

دوره ششم: شماره ۳، شماره مسلسل: ۵۹ آبان ۱۳۴۸

۶۵	عبدالحسین مصحفی	روش آموزشی فاطح
۶۶	عارف‌قلی نبا	بررسی کتاب، اندازه‌گیری زمان
۶۷	ترجمه: جعفر آفایانی چاوشی	خیام و اندازه‌های اصم
۶۸	ترجمه: محمودی مجد آبادی	گروههای دوری
۷۳	ترجمه: مصحفی	مقادمات آمار
۷۴	خطاء الله بزرگ‌ترینها	خواص شیمیائی ماده
۷۸	احمد شرف الدین	کاربرد اثک قضیه در تعیین مقاومت داخلی مواد
۷۹	محمد‌مهدوی	محاسبه مجموع توانهای مشابه اعداد طبیعی
۸۲	احمد قاضی‌زاده	گسترش و تعمیم مسئله اثک و آنها
۸۶	ابوالفضل فتح‌النذرزاده	قضیه‌های در مذکور
۸۸	هوشمنگ‌شهریزاده	درسی از اثک
۹۳	ترجمه	چکونگی حل ساده مسائل ریاضی
۹۶	«	راهنمای حل مسائل لرستانی هندسه
۱۰۱	ترجمه: داویدریجان	حد مسئله جالب و حل آنها
۱۰۵	—	حل مسائل یکان شماره ۵۸
۱۲۱	—	مسئل برای حل
۱۲۵	ترجمه: داویدریجان	دادستانهای ریاضی
۱۲۶	—	روضیح درباره‌های شعر خواجه نصیر
۱۲۷	شمس الدین رستمی	جدول اعداد
۱۲۸	—	Problems & Solutions



تأسیس: بهمن ۱۳۴۳

هر سال ده شماره منتشر می‌شود
دوره ششم - شماره دوم - شماره مسلسل: ۵۹
آبان ۱۳۴۸

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: عبدالحسین مصطفی
مدیر داخلی، داود مصفی
نشانی اداره:
تهران، خیابان لالهزارنو، نزدیک شاهرضا، شماره ۸۱
نشانی پستی: صندوق پستی ۲۶۶۳
تلفن اداره: ۳۳۳۱۸۱
وجه اشتراک برای هر دوره ۲۰۰ ریال
(برای کشورهای خارج به اضافه هزینه پست)
حساب بانکی: جاری ۳۰۹۵ شعبه لالهزارنو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume VI, number 2, Nov. 1969

subscription: \$3

TEHERAN . P.O. B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

کتابفروشی فخر رازی

تهران - خیابان شاهزاد - تلفن: ۳۰۴۳۲۰
محل فروش انتشارات یکان

دوره جلد کردۀ یکان

۵ شماره دوره پنجم مجله یکان در یک جلد
صحافی شده و در دفتر مجله برای فروش موجود
است.

بها: ۳۰۰ ریال

توجه، توجه

از اشخاصی که نقداً و یا بوسیله حواله وجهی به حساب
بانکی مجله ریخته اند تقاضا می‌شود مراتب را به دفتر مجله
اطلاع دهنده. زیرا تاکنون وجودی به حساب بانکی مجله
ریخته شده است بدون آنکه برای اداره مجله معلوم شود که وجه
مزبور از طرف چه شخصی پرداخته شده است.

تقاضا از مشترکان یکان

از مشترکان یکان تقاضا می‌شود به مندرجات چاپ شده
روی پاکت لفاف مجله توجه فرمایند.
به مشترکانی که دوره اشتراک آنان تمام شده بود توسط
کارت پستی اطلاع داده شد تا چنانچه مایل باشند اشتراک خود
را تجدید کنند تا مجله از این به بعدم برای ایشان ارسال شود.

یادآوری

کتابها یا نشریه‌هایی که زیر عنوان «کتابخانه یکان» در
مجله نامبرده می‌شوند فقط برای معرفی است.
اداره مجله در چاپ، انتشار یا فروش این نشریات
هیچگونه دخالتی ندارد.
کسانی که به خرید یا تهیه کتابها و نشریه‌های مزبور
مایل باشند می‌توانند مستقیماً به ناشر آن مربوط مراجعه کنند.

فروشگاه بزرگ (شماره ۲)

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

خیابان شاهرضا، مقابل در خروجی دانشگاه

محل فروش مجله و سایر انتشارات یکان

روش آموزشی قاطع

در آموزش محتوی معین یک درس به فرد یا به افرادی ، دو عامل مؤثر دخالت دارد : استعداد شاگرد ، وجود معلم و روشنی که وی بکار می برد . نه تنها شاگردان استعدادهای متفاوت دارند ، بلکه معلمان هم در بکار بردن روش معین و تطبیق آن با استعداد شاگردان دارای استعدادهای مختلف می باشند .

آیا روش آموزشی وجود دارد که در هر زمان و برای هر استعداد قابل اعمال باشد و ارجحیت آن بردیگر روشها قاطعیت داشته باشد ؟ مسلماً نه !

معیار سنجش در ارزشیابی روشها ، وصول بهتر و زودتر به هدفهای آموزشی است . اما به مقتضای زمان که متغیر اساسی در تحولات تمدن بشری است هدفهای آموزشی تغییر می کند و به تبع آن محتوی مواد آموزشی دگرگون می گردد و تجدید نظر در روشهای آموزشی لازم می آید .

تعجب آور است که بعضی افراد (و فعلاً بعضی مؤسسات خصوصی) حاضر به قبول روشهای نوادر آموزش نیستند . اینان زمانی روشی را انتخاب کرده و در بکار بردن آن خود را موفق دیده اند و اکنون که هدفهای آموزشی و مهمنتی ان ابزار کار در آموزش ، یعنی کتاب درسی ، دستخوش تحول اساسی شده است تصور می کنند که روش انتخابی آنان کماکان موفق می باشد .

بعضی معلمان که قبلاً در کار خود موفق بوده اند و این خود برای آنان تشویقی بوده تا با علاقه بیشتر کار کنند ، بعدها که احساس می کنند محیط درس ایشان کسالت آور شده و شاگردانشان توفیقی بدست نمی آورند علت آنرا کهولت سن و سالهای دامامت در تدریس تصور می کنند . در صورتی که علت اساسی اصرار آنان در حفظ روش ثابت بوده است . بقیه پائین صفحه بعد

بررسی کتاب

اندازه‌گیری زمان

تألیف: پروفسور ف. زاویسکی. ترجمه: مهدی تجلی پور

از سری کتابهای جیبی صدف

۲۵۰ صفحه - ۴۵ ریال

کشاورزی و سفالسازی را نمی‌شناستند و نمی‌توانند گذشتن زمان را درک کرده و یا به فکر محاسبه آن باشند. در این کتاب نیز مانند تمام کتابهای دیگر نوشته شده درباره زمان، بدون اینکه نویسنده حتی بطور ضمنی از تعریف زمان اظهار عجزی کرده باشد، درک آن را با گذشتن زمان بیان کرده است. تنها کار او این است که درک گذشت زمان را خیلی شیرینتر از خود درک زمان بیان می‌کند. پس به ناقار با تقویم سروکار پیدا می‌کند.

ما از زمان هیچ نمی‌دانیم. به همین دلیل نیز درباره آن بیشتر بحث هی کنیم.

آنچه از زمان می‌دانیم این است که گذشت آن را به وسیله دگر گوئیها در می‌یابیم. این، همه شناخت ما از زمان است. زاویسکی این مفهوم را به سادگی بیان می‌کند: «هم اکنون در استرالیای مرکزی، جنگلهای استوایی آندونزی و آمریکای جنوبی اشخاصی پیدا می‌شوند که هنوز

بقیه از صفحهٔ قبل

امروزه علوم و بالاخص ریاضی از دید تازه‌ای مورد بررسی واقع می‌شوند و ریاضی جدید در محیط‌های آموزشی گسترش می‌یابد. بسیار امکان دارد که چند سال دیگر تحول اساسی تری انجام گیرد و برای عرضه ریاضی نحوه دیگری انتخاب گردد. در آموزش ریاضی باید روشی بکار برد که محصلین در هر حال آماده درک هر نوع بیان ریاضی باشند، به عبارت بهتر فکر ریاضی در آنان پرورش داده شود.

کتابهای ریاضی درسی که هم اکنون در دستگاه‌های اجرایی می‌شوند، بر اساس روش مزبور تأثیرگذاری می‌کنند و در کشورهای پیشرفته‌هم فعلاً همین روش مورد توجه می‌باشد.

(از نتیجه کار «کنگره آسیایی» بحث و تجدید نظر در برنامه‌های ریاضی ابتدائی) که اسفندماه گذشته در ژاپن برگزار شده معلوم شده است که در بین کشورهای آسیایی، ایران اولین کشوری است که روش مزبور را در کتابهای درسی خود وارد کرده است، بعد از آن، ژاپن و فیلیپین در شرف انجام این کار می‌باشند).

علمایان و مؤسسه‌هایی که به همراه زمانه پیش‌می‌روند و از نوسازی و نوآوری در روش‌های خود بیمی ندارند و روش‌های تازه را با حسن نیت مورد آزمایش قرار داده بکار می‌برند، همواره دارای روش نو می‌باشند.

عبدالحسین مصححی

این همه آن چیزی است که بیان ساده‌آنها با تمام پیچیدگیشان آسان به نظر نمی‌رسد.

علم فیزیک جدید با مشکلات و پرسش‌های فراوانی روبروست
آیا می‌توان عمر خورشید و سایر ستارگان را معین کرد؟
آیا عمر خورشید بیش از عمر زمین است یا بر عکس؟ یا
زمین خورشید هر دو دوریک زمان به وجود آمدند؟
آیا وضع و ساختمان ستاره‌ها همیشه به صورت امر ورزی
بوده یا تغییر و تحول فراوان دیده‌اند؟
آیا ستارگان به تدریج سرد می‌شوند؟
این و همه پرسش‌های مشابه بودند که بشر را به ناجار
نه تنها در زمان آینده بلکه در گذشته نیز به حیرت و تفکر
وامی داشت. نمونه‌ای از نتیجه این اندیشه‌ها و پیشرفت رامی‌توان
چنین دریافت کرد:

«مطالعات زیستی دورانهای گذشته نشان می‌دهد که تاریخ
ظهور انسان روی زمین از ۵۰۰ هزار سال تجاوز نمی‌کند و
حال آنکه تاریخ پیدایش حیات به یک میلیارد سال می‌رسد»
خیال انسکیزی چنین تصوری از اندازه‌گیری، وقتی
ظاهر می‌شود که درک مرد استرالیای مرکزی یا جنگلهای
استوایی اندونزی را از زمان با این ادراک مقابله می‌کناریم.
امروزه روش‌های شناخته شده است که به وسیله آن
می‌توانند وقایع تاریخ را به طور دقیق باز شناسند و طول عمر
زمین و خورشید و ستارگان را تا دهها میلیارد سال حساب
کنند. بهمان نسبت فاصله زمانهای فوق العاده کوتاه را که به
میلیارد ثانیه می‌رسد حساب می‌کنند. سیر ذرات ماده قابل
محاسبه بوده و زمان ترکیب و تشکیل مولکولها را می‌توان
ثبت کرد.

هرراه سریعت‌رین پدیده‌ها، دستگاههای اندازه‌گیری
محاسبه می‌کنند و این عمل با چنان دقیقی صورت می‌گیرد که
گوئی محاسبه زمان بدون تأخیر صورت گرفته است.

کتاب اندازه‌گیری زمان در ۱۷ فصل به شرح زیر تنظیم
شده است،

۱- زمان و سالنامه.

۲- چگونگی اندازه‌گیری در زمانهای بسیار قدیم.

بقیه پائین صفحه ۷۲

- آغاز و انجام هر فرایندی تعویم آن فرایند است.

این همه آن چیزی است که در این کتاب پس از ذکر تاریخچه تعویم با جمله زیر نتیجه گیری شده است که همانا تعریف دقیق تعویم است:

«آنچه حائز کمال اهمیت است این است که تعویم بتواند برای همیشه موقع معینی را اعلام کند. شاید مبدأ یا مأخذ آن چندان مهم نباشد.

اما به تدریج تکنیک‌ها واقوت می‌گیرد. اندازه‌گیری زمان از ساعتهای آفتابی، شنبه، شمعی، آبی به ساعتهای ماشینی تحول می‌یابد. علم جدید نیازمند دقنهای بیشتری از اندازه‌گیری است. اساساً اگر دقت اندازه‌گیری را از دانش نوین بازنستانیم هیچ چیز برایش باقی نخواهد ماند. ذکر این مسئله خود عامل اصلی پیشرفت علوم دقیقه است.

قرن بیستم چهره همه چیز را عوض می‌کند. بمرای اندازه‌گیری زمان معیارهای اتمی بیش از همه تحول در علوم را نشان می‌دهد.

«وزن مخصوص آب در ستاره مصاحب شعرای یمانی ۳۰۰۰۰ مرتبه بیشتر از وزن مخصوص آن در کره زمین و بیشتر از ۱۰۰۰ مرتبه در خورشید است. اینجاست که تغییرات شدت نوسانات مولکولی آشکار می‌شود. آونگی که در دقیقه یک بار می‌زند در آنجا ۱۴۵ مرتبه نوسان خواهد کرد».

می‌بینم تکنیهای تکامل می‌یابند که میلیونیم ثانیه را اندازه می‌گیرند. این نیازمند دانش جدید به زمانهای بسیار کوتاه و اندازه‌گیری آنها را نشان می‌دهد. ولی آیا می‌توان به اندازه‌گیری میلیارد ثانیه اکتفا کرد؟ این است که زاویسکی می‌گوید:

«.... این تحقیقات هنوز ناکافی است. در بعضی از شرایط مسئله اندازه‌گیری به قدری اهمیت دارد که شناختن روش‌های اندازه‌گیری دقیقتر را می‌توان یک کشف بزرگ نامید. دستگاهی که بتواند فاصله زمانهای بسیار کوتاهتر از این را اندازه‌گیرد می‌تواند زمانگیر گفته شود نه اندازه‌گیر نده زمان. یعنی به سرعت زمان حرکت می‌کند».

این تکنیکها نه تنها ما را در آینده بلکه در گذشته نیز می‌برد. این سر برگی است که نهفته در راز بزرگتر است: همه عناصر پایدار نیستند. با مطالعه تبدیل آنها به یکدیگر می‌توان عمر سنگهای زمینی و سماوی، آثار تاریخی و باستانی را اندازه‌گیری کرده به گذشته‌های بسیار دوری مسافرت کرد.

خيام و اندازه‌های اصم

(رساله‌ای که توسط دکتر علیرضا امیر معز استاد ریاضی دانشکده تکنولوژی تکزاس به کنگره بین‌المللی ریاضیدانان، مسکو، اوت ۱۹۶۶، ارائه شده و بعد در مجله «Scripta Mathematica» چاپ شده است.)

ترجمه: جعفر آقایانی چاوشی

فرض می‌کنیم n عددی باشد صحیح و مثبت. برای اینکه AB را به n قسمت متساوی تقسیم کنیم از A خط دلخواهی رسم می‌کنیم و روی آن نقاط A_1, A_2, \dots, A_n را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$$

را به B وصل A_n
می‌کنیم و از نقاط A_1, A_2, \dots, A_{n-1} و A_nB خطوطی موازی با
رسم می‌کنیم تا خط AB را به ترتیب در
نقاط B_1, B_2, \dots, B_n قطع کنند. به سادگی می‌توان ثابت کرد که:

$$AB_1 = B_1B_2 = \dots = B_{n-1}B_n$$

اثبات حکم بالا در اغلب کتابهای هندسه اقلیدسی مذکور است و ما از بیان آن صرف نظر می‌کنیم.

۲ - تعریف (خيام). فرض می‌کنیم $\{A_n\}$ و

دورشته مقادیر (قطعه خطها) باشند و فرض می‌کنیم رشته $\{B_n\}$

از عده‌های صحیح وجود داشته باشد بقسمی که:

$$A_{n+2} = A_n - m_n A_{n+1}$$

تنها وقتی برقرار باشد که داشته باشیم:

$$B_{n+2} = B_n - m_n B_{n+1}$$

: $n = 1, 2, \dots$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1}$$

در این تعریف رشته $\{m_n\}$ می‌تواند محدود یا نا-

عمر خیام در اثر خود در رسالة فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس، از تعریفی که اد‌کسوس (Eudoxus) برای تناسب بکار برده و از اینکه اقلیدس موضوع همه‌ی را در قضایای مربوط به تساوی نسبتها نادیده‌انگاشته نارضایتی خود را اظهار داشته است. او سپس تعریفی را راهنمایی می‌دهد و بر اساس آن کوشش می‌کند تا حکمی را در مورد تناسب بین بعضی قطعه خطهای یک مثلث ثابت بکند. اما به علت اینکه وی با علام جدید سروکار نداشته این اثبات ناقص انجام گردیده است. در واقع باید گفت که تعریف عمر معادل یکی از تعاریف ادکسوس می‌باشد.

غیاث الدین ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیام ریاضیدان و منجم و شاعر ایرانی، حدود سال ۱۰۵۰ در نیشاپور از شهرهای ایران متولد شده است. وی در حل یک مسئله ترسیمی هندسه با معادله‌ای درجه سوم مواجه گشته که با توصل به مقاطع مخروطی به حل آن موفق گردیده است. هر چند که تاریخ تحریر این رساله معلوم نیست اما مسلم آنست که خیام «اصول اقلیدس» و «مقاطع مخروطی آپولونیوس» را بطور کامل مطالعه و بررسی کرده و به تحریر «رساله در شرح مشکلات مصادرات اقلیدس» اقدام کرده است. بنظر می‌رسد که این یکی از آخرین رساله‌هایش باشد. در این رساله عده‌های اصم توسط رشته‌هایی نامحدود معرفی می‌شوند و این در واقع جانشین اصل ادکسوس یا اصل ارشمیدس گردیده است که هر یکی از اینها نوعی بیان اصل پیوستگی می‌باشد.

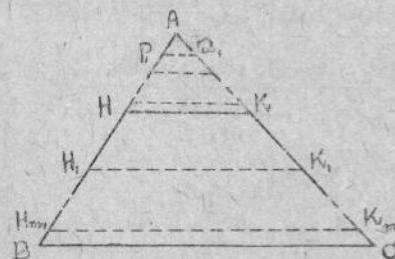
در این یادداشت تعریف و اثبات حکمی را که خیام انجام داده و فعلاً در بسیاری از کتابهای مقدماتی هندسه اقلیدسی به همان صورت بیان می‌شود بیان آوری می‌کنیم. نخست روش ترسیمی تقسیم یک قطعه خط را به n قسمت متساوی متذکر می‌شویم که n عددی است صحیح و مثبت.

۱- ترسیم: قطعه خط AB را در نظر می‌گیریم.

محدود باشد.

۳- حکم - مثلث ABC و نقطه H واقع بر قطعه خط AB را در نظر می‌گیریم. از H موازی با BC رسم می‌کنیم که AC را در K قطع می‌کند. خواهیم داشت:

$$\frac{AH}{HB} = \frac{AK}{KC}$$



برهان - بیدون آنکه از کلیت کاسته شود H را چنان انتخاب می‌کنیم که $AH < HB$ باشد. نقاط H_1 و H_2 و ... و H_{m_1} را چنان در نظر می‌گیریم که:

$$AH = HH_1 = \dots = H_{m_1-1}H_{m_1}$$

و H_2 و ... و H_{m_1} باشد. از نقاط H_1 و H_2 و ... و H_{m_1} خطوطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا AC را به ترتیب در K_1 و K_2 و ... و K_{m_1} قطع کنند. بنابر آنچه که در بند ۱ گفته شد این نقاط وجود دارند و داریم:

$$AK = KK_1 = \dots = K_{m_1-1}K_{m_1}$$

فرض کنیم $AH = A_1$ و $HB = A_2$ و همچنین $AK = B_1$ و $KC = B_2$ و بالاخره $H_{m_1}B = A_3$ و $K_{m_1}C = B_3$ ملاحظه خواهیم کرد که

$$A_3 = A_1 - m_1 A_2$$

تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$B_2 = B_1 - m_1 B_2$$

دو حالت باید در نظر بگیریم.

(۱) اگر $A_2 = B_2$ باشد در این صورت B_3 بوده و داریم:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ یا } \frac{AH}{HB} = \frac{AK}{KC}$$

(۲) اگر $A_2 \neq B_2$ باشد در این صورت نقاط P_1 و P_2 و ... و P_{m_2} را روی AH چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$AP_1 = P_1P_2 = \dots = P_{m_2-1}P_{m_2}$$

$$P_2P_{m_2} = \dots = P_{m_2-1}P_{m_2} \text{ و } P_{m_2}H < H_{m_1}B$$

خطوطی که از P_1 و ... و P_{m_2} موازی با BC رسم شوند

۴- حکم عکس - فرض کنیم K نقطه‌ای از ضلع AB و

نقطه‌ای از ضلع AC از مثلث ABC باشد بقسمی که داشته باشیم:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AH}{HC}$$

در این صورت خط KH با ضلع BC موازی می‌باشد.

از اثبات حکم اخیر صرف نظر می‌کنیم.

گروههای دوری (Cyclic Groups)

ترجمه: محمود محمودی مجد آبادی
دانشجوی ریاضی دانشسرای عالی

Edward J. Zoll
The Math. Student Journal

(توضیح: اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر عدد m برابر با r باشد، معادل عدد a در مدول m عبارتست از r . مثلاً معادلهای عدددهای ۵ و ۶ و ۷ و ... در مدول ۶ به ترتیب برابر با ۵ و ۰ و ۱ و ... می‌باشد.)

ممکن است مضربهای متولی هر یک از اعضای جدولها را در مدول مربوط بدست آورد و جدولی تشکیل داد. در این جدول که تشکیل شود در هر سیوون وقتی صفر بدست آمد بعد از آن عدددهای بالای آن به ترتیب تکرار می‌شوند. مثلاً جدول مربوط به مضربهای اعضای جدول ۳ در مدول ۶ چنین می‌شود:

عضو	۰	۱	۲	۳	۴	۵
مضرب اول	۰	۱	۲	۳	۴	۵
دوم	۰	۲	۴	۰	۲	۴
سوم	۰	۳	۰	۳	۰	۳
چهارم	۰	۴	۲	۰	۴	۲
پنجم	۰	۵	۴	۳	۲	۱
ششم	۰	۰	۰	۰	۰	۰

جدول ۴

در جدول بالا اگر مضارب را متولیاً ادامه دهیم عدددهای واقع در هر سیوون به ترتیب بالا تکرار می‌شوند.
مرتبه یک عضو x از یک گروه جمعی عبارتست از کوچکترین عدد صحیح n بقسمی که در مدول مربوط داشته

در مقاله‌ای که قبلاً چاپ شد ماهیت دستگاههای ریاضی که گروه شناخته می‌شوند معلوم گردید. بطور خلاصه، گروه عبارتست از مجموعه‌ای که عملی داخلی دوتائی در آن تعریف شده نسبت به این عمل شرکت‌پذیر و دارای عنصری اثر باشدو به علاوه هر عنصر آن دارای عنصر معکوس باشد. یک راadsاًde تعیین گروههای محدود بکار بردن مجموعه $\{1 - m, \dots, 0, 2, 4\}$ و جمع در مدول m می‌باشد، برای مثال گروههای دوتائی، سه‌تایی و شش‌تایی بوسیله جدولهای زیر نموده می‌شوند.

+	۰	۱	۲	+	۰	۱
۰	۰	۱	۲	۰	۰	۱
۱	۱	۲	۰	۱	۱	۰
۲	۲	۰	۱			

جدول ۲

+	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۰
۲	۲	۳	۴	۵	۰	۱
۳	۳	۴	۵	۰	۱	۲
۴	۴	۵	۰	۱	۲	۳
۵	۵	۰	۱	۲	۳	۴

جدول ۳

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

جدول ٥

هر تبة صفر برابر یک است ($0 = 0 \times 1$)، مرتبه یک برابر است:

بنایه آنچه که قبلاً گفته شد مرتبه ۲ باید ۱ باشد، بدیهی است که مرتبه ۲ برابر با ۲ است:

$$1 \times 2 = 2, \quad 2 \times 2 = 0$$

چون $(mod 4) = 0$ یعنی ۳ قرینه یک است پس مرتبه ۳ همان مرتبه ۱ یعنی ۴ است . عدد های ۱ و ۳ دارای مرتبه ای بر ایران مرتبه گروه آن دس مولدهای این گروه می باشند.

تاجیک اولر

مسئله‌ای که در باره گروههای دوری مطرح می‌شود عبارت از این است که: یک گروه دوری دارای چند مولد می‌باشد؟ جواب مسئله را می‌توان از راه استقراء بدست آورد، اما در این مورد استفاده از کارهای لئونارد اوئلر و تابع φ اوئلر اهمیت دارد.

عدد ۱۲ را در فظر می‌گیریم و با آن و با هر یک از عده‌های طبیعی کوچکتر از ۱۲ زوجهای زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$(۱۱ \text{ و } ۱۲), \dots, (۱۲ \text{ و } ۳) \text{ و } (۱۲ \text{ و } ۲), \dots, (۱ \text{ و } ۱۲)$$

برگشته بین مقسم علیمه مشترک هر یک از این زوجها چنین

۱۰۷

$$\begin{array}{ll}
 (1+12)=1 & (2+12)=2 \\
 (3+12)=3 & (4+12)=4 \\
 (5+12)=5 & (6+12)=6 \\
 (7+12)=7 & (8+12)=8 \\
 (9+12)=9 & (10+12)=10 \\
 (11+12)=11 &
 \end{array}$$

تعداد زوجها، که بزرگترین مجموعه مشترک آنها یک

باشیم : $nx = 0$. (مقصود از nx حاصل جمع n مرتبه x یعنی $\dots + x + x + \dots$ می باشد) . مثلاً مرتبه های اعضای جدول ۳ در مدول ۶ به ترتیب عبارتند از ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۶ و ۶ . مرتبه یک گروه تعداد عناصر آن می باشد ، و می توان ثابت کرد که مرتبه هر عضو گروه مقسوم علیه از مرتبه آن گروه می باشد . برای جمع در مدول ۶ مرتبه های اعضاء ۱ ، ۶ ، ۳ ، ۲ و ۶ می باشند که همه آنها مقسوم علیه از ۶، مرتبه گروه ، می باشند . جدول ۲ را در نظر می گیریم؛ مرتبه گروه آن ۳ است و مرتبه اعضای آن یعنی ۵ و ۱، ۰ و ۳ می باشد که هر کدام از این اعداد مقسوم به ترتیب ۱ و ۳ می باشد . از مرتبه گروه یعنی ۳ می باشند . علیه،

اگر در جدول ۴ دقیق شوید می‌توانید تقارنی را در مرتبه‌های اعضای آن مشاهده کنید؛ عده‌های ۱ و ۵ از مرتبه ۶ می‌باشند و داریم $1 + 5 = 6$ ، عده‌های ۲ و ۴ از مرتبه ۳ می‌باشند و داریم $2 + 4 = 6$ ، بطور کلی می‌توانید در یا باید که مرتبه قرینه یک عضو برابر است با مرتبه خود آن عضو. مثلا در مدول ۳ عدد ۲ قرینه عدد یک است و ملاحظه می‌کنیم که مرتبه عدد ۲ برابر است با ۳ و مرتبه عدد یک نیز برابر با ۳ می‌باشد. به این ترتیب بدون آنکه جدول جمع مدول ۱ را تشکیل دهیم می‌توانیم مرتبه‌های عده‌های ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ را معلوم کنیم در صورتی که بدانیم مرتبه‌های عده‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ به ترتیب عبارتند از ۱۲ و ۶ و ۴ و ۳ و ۱۲. (مرتبه عدد صفر چیست؟)

موجها

اهمیت خاص یک گروه تعیین اعضایی از آنست که با خود گروه هم مرتبه باشند. در گروه جدول ۳ این اعضاء عبارتند از ۱ و ۵ که مرتبه آنها ۶ است. در گروه جمعی مدول ۱۲ این نوع اعضاء عبارتند از ۱ و ۵ و ۷ و ۱۱ که مرتبه همه آنها می باشد. ۱۲

در هر گروه چنین عضوهایی را که مرتبه آنها با مرتبه گروه برابر باشد) مولدهای آن گروه می‌نامند . گروهی که دارای مولد باشد گروه دوری نامیده می‌شود . هر گروه دوری محدودی باشد : اگر m عددی طبیعی باشد هر گروه شامل m عضو درمدول m دوری است . دزاین گروه عدد یک و همچنین $m - 1$ از جمله مولدها می‌باشند . هر گاه که عدد طبیعی m انتخاب می‌شود می‌توان گروهی دوری در مدول m بدست آورد . گروه چهارتایی (یا گروه مرتبه ۴) چنانچه در جدول ۵ نشان داده شده دوری می‌باشد :

در باره گروههای دوری گفتنی بسیار است از جمله :
 ۱- اگر گروهی از مرتبه بینهایت باشد با مجموعه
 عدهای صحیح ایزو مورف است و مولدهای آن $+ 1$ و
 می باشد .

۲- اگر گروهی از مرتبه محدود باشد (چنانچه
 که در این مقاله مورد بحث واقع شد) تحت عمل جمع در مدول

n با مجموعه $\{ 1 \dots n \}$ ایزو مورف
 می باشد .

۳- هر یک از اعضای یک گروه دوری محدود زیر
 گروهی دوری از آن گروه بدست می دهد . مثلا در مدول 6

$H = \{ (\text{جدولهای } 3 \text{ و } 4) \cup \text{عضو } 2 \text{ زیر گروه دوری } \}$ و $4 \text{ و } 2 \text{ و } 0$
 را و عضو 3 زیر گروه $\{ 3 \text{ و } 0 \}$ را تولید می کند .

بررسی کتاب (بقیه از صفحه ۶۷)

- ۳- ساعت ماشینی به کمک چرخ و آونگ .
- ۴- چرا ملوانان به ساعت دقیق احتیاج دارند .
- ۵- تعیین ، ضبط و اعلام زمان بطور دقیق .
- ۶- چگونه ساعتی را میزان می کنند .
- ۷- واحدهای اندازه گیری و نمونهای واحد .
- ۸- ساعت اتمی .
- ۹- واحدی برای سنجش زمانهای کوتاه .
- ۱۰- مطالعه پدیده هایی که تغییرات سریع دارند .
- ۱۱- اندازه گیری هزارم ، میلیونیم ثانیه (دستگاه کاتودی)
- ۱۲- میلیونیم و میلیاردیم ثانیه را چگونه اندازه می گیرند .
- ۱۳- ساعت هزاره ها .
- ۱۴- سن صور مختلف زندگی روی زمین .
- ۱۵- آیا می توان عمر خورشید را معین کرد .
- ۱۶- پیشرفت علوم در تحقیقات فضایی .
- ۱۷- زمان را چگونه در اختیار می گیرند .

است یعنی به صورت $1 = \varphi(12) \text{ و } x = \varphi(12)$ می باشد φ را بذست
 می دهد و مشاهده می کنیم که برای تعیین $\varphi(6)$ ملاحظه می کنیم که :

$$1 = 1 = \varphi(12) \text{ و } 1 = 2$$

$$3 = 3 = \varphi(12) \text{ و } 3 = 2$$

$$5 = 5 = \varphi(12)$$

پس : $2 = \varphi(6)$

بطور کلی تابع φ اول در مورد عدد طبیعی n عبارتست
 از تعداد عدهای طبیعی کوچکتر از n که هر کدام با n
 مطابین باشند . [دو عدد مطابین نامیده می شوند وقتی که
 بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها برایک باشد ، اول $1 = \varphi(12)$
 اختیار کرده است .]

رابطه تابع φ اول با گروههای دوری از این قرار
 است : اگر x مرتبه یک گروه دوری باشد تعداد مولدهای آن
 برابر با $\varphi(x)$ می باشد . چنانچه m مولدی از گروه عدهای
 $a_1 \text{ و } a_2 \text{ و } \dots \text{ و } a_n$ هریک با x مطابین باشند در این صورت
 عدهای $a_1 m \text{ و } a_2 m \text{ و } \dots \text{ و } a_n m$ نیز مولدهای از گروه
 مرتبه x می باشند .

قبلا ملاحظه کردیم که $4 = \varphi(12)$ ، یکی از مولدهای
 گروه مرتبه ۱۲ عددیک است و عدهایی کوچکتر از ۱۲ که با
 ۱۲ مطابین اند عبارتند از $1 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 11 \text{ و } 13$ پس چهار مولد
 گروه مزبور عبارتند از :

$$1 \times 1 = 1 \quad , \quad 5 \times 1 = 5$$

$$2 \times 1 = 2 \quad , \quad 11 \times 1 = 11$$

اگر مضریهای هریک از چهارمولد بالا را در مدول ۱۲

بدست آوریم ملاحظه خواهیم کرد که :

$$1 \times 1 = 1 \text{ ، } 5 \times 1 = 5 \text{ ، } 7 \times 1 = 7 \text{ ، } 11 \times 1 = 11$$

$$1 \times 11 = 11 \text{ ، } 5 \times 11 = 5 \text{ ، } 7 \times 11 = 7$$

$$11 \times 11 = 1$$

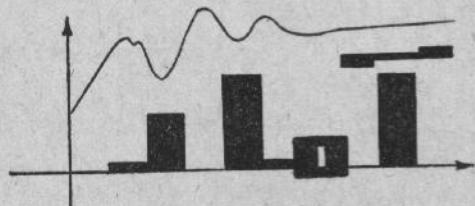
$$1 \times 5 = 5 \text{ ، } 5 \times 5 = 1 \text{ ، } 7 \times 5 = 11 \text{ ، } 11 \times 5 = 7$$

$$1 \times 7 = 7 \text{ ، } 5 \times 7 = 11 \text{ ، } 7 \times 7 = 1 \text{ ، } 11 \times 7 = 5$$

همه مولدهای گروه می باشند .

در حقیقت ، اینها چهار مولد از گروه ضربی (مدول ۱۲)
 می باشند .

Initiation à la
STATISTIQUE
Ière B . D .
par : M . HAGÈGE
ترجمه : ع . مصطفی



◦ دنباله از شماره پیش ◦

سال چهارم با میانگین m_4 :

$$J_4, F_4, \dots, D_4$$

۱- روش میانگینهای ماهانه (فرض جمعی)

الف- نخست میانگین داده های تمام ماههای ثانویه، بعد تمام ماههای فوریه و غیره را حساب می کنند :

$$\bar{J} = \frac{J_1 + J_2 + J_3 + J_4}{4}$$

$$\bar{F} = \frac{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}{4}$$

$$\bar{D} = \frac{D_1 + D_2 + D_3 + D_4}{4} \dots$$

بعد میانگین معمولی را تعیین می کنند :

$$m = \frac{1}{48}(J_1 + F_1 + \dots + D_1 + J_2 + F_2 + \dots +$$

$$+ D_2 + J_3 + \dots + D_3 + J_4 + \dots + D_4) = \\ = \frac{1}{12}(\bar{J} + \bar{F} + \dots + \bar{D})$$

بالاخره انحرافها را حساب می کنند :

$$\bar{J} - m, \bar{F} - m, \dots, \bar{D} - m$$

(مجموع انحرافها صفر است زیرا m در عین حال میانگین

\bar{J} و \bar{F} و ... و \bar{D} می باشد). نمودار این انحرافها تغییرات فصلی را آشکار می سازد.

حذف تغییرات فصلی به این ترتیب انجام می گیرد که از هر یک از داده ها انحراف مربوط به ماه نظیر را طرد می کنیم:

III - تغییرات فصلی

فعلا فرض می کنیم که داده های ماهانه را در اختیار داشته باشیم: (اگر حواسته باشند از روی داده های ماهانه مربوط به تعداد کمی از سالها حرکت درازمدت را بررسی کنند با محاسبه میانگینهای متحرك مرتبه ۱۲ داده های مزبور اثر تغییرات فصلی را خنثی می سازند در این باره بعداً صحبت خواهد شد).

مقصود ما این است که ابتدا تغییرات فصلی را معلوم سازیم و بعد آنها را حذف کنیم، به این معنی که برای بررسی بهتر مؤلفه های دیگر، حرکت حقیقی را از تأثیرات فصلی بر کنار داشته باشیم.

وصول به این مقصد بر حسب اینکه نوع جمعی یا نوع ضربی را در نظر بگیریم با دور و شیوه مختلف انجام می گرد: در یک روش نسبتی های عددی یعنی تفاوت ها را در نظر می گیریم و در دیگری نسبتی های هندسی را.

در این روشها که در زیر بیان می شوند فرض می کنیم که داده های ماهانه چهار سال متوالی را در اختیار داریم:

سال اول با میانگین m_1 :

$$J_1, F_1, Ma_1, Av_1, Me_1, Jn_1, Ag_1, S_1, O_1, N_1, D_1$$

سال دوم با میانگین m_2 :

$$J_2, F_2, \dots, D_2$$

سال سوم با میانگین m_3 :

$$J_3, F_3, \dots, D_3$$

الف - درصدهای :

$$\frac{J_1}{100} \cdot m_1, \frac{F_1}{100} \cdot m_1, \dots, \frac{D_1}{100} \cdot m_1$$

$$\frac{J_2}{100} \cdot m_2, \dots, \frac{D_4}{m_4}$$

را حساب می کنند و بعد از آن میانه درصدهای ژانویه، فوریه و ... را معلوم می کنند :

$$\mu(J), \mu(F) \dots, \mu(D)$$

اگر S مجموع این دوازده عدد غیر از ۱۲۰۰ باشد هریک از آنها را در $\frac{1200}{S}$ ضرب می کنند تا مجموع آنها برابر با ۱۲۰۰ گردد و از روی آن ضرایب ماهانه $(J'), \mu'(F), \dots, \mu'(D')$ بدست آید . تصحیح اخیر چنین توجیه می شود : دریک حالت مطلوب، باید از ضرب مثلث m_1 در ضرایب ماهانه، داده های ماهانه دست نخورده سال اول بدست آید :

$$J_1 = \frac{m_1 \times \mu'(J)}{100}, F_1 = \frac{m_1 \times \mu'(F)}{100}, \dots$$

در این صورت از تساوی :

$$J_1 + F_1 + \dots + D_1 = 12m_1$$

$$J_1 - (\bar{J} - m_1), F_1 - (\bar{F} - m_1), \dots$$

$$D_1 - (\bar{D} - m_1), \dots, J_4 - (\bar{J} - m_4), \dots$$

این عمل در میانگینهای سالانه تغییر نمی دهد زیرا مجموع انحرافها برابر با صفر است .

در روش میانگینهای ماهانه جز تغییرات فصلی، مؤلفه های دیگر در نظر گرفته نمی شوند ؛ و از این روش جز در موارد سریهای با حرکت درازمدت و با حرکت دورانی بسیار ضعیف، نتایج جالبی حاصل نمی شود .

ب- مثال: مصرف ماهانه انرژی الکتریک برای روشنائی خیابانهای یک شهر : طبق جدول پائین است
میانگینهای سالانه ترقی واضح مصرف را از یک سال به سال بعد نشان می دهد : حرکت دراز مدت قابل صرف نظر کردن نیست . انحرافهای تغییرات فصلی جالبی را نشان می دهند.
مقادیر بعد از طرد تغییرات فصلی، تغییرات ضعیفی را از یک ماه به ماه بعد نشان می دهند .

۳- روش نسبتهای میانگینهای سالانه (و تغییرات)

این روشها بر نوع ضریب مبتنی می باشند .

	J	F	Ma	Av	Me	Jn	Jl	Ag	S	O	N	D	مجموع	میانگین سالانه
۱۹۵۶	۱۵۹	۱۴۰	۱۳۸	۱۲۵	۱۱۶	۱۰۸	۱۱۲	۱۲۲	۱۳۵	۱۵۱	۱۶۳	۱۷۳	۱۶۴۲	۱۳۷
۱۹۵۷	۱۷۱	۱۵۵	۱۵۰	۱۳۵	۱۲۶	۱۱۸	۱۲۱	۱۲۱	۱۴۵	۱۶۰	۱۷۰	۱۸۲	۱۷۶۴	۱۴۷
۱۹۵۸	۱۸۳	۱۶۳	۱۶۰	۱۴۴	۱۳۵	۱۲۶	۱۲۹	۱۴۲	۱۵۶	۱۷۳	۱۸۴	۱۹۷	۱۸۹۲	۱۵۶
۱۹۵۹	۱۹۵	۱۷۴	۱۷۲	۱۵۶	۱۴۵	۱۳۶	۱۴۲	۱۵۳	۱۶۴	۱۸۰	۱۹۵	۲۰۸	۲۰۲۰	۱۶۸
جمع		۷۰۸	۶۴۲	۶۲۰	۵۶۰	۵۲۲	۴۸۸	۵۰۴	۵۴۸	۶۰۰	۶۶۴	۷۱۲	۷۶۰	۷۳۱۸
میانگینهای ماهانه	۱۷۷	۱۵۸	۱۵۵	۱۳۰	۱۲۸	۱۲۲	۱۲۶	۱۳۲	۱۵۰	۱۵۵	۱۷۸	۱۹۰		۱۵۲
انحرافات	+۲۵	+۶	+۳	-۱۲	-۲۴	-۳۰	-۲۶	-۱۵	-۲	+۱۳	+۲۶	+۳۸		
۱۹۵۶	۱۲۴	۱۲۴	۱۳۵	۱۳۷	۱۴۰	۱۳۸	۱۳۸	۱۳۷	۱۳۷	۱۳۸	۱۲۷	۱۲۵		
۱۹۵۷	۱۴۶	۱۴۹	۱۴۷	۱۴۷	۱۵۰	۱۴۸	۱۴۷	۱۴۶	۱۴۷	۱۴۷	۱۴۴	۱۴۴		
۱۹۵۸	۱۵۸	۱۵۷	۱۵۶	۱۵۶	۱۵۹	۱۵۶	۱۵۵	۱۵۷	۱۵۸	۱۶۰	۱۵۸	۱۵۹		
۱۹۵۹	۱۷۰	۱۶۸	۱۶۸	۱۶۸	۱۶۸	۱۶۹	۱۶۸	۱۶۸	۱۶۸	۱۶۹	۱۶۷	۱۷۰		

عرضهای نظیر این طولها روی خط حرکت دراز مدت
همان مقادیر ماهانه است که از روی خط حرکت
دراز مدت حساب می‌شوند :

$$T\left(\frac{1}{24}\right), T\left(\frac{3}{24}\right), \dots, T\left(3 + \frac{23}{24}\right)$$

این روش درصدهای

$$\frac{J_1}{100}, \frac{F_1}{m_1}, \dots$$

را با مقادیر زیر جانشین می‌کند :

$$\frac{J_1}{100 - T\left(\frac{1}{24}\right)}, \frac{F_1}{100 - T\left(\frac{3}{24}\right)}$$

و بعد مانند حالت اول عمل می‌شود .

۵ - نسبتها به میانگینهای متحرک

میانگین متحرک مرتبه ۱۲ :

$$\frac{J_1 + F_1 + \dots + D_1}{12}$$

با طول $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ ، یعنی با اول ژوئیه از اولین سال متناظر است :

همچنین میانگین متحرک :

$$\frac{F_1 + Ma_1 + \dots + D_1 + J_2}{12}$$

با طول $\frac{13}{24}$ یعنی با اول اوت سال اول متناظر می‌باشد ،

و غیره . برای تعیین میانگین متحرک نظریه ۱۵ ژوئیه (طول

$\frac{13}{24}$) نصف مجموع این دو میانگین متحرک اختیار می‌شود :

فرض می‌کنیم $\frac{13}{24}$ مقدار حاصل باشد .

در این روش درصدهای :

$$\frac{J_1}{100 - \frac{13}{24}}, \frac{Ag_1}{100 - \frac{15}{24}}$$

محاسبه شده و بعد عمل مانند حالت الف ادامه پیدا می‌کند .

نتیجه می‌شود که :

$$\mu'(J) + \mu'(F) + \dots + \mu'(D) = 1200$$

از تقسیم هر داده دست نخورده بضریب ماهانه نظیر

طرد تأثیرات فصلی انجام می‌گیرد :

$$\frac{J_1}{100 \mu'(J)}, \frac{F_1}{100 \mu'(F)}, \dots, \frac{D_4}{100 \mu'(D)}$$

ب مثال : با داده‌های جدول قبل داریم :

$$\frac{J_1}{100} = 100 \times \frac{159}{137} = 116 \dots$$

میانه‌ها عبارت می‌شوند از :

	J	F	Ma	Av	Me	Jn
()	116	103	102	91/5	84	81

Jl	Ag	S	O	N	D
82	90	99	109	117/5	125

مجموع این میانه‌ها برابر است با ۱۲۰۳ که خیلی

نزدیک به ۱۲۰۰ می‌باشد ، از ضرب در $\frac{1200}{1203}$ صرف نظر

می‌کنیم : طرد اثرات فصلی نتیجه می‌دهد :

$$100 \times \frac{159}{116} = 132, 100 \times \frac{140}{103} = 136 \dots$$

در این روش علاوه بر اثرات فصلی، مؤلفه‌های دیگر نیز تا اندازه‌ای در نظر گرفته می‌شوند : در اینجا J_1 را با m_1 مقایسه می‌کنیم در صورتی که باید مقایسه J_1 با m انجام گیرد .

اکنون دو روش دقیقتر را مذکور می‌شویم :

ج - نسبتها به «مقادیر ماهانه» حرکت دراز مدت»

فرض کنیم خط (یا منحنی) حرکت دراز مدت تعیین شده باشد : واحد انتخابی روی محور زمانها برابر با یک سال باشد، در این صورت مراکز ماهها دارای طولهای زیر می‌باشند :

$$\frac{1}{24}, \frac{3}{24}, \frac{5}{24}, \dots$$

خواص شیمیائی ماده

ترجمه و ترجمه از: عطاء الله بزرگ نیا

نمایش آرایش الکترونی اتمها

نشانه d و برای $=3$ نشانه زیرلایه f است . x معرف تعداد الکترون در زیر لایه است جدول فوق با استفاده از این نشانه ها آرایش الکترونی چند عنصر را نمایش می دهد. کاربری ویرگول ضروری نیست ، اما به منظور مقامایز کردن نشانه ها عمولاً بکار برده می شود .

برای آنکه نمایش اتمهای سنگین با این روش آسانتر شود . آرایش الکترونی اتم عناصر بی اثر را مبنا قرارداده و براین اساس آرایش الکترونی سایر عناصر را بنا می کنند . گازهای بی اثری که بیشتر مبنا قرار می گیرند عبارتند از : Xe ، Kr و Rn . به آرایش الکترونی این عناصر غالباً نام «هسته» می دهند و آنها را به شکلهای (Kr) و (Xe) و (Rn) نمایش می دهند . کلمه هسته در اینجا این مفهوم را می دهد که آرایش الکترونی این عناصر به عنوان بایه یا هسته اصلی برای سایر عناصر حساب می شود .

(B) قواعدی برای حل مسائل مربوط به نمایش آرایش الکترونی عناصر -

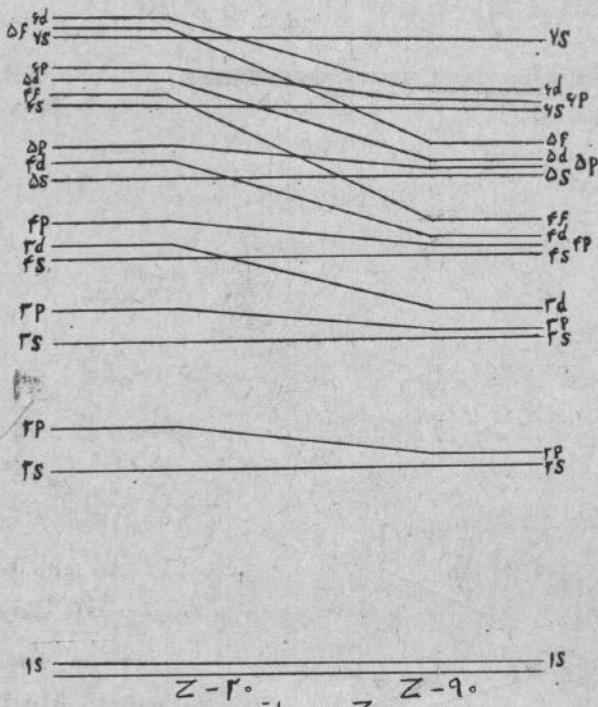
- برای دانستن چگونگی توزیع الکترونها در لایه های اصلی باید از جدول تناوبی استفاده کرد .
- برای تبیین دقیق تعداد الکترون در هر زیر لایه می توان از جدول زیر استفاده کرد . در این جدول اعداد داخل پرانتز که بعد از هر نشانه زیر لایه ، آمده است معرف عدد اکثر تعداد الکترون در این زیر لایه می باشد .

مقادیر n	
$K:$	$n=1$ $1S(2)$
$L:$	$n=2$ $2S(2)$ $2P(6)$ هسته نئون
$M:$	$n=3$ $3S(2)$ $3P(6)$ $3d(10)$ هسته آرگون
$N:$	$n=4$ $4S(2)$ $4P(6)$ $4d(10)$ $4f(14)$ هسته کربنیتون

(A) نمایش آرایش الکترونی بوسیله نشانه :
بالینکه به کمک اعداد کوانتمی می توان آرایش الکترونی عناصر را نشان داد ، نشانه های نسبتاً ساده تری نیز برای این منظور متداول شده است . در انتخاب این قبیل نشانه ها کیفیت طیفی عناصر نیز دخالت داشته است . با استفاده از فرمول کلی n^x در این عالم وضع الکترونها در اتمها مشخص می شود . در این فرمول دو حرف اول معرف اعداد کوانتمی $n=1$ و $n=2$ وغیره معرف کوانتم اصلی است و بوسیله اعداد 1 و 2 وغیره نشان داده می شود . حرف 1 معرف کوانتم ثانوی است و برای هر یک از مقادیر آن نشانه هایی قائل شده اند . مثلاً برای $n=1$ نشانه زیر لایه s ، برای $n=2$ این نشانه p ، برای $n=3$ نشانه d این عالم معرف آرایش الکترونی عنصر

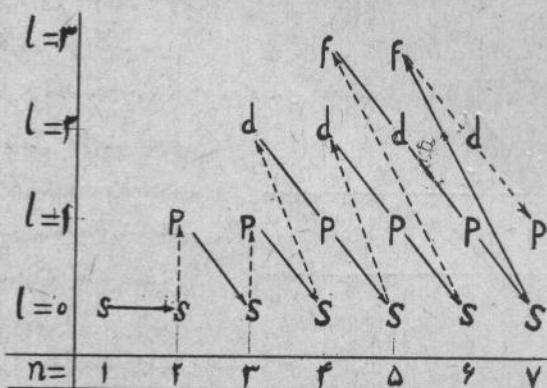
$1H$	$1S$
$2He$	$1S^2$
$3Li$	$1S^2$ و $2S$
$4Be$	$1S^2$ و $2S^1$
$5B$	$1S^2$ و $2S^1$ و $2P$
$6C$	$1S^2$ و $2S^1$ و $2P^1$
$9F$	$1S^2$ و $2S^1$ و $2P^5$
$10Ne$	$1S^2$ و $2S^1$ و $2P^5$
$11Na$	$1S^2$ و $2S^1$ و $2P^6$ و $1S$
$14Si$	$1S^2$ و $2S^1$ و $2P^6$ و $2S^1$ و $2P^1$
$18Ar$	$1S^2$ و $2S^1$ و $2P^6$ و $2S^1$ و $2P^6$
$20Ca$	$1S^2$ و $2S^1$ و $2P^6$ و $2S^1$ و $2P^6$ و $4S^2$
$21Sc$	$1S^2$ و $2S^1$ و $2P^6$ و $3S^2$ و $2P^6$ و $3S^2$ و $2P^6$ و $3d$

عناصر سنگین نشان می‌دهد. بطوری که در شکل می‌بینید انرژی نسبی بسیاری از زیر سطوح انرژی تا حدی با زیاد شدن عدد اتمی افزایش می‌یابد.



این آشفتگی به سبب تغییر مقدار بار مثبت هسته (عدد اتمی) و اثر آن روی الکترونهای لایه‌های پائین وزیر لایه‌ها و نتیجتاً اثر حرارتی آنها روی الکترونهای انتقال است که از هسته دور هستند.

شکل زیر ترتیب وارد شدن «واپسین» الکترون را در لایه‌های اصلی وزیر لایه‌هانشان می‌دهد و در حقیقت نتیجه استفاده از قواعد G_2 و G_3 می‌باشد.



ترتیب وارد شدن «واپسین» الکترون در زیر لایه‌ها پایان

۳- برای مقادیر n بزرگتر از ۴ تنظیم مقادیر [چنین

است :

$$n = 5|5S(2) \quad 5P(6) \quad 5d(10) \quad 5f(14)$$

$$n = 6|6S(2) \quad 6P(6) \quad 6d(10)$$

$$n = 7|7S(2)$$

۴- برای تعیین توالی یاتریب قرار گرفتن الکترونهای از قواعد G_2 و G_3 که در بخش پیش گفته شد باشد استفاده کرد. بطور کلی توالی سطوح انرژی از عنصری به عنصر بعدی ثابت است اما باید دانست که مقادیر حقیقتی انرژی برای سطوح مختلف انرژی از عنصری به عنصر دیگر تغییر می‌کند. شکل زیر ترتیب تقریبی پر شدن زیر لایه‌ها را نشان می‌دهد.

لایه‌های طبقه‌بندی کامل شده	لایه‌های طبقه‌بندی نامحدود	نمودار لایه‌های الکترونی	آریتال			
			S	P	d	f
۱s	۲	۶	۱۰	۱۴		
۲s	۲	۶	۱۰	۱۴		
۲p	۳	۶	۱۰	۱۴		
۳s	۳	۱	۱۸			
۳p	۳	۱	۱۸			
۳d	۵	۱۸				
۴s	۴	۱۸				
۴p	۴	۱۸				
۴d	۵	۱۸				
۵s	۵	۱۸				
۵p	۵	۱۸				
۵d	۷	۳۲				
۶s	۶	۳۲				
۶p	۶	۳۲				
۶d	۷	۳۲				
۷s	۷	۱۸				
۷p	۷	۱۸				
۷d	۹	۱۸				
۸s	۹	۱۸				
۸p	۹	۱۸				
۸d	۱۱	۱۸				
۹s	۱۱	۱۸				
۹p	۱۱	۱۸				
۹d	۱۳	۱۸				
۱۰s	۱۳	۱۸				
۱۰p	۱۳	۱۸				
۱۰d	۱۵	۱۸				
۱۱s	۱۵	۱۸				
۱۱p	۱۵	۱۸				
۱۱d	۱۷	۱۸				
۱۲s	۱۷	۱۸				
۱۲p	۱۷	۱۸				
۱۲d	۱۹	۱۸				
۱۳s	۱۹	۱۸				
۱۳p	۱۹	۱۸				
۱۳d	۲۱	۱۸				
۱۴s	۲۱	۱۸				
۱۴p	۲۱	۱۸				
۱۴d	۲۳	۱۸				
۱۵s	۲۳	۱۸				
۱۵p	۲۳	۱۸				
۱۵d	۲۵	۱۸				
۱۶s	۲۵	۱۸				
۱۶p	۲۵	۱۸				
۱۶d	۲۷	۱۸				
۱۷s	۲۷	۱۸				
۱۷p	۲۷	۱۸				
۱۷d	۲۹	۱۸				
۱۸s	۲۹	۱۸				
۱۸p	۲۹	۱۸				
۱۸d	۳۱	۱۸				
۱۹s	۳۱	۱۸				
۱۹p	۳۱	۱۸				
۱۹d	۳۳	۱۸				
۲۰s	۳۳	۱۸				
۲۰p	۳۳	۱۸				
۲۰d	۳۵	۱۸				
۲۱s	۳۵	۱۸				
۲۱p	۳۵	۱۸				
۲۱d	۳۷	۱۸				
۲۲s	۳۷	۱۸				
۲۲p	۳۷	۱۸				
۲۲d	۳۹	۱۸				
۲۳s	۳۹	۱۸				
۲۳p	۳۹	۱۸				
۲۳d	۴۱	۱۸				
۲۴s	۴۱	۱۸				
۲۴p	۴۱	۱۸				
۲۴d	۴۳	۱۸				
۲۵s	۴۳	۱۸				
۲۵p	۴۳	۱۸				
۲۵d	۴۵	۱۸				
۲۶s	۴۵	۱۸				
۲۶p	۴۵	۱۸				
۲۶d	۴۷	۱۸				
۲۷s	۴۷	۱۸				
۲۷p	۴۷	۱۸				
۲۷d	۴۹	۱۸				
۲۸s	۴۹	۱۸				
۲۸p	۴۹	۱۸				
۲۸d	۵۱	۱۸				
۲۹s	۵۱	۱۸				
۲۹p	۵۱	۱۸				
۲۹d	۵۳	۱۸				
۳۰s	۵۳	۱۸				
۳۰p	۵۳	۱۸				
۳۰d	۵۵	۱۸				
۳۱s	۵۵	۱۸				
۳۱p	۵۵	۱۸				
۳۱d	۵۷	۱۸				
۳۲s	۵۷	۱۸				
۳۲p	۵۷	۱۸				
۳۲d	۵۹	۱۸				
۳۳s	۵۹	۱۸				
۳۳p	۵۹	۱۸				
۳۳d	۶۱	۱۸				
۳۴s	۶۱	۱۸				
۳۴p	۶۱	۱۸				
۳۴d	۶۳	۱۸				
۳۵s	۶۳	۱۸				
۳۵p	۶۳	۱۸				
۳۵d	۶۵	۱۸				
۳۶s	۶۵	۱۸				
۳۶p	۶۵	۱۸				
۳۶d	۶۷	۱۸				
۳۷s	۶۷	۱۸				
۳۷p	۶۷	۱۸				
۳۷d	۶۹	۱۸				
۳۸s	۶۹	۱۸				
۳۸p	۶۹	۱۸				
۳۸d	۷۱	۱۸				
۳۹s	۷۱	۱۸				
۳۹p	۷۱	۱۸				
۳۹d	۷۳	۱۸				
۴۰s	۷۳	۱۸				
۴۰p	۷۳	۱۸				
۴۰d	۷۵	۱۸				
۴۱s	۷۵	۱۸				
۴۱p	۷۵	۱۸				
۴۱d	۷۷	۱۸				
۴۲s	۷۷	۱۸				
۴۲p	۷۷	۱۸				
۴۲d	۷۹	۱۸				
۴۳s	۷۹	۱۸				
۴۳p	۷۹	۱۸				
۴۳d	۸۱	۱۸				
۴۴s	۸۱	۱۸				
۴۴p	۸۱	۱۸				
۴۴d	۸۳	۱۸				
۴۵s	۸۳	۱۸				
۴۵p	۸۳	۱۸				
۴۵d	۸۵	۱۸				
۴۶s	۸۵	۱۸				
۴۶p	۸۵	۱۸				
۴۶d	۸۷	۱۸				
۴۷s	۸۷	۱۸				
۴۷p	۸۷	۱۸				
۴۷d	۸۹	۱۸				
۴۸s	۸۹	۱۸				
۴۸p	۸۹	۱۸				
۴۸d	۹۱	۱۸				
۴۹s	۹۱	۱۸				
۴۹p	۹۱	۱۸				
۴۹d	۹۳	۱۸				
۵۰s	۹۳	۱۸				
۵۰p	۹۳	۱۸				
۵۰d	۹۵	۱۸				
۵۱s	۹۵	۱۸				
۵۱p	۹۵	۱۸				
۵۱d	۹۷	۱۸				
۵۲s	۹۷	۱۸				
۵۲p	۹۷	۱۸				
۵۲d	۹۹	۱۸				
۵۳s	۹۹	۱۸				
۵۳p	۹۹	۱۸				
۵۳d	۱۰۱	۱۸				
۵۴s	۱۰۱	۱۸				
۵۴p	۱۰۱	۱۸				
۵۴d	۱۰۳	۱۸				
۵۵s	۱۰۳	۱۸				
۵۵p	۱۰۳	۱۸				
۵۵d	۱۰۵	۱۸				
۵۶s	۱۰۵	۱۸				
۵۶p	۱۰۵	۱۸				
۵۶d	۱۰۷	۱۸				
۵۷s	۱۰۷	۱۸				
۵۷p	۱۰۷	۱۸				
۵۷d	۱۰۹	۱۸				
۵۸s	۱۰۹	۱۸				
۵۸p	۱۰۹	۱۸				
۵۸d	۱۱۱	۱۸				
۵۹s	۱۱۱	۱۸				
۵۹p	۱۱۱	۱۸				
۵۹d	۱۱۳	۱۸				
۶۰s	۱۱۳	۱۸				
۶۰p	۱۱۳	۱۸				
۶۰d	۱۱۵	۱۸				
۶۱s	۱۱۵	۱۸				
۶۱p	۱۱۵	۱۸				
۶۱d	۱۱۷	۱۸				
۶۲s	۱۱۷	۱۸				
۶۲p	۱۱۷	۱۸				
۶۲d	۱۱۹	۱۸				
۶۳s	۱۱۹	۱۸				
۶۳p	۱۱۹	۱۸				
۶۳d	۱۲۱	۱۸				
۶۴s	۱۲۱	۱۸				
۶۴p	۱۲۱	۱۸				
۶۴d	۱۲۳	۱۸				
۶۵s	۱۲۳	۱۸				
۶۵p	۱۲۳	۱۸				
۶۵d	۱۲۵	۱۸				
۶۶s	۱۲۵	۱۸				
۶۶p	۱۲۵	۱۸				

کار بر دیکی از قضایای هندسه در تعیین مقاومت داخلی مولد الکتریکی

از : احمد شرف الدین

داخلی آن r فرض شود ، مقادیر جریان i چنین است :

$$i = \frac{E}{R+r}$$

ولذا اختلاف پتانسیل بین دو سر مقاومت R چنین می باشد :

$$V = \frac{ER}{R+r}$$

از رابطه فوق معلوم می شود که منحنی نمایشگر تابع $V=f(R)$ یک هذلولی است که معادلات مجانبهای آن چنین اند .

$$\begin{cases} V = E \\ R = -r \end{cases}$$

یعنی عرض مجانب افقی مساوی قوه الکتروموتوری مولد و طول مجانب قائم مساوی با مقاومت داخلی آن است (از حیث قدر مطلق) پس کافی است دوبار اندازه گیری کنیم . یک بار وقتي مقاومت R بینهایت باشد (کافی است مقاومت بین دو نقطه M و N برداشته شود) . در این صورت قوه الکتروموتوری مولد اندازه گرفته می شود و بدین ترتیب می توان مجانب افقی را در سه نمود در اندازه گیری دوم ، برای مقاومت R مقدار دلخواه R_1 را انتخاب کرده و پتانسیل V_1 نظیر آن را ، بین دوسر این مقاومت اندازه می گیریم و نقطه (V_1, R_1) را در صفحه مختصات تعیین می کنیم . سپس خط OR را وصل می کنیم تا خط مجانب افقی را در نقطه Q قطع کند . بر امتداد خط OR نقطه S را چنان اختیار می کنیم که :

$$\overline{SO} = \overline{PQ}$$

باشد . نقطه S بر روی مجانب قائم قرارداده (طبق قضیه هندسی مشروح در فوق) . فاصله نقطه S از محور Oy مساوی با مقاومت داخلی مولد می باشد :

$$\overline{OH} = r$$

مقدمه :

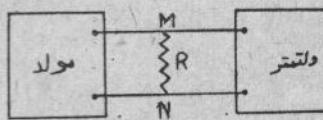
قضیه : چنانچه خط دلخواه AH هذلولی H را در نقاط A و B و مجانبهای آن را در نقاط C و D قطع کند ، چنین داریم :

$$\overline{CA} = \overline{BD}$$

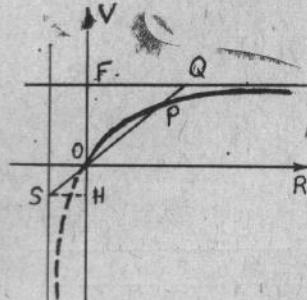
[برای مطالعه اثبات قضیه فوق می توانید به جلد نهم کتاب :

(Géometrie Moderne) تألیف : G. Papelier) مراجعت فرمائید .

ذیلا ، قضیه فوق را برای تعیین مقاومت داخلی الکتریکی مولد می بریم .



چنانچه به ازاء مقادیر مختلف مقاومت R ، اختلاف



پتانسیل V بین دوسر آن مقاومت را اندازه بگیریم ، منحنی نمایشگر تغییرات V بر حسب R یک هذلولی می باشد .

ذیرا مقاومت ولتیتر بسیار بزرگ است و می توان فرض کرد که جریان i که از مولد خارج می شود منحصر از مقاومت R می گزدد . چنانچه قوه الکتروموتوری مولد E و مقاومت

محاسبه مجموع توانهای k ام اعداد طبیعی (n عدد مثبت و صحیح)

با استفاده از مشتق و تابع اولیه

از : محمد مهدوی

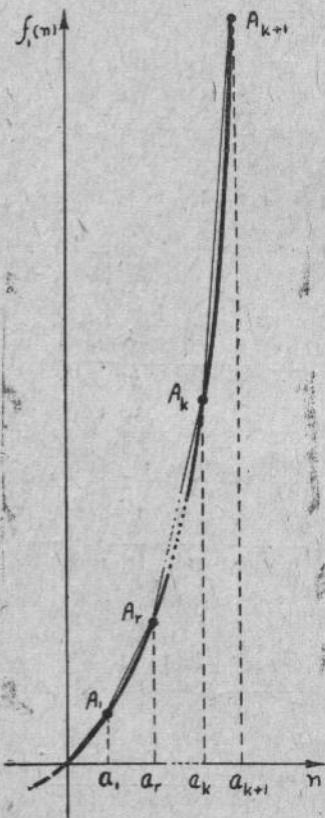
دانشجوی رشته ریاضی دانشکده علوم دانشگاه تهران

را وقتی که $(n > 0)$ و پیوسته باشد سپس وقتی که n اعداد طبیعی را اختیار کند در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می کنیم خواهیم داشت :

$$f_1(n) = \frac{n^1}{2} + \frac{n}{2}$$

$$f'_1(n) = n + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$$

n	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f'_1(n)$	-	-	0	+
$f_1(n)$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0



نمایشهای هندسی
تابع فوق هنگامی که
مقادیر پیوسته ای را
اختیار می کند و هنگامی
که n اعداد صحیح
متوالی را می پذیرد به
صورت مقابل است (شاخه ای
از سهمی P و مجموعه ای
از نقاط که خط شکسته
مرسوم بین آنها را D ای
می نامیم).

باتوجه به نمودارهای
بالا مشاهده می شود هر گاه
مساحت سطح حادث
بین منحنی $f_1(n)$ و
 $n > 0$ پیوسته و محور
های n و $f_1(n)$ و

[مقصود از نشانه « $\int_a^b f(x)dx$ » که در این مقاله بکار رفته است «تابع اولیه تابع $f(x)$ در فاصله (ab) » می باشد.]

مجموع توانهای k ام اعداد طبیعی را به $(n)_k$ نمایش می دهیم
یعنی :

$$(n)_1 = 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1$$

$$(n)_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$(n)_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

نخست ثابت می کنیم که :

$$(n)_2 = 2 \int_0^n (n)_1 dn + c_2 n \quad (1)$$

فرض می کنیم $(n)_1 = I_n$ (1) از روی

رابطه (1) مشاهده می شود که I_n دارای مقدار ثابت تابع اولیه نمی باشد چون باستثنی $(n)_2$ بر n قابل قسمت باشد.

لازم به تذکر است که چون تابع $\frac{n(n+1)}{2}$ تابع

پیوسته ای نمی باشد (n مقادیر صحیح از یک تا n را اختیار می کند) نبایستی از آن تابع اولیه بگیریم ولی ثابت می شود (در ریاضیات عالی) که یا تقریب حساب شده ای می توانیم عمل فوق را روی تابع $(n)_1$ انجام دهیم یعنی خواهیم داشت :

$$(n)_1 = 2 \int_0^n \frac{n(n+1)}{2} dn + c_1 n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + c_1 n$$

و چون به ازاء $n=1$ داریم : $(n)_1 = 1$ پس :

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{6}$$

و فرمول زیر بدست می آید :

$$(n)_1 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$f_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

تبیین هندسی - منحنی نمایش

آشکار است که محاسبه تقریب فوق وقته که می خواهیم از مجموع توانهای k ام بوسیله تابع اولیه مجموع توانهای $(k+1)$ ام را محاسبه کنیم بسیار مشکل می باشد و اغلب تبییر هندسی واضحی نخواهد داشت . این تقریب با استفاده از توپولوژی محاسبه می شود . حال با قضیه ای که در زیر به آن اشاره خواهیم کرد تقریبات رام محاسبه می کنیم (این قضیه در اینجا اثبات نخواهد شد) قضیه : هر گاه مجموع توانهای k ام اعداد طبیعی را به $\sigma_{k+1}(n)$ و مجموع توانهای $(k+1)$ ام اعداد طبیعی را به $\sigma_{k+1}(n)$ نمایش دهیم رابطه زیر برقرار است :

$$\sigma_{k+1}(n) = (k+1) \int_0^n \sigma_k(n) dn + c_k n \quad (3)$$

برای محاسبه ضریب ثابت c_k می دانیم وقتی که $n=1$ باشد $\sigma_{k+1}(n) = 1$ می شود رابطه (3) به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\sigma_{k+1}(1) = 1 - (k+1) \int_0^1 \sigma_k(n) dn + c_k$$

$$c_k = 1 - (k+1) \int_0^1 \sigma_k(n) dn$$

در رابطه (3) به جای c_k مقدارش را قرار می دهیم :

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1}(n) &= (k+1) \int_0^n \sigma_k(n) dn + n - \\ &\quad - n(k+1) \int_0^1 \sigma_k(n) dn \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1}(n) &= (k+1) \left[\int_0^n \sigma_k(n) dn - \right. \\ &\quad \left. - n \int_0^1 \sigma_k(n) dn \right] + n \end{aligned}$$

هر گاه $I_k(n) = \int_0^n \sigma_k(n) dn$ باشد خواهیم داشت :

$$\sigma_{k+1}(n) = (k+1)[I_k(n) - nI_k(1)] + n$$

و در حالت کلی فرمول زیر بدست می آید :

$$\sigma_{k+1}(n) = (k+1)[I_k(n) - nI_k(1)] + n$$

$$I_k(n) = \int_0^n \sigma_k(n) dn$$

اگر $n=0$ باشد داریم :

$$\sigma_1(n) = [I_0(n) - nI_0(1)] + n$$

$$I_0(1) = \int_0^1 n dn = \left| \frac{n^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I_0(n) = \int_0^n n dn = \frac{n^2}{2}$$

$A_{k+1}A_{k+1}A_{k+1}A_{k+1}$ و مساحت سطح ذوزنقه S_{k+1} را فرض کنیم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} S' &= \frac{f_1(k+1) + f_1(k)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} \right] = \dots = \frac{(k+1)^2}{2} \\ S_1 &= \int_k^{k+1} \frac{n(n+1)}{2} dn = \frac{1}{2} \left| \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} \right|_k^{k+1} = \\ &= \dots = \frac{(k+1)^2}{2} - \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$S' = S_1 + \alpha_k \quad (2)$$

(واحد سطح)

$$\frac{(k+1)^2}{2} = \frac{(k+1)^2}{2} - \frac{1}{12} + \alpha_k \Rightarrow \alpha_k = \frac{1}{12}$$

هر گاه k مقادیر از یک تا n را اختیار کند حاصل می شود :

$$S' = S + \frac{n}{12}$$

که S' سطح زیر خط شکسته D و S سطح زیر منحنی P

می باشد بنا به تعریف $S' = \frac{\sigma_2(n)}{2}$ و رابطه زیر برقرار است :

$$\sigma_2(n) = 2 \int_0^n \sigma_1(n) dn + \frac{n}{12}$$

سطح زیر خط شکسته D برابر است با $\frac{\sigma_2(n)}{2}$ که برابر است

با تابع اولیه (n) با یک تقریب اضافی که محاسبه شد . پس طریقه زیر برای محاسبه مجموع مربعات اعداد طبیعی بدست می آید . داریم :

$$\sigma_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

هر گاه از طرفین تابع اولیه گرفته و تقریب حساب شده را به آن بیفزاییم حاصل می شود :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \right) + \frac{n}{12}$$

و یا :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

اعداد طبیعی مجموع توانهای k ام را محاسبه کنیم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم :

$$\sigma_k(n) = \frac{\sigma'_{k+1}(n)}{k+1} \quad (A)$$

هر گاه مشتق $\sigma_{k+1}(n)$ دارای عدد ثابت شد عدد ثابت را حذف می‌کنیم ($\sigma_k(n)$) بر n قابل قسمت است) و در غیر این صورت تمامی جملات را خواهیم نوشت :

$$\sigma_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

مثال ۱ : از روی فرمول (A) مقدار (n) را محاسبه کنید.

با استفاده از فرمول (A) خواهیم داشت :

$$\sigma_1(n) = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

در اینجا وقتی از $\frac{n}{6}$ مشتق می‌گیریم بایستی عدد ثابت

$\frac{1}{6}$ را حذف کرده سپس در فرمول (A) قرارداد.

$$\text{مثال ۲ : از روی فرمول } \sigma_2(n) = \frac{n^4(n+1)^2}{4} \text{ مقدار } \sigma_2(n) \text{ را محاسبه کنید:}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2(n) &= \frac{\sigma'_3(n)}{3} = \frac{1}{3} \left(n^3 + 3 \frac{n^2}{2} + \frac{n}{12} \right) = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

در اینجا در عمل مشتق مقدار ثابتی بوجود نمی‌آید و مستقیماً مقدار مشتق $\sigma_3(n)$ را در رابطه (A) قرار داده‌ایم :

تهریث – صحبت روابط زیر را با استفاده از فرمولهای ذکر شده و همچنین با استفاده از استقراء ریاضی تحقیق کنید.

$$S_0(n) = n$$

$$S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$S_3(n) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{12}$$

$$S_4(n) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

$$S_5(n) = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^3}{12}$$

دنباله در صفحه ۱۲۶

$$\sigma_1(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

اگر $k=1$ باشد داریم :

$$\sigma_2(n) = 2[I_1(n) - nI_1(1)] + n$$

$$I_1(n) = \int_0^n \frac{n(n+1)}{2} dn = \frac{1}{2} \left[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} \right]$$

$$I_1(1) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] = \frac{5}{12}$$

$$\sigma_2(n) = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} \right) - \frac{5n}{12} \right] + n =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} + n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - \\ &\quad = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

به همین ترتیب مجموع توانهای k ام اعداد طبیعی را وقتی که k عدد صحیح و مثبت باشد می‌توانم بوسیله رکورانس (برگشته) محاسبه کنیم.

توجه : می‌توان ثابت کرد هنگامی که می‌خواهیم از مجموع توانهای $2k$ ام (زوج) اعداد طبیعی بوسیله تابع اولیه مجموع توانهای $(2k+1)$ ام (فرد) اعداد طبیعی را محاسبه کنیم ضریب $c_{2k} = 0$ خواهد شد یعنی برای محاسبه مجموع توانهای فرد اعداد طبیعی تقریب مذکور صفر خواهد شد و محاسبه تقریب برای c_{2k+1} بدون قایده است.

مثال برای محاسبه $\sigma_2(n)$ بدون محاسبه تقریب که مسلماً صفر خواهد شد مستقیماً از $\sigma_2(n)$ تابع اولیه گرفته و $\sigma_2(n)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$\sigma_2(n) = \frac{n^2}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2(n) &= \frac{n^4}{3 \times 4} + \frac{n^3}{3 \times 2} + \frac{n^2}{2 \times 6} - \frac{n^3}{4} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{4} = \\ &= \frac{n^4(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که در $\sigma_k(n)$ ضرایب n^{k+1} و

n^{k-1} به ترتیب عبارتند از $\frac{1}{k+1}$ و $\frac{1}{12}$ و می‌توان

ضرایب دیگر را با محاسبه یک تابع اولیه ساده محاسبه کرد.

لازم به تذکر است که ضرایب فوق با استفاده از ترکیب و تبدیل و ترتیب در ریاضیات عالی بطور ساده‌تری خلاصه خواهند شد

و فرمول برگشته دقیقی بدست می‌آید اما گفتگو از آن خارج

از برنامه متوسطه است.

در ضمن هر گاه بخواهیم از مجموع توانهای $(k+1)$ ام

● گسترش و تعمیم مسئله پروانه ●

ترجمه: احمد قاضیزاده

دانشجوی ریاضی دانشسرای عالی

William I. Jacobson

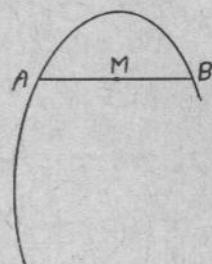
Math. Magazine

برواده نیز خواهد بود. (لزومی نیست که E و D در طرفین متقابل AB باشند) . برهان این قضیه مبتنی بر دللم زیر است:

لهم ۱: (شکل ۳) اگر محور X ها را بروتر AB از يك مقطع مخروطی منطبق بگيريم و M را كه بين A و B و غيره واقع بر روی مقطع مخروطی است مبدأ انتخاب كنيم و اگر معادله: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ نمایش مقطع مخروطی فوق باشد شرط لازم و کافی برای اينکه M وسط AB باشد آنست که جمله ای که شامل x تنها است حذف شود يعني $0 = d$ باشد.

برهان: اگر مقطع مخروطی محور x ها را در A و B قطع کند و M مبدأ مختصات باشد. از معادله عمومی مقطع مخروطی با قراردادن $y = 0$ معادله: $ax^2 + dx + f = 0$ حاصل می شود که اگر دیشهایش را k و h بنامیم چون A و B متمایزنند پس $a \neq 0$ است.

اثبات لزوم: اگر M وسط AB باشد نتیجه می شود $d = 0$ و آنجا $\left(\frac{d}{a}\right) = h + k = 0$ پس:



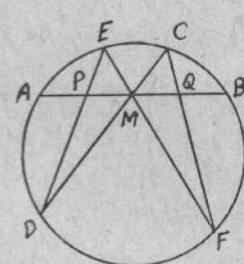
(شکل ۳)

بيان معمولی مسئله پروانه چنین است: از M وسط و تر $CFED$ از دایره ای دو وتر CD و EF رسم شده اند. وتر AB را به ترتیب در P و Q قطع می کنند ثابت کنید $PM = MQ$ (شکل ۱)

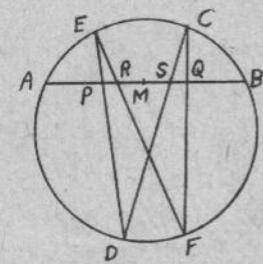
یکی از محققین به نام (Klamkin) نشان داده است نیازی نیست که وترهای CD و EF از M وسط AB بگذرند و مسئله را چنین گسترش داده است: اگر M وسط وتر AB باشد و دو وتر CD و EF را به ترتیب در R و S قطع کنند که $RM = MC$ باشد در این صورت $PM = MQ$ می باشد (شکل ۲)

برای تعمیم مسئله دایره را حالت خاصی از يك مقطع مخروطی فرض کنیم و نیز دو زوج خطوط (EF و CD) و (CF و ED) را حالات حد مقطع مخروطی می دانیم*

نخست قضیه ای در تعمیم شکل ۲ بیان می کنیم:



(شکل ۱)

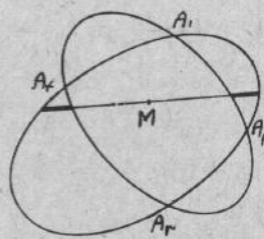


(شکل ۲)

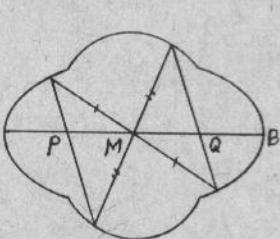
قضیه ۱ - اگر E و C و F و D چهار نقطه متمایز باشند که هیچ سه تای آنها روی يك خط راست واقع نباشند سه مقطع مخروطی بر این نقاط می گذرند که بر روی قاطع مشترکشان وترهای AB و RS و PQ را جدا می کنند. اگر M وسط

* حالتی که صفحه قاطع عمود بر محور مخروط باشد مقطع مخروطی دایره خواهد بود و حالتی که صفحه قاطع از رأس مخروط بگذرد مقطع دو خط متقاطع می باشد.

(یک مقطع مخروطی قاطع رادر دو نقطه داخلی و دیگری
دو نقطه خارجی قطع می کند مطابق شکل ۴)



(شکل ۴)

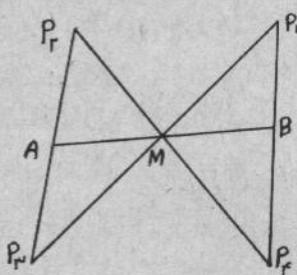


(شکل ۵)

باید تأکید کرد که مسئله پروانه حالت دیگری را غیر از آنچه در قضیه ۱ گذشت دارد است. این روش مختصرآ در شکل ۵ توضیح داده شده است. این شکل ترکیبی از دوقوس از یک دایره و دوقوس از یک بیضی است. AB قطر اطول بیضی M مرکز آن و مرکز دوقوس دایره است. با انتخابی مناسب از هر دو وتر متمایز با که از M مبدأ AB بگذرند خواهیم داشت $PM = MQ$ بدینه است.

در این حال شکل مذکور مقطع مخروطی نخواهد بود.

اگر نون بینینیم بطور کلی در چه حالاتی خواص مسئله پروانه قابل توجیه است؟ برای جواب دادن به این سؤال جنبه کمی



(شکل ۶)

ویژه گیهای مسئله را
بررسی می کنیم:
قضیه ۳.۰ مجموع
عکس عرضهای P_1P_2 و P_3P_4
همان مجموع عکس
عرضهای P_1P_2 است
فقط و فقط اگر M

وسط AB باشد (شکل ۶)

(در این شکل M مبدأ مختصات AB محور X ها، P_1P_3 دو خط مستقیم و P_2P_4 دو خط مستقیم یا یک مقطع مخروطی اند و لزومی نیست که P_1P_3 و P_2P_4 در طرفین AB باشند).

برهان: اگر معادله عمومی مقطع مخروطی $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ باشد
غیر واقع بر مقطع مخروطی RS متمایز نند (لم ۱) بنا بر این $a \neq 0$ و $f \neq 0$ اگر معادله P_1P_2 به صورت $x = my$ باشد آنگاه y به اندیاری my در معادله عمومی خواهیم داشت:

$$y^2(am^2 + bm + c) + y(dm + e) + f = 0$$

اثبات کفایت. اگر $d = 0$ بنا بر این $\frac{d}{a} = -\frac{f}{a}$ پس

ولذا M وسط AB است.

لم ۲: اگر سه مقطع مخروطی متمایز از همان چهار نقطه مجزا از هم بگذرند بطوری که هیچ سه نقطه ای از این نقاط بر یک خط واقع نباشند در این صورت هر مقطع مخروطی ترکیبی از دو تای دیگر است.

برهان: سه مقطع مخروطی متمایز از چهار نقطه منفک (y_1 و y_2 و y_3 و y_4) و (x_1 و x_2 و x_3 و x_4) می گذرند. چون هر پنج نقطه که هیچ چهار نقطه از آنها بر یک خط واقع نباشند مشخص کنندۀ یک مقطع مخروطی است لذا نقاطهای مانند (y_5 و y_6 و x_5 و x_6) در قطع مخروطی $f_2 = 0$ هست که نه در $f_1 = 0$ است و نه در $f_3 = 0$ (زیرا در غیر این صورت منحنیها متمایز نتوانند بود) با این تفصیل داریم:

$$f_1(x_5y_5) + f_2(x_5y_6) + f_3(x_6y_5) \neq 0$$

$$f_1(x_5y_5) + f_2(x_5y_6) + f_3(x_6y_6) = 0$$

بسهولت دیده می شود که $g = 0$ از پنج نقطه مذکور می گذرند و بنابراین هر دو یک مقطع مخروطی را نمایش خواهند داد (متدکر می شویم که $g = 0$ خطی نیست چون از نقاط غیر واقع بر یک استقامت می گذرد و نیز g متعدد باصفرا نیست زیرا چون $f_1 = kf_2$ و لذا $f_1 = 0$ و $f_2 = 0$ متمایز نخواهند بود ($k \neq 0$ و $k_1 \neq k_2$ با این خلاف فرض است) . از این‌رو $f_1 = 0$ با استفاده از این دولم از شکل ۲ با انتخاب محور X ها ممتد درجهت AB به شرح زیر نتیجه-

گیری می کنیم :

چون M وسط AB است پس جمله درجه اول x در هر دو مقطع مخروطی حذف می گردد چون هر قطع مخروطی ترکیبی از دو تای دیگر است لذا این جمله در سومی نیز حذف خواهد شد یعنی M نیز وسط PQ است. این قضیه را به طریق دیگری به شرح زیر بیان می کنیم:

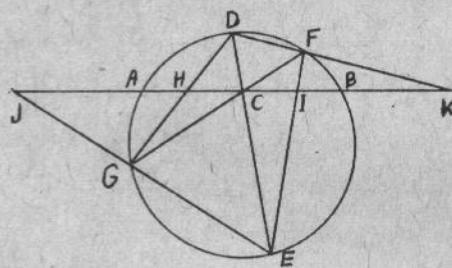
یک دسته از مقاطع مخروطی از چهار نقطه می گذرند که هیچ سه نقطه ای از این نقاط بر یک استقامت نیستند اگر هر دو مقطع مخروطی دوپاره خط متساوی روی قاطع مفروضی جدا کنند آنگاه هر دو مقطع مخروطی از دسته مزبور دارای چنین خاصیتی خواهند بود.

نیز با درنظر گرفتن نقاط C و $(e \text{ و } f)$ و D و C ، Q_1 و Q_2 و D و C و Q_1 و Q_2 و EMH از GMF وتر GH و EF محور x را به ترتیب در I و K قطع می کنند با ملاحظه تساوی مجموع عکس عرضهای G و F با مجموع عکس عرضهای Q_1 و Q_2 که هر کدام با مجموع معکوس عرضهای P_1 و P_2 و E و H برابرند نتیجه می شود که نقاط G, F, E و H تشکیل مجموعه نقاط پروانه نسبت به محور x داده و از این رو $IM = MK$ حاصل می گردد.

درباره خواص مسئله پروانه

قبل از خاصیتی از مسئله در مورد دایره به شرح زیر بیان شده است:

اگر C وسط یک وتر دلخواه AB از دایره و اگر DE و FG دو وتر دلخواه ماربر C باشند آنگاه $\overline{CH} = \overline{CI}$ و $\overline{CJ} = \overline{CK}$ خواهد بود (مطابق شکل ۸)



شکل ۸

وجه تسمیه این مسئله از تشابه شکل $DGFEC$ با $DGCFC$ پروانه است. از دیر باز می دانستند که بررسی این خاصیت در مورد بیضی نیز امکان پذیر است یکی از محققین ضمن گسترش مسئله پروانه حدس زد که خاصیت مربوط به دایره نشانی از بیضی را به همراه دارد و ما اکنون این مطلب را برای بیضی اثبات می کنیم:

قضیه: اگر S منحنی مسطح محدب بسته و محدود و C وسط وتر AB از آن و وترهای DE و FG از آن شامل S باشند و $\overline{CH} = \overline{CI}$ باشد (مانند شکل ۸) در این صورت Q_1 و Q_2 بیضی است.

برهان: ساده تر آنست که ابتدا ثابت کنیم S دارای مرکز تقارن است.

همواره دو وتر مانند GH و CD می توان یافت به-

۱۳ نسبت مجموع ریشه ها به حاصل ضربشان چنین است:

$$\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = -\frac{dm + e}{f}$$

(چون P_1 و P_2 متمایزند پس ضریب y^2 صفر نخواهد بود و $y_1 \neq 0$ و $y_2 \neq 0$ و $f \neq 0$) به طریق مشابه اگر معادله $x = my$ به صورت $P_2 P_4$ باشد:

$$\frac{y_2 + y_4}{y_2 y_4} = -\frac{dn + e}{f} = r_{24} (y_2 \neq 0, y_4 \neq 0, f \neq 0)$$

چون $P_1 P_2$ و $P_3 P_4$ خطوط متمایزی هستند $m \neq n$ از این رو شرط لازم و کافی برای $r_{13} = r_{24}$ اینست که $d = 0$ باشد و با توجه به لم ۱ شرط لازم و کافی برای $r_{13} = r_{24}$ اینست که AB وسط AB باشد. (باید توجه داشت وقتی M وسط

باشد هر چهار نسبتهای فوق مساوی $\frac{e}{f}$ خواهد بود برای مقاطع مخروطی حد این نسبت مقداریست ثابت و نیز مستقل از m یا n مشروط براینکه AB محور x ها باشد)

در بحث فوق نقطه M غیر واقع بر مقاطع مخروطی بود برای تکمیل این بحث باید حالاتی را که M روی مقاطع مخروطی ماربر $P_1 P_2 P_3 P_4$ است در نظر گرفت. مقاطع مخروطی خطوط $P_2 P_4$ و $P_1 P_3$ خواهد بود و:

$$AM = MB = 0$$

بنابراین M بر وسط

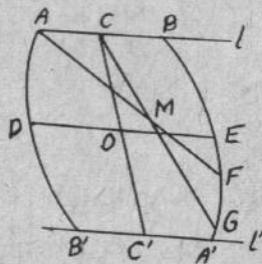
AB که مساوی صفر است واقع است. این خاصیت که مربوط به عرضها است. حالاتی از مسئله پروانه به طریق انتخاب وتری از یک مقاطع مخروطی و وتر دیگری از مقاطع مخروطی دیگر ارائه می دهد: دو نقطه $(2 \text{ و } 0)$ و $(P_1 \text{ و } P_2)$ روی محور y و نیز نقطه $(2 \text{ و } 0)$ Q_1 و Q_2 را در نظر می گیریم. حال نقطه $(k \text{ و } 0)$ Q_2 را چنان انتخاب می کنیم که:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$$

که از حل این معادله $k = 3$ خواهد بود.

با انتخاب نقاط $(0 \text{ و } 0)$ $A(r)$ و $(0 \text{ و } -r)$ روی محور x ها ورسم مقاطع مخروطی ماربر P_1, P_2, A, P_3 و B و

از طریق برهان خلف است. اگر M وسط وتر CD موازی I غیر واقع بر AA' باشد امتداد AM محیط S را در B قطع می‌کند. وتر BE موازی CD و F محل تقاطع محیط S باشد از خاصیت ضعیف مسئله پروانه نتیجه می‌شود



که FA موازی BE است که امکان پذیر نیست
چه F نمی‌تواند بر روی I واقع باشد. لذا فرض خلف باطل است و اوساط وترهای موازی $[AB]$ روی AA' قرار دارند.
در حالت دوم اگر

I و I' به ترتیب S را در دو پاره خط موازی و مساوی AB و $A'B'$ قطع کنند (شکل ۱۱) در اینجا نیز از برهان خلف کمک می‌گیریم:

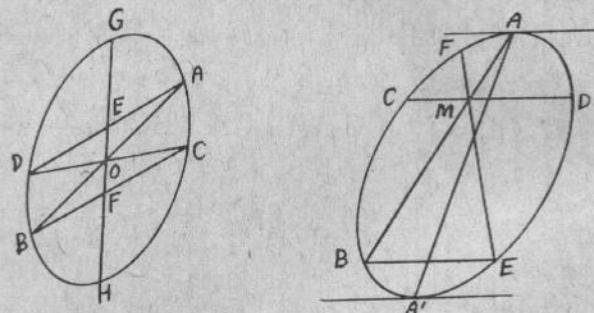
اگر C وسط AB و C' وسط $A'B'$ و DE وتری موازی AB مارب مرکز S باشد فرض می‌کنیم M وسط وتری موازی AB غیر واقع بر CC' باشد (فرض خلف) بدون اینکه به کلی استدلال خللی وارد آیدمی توان فرض کرد که M در ناحیه $COEB$ مطابق شکل ۱۱ قرار دارد. امتداد AM محیط S را در F غیر واقع بر I' قطع می‌کند اگر G محل تقاطع S با محیط S باشد G روی قوس $C'A'F$ واقع است و از خاصیت ضعیف نتیجه می‌شود که AC موازی GF است و این غیر ممکن است پس فرض خلف باطل است و اوساط وترهای موازی و متمایز با I و I' بر روی خط CC' قرار دارند.

اثبات شده که اوساط مجموعه وترهای موازی بر یک خط راست و می‌دانیم بیضی با خاصیت مشهور فوق کاملاً مشخص می‌شود اذاین رو می‌توان گفت S بیضی است.

مالحظه: قضیه زیر در باب خواص بیضی بسادگی قابل اثبات است:

اگر S یک منحنی محدب بسته و محدودی باشد بنحوی که درجهات مختلف اوساط وترهای موازی بر روی یک خطراست باشد در این صورت S بیضی است. لذا در برهانی که فوق گذشت با این حال لزومی نبست که حالتی را که I با S در یک پاره خط تقاطع می‌کند بررسی کنیم چه حالتی که I با S یک نقطه مشترک دارد هنگامی که در همه جهات در نظر گرفته شود شامل همه حالات ممکنه خواهد بود.

بنحوی که در نقطه‌ای مانند O هم‌دیگر دانصف کنند (طرق متعددی برای تحقیق این مطلب هست مثلاً می‌دانیم که S دارای یک مربع محاطی است و اقطار این مربع وترهای مطلوب هستند و یا مستقیماً: می‌دانیم که برای هر θ اگر $M(\theta)$ مجموعه اوساط وترهای باشد به سهولت می‌توان دریافت که $M(\theta)$ یک منحنی متصل است و هر دو منحنی از این منحنیها در نقطه‌ای در داخل S هم‌دیگر را قطع می‌کنند و این لازمه ایجاد دو وتر منصف یکدیگر است) بنابراین اگر AB وتری دلخواه مارب O باشد (شکل ۹) از خاصیت مسئله پروانه نتیجه می‌شود که $\overline{OE} = \overline{OF}$ و متعاقباً $\overline{OA} = \overline{OB}$ و از آنجا $CB \parallel AD$ خاصیت دیگری از مسئله پروانه که آنرا خاصیت ضعیف مسئله پروانه می‌نامیم و چنین بیان می‌شود: اگر C وسط وتر AB و DE دو وتری مارب C باشند شرط لازم و کافی برای اینکه AB موازی DE باشد آنست که GE موازی AB باشد (باشکلی شبیه به شکل ۸). در حقیقت با دقت به چهارضلعی $DGEF$ می‌توان دید که اگر $\overline{CH} = \overline{CI}$ باشد آنکاه شرط لازم و کافی برای اینکه DF موازی HI باشد آنست که GE موازی HI باشد باشد.



(شکل ۹) (شکل ۱۰)

حال ثابت می‌کنیم که اوساط مجموعه وترهای متوازی از روی یک خط راست قرار دارند.

اگر I و I' دو خط موازی متقی برو S باشند با توجه به مرکز تقارن S دو حالت ممکن است که پیش آید.
I- هریک از دو خط I و I' شامل یک نقطه از محیط S باشند.

II- دو خط I و I' شامل دوپاره خط موازی متقی برو S باشند.

در حالت اول I و I' منحنی S را در دو نقطه از محیط مانند A و A' قطع می‌کنند (شکل ۱۰) در اینجا اثبات مطلب

قضیه‌هایی در بارهٔ مثلث

ترجمه و تنظیم توسط : ابوالفضل فتح‌اندزاده
دانشجوی ریاضی دانشکده علوم مشهد

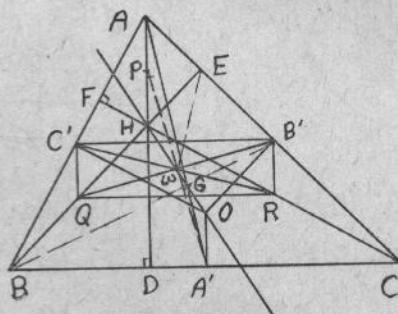
و HGA برابراند یعنی $GH = GO$ در یک امتداداند .
تانياً داریم :

$$\frac{GO}{GH} = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad GH = 2GO$$

تعریف - خط Δ که بر سه نقطه H و G و O می‌گذرد
خط اوپر نامیده می‌شود .

قضیهٔ ۳ - در هر مثلث ، اوساط اضلاع ، پاهای ارتفاعها
و اوساط قطعه خط‌هایی که رأسهای آنها به مرکز ارتفاعی وصل می‌کنند ،
نه نقطه‌ایند واقع بر یک دایره (دایرهٔ اوپر - دایرهٔ نه نقطه).
مرکز این دایره بر خط‌اوپر واقع بوده از مرکز دایرهٔ محیطی
و مرکز ارتفاعی به یک فاصله است .

ارتفاعات مثلث ABC را AD و BE و CF و نقطه تلاقی آنها را H و اوساط خطوط AH و BH و CH را به ترتیب P و Q و R ، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را O و اوساط ضلعهای AB و BC و CA را به ترتیب A' و B' و C' نامیم .



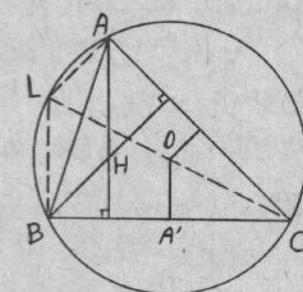
OA' می‌نامیم . چون OA' مساوی و موازی با PH است پس PA' از ω وسط OH می‌گذرد و در این نقطه نصف می‌شود
یعنی $\omega A' = \omega P$. به همین ترتیب خطوط QB' و RC' از ω می‌گذرند و در آنجا نصف می‌شوند یعنی :

$$\omega B' = \omega Q \quad \omega C' = \omega R$$

چهارضلعی $B'C'QR$ مربع‌مستطیل است زیرا $B'R$ و $C'Q$ هر کدام موازی و مساوی با نصف AH و $B'C'$ هر کدام مساوی و موازی با نصف BC بوده و AH بر BC

قضیهٔ ۱ - در هر مثلث فاصله یک رأس از محل تلاقی ارتفاعها (مرکز ارتفاعی) دوبرابر فاصله مرکز دایرهٔ محیطی از ضلع رو برو به آن رأس می‌باشد .

فرض می‌کنیم O مرکز دایرهٔ محیطی و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد . خط L در CO برخورد می‌کند . زاویه LBC قائمه است و در مثلث CBL خط OA' می‌باشد .

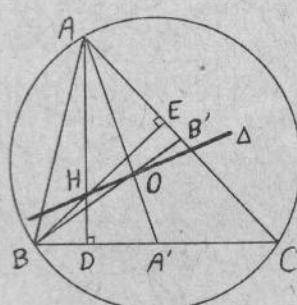


که از وسط یک ضلع موازی با ضلع دیگر رسم شده نصف ضلع $ALBH$ است . زاویه LAC نیز قائمه و چهار ضلعی LB متوازی‌الاضلاع است پس :

$$AH = LB = 2OA'$$

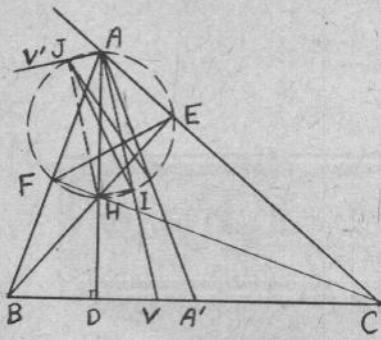
قضیهٔ ۲ - در هر مثلث : مرکز دایرهٔ محیطی ، مرکز ارتفاعی و مرکز نقل سه نقطه واقع بر یک استقامت‌اند و فاصله مرکز نقل تا مرکز ارتفاعی دو برابر فاصله مرکز دایرهٔ محیطی تا مرکز نقل می‌باشد .

اگر O مرکز دایرهٔ محیطی ، G مرکز نقل و H مرکز ارتفاعی باشد داریم :



$$\frac{AO}{AH} = \frac{1}{2}, \quad GA'O = HAG$$

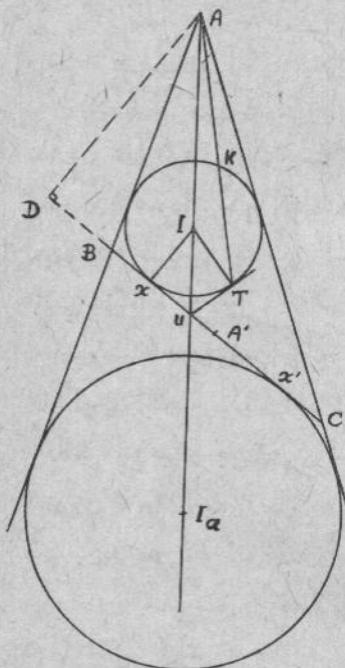
پس دو مثلث AGO و AHG در حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین متشابهند و نتیجه می‌گیریم که اولاً دوزاویه $'OGA$



دایره منبور می باشد
EF عمود منصف
است .

دایره به قطر
از نقاط E و F می گذرد
یعنی FE و قر مشترک
دو دایره به قطرهای BC و AH است پس خط .

المرکزین این دو دایره یعنی PA' عمود منصف EF است .
چون PA' قطری از دایره نه نقطه است بنابراین خط IJ از نقاط P و A' و در نتیجه از مرکز دایره نه نقطه می گذرد.
قضیه ۶ (قضیه فوئر باخ) - در هر مثلث دایره نه نقطه بردارهای محاطی داخلی و خارجی مماس می باشد .



در مثلث ABC
مرکز دایره محاطی
داخلی را I و مرکز
دایره محاطی خارجی
داخل زاویه A را Ia
نقطه تمسیح دایره های
مزبور را باضلع BC
به ترتیب x و x' و نقطه
تلاقی IIa با BC را
BC با بالاخره وسط u
را A' و پای ارتفاع
وارد از A بر BC را
می نامیم . چهار نقطه
D و Ia و u و در
نتیجه چهار نقطه D و

x و x' تا قیم توافقی تشکیل می دهند و چون A' وسط
u و x است پس :

$$A'D \cdot A'u = A'x^2 \quad (1)$$

مما مان uT = ux می باشد . Au نیمساز زاویه A در عین حال نیمساز زاویه DAO است (O مرکز دایره محیطی مثلث) پس uT بر AO و همچنین بر قدر A'P از دایره نه نقطه مماس می باشد .
خط AT در نقطه K با دایره محاطی متقاطع است و از تشابه دو مثلث A'Hu و A'OP و با استفاده از رابطه (1) خواهیم داشت :

$$A'H \cdot A'P = A'D \cdot A'u = A'x^2 = A'T \cdot A'K$$

(دنباله در صفحه ۹۲)

عمود است . نتیجه می شود که :

$$B'Q = C'R \Rightarrow \omega Q = \omega B' = \omega C' = \omega R$$

چهارضلعی A'C'PR و همچنین چهارضلعی B'A'QP نیز مربع مستطیل است و داریم :

$$\omega A' = \omega R = \omega B' = \omega P = \omega C' = \omega Q$$

در مثلث قائم الزاویه PDA خط D\omega میانه و تر است پس با نصف وتر PA برابر می باشد و همچنین E نصف B'Q و نصف RC است پس :

$$\omega A' = \omega R = \omega B' = \omega P = \omega C' = \omega Q = \omega D = \omega E = \omega F$$

مرکز دایره ای است که از نه نقطه A' و B' و C' و D و E و F و R و Q و O می گذرد و در ضمن HO وسط واقع است .

فرع ۴ - قبلا ثابت شده G و H روی یک خط راست واقع اند و HG = ۲GO است بنابراین در هر مثلث چهار نقطه O (مرکز دایره محیطی) ، G (مرکز ثقل) ، H (مرکز ارتفاعی) ، \omega (مرکز دایره نه نقطه) بر یک خط راست واقع بوده و داریم :

$$\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{HG}$$

$$\overrightarrow{\omega G} = \frac{1}{2} \overrightarrow{GO} = \frac{1}{3} \overrightarrow{HO}$$

فرع ۲ - چهار نقطه H و \omega و G و O روی خط اول

یک تقسیم توافقی پدید می آورند :

$$\frac{\overrightarrow{\omega G}}{\overrightarrow{\omega H}} = - \frac{\overrightarrow{OG}}{\overrightarrow{OH}}$$

قضیه ۵ - در هر مثلث شعاع دایره نه نقطه نصف شعاع

دایره محیطی است .

در مثلث HAO نقطه P وسط HA و \omega وسط HO است پس \omega P شعاع دایره نه نقطه نصف OA شعاع دایره محیطی است .

قضیه ۶ - در هر مثلث ، تصویر مرکز ارتفاعی روی نیمسازهای داخلی یا خارجی زوایا برخطی واقع است که از مرکز دایره نه نقطه می گذرد .

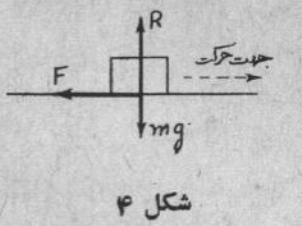
در مثلث ABC تصویرهای H مرکز ارتفاعی را بر و'Av Av نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A به ترتیب I و J می نامیم . دایره به قدر AH (به مرکز P) بر نقاط I و E و J می گذرد و چون I و J اوساط کمانهای EF از

نیرو، مقدار حرکت، قوانين حرکت

درسی از فیزیک و مکانیک

ترجمه: هوشنگ شریف زاده

• (دبیله از شماره پیش) •



شکل ۴

مایل باشد بر آن وارد
نشود ، عکس العمل
قائم عبارت خواهد
بود از :
 $R = mg$
و بنابراین
 $F = \mu mg$

اگر یک نقطه مادی بر روی سطح شیبداری که باافق
زاویه α می‌سازد حرکت کند و نیروهای دیگری جز در امتداد
سطح شیبدار بر آن اعمال نشود ، عکس العمل بین سطح و نقطه
مادی برابر است با :

$$mg \cos \alpha$$

$$F = \mu mg \cos \alpha$$

اگر هر نیروی دیگری ، ارقیل نیروی کشنخ ، وجود داشته
باشد و مایل باشد که نقطه مادی رادر روی سطح بکشد ، عکس
العمل قائم سطح و بنابراین اصطکاک را کم می‌کند . به طریق
مشابه اگر نقطه تحت تأثیر نیروهایی باشد که مایلند نقطه رادر
روی سطح به طرف بالا بکشند ، اصطکاک زیاد خواهد شد .

۱۶ - مثال ۱ - چه نیرویی بر حسب کیلو گرم نیرو
به جسمی به جرم ۹ تن در مدت یک دقیقه سرعتی برابر
۴۰ km/h می‌دهد ؟

حل - چون یکی از سرچشمه‌های اشتباه در حل مسائل
دینامیک بکار بردن آحاد غلط است . بهتر آنست که همیشه
اندازه‌گیری محاسبات را در آحاد $m - kg$ - $a - cm/s^2$ - $g - m/s^2$

۱۵ - اصطکاک *

در بسیاری از مسائل فرض می‌شود سطحی که جسم بر آن
واقع است صیقلی است ، یعنی بین سطح و جسم نیرویی که
مایل باشد از حرکت جسم در امتداد سطح جلوگیری کند وجود
نداارد . تنها نیرویی که بر جسم اثرمی‌کند و ناشی از تماس آن با
سطح است عمود بر سطح است ، و آن را عکس العمل قائم
می‌نامند . البته این بیکحال است ، و در تمام حالات
واقعی هنگامی که جسمی بر روی یک سطح حرکت می‌کند ، نیرویی
به نام اصطکاک وارد عمل می‌شود که مایل است از حرکت جسم
جلوگیری کند ، بوسیله آزمایش معلوم شده است که وقتی جسمی
بر روی جسم دیگر حرکت می‌کند و با آن تماس دارد ، نسبت
نیروی که مایل است از حرکت جلوگیری کند به عکس العمل
قائم بین دو سطح مقداری است ثابت که فقط بستگی به ماهیت دو
سطح تماس دارد . این مقدار ثابت را ضریب اصطکاک
دینامیکی برای سطح مورد نظر می‌گویند . اگر R عکس
العمل قائم بین دو سطح و F نیروی اصطکاک باشد .

$$F = \mu R \text{ یا } \frac{F}{R} = \mu$$

که در آن μ ضریب اصطکاک دینامیکی است .
مساحت سطح تماس هر چقدر باشد ، این نتیجه درست است .
ما آن را برای یک نقطه مادی بکار می‌بریم .

اگر یک جسم یا یک نقطه مادی روی سطحی افقی در حال
حرکت باشد (شکل ۴) ، و هیچ نیروی دیگری که نسبت به افق

* به دانش آموزان کلاسهای ششم طبیعی و ریاضی پیشنهاد می‌شود که پس از خواندن این مقاله ، که قسمت اول آن در شماره قبل
چاپ شد ، و پس از حل مسائل پیشنهادی ، مقاله «حرکت نقاط مادی وابسته» را که در یکان شماره ۴۱ مندرج است مطالعه و مسائل آن
را حل کنند . در آن مقاله یازده مثال به عنوان نمونه حل شده است و ۲۶ مسئله برای حل پیشنهاد شده است .

انجام داد . در واحدهای متر - کیلو گرم - ثانیه چنین داریم :

$$40 \text{ km/h} = \frac{40 \times 1000}{3600} = \frac{100}{9} \text{ m/s}$$

اکنون باید شتاب لازم را برای آنکه پس از ۶۰ ثانیه

به جسم چنین سرعتی بدهد حساب کنیم :

$$v = v_0 + \gamma t \quad \text{با بکاربردن} \quad \frac{100}{9} = 60 \text{ m/s}$$

$$\therefore \gamma = \frac{100}{540} = \frac{10}{54} \text{ m/s}^2$$

جرمی که نیروی آن اعمال شده است برابر است با $\frac{1}{9}$ تن یعنی 1000×9 ، نیروی لازم برای آنکه به چنین جرمی شتابی برابر باشد ، باستفاده از معادله $F = mg$ بدست می آید :

$$F = 9 \times 1000 \times \frac{10}{54} \text{ نیوتن}$$

$$= \frac{10000}{6} \times \frac{1}{9/81} \text{ kgf} = 170 \text{ kgf}$$

مثال ۲ - لوکوموتیو و قطاری روی هم ۲۰۰ تن جرم

دارند . لوکوموتیوی توافق طاردا بانیرویی برابر 4000 kgf بکشد . مقاومت در مقابل حرکت قطار برای هر تن برابر 10 kgf است ، و ترمزها وقتی که گرفته شوند ، برای هر تن مقاومتی برابر 200 kgf ایجاد می کنند . قطار از حال سکون به راه می افتد و سرعت آن بطور یکنواخت اضافه می شود تا 60 km/h برسد . در این هنگام موتور خاموش می شود و ترمزها بکار می افتد . تعیین کنید تمام مسافتی که تا قبل از توقف می پیماید و مدت زمان کل این حرکت را .

حل - وقتی که قطار حرکت می کند نیروی کشش برابر است با 4000 kgf و مقاومت در مقابل حرکت آن $10 \times 200 = 2000 \text{ kgf}$ است . بنابراین نیروی شتاب دهنده برابر است با :

$$4000 - 2000 \text{ kgf} = 2000 \text{ kgf} = 2000 \times g \text{ نیوتن}$$

$$\therefore \frac{F}{m} = \frac{2000g}{200 \times 1000} = \frac{g}{100} \text{ m/s}^2$$

$$= \frac{9/81}{100} \text{ m/s}^2$$

$$\text{نیز } 60 \text{ km/h} = \frac{60 \times 1000}{3600} \text{ m/s} = 16.67 \text{ m/s}$$

بینیم قطار چه مسافتی را طی می کند تا با شتاب $\frac{9}{100} \text{ m/s}^2$

$$\frac{100}{6} \text{ m/s} \text{ بسرعت} \quad \text{بر سرعت} : \quad \text{بر سرعت} / \text{s}$$

$$v = v_0 + \gamma t$$

$$\frac{10000}{36} = 2 \times 10 / 0981 x$$

$$\therefore x = \frac{10000}{26 \times 2 \times 10 / 0981} \text{ متر}$$

برای پیدا کردن زمان لازم می نویسیم :

$$v = v_0 + \gamma t$$

$$\therefore \frac{100}{6} = 10 / 0981 t$$

$$\therefore t = \frac{100}{6 \times 10 / 0981}$$

برآیند نیروی کند کننده برابر است با :

: ۲۰۰ $\times 10 + 200 \times 200$) یعنی برابر است با :

42000 kgf

$$\therefore \frac{42000g}{200 \times 1000} = 0.21 \text{ gm/s}^2$$

برای اینکه تعیین کنیم چه مسافتی طی می شود تا سرعت قطار از

$$\frac{100}{6} \text{ m/s} \text{ به صفر برسد می نویسیم :}$$

$$0 = \left(\frac{100}{6} \right)^2 - 2 \times 0.21 \times 9 / 81 x$$

$$\therefore x = \frac{10000}{36 \times 2 \times 0.21 \times 9 / 81}$$

برای اینکه تعیین کنیم پس از چه مدت قطار متوقف می شود می نویسیم :

$$0 = \frac{100}{6} - 0.21 \times 9 / 81 t$$

$$\therefore t = \frac{100}{6 \times 0.21 \times 9 / 81} \text{ ثانیه}$$

مسافت کلی که طی شده است :

$$\frac{10000}{36 \times 2 \times 0.21 \times 9 / 81} + \frac{10000}{36 \times 2 \times 21 \times 0 / 0981} = 1384 \text{ متر}$$

مدت زمان کل برابر است با :

$$\frac{100}{6} + \frac{100}{6 \times 0.21 \times 9 / 81} = 17.85 \text{ ثانیه} \# 3$$

توجه - وقتی که قطار با سرعت یکنواخت حرکت می کند

برآیند نیروهایی که برآن وارد می شود صفر است ، یعنی در

حل - باید ابتدا شتابی را که در لوکوموتیو و واگون تولید می‌شود پیدا کنیم.

$$\text{مقاومت کل} = \frac{105}{100} + \frac{30}{150} \times 1000 \text{ kgf} = 125 \text{ kgf}$$

$$3000 - 1250 = 1750 \text{ kgf}$$

$$105 + 30 \times 1000 = 13500 \text{ kg}$$

$$\frac{1750 \times 9.81}{13500} \text{ m/s}^2 = 122 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \text{ شتاب} \dots$$

نیروی شتاب دهنده واگون برابر است با:

$$30 \times 1000 \times 0.122 = 3660 \text{ N} = 389 \text{ kgf}$$

اما: مقاومت-کش در محل اتصال = نیروی شتاب دهنده

و مقاومت واگون برابر است با:

$$30000 \times \frac{1}{150} \text{ kgf} = 200 \text{ kgf}$$

$$389 + 200 = 589 \text{ kgf}$$

مثال ۵ - جسمی به جرم m کیلو گرم بر سطحی افقی قرار دارد و آن سطح باشتاب قائم به طرف بالا حرکت می‌کند. نیروی فشار بین جسم و سطح را پیدا کنید.

حل - فرض می-

کنیم عکس العمل بین

جسم و سطح R نیوتن

باشد، آشکاراست که

چون جسم به طرف بالا

باشتاب حرکت می-

کند R بزرگتر از وزن mg است.

نیروی برآیند به طرف بالا که بر جسم اثر می‌کند برابر است با $R - mg$ نیوتن.

$$\therefore R - mg = my$$

$$\therefore R = m(g + \gamma)$$

اگر سطح باشتاب γ به طرف پائین حرکت می‌کرد، وزن mg در این حالت بزرگتر از R می‌بود، در این حال نیروی برآیند به طرف پائین که بر جسم اثر می‌کند برابر است با:

$$mg - R$$

$$mg - R = my$$

$$\therefore R = m(g - \gamma)$$

که در حالت اخیر $g - \gamma$ می‌شود، در این صورت $R = 0$ خواهد بود، یعنی بین جسم و سطح نیروی فشاری اعمال نمی‌شود.

مثال ۶ - گلوله تفنگی از میان دو تخته بطور متواالی

عبور می‌کند و مقاومت متوسط تخته دوم ۵۰ درصد بیشتر از مقاومت متوسط تخته اول است. تندی اولیه 120 m/s است، و گلوله در ضمن عبور از هر تخته 8 m/s از سرعتش کاسته می‌شود ثابت کنید که ضخامت تخته‌ها به نسبت ۲۷ و ۱۴۹ است.

این حالت کشش موتور باید درست برابر با مقاومتها باشد. اگر کشش بیشتر از مقاومتها باشد، قطار شتاب پیدا خواهد کرد.

اگر جسمی در امتداد سطح شیبدار با سرعت یکنواخت پائین بیاید، مؤلفه وزن آن جسم در امتداد سطح شیبدار مساوی با مقاومت است.

مثال ۳ - بر مسیری افقی قطاری با سرعت یکنواخت 72 km/h حرکت می‌کند و به یک سر بلندی می‌رسد که شب آن به نسبت 75 است. نیرویی که موتور در این مسیر وارد می‌کند با نیرویی که در مسیر افقی وارد می‌کرد تفاوتی ندارد. قطار پیش از آنکه متوقف شود 4.8 m مسافتی در این مسیر طی خواهد کرد. فرض می‌کنیم که مقاومت ناشی از اصطکاک و غیره بر این مسیر با مقاومتی که در مسیر افقی اعمال می‌شد برابر است.

حل - چون بر مسیر افقی، قطار بطور یکنواخت حرکت می‌کند کشش موتور برابر است با مقاومت.

وقتی که قطار بسطح شیبدار می‌رسد، این نیروها باز هم متعادلند، اما اکنون مؤلفه وزن قطار که به طرف پائین سطح شیبدار است حرکت قطار را کند می‌کند.

اگر جرم قطار m کیلو گرم باشد، مؤلفه وزن آن به طرف پائین سطح شیبدار $\frac{mg}{25}$ نیوتن خواهد بود، و چون این نیرو، برآیند نیرویی است که به موازات امتداد سطح شیبدار وارد می‌شود، شتاب منفی حرکت $\frac{g}{25} \text{ m/s}^2$ خواهد بود. سرعت اولیه برابر است با :

$$72 \times \frac{1000}{3600} = 20 \text{ m/s}$$

مسافتی که طی می‌شود تا این سرعت را ازدست بدهد.

$$0 = 20^2 - 2 \times \frac{9/8}{75} x$$

$$\therefore x = \frac{400 \times 75}{2 \times 9/8} = 153 \text{ m}$$

مثال ۴ - لوکوموتیوی به جرم 105 تن به واگونی به جرم 30 تن متصل شده است و آن را می‌کشد. مقاومت در مقابل حرکت لوکوموتیو 50 m/s وزن آن است، و مقاومت در مقابل حرکت واگون $\frac{1}{150}$ وزن آن است. اگر نیروی کل محرک که لوکوموتیو اعمال می‌کند 3000 kgf باشد، کشش در محل اتصال چقدر خواهد بود؟

می شود ، (ب) نیروئی برابر 6 کیلوگرم نیرو بر جسمی به جرم 12 کیلوگرم وارد می شود.

- 3 - چه نیروئی بر حسب نیوتن، جسمی به جرم 12 کیلوگرم را در مدت 5 دقیقه از حالت سکون با سرعت 15 km/h می رساند ؟

- 3 - جسمی به جرم 100 تن تحت تأثیر نیروئی برابر 25 kgf است . چه مدت طول می کشد ، تا سرعت جسم به 15 km/h برسد ؟

- 4 - کشته بدهی 10000 تن موتورهایش را خاموش می کند و در این حال با طی مسافت 9 km/h سرعتش از 27 m به 7.5 km/h می رسد به فرض آنکه مقاومت در مقابل حرکت یکنواخت باشد، مقدار مقاومت را بر حسب نیوتن حساب کنید.

- 5 - از سطح شیبداری که شب آن $\frac{1}{12}$ است اربابی با

سرعت یکنواخت پائین می آید. اگر همین ارباب از پائین سطح شیبدار با سرعت 15 km/h به طرف بالا رانده شود، تا قبل از توقف چه مسافتی از سطح شیبدار بالا خواهد رفت.

- 6 - قطاری با سرعت 90 km/h حرکت می کند . در این هنگام قطار ترمز می کند و پس از طی 750 متر می ایستد. نیروئی که از طرف ترمزها اعمال شده است بر حسب نیوتن بر هر تن چقدر است ؟ نیز مدت زمان پس از ترمز گرفتن تا توقف کامل چقدر است ؟

- 7 - نیرویی برابر وزن جسمی به جرم 10 kg بر جسمی به جرم 218 g به مدت 5 ثانیه اعمال می شود. سرعت ناشی از آن و مسافتی را که در این مدت طی می کند حساب کنید.

- 8 - بزرگی نیرویی را پیدا کنید که به جرم 5 kg به مدت 5 ثانیه اعمال می شود و آن را از حالت سکون به راهی اندازد و در این مدت 15 متر جلو می برد.

- 9 - مقاومت ناشی از اصطکاک و غیره در مقابل حرکت قطاری 7 کیلوگرم نیرو برای هر تن است. اگر قطار در ریلهای افقی با سرعت 80 km/h حرکت کند و در این هنگام به پای مسیر شیبداری به شب $\frac{1}{150}$ برسد و موتورش را خاموش کند ،

چه مسافتی از این جاده شیبدار بالا خواهد رفت تا متوقف شود ؟

- 10 - بر مسیری مستقیم مشاهده می شود که جسمی به جرم 25 g در ثانیه های متوالی به ترتیب در 8615 و 615 ثانیمتری مبدأ است . ثابت کنید که این حرکت ناشی از اعمال نیرویی ثابت است. مقدار این نیروی ثابت را تعیین کنید.

حل - چون مقاومت تخته دوم 55 درصد بیشتر از تخته اول است ، شتاب منفی حاصل در آن $1/5$ برابر شتاب منفی حاصل در تخته اول خواهد بود.

فرض می کنیم \ddot{x}_1 شتاب منفی حاصل در تخته اول بر حسب m/s^2 باشد ، در این صورت شتاب منفی حاصل در تخته دوم

$\ddot{x}_2 = \frac{3}{2} \ddot{x}_1$ خواهد بود .

فرض می کنیم x_1 و x_2 ضخامت تخته ها باشد . در این صورت داریم :

$$480^2 = 600^2 - 2\ddot{x}_1$$

$$360^2 = 480^2 - 2\ddot{x}_2$$

$$\therefore 2\ddot{x}_1 = 120 \times 1080$$

$$2\ddot{x}_2 = 120 \times 840$$

$$\therefore \frac{2x_1}{2x_2} = \frac{108}{84} = \frac{9}{7}$$

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} = \frac{27}{14}$$

توجه - در مسائلی شبیه مثال (۶)، باید دقت بسیار داشت

که این دو حالت را از یکدیگر تمیز داد :

(الف) وقتی جسم بطور افقی حرکت می کند، (ب) وقتی که جسم بطور قائم حرکت می کند.

در حالت (الف) اگر \ddot{x} تندی اولیه، m جرم، x مسافت طی شده ، R مقاومت متوسط و \ddot{x} شتاب منفی حرکت باشد،

$$R = mg = m \frac{\ddot{x}}{2x}$$

$$R = mg = m \frac{\ddot{x}}{2x}$$

در حالت (ب) معادله اول به همان صورت است، یعنی :

$$0 = \ddot{x} - \frac{v_0}{2x}$$

اما اکنون وزن mg جسم بطور قائم و به طرف پائین اثر می کند. بنابراین بر آیند نیروی کندکننده ، دیگر R نیست بلکه در صورتی که جسم به طرف پائین حرکت کند $R = mg$ است و بنابراین :

$$R - mg = m\ddot{x}$$

یعنی هنگامی که جسم بطور قائم حرکت می کند ، مقاومت به اندازه وزن جسم از مقاومت در حالتی که جسم بطور افقی حرکت می کند ، بیشتر است.

تمرين

- 1 - شتاب حرکت را در هر یک از دو حالت زیر پیدا کنید:
(الف) نیروئی برابر 6 نیوتن بر جسمی به جرم 12 کیلوگرم وارد

۱۵cm و ۱۰cm ضخامت داردند ساخته شده است و بطور قائم قرار دارد. گلولهای که بطور افقی پرتاب شده است . ابتداء در آهن نفوذ می کند و سپس ۱۰cm در چوب فرو می رود . گلوله مشابه دیگری که باهمان سرعت از طرف دیگر بطور افقی به سپر پرتاب شده است، پس از عبور از چوب ، ۲/۵ cm فرو می رود . مقاومت متوسطی را که بوسیله آهن و چوب اعمال می شود تعیین کنید.

۱۹ - گلولهای به جرم ۱۰۰ گرم که با سرعت ۱۵۰m/s حرکت می کند در قطعه چوب ثابتی ۷/۲cm نفوذ می کند . اگر تخته ای به ضخامت ۶cm باشد و همان گلوله با همان سرعت به این تخته که ثابت است و مقاومت آن در مقابل حرکت یکنواخت و با مقاومت قطعه چوب اولی یکسان است بر خورد کند با چه سرعی از طرف دیگر خارج خواهد شد؟

۲۰ - گلولهای به جرم ۳۰g با سرعت ۲۹۴m/s به داخل قطعه چوبی پرتاب شده است و پس از $\frac{1}{150}$ ثانیه متوقف شده است . مقاومتی را که از طرف چوب اعمال می شود، به فرض آنکه یکنواخت باشد بر حسب دین و کیلو گرم نیز تعیین کنید.

قضیه هایی ۰۰۰ (بقیه از صفحه ۸۷)

چهار نقطه H و P و K و T بر یک دایره واقع اند و :
 PK=THA' بوده KA' عود است و چون PA' قطر دایره نه نقطه است پس K بر دایره نه نقطه واقع است.
 PK دایره محاطی را در M قطع می کند که TM قطر این دایره می باشد . TM با A'H موازی است و نقطه K با اوساط TM و A'P است . بر یک استقامت واقع بوده در نتیجه دایره نه نقطه و دایره محاطی در K بر هم مماس می باشند . حال اگر مماس uTa را بر دایره محاطی خارجی رسم کنیم و نقطه تلاقی ATa با این دایره Ka باشد به طریق مشابه ثابت می شود که دایرة نه نقطه در Ka بر دایره محاطی خارجی Ia مماس است .

۱۱ - بر سطح شیبداری به شیب $\frac{1}{160}$ اراده ای از حال

سکون بدراه می افتد و سرعت آن پس از ده دقیقه به 20km/h می رسد ، مقاومت در مقابل حرکت را بر حسب نیوتن برای هر تن جرم اراده تعیین کنید.

۱۲ - نیرویی بر ابر با وزن یک تن به مدت ۳ ثانیه بر جسمی به جرم ۵ تن اعمال می شود . سرعت حاصله و مسافتی را که در این مدت طی می کند تعیین کنید . واحدهایی را که نتایج بر حسب آنها اندازه گیری می شود توضیح دهید .

۱۳ - جسمی به جرم ۵ kg میزی افقی قرار دارد و میز به سمت بالا حرکت می کند .

(الف) میز با سرعت ثابت $1/5\text{m/s}$ حرکت می کند .
 (ب) میز با شتاب ثابت $1/5\text{m/s}^2$ حرکت می کند . در هر حال عکس العمل میز را تعیین کنید .

۱۴ - شخصی به جرم 60kg روی کف آسانسور ایستاده است . هنگامی که آسانسور با شتاب یکنواخت 4m/s^2 (الف) به طرف بالا، (ب) به طرف پائین حرکت می کند، عکس العمل کف آسانسور را پیدا کنید .

۱۵ - کفه ترازوئی که در آن وزنهای به جرم 50g نهاده شده است با شتاب ثابت به بالا کشیده می شود . و عکس العمل بین جرم و کفه 50000 دین است ، شتاب کفه را تعیین کنید .

۱۶ - جسمی که وزن آن 390gf است در یک آسانسور توسط یک ترازوئی فنری مجدداً توزین شده است و وزن آن بر این 360gf بدست آمده است . شتاب آسانسور در لحظه توزین چقدر بوده است .

۱۷ - در یک آسانسور ، ترازوئی فنری کارگذاشتند . وقتی که آسانسور با شتاب معینی بالا می رود این ترازو وزن جسمی را 5kgf نشان می دهد . وقتی که آسانسور باشتابی دو برابر شتاب بالارفتن، پائین می آید، این ترازو وزن جسم را $3/5\text{kgf}$ نشان می دهد . وزن واقعی جسم ، و شتاب بالا رفتن آسانسور را تعیین کنید .

۱۸ - سپری از دو صفحه چوبی و آهنی که به ترتیب



چگونه می توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

تألیف: René Boirel

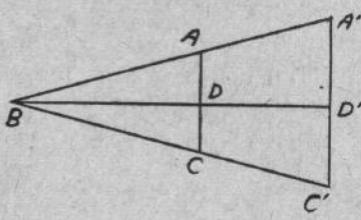
(دباله از شماره پیش)

بالاخره در مورد خطهم می توان مانند سایر ساختمانهای هندسی روش کلی را که قبل در بند C گفته شد بکار بست ، با این تفاوت که این روش در این حالات سریعتر انجام می گیرد، به این معنی که برای مر بوط ساختن خط مطلوب با اجزاء معلوم از نقاط مهم شکل عمودهایی بر آن یا موازیهایی با آن رسم کرد.

۴- وقتی مقصود رسم یک مثلث باشد - کوشید تا رأسهای مثلث را معلوم کرد (در این حال مسئله مربوط می شود به رسم نقاط) . یا اینکه اگر میسر باشد به کمک مثلثی که فرضی رسم شده مستقیماً مثلث مطلوب را بدست آورد ، یا اینکه با کنار گذاشتن یک شرط مثلثی را ساخت که شرایط دیگر در آن صدق کند و بعداز روی آن به کمک تجانس مثلث مطلوب را بدست آورد که شرط کنار گذاشته هم در آن صادق باشد (مثلاً ابتدا مثلثی را ساخت که طول اجزاء آن کمتر یا بیشتر از مقدار معین باشد) .

روش اخیر مخصوصاً وقتی اهمیت بیشتر دارد که یک جزء خطی (یا مجموع بعضی اجزاء) مثلث وزاویهای آن یا اینکه بعضی نسبتهاي بین اجزاء معلوم باشد : در این حال ابتدا مثلثی می سازیم که طول اجزاء آن غیر از مقادیر معلوم باشد اما زاویهها یا نسبتها مطابق با مقادیر داده شده باشند و بعد از روی این مثلث به کمک تجانس مثلث مطلوب را تعیین می کنیم .

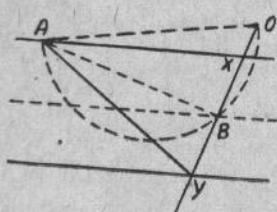
مثال - مثلث ABC را رسم کنیم که از آن اندازهای زاویهای B و C و طول ارتفاع نقطه رأس B معلوم باشد .



فرض می کنیم مسئله حل شده باشد و مثلث ABC مطلوب باشد. روی طول BC' را جدا می کنیم و از

۲- اگر موضع رسم یک نقطه باشد . در شکل فرضی حل شده دو مکان از نقطه مزبور را تعیین کرده (نقطه مزبور محل تقاطع این دو مکان می باشد) . مخصوصاً اگر نقطه مطلوب باید بر خط مفروضی واقع باشد در این صورت کافی است که یک مکان دیگر آنرا پیدا کرد . در این حالات مسئله ترسیمی به مسئله ای از تعیین مکان منجر می شود .

۳- اگر مقصود رسم یک خط باشد . به ترتیبی که گذشت دو نقطه از این خط را بدمست آورد . در حالت خاصی که خط مطلوب باید از نقطه مفروض بگذرد تعیین یک نقطه دیگر آن کفايت می کند . مثلاً فرض کنیم که دو خط متوازی و یک نقطه A روی یکی از آنها و نقطه D لخاره O مفروض و مقصود دسم خطی باشد که از آنها و خط موازی مدار بر A را در X و خط موازی دیگر را در Y قطع کند بقسمی که $AX = AY$ باشد . مسئله را حل شده فرض می کنیم ! اگر OXY قاطع مطلوب باشد چون مثلث AXY متساوی الساقین فرض شده است عمود منصف XY از A می گذرد یعنی اگر B وسط XY باشد زاویه ABO باشد و درنتیجه



B بر دایره به قطر OA واقع است . از طرف دیگر چون B وسط XY است از دو خط موازی به یک فاصله بوده مکان آن خطی است موازی با دو خط مفروض و به یک فاصله از آنها . با رسم دو مکان مزبور نقطه B و از روی آن خط OB . با رسم دو مکان مزبور نقطه B و از روی آن خط OB معین می شود .

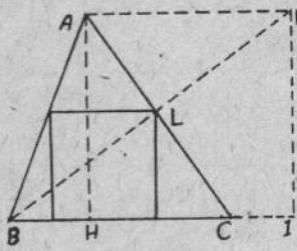
اگر خط مطلوب باید با خط مفروضی موازی باشد در این حالات هم تعیین یک نقطه ار آن کفايت می کند .

یا از روی تفاضل دو مثلث که آنها را بتوان رسم کرد بدست آورد.

۶- اگر مقصود رسم یک متوازی الاضلاع باشد - از روی شکل فرضی حل شده یکی از مثلثهای را که از تجزیهٔ متوازی الاضلاع حاصل می‌شود رسم کرد و بعد شکل را کامل کرد.

۷- اگر مقصود رسم یک مربع مستطیل (یا مربع) باشد - یا اینکه مثلث قائم الزاویه نصف آنرا تعیین کرد، یا اینکه روی شکل فرضی حل شده مربع مستطیلی چنان رسم کرد که از روی آن به کمک تجانس مسقیطی مطلوب معین بشود.

مثال - هر برعی رسم کنیم که در مثلث مفروض ABC



محاط باشد. ابتدا مربع $AHIK$ را که ضلع AH را که ارتفاع AH از مثلث است می‌سازیم. خط ضلع AC را در BK قطع می‌کند. در تجانس به مرکز B و C به نسبت $BL : BK$ مربع مطلوب مجانس مربع $AHIK$ می‌باشد.

۸- اگر مقصود رسم یک چهارضلعی باشد - یا اینکه مثلثهایی را رسم کرد که از تجزیهٔ چهارضلعی بدست می‌آیند، یا اینکه از روی چهارضلعی فرضی حل شده به کمک تجانس مستقیماً چهارضلعی مطلوب را رسم کرد.

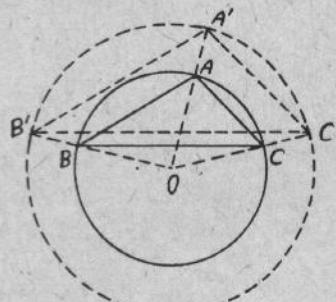
۹- اگر مقصود رسم یک دایره باشد - از روی شکل فرضی حل شده مرکز و شعاع آنرا از روی روابط بین آنها و اجزاء معلوم شکل بدست آورد. در حالت خاصی که دونقطه از دایره معلوم باشد کافی است که نقطه سومی از آنرا بدست آورد (هر دایره با سه نقطه آن مشخص می‌شود). همچنین اگر روی شکل دایره‌ای هم مرکز با دایره مطلوب وجود داشته باشد دایره مطلوب به سادگی معین می‌گردد. در این حالت هم می‌توان از تجانس یا انگکاس استفاده کرد.

۱۰- اگر مقصود رسم دایره‌ای باشد که بر دو نقطه معلوم گذشته و دایرة مفروضی را قطع کند یا اینکه بر آن مماس باشد - با توجه به اینکه خط مادربر دو نقطه مفروض و وتر یا مماس مشترک دو دایره در نقطه‌ای متقاطع اند که نسبت به دو دایره دارای یک قوت است می‌توان با استفاده از انگکاس دایره مطلوب را به سادگی رسم کرد.

۱۱- اگر مقصود رسم چند طول از روی طولهای معلوم

'موازی با AC رسم می‌کنیم تا ضلع BA یا امتداد آنرا در A' قطع کند، ارتفاع BD از مثلث ABC صلع $A'C'B$ را در D' قطع می‌کند. مثلث $BA'C'$ که به این ترتیب بدست می‌آید دارای زاویه‌های B و $C' = C$ به اندازه‌های معلوم بوده اما طول ارتفاع آن غیر از طول داده شده $BD = h$ می‌باشد. وقتی مثلث $BA'C'$ را رسم کردیم کافی است که روی ارتفاع BD از آن طول $BD = h$ را جدا کنیم و از D موازی با $A'C'$ رسم کنیم تا مثلث ABC مشخص شود.

مثال دیگر - مثلثی رسم کنیم که اندازه‌های دوزاویه و شعاع دایرة محیطی آن معلوم باشد - فرض می‌کنیم مثلث مطلوب باشد که در دایرة O به شعاع R محاط شده است. به مرکز O و به شعاع دلخواه دایرة دیگری رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا این دایره را به ترتیب در A', B', C' قطع کند. مثلث $A'B'C'$ که در دایرة دوم محاط است دارای زاویه‌های B' و C' برای بر B و C دو زاویه‌های معلوم OA' و OB' را



می‌باشد و حل مسئله را به این ترتیب نتیجه می‌گیریم: نخست مثلث $A'B'C'$ را با زاویه‌های $A' = C'$, $B' = B$, $C' = C$ می‌سازیم و دایرة محیطی آن را رسم می‌کنیم. به مرکز این دایره و به شعاع معین R دایره‌ای رسم می‌کنیم که از تقاطع آن با OA' , OB' , OC' نقاط A , B , C بود. بدست آمده مثلث مطلوب معین می‌شود.

در موردی که مقصود رسم مثلثی باشد که بین اجزاء معلوم آن وضلعهایش نسبت معینی وجود داشته باشد نیز روش مزبور قابل اجراءست: به این ترتیب که از روی نسبت مزبور طولهای متناسب باضلعهای مثلث بدست می‌آید و با این طولها مثلثی ساخته می‌شود که با مثلث مطلوب به نسبت مزبور متشابه است و تعیین آن به سادگی انجام می‌گیرد.

۵- اگر مقصود رسم یک دوزنقه باشد - یا اینکه رأسهای آن را مستقیماً پیدا کرد، یا بر حسب اینکه شکل فرضی حل شده را چگونه بتوان تجزیه کرد دوزنقة مطلوب را از روی مجموع دو مثلث، از روی یک متوازی الاضلاع و یک مثلث،

$\frac{mp}{n}$ چهارمین جزء تناسبی است که سه جزء آن معلوم است.

رسم آن به سادگی میسر است. اگر q این چهارمین جزء تناسب باشد قطعه خط x واسطه هندسی است بین m و q و از آنجا به سادگی رسم می شود.

۱۲- وقتی مقصود رسم قطعه خطی باشد و از روی شکل فرضی حل شده معلوم گردد که رسم این قطعه خط به سادگی میسر است اگر طول دیگری حساب شود در این صورت معلوم کرد که بین این دو قطعه خط چه رابطه برقرار است و راه رسم مر بوطردا بکار برد. مثلاً اگر مجموع یا تفاضل و حاصل ضرب این دو قطعه خط معلوم است طبق راه رسم کلاسیک می توان هر دو قطعه خط را با هم رسم کرد.

۱۳- اگر مقصود رسم وتری در دایره معلوم باشد - چنانچه فاصله آن تا مرکز معلوم شود در این صورت وتر مطلوب بر دایره ای مماس است که بادایره اول هم مرکز بوده و شعاع آن برابر فاصله مزبور می باشد.

۱۴- اگر مقصود رسم یک منحنی مقطع مخروطی باشد - کوشید تا اجزاء اصلی آنرا بدست آورد و بدین وسیله منحنی مطلوب را مشخص کرد.

مخصوصاً در مورد بیضی و هذلولی اگر یک نقطه M و یک کانون F از آن معلوم باشد دایره به مرکز M و به شعاع MF بر دایره هادی نظیر کانون F مماس می باشد؛ یا اینکه اگر کانون F و یک مماس بر منحنی معلوم باشد از یک طرف قرینه کانون نسبت به مماس مزبور و نقطه تماس آن با کانون دیگر روی یک خطراست واقع اند و فاصله کانون اخیر تا قرینه F برابر با $2a$ است و از طرف دیگر، مماس مزبور باشعاعهای حاملی که M را به دو کانون وصل می کنند زاویه های برابر می سازد؛ همچنین اگر دو مماس معلوم باشد این دو مماس با خطوطی که نقطه تلاقی دو مماس را به دو کانون وصل می کنند زاویه های برابر می سازند...

باشد - روابط بین طولهای مطلوب و طولهای معلوم را بدست آورد و با استفاده از تعیین چهارمین جزء تناسب یا با استفاده از روابط بین اضلاع و اجزاء مثلث قائم الزاویه یا با استفاده از قطعات متناسب خطوط متقابل که توسط دو خط موازی از آنها جدا می شود از روی طولهای معلوم طولهای مطلوب را بدست آورد.

اگر نسبت بین دو طول معلوم باشد می توان قضیه تالیس یا قضیه خطوط متقابل را مورد استفاده قرارداد.

اگر مجموع دو قطعه خط معلوم باشد روی شکل فرضی حل شده دو قطعه خط متناسب با آنها را به دنبال هم و دریک امتداد قرارداد و نقطه وسط قطعه خط حاصل را تعیین کرد که فاصله این نقطه از طرفین این قطعه خط با نصف مجموع داده شده متناسب است. همین روش در موردی که تفاضل دو قطعه خط معلوم باشد قابل استفاده است.

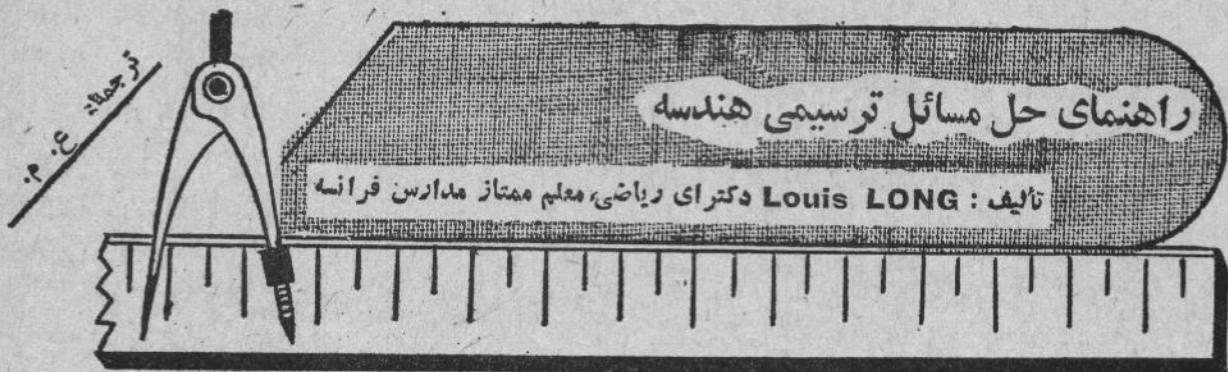
بطور کلی وقتی رابطه ای بین طول معلوم و طول مطلوب برقرار است می توان فرم جبری این رابطه را بقسمی تعیین کرد که از روی آن بتوان طول مجهول را به سادگی رسم کرد.

مثلاً فرض کنیم مقصود رسم قطعه خطی به طول $x=a\sqrt{7}$ باشد که a طول قطعه خطی معلوم است. برای پرهیز از رسم یک طول اصم طرفین رابطه را به توان ۲ می رسانیم که می شود $x^2=7a^2$ و یا $x=\sqrt{7}a$ و از این رابطه نتیجه می شود که طول مجهول x واسطه هندسی بین طولهای a و $7a$ می باشد و چنانچه می دانیم یک راه ترسیم آن این است که مثلث قائم الزاویه ای رسم کنیم که در آن a و $7a$ دو قطعه ای باشد که توسط ارتفاع از وتر جدا می شود، طول ارتفاع این مثلث همان طول x است.

مثال دیگر - فرض کنیم مقصود رسم طول x باشد بقسمی که داشته باشیم $\frac{x^2}{m^4} = \frac{p}{n}$. از این رابطه با محاسبات جبری

$$x = \sqrt{m \frac{mp}{n}}$$





بخش چهارم - ترسیمات خاص

فصل دوم - مسائل مشهور ترسیمی، ترسیمات تقریبی

۳- مسئله پاپوس - نقطه I واقع بر نیمساز زاویه $\angle Axy$ مفروض است. از I خطی چنان رسم کنید که قطعه ای از آن که محصورین دو ضلع زاویه است به طول معین ۱ باشد (*). این مسئله را می‌توان تعمیم داد به این ترتیب که زاویه $\angle Axy$ غیر قائم و I نقطه دلخواهی از صفحه آن فرض شود. مسئله کلی را می‌توان از راههای مختلفی کما بیش ساده‌یا پیچیده مورد مطالعه قرارداد. مثلاً می‌توان زاویه خط مطلوب با Ax یعنی زاویه B را مجهول اختیار کرد و معادلات منوط را تشکیل داد. فرض می‌کنیم خط مطلوب Ax و Ay یا متداول آنها را به ترتیب در B و C قطع کند و داشته باشیم: $BAI = \alpha$ و $IAC = \beta$ و $BI = x$ و $IC = y$ و $AI = d$. خواهیم داشت:

$$x + y = 1, \quad \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin B}$$

$$x = \frac{d \sin \alpha}{\sin B}, \quad y = \frac{d \sin \beta}{\sin(B + \alpha + \beta)}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin B} + \frac{\sin \beta}{\sin(B + \alpha + \beta)} = \frac{1}{d}$$

از این رابطه زاویه B بدست می‌آید.

می‌توان مسئله را از راه حل هندسی حل کرد به این ترتیب که نقطه B را از تقاطع Ax با یک کنکوئید نیکومدیه قطب I بدست آورد.

I - مسائل مشهور

۱- مسئله کاستیلن - در دایره مفروض مثلث چنان محاط کنید که هر ضلع آن از نقطه ثابت معین بگذرد. حل این مسئله با روشن کاملاً مقدماتی در ابتدای کتاب انجام گرفت (یکان شماره ۴۸ صفحه ۳۵). حل مسئله مزبور با استفاده از انکاس نیز میسر است.

۲- مسئله مالفاتی - سه دایره چنان رسم کنید که هر یک از آنها بر دو دایره دیگر و بر دو ضلع از مثلث مفروض مماس باشد. مالفاتی ریاضیدان ایتالیایی برای نخستین بار در ۱۸۰۷ این مسئله را حل کرد. او از راه محاسبه اندازه شعاع هر دایره را بدست آورد و بعد نمایش هندسی عبارتهای حاصل را تعیین کرد. در ۱۸۲۶، آشتینیو خاصیت زیر را بدون آنکه اثبات کند بیان کرد و در نتیجه آن حل بسیار ساده مسئله بدست آمد: هر مماس مشترک دو دایره از سه دایره مطلوب بر دو دایره از دایره‌های محاطی سه مثلثی که از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های مثلث مفروض تشکیل می‌شوند نیز مماس می‌باشد. اثبات این خاصیت همانند قضیه مرموز فرما، حدود نیم قرن ریاضیدانان را به خود مشغول داشت. اولین دفعه در ۱۸۷۴ یک اثبات با استفاده از انکاس توسط سکر و قر ارائه شد که به نام وی مشهور شده است. تازگیها ریاضیدان دانمارکی پترسن راه حل مقدماتی مسئله را نشان داده است.

* دو راه حل مسئله پاپوس در «مجموعه علمی» از انتشارات یکان چاپ شده است.

OI باشد خواهیم داشت :

$$x^3 = 2a^3$$

می توان مسئله را به ترتیب زیر حل کرد . هذلولی به معادله (۱) و سهمی به معادله (۲) رسم کرد و نقاط تلاقی آنها را پیدا کرد . یکی از چهار نقطه تلاقی آنها در بینهایت واقع است و دو تای آنها موافق است پس دو منحنی فقط در یک نقطه حقیقی A منقطع می باشند . طول این نقطه همان طول مجھول است . راه حل منوشم (۳۲۸ ق . م .) - از حذف y بین معادله های :

$$(1) y^3 = 2ax \quad (2) x^3 = ay$$

معادله $x^3 = 2a^3$ حاصل می شود . معادله های (۱) و (۲) مربوط به دو سهمی اند که علاوه در مبدأ مختصات در یک نقطه حقیقی A منقطع می باشند طول نقطه A جواب مسئله است .

راه رسم ۵ کارت - منحنی های به معادله های زیر را رسم می کنیم :

$$(1) x^3 = ay$$

$$(2) x^3 + y^3 = a(2x + y)$$

از حذف y بین این دو معادله همان معادله $x^3 = 2a^3$ بدست می آید . منحنی معادله (۲) دایره ای است به مرکز $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

و به شعاع $\frac{a\sqrt[3]{5}}{2}$ و منحنی به معادله (۱) سهمی است که علاوه بر مبدأ در نقطه دیگر A مشترک می باشند . حل مسئله عبارت می شود از تعیین طول نقطه A

راه رسم گرگوار سن و نسان - از حذف y بین

$$(1) xy = 2a^3 \quad \text{دو معادله :}$$

$$(2) x^3 + y^3 = a(2x + y)$$

معادله زیر بدست می آید :

$$(x - 2a)(x^3 - 2a^3) = 0$$

حل مسئله مربوط می شود به تعیین نقاط مشترک هذلولی متساوی القطرین به معادله (۱) و دایره به معادله (۲) و برای این کار گرگوار چنین عمل کرده است .

مربع مستطیل ABCD به ضلعهای AB = ۲a و BC = a را در نظر می گیریم . دایره محیطی این مربع مستطیل هذلولی را که از C می گذرد و AD و AB مجانبهای آن می باشند در یک نقطه I قطع می کند که فاصله های آن از این مجانبهای واسطه های هندسی بین ضلعهای CD و CB می باشد .

راه رسم افلاطون - مثلث BAE قائمه در زاویه

$$\frac{AS}{SK} = \frac{AE}{EI} = \frac{2}{1} \Rightarrow AS = 2SK$$

$$AS = ST = TB$$

$$AOS = SOT = TOB$$

و در نتیجه :

راه حل ۵ کارت - این راه حل منجر می شود به تعیین

مختصات نقاط تلاقی دایره و سهمی به معادله های زیر :

$$\begin{cases} (x - \frac{13}{8})^3 + (y + 2a)^3 = 4a^3 + \frac{169}{64} \\ x = 4y^3 \end{cases}$$

با حذف x بین دو معادله بالا و بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$f(y) = 4y^3 - 3y + a = 0$$

با فرض $a < 0$ به سادگی معلوم خواهد شد که این معادله همواره دارای سه ریشه است که دو تای آن مثبت می باشد .

یکی از این دوریشه کوچکتر و دیگری بزرگتر از $\frac{1}{2}$ می باشد .

کوچکترین جواب سینوس ثلث زاویه ای است که سینوس آن برابر با a می باشد .

تبصره ۱ - راه حل بالا را می توان به صورت زیر ساده تر کرد . از اتحاد مثلثاتی :

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

با فرض y = sin x و $\sin 3x = a$ معادله درجه سوم بالا بدست خواهد آمد .

تبصره ۲ - می توان اتحادهای زیر را در نظر گرفت :

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

و به ترتیب معادله های زیر را بدست آورد :

$$4y^3 - 3y - a = 0$$

$$y^3 - 3ay - 3y + a = 0$$

- مسئله تضییف مکعب - هر چند که این یک مسئله

فضائی است اما حل آن به هندسه مسطحه مربوط می شود . مقصود از مسئله تعیین مکعبی است که حجم آن دوبرابر حجم مکعب مفروض باشد .

راه حل ۵ هیپوگرات - بعد از محاسبات لازم حل

مسئله به تعیین جواب مشترک دو معادله زیر منجر می شود :

$$xy = 2a^3 \quad (1) \quad ay = x^3 \quad (2)$$

دو وتر متواالی به طول برابر با شعاع یعنی یک را نقل می کنیم تا نقطه I بست آید . داریم $BI = \sqrt{3}$ و $BA = \sqrt{2}$ و از آنجا $BI + BA$ مقدار π را تا دو رقم اعشار صحیح و

$\frac{1}{\pi} \cdot BI - BA$ مقدار $\frac{1}{\pi}$ را تا سه رقم اعشار صحیح بست می دهد .

تبصره - دو عدد $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ و $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ جوابهای

معادله زیراند :

$$x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 = 0$$

اگر در این معادله علامت $\sqrt{3}$ تغییر کند جوابهای معادله تغییر علامت می دهند و نتیجه می شود که معادله درجه چهارم :

$$(x^2 - 2x\sqrt{3} + 1)(x^2 + 2x\sqrt{3} + 1) = \\ -x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

که در آن تمام ضریبها منطق می باشند مقادیر π و $\frac{1}{\pi}$ و

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \cdot \text{را بست می دهد .}$$

روش ۳ - در دایره به شعاع یک مربعی محاط می کنیم .

یکدهم ضلع این مربع را با ۳ جمع می کنیم مقدار π با خطای کمتر از 0.0002 بست می آید . زیرا داریم :

$$3 + \frac{\sqrt{2}}{10} = 3 + 0.1414 = 3.1414$$

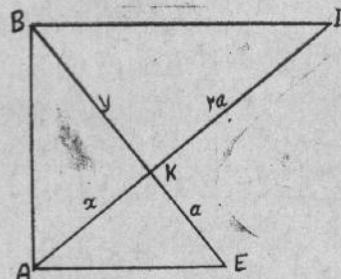
روش ۴ - در دایره C به مرکز O و به شعاع R قطر را رسم می کنیم . در A مماسی بر دایره رسم کرده روی آن نقطه I را چنان تعیین می کنیم که AI برابر باشد با اختلاف $3R$ و نئن طول ضلع سه ضلعی منتظم محاطی در دایره C . در این صورت طول BI برابر با مقدار تقریبی نصف محیط دایره می باشد . زیرا داریم :

$$BI = AB + AI = 4R + (2R - \frac{R}{\sqrt{3}})^2 = \\ - \frac{R^2(40 - 6\sqrt{3})}{3}$$

$$BI = \frac{R\sqrt{4(20 - 3\sqrt{3})}}{3} \approx 3.14153...R$$

روش پنجم - دایره C به مرکز O و به شعاع یک را در نظر گرفته در A مماسی بر آن رسم می کنیم . روی این مماس طولهای $2 = \frac{1}{5} AE$ و $EF = \frac{2}{5}$ را جدا می کنیم .

روی قطری که از A رسم شود طول AH = OE را جدا کرده از H موازی با OF رسم می کنیم که امتداد AI را در قطع K



را چنان رسم کنیم که داشته باشیم $KI = 2KE$ مسئله حل شده است . زیرا با فرض :

$$AK = x, BK = y, EK = a, KI = 2a$$

در مثلثهای ABI و BAE به ترتیب داریم :

$$x^2 = ay, y^2 = 2ax$$

و از آنجا نتیجه می شود :

II - ترسیم تقریبی عدد π

ترسیم تقریبی عدد π

روش ۱ - کسر $\frac{22}{7}$ که توسط ارشمیدس ارائه شده و مقدار

π را تا دورقم اعشار بست می دهد به سادگی و با استفاده از خطوط متوالی قابل رسم می باشد .

روش ۲ - داریم :

که مقدار π را تا دو رقم اعشار بست می دهد . از طرف دیگر داریم :

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$$

یعنی عبارت $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ برابر با $\frac{1}{\pi}$ می باشد . در اینجا

نکته قابل توجهی ملاحظه می شود و آن اینکه در محاسبه تقریبی

$\frac{1}{\pi}$ خطای ده مرتبه کمتر از خطای مربوط به محاسبه π وجود دارد :

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi + \epsilon} = \frac{\epsilon}{\pi(\pi + \epsilon)} \# \frac{\epsilon}{10}$$

اگر مقادیر $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ به ترتیب 1.732 و 1.414 اختیار

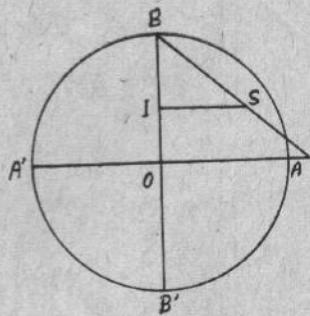
شود اولین سه رقم اعشار 3.141592653589793 دقیق

می باشد و می توان راه رسم زیر را بکاربرد :

در دایره به مرکز O و به شعاع یک دو قطر عمود برهم

AA' و BB' را رسم می کنیم . روی دایره درجهت از B به

C به مرکز O و به شعاع R دو قطر عمود بر هم ' و ' BB' AA'



را رسم می کنیم . روی امتداد OA ابتدا از A و در خارج آن طول

$$BO = \frac{R}{\sqrt{7}}$$

درجهت از B به

$$BI = \frac{4R}{\sqrt{7}}$$

را جدا می کنیم . از I موازی با OA رسم می کنیم که BE را قطع می کند . طول BS نزدیک به طول ضلع هفتضلعی منتظم محاط در C می باشد . ذیرا از تشابه مثلثات BIS و BOE خواهیم داشت :

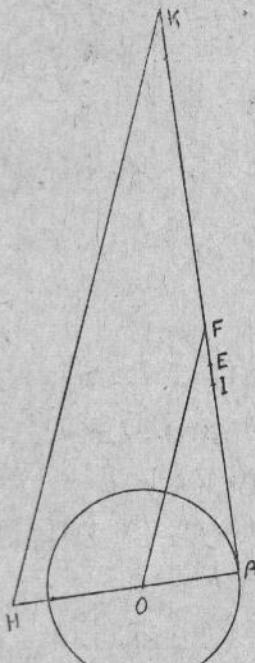
$$IS = \frac{4}{\sqrt{7}} \times \frac{8R}{\sqrt{7}} = \frac{32R}{49}$$

$$BS = BI + IS = \frac{16R^2(49+64)}{49^2}$$

$$BS = \frac{4R\sqrt{113}}{49} \# 0.8677670...R$$

در حالی که طول C برابر است با :

$$0.8677675...R$$



می کند طول AK مقدار

2π را با تقریب کمتر

۰/۰۰۰۰۰۷ از

بدست می دهد . ذیرا

داریم :

$$\frac{AK}{AF} = \frac{AH}{AO} = AH$$

$$AK - AF \cdot AH = AF \cdot OE$$

$$AE = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$OE = 1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{146}{25}$$

$$OE = \frac{\sqrt{146}}{5}$$

$$AF = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5} \text{ و } AK = \frac{13\sqrt{146}}{25}$$

$$\frac{AK}{2} = \frac{13\sqrt{146}}{50} \# 3/1415919...$$

رسم تقریبی ضلع هفتضلعی منتظم - در دایره

پاسخها (مربوط به جشنواره سالانه)

و خانم کامبین مابین دو جنگ جهانی بدنیا آمدند، این جواب غیرقابل قبول است. بدلیلی واضحتر جوابهای ۱۶۹۱۲ و بیشتر برای e غیرقابل قبول خواهد بود.

بنابراین $a = 27$ می باشد . بهینانی دیگر خانم و آقای کامبین در ۱۹۲۷ بدنیا آمدند: در ۱۹۵۴ دارای $e = 4$ فرزندانشان در این سال e باشد . در ۱۹۵۴، والدین کامبین

در باره دوران استانالاهای چنانکه گفته شده دورانند . استانالای پدر درسالی بخش پذیر برابر ۴ بدنیا آمد است ولی جشن تولدش همواره در ۲۸ یا ۲۹ فوریه می افتد. تنهایانی که بر ۴ بخش پذیر بوده و کمیسنه نباشد ۱۹۰۰ است (اگر از ۱۷۵۵ یا ۱۸۰۰ به بالا باشد) . بنابراین آقای استانالای پدر درسال ۱۹۴۸ سال داشته و پسرش ۱۶ سال . فعلا هر کدام ۲۱ سال بیشتر از این دارند .

ابتدا از خانواده کامبین ها شروع می کنیم، فرض می کنیم که در سال ۱۹۵۴ آقا و خانم کامبین هر کدام a سال و تعداد فرزندانشان در این سال e باشد . در ۱۹۵۴، والدین کامبین

مجموعاً $\frac{2a}{3}$ سال و فرزندانشان $\frac{2a}{3}$ سن داشته اند.

پس از ۹ سال، در ۱۹۶۳ سن والدین $2a + 18$ و سن

فرزندان $\frac{2}{3}a + 9e + 18$ می باشد (عدد ۱۸۰۰ مجموع سنین سه قلوهای متولد در سال ۱۹۵۷ است) . در این صورت :

$$2a + 18 = \frac{2}{3}a + 9e + 18 \Rightarrow 4a = 27e$$

در نتیجه e باید برابر با ۴ یا مضربی از آن باشد .

اگر $e = 8$ باشد برای a مقدار ۵۴ بدست می آید. چون آقا

صد مسئله جالب و حل آنها

-۲-

ترجمه: داوید ریحان
دانشجوی دانشکده فنی دانشگاه تهران

از آنجا حاصل می شود :

$$3^{105} + 4^{105} \equiv 2 \pmod{5}$$

رابطه اخیر مبین آنست که در تقسیم عدد $3^{105} + 4^{105}$ بر ۵ باقیمانده عدد ۲ می باشد . همچنین داریم :

$$4^5 \equiv -2 \pmod{11}$$

$$4^3 \equiv -2 \pmod{11}$$

و چون $(4^3)^5 \equiv 1 \pmod{11}$ و بالاخره $4^{105} \equiv 1 \pmod{11}$

همچنین روابط زیر را بدست می آوریم :

$$3^{105} \equiv 1 \pmod{11}$$

رابطه اخیر نشان می دهد که باقیمانده عدد $3^{105} + 4^{105}$ بر ۱۱ عدد ۲ می باشد .

۵ - حالت تلخیص شده ای از معادله فرما :

اگر x, y, z اعداد صحیح مثبت باشند و $n > z$ باشد . ثابت کنید که رابطه $x^n + y^n = z^n$ محقق نخواهد بود .

حل - فرض می کنیم که اعداد صحیح x, y, z وجود داشته باشند بطوری که داشته باشیم :

$$n > z \quad x^n + y^n = z^n$$

بسادگی می بینیم که $x \neq y$ و $y < z$ ، $x < z$ ، $x > y$ باشند .

بواسطه تقارن می توانیم فرض کنیم که $x > y$ باشیم :

بنابراین :

$$z^n - y^n = (z - y)(z^{n-1} + yz^{n-2} + \dots + y^{n-1}) \\ > 100ny^{n-1} > nx^{n-1} > x^n$$

حکم اخیر با فرض $x^n + y^n = z^n$ مغایرت دارد و این تنافض نتیجه عدم صحت قضیه مزبور می شود .

۴- بخش پذیری اعداد

$$3^{105} + 4^{105} + 3^{105} \equiv 379, 181, 49, 13 \pmod{5}$$

پذیر است ولی بر اعداد ۵ و ۱۱ بخش پذیر نیست .

چگونه از این نتیجه اطمینان حاصل می کنیم ؟

حل - عبارت $a^n + b^n$ در حالتی که n فرد باشد بر $a+b$ بخش پذیر است بنابراین عدد :

$$3^{105} + 4^{105} + 3^3 + 4^3 = 64 + 27 = 91 = 7 \times 13$$

به همین ترتیب تساویهای :

$$3^{105} + 4^{105} = (3^5)^{21} + (4^5)^{21}$$

$$3^{105} + 4^{105} = (3^7)^{15} + (4^7)^{15}$$

نشان می دهند که عدد مفروض بر دو عدد $3^7 + 4^7 = 49 \times 379$ و $3^5 + 4^5 = 7 \times 181$ بخش پذیر است .

یادآوری می کنیم که فرمول اخیر به معنای آنست که عدد ۴ مساوی مضربی از ۵ منهای یک است) متعاقباً خواهیم داشت :

$$4^{105} \equiv (-1)^{35} \pmod{5}$$

و از آنجا $4^{105} \equiv -1 \pmod{5}$ همچنین داریم :

$$3^2 \equiv -1 \pmod{5}$$

و از آنجا $3^{104} \equiv (-1)^{52} \pmod{5}$ و باز هم نتیجه می شود :

$$3^{104} \equiv 1 \pmod{5}$$

بنابراین :

$$3^{105} \equiv 3 \pmod{5}$$

پس داریم :

$$3^{105} \equiv -1 \pmod{5}, \quad 3^{105} \equiv 3 \pmod{5}$$

۶- توزیع اعداد

	۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰
۰/۹۵	۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰
۰/۰۵	۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱
۰/۳۴	۲ ۲ ۲ ۳ ۳ ۳ ۴ ۴
۰/۷۴	۳ ۴ ۵ ۶ ۶ ۷ ۸
۰/۵۸	۳ ۴ ۵ ۵ ۶ ۶
۰/۱۷	۲ ۲ ۲ ۲ ۲
۰/۴۵	۴ ۴ ۵ ۵
۰/۸۷	۷ ۸ ۹
۰/۲۶	۳ ۳
۰/۶۶	۷

۷- تعمیم

در مسئله فوق اگر به جای ۱۰ عدد و ۱۰ شرط n ، عدد و n شرط موجود باشد، باز هم مسئله قابل حل خواهد بود (n عددی غیر مشخص و ثابت است)؟

حل - یک مجموعه چهارده تائی (۱۴ - ۱۱) وجود دارد بطوری که در شرایط مسئله قبل صادق باشد:

۰/۰۶، ۰/۵۵، ۰/۷۷، ۰/۳۹، ۰/۹۶، ۰/۲۸، ۰/۶۴
 ۰/۱۳، ۰/۸۸، ۰/۴۸، ۰/۱۹، ۰/۷۱، ۰/۳۵، ۰/۸۲
 (مجموعه اخیر را با اضافه نمودن عوامل ۰/۱۹، ۰/۸۲، ۰/۳۵، ۰/۷۱ به دوین مجموعه داده شده در مسئله قبل بدست آورده ایم).

چون اعداد ۰/۳۵ و ۰/۳۹ واقع مابین ۰/۴۰ = $\frac{9}{15}$

و ... ۰/۳۳ = $\frac{5}{15}$ می باشند نمی توانیم به این مجموعه عدد پانزدهمی اضافه کنیم که ضمناً در شرایط داده شده صادق باشد بسیار جالب توجه است یادآوری کنیم که می توانیم بوسیله تبدیلات ۱۴ عدد فوق الذکر، اعداد دیگری بدست آوریم که جواب مسئله باشند به عنوان مثال:

۰/۱۹، ۰/۹۶، ۰/۵۵، ۰/۳۹، ۰/۷۷، ۰/۰۶، ۰/۶۴
 ۰/۲۸، ۰/۸۸، ۰/۴۸، ۰/۱۳، ۰/۷۱، ۰/۳۵، ۰/۸۲
 توزیع مجموعه چهارده تائی از اعداد در فاصله [۰/۹۱]

در جدول صفحه بعد نمایش داده است.

د) عدد x_1, x_2, \dots, x_n را طوری تعیین کنید که:

(I) عدد x_1 در فاصله بسته [۱۰] یافت شود.

(II)- اعداد x_1, x_2 در دو نیمة مختلف فاصله [۰/۹۱] بدست آیند.

(III)- اعداد x_1, x_2, x_3 در سه ثلث مختلف از فاصله [۰/۹] بدست آیند.

(IV)- اعداد x_1, x_2, x_3, x_4 همگی در چهار چارک مختلف از فاصله منبور قرار گیرند و غیره ... بالاخره

(V) اعداد x_1, x_2, \dots, x_n همگی در دهکهای مختلف [۰/۹] یافت شوند.

حل - می توانیم بینایت مجموعه از اعداد x_1, x_2, \dots, x_n حائز شرایط مفروض بدست بیاوریم: دو تای آنها به قرار زیر است:

۰/۱۷، ۰/۴۵، ۰/۲۶، ۰/۸۷، ۰/۳۹، ۰/۹۶، ۰/۲۸، ۰/۶۴، ۰/۱۳، ۰/۸۸، ۰/۴۸، ۰/۱۹، ۰/۷۱، ۰/۳۵، ۰/۸۲، ۰/۰۵، ۰/۳۴، ۰/۷۴، ۰/۵۸، ۰/۴۸، ۰/۹۵، ۰/۰۵، ۰/۱۷، ۰/۴۵، ۰/۲۶، ۰/۸۷، ۰/۳۹، ۰/۹۶، ۰/۲۸، ۰/۶۴، ۰/۱۳، ۰/۸۸، ۰/۰۶، ۰/۵۵، ۰/۷۷

اعدادی که در اولین مجموعه های مشخص شده در فاصله [۰/۹] بدطريقه مفروض توزیع شده اند در جدولی که ذیلا تشکیل داده ایم، یافت می شوند؛ این جدول بدین صورت باید خوانده شود: درستون با شماره ۲ در اولین سطر عدد ۲ را در دوین سطر عدد ۱ را بدست می آوریم. این به معنای آنست که ۰/۹۵ در نیمة اول فاصله [۰/۹] و ۰/۹۵ در نیمة ثانی این فاصله قرار دارد. این قاعده برای تمام ستونها قابل اجرا است. به همین ترتیب، به عنوان مثال، عدد ۶ درستون با شماره ۸ و در سطر مر بوط به ۰/۷۴ نوشته شده است؛ این به معنای آنست که ۰/۷۴ در ششمین فاصله مر بوط به [۰/۹] در تقسیم به هشت قسمت قرار دارد ($\frac{6}{8} < ۰/۷۴ < \frac{5}{8}$). می خواهیم تمام

نتایج جمع آوری شده در این جدول را به تحقق برسانیم. اعداد ثبت شده در هر ستون همواره متفاوتند و چون به تعداد شماره هر ستون از این اعداد موجود است، مسئله حل شده است.

$$K = \left\lceil 35(x_j - x_i) + \frac{5}{\gamma} \right\rceil \quad \text{با فرض}$$

$$l = - \left[- \frac{(\mathbf{K} + \gamma) \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i} \right],$$

$$m = - \left[- \frac{1}{x_i} \right]$$

([x] به معنای قسمت صحیح x می باشد) . نامساویهای زیر را داریم :

$$(3) \quad r\Delta(x_j - x_i) - \frac{r}{\gamma} < K < r\Delta(x_j - x_i) + \frac{\Delta}{\gamma}$$

$$(4) \quad \frac{(K + \frac{r}{v})x_i}{x_i - x_j} < l < \frac{(K + \frac{r}{v})x_i}{x_i - x_j} + 1$$

$$(\Delta) \quad \frac{1}{x_i} < m < \frac{1}{x_i} + 1$$

از نامساویها (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم:

$$\tau \Delta x_i < l < \frac{[\tau \Delta (x_j - x_i) + 1]x_i}{x_j - x_i} + 1 =$$

$$= \tau \Delta x_i + \frac{x_i}{x_j - x_i} + 1$$

و با توجه به روابط (۵) و (۶) خواهیم داشت :

$$25 < m < 25 + \frac{1}{x_j - x_i} + \frac{1}{x_i} + 1 < 79$$

(٦) $46 < m < 75$: اینطور یا و

از طرف دیگر از نامساوی (۵) داریم :

$$(m - 1)x_i < l \leq mx_i$$

از آنجارا بطة زیر استخراج می‌شود:

$$(\forall) \quad [(m - 1)x_i] < [mx_i]$$

با توجه به روابط (۵)، (۴) و (۱) داریم:

$$(m-1)x_j > \left(\frac{1}{x_i} - 1\right)x_j = l \frac{x_j}{x_i} - x_j =$$

$$= 1 + l \frac{x_j - x_i}{x_i} - x_j > 1 + \frac{(k + \frac{r}{v})x_i}{x_j - x_i} \cdot \frac{x_j - x_i}{x_i} - x_j$$

$$= 1 + k + \frac{r}{v} - x_j > 1 + k$$

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۰/۰۶	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۰/۵۵	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵	۵	۶	۷	۷	۸	۸	۸
۰/۷۷	۳	۴	۴	۵	۶	۷	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۱		
۰/۳۹	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۴	۵	۵	۵	۶	۶		
۰/۹۶	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴				
۰/۲۸	۲	۲	۳	۳	۳	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴		
۰/۱۴	۵	۶	۶	۷	۸	۸	۸	۹	۹	۹				
۰/۱۳	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲			
۰/۸۸	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳								
۰/۴۸	۵	۶	۶	۷	۷									
۰/۱۹	۳	۳	۳	۳										
۰/۷۱									۹	۱۰	۱۰			
۰/۳۵									۵	۵				
۰/۸۲											۱۲			

ثابت کرده است که مسئله عمومی A. Schinzel)

دارای یک جواب منفی می باشد ، به طریق ازیر عدم وجود جواب را

برای ۷۵ = ثابت کرده است (*)

فرض می‌کنیم که اعداد x_1, x_2, \dots, x_{75} خواص

هر بوط را دادارا باشند . بنابراین به ازای برخی از مقادیر صحیح

: داریم $i < j \leq 35$

$$(1) \quad \frac{v}{r_0} < x_i < \frac{\lambda}{r_0}, \quad \frac{a}{r_0} < x_j < \frac{10}{r_0}$$

از آنچه :

$$(2) \quad \frac{1}{x_j - x_i} + \frac{1}{x_i} < \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\gamma} = 0,$$

$$(2') \quad \frac{x_j - x_i}{x_i} + x_j < \frac{\frac{10}{25} - \frac{v}{25}}{\frac{v}{25}} + \frac{\frac{10}{25}}{\frac{v}{25}} = \frac{5}{v} \quad .$$

* م . وارموس اخیراً ثابت کرده است که عدد ۱۷ بزرگترین عددی می‌بوده است که پهابزای آن می‌تواند مسئله جوابی

داشته باشد.

به یکدیگر تبدیل می‌شوند (یعنی چنین عمل می‌کنیم : به جای p ، q می‌نویسیم، به جای r می‌نویسیم x_i و به جای x_j می‌نویسیم)؛ بنابراین اولین جمله \square باید تبدیل به دومی، دومین جمله تبدیل به سومی، و سومین جمله تبدیل به اولی شود.

حل - می‌توانیم بنویسیم :

$$A:B:C = \sqrt{\frac{p}{r}} : \sqrt{\frac{q}{p}} : \sqrt{\frac{r}{q}}$$

زیرا از رابطه مفروض داریم : $1 = pqr$ و از آن نتیجه می‌گیریم که :

$$A:B = \sqrt{\frac{p}{qr}} = p, \quad B:C = \sqrt{\frac{q}{rp}} = q$$

$$C:A = \sqrt{\frac{r}{pq}} = r$$

با استفاده مجدد از رابطه $1 = pqr$ از رابطه بدست آمده در فوق می‌توانیم مقادیر دیگری بدست آوریم که در این رابطه صدق کنند و دارای همان خواص باشند :

$$A:B:C = \sqrt{p^2q} : \sqrt{q^2r} : \sqrt{r^2p}$$

مسائلی که حل آنها در شماره بعد جای می‌شود :

- ۹ - به طریق مقدماتی ثابت کنید که ریشه مثبت معادله $x^5 + x = 10$ اصم است.
- ۱۰ - نامساوی زیر را ثابت کنید در صورتی که حروف نماینده اعداد مثبت می‌باشند.

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r} + \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r} > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r}$$

- ۱۱ - رشته‌ای از اعداد a_1, a_2, a_3, \dots را پیدا کنید در صورتی که تمام جملات آن مثبت بوده $a_1 = 1$ و $a_n - a_{n+1} = a_{n+2}$ باشد (بازای $n = 1, 2, \dots$). ثابت کنید که چنین رشته‌ای منحصر به فرد است.

به همین ترتیب با درنظر داشتن رابطه (۲) داریم :

$$m x_j < \left(\frac{1}{x_i} + 1 \right) x_j = 1 \frac{x_j}{x_i} + x_j = \\ -1 + 1 \frac{x_j - x_i}{x_i} + x_j$$

$$< 1 + \left(\frac{(k+\gamma)x_i}{x_j - x_i} + 1 \right) \frac{x_j - x_i}{x_i} + x_j = \\ -1 + k + \frac{\gamma}{\gamma} + \frac{x_j - x_i}{x_i} + x_j < 1 + k + 1$$

با تلفیق دو نامساوی اخیر داریم :

$$1 + k < (m - 1)x_j < mx_j < 1 + k + 1 \\ \text{از آنجا :}$$

$$(8) \quad [(m - 1)x_j] = [mx_j]$$

از روابط (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که :

$$(9) \quad N_{m-1} = [(m - 1)x_j] - [(m - 1)x_i] >$$

$[mx_j] - [mx_i] = N_m$
حال، با توجه به نامساوی (۶) و همچنین فرض مسئله لازم است که رشتة :

$$[(m - 1)x_1, \dots, (m - 1)x_{n-1}]$$

مبدلی از رشتة $(m - 2, \dots, 1)$ باشد؛ به همین

ترتیب رشتة $[mx_1, \dots, mx_{n-1}]$ باشد مبدلی از

رشته $(m - 1, \dots, 1)$ باشد و چون داریم :

$$i < j < m - 1$$

N_{m-1} تعداد جوابهای x_i از نامساوی $x_j < x_t < x_i$ می‌باشد.

x_t عددی از مجموعه مورد نظر است که مربوط به عدد صحیح

$t < m$ می‌باشد؛ N_m تعداد جوابهای مربوط به عدد صحیح

$N_{m-1} < N_m$ می‌باشد. بنابراین واضح است که رابطه اخیر با نامساوی (۹) منافق است.

تناقض اخیر خاتمه اثبات را می‌رساند.

- نسبتها :

اعداد A, B, C, D, E, F, G, H را که بین آنها رابطه

زیر برقرار است درنظر می‌گیریم :

$$A:B=p, \quad B:C=q, \quad C:D=r$$

نسبت $\square : \square : \square : \square$ را بنویسید

بطوری که در مربعهای خالی، جملاتی بر حسب p, q, r و s نوشته شود؛ این جملات هر یک با تبدیل دوری p, q, r و s

حل مسائل یکان شماره: ۵۸

$$C_1 + B_1 + BOC = 180^\circ$$

$$C_1 = C_2 = O_1 OC \quad B_1 = B_2 = BOO_1$$

$$O_1 OB + BOC + COO_2 = 180^\circ$$

و سه نقطه O_1 و O_2 روی یک خط راست واقع اند

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۵۸/۳ - در عبارت زیر مقدار ضرایب های a و b را چنان تعیین کنید که عبارت نسبت به دو حرف x و y مترابن باشد:

$$(a+b-3)x^4 - (a+b-2)x^3y + (a-3)x^2y^2 - (a-2)xy^3 + 2y^4$$

حل - باید ضرایب همدرجه از x و y برابر باشند پس:

$$\begin{cases} a+b-3=2 \\ a+b-2=a-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases}$$

۵۸/۴ - فرستنده: اسماعیل بابلیان دانشجوی ریاضی دانسرای عالی.

ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$\frac{x}{l(mb+nc-la)} = \frac{y}{m(nc+la-mb)} = \frac{z}{n(la+mb-nc)}$$

خواهیم داشت :

$$\frac{l}{x(by+cz-ax)} = \frac{m}{y(cz+ax-by)} = \frac{n}{z(ax+by-cz)}$$

حل - طرفین تساوی اول را بر ۱ و دوم را بر m و سوم را بر n تقسیم می کنیم و با استفاده از خواص تناسب خواهیم داشت:

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} = \frac{1}{mb+nc-la} = \frac{1}{nc+la-mb} = \frac{1}{la+mb-nc} =$$

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۵۸/۱ - عبارت زیر را به صورت مجموع چندین مربع تبدیل کنید و از روی آن معلوم کنید که به ازاء چه مقدار از x و y این عبارت کمترین مقدار خود را دارد می باشد و این کمترین مقدار را معلوم کنید:

$$P = 2x^4 + 2y^4 + z^4 + 2(xy + yz + zx) + 2x - 2y + 3$$

حل - عبارت را به صورت زیر می نویسیم:

$$P = (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + 1$$

$$P = (x+y+z)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 + 1$$

مجموع چند عامل مثبت و قوی کمترین مقدار خود را دارد که هر یک از این عاملها برابر با صفر باشد یعنی:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

در ازاء این مفادیر از x و y و z مقدار P برابر با یک می باشد.

۵۸/۲ - فرستنده: حسین دهقان از دیبرستان سعدی اصفهان.

در مثلث ABC نیمسازهای داخلی زوایه های A و B یکدیگر را در O ، عمود منصف AB ضلع BO و عمود منصف AC ضلع CO را در O_1 قطع می کند . ثابت کنید سه نقطه O و O_1 و O_2 بر یک استقامت واقع اند ،

حل - مثلثهای OO_1B و OO_1C

متساوی الساقین

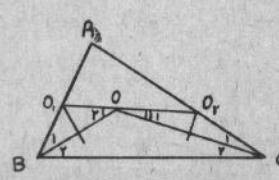
می باشند (چرا)

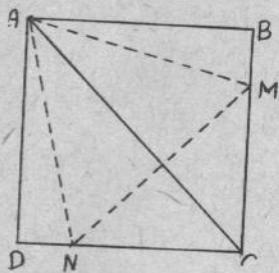
در نتیجه :

$O_1 = O_1 OC$

$O_1 = O_1 OB$

در مثلث BOC داریم :





حل - دو مثلث
ADN و ABM
 در حالت تساوى و تردد
 يك ضلع برا بر آن دارد
 $BM = DN$ نتیجه
 و از آنجا
 $CM = CN$
 بوده نقطه C بر عمود

منصف MN قرار دارد. از تساوى $AM = AN$ نيز نتیجه
 مى شود که A بر عمود منصف MN واقع باشد بنابراین
 عمود منصف MN مى باشد.

۵۸/۷ - ترجمه از روسی.

مقدار x را از رابطه زیر بدست آوردید:

$$\left(\frac{a}{b}\right)ax - b = \left(\frac{b}{a}\right)bx - a$$

حل - خواهیم داشت:

$$\left(\frac{a}{b}\right)ax - b = \left(\frac{a}{b}\right) - bx + a \Rightarrow ax - b = -bx + a$$

$$x(a+b) = a+b$$

اگر $a+b \neq 0$ باشد معادله ممکن بوده دارای جواب
 $x=1$ است. اگر $a+b=0$ باشد معادله به صورت

$x=0$ درآمده و مبهم است.

۵۸/۸ - ترجمه از روسی.

به فرض اینکه داشته باشیم:

$$\log_a \left\{ 1 + \log_b [1 + \log_c (1 + \log_p x)] \right\} = 0$$

مقدار x را تعیین کنید.

حل - فرض می کنیم:

$$1 + \log_b [1 + \log_c (1 + \log_p x)] = K_1 \quad \text{نتیجه می گیریم:}$$

$$\log_a K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = a^0 = 1 \Rightarrow K_1 = 1$$

$$\log_b [1 + \log_c (1 + \log_p x)] = 0$$

$$1 + \log_c (1 + \log_p x) = b^0 = 1 \Rightarrow$$

$$\log_c (1 + \log_p x) = 0$$

$$1 + \log_p x = c^0 = 1 \Rightarrow \log_p x = 0 \Rightarrow$$

$$x = p^0 = 1$$

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۵۸/۹ - از مصطفی گودرزی طائفه

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{l+m} &= \frac{y+z}{m+n} = \frac{z+x}{n+l} = \\ \frac{mx+ly}{lmnc} &= \frac{ny+mz}{lmna} = \frac{lz+nx}{lmnb} \Rightarrow \\ \frac{ny+mz}{a} &= \frac{lz+nx}{b} = \frac{mx+ly}{c} \end{aligned}$$

صورت و مخرج کسر اول را در x دومی را در y و سومی را در z ضرب می کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{x(ny+mz)}{ax} &= \frac{y(lz+nx)}{by} = \frac{z(mx+ly)}{cz} = \\ &= \frac{ylzy}{by+cz-ax} \end{aligned}$$

به همین ترتیب با تبدیل دوری نتیجه می شود که:

$$\frac{ylzy}{by+cz-ax} = \frac{2mzx}{cz+ax-by} = \frac{2nxy}{ax+by-cz}$$

با زهم صورت و مخرج کسر اول را در x دومی را در y و سومی را در z ضرب می کنیم و با تقسیم طرفین تساویها بر xyz نتیجه مطلوب بدست می آید.

۵۸/۱۰ - ترجمه از فرانسه.

مربع ABCD مفروض است. از A موازی با قطر BD رسم می کنیم تا امتداد ضلع CD را در E قطع کند و BE را وصل کرده عمود CH را بر BE رسم می کنیم. ثابت کنید که عمود منصف AH از رأس D می گذرد.

حل - چهار ضلعی

ABDE متوازی

الاضلاع است پس

DE = AB

چون

DE = CD

پس

می باشد و در مثلث قائم الزاویه EHC خط HD میانه و تردد دارد. DH = DC = DE با نصف و تربرابر است یعنی $DH = DC = DE$ و در نتیجه $DH = DA$ بوده نتیجه $DH = DA$ را روی عمود منصف AH واقع است.

۵۸/۱۱ - ترجمه از فرانسه.

در مربع مفروض ABCD مثلث متساوی الاضلاع را چنان محاط کرده ایم که يك رأس آن بر A، رأس M از آن بر ضلع BC و رأس N از آن بر ضلع CD قرار دارد. ثابت کنید که MN بر AC عمود است.

از روی آن درازاء مقادیر صحیح K رأسهای ده ضلعی معین می شود.

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۵۸/۱۱ - از کاظم حافظی.

اگر x_1, x_2, x_3, x_4 ریشه های معادله زیر باشند

$$x^4 + ax^2 + x + 1 = 0$$

مطلوب است تعیین مجموع زیر وشرط امکان آن :

$$S = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \frac{1}{x_3+1} + \frac{1}{x_4+1}$$

حل - اگر y ریشه غیر مشخص معادله مطلوب باشد داریم:

$$y = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{1-y}{y}$$

در معادله اول قرار می دهیم :

$$(a+1)y^4 - (2a+2)y^3 + (a+6)y^2 - 4y + 1 = 0$$

مجموع مطلوب، همان مجموع ریشه های این معادله است

$$S = \frac{2a+3}{a+1}$$

یعنی :

شرط امکان آنست که $a+1 \neq 0$ یعنی $a \neq -1$ باشد

۵۸/۱۲ - از اکبر ابراهیمیان

دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)^3 = 27 \\ (x^2 y + xy^2)^2 = 4 \\ x + y = 2a \end{cases}$$

حل - فرض می کنیم $b = x - y$ باشد با توجه به معادله

دوم دستگاه خواهیم داشت :

$$x = a + b \quad \text{و} \quad y = a - b$$

این مقادیر را در مادله اول دستگاه قرار می دهیم بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$b^6 - 18a^2b^4 + 81a^4b^2 = 0 \Rightarrow b^2(b^2 - 9a^2)^2 = 0$$

وازانجا $b = \pm 3$ بدست می آید و خواهیم داشت:

$$\begin{array}{lll} x = a & \left| \begin{array}{l} x = 4a \\ y = -2a \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} x = -2a \\ y = 4a \end{array} \right. \\ y = a & \text{یا} & \text{یا} \end{array}$$

۵۸/۱۳ - از داوید ریجان

اگر a, b, c سه عدد مثبت و α زاویه حاده باشد و

داشته باشیم :

$$a^2 \operatorname{tg} \alpha + b^2 \operatorname{cotg} \alpha + c^2 \operatorname{cotg} \alpha = abc$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$c^2 = ab^2$$

در لوزی ABCD طول قطر BD دو برابر طول قطر AC و برابر با $\sqrt{5}$ می باشد . اگر $P(2, 3)$ نقطه تلاقی دو قطر و $A(\alpha, 3\alpha)$ باشد مختصات چهار رأس لوزی را حساب کنید .

حل - چون اقطار منصف یکدیگرند بنابراین :

$$\overline{AP} = (\alpha - 3)^2 + (3\alpha - 2)^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\alpha = 2/4 \text{ یا } A(2, 0) \text{ و } 0/8 \text{ یا } 1/4$$

$$\frac{a+x_c}{2} = 3 \Rightarrow 1+x_c = 6 \Rightarrow x_c = 5 \text{ یا } 5/2$$

$$\frac{2a+y_c}{2} = 2 \Rightarrow 2+y_c = 4 \Rightarrow y_c = 1 \text{ یا } 1/6 \Rightarrow$$

$$C(5/2, 1/6) \text{ یا } (5, 1)$$

فرض می کنیم (β, α) و $B(\beta, 2)$ است پس :

$$(\alpha - 3)^2 + (\beta - 2)^2 = 20$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha - 4\beta = 7 \quad (1)$$

در مثلث قائم الزاویه APB داریم :

$$\overline{AB} = \overline{PA} + \overline{PB} = 20 + 5 = 25 \Rightarrow AB = 5$$

اگر $A(1, 0)$ فرض شود :

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - 3)^2 = 25 \quad \text{یا}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 6\beta = 21 \quad (2)$$

طرفین معادله های (1) و (2) را از هم کم می کنیم، می شود:

$$4\alpha - 2\beta = 14 \quad \text{یا} \quad \beta = 2\alpha - 7$$

این مقدار را در معادله (1) منظور می کنیم و از روی آن مقدار

α بدست خواهد آمد و بالآخر خواهیم داشت :

$$A(1, 0)$$

$$A(0, 2/4)$$

$$B(5, 6)$$

$$B(19, 9/5)$$

$$C(5, 1)$$

$$C(5/2, 1/6)$$

$$D(-13, -8/6)$$

$$D(-13, -8/6)$$

۵۸/۱۰ - ده ضلعی منتظم $M_1 M_2 \dots M_{10}$ را در دایره

مثلثاتی محاط کرده ایم . اگر A مبدأ کمانها و اندازه کمان

\widehat{AM}_1 برابر با 20° گراد باشد اندازه کلی کمانی را تعیین

کنید که از روی آن بتوان همه رأسهای ده ضلعی مزبور را

تعیین کرد .

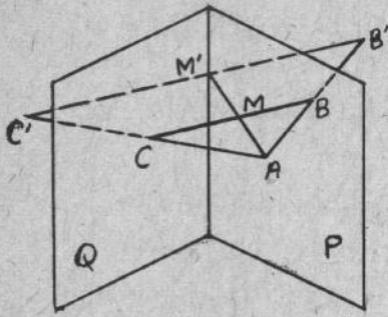
حل - اولاً اندازه کمان AM_1 بر حسب رادیان برابر

با $\frac{\pi}{10}$ می شود و چون اندازه هر کمان نظیر هر ضلع از ده ضلعی

منتظم برابر با $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ = \frac{\pi}{5}$ است پس اگر فرض

$$x = \frac{K\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

کنیم :



رسم کنیم تا صفحات P و Q را در C و B قطع کند. این دو نقطه جواب مسئله می‌باشند. مسئله بینایت جواب دارد.

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۵۸/۱۶ - اگر مکان هندسی نقطه :

$$M(x = \sin\alpha - \cos\alpha \text{ و } y = \tan\alpha + \cot\alpha)$$

منحنی به معادله :

$$y = \frac{k}{ax^2 + bx + c}$$

باشد مقادیر ضرایب a و b و c را تبیین کنید.

حل - طبق روابط مثلثاتی داریم :

$$y = \tan\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{y}$$

$$x^2 = 1 - 2\sin\alpha \cos\alpha = 1 - \frac{2}{y} \Rightarrow$$

$$(1) \quad y = \frac{-2}{x^2 - 1}$$

با متوجه قراردادن معادله (1) با معادله مفروض خواهیم داشت :

$$k = -2 \text{ و } a = 1 \text{ و } b = 0 \text{ و } C = -1$$

۵۸/۱۷ - در مسئله قبل مقدار α را چنان تعیین کنید که رابطه $x^2 + y = 0$ نیز برقرار باشد.

حل - از حذف x (یعنی معادله (1)) و رابطه خیر خواهیم داشت :

$$y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ یا } -2$$

$$\frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha} = 1 \text{ یا } \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = K\pi + \frac{\pi}{12} \text{ یا } K\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha} = -2 \text{ یا } \sin 2\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = K\pi - \frac{\pi}{4}$$

حل - با توجه به نامساوی $a_1 + a_2 + a_3 > \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ نتیجه خواهد شد :

$$abc = a^r \tan^r \alpha + b^r \cot^r \alpha + c^r \cot^r \alpha > \\ 3\sqrt[3]{a^r b^r c^r (\tan \alpha \cot \alpha)^r} = abc$$

تساوی وقتی برقرار است که داشته باشیم :

$$a^r \tan^r \alpha = b^r \cot^r \alpha = c^r \cot^r \alpha \\ \text{از رو باط فوق نتیجه می‌شود :}$$

$$\cot \alpha = \frac{c^r}{b^r}, \tan^r \alpha = \frac{b^r}{a^r} \Rightarrow \tan^r \alpha = \left(\frac{d}{c}\right)^{1/5} = \\ = \frac{b^r}{a^r} \Rightarrow \frac{b^5}{c^5} = \frac{b}{a} \Rightarrow c^5 = ab^4$$

۵۸/۱۴ - به فرض اینکه داشته باشیم :

$$\tan x = a + 1 \text{ و } \cos x = (a + 1)\sqrt{2}$$

مقدار a و اندازه کلی کمان x را معلوم کنید.

حل - طبق اتحاد $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + 1$ خواهیم داشت :

$$\frac{1}{(a+1)^2} = (a+1)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$(a+1)^4 + (a+1)^2 - 2 = 0$$

$$(a+1)^2 = A : A^2 + A - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$A = 1 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } -2$$

$$a = 0 \Rightarrow \tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \text{ و } x = K\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$a = -2 \Rightarrow \tan x = -1 = \tan \left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ و }$$

$$x = K\pi - \frac{\pi}{4}$$

۵۸/۱۵ - دو صفحه P و Q در خط A متقاطع اند و نقطه A در خارج آنها واقع است. یک نقطه B در صفحه P و یک نقطه C در صفحه Q چنان تعیین کنید که اگر B' C' قرینه A نسبت به B و C' قرینه A نسبت به C باشد خط B'C' با خط A متقاطع گردد. مسئله چند جواب دارد؟

حل - اگر M' نقطه تقاطع B'C' باشد خط AM' بوسیله BC نصف می‌شود. بنابراین از نقطه A به یک نقطه D لخواه از مانند M' وصل می‌کنیم و از وسط AM' خط D لخواهی

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

$$M(x=1\cos\alpha \text{ و } y=0 \text{ و } N(x=0 \text{ و } y=1\sin\alpha)$$

$$m_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = -\tan\alpha \text{ و } m_{NP} = \cot\alpha$$

$$(NP) \text{ معادله : } y - 1\sin\alpha = \cot\alpha x$$

$$(MP) \text{ معادله : } x = 1\cos\alpha$$

از این دو معادله خواهیم داشت :

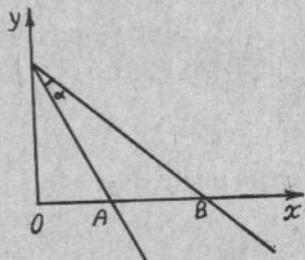
$$P(x=1\cos\alpha \text{ و } y=\frac{1}{\sin\alpha})$$

از حذف α بین مختصات P معادله مکان آن بدست می‌آید:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

۵۸/۲۰ - از محمود لشکری زاده به می دانشجوی
دانشکده علوم اصفهان :

بر محور Ox نقطه ثابت A را در نقطه گرفته آن را
به نقطه متغیر M واقع بر Oy وصل می‌کنیم و از M خطی
رسمی کنیم که با MA زاویه α بسازد و محور Ox را در
سمت راست A قطع بکند . اگر ω مرکز دایره محیطی مثلث
 AMB باشد معادله مکان ω را بدست آوردید .



حل - انداره
را برابر a وزاویه OA
متغیر OAM را برابر
می‌گیریم :
 $ABC = \varphi - \alpha$ و
 $OM = atg\varphi$ و

$$OB = \frac{atg\varphi}{tg(\varphi - \alpha)}$$

$$A(a \text{ و } 0) \text{ و } B\left(\frac{atg\varphi}{tg(\varphi - \alpha)} \text{ و } 0\right) \text{ و } M(0 \text{ و } atg\varphi)$$

باید داشته باشیم :

$$\overline{\omega A} = \overline{\omega B} = \overline{\omega M}$$

با فرض $(y \text{ و } x) \omega$ خواهیم داشت :

$$(x - a)^2 + y^2 = (x - \frac{atg\varphi}{tg(\varphi - a)})^2 + y^2 = \\ = x^2 + (y - atg\varphi)^2$$

از این معادلات x و y تعیین می‌شود که چون بین آنها
را حذف کنیم معادله مکان ω به صورت زیر بدست می‌آید:
 $x - ytg\alpha = a$

جبر

۵۸/۱۸ - از راه محاسبه مختصات نزدیکترین و دورترین

نقاط منحنی به معادله :

$$x^2 + y^2 - xy - 2 = 0$$

را از مبدأ مختصات پیدا کنید .

حل - اگر z فاصله یک نقطه منحنی از مبدأ مختصات فرض
شود وقتی مقدار مثبت z ماکریم یامی نیم باشد z^2 نیز ماکریم
یامی نیم خواهد بود و بالعکس . می‌دانیم که $z^2 = x^2 + y^2$ از
روی این رابطه معادله منحنی نتیجه می‌شود :

$$z^2 = xy + 2$$

$$(z')^2 = y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

از طرف دیگر چون از معادله مفروض مشتق y' را حساب

کنیم خواهیم داشت :

$$y' = \frac{-2x + y}{2y - x}$$

$$\frac{-2x + y}{2y - x} = -\frac{y}{x} \Rightarrow y = \pm x$$

این مقدار را در معادله مفروض منظور می‌کنیم نتیجه

خواهد شد :

$$(x = \pm \sqrt{2} \text{ و } y = \pm \sqrt{2})$$

$$(x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ و } y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3})$$

۵۸/۱۹ - از سید حلال آشفته دانشجوی دانشگاه

آریامهر .

پاره خط MN به طول l همواره متکی بر محورهای مختصات
است بقسمی که M بر محور طولها و N بر محور عرضها واقع
می‌باشد . در دو نقطه M و N دو خط به ترتیب بر محور طولها و
بر MN عمود اخراج می‌کنیم که یکدیگر را در P تلاقی می‌کنند .
معادله مکان هندسی نقطه P را تعیین کنید .

حل - زاویه $OMN = \alpha$ را متغیر اختیار می‌نماییم

خواهیم داشت :

$$2 \cos x < 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos x < \cos^2 \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$1 + \cos x < \cos^2 \frac{x}{2} + 1 < (1 + \cos \frac{x}{2})^2$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} < 2 \cos^4 \frac{x}{4}$$

$$\cos^4 \frac{x}{4} < \cos^2 \frac{x}{2} \quad (2)$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\cos^4 \frac{x}{4} < \cos^2 \frac{x}{8} \quad (3)$$

$$\cos^{4^n-1} \frac{x}{4^n-1} < \cos^{4^n} \frac{x}{4^n} \quad (n)$$

از ضرب نظیر به تغییر طرفین روابط (1) تا (n) نامساوی مطلوب نتیجه می شود .

حساب

۵۸/۲۳ - از سعید فرشاد دانشجوی ریاضی دانشگاه تبریز .

رقمهای a و b و c را از رابطه زیر بدست آوردید :

$$\overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc} = \overline{acb}$$

حل - داریم :

$$\overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc} = 111a + 111b + 111c = b + 110c + 1000a$$

$$100b + 10b + c = 889a \Rightarrow \overline{bbc} = 889a$$

واضع است که \overline{bbc} می باشد چون عددی

است سه رقمی . بنابراین $a = 1$ بوده و نتیجه خواهیم گرفت :

$$\overline{bbc} = 889 \Rightarrow b = 8 \text{ و } C = 9 \text{ و } a = 1$$

۵۸/۲۴ - از مصطفی گودرزی طائفه کرسی

ریاضیات دانشکده افسری .

رقمهای عدد \overline{bcde}^2 را پیدا کنید با فرض آنکه عددهای

$\overline{2b}$ و \overline{cd} و $\overline{e^2}$ تصاعد حسابی با قدر نسبت d بسازند .

حل -

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{2b} + d = \overline{cd} \\ \overline{cd} + d = \overline{e^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 20 + b = 10c \\ dc + d = 10e + 1 \end{array} \right.$$

مثلثات

۵۸/۲۱ - از جواد جمشیدی دانشجوی دانشگاه آریامهر .

زاویه قائم xOy و دایره به مرکز O مفروض است . نقطه A را بر Ox و نقطه B را بر Oy انتخاب می کنیم و از A و B مماسهای بر دایره رسم می کنیم که نقاط تماس آنها با دایره خارج زاویه xOy واقع باشد . اگر α زاویه حاده $OA = a$ و $OB = b$ بین دو مماس مزبور باشد R شعاع دایره را بر حسب α و β حساب کنید .

حل - فرض می کنیم :

$$OAP = \beta \text{ و } OBP = \gamma$$

در مثلثهای OAT و OBS داریم :

$$R = b \sin \gamma$$

$$R = a \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{R}{a} \text{ و } \sin \gamma = \frac{R}{b} \quad (1)$$

در مثلث PAB خواهیم داشت :

$$\alpha + \beta + \gamma + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - (\beta + \gamma) \text{ و } \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg}(\beta + \gamma)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} \right] \quad (2)$$

از روی رابطه (1) داریم :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R}{\sqrt{a^2 - R^2}} \text{ و } \operatorname{tg} \gamma = \frac{R}{\sqrt{b^2 - R^2}}$$

این روابط را در رابطه (2) منظور می کنیم ، بعد از

اختصار خواهیم داشت :

$$R = ab \sqrt{\frac{a^2 + b^2 \pm 2ab \sin \alpha}{(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

۵۸/۲۲ - از ناصر شاهمیر

به فرض اینکه x زاویه حاده باشد ثابت کنید که :

$$\cos x \cos^2 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{4} \dots \cos^{2^n} \frac{x}{2^n} > \cos^n x$$

حل - چون $\cos x$ مثبت است پس داریم : $\cos x < 1$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$$

طرفین دورابطه بdest آمده راعضو به عضو از هم کمی کنیم:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC}$$

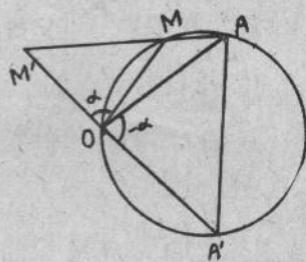
نتیجه خواهد شد

$58/22$ — ترجمه از فرانسه.

در یک صفحه دو نقطه ثابت A و O در نظر می‌گیریم مکان نقاط M از صفحه را تعیین کنید که اگر M' مبدل M در دوران به مرکز O و به زاویه معین α باشد خط MM' از نقطه A بگذرد.

مورد استعمال — مکان نقاط M از صفحه را تعیین کنید که اگر M_1 و M_2 قرینهای M نسبت به دو خط متقاطع مفروض D_1 و D_2 باشد خط M_1M_2 از نقطه ثابت A بگذرد.

حل — خط MM' تنهاوقتی از A می‌گذرد که زاویه



مکمل زاویه OMA باشد. اگر OMM' مبدل A در دوران به مرکز O و به زاویه α باشد از تشابه دو مثلث متساوی الساقین OMM' و OAA'

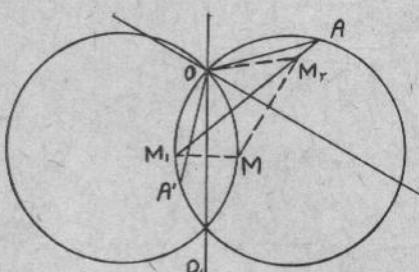
نتیجه خواهد شد که دوزاویه $OA'A$ و $M'MO$ با یکدیگر برابر می‌باشند در نتیجه دوزاویه $AA'O$ و AMO مکمل یکدیگر بوده و چهارضلعی $OMAA'$ محاطی می‌باشد یعنی مکان M دایره محیطی مثلث OAA' می‌باشد.

مورد استعمال — زاویه دو خط D_1 و D_2 را $\frac{\alpha}{2}$ و نقطه

تلاقی آنها را O می‌نامیم. در دوران به مرکز O و بدوزاویه α نقطه M_1 بر M_2 منطبق می‌شود و اگر A' مبدل A در دوران

به مرکز O و به زاویه α باشد برای اینکه A بر A' بگذرد باید M_1M_2 بر D_1D_2 متقاطع باشد. از قرار داشته باشد و در نتیجه مکان M دایره‌ای است

که قرینه دایره مذبور نسبت به خط D_1 می‌باشد.



رابطه اول طرف راست $10c$ زوج است پس باشد

$$20 + 2k = 10c \quad (k = b) \quad \text{باشد یعنی } k = 0$$

یا $10 + k = 5c$ که فقط $k = 0$ قابل قبول است که در ازاء آن $b = 2$ و $c = 2$ خواهد بود.

با توجه به رابطه دوم نتیجه می‌گیریم: $d = 5e$ که جوابهای قابل قبول آن عبارتند از:

$$d = 2 \quad e = 2 \quad \text{یا} \quad d = 6 \quad e = 1$$

و عدد مورد نظر به صورتهای 202122 و 202632 می‌باشد.

$58/25$ — مسعود حبیب‌اللهزاده.

عدد $medu$ رابه مبنای x می‌بریم و بسطهای دهیم عبارت

$$x^4 - 8x^3 - 7x^2 - 8x + 11$$

حاصل می‌شود. عدد مذبور و مبنای x را پیدا کنید.

حل — داریم:

$$\begin{aligned}medu &= x^r(x-9) + x^s(x-8) + x(x-7) + \\ &\quad + (11-x)\end{aligned}$$

$$medu = [(x-9)(x-8)(x-7)(11-x)]_x$$

چون ارقام نه توانند منفی باشند و نیز عدد

$x = 11x = 10$ یعنی $x = 11$ است بنابراین $9 < x < 11$ می‌باشد:

$$x = 10 \implies medu = 1231$$

$$x = 11 \implies medu = (2340)_{11}$$

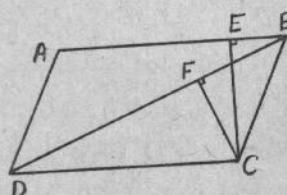
هندرسه و مخروطات

$58/26$ — ترجمه از فرانسه.

در متوازی الاضلاع $ABCD$ از رأس C عمودهای

CE را به ترتیب بر AB و BD رسم می‌کنیم. با استفاده از حاصل ضرب داخلی بردارها ثابت کنید که:

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC}' + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}$$



حل — بنایه فرض

داریم:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$$

$$\overrightarrow{BA} (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC}) = 0$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CF} = 0 \quad \text{یا} \quad \overrightarrow{BD}(\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BC}) = 0$$

حل مسائل متفرقه

۵۸/۲۸ - از سعید فرشاد.

اگر $a \geq b \geq c \geq \dots \geq n$ اندازه های ضلعهای یک n ضلعی و p محیط آن باشد ثابت کنید که :

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \dots + \frac{1}{p-1} > \frac{n}{n-1}$$

حل - می دانیم :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \dots &\rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{p-a} \times \frac{1}{p-b} \times \dots} \\ \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+\dots}{n} &= \\ = \frac{p(n-1)}{n} &> \sqrt[n]{(p-a)(p-b)\dots} \\ \frac{n}{p(n-1)} < \sqrt[n]{\frac{1}{(p-a)(p-b)\dots}} \end{aligned} \quad (2)$$

با مقایسه دو رابطه (۱) و (۲) داریم :

$$\begin{aligned} \frac{p}{p-a} + \frac{p}{p-b} + \frac{p}{p-c} + \dots &> \frac{n^t}{n-1} \\ \left(\frac{p}{p-a}-1\right) + \left(\frac{p}{p-b}-1\right) + \left(\frac{p}{p-c}-1\right) + \dots & \\ \dots &> \frac{n^t}{n-1} - n \end{aligned}$$

که از ساده کردن طرف اول نامساوی رابطه مطلوب بدست می آید.

۵۸/۲۹ - از محمد کشتی آرای.

اگر $a > b > m > n$ عدد های صحیح بزرگتر از یک باشند ثابت کنید که :

$$\sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n]{b^n} > \frac{b^m}{a} \sqrt[n]{a^n} - \frac{a^m}{b} \sqrt[n]{b^n}$$

حل - طرفین نامساوی $a > b$ را یک بار در $\frac{n-m}{m}$

وبار دیگر در $b^{\frac{n-m}{m}}$ ضرب می کنیم خواهیم داشت :

$$(1) \quad a \times a^{\frac{n-m}{m}} > b \times a^{\frac{n-m}{m}} \quad \text{و}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a \times b^{\frac{n-m}{m}} &> b \times b^{\frac{n-m}{m}} \\ \text{از جمع روابط (۱) و (۲) و پس از اختصار خواهیم داشت:} \\ \frac{a}{a^m} + \frac{ab}{b^m} &\geq a^{\frac{n-m}{m}} b + b^{\frac{n-m}{m}} \Rightarrow \\ a^{\frac{n}{m}} - b^{\frac{n}{m}} &> a^{\frac{n-m}{m}} b - ab^{\frac{n-m}{m}} \\ \sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n]{b^n} &> a^{\frac{n}{m}} b - ab^{\frac{n}{m}} \\ \text{که نتیجه خواهد شد:} \\ \sqrt[m]{a^n} - \sqrt[m]{b^n} &> \frac{b}{a} \sqrt[n]{a^n} - \frac{a}{b} \sqrt[n]{b^n} \end{aligned}$$

۵۸/۳۰ - ترجمه از فرانسه توسط محمد محمودی
مجد آبادی دانشجوی ریاضی دانشراي عالي.
صفحه اي يالهای SC و SB و SA و CA و BC و BA
قطع می کند.
SABC را به ترتیب در A' و B' و C' قطع می کند.
CA' و AC' و CB' و BC' خطوط يكديگر را در A، B، C
يکديگر را در BA و AB و B' و A' يکديگر را در C، C' قطع می کند.
همچنان SC و SB و SA و CA و BC و AB را
به ترتیب در A، B، C و A'، B'، C' قطع می کند.

(۱) ثابت کنید که خطوط AA، BB، CC و AA'، BB'، CC' در یک نقطه O متقابلاند.
(۲) خطوط SO و BB، AA و AA' و CC و CC' در یک نقطه I متقابلاند.

حل - اگر AA' محل تلاقی BC و B'C و BC' و B'C' محل تلاقی CA و C'A و C'A' و CA' باشد.
مزدوچ تواافقی نسبت به A و B می باشد ، پس سه نقطه A، A' و A و C و C' و C'A و C'A' روی خط راستی قرار دارند که قاطع دو صفحه A'B'C و ABC می باشد و از آنجا نتیجه می گیریم که AA' و BB' و CC' و BB' و AA' متقابلاند.

ثانیاً : خطوط AA، AA' و CC و CC' در صفحه B'AC قرار

دارند پس يكديگر را در نقطه ای مانند I قطع می کنند اما در AA، CC و SAA، SCC در صفحه SO قرار دارند و چون در نقطه SO مشترک هستند Fصل مشترک این دو صفحه است پس CC و CC' خطوط

می‌گیریم که KL موازی $A'B'$ و مساوی نصف آن می‌باشد.
پس مثلث $A'B'C'$ با مثلث ارتفاعی متشابه است و طبق مسئلهٔ مندرج دریکان شماره ۴۵ نامساوی مزبور محقق خواهد شد.

ثانیاً : داریم :

$$\text{ز} \quad C'A'A = \frac{C}{2} \quad \text{ذ} \quad AA'B' = \frac{B}{2}$$

$$\text{ز} \quad C'A'B' = \frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2} \quad \text{پس} :$$

$$S = 2R \sin A \sin B \sin C \quad \text{و}$$

$$S'' = 2R \sin(90 - \frac{A}{2}) \sin(90 - \frac{B}{2}) \sin(90 - \frac{C}{2}) =$$

$$= 2R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{S}{S''} =$$

$$= \frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \wedge \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} < \wedge \times \frac{1}{\wedge} = 1$$

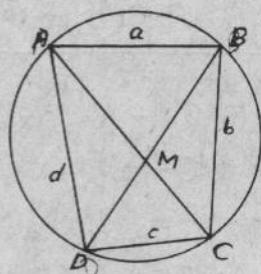
$$\Rightarrow S < S''$$

۵۸/۳۲ - از داوید ریحان :

اگر a, b, c, d اندازه‌های ضلعها M نقطهٔ تلاقی

قطراهای چهار ضلعی محاطی $ABCD$ باشد ثابت کنید که:

$$BM \cdot MD = AM \cdot MC < \frac{ac + bd}{4}$$



حل - از تشابه
MDA و MBC
MBA و MCD
تساویهای زیر حاصل
می‌شود :

$$\frac{BM}{AM} = + \frac{b}{d} =$$

$$-\frac{MC}{MD} \Rightarrow BM = \frac{b}{d} AM, MD = \frac{d}{b} MC$$

$$\frac{BM}{CM} = + \frac{a}{c} - \frac{AM}{DM} \Rightarrow CM = \frac{c}{a} BM, MA = \frac{a}{c} MD$$

باقیه به اینکه $BM + MD = BD$

: $CM + MA = CA$ تتجه می‌گیریم

$$(1) \quad \frac{b}{d} AM + \frac{d}{b} MC = BD \quad \text{هم‌چنین}$$

$$\frac{c}{a} BM + \frac{a}{c} MD = CA \quad (2)$$

AA_1 و SO را در I قطع می‌کند. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که BB_1 نیز از I می‌گذرد.

۵۸/۳۱ - از داوید ریحان دانشجوی دانشکده فنی
دانشگاه تهران.

مثلث ABC محاط در دایره O مفروض است. اولاً

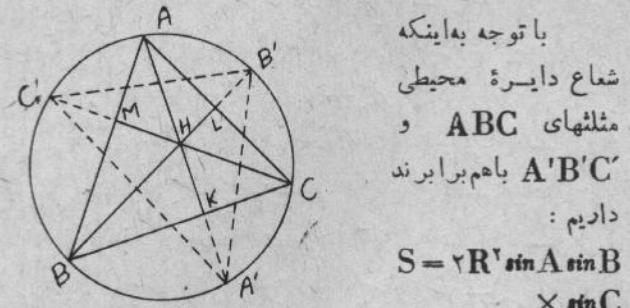
ارتفاعهای AK و BL دایرة محیطی مثلث را در A' و B' قطع می‌کنند. اگر مساحتهای مثلثهای ABC و $A'B'C'$ را به ترتیب با S و S' نشان دهیم ثابت کنید که $S' < S$

ثانیاً رأسهای مثلث را به I مرکز دایرة محاطی داخلی وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایرة محیطی مثلث را در A'' و B'' قطع کنند. اگر S'' مساحت مثلث $A''B''C''$ باشد ثابت کنید که $S'' > S$ مثلث حاده الزاویه فرض می‌شود.

حل - اولاً راه اول - داریم :

$$\left\{ \begin{array}{l} C'A'A = \text{ذ} \quad ACC' = 90 - A \\ \text{ذ} \quad AA'B' = \text{ذ} \quad ABB' = 90 - A \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow C'A'B' = 180 - 2A$$



$$S' = 2R \sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

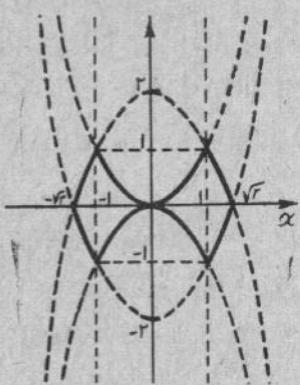
$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}{\sin A \sin B \sin C} = \wedge \cos A \cos B \cos C$$

با توجه به نامساوی $\cos A \cos B \cos C < \frac{1}{\wedge}$ نتیجه

$$\frac{S'}{S} < 1 \Rightarrow S' < S$$

می‌گیریم که :

راه دوم - K وسط HA' است به عبارت دیگر A' قرینه H نسبت به BC است. با توجه به چنین خاصیتی نتیجه



از سه میهای
به معادله های بالا
قسمت های محدود
مربوط را دریک شکل
رسم می کنیم نمایش
هندرسی تابع مفروض
بدست می آید.

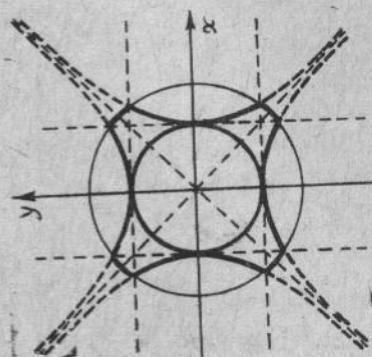
۵۸/۳۴ - از جمشید موری :

منحنی نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید.

$$|x^2 - 1| + |y^2 - 1| = 1$$

حل - با درنظر گرفتن علامت عبارتهای $-x^2 - 1$ و $-y^2 - 1$ در فاصله های مختلف رویهم ۹ حالت زیر را در نظر می کنیم :

- ۱) $x < -1 \text{ و } y < -1 \Rightarrow$
 $x^2 - 1 + y^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3$
- ۲) $x < -1 < y < 1 \Rightarrow$
 $x^2 - 1 - y^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$
- ۳) $x < -1 \text{ و } y > 1 \Rightarrow$
 $x^2 - 1 + y^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3$
- ۴) $-1 < x < +1 \text{ و } y < -1 \Rightarrow$
 $-x^2 + 1 + y^2 - 1 = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$
- ۵) $-1 < x < 1 \text{ و } -1 < y < 1 \Rightarrow$
 $-x^2 x + 1 - y^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$
- ۶) $-1 < x < 1 \text{ و } y > 1 \Rightarrow$
 $-x^2 + 1 + y^2 - 1 = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$
- ۷) $x > 1 \text{ و } y < -1 \Rightarrow$
 $x^2 - 1 + y^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3$



بر طبق رابطه بسطیوس در مورد چهار ضلعی فوق داریم:

$$BD \cdot CA = ac + bd$$

و از ضرب دورابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\left(\frac{b}{d} AM + \frac{d}{b} MC \right) \left(\frac{c}{a} BM + \frac{a}{c} MD \right) =$$

$$= BD \cdot CA = ac + bd$$

$$\frac{bc}{ad} AM \cdot BM + \frac{ab}{dc} AM \cdot MD + \frac{dc}{ba} MC \cdot BM +$$

$$+ \frac{ad}{bc} MC \cdot MD = ac + bd$$

طبق نامساوی :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 4 \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

$$ac + bd > 4 \sqrt{(BM \cdot BD)^4} \Rightarrow$$

$$BM \cdot BD < \frac{ac + bd}{4}$$

واضح است که در نامساوی اخیر از خاصیت قوت نقطه M نسبت به دایره استفاده کرده ایم .

۵۸/۳۳ - از جمشید موری دانشجوی دانشگاه مشهد

مطلوب است رسم منحنی نمایش تابع زیر :

$$|y| + |x^2 - 1| = 1$$

حل - ابتدا علامت $-x^2 - 1$ را تبیین می کنیم :

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	°	-	°

اگر $1 < -1$ و $y > 0$ باشد :

$$y + x^2 - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 - x^2$$

اگر $1 < -1$ و $y < 0$ باشد :

$$-y + x^2 - 1 = 1 \Rightarrow y = x^2 - 2$$

اگر $1 < 1 < x < 1$ باشد و $y > 0$ باشد : توجه می کنیم :

$$y = x^2$$

اگر $1 < 1 < x < 1$ باشد و $y < 0$ باشد : توجه می کنیم :

$$y = -x^2$$

اگر $1 < x < 1$ و $y > 0$ باشد نتیجه می شود :

$$y = 2 - x^2$$

اگر $1 < x < 1$ و $y < 0$ باشد نتیجه می شود :

$$y = x^2 - 2$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG}}{\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO}} \right) - \left(\frac{AH \cdot BH \cdot CH}{AI \cdot BI \cdot CI} \right) = \\ & = \left(\frac{R - \overline{GO}}{R} \right) \left(\frac{\cos A \cos B \cos C}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \right) \end{aligned}$$

اما داریم:

$$\begin{aligned} \overline{OG} &= (OG)^2 - \overline{OH}^2 = \\ &= R^2 (1 - \cos A \cos B \cos C) \end{aligned}$$

با جانشینی سازی در فوق و با توجه به اینکه در هر مثلث $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} < \frac{1}{8}$ است نامساوی مطلوب بدست می‌آید.

تساوی برای حالت $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ برقرار است.

۵۸/۳۷ - ترجمه جعفر آقایانی

هرگاه S مساحت مثلث ABC و a, b, c اندازه‌های ضلعهای آن باشد ثابت کنید که :

$$abc > \frac{8S^2}{3}$$

تساوی در چه حالت برقرار است؟

حل - فرض می‌کنیم $A = H = G$ از راست به چپ به ترتیب واسطه حسابی و واسطه هندسی و واسطه توافقی مقدار

ضلعهای $z = p - c, y = p - b, x = p - a$ باشند. می‌دانیم که :

$$A \geq G \geq H$$

$$S = (x + y + z)xyz = 3AG^2$$

$$abc = (x + y)(z + x)(z + y) =$$

$$= (x + y + z)(zy + zx + xy) - xyz -$$

$$= 2A\left(\frac{G^2}{H}\right) - G^2 \geq \frac{8AG^2}{H} \geq \frac{8AG^2}{(AG^2)^{\frac{1}{2}}} = 8\left(\frac{S^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

تساوی برای حالت $A = G = H = x = y = z$ برقرار است.

۵۸/۳۸ - ترجمه جعفر آقایانی

مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد مفروض است. ثابت کنید که جگونه می‌توان با یک برش مستقیم مثلث را به دو قطعه تجزیه کرد بقسمی که اگر دو قطعه بدست آمده را دنبال هم قرار دهیم شکل محدبی با قطعه اکسیم حاصل شود.

$$\begin{aligned} 2) \quad x > 1 &\quad -1 < y < 1 \Rightarrow \\ &x^2 - 1 - y^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1 \\ 3) \quad x > 1 &\quad y > 1 \Rightarrow \\ &x^2 - 1 + y^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3 \end{aligned}$$

از منحنیهای نه گانه بالا آن قسمت را که در فاصله مربوطه قراردارد رسم می‌کنیم نمایش هندسی مشخص می‌شود.

۵۸/۳۹ - ترجمه جعفر آقایانی چاوشی

یک پنج ضلعی محدب محاط در دایره‌ای به شعاع واحد است و AE قطری از این دایره می‌باشد. ثابت $DE = d, CD = e, BC = b, AB = a$ و $ACE = \theta$ نامساوی زیر برقرار است.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4$$

$CEA = \theta$ را رسم کرده فرض می‌کنیم

$$CBA = 180 - \theta \quad CAF = 90 - \theta \quad \text{باشد پس } \text{CAF} = 180 - \theta \quad \text{خواهد بود و نیز داریم.}$$

$$(1) \quad \overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180 - \theta) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$$

$$(2) \quad \overline{CE}^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(90 + \theta) = c^2 + d^2 + 2cd \sin \theta$$

اما از مثلث قائم الزاویه ACE داریم :

$$\overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 = 4$$

و همچنین :

$$AC = 2 \sin \theta > b \quad CE = 2 \cos \theta > c$$

با جانشینی سازی این مقادیر در روابط (۱) و (۲) و جمع دورابطه، نامساوی ثابت می‌شود.

۵۸/۴۰ - ترجمه جعفر آقایانی چاوشی

هرگاه I و H و G به ترتیب مرکز دایره محاطی داخلی، مرکز دایرة محیطی، مرکز ارتفاعی و مرکز تقلیل مثلث ABC باشد نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$(\frac{\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG}}{\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO}}) - (\frac{AH \cdot BH \cdot CH}{AI \cdot BI \cdot CI}) < 1$$

حل - در هر مثلث داریم:

$$\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO} = 2R$$

$$\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG} = 2(R - \overline{GO})$$

$$AH \cdot BH \cdot CH = R \cos A \cos B \cos C$$

$$AI \cdot BI \cdot CI = 64R^3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

دره ریک از این شکلها طول قطر بزرگتر شکل محدب حاصل از $\sqrt{3}CD = \sqrt{3}$ کوچکتر است مثلا در شکل ۵ یاشکل ۶ داریم :

$$CE_1 < CD + DE_1 < 2CD$$

و چون $\frac{\sqrt{13}}{2}$ است نتیجه می شود که بر و طرز عمل مطلوب مطابق باشکل (۳) می باشد.

حل مسائل فیزیک و مکانیک

زیر نظر : حسین فرمان

۵۸/۳۹ - از محمد علی حسینی هرگاه چند مقاومت R_1 و R_2 و ... و R_n همطول و همجنس و با مقاطع مختلف را بطور انشعابی بیندیم مقطع معادل آنها را بر حسب سطح مقطع مقاومتهای فوق حساب کنید (مقاومت معادل همطول و همجنس با مقاومتهای مزبور است) .

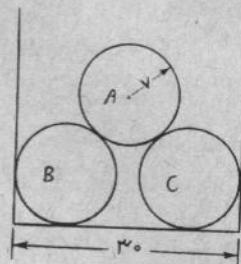
حل - طبق فرمول داریم :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

۵۸/۴۰ - فرستنده سعید دلایان دانشجوی پلی تکنیک



سه گلوله که وزن هر یک $20/5$ پاند و قطر یک 14 اینچ است درون یک جعبه به پهنای قاعده 30 اینچ مطابق شکل قرار دارد .

مطلوب است محاسبه :

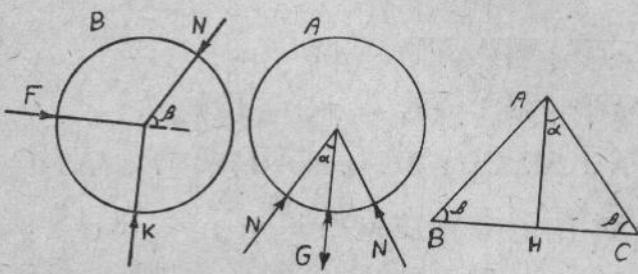
۱) عکس العمل گلوله B روی گلوله A

۲) عکس العمل دیوار جعبه بر روی گلوله B

۳) عکس العمل زمین روی گلوله C

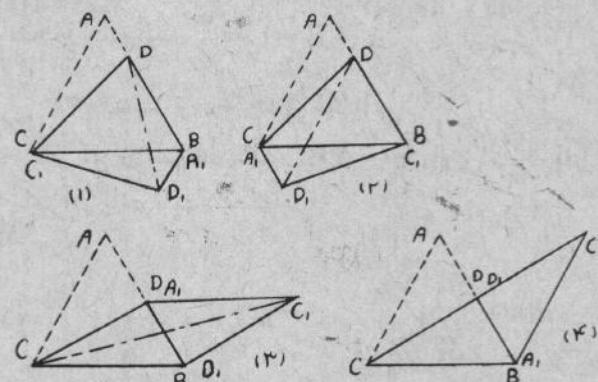
حل - مطابق شکل گالوهای را از یکدیگر جدا می کنیم:

$$BC = 30 - 14 = 16$$



حل - مثلث مفروض را ABC می نامیم و فرض می کنیم DE خط برش باشد که AC و AB بر DE قرار دارد . برای اینکه شکل حاصل محدب باشد لازم است که دو قطعه جدا شده حداقل در یک ضلع برابر باشند با توان آنها را در طول همین ضلع پهلوی هم قرار داد . با درنظر گرفتن این شرط حالتهای زیر را در نظر می گیریم :

الف - برش را ابتدا از رأسهای مثلث شروع کنیم، یعنی مثلا E را برش اختیار کنیم، در این حالت دو قطعه جدا شده عبارتند از مثلثهای BCD و ACD . این دو مثلث درضلهای BC و AC با یکدیگر برابرنند . پس هی توان آنها را مطابق شکل ۱ یاشکل ۲ پهلوی عم قرار دارد که در چهارضلعی حاصل قطر DD_1 کوچکتر از قطر دیگر بوده قطر ماکسیمم آن $= BC$ می باشد.



ممکن است D را وسط AB اختیار کرد و دو قطعه جدا شده یعنی مثلثهای BCD و ACD را مطابق با شکل ۳ یاشکل ۴ پهلوی هم قرار داد . در حالت شکل ۳ طول قطر CC_1 چنین می شود :

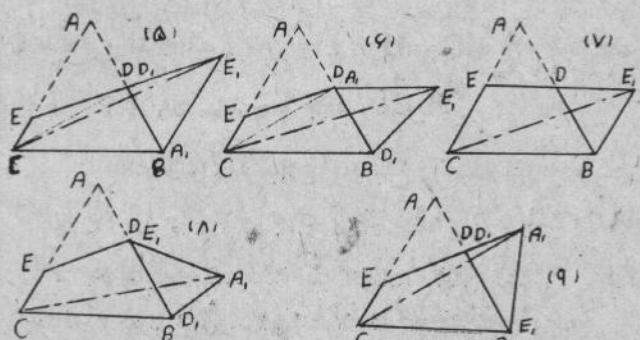
$$CC_1^2 = BC^2 + BC_1^2 - 2BC \cdot BC_1 \cos 150^\circ = \frac{13}{4}$$

$$CC_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

در حالت شکل ۴ طول قطر ماکسیمم برابر است با :

$$CC_1 = 2CD = \sqrt{3}$$

ب - اگر E بین A و C واقع باشد مطابق با یکی از پنج شکل زیر می توانیم عمل کنیم .

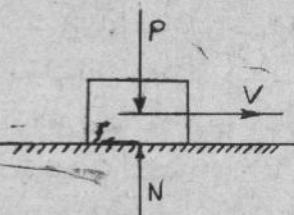


- حل -

$$-f = m\gamma$$

(علامت منفی به علت حرکت باشتباب کند شونده جسم است)

$$f = \mu N = \mu P$$



$$-\mu P = \frac{P}{g} \gamma \Rightarrow \gamma = -\mu g$$

$$x = -\frac{1}{2} \gamma t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \mu g t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{gt^2}{2x} = \frac{9.81 \times 25}{49} \Rightarrow \mu = 0.12$$

۵۸/۴۳ - فرستنده: سید جلال آشفته - محمد رضا بیزدان.

بار A به وزن P به طرف پائین سطح شیداری که بالا قرار می‌گیرد مطابق شکل زیر حرکت می‌کند. وزنه P

بوسیله ریسمانی که از قرقره C می‌گذرد دور استوانه B پیچیده می‌شود. شعاع استوانه r و وزن آن Q است.

هنگام حرکت وزنه P شتاب زاویه‌ای استوانه را محاسبه کنید

- حل -

$$P \sin \alpha - T = m\gamma$$

$$\Sigma M = T \cdot r = I\alpha$$

می‌دانیم کلیه ممانهای وارد بر یک سیستم برابر است با حاصلضرب ممان اینرسی جسم حول محور دوران در شتاب

$$\text{زاویه‌ای و چون } I = \frac{1}{2} \times \frac{Q}{g} r^2 \text{ است پس :}$$

$$T \cdot r = \frac{1}{2} \times \frac{Q}{g} r^2 \alpha \Rightarrow T = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r \alpha$$

$$x'' = r\theta'' = r\alpha$$

وچون $x = r\theta$ است پس :

$$P \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r \alpha = \frac{P}{g} \gamma \alpha$$

$$\alpha = \frac{P g \sin \alpha}{r(2P + Q)}$$

درمورد گلوله A می‌توان نوشت:

$$\cos \alpha = 0.82$$

$$\Sigma F_y = 2N \cos \alpha - b = 0$$

$$N = \frac{G}{2 \cos \alpha} = \frac{20/5}{0.82} = 12.5 \text{ lb}$$

و درمورد گلوله C می‌توان نوشت :

نیروی عکس العمل دیوار :

$$\Sigma F_x = F - N \cos \beta = 0 \Rightarrow$$

$$F = N \times \frac{1}{14} = 12.5 \times \frac{1}{14} = 7.14 \text{ lb}$$

نیروی عکس العمل دیوار :

$$\Sigma F_y = K - N \sin \beta = 0 \Rightarrow K = 30/8 \text{ lb}$$

۵۸/۴۱ - فرستنده: سید جلال آشفته دانشجوی دانشگاه آریامهر

معادله حرکت یک ذره که دارای حرکت نوسانی است

به صورت $x = a \sin kt$ است. چنانچه در موقعیت x_1 سرعت

ذره $v_1 = v_2$ و در موقعیت آن $x_2 = x_1$ سرعت آن باشد

مطلوب است محاسبه دامنه نوسانات a و سرعت زاویه‌ای k.

حل - می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} x_1 = a \sin kt \Rightarrow \sin kt = \frac{x_1}{a} \\ v_1 = \frac{dx}{dt} = ak \cos kt \Rightarrow \cos kt = \frac{v_1}{ak} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1^2 + \frac{v_1^2}{k^2} = a^2$$

$$\begin{cases} x_2 = a \sin kt \\ v_2 = ak \cos kt \end{cases} \Rightarrow x_2^2 + \frac{v_2^2}{k^2} = a^2$$

$$x_2^2 - x_1^2 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{k^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_2^2 - x_1^2}}$$

و به همین ترتیب نتیجه می‌شود :

$$a = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_2^2 - v_1^2}}$$

۵۸/۴۲ - فرستنده: سید جلال آشفته

یک جسم به وزن P در امتداد افقی یک سطح ناساق

مسافت ۲۴/۵ متر را در مدت ۵ ثانیه از لحظه سکون طی می‌کند.

مطلوب است ضریب اصطکاک بین جسم و سطح.

استیک و یک ملکول گرم الكل در حالت تعادل غلظت ملکولی استر و آب همیشه $\frac{2}{3}$ است. غلظت ملکولی را در حالت تعادل برای مخلوط اولیه a ملکول اسید استیک، b ملکول الكل اتیلیک، c ملکول استر و d ملکول آب پیدا کنید.

$$a=3, b=1, c=2, d=5$$

حل - در حالت تعادل داریم :

$$\frac{C_{\text{اسید}} \times C_{\text{استر}}}{C_{\text{آب}} \times C_{\text{آب}}} = K = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{C_{\text{استر}} \times C_{\text{آب}}}{C_{\text{آب}} \times C_{\text{آب}}} = \frac{1}{K} = 4 \quad (2)$$

برای آنکه مخلوط مورد نظر مسئله شرط فوق را تأمین نماید تغییراتی می کند. زیرا این مخلوط با رابطه (2) متنطبق نیست. چه هرگاه حجم مخلوط را V فرض کنیم:

$$C_{\text{استر}} = \frac{2}{V}, C_{\text{آب}} = \frac{5}{V}, C_{\text{آسید}} = \frac{4}{V}, C_{\text{آب}} = \frac{1}{V}$$

$$\frac{C_{\text{استر}} \times C_{\text{آب}}}{C_{\text{آسید}} \times C_{\text{آب}}} = \frac{2 \times 5}{4 \times 1} = \frac{10}{4} = 2.5$$

عدد حاصل (2.5) عددی غیر از 4 است. برای آنکه حاصل کسر به 4 برسد باید صورت کسر بزرگ شود. بنابراین اسید و الكل بایکدیگر ترکیبی شوندو آب و استر بوجود می آورند. هرگاه تعداد ملکولهای استر یا آب که تشکیل می شوند به x نشان دهیم. در حالت تعادل غلظت ملکولی اجسام واکنش کننده خواهد شد: $(c+x)$ ملکول استر، $(d+x)$ ملکول آب، $(a-x)$ ملکول اسید و $(b-x)$ ملکول الكل در شیجه خواهیم داشت:

$$\frac{(c+d)(d+x)}{(a-x)(b-x)} = 4$$

یعنی:

$$cd + cx + (c+d)x = 4(ab + bx - (a+b)x)$$

$$cd + cx + (c+d)x - 4ab - 4bx + 4(a+b)x = 0 \\ - 2x^2 + (4a + 4b + c + d)x + cd - 4ab = 0$$

هرگاه به جای a و b و c و d مقادیر مربوطه آنها

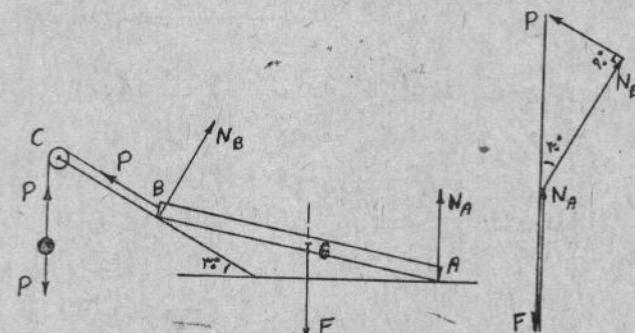
را قرار دهیم چنین خواهیم داشت:

$$3x^2 - 27x + 6 = 0$$

۵۸/۴۴ - فرستنده: محمد رضا یزدان دانشجوی پلی تکنیک

یک انتهای میله یکنواخت AB به وزن 100 kgf روی سطح شیبداری است که بالف زاویه 30° درجه می سازد. انتهای B توسط ریسمان B گذشته و به وزنه P مربوط شده است متصل است. قسمت BC از ریسمان موازی سطح شیبدار و از اصطکاک B و A صرف نظر می شود. مقدار وزنه P و عکس العمل در نقاط B و A را در حالت تعادل تعیین کنید.

حل - مطابق شکلها و با استفاده از قضیه سینوسهادر مثلث $PN_B N_A$ داریم:



$$\frac{F - N_A}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{P}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{N_B}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$100 - N_A = 2P = \frac{2\sqrt{3}}{3} N_B$$

همان نسبت به نقطه B را نوشته مساوی مفرقرار میدهیم:

$$\sum M_B = N_A \times a - Q \times \frac{a}{\gamma} = 0 \Rightarrow$$

$$N_A = \frac{Q}{\gamma} = \frac{100}{2} = 50 \text{ kgf}$$

$$P = \frac{100 - N_A}{2} = \frac{100 - 50}{2} = 25 \text{ kgf}$$

$$N_B = P\sqrt{3} = 25 \times \sqrt{3} = 43.3 \text{ kgf}$$

حل مسائل شبیهی

ترجمه و انتخاب توسط: عطا الله بزرگ نیا

۵۸/۴۵ - از بررسی استاتیک واکنش استری شدن یک الكل بوسیله یک اسید آلبی این نتیجه حاصل شده است که بایک ملکول گرم اسید

حل - ۱ - هر گاه m_1 و m_2 را جرم مخصوص دو گاز در شرایط آزمایش (فشار H و دمای t) فرض کینم

دیواره نازک و متخلخل	در شرایط آزمایش
فشار H	فرم کینم
دما t	جرم مخصوص مخلوط
	در این شرایط خواهد
	$\frac{m_1 + m_2}{2}$ شد:

هر گاه جرم مخصوص تئیدروژن را در این شرایط μ فرض کنیم بنابر تعریف، چگالی مخلوط نسبت به تئیدروژن خواهد شد:

$$\frac{m_1 + m_2}{2\mu} = \gamma / 5 \quad (1)$$

هر گاه صورت و مخرج این کسر را بر جرم مخصوص H و t داشته باشد و دمای t بخش کنیم. چگالی این گازها نسبت به هوا بدست می‌آید. و خواهیم داشت:

$$\frac{d_1 + d_2}{2\mu} = \gamma / 5$$

اعداد معرف چگالی یعنی d_1 و d_2 و δ مستقل از شرایط H و t هستند (فرض اینست که حجم گازهای مورد بحث وهمچنین حجم گاز تئیدروژن همگی به شکل بکسان بستگی به فشار و دما داشته باشد و نیز فرض اینست که از قانون ماریوت و گیلوساک پیروی کنند. به عبارت دیگر گازهای مورد بحث و گاز تئیدروژن گازهای کامل فرض می‌شوند)

هر گاه جرم گازها را که به فضای B نفوذ کرده‌اند با m' و m و حجم آنها را در فشار $P = \frac{H}{2}$ و دمای t با V نشان دهیم. خواهیم داشت:

$$m = V \cdot d \cdot \frac{P}{760} \times \frac{1}{1 + \alpha t}$$

$$m' = V' \cdot d' \cdot \frac{P}{760} \times \frac{1}{1 + \alpha t}$$

در این روابط، δ جرم مخصوص هوا، d و d' چگالی دو گاز نسبت به هوای یعنی همان اعدادی که قبل از d_1 و d_2 نشان داده شد.

در همین شرایط حجمی از تئیدروژن معادل $(V + V')$ است.

$$m'' = (V + V') \delta \cdot a \cdot \frac{P}{760} \times \frac{1}{1 + \alpha t}$$

خواهد داشت $(\delta \cdot \text{چگالی تئیدروژن})$ نسبت به هوای است

این معادله دارای دوریشه مثبت است. بنابر آنچه قبل از این شد x باید مثبت و کوچکتر از واحد باشد. زیرا مقدار الكل بیش از یک ملکول نیست. پس عدد یک نسبت به ریشه x های معادله خواهد شد:

$$f(x) = 3x^2 - 27x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 27x + 6 = 0$$

$$x_1 < 2 < x_2$$

بنابراین x_2 قابل قبول نیست و تنها ریشه کوچکتر معادله قابل قبول است.

$$x = \frac{+27 - \sqrt{(27)^2 - 72}}{6} = \frac{28 - \sqrt{657}}{6} = 0,228$$

تعداد ملکول گرم گازها از اجزاء تشکیل دهنده مخلوط در حالت تعادل خواهد شد:

$$c + x = 2,228 \quad \text{است}$$

$$d + x = 5,228 \quad \text{آب}$$

$$a - x = 3,772 \quad \text{اسید}$$

$$b - x = 0,772 \quad \text{الکل}$$

حال اگر این اعداد را در رابطه (2) قرار دهیم $\frac{1}{K}$

با تقریب کمی برابر 4 بدست می‌آید:

$$\frac{2,228 \times 5,228}{3,772 \times 0,772} = 4,000016$$

۵۸-۴۶ - نفوذ گازها، قانون گراهام

در شرایط فیزیکی یکسان از فشار و دما دو جسم مساوی از دو گاز مختلف را اختیار کرده در ظرف A وارد نودیم. چگالی این مخلوط نسبت به تئیدروژن $2,5$ است. ظرف A را بوسیله دیواره نازک و متخلخل که منافذ رین دارد به ظرف B که درون آن خلاء است مربوط می‌کنیم. پس از مدت کوتاهی مقداری از هر دو گاز به درون ظرف B نفوذ می‌کند. چگالی مخلوط گاز درون این ظرف نسبت به تئیدروژن برابر $\sqrt{1,4}$ است. معین کنید:

(۱) جرم هر یک از این دو گاز را در حجمی که دو گرم

تئیدروژن تحت شرایط متعارف اشغال می‌کند.

(۲) این دو گاز چه گازهایی می‌توانند باشند؟

(۳) آزمایشی را پیشنهاد کنید که در مورد جنس این گازها

بتوان با قاطعیت بیشتری نظر داد.

تنها گازی که دارای جرم ملکولی ۲ است ئیدرژن است.
اما ۲۸ با جرم ملکولی نیتروژن ، اکسید کربن و اتیلن مطابقت دارد . پس مخلوط شامل ئیدرژن و یکی از گازهای CO ، N_2 و C_2H_4 خواهد بود .

۳- به کمک تجزیه آبسنجی می توان جنس گازها را تعیین کرد . برای این منظور V حجم از مخلوط را در شرایط معین مثلث فشار ۷۶۰ میلیمتر جیوه و دمای 15° با V' حجم اکسیژن (حجم کافی از اکسیژن برای تمام حالات) در آبسنج وارد می کنیم و در آن جرقه الکتریک برقرار می کنیم . سپس حجم گازهای حاصل از احتراق را در شرایط نخست (مثلث فشار ۷۶۰ mm و دمای 15°) اندازه گیری می کنیم .
طبق فرض مسئله در دمای t و فشار H ، ئیدرژن حجمی برابر $\frac{V}{3}$ را اشغال می کند . نقصان حجم مربوط به $\frac{V}{2}$ حجم ئیدرژن برابر می شود با :

$$\frac{V}{2} + \frac{V}{4} = \frac{3}{4}V$$

اگر نقصان حجم این اندازه باشد گاز دوم نیتروژن است .
اگر گاز دوم CO باشد برای احتراق کامل آن $\frac{V}{4}$
حجم اکسیژن بکار می رود و هم حجم خود یعنی $\frac{V}{2}$ حجم گاز CO_2 تولید می کند . در اینحالت نقصان حجم خواهد شد .
 $\frac{V}{2} + \frac{V}{4} + \frac{V}{4} - \frac{V}{2} = V$

بالاخره اگر گاز دوم اتیلن باشد . برای احتراق $\frac{V}{2}$ حجم از آن $\frac{V}{2}$ حجم اکسیژن لازم است و $\frac{V}{2}$ حجم CO_2 از احتراق آن تولید می شود .
نقصان حجم در این حالت خواهد شد .

$$\frac{V}{2} + (\frac{V}{2} + \frac{V}{2} - V) = \frac{V}{4}$$

همچنین می توان ، پس از احتراق و بازگشت به شرایط نخستین محصول عمل را با پتانس تکان داد . اگر V حجم گازها پس از بازگشت به شرایط نخستین باشد ، و برای تکان دادن با پتانس حجم گازها همان V باقی بماند گاز دوم نیتروژن و اگر نقصان حجم $\frac{V}{3}$ باشد گاز دوم CO و اگر برابر V باشد گاز دوم اتیلن است .

چگالی مخلوط که به فضای B نفوذ کرده است نسبت به ئیدرژن برابر است با :

$$\frac{m+m'}{m'} = \frac{V \cdot d + V' \cdot d'}{(V+V')\delta} = V^{1/4} \quad (2)$$

$$\frac{V}{V'} = \sqrt{\frac{d}{d'}}$$

با استفاده از فرمول گراهام می توان رابطه (2) را به شکل رابطه مستقل از V و V' درآورد :

$$VV\bar{d} = V'V\bar{d}' = K$$

$$Vd + V'd' = KV\bar{d} + KV\bar{d}' = K(V\bar{d} + V\bar{d}')$$

$$V + V' = \frac{K}{V\bar{d}} + \frac{K}{V\bar{d}'} = \frac{K(V\bar{d} + V\bar{d}')}{V\bar{d}\bar{d}'}$$

$$\frac{V dd'}{\delta} = V^{1/4} \quad (II)$$

چون d برابر d' برابر d است طبق رابطه (1) می توان نوشت :

$$\frac{d+d'}{\delta} = 7/5 \quad (I)$$

از حل دو معادله (I) و (II) مقادیر d و d' را نسبت به δ بدست می آوریم .

$$d+d' = 7/5 \cdot 2\delta = 158$$

$$dd' = 148^2$$

مجموع و حاصل ضرب d و d' را در اختیار داریم با استفاده از آنها معادله درجه دومی تنظیم می کنیم :

$$X^4 - 158 + 148^2 = 0$$

از حل این معادله نتیجه می شود :

$$X_1 = \frac{28\delta}{2} = d \quad X_2 = \delta = d'$$

بنابراین چگالی دو گاز نسبت به ئیدرژن خواهد شد .

$$\frac{\delta}{\delta} = \frac{28\delta}{2} : \frac{28\delta}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

جرم دو گاز در حجمی که دو گرم ئیدرژن اشغال می کند

برابر است با :

$$1 \times 2 = 2 \quad 14 \times 2 = 28$$

۲- دو گرم ئیدرژن می ازدیل یک ملکول گرم ئیدرژن و حجم اشغال شده بوسیله این مقدار ئیدرژن طبق قانون آوگادرو برایر با حجم ملکولی امیت . بنابراین 2×28 گرم ملکولی دو گاز مورد بحث هستند .

مسائل پرایی حل

کلاس چهارم طبیعی

۵۹/۴ - فرستنده: بهروز فرهنگ بروجنی از
دیبرستان ادب اصفهان.

ثابت کنید که بجز $x = 2$ مقدار حقیقی دیگری از x در
معادله زیر صدق نمی‌کند:

$$\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{x^4 - 4} = \sqrt{2}$$

۵۹/۵ - از عارف حامیان.

ثابت کنید که اگر $a > b > 0$ باشد داریم:

$$a^a + b^b > a^b + b^a$$

۵۹/۶ - اگر داشته باشیم:

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \log(a+b) - 2\log(a-b) &= \\ &= \log y - \log(ay+by-4cx) \end{aligned}$$

۵۹/۷ - فرستنده: سهراب جلال از دیبرستان

محمد طبری آمل

در مثلث ABC نقطه M را بر AB و نقطه N را بر
چنان انتخاب می‌کنیم که:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{p}{q}, \quad \frac{BN}{NC} = \frac{m}{n}$$

دو خط AN و CM یکدیگر را در O قطع می‌کنند.
نسبت قطعات هریک از این دو خط را بدست آورید.

۵۹/۸ - فرستنده: محمد صالح مهندسی
دانشجوی
دیاضی دانسرای عالی

ABC مثلثی است که اندازه زاویه A برابر ۲۰ درجه و
می‌باشد. روی ضلع AB نقطه M را چنان انتخاب می‌کنیم
که AM = BC باشد. اندازه زاویه CMB را پیدا کنید.

۵۹/۹ - مقدار m را چنان معلوم کنید که $x = 2 + \sqrt{2}$

در رابطه زیر صدق کند:

$$x^4 = (m-1)(x^3 - x^2 - 2x - 1)$$

۵۹/۱۰ - مثلث متساوی الساقین ABC که در آن زاویه

A برابر با ۱۲۵ درجه می‌باشد مفروض است. بر ساق AC نقطه M را چنان تعیین کنید که اگر از آن عمود MH را بر
قاعدۀ BC رسم کنیم داشته باشیم: AM = MH و پس از آن ثابت کنید که اگر به مرکز M و به شعاع MA دایره‌ای رسم
کنیم تا امتداد ضلع BA را در D قطع کند سه نقطه D و
H روی یک خط راست واقع‌اند.

کلاس چهارم ریاضی

۵۹/۳ - فرستنده: اسماعیل با بلیان دانشجوی ریاضی
دانسرای عالی

ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{m}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{n}{\sqrt{c}-\sqrt{a}} &= \\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{m}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{n}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} &= 0 \end{aligned}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-b)(c-\sqrt{ab})} - \frac{m}{(b-c)(a-\sqrt{bc})} - \\ - \frac{n}{(c-a)(b-\sqrt{ac})} \end{aligned}$$

کلاس پنجم ریاضی

۵۹/۱۶ - اولا ثابت کنید که نقطه :

$$M(1 - \sin\alpha, 1 + 2\cos\alpha)$$

بر منحنی نمایش هندسی تابع زیر واقع است :

$$4x^3 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$$

ثانیاً - معلوم کنید به ازاء چه مقادیر از α مماس بر منحنی در نقطه M با محور Ox زاویه 120° درجه می‌سازد .

کلاس ششم ریاضی

۵۹/۱۷ - از فیروز نیکخواه

اولا - معلوم کنید که منحنی نمایش تابع :

$$y = \frac{mx^3 - mx + x - 2}{2mx - m}$$

از نقطه ثابت A می‌گذرد .

ثانیاً - اگر P و Q نقطه‌های نظیر ماکسیمم و مینیمم تابع مزبور باشد معادله مکان هندسی نقطه G محل تلاقی میانه‌های

مثلث APQ را بدست آورید .

۵۹/۱۸ - ترجمه از فرانسه

دونقطه ثابت A و B و نقطه متنبی M واقع در یک صفحه مفروض است . خطوط MA و MB را رسم می‌کنیم و در A عمودی بر AM اخراج می‌کنیم تا MB را در M' قطع کند .

۱) ثابت کنید که دایره C وجوددارد که اگر M بر آن واقع باشد نقطه M' به ترتیب فوق بدست نمی‌آید .

۲) دایره Γ متمایز از دایره C را در نظر می‌گیریم که بر A بگذرد و مرکز آن روی AB واقع باشد . ثابت کنید که اگر M بر دایره Γ واقع باشد مکان M' دایره Γ' است که بر A می‌گذرد و مرکزش بر AB قرار دارد .

۳) اگر A مبدأ مختصات و محور طولها منطبق بر AB اختیار شود که جهت مثبت آن از A به سوی B باشد و طول نقطه B برابر با a بوده O مرکز دایره Γ و O' مرکز دایره Γ' باشد تابع $y = \overline{OO'}$ را مشخص کنید .

۵۹/۱۹ - ترجمه از فرانسه

در صفحه محورهای مختصات xOy خط OX را چنان

رسم می‌کنیم که زاویه جهت دار آن با Ox برابر با $\frac{\pi}{6}$ باشد و

مثلث متساوی الساقین OSP را بقیه می‌سازیم که P بر OX واقع بوده و $SO=SP=a$ مقدار ثابت باشد و اندازه مشترک زاویه‌های SOP و SPO را α فرض می‌کنیم .

اگر M وسط PS باشد فاصله M را از محور x بر حسب a و α بدست آورید . باز از چه مقدار از α فاصله مزبور برابر با مقدار ma می‌باشد . بر حسب مقادیر مختلف m بحث کنید .

۵۹/۱۹ - از جمشید موری دانشجوی دانشگاه مشهد

نمایش هندسی تابع :

$$2y^3 - xy - x^3 - 6y + 3x + 4 = 0$$

را که از دو خط تشکیل شده است رسم کنید و مختصات نقطه تلاقی این دو خط را نیز تعیین کنید .

۵۹/۱۰ - اگر $\sin x + \sin y = 2$ باشد مقدار عددی

حاصل عبارت زیر را بدست آورید :

$$P = \frac{\sin(x+20^\circ)}{\sin(2y-20^\circ)} + \operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}(3x-50^\circ)\operatorname{cotg}320^\circ$$

کلاس پنجم طبیعی

۵۹/۱۱ - مطلوب است حل و بحث معادله زیر :

$$\sqrt{x+1} = mx + 2$$

۵۹/۱۲ - سه نقطه زیر مفروض است :

$$A(5, 0), B(1, 2), C(m-3, -2m+1)$$

اولا - ثابت کنید که تفاضل مرباعات فواصل نقاط A و B مقداری است ثابت و این مقدار ثابت را حساب کنید .

ثانیاً - مقدار m را چنان تعیین کنید که فاصله نقطه C از نقطه M وسط AB کمترین مقدار خود را داشته باشد .

۵۹/۱۳ - $y = x - 5$ و $y = kx$ کمانهای حاده‌اند و داریم :

$$\operatorname{tg}x = \frac{2a-2}{2a-a} = \frac{-a+4a-2}{a-2a+2}$$

نسبتهای مثلثاتی دوکمان x و y را بدست آورید و معلوم کنید بین این دوکمان چه رابطه‌ای برقرار است .

۵۹/۱۴ - از عبدالحسین ایمانی دیرستان علوی مشهد با استفاده از خواص کنج ، مساحت مثلثی را حساب کنید که اندازه‌های اضلاع آن عبارت باشد از :

$$\sqrt{a^2 + (b+a)^2}, \sqrt{b^2 + (a+b)^2}, \sqrt{a^2 + b^2}$$

کلاس ششم طبیعی

۵۹/۱۵ - با استفاده از نمایش هندسی دو تابع

$$y = x^3 + x^2 - 2x - 6x + 12$$

نامعادله زیر را حل کنید :

$$x^3 + x^2 - 8x - 12 < 0$$

O واقع‌اند . مکان نقاط M را تعیین کنید بقسمی که زاویه $\alpha = MBx$ برابر باشد با مجموع دو زاویه :
 $\gamma = MOx$ و $\beta = M\Lambda x$

۵۹/۲۷ - ترجمه از فرانسه

به فرض اینکه x_1 و x_2 ... و x_n عده‌های مثبت باشند نامساوی زیر را ثابت کنید و معلوم کنید تساوی مربوط به چه حالتی است .

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) > \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot 2^n$$

۵۹/۲۸ - ترجمه از فرانسه

دایره به معادله :

$$x^2 + y^2 - 2by - a^2 = 0$$

محور x' را در نقطه ۰ و A(-a, 0) و قطع می‌کند . اگر M نقطه غیر مشخصی از دایره مزبور باشد مطلوبست محاسبه :

$$\operatorname{tg}(MA + MB) = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}$$

۵۹/۲۹ - ترجمه از فرانسه

در صفحه محورهای مختصات متعامد (Ox و Oy) دایره C و خط D به معادله‌های زیر مفروض‌اند :

$$D: 3x \sin \varphi - 5y \cos \varphi + 8 \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$C: (x^2 + y^2) \cos \varphi - 3x - 4 \cos \varphi = 0$$

که φ زاویه‌ای غیر مشخص محصور بین صفر و 2π می‌باشد . مختصات M_1 و M_2 نقاط مشترک خط دایره مزبور را حساب کنید و معلوم کنید وقتی φ بین صفر و 2π تغییر کند این نقاط دایره‌ای به مرکز O را می‌پیمایند و قوت نقطه O را نسبت به دایره C حساب کرد و معلوم کنید که مقداری است مستقل از φ .

۵۹/۳۰ - از محمد رضا یزدان دانشجوی دانشکده

صنعتی

در چهار ضلعی محاطی ABCD به شعاع دایره محیطی R زاویه‌هایی که قطر AC با ضلعهای AD و BC می‌سازد به ترتیب α_1 و α_2 و زاویه‌هایی که قطر BD با ضلعهای DC و BA می‌سازد به ترتیب β_1 و β_2 می‌باشد . صحت دورابطه زیر را ثابت کنید :

$$AB \cos \alpha_1 + CD \cos \alpha_2 = AD \cos \beta_1 + BC \cos \beta_2$$

$$AC \cdot BD = 4R^2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2)$$

۵۹/۳۱ - ترجمه جعفر آقایانی چاوشی

در هر مثلث خطی که از مرکز ارتفاعی و مرکز ثقل و مرکز دایره نه نقطه وبالآخره مرکز دایره محیطی می‌گذرد خط اویلر نامیده می‌شود و نقطه‌ای که از آنجا هر ضلع مثلث

۵۹/۳۰ - از مسعود حبیب‌الله زاده

مطلوبست تعیین کنید از معادله زیر :

$$2 \sin^5 3x + 3 \cos 8x = 5$$

۵۹/۳۱ - از مسعود حبیب‌الله زاده

عددی چهار رقمی چنان تعیین کنید که با مکعب مجموع رقمها یش برابر باشد .

۵۹/۳۲ - از مسعود حبیب‌الله زاده

ثابت کنید که در هر مبنای بزرگتر از ۵ مکعب کاملی به صورت $a^5(a-4)$ وجود دارد .

۵۹/۳۳ - ترجمه از فرانسه

دایره به مرکز O و نقطه ثابت A واقع بر آن مفروض است . قطر CD از دایره را عمود بر OA رسم می‌کنیم و نقطه متغیر M واقع بر دایره را در نظر گرفته تصویر آن را روی CD بیست آورده B می‌نامیم . خطی که از M موازی با CD رسم شود خط AB را در P قطع می‌کند . اگر I وسط BI باشد ثابت کنید که با تغییر مکان M بر دایره ، خط PM همواره بر نقطه ثابتی می‌گذرد .

۵۹/۳۴ - ترجمه از فرانسه

بیضی E به مرکز O و به کانونهای F و F' و با نصف قطر اطول برابر a و نصف قطر اقصی بر این F مفروض است . دایره‌های به مرکزهای F و F' و به شعاع a را به ترتیب (F) و (F') می‌نامیم . ثابت کنید که نقطه M از بیضی مرکز دایره‌ای است که در T بر (F) و در T' بر (F') مماس است بقسمی که خط TT' از O می‌گذرد و علاوه بر آن دایره مزبور بر دایره ثابتی عمود می‌باشد .

مسائل متفرقه

برای داوطلبان امتحانات و وودی دانشکده ها

۵۹/۳۵ - از داوید ریحان

از معادله زیر مقادیر کمانهای حاده x و y و همچنین مقادیر ضایعات a و b و c و d را تعیین کنید :

$$a^5 \sin^5 x + b^5 \sin^5 y + c^5 \sin^5 x \sin^5 y + d^5 \sin^5 x \sin^5 y - 5abcd \sin^5 x \sin^5 y$$

۵۹/۳۶ - ترجمه از فرانسه

بر نیم خط Ox دونقطه A و B به ترتیب A بین و

رها می کنیم . وقتی این جسم به اندازه d پائین آمد جسم دیگری را از همان ارتفاع h رها می کنیم . ثابت کنید وقتی جسم اول به زمین می رسد جسم دوم از آن به اندازه $d - \sqrt{dh}$ فاصله دارد .

۵۹/۳۷ - هر گاه جسمی که با سرعت v روی یک سطح افقی شروع به حرکت کند و بعداز t ثانیه به سرعت صفر بر سر ثابت کنید ضریب اصطکاک سطح مساوی $\frac{v}{gt}$ می باشد .

۵۹/۳۸ - بالی با شتاب ثابت g $< \gamma$ فرود می آید . وزن بالن و محتویات آن P است . چقدر از بار محتوی بالن را خالی کنیم تا بالن شروع به صعود کند و شتاب حرکت آن موقع بالا رفتن همان γ باشد (از مقاومت هوا صرف نظر می شود) .

۵۹/۳۹ - جسمی دارای حرکت نوسانی است . اولاً ثابت کنید ماکسیمم مقدار شتاب آن وقتی حاصل می شود که جسم در انتهای مسیر باشد و ماکسیمم سرعت آن در وضع تعادل (وسط راه) حاصل می شود و بالعکس . شتاب در وسط راه صفر و سرعت در انتهای مسیر صفر می گردد . ثانیاً اگر ماکسیمم سرعت جسم 20 ft/sec و ماکسیمم شتاب آن 80 ft/sec^2 باشد پرید - فرکанс حرکت را پیدا کنید .

۵۹/۴۰ - جسمی که دارای حرکت نوسانی است در فاصله D از مبدأ دارای شتاب A است ثابت کنید پرید حرکت از

$$\text{رابطه } \sqrt{\frac{D}{A}} = 2\pi \text{ بدهست می آید .}$$

۵۹/۴۱ - فرستنده : سید جلال آشفته دانشجوی دانشگاه آریامهر یک پیستون موتور دارای حرکت نوسانی طبق قانون زیر است :

$$x = r \cos \omega t + \frac{r}{4} \cos 2\omega t$$

که r طول لنگ، $[$ طول میله رابط و ω سرعت زاویه ای ثابت میله لنگ است . پیدا کنید مقدار ماکسیمم نیروی مؤثر روی پیستون را در صورتی که وزن آن Q باشد .

مسائل شیمی

ترجمه و انتخاب توسط : عطاء الله بزرگ نیا

۵۹/۴۲ - چگالی به حالت بخار یک ماده آلی مرکب از کربن، یئدرن و اکسیژن $2/562 = d$ است . ۵۵ سانتیگرام از این ماده در اثر احتراق $1/6581$ گرم آب و $1/1905$ پائین صفحه بعد

به زاویه 120° درجه دیده می شود نقطه فرما نام دارد . وضع نقطه فرما را نسبت به خط اول بررسی کنید .

۵۹/۳۳ - ترجمه حعفر آقایانی چاوشی مطلوب است تعیین چهار عدد طبیعی x و y و z و w که جمله های متوالی یک تصاعد حسابی بوده و علاوه بر آن داشته باشیم .

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3$$

۵۹/۳۴ - ترجمه حعفر آقایانی چاوشی روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC و در خارج آن مثلثهای متساوی الاضلاع ACE و ABD را می سازیم . هر گاه G و H به ترتیب مرکزهای مثلثهای مذکور و M نقطه وسط BC باشد ثابت کنید که تنها وقتی $AC > AB$ خواهد بود که $MG > MH$ باشد .

۵۹/۳۴ - ترجمه حعفر آقایانی چاوشی نقطه P از صفحه مثلث ABC را نقطه بروکار داین مثلث می گوئیم هر گاه داشته باشیم :

$$PAB = PBC = PCA = \omega$$

و ω نیز زاویه بروکار مثلث نامیده می شود . روی ضلعهای مثلث و به طرف داخل آن مربعاً می سازیم . ثابت کنید برای آنکه مرکزهای این مربعاً روی یک خطراست واقع باشند آنست که $\cot \omega = 2$ باشد .

۵۹/۳۵ - ترجمه از مجله تربیت ریاضی x عددی است حقیقی و مثبت ($x \in \mathbb{R}^+$) و مقصود از $E(x)$ قسمت صحیح x می باشد یعنی بزرگترین عددی که با x برابر و یا از آن کوچکتر باشد و تابع زیر را در نظر می گیریم :

$$y = f(x) = E(x) - E\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

(۱) مقدار (x) اراده فاصله $+2$ و 0 معلوم کنید .
(۲) اختلاف $(x) - f(x+2)$ را معلوم کنید و از آن رسم نمایش هندسی تابع y را نتیجه بگیرید .
(۳) نا معادله زیر را حل کنید :

$$E\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{x-1}{2} < E(x)$$

مسائل فیزیک و مکانیک

ترجمه و انتخاب توسط : حسین فرمان

۵۹/۳۶ - جسمی را از نقطه به ارتفاع h بالای زمین

داستانهای ریاضی

ترجمه و تنظیم از: داویدریجان

نوشته: ریند (Rhind)

جشن‌های سالانه موروثی

در پانزدهم اوت ۱۹۵۴ سن خانم و آقای کامبین سه برابر مجموع سن فرزندانشان بود. سه سال بعد، خانم کامبین با زائیدن سه قلوهایش در ۱۵ اوت بداین سنت خانوادگی احترام گذاشت.

میهووت گفته است .

من شما را مجبور به گفتن نمی‌کنم...

اینطور نیست؟ بازهم راهنمائی دیگری می‌کنم: در ۱۵ اوت ۱۹۶۳، مجموع سن خانم و آقای کامبین درست برابر با مجموع سنین فرزندانشان بود.

فرزندان وی چندساله بودند؟

بین دوست من، بعد از آنچه که گفتم، شما می‌بایست فهمیده باشید... ریاضیدانی چون شما...

حق باشماست... آیا موارد دیگری از این نوع در ذهن دارید؟

چیزی بخاطر نمی‌آورم، ولی چرا یکی هست که چیزی تزدیک به آن است و فرضیه مرا به ثبوت می‌رساند.

این موضوع درباره آقای دوراند - استانلا است؛ وجه مشترک وی با فرزندش آنست که هر دو در آخرین روز ماه فوریه از سالهای بدنی آمده‌اند که بر ۴ بخش پذیر بوده است، وقتی در ۲۸ فوریه ۱۹۴۸ آقای دوراند - استانلا تولدش را جشن گرفت، درست سه برابر فرزندش سن داشت.

و تا امروز که در سال ۱۹۶۹ هستیم، اگر خداوند بآنها زندگی ارزانی داشته باشد، سن این آقایان برابر است با... خواننده عزیز، پاسخ این پرسش با شماست و این شماستید که باید جمله آقای فاکتوریل را کامل کنید. بنابر آنچه که دستگیر تان شده است، تعداد بچه‌های کامبین‌ها را در ۱۹۶۳ پیدا کنید. جواب این سؤالهارا در صفحه ... بینند.

آقای دلوسترین از دوستش فاکتوریل می‌پرسد که آیا جشن‌های سالانه همان وجود دارد؟

آقای فاکتوریل اظهار تعجب می‌کند و آقای دلوسترین برایش چنین توضیح می‌دهد:

- بلی، در بعضی از خانواده‌ها می‌توانیم با توجه به چنین میراثی تاریخ تولد را معلوم کنیم. من که کارمند ثبت احوال هستم، در باره بعضی از موارد که ناشی از تصادفات ساده بوده است، تحقیق کرده‌ام.

- مثل؟

- آه، خیلی از این موارد را بیاد دارم. یکی از جالبترین آنها مربوط به کامبین‌هاست. ملاحظه بفرمایید که آقا و خانم کامبین هر دو در ۱۵ اوت از سالی بین دو جنگ جهانی بدنیا آمده‌اند. بدون شک این امری اتفاقی بوده است. امام موضوع وقی جالبتر شد که کشف کردیم تمام بچه‌هایشان نیز در ۱۵ اوت بدنیا آمده‌اند.

واقعاً تعجب آور است.

بقیه از صفحه قبل

گرم گاز کربنیک تولید می‌کند.

۱) نسبت درصد عنصر را در این ماده پیدا کنید.

۲) فرمول ملکولی آنرا بنویسید.

۵۹/۴۳ - ۱۶۰۰ از مخلوط متنان و اتان را با مقدار زیادی اکسیژن در آبسنیج منفجیر می‌کنیم. گازهای باقیمانده پس از سردشدن ۳۲۰۰ حجم دارد که اگر آنرا با محلول نیدرو کسید پتالیم تکان دهیم حجم آن به ۱۲۰۰ تقلیل می‌یابد (حجمها در شرایط یکسان اندازه گیری شده است). نسبت حجم متنان و اتان را در مخلوط محاسبه کنید.

توضیح درباره شعر سه شر آمیز خواجه نصیر

«بسم الله الرحمن الرحيم قودکف»

حروف این عبارت را به ترتیب شماره گذاری کنید :

ب ، س ، م ، ا ، ل ، ه ، ر ، ح ، ن ، ی ، ق ،
 ۱۱ ۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱
 و ، د ، ک ، ف
 ۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲

شماره هر یک از این حروف برابر است با مجموع شماره های مصوعه ایی از شعر بالا که حرف مورد نظر در آنها وجود دارد . بدینه است که اگر شخص مخاطب اظهارداشت که حرف انتخابی وی در هیچیک از مصوعه های شعر وجود ندارد . این حرف «ص» می باشد .

مثال - فرض کنیم که شخص حرف «ق» را در نظر گرفته باشد ، این حرف در مصوعه های اول و دوم و چهارم از شعر وجود دارد و شماره های این مصوعه ها به ترتیب (۱) و (۲) (۸) است که مجموع آنها می شود ۱۱ و ملاحظه می شود که این شماره نظیر حرف «ق» می باشد .

درباره مسائل مندرج در یکان

آقای جواد فیض دانش آموز دیستان حکمت قم
نوشته اند که :

مسئله ۵۸/۴ در کتاب هفت‌صد مسئله ،

مسئله ۵۸/۸ در کتاب مسائل و تمرینات اگاریم ،

مسئله ۵۸/۱۱ در چندین کتاب از جمله روشهای جبر ،

مسئله ۵۸/۴۱ در کتاب ۷۵۰ مسئله فیزیک و مکانیک

مسئله ۵۸/۲۸ در کتاب هفت‌صد مسئله

مندرج می باشد .

عده ای از خوانندگان درباره معمای هریوط به مقاله «شعر سحر آمیز خواجه نصیر و مبنای دو » مندرج در یکان شماره ۵۸ توضیح خواسته بودند . این معما از این قرار است : به شخصی می گوئید یکی از حروف آیات سوره توحید را به دلخواه در نظر بگیرد و بعد به شما بگوید که آن حرف در کدام مصرع از دو بیت شعر زیر وجود دارد . با این شرط که «گ» را «دک» منظور بدارد :

- (۱) من در شرقم بعلم دفتر مطلق
 - (۲) شمس قمرم شریک زهره زشق
 - (۳) هر گوهر و درز لئو او للافر
 - (۴) گویندز تحت و فوق حقاً ياحق
- شما با روش زیر می توانید بگوئید که آن شخص چه حرفي را در نظر گرفته است :
- صرف نظر از حرف «من» بقیه حروف آیات سوره توحید را به ترتیب و هر حرف را فقط یک بار دنبال هم بنویسید ، در این صورت عبارت زیر را خواهید داشت :

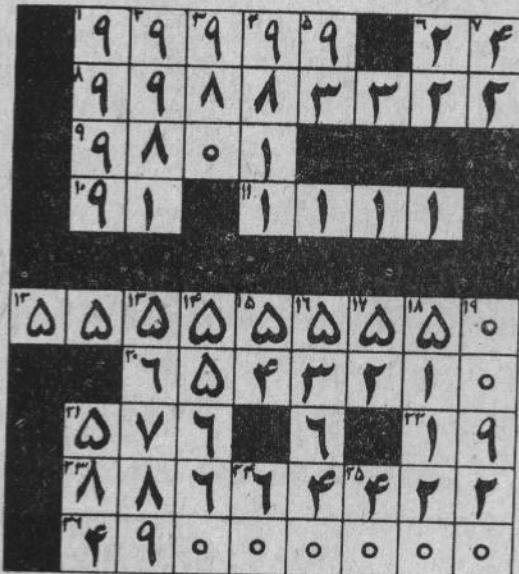
محاسبه مجموع ... (بقیه از صفحه ۸۱)

$$\begin{aligned}
 S_6(n) &= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} \\
 S_7(n) &= \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12} \\
 S_8(n) &= \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^6}{15} + \frac{2n^5}{9} - \frac{n}{30} \\
 S_9(n) &= \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \frac{3n^8}{4} - \frac{7n^6}{10} + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{20} \\
 S_{10}(n) &= \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^8 + n^6 - \frac{n^5}{2} + \frac{5n}{66} \\
 S_{11}(n) &= \frac{n^{12}}{12} + \frac{n^{11}}{2} + \frac{11n^{10}}{12} - \frac{11n^8}{8} + \frac{11n^6}{6} - \frac{11n^4}{8} + \frac{5n^2}{12} \\
 S_{12}(n) &= \frac{n^{13}}{13} + \frac{n^{12}}{2} + n^{11} - \frac{11n^9}{6} + \frac{22n^7}{7} - \frac{22n^5}{10} + \frac{5n^3}{3} - \frac{691n}{2730}
 \end{aligned}$$

جـ دـ لـ اـ عـ دـ اـ

طرح از : شمس الدین رستمی

- ۹ - ده برابر عدد ۱۹ افقی . ۱۵ - همان عدد ۱۲ افقی .
- ۱۴ - همان عدد ۱۳ افقی . ۱۶ - سه برابر نصف عدد ۱۱ افقی .
- ۱۷ - همان عدد ۱۶ قائم .

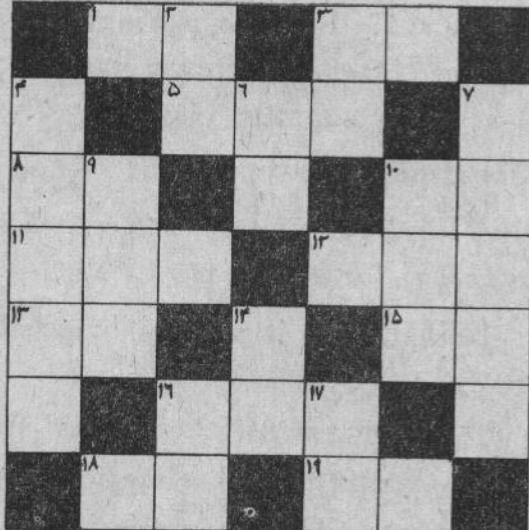


حل جدول شماره گذشته

→

Solution : Let the numbers in such a pair be represented by x and y . Then $xy - (x+y) = 215$. Therefore $xy - x - y + 1 = 216$, which factors as: $(x-1)(y-1) = 216$. Now 216 can be expressed as the product of two factors as follows: 1. 216, 2. 108, 3. 72, 4. 54, 6. 36, 8. 27, 9. 24 and 12. 18. We disregard 18. 12, 24. 9, etc. because the number pairs we seek are nonordered.

If now, we let $x-1=1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12$ and $y-1=216, 108, 72, 54, 36, 27, 24, 18$, we obtain: $(x, y)=(2, 217), (3, 109), (4, 73), (5, 55), (7, 37), (9, 28), (10, 25)$, and $(13, 19)$.



افقی : ۱ - کوچکترین عدد به صورت \overline{ab} که اگر ارزش موضعی رقمهای دهگان و یکان آن به ترتیب x و y باشد داشته باشیم :

$$\log_y x - \log_x y = \frac{\log xy}{\log x \log y}$$

۳ - عدد فرد با دو رقم متمایز که ۶ مقسوم عليه دارد و مضرب ۵ نمی باشد . ۵ - کوچکترین عدد اول به صورت \overline{aba} حاصل از \overline{ab} که مجموع رقمهایش برابر ۱۵ است . ۸ - عدد \overline{ab} رابطه : $(\overline{ab})_7 = (\overline{ba})_1$. ۱۰ - عدد دو رقمی که سه برابر مجموع رقمهایش است . ۱۱ - مجذور نصف عدد ۱ افقی . ۱۲ - عددی است متقارن و برابر با : $(2^{2n}+1)$. ۱۳ - در معادله زیر صدق می کند . ۱۴ - به صورت \overline{ab} است که a و b هر دو زوجاند و در رابطه زیر صدق می کنند :

$$(\overline{ab})_{b+2} = [(\overline{a+2})(\overline{b-2})]_{b-1}$$

۱۶ - ثلث آن کوچکترین عدد اول سه رقمی است . ۱۸ - مقلوبش سه برابر نصف عدد ۱۵ افقی است . ۱۹ - توان پنجم است .

قائم : ۲ - ثلث عدد ۳ افقی . ۳ - مقلوبش به صورت $\overline{a^2a}$ است . ۴ - عددی است به صورت \overline{abcde} با شرایط زیر : $a+b+c+d+e=25$ و $a=e$ ، $b=4c=2d$. ۶ - رقم دهگان آن چهار برابر رقم یکاوش است . ۷ - مجموع رقمهایش ۲۱ است و به صورت زیر می باشد :

$$(2a)(3a+1)a(3a)a$$

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 52: The line passing through the point $P: (3,3)$, intersects the x -axis at $(u,0)$, and the y -axis at $(0,v)$.

- Find v for $u=4, 5, 6$.
- Find the sum of the reciprocals of u and v for each case in a).
- What generalization is suggested? Prove it.
- Where are all the points, such as P , for which the generalization holds?

Solution : a) The intercept form of the equation of a line whose x and y intercepts are u and v respectively is

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1.$$

With $(x,y)=(3,3)$, and $u=(4, 5, 6)$, v becomes $(12, \frac{15}{2}, 6)$.

- b) For $u=4, 5, 6$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{u} + \frac{1}{v} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

c) The generalization is that for any line passing through the point (k, k) , and intersecting the x and y axes at $(u, 0)$ and $(0, v)$ respectively, ($u, v \neq 0$, and hence $k \neq 0$),

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{k}.$$

Proof: Let $(x, y) = (k, k)$ in

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$$

Then

$$\frac{k}{u} + \frac{k}{v} = 1$$

or

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{k}$$

d) All points (k, k) lie on the line $y=x$. But not all points on $y=x$ yield the given result. As noted in (c), the exception is $(0, 0)$.

Unger showed also that for points $(k, -k)$ on

$$y=-x, (k \neq 0), \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{1}{k}.$$

Commended Solver:

pointed out that the line $x=3$ is considered as having a y -intercept of ∞ , and if $1/\infty = 0$, then

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{3}$$

Problem 53: $(2, 25), (3, 13), (4, 9)$ and $(5, 7)$ are all possible non-ordered pairs of positive integers such that the difference between the product and the sum of the numbers of each is 23. For example: $2 \cdot 25 - (2+25) = 23$.

Find every such pair with a product-sum difference of 215.



نشریه علمی و فنی

پلی تکنیک تهران

سال دوم ، شماره اول - شهریورماه ۱۳۴۸

شامل مقالات :

معرفی شعبه مهندسی نساجی و رنگرزی دانشکده صنعتی - پلی وانیل کلراید یا کلرور پلی و بنیل - ارتباط با کرمه ماه بوسیله امواج میلیمتری - تهیه الیاف مصنوعی بوسیله فیبر-لاسیون فیلهای پلیمری - دینامیک فنرهای - تأثیر خوش برآفت ستوونها در ساختمانهای بلند از نوع بتن مسلح - تقسیم و انتقال هوا به داخل محوطه - روش‌های مختلف محاسبه ساختمانهای مرتفع برای نیروهای افقی - بررسی ژئوفیزیکی ساختمانهای کروی - فولادهای سخت و نشکن - الیاف پلی استر .

بها : ۲۰ ریال - برای دانشجویان : ۱۰ ریال

انتشارات یکان که فعلاً نایاب است بزودی تجدید چاپ خواهد شد .

تاریخ انتشار ه یک از این کتابها در مجله‌های شماره‌های بعد اعلام خواهد شد .

تجدد چاپ

اظهار تأسف

تا بستان گذشته یکان یکی از نایندگان فروش فعال خود را در شهربستانها از دست داد .

مرحوم حاج شیخ حسن سپهر صاحب کتابفروشی سپهر در ملايين و نماینده فروش یکان از خانواده‌ای روحانی بدنیا آمده بود و پس از اتمام تحصیلات در رشته الهیات و مراجعت به زادگاه خود به خدمت در فرهنگ و ایران مطبوعات اشتغال ورزید در زمان قدیم نایندگی روزنامه‌های جبل المتنین، شفق سرخ، ایران باستان و بعداً نایندگی روزنامه‌های اطلاعات و کیهان و اخیراً نایندگی چند مجله وزین را بهده داشت . در اثر فعالیتهای آن مرحوم سیکل اول و سیکل دوم متوسطه در ملايين دایر گردید .

وفاتش در ۱۴ مرداد ۴۸ به سن ۷۵ سالگی اتفاق افتاد

تسلیت

در گذشت آقای فرج الله بزرگ نیما برادر همکارگر ای
آقای عطاء الله بزرگ نیما را حضور ایشان و خانواده محترم
تسلیت می‌گوئیم .
نویسندهان و کارمندان مجله یکان

تسلیت

در گذشت آقای بیوک انصاری برادر آقای ناصر
انصاری مدیر شعبه حروفچینی چاپ آذر را حضور ایشان و
خانواده محترم تسلیت می‌گوئیم .
مدیر و کارمندان مجله یکان

انتشارات پیگان (آنچه فعلاً برای فروش موجود است)

روش ساده

حل مسائل شیمی

ترجمہ: عطاء اللہ بزرگ نیا

٢٠ دریال

مجموءة علمی

شامل مقالات ریاضی، فیزیک و شیمی

حل مسائل ممتاز ریاضی و مطالب دیگر

٦٤ دیال

مسائلی از حساب استدلای

تألیف محمود کاشانی

جلد اول : مسائل جمع و تفرقیق جلد دوم : مسائل ضرب جلد سوم : مسائل تقسیم

فوجل نایاب

چاپ دوم ۱۵ روپیہ

فَعْلَا نَيَاب

سر گرمیهای جبر مقدمه بر تئوری مجموعه‌ها

تألیف: علی اصغر ھومانی

۵۰ ریال

ترجمہ: پروین شهریاری

٦٠٠ - ١٠٠ روپیہ

تمثیل‌های ریاضیات مقدماتی

تألیف: دکتر محسن هشتگردی

رسانه‌های محدودی فقط برای تکفروشی: ۱۲۰ رمال

معماهای ریاضی - راهنمای ریاضیات متوسطه‌فعالاً برای فروش موجود نبست

یکان سال ۴۷

فَعْلَا نَادَاب

چاپ دوم یکان سال ۶

بها : ٥٠ ریال

ضمیمهٔ یکان سال برای دانش‌آموزان کلاس‌های سوم

بها : ۱۳ ریال