ گلولهٔ دیگرقطرشان بیشتراز ۶/۰۹ میلیمترمی‌باشد). اعدادی‌که‌باید روی جعبه‌ها نوشته شوند، عبارتنداز :

$a=6/06$ میلیمتر و $b=16/15$ میلیمتر .

۵۷ـ استوانهٔ باند پیچی شده

نواری به‌ضخامت ۰/۱ میلیمتر و به‌طول ۲۵متر روی استوانه‌ای مقوائی بطور خیلی فشرده می‌پیچیم . بدین‌ترتیب استوانهٔ جدیدی به‌قطریك دسیمتر بدست می‌آوریم.قطراستوانهٔ مقوائی چقدراست ؟

حل ـ مساحت‌مقطعی‌ازاستوانه 25π سانتیمترمربع‌ونوار ۲۵ سانتیمترمربع‌ازآنرا احاطه می‌کند، بنابراین مساحت داخلی $25(\pi-1)$ سانتیمترمربع‌است؛اگر d قطراستوانهٔ‌بدون نوار باشد ، از معادلهٔ :

$$\pi\frac{d^2}{4}=25(\pi-1)Cm^2$$

نتیجه می‌گیریم :

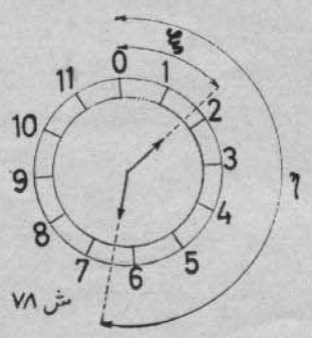
$$d=10\sqrt{\frac{\pi-1}{\pi}}\,Cm\approx 8/26\ Cm$$

۵۸ـ ساعتی که عقربه‌هایش باهم متساویند

می‌دانیم‌که هرکس می‌تواند بدون ساعت ، وقت را با خطائی‌که ازشش‌ساعت تجاوزنکند بگوید.

ساعتسازی ساعتی ساخت که عقربه‌هایش با هم مساوی بودند، بقسمی‌که هیچکس نمی‌توانست تشخیص بدهد کدامیك عقربهٔ ساعت‌شمارو‌کدامیك عقربهٔ دقیقه شمار است. بزرگترین خطای مربوط به ساعتی که دارای چنین خاصیتی باشد چقدر است ؟

حل ـ به سادگی دیده می‌شودکه اگر موضع عقربهٔ ساعتشمار را بدانیم، وقت مربوطه مشخص می‌شود (ش۷۸)؛ عقربهٔ دقیقه‌شمارداراى نقشی فرعی است؛ آن نوعی مقیاس‌کوچك را تشکیل می‌دهدکه عدد خوانده شده را باید در دوازده ضرب کنیم . اگر رقمی‌راکه بوسیلهٔ عقربهٔ کوچك خوانده



ش ۷۸

می‌شود به ξ و عدد خوانده شده بوسیلهٔ عقربهٔ بزرگ را به η نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$\eta - ۱۲\left\{\xi\right\} = ۰ \quad ، \quad ۰ < \xi < ۱۲$$

$$۰ < \eta < ۱۲$$

$\left\{\xi\right\}$ نمایندهٔ قسمت کسری عدد ξ است .

فرض می‌کنیم که دوعقربه هم‌اندازه باشند ، موضع یکی ازعقربه‌ها را به x و موضع دیگری را به y نمایش می‌دهیم .

سه امکان وجود دارد:

$$(I) \quad y - ۱۲\left\{x\right\} = ۰$$

وهمچنین

$$x - ۱۲\left\{y\right\} \neq ۰$$

$$(II) \quad x - ۱۲\left\{y\right\} = ۰$$

وهمچنین

$$y - ۱۲\left\{x\right\} \neq ۰$$

$$(III) \quad x - ۱۲\left\{y\right\} = ۰$$

و

$$y - ۱۲\left\{x\right\} = ۰$$

حالت III تنها موردی است که زمان را نمی‌توانیم از روی چنین ساعتی بدانیم. ۱۴۳ موضع استثنائی از این نوع وجود دارد. اعداد x و y مربوط عبارتند از ۱۴۳ نقطهٔ تقاطع منحنیهای توابع زیر :

$$y = ۱۲\left\{x\right\} \quad و \quad x = ۱۲\left\{y\right\}$$

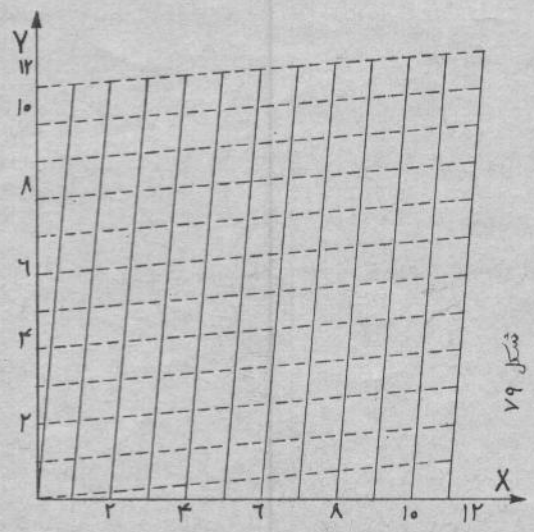
این نقاط برروی ۲۳ خط به معادلات :

$$(۱) \quad y = x + \frac{۱۲}{۱۳}K \quad (K = ۰ و \pm ۱ و \ldots \pm ۱۱)$$

واقعند (ش ۷۹) حال فرض می‌کنیم که $r = x - y$ خطائی باشد که ممکن است ازاشتباه عقربه‌ها باهم ناشی شود؛ باتوجه به‌معادلات (۱) خواهیم داشت :

$$r = \frac{۱۲}{۱۳}|K| \quad ، \quad (K = ۰ ، \pm ۱ ، \ldots ، \pm ۱۱)$$

بنابه‌فرض باکنارگذاشتن خطاهای بیشتر از ۶ ساعت ،



شکل ۷۹

وقتی بزرگترین خطا را مرتکب می‌شویم که $K = \pm ۶$ باشد که برابراست با :

$$r = \frac{۷۲}{۱۳} = ۵ + \frac{۷}{۱۳}$$

یعنی۵ساعت‌و ۳۲ دقیقه‌و ۱۸/۴۶ ثانیه(درچه ساعتی از روز چنین خطائی را مرتکب می‌شویم؟) .

مطمئناً فرض براین است که می‌توانیم بدون خطا عدد مربوط به یك عقربه را بخوانیم.

۵۹ـ بلند قدها وکوتاه قدها

درطی جلسهٔ درس فیزیك که درآن شاگردانی باقامتهای مختلف شرکت داشتند، دبیر مربوط شاگردان را در ردیفهایی به‌صورت مستطیل قرارداده ومی گوید: «ببینم چه‌کسی بزرگ‌ترین کوتاه قداست» .

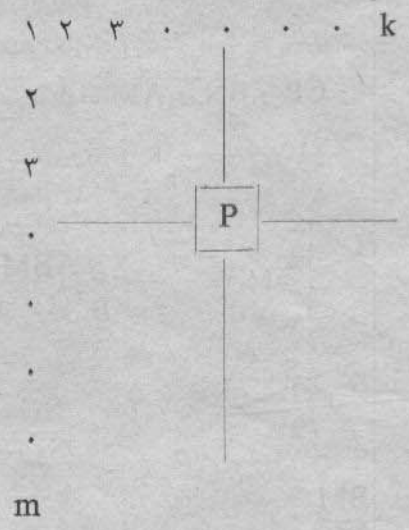
از هرستون کوچکترینشان را برمی گزیند و پس‌ازآنکه تمام این‌کوتاه قدها به ردیف می‌ایستند ، وی بزرگترینشان را از این گروه انتخاب کرده و می گوید : « این بزرگترین کوتاه قداست».

شاگردان به جاهایشان برمی گردند و دبیر می گوید : « حال ببینم کوچکترین قد بلندکیست ».ازهرکدام از ردیفها بزرگترینشان را انتخاب می‌کند وپس‌ازآنکه‌آنهارا پهلوی هم قرار می‌دهد ، کوچکترینشان را برگزیده ومی گوید : « این کوچکترین قدبلند است» .

آیا ممکن است‌که این شاگرد در عین حال بزرگترین کوتاه‌قد وکوچکترین بلندقد باشد؟ آیا کلاسهایی وجود دارد

که درآن کوچکترین بلندقد ، کوتاهتر از بلندترین کوتاه‌قد باشد؟ اگر دبیر بلندقدها را به جای انتخاب از ردیفها از میان ستونها یعنی مانندکوتاه قدها برمی گزید، نتیجه به‌چه صورتی درمی‌آمد ؟

حل ـ اولا، ممکن است که یکی از بچه‌ها درضمن اینکه کوتاهترین بلند قد است ، بلندترین کوتاه قد نیز باشد . اگر کلاسی شامل km شاگرد باقامتهای مختلف باشد (k و m اعداد صحیح بزرگتر از واحدند و به‌ترتیب نمایندهٔ تعداد ستون‌ها و ردیفها می‌باشند) ممکن است آنرا به صورت یك مستطیل طوری قرار دهیم که شاگرد غیرمشخصی که حداقل دارای $k-1$ دوست کوتاهتر از خود و حداقل $k-1$ رفیق بلندتر از خودش است ، هم کوتاهترین بلندقد و هم بلندترین کوتاه‌قد باشد :



ثانیاً : ممکن نیست که کوتاهترین بلندقد کوچکتر از بلندترین کوتاه قد باشد. فرض می‌کنیم که p بلندترین کوتاه‌قد و P کوتاهترین بلندقدو $P<p$ باشد. شاگردان p و P نمی‌توانند باهم در یك ستون (p کوچکترین نخواهد بود) و همچنین دریك ردیف (P بزرگترین نخواهد بود) قرار گیرند. فرض می‌کنیم که p_{ik} شاگردی باشد که درمحل تقاطع ستون p وسطر P قرار گرفته باشد. داریم :

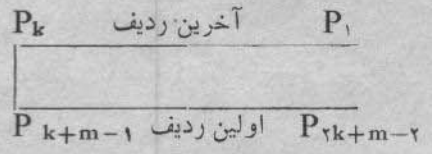
$$p<p_{ik} \text{ ، } p_{ik}<P$$

پس p کوچکتر از P است ولی بنابه‌فرض $P<p$ می‌بود وباوجود چنین تناقضی ، این فرض غلط است.

ثالثاً : اگر دبیر ، بلندقدها را ازمیان ستونها و نه از ردیفها مانند کوتاه‌قدها انتخاب می‌کرد ، واضح است که یك شاگرد ممکن نیست که درضمن اینکه کوتاهترین بلندقد است ، بلندترین کوتاه‌قد نیز باشد، زیرا وی باید درآن واحد هم بلندترین و هم کوتاهترین فرد ستون باشد و این امر غیر ممکن است .

پس ، درچنین موردی ممکن است که کوتاهترین بلندقد بتواند ازکوچکترین کوتاه‌قد بزرگتر باشد .

از km شاگرد موجود در کلاس برحسب اتفاق $2k+m-2$ شاگرد به‌اندازه‌های مختلف‌راانتخاب و درطول سه‌ضلع یك مستطیل قرار می‌دهیم وآنها را برحسب قامتهای نزولی به‌صورت زیرمرتب می‌کنیم :

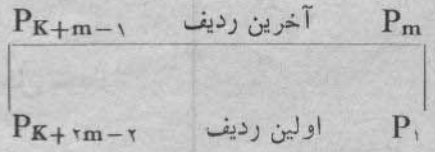


بقیهٔ شاگردان به‌ترتیب غیرمشخصی در مستطیل قرار گرفته‌اند. شاگرد P_K کوتاهترین بلندقدوشاگرد P_{K+m-1} بلندترین کوتاه قداست و چون $P_K>P_{K+m-1}$ است ، کوتاهترین بلندقد، بزرگتر از بلندترین کوتاه‌قد می‌باشد .

برعکس ، اگر $K+2m-2$ شاگرد را انتخاب‌کرده وآنها را برحسب قامتهای نزولی :

$$P_1>P_2>\ldots>P_{K+2m-2}$$

مرتب‌کنیم وآنها را درطول سه‌ضلع مستطیلی به صورت زیر قرارداده وبقیه را به‌هرصورت :



دلبخواهی در داخل مستطیل جای دهیم، شاگرد P_{K+m-1} کوتاهترین بلندقد و شاگرد P_m بلندترین کوتاه‌قد خواهد بود وچون $P_{K+m-1}<P_m$ است کوتاهترین بلندقدکوچکتر از بلندترین کوتاه‌قد خواهد بود.

حل مسائل یکان شمارهٔ: ٦٦

۶۶/۱ ـ از: طهمورث اسکندری

ثابت کنید که هرعدد به شکل زیر مکعب کامل است:

$$N=\underbrace{۹۹....۹}_{n\ \text{مرتبه}}\ ۲\ \underbrace{۰۰....۰}_{n-۱\ \text{مرتبه}}\ ۷\ \underbrace{۹۹....۹}_{n-۱\ \text{مرتبه}}$$

حل ـ عدد N به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$N=۹(۱۰^{۳n-۱}+۱۰^{۳n-۲}+...+۱۰^{۲n+۱})+$$
$$+۷\times ۱۰^{۲n}+۲\times ۱۰^{n}+۹(۱۰^{n-۱}+...+۱)$$

به جای ۹ می‌نویسیم $۱۰-۱$ و حاصل را ساده می‌کنیم، می‌شود:

$$N=۱۰^{۳n}-۱۰^{۲n+۱}+۷\times ۱۰^{۲n}+۲\times$$
$$\times ۱۰^{n}+۱۰^{n}-۱$$

$$N=۱۰^{۳n}-۳\times ۱۰^{۲n}+۳\times ۱۰^{n}-۱$$

$$N=(۱۰^{n}-۱)^{۳}=\underbrace{(۹۹...۹)}_{n\ \text{مرتبه}}^{۳}$$

۶۶/۲ ـ فرستنده: **عبدالرضا پورمهدی کسمائی**

اگر x و y دوعدد مثبت بوده و $x+y=۱$ باشد ثابت کنید که:

$$(۱+\frac{۱}{x})(۱+\frac{۱}{y})\geq ۹$$

حل ـ داریم:

$$(۱+\frac{۱}{x})(۱+\frac{۱}{y})=\frac{x+۱}{x}\times\frac{y+۱}{y}=$$
$$=\frac{xy+x+y+۱}{xy}=\frac{xy+۲}{xy}=۱+\frac{۲}{xy}$$

چون مجموع دوعدد مثبت x و y ثابت است پس حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکسیمم است که $x=y$ باشد یعنی:

$$x+y=۱\rightarrow xy\leq\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

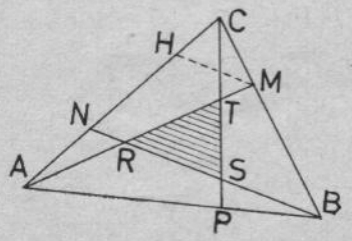
$$\frac{۲}{xy}\geq ۲:\frac{۱}{۴}=۸\Longrightarrow ۱+\frac{۲}{xy}\geq ۹$$

۶۶/۳ ـ فرستنده: **عبدالرضا پورمهدی کسمائی**

روی ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC نقاط M و N و P چنان انتخاب می‌شوند که:

$$\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{AP}{PB}=k$$

باشد که k عدد معین بزرگتر از یک می‌باشد. مساحت مثلث حاصل از تقاطع خطوط AM و BN و CP را برحسب S مساحت مثلث مفروض و k حساب کنید.



حل ـ دومثلث ABR و ABM در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند پس:

$$\frac{S_{ABR}}{S_{ABM}}=\frac{AR}{AM}$$

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}=\frac{BM}{BC}$$

$$\frac{BC}{BM}=\frac{BM+MC}{BM}=۱+\frac{MC}{BM}=$$
$$=۱+\frac{۱}{k}=\frac{k+۱}{k}$$

MH را موازی با BN رسم می‌کنیم داریم:

$$\frac{AR}{RM}=\frac{AN}{NH}=\frac{AN}{NC}\times\frac{NC}{NH}=\frac{AN}{NC}\times\frac{BC}{BM}=$$
$$=\frac{۱}{k}\times\frac{k+۱}{k}=\frac{k+۱}{k^{۲}}$$

$$\frac{AM}{AR}=\frac{AR+RM}{AR}=۱+\frac{k^{۲}}{k+۱}=\frac{k^{۲}+k+۱}{k+۱}$$

$$\frac{S_{ABR}}{S_{ABC}}=\frac{AR}{AM}\times\frac{BM}{BC}=\frac{k+1}{k^2+k+1}\times\frac{k}{k+1}=$$

$$=\frac{k}{k^2+k+1}$$

$$S_{ABR}=\frac{kS}{k^2+k+1}$$

به‌طریق مشابه ثابت خواهدشدکه :

$$S_{BSC}=S_{CTA}=S_{ABR}=\frac{kS}{k^2+k+1}$$

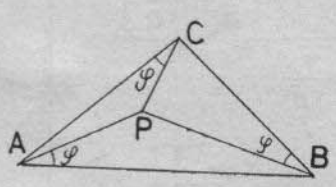
$$S_{RST}=S-\frac{3kS}{k^2+k+1}=\frac{(k-1)^2S}{k^2+k+1}$$

۶۶/۴ـ فرستنده : **عبدالرضا پورمهدی کسمائی**

نقطهٔ P در داخل مثلث ABC چنان واقع است که اندازهٔ هریك از زاویه‌های PAB و PBC و PCA برابر با φ می‌باشد . ثابت کنید که :

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}$$

حل ـ داریم:



$$APB=180^\circ-\varphi-(B-\varphi)=$$
$$=180^\circ-B$$
$$BPC=180^\circ-C$$
$$CPA=180^\circ-A$$

$$\frac{AP}{\sin\varphi}=\frac{AC}{\sin(180^\circ-A)}=\frac{b}{\sin A}=\frac{2R\sin B}{\sin A}$$

$$AP=\frac{2R\sin B\sin\varphi}{\sin A}$$

$$BP=\frac{2R\sin C\sin\varphi}{\sin B}\ ,\ CP=\frac{2R\sin A\sin\varphi}{\sin C}$$

$$S_{ABC}=S_{APB}+S_{BPC}+S_{CPA}$$

$$S_{ABC}=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

$$S_{APB}=\frac{1}{2}AP.AB\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2R\sin B\sin\varphi}{\sin A}\times 2R\sin C\times\sin\varphi=$$

$$=\frac{2R^2\sin B\sin C\sin^2\varphi}{\sin A}$$

$$S_{BPC}=\frac{2R^2\sin C\sin A\sin^2\varphi}{\sin B}$$

$$S_{CPA}=\frac{2R^2\sin A\sin B\sin^2\varphi}{\sin C}$$

روابط چهارگانهٔ اخیررا دررابطهٔ (۱) منظورمی‌کنیم و طرفین رابطهٔ حاصل را بر $2R^2\sin A\sin B\sin C\sin^2\varphi$ تقسیم می‌کنیم، نتیجه خواهدشد :

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}$$

۶۶/۵ـ فرستنده : **ابراهیم ذوالقدری**

دستگاه زیررا حل کنید :

$$\begin{cases}\dfrac{u(y-x)}{z-u}=a\\[2mm] \dfrac{z(y-x)}{z-u}=b\\[2mm] \dfrac{y(u-z)}{x-y}=c\\[2mm] \dfrac{x(u-z)}{x-y}=d\end{cases}$$

حل ـ ازمعادلات بالا نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\dfrac{u}{z}=\dfrac{a}{b}\\[2mm] \dfrac{y}{x}=\dfrac{c}{d}\Longrightarrow y=\dfrac{cx}{d}\\[2mm] uy=ac\Longrightarrow u=\dfrac{ac}{y}=\dfrac{ad}{x}\\[2mm] zx=bd\Longrightarrow z=\dfrac{bd}{x}\end{cases}$$

این مقادیررا درمعادلهٔ آخردستگاه مفروض منظور می‌کنیم، بعدازاختصار نتیجه خواهدشد :

$$x\left(\frac{ad}{x}-\frac{bd}{x}\right)=d\left(x-\frac{cx}{d}\right)$$

$$\Longrightarrow x=\frac{d(a-b)}{d-c}$$

$$y=\frac{c(a-b)}{d-c}\ ،\ z=\frac{b(d-c)}{a-b}\ و\ u=\frac{a(d-c)}{a-b}$$

۶۶/۶ـ فرستنده : **ابراهیم ذوالقدری**

اگر a و b و c ریشه‌های معادلهٔ $x^3+qx+r=0$ باشند ثابت‌کنید که :

$$3(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)=$$
$$=5(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)$$

حل ـ ازمعادلهٔ مفروض داریم :

$$a+b+c=0$$
$$ab+bc+ca=q$$
$$abc=-r$$
$$a^2+b^2+c^2=$$
$$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2q$$

$$\begin{cases} a^3+qa+r=0 \\ b^3+qb+r=0 \\ c^3+qc+r=0 \end{cases}$$

$$a^3+b^3+c^3=-q(a+b+c)-3r=-3r$$

ازضرب طرفین معادلهٔ مفروض در x خواهیم‌داشت :

$$x^4+qx^2+rx=0$$

دراین معادله x را به‌ترتیب برابر با a و b و c اختیار کرده روابط حاصل را باهم جمع می‌کنیم نتیجه خواهدشد:

$$a^4+b^4+c^4=2q^2$$

همچنین خواهیم داشت:

$$x^5+qx^3+rx^2=0$$

$$\Longrightarrow a^5+b^5+c^5=5rq$$

باتوجه به‌مقادیر بدست‌آمده در بالا به سادگی معلوم خواهد شدکه رابطهٔ داده شده محقق می‌باشد .

۶۶/۷ـ ترجمهٔ: **جعفرآقایانی چاوشی**

O و H به‌ترتیب مرکز دایرهٔ محیطی ومرکز ارتفاعی مثلث ABC است. اگر OH بایکی‌از ضلعهای مثلث موازی باشد ثابت‌کنیدکه مقادیر tgA و tgB و tgC سه جملهٔ یک تصاعد حسابی می‌باشند.

حل ـ فرض می‌کنیم‌که OH باضلع BC موازی باشد در این صورت بنا به مسئلهٔ ۶۴/۵ (مندرج در یکان ۴۶) خواهیم داشت :

$$tgB\,tgC=3$$

$$tgA=tg[180-(B+C)]=-\frac{tgB+tgC}{1-tgB\,tgC}$$

$$tgA=\frac{tgB+tgC}{3-1}=\frac{tgB+tgC}{2}$$

۶۶/۸ـ ترجمهٔ : **جعفرآقایانی چاوشی**

فرض می‌کنیم‌که $A_1A_2\ldots A_n$ یك چند ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به‌مرکز O و به‌شعاع R باشد. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هرمثلث $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ را با I_i و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هرمثلث حادث ازسه ضلع A_iA_{i+2} و $A_{i+2}A_{i+1}$ و $A_{i+1}A_{i+3}$ را با J_i نشان می‌دهیم . ثابت‌کنیدکه تمام I_i ها و J_i ها بردایرهٔ به‌مرکز O واقع‌اند و R' شعاع این دایره را حساب‌کنید .

حل ـ اگر P_i نقطهٔ تلاقی OA_i با $A_{i-1}A_{i+1}$ و Q_i نقطهٔ تلاقی OJ_i با $A_{i+1}A_{i+2}$ باشد خواهیم داشت:

$$OI_i=OP_i+P_iI_i=$$
$$=R\cos\frac{2\pi}{n}+R\sin\frac{2\pi}{n}tg\frac{\pi}{2n}$$
$$=\frac{R\left[2\cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{2n}+2\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}\right]}{2\cos\frac{\pi}{2n}}$$
$$=\frac{R\cos\frac{3\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}$$

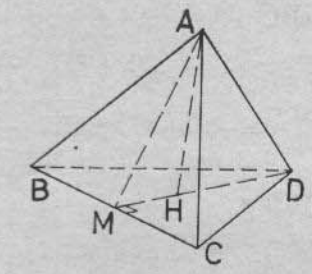
$$OJ_i=OQ_i-Q_iJ_i=$$
$$=R\cos\frac{\pi}{n}-R\sin\frac{\pi}{n}tg\frac{\pi}{2n}$$
$$=\frac{R\left[2\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{2n}-2\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}\right]}{\cos\frac{\pi}{2n}}$$
$$=\frac{R\cos\frac{3\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}$$

مسائل ترجمه ازمجلهٔ «ریاضیات دانش آموز»

۶۶/۹ـ کره‌های به‌شعاع m را کنار وروی هم چنان

قرار داده‌ایم که هرمی به‌شکل چهاروجهی منتظم تشکیل داده‌اند. ارتفاع این هرم را حساب کنید.

حل ـ فرض این است که خطوط واصل بین مراکز کره‌ها چهار یال یک چهاروجهی منتظم می‌باشند. چنانچه تعداد کره‌های مربوط به هر یال K باشد طول یال چهاروجهی برابر خواهد شد با : $2m(K-1)$ و در مثلث متساوی‌الاضلاع BCD خواهیم داشت :



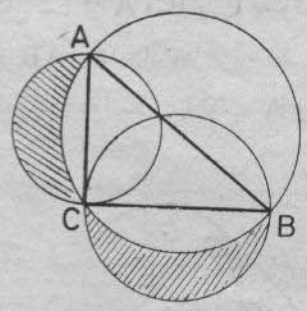
$$DM = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = m(K-1)\sqrt{3}$$

$$DH = \frac{2}{3}DM = \frac{2m(K-1)\sqrt{3}}{3}$$

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \frac{2m(K-1)\sqrt{6}}{3}$$

۶۶/۱۰ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه در زاویهٔ C مفروض است. به‌قطر هرضلع آن دایره‌ای رسم می‌کنیم. مساحت سطح قسمتهایی از دایره‌های کوچك راکه خارج دایرهٔ بزرگتر واقع است برحسب S مساحت مثلث حساب کنید.

حل ـ ازروی شکل ملاحظه می‌شود که مساحت سطح هاشورخورده به‌این‌ترتیب بدست می‌آید که مساحت نیمدایرهٔ به قطر AB را از مجموع مساحتهای مثلث ABC ونیمدایره‌های به قطرهای AC و BC کم کنیم. اما بنابه قضیهٔ فیثاغورس، مساحت نیمدایرهٔ به‌قطر AB برابراست با مجموع مساحتهای دو نیمدایرهٔ به‌قطرهای AC و BC. درنتیجه مساحت سطح هاشورخورده برابر است با S مساحت مثلث ABC.



مسائل ترجمه ازمجلات ریاضی چاپ فرانسه

۶۶/۱۱ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a مفروض است. از رأسهای B و C نیم خطهای Bx و Cy را موازی با AC و AB رسم می‌کنیم بقسمی‌که این نیم خطها با A دریك طرف BC واقع باشند. خط متغیری برA می‌گذرد و Bx و Cy را به‌ترتیب در M و P قطع می‌کند.

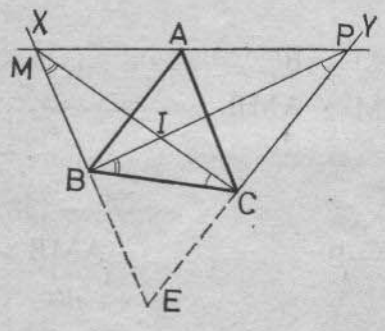
۱ـ ثابت کنیدکه : $BM.CP = a^2$

۲ـ اگر I نقطهٔ تلاقی BP و CM باشداندازهٔ زاویهٔ IBC را حساب کنید و ثابت کنیدکه :

$$CM.CI = a^2$$

۳ـ مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BIM را تعیین کنید.

حل ـ اگر E نقطهٔ تلاقی خطوط Bx و Cy باشد تناسبهای زیررا داریم :



$$\frac{MB}{BE} = \frac{MA}{AP}$$

و

$$\frac{PC}{CE} = \frac{PA}{AM}$$

ازضرب طرفین دورابطهٔ بالا دریکدیگرنتیجه می‌شود:

$$\frac{MB.PC}{BE.CE} = 1$$

چهارضلعی ABEC لوزی است ودرنتیجه ازرابطهٔ بالا خواهیم داشت :

$$MB.CP = BE.CE = a.a = a^2$$

۲ـ دوزاویهٔ MBC و BCP باهم برابرند و ازرابطهٔ اخیر داریم :

$$\frac{BM}{a} = \frac{a}{CP} \Longrightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BC}{CP}$$

نتیجه می‌شودکه دومثلث MBC و BCP بایکدیگرمتشابهند ودرنتیجه زاویهٔ IBC با زاویهٔ IMB وزاویهٔ ICB با زاویهٔ IPC برابر می‌باشد. مثلث IBC با هریك ازمثلثهای MBC و PBC متشابه است و درنتیجه اندازهٔ زاویهٔ IBC که با زاویه‌های MBC و BCP برابراست ۱۲۰ درجه می‌باشد.

ازتشابه دومثلث BCM و ICB خواهیم داشت :

$$\frac{CM}{CB} = \frac{CB}{CI} \Longrightarrow CM.CI = a^2$$

۳ـ ازرابطهٔ $CM.CI = \overline{CB}^2$ نتیجه می‌شودکه‌دایرهٔ

محیطی مثلث BIM در نقطهٔ B بر BC مماس است و مرکز این دایره بر خطی واقع است که در نقطهٔ B بر BC عمود است .

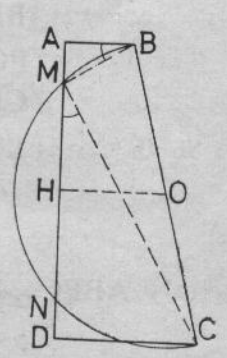
۶۶/۱۲ـ الف ـ ذوزنقهٔ ABCD قائمه در زاویه‌های A و D مفروض است و درآن $AB = a$ و $DC = ۲a$ و $AD = ۴a$ می‌باشد. دایرهٔ به‌قطر BC ضلع AD را در M و N قطع می‌کند . ثابت‌کنید که :

$$AM.AN = ۲a^۲$$

ب ـ در ذوزنقهٔ بالا فرض می‌کنیم که $AB = a$ و $DC = ۲a$ و $AD = x$ باشد. اولا چه رابطه‌ای بین a و x باید برقرارباشدتا دایرهٔ به‌قطر BC ضلع AD را دردونقطه‌قطع کند یا برآن مماس باشد.

ثانیاً ـ اگر دایرهٔ به‌قطر BC در M بر AD مماس باشد ثابت‌کنیدکه مثلثهای AMB و DCM و MCB متشابهند .

حل ـ الف :



دو مثلث AMB و DMC متشابهند ، زیرا زاویهٔ BMC قائمه است وزاویه‌های DMC و ABM که هردو متمم زاویهٔ AMB می‌باشند باهم برابرند . از تشابه این دومثلث خواهیم داشت :

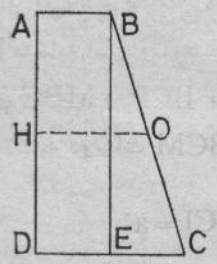
$$\frac{AM}{CD} = \frac{AB}{DM}$$

$$AM.DM = AB.CD = a.۲a = ۲a^۲$$

اگر H پای عمود مرسوم از O بر AD باشد داریم :

$$DM = DH + HM = AH + HN = AN$$

$$\Rightarrow AM.AN = ۲a^۲$$



ب ـ اولا عمود BE را بر DC رسم می‌کنیم ، خواهیم داشت :

$$BC^۲ = BE^۲ + CE^۲ = AD^۲ + (DC - AB)^۲ = x^۲ + a^۲$$

$$BC = \sqrt{x^۲ + a^۲}$$

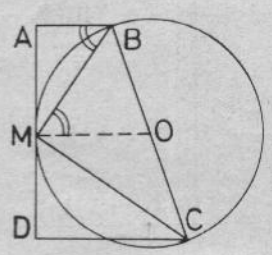
$$OH = \frac{AB + CD}{۲} = \frac{۳a}{۲}$$

برای اینکه دایرهٔ به قطر BC با AD متقاطع یا برآن مماس باشد لازم وکافی است‌که :

$$\frac{\sqrt{x^۲ + a^۲}}{۲} \geq \frac{۳a}{۲} \Longleftrightarrow a^۲ + x^۲ \geq ۹a^۲$$

$$x^۲ \geq ۸a^۲ \Longleftrightarrow x \geq ۲a\sqrt{۲}$$

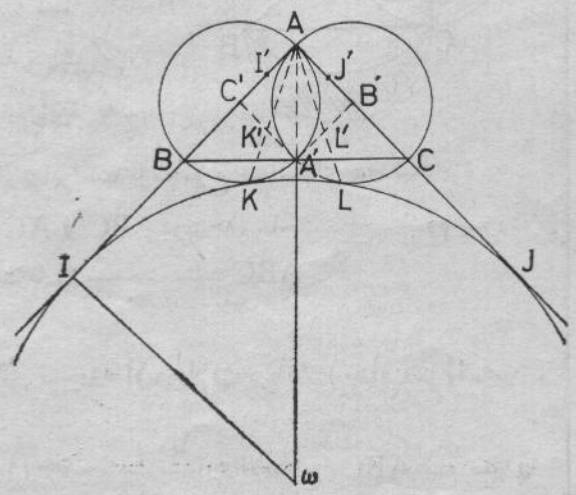
ثانیاً ـ قبلا ثابت شد که دو مثلث ABM و DCM متشابهند و چون دو زاویهٔ ABM وBMO باهم ودوزاویهٔ BMO و MBO باهم‌برابرند پس دو زاویهٔ ABM و MBO با یکدیگر



برابرند ونتیجه خواهد شدکه مثلث BMC باهریك‌ازدومثلث مذکور دربالا متشابه می‌باشد .

۶۶/۱۳ـ مثلث متساوی‌الساقین وقائم‌الزاویهٔ ABC قائمه درزاویهٔ A مفروض است و فرض می‌کنیم $BC = ۲a$ باشد. ثابت‌کنیدکه دایره‌ای وجود داردکه بردایره‌های به‌قطر‌های AB و AC ودرعین حال برامتداد ضلعهای AB وAC مماس است. شعاع این دایره وفاصلهٔ مرکزآن راازA برحسب a حساب‌کنید .

حل ـ اگر A' و B' و C' به‌ترتیب اوساط اضلاع BC و CA و AB باشد دایره‌های به قطرهای AB و AC از A' می‌گذرند . درانعکاس به‌قطب A و به‌قوت $AA'^۲ = a^۲$



خطهای AB و AC ثابت می‌مانند اما دایره‌های به قطرهای AB و AC به ترتیب به خطوط $C'A'$ و $B'A'$ تبدیل می‌شوند. تنها یك دایره وجود دارد که برچهارخط AB و AC و $A'B'$ و $A'C'$ مماس است که این دایره همان دایرهٔ محاطی مربع $AB'A'C'$ می‌باشد و نقاط تماس آن با ضلعهای مربع نقاط K' و L' و J' و I' اوساط اضلاع مربع می‌باشد. در انعکاس (a^2 و A) دایرهٔ محاطی مربع به‌دایره‌ای تبدیل می‌شود که در نقاط I و J و K و L مبدلهای نقاط I' و J' و K' و L' به ترتیب براضلاع AB و AC و بر دایره‌های به قطرهای AB و AC مماس است. ω مرکز این دایره بر امتداد AA' و برعمودی واقع است که در I بر AI اخراج می‌شود و داریم:

$$R = \omega I = AI = \frac{a^2}{AI'}$$

$$AI' = \frac{AB}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow R = 2a\sqrt{2}$$

$$\omega A = AI\sqrt{2} = 4a$$

۶۶/۱۴ـ تابع f از متغیر حقیقی x را چنین تعریف می‌کنیم:

اگر $x < -1$ باشد: $f(x) = 2x + 3$

اگر $-1 < x < 1$ باشد: $f(x) = |x|$

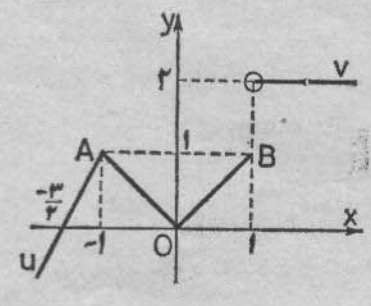
اگر $x > 1$ باشد: $f(x) = 2$

۱) نمایش هندسی تغییرات تابع f را رسم کنید.

۲) تابع f را از نظر پیوستگی و داشتن مشتق بررسی کنید.

۳) F تابع اولیهٔ تابع f را تعیین کنید.

حل ـ نمایش هندسی تابع ترکیب شده‌است از:



اولا نمایش‌هندسی تابع $y = 2x + 3$ در فاصلهٔ $]-\infty$ و $-1]$ که عبارتست ازنیم‌خط Au.

ثانیاً نمایش هندسی‌تابع $y = |x|$ درفاصلهٔ $[-1$ و $+1]$ که درفاصلهٔ $[-1$ و $0]$ داریم $y = -x$ و نمایش هندسی تابع قطعه خط AO است ودرفاصلهٔ $[0$ و $+1]$ داریم $y = x$ ونمایش هندسی آن قطعه خط OB می‌باشد.

ثالثاً نمایش‌هندسی‌تابع $y = 2$ درفاصلهٔ باز $]1$ و $+\infty[$ که نیم خط باز Cv نمایش‌هندسی آن می‌باشد. نقطهٔ $C(1,2)$ جزء نمایش هندسی‌این تابع نیست.

۲ـ تابع بالا در تمام نقاط مگر نقطهٔ $x = 1$ پیوسته می‌باشد. این تابع درتمام نقاط به استثنای سه‌نقطهٔ $x = -1$ و $x = 0$ و $x = 1$ دارای مشتق است.

۳) اگر $F(x)$ تابع اولیهٔ $f(x)$ باشد داریم:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + c & : \quad x < -1 \\ \dfrac{-x^2}{2} + c_1 & : \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + c_1 & : \quad 0 < x < 1 \\ 2x + c_2 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

مقدار $F(-1)$ از یك طرف برابر است با:

$$1 - 3 + c$$

و از طرف دیگر برابر است با:

$$-\frac{1}{2} + c_1$$

پس $c_1 = c - \frac{3}{2}$ می‌باشد.

تابع $F(x)$ برای تمام نقاط وقتی پیوسته است که داشته باشیم:

$$F(1) = \frac{1}{2} + c_1 = 2 + c_2$$

$$c_2 = c_1 - \frac{3}{2} = c - 3$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + c & : \quad x < -1 \\ -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} + c & : \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} + c & : \quad 0 < x < 1 \\ 2x - 3 + c & : \quad x > 1 \end{cases}$$

۶۶/۱۵ـ نامعادلهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} > m\sqrt{x}$$

از سه راه جبری ، هندسی و مثلثاتی نامعادله را حل و بحث کنید .

حل ـ باید داشته باشیم :

$$x-1\geq 0 \text{ و } x+1\geq 0 \text{ و } x\geq 0 \Longrightarrow x\geq 1$$

راه جبری ـ اولا اگر $m<0$ باشد چون :

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$ همواره مثبت است پس نا معادله به‌ازاء همهٔ مقادیر $x\geq 1$ برقرار می‌باشد .

ثانیاً اگر $m>0$ باشد چون طرفین نامساوی مثبت می‌باشند می‌توانیم طرفین را مجذورکنیم بعد از اختصارنتیجه خواهد شد :

$$2\sqrt{x^2-1}>(m^2-2)x$$

ـ اگر $0<m<\sqrt{2}$ باشد طرف دوم منفی بوده و نامعادله درازاء همهٔ مقادیر $x>1$ برقرار است .

ـ اگر $m\geq\sqrt{2}$ باشد ، طرفین را مجدداً مجذورمی‌کنیم بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$m^2(m^2-4)x^2+4<0$$

در حالت $2>m\geq\sqrt{2}$ داریم $m^2(m^2-4)<0$ و جوابهای نامعادله مقادیرخارج ازریشه‌های معادلهٔ زیرمی‌باشند:

$$m^2(m^2-4)x^2+4=0$$

که چون $x>1$ است باید داشته باشیم :

$$x>\frac{2}{m\sqrt{4-m^2}}$$

در حالت $m\geq 2$ نا معادله جواب نخواهد داشت .

روش هندسی ـ از تقسیم طرفین نامعادله بر $\sqrt{x}$ نتیجه خواهد شد :

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}-m>0$$

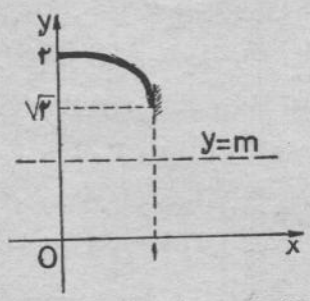
بافرض $t=\frac{1}{x}$ تابع زیررا درنظر می‌گیریم:

$$y=\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}$$

تابع وقتی معین است‌که $0<t<1$ باشد :

$$y'=\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}+\frac{1}{2\sqrt{1+t}}$$

در فاصله‌ای‌که تابع معین است مشتق آن منفی است و تابع نزولی است . دراین فاصله حداکثر مقدار تابع $y=2$ وحداقل آن $y=\sqrt{2}$ است.



برای اینکه نا ـ مساوی $y-m>0$ برقرار باشد از روی شکل ملاحظه می‌کنیم‌که اگر $m<\sqrt{2}$ باشدنامساوی‌همواره برقرار است .

اگر $\sqrt{2}<m<2$ باشد خط $y=m$ و منحنی دریك نقطه متقاطع‌اند و با محاسبهٔ طول این نقطه نتیجه خواهدشدکه

$$0<t<\frac{m\sqrt{4-m^2}}{2}$$

$$0<t<\frac{m\sqrt{4-m^2}}{2}\Longrightarrow x>\frac{2}{m\sqrt{4-m^2}}$$

اگر $m\geq 2$ باشد نامساوی ممکن نیست .

روش مثلثاتی ـ چون $0<x<1$ است فرض می‌کنیم $\frac{1}{x}=\cos 2\varphi$ که $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$ خواهد بود . با این فرض نامعادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$\sqrt{2}|\sin\varphi|+\sqrt{2}|\cos\varphi|-m>0$$

و چون $\sin\varphi>0$ و $\cos\varphi>0$ است پس داریم :

$$\sqrt{2}(\sin\varphi+\cos\varphi)>m$$

و خواهیم داشت :

$$\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})>\frac{m}{2}$$

اگر $m<\sqrt{2}$ باشد داریم :

$$\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})>\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

با توجه به حدود تغییرات φ نتیجه خواهد شدکه نامعادله همواره برقرار است .

اگر $\sqrt{2}<m<2$ باشد در این صورت‌کمان φ' وجود دارد بقسمی‌که :

$$\cos(\varphi'-\frac{\pi}{4})=\frac{m}{2}$$

$$\cos 2(\varphi' - \frac{\pi}{4}) = 2\cos^2(\varphi' - \frac{\pi}{4}) - 1 =$$

$$= \frac{m^2 - 2}{2} = \sin 2\varphi'$$

$$\cos 2\varphi' = \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi'} = \frac{m\sqrt{4 - m^2}}{2}$$

نامعادله وقتی برقرار است که :

$$\varphi' < \varphi < \frac{\pi}{4} \quad \text{یا} \quad 2\varphi' < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 2\varphi < \cos 2\varphi' \Longrightarrow x > \frac{2}{m\sqrt{4 - m^2}}$$

اگر $m \geq 2$ باشد نامساوی غیر ممکن خواهد بود .

۶۶/۱۶- نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} + \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} + \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}$$

حل - تابع به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$y = \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x+1|}{x+1}$$

- اگر $x < -1$ باشد داریم :

$$y = \frac{-x}{x} + \frac{-(x-1)}{x-1} + \frac{-(x+1)}{x+1}$$

$$y = -3$$

- اگر $-1 < x < 0$ باشد داریم :

$$y = \frac{-x}{x} + \frac{-(x-1)}{x-1} + \frac{x+1}{x+1}$$

$$y = -1$$

- اگر $0 < x < 1$ باشد داریم :

$$y = \frac{x}{x} + \frac{-(x-1)}{x-1} + \frac{x+1}{x+1}$$

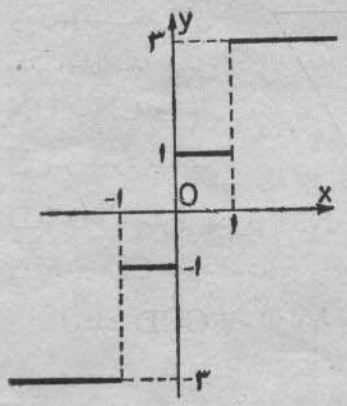
$$y = 1$$

- اگر $x \geq 1$ باشد خواهیم داشت :

$$y = \frac{x}{x} + \frac{x-1}{x-1} + \frac{x+1}{x+1}$$

$$y = 3$$

نمایش هندسی تابع به شکل مقابل است :



۶۶/۱۷- بزرگترین عدد صحیح موجود درعدد حقیقی x را با $E(x)$ نشان می‌دهیم .

۱) مکان نقاط $M(x,y)$ بافرض $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ازصفحهٔ محورهای مختصات متعامدرا رسم کنید که مختصات آنهادررابطهٔ زیرصدق کنند :

$$E(x) + E(y) + E(x)E(y) = 7$$

۲) مکان نقاط $P(x,y)$ بافرض $x \geq 0$ و $y \geq 0$ را رسم کنید که مختصات آنها دررابطهٔ زیرصدق کنند :

$$E(x+y) = 4$$

۳) مجموعهٔ S ازمقادیرمثبت x و y راکه دردستگاه زیر صدق می‌کنندپیدا کنید :

$$\begin{cases} E(x) + E(y) + E(x)E(y) = 7 \\ E(x+y) = 4 \end{cases}$$

حل - ۱) اگر $n \leq x < n+1$ باشدداریم $E(x) = n$ و رابطهٔ داده شده چنین می‌شود :

$$n + E(y) + nE(y) = 7$$

$$\Longrightarrow E(y) = \frac{7-n}{n+1} = \frac{8}{n+1} - 1$$

برای اینکه $E(y)$ عدد صحیح است باید $n+1$ مقسوم‌علیهی از ۸ باشدکه در نتیجه :

$$n = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 3 \text{ یا } 7$$

در این صورت اگر :

$$x \in [0 \text{ و } 1[\Longrightarrow E(y) = \frac{8}{0+1} - 1 = 7$$

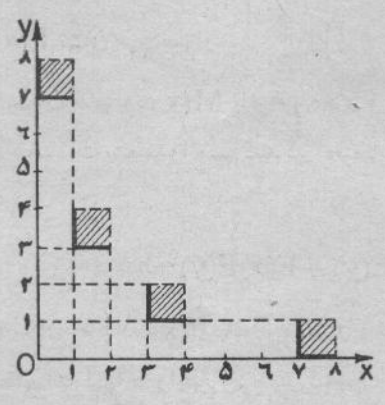
$$\Longrightarrow y \in [7 \text{ و } 8[$$

$$x \in [1 \text{ و } 2[\Longrightarrow y \in [3 \text{ و } 4[$$

$$x \in [3 \text{ و } 4[\Longrightarrow y \in [1 \text{ و } 2[$$

$$y \in [7 \text{ و } 8[\Longrightarrow y \in [0 \text{ و } 1[$$

مکان نقاط $M(x \text{ و } y)$ عبارت می‌شود از چهار مربع نیم‌بازکه در شکل نشان داده شده است . ضلعهای چپ و پائین هر مربع جزء مکان است اما دو ضلع بالا و راست آنها جزء مکان نمی‌باشند .

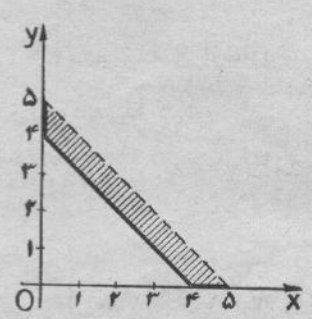


۲) از رابطهٔ :

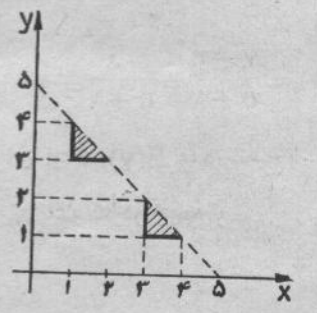
$E(x+y)=۴$ نتیجه می‌شودکه :

$۴<x+y<۵$

مکان نقاط $P(x و y)$ نوارنیم بازی‌ازصفحه می‌باشدکه در شکل نشان داده شده است . ضلع بلند نوار جزء مکان نیست .



۳) مجموعهٔ S عبارتست از فصل مشترك مکانهای‌نقاط M و P یعنی فصل مشترك نواحی‌که در دوشکل قبل مشخص شده است . این‌فصل مشترك مطابق با شکل مقابل است .



۶۶/۱۸ـ نمایش هندسی تابع زیررا رسم‌کنید:

$$y=۲(x-۱)+\frac{x(x^۲-۱)}{|x^۲-۱|}$$

حل ـ برحسب اینکه $x^۲-۱$ مثبت یا منفی باشددو حالت در نظر می‌گیریم :

اولا اگر $x^۲-۱>۰$ یعنی $x>۱$ یا $x<-۱$ باشدداریم

$$|x^۲-۱|=x^۲-۱$$

$$y=۲(x-۱)+\frac{x(x^۲-۱)}{x^۲-۱}$$

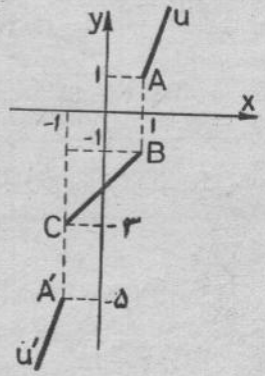
$$y=۳x-۲$$

ثانیاً اگر $-۱<x<۱$ باشد داریم :

$$|x^۲-۱|=-(x^۲-۱)$$

$$y=۲(x-۱)-\frac{x(x^۲-۱)}{x^۲-۱}$$

$$y=x-۲$$



نمایش هندسی عبارت می‌شود از قطعه‌خط BC ازخط به‌معادلهٔ $y=x-۲$ که در آن :

$-۱<x<۱$ است و از دو نیم خط Au و A′u′ از خط به معادلهٔ $y=۳x-۲$ با شرطهای $x>۱$ و $x<-۱$.

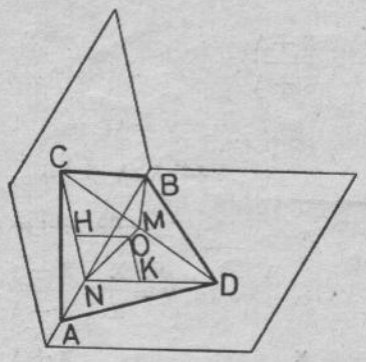
۶۶/۱۹ـ دومثلث متساوی‌الاضلاع ABC و ABD در ضلع $AB=a$ مشترك بوده و در دو صفحهٔ عمود برهم واقع‌اند .

۱)ـ ثابت‌کنید که اگر M وسط CD و N وسطAB باشد MN عمود مشترك دوخط AB وCD است‌وطول MN راحساب‌کنید.

۲)ـ ثابت کنیدکه O مرکز کرهٔ محیطی چهار وجهی ABCD روی MN قرار دارد وطول MO را حساب‌کنید .

۳)ـ اگرنقطهٔFبرپاره خط CD تغییرمکان دهد مکان G مرکزثقل مثلث ABF را پیداکنید .

حل ـ ۱) میانه‌های CN و DN ازدومثلث ABC و ABD بر AB عمودند در نتیجه AB بر صفحهٔ CND عمودبوده‌برخطMN ازاین صفحه نیزعمود است . ازطرف دیگر چون‌دومثلث‌مفروض متساوی‌اند پس $CN=DN$ ونقطهٔ N بر عمود منصف CD واقع است و چون NM منصف خط CD است پس MN بر CD عمود است.



مثلث CND قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین‌است‌وداریم:

$$CN=AC\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

$$CD = CN\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$MN = \frac{CD}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

۲) مکان نقاط متساوی‌الفاصلهٔ از سه نقطهٔ A و B و C خطی است که در H مرکزدایرهٔ محیطی مثلث ABC برصفحهٔ این مثلث عمود است . چون مثلث متساوی‌الاضلاع است پس H در دو ثلث CN ابتدا از C قرار دارد و خط مزبور در صفحهٔ CND واقع خواهد شد . همچنین مکان نقاط متساوی‌الفاصلهٔ از سه نقطهٔ D و B و A خطی است که در K بر صفحهٔ ABD عمود است و K در دو ثلث DN قرار داردکه این خط نیز در صفحهٔ CND واقع خواهد شد . دو خط مزبور که در یك صفحه‌اند در یك نقطهٔ O متقاطع می‌شوندکه O مرکزکرهٔ محیطی چهار وجهی ABCD خواهد بود . از تساوی $NH = NK$ نتیجه می‌شودکه چهارضلعی HNKO مربع است و O بر MN قرار خواهد داشت و داریم :

$$NH = NK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$NO = NH\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

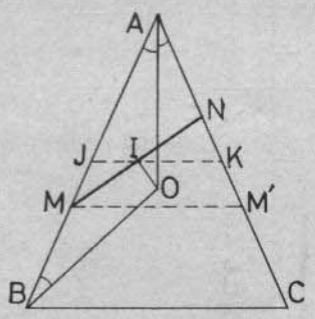
$$MO = MN - NO = \frac{a\sqrt{6}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

۳) در هرحال G در ثلث NF ابتدا از N واقع است و نتیجه می‌شود مکان G قطعه خطی است موازی با CD که به نقاط K و H محدود می‌باشد .

مسائل ترجمه از کتابهای چاپ فرانسه

۶۶/۲۰ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC که درآن $AB = AC$ است نقطهٔ M بر AB ونقطهٔ N بر AC چنان تغییرمی‌کندکه همواره $AM = CN$ می‌باشد . مکان I وسط MN را پیداکرده وثابت‌کنیدکه عمودمنصف MN همواره بر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد .

حل ـ از I و M موازی با BC رسم می‌کنیم که AC را در K و M' قطع‌می‌کنند . چون I وسط MN است



پس K وسط NM' می‌باشد . از طرف دیگر از تساویهای

$$AN = AC - CN = AB - AM = BM = CM'$$

نتیجه می‌شود که K وسط AC است . K نقطهٔ ثابتی است پس مکان I قطعه خطی است که از K وسط AC موازی با ضلع BC رسم می‌شود و در نقاط K و J به AC و AB محدود می‌گردد . در مثلث MNM' عمود منصفهای ضلعهای NM' و MM' همان عمود منصفهای ضلعهای AC و BC می‌باشند بنابراین O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC در عین‌حال مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MNM' نیز می‌باشد .

۶۶/۲۱ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیررارسم‌کنید :

$$y = \frac{3x - 3x^3}{\sqrt{4 - (3x - x^3)^2}}$$

حل ـ داریم :

$$4 - (3x - x^3)^2 = (2 - 3x + x^3)(2 + 3x - x^3)$$

$$2 - 3x + x^3 = 2 - 2x - x + x^3 = (1 - x)(2 - x - x^2) = (1 - x)^2(2 + x)$$

$$2 + 3x - x^3 = (1 + x)^2(2 - x)$$

$$4 - (3x - x^3)^2 = (1 - x^2)^2(4 - x^2)$$

$$y = \frac{3x(1 - x^2)}{|1 - x^2|\sqrt{4 - x^2}}$$

به غیر از مقادیر $x = \pm 1$ که در ازاءآنها تابع نامعین‌است، درازاء مقادیر $-2 < x < 2$ تابع معین می‌باشد .

اگر $-2 < x < -1$ یا $1 \leq x < 2$ باشد داریم :

$$|1 - x^2| = -(1 - x^2)$$

$$y = \frac{-3x}{\sqrt{4 - x^2}} \quad , \quad y' = \frac{-12}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

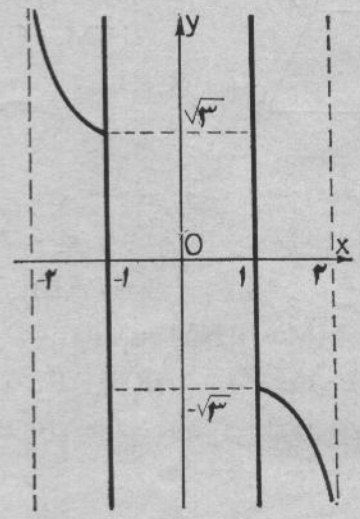
اگر $-1 \leq x \leq 1$ باشد داریم :

$$|1 - x^2| = 1 - x^2$$

$$y = \frac{3x}{\sqrt{4 - x^2}} \quad , \quad y' = \frac{12}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

جدول تغییرات و شکل منحنی چنین است :

x		−۲		−۱		۰		۱		۲	
y′	‖		−			+			−		‖
y	‖	$+\infty$		$\pm\sqrt{۳}$		۰		$\pm\sqrt{۳}$		$-\infty$	‖



درازاء $x=\pm ۱$ تابع نامعین و جمیع مقادیر را قبول می‌کند، یعنی دو خط به معادلات $x=۱$ و $x=-۱$ جزء نمایش هندسی تابع‌اند.

۶۶/۲۲ـ رشتهٔ چند جمله‌ایهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$P_۰=۱\ ،\ P_۱=x+۱\ ،\ P_۲=x^۲+x+۱$$

$$P_{n-۱}=x^{n-۱}+x^{n-۲}+\dots+x+۱$$

۱)ـ مجموع زیررا حساب کنید:

$$\Sigma_n(x)=P_۰+P_۱+P_۲+\dots+P_{n-۱}$$

۲)ـ عبارت زیررا درنظر می‌گیریم:

$$S_n(x)=۱+۲x+۳x^۲+\dots+nx^{n-۱}$$

تابع اولیهٔ این عبارت را تعیین کنید که به ازاء $x=۰$ برابر با صفر شود و از روی آن $S_n(x)$ و همچنین $\Sigma_n(x)$ را مجدداً حساب کنید.

حل ـ ۱) داریم:

$$P_۰=\frac{x-۱}{x-۱}\ ،\ P_۱=\frac{x^۲-۱}{x-۱}\ ،\ P_۲=\frac{x^۳-۱}{x-۱}$$

$$،\dots P_{n-۱}=\frac{x^n-۱}{x-۱}$$

$$\Sigma_n(x)=\frac{(x-۱)+(x^۲-۱)+\dots+(x^n-۱)}{x-۱}$$

$$=\frac{x+x^۲+\dots+x^n-n}{x-۱}$$

$$x+x^۲+\dots+x^n=\frac{x^{n+۱}-x}{x-۱}$$

$$\Sigma_n(x)=\frac{۱}{x-۱}\left(\frac{x^{n+۱}-x}{x-۱}-n\right)$$

$$=\frac{x^{n+۱}-(n+۱)x+n}{(x-۱)^۲}$$

۲) $F(x)$ تابع اولیهٔ تابع $S_n(x)$ عبارت می‌شود از:

$$F(x)=C+x+x^۲+\dots+x^n$$

$$F(۰)=۰ \Longrightarrow C=۰$$

$$F(x)=x+x^۲+\dots+x^n=\frac{x^{n+۱}-x}{x-۱}$$

$$S_n(x)=F'(x)=$$

$$=\frac{(x-۱)[(n+۱)x^n-۱]-(x^{n+۱}-x)}{(x-۱)^۲}$$

$$S_n(x)=\frac{nx^{n+۱}-(n+۱)x^n+۱}{(x-۱)^۲}$$

$$S_n(\frac{۱}{x})=۱+\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x^۲}+\dots+\frac{n}{x^{n-۱}}$$

$$=\frac{x^{n-۱}+۲x^{n-۲}+\dots+(n-۱)x+n}{x^{n-۱}}$$

$$S_n(\frac{۱}{x})=\frac{\Sigma_n(x)}{x^{n-۱}}$$

$$\Sigma_n(x)=x^{n-۱}S_n(\frac{۱}{x})$$

$$S_n(\frac{۱}{x})=\frac{\frac{n}{x^{n+۱}}-\frac{n+۱}{x^n}+۱}{\left(\frac{۱}{x}-۱\right)^۲}=$$

$$=\frac{n-(n+۱)x+x^{n+۱}}{x^{n-۱}(۱-x)^۲}$$

$$\Sigma_n(x)=\frac{x^{n+۱}-(n+۱)x+n}{(x-۱)^۲}$$

۶۶/۲۳ـ در دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر بحث کنید به فرض اینکه $a \neq K\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد .

$$\begin{cases} x + y\cos a + z\cos 2a = 0 \\ x\cos a + y\cos 2a + z\cos 3a = 0 \\ x\cos 2a + y\cos 3a + z\cos 4a = 0 \end{cases}$$

حل ـ از جمع نظیر به نظیر طرفین معادلات اول و سوم خواهیم داشت :

$$x(1 + \cos 2a) + y(\cos a + \cos 3a) + z(\cos 2a + \cos 4a) = 0$$

$$x\cos^2 a + y\cos a\cos 2a + z\cos a\cos 3a = 0$$

از تقسیم طرفین بر $\cos a$ که مخالف صفر است نتیجه می‌شود :

$$x\cos a + y\cos 2a + z\cos 3a = 0$$

این معادله همان معادلهٔ دوم دستگاه است و نتیجه می‌شود که معادلات دستگاه مستقل از یکدیگر نیستند .

چون هر معادلهٔ دستگاه از دو معادلهٔ دیگر نتیجه می‌شود پس دستگاه سه معادله معادل است با دستگاه دو معادله از معادلات مثلا معادلات اول ودوم . از حذف y و بعداً x بین دو معادلهٔ اول و دوم خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x(\cos^2 a - \cos 2a) + z(\cos a\cos 3a - \cos^2 2a) = 0 \\ y(\cos^2 a - \cos 2a) + z(\cos a\cos 2a - \cos 3a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sin^2 a - z\sin^2 a = 0 \\ y\sin^2 a + 2z\sin^2 a\cos a = 0 \end{cases}$$

اولا اگر $\sin a \neq 0$ یعنی $a \neq K\pi$ باشد داریم :

$$\begin{cases} x = z \\ y = -2z\cos a \end{cases}$$

مقدار z غیر مشخص می‌باشد .

ثانیاً اگر $\sin a = 0$ باشد درصورتی‌که $a = 2k\pi$ باشد سه معادلهٔ دستگاه به‌صورت :

$$x + y + z = 0$$

و درصورتی‌که $a = 2k\pi + \pi$ باشد سه معادله به‌صورت :

$$x - y + z = 0$$

تبدیل شده دستگاه مبهم می‌باشد .

۶۶/۲۴ـ بادرنظر گرفتن تابع $y = [f(x)]^2$ ثابت کنید که حاصل‌ضرب $f(x).f'(x)$ درعبور از هر مقدار x که ریشهٔ $f(x) = 0$ باشد ازمنفی به‌مثبت تغییرعلامت می‌دهد.

حل ـ فرض می‌کنیم $x = a$ یك ریشهٔ $f(x) = 0$ باشد . فاصلهٔ $[x_0 و x_1]$ را در نظر می‌گیریم بقسمی که شامل $x = a$ بوده و شامل ریشهٔ دیگری از $f(x) = 0$ نباشد . در این صورت مشتق تابع یعنی $y' = 2f(x)f'(x)$ در هر یك از فاصله‌های $]a$ و $x_0]$ و $[x_1 و a[$ در ازاء هیچ مقدار از x صفر نشده دارای علامت ثابت می‌باشد و در ازاء $x = a$ صفر می‌گردد . چون تابع $[f(x)]^2$ هیچگاه منفی‌نیست بنابراین در فاصلهٔ $]a$ و $x_0]$ نزولی و در فاصلهٔ $[x_1$ و $a[$ صعودی بوده مشتق‌آن در عبور از $x = a$ صفر شده از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد .

۶۶/۲۵ـ تابع زیررا درنظر می‌گیریم :

$$y = a(1 - \cos\frac{x}{a}) \quad ، \quad a \neq 0$$

و منحنی نمایش آنرا در ازاء مقادیر مختلف a به C_a نشان می‌دهیم .

۱) تبدیل هندسی را تعیین کنیدکه بوسیلهٔ آن می‌توان از روی‌منحنی C_1 هرمنحنی C_a رابدست‌آورد.

۲) با استفادهٔ ازتبدیل مزبور یامستقیماً ، مقدارمساحت سطح محصور بین منحنی C_a و محور Ox را در فاصلهٔ $[0$ و $2\pi]$ وهمچنین حجم حادث از دوران این سطح را حول Ox حساب کنید .

حل ـ ۱) داریم :

$$\frac{y}{a} = 1 - \cos\frac{x}{a}$$

منحنی C_a از روی منحنی C_1 به معادلهٔ :

$$y = 1 - \cos x$$

به این ترتیب بدست می‌آیدکه مختصات هر نقطهٔ ازآن را بر a تقسیم کنیم ، به عبارت دیگر منحنی C_a مجانس منحنی C_1 است در تجانسی‌که مرکز آن O و نسبت آن a می‌باشد .

۲) سطح محصور بین منحنی C_1 و Ox را در فاصلهٔ $(0$ و $2\pi)$ و حجم حادث از دوران این سطح را حول Ox حساب می‌کنیم :

معادلهٔ $1 - \cos x = 0$ در ازاء $x = 0$ و $x = 2\pi$ صفر

شده در ازاء سایر مقادیر فاصلهٔ (2π و 0) مثبت می‌باشد و داریم :

$$f(x) = 1 - \cos x \quad \text{و} \quad F(x) = x - \sin x + C$$

$$S_1 = [x - \sin x]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$g(x) = (1 - \cos x)^2 = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

$$g(x) = \frac{3}{2} - 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$G(x) = \frac{3}{2}x - 2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1$$

$$V_1 = [G(x)]_0^{2\pi} = 3\pi$$

$$S_a = S_1 \times a^2 = 2\pi a^2$$

$$V_a = V_1 \times a^2 = 3\pi a^2$$

۶۶/۲۶ـ کرهٔ Σ به مرکز O و به شعاع R و محور $x'Ox$ را که برمرکزآن می‌گذرد در نظر می‌گیریم . بر $x'x$ نقطه‌های I و I' به طولهای α و β را درنظر می‌گیریم که $\beta - \alpha = h > 0$ باشد. برنقاط I و I' و I'' وسط II' صفحاتی عمود بر $x'x$ می‌گذرانیم که کرهٔ Σ را به‌ترتیب در دایره‌های B و B' و B'' به شعاعهای r و r' و r'' قطع می‌کنند و حجمی ازکره را که بین صفحات B و B' محصور است با V نشان می‌دهیم مقدار V را برحسب r'' و h حساب کنید و حدود h را برحسب r'' و همچنین حدود R را برحسب h و r'' حساب کنید .

حل ـ اگر صفحه‌ای در نقطهٔ به طول x واقع بین α و β کره را قطع کند مساحت دایرهٔ مقطع حاصل برابر خواهد بود با :

$$f(x) = \pi(R^2 - x^2)$$

$$B = \pi(R^2 - \alpha^2) \quad ، \quad B' = \pi(R^2 - \beta^2)$$

$$B'' = \pi[R^2 - (\frac{\alpha + \beta}{2})^2]$$

$$V = \frac{\pi h}{6}[R^2 - \alpha^2 + 4R^2 - (\alpha + \beta)^2 + R^2 - \beta^2]$$

$$V = \frac{\pi h}{3}[3R^2 - (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)]$$

$$R^2 = r''^2 + (\frac{\alpha + \beta}{2})^2$$

$$V = \frac{\pi h}{3}[3r''^2 + \frac{3(\alpha + \beta)^2}{4} - (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)]$$

$$V = \pi fh = (r''^2 - \frac{h^2}{12})$$

شرط لازم و کافی برای اینکه حداقل یك کرهٔ با شرایط مذکور درمسئله وجود داشته باشد آنست که :

$$h \leq 2r''$$

باشد. اگر $h = 2r''$ باشد کره برصفحات B و B' مماس می‌باشد. واضح است که $R \geq r''$ می‌باشد . از طرف دیگر باید داشته باشیم :

$$OI' \leq R \quad \text{یا} \quad OI'' + \frac{h'}{2} \leq R$$

$$\sqrt{R^2 - r''^2} + \frac{h}{2} \leq R \quad \text{یا} \quad \sqrt{R^2 - r''^2} \leq R - \frac{h}{2}$$

از نامساویهای $h \leq 2r''$ و $R \geq r''$ نتیجه می‌شود $R \geq \frac{h}{2}$ و نامساوی بالا چنین می‌شود :

$$R^2 - r''^2 \leq (R - \frac{h}{2})^2$$

بعد از اختصار خواهد شد :

$$R \leq \frac{r''}{h^2} + \frac{h}{4}$$

$$r'' \leq R \leq \frac{r''^2}{h} + \frac{h}{4}$$

۶۶/۲۷ ـ به فرض اینکه x کمانی محصور بین $-\pi$ و $+\pi$ باشد هریك ازنامعادله‌های زیرراحل کنید :

$$\sqrt{1 + 2\cos x} > \cos x$$

$$\sqrt{1 + 2\cos x} > 2\sqrt{2}\cos x$$

حل ـ اولا برای اینکه هر یك از نامعادلات دارای معنی باشد باید داشته باشیم :

$$1 + 2\cos x \geq 0 \quad \text{یا} \quad \cos x \geq -\frac{1}{2}$$

ثانیاً اگر $\cos x \leq 0$ باشد چون طرف اول هر نامعادله مثبت است هر دو نامعادله برقرار خواهد بود . درصورتی که $\cos x > 0$ باشد می‌توانیم طرفین هر نامعادله را مجذور کنیم که نتیجه خواهد شد :

$$\cos^2 x - 2\cos x - 1 < 0$$

$$8\cos^2 x - 2\cos x - 1 < 0$$

از حل این نامعادلات و با توجه به آنچه قبلا ذکر شد نتیجه می‌شودکه جواب نامعادلهٔ اول‌عبارتست از :

$$-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

و جواب نامعادلهٔ دوم عبارتست از :

$$-\frac{1}{2} \leq \cos x < \frac{1}{2}$$

$$2k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x < 2k\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < x \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

۶۶/۲۸ـ درصفحهٔ مفروض P مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع a را درنظر می گیریم .

۱ـ مکان نقاط M ازفضا را پیداکنیدکه داشته باشیم:

$$MB^2 + MC^2 + 2MA^2 = 2a^2$$

۲ـ مکان نقاط M ازفضا را پیدا کنیدکه داشته باشیم :

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 2a^2$$

حل ـ اگر I وسط BC باشد در مثلث MBC داریم:

$$MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{a^2}{2} \qquad (1)$$

اگر O وسط AI باشد در مثلث MAI داریم :

$$MI^2 + MA^2 = 2MO^2 + \frac{AI^2}{2}$$

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$2MI^2 + 2MA^2 = 4MO^2 + \frac{3a^2}{4} \qquad (2)$$

از جمع طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$MB^2 + MC^2 + 2MA^2 = 4MO^2 + \frac{5a^2}{4}$$

بامقایسه با رابطهٔ مفروض خواهیم داشت :

$$4MO^2 + \frac{5a^2}{4} = 2a^2$$

$$OM^2 = \frac{3a^2}{16} \quad \text{و} \quad OM = \frac{a\sqrt{3}}{4} = OA$$

مکان M کره‌ای است به مرکز O و به شعاع OA

۲ـ رابطهٔ (۱)را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 2MI^2 - 2MA^2 + \frac{a^2}{2}$$

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ مفروض نتیجه خواهدشد :

$$MI^2 - MA^2 = \frac{3a^2}{4}$$

اگر H تصویر Mروی خط AIباشد در مثلث MAI داریم:

$$MI^2 - MA^2 = 2\,\overline{IA}.\overline{OH} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\overline{IA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \overline{OH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \overline{OA}$$

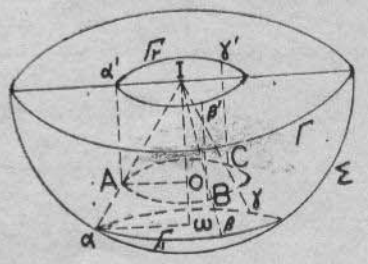
نقطهٔ H بر نقطهٔ A منطبق است و مکان M صفحه‌ای است که در نقطهٔ A بر خط AI عمود می‌باشد .

۶۶/۲۹ـ سه‌کرهٔ متساوی A و B و C دو به دو بریکدیگرمماس خارج وهرسه درنیمکرهٔ Σ به‌شعاع R که قاعدهٔ آن دایرهٔ Γ است محاطی‌باشند بقسمی‌که هریك‌ازآنهااز یك طرف برسطح‌کروی Σ و ازطرف دیگر بـر صفـحهٔ دایرهٔ Γ مماس است .

۱) شعاع کـره‌های متساوی مزبـور را برحسب R حساب‌کنید .

۲) اگر Γ_1 دایره‌ای باشدکه برنقاط تماس سه‌کرهٔ‌مزبور باکرهٔ Σ می گذرد و Γ_2 دایرهٔ ماربرنقاط تماس کره‌های مزبور با صفحهٔ دایرهٔ Γ باشد شعاع هریك از دو دایـرهٔ Γ_1 و Γ_2 را حساب‌کنید .

حل ـ اگر x اندازهٔ مشترك‌شعاع کره‌هاباشدصفحهٔ‌مراکز این کرها با صفحهٔ قاعدهٔ نیمکره موازی و به فاصلهٔ x ازآن واقع بوده‌و به علاوه مثلث ABC متساوی الاضلاع و به‌ضلع 2x می‌باشد . چنانچه O مـرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC



باشد O بر خطی واقع است کـه در I مرکز قاعدهٔ نیمکره بر صفحهٔ قاعده عمود می‌شود و داریم :

$$OA = OB = OC = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

اگر α و β و γ نقاط تماس کره‌ها با نیمکره باشد این نقاط به‌ترتیب بر IA و IB و IC واقع‌اند وچنانچه α' و β' و γ' نقاط تماس کره‌ها با قاعدهٔ نیمکره باشد داریم :

$$OA = \frac{2x\sqrt{3}}{3} \text{ و } OI = A\alpha' \text{ و } = x$$

$$IA = I\alpha - A\alpha = R - x$$

$$AI^2 = OI^2 + OA^2$$

$$(R-x)^2 = x^2 + \frac{4x^2}{3}$$

$$4x^2 + 6Rx - 3R^2 = 0$$

$$x = \frac{R}{4}(\sqrt{21} - 3)$$

۲)با فرض اینکه r_1 و r_2 به ترتیب شعاعهای دایره‌های Γ_1 و Γ_2 باشد داریم :

$$\frac{\omega\alpha}{OA} = \frac{I\alpha}{IA}$$

$$r_1 = \omega\alpha = \frac{OA.I\alpha}{IA} = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \times \frac{x}{R-x}$$

$$r_1 = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{21}-3}{7-\sqrt{21}} = \frac{2R\sqrt{7}}{7}$$

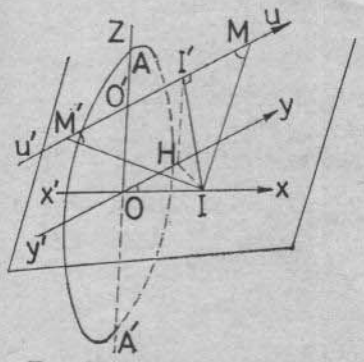
دایرهٔ Γ_2 بادایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر است پس :

$$r_2 = \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{R(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{2}$$

۶۶/۳۰- در صفحهٔ P دومحور $x'x$ و $y'y$ در O متقاطع بوده با یکدیگر زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازند. درOعمود Oz را برصفحهٔ P اخراج می‌کنیم و روی‌آن O' را به‌فاصلهٔ a از O انتخاب می‌کنیم و از O' محور $u'O'u$ راموازی و و همجهت با $y'y$ رسم می‌کنیم. کرهٔ متغیر S را درنظر می‌گیریم که مرکز آن روی $x'x$ واقع بوده و $u'u$ را دردونقطهٔ M و M' بقسمی قطع کند که شعاعهای مختوم به‌این نقاط با $u'u$ زاویهٔ ۴۵ درجه بسازند.

۱) اگر I نقطه‌ای از $x'x$ باشدکه $\overline{OI} = x$ مقدار R شعاع کرهٔ S به‌مرکز I را برحسب a و x حساب‌کنید و ثابت کنیدکه‌کرهٔ S با Oz در دونقطهٔ ثابت A و A' متقاطع است. نتیجه بگیریدکه‌کره‌های S بردایرهٔ ثابتی می‌گذرند وشعاع و مرکز این دایره را پیداکنید.

۲) ثابت‌کنید که حاصل ضرب $\overline{O'M}\,.\,\overline{O'M'}$ مقدار ثابتی‌است و مقادیر $\overline{O'M}$ و $\overline{O'M'}$ را برحسب x و R حساب‌کنید.



حل - اگر I' تصویر I روی $u'u$ و H تصویر I روی $y'y$ باشد $I'H$ بر $y'y$ و $u'u$ عمود است و داریم :

$$I'M' = I'M = I'I$$

$$R = IM = II'\sqrt{2}$$

$$IH = \frac{DI\sqrt{2}}{2} \text{ و } I'H = OO'$$

$$II'^2 = IH^2 + I'H^2 = \frac{OI^2}{2} + OO'^2$$

$$= \frac{x^2}{2} + a^2 = \frac{x^2 + 2a^2}{2}$$

$$R = II'\sqrt{2} = \sqrt{x^2 + 2a^2}$$

$$IA = IA' = R \Longrightarrow OA = OA' =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2a^2 - x^2} = a\sqrt{2}$$

بنابراین نقاط A و A' نقاط ثابت می‌باشند وکرهٔ S همواره بر دایرهٔ به قطر AA' می‌گذرد.

۲) قوت نقطهٔ O' نسبت به‌کرهٔ S برابر است با :

$$\overline{O'M}.\overline{O'M'} = OI^2 - R^2$$

$$O'I^2 = OO'^2 + OI^2 = a^2 + x^2$$

$$R^2 = x^2 + 2a^2$$

$$\overline{O'M}.\overline{O'M'} = a^2 + x^2 - (x^2 + 2a^2) = -a^2$$

چون I' وسط MM' است پس :

$$\overline{O'M} = \overline{O'I'} + \overline{I'M} \text{ و } \overline{O'M'} = \overline{O'I'} - \overline{I'M}$$

$$O'I' = OH = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$I'M = I'M' = IM\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{O'M} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+R) \text{ و } \overline{O'M'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-R)$$

مسائل برای حل

مسائل منتخب از مجلات و کتابهای خارجی

۶۷/۱- بزرگترین عددی را پیدا کنید که چون هریك ازعددهای ۱۱۶۶ و ۱۵۵۸ و ۲۲۴۴ را بر آن تقسیم کنیم باقیمانده‌های سه تقسیم بایکدیگر برابر باشند.

۶۷/۲- شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی ۴ است و دو قطعه‌ای که توسط این دایره روی یك ضلع مثلث جدا می‌شود به‌طولهای ۶ و ۸ می‌باشند. اندازه‌های ضلعهای مثلث را حساب کنید.

۶۷/۳- کوچکترین عددی را پیدا کنید که نصف آن توان دوم، ثلث آن توان سوم، خمس آن توان پنجم و سبع آن توان هفتم باشد. این کوچکترین عدد چند رقمی خواهد بود.

۶۷/۴- حاصل‌جمع n عددزیر را که‌دردستگاه‌به‌مبنای x نوشته شده‌است پیدا کنید:

$$S_n = (a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \dots + \underbrace{\overline{aa\dots a}}_{n\text{مرتبه}})x$$

۶۷/۵- اگر a و b و c اندازه‌های ضلعهای یك مثلث باشند وداشته باشیم:

$$a' = \frac{a}{1+a} \text{ ، } b' = \frac{b}{1+b} \text{ ، } c' = \frac{c}{1+c}$$

ثابت کنید که a' و b' و c' نیز اندازه‌های ضلعهای یك مثلث می‌باشند.

۶۷/۶- مثلث ABC قائمه درزاویهٔ A مفروض‌است. از A عمود AH را بر BC رسم می‌کنیم و از O وسط BC عمود OM را برضلع AB رسم‌می‌کنیم. اگر P نقطهٔ تلاقی AH و OM و I وسط PB و J وسط AO باشد ثابت‌کنید که چهارضلعی IHJM محاطی است ومرکزدایرهٔ محیطی‌آنرا تعیین کنید.

۶۷/۷- مربع‌مستطیل ABCD به‌ضلعهای $AB = 2a$ و $AD = 4a$ مفروض است. ضلع DC را از طرف C تا M امتداد می‌دهیم‌که C وسط DM باشد. خطوط AM و BC یکدیگررا در O قطع می‌کنند. اگر I وسط OC و H نقطهٔ تلاقی DI با BM باشد ثابت‌کنید که H بر دایرهٔ محیطی مستطیل مفروض واقع است و O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث BDH می‌باشد. شعاع این دایره را برحسب a حساب‌کنید.

۶۷/۸- دایرهٔ (O) به‌مرکز O وبه‌شعاع R مفروض است. نقطهٔ A را بر آن در نظر گرفته و مماس Ax را بر آن رسم‌می‌کنیم. برمماس Ax نقطهٔ C را به‌فاصلهٔ l از A انتخاب می‌کنیم.

۱- نقطهٔ B رابردایره چنان انتخاب‌کنیدکه مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد $(AB = BC)$. درازاء مقادیر مختلف l دروجود وتعداد جوابها بحث‌کنید.

۲- مقدار l رابرحسب R حساب‌کنید برای‌آنکه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع یااینکه درزاویهٔ B قائمه ومتساوی‌الساقین باشد.

۳- اگر M مرکزدایرهٔ محیطی مثلث ABC باشدنوع چهارضلعی AOBM را تعیین‌کنید.

۶۷/۹- مثلث متساوی‌الساقین ABC که درزاویهٔ A قائمه‌است مفروض‌است. نقطهٔ متغیر M را برضلع BC درنظر می‌گیریم و عمودهای MP و MQ را به ترتیب برضلعهای

AB و AC رسم می‌کنیم . ثابت‌کنیدکه عمود منصف PQ و همچنین عمودی که از M بر PQ رسم شود هریك برنقطهٔ ثابتی می‌گذرند .

۶۷/۱۰ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض‌است. برضلع AB نقطهٔ D را چنان تعیین‌کنیدکه اگر در Dعمودی بر AB اخراج‌کنیم تا BC را در E قطع‌کند ودرE عمودی بر BC اخراج‌کنیم تا AC را درF تلاقی‌کند، FD برAC عمود باشد .

۶۷/۱۱ـ مقادیر a و b را چنان تعیین‌کنیدکه دو معادلهٔ زیردارای ریشه‌های مشترك باشند :

$$(a+b)x^2-(a+4)x+2b=0$$
$$(a+b)^2x^2+(b-5)x+5b=0$$

۶۷/۱۲ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم زیرمفروض است :

$$(1+a)x^2+2bx+1-a=0$$

درحالتی‌که این معادله دارای دوریشهٔ حقیقی x' و x'' باشد اولا معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش عبارت باشند از :

$$y'=\frac{x'+1}{x'-1} \text{ و } y''=\frac{x'+1}{x''-1}$$

ثانیاً درصفحهٔ محورهای $a'a$ و$b'b$ مکان‌نقطهٔ$M(a,b)$ را تعیین‌کنید برای‌آنکه داشته باشیم:

$$\frac{x'}{x'-1}+\frac{x''}{x''-1}=\frac{y'}{y'-1}+\frac{y''}{y''-1}$$

۶۷/۱۳ـ به‌ازاء مقادیرمختلف عدد صحیح طبیعی n باقیماندهٔ تقسیم $A=n^2-n+1$ را بر ۷ تعیین‌کنید و معلوم‌کنید به‌ازاء چه مقادیر n عدد A بر ۷ بخش‌پذیر است.

۶۷/۱۴ـ دستگاه زیررا حل وبحث‌کنید :

$$\begin{cases} x^2+y=mxy \\ x+y^2=mxy \end{cases}$$

۶۷/۱۵ـ در چهار وجهی غیرمشخص SABC نقطهٔ O را داخل مثلث ABC درنظرمی‌گیریم و ازآن خطوطی موازی با SA و SB و SC رسم می‌کنیم‌که به‌ترتیب وجوه SBC و SCA و SAB را درA' وB' وC' قطع می‌کند . ثابت‌کنیدکه :

$$\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=1$$

۶۷/۱۶ـ نقطهٔ M برضلع BC ازمثلث ABC تغییر مکان می‌دهد. دو دایره‌که بر M می‌گذرند واولی در B بر AB و دومی در C بر AC مماس است یکدیگررا درنقطهٔ دیگر P قطع می‌کنند . مکان نقطهٔ P را تعیین‌کنید و ثابت‌کنید که PM برنقطهٔ ثابتی‌که آنرا تعیین خواهیدکرد می‌گذرد .

۶۷/۱۷ـ نقطهٔ M برسهمی به‌کانون معین F وبه‌خط هادی معلوم D تغییرمی‌دهد. مماس و قائم برسهمی درنقطهٔ M محور سهمی را به‌ترتیب در T و N قطع می‌کنند . اگر H و K به‌ترتیب تصاویر F بر MT و MN وM_1تصویر M برخط HK باشد، اولا ثابت‌کنیدکه HK با محورسهمی موازی است ثانیاً مکان نقطهٔ M_1 و همچنین مکان نقطهٔ K را تعیین‌کنید .

۶۷/۱۸ـ مثلث ABC که درآن $AC>AB$ است مفروض است. ثابت‌کنیدکه اگر میانهٔ AM با نیمساز خارجی AD' برابر باشد داریم :

$$a=(b-c)\sqrt{2}$$
$$tg\frac{B}{2}=(\sqrt{2}+1)^2\,tg\frac{C}{2}$$

۶۷/۱۹ـ محورهای متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ و مثلث متساوی‌الساقین OAB به محیط ثابت $2p$ را درنظرمی‌گیریم که $OA=AB$ بوده و B بر Ox تغییرمکان می‌دهد وA در زاویهٔ xOy واقع است .

۱ـ مکان A ومعادلهٔ آنرا تعیین‌کنید.

۲ـ اگر M تصویرA روی نیمساز زاویهٔ AOB باشد مکان M را مشخص‌کنید .

۳ـ اگرM' تصویرA روی نیمساززاویهٔ AOx' باشد مکان M' چه می‌باشد ؟

۶۷/۲۰ـ دونقطهٔ ثابت I وI' به فاصلهٔ معلوم $2R$ از یکدیگرمفروض است. مثلث متغیر ABC را درنظر می‌گیریم که I مرکزدایرهٔ محاطی داخلی، I' مرکزدایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A ازآن بوده و O مرکز دایرهٔ محیطی آن بر دایرهٔ ω به‌قطرII' واقع باشد .

۱ـ ثابت‌کنید که زاویهٔ A، ضلع BC و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث اندازه‌های ثابت دارند و این اندازه‌ها را تعیین‌کنید .

۲ـ مکان هریك ازنقاط O و A و B و C را مشخص کنید .

۳ـ ثابت‌کنیدکه بین r و r′ شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی وخارجی داخل زاویهٔ A ازمثلث و R رابطهٔ ساده‌ای وجود دارد . مقادیر ماکسیمم r و r′ را بدست‌آورید .

۴ـ مثلث ABC باشرایط مزبوررا بامعلوم بودن:

$$AB + AC = l\sqrt{3}$$

رسم وبرحسب مقادیر l بحث‌کنید .

۶۷/۲۱ـ زاویهٔ ثابت xOy ودایرهٔ ثابت C واقع در یك صفحه مفروض است . دایرهٔ متغیر Γ همواره بر Ox و Oy مماس می‌باشد. اگر P و N به‌ترتیب مراکز تجانسهای مستقیم و معکوس دایره‌های C و Γ باشد مکان نقاط P و N را مشخص کنید .

۶۷/۲۲ـ مجموع زیررا درنظر می‌گیریم :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

که درآن هریك ازجمله‌های u_1 و u_2 و... و u_n تابعی ازعدد صحیح طبیعی n می‌باشند .

۱ـ اگر داشته باشیم :

$$S_n = n\left(\frac{n^2}{3} - an + b\right)$$

جملهٔ u_n را برحسب n و a و b مشخص‌کنید.

۲ـ مقادیر a و b را چنان تعیین‌کنیدکه S_n به ترتیب برابر باشد با :

$$S = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$

$$S' = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n+1)$$

واین‌دومجموع را برحسب nتعیین‌کنید .

۶۷/۲۳ـ دونیم‌خط متنافر Ax و By متعامد بوده و هردو بر AB عمود می‌باشند . نقطهٔ M بر Ax و نقطهٔ N بر By چنان تغییر مکان می‌دهندکه :

$$AM \cdot BN = \frac{AB^2}{2}$$

می‌باشد .

۱ـ ثابت‌کنیدکه : $MN = AM + BN$

۲ـ اگر H تصویر O وسط AB روی MN باشد ثابت‌کنیدکه :

$$MH = MA \quad \text{و} \quad NH = NB$$

$$OH = OA = OB$$

۳ـ نیم‌خط Bx′ را موازی وهم‌جهت با Ax رسم‌می‌کنیم. اگر H′ تصویر H روی صفحهٔ yBx′ باشدثابت‌کنیدکه BH′ نیمساززاویهٔ yBx′ است و از آنرو مکان نقطهٔ H را نتیجه بگیرید.

۶۷/۲۴ـ کرهٔ Σ و روی آن دایرهٔ C ونقطهٔ S غیر واقع بردایرهٔ C وغیرواقع برمحور این دایره مفروض است . نقطهٔ K تصریر S برصفحهٔ دایرهٔ C است ودراین صفحه خطی متغیر حول نقطهٔ K می‌چرخد و دایرهٔ C را در M و N قطع می‌کند .

ثابت‌کنیدکه H مرکزارتفاعی مثلث SMN ثابت است وازآن نتیجه بگیریدکه سطح مخروطی به‌رأس H و به دایرهٔ هادی C کرهٔ Σ را دردایرهٔ دیگر Γ قطع می‌کند .

۶۷/۲۵ـ روی مخروط دوار Σ به‌شعاع قاعدهٔ R و به‌ارتفاع $SO = 2R\sqrt{2}$ دومولد SA و SB واقع در یك صفحهٔ نصف‌النهاری وروی SB نقطهٔ P رابه‌فاصلهٔ $SP = x$ از S درنظر می‌گیریم :

۱ـ اگر L مسیری باشدکه روی سطح مخروطی از A به P رسم شده‌باشدکوتاهترین طول این مسیررا برحسب R و x تعیین‌کنید .

۲ـ وضع P_0 از P را تعیین‌کنیدکه درآن مسیر L به‌نوبهٔ خودکمترین مقداررا داشته باشد. این وضع از L را L_0 می‌نامیم .

۳ـ M نقطه‌ای از L_0 است وm تصویرآن روی‌صفحهٔ قاعدهٔ Σ می‌باشد . طول Om را برحسب R و زاویهٔ $BOm = \varphi$ حساب کنید . وضع M_1 از M را تعیین‌کنیدکه مسیر AM_1 طولی برابر با $\frac{2}{3}$ طول مسیر AP_0 داشته‌باشد.

داستانهای ریاضی

نوشتهٔ : ریند (Rhind)

ترجمه و تنظیم از: داود بدریحان

عجب خانواده‌هایی !

پروفسور مارشال تازه از منزلش خارج شده بود که با دوتن از همکارانش آقایان لولیور و لووازو برخورد کرد . اینان همراه پسران ارشد خود از کتابفروشی می‌آمدند و هر کدام از چهار نفر ایشان کتابهایی خریده بودند .

آقای لولیور پس ازسلام‌واحوال پرسی‌معمول ، گوشزد می‌کندکه‌آنچه خریده‌اند معرف عدهٔ افراد خانواده‌های ایشان است . آقای مارشال موضوع را جالب می‌یابد و توضیح بیشتر می‌خواهد .

آقای لولیور اظهار می‌داردکه :

ـ بسیار ساده است ؛ هرکدام از ما برای کتابهایی که خریده‌است‌آنقدر پول‌پرداخته که عدد فرانکهای پرداختی وی با تعداد کتابهایی که خریده است برابر می‌باشد . هر پدر و پسر رویهم ۶۵ فرانك‌خرج‌کرده است . من ، خودم، کتابهایی بیشتر از هر یك از این جوانها ، توماس و دیدیه خریده‌ام . آن یکی ازاین‌جوانها ، تنها یك‌کتاب خریده است . هر شخص که کمی منطق بداند خیلی ساده خواهد فهمید که دیدیه پسر کیست .

ـ بدون شك ، شکی نیست ...

***

بعد از این گفتگو ، تنها آقایان لولیور و مارشال وارد منزل‌مارشال‌شدند. دردفتر کارمارشال نشستندوبه گفتگووتشریح افکار یکدیگرمشغول شدند . در این بین ،سروصدا هایی‌مزاحم بحث آنان شد . این سروصداها را بچه‌هایی راه انداخته بودند که در باغ مجاور به بازی مشغول بودند .

لولیور از مارشال می‌پرسدکه‌آیا بچه‌های‌وی‌می‌باشند؟

مارشال جواب می‌دهد :

ـ در بین آنان ، صدای بچه‌های خود را تشخیص می‌دهم ،صدای‌فرزندان‌همسایه‌های مجاور را نیز بازمی‌شناسم. در جمع آنان ، اکثریت بافرزندان من است . نام خانوادگی دیگران عبارتست از : لامیرال ، کاپیتن ، سرژان . در ضمن این را هم از شما مخفی نمی‌کنم که عدهٔ دامیرالها بیشتر از کاپیتنها وعدهٔ کاپیتنها بیشتر از سرژانها است .

ـ کلا تعداد فرزندان چقدر است ؟

ـ کمتر از ۱۸ نفر ، و عجیب اینکه حاصل ضرب عدهٔ بچه‌های خودم در عدهٔ بچه‌های لامیرال و غیره . . . برابر با شمارهٔ منزل من است . شما این شماره را قبلا دیده‌اید و از روی‌آن می‌توانید تعداد بچه‌های هرخانواده‌را بدانید .

آقای لولیور چیزهایی را روی کاغذ می‌نویسد و می‌پرسد :

ـ یك اطلاع دیگر لازم دارم ؛ «آیا سرژانها بیشتر از یك بچه دارند ؟»

مارشال در این باره اطلاع لازم را در اختیار لولیور می‌گذارد ووی پاسخ مسئله را بدست‌می‌آورد .

هرچندکه لولیورشمارهٔ منزل مارشال را می‌دانست ودر ضمن بروی معلوم شدکه سرژان یك فرزند دارد یا بیشتر ، اما خوانندهٔ عزیز بدون دانستن این دو عدد می‌تواند عدهٔ فرزندان هر خانواده را معلوم‌کند .

*

درمورد مسئلهٔ اول، تعدادکتابهای خریداری شده‌توسط هرپدر را با x نشان می‌دهیم . بهای هرکدام از این‌کتابها x

خواهد بود . تعدادکتابهای خریداری شدهٔ توسط هر پسر را با y نشان می‌دهیم‌که بهای هر یك از این‌کتابها y می‌باشد . بنابراین داریم :

$$x^۲ + y^۲ = ۶۵$$

چون x و y عددهای صحیح ومثبت می‌باشد پس رویهم چهار جفت جواب خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix} x = ۸ \\ y = ۱ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} x = ۷ \\ y = ۴ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} x = ۴ \\ y = ۷ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} x = ۱ \\ y = ۸ \end{vmatrix}$$

دیدیه تنها یك‌کتاب خریده است پس پدرش مشخص است که ۸ کتاب خریده است . می‌دانیم‌که لولیور بیش از توماس کتاب خریده است پس تعدادکتابهای خریداری شدهٔ توسط لولیور ۸ است و دیدیه فرزند لولیور می‌باشد .

*

در مورد مسئلهٔ دوم فرض می‌کنیم‌که m و l و c و s تعدادفرزندان هرخانواده و $m > l > c > s$ باشد.می‌دانیم‌که

$$m + l + c + s < ۱۸$$

همچنین می‌دانیم‌که حاصل‌ضرب mlcs برابر با شمارهٔ منزل مارشال است‌که آنرابا n نشان می‌دهیم. ترکیبات‌مختلف اعدادی راکه مجموع آنها از ۱۸کمتر است در نظرمی‌گیریم و حاصل‌ضرب آنها را تعیین می‌کنیم .

لولیور شمارهٔ منزل مارشال را می‌دانست وچون وی اطلاعی بیشتر خواسته معلوم می‌شودکه شمارهٔ مزبور بیش از یك بار درستون n وجود دارد . درستون n هریك ازعددهای ۱۲۰ و ۶۰ سه دفعه و هریك از عددهای ۴۸،۷۲،۸۰،۸۴، ۹۰و۹۶ دوبار مشاهده می‌شود . در تمام ترکیبات مربوط به این اعداد به‌استثنای یکی از آنها عامل یك وجود دارد .اگر

m	l	c	s	n
۴	۳	۲	۱	۲۴
۵	۳	۲	۱	۳۰
۱۱	۳	۲	۱	۶۶
۵	۴	۲	۱	۴۰
۱۰	۴	۲	۱	۸۰
۶	۵	۲	۱	۶۰
۹	۵	۲	۱	۹۰
۷	۶	۲	۱	۸۴
۸	۶	۲	۱	۹۶
۵	۴	۳	۱	۶۰
۹	۴	۳	۱	۱۰۸
۶	۴	۳	۲	۱۴۴
۶	۵	۳	۲	۲۴۰

در پاسخ پرسش لولیور ، آقای مارشال گفته باشدکه «سرژان فقط یك بچه دارد» در این صورت جواب مسئله برای لولیورو همچنین برای ما نامعین می‌باشد . جواب قاطع وقتی معلوم می‌شودکه‌سرژان بیش ازیك‌فرزند داشته باشد . از بین‌مقادیری که درستون n تکرار می‌شوند تنها $n = ۱۲۰$ است‌که دریك ترکیب آن عامل $s = ۲$ وجود دارد . بنابراین جواب مسئله عبارتست از :

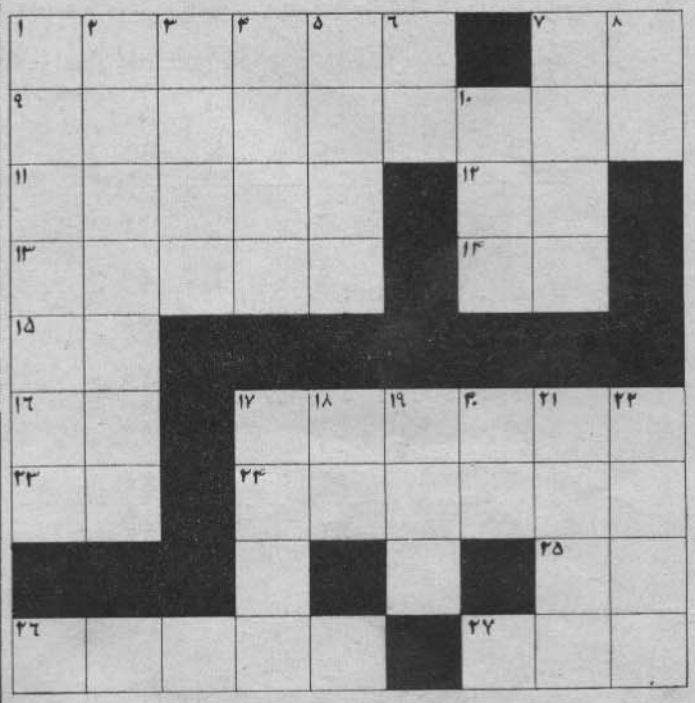
شمارهٔ منزل مارشال :	$n = ۱۲۰$
تعداد فرزندان سرژان :	$s = ۲$
« « کاپیتن :	$c = ۳$
« « لاسیرال :	$l = ۴$
« « مارشال :	$m = ۵$

دانش آموز ممتاز

ابوالقاسم احمدی
رتبهٔ اول
کلاس چهارم‌طبیعی
دبیرستان انوری
بهشهر

جدول اعداد

طرح از :محمداسحق لهراسبی



افقی : ۱- بر مجذور عدد به شکل $\overline{a(2a)}$ قابل‌قسمت است و خارج قسمت تقسیم کوچکترین عددی است که برهریك از اعداد از یك تا ۲۰ بخش پذیر می‌باشد . ۷- عددی است زوج و رقمهای آن ازبین اعداد به مجموع ۱۵ دارای حاصل ضرب ماکسیمم می‌باشند . ۹- لگاریتم آن در مبنای ۸ برابر است با $\frac{4}{\log 2}$. ۱۱- کوچکترین عدد پنج رقمی با ارقام فرد.

۱۲- جواب معادلهٔ زیر :

$$2^{1+\log_2 x}=72$$

۱۳- کوچکترین عدد با رقمهای متوالی که مجموع آنها ۲۵ است . ۱۴- خودش مکعب است و مجموع رقمهایش مربع . ۱۵- همان عدد ۱۲ افقی . ۱۶- تفاضل این عدد از مقلوبش برابر است با عدد ۱۵ افقی و درضمن یك رقمش سه برابررقم دیگر است . ۱۷- چون‌هفت واحد از رقم دهگان آن‌کم‌کنیم عددی فرد به‌صورت $\overline{aaabbb}$ باخاصیت $a=3b$ حاصل‌شود.

۲۳- چون آنرا در رقم یکان خود ضرب کنیم عدد حاصل مجذور سه‌برابر رقم یکان‌سزبور می‌باشد . ۲۴- کوچکترین‌عدد شش رقمی‌که چون‌آخرین رقم سمت‌چپ آنرا در سمت راستش قرار دهیم عددحاصل سه‌برابر عدد اول باشد . ۲۵- مجموع عددهای ۱۶و۲۳ افقی . ۲۶ - مجموع رقمهایش ۲۴ است و یك‌هشتم آن‌به‌صورت $\overline{a00a}$ می‌باشد. ۲۷- حاصل‌جمع زیر:

$$S=1+2+2+10+4+18+8+\dots+216+66$$

قائم : ۱- عددی است به‌صورت :

$$\overline{abbcc(b+1)(a+1)}$$

که درآن $a=3b$ است . ۲- فضل آن برعدد ۱ قائم برابر است با ۳.۲۹۲۱۳۴۱ -خمس آن به‌صورت $\overline{abb}$ است که $a=4b$ می‌باشد. ۴- اگررقم سدگان آنراکه‌صفر است حذف کنیم عددحاصل ۷۲۰۰ واحدکمتراز عدد ول گردد . ۵- ۲۱ واحد بیشترازعدد ۴ قائم . ۶- بی‌معنی است . ۷- اگرعدد۴ قائم‌به‌صورت $\overline{abcd}$ فرض شود این عدد به‌صورت $\overline{cbdc}$ خواهد بود . ۸- خمس‌آن توان چهارم است . ۱۰-دو خمس ازعدد ۸ قائم . ۱۷- اگر سه واحد ازرقم یکان آن کم کنیم عددبه‌صورت $\overline{abab}$ بدست‌آیدکه درآن $a=3b$ است . ۱۸- دو برابر مقلوب عدد ۲۵ افقی . ۱۹- مجذور نصف عدد ۱۲ افقی . ۲۰-جذرعدد ۱۹ قائم. ۲۱- چون ۵ واحد بررقم‌یکان آن بیفزائیم و همین مقدار ازرقم سدگان آن‌کم‌کنیم عدد ۴ قائم بدست آید . ۲۲- تکرار مقلوب عدد ۲۵ افقی .

۱	●	۳	۳	۵	۵	۴	۴	۳	۲	●	●	۱	۲	۵
۰	●	۲	●	●	۴	●	●	۱	●	۱	۱	●	۲	۳
۰	●	۳	●	●	۸	۱	●	۴	۴	۸	۴	۴	●	۵
●	●	۲	۴	●	۲	۱	●	●	●	●	●	●	●	●
۱	۳	●	●	●	۳	●	●	۵	۴	۴	۸	۴	۴	۵
۵	۳	۲	۱	۹	۶	۳	۲	۳	۰	●	●	۲	۱	۶
۲	۳	۴	۲	۸	۹	۰	۴	۱	۰	●	●	۷	۶	۵
۲	۱	۰	۳	●	۱	۳	۵	۷	۰	۱	۳	۵	۷	●
۴	۸	۴	۴	●	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳	۶	۹	●
۰	۱	۲	۵	●	۹	۳	۷	۷	۰	●	●	●	۱	●
●	●	●	۶	●	۴	●	●	۹	۰	●	۱	۲	۳	●
۱	۱	●	۷	●	۸	۰	●	۱	۰	●	۲	۴	۶	●
۳	۶	●	۸	●	۱	۰	●	●	●	●	●	●	۳	●
●	●	●	۹	●	۲	●	●	۳	۳	۳	۱	۸	۱	●
۳	۴	۳	۱	۸	۴	۳	۷	۲	۰	۸	۸	۸	۳	۲

حل جدول شمارهٔ قبل

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 66 – Find the sum of n terms of the following series :

$7+77+777+\ldots$

Solution– Let $S_n = 7+77+777+\ldots$

$$S_n = \frac{7}{9}(9+99+999+\ldots)$$

$$= \frac{7}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ldots]$$

$$= \frac{7}{9}(10+10^2+10^3+\ \ldots\ ) + \frac{7}{9}(-n)$$

$$= \frac{7}{9}\ [\ \frac{10}{9}(10^n-1)] + \frac{7}{9}(-n)$$

Therefore:

$$S_n = \frac{7}{9}\ [\ \frac{10}{9}(10^n-1)-n]$$

Problem67 – Is it possible for the length of one side of a triangle to be twice the length of another side of the triangle, if the sum of the lengths of two altitudes of the triangle is equal to the length of the third altitude of the triangle ?

Solution– Given $\triangle ABC$ with $a=2b$, and h_a , h_b and h_c the altitudes to named sides. There are three cases to be considered :

Case I : $h_a+h_b=h_c$

Case II : $h_a+h_c=h_b$

Case III : $h_b+h_c=h_a$

From the triangle :

$h_a = c.\sin B = b.\sin C$

$h_b = c.\sin A = a.\sin C$

$h_c = b.\sin A = a.\sin B$

From these equations :

$ah_a = bh_b = ch_c$

Substituting $a=2b$:

$2bh_a = bh_b = ch_c$

Case I :

$$h_a+h_b = \frac{ch_c}{2b}+\frac{ch_c}{b} = \frac{3ch_c}{2b}$$

Assume,

$$\frac{3ch_c}{2b} = h_c$$

Then, $c=\frac{2}{3}b$. This is impossible, since in any triangle the sum of the lengths of any two sides of the triangle is greater than the length of the third side. In this case, $b+c=\frac{5}{3}b$ which is less than $2b=a$

Case II :

$$h_a+h_c = \frac{bh_b}{2b}+\frac{bh_b}{c} = \frac{ch_b+2bh_b}{2c}$$

Solving, as in Case I , $a=c$

Case III :

$$h_b+h_c = \frac{2bh_a}{b}+\frac{2bh_a}{c} = \frac{2ch_a+2bh_a}{c}$$

Solving, as in case I and II , $2b=-c$

But this requires that either : $b=c=o$ in which case the triangle does not exist; or b or c is negative, which is an impos – sible condition of length of a side of a triangle .

Therefore , the requirements of the problem are satisfied if and only if $a=2b=c$

فهرست مندرجات مجله‌های یکان دورهٔ ششم

سرمقاله‌ها

کنفرانسهای ریاضی

مباحث آموزشی

تحقیقات تاریخی

در بارهٔ کلیات و روشهای ریاضی

بررسی و نقدکتاب

دانستنیها از ریاضی جدید

مقاله‌های گوناگون

در حاشیهٔ برنامهٔ ریاضیات متوسطه

مقدمات آمار

مقالات علوم تجربی

چگونگی حل سادهٔ مسائل ریاضی

راهنمای حل مسائل ترسیمی هندسه

روش حل مسائل مکان، پوش و ترسیمات هندسی

از میان نامه‌های رسیده

کتابخانهٔ یکان

جدول اعداد

داستانهای ریاضی

مسائل

صد مسئلهٔ جالب وحل آنها

مسائل تاریخی ومشهور

مسائل گوناگون

نمونه‌ای از مسائل امتحانات و مسابقات کشورهای خارج

مسائل انتخابی ازمسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

مسائل برای حل

حل مسائل

مندرجات یکان سال ۴۸

مندرجات ضمیمهٔ یکان سال ۴۸

برای دانش‌آموزان کلاس سوم

دانش‌آموز ممتاز

به‌قرار اطلاع آقای **منصور خدامی** دانش‌آموزممتاز سال پنجم ریاضی دبیرستان ملی‌عماد کرمان که‌در اشاعهٔ مجلهٔ یکان دردبیرستان‌مزبور همکاری‌فعال وصمیمانه‌داشت، در اردوی دانش‌آموزان ممتازرشتهٔ ریاضی سراسر کشور موفق شده است که امتیازات درخشان بدست‌بیاورد وبه پاداش آن یك بورس گردش علمی در کشورهای‌سوئیس و فرانسه به وی اعطاء شده‌است. نامبرده همچنین در امتحان ورودی دبیرستان وابسته به‌دانشگاه پهلوی شیراز پذیرفته شده است .

برای آقای منصور خدامی توفیقات بیشتر را آرزومندیم

نقد کتاب

مبادی منطق و ریاضی جدید

تألیف غلامرضا عسجدی

۴۶۴ صفحه ، از انتشارات یکان ـ ۲۴۰ ریال

این کتاب بامقدماتی از منطق شروع می‌شود و به سوی سازمان بندیهای (Structure) جبری می‌رود که فقط شامل گروه (Groupe) ، حلقه (Anneau) ، هیئت (Corps)، فضای برداری (Espace Vectoriels) و غیره است . مناسبتر بود که آنرا «مبادی منطق و جبر نو» بخوانیم ، چون موضوع اتصال (Continuité) و توپولوژی (Topologie) و مطالب مربوطه در آن نیست . ولی باید گفت که جناب آقای عسجدی کتابی بسیار بجا برای ایرانیان و پارسی زبانان فراهم کرده‌است. از زحمات ایشان نه‌تنها به‌تعارف باید قدردانی کرد بلکه هر دبیر و استاد ریاضی باید کتاب را اقلا یك‌بار با تعمق بخواند. این کتاب بانظم و ترتیب نو تهیه شده و مطالب آن کاملا روشن و خوانا نوشته شده‌است .

اصطلاحات ریاضی در تمام زبانها خواننده را دچار اشکال می‌کند؛ محققین موضوع تازه‌ای پیدا می‌کنند و آنرا به نامی می‌خوانند. وقتی این موضوع به‌زبان تازه‌ای ترجمه می‌شود هر مترجم آن کلمهٔ بخصوص را به‌میل خود اسم تازه‌ای می‌دهد . تنها زبان فارسی نیست که دچار این دردسر است . بنابراین باید گفت که کتاب آقای عسجدی با آوردن لغات مختلف و برابر فرانسهٔ آن خدمت بزرگتری به فارسی زبانان کرده‌است . این مطلب موضوع فهرست را بیاد می‌آورد. رسم است که در کتابها دو فهرست بیاورند ؛ یکی چنانچه در این کتاب است فهرست مندرجات به ترتیب چاپ آنها در کتاب است و معمولا در اول کتاب چاپ می‌شود. دیگری فهرست الفبایی موضوعها است . به‌این ترتیب برای مراجعهٔ به‌یك موضوع خواننده ناچار نیست که قسمت اعظم کتابرا بخواند تا آن لغت‌را پیدا کند و این کتاب فاقد چنین فهرستی است.

دوباره باید بخاطر آورد که کتاب مبادی منطق و ریاضی جدید بسیار بجا و خوانا تهیه شده‌است و خدمت آقای عسجدی را باخواندن و توصیهٔ کتاب باید قدردانی کرد.

علیرضا امیرمعز ـ دانشگاه تکزاس تك

دانش آموزان رتبهٔ اول امتحانات خرداد ۴۹

استان اصفهان

سیدمحمدموسوی‌نسب مبارکه
از دبیرستان سعدی اصفهان
با معدل کل ۱۹٫۰۲
رتبهٔ اول ششم طبیعی
در استان اصفهان

علی‌محمد فاضلی نهرخلجی
از دبیرستان پهلوی نجف‌آباد
بامعدل کل ۱۸٫۹
رتبهٔ اول ششم ریاضی در
استان اصفهان

منصور قزوینی
از دبیرستان حکیم سنائی
بامعدل کل ۱۸٫۸
رتبهٔ اول ششم ریاضی
در شهرستان اصفهان

خلیل کلباسی
از دبیرستان ملی‌حکیم سنائی
با معدل کل ۱۹٫۱۳
رتبهٔ دوم رشتهٔ طبیعی
شهرستان اصفهان

نمایندگی یکان ـ کتابفروشی امید