یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ ششم : شمارهٔ : ۱ ، شمارهٔ مسلسل : ۵۸ مهر ۱۳۴۸

بها : ۳۵ ریال

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هر سال ده شماره منتشر می‌شود
دورهٔ ششم ـ شمارهٔ اول ـ شمارهٔ مسلسل : ۵۸
مهر ۱۳۴۸

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، داود مصحفی

نشانی اداره:
تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱
نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳
تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای هر دوره ۲۰۰ ریال
(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)
حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك صادرات

YEKAN
Mathematical Magazine
volume IV, number 1, Sept. 1969
subscription : $3
TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

دورهٔ جلد کردهٔ یکان

ده شمارهٔ دورهٔ پنجم مجلهٔ یکان در یك جلد صحافی شده و دردفتر مجله برای فروش موجود است.

بها : ۳۰۰ ریال

توجه ، توجه

از اشخاصی که نقداً و یا بوسیلهٔ حواله وجهی به‌حساب بانکی مجله ریخته‌اند تقاضا می‌شود مراتب را به دفتر مجله اطلاع دهند . زیرا تاکنون وجوهی به حساب بانکی مجله ریخته شده است بدون آنکه برای ادارهٔ مجله معلوم شودکه‌وجه مزبور از طرف چه شخصی پرداخته شده است .

تقاضا از مشترکان یکان

از مشترکان یکان تقاضا می‌شود به مندرجات چاپ شدهٔ روی پاکت لفاف مجله توجه فرمایند.

به مشترکانی که دورهٔ اشتراك آنان تمام شده بود توسط کارت پستی اطلاع داده‌شد تاچنانچه مایل باشند اشتراك خود را تجدیدکنند تا مجله ازاین به‌بعدهم برای ایشان‌ارسال‌شود.

گسترش ریاضی جدید در برنامه‌های آموزشی

در چند ماه اخیر، ازطرف دستگاههای آموزشی فعالیتهای برجسته‌ای در زمینهٔ نوسازی برنامه‌های ریاضی انجام گرفته است. چندسال پیش که طرح نظام جدید آموزشی کشور پایه‌گذاری می‌شد و براساس آن برنامه‌های جدید تنظیم می‌گشت، هرگاه که دریکی ازکمیسیونهای برنامه‌نویسی صحبت از ریاضی جدید به‌میان می‌آمد موج مخالفت با آن برمی‌خاست و همه‌رااین واهمه‌بود که معلمان ما آمادهٔ اجرای چنین برنامه‌ای نباشند.

اما تاکنون چهار جلدازکتابهای حساب دورهٔ ابتدایی براساس برنامه‌های جدید و برپایهٔ ریاضیات نوین منتشر شده است که آموزش سه جلد اول آن با موفقیت کامل همراه بوده و جلد چهارم آن که به تازگی در دسترس دانش‌آموزان قرار گرفته است با وجود مطالب متنوع ونسبتاً سنگین خود به این علت‌که کلاسهای کارآموزی آن، برخلاف گذشته، قبل از آغاز سال تحصیلی تشکیل شده‌بااستقبال بیشتر آموزگاران‌مواجه شده است. مؤلفان این‌کتابها اکنون معتقد شده‌اندکه‌حتی‌می‌توانستندمندرجات‌این‌کتابهاراسنگینتر ازآنچه‌فعلاهست‌عرضه‌کنندومباحث‌دیگری ازآنچه را که فعلا در متوسطه‌می‌آموزند به مطالب آنها بیفزایند. به‌قراری که اظهار می‌دارند در کتاب ریاضی سال پنجم‌که سال تحصیلی آینده جانشین کتاب موجود می‌شود نظریهٔ مجموعه‌ها مستقیماً مورد بحث واقع خواهد شد.

برنامهٔ ریاضی کلاس تربیت دبیر برای دورهٔ راهنمایی که هم‌اکنون درتهران و مراکزاستانها در شرف تشکیل است براساس ریاضی جدید تنظیم شده است. دراین کلاسها نظریهٔ مجموعه‌ها، گروهها، حلقه‌ها، هیأتها وعلاوه برآن ساختمانهای اساسی ریاضی تدریس‌می‌شودوفارغ‌التحصیلان کلاس قادر خواهند بود تا برنامهٔ ریاضی دورهٔ راهنمایی را ابتدا ازسال تحصیلی ۵۰-۵۱ براساس ریاضی جدید تدریس‌کنند.

اخیراً در دانشسرای عالی به آموزش ریاضی جدید اهمیت مخصوص داده شده است و فارغ‌التحصیلان دوره‌های اخیراین مؤسسهٔ‌عالی شایستگی لازم برای تدریس روشهای نوین ریاضی را بدست‌آورده‌اند.

←

از کلاس کوتاه‌مدت آشنایی با ریاضی جدید که تابستان گذشته با همکاری انجمن معلمان ریاضی تشکیل شد وهمچنین از کلاس کارآموزی دوهفتگی که اواخر شهریور برای مربیان کلاسهای تربیت دبیر دورهٔ راهنمایی دایر گشت این نتیجه حاصل شده است که معلمان ما نه‌تنها برای تدریس ریاضی جدید آمادگی دارند بلکه از آن استقبال می‌کنند. اینان بی‌صبرانه منتظرند که برنامهٔ ریاضی ناقص وآشفتهٔ فعلی دبیرستانهای ما هرچه زودتر جای خود را به‌برنامه‌ای مترقی‌وکامل واگذار کند ودراین زمینه هم‌ایران به‌پای کشورهای پیشرفته برسد.

علی‌رغم بدبینیهایی که قبلاً وجود داشت اکنون مسلم شده است که محیط آموزشی‌ما از هرجهت آمادهٔ پذیرش روشهای جدیدریاضی می‌باشد و دراین‌باره وزارت‌آموزش و پرورش وظیفه دارد که همگام با تنظیم برنامه‌ها و تهیهٔ کتابهای درسی جدید، وسایل آشنایی معلمان را با مفاهیم و روشهای نوین فراهم آورد. دراین‌مورد نباید فقط به تشکیل کلاسهای کارآموزی توجه بشود، **آنچه بهتر وبیشتر مؤثر است فراهم آوردن وسایل دسترسی معلمان به‌کتابهای جدید می‌باشد. بسیاری از معلمان ریاضی دبیرستانهای ما، مخصوصا بیشتر آنان که در شهرستانها به تدریس مشغول‌اند، تحصیلات عالی ودرخشان داشته‌اندو خیلی خوب می‌توانند از راه‌مطالعه، بیان‌جدیدریاضی را دریابند** چنانچه اکنون‌هم عده‌ای از آنان ازراه مطالعهٔ‌شخصی، در ریاضی جدید صاحب‌نظر می‌باشند.

شایدمجموع مخارج تهیهٔ چندکتاب ریاضی‌جدید و قراردادن آنها در دسترس همهٔ دبیران ریاضی به‌مراتب کمتر ازمخارج تشکیل یك‌کلاس کارآموزی باشدکه درآن فقط چندده نفروبرای یك یا دوهفته شرکت‌کنند ودراین‌مدت حتی یك مبحث را هم بطورکامل فرانگیرند.

عبدالحسین مصحفی

تغییر برنامهٔ ریاضی به حکم ضرورت زمان است

نوشتهٔ: **علی عاطفی** دبیر دبیرستانهای پایتخت

مدت زمانی‌بس دراز از تاریخ تنظیم برنامهٔ‌کنونی‌ریاضی دورهٔ دبیرستان می‌گذرد. مباحثی از این برنامه باید درکتابی به نام تاریخچهٔ ریاضیات جمع‌آوری شود تا از این رهگذر در جوار فراگیری مقدمات علوم ریاضی نوین، دانش‌آموزان با نظرات و طرز تفکر ریاضیدانان و فلاسفهٔ دورهٔ قبل از میلاد آشنا شوند. البته‌برنامهٔ فعلی شامل موادی نیز هست که‌آموزش آنها چه درحال حاضر وچه در آینده مهم وضروری است‌ولی دربرنامه، این مواد به صورتی پراکنده و با مطالبی نارسا جای‌گرفته‌اند. در این مورد به‌کتاب جبر کلاسهای پنجم و ششم ریاضی و طبیعی رجوع می‌کنیم. این دو کتاب به رویهم شامل مباحثی بیشتراز «مقدمات هندسهٔ تحلیلی» و مباحثی کمتر از جبر و اندك اشاره‌ای به «حساب جامعه و فاضله» است!. با آنکه آموزش مقدمات هندسهٔ تحلیلی در دورهٔ متوسطه ضروری بوده و هست و با توجه به این امرکه مباحثی ازهندسهٔ تحلیلی به صورتی‌ناقص مدتی بیش ازنیم قرن درمدارس متوسطه‌تدریس شده و می‌شود، ولی حتی به این موضوع‌که جبر و مقابله با هندسهٔ تحلیلی فرق دارد توجه نشده است؛ زیرابرنامهٔ تنظیمی فاقد هدف بوده است.

اگر در برنامهٔ ریاضی تغییری حاصل نشده به‌همین‌علت بی‌هدفی بوده است که لاجرم امر تغییر برنامه فقط بـرداشتن چند صفحه ازیك کتاب وچسباندن همان صفحات به‌کتاب دیگر و یا تعویض اسامی و جا بجاکردن مباحث بوده است ودرواقع جنبهٔ تظاهر و رفع تکلیف را دربرداشته است وبس !

در دنیای امروز ، ریاضی خود هدف نیست بلکه وسیله‌و آنهم‌تنها وسیلهٔ رسیدن به مهمترین هدفهای علمی است . به‌علاوه می‌بینیم‌که تأسیسات صنعتی و بخشهای اقتصـادی و تولیدی در کشور ما (و بیشتر در تهران) ازدیـاد یافته‌اند و می‌یابند و نیاز این دستگاهها بـه آمـارگر ، حسابدار، متخصص ماشین حساب مسلم است و خلاصه **اینکه تغییرو دگـرگـونی برنامه‌های ریاضی و سایر دروس علمی باید بر - اساس نیاز جامعهٔ امروز مـا صورت‌گیرد ضمن آنکه هدف غائی که همانا ره یابی به جهان دانش امروز است در مد نظر باشد .**

در حال حاضر یك دانش‌آموزکه مدرك قبولی سال ششم ریاضی را بدست می‌آورد برای مؤسسات خصوصی نمی‌تـوانـد مفید باشد ـ معادلات جبری و مثلثاتی رابه‌خوبی حل می‌کند ، خطی راکه برصفحه‌ای تسطیح‌کرده دو باره ترفیع می‌کند ولی اگر سازمانی مثلا سازمان تلویزیون ملی ایران از اوبخواهد تا روشن‌کندکه چند در صد از تماشاگران به دیدن برنامه‌ای خاص علاقمندند ، مسلماً نخواهد توانست ، در حالی‌کـه این امر بر طبق یکی از ساده‌ترین روشهای‌آماری امکان پذیراست حال اگر این دانش آموز به‌دانشگاه راه یابد احساس می‌کند تا چه حد در فهمیدن و فراگرفتن دروس دانشگاه ناتوان‌است. نتیجهٔ شش سال تحصیل علوم پایه ، رسم چند منحنی (آنهم به اسم جبر !) ویا محاسبهٔ مدت زمان پائین وبالا رفتن دلوچرخ چاه و اثبات مو به موی‌چند قضیه، و چیزهائی دیگر، درهمین حدود بوده است ؛ در حالی‌که سالیان دراز است‌که در جهان مترقی دانش ، مسائلی مهم چون «کوانتوم» ومباحثی درخشان نظیر «مکانیك‌کوانتیك» در سطح عالی تدریس می‌شود **ولی به‌علت آشفتگی ، بیهودگی و کهنگی‌برنامهٔ دروس علمی وبخصوص ریاضی ، دانشجوئی‌که دراین‌زمان زندگی و تحصیل می‌کند قـادر به فهم و دریافت دانش زمان خود نیست !**

شش سال ، شش سال تمام ! مگر وقت‌کمی است؟هدف‌ما از تغییر برنامه‌های علوم پایه رفتن به سیارات دیگر نیست‌زیرا در انجام چنین مهمی ، اندیشه به تنهائی کـافی نیست ـ بشر اندیشمند امروز ، افکار خود را به روی‌کاغذ یا تابلوی سیاه و به صورت روابط ریاضی ارائه می‌کند . هرپدیدهٔ شگرفی‌بر مبنای اندیشه‌ای بوجود آمده و خواهد آمد : در سفر به‌کرهٔ ماه قالب ریاضی این‌سفر و تعیین معادلات مسیر معین و معلوم شده بود ولی برای تحقق یافتن ، پول وصنعت و کار لازم‌بود که اینهمه مقدورکمتر کشوری است . ولی از قبول این واقعیت گزیری نیست‌که تا قبل از طیران انسان در فضا ، می‌شد بـه راحتی از محورکه خطی است مستقیم و نامحدود یا ازبینهایت درسرکلاس سخن‌گفت و اکنون نمی‌شود . **پای نهادن بشر بر سیاره‌ای دیگر موجب آن شدکه زمینیـان حقارت وکوچکی زمین خاکی را احساس‌کنند !** درحالی‌که همه دیدندکه چگونه دونقطهٔ روشن وکوچك با مسیری به‌شکل لمینسکات به یکدیگر پیوستند و دیدند و دیدیم‌که هرچه در کائنات بود انحناء بـود و منحنی . در این صورت چگونـه می‌توانیم از خط راست سخن بگوئیم ، چگونه می‌توان سطح صاف و نا محدودی یافت و به‌آن‌گفت صفحه ! در تصور دانش آموز بینهایت بزرگ، خارج از محدودهٔ زمین نبود ولی‌اکنون چی؟اکنون‌زمین‌در نظراوودر نظر همهٔمایك«بینهایت کوچك‌است» در جهان امروز با برنامهٔ‌کنونی ،که درآن فضا به هوا تعبیر شده درحالی‌که فضاهـای بیشماری هست‌که ساده‌ترین آنها همین فضای سه‌بعدی است دیگر نمی‌توان مداراکرد. **اگر ما معلمین برنامهٔ فعلی رابنابروظیفه تدریس‌کنیم ، شاگردان گوش نخواهندکرد .** تغییر برنامه حکم ضروری زمان است وگریز ازآن‌گناهی است نابخشودنی برای همهٔما! امروز ریاضیات در علوم اقتصاد ، بازرگانی ،کشاورزی ونجوم وغیره کاربرد مؤثری یافته‌است . اکنون‌آموزش جبرو مقدمات هندسهٔ تحلیلی و نظریهٔ مجموعه‌ها و فضاها برای تربیت اقتصاد دان، بازرگان و مدیر برای ادارهٔ مراکز اقتصـادی و صنعتی واجب ولازم است وبعد از اینها ، ریاضی در حد اعـلای خود اساس فیزیك و مکانیك جهان امروز ، جهانی‌که بعد چهارم آن به تدریج رخ می‌گشاید قرار داردو آموزش مقدمات این ریـاضی عینی در دورهٔ دبیرستان انجام می‌گیردلذاتغییر برنامه براساس هدفها و نیازهای جامعه باید صورت‌گیرد و دراین موردتقلید از برنامه‌های دبیرستانی سایرکشورهابسی‌نارواست. آنهابرنامهٔ علوم‌پایه‌را براساس نیازها وهدفهای جامعهٔخود تنظیم‌کرده‌اندو **ما هم باید آیندهٔ علمی وصنعتی‌کشورمان‌را پیش بینی کرده ونیازهای اجتماعی راکه درآن زندگی می‌کنیم دریابیم و آنگاه براین اسـاس طرحی نو افکنیم . آنچنانکه رهنمون نسل امروز بـه جهان دانش امروزباشد .**

در بارهٔ شخصیت آقای علی‌رضا امیرمعز ، ریاضیدان ایرانی مقیم آمریکا ، تاکنون چندین بار در مجلهٔ یکان مطالبی چاپ شده است (از جمله ضمن مصاحبهٔ با استاد هشترودی مندرج در یکان شمارهٔ ۷ ـ مرداد ۱۳۴۳) . آقای امیر معز در ریاضیات و همچنین در سایر رشته‌ها و حتی ادبیات ،کتابهای متعددی به زبانهای مختلف چاپ‌کرده و مقالات بسیاری در مجله‌های ریاضی معروف بچاپ رسانده است . شرح‌حال ایشان درچند روزنامه ومجلهٔ خارجی به‌چاپ رسیده‌که امید است ترجمهٔ آنها در شماره‌های آیندهٔ یکان درج بشود .

آقای امیرمعز اخیراً از وجود مجلهٔ یکان مستحضرشده‌است وبه این‌مناسبت تعدادی از تألیفات و مقالات خود را که به زبانهای مختلف چاپ شده برای ادارهٔ این مجله ارسال داشته است. علاوه بر آن مقاله‌ای به زبان فارسی اخیراً از ایشان و اصل شده است که در زیر چاپ می‌شود . کتابها و رساله‌های ارسالی ایشان زیر عنوان کتابخانهٔ یکان در همین شماره معرفی شده است .

مبنای ۲ و شعر سحرآمیز خواجه نصیرطوسی

علیرضا امیرمعز

دانشمند عالیمقام ایرانی خواجه نصیرطوسی شعرزیر را برای تفریح ریاضی ساخته است .

من در شرفم بعلم دفتر مطلق
شمسم قمرم شریك‌زهره زشفق
هر گوهر و در زلؤلؤ لالافر
گویندز تحت‌وفوق حق یك‌حق

دو مجموعهٔزیرراکه یکی مجموعه‌ای از حروف ودیگری مجموعه‌ای‌از اعداد است وهر عدد زیر یك حرف بخصوص‌نوشته شده است درنظرمی‌گیریم .

{ ب ، س ، م ، ا ، ل ، ه ، ر ، ح

{ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸

{ ، ن ، ی ، ق ، و ، د ، ز ، ف

{ ، ۹ ، ۱۰ ، ۱۱ ، ۱۲ ، ۱۳ ، ۱۴ ، ۱۵

به حقیقت یك رابطهٔ **یك به یك** بین مجموعهٔ اعداد و مجموعهٔ حروف برقرار است . یعنی که **هرحرف به یك و فقط یك عدد مربوط است و هرعدد به یك‌وفقط یك حرف** . اکنون به شخصی می‌گوئیم کـه حرفی از این مجموعه را ، بدون اینکه بگوید چه حرفی ، انتخاب کند . از او می‌پرسیم که آیا آن حرف در مصرع اول یا دوم یا سوم یا چهارم است؟ اگرحرف‌درمصرع اول بود ۱ درنظرمی‌گیریم، و برای مصرع دوم ۲ و برای مصرع سوم ۴ و برای مصرع چهارم ۸.مثلا فرض‌کنیم‌که (د) را درنظر گرفته‌ایم . چون(د) در مصرع اول و سوم و چهارم است روابط یك‌به‌یك زیروجود دارند :

۱ ⟷ مصرع اول

۴ ⟷ مصرع سوم

۸ ⟷ مصرع چهارم

بنابراین (د) با عدد ۱۳ = ۸ + ۴ + ۱ رابطهٔ یك‌به‌یك دارد. به مجموعهٔاعداد مراجعه می‌کنیم . حرف (د) بالای ۱۳ نوشته شده است . البته برای تمام حرفهای مجموعهٔ حرفها ، این خاصیت موجود است .

ریاضی و منطقی‌که شعر را سحرآمیزکرده است بسیار

جالب و شامل بسیاری از موضوعهای جدید ریاضی است . مثلا به‌جای اینکه‌اعداد ۱ و ۲ و ۴ و ۸ را درنظر بگیریم‌می‌توان مبنای ۲ را در نظر گرفت . برای حرف (د) می‌گوئیم که در مصرع اول است . بنابراین ۱ درنظر می‌گیریم . چون در مصرع دوم نیست رقم دوم ۰ (صفر) است و چون در مصرعهای سوم و چهارم (د) موجود است برای رقم سوم و چهارم ۱ در نظر می‌گیریم . بنابراین در مبنای ۲ این عدد چنین نوشته می‌شود :

$(۱۱۰۱)_۲$

حال‌اگر این‌عدد رابه مبنای ۱۰ بدل کنیم ۱۳می‌شود. خواننده ممکن است ثابت‌کند که مبناهای دیگر سادگی مبنای دو راندارد و به این جهت شعر سحرآمیز با استفادهٔ مبناهای دیگر نمی‌توان ساخت .

اکنون شعری چهار مصرعی (رباعی) انتخاب می‌کنیم و چگونه می‌توان‌آنرا به سحرآمیز بدل‌کرد بیان‌می‌کنیم ؛ مثلا یك رباعی از خیام را درنظرمی‌گیریم :

آنانکه محیط فضل و آداب شدند
در جمع کمال شمع اصحاب شدند
ره زین شب تاریك نبردند برون
گفتند فسانه‌ای ودرخواب شدند .

اکنون حروف این رباعی را با دقت مطالعه می‌کنیم . بقسمی‌که در بالا ذکر شد به هرحرفی‌یك عددمربوط‌است ولی‌به هرعدد ممکن است که‌یك مجموعه از حروف رابطه داشته‌باشد . این روابط رامی‌نویسیم :

۱ ⟷ { ض ، ط }

۲ ⟷ { ص ، ع ، ج }

۳ ⟷ { ل ، ح ، م }

۴ ⟷ { ز }

۵ ⟷ { } = Ø

۶ ⟷ { } = Ø

۷ ⟷ { ك }

۸ ⟷ { خ ، گ }

۹ ⟷ { و ، ف }

۱۰ ⟷ { } = Ø

۱۱ ⟷ { } = Ø

۱۲ ⟷ { ت }

۱۳ ⟷ { ه ، ی }

۱۴ ⟷ { ر }

۱۵ ⟷ { ش ، ب ، د ، ن ، ا }

چنانکه ملاحظه می‌شود اعداد ۵ و ۶ و ۱۰ و ۱۱ با مجموعهٔ خالی (مجموعهٔ تهی) رابطه دارند . حال می‌توان مجموعه‌های مختلف برای حروف انتخاب‌کرد . ولی مجموعهٔ اعداد مربوطه عبارتست از :

{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۷ ، ۸ ، ۹ ، ۱۲ ، ۱۳ ، ۱۴ ، ۱۵}

ملاحظه می‌شود که اعداد ۵ و ۶ و ۱۰ و ۱۱ در این مجموعه نیستند . برای بازی با این رباعی می‌توان دومجموعهٔ زیر را بکار برد :

{ط ، ج ، م ، ز ، ك ، گ ، ف ، ت ، ه ، ر ، ن}

{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۷ ، ۸ ، ۹ ، ۱۲ ، ۱۳ ، ۱۴ ، ۱۵}

خواننده‌ممکن است که این دو مجموعه را امتحان‌کند. پس از آن‌مجموعه‌های دیگری‌انتخاب‌کند .

اکنون چندکلمه در بارهٔ خواجه نصیر بگوئیم .

ابو جعفر محمد ابن محمد ابن حسن طوسی ملقب به **خواجه نصیرالدین طوسی** دانشمند و ریاضیدان ارجمند ایران در حدودسال (۵۸۰) شمسی مقارن با (۱۲۰۱)میلادی در طوس متولد شده است.این‌دانشمند رسالات و مقالات وکتب بیشماری نوشته است که اغلب درریاضی و نجوم‌اند . رسالهٔ او دراصل توازی، نظرریاضیدان ایتالیائی**ساکری** (Saccheri) را جلب‌کرده و رسالهٔ ساکری در هندسهٔ بدون توازی مبتنی بر رسالهٔ طوسی سبب شده است که **گاوس** (Gauss) و **لباچبسکی** (Łobachevski) هندسه‌های‌غیر اقلیدسی را کشف کنند .

در بارهٔ نظریهٔ گروهها

ترجمهٔ : محمود محمودی مجد آبادی
دانشجوی ریاضی دانشسرای عالی

The Math. Student Journal

مفهوم گروه احتمالا یکی ازمجردترین مفاهیم ریاضی جدید می‌باشد که وحدت رشته‌های مختلف ریاضی را بـه‌سادگی میسر می‌سازد و در ساختمانهای اساسی بسیاری از مباحث ریاضی از قبیل اعداد، فرمولها وغیره بکار می‌رود . اساس گروهها بسیار ساده است در صورتی که به‌هنگام کار برد پیچیده‌تر می‌باشند .

هر گروه بوسیلهٔ جدولی همانند جدول جمع تعریف می‌شود

+	۰	۱	۲	۳	...
۰	۰	۱	۲	۳	...
۱	۱	۲	۳	۴	...
۲	۲	۳	۴	۵	...
۳	۳	۴	۵	۶	...
⋮	.	.	.	.	. .

گروه مجموعهٔ عنصرهـایی است کـه با نشانه‌های معین نمایش داده می‌شوند واین مجموعه متضمن یك عمل داخلی دوتایی (عمل داخلی دوتایی قانونی است که ازروی هردوعنصر مجموعه، عنصر دیگری از همان مجموعه‌را بدست می‌دهد) و علاوه بر آن شامل اصولی است که نسبت به‌عنصرهای آن وهمچنین نسبت به عمل داخلی مزبور سازگار می‌باشند .

قبلا فهرست این اصول و بعضی قراردادها را یاد آوری می‌کنیم ؛ نشانهٔ «e» را برای عنصر بی‌اثر بکار می‌بریم که‌عنصر ثابت منحصر به‌فرد است . عنصر متقابل را با «۱ — » مشخص می‌کنیم و نشانهٔ «*» را برای عمل دوتایی بکارمی‌بریم . مقصود از نشانهٔ «$\forall x$» یعنی : «هرچه باشد x — برای هر x».

اصول مربوط به گروهها به شرح زیر است :

اصل ۱–

$\forall x , \forall y , \forall z : x*(y*z)=(x*y)*z$

اصل ۲– $\forall x : \quad x*e=x$

اصل ۳– $\forall x : \quad x*x^{-1}=e$

ساده‌ترین گروهها ، گروهی است که عمل داخلی آن‌همان عمل «+» است که در آن «۰» عنصر بی‌اثر و «$-x$» عنصر متقابل عنصر x می‌باشد. درموردا‌ین گروه ، اصول بالا به‌صورت زیر بیان می‌شوند :

I) $\forall x$ و $\forall y$ و $\forall z : x+(y+z)=(x+y)+z$

II) $\forall x : x+0=x$

III) $\forall x : x+(-x)=0$

راجع به اصول گروهها مثالهای متعدد دیگـری وجود دارد، ازقبیل : مجموعهٔ عددهای منطق با عمل جمع ، مجموعهٔ عددهای حقیقی با عمل جمع ، مجموعهٔ عـددهای حقیقی بدون صفر با عمل ضرب ، مجموعهٔ عددهای صحیح مضرب ۳ با عمل جمع .

در اصطلاح ریاضی ، اصل اول را اصل شرکت پذیری می‌گویند ، اصل ۲ بیان می‌کند که عنصر بی‌اثر e وجود دارد که نتیجهٔ عمل آن با هر عنصر خود این عنصر می‌باشد ،اصل۳ بیان می‌کند که برای هرعنصر عنصر متقابلی‌وجود دارد .

فرض می‌کنیم که مجموعهٔ A فقط‌شامل یك عنصر باشدمثلا: $A=\{1\}$ ، دراین صورت برای تعریف عمل دو تایی فقط یك راه وجود دارد : $1*1=1$

آیا مجموعهٔ A با عمل * یك گـروه است ؟ برای پاسخ باید اصول سه‌گانه را بررسی کرد . داریم :

$1*(1*1)=(1*1)*1$

یعنی اصل۱ سازگاراست. اصل۲ نیز سازگاراست زیرا داریم $1*1=1$ وازهمین رابطه سازگاری اصل ۳ معلوم می‌شود یعنی ۱ عنصر متقابل

خودش می‌باشد. نتیجه‌می‌گیریم که A با عمل * یك گروه‌است.

اکنون مجموعه‌ای با دوعنصر درنظر می‌گیریم . در این صورت برای تعریف عمل دوتایی ۱۶ راه وجود دارد . مثلا اگر $A=\{۱ و ۲\}$ باشد در این صورت ۱*۱ می‌تواند۱ یا ۲ باشد . همچنین ۱*۲ می‌تواند ۱ یا ۲ باشد و بطورکلی ۱۶ تعریف به ترتیب جدولهای زیر وجود دارد :

۱)

*	۱	۲
۱	۱	۱
۲	۱	۱

۲)

*	۱	۲
۱	۱	۲
۲	۱	۱

۳)

*	۱	۲
۱	۱	۱
۲	۲	۱

۴)

*	۱	۲
۱	۱	۱
۲	۱	۲

۵)

*	۱	۲
۱	۲	۱
۲	۱	۱

۶)

*	۱	۲
۱	۲	۲
۲	۱	۱

۷)

*	۱	۲
۱	۲	۱
۲	۲	۱

۸)

*	۱	۲
۱	۲	۱
۲	۱	۲

۹)

*	۱	۲
۱	۱	۲
۲	۱	۲

۱۰)

*	۱	۲
۱	۱	۱
۲	۲	۲

۱۱)

*	۱	۲
۱	۱	۲
۲	۲	۱

۱۲)

*	۱	۲
۱	۲	۲
۲	۲	۲

۱۳)

*	۱	۲
۱	۲	۲
۲	۲	۱

۱۴)

*	۱	۲
۱	۲	۱
۲	۲	۲

۱۵)

*	۱	۲
۱	۱	۲
۲	۲	۲

۱۶)

*	۱	۲
۱	۲	۲
۲	۱	۲

سؤال جالبی که مطرح می‌شود این است که مجموعهٔ A باکدام یك از عملهای بالاگروه می‌باشد . همانگونه که‌قبلاهم یادآوری کردیم باید نسبت به هریك از ۱۶ حالت بالا اصول سه‌گانه را بررسی بکنیم . برای این کار به روش زیر عمل می‌کنیم ، ابتدا اصل ۲ (وجود عنصر بی‌اثر) رابررسی‌می‌کنیم سپس اگر اصل ۲ سازگار بود به بررسی اصل ۳ می‌پردازیم . اصل ۲ برای حالتهای ۱،۲،۵،۶،۷،۹،۱۲،۱۳ و ۱۶ سازگار نیست زیرا در مورد آنها خاصیت :

$\forall x : x*۲=x$ یا $\forall x : x*۱=x$

برقرار نیست . پس هیچیك از حالتهای مزبور واجد شرایط لازم برای تشکیل‌گروه نیست .

در مورد حالتهای ۴و۱۰و۱۵ ، اصل ۳ سازگارنیست، مثلا در حالت ۴ وقتی $e=۲$ باشدبرای عنصر ۱ عنصرمتقابل وجود ندارد بقسمی که‌داشته باشیم $۱*۱^{-۱}=۲$

فقط حالتهای ۳و۸و۱۱و۱۴ باقی می‌ماندکه ممکن‌است شرایط لازم برای‌گروه بودن را داشته باشند . برای هریك از این حالتها باید سازگاری اصل ۱ را بررسی کنیم. درموردحالت ۳ برحسب اینکه x وy وz هرکدام برابربا یك یا دوباشنداصل شرکت پذیری را باید در ۸ حالت امتحان‌کرد . وقتی $x=۱$ و $y=۱$ و $z=۱$ باشد داریم :

$۱*(۱*۱)=(۱*۱)*۱$

واصل مزبور سازگار است . همچنین وقتی $x=۱$ و $y=۱$ و $z=۲$ باشد بازهم‌معلوم خواهد شدکه اصل ۲سازگار است. اما بالاخره درحالت $x=۲$ و $y=۲$ و $z=۲$ملاحظه می‌شودکه :

$۲*(۲*۲)=۲*۱=۲$

$(۲*۲)*۲=۱*۲=۱$

$۲*(۲*۲)\neq(۲*۲)*۲$

اصل شرکت پذیری سازگار نیست و در نتیجه حالت ۳ نیز نمی‌تواندگروه باشد .

در مورد حالت ۱۴ وقتی $x=۱$ و $y=۲$ و $z=۱$ اختیار شود ناسازگاری اصل شرکت پذیری ملاحظه می گردد پس حالت ۱۴هم نمی‌تواندگروه باشد. در مورد حالت ۸ همهٔ ۸ مورد :

x :	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲
y :	۱	۱	۲	۲	۱	۱	۲	۲
z :	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۱	۲

راکه امتحان‌کنیم سازگاری اصل شرکت پذیری ملاحظه می‌شود پس حالت ۸ شرایط لازم برای‌گروه بودن را دارا می‌باشد . حالت ۱۱ نیزگروه است زیرا از روی حالت ۸ با تغییر ۱ به ۲ بوجود آمده است . با توجه به‌اینکه حالتهای ۸ و ۱۱ ساختمانهای یکسان دارندنتیجه می گیریم که‌فقط یك گروه‌مجرد مرتبهٔ ۲ وجود دارد . (تبصره ـ مرتبهٔ گروه عبارتست از تعداد عنصرهای متمایز آن) . قبلا دانستیم‌که از مرتبهٔ ۱ هم فقط‌یك گروه مجرد وجود دارد .

اگر مجموعهٔ سه عنصری مثلا $A=\{۱و۲و۳\}$ را در نظر بگیریم با توجه به اینکه ۱*۱ همچنین ۲*۱ و غیره می‌تواند ۱ یا ۲ و۳ باشد باید به‌بررسی $۳^{۹}=۱۹۶۸۳$ حالت بپردازیم که‌کارپردردسری است . درمورد مجموعهٔ چهارعنصری

مثلا $A=\{۱ و ۲ و ۳ و ۴\}$ بررسی

$$۴^{۱۶}=۴\,۲۹۴\,۹۶۷\,۲۹۶$$

حالت لازم می‌آید که کاملا گیج کننده است.

از بحث بالا به این نتیجه می‌رسیم که احتیاج به توسعه و تجرد بیشتر نظریهٔ عمومی گروهها داریم و این حقیقتی است که ریاضیدانها مدتها روی آن کار کرده‌اند و پیشرفتهای زیادی هم بدست آورده‌اند اما بیشتر کارهایی که انجام داده‌اند درهمین سطح از ریاضیات باقی مانده است . مثلا هنوز برای ساختن همهٔ گروههای مجرد با مرتبهٔ معین روش ساده‌ای نیافته‌اند و حتی برای چندحالت ساده هم قادر به پیش بینی تعداد گروهها نیستند.

می‌توان ثابت کرد که فقط یك گروه مجرد مرتبهٔ ۳ وجود دارد به صورت :

*	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۳
۲	۲	۳	۱
۳	۳	۱	۲

از مرتبهٔ ۴ دوگروه متمایز به صورتهای زیر وجود دارد :

*	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴
۲	۲	۱	۴	۳
۳	۳	۴	۱	۲
۴	۴	۳	۲	۱

*	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴
۲	۲	۴	۱	۳
۳	۳	۱	۴	۲
۴	۴	۳	۲	۱

انگیزهٔ نوشتن این مقالهٔ مختصر آشنایی مقدماتی خواننده با نظریهٔ گروهها بوده است . خواننده علاقمند خواهد شد که در این باره شخصاً به مطالعه بپردازد. در خاتمه یاد داشت کوتاهی دربارهٔ تاریخچهٔ نظریهٔ گروه بیان می‌شود و فهرست نامهای ریاضیدانانی که در پیشرفت این نظریه سهیم بوده‌اند به نظر خواننده می‌رسد .

اولین مطالعات مربوط به نظریهٔ گروهها اواخر قرن هیجدهم و اوایل قرن نوزدهم توسط **لاگرانژ** (۱۸۱۲ – ۱۷۳۶) ، **آبل** (۱۸۲۹ — ۱۸۰۲) و **گالوا** (۱۸۳۲ – ۱۸۱۱) انجام گرفت . این مطالعات در حاشیهٔ حل معادلات بعمل آمده بود .

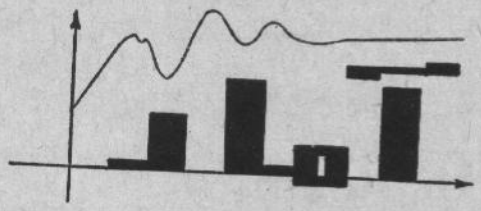
کار گالوا به خاطر خصوصیتی که داشت در زمان خود او قابل فهم نبود . استعداد و نظریات او برای استادانش ناشناخته ماند و تا زمانی که زنده بود مورد توجه قرار نگرفت . وی در سن ۲۱ سالگی در یك دوئل کشته شد.

آبل تازه بیست وهفت‌ساله شده بود که درگذشت. نظریات وی بعد ازمرگش مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفت .

باز هم یاد آوری می‌شود که مزیت غیرقابل انکار نظریهٔ گروه مجرد بودن و عمومیت آن می‌باشد . وقتی قضیه‌ای را بر پایهٔ تجرد و روی اصول اساسی ثابت کنیم درشاخه‌های مختلف ریاضی قابل تعمیم می‌باشد و دیگر احتیاج نیست که آنرا درهر یك از شاخه‌ها مجدداً اثبات کنیم . این یکی ازمزیتهای ریاضی محض می‌باشد .

فهرست بعضی ریاضیدانان که در بارهٔ نظریهٔ گروه کار کرده‌اند .

لاگرانژ (۱۸۱۲ – ۱۷۳۶) - گاوس (۱۸۵۵ — ۱۷۷۷) کوشی (۱۸۵۷ — ۱۷۸۹) - آبل (۱۸۲۹-۱۸۰۲) - هامیلتون (۱۸۶۵-۱۸۰۵) - گالوا (۱۸۳۲-۱۸۱۱) - کیلی (۱۸۹۵-۱۸۲۱) - ددکند (۱۹۱۶-۱۸۳۱) - سیلو (۱۹۱۸-۱۸۳۲) جردن (۱۹۲۲-۱۸۳۸) - فروبنیوس (۱۹۱۷-۱۸۴۹) - کلین (۱۹۲۵-۱۸۴۹) - شریر (۱۹۲۹-۱۹۰۱) - فیتینگ - (۱۹۳۸-۱۹۰۶) - ستیکل برژر (۱۹۳۶-۱۸۵۰) - برنسید (۱۹۲۷-۱۸۵۲) - فراتینی (۱۹۲۵-۱۸۵۲) - پوانکاره (۱۹۱۲-۱۸۵۴) -- وان دیك (۱۹۳۴-۱۸۵۶) -- هالدر (۱۹۳۷-۱۸۵۹) -- میلر (۱۹۵۱-۱۸۶۳) - ستینیتز (۱۹۲۸-۱۸۷۱) -- چر (۱۹۴۱-۱۸۷۵) - دن (۱۹۵۲-۱۸۷۸) - ناذر (۱۹۳۵-۱۸۸۲) -- ودربورن (۱۹۴۸-۱۸۸۲) -- رماك (۱۹۴۶-۱۸۸۸) -- پروفر (۱۹۳۴-۱۸۹۶)



Initiation à la
STATISTIQUE
Ière B . D .
par : M . HAGÈGE
ترجمهٔ : ع . مصحفی

بخش پنجم - سریهای زمانی

I ـ کلیات :

۱ـ تعریف :

دنبالهٔ مشاهدات یك پدیده درتاریخهای متوالی (که‌اغلب به فاصله‌های متساوی‌اند) **سری زمانی** نامیده می‌شود .

مثالهایی از سریهای زمانی (گاهی به‌جای سری زمانی تاریخ گفته می‌شود) :

(الف) جدول‌دمادر ساعت ۷ صبح تمام روزها در مکان معین .

(ب) مبالغ فروش ماهانهٔ یك مغازه .

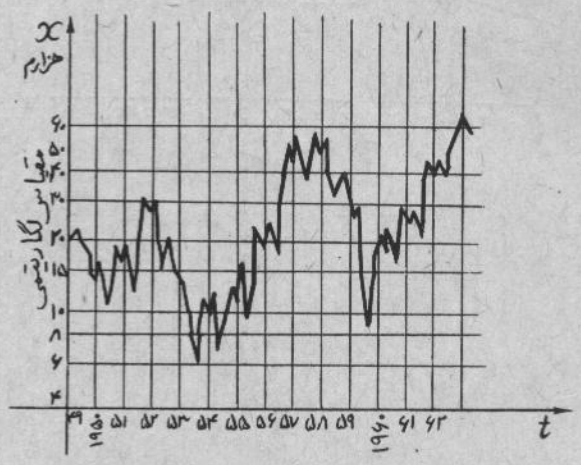
(ج) محصولات سالانهٔ فولاد در فرانسه .

(د) شاخصهای ماهانهٔ ارزشهای خرده فروشی که ازطرف INSEE چاپ شده است .

(ه) مصارف الکتریکی یك خانواده (فهرست دوماهگی EDF) . و غیره .

بررسی سریهای زمانی مورد توجه دستگاهها یا اشخاص مختلف می‌باشد : دولت، رئیس مؤسسه . رئیس خـانواده. زیرا بوسیلهٔ آن می‌توان وضع‌مخصوص یك مشخصهٔ اقتصادی راتعیین کرد و ازطرف دیگر پایه‌ای برای پیش بینی می‌بـاشد (تنظیم بودجه و غیره) .

نمودار سری زمانی به‌این ترتیب انجام می‌گیرد که‌روی محور طولها ، t_i تاریخهای مربوط به مشاهدات و روی محور عرضها ، x_i ارزشهای مشخصهٔ مورد بررسی را نقل می‌کنند . نقاط حاصل را بوسیلهٔ یك منحنی پیوسته بـه هم وصل می‌کنند که به این وسیله تغییرات پدیده بـرحسب زمـان نمایش داده می‌شود. این منحنی رانمودار **حرکت‌مجموعه‌ای** (یاحرکت حقیقی) سری زمانی نیز می‌نامند . شکل زیر نمودار حـرکت مجموعه‌ای سری زمانی : عرضه‌هـای اجابت نشدهٔ مشاغل بین سالهای ۱۹۴۹ و ۱۹۶۲ می‌باشدکه برای محور عرضها واحد هزارم و در مقیاس لگاریتمی بکار رفته است .



۲ـ مؤلفه‌های اساسی حرکت مجموعه‌ای :

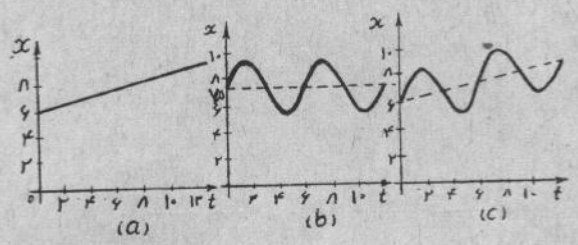
حرکت مجموعه‌ای عموماً به صورت منتجهٔ چهارحرکت (موسوم به‌مؤلفه‌های اساسی) ملاحظه می‌شود : **حرکت دراز مدت ، حرکت دورانی، تغییرات فصلی ، تغییرات اتفاقی :**

الف) به عنوان نمونه، مشاهدات (یا میانگینهای) سالانهٔ پدیده‌ای را در طول مدت ۲۰ سال با یك دید وسیع در نظر می‌گیریم . صرف نظر از بعضی نوساناتی‌که در دوجهت نسبت به تعدادکمی از سالها (مثلا سه یا چهار سال) وجـود دارد ، رویهم یك‌گرایش‌کلی بنظر می‌رسدکه عبارت از یك سیرصعودی یا نزولی خفیف بوده و همان **حرکت دراز مدت** می‌باشد .

این حرکت عموماً علل عمقی و مشخصهٔ دائمی دارد (ازدیاد نفوس ، گسترش کشورهای پیشرفته). منحنی نمودار این حرکت (منحنی دراز مدت) بسیار منظم است ، ترقی یا تنزل ملایم داشته بدون گودی و برآمدگی است . (مثلا: افزایش محصولات الکتریکی در کشورهای پیشرفته ، کاهش مرگ و میر اطفال).

نوسانهای حرکت حقیقی حول منحنی دراز مدت اغلب با نظم خاصی همراه است : منحنی حقیقی گاهی بالا وگاهی زیر منحنی دراز مدت است ؛ این نوسانها کمابیش منظم است و دورهٔ تناوبی دارد که تابع دورهٔ تناوب بحرانها (رونقها و کسادیها) می‌باشد. این حرکت نوسانی (اگروجود داشته باشد) به **حرکت دورانی** موسوم است .

نمودار (فرضی) زیر چگونگی ترکیب این دوحرکت‌را به خوبی نشان می‌دهد .



تبصره ـ می‌توان تابعهایی درست کرد که نمایش‌هندسی آنها منحنیهای بالا باشد :

برای (a) : $x=6+0/25t$

برای (b) : $x=7/5+2\sin t$

برای (c) : می‌توان به یکی از دو روش زیر تابع را بدست آورد :

روش «جمع» : $x=6+0/25t+2\sin t$

روش «ضرب» : $x=(6+0/25t)(1+\frac{2}{7/5}\sin t)$

ب) دیدوسیع را کنار می‌گذاریم و مشاهدات‌مربوط به همان پدیده را با دیدی تنگتر ، مثلا ماهانه ، و در طول مدت چند سال در نظر می‌گیریم ؛ در این حال منحنی حقیقی نوسانهای تندتری را حول منحنی بالا نشان می‌دهد ، واین نوسانها عموماً با تغییرات فصلهای سال هماهنگ می‌باشند زیرا بسیاری از پدیده‌های فیزیکی (دما ، بارندگی و ...) و یا اقتصادی یا مستقیماً تحت تأثیرفصلهای سال می‌باشند(لبنیات میوه‌ها) یا اینکه به خاطر بعضی از مراسم باز به فصلهای‌سال مربوط می‌باشند (تعطیلات تابستانی: جشن سال نو وغیره) .این تغییرات ، **تغییرات فصلی** نامیده می‌شود .

بالاخره باید **تغییرات اتفاقی** را درنظر گرفت که به وقایع غیر مترقبه و پیش بینی نشده مربوط می‌باشند : اثر یك اعتصاب درمحصول یك کارخانه، اثر تیرگیهای روابط بین‌المللی روی ارزشهای متغیر ، اثر دستیابی به‌کلیدهای چند قفلی روی تولید جاکلیدی و غیره .

اگرچهارمؤلفهٔ اساسی‌را به‌ترتیب با T (گرایش‌عمومی) C (حرکت دورانی) . S (تغییرات فصلی) ، A (تغییرات اتفاقی) نشان دهیم شاید بتوان برای تعیین R منتجهٔ آنها از فرمول جمع یا ضرب زیر استفاده‌کرد :

$$R=T+C+S+A$$

$$R=T'C'S'A'$$

برحسب اینکه سری‌زمانی چگونه باشد یکی ازدوفرمول بردیگری مزیت خواهد داشت .

۳- موضوع تجزیه و تحلیل یك سری زمانی :

مقصود ازتجزیه وتحلیل یك سری زمانی‌بررسی‌جداگانهٔ هریك از چهار مؤلفهٔ اساسی و تعیین اثر هرکدام ازآنهاروی حرکت‌مجموعه‌ای می‌باشد. این‌بررسی‌اغلب‌به تعیین اندازه‌هایی منجر می‌شودکه نوسانها را تخفیف می‌دهند : تنظیم موجودی ، تعرفهٔ شبانهٔ مصرف نیروی برق و اشتراك تلفن،جنسهایی‌که در مواقع‌کسادی باید ارزانتر فروخته شود ، استعمال اصطلاحات و علائم خاص درپست وتلگراف و تلفن ،گسترش ایام تعطیلات مدارس ، و غیره .

II ـ حرکت دراز مدت :

مجدداً یادآوری می‌کنیم‌که حرکت دراز مدت عموماً روی مشاهدات سالانه‌ای انجام می‌گیردکه برای مدت نسبتاً طولانی (یك یاچندین دوازده سال)گسترده شده‌اند . از روی نموداراولین اطلاعات مربوط به منحنی درازمدت بدست‌می‌آید و عملا یکی از روشهای زیررا بکار می‌بریم :

۱- میانگینهای گسسته :

الف ـ روش میانگینهای رده‌بندی شده

این روش به این ترتیب است‌که دورهٔ مورد بررسی را به چند پاره (پنج یا شش پاره) با مدتهای متساوی یا غیرمتساوی تقسیم می‌کنند و برای هریك از پاره‌ها میانگین داده راحساب می‌کنند . با این روش (که عموماً کم بکار می‌رود) می‌توان اولین اطلاعات مربوط به‌گرایش عمومی را بدست آورد .

یادآوری می‌کنیم‌که در روش آرایش مایر سری به دو پاره (زیر مجموعه) تقسیم می‌شد و میانگین هریك از دو پاره حساب می‌شد .

مثال : برای بدست آوردن ایده‌ای در تغییرات تولید

گندم در فرانسه ابتدا از سال ۱۹۰۰ تا به امروز طبق جدول اقتصادی چاپ شده در ۱۹۶۳ اعداد زیر را داریم :

	۱۸۹۸ – ۱۹۰۲	۱۹۰۹ – ۱۳	۱۹۲۵ – ۲۹	۱۹۳۴ – ۳۸	۱۹۴۸ – ۵۲	۱۹۵۷ – ۶۱
میلیون تن گندم	۹/۲	۸/۶	۷/۹	۸/۱	۷/۸	۱۰/۶
شاخص	۱۰۰	۹۳	۸۶	۸۸	۸۵	۱۱۵

مثلا ۹/۲ میانگین محصولات سالانه برای پنج سال ۱۹۰۲ – ۱۸۹۸ می‌باشد .

ب ـ روش میانگینهای متحرك :

عددی صحیح (عموماً فرد) انتخاب می‌کنیم ، مثلا ۵ ، برای محاسبهٔ میانگینهای متحرك رتبهٔ ۵ رشتهٔ :

$x_1 , x_2 , x_3 , \dots , x_{12}$

میانگین مقادیر x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_5 را حساب کرده و آنرا به x_3 نسبت می‌دهیم :

$$\xi_3 = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$$

بعد میانگین مقادیر x_2 و x_3 و ... و x_6 را حساب کرده و آنرا به x_4 نسبت می‌دهیم :

$$\xi_4 = \frac{x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{5}$$

و به‌همین ترتیب عمل را ادامه می‌دهیم :

$$\xi_5 = \frac{x_3+x_4+\dots+x_7}{5}$$

. . . . . .

$$\xi_{10} = \frac{x_8+x_9+\dots+x_{12}}{5}$$

در روش میانگینهای متحرك به تغییرات از یك سال به سال دیگر کاهش داده می‌شود ؛ به‌عبارت دیگر ، سری پرداخت می‌گردد .

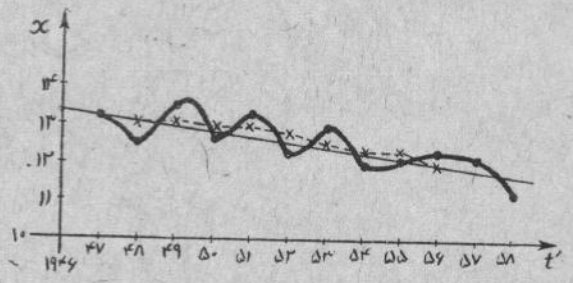
در موردحرکت دورانی معین می‌توان با انتخاب مناسب رتبهٔ میانگینهای متحرك ، حرکت دورانی راکنارگذاشت و از روی‌آن حرکت دراز مدت را ظاهرساخت ؛ مثلا فرض می‌کنیم که‌منحنی‌حقیقی‌حرکتی‌دورانی‌با دورهٔ‌تناوب۷ را نشان بدهد ، هر میانگین متحرك رتبهٔ ۷ یك دورهٔ هفت سالهٔ متوالی راشامل می‌شودکه تقریباً یك نیمهٔ‌آن مربوط به دورهٔ‌کسادی ونیمهٔ‌دیگر آن مربوط به دورهٔ فراوانی است .

با وصل نقطه‌های (ξ_i و t_i) به یکدیگر منحنی منظمی در مجاورت منحنی دراز مدت رسم می‌سود .

ج ـ مثال (سؤال امتحانی .T.B ، ۱۹۶۰)

از ۱۹۴۶ تا ۱۹۵۸ نسبت مرگ ومیردرفرانسه (نسبت در هزار) به شرح ستونهای ۱ و ۲ ازجدول‌آینده بوده است. با استفاده از روش میانگینهای متحرك (وانتخاب دورهٔ تناوب پنجساله) گرایش درازمدت این پدیده راتعیین‌کنید ونمودارآن را رسم‌کنید .

داده‌های (x_i و t_i) را در صفحهٔ محورها نشان می‌کنیم و نقاط حاصل را با یك منحنی (منحنی حقیقی) به هم وصل می‌کنیم . برای سالهای از ۱۹۴۷ تا ۱۹۵۵ حرکتی دورانی مشاهده می‌شود و بنظر می‌آیدکه دورهٔ تناوب‌آن ۳ سال است.



همانطورکه خواسته‌اند میانگینهای متحرك رتبهٔ ۵ را حساب می‌کنیم . ستون ۳ از جدول مجموع x_i ها رابرای‌هر دورهٔ پنج سالهٔ متوالی نشان می‌دهد . مجموع پنج سال اولی ۶۵/۳ است و بقیهٔ مجموعها به سادگی حساب می‌شوند :

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)-x_1+x_6=$$
$$=65/3-13/4+13/3=65/2$$

میانگینهای متحرك‌درستون ۴ ازجدول یادداشت‌شده‌اند. با تقریب استثنائی (۶۴/۹ > ۶۴/۳) نوسانها ناچیزاند و ξ_i ها نزولی می‌باشند. نقطه‌های (ξ_i و t_i) راروی همان‌شکل نشان می‌کنیم (این‌نقطه‌ها داده‌های مرتب‌شده نامیده می‌شوند) و آنها را با یك منحنی (خط چین) به‌هم وصل می‌کنیم . این منحنی منظم‌تر ازمنحنی حقیقی است وبهترازآن گرایش عمومی را درجهت‌کاهش نشان می‌دهد .

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
سالها t_i	نسبتها x_i	نسبتها برای۵سال	میانگینهای متحرك ξ_i	$T_i = t_i - ۱۹۵۲$	$u_i = x_i - ۱۲$	$T_i^۲$	$T_i u_i$
۱۹۴۶	۱۳/۴			−۶	۱/۴	۳۶	−۸/۴
۴۷	۱۳/۲			−۵	۱/۲	۲۵	−۶
۴۸	۱۲/۴	۶۵/۳	۱۳/۰۶	−۴	۰/۴	۱۶	−۱/۶
۴۹	۱۳/۶	۶۵/۲	۱۳/۰۴	−۳	۱/۶	۹	−۴/۸
۱۹۵۰	۱۲/۷	۶۴/۳	۱۲/۸۶	−۲	۰/۷	۴	−۱/۴
۵۱	۱۳/۳	۶۴/۹	۱۲/۹۸	−۱	۱/۳	۱	−۱/۳
۵۱	۱۲/۳	۶۳/۳	۱۲/۶۶	۰	۰/۳	۰	
۵۳	۱۳	۶۲/۷	۱۲/۵۴	۱	۱/۰	۱	۱
۵۴	۱۲	۶۱/۷	۱۲/۳۴	۲	۰	۴	
۵۵	۱۲/۱	۶۱/۴	۱۲/۲۸	۳	۰/۱	۹	۰/۳
۵۶	۱۲/۳	۵۹/۶	۱۱/۹۸	۴	۰/۳	۱۶	۱/۲
۵۷	۱۲			۵	۰	۲۵	
۱۹۵۸	۱۱/۲			۶	−۰/۸	۳۶	−۴/۸
					۷/۵	۱۸۲	−۲۵/۸

۲- خط درازمدت :

الف - تعریف : مانند مثال بالا هنگامی‌که یك آرایش خطی مجاز باشد ، خط آرایش (که اغلب با روش کمترین مجذورات بدست آمده) **خط درازمدت** نامیده می‌شود .

محاسبات مربوط که در ستونهای ۵و۶و۷و۸ جدول بالا انجام گرفته است چنین است :

سال میانگین : $\bar{t} = ۱۹۵۲$ و $T_i = t_i - \bar{t}$

میانگین موقت برای x_iها :

$x_0 = ۱۲$ ، $u_i = x_i - ۱۲$

و به ترتیب خواهیم داشت :

$$\Sigma u_i = ۷/۵ \Longrightarrow \bar{u} = \frac{۷/۵}{۱۳} = ۰/۵۷$$

$$\Longrightarrow \bar{x} = x_0 + \bar{u} = ۱۲/۵۷$$

$$\Sigma T_i^۲ = ۱۸۲ ، \frac{۱}{N}\Sigma T_i X_i = \frac{۱}{N}\Sigma T_i u_i = \frac{-۲۵/۸}{۱۳}$$

$$a = \frac{\frac{۱}{N}\Sigma T_i X_i}{\frac{۱}{N}\Sigma T_i^۲} = \frac{-۲۵/۸}{۱۸۲} = -۰/۱۴$$

از نقطهٔ میانگین (۵۷ و ۱۲ و ۱۹۵۲)ω خط باضریب زاویهٔ ۰/۱۴ − را رسم کرده‌ایم (در شکل قبل) . ملاحظه می‌کنیم که نقاط مرتب شدهٔ (ξ_i و t_i) بسیار نزدیك به خط درازمدت می‌باشند .

ب - تبصره -۱) گاهی جالب است که آرایش خطی به‌جای آنکه روی داده‌های اولیهٔ (x_i و t_i) انجام‌گیرد نسبت به داده‌های مرتب شدهٔ (ξ_i و t_i) معمول شود .

۲) می‌توان از راه محاسبهٔ انحرافهای $x_i - x'_i$ به بررسی دقیق حرکت دورانی اقدام کرد . x_i ها داده‌های اولیه و x'_i ها مقادیر آرایش شدهٔ نظیر آنها روی خط دراز مدت می‌باشد .

دنباله دارد

خواص شیمیائی ماده

(دنباله از شمارهٔ پیش)

ترجمه و تنظیم از: عطاءالله بزرگ‌نیا

قواعد اعداد کوانتومی

طبق اصل « انحصار پولی» هرالکترونی از اتم بوسیلهٔ دستگاه عددی معین و منحصر به فرد، متشکل از ۴ نوع عدد کوانتومی معرفی می‌شود. این دستگاه را درمورد یکتاالکترون اتم ئیدروژن و «واپسین» الکترون اتم‌هلیوم قبلا تعیین نمودیم. بااستفاده ازقواعد زیر می‌توان‌این دستگاه رادرمورد «واپسین» الکترون همگی عناصر پیداکرد و اطلاعات لازم را در بارهٔ حداکثر تعداد الکترون درپوسته‌های اصلی وفرعی و در نتیجه حداکثر دستگاههای اعداد کوانتومی بـرای این پوسته‌ها بدست آورد .

قواعد نـامبرده نشان می‌دهندکه مقادیراعداد کوانتومی مستقل ازیکدیگر نیستند ومقادیرممکن برای هرعددکوانتومی بستگی به مقدار عدد کوانتومی قبلی دارد . برای تعیین اعداد کوانتومی قواعد مزبور با نظم و ترتیب خاصی‌آمده است و در دنبال‌آنها مثالها ونمونه‌هائی ذکرشده است‌که طرز استفاده از این قواعد را نشان می‌دهد . نتیجه آنکه برای « واپسین » الکترون هراتم آدرس یا نشانی خانه (اربیتال) که عبارت از کوانتومهای n و l و m و s می‌باشند تعیین می‌شود. این‌نشانی واربیتال‌را می‌توان باآدرس‌خانهٔ‌یك‌شخص‌که شامل‌کشور، شهر، خیابان،کوچه است مقایسه‌کرد .

قاعدهٔ A- تعداد دستگاههای متشکل از۴عددکوانتومی، برای هر پوستهٔ اصلی برابر $2n^2$ است ، زیرا حداکثر تعداد الکترون درهر پوستهٔ اصلی مساوی $2n^2$ می‌باشد. مسلماً برای پوستهٔ سوم $n=3$ وحداکثرتعداد الکترون ودرنتیجه حداکثر تعداد دستگاههای ۴عددکوانتومی‌برابر $2n^2=2(3)^2=18$ می‌باشد .

قاعدهٔ B- حداکثرتعداد پوسته های فرعی درهر پوستهٔ اصلی برابر کوانتوم اصلی (n) است. بنابراین سومین پوستهٔ اصلی دارای سه پوستهٔ فرعی می‌باشد زیرا $n=3$ و به ترتیب افزایش انرژی عبارتند از s، p و d، f .

قاعدهٔ C- حداکثر تعداد الکترون درپوسته‌های فرعی انرژی (s و p و d و f و...) به‌ترتیب معادل با دو برابر اعداد متوالی فرد است‌که از یك آغاز شده باشند. بنابراین حداکثر الکترون درلایهٔ فرعی (s) $2\times1=2$ ؛ درلایهٔ فرعی (p) $2\times3=6$ ؛ در لایهٔ فرعی (d) $2\times5=10$ ؛درلایهٔ فرعی (f) $2\times7=14$ است .

قاعدهٔ D- این‌قاعده درحقیقت جدولی است‌که‌چگونگی بستگی‌مقادیراعدادکوانتومی را به‌یکدیگر نشان می‌دهد.

مقادیر n هرچه باشد ، l تنها دارای مقادیری خواهد بودکه‌بستگی به‌n دارند ونیزمقادیرm محدود به‌مقادیری‌است که‌به‌l بستگی‌دارند، اما بخاطر می‌آورید که s فقط می‌تواند یکی از دومقدار $-\frac{1}{2}$ و $+\frac{1}{2}$ را اختیار کند .

درجدول زیراعدادکوانتومی ورابطهٔ‌بین‌آنهانشان داده‌شده‌است:

حدودمقادیر ۴ عددکوانتومی

عدد کوانتومی	حدود
عددکوانتومی‌اصلی (n)	همیشه عدد صحیح ومثبت ۱و۲و۳و غیره است
عددکوانتومی‌ثانوی l	عددصحیح مثبت‌کوچکتراز n: ۰،۱،۲ وغیره‌تا(n−۱)
عددکوانتومی مغناطیسی m	صفر؛ ۱−، ۰، ۱+؛ ۲−، ۱−، ۰ ، ۱+، ۲+، تا l−(l−۱)، −l، ...، ۲−، ۱−، ۰، ۱+، ۲+، ...(l−۱)+، l+
عددکوانتومی‌اسپین s	فقط دارای دومقدار $-\frac{1}{2}$ و $+\frac{1}{2}$

دستورهائی برای تعیین اعداد کوانتومی

دستور ۱ـ پس از تعیین مقدار n ، کمترین مقدار l را کـه صفر است برای آن قرار دهید . و پس‌ازبکار بـردن دستورهای ۲ و ۳ ، مقدار بعدی l راکه یك است تعیین کنیدو بار دیگردستورهای ۲ و ۳ را بکار برید واین عمل را تاآخر ادامه دهید .

دستور ۲ـ برای هر مقدار l ، دستگاهی از مقادیر وابسته به آن برای m ، به‌نحوی‌که درجدول فوق نشان‌داده شده است تعیین‌کنید . یعنی عدد صفر و مقادیر منفی ومثبت را به ترتیب صعودی به دنبال هم قرار دهید. با این عمل مقادیر عددکوانتومی m به ازاء افزایش تدریجی یك واحدبه l تعیین می‌شود .

دستور ۳ـ به ازاء هر مقدار از m برای S به‌ترتیب دو مقدار $-\frac{1}{2}$ و $+\frac{1}{2}$ را قراردهید. به عبارت دیگر نخست مقدار منفـی S $(-\frac{1}{2})$ را برای ردیف معینی از مقادیر m قرار دهید سپس مقدار مثبت آن $(+\frac{1}{2})$ برای‌همان ردیف m قرار دهید .

قاعدهٔ E ـ «اصل» انحصار پولی بحث می‌کند ازاینکه دریك اتم هیچ دو الکترونی نیست که ۴ عددکوانتومی یکسان داشته باشند .

در کاربری قواعد و دستورهای بند D کـه به منظور تنظیم جدول‌اعدادکوانتومی برای‌واپسین الکترون‌عناصرمتوالی جدول تناوبی ، قبلا بیان‌شد رعایت اصل پولی شده‌است. برای آنکه مـوضوع روشن شود قواعد D و E را درمورداتمهای ئیدروژن ($_1H$) و هلیوم ($_2He$) که ساده‌ترین عناصر ندبکار برده ودستگاه‌اعداد کوانتومی‌را برای‌هر یك از الکترونهائی راکه در این‌اتمها موجوداست‌بدست‌می‌آوریم.

الکترونهای این اتمها دارای کـوانتوم اصلی $n=1$ می‌باشدکه مطابقت با پوستهٔ اصلی (K) دارد : چون $n=1$ است ، پس کوانتوم دوم (l) برای هر یك از الکترونها فقط می‌تواند مقدار صفر را داشته باشد . خاطرنشان می‌سازیم که مقدار l از صفر شـروع و به $n-1$ ختم می‌شود بنابراین مقدار آن $1-1=0$ است . در نتیجه چون $l=0$ است ، تنها مقدار ممکن برای کوانتوم مغناطیسی (m)صفرخواهدبود. بنابرآنچه گفته شد هردو الکترون (یکتا الکترون‌ئیدروژن و الکترون‌واپسین‌هلیوم)دارای‌سه‌کوانتم‌مشابه می‌باشند . باوجود این‌چون این دو الکترون‌ازنظر انرژی با هم‌فرق‌دارند . پس بناچار باید از نظرعدد کوانتوم اسپین (S) فرق داشته باشند.

طبق دستور ۳ باید مقدار $-\frac{1}{2}$ برای معرفی‌الکترون ئیدروژن و مقدار $+\frac{1}{2}$ برای معرفی واپسین الکترون هلیوم بکار برد. نخستین‌الکترون‌همهٔ اتمهای دیگر دارای همان اعدادکوانتومی الکترون ئیدروژن ، و دومین الکترون همه اتمها دارای همان اعدادکوانتومی واپسین‌الکترون هلیوم $_2He$ هستند . بطوری که دربالا گفته شد اعداد کوانتومی برای این الکترون اخیر عبارتند از : $n=1$ ، $l=0$ ، $m=0$ ، $S=+\frac{1}{2}$.جفت این الکترونها در سطح اصلی انرژی K($n=1$) و آنها را با علامت $_1S$ معرفی می‌کنند . زیرا هر دو در زیر پوستهٔ (اربیتال) S واقعند . پیش از مطالعهٔ جدول زیر به جدولی‌که قبلا در مورد نشانه‌های مقادیر l ذکر شد مراجعه کنید تا این نشانه‌ها را بیادآورید .

جدول اعداد کوانتومی معرف واپسین الکترون عناصر متوالی ازعدد اتمی ۳ تا عدد اتمی ۱۲

نشانه پوسته‌اصلی	نشانه‌زیر پوسته	عنصر	n	l	m	S
l($n=2$)	$_2S$	$_3li$	۲	۰	۰	$-\frac{1}{2}$
		$_4Be$	۲	۰	۰	$+\frac{1}{2}$ (زیرپوستهٔ $_2S$ کامل‌است)
	$_2P$	$_5B$	۲	۱	-1	$-\frac{1}{2}$ (نخستین‌الکترون درزیرپوستهٔ $_2P$)
		$_6C$	۲	۱	۰	$-\frac{1}{2}$
		$_7N$	۲	۱	$+1$	$-\frac{1}{2}$
		$_8O$	۲	۱	-1	$+\frac{1}{2}$
		$_9F$	۲	۱	۰	$+\frac{1}{2}$
		$_{10}Ne$	۲	۱	$+1$	$+\frac{1}{2}$ (دوزیرپوستهٔ کامل: پوسته‌اصلی L کامل)
M($n=3$)	$_3S$	$_{11}Na$	۳	۰	۰	$-\frac{1}{2}$
		$_{12}Mg$	۳	۰	۰	$+\frac{1}{2}$ (زیر پوستهٔ $_3S$ کامل)

در جدول فوق‌خط پیوستهٔ افقی ، الکترونهائی راکه درپوسته‌های‌اصلی مختلف واقعند ازهم جدامی‌کند .[عنصر نئون.

(Ne) تناوب دوم وعنصر هلیوم (He) تناوب نخست راکامل می‌کنند] . خط افقی ناپیوسته ، الکترونهائی را که در زیر پوسته‌های مختلف واقمنداز هم جدا می‌کند .لازم است خاطر نشان سازیم که این الگوهای ریاضی ، که مبتنی بر اعداد کوانتومی است ، بیش از الگوهای « الکترون ـ مداری » بر اطلاعات لازم دربارهٔ الکترون رادر اختیار می‌گذارد .

قاعدهٔ F ـ قاعدهٔ هوند Hund بیان می‌کند که در یك زیر پوستهٔ ناقص ، تا جائی کـه ممکن باشد الکترونهـا واربیتالهای مختلف اشغال می‌کنند . درجدول فوق این قاعده بکار رفته است . و نیز در اجرای قاعدهٔ عملی «شست» که‌قبلا گفته شد مراد از این قاعده اینست که در رج مقادیر معینی از m ، نخست مقدار $-\frac{1}{2}$ کوانتوم اسپین (S) سپس مقدار $+\frac{1}{2}$ آنرا قرار می‌دهد . این ترتیب در مورد الکترونهای متوالی که در زیر پوستهٔ ۲P وارد شده‌اند طبق دستور ۳اعمال شده است .

طبق قاعدهٔ هوند واپسین الکترونها تا جائی‌که امکان داشته باشد بطور انفرادی دراربیتالهای خالی وارد می‌شوند . تا اینکه هر اربیتال شامل‌یك الکترون شود .آنگاه به‌ترتیب هراربیتال بایك جفت الکترون پرمی‌شود .

در جدول فوق ملاحظه می‌کنید که مقادیر n و l و m برای ۵B و ۸O یکی است اما مقادیر S در این دو عنصر با هم فرق‌دارد. زیراطبق قاعدهٔهوند الکترونهای‌ورودی(واپسین) برای ۶C و ۷N هریك‌منفرداًاربیتالی را اشغال کرده‌اند.

قاعدهٔ G ـ اصل « اوف‌باو» بیان می‌کند که علاوه بر قاعدهٔ هوند (که‌به عنوان بخشی از این اصل محسوب می‌شود) الکترونها (الکترونهای واپسین) به نزدیکترین زیر پوستهٔ که طبیعتاًدر پائینترین‌سطح انرژی است وارد می‌شود در نتیجه باید انتظار داشت‌که در دورهٔ دوم جدول تناوبی (پوستهٔ L و n=۲) هر الکترون «واپسین» به‌ترتیب نخست در زیرپوستهٔ S ، سپس در زیر پوستهٔ P وارد شود . بنابراین وقتی‌که n افزایش می‌یابد تدریجاً زیر پوسته‌ها به ترتیب پرشوند . این مطلب‌درمورد سه‌زیرپوستهٔ s ، p و d از پوستهٔ اصلی n=۳ صادق است اما در مورد زیر پوسته‌های s، p ، d و f از پوستهٔ اصلی n=۴ ونیز درحالت کلی‌چنین انتظاری بی‌مورد است‌و این‌قاعده‌فقط تاعنصر ۱۸ جدول‌تناوبی(آرگون) که‌زیر-پوستهٔ ۳p آن‌پر است صادق‌می‌باشد .

بررسی مجدد نمودار سطوح اصلی انرژی وزیر سطوح مربوطه‌که سابقاً مورد مطالعه قرارگرفت وجود یك حالت غیر منتظره را در این نمودار نشان می‌دهد . و آن تقدم زیرپوستهٔ ۴s بر ۳d است . چنین‌تقدم غیرمنتظره‌ای در مورد «واپسین» الکترون ۱۹K و ۲۰Ca دیده می‌شود یعنی‌به‌جای آنکه‌این الکترون در زیر پوستهٔ ۳d وارد شوددر زیر پوستهٔ ۴s وارد شده است .

نخستین‌الکترونی که درزیرپوستهٔ ۳d واردمی‌شودواپسین الکترون اتم عنصر ۲۱Sc است که زیر پوستهٔ ۴s آن با دو الکترون‌پرشده است، چنین حالت غیرمنتظره‌ای موجب پیدایش قاعدهٔ خاصی در مورد ترتیب زیرپوسته‌های اتم شده است:

۱ ـ در جدول تناوبی معمولا (بـا چند استثنای مهم) آرایش الکترونی همه الکترونها بجز واپسین الکترون عیناً مانند اتم بلافصل قبلی است و چنین کیفیتی را که نمی‌توان به‌آسانی بیاری الگوی بر (مدار ثابت) بیان کرد به یاری ابر الکترونی به سهولت قابل‌توجیه می‌باشد . زیرا تنوع شکل و توجیه ابر الکترونی‌اجازهٔ قبول این نظر را می‌دهد کـه ابرهای‌الکترونی (مثلا۴S)که‌انتظار داریم انرژی بیشتر داشته باشد بتواند در صف ابرهای الکترونی دیگرکه طبق تئوری انرژی‌کمتری دارند رخنه‌کند و پائینتر از ابرالکترونی(۳d) قرارگیرد . انرژی الکترونهای ۴s و ۳d خیلی بـه هـم نزدیکند .

بخاطر سپردن ترتیبی که معمولا (نه همیشه) واپسین الکترونها درزیر پوسته‌ای وارد می‌شوند هر چند مشکل است اماغیر ممکن نیست . با استفاده از دو قاعدهٔ نسبتاً ساده‌می‌توان موقع واپسین الکترون را تعیین کـرد . این دو قاعده عبارتند از :

الف ـ الکترونها در زیر پوسته‌ای وارد می‌شوند کـه مجموع n+l (کوانتوم اصلی وکوانتوم ثانوی) آن از همه کوچکتر باشد .

ب ـ درحالتی‌که مجموع n+l در دو زیر پوسته برابر باشد . نخست‌آنکه دارای مقدار n کوچکتری است‌پرمی‌شود.

مثال

ترتیب پر شدن زیر پوسته‌های ۳d و ۴s و ۴p با الکترونهای «واپسین» پی‌درپی‌چگونه است ؟

پاسخ :

$n+l=?$

$3d=3+2=5$

$4s=4+0=4$

$4p=4+1=5$

بنا براین ترتیب پر شدن‌چنین است : ۴s ، ۳d و۴p. زیرا مجموع n+l برای ۴s برابر ۴ . اما در مورد ۳d و ۴p که مجموع n+l برای هر دو یکی است چون n برای ۳d کوچکتر است قبل از۴p پر می‌شود .

دنباله دارد

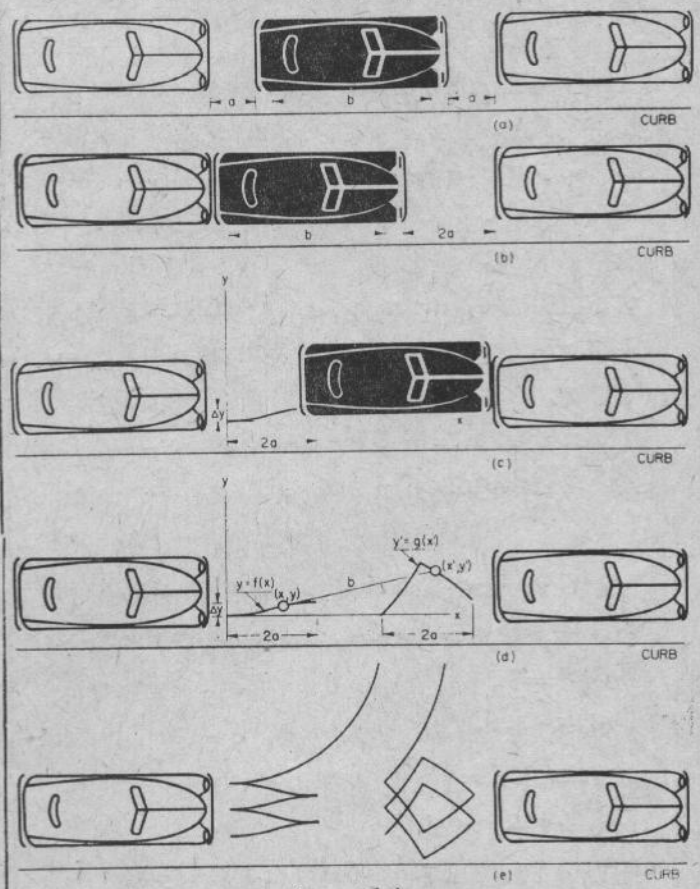
آنالیز ریاضی مسئلهٔ پارکینگ

نوشتهٔ : William A.Allen
مأخذ: Mathematics Magazine

ترجمهٔ : محمد حسین احمدی
دانشجوی ریاضی دانشسرایعالی تهران

بی‌شك هر راننده‌ای تجربهٔ آنرا دارد که اتومبیل خود راکه مابین دو اتومبیل محاذی یکدیگر در خیابان پارك شده است تشخیص دهد .

یك رانندهٔ خوب و کارآزموده معمولا می‌تواند با اجرای یك رشته اعمال تخصصی به‌طریقی که برایش مستقیماً مفهوم است اتومبیل خود را ازپارك(توقفگاه در خیابان) خارج سازد . این اعمال خاص ، بطورکلی شامل یك سلسله حرکاتی است که اتومبیل‌را به‌سمت جلو وعقب هدایت می‌کند. قبل‌ازهرچیز به منظور



(شکل - ۱)

سلسله اعمالی که برای خروج ازمحل‌پارکینگ باریك (تنك) باید انجام‌گیرد .

پرهیز از تکرار بعضی کلمات، اتومبیلها را به‌ترتیبی که در شکل فوق ملاحظه می‌شودشماره گذاری می‌کنیم .

در مواقعی‌که فاصلهٔ بین‌اتومبیلهای (I) و (III) کمتر از حد معمول است خارج کردن اتومبیل (II) از پارك ، نیاز شدیدی به مهارت و استادی شخص راننده دارد . زیرا که دراین حالت اتومبیل مذکور به علت عدم فاصلهٔ کافی جهت خروج از توقفگاه ، ضرورتاً باید تماسی با اتومبیلهای دیگر پیدا کند تا بدین ترتیب از حداقل فاصلهٔ موجود بین آنها حداکثر استفاده شده باشد .

حال با توجه به شکل (a-۱) فاصلهٔ بین دو چرخ سمت راست عقب (اتومبیل II)،که فاصلهٔ بین مراکزچرخهاخواهد بود ، مساوی b و فاصلهٔ این اتومبیل را از اتومبیلهای (I) و (III)که با هم مساویند برابر a می‌گیریم‌و فرض می‌کنیم‌که اتومبیل II آنقدر به جهت عقب حرکت کند تا سپر عقبش با سپر جلوئی اتومبیل (I) کاملا تماس حاصل کند . این حالت حرکت‌که نخستین شکل مسئلهٔ پارکنیگ‌پشت سرهم است در شکل (b-۱) نمایش‌داده شده است و می‌توان آنرابه‌صورت فرمولی‌که ذیلا مورد بررسی قرار خواهد گرفت بیان کرد . برای دست یافتن به این فرمول و ارائهٔ آن سؤال زیر را مطرح می‌کنیم :

یك راننده چه سلسله‌ای از اعمال را باید انجام دهد تا با جابجاکردن به قدر کافی‌اتومبیل‌خود، بتواند آنرا ازپارك خارج سازد ؟

بنابه‌آنچه‌که شرح آن گذشت اگر فاصلهٔ بین اتومبیلهای (I) و (III) کم باشد در این‌صورت اتومبیل (I) که در واقع می‌شود گفت به‌دام افتاده است فقط می‌تواند حرکت نوسانی به‌سمت جلووعقب‌انجام دهد بطوری‌که درهر نوسان ، یك‌حرکت جانبی نیز خواهد داشت و این حرکت موجب می‌شود که اتومبیل از توقفگاه به مقدار کمی به سمت خارج انتقال‌یابد. در این لحظه اتومبیل به‌موازات جدول قرار می‌گیرد شکل (c - ۱) . با توجه به این مطالب به آسانی می‌توان

دریافت که این سلسله اعمال باید جهت خروج ازپارك متناوباً صورت گیرد واین تناوب در این مورد تلویحاً بدین معنی‌است که اتومبیل در انتهای هردوره از اعمال وضع اولیهٔ خود راکه همانا موازی بودن با جدول است پیدامی کند .

با توجه به شکل (c ـ ۱) یك دستگاه مختصات دکارتی Oxy را طوری انتخاب می‌کنیم که مرکز آن منطبق بر وضع اولیهٔ چرخ سمت راست عقب (اتومبیل II) ومحور x ها موازی با جدول خیابان باشد، با ملاحظهٔ شکل (d-۱) فرض می‌کنیم مسیری را کـه چرخ مذکور در نخستین دور حرکت اتومبیل (II) طی می‌کند بوسیلهٔ رابطهٔ :

$$(۱) \quad y=f(x)$$

و با شرایط حدی زیر، مشخص گردد :

$$(۲) \quad \begin{cases} y(۰)=۰ \text{ و } y(۲a)=\Delta y \\ y'(۰)\equiv y'(۲a)=۰ \end{cases}$$

(y' مشتق y نسبت به x)

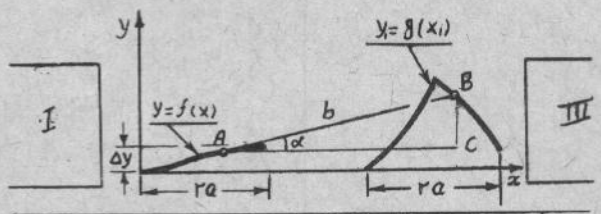
در خلال مدت این دوره از اعمال ، اتومبیل به‌اندازهٔ Δy به‌سمت خیابان انتقال‌می‌یابد . حال کافی است که فقط‌دور اول را قبل از دور دوم و یا بالعکس مورد بررسی قرار دهیم (ازآنجاکه حالت عکس ، تصویر متقارنی از حالت سابق‌الذکر می‌باشد لذا ضمن بررسی هر یك از حالات فوق هیچ اشکالی بوجود نمی‌آید).

ازروی معادلهٔ مسیرچرخ سمت‌راست عقب می‌توان‌معادلهٔ مسیر چرخ سمت راست جلورا پیداکرد .

به این ترتیب که : از نقطه‌ای مانند $A(x و y)$ واقع روی منحنی $y=f(x)$ خط مماسی برآن رسم کرده و آنرا به‌اندازهٔ b امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ $B(x_۱ و y_۱)$ که یك نقطه از منحنی مسیرچرخ‌سمت راست جلو می‌باشد بدست‌آید . واضح‌است که مکان‌هندسی چنین نقاطی ، معادلهٔ مسیر چرخ اخیرالذکر را مشخص می‌کند. این‌معادله‌را می‌توان به‌صورت $y_۱=g(x_۱)$ نوشت .

منحنی‌مسیر $y_۱=g(x_۱)$ رامی‌توان به‌صورت‌پارامتری نوشت برای این‌کار کافی است‌که مختصات‌یك‌نقطه ازآن‌مثلاً B را برحسب پارامتر بنویسیم . با توجه به شکل زیر که همان شکل d ـ ۱ است که با مقیاس بزرگتر رسم‌شده است به‌ترتیب می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{cases} x_۱=x+AC \\ y_۱=y+BC \end{cases}$$



جدول

از روی شکل داریم :

$y'=tg\alpha$ (ضریب زاویهٔ خط AB)

و

$$BC=b\sin\alpha=\frac{b\,tg\alpha}{\sqrt{۱+tg^۲\alpha}}=by'(۱+y'^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$AC=b\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{۱+tg^۲\alpha}}=\frac{b}{\sqrt{۱+y'^۲}}=$$

$$=b(۱+y'^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$$

(توضیح-همانطوری که درشکل ملاحظه‌می‌شود طولهای AC و BC مثبت‌اند لذا درقسمت بسط سینوس یاکسینوس α برحسب $tg\alpha$ مقدار مثبت آنهارا اختیارکرده‌ایم .)

باتوجه‌به این روابط ، $x_۱$ و $y_۱$(مختصات پارامتری B) به‌صورت زیر در می‌آیند .

$$(۳) \quad x_۱=x+b(۱+y'^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$(۴) \quad y_۱=y+by'(۱+y'^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$$

انتگرال زیر را درنظر می‌گیریم :

$$(۵) \quad W=\int y_۱dx_۱$$

دراین‌رابطه به‌جای $x_۱$ و $y_۱$ مقادیرشان‌راازروابط(۳)و(۴) قرار می‌دهیم که پس از تفکیك به صورت زیر در خواهدآمد:

$$(۶) \quad W=\int ydx-\int\frac{byy'dy'}{(۱+y'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}+$$

$$+\int\frac{by'dx}{(۱+y'^۲)^{\frac{۱}{۲}}}-\int\frac{b^۲y'^۲dy'}{(۱+y'^۲)^۲}$$

از انتگراسیون دومین جملهٔ سمت راست رابطهٔ (۶) خواهیم داشت :

$$(7)\qquad -\frac{b}{2}\int\frac{2yy'dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=-\frac{b}{2}\left[-\frac{2y}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}+\int\frac{2y'dx}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

بعد از جاگذاری مقادیر رابطهٔ (۷) در (۶) و حذف جمل متقابل داریم :

$$W=\int y_1dx_1=$$

$$=\int ydx+\frac{by}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}-b^2\int\frac{y'^2dy'}{(1+y'^2)^2}$$

$$(8)\qquad \int y_1dx_1-\int ydx=$$

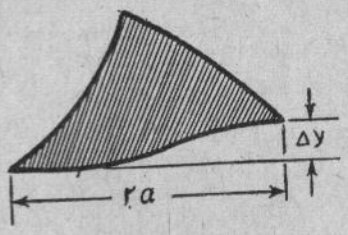
$$=\frac{by}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}-b^2\int\frac{y'^2dy'}{(1+y'^2)^2}$$

حال چنانچه دومین جملهٔ سمت‌راست رابطهٔ (۸) را در یك دور کامل انتگره کنیم درشرایط حدی رابطهٔ (۸) به‌رابطهٔ زیر بدل می‌شود :

$$(9)\qquad \int y_1dx_1-\int ydx=b\Delta y$$

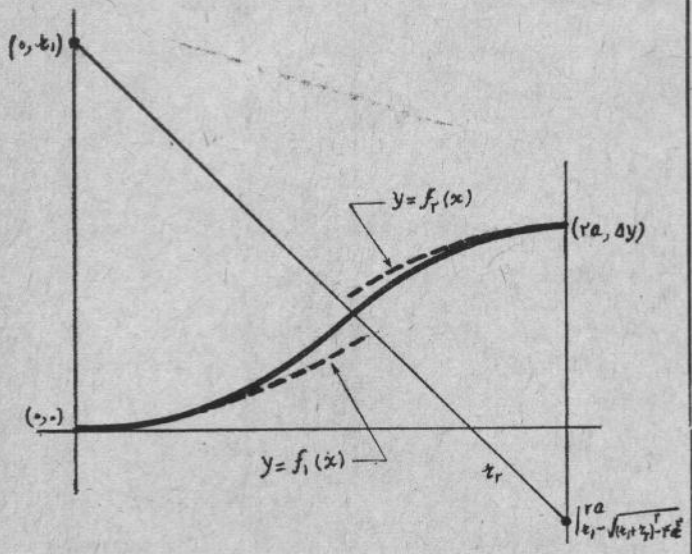
تفسیر فیزیکی وهندسی رابطهٔ (۹)

(شکل-۲)طرح ساده‌ای است‌که تعبیرو تفسیرفیزیکی‌انتگرالهای رابطهٔ (۹) را روشن می‌سازد.منحنی MNP مسیر چرخ سمت‌راست جلوومنحنی MP مسیر چرخ سمت راست عقب را مشخص می‌کند . با توجه‌به رابطهٔ (۹) وبا کمی تأمل به‌آسانی می‌توان دریافت‌که سطح‌مسدود(شکل-۲). با مقدار Δy مستقیماً بستگی دارد (مستقیماً متناسب است) . و مقدار Δy در صورتی ماکزیمم خواهد شد که مساحت سطح مسدود فوق ، ماکزیمم‌گردد .



(شکل - ۲)
سطح مسدودی که منحنیهای مسیر چرخهای سمت راست جلو و عقب اتومبیل‌می‌سازند

حال‌منحنی‌مسیرچرخ سمت راست عقب راکه ماکزیممی به‌عرض Δy دارد مورد بررسی قرار می‌دهیم . همانطورکه در شکل (۳) ملاحظه می‌شود .



(شکل - ۳)

* اگر r_1 و r_2 به ترتیب می‌نیمم شعاعهای انحنای‌مسیر این چرخ درگردش به چپ و راست باشند آنگاه‌اگر t فاصلهٔ تماسی چرخ با زمین باشد خواهیم‌داشت :

$$(10)\qquad r_1=r_2+t$$

در (شکل - ۳) نمایش دو منحنی‌خط‌چین $y_1(x)$ و $y_2(x)$ که به دلخواه انتخاب شده‌اند دیده‌می‌شود . انحناهای منحنیهای مذکور به‌ترتیب مساوی $\frac{1}{\rho_1}$ و $\frac{1}{\rho_2}$ می‌باشدبطوری‌که:

$$\frac{1}{\rho_2}<\frac{1}{r_2}\ \text{و}\ \frac{1}{\rho_1}<\frac{1}{r_1}$$

هر یك از منحنیهای‌خط چین خواه روی دایره وخواه خارج ازآن قرارگیرند بوسیلهٔ کمان مشترکشان (کمان‌مشترك منحنی خط چین و دایره) مشخص می‌گردند. حقیقت این امر با صرف کمی دقت به سهولت مستنبط است زیرا که‌در حدگیری منحنیهای خط چین ، انحناهایشان یعنی $\frac{1}{\rho_1}$ و $\frac{1}{\rho_2}$ به‌ترتیب به سمت $\frac{1}{r_1}$ و $\frac{1}{r_2}$ میل خواهد کرد . من باب مثال اگر $\frac{1}{\rho_1}$ به سمت $\frac{1}{r_1}$ میل کند ($\frac{1}{\rho_1}\to\frac{1}{r_1}$) آنگاه نقاط واقع روی منحنی $y_1(x)$ در مراجعت از مرکز مختصات ، حرکتی به‌سوی کمان‌دایره‌ای که درخلاف‌جهت چرخش‌عقربه‌های ساعت است خواهند داشت .

(دنبالهٔ درصفحه۲۶)

معادلات شکلهای مختلف هندسی

از : یعقوب گنجی
دانشجوی ریاضی دانشسرای عالی

دنباله از شماره‌های پیش

تذکر ـ از خوانندگان ارجمندی که مقالهٔ تحت عنوان بالا را در شمارهٔ ۵۶ مطالعه کرده‌اند خواهشمند است اشتباههای زیر را درقسمت مزبور تصحیح کنند :

۱ـ در صفحهٔ ۵۶۴ ، درسطر ۲۳ از ستون اول، به‌جای «منتظم» ، «منتظم کامل» ودر سطر آخر از ستون دوم ، به‌جای «... یا منتظم» ، «یا شبه منتظم کامل» بنویسید .

۲ـ در ستون دوم از صفحهٔ ۵۶۶ ، در سطرهای ۵ ، ۹ ، ۱۳ ، به جای «و $\neq 0$» ، «$\neq 0 \Longrightarrow$» و در دوسطر آخر ، به‌جای «m'» ، «m» باید نوشت .

قرار داد ـ $4n$ ضلعی منتظم را «مبدأ محوری» گوئیم هرگاه دو قطر متعامد متقارب در مرکزش منطبق بر محورهای مختصات باشند . چنانچه $4n$ ضلعی مزبور را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{OC}$ انتقال دهیم ؛ در وضع جدید ، آن را «محوری به مرکز C» می‌نامیم .

معادلهٔ $4n$ ضلعی منتظم مبدأ محوری

اگر طول شعاع $4n$ ضلعی منتظم را R بنامیم معادلهٔ آن در وضعیت مبدأ محوری به ازاء $n=1$ به صورت : $|y|+|x|=R$ و به ازاء $n=2$ به فرم :

$$\sqrt{2}|y|+|x-y|+\sqrt{2}|x|+|x+y|=R(2+\sqrt{2})$$

(صفحهٔ ۵۶۸ از شمارهٔ ۵۶ مجله) ویا به شکل :

$$|y|+\left|x\frac{\sqrt{2}}{2}-y\frac{\sqrt{2}}{2}\right|+|x|+\left|x\frac{\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=R(\sqrt{2}+1)$$

نوشته می‌شود که ازآنجا چنین بنظر می‌رسدکه معادلهٔ هر $4n$ ضلعی منتظم مبدأ محوری به صورت :

$$(E_5)\quad \sum_{k=0}^{2n-1}\left|x\sin\frac{k\pi}{2n}-y\cos\frac{k\pi}{2n}\right|=h$$

باشد . بخصوص حدس زده می‌شود که به ازاء جمیع مقادیر n داشته باشیم :

$$(1)\quad \frac{h}{R}=\sum_{k=0}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\sum_{k=0}^{2n-1}\left|\cos\frac{k\pi}{2n}\right|=\cot g\frac{\pi}{4n}$$

در رابطهٔ اخیر اگر $\frac{h}{R}$ راکنار بگذاریم تحقیق برقراری بقیهٔ رابطه بسیار ساده است زیرا در این صورت رابطهٔ مزبور با اتحاد :

$$(1')\quad \sum_{k=0}^{2n-1}2\sin\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}=$$

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\left|2\cos\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}\right|=2\cos\frac{\pi}{4n}$$

معادل است که اثبات درستی آن با استفاده از قاعدهٔ ادغام در Σ به سهولت امکان پذیر است و اثبات رابطهٔ (۱) بـه اثبات رابطهٔ زیر منجر می‌شود :

$$(1'')\quad h=R\cot g\frac{\pi}{4n}$$

اکنون برای تحقیق اینکه نمودار معادلهٔ E_5 یك $4n$ ضلعی منتظم مبدأ محوری است یا خیر ، فرض می‌کنیم :

$$I_k=x\sin\frac{k\pi}{2n}-y\cos\frac{k\pi}{2n}$$

وخط به معادلهٔ : $I_k=0$ را D_k می‌نامیم دراین صورت D_0 محور طولها و D_n محورعرضها می‌باشد . واضح است که‌صفحهٔ مختصات به وسیلهٔ D_kها (یعنی به وسیلهٔ خطوط متقارب D_0، D_1، ... و D_{2n-1}) به $4n$ ناحیه تقسیم می‌شود (شکل ۴) که هرناحیه عبارت از سطح نامحدود داخل زاویه‌ای است به رأس

O و به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{2n}$ رادیان . بخصوص D_k باجهت مثبت محور طولها زاویه‌ای برابر با $\frac{k\pi}{2n}$ رادیان می‌سازد.

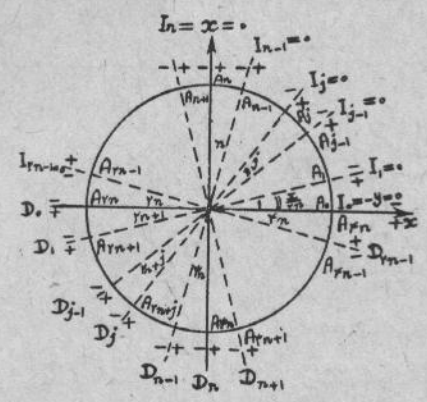
از اینجا روشن است که نقاط تلاقی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع متغیر R با خطوط متقارب مزبور عبارتند از نقاطی به صورت :

$$A_j(R\cos\frac{j\pi}{2n} و R\sin\frac{j\pi}{2n})$$

که رؤوس یك $4n$ ضلعی منتظم مبدأ محوری می‌باشند که در آن رأس A_j از دوران رأس $A_0(R$ و $0)$ حول O به‌اندازهٔ $\frac{j\pi}{2n}$ رادیان حاصل می‌شود .

حال اگر ناحیهٔ درون زاویهٔ A_jOA_{j-1} را ناحیهٔ j زام بنامیم برای اینکه نمایش هندسی E_5 یك $4n$ ضلعی منتظم مبدأ محوری باشد لازم وکافی است که بخشی از نمودار مزبور که در ناحیهٔ j زام ($j=1$ و 2 و 3 و ... و $4n$) رسم می‌شود پاره خط A_jA_{j-1} (به ازاء مقدار معینی از R) باشد .

اما ازآنجاکه نقطهٔ O مرکز تقارن نمودار E_5 می‌باشد



(ش ۴)

(چرا ؟) هرگاه حکم اخیر به ازاء مقادیری از j که $1<j<2n$ برقرار باشد به ازاء تمام مقادیر j برقرار خواهد بود که چون با شرط $1<j<2n$ گروهی از I_kها که در آنها $k<j$ در ناحیهٔ j زام منفی بوده و بقیهٔ آنها در این ناحیه مثبت هستند، معادلهٔ شرطی قسمتی از نمودار E_5 که در ناحیهٔ مزبور رسم می‌شود با توجه به E_5 و تعریف تابع قدر مطلق چنین است :

$$\begin{cases} I_j>0 \text{ و } I_{j-1}<0 \\ \sum_{k=0}^{j-1}\left(y\cos\frac{k\pi}{2n} - x\sin\frac{k\pi}{2n}\right) + \\ \quad + \sum_{k=j}^{2n-1}\left(x\sin\frac{k\pi}{2n} - y\cos\frac{k\pi}{2n}\right) = h \end{cases}$$

و یا :

$$(j)\quad \begin{cases} y\,cotg\frac{j\pi}{2n} < x < y\,cotg\frac{j-1}{2n}\pi \\ x\left(\sum_{k=j}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} - \sum_{k=0}^{j-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right) + \\ \quad y\left(\sum_{k=0}^{j-1}\cos\frac{k\pi}{2n} - \sum_{k=j}^{2n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}\right) = h \end{cases}$$

هرگاه طرفین معادلهٔ اخیر را در $2\sin\frac{\pi}{4n}$ ضرب کرده و درمعادلهٔ حاصل ، ضرایب x و y را به ترتیب a و b بنامیم دستگاه اخیر به دستگاه زیر تبدیل می‌شود :

$$(j')\quad \begin{cases} y\,cotg\frac{j\pi}{2n} < x < y\,cotg\frac{j-1}{2n}\pi \\ ax + by = 2h\sin\frac{\pi}{4n} \end{cases}$$

که در آن :

$$a = \sum_{k=j}^{2n-1} 2\sin\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n} - \sum_{k=0}^{j-1} 2\sin\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}$$ و

$$b = \sum_{k=0}^{j-1} 2\cos\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n} - \sum_{k=j}^{2n-1} 2\cos\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}$$

واما بر اساس محاسباتی که برای تحقیق درصحت اتحاد (۱') انجام دادیم خواهیم داشت :

$$a = 2\cos\frac{2j-1}{4n}\pi \quad و \quad b = 2\sin\frac{2j-1}{4n}\pi$$

که از آنجا (j') به‌صورت زیر در می‌آید :

$$(j'')\quad \begin{cases} y\,cotg\frac{j\pi}{2n} < x < y\,cotg\frac{j-1}{2n}\pi \\ x\cos\frac{2j-1}{2n}\pi + y\sin\frac{2j-1}{4n}\pi = h\sin\frac{\pi}{4n} \end{cases}$$

برای آنکه نمودار این دستگاه ، پاره خط A_jA_{j-1} باشد لازم وکافی است که مختصات نقاط A_j و A_{j-1} درمعادلهٔ اخیر صدق کند و اما طرف اول معادلهٔ مزبور به ازاء مختصات این نقاط به ترتیب برابر است با :

$$R\left(\cos\frac{j\pi}{2n}\cos\frac{2j-1}{4n}\pi + \sin\frac{j\pi}{2n}\sin\frac{2j-1}{4n}\pi\right) = R\cos\frac{\pi}{4n}$$

$$R\left(\cos\frac{j-1}{2n}\pi\cos\frac{2j-1}{4n}\pi+\sin\frac{j-1}{2n}\pi\sin\frac{2j-1}{4n}\pi\right)=R\cos\frac{\pi}{4n}$$

یعنی به ازاء $R=h\,tg\frac{\pi}{4n}$ (۱'') نمودار (j'') پاره خط A_jA_{j-1} می‌باشد که از آنجا صحت حدس ما در مورد معادلهٔ $4n$ ضلعی منتظم مبدأمحوری به ثبوت می‌رسد . بخصوص (۱''') همان (۱'') می‌باشد که‌درستی آن نیز بدین ترتیب تأئید می‌گردد و از آنجا E_5 به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(E_{5'})\quad \sum_{k=0}^{2n-1}\left|x\sin\frac{k\pi}{2n}-y\cos\frac{k\pi}{2n}\right|=R\,cotg\frac{\pi}{4n}=\frac{l\cos\frac{\pi}{4n}}{1-\cos\frac{\pi}{2n}}$$

که در آن l طول ضلع $4n$ ضلعی منتظم است .

تبصرهٔ ۱ـ با وجود آنکه محورهای مختصات ، محورهای تقارن هر $4n$ ضلعی منتظم مبدأمحوری هستند معادلهٔ $E_{5'}$ (یا E_5) با تبدیل x به $-x$ یا y به $-y$ ظاهراً تغییر می‌کند. این تغییر فقط ظاهری است زیرا می‌توان معادلهٔ مزبور را به معادله‌ای معادل تبدیل کرد که در آن مسئلهٔ تقارن مشهود باشد و $E_{5'}$ به صورت زیر در می‌آید :

$$(E_{5''})\quad |y|+\sum_{i=1}^{n-1}\left|x\sin\frac{i\pi}{2n}-y\cos\frac{i\pi}{2n}\right|+|x|+\sum_{i=1}^{n-1}\left|x\sin\frac{i\pi}{2n}+y\cos\frac{i\pi}{2n}\right|=R\,cotg\frac{\pi}{4n}$$

که با تبدیل x به $-x$ یا y به $-y$ تغییری نمی‌کند .

تمرین ۱ـ با لغزاندن حدود در Σ ی آخر (*) (به اندازهٔ $-n$) ثابت کنید معادلهٔ زیر با $E_{5'}$ معادل است :

$$(E_{5'''})\quad |y|+\sum_{k=1}^{n-1}\left|x\sin\frac{k\pi}{2n}-y\cos\frac{k\pi}{2n}\right|+|x|+\sum_{k=1}^{n-1}\left|x\cos\frac{\pi}{2n}+y\sin\frac{k\pi}{2n}\right|=R\,cotg\frac{\pi}{4n}$$

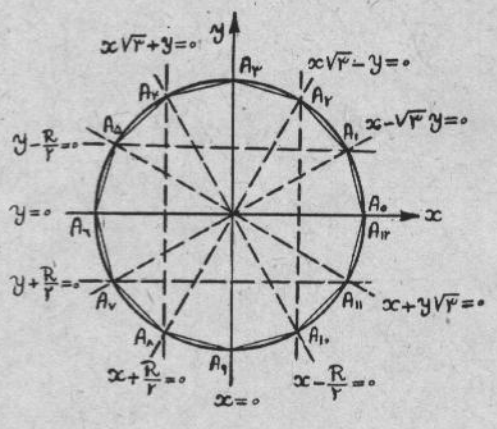
معادلات $E_{5''}$ و $E_{5'''}$ در واقع ، صورتهای ساده شدهٔ $E_{5'}$ هستند و استفاده از آنها تحریر معادلات $4n$ ضلعیهای منتظم مشخص را ساده‌تر می‌کند ($4n$ ضلعی را مشخص گوئیم هرگاه n عدد معلومی باشد) .

معادلهٔ دوازده ضلعی منتظم مبدأ محوری

الف ـ با استفاده از اقطار مرکزی ـ چون در این حالت ، $n=3$ ، معادلهٔ مطلوب (که نمودار آن در شکل ۴' رسم شده است) با توجه به $E_{5'''}$ پس از اختصار به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$2|y|+|x-y\sqrt{3}|+|x\sqrt{3}-y|+2|x|+|x\sqrt{3}+y|+|x+y\sqrt{3}|=R(4+2\sqrt{3})=l(3\sqrt{6}+5\sqrt{2})$$

ب ـ با استفاده از اقطار دو به دو متعامد یا متوازی ـ ازشکل ۴' ، بخصوص برای خوانندگانی‌که تمرین شمارهٔ ۱۱ را درصفحهٔ ۵۲۱ (شمارهٔ ۵۵ مجله) ملاحظه کرده‌اند ، ممکن است این فکر پیش آید که معادله‌ای به فرم :



(ش ۴')

$$(\alpha)\quad a_1|x|+a_2\left|x-\frac{R}{2}\right|+a_3\left|x+\frac{R}{2}\right|+b_1|y|+b_2\left|y-\frac{R}{2}\right|+b_3\left|y+\frac{R}{2}\right|=c_1$$

نیزکه در آن ضرائب قدر مطلقها و c_1 اعدادی مثبت هستند در حالت خاص دوازده ضلعی منتظم مبدأ محوری به شعاع R را مشخص می‌کند . اما وقتی معادلهٔ α خاصیت اخیر را دارا باشد چون وضع نمودارآن نسبت به محورهای مختصات یکسان است خواهیم داشت :

$$a_1=b_1 \quad و \quad a_2=b_2 \quad و \quad a_3=b_3$$

از طرفی با توجه به‌آنکه در این حالت ، مثلا محور عرضها ، محور تقارن منحنی است داریم : $a_2=a_3$ که هرگاه این تساوی را با فرض : $a_1=aa_2$ و $c_1=ca_2$ منظورکنیم وبا توجه به اینکه مختصات نقاط $A_0(R$ و $0)$ و

$A_1\left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\ و\ \frac{R}{2}\right)$ درمعادله صدق‌می‌کنند. بایدداشته باشیم:

$$a=\sqrt{2}-1 \quad و \quad c=(2+\sqrt{3})R$$

وازآنجا معادله‌زیرمعادلهٔ مطلوب خواهدبود:

$$(XII') \quad (\sqrt{3}-1)\left|x\right|+\left|x-\frac{R}{2}\right|+\left|x+\frac{R}{2}\right|+$$

$$(\sqrt{3}-1)\left|y\right|+\left|y-\frac{R}{2}\right|+\left|y+\frac{R}{2}\right|=(2+\sqrt{3})R=$$

$$=\frac{5\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}.l$$

قرارداد ـ چند ضلعی را افقی (یاقائم) گوئیم هرگاه یك ضلعش بهموازات محورطولها (یا عرضها) باشد.

تمرین۲ـ هرگاه $4n$ ضلعی منتظم شکل ۴ را به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{4n}$ رادیان (یا بطورکلی به اندازهٔ $\frac{2k+1}{4n}$ رادیان) حول O دوران دهیم‌به‌وضع افقی (وقائم)درمی‌آیدبا استفاده ازفرمولهای مربوط به دوران محورهای مختصات و از روی معادلهٔ اخیر، معادلهٔ $4n$ ضلعی منتظم افقی (یاقائم) را بدست آورید.

تمرین۳ـ با توجه به اتحادهای $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$$

و

$$\cot\frac{\pi}{4n}=\sum_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=$$

$$=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}$$

معادلهٔدوازده‌ضلعی‌منتظم افقی (وقائم) به‌شعاع R وبه‌ضلع $l=2R\sin\frac{\pi}{12}$ را از دو طریق (برحسب نوع انتخاب اقطار) بنویسید وآن را تا حد ممکن ساده‌کنید.

تبصرهٔ۳ـ دیدیم که‌نمودار معادلهٔ E_{50} نسبت به‌محورها ومرکز مختصات متقارن (یاقرینه) است. بنابراین‌معادلهٔ‌مزبور بامعادلهٔ‌زیرمعادل است:

$$(F_5)\quad \sum_{k=0}^{2n-1}\left|x\sin\frac{k\pi}{2n}+y\cos\frac{k\pi}{2n}\right|=R\cot g\frac{\pi}{4n}$$

بطورکلی می‌توان ثابت‌کردکه معادلاتی به‌صورت:

$$(F_{50})\quad \sum_{k=m}^{2n+m-1}\left|x\sin\frac{k\pi}{2n}\pm y\cos\frac{k\pi}{2n}\right|=R\cot g\frac{\pi}{4n}$$

$$(F_{50'})\quad \sum_{k=m}^{2n+m-1}\left|x\cos\frac{k\pi}{2n}\pm y\sin\frac{k\pi}{2n}\right|=R\cot g\frac{\pi}{4n}$$

که درآنها m عدد صحیح دلخواهی است همگی با هم معادل بوده و $4n$ضلعی‌منتظم مبدأ محوری به‌شعاع R رامشخص می‌کنند.

از F_{50} به ازاء $m=-n$ معادلهٔ:

$$(F_{50''})\quad \sum_{k=-n}^{n-1}\left|y\cos\frac{k\pi}{2n}-x\sin\frac{k\pi}{2n}\right|=R\cot g\frac{\pi}{4n}$$

منشعب می‌شود که برای‌بدست‌آوردن معادلات $4n$ضلعیهای منتظم مشخص ازجهت‌سهولت محاسبه بسیارمناسب است.

احکام اخیر در مورد E_6 یا E_6 (به‌جای E_{50}) نیز صادق‌اند وازآنجا معادلهٔ‌زیرکه برای سرعت در محاسبهٔ معادلات $4n$ضلعیهای منتظم‌مشخص‌افقی (وقائم) مفید است‌حاصل‌می‌شود:

$$\sum_{k=-n}^{n-1}\left|y\cos\frac{2k+1}{4n}\pi-x\sin\frac{2k+1}{4n}\pi\right|=R\cot g\frac{\pi}{4n}$$

تمرینات‌دیگر

۳ـ اگر $4n$ ضلعی شکل ۴ را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{OA_0}$ انتقال دهیم معادلهٔ‌آن را دروضع جدید بنویسید.

۴ـ مسئلهٔ قبل را درحالتی‌که بردار انتقال چنان باشد که A_{2n} برمحور عرضها و A_{3n} برمحور طولها قرار گیرد حل کنید.

۵ـ هرگاه نمودار معادلهٔ E_{50} را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{OC}$ $[C(\alpha,\beta)]$ انتقال دهیم یا حول O به‌اندازهٔ θ رادیان دوران دهیم یا انتقال ودوران را توأماً انجام دهیم معادلهٔ مزبور(پس ازساده‌شدن) به‌چه‌صورت درمی‌آید؟ (معادلهٔ اخیرمعادلهٔ‌کلی $4n$ ضلعی منتظم است.)

۶ـ با توجه به اینکه دوازده ضلعی منتظم مبدأ محوری (شکل۴) پس ازدوران حول O به‌اندازهٔ $30°$یا $60°$ به وضع اولیه برمی‌گردد وبراساس‌معادلهٔ XII'، دومعادلهٔ دیگربرای دوازده‌ضلعی‌منتظم مزبورارائه دهید. سپس‌ازدوران دوازده‌ضلعی حول O و به‌اندازهٔ θ رادیان و انتقال‌آن به‌اندازهٔ بردار $\overrightarrow{OC}$ $[C(\alpha,\beta)]$ وبا توجه به معادلهٔ XII'، یك معادلهٔ کلی برای دوازده‌ضلعی‌منتظم بنویسید.

۷ ـ هرگاه $4n$ ضلعی افقی وقائم به‌معادلهٔ E_6 را چنان انتقال دهیم‌که اضلاع‌افقی وقائم‌آن برنیم محورهای Ox وOy واقع‌شوند معادلهٔ‌آن‌را دروضع‌جدید بنویسید.

۸ـ معادلهٔ مجموعهٔ نقاط مشترك $4n$ ضلعیهای به‌شعاع R و'R رابا فرض: $R'=R\sec\frac{\pi}{4n}$ بدست‌آورید

(دنباله در صفحهٔ ۶۲)

حل برداری مسائل هندسی و تعمیم آنها

نوشتهٔ : علی‌رضا امیر معز
استاد دپارتمان ریاضی دانشکدهٔ تکنولژی تکزاس

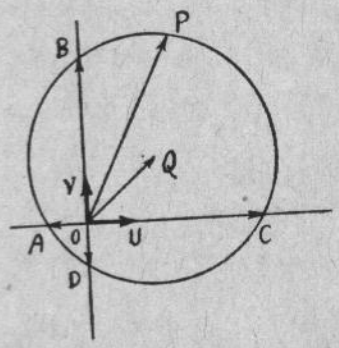
مجلهٔ : Mathematics Magazine
ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

هدف از این مقاله چگونگی حل مسائل هندسهٔ اقلیدسی با روش برداری است . ابتدا مسئلهٔ نمونه‌ای را حل می‌کنیم. سپس آنرا در فضای n بعدی اقلیدسی تعمیم می‌دهیم . حل این مسئله امکان آنرا فراهم می‌آورد که مسائل دیگری نظیر تمرینهای مربوط به فضاهای خطی راکه دانش آموزان دورهٔ متوسطه حل می‌کنند بتوان به‌کمك بردار حل کرد.

۱ـ یاد داشتها ـ نقاط و بردارها بوسیلهٔ حروف بزرگ لاتین ، حاصل‌ضرب اسکالر (داخلی) دوبردار A و B به صورت (A و B) ، قدرمطلق اندازهٔ بردار A با |A| و قطعه خط محصور بین دونقطهٔ A و B با AB نموده می‌شود.

۲ـ قضیه : دایرهٔ (Q) به مرکز Q و به شعاع r را در نظر می‌گیریم . نقطهٔ O را داخل‌دایرهٔ (Q) اختیارکرده و برآن دو وتر عمود بر هم AC و BD را می‌گذرانیم . می‌خواهیم ثابت کنیم که :

$$(OA)^2+(OB)^2+(OC)^2+(OD)^2=4r^2$$



مجموع مزبور مقداری است ثابت و به وضع نقطهٔ O ووترهای‌عمود بر هم AC و BD بستگی ندارد .

برهان ـ ابتدا قضیه‌را بازبان برداری بیان می‌کنیم، نقطهٔ O را بردار صفر فرض می‌کنیم . بردارهای یکان روی C و B را به ترتیب با U و V نشان می‌دهیم . معادله‌های برداری خطوط AC و BD به ترتیب به صورت $P=tU$ و $P=sV$ می‌باشند . اگر P نقطه‌ای از دایره باشد معادلهٔ برداری Q عبارتست از : $|P-Q|=r$ ، در تمام معادلات P برداری متغیر می‌باشد .

اکنون بردارهای C و D را از روی :

$$|P-Q|=r \quad \text{و} \quad P=tU$$

بدست می‌آوریم . درمعادلهٔ اول tU را به جای P قرارمی‌دهیم و با توجه به خاصیت حاصل ضرب داخلی دو بردار خواهیم داشت :

$$(1) \quad t^2-2t(Q \text{ و } U)+|Q|^2-r^2=0$$

این معادله دارای دو ریشهٔ t_1 و t_2 است و داریم $A=t_1U$ و $C=t_2U$. به طریق مشابه برای بردارهای B و D خواهیم داشت $B=s_1V$ و $D=s_2V$ که s_1 و s_2 ریشه‌های معادله زیرمی‌باشند :

$$(2) \quad s^2-2s(Q \text{ و } V)+|Q|^2-r^2=0$$

ملاحظه می‌کنیم‌که :

$$(OA)^2+(OB)^2+(OC)^2+(OD)^2=$$
$$=t_1^2+t_2^2+s_1^2+s_2^2$$

می‌توان ریشه‌های معادله‌های (۱) و (۲) را حساب‌کرد و با درنظرگرفتن اینکه $(U \text{ و } V)=0$ است مقدار : $t_1^2+t_2^2+s_1^2+s_2^2$ را برابر با $4r^2$ بدست آورد . اما ما می‌خواهیم با رعایت ملاحظات دیگر محاسبات را تاحدامکان کوتاه‌کنیم. باتوجه به‌اینکه (U و Q) و (V و Q) مؤلفه‌های Q روی U و V می‌باشند داریم :

$$(Q \text{ و } U)^2+(Q \text{ و } V)^2=|Q|^2$$

از طرف دیگر داریم :

$$t_1+t_2=2(Q \text{ و } U) \quad \text{و} \quad s_1+s_2=2(Q \text{ و } V)$$
$$t_1t_2=s_1s_2=|Q|^2-r^2$$

پس می‌توان‌نوشت :

$$t_1^2+t_2^2+s_1^2+s_2^2=$$
$$=(t_1+t_2)^2+(s_1+s_2)^2-2t_1t_2-2s_1s_2$$
$$=4[(Q \text{ و } U)^2+(Q \text{ و } V)^2]-4[|Q|^2-r^2]=4r^2$$

۳ـ تعمیم ـ ابتدا مفروضات قضیه را بیان کرده مانند قسمت ۲ به اثبات آن می‌پردازیم و پس از آن نتایج حاصل را ذکر می‌کنیم.

فرض می‌کنیم P نقطه‌ای ازکرهٔ به مرکز Q و به‌شعاع r از فضای حقیقی اقلیدسی n بعدی باشد. پس $|P-Q|=r$ است. فرض می‌کنیم $\{U_1$ و ... و $U_n\}$ مجموعهٔ ارتونرمالی از بردارها باشد. هربرداراواقع بر U_i به صورت $P=t_iU_i$ می‌باشد. نقاط مشترك کرده و خطوط از معادلهٔ زیر بدست می‌آیند:

$$(۳)\quad t_i^2-2t_i(Q \text{ و } U_i)+|Q|^2-r^2=0$$

این معادله دارای دوریشهٔ t_{i1} و t_{i2} است. برای‌محاسبهٔ مقدار $\sum_{=1}^{n}(t_{i1}^2+t_{i2}^2)$ باز ملاحظه می‌کنیم که برای همهٔ مقادیر i از ۱ تا n داریم:

$$t_{i1}+t_{i2}=2(Q \text{ و } U_i) \text{ و } t_{i1}t_{i2}=|Q|^2-r^2$$

از طرف دیگر داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(Q \text{ و } U_i)^2=|Q|^2$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(t_{i1}^2+t_{i2}^2)=\sum_{i=1}^{n}(t_{i1}+t_{i2})^2-2\sum_{i=1}^{n}t_{i1}t_{i2}$$

$$=4\sum_{i=1}^{n}(Q \text{ و } U_i)^2-2n[|Q|^2-r^2]$$

پس نتیجه می‌شودکه:

$$\sum_{i=1}^{n}(t_{i1}^2+t_{i2}^2)=2nr^2-(2n-4)|Q|^2$$

که مقدار طرف راست رابطه ثابت می‌باشد.

۴ـ نتیجه: در قسمت ۳ هرگاه $r=|Q|$ باشد یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۳) مثلا t_{i2} برابربا صفر می‌باشدوداریم:

$$\Sigma_{i=1}^{n}t_{i1}^2=4r^2$$

t_{i1} را t_i می‌گیریم. می‌توانیم ثابت کنیم که:

$$\Sigma_{i=1}^{n}t_iU_i=2Q$$

که در واقع تعمیمی است ازاینکه مثلث قائم‌الزاویه قابل‌محاط در نیمدایره است. اما می‌توانیم آنرا به صورت دیگر بیان کنیم، مثلا دو برابر میانهٔ نظیر وتر قطر دایرهٔ محیطی مثلث می‌باشد.

تعمیم مباحث بالادرفضای مختلط (Complex) جالبتر است و آنرا به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

راهنمای حل ... (دنباله از صفحهٔ ۳۹)

مقدار معین a کمتر باشد غیر از نیروی وزن نیروی دیگری بر M تأثیر نمی‌کند؛ وقتی‌که فاصلهٔ OM با طول x بزرگتر از a برابر باشدنیروی کشش‌متناسب‌با $x-a$ و درجهت MO از طرف نخ بر نقطهٔ M اثرمی‌کند. این نیروبقسمی است‌که‌اگر $x-a$ با a برابر شود به اندازهٔ وزن M می‌گردد. وضع تعادل نقطهٔ M و پایداری آن را تعیین کنید.

۱۷ ـ میلهٔ وزین ومتجانس به‌طول $2a$ و به وزن P در یك صفحهٔ قائم حرکت می‌کند و بر میلهٔ ثابت O که‌قائم‌بر صفحه است بدون اصطکاك تکیه دارد. یك سر این میله در A روی دیوار قائمی که با میلهٔ O موازی است وبه فاصلهٔ b از آن قرار دارد تکیه دارد. وضع تعادل میله را تعیین‌وپایداری آن را بررسی کنید،

۱۸ ـ میلهٔ‌مستقیم‌الخط و متجانسی در طرفین خودبه دو حلقهٔ‌کوچك متصل است. یکی از این دو حلقه روی نخ ثابت قائمی و دیگری روی نخ سهمی‌شکلی‌که محور آن بر نخ قائم منطبق است می‌لغزد. وضع تعادل میله و پایداری آن را پیدا کنید.

۱۹ ـ میلهٔ مستقیم‌الخط و متجانس AB و به‌وزن P می‌تواند حول انتهای خود B بچرخد. در A انتهای دیگر میله نخی وصل است که‌ازروی‌یك‌قرقرهٔ O می‌گذرد و به‌انتهای خود وزنهٔ $\frac{P}{2}$ را آویزان دارد. با فرض اینکه مرکز قرقره روی قائم در جهت بالای نقطهٔ B و به فاصلهٔ $BO=BA$ قرار داشته باشد وضع تعادل میله را تعیین و پایداری آن را بررسی‌کنید.

۲۰ـ مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع a و واقع در یك صفحهٔ قائم را درنظرمی‌گیریم. نخ به‌طول $OM=P$ در یك سر به M وسط AB وصل است و در سر دیگر به نقطهٔ O از دیوارقائم VV' ثابت می‌باشد. کشش نخ نیروی T را که بر M اثرمی‌کند ایجاد می‌کند. رأس A از مثلث بدون اصطکاك‌روی‌دیوار VV' تکیه‌دارد. وضع تعادل مثلث‌وپایداری آن را تعیین کنید.

چند اتحاد و چند نامساوی مثلثاتی

طرح و اثبات از : **احمد شرف‌الدین**

الف ـ چند اتحاد مثلثاتی : می‌خواهیم صحت اتحادهای مثلثاتی زیر را اثبات کنیم :

$$(1)\quad \cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{n})+\cos(x+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\cos[x+(n-1)\frac{2\pi}{n}]=$$

$$\sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{n})+\sin(x+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\sin[x+(n-1)\frac{2\pi}{n}]=0 \qquad n\neq 1$$ با شرط

* * *

$$(2)\quad \cos^2 x+\cos^2(x+\frac{2\pi}{n})+\cos^2(x+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\cos^2[x+(n-1)\frac{2\pi}{n}]=$$

$$\sin^2 x+\sin^2(x+\frac{2\pi}{n})+\sin^2(x+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\sin^2[x+(n-1)\frac{2\pi}{n}] \qquad n\neq 2$$ با شرط

* * *

$$(3)\quad \cos^3 x+\cos^3(x+\frac{2\pi}{n})+\cos^3(x+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\cos^3[x+(n-1)\frac{2\pi}{n}]=$$

$$\sin^3 x+\sin^3(x+\frac{2\pi}{n})+\sin^3(x+\frac{4\pi}{n})+\cdots+\sin^3[x+(n-1)\frac{2\pi}{n}]=0 \qquad n\neq 1$$ با شرط ۳ و

صورت کلی اتحادهای فوق ـ ذیلا اتحادی ذکر می‌کنیم که صورت کلی اتحادهای مشروح در فوق می‌باشد . برای نشان دادن این اتحاد احتیاج به قرار دادی خاص داریم .

چنین قرار می‌گذاریم که تابع $\alpha(x)$ بتواند به‌دلخواه ما، $\sin x$ و یا $\cos x$ را نشان دهد وتابع $\alpha'(x)$ که آن را تابع‌متمم‌تابع $\alpha(x)$ اصطلاح می‌کنیم ، توابع $\cos x$ و یا $\sin x$ را نمایش دهد . یعنی اگر در عبارتی‌که شامل $\alpha(x)$ و $\alpha'(x)$ است ، چنانچه به جای $\alpha(x)$ تابع $\sin x$ را قرار دادیم باید به جای $\alpha'(x)$ تابع $\cos x$ را قرار دهیم و چنانچه به‌جای $\alpha(x)$ تابع $\cos x$ را اختیار کردیم باید به جای تابع $\alpha'(x)$ تابع $\sin x$ را انتخاب نمائیم . با این قرار داد عبارت : $\alpha(x)\beta(y)$ دوتابع‌زیر را نشان می‌دهد:

$\sin x\cos y$ و $\cos x\sin y$

نیز فرض می‌کنیم که هریك از توابع $\beta(x)$ و $\gamma(x)$ و.... و $\lambda(x)$ مانند تابع $\alpha(x)$ بتوانند $\sin x$ یا $\cos x$ را به‌دلخواه ما نشان دهند و توابع $\beta'(x)$ و $\gamma'(x)$ و... و $\lambda'(x)$ توابع متمم آنها باشند . با این قرار داد اتحاد مورد نظر ما به صورت زیر نمایش داده می‌شود :

صورت کلی اتحاد :

$$\alpha^p(x)\cdot\beta^q(x+\frac{2\pi}{n})\cdot\gamma^r(x+2\frac{2\pi}{n})\cdots\lambda^t(x+i\frac{2\pi}{n})+\alpha^p(x+\frac{2\pi}{n})\cdot\beta^q(x+2\frac{2\pi}{n})\gamma^r(x+4\frac{2\pi}{n})\cdots$$

$$\cdots\lambda^t(x+\frac{2(i+1)\pi}{n})+\alpha^p(x+2\frac{2\pi}{n})\cdot\beta^q(x+4\frac{2\pi}{n})\cdot\gamma^r(x+6\frac{2\pi}{n})\cdots\lambda^t(x+\frac{2(i+2)\pi}{n})+\cdots=$$

$$=\alpha'^{p}(x)\cdot\beta'^{q}(x+\frac{2\pi}{n})\cdot\gamma'^{r}(x+2\frac{2\pi}{n})\cdots\lambda'^{t}(x+i\frac{2\pi}{n})+\alpha'^{p}(x+\frac{2\pi}{n})\beta'^{q}(x+2\frac{2\pi}{n})\gamma'^{r}(x+4\frac{2\pi}{n})\cdots\cdots$$

$$\cdots\lambda'^{t}(x+\frac{2(i+1)\pi}{n})+\alpha'^{p}(x+2\frac{2\pi}{n})\beta'^{q}(x+4\frac{2\pi}{n})\gamma'^{r}(x+6\frac{2\pi}{n})\cdots\lambda'^{t}(x+\frac{2(i+2)\pi}{n})+\cdots\cdots$$

اگر $(p+q+\cdots+t)$ **عددی فرد** باشد هریك از دو طرف رابطهٔ بالا مساوی صفر می‌باشد .

اگر در رابطهٔ فوق به جای q و p و r و ... و t و i و n اعداد دلخواه بگذاریم (با شروط معین) و به جای توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ و $\gamma(x)$ و ... و $\lambda(x)$ بطور دلخواه $\sin x$ یا $\cos x$ و به جای توابع متمم توابع مذکور ، $\cos x$ یا $\sin x$ بگذاریم **تعداد بیشمار** اتحاد مثلثاتی حاصل می‌گردد .

مثلا اگر در اتحاد فوق قرار دهیم $p=3$ و $q=r=\ldots=t=0$ ، اتحاد (۳) حاصل می‌گردد .

اثبات :

۱ـ برای اثبات صحت اتحاد اول از دو رابطهٔ مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم :

$$\cos x+\cos(x+r)+\cdots+\cos[x+(n-1)r]=\frac{\sin\frac{nr}{2}\cos[x+(n-1)\frac{r}{2}]}{\sin\frac{r}{2}}\quad (I)$$

و

$$\sin x+\sin(x+r)+\cdots+\sin[x+(n-1)r]=\frac{\sin\frac{nr}{2}\sin[x+(n-1)\frac{r}{2}]}{\sin\frac{r}{2}}\quad (II)$$

برای مطالعهٔ اثبات دو اتحاد فوق به‌کتب مثلثاتی مراجعه فرمائید .

طرف چپ اتحاد (۱) با رعایت رابطهٔ (I) به صورت زیر در می‌آید :

$$\text{طرف چپ اتحاد (۱)}=\frac{\sin\pi\cos[x+(n-1)\frac{\pi}{n}]}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

کسر فوق به ازاء $n\neq 1$ مساوی صفر است .

طرف راست اتحاد (۱) با رعایت رابطهٔ (II) به صورت زیر در می‌آید :

$$\text{طرف راست اتحاد (۱)}=\frac{\sin\pi\sin[x+(n-1)\frac{\pi}{n}]}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

کسر فوق به ازاء $n\neq 1$ مساوی صفر است .

بنابراین دو طرف اتحاد (۱) مساوی صفر می‌باشند و بدین ترتیب صحت اتحاد (۱) به ازاء $n\neq 1$ مسلم است .

۲ـ اثبات صحت اتحاد (۲) ـ برای اثبات صحت اتحاد (۲) ، دستورهای زیر را بکار می‌بریم :

$$\begin{cases}\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2} & (I')\\[2ex] \sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2} & (II')\end{cases}$$

بدین ترتیب :

$$\text{طرف چپ اتحاد (۲)} = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)+\frac{1}{2}[1+\cos(2x+\frac{4\pi}{n})]+\dots=$$

$$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left\{\cos 2x+\cos(2x+\frac{4\pi}{n})+\dots+\cos[2x+(n-1)\frac{4\pi}{n}]\right\}$$

به‌کمك دستور (II) می‌توان مقدار داخل آکـولاد را حساب کـرد . محاسبه نشان می‌دهد کـه مقدار داخل آکولاد به ازاء $n\neq 2$ مساوی صفر است .

با همین نحوهٔ استدلال ثابت می‌کنیم مقدار طرف دوم اتحاد (۲) ، به‌ازاء $n\neq 2$ مساوی $\frac{n}{2}$ است. برای‌این‌منظوردستورهای (II') و (II) را بکار می‌بریم .

نتیجه می‌شود که دو طرف اتحاد (۲) مساوی $\frac{n}{2}$ است و بدین ترتیب صحت اتحاد (۲) مسلم می‌گردد .

اثبات اتحاد (۳) ـ برای اثبات اتحاد (۳) دستورهای زیر را بکار می‌بریم :

$$\begin{cases} \sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x) & (I'') \\ \cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x) & (II'') \end{cases}$$

طرف اول اتحاد (۳) با بکار بردن‌دستور(I'') به صورت‌زیر در می‌آید :

$$\text{طرف اول اتحاد (۳)} = \frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)+\frac{1}{4}[3\sin(x+\frac{2\pi}{n})-\sin(3x+\frac{6\pi}{n})]+\dots=$$

$$\frac{1}{4}\left\{3[\sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{n})+\dots]-[\sin 3x+\sin(3x+\frac{6\pi}{n})+\dots]\right\}$$

با بکار بردن دستور (I) نتیجه می‌شود که کروشهٔ اول داخل آکولاد به‌ازاء $n\neq 1$ صفر است . نیز کروشهٔ دوم داخل آکولاد به ازاء $n\neq 3$ صفر می‌باشد . پس مقدار داخل آکولاد به ازاء ۳ و $n\neq 1$ مساوی صفر می‌باشد .

با همان استدلال بالا نتیجه می‌گیریم که طرف راست اتحاد (۳) به ازاء ۳ و $n\neq 1$ مساوی صفر است ـ برای این منظور اتحادهای (II'') و (II) را بکار می‌بریم .

بدین ترتیب ثابت می‌گردد که دو طرف اتحـاد (۳) مساوی صفر است و لذا صحت اتحاد (۳) مدلل می‌گردد .

اثبات اتحاد آخر ـ اثبات اتحاد آخر که صورت کلی اتحادهای قبل است از برنامهٔ دبیرستان خارج است ، چه بایداز فرمولهای **اولر** که مربوط به **ریاضیات عالی** است استفاده‌کنیم .

* * *

ب ـ نامساویهای مثلثاتی ـ می‌خواهیم صحت نامساویهای زیر را ثابت‌کنیم :

با شرط رادیان $x_1+x_1+\dots+x_n<2\pi$

$$\left\{\frac{\sin x_1+\sin x_2+\dots+\sin x_n}{n} < \sin\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right.$$

یعنی سینوس واسطهٔ عددی چند زاویه بزرگتر یا مساوی است با واسطهٔ عددی سینوسهای آن زوایا .

* * *

با شرط رادیان $x_1+x_2+\dots+x_n<\pi$

$$\left\{\sqrt[n]{\sin x_1\sin x_2\dots\sin x_n} < \sin\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right.$$

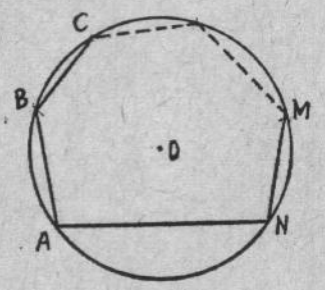
یعنی سینوس واسطهٔ عددی چند زاویه بزرگتر یا مساوی است با واسطهٔ هندسی سینوسهای آن زوایـا . در **حالت خاص** کـه

زاویه‌های x_1 و x_2 و ... و x_n به اندازهٔ کافی کوچك باشند تا بتوان زاویه‌ها را با سینوس آنها مساوی تلقی نمود ، از نا مساوی فوق نامساوی زیر نتیجه می‌شود :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} < \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

اثبات :

اثبات صحت نامساوی اول ـ فرض کنیم $x_1+x_2+\cdots+x_n=\alpha$ باشد .

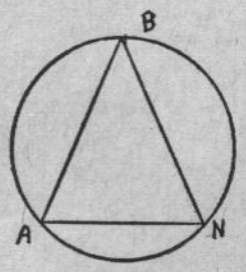


شکل (۱)

بر محیط دایرهٔ (R و O) کمان AN را مساوی α اختیارمی‌کنیم وکمانهای AB و BC و ... و MN را به ترتیب مساوی x_1 و x_2 و ... و x_n اختیار می‌کنیم تا چند ضلعی ABC ... MN حاصل شود (شکل ۱) . ثـابت می‌کنیم انـدازهٔ سطح ایـن چند ضلعی هنگامی ماکسیمم خود رااحراز می‌کندکه‌منکسر ABC ... MN منتظم باشد یعنی :

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\cdots=\overline{MN}$$

مطلب اخیر را ابتدا در حالت $n=2$ اثبات می‌کنیم . برای این منظور برمحیط دایرهٔ (R و O) کمان AN را مساوی α اختیار می‌کنیم ($\alpha=x_1+x_2$) وموقعیت نقطهٔ B را برکمان AN جستجو می‌کنیم تا اندازهٔ سطح مثلث ABN ماکسیمم باشد شکل (۲) . بدیهی است‌که نقطهٔ مطلوب B باید بر وسط‌کمان AN واقع باشد . زیرا در این وضع است‌که مثلث مورد بحث که دارای قاعدهٔ AN به طول ثابت می‌باشد ، دارای ارتفاع ماکسیمم خواهد بود .



شکل (۲)

اکنون می‌گوئیم‌که در چند ضلعی AB ... N اگرمنکسر AB ... N منتظم‌نباشد مثلا $\overline{AB}\neq\overline{BC}$ باشد ، با انتخاب نقطهٔ B بر وسط کمان AC مساحت مثلث ABC و در نتیجه‌مساحت چندضلعی موردبحث افزایش خواهد یافت. بدین ترتیب‌مساحت چندضلعی مذکور هنگامی ماکسیمم خود را احراز می‌کندکه $\overline{AB}=\overline{BC}=\cdots=\overline{MN}$ باشد ، در حالت خاص‌که $\alpha=2\pi$ باشد حکم زیر نتیجه می‌شود .

در بین چند ضلعیهای محاط دریك دایرهٔ معلوم‌آنکه منتظم است مساحتش‌بزرگترین مقدار را داراست .

از طرفی می‌توان نوشت :

$$S_{ABC\ldots N}=S_{AOB}+S_{BOC}+\cdots+S_{MON}+S_{NOA}$$

و یا :

$$S_{ABC\ldots N}=\frac{1}{2}R^2\sin x_1+\frac{1}{2}R^2\sin x_2+\cdots+\frac{1}{2}R^2\sin x_n+S_{NOA}=\frac{1}{2}R^2(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n)+S_{NOA}$$

بنابر آنچه قبلا اثبات‌کردیم (ماکسیمم مساحت) ، چنین داریم :

$$S_{ABC\ldots N}\ \text{ماکسیمم}=n\left(\frac{1}{2}R^2\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)+S_{NOA}$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ فوق ، نامساوی زیر حاصل می‌شود :

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n}{n}<\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

۲ـ راهنمائی برای اثبات نا مساوی دوم ـ بردایرهٔ (R و O) کمان AN را مساوی $2(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ اختیارمی‌کنیم وکمانهای $\widehat{AB}=2x_1$ و $\widehat{BC}=2x_2$ و ... و $\widehat{MN}=2x_n$ را انتخاب می‌کنیم. ثابت می‌کنیم حاصل ضرب‌اضلاع منکسر ABC...N هنگامی ماکسیمم خود را احراز می‌کندکه این منکسر منتظم باشد . سپس این مطلب را بـه صورت مثلثاتی بیان می‌کنیم ، نامساوی دوم حاصل می‌گردد .

درسی از فیزیك و مکانیك

ترجمهٔ: هوشنگ شریف زاده

نیرو، مقدار حرکت، قوانین حرکت.

۱ـ نیروها را با آثاری‌که بوجود می‌آورند ، از قبیل تمایل به تغییر حالت سکون یا تغییر حالت حرکت یکنواخت اجسام ، تشخیص می‌دهیم . همین اثر است‌که در دینامیك مورد نظر است و ما با تعریف زیر آن را شروع می‌کنیم .

۲ـ هرعاملی‌که در حالت سکون یك جسم یا درحرکت مستقیم‌الخط یکنواخت‌یك جسم تغییری ایجادکندیا تمایل به تغییر ایجادکند، نیرواست.

در زندگی روزانه با مثالهای متعددی از حرکت اجسام که تحت اثر نیروهایی حرکت می‌کنند آشنائیم ، یك ماشین چمن زنی راکه به حالت سکون در چمن افتاده است می‌توان باکشیدن دستهٔ آن ، آن را به حرکت واداشت ، اثر این‌نیرو چرخ را به شتاب وامی‌دارد و سرعت چرخ را می‌توان به دلخواه با تغییر بزرگی نیرو تغییر داد . البته چرخ را می‌توان دوباره با واردکردن نیروئی در خلاف جهت حرکت ساکن نمود بدیهی است‌که نیروهم دارای بزرگی و هم دارای جهت است ، بنابراین یك **کمیت برداری** است .

مثالهای متعدد دیگری از آثار نیروها می‌توان ارائه داد . اگر توپ فوتبال را باپا بزنیم ، درجهت پا زدن‌شروع به حرکت می‌کند ، هرچه پا زدن شدیدتر باشد، سرعت‌ابتدائی توپ بیشتر خواهد بود . یا نیز اگر گلوله‌ای رها شود تا سقوط کند ، پس از برخوردبازمین به طرف بالا برمی‌گردد. چه نیروئی‌حرکت بالاوپائین را تنظیم می‌کند؟ یا اگرگلوله‌ای روی زمین طوری قرارگیردکه ساکن بماند ، چه نیروهایی‌بر آن اثر می‌کند ؟

به این نکته متوجه شدیم‌که درهمهٔ این مثالها دو جسم وجود داشتند ، یعنی ماشین چمن زنی وشخصی‌که دستهٔ‌آن را را می‌گرفت و ماشین را می‌راند . توپ فوتبال وکسی‌که توپ را با پا می‌زد، گلوله وزمین. درهرحالت‌بین اجسام نیروهائی از یکی بر دیگری وارد می‌شود . می‌گوئیم‌که بریکی از آنها **عمل** و بر دیگری **عکس‌العمل** وارد می‌شود . اگر فقط یکی از اجسام را در نظر بگیریم می‌گوئیم که نیروئی‌که بر آن اثر می‌کند **خارجی** است ؛ اگر هر دوجسم را در نظر بگیریم به نیروها (عمل و عکس‌العمل) **نیروهای داخلی** اطلاق می‌کنیم . غالباً اجسام با یکدیگر در تماسند ، اما در بعضی از حالات ، مثلاگلوله‌ای که بطرف زمین سقوط می‌کند یا ماه‌که به دور زمین می‌چرخد ، اجسام با یکدیگر در تماس نیستند و با یکدیگر فاصله دارند .

بنابراین لازم است‌که به این موارد توجه‌کنیم : (الف) اگر جسم A رابه حال خودرهاکنیم ، چگونه حرکت‌خواهد کرد ؛ (ب) عمل یك نیروی خارجی بر حرکت چگونه تأثیر خواهدکرد ؛ (پ) اگر این نیروی خارجی ناشی از جسم دیگر B باشد ، عمل B بر A چه ارتباطی با عکس‌العمل A بر B دارد .

پاسخ این پرسشها بوسیلهٔ قوانین حرکت نیوتن داده می‌شود ، اما پیش از بیان این قوانین به یك یا دو تعریف نیازمندیم .

۳ـ جرم یك جسم عبارت است از مقدار مادهٔ موجود در جسم .

آشکار است‌که این تعریف ، که توسط خود نیوتن بکار برده شده است ، تعریف قانع‌کننده‌ای نیست . از «مقدارماده» چه استنباطی می‌کنیم ؟ همهٔ ما با ماده آشنا هستیم و می‌توانیم آن رابه عنوان یك مفهوم اساسی بپذیریم‌که به تعریف نیازمند نیست . اما درك «مقدار»که به معنی «حجم» نیست فوق‌العاده مشکل است .

با وجود این از «مقدار مادهٔ» موجود در یك جسم یااز «جرم» آن منظور یك خاصیت فیزیکی اساسی‌جسم است. که هرگاه با تغییر حرکت جسم سروکار داریم با آن مواجه می‌شویم ، به‌گفتهٔ دیگر هنگامی‌که بریك جسم نیرو وارد

می‌کنیم با این خاصیت جسم روبرو می‌شویم . بعدا خواهیم‌دید (پاراگراف II) که اصول‌اساسی نیوتن، که به قوانین حرکت نیوتن معروف است ما را به روشی هدایت می‌کند که جرمهای دو جسم را مقایسه کنیم . در واقع نشان خواهیم داد که نسبت جرم دو جسم برابر نسبت وزن آن دو جسم است . پس اگر جرم جسمی معلوم باشد و آن را به عنوان واحد اساسی جرم بپذیریم، جرم‌هر جسم‌دیگررا می‌توانیم تعیین‌کنیم .

واحد اساسی جرم در سلسلهٔ متری **کیلو گرم نمونهٔ بین‌المللی** است ، که از پلاتین ـ ایریدیم ساخته شده است و شکل‌هندسی ساده‌ای دارد. این جرم جای‌کیلوگرم استانداردی راکه سابق بر این جرم یك دسیمتر مکعب آب در دما وفشار معینی بودگرفته است . واحد اساسی جرم در سلسلهٔ انگلیسی **پوند استاندارد سلطنتی** است‌که از پلاتین ساخته شده و به شکل استوانه‌ای است‌که ارتفاع آن تقریباً برابر قطر آن است .

باید توجه داشت که جرم فقط دارای بزرگی است و بنابراین یك‌**کمیت اسکالر** است .

۴ـ مقدار حرکت خطی یك نقطهٔ مادی برابر است با حاصل ضرب جرم‌آن نقطهٔ مادی در تندی آن .

از این پس ، ضمن اشاره به مقدار حرکت خطی ،بطور ساده اصطلاح **مقدار حرکت** را بکار خواهیم برد.

اگر m جرم یك نقطهٔ مادی و v تندی آن باشد ، مقدارحرکت‌آن‌نقطهٔ‌مادی mv است. برای واحدمقدارحرکت نام خاصی وجود ندارد ؛ اگر m برحسب‌کیلوگرم و v بر-حسب متربرثانیه‌باشد واحدمقدارحرکت برحسب $kg-m/s$ بیان می‌شود .

لازم است توجه داشت‌که مقدارحرکت یك‌کمیت برداری است ، یعنی هم شامل بزرگی و هم شامل جهت است و جهت mv درجهت v است . اگرمؤلفه‌های v به‌موازات محورهای OX و OY به ترتیب v_1 و v_2 باشند ، مؤلفه‌های مقدار حرکت به موازات این محورها به ترتیب : mv_1 و mv_2 است . به همین طریق اگر چند نقطهٔ مادی وجود داشته‌باشد، مقدارحرکت‌کل نقاط مادی برابربردار برآیندمقدارحرکتهای جداگانه است ، پس اگر جسمی را با ابعاد معین ، مجموعه‌ای از نقاط مادی ، درنظر بگیریم ، مقدار حرکت جسم برابر است با بردار برآیند مقدار حرکتهای نقاط مادی جداگانه است . درساده‌ترین‌حالت **حرکت انتقالی** جسم، یعنی **وقتی که تمام نقاط جسم در مسیرهای مستقیم متوازی با تندیهای یکسان حرکت می‌کنند ، مقدار**حرکت‌جسم برابر است با حاصل ضرب جرم‌کل جسم در تندی آن .

البته درحالت‌کلی.حرکت جسم ، تنهایك حرکت‌انتقالی نیست ؛ بلکه‌گاهی توأم با حرکت دورانی است در این حال کمیت دیگری به نام **مقدار حرکت زاویه‌ای** برای توجیه حرکت دورانی بکار می‌آید . از این‌کمیت بعداً‌گفتگوخواهیم کرد . درحال حاضر ، حالتی را درنظر می‌گیریم‌که اگرجسم را نتوان یك نقطهٔ مادی فرض‌کرد ، لااقل حرکت دورانی‌نیز نداشته باشد ؛ بنابراین مقدار حرکت آن برابراست باحاصل ضرب جرم آن در تندی، حرکت انتقالی آن .

۵ ـ قوانین نیوتن را در بارهٔ حرکت می‌توان به‌صورت زیر بیان‌کرد:

I ـ هرجسم به‌حالت سکون‌یاحرکت‌یکنواخت در مسیر مستقیم باقی می‌ماند ، مگر آنکه حالت‌آن جسم ، بواسطهٔ نیروهای خارجی تغییر کند.

II ـ تغییر مقدار حرکت در واحد زمان متناسب با نیروی خارجی وارده است و در جهت مسیر مستقیمی صورت می‌گیردکه نیرودرآن‌جهت وارد شده است .

III ـ برای هر عملی‌همیشه‌عکس‌العملی‌مساوی ودرخلاف جهت وجود دارد ، یا اعمال هردو جسم بریکدیگرهمیشه متساوی‌ودرخلاف‌جهت‌یکدیگرند

دو قانون اول را بیشتر مدیون **گالیله** ، وچند نفر از معاصرین **نیوتن** ، بخصوص **هیوگنس** که دربسط آن سهیم بوده‌اند هستیم . اما نیوتن نخستین‌کسی بودکه‌آنها را به‌شکل رسمی درکتاب خودش **پرنسیپیا «principia»** که در ۱۶۸۶ منتشرشد واردکرد. سهم وی درکشف این‌قوانین‌بسیار برجسته است .

دلیل‌کاملی برای این قوانین ، تجربی‌یا به‌صورت‌دیگر نمی‌توان ارائه داد .

اینها اصول اساسی یا فرضیاتی هستندکه‌علم دینامیك نیوتنی مبتنی برآنهاست و ، مانندسایر قوانین علمی ، فقط تا آنجاکه منتهی به نتایجی می‌شوندکه با مشاهده وفق می‌دهنددرست هستند.

البته تجربه عادی صحت آنها رابطورکلی ثابت می‌کند، اما بایدکاملترین امتحان آزمایش دقیق و مشاهده انجام‌شود.

مثلا به فرض اینکه این قوانین درست باشند ، حرکات ماه و سیارات را باید بتوان محاسبه‌کرد وسپس با نتایج‌مشاهده شده مقایسه نمود . وضع سیارات ، زمان‌کسوف و غیره قبلا

حساب شده‌اند . جاها و زمانهای پیش‌بینی شده بطور قابل توجهی با مشاهده تطبیق می‌کنند و این خود دلیلی بسیار عالی بر درستی این قوانین اساسی است .

۶ـ در بسیاری از این محاسبات نجومی قانون دیگری که توسط نیوتن اظهار شده است اضافه می‌شود . آن را **قانون نیوتون دربارهٔ جاذبه** یاگاهی قانون جاذبهٔ نیوتن می‌نامند وبه صورت زیر بیان می‌کنند :

هر نقطهٔ مادی، نقطهٔ مادی دیگری را بانیروئی جذب می‌کند که با حاصل ضرب جرم دو نقطهٔ مادی نسبت مستقیم و با مجذور فاصلهٔ دو نقطه نسبت عکس دارد .

پس نیروی جاذبهٔ F که بین دو نقطهٔ مادی به جرمهای m_1 و m_2 و به فاصلهٔ r اثر می‌کند بوسیلهٔ رابطهٔ زیر داده می‌شود :

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

که در آن G ، مقداری است ثابت ، به نام **ثابت جاذبه** . اگر F برحسب دین (پاراگراف ۹ را نگاه کنید)، m_1 و m_2 برحسب گرم و r بر حسب سانتیمتر اندازه‌گیری شوند ، G بطور تجربی برابر $6/669 \times 10^{-8}$ بدست می‌آید .

آزمایشهای متعددی به عمل آمده است تا درستی این قانون را مستقیماً تحقیق کنند ، اما دلیل اصلی برصحت آن ، دراین مورد نیز تطبیق مشاهدات با محاسبات متعددی است که مبتنی بر این قانون بوده است .

توجه به این نکته نیز جالب است که بعضی ازمشاهدات نجومی که نمی‌توانستند با قوانین نیوتن و منجمله قانون جاذبه توجیه شوند با **تئوری نسبیت** که نخستین بار توسط **اینشتاین** در ۱۹۰۵ پیشنهاد شد ، بیان شدند . از این تئوری ، مکانیك جدید بوجود آمد که مبتنی بر اصولی بود که کاملا با اصول مکانیك نیوتنی تفاوت داشت . بیان ریاضی قوانین حرکت در مکانیك نسبیت فقط بطور محسوس در عباراتی ازمکانیك نیوتنی تفاوت دارد که در آنها سرعت نقطهٔ مادی بسیار زیاد و قابل مقایسه با سرعت نور است* . برای سرعتهای معمولی نظیر سرعتهایی که درزندگی روزمره باآن مواجه هستیم ، فرمولهای دو مکانیك خیلی به هم شبیه‌اند وسیستم دینامیك نیوتنی که اکنون آن را شرح خواهیم داد صحیح است .

به همین ترتیب ، قانون نیوتن دربارهٔ جاذبه با تقریب کافی دربسیاری از حالات قابل قبول است .

لازم است توجه داشت که نیروئی که بر یك جسم وارد می‌شود و ناشی ازکشش جاذبه‌ای زمین است **وزن** جسم نامیده می‌شود وزن ، یك کمیت برداری است وبطور قائم و از بالا به پائین اثرمی‌کند .

۷ـ قانون اول حرکت .

این قانون در اصل ، تعریفی برای نیرو است . این قانون می‌گوید که نیرو به جسم شتاب می‌دهد، وفقط اگر برآیند نیروئی نباشد که برجسم اثر کند، جسم باتندی یکنواخت، یعنی با سرعت یکنواخت درمسیری مستقیم، به‌حرکت خود ادامه خواهد داد.

این مفهوم نیروکه امروزه مسلم است توسط گالیله بیان شد . این مفهوم کاملا آشکار و بدیهی نیست زیرا در غیراین‌صورت لازم نبود که برای درك آن تا قرن هفدهم ، یعنی تقریباً دوهزار سال بعد ازروزهای طلایی علم یونان ، صبر کنیم .

به مثال یك ماشین چمن زنی که درپاراگراف ۲ یادآور شدیم برمی‌گردیم تا ببینیم هنگامی که به کشیدن دستهٔ ماشین ادامه نمی‌دهیم چه روی می‌دهد . اگر چمن مسطح باشد حرکت ماشین چمن زنی کند می‌شود و بالاخره ماشین می‌ایستد . میزان کند شدن بستگی به‌عوامل متعدد دارد ، از قبیل صافی ماشین چمن زنی ، نرم یا تربودن چمن ؛ اما در هرحالت کند شدن حرکت ماشین چمن زنی نتیجهٔ بعضی ازنیروهای اصطکاکی است که بر محور و سطح تماس ماشین با چمن وارد می‌شود . این نیروها همیشه هنگامی که ماشین در حال حرکت است وجود دارند ، وقتی که نیرویی که بردسته وارد می‌شود **کمتر** از این نیروهای اصطکاکی باشد ، نیروی مؤثر حرکت دهندهٔ ماشین بطرف جلو است . شتاب یا شتاب منفی ماشین چمن زنی را می‌توان به دلخواه با تغییر نیروی وارده، تغییرداده ، هنگامی که نیروی وارده ، درست برابر نیروهای اصطکاکی باشد، ماشین به‌حرکت با سرعت یکنواخت ادامه می‌دهد . این موضوع به ما کمك می‌کند که بفهمیم چرا نگاهداشتن ماشین در حالت حرکت با تندی یکنواخت از حالت متوقف ساختن آن یعنی حالتی که باید به ماشین شتاب داده شود آسانتر است .

به همین طریق ، اگر جسمی بر روی یك میز ساکن باشد ، برآیند نیروهای وارد برآن باید صفر باشد یعنی وزن که بطور قائم و بطرف پائین است باید بارانش میز که درسطح تماس بر جسم وارد می‌شود تعادل داشته باشد .

قانون اول در واقع حالت خاصی از قانون دوم است که هم اکنون به ذکر آن خواهیم پرداخت .

* تندی نور درخلاء برابر 3×10^{10} cm/s است .

۸ـ قانون دوم حرکت

قانون دوم ما را به تعریف واحدهای نیرو و پی‌ریزی معادلهٔ اساسی دینامیك قادر می‌سازد. فرض کنید نیرویی برابر F برجرمی برابر m شتابی برابر γ بدهد . در این صورت برطبق قانون دوم .

$F=k$ (میزان تغییر مقدار حرکت)

که k ثابت بخصوصی است .

$\therefore F=k$ (میزان تغییر mv)

به فرض آنکه m مقداری است ثابت .

$=km\times v$ میزان تغییر

$=km\gamma$

$\therefore F=km\gamma$

که k ثابت بخصوصی است .

بهتر است واحد نیرو را طوری اختیارکنیم که k برابر واحدگردد ، یعنی هنگامی که $m=1$ و $\gamma=1$ است $F=1$ گردد ، و اگرچنین انتخابی بکنیم‌واحدنیروچنین‌خواهدبود.

واحد نیرو عبارت از نیروئی است که اگر بر جرم واحد واردشودشتابی برابرواحد به‌آن‌بدهد.

بنابراین معادلهٔ اساسی چنین می‌شود:

$F=m\gamma$

توجه داشته باشید همانطورکه در قانون اول بیان شد ، هرگاه $F=0$ باشد $\gamma=0$ بعلاوه $F=m\gamma$ یك معادلهٔ برداری است ، یعنی همانطورکه درقسمت دوم بیان شد ، شتاب γ در همان جهتی است‌که نیرو $\vec{F}$ وارد می‌شود (پاراگراف ۱۲ را ببینید) ، بنابراین باید چنین نوشت .

$\vec{F}=m\vec{\gamma}$

وقتی‌که واحد جرم گرم ، و واحدهای طول و زمان سانتیمتر وثانیه‌اند ، واحد نیرودین (Dyne) نامیده‌می‌شود.

در سلسلهٔ SI که متر واحد طول ، کیلوگرم واحدجرم ثانیه واحد زمان است ، واحد نیرو نیوتن Newton نامیده می‌شود . یك نیوتن برابر 10^5 دین است .

دین و نیوتن‌از**واحدهای مطلق** نیرو هستند ، زیرا مقدار آنهاهمه جا یکسان است و مانند واحدی‌که درپاراگراف بعد ذکر خواهیم‌کرد بستگی به جاذبه زمین ندارد .

با استفاده از معادلهٔ $F=m\gamma$ ، بسیار اهمیت داردکه بیاد داشته باشیم‌که F باید دارای واحد مطلقی باشدکه مربوط به واحدهایی است‌که برای m و γ بکار می‌رود .

$$F=m\cdot\gamma$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(dyn)\text{دین} \quad g \quad cm/s^2$$

$$F=m\cdot\gamma$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(N)\text{نیوتن} \quad kg \quad m/s^2$$

۱۰ـ واحد نیروکه‌درکارهای فنی بکارمی‌رود، **کیلوگرم نیرو** (kgf) است ، و آن مقدار نیروئی است‌که زمین با آن مقدار نیرو جسمی به جرم‌یك‌کیلوگرم را جذب می‌کند. این واحد ثابت نیست ، بلکه در نقاط مختلف زمین دارای مقادیر متفاوت است .

می‌دانیم‌که اجسام‌با شتابی‌که به g نشان می‌دهیم به‌زمین سقوط می‌کنند . این شتاب در جاهای مختلف زمین مقادیر مختلف دارد . مقدار تقریبی آن $9/81\,m/s^2$ است .

نیرویی‌که به جرم یك‌کیلو گرم‌شتابی برابر $g\,m/s^2$ می‌دهد برابر است با g نیوتن . بنابراین :

$1kgf=9/81$ نیوتن تقریباً

$1gf=981$ دین تقریباً

پس دین برابراست با وزن جسمی به جرم $\frac{1}{981}$ گرم (کمی بیش از یك میلیگرم) . نیوتن برابر است با وزن جسمی به جرم $\frac{105}{981}$ گرم ، یعنی تقریباً برابر است با $102gf$.

۱۱ـ می‌دانیم‌که تجربه نشان داده است‌که در یك محل معین ، اجسامی‌که جرمهای مختلف دارند ، در خلاء با شتاب یکسان g سقوط می‌کنند .

پس اگر P_1 و P_2 وزنهای جرمهای m_1 و m_2 در یك محل باشد ، با استفاده از $F=m\gamma$ داریم :

$$P_1=m_1g$$

$$P_2=m_2g$$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2}=\frac{m_1}{m_2}$$

یعنی وزنهای اجسام در یك محل متناسب با جرمهای آنها است .

این موضوع ما را قادر می‌سازد ،که همانطورکه نیوتن نشان داد ، با مقایسهٔ وزنهای اجسام توسط ترازوی معمولی ، جرمهای آنها را مقایسه‌کنیم «پاراگراف ۳ را ببینید) . اگر مجموعه‌ای از جرمها یا وزنهای استاندارد را به جای مختلف ببریم ، نتیجه خواهیم گرفت که جرم هر جسم در همه جا یکسان است .

از طرف دیگر ، ترازوی فنری ، شدت جاذبهٔ زمین را بریك جسم اندازه می‌گیرد . یعنی وزن جسم را تعیین می‌کند چنین ترازوئی در نقاط مختلف زمین برای وزنهٔ یکسانی که به آن آویزان شده است نتایج مختلف خواهد داد .

پس جرم یك ثابت اساسی جسم است و در همه جا یکسان است ، و حال آنکه وزن جسم از جایی به جای دیگر تغییر می‌کند .

باید توجه داشت که mg وزن جسمی به جرم m رادر آحاد **مطلق** بدست می‌دهد ، یعنی اگر m برحسب کیلوگرم باشد . mg برحسب نیوتن است .

۱۲ـ قسمت دوم قانون مشتمل براصل استقلال فیزیکی نیروهاست . تغییر مقدار حرکت که بوسیلهٔ نیروی دلخواهی تولید شده است درجهتی روی می‌دهد که نیرو درآن جهت وارد شده است . اگر چند نیرو بریك نقطهٔ مادی اثر کنند ، هریك تغییر مقدار حرکتی ایجاد می‌کند که کاملا مستقل ازتغییرهای مقدار حرکت سایر نیروهاست ، **برآیند** تغییر مقدار حرکت همان برآیند تغییرهای جداگانه‌ای است که بر اثر تك تك نیروها تولید شده است .

مثلا اگر دونیروی $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ بر جسمی به جرم m وارد شوند ، شتابهای معادل $\vec{\gamma_1}$ و $\vec{\gamma_2}$ تولید می‌کنند که بر طبق معادلات زیر داده می‌شوند :

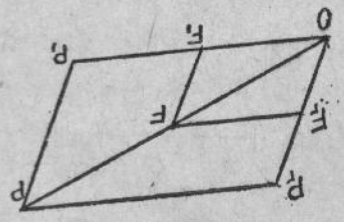
$$\vec{F_1}=m\,\vec{\gamma_1}$$
$$\vec{F_2}=m\,\vec{\gamma_2}$$

از جمع کردن این دو معادله نتیجه می‌شود:

$$(\vec{F_1}+\vec{F_2})=m(\vec{\gamma_1}+\vec{\gamma_2}),$$

یعنی $\vec{F}=m\vec{\gamma}$ ، که درآن $\vec{F}$ برآیند نیروهای $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ است و $\vec{\gamma}$ برآیندشتابهای $\vec{\gamma_1}$ و $\vec{\gamma_2}$ است .

آشکار است که $\vec{\gamma}$ بایدهمجهت با $\vec{F}$ باشد این را می‌توان با رسم هندسی زیر نشان داد: OF_1 و OF_2 را به ترتیب برای نشان دادن $\vec{\gamma_1}$ و $\vec{\gamma_2}$ رسم می‌کنیم (شکل ۱). در این صورت قطر OF متوازی‌الاضلاع OF_1FF_2 شتاب



شکلا ۱

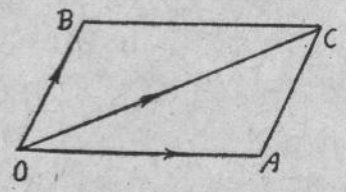
$\vec{\gamma}$ را نشان می‌دهد . فرض کنیم که P_1 نقطه‌ای بر OF_1 یا امتداد OF_1 است بطوری که $OP_1=m(OF_1)$ ، دراین‌صورت $\vec{OP_1}$ نشان دهندهٔ $m\vec{\gamma_1}$ ، یعنی $\vec{F_1}$ است . بطریق مشابه اگر P_2 نقطه‌ای بر OF_2 یا امتداد OF_2 باشدبطوری که $OP_2=m(OF_2)$ ، در این صورت $\vec{OP_2}$ نشان دهندهٔ $m\vec{\gamma_2}$ ، یعنی $\vec{F_2}$ است . اگر متوازی‌الاضلاع OP_1PP_2 را کامل کنیم و قطر OP را رسم کنیم در این صورت $\vec{OP}$ بطور کامل $m\vec{\gamma_1}+m\vec{\gamma_2}$ یعنی $\vec{F_1}+\vec{F_2}$ یا $\vec{F}$ را نشان می‌دهد.

اما بطریق هندسی از راه مثلثهای متشابه ، می‌توان نشان داد که اقطار OF و OP باید بر یك امتداد قرارگیرند و OP برابر $m(OF)$ باشد ، یعنی $\vec{OP}=m\vec{OF}$ یا :

$$\vec{F}=m\,\vec{\gamma}$$

در اینجا در واقع ما ، بر مبنای قانون دوم نیوتن ، نشان دادیم که چون شتابها به‌صورت جمع برداری با هم ترکیب می‌شوند، نیروها نیز به این صورت بایکدیگر ترکیب می‌گردند. این نتیجه را غالباً **متوازی‌الاضلاع نیروها** می‌گویند که ممکن است به صورت زیر بیان شود :

اگر بر یك نقطهٔ مادی که در O واقع است دو نیرو وارد شود که از نظر بزرگی وجهت با خطوط OA و OB نمایش داده شوند برآیند آنها از نظر بزرگی و جهت قطر OC متوازی‌الاضلاع $OACB$ است .



شکل ۲

این قضیهٔ اساسی استاتیك است که در اینجا از قوانین حرکت نیوتن آن را نتیجه گرفتیم. این نتیجه درواقع نخستین بار به همین طریق توسط نیوتن بوضوح تنظیم شد .

۱۳ـ قانون سوم حرکت .

این قانون توضیح می‌دهد که اگر دو جسم B و C بر یکدیگر اثر کنند ، عمل B بر روی C مساوی و در خلاف جهت عکس‌العمل C برروی B است .

پس اگر وزنهٔ B روی میز افقی C قرارگیرد نیروئی **بطرف پائین** بر میز وارد می‌کند که آن را به A نمایش می‌دهیم (شکل ۳) و آن عمل B بر روی C است . بطریق مشابه وزن B تحت اثر نیروئی است **بطرف بالا** که ناشی از میز C است ، و ما آن را به R نمایش می‌دهیم (شکل ۳)

(دنباله درصفحه ۲۱)

چگونه می‌توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

تألیف: René Boirel

(دنباله از شمارهٔ پیش)

برای **رسم یك شکل** می‌توان:

۱ـ روش عمومی زیررا پیروی کرد:

الف) مسئله را حل شده انگاشت، به‌این معنی‌که شکل مطلوب را رسم شده درنظر گرفت.

ب) مفروضات مسئله را روی این شکل وارد کرد.

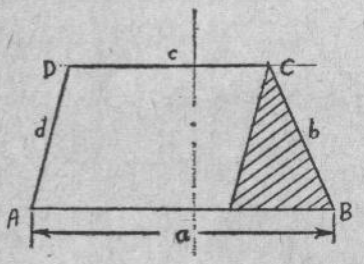
مثلا اگریك زاویه ومجموع دوضلع ازمثلثی معلوم باشد، ابتدا مثلثی‌در نظر می گیریم وفرض‌می‌کنیم مثلث مطلوب باشد. یك‌ضلع‌این‌مثلث‌را به‌اندازهٔ ضلع دیگر ازطرف رأس زاویهٔ‌معلوم امتداد می‌دهیم و به این ترتیب مجموع دو ضلع را روی شکل وارد می‌کنیم.

همچنین اگر مقصود رسم مثلث BAC باشد بقسمی که $\frac{BA}{AC}=\frac{m}{n}$ باشد؛ بعد ازرسم‌مثلث فرضی ABC برای اینکه رابطهٔ مزبور درآن نشان داده شود روی ضلع BA طول $BD=m$ را جدا کرده از D موازی AC رسم می‌کنیم تا BC را در E قطع‌کند و نتیجه خواهد شد $DE=n$

همچنین فرض کنیم که مقصود رسم مثلثی باشدکه از آن یك‌ضلع و مجموع دوضلع دیگرمعلوم باشد؛ دراین‌صورت‌محیط این‌مثلث‌معلوم‌است‌ومی‌توان روی‌شکل‌فرضی قطعه خطی را نشان دادکه طول‌آن برحسب محیط بیان بشود.

ج) بالاخره، اجزاء تعیین‌کننده شکل (یعنی‌اجزائی‌که از روی آنها شکل به تمامی معین می‌شود: مثلا اگر مرکز متوازی الاضلاعی معلوم باشد برای تعیین تمام متوازی الاضلاع معلوم بودن دو رأس مجاور آن کفایت می‌کند، یا اگر مقصود محاط‌کردن یك‌لوزی دریك متوازی‌الاضلاع باشد پیدا کردن یك رأس‌آن برای تعیین تمام لوزی‌کافی می‌باشد) را بوسیلهٔ خطوط قابل توجه، بخصوص خطوط متوازی (که این امکان را فراهم می‌آورد تا اجزاء دورازهم را بوسیلهٔ اجزاء متعادل به‌هم‌نزدیك کردوهمچنین اجزاءمعلوم را به‌ترتیب دیگری‌به‌هم‌مربوط‌کرد) وخطوط عمودبرهم بقسمی‌به‌ساختمان شناخته‌شده مربوط ساخت تا قسمتهائی ازشکل هویدا شودکه رسم‌آنها به‌سادگی میسراست ودرضمن اساس رسم تمام شکل می‌باشند. به‌عبارت دیگر، از تجزیه و تحلیل شکل رسم شدهٔ فرضی، بخشی از ساختمان آنرا معلوم کرد که‌رسم‌آن به‌سادگی انجام‌می‌گیرد و از روی آن می‌توان اجزاء مشخص کنندهٔ شکل مطلوب را بدست آورد.

فرض کنیم مقصود رسم ذوزنقه‌ای باشد که اندازه‌های چهارضلع‌آن معلوم است. مسئله‌را حل‌شده دانسته وفرض‌می‌کنیم ذوزنقهٔ ABCD شکل مطلوب باشد که در آن $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ و $DA=d$ است، CE راموازی‌با AD رسم می‌کنیم. مثلث BCE بدست می‌آید که اندازه‌های‌سه‌ضلع آن معلوم است:



$BC=b$ و $CE=d$

$EB=a-c$

برای رسم ذوزنقهٔ‌مطلوب ابتدا این‌مثلث را رسم می‌کنیم وبعد BE را به اندازهٔ $EA=c$ امتداد می‌دهیم و CD را موازی ومساوی با EA رسم می‌کنیم.

هردفعه‌که قطعه خطی معین می‌شود ممکن است ازیك سر آن عمودی بریکی از خطوط شکل فرضی رسم‌کرد ومعلوم‌کرد که آیا طول این عمود قابل محاسبه است یا نه؟ درچنین حالتی می‌توان قطعه خطی را رسم‌کردکه یك سرآن سر دیگر قطعه خط مفروض و سر دیگرآن پای عمود مرسوم است (این قطعه خط ضلع مثلث قائم الزاویه‌ای است‌که قطعه خط مفروض وتروعمود مرسوم یك ضلع‌آن می‌باشد)

اگرمقصود رسم قطعه خطی باشدکه‌محمل‌آن‌حول‌نقطه‌ای می‌چرخد و بوسیلهٔ این نقطه به نسبت معلومی تقسیم می‌شود و نقطه‌ای خارج ازاین قطعه خط نیز معلوم باشد، مناسبتر آنست که از طرفین قطعه خط (که فرض می‌کنیم معلوم باشد) و از نقطهٔ‌مرکز دوران سه‌خط متوازی رسم‌کنیم که‌روی خطی دلخواه

که از نقطهٔ مفروض خارج قطعه‌خط می‌گذرد تقسیمی با همان نسبت بدست‌آورد (ودراین‌حالت می‌توان با ترسیم معکوس‌قطعه خط‌مطلوب را بدست‌آورد).

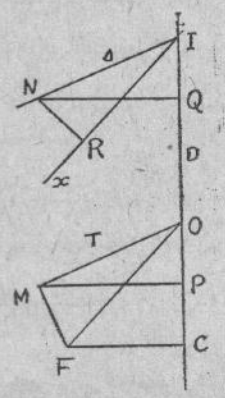
د) گاهی می‌توان شکل فرضی را چنان رسم کرد که با استفاده از تشابه یا تجانس ازروی‌آن بتوان شکل مطلوب‌را به‌سادگی بدست آورد.

برای مثال، فرض‌کنیم که مقصود رسم سهمی باشدکه‌محور آن‌با خط Δ موازی باشد وبرسه نقطهٔ A وB وC بگذرد. اگر نقاط A' و B' و C' را چنان تعیین کنیم که ضلعهای دو مثلث $A'B'C'$ و ABC با هم موازی باشند در این صورت سهمی که محورش‌با Δ موازی باشد وبرنقاط A' و B' و C' بگذرد همان خواص سهمی مطلوب را خواهد داشت. بنابراین ابتدا سهمی دلخواهی رسم می‌کنیم که‌محورش‌با Δ موازی‌باشد ودرآن مثلث $A'B'C'$ را چنان محاط می‌کنیم‌که ضلعهایش با ضلعهای مثلث ABC موازی باشد. درتجانسی‌که مثلث $A'B'C'$ را به مثلث ABC بدل می‌کند سهمی مطلوب مجانس سهمی اخیر می‌باشد.

درحالتی که مقصود رسم خطی باشد که با خط مفروض Δ موازی بوده وخواص معینی را داشته باشد می‌توان از روش مشابه‌باروش بالا استفاده کرد.

مثلا فرض‌کنیم‌که می‌خواهیم خطی رسم‌کنیم که با خط Δ موازی باشد وبرمقطع مخروطی‌که ازآن‌کانون F، هادی D نظیر این‌کانون وخروج ازمرکزآن e معلوم است‌مماس باشد.

فرض‌می‌کنیم‌مسئله‌حل‌شده‌باشد وشکل رسم شده را تجزیه وتحلیل می‌کنیم؛ اگر T مماسی موازی با Δ و M نقطهٔ تماس آن باشد زاویهٔ OFM قائمه است وداریم $\frac{MF}{MP}=e$. از I نقطهٔ تقاطع Δ باD خط Ix را موازی با OF رسم می‌کنیم و از نقطهٔ دلخواه N واقع برΔ عمودهای NR و NQ را بر Ix وD رسم می‌کنیم. مثلثهای IRN و OFM، IQN و OPM متشابهند:



$$\frac{NR}{MF}=\frac{NI}{MO}=\frac{NQ}{MP}\Longrightarrow\frac{NR}{NQ}=\frac{MF}{MP}=e$$

نتیجه خواهد شد $NR=NQ\times e$ و راه رسم زیر نتیجه می‌شود: نقطهٔ دلخواه N واقع برΔ را مرکز قرارداده‌به‌شعاع $NQ\times e$ دایره‌ای رسم می‌کنیم وازI مماسهای Ix و Ix′ را براین دایره رسم‌کرده خطوط FO و FO′ را موازی با این مماسها رسم می‌کنیم. خطوط OT و O′T′ که موازی با Δ رسم شوند مماسهای مطلوب می‌باشند.

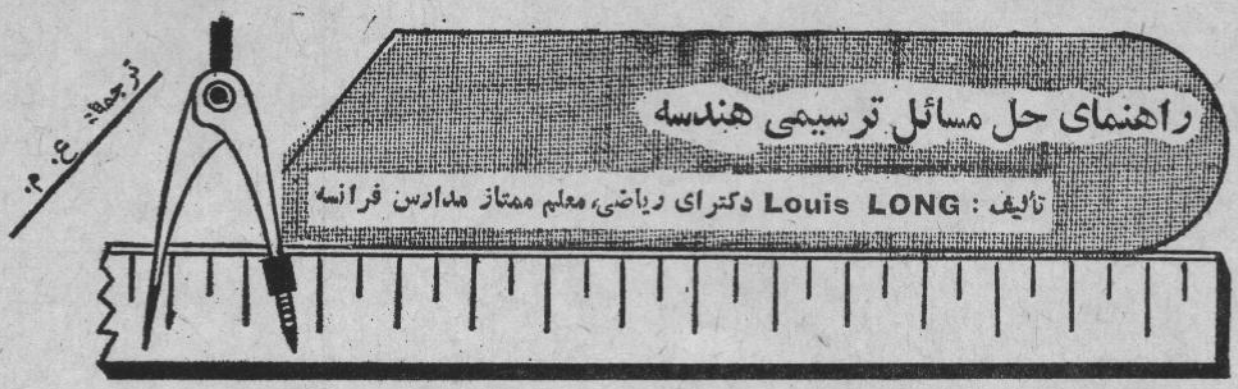
هـ) وقتی‌که از روی مفروضات به‌ترتیبی‌که گفته شدشکل مطلوب رسم‌گردید باید با بررسی حالتهای مختلفی‌که می‌توان خطوط اصلی را رسم‌کرد وبا درنظر گرفتن تعداد نقاط تقاطع این‌خطوط درمسئله بحث‌کرد. به‌این ترتیب‌که:

- تعداد شکلهایی‌که از روی مفروضات بدست می‌آید و جواب مسئله است معین گردد؛

- شرایط تعیین‌شکل مطلوب وشکلهای‌واسطه را ازروی معلومات داده شده تعیین‌کرد. مثلا اگر برای رسم‌شکل مطلوب رسم یك مثلث کمکی‌لازم باشد بایدمعلومات چنان باشندکه‌رسم این مثلث امکان‌پذیرباشد، یعنی اینکه هرضلع‌آن ازمجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و ازتفاضل‌آنها بزرگترباشد؛ یامثلا اگر نقطه‌ای از تقاطع دوخط بدست می‌آید، چنانچه این دوخط بر هم‌منطبق باشند مسئله دارای بینهایت جواب است و اگرشرایط به نحوی باشند کـه این دوخط متوازی گردند مسئله جواب نخواهد داشت.

بررسی فوق با درنظر گرفتن حالتهای فوق‌العاده تکمیل می‌شود(مثلااگربحث‌مسئله به‌اینجا بینجامدکه باید طول معلومی ازیك طول دیگر کوچکتر یا مساوی باآن باشد، حالت‌حدیعنی حالتی‌راکه دوطول با هم‌برابرند بررسی‌کرد)؛ بادرنظرگرفتن حالتهای حد خطوطی‌که رسم شکل مطلوب وشکلهای واسطه را میسر می‌سازد بالاخره معلوم خواهد شد کـه معلومات مسئله نسبت به‌هم چه وضعی را باید داشته باشند (مثلا وقتی‌که نقطه‌ای واقع بریك خط داده‌شده است، اوضاع‌قابل توجه‌آن وقتی است که این نقطه برمحل‌تلاقی خط مزبوروسایرخطوط داده شده یا خطوط مهم شکل فرضی منطبق باشد).

دنباله دارد



پخش چهارم ـ ترسیمات خاص

ترسیمات مربوط به تعادل پایدار ـ مسائل مشهور ترسیمی ـ ترسیمات تقریبی ـ ترسیمات عملی ـ مغلطه‌های ترسیمی ـ مغلطه‌های استدلالی

فصل اول ـ ترسیمات مربوط به تعادل پایدار

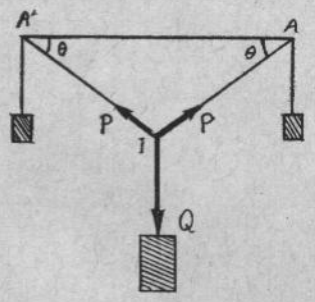
در مکانیك این موضوع اهمیت دارد که معلوم شود آیا وضعی از تعادل پایدار است یا ناپایدار. یك نقطه یا یك جسم در تعادل پایدار است هرگاه اگر از این وضع منحرف گردد کم کم به وضع اول خود برگردد ؛ درصورتی که اگر بعد از انحراف هرچه بیشتر از آن واقع دور شود ، تعادل ناپایدار است .

نقطهٔ وزین M را درنظر می‌گیریم که مقید است دردرون حلقه‌ای واقع دریك صفحهٔ قائم حرکت کند . برای M دووضع تعادل وجوددارد؛ یکی نقطهٔ A مرتفعترین نقطهٔ حلقه و دیگری B پائین ترین نقطهٔ حلقه . A وضع تعادل ناپایدار M است زیرا اگر M از وضع A کمی منحرف شود از آن دور شده به سمت B نزدیك می‌شود. اما B وضع تعادل پایدار M است زیرا اگر M از این وضع منحرف گردد بعد از یك عده نوسانها مجدداً دروضع B قرارمی‌گیرد .

یك میله را می‌توان از یك سر دوآن آویزان کرده و آنرا در وضع ثابت نگاه داشت که این حالت تعادل پایدار آن می‌باشد .همین میله را می‌توان باکمی تلاش به‌طورقائم روی نوك انگشت نگاه داشت . اما در این حالت در وضع تعادل ناپایدار است ، زیراکوچکترین انحرافی منجر به سقوط آن می‌شود.

مسئلهٔ تعیین وضع تعادل پایدار همیشه به سادگی دومثال بالا نیست . در این مورد قضیهٔ **لژون دیریکله** یکی از افتخارات مکانیك استدلالی مورد استناد است ، اما اغلب استفادهٔ عملی از این قضیه بسیار مشکل است. دراین بخش معلوم خواهیم کرد که دربسیاری از حالتها ، یك ترسیم هندسی کلید حل مسئله می‌باشد .

مسئلهٔ ۱ ـ دو وزنهٔ معادل به طرفین نخ بی‌وزنی که از روی دو قرقرهٔ ثابت واقع در نقاط A و A' می‌گذرد ثابت شده‌اند ودو نقطهٔ A و A' دریك خط افقی‌اند؛ نخ بی‌وزن دیگری که یك وزنهٔ Q راحمل می‌کند به دونخ مزبور متصل می‌باشد . وضع تعادل پایدار دستگاه را پیدا کنید .



مطابق شکل، دستگاه وقتی درحال تعادل است که نقطهٔ I روی عمودمنصف قائم خط AA' قرارداشته باشد، دراین حال، مجموع تصویرهای دووزنهٔ P که به ترتیب در امتدادهای IA و IA' قرار دارند روی D یعنی $s=2P\sin\theta$ با Q برابر خواهد بود .

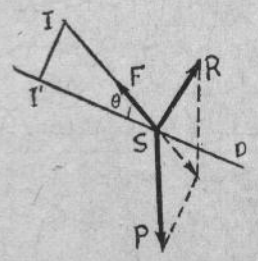
تعادل مزبور پایدار است زیرا اگر I به‌سمت بالا رانده شود مجموع $s=2P\sin\theta$ کم می‌شود نیروی $Q-2P\sin\theta$ آنرا به سمت پائین می‌کشاند ،و اگر برعکس I به سمت پائین کشیده شود s زیاد شده نیروی $Q-2P\sin\theta$ آنرا به سمت بالا می‌کشاند . اگر I به‌سمت چپ تغییر مکان دهد s' منتجهٔ تصاویر دووزنهٔ P روی خط موازی با AA' نقطهٔ I را به‌سمت راست می‌راند وبرعکس . بنابراین I به‌هر ترتیب که تغییرمکان دهد به‌وضع اول خودبرمی‌گردد .

مسئلهٔ ۲ ـ سه نقطهٔ A و B و C مفروض است . یك نقطهٔ M از طرف‌هریك ازاین نقاط با نیروئی‌متناسب با فاصله به طرف این نقطه کشانده می‌شود . وضع تعادل نقطه را پیدا کنید .

به سادگی معلوم‌خواهد شد کـه G مرکز ثقل مثلث ABC وضع تعادل نقطهٔ M می‌باشد . ثابت می‌کنیم که این وضع تعادل پایدار است : اگر M را از G به‌سمت A جابجا کنیم ، کشش A کم می‌شود در حالی که مجموع تصویرهای کششهای B و C روی محمل GA زیاد می‌گردد . بنابراین در اثر نیروی R' تصویر R منتجهٔ سه‌نیروروی GA نقطهٔ M به‌سمت G کشانده می‌شود . وانگهی ، وقتی M کاملا به A نزدیك شود R' برابر خواهد شد با مجموع دونیرو که هردو از A متوجه G می‌باشند زیرا در این حالت نیروی کشش A صفر است . بنابراین G وضع تعادل پایدار نقطهٔ M می‌باشد.

تبصرهٔ ـ اگر در این مسئله علامت نیروها تغییر یابد ، به‌عبارت‌دیگر نیروها به جای آنکه جاذبه باشند دافعه باشند ، با استدلالی مشابه ثابت خواهد شدکه G وضع تعادل ناپایدار نقطهٔ M می‌باشد .

مسئلهٔ ۳ ـ تعیین وضع تعادل نقطهٔ وزین M که بدون اصطکاك روی صفحهٔ مایل π حرکت می‌کند و بانیروی ثابت F به‌سمت یك نقطهٔ I کشانده می‌شود .مطابق با شکل نیروهای مؤثر عبارتند از : P نیروی وزن M ، نیروی F و R نیروی‌عکس‌العمل‌صفحهٔ π که براین‌صفحه‌عمود است زیرااز اصطکاك صرف‌نظر شده است . با استفاده از تقارن ، S نقطهٔ واقع برخط بزرگترین شیب صفحهٔ π که بر I می‌گذرد وضع تعادل نقطهٔ M می‌باشد .



برای تعیین وضع تعادل پایدار قبلا به این نکته توجه کنیم‌که نیروی R درپایداری‌تعادل تأثیری ندارد زیرا تصویر آن برصفحه‌برابر با صفر است . نقطهٔ M راروی D به‌طرف پائین حرکت می‌دهیم . تصویر نیروی P روی D چه ازلحاظ اندازه وچه ازلحاظ جهت تغییر نمی‌کند ، اما مطابق با شکل که I' تصویر I روی D بالای S قراردارد زاویهٔ θ که F با D می‌سازدکوچك می‌شود و درنتیجه تصویر F روی D بزرگ می‌شود و در اثر آن نقطهٔ M به‌سمت بالا کشانـده می‌شود . به‌همین ترتیب مشاهده خواهدشدکه اگر M از S به سمت بالا حرکت داده شود مجدداً به‌سمت پائین برمی‌گردد .

اکنون M راروی افقیهٔ H مادبر S تا S' تغییر مکان می‌دهیم . تصویرهای P و F روی خط بزرگترین شیب D' که بر S' می‌گذرد معادل باقی می‌مانند اما نسبت به خط H چنین نیستند : تصویر P روی H صفر است و M تحت تأثیر تصویر F روی H به‌سمت S کشانده می‌شود . پس نقطهٔ S از صفحهٔ P وضع تعادل پایدارنقطهٔ M می‌باشد .

وقتی نیروی F دافعه باشد وضع تعادل مزبور ناپایدار خواهد بود .

مسئلهٔ ۴ ـ تعیین تعادل یك نقطهٔ M که توسط دونیرو متناسب با عکس مربع فاصله به سمت دو نقطهٔ ثابت A و B کشانده می‌شود بقسمی‌که وقتی فاصله‌ها برابر باشند نیروهانیز برابر می‌باشند .

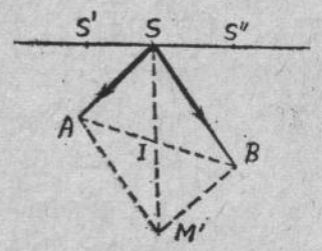
واضح است که S وسط AB وضع تعادل M می‌باشد . اگر M از S به طرف A تغییر مکان دهد نیروی کشش A اضافه ونیروی کشش B کم می‌شود و در نتیجه M به سمت B پرت می‌شود . اگر M از S به سمت B تغییر مکان دهد به سوی A خواهد رفت .

در این مسئله در مورد هر تغییرمکان M از S به سمت S' از صفحهٔ عمود منصف AB یك حالت استثنائی شگفت‌وجود دارد . وقتی M در S است تصاویر نیروهای ناشی از A وB روی AB یکدیگر را خنثی می‌کنند . در حالی که وقتی M از S'به‌سمتS بر می‌گردد تصویرهای این نیروها روی S'S اضافه می‌شوند .

اگر نیروهای مزبوردافعه‌باشند تعادل پایدارخواهدبود.

مسئلهٔ ۵ ـ تعادل نقطهٔ غیروزین M که می‌تواند روی یك خط D جابجا شود بدون آنکه از این خط رها گردد و توسط دو نقطهٔ ثابت با نیروهایی متناسب با MA و MB جذب می‌شود .

باید برآیند دو نیرو یعنی قطر متوازی الاضلاعی که‌روی MA و MB ساخته می‌شود برخط D عمود باشد . هرگاه از I وسط AB برD عمودکنیم S وضع‌تعادل بدست خواهدآمد .

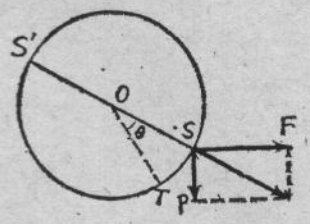


اگر M به‌سمت S'تغییرمکان‌دهدنیروی ناشی از A کم می‌شودو زاویهٔ آن با D زیـاد

می‌گردد . هردوعامل باعث می‌شودکه تصویر نیروی ناشی از A روی D کم شده و برعکس آن نیروی ناشی از B زیاد شده نقطهٔ M به سمت S باز می‌گردد . وهمچنین وقتی M از S به‌سمت "S تغییر مکان دهد مجدداً به S باز خواهدگشت .پس S وضع تعادل پایدار M است .

مسئلهٔ ۶ ـ حلقهٔ توخالی C به مرکز O و واقع دریك صفحهٔ قائم مفروض است. نقطهٔ وزین M به‌وزن P داخل حلقه حرکت می‌کند وعلاوه برآن تحت تأثیر نیروی ثابت وافقی F واقع درصفحهٔ C می‌باشد. تعادل M را پیداکنید .

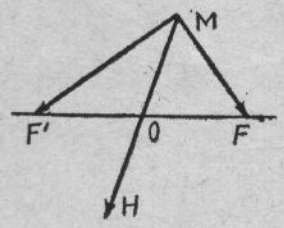
با رسم متوازی‌الاضلاعی که‌دوضلعش همسنگ P و F باشند D امتداد 'F برآیند نیروهای P و F معین می‌شود .S و 'S طرفین قطری از حلقه که در امتداد D باشد دووضع تعادل نقطهٔ M می‌باشد .



اگر M را از S به‌طرف پائین تا نقطهٔ T حرکت دهیم،چنانچه θ اندازهٔ زاویهٔ SOT باشد نقطهٔ M تحت تأثیر نیروی $F'\sin\theta$ به سمت S کشانده می‌شود . همچنین اگر M را از S به طرف بالا تا 'T حرکت دهیم مجدداً نقطهٔ M به سمت S مراجعت می‌کند . پس S وضع تعادل پایدار نقطهٔ M و برعکس نقطهٔ 'S وضع تعادل ناپایدار M می‌باشد .

مسئلهٔ ۷ ـ نقطهٔ غیر وزین M داخل حلقهٔ بیضی‌شکل E حرکت می‌کند و تحت تأثیر نیروهایی مساوی با $\overrightarrow{MF}$ و $\overrightarrow{MF'}$ به طرف‌دوکانون F و 'F کشانده‌می‌شود. اوضاع تعادل نقطهٔ M را پیداکنید.

H انتهای برآیند دونیروی $\overrightarrow{MF}$ و $\overrightarrow{MF'}$ رأس چهارم ازمتوازی‌الاضلاعی‌است که‌روی MF و 'MF بنامی‌شود .این برآیند ازO مرکز E می‌گذرد. تعادل‌وقتی‌است که MO قائم بر بیضی باشدیعنی MO نیمساز داخلی زاویهٔ 'FMF باشد . به‌این ترتیب‌چهاررأس بیضی چهاروضع تعادل نقطهٔ M می‌باشد .

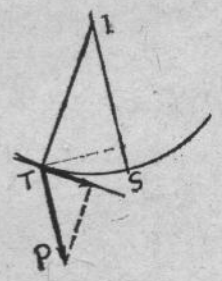


اگر B رأس قطر کوتاه بیضی E باشد M را به سمت راست تا B_1 حرکت می‌دهیم .تصویر H روی بربیضی در B_1 سمت راست B_1 واقع می‌شود ودر نتیجه M به‌سمت B برمی‌گردد . چنانچه M را به سمت چپ حرکت دهیم به‌همان ترتیب‌مشاهده‌خواهدشد که‌به B بازمی‌گردد .پس B وضع‌تعادل پایدار نقطهٔ M می‌باشد . برای رأس 'B از بیضی نیزوضع به همین قرار است .

اگر رأس A از قطر بلندبیضی را درنظر بگیریم و M را از A به A_1 نزدیك‌آن حرکت دهیم ، تصویر برآیند نیروها روی مماس نقطهٔ A_1 چنان خواهد بودکه باعث می‌شود M از A دورگردد . یعنی A وضع تعادل ناپایدار می‌باشد . A_1 رأس متقابل A نیزوضع تعادل ناپایدار می‌باشد .

مسئلهٔ ۸ ـ نقطهٔ M با نیرویی متناسب با فاصله‌به‌سمت نقطهٔ ثابت I کشانده می‌شود . تعادل نقطهٔ M را تعیین کنید.

بامحاسبه‌ای‌ساده معلوم خواهد شدکه S واقع برقائم ماربر I که‌زیرآن‌قراردارد‌وضع تعادل M می‌باشد .



اگر 'S نقطه‌ای از IS وواقع درزیر S باشد نقطهٔ M را به 'S می‌بریم ؛ وزن که قائم ونزولی است تغییر نمی‌کند . نیروی‌کشش I که به سمت بالا است افزوده می‌شود و در نتیجه M به سمت S باز می‌گردد . اگر M به "S واقع بر IS و در بالای S ببریم به ترتیب مشابه نتیجه خواهدشدکه M به S باز می‌گردد .

از طرف دیگر، اگر M را به نقطهٔ T واقع بر دایرهٔ به مرکز I و به شعاع IS ببریم‌تصویر I روی مماس D مرسوم بردایره در T برابر صفر خواهد بود . در نتیجه M تحت تأثیر تصویر نیروی‌وزن‌روی D به سمت S باز گردانده‌می‌شود. نقطهٔ S وضع تعادل پایدار نقطهٔ M می‌باشد .

تمرینات

۱ ـ نقطهٔ M تحت تأثیرسه نیروی متساوی به طرف سه رأس مثلث ABC کشانده می‌شود . وضع تعادل نقطهٔ M را پیداکنید .

[M داخل مثلث واقع است وچون چندضلعی نیروها مثلث‌متساوی‌الاضلاع‌است‌وضع‌تعادل نقطهٔ M نقطه‌ای‌است که‌از آنجا هر یك از سه ضلع مثلث به زاویهٔ ۱۲۰ درجه دیده می‌شود .]

۲ ـ نقطهٔ M در اثرسه نیروی مساوی با فاصله به‌سمت

سه نقطهٔ A و B و C واقع بریك خط راست کشانده می‌شود. وضع تعادل آنرا پیدا کنید .

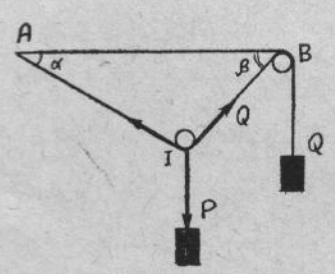
(به فرض اینکه B بین A وC و S وضع تعادل بوده $\overline{AB}=a$ و $\overline{BC}=b$ و $\overline{AS}=x$ فرض‌شود خواهیم‌داشت $(x=\frac{2a+b}{3})$

۳ ـ نقطهٔوزین M مقید است که‌دایرهٔC به‌مرکزOوواقع درصفحهٔقائم را بپیماید؛ علاوه برآن ، نقطهٔ M در اثر نیرویی متناسب با فاصله‌به طرف نقطهٔ A واقع برقطرافقی دایره کشانده می‌شود . وضع تعادل M را پیدا کنید .

۴ ـ دایرهٔ C واقع در یك صفحهٔ قائم و به مرکز O مفروض‌است. روی‌قائمOودرخارجC نقطهٔ I را در نظر می‌گیریم و این نقطه را به صورت قرقرهٔ بسیار کوچکی فرض‌می کنیم. یك نخ ACB ازروی این قرقره می گذرد که در انتهای B ازآن یك وزنهٔ Q آویزان‌است . در A حلقه‌ای ثابت است که یك وزنهٔ P را حمل‌می‌کند و علاوه برآن بدون‌اصطکاك بر دایرهٔ C می‌لغزد. وضع‌تعادل دستگاه را تعیین کنید . پایداری تعادل‌را برای‌اوضاعی که روی قطرقائم‌قرار ندارند بررسی کنید .

۵ ـ سه نقطهٔ ثابت A و B و C یك نقطهٔ R را با نیروهایی به‌شدتهای A' و B' و C' به طرف خود می کشانند. وضع تعادل را پیدا کنید .

۶ ـ دو نقطهٔ A و B بر یك خط افقی مفروض‌اند . نخی‌که یك سر آن به A ثابت شده اززیر قرقرهٔ کوچك I که وزنهٔ P به‌آن آویزان است‌وبعداز روی قرقرهٔ کوچکی کـه حول B می‌چرخدمی گذرد ودر آخر به‌وزنهٔ Q متصل می‌باشد . وضع تعادل رابیابید .



۷ ـ نقطهٔ غیر وزین M برسهمی مفروض بدون‌اصطکاك تغییر مکان می‌دهد وبه‌طرف‌نقطهٔ I واقع برمحور سهمی‌کشانده می‌شود . وضع تعادل را پیدا کنید .

۸ ـ نقطهٔ غیروزین M بر سهمی مفروض‌حرکت‌می کند و با نیروی ثابت P به طرف F کانون سهمی‌کشانده می‌شود و علاوه برآن ازطرف خط‌هادی D بانیروی‌متناسب با فاصله دفع می گردد . تعادل‌وپایداری آن رابررسی کنید .

۹ ـ حلقهٔ توخالی به شکل بیضی مفروض است‌که محور بلند آن افقی و محور کوتاه آن قائم می‌باشد . نقطهٔ وزین M به‌وزن P در داخل این حلقه حرکت می کند وعلاوه برآن تحت تأثیر نیروی افقی مساوی با وزن خود قراردارد . وضع تعادل پایداررا تعیین‌کنید .

۱۰ ـ نقطهٔ غیر وزین M روی‌یك خط D بدون‌اصطکاك حرکت می‌کند و با دونیروی متساوی F به طرف‌دونقطهٔ ثابت A و B کشانده می‌شود . وضع تعادل پایدار را تعیین‌کنید .

۱۱ ـ نقطهٔ M به وزن P روی دایرهٔ قائم C بدون اصطکاك می‌لغزد و علاوه برآن با نیروی ثابت Q به طرف یك نقطهٔ A کشانده می‌شود . پایداری تعادل را در دو حالت زیر بررسی کنید .

۱) A بلندترین نقطهٔ دایره باشد .

۲) A نقطهٔ‌دلخواهی از دایره باشد .

۱۲ ـ نقطهٔ غیر وزین M داخل حلقهٔ تو خـالی بیضی شکل‌به‌کانونهای F و F' وبه مرکز O و به قطر اطول AA' بدون اصطکاك تغییرمکان می‌دهد و تحت تأثیر دو نیروی MA و MO قراردارد . اوضاع تعادل را پیدا کنید و پایداری‌آنها بررسی کنید .

۱۳ ـ تمرین قبل‌وقتی‌که M تحت تأثیر نیروهای MB و MO باشد .

۱۴ ـ میلهٔ متجانس OA بـه طول 2a و به وزن P می‌تواند بدون اصطکاك در یك صفحهٔ قائم AOC حول انتهای خود O دوران‌کند . یك نخ BCD در نقطهٔ B به میله‌متصل است و از روی قرقرهٔ C بـه شعاعی که قابل صرف‌نظر است می‌گذرد و در انتهای دیگر به وزنهٔ Q وصل می‌باشد . خط OC قائم و در جهت بالا است . فرض می‌کنیم $OB=b$ و $OC=c$. وضع تعادل دستگاه را بیابید و پایداری آنرا معلوم‌کنید .

۱۵ ـ قطعهٔ وزین و متجانسی به جرم M که به شکل مثلث متساوی‌الساقین ABC است می‌تواند حول قاعدهٔ AB که افقی است بچرخد . به رأس C نخی وصل شده است که از روی قرقرهٔ بسیارکوچك P بدون اصطکاك می‌گذرد و یك جرم M را حمل می‌کند . اگر O وسط AB باشد با فرض اینکه OP افقی و بر AB عمود وبا OC برابر باشد وضع تعادل را پیدا کنید .

۱۶ ـ نقطهٔ وزین فلزی M به جرم m روی یك خط بزرگترین‌شیب‌صفحه‌ای که‌با افق‌زاویهٔ α می‌سازدمتکی‌است. علاوه برآن نقطهٔ M توسط یك نخ قابل ارتجاع به‌نقطهٔ ثابت O از خط بزرگترین شیب مربوط می‌باشد . وقتی‌که فاصلهٔ OM از

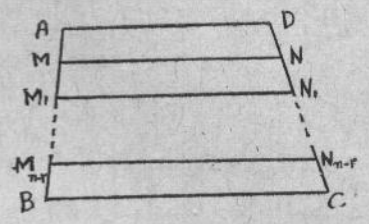
(دنباله درصفحه ۲۴)

بحثی در ذوزنقه و مثلث

محمدرضامیبدی دانش‌آموز پنجم ریاضی

I- ذوزنقه

ذوزنقهٔ ABCD را درنظرگرفته ساق AB از آن را به n قسمت برابر تقسیم کرده و نقاط تقسیم را درجهت از A به B به M و M_1 و M_2 و ... و M_{n-2} نشان می‌دهیم. از این نقاط خطوطی موازی با قاعده‌های AD و BC ذوزنقه رسم می‌کنیم تا ساق CD را به ترتیب در N و N_1 و ... و N_{n-2} قطع کند. می‌خواهیم طولهای قطعه خطهای MN و M_1N_1 و ... و $M_{n-2}N_{n-2}$ را برحسب $AD=d$ و $BC=b$ حساب کنیم.



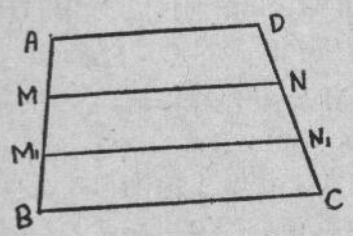
حالت خاص اول: $n=2$ - می‌دانیم که اگر از M وسط ساق AB موازی با دو قاعده رسم کنیم تا ساق CD را در N قطع کند نقطهٔ N وسط CD بوده و داریم:

$$MN=\frac{AD+BC}{2}=\frac{b+d}{2}$$

حالت خاص دوم: $n=3$ - در ذوزنقه‌های AM_1N_1D و $MBCN$ بنا به حالت اول داریم:

$$MN=\frac{AD+M_1N_1}{2}$$

$$M_1N_1=\frac{MN+BC}{2}$$



از این دو رابطه مقادیر MN و M_1N_1 حساب می‌شود:

$$MN=\frac{2d+b}{3}$$

و

$$M_1N_1=\frac{d+2b}{3}$$

حالت خاص سوم: $n=4$ - در ذوزنقه های AM_1N_1D و MM_2N_2N و M_1BCN_1 به ترتیب خواهیم داشت:

$$MN=\frac{AD+M_1N_1}{2} \quad \text{و} \quad M_1N_1=\frac{MN+M_2N_2}{2}$$

$$M_2N_2=\frac{M_1N_1+BC}{2}$$

ازسه‌رابطهٔ بالانتیجه خواهدشد:

$$MN=\frac{3d+b}{4} \quad \text{و} \quad M_2N_2=\frac{d+3b}{4}$$

$$M_1N_1=\frac{d+b}{2}=\frac{2d+2b}{4}$$

حالت کلی- طبق‌روش بالا درذوزنقه‌های AM_1N_1D و MM_2N_2N و ... و $M_{n-3}BCN_{n-3}$ به ترتیب‌داریم:

$$MN=\frac{AD+M_1N_1}{2} \quad \text{و} \quad \ldots$$

$$\text{و} \quad M_{n-2}N_{n-2}=\frac{M_{n-3}N_{n-3}+BC}{2}$$

تعداد این رابطه‌ها برابربا $n-1$ است. به‌عبارت‌دیگر برای تعیین $n-1$ مجهول، $n-1$ معادله دردست داریم. ازحل این‌معادلات نتیجه خواهدشد:

$$MN=\frac{(n-1)d+b}{n} \quad ، \quad M_1N_1=\frac{(n-2)d+2b}{n}$$

$$M_2N_2=\frac{(n-3)d+3b}{n}$$

. . . . . .

$$M_qN_q=\frac{(n-q+1)d+(q+1)b}{n}$$

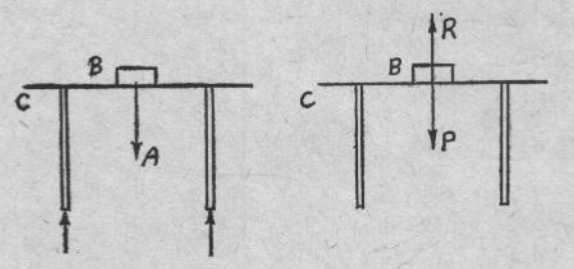
. . . . . .

$$M_{n-2}N_{n-2}=\frac{d+(n-1)b}{n}$$

و آن عکس‌العمل C برروی B است .

برطبق قانون سوم نیوتن $A = R$.

بیاد داریم‌که تنها نیروئی‌که بر B اثر می‌کند وزن P آن است‌که بطور قائم و بطرف پائین است . نیروهای دیگری که‌بر C اعمال‌می‌شوندمعین نشده‌اند ، اما مسلما نیروهائی‌بطور قائم و بطرف بالا بر پایه‌های میز ودر محل تماس آنهابازمین اعمال می‌شوند . (اگر دو جسم وجود داشته باشد ، بهتر آن است‌که دو شکل رسم شود و نیروهائی‌که بـر هر جسم وارد می‌شود جداگانه مشخص شود) در این حالت ، و در بسیاری حالات دیگر ، **راهٔ مستقیمی** برای اثبات اینکه A و R برابرند نداریم. اما بعداً مثالی از ئیدرو ستاتیك خواهیم‌آورد کـه در آن مـی‌توان‌مستقیما نیروهـای عمل و عکس‌العمل را اندازه‌گیری‌کرد و نشان دادکه با یکدیگر برابر و در خلاف جهت یکدیگرند .



نیروهائی‌که بروزنهٔ B اثر می‌کنند . بعضی‌از نیروهائی‌که برمیز C اثر می‌کنند .

شکل ۳

فعلاتاکید می‌کنیم‌که **این قانون ،که آن رامدیون نبوغ نیوتن هستیم تاآنجا که نتایج مبتنی بر آن با مشاهده وفق می‌دهد ، درست است .**

مثال جالبی از عمل و عکس‌العمل توسط حرکت ماه به دور زمین ارائه می‌شود . عمل ماه برروی زمین‌کشش جاذبـه است‌که حرکت ماه را به دور زمین دریك مسیرتقریبا دایره‌ای تأمین می‌کند . عکس‌العمل ماه بر روی زمین ،کشش جاذبه‌ای است برابر و درخلاف جهت عمل زمین بـر روی ماه ، و این عکس‌العمل جزر و مداقیانوسها را تولیدمی‌کند . مثال‌دیگری از عمل وعکس‌العمل هواپیمای‌جت است . هوا بداخل‌محفظه‌ای مکیده می‌شود و در آنجا گرم می‌گردد ، و از سوراخ باریکی به بیرون رانده می‌شود ، رانده شدن هوا بـه بیرون ، تولید عکس‌العملی‌مساوی و در خلاف جهت برروی هواپیما می‌نماید و درنتیجه هواپیما را به جلو می‌راند .

در اینجا اشاره می‌کنیم‌که بر مبنای قانون سوم ، بعدا یکی از مهمترین اصول دینامیك راکه **اصل مقدار حرکت** نامیده می‌شود ، نتیجه خواهیم‌گرفت . این اصل را ممکن‌است به صورت زیر بیان‌کرد .

در هر دستگاه‌که شامل نقاط مادی است‌که یکدیگر را جذب می‌کنند یا با یکدیگر برخورد دارند ، مقدار حرکت درهر جهت ثابت دلخواه ، بدون تغییر باقی می‌ماند مگـر آنکه در آن جهت یك نیروی خارجی وارد شود.

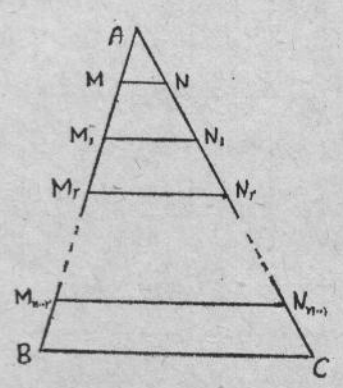
۱۴ـ در معادلهٔ $F = m\gamma$ نیروی F در نتیجه شتاب γ ممکن است ثابت یامتغیر باشد. فعلا حالاتی را درنظرمی‌گیریم که اینها ثابت هستند ، و حرکت در یك مسیر مستقیم صورت می‌گیرد .

(بقیه از صفحهٔ قبل)

II ـ مثلث

مثلث را ذوزنقه‌ای تصور می‌کنیم‌که یك قاعدهٔ آن‌برابر با صفرباشد ومی‌توانیم در فرمولهای بالا مثلا $d = 0$ اختیارکرده وفرمولهای مربوط به‌مثلث را بدست آوریم، به‌این ترتیب:

در مثلث ABC که قاعدهٔ آن $BC = a$ است ضلع AB را به n قسمت برابر تقسیم می‌کنیم و نقاط حاصل‌در جهت از A به B به‌ترتیب $M, M_1, \ldots, M_{n-2}$ می‌نامیم. از این‌نقاط خطوطی موازی با قاعدهٔ BC رسم‌می‌کنیم تاضلع AC را به‌ترتیب درنقاط N, N_1 و .... و N_{n-2} قطع کنند . خواهیم داشت :



$$MN = \frac{a}{n} \text{ و } M_1N_1 = \frac{2a}{n}$$

. . . . . .

$$M_qN_q = \frac{(q+1)a}{n}$$

. . . . . .

$$M_{n-2}N_{n-2} = \frac{(n-1)a}{n}$$

مسائل نمونه

صد مسئلهٔ جالب وحل آنها

ترجمهٔ: داوید ریحان
دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

فصل اول

اعداد، معادلات و نامساویها،

۱ـ تمرین دربارهٔ جدول ضرب

رشته اعدادی به صورت زیر تشکیل می‌دهیم: اولین عدد ۲ است، دومین عدد ۳ می‌باشد، سومین عدد ۶ = ۳ × ۲ ، مطابق قاعدهٔ بالا ۱۸ = ۶ × ۳ را تشکیل می‌دهیم وچهارمین عدد را ۱ و پنجمین عدد را ۸ اختیار می‌کنیم.

ششمین عدد ۶ = ۱ × ۶ و بعداز آن ۸ = ۸ × ۱ بدست می‌آید.

با این روش رشته اعدادی به‌صورت زیر خواهیم داشت:

۲ ۳ ۶ ۱ ۸ ۶ ۸ ...

کمانکهای واقع بین اعداد نمایندهٔ عمل ضربی است که در مورد آنها اجرا می‌شود وحاصل این عمل پس از آخرین رقم رشته ثبت می‌گردد. به عنوان مثال، اکنون می‌باید ۶ را در ۸ ضرب کرده و ارقام حاصل، یعنی ۴ و ۸ را بنویسیم. هیچگاه ازضرب اعداد کوتاهی نمی‌کنیم، زیرا تعداد کمانکها در هرضرب یك واحد اضافه می‌شود ونتیجه حداقل یك رقم واغلب دو رقمی است بطوری که همیشه حد اقل یك رقم جدید بدست می‌آید.

حال! کنید که اعداد ۵، ۷ و ۹ هیچگاه دراین رشته وجود ندارد.

حل ـ ابتدا یادآوری می‌کنیم که در رشتهٔ مفروض رقم فردی اگر وجود داشته باشد حتماً مابین دو رقم زوج ظاهر خواهد شد؛

زیرا اگر به‌فرض، دررشتهٔ مفروض دوجملهٔ متوالی c و d فرد باشند از دو حال خارج نیست:

یا عدد $\overline{cd}$ حاصل‌ضرب دوجملهٔ a و b ازرشته که ماقبل c و d قرار دارند می‌باشد که درنتیجه این دوجمله فرد می‌باشند.

یا c آخرین رقم ازحاصل‌ضرب دوجملهٔ a و b ماقبل c و d ازرشته می‌باشد که درنتیجه a و b نیز فرد خواهندبود.

با این روش، فرض اینکه دو جملهٔ متوالی c و d از رشتهٔ موردنظرفرد هستند حکم می‌کند که دوجملهٔ دیگرازرشته که قبل از c و d هستند؛ فردباشند وبالاخره نتیجه خواهد شدکه ازمیان سه‌جملهٔ اولیهٔ رشتهٔ مفروض، دوعدد فرد وجود داشته‌باشد واین امر ممکن نیست.

با توجه به‌اینکه، دررشتهٔ موردنظردوجملهٔ متوالی توأماً فرد نیستند نتیجه‌می‌گیریم‌که رقم ۹ دررشتهٔ فوق ظاهر نمی‌شود؛ زیرا رقم ۹ تنها در حاصل ضربی بزرگتر یا مساوی ۹۰ ظاهر می‌شود ولی حاصل‌ضرب‌دوعدد یك رقمی همواره کوچکتر از ۹۰ می‌باشد.

رقم ۷ نیز وجود نخواهد داشت زیرا تنها عدد دورقمی که حاصل‌ضرب دوعدد یك رقمی یکی فرد و دیگری زوج باشد وبه‌کمك یك ۷ نوشته شود عدد ۷۲ = ۹ × ۸ می‌باشد وچنانکه درفوق گفتیم رقم ۹ در رشتهٔ مورد نظروجود ندارد.

به‌همین‌ترتیب دراین رشته به رقم ۵ نیز برنخواهیم‌خورد زیرا تنها دو عدد دورقمی وجود دارد که به‌کمك یك ۵ نوشته می‌شوندوحاصل‌ضرب دوعدد یك رقمی یکی‌زوج و دیگری فرد می‌باشندکه عبارتند از: ۵۶ = ۸ × ۷ و ۵۴ = ۹ × ۶ ولی دراین دوحاصل‌ضرب دوعددی مداخله می‌کنندکه قبلاثابت کرده‌ایم دررشته وجود ندارند.

***

۲ـ خاصیت جالبی از اعداد

ابتدا عدد صحیح غیرمشخصی (به عنوان مثال ۲۵۸۳) را می‌نویسیم ، سپس مجموع مربعات ارقام را بدست می‌آوریم ($۲^۲+۵^۲+۸^۲+۳^۲=۱۰۲$). بعد ، همین‌اعمال رادرمورد عدد بدست‌آمده، انجام می‌دهیم($۱^۲+۰^۲+۲^۲=۵$)، وعمل‌را به همین منوال ادامه می‌دهیم :

($۵^۲=۲۵$ ، $۲^۲+۵^۲=۲۹$ و $۲^۲+۹^۲=۸۵$) .

ثابت‌کنید ، قبل از آنکه جملهٔ اخیر به عدد واحد برسد،(واضح است‌که در چنین حالتی ، عدد ۱ بینهایت مرتبه تکرار خواهد شد) ، به عدد ۱۴۵ می‌رسد و دورهٔ زیر بینهایت مرتبه بوجود می‌آید :

۸۹ و ۵۸ و ۳۷ و ۱۶ و ۴ و ۲۰ و ۴۲ و ۱۴۵

حل ـ عدد n رقمی‌غیرمشخصی‌را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$L=۱۰^{n-۱}a_n+۱۰^{n-۲}a_{n-۱}+\cdots+۱۰^۲a_۳+۱۰a_۲+a_۱$$

که مجموع مربعات ارقام آن چنین می‌شود :

$$L_۱=a_n^۲+a_{n-۱}^۲+\cdots+a_۳^۲+a_۲^۲+a_۱^۲$$

داریم :

$$L-L_۱=(۱۰^{n-۱}-a_n)a_n+(۱۰^{n-۲}-a_{n-۱})a_{n-۱}+\cdots+(۱۰^۳-a_٤)a_٤+(۱۰^۲-a_۳)a_۳+(۱۰-a_۲)a_۲+(۱-a_۱)a_۱$$

ملاحظه می‌کنیم که : $(a_۱-۱)a_۱<۷۲$

اگرفرض‌کنیم‌که n بزرگتر یا مساوی۳باشد (وهمچنین $a_n\neq ۰$) خواهیم داشت :

$$(۱۰^{n-۱}-a_n)a_n\geqslant ۹۹$$

و $(i=۲و۳و...و n-۱)$ $(۱۰^{i-۱}-a_i)a_i\geqslant ۰$

و بالاخره : $L>L_۱$

آخرین نامساوی نشان می‌دهد که اگر L عددی حداقل سه رقمی باشد و با طریقهٔ مذکور در فرض رشتهٔ :

$L_۱$ ، $L_۲$ ، $L_۳$،... (۱) را که متشکل ازمربعات‌ارقام است تشکیل‌دهیم، رشته‌ای‌همگرا خواهیم‌داشت، درصورتی‌که‌جملاتش حداقل سه رقمی باشند: چون جملات رشته،اعداد طبیعی هستند مطمئن‌هستیم که (ازشروع عدد غیرمشخص L که حداقل سه‌رقمی است) پس‌ازمقداری عملیات حداکثر به‌یك‌عدد سه رقمی برسیم. ازاین‌امر نتیجه‌می‌گیریم که‌کافیست‌خاصیت مزبوررا برای اعدادی که بیش ازسه رقم‌ندارند امتحان‌کنیم.

درنتیجه ، فرض می‌کنیم‌که عدد سه رقمی L راکه درآن $n=۳$ است داشته‌باشیم: بنابراین $a_n\neq ۰$ وداریم:

$$L-L_۱=(۱۰۰-a_۳)a_۳+(۱۰-a_۲)a_۲-(a_۱-۱)a_۱\geqslant ۹۹-۷۲=۲۷$$

بنابراین: $L_۱<L-۲۷$

از نامساوی اخیرنتیجه می‌شودبعضی ازجملات سری(۱) حداکثر دو رقمی است که آنرا به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$L_q=۱۰j+k$$

جملات رشتهٔ $L_{q+۳}$ ، $L_{q+۲}$ ، $L_{q+۱}$ و ... با جانشین ساختن L_q بوسیلهٔ $۱۰k+j$ تغییر نمی‌کنند ؛ بنابراین‌کافیست خاصیت مفروض‌را برای اعداد L که درشرایط زیرصادقند به ثبوت برسانیم : $j\geqslant ۱$ $j\geqslant k\geqslant ۰$

اگر $L_q=۱۰j+k$ باشرط اخیر باشد، $L_{q+۱}$ یکی از اعداد جدول زیراست‌که نمایندهٔ مقادیر $j^۲+k^۲$ می‌باشد.

j \ k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۱	۲								
۲	۴	۵	۸							
۳	۹	۱۰	۱۳	۱۸						
۴	۱۶	۱۷	۲۰	۲۵	۳۲					
۵	۲۵	۲۶	۲۹	۳۴	۴۱	۵۰				
۶	۳۶	۳۷	۴۰	۴۵	۵۲	۶۱	۷۲			
۷	۴۹	۵۰	۵۳	۵۸	۵۶	۷۴	۸۵	۹۸		
۸	۶۴	۶۵	۶۸	۷۳	۸۰	۸۹	۱۰۰	۱۱۳	۱۲۸	
۹	۸۱	۸۲	۸۵	۹۰	۹۷	۱۰۶	۱۱۷	۱۳۰	۱۴۵	۱۶۲

در جدول فوق می‌توانیم اعداد ۱، ۱۰، ۱۰۰ و همچنین اعداد ۸۹، ۵۸، ۳۷، ۱۶، ۴، ۲۰، ۱۴۵ راکه در فرض به آن اشاره شده است حذف کنیم زیرا برای این مقادیر نتیجه‌بدست می‌آید .

به همین‌ترتیب می‌توانیم اعداد :

۱۳۰، ۹۸، ۹۰، ۸۵، ۸۱، ۸۰، ۷۳، ۶۱، ۵۲، ۵۰، ۴۰، ۲

راکه از اعداد قبلی ویا از اعداد دیگر جدول بدست می‌آیند (خواه باتبدیل دوری حروف، خواه با اضافه‌کردن‌یك‌صفر به‌آن) حذف کنیم‌و۲۸عددباقی می‌ماندکه‌عبارتنداز: ۵، ۸، ۹، ۱۳، ۱۸، ۲۵، ۲۶، ۲۹، ۳۲، ۳۴، ۳۶، ۴۱، ۴۵، ۴۹، ۵۳، ۶۴، ۶۵، ۶۸، ۷۲، ۷۴، ۸۲، ۹۷، ۱۰۶، ۱۱۳، ۱۱۷، ۱۲۸، ۱۶۲.

باید ببینیم که قضیه برای مقادیر فوق قابل قبول هست یا خیر .

نتایج این‌مطالعه را به صورت جدول نمایش می‌دهیم . در ستون اول اعدادی رامی‌نویسیم‌که قضیه را برای‌آنها تحقیق می‌کنیم ودردومین ستون ، رشتهٔ (۱) راکه متشکل‌از این اعداد است می‌نویسیم ؛ این رشته‌ها را وقتی به‌عددی که قبلا قضیه در موردش اثبات شده است رسیدیم ، متوقف می کنیم :

۲۵ و ۳۴ و ۵۳	۷۲	۸۵ و ۲۹ و ۲۵	۵
۶۵	۷۴	۵۲ و ۶۴	۸
۱۰۰ و ۶۸	۸۲	۸۱	۹
۳۷	۱۰۶	۶۱ و ۶۵	۱۸
۲ و ۱۱	۱۱۳	۱۰ و ۱۳	۳۲
۴۰ و۲۶و۵۱و۱۱۷ و ۶۹	۱۲۸	۵۰ و۱۷و۴۱ و ۴۵	۲۶
۴۱	۱۶۲	۱۳۰ و ۹۷	۴۹

چون در هرحالت به‌عدد ۱ یا به‌یکی‌از اعداد۸۹ ،۵۸، ۳۷ ، ۱۶ ، ۴ ، ۲۰ ،۴۲ و ۱۴۵ که متناوباً تکرار می‌شوند می‌رسیم ، قضیه مفروض ثابت شده است .

۳ - بخش پذیری بر ۱۱

ثابت کنید عدد $5^{5k+1}+4^{5k+2}+3^{5k}$ به‌ازاء هر مقدار ازعدد صحیح و مثبت k بر ۱۱ بخش پذیر است .

حل ـ از تقسیم قوای 5^{α} ، 4^{β} و 3^{γ} بر ۱۱ (α ، β ، γ نمایندهٔ اعداد صحیح غیر منفی کوچکتر یا مساوی با ۵ می‌باشند) باقیمانده‌هائی به‌صورت زیر خواهیم داشت :

باقیمانده	عدد	باقیمانده	عدد	باقیمانده	عدد
۱	3^{0}	۱	4^{0}	۱	5^{0}
۳	3^{1}	۴	4^{1}	۵	5^{1}
۹	3^{2}	۵	4^{2}	۳	5^{2}
۵	3^{3}	۹	4^{3}	۴	5^{3}
۴	3^{4}	۳	4^{4}	۹	5^{4}
۱	3^{5}	۱	4^{5}	۱	5^{5}

باقیمانده‌های‌اعداد 3^{γ} ، 4^{β} ، 5^{α} را بـر ۱۱ بـه $R(3^{\gamma})$ ، $R(4^{\beta})$ و $R(5^{\alpha})$ نمایش‌می‌دهیم. این‌باقیمانده‌ها را می‌توانیم در جدول فوق بخوانیم . فرض می‌کنیم k ، m ، n سه‌عـدد غیـر مشخص ، مثبت یـا صفر بـاشند . اعـداد 3^{5n} ، 4^{5m} ، 5^{5k} در تقسیم بر ۱۱ باقیمانده‌هایی مساوی باواحد خواهند داشت . بنابـراین ، اعـداد $5^{5k+\alpha}$ ، $4^{5m+\beta}$ ، $3^{5n+\gamma}$ دراین‌بخش‌پذیری‌بر ۱۱ باقیمانده‌های مربوطه‌یعنی $R(3^{\gamma})$ ، $R(4^{\beta})$ ، $R(5^{\alpha})$ را بدست می‌دهند. بنابراین حاصل $5^{5k+\alpha}+4^{5m+\beta}+3^{5n+\gamma}$ بر ۱۱ بخش پذیراست زیرا $R(5^{\alpha})+R(4^{\beta})+R(3^{\gamma})$ برآن بخش‌پذیراست . درحالت مذکور درصورت مسئله نیزاین شرط برقرار است زیرا در این حالت :

$$k=m=n \ ، \ \alpha=1 \ ، \ \beta=2 \ ، \ \gamma=0$$

می‌توانیم ۱۴ نوع دیگر از این مجموعها بدست آوریم که بر۱۱بخش پذیرباشند . و تمام این مجموعها بدین ترتیب بدست می‌آیدکـه از هر یك از سه ستون باقیمانده‌های جدول عددی‌را اختیارکنیم‌و مجموع اعداد حاصل بر ۱۱ بخش پذیر باشد .

***

(حل مسئله‌های ۴ و ۵ و ۶ که صورتهای‌آنها در زیر درج می‌شود در شمارهٔ بعدی مجله چاپ خواهد شد)

۴ـ عدد $3^{105}+4^{105}$ بر ۱۳ و ۴۹ و ۱۸۱ و ۳۷۹ بخش پذیراست ولی بر اعداد ۵و۱۱ بخش‌پذیر نیست .چگونه از این نتیجه اطمینان حاصل‌کنیم .

۵ـ حالت تلخیص شده‌ای از معادلهٔ فرما : اگر x وy و z و n عددهای صحیح‌مثبت و $n \geqslant z$ باشد، ثابت‌کنید‌که رابطهٔ زیر محقق نخواهد بود : $x^n+y^n=z^n$

۶ـ ده عدد x_1 و x_2 و . . . و x_{10} را طوری تعیین کنید که :

I ـ عدد x_1 در فاصلهٔ بستهٔ [۱ و ۰] یافت شود .

II ـ عددهای x_1 و x_2 در دو نیمهٔ مختلف فاصلهٔ[۱و۰] بدست آیند .

III ـ عددهای x_1 و x_2 و x_3 در سه ثلث مختلف از فاصلهٔ [۱و۰] بدست‌آیند .

IV ـ عددهای x_1 و x_2 و x_3 و x_4 در چهار چارك مختلف ازفاصلهٔ مزبور قرارگیرد و ... و بالاخر

V ـ عددهای x_1 و x_2 و... و. x_{10} همگی‌در ده‌دهك مختلف فاصلهٔ [۱و۰] یافت شوند .

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۵۷

۵۷/۱ ـ اگر عبارت جبری زیر مربع کامل باشد .

$$a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$$

ثابت‌کنید که a و b و c تشکیل تصاعد توافقی‌می‌دهند .

حل ـ با توجه به اینکه داریم :

$$b(c-a)=bc-ab+ac-ac=$$
$$-a(b-c)-c(a-b)$$

عبارت مفروض به‌صورت زیر در می‌آید :

$$(x-y)[a(b-c)x-c(a-b)y]$$

این عبارت وقتی مربع کامل است که عبارت داخل کروشه دارای‌عامل ($x-y$) باشدو این وقتی‌امکان‌پذیر است که‌داشته باشیم :

$$a(b-c)=c(a-b) \Longrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$$

۵۷/۲ ـ صحت رابطهٔ زیر را برای اجزاء مثلث ثابت‌کنید :

$$tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}\,tg\frac{C}{2}=\frac{abc}{R(a+b+c)^2}$$

حل ـ

$$tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}\,tg\frac{C}{2}=\frac{r}{p-a}\cdot\frac{r}{p-b}\cdot\frac{r}{p-c}$$
$$=\frac{r^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{pr^3}{S^2}=\frac{S}{p^2}=$$
$$=\frac{abc}{4Rp^2}=\frac{abc}{R(a+b+c)^2}$$

۵۷/۳ ـ نوع مثلثی را معلوم کنید که بین‌اندازه‌های ضلعهای آن رابطهٔ زیربر قراراباشد .

$$\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}$$

حل ـ رابطهٔ‌بالا پس از مرتب کردن و اختصار به‌صورت زیر در می‌آید :

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=$$
$$=ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)$$

اما با توجه‌به نامساوی عمومی $a^2+b^2\geqslant 2ab$ داریم:

$$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\geqslant$$
$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

و نتیجه می‌شود که تساوی بالا فقط وقتی برقرار است که داشته باشیم: $a=b=c$

۵۷/۴ ـ نقطهٔSرا داخل مثلث ABC اختیار می‌کنیم و از آن به رأسهای A و B و C وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تاضلعهای مقابل را به ترتیب در P و Q و R قطع کنند . اولا ثابت‌کنیدکه :

$$\frac{PS\cdot QS\cdot RS}{PA\cdot QB\cdot RC}<\frac{1}{27}$$

ثانیاً اگر داشته باشیم :

$$\frac{PS}{PA}=\frac{QS}{QB}=\frac{RS}{RC}$$

موضع نقطهٔ S را مشخص‌کنید .

حل ـ بنابه‌قضیهٔ ژرگون داریم :

$$\frac{PS}{PA}+\frac{QS}{QB}+\frac{RS}{RC}=1$$

حاصل ضرب سه عامل متغیر مثبت که حاصل جمع آنها مقداری ثابت است وقتی ماکسیمم است که عوامل مزبور با هم برابر باشند . به‌عبارت دیگرحاصل‌ضرب‌سه‌عامل مزبورازمکعب ثلث مجموع آنها بزرگتریا اقلا باآن برابر است و نامساوی مطلوب محقق می‌باشد .

ثانیاً داریم : $\frac{PS}{PA}=\frac{QS}{QB}=\frac{RS}{RC}=\frac{1}{3}$

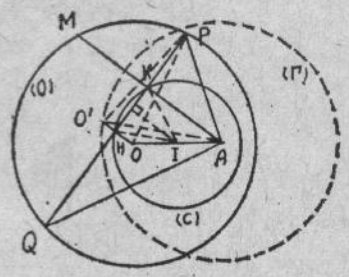
و S نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث می‌باشد .

۵۷/۵ ـ دایرهٔ (O) به مرکز O و به‌شعاع R و نقطهٔ ثابت A واقع در داخل آن مفروض است . M نقطهٔ متغیری است‌که دایرهٔ (O) رامی‌پیماید .

۱) اگر K وسط AM باشد مکان K را بیابید .

۲) عمود منصف AM دایرهٔ (O) را در P و Q قطع می‌کند . اگر H تصویر قائم O بر PQ باشد ثابت کنیدکه مکانH برمکان K منطبق است .

۳) اگر O' قرینهٔ O نسبت به PQ باشد، ثابت کنید که O' مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APQ است و مکان O' را تعیین کنید.



حل ـ داریم:

$$\frac{AK}{AM}=\frac{1}{2}$$

یعنی در تجانس به‌مرکز A و به نسبت $\frac{1}{2}$ نقطهٔ K مجانس نقطهٔ M می‌باشد، در تجانس مزبور، مجانس نقطهٔ O نقطهٔ I وسط AO است. پس مکان K دایره‌ای است به‌مرکز I و به‌شعاعی مساوی با نصف شعاع دایرهٔ (O).

۲) چهار ضلعی $AKHO$ ذوزنقهٔ قائم است که در آن زاویه‌های H و K قائمه می‌باشند. اگر J تصویر قائم I بر PQ باشد IJ با AK و OH موازی است و چون I وسط OA است پس J وسط HK بوده و IJ عمود منصف HK می‌باشد و داریم $IH=IK$ یعنی مکان H بر دایرهٔ مکان K منطبق می‌باشد.

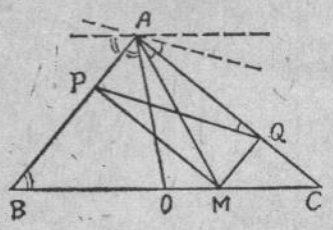
۳) در مثلث AOO' چون I وسط AO و H وسط OO' است پس AO' با دو برابر IH یعنی با R برابر می‌باشد و از طرف دیگر داریم $O'P=OP=R$ پس خواهیم داشت $O'P=O'A$ یعنی O' روی عمود منصف PA قرار دارد. OH عمود منصف PQ است پس O' روی عمود منصف PQ قرار دارد. بنابراین O' نقطهٔ تلاقی عمود منصفهای ضلعها یعنی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APQ می‌باشد.

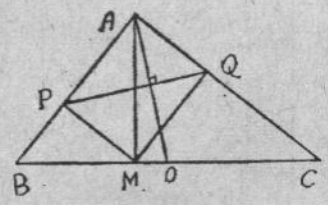
۵۷/۶ ـ مثلث ABC قائمه در زاویهٔ A مفروض است. نقطهٔ M را بر خط BC اختیار می‌کنیم. تصاویر M را بر AB و AC به‌ترتیب P و Q و وسط BC را O می‌نامیم. نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که:

الف ـ PQ بر AO عمود باشد.

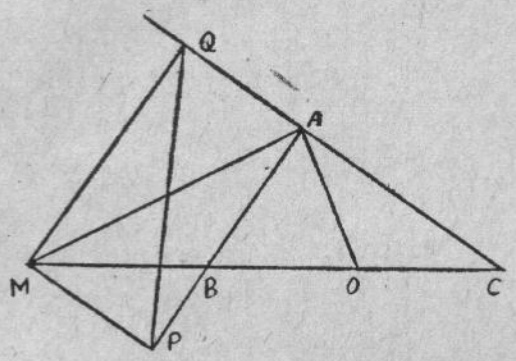
ب ـ PQ بر BC عمود باشد.

حل ـ چهار ضلعی $APMQ$ مربع مستطیل است و قرینهٔ AM نسبت به AB (یا AC) با PQ موازی است. همچنین قرینهٔ AO نسبت به AB (یا AC) با BC موازی خواهد بود. وقتی AO بر PQ عمود باشد قرینه‌ها آنها نسبت به AB و همچنین امتداد این قرینه‌ها یعنی AM و BC بر یکدیگر عمود خواهند بود. بنابراین برای اینکه PQ بر AO عمود باشد لازم و کافی است که نقطهٔ M پای ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC باشد.





ب ـ PQ وقتی بر BC عمود است که قرینهٔ آن نسبت به AB بر قرینهٔ BC نسبت به AB یعنی AM بر AO عمود باشد. در این حال برای تعیین M کافی است که در A عمودی بر AO اخراج کرد تا امتداد ضلع BC را در M قطع کند



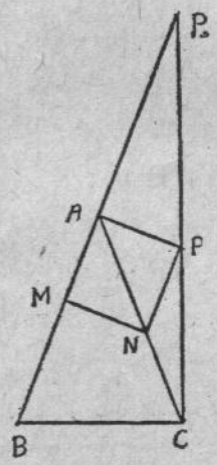
۵۷/۷ ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC را که در آن $AB=AC$ در نظر می‌گیریم. نقطهٔ M را بر AB و نظیر آن نقطهٔ N را بر AC چنان انتخاب می‌کنیم که $AM=CN$ باشد و متوازی‌الاضلاع $AMNP$ (به‌قطر AN) را می‌سازیم.

۱) وقتی M ضلع AB را بپیماید مکان P چیست؟

۲) نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که $AMNP$،

الف ـ مربع مستطیل باشد.

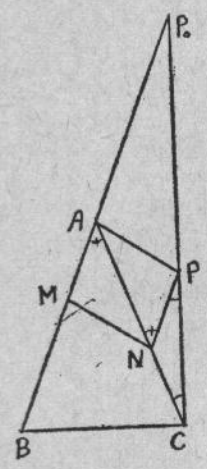
ب ـ لوزی باشد.



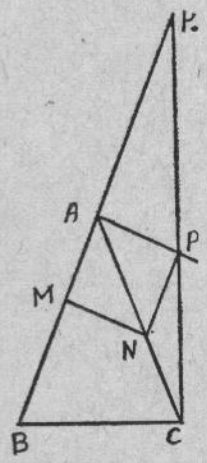
حل ـ خط CP را رسم می‌کنیم از تساویهای $AM=CN$ و $AM=NP$

نتیجه می‌شودکه $NP=NC$ وزاویهٔ NCP بازاویهٔ NPC برابر باشد . هریك از این دوزاویه نصف زاویهٔ ANP و در نتیجه نصف زاویهٔ BAC می‌باشد وچون نصف زاویهٔ BAC متمم زاویهٔ ACB است پس زاویهٔ PCB قائمه بوده و خط CP ثابت می‌باشد . وقتی M به A نزدیك شود P به C نزدیك می‌گرددووقتی P به B نزدیك شود P به نقطهٔ P_0 محل تلاقی CP با امتداد BA نزدیك می‌گردد و در سایر حالات که M بین A و B باشد P بین C و P_0 واقع خواهد بود. بنابراین‌مکان P قطعه خط CP_0 است .

۲) الف ـ برای اینکه چهارضلعی $AMNP$ مستطیل باشدلازم وکافی است که AP بر AB عمود باشد.دراین حال برای تعیین M ابتدا در A عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا CP_0 راقطع کند و P بدست آید . و از آنجا از روی P نقطهٔ M معین خواهد شد .



ب ـ برای اینکه چهارضلعی $AMNP$ لوزی باشد لازم‌وکافی است که AC نیمساز زاویهٔ PAM باشد . در این حال ابتداقرینه AB رانسبت به AC رسم می‌کنیم‌تا CP_0 را در P قطع کند و از روی P نقطهٔ M را تعیین‌می‌کنیم.



بحث ـ درحالتهای الف و ب مسئله وقتی جواب داردکه زاویهٔ A حاده باشد .

۵۷/۸ ـ معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$1+2\sin x+2\sin^2 x+\cdots+2\sin^{n-1}x+\sin^n x=0$$

حل ـ می‌توان نوشت :

$$(1+\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^{n-1}x)+$$
$$+\sin x(1+\sin x+\cdots+\sin^{n-1}x)=0$$

$$(1+\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^{n-1}x)=0$$

$$1+\sin x=0 \implies x=2K\pi-\frac{\pi}{2}$$

و عبارت داخل پرانتز دوم صفر نمی‌شود .

۵۷/۹ ـ مقادیر x و y و z را از سه‌معادلهٔ سه مجهولی زیر بدست آورید :

$$\begin{cases} x\sin\alpha+y\sin 2\alpha+z\sin 3\alpha=\sin 4\alpha \\ x\sin\beta+y\sin 2\beta+z\sin 3\beta=\sin 4\beta \\ x\sin\gamma+y\sin 2\gamma+z\sin 3\gamma=\sin 4\gamma \end{cases}$$

حل ـ معادلات بالابه صورتهای زیر خلاصه می‌شوند .

$$\begin{cases} 8\cos^3\alpha-4z\cos^2\alpha-2(y+2)\cos\alpha+z-x=0 \\ 8\cos^3\beta-4z\cos^2\beta-2(y+2)\cos\beta+z-x=0 \\ 8\cos^3\gamma-4z\cos^2\gamma-2(y+2)\cos\gamma+z-x=0 \end{cases}$$

از این روابط نتیجه می‌شود که $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم زیر می‌باشند.

$$8T^3-4zT^2-2(y+2)T+z-x=0$$

ازروی‌این‌معادله‌با استفاده از روابط بین‌ریشه‌ها وضرایب معادله خواهیم داشت :

$$x=8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$
$$y=2-4(\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha)$$
$$z=2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$

۵۷/۱۰ ـ ثابت‌کنید که اگر a و b دو عدد حقیقی و $a^2+b^2=1$ باشد به ازاء هرکمان x نامساوی زیر برقرار است :

$$a\sin x+b\cos x<1$$

و تساوی فقط وفقط وقتی بر قرار است‌که :

$$b=\cos x \quad \text{و} \quad a=\sin x$$

حل ـ می‌دانیم که :

$$2a\sin x<a^2+\sin^2 x$$
$$2b\cos x<b^2+\cos^2 x$$

از جمع عضوبه عضو این دونامساوی و با توجه به فرض مسئله بعد ازاختصار خواهیم داشت :

اگر داشته‌باشیم: $a\sin x+b\cos x<1$

$$a\sin x+b\cos x=1 \qquad (I)$$

با توجه به‌فرض $a^2+b^2=1$ نتیجه خواهد شد :

$$a=\sin x \quad \text{و} \quad b=\cos x \qquad (II)$$

وچنانچه رابطه‌های (II) را داشته باشیم از روی آن به‌سادگی رابطهٔ (I) بدست خواهد آمد . بنابراین رابطه‌های

(II) شرط لازم وکافی برای برقراری رابطهٔ (۱) می‌باشند .

۵۷/۱۱- تابع زیر مفروض است :

$$y=a|x+1|+|x-1|+(2-a)x-a-1$$

۱) با استفاده از نمودار تابع حدود a را تعیین کنید برای آنکه درازاء هرمقدار از y برای x فقط یك مقدار بدست آید.

۲) فرض می‌کنیم که شرط (۱) برقرار باشد . درصورتی که از تابع بالا مقدار x به‌صورت زیر بدست آمده باشد :

$$x=\alpha|y+1|+\beta|y-1|+\gamma y+\delta$$

مقادیر α و β و γ و δ را برحسب a حساب کنید.

حل- درازاء $x<-1$ داریم $|x+1|=-(x+1)$ و $|x-1|=x-1$ و از آنجا خواهیم داشت :

$$(I)\quad \begin{cases} y=-(2a-1)x-2a \\ x<-1 \end{cases}$$

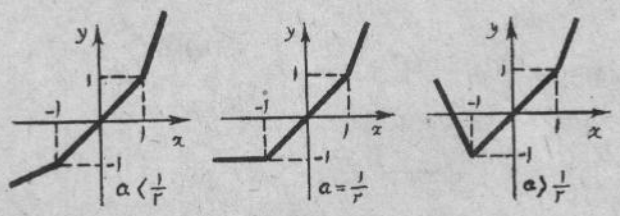
وقتی x در فاصلهٔ $[-1$ و $+1]$ باشد خواهیم داشت :

$$(II)\quad \begin{cases} y=x \\ -1<x<1 \end{cases}$$

واگر x درفاصلهٔ $]+1$ و $+\infty[$ باشد خواهیم‌داشت:

$$(III)\quad \begin{cases} y=3x-2 \\ x>1 \end{cases}$$

نمایش هندسی تابعهای II و III به a بستگی ندارندو نمایش هندسی تابع(I)قطعه خطی است‌که برحسب اینکه‌ضریب زاویهٔ آن $-2a+1$ مثبت ، صفریا منفی باشد با محور x ها زاویهٔ حاده، صفر، یا منفرجه می‌سازد. بنابراین نمایش‌هندسی تابع‌مفروض برحسب مقادیر مختلف a به‌یکی از صورتهای زیر می‌باشد :



وقتی درازاء هرمقدار y برای x فقط یك مقدار بدست می‌آیدکه خط به‌معادلهٔ $y=k$ نمایش هندسی تابع را فقط در یك نقطه قطع کند و این شرط فقط در مورد شکل مربوط به $a<\frac{1}{2}$ برقراراست.

۲) وقتی $a<\frac{1}{2}$ است ؛ الف ـ در ازاء $y<-1$ داریم $x<-1$ و :

$$y=-(2a-1)x-2a$$

$$x=\frac{-1}{2a-1}y-\frac{2a}{2a-1} \qquad (1)$$

از طرف دیگر داریم :

$$x=-\alpha(y+1)-\beta(y-1)+\gamma y+\delta$$

$$x=(-\alpha-\beta+\gamma)y-\alpha+\beta+\delta \qquad (1')$$

ب- در ازاء $-1<y<1$ داریم $-1<x<1$ و :

$$y=x \qquad (2)$$

$$x=\alpha(y+1)-\beta(y-1)+\gamma y+\delta$$

$$x=(\alpha-\beta+\gamma)y+\alpha+\beta+\delta \qquad (2')$$

ج- در ازاء $y\geqslant 1$ داریم $x\geqslant 1$ و :

$$y=3x-2 \Longrightarrow x=\frac{y}{3}+\frac{2}{3} \qquad (3)$$

$$x=\alpha(y+1)+\beta(y-1)+\gamma y+\delta$$

$$x=(\alpha+\beta+\gamma)y+\alpha-\beta+\delta \qquad (3')$$

از متحد قراردادن (۱) با (۱') و (۲) با (۲') و (۳) با (۳') داریم :

$$\begin{cases} -\alpha-\beta+\gamma=\dfrac{-1}{2a-1} \\ -\alpha+\beta+\delta=\dfrac{-2a}{2a-1} \\ \alpha-\beta+\gamma=1 \\ \alpha+\beta+\delta=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{1}{3} \\ \alpha-\beta+\delta=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه خواهد شد:

$$\alpha=\frac{a}{2a-1} \quad \text{و} \quad \beta=-\frac{1}{3}$$

$$\text{و}\ \gamma=\frac{a-2}{3(2a-1)} \quad \text{و} \quad \delta=-\frac{a+1}{3(2a-1)}$$

۵۷/۱۲- الف ـ اگرداشته باشیم:

$$f(x+y \text{ و } x-y)=xy+y^2$$

f(x و y) را تعیین کنید :

ب- اگر $y>0$ و داشته‌باشیم:

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

تابع f(x) را مشخص کنید .

ج ـ اگر $z=xf(\frac{y}{x})$ و به ازاء $x=1$ داشته باشیم $z=\sqrt{1+y^2}$ تابع $f(x)$ را بیابید .

حل ـ الف ـ فرض می‌کنیم :

$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}$$

$$f(u \text{ و } v)=\frac{u^2-v^2}{4}+\frac{(u-v)^2}{4}=\frac{u^2-uv}{2}$$

چون u و v را به ترتیب با x و y جانشین کنیم :

$$f(x \text{ و } y)=\frac{x^2-xv}{2}$$

ب ـ داریم :

$$f(\frac{y}{x})=\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}$$

و چنانچه $\frac{y}{x}$ را با x جانشین کنیم ؛

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$$

ج ـ در ازاء $x=1$ داریم :

$$\sqrt{1+y^2}=1\times f(y)$$

نتیجه خواهد شد :

$$f(x)=\sqrt{1+x^2} \text{ و } f(\frac{y}{x})=\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

$$z=x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

۵۷/۱۳ ـ حاصل جمع زیر را بدست آورید :

$$S_n=\cos(2\operatorname{Arcsin}x)+\cos(2\operatorname{Arcsin}^2x)+\dots+$$
$$+\cos(2\operatorname{Arcsin}nx)$$

حل ـ فرض می‌کنیم $\operatorname{Arcsin}nx=\alpha$ در این‌صورت خواهیم داشت :

$$nx=\sin\alpha \text{ و } \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2n^2x^2$$

$$S_n=(1-2x^2)+(1-8x^2)+\dots+(1-2n^2x^2)$$

$$S_n=n-2x^2(1+4+9+\dots+n^2)$$

$$S_n=n-2x^2[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)]$$

$$S_n=\frac{n}{3}[3-x^2(n+1)(2n+1)]$$

۵۷/۱۴ ـ مجموع زیر را درنظر می‌گیریم :

$$S_n=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)$$

ثابت کنید که مجموع کسرهای داخل هریك از پرانتزها از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است و ازآنجا نتیجه بگیرید که :

$$S_n>1+\frac{n}{2}$$

حل ـ فرض می‌کنیم که :

$$T_q=\frac{1}{2^{q-1}+1}+\frac{1}{2^{q-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^q}$$

این مجموع شامل :

$$[2^q-(2^{q-1}+1)]+1=2^q-2^{q-1}=2^{q-1}$$

جمله است که‌هریك از آنها بغیرازآخری از $\frac{1}{2^q}$ بزرگتر می‌باشد . بنابراین داریم .

$$T_q>\frac{1}{2^q}\times 2^{q-1} \quad \text{یا} \quad T_q>\frac{1}{2}$$

۵۷/۱۵ ـ ۱) نمایش‌هندسی تابع زیر را رسم کنید :

$$y=-1+|x+1|-2|x|+|x-1|$$

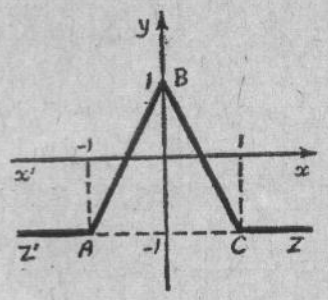
۲ ـ نامعادلهٔ زیررا حل کنید :

$$|x+1|+|x-1|>2|x|+\frac{2x+4}{5}$$

حل ـ ۱) برحسب اینکه هریك از عاملهای $(x+1)$ و x و $(x-1)$ مثبت . صفر یا منفی باشنددر ازاء مقادیر مختلف x عبارت تابع از روی جدول زیر معین می‌شود .

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$	
$-2\lvert x\rvert$	$2x$	$2x$	$-2x$	$-2x$	
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	
y	-1	$2x+1$	$-2x+1$	-1	
		-1	1	-1	

نمایش هندسی تابع به شکل مقابل می‌باشد که ازچهار قطعه خط $z'A$ ، AB ، BC و Cz تشکیل‌شده است .



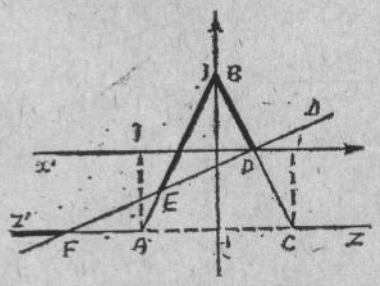
۲) نامعادلهٔ مفروض به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$-1+|x+1|-2|x|+|x-1|>\frac{2x-1}{5}$$

مشاهده می‌شود که جوابهای نامساوی عبارتند از طولهای نقاطی از نمایش هندسی تابع بالا که بالای خط Δ به معادلهٔ

$$y=\frac{2x-1}{5}$$

واقع‌اند . خط Δ نمایش هندسی تابع بالارادرسه نقطهٔ F و E و D قطع می‌کند که مختصات این نقاط به ترتیب زیر حساب می‌شود:



$$\begin{cases} y=\frac{2x-1}{5} \\ y=-1 \end{cases} \Longrightarrow F\left|\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases} y=\frac{2x-1}{5} \\ y=2x+1 \end{cases} \Longrightarrow E(-\frac{3}{4} \text{ و } -\frac{1}{2})$$

$$\begin{cases} y=\frac{2x-1}{5} \\ y=-2x+1 \end{cases} \Longrightarrow D(\frac{1}{2} \text{ و } 0)$$

در نتیجه جوابهای نامعادلهٔ مفروض عبارتند از :

$$x<-2 \quad \text{و} \quad -\frac{3}{4}<x<\frac{1}{2}$$

۵۷/۱۶ ـ عدد مثبت x را چنان تعیین کنید که اگر به خارج قسمت صحیح تقسیم یك بر آن مقدار $\frac{1}{2}$ را اضافه کنیم عکس آن عدد بدست آید .

حل ـ خارج قسمت صحیح تقسیم یك بر x بزرگترین عدد درستی است که در $\frac{1}{x}$ وجود دارد . این عدد را به‌صورت $E(\frac{1}{x})$ نشان می‌دهیم . بنابه فرض باید داشته باشیم .

$$(1) \qquad \frac{1}{2}+E(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$$

$$(2) \qquad xE(\frac{1}{x})=-\frac{x}{2}+1$$

جوابهای این معادله طولهای نقاط تلاقی نمایش هندسی تابع $y=xE(\frac{1}{x})$ و $y=-\frac{x}{2}+1$ می‌باشند. برای رسم نمایش هندسی تابع $y=xE(\frac{1}{x})$ ملاحظه می‌کنیم که :

$$x>1 \text{ یا } \frac{1}{x}<1 \Longrightarrow E(\frac{1}{x})=0 \text{ و } y=0$$

$$\frac{1}{2}<x<1 \text{ یا } 1<\frac{1}{x}<2 \Longrightarrow E(\frac{1}{x})=1 \text{ و } y=x$$

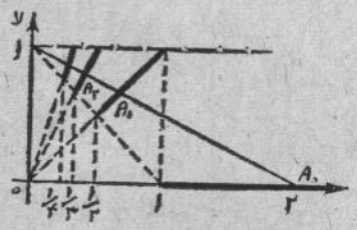
$$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2} \text{ یا } 2<\frac{1}{x}<3 \Longrightarrow E(\frac{1}{x})=2 \text{ و } y=2x$$

. . . . . .

$$\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n} \text{ یا } n<\frac{1}{x}<n+1 \Longrightarrow$$

$$E(\frac{1}{x})=n \text{ و } y=nx$$

نمایش‌هندسی تابع تشکیل شده است از قطعه‌ای ازمحور Ox که طولهای نقاط آن از یك بزرگتر است و قطعاتی از خطوط $y=x$ و $y=2x$ و... و $y=nx$ که طولهای نقاط آنها به ترتیب بین ۱و $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و . . . محصور می‌باشند مطابق باشکل روبرو .



روی این شکل خط به معادلهٔ $y=-\frac{x}{2}+1$ رارسم می‌کنیم. این خط نمایش هندسی تابع بالارادر نقاط A_0 و A_1 و A_2 و ... قطع می‌کند که طولهای این نقاط را به‌ترتیب x_0 و x_1 و x_2 و ... می‌نامیم به سادگی معلوم می‌شود که $x_0=2$ و ملاحظه می‌کنیم که $\frac{1}{2}<x_1<1$ بنابراین داریم :

$$E(\frac{1}{x_1})=1 \text{ و } x_1=-\frac{x_1}{2}+1 \Longrightarrow x_1=\frac{2}{3}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{1}{3} < x_2 < \frac{1}{2} \text{ و } E(\frac{1}{x_2}) = 2$$

$$2x_2 = -\frac{x_2}{2} + 1 \Longrightarrow x_2 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{4} < x_3 < \frac{1}{3} \text{ و } E(\frac{1}{x_3}) = 3$$

$$3x_3 = -\frac{x_3}{2} + 1 \Longrightarrow x_3 = \frac{2}{7}$$

. . . . . .

$$n < x_n < n+1 \text{ و } E(\frac{1}{x_n}) = n$$

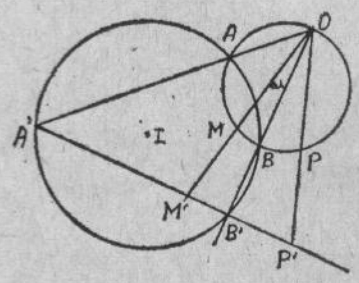
$$nx_n = -\frac{x_n}{2} + 1 \Longrightarrow x_n = \frac{2}{2n+1}$$

نتیجه آنکه عدد مطلوب هریك از جمله‌های رشتهٔ زیر می‌باشد :

$$2 \text{ و } \frac{2}{3} \text{ و } \frac{2}{5} \text{ و } \frac{2}{7} \text{ و } \ldots \text{ و } \frac{2}{2n+1} \text{ و } \ldots$$

۵۷/۱۷ ـ دایرهٔ ثابت (I) به مرکز I و دایرهٔ متغیر (ω) که بر دو نقطهٔ ثابت P و Q می‌گذرد و دایرهٔ (I) را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند مفروض است . مکان نقاط M از دایرهٔ (ω) را پیدا کنید که دسته اشعهٔ (P و M و B و A) O توافقی باشد .

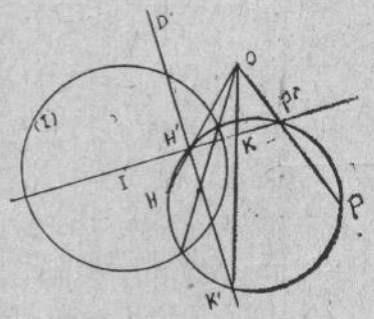
حل ـ شعاع مزدوج توافقی OP نسبت به OA و OB دایرهٔ ω را در M قطع می‌کند . اگر A' و B' نقاط تقاطع مجدد خطوط OA و OB با دایرهٔ I باشد خط A'B' با خطوط OM و OP در نقطه‌های M' و P'



برخورد می‌کند . در انعکاس به قطب O و به قوت $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$ دایرهٔ I ثابت باقی می‌ماند و دایرهٔ ω به خط A'B' تبدیل می‌شود که در این تبدیل M' نظیر M و P' نظیر P است . P' نقطهٔ ثابتی است و چون M' مزدوج توافقی P' نسبت به A' و B' است پس مکان M' عبارتست از قطبی P' نسبت به دایرهٔ I که این خط را D' می‌نامیم ، اگر P' داخل دایرهٔ I باشد مکان M' تمام خط D' و اگر P' خارج دایرهٔ I باشد مکان M' وتری از D' است که توسط دایرهٔ I جدا می‌شود . وقتی P' داخل دایرهٔ I است که دو نقطهٔ O و P طرفین دایرهٔ I واقع باشند وچنانچه این دونقطه هر دو در یك طرف دایرهٔ I واقع باشند نقطهٔ P' خارج دایرهٔ I واقع خواهد بود . درحالت خاصی که P' بر I مرکز دایره منطبق باشد خط D' در بینهایت قرار خواهد گرفت و این حالت وقتی است که دایرهٔ ω بر دایرهٔ I عمود باشد .

در تبدیل عکس‌انعکاس مزبور نقطهٔ M مبدل نقطهٔ M' است یعنی مکان M منعکس خط D' به انعکاس مذکور در فوق می‌باشد . درحالت کلی OP روی خط D' واقع نباشد مکان M یك دایره‌است که بر O می‌گذرد و اگر O روی D' واقع باشد این مکان‌خط مستقیم D منطبق بر D' خواهد بود.

برای تعیین این مکان نقطهٔ H' تصویر P' بر D' و K' نقطهٔ تلاقی D' با دایرهٔ محیطی مثلث PP'H' را در نظر می‌گیریم ، این‌دایره‌که در انعکاس فوق ثابت است خطوط OH' و OK' را مجدداً در H و K قطع می‌کند دایرهٔ مکان M با سه نقطهٔ O و H و K معین می‌شود .



۵۷/۱۸ ـ دو خط D و Δ غیر واقع در یك صفحه مفروض است . زاویهٔ این دو خط α و طول عمود مشترك آنها a است . دوصفحهٔ‌متغیرعمود برهم بر Δ گذشته و D را در M و M' قطع‌می‌کنند .

۱ ـ ثابت‌کنید که‌روی D نقطهٔ‌ثابت I وجود دارد بقسمی که $\overline{IM} \cdot \overline{IM'} = K$ باشد ، K مقداری است ثابت که مقدار آنرا بر حسب a و α حساب خواهید کرد .

۲ـ ثابت‌کنید که کرهٔ به قطر MM' بردایرهٔ ثابت C می‌گذرد و خط Δ را به زاویهٔ ثابت قطع می‌کند . دایرهٔ‌ثابت C را مشخص‌کنید .

حل ـ عمود مشترك D و Δ را IJ و نقاط تلاقی D را با دوصفحهٔ‌عمود بر هم‌مار بر Δ به M و M' نشان می‌دهیم نقطهٔ J را روی Δ اختیار می‌کنیم و بر این‌نقطه صفحهٔ P را عمود بر Δ می‌گذرانیم . تصاویر قائم نقاط M و M' و I را روی صفحهٔ P به ترتیب m و m' و i می‌نامیم . زاویهٔ

mjm' که مسطحهٔ فرجهٔ (M' و M و Δ) است قائمه می‌باشد و ازطرف دیگرچون IJ بر Δ عمود است با صفحهٔ P موازی است و درنتیجه ij ارتفاع مثلث قائم‌الزاویهٔ mjm' بوده وداریم:

$$\overline{im}\cdot\overline{im'}=-\overline{ij}^2=-a^2 \qquad (1)$$

اگر α زاویهٔ حادهٔ D با Δ باشد زاویهٔ D با تصویرش mm' برابر با $\frac{\pi}{2}-\alpha$ است و داریم:

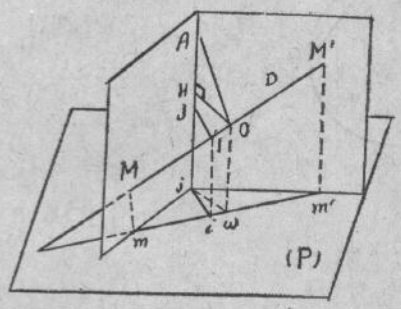
$$\overline{im}=\overline{IM}\sin\alpha \quad و \quad \overline{im'}=\overline{IM'}\sin\alpha$$

$$\overline{IM}\cdot\overline{IM'}\sin^2\alpha=-a^2$$

$$\overline{IM}\cdot\overline{IM'}=-\frac{a^2}{\sin^2\alpha}=k \qquad (2)$$

۲- اگر S و S' نقاطی از عمود مشترك IJ باشند که داشته باشیم $IS=IS'=\frac{a}{\sin\alpha}$ رابطهٔ (۲) به صورت زیر نوشته خواهدشد:

$$\overline{IM}\cdot\overline{IM'}=-IS^2=-IS'^2$$



از این رابطه‌معلوم می‌شود که مثلثهای MSM' و $MS'M'$ زاویه‌های S و S' قائمه هستند و کرهٔ به‌قطر MM' بر نقاط ثابت S و S' می‌گذرد. این کره شامل دایرهٔ ثابت C به قطر SS' است‌که صفحهٔ‌آن در I بر D عمود می‌باشد.

اگر خط Δ کره را در A و A' قطع کند زاویه‌ای که خط Δ با صفحهٔ مماس بر کره در A (یا A') می‌سازد زاویهٔ Δ با کره نامیده می‌شود. این زاویه متمم زاویه‌ای است‌که Δ با شعاع OA (یا OA') ازکره می‌سازد.

اگر O مرکزکرهٔ به‌قطر MM' و ω وسط mm' (تصویر O روی صفحهٔ P) و H تصویر O روی Δ باشد A و A' نقاط برخورد کره با Δ نسبت به H قرینه‌اند و اگر θ زاویهٔ کره با Δ باشد داریم:

$$\frac{\pi}{2}-\theta=OAH=OA'H$$

$$\sin OAH=\frac{OH}{OA}=\frac{\omega j}{OA}=\frac{\omega m}{OM}=\sin\alpha$$

$$OAH=\alpha \implies \theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

۵۷/۱۹- اگر P محل برخورد قطرهای AC و BD از چهارضلعی محدب $ABCD$ بوده وفاصله‌های P ازضلعهای $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ و $DA=d$ به ترتیب x و y و z و t باشد ثابت‌کنید که:

$$x+y+z+t<\frac{3}{4}(a+b+c+d)$$

حل- نیمسازهای زاویه‌های دوقطر AC و BD ضلعهای AB و BC و CD و DA را به‌ترتیب در R و S و T و U قطع می‌کنند. طبق قضیهٔ اردوس- موردل (یکان‌شمارهٔ ۵۳ صفحهٔ ۳۵۹) داریم:

$$2(PS+PT)<PB+PC+PD$$

$$2(PT+PU)<PC+PD+PA$$

$$2(PU+PR)<PD+PA+PB$$

$$2(PR+PS)<PA+PB+PC$$

$$4(PR+PS+PT+PU)<$$
$$3(PA+PB+PC+PD)$$

از طرفی داریم:

$$x+y+z+t<PR+PS+PT+PU$$

$$PA+PB+PC+PD<(a+b+c+d)$$

درنتیجه نامساوی مطلوب محقق می‌باشد.

۵۷/۲۰- اگر d_a و d_b و d_c طولهای نیمسازهای داخلی، m_a و m_b و m_c طولهای میانه‌ها و r و R شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی و p نصف محیط یك‌مثلث باشد ثابت کنید که:

$$\Sigma d_a^6<p^4(p^2-12rR)<\Sigma m_a^6$$

حل- اگر S مساحت مثلث باشد داریم:

$$p^4(p^2-12rR)=p^4\left(p^2-12\frac{S}{p}\cdot\frac{abc}{4S}\right)=$$

$$=p^4\left(p^2-\frac{3abc}{p}\right)=p^3(p^3-3abc)=$$

$$=p^3[(p-a)^3+(p-b)^3+(p-c)^3]$$

$$d_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}<\sqrt{p(p-a)}$$

تساوی وقتی است‌که $b=c$ باشد. درمورد d_b و d_c نامساویهای مشابهی خواهیم داشت ودرنتیجهٔ آن داریم:

$$\Sigma d_a^6<p^3(\Sigma(p-a)^3)$$

که تساوی وقتی است‌که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

همچنین داریم:

$$m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$$

$$=\frac{1}{4}[(b+c-a)(b+c+a)+b^2+c^2-2bc]=$$

$$=(p-a)p+\frac{1}{4}(b-c)^2$$

$$m_a^2 \geqslant p(p-a)$$

که تساوی درحالت $b=c$ می‌باشد. باتوجه به‌رابطه‌های مشابه برای m_b ، m_c خواهیم‌داشت:

$$\Sigma m_a^6 \geqslant p^3(\Sigma(p-a)^3)$$

تساوی در حالتی است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

۵۷/۲۱ـ جسمی به جرم ۱ کیلوگرم روی سطح بدون اصطکاکی تحت تأثیر نیروی F چنان حرکت می‌کند که همیشه بین نیرو و سرعت و زمان حرکت رابطهٔ:

$$F=\frac{18t^3}{V}(MKS)$$

برقرار است. مطلوبست معادلهٔ حرکت، سرعت وشتاب جسم و معادلهٔ کار انجام شده توسط نیروی F.

حل ـ

$$F=M\gamma \Longrightarrow \frac{18t^3}{V}=1\times\gamma \qquad 18t^3=V\gamma$$

اگر ازطرفین‌تابع اولیه بگیریم (درلحظهٔ شروع سرعت صفر بوده‌است)

$$9t^4=V^2+C \qquad (V=0 \quad t=0)\Longrightarrow C=0$$

$$9t^4=V^2 \quad \text{یا} \quad V=\pm 3t^2$$

$$x=\pm t^3 \ ، \ \gamma=\pm 6t$$

علامت منفی برای عکس‌جهت محوراست یعنی:

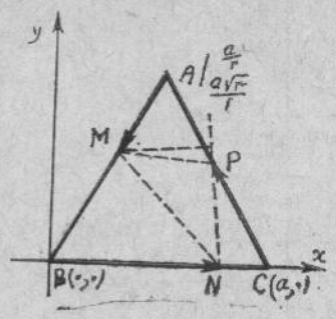
$$x=t^3 \ ، \ V=3t^2 \ ، \ \gamma=6t$$

طبق قضیهٔ فرس‌ویو :

$$W=\frac{1}{2}MV^2=\frac{9}{2}t^4$$

۵۷/۲۲ـ ازسه‌نقطهٔ A وB وC که به‌فاصلهٔ a ازیکدیگر قرار دارند سه متحرك با سرعتهای ثابت v_1 و v_2 و v_3 در یك لحظه در جهتهای $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CA}$ وبرهمان‌امتداد آغاز به حرکت می‌کنند. در یك لحظه سطح محاصره شده توسط سه متحرك به‌کمترین مقدار خود می‌رسدآن لحظه را محاسبه‌کنید ومکان مرکزثقل این مثلث را درهرلحظه پیدا کنید.

حل ـ این‌مسئله‌به‌روش تحلیلی به‌آسانی حل‌می‌شودداریم:



$$\overline{AM}=x_1=v_1t$$

$$\overline{BN}=x_2=v_2t$$

$$CP=x_3=v_3t$$

در این صورت خواهیم‌داشت:

$$\frac{x_N}{\frac{a}{2}}=\frac{a-v_1t}{a}\Longrightarrow$$

$$x_M=\frac{a-v_1t}{2} \ و \ y_M=\frac{(a-v_1t)\sqrt{3}}{2}$$

$$N\begin{cases}x_M=v_2t\\ y_N=0\end{cases} \quad و \quad P\begin{cases}x_P=\dfrac{2a-v_3t}{2}\\ y_P=v_3t\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\overline{PN}=\sqrt{\left(\frac{2a-v_3t-2v_2t}{2}\right)^2+\left(v_3t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

برای محاسبهٔ طول ارتفاع MH لازم است معادلهٔ خط PN نوشته شود.

$$\overline{MH}=\left|\frac{(2a-v_3t-2v_2t)\cdot\frac{(a-v_1t)\sqrt{3}}{2}-}{\sqrt{(2a-v_3t-2v_2t)^2+(-v_3t\sqrt{3})^2}}\right.$$

$$\left.\frac{-\frac{v_3t(a-v_1t)\sqrt{3}}{2}+v_2v_3t^2\sqrt{3}}{\sqrt{(2a-v_3t-2v_2t)^2+(-v_3t\sqrt{3})^2}}\right|$$

$$S=\frac{1}{2}|\overline{MH}|\cdot\overline{PN}=\frac{\sqrt{3}}{8}\Big[2a^2-av_3t-2v_2ta-$$

$$-2av_1t+v_1v_3t^2+2v_1v_2t^2-av_3t+v_1v_3t^2+2v_2v_3\Big]$$

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\Big[(v_1v_2+v_2v_3+v_1v_3)t^2-$$

$$-(v_1+v_2+v_3)at+a^2+v_1v_3\Big]$$

$$S'=0 \Longrightarrow$$

$$2(v_1v_2+v_2v_3+v_1v_3)t-(v_1+v_2+v_3)a=0$$

$$t=\frac{a(v_1+v_2+v_3)}{2(v_1v_2+v_2v_3+v_1v_3)}$$

$$x_G=\frac{x_M+x_N+x_P}{3}=\frac{3a+(2v_2-v_1-v_3)t}{6}$$

$$y_G=\frac{y_M+y_N+y_P}{3}=\frac{\sqrt{3}(v_3-v_1)t-a\sqrt{3}}{6}$$

و از حذف پارامتر t بین مختصات مرکز ثقل معادلهٔ مکان نمایش خط زیر است .

$$\frac{6x-3a}{6y-\sqrt{3}a}=\frac{2v_2-v_1-v_3}{\sqrt{3}(v_3-v_1)}$$

۵۷/۲۳ ـ تجزیهٔ عنصری کیفی یك مایع شربتی شکل با مزهٔ شیرین تنها وجود عناصر C ، H و O را در این جسم ثابت کرده است . تجزیهٔ عنصری کمی همین جسم نتایج زیر را داده است. درصد کربن ۳۸/۹۸ ، درصد ئیدرژن ۸/۹۱ .

جرم ملکولی این جسم که با استفاده از روش نزول نقطهٔ انجماد بدست آمده درحدود ۹۱ می‌باشد . ازطرف دیگر مطالعهٔ خواص شیمیائی آن نشان داده است که این جسم شامل سه عامل می‌باشد . فرمول گستردهٔ جسم مزبور را رسم کنید .

حل ـ نخست فرمول جسم را $C_mH_nO_p$ درنظر می‌گیریم و به ازاء جرم ملکولی ۱۰۰ تعداد اتمهای عناصر را در این فرمول پیدا می‌کنیم .

$$m=\frac{38/98}{12}=3/25$$

$$n=\frac{8/91}{1}=8/91 \Longrightarrow C_{3/25}H_{8/91}O_{3/26}$$

$$p=\frac{52/11}{16}=3/26$$

همهٔ این ضرایب را بر کوچکترین آنها بخش می‌کنیم :

$$\frac{3/25}{3/25}=1 \ , \ \frac{8/91}{3/25}=2/74 \ , \ \frac{3/26}{3/25}\simeq 1$$

بنابراین ساده‌ترین فرمول جسم $C_1H_{2/74}O_1$ خواهد شد که عددها به ازاء جرم ملکولی آن برابر

$12\times1+1\times2/74+16\times1=30/74$ و فرمول جسم خواهد شد : $(CH_{2/74}O)_n$ که در آن n می‌تواند اعداد ۱و۲و۳و۴ و غیره را اختیار کند . چون جرم ملکولی تقریبی آن ۹۱ است بنابراین $n=3$ و فرمول خام جسم $C_3H_8O_3$ است .

این جسم دارای سه عامل الکلی (سه مجموعهٔ OH) است از آنجا فرمول آن $C_3H_5(OH)_3$ و کربور متناظر آن C_3H_8 (پروپان) است . چون هر کربن بیش از یك مجموعهٔ OH نمی‌تواند داشته باشد پس تنها فرمول گستردهٔ ممکن:

$$CH_2OH-CHOH-CH_2OH$$

و نام آن گلیسیرین یا پروپان تریول است .

۵۷/۲۴ ـ تجزیهٔ عنصری یك مایع آلی نتایج زیر را داده است : کربن ۷۴/۱ درصد ، ئیدرژن ۸/۶ درصد ، ازت ۱۷/۳ درصد چگالی به حالت بخار جسم ۵/۶ می‌باشد .

الف ـ فرمول این جسم چیست ؟

ب ـ چه حجمی از هوا برای سوختن یك گرم آن لازم است ؟

حل ـ الف :

$$m_O=m-(m_C+m_H+m_N)=$$
$$=100-(74/1+8/6+17/3)=0$$

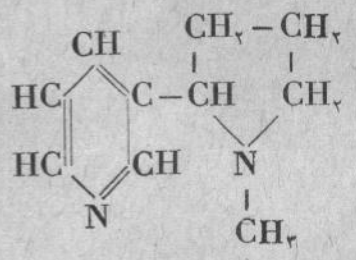
$$M=29d=29\times5/6=162/4\simeq162$$

$$\frac{m}{M}=\frac{mC}{12X}=\frac{mH}{y}=\frac{mN}{14Z}$$

$$\frac{100}{162}=\frac{74/1}{12X}=\frac{8/6}{y}=\frac{17/3}{14Z}$$

فرمول بسته جسم $C_{10}H_{14}N_2$

تبصره ـ این فرمول متعلق به آلکالوئید بدون اکسیژنی به نام نیکوتین است که گسترده آن به شکل زیر می‌باشد :



ب ـ جرم ملکولی جسم برابر است :

$$120+14+28=162$$

فرمول احتراق کامل آن از این قرار است :

$$C_{10}H_{14}N_2+\frac{27}{2}O_2 \rightarrow 10CO_2+7H_2O$$

$$162 \qquad 13/5\times22/4\times5$$

$$1 \qquad x=\frac{13/5\times22/4\times5}{162}=8/88 \text{ لیتر هوا}$$

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۵۸/۱ ـ عبارت زیر را به‌صورت مجموع چندین مربع تبدیل کنید و از روی آن معلوم کنید که به ازاء چه مقدار از x و y و z این عبارت کمترین مقدار خود را دارا می‌باشد و این کمترین مقدار را معلوم کنید :

$$P=2x^2+2y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+$$
$$+2x-2y+3$$

۵۸/۲ـ فرستنده: **حسین دهقان** از دبیرستان سعدی اصفهان .

در مثلث ABC نیمسازهای داخلی زاویه های B و C یکدیگر را در O ، عمود منصف BO ضلع AB را در O_1 و عمود منصف CO ضلع AC را در O_2 قطع می‌کند . ثابت کنید سه نقطهٔ O و O_1 و O_2 بر یك استقامت واقع‌اند ،

کلاس چهارم ریاضی

۵۸/۳ ـ در عبارت زیر مقدار ضریبهای a و b را چنان تعیین کنید که عبارت نسبت به دو حرف x و y متقارن باشد :

$$(a+b-3)x^4-(a+b-2)x^3y+$$
$$+(a-3)x^2y^2-(a-2)xy^3+2y^4$$

۵۸/۴ ـ فرستنده : **اسماعیل بابلیان** دانشجوی ریاضی دانشسرای عالی .

ثابت کنید که اگر داشته باشیم :

$$\frac{x}{l(mb+nc-la)}=\frac{y}{m(nc+la-mb)}=$$
$$=\frac{z}{n(la+mb-nc)}$$

خواهیم داشت :

$$\frac{l}{x(by+cz-ax)}=\frac{m}{y(cz+ax-by)}=$$
$$=\frac{n}{z(ax+by-cz)}$$

۵۸/۵ ـ ترجمه از فرانسه .

مربع $ABCD$ مفروض است . از A موازی با قطر BD رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع CD را در E قطع کند و BE را وصل کرده عمود CH را بر BE رسم می‌کنیم . ثابت کنید که عمود منصف AH از رأس D می‌گذرد .

۵۸/۶ ـ ترجمه از فرانسه .

در مربع مفروض $ABCD$ مثلث متساوی الاضلاع AMN را چنان محاط کرده‌ایم که یك رأس آن بر A ، رأس M از آن بر ضلع BC و رأس N از آن بر ضلع CD قرار دارد. ثابت کنید که MN بر AC عمود است .

۵۸/۷ـ ترجمه از روسی .

مقدار x را از رابطهٔ زیر بدست آورید :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{ax-b}=\left(\frac{b}{a}\right)^{bx-a}$$

۵۸/۸ـ ترجمه از روسی .

به فرض اینکه داشته باشیم :

$$\log_a\left\{1+\log_b\left[1+\log_c(1+\log_p x)\right]\right\}=0$$

مقدار x را تعیین کنید .

کلاس پنجم طبیعی

۵۸/۹ـ از مصطفی گودرزی طائمه

در لوزی $ABCD$ طول قطر BD دو برابر طول قطر AC و

برابر با $4\sqrt{5}$ می‌باشد . اگر $P(2 \text{ و } 3)$ نقطهٔ تلاقی دوقطر و $A(\alpha \text{ و } 3\alpha)$ باشد مختصات چهار رأس لوزی را حساب کنید .

۵۸/۱۰ـ ده ضلعی منتظم $M_1M_2\cdots M_{10}$ را دردایرهٔ مثلثاتی محاط کرده‌ایم . اگر A مبدأ کمانها و اندازهٔ کمان $\widehat{AM_1}$ برابر با ۲۰ گراد باشد اندازهٔ کلی کمانی را تعیین کنید که از روی آن بتوان همهٔ رأسهای ده ضلعی مزبور را تعیین کرد .

کلاس پنجم ریاضی

۵۸/۱۱ـ از کاظم حافظی .

اگر x_1 و x_2 و x_3 و x_4 ریشه‌های معادلهٔ زیر باشند

$$x^4+ax^2+x+1=0$$

مطلوبست تعیین مجموع زیر وشرط امکان آن :

$$S=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\frac{1}{x_4+1}$$

۵۸/۱۲ ـ از اکبر ابراهیمیان

دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیررا حل کنید :

$$\begin{cases}\dfrac{(x^2+xy+y^2)^3}{(x^2y+xy^2)^2}=\dfrac{27}{4}\\ x+y=2a\end{cases}$$

۵۸/۱۳ ـ از داوید ریحان

اگر a و b و c سه عدد مثبت و α زاویهٔ حاده باشد و داشته باشیم :

$$a^2tg^3\alpha+b^3cotg^2\alpha+c^3cotg\alpha=3abc$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$c^5=ab^4$$

۵۸/۱۴ ـ به فرض اینکه داشته باشیم :

$$tgx=a+1 \quad \text{و} \quad 2cosx=(a+1)\sqrt{2}$$

مقدار a و اندازهٔ کلی کمان x را معلوم کنید .

۵۸/۱۵ ـ دوصفحهٔ P و Q در خط Δ متقاطع‌اند و نقطهٔ A در خارج آنها واقع است . یك نقطهٔ B در صفحهٔ P ویك نقطهٔ C درصفحهٔ Q چنان تعیین کنید که‌اگر B' قرینهٔ A نسبت به B و C' قرینهٔ A نسبت به C باشد خط $B'C'$ با خط Δ متقاطع گردد . مسئله چندجواب دارد ؟

کلاس ششم طبیعی

۵۸/۱۶ ـ اگر مکان هندسی نقطهٔ :

$$M(x=sin\alpha-cos\alpha \quad \text{و} \quad y=tg\alpha+cotg\alpha)$$

منحنی به معادلهٔ :

$$y=\frac{k}{ax^2+bx+c}$$

باشد مقادیر ضریبهای a و b و c و k را تعیین کنید .

۵۸/۱۷ ـ در مسئلهٔ قبل مقدار α را چنان تعیین کنید که رابطهٔ $x^2+y=0$ نیز برقرار باشد .

کلاس ششم ریاضی

جبر

۵۸/۱۸ ـ از راه‌محاسبه‌مختصات نزدیکترین و دورترین نقاط منحنی به معادلهٔ :

$$x^2+y^2-xy-2=0$$

را از مبدأ مختصات پیدا کنید .

۵۸/۱۹ ـ از سیدجلال آشفته دانشجوی دانشگاه آریامهر .

پاره خط MN به‌طول l همواره متکی برمحورهای‌مختصات است بقسمی که M برمحور طولها و N برمحور عرضها واقع می‌باشد .دردو نقطهٔ M و N دو خط به‌ترتیب برمحورطولها و بر MN عمود اخراج‌می‌کنیم که‌یکدیگررا در P تلاقی‌می‌کنند. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P را تعیین کنید .

۵۸/۲۰ ـ از محمود لشکری زاده بمی دانشجوی دانشکدهٔ علوم اصفهان :

بـرمحور Ox نقطهٔ ثابت A را درنظرگـرفته آن را به‌نقطهٔ متغیر M واقع بر Oy وصل می‌کنیم و از M خطی رسم‌می‌کنیم که با MA زاویهٔ α بسازد و محور Ox را در B سمت راست A قطع بکند . اگر ω مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMB باشد معادلهٔ مکان ω را بدست‌آورید .

مثلثات

۵۸/۲۱ ـ از جواد جمشیدی دانشجوی دانشگاه آریامهر .

زاویهٔ قائمهٔ xOy و دایرهٔ به مرکز O مفروض است. نقطهٔ A را بر Ox و نقطهٔ B را بر Oy انتخاب می‌کنیم و از A و B مماسهای بردایره رسم می‌کنیم که نقاط تماس آنها با دایره خارج زاویهٔ xOy واقع باشد . اگر α زاویهٔ حادهٔ بین دومماس‌مزبورباشد R شعاع‌دایره را برحسب $OA=a$ و α و $OB=b$ حساب کنید .

۵۸/۲۲ ـ از ناصر شامیر

به فرض‌اینکه x زاویهٔ حاده‌باشد ثابت کنید که :

$$\cos x \cos^{2}\frac{x}{2} \cos^{4}\frac{x}{4} \cdots \cos^{2^n}\frac{x}{2^n} \geqslant \cos^n x$$

حساب

۵۸/۲۳ ـ از سعید فرشاد دانشجوی ریاضی دنشگاه تبریز .

رقمهای a و b و c را از رابطهٔ زیر بدست‌آورید :

$$\overline{aaa}+\overline{bbb}+\overline{ccc}=\overline{accb}$$

۵۸/۲۴ ـ از مصطفی گودرزی طائمه کرسی ریاضیات دانشکدهٔ افسری .

رقمهای عدد $\overline{2bcde2}$ راپیدا کنیدبافرض آنکه‌عددهای $\overline{e2}$ و $\overline{cd}$ و $\overline{2b}$ تصاعد حسابی با قدر نسبت d بسازند .

۵۸/۲۵ ـ مسعود حبیب‌الله‌زاده .

عدد $\overline{mcdu}$ رابه مبنای x می‌بریم وبسط‌می‌دهیم‌عبارت

$$x^4-8x^3-7x^2-8x+11$$

حاصل می‌شود . عدد مزبور و مبنای x را پیدا کنید .

هندسه و مخروطات

۵۸/۲۶ ـ ترجمهٔاز فرانسه .

درمتوازی الاضلاع $ABCD$ از رأس C عمودهای CE و CF رابه‌ترتیب بر AB و BD رسم می‌کنیم . با استفاده‌از حاصل ضرب داخلی بردارها ثابت کنیدکه :

$$\overline{BD}\cdot\overline{BF}=\overline{BC}^2+\overline{BA}\cdot\overline{BE}$$

۵۸/۲۸ ـ ترجمه از فرانسه .

در یك صفحه دو نقطهٔ ثابت A و O در نظر می‌گیریم مکان نقاط M از صفحه را تعیین کنیدکه اگر M' مبدل M در دوران به‌مرکز O وبه زاویهٔ معین α باشد خط MM' از نقطهٔ A بگذرد .

مورد استعمال ـ مکان نقاط M از صفحه را تعیین‌کنید که اگر M_1 و M_2 قرینه‌های M نسبت به دو خط متقاطع مفروض D_1 و D_2 باشد خط M_1M_2 ازنقطهٔ ثابت A بگذرد.

مسائل متفرقه

برای داوطلبان امتحانات ورودی دانشکده‌ها

۵۸/۲۸ ـ از سعید فرشاد .

اگر a و b و c و . . و l اندازه‌های ضلعهای یك n ضلعی و p محیط آن باشد ثابت‌کنیدکه :

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\cdots+\frac{l}{p-l}\geqslant\frac{n}{n-1}$$

۵۸/۲۹ ـ از محمد کشتی آرای .

اگر $a>b>0$ و m و n عددهای صحیح بزرگتراز یك باشند ثابت‌کنیدکه :

$$\sqrt[m]{a^n}-\sqrt[m]{b^n}\geqslant\frac{b}{a}\sqrt[m]{a^n}-\frac{a}{b}\sqrt[m]{b^n}$$

۵۸/۳۰ ـ ترجمهٔ ازفرانسه توسط**محمود محمودی مجدآبادی**دانشجوی ریاضی دانشسرای عالی .

صفحه‌ای یالهای SA و SB و SC از کنج سه وجهی $SABC$ را به ترتیب در A' و B' و C' قطع می‌کند . خطوط BC' و CB' یکدیگر را در A_1 ، AC' و CA' یکدیگررادر B_1، AB' و BA' یکدیگررادر C_1قطع می‌کنند. همچنین SA_1 و SB_1 و SC_1 خطوط BC و CA و AB را به‌ترتیب در A_2 و B_2 و C_2قطع می‌کنند.

۱) ثابت‌کنیدکه خطوط AA_2 و BB_2 و CC_2 در یك نقطهٔ O متقارب‌اند.

۲) خطوط SO و AA_1 و BB_1 و CC_1 در یك‌نقطهٔ I متقارب‌اند .

۵۸/۳۱ ـ از داوید ریحان دانشجوی‌دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران .

مثلث ABC محاط در دایرهٔ O مفروض است . اولا

ارتفاعهای AK و BL و CM دایرهٔ محیطی مثلث را در A' و B' و C' قطع می‌کنند. اگر مساحتهای مثلثهای ABC و A'B'C' را به‌ترتیب با S و S' نشان دهیم ثابت کنید که:

$$S' < S$$

ثانیاً رأسهای مثلث را به I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در A" و B" و C" قطع کنند. اگر S" مساحت مثلث A"B"C" باشد ثابت کنید که: $S'' > S$

۵۸/۳۲ ـ از داوید ریحان:

اگر a و b و c و d اندازه‌های ضلعها و M نقطهٔ تلاقی قطرهای چهار ضلعی محاطی ABCD باشد ثابت کنید که:

$$BM \cdot MD = AM \cdot MC < \frac{ac+bd}{4}$$

۵۸/۳۳ ـ از جمشید موری دانشجوی دانشگاه مشهد

مطلوبست رسم منحنی نمایش تابع زیر:

$$|y| + |x^2 - 1| = 1$$

۵۸/۳۴ ـ از جمشید موری:

منحنی نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید.

$$|x^2 - 1| + |y^2 - 1| = 1$$

۵۸/۳۵ ـ ترجمهٔ: **جعفر آقایانی چاوشی**

ABCDE یك پنج ضلعی محدب محاط در دایره‌ای به شعاع واحد است و AE قطری از این دایره می‌باشد. ثابت کنید بین اضلاع AB=a و BC=b و CD=c و DE=d نامساوی زیر برقرار است.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4$$

۵۸/۳۶ ـ ترجمهٔ **جعفر آقایانی چاوشی**

هرگاه I و O و H و G به‌ترتیب مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، مرکز دایرهٔ محیطی، مرکز ارتفاعی و مرکز ثقل مثلث ABC باشد نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$9\left(\frac{\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2}{\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2}\right) - \left(\frac{AH \cdot BH \cdot CH}{AI \cdot BI \cdot CI}\right) < 8$$

۵۸/۳۷ ـ ترجمهٔ **جعفر آقایانی**

هرگاه S مساحت مثلث ABC و a و b و c اندازه‌های ضلعهای آن باشد ثابت کنید که:

$$abc \geq \frac{8S^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{4}}}$$

تساوی در چه حالت برقرار است؟

۵۸/۳۸ ـ ترجمهٔ **جعفر آقایانی**

مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد مفروض است. ثابت کنید که چگونه می‌توان با یك برش مستقیم مثلث را به‌دو قطعه تجزیه کرد بقسمی که اگر دوقطعهٔ بدست آمده را دنبال هم پهلوی مثلث اول قرار دهیم شکل محدبی با قطر ماکسیمم حاصل شود.

مسائل فیزیك و مکانیك

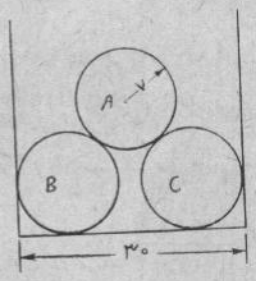
زیر نظر: حسین فرمان

۵۸/۳۹ ـ از محمد علی حسینی

هرگاه چند مقاومت R_1 و R_2 و... و R_n همطول و همجنس و با مقاطع مختلف را بطور انشعابی ببندیم مقطع معادل آنها را برحسب سطح مقطع مقاومتهای فوق حساب کنید (مقاومت معادل همطول و همجنس با مقاومتهای مزبور است).

۵۸/۴۰ ـ فرستنده **سعید دائیان** دانشجوی پلی‌تکنیك

سه گلوله که وزن هر یك ۲۰/۵ پاند و قطر هر یك ۱۴ اینچ است درون یك جعبه به‌پهنای قاعدهٔ ۳۰ اینچ مطابق شکل قرار دارند.



مطلوبست محاسبهٔ:

۱) عکس‌العمل گلولهٔ B روی گلولهٔ A

۲) عکس‌العمل دیوار جعبه بروی گلولهٔ B

۳) عکس‌العمل زمین روی گلولهٔ C

۵۸/۴۱ ـ فرستنده: **سید جلال آشفته** دانشجوی دانشگاه آریامهر

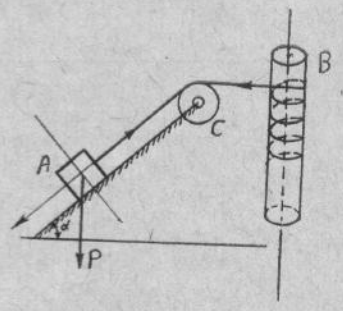
معادلهٔ حرکت یك ذره که دارای حرکت نوسانی است به صورت $x = a \sin kt$ است. چنانچه درموقعیت $x = x_1$ سرعت ذره $v = v_1$ ودر موقعیت $x = x_2$ سرعت آن $v = v_2$ باشد مطلوبست محاسبهٔ دامنهٔ نوسانات a و سرعت زاویه‌ای k.

۵۸/۴۲ ـ فرستنده: **سید جلال آشفته**

یك جسم به وزن P در امتداد افقی یك سطح ناصاف مسافت ۲۴/۵ متر را درمدت ۵ ثانیه ازلحظهٔ سکون طی می‌کند. مطلوبست ضریب اصطکاك بین جسم و سطح.

۵۸/۴۳ ـ فرستنده: **سیدجلال آشفته ـ محمدرضا یزدان.**

بار A به وزن P به طرف پائین سطح شیبداری که باافق زاویهٔ α می‌سازد مطابق شکل زیر حرکت می‌کند . وزنهٔ P بوسیلهٔ ریسمانی که از قرقرهٔ C می‌گذرد دور استوانهٔ B پیچیده می‌شود. شعاع استوانه r و وزن آن Q است . هنگام حرکت وزنهٔ P شتاب زاویه‌ای استوانه را محاسبه کنید



۵۸/۴۴ـ فرستنده: **محمدرضا یزدان** دانشجوی پلی تکنیك

یك انتهای میلهٔ یکنواخت AB به وزن ۱۰۰kgf روی سطح صیقلی افقی و انتهای دیگر آن B روی سطح شیبداری است که باافق زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد. انتهای B توسط ریسمانی که از قرقرهٔ C گذشته و به وزنهٔ P مربوط شده است متصل است . قسمت BC از ریسمان موازی سطح شیبدار وازاصطکاك صرف‌نظر می‌شود. مقدار وزنهٔ P وعکس‌العمل در نقاط A و B را درحالت تعادل تعیین کنید .

مسائل شیمی

ترجمه و انتخاب توسط : عطاالله بزرگ‌نیا

۵۸/۴۵ ـ ازبررسی استاتیك واکنش استری‌شدن یك الکل بوسیلهٔ یك اسید آلی این نتیجه حاصل شده است که با یك ملکول گرم اسید استیك و یك ملکول گرم الکل درحالت تعادل غلظت ملکولی استر و آب همیشه $\frac{۲}{۳}$ است . غلظت ملکولی را در حالت تعادل برای مخلوط اولیه a ملکول اسیداستیك ، b ملکول الکل اتیلیك ، c ملکول استر و d ملکول آب پیدا کنید.

$a=۴$ ، $b=۱$ ، $c=۲$ ، $d=۵$

۵۸/۴۶ـ نفوذ گازها ، قانون گراهام

در شرایط فیزیکی یکسان از فشار و دما دوجسم مساوی از دوگاز مختلف را اختیارکرده در ظرف A وارد نمودیم . چگالی این مخلوط نسبت به ئیدروژن ۷/۵ است . ظرف A را بوسیلهٔ دیوارهٔ نازك و متخلخلی که منافذ ریز دارد به‌ظرف B که درون آن خلاء است مربوط می‌کنیم . پس از مدت کوتاهی مقداری از هردوگاز به درون ظرف B نفوذ می‌کند. چگالی مخلوط گازدرون این ظرف نسبت به‌ئیدروژن برابر $\sqrt{۱۴}$ است . معین کنید :

۱) جرم هر یك از این دوگاز را در حجمی که دوگرم ئیدروژن تحت شرایط متعارفی اشغال می‌کند .

۲) این دوگاز چه گازهایی می‌توانند باشند ؟

۳) آزمایشی را پیشنهادکنیدکه درمورد جنس این گازها بتوان با قاطعیت بیشتری نظر داد .

از میان نامه‌های رسیده

هرچه بیشتر اعلام می‌کنیم‌که از ارسال مسائل مندرج در کتابها وحل‌المسئله‌های چاپ ایران خود داری شود اما بازبعد از انتشار هرشماره از مجله نامه‌هایی واصل می‌شودکه در آنها یادآوری شده است بعضی از مسائل مندرج به نام اشخاص قبلا درکتابها چاپ شده است . حتی افرادی مسائلی را می‌فرستندو قید می‌کنندکه طرح خود ایشان است وبعد معلوم می‌شودکه‌آن مسئله را ازیك‌کتاب برداشته‌اند ! نامه‌هایی‌کـه در این زمینه رسیده به شرح زیر است :

* آقای **ابراهیم ذوالقدری** نوشته‌است که مسئله‌های ۵۵/۵ و همچنین مسئلـهٔ ۵۵/۷ درکتاب جبر برای کنکور درج می‌باشد .

* آقای **حسن گل محمدی** نوشته‌است که‌مسئلهٔ ۵۶/۸ در کتاب هزار و پـانصد مسئلـهٔ جبر ، مسئلهٔ ۵۶/۲۳ درکتاب حل‌المسائل مکانیك ، مسئلهٔ ۵۷/۲ در اکثر حل‌المسئله‌ها ، مسئلهٔ ۵۷/۹ درکتاب روشهای جبر ومسئلهٔ ۵۷/۸ در ۲۵۰۰ مسئله مندرج است .

* آقای **جوادفیض** نوشته‌انـد کـه مسئلهٔ ۵۶/۷ در کتاب مجموعهٔ جبر و مثلثات و مسئلهٔ ۵۷/۹ درکتاب روشهای جبر چاپ‌گردیده است .

* آقای **عباس کریم‌طاهرسیما** نوشته‌است که‌مسئله‌های ۵۶/۷ و ۵۵/۵ و۵۱/۲۸ درکتاب مسائل ریاضیات مقدماتی و مسئلهٔ ۵۱/۲۶ باکمی تغییرازکتاب مسائل مسابقات شوروی اخذ شده است .

حل مسئلهٔ ۵۶/۱۵

حل این مسئله در شمارهٔ ۵۷ از قلم افتاده است و اکنون چاپ می‌شود :

ـ همهٔ مثلثهایی را تعیین‌کنیدکه اندازه‌های ضلعهای‌آنها عددهای صحیح بوده و قدر مطلق اندازهٔ مساحت ومحیط آنها نیزعدد صحیح بوده وبا هم برابر باشند .

حل ـ اگر p و s بـه ترتیب نصف محیط و مساحت مثلث مطلوب باشد داریم : $s=2p$ و :

$$(1)\quad 2p=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

فرض می‌کنیم :

$$x=p-a \quad و \quad y=p-b \quad و \quad z=p-c$$

خواهیم داشت $p=x+y+z$ ورابطهٔ (۱) چنین‌می‌شود:

$$(2)\quad 4(x+y+z)=xyz$$

فرض می‌کنیم $x<y<z$ در این صورت اگـر $x>3$ باشد خواهیم داشت :

$$4(x+y+z)<12z<16y<xyz$$

و رابطهٔ (۲) غیر ممکن می‌شود . اگر $x=1$ باشد از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود :

$$(y-4)(z-4)=20 \Longrightarrow y=5 \text{ یا } 6 \text{ و } z=24 \text{ یا } 8 \text{ یا } 14 \text{ یا } 9$$

درازاء $x=2$ خواهیم داشت :

$$(y-2)(z-2)=8 \Longrightarrow y=3 \text{ یا } 4 \text{ و } z=10 \text{ یا } 6$$

در ازاء $x=3$ داریم :

$$(3y-4)(3z-4)=52$$

در این رابطه $y=3$ صدق نمی‌کند و اگر $y>3$ باشد از $4<y<z$ نتیجه خواهد شد :

$$8<3y-4<3z-4 \Longrightarrow (3y-4)(3z-4)\geqslant 64$$

که غیرممکن‌است . بنابراین جوابهای مسئله منحصر به مقادیر بالا است و مثلثهای مطلوب عبارتند از :

$a=6$	۷	۹	۵	۶
$b=25$ یا	۱۵ یا	۱۰ یا	۱۲ یا	۸
$c=29$	۲۰	۱۷	۱۳	۱۰

داستانهای ریاضی

نوشتهٔ : ریند (Rhind)

ترجمهٔ : داوید ریحان

میراث کرزوس پنجم

در ابتدای امسال بودکه باستان شناسان طوماری را که نیم قرنی است در آسیای صغیر از زمین در آورده شده است ، توانستند بخوانند . این سندازآن جهت جالب است که حاوی نکات روشنی دربارهٔ وراثت کرزوس پنجم است . نقل تمام آن در اینجا بی‌مورد است و خلاصه‌ای از آن برای بیان مطلب ما کافی خواهد بود ؛

کرزوس‌پنجم بانزدیك دیدن آخرعمرش ، وصیت‌نامه‌اش را تنظیم می‌کند و درآن‌حکم می‌کند که کشور پادشاهی‌اش بوسیلهٔ حکام‌ثلاثه متشکل‌از سه فرزندش اداره شود . هرکدام از آنها باید مالك یکی از نشانه‌های قدرت باشد : به فرزند بزرگتر تاج شاهی ، به دومی فرمانروائی و به سومی مهر شاهی برسد . اما در بارهٔ گنج شاهی ، بیست‌صندوق مالامال از سکه‌های طلا است و باید که به ترتیب زیر تقسیم شود : به فرزندان پسر بزرگتر هرکدام سه صندوق ، به‌فرزندان پسر دومی هرکدام دو صندوق و به فرزندان پسر کوچکتر هرکدام یك صندوق باید برسد و بقیه باید به تعداد متساوی به‌هریك از دختران کرزوس پنجم برسد .

در وصیت نامه ، اسامی پسران پادشاه را به‌ترتیب الفبا نوشته‌اند : آلیات Alyatte ، بکوریس Bocchoris گراتیپ Gratippe . در جائی دیگرقید شده است‌که‌آلیات دارای دو پسر ، بکوریس دارای سه دختر و گراتیپ دارای دو پسر ودو دخترمی‌باشد .

علاوه بر شرایط فوق باید که تقسیم بیست صندوق بدون هیچگونه اشکالی انجام گیرد : به عبارتی دیگر ، به هریك از وارثین باید صندوقی کامل ودست نخورده برسد . ولی روز قبل از مرگ پادشاه ، یکی از نوه‌های کرزوس در حادثهٔ ارابه‌رانی‌جان می‌سپارد . آیا بایدمفادوصیت‌نامه را تغییردهند؟

برای پرهیز ازچنین موردی ، ذیعلاقگان تصمیم گرفتندکه‌سهم متوفی را به دختران شاه بسپارند . همین کار را هم کردند و هرکدام از وارثان جعبه‌های سالم دریافت‌کردند و تمام‌جعبه‌ها هم توزیع شد .

بدبختانه بقیهٔ کتیبه پاك شده بود . باستانشناسان بسیار مایل بودندبدانندکه کدامیك از پسران‌کرزوس مقام سلطنت ، کدامیك فرمانروائی وکدامین‌دیگر مهر شاهی را دریافت‌کرده است. همچنین مایل بودند بدانند که کدامیك از پسران شاه فرزندش را روز قبل از مرگ کرزوس ازدست داده است .اما یکی از خوانندگان طومار اظهارمی‌داردکه قسمت خوانده‌شدهٔ طومار برای پاسخ به‌این سؤالها کفایت می‌کند و چنین‌استدلال می‌کند :

اگر آلیات فرزند مهتر ، بکوریس فرزندمیانی و گراتیپ‌کهترین فرزند باشد(در ترتیب ABG) فرزندانشان $(۳\times۲)+(۲\times۳)+(۱\times۴)=۱۶$ صندوق‌ارث می‌برند. ببینیم که چند جعبه می‌توانیم در ترتیب‌های مختلف تقسیم کنیم :

با ABG، ۱۷ با BAG، ۱۷ با BGA، ۱۹ با GAB، ۱۹ با GBA، ۲۰عدد . چون جعبه‌ها به دختران شاه نیز تخصیص داده شده است (چند نفر) ، ترکیبهای BGA ، GAB و GBA حذف می‌شوند . در این‌صورت به دختران پادشاه قبل از حادثهٔ ارابه رانی ۳ یا ۴ جعبه می‌رسد . به بیانی دیگر پادشاه یا داری سه دختر (هرکدام یك جعبه) ، یا دو دختر (هرکدام دو جعبه) و یا ۴ دختر (هرکدام یك جعبه) بوده است .

اگر پادشاه ۲ یا ۴ دختر می‌داشت ، ترتیب پسرانش

تنها به‌صورت ABG می‌بود (تنها ترکیبی که مربوط به‌تفاضل ۱۶ – ۲۵ می‌شود) . ولی با ۴ دختر که‌پس از مرگ نوهٔ شاه یك جعبه بیشتر بر می‌دارند ، برای نوه‌ها تنها ۱۲ جعبه باقی می‌ماند . ولی ، نوهٔ ازدست رفته‌هر که باشد ، به نوه‌هاحداقل ۱۳ جعبه می‌رسد (این درحالتی است که در ترکیب ABG ، A یکی از فرزندانش را از دست بدهد) . اگر پادشاه دارای دودختر بودکه هرکدام‌یك جعبه بیش از ۲ تائی که برایشان درنظرگرفته شده است ، دریافت‌کنند ، برای نوه‌های شاه ۱۴ صندوق‌باقی می‌ماند . این‌فرض تنها موقعی صحت خواهدداشت که قربانی حادثهٔ ارابه‌رانی یکی از فرزندان B (همواره در ترکیب ABG) باشد. ولی B دارای‌پسر نیست . پس ABG نیزحذف می‌شود .

تنها امکان باقیمانده این است که : پادشاه دارای ۳ دختر است که در ابتدا می‌بایست هر کدام یك جعبه بردارند ولی پس از حادثه دو جعبه دریافت می‌کنند و در این صورت ۱۴ جعبه برای نوه‌ها باقی می‌ماند . در ترتیب BAG ، از مرگ یکی از فرزندان A یا G لازم می‌آید که به‌ترتیب ۱۵=۴+۲+۹ یا ۱۶=۳+۴+۹ جعبه برای نوه‌ها باقی بماند. بنابراین ترکیب BAG را نیز کنار می‌گذاریم. باقی می‌ماند ترکیب AGB که‌مربوط به مقدارکل اولیهٔ۱۷ است، ولی اگر در لحظهٔ تقسیم آخری A یك فرزند کمتر داشته باشد، این‌مقدار به۱۴ تقلیل می‌یابد .

درنتیجه ، آلیات بزرگترین پسرپادشاه است که یکی‌از پسرانش درحادثه ارابه‌رانی فوت شده و وارث عنوان سلطنت است ، دومی گراتیپ عنوان فرمانروائی را وکوچکترین آنها یعنی بکوریس مهرشاهی راتصاحب کرده‌است .

معادلهٔ شکلها ... (دنباله‌ازصفحهٔ ۲۲)

۹- اگر j ، عدد صحیح دلخواهی (مثبت، منفی یاصفر) باشد ثابت‌کنید که نمایش هندسی معادلهٔ ؛

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left| x\sin\frac{k\pi}{n} - y\cos\frac{k\pi}{n}\right| = R\cot g\frac{\pi}{2n}$$

از نقطهٔ $A_j\left(R\cos\frac{j\pi}{n}\ \text{و}\ R\cot g\frac{j\pi}{n}\right)$ می‌گذرد .

راهنمائی- از تقسیم j بر n ($j=nq+r$ و $0<r<n$) استفاده‌کنید . از حل‌این مسئله چه نتیجه‌ای بنظرتان می‌رسد؟

۱۰- با توجه به‌اتحادهای مذکور درتمرین ۳ ، معادلهٔ شانزده ضلعی منتظم به مرکز O به شعاع R و به ضلع $l=2R\sin\frac{\pi}{16}$ را هرگاه مبدأ محوری یا افقی وقائم باشد درحالت ازدوطریق (برحسب‌نوع انتخاب‌اقطار) بدست آورید. معادلات حاصل‌را تا حدممکن ساده‌کنید .

آنالیز ریاضی... (دنباله ازصفحهٔ۱۸)

بنابراین از شرح مطالبی که گذشت می‌توان چنین نتیجه گرفت‌که Δy وقتی ماکزیمم خواهد بود که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ کمانهائی دایره‌ای باشند و در این حالت با توجه به شکل -۳ خواهیم داشت :

$$\Delta y=(r_1+r_2)-[(r_1+r_2)^2-4a^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (11)$$

در حالت خاصی که Δy ماکزیمم است سطح مسدود (شکل - ۲) بوسیلهٔ شعاعهای کمانهای دایره‌ای r_1 و r_2 و $(r_1^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ و $(r_2^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ مشخص می‌گردد . هر یك از چرخها از داخل یك کمان معین که $\sin^{-1}\frac{2a}{r_1+r_2}$ می‌باشند گذشته وهمواره در تمام لحظات‌حول نقطهٔ مشترکی می‌چرخند. علت این امردامی‌توان‌به‌کمك انتگراسیون و یا به‌صورتی‌دیگر که سطح مسدود (شکل ۲) بوسیلهٔ $b\Delta y$ معلوم است ثابت‌کرد (به‌طریق اولی خود Δy از رابطهٔ (۱۱) قابل محاسبه‌است) .

دانش‌آموز رتبهٔ اول خرداد ۱۳۴۸

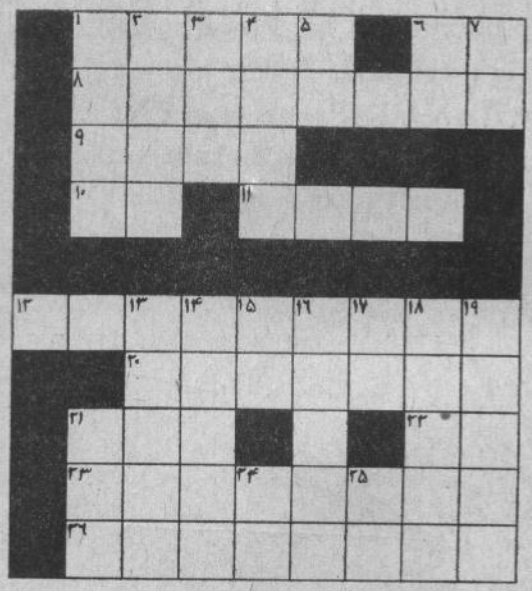
کلاس ششم ریاضی دبیرستانهای خرمشهر

بهزاد سپهربند از دبیرستان بایندر

جمع نمره‌های کتبی : ۱۷۳/۵۸

جدول اعداد

طرح از : ازحسن‌گل محمدی دانشجوی دانشکدهٔ فنی



افقی : ۱ـ تکرار عکس جواب x از معادلهٔ :

$$\log_{\sqrt[3]{3}} x = -\frac{3}{2}$$

۶ ـ رقمهایش در رابطهٔ $x^2 = 2^x$ صدق می‌کنند و مقلوب عدداز خود آن‌بزرگتر است . ۸ ـ عددی است به‌صورت $\overline{aabbccdd}$ بقسمی‌که :

$$a - b = c - d = 1 \quad \text{و} \quad a = 3c \quad \text{و} \quad b = 4d$$

۹ ـ اگر آنرا بر ۹ تقسیم کنیم مقلوبش بدست آید . ۱۰ـ یك رقمش نه برابر رقم دیگر است. ۱۱ـ یك نهم عدد ۱ قائم . ۱۲ـ ده برابر حاصل :

$$Z = 7778^2 - 2223^2$$

۲۰ ـ رقمهایش تشکیل تصاعد می‌دهند و مقلوبش شش رقمی است . ۲۱ـ برابر است با $a^6 \times b^2$ که $a \neq b \neq 1$ است. ۲۲ـ مقلوب‌عدد ۱۰ افقی. ۲۳ـ به صورت $\overline{aabbccdd}$ است که :

$$a - b = b - c = c - d = d$$

۲۶ـ مجذور هزار برابر یك ششم عدد ۷ قائم .

قائم : ۱ ـ تکراریك رقم . ۲ـ به‌صورت $\overline{aabc}$ است که $a = b + c$ می‌باشد . ۳ ـ چون در 5×10^4 ضرب شود عدد ۲۶ افقی بدست آید . ۴ـ یازده واحد بیش از ده برابر عدد ۳ قائم . ۵ ـ یك رقمش سه برابر رقم دیگر است . ۶ـ تکرار یك رقم . ۷ـ مقلوب عـدد ۶ افقی . ۱۳ ـ رقمهایش تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند . ۱۴ ـ شمارهٔ دهگانش به‌صورت $\overline{aabb}$ است که $b = a + 1$ است . ۱۵ ـ رقـم یکانش یك واحد ازرقم دهگانش‌کمتر است . ۱۶ـ ۲۰۲۰ واحد کمتر از عدد ۱۴قائم. ۱۷ـ مقلوبش مجذور کامل‌است. ۱۸ـ به ۷۱و ۷۲ بخش پذیر است. ۱۹ـ یکدهم‌آن ازعدد ۵ قائم یك‌واحد کمتر است . ۲۱ـ هشت واحد بیشتر ازعدد ۲۱ افقی . ۲۴ـ برابراست با باقیماندهٔ‌تقسیم‌عدد۱۴قائم برصد. ۲۵ـمتمم حسابی عدد ۲۴ قائم .

۱	۰	۳	۹	۸	۸	۳	۷	۷	۵
۷	۸	۹	●	۸	●	۲	●	۹	●
۵	۲	۱	●	●	●	●	●	●	●
۰	۱	۶	●	۸	۸	۰	۸	۸	۰
۲	●	●	●	۹	●	●	●	۱	۸
۷	۱	۲	۱	۷	●	۵	۹	۹	۵
۸	۷	●	۴	۰	●	●	●	۸	۱
۱	۵	●	۵	۷	۶	۰	●	۶	۵
۹	۰	●	●	●	●	●	●	۸	۸
۵	۲	۴	۰	۳	۱	۲	۱	۰	۰

حل جدول شمارهٔ قبل

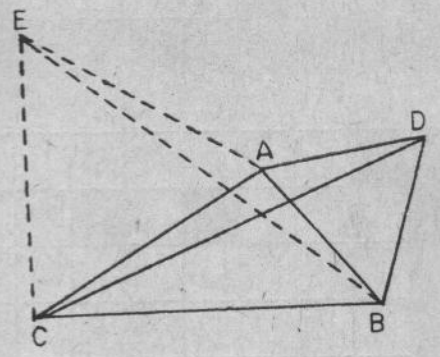
←

b) Let every arrangement of H's and T's be called even if it contains an even number of T's, and odd otherwise. Step 1 (HHHH) is even, step 2 must be odd, step 3 even, etc, ... Step 16 should then be odd, since all even numbered steps are odd. But step 16 has 4 T's and is therefore even. Hence there is no possible solution for 4 coins, and in general for any even number of coins.

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 50 – In triangle ABC, angle C is 30°; triangle ABD, shown in Fig' is equilateral. Prove that $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ can be the sides of a right triangle.

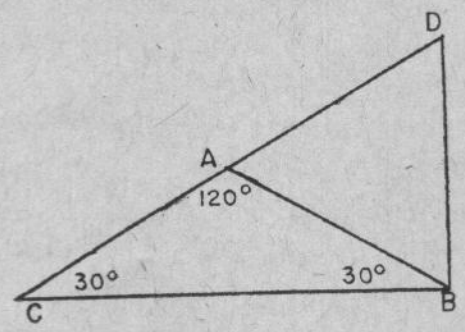
Solution : Case I : $\angle CAB \neq 120°$.



On $\overline{CA}$ construct equilateral triangle ECA, and draw $\overline{BE}$. Since EA, $\angle EAB$ and AB of ΔEAB are equal, respectively, to CA, $\angle CAD$, AD of ΔCAD, $\Delta EAB \cong \Delta CAD$. Therefore CA = EB But $\angle ECB = 90°$; therefore $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ can be the sides of a right triangle.

Case II: $\angle CAB = 120°$.

In this case C, A, D are collinear



We have CA = AB = DB . Then since $\overline{DB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ are the sides of a right triangle, so too are the sides $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$.

Problem 51 : a) Show that 3 coins in a row, all heads, can be turned to all tails under the following conditions: (1) only one coin at a time may be turned; (2) each of the 8 possible heads-tails arrangements shall appear once and only once, ending with TTT. For example: (1) HHH; (2) HHT; (3) HTT; (4) not TTT, which must occur at step 8.

b) Prove that there can be no solution for four coins, under the same conditions. (There are now 16 possible heads-tails arrangements.)

Solution – a) If each column is numbered for n coins, as with

12 or 123
HH HHH

and the solution is indicated by some arrangement of the numbers, which give the number of the column where the change occurs, (the 3-coin case is 3-2-3-1-2-3-2), the following is true. Let P_i be some permutation of the numbers one through n. Then if the solution is replaced by the numbers of the permutation, a new solution is determined. For example, 132 is a permutation of 123. Therefore interchanging 2 and 3 in the solution above, we obtain the new solution 2-3-2-1-3-2-3. This proves the existence of n! solutions if there are any, and 3! or 6 solutions for the given problem.

→

انتشارات یکان (آنچه فعلا برای فروش موجود است)

مجموعهٔ علمی

شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل مسائل ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

۶۰ ریال

روش سادهٔ

حل مسائل شیمی

ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا

۲۰ ریال

مسائلی از حساب استدلالی

تألیف محمود کاشانی

جلد اول : مسائل جمع و تفریق — فعلا نایاب

جلد دوم : مسائل ضرب — چاپ دوم ۱۵ ریال

جلد سوم : مسائل تقسیم — فعلا نایاب

سرگرمیهای جبر

ترجمهٔ : پرویز شهریاری

۶۰ریال ـ ۱۰۰ریال

مقدمه بر تئوری مجموعه‌ها

تألیف : علی‌اصغر هومانی

۵۰ ریال

تمرینهای ریاضیات مقدماتی

تألیف : دکتر محسن هشترودی

نسخه‌های محدودی فقط برای تکفروشی: ۱۲۰ ریال

معماهای ریاضی ـ راهنمای ریاضیات متوسطه فعلا برای فروش موجود نیست

چاپ دوم یکان سال ۴۶

بها : ۵۰ ریال

یکان سال ۴۷

فعلا نایاب

ضمیمهٔ یکان سال برای دانش‌آموزان کلاسهای سوم

بها : ۱۲ریال