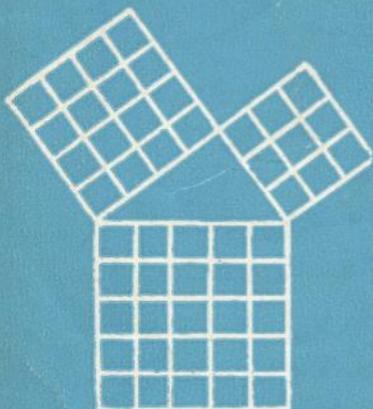


در این شماره:

۴۸۹	مهندس محمود خوئی	نقدی بر انتقاد
۴۹۱	-	دربارهٔ مندرجات یکان سال ۴۷
۴۹۲	امین ناطقی - شهر باری	دایرةالمعارف ریاضی جدید
۴۹۴	عطاء الله بررک نیا	ساختمان شیمیائی ماده
۴۹۸	یعقوب گنجی	معادلهٔ شکلهای هندسی
۵۰۵	بختیار علیمدد سلطانی	محاسبهٔ توابع اولیه
۵۱۱	ترجمه از فرانسه	راهنمای حل مسائل ترسیمی هندسه
۵۲۲	داوید ریحان	حل مسئلهٔ نمونه - مسئلهٔ هرمیت
۵۲۳	-	مسائل برای حل
۵۲۷	-	حل مسائل یکان شمارهٔ ۵۳
۵۴۶	ترجمه: مصحفی	مقدمات آمار
۵۵۱	یوسف رضازاده	جدول اعداد
۵۵۲	-	Problems & Solutions

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots + x^n$$



فروشگاه بزرگ (شماره ۲)

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

خیابان شاهرضا، روبروی دانشگاه تهران

محل فروش مجله و سایر انتشارات یکان

یکان مجله ریاضیات

هر ماه یک بار می‌مردد

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

دوره پنجم - شماره هشتم - شماره مسلسل: ۵۵

خرداد ۱۳۴۸

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: **عبدالحسین مصحفی**

مدیر داخلی، داود مصحفی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیک شاهرضا، شماره ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۳۴۱۸۱

وجه اشترک برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به اضافه هزینه پست)

حساب بانکی: جاری ۳۰۹۵ شعبه لاله‌زارنو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume V, number 8, May 1969

subscription: \$3

TEHERAN . P.O. B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

تذکر

عده‌ای از خوانندگان مجله به این تصویر که طرح سؤال-های شیمی امتحانات داوطلبان متفرقه توسط آقای عطاءالله بزرگ نیا یا زیر نظر ایشان انجام گرفته است از اداره مجله خواسته بودند که درباره بعضی ایرادهای آنان توضیح داده شود. این موضوع با آقای بزرگ نیا در میان نهاده شد و ایشان اظهار داشتند که به علت اشتغال به امر نگارش کتابهای علوم دبستان از نمایندگی دبیران شیمی وابسته به انجمن معلمان علوم تجربی استعفا کرده و در طرح یا نظارت سؤالهای امتحانی به هیچ وجه دخالتی نداشته و مراتب را طی نامه‌ای به استحضار مقام وزارت آموزش و پرورش رسانده‌اند.

سازمان انتشارات ارغنون معرفی می‌کند:

خودآموز

لگاریتم و تصاعد

همراه کنکورهای

ایران، فرانسه، انگلستان، شوروی

ترجمه و تألیف: محمد هادی بکتاشی

تهران - خیابان شاه‌آباد

جناب مینما حافظ - شماره ۲۲۴

سازمان انتشارات ارغنون

کتابفروشی فخر رازی

تهران - خیابان شاه‌آباد - تلفن: ۳۰۴۳۲۰

محل فروش انتشارات یکان

نقدی بر انتقاد

از : مهندس محمود خوئی

و نوشته می‌شود ، تعلیم رسم الخط و املاء و انشاء چه مفهومی خواهد داشت؟! حال اگر بنا بر نظریه نویسنده محترم بر معلمین و متعلمین سخت و ناگوار است که هندسه را تدریس کنند و بار بزرگی بردوش آنهاست ضمناً به اصول مجموعه‌های جبری نیز «خو» نگرفته و نخواهند گرفت و معادلات درجه سوم را نیز نمی‌توانند حل کنند خوبست همه را یکجا از برنامه دوره دوم دبیرستان حذف و به جای آنها آمار و احتمالات را به حد کامل تدریس نمائیم. تا صاحب نظران چه گویند !!

با توجه به اینکه «جهان چون چشم و خط و خال و ابرو است که هر چیزی به جای خویش نیکوست» بایستی در مورد حذف تمام یا قسمتی از برنامه‌های دبستانی و دبیرستانی و دانشگاهی با تأمل بیشتری اقدام گردد و اگر در وزارت آموزش و پرورش اقدامی در این مورد بعمل آمده با توجه به نظرات دانشمندان و اساتید فن در هر رشته‌ای تصمیمات لازمه با بررسی برنامه‌های مدارس عالی و دبیرستانی سایر کشورها هر چه زودتر تصویب و بموقع اجرا گذارده شود. و الا اظهار نظر افراد و غیر وارد در مواد درسی و بالخصوص حسابیت در مورد درس بخصوصی بجز پراکندگی افکار دانش آموزان و دلسرد کردن آنها در آموزش آن درس نتیجه‌ای در بر نخواهد داشت .

از جمله مواردی که نویسنده محترم آن را دست و پا گیر و محدود قلمداد کرده اند هندسه تریسیمی است . اولاً در مورد اینکه نوشته اند و از سیصد ورقه امتحان نهائی فقط يك نمره ۱۴ و دو نمره ۸ و چند نمره ۵ و بقیه زیر ۲ بوده است ، صرف نظر از اینکه باید دید این اوراق مربوط به کجا ؟ کدام دبیرستان ؟ چه سال ؟ و بخصوص شاگردان کدامیک از دبیران (نظیر آنهایی که به قول نویسنده الزامی برای تفهیم مطالب برای دانش آموزان ندارند!) بوده است.؟! مسلماً در این مورد اشتباه بسزائی رخ داده و تا آنجائی که در تصحیح اوراق امتحانات سالهای ۴۲ و ۴۳ تا ۴۶ در خاطر دارم همواره در حوزه‌های امتحانات نهائی در هر دسته اوراق

در هفتمین شماره از دوره پنجم مجله ریاضی یکان مورخه فروردین-اردیبهشت ۴۸ در سرمقاله مجله زیر عنوان «نامه رسیده» درباره لزوم حذف بعضی از مواد دروس ریاضی مطالبی درج گردیده که از نظر روشن شدن اذهان و افکار خوانندگان و بالخصوص دانش آموزان عزیز مبادرت به توضیحات زیر می‌نماید .

بدواً از اینکه مجله یکان که صفحاتش اختصاص به حل و بحث مسائل ریاضی و نوشته‌ها و فرضیه‌های دانشمندان و برگزیدگان علوم ریاضی داشته و دارد برای درج اینگونه نامه‌ها و مطالب مورد استفاده قرار گرفته است مراتب تأسف خود را ابراز می‌دارد چه انتشار نامه‌های انتقادی که در حقیقت برای بهتر ساختن روش آموزش ریاضی است موجب سوء تفاهم دانش آموزان شده و آنها را در فرا گرفتن دروس سرگردان می‌سازد .

نویسنده نامه نه تنها خواسته‌اند بر نامه دروس ریاضی و کتابهای درسی را مورد انتقاد قرار دهند بلکه پیشنهاد نموده اند که به جای هندسه مسطحه-هندسه فضائی-هندسه اقلیدسی-هندسه تریسیمی و هندسه رقومی در دوره دوم دبیرستان درس آمار و احتمالات تدریس گردد . بنظر می‌رسد که در پیرو این پیشنهاد اظهار نظر شود با توجه به اینکه چون در دنیای امروز در تمام مؤسسات بزرگ کلیه عملیات محاسباتی با ماشین حساب انجام می‌شود از این به بعد درس حساب و جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و غربال اراتستن و عباد مشترك و . . . به دانش آموزان تدریس نشده و اصولاً در جائی که امروزه مغز الکترونیکی مسائل غامض را حل و بحث نموده و افکار اشخاص را با ماشینهای محیر العقول می‌خوانند چه لزومی دارد مثلثات و جبر جزو برنامه تحصیلی قرار گیرد و با در نظر گرفتن اینکه با وسائل رسم و اندازه گیری و پانئوگراف می‌توان سطح و حجم اشکال و احجام را تعیین نمود چه احتیاجی است که اینهمه حل و بحث مثلث و ریاضیات و دیفرانسیل و انتگرالها را تدریس نموده و بالخصوص در موقعی که تمامی نامه‌ها و مکاتبات با ماشین تحریر الکتریکی و بطور ساده و آسان تهیه

امتحانی اقلای نمرات ثلث اوراق امتحانی بین ۱۵ و ۲۰ بوده است بقسمی که در خرداد سال ۱۳۴۴ فقط در حوزه ۲ تهران بیش از ۳۰۰ نمره بیست ازدو هزار ورقه امتحانی وجود داشته و در سال ۱۳۴۷ از شش هزار نفر (۵۴۰۸ پسر و ۶۷۲ دختر) دانش-آموزان کلیه دبیرستانهای تهران حدود سه هزار و چهارصد نفر (۳۰۳۸ نفر پسر و ۳۹۹ دختر) در خرداد ماه پذیرفته شده و معدل بیش از ده داشته اند که مسلما از این عده اقلای پانصد نفرشان در درس هندسه ترسیمی و رقومی با نمره ۱۵ تا ۲۰ توفیق یافته اند. بنابراین اگر به دفاتر امتحانات نهائی سالهای اخیر مراجعه شود صدق ارقام و اعداد بالا خودجوابگوی قانع کننده ای به نویسنده نامه و موجبات دلگرمی دانش آموزان به ادامه تحصیل و آموزش هندسه ترسیمی خواهد بود. در مورد محدود بودن در هندسه ترسیمی متذکر می شود که اصول این درس از تصاویر اشکال و احجام روی دو صفحه تصویر بحث نموده و حتی به موجب کتابهای جدید که در ممالک مترقی جهان منتشر شده و کنکورهای پلی تکنیک نیز بر همان اساس تنظیم می شود در هندسه ترسیمی از سه صفحه تصویر بحث می گردد و با در نظر گرفتن اصول رسم فنی و پرسپکتیو می توان گفت شالوده و اساس کلیه پروژه های دانشکده فنی - معماری - پلی تکنیک و دانشگاه صنعتی آریامهر و بطور کلی تمامی دستگاههای آموزشی کشور که از تصویر و نقشه گفتگو می کند بر اساس تعلیمات و ترسیمات هندسه ترسیمی استوار گردیده است رسم سایه ها در احجام مخطط و منحنی و مسطح و مقاطع و گسترش احجام در دانشگاهها و بخصوص حجم شناسی دانشکده معماری دانشگاه تهران و هندسه ترسیمی دانشکده معماری دانشگاه ملی همگی در دنباله درس هندسه ترسیمی دوره دوم دبیرستان است و اصولا اگر شخص وارد و مطالعی در این مورد قضاوت کند خواهد دید روزی می توان هندسه ترسیمی را حذف کرد که بخواهند دانش آموزان و دانشجویان را بدون هیچگونه دلیل و اثبات هندسه فضایی و چشم بسته به رسم فنی و پرسپکتیو آشنا سازند و اینهم امری محال و غیرممکن است چه کتابهایی از قبیل:

Descriptive Geometry A.T. Chaly.
Second Edition (1968)

Fundamentals of Engineering Drawing
by Warren J. Luzadder. Fifth Edition.

Elementary Engineering Drawing
by N.D. Bhatt D.M.E.E. Sixth Edition
(1962)

Graphic Science by French and Vierck. Second Edition (1963)

که در این مورد در دنیای مترقی امروز نوشته و به زبانهای مختلفی چاپ شده است خود دلیل بارزی است که هندسه ترسیمی و رسم فنی امروزه پایه و اساس معماری و مهندسی است و تحصیل و تدریس مقدمات آن فقط در دوره دوم دبیرستان بایستی انجام گیرد زیرا در دانشگاهها و مدارس

عالی وقت لازم برای دانشجو جهت آشنائی به قسمت مقدماتی آن وجود ندارد.

نسبت به اینکه نویسنده محترم نوشته اند « کمتر دبیری حاضر به تدریس هندسه ترسیمی بوده و کمتر دانش آموزی علاقمند به فراگرفتن آن می باشد » بایستی متذکر شوم با توجه به صفحات ۲۲۳ و ۲۲۴ کتاب ترسیمی و رقومی وزارت آموزش و پرورش مسائل امتحان نهائی سال ۱۳۳۷ و مقایسه آنها با مسائل امتحان نهائی سال ۴۵ - ۴۶ و ۴۷ که در مجله های یکان سال مرتبا در دو سه ساله اخیر منتشر شده ملاحظه می شود که سطح مسائل ترسیمی و رقومی به هیچ وجه قابل مقایسه نیست و در حقیقت اگر شخص وارد و مطالعی مسائل مزبور را مقایسه و حل و بحث نماید متوجه پیشرفت کامل این درس در دبیرستانها خواهد شد که تقریبا در ظرف ده سال اقلای پنج برابر توسعه یافته و این مطلب مؤید دو موضوع است یکی آنکه دبیران مبرز و کارازموده ای در تهران و شهرستانها وجود دارند که باکمال علاقمندی این درس را تدریس می نمایند و دیگر اینکه دانش آموزان متوجه اهمیت آن شده و در یافته اند که با توجه به مسائل هندسه فضایی سهولت می توان مسائل هندسه ترسیمی واپورهای رقومی را فراگرفت تحصیل آن را در سر لوحه کار خویش قرار داده و برای موفقیت در امتحانات نهائی سال ششم ریاضی کوشش نموده اولین نمره را برای خود در این ماده قرار داده اند. ضمنا گفته اند مسائل ترسیمی کنکورهای فنی دانشکده فنی تهران و تبریز و دانشکده پلی تکنیک و دانشکده معماری دانشگاه ملی و سایر دانشکده ها نیز گواه بر این است که در سالهای اخیر سطح هندسه ترسیمی بطور غیر قابل تصویری بالا رفته و اگر با مسائل کنکورهای سالهای ۳۷ - ۴۱ مقایسه شود به هیچ وجه قابل مقایسه نیست و در سطح بالاتری قرار دارد.

حال باید دید آیا درسی که بدین درجه اهمیت داشته و دانشگاههای اروپائی نیز وسیله مقامات مربوطه مستقیما به وزارت آموزش و پرورش ایران تأکید نموده اند که دانش آموزان را در درس هندسه ترسیمی تقویت نمایند چگونه بایستی از برنامه آموزشی کشور حذف کرد؟ آن وقت چگونه بایستی اصول رسم فنی و حجم شناسی و پرسپکتیورا که مورد علاقه دانش آموزان و دانشجویان است تدریس نمود؟ تا صاحب نظران چه گویند!

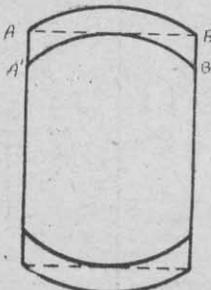
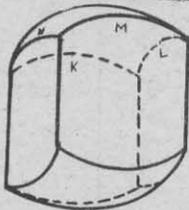
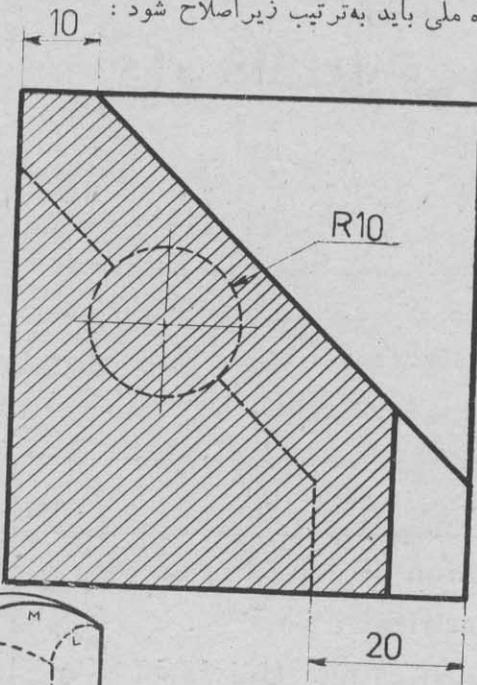
در پایان برای اینکه صفحات مجله یکان با اینگونه مطالب و انتقادات برگزار نشود پیشنهاد می نماید حذف يك یا کلیه مواد درسی ریاضی را به عهده اداره کل برنامه های وزارت آموزش و پرورش و انجمن ریاضی تهران که خوشبختانه دانشمندان معاصر ایران استاد هشترودی بنیان گذار آن شده اند محول نماییم و اگر اشخاصی از گوشه و کنار نظراتی دارند کتباً به انجمن بنویسند تا از طرف اساتید فن با شور و مداقه کامل اظهار نظر گردد. والا درج اینگونه نامه ها بجز سرگردانی دانش آموزان نتیجه ای در بر نخواهد داشت.

مهندس محمود خویی

دبیر دبیرستانهای تهران و دانشکده معماری دانشگاه ملی

دربارهٔ مندرجات یکان سال ۴۷

سعادت‌نمند یادآوری کرده‌اند که تصویر نیمرخ چاپ رسم فنی دانشگاه ملی باید به ترتیب زیر اصلاح شود:



* آقای علی معماریان

نوشته‌اند در حل مسئلهٔ دوم امتحان حجم‌شناسی با توجه به اینکه نقاط K و L و M و N در یک صفحه قرار دارند تصویر قائم جسم باید به شکل مقابل باشد بقسمی که کمان A'B' بر وتر کمان AB مماس باشد.

* آقای حسین فرمان دربارهٔ حل مسئلهٔ الکتریسته

پلی تکنیک توضیح زیر را مرقوم داشته‌اند:

در حالت (۴) که A و D به مولد جریان مستقیم وصل است اشتباهی مانند حالت‌های قبل تصور شده که مولد جریان متناوب است و حل مندرج عیناً برای مولد جریان متناوب صحیح است. در مورد جریان مستقیم، خازن زمان کوتاهی برق را از خود عبور می‌دهد (تأشارت شود) و پس از آن دیگر جریانی از آن نمی‌گذرد و بنابراین آمپرمتری اگر سر راه خازن قرار دهیم پس از آنکه جریانی را در مدت کوتاهی نشان داد عقربه‌اش به صفر می‌رسد. در این صورت است که جریان فقط از مقاومت - های R_1 و R_2 می‌گذرد و داریم:

$$V_A - V_D = (R_1 + R_2)I$$

$$110 = (100 + 120)I \Rightarrow I = 0.5A$$

* آقای علی اصغر قلاوند نوشته‌اند در چاپ صورت

مسئلهٔ پنجم از دانشکدهٔ نفت آبادان اشتباهی روی داده است که باید چنین تصحیح شود: دو مثلث ACE و AEF متشابهند.

عده‌ای از خوانندگان علاقمند مجلهٔ یکان ضمن ارسال نامه اشتباه‌های چاپی و بعضی لغزشها را که ضمن حل مسائل مندرج در یکان سال ۴۷ روی داده‌است یادآوری فرموده‌اند. با سپاسگزاری از این خوانندگان نظرات آنان به شرح زیر به نظر خوانندگان دیگر مجله می‌رسد.

* نویسندهٔ نامه بدون نام و نشانی اشتباه‌های چاپی مربوط به صورت مسئلهٔ اول و صورت مسئلهٔ سوم از سؤال‌های ریاضی گروه دوم دانشگاه تهران را یادآوری کرده است، در صورت این دو مسئله در یک جمله به جای x حرف a چاپ شده است.

* آقای احمد رضا گنجی نوشته‌اند:

$$y_1 = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-2)^5}$$

الف - در محاسبهٔ تابع اولیهٔ تابع $y_1 = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-2)^5}$ بایستی توجه می‌شود که صورت و مخرج کسر مزبور بر $x - 2$ بخش پذیر می‌باشد.

ب - حل مسئلهٔ ۸ از گروه دوم دانشگاه به راهی ساده‌تر حل می‌شود و محتاج به اثبات یک لم طولانی نیست.

ج - در حل مسئلهٔ الکتریسته پلی تکنیک مندرج در صفحهٔ ۷۵ اینکه از خازن که در مدار سلف قرار دارد جریان مستقیم گذرانده‌اند اشتباه می‌باشد.

* آقایان محمد صادق ابریشمی و ناصر عمیمی نژاد

نیز اشتباه مربوط به حل مسئلهٔ الکتریسته پلی تکنیک را یادآوری کرده‌اند.

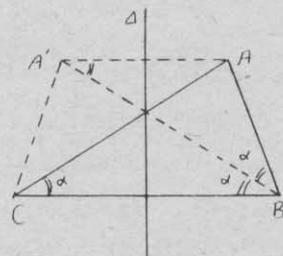
* آقایان ابراهیم ذوالقدری و محمد صادق

ابریشمی طی نامه‌های جداگانه نوشته‌اند: اینکه ضمن حل مسئلهٔ اول پلی تکنیک (دیماه ۴۷) نقطهٔ P ثابت فرض شده و برای جواب مسئله فقط یک منحنی بدست آمده است اشتباه می‌باشد. جواب مسئله دودسته دایره است که مرکز آنهاروی محور $x'x$ قرار دارد.

* آقای هندی نژاد مرقوم داشته‌اند که بهتر آن

می‌بود مسئلهٔ دوم هندسه و مخروطات تیرماه پلی تکنیک به طریق هندسی زیر حل می‌گردید:

A' قرینهٔ A را نسبت به Δ عمود منصف BC بدست می‌آوریم. داریم: $AB = AA'$ پس $AB = 2AH$



و نتیجه می‌شود که نسبت فاصلهٔ A از نقطهٔ ثابت B به فاصلهٔ آن از خط ثابت Δ مقداری است ثابت و بزرگتر از یک. پس مکان A

هدلوی به کانون B و به خط های Δ می‌باشد.

* آقای بهرام منشط نوشته‌اند که در حل مسئلهٔ نور دی‌ماه پلی تکنیک مقدار ۷۵۵ که برای توان میکروسکپ چاپ شده اشتباه است و صحیح آن ۷۵۵۵ می‌باشد.

* آقایان مهندس فرزین روشن افشار و همایون

دایرةالمعارف ریاضیات جدید - ۲-

ترجمه و تنظیم توسط : منوچهر امین ناطقی - پرویز شهریاری

یادآوری - قبل از شروع به ادامه مطلب شماره قبل ، اصطلاحات راجع به مجموعه‌ها را به شرح زیر تکرار می‌کنیم. این اصطلاحات با نظر دوست دانشمندگرامی آقای دکتر غلامحسین مصاحب استاد و سرپرست گروه ریاضی دانشسرای عالی انتخاب شده است. اصطلاحاتی که دوست فاضل ارجمند آقای دکتر علی افضلی پور استاد و سرپرست گروه ریاضی دانشگاه تهران بکار برده‌اند در هر مورد برای يك مرتبه در پراگتزر نوشته شده‌است. از همکاری دوستان محترم سپاسگزاریم .

اصطلاح	معادل فرانسه	علامت	توضیح
اتحادیه دو مجموعه	Réunion de deux Ensembles	U	$R = A \cup B$: مجموعه R اتحادیه دو مجموعه A و B است
سور	Quantificateur		
سور عمومی	Quantificateur Universel	\forall	هر چه باشد ، به‌ازاء هر مقدار
سور وجودی	Existentiel	\exists	مقادیری وجود دارند که به‌ازاء آنها
متمم مجموعه	Complément d'un ensemble	C_A	متمم مجموعه A
زیرمجموعه = مجموعه‌ك	Sous-ensemble		
استلزام منطقی	Implication logique	\Rightarrow	$A \Rightarrow B$: A مستلزم B است
هم‌ارزی منطقی	Equivalence logique	\Leftrightarrow	$A \Leftrightarrow B$: A هم‌ارز B است
تعلق	Appartenance	\in	عنصر a متعلق به مجموعه A است
عدم تعلق	Non-appartenance	\notin	عنصر b به مجموعه A تعلق ندارد
احتوا	Contenance	\supset	مجموعه B محتوی مجموعه A است
جزئیت	Inclusion	\subset	A جزء B است $A \subset B$: مجموعه B محتوی مجموعه A است
فصل مشترك	Intersection	\cap	T : فصل مشترك A و B است $T = A \cap B$

مشترك آنها تعلق خواهد داشت .

برای اینکه يك عنصر خارجی مجموعه A متعلق به این فصل مشترك باشد لازم و کافی است از طرفی به $A \cup B$ یعنی به B و از طرف دیگر به $A \cap C$ یعنی به C تعلق داشته و به عبارت دیگر در B و C مشترك باشد . بنابراین دو مجموعه مفروض هم‌ارز هستند . یعنی :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

در این صورت می‌گویند اتحادیه نسبت به فصل مشترك

ادامه مطلب شماره قبل

حل مسئله - مفهوم عبارت $A \cup (B \cap C)$ اتحادیه A و $B \cap C$ است . مجموعه متناظر (Ensemble Correspondant) آن شامل عناصر مجموعه A می‌باشد به اضافه عناصر مشترك B و C که متعلق به A نیستند . عبارت :

$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

فصل مشترك $A \cup B$ و $A \cup C$ است . هر عنصر A هم به مجموعه $A \cup B$ تعلق دارد و هم به مجموعه $A \cup C$. بنابراین به فصل

توزیع پذیر (پخش) Réunion distributive است.

۳- از تعریفی که برای ضرب دو مجموعه کردیم می توان به وجود نسبت دوتائی (رابطه دوگانی) پی برد. نسبت دوتائی Relation binaire یعنی نسبت بین دو عنصر نه تنها در مبحث ریاضیات مورد استعمال فراوان دارد بلکه در قلمرو علوم و مباحث مختلف دیگر هم وارد است.

اگر اجتماعی از پسران چند خانواده مختلف را در نظر بگیریم ممکن است شرط «برادر بودن» درباره بعضی زوجها وجود داشته باشد ولی همه زوجها واجد این شرط نیستند. فرض کنیم پسران اجتماع جزء مجموعه E باشند. مجموعه زوجهای ممکن «دوسری» که می توان از عناصر E تشکیل داد برابر حاصل ضرب مجموعه E است در خود آن که به صورت $E \times E$ یا E^2 نمایش داده می شود (این مجموعه شامل زوجهای (a.a) است که از عناصر یکسان Identique تشکیل یافته اند.

بعضی زوجهای مجموعه E^2 از دو برادر تشکیل می شوند و بقیه اینطور نیستند. به همین ترتیب اگر دو مجموعه:

$$E = \{1, 2\} \text{ و } F = \{1, 2, 3\}$$

را در نظر بگیریم داریم:

$$E \times F = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$$

نسبت ($x \in E$) کوچکتر یا مساوی ($y \in F$) یعنی نسبتی که با علامت \leq نشان داده می شود در باره عناصر متعلق به «زیر مجموعه»:

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$$

از مجموعه $E \times F$ سازگار است. نسبت ($x \in E$) بزرگتر از ($y \in F$) که با علامت $>$ نمایش داده می شود در «زیر مجموعه»

$\{(2,1)\}$ که فقط شامل یک عنصر است سازگاری باشد. بطور کلی

نسبت دوتائی هر نسبتی است که طبق آن بتوان در حاصل ضرب دو مجموعه یک زیر مجموعه ای بدست آورد که زوجهای آن در نسبت معینی سازگار باشند و سایر زوجهای حاصل ضرب خارج آن قرار گیرند. به صورت کلی تر یک نسبت را اغلب به علامت

R نمایش می دهند - برای نمایاندن اینکه یک زوج (x,y)

در این نسبت سازگار است می نویسند: $R(x,y)$ و یا

$$x R y$$

حرف R را در مورد بعضی نسبتهای معین می توان

تبدیل به هر علامت دیگر کرد. نسبت دوتائی \leq را برای رابطه «کوچکتر یا مساوی» دو عدد حقیقی انتخاب کرده اند و \geq رابطه عمود بودن دو خط در یک صفحه است.

خواص نسبتهای دوتائی - ۱- قرینه Symétrie

نسبت دوتائی را قرینه گویند وقتی که نسبت برای زوجی با عناصر مفروض (x,y) سازگار باشد، چون جای عناصر زوج را بدل کنیم باز هم نسبت سازگار شود.

به عبارت دیگر نسبت دوتائی قرینه است هرگاه از

$$x R y \text{ نتیجه شود } y R x \text{ پس نسبتی که با علامت هم ارزی } \equiv$$

نمایش داده می شود قرینه است اگر $x \equiv y$ و $y \equiv x$

۲- قناس - Antisymétrie - نسبت دوتائی

عناصر یک مجموعه را قناس گویند وقتی نسبت برای زوجهای (a,b) و (b,a) در صورتی سازگار باشد که $a = b$

به عبارت دیگر اگر $a R b$ و $b R a$ فقط در صورت

$a = b$ وجود داشته باشد نسبت قناس است به این ترتیب چون دو نسبت $x < y$ و $y < x$ وقتی سازگارند که $x = y$ پس نسبت \leq قناس است.

۳- انعکاس - Reflexivité - نسبت را انعکاسی

گویند وقتی هر عنصر در خود نسبت سازگار باشد به عبارت دیگر:

$$x R x$$

نسبتی که با علامت $=$ نموده شود انعکاسی است چون

$$x = x : x \text{ به ازاء هر مقدار}$$

۴- تعدی - Transitivité - نسبت متعدی نامیده

می شود وقتی به ازاء دستگاه عناصر x,y,z اگر زوجهای (x,y) و (y,z) در نسبتی سازگار باشند زوج (x,z) نیز در آن نسبت

سازگار باشد. یعنی از $x R y$ و $y R z$ بدست آید $x R z$

Y وجود دارد - به این ترتیب هم‌نهادی توسط زوج‌های عناصر X و عناصر Y را جفت می‌کند .

تناظری که به این ترتیب بین عناصر X و Y برقرار می‌شود به تناظر یک‌به‌یک **Correspondance biunivoque** موسوم است .

نمودار یک‌نگاشت - نمودار یک‌نگاشت (مجموعه X در مجموعه Y) مجموعه زوج‌های (x, y) است که از هر عنصر X و عنصر نظیر آن در Y در این نگاشت تشکیل می‌شود . مفهوم این تعریف همانست که در جبر کلاسیک **تابع** **Fonction** اصطلاح شده است .

اگر X و Y مجموعه اعداد باشند هر زوج (x, y) می‌تواند در صفحه هر دستگاه مختصات مشخص یک نقطه باشد نمودار نگاشت (یا تابع) در این صورت توسط دستگاهی از نقاط نشان داده می‌شود (نمایش نموداری)

۵- در اینجا مجموعه‌های مختلف عددی را نام می‌بریم - در هر یک از این مجموعه‌ها تعریفات برای عملیات یا قواعد درجه‌بندی به آنها وجود دارد - خواص این عملیات با سازندگی مجموعه **Structure** ارتباط دارد که ما به تدریج سازندگی هر یک از آنها را نشان خواهیم داد .

مثلاً در جبر سازندگی‌های اصلی و کلاسیک عبارتند از: **گروه‌ها** **Groupes** ، **حلقه‌ها** **Anneaux** و **میدانها** (هیئت‌ها) **Corps**

مجموعه $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ درست (صحیح) طبیعی - اعداد درست طبیعی اعدادی هستند که در بادی امر به فکر می‌رسند این اعداد برای شمارش واحدهای منفرد بکار می‌روند :

مجموعه N اعداد درست طبیعی را با صفر (علامت واحد غیر موجود) تکمیل می‌کنند :

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
 ساده‌ترین عملیات در باره این اعداد جمع است. مجموع a و b به صورت $a + b$ نوشته می‌شود که عبارت از عددی است شامل واحدهای a و b - ضرب ، جمع چند عدد مساوی است و علامت آن \times است و نوشته $a \times b$ نمایش آن است که b عدد مساوی a را باید با هم جمع کرد - حاصل ضرب p عدد مساوی a به صورت a^p (توان a) نوشته می‌شود .

نسبت $>$ (بزرگتر از) متعددی است زیرا از $x > y$ و $y > z$ حاصل می‌شود $x > z$.

۴- اگر دو مجموعه X و Y را در نظر بگیریم که دارای عناصر نوعی (Elements génériques) yx باشند هر گاه به ازاء هر مقدار $x \in X$ طبق قاعده مفروضی عنصر نظیری از Y مانند y یافت شود می‌گویند در مجموعه Y **نگاشتی** (نگارش) **Application** از مجموعه X وجود دارد یا به صورت دیگر در مجموعه Y مقادیری از تابع با متغیر x موجود است، عنصر y متناظر **Correspondant** با یک عنصر x را **تصویر** و x را **مقدمه** **Antécédent** می‌گویند .

به موجب تعریف فوق هر عنصر x دارای تصویر **Image** واحد است ولی هر عنصر y از مجموعه Y ممکن است دارای مقدمه‌های متعدد بوده و یا اصلاً مقدمه (پیشرو) نداشته باشد اگر نگاشت بقسمی باشد که هر عنصر مجموعه Y دارای یک مقدمه باشد نگاشت تمام مجموعه Y را می‌پوشاند. در این صورت می‌گویند مجموعه X بر مجموعه Y نگاشت دارد (توجه : بر به جای در). دو مجموعه X و Y ممکن است از هم متمایز نباشند یعنی هر عنصر x از مجموعه X تصویری در همین مجموعه داشته باشد در این صورت نگاشت نسبت دوتایی xRy است که داخل X قرار دارد .

نگاشت بر نهاد (بر نگاری) Application surjective در بالا گفتیم که نگاشت X بر Y نگاشتی است که در آن مجموعه Y کاملاً بوسیله تصاویر عناصر X پوشیده می‌شود - هر عنصر Y لااقل یک مقدمه دارد - چنین نگاشتی را **بر نهادی** می‌گویند یا گفته می‌شود نگاشت تشکیل بر نهادی (Surjection) می‌دهد .

نگاشت در نهاد (در نگاری) Application injetive - اگر در نگاشت X بر Y عنصر y از مجموعه Y بیش از یک مقدمه داشته باشد نگاشت در نهاد است و یا تشکیل در نهادی **Injection** می‌دهد - در یک در نهادی ممکن است عناصری از مجموعه Y وجود داشته باشند که مقدمه نداشته باشند .

نگاشت هم نهاد (دو نگاری یا نگارش دوگانی) Application bijective - نگاشت را هم نهاد می‌نامند وقتی در عین حال بر نهاد و در نهاد باشد - در هم‌نهادی یا نگاشت هم‌نهاد نظیر هر عنصر x از مجموعه X فقط یک عنصر از مجموعه

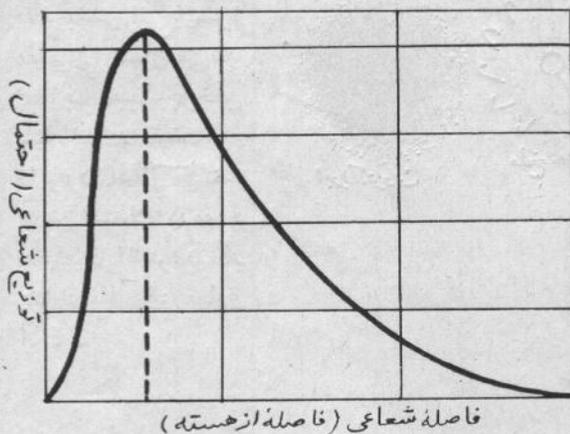
ساختمان شیمیائی ماه

(دنباله از شماره پیش)

ترجمه و تنظیم از : عطاءالله بزرگ نیا

احتمالات

x هم محاسبه کنیم. طبق نمودار زیر نقطه ای را پیدا می کنیم که این احتمال در آن از هر نقطه دیگر زیادتر باشد.



(شکل ۱)

این محاسبه با تغییر مقادیر x و قرار دادن صفر به جای y و z انجام می شود. چنانچه در مورد محورهای y و z به همین نحو عمل کنیم یعنی نخست x و z سپس y و x را ثابت بگیریم احتمال وجود الکترون اتم نئیدروژن در نقاط مختلف محورهای y و z تعیین خواهد شد. با ادامه این روش می توان احتمال وجود الکترون را برای هزاران نقطه در فضا محاسبه کرد. از نتایج حاصل چنین بر می آید که این احتمال برای بسیاری از نقاط یکسان است. از اتصال کلیه این نقاط به هم یک شکل سه بعدی تشکیل می شود. بنابراین سطح خارجی این اشکال فضائی، جایی است که احتمال وجود الکترون در آنجا بیش از هر جای دیگر می باشد. باید توجه داشت که اینها، اشکال حقیقی نیستند بلکه ساخته و پرداخته فکر انسان می باشند. از اینرو آنها را «الگوهای تخیلی» اتم نامیده اند.

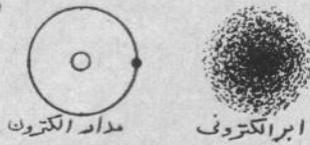
موقعیت يك الکترون

همینکه هایزبرگ با اقامه دلیل ثابت کرد که دانستن موقعیت و سرعت دقیق الکترون با هم امکان پذیر نیست، دانشمندان درصدد یافتن راه دیگری برای بیان موقعیت الکترون برآمدند. شرودینگر در استنباط خود از بسته موج، لزوم موج راهنما را برای کامل کردن این نظریه ضروری می دانست. وی استفاده از روش زیر را برای تعیین موقعیت الکترون در اتم امکان پذیر ساخت:

معادله موج

شرودینگر معادله ای کشف کرد که نقش موج راهنما را برای تعیین موقعیت احتمالی الکترون و یا بسته موج در هر لحظه تعیین می نماید. مادراینجا معادله شرودینگر را که مستلزم استفاده از ریاضیات عالی است مطرح نمی کنیم. تنها کافی است بدانیم که این معادله مختصات x ، y و z نقطه ای که احتمال وجود الکترون در آن نقطه می رود نشان می دهد. به عبارت دیگر احتمال یافته شدن الکترون در نقطه ای به مختصات $x=2$ و $y=0$ و $z=0$ با قرار دادن این مقادیر در معادله شرودینگر که متضمن عوامل دیگری نیز می باشد تعیین می شود. عوامل موجود در معادله شرودینگر عبارتند از ثابت پلانک و جرم و سرعت الکترون. نتیجه حاصل از حل رابطه نهائی، احتمال وجود الکترون را در نقطه ای به مختصات $x=2$ و $y=0$ و $z=0$ نشان می دهد.

از معادله موجی شرودینگر می توان برای تعیین موقعیت احتمالی الکترون اتم نئیدروژن استفاده کرد. در این صورت نتایج حاصل همانست که بوسیله برپیش بینی شده است. اگر احتمال وجود الکترون اتم نئیدروژن را در نقاط مختلف محور



شکل (۳) مشخص کردن موقعیت واقعی الکترون دیگر مورد نظر نیست ، تنها موقعیت احتمالی آن مورد توجه است از این رو به جای مراجعه به مدار الکترونی به ابر الکترونی مراجعه می شود .

اعداد کوانتوم

حل معادله شرودینگر - متأسفانه معادله شرودینگر حتی برای ریاضیدانان ماهر خالی از اشکال نیست . برخی از نتایج دانستنیهای مادر مورد الکترون وفق نمی دهد و قابل قبول نیست . چنین رویدادی در ریاضیات غیر عادی نیست . مثلاً ضلع مربعی به مساحت ۶۴ متر مربع ریشه دوم عدد ۶۴ یعنی یکی از دو عدد ۸ + و ۸ - متری باشد و چون اندازه ضلع مربع نمی تواند ۸ - متر باشد از این ریشه صرف نظر کرده و ریشه دیگر را که ۸ + متر است به عنوان جواب مسئله قبول می کنیم .

قبول یک پیش بینی ساده ، تفسیر نتایج حاصل از معادله شرودینگر را بسیار آسان کرده است . این پیش بینی که بعدها به ثبوت رسید می گوید که برخی از عاملهایی که در معادله شرودینگر دخالت دارند ناچار باید محدود به اعداد سر راست و صحیح باشند و هر چند این عاملها تغییر می کنند و ثابت نیستند اما در مجموعه ای از اعداد ، محدود هستند . چنین عواملی را پارامتر نامند . دخالت پارامترهای « اعداد سر راست » تفسیر نتایج حاصل از معادله شرودینگر را خیلی آسانتر کرده است . به این پارامترها با یک پارامتر دیگر که از مجموعه اعداد ناصحیح تشکیل یافته است عنوان اعداد کوانتم را داده اند . چهار عدد کوانتم (پارامترها) با حروف s, m, l, n نشان داده می شوند . در یک اتم هر الکترون بوسیله دستگاهی از چهار عدد کوانتیک معرفی می شود . الکترونها ایتمهای مختلف دارای دستگاههای مختلف از اعداد کوانتوم می باشند . ما در اینجا درباره هر یک از اعداد کوانتوم جداگانه بحث می کنیم .

عدد کوانتوم اصلی : عدد کوانتوم نخست مربوط به سطوح انرژی (۲، ۱، ۰، ۰، ۰، ۰) می باشد که بر برای اتم هیدروژن پیشنهاد کرد . طبق نظریه بر الکترون نمی تواند هر

اگر به پدیده مزبور از دیدگاه دیگری بنگریم می توان گفت که الکترون به دور هسته به نحوی می گردد که از نقاطی که احتمال یکسان دارند بیش از دیگر نقاط عبور می کند . الکترون با سرعت بسیار به دور هسته در گردش است . بنابراین اگر امکان دیدن آن وجود می داشت به شکل ذره کوچکی که در مسیری در گردش باشد بنظر نمی رسید بلکه بیشتر شبیه به ابری می بود که از حرکت سریع الکترون پدید آمده باشد . نمونه ای از چنین حالت ، چرخش ملخ هواپیما (شکل ۲) است . یک ملخ چهارپره در هر لحظه فقط در حدود ۲۰٪ دایره ای را که دور می زند اشغال می کند با این وجود ملخ در ضمن گردش بنظر می رسد که دایره کاملی را اشغال کرده است .

شکل (۲) - ملخ هواپیما در هر لحظه فقط بخشی از دایره معینی را اشغال می کند اما به سبب چرخش بسیار تند در حقیقت تمام دایره را اشغال می کند . همین استدلال در مورد موقعیت الکترون در یک اربیتال نیز صادق است .

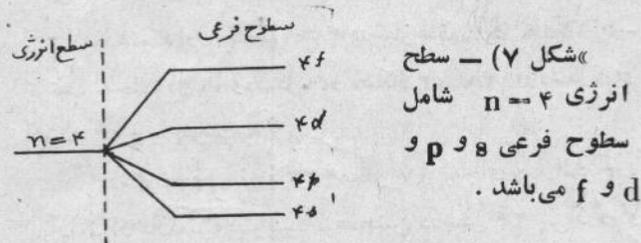


اگر در ضمن حرکت ملخ هواپیما امکان داشت که دست خود را بین دو پره ملخ قرار دهیم می توانستیم درک کنیم که در حقیقت ملخ یک دایره کامل را اشغال می کند . همین وضع در مورد الکترون نیز برقرار است .

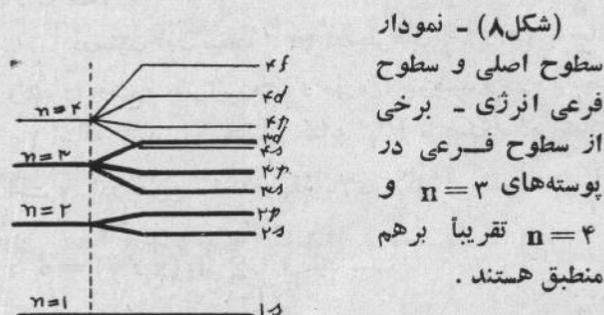
الکترون در حقیقت تمام فضا را اشغال می کند . اما در هر لحظه بیشتر محتمل است در سطح شکلی باشد که از پیوستن نقاطی که به اقوی احتمال وجود الکترون در آنجا است ، ساخته شده است . با اینکه احتمال یافته شدن ملخ هواپیما در خارج از حجمی که در فضا می سازد بی شک صفر است . اما برای یافته شدن الکترون در خارج از سطح « احتمال بیشتر » وجود دارد . بنا بر این چون حجم اشغال شده بوسیله الکترون نا مشخص است بهتر است آن را به شکل « ابر الکترونی » بدانیم . اکنون به مطالعه شکل و اندازه ابر الکترونی می پردازیم .

پنداشتید که تمام الکترونهاى يك پوسته اتمى دارى انرژى يكسان مى باشند. اما در حقيقت چنين نيست. مطالعه طيف نشان داده است كه يك سطح انرژى خود از چند سطح انرژى فشرده تشكيل شده است. اين سطوح انرژى را مى توان سطوح ياپوسته هاى فرعى يا زيرين (Subshells يا Sublevels) انرژى دانست.

تعداد پوسته هاى فرعى در هر پوسته اصلى برابر با عدد كوانتوم آن پوسته است، بنا بر اين پوسته ۱ دارى ۱ يك پوسته فرعى، پوسته ۲ دارى ۲ پوسته فرعى، پوسته ۳ دارى ۳ پوسته فرعى مى باشد. پائين ترين پوسته فرعى در هر پوسته با s دومى با p، سومى با d و چهارمى با f نشان داده مى شود. بنا بر اين اولين پوسته، تنها پوسته فرعى s دومين و سومين p و s و d را دارا مى باشد.

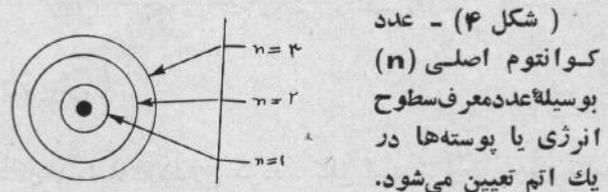


به عنوان مثال، در پوسته N (n=۴) به جاى يك سطح انرژى كه در شكل ۵ نشان داده شده. متشكل از ۴ سطح فرعى انرژى مى باشد.

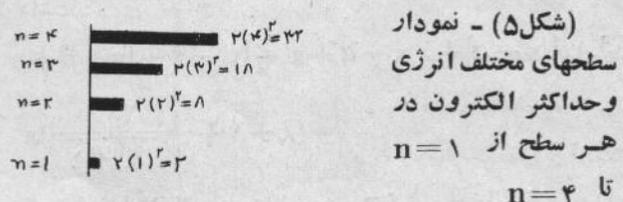


با بكار بردن قاعده نامبرده به آسانى مى توان نمودار سطوح انرژى را ترسيم كرد. شكل ۸، سطوح فرعى مختلف را برابى هر پوسته نشان مى دهد. به سطوح فرعى انرژى كه در سطوح اصلى ۳ و ۴ برهم منطبق هستند توجه كنيد. در سطوح چهار و پنج، پنج و شش و همچنين سطوح بالاتر اين كيفيت بيشتر بچشم مى خورد. مفهوم اين كيفيت در حقيقت آنست كه سطح فرعى ۴s دارى انرژى كمترى از سطح فرعى ۳d است. اين موضوع در چگونگى پر شدن الکترونها در مدارهاى مختلف حائز اهميت خاصى است. (دنباله دارد)

مقدار انرژى داشته باشد فقط مى تواند مقادير معينى را داشته باشد. وى بيان كرد كه الکترون تنها مى تواند سطوح خاصى از انرژى را اشغال كند. اين سطوح انرژى بدین ترتيب شماره گذاری شده است كه از عدد يك آغاز شده و به سوى اعداد صحيح بزرگتر پيش مى رود. عدد سطح انرژى كه با n نشان داده مى شود «عدد كوانتوم اصلى» نام دارد.



الکترونها ممكن است در هر سطح انرژى، يك اتم يافته شوند. ليكن بزرگترين تعداد الکترون ممكن، در يك سطح انرژى برابر با $2n^2$ است. مثلاً نخستين سطح انرژى (n=۱) و بنا بر اين حداكثر ۲ الکترون (2×1^2) و چهارمين سطح انرژى حداكثر ۳۲ الکترون (2×4^2) دارد. شكل (۵) سطحهاى مختلف انرژى، انرژى نسبى اين سطحها و حداكثر الکترون ممكن در هر يك از آنها را نمايش مى دهد.



سطوح مختلف انرژى را مى توان، چون پوسته هاى بر-گرد اتم دانست. پائين ترين سطح انرژى را پوسته K، دومين سطح انرژى را، پوسته L، سومين سطح انرژى، را پوسته M و چهارمين سطح انرژى را پوسته N نام داده اند. اين نشانه گذاری در برخى نمودارهاى سطوح انرژى بكار برده شده است. بديهى است كه پوسته هاى (K و L و M و N) با اعداد (۲ و ۳ و ۴ و ۵) كه مقادير ساده كوانتوم اصلى n مى باشند مطابقت دارند.

n	۱	۲	۳	۴	۵
لايه	K	L	M	N	O

شكل ۶ - مقادير n كه با حروف نشان داده مى شوند انرژى سطوح فرعى دومين كوانتوم l مى باشد. شايد تا كتون چنين مى -

معادلات شکلهای مختلف هندسی

یعقوب گنجی

دانشجوی رشته ریاضی دانشسرای عالی

(دنباله از شماره پیش)

شکل ۱ متساوی الاضلاع گردد. کافی است شرایطی تعیین کنیم که رابطه $A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_1$ برقرار باشد و اما این رابطه با رابطه زیر به فرض $\alpha > \alpha'$ و $\beta > \beta'$ معادل است:

$$\beta - \beta' = \frac{h}{\lambda} \sqrt{1 + \lambda^2} = \alpha - \alpha' = \alpha \Rightarrow$$

$$\alpha' = \alpha - a \quad \beta' = \beta - a \quad \text{و} \quad h = \frac{a\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \quad (1)$$

که با نقل مقادیر α' ، β' ، h در معادله E_1 خواهیم داشت:

$$(E''_1) \lambda|x - \alpha| + \lambda|x - \alpha + a| + |y - \beta| + |y - \beta + a| = (\lambda + 1 + \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}})a$$

که این معادله یک هشت ضلعی شبهمنتظم متساوی الاضلاع به ضلع a است که مرکز تقارنش نقطه:

$$C \left(\alpha - \frac{a}{\lambda}, \beta - \frac{a}{\lambda} \right)$$

می باشد.

معادله هشت ضلعی منتظم - برای اینکه هشت

ضلعی شکل ۱، منتظم گردد کافی است که شرط $\lambda = 1$ و شرایط

(۱) باهم برقرار باشند که در این حالت معادلات E_1 و E'_1

و E''_1 هر سه به صورت زیر درمی آیند:

$$(E_V) |x - \alpha| + |x - \alpha + a| + |y - \beta| + |y - \beta + a| = (2 + \sqrt{2})a$$

در این حالت شکل ۱ به شکل ۴ (پس از کوچک کردن

مقیاس) تبدیل می گردد. اگر در این شکل عدد a (طول ضلع

هشت ضلعی منتظم) مرتباً کوچک شود. اضلاع و اقطار هشت

ضلعی به موازات خود بطرف نقطه $A(\alpha, \beta)$ حرکت می کنند

وبالآخره در حالت $a = 0$ ، هشت ضلعی به نقطه A تبدیل

تذکر - از خواننده محترم این مقاله تقاضا می شود از جهت وابستگی کامل مقاله با قسمتی از آن که در شماره ۵۴ مجله درج شده است قبلاً بخش مذکور را مطالعه نموده و در آنجا اشتباههای چاپی زیر را اصلاح نمایند:

درستون اول صفحه ۴۳۰ در سطرهای ۸ و ۹ و ۱۲ به ترتیب به جای «۱۵» و «شکل ۹» و «شکل ۳»، «۱۴» و «شکل ۵» و «مثال ۳» باید نوشت.

درستون دوم صفحه ۴۳۲ سطر ۱۷ به جای «پارامتر»، «پارامتر از پارامتر» بنویسید. همچنین در سطر ۲۴ پس از «و خط» اضافه کنید:

«زاست $A_2 A_3$ و $A_3 A_1$ مشخص می شوند و گرنه E_2 به صورت: $|y - \beta| + |y - \beta'| = |\beta - \beta'|$ درمی آید که از آن درحالات».

درستون اول صفحه ۴۳۳ در سطرهای ۱۹ و ۲۲ به جای « α' » و «وضع» به ترتیب « α » و «فرض» بنویسید و در زیر سطر ۳۰ اضافه کنید: «به دلیل مشابه E'_1 با دستگاه زیر معادل است». در همین صفحه رابطه بالای شکل ۲ به صورت:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x, y) = 0 \quad \text{باید باشد.}$$

در شکلهای ۲ و ۱ نیز روابط:

$$AA_1 = \frac{h}{\lambda} \quad \text{و} \quad AA_2 = h$$

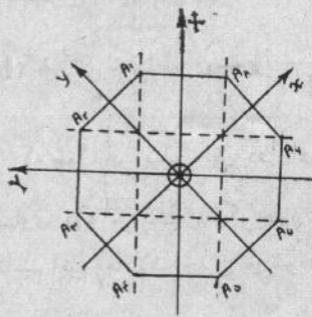
را مشخص نمائید. همچنین در سطرهای ۸ و ۹ از پایین صفحه ۴۳۵ (ستون ۱) به جای « $A = B$ » و « $AB > 0$ » به ترتیب

« $A = B$ و $C = 0$ » و « $AB > \frac{C^2}{4}$ » بنویسید.



معادله هشت ضلعی شبهمنتظم متساوی الاضلاع - در E_1 می توان پارامترها را چنان اختیار کرد که هشت ضلعی

نیز هر يك حول مبدأ مختصات به اندازه 45° می چرخند و شکل ۵ به شکل ۶ بدل می گردد . دستگاه xOy نیز به وضع XOY (شکل ۶) در می آید .



(ش ۶)

واضح است که چون هشت ضلعی شکل ۶ ، وضعش نسبت به دستگاه xOy با هشت ضلعی شکل ۵ یکی است معادله آن در این دستگاه همان E_8 خواهد بود . اما برای اینکه معادله این هشت ضلعی را نسبت به وضعیت

جدید اقطار بنویسیم ، به این توجه می کنیم که این معادله نسبت به دستگاه XOY به صورت زیر است :

$$|X + \frac{a}{\sqrt{2}}| + |X - \frac{a}{\sqrt{2}}| + |Y + \frac{a}{\sqrt{2}}| + |Y - \frac{a}{\sqrt{2}}| = (2 + \sqrt{2})a$$

که از آنجا بنا بر فرمولهای دوران (بخش اول - دوران محورها) معادله مطلوب در دستگاه xOy چنین می شود :

$$|x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}| + |x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}| + |y \frac{\sqrt{2}}{2} - x \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}| + |y \frac{\sqrt{2}}{2} - x \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}| = (2 + \sqrt{2})a$$

که پس از ضرب داخل قدر مطلقها و طرف دوم در $\sqrt{2}$ داریم :

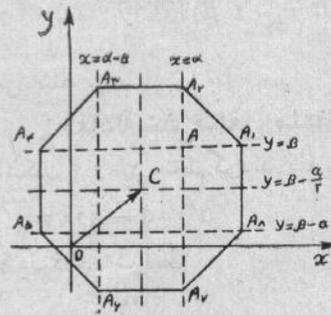
$$(E_{10}) \quad |x + y + a \frac{\sqrt{2}}{2}| + |x + y - a \frac{\sqrt{2}}{2}| + |y - x + a \frac{\sqrt{2}}{2}| + |y - x - a \frac{\sqrt{2}}{2}| = 2(\sqrt{2} + 1)a$$

و این معادله هشت ضلعی منتظم شکل ۶ بر اساس اقطار مرسوم در آن می باشد . از تساوی هر يك از این قدر مطلقها با صفر ، معادله یکی از اقطار مزبور بدست می آید . معادله این هشت ضلعی بر مبنای اقطار افقی و قائم آن چنانکه دیدیم E_8 می باشد .

معادله شش ضلعی شبه منتظم متساوی الزوایا -

وقتی در E_6 ، $\lambda = \text{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ و در E_6 ،

$$\lambda = \text{cotg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



(ش ۴)

می شود و معادله آن به صورت :

$$|x - \alpha + y - \beta| = 0$$

در می آید .

اگر مختصات نقطه C مرکز این هشت ضلعی را به ترتیب

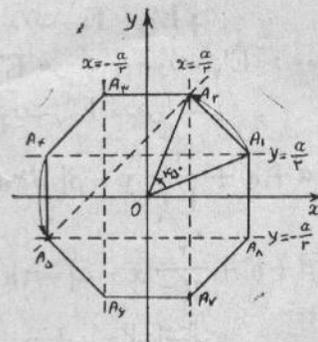
$$\alpha_1 = \alpha - \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\beta_1 = \beta - \frac{a}{\sqrt{2}}$$

بنامیم E_8 چنین می شود :

$$(E_8) \quad |x - \alpha_1 - \frac{a}{\sqrt{2}}| + |x - \alpha_1 + \frac{a}{\sqrt{2}}| + |y - \beta_1 - \frac{a}{\sqrt{2}}| + |y - \beta_1 + \frac{a}{\sqrt{2}}| = (2 + \sqrt{2})a$$

حال اگر در شکل



(ش ۵)

۴ محورهای مختصات

را به اندازه بردار OC

انتقال دهیم این محور -

ها بر محورهای تقارن

هشت ضلعی منطبق

می شوند و شکل ۴ به

شکل ۵ و معادله آن

به معادله زیر تبدیل می شود :

$$(E_9) \quad |x - \frac{a}{\sqrt{2}}| + |x + \frac{a}{\sqrt{2}}| + |y - \frac{a}{\sqrt{2}}| + |y + \frac{a}{\sqrt{2}}| = (2 + \sqrt{2})a$$

که معادله وضعیت جدید هشت ضلعی (شکل ۵) می باشد . در

این حالت اگر a صفر شود اقطار هشت ضلعی به محورهای

مختصات و خود هشت ضلعی به نقطه O تبدیل می شود و E_8

به صورت $|x + y| = 0$ در می آید که معادله مبدأ مختصات است .

اگر شکل ۵ را حول مبدأ مختصات به اندازه 45° (یا مضرب

صحیحی از 45°) بچرخانیم هر رأس به رأس بعدی (یا به رأسی

دیگر) تبدیل می شود و در وضع چند ضلعی تغییری داده نمی شود

اما (بطور کلی وقتی به اندازه مضرب فردی از 45° دوران دهیم)

وضعیت اقطار مرسوم تغییری می کند زیرا فی المثل از آنجا که

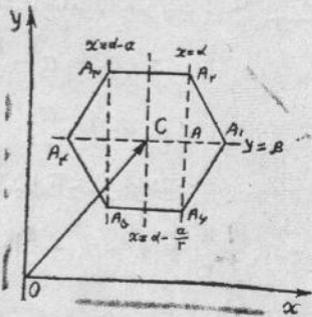
A_1 پس از دوران بر A_2 و A_3 بر A_4 منطبق می شود قطر $A_1 A_4$

پس از دوران به وضع $A_2 A_5$ در می آید . به این ترتیب اقطار دیگر

$$C'(\alpha \text{ و } \beta - \frac{a}{\sqrt{3}}) \text{ و } C(\alpha - \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ و } \beta)$$

می باشند.

معادله شش ضلعی منتظم - برای اینکه شش ضلعیهای اشکال ۲ و ۲' منتظم گردند کافی است در اولی شرایط:



$$\alpha' = \alpha - a\lambda = \sqrt{3}h$$

و در دومی شرایط:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta' = \beta - a$$

و در هر دو شرط:

$$h = \frac{a\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

برقرار باشد که از آنجا

(ش ۴')

معادلات E_6 ، E_6' و

E_6'' هر سه به صورت E_6' ، F_6 و معادلات F_6' ، F_6'' به صورت E_6'' درمی آیند:

$$(E_6') \quad |x - \alpha| + |x - \alpha + a| + \frac{\sqrt{3}}{2}|y - \beta| = \sqrt{3}a$$

$$(E_6'') \quad |y - \beta| + |y - \beta + a| + \frac{\sqrt{3}}{2}|x - \alpha| = \sqrt{3}a$$

در این حالت اشکال

۲ و ۲' (پس از کوچک

کردن مقیاس) به ترتیب

به اشکال ۳' و ۳''

تبدیل می شوند. نقطه

$A(\alpha \text{ و } \beta)$ در این دو

شکل عینا وضع نقطه

A در شکل ۲ رادارد

و در حالت $a=0$

این شش ضلعیها به این نقطه بدل می شوند (ش ۴'')

اگر مختصات نقطه C مرکز شش ضلعی افقی (شکل ۴')

را به ترتیب: $\alpha_1 = \alpha - \frac{a}{\sqrt{3}}$ و $\beta_1 = \beta$ و مختصات C'

(در شکل ۴'') را: $\alpha_2 = \alpha$ و $\beta_2 = \beta - \frac{a}{\sqrt{3}}$ بنامیم E_6' و E_6''

چنین می شوند:

$$(E_6') \quad |x - \alpha_1 - \frac{a}{\sqrt{3}}| + |x - \alpha_1 + \frac{a}{\sqrt{3}}| +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}|y - \beta_1| = \sqrt{3}a$$

گردد شش ضلعیهای اشکال ۲ و ۲' متساوی الزوایا می شوند و معادلاتشان به ترتیب به صورتهای زیر درمی آیند:

$$\sqrt{3}|x - \alpha| + \sqrt{3}|x - \alpha'| + 2|y - \beta| = \sqrt{3}|\alpha - \alpha'| + 2h$$

$$|y - \beta| + |y - \beta'| + \frac{\sqrt{3}}{2}|x - \alpha| = |\beta - \beta'| + \sqrt{3}h$$

که طول هر ضلع مایل در اولی مساوی $\frac{\sqrt{3}h}{2}$ و در دومی

مساوی $\sqrt{3}h$ می باشد. اگر بطور کلی طول هر ضلع مایل را a بنامیم این معادلات چنین می شوند:

$$(E_6') \quad |x - \alpha| + |x - \alpha'| + \frac{\sqrt{3}}{2}|y - \beta| =$$

$$= |\alpha - \alpha'| + a$$

$$(F_6') \quad |y - \beta| + |y - \beta'| + \frac{\sqrt{3}}{2}|x - \alpha| = |\beta - \beta'| + a$$

معادله شش ضلعی شبه منتظم متساوی الاضلاع -

برای آنکه شش ضلعیهای اشکال ۲ و ۲' متساوی الاضلاع گردند

کافی است که داشته باشیم: $A_6A_6' = A_6'A_1 = a$ ، و اما

با فرض $\alpha > \alpha'$ و $\beta > \beta'$ ، این رابطه در شکل ۲ با رابطه:

$$\alpha - \alpha' = \frac{h}{\lambda} \sqrt{1 + \lambda^2} = a$$

و در شکل ۲' با رابطه:

$$\frac{h}{\lambda} \sqrt{1 + \lambda^2} - \beta - \beta' = a$$

معادل است که از آنجا نتیجه می شود:

$$\alpha' = \alpha - a, \quad \beta' = \beta - a \quad \text{و} \quad h = \frac{a\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

بنابراین معادلات اشکال مزبور در این حالت به ترتیب به صورتهای

زیر در می آیند:

$$(E_6') \quad \lambda|x - \alpha| + \lambda|x - \alpha + a| + 2|y - \beta| =$$

$$= (1 + \frac{\sqrt{3}}{\lambda})a\lambda$$

$$(F_6') \quad |y - \beta| + |y - \beta + a| + \sqrt{3}|x - \alpha| =$$

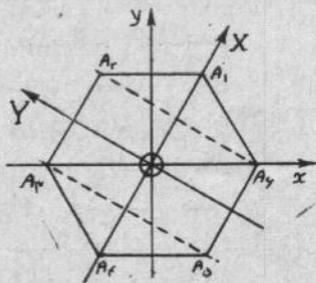
$$= (1 + \frac{\sqrt{3}}{\lambda})a$$

که اینها به ترتیب معادلات شش ضلعیهای شبه منتظم

متساوی الاضلاع افقی و قائم به ضلع a هستند. مراکز تقارن

آنها نیز به ترتیب نقاط:

واضح است که چون وضع شش ضلعهای اشکال ۶' و ۶''



(ش ۶')

نسبت به دستگاه xOy به ترتیب باشش ضلعیهای ۵' و ۵'' یکی است معادلات آنها در این دستگاه همان E'۶ و E''۶ خواهند بود. اما برای آنکه معادلات آنها را نسبت به وضعیت جدید اقطار بنویسیم به این توجه می‌کنیم که این

معادلات نسبت به دستگاه XOY به ترتیب به صورتهای زیر اند:

$$\left|X + \frac{a}{\sqrt{3}}\right| + \left|X - \frac{a}{\sqrt{3}}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}|Y| = 2a \quad \text{و}$$

$$\left|Y + \frac{a}{\sqrt{3}}\right| + \left|Y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}|X| = 2a$$

که از آنجا بنابر فرمولهای دوران، معادلات مطلوب در

دستگاه xOy چنین می‌شوند:

$$\left|\frac{x}{\sqrt{2}} + y\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{x}{\sqrt{2}} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\left|\frac{y}{\sqrt{2}} - x\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 2a$$

$$\left|\frac{y}{\sqrt{2}} - x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{y}{\sqrt{2}} - x\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\left|\frac{x}{\sqrt{2}} + y\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 2a$$

و یا:

$$(E'_{۶}) \quad \left|x + y\sqrt{3} + a\right| + \left|x + y\sqrt{3} - a\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\left|y - x\sqrt{3}\right| = 4a$$

$$(E''_{۶}) \quad \left|y - x\sqrt{3} + a\right| + \left|y - x\sqrt{3} - a\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\left|x + y\sqrt{3}\right| = 4a$$

معادلات این شش ضلعیها بر مبنای اقطار افقی و قائم چنانکه دیدیم به ترتیب E'۶ و E''۶ می‌باشند.

$$(E''_{۸}) \quad \left|y - \beta_2 - \frac{a}{\sqrt{3}}\right| + \left|y - \beta_2 + \frac{a}{\sqrt{3}}\right| +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}\left|x - \alpha_2\right| = 2a$$

حال اگر در اشکال

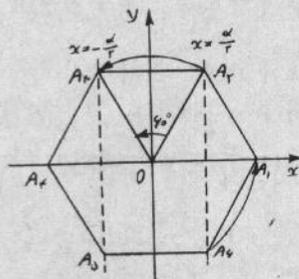
۴' و ۴'' محورهای مختصات را به اندازه

برداریهای OC' و OC''

انتقال دهیم این محورها

بر محورهای تقارن شش

ضلعیها منطبق می‌شوند



(ش ۵')

و این اشکال به ترتیب به اشکال ۵' و ۵'' و معادلات آنها E'۸ و E''۸ به معادلات زیر تبدیل می‌شوند:

$$(E'_{۸}) \quad \left|x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right| + \left|x + \frac{a}{\sqrt{3}}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}|y| = 2a$$

$$(E''_{۸}) \quad \left|y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right| + \left|y + \frac{a}{\sqrt{3}}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}|x| = 2a$$

که معادلات وضعیتهای جدیدش ضلعیها (اشکال ۵' و ۵'')

می‌باشند. در این حالت اگر a به سمت صفر میل کند اقطار شش-

ضلعیها به سمت محورهای مختصات و اضلاع آنها به سمت نقطه

O میل می‌کنند که در حالت حد انطباق صورت می‌گیرد و

معادلات اخیر به صورت $|x + y| = 0$ در می‌آیند.

اگر اشکال ۵' و ۵'' را حول مبدأ مختصات به اندازه ۶۰°

(یا مضرب صحیحی از

۶۰°) بچرخانیم هر

رأس به رأس بعدی (یا

به رأسی دیگر) تبدیل

می‌شود و در وضع چند

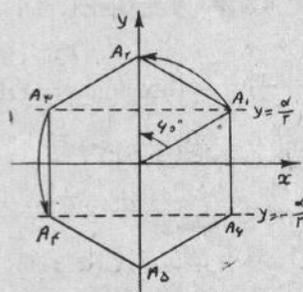
ضلعی تغییری حاصل

نمی‌شود اما بطور کلی

وقتی به اندازه

$$60^\circ (2K \pm 1)$$

دوران دهیم وضعیت



(ش ۵'')

اقطار مرسوم تغییری می‌کند و هر یک از آنها حول مبدأ مختصات

به اندازه ۶۰° می‌چرخند و اشکال ۵' و ۵'' به اشکال ۶' و ۶''

بدل می‌شوند. دستگاه xOy نیز به وضع XOY (اشکال

۶' و ۶'') در می‌آید.

می توان طرفین این روابط را بر $|\cos\theta|$ تقسیم کرد و با فرض:

$$m = tg\theta \text{ و } a = \sqrt{2}k|\cos\theta|$$

$$(E_{13}) \quad |x + my + k| + |x + my - k| + |y - mx| + |k| + |y - mx - k| = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})k$$

$$(E'_{13}) \quad |x + my + k| + |x + my - k| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|y - mx| = \sqrt{2}k$$

چنانچه در E_{13} و E'_{13} همه جا به جای a (طول ضلع هشت ضلعی یا شش ضلعی منتظم) a' بنویسیم و در روابط حاصل داخل قدر مطلقها و طرف دوم را در عدد مثبت و اختیاری p ضرب کنیم با فرض:

$$p \cos\theta = a, \quad p \sin\theta = b \text{ و } p a' = \sqrt{2}d$$

$$(E_{14}) \quad |ax + by + d| + |ax + by - d| + |ay - bx + d| + |ay - bx - d| = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})d$$

$$(E'_{14}) \quad |ax + by + d| + |ax + by - d| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|ay - bx| = \sqrt{2}d$$

که با توجه به آنکه بطور کلی $|u| = |-u|$ می توان آنها را به صورت زیر نیز نوشت:

$$(E_{14}') \quad |ax + by + d| + |ax + by - d| + |bx - ay - d| + |bx - ay + d| = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})d$$

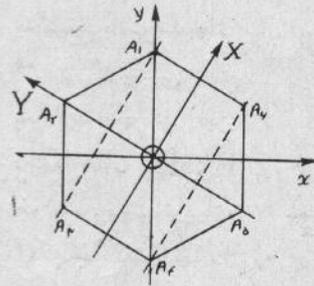
$$(E'_{14}') \quad |ax + by + d| + |ax + by - d| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|bx - ay| = \sqrt{2}d$$

اکنون برای نوشتن معادلات کلی هشت ضلعی و شش ضلعی منتظم آنها را انتقال می دهیم تا مرکز آنها یعنی O در نقطه $C(\alpha, \beta)$ قرارگیرد. در این حالت معادله E'_{14}' به صورت زیر در می آید:

$$|a(x - \alpha) + b(y - \beta) + d| + |a(x - \alpha) + b(y - \beta) - d| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|b(x - \alpha) - a(y - \beta)| = \sqrt{2}d$$

$$|ax + by - a\alpha - b\beta + d| + |ax + by - a\alpha - b\beta - d| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|bx - ay - b\alpha + a\beta| = \sqrt{2}d$$

اصولاً براساس این روش بر حسب آنکه معادله کدام قطر بزرگ را در معادله دخالت دهیم سه نوع معادله برای هر شش ضلعی می توان نوشت. فی المثل در شکل ۴، وضع شش ضلعی پس از دوران به اندازه 120° تغییری نمی کند ولی اقطار مرسوم در



(ش ۴')

آن دوران کرده و به وضعی غیر از آنچه در اشکال ۵ و ۶ هست در می آیند. در این حالت E'_4 به صورت زیر نوشته می شود:

$$(E'_{11}) \quad |x - \sqrt{3}y + a| + |x - \sqrt{3}y - a| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|y + \sqrt{3}x| = \sqrt{2}a$$

بعداً خواهیم دید که برای هر شش ضلعی دو نوع معادله دیگر نیز می توان ارائه داد که یکی از آنها بر مبنای اقطار بزرگ و دیگری بر مبنای اضلاع شش ضلعی است ولی همواره استفاده از روش مذکور در فوق در تحریر معادلات، ساده تر و بهتر است.

معادلات کلی هشت ضلعی و شش ضلعی منتظم

اگر اشکال ۵ و ۶ را جای 45° و 60° بطور کلی θ حول O دوران بدهیم معادلات اشکال منتظم مزبور یعنی E_4 و E'_4 به ترتیب به صورتهای زیر در می آیند:

$$(E_{12}) \quad \left| x \cos\theta + y \sin\theta + \frac{a}{\sqrt{2}} \right| + \left| x \cos\theta + y \sin\theta - \frac{a}{\sqrt{2}} \right| + \left| y \cos\theta - x \sin\theta + \frac{a}{\sqrt{2}} \right| + \left| y \cos\theta - x \sin\theta - \frac{a}{\sqrt{2}} \right| = (\sqrt{2} + \sqrt{2})a$$

$$(E'_{12}) \quad \left| x \cos\theta + y \sin\theta + \frac{a}{\sqrt{2}} \right| + \left| x \cos\theta + y \sin\theta - \frac{a}{\sqrt{2}} \right| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|y \cos\theta - x \sin\theta| = \sqrt{2}a$$

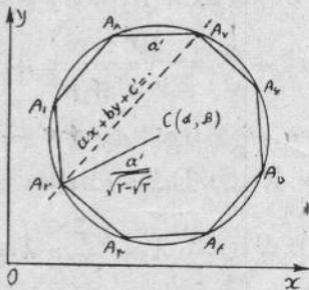
که اگر $\cos\theta = 0$ یعنی θ مضرب فردی از 90° باشد در این صورت وضعیت هشت ضلعی مذکور و اقطارش پس از دوران تغییر نخواهد کرد ولی شش ضلعی مذکور از حالت افقی به حالت قائم (شکل ۵) در خواهد آمد و معادلات E_{12} و E'_{12} به ترتیب همان معادلات E_4 و E'_4 خواهند بود. در غیر این صورت

را به ترتیب به صورت زیر نیز نوشت :

$$(E_{16}) |ax + by + c| + |ax + by + c'| + |ay - bx + c''| + |ay - bx + c - c' + c''| = (\sqrt{2} + \sqrt{2})(c - c')$$

$$(E'_{16}) |ax + by + c| + |ax + by + c'| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |ay - bx + c''| = \sqrt{2}(c - c')$$

برای رسم نمایش هندسی E'_{16} یا E_{16} ، با محاسبه مختصات مرکز طول ضلع و شعاع شش ضلعی یا هشت ضلعی منتظم (شکل ۷) پس از رسم یک قطر چند ضلعی و دایره محیطی آن می توان به سادگی شکل را کامل کرد .



(ش ۷)

منتظم کوچکتر می شود و در حالتی که $c - c' = 0$ صفر شود یا لااقل یکی از ضرائب a و b از حیث قدر مطلق به سمت بینهایت میل کند این چند ضلعی به نقطه C و در حالت اول معادله آن به معادله زیر تبدیل می شود :

$$|a + by + c| + |bx - ay + c''| = 0$$

که یکی از معادلات نقطه C در حالت $c = c'$ می باشد . در حالت دوم معادلات مزبور پس از تقسیم طرفین بر ضریبی که بینهایت شده است به صورت $|x| + |y| = 0$ در می آیند . یعنی در این حالت مرکز چند ضلعی (و خود چند ضلعی) بر مبدأ مختصات منطبق می شود .

به همین طریق می توان معادله مربع (چهار ضلعی منتظم) به ضلع a' را از دوران شکل ۳ به ازا $\lambda = 1$ به صورت :

$$(E''_{16}) |ax + by + c| + |\pm bx \mp ay + c'| = -a' \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

بدست آورد . می توان نمودار معادله :

$$(E'''_{16}) |ax + by + c| - \frac{d}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(2) \begin{cases} -a\alpha - b\beta = e \\ -b\alpha + a\beta = f \end{cases} \quad \text{یا با فرض :}$$

$$(E'_{15}) |ax + by + e + d| + |ax + by + e - d| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |bx - ay + f| = \sqrt{2}d$$

به همین طریق E_{15} با فرض (۲) به صورت زیر درمی آید :

$$(E_{15}) |ax + by + e + d| + |ax + by + e - d| + |bx - ay + f - d| + |bx - ay + f + d| = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})d$$

ضمناً بنا به فرض (۲) مختصات نقطه C (مرکز هشت ضلعی یا شش ضلعی منتظم) چنین خواهند بود :

$$\alpha = -\frac{ae + bf}{a^2 + b^2} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{af - be}{a^2 + b^2}$$

E_{15} با فرض (۳) $e + d = c$ و $e - d = c'$ و $f - d = c''$ چنین می شود :

$$(E_{16}) |ax + by + c| + |ax + by + c'| + |bx - ay + c''| + |bx - ay + c - c' + c''| = (\sqrt{2} + \sqrt{2})(c - c')$$

که بنا به فرض ۳ مختصات مرکز این هشت ضلعی چنین خواهد بود .

$$\alpha = -\frac{a(c + c') + b(c - c' + \sqrt{2}c'')}{\sqrt{2}(a^2 + b^2)}$$

$$\beta = \frac{a(c - c' + \sqrt{2}c'') - b(c + c')}{\sqrt{2}(a^2 + b^2)}$$

به همین طریق E'_{15} با فرض : $f = c'$ و $e - d = c'$ و $(3') e + d = c$ به صورت زیر در می آید :

$$(E'_{16}) |ax + by + c| + |ax + by + c'| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |bx - ay + c''| = \sqrt{2}(c - c')$$

که بنا به فرض ۳ مختصات مرکز این شش ضلعی عبارتند از :

$$\alpha = -\frac{a(c + c') + \sqrt{2}bc''}{\sqrt{2}(a^2 + b^2)}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}ac'' - b(c + c')}{\sqrt{2}(a^2 + b^2)}$$

همچنین a' ، طول ضلع این اشکال منتظم بنا به فرض (۱) مساویست با :

$$a' = \frac{\sqrt{2}d}{p} = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c - c'}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بامقایسه E_{16} با E_{15} و E'_{15} با E'_{16} می توان E_{16} و E'_{16}

را نیز يك دوضلعی منتظم نامید . این نمودار عبارت از دو خط متوازی به فاصله d از هم می باشد که به يك فاصله از خط $ax + by + c = 0$ قرار دارند . خط اخیر را قطر این دو ضلعی می نامیم .

نتیجه - از قیاسه $E_{16}, E'_{16}, E_{17}, E'_{17}$ و E''_{16} با معادلات E_1, E_6, E_7 می توان معادلات هشت ضلعی شش ضلعی و چهار ضلعی شبه منتظم کامل را در حالت کلی با فرض $C < C', C > C''$ و $k > 0$ به ترتیب به صورت های زیر نوشت:

$$(E_{17}) \quad \lambda |ax + by + c| + \lambda |ax + by + c'| + | \pm bx \mp ay + c'' | + | \pm bx \mp ay + c''' | = \frac{\lambda(c - c') + c'' - c'''}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \tau k$$

$$(E'_{17}) \quad \lambda |ax + by + c| + \lambda |ax + by + c'| + | \pm bx \mp ay + c'' | = \frac{\lambda(c - c')}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \tau k$$

$$(E''_{17}) \quad \lambda |ax + by + c| + | \pm bx \mp ay + c' | = \tau k$$

نمودارهای E'_{17} و E_{17} به ترتیب به ازا

$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\lambda = 1$ متساوی الزوایا می گردند . همچنین به ازا

$$k = \frac{(c - c')\lambda}{\sqrt{(a^2 + b^2)(1 + \lambda^2)}} \text{ و با شرط } c - c' = c'' - c'''$$

هر دو متساوی الاضلاع می شوند و معادلاتشان به ترتیب به صورت زیر در می آیند :

$$(E_{17}) \quad \lambda |ax + by + c| + \lambda |ax + by + c'| + | \pm bx \mp ay + c'' | + | \pm bx \mp ay + c - c' + c'' | = \left(\lambda + 1 + \frac{\tau \lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right) \cdot \frac{(c - c')}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$(E'_{17}) \quad \lambda |ax + by + c| + \lambda |ax + by + c'| + | \pm bx \mp ay + c'' | = \left(1 + \frac{\tau}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right) \frac{\lambda(c - c')}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نمودار E''_{17} (لوزی) همواره متساوی الاضلاع است و

به ازا $\lambda = 1$ متساوی الزوایا نیز می شود (مربع)

خوانندگان علاقمند ، پر حوصله و محقق می توانند با روشی که در سرتاسر این بخش بکار رفت معادلات $2n$ ضلعیهای شبه منتظم کامل را که در آنها $n \geq 5$ به ترتیب در حالات خاص (افقی یا قائم بودن چند ضلعی) نوشته سپس وسیله دوران و انتقال اشکال مزبور معادلات کلی آنها را بدست آورند . شاید از آنجا بتوانند معادله کلی يك و $2n$ ضلعی شبه منتظم متساوی الزوایا ،

متساوی الاضلاع یا منتظم ، را نیز حدس بزنند و حتی درستی این حدس را بثبوت برسانند . ما خود نیز چنانچه فرصتی حاصل شد در این زمینه تحقیق خواهیم کرد . برای راهنمایی در این زمینه به تمرین شماره ۱۱ توجه کنید .

بد نیست این راهم بدانید که بطور کلی برای هر n ضلعی بر حسب نوع انتخاب اقطار در حالت کلی معادلات زیادی می توان نوشت که مادرا اینجا ساده ترین راه تحریر معادلات را برای $2n$ ضلعیهای خاص عرضه کردیم .

تمرینات

۱- در مسئله ۴ شرایطی تعیین کنید که هشت ضلعی یا شش ضلعی حاصل اولاً متساوی الزوایا ، ثانیاً متساوی الاضلاع ، ثالثاً منتظم گردد . در هر حالت مرکز تقارن این اشکال را به مبداء مختصات انتقال داده و معادلاتشان را در وضع جدید بنویسید .

۲- معادلات هشت ضلعی و شش ضلعی (افقی یا قائم) منتظمی را بنویسید که مرکزشان مبداء مختصات و طول ضلعشان واحد باشد (با معلومات فعلی برای اولی دو معادله و برای دومی در هر حالت سه معادله می توان نوشت) ، سپس محورها را به نقطه O_1 (-۱ و -۱) انتقال داده معادلاتشان را در وضع جدید محورها بنویسید .

۳- معادلات کلی هشت ضلعیها و شش ضلعیهای منتظم به مرکز O و به ضلع واحد را بنویسید .

۴- معادله کلی دوضلعی منتظمی را بنویسید که قطرش از مبداء مختصات بگذرد و فاصله دوضلعش ۲ واحد باشد .

۵- مسئله ۳ را در مورد هشت ضلعیهای شبه منتظم متساوی الزوایا یا متساوی الاضلاع حل کنید .

۶- نمودار E_{17} در چه حالت مستطیل می باشد آیا وضعیت این مستطیل به λ بستگی دارد .

۷- شکل ۵ را حول نقطه O به اندازه $(-22/5^\circ)$ دوران داده معادله هشت ضلعی را در وضعیت جدید بنویسید .

۸- دو رأس مجاور و مشترک يك هشت ضلعی و شش ضلعی منتظم نقاط $A_1(1, 2)$ و $A_2(2, 1)$ هستند . اگر شش ضلعی در زیر هشت ضلعی واقع باشد معادلات آنها را بنویسید .

۹- معادله يك قطر هشت ضلعی منتظم به صورت

$$3x + 4y = 3$$

و مرکز آن نقطه $C(0, 2)$ است با استفاده از شکل ۷ این هشت ضلعی را رسم کرده سپس معادله آن را بنویسید . معادله شرطی یکی از اضلاع آن را نیز بنویسید .

(دنباله در صفحه ۵۲۱)

محاسبه توابع اولیه بعضی از توابع

تنظیم از: بختیار علیمددسلطانی

دانشجوی دانشگاه آریامهر

$$Y = \frac{1}{c} \left[\frac{a(cx+d)^{n+2}}{c(n+2)} + \frac{(bc-ad)(cx+d)^{n+1}}{c(n+1)} \right] + C$$

۲- برای محاسبه تابع اولیه تابع به صورت:

$$y = (ax^2 + bx + c)(dx + e)^n$$

$$dx + e = t \quad (n \neq -1 \text{ و } -2) \text{ فرض می کنیم}$$

$$\text{و یا } x = \frac{t-e}{d} \text{ خواهیم داشت:}$$

$$y = \frac{1}{d^2} [at^{n+1} + (bd - 2ae)t^{n+1} + (ae^2 + d^2c - bde)t^n]$$

و یا:

$$y = \frac{1}{d^2} [a(dx+e)^{n+2} + (bd - 2ae)(dx+e)^{n+1} + (ae^2 + d^2c - bde)(dx+e)^n]$$

پس:

$$Y = \frac{1}{d^2} \left[\frac{a(dx+e)^{n+2}}{d(n+2)} + \frac{(bd - 2ae)(dx+e)^{n+1}}{d(n+1)} + \frac{(ae^2 + d^2c - bde)(dx+e)^n}{d(n+1)} \right] + C$$

۳- بطور کلی با استفاده از روش فوق می توان از

توابعی که به صورت:

$$y = (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m)(bx + c)^n$$

می باشد تابع اولیه گرفت.

مثال ۱- محاسبه توابع اولیه تابع

$$y = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

$$\text{فرض می کنیم: } 2x+1 = t \quad \text{پس } x = \frac{t-1}{2}$$

مبثی که در علوم ریاضی و تجربی دارای اهمیت بسیار و

موارد استعمال فراوان است محاسبه توابع اولیه يك تابع یا انتگرالگیری از يك تابع می باشد که در محاسبه سطح زیر يك منحنی، حجم يك جسم دوار؛ طول قوس يك منحنی، و تعیین مختصات مرکز ثقل يك جسم و غیره بکار می رود.

منظور از نوشتن این مقاله آشنا نمودن دانش آموزان

به طرق مختلف تعیین توابع اولیه است که در امتحانات نهایی و

مخصوصاً در امتحانات ورودی دانشکده ها با آن سروکار پیدا

می کنند. و ما با فرض اینکه خواننده از مطالب و فرمولهای

مقدماتی آشنائی دارد بحث خود را شروع می کنیم.

I

۱- برای محاسبه توابع اولیه توابعی که به صورت

کلی زیراند:

$$y = (ax + b)(cx + d)^n$$

(n هر مقدار مقدار صحیح یا کسری مثبت یا منفی را می تواند

داشته باشد ولی در اینجا تنها -2 و -1 را که از

برنامه متوسطه خارج است در نظر نمی گیریم.)

$$\text{فرض می کنیم که } cx + d = t \quad \text{و یا } x = \frac{t-d}{c}$$

و این مقدار x را در تابع قرار می دهیم. بعد از انجام عملیات

لازم خواهیم داشت:

$$y = \frac{a}{c} t^{n+1} + \frac{bc-ad}{c} t^n =$$

$$= \frac{1}{c} [a(cx+d)^{n+1} + (bc-ad)(cx+d)^n]$$

می دانیم که تابع اولیه تابع $y = (ax + b)^n$ برابر است با:

$$Y = \frac{1}{a(n+1)} (ax + b)^{n+1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$5- \quad y = \frac{x^2 + 6x + 3}{(2x-2)^2}$$

$$6- \quad y = \frac{7x^2 + 7x^2 + 1}{(2x+1)^2}$$

$$7- \quad y = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{5x+1}}$$

$$8- \quad y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}$$

$$9- \quad y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$$

$$10- \quad y = \frac{x^2}{\sqrt[n]{(ax+b)^m}}$$

$$11- \quad y = (\sqrt{2x^2 - 1})(\sqrt{2x+6})^5$$

$$12- \quad y = (\sqrt{2x^2 - 1})(\sqrt{2x+1})(\sqrt{5x+2})^{\sqrt{2}}$$

II

می‌دانیم که اگر u تابعی از x باشد و داشته باشیم
 $y = u^n \cdot u'$ خواهیم داشت:

$$Y = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

پس اگر بتوانیم تابعی را به صورت (۱) بنویسیم محاسبه توابع اولیه آن ساده است.

مثال ۱- برای محاسبه توابع اولیه تابعی که به صورت $y = x^{2m+1}(ax^{m+1}+b)^n$ می‌باشند (m و $n \neq -1$) چنین عمل می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{a} x^m (ax^{m+1} + b - b)(ax^{m+1} + b)^n = -\frac{1}{a} [x^m (ax^{m+1} + b)^{n+1} - bx^m (ax^{m+1} + b)^n]$$

اگر فرض کنیم که $u = ax^{m+1} + b$ نتیجه می‌شود
 $u' = a(m+1)x^m$ پس داریم:

$$y = \frac{1}{a} \left[\frac{u' u^{n+1}}{a(m+1)} - \frac{bu' u^n}{a(m+1)} \right]$$

بنابراین:

$$Y = \frac{1}{a^2(m+1)} \left(\frac{u^{n+2}}{n+2} - \frac{bu^{n+1}}{n+1} \right) + C$$

بنابراین:

$$y = x(cx+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} (t-1)(t)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{c}} [(2x+1)^{\frac{1}{2}} - (2x+1)^{-\frac{1}{2}}]$$

پس:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{c}} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} (2x+1)^{\frac{3}{2}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}} \right] + C$$

مثال ۲- برای محاسبه توابع اولیه تابع:

$$y = \frac{x^2 + 2}{(x-1)^5}$$

فرض می‌کنیم $x-1=t$ پس $x=t+1$ لذا:

$$y = \frac{t^2 + 2t + 2}{t^5} =$$

$$= t^{-2} + 2t^{-3} + 2t^{-4} + 2t^{-5}$$

$$y = (x-1)^{-2} + 2(x-1)^{-3} + 2(x-1)^{-4} + 2(x-1)^{-5}$$

$$Y = -\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{2(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{4(x-1)^4} \right) + C$$

$$Y = \frac{-(4x^2 - 6x + 4)(x-1) + C}{4(x-1)^4}$$

تمرینات I

توابع اولیه هر یک از توابع زیر را بدست آورید:

$$1- \quad y = (2x+4)(x+1)^5$$

$$2- \quad y = \frac{2x+2}{\sqrt{x-2}}$$

$$3- \quad y = \frac{5x+6}{\sqrt{(x+2)^2}}$$

$$4- \quad y = (2x^2 + 2x - 2)(2x+2)^2$$

$$-\frac{1}{2(n+1)}(x^2 + 2x)^{n+1}$$

تمرینات II

توابع اولیه هریک از توابع زیر را پیدا کنید:

- ۱- $y = x^2(x^2 + 1)^2$
- ۲- $y = (2x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x^3 + 2x + 1)^2$
- ۳- $y = x^{5/2}(6x + 5)(x + 1)^{11}$
- ۴- $y = \frac{(x^2 - 1)\sqrt{2x^2 + 4x^2 + 6x^2 + 12x + a}}{x - 1}$
- ۵- $y = \frac{x^2}{\sqrt{2x^2 + 3}}$
- ۶- $y = \frac{x^5}{\sqrt{(x^2 + 2)^2}}$
- ۷- $y = \frac{x^6}{\sqrt{x^2} \sqrt{x + 2}}$
- ۸- $y = \frac{x^4}{\sqrt{x^5 + 2x^2} \sqrt{x + 1}}$
- ۹- $y = \frac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 4}}$
- ۱۰- $y = \cos^5 x \sin^3 x$
- ۱۱- $y = \sin^4 x \cos^3 x$
- ۱۲- $y = \tan^n x + \cotg^n x + \tan^{n-2} x + \cotg^{n-2} x$
- ۱۳- $y = \frac{2x + 2}{(x^2 + 3x + 1)^n}$
- ۱۴- $y = (x^4 + 2x^5) \sqrt{(2x^2 + 1)^p}$
- ۱۵- $y = (ax^{2n-1} + bx^{2n-1} + cx^{n-1})(x^n + d)^m$

III

اگر u و v توابعی از x باشند و داشته باشیم:

$$y = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

توابع اولیه تابع y برابر است با:

$$Y = \frac{1}{a^2(m+1)} \left[\frac{(ax^m + b)^{n+2}}{n+2} - \frac{b(ax^m + b)^{n+1}}{n+1} \right] + C$$

مثال ۲ - برای محاسبه توابع اولیه تابع:

$$(n \neq -1, -3) \quad y = \cos^2 x \sin^n x$$

چنین عمل می‌کنیم:

$$y = \cos x (1 - \sin^2 x) \sin^n x = \cos x \sin^n x - \cos x \sin^{n+2} x$$

فرض می‌کنیم که $\sin x = u$ در نتیجه $\cos x = u'$ بنابراین:

$$y = u' u^n - u' u^{n+2}$$

$$Y = \frac{1}{n+1} u^{n+1} - \frac{1}{n+3} u^{n+3} = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x - \frac{1}{n+3} \sin^{n+3} x + C$$

به همین ترتیب می‌توان از توابعی که به صورت کلی

$$y = \sin^{2m+1} x \cos^n x \quad \text{و یا} \quad y = \cos^{2m+1} x \sin^n x$$

میر باشند توابع اولیه گرفت. به این ترتیب که $\cos^{2m+1} x$

و یا $\sin^{2m+1} x$ را به ترتیب به صورت:

$$\sin x (1 - \cos^2 x)^m \quad \text{و یا} \quad \cos x (1 - \sin^2 x)^m$$

می‌نویسیم. سپس $(1 - \sin^2 x)^m$ و یا $(1 - \cos^2 x)^m$

را بسط می‌دهیم و مانند مثال ۲ عمل می‌کنیم.

مثال ۳ - محاسبه توابع اولیه تابع:

$$y = x^{2n}(x^2 + 2x)(x^2 + 4)^n$$

$$y = (x^2 + 2x)(x^2)^n (x^2 + 4)^n =$$

$$-(x^2 + 2x)(x^2 + 4x^2)^n$$

اگر $x^2 + 4x^2 = u$ باشد داریم:

$$y = \frac{u'}{4} u^n \quad \text{پس} \quad 2(x^2 + 2x) = u'$$

در نتیجه:

$$Y = \frac{1}{2(n+1)} u^{n+1} =$$

$$Y = -\frac{u}{v} + C = -\frac{\sqrt{2x+1}}{x^2} + C$$

مثال ۳ - محاسبه توابع اولیه تابع :

$$y = \frac{1}{(2x+3)^2 \sqrt{2x+1}}$$

$$y = \frac{1}{2} \times \frac{(2x+3) - (2x+1)}{(2x+3)^2 \sqrt{2x+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+1}}{(2x+3)^2 \sqrt{2x+1}}$$

فرض می کنیم :

$$u = \sqrt{2x+1} \quad \text{و} \quad v = \sqrt{2x+3} \quad \text{در نتیجه :}$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \quad \text{و} \quad v' = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

$$y = \frac{1}{2} \times \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$Y = \frac{u}{2v} + C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x+1}{2x+3}} + C$$

تمرینات III

توابع اولیه هر یک از توابع زیر را بدست آورید .

$$1- y = \frac{x+2}{x^2 \sqrt{x+1}} \quad 2- y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$$

$$3- y = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} \quad 4- y = \frac{x+1}{(2x+1) \sqrt{2x+1}}$$

$$5- y = \frac{3x^2 - 2x - 2}{(x^2-1) \sqrt{x^2-1}}$$

$$6- y = \frac{x^2 - 4x}{(x^2+1) \sqrt{x^2+1}}$$

$$7- y = \frac{3x+2}{x^2 \sqrt{2x+1}} \quad 8- y = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)^2}}$$

$$9- y = \frac{2x^2+4x}{(x+1) \sqrt{x+1}} \quad 10- y = \frac{x^2+3x^2}{\sqrt{(x^2+x^2)^2}}$$

$$11- y = \frac{x^2-1}{x \sqrt{x^2+x}} \quad 12- y = \frac{5x^2-10x^2-6}{x^2 \sqrt{x^2+2}}$$

$$Y = \frac{u}{v} + C$$

پس اگر بتوانیم تابعی را به صورت مزبور بنویسیم محاسبه

توابع اولیه آن ساده است .

مثال ۱ - برای محاسبه توابع اولیه تابع :

$$y = \frac{1}{x^2 \sqrt{ax^2+b}}$$

متوالیاً چنین می نویسیم :

$$y = \frac{1}{b} \times \frac{ax^2+b - ax^2}{x^2 \sqrt{ax^2+b}} =$$

$$\frac{1}{b} \frac{\sqrt{ax^2+b} \times 1 - \frac{ax \times x}{\sqrt{ax^2+b}}}{x^2}$$

اگر فرض کنیم که $x=v$ و $\sqrt{ax^2+b}=u$

به ترتیب داریم :

$$u' = \frac{ax}{\sqrt{ax^2+b}} \quad \text{و} \quad v' = 1 \quad \text{پس :}$$

$$y = \frac{1}{b} \frac{v'u - u'v}{v^2}$$

$$Y = -\frac{u}{bv} + C = -\frac{\sqrt{ax^2+b}}{bx} + C$$

مثال ۲ - محاسبه توابع اولیه تابع :

$$y = \frac{2x+2}{x^2 \sqrt{2x+1}}$$

$$y = \frac{2x^2+2x}{x^2 \sqrt{2x+1}} = \frac{2x(2x+1) - x^2}{x^2 \sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{2x \sqrt{2x+1} - \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}}}{x^2}$$

فرض می کنیم که $u = \sqrt{2x+1}$ و $v = x^2$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \quad \text{و} \quad v' = 2x \quad \text{در نتیجه}$$

$$y = \frac{v'u - u'v}{v^2}$$

پس

$$Y' = y = \frac{-ax^2 - 2bx - 2b + a}{(x^2 + 3x + 1)^2}$$

$$-ax^2 - 2bx - 2b + a = x^2 + 2x + 2$$

$$\begin{cases} -a = 1 \\ -2b = 2 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$Y = -\frac{x+1}{x^2+3x+1} + C$$

می توانستیم به ترتیب زیر نیز عمل کنیم:

$$y = \frac{-(x^2+3x+1) + (2x+2)(x+1)}{(x^2+3x+1)^2}$$

اگر فرض شود:

$$u = -x-1 \quad \text{و} \quad v = x^2+3x+1$$

$$y = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad \text{داریم:}$$

$$Y = \frac{u}{v} + C = -\frac{x+1}{x^2+3x+1} + C \quad \text{و}$$

مثال ۲- محاسبه تابع اولیه تابع:

$$y = \frac{2x^2 - 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$Y = \frac{ax^2 + bx^2 + cx + d}{(x^2+1)^2}$$

$$Y' = \frac{-2ax^2 + 2bx^2 - 4cx - 2d}{(x^2+1)^2} +$$

$$+ \frac{2ax^2 + 2bx^2 + c}{(x^2+1)^2} \equiv \frac{2x^2 - 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$-2a = 2 \quad \text{و} \quad 2b = 0 \quad \text{و} \quad -4c = 0 \quad \text{و} \quad -2d = 0$$

$$\text{و} \quad a = -1 \quad \text{و} \quad c = 0 \quad \text{و} \quad d = 0 \quad \text{و} \quad 2b = 0$$

$$b = c = d = 0 \quad \text{و}$$

$$= -\frac{x^2}{(x^2+1)} \quad Y = \frac{-x^2}{x^2+1} + C$$

۲- برای تعیین توابع اولیه توابعی به صورت:

$$y = \frac{f(x)}{(ax+b)^m(cx+d)^n(\dots)}$$

ابتدا این کسر را به کسرهای ساده تری تفکیک می کنیم سپس برای هر یک از آنها مانند روشهای بالا عمل می کنیم.

IV

۱- برای محاسبه توابع اولیه توابعی که به صورت:

$$y = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}{(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n)^2}$$

(m و n مثبت و صحیح هستند).

گاهی اوقات می توان چنین استدلال کرد که اگر یکی از توابع اولیه تابع y به صورت:

$$Y = \frac{c_0x^p + c_1x^{p-1} + \dots + c_p}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n}$$

باشد در این صورت داریم:

$$Y' = y = \frac{b_0c_0(p-n)x^{p+n-1} + (pb_1c_0 +$$

$$+ b_0c_1p - b_0c_1 - nb_0c_1 + b_1c_0)x^{p+n-2} + \dots + k}{(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n)^2}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} b_0c_0(p-n)x^{p+n-1} + (pb_1c_0 + b_0c_1p \\ - b_0c_1 - nb_0c_1 + b_1c_0)x^{p+n-2} + \dots + K \\ \equiv a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m \end{aligned}$$

و از اینجا نتیجه می شود که باید داشته باشیم:

$$p+n-1 = m \Rightarrow p = m-n+1$$

و:

$$b_0c_0(p-n) = a_0 \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{b_0(m-n+1)}$$

و به همین ترتیب مقادیر c_1 و c_2 و c_3 و c_4 و c_5 را می توان تعیین کرد. البته استفاده از روش فوق همیشه ممکن نیست و در حالت کلی تابع اولیه تابع y را به طریق دیگری تعیین می کنند که بحث در باره آن از برنامه متوسطه خارج است. مثلا اگر تابع به صورت:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{(dx^2 + ex + f)^2}$$

باشد در صورتی استفاده از این روش جایز است که شرط $be = 2(dc + af)$ برقرار باشد (چرا؟)

مثال ۱- محاسبه تابع اولیه تابع:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 3x + 1)^2}$$

$$Y = \frac{ax + b}{x^2 + 3x + 1}$$

$$9- y = \frac{2x^2 + 5x + 2}{(x+1)^2(2x+1)^2}$$

$$10- y = \frac{(x+a)^m + x^n}{(x+a)^m x^n} \quad m, n \neq -1$$

$$11- y = \frac{x^2 + 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$12- y = \frac{x^2(2x^2 + 4x - 5)}{(x^2 + x - 1)^2}$$

$$13- y = \frac{2x^2 + 5x^2 - 8x}{(x^2 + 2)^2} \quad 14- y = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 2)^2}$$

$$15- y = \frac{(n-1)x^n - b}{(x^n + b)^2}$$

V

توابع مثلثاتی - برای تعیین تابع اولیه توابعی که شامل عبارتهای $\sin^m x$ و یا $\cos^m x$ و یا $\sin^p x \cos^q x$ و ... باشند به این ترتیب عمل می‌کنیم که ابتدا $\sin^m x$ و $\cos^m x$ را بر حسب خطوط مثلثاتی از درجه اول می‌نویسیم و همچنین عباراتی نظیر $\sin^p x \cos^q x$ و ... را با استفاده از فرمول‌های تبدیل حاصل ضرب به مجموع به صورتی درمی‌آوریم که بتوان تابع اولیه آن را تعیین کرد.

مثال ۱- تعیین تابع اولیه:

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x \cos 2x \cos x$$

$$\sin^2 x = \frac{2 \sin x - \sin 2x}{4}$$

$$\cos^2 x \cos 2x \cos x = \frac{1}{2} \cos 2x (\cos 2x + \cos x) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos^2 2x + \cos 2x \cos x) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) =$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \cos 4x + \cos 4x + \cos 2x)$$

$$y = \frac{2 \sin x - \sin 2x}{4} +$$

$$+ \frac{1 + \cos 4x + \cos 4x + \cos 2x}{4}$$

$$Y = \frac{1}{4} (-2 \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + x + \frac{1}{2} \sin 4x +$$

مثال ۱- محاسبه توابع اولیه تابع:

$$y = \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\frac{2(x^2 + 1)}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + 2(A-B)x + A+B}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$(A+B)x^2 + 2(A-B)x + A+B = 2x^2 + 2$$

و یا:

$$A+B=2$$

$$\Rightarrow A=B=1$$

$$2(A-B)=0$$

$$y = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$Y = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + C = -\frac{2x}{x^2-1} + C$$

توضیح آنکه ما در رابطه (۱) مقدار $m=1$ را در نظر نگرفتیم زیرا اگر یکی از کسرها به این صورت بود تابع اولیه آن یک تابع لگاریتم می‌شد که از بحث ما خارج است. تابع y را در صورتی می‌توان به صورت (۱) نوشت که پس از مخرج مشترک گیری درجه کثیر الجمله حاصل از درجه $f(x)$ کمتر نباشد و همچنین اگر بزرگترین درجه $f(x)$ از بزرگترین درجه مخرج بزرگتر باشد باید ابتدا خارج قسمت $f(x)$ را بر مخرج بدست آوریم و بعد باقیمانده را به ترتیب فوق عمل کنیم.

تمرینات IV

توابع اولیه هر یک از توابع زیر را محاسبه کنید.

$$1- y = \frac{2x^2 - 1}{(2x^2 + 2x + 1)^2} \quad 2- y = \frac{x^2 - 6x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$3- y = \frac{2x^2 - 1}{(x^2 + 2x + 1)^2} \quad 4- y = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$5- y = \frac{x^2 - 4x^2 + 4x^2 + 4}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$$6- y = \frac{4x^2 - 8x}{(x^2 - 2x + 2)^2} \quad 7- y = \frac{x^2(x^2 + 8)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$8- y = \frac{4x^5 + 1}{(x^5 - 1)^2}$$



بخش سوم - فایده و موارد استعمال ترسیمات

پوشها ، تعیین دقیق مشخصات منحنیهایی که در مطالعات مربوط به ریاضیات عمومی و ریاضیات خاص یافت می‌شوند ، نمایش بسیاری از عبارتهای جبری به صورتی کاملاً دقیق ، انجام بحثهای سریع مسائلی که از راه جبری حل می‌شوند .

فایده ترسیمات در هندسه و غیر از آن ، در حل تقریباً تمام مسئله‌های رقومی و ترسیمی ، مثلثات ، مکانیک و علوم تجربی نیز مسلم و قطعی است . در این بخش توجه خواننده را بخصوص به استفاده از ترسیمات در موارد زیر جلب می‌کنیم : آسانتر کردن اثبات قضایا ، کشف خواص جدید ، جستجوی مکانها و

فصل اول - استفاده از ترسیمات برای اثبات قضایا

یک تقارن می‌توان یکی از آنها را از روی دیگری بدست آورد؛ تقارن نسبت به BC و تقارن نسبت به عمود منصف BC . چون دو شکل متقارن با یکدیگر برابراند بنابراین هر دو مثلث از چهار مثلث مزبور با هم برابراند .

قضیه ۲- اگر دو ضلع و زاویه بین از دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابر باشند آن دو مثلث متساویند (حالت دوم تساوی دو مثلث) .

فرض کنیم می‌خواهیم مثلثی رسم کنیم از آن اندازه زاویه A و اندازه‌های دو ضلع AB و AC معلوم باشد . ابتدا ضلع AB را رسم می‌کنیم و در یکی از دو نیم صفحه آن A خطی رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ای به اندازه معلوم A بسازد و روی این خط ابتدا از A طولی مساوی مقدار معلوم AC جدا می‌کنیم تا نقطه C بدست آید . چون B و C را به هم وصل کنیم یک فقط یک مثلث ABC حاصل می‌شود . به همان ترتیب که در سابق گذشت با استفاده از تقارن نتیجه می‌شود که مثلثهای دیگری که از روی معلومات مزبور در وضعهای دیگر رسم می‌شوند با هم برابراند .

قضیه ۳- اگر سه ضلع از دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابر باشند آن دو مثلث متساوی‌اند (حالت سوم تساوی دو مثلث) .

با توجه به تبصره زیر به سادگی می‌توان روشهای سریع و غیر منظره‌ای برای اثبات تساوی دو شکل بسته بدست آورد : اگر در یک ترسیم ، از روی معلومات معین منحصرأ یک شکل (از لحاظ اندازه) بدست آید نتیجه می‌شود که همه شکلهایی که از روی آن معلومات بدست می‌آیند با هم برابراند .

قضیه ۱- اگر دو زاویه و ضلع بین آنها از دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابر باشند آن دو مثلث با یکدیگر برابرند . (حالت اول تساوی دو مثلث) .

فرض کنیم مقصود ترسیم مثلثی باشد که از آن اندازه‌های زاویه‌های B و C وضع $BC = a$ معلوم باشد . اگر دریکی از دو نیم صفحه مربوط به خط BC از B خطی رسم کنیم که با BC زاویه به اندازه معلوم B بسازد و از C خطی رسم کنیم که با BC زاویه به اندازه معلوم C بسازد این دو خط یکدیگر را در یک نقطه منحصر A قطع می‌کنند ، یعنی یک فقط یک مثلث ABC حاصل می‌شود .

اگر B و C را به جای یکدیگر یا اینکه نیم صفحه دیگر BC را انتخاب کنیم و ترسیمات بالا را مجدداً انجام دهیم رویهم چهار مثلث ، عموماً متمایز ، بدست می‌آید . اما این مثلثها در اندازه‌های اجزاء با یکدیگر تفاوتی ندارند و با

برای رسم مثلثی که اندازه‌های سه ضلع آن معلوم است ابتدا ضلع AB را رسم می‌کنیم. بعد به مرکز A و به شعاع AC یک دایره و به مرکز B و به شعاع BC یک دایره دیگر رسم می‌کنیم که این دو دایره در یکی از دو نیم صفحه خط AB فقط در یک نقطه مشترک می‌باشند یعنی از روی معلومات داده شده منحصرأ یک مثلث (از لحاظ اندازه) حاصل می‌شود. بنابراین مثلثهای دیگری که از روی این معلومات امادر وضعیتهای مختلف بدست می‌آیند با یکدیگر برابرند.

فرع - دو مثلث برابراند هرگاه یک ضلع و دو میانه از آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

فرض کنیم در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داشته باشیم $BC = B'C'$ و $BM = B'M'$ و $CN = C'N'$ و G و G' نقطه تلاقی میانه‌ها در دو مثلث باشد. دو مثلث BGC و $B'G'C'$ در حالت تساوی سه ضلع با هم برابرند و در نتیجه قابل انطباق اند و بعد از انطباق آنها M بر M' و N بر N' و بالاخره A بر A' واقع شده دو مثلث برابر می‌باشند.

قضیه ۴ - دو مثلث برابرند هرگاه دو ضلع و میانه نظیر ضلع سوم از آنها نظیر به نظیر با یکدیگر برابر باشند فرض کنیم مقصود رسم مثلثی باشد که از آن $AB = c$ و $AC = b$ و $AM = m$ معلوم است.

مثلث ACA' را با ضلعهای $AA' = 2m$ و $AC = b$ و $A'C' = c$ رسم می‌کنیم. از C به M وسط AA' وصل می‌کنیم و آنرا به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا B بدست آید. چون BA را رسم کنیم مثلث ABC مثلث مطلوب است زیرا از تساوی دو مثلث ABM و $A'CM$ (در حالت تساوی دو ضلع و زاویه بین) نتیجه می‌شود که $AB = A'C = c$. چون از روی معلومات فوق فقط یک مثلث بدست می‌آید بنابراین حکم ثابت است.

قضیه ۵ - اگر میانه‌های دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابر باشند آن دو مثلث متساوی اند. فرض کنیم مقصود رسم مثلثی باشد که اندازه‌های سه میانه آن معلوم باشد. اگر G نقطه تلاقی میانه‌های مثلث باشد مثلث BGC با معلومات دو ضلع BG و CG و میانه GM قابل رسم است. بعد از رسم این مثلث اوساط ضلعهای AB و AC و بالاخره نقطه A بدست می‌آید و منحصرأ یک مثلث ABC رسم می‌شود و در نتیجه حکم ثابت است.

قضیه ۶ - دو مثلث قائم الزاویه برابراند هرگاه وتر و یک زاویه حاده از آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

رسم مثلث قائم الزاویه با معلومات اندازه وتر و یک زاویه حاده به سادگی انجام می‌گیرد و جواب آن منحصر است پس حکم ثابت است.

قضیه ۷ - دو مثلث قائم الزاویه برابراند هرگاه وتر و یک ضلع از آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند. در این حالت هم نظیر حالت قبل حکم ثابت می‌شود.

فرع - هرگاه یک ضلع زاویه قائمه و ارتفاع وارد بر وتر از دو مثلث قائم الزاویه نظیر به نظیر متساوی باشند آن دو مثلث با هم برابرند.

رسم مثلث قائم الزاویه ABC که از آن ضلع AB و ارتفاع AH معلوم باشد به این ترتیب انجام می‌گیرد که ابتدا مثلث ABH رسم می‌شود و بعد در A عمودی بر AB اخراج می‌شود که امتداد BH را در C قطع می‌کند و مثلث ABC بدست می‌آید. مسئله یک جواب دارد و در نتیجه حکم ثابت است.

قضیه ۸ - دو مثلث قائم الزاویه متساوی اند هرگاه وتر و ارتفاع وارد بر آن از دو مثلث نظیر به نظیر برابر باشند. برای رسم مثلث قائم الزاویه‌ای که وتر آن $BC = a$ و ارتفاع آن $AH = h$ معلوم است (با شرط $2h < a$) ابتدا BC را رسم می‌کنیم و نیمدایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم که خط موازی با BC و به فاصله h از آن را در دو نقطه A و A' قطع می‌کند. دو مثلث بدست می‌آید اما این دو مثلث نسبت به عمود منصف BC قرینه بوده و متساوی اند. در حقیقت یک مثلث حاصل می‌شود.

قضیه ۹ - اگر در مثلثی یک زاویه قائمه باشد هر یک از دوزاویه دیگر حاده اند.

مثلث ABC را در نظر می‌گیریم که در آن زاویه A قائمه باشد چون CA را از طرف A امتداد دهیم زاویه خارجی BAX که حاصل می‌شود از هر یک از دوزاویه داخلی غیر مجاور خود بزرگتر است. و چون زاویه BAX قائمه است پس هر یک از زاویه‌های B و C حاده می‌باشند.

فرع - اگر یک زاویه از مثلثی منفرجه باشد هر یک از دو زاویه دیگر آن حاده می‌باشند.

قضیه ۱۰ - از نقطه O واقع در خارج خط xy یک خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

می‌توانیم به مرکز O دایره‌ای چنان رسم کنیم که xy را در دو نقطه M و N قطع کند. اگر A وسط MN باشد در مثلث قائم الزاویه OMN میانه OA بر MN یعنی بر xy عمود می‌باشد.

قضیه - اگر دو ضلع و زاویه روبرو به ضلع بزرگتر از دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابر باشند آن دو مثلث متساوی، ند

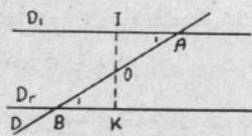
می توان با استفاده از ترسیمات بعضی قضیه های عکس را که با برهان خلف ثابت می شوند مستقیماً ثابت کرد .

مثال ۱- اگر دو مایل OB و OC در یک طرف عمود OA نسبت به خط xy واقع بوده و $OB < OC$ باشد $AB < AC$ می باشد .

در مثلث OBC زاویه C که مقابل به ضلع کوچکتر است از زاویه B که مقابل به ضلع بزرگتر است کوچکتر می باشد و از طرفی زاویه C حاده و زاویه B منفرجه است و نتیجه خواهد شد که B بین A و C واقع است .

مثال ۲- اگر خط D دو خط D_1 و D_2 را قطع کرده و دو زاویه متبادله داخلی حاصل برابر باشند دو خط D_1 و D_2 متوازی اند .

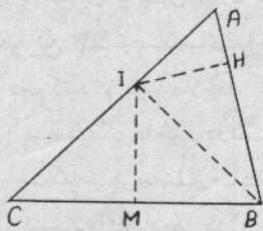
اگر A و B نقاط تلاقی D با D_1 و D_2 باشد از



O وسط AB عمود OI را بر D_1 رسم می کنیم که D_2 را در K قطع می کند . دو مثلث AIO و BOK در حالت تساوی دو زاویه

وضلع بین متساوی اند و نتیجه می شود که زاویه K قائمه است و دو خط D_1 و D_2 که بر یک خط عمود اند متوازی می باشند.

مثال ۳- در هر مثلث ، زاویه کوچکتر مقابل به ضلع



کوچکتر واقع است . در مثلث ABC فرض می کنیم که زاویه B بزرگتر از زاویه C باشد عمود منصف ضلع BC را در

I واقع بین A و C قطع می کند . عمود IH را بر AB

رسم می کنیم که H بین A و B واقع می شود و داریم:

$$BH < BI = CI \text{ و } AH < AI$$

$$BH + AH < CI + IA \text{ یا } AB < AC$$

تبصره - برای رسم OA به طریقی که گذشت رسم سه کمان با مرکزهای مختلف لازم است . می توان به ترتیب زیر فقط از دو کمان متحدالمرکز استفاده کرد: به مرکز O کمانی رسم می کنیم که OM و ON را به ترتیب در M' و N' قطع کند . MN' و NM' در I متلاقی می شود و OI از A خواهد گذشت .

قضیه ۱۱- از نقطه O خارج xy فقط یک عمود بر xy می توان رسم کرد .

اگر OA بر xy عمود باشد و OB خط دیگری باشد که O را به یک نقطه B از xy وصل می کند زاویه OBy که زاویه خارجی مثلث OAB است از زاویه داخلی A بزرگتر بوده و منفرجه می باشد یعنی OB نسبت به xy مایل می باشد.

قضیه ۱۲- هر گاه از یک نقطه یک عمود و یک مایل بر خطی رسم کنیم عمود از مایل کوچکتر است .

قضیه ۱۳- هر گاه از یک نقطه یک عمود و چند مایل نسبت به خطی رسم کنیم از دو مایل مختلف البعد آنکه بعدش کمتر است دارای طول کوچکتر می باشد .

مسئله - مثلثی رسم کنید که از آن دو ضلع و زاویه مقابل به یکی از آنها معلوم است .

فرض می کنیم اندازه زاویه A و اندازه های $AB = c$ و $BC = a$ معلوم باشد . ابتدا AB را رسم می کنیم و Ax را چنان رسم می کنیم که با AB زاویه معلوم A را بسازد ، یک مکان C خط Ax و مکان دیگر آن دایره به مرکز B و به شعاع a است .

۱) اگر زاویه A منفرجه باشد در این صورت اگر $a > c$ باشد مسئله یک جواب دارد و اگر $a < c$ باشد مسئله جواب ندارد و حکم زیر نتیجه می شود: اگر ضلع مقابل به زاویه منفرجه و یک ضلع دیگر از دو مثلث منفرجه زاویه نظیر به نظیر با هم و زاویه های منفرجه نیز با هم برابر باشند آن دو مثلث متساوی اند .

۲) اگر زاویه A قائمه باشد نتیجه به ترتیب قبل است.

۳) اگر زاویه A حاده باشد اگر $a > c$ باشد مسئله

یک جواب و اگر $c \sin A < a < c$ باشد مسئله دو جواب دارد .

با توجه به حالت های بالا حکم کلی، زیر نتیجه می شود .

فصل دوم - استفاده از ترسیمات در کشف خواص جدید

(۴) پاهای سه نیمساز خارجی روی يك خط مستقیم واقع اند .

(۵) پاهای دو نیمساز داخلی و نیمساز خارجی زاویه دیگر روی يك خط مستقیم واقع اند .

تبصره - از مشاهده وضع مشابه بین عنصرهایی که مستقل از یکدیگر اند این فکر بوجود می آید که ممکن است بین عنصرهای مزبور رابطه ای برقرار باشد . سه خط دلخواه دوه دو متقاطع اند و سه نقطه تقاطع روی يك خط مستقیم قرار ندارند . در صورتی که سه عمود منصف ضلعهای يك مثلث در يك نقطه متقارب می باشد و همین وضع برای اجزاء دیگری از مثلث مثلا ارتفاعها و نیمسازهای زاویهها نیز وجود دارد . آیا بین عمود منصفها ، ارتفاعها و نیمسازهای زاویهها رابطه ای برقرار است ؟ ذیلا ملاحظه خواهیم کرد که این فرض درست می باشد .

I- مثلث ABC را در نظر می گیریم . از هر رأس مثلث خطی موازی با ضلع مقابل رسم می کنیم که به این ترتیب مثلث $A'B'C'$ بوجود می آید . هر رأس از مثلث ABC وسط يك ضلع از مثلث $A'B'C'$ قرار دارد و هر ضلع از مثلث $A'B'C'$ دو برابر ضلع مقابل از مثلث ABC می باشد . ارتفاعهای مثلث ABC عمود منصفهای ضلعهای مثلث $A'B'C'$ می باشند . بنابراین تقارب ارتفاعهای يك مثلث به عبارت دیگر تقارب عمود منصفهای ضلعهای مثلث می باشد .

می توان دقت بیشتر بکار برد ، دو مثلث دارای يك مرکز ثقل G می باشند و در تجانس سه مرکز G و به نسبت ۲- مثلث $A'B'C'$ است و بالاخره خاصیت زیر نتیجه می شود :

اگر O مرکز دایره محیطی مثلث ABC ، M وسط ضلع BC و H مرکز ارتفاعیه و G مرکز ثقل آن باشد ، بردارهای HA و OM در تجانس (۲-G) مجانس یکدیگر اند و از آنجا خاصیت زیر نتیجه می شود :

قضیه - در هر مثلث ، سه نقطه O مرکز دایره محیطی ، G نقطه تلاقی میانهها ، H نقطه تلاقی ارتفاعها بر يك خط مستقیم قرار دارند و $\overline{GH} = -\frac{2}{3}\overline{GO}$ می باشد .

تبصره - خاصیت مزبور در مورد مثلث قائم الزاویه به سادگی محقق می شود زیرا در این مثلث O وسط وتر و H رأس زاویه قائمه است .

از آنچه گذشت می توان خواص متعددی نتیجه گرفت مثلا :

برای کسی که به ترسیمات و تفسیر و تعبیر آن آشنا باشد ترسیمات یکی از وسایل تحقیق بسیار واضح و عمیق و در عین حال هیجان انگیز در ریاضیات می باشد . فصل آینده را یکسره به استفاده از ترسیمات در تعیین مکانهای هندسی و پوشها اختصاص داده ایم . در این فصل با ذکر چند مثال نقش مهم ترسیمات را در کشف خواص جدید ریاضی یادآوری می کنیم . برای استفاده از ترسیمات قبل از هر چیز باید خوب و دقیق دید . برای این امر انجام تمرینهای زیر را پیشنهاد می کنیم :

تمرین ۱- عمود منصفهای ضلعهای يك مثلث را رسم کنید . باید مشاهده کنید که :

(۱) سه عمود منصف از نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث می گذرند .

(۲) اگر هر سه زاویه مثلث حاده باشند نقطه O داخل مثلث واقع است .

(۳) اگر يك زاویه از مثلث قائمه باشد نقطه O درست در وسط ضلع مقابل به این زاویه واقع خواهد شد .

(۴) اگر يك زاویه از مثلث منفرجه باشد نقطه O خارج مثلث اما داخل زاویه مزبور قرار خواهد داشت .

تمرین ۲- ارتفاعهای يك مثلث را رسم کنید . باید مشاهده کنید که :

(۱) هر سه ارتفاع از يك نقطه H می گذرند .

(۲) اگر هر سه زاویه مثلث حاده باشند H داخل مثلث واقع است .

(۳) اگر مثلث قائم الزاویه باشد H بر رأس زاویه قائمه منطبق است .

(۴) اگر مثلث منفرجه الزاویه باشد H خارج مثلث و داخل زاویه متقابل به رأس زاویه منفرجه قرار دارد .

تمرین ۳- نیمسازهای داخلی و خارجی زاویههای يك مثلث را رسم کنید . باید ملاحظه کنید که :

(۱) نیمسازهای داخلی در نقطه I متقارند و این فقط مرکز دایره ای است که بر هر سه ضلع مثلث مماس می باشد .

(۲) نیمسازهای خارجی دوزاویه B و C با نیمساز داخلی A در I_1 متقارند و I_1 مرکز دایره ای است که بر ضلع BC و بر امتدادهای دو ضلع دیگر مماس می باشد .

(۳) پای نیمساز داخلی و پای نیمساز خارجی هر زاویه در يك طرف نقطه وسط ضلع مقابل به این زاویه واقع می باشند .

I - اوساط مماسهای مشترك دو دایره روی محور اصلی آنها واقع اند. نتیجه می شود اگر دو دایره متخارج باشند چهار نقطه اوساط چهار مماس مشترك آنها روی يك خط راست قرار دارند که بر خط المركزین عمود می باشد.

II - محور اصلی دو دایره مماس خارج همان مماس مشترك داخلی آنهاست بنابراین مماس مشترك داخلی دو دایره مزبور از اوساط مماسهای مشترك خارجی می گذرد.

III - محور اصلی دو دایره متقاطع همان وتر مشترك آنها است. پس در دو دایره متقاطع وتر مشترك هر يك از دو مماس مشترك خارجی را به دو قسمت برابر تقسیم می کند.

IV - وقتی دو دایره متداخل و O و O' مرکزهای آنها نزدیک به هم قرار داشته باشند محور اصلی آنها به فاصله دور از مرکزهای آنها قرار دارد و وقتی O و O' منطبق باشند محور اصلی در فاصله بینهایت دور واقع می شود و چون در این حالت امتداد خط OO' نامعین است می توان گفت که خط بینهایت صفحه بر هر امتدادی از آن عمود است و به عبارت دیگر خط بینهایت صفحه دارای خواص ذاتی دایره می باشد.

رسم مماس بر سیکلوئید - می دانیم که هر گاه يك دایره روی خط بغلتد بدون آنکه بر آن بلغزد مکان يك نقطه M از آن منحنی است به نام سیکلوئید. رسم مماس بر سیکلوئید بساط استفاده از نظریه مرکز لحظه ای دوران انجام می گیرد. وقتی جسمی جابجا شود می توان گفت که این جسم در لحظه t حول مرکز P که بازمان تغییر می کند دوران کرده است. قائم بر منحنی مسیر هر نقطه از جسم در لحظه t از P می گذرد. از این رو رسم قائم بر مماس میسر می شود.

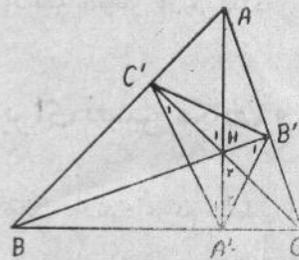
خط D و دایره C را در نظر می گیریم که روی آن می غلند اگر A نقطه تماس C با D و A' نقطه متقاطع آن و M نقطه دلخواهی از C باشد واضح است MA قائم بر مسیر M و در نتیجه MA مماس بر آن در نقطه M می باشد در اینجا می خواهیم مماس بر سیکلوئید را بدون استفاده از مرکز لحظه ای دوران رسم کنیم. وقتی دایره C

بغلند و در وضع جدید در نقطه B بر D مماس باشد نقطه M به وضع M₁ واقع می شود بقسمی که اگر M' نقطه ای باشد که دو کمان AM و B'M₁ برابر باشند داریم M'M₁ = AB و در نتیجه دو بردار MM' و AB همسنگ می باشند. در یک تغییر مکان بسیار جزئی می توان امتداد M'M₁ را بر مماس نقطه M' منطبق دانست و اگر توجه داشته باشیم که:

در نتیجه می شود H₁ = H₂ یعنی سه نقطه C و H و C' روی يك خط راست واقع اند یعنی CC' ارتفاع مثلث ABC می باشد. ملاحظه شده که ارتفاعها و نیمسازهای زاویه های مثلث نیز در رابطه می باشند.

الف - اگر O' مرکز دایره نه نقطه (دایره اولر) مثلث ABC باشد در تجانس به مرکز O، مرکز دایره محیطی، و به نسبت ۲+ دایره نه نقطه به دایره C" تبدیل می شود که H مرکز آن و شعاع آن همان R شعاع دایره محیطی می باشد. دایره C" نیز بر نه نقطه مهم از مثلث خواهد گذشت که عبارتند از قرینه های O نسبت به سه ضلع، نسبت به پاهای ارتفاعها و نسبت به اوساط قطعه خطهایی که مرکز ارتفاعیه را به سه رأس مثلث وصل می کنند.

ب - در تجانس به مرکز G، مرکز ثقل مثلث، و به نسبت ۲- دایره نه نقطه به دایره محیطی مثلث تبدیل می شود. نتیجه می شود که دایره محیطی مثلث علاوه بر سه رأس بلکه بر مجانسهای پاهای ارتفاعها و همچنین مجانسهای اوساط خطوط واصل بین-رأسها و مرکز ارتفاعیه نیز می گذرد.



II - اگر A' و B' و C' پاهای ارتفاعهای مثلث ABC باشد، مثلث A'B'C' مثلث ارتفاعیه مثلث ABC نامیده می شود. با استفاده از خواص چهار ضلعی محاطی ثابت می شود AA' و BB' و CC' ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای زاویه های مثلث A'B'C' می باشند بر حسب اینکه مثلث ABC در هر سه زاویه حاده یا اینکه در یک زاویه منفرجه باشد نیمسازهای مزبور داخلی یا خارجی می باشند. برعکس اگر HA' و HB' و HC' نیمسازهای زاویه های مثلث A'B'C' و H نقطه تقارب آنها باشد چون در A' و B' و C' عمودهایی بر این نیمسازها رسم کنیم مثلث ABC بوجود خواهد آمد. ثابت می کنیم که نیمسازهای مزبور ارتفاعهای مثلث اخیر می باشند HC را در نظر می گیریم و کافی است که ثابت کنیم HC و HC' بر يك امتداد واقع اند. در مثلث C'HA' داریم:

$$H_1 = C'_1 + A'_1 = \frac{C' + A'}{2} = 90^\circ - \frac{A'B'C'}{2}$$

در چهار ضلعی محاطی HB'CA' داریم:

$$H_2 = 90^\circ - C_1 = 90^\circ - B'_1 = 90^\circ - \frac{A'B'C'}{2}$$

نتیجه می شود H₁ = H₂ یعنی سه نقطه C و H و C' روی يك خط راست واقع اند یعنی CC' ارتفاع مثلث ABC می باشد. ملاحظه شده که ارتفاعها و نیمسازهای زاویه های مثلث نیز در رابطه می باشند.

محورهای اصلی - از ترسیمات مربوط به محورهای اصلی نیز خواص جالبی نتیجه می شود:

جستجو برای تعیین تقارن - مثال ۱ - مکان نقطای را تعیین کنید که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت F و F' برابر با مقدار ثابت $2a$ باشد.

اگر M' قرینه M نسبت به عمود منصف FF' باشد واضح است که $M'F = MF$ و $M'F' = MF'$ و در نتیجه:

$$M'F + M'F' = 2a$$

بوده و M' نیز روی مکان M قرار دارد یعنی عمود منصف FF' محور تقارن مکان مطلوب است به طریق مشابه معلوم خواهد شد که M'' قرینه M نسبت به خط FF' و M''' قرینه M نسبت به نقطه O وسط FF' نیز روی مکان قرار دارند یعنی خط FF' نیز محور تقارن و نقطه O مرکز تقارن مکان مطلوب است. (این مکان يك بیضی است که F و F' کانونهای آن و $2a$ طول قطر بزرگتر آن می باشد.)

مثال ۲ - مکان نقاط M را تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آنها از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابت $2k^2$ باشد.

به ترتیب فوق ثابت خواهد شد که AB و همچنین عمود منصف AB محور تقارن مکان و O وسط AB مرکز تقارن مکان می باشد (مکان مزبور دایره ای است به مرکز O).

مثال ۳ - مکان نقاط M را پیدا کنید که تفاضل مربعات فواصل آنها از دو نقطه ثابت A و B برابر با مقدار ثابت k^2 باشد.

AB محور تقارن مکان مطلوب است بنا بر این اگر مکان مطلوب يك خط مستقیم باشد (که در حقیقت هم يك خط مستقیم است) این خط بر AB عمود می باشد (زیرا به سادگی معلوم خواهد شد که همه نقاط AB نمی توانند جزو مکان باشند و مکان بر AB منطبق نیست) . عمود منصف AB نمی تواند محور تقارن مکان باشد زیرا اگر M' قرینه M نسبت به این عمود منصف باشد خواهیم داشت :

$$M'A^2 - M'B^2 = -k^2 \quad (\neq k^2)$$

تبصره - با استفاده از ترسیمات می توان چند نقطه از مکان را پیدا کرده و نوع شکل مکان را بررسی کرد و اغلب تعیین این نقاط مکان را مشخص می کند. گاهی هم می توان از روی پیدا کردن این نقاط، مکان را رد گیری کرد و مثلاً معلوم کرد که آنها روی يك خط راست قرار دارند یا اینکه بعضی از آنها در بینهایت واقع می شوند. بطور کلی روش مزبور ما را به تعیین درجه و طبقه مکان راهنمایی می کند.

II - درجه يك منحنی

درجه يك منحنی عبارت از حداکثر تعداد نقاطی است که از تقاطع منحنی مزبور بایک خط مستقیم حاصل می شود. خود

خط مستقیم از درجه يك است و تنها منحنی از درجه يك می باشد. خط مستقیم يك امتداد دارد و خط بینهایت را در يك نقطه قطع می کند.

می دانیم که يك دایره حداکثر در دو نقطه با خط مستقیم متقاطع است پس دایره منحنی از درجه دو است. همچنین می دانیم که هر يك از منحنیهای بیضی، هذلولی و سهمی نیز حداکثر در دو نقطه می توانند با خط مستقیم متقاطع باشند پس هر يك از این منحنیها یعنی بیضی، هذلولی و سهمی از درجه دو می باشند.

یاد داشت - منحنیهای از درجه دو منحصر به دایره، بیضی، هذلولی، سهمی و دستگاه متشکل از دو خط مستقیم متقاطع یا متوازی است که رویهم منحنیهای مقاطع مخروطی نامیده می شوند.

III - طبقه يك منحنی

طبقه يك منحنی عبارت از حداکثر تعداد مماسهایی است که از يك نقطه می توان بر آن منحنی رسم کرد. می دانیم که از يك نقطه می توان حداکثر دو مماس بر دایره، بیضی، هذلولی یا سهمی رسم کرد. پس منحنیهای مزبور از طبقه دو می باشند.

تبصره - عموماً يك منحنی از درجه n دارای طبقه $p \neq n$ است. اما منحنیهای از درجه دو از این جهت دارای طبقه دو هستند که در تبدیل قطب و قطبی معکوس هر نقطه از آنها به مماس بر آنها و برعکس هر مماس بر آنها به نقطه ای از آنها تبدیل می شود. به عبارت دیگر می توان گفت که درجه و طبقه آنها به یکدیگر تبدیل می شوند.

IV - ادامه بررسی يك مکان

ابتدا معلوم می کنیم که مکان تقارن دارد یا نه و بعد از آن نقطای از مکان را پیدا می کنیم که روی يك خط راست واقع باشند. فرض می کنیم n تعداد این نقاط باشد. قبل از آنکه درجه مکان را معلوم کنیم باید توجه داشته باشیم که درجه مکان ممکن است بیشتر از n باشد زیرا امکان دارد که بعضی از این نقاط مضاعف باشند یا اینکه خط مزبور در امتداد مجانب مکان بوده و يك نقطه تلاقی واقع در بینهایت باشد.

در بعضی از حالتها کافی است که معلوم کنیم چند نقطه از مکان در بینهایت واقع است تا اینکه درجه مکان معین شود. با توجه به آنچه گذشت، نقطه M را که به دنبال مکان آن هستیم به نقاط ثابت شکل و به نقطه های ممتازی از مکان که تعیین کرده ایم وصل می کنیم و از روی تمام مفروضاتی که داشته ایم نوع شکل مکان را بررسی می کنیم.

مثال ۱ - مکان نقاط M را پیدا کنید که نسبت فاصله های آنها از دو خط $x'x$ و $y'y$ که در O متقاطع اند مقدار ثابت و معلوم k باشد.

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{MB}{MA} = \frac{1}{k}$$

می دانیم که روی خط ماربر A و B دو نقطه و فقط دو نقطه I و I' وجود دارد که نسبت فاصله‌های آنها از A و B برابر با k است پس مکان مطلوب از درجه دو است. بالاخره اگر $k \neq 1$ باشد مکان مطلوب دارای نقطه واقع در بینهایت نیست. بنابراین مکان مطلوب یا دایره است یا بیضی. اما با توجه به خاصیت نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه M از مثلث AMB ملاحظه می کنیم که زاویه IMI' قائمه است و در نتیجه مکان مطلوب دایره به قطر II' می باشد.

مسئله ۴ - مکان نقاط M را پیدا کنید که از دو نقطه معلوم A و B به يك فاصله باشند.

يك مسئله ساده و مقدماتی است و می دانیم که مکان مطلوب عمود منصف قطعه خط AB است. اما اگر توجه داشته باشیم که مکان از درجه دو است زیرا خط ماربر AB را در دو نقطه O وسط AB و نقطه واقع در بینهایت قطع می کند، ملاحظه خواهیم کرد که علاوه بر عمود منصف AB خط بینهایت صفحه نیز جزء مکان می باشد.

تبصره - می توانیم این مسئله را به صورت خاصی از مسئله قبل بررسی کنیم. در این صورت مکان مطلوب دایره ای است که مرکز آن در بینهایت واقع شده است.

مسئله ۵ - بیضی به قطر بزرگتر AA' مفروض است. مماس متغیر بر بیضی مماسهای در نقاط A و A' بر آن را در B و B' قطع می کند. اگر M نقطه تلاقی AB' با BA' باشد مکان M را پیدا کنید.

به سادگی درمی یابیم که مکان دارای دو محور تقارن عمود بر هم AA' و عمود منصف آن می باشد، پس O مرکز بیضی نیز مرکز تقارن مکان است. وقتی مماس متغیر اوضاع نزدیک به مماسهای در A و A' را اختیار کند نقاط M نظیر آنها اوضاع نزدیک به A و A' را اختیار می کند یعنی مکان از دو نقطه A و A' می گذرد و نتیجه می گیریم که يك منحنی از درجه دو است اما چون این مکان از مرکز تقارن خود نمی گذرد پس نمی تواند از دو خط متقاطع تشکیل شده باشد. هیچیک از نقطه‌های مکان خارج بیضی مفروض واقع نیست پس مکان هذلولی نمی تواند باشد مکان دایره هم نمی تواند باشد زیرا از A و A' می گذرد و تمام نقاط آن داخل بیضی واقع اند. پس مکان مطلوب يك بیضی است به قطر بزرگتر AA' و در وضعی که مماس متغیر با AA' موازی باشد قطر کوچکتر بیضی مکان مشخص می شود.

تبصره - می توانیم این مسئله را با استفاده از خاصیت همنگاری بیضی مفروض و دایره اصلی آن حل کنیم.

مسئله ۶ - مکان نقاطی را پیدا کنید که از نقطه معلوم F و از خط معلوم D به يك فاصله باشند.

دستگاه دو خط مفروض دو محور تقارن دارد که D و D' نیمسازهای زاویه‌های این دو خط می باشند. اما دو خط D و D' محورهای تقارن مکان مطلوب نمی توانند باشند، زیرا اگر M يك نقطه از مکان و M' قرینه آن نسبت به D یا D' باشد نسبت فاصله‌های M' از دو خط مفروض غیر از k و برابر با $\frac{1}{k}$ می باشد. اما O نقطه تلاقی دو خط مفروض که مرکز تقارن دستگاه دو خط است در ضمن مرکز تقارن مکان می باشد.

مکان مطلوب از V نقطه واقع در بینهایت که نسبت به دو-زاویه متقابل $x'Oy'$ و xOy یکی است و همچنین از V' نقطه دیگر واقع در بینهایت که نسبت به دو زاویه دیگر دو خط یکی است می گذرد. پس مکان مطلوب خط بینهایت را در دو نقطه متمایز قطع می کند و از درجه دو است و چون این مکان از O مرکز تقارن خود می گذرد پس عبارت از دستگاه دو خط متقاطع می باشد (به سادگی معلوم می شود که این دو خط و دو خط مفروض يك دسته شعاعهای توافقی تشکیل می دهند).

تبصره - اگر خواسته بودیم برای تعیین درجه مکان نقطه تلاقی آن را با $x'x$ یعنی O را ملاک قرار دهیم بایستی توجه داشته باشیم که O يك نقطه مضاعف است زیرا در عین حال نقطه تلاقی مکان با $y'y$ نیز می باشد.

در حالت خاص $k=1$ مکان همان دستگاه دو خط D و D' می باشد.

مسئله ۲ - مکان نقاط M را پیدا کنید که از دو خط متوازی D و D' به يك فاصله اند.

اگر این مسئله را مستقیماً عمل کنیم به سادگی معلوم خواهد شد که مکان مطلوب خط D'' است که با D و D' موازی بوده و از آنها به يك فاصله است.

اما می توانیم مسئله را حالت خاصی از مسئله قبل بدانیم که O نقطه تلاقی دو خط مفروض در بینهایت واقع شده است در این صورت ملاحظه می کنیم که علاوه بر خط D'' خط بینهایت صفحه نیز جزء مکان می باشد.

مسئله ۳ - مکان نقاط M را پیدا کنید که نسبت $MA:MB$ فاصله‌های آنها از دو نقطه معلوم A و B برابر با مقدار معلوم K باشد.

خط AB محور تقارن مکان است زیرا اگر M' قرینه M نسبت به AB باشد داریم:

$$M'A - MA = M'B - MB \text{ و } M'A:M'B = k$$

اما عمود منصف AB نمی تواند محور تقارن مکان باشد زیرا اگر M' قرینه M نسبت به این عمود منصف باشد خواهیم داشت.

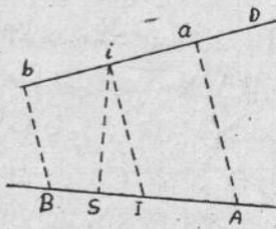
اگر Δ خطی باشد که در M بر AM عمود است اکنون معلوم می‌کنیم که از یک نقطه P واقع در صفحه چند خط Δ می‌گذرد. تعداد خطوط Δ با تعداد نقاط M برابر است و نقاط M نقاط مشترک دایره C و دایره C' به قطر AP می‌باشد نتیجه می‌شود که از نقطه P دو خط از خطوط Δ می‌گذرد پس پوش E از طبقه دو است.

پوش E مکان نقاطی است که از آنها می‌توان دو مماس منطبق بر هم بر E رسم کرد یعنی نقاط P به وضعی باشند که دایره‌های C و C' بر هم مماس باشند که اگر I وسط AP باشد داشته باشیم:

$$IO - IA = R$$

مکان نقاط I هذلولی است به کانونهای A و O که دایره C یکی از دایره‌های هادی آن است. چون در تجانس به مرکز A و به نسبت $\frac{1}{2}$ نقطه P مجانس نقطه I است بنابراین مکان P هذلولی است که A یک کانون و C دایره اصلی آن است.

مسئله ۲- پوش خطوط D را تعیین کنید که تفاضل



مربعات فواصل آنها از دو نقطه ثابت A و B برابر با مقدار ثابت k^2 باشد.

اگر I وسط AB و i تصویر آن روی D

و a و b تصویرهای A و B روی D باشد داریم:

$$Aa'^2 - Bb'^2 = k^2$$

$$Aa'^2 = Ai'^2 - ia'^2 \text{ و } Bb'^2 = Bi'^2 - ib'^2$$

$$Aa'^2 - Bb'^2 = Ai'^2 - Bi'^2 = k^2$$

مکان i مکان نقاطی است که تفاضل مربعات فواصل آنها از A و B برابر با مقدار ثابت k^2 است که این مکان خطی است مانند Δ که در نقطه ثابت S بر AB عمود می‌باشد زیرا می‌دانیم که:

$$Ai'^2 - Bi'^2 = 2AB \cdot SI \implies SI = \frac{k^2}{2AB}$$

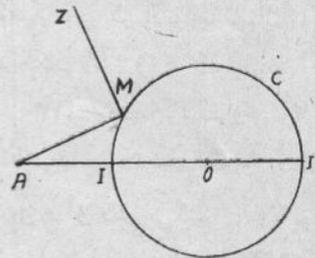
اگر M نقطه‌ای از خط D باشد خطوط D که از M می‌گذردند از نقطه تلاقی Δ با دایره C به قطر IM نیز می‌گذردند که تعداد آنها $\frac{1}{2}$ است. پس پوش مطلوب از طبقه دو است و این پوش مکان نقاط M است که نظیر آنها دو نقطه مزبور بر هم منطبق باشند یعنی خط D بر دایره C مماس باشد. مکان مزبور

ملاحظه می‌کنیم که عمود مرسوم از F بر D محور تقارن مکان است. هر نقطه از مکان مرکز دایره‌ای است که بر F می‌گذرد و بر D مماس است بنابراین نقاط تلاقی مکان با خط D'' که موازی با خط D است بر دایره‌ای به مرکز F و به شعاع مساوی با فاصله D و D'' قرار دارند که حداکثر دو نقطه می‌توانند باشند. پس مکان مطلوب منحنی از درجه دو است. اگر I تصویر قائم F روی D باشد خط D' مکان مطلوب را در دو نقطه قطع می‌کند که یکی S وسط FI و دیگری در بینهایت واقع است و نتیجه می‌شود که مکان مطلوب منحنی مقطع مخروطی است که بر خط بینهایت صفحه مماس است یعنی سهمی است به کانون F و به خط هادی D .

V - استفاده از ترسیمات در تعیین یک پوش

ارزش ترسیمات در تعیین پوش مسلم است. بخصوص اینکه با استفاده از ترسیمات می‌توان تعیین پوش را به تعیین یک مکان منجر کرد: مکان نقاطی که از آنها می‌توان دو مماس منطبق بر هم بر پوش رسم کرد. به دو مسئله زیر توجه کنید:

مسئله ۱- نقطه ثابت A را به نقطه M که روی دایره C به مرکز O تغییر مکان می‌دهد وصل می‌کنیم و عمود MZ را بر AM اخراج می‌کنیم. در حالتی که A خارج دایره C باشد پوش خط MZ را پیدا کنید.



خط AO محور تقارن شکل است. دو وضع ممتاز M در حالتی است که بر I و I' واقع باشد که در این دو وضع مماسهای I و I' بر

دایره برپوش مطلوب نیز مماس بوده و I و I' دو نقطه از این پوش می‌باشند. واضح است که پوش غیر از I و I' در نقطه دیگری با AO متلاقی نیست پس یک منحنی است از درجه دو. اگر AT مماس باشد که از A بر دایره C رسم می‌شود و TZ عمود بر AT باشد، خط AT و دایره C دارای دو نقطه مشترک کاملاً نزدیک به هم T و T' می‌باشند بنابراین K نقطه تماس TZ با پوش عبارت از دو نقطه نزدیک به هم تلاقی پوش با دو خطی است که در T و T' بر AT عمود می‌شوند که این دو خط کاملاً نزدیک به هم متوازی می‌باشند پس K نقطه بینهایت خط TZ است و این خط که از O می‌گذرد یک مجانب منحنی پوش می‌باشد. قرینه TZ نسبت به AO مجانب دیگر منحنی پوش است و در نتیجه پوش مطلوب یک هذلولی است.

مکان تقاطعی است که از خط ثابت Δ' و از I به يك فاصله باشند
 که Δ' با Δ موازی بوده و از I و Δ به يك فاصله است. نتیجه
 می شود که مکان مزبور سهمی است به کانون I که Δ مماس بر
 رأس آن می باشد.

تمرینات

(هر يك از تمرینهای زیر را قبل از آنکه از راههای
 کلاسیک حل کنید طبق روشهایی که گفته شد مورد بررسی قرار
 دهید و سعی کنید قبل از حل مسئله، نوع و مشخصات مکان یا
 پوش مطلوب را معین کنید)

۱- دایره C به مرکز O و نقطه A در خارج آن
 مفروض است. مکان نقاط M را تعیین کنید که اگر از آنها
 مماسهایی بر دایره رسم کنیم طول این مماسها برابر با MA
 باشد.

۲- در مثلث مفروض ABC مربع مستطیلهای $MNST$
 را چنان محاط می کنیم که MN بر ضلع BC واقع باشد مکان
 مرکزهای این مربع مستطیلها را بیابید.

۳- در مثلث مفروض ABC مثلثهای متساوی الساقینی
 چنان محاط می کنیم که MN قاعدههای آنها با BC موازی
 باشد. مکان مرکز ثقل این مثلثها را بیابید.

۴- دایره C به مرکز O و خط D خارج آن مفروض
 است. از نقطه متغیر P واقع در D مماسهای PA و PB را
 بر دایره C رسم می کنیم. مکان M مرکز دایره های محیطی
 مثلثهای PAB را بیابید.

۵- می دانیم که بر دو نقطه A و B ، عموماً دو دایره
 C' و C'' می توان گذراند که بر دایره مفروض C به مرکز O
 مماس باشند. فرض می کنیم که A ثابت و B بر دایره C_1
 هم مرکز با دایره C تغییر مکان دهد. مکان مرکز اصلی سه
 دایره C و C' و C'' را پیدا کنید.

۶- نقطه M بر دایره C به مرکز O تغییر مکان می دهد.
 این نقطه را به دو نقطه ثابت A و B از دایره C وصل می کنیم.
 نیمساز داخلی زاویه A و خطی که A را به I وسط BM وصل
 می کند مثلث IDM را تشکیل می دهند که D نقطه تلاقی نیمساز
 مزبور با دایره می باشد. مکان مرکز دایره محیطی این مثلث
 را پیدا کنید.

۷- دایره C و خط D مفروض است. قطر D' از دایره
 را عمود بر D رسم می کنیم و از A یکی از دوسر این قطر
 قاطعی رسم می کنیم که دایره را در B و خط D را در E قطع

می کند. بر B و E دایره C' را چنان رسم می کنیم که مرکز
 آن روی خط D واقع باشد. مکان وسط وتر مشترک دو دایره
 را پیدا کنید.

۸- از نقطه ثابت P واقع در داخل دایره C به مرکز
 O دو قاطع متغیر عمود بر هم رسم می کنیم که اولی دایره را
 در M و N و دومی آنرا در M' و N' قطع می کند. اگر
 S وسط MM' و T تصویر P روی MM' باشد اولاً مکان
 S و ثانیاً مکان T را بیابید.

۹- دایره C و دو نقطه ثابت A و B مفروض است.
 بر B قاطع BCD را می گذرانیم و وترهای CAE و DAF
 را رسم می کنیم. مکان مرکز دایره محیطی مثلث AEF را
 پیدا کنید.

۱۰- دو دایره C و C' به مرکزهای O و O' و به شعاعهای
 R و R' مفروض است. مکان نقاط M را بیابید که مجموع
 قوتهای آن نسبت به دو دایره C و C' برابر با مقدار معلوم
 k باشد.

۱۱- مکان نقاط M را بیابید که تفاضل قوتهای
 آنها نسبت به دو دایره مفروض برابر با مقدار ثابت k باشد.
 ۱۲- نقطه های P و Q اوساع ضلعهای AB و AC
 و زاویه B از مثلث ABC معلوم است. اولاً مکان مرکز ثقل
 ثانیاً مکان مرکز ارتفاعیه، ثالثاً اگر O مرکز دایره محیطی
 باشد مکان وسط AO را بیابید.

۱۳- روی دایره مفروض C نقطه دلخواه M را در نظر
 گرفته و از آن وترهای MP و MQ را موازی با خطهای
 ثابت Δ و Δ' رسم می کنیم. اولاً پوش خط PQ ، ثانیاً مکان
 مرکز دایره محیطی مثلث MPQ را بیابید.

۱۴- مثلث ABC که در زاویه A قائمه است مفروض
 است. از نقطه متغیر P واقع بر وتر عمودهای PQ و PR را بر
 AB و AC رسم می کنیم. مکان نقاط M را بیابید که QR را به
 نسبت معلوم k تقسیم می کند.

۱۵- دایره C به مرکز O و به شعاع r و نقطه A
 واقع در صفحه آن مفروض است. اولاً بر دایره C نقطه M
 را چنان بیابید که دایره C' که بر A می گذرد و در M بر
 OM مماس است به شعاع معلوم R باشد. ثانیاً اگر R تغییر
 کند مکان O' مرکز دایره C' و مکان نقطه تلاقی وتر مشترک
 دو دایره C و C' با مماس در A بر C' را پیدا کنید.

۱۶- نقطه A و زاویه xOy مفروض است. از A خطی

رسم می‌کنیم که ضلعهای زاویه را در B و C قطع می‌کند و نقطه C را به M وسط OA وصل می‌کنیم که این خط، خطی را که از B موازی با OA رسم شود در P قطع می‌کند. مکان P را پیدا کنیم.

۱۷- مربع مستطیل OACB مفروض است. زاویه قائمهای حول رأس C می‌چرخد و یکی از ضلعهای این زاویه ضلعهای OA و OB را در a و b وضع دیگر آنها را در a' و b' قطع می‌کند. اولاً مکانهای اواسط ab' و a'b، ثانیاً مکانهای تصویرهای قائم C را روی a'b و ab'، ثالثاً مکان نقطه تلاقی ab' و a'b را بیابید.

۱۸- دو دایره C و C' در A متقاطع اند. از A قاطع ثابت BAE و قاطع متغیر MAN را رسم می‌کنیم. اگر P نقطه تلاقی BM و NE باشد مکان P را بیابید.

۱۹- دو خط متوازی D و D' مفروض است. از A عمود ABB' را بر D و D' رسم می‌کنیم و همچنین از A قاطعی متغیر رسم می‌کنیم که D را در C و D' را در C' قطع می‌کند. در C' عمودی بر D' اخراج می‌کنیم که B'C را در M قطع می‌کند. مکان M را بیابید.

۲۰- در دایره مفروض وتر ثابت AB و وتر متغیر AM را رسم می‌کنیم. مکان مراکز متوازی الاضلاعهای ABNM را بیابید.

۲۱- دایره C به مرکز O و نقطه G در داخل آن مفروض است. ثابت کنید که بینهایت مثلث وجود دارد که در دایره C محاط بوده و G مرکز ثقل آنها باشد. مکان اواسط ضلعهای این مثلثها را پیدا کنید.

۲۲- ضلع AB از متوازی الاضلاع ABCD و اندازه زاویه دو قطر آن ثابت است. مکانهای رأسهای C و D را پیدا کنید.

۲۳- زاویه xOy مفروض است. روی نقطه Ox ثابت A و روی Oy نقطه ثابت B را در نظر می‌گیریم و A'B' را موازی با AB رسم می‌کنیم. خطهای AB' و A'B در M برخورد می‌کنند. دقتی A'B' موازی با AB تغییر مکان دهد مکان نقطه M چیست؟

۲۴- در مثلث ABC قاعده BC ثابت و مجموع AB+AC با مقدار ثابت l برابر می‌باشد. مکانهای تصویرهای

B و C را روی نیمساز خارجی زاویه A پیدا کنید.

۲۵- دایره C و نقطه A ثابت است و دایره C' چنان تغییر می‌کند که همواره بر A گذشته و I مرکز آن دایره C را می‌پیماید. پوش محور اصلی دو دایره C و C' را بیابید.

۲۶- دایره C ثابت است و دایره C' چنان تغییر می‌کند که همواره بر نقطه ثابت P می‌گذرد و بر خط ثابتی مماس است. پوش محور اصلی دو دایره را پیدا کنید.

۲۷- دایره ثابت C و دایره متغیر C' به شعاع ثابت مفروض است. اگر O' مرکز C' بر خط ثابت D تغییر مکان دهد پوش محور اصلی دو دایره چیست؟

۲۸- مسئله قبل وقتی که O' بر دایره ثابتی تغییر مکان دهد.

۲۹- پوش قطبیههای نقطه ثابت A را نسبت به دایره‌هایی بیابید که بر نقطه معلوم P می‌گذرند و بر خط ثابت D مماس اند.

۳۰- دایره C به شعاع ثابت روی خط معلوم D می‌غلتد. پوش قطبی نقطه ثابت A را نسبت به دایره C پیدا کنید.

شکلهای هندسی (بقیه از صفحه ۵۰۳)

۱۰- مسئله قبل را در مورد شش ضلعی منتظم حل کنید.

۱۱- نمودار معادلات قدر مطلق زیر را رسم کنید (به مراکز

و محورهای تقارن توجه کنید (محورها و مراکز مختصات) (در صورتی که $\lambda, \lambda', \alpha, \alpha', \beta, h$ اعدادی مثبت باشند. مبتدیان می‌توانند این تمرین را در حالت

$$\alpha' = \gamma \text{ و } \alpha - \beta = \lambda = \lambda' = h = 1$$

بررسی کنند:

$$\lambda |x - \alpha| + \lambda |x + \alpha| + |y - \beta| + \gamma |y| + |y + \beta| = 2(\lambda \alpha + \beta + h)$$

$$\lambda |\alpha - x| + \gamma \lambda |x| + \lambda |\alpha + x| + |\beta - y| + \gamma |y| + |\beta + y| = 2(\lambda \alpha + \beta + h)$$

$$\lambda |x - \alpha| + \lambda |x + \alpha| + \lambda' |x - \alpha'| + \lambda' |x + \alpha'| + |y - \beta| + |y + \beta| = 2(\lambda \alpha + \lambda' \alpha' + \beta + h)$$

۱۲- دو معادله برای خط واصل بین نقاط (۵۰۱) و A و

B (۲۰۰) ارائه دهید. معادلات OA، OB و OM را نیز

بنویسید (M وسط AB است.)

تعمیم مسئله هر میت



از : داوید ریحان

دانشجوی دانشکده فنی دانشگاه تهران

$u - t, \dots, y - t, \dots, y - z, x - t, \dots$ نیز قابل قسمت است و از آنجا خواهیم داشت :

$$Q(x, y, z, \dots, t) = [(x-y)(x-z)\dots(x-t)(y-z)\dots(y-t)\dots(u-t)] \times Q'(x, y, z, \dots, t)$$

$f(x, y, z, \dots, t) = [(x-y)(x-z)\dots(x-t)(y-z)\dots(y-t)\dots(u-t)] Q'(x, y, z, \dots, t)$
تبصره - می توان مسئله را با استفاده از نظریه مشتق تابع اثبات کرد به ترتیب که از تابع $f(x, y, z, \dots, t)$ نسبت به x مشتق گرفته و ثابت کنیم که مشتق حاصل بر $x - y$ بخش پذیر است که در نتیجه خود تابع بر $(x - y)$ بخش پذیر خواهد بود و نسبت به دیگر عاملها نیز همین عمل را انجام دهیم .

توابع اولیه (بقیه از صفحه ۵۰۹)

$$+\frac{1}{4}\sin^4 x + \frac{1}{3}\sin^2 x + C$$

مثال ۲- برای تعیین تابع اولیه تابع $y = tg^{2n} x$

چنین عمل می کنیم :

$$tg^{2n} x = (1 + tg^2 x) tg^{2n-2} x - (1 + tg^2 x) tg^{2n-4} x + (1 + tg^2 x) tg^{2n-6} x - \dots + (-1)^n$$

می دانیم که تابع اولیه

برابر است با :

$$Y = \frac{1}{n+1} tg^{n+1} x + C$$

بنابراین داریم :

$$Y = \frac{1}{2n-1} tg^{2n-1} x - \frac{1}{2n-3} tg^{2n-3} x + \dots + (-1)^n x + C$$

(در صفحه ۵۲۸)

مثلا در مورد $y = tg^6 x$ داریم :

مسئله هر میت چنین است : اگر $f(x, y)$ نسبت به x و y متقارن و بر $x - y$ بخش پذیر باشد بر $(x - y)^2$ بخش پذیر خواهد بود .

در زیر تعمیم مسئله هر میت و حل آن در حالت کلی بیان می شود :

تعمیم مسئله هر میت - اگر $f(x, y, z, \dots, t)$ نسبت به x و y و z و t, \dots متقارن بوده بر تفاضل دو به دو این عاملها بخش پذیر باشد بر توان دوم این تفاضلهای بخش پذیر خواهد بود .

اثبات - خارج قسمت تقسیم عبارت فوق را بر تفاضل دو به دو عاملها به (t, \dots, z, y, x) نمایش می دهیم پس داریم :

$$f(x, y, z, \dots, t) = [(x-y)(x-z)\dots(x-t)(y-z)\dots(y-t)\dots(u-t)] Q(x, y, z, \dots, t)$$

در این رابطه با تبدیل x به y خواهیم داشت :

$$f(y, x, z, \dots, t) = [(y-x)(y-z)\dots(y-t)(x-z)\dots(x-t)\dots(u-t)] Q(y, x, z, \dots, t)$$

$$f(y, x, z, \dots, t) = -[(x-y)(x-z)\dots(x-t)(y-z)\dots(y-t)\dots(u-t)] Q(y, x, z, \dots, t)$$

اما بنا به فرض داریم :

$$f(x, y, z, \dots, t) = f(y, x, z, \dots, t)$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$Q(x, y, z, \dots, t) = -Q(y, x, z, \dots, t)$$

و اگر در این رابطه به جای x عامل y را قرار دهیم

نتیجه می شود :

$$Q(y, y, z, \dots, t) = 0$$

یعنی عبارت Q بر $x - y$ بخش پذیر است .

به روش مشابه ثابت خواهد شد که عبارت Q بر $x - z$ و

مسائل برای حل

خواهشمند است از فرستادن حل مسائل خودداری شود.

مسائل متفرقه

ارتفاعهای نظیر آنها باشد ثابت کنید که :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ha^2 + hb^2 + hc^2} > \frac{16}{9}$$

۵۵/۵ - از جعفر جهان بخش ششم ریاضی دبیرستان ادب اصفهان

الف - سلسله اعداد طبیعی را طوری دسته بندی می کنیم که هر دسته به عددی مربع کامل ختم شود :

۰۰۰ و (۵۹ و ۷۱ و ۹۹) و (۳ و ۴ و ۲۰) و (۱)

ثابت کنید که دسته n ام شامل ۱ - ۲n جمله است و مجموع جمله های این دسته را بدست آورید .

ب - اگر سلسله عددهای طبیعی را به ترتیب فوق قسمی دسته بندی کنیم که آخرین جمله هر دسته مکعب کامل باشد تعداد جمله های دسته n ام و مجموع جمله های آن را حساب کنید .

۵۵/۶ - ترجمه از مجله دانش آموز ریاضی

سه دایره دو به دو چنان برهم می آیند که مرکزهای آنها مثلثی متساوی الاضلاع و نقاط تماس آنها مثلثی غیر متساوی الاضلاع تشکیل می دهند . نسبت بین شعاعهای سه دایره و همچنین نسبت بین ضلعهای مثلثی را که از نقاط تماس تشکیل می شود بدست آورید .

۵۵/۷ - ترجمه از مجله دانش آموز ریاضی

مربع مستطیل ABCD به ابعاد $AB = m$ و $AD = n$ مفروض است که m و n عددهای صحیح می باشند ضلع AB را به m قسمت و ضلع AD را به n قسمت برابر تقسیم می کنیم و از نقاط حاصل خطهایی موازی ضلعهای مستطیل و محدود به ضلع مقابل رسم می کنیم. تعداد همه مربع مستطیل هایی را که تشکیل می شود بر حسب m و n بدست آورید.

۵۵/۱ - از : علی حاجی ابراهیمی

از رابطه (۱) رابطه (۲) را بدست آورید :

$$(1) \frac{p+q \sin x}{p+q} = \frac{p-q}{p-q \sin y}$$

$$(2) (p+q) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right) = (p-q) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

۵۵/۲ - فرستنده : اسماعیل مهدیزاده دهکردی

دو دیوار قائم که ارتفاع آنها مساوی است و با هم زاویه α می سازند بوسیله خورشید دو سایه در روی زمین افقی ایجاد کرده اند . فاصله لبه سایه هر دیوار از پای آن دیوار به ترتیب b و c است و از نقطه R سایه رأس فصل مشترک دو دیوار این فصل مشترک به زاویه θ دیده می شود. ارتفاع دیوارها را بر حسب b و c و θ و α حساب کنید .

۵۵/۳ - ترجمه از مجله تربیت ریاضی

در يك صفحه دایره C به مرکز O و نقطه P واقع در خارج آن مفروض است . از P خطی رسم می کنیم که دایره را در A و B قطع می کند .

(۱) O_1 و O_2 مرکزهای دایره های C_1 و C_2 را پیدا کنید که از P گذشته و به ترتیب در A و B بر دایره C مماس می باشند و این دایره ها را رسم کنید .

(۲) ثابت کنید که چهار ضلعی OO_1PO_2 متوازی الاضلاع است .

(۳) دایره های C_1 و C_2 علاوه بر P در نقطه دیگر M مشترك هستند . وقتی قاطع PAB حول P حرکت کند مکان M را پیدا کنید .

۵۵/۴ - از : مسعود حبیب الله زاده ششم ریاضی

دبیرستان خوارزمی ۱

اگر a و b و c ضلعهای يك مثلث و h_a و h_b و h_c

۵۵/۱۴ - از اکبر ابراهیمیان

اگر r شعاع دایره محاطی داخلی و a و b و c اندازه های ضلعهای مثلث ABC باشد می‌تیم عبارت زیر را بیابید .

$$y = \frac{a}{r} \cot A + \frac{b}{r} \cot B + \frac{c}{r} \cot C$$

۵۵/۱۵ - ترجمه جعفر آقایی چاوشی

مثلثی منفرجه الزاویه تعیین کنید که با مثلث ارتفاعی خود متشابه باشد .

۵۵/۱۶ - از محمدرضا یزدان

از نقطه M خارج بیضی مماسهای MT و MT' را بر آن رسم می‌کنیم. خطهای MF و MF' خط TT' را در Q و Q تلاقی می‌کنند. مزدوجهای توافقی P و Q را نسبت به T و T' به ترتیب K و L . نقطه تلاقی FK و $F'L$ را S می‌نامیم. ثابت کنید که چهار نقطه F و F' و M و S روی یک دایره واقع اند و مکان مرکز این دایره را وقتی M تغییر کند پیدا کنید .

۵۵/۱۷ - ترجمه از فرانسه

رشته اعدادی را در نظر می‌گیریم که با شرایط زیر مهین می‌باشد :

$$u_0 = 2 \quad \text{و} \quad 2u_n = u_{n-1} + 1$$

(۱) ثابت کنید که رشته با جمله عمومی $u_n = u_{n-1} + 1$ یک تصاعد هندسی است .

(۲) مقدار u_n را بر حسب n حساب کنید .

(۳) وقتی n بینهایت بزرگ شود حد u_n چه می‌باشد ؟

(۴) مجموع زیر را بر حسب n حساب کنید :

$$U = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

۵۵/۱۸ - از داوید ریحان دانشجوی دانشکده فنی

در مثلثی شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی تصاعد عددی تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که در چنین مثلثی نامساوی $p^2 > ac$ برقرار می‌باشد .

۵۵/۱۹ - از داوید ریحان

روی ضلعهای مثلث ABC مربعهایی می‌سازیم و مساحت های آنها را به ترتیب به S_1 و S_2 و S_3 نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم :

$$S_2 + S_3 - S_1 = S'$$

$$S_2 + S_1 - S_3 = S''$$

$$S_1 + S_2 - S_3 = S'''$$

۵۵/۸ - ترجمه از مجله دانش آموز ریاضی

روی ضلعهای مثلث قائم الزاویه مفروض و در خارج آن سه مربع می‌سازیم . اگر اندازه‌های ضلعهای زاویه قائمه از مثلث a و b باشد فاصله مرکزهای مربعهای مزبور را از یکدیگر دوبه دو بر حسب a و b بدست آورید .

۵۵/۹ - ترجمه از مجله مزبور

مثلث متساوی الساقین ABC به ضلعهای :

$AB = AC = 5$ و $BC = 6$ مفروض است. روی ضلعهای AB و AC و در خارج مثلث مربعهایی می‌سازیم. فاصله مرکزهای این دو مربع را از یکدیگر بدست آورید .

۵۵/۱۰ - از محمدرضا یزدان دانشجوی پلی تکنیک تهران

معادله دو دایره عبارتست از :

$$(C) : x^2 + y^2 - 2ax - b^2 = 0$$

$$(C') : x^2 + y^2 + 2ax - b^2 = 0$$

اولاً با شرط $a^2 - b^2 = 2ab$ مساحت سطح محصور بین دو دایره را بر حسب a و b بدست آورید .
ثانیاً در سطح محصور بین دو دایره مربع مستطیلی به مساحت ماکزیم محاط کنید .

۵۵/۱۱ - فرستنده : دانش عمرانی از انگلستان

با فرض $a > b > 0$ کدام یک از دو کسر زیر بزرگتر است ؟

$$A = \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}}{1 + a + a^2 + \dots + a^n}$$

$$B = \frac{1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1}}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}$$

۵۵/۱۲ - اولاً منحنیهای (C) و (C') نمایش هندسی

دو تابع زیر را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید :

$$(C) : y = \frac{x^2 + 16}{4x} \quad \text{و} \quad (C') : y = \frac{4}{x}$$

ثانیاً - مساحت سطح محصور بین دو منحنی و خطوط $x = 2$ و $x = k$ ($0 < k < 2$) را بر حسب k بدست آورید و حد آنرا وقتی $k \rightarrow 0$ پیدا کنید .

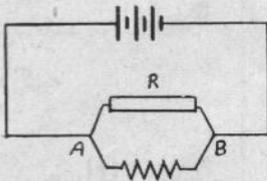
۵۵/۱۳ - از اکبر ابراهیمیان ششم ریاضی دبیرستان

سعدی اصفهان

تابع اولیه تابع زیر را پیدا کنید :

$$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)(1 + \cot^2 x)^2$$

سانتیمتر و یک مقاومت چهار اهمی بطورانشعاب بسته شده است.



بوسیله‌ای هرثانیه $5/3$
سانتیمتر مکعب جیوه
در لوله شیشه‌ای ریخته
می‌شود. اگر دو نقطه
A و B به دو سر یک
مولد به نیروی محرکه

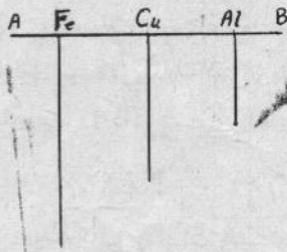
۲۰ ولت وصل شوند، مطلوبست:

(۱) مقاومت مدار در لحظه t

(۲) شدت جریان در این لحظه

(۳) گرمای ایجاد شده در R در دو ثانیه اول.

۵۵/۲۵ - روی یک میله افقی AB سه میله آهنی و



مسی و آلومینیومی را
لجیم می‌کنیم بطوری که
در تمام درجات حرارت
اختلاف طول میله‌های
مجاور از هم مساوی ۲
سانتیمتر است. مطلوبست
طول میله‌های مزبور و

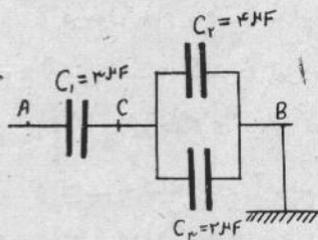
ضریب انبساط خطی آهن در صورتی که:

$$\lambda_{Al} = 24 \times 10^{-6} \text{ و } \lambda_{Cu} = 16 \times 10^{-6}$$

۵۵/۲۶ - دو قطب مولدی را یک بار به مقاومت خارجی

R و بار دیگر به مقاومت خارجی R' می‌بندیم. مقاومت داخلی
مولد را بر حسب R و R' طوری تعیین کنید که گرمای حاصل
در دو تجربه فوق برای مدت‌های مساوی برابر باشند.

۵۵/۲۷ - مداری مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم



هرگاه نقطه B به
زمین وصل باشد و نقطه
A را به پتانسیل
 $+2000$ ولت وصل
کنیم مطلوبست محاسبه
میزان بار روی هر یک
از خازنها و پتانسیل
نقطه C.

۵۵/۲۸ - دو متحرک A و B به فاصله ۹۰۰ متر از هم

قرار دارند و در یک لحظه به سمت هم حرکت می‌کنند. سرعت
متحرک A طوری است که می‌تواند فاصله BC را در مدت ۳ دقیقه

صحت رابطه زیر را ثابت کنید:

$$16S^2 = S'S'' + S''S''' + S'''S''''$$

۵۵/۲۰ - ترجمه داوید ریحان

چه شرطهایی باید برقرار باشد تا مقدار:

$$y = \frac{Ax^2}{x+a} + \frac{Bx^2}{x+b} + \frac{Cx^2}{x+c}$$

وقتی x به سمت بینهایت میل می‌کند محدود باقی‌ماند.

۵۵/۲۱ - ترجمه از فرانسه

دو دایره به مرکزهای O و O' و به شعاعهای R و R'
و به طول خط‌المركزین $OO' = d$ مفروض است. اگر D
قطبی O نسبت به دایره (O') و H پای آن و D' قطبی O'
نسبت به دایره (O) و H' پای آن باشد طول HH' را
حساب کنید و معلوم کنید چه وقت H و H' بر هم منطبق
می‌شوند.

۵۵/۲۲ - ترجمه از فرانسه

روی بیضی E که باکانونهای F و F' و دایره هادی Γ'
نظیرکانون F' مشخص می‌باشد، دو نقطه M و M' در نظر می-
گیریم. نقاط تماس دایره‌های به مرکزهای M و M' و مار
بر F با دایره Γ' به ترتیب P و P' می‌نامیم.

(۱) ثابت کنید که خط PP' بر I مرکز تجانس مستقیم
دو دایره مزبور می‌گذرد و انعکاس به قطب I و به قوت IF^2
این دو دایره منعکس یکدیگراند.

(۲) وقتی M و M' روی بیضی به دلخواه تغییر مکان
دهند مکان نقاط I را پیدا کنید.

۵۵/۲۳ - ترجمه از ماهنامه ریاضی آمریکا

به فرض اینکه a و k عددهای صحیح و $a > k > 0$ باشد
ثابت کنید که به ازاء هر مقدار صحیح و مثبت n از رابطه زیر
برای b مقداری صحیح بدست می‌آید:

$$[\sqrt{a} - \sqrt{a-k}]^n = \sqrt{b} - \sqrt{b-k}^n$$

مسائل فیزیک

تهیه و انتخاب توسط: حسین فرمان

۵۵/۲۴ - فرستنده: میر منصور ضیابری

بین دو نقطه A و B یک لوله شیشه‌ای به طول ۱۰۶

۵۵/۳۰ - از کلسیم سولفات $CaSO_4$ مشتق مونوکلرید B بدست آمده است. از اثر پتانسی الکلی بر B جسم C تولید شده است. بالاخره از اکسیداسیون ملکول C اسید استیک و اسید پیروویک بدست آمده است.

ساختمان احتمالی جسم A را مشخص کنید در صورتی که بدانیم برای خنثی کردن 0.204 گرم این اسید 20 cc سود $\frac{N}{10}$ لازم است.

۵۵/۳۱ - مونواسید A که دارای فعالیت نوری است فقط شامل C و H و O می باشد و در اثر تجزیه نتایج زیر را داده است:

$$C \ 58.82\% \quad - \quad H \ 9.85\%$$

مونواسید A را به صورت نمک نقره در آوریم، از تکلیس 0.2299 گرم این نمک 0.1118 گرم نقره بدست آمده است. ساختمان احتمالی اسید A را مشخص کنید و سنتز آن را شرح دهید.

توابع اولیه (بقیه از صفحه ۵۲۱)

$$tg^2 x = (1 + tg^2 x)tg^2 x - (1 + tg^2 x)tg^2 x + (1 + tg^2 x) - 1$$

$$Y = \frac{1}{5}tg^5 x - \frac{1}{3}tg^3 x + tg x - x + C$$

تمرینات V

توابع اولیه تابعهای زیر را پیدا کنید:

۱- $y = \sin x \cos x + \cos^2 x$

۲- $y = \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x$

۳- $y = \sin ax \cos bx$

۴- $y = \sin ax \cdot \sin bx \cdot \sin cx \cdot \sin dx$

۵- $y = \sin^2 x + \sin^2 x \sin^2 x \sin x$

۶- $y = \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x$

۷- $y = \cos^2 x + \sin^2 x$ ۸- $y = \sin^2 x$

۹- $y = \sin^2 x \sin^2 x \cos^2 x$ ۱۰- $y = tg^2 x$

۱۱- $y = tg^2 x$ ۱۲- $y = tg^2 x$

۱۳- $y = tg^{2n} px$ ۱۴- $y = cotg^2 x$

۱۵- $y = cotg^{2n} qx$ ۱۶- $y = \sin^2 x \cos^2 x$

پیماید و سرعت متحرك B چنان است که می تواند مسافت AC را در ۱۲ دقیقه طی کند اگر C روی AB و بین A و B واقع باشد موقعیت آن و سرعت هر يك از دو متحرك را پیدا کنید.

مسائل شیمی

ترجمه و انتخاب توسط: عطاءالله بزرگ نیا

۵۵/۲۹ - جسم خالص A مایعی است با بوی آمونیاکی و واکنش بازی که تحت فشار يك جو در 50° می جوشد. برای مشخص کردن آن به طریق زیر آزمایش می کنیم:

الف - برای خنثی کردن يك گرم از این جسم 13.6 cc محلول اسید کربدريك دسی نرمال لازم است. تجزیه عنصری آن نتایج زیر را داده است.

$$O\%: 66.15 \quad H\%: 14.18 \quad N\%: 19.10$$

چگالی بخار آن نسبت به هوا 2.6 است.

فرمول خام جسم A و گسترده تمام ایزومرهای آن را بنویسید.

ب - جسم A را با مقدار زیادی یدور متیل در لوله سر بسته گرم می کنیم. مخلوطی از چند یدور که شامل يك نمک آمونیم چهار استخلافی نیز می باشد بدست می آید.

چگونه می توان جسم اخیر را از سایر یدورها جدا کرد؟ تجزیه عنصری نمک آمونیم چهار استخلافی نتایج زیر را داده است:

$$C\%: 31 \quad H\%: 7 \quad N\%: 6 \quad I\%: 56$$

فرمول خام یدور چهار استخلافی چیست؟ آمین A چه نوع آمینی است؟ گسترده ایزومرهای آنرا بنویسید.

آیا روش دیگری برای تعیین نوع آمین A می شناسید؟ ج - به کمک یدور آمونیم چهار استخلافی حاصل در قسمت (ب) یدروکسید مربوط را تهیه می کنیم. روش عمل را بیان کنید.

هرگاه این یدروکسید را در حدود 150° سانتیگراد گرم کنیم به تری متیل آمین، آب و يك یدروکربور تجزیه می شود. این یدروکربور چیست؟

حل مسائل یکان شماره ۵۳

★ ★ ★ ★

$$BE \cdot EF = a^2 \Rightarrow EF = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

عمود CH را بر EF رسم می‌کنیم. زاویه CEH که متمم زاویه BEC است با زاویه EBC برابر است و در نتیجه دو مثلث BEC و CHE متشابهند و داریم:

$$\frac{CE}{BE} = \frac{EH}{BC} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{EH}{a} \Rightarrow EH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

اندازه EH برابر با نصف اندازه EF بدست می‌آید بنابراین مثلث ECF متساوی الساقین است و داریم:

$$CF = CE = \frac{a}{2} \quad \text{و} \quad CG = CB = a$$

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۵۳/۳ - معادله زیر را حل کنید و در تعداد جوابهای آن بحث کنید:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} - a\sqrt{x^2}$$

حل - اولاً برای اینکه تساوی برقرار باشد لازم است که $x > 0$ و همچنین $a > 0$ باشد. با این دو شرط رادیکالها را را به فرجه مشترک تحویل می‌کنیم و فرض می‌کنیم:

$$\sqrt{x} = X$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$X + X - aX^2 = 0 \quad \text{و} \quad X > 0$$

$$X(X^2 - aX + 1) = 0$$

$$X = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$X^2 - aX + 1 = 0$$

$$\Delta = a^2 - 4 > 0 \Rightarrow a > 2$$

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۵۳/۱ - ثابت کنید که عبارت:

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 2x^2 + 16x - 8$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت و معادله $f(x) = 0$ را حل کنید:

$$f(x) = (x+1)^2 - (2x-3)^2$$

حل - به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 6x^2 + 4x + 1 - (4x^2 - 12x + 9)$$

$$f(x) = (x+1)^2 - (2x-3)^2$$

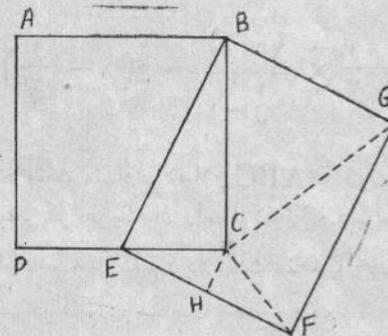
$$f(x) = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = \pm(2x-3)$$

$$x^2 + 4 = 0 \quad \text{جواب حقیقی ندارد}$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{6}$$

۵۳/۲ - در مربع $ABCD$ به طول ضلع a از B به

E وسط ضلع CD وصل می‌کنیم و مستطیل $BEFG$ را معادل با مربع مقروض می‌سازیم. بعدها این مستطیل و طولهای CF و CG را بر حسب a حساب کنید.



حل - در مثلث BCE داریم:

$$BE = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$l = a + (n-1)d \quad \text{یا} \quad 30 - a = a + 6d$$

$$\text{یا} \quad a = 15 - 3d$$

و جمله های دیگر واسطه های مزبور به ترتیب عبارت خواهند شد از:

$$15 + d \quad \text{و} \quad 15 \quad \text{و} \quad 15 - d \quad \text{و} \quad 15 - 2d$$

$$15 + 3d \quad \text{و} \quad 15 + 2d$$

و دو عدد مفروض به صورت $15 - 4d$ و $15 + 4d$ می باشند. بر حسب مقادیر مختلف d مسئله دارای بینهایت جواب است.

۵۳/۶ - حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$A = \log_a \sqrt[n]{a} + \log_a \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} + \dots +$$

$$+ \log_a \sqrt[n]{\sqrt[n]{\dots \sqrt[n]{a}}}$$

حل - داریم:

$$\log_a \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_a a = \frac{1}{n}$$

$$\log_a \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$$

.....

$$\log_a \sqrt[n]{\sqrt[n]{\dots \sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$A = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^{n-1}}\right)$$

$$A = \frac{1}{n} \times \frac{\frac{1}{n^{n-1}} - 1}{\frac{1}{n} - 1} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

۵۳/۷ - مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع a مفروض است. به مرکز هر یک از رأسها کمانی از دایره محدود به دو رأس دیگر رسم می کنیم و در مثلث منحنی الخط حاصل دایره ای محاط می کنیم. مساحت سطح واقع بین مثلث منحنی الخط مزبور و دایره محاطی آن را بر حسب a حساب کنید.

حل - مساحت مثلث منحنی الخط برابر است با مساحت مثلث ABC به اضافه سه برابر مساحت قطعه محصور بین

$$x = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}} \Rightarrow$$

$$x = \left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

بحث - در ازاء همه مقادیر a معادله يك جواب $x=0$ دارد و غیر از آن اگر $a > 2$ باشد معادله دو جواب دیگر و اگر $a = 2$ باشد يك جواب دیگر نیز دارد. در حالت $a < 2$ معادله جز جواب $x=0$ جواب حقیقی دیگری ندارد.

۵۳/۴ - به فرض اینکه $x = my$ باشد و داشته باشیم:

$$\begin{cases} xy(x+y)(x^2+y^2) = 30 \\ x^5 + y^5 = 33 \end{cases}$$

مقادیر m و x و y را حساب کنید.

(در چاپ صورت مسئله در یکان شماره ۵۳ معادله دوم از قلم افتاده است.)

حل - با فرض $x = my$ معادله های مفروض به صورت

زیر خلاصه می شوند:

$$\begin{cases} y^6(m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m) = 30 \\ y^5(m^5 + 1) = 33 \end{cases}$$

از تقسیم طرفین دو معادله بر یکدیگر و بعد از اختصار

نتیجه می شود:

$$30m^5 - 33m^4 - 33m^3 - 33m^2 - 33m + 30 = 0$$

معادله ای معکوسه که چون طبق قاعده مربوط عمل کنیم

نتیجه خواهد شد:

$$m = 2 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow (x = 2 \text{ و } y = 1)$$

$$\text{یا} \quad (x = 1 \text{ و } y = 2)$$

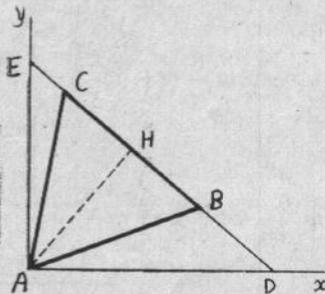
۵۳/۵ - بین دو عدد که مجموع آنها ۳۰ است عدد فردی واسطه های عددی درج می کنیم بقسمی که مجموع این واسطه ها ۹۸ واحد از تعداد آنها بیشتر است. واسطه های مزبور و سایر مشخصات تصاعد مربوط را بدست آورید.

حل - اگر a و l اولین و آخرین واسطه ها و n تعداد

آنها و S مجموع آنها باشد داریم:

$$a + l = 30 \quad \text{و} \quad S = n + 98$$

$$S = \frac{n}{2}(a + l) : n + 98 = 15n \Rightarrow n = 7$$



قاعده‌های آنها و نتیجه می‌شود که:
 $BD = 2CE$
 اگر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض برابر با a و $CE = x$ فرض شود داریم:

$$BH = CH = \frac{a}{2} \text{ و } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AH' = HD \cdot HE$$

$$\frac{3a^2}{4} = \left(\frac{a}{2} + 2x\right)\left(\frac{a}{2} + x\right)$$

$$4x^2 + 2ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = CE = \frac{a}{4}$$

و $BD = \frac{a}{2}$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{S_{ACE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$$

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۵۳/۹ - تابع درجه دوم y را چنان تعیین کنید که ضریب زاویه مماس بر منحنی نمایش آن در نقطه به طول x برابر باشد با $5 - 2x$ و در ازا $x = \sin \alpha$ داشته باشیم:

$$y = (1 - \sin \alpha)(\sin \alpha - 4)$$

حل - تابع را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ فرض می‌کنیم و باید داشته باشیم:

$$y' = 2ax + b = -2x + 5 \Rightarrow a = -1 \text{ و } b = 5$$

$$(1 - \sin \alpha)(\sin \alpha - 4) = -\sin^2 \alpha + 5 \sin \alpha + c$$

$$\Rightarrow c = -4 \text{ و } y = -x^2 + 5x - 4$$

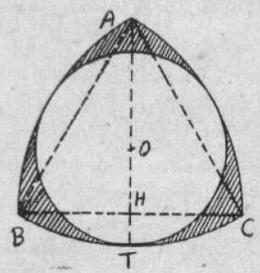
۵۳/۱۰ - در هریک از رابطه‌های زیر مقدار x را بدست آورید:

$$I - \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha\right)^x = \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$II - \left(\frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta}\right)^x = \left(\cot \frac{\beta}{2} - 2 \cot \beta\right)^4$$

حل - داریم:

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$



وتر و کمان AB مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_1 = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

مساحت قطاع به مرکز C و کمان AB برابر است با:

$$\frac{\pi a^2 \times 60}{360} = \frac{\pi a^2}{6}$$

مساحت قطعه محصور بین وتر و کمان AB می‌شود:

$$S_2 = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

مساحت مثلث منحنی الخط ABC برابر می‌شود با:

$$S_3 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{a^2(\pi - \sqrt{3})}{2}$$

O مرکز دایره محاطی مثلث منحنی الخط ABC بر مرکز دایره محاطی مثلث ABC منطبق است و شعاع آن به ترتیب زیر حساب می‌شود:

$$OH = \frac{BH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$TH = AT - AH = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2}$$

$$r = OH + HT = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2}$$

$$S_4 = \pi r^2 = \frac{\pi a^2(2 - \sqrt{3})^2}{4}$$

$$S = S_3 - S_4 = \frac{\pi(2\sqrt{3} - 5) - 3\sqrt{3}}{4}$$

۵۳/۸ - در داخل زاویه قائمه xAy مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را می‌سازیم و ضلع BC از آن را امتداد می‌دهیم تا Ax و Ay را به ترتیب در D و E قطع کند (بین C و D قرار دارد). اگر مساحت مثلث ACE نصف مساحت مثلث ABD باشد نسبت مساحت‌های هریک از این مثلث‌ها را به مثلث ABC بدست آورید.

حل - دو مثلث ACE و ABD در ارتفاع AH مشترک‌اند پس نسبت مساحت‌های آنها برابر است با نسبت

اگر φ_1 زاویه مماس نقطه A و φ_2 زاویه مماس نقطه B با Ox باشد داریم:

$$tg \varphi_1 = -\frac{1}{r} \quad \text{و} \quad tg \varphi_2 = -2$$

$$tg \varphi_1 \cdot tg \varphi_2 = 1 \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که زاویه مماس نقطه A با Ox برابر است با زاویه مماس نقطه B با Oy یا به عبارت دیگر دو مماس با نیمساز ربع اول محورها زاویه‌های برابر می‌سازند و چون A و B نسبت به نیمساز ربع اول قرینه‌اند پس دو مماس نسبت به این نیمساز قرینه می‌باشند.

۵۳/۱۲ - ثابت کنید که اگر A و B و C زاویه‌های یک مثلث باشند رابطه زیر برقرار است:

$$tg^2 A \cdot tg^2 B \cdot tg^2 C - (tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C) = 2 + \frac{2}{\cos A \cos B \cos C}$$

حل - در هر مثلث داریم:

$$tg A + tg B + tg C = tg A \cdot tg B \cdot tg C$$

طرفین این رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &tg^2 A \cdot tg^2 B \cdot tg^2 C - (tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C) = \\ &= 2(tg A \cdot tg B + tg B \cdot tg C + tg C \cdot tg A) \\ &= \frac{2(\sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B)}{\cos A \cos B \cos C} \end{aligned}$$

باتوجه به بسط $\cos(A+B+C)$ طرف دوم این رابطه برابر خواهد شد با:

$$\frac{2(1 + \cos A \cos B \cos C)}{\cos A \cos B \cos C}$$

۵۳/۱۳ - جسم صلب به شکل مکعب به طول یال a را در نظر می‌گیریم. در این جسم سوراخی استوانه شکل ایجاد می‌کنیم بقسمی که محور این استوانه بر یکی از قطرهای مکعب منطبق بوده و قطردهانه سوراخ برابر با $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ باشد. حجم جسم صلب حاصل را بر حسب a حساب کنید.

تبصره - دو دهانه سوراخ مسطح فرض می‌شود و البته این موضوع در یکان شماره ۵۳ نیز باید توضیح داده می‌شد.

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}} = \cotg \frac{\alpha}{2} = \left(tg \frac{\alpha}{2} \right)^{-1}$$

$$\left(tg \frac{\alpha}{2} \right)^{-x} = tg^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x = -2$$

$$\frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta} = \cotg^2 \frac{\beta}{2} \quad \text{و} \quad \cotg \frac{\beta}{2} - 2 \cotg \beta = tg \frac{\beta}{2}$$

$$\left(tg \frac{\beta}{2} \right)^{-2x} = tg^2 \frac{\beta}{2} \Rightarrow x = -2$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

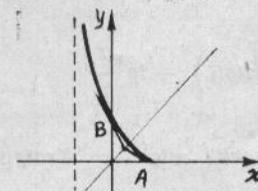
۵۳/۱۱ - تغییرات تابع $y = tg^2 \alpha$ را بر حسب تغییرات $x = \cos 2\alpha$ معین کرده نمایش هندسی آنرا رسم کنید و تحقیق کنید که مماسهای بر این منحنی در نقطه‌های تلاقی آن با محوره‌های مختصات نسبت به نیمساز ناحیه اول این محورها متقارن‌اند.

حل - داریم:

$$y = tg^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - x}{1 + x} \quad \text{و} \quad -1 < x < 1$$

$$y' = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0$$

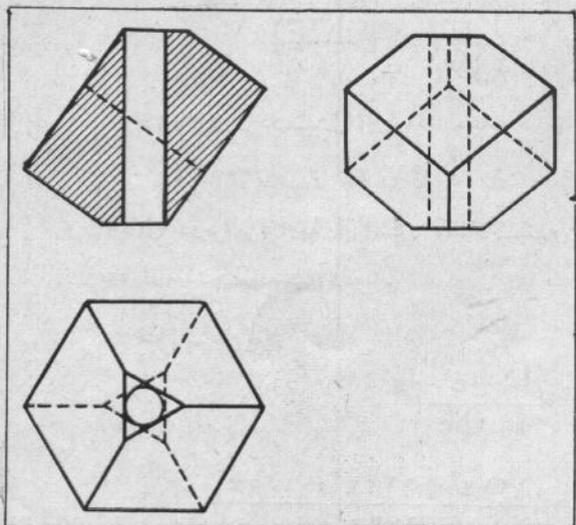
x	-1	0	1
y'		-	
y	$+\infty$	1	0



منحنی در $(0, 1)$ و $A(1, 0)$ با x و در $B(0, 1)$ با y متلاقی است و ضریب زاویه‌های مماسهای بر منحنی در نقاط مزبور به ترتیب برابرند با:

$$m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{و} \quad m_2 = -2$$



حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۵۳/۱۵ - اولاً هذلولی به معادله زیر را رسم کنید :

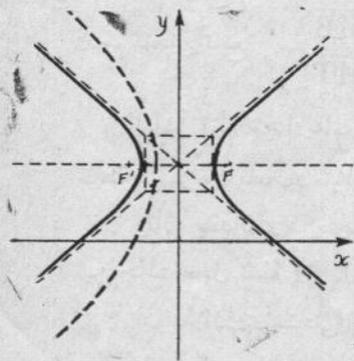
$$7x^2 - 16y^2 + 22y - 17 = 0$$

ثانیاً اگر F' و F کانونهای هذلولی مزبور و F' سمت چپ F واقع باشد معادله سهمی را تعیین کنید که F' کانون آن و محور $y'y$ خط هادی آن باشد .

(توجه - در صورت مسئله که بیضی چاپ شده اشتباه بوده است) .

حل - اولاً معادله مفروض به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{7}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{16}} = 1$$



$$a = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ و } b = \frac{1}{4}$$

$$c = \frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{7}} \text{ و}$$

و هذلولی مطابق شکل مقابل است .

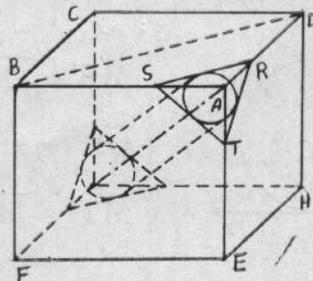
ثانیاً داریم :

$$F'(x = -\frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{7}} \text{ و } y = 1)$$

$$S(-\frac{\sqrt{23}}{8\sqrt{7}} \text{ و } 1) \text{ و } p = \frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{7}}$$

حل - در مثلث متساوی الاضلاع RST (مطابق شکل)

شعاع دایره محاطی برابر است با $\frac{a\sqrt{6}}{18}$ و از آنجا طول



ضلع این مثلث برابر است با : $RS = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

حساب می شود . از تشابه دو مثلث ABD و ASR نتیجه خواهد شد :

$$\frac{AS}{AB} = \frac{RS}{BD} \Rightarrow AS = \frac{a}{3}$$

شکل ARST هرم منتظم مثلث القاعده ای است که طول یال جانبی و طول ضلع قاعده آن معلوم است و به سادگی می توان طول $A\omega$ ارتفاع این هرم را حساب کرد که خواهیم داشت :

$$A\omega = \frac{a\sqrt{3}}{9} \text{ و در نتیجه طول } \omega\omega' \text{ ارتفاع}$$

استوانه برابر است با :

$$\omega\omega' = AG - 2A\omega = a\sqrt{2} - \frac{2a\sqrt{3}}{9} = \frac{9a\sqrt{2} - 2a\sqrt{3}}{9}$$

مقدار V_1 حجم این استوانه برابر می شود با :

$$V_1 = \pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{18} \right)^2 \left(\frac{9a\sqrt{2} - 2a\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{7\pi a^3 \sqrt{2}}{486}$$

مقدار V_2 حجم هرم ARST برابر است با :

$$V_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{18} \right) \left(\frac{a\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{a^3}{162}$$

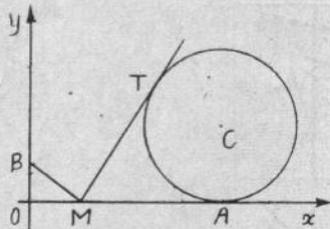
مقدار V حجم جسم باقیمانده برابر خواهد شد با :

$$V = a^3 - \frac{7\pi a^3 \sqrt{2}}{486} - \frac{2a^3}{162} = \frac{a^3(480 - 7\pi\sqrt{2})}{486}$$

۵۳/۱۶ - مطابق با اپور زیر که به مقیاس کوچکتر

رسم شده است .

بر خط BM عمود باشد. برای یافتن x (طول نقطه M) به يك معادله درجه سوم می‌رسیم. در حالت مخصوصی که R=2OB باشد معادله درجه سوم مزبور را حل کرده مقدار x را بدست آورید.



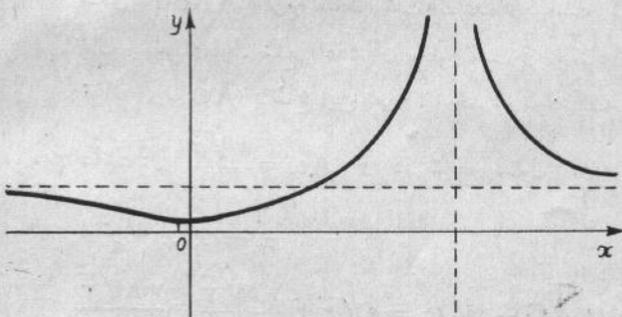
حل - ۱- داریم:

$$\overline{MB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OB}^2 = x^2 + \frac{4}{3}$$

$$\overline{MT}^2 = \overline{MA}^2 = (6-x)^2$$

$$y = \frac{3x^2 + 4}{3(x-6)^2} \text{ و } y' = \frac{4(6-x)(9x+2)}{3(x-6)^3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{9}$	0	6	$+\infty$
y'	-	0	+	-	-
y	1	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{27}$	$+\infty$	1



ثانياً مشتق تابع به ازاء $x=0$ می‌شود $\frac{1}{27}$ پس:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$$

$$\operatorname{log} \operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{colog} 3 = 2,09152 \Rightarrow \alpha = 42' \text{ و } 26,38''$$

ثالثاً اگر $y=1$ باشند داریم:

$$3x^2 + 4 = 3(x-6)^2 \Rightarrow x = \frac{26}{9}$$

به طریق هندسی داریم:

$$y=1 \text{ و } \overline{MB}^2 = \overline{MT}^2 \text{ و } \overline{BM} = \overline{MT} = \overline{MA}$$

پس نقطه M روی عمود منصف AB واقع است و همچنین بر محور طولها قرار دارد پس این نقطه بر محل تلاقی عمود منصف AB و محور طولها قرار دارد.

$$(y-1)^2 = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{y}} \left(x + \frac{\sqrt{23}}{8\sqrt{y}} \right)$$

۵۳/۱۶ - در مثلث ABC اندازه‌های ضلعها چنین است:

$$a=10x \text{ و } b=11x \text{ و } c=12x$$

و زاویه C دو برابر زاویه A است. مقدار کسینوس هر يك از زاویه‌های مثلث را بدست آورید.

حل - داریم:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{121x^2 + 144x^2 - 100x^2}{264x^2}$$

$$\cos C = \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = -\frac{7}{32}$$

$$\cos B = -\cos(A+C) = -\cos 3A$$

$$\cos B = 3\cos A - 4\cos^3 A = \frac{115}{118}$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۵۳/۱۷ - در صفحه مجاورهای مختصات دایره (C)

به مرکز C و به شعاع R در نقطه A بر محور $x'Ox$ مماس است بسمتی که $\overline{OA} = +6$ می‌باشد. نقطه B به عرض $\overline{OB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ را روی محور $y'y$ و نقطه متغیر M به طول

x را روی محور $x'x$ در نظر می‌گیریم. اولاً از نقطه M مماس MT را بر دایره (C) رسم می‌کنیم. مطلوب است تعیین تغییرات

$$y = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MT}^2} \text{ و رسم منحنی تابع}$$

ثانياً اندازه زاویه‌ای را که مماس در نقطه به طول $x=0$

بر منحنی مزبور با محور طولها می‌سازد پیدا کنید.

ثالثاً مقدار x را طوری حساب کنید که $y=1$ باشد و در

این حالت محل نقطه M را به طریق هندسی نیز تعیین کنید.

رابعاً از روی منحنی اولاً، اعداد صفر و ۶ را باریشه‌های

معادله زیر مقایسه کنید.

$$3(m-1)x^2 - 36mx + 108m - 4 = 0$$

خامساً محل نقطه M را طوری پیدا کنید که مماس MT

و معادله بالا می شود: $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$x(6-x)^2 - 22 = 0$$

$$x^3 - 12x^2 + 36x - 22 = 0 \quad \text{و یا}$$

این معادله درجه سوم کامل است. اگر آنرا به صورت ناقص $x^2 + px + q = 0$ در آوریم به سهولت معلوم می شود که دارای یک ریشه مضاعف $x = 2$ و ریشه ساده $x = 8$ است یعنی $OM = 2$ یا $OM = 8$ می باشد (دو جواب).

$53/18$ - نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن رابطه زیر برقرار باشد.

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A = \frac{P^2}{2R^2}$$

حل - با توجه به روابط

$$\sin A = \frac{2S}{bc} \quad \text{و} \quad \sin B = \frac{2S}{ac} \quad \text{و} \quad \sin C = \frac{2S}{ab}$$

رابطه بالا به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{4S^2(ab+bc+ca)}{a^2b^2c^2} = \frac{ab+bc+ca}{2R^2}$$

$$4p^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c$$

$53/19$ - ثابت کنید که در هر مثلث رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\sqrt{h_a - 2r}}{d_a} + \frac{\sqrt{h_b - 2r}}{d_b} + \frac{\sqrt{h_c - 2r}}{d_c} = \sqrt{\frac{2}{R}}$$

حل - داریم:

$$h_a - 2r = \frac{2S}{a} - \frac{2S}{p} = \frac{2S(p-a)}{pa}$$

$$\frac{\sqrt{h_a - 2r}}{d_a} = \frac{\sqrt{\frac{2S(p-a)}{pa}}}{\frac{2}{b+c} \sqrt{pbc(p-a)}} =$$

$$= \frac{b+c}{2} \sqrt{\frac{2S}{p^2 abc}} = \frac{b+c}{2p} \sqrt{\frac{1}{2R}}$$

با توجه به این رابطه و رابطه های مشابه آن، طرف اول رابطه مفروض به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{1}{2p\sqrt{2R}} [(b+c) + (c+a) + (a+b)] -$$

رابطه m را از معادله حساب کنیم داریم:

$$m = \frac{3x^2 + 4}{3(x-6)^2}$$

و ریشه های معادله درجه دوم مزبور طولهای نقاط تلاقی خط $y = m$ با منحنی مرسوم است و داریم:

m	
$-\infty$	جواب ندارد
$\frac{1}{28}$	$x' = x'' = -\frac{2}{9} < 0 < 6$
	$x' < x'' < 0 < 6$
$\frac{1}{27}$	$x' < x'' = 0 < 6$
	$x' < 0 < x'' < 6$
1	$x'' = \frac{26}{9}$
$+\infty$	$0 < x' < 6 < x''$

خامساً - محل M را باید پیدا کرد بقسمی که زاویه

BMT قائمه باشد. ضریب زاویه MC مساوی $\frac{R}{6-x}$ است

و زاویه ای که MT با محور طولها می سازد دو برابر زاویه ای است که MC با محور طولها می سازد پس ضریب زاویه MT را با کمک فرمول زیر بدست می آید:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ضریب} \text{ زاویه } MT = \frac{\frac{2R}{6-x}}{1 - \left(\frac{R}{6-x}\right)^2} =$$

$$= \frac{2R(6-x)}{(6-x)^2 - R^2}$$

و ضریب زاویه BM مساوی $\frac{-2\sqrt{3}}{3x}$ است و چون BM

و MT برهم عمودند پس داریم:

$$\frac{-2\sqrt{3}}{3x} \times \frac{2R(6-x)}{(6-x)^2 - R^2} = -1$$

$$2x[(6-x)^2 - R^2] - 4R\sqrt{3}(6-x) = 0$$

حالت مخصوص - اگر $R = 2OB$ باشد داریم:

$$= \frac{4P}{2P\sqrt{2R}} = \frac{2}{\sqrt{2R}} = \sqrt{\frac{2}{R}}$$

۵۳/۲۰ - عددی شش رقمی با ارقام دو به دو متفاوت پیدا کنید که به ترتیب زیر به عوامل اول تجزیه شده باشد:

$$\overline{abcdef} = \overline{dbac} \cdot e \cdot f \cdot 19 \quad I$$

(اگر متفاوت بودن ارقام قید نشود جوابهای بیشتری بدست نمی آید اما حل مسئله طولانی تر می شود.)

حل - چون ارقام e و f هر دو اعدادی اول اند پس مقادیری که می توانند اختیار کنند چنین است:

$$f = \{203, 507\} \quad \text{و} \quad e = \{203, 507\}$$

حال اگر قرارداد کنیم که $(f, e) = (\beta, \alpha)$ یعنی $e = \alpha$ و $f = \beta$ چون f و e باید متفاوت اختیار شوند دسته مقادیری که می توان به آنها نسبت داد دسته مقادیر واقع در ابروی زیر هستند:

$$(fe) = \left\{ (203) \text{ و } (205) \text{ و } (207) \text{ و } (302) \text{ و } (305) \text{ و } (307) \text{ و } (502) \text{ و } (503) \text{ و } (507) \text{ و } (702) \text{ و } (703) \text{ و } (705) \right\}$$

که (205) و (502) قابل قبول نیستند زیرا در این صورت طرف دوم رابطه I مضربی از 10 می شود و طرف اول چون به 2 یا 5 ختم می شود مضربی از 10 نخواهد شد. اما e نمی تواند مساوی 2 باشد زیرا در این صورت حاصل طرف دوم عددی زوج و طرف اول عددی فرد خواهد شد و همچنین e نمی تواند مساوی 5 باشد زیرا در این صورت حاصل طرف دوم مضربی از 5 می شود و طرف اول چنین نیست. پس:

$$(fe) = \left\{ (203) \text{ و } (207) \text{ و } (307) \text{ و } (503) \text{ و } (703) \text{ و } (507) \right\}$$

حال گوئیم اولاً اگر $f \neq 5$ باشد از اینکه $19e \cdot c \cdot f$ بنا به رابطه I باید به f ختم شود $P = 19e \cdot c$ باید به 1 ختم شود اما می دانیم که یا $e = 3$ یا $e = 7$ و از آنجا:

یا $P = 57c$ یا $P = 133c$ که در حالت اول باید $c = 3$ باشد و در حالت دوم $c = 7$ باشد تا P به 1 ختم شود یعنی وقتی $e = 3$ باید $c = 3$ باشد و وقتی $e = 7$ باید $c = 7$ باشد که چون در این صورت ارقام e و c متفاوت نمی شوند مسئله در این حالت (یعنی به ازاء $f \neq 5$) جواب ندارد.

ثانیاً اگر $f = 5$ باشد باز هم یا $e = 7$ یا $e = 3$ که به ازاء $e = 7$ رابطه I به صورت زیر درمی آید:

$$\overline{abcd75} = \overline{dbac} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 19 \Rightarrow 100\overline{abcd} +$$

$$+ 75 = 5 \cdot 133\overline{dbac} \Rightarrow 20\overline{abcd} + 15 = 133\overline{dbac}$$

که در این رابطه حاصل طرف اول به 5 ختم می شود پس باید $c = 5$ باشد که چون در این صورت f و c یکسان می شوند این قابل قبول نیست.

اما به ازاء $e = 3$ داریم:

$$\overline{abcd35} = \overline{dbac} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \Rightarrow 100\overline{abcd} +$$

$$+ 35 = 5 \cdot 57\overline{dbac} \Rightarrow$$

$$20\overline{abcd} + 7 = 57\overline{dbac}$$

که چون عدد حاصل از طرف چپ این رابطه به 7 ختم می شود باید طرف راست آن نیز به 7 ختم شود و این تنها به ازاء $c = 1$ ممکن است و از آنجا این رابطه به صورت زیر در می آید:

$$20\overline{abd} + 7 = 57\overline{dba1} \Rightarrow 20(\overline{abd} + 10) + 7$$

$$= 57(10\overline{dba} + 1) \Rightarrow$$

$$2\overline{abd} + 15 = 57\overline{dba}$$

یا پس از باز کردن طرفین:

$$2000a + 200b + 2d + 15 = 57a + 570b +$$

$$+ 5700d$$

$$1943a + 15 = 370b + 5698d \quad II$$

از اینجا راه حل مسئله را به دو طریق می توان ادامه داد:

(1) راه حل کلی و عمومی - چون a حداکثر می تواند

مساوی 9 گردد طرف اول و در نتیجه طرف دوم رابطه II حد -

اکثر مساوی $17502 = 15 + 9 \times 1943$ می شود و از آنجا:

$5698d < 17502$ یعنی $d < 3$ که چون عددی چهار رقمی

به صورت \overline{dbac} در صورت مسئله موجود است $d \neq 0$ پس d

می تواند مقادیر 1، 2 و 3 را اختیار کند که به ازاء $d = 1$

داریم:

$$1943a + 15 = 370b + 5698 \Rightarrow$$

$$1943a = 370b + 5683$$

که چون عدد حاصل از طرف دوم به 3 ختم می شود ناچار

$a = 1$ می شود که این ممکن نیست زیرا a و d مساوی می شوند

(از طرفی رابطه اخیر نیز غیر ممکن می شود).

و به ازاء $d = 2$ داریم:

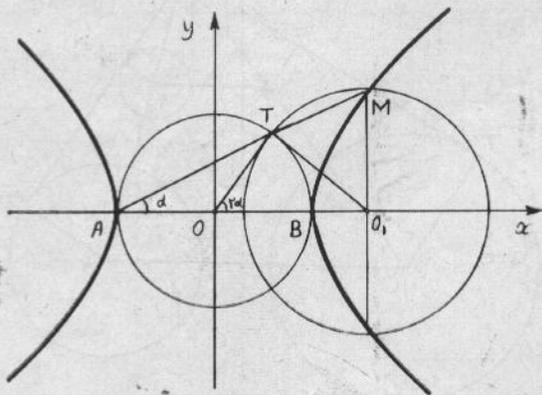
$$1943a + 15 = 370b + 11396 \Rightarrow$$

$$1943a = 370b + 11381$$

حل - داریم :

$$\vec{a}^2 - \vec{OP} \cdot \vec{OQ} \text{ و } \vec{OT}^2 - \vec{OP} \cdot \vec{OQ} \Rightarrow \vec{OT} = \vec{a}$$

T بر دایره به قطر AB قرار دارد . اندازه زاویه



TAB را α فرض می‌کنیم که در نتیجه اندازه زاویه $\angle TOB$ برابر با 2α خواهد بود خواهیم داشت :

$$OO_1 = \frac{a}{\cos 2\alpha}$$

$$MO_1 = (OA + OO_1) \tan \alpha = \left(a + \frac{a}{\cos 2\alpha}\right) \tan \alpha = a \tan 2\alpha$$

اگر محور $x'x'$ منطبق بر AB و محور $y'y'$ منطبق بر عمود منصف AB اختیار شود داریم :

$$M(x = \overline{OO_1} = \frac{a}{\cos 2\alpha} \text{ و } y = \overline{MO_1} = a \tan 2\alpha)$$

از حذف 2α بین مختصات M نتیجه خواهد شد :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

یعنی مکان M هذلولی متساوی المحورین به رأسهای A و B می‌باشد .

۵۳/۲۲ - هرگاه r و r' شعاعهای دو دایره و d طول خط‌المركزین آنها باشد ، p و p' شعاعه دواير منعكس آنها را انعكاس (O و λ) و δ فاصله مراکز دواير منعكس باشد تساوی زیر را تحقیق کنید :

$$\frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'} = \pm \frac{\delta^2 - p^2 - p'^2}{pp'}$$

حل - مسئله را درموردی که λ مثبت است بررسی می‌کنیم. C و K مراکز دواير اولیه و C' و K' مراکز دواير منعكس می‌باشد. از O مماسهای OM و OT را بردواير K و K' رسم می‌کنیم. این مماسها بر دواير K' و C' در نقاط M' و T' قرار می‌گیرند.

که رقم یکان حاصل جمع طرف دوم واحد است و از آنجائیم می‌آید $a = 7$ و در نتیجه رابطه چنین می‌شود :

$$1943 \times 7 = 370b + 11381 \Rightarrow$$

$$370b = 2220 \Rightarrow b = 6$$

و بنابراین عدد شش رقمی مطلوب به صورت ۷۶۱۲۳۵ درمی‌آید که به صورت $761235 = 2671 \times 3 \times 5 \times 19$ تجزیه می‌شود که ۲۶۷۱ عددی است اول

بالاخره به ازا $d = 3$ رابطه II چنین می‌شود :

$$1943a + 15 = 370b + 17094 \Rightarrow$$

$$1943a = 370b + 17079$$

که طرف دوم به ۹ ختم می‌شود و لاجرم باید $a = 3$ باشد که این ممکن نیست زیرا a و d متساوی می‌شوند . (گذشته از تساوی a و d برای b هم جواب قابل قبولی بدست نمی‌آید) .

(۲) راه حل ابتکاری و خصوصی - رابطه II به صورت زیر

نوشته می‌شود :

$$1943a + 15 = 37(10b + 154d) \quad \text{III}$$

یعنی :

$$1943a + 15 = 37K \Rightarrow$$

$$(37 \cdot 52 + 19)a + 15 = 37K \Rightarrow$$

$$19a + 15 = 37(K - 52a) = 37h \quad \text{IV}$$

$$\Rightarrow 19a - 37h - 15 = 38h - h - 15 \Rightarrow$$

$$a = 2h - \frac{h + 15}{19}$$

که تنها به ازا $h = 4$ جواب قابل قبول $a = 7$ حاصل می‌شود که چون بنا به رابطه IV ، $K - 52a - h$ داریم :

$$K - 52a + h = 52 \cdot 7 + 4 = 368$$

و بنا به رابطه III ، $10b + 154d = K$ یا $10b + 154d = 368$ که باید حاصل طرف اول این رابطه به ۸ ختم شود یعنی $d = 2$ که از آنجا $b = 6$ بدست می‌آید و در نتیجه همان عدد شش رقمی ۷۶۱۲۳۵ حاصل می‌شود .

۵۳/۲۱ - روی خطی چهار نقطه A و B و P و Q

در نظر می‌گیریم که خط را به نسبت توافقی تقسیم کنند و $AB = 2a$ ثابت باشد . بر دو نقطه متغیر P و Q دایره‌ای می‌گذرانیم و از O وسط AB مماس OT را بر این دایره رسم می‌کنیم . خط AT قطر عمود بر PQ از دایره رادر M قطع می‌کند . مکان M را تعیین کنید .

نیز مماس می باشد و روابط زیر را داریم :

$$\text{II} \begin{cases} \frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'} = \frac{\lambda}{\rho r'} + \frac{\lambda}{r' \rho} - \frac{2OC' \cdot OK' \cos \alpha}{\rho \rho'} \\ \frac{\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2}{\rho \rho'} = \frac{\lambda}{r' \rho} + \frac{\lambda}{\rho r'} - \frac{2OC' \cdot OK' \cos \alpha}{\rho \rho'} \end{cases}$$

طرف دوم معادلات II متساویند بنا بر این طرف اول آنها نیز باید یکدیگر متساوی خواهند بود و خواهیم داشت :

$$\frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'} = \frac{\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2}{\rho \rho'}$$

در موردی که λ منفی باشد خواهیم داشت :

$$\frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'} = - \frac{\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2}{\rho \rho'}$$

حل مسائل متفرقه

۵۳/۲۳ - معادله زیر مفروض است .

$$(m^2 + m^2 + 1)x^5 - (m^2 + 1)x^2 + 2x - f(m) = 0$$

اولاً ثابت کنید که به ازاء هیچ مقداری از پارامتر m معادله مزبور نمی تواند ریشه مضاعف داشته باشد. ثانیاً $f(m)$ را بر حسب m چنان مشخص کنید که معادله حداقل یک ریشه مستقل از m داشته باشد .

حل - برای اینکه معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد لازم و کافی است که دو معادله $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ یک ریشه مشترك داشته باشند . در صورتی که $f'(x) = 0$ ریشه نداشته باشد مسلم است که معادله مفروض نمی تواند ریشه مضاعف داشته باشد. از طرفین معادله بالا نسبت به x مشتق می گیریم :

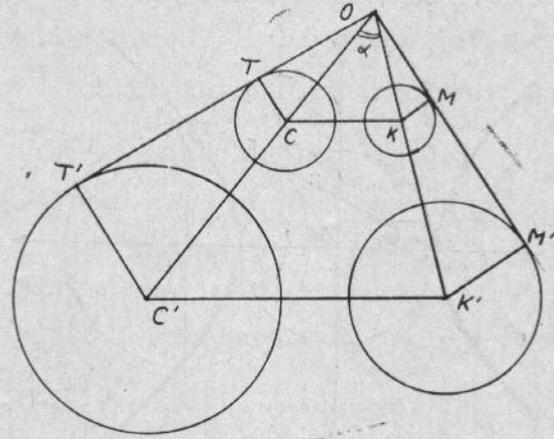
$$\Delta(m^2 + m^2 + 1)x^4 - 2(m^2 + 1)x + 2 = 0$$

$$\Delta = -21m^4 - 22m^2 - 31 < 0$$

این معادله ریشه حقیقی ندارد پس معادله مفروض نمی تواند ریشه مضاعف داشته باشد .

ثانیاً برای اینکه معادله بالا ریشه ای مستقل از m داشته باشد لازم و کافی است که درازاه آن مقدار از x هر يك از ضرب های توانهای مختلف m برابر با صفر باشد و لازم می آید که $f(m)$ حداکثر از درجه چهارم باشد. فرض می کنیم :

$$f(m) = am^4 + bm^3 + cm^2 + dm + e$$



$$\begin{cases} d^2 = OC'^2 + OK'^2 - 2OC' \cdot OK' \cos \alpha \\ \delta^2 = OC'^2 + OK'^2 - 2OC' \cdot OK' \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2 - r^2 - r'^2 = (OC'^2 - r^2) + (OK'^2 - r'^2) - 2OC' \cdot OK' \cos \alpha \\ \delta^2 - \rho^2 - \rho'^2 = (OC'^2 - \rho^2) + (OK'^2 - \rho'^2) - 2OC' \cdot OK' \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2 - r^2 - r'^2 - OT^2 + OM^2 - 2OC' \cdot OK' \cos \alpha \\ \delta^2 - \rho^2 - \rho'^2 = OT'^2 + OM'^2 - 2OC' \cdot OK' \cos \alpha \end{cases} \quad \text{I}$$

$$\begin{cases} \frac{OT}{OT'} = \frac{r}{\rho} & \rightarrow & OT' = \frac{r\lambda}{\rho} \\ OT \cdot OT' = \lambda & & OT'^2 = \frac{\rho\lambda}{r} \end{cases}$$

همچنین $OM'^2 = \frac{r'\lambda}{\rho'}$ و $OM'^2 = \frac{r'\lambda}{\rho'}$ چون

$$\begin{cases} \frac{OC}{OC'} = \frac{r}{\rho} \Rightarrow OC = \frac{r}{\rho} OC' \\ \frac{OK}{OK'} = \frac{r'}{\rho'} \Rightarrow OK = \frac{r'}{\rho'} OK' \end{cases}$$

مقادیر فوق را در رابطه I قرار می دهیم :

$$\begin{cases} d^2 - r^2 - r'^2 = \frac{r\lambda}{\rho} + \frac{r'\lambda}{\rho'} - 2 \frac{rr'}{\rho\rho'} OC' \cdot OK' \cos \alpha \\ \delta^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \frac{\rho\lambda}{r} + \frac{\rho'\lambda}{r'} - 2OC' \cdot OK' \cos \alpha \end{cases}$$

۵۳/۲۶ - حاصل عبارت زیر را بدست آورید و حد آنرا
وقتی $m \rightarrow \infty$ پیدا کنید

$$S = \text{Arctg} \frac{1}{2} + \text{Arctg} \frac{1}{4} + \dots + \text{Arctg} \frac{1}{2n^2}$$

حل - اتحاد زیر را در نظر می گیریم

$$\frac{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}}{1 + \frac{1}{2n^2-1}} = \frac{1}{2n^2}$$

و چون در این اتحاد به n مقادیر از ۱ تا n را نسبت
دهیم خواهیم داشت

$$\text{Arctg} 1 - \text{Arctg} \frac{1}{3} = \text{Arctg} \frac{1}{2}$$

$$\text{Arctg} \frac{1}{3} - \text{Arctg} \frac{1}{5} = \text{Arctg} \frac{1}{4}$$

$$\dots$$

$$\text{Arctg} \frac{1}{2n-1} - \text{Arctg} \frac{1}{2n+1} = \text{Arctg} \frac{1}{2n^2}$$

از جمع طرفین رابطه های بالا نتیجه خواهد شد :

$$S = \text{Arctg} 1 - \text{Arctg} \frac{1}{2n+1}$$

$$n \rightarrow \infty : \lim S = \text{Arctg} 1 - \text{Arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

۵۳/۲۷ - هرگاه x و y و z عددهای مثبت و $n > 1$
باشد و داشته باشیم :

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} + \sqrt[n]{z} = 7$$

ثابت کنید که :

$$\sqrt[2n]{x} + \sqrt[2n]{y} + \sqrt[2n]{z} < 5$$

حل - با توجه به نامساوی :

$$\sqrt[2n]{x} + \sqrt[2n]{y} + \sqrt[2n]{z} <$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt[n]{x} + 1) + \frac{1}{2}(\sqrt[n]{y} + 1) + \frac{1}{2}(\sqrt[n]{z} + 1) =$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$$

۵۳/۲۸ - از رابطه زیر مقادیر x و y را بدست آورید :

$$x^4 + 2x^2 \cos^2 xy + 1 = 0$$

و معادله مفروض را نسبت به m مرتب می کنیم :

$$(x^5 - a)m^2 - bm^2 + (x^5 - x^2 - c)m - dm +$$

$$+ x^5 - x^2 + 2x - e = 0$$

باید داشته باشیم :

$$x^5 - a = 0 \quad \text{و} \quad b = 0 \quad \text{و} \quad x^5 - x^2 - c = 0$$

$$d = 0 \quad \text{و} \quad x^5 - x^2 + 2x - e = 0$$

از معادلات اخیر مقادیر c و e بر حسب a بدست می آید
و تابع $f(m)$ بر حسب پارامتر a مشخص می شود . اگر فرض
کنیم $a = 1$ خواهیم داشت :

$$x = 1 \quad \text{و} \quad c = 0 \quad \text{و} \quad e = 2 \quad \text{و} \quad f(m) = m^2 + 2$$

۵۳/۲۹ - به فرض اینکه a و b و c و d عددهای
مثبت بوده و نامعادله زیر همواره برقرار باشد :

$$dx^2 - 2(a+b+c+3)x + d > 0$$

ثابت کنید :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} < \frac{d}{2}$$

حل - چون نامعادله همیشه برقرار است داریم :

$$d > 0 \quad \text{و} \quad (a+b+c+3)^2 - d^2 < 0$$

$$a+b+c+3 < d \quad \text{(I)}$$

$$a+1 > 2\sqrt{a} \quad \text{و} \quad b+1 > 2\sqrt{b} \quad \text{و} \quad c+1 > 2\sqrt{c}$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین این سه نامساوی نتیجه می شود :

$$a+b+c+3 > 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \quad \text{(II)}$$

از نامساویهای I و II نامساوی مطلوب نتیجه می شود .

۵۳/۳۰ - با استفاده از رابطه های مثلثاتی معادله زیر

را حل کنید .

$$(5\sqrt{3})^x - 12x = 10^x - 13x$$

حل - طرفین معادله را بر 26^x تقسیم می کنیم و حاصل

را به صورت زیر می نویسیم :

$$\left(\frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x - \left(\frac{12}{13} \times \frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{5}{13}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

با فرض $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ و $\sin \beta = \frac{1}{2}$ این رابطه چنین

نوشته می شود :

$$(\sin \alpha \cos \beta)^x - (\cos \alpha \sin \beta)^x = \sin^x \alpha - \sin^x \beta$$

از مقایسه این رابطه با اتحاد زیر :

$$\sin^x \alpha \cos^x \beta - \cos^x \alpha \sin^x \beta = \sin^x \alpha - \sin^x \beta$$

نتیجه می شود که :

$$x = 2$$

ضلعی محاطی CDGF نتیجه می‌شود که دو زاویه CDE و GFE با یکدیگر برابر باشند. از آنجا دو زاویه GFE و CEA با یکدیگر برابر شده و دو خط FG و AE متوازی می‌باشند.

۵۳/۳۱ - عددهای a و b و c با عدد اول p متباین اند و عدد $N = a^p + b^p + c^p$ مضرب p می‌باشد. ثابت کنید که عدد:

$$N' = a^{2p} + b^{2p} + c^{2p} - 3abc$$

نیز مضرب p است.

حل - طبق قضیه فرما عدد $a^p - a$ مضرب p است پس اگر N مضرب p باشد عدد $N - (a+b+c)$ در نتیجه عدد $(a+b+c)$ نیز مضرب p است. از طرف دیگر هر يك از عددهای $a^2 - a$ و $b^2 - b$ و $c^2 - c$ نیز مضرب p هستند و در نتیجه وقتی N' مضرب p می‌شود که عدد $a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$ مضرب p باشد و چون داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + \dots)$$

و طرف دوم این رابطه مضرب p است طرف اول آن هم مضرب p بوده و N' بر p بخش پذیر است.

۵۳/۳۲ - از حسن پرسیدند سن وی و برادرانش چقدر است؟ او چنین پاسخ داد: سن من و برادر بزرگترم هر دو عددهای اول اند. سن برادر بزرگم در مبنای سن من $b+1$ و سن من در مبنای سن برادر کوچکم $(b+1)$ است. در صورتی مجموع سنهای سه برادر $25b$ باشد سن هر يك را محاسبه کنید.

حل - سنهای سه برادر را به ترتیب از بزرگ به کوچک x و y و z فرض می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} x = \overline{(\backslash b)_y} = y + b \\ y = \overline{(\backslash (b+1))_z} = z + b + 1 \\ x + y + z = 25b \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه خواهد شد:

$$3y = 25b + 1 \quad \text{یا} \quad y = 8b + \frac{b+1}{3}$$

$$b+1 = 3t \Rightarrow b = 3t - 1$$

$$y = 25t - 8 \quad \text{و} \quad x = 28t - 9 \quad \text{و} \quad z = 22t - 8$$

چون x و y باید عددهای اول و کوچکتر از 100 باشند فقط $t=1$ قابل قبول بوده و خواهیم داشت:

$$x=19 \quad \text{و} \quad y=17 \quad \text{و} \quad z=14$$

حل - با توجه به اتحاد $\cos^2 xy - 1 - 2\sin^2 xy$ از رابطه مفروض نتیجه خواهد شد:

$$\sin^2 xy = \frac{(x^2+1)^2}{4x^2} < 1$$

$$(x^2+1)^2 - 4x^2 < 0 \quad \text{یا} \quad (x^2-1)^2 < 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\sin^2(\pm 2y) = 1 \Rightarrow y = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$$

۵۳/۲۹ - نقطه D را روی ضلع BC از مثلث ABC

چنان انتخاب کرده‌ایم که دایره‌های محاطی داخلی دو مثلث ABD و ACD بر یکدیگر مماس باشند. اگر طولهای AB و BC و CA و BD به ترتیب a و c و b و x باشد مقدار x را بر حسب a و b و c پیدا کنید و از آن محل نقطه D را نتیجه بگیرید.

حل - مطابق باشکل داریم:

$$2m + 2n + 2k +$$

$$+ 2p = a + b + c$$

$$m + k = b$$

$$n + p = x \quad \text{و}$$

$$2b + 2x =$$

$$a + b + c$$

$$x = \frac{a+c-b}{2}$$

و اگر T نقطه تماس

دایره محاطی داخلی مثلث با ضلع BC باشد می‌دانیم که

$$BT = \frac{a+c-b}{2}$$

۵۳/۳۰ - از نقطه A واقع در خارج دایره O مماس AB را بر آن رسم می‌کنیم و نقطه D را روی دایره و نقطه E را خارج دایره چنان انتخاب می‌کنیم که $AB=AE$ باشد. DA دایره را در C و DE و CE دایره را به ترتیب در G و F قطع می‌کنند ثابت کنید که FG با AE موازی است.

حل - از رابطه‌های $AB^2 = AC \cdot AD$ و $AB = AE$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AC}$$

و دو مثلث ADE

و ACE در حالت

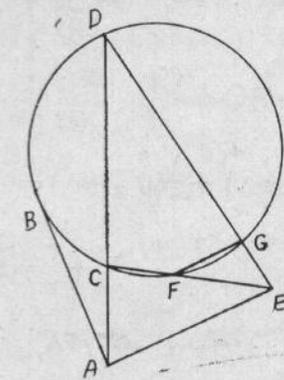
تناسب دو ضلع و تساوی

زاویه بین متشابه می‌شوند

و در نتیجه آن زاویه

CEA با زاویه CDE

برابری شود. در چهار-



$$b+c = \frac{\sqrt{(h+r_a)r_a}}{h+\sqrt{r_a}} \cotg \frac{A}{2} \quad \text{و}$$

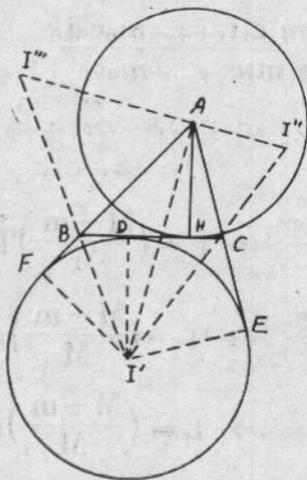
$$a = \frac{\sqrt{r_a} \cotg \frac{A}{2}}{h+\sqrt{r_a}} \quad \text{و}$$

بنابراین b و c ریشه‌های معادله درجه سوم زیر می‌باشند:

$$X^3 - \frac{\sqrt{(h+r_a)r_a}}{h+\sqrt{r_a}} \cotg \frac{A}{2} X + \frac{hr_a}{(h+\sqrt{r_a}) \sin \frac{A}{2}} = 0$$

برای آنکه مقادیر b و c قابل قبول باشند، لازم و کافی است که حقیقی و مثبت باشند. این شرایط برقرارند زیرا چون از رابطه $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ استفاده کرده‌ایم نامساوی مضاعف $|b-c| < a < b+c$ برقرار خواهد بود. رابطه واقعی $\frac{A}{2} < \frac{r_a}{h+r_a}$ می‌باشد و اگر این شرط برقرار باشد چون حاصل ضرب b و c مثبت است، b و c مثبت خواهند بود.

ثانیا: برای ساختن مثلث، دایره I' به شعاع r_a را در



نظر می‌گیریم. برای دایره زاویه A مساوی با زاویه مفروض محیط می‌کنیم سپس به مرکز رأس A و به شعاع h_a دایره دیگر رسم می‌کنیم و کافی است مماس خارجی دو دایره را رسم کنیم تا قاعده BC بدست بیاید. بحث: مسئله ممکن نیست مگر آنکه

$$AI' > h_a + r_a \quad \text{چون} \quad AI' = \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}} \quad \text{است به شرط قبلی}$$

می‌رسیم:

$$\sin \frac{A}{2} < \frac{r_a}{h_a + r_a}$$

ثالثا: فرض می‌کنیم که I'' و I''' مراکز دایره محاطی داخل زوایای B و C باشد و اشعه این دایره را به r_b و r_c

$53/33$ - عدد A از رابطه زیر چند رقمی است؟

$$A = 2^{10^6} + 10^6 \times 2^{10^6-1} +$$

$$\frac{10^6(10^6-1)}{1 \times 2} \times 2^{10^6-2} + \dots + 1$$

حل - طبق فرمول بسط دو جمله‌ای نیوتن خواهیم داشت:

$$A = (2+1)^{10^6} = 3^{10^6}$$

$$\log A = 10^6 \log 3 = 4771226/250.$$

از روی مفسر لگاریتم عدد A معلوم می‌شود که این عدد دارای 4771227 رقم می‌باشد.

$53/34$ - (این مسئله بر خلاف آنچه در شماره 3 چاپ شده طرح داوید ریچان می‌باشد). شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را به r_1 و r_2 و r_3 نشان می‌دهیم. مثلثی می‌سازیم که ضلعهایش مجموع دایره r_1 و r_2 و r_3 باشد. اگر S_1 مساحت مثلث اخیر و S مساحت مثلث مفروض باشد ثابت کنید که: $S_1 > 3S$

حل - داریم:

$$S_1 = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}$$

$$S^2 = r_1r_2r_3 \quad \text{و} \quad r_1+r_2+r_3 = 4R+r$$

$$S_1 = S \sqrt{1 + \frac{4R}{r}}$$

$$R > 2r \Rightarrow S_1 > 3S$$

$53/35$ - اولاً: با دانستن زاویه A ، ارتفاع r_a و h_a شعاع دایره محاطی واقع در زاویه A ، اضلاع b و c را بدست آورید و شرط امکان مسئله را بررسی کنید.

ثانیاً: مثلث ABC را رسم کنید.

ثالثاً: فاصله مراکز دو دایره محاطی خارجی دیگر مثلث

ABC را بدست آورید.

حل - اولاً: از روابط معروف:

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} bc \sin A = (p-a)r_a$$

$$a^2 - b^2 + c^2 - 2bc \cos A =$$

$$-(b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$bc = \frac{hr_a}{(h+\sqrt{r_a}) \sin \frac{A}{2}}$$

نمایش می‌دهیم : داریم :

$$r_b = AI'' \cos \frac{A}{\gamma} \text{ و } r_c = AI''' \cos \frac{A}{\gamma}$$

$$d = I'' I''' = \frac{r_b + r_c}{\cos \frac{A}{\gamma}}$$

ولی :

$$r_b + r_c = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{Sa}{(p-b)(p-c)} = a \cotg \frac{A}{\gamma}$$

از آنجا :

$$d = \frac{a}{\sin \frac{A}{\gamma}} = \frac{\gamma r_a \cotg \frac{A}{\gamma}}{(h + \gamma r_a) \sin \frac{A}{\gamma}}$$

۵۳/۳۶ - در ظرفی M گرم آب T درجه وجود دارد.

m گرم از آن را برمی‌داریم و به جایش m گرم آب صفر درجه می‌ریزیم و این عمل را n بار تکرار می‌کنیم فرمولی بدست آورید که دمای تعادل مخلوط را بدست دهد .

حل - دمای تعادل مخلوط را می‌توان از فرمول :

$$t = \frac{\sum mct}{\sum mc} = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + \dots + m_n c_n t_n}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_n c_n}$$

بدست آورد چون گرمای ویژه آب مساوی يك است پس می‌توان نوشت :

$$t_1 = \frac{(M-m)T + m \times 0}{(M-m) + m} \Rightarrow t_1 = \left(\frac{M-m}{M}\right)T$$

$$t_2 = \frac{(M-m)t_1 + m \times 0}{(M-m) + m} \Rightarrow t_2 = \left(\frac{M-m}{M}\right)t_1$$

$$t_3 = \frac{(M-m)t_2 + m \times 0}{(M-m) + m} \Rightarrow t_3 = \left(\frac{M-m}{M}\right)t_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t_n = \frac{(M-m)t_{n-1} + m \times 0}{(M-m) + m} \Rightarrow$$

$$t_n = \left(\frac{M-m}{M}\right)t_{n-1}$$

از رابطه‌های بالا نتیجه خواهد شد :

$$t_n = \left(1 - \frac{m}{M}\right)^n T$$

۵۳/۳۷ - يك قطره كروی شكل باران t ثانیه طول

می‌کشد تا از ابر به زمین برسد . این قطره باران قبل از افتادن به n قسمت مساوی و کروی شکل تقسیم می‌شود. پس از چه مدت این قطرات به زمین می‌رسند .

حل - بنا به فرمول مقاومت هوا داریم

$R = KSV^2$ و قطره باران وقتی به سرعت حد می‌رسد که وزن آن با مقاومت هوا مساوی گردد یعنی $P = KSV^2$ و برای هر يك از قطره‌ها

داریم $\frac{P}{n} = KSV^2$ و از آنجا $SV^2 = nS'V'^2$ و چون

سطح بامجذور شعاع متناسب است پس $r^2 V^2 = nr'^2 V'^2$ و یا $rV = \sqrt{n} r'V'$ از طرفی حجم کره با مکعب شعاع متناسب

است پس $\frac{r^3}{r'^3} = n$ یا $\frac{r}{r'} = \sqrt[3]{n}$ و از دو رابطه بالا

حاصل می‌شود $\frac{V}{V'} = \sqrt[6]{n}$ و چون حرکت یکنواخت است

بنابر این $\frac{V}{V'} = \frac{t'}{t} = \sqrt[6]{n}$ پس $\frac{t'}{t} = \sqrt[6]{n}$ که از آنجا $t' = \sqrt[6]{n} t$

۵۳/۳۸ - نقطه وزینی را در امتداد شاقول به طرف

بالا می‌اندازیم . اگر t_1 و t_2 لحظه عبور نقطه (حین بالارفتن و پائین آمدن) از ارتفاع h باشند ثابت کنید که :

$$t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$$

حل - حرکت جسم در امتداد قائم روبه بالا کند

شونده است و معادله حرکت به صورت :

$$h = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

است . h ارتفاعی است که جسم پس از مدت t به آن می‌رسد . در حالت کلی اگر $h < H$ داده شده باشد (H ارتفاع اوج

و برابر با $\frac{V_0^2}{2g}$ است) معادله درجه دوم بالا نسبت به t دو جواب

دارد که هر دو قابل قبول اند ، منتهی یکی مربوط به زمان بالا رفتن و دیگری مربوط به زمان پائین آمدن است . پس داریم :

$$gt^2 - 2V_0 t + 2h = 0$$

$$t_1 + t_2 = \frac{2V_0}{g} \text{ و } t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$$

۵۳/۳۹ - مسیر متحرك M يك منحنی است به معادله

$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ و تصویر شتاب روی محور y ها به صورت

$$\gamma = g \sin \alpha - K \times g \cos \alpha$$

سرعت در نقطه D که بعداً سرعت اولیه حرکت کندشونده در سطح افقی می‌شود :

$$(1) V^2 = 2\gamma x = 2(g \sin \alpha - K g \cos \alpha) \frac{h+1}{\sin \alpha} = 2\gamma(h+1) - 2Kg(h+1) \cot \alpha$$

شتاب حرکت و مسافت طی شده را در سطح افقی بدست می‌آوریم. در این سطح فقط نیروی اصطکاک مؤثر است.

$$R = KP = Kmg$$

$$(2) F = m\gamma' \Rightarrow Kmg = m\gamma' \Rightarrow \gamma' = Kg$$

$$BD = \frac{V^2}{2\gamma'} = \frac{2\gamma(h+1) - 2Kg(h+1) \cot \alpha}{2Kg} = \frac{h+1}{K} - (h+1) \cot \alpha$$

$$h = CD + BD = (h+1) \cot \alpha + \frac{h+1}{K} - (h+1) \cot \alpha = \frac{h+1}{K}$$

ضریب اصطکاک سطح :

$$h = CD + BD = \frac{h+1}{K} \Rightarrow h = \frac{h+1}{K} \quad \text{و} \quad K = \frac{h+1}{h}$$

اکنون برای اثبات نامساوی فوق ، مقدار K را در نامساوی قرار می‌دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{h}{\sqrt{2}} < \frac{h+1}{h} < \frac{h}{\sqrt{2/75}}$$

$$\frac{h}{\sqrt{2h}} < \left(\frac{h+1}{h}\right)^h < \frac{h}{\sqrt{2/75}h} \Rightarrow 2 < \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h < 2/75$$

$$\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = C_h^0 + C_h^1 \times \frac{1}{h} + C_h^2 \times \frac{1}{h^2} + \dots + C_h^h \times \frac{1}{h^h}$$

$$\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = 1 + 1 + \frac{h(h-1)}{2!} \times \frac{1}{h^2} + \frac{h(h-1)(h-2)}{3!} \times \frac{1}{h^3} + \dots$$

سرعت متحرک روی محور y ها برابر با $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ و در لحظه $t = \frac{\pi}{12}$ ثانیه تصویر

سرعت متحرک روی محور x = -1 باشد معادلات زمانی

حرکت را بدست آورید .

حل - با در نظر گرفتن آنکه شتاب مشتق سرعت و سرعت

مشتق مسافت است داریم :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \gamma_y = -9 \sin 2t$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \int \gamma_y = 3 \cos 2t + C_1$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} = 3 \cos \frac{2\pi}{12} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$V_y = 3 \cos 2t \quad \text{و} \quad y = \int V_y = \sin 2t + C_2$$

$$(x = -1 \quad \text{و} \quad y = 0) \quad \text{و} \quad \sin \pi + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1+y}{1-y}$$

و معادلات زمانی چنین می‌شود :

$$(x = \pm \sqrt{\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}} \quad \text{و} \quad y = \sin 2t)$$

۵۳/۴۰ - شخصی مطابق شکل از نقطه A بر بالای سطح

شیب داری بر روی

یخها لغزیده و در سطح

افقی در نقطه B متوقف

می‌شود اگر فاصله‌های

BC = h

و AC = h+1

و ضریب اصطکاک بین سورتمه شخص با یخها K باشد ثابت

کنید : $\sqrt{2} < K < \sqrt{2/75}$ است .

حل - اول ضریب اصطکاک (K) را بر حسب h محاسبه

می‌کنیم :

$$AD = x = \frac{h+1}{\sin \alpha} \quad \text{و} \quad CD = (h+1) \cot \alpha$$

حالا شتاب را در سطح شیب دار محاسبه می‌کنیم :

$$P \sin \alpha - R = m\gamma \Rightarrow P \sin \alpha - KP \cos \alpha = m\gamma$$

$$mg \sin \alpha - Kmg \cos \alpha = m\gamma$$

قرار دهیم نامساوی تغییر نمی‌کند و خواهیم داشت :

$$\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2,75$$

نامساوی به ازاء $h > 3$ ثابت شد و می‌توان به ازاء $h = 1$ و $h = 2$ نیز ثابت کرد بطور کلی به ازاء جميع مقادیر h خواهیم داشت :

$$2 < \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h < 2,75 \quad \text{یا} \quad \sqrt[h]{2} < K < \sqrt[h]{2,75}$$

حل مسائل شیمی

۵۳/۴۱ - ترکیب سه عنصری A به جرم مولکولی ۹۰ شامل ۵۳/۳۳٪ کربن و ۱۱/۱۱٪ ئیدروژن است. این ترکیب از اکسیداسیون ملایم (بوسیلهٔ محلول رقیق پرمنگنات پتاسیم) ئیدروکربور B به فرمول تجربی $(CH_4)_n$ بدست می‌آید. از اکسیداسیون کامل جسم B دو جسم X و Y تولید می‌شود. جسم X شامل ۶۲/۰۷٪ کربن و ۱۰/۳۴٪ ئیدروژن است و محلول فهلینگ را احیاء نمی‌کند جسم Y منواسیدی است شامل ۲۶/۰۹٪ کربن و ۴/۳۴٪ ئیدروژن و برای خنثی کردن ۰/۰۴۶ گرم آن 10 m^3 سود $\frac{N}{10}$ لازم است. ساختمان احتمالی اجسام A، B، X و Y را مشخص کنید.

حل -

$$m_C = 53,33\% \cdot 100, \quad m_H = 11,11\% \cdot 100,$$

$$m_O = 100 - (53,33 + 11,11) = 35,56\% \cdot 100$$

$$\frac{100}{90} = \frac{53,33}{12x} = \frac{11,11}{y} = \frac{35,56}{16z}$$

$$x \neq 4 \text{ و } y \neq 10 \text{ و } z \neq 2 : C_4H_{10}O_2$$

چون این جسم از اکسیداسیون ملایم ئیدروکربور B به فرمول $(CH_4)_n$ بدست آمده است بنابراین تعداد اتمهای کربن در ملکول جسم مزبور و ئیدروکربور مورد بحث یکی است. و چون این جسم شامل ۴ اتم کربن در ملکول می‌باشد بنابراین

$$\text{فرمول ئیدروکربور } (CH_4)_4 \text{ یا } C_4H_{16}$$

$$m_O = 100 - (62,07 + 10,34) = 27,59$$

$$(4) \quad \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{h}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{h}\right) \left(1 - \frac{2}{h}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{h!} \left(1 - \frac{1}{h}\right) \left(1 - \frac{2}{h}\right) \dots \left(1 - \frac{h-1}{h}\right)$$

چون تمام جملات مثبت است پس $\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h > 2$

است فقط به ازای $h = 1$ نتیجه می‌شود:

$$K = \frac{h+1}{h} = \frac{1+1}{1} = 2$$

و به ازاء $h > 2$ از مساوی (۴) نتیجه می‌شود :

$$\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h < 2 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times h}$$

و به ازاء $h > 3$ خواهیم داشت :

$$\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h < 2 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} +$$

$$+ \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \dots + \dots +$$

$$+ \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times h^{h-2}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h < 2 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} \left[1 +$$

$$+ \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{h-2}}\right]$$

داخل کروشه مجموع جمل تصاعد هندسی است پس خواهیم

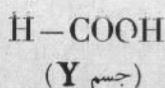
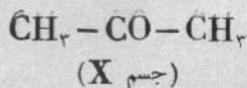
داشت :

$$\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h < 2 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} \left[\frac{3}{2} -$$

$$- \frac{1}{2 \times 3^{h-2}}\right]$$

چون طرف دوم از طرف اول بزرگتر است می‌توان به جای طرف دوم، حداکثر آنرا قرار دهیم که نامساوی همچنان برقرار خواهد بود. وقتی طرف دوم حداکثر است که

$$\left(\frac{1}{2 \times 3^{h-2}} - 0\right) \text{ مساوی صفر باشد پس اگر } \left(\frac{1}{2 \times 3^{h-2}} - 0\right)$$



کلرور آمونیم کاملاً خشک بدون آنکه تجزیه شود بخار می‌شود. چگالی بخار آن نسبت به هوا ۱/۸۶ است. اما در مجاورت اندکی آب این جسم به آمونیاک و گاز کلریدریک تجزیه می‌شود. در این حالت چگالی مخلوط حاصل نسبت به هوا ۰/۹۷ است. ضریب تفکیک کلرور آمونیم را محاسبه کنید.

حل - چگالی NH_4Cl گازی شکل نسبت به هوا عبارتست از:

$$\frac{53/5}{22/4 \times 1/293} \neq \frac{53/5}{29} = 1/845$$

بنا بر این عدد ۱/۸۶ که از طریق آزمایش بدست آمده است کاملاً با تئوری مطابقت دارد. اما عدد ۰/۹۷ خیلی با آن مختلف است.



اگر u ضریب دیسوسیاسیون برای یک ملکول گرم NH_4Cl باشد. از دیسوسیاسیون u ملکول گرم کلرور آمونیم u ملکول گرم آمونیاک و u ملکول گرم HCl تولید خواهد شد و مخلوط رویهم شامل $(1+u)$ $= 1 - u + 2u$ ملکول گرم خواهد بود. چگالی مخلوط نسبت به هوا چنین خواهد شد:

$$\frac{53/5}{(1+u) \times 22/4 \times 1/293} = 0/97$$

از آنجا بدست می‌آید که:

$$1+u = \frac{53/5}{22/4 \times 1/293 \times 0/97} = \frac{53/5}{29 \times 0/97} = 1/90$$

$u = 0/90$ مفهوم این جمله اینست که در مجاورت مقدار بسیار ناچیزی آب، کلرور آمونیم تقریباً بطور کامل به آمونیاک و HCl تجزیه می‌شود. و ضریب تفکیک آن $u = 0/90$ یا ۱۰۰٪ است.

۵۳/۴۳ - چگالی مخلوط گاز پروپان و بوتان تحت شرایط متعارفی نسبت به هوا $d = 1/916$ می‌باشد. تعیین کنید:

۱ - نسبت اختلاط حجمی مخلوط را به فرض آنکه حجم مولکولی ۲۲/۳ لیتر اختیار شده باشد.

$$\frac{62/07}{12} = 5/17 \quad \text{اتم گرم کربن}$$

$$\frac{10/34}{1} = 10/34 \quad \text{اتم گرم ئیدروژن}$$

$$\frac{27/59}{16} = 1/72 \quad \text{اتم گرم اکسیژن}$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین این اعداد ۱/۷۲ است. از تقسیم اعداد معرف تعداد اتمها بر این عدد، فرمول تجربی جسم $(\text{C}_7\text{H}_6\text{O})_n$ بدست می‌آید. $n = 1$ زیرا ئیدروکربورمزبور $\text{C}_7\text{H}_6\text{O}$ و دارای چهار اتم کربن می‌باشد. فرمول $\text{C}_7\text{H}_6\text{O}$ منطبق با فرمول عمومی $(\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O})$ و الئید باستون می‌باشد. چون جسم مزبور خاصیت احیاء کنندگی محلول فهلینگک ندارد پس ستون است و فرمول آن $\text{CH}_3 - \text{CO} - \text{CH}_3$ (استون) می‌باشد.

از طرف دیگر برای جسم Y:

$$m_o = 100 - (26/09 + 4/34) = 69/57$$

$$\frac{26/09}{12} = 2/17 \quad \text{اتم گرم کربن}$$

$$\frac{4/34}{1} = 4/34 \quad \text{اتم گرم ئیدروژن}$$

$$\frac{69/57}{16} = 4/34 \quad \text{اتم گرم اکسیژن}$$

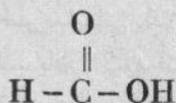
بنابراین ساده‌ترین فرمول جسم $(\text{CH}_2\text{O}_2)_n$ است از طرفی چون جسم یک مونو اسید است بنابراین هر ملکول آن بتوسط یک لیتر محلول نرمال سود خنثی می‌شود:

$$10 \times \frac{N}{10} = 100 \quad \text{نرمال}$$

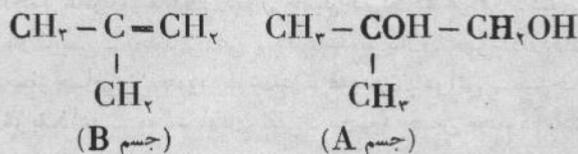
$$\frac{0/046 \times 1000}{1} = 46 \quad \text{جرم ملکولی اسید}$$

$$(\text{CH}_2\text{O}_2)_n = 46 \quad n = 1$$

بنابراین فرمول اسید مزبور چنین است:



ساختمان احتمالی اجسام A و B و X و Y از این قراراند:



۲- حجم هوای لازم برای سوختن کامل يك حجم مخلوط را
 حل ۱- تحت شرایط متعارفی از فشار و حرارت جرم ۲۲/۳
 لیتر (حجم ملکولی) مخلوط برابر است با :

$$\frac{1}{916} \times 22/3 \times \frac{1}{293} = \frac{1}{916} \times 28/8 = 55/18 \neq 55/28^{\text{gr}}$$

فرض می‌کنیم که در این ۲۲/۳ لیتر مخلوط x ملکول پروپان و y ملکول بوتان یافته شود :

$$(x+y) \times 22/3 = 22/3 \Rightarrow x+y=1 \quad (1)$$

جرم پروپان برابر است با : ۴۴x زیرا جرم ملکول آن (C₃H₈) برابر ۴۴ است و جرم بوتان ۵۸y زیرا جرم ملکولی آن (C₄H₁₀)، ۵۸ است. جرم ۲۲/۳ لیتر مخلوط خواهد شد :

$$44x + 58y = 55/2 \quad (2)$$

از حل معادلات (۱) و (۲) بدست می‌آید :

$$x = 0/2 \text{ ملکول گرم} \quad \text{و} \quad y = 0/8 \text{ ملکول گرم}$$

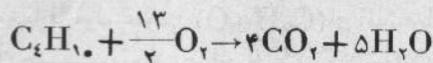
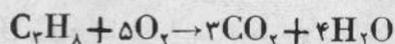
حجم پروپان خواهد شد ۲۲/۳ × ۰/۲ = ۰/۴۴ لیتر و حجم بوتان ۲۲/۳ × ۰/۸ = ۰/۱۷۶ لیتر. بنابراین ۲۲/۳ لیتر مخلوط از ۲۲/۳ × ۰/۲ = ۰/۴۴ لیتر پروپان و ۲۲/۳ × ۰/۸ = ۰/۱۷۶ لیتر بوتان تشکیل یافته است. در نتیجه ۱۰۰ لیتر مخلوط متشکل است از:

$$\text{لیتر پروپان} = 20 = 0/2 \times 100$$

(پاسخ I)

$$\text{لیتر بوتان} = 80 = 0/8 \times 100$$

۲- فرمول احتراق پروپان و بوتان :



طبق معادلات فوق حجم اکسیژن لازم ۵ برابر حجم پروپان و ۶/۵ برابر حجم بوتان یعنی :

$$5 \times 0/2 + 6/5 \times 0/8 = 6/2 \text{ حجم اکسیژن}$$

$$\text{حجم هوا معادل} = 31 = 6/2 \times 5 \text{ لیتر خواهد بود.}$$

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شماره ۵۳

دانش آموزان کلاس چهارم ریاضی

۵۳/۴ - عرب رهی - داریوش خامنه‌ای - مجتبی شریف زاده - سعید حیدری - علی اکبر احسانی - فرشاد اسکندریاتی منصور علایان - فرامرزا بدینی عربانی

۵۳/۶ - رحمت رودگری - مسعود محزون - عرب رهی - داریوش خامنه‌ای - مجتبی شریف زاده - فرشاد اسکندر بیاتی - صدرالدین زری باف - ابراهیم موسوی - میر کاظم جلالی حسین کاظمی - شاهپور رانما - عطاءالله مهرمند - رضاجب پور بهمن بهزادی - مهرداد قاسمپور - اردشیر جعفریان - احمد نعمتی پور - فرامرزا بدینی عربانی - جعفر خضری

۵۳/۷ - عباسعلی چهره ساز

دانش آموزان کلاس پنجم ریاضی

۵۳/۱۱ - محمد پوستان دوز - وحید بزاز محمدی - اسمعیل شریف زاده - ابوالفضل نجیف - محمدعلی شاهانی - حسن رمیار - جهانبخش جهانسوز - مسعود آسا - احمد نعمتی پور - مهدی اکبر عباس کیوانلو - میر حسین شریف زاده - حمید حمیدزاده عراقی - محمد حسینی محمودآبادی - باهره دبیران - محمود مصطفی زاده محمد اسحق لهراسبی - یوسف هندی - علیرضا وشاق - فریدون زهرائی - علی اصغر طائی - محمدعلی شبستری - بهرخ حسینی

هاشمی - غلامحسین اردانی - بهروز نوری خواجوی - حبیب اسلامی - جواد فیض

۵۳/۱۲ - غلامعلی قائدی - علی اکبر صادقی پور - محمد پوستان دوز - تراب نیکی نژاد - محمد ساجدیان - علی عسکر کریمی - رضا غیور کاظمی - عباس مجتهدی - سید ابوالحسن تقوی - ایرج شمسائی - عباسعلی چهره ساز - پرویز پرهامی - تقی توانای رشید - ایرج گلشن - وحید بزاز محمدی - هادی فوقانی عطاءالله ویسی - یدالله آستارائی - مهرداد حاجی وندی - انور خواجوی - علی برنامقدم - انور خواجوی - محمد پوستان دوز - اسمعیل شریف زاده - محمدعلی شاهانی - یوسف بستان آبادی - بهمن خلیقی - عباس عالیداعی - مهدی بهاریان - علی اصغر فلاوند حسن رمیار - اسمعیل محمدی - امیرعباس جباری - رضا نامور - علیرضا وشاق - طهمورث اسکندری - فرشاد اسکندر بیاتی - محمد کلانتری محمد تقی چرچی شبستری - جهانبخش جهانسوز - سیمین شرافت - حسن سلیمانی - غلامرضا فراهانی - رضا اشراقی کاخکی - مسعود سعیدیان - کیومرث فیض رهنمون - محمد رضا اسمعیلی - عزت آسا - غلامرضا شاهنوشی - مسعود آسا - ابراهیم یزدان بین - احمد غافری - مهدی اکبر - حمید حمیدزاده عراقی - کیومرث ملاکریمی - محمد زارعی - علی رضا نونال - مهرداد اردوان - جعفر حسامی - محمود هوشمند - فریدون زهرائی - میر حسین شریف زاده - محمد مهدی تقفی - محمود حسین محمودآبادی - باهره دبیران - محمود مصطفی زاده - محمد اسحق لهراسبی -

علی محمد فیض - مجید شناسی فام - ناصر خوشباف فرشی - یوسف
 هندی - محمود سمعی - اسمعیل انصاری - علی اصغر طائی - سعید
 ناصحی - ابراهیم مؤمنی - نعمت الله صالحی زاد - محمد علی
 شبستری - بهرخ حسینی هاشمی - بهروز نوری خواجوی - محمد
 حقوقی - عباس زکی زاده - عادل گلزاده فندقلو - حبیب اسلامی
 اسمعیل پور طاهریان - سید احمد سدهی اصفهانی - فاخر دریم -
 جواد فیض .

۵۳/۱۳ - محمد ساجدیان - پرویز پرهامی - وحید
 بزاز محمدی - اسمعیل شریف زاده - غلامرضا فرخ نیا - جهان بخش
 جهانسوز - حسن رمیار - کیومرث فیض رهنمون - غلامرضا شاه
 نوشی - عطاء الله مهرمند - اسمعیل پور طاهریان - محمود مصطفی
 زاده - محمد اسحق لهراسبی - یوسف هندی - علی اصغر طائی -
 غلامعلی قائدی - فاخر دریم .

دانش آموزان کلاس ششم ریاضی

۵۳/۱۷ - ابراهیم ذوالقدری - ارسام صبری - الیزابت
 ابراهیم زاده .

۵۳/۱۹ - محمد رحمت ستوده - محمد واحدی - ابراهیم
 مؤمنی - نعمت الله صالحی زاد - محمد ابراهیم کلانتری - یوسف
 هندی - باقر قاسم زاده - حبیب اسلامی - ابراهیم ذوالقدری -
 احمد پیوست - حسن گل محمدی - اسفندیار رجائی - الیزابت
 ابراهیم زاده - غلامرضا موسوی - شهریار کوزه کنانی - انور
 محمدی .

۵۳/۲۲ - محمد واحدی .

۵۳/۲۳ - عباس کیوانلو - الیزابت ابراهیم زاده .

۵۳/۲۴ - محمد راستی - پرویز پرهامی - علی اکبر
 قضائی - تقی توانای رشید - محمد تقی اولیائی - محمد رحمت
 ستوده - حسن رمیار - محمد رضا اسمعیلی - عزت آسا - احمد
 غافری - مهدی اکبر - محمود سمعی - محمد علی شبستری -
 بهرخ حسینی هاشمی - یوسف هندی - محسن اربابیان - محسن
 پورا احمدی - جعفر ترکیان - آذر حسینی پناه - حبیب اسلامی -
 ابراهیم ذوالقدری - احمد سدهی اصفهانی - ارسام صبری -
 اسفندیار رجائی - غلامعلی قائدی - الیزابت ابراهیم زاده - علی
 طاهر - حمید هاشمیان .

۵۳/۲۵ - ارسام صبری - انور خواجوی - محمد
 واحدی - علی اصغر قلاوند - مهدی اکبر - فاضل سعیدی - محمد
 مهدی ثقفی - ابراهیم مؤمنی - جعفر ترکیان - علی اصغر قلاوند
 اسمعیل پور طاهریان - علی صفرزاده امیری - غلامعلی یاجم -
 مجتبی و لیزاده - حسین حمیدیه - ابوالقاسم داعی - امیر عباس
 جباری .

۵۳/۲۶ - محسن پوررفیع - عباس مجتهدی - عباسعلی
 چهره ساز - علی صفر زاده امیری - پرویز پرهامی - مهرداد
 حاجی وندی - محمد تقی اولیائی - حسین پور خلیل - عباس
 عالیداعی - مهدی اکبر - علی اصغر طائی - محمد علی شبستری -

بهرخ حسینی هاشمی - محمد ابراهیم کلانتری - یوسف هندی -
 رشید صدرالحفاظی - حبیب اسلامی - ارسام صبری - محمود آل
 محمد - شهریار وصال - غلامعلی قائدی - سبزی علی تقیان - علی رضا
 نونهار - محمود سمعی - الیزابت ابراهیم زاده - حسین حمیدیه -
 احمد نعمتی پور - حمید هاشمیان - جواد امجدی - علی برنا
 مقدم - علی اکبر صادقی پور - شهریار کوزه کنانی - جواد فیض -
 انور محمدی .

۵۳/۲۷ - تقی توانای رشید - محمد تقی اولیائی - محمد
 رحمت ستوده - ارسام صبری - حسن رمیار - محسن پورا احمدی
 محمد رضا اسمعیلی - مسعود آسا - مهدی اکبر - عبیدالله مدرسی
 محمد علی شبستری - بهرخ حسینی هاشمی - آذر حسینی پناه -
 حبیب اسلامی - علی صفرزاده امیری - نعمت الله صالحی زاد -
 ابراهیم مؤمنی - حمیدرضا عطائی اصفهانی - غلامعلی قائدی -
 مجتبی و لیزاده - اسفندیار رجائی - الیزابت ابراهیم زاده -
 علی طاهر .

۵۳/۲۸ - امینی - محسن پوررفیع - ایرج شمسانی
 پرویز پرهامی - علی اکبر قضائی - تقی توانای رشید - محمد تقی
 اولیائی - انور خواجوی - محمد رحمت ستوده - اسفندیار رجائی
 محمد واحدی - شهریار کوزه کنانی - علی طاهر - امیر عباس
 جباری - غلامرضا شاهنوشی - غلامرضا موسوی - احمد پیوست -
 احمد سدهی - داریوش خامنه‌ای - محمد علی شبستری - بهرخ
 حسینی هاشمی - نعمت الله صالحی زاد - یوسف هندی - جعفر
 ترکیان - محسن اربابیان - محسن پورا احمدی - آذر حسینی پناه
 فاضل سعیدی - حبیب اسلامی - ابراهیم ذوالقدری - شهریار
 وصال - عرب رهی - ابراهیم مؤمنی - فریدون زهرائی - ارسام
 صبری - سبزی علی تقیان - حسین گل محمدی - غلامعلی بنائی -
 عبدالرضا کشمیری - الیزابت ابراهیم زاده - احمد نعمتی پور -
 حسین حمیدیه .

۵۳/۲۹ - تقی توانای رشید - محمد تقی اولیائی - محمد
 رحمت ستوده - ارسام صبری - علی طاهر - مهدی اکبر - یوسف
 هندی - محمود سمعی - محمد علی شبستری - بهرخ حسینی
 هاشمی - بهروز نوری خواجوی - ابراهیم ذوالقدری - حبیب
 اسلامی - غلامرضا موسوی - جواد فیض - غلامعلی یاجم .

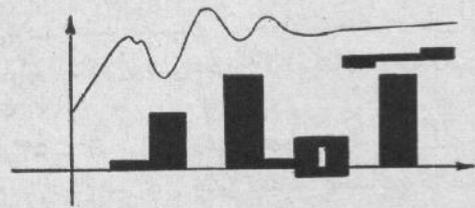
۵۳/۳۰ - هادی کیاست - عباس عالیداعی - شهریار
 کوزه کنانی - مهدی اکبر - فریدون زهرائی - محمود سمعی
 محمد علی شبستری - بهرخ حسینی هاشمی - مجتبی و لیزاده -
 غلامعلی یاجم - محمد واحدی .

۵۳/۳۱ - محسن پوررفیع - غلامعلی یاجم - علی اکبر
 قضائی - محمد تقی اولیائی - محمد رحمت ستوده - محمد واحدی
 حسن رمیار - علی اصغر قلاوند - عباس زکی زاده - محسن پور
 احمدی - محسن اربابیان - ابراهیم ذوالقدری - اسمعیل پور
 طاهریان - احمد پیوست - حمیدرضا عطائی اصفهانی - ارسام صبری -
 سبزی علی تقیان - مجتبی و لیزاده - حسن گل محمدی اسفندیار رجائی -
 علی طاهر .

(دنیالهدر پائین صفحه ۵۵)

Initiation a' la
STATISTIQUE
par : M. HAGEGE

ترجمه : ع . مصحفی



بخش IV: آرایش خطی (Ajustement linéaire)

۱- شرح موضوع

فرض کنیم^۱ که آزمایش کننده‌ای می‌خواهد ضریب انبساط خطی یک تیغه فلزی را معلوم کند. با توجه به اینکه بین I_0 طول تیغه در دمای صفر درجه و I طول تیغه در دمای t درجه رابطه زیر برقرار است:

$$I = I_0(1 + \lambda t)$$

که در آن λ ضریب انبساط خطی فلز مورد آزمایش نامیده می‌شود؛ شخص مزبور به ترتیبی مناسب طول تیغه را در دماهای مختلف اندازه می‌گیرد و در نتیجه آن تعدادی مشاهدات $(t_i$ و $I_i)$ ، مثلاً دوازده تا بدست می‌آورد. آنگاه این شخص روی کاغذ میلیمتری نقطه‌های $(t_i$ و $\frac{I_i}{I_0}$) را نشانه‌گذاری

می‌کند. شاید دانش‌آموزانی که با کارهای تجربی سر و کار نداشته‌اند تصور کنند که نقطه‌های مزبور روی یک خط راست واقع می‌شوند. اما چنین نیست، به علت خطاهای مربوط به اندازه‌گیری، این نقطه‌ها در حدود یک خط مستقیم به نظر می‌آیند. مسئله‌ای که مطرح می‌شود تعیین خطی است که به بهترین وجه ممکن به نقطه‌های مزبور نزدیک باشد. این چنین خطی را **خط آرایش** این داده‌ها می‌نامیم. وقتی که این خط معین شود ضرایب زاویه‌ای آن همان λ خواهد بود.

در آزمایش بالا بنا به یک قانون فیزیکی پیش‌بینی می‌شد که باید نقطه‌ها روی یک خط راست واقع باشند؛ درحالت‌های دیگر هم از روی نمودار می‌توان ملاحظه کرد که پراکندگی عمومی نقاط در حدود یک خط مستقیم می‌باشد.

تبصره - ممکن است که در نمودار یکی دو نقطه استثنائی ملاحظه شود که به حالت‌های خاص مربوط می‌باشند و از آنها صرف نظر می‌شود؛ مثلاً اگر خواسته باشیم نمودار نسبت

بین قد و وزن ده دانش‌آموز با ستهای متفاوت را رسم کنیم، ممکن است که هشت نقطه نزدیک به خط مستقیم بدست بیاوریم و دو نقطه دیگر به نحو بارزی از این خط فاصله داشته باشند. این دو نقطه را می‌توانیم مربوط به دانش‌آموزان بسیار لاغر یا بسیار چاق بدانیم.

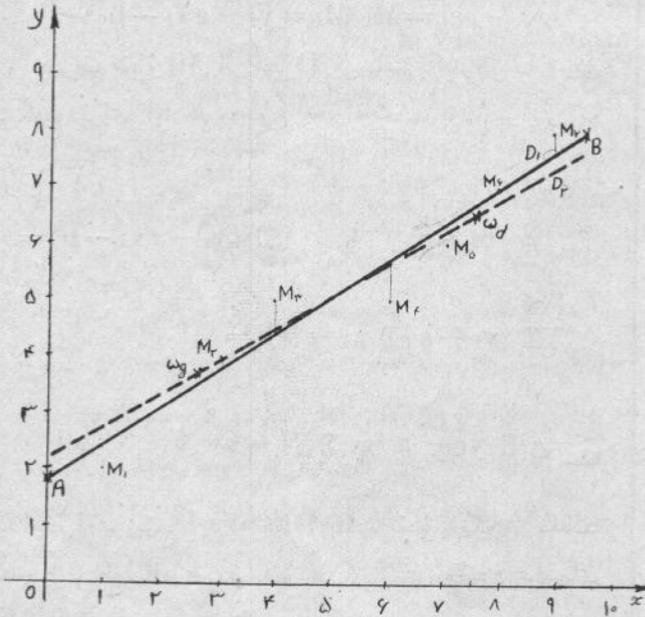
با توجه به مثال بالا، موضوع مورد بحث از این قرار است: تعداد N نقطه $(x_i$ و $y_i)$ داده شده است که تقریباً در یک امتداد به نظر می‌رسند؛ می‌خواهیم خط مستقیمی رسم کنیم که هر چه بهتر ممکن است به نقطه‌های مزبور نزدیک باشد. برای این کار سه روش متداول است: روش ترسیم، روش مایر، روش کمترین مجذورات.

۲- روش ترسیم

الف - این روش (که به خاطر سادگی آن بیشتر خوشایند دانش‌آموزان است) به این ترتیب است که ابتدا داده‌ها را به صورت نقطه‌هایی روی یک صفحه کاغذ نمایش می‌دهیم و بعد، مثلاً به کمک یک نخ کشیده، خطی رسم می‌کنیم که به شایسته‌ترین وجه به این نقطه‌ها نزدیک باشد. وقتی این خط رسم شد دو نقطه (دورازهم) روی آن را در نظر گرفته و به کمک مختصات آنها معادله خط را بدست می‌آوریم.

خطی که به این ترتیب رسم می‌شود به ناظر بستگی دارد و از یک شخص نسبت به شخص دیگر تغییر می‌کند (وقتی که در رسم یک خط آرایش توسط دو شخص اختلاف فاحش مشاهده شود به این نتیجه می‌رسیم که نمی‌توان به روش مزبور اطمینان داشت) ب - مثال: هفت نقطه زیر را در نظر می‌گیریم (دوسطر اول جدول صفحه بعد):

نمایش هندسی این هفت نقطه را تعیین می‌کنیم. بنظر می‌رسد که در مجاورت یک خط مستقیم قرار دارند. به کمک یک نخ



کشیده اوضاع مختلفی را بررسی می‌کنیم که بتوان خط آرایش را رسم کرد و بالاخره خط D_1 را رسم می‌کنیم که بر دو نقطه $A(0 و 1/8)$ و $B(9/5 و 8)$ می‌گذرد. معادله خط D_1 عبارت خواهد شد از:

$$y_1 = 0.65x + 1/8$$

اکنون y_i' عرضهای نقطه‌های M_i' واقع بر D_1 را که با نقطه‌های M_i هم طول هستند به‌ازاء مقادیر مختلف i حساب می‌کنیم (مقادیر سطر سوم جدول بالا) و بعد از آن به محاسبه انحرافات:

$$e_i = \overline{M_i M_i'} = y_i - y_i'$$

می‌پردازیم (مقادیر سطر چهارم جدول). این انحرافات در روشهایی که در زیر تشریح می‌شوند نقش مؤثری را ایفا می‌کنند.

ج - تبصره: در حالتی که نمایش هندسی داده‌ها به شکل یک منحنی، مثلاً سهمی با محور موازی با محور Oy باشد اساس عمل فرق نمی‌کند؛ سهمی را رسم می‌کنیم، سه نقطه بر آن انتخاب کرده با استفاده از مختصات این نقطه‌ها معادله سهمی را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ مشخص می‌کنیم.

۳- روش مایر (میانگینهای گسسته)

الف - تمرین مقدماتی: تعداد N نقطه $(x_i و y_i)$

x_i	y_i	y_i'	e_i	e_i^2
1	2	2/45	-0.45	0.2025
2	3	3/75	+0.25	0.0625
3	4	4/150	+0.50	0.25
4	5	5/225	+0.75	0.5625
5	6	6/300	+0.90	0.81
6	7	7/375	+0.95	0.9025
7	8	8/450	+0.95	0.9025
8	9	9/525	+0.95	0.9025
9	10	10/600	+0.95	0.9025
Σx_i	45	45	0	0
Σy_i	45	45	0	0
$\Sigma y_i'$	45	45	0	0
Σe_i^2				6.75
$\Sigma e_i $				7.05
$\Sigma e_i'$				1.67

باصفر است نتیجه می شود که سه نقطه ω_g و ω و ω_d بر یک خط راست واقع اند که همان خاصیت مشهور شرکت پذیری مراکز بار N نقطه می باشد.

۲- مجموعه مفروض را از این جهت به زیر مجموعه های چپ و راست تفکیک کردیم که نقطه های میانگین آنها حتی الامکان از هم فاصله داشته باشند تا در تعیین خط دقت کافی ملحوظ شده باشد.

۳- در مورد سهمی آرایش، مجموعه را به سه زیر مجموعه چپ، مرکزی و راست تقسیم می کنیم و معادله سهمی را چنان تعیین می کنیم که سهمی از سه نقطه میانگین سه زیر مجموعه مزبور بگذرد.

د - مثال

همان داده های جدول پیش را در نظر می گیریم، با انتخاب:

$$\text{زیرمجموعه چپ} = \{M_1, M_2, M_3\}$$

$$\text{زیرمجموعه راست} = \{M_4, M_5, M_6, M_7\}$$

داریم:

$$x_g = \frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{و} \quad y_g = \frac{2+4+5}{3} = \frac{11}{3}$$

$$x_d = \frac{6+7+8+9}{4} = \frac{30}{4} = 7.5$$

$$y_d = \frac{5+6+7+8}{4} = \frac{26}{4} = 6.5$$

معادله خط D_p که بر دو نقطه ω_g و ω_d می گذرد عبارت خواهد شد از:

$$y = \frac{17}{29}x + \frac{61}{29}$$

خط D_p روی شکل قبل با خطوط بریده (خط چین) رسم شده است و ملاحظه می شود که کاملاً به خط D_1 نزدیک می باشد.

عرضه های نقاط هم طول خط D_p با نقاط مفروض و انحرافات آنها در سطرهای ششم و هفتم جدول پیش یادداشت شده است و ملاحظه می شود که مجموع انحرافات سه نقطه اول و چهار نقطه آخر برابر با صفر است:

$$-\frac{20}{29} + \frac{4}{29} + \frac{16}{29} = 0$$

و خط D به معادله $y = ax + b$ را در نظر می گیریم. مقدار e_i از رابطه:

$$e_i = \overline{M_i} - M_i = y_i - ax_i - b$$

را انحراف نقطه M_i از خط D می نامیم. شرطی را تعیین می کنیم برای اینکه مجموع انحرافات مزبور برابر با صفر باشد.

$$\sum_{i=1}^N e_i = 0 \quad \text{یا} \quad \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i - Nb = 0$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i - a \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - b = 0$$

از رابطه اخیر برمی آید که خط D باید بر نقطه میانگین ω بگذرد که \bar{x} و \bar{y} طول و عرض آن به ترتیب میانگین طولها و عرضهای نقاط مفروض می باشد.

اما شرط $\sum e = 0$ برای تعیین خط D کافی نیست زیرا با این شرط فقط یک نقطه از آن معین می شود، وانگهی از نقطه نظر آرایش هم این شرط کافی بنظر نمی رسد زیرا انحرافات از لحاظ جبری معادل فرض شده اند در صورتی که ممکن است از لحاظ قدر مطلق بزرگ باشند.

ب - روش مایر

باتوجه به قسمت الف و باتوجه به اینکه هر خط با دو نقطه معین می شود مجموعه نقطه های M_i را به دوزیر مجموعه متمم یکدیگر که از نظر اهمیت برابر باشند تقسیم می کنیم بقسمی که طول هر نقطه از اولی کوچکتر از طول هر نقطه از دومی باشد. زیر مجموعه اولی را زیر مجموعه چپ و دومی را زیر مجموعه راست می نامیم. اکنون خط D را با دو شرط زیر تعیین می کنیم:

اولاً مجموع انحرافات نقطه های زیر مجموعه چپ از خط D برابر با صفر باشد. ثانیاً مجموع انحرافات نقطه های زیر مجموعه راست از خط D برابر با صفر باشد. (در این صورت نتیجه خواهد شد که مجموع انحرافات تمام نقطه های مجموعه از خط برابر با صفر می باشد).

باتوجه به بند الف برای اینکه دو شرط اخیر برقرار باشد لازم و کافی است که خط D از ω_g میانگین زیر مجموعه چپ و از ω_d میانگین زیر مجموعه راست بگذرد.

ج - تبصره ها

۱- از اینکه مجموع انحرافات تمام نقاط مجموعه برابر

$y = a_0 x + b_0$ است در مورد آن مجموع مربعات انحرافات می نیم می باشد. این خط از نقطه میانگین ω می گذرد و در نتیجه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\bar{y} - a_0 \bar{x} - b_0 = 0$$

از آنچه گذشت چنین نتیجه می گیریم: اگر خطی وجود داشته باشد که در مورد آن مجموع مربعات انحرافات می نیم باشد این خط الزاماً از نقطه میانگین ω می گذرد.

اکنون مسئله را به صورت زیر مطرح می کنیم: از بین همه خطوطی که بر ω می گذرند آن را بیابید که در مورد آن مجموع مربعات انحرافات می نیم باشد. محورهای مختصات را انتقال می دهیم تا ω مبدأ جدید باشد. نسبت به محورهای جدید ωX و ωY مختصات نقاط M_i عبارت خواهد شد از:

$$X_i = x_i - \bar{x} \quad Y_i = y_i - \bar{y}$$

$$\sum_{i=1}^N X_i = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^N Y_i = 0 \quad \text{داریم:}$$

معادله خطی که بر ω می گذرد به صورت $Y = aX$ است و انحرافات عبارتند از:

$$e_i = Y_i - aX_i$$

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - aX_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^N Y_i^2 - 2a \sum_{i=1}^N X_i Y_i + a^2 \sum_{i=1}^N X_i^2$$

این سه جمله ای که نسبت به a از درجه دوم و در آن ضریب جمله a^2 مثبت است وقتی می نیم می باشد که داشته باشیم:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N X_i Y_i}{\sum_{i=1}^N X_i^2}$$

نتیجه می گیریم که: با فرض N نقطه (x_i, y_i) یک خط فقط یک خط وجود دارد که نسبت به آن مجموع مربعات انحرافات می نیم می باشد؛ این خط از نقطه میانگین $\omega(\bar{x}, \bar{y})$ می گذرد و ضریب زاویه ای آن برابر با مقدار a از رابطه بالا می باشد.

۲- تبصره. به ترتیب مشابه می توان روش کمترین مجذورات را در مورد منحنیهای آرایش نیز بکار برد.

$$-\frac{18}{29} - \frac{6}{29} + \frac{6}{29} + \frac{18}{29} = 0 \quad \text{و}$$

۵- با دو روشی که بکار رفت دو خط متفاوت D_1 و D_2 بدست آوردیم. آیا کدام یک از این دو خط برای آرایش «بتر» داده ها شایسته تر است؟ مسلماً آنکه در مورد آن قدر مطلق انحرافات «در میانگین» کوچکتر باشد؛ برای مقایسه می توانیم به جای مجموع قدر مطلق انحرافات مجموع مربعات آنها را در مورد دو خط حساب کنیم (سطرهای ۵ و ۷ و ۸ جدول پیش)

در مورد D_1 داریم: $\sum e_i^2 = 1/36$ و در مورد D_2 داریم:

$$\sum e_i^2 = 1/67$$

پس برای این خط D_1 داده های مثال بالا را بهتر از خط D_2 آراسته است.

۴- روش کمترین مجذورات

الف- طرح موضوع

۱- چنانکه ملاحظه شد از مقایسه مجموع مربعات انحرافات معلوم کردیم که کدام یک از دو خط D_1 و D_2 برای آرایش بهتر داده ها شایسته تر است. اکنون این سؤال برای ما پیش می آید: آیا خطی وجود دارد که در مورد آن مجموع مربعات انحرافات می نیم باشد؟ این سؤال را به صورت مسئله زیر مطرح می کنیم: از بین همه خطوط با ضریب زاویه ای معلوم a_0 آنرا معلوم کنید که در مورد آن مجموع مربعات انحرافات می نیم باشد - اگر $y = a_0 x + b$ معادله این خط باشد (که در آن b مجهول است) داریم:

$$e_i = y_i - a_0 x_i - b$$

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 x_i - b)^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 x_i)^2 - 2b \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 x_i) + Nb^2$$

عبارت اخیر نسبت به b سه جمله ای درجه دوم می باشد که در آن ضریب جمله b^2 مثبت است و این سه جمله ای وقتی می نیم است که مقدار b برابر باشد با:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - a_0 x_i)}{N} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i - a_0 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \bar{y} - a_0 \bar{x}$$

یعنی از بین خطهای با ضریب زاویه ای a_0 آنکه به معادله

معادله خط کمترین مجذورات عبارت می شود از:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

د- تمرین: در مورد خط D_1 داشتیم $1/36 = \sum e_i^2$

با محاسبه مقدار می نیمم سه جمله ای:

$$\sum_{i=1}^N Y_i^2 - 2a \sum_{i=1}^N X_i Y_i + a^2 \sum_{i=1}^N X_i^2$$

$$\sum e_i^2 = \frac{4}{3} = 1/33 \text{ خواهیم داشت}$$

ه- تبصره کلی: در تمام این فصل، متغیرهای x و y یک

نقش را نداشتند: مقادیر x_i را به صورت «قطعی» منظور شدند و سعی شد که مقادیر y_i آرایش یابند. به عبارت دیگر فقط انحرافات موازی با Oy محاسبه شد. در مورد آزمایش مربوط به تعیین ضریب انبساط تیفه فلزی دقت در اندازه گیری دما کمتر از دقت در اندازه گیری طول مورد توجه واقع شد.

بقیه پاسخهای رسیده

۵۳/۳۲ - محمد رضازاده افشار ، محمد رحمت ستوده ،

حسین پورخلیل ، داریوش خامنه ای ، محسن اربابیان ، محمود آل محمد ، ابراهیم ذوالقدری ، علی صفرزاده امیری ، ارسام صبری ، عرب رهنی ، حمیدرضا عطائی اصفهانی ، سبزعلی تقیان مجتبی ولیزاده ، لطفعلی انصاری ، اسفندیار رجائی ، علی طاهر ، غلامرضا موسوی .

۵۳/۳۳ - امینی ، غلامعلی یاجم ، بهمن ترکمن

محمدتقی اولیائی ، محمد رحمت ستوده . حسین پورخلیل ، محمد واحدی ، محمدرضا اسمعیلی ، مسعود آسا، علی اصفراطی بهرخ حسینی هاشمی ، بهروز نوری خواجوی ، رشید صدرالحفاظی ، محسن پوراحمدی، محمود آل محمد ، اسمعیل پور طاهریان ، علی صفرزاده امیری ، حمید رضا عطائی اصفهانی ، ارسام صبری .

۵۳/۳۴ - محمد رحمت ستوده ، محمد واحدی ، حبیب

اسلامی ، ابراهیم ذوالقدری ، علی صفرزاده امیری ، اسفندیار رجائی ، غلامرضا موسوی .

۵۳/۳۵ - علی صفرزاده امیری ، یوسف هندی ، حبیب

اسلامی ، مجتبی ولیزاده ، باهره دبیران ، غلامعلی یاجم .

ب- طریقه عملی محاسبه a

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N X_i Y_i}{\sum_{i=1}^N X_i^2} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i Y_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2}$$

مخرج کسر نوسان رشته x_1, x_2, \dots, x_n می باشد. برای محاسبه صورت همانگونه که در محاسبه واریانس عمل کردیم x_0 و y_0 را به عنوان میانگینهای موقت انتخاب می کنیم. ثابت می کنیم اگر x_0 و y_0 دو عدد دلخواه باشد داریم:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i Y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_0)(y_i - y_0) - (x_0 - \bar{x})(y_0 - \bar{y})$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i - x_0)(y_i - y_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^N [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x_0)][(y_i - \bar{y}) + (\bar{y} - y_0)]$$

$$= \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + (\bar{x} - x_0) \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}) +$$

$$+ (\bar{y} - y_0) \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) + N(\bar{x} - x_0)(\bar{y} - y_0)$$

در حالت خاص $x_0 = \bar{x}$ و $y_0 = \bar{y}$ اتحاد بالا چنین می شود:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i Y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i y_i$$

ج- مثال: هفت نقطه جدول پیش را در نظر می گیریم: مختصات نقطه میانگین ω عبارتست از:

$$\omega(\bar{x} = \frac{38}{7} \text{ و } \bar{y} = \frac{37}{7})$$

با انتخاب $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ داریم:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i Y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$a = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \bar{x}^2}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{256}{7} - \frac{1444}{49} = \frac{348}{49}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = \frac{234}{7} - \frac{1406}{49} = \frac{232}{49}$$

$$a = \frac{232}{49} : \frac{348}{49} = \frac{2}{3} = 0.66$$

جدول اعداد

طرح از: یوسف رضا زاده دانش آموز دبیرستان شاهپور رشت

سال بعد از سال تأسیس مجلهٔ یکان . ۳۴ - تکرار رقمی که در نوشتن عدد ۲۲ افقی نیز بکار رفته است .
قائم : ۱ - از ارقام فرد متوالی تشکیل شده است .
 ۲ - همان عدد ۷ افقی . ۳ - عددی است مجذور کامل که به صورت **abb** است . ۴ - هر يك از رقمهای یکان و سدگان آن دو برابر رقم دهگان و نصف رقم هزارگان عدد است . ۵ - پنج واحد کمتر از عدد ۱۶ افقی . ۶ - هر رقمش شمارهٔ مرتبهٔ مربوط می باشد . ۹ - رقمهای هزارگان و سدگان به ترتیب نصف رقمهای دهگان و یکان است و مجموع چهار رقم برابر با ۲۱ است .
 ۱۳ - به تمام عددهای از يك تا ده بخش پذیر است . ۱۴ - ترتیب دیگری از رقمهای عدد ۱۳ قائم و در ضمن مجذور کامل است . ۱۶ - عددی است متقارن که مجموع رقمهایش ۲۵ است .
 ۱۷ - برای اینکه همهٔ رقمهای مشابه شوند باید آنرا با ۶۵۸۵ جمع کرد . ۲۱ - عددی که از چهار رقم سمت راست عدد تشکیل می شود همان عدد ۲۷ افقی است و مجموع تمام رقمهای عدد برابر با ۱۷ است . ۲۳ - اگر رقم بزرگترین مرتبه اش را بر ۶ تقسیم کنیم عددی با رقمهای مشابه بدست آید . ۲۴ - مربع کامل است و مجموع رقمهایش مجذور حاصل جمع رقمهای جذرش می باشد .
 ۲۶ - رقمهایش تصاعد هندسی می سازند . ۲۷ - توانی از شش .
 ۲۸ - يك دهم عدد ۱۳ قائم . ۳۰ - جذر عدد ۲۴ قائم .

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷		۸	۹		۱۰
		۱۱			
۱۲	۱۳	۱۴	۱۵		۱۶
۱۷			۱۹		
۲۰			۲۱	۲۲	
۲۳			۲۴	۲۵	۲۶
		۲۷		۲۸	
۲۹	۳۰	۳۱			۳۲
۳۳			۳۴		

افقی ۱: مکعب کامل است و با مقلوبش برابر می باشد .
 ۴ - مجموع رقمهایش مربع کامل است ، مجموع رقمهای یکان و دهگان آن سه برابر رقم سدگان آن است و تفاضل رقم دهگان بر رقم یکان نصف رقم سدگان است . ۷ - توان پنجم کامل است . ۸ - رقمهایش از چپ به راست تصاعد حسابی می سازند و مجموع آنها ۱۰ است . ۱۰ - دو برابر جذر عدد ۳ قائم . ۱۱ - به اندازهٔ چهار برابر عدد ۱۰ افقی از عدد ۸۵ افقی بزرگتر است . ۱۲ - مجموع رقمهایش یازده است و برابر است با : $abb = 2x^2$. ۱۵ - مجموع رقمهایش مکعب کامل است و تفاضل رقم دهگان بر رقم یکان آن مربع کامل است . ۱۶ - همان عدد ۱۲ افقی . ۱۸ - دو برابر عدد ۴ افقی .
 ۱۹ - همان عدد ۱ افقی : ۲۵ - ده برابر عدد ۳۲ افقی .
 ۲۲ - مقلوبش که يك رقمی است ۲۷ واحد از خودش کوچکتر است . ۲۳ - خمس آن مجذور کعب عدد ۱ افقی است . ۲۴ - جذر عدد ۳ قائم . ۲۵ - چون به رقم سدگان آن يك واحد اضافه شود چهار برابر عدد ۳۴ افقی بدست آید .
 ۲۷ - عددی است زوج و به صورت $a(3a)(2a)a$. ۲۹ - کعب عدد ۱ افقی . ۳۱ - چون با ۸۵۳۴ جمع شود عددی با چهار رقم متساوی حاصل شود . ۳۲ - دو برابر عدد ۲۹ افقی . ۳۳ - چهار

۱	۵	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲	۳	۴	۶	۳		۱۱	۴	۷	۳
۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳
۴						۱۴	۳	۲	۷
۱۵	۶	۴	۶			۱۵	۶	۴	۶
۱۶	۳	۲	۶			۱۶	۳	۲	۶
۱۷	۱	۶	۱			۱۷	۱	۶	۱
۲۰	۱	۶	۳	۰	۲۱	۹	۳	۳	۸
۲۲	۶	۲	۳	۳	۲۲	۶	۲	۳	۳
۲۹	۸	۰	۱	۰	۳۱	۰	۶	۶	۶
۳۲	۹	۰	۱	۸	۷	۰	۳۳	۰	۲

PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 43 : The pages of a book are numbered consecutively from 1 to n . Two bookmarks are placed so that the number of digits used to number the pages in each of the three sets of pages is the same. The three smallest values of n for which this is possible are 3, 6, and 9. What is the next smallest value of n , and where are the bookmarks placed? How did you obtain your answer?

Solution: The book is divided into three sections, each of which contains the same number of digits. The number of pages in the first section exceeds 9, and (if it does not also extend into the hundreds) they contain an odd number of digits. Thus, the second section is located partially in the tens and partially in the hundreds. Let x equal the number of pages in the first section beyond 9. Let y equal the number of pages in the second section beyond 99. Then $9+2x=2(90-x)+3y$; or $x=(171+3y)/4$. The least integral value of y which will make x integral is 3. Hence $(x,y)=(45,3)$. Thus there are $9+45=54$ pages and $9+2(45)=99$ digits in the first section, and $(90-45)+3=48$ pages, and, as required, $2(45)+3(3)=99$ digits in the second section. We are now in the hundreds. The next 33 pages will contain 99 digits, as required. Thus the book contains a total of $54+48+33=135$ pages.

Problem 44 : In a new variation of the game of NIM two players A and B start with a pile of N matches and alternate in removing them. A, playing first, removes any number of matches from one to not more than half the pile.

Alternating thus, with the additional rule that if a single match remains it may be removed, the one who removes the last match is the winner.

- (a) Show that with best play on both sides, A will win when $N=1, 3, 4$ or 6; B will win when $N=2$ or 5.
- (b) What are the next two larger values of N for which B will win? Generalize.
- (i) When $N=1$, A removes 1 and wins.
- (ii) When $N=2$, A (must) remove 1, leaving $N=1$, and B the first move. Therefore B wins as in (i).
- (iii) When $N=3$, A (must) remove 1, leaving $N=2$. Thus A—now the second player—wins as in (ii).
- (iv) When $N=4$, A removes 2 matches and wins as in (ii).
- (v) When $N=5$, A removes 1 or 2 matches, leaving $N=4, 3$. Thus B wins as in (iv), (iii).
- (vi) When $N=6$, A removes 1 match, leaving $N=5$, and wins as in (v).

B- If N_1, N_2, \dots, N_x are the first x winning positions, $N_{x+1}=2N_x+1$. Likewise $N_x=2N_{x-1}+1$. Hence $N_{x+1}=2^2N_x+3$. Continuing in this way, we obtain ultimately $N_{x+1}=2^xN_1+2^x-1$. But N_1 is the first winning value for B, viz. 2. Therefore, $N_{x+1}=2^{x+1}+2^x-1$.

Editor's Comments: (1) It is recommended that every solver complete the details of this proof. (2)

$N_{x+1}=2^{x+1}+2^x-1=2^x(2+1)-1=3 \cdot 2^x-1$,
a formula found by observation by many solvers.

گروه فرهنگی جاویدان

برای کلاسهای کنکور و ششم طبعی و ریاضی

نگهدار تمام نمر

فنز - بزرگ - علوم - کت و نذر

با کادر آموزشی زیر ثبت نام می نماید

دکتر اناری - فرزاد	} فیزیک و شیمی	غلامرضا بهنیا	} ریاضیات
رهبان - گلنابابا پور		مهندس محمود خونی	
قلی پور - میر حسینی		فصیحان	
مجدی		مهدی مقصری	
نوبر		قراکزلو	
تهوری	مسعود مجدی		

دکتر جابگیر	} زبان و ادبیات	ثابتی اشرف	} طبیعی
سپهر - نصر الله		نصیری انصاری	

نشانی } ۱- خیابان شهباز چهارراه پهلوی کوچه پاشا نجر جنوب دانشگاه هنر تهران پلاک ۴۷ تلفن ۴۴۳۷۹
۲- خیابان مسیر چهارراه وثوق آفرینگاه مسیر تلفن ۹۵۵۴۶۳