یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ ششم : شمارهٔ ۴ ، شمارهٔ مسلسل : ۶۱ دی ۱۳۴۸

بها : ۲۵ ریال

کنفرانس ریاضی

شیراز ـ دانشگاه پهلوی

دانشگاه پهلوی شیراز در روزهای ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ فروردین ماه ۱۳۴۹ اولین کنفرانس ریاضی را به منظور ایجاد هماهنگی بیشتر بین ریاضیدانان ایرانی و تبادل نظر درطرق تدریس وتحقیق ریاضیات تشکیل خواهد داد.

از علاقمندان دعوت می‌شود که حداکثر تا پانزدهم بهمن‌ماه ۱۳۴۸ برای دریافت پرسشنامه به‌آدرس زیرمکاتبه نمایند:

بخش ریاضی ـ کمیتهٔ کنفرانس ریاضی
دانشکدهٔ ادبیات وعلوم ـ جنب حافظیه ـ شیراز

تشکیل مجمع عمومی

انجمن معلمان ریاضی ایران

مجمع عمومی انجمن معلمان ریاضی ایران ساعت ۹ صبح جمعه ۲۶ دی ۱۳۴۸ در محل دبیرستان البرز تشکیل می‌شود.

از عموم معلمان ریاضی ساکن تهران دعوت می‌شود که در این جلسه حضور یابند.

موضوع جلسه:

۱ـ گزارش فعالیتهای دوسالهٔ گذشته

۲ـ بحث و تبادل نظر دربارهٔ خط‌مشی آینده

۳ـ انتخاب ۳۰ نفراعضای شورای مرکزی

۴ـ انتخاب اعضای هیئتهای مجریان، داوران ومشاوران

رفع اشتباه

درچاپ روی جلد یکان ۶۰ چند اشتباه روی داده‌است. ازجمله اینکه «آبان» که چاپ شده اشتباه است و صحیح آن «آذر» می‌باشد.

یکان

مجله ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هر سال ده شماره منتشر می‌شود

دورهٔ ششم ـ شمارهٔ چهارم ـ شمارهٔ مسلسل: ۶۱

دی ۱۳۴۸

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی، داود مصحفی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیک شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۳۳۱۸۱

وجه اشتراک برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی: جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume VI, number 3, Jan. 1970

subscription: $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

یادگیری ریاضی جدید

گسترش ریاضی جدید که در برنامه‌های دانشگاهی تقریباً در همهٔ کشورها کاری است انجام شده ودرسطح برنامه‌های دبیرستانی نیزدرکشورهایی انجام شده ودر کشورهایی دیگر درشرف انجام است ، برای چند دسته مسئله‌ای را ایجاد کرده است :

۱ـ آن دسته ازفارغ‌التحصیلان دبیرستانی ، وحتی لیسانسیه‌های دانشگاه ،که برای‌ادامهٔ تحصیل به برخی ازکشورهای پیشرفته می‌روند ، دراولین مرحله با مفاهیم و اصطلاحات ریاضی جدید مواجه می‌شوندکه قبلا با آن آشنا نبوده‌اند . اینان بعداز مکاتبهٔ با دوستان واولیاء خود در ایـران متـوجه می‌شوندکتابی که مقدمات ریاضی جدید را به اندازهٔ رفع نیاز ایشان بیان کرده باشد به زبان فـارسی وجود ندارد .

۲ـ بسیاری از دانشجویان دانشکده‌های ایران‌که درس ریاضی جدید دارند چون هیچ‌نوع سابقهٔ ذهنی نسبت به‌آن ندارند و در ضمن دروس ایشان اغلب در سطح بالا بوده توأم با اصطلاحات خارجی است درجستجوی کتابی می‌باشندکه ازآن بتوانند مفاهیم‌ریاضی جدیدرا واضحترازدروس‌خود فراگیرند.

۳ـ اشخاصی‌که به مطالعه یاترجمهٔ مقالات علمی‌جدید ، اعم از ریاضی ، فیزیك وشیمی وغیره ، اشتغال دارند چون درمتن این مقالات با مفاهیم واصطلاحات ریاضی‌جدید روبرو می‌شوند به‌کتابی نیاز دارندکه در این زمینه رفع نیاز ایشان را بکند .

۴ـ دبیرانی‌که اکنون به‌آموزش ریاضیات اشتغال دارند برای اینکه درتدریس برنامه‌های جدید آمادگی لازم را بدست آورند فقط کافی‌است کتابی‌که الفبای ریاضی جدید را بیان‌کرده باشد در اختیار داشته باشند ؛ چه ، اینان با تحصیلات عالی‌که داشته‌اند از همین راه به‌مرحلهٔ درك عمیق ریاضی جدید خواهند رسید .

۵ـ اشخاصی‌که می‌خواهند همواره فکرنوداشته باشند ازراه مطالعهٔ یك‌کتاب مقدماتی ریاضی‌جدید به بررسی ودرك دنبالهٔ آن توانایی خواهند داشت ...

***

مسئلهٔ وجود یـك چنین کتابی به زبان فارسی مورد توجه می‌بود ، تا اینکه اوایل سال جـاری معلوم شدکتابی با این صفات توسط فـردی که صلاحیت آنرا کاملا داشته تهیه شده و فعالیتهایی انجام می‌گیردکه این‌کتاب ازطرف دانشگاه یا یکی از وزارتها چاپ و منتشرشود . دوستی با مؤلف‌کتاب را مغتنم شمرده موافقت وی را جلب‌کردکه‌کتاب مزبور ازطـرف ادارهٔ مجلهٔ یکان چاپ شود . با همـهٔ اشکالاتی ازقبیل کمیابی‌کاغذ وگران شدن آن واشکالات فنی دیگری‌که وجود داشت چاپ و صحافی‌کتاب بـه نحو شایسته به پایان رسید و ایـن کتاب اینك به علاقمندان آن‌تقدیم می‌شود .

نقل از مقدمهٔ کتاب « مبادی منطق و ریاضی جدید »

عبدالحسین مصحفی

ملا و رابطهٔ یکبیک

علیرضا امیرمعز
استاد ریاضی دانشکدهٔ تکنولژی تکزاس

گویا ملانصرالدین ریاضیات جدیدراخوب می‌دانسته است .چون روزی ملا مرد پرریش‌وپشمی‌رادید که دهنهٔ الاغش را گرفته و آهسته ازکوچه می‌گذرد . ملا سلام‌کرد.آن مرد عوض جواب‌سلام به ملاگفت : «می‌توانی بگوئی که دم الاغ من چندتا موداره ؟»

ملاجواب داد: «بین‌دم‌الاغت وریشت رابطهٔ یکبیک برقراراست.»

آن مرد با تعجب پرسید : «چی!؟ چه‌گفتی؟»

ملا دوبـاره‌گفت : « تعداد موهای دم الاغت به اندازهٔ تعداد موهای ریشت است . اگر باورنداری بگذار یك مو از دم الاغت بکنم و یك مو از ریشت ، و آنقدرادامه‌می‌دهیم تاببینی‌که مساوی در می‌آیند .»

مردك‌گفت : «حرفت راباورکردم»

رابطهٔ یکبیک

یکی‌از مطالب‌مهم ریاضی امروزه **رابطهٔ یکبیک**است. به‌فرانسه‌آنرا (Correspondance biunivoque)و به‌انگلیسی آنرا(One- to-one correspondance) می‌گویند. به صورت ظاهر این رابطه بسیار ساده است و وقتی که آنرا در حالت مجموعه‌های محدود مطالعه کنیم به‌صورت زیر درمی‌آید:فرض‌کنیم S و T دو مجموعهٔ محدود باشد،مثلا:

$$S=\{a,b,c,d\} \text{ و } T=\{۱,۲,۳,۴\}$$

در این حال رابطهٔ یکبیک بین S و T یعنی اینکه تعدادعناصر S با تعدادعناصر T برابر است . به طرز ریاضی رابطهٔ‌یکبیک بوسیلهٔ‌زوجهای‌مرتب‌شده(Ordered pairs) معرفی‌می‌شود بطور مثال می‌نویسیم :

$$\{(a,۱),(b,۲),(c,۳),(d,۴)\}$$

البته‌بین S و T رابطهٔ یکبیک به طریقه‌های مختلف ممکن است ، آنرا به‌خواننده واگذار می‌کنیم . بارها رابطهٔ یکبیک بین مجموعه‌های محدود به‌نظر شاگردان چنان ساده و بی‌معنی می‌آیدکه‌می‌گویند: «خوب‌که‌چه!» ولی درریاضی بیشتراوقات

خواص یك مجموعه بوسیلهٔ مجموعهٔ دیگری که با آن رابطهٔ یکبیك دارد مطالعه می‌شود . البته خواننده نبایدهمشکلی یا همریختی (Isomorphisme)را بارابطهٔیکبیك بطورکلی اشتباه کند . معمولاایزومرفیسم رابطهٔ یکبیکی است که خواص دیگری از مجموعه‌ها را حفظ می‌کند .

حال چند کلمه‌راجع به رابطهٔ یکبیك بین مجموعه‌های بینهایت بگوئیم . البته موضوع را به زبان ساده و بدون‌رسمیت ریاضی بررسی می‌کنیم . بخصوص مثال زیر بسیار مناسب‌است:

می‌دانیم‌که مجموعهٔ اعداد طبیعی (اعداد برای شمردن) عبارتست از :

$$N=\{۱،۲،۳،۴،...\}$$

چون یکی از خواص N این است‌که اگر $n\in N$ باشد آنگاه $(n+۱)\in N$. بنابراین N مجموعه‌ای نامحدود یا بینهایت است. معمولا این بینهایت را **بینهایت شمردنی** می‌گویند .

همچنان‌می‌دانیم‌که مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج عبارتست از :

$$T=\{۲،۴،۶،۸،...\}$$

و می‌دانیم‌که T هم مجموعه‌ای بینهایت است . برای‌آنکه‌اگر $p\in T$ باشدآنگاه $(p+۲)\in T$. حال می‌خواهیم ثابت‌کنیم که T مجموعهٔ بینهایت شمردنی است . راه اثبات ، برقرار کردن رابطهٔ یکبیك بین T وN است . همانطور که برای مجموعه‌های محدود رابطهٔیکبیك را بوسیلهٔ زوجهای مرتب‌شده برقرارکردیم‌در این‌حال‌هم سعی‌می‌کنیم که همان‌کار را بکنیم.

به‌حسب اتفاق این کار بسیار ساده است . مثلا زوجهای مرتب شده را به این ترتیب می‌نویسیم :

$$D=\{(n،۲n)\mid n=۱،۲،۳،...\}$$

این مجموعهٔ زوجها نشان می‌دهد که در مقابل هرعنصر N **یك و فقط یك**عنصر از Tو درمقابل هرعنصراز T**یك و فقط یك** عنصر از N قرار دارد .

خواننده ممکن است که مجموعهٔ اعداد شمردنی فرد را بررسی‌کند. این‌مجموعه رابه دووضع‌مختلف زیر می‌توان‌نوشت:

$$F=\{۱،۳،۵،۷،...\}$$

$$F=\{x\mid x=۲n-۱ \text{ و } n=۱،۲،۳،...\}$$

ازقضا طرز دوم رابطهٔ یکبیك بین Fو N را نشان می‌دهد .

بطورکلی چنانچه‌بخواهیم‌ثابت‌کنیم‌که مجموعه‌ای‌بینهایت شمردنی است سعی می‌کنیم رابطهٔ یکبیك بین‌آن مجموعه وN بر قرار کنیم . بدون اثبات بیان می‌کنیم‌که :(مجموعهٔ اعداد منطق شمردنی است) ، (مجموعهٔ اعداد جبری شمردنی است). اعداد جبری عبارتند ازریشه‌های معادلات به‌صورت چندجمله‌ای که ضرایب‌آنهااعداد منطق باشند . خواننده با مطالعهٔ کتابهای مقدماتی جبر جدید می‌تواند این قضایا را ثابت‌کند . چون منظور این مقاله بررسی موضوع به زبان ساده است مطلب را به همین‌جا پایان می‌دهیم .

نامهٔ رسیده

دربارهٔ ناهماهنگی‌برخی دستگاههای اجرائی آموزشی

آقای جعفریرئیس ادارهٔامتحانات ادارهٔ کل‌آموزش و پرورش استان کرمانشاهان در نامهٔ خود ضمن اشاره بـه سر مقالهٔ شمارهٔ گذشتهٔ یکان ، نکات زیر را یادآوری کرده‌اند:

۱ـ تهیهٔ کارنامه ورسیدگی به‌امتحانات داخلی‌دبستانها از جمله وظایف ادارهٔ کل تعلیمات ابتدائی است نه ادارهٔ کل امتحانات.

۲ـ درحال حاضر،حساب و هندسه دردبستانها به‌صورت یك مادهٔ واحد ریاضی ارزشیابی می‌شود نه‌صورت جداگانه

۳ـ ادارهٔ کل امتحانات درهمه حـال پیشقدم اجـرای طرحهای مترقی ونوین بوده وهست امکان اینکه در چهارسال پیش که طرح نظام جدید آموزش عنوان گردید . ادارهٔ کـل امتحانات ، تعلیمات و دستورات لازم را به ادارهٔ امتحانـات استانها ابلال نمود

۴ـ اینك همکاریهای خاصی بین ادارات استانها وادارهٔ کل مطالعات و برنامه‌ها به‌منظور بررسی ارزشیابی صحیح در کلاسهای تجربی وآماده ساختن دانش‌آموزان برای شرکت‌در امتحانات‌نهائی دورهٔفعلی ابتدایی‌بر قرار است وجای‌هیچگونه نگرانی نیست .

کاربردی از ریاضی جدید

کلید N راهی

ترجمهٔ : **مجید رنجی**

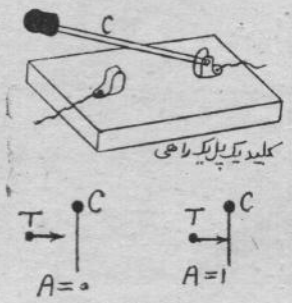
چراغ راهرو خانهٔ ما با دو کلید مختلف کنترل می‌شود. اگر چراغ روشن باشد با هریك از این کلیدها ، که یکی در طبقهٔ بالا و دیگری در طبقهٔ پایین نصب شده است می‌توان چراغ را خاموش کرد، واگر چراغ خاموش باشد با هریك از کلیدها می‌توان چراغ را دوباره روشن کرد . اهمیتی ندارد که کلید در طبقهٔ بالا یا پائین باشد ،زدن کلید وضع چراغ را از روشنایی به خاموشی یا بالعکس تغییر خواهد داد . آیا تاکنون به طرز کار این مدارها توجه کرده‌اید ؟

در این مقاله سعی خواهد شد که طرز کار کلید دو راهی و تعمیم آن به کلید سه راهی موقعی که هر کدام از کلیدها در مکانهای مختلف حالت روشنایی را تغییر دهند به شما نشان داده شود. ممکن است شما نیز در خانهٔ خود مشکل کنترل بلندگوهایی را داشته باشید که باید آنها را درجاهای مختلف نصب کنید و صدای یك دستگاه رادیو یا ضبط صوت یا گرام را با آنها پخش کنید . مشکل ما این بود که ضبط صوت را دریکی از اتاقهای طبقهٔ بالا قرار داده بودیم و می‌خواستیم صدای آنرا در هنگام پذیرایی از میهمانهای خود در اتاق پذیرایی و درمواقع عادی در اتاق نشیمن طبقهٔ پایین و درتابستان در بهار خواب طبقهٔ بالا از طریق بلندگو بشنویم . ما توانستیم با مدار کلیدی سه راهی (three – way switching circut) این مشکل را حل کنیم ودرهمانجایی که بودیم ـ اتاق پذیرایی ، اتاق نشیمن . بهار خواب طبقهٔ بالا ـ بلندگوها را خاموش یا روشن کنیم .

هدف دیگر این مقاله آشنایی شما به یك شاخهٔ جالب ریاضی که **جبر بول** در بارهٔ مدارهای کلیدی نامیده می‌شود. جبری که نه فقط طرز کار کلید دو راهی ، سه راهی و n راهی، بلکه چگونگی کار ماشینهای حساب برقی (Computer) را شرح می‌دهد ،

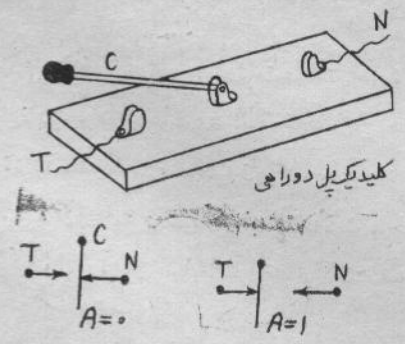
جبر مدارهای کلیدی جبریست با علامات A،B،C ...و اعمال دوتایی «+» و «×» که این اعمال درست به همان طریقی که در جبر معمولی مرسوم است انجام می‌گیرد .

متغیرهای ما A وB وC هریك معرف یك کلید هستند که دکمهٔ آن می‌تواند یادر وضع بالا باشد یادروضع پایین . ارزش هر یك از کلیدها را با صفر یا یك نمایش می‌دهیم به این معنی که یا A = ۰ یا A = ۱ است . در حالتی که کلید سبب روشن شدن دستگاه شود A = ۱ است و در حالتی که برق ، بین دو نقطه‌ای که سیمها را به کلید متصل کرده‌ایم منتقل نمی‌شود A = ۰ است . در شکل (۱) کلیدی که به کلید « یك پل یك راهی» موسوم است نشان داده شده است .



شکل ۱

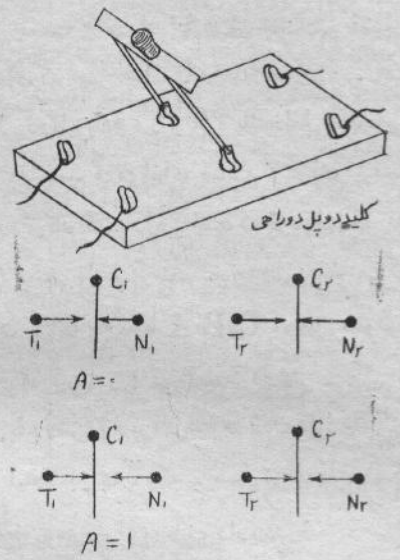
برای طرح مدار کلیدی دوراهی به کلیدهای «یك پل دو راهی»احتیاج خواهیم داشت . در کلید یك پل دوراهی(شکل۲)



شکل ۲

جریان از راه مشترك C وارد می‌شود و در حالتی که $A=0$ است از راه N خارج می‌شود و در حالتی که $A=1$ است از راه T خارج می‌شود .

اکنون وظیفهٔ ماشرح اعمال دوتایی است. برای تعریف اعمال «+» و «×» فقط کلید یك پل یك‌راهی را مورداستفاده قرار می‌دهیم . با وجود این بعداً موارد استعمال کلیدهای یك پل یك راهی و دوپل دوراهی (شکل ۳) را در طرح مدارهای کلیدهای n راهی ذکر خواهیم کرد .

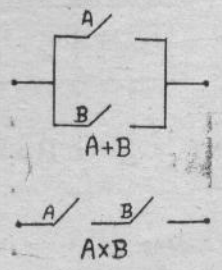


شکل ۳

بنابه تعریف $A+B$ به دو کلید که به صورت موازی و $A\times B$ به دو کلید که به‌صورت سری سیم کشی شده باشند اطلاق می‌شود (شکل ۴) بدیهی است که مقادیر $A+B$ و $A\times B$ به مقادیر A و B مربوط خواهند شد . جدول زیر عملهای دو تایی «+» و «×» را شرح می‌دهد .

+	0	1
0	0	1
1	1	1

×	0	1
0	0	0
1	0	1



شکل ۴

در اینجا توصیه می‌شود که خواص زیر را در مدارهای کلیدی با اعمال «+» و «×» اثبات کنید :

۱ـ هردو از اعمال جابجائی هستند :

(جابجایی = استقلال از ترتیب عوامل = Commutative)

$$A\times B=B\times A \quad \text{و} \quad A+B=B+A$$

۲ـ هر دو از اعمال انجمنی هستند :

(انجمنی = شرکت‌پذیری = Associative)

$$A+(B+C)=(A+B)+C \quad \text{و}$$

$$A(BC)=(AB)C$$

(توجه : همانطورکه در جبر معمولی داشتیم AB را می‌توانیم به‌جای $A\times B$ بکار ببریم)

۳ـ دوقانون پخشی :

(پخشی = توزیعی = Distributive) وجود دارد :

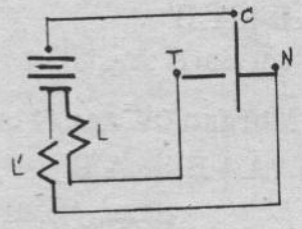
$$A+(BC)=(A+B)\times(A+C) \quad \text{و}$$

$$A(B+C)=AB+AC$$

(توجه : این اولین جایی است‌که این جبر خواصی غیر از خواص جبر معمولی دارد . موارد زیر نیز ازهمین قرارند)

۴ـ $A+A=A$ و $A\times A=A$

خوانندهٔ علاقمند ممکن است خود به‌کشف خواص دیگر این جبر بپردازد . جبر جدید ما احتیاج به یك عمل دیگر دارد که با «'» نشان می‌دهیم و آنرا چنین تعریف می‌کنیم : اگر $A=0$ باشد دراین صورت $A'=1$ است واگر $A=1$ باشد $A'=0$ خواهد بود . یك مورد نمایش دادن A' کاربرد کلید یك پل دو راهی است .



شکل ۵

اگر $A=0$ باشد لامپ L' واگر $A=1$ باشد دراین حال لامپ L روشن خواهد بود . اکنون ما آماده برای طرح کلید دو راهی هستیم . اولین کار تهیهٔ جدولی مانند جدول زیر است .

A	B	L_2
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

سپس مقادیر L_2 چراغ راکه مربوط به زدن هریك از کلید A یا B است در این جدول درج می‌کنیم . اگر فرض

کنیم که وقتی چراغ خاموش باشد A و B برابر صفر باشند آنرا در جدولی مانند زیر می‌نویسیم :

A	B	L_2
۰	۰	۰
۰	۱	۱
۱	۱	۰
۱	۰	۱

زدن کلید B چراغ را روشن وزدن کلید A دوباره آنرا خاموش می‌کند . اکنون متوجه شدیم که در حالتی که $L_2=1$ است یا $A=0$ و $B=1$ یا $A=1$ و $B=0$ است . با در نظر گرفتن واستفاده ازخاصیتی که وقتی $A=0$ باشد $A'=1$ است می‌توانیم معادله‌ای مانند معادلهٔ (۱) بنویسیم . بنابراین برای کلید دو راهی :

$$(1)\quad L_2=AB'+A'B$$

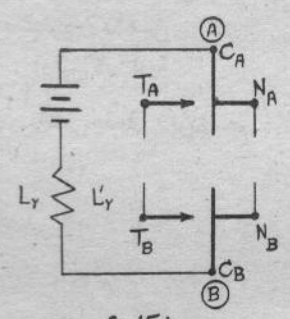
خواننده می‌تواند به‌عنوان یك تمرین ، نشان دهد که اگر با $L_2=1$ درحالتی که $A=B=0$ بودشروع کرده بودیم فرمول ما به‌صورت $L'_2=AB+A'B'$ در می‌آمد . سپس خواننده می‌تواند نشان دهد که $(L_2)'$ تحقیقاً برابر L'_2 است یعنی :

$$(AB'+A'B)'=AB+A'B'$$

[برای این کار خواننده باید ابتدا خواص زیر راکه به خواص **دو مورگان** De Morgan موسوم است ثابت کند:

$$[(AB)'=A'+B' \text{ و } (A+B)'=A'B']$$

یك روش سیم‌کشی دو کلید یك پل دوراهی برای ساختن کلید دو راهی در شکل (۶) نشان داده شده .



شکل ۶

برای بدست آوردن $L_2=AB'+A'B$ باید T_A را به N_B و N_A را به T_B متصل کنید . برای بدست آوردن $L'_2=AB+A'B'$ باید T_B را به T_A و N_B را به N_A متصل کنید .

برای یك خوانندهٔ محقق ،مطلب زیر جالب خواهد بود.

تااینجا اعمال دوتایی $A+B$ و $A\times B$ و نیز عمل یك‌تایی A' گفته شد . در مطالعهٔ این جبر اغلب با ترکیب : $AB'+A'B$ برخورد می‌کنیم . بنابراین تعریف یك عمل دوتایی جدید لازم است که ما آنرا بدین صورت می‌نویسیم :

$$A*B=AB'+A'B$$

خواننده خود می‌تواند خواص جالب این عمل دوتایی جدید راکشف کند : آیا این عمل یك عمل جابجایی است ؟ آیا انجمنی است ؟ آیا نسبت به « × » یك عمل پخشی است ؟ آیا خواص پخشی دیگری که شامل «*» باشد وجود دارد ؟ مقدار $A*A$ چیست ؟ مقدار $A*A'$ چیست ؟ قضیهٔ مرکب، برای خواننده‌ای که جبر حلقه‌ها را مطالعه کرده است چنین است : بااعمال دوتایی «*» و « × » یك حلقهٔ جابجایی داریم.

اکنون به تعمیم فرمولهای مدار برای کلید سه راهی می‌پردازیم . روش کار شبیه راهی است که فرمولها را برای L_2 در رابطهٔ (۱) تعمیم دادیم . نخست جدولی رسم می‌کنیم که شامل سه ستون برای سه کلید A،B وC است . ستون چهارمی برای چراغ ،که آنرا L_3 می‌نامیم ، درنظر می‌گیریم .سپس حالت خاموش یا روشن را برای یك بار زدن فقط یك کلید تعیین می‌کنیم . در اینجا برای آنکه برهمهٔ ترکیبهای ممکن دست بزنیم ، احتیاج به $8=2^3$ ردیف داریم.

A	B	C	L_3	
۰	۰	۰	۰	
۱	۰	۰	۱	کلید A را می‌زنیم
۱	۱	۰	۰	اکنون کلید B را می‌زنیم
۰	۱	۰	۱	اکنون کلید A را می‌زنیم
۰	۱	۱	۰	.....
۰	۰	۱	۱	.....
۱	۰	۱	۰	.....
۱	۱	۱	۱	بالاخره کلید B را می‌زنیم

با توجه به این جدول و مشاهدهٔ همهٔ راههایی که درآن $L_3=1$ است ، فرمول (۲) را بدست خواهیم آورد : ←

داستانهای ریاضی

(بقیه از صفحهٔ ۲۷۵)

وقتی که یك مربع به یك رقم فرد ختم می‌شود، جذرش نیز دارای چنین خاصیتی خواهد بود . دو حالت اتفاق می‌افتد :

جذر به دورقم فرد یا به یك رقم زوج ویك رقم فرد ختم می‌شود. در مورد اول با این قرارداد که ف معرف فردو ز معرف زوج است و ستاره‌ها نمایندهٔ عدد نامعین متشکل از ارقام غیر مشخص واقع در طرف چپ هستند می‌توانیم عدد را چنین بنویسیم :

```
ف ف ***
```

و در حالت دوم : ف ز ***

مربع عدد اول عبارتست از :

```
      ف ف ***  ×
      ف ف ***
  ----------------
[۱]   ف ف ***
[۲]   ف ***
      **
      *
  ----------------
      ف ز ***
```

می‌پرسند که به‌چه دلیل، رقم دهگان از سطر [۱] ورقم یکان ازسطر [۲] فردهستند .اگر حاصل‌ضرب ف × ف کوچکتر از ۹ باشد ، این موضوع واضح است . ولی اگر دو رقمی بود؟ بسیار خوب ، یادآوری خواهیم کرد که دهگان این عدد دو رقمی (۸۱،۴۹،۲۵) همیشه زوج است و اگر به‌آن عدد فردی اضافه کنیم ، جواب همیشه فرد خواهد بود . در نتیجه ، رقم دهگان حاصل‌ضرب همیشه مجموع دو عدد فرد یعنی عددی زوج است .

حالت دوم را مطالعه می‌کنیم :

```
      ف ز ***  ×
      ف ز ***
  ----------------
[۱]   ف ز ***
[۲]   ز ***
      **
      *
  ----------------
      ف ز ***
```

رقم دهگان سطر [۱] زوج است ، ف × ز = زوج است، و عدد حاصل نیز به‌همین ترتیب است . رقم یکان از سطر [۲] نمی‌تواند زوج نباشد ، زیراکه در حاصل‌ضرب یك رقم زوج در ردیف ماقبل آخر داریم .

حال اثبات این موضوع راکه «شرط لازم و کافی برای آنکه ارقام دهگان یك مربع فردباشد ، آنست که این مربع به ۶ ختم‌شود» به‌شماخوانندهٔ گرامی واگذار می‌کنیم . سرگرمی جالبی است !

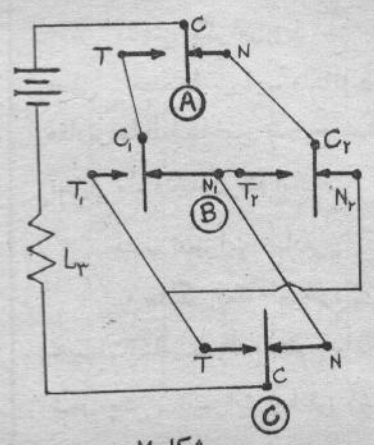
از صفحهٔ قبل

$$(۲)\quad L_۳ = AB'C' + A'BC' + A'B'C' + ABC$$

برای ساده کردن مدارهای کلیدی ، می‌توانیم از بعضی از خواص «+» و «×» یعنی خواص انجمنی وپخشی استفاده کنیم . بعلاوه به دوکلید یك پل دو راهی برای A و C ویك کلید دو پل دو راهی برای B احتیاج داریم . دراین صورت رابطهٔ (۲) را می‌توانیم به این صورت بنویسیم :

$$(۲a)\quad L_۳ = A(BC + B'C') + A'(BC' + B'C)$$

یك راه سیم کشی سه کلید که نمایش دهندهٔ این رابطه است ، در شکل (۷) نشان داده شده است.



شکل ۷

مهمتر از سیم کشی حقیقی کلیدها ، راه جالب زیر یعنی نوشتن رابطهٔ (۲a) با استفاده از عمل جدید یعنی «*» است . خواصی را که قبلا تعمیم دادیم بکار می‌بریم :

$$B*C = BC' + B'C$$
$$(B*C)' = BC + B'C'$$

که در این صورت :

$$(۲b)\quad L_۳ = A[(B*C)'] + A'[B*C]$$
$$(۲c)\quad L_۳ = A*(B*C)$$

چون می‌توان ثابت کرد که عمل دوتایی «*» یك عمل انجمنی است ، (۲c) را به این صورت می‌توان نوشت :

$$(۲d)\quad L_۳ = A*B*C$$

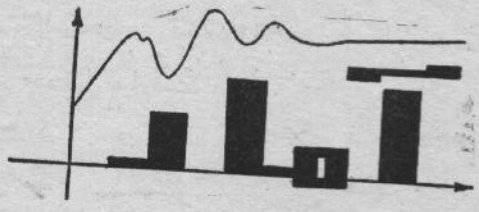
با توجه به تقارن :

$$L_۳ = A*B*C \;;\; L_۲ = A*B$$

تعمیم و اثبات L_n به خواننده واگذار می‌شود .

Initiation à la
STATISTIQUE
Ière B . D .
par : M . HAGÈGE
ترجمهٔ : ع . مصحفی

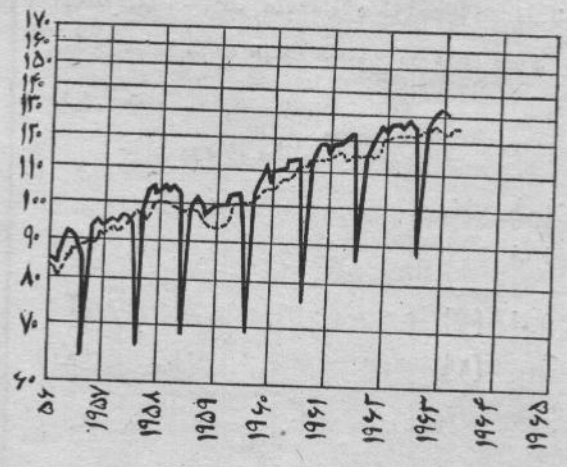
مقدمات



ــــــ ◦ دنباله از شمارهٔ قبل ◦ ــــــ

۴ـ متممها

الف ـ شکل زیر که از «جدولهای اقتصادی ۱۹۶۳ فرانسه» استخراج شده است تغییرات شاخص تولید صنعتی (به پایهٔ ۱۰۰ در ۱۹۵۹) از ۱۹۵۶ تا ۱۹۶۳ را نشان می‌دهد ؛ یکی از منحنیها به شاخص **تصحیح شدهٔ نابرابری تعداد روزهای غیر تعطیل ماه** مربوط می‌باشد . درزیر توضیح



می‌دهیم که این تصحیح مبتنی برچیست .

فرض می‌کنیم که تعداد روزهای غیر تعطیل ماههای سالی چنین باشد :

J	F	Ma	Av	Me	Jn	Jl	Ag	O	N	D
۲۶	۲۴	۲۶	۲۴	۲۲	۲۵	۲۶	۲۶	۲۶	۲۴	۲۵

اگر تعداد روزهای غیر تعطیل همهٔ ماهها با هم برابر و $\frac{۲۶+۲۴+\dots+۲۵}{۱۲}=۲۵$ باشد، شاخصهای ماهانهٔ J' و F' و... و D' عبارت خواهد شد از :

$$J'=\frac{J\times ۲۵}{۲۶} \text{ و } F'=\frac{F\times ۲۵}{۲۴} \text{ و...و } D'=\frac{D\times ۲۵}{۲۵}$$

که مقادیر شاخص تصحیح شدهٔ نابرابری تعداد روزهای غیر تعطیل ماهها می‌باشد .

منحنی دیگر مربوط است به شاخص تصحیح شدهٔ تغییرات فصلی : محاسبهٔ ضرایب ماهانه و حذف اثرات فصلی ابتدا از مقادیر ماهانهٔ شاخص تصحیح شدهٔ نابرابری تعداد روزهای غیر تعطیل ماه انجام گرفته است .

ب ـ تغییرات تصادفی

به سادگی معلوم می‌شود که از مقایسهٔ شاخص تصحیح شدهٔ تغییرات فصلی با یك منحنی میانگینهای متحرك ، مثلا درحالت شکل پیش ، تغییرات تصادفی آشکار خواهند شد .

تمرینات

تبصره ـ خطوط آرایشی که در تمرینهای ۳۳و۳۶و ۳۷ (فصل قبل) مورد نظر بوده است درحقیقت خطوط درازمدت مربوط به سریهای زمانی نظیر می‌باشند .

۴۰ـ درموردسری زمانی تمرین ۳۳ ، باروش میانگینهای متحرك (مرتبهٔ ۵) گرایش دراز مدت را تعیین کنید . نمودار را رسم کنیدوآنرا با خط دراز مدت مقایسه کنید .

۴۱ ـ بازدهٔ یك کارکشاورزی C درزمینهٔ P (برحسب کنتال درهکتار) از۱۹۲۶ تا ۱۹۴۰ چنین بوده است :

۱۱۸/۱	۱۹۳۴	۷۶/۲	۱۹۲۶
۱۰۱/۴	۱۹۳۵	۱۱۷/۱	۱۹۲۷
۱۰۷/۳	۱۹۳۶	۷۶/۵	۱۹۲۸
۱۰۵/۸	۱۹۳۷	۱۱۵/۵	۱۹۲۹
۱۲۱/۵	۱۹۳۸	۹۷/۴	۱۹۳۰
۱۱۲/۷	۱۹۳۹	۱۱۴/۰	۱۹۳۱
۱۱۸/۰	۱۹۴۰	۱۱۶/۷	۱۹۳۲
		۱۰۷/۸	۱۹۳۳

۱) نمودار سری را رسم کنید .

۲) اولا میانگینهای رده‌بندی شده (دوره‌های پنجساله) ، ثانیاً میانگینهای متحرك (رتبهٔ ۵) را تعیین کنید .

۳) نمودار میانگینهای متحرك را رسم کنید .

۴۲ ـ در مورد سری زیر باروش میانگینهای ماهانه ، تغییرات فصلی را بررسی و بعد اثرات فصلی را حذف کنید . تعداد غائبین ماهانه در یك کارخانه :

ماه	۱۹۶۰	۱۹۶۱	۱۹۶۲	۱۹۶۳
ژانویه	۱۱۲	۱۰۷	۱۱۳	۱۰۶
فوریه	۱۰۴	۱۰۷	۱۰۷	۱۰۲
مارس	۱۰۳	۱۰۰	۱۰۵	۱۰۱
آوریل	۱۰۳	۱۰۳	۹۹	۱۰۲
مه	۱۰۴	۱۰۰	۹۹	۱۰۰
ژوئن	۹۶	۹۳	۹۹	۱۰۰
ژوئیه	۹۲	۹۴	۹۴	۹۷
اوت	۹۳	۱۰۰	۹۲	۹۳
سپتامبر	۸۷	۸۷	۸۸	۹۰
اکتبر	۹۸	۱۰۰	۹۷	۱۰۰
نوامبر	۱۰۰	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۰
دسامبر	۱۰۷	۱۱۰	۱۰۶	۱۱۲

۴۳ـ تعداد ماهانهٔ ازدواجهای رسمی در فرانسه از ۱۹۳۲ تا ۱۹۳۵ (برحسب هزاران) چنین بوده است :

	دسامبر	نوامبر	اکتبر	سپتامبر	اوت	ژوئیه	ژوئن	مه	آوریل	مارس	فوریه	ژانویه
۱۹۳۲	۲۳/۷	۲۶/۳	۳۴/۸	۲۹/۳	۲۲/۸	۲۴/۷	۲۸/۱	۲۰/۰	۴۱/۸	۱۸/۳	۲۰/۵	۲۴/۶
۱۹۳۳	۲۴/۴	۲۴/۹	۳۲/۶	۳۲/۶	۲۲/۸	۲۵/۴	۲۹/۴	۲۱/۲	۳۹/۱	۱۳/۵	۲۷/۶	۲۲/۲
۱۹۳۴	۲۴/۰	۲۳/۸	۳۱/۳	۳۰/۹	۲۱/۴	۲۱/۸	۲۹/۰	۱۹/۱	۴۱/۰	۱۵/۰	۲۰/۷	۲۰/۴
۱۹۳۵	۲۰/۵	۲۵/۰	۲۹/۸	۲۶/۸	۲۳/۰	۲۲/۰	۲۸/۷	۱۸/۰	۳۲/۰	۱۸/۹	۲۱/۶	۱۸/۸

با روش نسبتها به میانگین ماهانه ، تغییرات فصلی را بررسی سپس اثر آنها را حذف کنید .

۴۴ ـ تمرین قبل را با استفادهٔ از روش سلسله نسبتها انجام دهید .

۴۵ ـ یك گروه تولیدی دستگاههای سرد کنندهٔ خانگی می‌سازد و آنهارا توسط شعبه‌های خود بفروش می‌رساند . آمار فروش و محصول مدل ۷۰ لیتری این گروه برای چهار سال متوالی درجدولی که می‌آید گردآوری شده است .

فروش گروه تا دسامبر ۱۹۵۱ منحصراً نقدی انجام می‌گرفته است. از این تاریخ به بعد روش زیر بکاررفته است: هر دستگاه به متقاضی تحویل شده وبهای آن درشش قسط ماهانه مستهلك گردیده‌است که برای هرسفارش رسیده بین اول نوامبر و ۳۱ مارس هر قسط برابر بوده است با یك ششم بهای نقدی

۱) با استفادهٔ از جدول فروشهای ماهانه ، منحنی زمانی مربوط به‌سالهای ۱۹۵۲ و ۱۹۵۳ را رسم کنید .

۲) خط درازمدت **AB** مربوط به این دو سال را رسم کنید و معادلهٔ آنرا بدست آورید . معلوم کنید که داده‌های منظم شدهٔ مربوط به‌سالهای ۱۹۵۲ و ۱۹۵۳ چگونه بدست خواهند آمد. (در محاسبات مربوط به تعیین این معادلات فروشها تا یك دوازدهم تقریب تخمین زده خواهند شد) .

۳) آیا آرایش یك خط دراز مدت برای مجموعهٔ چهار سال مناسبت دارد ؟

سال	فروش													موجودی		محصول
	ژانویه	فوریه	مارس	آوریل	مه	ژوئن	ژوئیه	اوت	سپتامبر	اکتبر	نوامبر	دسامبر	جمع	۱ ژانویه	۳۱ دسامبر	سالانه
۱۹۵۰	۳۰۷	۳۲۱	۳۵۴	۴۰۹	۸۰۰	۲۴۸۸	۱۷۵۰	۷۸۳	۹۲	۴۹	۵۸	۲۶	۷۴۳۷	۱۹۱۷	۱۸۱۴	۷۳۳۴
۱۹۵۱	۲۲۶	۳۱۷	۲۹۳	۴۱۰	۹۵۶	۲۳۳۷	۱۹۲۴	۵۴۰	۷۹	۵۷	۴۳	۱۱۲	۷۲۹۴	۱۸۱۴	۱۷۸۹	۷۲۶۹
۱۹۵۲	۵۴۳	۶۲۵	۸۱۵	۴۱۸	۷۳۴	۱۸۳۴	۱۲۹۳	۵۸۰	۱۰۴	۸۹	۲۸۰	۳۱۰	۷۶۲۵	۱۷۸۹	۱۲۸۴	۷۱۲۰
۱۹۵۳	۴۸۴	۵۷۸	۹۷۷	۳۳۴	۷۲۶	۱۷۴۶	۱۱۸۲	۵۹۲	۱۰۲	۷۸	۳۱۲	۴۳۶	۷۵۴۷	۱۲۸۴	۱۳۱۲	۷۵۷۵

۴۶ـ دربارهٔ محصول انرژی الکتریکی در فرانسه آمار جدول زیر داده می‌شود :

سال	تولید برحسب کیلووات ساعت	نسبت تولیدهای متوالی	سال	تولید برحسب کیلووات ساعت	نسبت تولیدهای متوالی
۱۹۲۰	۳/۵	—	۱۹۲۷	۲۰	۱/۱
۱۹۲۱	۴/۴	۱/۳	۳۸	۲۱	۱/۱
۲۲	۵/۸	۱/۳	۳۹	۲۲	۱
۲۳	۸/۴	۱/۴	۱۹۴۰	۱۹	۰/۹
۲۴	۱۰	۱/۲	۴۱	۲۱	۱/۱
۲۵	۱۱	۱/۱	۴۲	۲۰	۱
۲۶	۱۳	۱/۲	۴۳	۲۱	۱/۱
۲۷	۱۳	۱/۰	۴۴	۱۶	۰/۸
۲۸	۱۵	۱/۲	۴۵	۱۹	۱/۲
۲۹	۱۶	۱/۱	۴۶	۲۴	۱/۲
۱۹۳۰	۱۷	۱/۱	۴۷	۲۷	۱/۱
۳۱	۱۶	۰/۹	۴۸	۲۹	۱/۱
۳۲	۱۵	۰/۹	۴۹	۳۰	۱
۳۳	۱۷	۱/۱	۱۹۵۰	۳۳	۱/۱
۳۴	۱۷	۱/۰	۵۱	۳۸	۱/۱
۳۵	۱۸	۱/۱	۵۲	۴۱	۱/۱
۱۹۳۶	۱۹	۱/۱	۱۹۵۳	۴۱	۱

۱) میانگین هندسی نسبتهای تولیدات برای سالهای متوالی را حساب کنید .

۲) مقداری که مربوط به مقایسهٔ بین تولیدات انرژی الکتریکی سالهای ۱۹۲۰ و ۱۹۵۳ بدست می‌آید چه معنی می‌دهد ؟ نسبت ثابت افزایش سالانه چیست که ازروی آن بتوان تولید ۱۹۵۳ را از روی تولید ۱۹۲۰ بدست آورد ؟

۳) سری تولیدات سالانه را (برحسب هزار کیلووات ساعت) روی یك نمودار نمایش دهید. سعی کنید دستگاه مقیاساتی انتخاب کنید که تغییرات نسبت افزایش مزبور را روی نمودار بهتر نشان بدهد .

آیا از روی نسبت مزبور که آنرا حساب کرده‌اید می‌توان تحول واقعی تولید از ۱۹۲۰ تا ۱۹۵۳ را معلوم کرد ؟

روش هندسی ... (بقیه ازصفحهٔ ۲۳۹)

این اتحاد را به صورتهای دیگر از جمله به صورت زیر نیز می‌توان نوشت :

$$(\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha)(\sin 3\alpha - \sin \alpha) = \sin 4\alpha \sin \alpha$$

تمرین ۱ـ مثلثی را در نظر بگیرید که در آن یك زاویه چهار برابر زاویهٔ دیگر باشد وبه‌ترتیب بالا عمل کرده اتحاد مثلثاتی مربوط را بدست آورید .

تمرین ۲ـ نوع مثلث ABC را معلوم کنید که در آن دو رابطهٔ زیر با هم برقرار باشد .

$$\begin{cases} \sin^2 B - \sin^2 C = \sin A \sin C \\ (\sin^2 A - \sin^2 C)(\sin A - \sin C) = \sin^2 B \sin C \end{cases}$$

عکس مسئلهٔ مالفاتی

Micheal Goldberg
Mathematics Magazine

ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

۱ـ مقدمه ـ مسئلهٔ معروف مالفاتی عبارتست ازتعیین اندازه‌های شعاعهای سه‌دایره‌ای که در یك مثلث محاط باشند بطوری‌که مجموع مساحات آنها ماکزیمم باشد.

مالفاتی تصور می‌کرد ، که جواب این مسئله سه دایره است که علاوه برآنکه باید دو به دو برهم مماس باشند هریك ازآنها بایستی بردوضلع مثلث مفروض تماس داشته باشند .

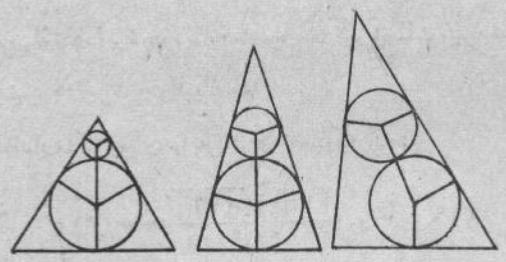
لیکن بعدها نظرمالفاتی دراین‌مورد بوسیلهٔ محققین‌دیگر رد شد واکنون نیز برما مسلم شده‌است که عقیدهٔ مالفاتی دراین باره اشتباه بوده است ، چه نویسنده ضمن رساله‌ای که در این خصوص به رشتهٔ تحریر درآورده و در همین مجله تحت عنوان « مسئلهٔ اصلی مالفاتی » (صفحهٔ ۲۲۰ یکان دورهٔ پنجم) چاپ شده ، ثابت کرده‌است که مجموعهٔ دوایر مالفاتی‌هرگز نمی‌توانند جواب واقعی‌این‌مسئله باشند، مضافاً اینکه می‌شوددستورمالفاتی را جواب تقریبی دانست .

عکس‌این مسئله‌که بنظر نمی‌رسد سابقاً طرح شده باشد ، ممکن است به صورت زیرعنوان شود :

« مثلثی باکمترین مساحت تعیین‌کنیدکه بتواند سه‌دایرهٔ مفروض‌را بدون‌اینکه‌یکدیگرراقطع‌نمایند ،درخودجای بدهد».

این مسئله کلیتر ازمسئلهٔ اصلی مالفاتی است ، زیرا در میان مجموعه‌های دوایر مفروض ممکن است مجموعهٔ دوایری یافت‌که طبیعتاً نمی‌توانستهٔ جواب مسئلهٔ اصلی مالفاتی باشد. به‌علاوه درعکس مسئلهٔ مالفاتی سروکارما بافرمهای گوناگون و جوابهای مختلف خواهد بود .

۲ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ـ فرض می‌کنیم a و b و c $(a>b>c)$ شعاعهای دوایر مفروض باشند برای سهولت‌شعاع دایرهٔ بزرگتر یعنی a را برابر واحد اختیار می‌کنیم . بنابراین مثلثی باکمترین مساحت‌که بتواند این دایره رادربر گیرد همانا مثلث متساوی‌الاضلاع محیطی این دایره خواهد بود . هرگاه شعاعهای دو دایرهٔ دیگرازحدود $\frac{1}{3}$ تجاوز ننمایند ، آنهارا می‌توان دردوگوشهٔ این مثلث مطابق‌شکل(۱) گنجانید ، از اینرو مثلث متساوی‌الاضلاع برای چنین دسته دوایری جواب می‌باشد .



شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳

۳ـ مثلث متساوی‌الساقین ـ فرض می‌کنیم دایرهٔ دوم شعاعش بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ باشد ، در این صورت مثلثی با کمترین مساحت‌که فقط این دو دایره ، یعنی دایرهٔ اول به‌شعاع‌واحدودایرهٔ‌اخیر، رادربر گیردتعیین‌می‌نمائیم .

ابتدا ، دودایره را به‌حالت تماس پهلوی یکدیگر قرار می‌دهیم ، سپس دوخط که به منزلهٔ اضلاع مثلث مطلوب باشند طوری رسم می‌کنیم‌که هرکدام بردودایرهٔ مذکورمماس باشند، بنابراین ضلع دیگراین مثلث بردایرهٔ بزرگتر مماس می‌گردد، اکنون اگر مساحت این مثلث می‌نیمم باشد ، لازم می‌آید ، که نقطهٔ تماس ضلع سوم ودایره ، منطبق بروسط همین ضلع یعنی ضلع سوم باشد ، روی این اصل مثلث مطلوب در این حالت متساوی‌الساقین است . (شکل ۲) ، اکنون اگر دایرهٔ سوم بتواند دریکی ازنواحی‌اشغال نشده ، گنجانده شود دراین‌صورت می‌شود گفت که مثلث متساوی‌الساقین برای چنین دوایری جواب است .

بزرگترین مقداری‌که c می‌تواند احراز نماید عبارتست از : $c=b^2$

۴ـ فرض می‌کنیم شعاع دایرهٔ دوم بین $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ و ۱ باشد ،دراین صورت وضع مثلث متساوی‌الساقین سابق‌تغییر می‌کند ، فرض می‌کنیم ضلع سمت راست مثلث متساوی‌الساقین فوق دروضع خود ثابت باشد، وبنابراین فشار دایرهٔ دوم بر- ضلع طرف چپ تأثیر کرده وآنرا به مثلث غیرمشخص تبدیل می‌کندکه یك ضلع‌آن بردو دایرهٔ مذکور مماس بوده و اضلاع دیگر هرکدام بریك دایره از این دو دایره مماس می‌گردند (شکل ۳) اکنون برای‌آنکه مساحت این مثلث می‌نیمم باشد ، باید نقاط تماس هریك ازدوضلع اخیرکه به‌ترتیب بریك دایره مماس‌هستند ، براوساط‌آنها منطبق‌گردند .

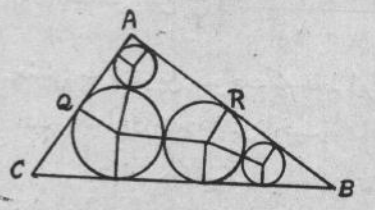
اگـردایرهٔ سوم بتواند در یکی از نواحی اشغال نشده مثلث بوسیلهٔ دودایرهٔ مورد بحث ، جای‌گیرد مثلث غیرمشخص برای چنین دوایری جواب است ،

مقدارماکزیمم c تابعی‌از b است‌که از :

$$\frac{(1+\sqrt{17})^2}{(8)^2}=0/410 \quad \text{تا} \quad 0/719$$

تغییر می‌کند .

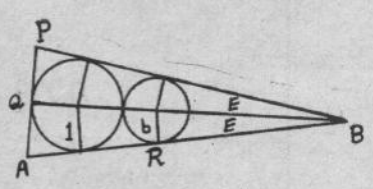
اکنون فرض می‌کنیم دایرهٔ سوم در کوچکترین زاویهٔ مثلث یعنی B و یا زاویهٔ سوم مثلث A گنجانده شود (شکل۴) به ازاء مقدار معینی از b که‌آنرا به k نمایش می‌دهیم‌دومقدارماکزیمم c مساوی می‌شوند . با انجام محاسبات لازم مقدار k تقریباً برابر با ۰/۸۵ بدست می‌آید .



(شکل ۴)

برای مقادیر کوچکتر از k که به b نسبت دهیم مقدار ماکزیمم c وقتی‌حاصل می‌شودکه c در زاویهٔ B گنجانده‌شود، درازاء مقادیری بزرگتر از k مقدار ماکزیمم هنگامی بدست می‌آیدکه c درزاویهٔ A محاط شود .

۵ ـ می‌توان مثلث متساوی‌الساقین شکل (۵) را مثلث غیرمشخص ABC سابق تصور نمود ، اگـر ضلع اول مثلث متساوی‌الساقین را AB ورأس سوم را P بنامیم، بنابراین R وسط AB خواهد بود ، همچنین نقطهٔ تماس Q بروسط AP منطبق می‌باشد .



(شکل ۵)

اگر دایرهٔ دوم شعاعش b باشد وزاویهٔ E نصف زاویهٔ ABP باشد خواهیم داشت :

$$\sin E=\frac{1-b}{1+b} \quad \text{و} \quad \cos^2 E=1-\sin^2 E=\frac{4b}{(1\times b)^2}$$

$$CB=2b\cot g E \quad \text{و} \quad RB=(\cos E)\times \overline{CB}=$$
$$=2b\cos^2 E/\sin E=b/\sin E+b+2$$

$$b+(b+2)\sin E=2b\cos^2 E \quad \text{و}$$

$$b+(b+2)(1-b)/(1+b)=8b^2/(1+b)^2$$

ازاینرو حاصل می‌شود :

$$4b^2-b-1=0 \Longrightarrow b=\frac{1+\sqrt{17}}{8}\#0/6404$$

۶ـ هرگاه کوچکترین دایره‌نتواندرسطح محصور بین دو دایـرهٔ بزرگتر و ضلع مثلث محاط شود ، باید ترتیبهـای دیگری بکار برد ، چند نمونه ازایـن ترتیبها به کمك محاسبه پیدا شده‌اندکه درزیر به ذکرآنها می‌پردازیم .

برای مقادیری‌کوچکتراز b فرم سه دایره چنین است: هرسه دایره باید بر یك ضلع مثلث حتماً مماس باشند و دایرهٔ بزرگتر درمیان دودایرهٔ دیگرقرارگیرد، ودوضلع دیگرهریك بردو دایره مماس باشند .

برای مقادیر بزرگتر از b و c ، ترتیبی حاصل می‌شود که نه بزرگترین دایره برتمام اضلاع مثلث مماس‌است و نه دو دایرهٔ‌کوچکتر برهم مماس می‌شوند.

اکنون برای مقادیر بزرگتری از b و c ، ترتیب‌دوایر مالفاتی ، برای مسئله بدست می‌آید ، که هرسه دایره عـلاوه برآنکه دو به‌دو برهم مماس می‌باشند هریك بردوضلع ازمثلث مماس هستند .

۷ـ تـرسیمات فوق درشکل دیاگرام صفحه‌بعد خلاصه می‌شوند .

هریك ازمجموعهٔ اشعهٔ c و b و ۱ بـوسیلهٔ نقطه‌ای از مثلث دیاگرام مشخص شده‌اند ، این مثلث به هفت ناحیه تقسیم شده و جواب مخصوص هرناحیه بوسیلهٔ علائم هندسی‌آن ناحیه مشخص شده‌است .

درنواحی پائین (VII و VI و V) حداقل یکی از سه دایره بطورآزاد است . اما در نواحی بالا (VII و VI

و V) هریك ازدایره‌ها بوسیلهٔ دو دایرهٔ دیگر محکم و تحت فشار است .

در V ، سه‌دایره بریك ضلع مثلث مماس هستند.

در VI ، هردایره بر دوضلع مثلث مماس می‌باشند ولی دودایرهٔ کوچك برهم مماس نیستند.

درناحیهٔ VII ، ترتیب همان ترتیب مالفاتی است.

مختصات نقاط مذکور دردیاگرام به قرار زیراست :

$P(\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{9})$

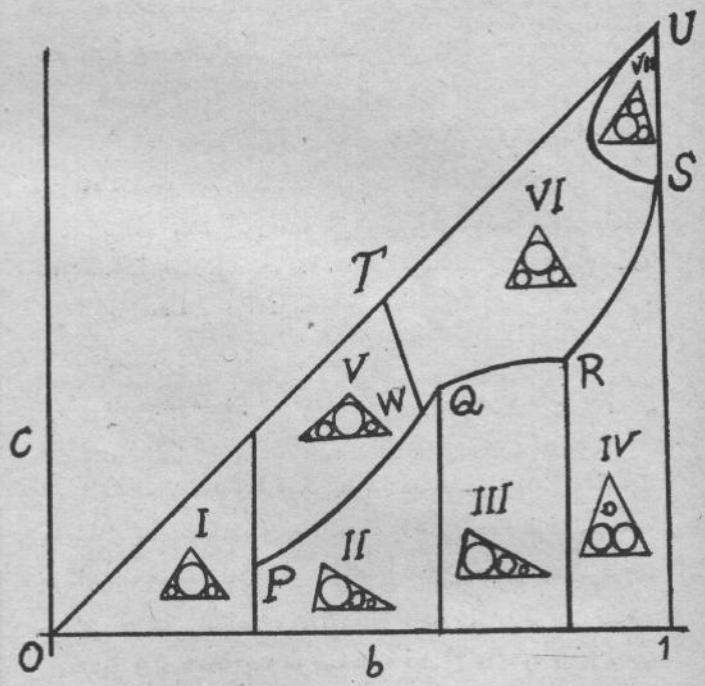
$Q[(1+\sqrt{17})/8$ و $(1+\sqrt{17})^2/64 \# 0/6410$

$R(0/85$ و $0/45)$ و

$S(1$ و $0/719)$ و $T(0/55$ و $0/55)$

$U(1$ و $1)$ و $W(0/60$ و $0/36)$

منحنی PQ یك سهمی به معادلهٔ $c=b^2$ است ، منحنیهای دیگر مشخص نشده‌اند .



۸ ـ هرگاه اندازه‌های شعاعهای دو دوایره معلوم باشند و دایرهٔ سوم بتواند تغییر کند ، نوع جوابها با اختیار اندازهٔ شعاع دایره سوم تغییر می‌نمایند، برای‌مثال‌اگر $a=1$ و $b=0/95$ باشد ، پس چون c از صفر تا ۰/۹۵ ترقی می‌کند ، رشته جوابهای زیر بدست می‌آید:

VI و VII و VI و IV

اگر نسبت c به b مساوی با ۰/۶۲۵ باشد خط با ضریب زاویهٔ ۰/۶۲۵ از مبدأ گذشته و شش ناحیه را قطع می‌کندکه یکی‌ازآنها تکرار می‌شود ویك رشته از هفت جواب را بدست می‌دهد. این موضوع باانتخاب $b=16$ و $c=10$ و مقادیری از a که بیشتراز ۱۶ باشد واضح می‌باشد .

دنباله ازصفحهٔ بعد

پثانوادامه پیدا می‌کند هیچکدام ازآنها دوباره به‌صفر نمی‌رسد.

اثبات ـ می‌دانیم‌که $1=(0)'$ و $2=(1)'$ است .

حال اگر $0=2$ باشد لازم می‌آیدکه $0=(1)'$ باشدو این مخالف با اصل دوم است . به‌همین ترتیب هیچیك ازاعضاء مجموعهٔ N نمی‌تواند دوباره به‌صفر برگردد .

آیا اعداد صحیح همه متمایزند ؟

قبلا می‌دانیم‌که $1=0'$ می‌باشد حال اگر $1'=(0')'$ راتشکیل‌بدهیم چون $1'$ نمی‌تواندبرابر ۰و۱ بشود پس ناچارقیافهٔ جدیدی به‌آن داده وبه‌صورت مثلا ۲ می‌نویسیم ، نتیجه می‌شود که سه عدد ۰و۱و۲ متمایز می‌باشند. اکنون $2'=3$ رااختیار کرده وثابت می‌کنیم‌که ۳ نیز به نوبهٔ خود نمی‌تواند برابر ۰و۱و۲ بشود ، مساوی نبودن ۳ با ۲ و ۰ معلوم است و اگر $3=1$ باشد $2'=0'$ ویا $2=0$ گردد و این هم نشدنی‌است پس به این ترتیب مسلم شدکه چهار عدد ۰ و ۱ و۲و۳ متمایز می‌باشند .

پس از این مقدمات این سؤال پیش می‌آیدکه اگر با این طریق پیش‌برویم، $3'=4$ و $4'=5$ ونظائرآن رابنویسیم تمام اعداد حاصل از همدیگر مجزی هستند یا بعضی از آنها تکراری می‌باشد ، داشتن نامهای مختلف آیا دلیل ماهیتهای مختلف است ؟ برای جواب دادن به این موضوع قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم .

قضیه :

مجموعهٔ N که بوسیلهٔ اصل پثانو تشکیل می‌شود دارای اعضاء مکرر نمی‌باشد .

.....

دربارهٔ مسائل مندرج در یکان

● آقای **سید حسن حسینی** از دبیرستان حکمت قم نوشته‌اند :

مسئلهٔ ۶۰/۴ در کتاب جبر چهارم ریاضی
« ۶۰/۲۱ در کتاب ۴۰۰ مسئلهٔ ریاضی
« ۶۰/۲۵ در حل‌المسئلهٔ هندسه
مندرج است .

● آقای **جواد فیض** از دبیرستان‌حکمت قم‌نوشته‌اند
مسئلهٔ ۶۰/۲۳ در ۱۲۰۰ مسئله
« ۶۰/۳۱ در حل‌مسائل مکانیك
چاپ شده است .

● آقای **پرویز رهبر** نوشته‌اندکه
مسئله ۶۰/۳۱ در حل‌المسائل مکانیك نوین
« ۶۰/۳۴ درحل‌المسائل مکانیك برای دانشجویان
مندرج می‌باشد.

یك مبحث از کتاب «مبادی منطق و ریاضی جدید»

تألیف : غلامرضا عسجدی

اصول پئانو

مابین مجموعه‌های مختلف ریاضی مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت با صفرشهرت دارد . سابقاً بیشترقضایا واحکام‌مربوط به علم حساب و اعداد ، شهودی بوده است و اگر استدلالی هم بکار رفته جنبهٔ تجربی و مشاهده داشته است . اولین دفعه (Giuseppe Peano) ریاضیدان‌ایتالیائی‌که مابین‌سالهای ۱۸۵۸ تا ۱۹۳۲ می‌زیسته است نظریهٔ اعداد و یا علم حساب را با روش اکسیوماتیك بناکرد. دانشمند نامبرده مجموعهٔ‌اعداد مثبت و صحیح با صفر را به‌صورت $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ویابه‌صورت : {صفر ، یك ، دو ، سه ،...} در نظر گرفت و پنج اصل زیر را دربارهٔ آن بدون استدلال اختیارکرد . سپس بقیهٔ احکام اعداد و علم حساب را از روی آنها بدست آورد .

پنج اصل معروف پئانوعبارتست از

اصل اول ـ صفر عدد است وعضو مجموعهٔ N اعداد طبیعی می‌باشد : $0 \in N$

اصل دومـ درمجموعهٔ اعداد طبیعی هرعددغیرمشخص n یك تالی داردکه منحصر به فرد است وآن را n' می‌نامیم:

$$\forall n : n \in N \cdot \exists | n' \cdot n' \in N$$

اصل سوم ـ صفر تالی هیچ عدد نیست ؛ یعنی صفر مقدم ندارد :

$$\forall n : n \in N \cdot n' \neq 0$$

مقدم هر عدد n را به‌صورت n' نشان می‌دهند پس :

$$(n')' = n$$

اصل چهارم ـ اگر تالیهای دو عدد برابر باشندآن دو عدد برابرند یعنی :

$$(n' = m') \Longrightarrow (n = m)$$

اصل پنجم یا اصل استقراء ضعیف ـ (Induction) ـ اگر مجموعهٔ غیر مشخص M شامل صفر و شامل عدد n و تالی آن n' باشد با مجموعهٔ N برابراست یعنی $M = N$.

پس از قبول این پنج اصل استدلال قضایای حساب میسر خواهد بود . استدلالی‌که گاهی بیان‌آن غیر طبیعی‌تر از خود موضوع جلوه می‌کند . بهرحال برای‌توجه‌خواننده چند قضیه از روی اصول پئانو مطرح می‌کنیم .

قضیه :

اگر در مجموعهٔ N دو عدد مختلف باشند، تالیهای‌آنها نیز مختلف خواهند بود .

برای اثبات این قضیه می‌گوئیم اگر تالیها برابر باشند به‌موجب‌اصل‌چهارباید خوددوعدد برابرباشند،چون چنین‌نیست پس تالیها مختلف خواهندبود.

قضیه :

در مجموعهٔ N هر عدد با تالی خود فرق دارد یعنی :

$$n \neq n'$$

اثبات ـ مجموعهٔ دیگر E را در نظر می‌گیریم بقسمی که شامل تمام اعداد صحیح باشدکه با تالی خود فرق دارند . پس این مجموعه شامل صفر خواهدبود $0 \in E$ ، حال فرض می‌کنیم n یکی از اعضاء مجموعهٔ E باشد پس به موجب فرض $n \neq n'$ و از آنجا به موجب قضیهٔ قبل $n' \neq (n')'$ ، یعنی n' با تالی خود فرق دارد . بنابراین n' نیز عضو مجموعهٔ E خواهد بود یعنی : $(n \in E) \Longrightarrow (n' \in E)$ حال به موجب اصل پنجم‌گوئیم مجموعهٔ E همان مجموعهٔ N است یعنی در مجموعهٔ N هر عدد با تالی خود فرق دارد .

قضیه :

درمجموعهٔ N هرعدد غیرصفر فقط تالی یك عدداست . اثبات‌این قضیه‌ازروی قضیه‌های‌قبل‌به عهدهٔ خواننده‌است.

قضیه :

اعدادی‌که ازصفر شروع شود وبه موجب اصول پنجگانهٔ

بقیه درصفحه قبل

کتابخانهٔ یکان

در قلمرو ریاضیات

تألیف : الکساندر پترویچ دوموریاد

ترجمه : پرویز شهریاری

ناشر : مؤسسهٔ مطبوعاتی امیر کبیر

۴۲۶ صفحه با جلد سلیفون - بها : ۲۳۰ ریال

خلاصه‌ای از

زیست شناسی

«فیزیولوژی جانوری و جانور شناسی»

وپرسشهای مسابقه‌های ورودی دانشگاههای ایران با پاسخ آنها

تألیف: افسر تجلی‌پور«مینا»

از سری :

دوره‌های کنکور

با نظارت : مهدی تجلی پور

مؤسسهٔ مطبوعاتی امیر کبیر

۳۱۸ صفحه - بها ۱۴۰ ریال

حل المسائل فیزیك سال پنجم

شامل مسائل‌حل شده و خلاصه مطالب فیزیك‌کلاس پنجم

برای دانش‌آموزان پنجم طبیعی و ریاضی و داوطلبان‌متفرقه

وکنکور دانشگاه

به‌انضمام مسائل‌کنکورها و امتحانات متفرقه

تألیف : غضنفر بازرگان

ناشر : مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی

چاپ پنجم ، ۶۱۲ صفحه ، بها : ۲۰۰ ریال

راهنما و حل المسائل

فیزیك

یکصد مسئله

برای‌کلاس سوم و داوطلبان متفرقه

به‌انضمام‌سؤالات ومسائل امتحانی‌سوم متفرقه‌درتهران واصفهان

از : هوشنگ ملکپور

ناشر :کتابفروشی مشعل - اصفهان ، چهارباغ

بها : ۳۵ ریال

Fun With Numbers Lines and Angles

By :

Ali R. Amir - Aoez, Ph.D.

and

Donald H. Menzel, Ph.D.

Published by

Highlights for Children

2300 W. Fifth Avenue

Columbus, Ohio 43216

فهرست مندرجات

مجله‌های علمی وعلوم اجتماعی ایران

دورهٔ اول - شمارهٔ سوم - آبان ۱۳۴۸

ناشر :

مرکز اسناد و مدارك علمی ایران

مؤسسهٔ تحقیقات و برنامه ریزی علمی وآموزشی

وزارت‌علوم و آموزشی‌عالی

تهران - صندوق پستی : ۱۳۸۷-۱۱

خلاصهٔ فعالیتهای

بنیاد فرهنگی ح.ع. البرز

در سال تحصیلی ۴۷ - ۴۸

ناشر: بنیاد فرهنگی ح.ع. البرز-خیابان لاله‌زارنو-چهارراه‌مهنا

آشنایی با صنعت نفت ایران

نشریهٔ ادارهٔ کل روابط عمومی شرکت ملی نفت ایران

مدیریت در

شرکتهای تعاونی

مالکیت املاك مزروعی و

تعاون

نشریه‌های‌شماره‌های ۳۰و۳۱ انتشارات‌سازمان مرکزی‌تعاون کشور

توجه

ادارهٔ مجلهٔ یکان از تهیه و ارسال این کتابها برای طالبان معذورمی‌باشد. طالبان کتابها می‌توانند به‌کتابفروشیها یا به ناشران مربوط مراجعه‌کنند

«تفسیر مسئلهٔ چهار رنگ»

THOMAS L. SAATY
Mathematics Magazine

ترجمه و تنظیم از: محمدحسین احمدی
دانشجوی ریاضی دانشسرایعالی تهران

۱ـ مقدمه

مسئلهٔ چهار رنگ یکی از قدیمیترین ومعروفترین مسائل توپولوژی است که ازدیرباز موردتوجه ریاضیدانان بوده ومی باشد بیان مسئلهٔ چهاررنگ اگرچه تکرار مکرر است ولی ذکرآن خالی از فایده هم نیست . مسئله چنین است « برای رنگامیزی یك نقشه به طریقی که رنگهای نواحی هم مرز متشابه نباشند چندرنگ لازم وکافی است ؟»

البته خوانندگان ارجمند باتوجه وملاحظهٔ دقیق مقالات متعددی که دراین زمینه در شماره‌های مختلف مجلهٔ یکان درج گردیده آشنائی قابل‌ملاحظه‌ای نسبت به‌مسئلهٔ چهاررنك دارند. بنابراین ازاشارهٔ بعضی‌مطالب درمورد مسئلهٔ مذکور که توضیح واضحات تلقی‌خواهد شد در می گذریم و تنها به ذکر دو نکتهٔ بسیارمهم اکتفا می‌کنیم :

الف‌ـ دراین مسئله «نواحی هم‌مرزومشترك» تلویحاً به آنهائی اتلاق می‌شود که لااقل دریك‌خط (اعم از مستقیم یا غیر مستقیم) مشترك باشند بدیهی است که هرگاه دو ناحیه فقط در یك نقطه مشترك‌باشند دوناحیهٔ هم‌مرز تلقی‌نخواهد شد .

ب‌ـ مطلب دوم که بسیار اساسی ودر خور شایان توجه بوده‌وهیچگاه نبایدآنرا ازنظر دور داشت این است که نمایش هندسی (اشکال) صرفاً به خاطر نزدیك ساختن مطالب به ذهن است و ما را در دست یافتن به‌طریق استدلال هدایت می‌کند . نمایش‌هندسی هیچ‌وقت جایگزین برهان نمی‌شود حتی‌اگر نتیجه ازروی شکل کاملا محسوس باشد .

کمپ کاتاسترف ریاضیدان معروف‌روش اثباتی درمورد مسئلهٔ چهاررنگ‌ارائه نمود. امادر ضمن استدلال خود مرتکب اشتباهی شده بود وبه این‌جهت طریق اثبات اوبا اعتراض‌اغلب آنهایی که روش استدلال استقرائی مسئله را دنبال می کردند مواجه می‌شد تا اینکه بعدها اشتباه اصلی‌کمپ توسط **هی‌وود** کشف‌شد .

در این قسمت می‌خواهیم کوششی راکه اخیراً در مورد مسئلهٔ چهار رنك بعمل‌آمده است همراه با یك رشته استدلالات کاملا مستقل ، که درضمن‌آن اشتباه‌کمپ به وضوح معلوم است بیان نمائیم .

استدلالی که محتملا اذهانمانرا نسبت به مشکلات ناشی ازکار برد روش استقرائی، روشن‌ساخته ومارا دربررسی طرق متعدد یاری می‌بخشد .

دراین‌مقاله‌قضیه‌ای‌سودمندمربوط به‌همشکلی(ایزومرفیسم) نقشه‌هـای شش رأسی کـه حداقل تعداد نقاط تقاطع را دربر دارند ارائه می‌دهیم .

۲ـ زمینه :

که هرنقشه ازتعدادی نواحی (مثلا n ناحیه) تشکیل‌شده است . اگریك وتنها یك‌نقطه در داخل هرناحیه به دلخواه در نظربگیریم وهردو رأس متعلق به دوناحیهٔ هم‌مرز راتنها بایك خط به‌هم وصل‌کنیم نقشه‌ای حادث می گرددکه آنرا اصطلاحاً «شبکه» می‌نامیم . ازاینرو به جای رنگ‌آمیزی‌کامل n ناحیه می‌توان رنگامیزی مناسب دیگری‌که همانا رنگ‌کردن n رأس شبکهٔ مذکور می‌باشد درنظرگرفت .

دراین‌مقام مانیز روش متداول استقراء ریاضی راکه در ریاضیات موارد استفادهٔ بیشمار دارد درمورد نقشهٔ $n-1$ رأسی حاصل ازبرداشت یك‌رأس، بکارمی‌بندیم . این‌رأس‌که آنرا v می‌نامیم حداکثربا پنج‌یال خودبه‌کلیهٔ رأسهای مجاورش متصل می گردد چنین‌رأسی همواره وجود دارد .

ابتدا اگرچنین در نظرگرفته شودکه نقشهٔ فرعی شامل رأس v (درنامناسبترین شرایط) باتمام پنج یالش ، کامل شده باشد، بدین معنی‌که اگرهرزوج ازشش رأس تنهابوسیلهٔ یك‌یال به‌هم متصل‌شده باشندآنگاه یك نقشه‌ئی غیر واقع در یك صفحه (غیرمسطح) خواهیم داشت . به سهولت می‌توان نشان‌دادکه این

نقشه به‌هیچ وجه نمی‌تواند کمتر از سه نقطهٔ تقاطع (محل برخورد یالها) داشته باشد می‌دانیم که یك نقشهٔ کامل شش رأسی باسه نقطه وجود دارد بنابراین کلیهٔ نقشه‌های هندسی کامل که واجد خاصیت مذکور باشند باهم همشکل‌اند مشروط براینکه نقاط تقاطع را به عنوان رأسها درنظر بگیریم وواضح است که به منظور داشتن نقشه‌ای مسطح ضرورتاً باید حداقل سه یال از نقشهٔ فوق‌الذکر راکنار گذاشت . نقشهٔ مسطح حاصل خود یك نقشهٔ فرعی ممکن الوصول از نقشهٔ مفروضی است. این موضوع نتیجهٔ این حقیقت است که :

شرط کافی برای غیرمسطح بودن یك نقشه آنست که m تعداد یالهای نقشه درنامساوی زیر صدق کندکه درآن n تعداد رأسها می‌باشد .

$$m > 3n - 6$$

ابتدا نقشه‌ای باشش رأس که یکی‌ازآنها v است در نظر می‌گیریم . ملاحظه می‌شود که ممکن‌است یك نقشهٔ مسطح باحذف سه‌یال که درعین‌حال شاخص نقاط تقاطع نیزمی‌باشند بدست‌آورد نقشهٔ حاصل حداکثر تعداد یالهائی را در بردارد که یك نقشهٔ سادهٔ مسطح شش‌رأسی می‌تواند داشته باشد . یك‌رنگ آمیزی خاص ومناسب $n - 1$ رأس نقشهٔ فرعی (که از برداشت رأس v وپنج‌یال مربوط به‌آن حاصل شده‌است) کنار گذاشتن پنج رأس مربوط به نواحی پنجگانهٔ مجاور به v را که با چهاررنگ رنگامیزی شده باشد ممکن می‌سازد بعد ازآن حل مسئله به سادگی انجام می‌گیرد . مسئله چنین خواهد شد که‌آیا در بین رأسهای پنج‌ناحیهٔ مجاوربه v دوزوج‌رأس وجوددارد که‌رأسهای هرزوج هرگز نتوانند بوسیلهٔ یك‌شبکه به‌هم مرتبط گردند؟ اگر چنین شرطی برقرارباشد رأسهای هرزوج‌یك‌رنگ‌را پذیرفته و رنگ‌چهارم به‌v نسبت داده می‌شود . باید توجه داشت که‌اگر چنین زوجهایی‌درنقشهٔ مسطح وشش‌رأسی‌با بیشینهٔ خطوط‌ارتباط وجود داشته باشدآنگاه امیدآن می‌رودکه اگربعضی‌از یالها در نقشهٔ مضاعف نباشد امکان داردکه رأسهای مربوط به یك زوج که بوسیله یك رشته ازرأسها به‌هم ارتباط حاصل نمایندکه این رأسها متناوباً به رنگهای‌دورأس فوق‌الذکررنگامیزی‌می‌شوند. من‌باب مثال اگرچنین رشته‌ای بین‌رأسهای x و y وجود نداشته باشد (فرض‌خلف) آنگاه باتبدیل رنگ‌یکی از رأسها مثلا x ، امکان داردکه کلیهٔ رأسهای یك نقشهٔ فرعی مرتبط‌که x را دربر داشته باشد همرنگ‌بارأسهای x و y رنگامیزی‌کرد و از اینرو امید اختصاص دادن‌رنگ اضافی به v ازبین می‌رود .

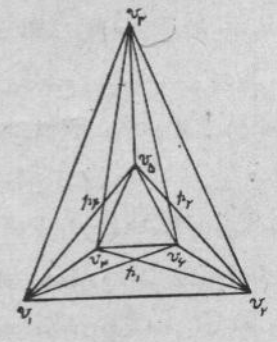
باکمی‌توجه به نمودار (ش-۱) این‌نظریهٔ ابتدایی تأیید می‌گردد ولی‌ما موضوع موردبحث اولیه را پس‌از اثبات قضیهٔ همشکلی (ایزومرفیسم) که‌ضمن استدلال‌لازم‌می‌شود موردبررسی دقیق‌قرار می‌دهیم .

۳- ایزومرفیسم (همشکلی یاهمریختی)

ازاثبات «لم» زیرکه بسیار سهل‌وابتدائی است صرف‌نظر کرده وتنها به‌بیان‌آن اکتفا می‌کنیم :

لم- هرنقشهٔ کامل شش رأسی، حداقل سه‌نقطهٔ تقاطع دارد .

قضیه : درهرنقشهٔ کامل شش‌رأسی که حداقل تعدادنقاط تقاطع‌را دربردارد اگراین‌نقاط به‌عنوان رؤوس در نظرگرفته شوندآنگاه نقشهٔ‌مفروض بانقشهٔ شکل‌زیر ایزومورف است .



(ش - ۱)

اثبات: رأسهای نقشه را به V_i که $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ ونقاط تقاطع‌اصلی را به p_j که‌درآن $(j = 1, 2, 3)$ می باشد نامگذاری می‌کنیم .

الف- همانطور که در (ش - ۱) ملاحظه می‌شود بدیهی بنظر می‌رسد که هر p_j درست در مجاورت چهار V_i قرار دارد وبنابرتعریف p_j ، p_k ای وجود ندارد بطوری‌که $k \neq j$ باشد . این مطلب را می‌توان ازراه برهان خلف ثابت کرد به این ترتیب‌که فرض می‌کنیم p_k ای وجود داشته باشد بطوری که $k \neq j$ باشد این‌فرض مبین‌آنست‌که نقاط تقاطع بیشتری ، روی یك یال وجوددارد واین‌غیر ممکن‌است‌که‌بنابه فرض، نقشهٔ شش‌رأسی‌با حداقل تعداد نقاط تقاطع رابايد دربرداشته باشد و این‌با نتیجهٔ حاصل ازفرض متناقض است پس‌این فرض باطل و حکم برقرار است .

ب- همچنین ازروی (ش - ۱) مشهوداست‌که هر V_i در عین‌حال بادو p_j و سه V_i مجاور می‌باشد . برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم‌که نقشه دارای ۹ رأس و۲۱یال باشد (در واقع هرنقطهٔ تقاطع، یك‌یال نقشهٔ‌کامل شش‌رأسی را به دو یال نقشهٔ ۹ رأسی‌تقسیم می‌کند) . در این حالت بنابر قضیهٔ معروف **اولر** رأسها و یالهای مذکور نقشه را به چهارده ناحیه تقسیم می‌کنند . تعداد متوسطه یالهائی که در یك ناحیه ، هم مرز و

مشترکند عبارت از سه بوده (چون هریال با دو ناحیه هم مرز است) و هیچگاه ناحیه‌ای وجود ندارد که باکمتر از سه یال مشخص‌شده باشد ، از اینرواین نواحی ، مثلثی شکل خواهند بود . مابین هر دو یالی که از نقطهٔ مفروض V_i ، مرسوم و به دو نقطهٔ p_j پایان می‌یابند باید یالی وجود داشته باشد که به رأسی مانند V_m $(m \neq i)$ پایان یافته باشد .

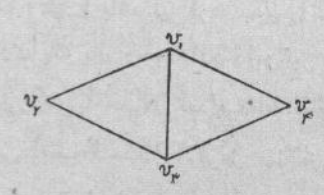
به عبارت دیگر به منظور تکمیل مثلثی که روی دو یال مذکور ساخته می‌شود باید دو نقطهٔ p_j بوسیلهٔ یك یال به‌هم‌وصل شوند. برای‌روشن‌شدن‌مطلب‌یالهای V_3P_3 و V_3P_2 را درنظر می‌گیریم ، این دو یال از رأس V_3 $(i=3)$ رسم شده و به ترتیب به‌نقاط P_3 و P_2 ختم می‌شوند .

بدیهی است که برای‌کامل نمودن مثلث $V_3P_3P_2$ کافی است نقاط P_3 و P_2 را بوسیلهٔ یال P_3P_2 به هم وصل‌نمائیم، ونیز واضح است که بین دویال V_3P_3 و V_3P_2 یال V_3V_5 که به V_5 مختوم است $(m=5)$ وجود دارد بطوری که $m \neq i$ است .

از این مختصر چنین استنباط می‌شودکه منتها دو نقطهٔ p_j در مجاورت هر نقطهٔ V_i قرار می‌گیرد ولی حد متوسطه تعداد نقاط p_j که می‌توانند با یك V_i مجاور باشند «دو» می‌باشد از اینرو بطور دقیق هردونقطهٔ p_j و سه نقطهٔ V_i با یك V مجاور خواهند بود .

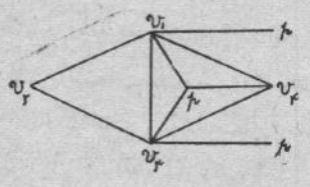
ج ـ از چهارده ناحیهٔ مثلثی شکل مفروض ، فقط دو ناحیه وجود دارد که فاقد p_j می‌باشند . برای اثبات فرض می‌کنیم که هر p_j درست در هر چهار مثلث وقتی که ناحیه از درجهٔ چهار باشد قرارگیرد و pهای دیگری در همان مثلث وجود نداشته باشد .

د ـ این‌دو ومثلثی که شامل p_j نیستند رأس مشترکی ندارند. برای اثبات گوئیم که مثلثهای مذکور حتی



ش ۲

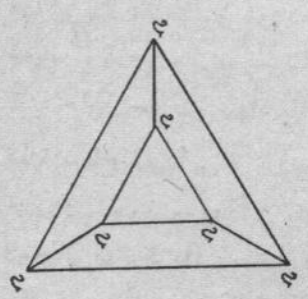
یك رأس مشترك هم نمی‌توانند داشته باشند زیراکه در غیراین صورت رأس مزبور با چهار V_i مجاور خواهد بود و این با آنچه که درقسمت (ب) گذشت متناقض است . حال همانطورکه در(ش ـ۲) نمایش داده شده است فرض می‌کنیم که آن دو مثلث فقط‌دردورأس‌ویك یال‌مشترك‌بوده‌وبه‌علاوه‌رأسها ویالهای‌دیگری در داخل مثلثی که با v_1 و v_2 و v_3 مشخص می‌گردد (مثلث $v_1v_2v_3$) وجود نداشته باشد . با درنظر گرفتن دو یال مربوط به v_1 که از نقاط p_j می‌گذرند تنها یکی از یالها باید در ناحیهٔ خارجی و دیگری در داخل ناحیهٔ $V_1V_3V_4$ قرار گیرد و قس علیهذا در مورد V_3 . درحقیقت نقشهٔ (ش ـ۲) باید نقشه‌ای فرعی به‌صورت مقابل را دارا باشد . اما در این حالت در(ش ـ۳) p ای که در داخل



ش ۳

مثلث $V_1V_2V_4$ واقع شده نمی‌تواند با رأس چهارم V (یعنی V_2) مجاور باشد .

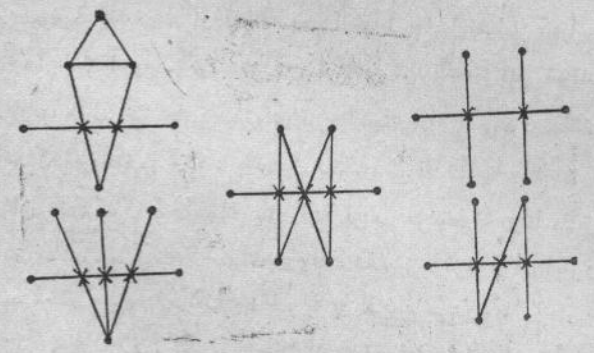
ه ـ اگر یکی از دو مثلث یاد شدهٔ در قسمت (د) رادر ناحیهٔ خارجی رسم نمائیم (ازآنجاکه هرمثلث یك شبکهٔ مسدود است لذا صفحه را به دو ناحیه داخلی و خارجی تقسیم می‌کند) آنگاه نقشهٔ مذکور شامل نقشهٔ فرعی(ش۴) خواهد بود اما دراین وضع ضرورتاً باید یك نقطهٔ p در هر چهار ضلعی به‌منظوربرقراری قسمت (الف) وجود



ش ۴

داشته باشد . از اینرو نقشهٔ فوق باید ساختمان اصلی ومعینی داشته باشد و برهان در اینجا تمام است .

باید درنظر داشت‌که امکان دارد با اتصال شش رأس ، شکل‌کاملی ارائه دادکه بیش ازسه نقطهٔ تقاطع‌داشته ویحتمل بعضی از یالها دارای نقاط تقاطع بیشتری باشندکه هر یك از این حالات نیز می‌توانند جداگانه مورد بحث و رسیدگی قرار گیرند برای نمونه یك یال ممکن است تیپهای مختلف نقاط تقاطع زیر را (بدون تکمیل نقشه) دارا باشد .

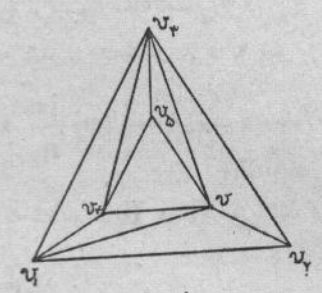


ش ۵

اما در اینجا وقتی که اتصالات کامل شد نشان خواهدداد که مانند آنچه که شرح آن گذشت حداقل دوزوج رأس درمیان رأسهای نقشه وجود دارد بطوری که یك رأس ازیکی، ازدیگری منفك و مجزاست و نمی‌توان آن دورا بوسیلهٔ شبکه‌ای بـه هم متصل کرد .

شبکه‌ها ممکن است یکدیگر را قطع کنند اما یالها ممکن نیست :

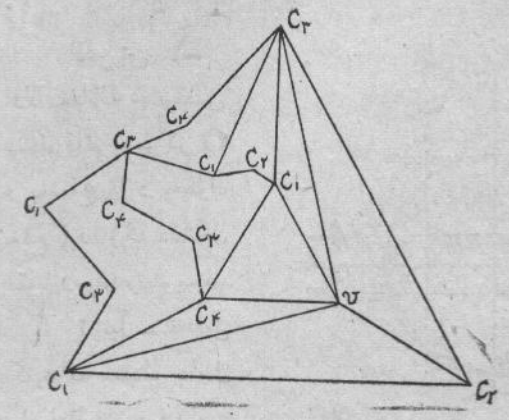
همانطورکه ملاحظه شد ما دراستفادهٔ از(شکل ـ۱) رأس V را درنظر گرفته و پنج یال مربوط بـه آنرا رسم نمودیم و آنگاه سه یال آنرا بهمنظورتعیین نقاط تقاطع ونیز تهیهٔشکلی مسطح، کنارگذاشتیم . فرض می کنیم که شکل حاصل ازتغییرات فوق،مطابق (ش ـ۶) باشد حال چنین در نظرمی گیریم که C_i رنگ مربوط به رأس V_i (۴ و... و۱=i) باشد . دراینجاملاحظه خواهیم کرد کـه رأس V_5 از V_2 و V_1 مجزا وجداشده است.همچنین V_4 از V_2 . ازاینرو



ش ۶

اگر رنگ C_2 را به V_4 اختصاص دهیم به طریق اولی رنگ C_1 باید به V_5 و درنتیجه رنگ باقیمانده یعنی C_1 بـه V اختصاص داده شود .

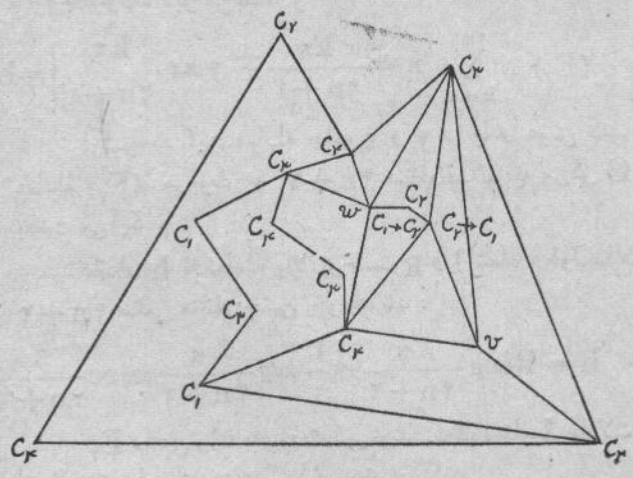
در واقع اگر کلیهٔ رابطهای بین رأسها ، یالها باشندکار ما خاتمه خواهد پذیرفت ولی فرض می کنیم که در نبودن یالها (بدون درنظرگرفتن یالها) ، رشته‌ای از V_1 بـه V_5 شامل رأسهای بهرنگهای متناوب C_1و C_2 و نیز رشته‌ای از V_4 به V_3 با رأسهایی‌که متناوباً بـه رنگهای C_4 و C_3 رنگامیزی



ش ۷

شده داشته‌باشیم . رشتهٔ (V_3وV_1)ممکن‌است‌رشتهٔ (V_3وV_4) را به طـریقی کـه نمودار زیـر نشان می‌دهـد قطع کند می‌دانیم‌که رنگ C_1 بایدبه V_5 اختصاص داده شودولی فرض می کنیم‌که نتایج‌استدلال استقرائی ، رنگ C_2 را به V_5 نسبت دهد . اکنون رنگهای نقشهٔ فرعی متشکل ازکلیهٔ رأسهایی با C_2 و C_1 رنگامیزی شده و V_5 را نیز در بـردارد وارونـه می کنیم . دراین صورت رأس V_5 رنگ C_1 را شامل می‌شود اگر چه V_5 ممکن است بوسیلهٔ رشته‌ای از رأسها به رنگهای C_1 و C_2 با رأسی (مانند w) به رنگ C_1 واقع روی رشتهٔ (V_1 و V_3) ، مرتبط‌شودکه دراین صورت تعویض رنگهاروی نقشهٔ فرعی اخیرالذکرکه V_5 را نیز شامـل است سبب تغییر رنگ w از C_1 به C_2 می گردد . اکنون با صرف‌کمی دقت در (ش ـ۸) این مطلب‌کاملامحسوس است‌کـه رأس V_4 دیگر منفك از V_2 نیست . زیراکه این دو می‌توانند بوسیلهٔرشته‌ای از رأسهای رنگامیزی شده با C_2 و C_4 بـه‌هم ارتباط حاصل نمایند این رشته ممکن است نقشه را در رأسی بـه رنگ C_4 واقع در قسمت خارجی رشتهٔ (V_3 و V_4) قطع نمایـد و بعد با رأسهایی به رنگهای متناوب C_2 و C_4 ادامه یابد و آنگاه پس از عبور از رأس w (که رنگ آن از C_1 بـه C_2 مبدل شده) به V_4 منتهی گردد .

بایـد متوجـه‌ی این نکته بودکـه رشتهٔ (V_3 و V_1) گسیخته شده و ازاینرو رنگ C_3 ممکن است به V_1 اختصاص داده شود . اما این مطلب نه درنظرگرفتن رنگی اضافی برای v نه وجود امکانی را جهت تعقیب استدلال بـه اینکه رنگ



ش ۸

(دنباله در صفحهٔ ۲۶۵)

معادلات شکلهای مختلف هندسی

از : یعقوب گنجی
دانشجوی ریاضی دانشسرای عالی

دنباله از شماره‌های پیش

توضیح از طرف مجله : مقالاتی که در مجله چاپ می‌شود عموماً از طرف مدیر مجله حك و اصلاح شده‌اند . در قسمتی ازمقالهٔ به عنوان بالا که در یکان شمارهٔ ۵۸ چاپ شد ، محاسبات مربوط به اثبات رابطهٔ (۱') ، تبصره‌های ۱و ۲ و تمرین ۲ حذف گردیده است . دراین قسمت ازمقاله هم که در زیرچاپ می‌شود (و از طرف نویسندهٔ آن به موقع تحویل شده اما تاکنون چاپ‌آن میسرنشده بود) تا آنجا که با هدف اصلی مقاله مغایرت نداشته اختصارات لازم انجام‌گرفته است.

درمقالهٔ قبلی‌معادلات E_6 و $E_{6'}$ که درتبصرهٔ ۲ وتمرین ۷ از آنها نام برده شده است همان جوابهای تمرین ۲ می‌باشند . همچنین درمقالهٔ مزبور درتمرین ۲ واواخر تبصرهٔ ۲ به جای « معادلهٔ اخیر » ، « مورد E » کـه اشتباه چاپ شده به ترتیب « معادلات E_5 و $E_{5'}$ » و « مورد $E_{6'}$» باید چاپ می‌شد . درمسائل ۸ و ۹ نیز به‌جای « شعاع R و R' را » و « $cotg\frac{j\pi}{n}$ » به ترتیب « معادلات E_5 و E_6 را که به ترتیب به شعاعهای R و R' می‌باشند » و « $sin\frac{j\pi}{n}$ » بـاید چـاپ می‌شد .

معادلهٔ $4n+2$ ضلعی منتظم افقی یا قائم به مرکز O

با روشی نظیر آنچه که در مورد معادلهٔ $4n$ ضلعی منتظم بکاررفت می‌توان ثابت‌کرد که معادلهٔ هر $4n+2$ منتظم به مرکز O که افقی (یك قطراصلی‌آن منطبق برمحورطولها) باشد به صورت زیر می‌باشد :

$$(E_7)\quad \sum_{k=0}^{2n}\left| x\sin\frac{k\pi}{2n+1} \mp y\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right| = h$$

اگـر در این معادله جای x و y را با هم عوض کنیم معادلهٔ (F_7) مربوط به $4n+2$ منتظم قـائم به مرکز O بدست می‌آید .

مقدار h ازمعادلهٔ بالا برحسب R و l شعاع وطول‌ضلع $4n+2$ ضلعی منتظم چنین خواهد شد :

$$h = R\,cotg\frac{\pi}{4n+2} = \frac{l}{2}\,cotg\frac{\pi}{4n+2}\,cosec\frac{\pi}{4n+2}$$

E_7 را می‌توان به‌صورت زیر نوشت که کارمحاسبهٔ معادلات $4n+2$ ضلعیهای مشخص را سریعتر می‌کند .

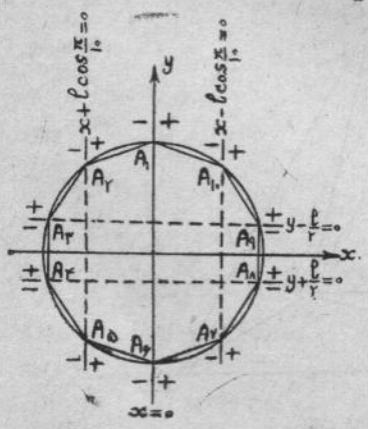
$$(E_{7'})\quad |y| + \sum_{k=1}^{n}\left| x\sin\frac{k\pi}{2n+1} \mp y\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right| +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left| x\cos\frac{k\pi}{2n+1} \pm y\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right| = h$$

از $E_{7'}$ به‌ازاء $n=2$ معادلهٔ ده ضلعی منتظم افقی به‌مرکز O به صورت زیر بدست می‌آید :

$$|y| + \left|x\sin\frac{\pi}{5} - y\cos\frac{\pi}{5}\right| + \left|x\sin\frac{2\pi}{5} - y\cos\frac{2\pi}{5}\right| +$$

$$\left|x\cos\frac{\pi}{5} + y\sin\frac{\pi}{5}\right| + \left|x\cos\frac{2\pi}{5} + y\sin\frac{2\pi}{5}\right| = R\,cotg\frac{\pi}{10}$$



تمرین ۱-

اولا معادلهٔ ده ضلعـی منتظم قائم به مرکز O و به‌شعاع R و به‌طول ضلع l را (که درشکل مقابل‌رسم‌شده) بنویسید.

ثانیاً ـ تحقیق کنید که معادلهٔ حاصل بامعادلهٔ زیرهم‌ارزاست

که درآن a و b و $\frac{c}{l}$ مقادیری حقیقی ومثبت می‌باشند که آنها را محاسبه خواهیدکرد .

$$a|x|+|x-l\cos\frac{\pi}{10}|+|x+l\cos\frac{\pi}{10}|+$$
$$+b|y-\frac{l}{2}|+b|y+\frac{l}{2}|=c$$

از روی این معادله ، معادلهٔ ده ضلعی منتظم افقی را برحسب اقطار دو به دو متعامد یا متوازی بنویسید.

تبصرهٔ ۱ـ می‌توان ثابت کردکه معادلهٔ E_7 با معادلهٔ زیر هم‌ارز است :

$$(E_{7'})\quad \sum_{k=m}^{2n+m}\left|x\sin\frac{k\pi}{2n+1}\pm y\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right|=$$
$$=R\cot g\frac{\pi}{4n+2}$$

تبصرهٔ ۲ـ ازترکیب معادلهٔ F_5 بامعادلهٔ $E_{7'}$ معادلهٔ $2n$ ضلعی منتظم به مرکز O و به شعاع R به صورت زیر بدست می‌آید :

$$(E_8)\quad \sum_{k=m}^{n+m-1}\left|x\sin\frac{k\pi}{n}\pm y\cos\frac{k\pi}{n}\right|=R\cot g\frac{\pi}{2n}$$

نمایش هندسی این معادله برحسب آنکه n زوج یا فرد باشد یك $2n$ ضلعی منتظم افقی یا با قطرهای اصلی منطبق بر محورهای مختصات می‌باشد .

تمرین ۲ـ تحقیق کنیدکه هریك از معادله‌های زیر یك هشت ضلعی منتظم را مشخص می‌کند و نوع این هشت ضلعی را تعیین کنید .

$$a|x|+b|y|+|y-R\frac{\sqrt{2}}{2}|+|y+R\frac{\sqrt{2}}{2}|=2$$

$$|x-y|+(\sqrt{2}-1)|x+y|+|x+y-R|+$$
$$+|x+y+R|=(2+\sqrt{2})R$$

معادلهٔ $2m$ ضلعی شبه منتظم کامل به مرکز O

الف ـ از طریق اقطار متقارب در مرکز ـ براساس معادلهٔ E و جدول مربوط به آن (صفحات ۵۶۳ و ۵۶۶ دورهٔ ۵ مجله) ، حدس می‌زنیم که معادله‌ای به‌صورت :

$$(E_9)\quad \sum_{i=1}^{n}\Big[\gamma_i|m_ix+y|+\gamma_i|m_ix-y|+\lambda_i|x-$$
$$-k_iy|+\lambda_i|x+k_iy|\Big]=2h$$

هرگاه ،درآن k_i ، γ_i،λ_i ، m_i و h اعدادی‌حقیقی ، مثبت‌و محدود باشند ، وبه‌ازاء هر i ، $m_ik_i<1$ وعلاوه برآن به‌ازاء هر i و j (که $i\neq j$ و i و j اعدادی طبیعی بوده و $i<n$ و $j<n$) ، $m_i\neq m_j$ ، $k_i\neq k_j$ و $m_ik_j<1$ ، یك $8n$ ضلعی شبه منتظم کامل افقی (وقائم) به مرکز O را مشخص می‌کند .

بخصوص ، بنظرمی‌رسدکه هرگاه در E_9 ، کوچکترین m_i یا کوچکترین k_i صفر شود ، نمودار E_9 به ترتیب ، به یك $8n-2$ ضلعی افقی یا قائم ، ازنوع مذکور درفوق ، تبدیل شود و چنانچه کوچکترین m_i وکوچکترین k_i با هم صفر شوند $8n$ ضلعی مزبور به یك $8n-4$ ضلعی شبه منتظم کامل‌که مرکزش مبدأ وقطرهای اصلی‌آن برمحورهای‌مختصات منطبق‌اند تبدیل گردد .

همچنین حدس می‌زنیم‌که برحسب‌آنکه ، کوچکترین m_i وکوچکترین λ_i یا کوچکترین k_i و کوچکترین γ_i ، با هم صفرشوند ، نمودار E_9 به‌ترتیب ، به یك $8n-6$ ضلعی افقی یا قائم ، ازنوع مذکور در بالا ، مبدل شود . شاید $2m$ ضلعی اخیر دروضعیتهای مزبور ، ازصفرشدن دوتا از m_iها یا دوتا از k_iها ، نیزحاصل شود .

ب ـ ازطریق اقطاردوبدو متعامد یا متوازی

باتوجه به معادلهٔ E_1 وجدول مربوطه (صفحات ۴۳۱ و ۴۳۴ دورهٔ ۵ مجله)، درحالت $\alpha'=-\alpha$ بنظر می‌رسد که‌معادله‌ای به فرم :

$$(E_9)\quad \sum_{i=1}^{n}\Big(\gamma_i|x-\alpha_i|+\gamma_i|x+\alpha_i|+\lambda_i|y-\beta_i|+$$
$$+\lambda_i|y+\beta_i|\Big)=2k$$

وقتی که درآن α_i ، β_i ، γ_i و λ_i مثبت و محدود باشند و $\alpha_n<\alpha_{n-1}<\dots<\alpha_2<\alpha_1$ ،

و $\beta_n<\beta_{n-1}<\dots<\beta_2<\beta_1$

و $k>\alpha_1\sum_{i=1}^{n}\gamma_i+\beta_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ با یك $8n$ ضلعی شبه منتظم کامل افقی وقائم به‌مرکز O را مشخص می‌کند .

همچنین ، با مطالعهٔ سطحی این معادله ، بنظر می‌رسد که به ازاء :

$$k=\alpha_1\sum_{i=1}^{n}\gamma_i+\beta_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$8n$ ضلعی مزبور به یك $8n-4$ ضلعی ، ازنوع و دروضعیت خود تبدیل شود وقتی :

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\gamma_i+\beta_i\lambda_i)<k<\alpha_1\sum_{i=1}^{n}\gamma_i+\beta_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

باشد نمودار F_1 به احتمال زیاد یك $8r$ ضلعی $(1\leqslant r\leqslant n)$ ،از نوع و دروضعیت فوق‌الذکر ، باشد و این $8r$ ضلعیها درحالت کلی وقتی :

$$(q\neq n \text{ و } p\neq n)\ k=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\gamma_i+\beta_p\sum_{i=p+1}^{n}\gamma_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\lambda_i+\beta_q\sum_{i=q+1}^{n}\lambda_i$$

باشد به $8r\mp 4$ ضلعیهائی ، از نوع و در وضع مذکوردر بالا بدل شوند و به ازاء

$$k=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\gamma_i+\beta_i\lambda_i)$$

نمودار F_1 یك مستطیل بـه اضلاع افقی و قائم $2\alpha_n$ و $2\beta_n$ باشد . با استفاده ازآنچـه در ابتدای صفحهٔ ۴۳۱ دورهٔ پنجم مجله گفتیم می‌توان به‌آسانی ثابت کرد که F_1 درحالت :

$$k<\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\gamma_i+\beta_i\lambda_i)$$

نمایش هندسی ندارد .

بالاخره ، احساس می‌شود که وقتی α_p یا β_q (جز در حالت $p=n$ یا $q=n$) صفر شوند $4t$ ضلعیهای فوق‌الذکر به $4t$ ضلعیهای ساده‌تر (ازهمان نوع و درهمان وضع) تبدیل شوند و درحالتی‌که α_n یا β_n با هردو صفرشوند $4t$ ضلعیهای مزبور به ترتیب به $4t-2$ ضلعیهای شبه منتظم کامل قائم یا افقی به مرکز O یـا $4t-4$ ضلعیهای شبه منتظم کـامل مبدأ محوری مبدل شوند .

به‌همین‌ترتیب، درحالتی‌که‌فقط‌یکی از γ_iها یا λ_iها صفر شود $8n$ ضلعی نمودار F_1 معمولا به $8n-4$ ضلعی شبه‌منتظم کامل قائم و افقی تبدیل می گردد .

ج ـ از طریق اختلاط اقطار فوق‌الذکر ـ از این طریق بنظر می‌رسد که معادلات بیشماری برحسب آنکه مثلا چند قطر را از دستهٔ اول اختیارکنیم بتوان نوشت . بـه عنوان مثال معادلهٔ :

$$(H_1)\ \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i|m_ix+y|+\lambda_i|m_ix-y|+\gamma_i|x-\alpha_i|$$

$$+\gamma_i|x+\alpha_i|)=2k$$

وقتی‌که‌درآن α_i ، β_i، γ_i و λ_i مثبت ومحـدود می‌باشند ومثلا

$$m_n<m_{n-1}<\cdots<m_2<m_1$$

و

$$\alpha_n<\alpha_{n-1}<\cdots<\alpha_2<\alpha_1$$

باشدیك $8n$ ضلعی‌شبه‌منتظم کامل به‌مرکز O رامشخص می‌نماید که برمبنای $2n$ قطر قائم(متوازی) و $2n$ قطر متقارب‌در مرکز نوشته شده است . ظاهراً برای اینکه نمودار H_1 با شرایط فوق $8n$ ضلعی باشد لازم است داشته باشیم :

$$k>\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_i$$

که در حالات خاص این $8n$ ضلعی به $2m$ ضلعیهای دیگـر تبدیل می‌شود .

د ـ ازطریق معادلات اضلاع ـ اصولا بنظرمی‌رسد که یکی از راههای تحریر معادلهٔ هـر چند ضلعی استفاده از معادلات اضلاع آن باشد به عنوان مثال ، معادلات $4n$ ضلعی منتظم به مرکـز O و با قطرهای اصلی منطبق بر محورهـا و $4n+2$ ضلعی افقی یا قائم برمبنای معادلات اضلاع آنها به ترتیب چنین هستند :

$$(E_{10})\ \sum_{k=1}^{4n}\left|x\cos\frac{2k-1}{4n}\pi+y\sin\frac{2k-1}{4n}\pi-R\cos\frac{\pi}{4n}\right|$$

$$=4nR\cos\frac{\pi}{4n}=2nl\cot g\frac{\pi}{4n}$$

$$(E_{10}')\ \sum_{k=1}^{4n+2}\left|x\cos\frac{2k-1}{4n+2}\pi+y\sin\frac{2k-1}{4n+2}\pi-R\cos\frac{\pi}{4n+2}\right|$$

$$=(4n+2)R\cos\frac{\pi}{4n+2}=(2n+1)l\cot g\frac{\pi}{4n+2}$$

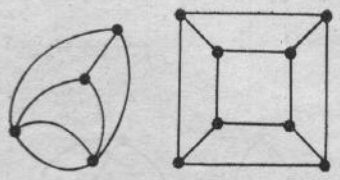
$$(E_{10}'')\ \sum_{k=1}^{4n+2}\left|y\cos\frac{2k-1}{4n+2}\pi+x\sin\frac{2k-1}{4n+2}\pi-R\cos\frac{\pi}{4n+2}\right|$$

$$=(4n+2)R\cos\frac{\pi}{4n+2}=(2n+1)l\cot g\frac{\pi}{4n+2}$$

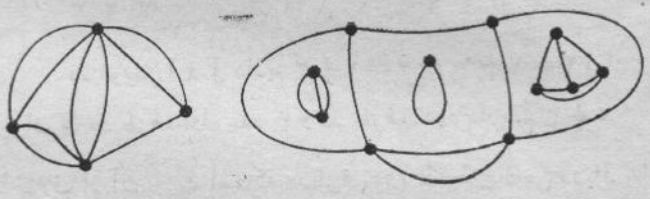
شبکه‌ها

ترجمهٔ : محمودمحمودی مجدآبادی
دانشجوی ریاضی دانشسرای‌عالی

شبکه مجموعهٔ خطها، اتصالهاو ناحیه‌هایی است که‌ازیك‌شکل بوجود می‌آید .



دو نوع شبکه وجود دارد : پیوسته و ناپیوسته . در شکل زیر ، شبکهٔ سمت چپ پیوسته وشبکهٔ سمت راست ناپیوسته است .



نخست شبکه‌های‌پیوسته را در نظر می‌گیریم . برای‌این نوع شبکه‌ها بعضی قانونها از جمله قانونهای زیر وجود دارد :

- وقتی دو یاسه خط متلاقی باشند اتصالی وجود دارد .
- اگرخط‌راستی‌دارای‌اتصالی‌روی خود باشددرشمارش، دو خط بحساب خواهد آمد .
- دایره دارای اتصالی روی خودش می‌باشد .

برای جستجوی‌روشی‌جهت نشان دادن این نوع شبکه‌ها به شمارش خطها ، ناحیه‌ها و اتصالهای آنها می‌پردازیم.

L	J	S
۶	۴	۴

L	J	S
۶	۳	۵

L	J	S
۸	۵	۵

بقیه از صفحهٔ پیش

معادلهٔ E_{10}، که از تعویض جای x و y در E_{10} حاصل می‌شود نیز با E_{10} معادل است .

خوانندگان‌علاقمند، پرحوصله ومحقق می‌توانند موضوع رادنبال‌کرده معادلات $2m$ ضلعیهای شبه منتظم‌کامل متساوی‌الزوایا ، متساوی‌الاضلاع یا منتظم را در حالات افقی وقائم بدست آورند .

خوانندگان‌این مقاله ، همچنین می‌توانند نظریه‌ها ، پیشنهادها یا انتقادهای خود را درتحریر این مقاله ، برای نویسندهٔ آن بنویسند .

تمرینات دیگر

۳ـ براساس معادله‌ای‌که ازتمرین ۱ بدست‌آورده‌ایدوبا درنظرگرفتن اینکه‌وضع نمودارمعادلهٔ مزبور نسبت به‌محورهای مختصات ، پس از دوران به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{5}$ یا $\frac{2\pi}{5}$ ، تغییری‌نمی‌کند معادله‌های دیگری‌برای ده‌ضلعی منتظم قائم بـه مرکز O پیدا کنید . آنگاه به روش مذکور در مسئلهٔ ۶ (صفحهٔ ۲۲ دورهٔ پنجم‌مجله)، یك معادلهٔ‌کلی برای ده ضلعی منتظم‌بنویسید .

۴ـ ثابت‌کنیدکه‌معادلهٔ زیر با E_7 معادل است .

$$\sum_{k=0}^{2n}\left|x\cos\frac{2k+1}{2n+1}\pi \pm y\sin\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right|=h$$

۵ـ هرگاه‌نمودار معادلات E_7، E_8، E_9، F_9، H_9 و E_{10} رابه‌اندازهٔ بردار OC، $[C(\alpha و \beta)]$ انتقال دهیم‌یاحول O به اندازهٔ θ رادیان دوران دهیم یا انتقال‌و دوران‌را تواماً انجام‌دهیم معادلات‌مزبور(پس از ساده‌شدن) به‌چه‌صورت‌درمی‌آیند؟(معادلات‌اخیر،معادلات‌کلی $2m$ ضلعیهای‌مربوطه‌هستند.)

۶ـ معادلهٔ $2n$ ضلعی منتظمی را بنویسیدکه درآن :

$A_n(0 و R\sqrt{3})$ و $A_0(R و 0)$

یا $A_n(0 و R\sqrt{2})$ و $A_0(R\sqrt{2} و 0)$

باشد . راهنمائی : از معادلهٔ‌کلی‌نمودار E_8 استفاده‌کنید)

۷ـ معادلات چهارده‌ضلعیهای منتظم افقی وقائم به مرکز O را درهرحالت از دوطریق (برحسب نوع انتخاب اقطار) بدست آورید .

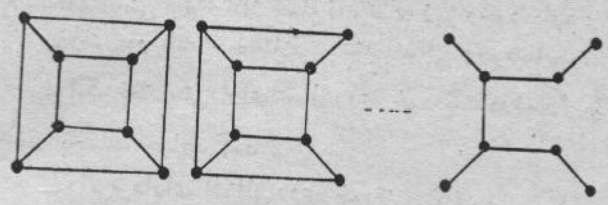
۸ـ در نمایش هندسی معادلهٔ :

$$|x-y|+|x+y|+|x+1|+|x-1|=2a$$

به ازاء مقادیر مختلف a بحث‌کنید .

تعداد خطها را با L ، تعداد اتصالها را با J و تعداد ناحیه‌ها را با S نشان‌می‌دهیم. یکی از ناحیه‌ها هرشبکه ناحیهٔ خارجی‌آن می‌باشد .

آیا بین L و J و S رابطه‌ای وجود دارد ؟ مثلا اگر تعداد خطها و تعداد ناحیه‌ها معلوم باشد از روی آن می‌توان تعداد اتصالهارا بدست آورد؟ برای این‌کار شبکه‌ای را درنظر می‌گیریم و متوالیاً یك خط آن‌را حذف می‌کنیم



L	J	S
۱۲	۸	۶

L	J	S
۱۱	۸	۵

....

L	J	S
۷	۸	۱

بدون‌آنکه تعداد اتصالهای‌آن تغییر کند . در موردشبکهٔ شکل بالا (سمت چپ) چون به این ترتیب عمل‌کنیم . بالاخره‌شبکهٔ (سمت راست شکل) بدست خواهد آمد . عددهای مربوط به شبکه‌هایی‌که‌ضمن عمل مزبوربدست می‌آید به ترتیب زیراست :

L	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
J	۸	۸	۸	۸	۸	۸
S	۶	۵	۴	۳	۲	۱

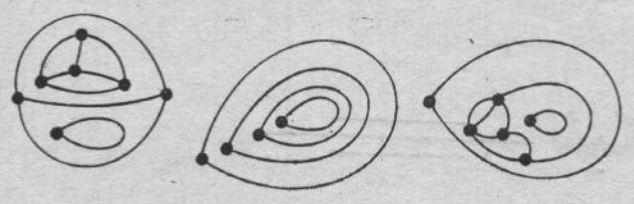
درهر یك از حالتهای جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تفاضل L−S همواره ثابت واز ۸ دو واحد کمتر است ،یعنی فرمول زیر در تمام این‌حالتها صدق می‌کند

$$L-S=J-۲$$

$$S=L-J+۲$$

این فرمول نخستین‌بار توسط **اولر** کشف‌شده ومربوط به شبکه‌های پیوسته می‌باشد .

شبکه‌های ناپیوسته ـ فرمول بالا برای شبکه‌های ناپیوسته‌صدق نمی‌کند. درمورد شبکه‌های ناپیوسته‌یك‌عدد N که عبارت‌ازتعدادشبکه‌های‌پیوستهٔ‌موجوددرشبکهٔ ناپیوستهٔ مفروض.

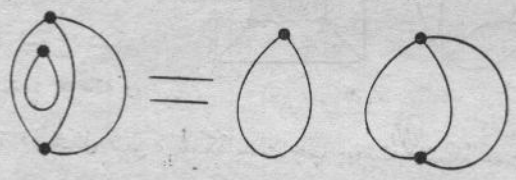


L	J	S	N
۹	۶	۷	۳

L	J	S	N
۴	۴	۵	۴

L	J	S	N
۱۰	۷	۷	۳

قبلا شبکهٔ ناپیوسته زیر را در نظر می‌گیریم و آنرا «تجزیه» می‌کنیم .



L	J	S
۳	۲	۳

L	J	S
۱	۱	۲

L	J	S	N
۴	۳	۴	۲

در مورد L و J داریم ۳+۱=۴ و ۲+۱=۳ اما برای S در طرف اول عدد ۴ و در طرف دوم داریم ۳+۲ اختلاف از آن جهت است‌که درطرف دوم ناحیهٔ خارجی دوبار حساب شده است .

مجدداً فرمول L−S+۲−J را درنظر می‌گیریم ، از روی‌آن معلوم می‌شودکه در موردشبکه‌های ناپیوسته هروقت S را بکارمی‌بریم‌باید N−۱ به‌آن اضافه‌کنیم ودر نتیجه‌برای شبکه‌های ناپیوسته فرمول‌زیر بدست می‌آید :

$$S=L-J+N+۱$$

این فرمول که با فرمول اولر تفاوت دارد در مورد هر نوع شبکه‌ای اعم از پیوسته ونا پیوسته صادق می‌باشد .

L	J	S	N
۸	۶	۶	۳

L	J	S	N
۱۰	۷	۸	۴

L	J	S	N
۸	۴	۶	۱

چندین سال است که برنامهٔ فیزیك ومکانیك کلاس ششم ریاضی تغییر نکرده است . فقط مقداری مطالب به عنوان ضمیمه به‌کتاب آن اضافه شده است که با محدود بودن ساعات تدریس ، استفادهٔ از آنها عملا مقدور نمی‌باشد . قسمتی از همین وقت محدود نیز صرف بحث در سیستمهای آحادی می‌شودکه فعلا درکشورهای مترقی منسوخ شده است . مثلا سیستم MTS درکشورفرانسه فقط تا سال ۱۹۶۱ مورد قبول بوده است . فعلا در بیشتر کشور ها سیستم SI مصوب سیزدهمین کنفرانس عمومی وبین‌المللی اوزان ومقادیر (۱۹۶۷) معمول می‌باشد. بطورکلی تغییر برنامه‌های آموزشی واضافه کردن مباحث جدید به کتابهای درسی لازم می‌باشد اما اگر این کار برمبنای صحیح انجام نگیرد جز اتلاف وقت ثمری ندارد . یکی‌از اصلاحاتی‌که درمورد فیزیك ششم باید انجام گیرد بیان اصل دالامبر قبل‌از بحث نیروی گریز از مرکز می‌باشد .در این باره مقالهٔ زیر ترجمه وتنظیم شده است‌که به نظر خوانندگان می‌رسد .

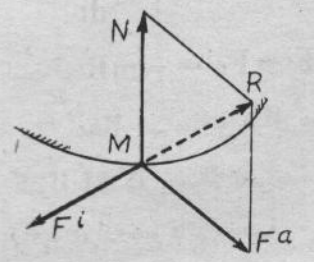
پرویزغفوریان

دبیر فیزیك دبیرستانهای تهران

اصل دالامبر (D' Alembert's Principle)

مفهوم نیروی گریز از مرکز

مطابق شکل نقطهٔ مادی M را که روی منحنی یا سطح ثابتی در حرکت است در نظر می گیریم . برآیند نیرو های وارد به نقطه‌را F^a می‌نامیم. اگر واکنش و عکس ـ العمل منحنی یا سطح اتکاء را با نیروی N



مشخص سازیم ، می‌توان نقطهٔ مادی M رامانند ذرهٔ آزادی‌که تحت اثر نیروهای F^a و N قرارگرفته است در نظر گرفت . حال نیروئی‌مانند F^i راپیدا می‌کنیم به طوری‌که‌بتواند نیرو ـ های فوق‌را خنثی‌نماید . واضح است‌که اگر برآیند نیرو های F^a و N نیروی R باشد ، $F^i = -R$ نیروی مطلوب‌خواهد بود . چون طبق قانون اساسی دینامیك $R = m\gamma$ است ، بنابراین‌مقدار F^i برحسب‌شتاب نقطهٔ‌مادی‌برابر $F^i = -m\gamma$

خواهد شد . نیروی F^i که اندازه‌آن حاصل ضرب جرم نقطه درشتاب آنست و درجهت مخالف بردار شتاب ممتداست نیروی اینرسی ذرهٔ M نامیده می‌شود . به‌طوری که ملاحظه شد اگر به نیروهای F^a و N نیروی اینرسی F^i اضافه شودآنهاراخنثی می‌کند ومی‌توان نوشت :

$$F^a+N+F^i=0$$

این معادله بیان‌کنندهٔ اصل دالامبراست : « درهرلحظه نیروهای‌واردبه‌نقطهٔ مادی‌ونیروهای عکس‌العمل ونیروی‌اینرسی یکدیگررا خنثی‌نموده ، روابط و کلیهٔ معادلات استاتیك دراین حالت صادق بوده می‌توان آنهارا بکاربرد». اصل دالامبرروشی را معین می‌سازد تا بـا تغییر شکل معادلات حرکت به صورت معادلات تعادل بتوان مسائل مربوط به حرکت را باهمان روش ساده متداول دراستاتیك حل‌نمود . ارزش اصل فوق به خصوص در مـوقع حل مسائل مربوط به حرکت یك دستگاه آشکار می‌گردد .

درموقع‌بکاربردن اصل‌دالامبر باید بخاطرداشت‌که به نقطهٔ مادی متحرك فقط نیرو هـای واقعی F^a و N وارد می‌گردد و تصورنیروی F^i فقط از آن جهت است‌که تبدیل شکل معادلات حرکت به معادلات سادهٔ تعادل صورت بگیرد .

چرا $-m\gamma$ نیروی اینرسی نامیده می‌شود؟:

اگربا دست خود به جسمی به جـرم m در امتداد خط مستقیمی نیروئی مانند F وارد سازیم شتـابی برابر γ حاصل می‌نماید . طبق اصل‌اساسی دینامیك $F=m\gamma$ است وطبق‌اصل عمل وعکس‌العمل نیروی محسوسی راکه جسم به دست ما وارد می‌سازد وباعامل تغییر سرعت مخالفت می‌کند برابر : $Q=-F=-m\gamma$ خواهد بود . نیروی Q راکه‌مربوط به اینرسی جسم می‌گردد نیروی اینرسی می نامند . به طوری که اشاره شد ، نیروی اینرسیQ فقط به دست ما وارد می‌شود وبه خود جسم وارد نمی‌گردد .

به این ترتیب در حرکات مستقیم الخط با معلوم بودن جهت ومقدارشتاب نیروی‌اینرسی‌که در خلاف جهت بردارشتاب ممتد است مشخص شده اندازهٔ آن از رابطـهٔ ($F^i=m\gamma$) بدست می‌آید .

مفهوم نیروی‌گریز ازمرکز چیست ؟:

درحرکت دورانی متشابه نیروی اینرسی از رابطهٔ : $F^i=-m\gamma$ که درآن $\gamma=R\omega^2$ گذاشته شود بدست‌می‌آید که‌آنرا نیروی‌گریز ازمرکز می‌نامند :

$F^i=-mR\omega^2$: نیروی‌گریز ازمرکز .

مؤلفه هـای نیـروی اینرسی در حـرکت منحنی‌الخط .

به‌طورکلی اگر حرکت روی خط منحنی باشد با معلوم بودن شتاب مماسی و نرمال مؤلفه های نیروی اینرسی معلوم می شود :

$$F_t^i=-m\gamma_t=-m\frac{dv}{dt}$$ اندازهٔ

$$F_n^i=-m\gamma_n=-\frac{mv^2}{\rho}$$ اندازهٔ

روابط‌فوق تصاویرمعادلهٔ $F^i=-m\gamma$ روی محورهای مماس برمسیر ودر جهت حرکت و نرمال (قائم) برمسیر و در جهت مرکزانحناء می‌باشد . این‌معادلات نشان می‌دهدکه‌جهت نیروی اینرسی‌مماسی F^i_t درخلاف جهت شتاب مماسی‌است(در جهتی‌که مقدار سرعت‌کم می‌شود) ونیروی اینرسی نرمال‌که‌در امتداد قائم برمنحنی‌است درجهتی قراردارد‌که ازمرکز انحناء دور می‌شود (همچنانکه جهت بردار شتاب قائم متوجه مرکز انحناء می‌باشد).

روابط زیراندازهٔ مؤلفه های نیروی اینرسی را مشخص می‌سازد :

$$|F_t^i|=m\left|\frac{dv}{dt}\right|$$ اندازهٔ

$$|F_n^i|=\frac{mv^2}{\rho}$$ اندازهٔ

درحرکت دورانی متشابه چون اندازهٔ سرعت ثابت است $\frac{dv}{dt}=0$ و $F_t^i=0$ می‌گردد و چون $v=R\omega$ و $\rho=R$ است $F^i=F_n^i=-mR\omega^2$ می‌شود .

مثال۱ـ مطابق شکل هنگامی‌که قطـار در حرکت است گلولهٔ M که بوسیلهٔ نخی‌به سقف‌آویزان شده است به اندازهٔ زاویهٔ α ازوضع قائم منحرف می‌شود ، شتاب را محاسبه‌کنید .

پائین صفحهٔ بعد

جدول برنولی برای محاسبهٔ مجموع قوای متشابه اعداد طبیعی

ترجمهٔ : قوام نحوی
دبیر دبیرستان اصفهان

مجموع اعداد صحیح از یك تا n یعنی :

$$1+2+3+4+\dots+n$$

را به Σ_n نمایش می‌دهیم و می‌دانیم مقدارآن برابر است با:

$$\Sigma_n=1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

و یا

$$\Sigma_n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

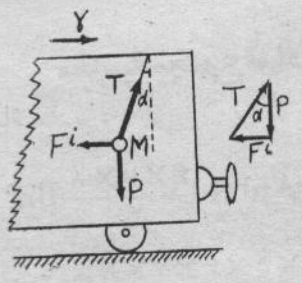
مجموع قوای دوم اعداد صحیح از یك تا n را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\Sigma_{n^2}=1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

رابطهٔ بالا از طریق استقراء ریاضی و همچنین از راه اتحادهای جبری اثبات می‌شود .

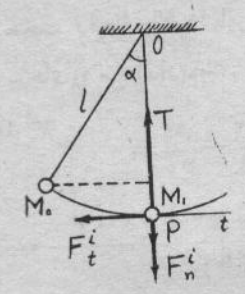
دنباله از صفحهٔ قبل

حل- علاوه بر نیروی وزن P به‌گلولهٔ M ازطرف نخ نیروی T وارد می‌گردد . با توجه به اصل دالامبر، اگربه نیرو های واقعی P و T نیروی اینرسی F^i اضافه گرددمنتجهٔ نیروها صفرمی‌گردد ونیروها مطابق‌شکل مثلث قائمه‌الزاویه‌ای تشکیل‌داده می‌توان نوشت :



$$F^i=P\,tg\alpha$$
$$m\gamma=mg\,tg\alpha$$
$$\gamma=g\,tg\alpha$$

مثال۲- مطابق شکل‌گلوله‌ای راکه به انتهای نخی به طول l بسته شده است به اندازهٔ زاویهٔ α از وضعیت M_0 بدون‌سرعت اولیه رهاکرده‌ایم می‌خواهیم کشش‌نخ رادر پائین ترین وضعیت گلوله‌یعنی M_1 محاسبه نمائیم .



حل- علاوه برنیروهای حقیقی وارد به‌گلوله دروضعیت M_1(P و T) مؤلفه‌های نیروی اینرسی‌را رسم می‌نمائیم . با توجه به اصل دالامبرمجموع تصاویر نیروها روی هرمحورمثلا روی قائم‌برمسیر باید صفرباشد .

دراین صورت :

$$T-P-F^i_n=0 \Longrightarrow T=P+F^i_n=P+\frac{mv_1^2}{l}$$

بدست می‌آید، که v_1 رامی‌توان بااستفاده‌ازقضیهٔ انرژی جنبشی بدست‌آورد .

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2=Pl(1-\cos\alpha)$$

چون $v_0=0$ است مقدار $mv_1^2=2Pl(1-\cos\alpha)$ می‌گردد واز روی‌آن مقدار T محاسبه می‌شود .

$$T=P+\frac{mv_1^2}{l}=P+2P(1-\cos\alpha)=$$
$$=P(3-2\cos\alpha)$$

اگر $\alpha=90^\circ$ باشد $T=3P$ یعنی نیروی‌کشش نخ درحالت قائم سه برابروزن‌گلوله بدست می‌آید .

در حالت سکون‌نیروی عکس‌العمل نخ برابر P می‌باشد . چنانکه دیده می‌شود باواکنش نخ هنگام حرکت گلوله متفاوت‌می‌باشد .

از جمع تصاویر نیرو ها روی مماس بر مسیر رابطهٔ $F_t^i=0$ بدست می‌آید : زیرا درآن نقطه‌گلوله بیشترین‌سرعت خودرا دارا بوده و $\frac{dv}{dt}$ برابرصفر می‌باشد .

یکی از دانشمندان ریاضی به‌نام : Faulhaber (۱۵۸۰-۱۶۳۵) تا مجموع قوای هفدهم اعداد طبیعی را پیدا کرد . همچنین در قرن‌هفدهم دانشمند ریاضی به‌نام : Jacqus Bernoulli جدول زیر را تنظیم کرد که در این جدول مجموع قوای متشابه اعداد طبیعی تا قوهٔ هشت حساب شده است.

$$\Sigma n = ۱+۲+۳+۴+\dots+n = \frac{۱}{۲}n^۲ + \frac{۱}{۲}n$$

$$\Sigma n^۲ = ۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots n^۲ = \frac{۱}{۳}n^۳ + \frac{۱}{۲}n^۲ + \frac{۱}{۶}n$$

$$\Sigma_{n^۳} = ۱^۳+۲^۳+۳^۳+\dots+n^۳ =$$

$$= \frac{۱}{۴}n^۴ + \frac{۱}{۲}n^۳ + \frac{۱}{۴}n^۲$$

$$\Sigma_{n^۴} = ۱^۴+۲^۴+۳^۴+\dots+n^۴$$

$$= \frac{۱}{۵}n^۵ + \frac{۱}{۲}n^۴ + \frac{۱}{۳}n^۳ - \frac{۱}{۳۰}n$$

$$\Sigma_{n^۵} = ۱^۵+۲^۵+۳^۵+\dots+n^۵ =$$

$$= \frac{۱}{۶}n^۶ + \frac{۱}{۲}n^۵ + \frac{۵}{۱۲}n^۴ - \frac{۱}{۱۲}n^۲$$

$$\Sigma_{n^۶} = ۱^۶+۲^۶+۳^۶+\dots+n^۶ =$$

$$= \frac{۱}{۷}n^۷ + \frac{۱}{۲}n^۶ + \frac{۱}{۱۲}n^۵ - \frac{۱}{۶}n^۳ + \frac{۱}{۴۲}n$$

و بطورکلی از روی فرمول زیر مجموع قوای متشابه اعداد طبیعی از یك تا هشت را می‌توان حساب کرد :

$$\Sigma_{n^c} = ۱^c+۲^c+۳^c+۴^c+\dots+n^c =$$

$$\frac{۱}{c+۱}n^{c+۱} + \frac{۱}{۲}n^c + \frac{c}{۲}An^{c-۱}$$

$$+\frac{c(c-۱)(c-۲)}{۴!}Bn^{c-۳} +$$

$$+\frac{c(c-۱)(c-۲)(c-۳)(c-۴)}{۶!}Cn^{c-۵} +$$

$$+\frac{c(c-۱)(c-۲)(c-۳)(c-۴)(c-۵)(c-۶)}{۸!}Dn^{c-۷}$$

که مقصود از «n!» یعنی فاکتریل n حاصل ضرب عددهای از ۱ تا n می‌باشد :

$$n! = n(n-۱)(n-۲)\dots\times۳\times۲\times۱$$

در فرمول بالا :

$$A = \frac{۱}{۶} \text{ و } B = -\frac{۱}{۳۰} \text{ و } C = \frac{۱}{۴۲} \text{ و } D = -\frac{۱}{۳۰}$$

مثلا می‌خواهیم $\Sigma_{n^۷}$ را حساب کنیم در این صورت این طور می‌نویسیم :

$$\Sigma_{n^۷} = \frac{۱}{۸}n^۸ + \frac{۱}{۲}n^۷ + \frac{۷}{۲}An^۶ +$$

$$+\frac{۷\times۶\times۵}{۱\times۲\times۳\times۴}Bn^۴ + \frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳}{۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶}Cn^۲$$

و در ازاء مقادیر معین A وB وC خواهیم داشت :

$$\Sigma_{n^۷} = \frac{۱}{۸}n^۸ + \frac{۱}{۲}n^۷ + \frac{۷}{۱۲}n^۶ - \frac{۷}{۲۴}n^۴ + \frac{۱}{۱۲}n^۲$$

پیداست که به ازاء $n=۱$ دو طرف رابطه مساوی یك می‌شود و از اینجا درستی رابطه معلوم خواهد شد :

$$۱ = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۲} + \frac{۷}{۱۲} - \frac{۷}{۲۴} + \frac{۱}{۱۲} = ۱$$

محاسبهٔ مجموع قوای هشتم : با استفادهٔ ازفرمول بالا داریم :

$$\Sigma_{n^۸} = \frac{۱}{۹}n^۹ + \frac{۱}{۲}n^۸ + \frac{۸}{۲}An^۷ + \frac{۶\times۷\times۸}{۴!}Bn^۵$$

$$+\frac{۴\times۵\times۶\times۷\times۸}{۶!}Cn^۳ +$$

$$+\frac{۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷\times۸}{۸!}Dn$$

به‌جای A و B و C و D مقدار می‌گذاریم :

$$\Sigma_{n^۸} = \frac{۱}{۹}n^۹ + \frac{۱}{۳}n^۸ + \frac{۲}{۳}n^۷ - \frac{۷}{۱۵}n^۵ + \frac{۲}{۹}n^۳ - \frac{۱}{۳۰}n$$

صحت رابطهٔ بالا را این طور تحقیق می‌کنیم که در دو طرف به‌جای n می‌گذاریم یك:

$$۱^۸ - ۱ = \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} - \frac{۷}{۱۵} + \frac{۲}{۹} - \frac{۱}{۳۰} =$$

$$= \frac{۱۰+۴۵+۶۰-۴۲+۲۰-۳}{۹۰} =$$

$$= \frac{۱۳۵-۴۵}{۹۰} = \frac{۹۰}{۹۰} = ۱$$

اثبات روابط بالا از راه استقراء ریاضی ساده است .

مسائل گوناگون در بارهٔ لگاریتم

تهیه از : **جعفر بنائی**

I - رابطه‌های عددی

۱) $\log_{۲}\log_{۲}\log_{۲}\log_{۲}۵۵۳۶=۱$

زیرا داریم :

$\log_{۲}\log_{۲}\log_{۲}۶۵۵۳۶=۲$ و $\log_{۲}\log_{۲}۶۵۵۳۶=۲^{۲}=۴$

$\log_{۲}۶۵۵۳۶=۲^{۴}=۱۶$ و $۶۵۵۳۶=۲^{۱۶}$

زیرا داریم :

۲) $\log_{۴}\log_{۳}\log_{۲}۲^{۸۱}=\log_{۲}\log_{۳}\log_{۴}۲^{۱۸}$

$\log_{۲}۲^{۸۱}=۸۱$ و $\log_{۳}۸۱=۴$ و $\log_{۴}۴=۱$

$\log_{۴}۲^{۱۸}=\log_{۴}۴^{۹}=۹$ و $\log_{۳}۹=۲$ و $\log_{۲}۲=۱$

۳) $\log_{۲}۱۰\log_{۳}۹\log_{۴}۸\log_{۵}۷\log_{۶}۶\log_{۷}۵\log_{۸}۴\log_{۹}۳$
$\log_{۱۰}۲=۱$

زیرا بنابه فرمول $\log_{b}a\log_{a}b=۱$ داریم :

$\log_{۲}۱۰\log_{۱۰}۲=۱$ و $\log_{۳}۹\log_{۹}۳=۱$

$\log_{۶}۶=۱$ و ... و

۴) $\log_{\frac{۲۴}{۴۲}}\frac{۲۰۴۰۶}{۶۰۴۰۲}=\log_{\frac{۳۶}{۶۳}}\frac{۳۰۶۰۹}{۹۰۶۳}$

زیرا این تساوی به‌صورت زیر ساده می‌شود :

$$\log_{\frac{۱۲}{۲۱}}\frac{۱۰۲۰۳}{۳۰۲۰۱}=\log_{\frac{۱۲}{۲۱}}\frac{۱۰۲۰۳}{۳۰۲۰۱}$$

۵) $$\log_{\sqrt[۱۱]{\frac{۲۰۴}{۴۰۲}}}\sqrt[۱۱]{\frac{۲۰۰۴}{۴۰۰۲}}=\log_{\sqrt[۱۱۱]{\frac{۳۰۶}{۶۰۳}}}\sqrt[۱۱۱]{\frac{۳۰۰۶}{۶۰۰۳}}=$$

$$=\log_{\sqrt[۱۱۱۱]{\frac{۴۰۸}{۸۰۴}}}\sqrt[۱۱۱۱]{\frac{۴۰۰۸}{۸۰۰۴}}$$

زیرا هریك از طرفهای این تساوی مضاعف بـه صورت زیر ساده می‌شود :

$$\log_{\frac{۱۰۲}{۲۰۱}}\frac{۱۰۰۲}{۲۰۰۱}$$

۶) $$\frac{\log_{۳}۲+\log_{۴}۲+\dots+\log_{۱۰}۲}{\log_{۳}۱۰+\log_{۴}۱۰+\dots+\log_{۱۰}۱۰}=\log ۲$$

زیرا داریم :

$\log_{۳}۲=\log_{۱۰}۲\log_{۳}۱۰$ و $\log_{۴}۲=\log_{۱۰}۲\log_{۴}۱۰$ و ...

وعبارت صورت به صورت زیر درمی‌آید :

$$\log ۲(\log_{۳}۱۰+\log_{۴}۱۰+\dots+\log_{۱۰}۱۰)$$

۷) $$(\log_{۸}۱۰\log_{۸}۹+\log_{۷}۱۰\log_{۷}۹+\log_{۶}۱۰\log_{۶}۹)^{۲}=$$
$$=(\log_{۸}^{۲}۱۰+\log_{۷}^{۲}۱۰+\log_{۶}^{۲}۱۰)(\log_{۸}^{۲}۹+\log_{۷}^{۲}۹+\log_{۶}^{۲}۹)$$

زیرا با استفادهٔ از فرمول :

$$\log_{b}a=\frac{\log a}{\log b}$$

و با توجه به اینکه $\log ۱۰=۱$ است حاصل هریك از طرفین چنین می‌شود :

$$\log^{۲}۹\left(\frac{۱}{\log^{۲}۸}+\frac{۱}{\log^{۲}۷}+\frac{۱}{\log^{۲}۶}\right)^{۲}$$

II - اتحادها و معادلات

۱- ثابت کنید که رابطهٔ زیر مستقل از x است و اگر علامت « × » را به علامت « + » و علامت « + » را بـه علامت « × » تبدیل کنیم تساوی حاصل بازهم برقرار است :

$$\sqrt{\log_3 2 \times \log_3 x} + \sqrt{\log_4 2 \times \log_4 x} =$$

$$= \sqrt{\log_3 2 + \log_4 2} \times \sqrt{\log_3 x + \log_4 x}$$

زیرا با استفادهٔ از فرمول $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ حاصل هر یك از عبارتهای طرفین برابر می‌شود با :

$$\sqrt{\log 2 \log x}\left(\frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4}\right)$$

۲ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر راحل کنید :

$$\begin{cases} 2^{\log_3 x} \times 3^{\log_2 y} = 18 \\ xy = 12 \end{cases}$$

از طرفین رابطهٔ اول در پایهٔ ۲ و از طرفین رابطهٔ دوم درپایهٔ ۳ لگاریتم می‌گیریم :

$$\begin{cases} \log_3 x \log_2 2 + \log_2 y \log_2 3 = 1 + 2\log_2 3 \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 + 2\log_3 2 \end{cases}$$

طرفین دو معادله را نظیر به نظیر ازهم کم می‌کنیم بعد ازساده کردن نتیجه خواهد شد :

$$\log_2 y = 2 \Longrightarrow y = 4 \Longrightarrow x = 2$$

۳ـ حل دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر :

$$\begin{cases} \mathrm{Arctg}\log_2 x + \mathrm{Arctg}\log_3 y = \mathrm{Arctg}\log_3 \frac{1}{27} \\ \sqrt{\log_a x \log_a 4} + \sqrt{\log_b y \log_b 3} = \\ = \sqrt{\log_a x + \log_b y} \times \sqrt{\log_a 4 + \log_b 3} \end{cases}$$

از تساوی اول نتیجه می‌شود :

$$\frac{\log_2 x + \log_3 y}{1 - \log_2 x \log_3 y} = -3$$

واز تساوی دوم بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$\log_4 x = \log_3 y \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\log_2 x = \log_3 y$$

با انتخاب مجهول معاونهای $\log_2 x = X$ و $\log_3 y = Y$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} X + Y - 3XY = -3 \\ X = 2Y \end{cases}$$

$$2Y^2 - Y - 1 = 0 \Longrightarrow Y = 1 \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{2}$$

بالاخره خواهیم داشت :

$$x = 4 \text{ و } y = 3 \quad \text{یا} \quad x = \frac{1}{2} \text{ و } y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۴ـ عمل غلط اما نتیجه درست ؛ معادلهٔ زیرمفروض است

$$\log_2(x-1) + 2\log_4(x-1) + 3\log_8(x-1) + 4\log_{16}(x-1) = 4$$

این معادله بصورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{\log(x-1)}{\log 2} + \frac{2\log(x-1)}{2\log 2} + \frac{3\log(x-1)}{3\log 2} + \frac{4\log(x-1)}{4\log 2} = 4$$

عمل غلط حذف نشانهٔ $\log$ را از صورت و مخرج هر کسر انجام می‌دهیم نتیجه می‌شود :

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2} = 4$$

$$4(x-1) = 8 \Longrightarrow x = 3$$

درصورتی که اگر به ترتیب صحیح عمل کنیم خواهیم داشت :

$$4\log(x-1) = 4\log 2 \quad \text{یا} \quad x - 1 = 2 \text{ و } x = 3$$

ملاحظه می‌شود با عمل غلطی که در ابتدا انجام داده‌ایم جواب صحیح بدست آورده‌ایم علت این امر چیست ؟

تمرینات

۱ـ صحت تساویهای زیر را ثابت کنید :

$$\log \sqrt{\frac{204}{402}} \sqrt{\frac{20004}{40002}} \times \log \sqrt{\frac{30006}{60003}} \sqrt{\frac{306}{603}} = 1$$

$$\log \left(\frac{246}{642}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{6004002}{2004006}} = \log \left(\frac{369}{963}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{9006003}{3006009}}$$

$$\log_{13} 31 \log_{12} 21 \log_{11} 19 \log_{31} 13 \log_{21} 12 \log_{19} 91 = 1$$

$$\frac{\log_2 2 + \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \dots + \log_{\sqrt[n]{2}} 2}{\sqrt{\log_3 3 + \log_{\sqrt{3}}^3 3 + \log_{\sqrt[4]{3}}^3 3 + \dots + \log_{\sqrt[n]{3}}^3 3}} = 1$$

۲ـ صحت اتحادهای زیر را ثابت کنید :

$$(\log_a^2 x + \log_b^2 x)(\log_a^2 y + \log_b^2 y) =$$

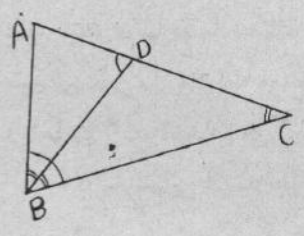
$$= (\log_a x \log_a y + \log_b x \log_b y)^2$$

(دنباله درصفحهٔ ۲۴۳)

روش هندسی در اثبات و تعمیم یك اتحاد مثلثاتی

تهیه از : ابوالفضل فتح‌الله زاده
دانشجوی دانشکدهٔ علوم دانشگاه مشهد

با استفادهٔ از روش هندسی و روابط متری بین اجـزاء یك مثلث می‌توان بعضی از اتحادهای مثلثاتی را بدست آورد ، ثابت‌کرد یا تعمیم داد . به نمونهٔ زیر توجه‌کنید :



مثلث ABC را در نظر می گیریم که درآن زاویهٔ B دوبرابرزاویهٔ C باشد . نیمساززاویهٔ B رارسم‌می‌کنیم‌تاضلع AC را در D قطـع کند. زاویهٔ ADB که بامجموع دو زاویهٔ ACB و DBC یعنی با دو برابر زاویهٔ C برابر است بـا زاویـهٔ B از مثلث برابر است و دو مثلث ABD و ABC متشـابه بوده خواهیم داشت :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{BD}{BC}\left(=\frac{CD}{BC}\right)$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{BD}{BC}\left(=\frac{CD}{BC}\right)=\frac{AB}{AB}$$

$$AD+DC=AC$$

$$\frac{AB^2}{AC}+\frac{AB\cdot BC}{AC}=AC$$

$$\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=AB\cdot BC$$

از تقسیم طرفین این رابطه بر $4R^2$ مجذور قطر دایرهٔ محیطی مثلث خواهیم داشت :

$$\left(\frac{AC}{2R}\right)^2-\left(\frac{AB}{2R}\right)^2=\frac{AB}{2R}\cdot\frac{BC}{2R}$$

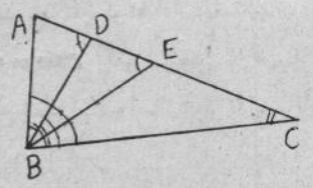
$$\sin^2 B-\sin^2 C=\sin A\sin C$$

با فرض $C=\alpha$ داریم :

$$B=2\alpha \text{ و } A=\pi-3\alpha \Longrightarrow \sin A=\sin 3\alpha$$

و اتحاد زیر را خواهیم داشت :

$$\sin^2 2\alpha-\sin^2\alpha=\sin 3\alpha\sin\alpha$$



اکنون‌مثلث ABC را در نظر می‌گیریم که درآن‌زاویهٔ B سه‌برابر زاویهٔ C باشد . اگـر خطهای BD و BE مطابق شکل چنان رسم شده باشندکه زاویهٔ B را به‌سه قسمت متساوی تقسیم‌کنند زاویهٔ ADB با زاویهٔ ABC وزاویهٔ AEB بازاویهٔ DBC برابر بوده اولا از تشابه دو مثلث ABD و ABC خواهیم داشت

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{BD}{BC}$$

$$BD=\frac{AB\cdot BC}{AC} \quad \text{و} \quad AD=\frac{\overline{AB}^2}{AC} \quad \text{و}$$

$$CD=AC-AD=\frac{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}{AC}$$

در مثلث BDC که زاویهٔ B از آن دو برابر زاویهٔ C است بنا به حالت اول داریم :

$$\overline{CD}^2-\overline{DB}^2=DB\cdot BC$$

$$\frac{(\overline{AC}^2-\overline{AB}^2)^2}{\overline{AC}^2}-\frac{\overline{AB}^2\cdot\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{AB\cdot\overline{BC}^2}{AC}$$

این رابطه بعد از اختصار چنین می‌شود :

$$\overline{AC}^3+\overline{AB}^3=AB(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+AC\cdot AB)$$

$$\sin^3 B+\sin^3 C=\sin C(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin B\cdot\sin C)$$

و با فرض $C=\alpha$ نتیجه خواهد شد :

$$\sin^3 3\alpha+\sin^3\alpha=\sin\alpha(\sin^2 4\alpha+\sin^2 3\alpha+$$
$$+\sin 3\alpha\sin\alpha$$

(بقیه در صفحهٔ ۲۱۸)

چگونه می‌توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

تألیف: René Boirel

فصل سوم - طرح منظم یورش به‌مسئله

تاکنون آن اندازه مجهز شده‌اید که یورش به مسئله را آغاز کنید . اما تجهیزاتی که‌با آن‌فقط بتوان موانع را ازسر راه برداشت کافی نیست ؛ برای حملهٔ مؤثر روش و استراتژی لازم است . ازاین جهت است که در این فصل به شما آموخته خواهد شد تاچگونه از دانستنیهای خوددرعمل استفاده کنید تا نتیجه موفقیت آمیز باشد .غرض از تنظیم این بخش آن است که به شما یاد داده شود تا مسائل را چگونه به آسانی حل کنید .

باباروبنه‌ای از کار بری‌که تاکنون فراهم‌آورده‌اید باید توانائی حل مسائل را داشته باشید . البته اگر روشی منظم در پیش گیرید . طرح یورش به مسئله را در چهار مرحله تنظیم کنیدو طبق دستور کلی که‌درپایان این فصل داده خواهدشد عمل کنید .

چهار مرحلهٔ حل یك مسئله

۱ـ تبدیل بیان مسئله به‌صورت کاربری

الفـ برای این منظور ، معلومات مسئله را به صورتی کمی بیان می‌کنیم: مثلااگرازبیان مسئله برمی‌آید که‌خط AB بر دایرهٔ به‌مرکز O مماس است آنراچنین می‌نویسیم که‌زاویهٔ ABO برابر یك قائمه است . یااینکه اگر گفته شود که دو دایره بر یکدیگر عمودند آنرا به این ترتیب بیان می‌کنیم که زاویهٔ بین مماسهای براین دودایره در نقطهٔ مشترك آنهابرابر یك قائمه است .

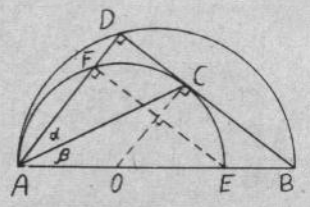
بـ اطلاعات کمی مزبور (تساوی پاره‌خطها، زاویه‌ها و....) را بکمك نشانه‌های اختصاصی که ضمن‌متن درس‌آموخته شده است برروی شکل وارد کرد .

۲ـ تشخیص دقیق مطلوب مسئله و مخصوصاً صورتهایی معادل با آن که می‌توان‌بدست آورد .

وقتی آنچه که‌مورد نظر است به وضوح معلوم شد این امکان بوجود می‌آید که همهٔ کوششها را روی یك عمل اساسی متمرکز کرد تا آن نتیجه مورد نظر حاصل شود .

تشخیص صورتهای معادل با نتیجهٔ مورد نظر امکانات عملی بیشتری را در بارهٔ مسئله فراهم می‌آورد : برای وصول‌به نتیجه چندین راه ملاحظه می‌شود واز بین آنها آنکه ساده‌تر و آسانتر باشد انتخاب می‌گردد .

در حالتهایی از ملاحظهٔ صورتهای معادل نتیجهٔ موردنظر حل مستقیم مسئله میسرمی‌گردد .مثلا فرض کنیم که‌می‌خواهیم مسئلهٔ زیررا ثابت کنیم : دو دایره به‌قطرهای AB و AE در A مماس خارج می‌باشند .از B مماس BC رابردایرهٔ کوچکتر رسم می‌کنیم که امتداد آن دایرهٔ بزرگتررا مجدداً در D قطع می‌کند ، ثابت کنیدکه AC نیمساز زاویهٔ BAD است .



معادل این نتیجه‌یعنی اثبات تساوی دو زاویهٔ α و β این است که ثابت کنیم C وسط کمان EF است یعنی OC بروتر EF عمود است وچون OC بر BD عمود است پس حل مسئله‌منجر به این می‌شود که ثابت کنیم EF با BD موازی است که به‌سادگی انجام می‌گیرد زیرا هریك از دو زاویهٔ D و F قائمه‌می‌باشند.

۳ـ گسترش تحرك عملی مسئله

به این معنی که‌انواع مختلف عملیاتی رااز نظر گذراند که نتیجهٔ مطلوب را محقق می‌سازند به‌عبارت دیگر فهرستی از «راههای جستجو» را جور کرد که با عمل حل مسئله مناسب می‌باشند شما در فصل دوم باآنها آشنا شده‌اید .

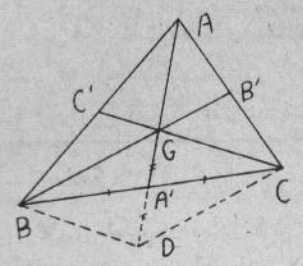
بطور کلی باید این راههای جستجو با راههای کاربری جور کرد که ازآنهاتحرك عملی داده‌ها نتیجه‌می‌شود وبالاخره راهی را ملاحظه کرد که در آن امکانات تحقق نتیجه ازروی معلومات فراهم می‌باشد . در نتیجه لازم است که تحرك عملی معلومات رانیز گسترش داد :

۴ــ گسترش تحرك عملی معلومات

به‌این معنی که انواع ترسیمات یاتبدیلاتی را که‌مناسب با معلومات است روی‌آنها انجام داد . به عبارت‌دیگر،راههای کار بری‌را فراهم ساخت که در فصل‌یکم‌از آنهاصحبت‌کرده‌ایم وشما فعلا با آنها آشنا هستید :

گاهی پیش‌می‌آید که‌در آغاز ،اینچنین گسترش عملی‌حل مستقیم مسئله میسر می گردد .

مثال : ثابت کنیدمساحت مثلثی که اندازه‌های‌ضلعهای آن اندازه‌های میانه‌های یك مثلث است سه چهارم مساحت‌این مثلث می‌باشد .



از گسترش عملی معلومات حل مسئله مستقیماً بدست می‌آید: اگر میانهٔ AA' راتا نقطهٔ D امتداد دهیم که DA' با GA' برابر باشدچهار ضلعی $GBDC$ متوازی‌الاضلاع است و هرضلع مثلث GDC دوسوم میانه‌ای از مثلث مفروض بوده مساحت آن $\frac{۴}{۹}=\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}$ مساحت مثلث است که اضلاعش میانه‌های مثلث مفروض باشند .

مساحت CGD نصف مساحت $DBGC$ وبرابر بامساحت BGC و در نتیجه ثلث مساحت مثلث ABC می‌باشد و از این راههای کاربری به آنجا می‌رسیم که مساحت مثلثی که اضلاعش میانه‌های مثلث ABC باشد سه چهارم مساحت مثلث ABC خواهد بود زیرا مساحت مزبور نه‌چهارم مساحت‌مثلث CGD می‌باشد .

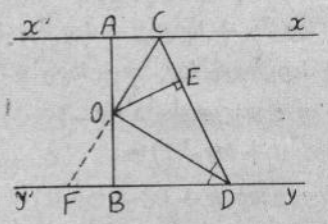
شاید تقدم گسترش تحرك عملی معلومات بر گسترش تحرك عملی مسئله ترجیح داشته باشد ازاین جهت که‌همیشه در موقع مقتضی‌حل‌مسئله میسر می گردد . همچنین اغلب از تغییر شکل و معلومات مسئله‌راه حلهای بسیار کوتاه و قشنگی بدست می‌آید ، در صورتی که راه حلهایی که از راه عمومی وبا استفاده ازعملیات اساسی بدست‌می‌آید بسیارطولانی‌می‌باشند زیرا از این راه حلها تغییر شکلهای خاص‌معلومات ودرنتیجه امکانات مربوط به آنها به‌نظر نمی‌رسد .

اما وقتی‌که وقت محدود باشد ، مثلا در روز امتحان ، بهتر آنست که‌ابتدا گسترش تحرك عملی مسئله وبعداً گسترش تحرك عملی معلومات انجام گیرد . در این نوع مواقع اگر قبلی از پایان وقت جواب‌مسئله معلوم شد آنگاه می‌توان‌تحرك عملی معلومات را از نوگسترش داد تا شایدبتوان راه‌حل‌کوتاه وقشنگ مسئله را پیدا کرده آنرا ارائه داد .

در بسیاری از موقع ، همانگونه که قبلا هم گفته‌ایم ، از توجه به‌نکتهٔ مخصوصی‌در گسترش تحرکهای‌عملی‌مسئله‌معلومات راه‌حل مسئله ناگهانی جلوه می‌کند . برای مثال حلا مسئلهٔ‌زیر را درنظر می‌گیریم :

قطعه خط AB و نقطهٔ O وسط آن و خطوط $x'x$ و $y'y$ که به ترتیب در A و B بر AB عمودند مفروض‌است. زاویهٔ قائمهٔ COD به رأس O را در نظرمی گیریم که‌ضلعهای آن $x'x$ و $y'y$ رابه ترتیب در C و D قطع می کنند . ثابت کنید که CD بردایرهٔ به‌قطر AB مماس است .

از تحرك عملی مسئله حاصل می‌شود که : برای اینکه CD بردایرهٔ به قطر AB مماس باشد باید OE (عمودی که از O بر CD رسم می‌شود با OB یا OA برابر باشد ، یعنی‌مثلثهای‌قائم‌الزاویه OBD و OED که در وتر باهم مشترك‌اند بایکدیگر برابر باشند یعنی آنکه دو زاویهٔ BDO و EDO متساوی باشند .



ازتحرك‌عملی‌معلومات‌نتیجه‌می‌شود که: چون O وسط AB است پس اگر CO را امتداد دهیم تا $y'y$ رادر F قطع کند O وسط CF می‌باشد .

باتوجه‌به‌گسترشهای‌بالا به‌حل‌مسئله‌راهنمائی‌می‌شویم: مثلث CDF که‌در آن DO میانه وهمچنین‌ارتفاع‌است متساوی‌الساقین می‌باشد ودر نتیجه OD نیمساز زاویهٔ D نیزمی‌باشد .

در برابر مشکلاتی که برای شما پیش می‌آید به دستور کلی و عمومی زیر توجه داشته‌باشید :

علت برخورد با مشکلات را که‌ضمن‌عملیات پدیدمی‌آیند بررسی وتحلیل کنید . مخصوصاً باید توجه کنید که گسترش تحرك عملی بابن بست موقتی مواجه نشده‌باشد ، به‌این معنی‌که اگر ضمن راه‌حل به موانعی برخورد کردید توجه کنیدکه‌آیا از خلال این موانع راه گریزی وجود یانه ، وبی مطالعه راه

حل مزبور را رها نکنید . درچنین صورتی جستجوی خود را قطع کنید و به بررسی علل وجود این مشکلات بپردازید .

این علل را بخصوص با پیروی از دستور زیر جستجو کنید :

ـ آیا به خاطر این متوقف شده‌اید که شرایط کاربرد یك روش کلی با نوع عرضهٔ فعلی معلومات سازگار نیست ؟ در این صورت فقط کافی است که در نوع عرضهٔ مزبور تغییرات لازم را انجام دهیم تا بتوانید روش انتخابی را به سرانجام برسانید.

ـ آیا به خاطر این متوقف شده‌اید که تاکنون یکی از معلومات ودر نتیجه راه عملی مربوط به آنها مورد استفاده قرار نداده‌اید؟

اکنون تصدیق خواهید کرد که با هر دفعه برخورد به یك مانع می‌توانید با بررسی و تعیین علل آن ، موجبات رفع این مانع را فراهم آورید و جستجوی عملی خودرا تا حصول به نتیجهٔ مطلوب دنبال کنید . در مرحله‌ای از عملیات در کوششهای خود چنان تغییری را بوجود می‌آورید تا متدرجاً به سوی جواب نزدیك بشوید .درچنین راه حل تدریجی که به وضوح منظم شده و بطور واقعی توجیه شده باشد هرمرحله‌ای از جستجوهای شما نتیجهٔ مثبت خواهد داشت : باوجود مواقع توقف عملی به موفقیت نهائی خواهید رسید .

خوانندهٔ عزیز ، متوجه شده‌ای که در مقابل برخورد با مشکلات به جای آنکه خودرا بیچاره احساس کنید ، باید در صدد برطرف ساختن کامل علل آنها باشی و مانع را باراحتی دور بزنی در این صورت توانسته‌ای درهر ایست ناگهانی خودرا مؤثراً نگاهداری و به آن عادت کنی . اعتمادی که تاکنون به توانائی خود ازراه کشف تحرکهای عملیات ریاضی بدست آورده‌ای استوار نخواهد بود مگر اینکه چنین عادتی راکسب کرده باشی.

به‌علاوه ، کسب چنین عادتی در پرورش انسانی شما نیز سودها و برتریهائی خواهدداشت، ازاین به‌بعد خواهیددانست برای کسی در یك زمینهٔ عملی تحقیقات و جستجوهای خودش را باروش منظم دنبال می‌کند چیزی غیر ممکن وجود نخواهد داشت . درزندگی روزمرهٔ خود دربرابر برخورد باهرمانع یا باپیش آمدن هرنوع مشکلاتی خیلی خوب می‌توانید به عادت مزبور روشن بین باشید و موانع را از راه پیشرفت خود برطرف سازید .این درس بزرگ رااز ممارست در حل مسائل ریاضی فرامی‌گیرید، مخصوصاً اگراین عمل رابه‌پیروی ازاصولی انجام دهید در این کتاب به‌شما نموده شده است .

برای اینکه امکان آزمودن همهٔ سلسله امور تدریجی برای شما فراهم شود ،ازشمادعوت می‌کنیم که برای آشنائی باتحرکهای عملی جبر و مثلثات فصلهای آینده را بخوانید . به شماتوصیه می‌کنیم که به هنگام مطالعه ، قلم را آماده در دست داشته باشید ودر این فصلها بمانند فصلهای اول ودوم عمل کنید.

مسائل دربارهٔ لگاریتم

(بقیه ازصفحهٔ ۲۳۸)

$$(\log_a x\log_a y+\log_b x\log_b y+\log_c x\log_c y+$$
$$+\log_d x\log_d y)^2=(\log_a^2 x+\log_b^2 x+\log_c^2 x+$$
$$+\log_d^2 x)(\log_a^2 y+\log_b^2 y+\log_c^2 y+\log_d^2 y)$$

۳ـ چه رابطه بین x و y برقرار باشد تا داشته باشیم:

$$(\log_2^2 x+\log_3^2 y)(\log_2^2 \alpha+\log_3^2 \alpha)=$$
$$=(\log_2 x\log_2\alpha+\log_3 y\log_3\alpha)^2$$

۴ـ اولا معادلهٔ زیر راحل کنید . ثانیاً ثابت کنید که اگر علامتهای + و × را با یکدیگر عوض کنیم معادلهٔ حاصل با معادلهٔ مفروض هم ارز می‌باشد .

$$\sqrt{\log_5 x\times\log_5 3}+\sqrt{\log_4 2\times\log_4 3}=$$
$$=\sqrt{\log_4 2+\log_5 x}\times\sqrt{\log_3 3+\log_5 3}$$

۵ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$[(\log_4 x+\log_4 3)(\log_5 2+\log_5 3)+$$
$$+(\log_4 x-\log_4 3)(\log_5 2-\log_5 3)]^2=$$
$$=[(\log_4 x+\log_4 3)^2+(\log_4 x-\log_4 3)^2][(\log_5 2+$$
$$+\log_5 3)^2+(\log_5 2-\log_5 3)^2]$$

۶ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}(\log_3 4\log_3 2+\log_3 y\log_3 x)^2=(\log_3^2 4+\\ \qquad +\log_3^2 y)(\log_3^2 2+\log_3^2 x)\\ (\log_4 y\log_4 3+\log_4 2x\log_4 3)^2=(\log_4^2 y+\\ \qquad +\log_4^2 2x)(\log_4^2 3+\log_4^2 3)\end{cases}$$

۷ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید و ثابت کنید با تعویض جای علامتهای × و + جوابهای معادله فرق نمی‌کنند .

$$\begin{cases}\sqrt{\log_a x\log_a 3}+\sqrt{\log_b y\log_b 2}=\\ \qquad =\sqrt{\log_a x+\log_b y}\times\sqrt{\log_a 3+\log_b 2}\\ \sqrt{\log_2 x\log_2 y}+\sqrt{\log_d x\log_d 2}=\\ \qquad =\sqrt{\log_c x+\log_d x}\times\sqrt{\log_c y+\log_d 2}\end{cases}$$

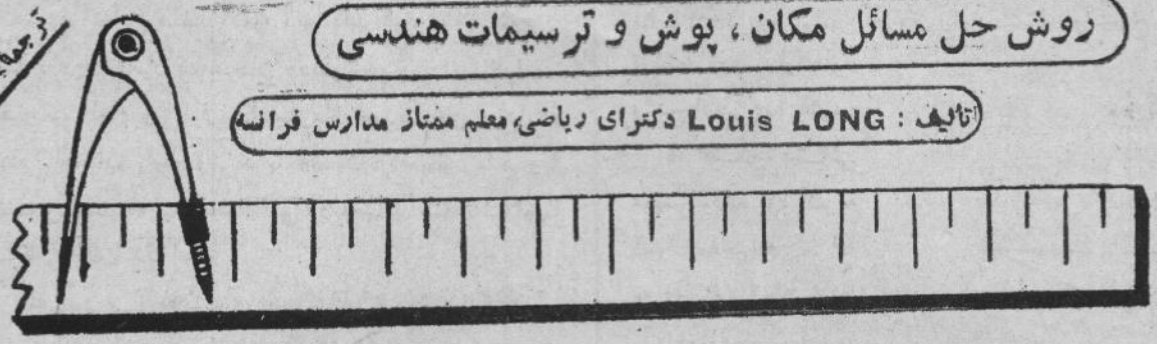
۸ـ دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را حل کنید و معلوم کنید که با تعویض جای علامتهای × و + جوابهای دستگاه فرق نمی‌کند .

$$\begin{cases}\sqrt{\log_5 x\log_5 y}+\sqrt{\log_6 2\log_6 3}=\\ \qquad =\sqrt{\log_5 x+\log_6 2}\times\sqrt{\log_5 y+\log_6 3}\\ \sqrt{\log_6 y\log_6 z}+\sqrt{\log_7 3\log_7 4}=\\ \qquad =\sqrt{\log_6 y+\log_7 3}\times\sqrt{\log_6 z+\log_7 4}\\ \sqrt{\log_8 z\log_8 x}+\sqrt{\log_9 2x\log_9 2}=\\ \qquad =\sqrt{\log_8 z+\log_9 2x}\times\sqrt{\log_8 x+\log_9 2}\end{cases}$$

روش حل مسائل مکان، پوش و ترسیمات هندسی

تألیف : Louis LONG دکترای ریاضی، معلم ممتاز مدارس فرانسه

ترجمهٔ: ع. م.



I ـ مقدمه

۱ـ دشواری آموزش ریاضی

بسیاری ازدانش‌آموزان در برابر دشواری ریاضیات جا می‌خورند. مثل اینکه برای فرا گرفتن این علم، استعداد خاصی لازم است. در هندسه مخصوصاً آنچه که «مشاهده» نمی‌شود دروضع ناجورتری‌قرار دارد. به‌ویژه در روبرو شدن بایك مسئله است که به تشویش خاطر دوچار می‌شوند: عموماً روشی کلی را نمی‌شناسند؛ نمی‌دانند کار به کجا می‌انجامد. راههای مختلفی در نظر گرفته می‌شود که اغلب بی‌فایده‌اند و به خاطر پراکندگیهای‌فکری به‌ناکامی منجرمی‌شوندودلسردی بیشتری راباعث می‌گردند.

آیا آموزش ریاضیات فاقد روش است؟ دارا نبودن روش مشخص برای آنچه‌که‌به علمی مربوط است که نمونه‌دقت می‌باشدومخصوصاً برای‌آنچه‌که به‌حل مسائل مربوط است‌اعجاب آور می‌باشد. ریاضی علمی منتزع و کامل است، و هوش‌محدود ما به اشکال می‌تواند این حقیقت مجرد راکه موجب حیرت اوست بین سایر ادراکات‌خود تشخیص دهد. بین مجموعه‌های بسیاری از چیزها که در تاریکی محو شده‌اند فقط برخی درخشندگیهای پراکنده ملاحظه می‌شود، از این جهت است که در بیشتر موارد، روش از نظر ما ناپدید است. و به همین خاطر است که بنظر می‌آید ریاضیات فاقدهماهنگی‌است.

یك مثال بارز: از دو خط موهومی مزدوج چه می‌بینیم؟ فقط یك نقطه: نقطهٔ تلاقی آنها. در حالی‌که این دو خط به صورت قرار دادی محض وجود ندارند، فقط در محاسبات مربوط به معادلات است که به تشابه وجود خطوط حقیقی وجود آنهاعرض اندام می‌کند.

۲ـ غرض از تألیف کتاب

دربسیاری از موارد اینطور بنظر می‌آید که روش‌کاملا ذهنی و استدلالی به ندرت دوچار لغزشی می‌شود مبتنی بر فکری کاملا طبیعی است که از مشاهدات مادی سرچشمه گرفته است: اسم یك مکان نقاط یا پوش خطوط، تعیین درجهٔ یك شکل از روی تعیین عدهٔ نقاط مکان‌که بریك‌خط‌مستقیم‌واقع‌اند یا از روی عدهٔ مماسهایی از پوش‌که بریك‌نقطه‌می‌گذرند؛ همهٔ این کارها اغلب بامشاهدهٔ محور یامرکز تقارن و از راه‌حذف قطعی وقبلی همهٔ خطوطی که‌با جواب‌موافق نیستند وبااختصار مفروضات به سادگی انجام می‌گیرد.

گاهی باشناسائی ماهیت شکل مورد نظراثبات بسیارساده می‌شود. در این صورت روشهای دقیق از هر جهت پدیدار می‌شوند.

تعیین قبلی ماهیت یك مکان هندسی یا یك پوش که از اثبات تیکه به‌تیکهٔ بعدی جلوگیری کنداز‌این‌جهت که علمی کامل نیست مورد اعتراض نخواهد بود! مثلا ترسیم یك مکان ازراه تعیین وضع نقاط‌خاص‌آن، یك رشته عملیات تردیدآمیز غیر مرتبط نخواهد بود، ودر ضمن نباید از نظر دور داشت که تجربه و مشاهده در حقیقت پایهٔ اولیه و استوار هر علمی می‌باشد.

غرض از تألیف این کتاب راهنمائی دانش‌آموزی است که از استعداد خاصی برخوردارنیست‌تا بتواندآنرا باکمترین شانس بدست آورید. در اینجا مسائل باراه حلهای طولانی‌اما منظم برمسائلی که راه حل آنی دارند ترجیح داده شده است؛ این مسائل هر چند که زیبا باشند، اما دست یافتن‌به‌جواب آنها اغلب محتاج به نوعی تصادف یاالهام می‌باشد. ودرنتیجهٔ آن، دانش‌آموزدر دریائی از پریشان خاطری غوطه‌ور می‌شود زیرا درحل‌هرمسئله اعجابی‌به او دست می‌دهد ووقتی خواسته باشد مسائل مشابه با آنرا حل کند دوچار ناتوانی کامل است. تنهانکته‌های که از حل این نوع‌مسائل عاید می‌شود این‌خواهد بود که: اگر شانس همکاری کند اشکالی نخواهد داشت. موضوعی که عجیب هم بنظر می‌رسداین است که چیزهای‌ساده

تقریباً همیشه آنهایی هستند که به آنها دقت کمتری می‌شود ؛ مخصوصاً درروزامتحان که هیجان ودلهره هم دست‌اندرکاراست نباید هیچگاه الهام و اتفاق را بیشرمانه مورد بهره برداری قرار داد . همواره باید روشی راپیروی کرد که بطور منظم وبا اسلوب معین به‌نتیجه بینجامد ؛ این رویه شاید کند باشد اما خطر ناکامی آن اندك است .

گاهی پیش می‌آید مسئله‌ای که حل شد آنگاه روش حل کوتاه آن باوضوح تمام بنظر می‌رسد. دراین صورت داوطلب می‌تواند این روش را نزد خود نگاه دارد و آنرا بر ممتحن عرضه نکند ، البته اگر این گمان برود که ارائهٔ راه‌حل کوتاه وزیبا اثری مداهنه آمیز دارد واینطور وانمود شود که وی بهترین راه حل را اتفاقاً یافته است ، و در حقیقت او این استعداد را دارد .

۳ـ نصایح سودمند

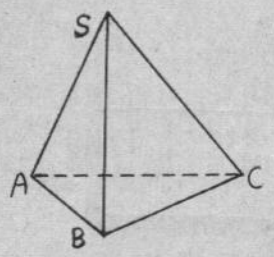
وقتی که پیدا کردن یك مکان یا یك پوش دشوار بنظر می‌رسد ، می‌توان شکل موردنظر را به حالتها دیگر ومخصوصاً درحالتهای خاص درنظر گرفت واین راه اغلب سودمند می‌باشد (مثلا به‌جای مثلث غیر مشخص ،حالت خاص آن متساوی‌الساقین را در نظر گرفت) . اما در این باره باید محتاط بود ، زیرا گاهی موجب می‌شود که نوع مکان یا پوش یافته شده بکلی دگرگون باشد . مثلا اگر مقصود تعیین شکل منعکس یك دایره باشد ، وقتی حالت خاصی که دایره برقطب انعکاس می‌گذرد درنظر گرفته شود منعکس آن یك خط مستقیم خواهد بود ، در صورتی که در حالت کلی منعکس دایره یك دایره است .

همچنین باید مواظب بود تا شکلی که بجای حل مسئله مورد استفاده واقع می‌شود درحالات خاصی نباشد بقسمی که مفروضات مسئله در آن صدق نکند . مثلا اگر یك زاویه موضوع سؤال است نباید زاویهٔ قائمه رسم کرد که در فرض این خصوصیت ذکر نشده است . این تبصره ، همچنین در موارد اثبات خواص کلی هندسی باید مورد توجه باشد .

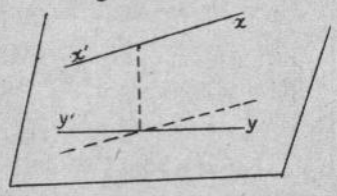
رسم شکلهای دقیق ودر عین حال بسیار بزرگ و واضح باخط‌کش وپرگار ضروری می‌باشد . این نکته مخصوصاً درتعیین مکان از راه رسم نقاط آن‌شایان اهمیت است . گاهی بی اعتنائی به این نکته موجب اشتباههای دربارهٔ شکل مکان یا پوش خواهد شد (مثلا در یك دایرهٔ با شعاع بزرگ ، به سادگی امکان دارد که یك کمان باوترش اشتباه شود).

هرشکل باید شامل حداقل خطوط ممکن باشد . به این منظور بهتر آنست که چندین شکل رسم کرد و در هر یك از آنها غیر از خطوط ضروری خطوط دیگر را رسم نکرد .

هیچ روشی که باعث مشاهدهٔ بهتر باشد و از کوششهای بیهوده جلوگیری کند و باعث کاهش خستگی جسمانی باشد نباید از نظر دور بماند . حروف را باید خوانا و خارج از خطوط نوشت. نقاط باید بطور واضح ازهم جدا باشند.



در هندسهٔ فضائی مفید خواهد بود که به اصول مناظر و مرایا توجه بشود (مثلا شکل یك چهاروجهی، یا شکل دو خط متنافر) .



۴ـ آنچه دانستنش لازم است .

برای حل موفقیت‌آمیز مسائل مکان وپوش ، تسلط بر دروس هندسه لازم است . دراین مورد بخاطر داشتن بعضی تعاریف و قضایا اهمیت بیشتر دارد : نقطهٔ واقع در بینهایت ، چهارضلعی محاطی ، دایرهٔ نه نقطه ، قطعه خط در خور زاویه ، تقسیم توافقی ، پودر قضیهٔ سمسن . تبدیلات : تجانس ، همنگاری ، انعکاس ، قطبی معکوس ، همولژی .

دانستن تمام خواص معمولی مقاطع ضروری است :اینکه مکان هر نقطه که نسبت فاصله‌اش از یك نقطهٔ ثابت به یك خط ثابت مقدار ثابت است ،یا اینکه مکان نقطه‌ای که مجموع یا تفاضل فواصلش ازدو نقطهٔ ثابت مقدار ثابت است یك مقطع مخروطی است ، اگر تصویر نقطهٔ ثابت F بریك خط متحرك دایره‌ای را بپیماید پوش آن خط یك مقطع مخروطی به کانون F است ، اگر رأس یك زاویهٔ قائمهٔ باضلعهای متحرك دایره‌ای را بپیماید پوش هریك از ضلعهای آن یك مقطع مخروط است که مرکز آن برمرکز آن دایره منطبق است ، وغیر .

دراینجا از تنظیم لیستی مفصل از مکانها وپوشهایی که به صورت قضیهٔ درسی آموخته شده‌اند خودداری می‌کنیم . اماجداً از خواننده می‌خواهیم که قبل از شروع به مطالعهٔ این کتاب چنین لیستی را شخصا فراهم کند و آنرا از حفظ کند. هنگامی که وی متن این کتاب را بخوبی تجلیل کرد ، با استفادهٔ از روشهایی که خواهد آمد، تعیین مجدد بعضی ازاین خواص کلاسیك برایش جالب خواهد بود .

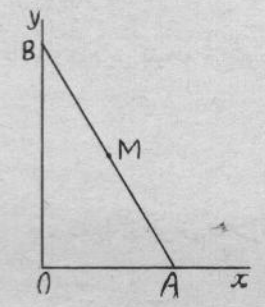
۵ـ مفهوم مکان و پوش

مکان ـ در هندسهٔ مسطحه برای اینکه یك نقطهٔ متحرك M یك مکان را بپیماید لازم است تغییر مکان آن بایك درجهٔ آزادی انجام گیرد ، یا به عبارت دیگر حرکت آن شامل یك پارامتر باشد .

مثال ۱ـ دری که حول لولاهایش می‌چرخد با یك درجهٔ

آزادی حرکت می‌کند(اگر تنها یکی‌از نقاط غیر واقع برامتداد لولا از آن ثابت شود تمام نقاط آن ثابت خواهند شد) . یک نقطهٔ غیر مشخص‌از در غیر واقع برامتداد لولا یك مکان هندسی رسم می‌کند (دایره‌ای که صفحه‌اش برامتداد لولا عمود است و مرکز آن روی لولا واقع است)

مثال ۲ـ مسئلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم : قطعه خط AB بـه طول ثابت بقسمی حرکت مـی‌کند کـه A و B طـرفین آن به ترتیب برد و محور متعامد Ox و Oy تکیه دارند .مکان M وسطAB چیست ؟ دستگاه متحرك یك درجهٔ آزادی دارد ؛ اگر مثلا A ثابت شود تمام نقاط قطعه خـط AB ثابت خواهد شد . هرنقطهٔ از AB یك‌مکان هندسی‌رسم مـی‌کـند : نقطهٔ M دایره‌ای به‌مرکز Oرا می‌پیماید و سایر نقاط خط چنانکه مـی‌دانیم یك بیضی راطی‌می‌کنند در هندسهٔ فضایی ، اگر یك‌نقطهٔ غیرمشخص M بطور کامل آزاد باشد . حرکت عمومی آن به سه پارامتر بستگی خواهد داشت .می‌دانیم که وضع هر نقطهٔ فضایی بـا سه مختص معین می‌شود . حرکت این نقطهٔ M سه درجهٔ آزادی دارد ؛ برای اینکه چگونگی‌اوضاع یك‌نقطهٔ فضایی غیر مشخص M معلوم شود ابتدا حرکت آنرا روی‌یك خط درنظرمی‌گیریم (این حرکت یك درجهٔ آزادی خواهد داشت) ،بعد این خـط رادر یك صفحه حول یك نقطهٔ ثابت می‌چرخانیم (این حرکت هم یك درجهٔ آزادی دارد) . بالاخره صفحهٔ مزبور را حـول یکی از خطوط خود دوران می‌دهیم (این حرکت هم یك‌درجهٔ آزادی دارد .



اگر شرطی باعث شودکه نقطهٔ M ازیکی ازاین‌حرکات معاف باشد دراین صورت یك مکان رسم خواهد شود که عموماً یك سطح می‌باشد . واگرشرایطی موجب سلب دودرجهٔ آزادی ازحرکت‌نقطهٔ M باشد در این صورت Mیك مکان رسم‌خواهد کرد که عموما یك خط است (مستقیم یامنحنی) .

مثال ۱ـ مکان مزدوج توافقی یك نقطهٔ P رانسبت‌به یك کره تعیین کنید .

هـر خط که‌از P بگذرد وکره رادردو نقطـه قطع‌کند یك نقطهٔ 'P مزدوج P نسبت به دونقطهٔ متقاطع وجودخواهد داشت . چون درهر فضا هرخط که حول یك نقطه حرکت‌کند دارای دو درجـهٔ آزادی است پس 'P نیز دو درجـهٔ آزادی دارد .پس مکان 'P یك‌سطح پیش‌بینی‌می‌شود (صفحهٔ π که‌قطبی P نسبت به کره نامیده می‌شود) .

مثال ۲ـ مکان نقـاط 'P مزدوجهای توافقی نقطهٔ معین P را نسبت به‌کرهٔ مفروض تعیین کنید که دریك صفحهٔ مفروض 'π واقع باشند .

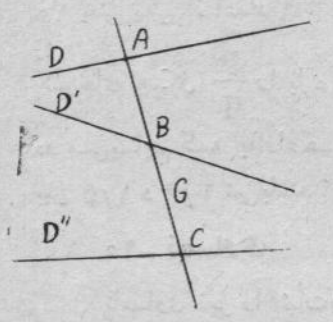
'P ملزم است که در صفحهٔ مفروض بـاقی‌بماندپس‌بیش ازیك درجهٔ‌آزادی‌ندارد بنابراین مکان آن یك خط‌خواهدبود (فصل مشترك‌دوصفحهٔ π و 'π)

تبصرهٔ ۱ـ قبل‌از شروع به‌هر مسئلهٔ مکان باید تعداد درجات آزادی نقطهٔ متحرك را تعیین کرد و معلوم ساخت که آیا در واقع مکانی وجود دارد یا نه ،و اگر مکان یك نقطهٔ فضـایی مورد نظر است معلوم کرد که آیا مکان آن سطح است یاخط ؛ به این وسیله‌ازبسیاری‌از اشتباهها‌جلوگیری‌خواهدشد.

تبصرهٔ ۲ـ بین‌مکانهای‌هندسی‌مسطح‌ومکانهای هندسی فضایی یك اختلاف بارز وجود دارد : در حالت اول مسلم است‌که مکان‌یك خط است ، اما در حالت دوم مکان ممکن است یك خط یا یک‌سطح باشد .

تبصرهٔ ۳ـ دربسیاری‌ازحالات درحل مسائل مکانهای هندسی مسطح وفضایی تشابهی وجود دارد. اغلب می‌توان‌تعیین یک مکان فضایی رابه تعیین یک مکـان مسطح منوط کرد . برعکس، باتعیین‌یک‌مکان‌هندسی مسطح، غالبامی‌توان‌مکانهـای فضایی را نتیجه گرفت. این تبصره درعمل بسیاری‌سودمنداست.

وقتی یک خط (مستقیم یامنحنی) با یک درجهٔ آزادی تغییر مکان می‌دهدمکانی رسم‌می‌کندکه یک سطح است . مثلا خط‌متغیر G رادر نظر می‌گیریم که مقیداست همواره برسه خط ثابت D و 'D و "D تکیـه داشته باشد . نظیر هر نقطهٔA واقع برD نقطهٔ C از"Dوجود داردکه



فصل مشترك صفحهٔ ('D و A) باخط "D می‌باشد ،ودر نتیجه خط Gوجوددارد که برA وC می‌گذردو 'DرادرB قطع‌می‌کند نقطهٔ A که‌روی D حرکت می‌کند یک درجهٔ‌آزادی‌دارد و نتیجه می‌شود که خط G نیز یک‌درجهٔ آزادی دارد پس مکان آن یک سطح خواهد بود (هیپربولوئید بایک سطح) .

یک دایره که حول یکی از قطرهایش دوران کندیک کره پدید می‌آورد ودر حالتی که حول یک محور موازی بـا یکی از قطرهایش بچرخد حلقه‌ای بوجود می‌آورد ،

(دنباله در صفحهٔ ۲۵۱)

صد مسئلهٔ جالب ریاضی و حل آنها

-۳-

ترجمهٔ: داوید ریحان
دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

۹ـ اصم بودن یك ریشه

به طریقهٔ مقدماتی ، ثابت‌کنید که ریشهٔ مثبت معادلهٔ : $x^5+x=10$ اصم است .

حل ـ به‌ازای $x>0$ مقدار طرف چپ معادله صعودی است و به سادگی دیده می‌شود که به ازای $x=1/5$ کوچکتر از ۱۰ و به‌ازای $x=1/6$ بزرگتر از ۱۰ است . بنابراین ریشهٔ معادله واقع‌درفاصلهٔ باز (۱/۶ و ۱/۵) است . این ریشه را به‌صورت کسر تحویل ناپذیر $\frac{p}{q}$ می‌نویسیم. معادله به‌صورت زیر در خواهد آمد :

$$p^5+pq^4=10q^5$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم که p یکی از مقسوم علیه‌های ۱۰ یعنی یکی از اعداد ۱ ، ۲ ، ۵ ، ۱۰ می‌باشد .اگر تمام کسرهای به‌شکل $\frac{p}{q}$ را با $p=1$ و ۲ و ۵ و ۱۰ بنویسیم به‌سادگی در می‌یابیم که به‌ازاء هر مقدارصحیح q هیچکدامشان بین ۱/۵ و ۱/۶ نمی‌باشند .

۱۰ـ نامساوی

نامساوی زیر را اثبات‌کنید ، در صورتی که بدانیم تمام حروف نمایندهٔ اعداد مثبتند :

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+C+r}+\frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r}>\frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r}$$

حل ـ ابتدالم زیر را بیان‌کرده سپس به اثبات قضیهٔ اصلی می‌پردازیم .

اگر p، q، x و y اعداد مثبتی باشند از نامساویهای :

$$\frac{1}{p}>\frac{1}{q} \text{ و } x>y$$

نامساوی زیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{x}{x+p}>\frac{y}{y+q}$$

زیرا از فرض $x>y>0$ و $\frac{1}{p}>\frac{1}{q}$ رابطهٔ :

$\frac{x}{p}>\frac{y}{q}>0$ و ازآنجا : $\frac{p}{x}<\frac{q}{y}$ بدست می‌آید و از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شودکه :

$$0<\frac{x+p}{x}<\frac{y+q}{y} \text{ یا } 0<1+\frac{p}{x}<1+\frac{q}{y}$$

ازآنجا

$$\frac{x}{x+p}>\frac{y}{y+q}$$

پس از اثبات لم فوق ، چون A، B، C، a، b، c مثبت هستند، داریم :

$$\frac{1}{c+r}>\frac{1}{C+c+b+r} \text{ و } A+a+B+b>A+a$$

و با توجه به لم مذکور در فوق :

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r}>\frac{A+a}{C+c+A+a+b+r} \quad (1)$$

به‌همین ترتیب داریم :

$$B+b+C+c>C+c \text{ و } \frac{1}{a+r}>\frac{1}{A+a+b+r}$$

از آنجا (با توجه به لم) :

$$(۲)\quad \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r} > \frac{C+c}{C+c+A+a+b+r}$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین نا مساویهای (۱) و (۲) نامساوی مورد نظر محقق می‌شود .

۱۱ـ رشتهٔ اعداد .

رشته‌ای از اعداد a_0، a_1، a_2 و... را پیدا کنید در صورتی که تمام جملات آن مثبت بوده ، $a_1=1$ و : $a_n-a_{n+1}=a_{n+2}$ باشد (به ازای $n=0$ و ۱ و ۲ و ...) ثابت کنید که چنین رشته‌ای منحصر به‌فرد است .

حل ـ معادلهٔ $1-z=z^2$ تنها دارای یك ریشهٔ مثبت $z=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ می‌باشد بنابراین عدد z در روابط :

$$1-z=z^2 \quad , \quad z-z^2=z^3$$

و

$$z^n-z^{n+1}=z^{n+2}$$

صادق است . با فرض $a_n=z^n$ ($n=0$ و ۱ و ۲ و ...) رشتهٔ مفروض بدست می‌آید . وچون $0<z<1$ ، تصاعدهندسی اخیر دارای حدی برابر با صفرمی‌باشد .

با فرض اینکه b_0، b_1، ... رشتهٔ دیگری باشدکه در شرایط مسئله صدق نماید باید داشته باشیم :

$b_0=1$ و $b_n-b_{n+1}=b_{n+2}$ (به‌ازای $n=0$ و ۱ و ...)

اگر رشتهٔ اخیر با رشته‌ای که قبلا بدست آورده‌ایم مطابقت نداشته باشد ، عامل دیگری مانند b_k مغایر با z^k وجود دارد بطوری که : $b_k=z^k+d$ (d مخالف صفر است) .

فرض می‌کنیم k اولین اندیسی باشدکه اختلاف اخیر ظاهر شود . می‌دانیم که $a_0=1=z^0$ بقسمی که k حداقل برابر با واحد باشد . بنابراین عامل b_{k-1} وجود دارد بطوری که داریم $b_{k-1}=z^{k-1}$ ونیز می‌دانیم که :

$$b_k=z^k+d$$

$$b_{k+1}=b_{k-1}-b_k=z^{k-1}-(z^k+d)=$$
$$z^{k-1}-z^k-d=z^{k+1}-d$$

$$b_{k+2}=b_k-b_{k+1}=z^k+d-(z^{k+1}-d)=$$
$$=z^k-z^{k+1}+2d=z^{k+2}+2d$$

$$b_{k+3}=b_{k+1}-b_{k+2}=z^{k+1}-d-(z^{k+2}+2d)$$
$$=z^{k+3}-3d$$

$$b_{k+4}=z^{k+4}+5d$$

و

$$b_{k+5}=z^{k+5}-8d$$

.....

$$b_{k+p}=z^{k+p}\pm c_p d$$

چون z^{k+p} وقتی که p به سمت بینهایت میل کند به‌سمت صفر میل می‌کند و از طبقه‌ای کمی بالاتر از p دومین جملهٔ $\pm c_p d$ است که علامت b_{k+p} را تعیین می‌کند و نیز مقدار مطلق $c_p d$ همواره حداقل برابر با d است . ولی ضرایب $\pm c_p$ که در d ضرب می‌شوند همگی اعداد صحیح و متناوبا مثبت و منفی می‌باشند ، پس ، در رشتهٔ $\{b_n\}$ باید جمله‌ای منفی ظاهر شود، واین حکم با خواص ذکرشده مغایرت‌دارد.

همچنین‌فرض اینکه دوسری با یکدیگرمتحد نیستندتولید تناقض می‌کند . در نتیجه ، سری $\{z^n\}$ تنها جواب مسئله می‌باشد .

فصل دوم

نقاط ، چند ضلعی‌ها ، دوایر ، بیضی‌ها .

۱۲ـ نقاط

تعدادی نقطه واقع در یك صفحه را در نظر می‌گیریم . هر نقطه را به‌نزدیکترین نقطه بوسیلهٔ خط راست وصل می‌کنیم چون فرض براین است که تمام فواصل نا متساویند ، تردیدی در انتخاب نزدیکترین نقطه وجود نخواهد داشت . ثابت کنید که شکل حاصل نه‌شامل چند ضلعی بسته است

و نه ازخطوط متقاطع تشکیل شده است .

اثبات ـ I ـ فرض کنیم که شکل حاصل شامل چندضلعی بستهٔ $ABCDE...MN$ باشد . بازهم فرض می‌کنیم که‌داشته باشیم : $AN<AB$ ، یعنی N نزدیکترین‌نقطه به A باشد بنابراین داریم : $AB<BC$

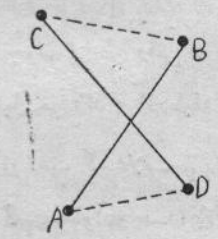
اما BوC بوسیلهٔ یك قطعه خط به هم وصل شده‌اند ، بنابراین داریم $BC<CD$ ، با تعقیب‌این استدلال ، رابطهٔ زیر را بدست می‌آوریم :

$$CD<DE<\dots<MN<NA$$

وبدست می‌آید : $AB<NA$ که با فرض $AN<AB$ مغایرت دارد .

با فرض $AN>AB$ ، می‌توانیم همین استدلال رابکار بریم وهمینطور به‌یك تناقض بربخوریم . از این استدلالهاپی می‌بریم که شکل حاصل نمی‌تواند شامل چند ضلعی بسته باشد .

II ـ حال فرض می‌کنیم که شکل بدست آمده شامل قطعه‌خطوط متقاطع AB و CD (شکل ۱) باشد .



ش ۱

فرض می‌کنیم که چنین امری ممکن باشد زیرا B نزدیکترین نقطه به A است و AوB بوسیلهٔ خطی به‌هم وصل شده‌اند ؛ همچنین در نظر می‌گیریم‌که D نزدیکترین نقطه به C باشد . بنابراین داریم :

$$CD<CB \;;\; AB<AD$$

و ازآنجا : $AB+CD<AD+CB$

نتیجهٔ اخیر با شرطی‌که درچهار ضلعیهای محدب وجود دارد، متناقض است زیرا در هرچهار ضلعی محدب مجموع اقطار بزرگتر از مجموع اضلاع مقابل است. و چنانکه دیده می‌شود دومین قسمت نیز به‌طریقهٔ فوق اثبات شده است .

۱۳ـ مطالعهٔ یك زاویه

فرض‌کنیم که x_1، x_2،...، x_n اعدادی مثبت باشند. دریك صفحه ، نیم خط Ox را انتخاب‌کرده وروی آن قطعه خط $OP_1=x_1$ را قرار می‌دهیم . سپس قطعه خط $P_1P_2=x_2$ را عمود بر OP_1، آنگاه‌قطعه خط P_2P_3 را عمود بر OP_2 رسم می‌کنیم . به‌همین ترتیب عمل را تا $P_{n-1}P_n=x_n$ ادامه می‌دهیم .

زوایای قائمه طوری جهت دارشده‌اند که همیشه دریك جهت بچرخند ، می‌توانیم فرض کنیم که نیم خط Ox حول O و ازحالت اولیه دوران‌کند وازنقاط P_1، P_2،... تا وضع‌انتهائی OP_n بگذرد. با این‌طریقه‌زاویهٔ دوران به‌مقداری خواهدرسید .

ثابت‌کنید که‌برای اعداد x_i مفروض ، این زاویه حداقل است ، درصورتی‌که اعدد x_i نزولی باشند یعنی :

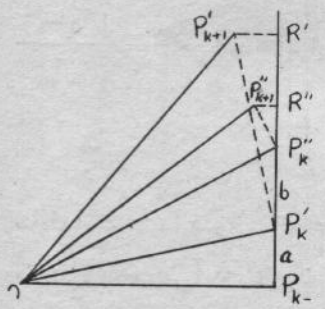
$$x_1\geqslant x_2\geqslant\dots\geqslant x_n$$

و اگر این اعداد صعودی باشند ، این زاویه حداکثر است . (یعنی $x_1\leqslant x_2\leqslant\dots\leqslant x_n$ باشد) .

حل ـ به منظور سهولت در نوشتن فرض می‌کنیم :

$$r=\sqrt{x_1^2+\dots+x_{k-1}^2} \text{ و } a=x_k \text{ و } b=x_{k+1}$$

ثابت می‌کنیم‌که اگر $a<b$ باشد به ترتیب $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, b, a, x_{k+2}, \dots, x_n$ زاویه‌ای کوچکتر از زاویهٔ مربوط به‌ترتیب اولیه :



ش ۲

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, a, b, x_{k+2}, \dots, x_n$$

بدست می‌آید .

برای این منظور، کافی است‌که زوایای $P_{k-1}OP_{k+1}$ را در دوحالت مورد بررسی قرار دهیم . در شکل ۲ ، زاویهٔ $P'_{k+1}OP_{k-1}$ مربوط به‌وضع‌اولیه‌وزاویهٔ $P''_{k+1}OP_{k-1}$ مربوط به وضع ثانی می‌باشد . چون :

$$OP'_{k+1}=OP''_{k+1}=\sqrt{r^2+a^2+b^2}$$

است باید نامساوی $P''_{k+1}R''<P'_{k+1}R'$ یعنی :

$$\frac{ab}{\sqrt{b^2+r^2}}<\frac{ab}{\sqrt{a^2+r^2}}$$

را اثبات‌کنیم وحکم اخیر به سادگی از فرض $a<b$ استنتاج خواهد شد .

۱۴ـ مساحت یك مثلث

بدون استفاده از مثلثات ، ثابت‌کنید که اگر در مثلثی زاویهٔ $A=60^\circ$ باشدمساحتش‌از رابطهٔ:

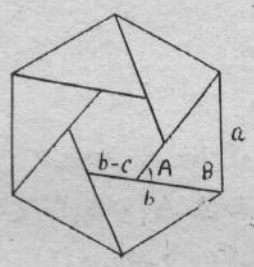
$$(1)\quad S=\frac{\sqrt{3}}{4}[a^2-(b-c)^2]$$

واگر $A=120^\circ$ باشد ، مساحت آن ازفرمول :

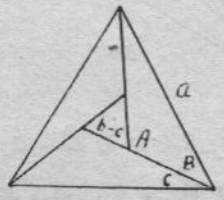
$$(2)\quad S=\frac{\sqrt{3}}{12}[a^2-(b-c)^2]$$

بدست می‌آید .

حل ـ هرگاه در مثلث ABC به‌اضلاع a، b، c زاویهٔ A برابر 60° باشد ، واضح است که مجموع زوایای B و C برابر با 120° خواهد بود و می‌توانیم شش مثلث از این‌نوع را به‌صورت (شکل ۳) که ازخارج محدود به شش ضلعی‌منتظم به ضلع a و از داخل به‌شش ضلعی منتظم به‌ضلع $b-c$ محدود می‌شود ، قراردهیم ، با محاسبهٔ مساحتهای دوشش ضلعی،فرمول (۱) بدست می‌آید .



شکل ۳



شکل ۴

در حالتی‌که $A=120^\circ$ باشد ، مجموع زوایای B و C برابر با 60° است و سه مثلث از نوع اخیر شکل (۴) را تشکیل می‌دهند.

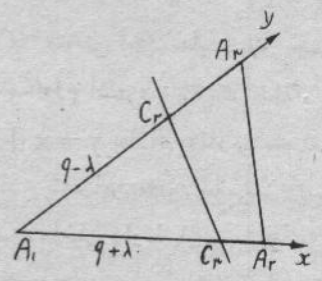
با محاسبات‌نظیر باعملیات قبلی رابطهٔ (۲) بدست‌می‌آید.

۱۵ـ سه‌طریقه برای تقسیم پیرامون یك‌مثلث به دوقسمت متساوی .

مثلث غیر مشخصی را درنظر می‌گیریم . با قبول اینکه می‌توانیم خطی رسم‌کنیم‌که پیرامون مثلث را به دوقسمت‌کند ،و با درنظرگرفتن جهت برای قاطع ، اگر دو بار این عمل را تکرارکنیم، خطوط قاطع درنقطه‌ای مانند Q یکدیگر راقطع می‌کنند. بنابراین ازنقطهٔ Q دوخط می‌گذرد بطوری‌که‌پیرامون مثلث را نصف می‌کنند .

آیا نقطه‌ای وجود داردکه ازآن سه خط ازخطوط اخیر بگذرد؟ اگر جواب مثبت است ، چگونه می‌توانیم‌آنرا بیابیم.

حل ـ خطی رسم می‌کنیم‌که اضلاع A_1A_2 و A_2A_1 از مثلث $A_1A_2A_3$ را قطع‌کند و منصف محیط آن باشد . پیرامون‌مثلث‌را به $2p$ نمایش می‌دهیم (شکل ۵). خطوط A_1A_2 و A_1A_3 را محورهای مختصات اختیار می‌کنیم .



ش ۵

بنابراین قاطع مفروض از نقاط : $C_2(0\ \text{و}\ q-\lambda)$ و $C_3(q+\lambda\ \text{و}\ 0)$ خواهد گذشت . دررابطهٔ اخیر $q=\frac{p}{2}$ و λ نمایندهٔ عدد غیر مشخص است .

C_2C_3 پیرامون مثلث $A_1A_2A_3$ را به دو قسمت متساوی تقسیم می‌کند(واضح است) . چون خط C_2C_3 خطوط A_1A_2 و A_1A_3 و نه امتدادآنها را قطع می‌کند ، اگر d_1 ، d_2 و d_3 به‌ترتیب‌طولهای A_2A_3، A_3A_1 و A_1A_2 باشندداریم:

$$0\leq q+\lambda\leq d_3\ ,\quad 0\leq q-\lambda\leq d_2$$

از آنجا :

$$(1)\quad -q\leq\lambda\leq d_3-q\ ,\quad q-d_2\leq\lambda\leq q\ .$$

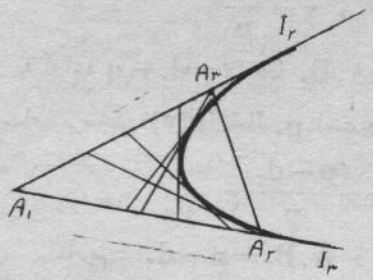
چون $d_1<d_2+d_3$ است ، بنابراین $2d_1<2p$ و در نتیجه $d_1<p$ می‌باشد ، به‌همین ترتیب ، داریم $d_2<p$ و $d_3>p$. متساویاً واضح است‌که از نامساوی $p>d_3$ نامساوی $q>d_3-q$ بدست می‌آید و به همین ترتیب از $p>d_2$ خواهیم داشت $q-d_2>-q$. و نتیجه می‌شود که دستگاه (۱) را می‌توانستیم بوسیلهٔ نامساوی مضاعف زیرکه حدود تغییرات پارامتر λ را مشخص می‌کند ، نمایش دهیم :

$$(2)\quad q-d_2\leq\lambda\leq d_3-q$$

معادلهٔ C_2C_3 به‌صورت زیر است :

$$(3)\quad (q-\lambda)x+(q+\lambda)y-q^2+\lambda^2=0$$

اگر پس از ترسیم مثلث $A_1A_2A_3$ ، پیرامونش را اندازه بگیریم . و خطوط مختلف C_2C_3 راکه واصل نقاط C_2 و C_3 هستند و به‌ازای مقادیر مختلف‌پارامتر λ بدست آمده‌اند ، رسم‌کنیم ، درخواهیم یافت‌که تمام خطوط C_2C_3 مماس بر یك منحنی (شکل ۶) هستند که منحنی اخیر پوش خطوطی است‌که معادلاتشان به‌صورت معادلهٔ (۳) می‌باشد.



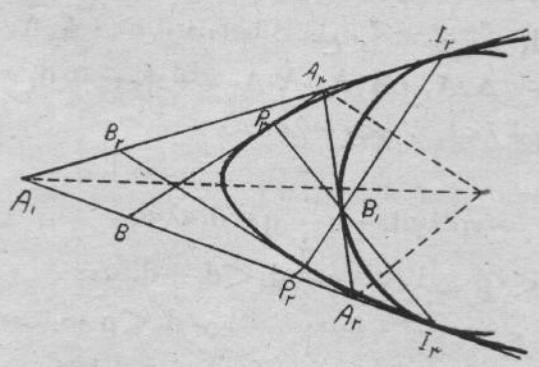
ش ۶

محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهدکه معادلهٔ این منحنی به صورت زیر است :

$$(۴) \quad ۴xy=(p-x-y)^۲$$

منحنی (۴) نمایش یك سهمی است زیرا این منحنی از درجهٔ دوم است و تنها یك نقطهٔ برخورد با خطوط بـه معادلهٔ $y=x+k$ به‌ازای مقادیر مختلف k ، دارد .

بنابراین محور سهمی (۴) به‌موازات خط $y=x$ یعنی منصف داخلی زاویهٔ A می‌باشد. به‌ترتیب با نقل مقادیر $y=۰$ و $x=۰$ در معادلهٔ (۴) خواهیم توانست ثابت کنیم‌کـه سهمی (۴) براضلاع زاویهٔ A درنقاط $T_۳(p$ و $۰)$ و $T_۲(۰$ و $p)$ مماس است ، درشکل ۷ این موضوع دیده می‌شود .



ش ۷

چـون مثلث $A_۱T_۲T_۳$ متساوی‌الساقین است ، نیمساز داخلی $A_۱$ عمود منصف $T_۲T_۳$ است و همین امر نشان می‌دهد که این نیمساز محور سهمی (۴) می‌باشد . حـال بـه ترتیب مقادیر حد λ راکه از نامعادلهٔ (۲) بـدست می‌آیند ، اختیار می‌کنیم ، به‌ازای $\lambda=q-d_۲$ خط $A_۳B_۳$ را داریم کـه بر سهمی (۴) در نقطهٔ $p_۳$ مماس است و مختصاتش چنین است :

$$x=\frac{(p-d_۲)^۲}{p} \quad و \quad y=\frac{d_۲^۲}{p}$$

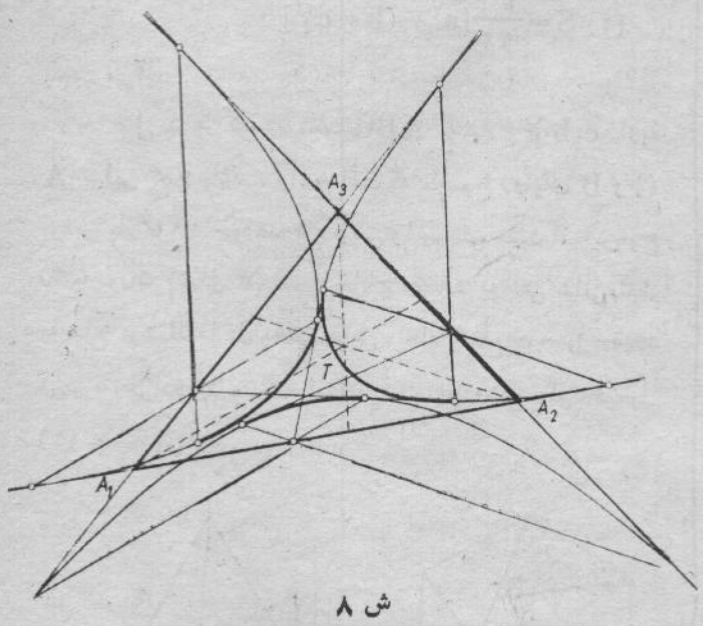
و به ازای $\lambda=d_۳-q$ خط $A_۲B_۲$ را بدست می‌آوریم کـه مماس برسهمی (۴) درنقطهٔ $p_۲$ است و مختصاتش عبارتند از :

$$x=\frac{d_۳^۲}{p} \quad و \quad y=\frac{(p-d_۳)^۲}{p}$$

داریم : $A_۱B_۳=p-d_۲$ و $B_۳A_۲=p-d_۱$

نقطه‌ای را که قطعه خط $A_۲A_۳$ را به قطعه خطوط به طولهای $p-d_۳$ و $p-d_۲$ قطع می‌کند به $B_۱$ نمایش می‌دهیم. به سادگی تحقیق می‌شودکـه نقاط : $T_۲$،$B_۱$،$P_۲$ ازیك طرف‌و نقـاط $P_۳$،$B_۱$،$T_۳$ ازطرف دیگر بریك استقامتند. واضح است‌کـه خطوط $T_۲B_۱$ و $T_۳B_۱$ بـه ترتیب موازی با نیمسازهای‌داخلی زوایای $A_۲$ و $A_۳$ می‌باشند.

بالاخره ، می‌بینیم‌که $B_۱$،$T_۲$ و $T_۳$ نقاط برخورددایرهٔ محاطی خارجی مثلث $A_۱A_۲A_۳$ در زاویهٔ $A_۱$ است .



ش ۸

درنتیجه ، هرخطی‌که پیرامون مثلث را نصف کـرده و اضلاع $A_۱A_۲$ ، $A_۳A_۱$ را قطع‌کند مماس برقوس $P_۲P_۳$ از سهمی (۴) می‌باشد و برعکس .

همین استدلال را می‌توانیم برای سایر زوایای مثلث‌بکار بریم وهمینطور سه قوس سهمی بدست می‌آیدکه اگـر قطعات مماس مشترکشان را به‌هم وصل کنیم یك مثلث منحنی‌الخط T (ش ۸) بدست می‌آید .

حال می‌توانیم نتایج زیر را از بررسیهای بعمل آمـده استخراج‌کنیم :

(۱) از هرنقطهٔ P داخل مثلث $A_۱A_۲A_۳$ ولی خارج از مثلث T ، خطی می‌گذردکه منصف محیط مثلث مفروض‌است واین خط منحصر به‌فرد است . این خط ، مماسی است‌که از نقطهٔ مفروض بریکی از سه قوس سهمیهای مشخص شده درشکل ۸ می‌توان رسم‌کرد .

(۲) از هـر نقطهٔ P داخل مثلث T ، تنها سه خط از خطوط مطلوب می‌گذرد . این خطوط سه مماسی هستندکـه از P برسه قوس سهمیهای شکل ۸ می‌توان رسم‌کرد .

(۳) اگر برای صفحه جهتی قائل‌شویم ، همیشه‌می‌توانیم خطی به‌موازات این جهت رسم‌کنیم‌که پیرامون مثلث را نصف کند . برای این منظور کافیست مماسی بر یکـی از قوسهای سهمیها ، به موازات این جهت رسم‌کنیم .

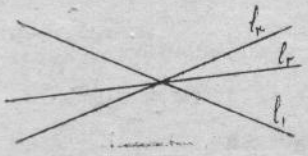
(۴) ـ اگر دوجهت داشته باشیم ، همواره می‌توانیم دو

خط رسم‌کنیم بطوری‌که دارای شرط مطلوب بوده و به‌موازات این دوجهت باشد. نقطهٔ Q محل برخورداین خطوط درداخل مثلث منحنی‌الخط T می‌باشد، بنابراین اگر دو خط منصف محیط مثلث $A_1A_2A_3$ را داشته باشیم همواره می‌توانیم از نقطهٔ تقاطع Q آنها خط ثالثی بگذرانیم که دارای چنین خاصیتی باشند.

(۶) ـ هرگاه سه خط l_1 و l_2 و l_3 راکه هرکدام نسبت به دیگری ثابت است (ش ۹) داشته باشیم (که مثلا با مرکب چین روی‌کاغذکالك رسم شده باشند) همواره می‌توانیم آنرا روی صفحه طوری قرار دهیم‌که هریك از خطوط l_1 و l_2 و l_3 پیرامون مثلث $A_1A_2A_3$ را به دونیم تقسیم‌کند.

جواب این مسئله ما را به نتیجه‌ای غیرمترقبه راهنمائی می‌کند. جستجوی نقطه‌ای‌که دارای خاصیت مذکور در فرض مسئله است بی‌فایده است، زیراکه تمام نقاط به‌نام Q دراین مسئله دارای چنین خاصیتی است.

اگر به‌جای مثلث از شکل دیگری مثلا یك چهار ضلعی استفاده‌کنیم، حل‌آن به‌طریق مشابه‌با حل مثلث‌انجام‌می‌گیرد. دراین موردبه‌جای مثلث منحنی‌الخط T، ناحیه‌ای محدود به چهار قوس سهمی خواهیم داشت؛ باوجوداین، بازهم می‌توانیم مانند حالت قوسهای مثلث، یکی از سه خطی راکه پیرامون را نصف می‌کند (این خطوط درنقطهٔ Q متقاربند) از نقطهٔ غیر مشخصی واقع درداخل چهار ضلعی رسم‌کنیم. در موردی‌که یك شکل دارای مرکز تقارن باشد، ناحیهٔ نقاطی‌که می‌توان از آنجا سه خط منصف محیط رسم



ش ۹

کرد تبدیل به یك نقطه می‌شود. هرخطی‌که از این نقطه‌بگذرد حائز شرایط مذکور می‌باشد.

***

مسائلی‌که حل آنها درشمارهٔ بعد درج خواهد شد:

۱۶ـ مثلثی را به ۱۹ مثلث بقسمی تقسیم‌کنیدکه در هر رأس از شکل بدست آمده (همچنین رأسهای مثلثهای اولیه) همین تعداد از اضلاع یکدیگر را قطع‌کنند.

۱۷ـ n عددی صحیح فرض می‌شود. در صفحه‌ای 3n نقطه بقسمی وجود داردکه هیچیك از سه نقطهٔ غیر مشخصی از آن بریك امتداد نباشند. آیا می‌توانیم با این نقاط‌که به‌عنوان رأس اختیار می‌شوند n مثلث بسازیم بقسمی‌که هیچکدام از آنها روی دیگری واقع نشودوهمچنین هیچکدام از آنهاداخل دیگری قرار نگیرد. به‌کمك 4n نقطه می‌توانیم مسئلهٔ‌متشابه را برای چهارضلعی و به‌کمك 5n برای پنج ضلعیها و غیره مطرح‌کنیم. آیا تمام این مسائل دارای جواب مثبت می‌باشند؟

۱۸ـ می‌دانیم‌که سطح را می‌توان بوسیلهٔ یك دسته از مثلثهای متساوی‌الاضلاع پوشاند. آیا امکان داردکه درهرگره (واقع‌در رأس مثلثها) یکی‌ازعلامات بعلاوه یا منها راقراردهیم بطوری‌که درمورد هرمثلث‌که شبکه را تشکیل می‌دهد شرط‌زیر برقرار باشد: اگر دو رأس ازیك مثلث هم‌علامت باشند سومی دارای علامت بعلاوه و اگر آن دو رأس مختلف العلامت باشند سومی دارای علامت منها باشد.

روش حل مسائل ... (بقیه از صفحهٔ ۲۴۵)

پوش ـ در هندسه مسطحه نقطه‌ای را در نظر بگیریم که بایك‌درجهٔ آزادی تغییر مکان می‌دهد.، در این حالت‌یك منحنی رسم می‌کند. باتبدیل قطبی معکوس، می‌توان گفت هر خط که با یك درجهٔ آزادی جابجا شود همواره برمنحنی ثابتی مماس است که این‌منحنی پوش آن خط نامیده می‌شود.

همچنین، هر منحنی که به یك پارامتر بستگی داشته باشد دارای یك یا چندین پوش می‌باشد. مثلا یك دایرهٔ به شعاع ثابت که مرکزش دایرهٔ ثابتی را بپیماید دارای دو پوش می‌باشد که عبارتند از دو دایرهٔ متحدالمرکز بادایرهٔ ثابت.

در فضا نقطه‌ای که تابع دوپارامتر تغییر مکان دهد یك سطح را می‌پیماید؛ واگر تابع یك پارامتر باشد یك منحنی رسم خواهد کرد. باتبدیل متناسب‌این خواص، ملاحظه‌خواهد شد که‌یك صفحهٔ متحرك بادو درجهٔ آزادی دارای پوشی‌است‌که یك سطح است. یك صفحهٔ با یك درجهٔ‌آزادی دارای پوشی است که سطحی از نوع مخصوص می‌باشد.

بطور کلی، سطح تابع دوپارامتر دارای‌پوشی است که یك سطح است. مثلا کرهٔ S باشعاع ثابت رادر نظر می‌گیریم که مرکزش همواره برسطح کروی Σ قرار دارد. کرهٔ S تابع دو پارامتر است که وضع مرکز آن را روی Σ معین می‌کنند. کرهٔ S دارای دو پوش‌است‌که کره‌های متحدالمرکز باΣ می‌باشند پوش سطحی که فقط تابع‌یك پارامتر باشد سطحی است که‌در طول یك منحنی برآن مماس می‌باشد.

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۶۰

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۶۰/۱ـ چه رابطه بین a و b برقرار باشد تا اینکه داشته باشیم:

$$\begin{cases} y=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}} \\ y^4=4a(y^2-a) \end{cases}$$

حل ـ طرفین رابطهٔ اول را به توان ۲ می‌رسانیم و از روی آن مقادیر y^2 و y^4 را حساب کرده در رابطهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$y^2=a+\sqrt{b}+a-\sqrt{b}+2\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}$$

$$y^2=2a+2\sqrt{a^2-b}$$

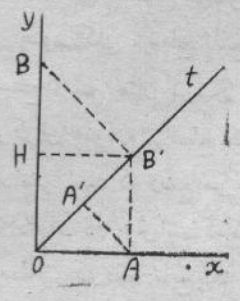
$$y^4=8a^2-4b+8a\sqrt{a^2-b}$$

$$8a^2-4b+8a\sqrt{a^2-b}=4a(a+2\sqrt{a^2-b})$$

$$\Longrightarrow a^2=b$$

۶۰/۲ـ زاویهٔ قائمهٔ xOy مفروض است. روی Ox یك نقطهٔ A و روی Oy نقطهٔ B را چنان انتخاب می‌کنیم که $OB=2OA$ باشد. Ot نیمساز زاویهٔ xOy و عمودهای AA′ و BB′ را بر آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث AA′B′ بر Ox مماس می‌باشد.

حل ـ چون زاویهٔ A′ از مثلث AA′B′ قائمه است پس دایرهٔ محیطی این مثلث به قطر AB′ می‌باشد و باید ثابت کنیم که AB′ بر Ox عمود است. عمود B′H را بر OB رسم می‌کنیم چون مثلث OB′B



قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است (چرا؟) پس ارتفاع B′H در ضمن میانهٔ وتر بوده طول آن با نصف وتر OB برابر است وچون OA بنابه فرض نصف OB است پس HB′ با OA برابر است و چون این دو خط هر دو بر Oy عموداند پس چهار ضلعی AOHB′ مربع است و AB′ بر Ox عمود می‌باشد.

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۶۰/۳ـ مقدار عبارت $y=x+\sqrt{x^2-1}$ را به‌ازاء

$$x=\sqrt{\frac{a}{8}}+\sqrt{\frac{1}{2a}} \quad (a>0)$$

بدست آورید و جواب را در دو حالت $a=1$ و $a=6$ امتحان کنید.

حل ـ داریم:

$$x^2=\frac{a}{8}+\frac{1}{2a}+2\sqrt{\frac{a}{16a}}=\frac{a}{8}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}$$

$$x^2-1=\frac{a}{8}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}-1=$$

$$=\frac{a^2-4a+4}{8a}=\frac{(a-2)^2}{8a}$$

اکنون دو حالت درنظر می‌گیریم.

حالت اول: اگر $a>2$ باشد خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{(a-2)^2}{8a}}=\frac{a-2}{2\sqrt{2a}}=\frac{a}{2\sqrt{2a}}-\frac{2}{2\sqrt{2a}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a}{8}}-\sqrt{\frac{1}{2a}}$$

$$y=\sqrt{\frac{a}{8}}+\sqrt{\frac{1}{2a}}+\sqrt{\frac{a}{8}}-\sqrt{\frac{1}{2a}}=2\sqrt{\frac{a}{8}}$$

$$y=\sqrt{\frac{a}{2}} \qquad (I)$$

حالت دوم : اگر $0<a<2$ یعنی $(a-2)$ منفی باشد داریم :

$$\sqrt{\frac{(a-2)^2}{8a}}=\frac{-(a-2)}{\sqrt{8a}}=-\sqrt{\frac{a}{8}}+\sqrt{\frac{1}{2a}}$$

$$y=\sqrt{\frac{a}{8}}+\sqrt{\frac{1}{2a}}-\sqrt{\frac{a}{8}}+\sqrt{\frac{1}{2a}}=2\sqrt{\frac{1}{2a}}$$

$$y=\sqrt{\frac{2}{a}} \quad (II)$$

وقتی $a=1$ باشد باید مقدار (II) را در نظر بگیریم و نتیجه می‌شود $y=\sqrt{2}$

درازاء $a=6$ باید مقدار (I) را درنظر بگیریم و خواهیم داشت $y=\sqrt{3}$

۶۰/۴ـ مطلوبست حل و بحث معادلهٔ زیر :

$$\frac{(1+x)^2}{1+mx}=1-x$$

حل ـ تمام‌جملات‌را به یك طرف نقل و مخرج‌مشترك می‌گیریم . بعد از اختصارخواهیم داشت :

$$\frac{x[(m+1)x-(m-3)]}{1+mx}=0$$

مقداری از x جواب این معادله خواهد بود که درازاء آن عبارت صورت کسر صفر و عبارت مخرج کسر مخالف صفر باشد، یعنی معادلهٔ مفروض بادستگاه زیرمعادل می‌باشد :

$$\begin{cases} x[(m+1)x-(m-3)]=0 & (1)\\ 1+mx\neq 0 & (2)\end{cases}$$

درازاء $x=0$ هم تساوی (۱) وهم نامساوی (۲) برقرار است پس $x=0$ در ازاء جمیع‌مقادیر m جواب‌معادلهٔ‌مفروض می‌باشد و معادلهٔ (۱) به صورت زیر در می‌آید :

$$(m+1)x=m-3 \qquad (3)$$

حالتهای زیر را درنظر می‌گیریم :

I ـ $m+1=0$ یا $m=-1$ باشد. در این‌صورت معادلهٔ (۳) غیر ممکن می‌باشدو معادلهٔ مفروض غیر از $x=0$ جواب دیگری ندارد .

II ـ اگر $m\neq -1$ باشد معادلهٔ (۳) دارای جواب زیر می‌باشد :

$$x=\frac{m-3}{m+1} \qquad (4)$$

این مقدار را در نامساوی (۲) قرارمی‌دهیم

$$1+m\left(\frac{m-3}{m+1}\right)\neq 0$$

$$\frac{m^2-2m+1}{m+1}=\frac{(m-1)^2}{m+1}\neq 0 \Longrightarrow m\neq 1$$

بنابراین جواب(۴) وقتی قابل‌قبول است‌که $m\neq\pm 1$ باشد.

خلاصهٔ حل و بحث معادله چنین می‌شود :

اگر $m=\pm 1$ باشد معادله فقط یك جواب $x=0$ دارد .

اگر $m\neq\pm 1$ باشدمعادله‌دارای‌دوجواب‌زیرمی‌باشد:

$$x=0 \quad و \quad x=\frac{m-3}{m+1}$$

۶۰/۵ـ به‌فرض اینکه داشته باشیم :

$$a^{(b^x)}=b^{(a^x)} \quad و \quad a=5^{m+7} \quad و \quad b=5^{m-1}$$

اولا ـ مقدار x را برحسب m پیدا کنید .

ثانیاً ـ اگر $5^x=2$ باشد مقدارm را تعیین کنید .

حل ـ ازطرفین رابطهٔ مفروض دو دفعه متوالیاً درپایهٔ ۵ لگاریتم می‌گیریم :

$$b^{x\log_5 a}=a^{x\log_5 b}$$

$$x\log_5 b+\log_5(\log_5 a)=x\log_5 a+\log_5(\log_5 b)$$

$$a=5^{m+7} \Longrightarrow \log_5 a=m+7$$

$$b=5^{m-1} \Longrightarrow \log_5 b=m-1$$

$$x(m-1)+\log_5(m+7)=x(m+7)+$$
$$+\log_5(m-1)$$

$$x=\frac{\log_5(m+7)-\log_5(m-1)}{(m+7)-(m-1)}$$

$$x=\frac{1}{8}\log_5\frac{m+7}{m-1}=\log_5\sqrt[8]{\frac{m+7}{m-1}}$$

ثانیاً از رابطهٔ $5^x=2$ نتیجه می‌شود $x=\log_5 2$ و خواهیم داشت :

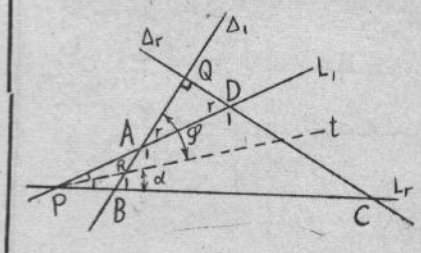
$$\log_5 \sqrt[8]{\frac{m+7}{m-1}} = \log_5 2 \Longrightarrow \sqrt[8]{\frac{m+7}{m-1}} = 2$$

$$\frac{m+7}{m-1} = 256 \Longrightarrow m = \frac{263}{255}$$

۶۰/۶ ـ ترجمهٔ جعفر آقایانی چاوشی

امتداد خطوط Δ_1 را تعیین کنید بنابرآنکه اگر Δ_2 بر Δ_1 عمودباشد از تقاطع Δ_1 و Δ_2 با دو خط مفروض L_1وL_2 یك چهار ضلعی محاطی پدیدآید .

حل ـ اگر P نقطهٔ تقاطع دو خط L_1 و L_2 و 2α زاویهٔ این‌دو خط باشدو چهار ضلعی پدیده‌آمده ABCD فرض‌شودوقتی این چهارضلعی محاطی باشدچنانچه Pt نیمساز زاویهٔ دو خط L_1وL_2 و φ زاویهٔ Δ_1 با Pt باشد بین زاویه‌های شکل رابطه‌های زیررا خواهیم داشت :



$$D_1 = 90^\circ + A_2 \quad \text{و} \quad B_1 = A_2 + 2\alpha$$

$$D_1 + B_1 = 180^\circ \Longrightarrow A_2 = 45^\circ - \alpha$$

در مثلث APR داریم :

$$ART = APR + PAR \quad \text{یا} \quad \varphi = \alpha + A_2$$

$$\varphi = \alpha + (45^\circ - \alpha) = 45^\circ$$

یعنی امتداد Δ_1 با نیمساز زاویهٔ دو خط L_1 و L_2 زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد ، مسئله دودسته جواب دارد .

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۶۰/۷ ـ از : مصطفی گودرزی طائمه

در صفحهٔ محورهای مختصات نقطهٔ A به‌طول $2t$ برمحور Ox و نقطهٔ B به‌عرض $2t$ برمحور Oy مفروض است .

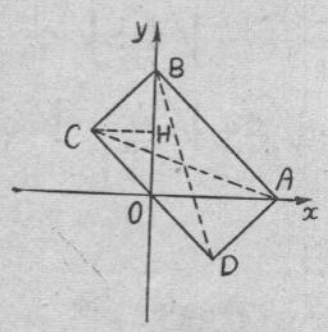
۱) مختصات رأسهای C وD از مربع مستطیل ABCD را تعیین کنید بنابرآنکه ضلع CD از مبدأ مختصات بگذرد و ثابت کنید که مرکز این مستطیل بر نیمسازربع اول محورها واقع است .

۲) اگر مرکز مستطیل بر خط $x+y=8$ نیز واقع باشد مقدار عددی t را معلوم کنید .

حل ـ معادلهٔ خط AB عبارت می‌شود از :

$$\frac{y}{x-2t} = \frac{2t}{-2t} = -1 \quad \text{و} \quad y = -x + 2t$$

ضریب زاویه‌ای این خط ۱ ـ است پس ضریب زاویه‌ای ضلع CD نیز ۱ ـ بوده و چون این‌ضلع ازمبدأ مختصات می‌گذرد پس‌معادلهٔ‌آن می‌شود $y = -x$. در مثلث‌قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین BCO طول CH بانصف طول وتر برابر است یعنی $CH = t$ و چون C برنیمساز زاویهٔ‌دومحور واقع است پس :



$D(t \text{ و } -t)$ و

$C(-t \text{ و } t)$

اگر P مرکز مستطیل باشد داریم :

$$x_P = \frac{1}{2}(x_A + x_C) = \frac{1}{2}(2t - t) = \frac{t}{2}$$

$$y_P = \frac{1}{2}(y_A + y_C) = \frac{t}{2}$$

یعنی P بر نیمساز ربع اول محورها واقع است .

۲) باید داشته باشیم :

$$P \begin{cases} x+y=8 \\ y=x \end{cases} \Longrightarrow P\Big|^{4}_{4}$$

$$\frac{t}{2} = 4 \Longrightarrow t = 8$$

۶۰/۸ ـ اگر دو کمان حادهٔ αوβ متمم یکدیگر باشند و دوریشهٔ x از معادلهٔ :

$$3(\sin\alpha + \cos\beta)x^2 - ax + tg\alpha + cotg\beta = 0$$

عکس یکدیگر باشندنسبتهای مثلثاتی‌دو کمان را تعیین کنیدسپس کمترین حدود a را بیابید برای آنکه معادلهٔ بالا دارای ریشهٔ حقیقی باشد .

حل ـ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله برابر با یك است :

$$\frac{tg\alpha + cotg\beta}{3(\sin\alpha + \cos\beta)} = 1$$

وچون αوβ دوکمان متمم‌اندپس :

$$cotg\beta = tg\alpha \quad \text{و} \quad \cos\beta = \sin\alpha$$

$$\frac{2tg\alpha}{6\sin\alpha} = 1 \Longrightarrow \frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha\sin\alpha} = 1 \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$tg\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad cotg\alpha=2\sqrt{2}$$

$$\sin\beta=\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{و} \quad tg\beta=2\sqrt{2}$$

برای اینکه معادله‌دوریشهٔ حقیقی داشته باشدلازم وکافی است که :

$$\Delta=a^2-12(\sin\alpha+\cos\beta)(tg\alpha+cotg\beta)\geq 0$$

$$a^2\geq 12\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$a^2\geq 16 \Longrightarrow a\geq 4 \text{ یا } a\leq -4$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۶۰/۹ـ از مصطفی گودرزی طائمه

اولا ثابت‌کنیدکه خط D به معادلهٔ :

$$(Ax+By+A-B)+\lambda(Ax+By+A+B)=0$$

با دو خط D_1 و D_2 به معادله‌های :

$$Ax+By+A-B=0 \quad \text{و} \quad Ax+By+A+B=0$$

موازی است ثانیاً حدود λ را تعیین‌کنید برای آنکه خط D بین دو خط D_1 و D_2 واقع باشد .

حل ـ ضریب زاویه‌ایهای خطهای D_1 و D_2 و D به‌ترتیب عبارتند از

$$m=-\frac{A+\lambda A}{B+\lambda B}=-\frac{A}{B}$$

$$m_1=m_2=-\frac{A}{B}=m$$

برای اینکه D بین D_1 و D_2 واقع شود لازم وکافی است‌که‌عرض‌ازمبدأ D یعنی h بین h_1 و h_2 عرضهای ازمبدأ دو خط D_1 و D_2 واقع باشد :

$$x=0 \quad \text{و} \quad (Bh+A-B)+\lambda(Bh+A+B)=0$$

$$h=-\frac{A}{B}+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

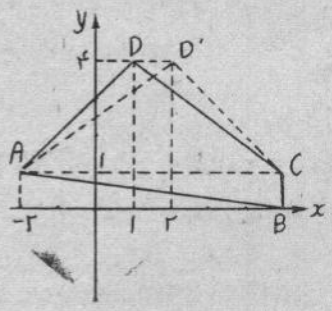
$$h_1=\frac{B-A}{B}=1-\frac{A}{B} \quad \text{و} \quad h_2=-1-\frac{A}{B}$$

$$1-\frac{A}{B}>-\frac{A}{B}+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}>-1-\frac{A}{B}$$

$$1>\frac{1-\lambda}{1+\lambda}>-1$$

$$\begin{cases}\frac{1-\lambda}{1+\lambda}+1=\frac{2}{1+\lambda}>0\\ \frac{1-\lambda}{1+\lambda}-1=\frac{-2\lambda}{1+\lambda}<0\end{cases} \Longrightarrow \lambda>0$$

۶۰/۱۰ ـ سه نقطهٔ A(۱ و ۲ −) و B(۵ و ۰) و C (۵ و ۱) مفروض‌است . نقطهٔ D را چنان پیدا کنیدکه چهار ضلعی ABCD (که رأسهای آن به همین ترتیب واقع‌اند) محاطی بوده مساحت آن ۱۴ واحد سطح باشد .



حل ـ چون‌چهار ضلعی ABCD وزاویهٔ ACB قائمه است پس زاویهٔ ADB نیزقائمه خواهدبودواگر $D(\alpha و \beta)$ باشد داریم :

$$\overline{DA}^2+\overline{DB}^2=\overline{AB}^2$$

$$(\alpha+2)^2+(\beta-1)^2+(\alpha-5)^2+\beta^2=$$
$$=(5+2)^2+1$$

$$\alpha^2+\beta^2-3\alpha-\beta-10=0 \qquad (1)$$

مساحت‌چهارضلعی ABCD برابر است با مجموع مساحتهای دو مثلث ABC و ADC و چون AC با $x'x$ و BC با $y'y$ موازی است پس $AC=7$ و $BC=1$ بوده مساحت مثلث ABC برابر با ۳/۵ واحد سطح می‌باشد در نتیجه مساحت‌مثلث ACD برابربا ۱۰/۵ واحد سطح بوده فاصلهٔ D ازخط AC می‌شود : $\frac{10/5}{7}\times 2=3$

و از آنجا $\beta=3+1=4$ و معادلهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$\alpha^2-3\alpha+2=0 \Longrightarrow \alpha=1 \text{ و } 2$$

مسئله دارای دوجواب D(۱و۴) و D(۲و۳) می‌باشد .

۶۰/۱۱ـ ثابت کنیدکه عبارت :

$$P=5\cos^2x+4\sin x+6\cos x+6$$

به‌صورت $P=R^2+S^2$ یعنی‌به‌صورت مجموع دو مربع‌نوشته می‌شود . انتهای کمان x درچه قسمت از دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد تا اینکه داشته باشیم :

$$y=\sqrt{R^2}+\sqrt{S^2}=a\sin x+b\cos x$$

ومقادیر a و b را تعیین کنید . در حالتی که $y=0$ باشد نسبتهای مثلثاتی کمان x را تعیین کنید .

حل- فرض می‌کنیم که :

$$P=(a\cos x+b)^2+(c\sin x+d)^2$$

بعد از اختصار این عبارت خواهیم داشت :

$$P=(a^2-c^2)\cos^2 x+2ab\cos x+2cd\sin x+b^2+d^2+c^2$$

ازمتحد قراردادن این عبارت باعبارت مفروض خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a^2-c^2=5 \\ ab=3 \\ cd=2 \\ b^2+d^2+c^2=6 \end{cases}$$

ازحذف a بین دورابطهٔ اول ودوم مقدار c رابرحسب b واز روی آن با استفادهٔ از رابطهٔ سوم مقدار d را نیز بر حسب b بدست آورده در معادلهٔ چهارم قرار می‌دهیم ، بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$5b^6-68b^4+144b^2-81=0$$

مجموع ضرایب این‌معادله صفراست‌پس $b^2=1$ درمعادله صدق کرده وخواهیم داشت :

$$(b^2-1)(5b^4-63b^2+81)=0$$

پرانتز دوم جواب منطق ندارد وبرای‌سادگی فقط‌جواب مثبت $b=1$ را اختیار می‌کنیم که درازاء آن خواهیم داشت:

$$b=1 \text{ و } a=3 \text{ و } c=2 \text{ و } d=1$$

$$P=(3\cos x+1)^2+(2\sin x+1)^2$$

ثانیاً عبارت y به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$y=|3\cos x+1|+|2\sin x+1|$$

برای اینکه عبارت y شامل جملهٔ ثابت نباشد باید دو عبارت $(3\cos x+1)$ و $(3\sin x+1)$ مختلف‌العلامت‌باشند.

I- اگر داشته باشیم :

$$3\cos x+1>0 \text{ و } 2\sin x+1<0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos x>-\frac{1}{3} \text{ و } \sin x<-\frac{1}{2}$$

خواهیم داشت

$$y=(3\cos x+1)-(2\sin x+1)=3\cos x-2\sin x$$

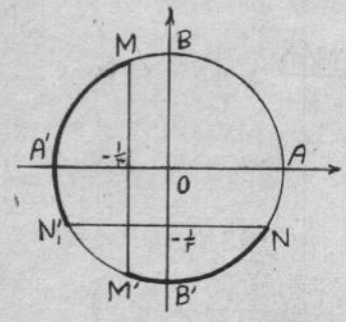
II- اگر داشته‌باشیم:

$$3\cos x+1<0 \text{ و } 2\sin x+1>0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos x<-\frac{1}{3} \text{ و } \sin x>-\frac{1}{2}$$

خواهیم داشت :

$$y=-(3\cos x+1)+(2\sin x+1)=$$
$$=-3\cos x+2\sin x$$



برای تعیین انتهای کمان x روی دایرهٔ مثلثاتی دردو حالت I و II ازروی شکل‌ملاحظه می‌کنیم‌که در حالت I انتهای x روی کمان M'B'N واقع است یعنی داریم :

$$2k'\pi+\pi+\text{Arccos}\frac{1}{3}<x<2k\pi-\frac{\pi}{6}$$

ودر حالت II انتهای‌کمان x باید روی کمان MA'N' واقع باشد یعنی :

$$2k'\pi+\pi-\text{Arccos}\frac{1}{3}<x<2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}$$

ثالثاً در حالت $y=0$ در حالت اول داریم :

$$3\cos x-2\sin x=0 \Longrightarrow tg\,x=\frac{3}{2}$$

ودر حالت دوم داریم :

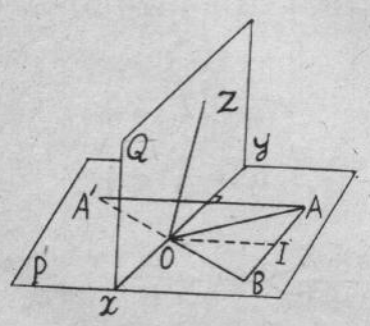
$$-3\cos x+2\sin x=0 \Longrightarrow tg\,x=\frac{3}{2}$$

در هردوحالت $tg\,x$ مثبت است پس انتهای کمان دربخش سوم (روی‌کمان A'N' یا M'B') واقع بوده و خواهیم داشت :

$$\sin x=-\frac{3\sqrt{13}}{13} \text{ و } \cos x=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

۶۰/۱۲- ترجمه از فرانسه

دوصفحهٔ P و Q بریکدیگر عمودند و xy فصل مشترك آنهاست .در صفحهٔ P قطعه‌خط AB را موازی با xy درنظر می‌گیریم و I وسط آنرا در O روی xy تصویر می‌کنیم و در صفحهٔ Q نیم خط متغیر Oz را رسم می‌کنیم که‌می‌تواندحول O بچرخد . ثابت کنید که مجموع دوزاویهٔ AOz و BOz مقداری است ثابت واین مقدار ثابت را پیدا کنید .



حل - اگر A' قرینهٔ A نسبت به xy باشد A و A' نسبت‌به صفحهٔ Q نیز قرینهٔ یکدیگرندو نتیجه‌می‌شود که $AA'=2OI$ و چون OI با AA'

موازی نیز هست پس سه نقطهٔ B و O و A' بریك استقامت و به علاوه $OA'=OB$ می‌باشد . دو زاویهٔ AOz و $A'Oz$ که نسبت به صفحهٔ Q قرینهٔ یکدیگرند متساوی‌اند ، وچون دوزاویهٔ $A'Oz$ و zOB مجانب و مکمل یکدیگرند پس مجموع دوزاویهٔ AOz و BOz برابر با دو قائمه می‌باشد

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۶۰/۱۳ ـ در تابع زیراولا وقتی یکی از متغیر های x یا y به‌سمت $\pm\infty$ میل کند حد دیگری را پیدا کنید :

$$xy+ax+by+c=0$$

ثانیا اگر داشته باشیم $A(1 \text{ و } 0)$ و $B(0 \text{ و } -1)$ و C نقطه‌ای باشد که زاویهٔ ABC قائمه بوده وضریب زاویهٔ خط AC برابر با $-\frac{1}{2}$ باشد ومنحنی نمایش تابع بالا برسه رأس مثلث ABC بگذرد مقادیر ضرایب a و b و c را تعیین کنید .

حل ـ تابع را نسبت به y حل می کنیم :

$$y=\frac{-ax-c}{x+b}$$

$$x\to\pm\infty \Longrightarrow y\to -a$$

$$y\to\pm\infty \Longrightarrow x\to -b$$

ثانیاً ضریب زاویهٔ خط AB برابر با ۱ و در نتیجه ضریب زاویهٔ خط BC برابر با ۱ ـ بدست آمده معادلهٔ BC چنین می‌شود :

$$y+1=-(x-0) \text{ یا } y=-x-1$$

معادلهٔ AC را نیز می‌نویسیم :

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-1) \text{ یا } y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$C\begin{cases} y=-x-1 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow C\left|\begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix}\right.$$

باید مختصات سه نقطهٔ A و B و C در معادلهٔ تابع صدق بکند یعنی :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ -b+c=0 \\ -6-3a+2b+c=0 \end{cases} \Longrightarrow \left|\begin{matrix} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{matrix}\right.$$

۶۰/۱۴ـ معادلهٔ زیر مفروض است :

$$\sin\alpha\sin^2 x+\sin 2x-\cos\alpha\cos^2 x=1$$

کمان حادهٔ α چنان کنید تعیین که $x=\frac{\pi}{4}$ در معادله صدق کند و پس از تعیین مقدار α فرمول کلی جوابهای معادله را بدست آورید.

حل ـ درازاء $x=\frac{\pi}{4}$ معادلهٔ مفروض بعدازاختصار چنین می‌شود :

$$\sin\alpha-\cos\alpha=0 \Longrightarrow tg\alpha=1 \text{ و } \alpha=\frac{\pi}{4}$$

و درازاء این مقدار از α معادلهٔ مفروض به صورت زیر درمی‌آید

$$\sqrt{2}\sin^2 x+4\sin x\cos x-\sqrt{2}\cos^2 x=2$$

از تقسیم طرفین بر $\cos^2 x$ بعد از اختصار خواهیم داشت

$$(2-\sqrt{2})tg^2 x-4tg x+2+\sqrt{2}=0$$

$$tg x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=1 \text{ یا } 3+2\sqrt{2}$$

$$x=K\pi+\frac{\pi}{4} \text{ یا } K'\pi+Arctg(3+2\sqrt{2})$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۶۰/۱۵ـ از **سید جلال آشفته** دانشجوی دانشگاه آریا مهر

درصفحهٔ محورهای مختصات xOy دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R مفروض است . خط متغیر Δ همواره با این دایره مماس‌است و x'x رادر N و y'y را در M قطع می‌کند. معادلهٔ مکان P نقطهٔ وسط MN رابدست آورید ومنحنی نمایش آنرا درهمان صفحه رسم کنید .

حل ـ اگر T نقطهٔ تماس خط با دایره باشد زاویهٔ $xOT=\varphi$ را پارامتر اختیار می کنیم . مختصات T می‌شود:

$$T(x=R\cos\varphi \text{ و } y=R\sin\varphi)$$

معادلهٔ دایرهٔ مفروض چنین است :

$$x^2+y^2=R^2 \Longrightarrow y'=-\frac{x}{y}$$

ضریب زاویه‌ای و معادلهٔ خط مماس می‌شود :

$$m=-\frac{R\cos\varphi}{R\sin\varphi}=-\cot g\varphi$$

$$y-R\sin\varphi=-\cot g\varphi(x-R\cos\varphi)$$

$$M(x=0 \text{ و } y=\frac{R}{\sin\varphi}) \text{ و } N(x=\frac{R}{\cos\varphi} \text{ و } y=0)$$

$$P(x=\frac{R}{2\sin\varphi} \text{ و } y=\frac{R}{2\cos\varphi})$$

$$\sin\varphi=\frac{R}{2x} \text{ و } \cos\varphi=\frac{R}{2y} \Longrightarrow \frac{R^2}{4x^2}+\frac{R^2}{4y^2}=1$$

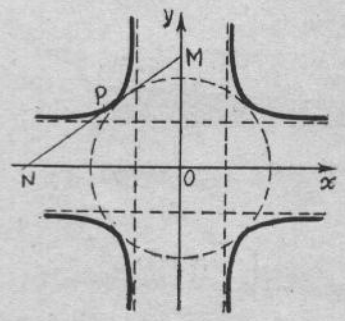
$$y=\frac{\pm Rx}{\sqrt{4x^2-R^2}}$$

تابع در فاصله‌های $x>\frac{R}{2}$ و $x<-\frac{R}{2}$ معین و اتصالی است .

$$y'=\frac{\pm R^3}{(4x^2-R^2)\sqrt{4x^2-R^2}}$$

با انتخاب علامت + جدول تغییرات تابع چنین است:

x	$-\infty$		$-\frac{R}{2}$		$\frac{R}{2}$		$+\infty$
y'		+				−	
	$\frac{R}{2}$	↗	$+\infty$		$+\infty$	↘	$-\frac{R}{2}$



باتوجه‌به‌اینکه‌محور $x'x$ محور تقارن منحنی است نمایش هندسی تابع با فرض $R=2$ به شکل مقابل است .

۶۰/۱۶ـ ازعلی اصغر یونسیان ششم ریاضی دبیرستان علوی

معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$2(3\sin 6x-\sqrt{10}\sin 8x+2)=$$
$$=3\sin^2 4x+5\sin^2 3x$$

حلـ بااستفاده از اتحادهای

$$2\sin^2 4x=1-\cos 8x \text{ و } 2\sin^2 3x=1-\cos 6x$$

معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$12\sin 6x+5\cos 6x=4\sqrt{10}\sin 8x-3\cos 8x$$

این معادله با فرض $tg\alpha=\frac{5}{12}$ و $tg\beta=\frac{3}{4\sqrt{10}}$

چنین می‌شود :

$$\cos\alpha\sin 6x+\sin\alpha\cos 6x=\cos\beta\sin 8x-\sin\beta\cos 8x$$

$$\sin(6x+\alpha)=\sin(8x-\beta)$$

$$x=K\pi+\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ یا } x=\frac{K\pi}{7}+\frac{\pi}{14}-\frac{\alpha-\beta}{14}$$

۶۰/۱۷ـ از محمد مهدی عابدی‌نژاد

عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ راپیدا کنید که‌از ۴۸ برابر مجموع رقمهایش یك‌واحد بیشتر باشد .

حلـ باید داشته باشیم:

$$\overline{abc}=48(a+b+c)+1$$

از بسط طرف اول وبعد ازاختصارخواهیم داشت:

$$99a+9b=47(a+b+c)+1$$

طرف دوم‌باید مضرب ۹ باشد ونتیجه می‌شود :

$$2(a+b+c)+1=9k$$

از این رابطه وبا توجه به‌اینکه $48(a+b+c)$ عددی سه‌رقمی است یعنی $3\leq a+b+c\leq 20$ و باتوجه به اینکه k باید فرد باشد خواهیم داشت :

$$a+b+c=4 \text{ یا } 13$$

فقط ۱۳ قابل قبول‌است ودرازاءآن عدد ۶۲۵ بدست می‌آید .

۶۰/۱۸ـ از مصطفی گودرزی طائمه

عدد $\overline{abab}$ رابا شرط زیرپیدا کنید :

$$\overline{abab}=(a+b)^4+2(a+b)^3+2(a+b)^2$$

حلـ ازبسط طرف اول و بعد از عملیات لازم خواهیم داشت :

$$101\overline{ab}=(a+b)^2[(a+b+1)^2+1]$$

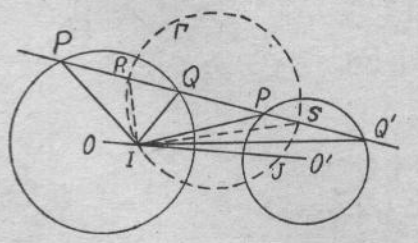
چون۱۰۱ عدد اول‌و $\overline{ab}$ دورقمی بوده‌از ۱۰۱ کوچکتر است باید داشته باشیم

$$\begin{cases}(a+b+1)^2+1=101\\(a+b)^2=\overline{ab}\end{cases}\Longrightarrow \overline{ab}=81$$

عدد مطلوب ۸۱۸۱ می‌باشد .

۶۰/۱۹ـ ترجمهٔ از فرانسه

دو دایرهٔ (O) و (O') از دسته دوایر با نقاط حد I و J مفروض است . خط Δ دایرهٔ اول رادر P و Q و دومی را در P' و Q' قطع می‌کند . وضع نیمسازهای زاویه‌های PIQ و $P'IQ'$ را نسبت به‌یکدیگر تعیین کنید و در حالتی که Δ بردو دایره مماس باشد آنرا بررسی کنید .



حلـ دایرهٔ Γ رادر نظر می‌گیریم که‌بر I و J گذشته مرکزش بر Δ واقع باشدو Δ رادر R و S قطع کند .دایرهٔ Γ

برهر یك از دودایرهٔ O و O' عمود است و نقاط S و R و Q و P همچنین S و R و Q' و P' در تقسیم توافقی می‌باشند. پس شعاعهای $(IS$ و IR و IQ و $IP)$ و $(IS$ و IR و IQ' و $IP')$ توافقی بوده و چون IR و IS بر یکدیگر عمودند پس نیمسازهای زاویه‌های PIQ و $P'IQ'$ می‌باشند. به عبارت دیگر نیمسازهای این دو زاویه برهم عموداند. در حالتی که Δ در T بردایرهٔ O مماس باشد IT بر IS عمود خواهد بود اگر Δ مثلا در T بردایرهٔ O و در T' بر دایرهٔ O' مماس باشد زاویهٔ TIT' قائمه خواهد بود.

۶۰/۲۰ـ ترجمهٔ جعفر آقایانی چاوشی

ثابت کنید بجزمربع هیچ‌چند ضلعی منتظمی راکه تعداد ضلعهایش بیشتر از چهار باشد نمی‌توان در بیضی محاط کرد.

حل ـ مسئله را با برهان خلف ثابت می‌کنیم: فرض می‌کنیم چنین چیزی ممکن باشد دراین صورت لازم می‌آید که یك دایره (دایرهٔ محیطی چند ضلعی مزبور) در بیش از چهار نقطه با بیضی مشترك باشد و چنین چیزی ممکن نیست.

حل مسائل متفرقه

۶۰/۲۱ـ از سعید فرشاد دانشجوی ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تبریز

دستگاه دومعادلهٔ دو مجهولی زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} x^3-y^2+2x+4y=6 \\ xy-2x+y=4 \end{cases}$$

حل ـ دستگاه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} (x+1)^2-(y-2)^2=3 \\ (x+1)(y-2)=2 \end{cases}$$

باانتخاب $u=x+1$ و $v=y-2$ حل دستگاه به سادگی انجام می‌گیرد و خواهیم داشت

$x=2$ و $y=3$ یا $x=-3$ و $y=1$

۶۰/۲۲ـ از سعید فرشاد

اگر داشته باشیم:

$$f(x-2)+2f(2-x)=k-x$$

به ازاء چه مقدار از k خواهیم داشت:

$$f(k-1)=1$$

حل ـ دررابطهٔ مفروض x رایك‌بار با $x+2$ وباردیگر با $2-x$ جانشین می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} f(x)+2f(-x)=k-2-x \\ f(x)+2f(x)=k-2+x \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه خواهد شد:

$$f(x)=\frac{3x+k-2}{3}$$

$$f(k-1)=\frac{3k-3+k-2}{3}=1 \Rightarrow k=2$$

۶۰/۲۳ـ ترجمه ازروسی توسط: فتح‌الله زرگری

دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

در تساویهای زیرهر حرف نمایندهٔ یك رقم است. این رقمها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} \overline{algebr}=\overline{br}^3 \\ \overline{lgebr}=br^5 \\ \overline{gebr}=\overline{br}\cdot r^2 \\ \overline{ebr}=br^3 \end{cases}$$

حل ـ از رابطهٔ اول نتیجه می‌شود که r رقمی است که بارقم سمت راست مکعب خود برابر می‌باشد. چنین رقمهایی عبارتند از:

$1^3=1$ و $4^3=64$ و $5^3=125$ و $6^3=216$ و $9^3=729$

الف ـ باانتخاب $r=1$ رابطهٔ چهارم به‌صورت غیرممکن $\overline{eb1}=b$ در می‌آید.

ب ـ بافرض $r=9$ رابطهٔ چهارم به‌صورت:

$\overline{eb9}=729b$ درمی‌آید که‌چون طرف اول سه رقمی است پس $b=1$ می‌شود اما دراین صورت داریم $\overline{e19}=729$ که غیر ممکن است.

ج ـ اگر $r=4$ باشد رابطهٔ چهارم می‌شود $\overline{eb4}=64b$ وعدد $64b$ باید به ۴ ختم شود. یعنی یا $b=1$ و یا $b=6$ است اما $b=1$ قابل قبول نیست زیرا طرف دوم رابطه دو رقمی می‌شود درحالی که طرف اول آن سه رقمی است. همچنین $b=6$ قابل قبول نیست زیراتساوی $\overline{e64}=384$ غیرممکن است.

د ـ وقتی $r=6$ باشد رابطهٔ ۲ چنین می‌شود:

$$\overline{lgeb6}=7776b$$

این حاصل‌ضرب بایدبه۶ ختم‌شودپس یا $b=1$ یا $b=6$ است. درازاء $b=1$ طرف دوم چهار رقمی استو تساوی‌غیر ممکن است مقدار $b=6$ نیز قابل قبول نیست زیرا باید $b\neq r=6$ باشد.

هـ ـ باقی‌می‌ماند: $r=5$ دراین‌صورت ازرابطه‌های۲و ۴ برمی‌آید که b باید رقم فردباشد زیرا اگر b زوج باشد $r=0$ نتیجه می‌شودکه قبول نیست. درازاء مقادیر ۱ و ۳و

۹ از b رابطهٔ چهارم به ترتیب به‌صورتهای غیر ممکن زیر درمی‌آید

$\overline{e۱۵}=۱۲۵$ و $\overline{e۳۵}=۳۷۵$ و $\overline{e۹۵}=۱۱۲۵$

پس فقط $b=۷$ باقی می‌ماند و خواهیم داشت :

$۴۲۱۸۷۵=۷۵^{۳}$

$۲۱۸۷۵=۷\times۵^{۵}$

$۱۸۷۵=۷۵\times۵^{۲}$

$۸۷۵=۷\times۵^{۳}$

مسائل ترجمهٔ جعفر آقایانی چاوشی

از ماهنامهٔ ریاضی آمریکا

۶۰/۲۴ ـ درجمع زیر هر حرف نمایندهٔ یك رقم وحرف‌های متفاوت نمایندهٔ رقمهای متفاوت می‌باشند . این رقمها را تعیین کنید .

```
  THIS+
    ISA
  GREAT
   TIME
 ------
 WASTER
```

حل ـ معلوم است که T و I و G و T و W مخالف صفر می‌باشند و $W=۱$ است . G یا ۸ است یا ۹ و درنتیجه A یا صفر است یا ۱ اما چون $A\neq W=۱$ پس $A=۰$ است و می‌توانیم بنویسیم :

$S+T+E=R+۱۰\alpha \ ، \ ۰<\alpha<۲$

$\alpha+I+S+M=E+۱۰\beta \ ، \ ۰<\beta<۲$

$\beta+H+E+۲I=T+۱۰\gamma \ ، \ ۰<\gamma<۳$

$\gamma+R+۲T=S+۱۰\delta$

$\delta+G=۱۰$

نتیجه خواهد شد :

$۳T+E<۱۰(\alpha+\delta)-\gamma$

الف ـ اگر $\alpha=۰$ باشد خواهیم داشت :

$\{S \text{ و } T \text{ و } E\}=\{۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲\} \Longrightarrow$

$R=۹ \text{ و } G=۸ \text{ و } S=۲$

$۳T+E<۱۵$

اما باید داشته باشیم $۳T+E=۲۰-\gamma>۱۷$ بنابراین $\alpha\neq۰$ است .

ب ـ وقتی $\alpha=۲$ باشد باز به تناقض زیر برمی‌خوریم:

$۳T+E>۳۷ \text{ و } ۳T+E<۳۴$

ج ـ داریم $\alpha=۱$ و در نتیجه $\beta\neq۰$ ،

اگر $\beta=۲$ باشد خواهیم داشت :

$I+S+M>۲۱ \Longrightarrow \{I \text{ و } S \text{ و } M\}=\{۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\}$

$\{۹ \text{ و } ۷ \text{ و } ۶\}$ یا $\{۸ \text{ و } ۷ \text{ و } ۶\}$ یا

با انتخاب $\{۹ \text{ و } ۷ \text{ و } ۵\}$ و $\{۹ \text{ و } ۷ \text{ و } ۶\}$ نتیجه خواهد شد ۳ یا $E=۲$ و از آنجا $T=۹$ که قابل قبول نیست .

اگر داشته باشیم $\{I \text{ و } S \text{ و } M\}=\{۸ \text{ و } ۷ \text{ و } ۶\}$ و از روی آن نتیجه خواهد شد :

$H+۲I=۳۱$ و $T=۵$ و $\gamma=۳$ و $G=۹$ و $E=۲$

که غیرممکن می‌باشد . بنابراین $\beta=۱$ می‌باشد .

د ـ چون $\beta+H+E+۲I>۱۲$ و $\gamma\neq۰$ است پس $\gamma=۳$ است که در نتیجهٔ آن خواهیم داشت :

$H+E+۲I>۳۲ \Longrightarrow I=۹$ و $\{H \text{ و } E\}=\{۶ \text{ و } ۷\}$

$G=۸ \Longrightarrow T=۲$ و $۳+۴+R>۲۲$

که غیر ممکن است . بنابراین : ۲ یا $\gamma=۱$

ه ـ وقتی $\delta=۲$ و $\gamma=۱$ باشد داریم :

$G=۸ \Longrightarrow T=۹$ و $E=۲ \Longrightarrow I+S+M=۱۱$

$\{I \text{ و } S \text{ و } M\}\subset\{۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۶ \text{ و } ۷\} \Longrightarrow G=۸$ و $\delta=۱$

که غیر ممکن است .

و ـ با فرض $\gamma=۲$ خواهیم داشت :

$T=۵$ و $E=۳$ و $S+T+E=R+۱۰$

$۲+R+۲T=S+۱۰ \Longrightarrow ۳T+E=۱۸$!

$\Longrightarrow H+۲I=۲۱ \Longrightarrow H=۹$ و $I=۶$

$\Longrightarrow S+M=۶$ و $\{S \text{ و } M\}=\{۲ \text{ و } ۴\}$

$\Longrightarrow R=۰$ یا $R=۲$

که غیر ممکن است . پس $\gamma=۱$ می‌باشد و داریم :

$$\begin{cases} S+T+E=R+۱۰ \\ I+S+M=E+۹ \\ H+E+۲I=T+۹ \\ R+۲T=S+۹ \end{cases}$$

از معادله‌های اول و چهارم حاصل می‌شود :

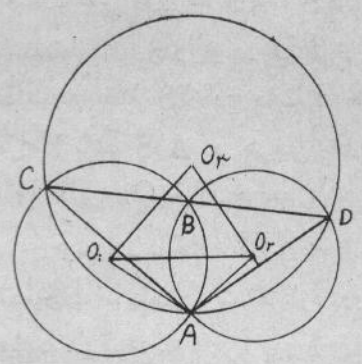
$۳T+E=۱۹ \Longrightarrow \{T \text{ و } E\}=\{۵ \text{ و } ۴\}$ یا $\{۷ \text{ و } ۴\}$

$\{۷ \text{ و } ۴\}$ قابل قبول نیست و با انتخاب $T=۵$ و $E=۴$ خواهیم داشت :

$M=۳$ و $R=۷$ و $S=۸$ و $I=۲$ و $H=۶$

۶۰/۲۵ ـ سه دایره در یك نقطه متقاربند بقسمی که نقاط تقاطع دیگر آنها سه نقطهٔ واقع بر یك خط مستقیم می‌باشند.

ثابت کنید که مرکزهای این سه دایره با نقطهٔ تقارب آنها چهار نقطهٔ واقع بریك دایره می‌باشند .



حل ـ دایره‌ها را به نام مرکزهای آنها O_1 و O_2 و O_3 می‌نامیم . نقطهٔ مشترك هر سه دایره را A و نقطهٔ تلاقی دیگر O_1 و O_2 را B ، O_1 و O_3 را C ، O_2 و O_3 را D می‌نامیم . خط O_1O_3 بر AC و خط O_2O_3 بر AD عمود است و همچنین O_1O_2 عمود منصف AB می‌باشد و داریم :

$$O_1O_3O_2+CAD=180^\circ$$

$$AO_1O_2=ACB \text{ و } AO_2O_1=ADB$$

بنابه فرض CD از B می‌گذرد پس مثلثهای AO_1O_2 و ACD متشابه‌اند و نتیجه می‌شود :

$$O_1AO_2=CAD \Longrightarrow O_1AO_2+O_1O_3O_2=180$$

یعنی چهارضلعی $AO_1O_3O_2$ محاطی است .

۶۰/۲۶ ـ هرگاه a و b و c اندازه‌های ضلعها ، 2p محیط I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ، I_1 و I_2 و I_3 مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی و G مرکز ثقل مثلث ABC باشد ثابت کنید که :

$$(p-a)\overline{GI_1}^2+(p-b)\overline{GI_2}^2+(p-c)\overline{GI_3}^2-$$
$$-p\overline{GI}^2=2abc$$

حل ـ داریم :

$$p=(p-a)+(p-b)+(p-c)=\Sigma(p-a)$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=c(p-a) \text{ و } \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}=b(p-a)$$

$$AI'=\left(\frac{p}{p-a}\right)AI$$

$$\Sigma(p-a)\overline{GI'}^2-p\overline{GI}^2=\Sigma(p-a)\{\overline{GI'}^2-\overline{GI}^2\}$$

$$=\Sigma(p-a)\{(\overrightarrow{AI'}-\overrightarrow{AG})^2-(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AG})^2\}\rightarrow$$

$$=\Sigma(p-a)\{\overline{AI'}^2-\overline{AI}^2-2\overrightarrow{AG}(\overrightarrow{AI'}-\overrightarrow{AI})\}$$

$$=\Sigma(p-a)\{a(2p-a)\sec^2\frac{A}{2}-$$
$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{p-a}(p-c)(b+c)\}$$

$$=\Sigma\frac{abc(b+c)}{p}-\Sigma\frac{abc(b+c}{p}\cos A$$

$$=4abc-2abc=2abc$$

۶۰/۲۷ ـ ثابت کنید در هر مثلث نامساویها یا تساویهای زیر برقرار است :

$$(1)\ \frac{1}{(p-a)}+\frac{1}{(p-b)}+\frac{1}{(p-c)}>$$
$$4\left(\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}\right)$$

$$(2)\quad r_1+r_2+r_3\geqslant 2(h_a\cos A+h_b\cos B+h_c\cos C)$$

حل ـ نامساویهای بالا به‌صورتهای زیر نوشته می‌شوند:

$$(1)\ \frac{abc}{2}\Sigma\frac{1}{p-a}\geqslant 2(ab\cos C+ac\cos B+bc\cos A)$$

$$(2)\ (r_1+r_2+r_3)\left(\frac{abc}{2S}\right)\geqslant 2(ab\cos C+$$
$$+ac\cos B+bc\cos A)$$

می‌دانیم که درهر مثلث تساویها و نامساویهای زیر برقراراست:

$$\Sigma a^2>2\Sigma ab\cos C$$

$$2\Sigma ab-\Sigma a^2=4r(4R+r)$$

$$\Sigma a^2<4r^2+8R^2 \text{ و } 2r<R$$

و خواهیم داشت :

$$\Sigma a^2<\frac{R}{2r}[4r(4R+r)]$$

$$\Sigma a^2<\frac{4RS}{2}\cdot\frac{1}{4rS}(2\Sigma ab-\Sigma a^2)$$

$$\Sigma a^2<\frac{1}{2}abc\Sigma\frac{1}{p-a}$$

$$\frac{abc}{2}\Sigma\frac{1}{p-a}>\Sigma a^2>2\Sigma ab\cos C$$

به این ترتیب نامساوی یا تساوی (۱) ثابت شد . برای اثبات نامساوی (۲) می‌نویسیم :

$$\Sigma a^2\leqslant 4r^2+8R^2<2R(4R+r)$$

$$\Sigma a^2\leqslant\frac{abc}{2S}(4R+r)=\frac{abc}{2S}(r_1+r_2+r_3)$$

$$\frac{abc}{2S}(r_1+r_2+r_3)\geqslant\Sigma a^2\geqslant 2\Sigma ab\cos C$$

۶۰/۲۸ـ اگر A و B و C سه‌زاویهٔ یك مثلث باشند، ثابت کنید که:

$$3(\cos A+\cos B+\cos C)\geqslant 2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$$

حل ـ اثبات در مورد مثلث حادالزوایا انجام می‌گیرد. اگر P نقطه‌ای واقع در داخل مثلث و p_a و p_b و p_c فاصله‌های آن از ضلعهای a و b و c باشد طبق نامساوی اردوس داریم:

$$PA+PB+PC\geqslant 2(p_a+p_b+p_c)$$

وقتی P بر نقطهٔ تلاقی ارتفاعات واقع شود خواهیم داشت:

$$2R(\cos A+\cos B+\cos C)\geqslant 4R(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$

$$\Sigma\cos A-2\Sigma\cos A\cos B\geqslant 0$$

$$\Sigma\cos A-2\Sigma\cos A\cos B=3\Sigma\cos A-2\Sigma\sin A\sin B$$

$$3\Sigma\cos A\geqslant 2\Sigma\sin A\sin B$$

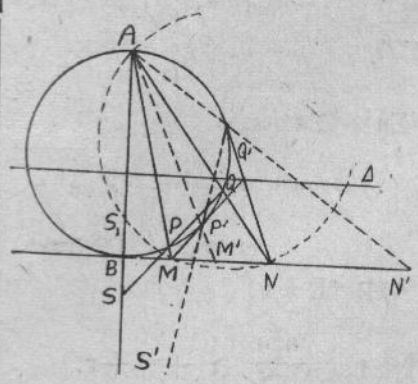
۶۰/۲۹ـ ترجمهٔ از فرانسه

دایرهٔ (O) وقطر AB ازآن مفروض است. روی‌مماس در نقطهٔB بر دایره دونقطهٔ M و N چنان تغییرمکان‌می‌دهند که همواره $\overline{BM}\cdot\overline{BN}=k$ می‌باشد که k مقدار ثابت مخالف صفر است. خطوط AM و AN دایره را در نقاط P و Q قطع می‌کنند.

۱) ثابت کنید که خط PQ بر نقطهٔ ثابت S می‌گذرد و وضع S را نسبت‌به (O) برحسب مقادیر k معلوم کنید.

۲) از M مماس MP′ و از N مماس NQ′ را بردایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط P′Q′ از نقطهٔ ثابت S′ می‌گذرد و اگر C نقطهٔ تلاقی مماسهای مزبور باشدمکان C را بیابید.

حل ـ درانعکاس به قطب A و به قوت $\overline{AB}^2$ منعکس دایرهٔ (O) به مماس درنقطهٔ B برآن‌تبدیل می‌شود و مبدل خط PQ دایرهٔ محیطی‌مثلث AMN است که خط AB را در S_1 قطع می‌کند بقسمی‌که:



$$\overline{BS_1}\cdot\overline{BA}=\overline{BM}\cdot\overline{BN}=k$$

پس این نقطهٔ S_1 ثابت است و در نتیجه خط PQ بر نقطهٔ ثابت S می‌گذرد که در انعکاس مزبور مبدل نقطهٔ S_1 می‌باشد که از رابطهٔ $\overline{AS}\cdot\overline{AS_1}=\overline{AB}^2$ تعیین‌می‌شود. اگر $k>0$ باشد نقطه‌های S_1 و A در یك طرف مماس نقطهٔ B واقع‌اندو در نتیجه نقطهٔ S خارج دایرهٔ (O) واقع می‌شود. اگر $k<0$ باشد S_1 و A در طرفین خط مماس ودر نتیجه‌نقطهٔ S داخل دایرهٔ (O) قرار خواهد داشت.

تبصره ـ درحالت $k=\overline{AB}^2$ نقطهٔ S_1 بر A واقع‌شده نقطهٔ S به بینهایت پرت می‌شود و خط PQ با خط AB موازی می‌گردد.

۲) اگر M′ و N′ نقاط تلاقی AP′ و AQ′ باممماس‌درنقطهٔ B باشد مثلثهای BP′M′ و BQ′N′ به‌ترتیب در زاویه‌های P′ و Q′ قائمه‌انـد و از تساویهـای $MB=MP'$ و $NB=NQ'$ نتیجه خواهد شدکه M وسط BM′ و N وسط BN′ واقع است و داریم:

$$\overline{BM'}\cdot\overline{BN'}=4\overline{BM}\cdot\overline{BN}=4k$$

و طبق قسمت اول مسئله نتیجه می‌شودکه P′Q′ برنقطهٔ ثابت S′ می‌گذرد بقسمی‌که S′ در انعکاس ($\overline{AB}^2$ و A)منعکس نقطهٔ S'_1 است که داشته باشیم:

$$\overline{BS_1'}\cdot\overline{BA}=4k \quad \text{یا} \quad \overline{BS_1'}=4\,\overline{BS_1}$$

نقطهٔ C قطب خط P′Q′ نسبت به دایرهٔ (O) است و بر Δ قطبی S′ نسبت به این دایره واقع می‌باشد.

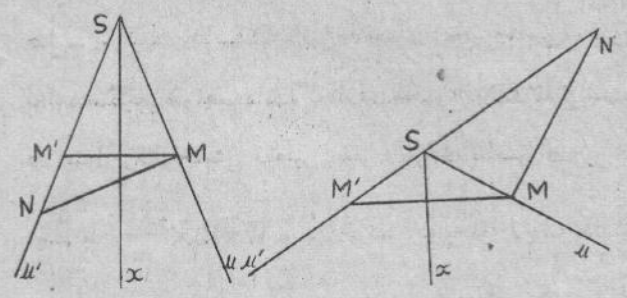
اگر $k>0$ باشد S′ خارج دایره است و مکان C فقط قطعه‌هایی از Δ است‌که داخل‌دایره‌واقع نمی‌باشند.

اگر $k<0$ باشد S′ داخل‌دایره واقع است و تمام خط Δ مکان C می‌باشد.

۶۰/۳۰ـ ترجمهٔ از فرانسه

سطح مخروطی دوار Σ به زاویهٔ رأس θ ($\theta\neq 90$) مفروض است، یك‌صفحهٔ قاطع این سطح مخروطی را درمنحنی Γ قطع‌می‌کند. درنقطهٔ M واقع‌بر Γ قائم بر Σ‌رارسم‌می‌کنیم که‌Σ را در نقطهٔ دیگر N قطع می‌کند. وقتی M بر Γ تغییر مکان دهد مکان نقطهٔ N را تعیین‌کنید.

حل ـ فرض می‌کنیم M نقطهٔ دلخواهی از Γ واقع بر مولد Su بوده و Su′ مولد دیگری از Σ باشد که درصفحهٔ نصف‌النهار M قرار دارد. قائم بر Σ در M محور دوران سطح یعنی Sx را در نقطه‌ای واقع در صفحهٔ u′Su و Su′ را در N قطع می‌کند. اگر صفحهٔ u′Su را صفحهٔ شکل



اختیارکنیم‌در مثلث قائم‌الزویهٔ SMN خواهیم داشت :

$$\frac{SN}{SM}=\frac{1}{\cos\theta}$$

اگر M' قرینهٔ M نسبت به Sx باشد $SM'=SM$ است و بـر حسب اینکـه N و M' در یك طرف S (درحالت $\theta<90^\circ$) یا طرفین‌آن واقع باشند خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{SN}}{\overline{SM'}}=\frac{1}{\cos\theta}$$

پس در تجانس به مرکز S و بـه نسبت $\frac{1}{\cos\theta}$ نقطهٔ N مجانس نقطهٔ M' مـی‌باشد و مکان N مقطع مخروطی C است که در تجانس مزبور مجانس Γ' قرینهٔ Γ نسبت به Sx می‌باشد .

حل مسائل فیزیك

تهیه و انتخاب توسط : حسین فرمان

۶۰/۳۱ـ جسمی‌که بطور آزاد سقوط می‌کند در ثانیه دهم، مسافت‌طی‌شده‌اش‌دو برابر مسافت‌طی‌شده‌در ثانیهٔ‌پنجم‌می‌باشد. سرعت اولیهٔ حرکت جسم راحساب کنید ($g=32(ft/sec^2)$)

حل ـ برای‌محاسبه مسافت‌طی‌شده‌در ثانیهٔ tام‌دریك‌حرکت تندشونده‌کافی است مسافات‌طی‌شدهٔ درازاء t و $t-1$ ثانیه‌را از هم‌کم‌کنیم :

$$X=x_t-x_{t-1}$$

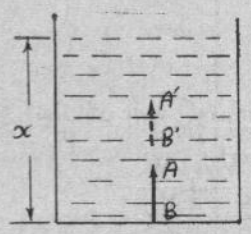
$$=[\tfrac{1}{2}gt^2+v_0t]-[\tfrac{1}{2}g(t-1)^2+v_0(t-1)]$$

$$X=\tfrac{1}{2}g(2t-1)+v_0$$

مقادیر X را در ازاء $t=10$ و $t=5$ حساب‌کرده بر هم تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{16(20-1)+v_0}{16(10-1)+v_0}=2 \Longrightarrow v_0=16ft/sec$$

۶۰/۳۲ـ جسمی‌که داخل یك مایع‌درعمق x قراردارد وقتی از بالا بطورعمود نگاه‌کنیم آنرا درفاصلهٔ $x'=\frac{x}{n}$ می‌بینیم اگر طول واقعی‌جسم a باشد داخل مایع چه مقدار بنظر می‌رسد؟



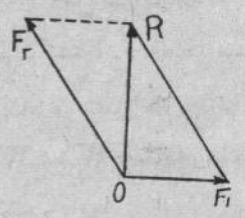
حل ـ داریم :

$$x_B'=\frac{x_B}{n}=\frac{x}{n}$$

$$x_A'=\frac{x_A}{n}=\frac{x-a}{n}$$

$$A'B'=\frac{x}{n}-\frac{x-a}{n}=\frac{a}{n}$$

۶۰/۳۳ـ دو نیروی متقاطع $F_1=a$ و $F_2=x$ دارای بـرآیند R می‌بـاشند بقسمی‌که R بر F_1 عمود و برابر بـا $\sqrt{3}F_1$ می‌باشد . نیروی F_2 و زاویهٔ بین دو نیرو را تعیین کنید .



حل ـ بدون استفاده‌ازروابط‌مثلثاتی چنین عمل‌می‌کنیم:

$$F_2^2=F_1^2+R^2=a^2+3a^2$$

$$F_2=2a \Longrightarrow F_1=\frac{R}{2}$$

زاویهٔ ORF_1 برابر با ۳۰ درجه و در نتیجه زاویهٔ دو نیرو ۱۲۰° است .

۶۰/۳۴ـ ترجمهٔ **داوید ریحان**

وزنهٔ W به دو فنر با ضرایب فنری ثابت k_1 و k_2 کـه مطابق با شکل بطور سری‌بسته‌شده‌اندآویزان است . ضرایب فنری k برای چنین دستگاهی

چقدر است ؟

حل ـ در موقع تعادل ، هـر دو فنر بوسیلهٔ وزنهٔ W کشیده شده و ازدیاد طول آنها به ترتیب چنین است :

$$\delta_1 = \frac{W}{k_1} \quad و \quad \delta_2 = \frac{W}{k_2}$$

اگر δ اندازه‌ای باشد که‌تمام‌فنر کشیده می‌شود :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \Longrightarrow \frac{W}{k} = \frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2}$$

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

۶۰/۳۵ـ ترجمهٔ **داوید ریحان**

مطلوبست تعیین ضریب فنری برای دو فنربا ضریب فنری k_1 و k_2 که مطابق باشکل بطور موازی بسته شده‌اند .

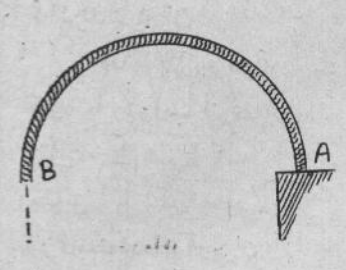
حل ـ اگر وزنهٔ W را میان دو فنر ببندیم ،درحالت کلی، کششها در فنرها متساوی نیستند ولی تغییر در طول آنها به‌ازاء هر تغییر مکان قائم از وزن باید متساوی باشند . اگر W_1 و W_2 قسمتهائی از وزنهٔ W باشدکه بر فنرهای بالااثر کنند ، داریم :

$$\delta = \frac{W_1}{k_1} = \frac{W_2}{k_2} = \frac{W_1 + W_2}{k_1 + k_2} = \frac{W}{k_1 + k_2}$$

$$\frac{W}{k} = \frac{W}{k_1 + k_2} \Longrightarrow k = k_1 + k_2$$

۶۰/۳۶ـ ترجمهٔ **داویدریحان**

لولهٔ صیقلی به شکل نیمدایرهٔ AB به‌شعاع R در صفحهٔ قائم قرارداشته و داخل آن زنجیری به‌طول πR و به‌وزن WπR مطابق باشکل‌قرارداد . باچشم پوشی‌ازمختصر اشکالی که درشروع به‌حرکت برای زنجیروجوددارد سرعت v زنجیر را در موقع خروج از دهانهٔ B لوله تعیین‌کنید .



حل ـ صرف نظر ازاصطکاک مابین‌حلقه‌های زنجیرومابین‌زنجیرو لوله،دستگاهی‌خواهیم داشت که‌دارای مجموع انرژی ثابتی‌است. در ابتداانرژی جنبشی زنجیر صفر وانرژی پتانسیل‌آن برابر است با $W\pi R \times \frac{2R}{\pi}$. در خاتمه ، هرحلقهٔ زنجیر دارای سرعت v است انرژی جنبشی آن $\frac{1}{2}\left(\frac{W\pi R}{g}\right)v^2$ است و انرژی پتانسیل آن $-W\pi R\left(\frac{\pi R}{2}\right)$ می‌باشد پس خواهیم داشت :

$$2WR^2 = \frac{W\pi R v^2}{2g} - \frac{W\pi^2 R^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gR\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

حل مسائل شیمی

ترجمه و انتخاب توسط : عطاءالله بزرگ‌نیا

۶۰/۳۷ـ تجزیهٔ عنصری‌یك‌مادهٔ آلی نشان‌داده‌است که این ماده فقط مرکب ازکربن وئیدرژن است. ازسوختن۵ میلی گرم ازاین ماده ۱۶/۱۵ میلیگرم CO_2 و ۵/۳۰میلیگرم‌آب حاصل شده است . چگالی به‌حالت بخار یکی ازایزومرهای‌آن نسبت به‌هوا۲/۳۴ می‌باشد . فرمول بسته وگستردهٔ ایزومر-های‌آنرا بنویسید .

حل ـ

$$m_C = 16/15 \times \frac{3}{11} = 4/40g$$

$$m_H = 5/30 \times \frac{1}{9} \# 0/6g$$

$$M = 29 \times 2/34 = 68$$

$$\frac{5}{68} = \frac{4/4}{12x} = \frac{0/6}{y} \Longrightarrow x = 5 \text{ و } y = 8$$

فرمول ئیدرکربور $\boxed{C_5H_8}$

پنتین ۱ $CH_3 - CH_2 - CH_2 - C \equiv CH$

پنتین ۲ $CH_3 - CH_2 - C \equiv C - CH_3$

متیل۲ بوتین ۱

$$CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-C\equiv CH$$

پنتادی ان ۱ و ۴ :

$$CH_2=CH-CH_2-CH=CH_2$$

پنتادی‌ان ۲و۳ : $CH_3-CH=C=CH-CH_3$

پنتادی ان ۱ و ۳ :

$$CH_2=CH-CH=CH-CH_3$$

پنتادی ان ۱ و ۲:

$$CH_2=C=CH-CH_2-CH_3$$

متیل ۲ بوتادین ۱ و ۳ :

$$CH_2=\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}-CH=CH_2$$

متیل۲ بوتادی ان ۲ و ۳ :

$$CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}=C=CH_2$$

۶۰/۳۸ ـ جسمی است به‌فرمول C_xBr_y . ازتجزیهٔ یك‌گرم از آن ۰/۱۸۰ گرم دی اکسیدکربن و ۲/۲۶ گرم برمور نقره حاصل‌شده است . جرم ملکولی تقریبی این‌جسم‌که به روش رائول بدست‌آمده ۵۱۴ است . فرمول ملکولی‌جسم‌را پیدا کنید .

یك‌گرم دیگر ازاین‌جسم را حرارت می‌دهیم وگازی‌که از این‌عمل حاصل می‌شود درمقدار زیادی ازمحلول یدورپتاسیم واردمی‌کنیم . برای برطرف‌کردن رنگ محلول ۳۹ میلی‌لیتر محلول دسی‌نرمال تیوسولفات سدیم لازم می‌شود. تعیین کنید که برم به چه نسبتی‌آزاد شده است .

حل ـ

$$mc=0/180\times\frac{3}{11}\#0/05g$$

$$m_{Br}=2/26\times\frac{80}{188}\#0/96g$$

$$\frac{1}{514}=\frac{0/05}{12x}=\frac{0/96}{80t}\Longrightarrow x\#2\quad t\#6$$

فرمول جسم $\boxed{C_2Br_6}$ و جرم ملکولی آن ۵۰۴ است .

$$Br_2+2KI\rightarrow I_2+2KBr$$

$$I_2+2Na_2S_2O_3\rightarrow 2NaI+Na_2S_4O_6$$

جرم برم آزاد شده از یك‌گرم جسم

$$\frac{80}{10000}\times 39=0/312$$

جرم برم آزاد شده از یك ملکول‌گرم جسم :

$$504\times 0/312=157$$

تعداد اتمهای برم‌آزاد شده از یك ملکول :

$$\frac{157}{80}\#2$$

بنابراین تجزیه جسم چنین بوده است :

$$C_2Br_6\rightarrow C_2Br_4+Br_2$$

تفسیر مسئلهٔ ... (بقیه‌از صفحهٔ۲۲۷)

C_1 به v_2 تعلق دارد تأیید نمی‌کند .

در مورد تداخل شبکه‌هاکه برای یالهای ساده امکان پذیر نیست‌کسی نیست‌که به اندازهٔ **کمپ کاتاسترف** روی‌آنها وقت صرف‌کرده باشد . و این مبین مشکلی است‌که استدلال استقرائی به ماعرضه‌می‌داردو این‌مشکل‌متضمن این مطلب‌اساسی است‌که هرگاه رنگ یکی از پنج رأس به‌رنگ رأسی دیگر مبدل‌گردد آنگاه رنگهای‌کلیهٔ رأسهای یك نقشهٔ فرعی مرتبط که رأس مذکور را در برداشته وشامل رأسهایی است‌که متناوباً با همان دو رنگ (رنگهای دو رأسی‌که با هم تعویض رنگ نمودند) رنگا میزی شده‌است دراثر برگشت متناوب ، متقابلا تبدیل‌خواهند شد.

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۶۱/۱ ـ اگر $x \geqslant ۴$ باشد مقدار کسر زیر درچه‌حدی می‌باشد ؟

$$\frac{x+۸}{x^۲-۴}$$

۶۱/۲ ـ ترجمهٔ جعفر آقایانی چاوشی

مثلث ABC به مساحت یك واحد سطح مفروض است . از A خطی موازی با BC و از C خطی موازی با AB رسم می‌کنیم‌که یکدیگر را در B' قطع می‌کنند و از B در خارج مثلث خط دلخواهی رسم مـی‌کنیم که امتداد $B'C$ را در A' و امتداد $B'A$ رادر C' قطع می‌کند .حاصل‌ضرب مساحتهای سه مثلث $A'BC$ و $B'AC$ و $C'AB$ را بدست‌آورید .

کلاس چهارم ریاضی

۶۱/۳ ـ ثابت‌کنید که اگر داشته باشیم :

$$t > ۰ \quad و \quad \frac{۲t}{۱-t^۲} > ۱$$

خواهیم داشت :

$$\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲} < \frac{\sqrt{۲}}{۲} < \frac{۲t}{۱+t^۲}$$

۶۱/۴ ـ از مهدی نمازیان ششم ریاضی دبیرستان شاهپور کرمان .

از معادلهٔ زیر مقدار x را بدست‌آورید :

$$\sqrt[x]{۶۲۵} + ۱۶\sqrt[x]{۴۰} = ۱۶\sqrt[x]{۱۶} + ۴\sqrt[x]{۲۵۰}$$

۶۱/۵ ـ ترجمهٔ مصطفی گودرزی طائمه

اگر $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ به ترتیب‌حاصل جمع از جملهٔ اول تا $n_۱$ جمله و $n_۲$ جمله و $n_۳$ جمله از یك تصاعد عددی باشد رابطهٔ زیررا محقق‌کنید :

$$K = \frac{S_۱}{n_۱}(n_۲ - n_۳) + \frac{S_۲}{n_۲}(n_۳ - n_۱) + \frac{S_۳}{n_۳}(n_۱ - n_۲) = ۰$$

۶۱/۶ ـ ترجمه از فرانسه

مربع‌مستطیل ABCD به‌ضلعهای $AB = ۸$ و $BC = ۶$ مفروض‌است . بر ضلع AB نقطهٔ M را به فاصلهٔ $AM = x$ از A انتخاب‌کرده از M خطهایی موازی با دو قطر مستطیل رسم می‌کنیم‌که ضلعهای BC و DA را به ترتیب در N و P قطع می‌کنند .

۱) نسبت $\frac{MN}{MP}$ را برحسب x حساب کنید و نقطهٔ M را واقع بر قطعه خط AB چنان تعیین‌کنید کـه نسبت مزبور برابربا عدد مثبت و معلوم k باشد .

۲) به‌ازاء چه‌مقادیر از x نسبت مزبورکوچکتر از یك، مساوی با یك ،بزرگتر از یك می‌باشد ؟

۳) دو دایره درنظر می‌گیریم ، یکی به مرکز B و به شعاع $R = BM$ و دیگری به مرکز O (مرکزمستطیل) و به شعاع $R' = ۳x - ۶$

الف ـ به‌ازاء چه مقادیر x برای R و R' مقادیرقابل قبول وجود دارد ؟

ب ـ به ازاء چه مقادیر x دو دایرهٔ مزبورمتخارج‌اند؟

ج ـ مقادیری از x را تعیین‌کنید کـه دو دایرهٔ مزبور

متقاطع باشند و حالتهای خاص $x=\frac{7}{2}$ و $x=\frac{9}{4}$ را بررسی کنید .

کلاس پنجم طبیعی

۶۱/۷ ـ تابع $y=ax^2+bx+c$ را مشخص کنید بنابرآنکه منحنی نمایش تابع آن از نقطهٔ $A(5,8)$ و همچنین از نقطهٔ B قرینهٔ A نسبت به خط به معادلهٔ $2y+x=11$ بگذرد و محور $y'y$ را درنقطهٔ به عرض ۳ قطع کند .

۶۱/۸ ـ به فرض اینکه x و y کمانهای حاده باشندو داشته باشیم :

$$\sin y=\frac{3\sqrt{10}}{10} \quad \text{و} \quad tg(x+y)=-7$$

نسبتهای مثلثاتی هریك از دوکمان x و y را حساب کنید .

کلاس پنجم ریاضی

۶۱/۹ ـ اولا ثابت کنید که خط به معادلهٔ $y=mx+1$ به ازاء جمیع مقادیر m از نقطهٔ ثابت A که آنرا مشخص خواهید کرد می‌گذرد .

ثانیاً ـ نمایش تابع زیر را کـه یك خط شکسته است رسم کنید :

$$y=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$$

ثانیاً از روی شکل در تعداد و علامت جوابهای معادلهٔ زیر برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید .

$$\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=mx+1$$

۶۱/۱۰ ـ درصفحهٔ محورهای مختصات $a'a$ و $b'b$ مکان نقطهٔ $M(a,b)$ را تعیین کنید بنابرآنکه تابع :

$$y=\sqrt{(a+b+1)x^2-2(a+b-2)x+a+b+3}$$

معین باشد و نقطهٔ M از O مبدأ مختصات به فاصلهٔ ۳ قرار داشته باشد .

۶۱/۱۱ ـ نسبتهای مثلثاتی کمانهای حادهٔ x و y را بدست آورید بنابرآنکه داشته باشیم :

$$tg(x+y)=\frac{4}{7} \quad \text{و} \quad tg(x-y)=\frac{1}{8}$$

۶۱/۱۲ ـ در یك طرف نیم خط مفروض Ox نیم‌خط Oy و به دنبال آن نیم خط Oz را چنان رسم می‌کنیم که اندازهٔ هریك از دو زاویهٔ xOy و yOz برابر با α باشد . بر Ox نقطهٔ M را انتخاب کرده از آن عمود MH را بر Oy وعمود MK را بر Oz رسم می‌کنیم . اگر $OH=OK\sqrt{3}$ باشد مقدار α را حساب کنید .

۶۱/۱۳ ـ متوازی‌السطوح غیر مشخص $ABCDA'B'C'D'$ به قطرهای AA' و BB' و CC' و DD' مفروض است. ثابت کنید که دو صفحهٔ DBC' و $D'B'C$ قطر AA' را به سه قسمت برابر تقسیم می‌کنند .

کلاس ششم طبیعی

از **جمشید موری** دانشجوی دانشگاه مشهد .

۶۱/۱۴ ـ اولا معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد ، محـور Ox را در نقطهٔ P به طول α و محور Oy را در نقطهٔ به عرض β قطع کند . ثانیاً اگر داشته باشیم $m\alpha+n\beta=1$

ثابت کنید که دایرهٔ مزبور غیر از O از نقطهٔ ثابت دیگر M می‌گذرد ومختصات این نقطه را برحسب m و n حساب کنید.

۶۱/۱۵ ـ معادلهٔ زیر مفروض است :

$$\cos x+a\cos 2x+\cos 3x=0$$

برحسب مقادیر مختلف a در تعداد جوابهای معادله که بین صفر و 2π واقع‌اند بحث کنید .

کلاس ششم ریاضی

۶۱/۱۶ ـ تابع زیر مفروض است :

$$y=(x-a)\sqrt{\frac{ax^2+(a-1)x+2a-1}{(2-a)x^2-2ax+4a-3}}$$

اولا مقدار a را معلوم کنید که مماس بر منحنی نمایش تابع در نقطهٔ به طول a ازآن با محور $x'x$ زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد

و به ازاء مقادیر مختلف a در وجود مماس بحث کنید .

ثانیاً به ازاء $a=1$ تابع را مشخص کرده جدول تغییرات و نمایش هندسی آنرا رسم کنید .

۶۱/۱۷ـ فرستنده **مظاهر امینی** دانشجوی دانشگاه آریامهر

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$(1-tg^2x)(tg^2x+tg^2 2x)-3tg^2x+1=0$$

۶۱/۱۸ـ فرستنده : **مسعود حبیب‌الله‌زاده**

با استفادهٔ از روابط مثلثاتی دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \\ x^3+y^3=1 \end{cases}$$

۶۱/۱۹ـ ترجمهٔ **قوام نحوی**

در مبنای شمار B کوچکترین عدد چهاررقمی به فرم $\overline{abcd}$ را پیدا کنید که ارقامش در روابط زیر صدق کنند :

$$\begin{cases} a+d=\overline{(bc)}_B=B^2+1 & (1) \\ \overline{(cb)}_B=(a+d)^2 & (2) \end{cases}$$

۶۱/۲۰ ـ ترجمهٔ **جعفر آقایانی چاوشی**

در یك صفحه دو نقطهٔ ثابت A و B مفروض است و C نقطهٔ متحرکی روی دایرهٔ به شعاع اختیاری و به مرکز A می‌باشد. مطلوبست تعیین مکان هندسی نقطهٔ P محل تلاقی BC با نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث ABC .

۶۱/۲۱ ـ ترجمهٔ از فرانسه

سه نقطهٔ O و A و B به همین ترتیب بر یك خط مستقیم Δ واقع‌اند . در O خط D را عمود بر Δ اخراج می‌کنیم و نقطهٔ متغیر M را بر D درنظر می‌گیریم . دایرهٔ L که بر A می‌گذرد و در B بر MB مماس است خط MA را در نقطهٔ دیگر P قطع می‌کند . ثابت کنید خطی که در P بر MP عمود می‌شود از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد و وقتی که M دایرهٔ L را می‌پیماید مکان P را تعیین کنید .

۶۱/۲۲ ـ ترجمهٔ از فرانسه

ثابت کنید قطعه‌خطی که O مرکز هذلولی متساوی‌القطرین را به یك نقطهٔ M از این هذلولی وصل می‌کند واسطهٔ هندسی است بین MF و MF′ شعاعهای حامل نقطهٔ مزبور .

مسائل متفرقه

برای داوطلبان امتحانات ورودی دانشکده‌ها

۶۱/۲۳ ـ فرستنده : **جمشید موری** دانشجوی دانشگاه مشهد

اگر داشته باشیم $ad\neq bc$ و $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

$a^2+ad+d^2+bc=0$ و $\gamma=f(\beta)$ و $\beta=f(\alpha)$

اولا ثابت کنید که $\alpha=f(\gamma)$ است .

ثانیاً ثابت کنید که α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند:

$$x\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right)=$$

$$=\alpha\left(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}\right)\left(\frac{-d\alpha+b}{c\alpha-a}\right)$$

ثالثاً معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{6x^3-35x^2+49x}{x^2-5x+6}=\frac{6\alpha^3-35\alpha^2+49\alpha}{\alpha^2-5\alpha+6}$$

مسائل ترجمهٔ جعفر آقایانی چاوشی

۶۱/۲۴ ـ در مثلث ABC میانه‌های m_a و m_b بر هم عمودند . ثابت کنید که در این مثلث داریم :

$$\cot g B+\cot g C\geq\frac{2}{3}$$

۶۱/۲۵ ـ ثابت کنید از بین چند ضلعیهایی که داخل دایرهٔ به شعاع واحد واقع باشند فقط مثلث است که امکان دارد طول هرضلع آن بزرگتر از $\sqrt{2}$ باشد .

۶۱/۲۶ ـ چهار ضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است . هرگاه G_1 و G_2 و G_3 و G_4 به ترتیب مرکزهای ثقل مثلثهای BCD و CDA و DAB و ABC باشد ثابت کنید که چهارضلعی $G_1G_2G_3G_4$ محاطی است .

۶۰/۲۷ـ ثابت کنید بین ارتفاعها و شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی هر مثلث نامساوی یا تساوی زیر برقراراست:

$$h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1\leq r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1$$

۶۱/۲۸ ـ داخل نیمکرهٔ به‌قاعدهٔ افقی چهارکره چنان

محاط شده‌اند که هریك از آنها با دو کرهٔ مجاور و برسطح نیمکره و برقاعدهٔ آن‌مماس می‌باشد . صفحهٔ‌قاطع‌قائمی درنظر می‌گیریم که بر مرکز نیمکره و بر مرکز یکی از کره‌های مزبور بگذرد . مقطع این صفحه عبارت خواهد شد از یك قطاع دایره و دایره‌ای که در آن محاط است . ثابت کنید سه دایره‌ای‌که درسه‌گوشهٔ قطاع مزبور بین قطاع و دایرهٔ محاطی آن‌می‌توان محاط کرد بایکدیگر برابرند.

مسائل ترجمهٔ از فرانسه

۶۱/۲۹ـ به فرض آنکه a عدد نسبی مخالف صفرباشد نمایش هندسی دو تابع :

$$y_1 = \big||a| - |ax|\big| \quad \text{و} \quad y_2 = |a - ax|$$

را در یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید و از روی آن دوعدد زیر را با یکدیگر مقایسه‌کنید :

$$\big||a| - |b|\big| \quad \text{و} \quad |a - b|$$

۶۱/۳۰ـ در صفحهٔ محورهای مختصات ، $M(x,y)$ در چه‌ناحیه‌ای واقع باشد تاعبارت زیر بتواند برابر باسینوس یك زاویهٔ حاده باشد .

۶۱/۳۱ـ ثابت‌کنید که‌هرچندضلعی غیر مشخص به‌محیط $2p$ را همواره می‌توان بطور کامل داخل در دایرهٔ به‌قطر p قرارداد و مجموعهٔ مرکزهای دایره‌هـای به‌قطر p را تعیین که چند ضلعی مفروض به محیط $2p$ را دربر می‌گیرند .

۶۱/۳۲ـ مثلث ABC قـائمه در زاویهٔ A و دایرهٔ محیطی آن مفروض است .

اولا ثابت کنیدکه برکمان BC از دایرهٔ مفروض کـه شامل A نیست‌یك نقطهٔ α ، بر کمان CA که شامل B نیست یك نقطهٔ β وبرکمان AB که‌شامل C نیست یك نقطهٔ γ وجود دارد بقسمی‌که α وβ و γ اوساط قطعه مماسهایی باشند که در نقاط مزبور بردایره رسم می‌شوند و ازطرفین به خطوط AB و AC محصور می‌باشند .

(تعیین ترسیمی نقاط مزبور مورد نظر نیست) .

ثانیاً ثابت‌کنید که مثلث $\alpha\beta\gamma$ متساوی‌الاضلاع است.

۶۱/۳۳ـ هرم به رأس O مفروض است بقسمی که خط Ox از رأس آن گذشته با هر یك از وجوه جانبی زاویهٔ α و با صفحهٔ قاعدهٔ هرم زاویهٔ φ می‌سازد . اگـر S_B مساحت قاعده و S_L مساحت سطح جانبی هرم باشد ثابت کنیدکه :

$$S_L = S_B \times \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$$

مسائل فیزیك و مکانیك

تهیه و انتخاب توسط : حسین فرمان

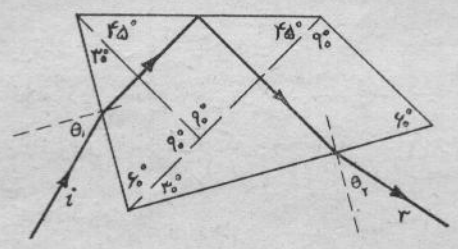
۶۱/۳۴ـ یك جسم روش و یك‌پرده به فاصلهٔ D از هم قرار دارند . یك عدسی محدب به فاصلهٔ کانونی f که بین جسم وپرده جابجا می‌شود دردوحالت تصویری روی پرده‌می‌اندازد. ثابت کنید اولافاصلهٔ دووضع مزبور از رابطهٔ زیر بدست‌می‌آید:

$$d = \sqrt{D(D-4f)}$$

ثانیاً نسبت دو تصویر در دو حالت مزبور از رابطهٔ‌زیر حاصل می‌شود :

$$\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2$$

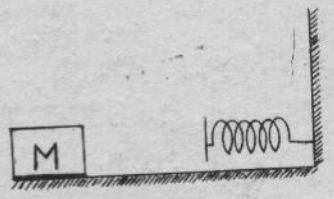
۶۱/۳۵ـ شکل زیر ترکیب شده است از دو منشور به زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ و ۹۰ درجه و یك منشور به زاویه‌های ۴۵ و ۴۵ و ۹۰درجهٔ از یك جنس(باضریب‌شکستهای‌متساوی)



شعاع نورانی i بازاویهٔ θ_1 به یك وجه تابیده و پس ازانعکاس کلی و برگشت در داخل شیشه در مسیر r با زاویهٔ θ_2 خارج می‌شود . ثابت‌کنید که اگر $\sin\theta_1 = \frac{n}{2}$ باشد زاویه‌های θ_1 و θ_2 با هم برابرند و i و r بر هم عمودند .

۶۱/۳۶ـ فرستنده: **علی‌صفرزاده امیری** دانشجوی دانشگاه آریامهر

جسم M به‌جرم یك‌کیلو گرم با سرعت v روی سطح همـوار افقی با ضریب اصطکاك $\mu_k = 0/25$ حرکت می‌کند. این‌جسم‌مطابق



(پائین صفحه بعد)

داستانهای ریاضی

نوشتهٔ : ریند (Rhind)

ترجمه و تنظیم از: داود یدریحان

فقط ارقام فرد؟

ژاك بهترین دوستش ژان‌را درحالی یافت که مشغول نوشتن ارقامی روی کاغذ بود و پریشان حال بنظرمی‌رسید. موضوع را جویا شد و دریافت که وی در مورد اعداد و خواص آنها ، دست به تحقیقات ریاضی زده است .

ـ ژان شرح می‌دهد که در مورد عدد ۱۳ مطلب جالبی کشف کرده است و خطاب به ژاك چنین می‌گوید :

مربع ۱۳ برابر با ۱۶۹ است این عدد را برعکس کن عدد ۹۶۱ بدست می‌آید که مربع عدد ۳۱ است و عدد اخیر عکس عدد ۱۳ است !

« واضح است که حاصل‌ضرب دو مربع ، بازهم مربع خواهد بود ولی درنظرداشته باش که مجموع ارقام ۱۶۹ مربع عدد ۴ یعنی ۱۶را می‌دهد وعدد۴مجموع ارقام‌تشکیل دهندهٔ‌عدد ۱۳ می‌باشد .

« من ملاحظه کرده‌ام که هیچ عدد مربعی که‌حداقل دورقمی باشد ، نمی‌تواند فقط متشکل ازارقام فرد باشد . من بسیارکوشیده‌ام‌ولی نتوانسته‌ام این موضوع را اثبات کنم. مطمئناً اگر یك ماشین حساب در دسترسم بود می‌توانستم این کار را عملی کنم ...»

ولی ژاك حرف وی را قطع‌می‌کند :

ـ ببین ، کمی واقع‌بین باش ، این راهی نیست که می‌خواهی برای تأیید یا رد حدس‌خود بکار ببری باید آنچه می‌گویی مستدل باشد .

ـ تو قادر به این‌کار هستی ؟

ـ سعی‌نکن اوقات مرا تلخ‌کنی .یك‌ورق‌کاغذ ، یك‌مداد و پنج دقیقه‌فرصت به من بده .

باور می‌کنید ؟ چهار دقیقه بعد ، ژاك ثابت کرد که نمی‌توانیم به‌هیچ‌طریقی یك مربع را فقط‌باارقام فرد بنویسیم.

استدلال‌وی به‌صورت زیر بود : هیچ‌عدد مربعی‌نمی‌تواند فقط به‌کمك ارقام فرد نوشته شود به دلیل اینکه اگر مربعی مختوم به یك رقم فرد باشد ، رقم کناریش ، یعنی رقم دهگان آن همیشه زوج است . چرا ؟ به دلیل زیر :

(بقیه درصفحه۲۱۵)

از صفحه قبل

با شکل به فنری که ضریب الاستیسیتهٔ آن $k=2$ می‌باشد برخوردمی‌کندوآنرابه اندازهٔ چهارمترجمع‌می‌کند .مطلوبست سرعت جسم M در لحظهٔ برخورد به فنر .

۶۱/۳۷ ـ فرستنده : **محسن سربیشه‌ای** دانشجوی دانشگاه مشهد .

استوانه‌ای‌به‌قطر ۲۰ اینچ و به وزن ۳۵۰ پوند درطول یك مولد خود روی سطح افقی قرار دارد . پیدا کنید می‌نیمم مقدار وجهت نیروی‌لازم برای‌آنکه جسم مزبور از پلهٔ به‌ارتفاع ۲ اینچ بالا برود .

مسائل شیمی

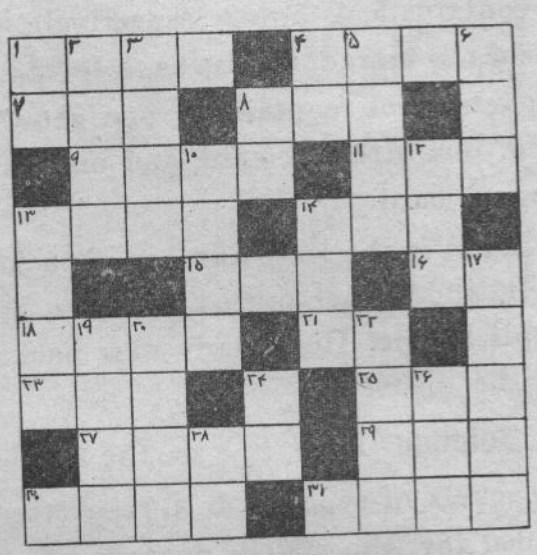
تهیه‌و انتخاب توسط : عطاءالله بزرگ‌نیا

۶۱/۳۸ـ سوخت یك موتورانفجاری مخلوطی ازمتان، ئیدروژن و اکسیدکربن است .۵۰cc از این‌مخلوط را با ۷۰cc اکسیژن در آبسنجی واردکرده درآن جرقهٔ الکتریك برقرار می‌کنیم . پس از جرقه و باز گشت به شرایط نخست ، ۴۵cc گاز باقی می‌ماند که ۳۷/۵cc آن قابل جذب پتاس و بقیه جذب فسفر می‌شود . حجم هر یك از اجزاء مخلوطرا پیدا کنید .

۶۱/۳۹ـ ئیدروکربور A می‌تواندو مشتق مونوبرومه X و Y را تولید کند . هرگاه ۲/۷۴ گرم از X را به‌طور کامل بائیدروژن احیاء کنیم ۱/۱۶ گرم از ئیدوکربور A بدست‌می‌آید. از اثر برم‌بر X فقط سه مشتق دی برومه‌ایزومر بدست می‌آید . ساختمان A و X و Y را مشخص کنید .

جدول اعداد

طرح از : ابوالفضل فتح‌الله‌زاده دانشجوی دانشکدهٔ علوم دانشگاه مشهد



افقی : ۱ـ حاصل‌عمل زیر

$$S_{۹}=(۱+\sqrt{۳})^{۹}+(۱-\sqrt{۳})^{۹}$$

۴ ـ عددی چهار رقمی که برابر است با توان چهارم مجموع ارقامش کـه این مجموع عدد اول می‌باشد . ۷ ـ عددی است سه رقمی که رقمهایش متوالی‌اند و اگر جای رقمهای یکان‌و دهگان‌را عوض‌کنیم‌عدد حاصل مربع کامل است . ۸ـ ده‌برابر عدد ۴ قائم . ۹ـ مقلوب حاصل‌ضرب $(۱۰۷۸)_{۹}\times(۵)_{۹}$ در همین مبنا . ۱۱ـ عددی است به صورت $\overline{abc}$ که خوداین‌عدد و هریك از عددهای a و c و $\overline{ab}$ و $\overline{cba}$ و $\overline{acb}$ مربع کامل می‌باشند . ۱۳ـ عددی است که در رابطهٔ زیر صدق‌می‌کند .

$$\overline{aabb}=\overline{bb}(\overline{ab}+\overline{ba})$$

۱۴ ـ باقیماندهٔ تقسیم عدد ۳۱ افقی بر هزار . ۱۵ ـ مقلوب عدد ۲۵ افقی . ۱۶ـ دوبرابر جذر عدد $\overline{acb}$ از عـدد ۱۱ افقی ۱۸۰ عددی است‌چهاررقمی که در رابطهٔ $\overline{abbb}=(\overline{ab})^{۳}$ صدق می‌کند . ۲۱ ـ دررابطهٔ زیرصدق می‌کند .

$$\overline{ab}=a^{۲}+b^{۲}-۶$$

۲۳ـ خمس عدد ۱۸ افقی . ۲۵ ـ یك واحدکمتر ازعدد ۲۳ افقی . ۲۷ ـ عدد $\overline{abcd}$ که‌در رابطهٔ زیرصدق می‌کند :

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}>۱$$

۲۹ـ عددی‌است سه رقمی‌که درآن رقم یکان توان سوم‌مجموع دو رقم دیگر بوده و مقلوب آن زوج است . ۳۰ـ مقلوب عدد ۲۷ افقی . ۳۱ ـ رقمهایش بـه ترتیب ضرایب عددی بسط $(a+b)^{۳}$ می‌باشند .

قائم : ۱ـ تفاضل‌رقمهایش‌برابر است‌با رقم‌یکان‌مجموع رقمهایش . ۲ـ تکرارعدد ۲۱ افقی ۳ ـ ۳۱۴ واحد بیشتراز عدد ۲۷ افقی . ۴ـ جواب معادلهٔ زیر .

$$\sqrt{x}^{-\log_{۵}x-۱}=۵$$

۵ ـ اگر رقم هزارگان‌آن با رقم سدگانش برابر می‌بودجذر عدد ۱۱ افقی می‌شد . ۶ـ نود واحد کمتر از عدد ۲۵ افقی. ۸ـ همان عدد۴ افقی. ۱۰ ـ به‌صورت $\overline{abcd}$ است که $\overline{ab}$ نصف $\overline{cd}$ و $a+b=c$ می‌باشد . ۱۲ـ مقلوبش توانی از ۶ است.۱۳ـ ازگذاردن ۵ بین‌رقمهای دهگان و سدگان عدد ۱۲ قائم بدست می‌آید . ۱۴ ـ ده برابر مقدار معمول π . ۱۷ ـ به صورت $\overline{abbac}$ است‌که درآن c یك‌هشتم a و $b=a+c$ است . ۱۹ـ مقلوب عدد ۲۸ قائم . ۲۰ـ چهار برابر عدد۲۴ قائم . ۲۲ـ از ده برابر عدد ۱۲ قائم ۳ واحد بیشتر است . ۲۴ـ تکرار رقم یکان عدد ۱۷ قائم . ۲۶ ـ ۹۷ واحد کمتر از عدد ۱۸ افقی . ۲۸ـ همان‌عدد ۱۶ افقی .

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 56: A greeting card dealer has 3 kinds of packets, Packet A contains 3 get-well cards, 1 birthday card, and 7 anniversary cards. Packet B contains 2, 3, and 1 respectively; and packet C contains 5, 4, anb 2 respectively. He wisbes to merge these so as to form new packets, each containing one get-well card, one birthday card, and one anniversary card.

What is the least number of packets A, B, and C that must be used to accomplish this? How many new packets wi]l be made?

Solution: Let a, b, c, be the number of packets of types A, B, C respectively, needed for the stated purpose. Since the number of cards of each kind must be the same,

$$3a+2b+5c=a+3b+4c=7a+b+2c.$$

But the total number of cards equals three times the number of any one type of card. Therefore

$$11a+6b+11c=3(3a+2b+5c),$$

or

$$a=2c.$$

Also

$$11a+6b+11c=3(7a+b+2c)$$

or

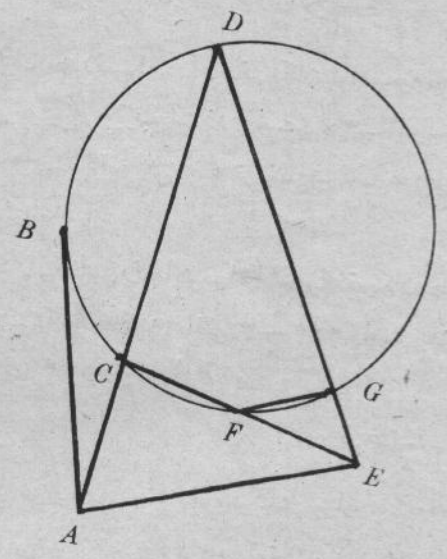
$$b=5c,$$

(after replacing a by 2c). Therefore $a:b:c=2:5:1$, whence the least number of packets needed is 2 of A, 5 of B and 1 of C. This results in

$$3(2)+2(5)+5(1)=21$$

of each kind of card, or 21 new packets.

Problem 57: In Fig. 3, AB is tangent to the circle at B. D is any point on the circle, and E is taken so that AE=AB. $\overline{AD}$ and $\overline{ED}$ intersect the circle at C and G respectively. $\overline{CE}$ intersects the circle at F. Prove $\overline{FG} \parallel \overline{AE}$.



Solution: Since AD/AB=AB/AC, and AB=AE, then AD/AE=AE/AC. Now $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ are sides of Δ AEC, and $\angle$DAE is the included angle of each of these pairs of sides. Therefore $\Delta ADE \sim \Delta AEC$, and $m\angle CEA = m\angle D$. But $m\angle GFE = m\angle D$, because each angle is the supplement of $\angle$GFC. Hence $m\angle CEA = m\angle GFE$, and thus $\overline{FG} \parallel \overline{AE}$.