یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ ششم ، شمارهٔ : ۹ شمارهٔ مسلسل : ۶۶ تیر ۱۳۴۹

در این شماره :

بها : ۲۵ ریال

قابل توجه مشترکان یکان

از مشترکانی‌که نشانی آنها دبیرستان یا دانشکده است تقاضا می‌شود نشانی تازهٔ خود را برای دریافت مجله های ماههای تیر ومرداد اطلاع دهند. درغیرآن، از ارسال این مجله‌ها برای‌آنان‌تامهرماه خودداری خواهد شد.

یکان سال ۱۳۴۸

شامل :

سؤالها و حل مسائل امتحانات نهایی خرداد و شهریور ۱۳۴۸ کلاسهای ششم طبیعی وریاضی،

سؤالها وحل مسائل امتحانات ورودی دانشکده‌های :

کنکور سراسری دانشگاه آریامهر - شبانهٔ دانشگاه تهران - دانشگاه ملی - دانشگاه پهلوی - دانشکدهٔ نفت - دانشکدهٔ افسری - هنرسرای عالی - آموزشگاه نقشه‌برداری- آموزشگاه کارتوگرافی - مدرسهٔ عالی بازرگانی رشت - انستیتو تکنولژی تهران - هنرسرای صنعتی بابل

نمونه‌ای ازمسائل امتحانات نهایی‌کشور فرانسه

امتحانات نهائی G. C. E. انگلستان

نمونه‌ای از مسائل المپیادهای ریاضی شوروی

بها : ۷۵ ریال

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال ده شماره منتشر می‌شود

دورهٔ ششم - شمارهٔ نهم - شمارهٔ مسلسل : ۶۶

تیر ۱۳۴۹

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول، عبدالحسین مصحفی

نشانی اداره :

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VI, number 9. June. 1970

subscription ; $

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

ضمیمه‌های یکان سال

برای دانش آموزان کلاسهای سوم

جزوهٔ سال ۱۳۴۶ - جزوهٔ سال ۱۳۴۷ - جزوهٔ سال ۱۳۴۸

شامل مطالب گوناگون و مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

بهای هرجزوه : ۱۲ ریال

استقراء ریاضی در هندسه

دکتر علی‌رضا امیر معز
دانشگاه تک‌تکزاس

معمولا مثالهائی که برای استقراء ریاضی (۱) درکتابها موجود است مربوط به سریها و رشته‌ها است . دانشجویان و دانش‌آموزان اغلب‌در درك مطلب دچار اشکال می‌شوند .اینك چند مثال هندسی را به عرض خوانندگان می‌رسانیم .

۱ـ استقراء ریاضی :فرض کنیم که S زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ اعدادطبیعی باشد . هر گاه‌عدد k متعلق به S باشد نتیجه‌می‌شود که‌عدد $k+1$ هم به S متعلق است.دراین‌صورت می‌نویسیم که S یك **مجموعهٔ استقرائی**(۲) است . اصل استقراء ریاضی چنین است : هر گاه زیر مجموعهٔ S ازمجموعهٔ اعداد طبیعی استقرائی باشد وعدد یك‌نیز متعلق به S باشد ، S مجموعهٔ اعداد طبیعی است ، یعنی :

$$S=N=\{1,2,3,\ldots\}$$

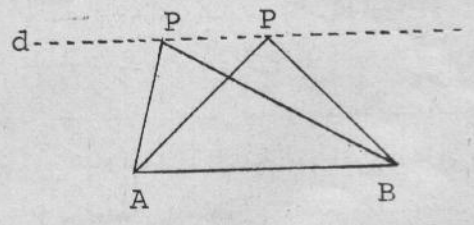
گاهی‌تعمیم‌مختصر این اصل‌در اثبات بعضی قضایابکارمی‌رود: هر گاه زیرمجموعهٔS از مجموعهٔ اعداد طبیعی استقرائی باشد وعددی مانند a متعلق به S باشد،نتیجه می‌شودکه :

$$S=\{n \mid n\geq a \text{ و } n\in N\}$$

یعنی S مجموعه‌ای از اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی a می‌باشد .

اکنون چند مثال هندسی‌می‌زنیم .

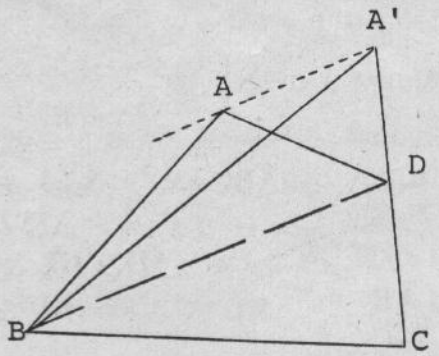
۲ـ لم : قطعه خط AB و خط d را به موازات آن درنظرمی گیریم.فرض کنیم که‌نقطهٔPروی d باشد.دراین‌صورت مساحت مثلث PAB مقداری‌است ثابت . اثبات این لم بسیار ساده است و ازآن صرف‌نظرمی‌کنیم .



۳ـ قضیه : فرض‌کنیم که P یك‌چندضلعی باشدکه عدهٔ اضلاع‌آن n است و $n\geq 4$. مثلثی می‌توان ساخت که‌معادل P باشد .

برهان ـ نخست قضیه را برای حالت $n=4$ ثابت می‌کنیم .

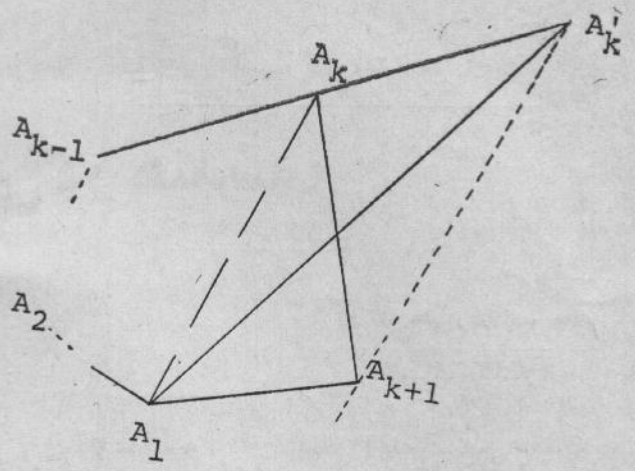
چهارضلعی ABCD رادرنظرمی گیریم. یکی ازاقطار ، مثلا ، BD را انتخاب می‌کنیم . از نقطهٔ A خطی موازی‌با



BD رسم می‌کنیم . این خط ضلع CD را درنقطهٔ A' قطع می‌کند . بنابه (لم۲) مثلثهای ABD و $A'BD$ معادلند . نتیجه می‌شودکه مثلث $A'BC$ معادلPمی‌شود. بنابراین‌قضیه را برای $n=4$ ثابت‌کرده‌ایم .

اکنون فرض می‌کنیم‌که قضیه برای عدد k بقسمی که $k>4$ درست است . یعنی هر گاه چند ضلعی‌که k ضلع دارد بگیریم مثلثی معادل‌آن می‌توان ساخت . چند ضلعی به تعداد اضلاع $k+1$ انتخاب می‌کنیم و آنرا $A_1\ldots A_kA_{k+1}$

۱- principle of mathematical induction. ۲- Inductif



می‌نامیم. قطر A_1A_k را درنظر می گیریم . خطی به‌موازات A_1A_k از نقطهٔ A_{k+1} رسم می‌کنیم . این خط $A_{k-1}A_k$ را در A'_k قطع می‌کند . بنابه(لم ۲) مثلثهای $A_1A_kA'_k$ و $A_1A_kA_{k+1}$ معادلند . نتیجه می‌شود کـه دو چند ضلعی $A_1...A_{k+1}$ و $A_1...A_{k-1}A'_k$ معادلند .چون چندضلعی $A_1...A_{k-1}A'_k$ دارای k ضلع‌است معادل‌یك مثلث است . در نتیجه مجموعهٔ :

$$S=\left\{n \mid \text{عدهٔ اضلاع چندضلعی است که‌معادل‌یك‌مثلث‌است } n\right\}$$

مجموعه‌ای‌است‌استقرائی . چون $n=۴$ متعلق به این‌مجموعه است نتیجه می‌شودکه :

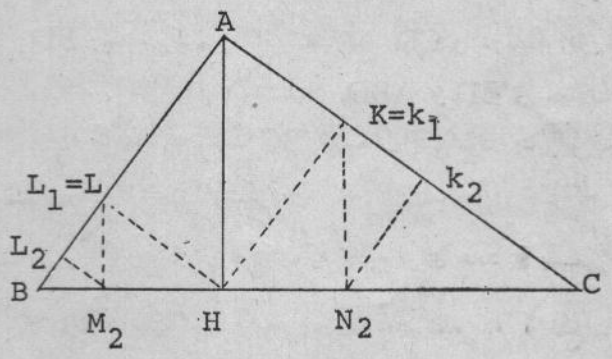
$$S=\left\{n \mid n\geqslant ۴ \text{ و } n\in N\right\}$$

بنابراین قضیه برای تمام چندضلعیها ثابت‌شده است .

۴ـ قضیه :در مثلث ABCزاویهٔ A قائمه است.فرض کنیم که AH ارتفاع وارد بـر وتـر باشد . از نقطهٔ H عمودهای HL وHK را به ترتیب بر اضلاع AB وAC فرود می‌آوریم. بنابراین :

$$\frac{LB}{KC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^{۳}$$

اثبات این‌قضیه بیسارآسان است و از آن صرف‌نظرمی‌کنیم.

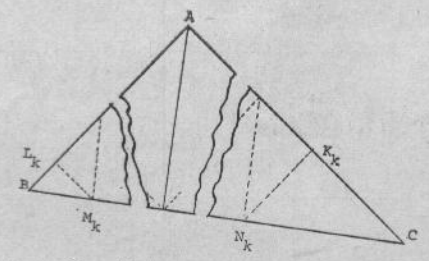


اکنون عمودهای $LM_۲$ و $KN_۲$رابرBCرسم‌می‌کنیم. خط$M_۲L_۲$ را بر AB عمود می‌کنیم وخط$N_۲K_۲$ رابرAC. نتیجه می‌شود که :

$$\frac{L_۲B}{K_۲C}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^{۵}$$

برهان این قضیه‌هم بسیار ساده است‌وازآن‌صرف‌نظرمی‌کنیم.

حال یك سؤال کلی می‌کنیم . اگر رسم بالا را k بار

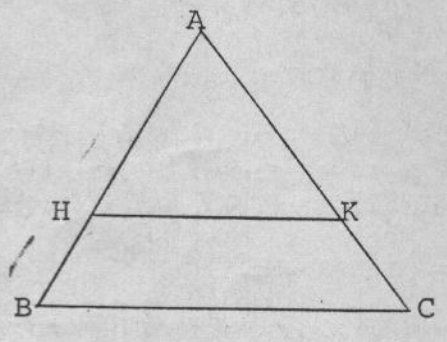


ادامه دهیم تا نقاط K_kوL_k بدست‌آید آیارابطهٔ:

$$\frac{L_kB}{K_kC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^{۲k+۱}$$

صحیح است؟ به حقیقت جواب این‌سؤال (بلی) است وبرهان آن بااصل استقراء ریاضی بسیار ساده است و مسئله‌ای برای خواننده خواهد بود .

۵ـ عمر خیام واستقراء : در هندسهٔ اقلیدسی‌قضیهٔ مشهوری‌وجود داردکه در ریاضی اهمیتی خاص دارد . اولین بار در تاریخ ریاضی اثبات منطقی این قضیه مدیون عمر خیام است [۲] . اینك قضیه را بیان می‌کنیم :



در مثلث ABC نقطهٔ H راروی ضلع AB می گیریم. خط موازی BC که از نقطهٔ H می گذرد ضلع BC را درنقطهٔ K قطع می‌کند بقسمی‌که :

$$\frac{AH}{HB}=\frac{AK}{KC}$$

برهان در حالتی کـه طولهای AHوHB منطق باشند بسیار ساده‌است .ولی‌هرگاه این‌طولها اصم باشند برهان‌مشکل می‌شود . عمر خیام اعداد اصم را توسط رشته‌هـای بینهایت تعریف می‌کند وقضیه را با استقراء ریاضی ثابت می‌کند [۲].

۶ـ سطح مستطیل : معمـولا مساحت مستطیل ABCD کـه درآن AB بـر BC عمود است عبارتست از

(AB)(BC) . اثبات این قضیه در موردی که AB وBC طولهای منطق باشند بسیار ساده است‌ولی درحالتی که این طولها اصم باشند برهان قضیه دشوارمی‌شود . در این‌صورت می‌توان‌تعریف عمر خیام را سند قرار داد و با استقراء ریاضی قضیه را ثابت‌کرد .

براهین‌صرف‌نظرشده‌را به عنوان مسئله به عهدهٔ‌خواننده می گذاریم .

مراجعات

[1]. A.R. Amir-Moéz, J.N. Javaher, Precalculus math., Edwards Brothers clnc,, on arbor michigan (1969)P190

[2]. A.R. Amir-Moéz, Khayyam and irrational magnitudes, Scripta mathematica, Vol XXVIII, no3/ 1968

داستانهای ریاضی

(بقیه ازصفحهٔ ۶۲۱)

شرطی برقرار نیست.

۱) اگر x و y هردو بزرگتر از $\frac{1}{2}$ باشند، قطعهٔ‌طرف چپ (ش ۱) بزرگتراز $\frac{1}{2}$ است . مجموعهٔ این احتمالات از نقاط واقع درمربع XRZN به ضلع $\frac{1}{2}$ تشکیل شده‌است.

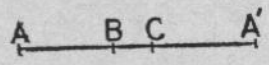
۲) اگر x و y هردو کوچکتر از $\frac{1}{2}$ باشند، قطعهٔ‌طرف راست بزرگتر از نصف چوب می‌شود . به این فرض مربع OXRU نظیر می گردد.

۳) اگر x و y در نامساوی $y-x>\frac{1}{2}$ یا $x-y>\frac{1}{2}$ صدق‌کنند، قطعهٔ وسطی بزرگتر از $\frac{1}{2}$ خواهد بود. مجموعهٔ نقاط (x و y) بقسمی‌که $y-x=\frac{1}{2}$ باشد ، درشکل ۱ بوسیلهٔ خطXY نشان داده شده است وخط ZU معرف نقاطی است که $x-y=\frac{1}{2}$ باشد. نقاط مربوط به ـ نامساوی $y-x>\frac{1}{2}$ مثلث XMY و نقاطی‌که برای آنها $x-y>\frac{1}{2}$ باشد مثلث UPZ را اشغال می‌کنند .

بالاخره، نقاط مربوط به‌نتیجهٔ مساعد، یعنی برای‌احتمال تشکیل یك مثلث ، درقسمت هاشور خوردهٔ مربع OMNP واقعند . دراین صورت ، مساحت این قسمتها ، بطوری که دیده می‌شود برابر با ربع مساحت OMNP است. به بیانی دیگر احتمال ساختن یك مثلث $\frac{1}{4}$ است. حق با الیور ژرك جوان بود .

* * *

اگرچوب مستدیربود... این دفعه باید بدانیم‌که‌احتمال اینکه ، نقاط A ، B ، C که بطور اتفاقی روی یك دایره انتخاب شده‌اند، تشکیل مثلث ABC را بدهند ومثلث‌اخیر فقط دارای زوایای حاده باشد ، چقدرخواهد بود .



A درروی نقطهٔ غیرمشخصی از دایره واقع است، موضع B و C بوسیلهٔ طول کمانهای AB و AC (که به عنوان مثال درخلاف جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری شده‌اند) مشخص می‌شود ، حال تصور می‌کنیم‌که دایره را در A قطع‌کرده وآنرا بکشیم تا قطعه خط AA′ (ش ۲) حاصل شود . برای آنکه یکی از زوایای مثلث ABC منفرجه باشد، لازم و کافی است که یکی ازسه‌کمان که هرضلع مثلث یك وترش است بزرگتر از نصف دایره باشد. باقبول چنین حکمی ، مسئله را در موردقطعه خط AA′ بررسی می‌کنیم وآنرا به‌صورت زیر مطرح می‌کنیم : دونقطهٔ B و C بطوراتفاقی روی AA′ انتخاب شده‌اند ، احتمال اینکه هیچکدام از سه قطعهٔ اخیر بزرگتر از $\frac{AA'}{2}$ نباشد، چقدراست ؟ درنتیجه به اولین مسئله برخواهیم خورد که درفوق بررسی شده است .

تربیت معلم ریاضی در کشورهای مختلف

از مجلهٔ آمریکائی «معلم ریاضی»

ترجمهٔ: محمدحسین احمدی

II ـ بلژیك

نظام آموزشی بلژیك همانند نظام آموزشی آمریکا است با این تفاوت که تعلیم وتربیت دربلژیك فقط از سن ۶ تا ۱۴ سالگی اجباری است. بعدازسن ۱۴ برای کسانی که مایل باشند ادامهٔ تحصیل اختیاری است . البته برای دانش‌آموزانی که مایل به ورود به دانشگاه می‌باشند ادامهٔ تحصیل اجباری است .

سازمان آموزشی بلژیك به‌اختصار به‌شرح زیراست:

۱ـ کودکستان : ازسن ۳ تا ۶ سال‌برای‌خانواده‌های داوطلب وکاملا خصوصی‌است .

۲ـ آموزش ابتدایی : برای سنین‌از ۶ تا ۱۲ سال. این دورهٔ آموزش که ۶ سال است برای کلیهٔ افراد یکسان است .

۳ـ دورهٔ اول متوسطه : برای سنین ۱۲ تا ۱۵ سال ؛ برای‌کسانی‌که علاقمند به ادامهٔ تحصیلات دانشگاهی باشند یك دورهٔ آموزشی شامل رشته‌های تحصیلی از جمله فنی، لاتین و یونانی، لاتین وریاضیات ، لاتین وعلوم یا رشتهٔ علوم ، که رشتهٔ اخیرالذکر منفك از ریاضیات و علوم است ، وجود دارد. همچنین یك‌دورهٔ سه‌سالهٔ دیگروجود دارد وبرای آن دسته ازافرادی است‌که می‌خواهند بعد ازسنین ۱۴ یا ۱۵ سالگی وارد دنیای کارشوند .

۴ـ دورهٔ دوم متوسطه : برای سنین از ۱۴ تا ۱۸ سال ودنبالهٔ تحصیلات دورهٔ اول‌است.

۵ـ تحصیل دانشگاهی : برای سنین از ۱۸ تا ۲۲ سال و دورهٔ آن چهار سال است و به درجهٔ لیسانس منتهی می‌شود .

تربیت معلم

تربیت معلمان مدارس ابتدایی در مدرسهٔ تربیت معلم صورت می‌گیرد . برای ورود به آن ، داوطلب باید فارغ ـ التحصیل دورهٔ دوم دبیرستان دولتی باشد (با شرط سنی ۱۸ سال) .

تحصیل درمدرسهٔ تربیت معلم به‌مدت دو سال در مواد روانشناسی ، تاریخ ، فلسفه، روش تدریس وتمرین معلمی‌که اغلب جنبهٔ عملی دارد انجام می‌گیرد. دانشجویال در طول مدت این دوسال هیچ مواد ریاضی به عنوان مواد اختصاصی ندارند مگر به‌مقدارکم که‌آنهم درموردروشهای تدریس ریاضیات مدارس ابتدایی است . فارغ‌التحصیلان این مدرسه از سن بیست‌سالگی شغل معلمی راآغاز می‌کنند .

دبیران دورهٔ اول دبیرستانها همان برنامهٔ معلمان‌مدارس ابتدایی را به انضمام یك سال تحصیل ریاضیات‌که در سطحی بالاتر از برنامهٔ دوسالهٔ ریاضیات دبیرستانهای دولتی است فرا می‌گیرند .

به‌منظور احراز صلاحیت وشایستگی درامرتدریس مواد دورهٔ دوم دبیرستان ، معلم داوطلب باید فارغ‌التحصیل‌دورهٔ چهار سالهٔ دانشگاه با درجهٔ لیسانس باشد . در این دوره دانشجو تنها به‌مطالعهٔ دو یا حداکثر سه مادهٔ درسی فی‌المثل ریاضیات وفیزیك یا ریاضیات وفیزیك ویك مادهٔ دیگر از علوم ویا زبان می‌پردازد. پس‌ازفراغت ازتحصیل یك دورهٔ یکسالهٔ تحصیلی به‌نام آگرژه (Aggregation) را جهت آموزش متوسطه می‌گذراند .

این‌آموزش در دپارتمان تعلیم وتربیت‌وابسته‌به‌دانشگاه تحت نظارت وکنترل مستقیم وزارت آموزش وپرورش صورت می‌گیرد. این دورهٔ یکسالهٔ تحصیلی همچنین شامل دروس‌عملی چون « تمرین دبیری » و « مشاهده » می‌باشد.پس از حصول موفقیت‌کامل دراین دوره از تحصیل یك گواهینامهٔ دبیری در

مواد تخصصی به فارغ‌التحصیلان اعطاء می گردد. این‌موسسهٔ وابسته به دانشگاه دائماً معلمان موفق و صلاحیتدار را برای یك دورهٔ خدمت پنجساله در دبیرستانهای ملی و یا یك دورهٔ سه‌ساله جهت دبیرستانهای دولتی آماده می‌سازد .

اخیراً در برنامهٔ ریاضی دورهٔ شش سالهٔ دبیرستانها مخصوص افراد از ۱۱تا۱۸ سال تجدیدنظرشده وریاضی جدید جایگزین برنامهٔ قدیم شده‌است .

III ـ سوئد

نظام‌آموزشی وتربیت معلم درکشورهای اسکاندیناوی (نروژ ـ سوئد ودانمارك) شبیه به‌هم است. کشورهای مذکور یك‌بار درسال ۱۹۵۹ وباردیگر درسال ۱۹۶۷ در برنامه‌های آموزشی خود تجدیدنظر کردند .

آموزش ابتدایی ازسن ۷سالگی شروع می‌شودوتحصیل دراین دورهٔ نه‌سالهٔ ابتدایی که شرح آن ذیلا به‌ایجازخواهدآمد برای همه اجباری است .

۱ـ دورهٔ مقدماتی ابتدایی : برای سنین ۷ تا ۹ سال ازکلاس ۱ تا ۳

۲ـ دورهٔ متوسطهٔ ابتدایی : برای سنین ۱۰تا۱۲ سال. ازکلاس ۴ تا ۶

۳ـ دورهٔ اعلای ابتدایی : برای‌سنین ۱۳ تابیش‌از ۱۵سال. ازکلاس ۷ تا ۹

به‌کلیهٔ دانش‌آموزان پس از اتمام دوره‌های فوق‌الذکر یك گواهینامهٔ فارغ‌التحصیلی مخصوص داده می‌شود.

ادامهٔ تحصیلات بعداز دورهٔ دبستانی (یعنی بعدازپشت سر گذاشتن کلاس ۹) به‌دو صورت انجام پذیر و ممکن‌الوصول است :

الف ـ دورهٔ نظری : برای سنین ۱۶ تا ۱۸ یا ۱۹ سال که ویژهٔ دانش‌آموزان علاقمند به ادامهٔ تحصیل در دانشگاه یا مشاغل فنی است و مدت آن بالغ برسه‌سال‌است.

ب ـ دورهٔ حرفه‌ای : برای سنین ۱۶ و ۱۷ سال که به‌مدت دوسال بطول‌می‌انجامد وویژهٔ کسانی‌است‌که مایلند قبل از ورود به دنیای کار ، تحصیل و تربیت آموزشگاهی بیشتری داشته باشند .

جوانان علاقمند به تدریس درکلاسهای ۳ـ۱ مدارس ابتدایی، در ۱۷سالگی واردکالج تربیت معلم می‌شوندوازیکی ازمدارس حرفه‌ای یا تربیت بدنی فارغ‌التحصیل شده به اخذ درجهٔ عالی نائل خواهندشد. فارغ‌التحصیلان مدارس حرفه‌ای برای مدت دوسال و نیم به تحصیل پرداخته و برای تکمیل تحصیلات خود یك دورهٔ تابستانی ۵ هفته‌ای را در مواد نظری می گذرانند. درحالیکه فارغ‌التحصیلان دورهٔ نظری‌تنها دوسال بیشتراز متعلمین مدارس حرفه‌ای به‌مطالعهٔ‌دروس‌نظری می‌پردازند. تنها ریاضیاتی‌که دراین دورهٔ دوسالهٔ آماده‌سازی، به‌معلمان تعلیم داده می‌شود تکرار ومرور موادی‌است‌که‌باید دردبستانها تدریس شود، بقیهٔ دروس عبارتنداز : روانشناسی، روش تدریس، مشاهده وتمرین علمی.

برای تدریس در کلاسهای ۶ ـ ۴ مدارس ابتدایی ، داوطلبان مشمول مقرراتی که فوقاً آمد خواهند بود با این تفاوت‌که دورهٔ تربیت این معلمان سه‌سال است. در این دوره نیز به ریاضیاتی بیش‌ازسرور مطالب ریاضی دبستانها ونیزروش تدریس این مطالب احتیاج نیست .

کسانی‌که علاقمند به تدریس در دورهٔ اعلای مدارس ابتدایی (یعنی‌کلاسهای ۹ـ۷) می‌باشند باید بعد ازگذراندن دورهٔ نظری به‌مدت سه‌سال در دانشگاه به تحصیل بپردازند . دراین دوره‌آنها دوماده را به عنوان رشتهٔ اصلی (تخصصی) گذرانده و محتملا با انتخاب مادهٔ سوم این رشته را تکمیل می‌نمایند. پس‌ازاینکه امتحان مواد رشتهٔ مذکور را با موفقیت تام به‌پایان رساندند به‌آنها درجهٔ «Magister» که معادل درجهٔ لیسانس (B.A.) دانشگاههای آمریکائی است اعطاء می گردد. آنگاه داوطلبان‌واردکالج تربیت معلم(دانشسرایعالی) شده و برای مدت یك سال به مطالعهٔ عملی‌که بیشتر در زمینهٔ روش تدریس و تمرین دبیری است می‌پردازند **پس از اتمام موفقیت‌آمیز این دورهٔ یکساله شایستگی وصلاحیت**

آنان در امر تدریس مورد تایید و تصدیق قرار می‌گیرد (*) . با وجود اینکه برنامهٔ سه سالهٔ ریاضیات در دانشگاه بس فشرده و مدغم است مع‌الوصف صاحب‌نظران در ریاضیات معتقدند که معلمین مذکور دانش و سواد ریاضی کافی جهت تدریس اهم‌مطالب ریاضی مطلوب ومورد نیازرا دارند.

برای تدریس درمدارس نظری دو سطح آموزشی بالا و پائین وجود دارد :

(الف)ـ معلمان سطح پائین (از نقطهٔ نظررتبه و اشل حقوقی) که تحصیلاتی همانند معلمان دورهٔ اعلای مدارس ابتدایی را دارند ودارای عنوان «Adjuncts» می‌باشند.

(ب)ـ معلمان سطح بالا که عنوان « Lektors » را دارند پس‌از فراغت از تحصیل دانشگاهی دو یا سه‌سال دیگر به‌تحصیل ریاضیات درسطح «Graduate» که با ریاضیات در سطح «Ph.D.» برابری می‌کند می‌پردازند و پس‌از یك سال آموزش علمی دیگرکه‌آنهم تحت نظارت دانشسرایعالی‌صورت می‌گیرد شایستگی وصلاحیت درکارتدریس را حائزمی‌گردند . این افراد عالیترین معلمان این‌کشورند.

درکشورهای اسکاندیناوی نیزمانند سایرکشورها کمبود دبیران مجرب و ذیصلاحیت مشهود است از اینرو فارغ ـ التحصیلان مدرسهٔ تربیت معلم‌که درکلاسهای ۴ تا ۶ تدریس می‌کردند بااخذ واحد دیگر [دریك سال] در دوماده می‌توانند به‌سطح‌آموزشی پائین‌که شرح‌آن آمد ارتقاء یافته ودرکلاس‌ـ های ۷ تا ۹ مدارس ابتدایی تدریس کنند . معلمان به محض اینکه دوسال دورهٔ آزمایشی راکه متعهد به‌انجام‌آنندبارضایت مسؤولان امر به‌پایان رساندند آنگاه طی تشریفاتی احکام دائمی (یارسمی) به نامشان صادر می‌گردد و برای بقیهٔ دورهٔ معلمی‌خود نیازی به‌تحصیلات بیشترندارند .

معلمین گهگاه مورد بازرسی هیئت آموزشی قرار می ـ گیرند. اخیراً دورهٔ کوتاهی جهت معلمان بطور آزاد تشکیل داده‌اند تا بدین‌وسیله آنهارا درتفسیر وتعبیر برنامه‌های جدید آموزشی یاری بخشد .

IV ـ آلمان

درآلمان غربی نه ایالت وجودداردکه نظام‌آموزشی هر ایالت با ایالت دیگرمتفاوت است یکی از انواع این نظامها به‌شرح زیر است :

کلیهٔ بچه‌ها تحصیل را در سن شش سالگی در دبستان دولتی (Volksschule) که مدت‌آن چهار سال است آغاز می‌کنند . در پایان این دوره دانش‌آموزان برای دومین دورهٔ تربیت آموزشگاهی به سه دستهٔ منفك از هم تقسیم می‌شوند :

۱ـ حدود ۵۰٪ از این افراد وارد دومین دورهٔ «Volksschule» می‌شوند وپنج سال دیگرتحصیلات اجباری را می‌بینند. بعدازآن دانش‌آموزان مذکورموظفندکه یك دورهٔ آموزش حرفه‌ای را انتخاب وبطور تمام‌وقت یانیم‌وقت‌دریکی ازمدارس حرفه‌ای حضور بهم‌رسانند .

۲ـ درحدود ۲۰٪ از این افراد وارد مدرسهٔ متوسطه (Middle School) می‌شوند مدت این دورهٔ تحصیلی ۶سال بوده و به افراد به سن ۱۰ تا ۱۶ سال اختصاص دارد ورود به‌این دوره منوط به شرکت وموفقیت درامتحانی‌است‌که به‌این منظورازآنها بعمل می‌آید .

این دانش‌آموزان پس‌از اتمام دورهٔ مذکور معمولا وارد مدرسهٔ عالی بازرگانی یا فنی می‌شوند.

۳ ـ ۳۰٪ باقیمانده باگذراندن امتحاناتی وارد دورهٔ نه سالهٔ نظری می‌شوند که خود به سه دورهٔ سه ساله تفکیك می‌گردد . اولین دورهٔ سه‌ساله‌را در مدرسهٔ (Unterstufe) می‌گذرانند و این یکی از آموزشهای‌آکادمی عمومی است . بعد ازآن محصلین در (Mittelstufe) یکی یا بیشتر از یکی از سه رشتهٔ کلاسیك ،زبانهای‌جدید یا علوم ریاضی راانتخاب می‌کنند .در پایان دورهٔ نه سالهٔ نظری امتحان شکلی موسوم به(Abitur) وجود داردکه ازکلیهٔ مواد تدریس شدهٔ درمدت مذکور بعمل می‌آید. شرکت در این امتحان برای آنان که علاقمند به ادامهٔ تحصیلات خودهستند ضروری است .

معلمین علاقمندبه تدریس در(Volksschule) می‌باید درمدارس نظری‌حضور یافته وامتحان (Abitur) راگذرانده

*ـ درگذشته‌این سبك به‌مدت چند سال‌درایران‌متداول‌بوده است،بدین معنی که‌فارغ‌التحصیلان‌دانشکدهٔ علوم‌دانشگاهها پس‌ازگذراندن یك دورهٔ یکساله در دانشسرایعالی واردکادرآموزشی وزارت آموزش وپرورش می‌شدند .

باشند. دراین‌زمان آنان که ۱۹ سال‌دارند به‌مدت سه‌سال‌دردانشسرا (Pedagogishe Hochschule) به‌تحصیل می‌پردازند. آنان در مدت این دوره باید در دو سمینار « یك سمستری » آموزش حساب و یا هندسه شرکت جویند مضافاً به اینکه‌تمام معلمان‌باید رشته‌ای راجهت تحقیق ومطالعهٔ عمیق آن‌انتخاب کنند. حدود پنج درصداز دانشجویان ریاضیات و۹۵٪ باقیمانده سایر رشته‌های درسی را برای امر مذکور انتخاب می‌کنند. از اینرو دانش ریاضی اغلب معلمان مدارس ابتدایی (دولتی) در سطح برنامهٔ مدارس نظری است که تقریباً مطابق با برنامهٔ اولین دورهٔ جبر و دوره‌ای از هندسهٔ مسطحه مدارس آمریکائی است.

این‌معلمان‌همچنین می‌توانند دنبالهٔ مطالب مدارس‌دولتی را تدریس نمایند مشروط براینکه‌تحصیل رشته‌ای مثلاریاضیات را برای مدت دوسال‌در دانشسرا دنبال نمایند. برنامهٔ‌تحصیلی این دوره معادل برنامهٔ نظری(Mittelstufe) می‌باشد.

تربیت معلمان مدارس متوسط (Middle school) بسیار متغیر بوده‌و حداکثر شبیه به تربیت معلمان دورهٔ‌نظری است‌که شرح‌آن خواهدآمد و حداقل همانند تربیت معلمان دومین قسمت (Volksschule) است که شرح آن به‌تفصیل گذشت.

معلم دورهٔ نظری‌که هنگام ورود به دانشگاه ۱۹ سال دارد باید دو و احتمالا سه ماده را که تنها علاقمند به‌تدریس آنهاست به‌مدت پنج یا شش‌سال مطالعه‌کند. این مواد انتخابی باید از جمله موادی‌باشدکه در دورهٔ نظری تدریس می‌شود. مدت این‌دوره قبل از تکمیل تحصیلات و تأیید آن‌که یقیناً به کمك امتحان، ارزیابی می‌شود ۶ یا ۷ سال است. دانشجو همچنین موظف است‌که در سخنرانیها و سمینارهائی‌که دربارهٔ فلسفه و روش تدریس تربیت داده می‌شود شرکت‌کند. در پایان این دوره معلمان علاقمند(که عموماً ۲۶ سال دارند)در «اولین امتحان‌ایالتی» خود شرکت می‌کنند. این‌امتحان‌مشتمل در قسمتهای زیر است:

۱- نوشتن رساله‌ای در حدود ۸۰ تا ۱۰۰ صفحه‌در مورد یك مبحث ریاضی محض که درعین حال نمایشگر تازگی مبحث و تبحر نویسنده باشد.

۲- شرکت در دوامتحان کتبی که از دو ماده‌ای‌که خودداوطلب انتخاب‌کرده‌است بعمل می‌آید؛ وقت هر امتحان معادل ۴ تا ۵ ساعت است.

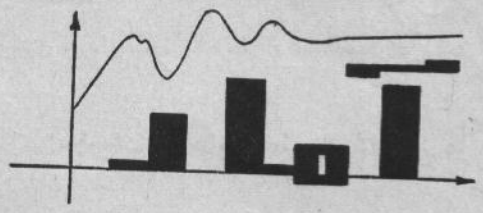
۳ - شرکت درامتحانات شفاهی یکساعته؛ این امتحانات از موادی‌که داوطلب به دلخواه انتخاب‌کرده است انجام می‌گیرد.

۴ - شرکت دریك امتحان عملی و شفاهی در فلسفه و روش تدریس.

دانشجویان درحالی که این امتحان را می‌گذرانند یك دورهٔ دو ساله راکه دورهٔ آماده سازی است می‌گذرانند. در سال اول انترن یك مدرسهٔ‌نظری و در سال دوم عضوسمیناری می‌باشندکه‌درآن عمل و تئوری زندگی مدرسه‌ای و معلمی‌به هم تلفیق داده شده است. در خاتمهٔ این دورهٔ دوساله داوطلب که ۲۸ سال‌دارد در« دومین امتحان ایالتی» شرکت می‌جوید. در طول این مدت آنان که عنوان داوطلب یا کاندیدا را دارند باید گزارشی از دورهٔ معین آموزشی کلاسیك خودکه مشمل بر قسمتهای ذیل است تهیه‌نمایند:

الف - تحلیل و بررسی بنیان ریاضی وآموزشی مباحث تعلیم‌داده شده. ب- تشریح‌عکس‌العملهای دانش‌آموزان ورفتار خود با آنان. ج - تعیین خصوصیات فردی برخی از دانش‌آموزان. د- ارزیابی روش تدریس خود. به‌علاوه باید در دو امتحان از دروس اثباتی‌که درحضور گروهی ازممتحنین‌صورت می‌گیردویکی درکلاسی که‌از نظراو شناخته شده است‌ودیگری درکلاسی است‌که برای اوناآشنا است شرکت نماید وسرانجام باید یك امتحان شفاهی را نیزکه در زمینهٔ روش و متدلوژی است بگذراند. اگراحیاناًداوطلبی از عهدهٔ امتحان اخیرالذکر برنیامد فرصت دیگری‌به او داده‌می‌شود. اگر در این‌فاصله، امتحان خود را با موفقیت بپایان رساند آنگاه وضع زندگی و موقعیت او در سطح‌یك معلم دورهٔ‌نظری قرار می‌گیرد. اشل حقوقی او در بدوامرمعادل‌اشل حقوقی، دکتر، مهندس، حقوقدان یا سایر مشاغل حساس و مهم این طبقه بوده‌ودارای عالیترین موقعیت‌اجتماعی است. همانطورکه ممکن بودانتظار داشته‌باشیددرآلمان‌نیزکمبود واقعی‌دبیران مجرب‌وذیصلاحیت وکاملا شایسته احساس می‌شود.

دنباله دارد



Initiation a' la
STATISTIQUE
par: M. HAGÈGE
ترجمهٔ : ع . مصحفی

تمرینهای مربوط به «همبستگی»

۴۷ـ آمار جهانگردی در اروپا در سال ۱۹۵۰ :

کشور	عدهٔ جهانگردان رسیده بر حسب میلیون	مجموع دریافتیها بر حسب میلیون فرانك
آلمان	۴/۹	۴۵۰۰
اسپانیا	۴/۱	۷۰۰
فرانسه	۵/۵	۴۰۰۰
ایتالیا	۸/۶	۵۰۰۰
سوئیس	۴/۶	۲۵۰۰

مطلوبست :

۱ـ تعیین معادلهٔ خطوط برگشت y برحسب x واز x برحسب y .

۲ـ رسم نمودار این خطوط .

۳ـ تعیین ضریب همبستگی و توضیح این همبستگی در یك سطر

۴۸ـ جدول با مدخل مضاعف زیرمربوط است به‌نتیجهٔ بررسی رشتهٔ مضاعف زیر: اتومبیلهای کم سیلندری که درپاریس آمد و رفت می‌کنند و برحسب دو مشخصهٔ : توان موتور و طول متوسط دوام آن و به‌صورت درصد رده‌بندی شده‌اند.

x معرف توان موتور برحسب اسب بخار و y معرف طول دوام موتور برحسب هزارکیلومتر می‌باشد .

جمع	۳۰	۳۱	۳۹	۱۰۰
۳۰	۲۵	۳	۲	۳۰
۲۵	۵	۲۰	۷	۳۲
۲۰	۰	۸	۳۰	۳۸
x/y	۲	۳	۴	جمع

مطلوبست :

۱ـ نمودار این رشته به صورت ابر نقاط

۲ـ محاسبهٔ معادلات دوخط برگشت

۳ـ محاسبهٔ ضریب همبستگی

۴ـ رسم خطوط برگشت روی نمودار قبلی

۴۹ـ نمرات امتحانی ده دانش آموز A،B،...،J در درس ریاضی و در درس فیزیك چنین است :

دانش‌آموز	A	B	C	D
نمرهٔ ریاضی	۱۲	۱۵	۱۰	۸/۵
نمرهٔ فیزیك	۱۰	۱۸	۸	۷

E	F	G	H	I	J
۵	۱۰/۵	۱۱/۵	۱۶/۵	۱۱	۱۶
۳	۸/۵	۹	۱۹	۱۳	۱۰/۵

مطلوبست :

۱ـ رسم نمودار

۲ـ محاسبهٔ ضریب همبستگی خطی

۳ـ محاسبهٔ ضریب همبستگی رتبه‌هاو مقایسهٔ آن بانتیجهٔ ۲ (باید رتبهٔ دانش آموزان درریاضی ودر فیزیك تعیین‌شده باشد) .

۵۰ ـ در اتحاد $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

x را متوالیاً باعددهای ۱، ۲، ...، N جانشین می‌کنیم. تساویهای حاصل را عضو به‌عضو با هم جمع کنید و مجموع $1 + 2 + \ldots + N$ را بدست آورید.

۲ـ به همان ترتیب با استفادهٔ از اتحاد

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

و با استفادهٔ از نتیجهٔ قبل، مجموع $1^2 + 2^2 + \ldots + N^2$ را بدست آورید.

۵۱ ـ در مورد ۱۰ عروسی سن داماد و سن عروس را یاد داشت کرده‌اند:

سن داماد	۲۱	۲۶	۲۶	۲۷
سن عروس	۱۸	۲۲	۲۱	۲۳

۲۷	۲۸	۳۰	۳۰	۳۵	۴۱
۲۳	۲۴	۳۱	۲۷	۳۳	۲۹

ضریب همبستگی خطی این رشتهٔ مضاعف را حساب کنید.

۵۲ـ محصول و بهای سیب مخصوص شراب را به شرح زیر در نظر می‌گیریم:

سال	محصول برحسب هزار کنتال	بهای متوسط سالانهٔ هر کنتال
۱۹۰۰	۳۷/۵	۷/۵۰
۱۹۰۱	۱۲/۶	۶/۸۵
۱۹۰۲	۸/۶	۱۱/۷۹
۱۹۰۳	۵/۴	۱۲/۶۸
۱۹۰۴	۶۲/۶	۲/۹۱
۱۹۰۵	۴/۶	۱۲/۲۰
۱۹۰۶	۲۶/۱	۵/۰۴

ضریب همبستگی (همپراش) را تعیین کنید.

۵۳ ـ دریک گزارش مربوط به یك امر اقتصادی جدول زیر نموده شده است:

تحولات دو متغییر اقتصادی بالا را به‌صورت نمودار نشان دهید. ضریب همبستگی موجود بین این دو متغیر را حساب کنید.

یادداشت ـ راهنمائیهای زیر انجام گرفته است: در رشتهٔ نرخهای دستمزدها میانگین ۱۳۷/۸ و معیار انحراف ۲۲/۹ و در رشتهٔ شاخصهای قیمتها میانگین ۱۲۶ و معیار انحراف ۱۵/۹ می‌باشد.

کل فرانسه	نرخهای دستمزدهای ساعتی	شاخص مجموعهٔ قیمتهای تفصیلی
مارس ۱۹۵۰	۱۰۵	۱۰۵/۳
ژوئن ۱۹۵۰	۱۰۷	۱۰۳/۹
سپتامبر ۱۹۵۰	۱۱۴	۱۰۹/۲
دسامبر ۱۹۵۰	۱۲۰	۱۱۳/۶
مارس ۱۹۵۱	۱۲۷	۱۱۹/۷
ژوئن ۱۹۵۱	۱۳۸	۱۲۷
سپتامبر ۱۹۵۱	۱۵۶	۱۳۱/۶
دسامبر ۱۹۵۱	۱۶۰	۱۴۱/۳
مارس ۱۹۵۲	۱۶۲	۱۴۶/۹
ژوئن ۱۹۵۲	۱۶۳	۱۴۲/۷
سپتامبر ۱۹۵۲	۱۶۴	۱۴۷/۹

۵۴ ـ در یك بررسی اقتصادی مربوط به کشورهای متحد آمریکا این معلومات بدست آمده است:

سال	درآمد ملی برحسب 10^9 دلار x	شاخص تولیدات صنعتی y
۱۹۲۹	۸۳	۱۱۰
۱۹۳۰	۶۹	۹۱
۱۹۳۱	۵۴	۷۵
۱۹۳۲	۴۰	۵۸
۱۹۳۳	۴۴	۶۹
۱۹۳۴	۴۹	۷۴
۱۹۳۵	۵۶	۸۷
۱۹۳۶	۶۵	۱۰۳
۱۹۳۷	۷۶	۱۱۳
۱۹۳۸	۶۴	۹۰

۱ـ نمودار دو رشته را در یك شکل برحسب زمان رسم کنید. برای محور طول واحد ۱۵ میلیمتر. برای سال و برای محور عرض واحد ۵ میلیمتر برای 10^9 دلار و برای ۲ نقطه انتخاب کنید.

۲ـ با همان مقیاسات ابر نقاط (x و y) را رسم کنید.

۳ـ معادلات دو خط برگشت را بدست آورید.

۵۵ ـ در مورد سال ۱۹۶۴

ـ از یك طرف تغییرات شاخص تولیدات صنعتی فرانسه

ـ از طرف دیگر عدهٔ کارگران بیکار اعانه بگیر درفرانسه

را در نظر می‌گیریم :

ماه	شاخص تولیدات صنعتی (پایهٔ ۱۰۰ در۱۹۳۸)	عدهٔ کارگران (بر حسب ۱۰۰۰ نفر)
ژانویه	۱۴۴	۷۲
فوریه	۱۴۳	۷۸
مارس	۱۵۱	۷۶
آوریل	۱۵۵	۷۳
مه	۱۵۹	۶۹
ژوئن	۱۵۷	۶۱
ژوئیه	۱۴۷	۵۶
اوت	۱۲۲	۵۴
سپتامبر	۱۵۶	۴۸
اکتبر	۱۵۹	۴۹
نوامبر	۱۶۲	۵۳
دسامبر	۱۶۶	۵۷

۱ـ نموداراین تغییرات را رسم‌کنید؛ روی محورطولها عدهٔ کارگران بیکار وروی محورعرضها شاخص تولیدات‌صنعتی را نقل‌کنید . روی نمودار چه ویژگی ملاحظه می‌شود ؟ از آن چه نتیجه‌ای بدست می‌آید ؟

۲ـ با توجه به ملاحظهٔ بالا ، معادلات دوخط برگشت را تشکیل دهید (نسبت به محورهایی‌که مبدأ با مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ انتخاب شده است) و این خطوط را رسم‌کنید.

۳ـ با توجه به همان ملاحظه ضریب همبستگی را حساب‌کنید .

۵۶ ـ ۱۶ دانش‌آموز برحسب نمره‌هایشان در دودرس رده بندی شده و رتبه‌های آنان به‌صورت زوج اعدادزیرنشان داده شده است .

(۲و۷)،(۷و۶)،(۵و۵)،(۴و۴)،(۳و۳)،(۱۰و۲)،(۱و۱)

، (۴و۱۳)،(۹و۱۲)،(۱۵و۱۱)،(۱۱و۱۰)،(۸و۹)،(۶و۸)

(۱۳و۱۶)،(۱۶و۱۵)،(۱۲و۱۴)

ضریب همبستگی رتبه‌ها را حساب‌کنید .

۵۸ ـ مؤسسه‌ای تجاری درابتدای هرماه مبلغی‌رابرای امور تبلیغاتی منظور می‌دارد . این وجوه به‌صورت جدول زیر خلاصه شده‌اندکه درآن مجموع وجوهی‌که صرف‌تبلیغات شده و ازدیاد فروش‌ثبت شده است.

ماه	فروش برحسب ۱۰۰۰ فرانك	هزینهٔ تبلیغات بر حسب۱۰۰۰فرانك
ژانویه	۳۸۰۰	۲۴۰
فوریه	۴۲۰۰	۳۰۰
مارس	۴۲۰۰	۳۰۰
آوریل	۳۹۰۰	۲۵۰
مه	۴۰۰۰	۳۲۰
ژوئن	۴۵۰۰	۳۵۰
ژوئیه	۳۵۰۰	۲۰۰
اوت	۲۴۰۰	۱۸۰
سپتامبر	۳۸۰۰	۳۰۰
اکتبر	۴۰۰۰	۳۲۰
نوامبر	۴۴۰۰	۳۸۰
دسامبر	۵۳۰۰	۴۶۰
	۴۸۰۰۰	۳۶۰۰

مطلوبست :

۱ـ محاسبهٔ ضریب همبستگی موجود بین داده‌ها

۲ـ تعیین معادلهٔ خط برگشت y برحسب x

۳ـ تعیین معادلهٔ خط برگشت x برحسب y

۴ـ رسم ابر نقاط و دوخط برگشت دریك شکل

۵۸ ـ رشته‌ای شامل ۳ زوج ارزشهای (x_1 و y_1) و (x_2 و y_2) و (x_3 و y_3) داده شده است . در یك صفحهٔ محورهای مختصات‌متعامدبردارهای OA و OB بامؤلفه‌های

$$OA = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad , \quad OB = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

راکه در آن : $X_i = x_i - \bar{x}$ و $Y_i = y_i - \bar{y}$

است رسم‌کنید . ثابت‌کنیدکه r ضریب همبستگی خطی برابر است باکسینوس زاویهٔ بردارهای OA و OB .

(پایان کتاب)

نامساویهای معروف

ترجمهٔ : محمدعلی رضوانی ـ مگردیچ تومانیان

تعاریف : هرگاه a_n و .... و a_2 و a_1 ، n عدد حقیقی دلخواه باشند بنابه تعریف **میانگین حسابی** یا عددی آنها عبارتست از :

$$A(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

هرگاه اعداد فوق‌الذکر همگی مثبت باشند **میانگین ـ های هندسی و توافقی** آنها با روابط زیر مشخص می‌شوند :

$$G(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$H(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

قضیه : اگراعداد a_n و ....و a_2 و a_1 همگی مثبت وهمه باهم برابرنباشند دراین صورت خواهیم داشت:

$$H(a) < G(a) < A(a)$$

اثبات : اول ثابت می‌کنیم‌که $G(a) < A(a)$ یعنی:

$$a_1 a_2 \dots a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n$$

اگر $a_1 \neq a_2$ باشد خواهیم داشت :

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 <$$

$$< \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \quad (I)$$

همچنین داریم :

$$a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2$$

علامت تساوی برای موقعی است‌که :

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4$$

اما بنابه رابطهٔ (I) می‌دانیم‌که :

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} < \left(\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}\right)^2$$

و اگر طرفین نامساوی بالا را به توان ۲ برسانیم خواهیم داشت :

$$a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$$

بطورکلی فرض‌می‌کنیم که‌نامساوی‌برای $n = 2^{m-1}$ صادق باشد یعنی :

$$a_1 a_2 \dots a_{2^{m-1}} < \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots a_{2^{m-1}}}{2^{m-1}}\right)^{2^{m-1}} \quad (II)$$

ثابت می‌کنیم‌که برای $n = 2^m$ نیز صادق است یعنی :

$$a_1 a_2 \dots a_{2^{m-1}} a_{2^{m-1}+1} \dots$$

$$a_{2^m} < \left(\frac{a_1 + \dots + a_{2^m}}{2^m}\right)^{2^{m-1}}$$

از نامساوی (II) داریم :

$$a_{2^{m-1}+1} \dots a_{2^m} < \left(\frac{a_{2^{m-1}+1} + \dots + a_{2^m}}{2^{m-1}}\right)^{2^{m-1}}$$

طرفین نامساوی بالا ونامساوی (II) را در هم ضرب می‌کنیم :

$$a_1 a_2 \dots a_{2^{m-1}} a_{2^{m-1}+1} \dots a_{2^m} <$$

$$< \left(\frac{a_1 + \dots + a_{2^{m-1}}}{2^{m-1}} \right)^{2^{m-1}}$$

$$\left(\frac{a_{2^{m-1}+1} + \dots + a_{2^m}}{2^{m-1}} \right)^{2^{m-1}} \quad \text{(III)}$$

اما طبق نامساوی (I) داریم :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{m-1}}}{2^{m-1}} \cdot \frac{a_{2^{m-1}+1} + \dots + a_{2^m}}{2^{m-1}}$$

$$< \left(\frac{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{m-1}}}{2^{m-1}} + \frac{a_{2^{m-1}+1} + \dots + a_{2^m}}{2^{m-1}}}{2} \right)^2$$

طرفین نامساوی بالا را به‌توان $2^m - 1$ می‌رسانیم و با درنظر گرفتن نامساوی(III) نامساوی مطلوب حاصل‌می‌شود:

$$a_1 a_2 \dots a_{2^m} < \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^m}}{2^m} \right)^{2^m} \quad \text{(IV)}$$

در بالا فرض‌کردیم $n = 2^m$ باشد اینك حالت کلی را ثابت می‌کنیم . برای این منظورفرض می‌کنیم :

$$K = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

پس مجموعهٔ اعداد $\{2, 4, 8, \dots, 2^s, \dots\}$ را در نظر گرفته وعضوی ازاین مجموعه راکه بلافاصله از n بزرگتر است انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم عضومنتخب 2^m باشد. حال به‌اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$، $2^m - n$ عامل مساوی با K را می‌افزائیم دراین صورت طبق نامساوی (IV) داریم:

$$a_1 a_2 \dots a_n \overbrace{K . K \dots K}^{2^m - n} <$$

$$< \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + (2^m - n)K}{2^m} \right)^{2^m}$$

درطرف راست نامساوی بالا بـه جای K مقدارش را قرار می‌دهیم :

$$a_1 a_2 \dots a_n K^{2^m - n} <$$

$$\left\{ \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + (2^m - n)\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}{2^m} \right\}^{2^m}$$

$$a_1 a_2 \dots a_n K^{2^m - n} <$$

$$< \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{2^m} = K^{2^m}$$

$$a_1 a_2 \dots a_n < K^n \Longrightarrow$$

$$a_1 a_2 \dots a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n \quad \text{(IV)}$$

اگر درطرفین نامساوی بالا $a\ (i = 1, 2, \dots, n)$ را به $\frac{1}{a_i}$ تبدیل‌کنیم داریم :

$$\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \dots \dots \frac{1}{a_n} < \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \right)^n$$

$$\left\{ \frac{1}{G(a)} \right\}^n < \left\{ \frac{1}{H(a)} \right\}^n \Longrightarrow H(a) < G(a)$$

بدین‌ترتیب ثابت‌کردیم‌که :

$$H(a) < G(a) < A(a)$$

نامساوی کوشی‌شوارز

هرگاه $a_1, a_2, \dots, a_n$; $b_1, b_2, \dots, b_n$ دومجموعه اعداد حقیقی ودلخواه باشند نامساوی زیر برقراراست :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$$

علامت تساوی فقط درصورتی امکان داردکه :

$$a_i = \lambda b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

اثبات : برای اثبات ازنامساوی :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + \mu b_i)^2 \geqslant 0$$

استفاده می‌کنیم‌که درآن μ عددی دلخواه است :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + \mu b_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\mu \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant 0$$

طرف چپ نامساوی بالا یك سه جمله‌ای درجهٔ دوم برحسب μ است که همواره مثبت می‌باشد و چون ضریب درجهٔ دوم $\sum_{i=1}^{n} b_i^2$ مثبت است پس باید $B^2 - AC < 0$ و بالنتیجه :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

یك نامساوی اساسی

قضیه : هرگاه اعداد p و x ازیك بزرگتر باشند برای جمیع مقادیر حقیقی p نامساوی زیر صادق است:

$$x^p - 1 > p(x-1)$$

اثبات : برای اثبات قضیه p را عددی گویا فرض می‌کنیم به‌صورت :

$$p = \frac{r}{s} = \frac{s+t}{s}$$

اگرفرض‌کنیم $y > 1$ دراین صورت داریم :

$$\text{(I)} \quad sy^s = \underbrace{(y^s + y^s + \dots + y^s)}_{s \text{ مرتبه}} >$$

$$> y^0 + y + y^2 + \dots + y^{s-1} = \frac{y^s - 1}{y - 1}$$

اینك اگرفرض‌کنیم‌که y بقسمی انتخاب شده‌که $y^s = x$ ازنامساوی بالا خواهیم داشت :

$$\text{(II)} \quad s(x^{\frac{1}{s}} - 1) > \frac{x-1}{x}$$

حال اتحاد زیررا درنظر می‌گیریم :

$$\text{(III)} \quad \frac{y^{s+1} - 1}{s+1} - \frac{y^s - 1}{s} =$$

$$= \frac{y-1}{s(s+1)}\left\{(y^s - y^{s-1}) + (y^s - y^{s-2}) + \dots (y^s - 1)\right\}$$

اثبات اتحاد بالا به‌ترتیب زیراست :

$$\frac{y^{s+1} - 1}{s+1} - \frac{y^s - 1}{s} =$$

$$= \frac{sy^{s+1} - s - sy^s - y^s + s + 1}{s(s+1)} =$$

$$= \frac{sy^s(y-1) - (y^s - 1)}{s(s+1)} =$$

$$= \frac{y-1}{s(s+1)}\left[sy^s - \frac{y^s - 1}{y-1}\right] =$$

$$= \frac{y-1}{s(s+1)}\left\{sy^s - (y^{s-1} + y^{s-2} + \dots + y + 1)\right\} =$$

$$= \frac{y-1}{s(s+1)}\left\{(y^s - y^{s-1}) + (y^s - y^{s-2}) + \dots + (y^s - 1)\right\}$$

اکنون اتحاد (III) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{y^{s+1} - 1}{s+1} - \frac{y^s - 1}{s} = \frac{(y-1)^2}{s(s+1)}\left\{\frac{y^{s-1}(y-1)}{y-1} + \frac{y^{s-2}(y+1)(y-1)}{y-1} + \dots + \frac{(y^{s-1} + y^{s-2} + \dots + y + 1)(y-1)}{y=1}\right\} +$$

$$= \frac{(y-1)^2}{s(s+1)}\left\{y^{s-1} + y^{s-2}(y+1) + \dots + (y^{s-1} + y^{s-2} + \dots + y + 1)\right\}$$

اگر داخل‌آکولاد را ساده‌کنیم ملاحظه می‌شودکه‌تعداد جمل $\frac{1}{2}s(s+1)$ است وچون $y > 1$ فرض شده در نتیجه خواهیم داشت :

$$\frac{y^{s+1} - 1}{s+1} - \frac{y^s - 1}{s} > \frac{1}{2} \times \frac{(y-1)^2}{s(s+1)} \cdot \frac{s(s+1)}{1}$$

$$\frac{y^{s+1} - 1}{s+1} - \frac{y^s - 1}{s} > \frac{1}{2}(y-1)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{y^{s+t}}{s+t} - \frac{y^{s+t-1} - 1}{s+t-1} > \frac{1}{2}(y-1)^2$$

حال اگر نامساوی بالا را t بار نوشته‌و باهم جمع‌کنیم به‌نامساوی زیر می‌رسیم :

$$\frac{y^{s+t} - 1}{s+t} - \frac{y^s - 1}{s} > \frac{1}{2}t(y-1)^2$$

$$\frac{y^r - 1}{r} - \frac{y^s - 1}{s} > \frac{1}{2}t(y-1)^2$$

$$\frac{x^{\frac{r}{s}} - 1}{\frac{r}{s}} - (x-1) > \frac{1}{2}ts(y-1)^2 > 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{x^p - 1}{p} - (x-1) > 0 \Longrightarrow x^p - 1 > p(x-1)$$

تبصره ـ قضیه برای مقادیراصم p نیز صادق است اما در این حالت قبلا باید x^p را تعریف‌کرد و در اثبات قضیه تغییراتی دادکه از حوصلهٔ این مقال خارج است .

نتایجی‌که ازقضیهٔ بالا استنتاج می‌شود:

۱) هرگاه $0<p<1$ و $x<1$ باشد :

$$x^p-1<p(x-1)$$

زیرا که دراین حال $\frac{1}{p}>1$ و طبق نامساوی اساسی که درقضیهٔ بالا ثابت شد خواهیم داشت:

$$x^{\frac{1}{p}}-1>\frac{1}{p}(x-1)$$

از اینجا باتبدیل $x^{\frac{1}{p}}$ به x بدست می‌آید :

$$x^p-1<p(x-1)$$

۲) هرگاه چهارعدد مثبت αوβ وaوb را داشته باشیم بقسمی که $\alpha+\beta=1$ و $a\neq b$ باشد در این صورت خواهیم داشت :

$$a^{\alpha}b^{\beta}<a\alpha+b\beta$$

اولا از اینکه $\alpha+\beta=1$ است نتیجه می‌گیریم که $0<\alpha<1$ و $0<\beta<1$ وازاینکه $a\neq b$ است می‌توان فرض‌کرد $a>b$.

حال اگر $\frac{a}{b}=x$ قرار دهیم بااستفاده از نتیجهٔ (۱) داریم :

$$x^{\alpha}-1<\alpha(x-1)\Longrightarrow(\frac{a}{b})^{\alpha}<$$

$$<1+\alpha(\frac{a}{b}-1)\Longrightarrow a^{\alpha}.b^{-\alpha}<(1-\alpha)+\frac{a\alpha}{b}$$

$$\Longrightarrow a^{\alpha}.b^{1-\alpha}<b(1-\alpha)+a\alpha$$

ولی چون $\beta=1-\alpha$ است پس :

$$a^{\alpha}.b^{\beta}<b\beta+a\alpha$$

نامساوی هلدر

قضیه : هرگاه اعداد مثبت a_1 و a_2و...وa_n و b_1 و b_2و...وb_n و p و q را داشته باشیم بقسمی‌که : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ باشد دراین‌صورت داریم :

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i<\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}.\left\{\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

تساوی فقط درصورتی امکان داردکه داشته باشیم :

$a_i^p=\lambda b_i^q(i=1$و2و...و$n)$ که درآن λ عدد ثابتی‌است.

اثبات : بنابر نتیجهٔ (۲) ازقضیهٔ قبل می‌دانیم که‌هرگاه $\frac{a_i}{\Sigma a_i}\neq\frac{b_i}{\Sigma b_i}$ باشد داریم :

$$\frac{\Sigma a_i^{\alpha}b_i^{\beta}}{(\Sigma a_i)^{\alpha}(\Sigma b_i)^{\beta}}=\Sigma(\frac{a_i}{\Sigma a_i})^{\alpha}.(\frac{b_i}{\Sigma b_i})^{\beta}<\Sigma(\frac{\alpha a_i}{\Sigma a_i}+$$

$$+\frac{\beta b_i}{\Sigma b_i})=\alpha\frac{\Sigma a_i}{\Sigma a_i}+\beta\frac{\Sigma b_i}{\Sigma b_i}=\alpha+\beta=1\Longrightarrow$$

$$\frac{\Sigma a_i^{\alpha}b_i^{\beta}}{(\Sigma a_i)^{\alpha}(\Sigma b_i)^{\beta}}<1\Longrightarrow\Sigma a_i^{\alpha}.b_i^{\beta}<(\Sigma a_i)^{\alpha}(\Sigma b_i)^{\beta}$$

هرگاه در نامساوی بالا a_i^{α} و b_i^{β} را به ترتیب به a_i وb_i تبدیل‌کرده و همچنین $\alpha=\frac{1}{p}$ و $\beta=\frac{1}{q}$ قرار دهیم به‌نتیجهٔ مطلوب خواهیم رسید :

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i<\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}.\left\{\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

(شرط تساوی درصورت قضیه ذکر شده است)

نتیجه : با مفروضات قضیهٔ بالا خواهیم داشت :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i<\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}.\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

نامساوی مینکوفسکی

قضیه : هرگاه $M_p(a)\equiv(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}$ باشدکه درآن اعداد $a_i(i=1$و2و...و$n)$ مثبت و $p>1$

است در این صورت خواهیم داشت :

$$M_p(a+b)<M_p(a)+M_p(b)$$

علامت تساوی فقط درصورتی امکان داردکه :

$a_i=\lambda b_i (i=1,2,\dots,n)$ (λ عدد ثابتی است)

اثبات ـ طریقهٔ اول با استفادهٔ از قضیهٔ هلدر

برای این منظور فرض می‌کنیم :

$$S\equiv\Sigma(a_i+b_i)^p$$

$$(I)\quad S=\Sigma(a_i+b_i)(a_i+b_i)^{p-1}=$$

$$=\Sigma a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\Sigma b_i(a_i+b_i)^{p-1}$$

ازطرفی چون $p>1$ پس $\frac{1}{p}<1$ و q (همان عددqکه درقضیهٔ هلدر بکاررفت)برابر $\frac{p}{p-1}$ می‌باشد با بکار بردن نامساوی هلدر برای دو مجموع طرف راست اتحاد (I) با فرض :

$(a_i+b_i)^{p-1}=c_i$ داریم :

$$\Sigma a_i(a_i+b_i)^{p-1}=\Sigma a_ic_i<\left\{\Sigma a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}.\left\{\Sigma c_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left\{\Sigma a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\Sigma(a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

بهمین ترتیب :

$$\Sigma q_i(a_i+b_i)^{p-1}<\left\{\Sigma b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}.\left\{\Sigma(a_i+q_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$S\equiv\Sigma a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\Sigma b_i(a_i+b_i)^{p-1}<$$

$$\Bigg(\underbrace{\left\{\Sigma a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}}_{M_p(a)}+\underbrace{\left\{\Sigma b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}}_{M_p(b)}\Bigg)\underbrace{\left\{\Sigma(a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}}}_{S}\Longrightarrow$$

$$S^{1-\frac{1}{q}}<M_p(a)+M_p(b)\Longrightarrow S^{\frac{1}{p}}<M_p(a)+$$

$$+M_p(b)\Longrightarrow M_p(a+b)<M_p(a)+M_p(b)$$

توابع محدب و مقعر : تابع $\varphi(t)$ راکه در فاصلهٔ $[\alpha$ و $\beta]$ معین است درنظر می‌گیریم . تابع نامبرده را دراین فاصله محدب گویند هرگاه برای هر زوج متمایز t_1 و t_2 از فاصلهٔ مزبور نامساوی :

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}$$

برقرار باشد ، اگربه‌جای علامت $<$ فقط علامت $>$ جایگزین شودتابع را مطلقاًمحدب گویند. به‌همین ترتیب اگرنامساویهای

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)>\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}$$

و یا :

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)>\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}$$

برقرار باشد تابع $\varphi(t)$ را مقعر و یا مطلقاً مقعر می‌نامند .

قضیه : هرگاه تابع $\varphi(t)$ در فاصلهٔ $[\alpha$ و $\beta]$ معین و $\varphi''(t)$وجود داشته و مخالف صفر باشد دراین صورت $\varphi(t)$ مطلقاً مقعر یا محدب است بر حسب آنکه $\varphi''(t)$ منفی یا مثبت باشد .

اثبات :فرض‌کنیم‌که t_1 و t_2 $(t_2>t_1)$ دونقطهٔدلخواه واقع در فاصلهٔ فوق باشد دراین صورت با استفادهٔ از **بسط تیلور** خواهیم داشت :

$$\varphi(t_1)=\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\frac{t_1-t_2}{2}\varphi'\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+$$

$$+\frac{(t_1-t_2)^2}{8}\varphi''(\tau_1)$$

$$\varphi(t_2)=\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\frac{t_2-t_1}{2}\varphi'\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+$$

$$+\frac{(t_2-t_1)^2}{8}\varphi''(\tau_2)$$

$$t_1<\tau_1<\frac{t_1+t_2}{2}<\tau_2<t_2$$

$$\varphi(t_1)+\varphi(t_2)=$$

$$2\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\frac{(t_1-t_2)^2}{8}[\varphi''(\tau_1)+\varphi''(\tau_2)]$$

ملاحظه می‌شودکه اگر $\varphi''(t)>0$ باشد :

$$\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}>\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

و اگر $\varphi''(t)<0$ باشد :

$$\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}<\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

و بدین ترتیب قضیه اثبات شد .

قضیه : هرگاه تابع در فاصلهٔ $[\alpha$ و $\beta]$ مطلقاً محدب باشد و اگر $\varphi''(t)$ وجود داشته باشد $\varphi''(t)<0$

اثبات : هرگاه h مثبت باشد و نقاط $t\pm h$ در فاصلهٔ

$[\alpha و \beta]$ باشند در این صورت چون تابع $\varphi(t)$ مطلقاً محدب است داریم :

$$2\varphi(t) > \varphi(t-h) + \varphi(t+h)$$

و سپس با استفادهٔ از بسط تیلور :

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + h\varphi'(t) + \frac{h^2}{2}[\varphi''(t) + \varepsilon_1]$$

$$\varphi(t-h) = \varphi(t) - h\varphi'(t) + \frac{h^2}{2}[\varphi''(t) + \varepsilon_2]$$

که ε_1 و ε_2 با h به‌سمت صفرمیل می‌کنند. روابط‌بالارا با هم جمع می‌کنیم :

$$\varphi(t+h) + \varphi(t-h) = 2\varphi(t) + \frac{h^2}{2}[2\varphi''(t) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$$

چون بنا بفرض :

$$2\varphi(t) > \varphi(t+h) + \varphi(t-h)$$

است لذا :

$$\frac{h^2}{2}[2\varphi''(t) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2] < 0$$

یا :

$$2\varphi''(t) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0$$

حال هنگامی‌که $h \to 0$ چون ε_1 و ε_2 به‌سمت صفرمیل‌می‌کنند پس $\varphi''(t) < 0$ یعنی در جمیع نقاط فاصلهٔ $[\alpha$ و $\beta]$ داریم : $\varphi''(t) < 0$ به‌همین ترتیب ثابت می‌شود وقتی‌که $\varphi(t)$ در فاصلهٔ $[\alpha$ و $\beta]$ مطلقاً مقعر است $\varphi''(t) \geqslant 0$ می‌باشد .

تعمیم خاصیت تحدب : می‌توان خاصیت تحدب توابع را توسط قضیهٔ زیر تعمیم داد .

قضیه : هرگاه n مقدار دلخواه t_1 و t_2 و... و t_n ، به فاصلهٔ $[\alpha$ و $\beta]$ تعلق داشته وتابع $\varphi(t)$ دراین فاصله‌محدب باشد دراین صورت داریم :

$$\varphi\left(\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}\right) \leqslant \frac{\varphi(t_1) + \varphi(t_2) + \dots + \varphi(t_n)}{n}$$

اثبات : می‌دانیم که :

$$\varphi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leqslant \frac{\varphi(t_1) + \varphi(t_2)}{2} \qquad (I)$$

از طرفی با استفاده از همین نامساوی داریم :

$$\varphi\left(\frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}\right) \leqslant \frac{\varphi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) + \varphi\frac{(t_3 + t_4)}{2}}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{\varphi(t_1) + \varphi(t_2)}{2} + \frac{\varphi(t_3) + \varphi(t_4)}{2}}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \varphi\left(\frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}\right) \leqslant$$

$$\frac{\varphi_1(t_1) + \varphi(t_2) + \varphi(t_3) + \varphi(t_4)}{4}$$

فرض می‌کنیم قضیه برای $n = 2^{m-1}$ صادق باشد یعنی :

$$\varphi\left(\frac{t_1 + \dots + t_{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}}\right) \leqslant \frac{\varphi(t_1) + \dots + \varphi(t_{\frac{m-1}{2}})}{2^{m-1}} \qquad (II)$$

می‌خواهیم‌ثابت‌کنیم که‌قضیه برای $n = 2^n$ نیزصادق‌است‌یعنی

$$\varphi\left(\frac{t_1 + \dots + t_{\frac{m-1}{2}} + \dots + t_{\frac{m}{2}}}{2^m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varphi(t_1) + \dots + \varphi(t_{\frac{m}{2}})}{2^m}$$

باستفاده از نامساوی (I) خواهیم داشت :

$$\varphi\left(\frac{t_1 + \dots + t_{\frac{m-1}{2}} + \dots t_{\frac{m}{2}}}{2^m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varphi\left(\frac{t_1 + \dots + t_{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}}\right) + \varphi\left(\frac{t_{\frac{m-1}{2}+1} + \dots + t_{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}}\right)}{2}$$

حال از نامساوی (II) استفاده می‌کنیم :

$$\leqslant \frac{\frac{\varphi(t_1) + \varphi(t_2) + \dots + \varphi(t_{\frac{m-1}{2}})}{2^{m-1}} + \frac{\varphi(t_{\frac{m-1}{2}+1}) + \dots + \varphi(t_{\frac{m}{2}})}{2^{m-1}}}{2} \Longrightarrow$$

$$\varphi\left(\frac{t_1 + \dots + t_{\frac{m-1}{2}} + t_{\frac{m-1}{2}+2} + \dots + t_{\frac{m}{2}}}{2^m}\right) \leqslant$$

$$\frac{\varphi(t_1) + \dots + \varphi(t_{\frac{m-1}{2}}) + \varphi(t_{\frac{m-1}{2}+1}) + \dots + \varphi(t_{\frac{m}{2}})}{2^m}$$

در اثبات بالا فرض‌کردیم : $n = 2^m$ باشد حال ، حالت کلی را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم :

$$K=\frac{t_1+t_2+\dots+t_n}{n}$$

فرض می‌کنیم که n متعلق به مجموعهٔ $\{2, 4, 8, \dots, 2^m, \dots\}$ نباشد. اگر 2^m عضوی از مجموعه باشد که بلافاصله از n بزرگتر است، به اعداد $t_1, t_2, \dots, t_n$، (2^m-n) عامل مساوی با K می‌افزائیم. طبق اثبات بالا خواهیم داشت:

$$\varphi\left\{\frac{\overbrace{t_1+t_2+\dots+t_n}^{nK}+(2^m-n)K}{2^m}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\dots+\varphi(t_n)+(2^m-n)\varphi(K)}{2^m}$$

$$\varphi\left\{\frac{nK+(2^m-n)K}{2^m}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varphi(t_1)+\dots+\varphi(t_n)+(2^m+n)\varphi(K)}{2^m}$$

$$2^m\varphi(K)\leqslant\varphi(t_1)+\dots+\varphi(t_n)+2^m\varphi(K)-n\varphi(K)\Longrightarrow$$

$$n\varphi(K)\leqslant\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\dots+\varphi(t_n)\Longrightarrow$$

$$\varphi\left(\frac{t_1+\dots+t_n}{n}\right)\leqslant\frac{\varphi(t_1)+\dots+(t_n)}{n}$$

و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل گردید.

قضیه جانسن

فرض می‌کنیم که اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ مثبت ودلخواه باشند و اگر $\varphi(t)$ در فاصلهٔ $[\alpha \text{ و } \beta]$ محدب و $\varphi''(t)$ وجود داشته باشد در این‌صورت:

$$\varphi\left(\frac{a_1t_1+\dots+a_nt_n}{a_1+\dots+a_n}\right)\leqslant\frac{a_1\varphi(t_1)+\dots+a_n\varphi(t_n)}{a_1+\dots+a_n}$$

اثبات: چون $\varphi(t)$ محدب است لذا $\varphi''(t)\geqslant 0$ وبافرض

$$\frac{a_1t_1+\dots+a_nt_n}{a_1+\dots+a_n}=h \quad (I)$$

و استفاده از بسط تیلور خواهیم داشت:

$$\varphi(t_i)=\varphi(h)+(t_i-h)\varphi'(h)+$$

$$+\frac{(t_i-h)^2}{2}\varphi''(\tau_i)t_i<\tau_i<h$$

$$a_i\varphi(t_i)=a_i\varphi(h)+a_i(t_i-h)\varphi'(h)+$$

$$+a_i\frac{(t_i-h)^2}{2}\varphi''(\tau_i)$$

اگر دررابطهٔ بالا i را ازیك تا n تغییر داده‌وبستگیهای حاصل را باهم جمع کنیم داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi(t_i)=\varphi(h)\sum_{i=1}^{n}a_i+\varphi'(h)\sum_{i=1}^{n}a_i(t_i-h)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(t_i-h)^2}{2}\varphi''(\tau_i)$$

اکنون با در نظر گرفتن رابطهٔ (I) ملاحظه می‌شود که:

$$\varphi'(h)\sum_{i=1}^{n}a_i(t_i-h)=0$$

پس:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi(t_i)}{\sum_{i=1}^{n}a_i}=$$

$$=\varphi(h)+\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(t_i-h)^2}{2}\varphi''(\tau_i)}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$$

چون $\frac{a_i(t_i-h)^2}{2}\varphi''(\tau_i)\geqslant 0$ و $\sum_{i=1}^{n}a_i>0$

است پس:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi(t_i)}{\sum_{i=1}^{n}a_i}>\varphi(h)\Longrightarrow\frac{a_1\varphi(t_1)+\dots+a_n\varphi(t_n)}{a_1+a_2+\dots+a_n}>$$

$$>\varphi\left(\frac{a_1t_1+\dots+a_nt_n}{a_1+a_2+\dots+a_n}\right)$$

اگر تابع $\varphi(t)$ در فاصلهٔ $[\alpha \text{ و } \beta]$ متصل ومحدب باشد علامت تساوی فقط درصورتی امکان پذیر است که یا t_i ها با هم‌برابر باشند یا $\varphi(t)$ در این فاصله خطی باشد $[\varphi''(t)\equiv 0]$.

طریقهٔ دوم اثبات نامساوی مینکوفسکی.

صورت کامل قضیهٔ مینکوفسکی چنین است :

$$M_p(a+b) < M_p(a) + M_p(b) \quad ، \quad p > 1$$

$$M_p(a+b) > M_p(a) + M_p(b) \quad ، \quad p < 1$$

علامت تساوی فقط درصورتی امکان دارد که داشته باشیم:

$a_i = \lambda b_i (i = 1$ و 2 و ... و $n)$ (λ عدد ثابتی است) یا $p = 1$

اثبات : فرض می‌کنیم $p \neq 0$ و قرار می‌دهیم :

$A_i = ta_i + (1-t)b_i (i = 1$ و ... و $n)$ و $(0 < A < 1)$

و همچنین فرض می‌کنیم :

$$\varphi(t) = M_p(A) \equiv (A_1^p - A_2^p + \ldots + A_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

چون $\varphi''(t)$ وجود دارد لذا علامت آن تحدب یا تقعر تابع $\varphi(t)$ رادر فاصلهٔ [۱ و ۰] مشخص می‌کند . حال $\varphi''(t)$ را حساب می‌کنیم $\quad A'_i = a_i - b_i$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{p}(A_1^p + A_2^p + \ldots + A_n^p)^{\frac{1}{p}-1} \times$$

$$\times \left\{ p(a_1 - b_1)A_1^{p-1} + p(a_2 - b_2)A_2^{p-1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + p(a_n - b_n)A_n^{p-1} \right\}$$

$$\varphi''(t) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)(A_1^p + A_2^p + \ldots + A_n^p)^{\frac{1}{p}-2} \times$$

$$\times \left\{ p(a_1 - b_1)A_1^{p-1} + p(a_2 - b_2)A_2^{p-1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + p(a_n - b_n)A_n^{p-1} \right\}$$

$$\left\{ (a_1 - b_1)A_1^{p-1} + (a_2 - b_2)A_2^{p-1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (a_n - b_n)A_n^{p-1} \right\} +$$

$$\left\{ (p-1)(a_1 - b_1)^2 A_1^{p-2} + (p-1)(a_2 - b_2)^2 A_2^{p-2} \right.$$

$$\left. + \ldots + (p-1)(a_n - b_n)^2 A_n^{p-2} \right\} \times$$

$$\times (A_1^p + A_2^p + \ldots + A_n^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$\varphi''(t) = (1-p)(A_1^p + A_2^p + \ldots + A_n^p)^{\frac{1}{p}-2} \times$$

$$\times \left\{ (a_1 - b_1)A_1^{p-1} + (a_2 - b_2)A_2^{p-1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (a_n - b_n)A_n^{p-1} \right\}^2 +$$

$$+ (p-1)\left\{ (a_1 - b_1)^2 A_1^{p-2} + (a_2 - b_2)^2 A_2^{p-2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + a_n - b_n)^2 A_n^{n-2} \right\} (A_1^p + A_2^p + \ldots + A_n^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$\varphi''(A) = (p-1)\left\{ A_1^p - A_2^p + \ldots + A_n^p \right\}^{\frac{1}{p}-2} \times$$

$$\times \left[(A_1^p + A_2^p + \ldots + A_n^p) \right.$$

$$\left\{ A_1^{p-2}(a_1 - b_1)^2 + \ldots + A_n^{p-2}(a_n - b_n)^2 \right\} -$$

$$\left. \left\{ A_1^{p-1}(a_1 - b_1) + \ldots + A_n^{p-1}(a_n - b_n) \right\}^2 \right]$$

حال اگر فرض کنیم که :

$$A_i^{\frac{p}{2}-1}(a_i - b_i) = d_i \text{ و } A_i^{\frac{p}{2}} = c_i$$

بنابر نامساوی کوشی داریم :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i d_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \right)$$

داخل کروشه مثبت است و چون :

$$\left\{ A_1^p + A_2^p + \ldots + A_n^p \right\}^{\frac{1}{p}-2}$$

نیز مثبت است لذا علامت $\varphi''(t)$ وابسته به علامت $p-1$ است . اینك فرض می‌کنیم که $t_1 = 0$ و $t_2 = 1$ باشد .

بااستفادهٔ ازقضیهٔ مربوط به تحدب و تقعر تابع $\varphi(t)$

$$\begin{cases} \varphi(0) + \varphi(1) \geq 2\varphi(\frac{1}{2}) \ (\mathrm{I}) \ \varphi''(t) > 0 \ ، \ (p > 1) \\ \varphi(0) + \varphi(1) \leq 2\varphi(\frac{1}{2}) \ (\mathrm{II}) \ \varphi''(A) < 0 \ ، \ (p < 1) \end{cases}$$

$$\varphi(0) = M_p(b)$$

$$\varphi(1) = M_p(a)$$

$$2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = M_p(a+b)$$

با توجه‌به نامساویهای(I)و (II) و روابط بالا خواهیم‌داشت:

$$M_p(a) + M_p(b) \geq M_p(a+b) \quad , \quad p > 1$$

$$M_p(a) + M_p(b) \leq M_p(a+b) \quad , \quad p < 1$$

و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل گردید .

نتایجی از قضیهٔ جانسن

(I)تعمیم قضیهٔ میانگینهای حسابی ، هندسی وتوافقی

هر گاه تابع $\varphi(t)$ برابر $-\log t$ اختیار شود .(لگاریتم درپایهٔeاست). $\varphi''(t) = \frac{1}{t^2} > 0$است.اگر t مثبت باشد زیرا اعداد منفی لگاریتم ندارند . بنابراین $\varphi(t)$ مطلقاً محدب‌است در هر فاصله‌ای‌که t مثبت باقی بماند .

حال با استفاده از قضیهٔ جانسن نتیجه می‌شودکه هر گاه a_1 و a_2 و ... و a_n ؛ t_1 و t_2 و ... و t_n همگی‌مثبت‌باشندو t_i ها همه باهم برابر نباشند :

$$(K) \qquad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\frac{a_1}{t_1} + \frac{a_2}{t_2} + \dots + \frac{a_n}{t_n}} <$$

$$< \exp\left(\frac{a_1 \log t_1 + a_2 \log t_2 + \dots + a_n \log t_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}\right) <$$

$$< \frac{a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

[مقصود از $\exp(u)$ یعنی e^u]

نیمهٔ دوم نامساوی مضاعف بالا بـه این ترتیب اثبات می‌شود.طبق نامساوی جانسن داریم :

$$-\log\left(\frac{a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}\right) <$$

$$< \frac{-a_1 \log t_1 - a_2 \log t_2 - \dots - a_n \log t_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

از نامساوی بالا بدست می‌آید :

$$e^{\log\left(\frac{a_1 t_1 + \dots + a_n t_n}{a_1 + \dots + a_n}\right)} > e^{\frac{a_1 \log t_1 + \dots + a_n \log t_n}{a_1 + \dots + a_n}}$$

وچون $e^{\log A} = A$ وهمچنین $e^u = \exp(u)$ پس نتیجـه می گیریم که :

$$\frac{a_1 t_1 + \dots + a_n t_n}{a_1 + \dots + a_n} > \exp\left(\frac{a_1 \log t_1 + \dots + a_n \log t_n}{a_1 + \dots + a_n}\right)$$

اگـر در نامساوی بـالا (n و . . . ۲ و ۱ = i)t_i را به $\frac{1}{t_i}$ تبدیل کنیم نیمهٔ اول نامساوی (K) نیز اثبات می‌شود .

II) نامساوی جانسن

هر گاه a_1وa_2و...وa_n اعداد مثبت و دلخواه باشند در این‌صورت وقتی $0 < r < s$ باشد داریم :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

وقتی‌که $0 < r < s$ فرض می کنیم :

$$\psi(t) = (a_1^t + a_2^t + \dots + a_n^t)^{\frac{1}{t}} =$$

$$= (A_1 + A_2 + \dots + A_n)^{\frac{1}{t}}$$

که درآن $A_i = a_i^t (i = 1, 2, \dots, n)$

برای اثبات کافی است نشان دهیم‌که $\psi(t)$ تابعی نزولی از t است . به‌عبارت دیگر باید ثابت کنیم که $\psi'(t) < 0$ ، برای این منظور از $\psi(t)$ مشتق لگاریتمی می گیریم :

$$t^2 \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{A_1 \log A_1 + \dots + A_n \log A_n}{A_1 + \dots + A_n} -$$

$$- \log(A_1 + \dots + A_n)$$

با استفاده‌از تعمیم‌قضیهٔ میانگینهاکه درنتیجهٔاول بیان‌شدداریم:

$$\frac{A_1 \log A_1 + \dots + A_n \log A_n}{A_1 + \dots + A_n} <$$

$$< \log\left(\frac{A_1^2 + \dots + A_n^2}{A_1 + \dots + A_n}\right) < \log(A_1 + \dots + A_n)$$

نـــــور

ترجمهٔ : حسین فرمان

مقدمه : یکی از مباحث بسیار مهم درفیزیك مبحث نور (اپتیك) است که ازماهیت و انتشار وخواص نور و دستگاههای نوری بحث می کند . علم نور را می‌توان به ترتیب شناخت و توصیفی که ازآن با دیدهای مختلف بعمل آمده‌است به سه‌نوع تقسیم‌بندی‌نمود:

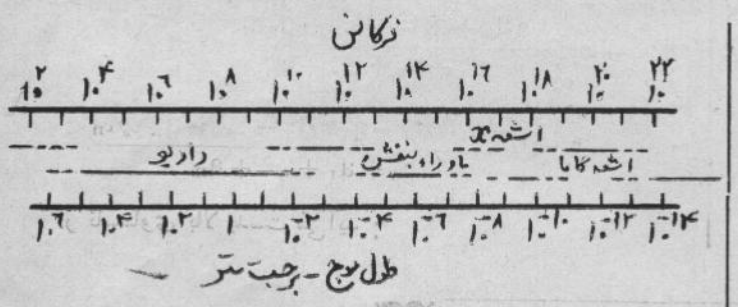
۱ــ نور هندسی که متکی به «اصل انتشار مستقیم‌الخط نور» بوده وقوانین دکارت پایه‌های آنرا تشکیل می‌دهد .

۲ــ نور تموجی که درآن نور به عنوان یك پدیدهٔ موجی شناخته‌وثابت‌شده‌وبسیاری ازمسائل‌راکه‌نورهندسی قادر به‌توجیه‌آن نیست روشن‌می‌گرداند .

۳ــ نورکوانتیك که‌درآن از خاصیت ذره‌ای بودن نوراستفاده شده وبه کمك‌قوانین مکانیك موجی اثرنور وماده را برروی هم بررسی می کند .

درفیزیك دبیرستانی مبحث نور هندسی درسال پنجم ونور موجی (بطورمختصر) درسال ششم بیان‌گردیده است. ترجمهٔ زیر خواص وانتشارنوررا که عموماً از هرسه‌تقسیم‌بندی فوق استفاده شده (با حذف معادلات و بحثهای مکانیك موجی) و کمتر در کتب دبیرستانی مورد مداقه قرارگرفته است بررسی می کند .

طبیعت و انتشارنورــ نورجزئی از یك‌طیف الکترو-مغناطیسی است که بوسیلهٔ **ماکسوئل** شناخته شده است (مطابق شکل) تمام امواجی‌که دراین طیف مشاهده می‌کنید امواج الکترومانیتیك است وتمام آنها دریك فضای‌آزاد با سرعت ثابت (سرعت نور) منتشر می‌شوند . تنها تفاوت امواج مختلف، متفاوت بودن طول موج (وبالنتیجه فرکانس) آنها است واین اختلاف هم به‌علت وجود تفاوتی است که در



منابع سازندهٔ آنها است . طیف الکترومانیتیك حدود مشخصی

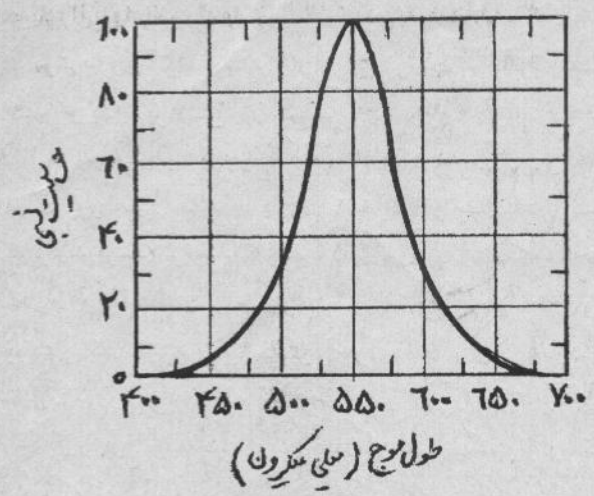
ندارد. تمام تواترهای نشان داده شده در شکل را می‌توان ایجادکرد. مثلا، می‌توانیم تابشهائی باطول موج 10^{-3} متر بوسیلهٔ میکروویو (نوسان سازهای میکرو ویو) و یا بوسیلهٔ طیف ماوراء قرمز تولیدکنیم.

جزئی‌از طیف الکترومانیتیک‌که می‌تواند چشم را متأثر کند نورمرئی است چنانکه ازشکل پیداست ناحیه‌ای‌که‌بوسیلهٔ چشم قابل رؤیت است ناحیهٔ بسیارمحدودی ازنظرطول موج است. در اپتیک طول موج را با واحدهایی از قبیل میکرون (μ) و میلی میکرون ($m\mu$) و آنگستروم (A) اندازه می‌گیرند بقسمی‌که:

$$1\mu = 10^{-6}m$$
$$1m\mu = 10^{-9}m$$
$$1A = 10^{-10}m$$

حدودّ دقیق طیف مرئی خوب مشخص نیست وباتقریبی در حدود $\frac{1}{100}$ می‌توان گفت این حدود بین ۴۳۰۰A تا ۶۹۰۰A است واگرچشم خوب‌حساس باشد ماوراء این‌حدود را نیزتشخیص می‌دهد.

ازحدود اشعهٔ مرئی (که بسیارمحدودند) به‌طرف طول‌موجهای‌کوتاه یا بلند به دو دسته اشعهٔ غیر مرئی می‌رسیم. این نواحی را ماوراء قرمز وماوراء بنفش می‌خوانیم. اشعهٔ ماوراء بنفش را بوسیلهٔ خاصیت شیمیائی زیادشان می‌شناسیم. ازطول موج ۳۵۰۰ آنگستروم به پائین شیشه برای اشعهٔ محیط کدر می‌شود ولی محیطهائی ازقبیل‌کوارتز متبلور محیط شفاف ومناسب این اشعه هستند، ولی این قبیل اجسام‌هم تا طول موجی حدود ۱۸۵۰ آنگستروم اشعه رااز خود عبور می‌دهد. بطور خلاصه وسائل مختلفی‌که تا۱۰۰ آنگستروم نوررا از خود عبور دهد شناخته شده است. (هرسری وسایل تا حدودی از طول موجها را از خود عبور می‌دهند) طول موجهای کوتاه‌ترناحیهٔ اشعهٔ x راتشکیل می‌دهندکه تا ۰/۰۵ آنگستروم است پس‌از آن اشعهٔ گاما (γ) که بوسیلهٔ اجسام رادیوآکتیو تولید می‌شود واز ۰/۰۰۱آنگستروم به‌بعد اشعهٔ کیهانی است‌که طول موج‌آنها فوق‌العاده‌کوتاه است. ازطول موجهای مرئی‌که به‌طرف امواج باطول موج بلند پیش رویم به‌ترتیب به ماوراء قرمز ـ امواج رادار ـ تلویزیون‌ـامواج رادیو (کوتاه ـ بلند) می‌رسیم.



شکل بالا منحنی حساسیت چشم رابرای طول موجهای مختلف نشان می‌دهد. ماکزیمم این حساسیت در حدود طول موج $5/55 \times 10^{-7}$ متراست. نوری‌که این طول موج را ایجاد می‌کند حدود رنگهای زرد وسبزاست.

۲ـ سرعت نور ـ با مقایسهٔ سرعتهای معمولی‌که در تجربیات روزانه می‌شناسیم، سرعت نور به قدری زیاد است که دلیلی وجود ندارد ثابت‌کند این سرعت بینهایت نیست.

گالیله یکی‌از دانشمندانی بودکه از خود سؤال کرد چگونه سرعت نوررا می‌توان تعیین‌کرد؟ وی دراثر بزرگ خود «دوعلم جدید» که در سال ۱۶۳۸ درهلند منتشرشد به‌شکل یك مکالمه بین سه شخص فرضی (خیالی) به نامهای Salviati و Sagredo و Simplico نوشته‌است و در اینجا قسمتی از این مکالمات را که بین‌آنها رد و بدل می‌شود نقل می‌کنیم:

Simplico ـ تجربه و آزمایش روزمره نشان می‌دهد که انتشارنورآنی است زیرا وقتی در فاصلهٔ بسیار زیادی یك جرقه یانوری ساطع شود آناً به‌چشم مامی‌رسد درحالی‌که صدا پس‌از یك مدت قابل ملاحظه به‌گوش می‌رسد.

Sagredo ـ بسیارخوب Simplico، تنها استنباطی که ازاین تجربه می‌توان کرد آنست‌که نور خیلی سریعتر از صوت به ما می‌رسد یعنی‌سرعت نورخیلی بیشتر ازصوت است ولی‌شاید این سرعت ((بینهایت)) نباشد.

Sagredo (که ازقرار معلوم خودگالیله است) یك روش عملی برای تعیین سرعت نور پیشنهاد می‌کند. اوبه‌کمك

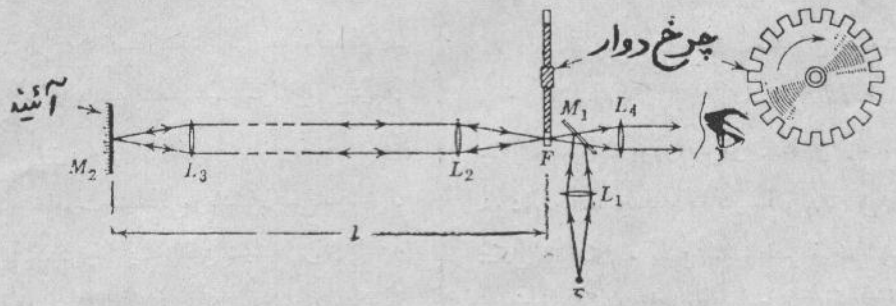
دستیارش در یك شب تاریك درفاصلهٔ معینی‌مقابل‌هم‌می‌ایستند. هریك ازآنها فانوسی با خود دارندکه به دلخواه می‌توانند با سرپوشی روی‌آنرا بپوشند (وبه این ترتیب نورآنرا پنهان کنند) و یا با برداشتن آن شخص دوم نور را بتواند ببیند . گالیله سرپوش را از چراغ برمی‌داشت و دستیارش به محض دیدن نور همین عمل را با چراغ خود انجام می‌داد تا نور به گالیله برسد. درچند تجربه با اندازه‌گیری زمان چون‌فاصله معلوم بود اعدادی برای سرعت نور (نتایج آزمایشات تفاوت زیادی باهم داشتند) پیدا می‌کرد. برای فاصله‌ای درحدود یك مایل امروزه می‌دانیم‌که زمان لازم برای آزمایش گالیله فقط ۱۱×۱۰^{-۶} ثانیه است واین زمان به مراتب‌کمتراز زمانی است که اصطلاحاً زمان واکنش (عکس‌العمل) نامیده می‌شود (زمان واکنش در اینجا مدتی است‌که طول می‌کشد تا پس از دیدن نورشروع به‌کار برداشتن سرپوش شود) . بنابراین این آزمایشات به‌هیچ وجه نمی‌توانست نتیجهٔ صحیح بدست دهدو باشکست مواجه شد .

برای اندازه‌گیری سرعت‌زیادی مثل نور یابایدزمانهای بینهایت کوچك را بطور دقیق اندازه‌گرفت یا فاصله را بسیار بزرگ (فواصل نجومی) انتخاب کرده و برای این‌کار باید از ستاره شناسی وهیئت استفاده شود . با استفادهٔ از این علوم و به کمك علامات میکرو ویو (Microwaves) که از ماه یا زهره منعکس شده استفاده کرده و سرعت نور را تعیین نموده‌اند .

درسال۱۶۷۵ **روامر** (ole Roemer)منجم‌دانمارکی که در پاریس مشغول کار بود بوسیلهٔ اندازه‌گیری دوره‌های اقمارمشتری ، سرعت نوررا برابر با $۲ \times ۱۰^{۸} m/s$ پیداکرد. این عدد صحیح نبود ولی پایهٔ آزمایشهای دقیق بعدی بشمار می‌آید .

تقریباً ۵۰ سال بعد **جیمزبرادلی** (James Bradley) منجم انگلیسی مشاهدات نجومی دیگری بعمل آورد که به ـ وسیلهٔ آنها سرعت نور برابر با $۳/۰ \times ۱۰^{۸} m/s$ استنباط شده است.

درسال ۱۸۴۹ **فیزو** (Hippolyte Louis Fizeau) فیزیکدان فرانسوی نوررا با روشی غیرنجومی اندازه‌گرفت و نتیجهٔ این اندازه‌گیری عدد $۳/۱۳ \times ۱۰ m/s$ بود . شکل زیر دستگاه آزمایش فیزو را نشان می‌دهد .



ابتدا چرخ دندانه‌دار را نادیده بگیرید. نور منبع S بوسیلهٔ عدسی L_1 متمرکزشده و پس‌از انعکاس ازآئینهٔ M_1 در فضا درنقطه‌ای مانند F تصویرش تشکیل می‌شود.آئینهٔ M_1 که (نیم نقره‌ای) است یعنی پوشش انعکاسی‌آن به‌قدری نازك است‌که فقط نیمی‌ازنورکه به‌آن می‌تابد منعکس می‌شود ونیم دیگرازآن می‌گذرد . نور تصویر F داخل عدسی L_2 شده و تبدیل به‌اشعهٔ موازی می‌شود و پس از گذشتن از عدسی L_2 توسط آئینهٔ M_2 منعکس می‌شود. درتجربهٔ فیزو فاصلهٔ l بین M_2 و F به‌اندازهٔ ۸۶۳۰ متر ویا ۵/۳۶ مایل بود. وقتی‌که نور دوباره به‌آینهٔ M_1 برخورد کند مقداری از آن گذشته و بوسیلهٔ عدسی L_4 به‌چشم ناظر می‌رسد. ناظرتصویررا که راه ۲l را مابین چرخ وآینهٔ M_2 پیموده و برگشته است خواهد دید . اکنون فرض‌کنید چرخ دندانه‌دار شکل جلو شکاف F قرارگرفته باشد . هرلحظه‌که یکی از دندانه‌ها مقابل شکاف قرارگیرد نور نمی‌تواند از آن بگذرد و به‌چشم ناظر برسد . ودرلحظاتی‌که فاصلهٔ بین دو دندانه (فرورفتگی) مقابل شکاف باشد نور به چشم می‌رسد . ممکن است سرعت‌حرکت دورانی چرخ دندانه را طوری انتخاب کردکه نور به چشم برسد . فیزو سرعت را ازصفر به‌تدریج تغییرداد تا جایی‌که مدت‌لازم برای رفت و برگشت نور $\left(t = \frac{۲l}{c}\right)$ درست برابر مدتی باشدکه چرخ دندانه‌دار به‌اندازهٔ یك دندانه بچرخد . بنابراین اگر زاویهٔ دوران چرخ را θ فرض‌کنیم وسرعت زاویه‌ای‌چرخ دندانه را ω ، می‌توان نوشت :

$$\frac{\theta}{\omega}=\frac{2l}{c}\Longrightarrow c=\frac{2\omega l}{\theta}$$

امروزه برای اندازه‌گیری سرعت نوترونها وسایرذرات از روشهای مشابهی استفاده می‌کنند .

مثال : چرخی‌که بادستگاه فیزو بکاررفته ۷۲۰ دندانه داشته است. کوچکترین سرعت زاویه‌ای که تصویر دیده می‌شود چقدراست ، درصورتی‌که $\theta = ۱/۱۴۴$ باشد :

$$\omega = \frac{c\theta}{2l}\Longrightarrow\omega=\frac{۳\times ۱۰^{۸}\times ۱/۱۴۴}{۲\times ۸۶۳۰}=۱۲/۱$$

فیزیکدان فرانسوی **فوکو** (Foucault) روش فیزو را با جانشین‌کردن آینهٔ دوار به‌جای چرخ دندانه‌دار اصلاح کرد ، فیزیکدان آمریکائی به نام **آلبرت مایکلسن** (Albert. A. Michelsen) آینهٔ‌دواررا‌که‌توسط فوکو در ۱۸۵۰ بکار رفته بود کامل‌کرد. اساس آزمایش اوشبیه آزمایش فیزو است بااین تفاوت‌که چرخ دندانه‌دار به‌آینهٔ چند پهلوی دوار تبدیل شده ودقیقترین روشها را برای‌اندازه‌گیری سرعت نور ارائه می‌دهد .

ازسال ۱۶۰۰ که‌گالیله آزمایش ناموفق خودرا برای اندازه‌گیری سرعت نور انجام داد تا سال ۱۹۵۶ بیش از ۳۵ تن از دانشمندان‌کشورهای مختلف با شیوه‌های مختلف‌سرعت نوررا ۲۰۰ تا ۳۰۰ هزارکیلومتر بدست آورند (به غیر از آزمایش‌گالیله‌که اشتباهش بی‌اندازه زیاد بود) .

برطبق نظریهٔ ماکسول سرعت تمام‌امواج‌الکترومانیتیك مساوی سرعت نوربوده وتمام‌آنها در یك‌فضای‌آزاد باسرعت ثابت حرکت می‌کنند. دقیقترین عددی که برای سرعت نور با امواج الکترومانیتیك بدست آمده :

$$c=۲/۹۹۷۹۲۵\times ۱۰^{۸}m/s$$

است‌که باتقریب‌کمی می‌توان آنرا $۳\times ۱۰^{۸}m/s$ گرفت .

بحث اثر و بررسی حرکت منبع نور یا ناظر

وقتی ما می‌گوئیم سرعت سیرصوت در هوای خشك صفر درجه $۳۳۱/۷m/s$ است . این مقداررا نسبت‌به‌سیستمی که تودهٔ هوای ثابت فرض می‌شود بیان می‌کنیم ، وقتی می‌گوئیم سرعت‌نوردریك فضای‌آزاد $۲/۹۹۷۹۲۵\times ۱۰^{۸}m/s$ است این عدد نسبت به چه مبنا یا مختصاتی‌منظور می‌شود؟ دستگاه مقایسه نمی‌تواند محیطی باشد که نور در آن حرکت می‌کند زیرا ثابت می‌شود برای‌نوربرخلاف صوت محیط مادی واسطه لازم نیست .

برای فیزیکدانان‌قرن۱۹که تشابهی کامل بین‌تمام‌امواج الکترومغناطیس قائل شده بودند قبول این مطلب‌سخت دشوار بودکه چگونه صوت درخلاء منتشر نمی‌شود ولی نور فضای خالی بین ستارگان تا زمین را می‌پیماید . سرانجام دانشمندان وجود سیال رقیقی به‌نام (اتر) را پذیرفتندکه همهٔ فضاراشغال کرده وعامل انتشارنور شناخته شد. البته لازم می‌نمود چگالی اتر بی‌اندازه‌کوچك باشد تاقابل مقایسه باهیچ مادهٔشناخته‌شده دیگرنباشد .

نظریهٔ وجود اتر سالها قابل قبول بود ولی بر اثر تجربیات دقیق عملی مخصوصاً کوششهائی‌که در اندازه‌گیری سرعت حرکت زمین در اتر بعمل آمد و آزمایش معروف **مایکلسن ـ مورلی** اساس‌وجودی‌اتررا‌سست‌ساخت. سرانجام **اینیشتن** درسال ۱۹۰۵ به‌این نتیجه‌رسیدکه‌اشکال‌بزرگ‌انتشار نوررا با یك فرضیهٔ متهورانه توجیه‌کند :

اگرتعدادی ناظرنسبت به‌هم ونسبت به‌یك منبع نورانی درحال حرکت باشند واگرهرناظری سرعت نوررا که از منبع ساطع می‌شود جداگانه اندازه بگیرد همهٔ نتایج یکسان و همانند خواهد بود. طبق فرضیهٔ اینیشتن به‌وجود اتراحتیاجی نیست وسرعت نور نسبت به‌تمام سیستمها مساوی است .

هرگاه‌یك‌منبع‌نورانی‌که‌دردستگاه S'ساکن‌است‌وایجادپرتو نوری مانند P کند ، سرعت V' این تشعشع توسط ناظر S' اندازه‌گیری می‌شود. از نظرناظری‌که در دستگاه S قراردارد، دستگاه S' و ناظر مربوط‌آن درجهت مثبت x با سرعت uدر حرکتند . می‌خواهیم‌سرعتی (V) که ناظر S از تشعشع P اندازه‌گیری می‌کند معلوم کنیم . فرض‌اینیشتن قائل به این حقیقت است‌که هریك از دوناظر یك سرعت (C) را بدست می‌آورند یعنی $V=V'=C$

این فرض با قانون قدیمی جمع سرعتهاکه طبق آن باید $V=V'+u$ باشد متناقض است .

قانون قدیمی ترکیب سرعتهاکه در حرکتهای معمولی و سرعتهای کم صادق‌است مبتنی برتجربیاتی است‌که ازاجرام متحرك عظیم درجهان‌اطراف خودداریم حتی سریعترین اجرام مثلا یك قمرزمینی در مقایسهٔ با سرعت نور ، سرعتش ناچیز است بنابراین فرمول بالا یك زمینهٔ تجربی بسیار محدود را معلوم می‌دارد یعنی تجربیاتی که درآنها $V'<<C$ و $u<<C$ باشند .

طبق فرضیهٔ نسبیت ارتباط سرعتها در مورد تشعشعات نورانی وذرات مادی از رابطهٔ زیر معلوم می‌شود :

$$V = \frac{V' + u}{1 + \frac{V'u}{C^2}}$$

این معادله‌درسرعتهای‌کم بامعادلهٔ $V = V' + u$ خیلی‌نزدیك است ولی وقتی u ناچیز و V' سرعت زیادی مانند نور باشد معادلهٔ بالا به‌صورت $V = C$ در می‌آید :

$$V = \frac{C + u}{1 + \frac{Cu}{C^2}} = C$$

بنابراین سرعتی‌که عملا دو یاچند ناظر مختلف (با حرکتهای نسبی) ازنور پیدامی‌کنند مساوی است .

پدیدهٔ دوپلر ـ دیدیم که‌سرعت نور بستگی‌به‌سرعت حرکت منبع وناظر نسبت‌به هم‌ندارد. اما فرکانس و طول‌موج ارتعاشات‌نورانی به سرعتهای نسبی بستگی دارد و این‌بستگی طوری است که حاصل ضرب آنها ثابت باقی می‌ماند . این تغییرات‌فرکانس یاطول‌موج‌را به‌نام **پدیدهٔ‌دوپلر** می‌شناسیم. در مورد ارتعاشات صوتی ثابت می‌شودکه اگر محیط‌وشنونده ساکن ومنبع‌صوت متحرك باشد (باسرعتu) فرکانسی‌که شنیده می‌شود از رابطهٔ :

$$N' = \frac{N}{1 + \frac{u}{V}} \qquad (1)$$

بدست می‌آید (V سرعت سیر صوت و N تواتر حالت‌سکون است) و اگر منبع صوت و محیط ساکن‌ولی شنونده نسبت به سرچشمهٔ صوت متحرك باشد تواتر از رابطهٔ :

$$N' = N(1 - \frac{u}{V}) \qquad (2)$$

نتیجه‌می‌شود.ازمعادلات (۱)و(۲) نتیجه می‌شودکه سرعتهای نسبی (u) دردوحالت فوق اگرهم مساوی باشند تواتر صوت مسموع یکی نیست .

در مورد نور برخلاف صوت پدیدهٔ دوپلر درحالتی‌که ناظر از منبع دور می‌شود یا منبع حرکت داشته و ناظر ساکن باشد یکسان است ، یعنی فرکانسها مساوی خواهند شد . معادلات (۱)و(۲) بطورکامل برای نور صادق نیست و طبق فرضیهٔ نسبیت رابطهٔ دوپلر برای‌نوربه‌صورت زیر درمی‌آید :

$$N' = N\frac{1 - \frac{u}{C}}{\sqrt{1 - (\frac{u}{C})^2}} \qquad (3)$$

اگر معادلات(۱)و(۲)و(۳) (در دو معادلهٔ اول‌که برای‌صوت نوشتیم V سرعت‌صوت است ودر معادلهٔ سوم C سرعت‌نور) را بوسیلهٔ دو جمله‌ای نیوتن بسط دهیم و آنها را برای نور بنویسیم داریم :

بجای V مقدار C راگذاشته‌ایم :

$$\begin{cases} N' = N\left[1 - \frac{u}{C} + (\frac{u}{C})^2 + \dots\right] & (1') \\ N' = N\left[1 - \frac{u}{C}\right] & (2') \\ N' = N\left[1 - \frac{u}{C} + \frac{1}{2}(\frac{u}{C})^2 + \dots\right] & (3') \end{cases}$$

چنانچه مشاهده می‌شودبا توجه‌به آنکه u نسبت به Cناچیز است معادلات نزدیك هم هستند ولی رابطهٔ آخر کلیتر و با دقت بیشتر است بدیهی است رابطهٔ طول موج چیزی شبیه روابط فوق می‌شود . به‌علت کوچکی $\frac{u}{C}$ پدیدهٔ‌دوپلر در مورد نور را در سرعتهای متعارف روی زمین می‌توان نادیده گرفت ولی در مورد ستارگان‌که با سرعتهایی حدود ۳۰۰ کیلومتر ممکن‌است‌حرکت‌کنند پدیدهٔ دوپلر باعث می‌شود در طول موج ارتعاشات نوری‌که‌به زمین می‌فرستند اثر بگذارد و با بررسی طیف آنها می‌توان این تغییر را بررسی‌کرد . همین عمل‌خود وسیله‌ای برای اندازه‌گیری سرعت حرکت ستارگان‌می‌شود .

ماکسیمم، مینیمم یك تابع

بعضی از خوانندگان مجله در مورد یکی از سؤالهای تستی کنکور سال قبل دانشگاه صنعتی آریامهر به این مضمون «آیا مبدأ مختصات برای تابع $y=|x|$ مینیمم است یا نه» اظهار تردید کرده و توضیحاتی را تقاضا کرده‌اند. این مقاله به این خاطر تنظیم شده است.

عبدالحسین مصحفی

۱ـ در حوزهٔ اعداد حقیقی، تابع $y=f(x)$ در ازاء $x=a$، **معین** نامیده می‌شود هرگاه $f(a)$ وجود داشته، دارای معنی بوده و منحصر به فرد باشد، یا اینکه مقدار آن طبق تعریف مشخص شده باشد.

ـ تابع $y=\frac{1}{x^n}$ در ازاء $x=0$ نا معین است خواه n زوج باشد و خواه فرد، زیرا $\frac{1}{0}$ دارای معنی نیست.

ـ تابع $y=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ در ازاء $x=1$ نامعین است، زیرا مقدار $\frac{0}{0}$ معین نیست.

ـ تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ در فاصلهٔ باز $]-1 \text{ و } 1[$ نامعین است. زیرا در ازاء مقادیر $-1<x<1$ دارای معنی نیست.

ـ تابع $y=\text{Arc}\cos x+2K\pi$ که در آن K عدد صحیح دلخواه است، در ازاء هر مقدار از x نامعین است، زیرا در ازاء هر مقدار از x برای y مقدار منحصر به فرد وجود ندارد.

(در تعریف جدید تابع، در ازاء هر مقدار از x برای y حد اکثر یك مقدار وجود دارد. بنابر این عبارت $\text{Arc}\cos x+2K\pi$ تابع شناخته نمی‌شود).

ـ تابع $y=f(x)$ اینطور تعریف شده است که اگر $x>0$ باشد $y=1$ و اگر $x<0$ باشد $y=0$ است، این تابع در ازاء $x=0$ معین نشده است.

ـ بنا به تعریف مقدار $|x|$ در حالت $x\geq 0$ برابر با x و در حالت $x<0$ برابر با $-x$ است. این تابع درازاء $x=0$ معین و برابر با صفر می‌باشد.

ـ یك تابع را اینطور تعریف کرده‌اند که اگر $x\neq 1$ باشد $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ و اگر $x=1$ باشد $f(1)=7$ می‌باشد. واضح است که این تابع در ازاء $x=1$ معین شده است.

***

۲ـ ماکسیمم و مینیمم در زبان متداول به معنی **حداکثر** و **حداقل** می‌باشد. با این تعبیر:

ـ اگر $-1<x<3$ باشد حد اکثر مقدار تابع: $y=3x-4$ برابر با ۵ و حداقل مقدار آن برابر با -7 است.

ـ نقطهٔ $A(3 \text{ و } 0)$ و دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2=1$ مفروض است. اگر M نقطه‌ای از دایره باشد داریم:

$$AM^2=(x-3)^2+y^2=(x-3)^2+(1-x^2)$$

$$\begin{cases} AM^2=10-6x \\ -1<x<1 \end{cases}$$

حداکثر مقدار AM^2 برابر با ۱۶ و حداقل آن برابر با ۴ است.

ـ تابع $y=\sqrt{x-1}$ در فاصلهٔ $[1 \text{ و } +\infty[$ معین است. در این فاصله کمترین مقدار تابع برابر با $y_0=0$ است.

ـ رابطهٔ:

$$|x+y|+|x-y|=4$$

با چهار دستگاه زیر معادل است:

$$\begin{cases} x-y\geq 0 \text{ و } x+y\geq 0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y<0 \text{ و } x-y\geq 0 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y>0 \text{ و } x-y<0 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y<0 \text{ و } x-y<0 \\ x=-2 \end{cases}$$

نتیجه می‌شودکه در رابطهٔ بالا بیشترین مقدار y برابر با ۲ وکمترین مقدار آن برابربا ۲ − است . دررابطهٔ مزبور بیشترین‌وکمترین مقادیر x به‌ترتیب برابربا ۲ و ۲ − می‌باشد

ـ از رابطهٔ : $y=\sqrt{4-x^2}$

که معادلهٔیك نیمدایره است نتیجه می‌شودکه بیشترین وکمترین مقادیر x به ترتیب برابر با ۲ و ۲ − و :

$$\begin{cases} x^2=4-y^2 \\ y>0 \end{cases}$$

یعنی بیشترین و کمترین مقادیر y به ترتیب ۲ و صفر می‌باشد .

ـتابع $y=x-E(x)$ که درآن $E(x)$ نمایندهٔبزرگترین عددصحیح‌موجوددرxمی‌باشددر ازاءجمیع مقادیرxواقع‌درفاصلهٔ مثلا[۲ و۱]معین‌است، دراین‌فاصله‌کمترین‌مقدارy برابراست‌با:

$$1-E(1)=1-1=0$$

اما برای y بیشترین مقدار وجود ندارد . اگر ε عدد مثبت بسیارکوچکی‌باشد وقتی $x=2-\varepsilon$ است داریم :

$$y=2-\varepsilon-E(2-\varepsilon)=2-\varepsilon-1=1-\varepsilon$$

و اگر $x=2$ باشد داریم :

$$y=2-E(2)=2-2=0$$

***

۳ـ تعریف ـ اگر تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ [a و b] معین بوده و x_0 در این فاصله واقع باشد و عدد مثبت α وجود داشته باشد بقسمی‌که هریك از مقادیر $x_0-\alpha$ و $x_0+\alpha$ به فاصلهٔ [a و b] تعلق داشته باشد ، در این‌صورت به فرض $x\neq x_0$ اگر

$$x_0-\alpha<x<x_0+\alpha \implies f(x)<f(x_0)$$

باشد می گوئیم‌تابع دارای ماکسیمم $f(x_0)$ است ،واگر

$$x_0-\alpha<x<x_0+\alpha \implies f(x)>f(x_0)$$

باشد می گوئیم تابع y دارای مینیمم $f(x_0)$ است .

به عبارت ساده ، تابع $f(x)$ در فاصلهٔ [a و b] دارای ماکسیمم $f(x_0)$ است وقتی‌که اولا $f(x_0)$ معین باشد ، ثانیاً مقدار $f(x_0)$ازمقادیر $f(x)$ مجاور بسیارنزدیك $f(x_0)$ بیشترباشد تابع $f(x)$ در فاصلهٔ [a و b] دارای مینیمم $f(x_0)$است وقتی اولا $f(x_0)$ معین باشد، ثانیاً مقدار $f(x_0)$کمتر ازمقادیر $f(x)$ مجاوربه $f(x_0)$ باشد .

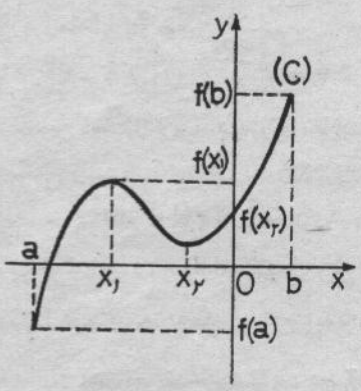
وقتی‌ازنامساوی $x_0-\alpha<x$ نامساوی $f(x)<f(x_0)$ نتیجه شودبنابه تعریف ، تابع صعودی است ووقتی ازنامساوی $x<x_0+\alpha$ نامساوی $f(x)<f(x_0)$ نتیجه شود،تابع نزولی است . بنابراین :

اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ [a و b] معین بوده‌به ازاء مقادیر $x<x_0$ متعلق‌به‌این فاصله صعودی و به ازاء مقادیر $x>x_0$ متعلق به فاصلهٔ مزبرر نزولی باشد می گوئیم تابع $f(x)$ دارای ماکسیمم $f(x_0)$ است .

اگر تابع $f(x)$ در فاصله‌ای‌که معین است به ازاءمقادیر $x<x_0$ نزولی و به‌ازاء مقادیر $x>x_0$ صعودی باشد دارای مینیمم $f(x_0)$ می‌باشد .

ملاحظه می‌شودکه تعریف ماکسیمم ومینیمم تابع بدون ارتباط به مشتق تابع انجام می گیرد ؛ وقتی شرایط بالا برقرار باشند ، در این صورت مشتق تابع دارای هر مقدارکه باشد و حتی اگر نامعین باشد ، تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم است .

تبصره ـ ممکن است تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم باشد اما این ماکسیمم بیشترین مقادیر تابع و همچنین مینیمم مزبورکمترین مقادیر تابع نباشد.اگر منحنی (C) نمایش هندسی یك تابع $y=f(x)$ درفاصلهٔ [a و b] باشدملاحظه می‌شود که تابع دارای ماکسیمم$f(x_1)$ودارای مینیمم $f(x_2)$ است ، اما $f(x_1)$بیشترین‌مقدار تابع و همچنین $f(x_2)$ کمترین مقدار تابع نمی‌باشد . درفاصلهٔ [a و b] کمترین مقدار تابع برابر با $f(a)$ و بیشترین مقدار آن برابر با $f(b)$ است .



برای تمایز بین مفاهیم فوق ، $f(a)$ را **مینیمم مطلق** و $f(x_2)$ را **مینیمم نسبی**تابع، همچنین $f(b)$ را **ماکسیمم مطلق** و $f(x_1)$ را **ماکسیمم نسبی** تابع می‌نامند . در مواردی که اشتباه نشود از آوردن الفاظ مطلق و نسبی صرف‌نظر می‌شود .

***

۴- تعیین ماکسیمم و مینیمم یك تابع

الف ـ در مواردی، مخصوصاً وقتی که مقادیر ماکسیمم یا مینیمم نسبی تابع همان مقادیر ماکسیمم یا مینیمم مطلق آن باشد ، می‌توان عبارت تابع را به فرمی تبدیل کردکه از روی آن بتوان مقادیر مزبور را تعیین کرد . مثالهای مربوط به بند ۲ نمونه‌ای از این موارد است . مثالهای دیگر :

ـ تابع زیر را درنظر می گیریم :

$$y = ax^2 + bx + c$$

آنرا به صورت زیر می‌نویسیم :

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

اگر a مثبت باشدکمترین مقدار y وقتی است که :

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \implies x = -\frac{b}{2a}$$

باشدکه در این‌صورت تابع‌دارای مینیم (هم‌مطلق‌و هم‌نسبی) برابربا $\frac{4ac - b^2}{4a}$ می‌باشد .

اگر a منفی باشد تابع درازاء $y = -\frac{b}{2a}$ دارای‌ماکسیمم (مطلق ونسبی) برابر با $\frac{4ac - b^2}{4a}$ می‌باشد .

ـ تابع :

$$y = a\sin x + b\cos x + c$$

بافرض $tg\varphi = \frac{b}{a}$ به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$y = a\sin(x + \varphi) + c$$

این تابع درازاء $x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi$ ماکسیمم‌ومینیمم است‌که مقدار آنها برابر با $c \pm a$ می‌باشد. اگر a مثبت باشد $c + a$ ماکسیمم و $c - a$ مینیمم تابع است‌واگر a منفی‌باشد $c + a$ مینیمم‌و $c - a$ ماکسیمم تابع می‌باشد .

ـ تابع زیررا در نظر می گیریم :

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

و فرض می‌کنیم که‌عبارتهای صورت و مخرج کسر ریشهٔ‌مشترك نداشته‌باشند . رابطهٔ‌بالارا نسبت به x مرتب می‌کنیم :

$$(a'y - a)x^2 + (b'y - b)x + c'y - c = 0$$

این معادله‌نسبت به‌x وقتی جواب داردکه داشته‌باشیم:

$$\triangle = (b'y - b)^2 - 4(a'y - a)(c'y - b) \geq 0$$

$$\triangle = (b'^2 - 4a'c')y^2 - 2(bb' - 2a'c - 2ac')y + b^2 - 4ac \geq 0$$

اگر این معادله ریشه نداشته باشد نتیجه خواهد شدکه تابع جهت ثابت داشته ماکسیمم‌و مینیمم ندارد. اگر معادلهٔ اخیر دارای دو ریشهٔ y' و y'' $(y' > y'')$ باشد در این صورت :

در حالت $b'^2 - 4a'c' > 0$ باید داشته باشیم $y > y'$ یا $y < y''$. در این حالت y'' ماکسیمم تابع و y' مینیمم تابع است و این مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق نمی‌باشند .

در حالت $b'^2 - 4a'c' < 0$ باید داشته باشیم $y'' < y < y'$ و مقادیر y'وy'' به ترتیب ماکسیمم و مینیمم (مطلق و نسبی) تابع می‌باشند .

درحالت $b'^2 - 4a'c' = 0$ فقط یکی از مقادیر y'یاy'' محدود است . تابع دارای یك ماکسیمم یا مینیمم محدود می‌باشد .

ب ـ در حالت کلی تعیین ماکسیمم و مینیمم تابع از راه تعیین جهت تغییرات آن صورت می گیرد . و چون جهت تغییرات تابع بستگی به علامت مشتق دارد پس :

اگر تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ معین‌بوده و x_0 متعلق به این فاصله باشد ؛

چنانچه مشتق تابع درازاء مقادیر $x < x_0$ منفی و در ازاء مقادیر $x > x_0$ مثبت باشد تابع $f(x)$ درازاء $x = x_0$ مینیمم می‌باشد .

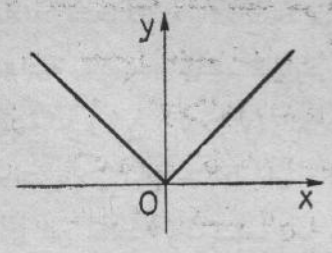
چنانچه مشتق تابع در ازاء مقادیر $x < x_0$ مثبت و در ازاء مقادیر $x > x_0$ منفی باشدتابع‌در ازاء $x = x_0$ ماکسیمم می‌باشد .

برای $f'(x_0)$ شرطی درکار نیست ، در بعضی ازحالات $f'(x_0)$ صفر است‌و دربعضی ازحالات نامعین می‌باشد .

چند مثال :

ـ تابع $y = |x|$ در فاصلهٔ $x \geq 0$ برابر است با $y = x$ که صعودی است و در فاصلهٔ $x \leq 0$ به صورت $y = -x$ و نزولی است . جدول تغییرات تابع ونمایش هندسی آن چنین است :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	↘	0	↗



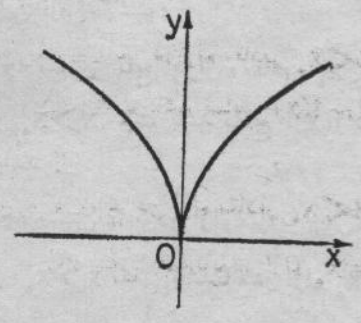
تابع در مبدأ مختصات مینیمم است .

تبصره ـ مشتق تابع بالا در فاصلهٔ باز]∞ − و ۰[برابر با ۱ − و در فاصلهٔ باز]۰ و ∞ + [برابر با ۱ + بوده درازاء $x = ۰$ نامعین است .

ـ در مورد تابع $y = \sqrt[۳]{x^۲}$ داریم :

$$y' = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y′		−	|	+	
y	$+\infty$	↘	۰	↗	$+\infty$



تابع در مبدأ مختصات مینیمم دارد درحالی که مشتق تابع در ازاء $x = ۰$ نامعین می‌باشد .

ـ تابع زیررا در نظر می‌گیریم :

$$y = |x^۲ - ۱|$$

اگر $x > ۱$ یا $x < -۱$ باشد داریم :

$$y = x^۲ - ۱ \quad \text{و} \quad y' = ۲x$$

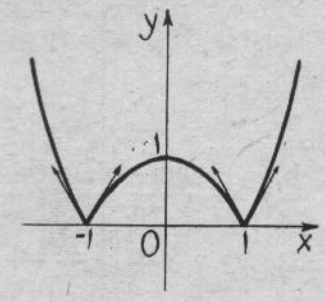
مشتق تابع در ازاء $x > ۲$ مثبت ودر ازاء $x < -۱$ منفی‌است.

اگر $-۱ < x < ۱$ باشد داریم :

$$y = -x^۲ + ۱ \quad \text{و} \quad y' = -۲x$$

مشتق درفاصلهٔ [۰ و ۱ −] مثبت‌ودر فاصلهٔ [۱ + و ۰]منفی است . جدول تغییرات و شکل منحنی نمایش تابع چنین‌است:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y′		−	|	+	۰	−	|	+	
y	$+\infty$	↘	۰	↗	۱	↘	۰	↗	$+\infty$



تابع در ازاء $x = ۱$ دارای ماکسیممی‌برابر با یك و درازاءدو مقدار $x = ۱$ و $x = -۱$ دارای‌مینیممهایی‌برابربا صفراست درازاء $x = ۰$ مشتق‌تابع برابرباصفر است اما در ازاء $x = ۱$ و $x = -۱$ مشتق تابع نامعین است .

تمرین

۱ـ جهت تغییرات هریك از تابعهای زیر را تعیین‌کرده درصورتی‌که ماکسیمم یا مینیمم داشته باشند مقادیر آنها را پیدا کنید .

$$y = \sqrt{(x+۱)^۲} + \sqrt{x^۲} + \sqrt{(x-۱)^۲}$$

$$y = |x+۲| + |x+۱| + |x| + |x-۱| + |x-۲|$$

$$y = \sqrt{x^۲ + ۱ + ۲\sqrt{x^۲}} - \sqrt{x^۲ + ۱ - ۲\sqrt{x^۲}}$$

$$y = \frac{|x-۱|}{x+۱}$$

$$y = x^۲ - |x-۲|$$

$$y = \sqrt[۳]{x^۲ - x + ۲}$$

۲ـ از روابط زیر مقادیر ماکسیمم و مینیمم x و y را حساب کنید :

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ - ۴y = ۰ \\ x \geqslant ۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} y^۲ - ۲x + ۲y - ۳ = ۰ \\ y \geqslant -۳ \end{cases}$$

$$|۲x + y - ۴| + |x - ۲y + ۲| = ۴$$

۳ـ از روی نمودار هندسی مقادیر ماکسیمم و مینیمم x و y راکه در دستگاه زیر صدق می‌کنند تعیین‌کنید :

$$\begin{cases} ۴x^۲ + ۹y^۲ - ۳۶ < ۰ \\ ۹x^۲ + ۴y^۲ - ۳۶ < ۰ \end{cases}$$

اعداد دوری در مبناهای غیر دهگانی

ترجمهٔ : مجیدرنجی

می‌دانیم که عدد ۱۴۲۸۵۷ یك عدد دوری است، به‌این معنی که اگر آنرا درهریك ازعددهای از ۱ تا ۶ ضرب کنیم عددی با همین رقمها بدست‌می‌آید و ترتیب توالی رقمها در هرحال به یك منوال است (*) عدد مزبور از تقسیم یك بر ۷ بدست می‌آیدو عبارتست از یـك دورهٔ تناوب کسر $\frac{1}{7}$ وخاصیت مزبور به این جهت است که در تقسیم یك بر ۷ کلیهٔ باقیمانده‌های کوچکتر از ۷ بدست می‌آید . بعد ازآن در تقسیم یك بر ۱۹ نیز تمام باقیمانده‌های کوچکتر از۱۹ بدست می‌آیند اما دراین تقسیم ارقام خارج‌قسمت متفاوت نیستند ،چون تعداد آنها۱۹ است در صورتی که برای نوشتن آنها بیشتر از ده رقم بکار نمی‌رود . در مبنای‌دهگانی تنها عدد ۱۴۲۸۵۷ است که‌دوری است . آیا در مبناهای دیگر چنین عددی وجوددارد ؟ باید معلوم کنیم که در هر مبنا کدام‌کسر متناوب است کـه تعداد رقمهای دورهٔ تنـاوب آن از مخرج‌کسر مولد آن یـك واحد کمتر است . در مـورد چند کسر خاص و تامبنای ۱۷ جدول زیر بدست می‌آید که برای هرکسر فقط یك دورهٔ تناوب‌نوشته شده است .

کسر / مبنا	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{13}$
۲	۰/۰۱	۰/۰۰۱۱		۰/۰۰۰۱۰۱۱۱۰۱	۰/۰۰۰۱۰۰۱۱۱۰۱۱
۳		۰/۰۱۲۱	۰/۰۱۰۲۱۲		
۴					
۵	۰/۱۳		۰/۰۳۲۴۱۲		
۶				۰/۰۳۱۳۴۵۲۴۲۱	
۷		۰/۱۲۵۴		۰/۰۴۳۱۱۶۲۳۵۵	۰/۰۳۵۲۴۵۶۳۱۴۲۱
۸					
۹	۰/۲۵	۰/۱۴۶۳		۰/۰۵۶۴۲۷۲۱۳۵	
۱۰			۰/۱۴۲۸۵۷		
۱۱	۰/۳۷				۰/۰۹۳۴۲۵T۱۷۶۸۵
۱۲		۰/۲۴۹۷	۰/۱۸۶T۳۵		
۱۳		۰/۲۷T۵		۰/۱۲۴۹۵ET۸۳۷	
۱۴	۰/۴۹				
۱۵					۰/۱۲۴۹۳۶HWT۵E۸
۱۶					
۱۷	۰/۵E	۰/۳۶HT	۰/۲۷۴F۹W	۰/۱۹۴THIVW۶۳	

* یك‌عدد جادویی ، صفحهٔ ۱۹ یکان شمارهٔ مسلسل ۱۸

مثلثهای متساوی الساقین معادل

ترجمهٔ: مقصود عین‌اللهی

با بکار بردن ماشین حساب مثلثهای متساوی‌الساقین و معادل زیر بدست آمده‌اند :

	a) اضلاع مثلث		b) اضلاع مثلث
I	۲و۲و۳	:	۱و۴و۴
II	۴و۴و۴	:	۲و۷و۷
III	۴و۴و۶	:	۲و۸و۸
IV	۶و۶و۹	:	۳و۱۲و۱۲
V	۷و۷و۵	:	۳و۱۱و۱۱
VI	۷و۷و۶	:	۲و۱۹و۱۹
VII	۷و۷و۱۲	:	۴و۱۱و۱۱
VIII	۸و۸و۸	:	۴و۱۴و۱۴
IX	۸و۸و۱۲	:	۴و۱۶و۱۶
X	۸و۸و۱۵	:	۳و۱۴و۱۴
XI	۱۰و۱۰و۱۵	:	۵و۲۰و۲۰
XII	۱۱و۱۱و۶	:	۴و۱۶و۱۶

در جدول بالا اولین نکته‌ای که به چشم می‌خورد این است که اندازهٔ ساقهای مثلثهای III و IX مضاربی از اندازهٔ ساقهای مثلثهای I می‌باشند ، به همین ترتیب VIII مضرب II و IX مضرب III است ، این سؤال پیش می‌آید که اگر اندازهٔ ساقهای دو مثلث متساوی‌الساقین معادل را در عددی ضرب کنیم آیا مثلثهای تازه نیز معادل خواهند بود ؟ جواب این سئوال «بلی» است . اگر دو مثلث متساوی‌الساقین به ضلعهای a،a،b و d،d،e را درنظر بگیریم وفرض کنیم که آنها معادل باشند خواهیم داشت :

$$\frac{1}{2}b\sqrt{a^2-\frac{1}{4}b^2}=\frac{1}{2}e\sqrt{b^2-\frac{1}{4}e^2}$$

اندازهٔ اضلاع دومثلث‌را درعددی‌مانند x ضرب‌می‌کنیم مساحت مثلثهای بدست آمده به ترتیب چنین می‌شوند :

$$2)\quad \frac{1}{2}bx\sqrt{(ax)^2-\frac{1}{4}(bx)^2} \Longrightarrow \frac{1}{2}bx^2\sqrt{a^2-\frac{1}{4}b^2}$$

بقیه از صفحهٔ قبل

در جدول بالا فقط معادلهایی یادداشت شده که‌خاصیت مورد نظر را دارا می‌باشند و حروف T،E،W،H،F،I وS به ترتیب نمایندهٔ رقمهای ۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،۱۴و۱۵و۱۶ در مبناهای‌بزرگتر از۱۰می‌باشند . از بررسی جدول‌بالانتیجه‌های زیر بدست می‌آید :

۱) در هر مبنا دورهٔ تناوب معادل هر کسر که تعداد رقمهایش یك واحدکمتر از مخرج‌کسر است دارای این‌خاصیت نیست‌که چون در هرعدد کوچکتر از مخرج ضرب شود باز خود آن بدست آید .

۲) بین تعداد فاصله‌های‌مابین اعداد درستونهای‌مختلف تشابهی برقرار است .

۳) گرچه اعداد در مبناهای مختلف نوشته شده‌اند اما در ستون اول ملاحظه می‌کنیم‌که اعداد تصاعد حسابی باقدر نسبت ۰/۱۲ تشکیل داده‌اند ، در ستونهای دیگر نیز این خاصیت به نحوی ملاحظه می‌شود :

$$36HT-2497=2497-1254=$$
$$=1254-0011=1243$$
$$27T5-1463=1463-0121=1342$$

در ستونهای دیگر تفاضلهای ۱۳۲۶۴۵ و ۱۵۴۶۲۳ و همچنین ۱۲۴۸۵T۹۷۳۶ و ۱۶۳۷۹T۵۸۴۲ را بدست می‌آوریم‌که از ارقام متشابه تشکیل شده‌اند .

۴) معادلهایی دارای خاصیت مورد نظر برای مبناهایی که مربع کامل باشند وجود ندارد . از این نتیجه و نتیجهٔ ۲ می‌توان استفاده‌کردکه معادله‌های زیر دارای جوابهای‌صحیح مثبت نمی‌باشند :

$$A^2=5B+2 \quad , \quad A^2=3B+2$$
$$A^2=7B+3 \quad , \quad A^2=5B+3$$
$$A^2=11B+3 \quad , \quad A^2=7B+5$$

۲) $\frac{1}{2}ex\sqrt{(dx)^2-\frac{1}{4}(ex)^2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}ex^2\sqrt{d^2-\frac{1}{4}e^2}$$

مساحتهای مثلثهای جدید هرکدام x^2 برابر مساحت مثلثهای قبلی بوده و برابرند.

مثلثهای معادلی را که اندازه‌های ضلعهای آنها مضرب مشترکی ازاندازه‌های ضلعهای دومثلث معادل دیگر نباشد «مثلثهای معادل اول» می‌نامیم.

در جدول قبل، این مثلثها اول می‌باشند:

	b) اضلاع مثلث		a) اضلاع مثلث
I	۴و۴و۱	-	۲و۲و۳ :
II	۷و۷و۲	-	۴و۴و۴ :
III	۱۱و۱۱و۳	-	۷و۷و۵ :
IV	۱۹و۱۹و۲	-	۷و۷و۶ :
V	۱۱و۱۱و۴	-	۷و۷و۱۲ :
VI	۱۴و۱۴و۳	-	۸و۸و۱۵ :
VII	۱۶و۱۶و۴	-	۱۱و۱۱و۶ :

اگر از این جدول مثلثهای IV، V و VI را حذف کنیم جدول زیر باقی می‌ماند:

b) اضلاع مثلث	a) اضلاع مثلث
۴و۴و۱	۲و۲و۳
۷و۷و۲	۴و۴و۴
۱۱و۱۱و۳	۷و۷و۵
۱۶و۱۶و۴	۱۱و۱۱و۶

ترتیب معینی بین اعداد مشاهده می‌شود و از روی آن پیش بینی می‌شود که مثلث ضلعهای ۷و۱۶و۱۶ باید معادل مثلثی به‌ضلعهای۵و۲۲و۲۲ باشدومثلث ۸و۲۲و۲۲ بایدمعادل مثلث ۶و۲۹و۲۹ باشد و نیز مثلث ۹و۲۹و۲۹ باید معادل مثلث ۷و۳۷و۳۷ باشد. این‌پیش‌بینیها محقق‌شده‌اند ومی‌توانیم جدول زیررا تنظیم کنیم:

	a) مثلث	b) مثلث
n = ۱	۲و۲و۳	۴و۴و۱
n = ۲	۴و۴و۴	۷و۷و۲
n = ۳	۷و۷و۵	۱۱و۱۱و۳
n = ۴	۱۱و۱۱و۶	۱۶و۱۶و۴
n = ۵	۱۶و۱۶و۷	۲۲و۲۲و۵
n = ۶	۲۲و۲۲و۸	۲۹و۲۹و۶
n = ۷	۲۹و۲۹و۹	۳۷و۳۷و۷

می‌توان فرمول کلی زیر را استخراج کرد.

اگر n یك عدد صحیح باشد اضلاع مثلث a عبارت خواهند بود از:

$$n+2 \quad و \quad \frac{n(n+1)+2}{2} \quad و \quad \frac{n(n+1)+2}{2}$$

و اضلاع مثلث b عبارتند از:

$$n \quad و \quad \frac{(n+1)(n+2)+2}{2} \quad و \quad \frac{(n+1)(n+2)+2}{2}$$

این مثلثها معادل‌اند؛ از راه محاسبه ثابت خواهدشدکه مساحت هر یك‌ازآنها برابر است با:

$$\frac{1}{4}n(n+2)\sqrt{n^2+2n+4}$$

دنباله از صفحهٔ ۵۹۹

L محور تقارن برای وتر AB است. چنانکه می‌دانیم، محورتقارن وتری از دایره از مرکز می‌گذرد؛ بنابراین L از مرکز دایرهٔ C(P) می‌گذرد واین دایره را درنقاط M و N مشترك در L و S قطع می‌نماید. بنابراین هر دایره‌ای که از L می‌گذرد باید شامل M و N باشد، زیرا نقاط اخیر در S و P مشترکند. L دارای نقطهٔ مشترك دیگری با S نیست، زیرا اگر Q چنین نقطه‌ای می‌بود، مقطع حاصل از P شامل سه نقطهٔ متمایز M،N وQ واقع بریك استقامت بود، بنابراین خط L دایرهٔ C(P) را درسه نقطه قطع می‌کرد واین امر غیر ممکن است. حال می‌بینیم که قطعه خط MN قطرمشترك تمام دوایر C(P) است، P صفحهٔ ماربر L است. نتیجهٔ حاصل آنست که این دوایررا می‌توانیم ازیکی ازآنها بوسیلهٔ دوران حول قطرمشترك MN بدست‌آوریم. مطمئناً چنین پدیده‌ای، کره‌ای به‌قطر MN است. دراین صورت، مجموعهٔ برشهای حاصل از L، کرهٔ Σ راکه قسمتی‌ازسطح S است، بدست می‌دهد.

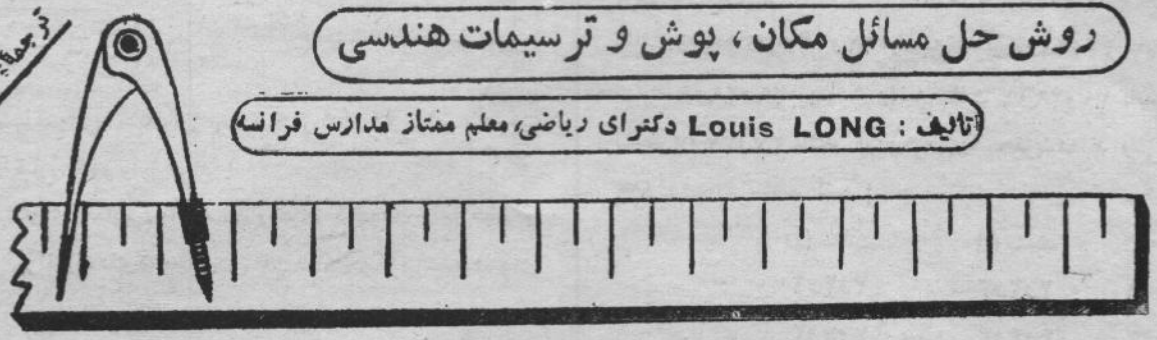
ولی S شامل چیز دیگری خارج از Σ نیست. درواقع اگرنقطهٔ T متعلق به Σ نبوده و روی S باشد، خط ماربر T ومرکز Σ با Σ دردونقطهٔ T_1 وT_2 متقاطع خواهد بود و در این صورت S دارای سه نقطهٔ T_1، T_2 و T واقع بریك‌استقامت است واین امرغیرممکن است.

بنابراین S منطبق برکرهٔ Σ است.

روش حل مسائل مکان، پوش و ترسیمات هندسی

تألیف : Louis LONG دکترای ریاضی، معلم ممتاز مدارس فرانسه

ترجمهٔ ع. م.



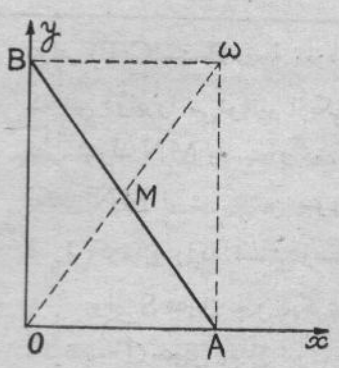
II ـ مکان (دنباله از شمارهٔ گذشته)

فصل دوازدهم

مکانهای مربوط به علم‌الحرکات

هر گاه نقطه‌ای که مقصود تعیین مکان آنست به شکلی متغیر وابسته باشد ، می‌توان روش اساسی زیر را بکار برد : اگر شکلی به‌صورت متغیر درصفحه جابجا شود ؛ درهروضع مفروض از آن ، قائمهای بر مسیرهای نقاط مختلف آن در یك نقطهٔ ω موسوم به مرکزلحظه‌ای دوران متقارب می‌باشند. بنابراین هر گاه مسیرهای دو نقطه از شکل معلوم باشد ω معین می‌شود . در نتیجه قائم و از روی آن مماس در هرنقطهٔ M از شکل رسم می‌شود .

مسئله ـ A و B طرفین یك میلهٔ صلب برمحورهای Ox و Oy تکیه داشته روی آنها حرکت می‌کنند. مکان M وسط AB چیست ؟



مسیر نقطهٔ A از میله همان Ox است پس خطی که در A بر Ox عمود شود قائم مسیر A می‌باشد و در این لحظه قائم برمسیر B خطی است که درB عمود بر Oy اخراج شود. از تلاقی دوعمود مزبور ω مرکز لحظه‌ای بدست می‌آید . در این حال ωM قائم بر مسیر M می‌باشد و چون ωM از O می‌گذرد پس قائمهای در نقاط مختلف برمسیر M همه از O می‌گذرند و در نتیجه مسیر M دایرهٔ به مرکز O می‌باشدکه شعاع آن برابر است با نصف طول AB .

تمرینات

۱ـ اگر طرفین میلهٔ صلب AB روی محورهای عمود بر هم Ox و Oy بلغزند مکان یك نقطهٔ غیر مشخص از آن چیست ؟

۲ـ همان مسئلهٔ قبل‌در حالتی‌که Ox و Oy بر هم عمود نباشند .

۳ـ سهمی P' روی سهمی‌مساوی با خودش P می‌غلتد بقسمی‌که در ابتدا رأسهای آنها منطبق می‌باشند . مکان F' کانون سهمی P' را پیداکنید .

فصل سیزدهم ـ تحدید مکان

وقتی معلوم شد نقطه‌ای‌که مکان آن مورد نظر است بر یك منحنی معین حرکت می‌کند لازم است‌که حدود این مکان معین شود . بدین معنی‌که معلوم‌کرد آیا تمام منحنی مزبور یا فقط بخشی از آن مکان نقطه می‌باشد .

روش کلی بسیارساده آنست که‌معلوم کرد که‌آیاهمهٔ مواضعی که‌نقطهٔM ضمن‌حرکت‌اتصالی‌خوداختیار می‌کند درشرایط‌مسئله صادق می‌باشند یا نه . در بعضی ازحالتها به سادگی می‌توان نقاط حد مکان را معین‌کرد ، مانند مسئلهٔ زیر :

مسئله ـ مکان رأس زاویهٔ به‌اندازهٔ معین‌که دوضلعش بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرند . مکان مطلوب از دو کمان دایره تشکیل می‌شودکه این دوکمان نسبت به AB قرینهٔ یکدیگر می‌باشند و شامل تمام دایره‌هایی‌که این‌کمانها

متعلق به آنها می‌باشند نمی‌باشد .

هرگاه نقطهٔ M فقط بخش P_1 از منحنی بدست آمده را بپیماید ، گاهی پیش می‌آید که یك نقطهٔ M_1 بخش دیگر از منحنی یعنی P_2 را کاملا به سان M نمی‌پیماید . در این حالتها مناسبت دارد که معلوم کرد صورت مسئله را به چه‌نحو می‌توان با بخش P_2 تلفیق کرد .

مثلا در مسئلهٔ بالا ، کمان دیگر از هر دایره مکان نقاطی است که زاویهٔ نظیر آنها مکمل زاویهٔ معلوم می‌باشد.

همچنین گاهی می‌توان مسئله را بقسمی تعمیم داد که تمام منحنی بدست آمده مکان مطلوب باشد .

معمولا درتعیین یك مکان تمام یك منحنی P ظاهر می‌شود در حالی که فقط بخش P_1 از آن مکان مورد نظر می‌باشد و در نتیجه بخش P_2 به صورت یك مزاحم در حل کامل مسئله خود نمائی می‌کند .

مسئلهٔ زیر را به عنوان مثال در نظر می‌گیریم :

مسئله ـ مکان M وسط وتر متغیری از یك دایرهٔ C که بر نقطهٔ معلوم I می‌گذرد .

اگر I روی دایره یا داخل آن واقع باشد تمام دایرهٔ به قطر OI مکان M می‌باشد که O مرکز دایرهٔ C است . اما در حالتی که I خارج دایرهٔ C باشد دایرهٔ به قطر OI شامل دو بخش C_1 و C_2 است که فقط بخش C_1 که داخل دایرهٔ C واقع است مکان M می‌باشد. زیرا در حالت اخیر خطوطی یافت می‌شوند که بر I می‌گذرند و نسبت به دایرهٔ C متخارج می‌باشند. می‌دانیم که یك خط و یك دایرهٔ متخارج در دو نقطهٔ موهومی متقاطع اند که نقطهٔ وسط آنها حقیقی است و اگر درصورت مسئله به جای وسط وتر ماربر I ، تصویر O را بر خط ماربر I در نظر گرفته باشیم در هرحال تمام دایرهٔ به قطر OI مکان مطلوب می‌باشد .

به همین ترتیب توضیح داده می‌شود که تمام خط قطبی یك نقطه نسبت به یك دایره مکان مزدوجهای آن نقطه نسبت به دایره می‌باشد و این عمل به کمك انعکاس انجام می‌گیرد .

در بعضی از موارد به جای بکاربردن روش بالا می‌توان مستقیماً ثابت کرد که آیا هر نقطهٔ متعلق به شکل P در شرایط مسئله صدق می‌کند یا نه و به این ترتیب حدود مکان را مشخص کرد . خواننده می‌تواند در حل مسئلهٔ زیر این روش را بکار ببرد .

مسئله ـ مکان نقاطی که نسبت فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت مقدار معین است .

مکانهای فضایی

مکانهای فضایی عموماً خط یا سطح می‌باشند . بعضی از مکانهای فضایی را می‌توان با استفادهٔ از تقارن یا تصویر از روی مکانهای مسطح بدست آورد اما برخی را باید مستقیماً تعیین کرد . در حالت اخیر استفادهٔ از هموگرافی روش بسیار سودمند می‌باشد .

فصل اول

مکانهایی که از روی مکانهای مسطح تعیین می‌شوند یا اینکه فصل مشترك دو مکان می‌باشند

مسئلهٔ ۱ـ مکان هندسی رأسهای مخروطهایی که بر سه کرهٔ معلوم محیط بوده و دارای زاویهٔ رأس برابر باشند .

ابتدا یکی از معلومات راکنار می‌گذاریم و مکان هندسی رأسهای مخروطهایی را تعیین می‌کنیم که بر دو کرهٔ معلوم O و O′ محیط بوده و در رأس دارای زاویهٔ برابر می‌باشند . به سادگی معلوم می‌شود که این مکان دارای مشابهی درهندسهٔ مسطحه می‌باشد . خط المرکزین دو کره محور تقارن آنها است و چنانچه شکل را با صفحه‌ای ماربر خط المرکزین قطع دهیم به مسئلهٔ مسطحهٔ زیر می‌رسیم :

مکان هندسی نقاطی که از آنها دو دایره به یك زاویه رؤیت می‌شوند . با ملاحظهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابه به سادگی معلوم می‌شود که مکان اخیر مکان نقاطی است که نسبت فواصل آنها از مرکزهای دو دایره مقداری است ثابت برابر با نسبت شعاعهای دو دایره و عبارتست از دایرهٔ C_1 که مرکز آن روی OO′ قرار دارد .

مکان فضایی نظیر مکان مزبور از دوران دایرهٔ C_1 حول OO′ حاصل می‌شود که عبارت می‌شود از کرهٔ S_1 که مرکز آن بر OO′ واقع است .

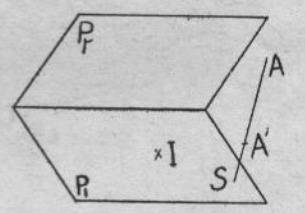
به ترتیب مشابه معلوم خواهد شد که مکان رأسهای مخروطهایی با زاویه‌های رأس برابر و محیط بر کره‌های O′ و O″ کرهٔ S_2 است که مرکزش روی O′O″ واقع است . بنابراین مکان مطلوب عبارتست از فصل مشترك دو کرهٔ S_1 و S_2 که

یك دایرهٔ γ می‌باشد ،صفحهٔ این دایره برخط‌المرکزین کره‌های S_1 و S_2 عمود است و به سادگی معلوم خواهد شدکه بر صفحهٔ $OO'O''$ که بر مرکزهای سه‌کرهٔ مفروض می گذرد عمود می‌باشد .

مسئلهٔ ۲ـ مکان مرکزهای کره‌هایی را پیداکنیدکه بردو نقطهٔثابت A و B می گذرند وبرخط ثابت Δ مماس‌می‌باشند.

مرکزهای‌این کره‌ها ازیك طرف روی صفحهٔ عمودمنصف پاره خط AB قرار دارند و ازطرف دیگراز نقطهٔ A (همچنین B) واز خط Δ متساوی‌الفاصله‌اندیعنی برسهموی (پارابلئید) به‌کانون A وبه صفحهٔ هادی P (که ازدوران Δ حول D عمود مرسوم ازA بر Δ پدید می‌آید) قرار دارند . پس مکان مطلوب عبارتست‌ازفصل مشترك این سهموی با صفحهٔ عمود منصف AB که در حالت‌کلی یك بیضی است و در حالتی‌که B روی D باشد یك دایره و در حالتی‌که AB بر D عمود باشد یك سهمی می‌باشد .

مسئلهٔ ۳ـ کرهٔ متغیر Σ بر نقطهٔ ثابت A می گذرد و بر دو صفحهٔ P_1 و P_2 مماس است . مکان نقطهٔ تماس‌کرهٔ مزبور با هر یك ازصفحات وهمچنین مکان مرکزآن‌راپیداکنید.

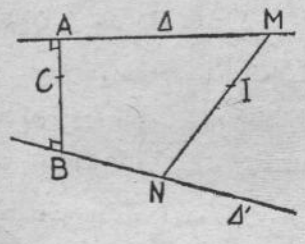


مرکزکرهٔ Σ در صفحهٔ π نیمساز فرجهٔ دو صفحه قرار دارد و این صفحه ، صفحهٔ تقارن‌کره می‌باشد . پس اگر A' قرینهٔ A نسبت به صفحهٔ π باشدکرهٔ Σ بر A' نیز می گذرد .

اگر AA' با P_1 در S متقاطع باشد و I نقطهٔ تماس کرهٔ Σ با صفحهٔ P_1 باشد قوت نقطهٔ S نسبت به‌کرهٔ Σ ازیك طرف برابر با $\overline{SA}.\overline{SA'}$ و از طرف دیگر برابر با $\overline{SI}^2$ است و چون $\overline{SA}.\overline{SA'}$ مقداری است ثابت پس طول SIثابت است ومکان I دایرهٔ C_1 واقع‌درصفحهٔ P_1 وبه مرکز Sمی‌باشد.

اما مکان مرکزکره از یك طرف صفحات نیمساز فرجهٔ P_1 و P_2 و از طرف دیگر سطح استوانه‌ای دوار به دایرهٔ هادی C_1 است پس فصل مشترك این مسطح استوانه‌ای و صفحات‌مزبورکه دوبیضی E_1و E_2است مکان‌مرکزکره‌می‌باشد. با در نظر گرفتن A'' قرینهٔ A نسبت به دومین صفحهٔ نیمساز فرجهٔ P_1 و P_2 دایرهٔ دیگر C_2 برای مکان I بدست می‌آید و از آنجا مکان مرکزکره غیراز دو بیضی E_1 و E_2 دو بیضی دیگر E_3 و E_4 نیز می‌باشد .

مسئلهٔ ۴ـ پاره خط متغیر MN همواره با صفحهٔثابت P_1 موازی است و بر دو خط متنافر Δ و Δ' متکی است. اگر I پاره خط مزبور را به‌نسبت معین $\frac{m}{n}$ تقسیم‌کند مکان I چیست ؟



چنانکه می‌دانیم‌خط MN یك سهموی هذلولی گون شامل دو خط Δ و Δ' را می‌پیماید از طرف‌دیگر اگرAB عمود مشترك دو خط Δ و Δ' و C نقطه‌ای باشد که AB را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم‌کند از تناسب $\frac{CA}{CB}=\frac{IM}{IN}$ نتیجه خواهد شدکه I درصفحهٔ P_2 واقع است‌که در C بر AB عمود است . فصل مشترك این صفحه با سهموی سابق‌الذکرکه یك خط است مکان I می‌باشد .

مسئله را می‌توان با استفادهٔ از تصویر نیز حل‌کرد : فصل مشترك دو صفحهٔ P_1 و P_2 دارای امتداد ثابت است . MN را در یك امتداد دلخواه برصفحهٔ P_2 تصویر می‌کنیم‌تا M_1N_1 بدست آید . M_1N_1 دارای امتداد ثابت است واگر JM_1 و JN_2 تصویرهای Δ و Δ' روی P_2 باشند مسئلهٔ مسطحهٔ زیر مطرح می‌باشد : مطلوبست مکان نقطهٔ I از خط با امتداد ثابت M_1N_1 بقسمی‌که $\frac{IM_1}{IN_1}=\frac{m}{n}$ است.چنانکه می‌دانیم این مکان خطی است‌که از J می گذرد .

تمرینات

۱ـ مکان مراکز دایره‌هایی‌که از تقاطع صفحهٔ مفروض P باکره‌های ماربر دونقطهٔ معلوم A و B پدید می‌آیند .

۲ـ مکان نقاطی‌که مجموع یا تفاضل فواصل آنها ازدو خط متقاطع مقدار ثابت است .

۳ـ مکان نقطه‌ای را تعیین‌کنید با فرض آنکه فاصله‌اش از نقطهٔ معلوم A برابربا طول معین a بوده و مجموع‌مربعات فواصلش از دو نقطهٔ ثابت برابر با K^2 باشد .

۴ـ زاویهٔ دو وجهی P و Q و نقطهٔ C واقع بین دو وجه آن مفروض است .کرهٔ Σ را در نظر می گیریم‌که بر C می گذرد و برصفحهٔ P در M مماس می‌شود و ω مرکز آن در صفحهٔ Q قرار دارد . مکان M را پیداکنید .

۵ ـ دایرهٔ C واقع بر یك کره مفروض است . تمام دایره‌های C_1 از این کره مماس بر دایرهٔ C را در نظر می‌گیریم که صفحهٔ آنها بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد . مکان قطبهای صفحات این دایره‌ها را نسبت به کره تعیین کنید .

۶ـ خط ثابت △ و خط متغیر '△ که بر نقطهٔ ثابت A می‌گذرد مفروض است . مکان پای عمود مشترك دوخط را روی '△ پیدا کنید .

۷ـ چهار وجهیهای به رأس S را در نظر می‌گیریم که قاعده‌های آنها بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرند .مکان پای عمودهای مرسوم از S بر این قاعده‌ها را پیدا کنید.

۸ـ چهار وجهی SXYZ و دونقطهٔ ثابت A و B روی یالهای SX و SY و نقطهٔ متحرك C روی یال SZ را درنظر می‌گیریم . از A عمود AH را بر BC رسم می‌کنیم . مکان H را پیدا کنید .

۹ـ درکرهٔ Σ به‌مرکز O همهٔ وترهایی را در نظر می‌گیریم که از نقطهٔ ثابت S به زاویهٔ قائمه دیده می‌شوند . مکان اوساط این وترها را پیدا کنید .

۱۰ـ کره‌هایی درنظر می‌گیریم که بر دو کرهٔ مفروض عمود و برصفحهٔ P مماس باشند . مکان نقاط تماس این کره‌ها را با صفحهٔ P تعیین کنید .

فصل دوم

تعیین مستقیم مکانهای فضایی ـ هموگرافی

مسئله ـ دو قطعه خط AB و A'B' به محملهای △ و '△ مفروض است . روی △ دو نقطهٔ M و M_1 وروی '△ دو نقطهٔ M' و M'_1 در نظر می‌گیریم بقسمی که :

$$\frac{M'A'}{M'B'}=\frac{MA}{MB} \qquad (1)$$

$$\frac{M'_1A'}{M'_1B'}=\frac{M_1A}{M_1B} \qquad (2)$$

۱ـ هرگاه M و M' ثابت باشند و M_1 و M'_1 تغییر کنند مکان مرکز کرهٔ مار برچهارنقطهٔ M و M_1 و M' و M'_1 را پیدا کنید .

۲ـ هرگاه M و M' تغییر کنند مکان مرکز کره‌ای را تعیین کنید که در M بر △ و در M' بر '△ مماس می‌باشد .

حل ـ ۱ـ یك مکان O مرکز کرهٔ مورد نظر صفحهٔ P_1 عمود منصف MM' است . از طرف دیگر به آسانی ثابت می‌شود که اگر I وسط MM_1 و I' وسط $M'M'_1$ باشد نظیر هر I فقط یك I' و برعکس نظیر هر I' فقط یك I وجود دارد. بنابراین صفحاتی که در I و I' به ترتیب عمود بر △ و '△ رسم شوند در تناظر یکبیك می‌باشند و دسته‌های هموگرافی را می‌پیمایند. نتیجه می‌شود که خط D فصل مشترك این دوصفحه که بر O می‌گذرد یك چهار سطحی Q را می‌پیماید . نقاط I و I' با هم به بینهایت می‌روند و دو صفحهٔ همولوگ نظیر آنها در حد برهم منطبق می‌شوند . در این حال Q بصورت دو صفحه در می‌آید که یکی از آنها صفحهٔ بینهایت است ودیگری صفحهٔ P_2 در فاصلهٔ محدود واقع است . مکان O که فصل مشترك صفحات P_1 و P_2 شامل خط بینهایت و یك خط دیگر می‌باشد .

۲ـ بین M و M' تناظر یکبیك برقرار است ، پس صفحاتی که به‌ترتیب در M و M' بر △ و '△ عمود می‌شوند دو دستهٔ هموگرافی پدید می‌آورند . وقتی M در بینهایت باشد صفحات همولوگ نظیر آن بر صفحهٔ بینهایت منطبق می‌شوند.

یك مکان O مرکز کرهٔ Σ مماس در M بر △ و در M' بر '△ صفحهٔ P_2 است که با عمود منصف "△ دو خط مفروض موازی است . مکان دیگر O عبارتست ازمکان نقاطی از فضا که از △ و '△ متساوی‌الفاصله‌اند که سهموی هذلولی وار π به محور "△ می‌باشد . در نتیجه فصل مشترك دو مکان مزبور که یك سهمی به محور موازی با "△ است مکان مطلوب می‌باشد.

تمرینات

۱ـ مکان نقاطی که مجموع فواصل آنها از سه صفحهٔ معلوم برابر با طول معلوم l باشد .

۲ـ اوساط ضلعهای هرچهار ضلعی چپ رأسهای یك متوازی‌الاضلاع می‌باشند . اگر سه رأس از رأسهای این متوازی‌الاضلاع ثابت بوده و رأس چهارم آن صفحهٔ معلومی را بپیماید مکان مرکز آن را پیدا کنید .

۳ـ بر دو خط ثابت D و D' دو صفحهٔ متغیر را بقسمی می‌گذرانیم که همواره بر هم عمود باشند . مکان نقطهٔ تلاقی فصل مشترك این دو صفحه را با صفحهٔ ثابتی که بریکی ازدو خط مفروض عمود است پیدا کنید .

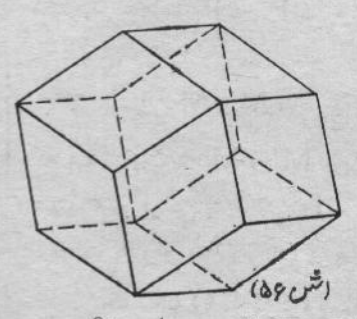
۴ـ کره‌ای متغیر همواره بر دایرهٔ ثابت C می‌گذرد . مکان دایره‌هایی را پیدا کنید که این کره در طول آنها بر سطح مخروطی که دارای رأس ثابت است مماس می‌باشد .

صد مسئلهٔ جالب و حل آنها

ترجمهٔ : داویدریحان

۴۱ـ افسانهٔ یك مگس

مگسی که دررأس یك دوازده وجهی منتظم قرار داشت تصمیم گرفت که یالهای آنرا طی کند بقسمی که از همهٔ رأسها و از هر رأس تنها یك‌بار بگذرد و به محل عزیمتش باز گردد. این عمل را انجام داد و آنرا مجدداً در بارهٔ دوازده وجهی که‌وجوهش لوزی بودند آزمایش کرد (ش ۵۶). آیا چنین اقدامی باموفقیت همراه بود؟



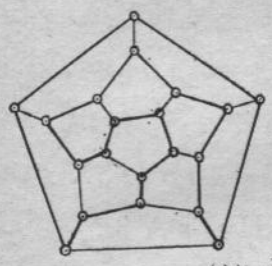
(ش ۵۶)

حل ـ چند وجهی‌را می‌توانیم همچون شبکه‌ای‌فضائی در نظر بگیریم که درآن، ضلعها نمایندهٔ یالها، گره‌ها نمایندهٔ رأسها و ناحیه‌ها نمایندهٔ وجه‌ها باشند. مسیرمگس باید تشکیل یك چند ضلعی بستهٔ بدون نقطهٔ مضاعف و شامل شبکه‌های فوق را بدهد. اگر شبکه را در صفحه‌ای گسترش دهیم، از امکان فراهم‌آوردن چنین مسیری، چیزی تحریف نمی‌شود.

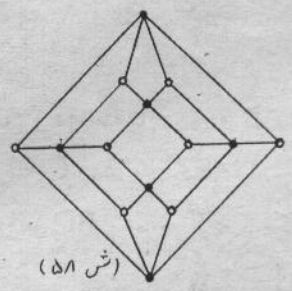
درشکل ۵۷ گستردهٔ شبکهٔ دوازده وجهی را در صفحه می‌بینید. خط پر نمایندهٔ مسیر مگس مطابق باقرارداد مفروض می‌باشد.

به‌طریق متشابه، شبکهٔ دوازده وجهی را که وجوهش لوزی هستند در این صفحه می گسترانیم (ش ۵۸). گره‌های شبکه به دو نوع تقسیم می‌شوند: آنهائی که در سه یال مشترکند وآنهائی که درچهار یال مشترکند (درشکل به‌صورت سیاه نمایش داده شده‌است).

هر گره از اولین دسته فقط به گره‌های دستهٔ دوم مربوط می‌شود و برعکس. مگس در جریان رفت و برگشت هایش مجبور خواهد شدکه از اولین و دومین دسته به نوبت عبور کند. چون هشت گره از اولین نوع و شش گره ازدومین نوع وجود دارد، مگس نمی‌تواند ازتمام رأسهای دوازده وجهی



(ش ۵۷)



(ش ۵۸)

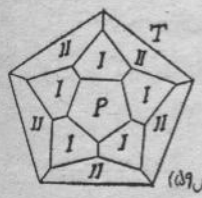
عبورکرده و به‌نقطهٔ عزیمتش مراجعت‌کند، بدون آنکه از یك نقطه دوبار عبورکرده باشد.

۴۲ـ دوازده وجهی منتظم

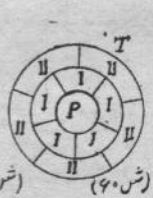
می‌توانیم وجوه یك دوازده وجهی را با چهار رنگ بطوری رنگ‌آمیزی کنیم که دو وجه مجاور دارای رنگهای متفاوت باشند. ثابت‌کنید که این عمل را فقط به چهار طریق می‌توانیم انجام دهیم (دونوع رنگ‌آمیزی که بوسیلهٔ دوران به‌یکدیگرتبدیل شوند یك جواب محسوب می‌شوند).

حل ـ دوازده وجهی منتظم را طوری جلوی خود قرار می‌دهیم که یکی‌از وجوهش که P نامیده می‌شود روبروی ما قرارگیرد (ش ۵۹). چنین وجهی را وجه پیشین می‌نامیم. وجه نامرئی که با آن موازی است به نام وجه پسین خوانده خواهد شد. مجموعهٔ پنج وجه مرئی که وجه پیشین را احاطه کرده‌اندحلقهٔ I ومجموعهٔ پنج وجه‌نامرئی که اطراف وجه‌پسین‌را گرفته‌اند، حلقهٔ II نامیده می‌شود.

چون مسئله اساساً مبتنی برتعیین طرق مختلف رنگ‌آمیزی وجوه دوازده وجهی‌است، می‌توانیم به‌جای شکل ۵۹ (که درآن پنج ضلعی دورهٔ ظاهری T همان وجه پسین دوازده



(ش ۵۹)



(ش ۶۰)

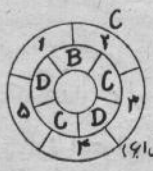
وجهی‌است) از نمایش ساده‌تر آن به‌صورت شکل ۶۰ استفاده کنیم .

دوازده وجهی منتظم را باسه رنگ بدون‌آنکه دو وجه مجاور همرنگ باشند، نمی‌توانیم رنگ‌آمیزی‌کنیم. زیرا اگر وجه پیشین دارای رنگ A باشد ، پنج وجه حلقهٔ I باید با رنگهای B و C رنگ‌آمیزی شوند و این امر غیرممکن‌است.

فرض می‌کنیم که بتوانیم دوازده وجهی مزبور را با چهاررنگ A،B،C و D رنگ‌آمیزی‌کنیم. به سادگی مشاهده می‌شودکه هر رنگ باید سه مرتبه بکار برده شود . زیرا اگر فرض‌کنیم‌که چنین نباشد، یعنی A کمتر ازسه مرتبه بکار برده شود، رنگ دیگری مثلا B بیشترازسه مرتبه بکارمی‌رود؛ می‌توانیم درنظر بگیریم‌که وجه پسین از رنگ B است . دراین صورت درحلقهٔ I از رنگ اخیر نمی‌تواند وجود داشته باشد . بنابراین حداقل سه وجه ازشش وجه نامرئی از رنگ B است وچنین چیزی ممکن نیست .

از این استدلال نتیجه می گیریم که وجوه پسین و پیشین همرنگ نیستند ولی رنگ وجه پسین دو مرتبه درحلقهٔ I بکار برده می‌شود .

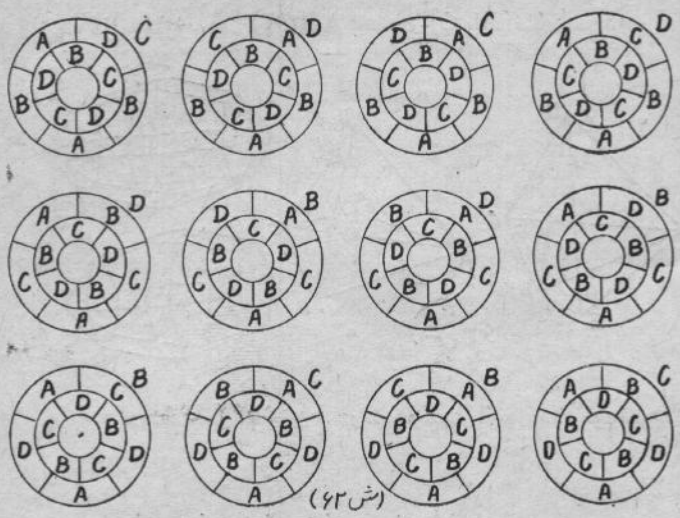
بالاخره ملاحظه می‌شود که با انتخاب رنگهای حلقهٔ I وترتیبی‌که این رنگها درآن باید داشته باشند و همچنین رنگ مربوط به وجه پسین تنها به یك نوع می‌توانیم رنگامیزی را انجام دهیم . مثلا در شکل۶۱ ، وجه پیشین باید ازرنگ A باشد ؛



(ش۶۱)

ازوجوه حلقهٔ II وجه ۱ فقط باید از رنگ A باشد درنتیجه ۲ باید از رنگ D و ۵ از رنگ B باشد، زیرا ۳ و۴ به‌ترتیب از رنگهای B و A هستند. این مثال می‌رساند که رنگامیزی به‌کمك فقط چهاررنگ امکان پذیراست.

فرض می‌کنیم‌که وجه پیشین از رنگ A باشد. درحلقهٔ I شش ترکیب مختلف می‌تواند بوجود بیاید و چون هرکدام ازاین ترکیبات دوامکان برای وجه‌پسین‌پدیدمی‌آوردپس رویهم دوازده ترکیب ممکن (مطابق با شکل ۶۲) داریم. درصورتی که دوازده وجهی با چهار رنگ رنگامیزی شده باشد ، رنگ A فقط روی سه وجه ظاهر می‌شود ؛ بنابراین اگر یکی از امکانات شکل ۶۲ را انتخاب کنیم ، بوسیلهٔ دوران دوازدهٔ


(ش۶۲)

وجهی حداکثر می‌توانیم دوتای دیگر به‌قبلی اضافه کنیم و در این صورت درمجموع سه‌صورت بوجود می‌آید. ازاین‌موضوع نتیجه می‌شودکه حداقل چهارطریق برای رنگامیزی یك‌دوازده وجهی وجود دارد .

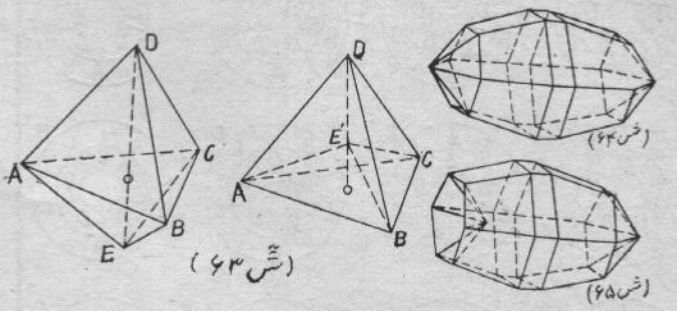
از دوران هریك‌ازطرحهای شکل ۶۲ ، طرحهایی‌بدست می‌آیندکه باآن دریك ستون واقعند وچون تمام طرحهای‌ممکن بررسی شده است پس بطورحتم ثابت شده است که فقط چهار طریقهٔ رنگامیزی وجود دارد .

۴۳- چند وجهیهای محدب

هر چند وجهی محدب دارای وجوه محدب است . برعکس ، آیا هرچند وجهی با وجوه محدب خودش‌هم محدب است؟ مخصوصاً ، آیا دوچند وجهی (مثلا ۳۰ وجهی) وجود داردکه تعداد وجوهشان باهم برابر واین وجوه دوبه‌دو با هم مساوی باشند (بدون‌آنکه وجوه هریك از چند وجهی با هم برابر باشند) و یکی از چند وجهیها محدب باشد و دیگری محدب نباشد ؟

حل - چند وجهی محدب غیر مشخصی را در نظر می گیریم و یکی‌از وجوه آنرا به‌عنوان قاعدهٔ یك هرم اختیار می‌کنیم‌که در آن زاویه‌های دو سطحی وجوه جانبی با قاعده به‌قدرکفایت‌کوچك باشند واین به‌منظورآنست که چند وجهی که ازکنار هم قراردادن این هرم با چند وجهی اولیه بدست می‌آید بازهم محدب باشد و به‌علاوه بتوانیم در چند وجهی اولیه هرمی متقارن با قبلی حفرکنیم . بدین‌ترتیب دو چند وجهی بدست می‌آوریم که یکی محدب است و دیگری محدب

نیست ، وجوهشان محدب و دو به دو متساویند . شکل ۶۳ دوچند وجهی ABCDE و ABCDE′ از نوع مذکور را که از چهاروجهی ABCD بدست آمده‌اند نشان می‌دهد.

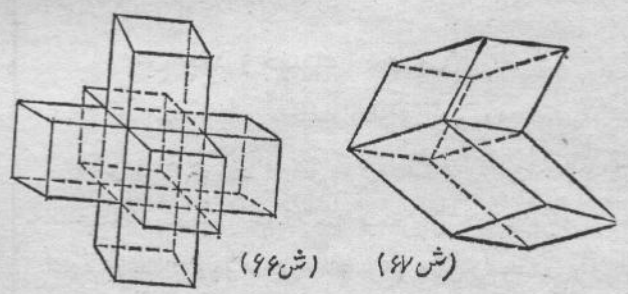


درشکلهای ۶۴و۶۵ دوسی وجهی ازنوع مذکورنموده شده‌اند .

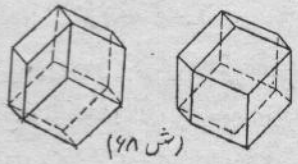
۴۴ـ یك چند وجهی غیرمحدب

یك چند وجهی غیرمحدب وجود داردکه وجوهش‌چهار ضلعیهای متساوی باشند ؟

حل ـ مثالهائی از اجسامی که حائز شرایط مفروض باشند درشکلهای ۶۶ و۶۷ نموده شده‌اند . جسم شکل ۶۷ ، متشکل از دومتوازی‌السطوح با وجوه لوزی است و این دو دریك وجه مشترك هستند .



دوازده وجهی با وجوه لوزی متساوی نیز وجود دارد که محدب نیست . می‌توانیم این جسم را از یك دوازده وجهی محدب با خارج کردن یك کنج سه‌وجهی جلوئی (شکل ۶۸ ، چپ) وبا جایگزین کردن آن بوسیلهٔ کنج سه وجهی جلوئی که آنرا در امتداد شش یال موازی مفروض انتقال داده‌ایم ، (شکل ۶۸ راست) بدست آوریم . جسم حاصل از سه متوازی السطوح



تشکیل شده‌است . اگراز جسم اخیریکی از متوازی‌السطوحها را حذف‌کنیم، شکل ۶۷ بدست می‌آید .

۴۵ـ در کشورعجایب .

لویز کارول (Lewis Carroll) ریاضیدان و داستان نویس، یکی‌ازخالقین مسائل پیچیدهٔ عجیب بود .

مثلا توصیه می‌کردکه‌از نقشه‌های با مقیاس ۱:۱استفاده کنیم ، زیرا با گستردن چنین نقشه‌ای روی زمین می‌توانیم موقعیت خودمان را درهرلحظه بدانیم؛ فقط کافی‌است‌که نامها را روی زمین ثبت‌کنیم .

فرض می‌کنیم مطابق با نصیحت وی ، تمام دوایر نصف‌النهارات ومدارات را بوسیلهٔ یك رنگ مقاوم رنگامیزی کرده و روی سطح‌کرهٔ زمین نام شهرها و بنادر وکشورها را ثبت نمائیم. دیگراحتیاجی به‌قطب‌نما نخواهیم داشت ولی‌تنها یك اشکال باقی می‌ماند وآن یافتن‌کوتاهترین راه برای رسیدن به‌مقصد معین می‌باشد . می‌دانیم‌که کوتاهترین راهها در این نقشهٔ عجیب خطوطی نیستند که نصف‌النهارات و مدارات را تحت زاویهٔ ثابتی قطع‌کنند. بدترآنکه ، رنگامیزی خطوط‌جدید در روی سطح‌کرهٔ زمین به‌هیچ وجه سودمند نیست: تمام دسته خطوط جهت‌یابی شده مارا به‌همین بن‌بست می‌کشاند . واضح است که مسؤولیت چنین وضعیتی برعهدهٔ کرهٔ ما است که بد ساخته شده‌است .

برای تصحیح کره ، بهترآنست‌که از نقشه شروع‌کنیم . می‌توانیم، مثلا شبکه‌ای راستگوشه ازنصف‌النهارات ومدارات رسم‌کرده و سپس چنین نقشه‌ای را روی یك استوانه به قسمی بپیچیم‌که مدارات روی آن تشکیل دوایری را بدهند . روی چنین سیارهٔ استوانه‌ای ،کوتاهترین راه مابین یك نقطه و نقطهٔ دیگر، تمام نصف‌النهارات را تحت زاویهٔ ثابتی قطع می‌کند . همچنین می‌توانیم نقشه را درامتداد مدارات ببریم وقطب N را یادداشت کرده و آنرا روی مخروطی به‌رأس N بپیچیم . قطب چنین سیارهٔ مخروطی ، نقطهٔ N می‌باشد ؛ مدارات و همچنین نصف‌النهارات یکدیگرراقطع نمی‌کنند ؛ هرمدارهرکدام از نصف‌النهارات را در دونقطه قطع می‌کند ، به‌همان سان که درروی زمین وقوع دارد . مطابق باآنچه درفوق به‌آن اشاره شد،کوتاهترین راهها همانهائی هستندکه دارای انحراف ثابت می‌باشند .

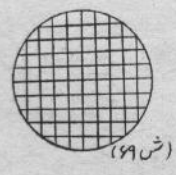
می‌توانیم طرحی مخروطی جالبتر بدست بیاوریم ، نقشهٔ شامل شبکه‌ای راستگوشه از خطوطی است که برای

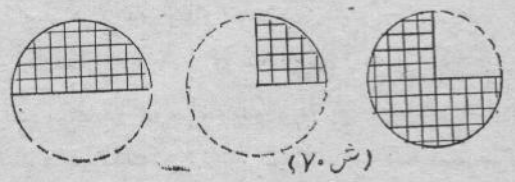
جهت‌یابی بکار می‌روند، ولی تنها یك دسته از چنین خطوطی روی سیاره تصویرشده‌اند؛ هرکدام از این خطوط ، دیگران را دردونقطه وخودش را در یك نقطه قطع می‌کند . اصل انحراف ثابت همچنان محفوظ باقی ماند .

این طرح چیست ؟

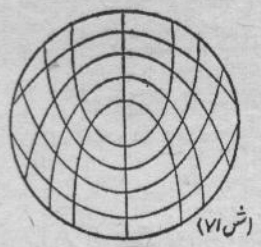
وقتی‌این دوطرح مخروطی را به **م. ر. نواکووسکی** نشان دادم، فوراً راه حل ثالثی برای‌آن بدست آورد و آن عبارت بود از : شبکه‌ای راستگوشه متشکل‌ازنصف‌النهارات، مدارات و «شبه مدارات» .

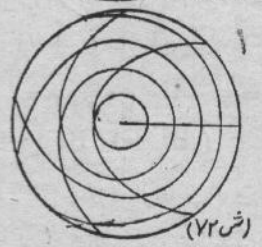
حل ـ سه‌طرح از سیارات مخروطی مذکور در این مسئله چنین بدست می‌آید که شبکه راستگوشه متشکل از « نصف‌النهارات » ، مدارات (ش ۶۹) را به‌سه نوع مطابق با شکل ۷۰ می‌بریم‌وبعد بطوری می‌پیچیم که تشکیل مخروطی با رأس N را بدهد .

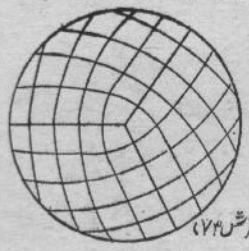

(ش ۶۹)


(ش ۷۰)

درشکل ۷۱ نمای فوقانی اولین مخروط دیده می‌شود . دودسته منحنیهای «نصف‌النهارات» و «مدارات» را به وضوح می‌بینیم. نه «نصف ـ النهارات» ونه«مدارات» هیچکدام، خودشان را قطع نمی‌کنند، ولی هر نصف النهار هر کدام ازمدارات را دردونقطه قطع می‌کند واین امر برعکس‌آن چیزی است که درروی زمین رخ می‌داد . مسیرهای کوتاهترین راههادارای انحراف ، ثابت‌اند ، یعنی نصف‌النهارات و مدارات را تحت زاویهٔ ثابتی قطع می‌کنند .


(ش ۷۱)


(ش ۷۲)


(ش ۷۴)

درتصاویر ۷۱ و ۷۲ نماهای فوقانی دومین و سومین مخروط ، یعنی تصاویر دسته منحنیهای روی نقشه عمود بر محورهای این مخروطها ، دیده می‌شود. روی‌دومین مخروط، دسته‌ای ازمنحنیها را می‌بینیم‌وهمچنین درسومین مخروط‌نیزاین امرآشکاراست .

جالب توجه است که جوابهای بالا منحصر به فرد نیستند .

۴۶ـ سه کره و یك خط

سه‌کره یکدیگررا در P قطع می‌کنند ولی هیچ خطی‌که از P بگذرد برسه‌کره مماس نیست. ثابت‌کنیدکه دراین صورت این‌کرات درنقطهٔ دیگری مشترکند .

حل ـ بین سه‌کره مفروض نمی‌توانیم دو کره بیابیم بطوری‌که برهم مماس باشند، زیرا صفحهٔ مماس بر دوکره در نقطهٔ تماس P سومی را تحت دایره‌ای قطع می‌کند . در این صورت مماس براین دایره ازنقطهٔ P برسه‌کره مماس‌است واین امرمغایر بافرض است .

بنابراین ، دوکرهٔ غیر مشخص از این کرات باید در دایره‌ای مشترك باشند ، واضح است که روی این دایره نقطهٔ P قراردارد . این دایره‌کرهٔ سوم را درنقطهٔ دیگری غیراز P قطع می‌کند. زیرا درغیر این صورت مماس از P براین دایره برسه‌کره مماس خواهد بود ومطابق بااستدلال فوق این امر غیرممکن است . چون این دایره از سومین کره و از نقطهٔ P عبورمی‌کند، باید مجدداً ازنقطهٔ دیگری‌که درهرسه‌کره‌مشترك است ، بگذرد .

۴۷ـ خاصیتی ازکره

سطحی را در نظر می‌گیریم‌که تمام برشهایش بوسیلهٔ صفحات ، دوایر باشند ، یك نقطهٔ تك نیز همچون دایره‌ای به‌شعاع صفر درنظرگرفته می‌شود . ثابت‌کنیدکه چنین سطحی کره است.

حل ـ فرض می‌کنیم که K دایرهٔ بریده شده از سطح S مفروض باشد. فرض می‌کنیم‌که L محور این دایره ، یعنی خط عمود ازمرکز دایرهٔ K برصفحهٔ K باشد . P نیز صفحهٔ ماربر L فرض می‌شود. بنا به‌فرض ، P سطح S را تحت یك دایره قطع می‌کند ؛ چون P با K دردونقطهٔ A و B (AB قطر K است) متقاطع است، دایرهٔ بریده شده از S بوسیلهٔ P که ما آنرا C(P) نمایش می‌دهیم از A و B می‌گذرد ، خط

(دنباله پایین صفحهٔ ۵۹۱)

نمونه‌ای از مسائل ریاضی مسابقات کشورهای مختلف

امتحانات ورودی برخی از دانشکده‌های اتحاد جماهیر شوروی

ازمجلهٔ روسی «ریاضیات دبیرستان»

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری

* - درکرهٔ به مرکز O هر یك از دو وتر متساوی AM و AN با قطر AB زاویهٔ α می‌سازند و وتر MN از مرکز O به زاویهٔ β دیده می‌شود . زاویهٔ بین دو وتر را پیدا کنید.

*ـ مطلوبست تعیین کلیهٔ اعداد مثبت a که درازاء آنها مقادیر مثبت x که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند تصاعد عددی با قدر نسبت مثبت تشکیل دهند :

$$\cos[(8a-3)x] = \cos[(14a+5)x]$$

* ـ بدون استفادهٔ از جدول ثابت کنید که :

$$\log_2 16 > \log_{16} 729$$

* ـ فاصلهٔ دو ایستگاه A و B برابر ۳۶۰ کیلو متر است . دو قطار در یك زمان از ایستگاههای A و B به‌سمت یکدیگر حرکت می‌کنند . قطاری که از ایستگاه A حرکت کرده می‌تواند در مدتی کمتر از ۵ ساعت به ایستگاه B برسد .اگر سرعت این قطار یك‌برابر ونیم بود می‌توانست در کمتر از ۲ ساعت پس از خروج از A به قطار دوم برسد . معلوم کنید سرعت کدام قطار بیشتر است .

* ـ از $x^2+y^2+z^2>0$ نتیجه بگیرید که :

$$2x^2+5y^2+3z^2-6xy-2xz-5yz>0$$

* ـ نقطهٔ A واقع در داخل کرهٔ به شعاع R با سه قطعه خط به طولهای متساوی l که دو به دو با یکدیگر زاویهٔ α می‌سازند به سه نقطه ازکره وصل شده است . فاصلهٔ A را از مرکز کره حساب کنید .

* ـ فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر ۷ کیلومتر است . دو نفر در یك زمان از A و B به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند و در مدتی کمتر از یك ساعت به یکدیگر می‌رسند . اگر سرعت اولی دو برابر و سرعت دومی ۲ کیلومتر بر ساعت بیشتر می‌شد در این صورت تا موقع رسیدن به‌هم نفر دوم راه بیشتری را طی می‌کرد . سرعت کدام یك ازآنان بیشتر بوده است ؟

* ـ سطح کروی به شعاع R از رأس یك هرم منتظم با قاعدهٔ شش گوش می‌گذرد . اگر طول هر قطعه از یالهای جانبی هرم که داخل کره محصور می‌شود برابر l باشد اندازهٔ زاویهٔ بین هر دویال مجاور را تعیین کنید .

* ـ از نقاط A و B که فاصلهٔ آنها از یکدیگر ۱۲۰ کیلومتر است دو دوچرخه سوار در یك لحظه به سمت هم‌براه می‌افتند و در مدت کمی بیشتر از ۵ ساعت به هم می‌رسند . روز دیگر این دو دوچرخه سوار از نقاط C و D که فاصلهٔ آنها از هم ۳۶ کیلومتر است در یك جهت شروع به حرکت می‌کنند و آنکه جلوتر است با سرعت ۶ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت خود در روز قبل حرکت می‌کند . اما دیگری با همان سرعت روز قبل حرکت می‌کند . آیا ۲ ساعت کافی است تا دوچرخه سوار دوم به اولی برسد ؟

* ـ درکرهٔ به شعاع R قطر AB و سه وتر AC و AD و AF به طولهای متساوی l که دو به دو با یکدیگر زاویهٔ α می‌سازند رسم شده است . مطلوبست محاسبهٔ حجم محصور بین صفحات مثلثهای ACD و ADF و ACF و BCD و BDF و BCF

* ـ ازنقاط A و B واقع درکناریك رودخانه که به‌فاصلهٔ ۲۰ کیلومتر از یکدیگر واقع‌اند دو قایق در یك زمان به‌سمت یکدیگر راه می‌افتند و بعد ازکمی بیشتر از ۲ ساعت به هم می‌رسند . اگر قایق دوم فاصلهٔ از B تا A را در مدتی کمتر از ۳ ساعت و ۲۰ دقیقه طی کند، آیا قایق اول می‌تواند فاصلهٔ از A تا B را در ۵ ساعت بپیماید ؟

* ـ ریاضیدانی درحالی که در یك دست کلاهش را گرفته

و در دست دیگر چوبی را نگاه داشته بود در امتداد ساحل یك رودخانه با سرعتی ۱/۵ برابرسرعت جریان آب رودخانه به طرف خانه‌اش در حرکت بود و در ضمن در بارهٔ مسئله‌ای فکر می‌کرد و به همین جهت بدون آنکه متوجه باشدکلاه خود را به جای چوب درآب انداخت . پس از مدتی متوجه اشتباه خود شد، چوب را درآب انداخت و برگشت وباسرعتی دو برابر سرعت قبلی خود شروع به دویدن‌کرد وپس ازمدتی توانست‌کلاه خود را از آب بگیرد . سپس در جهت اولی و با همان سرعت اولیه شروع به حرکت‌کرد و ۱۰ دقیقه بعد از آنکه‌کلاه را از آب گرفت با چوبی‌که در آب انداخته بود مواجه‌شد.معلوم‌کنیدکه‌اگرکلاهش رااشتباهی‌درآب‌نمی‌انداخت چه مدت زودتر به خانه‌اش می‌رسید .

* ـ آیا برای هر مثلث دلخواه ABC نقطه‌ای مانند P می‌توان پیداکردکه سه نقطهٔ قرینهٔ آن نسبت به ضلعهای AB و BC و AC روی دایرهٔ محیطی مثلث واقع شوند ؟

* ـ به ازاء چه مقادیر a تفاضل ریشه‌های معادلهٔ زیر برابر با ۳ می‌باشد :

$$ax^2 + x - 2 = 0$$

* ـ دانشجوئی درطول ۵ سال‌تحصیل خود ۳۱ امتحان داد .درهرسال تعداد امتحانات‌بیشتر از سال قبل بود و در سال پنجم تعدادآنها دو برابرسال اول بود . تعداد امتحانات سال چهارم را پیداکنید .

* ـ کلیهٔ اعداد چهار رقمی مجذورکامل را پیداکنیدکه اگر از هر رقم آنها یك واحدکم شود عددی مجذور کامل بدست آید .

* ـ آیا ممکن است‌که مجموع فواصل یك نقطهٔ واقع‌در داخل چهار ضلعی محدب ازرأسهای‌آن بیش از محیط‌آن‌باشد؟

* ـ به پادشاه «گاروخ» خبردادندکه بالاخره اژدهای خطرناکی‌که مزاحم مردم بود به دست یکی از پهلوانان شهر کشته شد. پادشاه می‌دانست‌که این‌کارفقط از دست سه‌پهلوان به‌نامهای «ایلیا» ، «دابرنیا» و «الیشا» ساخته است ، پس‌آنان را خواست‌وسه‌پهلوان‌با سر و وضع خاك آلود بـه حضور شاه رسیدند . پادشاه از هر یك از آنان سه سؤال‌کرد و پاسخهای ایشان به سه سؤال مربوط به‌ترتیب چنین بود :

ایلیا :

من اژدها را نکشتم ـ من به سرزمینهای پخبندان رفتم ـ

اژدها را الیشا گشت :

دابرنیا :

اژدها را الیشاکشت ـ اگر من‌کشته بودم نمی‌گفتم ـ نیروی نا پاك زیادی باقی ماند .

الیشا :

من‌اژدها را نکشتم ـ مدتی بودکه‌دنبال فرصتی‌می گشتم تا دلاوری خود را نشان دهم ـ در حقیقت ایلیا به سرزمینهای یخبندان رفته است .

پادشاه‌بعداز شنیدن‌پاسخها فهمیدکه‌هریك‌ازسه‌پهلوان‌دو بار راست ویك بار دروغ گفته است و برای وی معلوم شدکه کدام پهلوان اژدها راکشته است . چگونه ؟

* ـ اعداد صحیح x و y $(x>y>0)$ را پیداکنید که داشته باشیم :

$$x^3 + 7y = y^3 + 7x$$

* ـ مربع به ضلع ۱۰۰ متر را به مربعهای به‌ضلع یك متر تقسیم می‌کنیم و این مربعها را به‌رنگهای سفید ، قرمز ، سیاه و آبی چنان رنگامیزی می‌کنیم‌که دو مربع همرنگ در ضلع یا در رأس مشترك نباشند ، تعداد مربعهای رنگین چقدر می‌تواند باشد و عمل مزبور چگونه ممکن است ؟

* ـ معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$(x^2 + 6x - 4)(x^2 + 6x - 3) = 12$$

* ـ در مثلث ABC نقطهٔ K را روی AB و نقطهٔ H را روی AC چنان پیداکنیدکه :

$$BK = KH = HC$$

* ـ کلیهٔ‌عددهای‌اول p را تعیین‌کنیدکه بـه ازاء آنها $(p^2 + 13)$ نیز اول باشد .

II ـ مسائل جبر کنکور دانشگاههای‌لندن و انگلستان

از کتاب : Pure-Mathematics

تألیف : charlesworth

ترجمه و تنظیم از : ابراهیم ذوالقدری

دانشجوی دانشکدهٔ فنی تهران

۱ـ اولاـ مماس مشترك سهمیهای $y^2 = 4ax$ و $2x^2 = ay$ را پیداکنید . ثانیاً ـ نشان دهیدکه فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس ۷/۵ برابر فاصلهٔ مبدأ مختصات از مماس مشترك‌است.

۲ـ اولاـ معادلهٔ وتری از سهمی $y^2 = 4ax$ را پیدا

کنیدکه در نقطهٔ $P(h$ و $k)$ نصف شود . ثانیاً ـ مکان هندسی اوتاری از سهمی فوق را پیداکنیدکه برمنحنی زیرمماس‌باشند.

$$(2ma-ly)^2=8la(xl-1)$$

۳ـ مماسهای نقاط P و Q واقع بریك بیضی در نقطهٔ R متلاقی‌اند . N پای عمودی است‌که از نقطهٔ R بر محور اصلی بیضی وارد می‌شود . زاویه‌های PNR و QNR را به‌ترتیب α و β می‌نامیم .

(a) ـ اگر N داخل‌بیضی باشد : ثابت‌کنیدکه : $\alpha=\beta$

(b) ـ اگر N خارج بیضی واقع شود ؛ ثابت‌کنیدکه :

$$\alpha+\beta=\pi$$

۴ـ یك منحنی بوسیلهٔ روابط زیر معین می‌شود : $x=\cos t$ و $y=\cos t+\sin t$ که در آنجا t یك پارامتر متغیر است . ثابت‌کنیدکه ماکزیمم و می‌نیمم فاصلهٔ یك‌نقطه ازمنحنی تا مبدأ مختصات به ترتیب برابرند با :

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \text{ و } \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

اگر P و Q دو نقطهٔ نظیر ماکزیمم و می‌نیمم فرض شوند ؛ ثابت‌کنیدکه مماسهای این نقاط بریکدیگر عمودند .

۵ ـ اولا نشان دهید که معادلهٔ :

$(x+y-3)^2=2(x+2)(y-1)$ نمایش یك دایره است. مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع آنرا تعیین‌کنید . ثانیاً ـ ثابت کنیدکه خطوط $x+2=0$ و $y-1=0$ مماس بر دایره می‌باشند . وضعیت خط $x+y-3=0$ را با دو خط مماس تعیین‌کنید .

۶ـ خط $lx+my+n=0$ سهمی $y^2=4ax$ را در نقاط P و Q قطع می‌کند . خطوط BP و BQ مجدداً سهمی را در نقاط R و T می‌برند . B نقطه‌ای است به مختصات $(0$ و $b)$. ثابت‌کنیدکه معادلهٔ خط RT برابر است با :

$$nx-bmy+b^2l=0$$

۷ـ اولاـ معادلهٔ مماسی‌با ضریب زاویه‌ای m بربیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را بنویسید . ثانیاً ـ از نقطهٔ P خارج بیضی همواره می‌توان دو مماس بر آن رسم‌کرد . اگر زاویهٔ بین‌این دو مماس 45° باشد ؛ ثابت‌کنیدکه نقطهٔ P بر روی منحنی به معادلهٔ زیر حرکت می‌کند :

$$(x^2-a^2)^2+6(x^2-a^2)(y^2-b^2)+(y^2-b^2)^2=$$
$$=4x^2y^2$$

۸ـ مکان‌هندسی اوساط اوتاری به‌طول ثابت $2l$ ازبیضی به معادلهٔ زیرراپیداکنید.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

۹ـ اولاـ معادلهٔ وتری از بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ که دو نقطه به پارامترهای θ و φ را به یکدیگر وصل می‌کند بنویسید . ثانیاً ـ اگر این وتر بر هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ مماس باشد ؛ معادلهٔ مکان هندسی وسط آنرا پیداکنید .

۱۰ـ اولاـ معادلهٔ وتری‌که دو نقطهٔ $(ct_1$ و $\frac{c}{t_1})$ و $(ct_2$ و $\frac{c}{t_2})$ از هذلولی متساوی‌القطرین $xy=c^2$ را به یکدیگر وصل می‌کند ؛ بنویسید . ثانیاً ـ اگرسه نقطهٔ دلخواه برروی هذلولی در نظر بگیریم ؛ ثابت‌کنیدکه مرکز ارتفاعی مثلث حاصل از این سه نقطه برروی هذلولی قرار دارد .

۱۱ـ (a) ـ ثابت‌کنید معادلهٔ وتری از بیضی : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ که در نقطهٔ $(h$ و $k)$ نصف می‌شود ، به صورت زیر است :

$$\frac{xh}{a^2}+\frac{yk}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}$$

(b) ـ معادلهٔ قائم برهذلولی‌متساوی‌القطرین $xy=c^2$ را در نقطهٔ $(ct$ و $\frac{c}{t})$ بنویسید و پارامتر نقطهٔ تقاطع این‌قائم با هذلولی را تعیین‌کنید .

۱۲ـ یك منحنی بوسیلهٔ‌معادلات زیرنشان داده‌می‌شود:

$$x=\frac{(4-2t^2)}{1+t^2} \text{ و } y=\frac{2t}{1+t^2}$$

اولا ـ ثابت کنید معادلهٔ وتری از منحنی‌که دونقطه به پارامترهای t_1 و t_2 رابه‌یکدیگروصل می‌کندبه‌صورت زیراست

$$x(1-t_1t_2)+3y(t_1+t_2)=4+2t_1t_2$$

ثانیاً ـ ثابت‌کنیدکه اگر مماسهای این نقاط با یکدیگر موازی باشند ؛ وتر مزبور از یك نقطهٔ ثابت‌که مختصاتش را تعیین خواهیدکرد می گذرد .

ثالثاً ـ مکان هندسی نقطهٔ تقاطع مماسهای متعامدی‌که بر منحنی رسم می‌شوند پیداکنید .

۱۳ـ مثلث ABC در هذلولی متساوی‌القطرین (Σ) محاط است . دایرهٔ محیطی مثلث ABC هذلولی را مجدداً در نقطهٔ D قطع می‌کند . اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد ؛ ثابت‌کنیدکه H روی (Σ) قرار دارد و HD قطری از (Σ) می‌باشد .

۱۴ـ ثابت‌کنیدکه سطح‌محصوربین‌سهمیهای $ay = 2x^2$ و $y^2 = 4ax$ برابر $\frac{2a^2}{3}$ است .

مختصات مرکز ثقل این سطح را بیابید .

۱۵ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y^2 = x^2(a-y)$ را رسم‌کرده‌ومساحت سطح محصور بین منحنی فوق وخط $y = a$ را محاسبه‌کنید . همچنین معین‌کنیدکه خط $2y = a$ این سطح را به‌چه نسبت تقسیم می‌کند .

III ـ مسائل چهارمین المپیاد ریاضی انگلستان

از مجلهٔ ماهانهٔ ریاضیات آمریکا

ترجمهٔ : **علی اصغر قلاوند**

۱ـ دایرهٔ C بدون لغزش در طول خارجی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ در صفحهٔ مختصات می‌غلتد . یك نقطهٔ معین P از دایرهٔ C در ابتدا در محلی به مختصات (۲ و ۰) است ، رابطهٔ بین مختصات P را با انتخاب پارامتر مناسب θ پیداکنید ومکان‌هندسی آنرا رسم‌کنید وتمام‌مماسهایی راکه‌به‌موازات محور xها و محورyها براین‌مکان رسم‌می‌شوند پیداکنید .

۲ـ گاوهایی را در علفزاری رهاکرده‌اند . همانطورکه گاوها علفها را می‌خورند علف‌ها هم رشد می‌کنند. اگر ۱۵ گاو ۳ جریب ازعلفزار را در۴ روزچراکنند و ۳۲ گاوبتوانند ۴ جریب علفزار را در ۲ روز چراکنند ، چندگاو برای‌چرای ۶ جریب علفزار در ۳ روز لازم خواهد بود .

۳ـ یك «فاصله» بین دو نقطهٔ به مختصات $(x_1$ و $y_1)$ و $(x_2$ و $y_2)$ در صفحهٔ مختصات بوسیلهٔ رابطهٔ :

$d = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ تعریف شده است. با استفاده از این تعریف مکان هندسی تمام نقاطی‌از صفحه را پیداکنیدکه از مبدأ ویك نقطه ثابت به مختصات (a و b) به یك فاصله‌باشند. وقتی‌که $x \geq 0$ و $y \geq 0$ و $a > b$ باشد ، حالتهایی‌که برحسب علامات b و a بوجود می‌آیند تمیز دهید .

۴ـ دوکره به شعاعهای a و b با همدیگر مماسند ویك صفحه در دو نقطهٔ مختلف براین دوکره مماس است . شعاع بزرگترین کره‌ای را پیداکنیدکه بتواند از میان دوکره وصفحهٔ مزبور بگذرد .

۵ـ اگر داشته باشیم :

$\sin x + \sin y + \sin z = 0$ و $\cos x + \cos y + \cos z = 0$

ثابت‌کنیدکه :

$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$ و

$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$

۶ـ اگر a_1 و $a_2 \ldots a_7$ اعداد صحیح و مثبتی باشندو b_1 و $b_2 \ldots b_7$ همان اعداد باشندکه دو باره مرتب شده‌اند. ثابت‌کنید که عدد $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\ldots(a_7 - b_7)$ زوج است .

۷ـ یك مسابقهٔ یك حذفی پینگ‌پنگ بین دو نفر ترتیب داده شده است و برای هر بازی یك توپ نو (جدید) استفاده می‌شود . چند توپ برای مسابقه لازم است ؟

۸ـ وتری به طول l سطح داخلی دایره‌ای به شعاع r را به دو ناحیهٔ D_1 و D_2 تقسیم می‌کند . دایرهٔ S با شعاع ماکزیمم در D_1 محاط شده‌است. اگر A مساحت ناحیهٔ D_1 خارج دایرهٔ S باشد ثابت‌کنیدکه A وقتی بزرگترین مقدار را داردکه : $l = \frac{16\pi r}{16 + \pi^2}$ ودر این حال A بیشتر از مساحت D_2 است.

۹ـ اضلاع مثلثی به ارتفاعات ۳ و ۴ و ۶ راپیداکنید.

۱۰ـ وجوه یك‌چهاروجهی ازچهارمثلث‌متساوی‌الساقین تشکیل شده است.اگر α زاویهٔ بین دویال روبروی چهاروجهی باشد ثابت‌کنیدکه : $\cos\alpha = \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}$ که B و C زوایای مجاور بیکی از این یالها دریك وجه چهار وجهی می‌باشد .

۱۱ـ مجموع معکوسات‌یك‌مجموعهٔ اعداد صحیح‌مختلف و مثبت برابر واحد است اگر $n = 3$ باشد ثابت‌کنیدکه یك چنین مجموعه‌ای وجود دارد و آنرا پیداکنید ، یك چنین مجموعه‌ای را برای ۵ و $n = 4$ و بطورکلی $n > 3$ پیداکنید.

۱۲ـ ماکزیمم تعداد نقاطی را پیداکنیدکه‌می‌توانندروی سطح کره‌ای قرار بگیرند بطوری‌که فاصلهٔ بین هر دو نقطه از کره ؛ (a) کمتر از $\sqrt{2}$ ، (b) بیشتر از $\sqrt{2}$ باشد .

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۶۵

۶۵/۱- از علی‌اکبر احسانی، دبیرستان رازی شاهی

ثابت‌کنیدکه درهرمثلث قائم‌الزاویه مکعب وتر بزرگتر است ازمجموع مکعبات دوضلع دیگر.

حل - به‌فرض اینکه a طول وتر و b و c طولهای دوضلع دیگر باشد داریم :

$$\begin{matrix} a>b & & ab^2>b^3 \\ & \Longrightarrow & \\ a>c & & ac^2>c^3 \end{matrix}$$

$$ab^2+ac^2>b^3+c^3$$

$$a(b^2+c^2)>b^3+c^3 \quad \text{یا} \quad a^3>b^3+c^3$$

۶۵/۲- فرستنده : ابراهیم ذوالقدری

معادله‌ای زیررا حل‌کنید :

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{5(x+2)(x-4)}+\frac{(x+3)(x-5)}{9(x+4)(x-6)}-$$

$$-\frac{2(x+5)(x-7)}{13(x+6)(x-8)}=\frac{92}{585}$$

حل - معادلهٔ اول را به‌صورت زیرمی‌نویسیم و عمل می‌کنیم :

$$(12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4)=120$$

$$(144x^2-60x+4)(144x^2-60x+6)=120$$

$$144x^2-60x=y$$

$$y^2+10y-96=0 \Longrightarrow y=6 \text{ یا } -16$$

$$144x^2-60x-6=0 \Longrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ یا } -\frac{1}{12}$$

$144x^2-60x+16=0$ جواب حقیقی ندارد

معادلهٔ دوم‌با فرض $x^2-2x=y$ چنین می‌شود :

$$\frac{y-3}{5(y-8)}+\frac{y-15}{9(y-24)}+\frac{2(y-35)}{13(y-48)}=$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{2}{13}$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{y-3}{y-8}-1\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{y-15}{y-24}\right)+\frac{2}{13}\left(\frac{y-35}{y-48}-1\right)=0$$

$$\frac{1}{y-8}+\frac{1}{y-24}=\frac{2}{y-48} \Longrightarrow y=18$$

$$x^2-2x=18 \Longrightarrow x=1\pm\sqrt{19}$$

۶۵/۳- از : علی‌اکبر احسانی

معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$6\sqrt[x]{9}+6\sqrt[x]{4}=13\sqrt[x]{6}$$

یکان - می‌توان معادله را نسبت‌به‌مجهول x به‌صورت کلی‌زیردر نظرگرفت وآنرا حل وبحث‌کرد .

$$a\sqrt[x]{m^2}+b\sqrt[x]{mn}+c\sqrt[x]{n^2}=0$$

حل - از تقسیم طرفین معادله بر $\sqrt[x]{6}$ و با فرض $\sqrt[x]{\frac{3}{2}}=y$ خواهیم داشت :

$$y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6} \Longrightarrow y=\frac{3}{2} \text{ یا } \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[x]{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2} \Longrightarrow x=1$$

$$\sqrt[x]{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Longrightarrow x=-1$$

برای حل معادله در حالت‌کلی طرفین را بر $\sqrt[x]{mn}$ تقسیم می‌کنیم و $\sqrt[x]{\frac{m}{n}}=y$ را مجهول کمکی انتخاب می‌کنیم ، خواهیم داشت :

$$ay^2+by+c=0$$

۶۵/۴- از : امیرنادری سامانی

اندازه‌های زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ای را تعیین کنیدکه بین $2p$ محیط و a طول‌وترآن رابطهٔ زیربرقرارباشد.

$$8p^2 = a(a + 8p)$$

حل - رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$8p(p-a) = a^2$$

$$p(p-a) = \frac{b+c+a}{2} \times \frac{b+c-a}{2} =$$

$$= \ldots = \frac{bc}{2} = \frac{ah}{2}$$

$$\frac{8ah}{2} = a^2 \Longrightarrow h = \frac{a}{4}$$

ارتفاع نظیروتربرابر با یك چهارم وتر است ومی‌دانیم که درچنین مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌های زاویه‌های حاده 15° و 75° می‌باشد .

۶۵/۵- از: ایوب نصرت‌آبادی

اگر a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلثی در روابط زیر صادق باشند ثابت‌کنیدکه دو میانه از این مثلث بریکدیگر عمودند :

$$\begin{cases} c\cos x + b\sin x = 2a \\ b\cos x - c\sin x = a \end{cases}$$

حل - چون طرفین هریك ازدو رابطه را مجذورکنیم و بعد آنها را نظیربه‌نظیر با هم جمع کنیم‌نتیجه خواهد شد :

$$b^2 + c^2 = 5a^2$$

$$b^2 + a^2 + c^2 + a^2 = 7a^2$$

$$2m_c^2 + \frac{c^2}{2} + 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} = 7a^2$$

$$2m_c^2 + 2m_b^2 = 7a^2 - \frac{b^2+c^2}{2} = \frac{9a^2}{2}$$

$$(\frac{2}{3}m_c)^2 + (\frac{2}{3}m_b)^2 = a^2$$

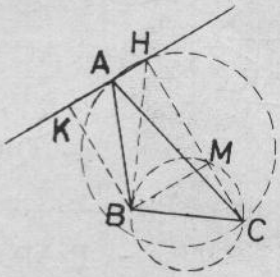
اگر G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شودکه مثلث BCGدر زاویهٔ Gقائمه است یعنی دو میانهٔ BG و CG بر هم عمودند .

۶۵/۶- از : سید جمال آشفته

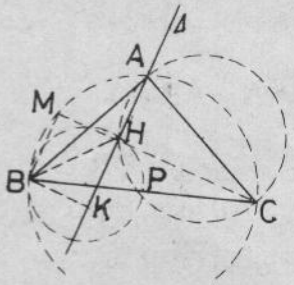
مثلث ABC مفروض است. از رأس A خطی رسم کنید که اگر K وH تصاویر B و C روی‌آن باشند BH واسطهٔ هندسی بین BK و CH باشد.

حل - به فرض‌اینکه $\triangle$ خط مطلوب‌باشد از B موازی با $\triangle$ رسم‌می‌کنیم که‌در M با CH برخورد می‌کند وخواهیم داشت :

$$BH^2 = BK.CH = HM.HC$$



یعنی قدر مطلق قوت نقطهٔ H نسبت به‌دایرهٔ ماربر سه نقطهٔ BوCو M از یك طرف برابر است با HB^2وازطرف دیگر برابر است با $HM.HC$ و چون زاویهٔ BMC قائمه است دایرهٔ ماربر سه نقطهٔ B و C و Mبه قطرBC می‌باشد وخط BH یا در نقطهٔ B بر



این دایره مماس‌است یعنی زاویهٔ AEC قائمه است ، یا اینکه HB نصف وتر می‌نیمم نظیر نقطهٔ H از دایرهٔ مزبور باشدکه در این حالت اگر P وسط BC باشد زاویهٔ BHP قائمه‌است و چون‌زاویهٔ AHC نیزقائمه است بنابراین H بردایرهٔ‌به‌قطر AC قرار دارد و راه حل مسئله چنین می‌شود :

دایرهٔ α به قطر AC را رسم می‌کنیم‌و در نقطهٔ Bعمود D را بر BC اخراج می‌کنیم و همچنین دایرهٔ β به قطر BP را رسم می‌کنیم . اگر H نقطهٔ تلاقی خط D با دایرهٔ α وH' نقطهٔ تلاقی دایرهٔ β با دایرهٔ α باشد خط AH و همچنین خط AH' همان خط مطلوب $\triangle$ می‌باشد .

بحث دروجود وتعداد جوابها به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود .

۶۵/۷- از : کاظم فلاحتی دبیرستان رازی شیراز

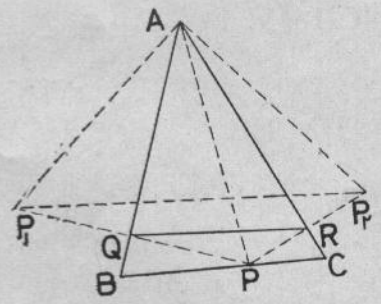
در مثلث حاده‌الزوایای ABC نقطهٔ P را برضلع BC چنان تعیین کنیدکه‌اگر R و Q تصویرآن روی ضلعهایAC و AB باشد،

۱- طول QR می‌نیمم باشد .

۲- مساحت مثلث PQR ماکسیمم باشد .

۳ـ به‌فرض اینکه زاویه‌های B و C از مثلث مفروض متساوی باشند محیط مثلث PQR می‌نیمم باشد .

حل ـ مثلث حاده‌الزوایای ABC و نقطهٔ P واقع بر ضلع BC ازآنرادرنظر می‌گیریم . اگر P_1 و P_2 به‌ترتیب‌قرینه‌های P نسبت بـه ضلعهای AB و AC باشد اولا طول P_1P_2 دو برابر طول QR است.



ثانیاً مثلث AP_1P_2 متساوی‌الساقین بوده ودرآن‌اندازهٔ زاویهٔ P_1AP_2 دو برابر اندازهٔ زاویهٔ BAC و مقدار ثابت می‌باشد، در نتیجه داریم :

$$QR = \frac{P_1P_2}{2} = AP_2 \sin A = AP \sin A$$

طول QR وقتی می‌نیمم است که‌طول AP می‌نیمم‌باشد و این در حالتی است‌که AP بر BC عمود باشد .

۲ ـزاویهٔ QPR مکمل‌زاویهٔ A است و اگر $PQ = x$ و $PR = y$ فرض شود Σ مساحت مثلث PQR برابراست‌با :

$$\Sigma = \frac{1}{2} xy \sin A$$

مقدار Σ وقتی‌ماکسیمم است‌که حاصل‌ضرب xy ماکسیمم‌باشد. از طرف دیگر اگر S مساحت مثلث ABC باشد داریم :

$$cx + by = 2S$$

مجموع دو مقدار مثبت cx و by ثابت است پس حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکسیمم است‌که‌با هم برابر باشند . به عبارت‌دیگر ماکسیمم bcxy (یعنی ماکسیمم xy) وقتی حاصل می‌شود که داشته باشیم :

$$cx = by \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{b}{c}$$

در این حالت برای تعیین نقطهٔ P کافی است مکان‌نقاطی را رسم‌کنیم‌که نسبت فواصل‌آنها از دوضلع AE و AC برابر با طولهای این دو ضلع باشد : از تلاقی این مکان (که خطی ماربر A است) با ضلع BC نقطهٔ P بدست می‌آید .

۳ـ ثالثاً وقتی $b = c$ باشدنتیجه می‌شود $x + y = h_b$ یعنی مجموع دو ضلع PQ و PR ثـابت است و محیط مثلث PQR وقتی می‌نیمم است‌که طول PQ می‌نیمم باشد و بنابه قسمت‌اول P باید پای‌ارتفاع نظیر رأس A (یعنی وسطBC) باشد .

۶۵/۸ـ از: کاظم فلاحتی

به‌فرض‌آنکه داشته باشیم:

$$\begin{cases} \sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 0 \\ \operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} b + \operatorname{cosec} c + \operatorname{cosec} d = 0 \end{cases}$$

ومقادیر a و b و c و d هیچیك مضرب صحیحی از π نباشد ثابت‌کنیدکه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} tg\,a + tg\,b + tg\,c + tg\,d = 0 \\ cotg\,a + cotg\,b + cotg\,c + cotg\,d = 0 \end{cases}$$

حل ـ از دو رابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود که مقادیر $\sin a$ و $\sin b$ و $\sin c$ و $\sin d$ ریشه‌های معادله‌ای به صورت زیر می‌باشند :

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

با توجه به‌فرمول $\sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$ اگر $x^2 = \frac{y^2}{1 + y^2}$ را درمعادلهٔ‌بالا منظورکنیم معادله‌ای‌بدست می‌آیدکه‌ریشه‌های آن مقادیر $tg\,a$ و $tg\,b$ و $tg\,c$ و $tg\,d$ می‌باشد . این معادله‌بعد از اختصار چنین است :

$$(A + B + C)y^4 + (B + 2C)y^2 + C = 0$$

و بنابه روابط بین ریشه‌ها و ضرایب داریم :

$$tg\,a + tg\,b + tg\,c + tg\,d = 0$$

$$tg\,a\,tg\,b\,tg\,c + tg\,a\,tg\,c\,tg\,d + tg\,a\,tg\,b\,tg\,d + tg\,b\,tg\,c\,tg\,d = 0$$

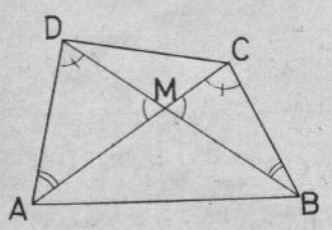
در رابطهٔ اخیر طرفین را بر $tg\,a\,tg\,b\,tg\,c\,tg\,d$ تقسیم می‌کنیم ، نتیجه می‌شود :

$$cotg\,a + cotg\,b + cotg\,c + cotg\,d = 0$$

۶۵/۹ـ از: محمدعلی عبائیان

چهارضلعی متغیر ABCD همواره محاطی‌است ودرآن دورأس A و B و انـدازه‌های ضلعهای AD و BC ثـابت می‌باشد. مکان هندسی نقطهٔ تلاقی دوقطر را پیداکنید .

حل ـ اگر M نقطهٔ تلاقی دو قطر و $AD = l$ و $BC = l'$ باشد چون چهار ضلعی محاطی است دو مثلث ADM و BCM



متشابهند و داریم :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{AD}{BC}=\frac{l}{l'}$$

نسبت فواصل M از دو نقطهٔ B و C مقدار ثابت است پس مکان آن دایره‌ای به قطر KH است که K و H دو نقطه‌اند که قطعه خط AB را به نسبت l به l' تقسیم می‌کنند .

۶۵/۱۰- از : اکبر ابراهیمیان

سه‌عدد صحیح ومثبت چنان تعیین کنید کـه سه جملـهٔ متوالی یك تصاعد حسابی باشند وسربع مجموع آنها بامجموع مکعباتشان برابر باشد .

حل ـ عدد میانی را x وقدر نسبت تصاعد را d فرض می‌کنیم ، باید داشته باشیم :

$$[(x-d)+x+(x+d)]^2=$$
$$=(x-d)^3+x^3+(x+d)^3$$

بعد از اختصار نتیجه می‌شود :

$$x^2-3x+2d^2=0$$
$$4x^2-12x+9-9+8d^2=0$$
$$(2x-3)^2=9-8d^2$$

مقدار طرف دوم باید عدد صحیح مثبت باشد و این فقط به ازاء مقادیر $d=0$ و $d=1$ امکان دارد . صرف نظـر از جواب $d=0$ در ازاء $d=1$ داریم :

$$(2x-3)^2=1 \Rightarrow x=2$$

سه عدد مطلوب عبارتند از عددهای ۱و۲و۳

۶۵/۱۱- از : عبدالحسین ایمانی

کنج سه‌قائمهٔ به رأس O را درنظرمی گیریم. بریالهای آن‌طولهای $OA=a$ و $OB=b$ و $OC=c$ وبرامتدادیال‌های آن به ترتیب طـولهای $OA'=a'$ و $OB'=b'$ و $OC'=c'$ را جدا می‌کنیم ، بقسمی‌که صفحات ABC و A'B'C' با هم موازی باشند .اگر V و V' حجمهای دوهرم OABC و OA'B'C' و S و P و S' و P' بـه تـرتیب مساحت و محیط مثلثهای ABC و A'B'C' بـاشد ثـابت کنید که :

$$\frac{V}{P\cdot S}=\frac{V'}{P'\cdot S'}$$

حل ـ دو هرم مزبور با هم متشابهند و اگر h و h' به ترتیب طولهای ارتفاعهای آنها باشد داریم :

$$\frac{V}{V'}=\frac{h^3}{h'^3}\ ,\ \frac{S}{S'}=\frac{h^2}{h'^2}\ ,\ \frac{P}{P'}=\frac{h}{h'}$$

$$\frac{V}{V'}=\frac{P.S}{P'.S'} \Longrightarrow \frac{V}{P.S}=\frac{V'}{P'.S'}$$

یکان ـ در حلی که‌از طرف طراح مسئله ارائـه شده از روابط متری استفاده شده است و از این جهت اندازه‌های یالها داده شده است : اما با استفادهٔ از تشابه دو شکل به‌اندازه‌های یالها نیازی نیست . در ضمن در چاپ‌صورت مسئلـه تـوازی صفحات قاعده‌ها از قلم افتاده که این اشتباه از طرف مجله‌روی داده است .

۶۵/۱۲- از: عباس پاسدار

عددچهاررقمی $\overline{aabb}$ را پیدا کنید کـه مجذور کامل بـاشد .

حل ـ داریم :

$$\overline{aabb}=k^2 \Longrightarrow 11(100a+b)=k^2$$

چون ۱۱ عدد اول و طرف دوم مجذور کامل است پس :

$$100a+b=11N^2 \quad \text{یا} \quad \overline{a0b}=11N^2$$

N^2 عددی است دو رقمی وچون حاصل ضرب این عدد در۱۱ عددی است با رقم دهگان صفر پس بـه ناچار مجموع رقمهای یکان و دهگان عدد N^2 برابر با ۱۰ است و عدد دو رقمی که مجذور کامل بوده و خاصیت مزبور را دارا باشد منحصر به۶۴ است پس :

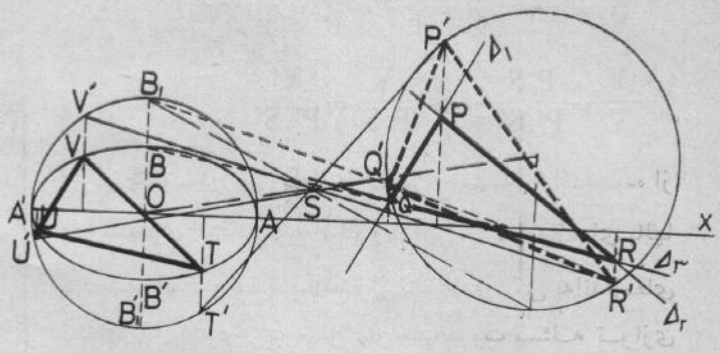
$$\overline{a0b}=11\times 64 \Longrightarrow \overline{aabb}=7744$$

۶۵/۱۳- از:محمود لشکریزاده بمی دانشجوی دانشکدهٔ علوم اصفهان

در بیضی مفروض مثلثی محاط‌کنیدکه ضلعهایش باخطوط معلوم $\triangle_1$ و $\triangle_2$ و $\triangle_3$ موازی باشند .

حل ـ دایرهٔ اصلی بیضی را رسم می‌کنیم و اگر P و Q و R نقاط تلاقی دو به دو خطوط $\triangle_1$ و $\triangle_2$ و $\triangle_3$ باشد نقاط P' و Q' و R' را چنان‌تعیین می‌کنیم‌که نسبت فواصل آنها از x'x محمل قطر اطول بیضی به فواصل P و Q و R از خط مزبور برابر با $\frac{a}{b}$ باشد به این ترتیب که از رأس B بیضی به Q وصل می‌کنیم تا x'x را در M قطع کند از M به B_1

وصل می‌کنیم وعمود QH رابر x'x اخراج می‌کنیم تا MB_1



را در Q' قطع کند . داریم :

$$\frac{Q'H}{QH}=\frac{B_1O}{BO}=\frac{a}{b}$$

درمورد نقاط P وQ وR نیزبه همین ترتیب عمل می‌کنیم . فعلا مسئله منجر به‌این شده‌است که در دایرهٔ اصلی بیضی مثلثی محاط کنیم که اضلاعش موازی با اضلاع مثلث P'Q'R' که این مسئله به‌سادگی حل‌می‌شود: به‌این ترتیب که دایرهٔ محیطی مثلث P'Q'R' رارسم می‌کنیم و S مرکز مجانست این دایره ودایرهٔ اصلی بیضی راپیدا می‌کنیم. از تلاقی خطوط SP' وSQ' وSR' با دایرهٔ اصلی سه نقطهٔ T' وU' وV' بدست‌می‌آیدکه چون از این نقاط بر x'x عمود کنیم بیضی را در T و U وV قطع می‌کنندو TUV مثلث مطلوبست .

مسائل انتخابی ازمجلهٔ روسی «ریاضیات دردبیرستان»

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری دانشجوی دانشکدهٔ فنی

۶۵/۱۴- نمایش هندسی تابع زیررا رسم‌کنید :

$$x^3+3xy+y^3-1=0$$

حل - معادله را به ترتیب‌چنین می‌نویسیم :

$$(x+y)^3-1-3x^2y-3xy^2+3xy=0$$

$$(x+y-1)[(x+y)^2+(x+y)+1]-$$
$$-3xy(x+y-1)=0$$

$$(x+y-1)(2x^2+2y^2-2xy+2x+$$
$$+2y+2)=0$$

$$(x+y-1)[(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2]=0$$

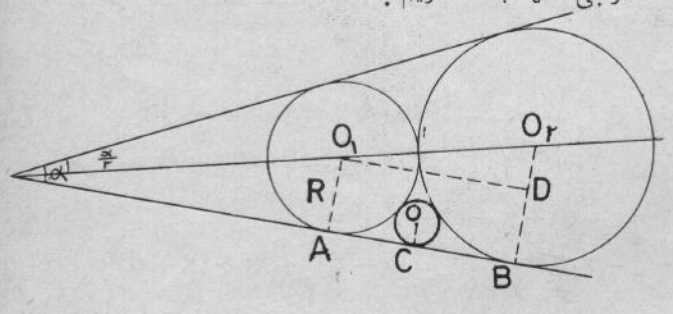
عبارت داخل کروشه فقط در ازاء $x=y=-1$ صفر می‌شود و در غیر آن مخالف با صفر است بنابراین معادلهٔ مفروض معادل است با :

$$x+y-1=0 \quad \text{و} \quad x=y=-1$$

نمایش هندسی‌تابع‌عبارت می‌شود از مجموعهٔ خط △ به‌معادلهٔ $x+y-1=0$ و نقطهٔ $M(-1 \text{ و } -1)$

۶۵/۱۵- دو دایرهٔ به شعاعهای R_1 و R_2 مماس خارج بوده و درزاویهٔ α محاط می‌باشند. دایرهٔ سوم به‌شعاع R_3 براین دودایره و بریك ضلع زاویه مماس می‌باشد . اگر $R_1<R_2$ باشد نسبت R_3 به R_1 را معلوم‌کنید .

حل - قبلا یاد آوری می‌کنیم که اگر دو دایره به شعاعهای R و r مماس خارج باشند و AB مماس مشترك خارجی آنها باشد داریم :



$$AB=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$$

اگر D تصویر O_1 روی O_2B باشد داریم :

$$\frac{DO_2}{O_1O_2}=\frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}=\sin\frac{\alpha}{2}$$

از آنجا :

$$R_2=R_1\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$AC+CB=AB$$

$$2\sqrt{R_1R_3}+2\sqrt{R_2R_3}=2\sqrt{R_1R_2}$$

$$\sqrt{R_3}=\frac{\sqrt{R_1R_2}}{\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{R_3}}=\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_1}}\sqrt{\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\frac{R_1}{R_3}=\left[1+\sqrt{\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}}\right]^2$$

از این رابطه بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{2(1+\cos\frac{\alpha}{2})}$$

۶۵/۱۶- نامعادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\log_2(x+1)>\log_{x+2}(x+1)$$

حل - نامعادله به صورت زیر ساده می‌شود :

$$\frac{\log_2(x+1)}{\log_2(x+2)}[1+\{\log_2(x-2)\}^2]<0$$

اگر $x+1>1$ یعنی $x>0$ باشد نامساوی غیر ممکن است . اگر $0<x+1<1$ یعنی $-1<x<0$ باشددراین صورت داریم $1<x+2<2$ و :

$$\log_2(x+1)<0 \quad \text{و} \quad \log_2(x+2)>0$$

و نامساوی‌برقرار است . پس جواب نا معادله عبارتست از :

$$-1<x<0$$

۶۵/۱۷- درمثلث ABC ضلع $BC=a$ و زاویهٔ $BAC=\alpha$ و $AB\neq AC$ بوده و طول میانه‌های نظیر ضلعهای AC و AB باطول این ضلعها نسبت معکوس‌دارند. طولهای ضلعهای AB و AC را برحسب a و α بدست آورید .

حل - طبق فرمول مربوط به طول میانه و بنابه‌فرض داریم :

$$\frac{2a^2+2b^2-c^2}{2a^2+2c^2-b^2}=\frac{b^2}{c^2}$$

از این رابطه بعد از اختصار و با توجه به اینکه $b\neq c$ است خواهیم داشت :

$$b^2+c^2=2a^2 \qquad (1)$$

اما داریم :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

از این رابطهٔ و رابطهٔ (۱) نتیجه خواهد شد :

$$2bc=\frac{a^2}{\cos\alpha}$$

از حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$\begin{cases} b+c=a\sqrt{2+\frac{1}{\cos\alpha}} \\ |b-c|=a\sqrt{2-\frac{1}{\cos\alpha}} \end{cases}$$

به فرض $b>c$ خواهیم داشت :

$$b=\frac{a}{2}\left[\sqrt{2+\frac{1}{\cos\alpha}}+\sqrt{2-\frac{1}{\cos\alpha}}\right]$$

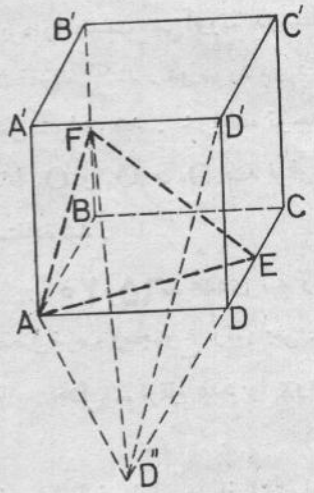
$$c=\frac{a}{2}\left[\sqrt{2+\frac{1}{\cos\alpha}}-\sqrt{2-\frac{1}{\cos\alpha}}\right]$$

شرط امکان مسئله عبارت می‌شود از :

$$2-\frac{1}{\cos\alpha}>0 \Rightarrow 0<\alpha<\frac{\pi}{3}$$

۶۵/۱۸- مکعب $ABCDA'B'C'D'$ به ضلع واحد مفروض است. اگر E وسط CD و F وسط BB' باشد حجم‌هرم $AD'EF$ را حساب‌کنید .

حل - از D' موازی با AF رسم می‌کنیم‌که امتداد CD را در D'' قطع‌می‌کندو $DD''=2CD$ خواهد بود . خط $D'D''$ با صفحهٔ AEF موازی است پس دو هرم $D'AEF$ و $D''AEF$ معادل می‌باشند.درهرم اخیر اگر F رأس‌اختیار شودارتفاع هرم‌می‌شود:



$FB=\frac{1}{2}$ و مساحت قاعدهٔ آن می‌شود :

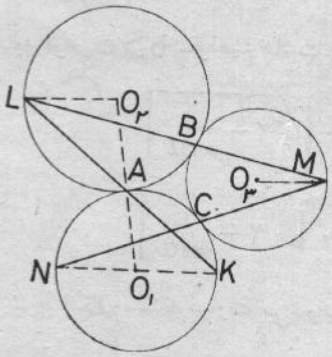
$$\frac{1}{2}D''E.AD=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 1=\frac{5}{4}$$

بنابر این حجم هرم مطلوب برابر خواهدشد با :

$$\frac{1}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{24}$$

۶۵/۱۹- سه دایرهٔ دو به دو مماس خارج مفروض است . تنها به کمك یك خطکش مرکزهای این دایره‌ها را پیدا کنید .

حل ـ نقطهٔ تماس‌دو دایرهٔ O_1وO_2 را A می‌نامیم . روی دایرهٔ O_1 نقطهٔ K را در نظر می‌گیریم و KA را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O_2 را در L قطع‌کند . از تشابه مثلثهای O_1KA و O_2LA نتیجه خواهد شد که O_2L با O_1Kموازی است . ازLبه B نقطهٔ تماس دایره‌های O_2 و O_3 وصل می‌کنیم که دایرهٔ O_3 را در M قطع می‌کند و MC را رسم می‌کنیم که دایرهٔ O_1 را درN قطع می‌کند . خواهیم داشت :



$$O_1K \| O_2L \| O_3M \| O_1N$$

پس سه نقطهٔK و O_1 و N یك استقامت واقع‌اند یعنی KN قطری از دایرهٔ O_1 است . نقطهٔ دیگر K_1 را بر دایرهٔ O_1 انتخاب می‌کنیم و به ترتیب بالا قطر دیگر K_1N_1 از این دایره را بدست می‌آوریم دو قطر مزبور مرکز دایرهٔ O_1 را مشخص می‌کنند . در مورد دو دایرهٔ دیگر به همین ترتیب عمل خواهد شد . خواننده توجه خواهد داشت که از وجود نقاط O_1 و O_2 و O_3 به فرض معلوم بودن فقط در اثبات استفاده شد .

۶۵/۲۰ـ عددی سه رقمی پیداکنیدکه برابر باشد با حاصل‌ضرب ومجموع رقمهایش .

حل ـ ارقام عدد را xوyوz فرض می‌کنیم :

$$\overline{xyz} = xyz(x+y+z)$$

از بسط طرف اول بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$9(11x+y) = (x+y+z)(xyz-1) \qquad (1)$$

اگر هر یك از دو عامل طرف دوم بر ۳ بخش پذیر باشند به آسانی نتیجه خواهد شدکه باقیماندهٔ تقسیم هر یك از ارقام xوyوz بر ۳ برابر با یك است و در این صورت $11x+y$ نیز بر ۳ بخش‌پذیر بوده لازم می‌آید که یکی ازدوعامل طرف دوم مضرب ۹ باشد . به‌هر حال از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که یکی از دو عامل طرف دوم این رابطه با مضرب ۹ باشد .

اگر $x+y+z>17$ باشد به‌آسانی نتیجه خواهد شد که $xyz>72$ و $xyz(x+y+z)>1000$

یعنی عدد مطلوب چهاررقمی می‌شود . بنابراین اگر عامل $x+y+z$ بر ۹ بخش پذیر باشد داریم :

$$x+y+z=9 \quad \text{و} \quad 11x+y=xyz-1$$

$$\sqrt[3]{xyz} < \frac{x+y+z}{3} = 3 \Longrightarrow xyz<27$$

و چون داریم :

$$xyz = 11x+y+1$$

پس x یا مساوی یك‌یا مساوی ۲ است .

اگر $x=2$ باشد خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y+z=7 \\ 2yz=y+23 \end{cases}$$

این دستگاه دارای جوابهای صحیح نمی‌باشد .

اگر $x=1$ باشد داریم :

$$\begin{cases} y+z=8 \\ 11+y=yz-1 \end{cases}$$

از حل این دستگاه دو جواب ۱۳۵ و ۱۴۴ برای مسئله بدست می‌آید .

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که $xyz-1$ بر ۹ بخش پذیرباشد .اگر $xyz-1=9$ باشد از رابطهٔ (۱)نتیجه می‌شود $z=10x$ که غیر ممکن است . حالتهای :

$$xyz-1 = 18 \text{و} 36 \text{و} 45 \text{و} 54 \text{و} 72 \text{و} 81 \text{و} 90$$

نیز غیر ممکن می‌باشند .اگر $xyz-1=27$ باشد خواهیم داشت :

$$\begin{cases} 8x = 2y+3z \\ xyz = 28 \end{cases}$$

این‌دستگاه جواب‌قابل قبول ندارد . درحالت $xyz-1=63$ نیز دستگاهی بدست‌می‌آیدکه دارای جواب قابل قبول‌نیست. مسئله فقط دارای دو جواب ۱۳۵ و ۱۴۴ می‌باشد .

۶۵/۲۱ـ اگر n عدد طبیعی باشد نامساوی زیر را ثابت‌کنید :

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}} = 2\sqrt[n]{n}$$

حل ـ فرض می‌کنیم که :

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}} = x \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}} = y$$

در این‌صورت نامساوی مفروض چنین می‌شود :

$$\frac{x+y}{2} < \sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}} \quad \text{یا} \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{x^n+y^n}{2}$$

با توجه به‌اینکه x و y عددهای مثبت و n عدد صحیح مثبت است داریم :

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{x^{n-1}+y^{n-1}}{2} \times \frac{x+y}{2}$$

و کافی است ثابت کنیم که :

$$\frac{x^{n-1}+y^{n-1}}{2} \times \frac{x+y}{2} < \frac{x^n+y^n}{2}$$

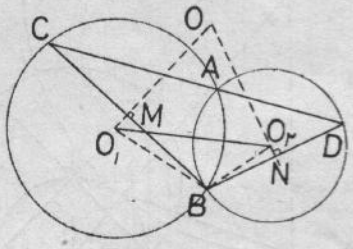
این‌نامساوی بعد از عملیات لازم چنین می‌شود :

$$(x^{n-1}-y^{n-1})(x-y) > 0$$

و این نامساوی محقق می‌باشد .

۶۵/۲۲- دودایره در A و B متقاطع‌اند. از A خطی متغیر می‌گذرد و دایره‌ها را غیر از A در نقاط C و D قطع می‌کند . مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BCD را پیدا کنید .

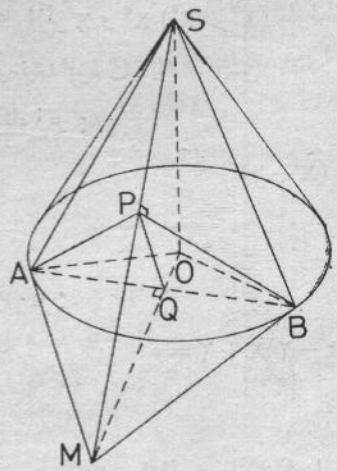
حل - M وسط BC بر OO_1 و N وسط BD بر OO_2 واقع است‌وچون چهار ضلعی OMBN محاطی است پس دو زاویهٔ O_1OO_2 و MBN مکمل یکدیگر می‌باشند . اما زاویهٔ O_1BO_2 بازاویهٔ MBN برابر است (زیرا زاویهٔ O_1O_2B با CDB و O_2O_1B با DCB مساوی است ودر



نتیجه دو مثلث O_1O_2B و CDB متشابه می‌باشند) . نتیجه می‌شود که دوزاویهٔ O_1OO_2 و O_1BO_2 مکمل یکدیگر (یا برابر باشند درحالتی‌که C وD در یك طرف A باشند) و چهارضلعی OO_1BO_2 محاطی است یعنی‌مکان O دایرهٔ‌محیطی مثلث O_1BO_2 می‌باشد .

۶۵/۲۳- مخروط دوارقائم به رأس S وبه‌مرکزقاعدهٔ O و به‌زاویهٔ رأس β مفروض است. دوصفحه که با یکدیگر زاویهٔ α می‌سازند در طول مولدهای SA و SB برمخروط مماس می‌باشند. اندازهٔ زاویهٔ AOB را پیداکنید.

حل - در نقاط A وB مماسهارا بردایرهٔ‌قاعدهٔ‌مخروط رسم می‌کنیم‌که در M متقاطع می‌شوند . چون OM و AB بر یکدیگر عمودند و OM تصویر SM بر صفحهٔ قاعده است پس SMوAB برهم‌عمود می‌باشند. بر AB صفحه‌ای مرورمی‌دهیم که در P بر SM عمود باشد . زاویهٔ APB مسطحهٔ فرجهٔ دو صفحهٔ مماس است



و بنابه فرض برابر α می‌باشد. اگراندازهٔ زاویهٔ AOBبرابر 2x فرض شوداندازهٔ زاویهٔ QAM که بازاویهٔ AOQ برابر است x می‌شود و داریم :

$$\sin x = \frac{MQ}{MA} = \frac{MQ}{SM} \cdot \frac{SM}{MA} = \frac{PQ}{SO} \cdot \frac{SA}{AP} =$$

$$= \frac{PQ}{AP} : \frac{SO}{SA} = \cos\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\beta}{2}$$

$$AOB = 2x = 2\operatorname{Arcsin}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

مسائل ترجمه از فرانسه

۶۵/۲۴- مطلوبست حل‌وبحث نامعادلهٔ زیر:

$$\sqrt{2mx-x^2} > x+2$$

حل -از نمایش‌هندسی استفاده می‌کنیم ؛ نمایش‌هندسی $y=x+2$ که در آن $x>-2$ است نیم خط D می‌باشد . نمایش هندسی تابع $y=\sqrt{2mx-x^2}$ یا

$$\begin{cases} y^2 = 2mx - x^2 \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} (x-m)^2 + y^2 = m^2 \\ y > 0 \end{cases}$$

نیمدایرهٔ C است‌که بالای محور x'x واقع است و در O بر

$y'y$ مماس می‌باشد و در نقطهٔ دیگر A به طول $2m$ محور $x'x$ را قطع می‌کند. مقادیر x که در نامعادلهٔ مفروض صدق کنند عبارتند از طولهای نقاطی از نیمدایرهٔ C که بالای خط D واقع‌اند.

اگر x' و x'' $(x''>x')$ طولهای نقاط مشترک نیم خط D و نیمدایرهٔ C باشند این مقادیر عبارتند از ریشه‌های دستگاه زیر:

$$\begin{cases} (2mx - x^2) = (x+2)^2 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

یا:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - (m-2)x + 2 = 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

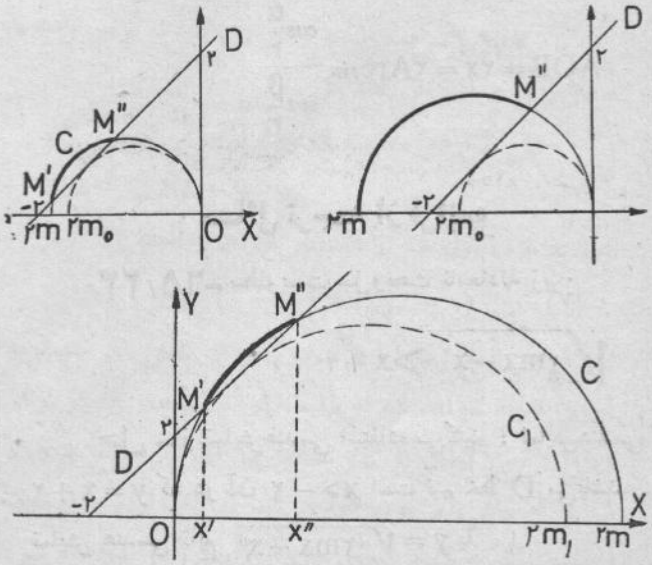
درمورد معادلهٔ $f(x) = 0$ داریم:

$$\triangle = (m-2)^2 - 8 = 0 \Longrightarrow m = 2(1 \pm \sqrt{2})$$

در ازاء این دو مقدار از m که آنها را:

$$m_1 = 2(1+\sqrt{2}) \quad \text{و} \quad m_0 = 2(1-\sqrt{2})$$

می‌نامیم خط D و نیمدایرهٔ C برهم مماس هستندونقاط‌تماس آنها $x_0 = -\sqrt{2}$ و $x_1 = \sqrt{2}$ می‌شود ونتیجه می‌شودکه اوضاع مختلف D و C به‌سه شکل زیراست.



از رسم شکل نظیر حالت $m_0 < m < m_1$ صرف‌نظر می‌شود زیرا در این حالت تمام نیمدایرهٔ C زیر D واقع است.

از روی شکلهای بالا حل وبحث نامعادلهٔ مفروض در جدول زیرخلاصه می‌شود:

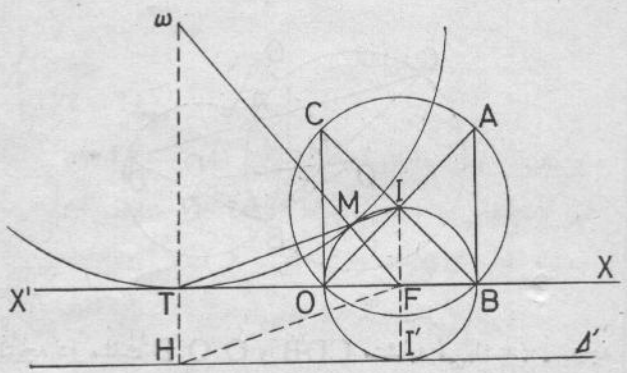
m	جواب
$-\infty$	(شکل ۱) $2m < x < x''$
-1	$-2 < x < -2+\sqrt{2}$
	(شکل ۲) $x' < x < x''$
$2-2\sqrt{2}$	
	جواب ندارد
$2+2\sqrt{2}$	
$+\infty$	(شکل ۳) $x' < x < x''$

۶۵/۲۵ـ مثلث متساوی‌الساقین OAB و قائمه در زاویهٔ B را درنظر می‌گیریم بقسمی‌که ضلع OB از آن برخط $x'x$ واقع باشد. دایرهٔ متغیر ω بر $x'x$ مماس است و قطبی O نسبت به‌این دایره بر A می‌گذرد.

۱ـ ثابت‌کنیدکه دایرهٔ ω بردایرهٔ ثابتی مماس است واز روی‌آن مکان مرکز ω را پیداکنید.

۲ـ درانعکاس به‌قطب O وبه‌قوت OB^2 دسته‌دوایر ω به‌چه صورت درمی‌آیند وازاین راه بازهم نتیجه بگیریدکه دایرهٔ ω بردایرهٔ ثابتی مماس است.

حل ـ اگر I وسط OA باشد چون نقاط A و O نسبت به دایرهٔ ω مزدوج یکدیگرند پس دایرهٔ ω بر دایرهٔ I به‌قطر OA عمود می‌باشد. درانعکاس به‌قطب I و به قوت IO^2 دایرهٔ ω تغییر نمی‌کند وچون این دایره بر $x'x$ مماس



است پس برمبدل $x'x$ یعنی بردایرهٔ F به‌قطر QB نیزمماس می‌باشد، نقطهٔ تماس‌آنها M عبارتست از نقطهٔ تلاقی دایرهٔ اخیر باخط IT.

از F موازی با IT رسم می‌کنیم که ωT را در H قطع می‌کند. TH با FI برابر است پس H برخط $\triangle'$ واقع است‌که بردایرهٔ F در I' مماس است. مثلث ωFH متساوی ـ

الساقین است و $\omega H = \omega F$ بوده درنتیجه ω برسهمی واقع است که $\triangle'$ خط هادی و F کانون آن می‌باشد.

۲- اگر C قرینهٔ B نسبت به نقطهٔ I باشد در انعکاس $(O\omega OB^2)$ خط $x'x$ تغییر نمی‌کند و دایرهٔ به‌قطر OA به‌خط BC تبدیل می‌شود ودایرهٔ ω به‌دایرهٔ ω_1 تبدیل می‌شود که بر $x'x$ مماس وبر BC عمود می‌باشد.

مرکز دایرهٔ ω_1 بر خط BC واقع است و چون این دایره بر $x'x$ مماس است پس بر قرینهٔ $x'x$ نسبت به BC یعنی بر AB نیزمماس‌است. بنابراین منعکس‌آن یعنی‌دایرهٔ ω برمنعکس AB یعنی بردایرهٔ F مماس می‌باشد.

۶۵/۲۶- صفحهٔ ثابت π ودایرهٔ ثابت (O) به مرکز O وبه‌شعاع R در این صفحه مفروض است و P نقطهٔ ثابتی از فضا می‌باشدکه در H برصفحهٔ مزبور تصویر می‌شود. دایره‌ای که بر P می‌گذرد وقطرش یك وتر AB از دایرهٔ (O) است Γ می‌نامیم و فرض می‌کنیم $OH = a$ و $HP = h$

۱- مکان ω مرکزدایرهٔ Γ را پیداکنید وبرحسب‌مواضع P دروجود این مکان بحث‌کنید.

۲- ثابت‌کنیدکه‌قطر AB ازدایرهٔ Γ بریك‌مقطع‌مخروطی مماس است. برحسب مواضع P در نوع این مقطع مخروطی بحث کنید.

حل - باید داشته باشیم:

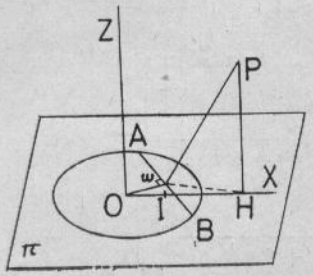
$$\omega O^2 + \omega P^2 = R^2$$

وچون داریم:

$$\omega P^2 = \omega H^2 + HP^2 = \omega H^2 + h^2$$

پس خواهیم داشت:

$$\omega O^2 + \omega H^2 = R^2 - h^2$$



به‌فرض اینکه I وسط OH باشدخواهیم داشت:

$$2\omega I^2 + \frac{a^2}{2} = R^2 - h^2$$

$$\omega I^2 = \frac{1}{2}\left[R^2 - \left(\frac{a^2}{2} + h^2\right)\right]$$

$$\omega I^2 = \frac{1}{4}\left[2R^2 - (a^2 + 2h^2)\right]$$

مکان ω دایره‌ای است به مرکز I به شرط اینکه داشته باشیم:

$$2R^2 - (a^2 + 2h^2) \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2}{2R^2} + \frac{h^2}{R^2} \leq 1$$

اگر درصفحهٔ OPH مختصات P را نسبت به محورهای Ox و Oz (که Ox منطبق بر OH و Oz در O بر صفحهٔ π عمود است) به x و z نشان دهیم از دوران بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{2R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$ حول Oz بیضوی E بدست می‌آید. برای اینکه شرط وجود دایرهٔ مکان ω برقرار باشد لازم است‌که P خارج E واقع نباشد. اگر P روی بیضوی E قرار داشته باشد دایرهٔ ω به‌نقطهٔ I تبدیل‌می‌شود. اگرPداخل بیضوی واقع باشد در این صورت مکان ω دایره‌ای به شعاع غیرصفر می‌باشد.

۲- وقتی P روی بیضوی E باشد همهٔ وترهای ABاز I می‌گذرند. فرض می‌کنیم P داخل بیضوی E باشد وترAB در ω بر $O\omega$ عمود است پس برمقطع مخروطی‌که دایرهٔ ω دایرهٔ اصلی و O و H کانونهای آن است مماس می‌باشد. نوع این مقطع بستگی دارد به‌وضع نقطهٔ O نسبت به‌دایرهٔ ω ونتیجه خواهد شدکه مقطع مزبور اگر $OP < R$ باشد بیضی است، اگر $OP > R$ باشد هذلولی‌است‌ودرحالت $OP = R$ به‌صورت نقطهٔ H درمی‌آید.

حل مسائل فیزیك

۶۵/۲۷- ترجمهٔ: فتح‌الله زرگری

هواپیمایی پس‌ازفرود مدتی‌را باسرعت V m/sec روی زمین حرکت می‌کند ودراین موقع خلبان آنرا ترمز می‌کندکه به هواپیما شتاب‌کند شونده‌ای برابر با ۲ m/sec^2 داده‌می‌شود. اگرهواپیما پس ازفرود تا محل توقف مسافت ۴ km را طی‌کند ونسبت به زمانی‌که هواپیما ۴۰۰m اول را طی کرده به‌زمانی‌که هواپیما بقیه را پیموده‌است $\frac{4}{65}$ باشد مقدار سرعت V را پیدا کنید.

حل - فرض می‌کنیم در ۴۰۰ متر اول ترمزها آزاد باشند، مطابق‌فرض‌مسئله‌شتاب‌کندشوندهٔ‌هواپیما۲متر برمجذور ثانیه است. اگر t زمان حرکت هواپیما قبل ازترمزگرفتن و T زمان حرکت آن باترمز باشد داریم:

$$\begin{cases} V - 2T = 0 \\ Vt + VT - T^2 = 4000 \\ \dfrac{400}{V(T+t)} = \dfrac{4}{65} \end{cases}$$

ازحذف V بین معادلات خواهیم داشت :

$$\begin{cases} 2tT + T^2 = 4000 \\ 2tT + 2t^2 = 6500 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} t = 50 \\ V = 100 \end{matrix}$$

حال فرض می‌کنیم که ترمزها پس از طی ۴۰۰ متر اول گرفته شده باشند. اگر ۴۰۰متر اول را هواپیما در T_1 ثانیه و ۳۶۰۰ باقی را در T_2 ثانیه طی‌کند داریم :

$$3600 = 2 \times \frac{T_2^2}{2} \Longrightarrow T_2 = 60 \text{ sec}$$

درلحظهٔ T_1 سرعت هواپیما برابر با $2T_2 = 120$ متر برثانیه است پس ۴۰۰ متراول را هواپیما با سرعت اقلا برابر ۱۲۰ متر برثانیه طی‌کرده‌است .

$$T_1 < \frac{400}{120} = \frac{10}{3}$$

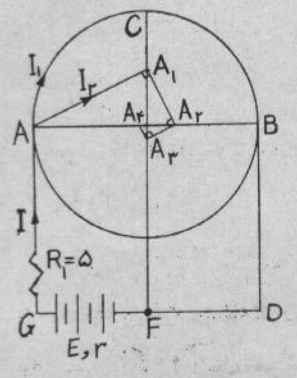
ازطرف دیگرداریم :

$$T_1 + T_2 = \frac{65}{4}T_1 \Longrightarrow T_1 = \frac{4}{61}T_2 = \frac{240}{61}$$

چون $\frac{240}{61} > \frac{10}{3}$ پس‌فرض‌اینکه ترمزها پس‌از۴۰۰ متر اول گرفته شده‌اند به‌تناقض برمی‌خورد وتنها این فرض صحیح است‌که $V = 100$ متر برثانیه باشد .

۶۵/۲۸- از: سید رضا میرزنده دل دانشجوی دانشکدهٔ فنی

مداری مطابق شکل مفروض است‌که شعاع سیم‌دایره‌ای شکل ۳سانتیمتر وطول هرسانتیمتر این سیم دارای‌مقاومت‌الکتریکی ۳ اهم می‌باشدنقطهٔ A_1 وسط شعاع OC بوده A_1A_2 بر AA_1 و A_1A_2برA_2A_3 و... عمود می‌باشد. نیروی محرکهٔ هر پیل ۱/۵ ولت و مقاومت داخلی



آن $r = 0/1$ اهم و $R = 5$ اهم می‌باشد . شدت جریانهای I_1وI_2وI را حساب‌کنید.

حل - شعاع سیم دایره‌ای را R فرض می‌کنیم ، داریم :

$$AA_1 = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

$$OA_2 = \frac{R}{4} \Longrightarrow A_1A_2 = \frac{R\sqrt{5}}{4}$$

بطورکلی اندازه‌های قطعات AA_1 و A_1A_2 و... و $A_{n-1}A_n$ تصاعدی هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ تشکیل می‌دهند ووقتی طول آخرین قطعه به‌سمت صفرمیل‌کرده باشدطول تمام سیم برابر می‌شود با :

$$\frac{AA_1}{1 - \frac{1}{2}} = R\sqrt{5}$$

که مقاومت این سیم بافرض $R = 3$ برابر با $S = 3\sqrt{5}$ اهم ومقاومت سیم دایره‌ای برابر با $S' = 6\pi$ اهم‌است وداریم :

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ E = I(R_1 + nr) + I_2 \times S \\ E = I(R_1 + nr) + I_1 \times S' \end{cases}$$

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ 4 + 1/5 = I(5 + 4 \times 0/1) + 3\sqrt{5}I_2 \\ 4 \times 1/5 = I(5 + 4 \times 0/1) + 6\pi I_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = 5/4(I_1 + I_2) + 3\sqrt{5}I_2 \\ 6 = 5/4(I_1 + I_2) + 6\pi I_1 \end{cases}$$

ازاین دستگاه نتیجه خواهد شد :

$$I_1 = \frac{6\sqrt{5}}{5/4(\sqrt{5} + 2\pi) + 6\pi\sqrt{5}}$$

$$I_2 = \frac{12\pi}{5/4(\sqrt{5} + 2\pi) + 6\pi\sqrt{5}}$$

حل مسائل شیمی

ترجمه وانتخاب توسط : عطاءالله بزرگ‌نیا

۶۵/۲۹- Vcm^3استیلن دراختیارداریم. نمونه‌ای‌از

آن به حجم $\frac{۷}{۱۰}$ به اتیلن تبدیل شده است . راندمان عمل $\frac{۲}{۳}$ واختلاف حجم بین پروپین حاصل و اتین بکارنرفته برابر ۴cc می‌باشد.

۱ـ فرمول واکنش را بنویسید وحجم V راسحاسبه‌کنید.

۲ـ $\frac{V}{۲}$cc استیلن اختیار کرده و در مجاورت کاتالیزر نیکل آنرا تحت اثر ئیدرژن نوزاد قرار می‌دهیم . پس از مدتی معلوم می‌شودکه اتیلن واتان به‌یك اندازه‌تولیدشده‌اند. جریان ئیدرژن را قطع کرده وئیدرژن زیادی را خارج‌می‌کنیم. باقیماندهٔ حاصل‌که شامل استیلن ترکیب نشده ، اتیلن و اتان است با اکسیژن کافی درآبسنجی وارد می‌کنیم ودر آن جرقهٔ الکتریك می‌زنیم. پس‌ازعمل معلوم می‌شودکه V′cc اکسیژن مصرف شده و V″cc بی‌اکسیدکربن تولید شده است . نسبت اختلاط گازها را در مخلوط پیدا کنید در صورتی‌که بدانیم $\frac{V'}{V''}=\frac{۲۳}{۱۶}$ است .

حلـ استیلن مونوشده درمحیط‌آمونیاك مایع با یدور متیل طبق شرایط مخصوصی‌تولیدآنیلن می‌کند :

$$H-C\equiv C-\boxed{Na+I}-CH_۳ \rightarrow$$

$$\rightarrow NaI+H-C\equiv C-CH_۳$$

نظراً یك حجم استیلن یك حجم وعملا $\frac{۲}{۳}$ حجم آنیلن تولید می‌کند و $\frac{۱}{۳}$ حجم استیلن باقی می‌ماند .

از آنجا :

$$V=۴cc\times ۳\times ۱۰=۱۲۰cc$$

۲ـ ئیدرژن نوزاد درمجاورت کاتالیزرنیکل احیاء شده طبق واکنشهای زیر با استیلن ترکیب می‌شود :

$$C_۲H_۲+H_۲\rightarrow C_۲H_۴$$

$$C_۲H_۲+۲H_۲ \rightarrow C_۲H_۶$$

$$C_۲H_۴+H_۲ \rightarrow C_۲H_۶$$

بطوریکه ملاحظه می‌شود درجهٔ ئیدروژناسیون هرچه باشد حجم مخلوط در هرلحظه از واکنش برابر $\frac{V}{۲}$ خواهد بود .

هرگاه x و y و z به‌ترتیب معرف نسبت گازهای اتان واتن و اتین درمخلوط اولیه $\left(\frac{V}{۲}=۶۰\ cc\right)$ باشد خواهیم داشت :

$$x+y+z=۱ \qquad (۱)$$

و

$$x=y \qquad (۲)$$

چون هرسه‌کربوردارای ۲ اتم‌کربن است،حجم‌بی‌اکسید کربن حاصل ازاحتراق‌آنها یعنی V″ دوبرابرحجم اولیهٔ گازها یعنی V خواهد شد بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{V'}{V}=\frac{۲۳}{۱۶}$$

نظر به اینکه حجم استیلن بکار رفته $\frac{۷}{۲}$ می باشد بنابراین :

$$C_۲H_۶+\frac{۷}{۲}O_۲\rightarrow ۲CO_۲+۳H_۲O$$

$$\frac{V}{۲}x$$

$$C_۲H_۴+۳O_۲\rightarrow ۲CO_۲+۲H_۲O$$

$$\frac{V}{۲}y$$

$$C_۲H_۲+\frac{۵}{۲}O_۲\rightarrow ۲CO_۲+H_۲O$$

$$\frac{V}{۲}z$$

این معادلات به‌خوبی‌نشان می‌دهندکه :

$$V'=\frac{۷}{۲}\cdot\frac{V}{۲}x+\frac{۶}{۲}\cdot\frac{V}{۲}y+\frac{۵}{۲}\cdot\frac{V}{۲}z$$

$$\frac{۷x}{۴}+\frac{۶y}{۴}+\frac{۵z}{۴}=\frac{V'}{V}=\frac{۲۳}{۱۶}$$

$$۷x+۶y+۵z=\frac{۲۳}{۴} \qquad (۳)$$

معادلات (۱) و (۳) با درنظر گرفتن معادلهٔ (۲) چنین خواهد شد :

$$\begin{cases} ۲x+z=۱ \\ ۱۳x+۵z=\frac{۲۳}{۴} \end{cases} \Longrightarrow x=y=\frac{۱}{۴} \text{ و } z=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نسبت اختلاط گازها درمخلوطی که واردآب‌سنج شده است ازاین قراراست :

اتان ۱۵cc اتن ۱۵cc اتین ۳۰cc

۶۵/۳۰- پنتول A با عامل ستونی پولیمر آلدئید فرمیك است. فرمول گستردهٔ آن به‌شکل خطی‌وعامل‌ستونی‌آن مجاور باعامل الکلی نوع اول است .

۴/۳۲۱ گرم آنرا درصدگرم‌آب حل می‌کنیم . نقطهٔ انجماد این محلول بانقطهٔ انجماد محلول گلوکزهم غلظت با آن یکی می‌شود. فرمول گستردهٔ این ستوپنتول را رسم‌کنید.

تجربه نشان می‌دهدکه اگر ۲/۱۶۰۲ گرم ازجسم B (پولیمر دیگرآلدئید فرمیك) را در ۱۰۰ گرم آب حل‌کنیم نزول نقطهٔ انجماد برای‌آن بانزول نقطهٔ انجمادبرای محلول‌های فوق‌الذکر یکی می‌شود. فرمول گستردهٔ تمام‌اجسامی‌که باجسم B مطابقت دارند بنویسید.

ایزومری از B را انتخاب‌کنیدکه دارای دو گروه‌عاملی ویك اتم‌کربن غیرمتقارن باشد. ۱۰ گرم از این جسم اخیر را در حرارت ملایم تحت اثر اکسید زرد جیوه قرار می‌دهیم . همولوگی از آلدئید فرمیك تشکیل می‌شود وزن آنرا محاسبه کنید .

حل - چون جسم A پولیمر آلدئید فرمیك است بنابراین فرمول خام‌آن $(CH_2O)n$ می‌باشد. وچون نزول نقطهٔ انجماد محلول هم‌غلظت‌آن با گلوکز $C_6H_{12}O_6$ یکی است بنابراین $n=6$ و جسم A هگزوز ایزومر با گلوکز می‌باشد .

عامل ستونی دو ظرفیتی‌است بنابراین مانند الکل نوع دوم در داخل زنجیرکربن قرار دارد . زنجیرکربن این جسم نمی‌تواند شامل‌کربن سوم باشد زیرا دارای شاخه نیست . بالاخره گروه عاملی‌الکل نوع اول‌که یك‌ظرفیتی‌است دریکی‌از دوسرزنجیرقرار دارد .

بنابراین باتوجه به‌اینکه جسم دارای ۶ اتم‌کربن در ملکول است وهریك ازاین اتمها باید شامل یك عامل (پنج عامل الکل و یك ستونی) باشد فرمول جسم الزاماً خواهدشد

$$CH_2OH-CO-CHOH-CHOH-$$
$$-CHOH-CH_2OH$$

بافرمول با آکروزیا فروکتوز مطابقت دارد و می‌توان آنها را از آلدولیزاسیون فرمل در مجاورت لیتارژ (Pbo نارنجی) بدست‌آورد .

۲- جرم ملکولی آکروز ۱۸۰ و آزمایش کریوسکوپی رائول با فرمول زیرخلاصه می‌شود :

$$\theta = K \times \frac{4/321}{180}$$

نتیجهٔ‌آزمایش‌کریوسکوپی با جسم B از این‌قرار است :

$$\theta = K \times \frac{2/1602}{M}$$

M معرف جرم ملکولی جسم B است.

ازآنجا $M=90$ و $n=3$ خواهد شد .

جسم B بافرمول $C_3H_6O_3$ مطابقت دارد. وایزومرهای آن عبارتند از :

دونوع اسید لاکتیك (راست و چپ) یاپروپان ال‌ائیك به فرمول :

$$CH_3-CHOH-COOH$$

که درآن کربن وسط غیر متقارن است واین جسم دارای ۲ گروه عاملی (الکل نوع دوم واسید) می‌باشد.

اسید ئیدرآکریلیك یا پروپانول ائیك به فرمول :

$$CH_2OH-CH_2-COOH$$

پروپان دیول ان به‌فرمول :

$$CH_2OH-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_2OH$$

پروپان دیول آل :

$$CH_2OH-CHOH-\overset{H}{C}=O$$

محصول اکسیداسیون ملایم اسیدلاکتیك ، گازکربنیك، آب و اتانال است که جسم اخیر همولوگ آلدئید فرمیك می‌باشد .

$$CH_3-CHOH-COOH+O\rightarrow$$
$$\rightarrow CO_2+H_2O+CH_3CHO$$

از اکسیداسیون ۱۰ گرم اسید لاکتیك:

$$\frac{44g}{9}=4/88g$$

اتانال بدست می‌آید .

مسائل برای حل

۶۶/۱ـ از: طهمورث اسکندری

ثابت کنید که هرعدد به شکل زیرمکعب کامل است :

$$N=\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ مرتبه}}\ 2\ \underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ مرتبه}}\ 7\ \underbrace{99\ldots9}_{n-1\text{ مرتبه}}$$

۶۶/۲ـ فرستنده : **عبدالرضا پورمهدی کسمائی**

اگر x و y دوعدد مثبت بوده و $x+y=1$ باشد ثابت کنید که :

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})\geq 9$$

۶۶/۳ـ فرستنده : **عبدالرضا پورمهدی کسمائی**

روی ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC نقاط M و N و P چنان انتخاب می‌شوند که :

$$\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{AP}{PB}=k$$

باشد که k عدد معین بزرگتر از یک می‌باشد . مساحت مثلث حاصل از تقاطع خطوط AM و BN و CP را برحسب S مساحت مثلث مفروض و k حساب کنید.

۶۶/۴ـ فرستنده : **عبدالرضا پورمهدی کسمائی**

نقطهٔ P در داخل مثلث ABC چنان واقع است که اندازهٔ هریك از زاویه‌های PAB و BPC و PCA برابر با φ می‌باشد . ثابت کنید که :

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}$$

۶۶/۵ـ فرستنده : **ابراهیم ذوالقدری**

دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}\dfrac{u(y-x)}{z-u}=a\\[2ex]\dfrac{z(y-x)}{z-u}=b\\[2ex]\dfrac{y(u-z)}{x-y}=c\\[2ex]\dfrac{x(u-z)}{x-y}=d\end{cases}$$

۶۶/۶ـ فرستنده : **ابراهیم ذوالقدری**

اگر a و b و c ریشه‌های معادلهٔ $x^3+qx+r=0$ باشند ثابت کنید که :

$$3(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)=$$
$$=5(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)$$

۶۶/۷ـ ترجمهٔ: **جعفر آقایانی چاوشی**

O و H به‌ترتیب مرکز دایرهٔ محیطی ومرکز ارتفاعی مثلث ABC است. اگر OH بایکی از ضلعهای مثلث موازی باشد ثابت کنید که مقادیر $tg A$ و $tg B$ و $tg C$ سه جملهٔ یک تصاعد حسابی می‌باشند.

۶۶/۸ـ ترجمهٔ : **جعفر آقایانی چاوشی**

فرض می‌کنیم که $A_1A_2\ldots A_n$ یك چند ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به‌مرکز O و به‌شعاع R باشد. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هرمثلث $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ را با I_i و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هرمثلث حادث ازسه ضلع A_iA_{i+2} و $A_{i+2}A_{i+1}$ و $A_{i+1}A_{i+3}$ را با J_i نشان می‌دهیم . ثابت کنید که تمام I_i ها و J_i ها بردایرهٔ به‌مرکز O واقع‌اند و R′ شعاع این دایره را حساب کنید .

مسائل ترجمه از مجلهٔ «ریاضیات دانش آموز»

۶۶/۹- کره‌های به‌شعاع m را کنار وروی هم چنان قرار داده‌ایم که هرمی به‌شکل چهاروجهی منتظم تشکیل داده‌اند. ارتفاع این هرم را حساب کنید.

۶۶/۱۰- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه در زاویهٔ C مفروض است. به‌قطر هرضلع آن دایره‌ای رسم می‌کنیم. مساحت سطح قسمتهایی از دایره‌های کوچك راکه خارج دایرهٔ بزرگتر واقع است برحسب S مساحت مثلث حساب کنید.

مسائل ترجمه از مجلات ریاضی چاپ فرانسه

۶۶/۱۱- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a مفروض است. از رأسهای B و C نیم خطهای Bx و Cy را موازی با AC و AB رسم می‌کنیم بقسمی که این نیم خطها با A دریك طرف BC واقع باشند. خط متغیری بر A می‌گذرد و Bx و Cy را به‌ترتیب در M و P قطع می‌کند.

۱- ثابت کنید که : $BM.CP = a^2$

۲- اگر I نقطهٔ تلاقی BP و CM باشد اندازه‌های زاویه‌های مثلث IBC را حساب کنید و ثابت کنید که :

$CM.CI = a^2$

۳- مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BIM را تعیین کنید.

۶۶/۱۲- الف - ذوزنقهٔ ABCD قائمه در زاویه‌های A و D مفروض است و درآن $AB = a$ و $DC = 2a$ و $AD = 4a$ می‌باشد. دایرهٔ به‌قطر BC ضلع AD را در M و N قطع می‌کند. ثابت کنید که :

$AM.AN = 2a^2$

ب - در ذوزنقهٔ بالا فرض می‌کنیم که $AB = a$ و $DC = 2a$ و $AD = x$ باشد. اولا چه رابطه‌ای بین a و x باید برقرارباشدتا دایرهٔ به‌قطر BC ضلع AD را دردونقطه‌قطع کند یا برآن مماس باشد.

ثانیاً - اگر دایرهٔ به‌قطر BC در M بر AD مماس باشد ثابت کنید که مثلثهای AMB و DCM و MCB متشابهند.

۶۶/۱۳- مثلث متساوی‌الساقین وقائم‌الزاویهٔ ABC قائمه درزاویهٔ A مفروض است و فرض می‌کنیم $BC = 2a$ باشد. ثابت کنید که دایره‌ای وجود دارد که بردایره‌های به‌قطرهای AB و AC ودرعین حال برامتداد ضلعهای AB و AC مماس است. شعاع این دایره وفاصلهٔ مرکزآن راازA برحسب a حساب کنید.

۶۶/۱۴- تابع f از متغیر حقیقی x را چنین تعریف می‌کنیم :

اگر $x \leq -1$ باشد : $f(x) = 2x + 3$

اگر $-1 < x \leq 1$ باشد : $f(x) = x$

اگر $x > 1$ باشد : $f(x) = 2$

۱) نمایش هندسی تغییرات تابع f را رسم کنید.

۲) تابع f را از نظر پیوستگی و داشتن مشتق بررسی کنید.

۳) F تابع اولیهٔ تابع f را تعیین کنید.

۶۶/۱۵- نامعادلهٔ زیررا درنظر می‌گیریم :

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} > m\sqrt{x}$$

از سه راه جبری، هندسی و مثلثاتی نامعادله را حل و بحث کنید.

۶۶/۱۶- نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} + \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} + \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}$$

۶۶/۱۷- بزرگترین عدد صحیح موجود درعدد حقیقی x را با E(x) نشان می‌دهیم.

۱) مکان نقاط M(x و y) بافرض $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ازصفحهٔ محورهای مختصات متعامدرا رسم کنید که مختصات آنهادررابطهٔ زیرصدق کنند :

$E(x) + E(y) + E(x)E(y) = 7$

۲) مکان نقاط P(x و y) بافرض $x \geq 0$ و $y \geq 0$ را رسم کنید که مختصات آنها دررابطهٔ زیرصدق کنند :

$E(x + y) = 4$

۳) مجموعهٔ S ازمقادیرمثبت x و y راکه دردستگاه زیر صدق می‌کنندپیدا کنید :

$$\begin{cases} E(x) + E(y) + E(x)E(y) = 7 \\ E(x + y) = 4 \end{cases}$$

۶۶/۱۸- نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y = 2(x-1) + \frac{x(x^2-1)}{x^2-1}$$

۶۶/۱۹- دومثلث متساوی‌الاضلاع ABC و ABD در ضلع $AB = a$ مشترك بوده و در دو صفحهٔ عمود برهم واقع‌اند.

۱)- ثابت کنید که اگر M وسط CD و N وسط AB باشد MN عمود مشترك دوخط AB و CD است وطول MN حساب کنید.

۲)- ثابت کنید که O مرکز کرهٔ محیطی چهار وجهی ABCD روی MN قرار دارد وطول MO را حساب کنید.

۳)- اگر نقطهٔ F برپاره خط CD تغییرمکان دهد مکان G مرکزثقل مثلث ABF را پیداکنید.

مسائل ترجمه از کتابهای چاپ فرانسه

۶۶/۲۰- در مثلث متساوی‌الساقین ABC که درآن $AB = AC$ است نقطهٔ M بر AB ونقطهٔ N بر AC چنان تغییرمی‌کندکه همواره $AM = CN$ می‌باشد. مکان I وسط MN را پیداکرده وثابت کنیدکه عمودمنصف MN همواره بر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد.

۶۶/۲۱- منحنی نمایش تغییرات تابع زیررارسم کنید:

$$y = \frac{3x - 3x^3}{\sqrt{4 - (3x - x^3)^2}}$$

۶۶/۲۲- رشتهٔ چند جمله‌ایهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$P_0 = 1 \,،\, P_1 = x + 1 \,،\, P_2 = x^2 + x + 1$$

$$P_{n-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

۱)- مجموع زیررا حساب کنید:

$$\Sigma_n(x) = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}$$

۲)- عبارت زیررا درنظر می‌گیریم:

$$S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

تابع اولیهٔ این عبارت را تعیین کنیدکه به ازاء $x = 0$ برابر با صفر شود و از روی آن $S_n(x)$ و همچنین $\Sigma_n(x)$ را مجدداً حساب کنید.

۶۶/۲۳- در دستگاه‌سه معادلهٔ‌سه‌مجهولی زیربحث کنید به فرض اینکه $a \neq K\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد.

$$\begin{cases} x + y\cos a + z\cos 2a = 0 \\ x\cos a + y\cos 2a + z\cos 3a = 0 \\ x\cos 2a + y\cos 3a + z\cos 4a = 0 \end{cases}$$

۶۶/۲۴- بادرنظر گرفتن تابع $y = [f(x)]^2$ ثابت کنید که حاصل‌ضرب $f(x).f'(x)$ درعبور از هر مقدار x که ریشهٔ $f(x) = 0$ باشد ازمنفی به‌مثبت تغییرعلامت می‌دهد.

۶۶/۲۵- تابع زیررا درنظر می‌گیریم:

$$y = a(1 - \cos\frac{x}{a}) \,،\, a \neq 0$$

و منحنی نمایش آنرا در ازاء مقادیر مختلف a به C_a نشان می‌دهیم.

۱) تبدیل هندسی را تعیین کنیدکه بوسیلهٔ آن می‌توان از روی‌منحنی C_1 هرمنحنی C_a رابدست‌آورد.

۲) با استفادهٔ ازتبدیل مزبور یامستقیماً، مقدارمساحت سطح محصور بین منحنی C_a و محور Ox را در فاصلهٔ $[0 \text{ و } 2\pi]$ وهمچنین حجم حادث از دوران این سطح را حول Ox حساب کنید.

۶۶/۲۶- کرهٔ Σ به مرکز O و به شعاع R و محور $x'Ox$ را که برمرکزآن می‌گذرد در نظر می‌گیریم. بر $x'x$ نقطه‌های I و I' به طولهای α و β را درنظر می‌گیریم که $\beta - \alpha = h > 0$ باشد. برنقاط I و I' و I'' وسط II' صفحاتی عمود بر $x'x$ می‌گذرانیم که کرهٔ Σ را به‌ترتیب در دایره‌های B و B' و B'' به شعاعهای r و r' و r'' قطع می‌کنند و حجمی ازکره را که بین صفحات B و B' محصور است با V نشان می‌دهیم مقدار V را برحسب r'' و h حساب کنید و حدود h را برحسب r'' و همچنین حدود R را برحسب h و r'' حساب کنید.

۶۶/۲۷ - به فرض اینکه x کمانی محصور بین $-\pi$ و $+\pi$ باشد هریك ازنامعادله‌های زیرراحل کنید:

$$\sqrt{1 + 2\cos x} > \cos x$$

$$\sqrt{1 + 2\cos x} > 2\sqrt{2}\cos x$$

۶۶/۲۸ـ درصفحهٔ مفروض P مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع a را درنظر می‌گیریم .

۱ـ مکان نقاط M ازفضا را پیداکنیدکه داشته باشیم:

$$MB^2 + MC^2 + 2MA^2 = 2a^2$$

۲ـ مکان نقاط M ازفضا را پیدا کنیدکه داشته باشیم :

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 2a^2$$

۶۶/۲۹ـ سه‌کرهٔ متساوی A و B و C دو به دو بریکدیگرمماس خارج وهرسه در عرقچین‌کروی Σ به‌شعاع R که قاعدهٔ آن دایرهٔ Γ است محاط می‌باشند بقسمی‌که هریك‌از آنها از یك طرف برسطح‌کروی Σ وازطرف دیگر بر صفحهٔ دایرهٔ Γ مماس است .

۱) شعاع کره‌های متساوی مزبور را برحسب R حساب‌کنید .

۲) اگر Γ_1 دایره‌ای باشدکه برنقاط تماس سه‌کرهٔ‌مزبور باکرهٔ Σ می‌گذرد و Γ_2 دایرهٔ ماربرنقاط تماس کره‌های مزبور با صفحهٔ دایرهٔ Γ باشد شعاع هریك از دو دایرهٔ Γ_1 و Γ_2 را حساب‌کنید .

۶۶/۳۰ـ در صفحهٔ P دومحور $x'x$ و $y'y$ در O متقاطع بوده با یکدیگر زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازند. درOعمود Oz را برصفحهٔ P اخراج می‌کنیم و روی‌آن O' را به‌فاصلهٔ a از O انتخاب می‌کنیم و از O' محور $u'O'u$ راموازی و و همجهت با $y'y$ رسم می‌کنیم .کرهٔ متغیر S را درنظر می‌گیریم‌که مرکز آن روی $x'x$ واقع بوده و $u'u$ را دردونقطهٔ M و M' بقسمی قطع‌کند که شعاعهای مختوم به‌این نقاط با $u'u$ زاویهٔ ۴۵ درجه بسازند .

۱) اگر I نقطه‌ای از $x'x$ باشدکه $\overline{OI} = x$ مقدار R شعاع‌کرهٔ S به‌مرکز I را برحسب a و x حساب‌کنید و ثابت کنیدکه‌کرهٔ S با Oz در دونقطهٔ ثابت A و A' متقاطع است . نتیجه بگیریدکه‌کره‌های S بردایرهٔ ثابتی می‌گذرند وشعاع و مرکز این دایره را پیداکنید .

۲) ثابت‌کنید که حاصل ضرب $\overline{O'M} \cdot \overline{O'M'}$ مقدار ثابتی‌است و مقادیر $\overline{O'M}$ و $\overline{O'M'}$ را برحسب x و R حساب‌کنید .

یك مسئله برای دانش‌آموزان

حل این مسئلهٔ را با ذکرنام ونشانی و پایهٔ تحصیلی تا قبل از پایان مرداد ماه به‌نشانی دفترمجله ارسال دارید . پاسخهای رسیده تصحیح و آنان که بهترین نمره را بیاورند معرفی می‌شوند .

هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای را در نظر می‌گیریم . اولا ثابت‌کنیدکه اگر ضلع مربع قاعده واسطهٔ هندسی باشد مابین اقطارکره‌های محیطی ومحاطی هرم ، مراکز این دوکره بر یکدیگر منطبق می‌باشند و بالعکس اگر مراکز این دوکره بریکدیگر منطبق باشند ضلع مربع قاعده واسطهٔ هندسی مابین دوقطرکره است (شرط لازم وکافی) وضمناً با بکاربردن نسبت $\frac{R}{r}$ (Rشعاع‌کرهٔ محیطی و r شعاع‌کرهٔ محاطی هرم نامبرده است) وبامعلوم بودن ضلع مربع $AB = 2a$ یك راه ترسیم هندسی ساده برای یافتن طولهای R و r بدست‌آورید .

ثانیاً فرض می‌کنیم $\frac{R}{r} = K$ (۱) باشد ثابت کنید به‌ازاء $K > \sqrt{2} + 1$ وقتی‌که $AB = 2a$ مقداری است ثابت دوهرم موجود است‌که برای هر دوی آنها رابطهٔ (۱) محقق است و ضمناً تحقیق‌کنید که حالت فعلی مسئله مورد $K = \sqrt{2} + 1$ بوده است .

مثال عددی ـ به‌ازاء $K = \frac{5}{2}$ دومقدار R ودومقدار r را برحسب a محاسبه کنید .

(م . ح . ر . خ)

داستانهای ریاضی

نوشتهٔ : ریند (Rhind)

ترجمه و تنظیم از: داود بدریحان

چوب و فلك در آموزشگاه تویست

مدیر آموزشگاه ملی تویست از اینکه برای چندمین بار رفتاری ناشایست مبنی بر بی ملاحظگی از **الیورژرك** ، یکی از شاگردان مدرسه مشاهده می‌کرد بسیار عصبانی شده بود. الیور شاگردی نسبتاً با قریحه و با اراده بود ولی عدم هماهنگیش با سایرین امری غیرقابل تحمل بود. درمدرسه‌ای «درجهٔ اول» مانند تویست، که مورد احترام فرزندان خانواده‌های متشخص کشور بود ، به هیچکس اجازهٔ قصور از انظباط و تخطی ازقوانین داده نمی‌شد . به‌همین مناسبت آقای مدیر مصمم شدکه الیورژرك را به‌خاطر رفتارش گوشمالی دهد.

برای تأدیب وی تنبیه بدنی را مؤثر دانست و شخصاً مصمم به‌انجام‌آن شد : ده ضربهٔ چوب به‌عنوان‌اخطار، بدون عواقب زیان‌آور ...

فوراً الیور ژرك را احضارکردند ووی را درجریان کار گذاشتند، الیور ژرك ناگزیر مجازاتش را قبول کرد . ولی در ابتدای عمل ، چوب به دونیمه شد. درحین اینکه مدیر به دو قطعه چوب ، یکی بزرگ ، یکی‌کوچك ، نگاه می‌کرد ، الیور اجازهٔ صحبت خواست ودرکمال خونسردی خاطرنشان ساخت که دراثنای تنبیه بوسیلهٔ قطعهٔ بزرگتر، ممکن است که قطعهٔ اخیر مجدداً بشکند. ودرنتیجه گفت :

ـ آقا ، به‌نظرمن ، شانس اینکه با این سه‌قطعه چوب نتوانیم مثلثی بسازیم سه برچهاراست .

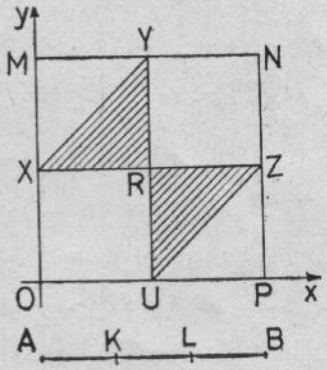
الیور ژرك ازموقعیت استفاده‌کرده بود، مدیرآموزشگاه ریاضیدانی محض بود و خواست بداندکه چطور این جوان آشوبگرتوانست نتیجه‌ای صریح بدهد، درصورتی‌که یك‌چوب می‌توانست به‌بینهایت نوع مختلف بشکند . در اثنای استماع توضیحات مجرم ، خشم مدیر فرو نشست ودست از تنبیه برداشت .

دراین موقع ، ژرك فرض اینکه چوب را بوسیلهٔ یك حلقهٔ دایره جانشین‌کند، مطالعه می‌نمود. اگر این حلقه در سه نقطهٔ اختیاری شکسته می‌شد، احتمال اینکه مثلثی‌که رأسهایش نقاط شکستگی باشند ، حاده‌الزوایا باشد ، چقدرخواهد بود؟

این‌دومسئله را (که درواقع یك مسئله هستند) می‌توانیم به‌صورت زیرتحلیل‌کنیم .

فرض می‌کنیم $AB = ۱$ طول چوب و K و I نقاط شکستگی باشند. تمام امکانات موجود درفرض بوسیلهٔ مواضع K و I یعنی بوسیلهٔ مقادیر $AK = x$ و $AL = y$ که x و y واقع بین ۰ و ۱ هستند، مشخص می‌شوند .

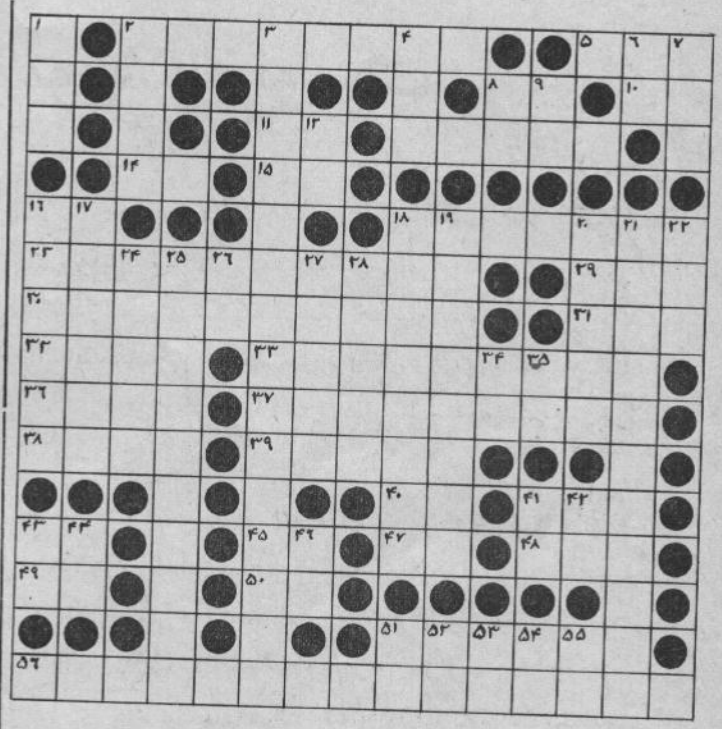
دردستگاه مختصات Ox و Oy ، تمام نقاط صفحه‌بقسمی که x و y آنها واقع بین صفر ویك باشدداخل‌مربع OMNP به ضلع $OM = OP = ۱$ واقعند . ولی تنها یك قسمت از این نقاط طوری هستند که اجازهٔ تشکیل یك مثلث می‌دهند . نسبت مساحتی که این نقاط درآن محصورند به ـ مساحت مربع ، معرف احتمال مطلوب است.



برای آنکه سه قطعه چوب بتوانند تشکیل یك مثلث بدهند ، لازم و کافی است‌که هر یك ازآنها کوچکترازمجموع دوقطعهٔ دیگر باشد. مجموع سه‌قطعه برابر واحد است، در نتیجه می‌توانیم بگوئیم‌که هرتکه یا هرقطعه از AB باید کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ باشد. حال ببینیم چه موقع چنین

جدول اعداد

طرح از : ناصر طارقی



افقی : ۱ ـ توان بیست و پنجم از یک عدد . ۵ـ کوچکترین عدد سه رقمی که برابر است با مکعب رقم یکان خود . ۸ ـ رقم یکانش مربع است و مکعب رقم دهگان آن می‌باشد. ۱۰ ـ از مجموع مربعات ارقام خود ده واحد بیشتر است . ۱۱ـ نه برابر مجموع رقمهایش است . ۱۳ـ به‌صورت $\overline{aabaa}$ است که b دوبرابر a و در ضمن مکعب کامل است. ۱۴ ـ زوج است و برابر است با حاصل‌ضرب مجموع ارقامش دررقم یکان خود . ۱۵ـ شمارهٔ صدهای عدد ۲۹ افقی . ۱۶ـ ده واحدکمتر از عدد ۱۰ افقی . ۱۸ـ از قرار دادن یك رقم بر طرفین عدد ۱۳ افقی بدست‌آمده است و مجموع ارقام‌تمام عدد۳۴ است. ۲۳ـ اگر ارقام‌آنرااز چپ به راست به‌ترتیب با a،b،c،...j،i نشان دهیم داریم :

$a=b+c=5d$ و $e=b^2=f+g$ و

$f=2g=2i$ و $h=c+j$

۲۹ـ عددی است زوج و همان خاصیت عدد ۵ افقی رادارد. ۳۰ـ اگر a و b به ترتیب اولین و دومین رقم سمت چپ‌عدد باشدارقام دیگر عدداز چپ به‌راست عبارتند از :

$b-a-1$ و $b-1$ و $2a$

۳۱ ـ از سه‌رقم متوالی تشکیل‌شده ،دو برابرش‌مضرب‌ده‌است واگرمقلوب‌شود کوچکترمی گردد. ۳۲ـ اگر با ۱۲۳۰ که‌ترتیب دیگری ازارقام آن‌است جمع‌شود عددی با رقمهای‌متساوی‌بدست آید . ۳۳ـ به صورت $\overline{abcd0abcd}$ است که درآن $\overline{abcd}$ کوچکترین‌عدد با چهاررقم فرد می‌باشد . ۳۶ـ چهار رقم‌سمت راست عدد ۱۳ افقی . ۳۷ـ مقلوبش مضربی از میلیون است و خودش سه برابر عدد ۴۱ افقی است . ۳۸ ـ مقلوبش ده برابر مقلوب عدد ۵ افقی است. ۳۹ـ پنج واحدکمتر ازتفاضل مجموع مربعات اعداد زوج جدول ضرب بر مجموع مربعات اعدادفردآن . ۴۰ـ بزرگترین عدد دورقمی جدول‌ضرب ۴۱ـ ارقامش از چپ به راست تصاعد حسابی با قدر نسبت مثبت می‌سازند و مجموع آنها با حاصل ضربشان برابر است . ۴۳ـ همان عدد ۸ افقی . ۴۵ ـ یك‌واحدکمتر از عدد ۱۱ افقی . ۴۷ـ کوچکترین عددبزرگتر از بزرگترین عدد یك‌رقمی . ۴۸ـ دوبرابر عدد ۴۱ افقی . ۴۹ـ عددی است زوج‌که مربع رقم یکان خود می‌باشد . ۵۰ـ همان عدد ۴۷ افقی . ۵۱ ـ شمارهٔ تلفن آشنا . ۵۶ـ توان چهل و هفتم است .

قائم : ۱ـ مجذور عدد ۴۷ افقی . ۲ـ تکرار عددی دو رقمی‌که توان پنجم است . ۳ـ به‌صورت زیر است :

$$\overline{(2a+1)a^2a^3a(a+1)(3a)(a^3+1)(a-1)(a-2)}$$

$$\overline{(a^3+1)a^2a^3(a-1)aa^2}$$

۴- ارقام مقدار متداول π . ۶- دوبرابر عدد ۸ افقی. ۷- عددی است فرد و متقارن که بررقم یکان خود بخش پذیر است و مجموع رقمهایش ۱۳ است . ۸- دو برابر مجموع رقمهایش است . ۹ - یک رقمش چهار برابر دیگری است . ۱۲- عدد ۸ افقی . ۱۶- به‌صورت زیر است :

$$\overline{a(۵a)(۲a)(۲a)a^{۲}(a-۱)}$$

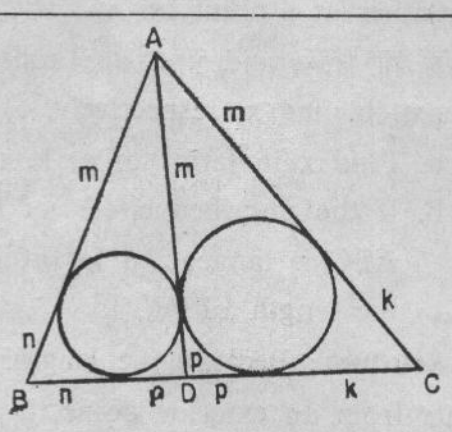
۱۷- عدد ۵۱ افقی . ۱۸- تفاضل آن بر عدد ۱۹ قائم برابر است با : ۱۳۱۷۰۷۹۱. ۱۹- اگر رقم ۲ را سمت‌چپ آن بنویسیم عدد حاصل شش برابرآن می گردد . ۲۰- ۲۰۸۸ واحدکمتر از عدد ۱۳افقی. ۲۱- به‌صورت زیر است :

$$\overline{(۴a)a(۲b)(۷a)b^{۲}ab(۲b)bab}$$

۲۲- اگر رقم دهگان آن را نصف‌کنیم عدد ۷ قائم بدست می‌آید . ۲۴- با مقلوبش برابر است و از هزار برابر عدد ۱۴ افقی به‌اندازهٔ مقلوب همین عدد بزرگتراست . ۲۵- کوچکترین عدد ده رقمی‌که درآن رقم صفر بکار نرفته وارقام آن به غیر از یکی از آنها تکراری نباشند . ۲۶ - متمم حسابی آن یك چهارم رقم یکان آن است . ۲۷- به صورت $\overline{ababa}$ و مجموع رقمهایش ۹ است . ۲۸- از عدد ۲۷قائم به‌اندازهٔ ۵۷۹۶ واحدکوچکتر است . ۳۴-کوچکترین عددی که‌ده برابرمجموع رقمهایش است . ۳۵- تکرار رقم یکان عدد ۴۱افقی. ۴۱- نصف عدد ۴۲ قائم . ۴۲- همان عدد ۱۴افقی ۴۳- همان عدد ۱۶ افقی . ۴۴- دو برابرش توان پنجم است ۴۶- بی‌معنی است. ۵۱ - دوبرابر عدد ۴۴ قائم . ۵۲-تلفظ فارسی این‌عدد درعین حال تلفظ یکی ازحروف الفبای‌انگلیسی است . ۵۳- ۵۰ واحدکمتر ازعدد ۵۵ قائم . ۵۴- همان‌عدد ۸ قائم . ۵۵- هشت برابرعدد ۸ افقی .

۱ ۱	۲ ۳	۳ ۵	۴ ۷	●	۵ ۷	۶ ۷	۷ ۴	۸ ۴
۹ ۲	۴	۳	۱	●	۱۰ ۳	۲	۰	۱
●	۳	●	۴	●	۱۱ ۳	۹	●	۰
۱۲ ۸	●	●	۱	●	۲	●	۱۳ ۶	۶
۸	●	۱۴ ۲	۷	●	۱۵ ۱	۶	۹	●
۱۶ ۴	۴	۱	●	●	۱	●	۱۷ ۱	۱
۴	●	۱۸ ۰	۱۹ ۲	●	●	●	●	●
۰	●	●	۲۰ ۴	۲۱ ۸	●	۲۲ ۵	۲۳ ۷	۲۴ ۶
۲۵ ۰	۲۶ ۱	۲۷ ۲	۳	۴	۲۸ ۵	۶	۷	۸
●	۲۹ ۳	۶	●	۳۰ ۵	۱	۲	●	۶

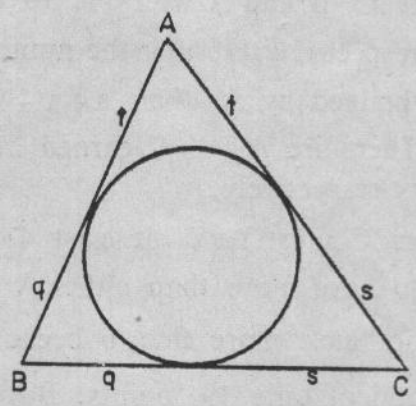
حل جدول شمارهٔ گذشته



Hence $2b+2x=a+b+c,$

and $BD=x=(a-b+c)/2.$

For the circle inscribed in the entire triangle, designate the lengths of tangents as in Fig. Here



$$2q+2s+2t=a+b+c$$

and

$$s+t=b.$$

Hence

$$2q+2b=a+b+c.$$

Therefore

$$BE=q=(a-b+c)/2=x.$$

Thus E and D coincide, making $DE=0$.

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 64 : Three teams A, B, and C compete in a track meet with ten events. Three points and a gold medal are awarded for each first place, two points and a silver medal for each second place, and one point and a bronze medal for each third place. Team C wins more gold medals than either A or B. Also team C wins a total of one more medal than B and two more than A. Nevertheless team A comes in first with one point more then B and two points more than C. Determine the number of medals of each type won by each team.

Solution : If c is the number of medals won by C, then $c+c-1+c-2=30$. Therefore C, B and A won 11, 10 and 9 medals respectively. If a is the number of points obtained by A, then $a+a-1+a-2=60$. Therefore A, B, C earned 21, 20, 19 points respectively.

Team C must have at least 4 gold medals to have more than either A or B, but cannot have more than 6 because it has a total of only 19 points. But if C had five or six gold medals, there would be no possible way for the team to have a total of 11 medals. Therefore C must have 4 gold medals. With 7 points and 7 medals more to account for, C must also have 7 bronze medals.

Because A and B must have fewer gold medals than C, they must each have 3 gold medals. For A we must still account for 6 medals and 12 points. This is possible only if A has 6 silver medals.

There remain 3 bronze and 4 silver medals which must belong to B.

Summary:

A: 3 gold and 6 silver medals;

B: 3 gold, 4 silver, and 3 bronze medals;

C: 4 gold and 7 bronze medals.

Problem 65 : Point D is taken on side BC of the triangle ABC so that if circles are inscribed in each of the triangles ABD and ACD, these circles will be tangent to each other at a point on $\overline{AD}$. The lengths of $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, and $\overline{BD}$. are represented by c, a, b, and x, respectively.

a. Find x in terms of a, b, and c.

b. If the inscribed circle of triangle ABC is tangent to $\overline{BC}$ at E, find the length of $\overline{DE}$.

Solution : Because the lengths of tangents from an exterior point to a circle are equal, we may designate the segments as in Fig. We have

$$2m+2k+2n+2p=a+b+c;$$

$$m+k=b$$

and

$$n+p=x.$$

→