یکان

مجله ریاضیات

دورهٔ ششم ، شمارهٔ : ۸ شمارهٔ مسلسل : ۶۵ خرداد ۱۳۴۹

در این شماره :

بها : ۲۵ ریال

قابل توجه مشترکان یکان

از مشترکانی‌که نشانی آنها دبیرستان یا دانشکده است تقاضا می‌شود نشانی تازهٔ خود را برای دریافت مجله های ماههای تیر ومرداد اطلاع دهند. درغیرآن، از ارسال این مجله‌ها برای‌آنان‌تامهرماه خودداری خواهد شد.

یکان سال ۱۳۴۸

شامل :

سؤالها و حل مسائل امتحانات نهایی خرداد و شهریور ۱۳۴۸ کلاسهای ششم طبیعی وریاضی،

سؤالها وحل مسائل امتحانات ورودی دانشکده‌های :

کنکور سراسری دانشگاه آریامهر ـ شبانهٔ دانشگاه تهران ـ دانشگاه ملی ـ دانشگاه پهلوی ـ دانشکدهٔ نفت ـ دانشکدهٔ افسری ـ هنرسرای عالی ـ آموزشگاه نقشه‌برداری ـ آموزشگاه کارتوگرافی ـ مدرسهٔ عالی بازرگانی رشت ـ انستیتو تکنولژی تهران ـ هنرسرای صنعتی بابل

نمونه‌ای ازمسائل امتحانات نهایی‌کشور فرانسه

امتحانات نهائی G. C. E. انگلستان

نمونه‌ای از مسائل المپیادهای ریاضی شوروی

بها : ۷۵ ریال

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال ده شماره منتشر می‌شود

دورهٔ ششم ـ شمارهٔ هشتم ـ شمارهٔ مسلسل : ۶۵

خرداد ۱۳۴۹

صاحب امتیاز ومدیر مسؤول، عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی، داود مصحفی

نشانی اداره :

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

YEKAN

Mathematical Magazine

Volume VI, number 8. May. 1970

subscripti. n ; $

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

ضمیمه‌های یکان سال

برای دانش‌آموزان کلاسهای سوم

جزوهٔ سال ۱۳۴۶ ـ جزوهٔ سال ۱۳۴۷ ـ جزوهٔ سال ۱۳۴۸

شامل مطالب گوناگون و مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

بهای هرجزوه : ۱۲ ریال

سخنرانی آقای : **ابوالقاسم قربانی**
درجلسهٔ مورخ ۴۹/۱/۱۰ کنفرانس ریاضی‌شیراز

غیاث‌الدین جمشید کاشانی
و
رسالهٔ «وتر وجیب» او

خلاصهٔ زندگینامهٔ کاشانی (شرح احوال و آثار کاشانی رادرکتابی جداگانه نوشته‌ام‌که به‌زودی به چاپ خواهد رسید ودراینجا به مختصر زیراکتفا می‌کنم) :

غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضیدان عالیقدر ایرانی، محاسبی ماهرومنجمی زبردست‌ومؤلفی توانا ومخترع آلات دقیق رصد بود و به حق می‌توان اورا از برجسته‌ترین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی‌دانست. وی‌ازحدود ۸۰۸(۱۴۰۶ م) تا پایان عمرش یعنی ۸۳۲ (۱۴۲۹ م) فعالیت علمی داشت و دراین مدت به‌تصنیف وتألیف رسالات وکتب ریاضی ونجومی پرداخت‌که مهمترین آنها «زیج خاقانی» و «مفتاح‌الحساب» و «رسالهٔ محیطیه» و «رسالهٔ وتروجیب» است . و آلت «طبق‌المناطق» را برای تعیین عروض‌کواکب اختراع کرد و کتاب «نزهة‌الحدائق» رادرشرح‌آن نوشت. ازجملهٔ شاهکارهای ریاضی وی این است‌که او نخستین مخترع کسرهای اعشاری است (۱) وعدد π (پی) یعنی نسبت محیط دایره به قطرآن را با دقتی‌که تقریباً تا صد وپنجاه سال بعد ازوی دردنیا بی‌رقیب ماند حساب‌کرد(۲) وجیب زاویهٔ یك درجه راباروش تکراری حل نوعی معادلهٔ درجهٔ سوم (چنانکه خواهیم دید) به وجهی که تا زمان وی سابقه نداشت به دست‌آورد .

کاشانی در حدود سال ۸۲۴ (۱۴۲۱ م) به دعوت **الغ‌بیك** ازکاشان به سمرقند رفت ومدیر رصدخانهٔ سمرقند ومورد احترام **الغ بیك** و ریاضیدانان دیگری‌که درسمرقند می‌زیستند بود وبنابه قول **بیرجندی** (۳) «اصل‌رصدسمرقنداز ازآثار طبع لطیف اواست» .

کاشانی در۱۹ رمضان سال ۸۳۲ (۱۴۲۹) درخارج شهرسمرقند درگذشت .

شخصیت علمی کاشانی

برای شناختن شخصیت علمی **کاشانی** بهتراست‌که به جای تکرار بعضی‌توصیفات مبهم ومعمولی ازقبیل «بطلمیوس ثانی» و «بی‌شبیه و نظیر زمان خود» و «سلطان‌المهندسین» و غیره‌که درکتابهای فارسی دربارهٔ اوآمده است قسمتی ازآنچه را ریاضیدانان ومحققان مغرب زمین دروصف‌آثار وی‌نوشته‌اند دراینجا بیاورم» .

دانشمند خاورشناس و ریاضیدان آلمانی **پاول‌لوکی** (Paul Luckey) نخست درسال ۱۹۴۴ میلادی‌کتابی در شرح وتفسیر قسمتی از «مفتاح‌الحساب» **کاشانی** نوشت (۴) وسپس در ۱۹۴۹ میلادی «رسالهٔ محیطهٔ» اورا به زبان‌آلمانی ترجمه وتفسیرکرد (۵) وکتاب اول (متأسفانه بعد ازسرگش) در ۱۹۵۱ وکتاب دوم در ۱۹۵۳ میلادی به چاپ رسید .

اینك وصف «رسالهٔ وتروجیب» **کاشانی** را از زبان **لوکی**بشنوید(۶):«**هانکل**(۷) درکتاب «تاریخ ریاضیات(۸)» خود شرح می‌دهدکه چگونه یك منجم و ریاضیدان مسلمان

(۱) مقالهٔ «نخستین مخترع کسرهای اعشاری» به قلم **قربانی** ، مجلهٔ سخن دورهٔ پنجم ، شمارهٔ ۱۰ ، آبان ۱۳۳۳ ، صفحات ۷۴۷ تا ۷۵۳ .

(۲) مقالهٔ «تاریخ عدد پی درشرق‌وغرب» به‌قلم‌**قربانی** ، مجلهٔ‌سخن ، دورهٔ ششم، شمارهٔ۵ ، تیرماه ۱۳۳۴صفحات۳۹۹تا۴۰۷.

(۳) **بیرجندی** ، شرح زیج ، ص۴۰ (۴) **لوکی** R (۵) **لوکی** L (۶) **لوکی**R ، ص۱

(۷) H . Hankel (۱۸۷۳_۱۸۳۹م) (۸) **هانکل** G ، ص ۲۸۹ تا ۲۹۳ .

(= کاشانی) درقرن پانزدهم میلادی جیب یك درجه را از روی جیب سه درجه بادقت فراوان حساب کرده وچگونه معادلهٔ درجهٔ سوم مربوط به آن را تشکیل داده وباروش استادانه‌ای آن را حل کرده است . **هانکل** می گوید که این روش زیبای حل معادلات عددی ازحیث دقت وظرافت دست کمی ازروشهای تقریبی که اززمان **ویت** (François Viète) به بعد در مغرب زمین متداول شده است ندارد . بعد از روش استخراج جذر وکعب که‌در اصل باآن شباهتهایی دارد این نخستین روش محاسبهٔ تقریبی است که درتاریخ ریاضیات بدان برمی‌خوریم.. به‌حق می‌توان این روش راازبد یعترین و جالبترین روشهایی دانست که‌در همهٔ نوشته های (ریاضی) اسلامی وجود دارد. مخترع چنین روش تحسین آمیزی یك نفر ایرانی بود که در نیمهٔ اول قرن پانزدهم (میلادی) درانجمن دانشورانی که نزد **الغ بیك** گرد آمده بودند می‌زیست و در آثارش خودرا **غیاث الدین جمشید فرزند مسعود فرزند محمود طبیب کاشانی** نامیده است »

سپس **لوکی** دربارهٔ سایر آثار **کاشانی**(۱) می‌نویسد: « درنتیجهٔ پژوهشهایی که من تاکنون دریك قسمت ازآثار وی، که‌خوشبختانه قسمت اعظم آنهادر کتابخانه‌های شرق وغرب موجود است، به‌عمل آورده‌ام اورا ریاضیدانی شناخته‌ام هوشمند ومخترع ونقادوصاحب افکار عمیق وواقف برآثار ریاضیدانان سلف که به‌خصوص درفن محاسبه و به کاربستن روشهای تقریبی متبحر وچیره‌دست بوده‌است . اگر «رسالهٔ محیطیهٔ» او به‌دست ریاضیدانان معاصروی که‌در مغرب زمین می‌زیستند رسیده‌بود ازآن پس مردم مغرب زمین ازبعضی منازعات وتألیفات شرم‌آور دربارهٔ اندازه گیری دایره (= محاسبهٔ عددپی) بی نیازمی‌شدند»(۲)

رسالهٔ و تروجیب

کاشانی در مقدمهٔ « مفتاح الحساب » در ضمن ذکر اسامی تألیفات خودازاین رساله نام برده ونوشته است : (۳) « ورساله‌های دیگر تصنیف کردم مانند ... ورسالهٔ وتروجیب در استخراج آن‌دو ، برای یك سوم قوسی که وتروجیب آن معلوم باشد واین‌نیز یکی‌از مسائلی است که برپیشینیان دشوار بوده چنانکه صاحب مجسطی (= بطلمیوس) در آن کتاب گفته است که برای به‌دست آوردن آن راهی نیست »

ازمتن اصلی این‌رساله متأسفانه نشانه‌ای دردست نیست اما چنانکه خواهیم دید برآن شرحهایی نوشته‌اند و از روی آنها می‌توان قسمت اساسی آن‌را به‌دست‌آورد.

بحث دروجودرسالهٔ وتروجیب

در اینجا باید در بارهٔ عبارت نا درستی که در حاشیهٔ «مفتاح الحساب» چاپی‌آمده است توضیحی بدهیم :

درحاشیهٔ صفحهٔ سوم «مفتاح الحساب» چاپی‌دربارهٔ **کاشانی** نوشته شده‌است : (۴) «جیب یك درجه را تا تاسعه در غایت درستی ودقت به‌طریق جبرو مقابله (ازراهی) غیر از مسائل ششگانه (المسائل‌الست)استخراج کرد امابه‌علت کوتاهی عمرش موفق‌نشد رساله را به‌پایان برساند»

به‌دلایل زیر این‌ادعا که **کاشانی** رسالهٔ «وتروجیب» رابه‌پایان نرسانده درست‌نیست :

اولا ـ چنانکه گفتیم **کاشانی** خوددر مقدمهٔ «مفتاح‌ـ الحساب» به‌صراحت رسالهٔ « وتروجیب» را از تألیفات خود می‌شمارد و گذشته‌ازاین به‌تصنیف چنان‌رساله‌ای‌مباهات‌می‌کندو می‌نویسد«این‌نیزیکی‌ازمسائلی‌است که‌برپیشینیان‌دشواربوده‌است» بادرنظر گرفتن‌اینکه **کاشانی**«مفتاح‌الحساب»رابه**الغ‌بیك**اهدا کرده‌وعلاوه‌براینکه **الغ‌بیك**خودریاضیدان‌بوده‌است‌درآن‌زمان پانصدکس‌در سمرقندبه‌ریاضیات‌مشغول‌بوده‌اندو دربیست موضع

---

(۱) **لوکی** R : ص۲ (۲) برای کسب‌اطلاع‌از نظرسایر دانشمندان اروپائی دربارهٔ آثار کاشانی رجوع کنیدبه‌کتاب «احوال وآثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی) تألیف **قربانی** که‌به‌زودی به‌چاپ خواهدرسید .

(۳) **مفتاح** ، ص۲و۳ : «وصنفت رسائل اخری مثل‌الرسالة المسماة بسلم السماء ... ورسالة الوتروالجیب‌فی‌استخراجهما لثلث‌القوس المعلومة الوتر والجیب وذلك ایضا مماصعب علی المتقدمین کماقال صاحب المجسطی فیه ان‌لیس الی تحصیله سبیل»

(۴) « استخرج جیب درجة واحد الی التاسعه فی‌غایةالصحة والدقة بطریق الجبر والمقابله بغیر المسائل الست لکن‌لم یوفق لاتمام‌الرسالة لفقر عمره‌وکتب الحکیم الفیلسوف قاضی زاده‌الرومی...»

درس ریاضیات می گفته‌اند (۱) باورکردنی نیست که **کاشانی** درمقدمهٔ کتابی که می‌خواسته است آن‌را به‌سلطان وقت اهدا کند آنهم باداشتن همکارانی که باوی رقابت می‌کرده‌اند ودر چنان محیط علمی ادعای بی‌اساسی مبنی برتصنیف رسالهٔ وتر وجیب کرده وحتی به‌آن تفاخر نموده‌باشد.

علاوه براین درحاشیهٔ برگ ۳۲ از نسخهٔ خطی « زیج خاقانی » تألیف **کاشانی** که در دیوان هند (ایندیاافیس) موجود است عبارتی از **کاشانی** نقل شده (۲) ودرآن از قول **کاشانی** آمده است که « قدما راهی برای محاسبهٔ دقیق جیب ثلث زاویه‌ای که جیب‌آن معلوم باشد نیافته‌اند وما طریقه‌ای یافتیم ورساله‌ای دربارهٔ آن نوشتیم وجیب زاویهٔ یک‌درجه را باآن طریقه حساب کردیم ».

ثانیاً ـ قاضی‌زادهٔ رومی که رسالهٔ « وتروجیب » را تحریرکرده است (شرحش خواهد آمد) درمقدمهٔ این تحریر نوشته است (۳) : « این رساله‌ای است در استخراج جیب یك درجه با اعمالی متکی بر قاعده‌های هندسی و حسابی که برادر ارجمند ویکتای زمان خود جمشید پسرمسعود ، طبیب ملقب به غیاث‌کاشانی به‌آن ملهم شده‌است ... اما چون در سخن او ایجازی است که ازحد لغزهم گذشته و تصرفاتی دیده می‌شود که ازکثرت تعقید راه فهم را بربسته وبه‌جایی رسیده است که به راهنمایی نیاز پیدا کرده است برمن از راه برادری واجب‌آمد که آنچه را او گفته شرح وبسط دهم و هرچه را پوشیده گذارده بازنمایم ودشواری‌آن را هموارسازم وتصرفات وی را بیان کرده برمقدمات‌آن برهان آورم...»(۴)

ملاحظه می‌شود که گذشته ازآنکه **قاضی‌زادهٔ رومی** که معاصر وهمکار وشاید رقیب **کاشانی** بوده دراین مقدمه سخنی از ناتمام ماندن رسالهٔ « وتروجیب » **کاشانی** به‌میان نیاورده از سیاق عبارات فوق کاملا واضح است که وی رسالهٔ **کاشانی** را دردست داشته و گفته‌های اورا شرح وبسط داده است . علاوه بر این **قاضی‌زاده** پس از عباراتی که ترجمهٔ آن را آوردیم مطالبی‌می‌نویسد (۵) که مطالعهٔ آن کوچکترین تردیدی در اینکه وی متن رسالهٔ «وتروجیب» را دردست داشته است باقی نمی گذارد : « درسیاق سخن ترتیب کلام او (= کاشانی) را مراعات کردم ... وسخن او را با عبارات خود او آوردم »

ثالثاً ـ ملا عبدالعلی بیرجندی در شرح « زیج الغ بیك» می‌نویسد(۶): وافضل‌المهندسین مولانا غیاث‌الحق والدین جمشیدالکاشی رهکه اصل رصد سمرقند از آثار طبع لطیف او است ملهم شده بطریق استخراج جیب یك درجه **ودرآن باب رساله‌ای‌انشاء نموده...»** سپس **بیرجندی** قسمت اساسی ومهم رسالهٔ مذکور را به فارسی برگردانده است(۷) ودر پایان آن می‌نویسد: « وچون‌درنسخهٔ اصل‌بعض ارقام را ازین عمل درجدول‌آورده وبعضی را ترك‌کرده ما این عمل را نیزازسر گرفته استخراج‌کردیم تا اگرناظررا اشتباهی واقع شود رجوع به آن نماید » . از این عبارات به خوبی واضح است که **بیرجندی** متن‌رسالهٔ «وتروجیب» رادراختیار داشته است .

تبصره ـ درجزو مجموعهٔ خطی شمارهٔ ۱۷۵۱ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران رساله‌ای به‌فارسی‌موجود است‌موسوم

---

(۱) رجوع شودبه‌کتاب «احوال وآثار غیاث الدین جمشید کاشانی »

(۲) **آبو** : ص ۲۸

(۳) **قاضی‌زاده** : ص ۳۸ : «وبعد فهذه رسالة فی‌استخراج جیب درجة واحدة باعمال موسسة علی‌قواعد هندسیة حسابیة قد الهم به‌الاخ الاعز وحید زمانه جمشیدبن مسعودالطبیب‌الملقب بغیاث‌الکاشی ... لکن لما کان فی‌کلامه ایجاز تجاوز حدالالغاز وتصرفات سدت سبیل‌الفهم بالتعقید و ادت الی مایحتاج الی‌التسدید وجب علی من طریق‌الاخوه ان ابسط ماذکره واکشف ماستره واحل‌العقد و اسددالاود و ابین‌التصرفات و ابرهن علی‌المقدمات ...»

(۴) این ترجمه باختصرتصرفاتی از مقالهٔ آقای محیط طباطبائی اقتباس شده‌است (←**محیط** ، غیاث‌الدین ، ص ۲۴)

(۵) **قاضی‌زاده** : ص ۳۹ : «واسوق الکلام مراعیا لترتیب کلامه... ثم اذکر کلامه بعباراته »

(۶) **بیرجندی** ، شرح زیج ، روی برگ ۴۰

(۷) **بیرجندی** ، شرح زیج : پشت برگ ۴۱ تا پشت برگ ۴۲

به « رساله در معرفت وترثلث قوس معلومةالوتر » تألیف **میرزا ابوتراب بن احمد** که بنا به قول **عباس اقبال آشتیانی** از ریاضیدانان عهد محمد شاه قاجار بوده‌است (۱).

میرزا ابوتراب درمقدمهٔ رسالهٔ مذکور نوشته است :

«... وسایرمهندسان نیزعدم امکان استنباط آن‌راتسلیم‌داشته‌اند مگرفاضل مهندس بارع **غیاث‌الدین جمشید الکاشانی** که بعداز اعمال قواعد هندسیه و استعمال جبر و مقابله طریقه‌ای بجهت‌آن استنباط ودر رسالهٔ «وتروجیب» ایراد نموده وامیر شهید **میرزا الغ بیك** به‌همان طریقه از وترشش درجه وتر دودرجه‌را استنباط وازآن‌جیب یك درجه را به تحقیق بیرون آورده و وضع جدول جیب را در زیج به همان قانون کرده است » .

مؤلف مذکور پس از تمهید دومقدمه روش **کاشانی** را شرح داده ودرآغازآن می‌نویسد : « وبعد از تمهید این دو مقدمه شروع درمقصد می‌شود . اما طریقهٔ موروثه از مهندس فاضل غیاث‌الدین جمشید . پس به جهت آن فرض کنیم قوس **ا ب ج د...**»

شرحهایی که بر رسالهٔ وتر وجیب نوشته‌اند

الف ـ چنانکه گفتیم **قاضی‌زادهٔ رومی**رسالهٔ «وتر وجیب» **کاشانی** را به عربی تحریرکرده است و عنوان کامل این تحریر این است: «رسالة فی‌استخراج جیب‌الدرجةالواحده علی‌التحقیق‌الحقیق استخرجه افضل المهندسین غیاث‌الدین جمشید القاسانی حرره ونقحه فی‌هذه‌الرسالة قاضی زاده الرومی مؤلف شرح چغمینی» .

این رساله چنانکه گفتیم درسال ۱۲۹۹ ه.ق. درتهران به‌چاپ سنگی رسیده ودرآخر بعضی از نسخه‌های چاپی کتاب «مفتاح‌الحساب» دیده می‌شود.

ازاین رساله چند نسخهٔ خطی در ایران موجود است : دونسخهٔ خطی درکتابخانهٔ ملی‌ملك درجزو مجموعه‌های‌شمارهٔ ۳۵۳۶/۱ و ۳۱۸۵ (۲) ویك نسخهٔ خطی ناقص به شمارهٔ ۱۵۳۱(۱۵۱۹) در کتابخانهٔ‌مجلس شورای ملی (۳). یك‌نسخهٔ خطی‌نیزازاین رساله درکتابخانهٔ خدیویهٔ مصرموجوداست (۴) بااین عنوان : «رسالة فی‌استخراج جیب درجة واحده باعمال مؤسسة علی قواعد هندسیه وحسابیه» .

این تحریر **قاضی‌زاده** درسال ۱۹۶۰ میلادی به‌زبان روسی ترجمه شده‌است(۵).

ب ـ چون **الغ بیك** در باب دوم از مقالهٔ دوم زیج خود دربارهٔ «معرفت جیب وسهم» گفتگوکرده است کسانی که « زیج الغ بیك » را شرح کرده‌اند وقتی به باب مذکور رسیده‌اند و در بارهٔ روش استخراج جیب یك‌درجه به بحث پرداخته‌اند ازرسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** نام‌برده و مطالب آن را تشریح‌کرده‌اند .

ازجمله چنانکه گفتیم **ملاعبدالعلی بیرجندی** قسمت مهم رسالهٔ وتروجیب **کاشانی** رادرشرحی‌که برزیج **الغ‌بیك** نوشته‌است آورده . همچنین **میرم چلبی** درشرح زیج **الغ‌ـ بیك** موسوم به «دستورالعمل وتصحیح‌الجدول» دربارهٔ رسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** بحث‌کرده‌است(۶).

نظر به‌اهمیت رسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** این قسمت ازشرح **میرم چلبی** بر زیج **الغ بیك** یا خلاصهٔ آن به ـ زبانهای فرانسوی و آلمانی و روسی و انگلیسی ترجمه شده است به‌این شرح :

ترجمهٔ فرانسوی توسط **سدیّو** در ۱۸۵۳ میلادی صورت گرفت(۷) ودر ۱۸۵۴میلادی **وپکه** نیزدرمقاله‌ای (۸) روش **کاشانی** را در استخراج جیب یك درجه مورد بحث

---

(۱) **مصاحب** ، حکیم خیام : ذیل صفحهٔ ۱۵۲

(۲) شخصاً دیده‌ام

(۳) **فهرست مجلس** : ج ۴ ص ۲۳۳ شمارهٔ ۱۵۳۱(۱۵۱۹)

(۴) فهرست الکتب‌العربیه المحفوظة بالکتبخانه الخدیویة المصریة : ج ۵ ص ۲۱۰

(۵) **یوشکویچ** G : ذیل صفحهٔ ۳۲۳ وص ۴۴۳ ش ۱۷۵a

(۶) **میرم چلبی** : ص ۴۳ به بعد

(۷) **سدیّو** A : صفحات ۳۳۳ تا ۳۵۶ ـ سدیّو P : ذیل صفحات ۶۹ تا ۸۳

(۸) **وپکه** D : صفحات ۱۵۵ به‌بعد و ۱۶۷ به‌بعد

قرار دارد وآن را روش چلبی نامید. ترجمهٔ آلمانی مختصری ازشرح **میرم چلبی** در ۱۹۲۲ میلادی توسط **کارل شوی** انجام یافت(۱).

در ۱۹۵۴ میلادی **آبو** مقالهٔ بسیار جالب و مفیدی در بارهٔ شرح **میرم چلبی** راجع به رسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** نوشت ودرآن ، قسمت اساسی ومهم رسالهٔ «وترو جیب» راتفسیروتوجیه کرد (۲) .

بالاخره **رزنفیلد ویوشکویچ** فصل مذکور ازشرح میرم چلبی را در ۱۹۵۶ میلادی بـه‌زبان روسی تـرجمه و تفسیر کردند (۳).

برای کسب اطلاع ازعقیدهٔ دانشمندان اروپائی دربارهٔ رسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** رجوع کنید به‌کتاب شرح‌احوال وآثار کاشانی (زیرچاپ) .

خلاصه‌ای از آنچه بیرجندی در بارهٔ رسالهٔ وتروجیب نوشته است

گفتیم کـه اصل رسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** ازبین‌رفته است ولی می‌توان قسمت اساسی ومهم آن را ازروی شرح ـ هایی که برآن‌رساله نوشته‌اند (وذکرش گذشت) به‌دست‌آورد. چون همهٔ بحث‌هایی که تاکنون دراین باره صورت گرفته است متکی برشرح **میرم چلبی** برزیج **الغ بیك** است و ازطرف دیگرتحریر **قاضی‌زادهٔ رومی** به‌زبان عربی است وتاکنون ندیده‌ایم کـه کسی از گفته‌های **بیرجندی** که به فارسی است دراین باره استفاده‌کرده باشد وحال‌آنکه آنچه وی دراین‌مورد نوشته بسیار مفید وجامع ودرواقع خلاصهٔ «رسالهٔ وتروجیب» **کاشانی** است وازبعضی جهات برتفسیر**قاضی‌زادهٔ رومی** مزیت دارد بهتر دیدیـم کـه آنچـه را **بیرجندی** دربارهٔ ایـن رساله نوشته است اساس قـرار دهیم . بنابرایـن ابتدا گفته‌های **بیرجندی** را عیـناً و بدون تغییر (حتی در رسم‌الخط) ازکتاب «شرح زیج الغ بیك» او دراینجا می‌آوریم ودرحاشیهٔ صفحات برخی از توضیحات لازم را اضافه می‌کنیم‌و سپس‌آن را بـا اصطلاحات و علائم قراردادی کنونی بیـان می‌کنیم(*) .

بیرجندی می‌نویسد(۴):« ازقواعد سابق جیب‌بسیاری از قسی را استخراج تـوان کرد وچون جیب سه درجـه بآن قواعد معلوم میتوان کرد قسی را که از سه باشد تا بنود بتفاضل سه سه هم بقواعد مذکور معلوم توان‌کرد امـابعضی ازآن قبیل است که جیب آن اصلا ازین قواعد معلوم نتوان کرد مگرآنکه جیب یکدرجه را باجیب قوس معلومی‌ملاحظه کنند وازآن هردوجیب مطلوب حاصل کنند و اگر جیب یك درجه معلوم باشد جیوب ازآن معلوم توان‌کرد و قدما طریق استعلام آن بیان نتوانستند نمود . محقق طوسی در تحـریـر مجسطی میفرماید :

لیس الی معرفت وترثلث‌القوس المعلومةالوترمن جهة‌ـ الخطوط (یعنی بالبراهین الهندسی) طریق و وتـر قوس شش درجه معلوم است اگر وتر ثلث اوکه دودرجه است معلـوم شود جیب یکدرجه‌که نصف وتر دودرجه است معلوم می‌ـ شود وایشان (= الغ بیك) جیب یك درجه رابتقریب بیـرون آورده‌اند و بنای جدول برآن نهاده‌اند . و افضل المهندسین مولانا غیاث‌الحق و الدین جمشید الـکاشی ره کـه اصل رصد

---

(۱) **شوی B** : ذیل صفحات ۳۸۶ تا ۳۹۹

(۲) **آبو**

(۳) **رزنفیلد ویوشکویچ** : صفحات ۳۱۱ تا ۳۱۹ (ترجمهٔ روسی) وصفحات ۳۷۵ تا ۳۷۹ تفسیر

(۴) **بیرجندی** ، شرح زیج : روی صفحهٔ ۴۰

(*) نوشتهٔ بیرجندی علاوه برآنکه نمونهٔ جالب توجهی از انشای‌کتابهای ریاضی قدیمی فارسی است شامل تعریف بعضی اصطلاحات ازقبیل «جبر» و «مقابله» و «تکمیل» و «منحط‌کردن» وغیره است و رسم‌الخط‌آن درنسخهٔ خطی مذکورنیزجالب است مثلا شیء را همه‌جا بدون همزه نوشته است .

سمرقند ازآثار طبع لطیف اواست ملهم شده بطریق استخراج جیب یکدرجه ودرآن باب رسالهٔ انشانموده وسصنف (= الغ بیك) ره طریقی دیگردرباب جیب درجهٔ واحد بیان فرموده و درآن‌باب رسالهٔدیگر نوشته‌وماولا طریق تقریبی رابیان‌کنیم».

بیرجندی پس ازبیان دو طریق تقریبی یکی ازقول صاحب«کشف‌الحقایق(۱)»ودیگری‌ازقول**خواجه‌نصیرالدین طوسی** (درتحریر مجسطی) چنین‌می‌نویسد(۲) :

«وچون طریق استخراج جیب یکدرجه بتقریب معلوم شد طریق استخراج آن به برهان نیزایرادکنیم وآن دوطریق است یکی آنکه سلطان المهندسین **غیاث‌الدین جمشید** استخراج‌کرده ودیگر آنکه سلطان شهیدسعید مصنف‌ره بیان فرموده وماین هردو رابرسبیل اختصارایرادکنیم».

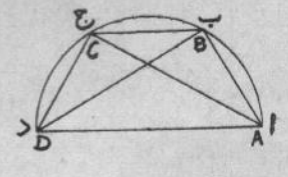
«اما بجهت طریق اول (یعنی طریق کاشانی) فرض‌کنیم که قوس **اب جد** شش درجه است وآن رابسه‌قسم متساوی کنیم برنقطه‌های **ب‌وج** واوتار**اب واج واد وب‌ج وب‌دو جد** وصل‌کنیم وازجیب پانزده درجه وهیژده درجه‌که سابقاً معلوم شد جیب‌سه درجه استخراج کردیم بود(۳):

ج ح که لج نط لد کح ید ن (ثامنه)

پس آن رامضاعف‌ساختیم حاصل شد وتر(۴) **اد :**

و یو مط ز نط ح نو کط م (ثامنه)

و مطلوب وتر **اب** است که (وترو بروی کمان) دودرجه است»



« پس می گوییم که در شکل دوم از مقالهٔ اول مجسطی مبین شده است که هرذواربعة اضلاع که دردائره واقع شود مجموع دوسطح هر ضلع درمقابل اومساوی سطح‌یکی ازدوقطراوست دردیگری(۵) وازشکل چهاردهم‌همان‌مقاله‌مستفاد می‌شودکه مربع‌وترنصف قوسی مساوی سطح نصف قطراست درفضل قطر بروتر تمام اصل‌آن قوس تانصف‌دور(۶)وظاهر است‌که**اب وج‌د**متساویند وهمچنین **اج‌وب‌د** پس‌حاصل ضرب **اب درج‌د** مربع باشدکه دراصطلاح اهل جبرومقابله آنرا **مال** گویند وحاصل ضرب **ب‌ج** که مجهول است یعنی‌شیء دراصطلاح‌جبر ومقابله در **اد** باشد اینقدرازاشیا :

و یو مط ز نط ح نو کط م

و مجموع این دو حاصل مساوی مربع **اج** است یعنی سطح **اج** در **ب‌د**بحکم‌مقدمهٔ‌اولی(۷) ومربع **اب** مساوی سطح‌نصف قطراست‌که شصت است درفضل قطر بروتر تمام **اج** تا نصف

---

(۱)«**کشف الحقایق**» درشرح زیج‌ایلخانی ازحسن‌بن محمدنیشابوری معروف به‌نظام اعرج است ویك‌نسخهٔ خطی‌ازآن‌در مشهد موجود است (**فهرست مشهد ج**۳، فصل ۱۷ ص۲۸ش۱۱۴)

(۲) **بیرجندی** ، شرح زیج : پشت صفحهٔ ۴۱ سطر ماقبل آخر به‌بعد

(۳) توجه کند : این عدد دردستگاه شصتگانی ازراست به‌چپ نوشته‌شده ومابرای سهولت آن راازچپ به‌راست به صورت زیر می‌نویسیم وقسمت صحیح رااز قسمت‌کسری بانقطه ویرگول (;) جدامی‌کنیم ،

$sin\,۳^\circ = ۳;۸,۲۴,۳۳,۵۹,۳۴,۲۸,۱۴,۵۰$

(۴) یعنی : $۶;۱۶,۴۹,۷,۵۹,۸,۵۶,۲۹,۴۰$

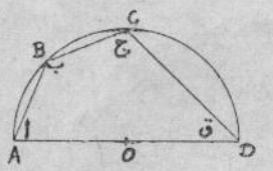
برای سهولت بیان این عدد را (α ثامنه) خواهیم نامید وباید متوجه بودکه:

$$(\text{ثامنه}\ \alpha) = ۶ + \frac{۱۶}{۶۰} + \frac{۴۹}{(۶۰)^۲} + \frac{۷}{(۶۰)^۳} + \frac{۵۹}{۶۰^۴} + \frac{۸}{(۶۰)^۵} + \frac{۵۶}{(۶۰)^۶} + \frac{۲۹}{(۶۰)^۷} + \frac{۴۰}{(۶۰)^۸}$$

(۵) قضیهٔ معروف بطلمیوس درچهارضلعی محاطی : $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$

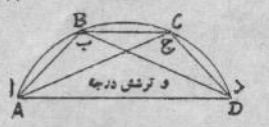
(۶) یعنی اگر AG قطردایره ونقطهٔ B وسط قوس AC باشد

$$\overline{AB}^۲ = \frac{AG}{۲}(AG - GC)$$



(۷) یعنی اگرفرض کنیم‌که قوس AD مساوی با۶ درجه باشد و آن را در نقاط B وC به‌سه قسمت متساوی کنیم و $AB = BC = CD$ را x بگیریم خواهیم داشت :

$\overline{AC}^۲ = \overline{BD}^۲ = (\text{وتر ۶ درجه}) \times x + x^۲$.

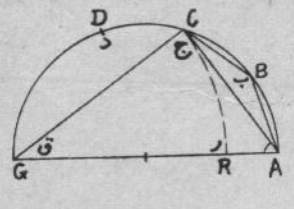


دوربحکم مقدمهٔ ثانیه چه قوس **اج** ضعف قوس **اب** است(۱).

پس چون مربع **اب** که مال است برشصت قسمت کنند خارج‌قسمت جزوی‌باشدازشصت‌جزوازمال‌واین فضل قطراست بروترتمام(قوس) **اج**پس‌چون‌انرااز‌قطر که‌صدوبیست جزواست نقصان‌کنندباقی‌ماندوترتمام**اج**صدوبیست‌جزوالایك‌جزوازشصت جزوازمال(۲)ودرعلم‌جبرومقابله‌مقررشده‌است که‌چون‌مربع‌عددی خواهندکه درآن استثناباشد اول مستثنی منه‌را درنفس اوضرب کنند وهردورا جمع‌کنند وضعف حاصل ضرب مستثنی رادر مستثنی‌منه ازمجموع مذکور استثناکنند(۳)پس بجهت معرفت وتر **اج** اول مربع ۱۲۰ گرفتیم بود ۱۴۴۰۰ وچون آن را مرفوع کنند چهار مرفوع مره باشد که چهارمال(۴) است و مربع جزوی‌ازشصت‌جزوازمال‌جزوی باشد ازسه هزاروششصد جزوازمال‌مال(۵)زیراکه حاصل ضرب جزومال درنفس‌اوجزو مال‌المال است وضعف حاصل ضرب صدوبیست در جزوی از شصت‌جزومال‌چهارمال‌است(۶)پس‌مربع‌وترتمام(قوس)**اج**چهار مرفوع مره باشد ازدرجات وجزوی از۳۶۰۰ جزو از مال‌مال الا چهارمال(۷)و چون مربع و ترقوسی‌ازمربع قطراسقاط کنند مربع وترتمام‌آن قوس تانصف دوربماند چه ازقطرواین دووتر مثلث قائم‌الزاویه حاصل شود که‌وتر آن زاویهٔ قائمه قطربود زیراکه زاویهٔ نصف دایره قائمه است چنانچه مبین‌شده‌است‌در ثالثهٔ اصول ومربع‌وترقائمه مساوی مجموع دومربع دوضلع او است بشکل عروس(۸)وهم در علم جبرومقابله مقررشده است که چون درعدد استثنا باشدو خواهندکه آنرا از عدد دیگر نقصان‌کنند اول مستثنی را حذف‌کنند ومثل مستثنی برمنقوص منه زیاده‌کنند(۹).پس می گوئیم‌مربع قطرچهارمال‌است‌پس‌چهار مال مستثنی است ازمنقوص نقصان کردیم وبرمنقوص منه که چهارمال است اضافه کردیم‌پس منقوص منه هشت مال شدپس چون مربع وترتمام **اج** ازآن اسقاط‌کردیم باقی ماند مربع‌وتر **اج** چهارمال الا جزوی از۳۶۰۰ جزو از مال‌مال(۱۰)و سابقاً

---

(۱) یعنی اگر از روی قطر GA طول GR را مساوی GC جداکنیم وشعاع دایره را ۶۰ بگیریم داریم



$$\overline{AB}^2 = \frac{AG}{2}(AG - GC) = 60AR$$

(۲) یعنی درشکل قبل

$$GR = AG - AR = 120 - \frac{x^2}{60}$$ که درآن $x = AB$

(۳) مقصود اتحاد $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

(۴) یعنی اگرعدد ۱۴۴۰۰ رادردستگاه شمارشصتگانی بنویسیم می‌شود ۴،۰،۰ [یعنی $4 \times (60)^2$]

(۵) یعنی $\left(\frac{x^2}{60}\right)^2 = \frac{x^2}{3600}$

(۶) یعنی $2 \times 120 \times \frac{x^2}{60} = 4x^2$

(۷) یعنی در شکل $\overline{GC}^2 = 4 \times (60)^2 + \frac{x^4}{3600} - 4x^2$ (GC وترتمام قوس AC است).

(۸) مقصود به‌کاربردن قضیهٔ فیثاغورس است درمثلث قائم‌الزاویه‌ای‌که وترآن قطردایره ودوضلع زاویهٔ قائمهٔ‌آن دووتراز دایره باشند ، ومی‌خواهد بگویدکه درشکل ... $\overline{AC}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{GC}^2$

(۹) یعنی $a - (b - c) = a + c - b$

(۱۰) ظاهراً عبارت افتادگی دارد ولی مطلب کاملا روشن است . مقصود این‌که ازرابطهٔ $\overline{AC}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{GC}^2$ بادرنظر گرفتن اینکه $AG = 120$ وملحوظ داشتن مقدار $\overline{AC}^2$ازرابطهٔ ذیل شمارهٔ (۷) همین صفحه حاصل می‌شود :

$$\overline{AC}^2 = 4x^2 - \frac{x^4}{3600}$$

گفتیم که مربع وتر **اج** مساوی سطح **اب‌درج‌د** است که مال است وسطح **ب‌ج‌دراد** که آن هست ازاشیا اینقدر

و یو مط ز نط ح نوکط م

پس چهارمال‌الاجزوی‌ازسه‌هزاروششصد جزو ازمال‌مال معادل باشد بامالی واین قدراشیاکه مذکورشد(۱)وچون‌مستثنی ازمعادل اول اسقاط‌کنند ومثل آن برمعادل ثانی اضافه کنند چهارمال معادل شود بایك‌مال واین قدراشیا

و یو مط ز نط ح نوکط م

و جزوی از سه هزار و ششصد جزو از مال مال (۲) واین عمل **راجبر** گویندوچون‌آنچه‌مشترك‌است‌درمتعادلین وآن یك مال است حذف‌کنند بماند سه مال معادل اینقدر اشیا

ویو مط ز نط ح نو کط م

ثامنه و جزوی از سه هزار ششصد جزو از مال مال (۳) و این عمل **رامقابله** گویند وهم ازقواعد آن‌علم است‌که چون دریکی ازمتعادلین‌کسری باشد آن‌کسرتمام سازندومثل آن بر معادل دیگراضافه اضافه‌کنند واین عمل **راتکمیل** گویند .

پس چون تکمیل‌کسر کنند درینمقام ده‌هزار وششصد مال وآن سه مرفوع مرتین بود ازمال(۴)معادل شود باینقدراشیا

و یو مط ز نط ح نو کط م

سادسه ویك مال مال (۵) زیراکه چون سه را در سه هزاروششصد ضرب‌کنند ده‌هزار وهشتصد شود وچون ارقام این اعداد درسه هزاروششصد ضرب کنند هررقمی بدومرتبه رفع شود . مثلا سه‌هزاروششصد ثامنه شصت سابعه است که یك سادسه باشد وعلی‌هذاالقیاس» .

«ودرهمان علم مبین است که اجناس که عبارت از عدد است وشی مال‌وکعب ومال مال وغیرذلك همه بریك‌نسبت‌اند نسبت واحدبا شی چون نسبت شی است بامال وچون نسبت مال به‌کعب وچون کعب بامال مال(۶)پس اگر اجناس را از هردوجانب یعنی ازهر دومتعادلین **منحط** گیرند در مقصود تفاوت نکند وچون چنین کنند یعنی یکمرتبه منحط گیرند درینمقام ۳ مرفوع مرتین ازاشیا معادل شود بااین عدد.

و یو مط ز نط ح نوکط م

سادسه ویك کعب (۸) . پس از تصرفات مذکور منتهی

---

(۱) یعنی :

$$۴x^۲ - \frac{x^۴}{۳۶۰۰} = x^۲ + x \times (\text{ثامنه}\alpha)$$

درمورد (ثامنهα) رجوع کنید به‌ذیل شمارهٔ(۴)از صفحهٔ ۵۰۲

(۲) یعنی ازمعادلهٔ فوق نتیجه می‌شود

$$۴x^۲ = x^۲ + x \times (\text{ثامنه}\alpha) + \frac{x^۴}{۳۶۰۰}$$

(۳) یعنی ازمعادلهٔ اخیرحاصل می‌شود

$$۳x^۲ = x \times (\text{ثامنه}\alpha) + \frac{x^۴}{۳۶۰۰}$$

(۴) یعنی $۱۰۸۰۰x^۲ = ۳ \times (۶۰)^۲x^۲$ طرف راست دردستگاه شصتگانی چنین نوشته می‌شود : $(۳،۰،۰)x^۲$

(۵) یعنی اگردوطرف معادلهٔ مذکوردر ذیل شمارهٔ (۳) همین صفحه را در۳۶۰۰ ضرب کنیم حاصل می‌شود :

$$۳ \times (۶۰)^۲x^۲ = (\text{سادسه}\alpha) \times x + x^۴$$

زیرا چون (ثامنهα) رادر۳۶۰۰ ضرب‌کنند ازجنس سادسه (یعنی$\frac{۱}{(۶۰)^۶}$) می‌شود وباید متوجه بود که:

$$(\text{سادسه}\alpha) = ۶ \times (۶۰)^۲ + ۱۶ \times (۶۰) + ۴۹ + \frac{۷۰}{۶۰} + \frac{۵۹}{(۶۰)^۲} + \frac{۸}{(۶۰)^۳} + \frac{۵۶}{(۶۰)^۴} + \frac{۲۹}{(۶۰)^۵} + \frac{۴۰}{(۶۰)^۶}$$

(۶) یعنی

$$\frac{۱}{x} = \frac{x}{x^۲} = \frac{x^۲}{x^۳} = \frac{x^۳}{x^۴}$$

(۷) یعنی اگر دوطرف معادلهٔ مذکور درذیل شمارهٔ (۵)را بهx تقسیم‌کنیم حاصل می‌شود :

$$۳ \times (۶۰)^۲x = (\text{سادسه}\alpha) + x^۳$$

شد این مسئله باشیاکه معادل است باعدد وکعب(۱)واین از شش مسئله مشهور(۲)آن علم نیست .لیکن اگرعدد وکعب بر عدد اشیا قسمت کنند خارج قسمت آن شی مجهول بود(۳)چه قسمت تجزیهٔ مقسوم است باحادمقسوم علیه پس خارج قسمت عدد وکعب برعدداشیانصیب واحد باشدازمقسوم علیه که اشیااست».

«وبجهت آنکه کعب داخل قسمت شود طریق بدیع اختراع فرموده(۴)وآن چنان است که اول بعضی عدد را برعدد اشیا قسمت کرده ومکعب خارج قسمت را باباقی عدد جمع کرده پس بعضی دیگررا ازعدد مجموع قسمت کرده برعدد اشیا ومکعب مجموع هردوخارج قسمت حاصل کرده ومکعب خارج قسمت اول راازین مکعب اسقاط کرده آنچه باقی مانده آن را باعدد مجموع جمع کرده پس بعضی دیگرازعدد مجموع ثانی برعدد اشیا قسمت کرده ومکعب مجموع خارجهای قسمت راحاصل کرده وفضل این مکعب اخیر را بر مکعب آن دوخارج قسمت بگرفته و آن را باباقی هم ازمجموع ثانی جمع کرده بعدازآن بعضی دیگراز مجموع ثالث قسمت کرده برعدداشیا برهمین منوال تاباخرعمل کرده تاازعدد مقسوم مقدارغیرمعتدبه باقی مانده پس عمل راقطع کرده»

«وچون درنسخهٔ اصل بعضی ازارقام را ازین عمل در جدول آورده وبعضی راترك کرده مااین عمل رانیز ازسر گرفته استخراج کردیم تا اگرناظرراشتباهی واقع شودرجوع بان نماید وجدول درصفحهٔ آینده تحریریافته وآنچه درجدول اخیرمسطور است خارج قسمت است اعنی :

ب ه لط کو کب کط کح لب ند لج

ثامنه . چون آن راتنصیف کنند حاصل آید .

ا ب مط مج یا ید مد یو کو یو

(پایان آنچه ازشرح بیرجندی اقتباس شد)

تفسیر رسالهٔ « وتروجیب » کاشانی بااصطلاحات وعلائم کنونی

ازشرحی که **بیرجندی** بررسالهٔ«وتروجیب» **کاشانی** نوشته است نتیجه می‌شودکه مطالب رسالهٔ مذکور رامی‌توان به دوجزوتقسیم کرد : یکی روش به‌دست آوردن معادلهٔ مسأله یعنی معادلهٔ :

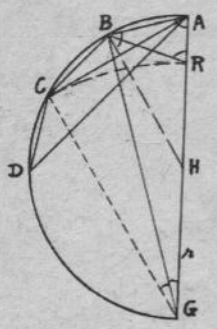
$$(۱) \qquad x = \frac{(\text{سادسه}\alpha) + x^{۳}}{۳ \times (۶۰)^{۲}}$$

که در آن مجهول x وتر قوس دو درجه ازدایره است(۵) و یکی دیگرچگونگی حل این معادله با روش **کاشانی** که قسمت مهم واساسی رسالهٔ مذکور است . وماانیك به طورخلاصه و بااصطلاحات کنونی قبلاچگونگی به‌دست آوردن معادلهٔ (۱) رابیان می‌کنیم وسپس به‌شرح وبیان روش **کاشانی** درحل آن می‌پردازیم (۶) ؛

الف ـ به دست‌آوردن معادلهٔ (۱)

نمیدایره‌ای به‌مرکز H وبه قطر AHG مساوی با ۲r رسم وفرض می‌کنیم که :

وتر روبه‌روی قوس درجه ≐ وتر CD = وتر BC = وتر AB



(البته‌روی شکل اندازه‌های حقیقی در نظر گرفته نشده است) بنایراین AD وترقوس ۶درجه است. **کاشانی** بدواً جیب ۳ درجه را از روی تفاضل جیب ۱۸ درجه وجیب ۱۵ درجه که قبلا آنها رامی‌دانسته به‌دست آورده وآن را در۲ضرب کرده ووترقوس ۶ درجه یعنی طول AD راسساوی باعدد زیردر دستگاه شمار شصتگانی حساب کرده است :

$$AD = (\text{ثامنه}\alpha) = ۶;۱۶,۴۹,۷,۵۹,۸,۵۶,۲۹,۴۰$$

ووتر روبروی قوس دو درجه یعنی $AB = BC = CD$ را

(۱) یعنی معادلهٔ مسأله به‌صورت $ax = b + x^{۳}$ درآمد .

(۲) مقصود معادلات ششگانهٔ جبری است (المسائل‌الست)

(۳) یعنی‌ازمعادلهٔ‌مذکوردرذیل شمارهٔ(۷)صفحهٔ‌قبل‌حاصل می‌شود: $x = \frac{(\text{سادسه}\alpha) + x^{۳}}{۳ \times (۶۰)^{۲}}$

(۴) این قسمت مهمترین قسمت رسالهٔ « وتروجیب » است وشرح آن رابااصطلاحات‌کنونی بعداً خواهیم دید

(۵) درمورد مقدار (سادسهα) رجوع کنید به‌ذیل شمارهٔ (۵)ازصفحهٔ‌قبل

(۶) ونیزرجوع کنید به **شوی** B : ذیل صفحات ۳۸۶تا۳۹۹ ـ **ویوشکویچ** G : صفحات ۳۲۱ تا ۳۲۳

را x یعنی مجهول مسأله گرفته است و برای تشکیل دادن معادلهٔ مسأله به‌طریق زیر عمل کرده :

از قضیهٔ بطلمیوس درچهارضلعی محاطی ABCD حاصل می‌شود .

$$AB.CD + BC.AD = AC.BD$$

وچون $AB = BC = CD$ و $AC = BD$ پس

$$\overline{AB}^2 + BC \times AD = \overline{AC}^2$$

یعنی $x^2 + x \times (\text{وترشش درجه}) = \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2$ (۲)

اکنون اگر ازقطر AG طول GR راسساوی با CG جدا وپاره خطهای BH و BR را رسم کنیم ازدومثلث متشابه ABH و ARB نتیجه می‌شود (۱) :

$$\frac{AR}{AB} = \frac{AB}{AH}$$

وازآنجا

$$\frac{\overline{AB}^2}{r} = AR$$

بنابراین اگرشعاع دایره را ۶۰ واحد بگیریم داریم :

$$GR = AH - AR = 120 - \frac{\overline{AB}^2}{60} \quad (3)$$

ازطرف دیگردرمثلث قائم‌الزاویهٔ ACG بادرنظر گرفتن اینکه $GC = GR$ ورابطهٔ (۳) داریم :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{GC}^2 = (120)^2 - (120 - \frac{\overline{AB}^2}{60})$$

یعنی

$$\overline{AC}^2 = 4\overline{AB}^2 - \frac{\overline{AB}^4}{3600} \quad (4)$$

اکنون اگردررابطهٔ(۴) مقدار $\overline{AC}^2$ را از رابطهٔ (۲) بگذاریم حاصل می‌شود:

$$x^2 + x \times (\text{وترشش درجه}) = 4x^2 - \frac{x^4}{3600}$$

که‌پس‌ازتقسیم کردن طرفین بر x وساده کردن حاصل می‌شود:

$$\text{وترشش درجه} = 3x - \frac{x^3}{3600} \quad (5)$$

که می‌توان آن راچنین نوشت :

$$3 \times (60)^2 x = (\text{وترشش درجه}) \times (60)^2 + x^3$$

اما

$$\alpha_{\text{سادسه}} = (60)^2 \times (\alpha_{\text{ثامنه}}) = (60)^2 \times (\text{وترشش درجه})$$

پس داریم:

$$3 \times (60)^2 x = (\alpha_{\text{سادسه}}) + x^3$$

واز آنجا

$$x = \frac{(\alpha_{\text{سادسه}}) + x^3}{3 \times (60)^2} \quad (1)$$

و این همان معادله‌ای است که می‌خواستیم(یعنی معادلهٔ مسأله)

تبصره ـ چون دراستدلال فوق هیچ جا از مقدار عددی $AB = x$ که وتر روبروی قوس دو درجه است استفاده نکردیم می‌توانیم به‌طورکلی x راوتررروبروی قوس 2α درجه و AD راکه در حالت خاص مساوی باوترقوس شش درجه اختیارشده است وتررروبروی قوس 6α درجه فرض کنیم . در این صورت بادرنظر گرفتن اینکه شعاع دایره را ۶۰ واحد گرفته‌ایم حاصل می‌شود :

$$AB = 2 \times 60 \sin a = 120 \sin a$$

و

$$AD = 2 \times 60 \sin 3a = 120 \sin 3a$$

وچون این مقادیر رادرمعادلهٔ(۵)قرار دهیم حاصل می‌شود:

$$120 \sin 3a = 3 \times 120 \sin a - \frac{(120 \sin a)^3}{3600}$$

ویاپس‌ازاختصار:

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

واین همان اتحاد مثلثاتی معروف است که $\sin 3a$ رابرحسب $\sin a$ به‌دست می‌دهد و **کاشانی** آن را درحالت‌خاص ثابت کرده وبه کاربرده است .

ب ـ روش کاشانی درحل معادلهٔ (۱)

اکنون می‌پردازیم به شرح روش بدیع وجالب توجهی که **کاشانی** برای حل معادلهٔ(۱)اختراع کرده (۲) وبیرجندی آن رانقل کرده است ومطالب را طوری بیان می‌کنیم که کسانی

---

(۱) این دومثلث هردومتساوی الساقین هستند زیرا AH و BH شعاعهای دایره می‌باشند و $BR = BC = AB$ (مساوی بودن BC با BR بادرنظر گرفتن اینکه BG نیمساز زاویهٔ AGC ومحور تقارن چهارضلعی BRGC است واضح می‌شود)وزوایای مجاور به قاعده ودرهردومثلث متساوی الساقین مذکور باهم‌مساویند .

(۲) این روش به‌وجوه مختلف درمنابع زیر موردبحث وبررسی قرار گرفته است : **سدیو A**: صفحات ۳۵۵و۳۵۶ـ **سدیو P** : صفحات ۸۲تا۸۳ (همان‌مطالب سدیو A است)ـ **وپکه D** :صفحات ۱۶۷تا۱۷۶(بحثی است‌مفصل‌ودرآن از سلسله‌ها استفاده شده) ـ **هانکل G** : صفحات ۲۸۹تا۲۹۳ـ **آبو**: صفحات ۲۴تا۲۹ (بهترین‌وروشنترین‌شرحی است که دراین باره نوشته شده ودر آن محاسبات دردستگاه شصتگانی صورت گرفته است) ـ **یوشکویچ G** : صفحات ۳۲۱ تا ۳۲۴

هم که بامحاسبهٔ در دستگاه شصتگانی آشنایی ندارنداز عهدهٔ فهم آن برآیند .

معادلهٔ

$$(1) \quad x = \frac{(\text{سادسه}\,\alpha) + x^{3}}{3 \times (60)^{2}}$$

را برای سهولت بیان به‌شکل کلی زیر می‌نویسیم :

$$(1)' \quad x = \frac{q + x^{3}}{p}$$

وفراموش نمی‌کنیم کـه درمسألهٔ مورد بحث اعـداد p و q دردستگاه شمارشصتگانی چنین نوشته می‌شوند :

$p = 3 \times (60)^{2}$ یعنی درواقع $p = 3,0,0$

و $q = 6,16,49;7,59,8,56,29,45$

یعنی دردستگاه اعشاری

$$q = 6 \times (60)^{2} + 16 \times (60) + 49 + \frac{7}{(60)} + \frac{59}{(60)^{2}} + \frac{8}{(60)^{3}} + \frac{56}{(60)^{4}} + \frac{29}{(60)^{5}} + \frac{45}{(60)^{6}}$$

اکنون فرض می‌کنیم که جواب معادلهٔ $(1)'$ دردستگـاه شصتگانی به‌صورت

$$x = a + b + c + \ldots$$

باشد که در آن a وb وc و... **ارزش نسبی** ارقام‌شصتگانی عدد xهستند(۱) . باید a وb وc و... را یکی پس‌از دیگری تعیین کنیم .

چون xوتر روبروی قوس ۲درجه است، مقدارآن‌نسبت به‌شعاع دایره که ۶۰ فرض می‌شودکوچك است و مکعب آن یعنی x^{3}بسیارکوچك‌است‌ومی‌توان درتقریب اول ازمکعب‌آن صرف‌نظر کردوx را تقریباًمساوی بـا $\frac{q}{p}$ گرفت.

پس نخستین مقدار تقریبی xکه آن‌را x_1 می‌نامیم‌عبارت است از :

$$x_1 = \frac{q}{p} \approx a$$

به‌این طریق معلوم‌می‌شودکه (۲):

$$(6) \quad x_1 = \frac{6 \times (60)^{2} + 16 \times (60) + 49 + \ldots}{3 \times (60)^{2}} = 2 + \frac{16 \times (60) + 49 + \ldots}{3 \times (60)^{2}}$$

یعنی ارزش نسبی نخستین رقم شصتگانی x مساوی با ۲ درجه (واحد) است .

اینك که نخستین رقـم شصتگانی x یعنی a را یافـتیم برای تعیین ارزش نسبی دومین رقم آن درطرف چپ معـادلهٔ $(1)'$ به‌جای x مقدار $a + b + \ldots$ راکه به حقیقت نزدیکتر است و درطرف راست آن مقدار تقریبی a را قرار می‌دهیم ، حاصل می‌شود :

$$a + b + \ldots = \frac{q + a^{3}}{p}$$

و از آنجا (۳) :

$$b + \ldots = \frac{q - ap + a^{3}}{p}$$

یعنی (۴) :

$$b + \ldots = \frac{[6 \times (60)^{2} + 16 \times (60) + 49 + \ldots]}{3 \times (60)^{2}} - \frac{[2 \times 3 \times (60)^{2}] + (2)^{3}}{3 \times (60)^{2}}$$

---

(۱) همانگونه‌که مثلا دردستگاه دهگانی عدد ۳۲/۴۷۶ را می‌توان چنین نوشت :

$$3 \times 10 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{7}{(10)^{2}} + \frac{6}{(10)^{3}}$$

وآن را به‌صورت $a + b + c + d + e$ نشان داد. دراینجا مثلا $c = \frac{4}{10}$ و $e = \frac{6}{(10)^{3}}$

(۲) توجه‌کنیدکه اگرصورت‌کسر x_1 را در دستگاه شصتگانی برمخرج آن تقسیم کنیم خارج قسمت ۲ وباقیمانده ، صورت آخرین‌کسر طرف راست رابطهٔ (۶) است.

(۳) پس b از تقسیم‌کردن $q - ap + a^{3}$ بر p معین می‌شود. باقیماندهٔ این تقسیم یعنی $(q - ap + a^{3}) - bp$ بعداً به‌کار خواهدآمد.

(۴) توجه‌کنیدکه اگر در دستگاه شصتگانی صورت‌کسر $b + \ldots$ را برمخرج‌آن تقسیم‌کنیم خارج قسمت ۵ دقیقه‌وباقیمانده صورت‌آخرین‌کسر طرف راست رابطهٔ (۷) است.

$$\approx \frac{16\times(60)+49+\dots}{3\times(60)^2} =$$

$$= \frac{5}{(60)} + \frac{1\times(60)+49+\dots}{3\times(60)^2}$$

یعنی ارزش نسبی دومین رقم شصتگانی x مساوی $\frac{5}{60}$ یعنی ۵ دقیقه است.

پس دومین مقدار تقریبی x که آن‌را x_2 می‌نامیم تعیین شد :

$$x_2 = a+b$$

برای تعیین ارزش نسبی سومین رقم شصتگانی x این باردرطرف‌چپ معادلهٔ (۱) به‌جای x مقدار $a+b+c+\dots$ را که به‌حقیقت نزدیکتراست ودرطرف راست‌آن مقدار تقریبی $a+b$ را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$a+b+c+\dots = \frac{q+(a+b)^3}{p}$$

و ازآنجا :

$$c+\dots = \frac{q+(a+b)^3-(a+b)p}{p}$$

که‌می‌توان‌آن راچنین‌نوشت(۱) :

$$c+\dots = \frac{(q-ap+a^3)-bp+[(a+b)^3-a^3]}{p}$$

علت اینکه مقدار $c+\dots$ را بـه‌شکل فوق درآوردیم این است‌که مقدار :

$$(q-ap+a^3)-bp$$

را که باقیماندهٔ تقسیم $q-ap+a^3$ بر b است قبلا حساب کرده‌ایم (رجوع شود به‌ذیل‌شمارهٔ۳و۴صفحهٔ‌قبل) و کافی است که $(a+b)^3-a^3$ را حساب‌کنیم و بـرآن بیفزاییم و سپس حاصل را بر p تقسیم‌کنیم تارقم c به‌دست آید. این‌بار پس‌از محاسبه معلوم مـی‌شودکه $c=\frac{39}{(60)^2}$

پس سومین مقـدارتقریبی x که‌آن‌را x_3 می‌نامیم تعیین شد :

$$x_3 = a+b+c$$

باهمین روش می‌توان ارزش نسبی سایر ارقام شصتگانی x را تا هرجا بخواهیم‌حساب کرد(۲) و به این ترتیب حاصل می‌شود :

$$x_1 = a$$

$$x_2 = \frac{q+a^3}{p} = \frac{q+(x_1)^3}{p}$$

$$x_3 = \frac{q+(a+b)^3}{p} = \frac{q+(x_2)^3}{p}$$

. . . . . .

. . . . . .

و بالاخره :

$$x_n = \frac{q+(x_{n-1})^3}{p}$$

وعمل را تا هراندازه‌که بخواهیم می‌توانیم ادامه‌دهیم. درهرعمل فقط باید مقدار تقریبی x را که درعمل ماقبل ازآن به دست آورده‌ایم به قوهٔ ۳ رسانده و یك عمل تقسیم انجام دهیم .

مـزیت روش **کاشانی** برروشهای دیگر محاسبهٔ جیب یك درجه که اصل آنها از بطلمیوس است این است که درآن روشها دقتی‌که می‌توان درمحاسبه به‌دست‌آورد محدوداست و محاسبات فوق‌العاده پیچیده و طولانی است(۳) درصورتـی‌که چنانکه‌گفتیم در روش **کاشانی** اولا درهرعمل فقط یك‌بارعمل به‌قوهٔ سه رساندن ویك بار عمل تقسیم لازم‌است و ثانیاً عمل را تاهردرجه از دقت‌که بخواهیم می‌توانیم ادامه دهیم.

کاشانی بـاروش فوق وتر روبروی قوس دودرجه را در دستگاه شصتگانی تارقم تا سعهٔ آن به‌شرح زیـر حساب کرده است :

= وتررروبروی قوس دودرجه

۲;۵،۲۹،۲۶،۲۲،۲۹،۲۸،۳۲،۵۲،۳۳

وآن را نصف‌کرده وجیب یك درجه را به‌دست‌آورده‌است:

جیب یك درجه = $60\sin 1^\circ$ =

۱;۲،۴۹،۴۳،۱۱،۱۴،۴۴،۱۶،۲۶،۱۷

ـ اگرمندار مذکور جیب یك درجـه را به ۶۰ تقسیم

(۱) ازاین رو قاعده‌ای‌که **بیرجندی** ازقول **کاشانی** نقل‌کرده‌است واضح می‌شود.

(۲) بیرجندی چگونگی همهٔ این محاسبات را درطی جدولی درشرح زیج الغ بیك (پشت صفحهٔ ۴۳) ثبت کرده‌است .

(۳) **آبو** : ص ۲۴

کنیم وحاصل را در دستگاه شمار دهگانی بنویسیم سینوس یك درجه با ۲۲ رقم اعشاری به‌دست می‌آید :

$\sin 1^\circ = 0,017\ 452\ 406\ 437\ 283\ 510\ 371\ 2$

که هفده رقم اعشاری آن با مقدار واقعی سینوس یك درجه موافق است .

درپایان این بخش عقیدهٔ **یوشکویچ** را دربارهٔ روش **کاشانی** درمحاسبهٔ جیب یك درجه ازکتاب تاریخ ریاضیات وی می‌آوریم (۱) : **« روش کاشانی در حل عددی معادلات جبری ازحیث شایستگی وبرازندگی مانند کارهای خیام در بارهٔ نظریهٔ کلی معادلات درجهٔ سوم سرآمد آثار ریاضیدانان دورهٔ اسلامی است».**

فهرست منابع ومآخذ

آبو

AABOE, Asgar: «Al-Kāshi's Iteration Method for the determination of $\sin 1^\circ$» Scripta Mathematica, vol. 20, 1954, pp24 - 29.

بیرجندی ، شرح زیج

شرح زیج الغ بیك : تألیف عبدالعلی‌بن محمدبن - حسین نظام‌الدین بیرجندی (متوفی به‌سال ۹۳۴ ه.ق.) نسخهٔ خطی شمارهٔ ۴۷۳ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران

رزنفیلدویوشکویچ

« جمشید غیاث‌الدین الکاشی ، **مفتاح‌الحساب** و **الرسالة المحیطیه** - الترجمه لبوریس روزنفیلد - التحریر لفلادیمیر سیفال و ادولف یوشکیفیتش - الشرح لادولف یوشکیفیتش وبوریس روزنفیلد - موسکو ۱۹۵۶ .

سدیو A

SEDILLOT, L. A. « De l'algèbre chez les Arabes » Journal asiatique, 5 me Série, tome II, 1853, pp, 323 - 356

SEDILLOT, L. A. : « Prolégomènes des tables astronomiques d' Oloug Beg », Paris, 1853

شوی B

SCHOY, Carl : « Beiträge zur arabischen Trigonometrie » Isis, vol. V 1922/3, pp. 364 - 399

فهرست مشهد

فهرست کتابخانهٔ آستان قدس رضوی ، تألیف عبدالعلی اکتایی ، جلد ۳، فصل ۱۷

فهرست مجلس

فهرست کتابخانهٔ مجلس شورای ملی

قاضی‌زاده

قاضی‌زادهٔ رومی : «تحریررساله فی‌استخراج‌جیب‌الدرجةالواحده » چاپ سال ۱۲۹۹ ه. ق.

قربانی ، نخستین مخترع

قربانی، ابوالقاسم : «نخستین مخترع کسرهای‌اعشاری استاد غیاث‌الدین جمشید کاشانی است » مجلهٔ سخن ، دورهٔ پنجم، شمارهٔ ۱۰،آبان ۱۳۳۳، صفحات ۷۴۷ تا ۷۵۳

قربانی ، تاریخ پی

قربانی ، ابوالقاسم : « تاریخ عدد پی درشرق‌وغرب» مجلهٔ سخن ، دورهٔ ششم ، شمارهٔ ۵ ، صفحات ۳۹۹تا۴۰۷

قربانی ، شرح احوال کاشانی

قربانی ، ابوالقاسم : « شرح احوال وآثارکاشانی » زیر چاپ

لوکی L

LUCKEY, Paul: « Der Lehrbrief über den Kreisumfang », Berlin, 1953

لوکی R

LUCKEY, Paul : « Die Rechenkunst

(۱) **یوشکویچ G** : ص ۳۲۳

bei Gamsid b. Mas'ud al-Kāsi», Wiesbaden 1951

محیط، غیاث‌الدین

محمد محیط طباطبائی: مقالهٔ «غیاث‌الدین جمشید کاشانی» مجلهٔ آموزش و پرورش، سال دهم، ۱۳۱۹، شمارهٔ ۳، صفحات ۱ تا ۸.

مصاحب، حکیم خیام

مصاحب، دکتر غلامحسین: «حکیم عمر خیام بعنوان عالم جبر» چاپ تهران، ۱۳۳۹ ه. ش.

مفتاح

مفتاح‌الحساب تألیف غیاث‌الدین جمشید کاشانی، چاپ سنگی تهران سال ۱۳۰۶ ه. ق.

میرم چلبی

میرم چلبی «دستورالعمل و تصحیح‌الجدول» نسخهٔ عکسی شمارهٔ ۲۳۴۶ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران.

وپکه D

WOEPCKE, F: «Discution de deux méthodes arabes pour determiner une valeur approchée de $\sin 1^\circ$» Journal de Math. pures et appliquées, tome 19, 1854, pp. 153 - 303

هانکل G

HANKEL, H: «Zur geschichte der Matematik» Leipzig, 1874.

یوشکویچ G

JUSCHKEWITSCH, A. P. «Geschichte der Mathematik im Mittelalter» Laipzig, 1964.

آموزش مفهوم پیوستگی (بقیه از صفحهٔ ۵۱۹)

معلوم است که خطای مطلق کمتر از ۰/۱ است زیر عدد $x = ۲/۲۱$ به‌مجاورت $(۲/۲۵ + ۰/۲۵ و ۲ - ۰/۲۵)$ تعلق دارد به‌ازاء $\varepsilon = ۰/۰۱$ درهمان نقطهٔ $x = ۲$ خواهیم داشت که، نامساوی $|x^۲ - ۲^۲| < ۰/۰۱$ به‌ازاء جمیع مقادیر x سازگار با $۲ - ۰/۰۰۲ < x < ۲ + ۰/۰۰۲$ صادق است (بااستفاده از جدولهای چهاررقمی). ازآنجاملاحظه می‌شود که به عنوان شعاع مجاورت مطلوب باید ۰/۰۰۲ رااختیار نمود. ودر حالت کلی داریم:

$$\delta = \min[۲ - \sqrt{۴ - \varepsilon} و \sqrt{۴ + \varepsilon} - ۲]$$

برای روشنگری تقابل ε و δ درتعریف پیوستگی توابع تمرتنات زیر کلا مفیداند.

۱ـ عبارت: تابع $f(x)$ درنقطهٔ x_0 معین است ودر این نقطهٔ پیوسته نیست، را به زبان ε و δ تنظیم کنید.

۲ـ فرض‌کنیم به‌ازاء $\varepsilon > ۰$ بتوان عدد نظیر $\delta > ۰$ را پیداکردبقسمی که $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ گرددا گر $|x - x_0| < \delta$ باشد، آیامی‌توان حکم کردکه تابع $f(x)$ به‌ازاء $x = x_0$ پیوسته است اگر:

الف) اعداد ε مجموعهٔ محدودی را تشکیل دهند.

ب) اعداد ε مجموعهٔ نامحدود کسرهای به صورت $\frac{1}{۲^K}$ راتشکیل دهند $K = ۱، ۲، ۳، \ldots\ldots$

ج) اعداد ε مجموعهٔ نا محدود کسرهای به صورت $\frac{K}{۱۰۰K - ۱}$ راتشکیل دهند $K = ۱، ۲، ۳، \ldots\ldots$

۳ـ فرض‌کنیم به‌ازاء هرعدد بقدر کفایت کوچك $\delta > ۰$ عدد $\varepsilon > ۰$ وجودداشته باشدبقسمی که اگر $|x - x_0| < \delta$ باشد در این صورت $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ گردد. آیا می‌توان از اینجا نتیجه گرفت‌که $f(x)$ درنقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است؟ نامساویهای مفروض کدام‌خاصیت $f(x)$ را بیان می‌کنند.

۴ـ فرض‌کنیم به ازاء هرعدد $\varepsilon > ۰$ عدد $\delta > ۰$ وجود داشته باشد بقسمی که اگر $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ باشد در این صورت $|x - x_0| < \delta$ گردد. آیا پیوستگی تابع $f(x)$ درنقطهٔ x_0 از اینجا نتیجه می‌شود؟

۵ـ فرض کنیم به ازاء هر $\delta > ۰$ عدد $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشد بقسمی که از $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ نتیجه شود: $|x - x_0| < \delta$. آیا ازاینجا پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 نتیجه می‌شود؟

تربیت معلمان ریاضی در کشورهای مختلف

ترجمهٔ : محمد حسین احمدی
دانشجوی دانشسرای عالی تهران

از مجلهٔ آمریکائی «معلم ریاضی»

تنظیم گزارشی کامل از چگونگی تربیت معلمان ریاضی در همهٔ کشورها کاری بسیار دشوار است . دراین مقاله نوع تربیت معلم ریاضی در چندکشور پیشرفته بررسی شده است . چون در هر کشور تربیت معلم بر اساس نظام آموزشی آنجا انجام می‌گیرد از این جهت در مورد هر کشور ابتدا نظام آموزشی آن به‌صورت خیلی مختصر معرفی می‌شود و بعد نوع تربیت معلم ریاضی در آن کشور بیان می‌گردد .

I - کشور فرانسه

تعلیم و تربیت درکشور فرانسه برای تمام افراد ازسن ۶ تا ۱۵ سالگی اجباری است . دراین کشوریك سازمان رسمی مشخص به‌نام «Ecole Maternelle» که شبیه کودکستانهای آمریکاست برای کودکان به سن ۲/۵ تا ۶ سال وجود دارد که حضور در آن اختیاری است . اما اغلب بچه‌های واجد شرایط در این کلاسهای آموزش‌مقدماتی حضوربهم می‌رسانند. مدارس ابتدایی شامل پنج کلاس ۱۱ ، ۱۰ ، ۹ ، ۸ ، ۷ و برای افراد به سنین ۶ تا ۱۱ سال می‌باشد و تحصیلات آن برای کلیهٔ دانش‌آموزان یکسان است . برنامهٔ ریاضیات آنها شامل حساب در سطحی نسبتاً بالا وتمرینات حل نشده‌می‌باشد مضافاً به اینکه اخیراً نظریات هندسی نیز به مواد ریاضیات آنها اضافه شده است .

تا زمانیکه محصلین آمادگی داشته باشند . آموزش تا سطحی فوق برنامه ادامه دارد . فی‌المثل تمام اعمال مربوط به‌ضرب درکلاس ۱۰ یعنی زمانی‌که دانش آموزان ۷ سال دارند به‌آنان آموخته می‌شود .

دورهٔ تحصیلی متوسطه به دو دورهٔ اول و دوم تقسیم می‌شودکه اولی چهار سال و دومی دو سال است محصلین‌پس از اتمام تحصیلات ابتدایی وارد دورهٔ اول دبیرستان می‌شوند که ویژهٔ دانش‌آموزان به سنهای از ۱۱ تا ۱۵ سال بوده و شامل کلاسهای ۶ و ۵ و ۴ و ۳ می‌باشد . دانش آموزانی که قصد ادامهٔ تحصیل در دانشگاه را داشته باشند این دوره از تحصیلات خود را در دبیرستانهای دولتی می گذرانند . اما اگرقصد ترك تحصیل وانتخاب شغلی را در سن پانزده سالگی داشته باشنددورهٔ مزبوررا درمدارس‌حرفه‌ای سپری می‌سازند. در خاتمهٔ این دوره یك امتحان رسمی به‌نام «Brevet» بعمل می‌آید و به قبول شدگان گواهینامهٔ رسمی به‌همین نام داده می‌شود.شرکت در امتحان مزبور اختیاری است اما برای کسانی‌که قصد ادامهٔ تحصیل در دبیرستانهای دولتی را داشته باشند و یا علاقمند به تحصیل در دانشسراها باشند داشتن گواهینامهٔ مزبور لازم است .

دورهٔ دوم دبیرستان همان دنبالهٔ دورهٔ اول است‌وشامل کلاسهای ۲ و ۱ و یك‌کلاس نهایی می‌باشد و ویژهٔ محصلینی است‌که ۱۵ تا ۱۸ سال‌دارند . در پایان‌کلاس یك (یا درپایان کلاس نهایی) دانش آموزان در امتحان رسمی برای اخذ گواهینامهٔ «Baccalaureat» شرکت می‌کنند و موادمربوط به رشته‌ای راکه انتخاب‌کرده‌اند امتحان می‌دهند .

رشته‌های‌تحصیلی در دبیرستانها عبارتند از : لاتین و یونانی ، فنی ، اقتصاد ، اجتماعی و دیگر رشته‌های جدید و علمی . محصلین رشته‌های فنی و علمی همه ساله و دانش - آموزان سایر رشته‌ها تنها برای یك سال به مطالعهٔ ریاضیات می‌پردازند .برای‌آنان‌که علاقمندبه گذراندن‌دوره‌های‌تخصصی هستند نوع دیگری از دبیرستانهای دولتی جهت کارهای‌عملی از قبیل منشی گری ، تکنیك ، تجارت و نظایر اینها وجود داردکه فارغ‌التحصیلان‌ازآنها به دریافت گواهینامهٔ مخصوص نائل می گردند .

برای ورودبه دانشگاه یا ادارات دولتی نیازبه گواهینامهٔ «باکالورآ» است .

تحصیلات دانشگاهی مدت سه سال طول می‌کشد .اگر این دورهٔ تحصیلی با موفقیت گذرانده شودبه فارغ‌التحصیلان درجهٔ لیسانس در یکی از رشته‌های ادبیات و هنر ، حقوق ، علوم و دیگر رشته‌ها داده می‌شود . این درجهٔ لیسانس‌تقریباً معادل‌درجهٔ .M.D فوق‌لیسانس دانشگاههای آمریکا است . ریاضیات اصلی در برنامهٔ این دوره ۵ واحد می‌باشد (۱) .

تربیت معلم

داوطلب‌آموزگاری دبستان‌در ۱۵ سالگی بعد ازخاتمهٔ دورهٔاول دبیرستان‌وگذراندن‌امتحان «Brevet» به‌دانشسرای مقدماتی موسوم به «Ecole normale» وارد می‌شود ودر آنجا مدت سه سال‌به تحصیل می‌پردازد. برنامهٔ این‌دانشسراها همسطح برنامهٔ دورهٔ دوم دبیرستانهای دولتی است اما فاقد آن قسمت از ریاضیاتی است‌که ضروری نمی‌باشد . بعد از آن معلم داوطلب و علاقمند دوسال‌به آموزش‌عملی در زمینه‌های روانشناسی ، تاریخ فرهنگ، روش تدریس ، روشهای آموزش مشاهده و تمرین معلمی در یك مدرسه می‌پردازد . اگردراین مراحل در مورد بیش از نصف آنچه‌که ازاو خواسته شده‌است توفیق‌یابد آنگاه او این دوره را بطور رضایت بخشی گذرانده است و در نتیجه به دریافت گواهینامهٔ مخصوص نائل می‌شود و از این پس کار خود راکه تدریس در مدارس ابتدایی است از ۲۰ سالگی آغاز می‌کند . ناگفته نماندکه اکثریت قریب به اتفاق این افراد گذشته ازمرور ریاضیات‌مقدماتی‌که باید تدریس نمایند ریاضیاتی‌که می‌خوانند مقدمات جبر و قدری از هندسهٔ فضائی است .

فارغ‌التحصیل دبیرستان دولتی‌که «باکالورآ» داشته باشد می‌تواند با گذراندن دورهٔ دانشسرادر یك سطح‌پیشرفته و بعد از بدست آوردن واحد عملی (ویا بدون این واحد) شغل آموزگاری را درکمی بیش از ۱۸ سال تحت نظارت بازرسی ویژه آغاز کند و پس‌از ۶ سال به اخذ گواهینامهٔ ویژه (در امر تدریس) نائل گردد . برای تدریس در دورهٔاول دبیرستان معلم داوطلب باید فارغ‌التحصیل دبیرستان دولتی باشد و بعد به حکم ضرورت باید به مدت سه سال در یك دانشگاه جهت اخذ درجهٔ لیسانس در رشتهٔ ریاضیات به تحصیل بپردازد و این رشته را با مطالعهٔ یك سالهٔ دیگر در زمینه‌های تمرین دبیری ، روانشناسی ، فلسفه و تاریخ فرهنگ‌و روش تدریس دنبال نمایدکه درصورت توفیق به دریافت گواهینامهٔ استعداد و صلاحیت در امر تدریس ریاضیات دورهٔ اول دبیرستان مفتخر می‌گردد .

برای تدریس در دورهٔ دوم دبیرستان دولتی معلمین داوطلب باید یکی از سخت‌ترین برنامه‌های آموزشی موجود را انتخاب‌کنند .

آنان بعد از اخذ درجهٔ باکالورآ یك دوره تحصیلات مقدماتی را درکلاسهای مقدماتی و عالی می‌گذرانند و آنگاه جهت ورود به دوره‌های تحصیلی دانشگاهی درکنکوری‌که‌به همین منظور برگزار می‌شود شرکت می‌کنند . پس از اتمام‌این دورهٔ تحصیلی و اخذ مدرك لیسانس درکنکوری دیگر به‌خاطر ورود به دانشسرای عالی :

(Ecole Normale Superieure) شرکت می‌کنند. کلیهٔ دانشجویان پذیرفته شدهٔ در این مدرسه مشمول دریافت تمام مخارج اضافی یك زندگی فوق‌العاده هستند . در پایان دومین سال تحصیلی از دانشجویان یك امتحان نهائی موسوم به آگرگاسیون (Agregation) بعمل می‌آید . امتحان مذکور مشتمل بر دو قسمت شفاهی وکتبی است . امتحان شفاهی در زمینهٔ آموزش عملی و امتحان‌کتبی در ریاضیات محض‌است امتحان اخیرالذکر در سطح امتحان دواطلبان گواهینامهٔ Ph.D دانشگاههای آمریکائی است . تعداد داوطلبانی‌که در این امتحان پذیرفته می‌شوندبا تعداد جاهایی‌که درسال‌تحصیلی آینده باید پر شودکنترل می‌شود . آنان‌که این امتحان را با موفقیت می‌گذرانند به درجهٔ :

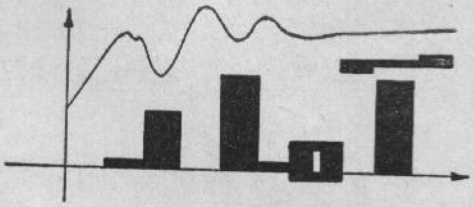
Eleves Anciens de Normales Superieures

که عالیترین درجهٔ تخصص (بجز Ph.D) می‌باشد رسیده و مقام دائمی معلمی را خواهند داشت .

اما به‌علت‌کمبود زیاده از حد معلم و فقدان افراد صلاحیتدار واجد شرایط در امر تدریس ، اکثر معلمان مدارس ابتدایی یك‌یا حد اکثر دو مواد ریاضی دورهٔ اول دبیرستان‌را تدریس می‌کنندواکنون اغلب معلمان دورهٔ اخیرالذکر پیشنهاد کرده‌اندکه بدون هیچ مطالعه و تحصیل اضافی به تدریس در دورهٔ دوم دبیرستان بپردازند .

۱ـ تلخیص مطالعات و بررسیهای وسیعی‌که در زمینهٔ چگونگی واحد های درسی شده درجزوه‌ای تحت عنوان«گزارش دانشجویان اروپائی» گردآوری شده‌که حصول این جزوات از دپارتمان ریاضی هر یك از دانشگاههای اروپائی به‌سهولت امکان پذیر است .

مقدمات



Initiation a' la
STATISTIQUE
par: M. HAGÈGE

ترجمهٔ : ع . مصحفی

(دنباله از شمارهٔ قبل)

۵ ـ محاسبهٔ عملی همپراش

فرمولهای مربوط به محاسبهٔ عملی پراشهای X و Y شناخته شد . برای محاسبهٔ r ، a و a′ محاسبهٔ همپراش نیز لازم می‌باشد . با توجه به فرمولهایی که قبلا بدست آورده‌ایم خواهیم داشت :

$$cov(X و Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} X_i Y_i n_{ij}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(x_i - x_\circ)(y_j - y_\circ) - (x_\circ - \bar{x})(y_\circ - \bar{y})$$

($x_\circ$ و $y_\circ$ میانگینهای موقت می‌باشند)

با انتخاب $x_\circ = \circ$ و $y_\circ = \circ$ خواهیم داشت :

$$cov(X و Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i y_i n_{ij} - \bar{x}\,\bar{y}$$

چنانچه تغییر مبنا و تغییر واحد :

$x = x_\circ + hu$ و $y = y_\circ + kv$

را انجام دهیم خواهیم داشت :

$$cov(X و Y) = hk\,cov(U و V)$$

٦ـ تتمه

الف ـ ضریب همبستگی رتبه‌ها

۱ـ گاهی پیش می‌آید که دو مشخصهٔ مشهود روی N فرد از یك جامعه اندازه پذیر نیستند ، اما بقسمی می‌باشند که می‌توان افراد را برحسب هریك از آنهارده بندی کرد ، به‌این ترتیب که N فرد یك‌دفعه برحسب مشخصهٔ اول ودفعهٔ دیگر برحسب مشخصهٔ دوم رده بندی می‌شوند :

اولین فرد در رده بندی اول رتبهٔ x_1 و در رده بندی دوم رتبهٔ y_1 را دارا می‌باشد ، وغیره .می‌توان نتایج را در یك جدول خلاصه کرد .

شمارهٔ ترتیب‌فرد	۱	۲	۳	...	i	...	N
رده بندی اول	x_1	x_2			x_i		x_N
رده بندی دوم	y_1	y_2			y_i		x_N

باید ازروی جدول ، همبستگی بین دو مشخصه معلوم شود. برای مثال فرض کنیم که در یك مسابقهٔ رادیوفونیك هشت خواننده شرکت داشته باشند که توسط دوهیئت ژوری مختلف به ترتیب زیر رتبه بدست آورده باشند .

شمارهٔ خواننده	۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷	۸
رتبه توسط ژوری اول	۵	۳	۱	٦	۴	۲	۷	۸
رتبه توسط ژوری دوم	۴	۱	۲	۷	۵	۳	۸	٦
تفاوت رتبه‌ها $x_i - y_i$	+۱	+۲	−۱	−۱	−۱	−۱	−۱	+۲

خوانندهٔ اول توسط ژوری اول در رتبهٔ ۵ و توسط ژوری دوم در رتبهٔ ۴ قرارگرفته است ...

ضریب همبستگی خطی رشتهٔ (x_i و y_i) را ضریب همبستگی رتبه‌ها می‌نامیم :

$$r = \frac{cov(x \text{ و } y)}{\sqrt{var(x).var(y)}}$$

با توجه به اینکه مجموعهٔ (x_1 و x_2 و ... و x_N) و مجموعهٔ (y_1 و y_2 و ... و y_N) هر دو با مجموعهٔ (۱ و ۲ و ... و N) قابل انطباق‌اند خواهیم دیدکه ضریب همبستگی مزبور معادل است با :

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2}{N(N^2-1)}$$

در مورد مثال بالا داریم :

$$r = 1 - \frac{6(1^2+2^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+2^2)}{8(8^2-1)} =$$

$$= \frac{5}{6} = 0/83$$

که همبستگی خوبی را بین دو رده بندی نشان می‌دهد .

۲ـ اتحادهای زیر را در نظر می‌گیریم :

$$(1) \quad 1+2+3+\ldots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$(2) \quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$(3) \quad ab = \frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2}$$

از اتحاد (۱) داریم :

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{N}(1+2+\ldots+N) = \frac{N+1}{2}$$

از اتحاد (۲) داریم :

$$var(X) = var(Y) = \frac{1}{N}(1^2+2^2+\ldots+N^2) - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{N^2-1}{12}$$

از (۳) داریم :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2$$

$$cov(X \text{ و } Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}$$

$$= \frac{(N+1)(2N+1)}{12} + \frac{(N+1)(2N+1)}{12} -$$

$$- \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2 - \frac{(N+1)^2}{4}$$

$$= \frac{N^2-1}{12} - \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2$$

و نتیجه خواهد شد :

$$r = \frac{\frac{N^2-1}{12} - \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2}{\frac{N^2-1}{12}}$$

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2}{N(N^2-1)}$$

ب ـ ضریب همپراش

برای مقایسهٔ دو مشخصهٔ اقتصادی X و Y ارزشهای x_1 و x_2 و... و x_N مربوط به اولین مشخصه و ارزشهای y_1 و y_2 و... و y_N مربوط به‌دومین‌مشخصه رادرتاریخهای متوالی t_1 و t_2 و ... و t_N در نظر می‌گیرند . وضع نقاط (x_i و y_i) در روی یك نمودار وجود احتمالی همبستگی بین دو مشخصه را نشان می‌دهد . در حالی‌که این همبستگی‌وجود داشته باشد آنرا **همپراش** دو رشتهٔ زمانی می‌نامند و دراین حال ضریب‌همبستگی‌خطی،**ضریب همپراش** نامیده‌می شود.

یادآوری‌می‌کنیم‌که در مقایسهٔ‌دورشتهٔ‌زمانی‌باید عاقلانه رفتارکرد : از مقایسهٔ بین دو مشخصهٔ اقتصادی‌مگردرموردی که بین آنها ارتباطی موجه وجود داشته باشدباید پرهیزکرد.

از ل . ت . ژوکوا (مسکو)
ترجمه : باقرامامی

بخشی از کتاب : مسائل دبیرستانهای ریاضی (شوروی)

آموزش مفهوم پیوستگی وحد توابع در کلاس نهم

پیوستگی تابع در یك نقطه

نظرات مقدماتی

تقریبا درتمام‌درسهای‌آنالیز ریاضی‌ترتیب‌طرح«پیوستگی توابع» و«حدتوابع» چنین است :

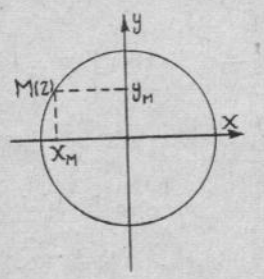
ابتدا خوانندگان بامفهوم حد تابع آشنا می‌شوند، جمیع قضایای مربوط به حدرابررسی می‌کنند سپس مفهوم پیوستگی تابع دریك نقطه را پیش‌می‌کشند و بعدآنرا بامفهوم معلوم حد تابع مربوط می‌سازند .

تجربه‌نشان می‌دهدکه می‌توان این ترتیب را باموفقیت تغییر داد .

ما ابتدا مفهوم پیوستگی توابع وسپس مفهوم حد توابع را مطرح می‌کنیم ، ضمنا معلوم شده است که دانش آموزان بامفاهیم جدید برای آموزش (توابع مثلثاتی) خیلی بهترآشنا می‌شوند .

مقدمتا چند کلمه‌ای راجع به توابع مثلثاتی صحبت می‌داریم. ابتدا **دایرهٔ عددی** درنظر گرفته می‌شود یعنی محورعددی‌که به شکل دایرهٔ به شعاع واحد پیچ می‌خورد بقسمی‌که‌نیم قطر مثبت در امتداد مثبت (جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) ونیم قطرمنفی درجهت منفی پیچ‌می‌خورد.

محور عددی بادایرهٔ عددی قابل مقایسه‌است. ملاحظه می‌شودکه به‌هرعدد حقیقی فقط یك نقطه ازدایرهٔ عددی نظیر است (همانطورکه برای محورعددی بود) فقط هرنقطهٔ دایره عددی به‌عکس محورعددی نظیر یك مجموعهٔ بینهایت اعداد حقیقی است . (مختصات دایره‌ای این نقطه)که تفاوت اعداد این مجموعه مضرب2πاست. بعد دایرهٔعددی را دردستگاه مختصات مستقیم‌الخط xoy جامی‌دهیم‌بقسمی‌که‌مبدأ مختصات برمرکزدایره منطبق گردد . جهت مثبت محورطولها دایرهٔ عددی را درنقطه‌ای که مختصات دایره‌ای آن برابر$2k\pi$است قطع می‌کند (kعدد صحیح است) . نقطهٔ M(z) از دایره (Z مختصات دایره‌ای نقطه‌است) در دستگاه مستقیم‌الخط xoy دارای مختصاتx_Mوy_M است (شکل۱)که آنها رابه‌ترتیب کسینوس‌وسینوس‌عدد حقیقی‌Zمی‌نامیم یعنی‌بنابه‌تعریف



$$\cos Z = x_M \text{ و } \sin Z = y_M$$

وبازبنابه‌تعریف

$$tgZ = \frac{\sin Z}{\cos Z} \text{ و } cotgZ = \frac{\cos Z}{\sin Z}$$

معمولا درس اول مثلثات به‌تعمیم مفاهیم زاویه، اندازهٔ رادیان وارتباط آن بادرجه وغیره صرف می‌شود . از نظرما برای این کارعجله‌لازم نیست‌بهتراست‌پس ازطرح دایرهٔ عددی یکباره آموزش توابع مثلثاتی باآوند (آرگومان) عددی را شروع نمود . دردرسهای اولیه‌نباید صحبت‌از«سینوس زاویه» کتابهای درسی باشد. کتابها شامل تعدادکافی تمرینات مربوط به توابع مثلثاتی باآوندهای عددی می‌باشند که ازهمان ابتدا باید آنهارا محدود نمود .

وقتی‌که شاگردان باتوابع جدید انس می‌گیرندباترتیب معمولی‌روابط بین‌آنها مطابق با معلومات کلاسی راجع به «توابع‌مثلثاتی زوایای حاده»به نوع عمومی‌تری‌آشنامی‌شوند. ازتعریف‌توابع‌مثلثاتی، خواص‌آنها:یك‌نواختی، تناوب، زوج‌و فرد بودن به‌سادگی نتیجه می‌شود.درنتیجهٔ خواص حاصل وبا استفادهٔ ازمقادیر توابع مثلثاتی به‌ازاء بعضی از مقاد یرآوند

$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right.$ وغیره) برای رسم نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \cos x$ کوشش می‌شود (به‌ازاء مقیاس واحدی که روی هردو محور برده‌می‌شودطول‌هرنیم‌موج تقریباًدوبرابرارتفاع آنست.)

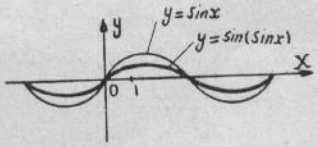
به عنوان تمرینات تکمیلی ، رسم نمودارهای زیر مفید است (شکلهای ۲ و ۴ و ۵) :

I- $y = \sin(\sin x)$ ، $y = \cos(tg x)$ ، $y = tg x^2$

اگردانش‌آموزان آموخته باشندکه به $\sin z$ به نظریک تابع باآوند عددی نگاه‌کنند معادله‌ای به‌شکل $y = \sin(\sin x)$ برای آنها ایجاد تعجب نخواهد نمود .

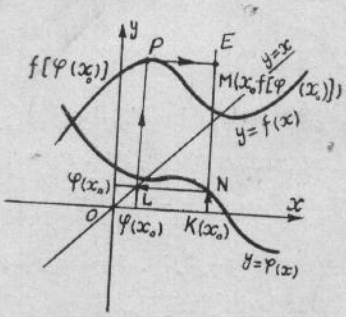
طبیعی است‌که رسم این نمودارهانه «باروش نقطه‌ای» بلکه مستلزم درنظر گرفتن فواصل یکنواختی است .

مثلا تابع $y = \sin\sin x$ به‌ازاء مقادیرصعودی x از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ ، از $\sin\sin 0 = 0$ تا $\sin\sin\frac{\pi}{2} = \sin 1 \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ترقی می‌کندواگرازآن‌پس x از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ تغییر نماید دراین صورت $y = \sin\sin x$ از $\sin 1$ تا $\sin(-1)$ تنزل وبرهمان اساس وقتی‌که x از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π تغییرمی‌نماید تا $\sin 0$ ترقی می‌کند و بعد از آن همه چیز تکراری است . تابع $\sin\sin x$ متناوب‌ودورهٔ‌تناوب‌آن 2π است در این جا می‌توان حتی راجع به‌رسم نمودار تابع تابع صحبت‌کرد .



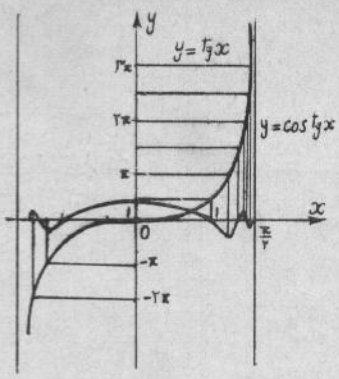
شکل ۲

$y = f[\varphi(x)]$ به شرطی که نمودار های $y = f(x)$ و $y = \varphi(x)$ را داشته باشیم وبخصوص اگر مقیاس انتخابی محورهای ox و oy برابر باشند در این صورت برای تعیین نقطهٔ $M(x_0 f[\varphi(x)])$ از نمودار $y = f[\varphi(x)]$ کافی است ترسیم زیررا اجراکنیم : (شکل ۵)



شکل ۳

عمود KE را ازنقطهٔ x_0 برمحور ox اخراج می‌کنیم تادرنقطهٔ N نمودار $y = \varphi(x)$ را قطع نماید ، NL راموازی ox می‌کشیم‌تادرL نیمسازاول راقطع کند، سپس LP را موازی oy رسم‌می‌کنیم‌که در آنجا P نقطه‌ای از نمودار $f(x)$ است ، عرض‌آن $y = f[\varphi(x_0)]$ همان‌عرض‌نقطهٔ‌مطلوب $M(x_0 f[\varphi(x)])$ است.



شکل ۴

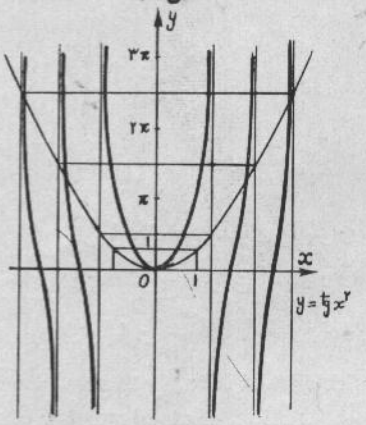
وخود نقطهٔ M ازتقاطع خط PM موازی محورox با عمود KE برمحور ox بدست می‌آید.

II- $y = tg x . cotg x$

$y = tg x \cos x$

$y = \sqrt{\sin^2 x}$

این نمودارهارا با نموداری توابع $y = 1$ و $y = \sin x$ مقایسه کنید .



شکل ۵

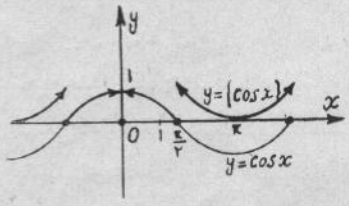
III- $y = \cos 3x$ ؛ $y = \frac{1}{2}\sin x$

$y = \sin(x-1)^2$ ؛ $y = \frac{\pi}{3} + tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

این نمودارها به‌ترتیب زیر به راحتی رسم می‌شوند (محض مثال تابع $y = \cos 3x$ را اختیار می‌کنیم) فرض کنیم نمودار تابع $y = \cos x$ را داشته باشیم (شکل۶)

نقطهٔ $M(x_0 \cos 3x_0)$ راچگونه‌باید پیداکرد؟

روی محور ox نقطهٔ L به‌طول $3x_0$ را نشان می‌کنیم LK را ازاین نقطه برox عمود می‌کنیم. K نقطهٔ تقاطع



شکل ۶

این عمود با نمودار $y = \cos x$ است یعنی عرض نقطهٔ K برابر $y_K = \cos 3x_0$ است این مقدارعرض رابه‌نقطهٔ x_0 نقل‌می‌کنیم.

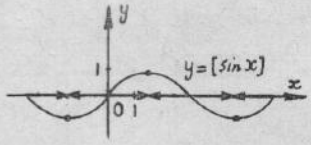
بدین ترتیب نمودار $y = \cos 3x$ ازنمودار $y = \cos x$ باسه‌بار فشرده‌کردن نمودار اخیر در طول محور ox بدست می‌آید .

به‌همین‌ترتیب نمودارهای توابع $f(kx)$ و $f(x+a)$ را به‌کمك نمودار تابع $f(x)$ به‌سادگی می‌توان توضیح داد .

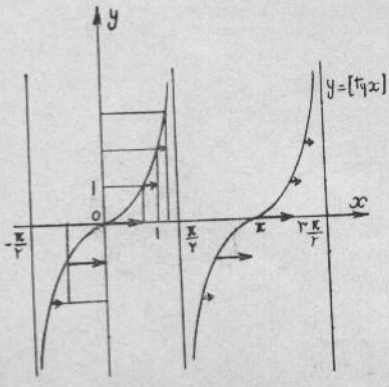
IV- $y=[\sin x]$ ، $y=[tg x]$ ، $y=\{\cos x\}$ و $y=\{cotg x\}$

علامت های $[a]$ و $\{a\}$ به ترتیب قسمتهای صحیح و کسری عدد a رانمایش می‌دهند .

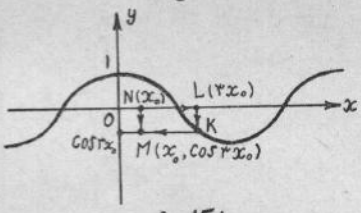
نمودار این چهارتابع رادرشکل‌های ۷ تا ۱۰ نمایش داده‌ایم.



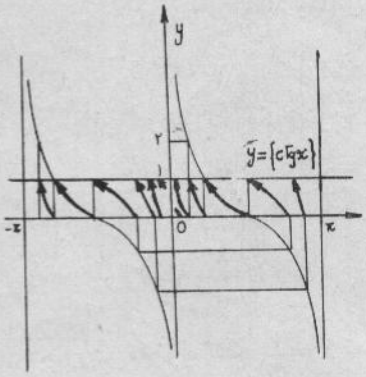
شکل ۷



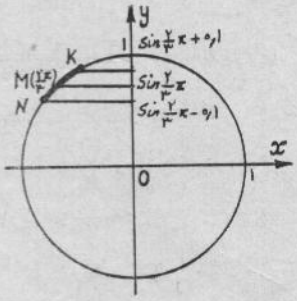
شکل ۸



شکل ۹



شکل ۱۰



شکل ۱۱

§ ۲- توابع پیوسته دریك نقطه- تعریف.

مفهوم پیوستگی توابع از میان سؤالهایی از نوع : نقاط $M(Z)$ از دایرهٔ عددی را معین کنید که به‌ازاء آنها

$\sin Z < \frac{1}{2}$ ،

$|\cos Z| < \frac{1}{3}$ ،

$|tg x - 1| < \frac{3}{2}$ ،

$|\sin Z - \sin\frac{2\pi}{3}| < 0/1$

باشدآهسته‌آهسته‌بروز می‌کند .

در شکل ۱۱ حل نامساوی‌آخری نمایش داده شده است .

جمیع نقاط کمان KN با نا مساوی

$|\sin Z - \sin\frac{2\pi}{3}| < 0/1$

سازگارند .

ملاحظه می‌شود که‌کمان KN نسبت به نقطهٔ $\frac{2\pi}{3}$ متقارن نیست بلکه ازدوکمان KM و MN تشکل‌شده‌است. اگرطول قوس کوچکتر را با α نمایش دهیم می‌توانیم بگوئیم که به ازاء جمیع نقاط کمان

$(\frac{2}{3}\pi - \alpha و \frac{2}{3}\pi + \alpha)$

نامساوی

$|\sin Z - \sin\frac{2\pi}{3}| < 0/1$

صادق است .

در حالتهایی که سمت راست نامساوی اعداد ۰/۰۱ و ۰/۰۰۱ وغیره باشند ترسیم مشابهی را می‌توان بعمل‌آورد.

بدین ترتیب به‌ازاءهرعدد مثبت دلخواه‌ع کمانی‌ازگونهٔ $(\frac{2}{3}\pi - \alpha و \frac{2}{3}\pi + \alpha)$ را روی دایرهٔ عددی می‌توان نمایش دادکه به‌ازاء جمیع نقاط آن، تفاضل مقدار $\sin Z$ با $\sin\frac{2}{3}\pi$ کمتر از ε باشد واین :

عبارت از تعریف پیوستگی تابع در یك نقطه است

که برای تابع $y=\sin Z$ درنقطهٔ $Z_0=\frac{2}{3}\pi$ تنظیم شده است .

ازنظر متدیك پیوستگی تابع را دریك نقطه به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم :

تابع $f(x)$ درنقطهٔ $x=x_0$ پیوسته است اگر: ۱) $f(x)$ دراین نقطه معین باشد. ۲) به ازاء عدد دلخواه $\varepsilon>0$ چنان مجاورت نقطهٔ x_0 وجود داشته باشد $(x_0-\alpha و x_0+\alpha)$ که به‌ازاء جمیع نقاط آن $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ باشد.

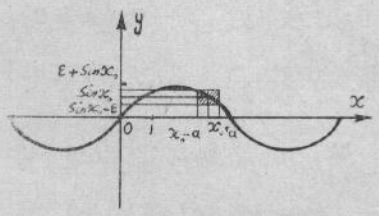
شرط۱) زیادی است وآنرا از شرط ۲) می‌توان نتیجه گرفت (اگرتابع درنقطهٔ x_0 پیوسته باشد) ولیکن این تقسیم‌بندی مفید است زیرا باآن ، شرط لازم وغیرکافی راخاطرنشان می‌کنیم (بایست که شرط ۲ نیزبرآورده شود) و آخری غالباً فراموش می‌شود ومی گویندکه مثلا تابع $f(x)$ پیوسته است چونکه درهمه جا معین است . شرط۲ را به صورت قبلی از ابتدا باید معلوم نمود . بهتراست حتی یکباره به دانش‌آموزان آموخت‌که: به‌ازاء عدد دلخواه $\varepsilon>0$ عددمثبتی مانند δ وجود داردکه‌به‌ازاء جمیع مقادیرx که تفاضلشان با x_0 کمترازه δ باشد تفاوت مقادیر تابع از $f(x_0)$ کمترازه ε گردد . وبعدها : به‌ازاء عدد دلخواه $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد بقسمی که از نا مساوی $|x-x_0|<\delta$ نامساوی $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ نتیجه شود .

پیوستگی تابع $y=\cos Z$ به‌ازاء جمیع نقاط Z وتابع $y=tg Z$ (یا $y=cotg Z$) به‌ازاءجمیع نقاط‌سوای $Z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (یا $Z=(2k+1)\pi$) که درآنجا k عدد صحیحی است مشابه ترسیم واقعی‌قبلی‌مجاورت نقطهٔ Z_0 اثبات می‌شودکه به‌ازاءآن نامساویهای نظیرباید سازگار باشند .

تعبیر هندسی پیوستگی تابع $y=\sin x$ چگونه است ؟

ازنقاط $\sin x_0+\varepsilon$ و $\sin x_0-\varepsilon$ واقع برمحور oy دوخط

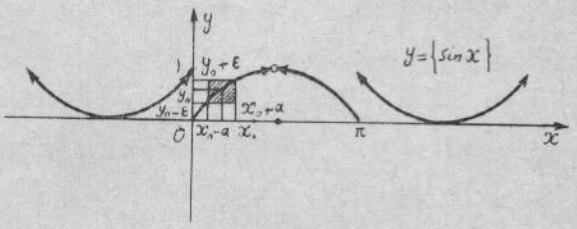
موازی محور ox رسم می‌کنیم . درآن صورت روی محور طولها مجاورت x_0 بقسمی پیدا می‌شود که به‌ازاءجمیع مقادیر آن قسمت نظیر نمودار $y = \sin x$ درداخل خانهٔ شطرنجی حاصل قرار می‌گیرد (شکل ۱۲) .



شکل ۱۲

اگر تابع $y = \{\sin x\}$ را درنظر بگیریم ، در این صورت‌ممکن است مشاهده کردکه :

در هر نقطهٔ $x \neq k\pi$ و $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ به‌ازاءعدد دلخواه $\varepsilon > 0$ می‌توان مجاورت δ رابقسمی پیداکرد که تمامی قسمت نظیر نمودار $y = \{\sin x\}$ در داخل‌مستطیل به‌ابعاد 2ε و 2δ قرار گیرد (شکل۱۳) درنقاط $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مقادیر تابع برابر صفرو در نقاط «همسایهٔ» آن مقادیر تابع نزدیک ۱ است یعنی ازمقادیر



شکل ۱۳

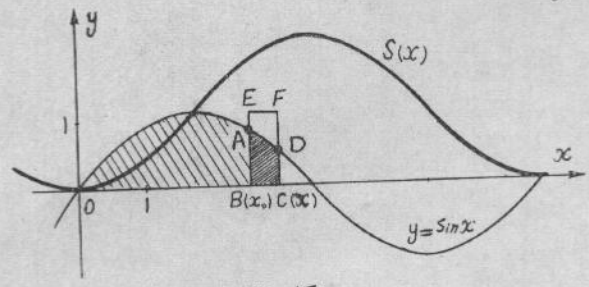
تابع درهمان نقاط به‌اندازهٔ تقریبی ۱ فرق دارند ودر نتیجه به ازاءمقادیر کوچک ε پیداکردن مجاورت نقطهٔ $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ که درآنجا $|\{\sin x\} - \{\sin x_0\}| < \varepsilon$ باشد غیرممکن است. تابع دراین نقاط گسسته (منفصل) است . وضع مشابهی در نقاط $x = k\pi$ وجود دارد .

مثال دیگر- نمودار $y = \sin x$ را رسم‌کنیم . حال به هرمقدار حقیقی x_0 عدد $S(x_0)$ رانظیر قرارمی‌دهیم که برابر مساحت شکل منحنی‌الخط OAB است (شکل ۱۴) (فرض می‌شودکه دانش آموزان نوعی تصورازمساحت را دارند)اگر شکل منحنی‌الخط از قسمتهائی تشکل شده که در بالا وپائین محورطولها قرار داشته باشند دراین صورت مقدار نظیر $S(x)$ مجموع جبری مساحتهای این‌قسمتها است .

برای رسم نمودار تابع $S(x)$ توصیه می‌شود که کاغذ میلیمتری انتخاب شود تا مقادیر تقریبی $S(x)$ مستقیما ازروی تعداد میلیمتر مربعهای تشکیل دهندهٔ شکل منحنی‌الخطمحاسبه گردد . برای توضیح بیشتر پیوستگی تابع $S(x)$ درنقطهٔ x_0 مقدار مطلق تفاضل $|S(x) - S(x_0)|$ رادرنظرمی گیریم.واضح است‌که این مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخط ABCD است‌که از مساحت مستطیل BEFC کمتراست .

وچون :

$$|S(x) - S(x_0)| = \text{مساحت } ABCD < \text{مساحت } BEFD = 1 \times |x - x_0|$$



شکل ۱۴

حال اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد در این صورت معلوم است که برای سازگار بودن نامساوی $|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$ کافی است‌که به‌عنوان شعاع‌مجاورت نقطهٔ x_0 عدد ε اختیار گردد. بدین ترتیب تابع $S(x)$ درهرنقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است .

تابع زیرراکه به**تابع دیریکله** (Diriclet) موسوم است درنظرمی گیریم :

$$D(x) = \begin{cases} 1 & : \text{(به‌ازاء مقادیرمنطق } x) \\ 0 & : \text{(به ازاء مقادیراصم } x) \end{cases}$$

فوراً وبدون هیچگونه‌تردید دانش‌آموزان‌اظهارمی‌دارند که این تابع‌درهرنقطه گسسته است . منتها بحثهائی ازاین قبیل ممکن است آنها را گمراه نماید .

مثلا نقطهٔ $x = \frac{1}{2}$ رابا $\varepsilon = 0/01$ درنظرمی گیریم. در مجاورت دلخواه نقطهٔ $x = \frac{1}{2}$ تعداد بینهایت نقاط منطق وجودداردکه درآنها مقدارتابع برابر ۱ است ودرنتیجه‌تفاضل $|D(\frac{1}{2}) - D(x)| = 0$ یعنی کمتراز ۰/۰۱ است . راجع به عدد مثبت قبلا داده شدهٔ ε اینطور نیز می‌توان صحبت‌کرد .

پس ازمقداری آشفتگی می‌توان دانش‌آموزان را به‌پیدا کردن یک‌کلمه فقط در تعریف پیوستگی هدایت نمود که آن کلمه ، این نوع اثبات پیوستگی تابع دیریکله را درمسیر خود قرارمی‌دهد .

نامساوی $|D(\frac{1}{2}) - D(x)| < \varepsilon$ به‌ازاء جمیع مقادیر x

واقع دریک‌مجاورت غیر مشخص $x = \frac{1}{2}$ باید برآورده شود و این مسئله در وضع موجود سازگار نیست .

خاصیت پیوستگی عبارت از خاصیت موضعی تابع در نقطهٔ مفروض است .

ممکن است تابع در نقطهٔ x_0 پیوسته و در نقطهٔ دیگر ولوکه هر قدر نزدیکتر به اولی باشد گسسته باشد. برای‌چنین تابعی مثالی بیاوریم :

فرض‌کنیم $\varphi(x) = x[1 - 2D(x)]$ باشدکه در آن $D(x)$ تابع دیریکله است .

درنقاط‌منطق $\varphi(x) = -x$ و درنقاط اصم $\varphi(x) = x$ است و بدین ترتیب نمودار $y = \varphi(x)$ از مجموعهٔ نقاط واقع بر نیمسازهای اول و دوم زوایای محورهای مختصات تشکیل یافته است . به سادگی مشاهده می‌شودکه این تابع درهرنقطهٔ $x \neq 0$ گسسته و در مبدأ مختصات پیوسته است . زیرا فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ معلوم باشد اگر مجاورت نقطه مبدأ مختصات را به شعاع ε اختیارکنیم یعنی فاصلهٔ $(+\varepsilon$ و $-\varepsilon)$ دراین - صورت به‌ازاء جمیع نقاط این فاصله :

$|\varphi(x) - \varphi(0)| = |x| < \varepsilon$ است .

تابع ریمن که در فاصلهٔ (۱ و ۰) به‌ترتیب زیرتعریف می‌شود جالب است .

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & : (x = \frac{p}{q} \text{ به ازاء مقادیر تحویل ناپذیر}) \\ 0 & : (\text{به ازاء مقادیر اصم } x) \end{cases}$$

این تابع در نقاط اصم پیوسته و در نقاط منطق گسسته است .

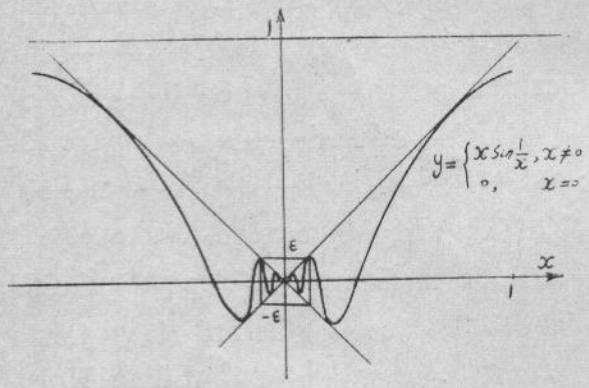
زیرا فرض‌کنیم $\varepsilon > 0$ معلوم باشد چون ازاعدادطبیعی عدد معین $q < \frac{1}{\varepsilon}$ فقط وجود دارد در این صورت به ازاء این عدد نقاط منطق $R(x) \geq \varepsilon$ است و نقطهٔ x_0 (منطق یا اصم) را می‌توان با مجاورتی مانند $(x_0 - \delta$ و $x_0 + \delta)$ محصور نمودکه یکی از این نقاط (سوای احتمالا خود x_0) در این مجاورت قرار نگیرد . در این صورت به‌ازاء جمیع مقادیر $x \neq x_0$ این‌مجاورت (منطق یا اصم) $R(x) < \varepsilon$ است .حال اگر x_0 نقطهٔ اصمی باشد در این‌صورت $R(x_0) = 0$ وبه‌ازاء جمیع $x \in (x_0 - \delta$ و $x_0 + \delta)$ داریم :

$|R(x) - R(x_0)| < \varepsilon$ یعنی‌تابع‌در نقطهٔ‌اصم x_0 پیوسته‌است.

حال فرض‌کنیم $x_0 = \frac{p_0}{q_0}$ نقطهٔ منطقی باشد. $\varepsilon > 0$ راطوری انتخاب می‌کنیم‌که $\frac{1}{q_0} > \varepsilon$ باشد در این صورت در مجاورت دلخواه δ -نقطهٔ x_0 نقطهٔ‌اصم x_1 پیدامی‌شودبقسمی‌که‌به‌ازاءآن

$$|R(x_1) - R(x_0)| = R(x_0) = \frac{1}{q_0} > \varepsilon$$

بدین ترتیب تابع $R(x)$ در هر نقطهٔ منطق گسسته است.تابع $y = x.\sin\frac{1}{x}$ در مبدأ مختصات گسسته است و این گسستگی قابل رفع است زیرا اگر قبلا این‌تابع را با فرض $y(0) = 0$ معین‌کنیم تابع پیوسته می‌شود (شکل ۱۵) .



بررسی توابع $y = ax + b$ و $y = x^2$ امکان پیداکردن مجاورت δ را به‌ازاء $\varepsilon > 0$ مفروض از روی حل نامساوی $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ مستقیماً فراهم می‌نماید .

مثلابرای‌تابع $y = x^2$ به‌ازاء $x = 2$ و $\varepsilon = 0/1$ داریم:

$|x^2 - 2^2| < 0/1$ یا $4 - 0/1 < x^2 < \varepsilon + 0/1$

از آنجا : $\varepsilon - 0/1 < x < \varepsilon + 0/1$

و : $2 - 0/25 < x < 2 + 0/25$

بدین ترتیب در مجاورتی به شعاع ۰/۲۵ از نقطهٔ $x = 2$ نامساوی $|x^2 - 2^2| < 0/1$ سازگار است .

طرح سؤال زیر خالی از فایده نیست :

اگرمعادلهٔ‌تقریبی $(2/21)^2 \# 4$ رابنویسیم‌دراین‌صورت خطای مطلق این تقریب چقدر است ؟

(دنباله درصفحهٔ ۵۱۰)

برشهای معمائی

فصلی از کتاب : Curiosités Géométriques

تألیف : E. Fourrey

ترجمهٔ : داوید ریحان

تجزیهٔ چند ضلعیهای معادل به اجزاء قابل انطباق

موضوع این مسئله ازاین قراراست : چند ضلعی‌مفروض A را به اجزائی چنان تجزیه‌کنیدکه اگرآنهارا طور دیگری پهلوی هم قراردهیم چند ضلعی B به شکل معین و معادل با اولی بدست‌آید .

به‌نظر می‌رسدکه اولین شرط امکان این عمل نخستین‌بار توسط دانشمندی‌مجارستانی‌به‌نام **بولیه**Bolyai (۳۳-۱۸۳۲) ابراز شده‌است؛ تجزیهٔ واقعی (برای چند ضلعیهای ، مسطح و کروی) بوسیلهٔ افسری آلمانی به‌نام **ژروین** Gerwien در سال ۱۸۳۳ ، سپس بوسیلهٔ سایرمؤلفین مشخص شده است . درتهیهٔ این مقاله کارهای اشخاص زیر مطالعه شده است :

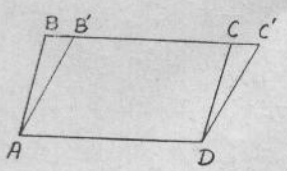
م. م. سون M. M. Sevéne (۱۸۶۷) ، **گیتل** Guitel ، **اس دولاکامپا** S. de la Campa ، **سوتا** Ceuta ، **ژرار** Gerard (۱۸۹۵) ، **الینگ هلست** Elling Holst ، **کریستیانیا**(۱۸۹۶) .

مگردرموردی‌که مخالف عقیده باشد روش م گیتل را که به‌نظرما درکاربرد عملی‌تراست بکار می‌بریم .

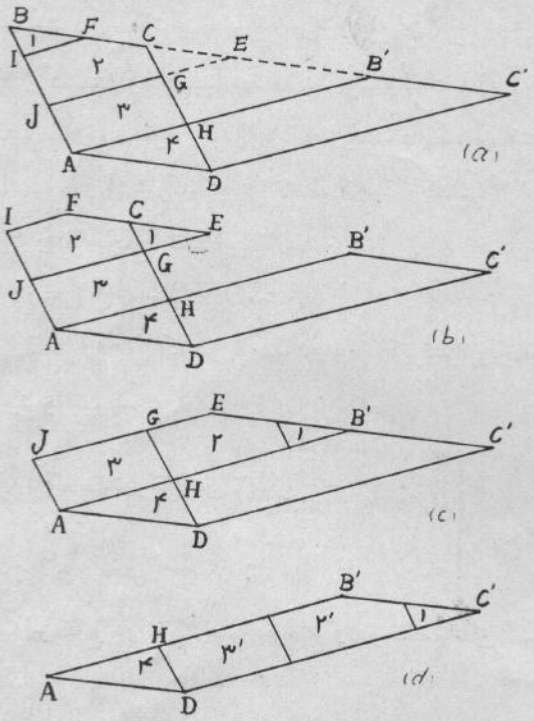
۱ـ شکلهای A و B متوازی‌الاضلاعهائی با قاعدهٔ مشترك و ارتفاع متساوی‌اند .

متوازی‌الاضلاعهای ABCD و AB′C′D مفروضند، برحسب اینکه B′C′ با BC فصل مشترك داشته یا اینکه با آن متخارج باشد دوحالت درنظر می گیریم.

حالت اول ـ با نقل مثلث ABB′ به وضع DCC′ از شکل اول به‌شکل دوم می‌رسیم .



حالت دوم ـ طول C′B′ را روی امتداد خود متوالیاً نقل می‌کنیم تا وضعی ازآن بدست‌آیدکه با BC قطعهٔ مشترك داشته باشند. ازنقاط E،F،... که به‌این‌ترتیب‌بدست



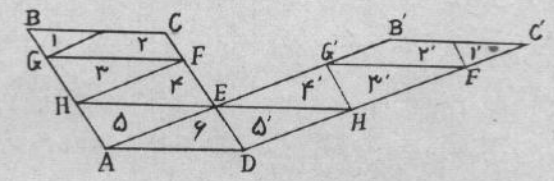
آمده‌اند موازی با C′D رسم می‌کنیم . به این ترتیب متوازی‌الاضلاع ABCD به چند ضلعیهائی تجزیه می‌شود که می‌توانند مجدداً AB′C′D را تشکیل بدهند .

جزء ۱ (شکل a) را در CGE (شکل b) قرار می‌دهیم، سپس ذوزنقهٔ JIFE (شکل b) متشکل از اجزاء ۱و۲ را در GEB′H (شکل c) وبالاخره ذوزنقهٔ AJEB′ (شکل

c) متشکل از اجزاء ۱،۲،۳ را در $DHB'C'$ (شکل d) قرار می‌دهیم ؛ به این ترتیب متوازی‌الاضلاع $AB'C'D$ بدست می‌آید .

ساختمان اشکال متوالی‌که برای روشنی مطلب ارائه شد عملا موردی نخواهد داشت بلکه تمام تبدیل درابتدا ویك دفعه انجام می گیرد .

برای دومین حالت راه حل **م. الینگ هلست** چنین است: فرض می‌کنیم E محل تقاطع ضلع CD با AB' باشد، DE را روی AB و AE را روی DC' به دفعاتی‌که ممکن باشد نقل می‌کنیم . ازنقاط G،H،.... که بدین ترتیب روی AB وازنقاط F'،H'،... که روی DC' بدست می‌آیند به‌ترتیب به‌موازات اضلاع $AB'C'D$ واضلاع ABCD رسم می‌کنیم؛ چند ضلعیهائی‌که بدین‌ترتیب درهر متوازی‌الاضلاع



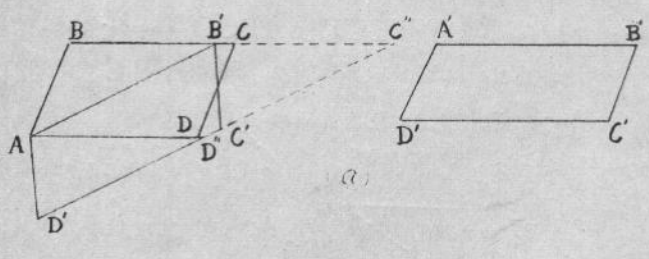
بدست می‌آیند هریکی بادیگری مساوی می‌باشند به‌کمك‌اولین ترسیم، تعداد اجزاء حداقل‌است ولی باید تذکردهیم که‌هر گاه اجزاء بدست‌آمده دراینجا را بطور مطلوب دسته بندی کنیم ، اجزاء ۱،۲و۳،۴ و ۵،۶ همان قطعات مفروض در راه حل قبلی می‌باشند.

۲ـ شکلهای A و B متوازی‌الاضلاعهای معادلند . بافرض‌آنکه متوازی‌الاضلاع ABCD معادل‌با $A'B'C'D'$ باشد، واضح است‌که بزرگترین ضلع $A'B'$ از دومی بزرگتر از کوچکترین ارتفاع از اولی‌است واحتمالا می‌تواند به وضع AB' مابین دوقاعدهٔ AD و BC نظیر ارتفاع مزبور محاط گردد .

بنابراین‌فرض می‌کنیم $A'B'C'D'$ به‌وضع $A'B'C'D'$ قرار گیردوC''وD''نقاط‌تقاطع$C'D'$باBCو AD باشد،درنتیجه متوازی‌الاضلاع $AB'C''D''$ که معادل با $A'B'C'D'$است با ABCD نیزمعادل خواهد بود .

ABCD و $AB'C''D''$ که دارای ارتفاع مشترك هستند دارای قاعده های متساوی نیز می‌باشند یعنی $AD'' = AD$ است و $D'C'$ از D می گذرد .

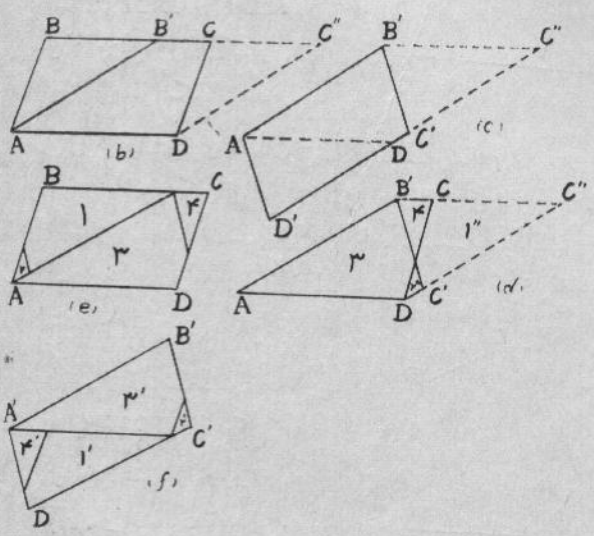
بدین‌ترتیب توانستیم دومتوازی‌الاضلاع مفروض رادر یکدیگر بقسمی محاط‌کنیم‌که رأس A درهردو مشترك باشد و برای هرکدام از آنها یکی از اضلاع ماربر A مابین دو ضلع مقابل از دیگری باشد .



بااین مقدمه ثابت می‌کنیم که می‌توانیم ABCD ؛ بقسمی تجزیه‌کنیم‌تادرترتیب‌استقرارجدید اجزاء $A'B'C'D'$ بدست بیاید. برای سادگی‌شکلها فرض می‌کنیم‌که می‌خواهیم درشرایط حالت اول قسمت ۱ را مورد بررسی قراردهیم.

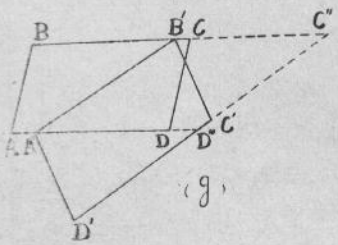
از شکل ABCD بوسیلهٔ برش ABB' و نقل آن در DCC'' (شکل b) به $AB'C''D$ و سپس از $A'B'C'D'$ (یا از $AB'C'D'$) بوسیلهٔ برش ADD' و نقل آن در $B'C''C'$ (شکل c) به $A'B'C''D$ می‌رسیم .

حال این دوترکیب را در $AB'C''D$ برهم منطبق‌می‌کنیم (شکل d) ودرامتداد $B'C'$ و CD آنرا برش‌می‌دهیم. بدین ترتیب ۴ قطعه خط بدست می‌آیدکه مستقیماً می‌توانیم از ABCD به $A'B'C'D'$ برسیم. اشکال e و f به ترتیب قرارگیری قطعات را برای تشکیل ABCD و $A'B'C'D'$ نشان می‌دهد .



تبصره : اولا مشاهده می‌شود که در شکل a متوازی‌الاضلاعهای $AB'C'D'$ و $AB'C''D''$ دارای قاعدهٔ مشترک AB' می‌باشند و قاعده‌های متقابل $C'D'$ و $C''D''$ بر یک امتدادند. این نتیجه موقعی بدست می‌آید که A' روی نقطه‌ای از خط AD باشد و بر A قرار نگیرد : متوازی‌الاضلاعی که برای مقایسهٔ ABCD و $A'B'C'D'$ بکار می‌رود بوسیلهٔ $A'B'C''D''$ (شکل g) نمایش داده شده‌است .

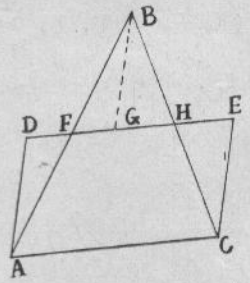
بدون اشکال می‌توانیم این حالت از شکل تجزیه را که در تصاویر b تا g نمایش داده‌ایم تعمیم دهیم .



ثانیاً ـ مشاهده می‌شود که راه حل مون توکلا (f۲) برای تبدیل یك مستطیل به‌یك مربع معادل حالت خاصی از ساختمانی است که برای تبدیل یك متوازی‌الاضلاع به متوازی‌الاضلاع معادل آن است که ذیلا نقل می‌شود.

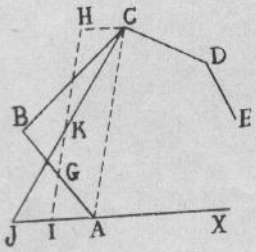
۳ـ شکلهای A و B مثلث ومتوازی‌الاضلاع معادل و هم‌قاعده هستند. ـ هرگاه ABCD و ADEG مثلث و متوازی‌الاضلاع مفروض باشند. از B، BG را موازی با AD رسم می‌کنیم .

$BG = AD = EG$ می‌باشد و مثلثهای BGF و ADF ، BGH و GEH به‌ترتیب با یکدیگر برابرند .



بنابراین بوسیلهٔ انتقال BGF در ADF و همچنین BGH در GEH از شکل مثلث ABC به‌متوازی‌الاضلاع ADEC می‌رسیم .

۴ـ شکلهای A و B یك چندضلعی و یك متوازی‌الاضلاع معادلند. ـ بافرض آنکه ABCDE...X چندضلعی فوق باشد . قطر AC را رسم می‌کنیم . می‌توانیم مثلث ABC رابه متوازی‌الاضلاع معادل IHCA(III) که‌یکی از اضلاعش IA وروی AX واقع است تبدیل کنیم، سپس متوازی‌ـ

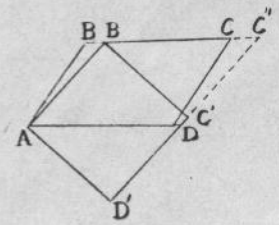


الاضلاع اخیررا به مثلث JCA که ضلع JA نیز روی AX قرار دارد تبدیل کنیم ؛ برای ترسیم اخیر، هرگاه J بقسمی باشد که $IJ = AI$ و K نقطهٔ برخورد HI با CJ باشد کافیست مثلث KHC را به KIJ انتقال دهیم .

بنابراین بوسیلهٔ تبدیلات مقدماتی چند ضلعی AJCDE...X معادل با چند ضلعی مفروض با یك ضلع کمتر بدست می‌آوریم . هرگاه این عمل را به‌همین ترتیب یکی بعدازدیگری انجام دهیم ، درخاتمه مثلثی بدست می‌آید که می‌توانیم آنرا به‌اجزائی تجزیه کنیم تامتوازی‌الاضلاع مفروض B بدست بیاید .

۵ـ شکلهای A و B چندضلعیهای معادلند. ـ اشکال A و B را بقسمی تجزیه می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاعهای C و D بدست بیاید؛ سپس C و D را طوری تجزیه می‌کنیم تا بتوانیم از یکی به دیگری برسیم . این دو تجزیهٔ انطباقی اجزائی را بدست می‌دهند که مستقیماً می‌توانیم از A به B برسیم .

مورد استعمال ـ با اتکا به مقدمات قبل، **م.گیتل** بسیاری ازمسائل دیگر برشهای هندسی‌را پیش‌بینی کرده است. موضوع آنها چنین است : یك چندضلعی مفروض است، مربع معادل‌آنرا بوسیلهٔ انتقال اجزاءآن بدست‌آورید .



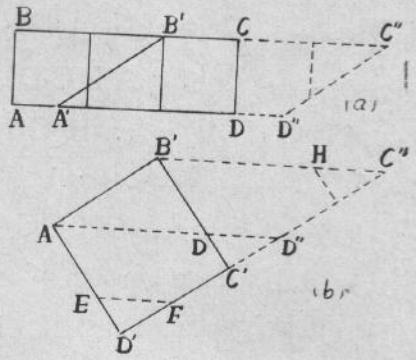
ابتدا شکل مفروض را تبدیل به متوازی‌الاضلاع ABCD می‌کنیم ، سپس شکل جدید را تبدیل به $AB'C''D$ می‌کنیم که یکی‌از اضلاعش ، ضلع مربع معادل است ؛ بالاخره این مربع $AB'C'D'$ را به‌اجزائی‌که بتوانند $AB'C''D$ را تشکیل بدهند تجزیه‌می‌کنیم. با تبدیل این‌دوترکیب می‌توانیم‌مستقیماً ازشکل مفروض به‌مربع $AB'C'D'$ برسیم .

ذیلا سه مورد استعمال از قاعدهٔ قبلی را که منتخبی از آنهائی است که مورد توجه م. گیتل بوده است ارائه می‌دهیم .

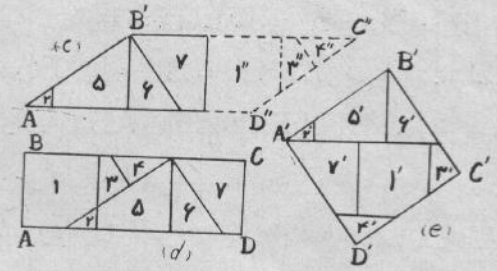
به‌کمك سه مربع مفروض یك مربع بسازید .

سه‌مربع مفروض را کنار یکدیگر مجاور می‌کنیم تا مستطیل ABCD (شکل a) بدست بیاید ؛ سپس در این مستطیل ضلع

A′B′ ازمربع معادل را بقسمی محاط می‌کنیم تا B′ منطبق بررأس فوقانی دومین مربع باشد به شرط آنکه تعداد اجزاء می‌نیمم باشد (هرگاه A′ بر A قرار می‌داشت ، ترسیم بجای ۷ جزء ، ۸ جزء بدست می‌داد) .



بانقل ABB′A′ در DCC″D″ ازمستطیل ABCD به‌متوازی‌الاضلاع واسطهٔ A′B′C″D″ (شکل a) می‌رسیم . بانقل C″D″ از D″ به F′ (I، حالت دوم) ورسم F′E′ موازی با A′D″ و نقل D′E′F′ در C′DD″ ، سپس ذوزنقهٔ E′A′D″F′ در DB′C″D″ یعنی D′E′(یا D′C′) یعنی بجای GH قرارگیرد ازمربع A′B′C′D′ به‌متوازی‌الاضلاع A′B′C″D″(شکل b) می‌رسیم. باانطباق‌دوترکیبی که بدین ترتیب روی A′B′C″D″ (شکل c) انجام می‌دهیم، ۷ جزء بدست می‌آید که بوسیلهٔ آنها مستقیماً از ABCD به A′B′C′D′ می‌رسیم .

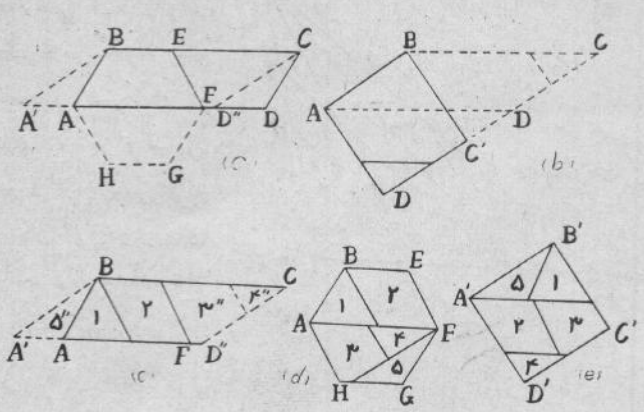


(اشکال d و e) چگونگی استقرار جالب این اجزاء را برای تشکیل ABCD و A′B′C′D′ نشان می‌دهد .

شش ضلعی منتظمی‌را تبدیل به‌یك‌مربع کنید.

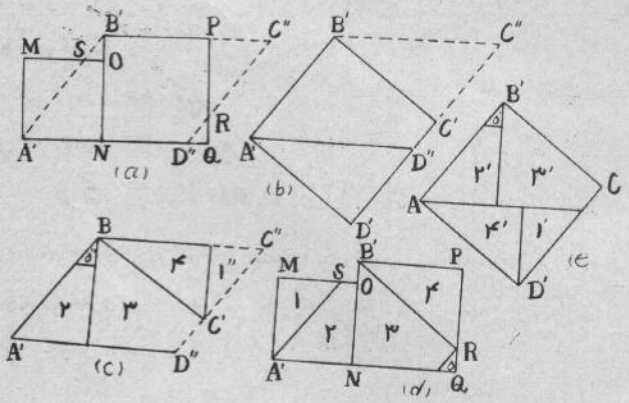
شش ضلعی مفروض ABEFGH را به دو ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین تقسیم می‌کنیم و با کنار هم گذاردن این دو عنصر متوازی‌الاضلاع ABCD (شکل a) بدست می‌آید . بقیهٔ عملیات مانند مسئلهٔ قبل انجام می‌شود.

شکلهای زیر برای بیان مطلب کافی است و به توضیح اضافی نیاز نیست .



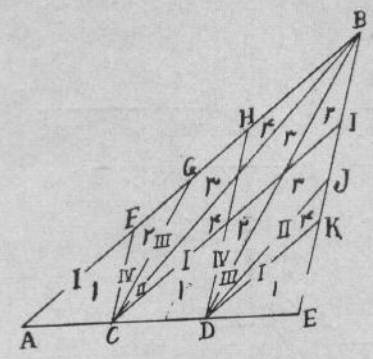
با دومربع غیرمتساوی که‌کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند یك مربع بسازید .

هرگاه مربعهای غیرمتساوی A′MON و NB′PQ که مطابق شکل a مجاور یکدیگرقرار گرفته‌اند درنظر بگیریم، طبق قضیهٔ فیثاغورس A′B′ ضلع مربع معادل بااین دو مربع می‌باشد . هرگاه S′ محل تلاقی MO با خط A′B′ باشد (شکل a) . روی امتداد B′P ، قطعه خط PC″ = MS را جدا می‌کنیم و از C″ خط C″O را موازی با B′A′ رسم می‌کنیم . مشاهده می‌شود که متوازی‌الاضلاع A′B′C″D″ معادل باشکل متشکل‌ازدومربع می‌باشد. بنابراین A′B′C″D″ متوازی‌الاضلاع واسطه است . دنبالهٔ مطلب مانند حالت قبل است .



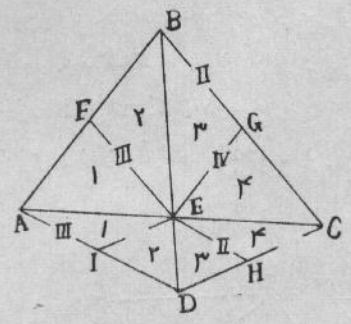
مسائل مختلف

* چند مثلث مانند ABC ، CBE ، ABE ،.... که دارای رأس مشترك وقاعده‌های متساوی AC،CD،DC واقع بریك استقامت می‌باشند مفروض است . هرگاه از C ،



D ،... موازی با اضلاعی که از رأس مشترك می گذرند رسم کنیم ، هرکدام از مثلثها به اجزاء قابل انطباق تبدیل می‌شوند درشکل فوق‌موازیهای یك‌ضلع وخود آن ضلع را بایك رقم رومی و اجزاء قابل انطباق را با ارقام فارسی مشخص کرده‌ایم . اجزائی‌که دارای زوایا و اضلاع متساوی هستند با یکدیگر برابرند (موازیهای محدود به دوخط متساوی‌الفاصله) .

* دومثلث ABC و ADC دارای‌قاعدهٔ مشترك HC و ارتفاعات متساوی هستند می‌توانیم آنها را به اجزاء قابل انطباق تجزیه کنیم . این مسئله مبنای روش **ژروین** برای تجزیهٔ چند ضلعیهای معادل به اجزاء قابل انطباق می‌باشد . برحسب اینکه BD ضلع AC را مابین A و C ، یا درنقطهٔ C ویا خارج A و C قطع کند سه‌حالت‌درنظر می گیریم. دراینجا فقط حالت اول‌را موردبحث قرار می‌دهیم . حالت دوم حد حالت فوق است و درمورد حالت سوم بواسطهٔ پیچیدگی اشکال آنرا به کنار می گذاریم .



هرگاه E نقطهٔ تلاقی BD با AC باشد ازاین‌نقطه در هرمثلث موازی با اضلاع مثلث دیگررسم می کنیم. بدین‌ترتیب مثلثهای مفروض به‌اجزائی تجزیه می‌شودکه هرکدام بردیگری قابل انطباق است .

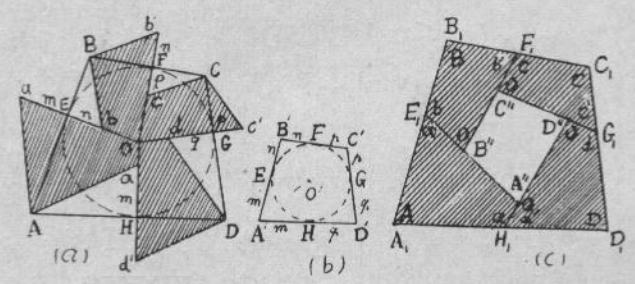
مسئلهٔ هارت

هارت درسال ۱۸۷۷ مسئلهٔ زیررا طرح کرده است . این مسئله فقط درحالات خاص چند ضلعیهای محاطی ومحیطی حل شده است .

مسئله : دو چند ضلعی متشابه مفروضند ، چند ضلعی بزرگتررا بقسمی تجزیه کنیدکه اگر اجزاء حاصل را کنار یکدیگر بگذاریم، چند ضلعی‌متشابه بادوتای دیگربدست بیاید وچند ضلعی کوچکتردر داخلش قرار گیرد .

I- چند ضلعی‌های محیطی . - ABCD....

(شکل a) و A'B'C'D'... (شکل b) دوچند ضلعی متشابه مفروضند، E،F،G،H،... و E'،F'،G'،H'،... نقاط تماس دوایرمحاطی بااین چند ضلعیها می‌باشد. از O عمود - های OE،OF،OG،OH،... را براضلاع فرود می‌آوریم وقرارداد می‌کنیم‌که m ، n ، p ، q ،... فواصل رأسهای A'،B'،C'،D' ، ... از نقاط تماس E'،F'،G'،H' ، ... باشد .



حال روی OE خارج ...ABCD وروی OHداخل همین چند ضلعی (AEOH مجانس A'E'O'H' است و از آنجا داریم: $A'E' = A'H' = m$) طولهای Ea' و Ha را مساوی با m جدا می‌کنیم. همچنین $Eb = Eb' = n$ ، $Fc = Gc' = p$ ، $Gd = Hd' = q$ ،...،رامی‌سازیم.مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AHa،AEa'،BEb،BFb'،...به‌ترتیب بایکدیگر برابرند. نتیجه می‌شودکه مجموع مساحتهای چهار ضلعیهای هاشورخوردهٔ شکل a معادل بامساحت...ABCD می‌باشد .

ثابت می‌کنیم‌که این چهارضلعیها که درشکل c نموده شده‌اند تشکیل چند ضلعی $A_1B_1C_1E_1$... متشابه با چند ضلعی مفروض‌را می‌دهند ودرداخل آنهاناحیهٔ...A''B''C''D'' خالی می‌ماندکه مساوی با...A'B'C'D' می‌باشد .

در واقع ، اولا $A_1E_1B_1$ ، $B_1F_1C_1$ ،... (شکل c) خطوط مستقیم هستندزیرامثلاًمثلثهای AEa'وBEb(شکل a) متشابه‌اند زیرا دارای زاویهٔ مساوی E مابین اضلاع‌متناسب

$\frac{AE}{m} = \frac{EB}{n}$ می‌باشند ونتیجه می‌شود که زاویه‌های $Aa'O$ و BbO مکمل یکدیگرند و A_1E_1 و E_1B_1 (شکل c) تشکیل خطی مستقیم می‌دهند.

ثانیاً ، چندضلعی $A_1B_1C_1D_1\ldots$ متشابه با دوتای دیگراست زیرا داریم: $A_1 = A$ ، $B_1 = B$ ،... وبه‌سادگی روابط زیر بدست می‌آید :

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \ldots$$

یا

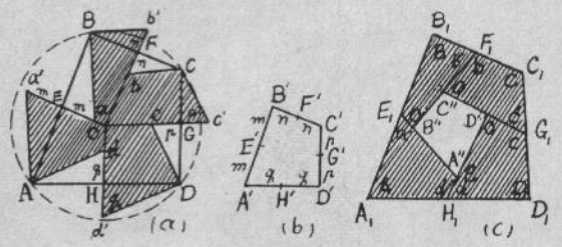
$$\frac{Aa' + Bb}{AB} = \frac{Bb' + Cc}{BC} = \ldots$$

بالاخره $A''B''C''D''\ldots$ مساوی با $A'B'C'D'\ldots$ است زیرا مثلا $A'' = A$ مکمل زاویهٔ $E_1A''H_1$ (شکل c) یا EOH (شکل a) می‌باشند و می‌بینیم که $A''B''$ (شکل c) مساوی است با $a'b = m + n = A'B'$ (شکل b) .

بنابراین چند ضلعی $A_1B_1C_1D_1\ldots$ محیطی است و نقاط E_1 ، F_1 ، G_1 ، H_1 ، ... نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی است .

مسئله دارای جواب نیست ، مگرآنکه بزرگترین قطعه خط $A'E'$ یا $A'H'$ که بوسیلهٔ نقاط تماس دایرهٔ محاطی با اضلاع چندضلعی $A'B'C'D'\ldots$ ایجاد می‌شود کوچکتر از شعاع دایرهٔ محاطی $ABCD\ldots$ باشد .

II ـ چند ضلعیهای محاطی : فرض می‌کنیم $ABCD\ldots$ و $A'B'C'D'\ldots$ چند ضلعیهای داده‌شده باشند، $E, F, G, H, \ldots$ و $E', F', G', H', \ldots$ اوساط اضلاع ، O مرکزدایرهٔ محیطی $ABCD\ldots$ باشد : می‌دانیم که خطوط $OE, OF, OG, OH, \ldots$ عمود براضلاع $ABCD\ldots$ می‌باشند. روی این عمودها از هر طرف $E, F, \ldots$ طولهای $Ea' = Ea$ ، $Fb = Fb'$ ،... را به‌ترتیب مساوی با نصف $A'B', B'C', \ldots$ جدا می‌کنیم.



مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AEa' و BEa ، BFb' و CFb ،... به‌ترتیب متساویند وچهارضلعیهای هاشورخوردهٔ شکل a که به ترتیب شکل c قرار گرفته شده‌اند تشکیل چند ضلعی $A_1B_1C_1D_1\ldots$ متشابه با چند ضلعیهای داده شده را می‌دهند ومابین آنها جای خالی $A''B''C''D''\ldots$ مساوی باچند ضلعی $A'B'C'D'\ldots$ وجوددارد. چند ضلعی $A_1B_1C_1D_1$ محاطی است و $E_1, F_1, G_1, H_1, \ldots$ اوساط اضلاع می‌باشند. اثبات کاملا مشابه با مسئلهٔ قبلی‌است .

ترسیم ممکن نیست مگرآنکه طول هرعمودی‌که از O براوساط اضلاع $ABCD\ldots$ فرود می‌آید بزرگتر از نصف ضلع نظیراز $A'B'C'D'\ldots$ باشد .

ترسیمات نموداری

ترجمه و تنظیم از : هوشنگ شریفزاده

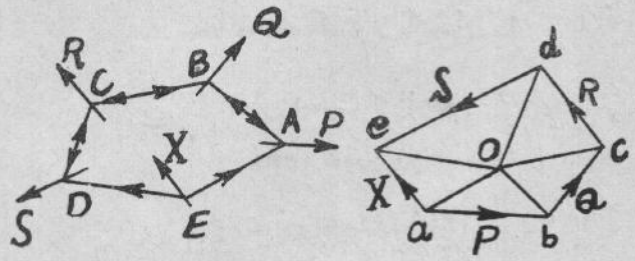
۱- بزرگی و جهت چند نیروی هم صفحه را می‌توان به روش چند ضلعی نیروها از طریق نموداری تعیین کرده وقتی که نیروها بر یک نقطه وارد می‌شوند، برآیند آنها نیز از آن نقطه می‌گذرد، بنابراین راستای آن معلوم می‌شود ، وقتی که نیروها بر یک جسم صلب وارد می‌شوند بازهم می‌توانیم بزرگی وجهت برآیند را با ترسیم چند ضلعی نیروها بدست آوریم، اما برای تعیین راستای برآیند به ترسیم بیشتری نیازمندیم .

اکنون نشان خواهیم داد که چگونه این کار انجام می‌گیرد و نیز نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از روش نموداری فشاری را تعیین می‌کنیم که بوسیلهٔ یک نیرو بردار بستی که از میلهٔ های سبک ساخته شده است وارد می‌شود .

۲- تعیین برآیند چند نیروی هم صفحه به طریق نموداری

فرض کنیم راستای نیروهای P و Q و R و S مطابق شکل- (۱ - الف) باشد .

شکل abcde (شکل ۱-ب) را که در آن اضلاع ab ، bc، cd، de به ترتیب موازی و متناسب با P و Q. R و S است رسم می‌کنیم . ae را نیز رسم کنیم.



شکل ۱ الف — شکل ۱ ب

ae درچند ضلعی نیروها ازحیث بزرگی وجهت معرف برآیند نیروهای P و Q و R و S است ما این برآیند را به X نمایش می‌دهیم .

برای آنکه راستای برآیند را تعیین کنیم ، نقطه‌ای مانند O اختیار می‌کنیم و آن را به a و b و c و e وصل می‌کنیم بر راستای P نقطه‌ای مانند A اختیار می‌کنیم (شکل ۱- الف) و AE و AB را به موازات Oa و Ob رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم AB راستای Q را در B قطع کند. P معادل است با نیروهائی که بوسیلهٔ aO و bO نمایش داده می‌شوند و به ترتیب در امتدادهای EA و BA وارد می‌شوند . از B خط BC را به موازات OC رسم می‌کنیم تا R را در C قطع کند .

Q معادل است با نیروهائی که بوسیلهٔ bO و cO نمایش داده می‌شوند و به ترتیب در امتدادهای AB و CB وارد می‌شوند نیروی bO که در امتداد AB وارد می‌شود با نیروی OC که در امتداد BA وارد می‌شود تعادل دارد .

از C خط CD را به موازات Od رسم می‌کنیم تا S را در D قطع کند .

R معادل است با نیروهایی که بوسیلهٔ CO و dO نمایش داده می‌شوند و به ترتیب در امتدادهای BC و DC وارد می‌شوند نیروی CO که در امتداد BC وارد می‌شود با نیروی OC که در امتداد CB وارد می‌شود تعادل دارد .

از D خط DE را به موازات Oe رسم می‌کنیم تا AE را در E قطع کند .

S معادل است با نیروهای dO و OC که به ترتیب در امتدادهای CD و ED وارد می‌شوند . نیروی dO که در امتداد CD وارد می‌شود با نیروی Od که در امتداد DC وارد می‌شود تعادل دارد .

پس نیروهای P و Q، R و S معادلند با نیروهای aO و Oe که به ترتیب در امتدادهای EA و ED وارد می‌شوند و چون این دو خط در E متلاقی هستند ، برآیند نیروها می‌بایستی از E بگذرد .

بنابراین برآیند نیروها نیرویی است مانند X که از E می‌گذرد وبه موازات ae و از حیث بزرگی وجهت با ae مشخص می‌شود .

بنابراین همانطورکه بزرگی وجهت برآیند رابدست آوردیم راستای آن راتعیین کردیم .

شکل abcde **را چند ضلعی نیرو** وشکل ABCDE **را چند ضلعی رابط** می‌نامند .

اگر چند ضلعی رابط ازنخ ساخته شود، درصورتی‌که نیروهای P وQ، R وS بر A، B، C وD وارد شوند و نیرویی مساوی ودرجهت مخالف برآیند نیروها بر E وارد شود، نخ به‌حال تعادل وبه‌شکل ABCDE باقی خواهد ماند. بدیهی است که اگراوضاع مختلف برای A وO درنظربگیریم، شکل چند ضلعی رابطتغییرمی‌کند. اما نقطهٔ نهایی تلاقی AE وOE همیشه برهمان راستا ، یعنی برراستای برآیند خواهد بود .

۳- اگرنقطهٔ e ازچند ضلعی نیروبرa منطبق شود چند ضلعی نیرورا بسته می‌نامند وبرآیند نیروها دراین حالت‌برابر صفر است .

اما صفربودن برآیندنیروها دلیل برآن نیست که نیروها درحال تعادلند .

زیرا دراین‌حالت Oe و Oa′ برهم منطبق می‌شوند و AE، DE باهم موازی خواهند بود، ونیروهائی‌که درامتداد آنها وارد می‌شوند مساوی ودرخلاف جهت یکدیگرند .

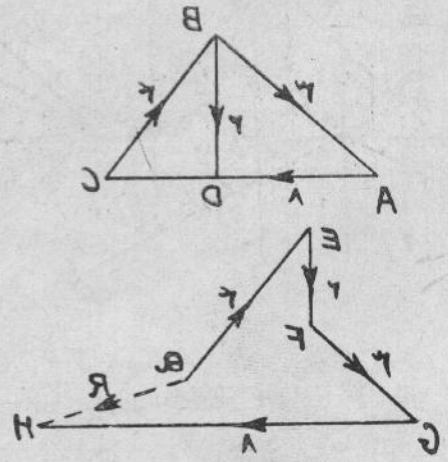
پس جزدرموردی که DEA خطی مستقیم است، یعنی چند ضلعی رابط بسته است ، برای مایك زوج باقی خواهد ماند این بدان معنی است **که اگرنیروها درحال تعادل باشند هم چندضلعی نیرو وهم چند ضلعی رابط باید بسته باشند .**

۴- مثال

ABC مثلثی است که درآن طول اضلاع AB، BC، CA به ترتیب ۱۲، ۱۰ ، ۱۵ سانتیمتر است ، وBD فاصلهٔ قائم B ازضلع CA است ، بزرگی وراستای برآیند نیروهای زیررا به‌طریقهٔ نموداری تعیین کنید : ۸واحد ازA به C ، ۴ واحد از C به B ، ۳ واحد ازB به A ، ۲ واحد ازB به D.

حل - نیروها درشکل (۲- الف)نمایش داده شده‌اند، بزرگی وجهت برآیندآنهارامی‌توان بارسم چند ضلعی نیرو ، مطابق شکل (۲- ب) پیدا کرده ، دراین شکل بردارهای OE، EF، FG، GH به ترتیب معرف نیروهای ۴، ۲، ۳، ۸ واحد هستند .R برآیند این نیروها باضلع OH که چند ضلعی را می‌بندد و نشان داده می‌شود .

ازروی‌اندازه گیری‌معلوم‌می‌شود ، R = ۳/۴ وزاویه‌ای



شکل ۲ الف

شکل ۲ ب

که باGH می‌سازد ، یعنی باAC می‌سازد تقریباً برابر ۱۳° است دراین حالت برای تعیین راستای R لازم نیست که چند ضلعی رابط را رسم کنیم . زیرا چون سه عدد از نیروها از B می‌گذرد ، برآیند آنها نیزازB می‌گذرد . بنابراین بزرگی وجهت برآیند آنها با بردار OG مطابق شکل ۲- (ب) مشخص می‌شود .

اما اگراز B خطی به موازات OG رسم کنیم تا امتداد CA را درنقطه‌ای مثلا درX قطع کند ، برآیند چهار نیرومی‌بایستی ازاین نقطه بگذرد .

۵- نشانه‌گذاری بوو BOW

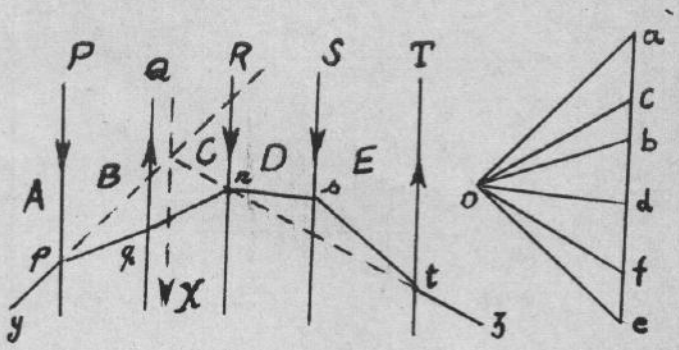
ترسیمات نموداری که شامل نیروهای هم صفحه‌اند غالباً بااستفاده ازطریقهٔ نشانه گذاری بووساده‌ترمی‌شودبرطبق این روش ، صفحه‌ای‌که نیروها در آن اعمال می‌شوند ممکن است چنین تصورشودکه راستاهای نیروها آن را به مناطقی تقسیم کرده است . این مناطق را مثلا باحروف A، B، C، D، نمایش می‌دهند ونیرویی راکه درامتداد خطی که منطقهٔ B را ازمنطقهٔ C جدا می‌کند با bc نمایش می‌دهندبه‌همین‌طریق‌برای بقیه نشانه گذاری می‌کنند .

این روش بخصوص درمواردی که با داربستها سروکار داریم بسیارمناسب است ، بطوری‌که آن رابعداً درپاراگراف ۱۰ مطرح خواهیم کرد .

۶- برآیند چند نیروی متوازی

حالتی‌که درآن، نیروها موازی هستند عملاحالت‌بسیار مهمی است ، روش تعیین برآیند کاملا شبیه آنست که در پاراگراف ۲ بیان کردیم اما دراین حالت چند ضلعی نیرو به صورت خطی مستقیم است .

فرض می‌کنیم نیروهای مفروض P و Q، R، S، T می‌باشند وراستاهای آنها مطابق شکل ۳-(الف) باشد .



شکل ۳- (الف) شکل ۳- (ب)

مناطق را با حروف A و B و C، D، E، F مطابق شکل نشان می‌دهیم ، وبرخطی موازی باجهت نیروها ab را به‌طرف پائین نشانه‌می‌کنیم. اندازهٔ آن‌را برطبق مقیاس‌معین برابر P می‌گیریم (شکل ۳- ب) ، bc را به‌طرف بالا ومعرف Q می‌گیریم . cd، de و ef را به‌ترتیب معرف R، S و T می‌گیریم .

دراین صورت af ازحیث بزرگی و جهت معرف برآیند است وراستای آن را می‌توان به طریقهٔ زیرتعیین کرد. نقطه‌ای دلخواه‌مانند O درنظر می‌گیریم و oa، ob، oc، od، oe، of را رسم‌می‌کنیم براستای P نقطه‌ای‌مانند p اختیارمی‌کنیم و py و pq را به‌موازات ao و ob رسم می‌کنیم. فرض‌می‌کنیم pq راستای Q رادرq قطع کند .

p معادل است بانیروهای ao ، ob که درامتداد py و pq وارد می‌شوند .

ازq خط qr را به موازات oc رسم می‌کنیم تا R را در r قطع کند .

Q معادل است بانیروهای bo ، oc که درامتداد pq، qr وارد می‌شوندکه نیروی اول بانیروی ob که درامتداد pq وارد می‌شود تعادل دارد .

از r خط rs را به‌موازات od رسم می‌کنیم تا S را در s قطع کند .

R معادل است بانیروی co ، od ، که درامتداد rq ، rs وارد می‌شوندکه نیروی اول بانیروی oc که در امتداد qr وارد می‌شود تعادل دارد .

از s خط st رابه‌موازات oe رسم می‌کنیم تا T را درt قطع کند .

S معادل است بانیروهای do ، oe ، که در امتدادsr ، st واردمی‌شوندکه نیروی اول بانیروی od که درامتداد rs وارد می‌شود تعادل دارد .

ازt خط tz را به موازات of رسم می‌کنیم .

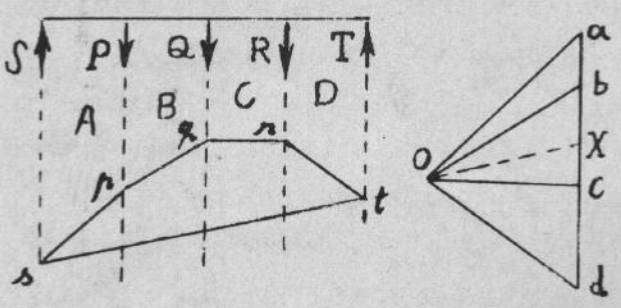
T معادل است بانیروهای of، eo که درامتداد ts ، tz وارد می‌شودکه نیروی اول بانیروی oe که در امتداد st وارد می‌شود تعادل دارد .

بنابراین برای مانیروی ao در امتداد py ونیرویی در امتداد tz باقی مانده‌است .

yp را امتداد می‌دهیم تا zt رادرx قطع کند، در این صورت برآیند نیروها می‌بایستی ازx بگذرد .

برآیند ازحیث بزرگی و جهت نیروی X است که با af نشان داده می‌شود ازx می‌گذرد .

مثال ۱- میلهٔ سنگینی که به‌نقاط معلومی‌ازآن وزنه‌های معلومی آویخته شده است بردوانتهای خودتکیه کرده است . عکس‌العملهایی راکه برتکیه گاهها وارد می‌شود تعیین‌کنید .



شکل ۴ - (الف) شکل۴- (ب)

حل- فرض می‌کنیم وزنه‌های P، Q، R مطابق شکل ۴- الف واردمی‌شوند وفرض می‌کنیم عکس‌العملهای تکیه گاهها S و T باشد .

مناطق رابا حروف A، B، C، D مطابق شکل نشان می‌دهیم وچند ضلعی نیروی abcd را (شکل ۴- ب) رسم می‌کنیم. نقطه‌ای مانند O اختیار می‌کنیم و oa، ob، oc، od را وصل می‌کنیم .

براستای P نقطه‌ای مانند p اختیار می‌کنیم و ps را به موازات oa رسم می‌کنیم تا S را درs قطع کند : pq رابه موازات ob رسم می‌کنیم تا Q رادر q قطع کند .

ازq خط qr را به‌موازات oc رسم می‌کنیم تا R رادر r قطع کند وازr خط rt به موازات od رسم می‌کنیم تا T رادر t قطع کند .

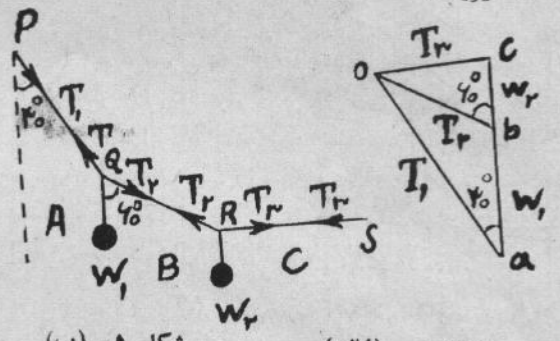
نیروهای P، Q، R معادلند با نیروهای ao ، od در امتدادهای ps، st . st راوصل می‌کنیم و ox را به موازات st می‌کشیم تا ad رادرx قطع کند .

نیروی ao که درامتداد ps واردمی‌شود معادل است بانیرویی که‌وسیلهٔ ax مشخص وبه‌طرف پائین وبرامتدادراستای S وارد می‌شود ونیروی xo که درامتداد ts وارد می‌شود .

نیروی od که درامتداد rt وارد می‌شود معادل است‌با xd که به‌طرف پائین در امتداد راستای T وارد می‌شود ، و نیروی ox که درامتداد st وارد می‌شود . نیروی اخیر با نیروی xo که درامتدادts وارد می‌شود تعادل دارد وبنابراین برای‌سانیروی‌قائمی‌باقی می‌ماندکه بوسیلهٔox وxd نمایش داده می‌شودودرامتدادSوT واردمی‌شوند.

عکس العملهایی که برمیله‌دردوانتها وارد می‌شوند باید مساوی ودرخلاف جهت این نیروها باشند وبنا براین مساوی ومخالف ax وxd هستند .

مثال ۲ـ PQRS نخ سبکی است که به‌دونقطهٔ ثابت PوS متصل شده است ووزنه‌های QوR رانگاه می‌دارد.اگر PQ نسبت به‌قائم‌به‌اندازهٔ °۳۰ منحرف باشد، QR نسبت به قائم°۶۰ منحرف‌باشدو RS افقی‌باشد ،نسبت این دو وزنه را بدست آورید .



شکل ۵ـ (الف) شکل ۵ـ (ب)

حل ـ شکل نخ PQRS مطابق شکل ۵ـ الف است این شکل درواقع چند ضلعی رابط برای نیروهای متوازی W_1وW_2 است‌که به ترتیب درQوR وارد می‌شوند .

ازروی این‌چند ضلعی رابط می‌توانیم چندضلعی نیرو را رسم کنیم .برای این منظور درشکل ۵ـب فرض‌می‌کنیم ba معرف وزن W_1 باشد . ازaوb به‌ترتیب خطوط به موازات نخهای QPوQR رسم می‌کنیم وفرض می‌کنیم که این‌خطوط در o بایکدیگر تلاقی‌کنند دراین صورت‌این مثلث abo مثلث نیروهابرای‌نیروهایW_1 ، T_1وT_2است که‌برQواردمی‌شوند .

اکنون اگرoc را به‌موازات نخ RS ، یعنی بطورافقی رسم‌کنیم ، دراین صورت مثلث bco مثلث نیروهایW_1 ، T_2وT_3 است‌که برR وارد می‌شوند .

بنابراین cb معرف W_2 وباهمان مقیاسی است که ba معرف W_1 است . وبنابراین $\frac{W_1}{W_2}=\frac{ab}{bc}$

اما $ac = oc\,tg\,60^\circ = oc\sqrt{3}$

و $bc = oc\,tg\,30^\circ = \frac{co}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ ac = 3bc$

$\therefore\ W_1 + W_2 = 3W_2 \longrightarrow W_1 = 2W_2$

این نتیجه را می‌توان باتجزیهٔ نیروهایی که درQوR وارد می‌شوند ، درامتدادهای افقی وقائم به‌ترتیب زیر بدست آورد .

برای Q : $T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ = W_1$

و $T_1 \sin 30^\circ - T_2 \sin 60^\circ = 0$

ونیز برای R $T_2 \cos 60^\circ = W_2$

و $T_2 \sin 60^\circ - T_3 = 0$

که منجربه این نتیجه می‌شود $W_1 = 2W_2$

مثال۳ـ نیروهای ۵،۹،۷ـ، ۳، ۱۰ـکیلو گرم‌نیرودر امتداد خطوط راست متوازی وارد می‌شوند وفاصلهٔ آنها از یکدیگر به ترتیب ۱۰ ، ۵ ، ۷ ، ۳سانتیمتر است ، باروش برداری وباروش چندضلعی رابط بزرگی وجهت‌زوج برآیندرا حساب کنید .

حل ـ نمودارمنطقه‌ای را مطابق شکل ۶ الف رسم می‌کنیم وهمان طورکه مشاهده می‌شودآن را حرف گذاری می‌کنیم چند ضلعی نیرو را مطابق شکل ۶ـ ب رسم‌می‌کنیم. در این شکل $ab = 5$ ، $bc = 9$ ، $cd = 7$ ، $de = 3$ و ef یا ea مساوی ۱۰ است . وچندضلعی بسته است .

چند ضلعی نیرورا بارسم خطوطی به‌موازات oa، ob، oc، od، oe ، of به‌ترتیب در مناطق A، B، C، D، E، F رسم می‌کنیم .

هریك ازنیروهای متوازی‌را می‌توان به دومؤلفه‌تجزیه کردکه مطابق شکل ۶ الف، درامتداد اضلاع چندضلعی نیرو وارد می‌شوند . این مؤلفه‌ها جفت جفت بایکدیگر معادلند ، جزنیروی‌اولی‌ونیروی‌آخری، که متساوی ومتوازی‌ودرخلاف جهت‌یکدیگرند. بنابراین تشکیل یك‌زوج‌می‌دهند .

بزرگی این نیروهاکه بوسیلهٔ oa در نمودارنیرونمایش داده می‌شود وفاصلهٔ آنها که ازیکدیگرمثلا برابرp است ، از نمودار منطقه‌ای (شکل ۶ الف) بدست می‌آیند .

بنابراین گشتاورزوج به‌وسیلهٔ oaxp مشخص می‌شود

ودر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است نتیجه می‌شود $oa = ۱۲/۷kgf$ و $p = ۱۵/۷\ cm$. پس گشتاورزوج برابر است با $۱۲/۷ \times ۱۵/۷ = ۱۹۹kgf.\ cm$

این مقدار را می‌توان باتعیین گشتاورهای همهٔ نیروها نسبت به‌یك نقطه ، مثلا نقطه‌ای واقع برراستای نیروی ۵ تعیین کرد چنین خواهیم داشت .

$$-۹ \times ۱۰ + ۷ \times ۱۵ - ۳ \times ۲۲ + ۱۰ \times ۲۵$$
$$= -۹۰ + ۱۰۵ - ۶۶ + ۲۵۰$$
$$= ۱۹۹kgf.cm$$

تمرین

۱ـ سه نیروی متوازی همسوی ۳،۵و۴ کیلو گرم نیرو مفروضند . فاصلهٔ آنها ازیکدیگربرابر یك‌متر است وضع برآیند این نیروها راباترسیمی نموداری نشان دهید .

۲ـ میله‌ای به‌طول ۹m بردوانتهای خودتکیه کرده‌است تکیه گاههاهمتراز هستند . بارهای ۵،۳،۹ و ۲تن درفواصل ۲/۴،۶/۳،۱/۵و۷/۵متر ازانتهای چپ میله برروی این‌میله قراردارند . به‌طریقهٔ نموداری با چندضلعیهای رابط وبرداری عکس‌العملهای تکیه گاهها را بدست‌آورید، نیزعکس‌العملها را حساب کنید .

۳ـ وضع برآیند چهارنیروی متوازی راکه بزرگی‌آنها ۷ + ، ۴ + ، ۵ − و ۲ + کیلو گرم نیرو است وفواصل‌بین‌آنها به ترتیب ۱، ۵/۵ و ۱/۲ سانتیمتر است ، به‌طریقهٔ نموداری تعیین کنید .

۴ـ وزنه‌های ۲، ۳، ۵ کیلو گرم نیروبرتیری که طول آن ۳m است درفواصل ۰/۳ ۰/۹ و ۱/۵ متر ازیك انتهاقرار دارند . راستای برآیند رابه طریقهٔ نموداری تعیین کنید .

۵ـ تیری افقی به‌طول ۶m بردوانتهای‌خود تکیه کرده است ووزنه‌های ۲،۳،۶و۴ کیلو گرمی به ترتیب درفواصل ۰/۹،۱/۸،۳/۶و۴/۵ مترازیك انتهای آن قراردارند عکس‌العملهای تکیه گاهها را به‌طریقهٔ نموداری تعیین کنید .

۶ـوزنه‌های ۸،۳،۲و۶ کیلو گرمی ازفواصل ۶، ۰/۵، ۰/۹ و ۱/۸و۲/۴ متری ازیك انتهای میله‌ای سبك به‌طول۳m که بردوانتهای خودتکیه کرده است ، آویزان شده‌اند . عکس‌العملهای تکیه گاهها رابه طریقهٔ نموداری تعیین کنید .

۷ ـنیروهای‌متوازی وهمسوی ۲، ۴، ۶، ۸و۱۰ کیلو‌گرم نیروبه فاصلهٔ یك متری از یکدیگر وارد می‌شوند، وضع راستای برآیند آنها رابه‌طریقهٔ نموداری تعیین کنید .

۸ـ برچرخهای یك‌لوکوموتیو بارهایی که‌واردمی‌شوند به‌ترتیب ۱۰، ۱۵، ۱۸، ۱۶، ۸و۸ تن است وفاصلهٔ آنها به ترتیب ۲/۱، ۱/۸، ۲/۴، ۳، ۱/۲، ۱/۲ متر است . بزرگی و وضع برآیند عکس‌العملهایی راکه ازطرف ریلها وارد می‌شود تعیین کنیدودرستی نتیجه رابامحاسبه تحقیق کنید .

۹ـ تیری افقی به‌طول ۳m وزنه‌هایی به‌وزن ۴، ۵، ۶و ۷ کیلو گرم نیروراکه به‌ترتیب درفاصله‌های ۰/۶ ، ۱/۵، ۲/۱ و ۲/۷ متری‌ازیك‌انتهای‌آن‌وارد می‌شودحمل می‌کند. ترسیمات نموداری را درموارد زیرتهیه‌کنید:(الف) برای برآیندوزنه‌ها (ب) برای عکس‌العملهای تکیه گاهها، هنگامی‌که تیرازدوانتها بردوپایه قرارداد ، ازوزن‌خود تیرصرف نظر کنید .

۱۰ـ فاصله‌های‌بین بارهایی که‌براکسلهای‌یك‌لوکوموتیو وارد می‌شوند به شرح زیراست که‌به‌ترتیب‌ازجلو به‌عقب‌است.

فواصل	۲/۷	۳	۲/۴	۳ متر
بارها	۱۲	۱۲	۲۵	۲۵ تن

باترسیم نموداری فاصلهٔ مرکزثقل‌لوکوموتیوراازاکسل جلویی پیداکنید .

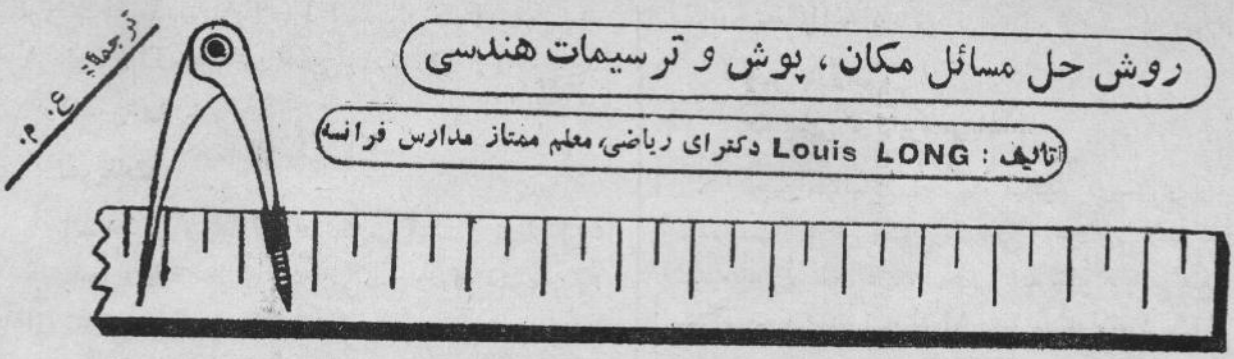
۱۱ـ تیر یکنواخت AB به وزن ۵۰ kgf و طول ۶m درنقطهٔ A ونقطهٔ B که در۱/۲ متری ازA است تکیه دارد. در ۱/۵ متری و ۲/۴ متری ازA وزنه‌هایی به‌وزن ۳۰kgf حمل‌می‌کند ودرB وزنه‌ای‌به‌وزن ۴۰kgf حمل‌می‌کند. به طریقهٔ برداری نیروهایی را که برتکیه گاهها فشارمی‌آورد تعیین کنید .

۱۲ـ نخ‌سبکی به نقطهٔ ثابت A بسته‌شده است وازروی قرقرهٔ صیقلی D که همتراز با A است می‌گذرد وبه‌انتهای آن وزنه‌ای برابرW بسته شده است . اگربه‌نقاط B وC از نخ بین A وD به ترتیب وزنه‌های W_1 و W_2 بسته شود، نشان دهیدکه چگونه می‌توان ازروی جهات قسمتهای AB وBC و CD ازنخ که درحال تعادل‌است W_1 و W_2 را پیداکرد .

۱۳ـ ABCD نخی سبك است . دوانتهای A وD از این نخ به نقاط ثابتی که بریك خط افقی هستند بسته‌شده‌است. وزنه‌های ۵kgf و pkgf به B وC متصل شده‌اند ، به طریقهٔ نموداری وزن P وکششهای قسمتهای AB، BC ، CD را تعیین کنید ، درصورتی که می‌دانیم AB وCD باافق به‌ترتیب زوایای ۶۰° و ۴۵° می‌سازند وزاویهٔ BCD برابر ۱۴۰° است

۱۴ـ نیروهای ۱، ۳، ۴ـکیلو گرم نیروبه‌ترتیب بر گرد اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که طول ضلع آن ۲cm واردمی شوند . براین مثلث ازیك تیغهٔ صلب بریده شده‌است برای تعیین بزرگی ، جهت ووضع برآیند این‌نیروها ترسیمی نموداری ارائه دهید .

۱۵ـ نیروهای۳، ۲، ۵/۳ـکیلو گرم نیروبه‌ترتیب بر گرد سه‌ضلع متوالی یك‌شش ضلعی‌منتظم‌که طول ضلع آن۲cm است وازیك تیغهٔ صلب بریده شده‌اند وارد می‌شوند . برای تعیین‌بزرگی،جهت ووضع‌برآیند این نیروها، ترسیمی‌نموداری ارائه دهید .



روش حل مسائل مکان، پوش و ترسیمات هندسی

تألیف : Louis LONG دکترای ریاضی، معلم ممتاز مدارس فرانسه

ترجمهٔ: ع. م.

II ـ مکان (دنباله از شمارهٔ قبل)

فصل دهم

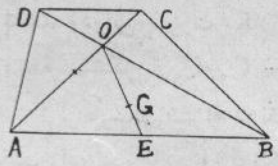
مکانهای منتج از مکانها یا پوشهای بسیار ساده

دربسیاری ازحالتها ، مکان مطلوب ، ازمکان یاپوش ، دیگری نتیجه می‌شود که بسیار ساده‌تر از اولی می‌باشد . از این جهت آنچه درحل مسائل مکان اهمیت فوق العاده دارد جستجوی مکان هریك ازنقاط مهم ومتحرك وهمچنین تعیین پوش خطوطی از شکل می‌باشد که بایك درجهٔ آزادی تغییر می‌کنند . حل این‌مسائل الحاقی ایجاب می‌کندکه سؤال مؤثراً فهمیده شده باشد وبه‌نوع موجهی بررسی گردد ؛

مسئلهٔ ۱ـ ذوزنقهٔ ABCD رادرنظر می‌گیریم که قاعدهٔ $AB = c$ ازآن هم از لحاظ وضع وهم ازلحاظ اندازه ثابت است ، ساقهای $AD = m$ و $CD = b$ فقط ازلحاظ‌اندازه ثابت می‌باشند .

۱ـ مکان O نقطهٔ تلاقی قطر های ذوزنقه چیست ؟

۲ـ مکان مرکز ثقل سطح مثلث OAB چیست ؟



اولاازروی‌شکل مشاهده می‌شود که دومثلث OAB و OCD متشابهند ودر نتیجه داریم :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{OB}{BD} = \frac{c}{b+c}$$

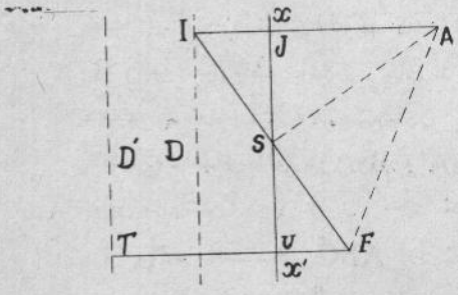
چون نقطهٔ B ثابت است پس مکان O عبارتست از متجانس مکان D درتجانسی‌که B مرکزآن و $\frac{c}{b+c}$ نسبت‌آن می‌باشد . مکان D دایره‌ای است به مرکز A وبه‌شعاع m پس مکان O دایره‌ای‌است‌که I مرکزآن برAB واقع است بقسمی که $\frac{BI}{BA} = \frac{c}{b+c}$ وشعاع آن برابراست با : $\frac{mc}{b+c}$

ثانیاً اگرE وسط AB باشد وG مرکزثقل سطح مثلث OAB باشد درایم .

$$\frac{EG}{EO} = \frac{1}{3} = \text{ثابت}$$

وچون E ثابت است پس مکان G عبارتست ازمتجانس مکان O درتجانس به‌نسبت $\frac{1}{3}$ وبه‌مرکز E. این‌مکان‌دایره‌ای‌خواهدبودکه‌مرکزوشعاع آن‌ازروی‌مرکزوشعاع دایرهٔ‌مکان O به‌سادگی مشخص می‌شود.

مسئلهٔ ۲ـ مکان کانونهای سهمیهایی را پیداکنید که دررأس برخط ثابت $x'x$ مماس‌اند وازنقطهٔ ثابت A می گذرند.



اگرF کانون و D خط هادی یکی از این سهمیها و I تصویر A روی D و S نقطهٔ تلاقی IF با $x'x$ باشد چون AS برIF عمود است ورأس S از زاویهٔ قائمه ASF برخط ثابت $x'x$ حرکت می‌کند وضلع SA ازآن ازنقطهٔ ثابت A می گذرد پس‌ضلع SF ازآن برسهمی ثابتی مماس است که A کانون و $x'x$ مماس دررأس برآن می‌باشد . البته‌این‌سهمی‌درF برIF مماس می‌باشدوچنانچه FT را موازی ومساوی وهمجهت با AI رسم‌کنیم مطابق با شکل داریم $FU = IJ$ وازآنجا نتیجه می‌شود که $UT = AJ$ برابر با

مقدار ثابت می‌باشدپس $FT = FA$ است ومکان F سهمی است که A کانون و D' خط هادی آن‌می‌باشدکه D' از T موازی با $x'x$ رسم می‌شود .

تمرینات

۱ـ خط D ونقطهٔ F رادرنظر می گیریم . نقطهٔ F را به‌نقطهٔ دلخواه B ازخط D وصل می‌کنیم ودرB عمود △ را بر BF اخراج می‌کنیم . اگرPنقطهٔ معلومی ازصفحه باشد خطوط △ راکه برP می گذرند رسم کنید وتعیین کنید :

اولا مکان Pرابرای آنکه‌خطوط △ که برP می گذرند برهم عمود باشند .

ثانیاً مکان Pرابرای آنکه خطوط △ که‌برP می گذرند منطبق گردند .

۲ـ روی مماس دررأس برسهمی معلومی دونقطهٔ M و M' انتخاب می‌کنیم وازآنها مماسهایی ، غیرازمماس دررأس برسهمی مزبور رسم می‌کنیم که یکدیگر رادرPقطع می‌کنند. هرگاه I وسط MM' ثابت باشد مکان P را تعیین کنید .

۳ـ دو نقطهٔ ثابت O وC مفروض است وOP خط دلخواهی است که‌ازO می گذرد وP تصویر قائم Cروی آن می‌باشد . درPعمود PM را برOP اخراج می‌کنیم بقسمی که $PM = OP$ باشد . مکان M راپیداکنید .

۴ـ درنقطهٔ A واقع بردایرهٔ معلومی مماسی‌برآن‌رسم می‌کنیم وروی‌آن نقطهٔP رادرنظرمی گیریم . اگرM نقطه‌ای ازدایرهٔ مزبورباشد وM وP چنان تغییرکنندکه مثلث AMP متساوی‌الساقین‌باشد مکان‌مرکزارتفاعی این مثلث راپیداکنید .

۵ـ دونقطهٔ A وB به‌فاصلهٔ l ازیکدیگر مفروض است بیضیهای E را درنظرمی گیریم که درآنهاA رأس محوراطول وB رأس محوراقصر باشد . مکان نقاط A' وB' رأسهای‌دیگر بیضیها را معلوم‌کنید وهمچنین مکان رأسهای مستطیلهایی‌را بیابید که‌ضلعهای آنها درA وB وA' وB' بر بیضیهای مزبور مماس می‌باشند .

۶ـ مثلث متغیر ABC رادرنظر می گیریم. نیمساز داخلی زاویهٔ Aضلع BC رادرK و دایرهٔ محیطی مثلث را در I قطع می‌کند . اگرA وI وK نقطه های ثابت باشند مکان ، G مرکز ثقل مثلث راپیداکنید .

۷ـ ذوزنقهٔ ABCD قائمه درزاویه‌های A وB مفروض است . قطر AC زاویهٔ A رانصف می‌کند وبرساق BC عمود است . ازنقطهٔ I واقع برCD عمودی برAI اخراج می‌کنیم که BC را درK قطع می‌کند وقتی I روی CD جابجا شود مکان وسط IK را پیداکنید .

فصل یازدهم

مکانهایی که دایره می‌باشند

تعیین مکانهایی که دایره باشند دربسیاری ازحالتها ساده است . دراین فصل روشهایی را ارائه می‌دهیم که هرگاه معلوم‌باشدکه مکان دایره است اثبات چگونه بایدانجام گیرد. مثلا می‌توان نقطهٔ متحرك M رابه دونقطهٔ ثابت A وB وصل کرد وثابت کرد که زاویهٔ AMB برابر بامقدار ثابتی است. یااینکه اگر O مرکز دایره معین باشد ثابت‌کردکه OM طول ثابت دارد . یااینکه ثابت‌کرد که مثلث AOM دررأس O متساوی‌الساقین است .

اگر △ قطرعمودبرAB وI وسط AM باشد بایدثابت کردعمودی که درI برAM اخراج شود از نقطهٔ ثابتی واقع بر △ می گذرد . این‌روش دربرخی ازحالتها مفید می‌باشد.

برای اثبات اینکه یك‌مکان دایره است می‌توان تقارن را بکاربرد یا ازترسیم نقاط مختلف استفاده کرد . اگر معلوم شده باشدکه مکان یك مقطع مخروطی‌است می‌توان ثابت‌کردکه برنقاط سیکلیك می گذرد .

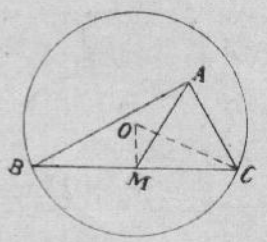
فرض‌کنیم‌که درشکل مسئله دودایره وجود داشته باشد اگردر صورت مسئله ازA وB نقاط مشترك آنهانامی برده‌نشده باشد واگراین دونقطه جزء مکان باشند ، شانس بسیار وجود داردکه مکان مطلوب‌که‌براین‌دونقطه می گذردبردونقطهٔ‌مشترك دیگرآنها یعنی نقاط سیکلیك I وJ بگذرد.درنتیجه اگر تبدیلی هموگرافی بکاربسته شود دومقطع مخروطی C_1 وC_2 بدست خواهد آمدکه یکدیگر رادرچهار نقطهٔ A' وB' وI' وJ' قطع می‌کنند وبعدازآن تنها کافی است که نوع آنها مشخص شود. اگرمکان برA' وB' بگذرد دلیلی دردست نیست‌که شامل I' و J' نباشد ودراین صورت مکان مقطعی مخروطی‌خواهد بودکه به دستهٔ متشکل ازC_1 وC_2 تعلق دارد .

اگر درشکل مسئلهٔ دونقطهٔ مشترك‌دودایره یعنی A وB دخالت داده شده باشد واگرمکان شامل این دونقطه باشد (در حالتی‌که دودایره مماس باشند مکان ازنقطهٔ تماس آنهابگذرد) بازهم شانسی ـ منتهی‌کمترـ وجود داردکه‌مکان‌یك‌دایره‌باشد. درحالتی که مکان شامل یکی ازنقاط باشد یااینکه هیچکدام‌از آنها را شامل نباشد شانس مزبور منتفی خواهد بود .

مسئلهٔ ۱ـ رأس زاویهٔ قائمهٔ A ازمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ثابت است ورأسهای B وC ازآن روی دایرهٔ معلومی جابجا می‌شوند. مکان وسط BC وهمچنین مکان تصویر A

روی BC را پیدا کنید .

۱- قبلاملاحظه می‌شودکه AO محورتقارن‌است وروی آن دونقطه ازمکان وجوددارد . پس‌مکان یك مقطع مخروطی خواهد بود .



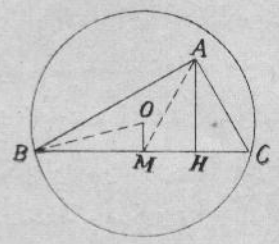
از طرف دیگر اگرI یك نقطهٔ سیکلیك باشد، عمودی‌که درA بـرAI رسم شود بـر AI منطبق می‌شود و دایره را درنقطهٔ دوم منطبق برI قطع می‌کند وM وسط قطعه خط واصل بین دونقطه که در I برهم منطبق‌اند بـرI منطبـق می‌شود . به همین تـرتیب ثابت مـی‌شود که مکان برنقطهٔ سیکلیك دیگرنیز می گذرد ودرنتیجه یك دایره است . اکنـون می‌توان مجموع $MA^2 + MO^2$ را حساب کرد ، داریم :

$$AM = \frac{BC}{2} = BM = CM$$

$$MA^2 + MO^2 = MC^2 + MO^2 = R^2 = \text{ثابت}$$

مجموع مـربعات فـواصل M ازدونقطهٔ ثابت A وO مقداری است ثابت پس مکان M دایره‌ای است‌که مرکزآن‌در وسط AO قراردارد .

۲- نظیرنقطهٔ سیکلیك I مثلث AII وجود دارد که‌یك مثلث متساوی الساقین است که دوضلعش بینهایت مرتبه بـه هم نزدیك شده‌اند . درنتیجه تصویر A روی II برI منطبق است . مکان ازنقطهٔ سیکلیك می گذرد وAO را درنقطه قطع می‌کند پس یك دایره است .



اکنون ملاحظه می‌کنیم که :

$$AH^2 = AM^2 - HM^2$$

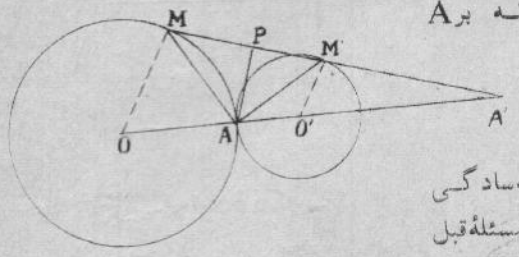
$$OH^2 = OM^2 + MH^2$$

$$AH^2 + OH^2 = AM^2 + OM^2 = BM^2 + OM^2 = R^2$$

مکان H برمکان M منطبق می‌باشد .

مسئلهٔ ۲- دودایره که درA مماس‌خارج‌اند مفروض است . ازA دوقاطع عمود برهم رسم می‌کنیم که دایره‌ها را درM وM′قطع می‌کنند وAرادرP روی MM′تصویرمی کنیم. وقتی‌زاویهٔ قائمهٔMAM′ دورAبچرخد مکان P راپیداکنید .

ملاحظه می‌شودکه OO′ خط‌المرکزین‌دو دایره‌محـورتقارن مکان است کـه برA



می گـذرد. به‌سادگـی می‌توان مانند مسئلهٔ‌قبل معلوم‌ساخت که مکان شامل نقاط سیکلیك است ونقطهٔ‌بینهایت ندارد ودرنتیجه یك دایره است .

برای اثبات کافی است ثابت شودکه MM′ باOO′در نقطهٔ‌ثابت برخورد می‌کند. باتوجه‌به اینکه زاویه‌های A_1وA_2 متمم یکدیگرندنتیجه خواهدشدکه دوزاویهٔMOA وM′O′A مکمل‌یکدیگرند ودوشعاع OMوO′M′متوازی‌می‌باشند پس MM′ ازنقطهٔA′مرکز تجانس‌مستقیم‌دودایره می گذرد ومکان P دایرهٔ به‌قطر AA′ است .

تمرینات

۱- مکان نقاطی‌که از آنها مماسهای به طول معین بر دایرهٔ مفروض رسم می‌شود .

۲-مکان‌رأس زاویهٔ‌به‌اندازهٔ معین‌ومحیط بردایرهٔ‌معلوم.

۳- پاره خط AB به‌طول a مفروض است . دایرهٔ به مرکز C وبه شعاع $AC = x$ را درنظرمی گیریم‌که درA بر AB مماس است . دایرهٔ دوم را درنظر می گیریم‌که درB بر AB وهمچنین بردایـرهٔ اول مماس باشد . وقتـی x تغییرکند مکان نقطهٔ تماس دودایرهٔ چیست ؟

۴- دایرهٔ O ونقطهٔ A مفروض است . پاره خطهایی درنظرمی گیریم که‌بین A ویك نقطه ازدایره‌محصور می‌باشند. مکان نقاطی را تعیین‌کنیدکه این پاره خطهارا به نسبت‌معـین $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌کنند .

۵- دودایره در A متقاطع‌انـد . از A قاطـعی متغیر می گـذرد ودو دایره را درM وN قطع مـی‌کند . مکان وسط MN را پیدا کنید .

۶- مکان رأس زاویهٔ قائمه ومحیط بربیضی معلوم .

۷- ازنقطهٔ ثابت I قاطعی متغیر می گذرد . مکان‌نقطهٔ تلاقی قرینه‌های قاطع مزبور را نسبت به دو خط ثابت Ax و Ay معلوم‌کنید .

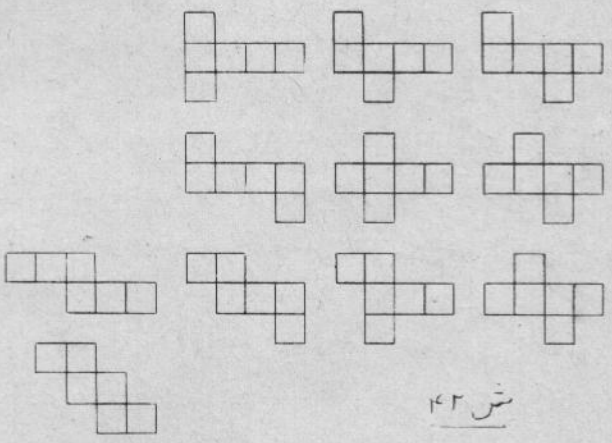
صد مسئلهٔ جالب و حل آنها

ترجمهٔ : داویدریحان

۳۴ـ گستردهٔ مکعب.

مدلهای چند وجهیها را از شکلهای مسطحی که برروی مقوا ترسیم شده‌اند، بدست می‌آورند. روی چنین شکلی‌وجوه در مجاورت یکدیگر قرار دارند و با تاکردن مقوا در امتداد یالهای شکل گسترده، مدل فضائی بدست می‌آید. گستردهٔ‌چهار وجهی منتظم را می‌توان دردوشکل مختلف رسم‌کرد. گستردهٔ یك مکعب درچند شکل وجود دارد ؟

حل ـ تمام شکلهای ممکنه را که تعداد آنها دوازده است درشکل ۴۲ نمایش داده‌ایم. شش‌عدد اولی‌آنهائی هستند که چهاروجهشان دریك ردیف‌واقع است، حالتهای دیگری از این قبیل وجود ندارد .



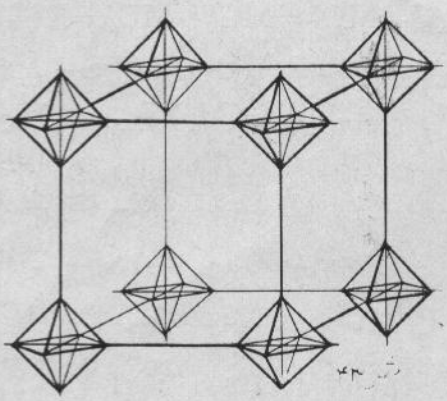
ش ۴۲

در چهار عدد بعدی سه وجه در یك ردیف واقع‌اند . و بالاخره ، آخرین طرح حالتی را نشان می‌دهدکه هیچکدام از ردیفها شامل سه‌وجه و بیشتر نمی‌باشند.

۳۵ ـ مکعبها .

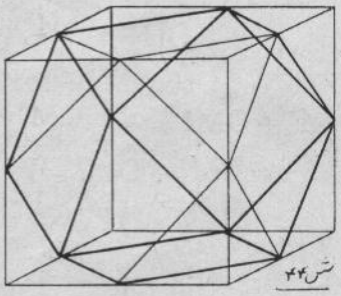
چنانکه می‌دانیم، می‌توانیم تمام‌فضارا به‌کمك مکعبهای مجاورهم پرکنیم. درهررأس چهار مکعب باهم‌تلاقی می‌کنند. بنابراین امکان دارد که با برشی مناسب از گوشه‌های این مکعبها و با چسبانیدن هشت قطعهٔ مجاور بدست‌آمده به ـ یکدیگر (که یك هشت وجهی منتظم ویك چند وجهی جدید است) فضا را با هشت وجهیهای منتظم و اجسام صلبی‌که از باقیمانده‌های مکعبهای اولیه تشکیل می‌شود ، پرکنیم . این اجسام صلب از چه نوعی‌است؟ اگرهشت وجهیها رابه‌مقدار ممکن بزرگ کنیم ، چه بخش از فضا را اشغال می‌کنند ؟ اندازهٔ اجسام صلب باقیمانده چقدرخواهد بود ؟ چند عدد از این اجسام صلب درهررأس باهم تلاقی می‌نمایند؟

حل ـ اجسام صلبی‌که از برش مکعب حاصل‌می‌شوند، دارای چهارده وجهند (تعداد وجوه مکعب به اضافهٔ تعداد گوشه‌های آن). که ازآنها هشت وجه مثلث و بقیه هشت



ش ۴۳

ضلعی می‌باشند (ش ۴۳) . برای بزرگترین هشت وجهی ، وجوه جسم صلب چهارده وجهی تبدیل به مثلثها و مربعهای شکل ۴۴ خواهد شد . چون این بزرگترین هشت وجهیها متشکل از گوشه‌های هشت مکعب مجاور ، تشکیل هشت هرم خواهند داد که قاعدهٔ آنها مثلثهای‌متساوی‌ـ الاضلاع است و سایر وجوهشان مثلثهای



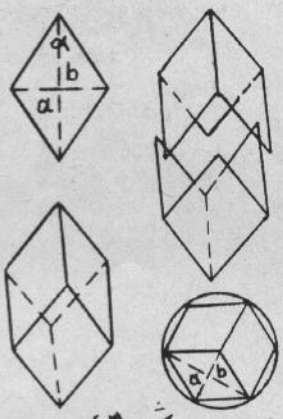
ش ۴۴

متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است که ضلع قائمش برابر با نصف یکی از یالهای مکعب می‌باشد ، هشت وجهیهائی که از هشت هرم درست شده‌اند یك ششم فضا $\left(8 \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\right)$ را اشغال می‌کنند . درهر رأس شش جسم صلب با هم تلاقی می‌کنند : چهار عدد چهارده وجهی ودوعدد هشت وجهی .

۳۶- یك شش وجهی

آیا شش وجهی وجود دارد که وجوهش لوزیهای متساوی باشند ، واین جسم یك مکعب یعنی مثل طاس تخته نرد نباشد ؟

حل - به‌سادگی می‌توان دیدکه پاسخ این‌سؤال مثبت است. شش وجهی که داری شرایط فوق باشد ، یك متوازی - السطوح است که یال‌هایش با هم مساوی بوده ودرهررأس زوایای سه‌وجه برابر باشند.



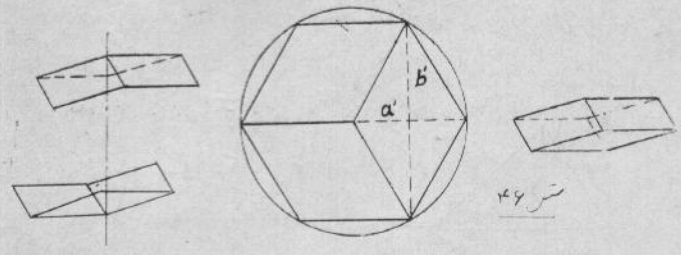
ش ۴۵

فرض‌کنیم لوزی به‌زاویهٔ حادهٔ α وبه‌اقطار $2a$ و $2b$ داشته باشیم. با قراردادن سه‌لوزی ازاین نوع درمجاورت هم‌بقسمی که زوایای حاده دو به دو ضلع مشترك داشته باشند ، یك «کنج» سه وجهی بدست می‌آوریم . شکل ۴۵ کنج مزبور و تصویر قائم آن را روی صفحه نشان می‌دهد (دید از رأس) . تجمع دوعدد ازاین‌کنجها شش وجهی از نوع مطلوب رابدست می‌دهد .

می‌بینیم که اگر α کوچکتراز 60° باشد، یعنی‌اگر:

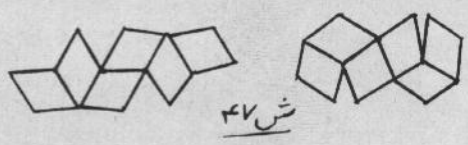
$$b = a\cot g\frac{\alpha}{2} > a\sqrt{3}$$

باشد، شش وجهی به‌روش مذکور دربالا ساخته می‌شود . ولی اگر $\alpha > 60$ ، یعنی $a < b < a\sqrt{3}$ باشد می‌توانیم کنجی باسه لوزی ، نه‌فقط بارأسهای زاویه‌های حاده، بلکه بازاویه‌های منفرجهٔ $180^\circ - \alpha$ (ش ۴۶) نیز بسازیم. دراین حالت، بغیر از شش وجهی شکل ۴۵ ، شش وجهی شکل ۴۶ را بدست می‌آوریم .



ش ۴۶

اگر $\alpha = 90^\circ$ ، داریم $a = b$ وشش وجهیها تبدیل به‌یك مکعب می‌شوند .


ش ۴۷

درشکل ۴۷ گستردهٔ دو شش وجهی که نام برده شد ملاحظه می‌شود .

یادآوری می‌کنیم که شکلهای ۴۵ و ۴۶ نوعی از دو چند وجهی محدب را نشان می‌دهند، که تعداد وجوهشان‌باهم برابروهمچنین دوبه‌دو متساویند ، ولی باوجود این ازیکدیگر متفاوت می‌باشند .

۳۷- چهار وجهیها .

شش میله با طولهای مختلف داریم، وآنهاطوری هستند که درهرتبدیلی می‌توانند همچون یالهای یك‌چهاروجهی‌درنظر گرفته شوند. بااین میله‌ها چند نوع چهاروجهی مختلف می‌توانیم بسازیم ؟

حل - برحسب اینکه دوچهاروجهی را که نسبت به‌یك صفحه متقارن هستند متمایز بدانیم یانه تعداد جوابهافرق می‌کند . حال ثابت می‌کنیم که در حالت اول شصت نوع مختلف چهاروجهی وجود دارد ؛ واضح است که درحالت ثانی بیش‌از سی‌نوع نداریم .

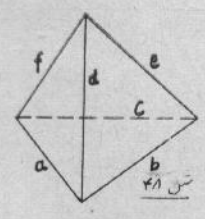
شکل ۴۸ تصویری از یك چهاروجهی با یالهای a،b f،e،d،c را نشان می‌دهد .

میله‌هائی که با آنها چهاروجهی‌ها را باید بسازیم از یك تا شش شماره گذاری شده‌اند. میلهٔ شمارهٔ k می‌تواند به‌جای هریك از یالهای a،b،c،d،e،f قرار گیرد .

بنابراین به‌تعدادتبدیلات‌شش‌چیزیعنی $6! = 720$ احتمال وجود دارد.

معهذا ، این تبدیلات تمام چهار وجهیهای مختلف را

شامل نخواهد بود. بعضیها متساویند ولی به‌صورتهای مختلف قرار گرفته‌اند.



ش ۴۸

فرض کنیم که تمام یالهای شکل ۴۸ همطول باشند معلوم کنیم که به‌چند طریق مختلف می‌توانیم این چهاروجهی راقراردهیم بطوری‌که یالها، یالهای چهار وجهی اولیه را بپوشانند. می‌بینیم که:

(۱) می‌توانیم هروجهی ازچهاروجهی را به‌عنوان‌قاعده اختیارکنیم؛

(۲) قاعده یك مثلث است‌که فقط به سه صورت مختلف می‌تواند قرار گیرد.

بنابراین‌کلا ۱۲ = ۴ × ۳ وضعیت مختلف برای همین چهاروجهی داریم واین تعداد، تمام مواضع ممکنی‌است که یالها منطبق بر یالهای چهار وجهی دروضع اولیه‌اش باشد. دراین صورت، ۷۲۰ تبدیلات میله‌های از ۱ تا ۶ که برای یالهای a تا f اختیارشده‌اند، ۱۲ مرتبه همین چهاروجهی را در اوضاع مختلف تولید می‌کند. می‌بینیم که ۶۵ = ۱۲:۷۲۰ نوع چهار ضلعی مختلف وجود داردکه باشش میله می‌توان ساخت. اگردوچهار وجهی متقارن نسبت به یك صفحه را، یکی‌فرض‌کنیم، دراین صورت تنها سی‌نوع چهاروجهی‌مختلف وجود خواهد داشت.

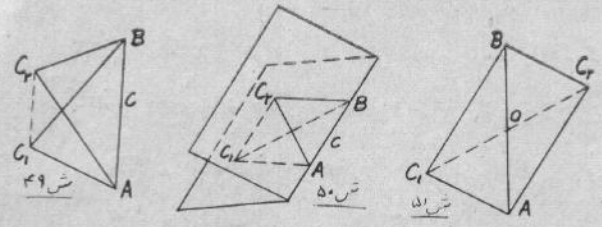
۳۸- یك چهار وجهی با وجوه متساوی.

آیا می‌توانیم یك چهاروجهی بسازیم بطوری‌که‌وجوهش از مثلثهای متساوی باهم وبه‌اضلاع به طولهای c،b،a که بطور اختیاری انتخاب شده‌اند، تشکیل شده باشد؟ اگرجواب مثبت است، حجم چنین چهاروجهی را محاسبه‌کنید.

حل - دومثلث به‌اضلاع a،b وc اختیارکرده وآنها را طوری پهلوی هم قرارمی‌دهیم‌که درضلع c (ش۴۹) مشترك باشند. با بازکردن صفحات این مثلثها ازهم فاصله‌ای راکه بین C_1 و C_2 وجود (ش ۵۰) دارد تاآنجااضافه‌می‌کنیم که‌صفحات برهم منطبق شوند ولی C_1 وC_2 درطرفین خط AB (ش۵۱) قرار گیرند.

فرض می‌کنیم که d_1 و d_2 به ترتیب فاصلهٔ C_1C_2 در شکل ۴۹ و درشکل ۵۱ باشد. شرط وجود چهاروجهی صادق در شرایط مفروض آنست‌که نامساوی زیر برقرار باشد:

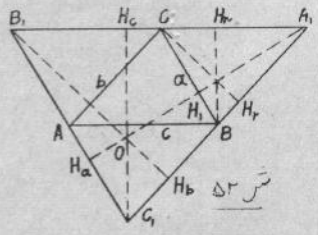
$$d_1 < c < d_2$$



ش۴۹ ش۵۰ ش۵۱

برای آنکه $d_1 < c$ باشد، لازم وکافی است‌که هرکدام از زوایای A و B حاده باشند؛ و برای آنکه داشته باشیم $c < d_2$ لازم وکافی است‌که زاویهٔ C حاده باشد. بنابراین شرط وجود چهار وجهی آنست‌که تمام زوایای مثلث ABC حاده باشند.

فرض می‌کنیم که چنین شرطی وجود داشته باشد؛ در شکل ۵۲ گستردهٔ چنین چهاروجهی دیده می‌شود؛ روابط زیر



ش ۵۲

را باهم داریم:

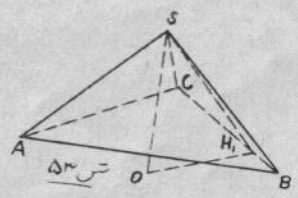
$$A_1B_1 \parallel AB \ ، \ B_1C_1 \parallel BC \ و \ C_1A_1 \parallel CA$$

با فرض:

$$BC = a \ ، \ CA = b \ ، \ AB = c \ ؛ \ a<b<c \ ؛$$

$$2p = a + b + c$$

باتوجه به شکلهای ۵۲ و ۵۳ دیده می‌شود که ارتفاع $h = SO$ چهار وجهی ازمثلث SH_1O بدست می‌آید به شرط آنکه قبلا $SH_1 = A_1H_1$ و H_1O محاسبه شود.



ش۵۳

داریم:

$$AH = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$OH_1 = H_1H_a - OH_a \ ؛ \ H_1H_a = A_1H_1$$

ازطرف دیگر، OH_a را می‌توانیم ازتساوی :

$$\frac{OH_a}{C_1H_a}=\frac{BH_c}{C_1H_c}$$

که نتیجهٔ تشابه مثلثهای C_1OH_a و $C_1B_1H_c$ است ، بدست بیاوریم، بامحاسبهٔ ساده‌ای نتیجه می گیریم که :

$$OH_a=\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{4a\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

وخواهیم داشت :

$$h^2=(A_1H)^2-(H_1H_a-OH_a)^2=$$
$$=OH_a(A_1H_a-OH_a)=$$
$$=\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{8p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

بالاخره اگر v حجم چهاروجهی باشد داریم :

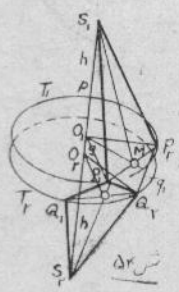
$$v=\frac{h}{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$$

۳۹ـ یك هشت وجهی .

آیا می‌توانیم هشت وجهی بسازیم که وجوهش چهار ضلعیهای متساوی باشند ؟ آیا می‌توانیم یك ده وجهی ، یا بطورکلی ، یك $2n$ وجهی $(n>3)$ بسازیم که دارای چنین خاصیتی باشد ؟

حل ـ $2n$ وجهی که در شرایط مفروض صادق باشد وجود دارد، وساختن آن بسیار ساده است . دو قرص گرد متساوی وموازی T_1 و T_2 (ش ۵۴) را درنظرمی گیریم و پیرامون هریك ازآنها را به n قسمت متساوی $(n>3)$ تقسیم می‌کنیم ؛ فرض‌می‌کنیم که $P_1, P_2, \ldots, P_n$ و $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ به ترتیب نقاط تقسیم T_1 و T_2 باشند. T_1 را در صفحه‌اش طوری می‌چرخانیم که تصویر قائم P_k روی صفحهٔ T_2 در وسط‌کمان Q_kQ_{k+1} قرار گیرد(تصویر P_n وسط‌کمان Q_nQ_1 خواهد بود).

روی خط O_1O_2 و درخارج‌آن ، دوقطعه خط O_1S_1 و O_2S_2 به طولهای متساوی (ش۵۴) جدا می‌کنیم. S_1 را به‌تمام نقاط P_k و S_2 را به‌تمام نقاط Q_k وصل می‌کنیم ؛ همچنین P_k



ش۵۴

را به Q_k و Q_{k+1} (P_n را به Q_n و Q_1) مربوط می‌کنیم. بدین‌ترتیب استخوان بندی یك $4n$ وجهی بدست می‌آیدکه قطعه‌ای ازآن درشکل ۵۴ نمود شده‌است .

ثابت می‌کنیم که می‌توانیم اجزاء این چند وجهی را بقسمی انتخاب‌کنیم که ازآن یك چندوجهی با $2n$ وجه‌متساوی بدست آید .

فرض می‌کنیم که g فاصلهٔ O_1O_2 باشد . چهار وجهی $S_1P_1Q_2P_2$ را درنظر می‌گیریم. برای آنکه $4n$ وجهی به‌صورت یك چند وجهی با $2n$ وجه متساوی درآید، لازم‌وکافی است‌که قطعات S_1Q_2 و P_1P_2 درنقطه‌ای مانند M یکدیگر را قطع نمایند. شرط مزبورموقعی برقراراست‌که داشته باشیم: (h معرف $O_1S_1=O_2S_2$ است) .

$$\frac{h}{O_1M}=\frac{h+g}{O_2Q_2}$$

این رابطه ایجاب می‌کندکه :

$$g=O_1O_2=h\frac{O_2Q_2-O_1M}{O_1M}$$

به‌ازای $n=4$ ، چهاروجهی مطلوب بدست می‌آید .

به‌سادگی می‌توانیم ثابت‌کنیم که وجوه این چند وجهی (با تعداد $2n$ وجه) چهار ضلعیهای متساویند که‌درحالت $n=3$ تبدیل به‌لوزی می‌شوند .

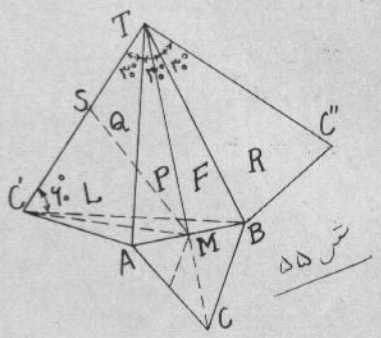
۴۰ـ کوتاهترین فاصلهٔ روی یك سطح .

به دونقطه از یك سطح محدب بسته می‌تواند خطی‌تعلق گیردکه ازهمهٔ خطوط واصل بین این دو نقطه کوتاهتر باشد . این امر با امکان اینکه خط دیگری با همین‌کوچکترین طول وجود داشته باشد، منافات ندارد : مثلا روی‌کره ، هردونقطهٔ طرفین یك قطررا می‌توان با بینهایت‌کمان بهم مربوط کرد و بطوریکه می‌دانید مابین این‌کمانها ، کوتاهترین وجود ندارد. دونقطهٔ A و B روی سطحی داده شده ،کوتاهترین فاصلهٔ بین آنها را به «فاصلهٔ AB» نمایش می‌دهیم ؛ بنابراین می‌توانیم دربارهٔ فاصلهٔ PX مابین P ونقطهٔ غیرمشخص X واقع برروی سطح مفروض صحبت‌کنیم. باچنین فرضی، می‌توانیم به‌هرنقطهٔ P نقطهٔ دیگری‌که دورترین نقطه باشد نسبت دهیم؛ این نقطه را Q می‌نامیم (تعداد زیادی ازاین نقاط می‌تواند وجودداشته باشد) . درصورتی‌که بدانیم که برای چنین زوج نقطهٔ PQ همواره حداقل دوخط وجود دارد که واصل آنها باشد و

کوتاهترین طول را نیز دارا باشد، ثابت کنید که چنین فرضی برای برخی ازچهار وجهیها مردود است .

حل - هرمی را درنظر می‌گیریم که قاعده‌اش مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد و وجوه جانبی‌اش از مثلثهای متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس °۳۰ تشکیل شده باشد. درشکل ۵۵ تصویر حاصل از قطع هرم را در امتداد CB،CA،CT و گسترش‌آنرا روی صفحه مشاهده می‌کنید .

فاصلهٔ وسط AB یعنی M از رأس T هرم در تصویر به‌صورت طول MT نمود شده‌است . ازاین موضوع فوراً نتیجه می‌گیریم که خط راست MT نه‌فقط مربوط‌به‌تصویراست، بلکه‌خطی فضائی نیزهست ، در صورتی‌که،تمام‌راههای واصل بین M و T



روی سطح هرم، مستقیم‌الخط نیستند (ولی می‌دانیم که راه واصل بین دونقطه‌که خطی راست نباشد، ازقطعه خط واصل بین این دونقطه بزرگتراست) . ولی بازهم باید ثابت‌کنیم‌که T دورترین نقطه از M می‌باشد. مثلث TC'B متساوی - الاضلاع است ، بنابراین زاویهٔ TC'B برابر با °۶۰ می‌باشد و زاویهٔ TC'M بزرگتراز°۶۰ است. چون °۴۵ = C'TM پس این مقدار کوچکتر از زاویهٔ TC'M است . پس ضلع TM ازضلع C'M بزرگتر است . و نتیجه می‌گیریم‌که اگر S ضلع C'T را طی‌کند طول MS ابتدا از C'M کوچکتر شده و سپس به‌اندازهٔ طول MT ترقی می‌کند . از این موضوع نتیجه می‌گیریم که هرنقطه از یال C'T می‌تواند از راهی کوتاهتر از MT به M وصل شود. ولی چنانکه در شکل ۵۵ دیده می‌شود ، نقطهٔ Q واقع در وجه L قبل از رسیدن به نقطهٔ S می‌تواند روی مسیر MPQS قرارگیرد . ونتیجه می‌گیریم‌که هرنقطهٔ Q از این وجه می‌تواند به M بوسیلهٔ راهی‌که‌کوتاهتر از MT (که‌کوتاهترین فاصلهٔ بین M و T است) است، مربوط شود. بنابراین هرنقطه از L به M نزدیکتراست تا T به M . برای نقاط وجه R نیز همین خاصیت برقرار است .

به‌سادگی درمی‌یابیم‌که دورترین نقطه واقع در وجه F به M نقطهٔ T است ؛ ودرقاعدهٔ ABC نقطهٔ C که از M دورتر است به T نزدیکتر می‌باشد . در این صورت ثابت کرده‌ایم که از میان تمام نقاط هرم ، T دورترین نقطه به - M است .

به خوانندگانی‌که خواستار درك عمیقی ازاین مسئله هستند توصیه می‌کنیم‌که ازخود بپرسند چرا برای مثال فوق، چهاروجهی منتظم را انتخاب نکردیم .

داستانهای ریاضی

(بقیه از صفحهٔ ۵۵۸)

پس از آنکه‌چرخ نیم دور زد ، A_1 درA_2وB_1 در B_2 یافت خواهد شد . دونقطه یك فاصله راطی‌کرده‌اند ولی نه باسرعت یکنواخت .

آنچه راکه درربع دورمی گذرد بررسی می‌کنیم . وقتی B_1 به B_2 برسد ، A_1 به A_2 می‌رسد . واضح است که در همین‌مدت، نقطهٔ واقع بربالای‌پایهٔ چرخ‌بیشترازنقطهٔ پائین‌چرخ راه پیموده‌است. اگربازهم‌به‌این موضوع‌شك‌دارید، می‌توانید باچرخانیدن (بدون لغزش)یك‌سکهٔ دوریالی درطول‌یك خط‌کش خود را سرگرم‌کنید و خواهید دید که سرکنگره‌ای پول تندترازپایه‌های آن حرکت می‌کند .

آخرین سخن : می‌توانیم بازهم یادآوری کنیم که‌در مورد چرخ متحرك ، وقتی‌که پایه می‌چرخد ، قسمتهای‌فوقانی درجهت حرکت می‌چرخند درصورتی‌که برای قسمت تحتانی حرکت درجهت خلاف است . درحالت اول سرعتها باهم‌جمع ودرحالت دوم ازهم‌کم می‌شوند . درنتیجه تمام قسمتهای پایه باسرعتهای متساوی حرکت نمی‌کنند .

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۶۴

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۶۴/۱ـ فرض می‌کنیم که معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$x^2 - px + q = 0$$

دو ریشهٔ مخالف صفر داشته باشد . اگر u یکی ازاین ریشه‌ها باشد ثابت کنید که عبارت زیر به u بستگی ندارد :

$$y = u^2 + \frac{q^2}{u^2} + u + \frac{q}{u}$$

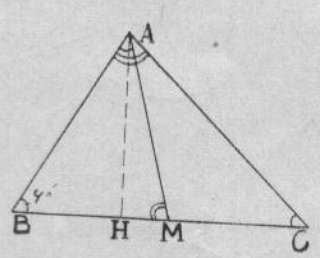
حل ـ اگر ریشهٔ دیگر معادله را v فرض کنیم چون حاصل‌ضرب دوریشه برابر است با q پس $\frac{q}{u} = v$ وخواهیم داشت :

$$y = u^2 + v^2 + u + u$$

$$y = (u+v)^2 - 2uv + (u+v)$$

$$y = p^2 - 2q + p$$

۶۴/۲ ـ مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و میانهٔ AM از آن را رسم می‌کنیم . به فرض اینکه اندازهٔ زاویهٔ B برابر با ۶۰ درجه بوده مثلث ABM با مثلث ABC متشابه باشد و داشته باشیم $AB = \sqrt{2}$ طولهای AC و BC را حساب کنید .



حل ـ زاویهٔ AMB از زاویهٔ C بزرگتر است پس اگر دو مثلث ABM و ABC که درزاویهٔ B مشترک‌اند متشابه‌باشند زاویهٔ BAM با زاویهٔ C و زاویهٔ AMB با زاویهٔA برابر بوده وداریم :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BM}{AB} \Longrightarrow AB^2 = BC \cdot BM$$

$$BM = \frac{BC}{2} \ ، \ AB^2 = \frac{BC^2}{2} \Longrightarrow BC = AB\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{2} \Longrightarrow BC = 2$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BH$$

$$AC^2 = 2 + 4 - 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AC^2 = 6 - 2\sqrt{2} \quad و \quad AC = \sqrt{6 - 2\sqrt{2}}$$

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۶۴/۳ـ فرستنده : مصطفی گودرزی طائمه

به فرض $9|x| < 1$ معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 7x + \dots + (7x)^n + \dots}} + \frac{1}{\sqrt{1 - 9x + 81x^2 + \dots + (-9x)^n + \dots}} = 2$$

حل ـ از شرط $|9x| < 1$ نتیجه می‌شود $7x < 1$ و داریم :

$$1 + 7x + \dots + (7x)^n + \dots = \frac{1}{1 - 7x}$$

$$1 - 9x + \dots + (-9x)^n + \dots = \frac{1}{1 + 9x}$$

ومعادلهٔ مفروض به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\sqrt{1 - 7x} + \sqrt{1 + 9x} = 2$$

ازحل این معادله خواهیم داشت :

$$x = 0 \quad یا \quad x = \frac{1}{16}$$

۶۴/۴ـ ترجمهٔ فتح‌الله زرگری دانشجوی دانشکدهٔ فنی

مطلوبست حل نامعادلهٔ زیر :

$$2x^{\log_{\frac{1}{2}} x} - x^{-\log_{\frac{1}{2}} x} < -1$$

حل ـ با فرض $u = x^{\log_{\frac{1}{2}} x}$ داریم:

$$2u - \frac{1}{u} + 1 < 0$$

$$\frac{2u^2 + u - 1}{u} < 0 \Longrightarrow u < -1 \text{ یا } 0 < u < \frac{1}{2}$$

چون باید داشته باشیم $0 < x \neq 0$ بنابراین باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \frac{1}{2} \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < x^{\log_x \frac{1}{2}} \\ 0 < x \neq 1 \end{cases}$$

I- اگر $0 < x < 1$ باشد خواهیم داشت :

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_x \frac{1}{2} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x}$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 > 1 \Longrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > 1 \Longrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$$

II- اگر $x > 1$ باشد خواهیم داشت :

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_x \frac{1}{2} \Longrightarrow (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 > 1$$

اما چون دراین حالت $\log_{\frac{1}{2}} x < 0$ است پس :

$$\log_{\frac{1}{2}} x < -1 \Longrightarrow x > 2$$

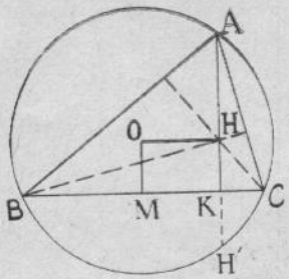
بنابراین جوابهای نامعادلهٔ مفروض عبارتند از :

$$0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad x > 2$$

۶۴/۵ـ در مثلث ABC سه ارتفاع یکدیگر را در H قطع می‌کنند و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است . در صورتی‌که OH باضلع BC موازی باشد . ثابت کنید که :

$$tg B \; tg C = 3$$

حل ـ دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم . می‌دانیم که $AH = 2OM$ واگر H' نقطهٔ تلاقی ارتفاع AK با دایرهٔ محیطی باشد $HK = H'K$ و:



$$tg B = \frac{AK}{BK} \quad \text{و} \quad tg C = \frac{AK}{CK}$$

$$tg B \, tg C = \frac{AK^2}{BK.CK}$$

چون $BK.CK = AK.KH'$ پس :

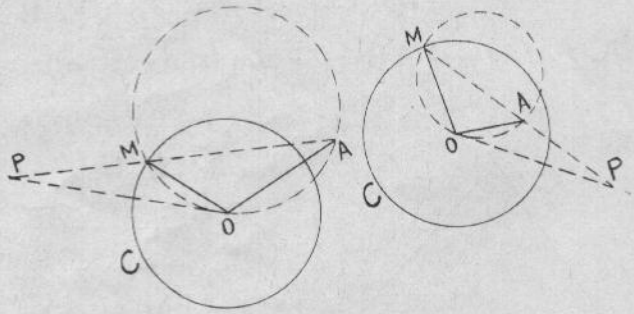
$$tg B \, tg C = \frac{AK^2}{AK.KH'} = \frac{AK}{KH}$$

$$tg B \, tg C = \frac{AH + HK}{HK} = \frac{AH}{HK} + 1 = 2 + 1 = 3$$

۶۴/۶ـ دایرهٔ (C) به مرکز O وبه شعاع R و نقطهٔ A غیر واقع بر آن و متمایز از مرکز آن مفروض است . نقطهٔ متغیر M از دایرهٔ (C) رادر نظر می‌گیریم . در نقطهٔ O مماسی بردایرهٔ محیطی مثلث AMO رسم می‌کنیم که MA را در P قطع می‌کند . ثابت کنید که نسبت $\frac{PA}{PM}$ برابر با مقدار ثابتی است و ازروی آن مکان نقطهٔ P را بدست آورید.

حل ـ ازتشابه دومثلث PAO و POM با فرض $OA = a$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{PA}{PO} = \frac{PO}{PM} = \frac{AO}{OM} = \frac{a}{R}$$



ازتناسبهای بالا نتیجه می‌شود :

$$\frac{PA}{PO} \times \frac{PO}{PM} = \frac{a}{R} \times \frac{a}{R}$$

$$\frac{PA}{PM} = \frac{a^2}{R^2} = \text{ثابت}$$

P خارج AM واقع است. اگر M بین A و P یعنی $a>R$ باشد داریم:

$$\frac{PA}{PA-PM}=\frac{a^2}{a^2-R^2} \quad \text{یا} \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}=\frac{a^2}{a^2-R^2}$$

واگر A بین P و M یعنی $a<R$ باشد داریم :

$$\frac{PA}{PM-PA}=\frac{a^2}{R^2-a^2} \quad \text{یا}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}=-\frac{a^2}{R^2-a^2}=\frac{a^2}{a^2-R^2}$$

درهرحال P مجانس M درتجانس به‌مرکز A وبه‌نسبت $\frac{a^2}{a^2-R^2}$ می‌باشد وچون M بر دایرهٔ (C) واقع است پس مکان P دایرهٔ (C′) می‌باشدکه درتجانس مزبور مجانس دایرهٔ (C) است .

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۶۴/۷ـ اولا منحنیهای C_1 و C_2 نمایش تابعهای زیر را در یك شکل رسم کنید :

$$C_1 : y=x^2-2x$$

$$C_2 : y=-x^2+4x+5$$

ثانیاً اگر S_1 و Δ_1 بـه ترتیب رأس و محور تقـارن منحنی C_1 و S_2 و Δ_2 به ترتیب رأس و محور تقارن منحنی C_2 باشد و Δ_1 با C_1 در M_1 و Δ_2 با C_2 در M_2 متقاطع باشد؛

۱) ثـابت کنید $S_1M_1S_2M_2$ متوازی‌الاضـلاع است و مساحت آنرا بدست آورید .

۲) مختصات P مرکز متوازی‌الاضلاع مزبور راحساب کنید ونقاطی ازمنحنیهای C_1 و C_2 راتعیین کنیدکه مماسهای در آن نقاط بر منحنی با خط OP موازی باشد .

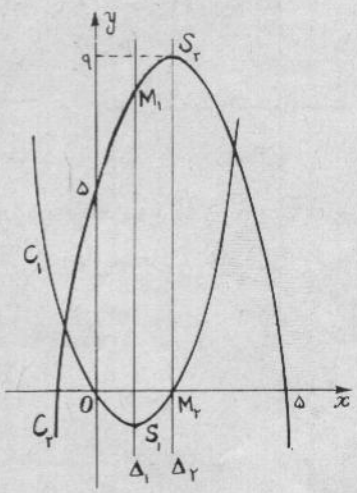
حل ـ داریم :

$$y'=2x-2 \quad \text{و} \quad x=1$$

$$y'=-2x+4 \quad \text{و} \quad x=2$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y′		−			0		+		
y	$+\infty$	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		−1		0		2		5		$+\infty$
y′			+				0		−		
y	$-\infty$	↗	0	↗	5	↗	9	↘	0	↘	$-\infty$



ثانیاً درتابع اول درازاء $x=2$ داریم $y=0$ پس $M_2(2,0)$ و در تابع دوم در ازاء $x=1$ داریم $y=8$ پس $M_1(1,8)$ وچون $S_1(1,-1)$ و $S_2(2,9)$ پس:

$$S_1M_1=8+1=9$$

$$S_2M_2=9+0=9$$

دو پاره خط S_1M_2 و S_2M_2 متساوی و متوازی‌اند پس چهارضلعی $S_1M_1S_2M_2$ متـوازی‌الاضلاع است .

فاصلهٔ دوخط متوازی Δ_1 و Δ_2 برابر بایك است پس S مساحت متوازی‌الاضلاع مزبور برابراست با:

$$S=\frac{9\times 1}{2}=\frac{9}{2} \quad \text{واحدسطح}$$

۲ـ نقطهٔ P وسط M_1M_2 واقع است ونتیجه می‌شود:

$$P\left(x=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2} \text{ و } y=\frac{8+0}{2}=4\right)$$

$$m_{OP}=4:\frac{3}{2}=\frac{8}{3} \Longrightarrow$$

$$\frac{8}{3}=2x-2 \Longrightarrow x=\frac{7}{3} \text{ و } y=\frac{7}{9}$$

$$\frac{8}{3}=-2x+4 \Longrightarrow x=\frac{2}{3} \text{ و } y=\frac{65}{9}$$

۶۴/۸ـ از **سعید فرشاد** دانشجوی ریاضی دانشگاه تبریز

به فرض $\cos 2x\cos 2y=1$ مقدار عبارت : $P=tg^2x+tg^2y$ را حساب کنید.

حل ـ بافرض $\cos 2x=a$ و $\cos 2y=b$ داریم:

$$P=\frac{1-a}{1+a}+\frac{1-b}{1-b}=\frac{2-2ab}{ab+a+b+1}$$

$ab = ۱ \Longrightarrow P = ۰$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۶۴/۹ـ دو نقطهٔ $A(۵و۲)$ و $B(۱و۰)$ مفروض است. نقطهٔ C و منحنی P به معادلهٔ:

$$y = ax^۲ + bx + c$$

را چنان مشخص کنید که مثلث ABC در زاویهٔ B قائمه باشد و سه نقطهٔ A و B و C بر منحنی P قرار داشته مماس براین منحنی در B با خط AC موازی باشد.

حل ـ معادلهٔ خط BC را بدست می‌آوریم:

$$m_{AB} = -۲ \Longrightarrow m_{BC} = +\frac{۱}{۲}$$

$$(BC):\ y = \frac{۱}{۲}(x - ۱)$$

هرگاه خطی سهمی P را در دونقطهٔ $M_۱$ و $M_۲$ قطع کند هرگاه این خط به‌موازات خود حرکت کند مکان هندسی K وسط $M_۱M_۲$ خطی‌است موازی با محورسهمی و نقطهٔ تلاقی این‌خط با سهمی نقطه‌ای ازآن است که مماس درآن با $M_۱M_۲$ موازی است. خطی‌که از B موازی بامحور سهمی P رسم شود به‌معادلهٔ $x = ۱$ است و این خط از وسط AC می‌گذرد و چون طول A صفراست پس طول نقطهٔ C برابر می‌شود با ۲ و از روی معادلهٔ خط BC نتیجه‌می‌شود:

$$C(x = ۲ \text{ و } y = \frac{۱}{۲})$$

مختصات سه نقطهٔ A و B و C باید درمعادلهٔ منحنی P صدق کنند یعنی:

$$\begin{cases} ۲ = c \\ ۰ = a + b + c \\ \frac{۱}{۲} = ۴a + ۲b + c \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a = \frac{۵}{۴} \\ b = -\frac{۱۳}{۴} \\ c = ۲ \end{array} \right.$$

$$y = \frac{۱}{۴}(۵x^۲ - ۱۳x + ۸)$$

۶۴/۱۰ـ ترجمهٔ از فرانسه

شاخهٔ H از هذلولی به‌معادلهٔ $y = \frac{۱}{x}$ راکه در ربع اول محورهای مختصات واقع است در نظر می‌گیریم. بر این شاخه دو نقطهٔ $M_۱(x_۱ \text{ و } y_۱)$ و $M_۲(x_۲ \text{ و } y_۲)$ را انتخاب می‌کنیم. مماس در $M_۱$ بر H محور $x'x$ را در $T_۱$ ومحور $y'y$ را در $T'_۱$ قطع می‌کند. مماس در $M_۲$ بر H محورهای طول و عرض را به ترتیب در $T_۲$ و $T'_۲$ قطع می‌کند. نقطهٔ تلاقی دو مماس مزبور را I، مساحت سطح محصور بین پاره خطهای $OM_۱$ و $OM_۲$ و کمان $M_۱M_۲$ از H را با S و مساحت سطح محصور بین کمان مزبور و پاره خطهای $M_۱T_۱$ و $T_۱T_۲$ و $T_۲M_۲$ را با S' و بالاخره مساحت سطح محصور بین همان کمان و پاره خطهای $M_۱m_۱$ و $m_۱m_۲$ و $m_۲M_۲$ را با T نشان می‌دهیم که $m_۱$ و $m_۲$ تصویرهای $M_۱$ و $M_۲$ روی Ox می‌باشد.

۱ـ مقدارهای S و S' را با T مقایسه‌کنید و نتیجه بگیرید که $S = S'$

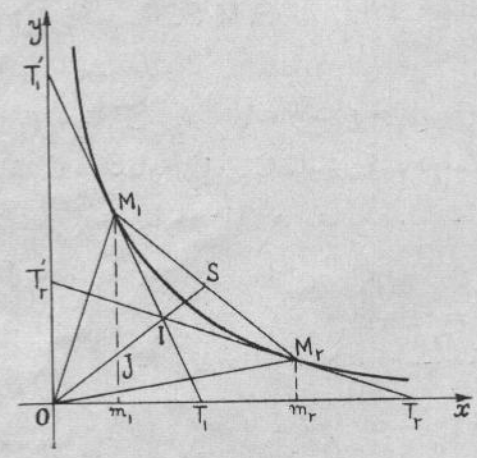
۲ـ مختصات I را حساب کنید و ثابت‌کنید که OI بر نقطهٔ S وسط $M_۱M_۲$ می‌گذرد.

۳ـ ثابت‌کنید که دومثلث $OIM_۱$ و $OIM_۲$ معادل‌اند و Σ اندازهٔ مساحت آنها را برحسب $x_۱$ و $x_۲$ و بعد برحسب α و β مختصات I حساب کنید.

حل ـ فرض می‌کنیم $x_۱ < x_۲$ و نقطهٔ تلاقی $OM_۲$ را با $M_۱m_۱$ به J نشان می‌دهیم. داریم:

$$\text{مساحت } OM_۱m_۱ = \text{مساحت } OM_۲m_۲ = \frac{۱}{۲}x_۱y_۱ =$$

$$= \frac{۱}{۲}x_۲y_۲ = \frac{۱}{۲}$$



از آنجا نتیجه می‌شود که مثلث $OM_۱J$ با ذوزنقهٔ $m_۱JM_۲m_۲$ معادل می‌باشد یعنی: $S = T$

بنابه خاصیت هذلولی نقطه‌های M_1 و M_2 به ترتیب بروسط T_1T_1' و T_2T_2' واقع‌اند، پس‌نقطهٔ m_1 وسط OT_1 و نقطهٔ m_2 وسط OT_2 قراردارد وداریم :

$$\text{مساحت } M_1m_1T_1 = \frac{1}{2}m_1T_1 \times m_1M_1 =$$

$$= \frac{1}{2}x_1y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{مساحت } M_2m_2T_2 = \frac{1}{2}m_2T_2 \times m_2M_2 =$$

$$= \frac{1}{2}x_2y_2 = \frac{1}{2}$$

دوشلث $M_1m_1T_1$ و $M_2m_2T_2$ معادل‌اند و نتیجه می‌شود : $S' = T$ ودرنتیجه خواهیم داشت :

$$S = S' = T$$

۲ـ داریم $T_1(2x_1 و 0)$ و $T_1'(0 و 2y_1)$ ومعادلهٔ خط T_1T_1' چنین می‌شود :

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1 \quad \text{یا} \quad xy_1 + xy_1 = 2$$

به‌همین‌ترتیب معادلهٔ T_2T_2' عبارت می‌شود از :

$$xy_2 + yx_2 = 2$$

از حل دستگاه دومعادلهٔ بالاخواهیم داشت :

$$I \begin{cases} \alpha = \dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2} = \dfrac{2}{y_1+y_2} \\[2ex] \beta = \dfrac{2y_1y_2}{y_1+y_2} = \dfrac{2}{x_1+x_2} \end{cases}$$

ازطرف دیگر داریم :

$$S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

تساوی $\frac{x_I}{y_I} = \frac{x_S}{y_S}$ برقراراست و نتیجه می‌شود که سه نقطهٔ S وI وO روی یك خط راست واقع‌اند .

۳ ـ چون OS میانهٔ مثلث OM_1M_2 است پس‌دو نقطهٔ M_1 وM_2 ازخط OI به‌یك فاصله‌اند ودرنتیجه دوشلث OIM_1 وOIM_2 معادل‌اند و اگر I' تصویر I روی Ox باشد داریم :

$$\Sigma = \text{مساحت } OIM_2 =$$

$$= \text{مساحت } OIT_2 - \text{مساحت } OM_2T_2$$

$$\Sigma = \frac{1}{2}(II' - m_2M_2)OT_2 = (\beta - y_2)x_2$$

$$\Sigma = x_2\left(\frac{2}{x_1+x_2} - \frac{1}{x_2}\right) = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

برای محاسبهٔ Σ برحسب α وβ چنین عمل می‌کنیم.

$$\Sigma^2 = \frac{(x_2-x_1)^2}{(x_2+x_1)^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}{(x_1+x_2)^2} =$$

$$= 1 - \frac{4x_1x_2}{(x_1+x_2)^2} = 1 - \frac{4x_1x_2}{(x_1+x_2)} \times \frac{1}{x_1+x_2}$$

$$\Sigma^2 = 1 - 2\alpha \times \frac{\beta}{2} = 1 - \alpha\beta$$

$$\Sigma = \sqrt{1 - \alpha\beta}$$

۶۴/۱۱ـ ترجمهٔ **فتح‌الله زرگری** از مجلهٔ روسی ریاضیات در دبیرستان .

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\cos^2 x + \cos\frac{x}{2}\cos^2 x - \cos\frac{x}{2} - 1 =$$

$$= 2\left(\sin\frac{x}{4} - \cos x\right)^2$$

حل ـ طرف اول معادله را به‌ترتیب زیرمی‌نویسیم

$$\cos^2 x\left(1 + \cos\frac{x}{2}\right) - \left(1 + \cos\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \left(1 + \cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2 x - 1\right) = -\sin^2 x\left(2\cos^2\frac{x}{4}\right)$$

معادلهٔ مفروض چنین می‌شود .

$$-2\sin^2 x\cos^2\frac{x}{4} = 2\left(\sin\frac{x}{4} - \cos x\right)^2$$

طرف اول معادله هیچگاه مثبت نیست و طرف دوم آن هیچگاه منفی نمی‌باشد بنابراین تساوی وقتی برقرار خواهد بودکه طرفین برابر باصفرباشند :

$$\begin{cases} \sin x\cos\dfrac{x}{4} = 0 \\[2ex] \sin\dfrac{x}{4} - \cos x = 0 \end{cases}$$

I ـ ازمعادلهٔ‌اول‌اگر $\sin x = 0$ یعنی $x = k_1\pi$ باشدآنگاه ازمعادلهٔ دوم داریم :

$$\sin\frac{k_1\pi}{4} = \cos k_1\pi$$

k عددی است صحیح یاصفر پس مقدارطرف‌دوم برابربا

± 1 است . اگر k فرد باشد طرف اول برابر با $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ وطرف دوم برابر با -1 بوده تساوی برقرار نیست . پس k_1 بایدزوج باشد وچون دراین حال مقدارطرف دوم $+1$ است پس کمان طرف اول باید به‌صورت $2k'\pi+\frac{\pi}{2}$ باشد واین درموقعی است که داشته‌باشیم $k_1 = 8k + 2$ وجواب معادله چنین می‌شود:

$$x = 8k\pi + 2\pi$$

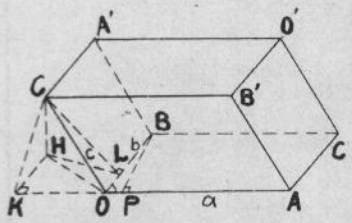
II- ازمعادلهٔ اول اگرداشته باشیم $\cos\frac{x}{4} = 0$ نتیجه‌خواهد شد $x = 4k_2\pi + 2\pi$ وبه طریق مشابه معلوم خواهد شدکه این جواب وقتی قابل‌قبول است‌که k_2 زوج باشد ودرنتیجه همان جواب بالابدست می‌آید .

به هرحال جواب معادله عبارتست از :

$$x = 8k\pi + 2\pi$$

۶۴/۱۲- ترجمهٔ از فرانسه

اگر طولهای یالهای یك رأس از متوازی‌السطوحی a و b و c و اندازه‌های زاویه‌های دو به دو این یالها α و β و γ باشد حجم متوازی‌السطوح را برحسب a و b و c و α و β و γ حساب کنید .



حل- متوازی‌السطوح $OABCO'A'B'C'$ را مطابق شکل در نظر می گیریم و فرض می کنیم :

$OA = a$ و $OB = b$

$OC = c$

$\angle COB = \alpha$ و $\angle AOC = \beta$ و $\angle BOA = \gamma$

عمود BP رابر OA وعمود CH را برصفحهٔ $OAC'B$ وعمودهای HK و HL رابه‌ترتیب بر AO و BO رسم‌می کنیم درمثلث قائم‌الزاویهٔ BOP داریم :

$$BP = OB\sin\gamma = b\sin\gamma$$

اگر S مساحت متوازی‌الاضلاع $OAC'B$ باشدداریم:

$$S = OA.BP = ab\sin\gamma$$

درمثلثهای قائم‌الزاویهٔ OKC و OKC به‌فرض اینکه β منفرجه و α و γ حاده باشند داریم :

$$OK = OC\cos(COK) = -c\cos\beta$$

$$OL = OC\cos(COL) = c\cos\alpha$$

چهارضلعی $KHLO$ محاطی است و OH قطر دایرهٔ محیطی آن می‌باشد بنابراین داریم :

$$KL = OH.\sin(KOL) = OH\sin\gamma$$

$$OH = \frac{KL}{\sin\gamma} \text{ و } OH^2 = \frac{KL^2}{\sin^2\gamma}$$

درمثلث KOL داریم :

$$KL^2 = OK^2 + OL^2 - 2OK.OL.\cos KOL$$

$$KL^2 = c^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\alpha - 2(-c\cos\beta)\times$$
$$\times(c\cos\alpha)(-\cos\gamma)$$

$$KL^2 = c^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ CHO داریم :

$$CH^2 = OC^2 - OH^2 = c^2 - \frac{KL^2}{\sin^2\gamma}$$

$$CH^2 = c^2 - \frac{c^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}{\sin^2\gamma}$$

چون این عبارت رادر رابطهٔ :

$$V = ab\sin\gamma.CH \text{ یا } V = S.CH$$

منظورکرده ساده کنیم نتیجه خواهد شد :

$$V = abc\times$$
$$\times\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

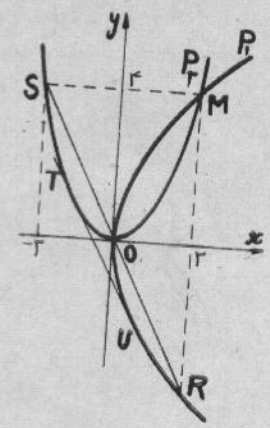
حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۶۴/۱۳- اولا سهمیهای به‌معادله های زیر را در یك شکل رسم کنید :

$$(P_1) : y^2 = 8x \quad , \quad (P_2) : y = x^2$$

ثانیاً دو سهمی مزبور یکدیگر را در M قطع می‌کنند و خطوطی‌که از M موازی با محورهای مختصات رسم شوند P_1 و P_2 را به ترتیب در R و S قطع می‌کنند . مختصات‌این نقاط را حساب کنید و ضریب زاویهٔ خط RS را بدست آورده ثابت کنیدکه اگر مماسی موازی با RS بر یکی از سهمیهارسم کنیم بر دیگری نیز مماس خواهد بود . معادلهٔ این مماس مشترك و مختصات نقطهٔ تماس آنرا با هر یك از دو سهمی بدست آورید .

حل ـ اولا منحنیها به‌شکل مقابل می‌باشد .



ثانیاً مقدار y از معادلهٔ P_2 رادرمعادلهٔ P_1 منظورمی‌کنیم :

$x^2 = 8x \Longrightarrow$

$x = 0$ و 2

$M(2,4) \Longrightarrow$

و $S(-2,4)$

$R(2,-4)$

$$m_{RS} = \frac{-4-4}{2+2} = -2$$

ضریب زاویهٔ مماس موازی با RS برابر ۲ـ است و درمورد P_2 داریم :

$y' = 2x ، 2x = -2 \Longrightarrow x = -1$ و $y = 1$

معادلهٔ مماس بر P_1 دراین نقطه می‌شود :

$y = -2x - 1$

درمورد P_2 داریم :

$2yy' = 8 ، 2y(-2) = 8 \Longrightarrow y = -2$ و $x = \frac{1}{2}$

$y + 2 = -2(x - \frac{1}{2})$ یا $y = -2x - 1$

معادلهٔ مماس درنقطهٔ $T(-1,1)$ برمنحنی P_2 همان معادلهٔ مماس برمنحنی P_1 درنقطهٔ $U(\frac{1}{2},-2)$ است پس‌خط TU به‌معادلهٔ $y = -2x - 1$ مماس‌مشترك دوسهمی P_1 و P_2 می‌باشد .

۶۴/۱۴ـ ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

معادلهٔ زیررا حل‌کنید وجوابهای کلی آنرا بدست‌آورید

$$\sin x - \sin 3x = \cos 2x \sin 3x$$

حل ـ ازتبدیل عبارت طرف اول به‌حاصل ضرب‌نتیجه خواهد شد :

$$-2\sin x \cos 2x = \cos 2x \sin 3x$$

$$\cos 2x(2\sin x + \sin 3x) = 0$$

$$\cos 2x(2\sin x + 3\sin x - \sin^3 x) = 0$$

$$\cos 2x \sin x(5 - \sin^2 x) = 0$$

$$5 - \sin^2 x \neq 0$$

$$\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۶۴/۱۵ـ ترجمهٔ از فرانسه

بیضی (E) به معادلهٔ زیر مفروض است :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

کانونهای آنرا F و F′ وفاصلهٔ کانونی آنرا 2c می‌نامیم سهمی (P) را درنظر می‌گیریم‌که yy′ خط هادی و F کانون آن باشد .

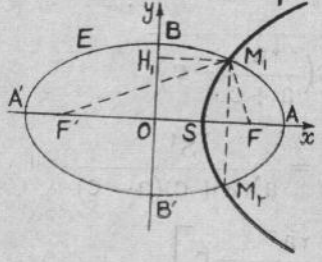
۱ـ مختصات M_1 و M_2 نقاط تلاقی بیضی و سهمی و فاصلهٔ آنها را از F و F′ حساب‌کنید .

۲ـ مساحت مثلث M_1OM_2 را برحسب a و c حساب کنید و از روی آن تابع z نسبت مربع مساحت این مثلث را به مربع‌مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ به ضلعهای a و b را برحسب e خروج از مرکز بیضی (E) مشخص‌کنید .

۳ـ اگر e متغییر فرض شودکه از صفر تا $+\infty$ تغییر می‌کند جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع z را رسم کنید و تحدب و تقعر و نقطهٔ عطف منحنی را معین کنید .

۴ـ فرض‌کنیم بیضی (E) متغیرباشد . اگر z برابر با مقدار معلوم k^2 باشد از روی شکل در تعداد مقادیر قابل‌قبول برای e خروج از مرکز بیضی (E) بحث‌کنید .

حل ـ سهمی P مکان هندسی نقاطی است‌که ازF و از y′y متساوی الفاصله‌اند . اگر M (xoy) نقطهٔ غیرمشخصی ازاین‌سهمی باشد داریم :



$$(x-c)^2 + y^2 = x^2$$

بعداز اختصار خواهیم داشت :

$$(P):\ y^2 = c(2x - c)$$

برای تعیین مختصات نقاط تلاقی،مجهول y را بین دو معادله حذف می‌کنیم .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{c(2x-c)}{b^2}=1$$

$$b^2x^2+2a^2cx-a^2(b^2+c^2)=0$$

$$b^2x^2+2a^2cx-a^4=0$$

این معادله دوریشهٔ مختلف العلامت دارد که‌ریشهٔ‌مثبت آن طول مشترك نقاط M_1 و M_2 می‌باشد ومقدار این ریشه بعدازاختصار برابر خواهد شد با $\frac{a^2}{a+c}$ واز روی آن عرض نقاط بدست خواهد آمد :

$$M_1\left(x_1=\frac{a^2}{a+c} \text{ و } y_1=\sqrt{c\left(\frac{2a^2}{a+c}-c\right)}\right)$$

$$M_2\left(x_2=\frac{a^2}{a+c} \text{ و } y_2=-\sqrt{c\left(\frac{2a^2}{a+c}-c\right)}\right)$$

می‌دانیم‌که فواصل یك نقطهٔ به‌طول x واقع بر بیضی‌از کانونهای آن برابر است با :

$$MF=a-\frac{cx}{a} \text{ و } MF'=a+\frac{cx}{a}$$

درمورد نقطهٔ M_1 خواهیم داشت :

$$M_1F=a-\frac{cx_1}{a}=a-\frac{ac}{a+c}=\frac{a^2}{a+c}$$

$$M_2F=a+\frac{cx_1}{a}=a+\frac{ac}{a+c}=\frac{a(a+2c)}{a+c}$$

۲ـ درمثلث M_1OM_2 قاعده را M_1M_2 اختیارمی‌کنیم که طول آن برابراست با $2y_1$ وارتفاع نظیر آن برابر با x_1 است پس :

$$S=x_1y_1=\frac{a^2}{a+c}\sqrt{c\left(\frac{2a^2}{a+c}-c\right)}$$

$$z=\frac{S^2}{a^2b^2}=\frac{S^2}{a^2(a^2-c^2)}=\frac{S^2}{a^2(a+c)(a-c)}$$

$$z=\frac{a^2c}{(a+c)^2(a-c)}\left[\frac{2a^2}{a+c}-c\right]$$

$$z=\frac{a^2c(2a^2-ac-c^2)}{(a+c)^4(a-c)}$$

$$2a^2-ac-c^2=(2a+c)(a-c)$$

$$z=\frac{a^2c(2a+c)}{(a+c)^4}$$

ازتقسیم جمله‌های صورت ومخرج کسربه a^4 وباتوجه به‌اینکه $e=\frac{c}{a}$ خواهیم‌داشت:

$$z=\frac{e(2+c)}{(1+e)^4}$$

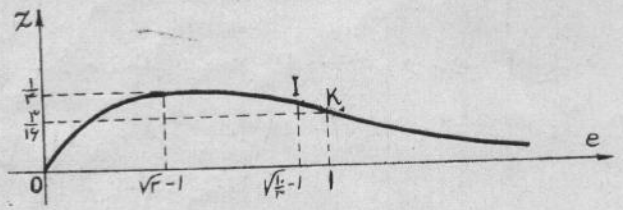
۳ـ بعداز اختصار خواهیم داشت :

$$z'=\frac{-2(e^2+2e-1)}{(1+e)^5}$$

$$z''=\frac{2(3e^2+6e-7)}{(1+e)^4}$$

هرگاه e درفاصلهٔ $(0 \text{ و } +\infty)$ تغییرکند مشتق اول در ازاء $e=\sqrt{2}-1$ ومشتق‌دوم درازاء $e=-1+\sqrt{\frac{10}{3}}$ صفرشده تغییرعلامت می‌دهد. جدول تغییرات و شکل منحنی نمایش تابع z چنین است :

e	0		$\sqrt{2}-1$		$\sqrt{\frac{10}{3}}-1$		1		$+\infty$
z'		$+$	0			$-$			
z''			$-$		0		$+$		
z	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{21}{100}$	$\searrow$	$\frac{3}{16}$	$\searrow$	0



منحنی‌دارای نقطهٔ عطف $I\left(\sqrt{\frac{10}{3}}-1 \text{ و } \frac{21}{100}\right)$ می‌باشد و تقعرکمان OI ازآن به‌سمت yهای منفی وتقعرکمان دیگرآن به سمت yهای مثبت است .

۴ـ خروج ازمرکز بیضی کوچکتراز یك‌است . اگر K نقطه‌ای‌ازمنحنی بالابه‌طول یك باشدباید نقطهٔ‌مشترك منحنی و خط‌به معادلهٔ $z=k^2$ برکمان OK واقع‌باشدوچون‌عرض‌نقطهٔ K برابراست با $\frac{3}{16}$ بنابراین خواهیم داشت :

$0 < k^2 < \frac{3}{16}$: برای e یك جواب وجود دارد .

$\frac{3}{16} < k^2 < \frac{1}{4}$: برای e دوجواب وجوددارد که در

ازاء $k^2 = \frac{1}{4}$ منطبق‌اند .

$k^2 > \frac{1}{4}$: برای e جواب وجودندارد.

۶۴/۱۶ـ ازطهمورث اسکندری کلاس ششم‌ریاضی دبیرستان هدایت سنندج

اگر در مثلثی بین p نصف محیط و d_a طول نیمساز داخلی زاویهٔ A و طولهای اضلاع رابطهٔ زیر برقرار باشدبین طولهای ارتفاعهای آن چه رابطه‌ای برقرار خواهد بود ؟

$$4a^2p^2 - 4a^3p - b^2c^2(d_a)^2 = 0$$

حل ـ از تقسیم طرفین رابطهٔ داده شده بر $4a^2b^2c^2$ نتیجه خواهد شد :

$$\frac{p^2 - pa}{b^2c^2} = \frac{d_a^2}{4a^2}$$

$$\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{d_a}{2a}$$

$$\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{1}{2a} \times \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{bc}}{a(b+c)}$$

رابطهٔ اخیر بعداز اختصارمی‌شود :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

وچون ارتفاعات معکوساً بااضلاع متناسب‌اند پس :

$$h_a = h_b + h_c$$

۶۴/۱۷ـ ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

معادلهٔ زیر را حل‌کنید و فرمول کلی جوابهای آنرا بدست آورید :

$$\sin x\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right) + \cos x\left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right) = 0$$

حل ـ معادلهٔ داده شده بعدازاختصار چنین می‌شود :

$$\sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2$$

این تساوی تنها وقتی برقرار است‌که :

$$\begin{cases} \sin\frac{5x}{4} = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \frac{(1+4k_1)\pi}{5} \\ x = 2k_2\pi \end{array} \right.$$

k_1وk_2 عددهای صحیح‌اند وباید داشته باشیم :

$$\frac{4k_1 + 1}{5} = 2k_2 \Longrightarrow k_1 = 2k_2 + \frac{2k_2 - 1}{4}$$

برای اینکه k_1 عدد صحیح باشد لازم وکافی است که $2k_2 = 4k + 1$ باشد وازآنجا نتیجه خواهد شد :

$$x = (4k + 1)\pi$$

۶۴/۱۸ـ ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

کوچکترین عدد n را تعیین‌کنید که عدد :

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)n$$

بر 7^{100} بخش پذیر باشد .

حل ـ برای آنکه N بر 7^{100} بخش پذیر باشد لازم و کافی است‌که درتجزیهٔ N به‌اعداد اول صد عامل ۷ وجود داشته باشد. گروههای اعداد زیررا درنظرمی گیریم :

۱) ۱و۲و۳و...و۴۹

۲) ۵۰و۵۱و...و۹۸

. . . . . .

k+۱) $49k+1, 49k+2, \dots, 49k+49$

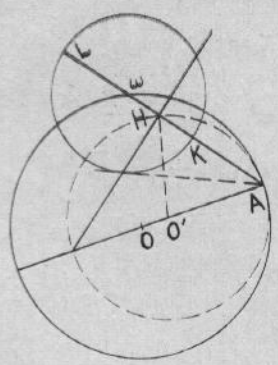
هر گروه شامل ۷ مضرب ۷ است‌که‌آخرین‌آنها مضرب ۴۹ است پس درحاصل ضرب اعداد هر گروه ۸ عامل ۷ وجود خواهد داشت اماتعداد این‌عوامل‌در گروه هفتم (وبطورکلی گروهی که‌رتبه‌اش‌مضرب۷ باشد) برابر با۹می‌باشد. پس‌برای‌اینکه ۱۰۰عامل ۷داشته باشیم‌باید۱۲ گروه‌انتخاب کنیم به‌اضافهٔ ۳ مضرب ۷از گروه سیزدهم . آخرین عدد ازگروه دوازدهم برابراست با$49 \times 12 = 588$ وسه‌مضرب متوالی ۷ بعداز عدد مزبور ۵۹۵ و۶۰۲ می‌باشد . بنابراین جواب مسئله عبارتست از : $n = 609$

۶۴/۱۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دایرهٔ (O) به مرکز O و به‌شعاع R و نقطهٔ ثابت A واقع برآن مفروض‌است و k عددی است مثبت ومخالف بایك. دایرهٔ (ω) را درنظرمی‌گیریم که مرکزآن روی (O) بوده و شعاع‌آن برابر با $r = k \cdot \omega A$ باشد.

اگر H پای قطبی A نسبت به دایرهٔ (ω) باشد مکان H راتعیین‌کنید وازآن نتیجه بگیریدکه دایرهٔ (ω) بر دایرهٔ ثابتی عمود است .

حل ـ داریم :



$$\overline{\omega H}.\overline{\omega A} = r^2 = k^2.\overline{\omega A}^2$$

$$\overline{\omega H} = k^2.\overline{\omega A}$$

$$\overline{AH} - \overline{A\omega} = -k^2\overline{A\omega}$$

$$\overline{AH} = (1-k^2)\overline{A\omega}$$

در تجانس به ـ مرکز A وبه‌نسبت $(1-k^2)$ نقطهٔ H مجانس نقطهٔ ω است و چون ω بر دایرهٔ (O) حرکت می‌کند پس مکان H دایرهٔ (O′) است که از A می‌گذرد و O′ مرکزآن روی AO است بقسمی که :

$$\overline{AO'} = (1-k^2)\overline{AO} \Rightarrow \overline{OO'} = k^2.\overline{OA}$$

اگر K و L نقاط تلاقی Aω با دایرهٔ به‌مرکز ω باشد می‌دانیم که K و L نسبت به A و H مزدوج توافقی‌اند . قطر KL ازدایرهٔ (ω) بوسیلهٔ دایرهٔ (O′) به‌توافق‌تقسیم‌شده است پس این دودایره بریکدیگرعمود می‌باشند.

۶۴/۲۰ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دونقطهٔ ثابت A و B مفروض است. مکان نقاط M را تعیین کنیدکه اگر H تصویرقائم M روی خط AA′ باشد داشته باشیم :

$$\frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2} = \frac{1}{MH^2}$$

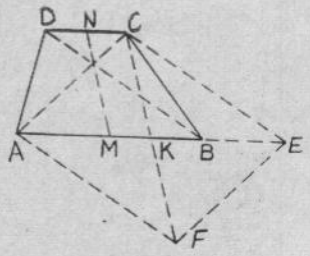
حل ـ اگر H بین A و B واقع باشد مثلث AMB در زاویهٔ M قائمه است و اگر H خارج A و B واقع باشد مثلث مزبور در رأس M شبه قائمه می‌باشد. پس‌مکان مطلوب عبارتست از دایرهٔ به قطر AA′ و هذلولی متساوی‌القطرین به‌رأسهای A و A′

حل مسائل متفرقه

مسائل ترجمهٔ فتح‌الله زرگری

از مجلهٔ روسی ریاضیات در دبیرستان

۶۴/۲۱ـ مطلوبست محاسبهٔ مساحت ذوزنقه برحسب طولهای قطرها وطول پاره خطی که اوساط دوقاعدهٔ آنرا بهم وصل می‌کند .



حل ـ ذوزنقهٔ ABCD را در نظر می‌گیریم. وسط قاعدهٔ AB را M و وسط قاعدهٔ CD را N می‌نامیم وفرض می‌کنیم :

$$AC = k \quad و \quad BD = l \quad و \quad MN = m$$

از C موازی با BD رسم می‌کنیم که امتداد AB را در E قطع می‌کند . طول BE با CD برابر است و مثلث ACE باذوزنقهٔ مفروض معادل می‌باشد. اگر K وسط AE باشد داریم :

$$MK = AK - AM = \frac{AE}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = NC$$

نتیجه می‌شود :

$$CK = MN = m$$

روی مثلث ACE متوازی‌الاضلاع ACEF را می‌سازیم . دو مثلث ACE و ACF معادل‌اند پس S مساحت ذوزنقهٔ مفروض برابر است با مساحت مثلث ACF و چون اندازه‌های ضلعهای این مثلث k و l و 2m است پس اگر $k + l + 2m = 2p$ فرض شود داریم :

$$S = \sqrt{p(p-k)(p-l)(p-2m)}$$

۶۴/۲۲ـ بدون استفاده ازجدول مقدار x را ازرابطهٔ زیر بدست آورید .

$$tg\,x = \frac{\cos 20^\circ \cos 30^\circ}{\cos^2 10^\circ}$$

حل ـ عبارت صورت‌کسررا به‌حاصل جمع تبدیل‌کرده وبه‌ترتیب زیرعمل می‌کنیم :

$$tg\,x = \frac{\cos 50 + \cos 10}{2\cos^2 10} = \frac{\sin 40 + \cos 10}{2\cos^2 10} =$$

$$= \frac{4\sin 10 \cos 10 \cos 20 + \cos 10}{2\cos^2 10} = \frac{4\sin 80 \cos 20 + 1}{2\cos 10} =$$

$$= \frac{2(\cos 100 + \cos 60) + 1}{2\cos 10} = \frac{\cos 100 + 1}{\cos 10} =$$

$$= \frac{1 - \cos 80}{\sin 80} = \frac{2\sin^2 40}{2\sin 40 \cos 40} = tg\,40^\circ$$

$$x = 40^\circ + 180^\circ n$$

۶۴/۲۳ـ ثابت کنید که اگر $\cos\alpha = \frac{p}{q}$ و p و q عددهای صحیح باشند مقدار $q^n \cos n\alpha$ عددی است صحیح (n عددی طبیعی است)

حل ـ ازروش استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم:

به‌ازاء $n = ۱$ داریم: $q\cos\alpha = p$

وبه‌ازاء $n = ۲$ داریم:

$$q^۲ \cos ۲\alpha = q^۲(۲\cos^۲\alpha - ۱) = ۲p^۲ - q^۲$$

پس رابطهٔ داده شده به ازاء مقادیر $n = ۱$ و $n = ۲$ صحیح است. حال فرض می‌کنیم که رابطهٔ مزبور به ازاء تمام مقادیر $n<k$ صحیح باشد وثابت می‌کنیم که به‌ازاء $n = k + ۱$ نیز صحیح است؛ داریم:

$$q^{k+۱} \cos(k+۱)\alpha =$$

$$= ۲(q^k \cos k\alpha)(q\cos\alpha) - q^۲[q^{k-۱}\cos(k-۱)\alpha]$$

بنا به فرض هریك از جمله‌های طرف دوم عددی است صحیح پس مقدارطرف اول نیزعددی صحیح می‌باشد.

۶۴/۲۴ـ اگر a و b و c اندازه‌های ضلعهای یك مثلث و $۲p$ محیط آن و R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن باشد داریم:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۲p(p^۲ - ۳r^۲ - ۶Rr).$$

حل ـ داریم:

$$۲p(p^۲ - ۳r^۲ - ۶Rr) = ۲p(p^۲ - \frac{۳S^۲}{p^۲} -$$

$$- \frac{۶abd}{۴S} \times \frac{S}{p}) = ۲p^۳ - ۶(p-a)(p-b)(p-c) -$$

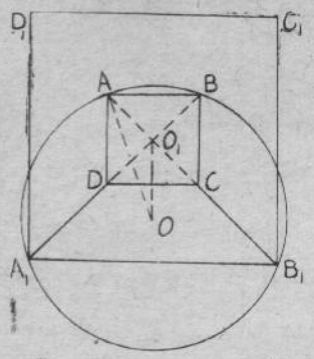
$$- ۲abc = ۸p^۳ - ۶(ab+bc+ca)p + ۲abc$$

$$= (a+b+c)^۳ - ۶(ab+bc+ca)(a+b+c) -$$

$$+ ۲abc = a^۲ + b^۲ + c^۲$$

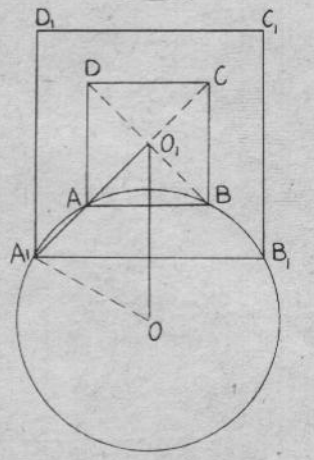
۶۴/۲۵ـ دورأس مجاورمربعی روی دایرهٔ به‌شعاع R قراردارند. فاصلهٔ مرکز دایره تامرکزمربع برابر با d است. طول‌ضلع مربع را برحسب R و d حساب کنید و بحث کنید.

حل ـ اگر O مرکز دایره و $O_۱$ مرکزمربع و $ABCD$ مربع مفروض باشد اندازهٔ زاویهٔ $OO_۱A$ یا ۴۵ یا ۱۳۵ درجه است. اگر $AB = x$ باشد:



$$O_۱A = \frac{x\sqrt{۲}}{۲}$$

است ودرمثلث $O_۱OA$ داریم:



$$R^۲ = \frac{x^۲}{۲} + d^۲ \pm$$

$$\pm xd \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$x^۲ \pm xd\sqrt{۲} +$$

$$+ ۲(d^۲ - R^۲) = ۰$$

$$x = \pm d \pm \sqrt{۲R^۲ - d^۲}$$

اگر $d<R$ باشد داریم:

$x = \sqrt{۲R^۲ - d^۲} \pm d$ و $\sqrt{۲R^۲ - d^۲} > R > d$

اگر $d = R$ باشد داریم: $x = ۲R$

اگر $R<d<R\sqrt{۲}$ باشد داریم:

$x = d \pm \sqrt{۲R^۲ - d^۲}$ و $\sqrt{۲R^۲ - d^۲} < R < d$

واگر $d > R\sqrt{۲}$ باشد مسئله جواب ندارد.

۶۴/۲۶ـ اگر $p_۱$ و $p_۲$ دوعدد اول و $p_۱ > p_۲$ باشد شرطی‌را تعیین کنید تاعدد $p_۱ + p_۲$ برعدد $p_۱ - p_۲$ بخش‌پذیر باشد.

حل ـ فرض می‌کنیم:

$$p_۱ + p_۲ = k(p_۱ - p_۲)$$

دراین صورت خواهیم داشت:

$$p_۱(k-۱) = p_۲(k+۱)$$

چون $p_۱$ و $p_۲$ دوعدد اول‌اند پس باید داشته باشیم:

$k - ۱ = p_۲ t$ و $k + ۱ = p_۱ t$

که t یك عدد طبیعی است.

$$k+1-(k-1)=(p_1-p_2)t$$

$$(p_1-p_2)t=2$$

یا $p_1-p_2=1$ است که نتیجه می‌شود $p_2=2$ و $p_1=3$. یاداریم $p_1-p_2=2$ یعنی p_1 و p_2 بایددوعدد اول متوالی باشند.

۶۴/۲۷ـ اگر n عدد طبیعی باشد ثابت کنید که عدد $a_n=3^n+4$ مربع کامل نیست.

حل ـ عدد a_n فرد است و کافی‌است ثابت‌کنیم عدد‌های n و l یافت نمی‌شوند بقسمی‌که رابطهٔ زیربرقرارباشد:

$$3^n+4=(2l+1)^2 \qquad (1)$$

اگررابطهٔ (۱) برقرار باشد خواهیم داشت :

$$3(3^{n-1}+1)=4l(l+1)$$

طرف دوم مضرب ۸ است پس $3^{n-1}+1$ باید مضرب ۸ باشد. اما اگر $n-1=2k$ باشد داریم :

$$3^{2k}+1=(8+1)^k+1=8M+2$$

واگر $n-1=2k+1$ باشد داریم :

$$3^{2k+1}+1=3(8+1)^k+1=8M+4$$

عدد $3^{n-1}+1$ هیچگاه بر ۸ بخش‌پذیر نیست وزابطهٔ (۱) نمی‌تواند برقرار باشد .

۶۴/۲۸ـ اگر $b>a>1$ و $k>0$ باشد ثابت کنید که :

$$\log_a b>\log_{a+k}(b+k)$$

حل ـ باتوجه به‌شرایط داده شده داریم :

$$\frac{b}{a}>\frac{b+k}{a+k}$$

$$\log_a\frac{b}{a}>\log_a\frac{b+k}{a+k}>\log_{a+k}\frac{b+k}{a+k}$$

$$\log_a b-1>\log_{a+k}(b+k)-1$$

$$\log_a b>\log_{a+k}(b+k)$$

۶۴/۲۹ـ بافرض $k\geq 1$ صحت نامساوی مضاعف زیررا ثابت کنید :

$$2^{1-k}\leq(\sin x)^{2k}+(\cos x)^{2k}\leq 1$$

حل ـ از نامساویهای $\sin^2 x\leq 1$ و $\cos^2 x\leq 1$ و $k\geq 1$ نتیجه می‌شود :

$$\sin^{2k}x\leq\sin^2 x \quad \text{و} \quad \cos^{2k}x\leq\cos^2 x$$

$$\sin^{2k}x+\cos^{2k}x\leq 1$$

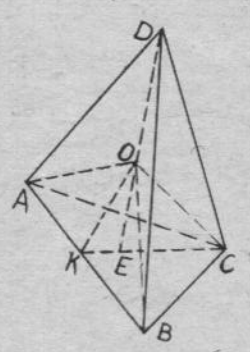
ازطرف دیگر نامساوی زیررا داریم :

$$\frac{a^k+b^k}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^k$$

از این نامساوی با فرض $a=\sin^2 x$ و $b=\cos^2 x$ نتیجه خواهد شد:

$$\sin^{2k}x+\cos^{2k}x\geq 2^{1-k}$$

۶۴/۳۰ـ ثابت‌کنید مجموع شش زاویه‌ای‌که تحت‌آنها یالهای چهاروجهی ازیك نقطه واقع درداخل چهاروجهی دیده می‌شوند بیشتر از 3π است.



حل ـ چهاروجهی ABCD و نقطهٔ O را داخل آن درنظر می‌گیریم . خط OD صفحهٔ ABC را در نقطهٔ E واقع در داخل مثلث ABC قطع‌می‌کند بایدثابت‌کنیم که:

$$(1)\quad AOB+AOC+AOD+BDC+BOD+COD>3\pi$$

این نامساوی را چنین می‌نویسیم :

$$AOB+BOC+AOC>(\pi-AOD)+(\pi-BOD)+(\pi-COD)$$

$$(2)\quad AOB+BOC+AOC>AOE+BOE+COE$$

اگر K نقطهٔ تلاقی CE با AB باشد درکنجهای سه‌وجهی OCBK و OEKA داریم :

$$BOC+BOK>COE+EOK$$

$$EOK+AOK>AOE$$

ازاین دونامساوی نتیجه می‌شود :

$$BOC+AOB>COE+AOE$$

وبه همین ترتیب خواهیم داشت :

$$AOB+AOC>BOE+COE$$

$$AOC+BOC>AOE+BOE$$

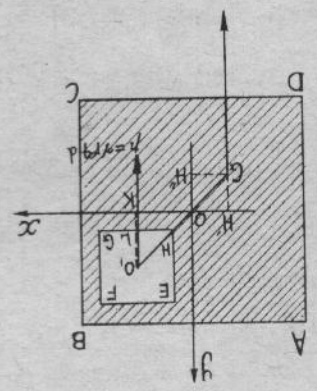
از جمع نظیر به‌نظیر طرفین سه‌نامساوی اخیر نامساوی (۲) وازآنجا نامساوی (۱) بدست می‌آید .

حل مسائل فیزیك

زیر نظر : حسین فرمان

۶۴/۳۱ـ ترجمهٔ: **پرویز غفوریان** دبیر دبیرستانها

ازمربع همکن ABCD بضلع ۲ متر، مربع EFGH به ضلع ۰/۷ متر بریده شده است بقسمی که ضلعهای دومربع متوازی است و O و O_1 مرکزهای آنها بوده $OK = O_1K = 0/5m$ و OK موازی با AB می‌باشد مختصات گرانیگاه قسمت باقیمانده را نسبت بمحورهای Ox و Oy تعیین کنید که Ox موازی با AB و Oy موازی با BC است .



حل ـ مطابق شکل گرانیگاه قسمت باقیمانده، G، نقطه‌ای از خط O_1HO است که مختصات آن به ـ ترتیب زیر محاسبه می‌شود :

$$OH' \times P = OK \times p$$

$$OH' \times 3/51d = OK \times 0/49d$$

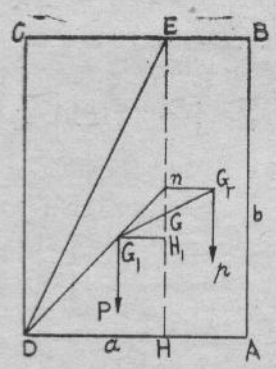
d وزن یك مترمربع فرض شده‌است.

$$OK = 0/5m \text{ و } OH' = 0/069 \# 0/07m$$

$$G(x = y = -0/07)$$

۶۴/۳۲ـ ترجمهٔ : **پرویز غفوریان**

درمستطیل ABCD خط DE را ازرأس D چنان‌رسم کنید که اگر ذوزنقهٔ ABDE را ازرأس E آویزان‌کنیم ضلع $AD = a$ افقی بماند .



حل ـ G گرانیگاه ذوزنقه روی خط EH قرار دارد که از E بر AD عمود می‌شود . گرانیگاه EHD یعنی G_1 درثلث میانهٔ MD و گرانیگاه مستطیل ABEH یعنی G_2 درمرکزآن واقع است . روابط زیررا داریم :

$$p.G_1M = PG_1H_1 \text{ یا } p.\frac{EB}{2} = P.\frac{DH}{3}$$

$$EB.b.d.\frac{EB}{2} = \frac{(a - EB)b}{2}.d.\frac{a - EB}{3}$$

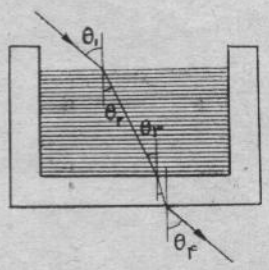
d وزن واحد سطح فرض شده‌است.

$$2EB^2 + 2aEB - a^2 = 0$$

$$EB = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1) \# 0/366a$$

۶۴/۳۳ـ ترجمهٔ : **پرویز غفوریان**

ظرفی‌است شیشه‌ای که داخل آن آب ریخته شده است . شعاعی نورانی بسطح آب می‌تابد و پس‌از انکسار ازته ظرف خارج می‌شود. ثابت کنید که امتداد شعاع خروجی موازی شعاع اولیه است



حل ـ درسطح آب داریم :

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_{\text{آب}}}{1/00}$$

در سطح جدائی آب و شیشه داریم :

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3} = \frac{n_{\text{شیشه}}}{n_{\text{آب}}}$$

از دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3} = \frac{n_{\text{شیشه}}}{1/00}$$

درسطح جدائی شیشه وهوا داریم:

$$\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4} = \frac{1/00}{n_{\text{شیشه}}}$$

از دورابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2 \Longrightarrow \theta_1 = \theta_4$$

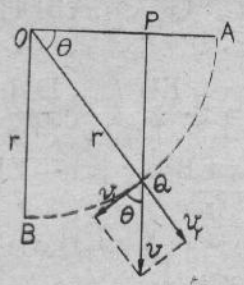
۶۴/۳۴ـ فرستنده: **عبدالرضا پورمهدی کسمائی**

دانشجوی دانشگاه تبریز

یك گلوله بوسیلهٔ نخ بطول r به‌نقطهٔ ثابت O متصل است. این‌گلوله را ازنقطهٔ P که روی خط افقی OA وبه‌فاصلهٔ $r\cos\theta$ از O می‌باشد رها می‌کنیم . ثابت کنید که سرعت گلوله هنگام عبور از وضع قائم ازرابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$v = \sqrt{2gr(1 - \sin^2\theta)}$$

حل ـ سرعت گلوله تانقطهٔ Q سقوط آزاد است ودرنقطهٔ Q برابراست با :



$$v^2 = 2gr\sin\theta$$

وقتی گلوله به نقطهٔ Q می‌رسد نخ کشیده می‌شود ومؤلفهٔ سرعت درامتداد نخ ازبین می‌رود و گلوله باسرعت $v_1 = v\cos\theta$ کمان QB را می‌پیماید و داریم :

$$v_1^2 = 2gr\sin\theta\cos^2\theta$$

درنقطهٔ B که گلوله به‌اندازهٔ :

$$r - r\sin\theta = r(1 - \sin\theta)$$

پائین آمده است داریم :

$$v^2 = v_1^2 + 2gr(1 - \sin\theta)$$

$$v^2 = 2gr\sin\theta\cos^2\theta + 2gr(1 - \sin\theta)$$

$$v^2 = 2gr(1 - \sin^2\theta)$$

$$v = \sqrt{2gr(1 - \sin^2\theta)}$$

حل مسائل شیمی

ترجمه وانتخاب توسط : عطاءالله بزرگ‌نیا

۶۴/۳۵ـ ۲/۴۸۲ گرم از یك مونوآمین را تحت‌اثر ئیدروژن نوزاد قرارداده‌ایم. مخلوط گازی شکلی ازآمونیاك و یك‌کربور ئیدروژن تولید شده‌است. آمونیاك موجود درمخلوط می‌تواند 24^{cc} اسیدکلریدریك نرمال را خنثی کند . کربور ئیدرژن موجود در مخلوط $1516/4^{cc}$ (دردمای صفردرجه و $760mm$) حجم دارد . 10^{cc} از این‌کربور را با 40^{cc} اکسیژن درآبسنجی واردکرده و درآن جرقهٔ الکتریك برقرار کرده‌ایم پس ازجرقه وبازگشت به‌دمای معمولی 24^{cc} گاز باقی مانده‌است‌که درمجاورت پتاس به 5^{cc} تقلیل می‌یابد. وباقیمانده تماماً جذب پیروگالات پتاسیم می‌شود .

بنابرآنکه حجم‌ملکولی ۲۲/۳ فرض شود فرمول و نام این‌آمین را تعیین کنید.

حل ـ تعداد ملکول گرم اسیدکلریدریك بکاررفته برابر است با :

$$34 \times 10^{-3} \times 1 = 0/034$$

چون هرملکول گرم HCl یك ملکول گرم NH_3 را خنثی می‌کند بنابراین تعداد ملکول گرم NH_3 نیز برابر ۰/۰۳۴ وجرم نیتروژن موجود در۲/۴۸۲ گرم‌نمونه مزبور برابر است با :

$$14 \times 0/034 = 0/476g$$

چون جسم مزبور یك مونوآمین است بنابراین هر ملکول گرم آن بیش‌از یك اتم گرم نیتروژن ندارد . پس هر ملکول گرم آن شامل ۱۴ گرم نیتروژن و جرم ملکولی آن برابراست با :

$$\frac{2/482 \times 14}{0/476} = \frac{2482 \times 14}{476} = \frac{2482 \times 1}{34} = 73$$

فرمول‌کربور حاصل ازئیدروژناسیون آمین‌را CnHp فرض می‌کنیم .

حجم کربور که تحت تجزیهٔ آبسنجی‌قرارگرفته است $V = 10cc$ وحجم اکسیژن‌افزوده شده به‌آن $40cc$ می‌باشد. اثر پیروگالات بر مخلوط حاصل نشان می‌دهد که مقداری اکسیژن باقیمانده‌است . پس‌می‌توان حکم‌کردکه عمل احتراق کامل بوده وطبق رابطهٔ زیرهمهٔ ئیدرژن به‌آب وهمهٔ کربن به بی‌اکسیدکربن تبدیل شده است:

$$CnHp + (n + \frac{p}{4})O_2 \rightarrow nCO_2 + \frac{p}{2}H_2O$$

حجمهائی‌که در عمل احتراق ازبین رفته عبارتند از : V حجم ئیدروکربور ؛ $(n + \frac{p}{4})V$ حجم اکسیژن لازم برای احتراق .

حجمهائی که در این عمل پدید آمده عبارتند از : nV حجم بی‌اکسیدکربن ؛ ε حجم‌آب به‌حالت مایع (که قابل صرفنظرکردن است) .

حجم پس‌ازاحتراق $25cc$ است‌که می‌توان نوشت :

$$V + 40 - V - (n + \frac{p}{4})V + nV + \varepsilon = 25$$

$$\frac{pV}{4} = 40 - 25 = 15$$

$$pV = 60$$

$$p = \frac{60}{V} = \frac{60}{10} = 6$$

پس‌از مجاورکرن با پتاس حجم به ۵cc تقلیل می‌یابد . حجم اولیه برابر ۲۵cc بوده است که nV حجم بی‌اکسید کربن نقصان یافته است بنابراین :

$$۲۵ - nV = ۵$$

$$nV = ۲۵ - ۵ = ۲۰$$

$$n = \frac{۲۰}{V} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲$$

فرمول‌کربور مورد نظر $C_۲H_۶$ ونام‌آن اتان است .

آزمایش با پیروگالات پتاسیم نشان می‌دهد که حجم اکسیژن اضافی ۵cc وحجم‌اکسیژن مصرفی $۴۰ - ۵ = ۳۵cc$ است. این مطلب صحت نتیجه را ثابت می‌کند . ۵cc نقصان حجم درمجاورت پیروگالات پتاسیم درحقیقت بمنظور رسیدگی به‌صحت نتیجه داده شده‌است .

اکنون ببینیم فرمول جسم چیست .

جسم مورد بحث آمینی است باجرم ملکولی ۷۳ که تحت اثر ئیدرژن نوزاد اتان تولید می‌کند ودرملکول‌آن بیش ازیك اتم نیتروژن یافته نمی‌شود .

ابتدا اتیل‌آمین $C_۲H_۵ - NH_۲$ درنظر می‌گیریم که برخی ازمشخصات فوق را دارا است. اما جرم ملکولی‌آن۴۵ می‌باشد. بنابراین جسم مورد نظرنمی‌تواند یك‌آمین نوع اول باشد زیرا تنها آمین نوع اولی‌که براثر ئیدرژن اتان تولید می‌کند $C_۲H_۵ - NH_۲$ است .

تنها آمین نوع دومی‌که براثر ئیدروژناسیون فقط اتان تولید می‌کند دارای فرمول :

$$\begin{matrix} C_۲H_۵ \\ \diagup \\ NH \\ \diagdown \\ C_۲H_۵ \end{matrix}$$

یعنی دی اتیل‌آمین است‌که جرم ملکولی‌آن ۷۳ می‌باشد. پس آمین مورد آزمایش دی‌اتیل‌آمین بوده است.

تذکر :

۱ـ کربوری که تحت تجزیهٔ آبسنجی قرارگرفته است دارای فرمول CnHp می‌باشد . ازاحتراق این‌کربور $CO_۲$ و $H_۲O$ تولید می‌کند . بنابراین :

$$\underset{۲۲/۴l}{CnHp} + \underbrace{nO_۲ + \frac{p}{۴}O_۲}_{(n+\frac{p}{۴})\times ۲۲/۴l} \rightarrow \underbrace{nCO_۲ + \frac{p}{۲}H_۲O}_{n\times ۲۲/۴l}$$

(حجم $\frac{p}{۲}H_۲O$ پس‌ازسردشدن‌ناچیزاست) .

بنابراین V حجم از ئیدروکربور $(n+\frac{p}{۴})V$ اکسیژن برای احتراق لازم دارد و nV گازکربنیك وحجم ناچیزی از آب بحالت مایع از احتراق‌آن تولید می‌شود . دراثر احتراق V (حجم ئیدروکربور) و $(n+\frac{p}{۴})V$ اکسیژن ازبین می‌رود و بجای‌آن nV حجم $CO_۲$ و ε حجم آب تولید می‌شود . حجم اولیه برابر بوده است با :

$$۴۰cc(\text{حجم‌اکسیژن}) + V(\text{حجم ئیدروکربور})$$

حجم گازها پس‌از احتراق وسردکردن برابر ۲۵cc شده است بنابراین می‌توان نوشت:

$$V + ۴۰ - V - (n+\frac{p}{۴})V + nV + \varepsilon = ۲۵$$

این رابطه همان رابطهٔ (۱) است .

۲) برای اثبات اینکه فرمول جسم :

$$\begin{matrix} C_۲H_۵ \\ \diagup \\ NH \\ \diagdown \\ C_۲H_۵ \end{matrix}$$

است می‌توان ازمعلومات دیگرمسئله استفاده‌کرد .

۱۵۱۶/۴cc کربور ئیدروژن از ۲/۴۸۲ گرم آمین بدست آمده است بنابراین ازهرملکول‌گرم (۷۳ گرم)آمین :

$$\frac{۱۵۱۶/۴ \times ۷۳}{۲/۴۸۲} = \frac{۱۵۱۶/۴}{۰/۰۳۴} = ۴۴۶۰۰cc = ۴۴/۶ \text{ لیتر}$$

اتان یعنی ۲ ملکول‌گرم بدست می‌آید . از اینجا نیز معلوم می‌شود که فرمول آمین $\begin{matrix} C_۲H_۵ \\ \diagup \\ NH \\ \diagdown \\ C_۲H_۵ \end{matrix}$ است.

معلومات اخیرمسئله به‌منظورتائید نتیجه حاصل ازطریق اندازه‌گیری است.

۶۴/۳۶ـ به‌منظور تعیین فرمول ونام شیمیائی یك‌مادهٔ آلی از دستهٔ چرب‌که دارای دوعامل‌آمید می‌باشد به‌طریق زیر آزمایش می‌کنیم:

۰/۸۸ گرم آنرا بامحلول غلیظ پتاسیم می‌جوشانیم و گازمتصاعد را در ۵۰cc محلول سنجیدهٔ اسید سولفوریك (به‌غلظت ۴۹ گرم درلیتر) وارد می‌کنیم . برای خنثی شدن اسید در مجاورت هلیانتین ۳۰cc پتاس سنجیده (به‌غلظت ۵۶ گرم درلیتر) لازم‌است. تعیین کنید که چگونه می‌توان با استفاده از محلول سنجیدهٔ پرمنگنات پتاسیم (۱۵/۸گرم درلیتر) صحت نتایج را کنترل کرد .

حل ـ دراثر جوشانیدن جسم با پتاس گروه عاملی $CONH_2$ – به گروه COOK و ازت به آمونیاك تبدیل می‌شوند .

ازروی جرم آمونیاك جرم ازت بدست می‌آید .

اندازه‌گیری آمونیاك با محلول ۴۹ گرم در لیتر اسید سولفوریك یعنی محلول نرمال اسید سولفوریك و محلول ۵۶ گرم درلیتر پتاس یعنی محلول نرمال پتاس انجام شده است .

چون هردومحلول نرمال هستند بنابراین می‌توان نوشت :

عددنرمالیته اسیدبکار رفته $۵۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۱ = ۵ \times ۱۰^{-۲}$

» » پتاس بکاررفته $۳۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۱ = ۳ \times ۱۰^{-۲}$

پس‌عدد نرمالیتهٔ اسیدکه صرف خنثی‌کردن آمونیاك شده است برابراست با :

$$۵ \times ۱۰^{-۲} - ۳ \times ۱۰^{-۲} = ۲ \times ۱۰^{-۲}$$

بنابراین ۲×۱۰^{-۲} ملکول گرم آمونیاك تولید شده است وتعداد اتم گرم ازت برابر با ۲×۱۰^{-۲} اتم گرم یا $۱۴ \times ۲ \times ۱۰^{-۲} = ۰/۲۸$ گرم در نمونهٔ مورد آزمایش موجود بوده است .

چون جسم مورد آزمایش یك دی‌آمید بوده است هر ملکول گرم‌آن ۲ اتم ازت یا ۲۸ گرم دارا می‌باشد . از آنجا جرم ملکولی جسم برابراست با :

$$M = \frac{۰/۸۸ \times ۲۸}{۰/۲۸} = ۸۸$$

جرم دومجموعهٔ $CONH_2$ – برابراست با :

$$۲ \times (۱۲ + ۱۶ + ۱۴ + ۲ \times ۱) = ۸۸$$

پس جسم مورد آزمایش بجز دو عامل آمید مجموعهٔ

$$\begin{array}{l} CONH_2 \\ | \\ CONH_2 \end{array}$$

دیگری را دارا نمی‌باشد . و فرمول‌آن (اگرامید) است .

کنترل نتایج به کمك محلول سنجیدهٔ $KMnO_4$ چنین است :

$$\begin{array}{l} CONH_2 \\ | \\ CONH_2 \end{array} + ۲H_2O \rightarrow \begin{array}{l} COONH_4 \\ | \\ COONH_4 \end{array}$$

تجزیهٔ نمك آمونیوم بوسیلهٔ پتاس)

$$\begin{array}{l} COONH_4 \\ | \\ COONH_4 \end{array} + ۲KOH \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} COOK \\ | \\ COOK \end{array} + ۲NH_3 + ۲H_2O$$

گازآمونیاك متصاعد می‌شود واگزالات خنثی پتاسیم‌و پتاس اضافی باقی می‌ماند.

به‌محلول مقدارکافی اسید سولفوریك می‌افزائیم‌تامحلول اسیدی شود (برای‌آنکه تأخیری در بی‌رنگ شدن پرمنگنات حاصل نشودآنرا گرم‌می‌کنیم) بدین‌ترتیب مقداراسیداگزالیك تولید شده را اندازه‌گیری می‌کنیم.

۰/۸۸ گرم‌آمید برابر $\frac{۱}{۱۰۰}$ ملکول گرم آنست $(M = ۸۸)$ و $\frac{۱}{۱۰۰}$ ملکول گرم اسید اگزالیك تولید می‌کند .

$$۲KMnO_4 + ۳H_2SO_4 \rightarrow$$
$$\rightarrow K_2SO_4 + ۲MnSO_4 + ۳H_2O + ۵[O]$$
$$۵[O] + ۵H_2C_2O_4 \rightarrow ۱۰CO_2 + ۵H_2O$$
$$۲KMnO_4 + ۳H_2SO_4 + ۵H_2C_2O_4 \rightarrow$$
$$\rightarrow K_2SO_4 + ۲MnSO_4 + ۱۰CO_2 + ۸H_2O$$

برای اکسید کردن ۵ ملکول $H_2C_2O_4$ دو ملکول $KMnO_4$ و برای اکسید کردن ۰/۰۱ ملکول گرم $H_2C_2O_4$.

$$\frac{۲ \times ۰/۰۱}{۵} = \frac{۰/۰۲۰}{۵} = ۰/۰۰۴$$ ملکول گرم

پرمنگنات لازم است.

محلول پرمنگنات بکاررفته شامل ۱۵/۸ گرم یا $\frac{۱}{۱۰}$ ملکول گرم در لیتر می‌باشد وهرسانتیمترآن شامل :

$$\frac{۱}{۱۰} \times ۱۰^{-۳} = ۱۰^{-۴}$$

ملکول گرم می‌باشد. بنابراین حجم محلول پرمنگناتی که باید افزود برابراست با :

$$۰/۰۰۴ \times ۱۰^{-۴} = \frac{۴ \times ۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۴}} = ۴۰ \text{ cc}$$

مسائل برای حل

۶۵/۱- از علی‌اکبر احسانی ، دبیرستان رازی شاهی

ثابت کنید که درهرمثلث قائم‌الزاویه مکعب وتر بزرگتر است ازمجموع مکعبات دوضلع دیگر.

۶۵/۲- فرستنده : ابراهیم ذوالقدری

معادله‌ای زیررا حل کنید :

$$(۱۲x-۱)(۶x-۱)(۴x-۱)(۳x-۱)=۵$$

$$\frac{(x+۱)(x-۳)}{۵(x+۲)(x-۴)}+\frac{(x+۳)(x-۵)}{۹(x+۴)(x-۶)}-$$

$$-\frac{۲(x+۵)(x-۷)}{۱۳(x+۶)(x-۸)}=\frac{۹۲}{۵۸۵}$$

۶۵/۳- از : علی‌اکبر احسانی

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$۶\sqrt[x]{۹}+۶\sqrt[x]{۴}=۱۳\sqrt[x]{۶}$$

یکان - می‌توان معادله را نسبت‌به‌مجهول x به‌صورت کلی‌زیردر نظر گرفت وآنرا حل وبحث کرد .

$$a\sqrt[x]{m^۲}+b\sqrt[x]{mn}+c\sqrt[x]{n^۲}=۰$$

۶۵/۴- از : امیرنادری سامانی

اندازه‌های زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ای را تعیین کنیدکه بین ۲p محیط و a طول‌وترآن رابطهٔ زیربرقرارباشد.

$$۸p^۲=a(a+۸p)$$

۶۵/۵- از: ایوب نصرت‌آبادی

اگر a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلثی در روابط زیر صادق باشند ثابت کنیدکه دو میانه از این مثلث بریکدیگر عمودند :

$$\begin{cases} c\cos x+b\sin x=۲a \\ b\cos x-c\sin x=a \end{cases}$$

۶۵/۶- از : سید جمال آشفته

مثلث ABC مفروض است. از رأس A خطی رسم کنید که اگر K وH تصاویر B و C روی‌آن باشند BH واسطهٔ هندسی بین BK و CH باشد.

۶۵/۷- از : کاظم فلاحتی دبیرستان رازی شیراز

در مثلث حاده‌الزوایای ABC نقطهٔ P را برضلع BC چنان تعیین کنیدکه‌اگر R و Q تصویرآن روی ضلعهای AC و AB باشد،

۱- طول QR می‌نیمم باشد .

۲- مساحت مثلث PQR ماکسیمم باشد .

۳- به‌فرض اینکه زاویه‌های B و C از مثلث مفروض متساوی باشند محیط مثلث PQR می‌نیمم باشد .

۶۵/۸- از: کاظم فلاحتی

به‌فرض‌آنکه داشته باشیم:

$$\begin{cases} \sin a+\sin b+\sin c+\sin d=۰ \\ \operatorname{cosec} a+\operatorname{cosec} b+\operatorname{cosec} a+\operatorname{cosec} d=۰ \end{cases}$$

ومقادیر a و b و c و d هیچیک مضرب صحیحی از π نباشد ثابت کنیدکه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} tg\,a+tg\,b+tg\,c+tg\,d=۰ \\ cotg\,a+cotg\,b+cotg\,c+cotg\,d=۰ \end{cases}$$

۶۵/۹- از محمدعلی عبائیان

چهارضلعی متغیر ABCD همواره محاطی‌است ودرآن

دورأس A و B و اندازه‌های ضلعهای AD و BC ثابت می‌باشد. مکان هندسی نقطهٔ تلاقی دوقطر را پیداکنید.

۶۵/۱۰- از : اکبر ابراهیمیان

سه‌عدد صحیح ومثبت چنان تعیین کنید که سه جملهٔ متوالی یك تصاعد حسابی باشند وسربع مجموع آنها بامجموع مکعباتشان برابر باشد.

۶۵/۱۱- از : عبدالحسین ایمانی

کنج سه‌قائمهٔ به رأس O را درنظرمی گیریم. بریالهای آن‌طولهای $OA = a$ و $OB = b$ و $OC = c$ وبرامتدادیال‌های آن به ترتیب طولهای $OA' = a'$ و $OB' = b'$ و $OC' = c'$ را جدا می‌کنیم. اگر V و V' حجمهای دو هرم OABC و OA'B'C' و S و P و S' و P' به ترتیب مساحت و محیط مثلثهای ABC و A'B'C' باشد ثابت کنید که :

$$\frac{V}{P \cdot S} = \frac{V'}{P' \cdot S'}$$

۶۵/۱۲- از: عباس پاسدار

عدد چهارقمی $\overline{aabb}$ را پیدا کنید که مجذور کامل باشد.

۶۵/۱۳- از:محمود لشکریزاده بمیدانشجوی دانشکده علوم اصفهان

در بیضی مفروض مثلثی محاط‌کنیدکه ضلعهایش باخطوط معلوم $\triangle_1$ و $\triangle_2$ و $\triangle_3$ موازی باشند.

مسائل انتخابی ازمجلهٔ روسی «ریاضیات دردبیرستان»

ترجمهٔ : فتح‌الله زرگری دانشجوی دانشکدهٔ فنی

۶۵/۱۴- نمایش هندسی تابع زیررا رسم‌کنید :

$$x^3 + 3xy + y^3 - 1 = 0$$

۶۵/۱۵- دو دایرهٔ به شعاعهای R_1 و R_2 مماس خارج بوده و درزاویهٔ α محاط می‌باشند. دایرهٔ سوم به‌شعاع R براین دودایره و بریك ضلع زاویه مماس می‌باشد. اگر $R_1 < R_2$ باشد نسبت R_2 به R_1 را معلوم‌کنید.

۶۵/۱۶- نامعادلهٔ زیررا حل‌کنید :

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\log_2(x+1) > \log_{x+3}(x+1)$$

۶۵/۱۷- درمثلث ABC ضلع $BC = a$ و زاویهٔ $BAC = \alpha$ و $AB \neq AC$ بوده و طول میانه‌های نظیر ضلعهای AC و AB باطول این ضلعها نسبت معکوس‌دارند. طولهای ضلعهای AB و AC را برحسب a و α بدست آورید.

۶۵/۱۸- مکعب $ABCDA'B'C'D'$ به ضلع واحد مفروض است. اگر E وسط CD و F وسط BB' باشد حجم‌هرم AD'EF را حساب‌کنید.

۶۵/۱۹- سه دایرهٔ دو به دو مماس خارج مفروض است. تنها به کمك یك خط‌کش مرکزهای این دایره‌ها را پیدا کنید.

۶۵/۲۰- عددی سه رقمی پیداکنیدکه برابر باشد با حاصل‌ضرب ومجموع رقمهایش.

۶۵/۲۱- اگر n عدد طبیعی باشد نامساوی زیر را ثابت‌کنید :

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}} = 2\sqrt[n]{n}$$

۶۵/۲۲- دودایره در A و B متقاطع‌اند. از A خطی متغیر می‌گذرد و دایره‌ها را غیر از A در نقاط C و D قطع می‌کند. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BCD را پیدا کنید.

۶۵/۲۳- مخروط دوارقائم به رأس S وبه‌مرکزقاعدهٔ O و به‌زاویهٔ رأس B مفروض است. دوصفحه که با یکدیگر زاویهٔ α می‌سازند در طول مولدهای SA و SB برمخروط مماس می‌باشند. اندازهٔ زاویهٔ AOB را پیداکنید.

مسائل ترجمه از فرانسه

۶۵/۲۴- مطلوبست حل‌وبحث نامعادلهٔ زیر:

$$\sqrt{2mx - x^2} > x + 2$$

۶۵/۲۵- مثلث متساوی‌الساقین OAB و قائمه در زاویهٔ B را درنظر می‌گیریم بقسمی‌که ضلع OB از آن برخط x'x واقع باشد. دایرهٔ متغیر ω بر x'x مماس است و قطبی O نسبت به‌این دایره بر A می‌گذرد.

۱- ثابت‌کنیدکه دایرهٔ ω بردایرهٔ ثابتی مماس است واز روی‌آن مکان مرکز ω را پیداکنید.

۲ـ درانعکاس به‌قطب O وبه‌قوت OB^2 دسته‌دوایر ω به‌چه صورت درمی‌آیند وازاین راه بازهم نتیجه بگیرید که دایرهٔ ω بردایرهٔ ثابتی مماس است .

۶۵/۲۶ـ صفحهٔ ثابت π ودایرهٔ ثابت (O) به مرکز O وبه‌شعاع R در این صفحه مفروض است و P نقطهٔ ثابتی از فضا می‌باشدکه در H برصفحهٔ مزبور تصویر می‌شود . دایره‌ای که بر P می‌گذرد وقطرش یك وتر AB از دایرهٔ (O) است Γ می‌نامیم و فرض می‌کنیم $OH = a$ و $HP = h$

۱ـ مکان ω مرکزدایرهٔ Γ را پیداکنید وبرحسب‌مواضع P دروجود این مکان بحث کنید .

۲ـ ثابت کنید که‌قطر AB ازدایرهٔ Γ بریك‌مقطع‌مخروطی مماس است . برحسب مواضع P در نوع این مقطع مخروطی بحث کنید .

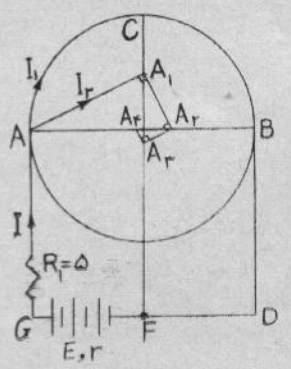
مسائل فیزیك

۶۵/۲۷ـ ترجمهٔ : **فتح‌الله زرگری**

هواپیمایی پس‌ازفرود مدتی‌را باسرعت V m/sec روی زمین حرکت می‌کند ودراین موقع خلبان آنرا ترمز می‌کندکه به هواپیما شتاب‌کند شونده‌ای برابر با $2\ m/sec^2$ داده‌می‌شود. اگرهواپیما پس ازفرود تا محل توقف مسافت 4 km را طی‌کند ونسبت به زمانی‌که هواپیما 400m اول را طی کرده به‌زمانی‌که هواپیما بقیه را پیموده‌است $\frac{4}{65}$ باشد مقدار سرعت V را پیدا کنید.

۶۵/۲۸ـ از: **سید رضا میرزنده دل** دانشجوی دانشکدهٔ فنی

مداری مطابق شکل مفروض است‌که شعاع سیم‌دایره‌ای شکل ۳ سانتیمتر وطول هرسانتیمتر این سیم دارای‌مقاومت‌الکتریکی ۳ اهم می‌باشدنقطهٔ A_1 وسط شعاع OC بوده A_1A_2 بر AA_1 و A_1A_2 بر A_2A_3 و... عمود می‌باشد. نیروی محرکهٔ هر پیل ۱/۵ ولت و مقاومت داخلی آن $r = 0/1$ اهم و $R = 5$ اهم می‌باشد .



مسائل شیمی

ترجمه وانتخاب توسط : **عطاءالله بزرگ‌نیا**

۶۵/۲۹ـ $V cm^3$ استیلن دراختیارداریم. نمونه‌ای‌از آن به حجم $\frac{7}{10}$ به اتیلن تبدیل شده است . راندمان عمل $\frac{2}{3}$ واختلاف حجم بین پروپین حاصل و اتین بکارنرفته برابر 4cc می‌باشد.

۱ـ فرمول واکنش را بنویسید وحجم V رامحاسبه‌کنید.

۲ـ $\frac{V}{2}$ cc استیلن اختیار کرده و در مجاورت کاتالیزر نیکل آنرا تحت اثر ئیدرژن نوزاد قرار می‌دهیم . پس از مدتی معلوم می‌شودکه اتیان واتان به‌یك اندازه‌تولیدشده‌اند. جریان ئیدرژن را قطع کرده وئیدرژن زیادی را خارج‌می‌کنیم. باقیمانده حاصل‌که شامل استیلن ترکیب نشده ، اتیلن و اتان است با اکسیژن کافی درآبسنجی وارد می‌کنیم ودر آن جرقهٔ الکتریك می‌زنیم. پس‌ازعمل معلوم می‌شودکه V'cc اکسیژن مصرف شده و V"cc بی‌اکسیدکربن تولید شده است . نسبت اختلاط گازها را در مخلوط پیدا کنید در صورتی‌که بدانیم $\frac{V'}{V''} = \frac{23}{16}$ است .

۶۵/۳۰ـ پنتول A با عامل ستونی پولیمر آلدئید فرمیك است. فرمول گستردهٔ آن به‌شکل خطی‌وعامل‌ستونی‌آن مجاور باعامل الکلی نوع اول است .

۴/۳۲۱ گرم آنرا درصدگرم‌آب حل می‌کنیم . نقطهٔ انجماد این محلول بانقطهٔ انجماد محلول گلوکزهم غلظت با آن یکی می‌شود. فرمول گستردهٔ این ستوپنتول را رسم‌کنید.

تجربه نشان می‌دهدکه اگر ۲/۱۶۰۲ گرم ازجسم B (پولیمر دیگرآلدئید فرمیك) را در ۱۰۰ گرم آب حل‌کنیم نزول نقطهٔ انجماد برای‌آن بانزول نقطهٔ انجمادبرای محلول‌های فوق‌الذکر یکی می‌شود. فرمول گستردهٔ تمام‌اجسامی‌که باجسم B مطابقت دارند بنویسید.

ایزومری از B را انتخاب‌کنیدکه دارای دو گروه‌عاملی ویك اتم‌کربن غیرمتقارن باشد. ۱۰ گرم از این جسم اخیر را در حرارت ملایم تحت اثر اکسید زرد جیوه قرار می‌دهیم . همولوگی از آلدئید فرمیك تشکیل می‌شود وزن آنرا محاسبه کنید .

نوشتهٔ : ریند (Rhind)

ترجمه و تنظیم از: داوید ریحان

تماشای دوچرخه‌سوارها

ماتیو درتراس «خروس طلائی» درانتظار سردشدن قهوه‌اش نشسته و در تمام این مدت مجذوب نمای خیابان شده بود. وی حضور دوستش، لوك، راکه پهلوی وی‌نشسته بود کاملا ازیاد برده بود ، تااینکه لوك گستاخانه اندیشهٔ وی را قطع می‌کند :

ـ هی،ماتیو ! حالت خوب نیست ؟ خواب می‌بینی ؟ خیر باشد ؛

ماتیو می‌جهد :

ـ ولی من خواب نمی‌دیدم ، فکر می‌کردم .

ـ دربارهٔ چه ؟

ـ به چیزی خارق‌العاده‌که حالا مشاهده‌کردم . آنجا ، توی خیابان ... واضح است‌که مقصودم را نمی‌فهمی .

ـ اگرروشنتر توضیح بدهی ...

ـ صبرکن، چرخهای دوچرخه‌هائی را که می‌گذرند نگاه‌کن . چیزقابل توجهی نمی‌بینی ؟

ـ واقعاً ...

ـ خوب نگاه‌کن ، پره‌های چرخ در قسمت فوقانی در اثرحرکت باهم اشتباه نمی‌شوند ، درصورتی‌که درقسمت‌تحتانی چرخ، می‌توانیم آنها را «یك‌به یك» ازهم تمیزبدهیم .

لوك بانگاهش دوچرخه‌ای راکه می‌گذشت دنبال‌می‌کند وصحت گفتاروی راتصدیق می‌نماید وپس ازچندلحظه سکوت شروع به‌صحبت‌کرده ومی‌گوید :

ـ من دوچارشك ودودلی شده‌ام ، آنچه که هم اکنون دیدیم به‌چه معنی است، آیا درپایهٔ چرخ قسمتی وجود دارد که تند تراز قسمت دیگرآن‌می‌چرخد؟ولی طبیعتاً این امرغیر ممکن است ... چیزی وجود دارد که برای‌من مفهوم نیست.

ماتیو می‌گوید : فکرکنم چیزهائی فهمیده باشم .

ـ خوب؟ شاید مانند وقتی‌که درسینما چرخهائی راکه وارونه می‌چرخند، می‌بینیم، یك پدیدهٔاستروبوسکوپی وسربوط به خطای باصره باشد ؟

ـ به هیچ وجه ، اما یك‌پدیدهٔ نسبتاً ساده است.

ـ می‌خواهم این موضوع را به‌من بفهمانی .

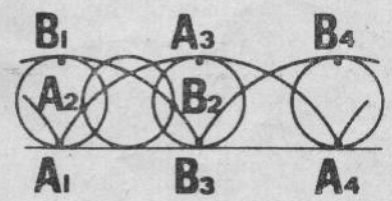
ـ پس گوش‌کن :

چگونگی استدلال ماتیو را درزیرمطالعه می‌کنید :

دوچرخه‌ای رابرگردانده وآنرا روی فرمان‌وزینش‌قرار دهید وبادست رکاب بزنید . مشاهده می‌کنیدکه خصوصیتی‌که قبلا اتفاق‌افتاده بود، بروزنمی‌کند . چرا ؟ برای اینکه‌محور چرخ ثابت است .

درصورتی‌که روی دوچرخهٔ متحرك، محور، هم زمان‌با چرخ ، نسبت به ناظرکه شما باشید ، به‌جلو می‌رود . وقتی محور ثابت است، تمام نقاط چرخ متساوی‌الفاصله از مرکزیك فاصلهٔ مشخص را در یك زمان طی می‌کنند. ولی وقتی‌دوچرخه حرکت می‌کند ، اتفاقی غیرازاین رخ می‌دهد .

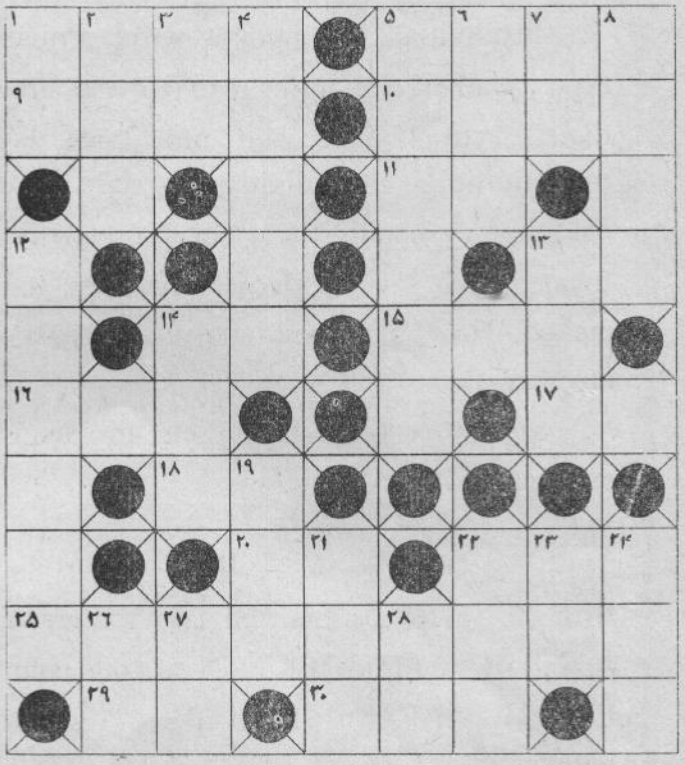
دونقطهٔ مخصوص واقع برروی لاستیك یعنی A_1 مماس برزمین و B_1 راکه باآن متقاطراست ، مورد بررسی قرار می‌دهیم . وقتی دوچرخه به جلو می‌رود ، دیگر A_1وB_1 دوایری را مانند وقتی که محورها ثابت بودند، رسم نمی‌کنند بلکه مسیرشان سیکلوئیدی مطابق باشکل است .



(دنباله در صفحهٔ ۵۳۸)

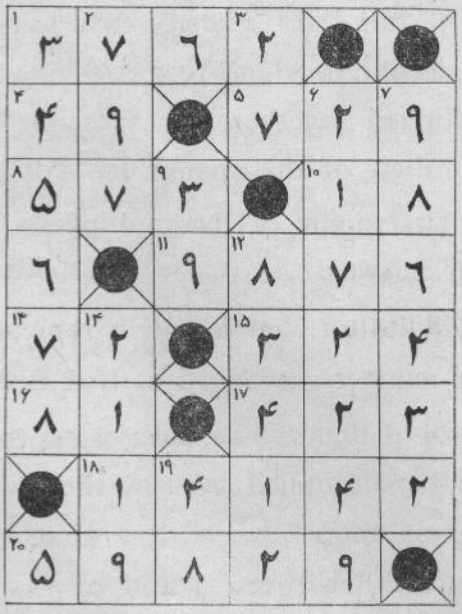
جدول اعداد

طرح از: سید مصطفی حسینی نژاد



افقی ـ ۱ـ کوچکترین عدد با رقمهای فرد متفاوت . ۵ـ به‌صورت $\overline{aabb}$ و مجذور کامل است . ۹ـ مقلوب سال تأسیس یکان . ۱۰ـ مقلوبش کوچکترین عدد چهار رقمی است که با رقمهای متفاوت نوشته می‌شود . ۱۱ـ سه برابر جذر عدد ۱۵ افقی . ۱۳ـ شش برابر عدد ۱۷ افقی . ۱۴ـ جذر عدد ۶ قائم . ۱۵ـ مجذور کامل و به‌صورت $\overline{abc}$ است که هر یك از عددهای a و $\overline{ab}$ و c و $\overline{cba}$ نیز مجذور کامل است . ۱۶ـ به‌صورت $\overline{aab}$ است و خودش و مقلوبش مجذور کامل است . ۱۷ـ تکرار یك رقم . ۱۸ـ مقلوبش ده برابر خودش است و تفاضل رقمهایش ۲ است . ۲۰ـ بزرگترین عدد دو رقمی است که مقلوبش هفت برابر ربعش است . ۲۲ـ مجذور نصف عدد ۲۰ افقی . ۲۵ـ رقمهایش از چپ به راست تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. ۲۹ـ مجموع این عدد و عدد ۲۰ افقی هفت برابر تفاضل آنها است . ۳۰ـ توان نهم است .

قائم : ۱ـ تفاضل عددهای ۲۰ و ۲۹ افقی . ۲ـ متقارن و مکعب است . ۳ـ مجموع رقمهایش مکعب تفاضل آنها است . ۴ـ به صورت $\overline{abcba}$ است که $a+b=2c$ و c مجذور کامل است . ۵ـ به‌صورت $\overline{abbcdd}$ است که : $\overline{abb} = 3(\overline{cdd}) + 100$. ۶ـ مکعب رقم یکان خود است. ۷ـ مقلوبش دو برابر عدد ۱۸ افقی است . ۸ـ اگر جای رقمهای یکان و دهگان را عوض کنیم ۵۴ واحد برعدد اضافه می‌شود . ۱۲ـ به‌صورت $\overline{aabbcc}$ است که : $a = 2(b+2) = 2(b-c)$ و مجموع رقمهای تمام عدد ۲۴ است . ۱۳ـ مقلوبش کوچکترین مجذور بزرگتر از عدد ۱۵ افقی است . ۱۴ـ ده برابر جذر عدد ۱۶ افقی . ۱۹ـ توان پنجم است . ۲۱ـ پنج برابر عدد ۱۵ افقی . ۲۲ـ مقلوبش پنج برابر عدد ۳ قائم است . ۱۳ـ هفت برابر عدد ۱۷ افقی. ۲۴ـ دو برابر عدد ۲ قائم . ۲۶ـ جذر عدد ۱۵ افقی . ۲۷ـ دو برابر عدد ۲۶ قائم . ۲۸ـ ده برابرش دو واحد کمتر از عدد ۳۰ افقی است .



حل جدول شمارهٔ پیش

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Probelm 62 - A student writes a nine-digit number containing each of the nine digits, 1 to 9, once and only once. He then multiplies each digit by its right hand neighbor and adds the eight products so formed. What is the largest sum he can make? How did you arrive at your answer?

Solution : Let S_n represent the sequence (1) $n-r, \cdots,$

$$\underset{A}{n-a}, \underset{B}{n-a-b}, \cdots n-s,$$

with $(n+1)$ to be inserted between terms A and B to form S_{n+1}. Then the sum $E_{n+1} = E_n - AB + (n+1)(A+B)$, which reduces to :

(2) $E_{n+1} = E_n + n^2 + 2n$

$$-(a^2 + ab + 2a + b).$$

This will be largest when a and b are smallest. Since, if $b=0$, $A=B$, make $a=0$, and $b=1$, yielding :

(3) $E_{n+1} = E_n + n^2 + 2n - 1.$

Since this is an identity, we may replace n by $n-1$. Therefore

(4) $E_n = E_{n-1} + n^2 - 2.$

Thus to make the series having the maximum E, insert $(n+1)$ between (n) and $(n-1)$. If we begin with the value for S_2 of 1, 2, we obtain for the series the general formula

(5) $1, \cdots, n-1, n, n-2, \cdots, 2,$

if n is even.

If n is odd, we have

(6) $1, \cdots, n-2, n, n-1, \cdots, 2.$

Since for S_2 we have 1, 2, then for S_3 insert 3 between 1 and 2: 1, 3, 2. For S_4 insert 4 between 3 and 2: 1, 3, 4, 2. Continuing this way, we obtain for S_9: 1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2, as the series having the largest sum, viz. 268. If we had begun with $S_2 = 2, 1$, the sequence for S_9 would have been reversed.

Problem 63 : When two numbers are multiplied together, is it possible for the first digit of the answer to fall between the first digits of the multipliers ? Prove your answer.

Solution Let a and b represent any two numbers, with $a > b$. If a is a number of n digits, a is always less than 10^n. If b be multiplied by 10^n, then the first digit of ab is always less than b, and cannot fall between a and b.