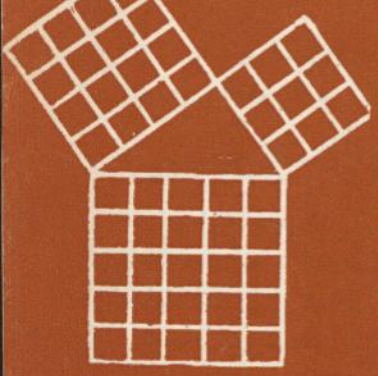
دورهٔ پنجم ـ شمارهٔ
۵
شمارهٔ مسلسل
۵۲
بهمن
۱۳۴۷

یکان
مجلهٔ ریاضیات

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots\dots + x^n$$



بها : بیست و پنج ریال

دراین شماره:

از میان نامه‌های رسیده

آقای **مهندس خلیل خوئی** نوشته‌اندکه‌درصفحهٔ ۲۱۸ یکان شمارهٔ ۵۱ نام **ثابت‌بن‌قره** به لاتین یعنی به صورت **Thabitben Korrah** نوشته شده که خیلی نامانوس بنظر می‌رسد.

***

بعد از انتشار هر شمارهٔ مجله نامه‌های زیادی واصل می‌شود مبنی براینکه مسائلی که دربخش مسائل برای حل به نام اشخاص چاپ می‌شود قبلا دربعضی کتابهای حل‌المسئله‌چاپ ایران مندرج می‌باشد. از ابتدای انتشار مجله سعی براین‌بوده و فعلا هم چنین کوششی درکار است ، که از درج این قبیل مسائل در مجله خودداری شود . اما با وجود کتابهای متعدد حل‌المسئله و با توجه به اینکه مسائل مندرج در این کتابها همه ترجمهٔ از کتابهای خارجی است کوشش مزبور آنطور که باید به موفقیت نمی‌انجامد . اشخاصی مسائلی‌را از یك کتاب خارجی ترجمه می‌کنند و این مسائل به نام آنها درمجله چاپ می‌شود حال اگر این اشخاص خبر نداشته باشند که مسائل مزبور قبلا دریك‌کتاب حل‌المسئله چاپ شده است‌گناهی متوجه ایشان نیست .

دربارهٔ مسائل مندرج درمجله به‌شرح زیرتذکر داده شده است‌که درکتابهای چاپ ایران مندرج می‌باشند :

حسن گل محمدی : مسائل ۴۸/۲۴ - ۴۸/۲۶ - ۴۸/۴ - ۴۹/۲۳ - ۴۹/۷ - ۵۰/۲۹ - ۵۰/۳۰ - ۵۱/۲۶

امرعباس جباری : مسئلهٔ ۵۱/۶ .

ابراهیم ذوالقدری : مسئلهٔ ۵۰/۲۹ .

محمدعلی موحدیان : مسئلهٔ ۴۸/۳۷

جعفر آقایانی چاوشی : مسئلهٔ ۴۹/۱۷

دربارهٔ مسئله‌های ۵۰/۲۹ و ۵۰/۳۰ تذکر داده شده که به ترتیب جزء مسائل مسابقهٔ ورودی‌دانشکدهٔ فنی‌ودانشکدهٔ پلی‌تکنیك بوده است .

***

در زیر قسمتی‌ازنامهٔ‌آقای **علی‌اکبر آموزگار** خطاب به مدیر مجله نقل می‌شود :

.... عموماً درایران‌یا درکلیهٔ کشورهای‌جهان مؤسساتی ایجاد می‌شودکه در ابتدای‌کار جلوه‌گری خوبی می‌کنند ونظر مردم را به خود جلب می‌کنند و وقتی‌که درجلب‌نظرمردم‌موفق شدند دست به خرابکاری می‌زنند که این امر در بارهٔ شما نیز صادق است ... شما قرار گذاشته بودید مسائلی را که در کتابهای حل‌المسئلهٔ ایرانی وجود دارد در مجله چاپ نکنید اما مسئلهٔ ۵۱/۳۴ در کتاب حل‌المسئلهٔ هندسهٔ ... عیناً وجود دارد .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

هرماه یك‌بار منتشر می‌گردد

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

دورهٔ پنجم ـ شمارهٔ پنجم ـ شمارهٔ مسلسل : ۵۲

بهمن ۱۳۴۷

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : **عبدالحسین مصحفی**

مدیر داخلی ، **داود مصحفی**

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانکه صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume V, number 5, Jan. 1969

subscription : **$3**

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

اجابت دعوت استاد

پیشنهاد استاد هشترودی دربارهٔ اقدام به تشکیل انجمن ریاضی که درشمارهٔ گذشتهٔ یکان درج شد از طرف بسیاری از محافل علمی وعلاقمندان به علوم ریاضی حسن استقبال گردید. برای اینکه انجمن بر اساس صحیح بنا شود ، از طرف مجلهٔ یکان نامه‌هایی حضور استادان و بسیاری از دبیران ریاضی که نشانی آنان در اختیار بود ارسال گردید وازایشان تقاضا شد که در این باره نظر خود را مرقوم فرمایند. تقاضای مزبور به این وسیله تجدید می‌شود و از همهٔ علاقمندان مخصوصاً دبیران ریاضی دعوت می‌شود که ضمن اعلام همکاری، نظریات خود را مرقوم دارند.

برای تشکیل انجمن ریاضی ، اقدام مجدانه ودسته جمعی همهٔ آنها که به نحوی با آموزش ریاضیات سرو کار دارند لازم می‌باشد.

عبدالحسین مصحفی

نویسندهٔ این مقاله ، خانم Dr. Gertrude Blanch ریاضیدان ارشد آزمایشگاه تحقیقات فضائی Wright Patterson واقع در پایگاه نیروی هوائی اهایو است . وی مقالاتی در زمینهٔ آنالیز عددی و تئوری و جدول بندی توابع Mathieu نوشته است . مقالهٔ قبلیش تحت عنوان «محاسبات عددی کسرهای مسلسل» در شمارهٔ اکتبر ۱۹۶۴ مجلهٔ SIAM انتشار یافت . مقالهٔ حاضر نیز درشمارهٔ مه ۱۹۶۵ مجلهٔ the Mathematics Student Journal بچاپ رسیده است . وی درسال ۱۹۳۲ از دانشکدهٔ Washington Square واقع در دانشگاه نیویورك لیسانس گرفت و در ۱۹۳۵ به اخذ دکترای ریاضی از دانشگاه Cornell نائل شد . در مارس ۱۹۶۴ جایزهٔ Federal Woman به او تعلق گرفت که این جایزهٔ علمی معمولاً در هر سال به یك زن داده می‌شود تا کنون شش زن این جایزه را گرفته‌اند .

زنان ریاضیدان

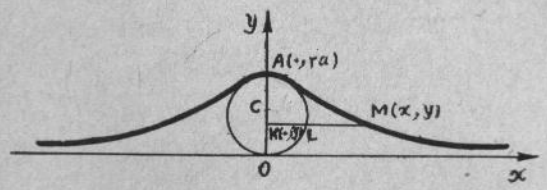
ترجمه و تنظیم : **یعقوب گنجی**

دانشجوی ریاضی دانشسرایعالی تهران

گاهی سؤال می‌شود که : «آیا در ریاضیات جائی برای زنان وجود دارد ؟» اصولا مطرح شدن این سؤال در درجهٔ اول به خاطر آن است که اکثریت مردم معتقدند که زن ذاتاً از نظر ظرفیت جمجمه و استعداد و تفکر با مرد فرق دارد و حتی گروهی چنین ابراز می‌دارند که همانگونه که زادن فرزند مخصوص زنان است اندیشه‌های شگرف و تفکرات عالی وابسته به مردان می‌باشد. پذیرش این عقیده یقیناً تفاوت و اختلاف کامل توانائیهای مرد و زن را موجب می‌شود یعنی براساس آن ، یکی می‌اندیشد و تصمیم می‌گیرد و یا در مورد مسئله‌ای نظریه‌ای ابراز می‌دارد و دیگری به کارهای خانه و خریدهای خانواده می‌رسد یا دستخطها و نوشته‌های شوهر دانشمندش را ماشین می‌کند .

اگر کسی دقت نظر علمی نسبت به مسئلهٔ توانائیهای فطری زنان داشته باشد باید حقایقی را که در این مورد وجود دارد دقیقاً مطالعه و تعبیر و تفسیر نماید . در این مورد آنچه مسلم است بعضی از زنان مرجع تصمیمات سیاسی و اقتصادی مهم و زیرکانه‌ای بوده‌اند هرچند از هیچ طریق خدمتی به ادبیات و یا تآتر ما نکرده‌اند .

راجع به زنان ریاضیدان باید گفت که نه تنها در حال حاضر در اروپا و آمریکا زنان ریاضیدانی یافت می‌شوند بلکه ازدیر زمان که مطالعهٔ ریاضیات آغاز شده ، حتی از دوران یونانیان باستان، گاهگاهی زنان ریاضیدانی وجود داشته‌اند . در قرن هیجدهم **ماریا آگنسی**(۱) فیلسوف و ریاضیدان به شهرت قابل ملاحظه‌ای رسید . وی که برطبق دایرةالمعارف به سن کمال ۸۱ سالگی رسیده کسی است که برروی منحنی نمایش تغییرات تابع $x^2y=4a^2(2a-y)$ مطالعات عمیقی نموده است و به همین مناسبت این منحنی را «افسون آگنسی» (Witch of Agnesi) می‌نامند .



1 -- Donna Maria Gaetana Agnesi

[اگر در صفحهٔ مختصات نقطهٔ $A(0 \text{ و } 2a)$ را مشخص کرده به قطر OA دایره‌ای رسم کنیم واز هر نقطه مانند K واقع بر OA عمودی اخراج کنیم تا دایره را در L قطع کند مکان هندسی نقاطی مانند M واقع برامتداد KL را افسون اگنسی گویند هرگاه بین نقاط O ، A ، K ، L ، M رابطهٔ $\frac{\overline{OK}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{KM}}$ برقرار باشد که با توجه به‌این‌رابطه و معادلهٔ دایرهٔ مذکور ، معادلهٔ منحنی به‌صورت :

$$x^2y = 4a^2(2a - y)$$

بدست می‌آید که اینجانب به دلائلی آن را «منحنی زندگی» نامیده‌ام . مترجم].

من‌دراینجا مقالهٔ فاضلانه‌ای راکه آقای **آرچی‌بالد**(۱) نوشته‌و به‌سال ۱۹۳۸ در ماهنامهٔ ریاضیات امریکا (دورهٔ ۲۵ صفحات ۱۳۶ تا ۱۳۹) بچاپ رسیده است می‌آورم که در آن راجع به‌دونفر از زنان ریاضیدان و ستاره شناس صحبت‌شده‌است وآن مقاله چنین آغاز می‌شود :

در این مقالهٔ مختصر من می‌خواهم خط مشی پیشرفت و ترقی دو زن را در دورهٔ زندگانی در فاصلهٔ سالهای ۱۸۷۰ تا ۱۹۳۵ بررسی وتشریح کنم . علاوه برآنکه بیوگرافیها به‌خودی خود جالب هستند تجزیه و تحلیل این پیشرفتها ، موقعیتها و فرصتهائی‌راکه‌کم‌کم موجب توسعه ، ترقی و نمو فکری می‌شود به‌ما خواهد شناساند و در تعبیر و تفسیر و درك زمانمان به ما کمك خواهد کرد .

سونیا کوالفسکی (۲) (۱۸۵۰ - ۱۸۹۱) در شهر مسکو به‌دنیا آمد. وی‌دختریك‌ژنرال‌روسی به‌نام **کروکفسکی**(۳) بود . زندگی او از خیلی جهات آئینهٔ تمام نمای این دورهٔ مهم تاریخی است‌وگذشته از نکاتی‌که برای ریاضیدانان دارد از نظر مطالعات اجتماعی بسیار جالب است . وی در شرح‌حال خود به‌نام «خاطرات‌کودکی» می‌نویسد‌که سالهای کودکیش را در ایالت خانوادگیش در «پالی بینو ، وی‌تبسك» (۴) گذرانده است و تعلیم و تربیت او برعهدهٔ معلمهٔ سرخانه و دختران پرستار بوده است . اوبه‌این مسئله توجه کرده بود که مادرش خواهرخوشگل و برادرش را(که اولی ۶ سال از او بزرگترو دومی ۳ سال از اوکوچکتر بوده) بیشتر از او دوست می‌دارد وی مانند هردختر کوچك دیگری خودبین و حساس بوده است و شایداحساس احتیاج به‌جبران این نقیصه بودکه او را به‌فکر کارهای‌بزرگ‌و فکری انداخت . هرچندکه این چنین‌کارها از شخصیت او در آن حال بعد بنظر می‌رسید . در زمان کودکی استعداد ریاضیش کافی بود . پدرش‌که مردی محافظه کار بودو اعتقادات‌صریحی‌در بارهٔ «نقش زن در جامعه» داشت تشویق شده بودکه یك معلم‌خصوصی ریاضی برای سونیا استخدام‌کند .این معلم یعنی آقای **ماله‌ویچ** (۵) خودش دانشمند مهمی نبود ولی به‌هرحال‌معلم‌و ریاضیدان‌قابلی‌بودوبه‌خوبی ازهوش‌خدادادشاگرد کوچکش‌آگاهی داشت . سونیاکه همواره مورد تشویق وتمجید معلمش قرار می‌گرفت به‌خوبی پیشرفت می‌کرد تا آنجا که در پانزده سالگی به‌مطالعهٔ‌حساب دیفرانسیل و انتگرال پرداخت.

دورهٔ خیال انگیزی‌که برزندگی سونیا سایه افکنده بود ممکن‌است بر بنیاد مقیاسهای امروزی‌کاملا مضحك بنظر برسد زیرازمان جنبش نیهیلیستی (۶) در روسیه بود که روشنفکران جوان به‌خاطرایجادجامعهٔ آزاد تلاش‌می‌کردند . در آن روزها برای دختران مجرد تحصیل در خارج غیر ممکن بود . بدین علت عادت عجیبی در بین طبقهٔ ثروتمند عمومیت یافت ، بدین معنی‌که وقتی دختر خانمی می‌خواست در خارج تحصیل کند ترتیب ازدواجی افلاطونی را بین او و جوانی دلسوز می‌دادند که این جوان اجبارداشت تا پایان تحصیلات دوست دخترش در آلمان یا فرانسه زندگی‌کند و سپس باید به آرامی از هم جدا شوند . وقتی سونیا تازه به‌سن هیجده سالگی رسیده بود به‌کمك خواهر و دوستش با دانشجوی جوانی بنام **ولادیمیر-کوالفسکی**(۷) طرح دوستی ریخت سپس به این دانشجوی خوش‌آتیه‌که در رشتهٔ فسیل شناسی دانشگاه «سنت‌پترزبورگ(۸) تحصیل می‌کرد پیشنهادکردکه او با یکی از آنها ازدواج‌کرده آنها را باخود به‌خارج ببرد . علی‌رغم تعجب آنها کوالفسکی گفت به‌شرطی پیشنهادشان را می‌پذیردکه باخود سونیا ازدواج کند و این مسئله‌ای را برای پدر سونیا ، ژنرال محافظه کار ، بوجود آوردزیرا او عقیده داشت‌که نبایدقبل از نامزدی‌خواهر بزرگتر ، با ازدواج خواهر کوچکتر موافقت‌کند . خود سونیا

I. R. C. Archibald 2. Sonya Kovalevsky 3. Krukovsky 4. Palibino ، Vitebsk 5. F. F. Malevitch 6 . Nihilist movement 7 . Vladimir Kovalevsky 8 . Saint-Petersburg .

بیش ازهرکسی از انتخاب ولادیمیر وسرسختی او در این‌مورد متعجب بود تا اینکه بالاخره والدینش راضی شدند. بزودی‌پس از ازدواج‌درسال ۱۸۶۸ سونیا وشوهرش‌عازم «هایدلبرگ»(۱) آلمان شدندوسونیا درآنجا به‌تحصیل‌فیزیك و ریاضیات‌پرداخت وشوهرش مطالعاتش را در فسیل‌شناسی ادامه داد . وی‌که‌شاگرد **هلمولتز**(۲) و **کیرشهف**(۳) بود به عنوان دانشجوئی با استعداد فوق‌العاده مشهورشد . پس از دوسال به وی توصیه شد که مطالعات‌دیگری‌را زیرنظر **ویرشتراس**(۴) که درآنزمان ریاضیدان راهنما در آلمان وشاید در اروپا بود ـ شروع‌کند ، درهمین مواقع بودکه شوهرش نیز برای تکمیل تحصیلاتش به دانشگاه «جنا» (۵) رفت .

دانشگاه برلن ، که ویرشتراس استاد آنجا بود ، دانشجویان زن را نمی‌پذیرفت . سونیا برای شناساندن خود به ویرشتراس به سفارشنامه‌هائی متوسل شد و از وی خواهش‌کرد که او را به عنوان شاگردی خصوصی بپذیرد . ویرشتراس مسائلی را به او داد تا آنها را حل‌کند و به اوگفت‌که پس از اتمام حل آنها نزد او بازگردد . ویرشتراس بعداً اظهارداشت که او تصور نمی‌کرده است‌که سونیا بتواند ازعهدهٔ حل مسائل برآید زیرا بعضی از مسائل برای شاگردان پیشرفته طرح شده بود ولی با کمال تعجب یك هفته بعد سونیا با حل مسائل برمی‌گردد .

ای. سی. لفلر(۶) نویسندهٔ بیوگرافی‌سونیا این‌ملاقات را چنین توصیف می‌کند : «با نهایت تعجب نه تنها همهٔ عملیات درست بود بلکه راه‌حلها نیز بطور بارزی واضح واصلی‌بود... ویرشتراس که خیلی جوان نبود ناگهان احساس علاقهٔ عجیبی نسبت به این دختر خانم پیدا کرد . نبوغ سونیا به درجه‌ای بودکه بزودی حتی درکنار قدیمی‌ترین وپیشرفته‌ترین‌شاگردان استاد قرارگرفت.ازآن ساعت به‌بعدریاضیدان بزرگ‌مادام‌العمر صمیمی‌ترین دوست سونیا وبهترین مشاور او بود .»

این خانم جوان ، موقع کار بر روی یك مسئلهٔ ریاضی دارای طاقت و بردباری بیمانندی بود . ساعتها بی‌حرکت‌پشت میز تحریرش می‌نشست وهیچ چیز دیگری جز مسئله او را به خود مشغول نمی‌داشت تا کارش را به پایان برساند . در سال ۱۸۷۴ ، وی سه رساله به دانشگاه گوتینگن (۷) ارائه داد تا بدین وسیله بدون امتحان شفاهی به او درجهٔ دکترا اعطا شود به سبب آنکه اطلاعات او از زبان آلمانی خیلی‌کم بود. یکی از این‌رساله‌ها که‌تحت عنوان«دربارهٔ تئوری معادلات‌دیفرانسیل جزئی» بود واقعاً قابل توجه می‌نمود و نتایج مهمی را شامل می‌شدکه حتی امروزه نیز مورد استعمال دارند . به این‌ترتیب به او درجهٔ «ابسنتیا»(۸) داده شد و این نشانی است‌که تنها به خاطر شایستگیهای فوق‌العاده اعطا می‌شد . در این اثناء شوهرش نیز مطالعاتش را در دانشگاه جنا تکمیل کرد . وی رسالهٔ قابل توجهی نوشته بود و از همین‌جا بودکه به عنوان یك دانشمند مهم شناخته شد .

خانوادهٔ کوالفسکی (سونیاو ولادیمیر) به روسیه‌بازگشتند در این مدت سونیا روحاً و جسماً خسته شده بود و حالا دیگر اشتیاقی به‌کارهای علمی نداشت . با وجود اینکه شخصیت او با ریاضیات پی‌ریزی شده بود او اکنون وارد چرخ پرزرق وبرق جامعه می‌گشت و دایره‌ای‌که او را دربرگرفته بود بیشترادبی می‌نمود تا علمی . او خود را درمسیر کارهای ادبی انداخت . به نوشتن مقالات در روزنامه‌ها، شعر وشاعری ونقد آثارتآتری پرداخت منتها هرگز خود را با آثارش معرفی نکرد و همهٔ مقالاتش را بدون امضاء نوشت . وی داستانی هم به نام **Privat-docent** نوشت که در آن زندگی در یك شهر دانشگاهی‌کوچك را درآلمان شرح می‌دهد . به قول نویسندهٔ بیوگرافیش «گوئی پیمان همکاری با ادبیات بسته بود» . خود سونیا راجع به علاقمندیش به حرفهٔ ادبی در نامه‌ای به یکی از دوستانش چنین می‌نویسد : «درسرتاسر زندگیم، من نتوانسته‌ام بفهمم‌که نسبت به ادبیات کشش بیشتری دارم یا ریاضیات بیشتر مرا مجذوب خود می‌کند . به همان نسبت که مغز من رشد می‌کند تفکرات انتزاعی ، مجرد و خشك برایم کسل‌کننده‌تر می‌شود . آنگاه فوراً به سمت مشاهدات زندگی‌کشانده می‌شوم، برای اینکه آنها را بیان‌کنم وبرعکس انتظار ، هرچیززندگی در این حال برایم بی‌اهمیت و بی‌مزه جلوه می‌کند بجزابدیت وقوانین تغییرناپذیر علم‌که مرا به سوی خود سوق می‌دهند . خیلی امکان دارد که من یکی از این دو رشته را به انجام

1- Heidelberg 2- Helmholtz 3- Kirshhoff 4- Weierstrass
5- Jena 6- A.C.Leffler 7- Göttingen 8- Absentia

برسانم اگرچه منحصراً خود را وقف آن کنم معهذا نمی‌توانم هیچیك از آنها را بکلی کنار بگذارم» .

در ۱۸۷۶ موقعی که هنوز در دنیای ادبیات سیرمی‌کرد با**میتاگ لفلر** (۱) ملاقات‌کردکه اونیز زیردست ویرشتراس تحصیل کرده بود . این آشنائی نتایج نیکوئی برای هردوی آنها ببار آورد . لفلر عمیقاً تحت تأثیر سرعت انتقال سونیا قرارگرفت وموقعی‌که به‌دانشگاه جدیدالتأسیس استکهلم‌برگشت واستادریاضیات آنجاشدگامهائی‌برداشت تا «فروکوالفسکی» (۲) را به عنوان «پریوت دوسنت» درآنجا استخدام‌کنند . پریوت دوسنت معلم خصوصی و ناظر دروس است که حق‌الزحمه‌اش از طرف شاگردانش پرداخت می‌شود . به‌هرحال اوعضوی است‌که درطبقهٔ کارمندان دانشگاه قرار می‌گیرد و مقامش شاید در حد یك مربی ، یك مشاق یا یك راهنما باشد . سونیا به پذیرش شغل تدریس اظهار تمایل می‌کند . اومدتی از دنیای ریاضیات برکنار بوده است وبه همین‌جهت از میتاگ‌لفلر خواهش می‌کند که این مسئله به بعد موکول شود تا اوبتواند دومقاله‌ای را که برروی آنها کار می‌کند به اتمام برساند . وی تصور می‌کرد که این مقالات موجب شهرت و اعتبار او شده و احترام او را در استکهلم بیشتر خواهدکرد .

در همین اثناء در زندگی شخصی او تحولات شگرفی صورت‌گرفت . او در ۱۸۷۸ دختری به دنیا آورد و این همان زمانی بودکه تمکن مالی قابل ملاحظه‌ای داشتند . اما ازآنجا که او و شوهرش هیچکدام کار آزموده نبودند به زودی همهٔ ثروتشان را ازدست دادند . در نتیجه سوء تفاهمی بین آنها بوجود آمدکه آن تا اندازه‌ای به‌خاطر مخارجی بودکه سونیا توقع داشت و تا اندازه‌ای به سبب افکار اقتصادی غیرطبیعی‌بود که شوهرش‌گرفتار آنها می‌بود . آنها ازهم جدا شدند و سونیا به پاریس رفت تا مطالعات ریاضیش را ازسر بگیرد .

دوسال بعد شوهرش نیز بطور غم‌انگیزی مرد و این بدبختیها ونگرانیهای شخصی موجب شد که در تکمیل مقالاتی که قرار بود تا قبل از اوت ۱۸۸۳ بنویسد تأخیر افتد. آنگاه او به میتاگ لفلر نامه‌ای نوشت و از او چاره جست . لفلر از او خواهش‌کردکه به استکهلم بیاید ، او درنوامبرهمان‌سال به استکهلم رسید و تا آخرعمر درهمانجا بسر برد .

دانشگاه استکهلم اولین دانشگاه اروپائی بودکه به یك زن ریاضیدان شغلی داد و آنهم در زمانی‌که دانشگاه برلن به دختران دانشجو اجازهٔ ورود نمی‌داد . در همین استکهلم بود که سونیا با مؤلفهٔ سوئدی ! یعنی خانم **آناکارلتا لفلر**[3] خواهر ریاضیدان میتاگ لفلر ملاقات‌کرد ، در نتیجه دوستی گرمی بین آنها بوجود آمد تا آنجا که حتی در یك سلسله کارهای ادبی با هم تشریك مساعی کردند . [بیوگرافی جالب «سونیا کوالفسکی» بوسیلهٔ همین خانم «آناکارلتا لفلر» بعد از مرگ دوستش سونیا-نوشته شد . این اثر وسیلهٔ :

ای. ام. کلایو بیلی (۴) از زبان سوئدی به‌انگلیسی‌ترجمه شد وبوسیلهٔ «شرکت قرن» (۵) نیویورك در ۱۸۹۵ انتشاریافت «خاطرات کودکی» خود سونیا نیمهٔ اول این کتاب را تشکیل می‌دهد .]

درخلال اولین سالی‌که درسوئد بود نزد گروه کوچکی از ریاضیدانهای برگزیده یك سخنرانی‌کردکه در شنوندگان اثرات‌عمیقی نمود.در۱۸۸۶ درپاریس‌به‌وی«جایزهٔ‌برودین» (۶) اعطا شدکه این نشان افتخاز بزرگی است و به خصوص‌کار وی آنچنان ارزشمند وشایسته بودکه جایزه‌ای که به او داده شد دوبرابر حد معمول بود . درآن موقع معلوم نبود که برندهٔ جایزه یك زن است بطوری‌که مقالات با اسم مستعار بررسی‌شده بود . [«دربارهٔ حالت خاص مسئلهٔ چرخش جسم سنگین به دور نقطهٔ ثابت»] بدین ترتیب شهرتش بین‌المللی شد و دانشگاه استکهلم که قبلا وی را به سمت استادی منصوب کرده بود بعد ازنشانها و درجاتی‌که ازخارج دریافت‌کرد درسال ۱۸۹۰درجهٔ استادیش را ثابت و همیشگی نمود . با این حال ، این دورهٔ سراسر موفقیت و افتخارآمیز ، دورهٔ سعادتمندی سونیا نبود زیرا او آرزو داشت که‌یك زندگی‌اجتماعی‌و روانی‌هیجان‌انگیز داشته باشد که در شهر کوچکی چون استکهلم برایش امکان آن نبود .

ازنظر زندگی شخصی ، وی در چندین فرصت دلبستگی عمیقی به برخی از مردان پیدا کرده بود ولی در هربار طرز فکر رمانتیك افراطی او موجب گسستن رشتهٔ زندگی آنان

1- Mittag-Leffler
2- Fru Kovalevsky
3- Anna Carlota Leffler
4- A.M. Clive Bayley
5- Century Co
6- Prix-Barodin

گردیده بود . وی امیدوار بودکه دانشگاه سنت پترزبورگ او را به عنوان رسمی استخدام خواهدکرد . این موجب می‌شدکه به او حقوق کلانی داده شود و او را قادر به زندگی درپاریس بنماید . اما گرچه در این مورد از اوپذیرائی وتجلیل بعمل آمد تنها به عنوان عضوی افتخاری منصوب گردید که در واقع افتخار بزرگی بود اما حقوق و مواجبی را به دنبال نداشت . به همین جهت بودکه او از ۱۸۸۳ تا آن موقع سال به سال به سوئد برمی‌گشت و آنهم ضمن مسافرتهائی که هربار با مشکلات بیشتری توأم بود . در آخرین سفرش در ۱۸۹۱ تب شدیدی کرد بطوری که چند روز بعد جان به جان آفرین تسلیم نمود .

سونیا تا حد زیادی فرزند زمان خویشتن بود . این دورانی بودکه **ایبسن**(۱) «خانهٔ عروسك»(۲) را نوشت وعصری بودکه **سوزان بی. آنتونی** (۳) در امریکا به خاطر حقوق مسلم زنان سخنرانیهای هیجان‌انگیزی می‌نمود. همچنین‌می‌توان آن‌را دورهٔ ارتباطات پاریس نامیدهمانگونه که‌وی بطورغیرمستقیم بیش ازخواهر بزرگترش گرفتار آن می‌بود . وی اگر دختر یك دهقان یا بازرگان متوسط می‌بود استعدادهایش‌رشد وتوسعه نمی‌یافت . ازطرف دیگر اگر او سی‌سال دیرتر به دنیا می‌آمد تحت تأثیر «انقلاب شیوی» (۴) قرار می‌گرفت ونبوغ‌ریاضیش محیط نامناسبی برای شکفتن داشت . اینها یك سلسله افکار و تحقیقات نظری دربارهٔ وی هستند . بیوگرافی او که همانطور که قبلا تذکر دادیم وسیلهٔ ای.سی.لفلر نوشته شد در حکم یك شاهکار است‌که با دست نویسنده‌ای بزرگ و دوستی صمیمی به رشتهٔ تحریر درآمده است . این کتاب مهمتر از داستان «زنی با استعدادهای استثنائی» است و در واقع شرح روشنی است از شخصیتها ، افکار و عقایدی که در این دوره سرتاسر اروپا را فرا گرفته بود .

حال می‌خواهم قسمت دیگری از تاریخ را بررسی‌کنم و از شخصیتی که شاید محصول انقلاب شیوی باشد صحبت‌کنم . **امی‌نوذر**[5] (۱۸۸۲-۱۹۳۵) دختر **ماکس نوذر**[6] شخصیت مشهورهندسهٔ جبری بود . برطبق دائرةالمعارف ، امی «مرکز مختصات» خانوادهٔ نوذر بود . ما در او شخصیت نادر دختری را سراغ داریم‌که کار پدر مشهورش را دنبال می‌کند و به علت شایستگی خود شخصیت بزرگی در رشته‌ای متفاوت با رشتهٔ پدرش می‌گردد . وی پس از رفع اشکالاتی‌که از طرف بعضی‌از اعضاء دانشکده برای زنان دانشگاهی بوجود می‌آمد در سال ۱۹۱۹ امتحانات «هبیلی تیشن»[7] راگذراند . [درجهٔ «هبیلی تیشن» در دانشگاههای اروپائی معمول است که به موجب آن شخص می‌تواند دردانشگاه تدریس‌کند. در آمریکانظیری برای آن وجود ندارد .] در ۱۹۲۲ درگوتینگن دانشیارگردید وتا ۱۹۳۳ در همان سمت باقی ماند و در این موقع‌که هیتلرظهور کرد از آنجاکه او یهودی بود آلمان را ترك‌کرد . وی سپس به دانشگاه «برین ماور»[8] در پنسیلوانیا رفت و در آنجا با استقبال اعضای دانشکده و دانشجویان روبرو شد . همان موقع بودکه امی نوذر به‌خاطر بسط تئوری جدید «حلقه‌ها وایدآلها» به شهرتی بین‌المللی رسیده بود. وی بدین ترتیب نفوذ زیادی پیداکرده و این نه تنها از طریق مقالاتش بوده است بلکه تا حدی به خاطر شاگردان با استعدادی بوده است‌که اورا احاطه کرده بوده‌اند. اگر سونیاکوالفسکی با دقت ، قدمهای معلمش ویرشتراس را دنبال کرد امی‌نوذر ، در مقایسهٔ بااو ، رهبر و توسعه دهندهٔ شاخهٔ جدیدی ازریاضیات بود. چه بسیارندکسانی که امروزه اورا ریاضیدانی درجهٔ اول‌می‌دانند.

در۱۹۳۶ نگارنده دختردانشجوئی راملاقات‌کردم که‌پس ازرفتن امی‌نوذر به دانشکدهٔ برین ماو درآن دانشکده تحصیل کرده بود. او امی را چنین توصیف می‌کرد که: « وی ازنظر ظاهری بطور مطبوعی چاق و خپل بود. علاقهٔ دوستانه‌ای به شاگردانش داشت ومی‌خواست آنهارا چابك‌و صریح‌الکلام بار آورد. اقامتش دراینجا متأسفانه خیلی‌کوتاه بود زیرا در اول عمرش در۵۳سالگی درگذشت .»

امروزه موفقیتهای زیادی برای‌زنان وجود داردکه حتی برای‌یك نسل پیش‌فراهم نبود . فی‌المثل امروزه دانشگاه برلن کاملا به‌روی‌زنان بازاست. لااقل یك زن عضو « انجمن سلطنتی بریتانیا» است وتعدادی از زنان نیزدر آمریکا استاد سازمانهای آموزشی مختلط [که پسر ودختربا هم درآنها تحصیل می‌کنند] هستند . استخدام زنان در مؤسسات جوان باختر میانه خیلی

بقیهٔ پائین صفحهٔ ۳۳۶

1- Ibsen 2- A doll's House 3- Susan B. Anthony 4- Shavian revolution
5- Emmy Noether 6- Max Noether 7- Habilitation 8- Bryn Mawr

در بارهٔ یك مسئلهٔ می‌نیمم

ترجمهٔ : **داوید ریحان**
دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

ترجمه از مجلهٔ سوئیسی : آموزش ریاضی

****

۱ـ موضوع مورد نظر عبارتست از مسئلهٔ مشهور زیر: A و B و C سه نقطهٔ مفروض و P نقطه‌ای متغیر از صفحهٔ ABC می‌باشد . مقدار می‌نیمم مجموع $PA+PB+PC$ چقدر است ؟

کوشیده‌ام که این مسئله را بوسیلهٔ روشهای مقدماتی بدون در نظر داشتن موقعیتهای مطلوبی که در آنها مقدار می‌نیمم حاصل است وبدون استفاده از نظریهٔ مقاطع مخروطی وهمچنین بدون استفاده از روشهای خاص هندسی حل کنم .

م. هادامار در یك رشته تمرینات کتاب هندسهٔ خود راه حلی برای این مسئله ارائه داده است ، اما روش وی هیچگونه ربطی با آنچه‌که ذیلا نقل می‌شود ندارد .

با بررسی راه حلهای مختلف مسئله به سادگی معلوم خواهد شد که راه حل زیر کاملا جدید است .

در بند اول بعضی احکام که در حل مسئله مورد استفاده است توضیح داده می‌شوند، از این‌جهت که دیگر احتیاجی به توضیح مجدد نباشد .

۲ـ طی پیرامون مثلث را در جهت ABC جهت مستقیم می‌خوانیم . هرگاه از نقطهٔ A خط غیر مشخص D و از B خط Δ را متقاطع با D رسم کنیم تاآنرا در P قطع کند بطوری که هرگاه D را حول P ودرجهت مستقیم به‌اندازهٔ $\frac{2\pi}{3}$ دوران دهیم روی Δ واقع شود، مکان P وقتی‌که D حول A می‌چرخد کمان در خور $\frac{2\pi}{3}$ مرسوم روی AB می‌باشد .

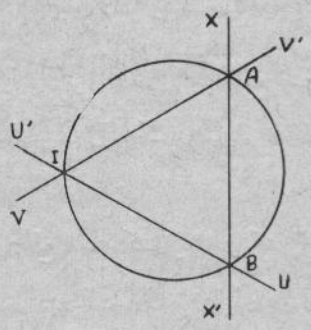
برعکس ، Δ در دورانی به‌اندازهٔ $\frac{2\pi}{3}$ ودر جهت معکوس بر D منطبق خواهد شد ومکان P کمان درخور $-\frac{2\pi}{3}$ مرسوم روی AB خواهد بود .

سه کمان درخور $\frac{2\pi}{3}$ که روی AB ، BC و CA بنا می‌شوند در نقطه‌ای مانند M و سه کمان درخور $-\frac{2\pi}{3}$ در نقطهٔ M_1 یکدیگر را تلاقی خواهند نمود و در واقع اگر مثلا M نقطهٔ مشترك دودایرهٔ اولیه باشد دردورانی به‌اندازهٔ $\frac{2\pi}{3}$ از MA به MB و در دورانی به اندازهٔ $\frac{2\pi}{3}$ از MB به MC می‌رسیم. بنابراین در دورانی به اندازهٔ

$$2\pi-\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=+\frac{2\pi}{3}$$

از MC به MA خواهیم رسید .

هرگاه $AIBI'$ (شکل ۱) کمان درخور زاویهٔ $\frac{2\pi}{3}$ مرسوم بوسیلهٔ P باشد ، تحقیق می‌کنیم درچه شرایطی نقطهٔ M داخل مثلث ABC واقع می‌شود. جهت دوران مستقیم زوایای $\frac{2\pi}{3}$ در جهت AIB است است که باید هم جهت با ABC باشد ؛



شکل ۱

بنابراین نقطهٔ C در نیم‌صفحه‌ای از AB است که شامل I' می‌باشد خط MC با MA و MB زوایای متساوی به قدر مطلق

$\frac{\pi}{3}$ می‌سازد که در دایرهٔ مزبور محاط‌اند . بنابراین MC از I وسط کمان بزرگتر AB می‌گذرد . خطوط IA و IB و کمان AI'B نیم صفحهٔ مورد نظر را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند . هرگاه C در X'BU یا V'AX باشد ، نقطهٔ M که روی IC واقع است ، روی کمان AI یا BI قرار دارد و در نتیجه در خارج ABC واقع است .

در صورتی که C در UBI'AV' واقع باشد ، M روی AI'B بین C و نقطهٔ برخوردش با AB واقع است ، در این صورت داخل ABC می‌باشد .

هرگاه C درقطعهٔ AI'B واقع باشد ، باز هم M روی AI'B قرار دارد ولی بین C و نقطهٔ برخورد با AB نیست و در نتیجه باز هم خارج ABC می‌باشد .

بنابراین ، وقتی‌که C در V'AX باشد زاویهٔ A از $\frac{2\pi}{3}$ تجاوز می‌کند ؛ زمانی که C در X'BU واقع باشد زاویهٔ B از $\frac{2\pi}{3}$ بیشتر است ؛ هنگامی‌که C در قطعه AI'B قرار داشته باشد زاویهٔ C از $\frac{3\pi}{3}$ تجاوز می‌کند ؛ موقعی که C در V'AI'BU باشد تمام زوایای مثلث کوچکتر از $\frac{2\pi}{3}$ می‌باشند .

بنابراین M وقتی داخل مثلث می‌باشد که تمام زاویه‌های مثلث از $\frac{2\pi}{3}$ کوچکتر باشند .

حال فرض می‌کنیم که $AIBI_1$ کمان در خور زاویهٔ $\frac{2\pi}{3}$ باشد وشرایطی‌را که M_1 باید دارا باشد جستجومی‌کنیم این نقطه روی کمان AI'B که آنرا Γ می‌نامیم واقع است . این بار C در نیم صفحه‌ای از AB که شامل I است قراردارد .

چون M_1 روی CI واقع است کافی است که C در AIB یا U'IV واقع باشد . درحالت اول ، زوایای A و B هر دو کوچکتر از $\frac{\pi}{3}$ می‌باشند و درمورد دوم، هر دو بزرگتر از آنند ، برای سایر موقعیتهای C یکی از زوایا بزرگتر از $\frac{\pi}{3}$ و دیگری کوچکتر از آنست .

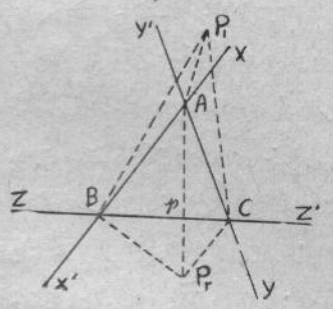
فرض می‌کنیم که θ مثلثی به زوایای α ، β و γ باشد به ترتیب بالا ثابت خواهد شد که کمانهای در خور زاویه‌های $+(\pi-\alpha)$ و $+(\pi-\beta)$ و $+(\pi-\gamma)$ و یا اینکه $-(\pi-\alpha)$ و $-(-\pi-\beta)$ و $-(\pi-\gamma)$ که روی AB و BC و CA رسم می‌شوند درنقطه‌ای مانند M یا M_1 متقارب می‌باشند و دراین حالت مثلث متساوی‌الاضلاع ABI جایگزین مثلثی متشابه با θ که در آن $IAB=\alpha$ و $BIA=\gamma$ و $ABI=\beta$ می‌باشد خواهد شد .

بنابراین ، M وقتی داخل مثلث ABC واقع است‌که: $C<\pi-\gamma$ و $B<\pi-\beta$ و $A<\pi-\alpha$ باشد. M_1 وقتی روی کمان Γ واقع است‌که داشته باشیم :

$$A>\alpha \text{ و } B>\beta \text{ یا } A<\alpha \text{ و } B<\beta$$

۳ـ برای جستجوی حداقل مجموع :

$$PA+PB+PC$$



می‌توانیم نقاط P را داخل یا روی محیط ABC فرض‌کنیم که مجموعهٔ این نقاط را نقاط ABC می‌نامیم: هرگاه P از نقاط ABC نباشد نظیر آن نقطه‌ای از ABC را بدست می‌آوریم که مجموعی کوچکتر از $PA+PB+PC$ داشته باشد .

هرگاه P به وضع P_1 در XAY' (ش ۲) واقع باشد داریم :

$$P_1B+P_1C>AB+AC \text{ و}$$

بنابراین

$$P_1A+P_1B+P_1C>AA+AB+AC$$

و می‌توانیم نقطهٔ A را نظیر P_1 انتخاب‌کنیم

هرگاه P به وضع P_2 داخل X'BCY واقع باشد در این صورت اگر p نقطهٔ برخورد AP_2 با BC باشد داریم :

$$P_2B+P_2C>pB+pC$$

$$P_2A+P_2B+P_2C>pA+pB+pC$$

بررسی حالتهای دیگر همانند دو حالت بالا می‌باشد .

در مورد مجموع :

$$aPA+bPB+cPC$$

که در آن a ، b ، c سه عدد ثابت و مثبت مفروض می‌باشند استدلالی مشابه وجود دارد . برای مجموع :

$$aPA+bPB-cPC$$

کافی است که نقاط ناحیهٔ $Y'ABZ$ را در نظر گرفت، دراین مورد ثابت می‌کنیم که می‌توانیم حدود استقرار نقطه را در نیم‌صفحهٔ π محدود به AB که شامل C نیست اختیار کنیم . در واقع هرگاه P_1 و P_2 دو نقطهٔ قرینه نسبت به AB باشند و P_1 در π واقع باشد واضح است که داریم :

$$aP_1A+bP_1B-cP_1C=$$
$$=aP_2A+bP_2B-cP_1C$$
$$<aP_2A+bP_2B-cP_2C$$

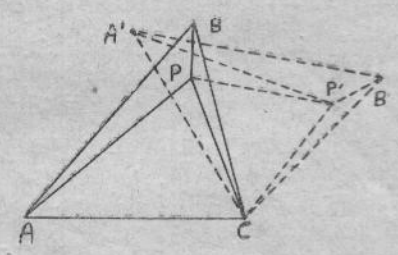
I

۴ـ فرض می‌کنیم : $A<B<C$ باشد (شکل۳)

ABC را حول C به اندازهٔ $+\frac{\pi}{3}$ دوران می‌دهیم تا به وضع $A'B'C$ درآید درآید در این صورت نقطهٔ P واقع در داخل ABC به‌صورت P' نمایان می‌شود . مثلث PCP' که درآن $PC=PC'$ است و زاویهٔ C مساوی $+\frac{\pi}{3}$ می‌باشد متساوی‌الاضلاع است . بنابراین :

$$PA+PB+PC=AP+PP'+P'B'$$

متحرکی که $APP'B'$ را در جهت از A به B' می‌پیماید حول C ابتدا به اندازهٔ زاویهٔ ACP که در جهت مستقیم است سپس به اندازهٔ $+\frac{\pi}{3}$ و بالاخره به اندازهٔ زاویهٔ $P'CB'=PCB$ در جهت مستقیم دوران می‌کند . بنابراین در مجموع به اندازهٔ $ACB+\frac{\pi}{3}$ دوران می‌کند .



در این صورت اگر زاویهٔ C مثلث ، از $\frac{2\pi}{3}$ تجاوز کند چون خط $APP'B'$ محیط بر خط ACB' است بنابراین زاویهٔ ACB' بزرگتر از π است . مقدار می‌نیمم وقتی حاصل می‌شود که P بر C قرار گیرد . این مقدار می‌نیمم ، مجموع دوتا از کوچکترین ضلعهای مثلث است، زیرا BA که روبروی بزرگترین زاویهٔ C می‌باشد بزرگترین ضلع مثلث است .

هرگاه C و بعد از آن A و B کوچکتر یا مساوی $\frac{2\pi}{3}$ باشند نقطهٔ M از ABC بقسمی وجود دارد که خطوط MA ، MB ، MC متوالیاً با یکدیگر زاویهٔ $\frac{2\pi}{3}$ بسازند هرگاه P بر M قرار گیرد داریم :

$$APC=\frac{2\pi}{3} \qquad CPP'=\frac{\pi}{3}$$

$$CP'B'=CPB=\frac{2\pi}{3} \quad و \quad PP'C=\frac{\pi}{3}$$

بنا براین A ، P ، P' و B بریك امتداداند : انطباق P بر M مقدار می‌نیمم را بدست می‌دهد و واضح است که این تنها موقعیت برای می‌نیمم می‌باشد و این مقدار می‌نیمم برابر است با :

$$AB'=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos(C+\frac{\pi}{3})}$$

چون C را بزرگترین زاویه اختیار کرده‌ایم باید دو حالت در نظر بگیریم ولی این موضوع در قسمت دوم استدلال تأثیری ندارد ؛ در حقیقت در عبارت فوق می‌توانیم تبدیلی دوری روی اضلاع و زوایای مثلث انجام دهیم .

۵ ـ م . مونتل به من یادآوری کرد که اثبات بالا در مورد مجموع

$$aPA+bPB+cPC$$

نیز قابل اجرا است .

حالتی را که یکی از مقایر a و b و c صفر باشد کنار می‌گذاریم و ابتدا فرض می‌کنیم مثلثی مانند θ به اندازه‌های ضلعهای a و b و c وجود داشته باشد . هرگاه α و β ، γ زوایای این مثلث باشند . فرض می‌کنیم که داشته باشیم :

$$A+\alpha<B+\beta<C+\gamma$$

و مثلث ABC را به‌اندازهٔ γ حول C دوران می‌دهیم وتجانس به مرکز C و به نسبت $\frac{a}{b}$ رامعمول‌می‌داریم‌تا مثلث $A'B'C'$ بدست بیاید ؛ در این تبدیل ، P که نقطه‌ای داخل مثلث ABC است به وضع P' در می‌آید و داریم :

$$P'B'=PB\times\frac{b}{a} \quad و \quad P'C=PC\times\frac{b}{a}$$

بنابراین چون زاویهٔ $PC'P$ مساوی با γ است مثلث PCP' با مثلث θ متشابه است و داریم :

$$PP' = PC \times \frac{c}{a}$$

$$AP + PP' + P'B' = \frac{aPA + bPB + cPC}{a}$$

اثبات به ترتیب سابق دنبال می‌شود . می‌نیمم C از $C+\gamma>\pi$ حاصل می‌شود و می‌نیمم مربوط به نقطهٔ M متعلق به سه کمان درخور زاویه‌های $+(\pi-\alpha)$ ، $+(\pi-\beta)$ و $+(\pi-\gamma)$ که به ترتیب روی BC ، CA ، AB رسم می‌شوند بدست می‌آید هرگاه داشته باشیم :

$$A+\alpha<\pi \text{ و } B+\beta<\pi \text{ و } C+\gamma<\pi$$

اکنون فرض می‌کنیم که مثلث θ وجود نداشته باشد و مثلا داشته باشیم :

$$c>a+b$$

می‌توانیم c_1 راکه درروابط $c_1<a$ و $c_1>b$ و $c_1<a+b$ صدق می‌کند بدست آوریم بطوری که مثلث به‌اضلاع a ، b و c_1 دارای زاویهٔ γ_1 مقابل به c_1 چنان باشدکه $C+\gamma_1$ از π تجاوز کند . بنابراین P در هرجا غیر از C که قرار داشته باشد داریم :

$$aPA+bPB+c_1PC>aCA+bCB$$

و چون c_1 کوچکتر از c است پس :

$$aPA+bPB+cPC>aCA+bCB$$

و می‌نیمم وقتی حاصل می‌شودکه P بر C واقع شود .

II

۶ـ فرض می‌کنیم A_1 ، B_1 ، C_1 نقاطی از MA و MB و MC و بین M با A و B و C واقع باشند و P نقطه‌ای مغایر با M باشد ، داریم :

$$PA<PA_1+AA_1 \text{ و } PB<PB_1+BB_1 \text{ و}$$
$$PC<PC_1+CC_1$$

سه علامت = در عین حال با هم نمی‌توانند وجود داشته‌باشند. از جمع سه نامساوی بالا داریم :

$$PA+PB+PC<PA_1+PB_1+PC_1+$$
$$+(AA_1+BB_1+CC_1)$$

بنابراین هرگاه داشته باشیم :

$$PA_1+PB_1+PC_1<MA_1+MB_1+MC_1$$

و با اضافه کردن : $AA_1+BB_1+CC_1$ به طرفین نتیجه می‌گیریم :

$$PA+PB+PC<MA+MB+MC$$

بنابراین ، هرگاه M به وضعی باشدکه :

$$PA+PB+PC$$

می‌نیمم باشد برای $PA_1+PB_1+PC_1$ نیز مقدار می‌نیمم حاصل‌می‌باشد . اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ نقاطی دلخواه ازنیم خطهای MA و MB و MC باشد چون‌تجانس به‌مرکز M وجود دارد که نقاط مزبوررا به نقاط A_1 و B_1 و C_1 بین M با A و B و C تبدیل می‌کند پس درهمان وضع M مقدار می‌نیمم :

$$P\mathscr{A}+P\mathscr{B}+P\mathscr{C}$$

نیز حاصل است .

جستجوی وضع مربوط به می‌نیمم عبارت می‌شود از جستجوی نوعی شکل بندی سه نیم خط MA و MB و MC و به‌وضع نقاط A و B و C بستگی ندارد .

با توجه به موقعیت M که دربند۲ معلوم‌شد وقتی می‌توانیم به نتیجه برسیم‌که وجود وضعی از P که می‌نیمم را بدست بدهد میسر باشد . برای آنکه‌کاملا در قلمرو مقدماتی باقی بمانیم ، نتیجه را به صورت زیر ذکر می‌کنیم :

اگر داشته باشیم:

$$PA+PB+PC>MA+MB+MC$$

می‌توانیم در این نامساوی نقاط A ، B ، C را در مواضع دیگری واقع بر MA ، MB ، MC و بین M و A ، M و B ، M و C و یا به وسیلهٔ نقاطی دیگری روی PA ، PB ، PC و آن سوی A ، B ، C اختیارکنیم . به عبارت دیگر ، می‌توانیم طولهای طرف بزرگتر نامساوی را بزرگتر کنیم و یا آنکه از طولهای طرف کوچکتر نامساوی بکاهیم .

۷ـ فرض می‌کنیم ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع و M محل برخورد ارتفاعهای آن و P نقطه‌ای غیر از M باشد . در این صورت داریم :

$$PA+PB+PC>MA+MB+MC$$

در واقع اگر P_1 و P_2 دو وضع جدید نقطهٔ P بعد از دوران حول نقطهٔ M به اندازهٔ $\pm\frac{2\pi}{3}$ باشد چون M نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث PP_1P_2 است ، بنابراین مجموع هندسی AP و AP_1 و AP_2 طبق قضیهٔ مشهور برابر با $3AM$ می‌باشد و این مجموع هندسی طولی بزرگتر از :

$$AP+AP_1+AP_2$$

دنباله در صفحه ۳۳۲

دستگاههای مثلثاتی مستقل و نوین

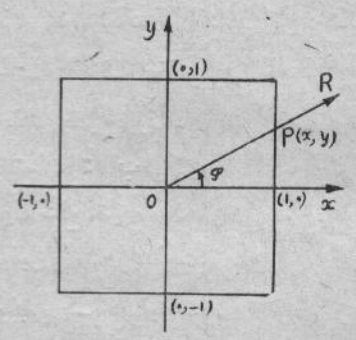
— مربع مثلثاتی —

نویسنده : J. O. Biddle
مجلهٔ : The mathematics Teacher

ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

دستگاههای مثلثاتی تفننی و جالبی در این مقاله مورد بحث واقع می‌شود ؛ این بحث می‌تواند برای دانش‌آموزان علاقمند به مثلثات سودمند واقع گردد و می‌توان آنرا درکلاس درس مثلثات یا در انجمنهای ریاضی مطرح کرد . دانش‌آموزان شائق می‌توانند این دستگاهها و روابط مربوط به‌آنها راتوسعه و تعمیم دهند .

دستگاه I : مربعی درنظر می‌گیریم که ضلعهایش با محورهای مختصات موازی بوده ، مرکزش بر مبدأ مختصات منطبق و طول ضلع آن برابربا ۲ واحد باشد. نیم‌خط OR حول نقطهٔ O ودرجهت‌عکس‌گردش عقربه‌های ساعت دوران می‌کند و روی مربع مزبور نقطه‌ای مانند



$P(x$ و $y)$ را مشخص می‌کند . زاویهٔ $(\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{OR})$ را با φ نشان می‌دهیم وبرای نقطهٔ P سه تابع اصلی زیر را تعریف می‌کنیم :

$$(۱) : \text{san}\varphi = x + y$$

$$(۲) : \text{cus}\varphi = x - y$$

$$(۳) : \text{tin}\varphi = x^۲ - y^۲$$

از روابط اصلی بالا روابطی فرعی به شرح زیر نتیجه می‌شودکه برای آنها هم نشانه‌های تازه‌ای وضع می‌کنیم :

$$(۴) : \frac{۱}{\text{san}\varphi} = \text{nas}\varphi = \frac{۱}{x+y}$$

$$(۵) : \frac{۱}{\text{cus}\varphi} = \text{suc}\varphi = \frac{۱}{x-y}$$

$$(۶) : \frac{۱}{\text{tin}\varphi} = \text{nit}\varphi = \frac{۱}{x^۲-y^۲}$$

همانطورکه بین نسبتهای‌مثلثاتی(توابع مستدیر) روابطی برقرار است و این توابع دارای دورهٔ تناوبی می‌باشند دربارهٔ توابع بالا که آنها را «توابع مربعی» می‌نامیم نیز می‌توان دورهٔ تناوب تعیین‌کرد و روابطی بین آنها بدست آورد. حتی می‌توان تغییرات آنها را معین کرده منحنی نمایش آنها را رسم کرد . بالاخره می‌توان توابع مربوط به مجموع یا تفاضل دو زاویه، چندین‌برابریك‌زاویه یا کسری از یك زاویه را معین کرد . بعضی‌از روابط‌به ترتیب زیر است :

$$(۷) : \text{san}\varphi \cdot \text{nas}\varphi = ۱$$

$$(۸) \ \text{cus}\varphi \cdot \text{suc}\varphi = ۱$$

$$(۹) \ \text{tin}\varphi \ \text{nit}\varphi = ۱$$

$$(۱۰) \ \text{san}\varphi \ \text{cus}\varphi = \text{tin}\varphi$$

$$(۱۱) \ \text{nas}\varphi \ \text{suc}\varphi = \text{nit}\varphi$$

$$(۱۲) \ \text{san}\varphi \ \text{nit}\varphi = \text{suc}\varphi$$

$$(۱۳) \ \text{san}\varphi \ \text{tin}\varphi = \text{san}^۲\varphi \text{cus}\varphi$$

$$(۱۴) \ \text{cus}\varphi \ \text{nit}\varphi = \text{nas}\varphi$$

$$(۱۵) \ \text{cus}\varphi \ \text{tin}\varphi = \text{san}\varphi \text{cus}^۲\varphi$$

$$(۱۶) \ \text{san}\varphi + \text{cus}\varphi = ۲x$$

$$(۱۷) \ \text{san}\varphi - \text{cus}\varphi = ۲y$$

$$(۱۸) \ \text{san}^۲\varphi + \text{cus}^۲\varphi = ۲(x^۲ + y^۲)$$

$$(۱۹)\ \text{san}^{۲}\varphi-\text{cus}^{۲}\varphi=۴\text{xy}$$

$$(۲۰)\ \text{san}(\alpha+\beta)=\text{san}\alpha-\frac{۱}{۲}(\text{cus}\beta-\text{san}\beta)$$

$$(۲۱)\ \text{cus}(\alpha+\beta)=\text{cus}\alpha-\frac{۱}{۲}(\text{cus}\beta-\text{san}\beta)$$

$$(۲۲)\ \text{tin}(\alpha+\beta)=[\text{cus}\alpha-\frac{۱}{۲}(\text{cus}\beta-\text{san}\beta)]\times$$
$$\times[\text{san}\alpha-\frac{۱}{۲}(\text{cus}\beta-\text{san}\beta)]$$

$$(۲۳)\ \text{san}(\alpha-\beta)=\text{san}\alpha-\frac{۱}{۲}(\text{san}\beta-\text{cus}\beta)$$

$$(۲۴)\ \text{cus}(\alpha-\beta)=\text{cus}\alpha-\frac{۱}{۲}(\text{san}\beta-\text{cus}\beta)$$

$$(۲۵)\ \text{san}(-\varphi)=\text{cus}\varphi$$

$$(۲۶)\ \text{cus}(-\varphi)=\text{san}\varphi$$

$$(۲۷)\ \text{tin}(-\varphi)=\text{tin}\varphi$$

برای روابط از (۲۰) تا (۲۴) باید شرایطی در نظر گرفت مثلا برای رابطهٔ (۲۳) باید داشته باشیم :

$$\begin{cases}\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{۳\pi}{۴}\\ -\frac{\pi}{۴}<\beta<\frac{\pi}{۴}\end{cases}\quad \text{یا}\quad \begin{cases}\frac{۳\pi}{۴}<\alpha<\frac{۵\pi}{۴}\\ \frac{\pi}{۴}<\beta<\frac{۳\pi}{۴}\end{cases}$$

دستگاه II : شکل مربوط به دستگاه I را در نظر می‌گیریم وتوابعی به شرح زیر تعریف می‌کنیم :

$$(۱)\ \text{san}\varphi=\text{x}+\text{y}$$

$$(۲)\ \text{cus}\varphi=\text{x}-\text{y}$$

$$(۳)\ \text{tin}\varphi=\frac{\text{san}\varphi}{\text{cus}\varphi}=\frac{\text{x}+\text{y}}{\text{x}-\text{y}}$$

از قرارداد (۳) روابط مختلفی بدست می‌آید که چند نمونهٔ آن از این قرار است :

$$(۴)\ \text{san}\varphi\ \text{tin}\varphi=\frac{\text{san}^{۲}\varphi}{\text{cus}\varphi}$$

$$(۵)\ \text{san}\varphi\ \text{nit}\varphi=\text{cus}\varphi$$

$$(۶)\ \text{san}\varphi\ \text{suc}\varphi=\text{tin}\varphi$$

$$(۷)\ \text{cus}\varphi\ \text{tin}\varphi=\text{san}\varphi$$

$$(۸)\ \text{cus}\varphi\text{nit}\varphi=\frac{\text{san}\varphi}{\text{cus}^{۲}\varphi}$$

$$(۹)\ \text{cus}\varphi\ \text{nas}\varphi=\text{nit}\varphi$$

$$(۱۰)\ \text{tan}\varphi\text{suc}\varphi=\frac{\text{san}\varphi}{\text{cus}^{۲}\varphi}$$

$$(۱۱)\ \text{tin}\varphi\text{nas}\varphi=\text{suc}\varphi$$

$$(۱۲)\ \text{nit}\varphi\text{suc}\varphi=\text{nas}\varphi$$

$$(۱۳)\ \text{nit}\varphi\text{nas}\varphi=\text{cus}\varphi$$

$$(۱۴)\ \text{san}\varphi+\text{tin}\varphi=\text{tin}\varphi(\text{cus}\varphi+۱)=$$
$$=\text{san}\varphi(\text{suc}\varphi+۱)$$

$$(۱۵)\ \text{san}\varphi+\text{suc}\varphi=\frac{\text{san}\varphi\text{cus}\varphi+۱}{\text{cus}\varphi}$$

$$(۱۶)\ \text{cus}\varphi+\text{suc}\varphi=\text{tin}\varphi(\text{san}\varphi+۱)$$

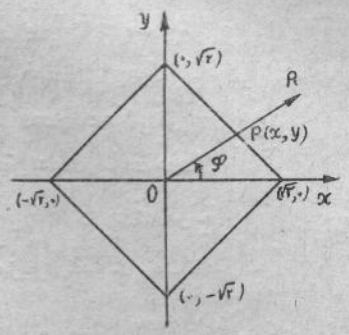
$$(۱۷)\ \text{tin}\varphi+\text{nit}\varphi=\frac{\text{san}^{۲}\varphi+\text{cus}^{۲}\varphi}{\text{san}\varphi\text{cus}\varphi}$$

$$(۱۸)\ \text{nit}\varphi+\text{suc}\varphi=\frac{\text{cus}^{۲}\varphi+۱}{\text{san}\varphi\text{cus}\varphi}$$

$$(۱۹)\ \text{suc}\varphi+\text{nas}\varphi=\frac{\text{san}\varphi+\text{cus}\varphi}{\text{san}\varphi\text{cus}\varphi}$$

$$(۲۰)\ \text{san}^{۲}\varphi+\text{tin}^{۲}\varphi=\text{tin}^{۲}\varphi(\text{cus}^{۲}\varphi+۱)=$$
$$=\text{san}^{۲}\varphi\left(\frac{\text{cus}^{۲}\varphi+۱}{\text{cus}^{۲}\varphi}\right)$$

دستگاه III : در این دستگاه مرکز مربع ، برمبدأ مختصات ورأسهای آنرا منطبق بر محورهای مختصات انتخاب می‌کنیم طول ضلع مربع بازهم برابر با ۲ واحداست. توابعی که در اینجا تعریف می‌شود نظیر توابع دستگاه II است و به همان ترتیب می‌توان روابط بین آنها را معلوم ساخت .



بحث دربارهٔ دستگاههایی که دربالاتعریف شد وتعمیم آنها هیچیك خارج از استعداد دانش آموزان نیست . از آنان می‌خواهیم که در این‌باره پژوهش لازم را انجام دهند .

هر چند که دستگاههای بالا جنبهٔ تفننی دارد با وجود این می‌تواند درمواردی استعمال داشته باشد و در حل بعضی مسائل مورد استفاده واقع شود .

به دنبال درج مقالهٔ «معادلهٔ متوازی‌الاضلاع» در شمارهٔ گذشتهٔ مجله ، اولین مقاله‌ای‌که در این باره واصل شده در زیر چاپ می‌شود . مقالات دیگری که برسد به ترتیب چاپ خواهد شد .

معادلهٔ چهار ضلعی

از : داوید ریحان
دانشجوی دانشکدهٔ فنی

رابطه‌ای جبری می‌نویسیم‌که نمایندهٔ چهارخط کاملا متفاوت باشد این رابطه به صورت زیر می‌باشد :

$$|ax+by+c|+|a'x+b'y+c'|+ \\ +a''x+b''y+c''=0$$

عامل $a''x+b''y+c''$ همواره منفی است ، زیرا حاصل جمع آن با دو عامل مثبت برابر صفر شده است . در چهارحالت مختلفی که می‌توانیم درنظر بگیریم معادلهٔ بالا به‌یکی ازچهارصورت زیر درمی‌آید :

$$(1)\quad \begin{cases} ax+by+c\geqslant 0 \\ a'x+b'y+c'\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{I})\ (a+a'+a'')x+(b+b'+b'')y+ \\ +c+c'+c''=0$$

$$(2)\quad \begin{cases} ax+by+c\geqslant 0 \\ a'x+b'y+c'<0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{II})\ (a-a'+a'')x+(b-b'+b'')y+ \\ +c-c'+c''=0$$

$$(3)\quad \begin{cases} ax+by+c<0 \\ a'x+b'y+c'<0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{III})\ (-a-a'+a'')x+(-b-b'+b'')y- \\ -c-c'+c''=0$$

$$(4)\quad \begin{cases} ax+by+c<0 \\ a'x+b'y+c'\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{IV})\ (-a+a'+a'')x+(-b+b'+b'')y- \\ -c+c'+c''=0$$

معادلات بالا با توجه به شرایط مربوط چهارقطعه خط را مشخص می‌کنند که همه درناحیهٔ منفی خط D'' به معادلهٔ :

$$a''x+b''y+c''=0$$

واقع‌اند و رویهم یك چهار ضلعی تشکیل می‌دهند که معادلات اقطار آن عبارتند از :

$$(D)\quad ax+by+c=0$$

$$(D')\quad a'x+b'y+c'=0$$

که محل تلاقی آنها مرکز چهارضلعی است که یکی ازنقاط‌مهم چهار ضلعی بوده و حتماً باید در ناحیهٔ منفی خط D'' واقع باشد .

رأسهای چهارضلعی ازتقاطع دو خط از خطوط چهارگانه بدست می‌آیند به شرطی‌که خطوط اخیر دارای یك‌شرط‌مشترك باشند. [مثلایکی از دوخط در دومورد مثبت و دیگری ازمثبت به منفی یا ازمنفی به مثبت تغییرعلامت دهد مانند خطوط I و II درشرطهای (۱) (۲)]

ترسیم چهار ضلعی ـ چون باید D'' همیشه منفی باشد پس قبلا خط مزبور را رسم‌کرده وناحیه‌ای ازصفحه راکه درطرف مثبت آن قرار دارد هاشور می‌زنیم و آن را ناحیهٔ غیرقابل قبول می‌نامیم . بعد خطوط D و D' را رسم‌کرده و ناحیه‌هایی را که بوسیلهٔ آنها بدست‌می‌آیند تعیین علامت‌می‌کنیم وآنگاه قطعه‌هایی ازخطوط I و ... و IV را که‌درناحیه‌های موردنظر واقع‌اند رسم می‌کنیم .

مثال : مطلوبست رسم چهارضلعی به معادلهٔ زیر :

$$|x+y-3|+|2x-3y-6|-x+2y+1=0$$

داریم $-x+2y+1<0$ وغیر ازآن چهار دستگاه زیررا

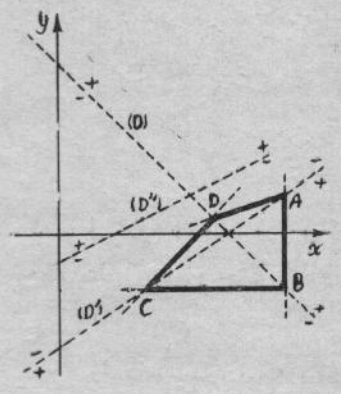
خواهیم داشت:

$$\text{I}\begin{cases} x+y-3\geqslant 0 \\ 2x-3y-6\geqslant 0 \\ 2x-8=0 \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} x+y-3\geqslant 0 \\ 2x-3y-6<0 \\ -2x+6y+4=0 \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} x+y-3<0 \\ 2x-3y-6<0 \\ -4x+4y+10=0 \end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases} x+y-3<0 \\ 2x-3y-6\geqslant 0 \\ -2y-2=0 \end{cases}$$



مطابق قاعده‌ای که ذکر شدعمل‌می‌کنیم چهار ضلعی به شکل مقابل بدست می‌آید. بـه سادگـی می‌توان مختصات مرکـز و رأسهای این چهارضلعی راحساب کرد

حالت خاصـ معادلهٔ ذوزنقه: ذوزنقه یك‌چهار ضلعی است‌که دوضلع از اضلاع آن با هم موازی باشند. پس کـافی است شرطی را پیدا کنیم‌که یکی ازخطوط با خط دیگرموازی باشد. دوحالت درنظر می‌گیریم:

۱ـ خطوط I و III موازی باشند:

$$\frac{a+a'+a''}{-a-a'+a''}=\frac{b+b'+b''}{-b-b'+b''}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a''(b+b')=b''(a+a')$$

۲ـ خطوط II و IV موازی باشند:

$$\frac{a-a'+a''}{-a+a'+a''}=\frac{b-b'+b''}{-b+b'+b''}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a''(b-b')=b''(a-a')$$

نتیجه: شرط آنکه معادلهٔ کلی نمایشگر یك متوازی‌ـ الاضلاع باشد آنست‌که دوشرط فوق تواماً برقرار باشند که از آن نتیجه می‌شود: $a''=0$ و $b''=0$ و چون (D'') منفی می‌بود پس $c''<0$ و درنتیجه معادلهٔ متوازی‌الاضلاع به‌صورت زیر بدست می‌آید.

$$|ax+by+c|+|a'x+b'y+c'|-K^2=0$$

برای ذوزنقه باید داشته باشیم:

$$\frac{a''}{b''}=\frac{a\pm a'}{b\pm b'}\Longrightarrow b''=\frac{(b\pm b')\,a''}{(a\pm a')}$$

مثال: مطلوبست رسم ذوزنقهٔ زیر:

$$|2x+y-4|+|x-y+1|+x-3=0$$

به ترتیبی‌که قبلا عمل‌کردیم ابتدا خطوط:

(D): $2x+y-4=0$ و

(D'): $x-y+1=0$ و

(D''): $x-3=0$ و

را رسم‌کرده ناحیه‌های مثبت ومنفی آنها را معلوم می‌کنیم. آنگاه قطعه‌هایی از خطوط زیر را در ناحیه‌های مربوط رسم می‌کنیم:

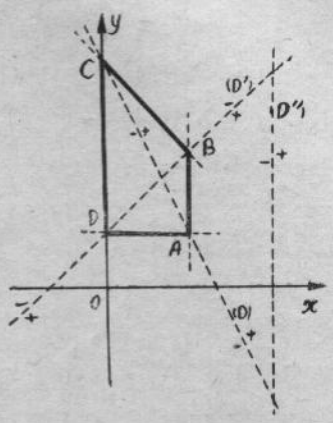
I): $4x-6=0$

II): $2x+2y-8=0$

III): $-2x=0$

IV): $-2y+2=0$

ذوزنقهٔ به شکل زیر حاصل می‌شود.



ذوزنقهٔ قائم: درمعادلهٔ بالا که برای ذوزنقه بدست آمـد می‌توان شرطی‌را تعیین کردکه یکی از خطوط غیر موازی بر دو خط موازی عمود باشد. با شرط‌مزبور معادلهٔ ذوزنقهٔ قائم معین خواهد شد و این کـار بـه عهده خواننده واگذار می‌شود.

کاربرد عدد نویسی در مبنای دو

در ضبط پیامهای رمزی

از کتاب: ریاضیات معاصر

ترجمهٔ : محمد رضا سلیمانی

دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی ۱

اولین مبنای عدد شماری که مورد استفادهٔ بشر قرار گرفته است ، مبنای ده می‌باشد ، ریاضیدانان علت انتخاب ده را به عنوان مبنای عدد نویسی نتیجهٔ استفادهٔ بشر از انگشتان دهگانهٔ دست خود برای شمارش می‌دانند .

علاوه برمبنای ده ، مبنای‌های دیگری نیز مورد استفادهٔ بشر قرار گرفته‌است .مثلا بعضی از قبایل سرخپوست درآمریکای مرکزی عدد بیست را به‌عنوان مبنای شماربکار می‌برند ،شاید به‌این علت‌که از انگشتان دست وپا تواماً برای شمردن استفادهٔ می‌کنند . و نیز در میان‌اسکیموها مبنای ۵ رایج است ،احتمالا از این جهت که وسیلهٔ شمارش آنان تنها انگشتان یك دست می‌باشد .

درحدودچهار هزار سال‌پیش چینی‌ها عددنویسی درمبنای ۲ را بوجود آوردندکه به تدریج از میان رفت . بعدها این دستگاه عددنویسی توسط «لایب نیتز» ریاضیدان اروپایی قرن هفدهم‌تکمیل‌گردید . اساس کار ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی عددنویسی‌درمبنای «دو»می باشد و به‌همین جهت نیز درسالهای اخیر توسعهٔ این ماشینها سبب رواج بیشتر دستگاه عددنویسی مزبور شده است. عددنویسی‌در مبنای دو ساده‌ترین دستگاههای شمار است ، زیرا در ایش دستگاه هرعدد را می‌توان تنها با استفاده ازدو رقم یك و صفر نوشت . در این مختصر نخست به‌شرح‌شماردر مبنای «دو»پرداخته سپس روشی راکه بااستفادهٔ از آن می‌توان‌پیامها واطلاعات رابه‌صورت رمز با استفادهٔ از یك سوزن روی نوارکاغذی‌ضبط‌کرد شرح خواهیم داد :

می‌دانیم هرگاه N عددی در مبنای α باشد داریم :

$$N=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\dots+a_n\alpha^n$$

که مقادیر a_0 و a_1 و a_2 و ... a_n بزرگتر یا مساوی‌صفر وکوچکتر از α می‌باشند . α (مبنای شمار) نشان می‌دهدکه واحد هرمرتبه چند برابر واحد مرتبهٔ ماقبل می‌باشد .

پس هرگاه P عددی باشد که در مبنای ۲ نوشته شده باشد داریم :

$$P=a_0+a_1\times 2+a_2\times 4+\dots+a_n\times 2^n$$

که دراینجا a_0 و a_1 و a_2 و ... a_n یا صفراند یایك ونیز مشاهده می‌شودکه واحد هرمرتبه تنها دو برابر واحد مرتبهٔما قبل می‌باشد . واحد اولین مرتبه یك ، واحد دومین مرتبه ۲ واحد مرتبهٔ سوم ۴ و از مرتبهٔ چهارم ۸ و ... می‌باشد .مثلا عدد ۱+۲+۱۶+۳۲=۵۱ در مبنای دو به صورت : ۱۱۰۰۱۱ و عدد ۱+۲+۳۲=۳۵ در مبنای دوبه‌صورت ۱۰۰۰۱۱ نوشته می‌شود. جدول زیراعداد از یك تا ده را در مبنای ۲ نشان می‌دهد :

مبنای دو	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مبنای دو	۱	۱۰	۱۱	۱۰۰	۱۰۱	۱۱۰
مبنای ده	۷	۸	۹	۱۰		
مبنای دو	۱۱۱	۱۰۰۰	۱۰۰۱	۱۰۱۰		

تمرین ۱ـ سن خود و افراد خانوادهٔ خود را درمبنای دو بنویسید .

تمرین ۲ـ اعداد زیر را از مبنای ۲ به مبنای ده برگردانید .

۱۱۱۰۱ و ۱۰۱۰۱ و ۱۱۰۱۱ و ۱ و ۱۰ و ۱۱۰۰۱

۱۱۰۰ و ۱۱۱۱ و ۱۱۱۰۱ و ۱۰۱۱۰۱

* * پائین صفحهٔ بعد

دربارهٔ محاسبهٔ تعداد جمله‌های یك تصاعد حسابی

بحث در ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم: $dn^2+(2a-d)n-2S=0$

کتاب : Higher Algebra

تألیف : Hall and Knight

ترجمهٔ : **محمد حسین احمدی**

دانشجوی ریاضی دانشسرایعالی تهران

اگر در یك تصاعد حسابی مقادیر S و a و d معلوم و n مجهول باشد، برای تعیین مقدار n به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر برمی‌خوریم :

$$S=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$$

$$\Longrightarrow dn^2+(2a-d)n-2S=0 \quad (1)$$

الف ـ درحالتی‌که هردو ریشهٔ معادلهٔ مذکور، اعدادی صحیح و مثبت باشند هیچ اشکال و زحمتی جهت تفسیر نتایج حاصل از مقادیر n موجود نیست . اما وقتی‌که یکی‌ازمقادیر n منفی باشد می‌توان در بارهٔ آن تفسیری مقتضی ارائه نمود . ابتدا جهت آماده‌کردن ذهن برای تفسیر در حالت کلی مثالی می‌آوریم :

←

دنباله ازصفحهٔ قبل

همانطورکه‌قبلاذکر شد با استفادهٔ از عدد نویسی‌درمبنای دو می‌توان‌اطلاعات وخبرها را به‌صورت رمز به‌کمك یك‌سوزن برروی یك‌نوارکاغذ باریك ضبط‌کرد . در این طریقه هرحرف ضبط شده تشکیل شده است از عده‌ای از سوراخها و فاصله‌ها (فضای بین‌دوسوراخ) که هرسوراخ علامت‌رقم یك و هر فاصله نشانهٔ‌رقم‌صفر می‌باشد . مجموع این سوراخها و فاصله‌ها (یك‌ها و صفرها) عددی را تشکیل می‌دهندکه در مبنای ۲ نوشته شده است و اگر آنرا در مبنای ده بنویسیم مرتبهٔ حرف مورد نظر در الفباء بدست می‌آید . (یعنی عدد حاصل نشان می‌دهد که حرف مربوط‌چندمین حرف الفباء است) . مثلا حرف «ع» که بیست ویکمین حرف الفباء است به صورت «ـ٥ـ٥ـ٥ـ» ضبط می‌شودکه‌دراین‌جا دایره‌های توخالی به‌جای سوراخها (نمایندهٔ ارقام یك) و تیره‌ها به‌جای فاصله‌ها (نمایندهٔ ارقام صفر) بکار رفته است. به‌این ترتیب‌مجموع علامات فوق عدد ۱۰۱۰۱ را تشکیل می‌دهدکه چون از مبنای ۲ به‌مبنای ده نوشته شود ۲۱ حاصل می‌شودکه معرف حرف «ع» بیست‌و یکمین حرف الفباء است.حرف «ی» که سی‌و دومین حرف الفباء است به‌صورت «ـ ـ ـ ـ ـ ـ ٥» و «پ» سومین حرف الفباء به‌صورت :

«ـ ـ ـ ـ ـ ٥ ٥»

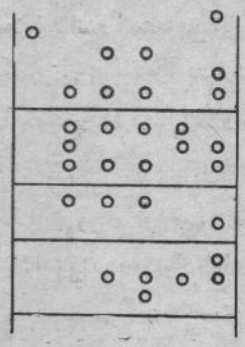
ضبط می‌گردند .

تمرین ۳ـ تمام حروف الفباء فارسی را با استفاده از سوزن به‌صورت بالا روی‌نوارکاغذی ضبط‌کنید :

برای ضبط هرکلمه حروف متشکلهٔ آن‌کلمه را از بالابه پائین زیرهم ضبط می‌کنیم و برای ضبط یك جمله کلمات آن جمله را زیرهم ضبط می‌نمائیم وبرای تشخیص‌کلمات ازیکدیگر پس از پایان‌هرکلمه‌کاغذ را یك‌بار تامی‌کنیم .

تمرین۴ـ جملهٔ «من ریاضیات را دوست دارم» راروی کاغذی باسوزن ضبط‌کنید .

تمرین۵ـ جملهٔ داده شده در ذیل را به فارسی ترجمه کنید با توجه به اینکه دایره های تو خالی علامت سوراخها و خطوط افقی نشانهٔ تاهاو کاغذ است .



مثال : چند جمله از رشتهٔ ... و ۳ − و ۶ − و ۹ − را باید انتخاب کرد تا مجموع آنها (محتملا) مساوی ۶۶ گردد .

حل : رشته یك تصاعد حسابی است و مشخصات آن چنین است :

$$a=-۹ \text{ و } d=۳ \text{ و } S=۶۶ \text{ و } n=...?$$

برای تعیین n، معادلهٔ زیر بدست‌می‌آید :

$$n^۲-۷n-۴۴=۰ \Longrightarrow n=۱۱ \text{ یا } -۴$$

به ازاء $n=۱۱$ رشتهٔ زیر که مجموع جمل‌آن ۶۶است بدست می‌آید :

۱۲ و ۹ و ۶ و ۳ و ۰ و ۳ − و ۶ − و ۹ −

۲۱ و ۱۸ و ۱۵

حال اگر از آخرین جملهٔ رشتهٔ فوق ، شروع کرده و چهار جملهٔ آنرا در جهت عکس بشماریم ملاحظه خواهیم کرد که مجموع این چهار جمله نیز برابر ۶۶ می‌گردد . بنابراین اگرچه جواب منفی n ، مستقیماً با مسئلهٔ مفروض تطابق ندارد ولی قادر به این هستیم که مفهوم معقولی به آن بدهیم(آن را تعریف‌کنیم .»

(ب) ـ تعبیر و تفسیر در حالت کلی

در حالت کلی این تفسیر را می‌توان به صورت زیر توجیه نمود :

اگر فرض‌کنیم ریشه‌های معادلهٔ (۱)عددهای صحیح‌و مختلف‌العلامه‌بوده وبه‌ترتیب‌مساوی $n_۱$ و $-n_۲$ باشند (فرض می‌کنیم $n_۱>۰$ و $n_۲>۰$) آخرین جملهٔ رشتهٔ‌مربوط به $n_۱$ برابر است‌با:

$$a+(n_۱-۱)d \qquad (۲)$$

اگر این رشته را به ترتیب عکس در نظر بگیریم قدر نسبت آن $(-d)$ و مجموع $n_۲$ جملهٔ از آن (که جملهٔ اولش عبارت (۲) می‌باشد) چنین خواهد شد .

$$\frac{n_۲}{۲}\left\{۲[a+(n_۱-۱)d]+(n_۲-۱)(-d)\right\} \qquad (۳)$$

ثابت می‌کنیم‌که عبارت فوق مساوی S است . قبل از هر چیز ذکر دو رابطه ضروری است . چون $n_۱$ و $-n_۲$ بنا به فرض ریشه‌های معادلهٔ (۱) می‌باشند دو رابطهٔ زیر را می‌توانیم بنویسیم :

$$-n_۱\cdot n_۲=-\frac{۲S}{d} \Longrightarrow n_۱n_۲\cdot d=۲S \qquad (I)$$

$$dn_۲^۲-(۲a-d)n_۲-۲S=۰ \qquad (II)$$

عبارت (۳) را به‌ترتیب چنین می‌نویسیم :

$$\frac{n_۲}{۲}\left\{۲[a+(n_۱-۱)d]+(n_۲-۱)(-d)\right\}$$

$$=\frac{n_۲}{۲}\left\{۲a+(۲n_۱-n_۲-۱)d\right\}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left\{۲an_۲+۲n_۱n_۲d-n_۲(n_۲+۱)d\right\}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left\{۲n_۱n_۲d-[dn_۲^۲-(۲a-d)n_۲]\right\}$$

با توجه‌به‌روابط (I) و (II) :

$$=\frac{۱}{۲}(۴S-۲S)=S$$

ج ـ در حالتی‌که n کسری باشد هیچ رشته‌ای نمی‌توان یافت‌که تعداد جمل آن عددی‌کسری باشد . این مطلب را با ذکر مثالی روشن می‌سازیم .

مثال : چند جمله از رشتهٔ ... و ۱۶ و ۲۱ و ۲۶ باید انتخاب‌کرد تا مجموع آنها ۷۲ باشد ؟

حل : مشخصات رشتهٔ فوق که یك تصاعد حسابی است چنین است :

$$a=۲۶ \text{ و } d=-۵ \text{ و } S=۷۲ \text{ و } n=?$$

$$۵n^۲-۵۷n+۱۴۸=۰ \Longrightarrow n=۴ \text{ یا } ۷\frac{۲}{۵}$$

بنابراین تعداد جمل چهار $(n=۴)$ و مجموع آنها برابر ۷۲ می‌باشد اما باتوجه به رشتهٔ مفروض واضح است که مجموع ۷جمله، بزرگترومجموع ۸جمله کوچکتراز(۷۲)خواهد بود، در نتیجه $n=۷\frac{۲}{۵}$ که عددی است‌کسری ، جواب غیرقابل قبول مسئله می‌باشد .

محاسبهٔ تفاضل قوای متشابه ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

ابوالفضل فتح‌الله‌زاده

دانشجوی ریاضی دانشکدهٔ علوم مشهد

معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$ax^2+bx+c=0$$

را درنظر می‌گیریم و ریشه‌های آنرا x_1 و x_2 می‌نامیم وفرض می‌کنیم x_1 بزرگتر از x_2 باشد . می‌خواهیم حاصل :

$$D_n=x_1^n-x_2^n$$

را برحسب ضریبهای معادله حساب کنیم ، البته در حالتی که معادله دو ریشه دارد .

حالتهای خاص :

$$D_0=x_1^0-x_2^0=1-1=0 \qquad (1)$$

$$D_1=x_1-x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$D_1=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \qquad (2)$$

حالت کلی ـ چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌اند داریم:

$$ax_1^2+bx_1+c=0$$

$$ax_2^2+bx_2+c=0$$

طرفین رابطهٔ اول را در x_1^m و طرفین رابطهٔ دوم را در x_2^m ضرب می‌کنیم :

$$ax_1^{m+2}+bx_1^{m+1}+cx_1^m=0$$

$$ax_2^{m+2}+bx_2^{m+1}+cx_2^m=0$$

طرفین دو رابطهٔ اخیر را عضو به عضو ازهم کم می‌کنیم:

$$a(x_1^{m+2}-x_2^{m+2})+b(x_1^{m+1}-x_2^{m+1})+$$
$$+c(x_1^m-x_2^m)=0$$

با فرض $n=m+2$ خواهیم‌داشت :

$$a\cdot D_n+b\cdot D_{n-1}+c\cdot D_{n-2}=0 \qquad (3)$$

طبق فرمول بالا با در دست داشتن D_0 و D_1 می‌توانیم D_2 را حساب کنیم ، بعد با داشتن D_1 و D_2 مقدار D_3 را پیدا کنیم ... وبالاخره از روی D_{n-2} و D_{n-1} مقدار D_n را تعیین کنیم .

مثال ۱ـ محاسبهٔ D_2 :

$$aD_2+bD_1+cD_0=0$$

$$aD_2+b\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right)+c(0)=0 \Longrightarrow D_2=\frac{-b\sqrt{\Delta}}{a^2}$$

مثال ۲ـ محاسبهٔ D_{-3} :

$$D_{-3}=\frac{1}{x_1^3}-\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_2^3-x_1^3}{(x_1x_2)^3}=\frac{-D_3}{(x_1x_2)^3}$$

$$aD_3+bD_2+cD_1=0$$

$$aD_3-\frac{b^2\sqrt{\Delta}}{a^2}+\frac{c\sqrt{\Delta}}{a}\Longrightarrow D_3=\frac{\sqrt{\Delta}(b^2-ac}{a^3}$$

$$D_{-3}=-\frac{\sqrt{\Delta}(b^2-ac)}{a^3}:\left(\frac{c}{a}\right)^3=\frac{-\sqrt{\Delta}(b^2-ac)}{c^3}$$

تبصره ـ برای محاسبهٔ D_{-n} کافی است D_n را بدست آورده درآن a و c را به‌جای‌یکدیگر بگذاریم وبه‌علاوه علامت حاصل را تغییر دهیم . زیرا می‌دانیم که $\frac{1}{x_1}$ و $\frac{1}{x_2}$ ریشه‌های معادلهٔ :

$$cx^2+bx+a=0$$

می‌باشند وچون فرض کرده‌ایم $x_1>x_2$ پس :

$$\frac{1}{x_1}<\frac{1}{x_2}$$

می‌باشد . مثلا :

$$D_1=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\Longrightarrow D_{-1}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{c}$$

$$D_2=\frac{-b\sqrt{\Delta}}{a^2}\Longrightarrow D_{-2}=\frac{b\sqrt{\Delta}}{c^2}$$

$$D_3=\frac{\sqrt{\Delta}(b^2-ac)}{a^3}\Longrightarrow D_{-3}=\frac{-\sqrt{\Delta}(b^2-ca)}{c^3}$$

موارد استعمال ـ مطلوبست‌محاسبهٔ حاصل‌عبارت‌زیر

$$A=(2+\sqrt{3})^7-(2-\sqrt{3})^7$$

ابتدا معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ باشد :

$$x^2-[(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})]x+$$
$$-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$$

$$x^2-4x+1=0$$

نسبت به این معادله داریم :

$$D_n-4D_{n-1}+D_{n-2}=0$$

$\Delta=12$ و $D_1=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$D_2=4\sqrt{12}=8\sqrt{3}$ و $D_3=30\sqrt{3}$

$D_4=112\sqrt{3}$ و $D_5=418\sqrt{3}$

$D_6=1560\sqrt{3}$ و $D_7=A=5822\sqrt{3}$

چگونه می‌توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

تألیف: René Boinel

تحرك عملی عملیات اساسی هندسی

(دنباله از شمارهٔ پیش)

ضمن مقدمه‌ای که قبلا بیان شدمعلوم گردید که از چه راههایی می‌توان تساوی دو قطعه خط را ثابت کرد .

برای **اثبات تساوی دو زاویه** می‌توان ثابت کرد که:

۱ـ دو زاویهٔ متبادل داخلی ، خارجی یا متقابل داخل و خارج نسبت به دو خط متوازی و یك مؤرب می‌باشند ، یا اینکه اضلاع آنها نظیر به نظیر متوازی یا عمود برهم می‌باشند .

۲ـ مجموع یا تفاضل زاویه‌های دو به‌دو متساوی می‌باشند (مثلا در مورد زاویه‌های خارجی مثلث) .

۳ـ دارای یك مکمل می‌باشند (مثلا یك زاویهٔ داخلی چهارضلعی محاطی با زاویهٔ خارجی روبروی آن) یا اینکه دارای یك متمم‌اند (مثلا در مورد زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه).

۴ـ زاویه‌های یك چهار ضلعی محاطی‌اند که روبرو به‌یك کمان قرار دارند .

۵ـ اگر یك دایره‌را دربردارند دارای یك اندازه‌می‌باشند.

۶ـ نسبت به‌یك محور قرینهٔ یکدیگراند .

۷ـ به مثلثهای متساوی تعلق دارند .

۸ـ به‌مثلثهای متشابه تعلق دارند .

۹ـ اگر در یك ضلع مشترك‌اند ، اضلاع دیگر آنها باآن ضلع یك مثلث متساوی‌الساقین می‌سازد .

۱۰ـ اگر در رأس ویك ضلع‌مشترك‌اند . این ضلع‌مشترك نیمساز زاویهٔ بین دو ضلع دیگر می‌باشد .

در حالت خاصی که این ضلع مشترك از نقطهٔ وسط یك قطعه خط می‌گذرد و این قطعه خط بین دو ضلع غیر مشترك زاویه‌هامحصور است کافی است ثابت کرد که ضلع مشترك برقطعه‌خط مزبور عمود می‌باشد .

در حالت خاصی که زاویه‌ها در یك دایره محاط‌اند کافی است ثابت کرد که ضلع مشترك از نقطهٔ وسط کمان محصور بین دو ضلع غیر مشترك می‌گذرد .

اگر اضلاع غیر مشترك بردو نقطهٔ معین‌می‌گذرند معلوم ساخت که آیادو نقطهٔ مزبور و رأس مشترك زاویه‌ها و نقطهٔ تلاقی عمود منصف قطعه خط واصل بین آن دو نقطه باضلع مشترك یك چهار ضلعی محاطی تشکیل می‌دهند .

برای **اثبات اینکه دو خط بریکدیگر عموداند** می‌توان ثابت کرد که :

۱ـ یکی از دو خط میانهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است که خط دیگر قاعدهٔ آن می‌باشد .

۲ـ دوخط مزبور اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه یااضلاع یك مستطیل‌اند : برای این‌کار می‌توان معلوم کرد که دو خط مزبور بایك خط دیگر مثلثی قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند(مثلثی که در آن خواص مثلث قائم‌الزاویه صادق است مثلا میانهٔ یك ضلع برابر با نصف همان ضلع است) یا اینکه مثلثی تشکیل می‌شود که با یك مثلث قائم‌الزاویه برابر است .

۳ـ دوخط‌مزبور نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب یانیمسازهای دو زاویهٔ مکمل بااضلاع‌متوازی می‌باشند .

۴ـ اگر خطی سومی از نقطهٔ تلاقی دو خط می‌گذرد زوایای هریك ازاین دو خط باخطسوم متمم یکدیگراند.

۵ـ یکی از دو خط باخطی که برخط دیگر عمود است موازی است .

۶- اگردوخط مفروض دو ضلع از دوزاویهٔ متساوی‌اند، دوضلع‌دیگر دو زاویهٔ مـزبور بریکدیگر عموداند .

۷- دوخط مزبور دو قطر یك لوزی یا یك مربع‌اند.

۸-اگریکی از دوخط برمرکز دایره می‌گذرد ،دیگری در نقطهٔ تلاقی آن ، بردایره مماس است ، یا اینکه بـا این مماس موازی است . یا اینکه خط دوم وتری از دایره جـدا کندکه بوسیلهٔ خط اول نصف گردد .

۹ -تصویرقائم یکی از دو خط روی دیگری بر نقطهٔتلاقی آنها منطبق است .

۱۰- اگر دو خط مزبور دو قطر از یك چهار ضلعی‌اند مجموع مربعات دوضلع مقابل از این چهارضلعی بـرابراست با مجموع مربعات دوضلع دیگر .

۱۱-اگر یکی‌از دوخط برمرکزهای دو دایره می‌گذرد دیگری‌محورمشترك(در حالت‌خاص ، وترمشترك یا مماس‌مشترك) دو دایره است .

برای **اثبات اینکه دو خط بایکدیگر موازی‌اند** می‌توان ثابت کردکه :

۱- اگر خط سومی آنها را قطع کرده است دو زاویـهٔ متبادل داخلی یاخارجی ، دو زاویهٔ متقابل داخل و خارج که تشکیل‌شده‌بایکدیگر برابرند . یا اینکه دو زاویهٔ متبادل‌داخل وخارج ،یا دو زاویهٔمتقابل‌داخلی یا خارجی مکمل‌یکدیگراند.

۲- هر دو خط مزبور برخط سوم عمود یا اینکه با خط سوم موازی‌اند .

۳-دوخطمزبور دوضلع مقابل از یك متوازی‌الاضلاع‌اند.

۴- دونقطهٔمتمایز واقع بر یکی از دو خط از خطدیگر به‌یك فاصله‌اند .

۵- اگردو خط مزبور دایره‌ای را قطع می‌کنند دوکمان واقع بین آنها با یکدیگر برابرند .

۶- دو خطمزبورروی دو خط قطعات‌متناسب جدامی‌کنند.

در حالت خاصی‌که یکی از دو خط یك ضلع مثلث یایك ضلع ذوزنقه است ، خط دیگر از اوساط دو ضلع دیگر مثلث یا ذوزنقه می‌گذرد .

۷-دوخط مفروض با دوخط متوازی دیگر زوایای‌مساوی می‌سازند .

۸ - اگر دو خط مزبور نیمسازهای دو زاویهٔ A و B هستند . نیمسازهای زوایای مکمل زوایای مزبور با یکدیگر موازی‌اند .

برای **اثبات نامساوی بودن‌دو قطعه‌خط** می‌توان ثابت کردکه :

۱- اگردو قطعه خط مزبور در یك سر مشترك‌اند :

الف- باوصل طرفین دیگر آنها به‌هم مثلثی تشکیل شود که در آن دو زاویهٔ مقابل به‌قطعه خطهای مزبور با یکدیگر نا- برابر باشند .

ب- روی یکی از دو قطعه خط نقطه‌ای وجود داردکه‌از دو سرغیر مشترك دو قطعه خط به‌یك فاصله است .

ج-یکی‌از دو قطعه خط برخط سوم عمود است و دیگری مایل ، یا اینکه تصاویر دو قطعه خط برخط سوم نابرابرند.

د-اگردوقطعه‌خط در یك امتداد و در خارج هم‌واقع‌اند نصف قطعه خط مجموع آنها از کوچکی بزرگتر است ؛ یـا اینکه دو قطعه خط مزبور دوضلع از دو مثلث‌اندکه در یك‌ضلع مشترك‌بوده‌و دوضلع دیگر آنها باهم‌مساوی اما مقابل به‌زوایای نامساوی‌اند .

۲- دو قطعه خط مزبور اضلاع دومثلث‌اند کـه دو ضلع دیگر آنها باهم مساوی اما زاویهٔ بین آنها نامساوی‌است .

۳- اگر دو قطعه خط مزبور دو وتر از یك‌دایـره‌اند ؛ کمانهای نظیرآنها نابرابرند ؛ یکی از دوقطعه خط قطر دایره و دیگری وتری از آن است ؛ دو وتـر مزبور از مـرکز بـه فاصله‌های نابرابر واقع‌اند .

۴- دو قطعه خط مزبور را با قطعه خط سوم مقایسه کرد.

برای **اثبات اینکه دو زاویه نابرابراند** می‌توان ثابت‌کردکه :

۱- دو زاویهٔ مزبور به دو مثلث تعلق دارند کـه اضلاع طرفین آنها با یکدیگر برابر اما ضلع سوم آنها نابرابراند.

۲- دو زاویهٔ مزبور به‌یك مثلث تعلق دارندکـه اضلاع مقابل آنها نابرابراند .

۳- اگردو زاویهٔ مزبور زاویه‌های خارجی یك مثلث‌اند زوایای مجاور به آنها از مثلث با یکدیگر نابرابراند .

۴- اگر دوزاویهٔمزبور مکمل یکدیگراند هیچیك‌ازآنها قائمه نیست .

۵- اگر دو زاویه‌در یك دایره محاط‌اندکمانهای‌روبرو

به آنها نابرابراند .

برای اثبات یك نامساوی بین مجموع دو یا چند طول

می‌توان ثابت کرد که :

۱ـ خط شکسته‌ای کـه از طولهای اول تشکیل می‌شود بر خط شکسته‌ای که از طولهای دوم تشکیل می‌شود و محدب است محیط است .

۲ـ طولها نظیر به‌نظیر نابرابراند. برای اثبات نامساوی ازنوع $a<b+c$ می‌توان ثابت کرد که a با مجموع دومقدار برابر است بقسمی‌که این مقادیر به ترتیب از b و c کوچکتر می‌باشند .

۳ـ در مورد نامساوی به فرم : $a+b<c+d$

می‌توان مثلثی پیدا کرد که طولهای ضلعهای آن به‌ترتیب برابر باشند با $a+b$ و c و d .

برای اثبات اینکه سه خط متقارب‌اند .

می‌توان ثابت کرد که :

۱ـ یکی ازآنها برنقطهٔ مشترك دوخط‌دیگر می گذرد .

درحالت خاصی‌که یکی ازخطوط با دونقطه مشخص شده است این دونقطه و نقطهٔ تقاطع دو خط دیگر بـریك استقامت واقع اند .

۲ـ خطوط مزبور اجزائی ازیك شکل‌اند کـه تقارب اجزاء مزبور مسلم است ، مثلا میانه‌ها ، ارتفاعات‌و نیمسازهای زاویه‌های یك مثلث .

۳ـ اگر یکی از خطوط مکان نقاطی بـا خاصیت معین می‌بـاشد نقطهٔ تقاطع دو خط دیگر نیز این خاصیت را دارا است .

۴ـ خطوط مزبور روی دو خط متوازی قطعات متناسب جدا می‌کنند .

۵ـ اگر دوخط ازخطوط مزبور خط سوم را مثلادر O و O' قطع می‌کنند این دونقطه ازیك نقطهٔ A واقع برخط‌سوم به یك فاصله و دریك طرف آن واقع‌اند .

۶ـ اگر خط اول دریك نقطهٔ O خط دوم‌راقطع کرده و آن را به نسبت معین تقسیم می‌کند خط سوم هم خط دوم را دریك نقطهٔ O_1 قطع کرده و آنرا به همان نسبت تقسیم‌می‌کند. (که دراین صورت O و O_1 منطبق‌اند) .

۷ـ سه خط مزبور محورهای اصلی (در حالت خاص وترهای مشترك) دو به دو ازسه دایره‌اند .

۸ـ قطبهای خطوط مزبور نسبت به یك دایره بـر یك خط مستقیم واقع‌اند .

۹ـ خطوط مزبور نقاط متناظر از دوشکل متجانس(در حالت خاص دوشکل متقارن مرکزی) را به هم وصل می‌کنند.

۱۰ـ خطوط مزبور نقاط متناظر از دوتقسیم توافقی را به هم وصل می‌کنند .

۱۱ـ اگر خطوط مزبور از سه رأس A و B و C یك مثلث می‌گذرند و اضلاع مقابل رابه‌ترتیب در A'وB'وC' قطع می‌کنند داریم :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$ (عکس‌قضیهٔ‌سوا)

برای اثبات اینکه سه نقطه بریك استقامت‌اند.

می‌توان ثابت کرد که :

۱ـ خطی‌که برنقطه‌ای‌که بین دونقطهٔ دیگر واقع است می‌گذرد با خطوطی‌که این نقطه‌را به دونقطهٔ‌دیگروصل می‌کنند زاویه‌های مساوی (متقابل به رأس) یا زاویه‌های مکمل(مجانب) می‌سازد .

۲ـ خطی‌که برقطعه خط واصل بین دونقطه ازنقاط‌عمود است برقطعه خط واصل بین یکی از این نقاط ونقطهٔ دیگرنیز عمود می‌باشد .

۳ـ اگر خطی با خط واصل بین دونقطه ازنقاط مزبور موازی باشد با خط واصل بین یکی از این نقاط ونقطهٔ دیگر نیز موازی است .

۴ـ نقاط مزبور نقاط مشخصی از یك شکل قابل ترسیم می‌باشندکه واقع بودن آنها بریك استقامت مسلم شده‌است(مثلا پای دونیمساز داخلی و یك نیمساز خارجی از یك مثلث ، یـا تصاویر یك نقطه از دایرهٔ محیطی مثلث روی‌سه‌ضلع ، یااوساط اقطار یك چهارضلعی‌کامل ، و غیره) .

۵ـ خطی‌که بریکی ازنقاط بیرونی می‌گذرد باخطوطی که این نقطه را به دو نقطهٔ دیگری وصل می‌کنند زاویـه‌های برابر می‌سازد .

۶ـ وقتی بریکی از نقاط دوخط می‌گذرد بـر دو نقطهٔ دیگر دوخط متوازی چنان رسم‌کردکه با استفاده ازقضیهٔ‌قطعه‌خطهای متناسب ثابت شودکه دوخطی که نقطهٔ مزبور را به دو نقطهٔ دیگر وصل می‌کنند برهم منطبق‌اند .

۷ـ خطی که بریکی از نقاط می‌گذرد با خط واصل بین دونقطهٔ دیگر درنقطه‌ای منطبق با نقطهٔ اول متقاطع است .

۸ـ استفاده ازعکس قضیهٔ منلائوس : اگر نقاط مزبور A' و B' و C' بوده وبه ترتیب بر اضلاع BC و CA و AB ازمثلث ABC واقع باشند داشته باشیم :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = ۱$$

۹ـ اگر طولهای قطعات واصل بین نقاط معلوم باشد اثبات رابطهٔ شال :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

۱۰ـ هریك ازنقاط مزبور نسبت به دو دایره (یادوایر یك دستگاه) قوتهای برابر دارندکه در نتیجه سه نقطهٔ مزبور برمحور اصلی دو دایره (یا دستگاه دوایر) قرار دارند .

۱۱ـ اگر یکی ازنقاط مرکز تجانس باشددونقطهٔدیگر مجانس یکدیگراند .

۱۲ـ اگر یك نقطهٔ O را به سه‌نقطهٔ مفروض A و B و C وصل کرده و هریك را به اندازهٔ خود امتداد دهیم تا سه نقطهٔ A' و B' و C' بدست آید این‌سه‌نقطه بریك استقامت‌واقع‌اند.

برای اثبات اینکه خطی برنقطهٔ مفروض می‌گذرد می‌توان ثابت‌کرد که :

۱ـ اگر خط مکان نقاط با خاصیت معین می‌باشد نقطهٔ مفروض نیز همان خاصیت را دارا است .

۲ـ خطوطی‌که نقطهٔ مفروض را به دونقطه ازخط وصل می‌کنند بریکدیگر منطبق‌اند .

۳ـ اگر نقطهٔ مفروض روی خطی واقع بوده و دارای خاصیت معینی است (مثلا قطعه خط مفروضی را به نسبت معین تقسیم می‌کند) نقطهٔ تلاقی این خط با خط مفروض نیز خاصیت مزبور را دارا است (یعنی برنقطهٔ اول منطبق است) .

۴ـ اگر نقطهٔ مفروض وسط قطعه خط معینی واقع است و خط مفروض عمود منصف قطعه خط دیگر است دایرهٔ به قطر قطعه خط اول برطرفین قطعه خط دوم می‌گذرد .

۵ـ اگر نقطهٔ مفروض مرکز تجانس دوشکل باشد خط مفروض دونقطهٔ نظیر از دوشکل را به هم وصل می‌کند .

۶ـ خط مفروض قرینهٔ محوری خطی است‌که بر قرینهٔ نقطهٔ مفروض نسبت به آن خط می‌گذرد .

۷ـ دایرهٔ منعکس خط مزبور بر منعکس نقطهٔ مفروض می‌گذرد .

برای اثبات اینکه خط متغیری بر یك نقطهٔ ثابت می‌گذرد می‌توان ثابت‌کرد که :

۱ـ اگر خط مفروض خط ثابتی را قطع می‌کند آیا این نقطه ثابت است ؟ مثلا فاصلهٔ آن از نقطهٔ مشخصی از خط متغیر همواره ثابت است ، یا اینکه قطعهٔ ثابتی از خط متغیر را به نسبت ثابت تقسیم می‌کند.

۲ـ دو وضع مشخص ازخط متغیررا درنظر گرفته معلوم کردکه نقطهٔ تقاطع آنها ثابت است ، مخصوصاً اینکه دو وضع مزبور دوحد از اوضاع متغیر باشند .

۳ـ حد اوضاع مختلف خط متغیر را معلوم‌کرد، واضح است‌که نقطهٔ ثابت براین خط قرار دارد ؛ نقطه‌ای از این خط را قطب انعکاس قرار داده نقطهٔ تلاقی این خط و منعکس خط متغیر را تعیین کرد ، نقطهٔ ثابت مطلوب منعکس این نقطه می‌باشد .

برای اثبات اینکه یك نقطه وسط یك قطعه خط است می‌توان ثابت‌کردکه :

۱ـ دو قطعه‌ای که توسط نقطهٔ مفروض روی قطعه خط مزبور جدا می‌شود با یکدیگر برابراند .

۲ـ قطعه خط مفروض قطر یك متوازی‌الاضلاع و نقطهٔ مفروض مرکز آن است.

۳ـ اگر قطعه خط مزبور یك ضلع از یك مثلث است خطی کـه نقطهٔ مفروض را بـه وسط ضلع دیگر ازمثلث وصل می‌کند با ضلع سوم موازی است .

۴ـ اگر از یك نقطه موازی با قطعه خط مزبور رسم کرده و علاوه برآن به نقطهٔ مفروض و طرفین قطعه خط وصل کنیم چهارخط حاصل یك دستگاه اشعهٔ توافقی تشکیل‌می‌دهند.

۵ـ اگر I وسط CD باشد وقتی $AC = BD$ باشد ، I وسط AB نیز می‌باشد .

برای اثبات اینکه دایره‌ای برنقطهٔ معین می‌گذرد می‌توان ثابت‌کرد که :

۱ـ خواص نقطهٔ مفروض را مشخص‌کرده و دربین آنها خاصیت مربوط به نقاط دایره وجود داشته باشد .

۲ـ دوخط درنظر گرفت که برنقطهٔ مفروض بگذرند و معلوم‌کردکه نقطهٔ تقاطع این دوخط یعنی نقطهٔ‌مفروض،روی دایره واقع است .

۳ـ سه نقطهٔ مشخص از دایره را درنظر گرفته و معلوم کرد که این سه نقطه با نقطهٔ مفروض یك چهار ضلعی محاطی تشکیل می‌دهند . یا اینکه تصاویر نقطهٔ مفروض بر اضلاع‌مثلثی که از سه‌نقطهٔ دیگر تشکیل می‌شود بـریك خط مستقیم قـرار دارند (قضیهٔ سمسن)

۴ـ سه نقطهٔ مشخص از دایره را در نظر گرفته ثابت کردکه نقطهٔ مفروض بر عمود منصف قطعه خط واصل بین دو نقطه از این نقاط و برنیمساز زاویهٔ بین خطوط واصل بین این دونقطه ونقطهٔ سوم قرار دارد .

دنباله دارد

بخش دوم ـ استفاده از تبدیلات

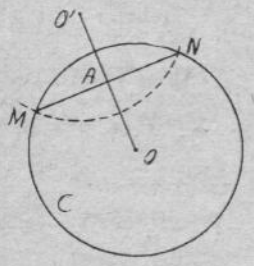
فصل دوم ـ ترسیمات به کمك تقارن

۱ـ تقارن نسبت به یك نقطه

قبلا بعضی مفاهیم مربوط به تقارن را یادآوری‌می‌کنیم: می‌گوئیم نقطهٔ O مرکز تقارن شکلی مانند F است هرگاه قرینهٔ هرنقطهٔ از F نسبت به O نقطه‌ای باشد واقع بر F. از جمله شکلهای مسطح که دارای مرکز تقارن می‌باشند متوازی‌الاضلاع ، بعضی چند ضلعیهای منتظم وکوکبی و دایره می‌باشد .

برای رسم 'A قرینهٔ A نسبت به نقطه‌ای مانند P ابتدا AP را رسم می‌کنیم وبعد آنرا ازطرف P به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم بقسمی که P وسط قطعه خط 'AA باشد. برای رسم قرینهٔ خطی‌مانند D نسبت‌به P کافی‌است که‌قرینه‌های دونقطه از D را بدست آورده به هم وصل کرد ، زیرا هرخط مستقیم با دونقطه مشخص می‌شود . همچنین ممکن است قرینهٔ یك نقطه از D را بدست آورده ازآن به موازات D رسم‌کرد، زیرا دوخط‌که نسبت به یك نقطه متقارن‌باشند متوازی‌اند. برای رسم قرینهٔ یك دایرهٔ C نسبت به نقطه‌ای مانند P ابتدا 'O قرینهٔ O مرکز آنرا بدست می‌آوریم ، بعد به مرکز 'O و به شعاعی مساوی با شعاع دایرهٔ مفروض دایره‌ای رسم می‌کنیم ؛ زیرا دو شکل‌که نسبت به یك مرکز متقارن باشند متساوی‌اند .

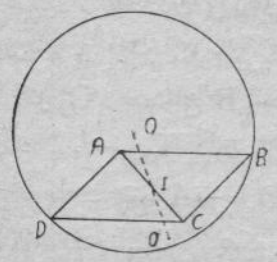
مسئلهٔ ۱ـ دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع R ونقطهٔ A واقع در داخل آن مفروض است . در A وتری از این دایره چنان رسم کنید که A وسط آن باشد .



اگر MN وتر مطلوب باشد ، یك مکان M همان دایرهٔ C است . مکان دوم آن عبارتست ازمکان قرینه‌های N نسبت به A یعنی قرینهٔ دایرهٔ C نسبت به A ؛ بنابراین 'O قرینهٔ O را نسبت به A تعیین می‌کنیم وبه مرکز 'O وبه‌شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم ، از تلاقی این دایره با دایرهٔ C نقاط M و N مشخص می‌شوند .

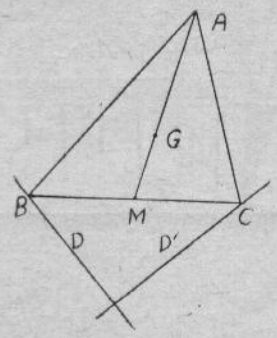
مسئلهٔ ۲ـ دونقطهٔ A و C و دایرهٔ 'C به مرکز O و به شعاع R مفروض است . متوازی‌الاضلاعی رسم‌کنیدکه A و C دو رأس متقابل از آن باشد و دو رأس دیگر آن B و D بر دایرهٔ 'C واقع باشد .

کافی است‌که نقطهٔ B را تعیین‌کنیم ؛ یك مکان B دایرهٔ 'C است ، مکان دیگر آن مکان قرینه‌های D نسبت به I وسط AC می‌باشد؛ مکان اخیر دایرهٔ "C قرینهٔ دایرهٔ 'C نسبت به I می‌باشد. بنابراین ابتدا 'O قرینهٔ O را نسبت‌به I تعیین می‌کنیم ، آنگاه به مرکز 'O و به شعاع R دایرهٔ "C



را رسم می‌کنیم که از تلاقی آن با دایرهٔ C' نقاط B و D مشخص می‌شوند .

مسئلهٔ ۳ـ دو نقطهٔ A و G و دو خط D و D' مفروض است ، مثلثی رسم کنید که A یك رأس آن و G مرکز ثقل آن بوده و دو رأس B و C از آن به ترتیب بر D و D' واقع باشد .



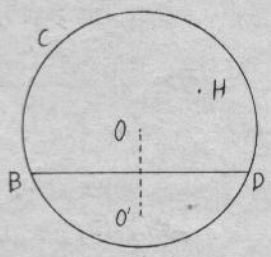
AG را از طرف G به اندازهٔ نصف طول خود امتداد می‌دهیم تا M وسط ضلع BC بدست آید . یك مکان C خط D' است و مکان دیگر آن D'' قرینهٔ D نسبت به M می‌باشد؛ از تلاقی D' و D'' نقطهٔ C و از روی آن B مشخص می‌شود.

تمرینات

۱ـ نقطهٔ A و دو خط D و D' مفروض است . خطی رسم کنید که D و D' را به ترتیب در M و N قطع کند بقسمی که A وسط MN باشد .

(N بر نقطهٔ تلاقی D'' و D واقع است که D'' قرینهٔ D' نسبت به A می‌باشد .)

۲ـ مثلث ABC را رسم کنید که از آن ، اندازهٔ زاویهٔ A ، فاصلهٔ H مرکز ارتفاعیه تا O مرکز دایرهٔ محیطی و R شعاع دایرهٔ محیطی معلوم باشد .



[دایرهٔ محیطی را رسم می‌کنیم ، چون اندازهٔ زاویهٔ A معلوم است ضلع BD از لحاظ اندازه معین می‌باشد اما فعلا وضعیت آن معین نیست و می‌توان B را روی C به دلخواه اختیار کرده و BD را رسم کرد . یك مکان H دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OH است که مقدار آن معلوم می‌باشد ، مکان دیگر H دایرهٔ به مرکز O' و به شعاع R است که O' قرینهٔ O نسبت به BD است . با تعیین H رأس A به سادگی بدست می‌آید .]

۳ـ نقطهٔ A ، خط D و دایرهٔ C مفروض است. قطعه خط MN را چنان رسم کنید که A وسط آن بوده M بر خط D و N بر دایرهٔ C واقع باشد .

(از تلاقی قرینهٔ D نسبت به A با دایرهٔ C نقطهٔ N بدست می‌آید .)

۴ـ قطعه خطی محصور بین دو دایرهٔ مفروض چنان رسم کنید که نقطهٔ مفروض A وسط آن واقع باشد .

۵ـ اگر A نقطهٔ مشترك دو دایرهٔ C و C' به مراکز O و O' و به شعاعهای R و R' باشد از A قاطع MAN را چنان رسم کنید که از دو دایره دو وتر به طولهای برابر جدا کند .

[یك مکان M دایرهٔ C و مکان دیگر آن قرینهٔ C نسبت نسبت به A می‌باشد .]

۶ـ دو نقطهٔ A و C و دو خط D' و D'' مفروض است. لوزی رسم کنید که A و C دو رأس متقابل از آن بوده و رأسهای B و D به ترتیب بر D' و D'' واقع باشند .

۷ـ مسئلهٔ قبل وقتی که به جای خط D'' دایرهٔ C داده شده باشد .

۸ـ مسئلهٔ قبل وقتی که به جای دو خط دو دایره مفروض باشد .

۹ـ در چهارضلعی مفروض ABCD یك متوازی‌الاضلاع چنان محاط کنید که نقطهٔ مفروض O مرکز آن باشد .

[اگر قرینهٔ AD نسبت به O رسم شود از تلاقی آن با BC نقطهٔ N بدست می‌آید . همچنین چون قرینهٔ CD نسبت به O رسم شود AB را در M قطع می‌کند و متوازی‌الاضلاع MNST مشخص می‌شود .]

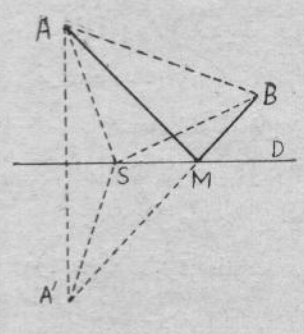
۲ـ تقارن نسبت به یك خط

خط XY را محور تقارن شکلی مانند F می‌نامیم هرگاه قرینهٔ هر نقطه از F نسبت به XY نقطهٔ دیگری از F باشد . از جمله شکلهای مسطح، مثلث متساوی‌الساقین و ذوزنقهٔ متساوی الساقین هر کدام یك محور تقارن دارند ؛ مربع مستطیل و لوزی هر کدام دو محور تقارن دارند ، مثلث متساوی‌الاضلاع سه محور تقارن و مربع چهار محور تقارن ، n ضلعی منتظم محدب یا کوکبی n محور تقارن و بالاخره دایره بینهایت محور تقارن دارد .

هر شکل مسطحی که دو محور تقارن عمود برهم داشته باشد دارای مرکز تقارنی است که نقطهٔ تلاقی دو محور مزبور می‌باشد . برعکس ، اگر شکل مسطحی دارای یك محور تقارن و یك مرکز تقارن واقع بر محور مزبور باشد محور تقارن

دیگری دارد که در نقطهٔ مزبور برمحور اول عمود می‌باشد .

مسئلهٔ ۱ـ خط D و دو نقطهٔ A و B مفروض است . برخط D نقطهٔ M را چنان معلوم کنید کـه مجموع طولهای MA و MB کمترین مقدار خود را داشته‌باشد .



وقتی A و B طرفین D واقع باشند نقطهٔ مطلوب همان نقطهٔ تلاقی AB و D می‌باشد . فرض می‌کنیم A و B هر دو در یك طرف D واقع باشند ، قرینهٔ A نسبت به D یعنی A' را تعیین می‌کنیم .

خط A'B در M با D متلاقی می‌شود و همین نقطهٔ M نقطهٔ مطلوب می‌باشد . زیرا اگر S نقطهٔ دیگری غیراز M از خط D باشددارّیم:

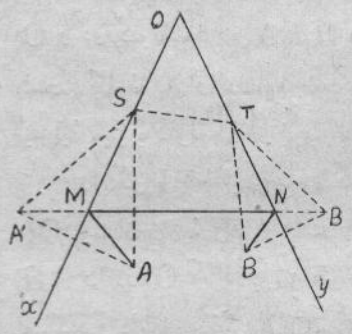
$$AM+MB=A'M+MB=A'B$$
$$AS+SB=A'S+SB$$

و درمثلث A'SB ضلع A'B ازمجموع دوضلع دیگر یعنی : A'S+SB کوچکتر است .

مسئلهٔ ۲ـ زاویهٔ xOy و دو نقطهٔ A و B واقع در داخل آن مفروض است . روی Ox یك نقطهٔ M و روی Oy یك نقطهٔ N چنان تعیین کنیدکه مجموع :

$$AM+MN+MB$$

کمترین مقدار خود را داشته باشد .



A' قـرینهٔ A نسبت به Ox و B' قرینهٔ B نسبت به Oy را بدست می‌آوریم خط A'B' با Ox در M و با Oy در N متلاقی می‌شودکه نقاط مطلوب می‌باشند . زیرا اگر S نقطهٔ دیگری از Ox و T نقطهٔدیگری از Oy باشد داریم :

$$AM+MN+BN=A'M+MN+NB'=A'B'$$
$$AS+ST+TB=A'S+ST+TB'$$
$$A'B'<A'S+ST+TB'$$

مسئلهٔ ۳ـ روی یك میز بیلیارد دو گلولهٔ A و B را درنظر می‌گیریم . گلولهٔ A را درچه جهتی باید ضربه زد تا بعد از :

الف ـ برخورد با یك کنار میز ،

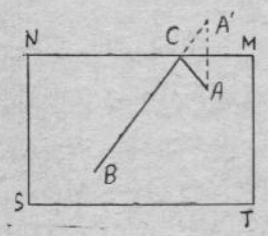
ب ـ برخورد با دوکنار میز ،

ج ـ برخورد با سه‌کنار میز ،

د ـ برخورد با هرچهارکنار میز ،

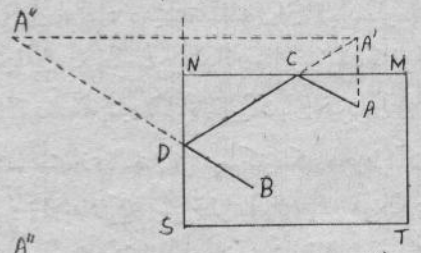
به گلولهٔ B برخورد بکند ؟ گلوله‌ها را یکنواخت دانسته و آنها را به‌صورت نقاط فرض می‌کنیم .

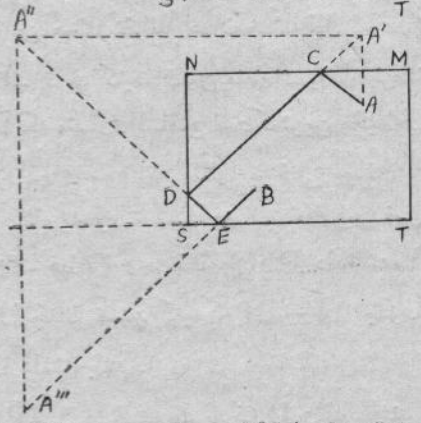
حل : الف ـ A' قرینهٔ A نسبت به کنارهٔ MN از میز را بدست می‌آوریم و A'B را رسم می‌کنیم که ازتلاقی‌آن آن با MN نقطهٔ C بدست می‌آید . ACB مسیر گلولهٔ A را مشخص می‌کند (این حالت همان مسئلهٔ ۱ است) .



ب ـ A' قـرینهٔ A نسبت به BN و A'' قرینهٔ A' نسبت به SN را بدست آورده A''B را رسم می‌کنیم که از تلاقی آن با SN نقطهٔ D و از تلاقی A'D با MN نقطهٔ C بدست می‌آید . ACDB مسیر مطلوب است .

ج ـ مانند حالت ب A'' را بدست‌آورده بعد A''' قرینهٔ A'' را نسبت به TS تعیین می‌کنیم . خط BA''' با ST





در E ، خط EA'' با SN در D و خط DA' با NM در C متلاقی می‌شود . ACDEB مسیر مطلوب می‌باشد .

د ـ مانند حالت ج نقطهٔ A''' را تعیین می‌کنیم و بعد

قرینهٔ این نقطه را نسبت به MT بدست می‌آوریم و از روی آن به طریق مشابه با حالتهای قبل مسیر مطلوب را تعیین می‌کنیم .

یاد داشت ـ خواننده می‌داند که گلوله بعد از برخورد با کنارهٔ میز درمسیری برمی‌گردد که همانند مسیر نور بعداز انعکاس دریك سطح می‌باشد که درآن زاویهٔ تابش‌وزاویهٔ بازتاب با یکدیگر برابرند و مسائل بالا با استفاده ازخاصیت مزبور حل شده‌اند . این مسائل یك جنبهٔ فلسفی دارند و آن اینکه: درطبیعت **قانون تنبلی** حکمفرما است ؛ هرجسمی مسیری را می‌پیماید که ضمن آن کمترین انرژی را مصرف بکند .

تمرینات

۱ـ زاویهٔ xOy وخط D که باOy در S متلاقی‌است مفروض است . خطّی عمود بر D چنان رسم کنید که Ox را در M و Oy را در N قطع کند بقسمی که M و N نسبت به D قرینهٔ یکدیگر باشند .

(قرینهٔ Sy را نسبت به D رسم می‌کنیم ، ازتلاقی آن با Ox نقطهٔ M بدست می‌آید .)

۲ـ مثلث ABC را با معلومات ضلع BC، زاویهٔB و مجموع دوضلع دیگر رسم کنید .

(با فرض اینکه مسئله حل شده باشد، BAرابه‌اندازهٔ : AS=AC امتداد دهید ، مثلث BSC با معلومات دو ضلع و زاویهٔ بین‌قابل رسم است . بعدازرسم‌این مثلث کافی‌است که عمود منصف CS را رسم کنیدتا ازتلاقی آن‌باBS رأس A بدست‌آید.)

۳ـ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که محیط آن ، طول یك قطر آن و زاویه‌ای که این قطر با یك ضلع می‌سازد معلوم‌است، (این مسئله تقریباً همان مسئلهٔ قبل است .)

۴ـ ثابت کنید از بین مثلثهای با قاعدهٔ مشترك BC و متعادل آنکه متساوی‌الساقین است کمترین محیط را دارد .

(رأسهای سوم این مثلثها بر خطی موازی با قاعده قرار دارند ومسئله به‌صورت مسئلهٔ ۱ ازبنددوم این فصل درمی‌آید.)

۵ـ خط D و دونقطهٔ A و B داده شده است . بر D نقطهٔ I را چنان تعیین کنید که AI−BI بزرگترین طول ممکن را داشته باشد .

(اگر A و B دریك طرف D واقع باشند I همان نقطهٔ تلاقی D با AB می‌باشد . اگر A و B طرفین Dواقع باشند B' قرینهٔ B را نسبت به D تعیین کنید ، I نقطهٔ تلاقی AB' با D می‌باشد .)

۶ـ دو خط D و D' و نقطهٔ A واقع بر D داده شده است . نقطهٔ M را بر D چنان تعیین کنید که از A و از D' به یك فاصله باشد .

(از A عمود D'' را بر D اخراج کنید . نقطهٔ M که از D' و D'' به یك فاصله است بر نیمساز زاویهٔ آنها قرار دارد .)

۷ـ در زاویهٔ مفروض xAy دایره‌ای چنان محاط کنید که از نقطهٔ مفروض B واقع بر نیمساز زاویه بگذرد .

(از B عمودی بر Az نیمساز زاویهٔ xAy رسم کنید. O مرکز دایرهٔ مطلوب بر نیمساز زاویهٔ دو خط Ax و D قرار دارد .)

۸ـ روی ضلع BC از مثلث ABC نقطهٔ M را چنان تعیین‌کنید که مجموع فواصل‌آن از دو ضلع AC و AB برابر با طول معلوم l باشد .

(اگر P و Q تصویرهای M بر AB و AC باشد چون QM را به‌اندازهٔ MI=MP امتداد دهیم داریم : QI=l و اگر از I خط D را موازی با AC رسم‌کنیم‌نقطهٔ M بر نیمساز زاویهٔ دو خط D و AB قرار دارد .)

۹ـ مسئلهٔ قبل را در حالتی حل‌کنید که تفاضل فواصل M از دو ضلع برابر با مقدار معلوم باشد .

۱۰ـ خط D و دو نقطهٔ A و B واقع در طرفین آن مفروض است . از A و B دو خط چنان رسم‌کنید که روی D متقاطع بوده و با آن زاویه‌های مساوی بسازند .

۱۱ـ یك میز بیلیارد مدور به شکل دایرهٔ C به مرکز O و دو گلولهٔ بیلیارد A و B روی یك قطر از آن مفروض است . گلولهٔ A را در چه جهت ضربه بزنیم تا بعد ازبرخورد به لبهٔ میز به‌گلولهٔ B برخورد کند .

(اگر I نقطهٔ برخورد گلولهٔ A با محیط دایره باشد OI نیمساز زاویهٔ AIB است و نیمساز خارجی این زاویه AB را در O' مزدوج توافقی O نسبت به A و B قطع می‌کند و دایرهٔ به قطر OO' از I می‌گذرد .)

۱۲ ـ نقطهٔ I روی ضلع BC از مثلث ABC مفروض است . در این مثلث ، مثلث IMN را چنان محاط کنید که محیط آن کمترین مقدار را داشته باشد .

(این مسئله حالت خاصی از مسئلهٔ ۲ بند دوم این فصل می‌باشد .)

۱۳ـ سهمی رسم کنید ازآن‌کانون F ودوممماس D و D' معلوم است .

(اگر I و I′ قرینه‌های F نسبت به D و D′ باشد II′ خط هادی سهمی است .)

۱۴- سهمی رسم کنید که کانون F، مماس D و نقطهٔ تماس این مماس با سهمی معلوم است .

۱۵- سهمی رسم کنید که خط هادی D و دو مماس D′ و D″ از آن معلوم است .

(کانون F بر قرینه‌های D نسبت به D′ و D″ واقع است .)

۱۶- سهمی رسم کنید که خط هادی D ، مماس D′ و M نقطهٔ تماس D′ باسهمی معلوم است .)

۱۷ - سهمی رسم کنید که کانون F ، یك نقطهٔ M ویك مماس D برآن معلوم است .

۱۸- سهمی رسم کنید که مماس بر رأس آن ، یك نقطهٔ M و D′ که در M برآن مماس است معلوم می‌باشد .

۱۹- دو سهمی دارای خط هادی مشترك D می‌باشند . D′ مماس مشترك آنها را رسم کنید .

(D′ نیمساز زاویهٔ FF′ با D است.)

فصل سوم - ترسیمات به‌کمك تجانس

تعداد زیادی از مسائل ترسیمی به‌کمك تجانس حل می‌شود .

می‌دانیم که اگر A نقطه‌ای ثابت و M نقطهٔ متغیری از یك شکل F باشد ، روی محور ماربر AM نقطهٔ M′ چنان انتخاب شود که نسبت حاملهای $\overline{AM}$ و $\overline{AM'}$ برابر با عدد جبری k باشد شکل F′ که از تعبیر مکان M′ ایجاد می‌شود مجانس شکل F در تجانس به مرکز A و به نسبت k نامیده می‌شود . در حالتی‌که k مثبت باشد تجانس مستقیم و درحالتی که k منفی‌باشد تجانس معکوس می‌باشد .

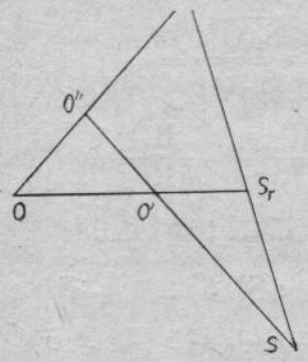
یکی از خواص مهم تجانس این است که ضمن آن اندازهٔ زاویه محفوظ می‌ماند .

حالت خاص تجانس -اگر $k=-1$ باشدتجانس عبارت می‌شود از تقارن مرکزی ، اگر $k=+1$ باشد تجانس عبارت می‌شود از انتقال: صرف نظر ازخواص حالتهای مزبور که در این‌کتاب در فصلهای جداگانه بیان شده است ذیلا به‌خواص کلی تجانس و موارد استعمال آن می‌پردازیم :

بعضی خواص تجانس -- مجانس خطی‌که از مرکزتجانس گذشته باشد برخودآن منطبق است . مجانس خطی‌که برمرکز تجانس نگذشته باشد خطی است موازی با آن . در تجانس به‌مرکز A و به نسبت k ، مجانس دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع R دایره‌ای است مانند C′ به مرکز O′ و به شعاع R′ به قسمی‌که در تجانس مزبور O′ نظیرO بوده و $R'=kR$ می‌باشد .

هر دو دایرهٔ دلخواه C و C′ به مراکز O و O′ و به شعاعهای R و R′ واقع در یك صفحه می‌توانند هم مستقیماً و هم معکوساً مجانس یکدیگر باشند .

اگر دو دایره دارای مماس مشترك خارجی باشند این مماس مشترك از مرکز تجانس مستقیم آنها می‌گذرد و اگر دو دایره دارای مماس مشترك داخلی باشند این مماس مشترك از مرکز تجانس معکوس آنها می‌گذرد . نسبت تجانس مستقیم دو دایره برابر $\frac{R'}{R}$ (یا $\frac{R}{R'}$) و نسبت تجانس معکوس آنها $-\frac{R'}{R}$ (یا $-\frac{R}{R'}$) می‌باشد . مراکز تجانس مستقیم و معکوس دو دایره نسبت به O و O′ مراکز دو دایره مزدوج توافقی یکدیگر می‌باشند . وقتی دو دایرهٔ C و C′ متداخل باشند برای تعیین S و S′ مراکز تجانس مستقیم و معکوس آنها می‌توان از یك دایرهٔ کمکی C″ که با هریك از آ ها متخارج باشد استفاده کرد. دراین‌مورد قضایای زیر حائز کمال اهمیت می‌باشد .



قضیهٔ ۱- مراکز تجانس مستقیم دو به دوی سه دایره بر یك خط مستقیم قرار دارند . اگر O و O′ و O″ مراکز ، R و R′ و R″ شعاعهای دودوایرمزبور و S مرکز تجانس مستقیم دایره های O′ و O″ ، S_1 مرکز تجانس مستقیم O و O″ و S_2 مرکز تجانس مستقیم O و O′ باشد داریم :

$$\frac{\overline{SO''}}{\overline{SO'}} = +\frac{R''}{R'} \quad و \quad \frac{\overline{S_2O'}}{\overline{S_2O}} = +\frac{R'}{R} \quad و$$

$$\frac{\overline{S_1O''}}{\overline{S_1O}} = +\frac{R}{R''}$$

از ضرب نظیر به نظیر طرفین رابطه‌های بالا داریم :

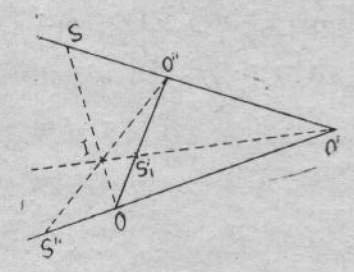
$$\frac{\overline{SO''}}{\overline{SO'}} \cdot \frac{\overline{S_2O'}}{\overline{S_2O}} \cdot \frac{\overline{S_1O''}}{\overline{S_1O}} = +1$$

بنا به عکس قضیهٔ منلائوس درمورد مثلث $OO'O''$ نتیجه می‌شود که سه نقطهٔ S و S_1 و S_2 بریك استقامتند .

قضیهٔ ۲ـ در سه دایره ، دو مرکز از مراکز تجانس معکوس با یکی از مراکز تجانس مستقیم دو به دوی دوایر ، بریك خط مستقیم واقع‌اند .

اثبات قضیه همانند اثبات قضیهٔ قبل است فقط کافی است در طرف دوم دو رابطه ازروابط به جای‌علامت + علامت − اختیارکرد .

قضیهٔ ۳ ـ سه دایره در نظر می‌گیریم و فرض‌می‌کنیم S'_1 یکی از مراکز تجانس معکوس و S و S'' دو مرکز از مراکز تجانس مستقیم آنها باشد . سه خط OS و $O'S'_1$ و $O''S''$ در یك نقطهٔ I متقارب‌اند.



زیرا داریم :

$$\frac{\overline{SO''}}{\overline{SO'}} \cdot \frac{\overline{S''O'}}{\overline{S''O}} \cdot \frac{\overline{S'_1O''}}{\overline{S'_1O}} =$$

$$= \left(+\frac{R''}{R'}\right)\left(+\frac{R'}{R}\right)\left(-\frac{R}{R''}\right) = -1$$

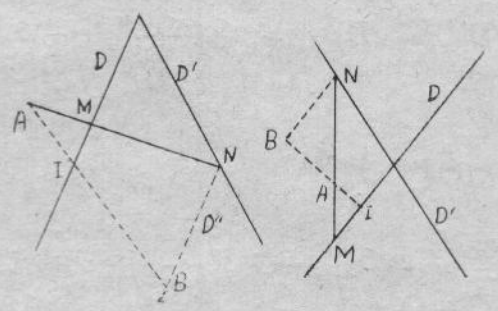
بنا به‌عکس قضیهٔ سوا سه خط مزبور متقارب می‌باشند .

قضیهٔ ۴ ـ اگر S_1 و S'_1 و S''_1 مرکزهای تجانس معکوس دو به دو سه دایره باشد خطوط OS_1 و $O'S'_1$ و $O''S''_1$ متقارب‌اند .

اثبات نظیر اثبات قضیهٔ ۳ است .

مسئلهٔ ۱ـ دوخط D و D' ویك نقطهٔ A مفروض‌است. از A خطی رسم کنید که D و D' را به ترتیب در M و N قطع‌کند بقسمی‌که AM یك سوم AN باشد .

حالت ۱ : A خارج قطعه خط MN باشد ؛ یك مکان N خط D' است ، مکان دوم آن D'' مجانس خط D به‌مرکز A و به نسبت ۳+ می‌باشد . برای رسم D'' یك نقطهٔ I بر D انتخاب‌کرده AI را به‌اندازهٔ $IB = 2AI$ امتدادمی‌دهیم. D'' از B گذشته و با D موازی است . از تلاقی D'' با D' نقطهٔ N بدست می‌آید .



حالت دوم : A بین M و N واقع باشد : در تجانس به مرکز A و به نسبت ۳− خط D'' مجانس D را رسم می‌کنیم ، از تقاطع آن با D' نقطهٔ N بدست می‌آید :

مسئلهٔ ۲ـ دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع R و نقطهٔ A در خارج آن مفروض است . از A خطی چنان رسم کنید که دایرهٔ C را در M و N قطع‌کرده و نسبت :

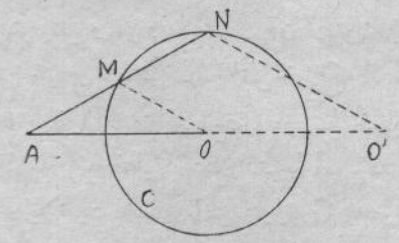
$$AN : AM = k$$

برقرار باشد .

یك‌مکان N دایرهٔ C است: مکان دیگر آن C' مجانس دایرهٔ C به مرکز A و به‌نسبت k می‌باشد . برای رسم این دایره AO را تا O' امتداد می‌دهیم به‌قسمی‌که :

$$AO' : AO = k$$

باشد و به مرکز O' و به شعاع kR دایره‌ای رسم می‌کنیم که دایرهٔ C را در N قطع می‌کند .



بحث ـ لازم است‌که مثلث ONO' وجود داشته باشد ، برای این‌کار سه شرط زیر لازم است :

$$OO' < ON + NO' \quad و \quad ON < OO' + NO'$$
$$NO' < OO' + ON$$

با توجه به اینکه :

$$OO' = AO' - AO = kd - d = (k-1)d$$

باید داشته باشیم :

$$(k-1)d<(k+1)R \text{ و } R<(k-1)d+kR$$

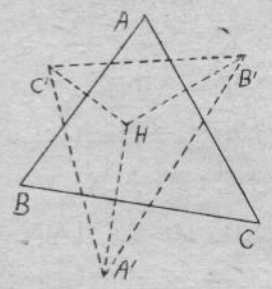
$$kR<R+(k-1)d$$

و نتیجه خواهد شدکه باید داشته باشیم :

$$R<d<\frac{k+1}{k-1}R$$

مسئلهٔ ۳ـ مثلث ABC را چنان رسم‌کنید که‌قرینه‌های H نقطهٔ تلاقی ارتفاعات آن نسبت به اضلاع سه نقطهٔ مفروض A' و B' و C' باشد .

مثلث A'B'C' مجانس مثلث ارتفاعیهٔ مثلث مطلوب در تجانس به مرکز H و به نسبت ۲+ می‌باشد . می‌دانیم که ارتفاعات مثلث نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعیه می‌باشندو نیمسازهای‌زاویه‌های مثلث ارتفاعیه‌همان نیمسازی زاویهٔ مثلث A'B'C' بوده H نقطهٔ تقارب نیمسازی مثلث A'B'C' است. باتعیین



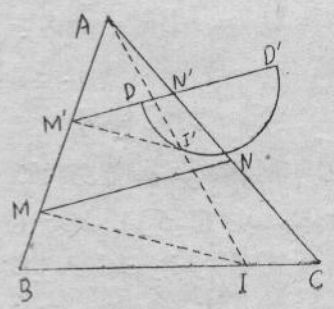
H کافی است که عمودمنصفهای خطوط HA' و HB' و HC' را رسم‌کرد تا مثلث مطلوب بدست آید .

مسئلهٔ ۴ـ مثلث ABC و نقطهٔ I واقع برضلع BC از آن مفروض است . نقطهٔ M را بر AB و نقطهٔ N را بر AC چنان انتخاب‌کنید که MN در امتداد معین بوده و :

$$MI : IN = k$$

برابر مقدار معلوم k باشد .

قطعه خط M'N' را در امتداد معلوم رسم می‌کنیم و روی‌آن نقاط D و D' را چنان تعیین می‌کنیم که M'N' را به نسبت معلوم k

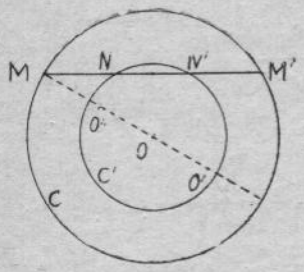


تقسیم‌کنند . I' نقطهٔ تلاقی AI بادایرهٔ به قطر DD' مجانس I است در تجانس به مرکز I و به نسبت MN : M'N' . پس‌از تعیین I' کافی‌است‌که از I موازی‌با I'M' و I'N' رسم کرد تا M و N بدست آیند .

مسئلهٔ ۵ ـ دو دایرهٔ متحدالمرکز C و C' به مرکز O و به‌شعهای R و R' ونقطهٔ A مفروض است . از A خطی رسم‌کنید که ازدایرهٔ C وتر MM' و از دایرهٔ C' وتر NN' را جداکرده طول MM' سه برابر طول NN' باشد .

اگر خط مزبور حول O دوران کند نسبت بین طول وترهای مزبور ثابت باقی می‌ماند بنابراین می‌توانیم وتر را با شرط مزبور به طور دلخواه رسم‌کرده در آخر شرطی تعیین‌کنیم که از A بگذرد . برای تعیین وتر مزبورکافی است که I وسط آنرا بدست آوریم ؛ یك نقطهٔ M بر C انتخاب می‌کنیم دراین صورت یك مکان I دایرهٔ C'' به قطر OM است چون $\frac{MI}{MN}=\frac{3}{2}$ مکان دیگرI مجانس نقطهٔ N در تجانس به مرکز M و به‌نسبت مزبور می‌باشد که این مکان دایره‌ای است به مرکز O' واقع بر MO بقسمی‌که :

$MO'=\frac{3R}{2}$ باشد و به شعاع $R''=\frac{3R'}{2}$. با رسم دو مکان مزبور نقطهٔ I تعیین می‌شود . اکنون به مرکز O و به شعاع OI دایرهٔ Γ را رسم می‌کنیم . قاطع مطلوب خطی است که از A مماس بر Γ رسم شود .



بحث ـ نقطه I وقتی تعیین می‌شود که مثلث O'IO'' بااضلاع $O'O''=R$ و $O''I=\frac{R}{2}$

$IO'=\frac{3R'}{2}$ وجود داشته باشد. چون نامساویهای لازم را بنویسیم و ساده‌کنیم نتیجه خواهد شد :

$$R'<R<3R'$$

در مثلث O'IO'' داریم :

$$IO'^2+IO''^2=2OI^2+2OO'^2$$

$$\frac{9R'^2}{4}+\frac{R^2}{4}=2OI+\frac{R^2}{2}$$

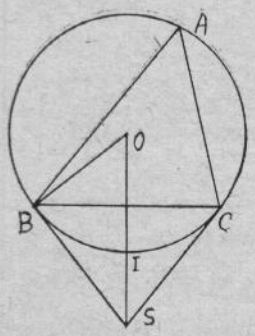
$$OI=\frac{\sqrt{2(9R'^2-R^2)}}{2}$$

با فرض $AO=d$ باید داشته باشیم :

$$d>\frac{\sqrt{2(9R'^2-R^2)}}{2}$$

در حالت نامساوی ، مسئله دو جواب و در حالت تساوی یك جواب دارد .

مسئلهٔ ۶ ـ مثلث ABC را با معلومات زیر رسم کنید: اندازه و وضع زاویهٔ A و S قطب ضلع BC نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث .



اگر I وسط کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث باشد یک مکان I نیمساز زاویهٔ A است . از طرفی اندازهٔ زاویهٔ مرکزی BOS با اندازهٔ زاویهٔ محاطی A برابر بوده و مقدار معلومی است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ SBO می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{OS}{OB}=\frac{SO}{OA}=\frac{1}{\cos A}=k$$

نسبت فواصل O از A و S برابر بامقدار ثابت k است ؛ مکان O دایره‌ای است مانند C′ که اگر M و N دو نقطه باشند که SA را به‌نسبت k تقسیم کنند MN قطر دایرهٔ C′ می‌باشد .

از طرفی داریم :

$$\frac{SO}{BO}=\frac{SO}{OI}=k$$

$$\frac{SO}{SO-OI}=\frac{SO}{SI}=\frac{k}{k-1}$$

مکان دیگر I دایرهٔ C″ مجانس دایرهٔ C′ در تجانس به‌مرکز S و به نسبت $\frac{k}{k-1}$ می‌باشد . بارسم دایره‌های C′ و C″ و نیمساز زاویهٔ A نقطهٔ I و از روی آن نقطهٔ O معین شده دایرهٔ محیطی مثلث رسم می‌شود . بعد از آن کافی است که مماسهای SB و SC را بردایرهٔ مزبور رسم کنیم تا نقاط B و C بدست آیند .

تمرینات

۱ـ مثلث ABC و نقطهٔ I واقع بر ضلع BC مفروض است . خطی در امتدادمعین رسم کنیدکه AB را در M و AC را در N قطع کند بقسمی‌که زاویهٔ MIN برابر با مقدارمعلوم باشد .

(M′N′ را در امتداد معلوم رسم کرده روی آن کمان C′ درخور زاویهٔ معلوم را بسازید . I′ نقطهٔ تلاقی AI را با کمان C′ تعیین کنید و از I بـه‌موازات I′M′ و I′N′ رسم کنید .)

۲ـ در نیمدایرهٔ معلوم به قطر AB مربعی محاط کنید . (روی AB دو نقطهٔ M و N را به‌یک فاصله از O انتخاب کنید و مربع MNTS را بسازید . OS در I با نیمدایره متلاقی می‌شود که رأس مربع مطلوب است) .

۳ـ زاویهٔ xSy و نقطهٔ A مفروض است . دایره‌ای رسم کنیدکه بر A بگذرد و بر Sx و Sy مماس باشد .

(دایرهٔ دلخواه C′ را مماس بر Sx و Sy رسم کنید . خط SA با C′ در M متلاقی می‌شود از A که موازی با MO′ رسم شود نیمساز زاویه را در O مرکز دایرهٔ مطلوب تلاقی می‌کند) .

۴ـ در مثلث مفروض ABC مستطیلی مشابه با مستطیل مفروض محاط کنید .

(M′N′ را محدود به AB و AC و موازی با BC رسم کنید و مستطیل M′N′S′T′ را مشابه بـامستطیل مفروض بسازید . AT′ باضلع BC در T متلاقی می‌شود که یک رأس مستطیل مطلوب می‌باشد .)

۵ـ دو دایرهٔ C و C′ در نقطهٔ A مشترک‌انـد . قاطع MAN را چنان رسم کنیدکه نسبت AM:AN=k باشد، (در تجانس به‌مرکز A و به‌نسبت k مجانس دایرهٔ C′ را رسم کنید ، دایرهٔ حاصل با دایرهٔ C در M متلاقی‌می‌شود) .

۶ـ مثلثی رسم کنیدکه از آن BC=a و AC=b و میانهٔ CM=m معلوم است .

(BC رارسم کنید. یک‌مکان A دایرهٔ C_1 به‌مرکز C و به‌شعاع b است ، دومین مکان آن دایرهٔ C″ مجانس‌مکان M یعنی دایرهٔ به‌مرکز C و به‌شعاع m در تجانس به مرکز B و به‌نسبت ۲+ می‌باشد.)

۷ـ مثلث ABC را رسم‌کنیـدکـه از آن BC=a و میانهٔ BM=m و نقطهٔ D پای نیمساز داخلی زاویهٔ A معلوم است .

[ضلع BC را رسم‌کنید و نقطهٔ D را برآن معلوم‌کنید. مکان اول A مجانس مکان M (دایرهٔ به مرکز B و به‌شعاع m) در تجانس به‌مرکز C و به‌نسبت ۲+ می‌باشد . مکان دیگر آن دایره‌ای است به‌قطر DD′ که D′ مزدوج توافقی D نسبت به B و C است .]

۸ـ دایرهٔ C و نقطهٔ A روی آن مفروض است . دراین دایره وتر AA′ را چنان رسم کنیدکه وتر معلوم DE را در I قطع کند بقسمی‌که IA′=۳AI باشد .

(I نقطهٔ تلاقی DE با دایـرهٔ C′ مجانس دایرهٔ C در تجانس به مرکز A وبه نسبت $\frac{AI}{AA'}=\frac{1}{4}$ می‌باشد.)

۹- مثلث ABC را با معلوم بودن طولهای سه‌میانه‌رسم کنید.

(میانهٔ BN را رسم‌کنید و برآن نقطهٔ G را با شرط $BG = ۲GN$ انتخاب‌کنید. اولین مکان A دایرهٔ C' به مرکز G و به شعاع دوثلث AM است. مکان دیگر آن‌مجانس مکان P وسط AB (یعنی دایرهٔ به‌مرکز G و به‌شعاع ثلث CP) در تجانس به مرکز B و به‌نسبت ۲+ می‌باشد.)

۱۰-مثلث ABC را رسم‌کنیدکه از آن ضلع $BC = a$ و m طول میانهٔ نظیر زاویهٔ B و مجموع مربعات دو ضلع $b^۲ + c^۲ = l^۲$ معلوم است.

(BC را رسم‌کنید. مکان اول A مجانس مکان M وسط AC (یعنی دایرهٔ به‌مرکز B و به شعاع m) در تجانس به‌مرکز C و به‌نسبت ۲+ است. مکان دیگر A مکان نقاطی است‌که مجموع مربعات فواصل آنها از B و C برابر مقدار ثابت $l^۲$ است‌که دایره‌ای است به‌مرکز O وسط CC و به شعاع:

$$r = \frac{\sqrt{۲l^۲ - a^۲}}{۲}$$

بحث‌کنید.)

۱۱- مثلث ABC را رسم‌کنیدکه از آن ضلع $BC = a$ طول میانهٔ $AM = m$ و نسبت طول میانهٔ $AN = n$ به‌ضلع $AC = b$ معلوم است.

(ضلع BC را رسم‌کنید. یك‌مکان A عبارتست ازمکان نقاطی‌که‌نسبت فواصل آنها از N و C مقدار معلوم است‌که‌این مکان یك‌دایره است. مکان دیگر A مجانس مکان M (دایرهٔ به مرکز B و به‌شعاع m) در تجانس به مرکز C و به‌نسبت ۲+ است.)

۱۲- مثلث ABC را رسم‌کنیدکه از آن اندازهٔ زاویهٔ A، طول ضلع $AB = c$ و اندازهٔ زاویهٔ میانهٔ AN با ضلع BC معلوم است.

(زاویهٔ A رارسم‌کرده روی‌یك ضلع آن طول $AB = c$ را جداکنید. یك مکان N خطی است موازی با ضلع دیگر زاویه‌که مجانس ضلع مزبور در تجانس به مرکز B و به‌نسبت یك دوم می‌باشد. مکان دیگر N کمان درخور زاویهٔ معلوم‌مار بر A و B می‌باشد.)

۱۳-مثلث ABC را رسم‌کنیدکه‌از آن b و c اندازه‌های دو ضلع و d طول نیمساز داخلی زاویهٔ A معلوم است.

($AD = d$) را رسم‌کنید. یك مکان C دایرهٔ به مرکز A و به‌شعاع b است. مکان دیگر C مجانس مکان B (دایرهٔ به مرکز A و به شعاع c) در تجانس به‌مرکز D و به نسبت $-\frac{b}{c}$ می‌باشد.)

۱۴- از چهار ضلعی محاطی ABCD طول قطر BD اختلاف مربعات اضلاع AD و AB، اندازهٔ زاویهٔ ACB و نسبت $\frac{AI}{IC} = m$ معلوم است. این چهارضلعی را رسم‌کنید. I نقطهٔ تلاقی دو قطر است.

(BD رارسم‌کنید. یك‌مکان A خطی است‌که در D با BD زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ ACB می‌سازد. مکان دیگر آن مکان نقاطی است‌که تفاضل مربعات فواصل آنها از B و D برابر مقدار معلوم است‌که این مکان خطی است عمود بر BD به این وسیله نقطهٔ A مشخص می‌شود.

یك مکان C دایرهٔ محیطی مثلث ABD و مکان دیگر آن مجانس خط BD در تجانس به‌مرکز A و به نسبت:

$$\frac{AC}{AI} = \frac{m+۱}{m}$$

است.)

۱۵- مثلث ABC قائمه در زاویهٔ A را رسم‌کنیدکه‌از آن s مجموع ضلع و قطر مربع محاطی MNST و نسبت $\frac{AM}{MB} = k$ معلوم است.

(ابتدا باید طول ضلع مربع را معین‌کرد: اگر مثلث MTI را به‌شرطی رسم‌کنیم‌که در آن $TI = s$ بوده اندازه‌های دو زاویهٔ MTI و MIT به‌ترتیب °۴۵ و °۲۲/۵ باشد MT ضلع مربع مطلوب‌است. بعد از رسم مربع مزبور، یك‌مکان A دایرهٔ به‌قطر MN است. مکان دیگر آن مجانس خط TS در تجانس به‌مرکز M و به نسبت $-k$ می‌باشد.)

۱۶- دو دایرهٔ C و C' به‌مرکزهای O و O' و به شعاعهای R و R' و نقطهٔ A مفروض است. بردوایر مزبور مماسهایی موازی باهم و در یك طرف A چنان رسم‌کنیدکه‌نسبت فواصل A از آنها برابر با مقدار معین k باشد.

(C'' مجانس دایرهٔ C' را در تجانس به‌مرکز A و به نسبت $\frac{۱}{k}$ رسم‌کنید. مجانس مماس D' بر C' مماس D'' بر C'' می‌باشدکه چون از A به‌یك فاصله‌اند برهم منطبق می‌باشند و مسئله منجر به‌این می‌شودکه مماس مشترك دو دایرهٔ C' و C'' را رسم‌کنید.)

۱۷- دو دایرهٔ C و C' به‌مرکزهای O و O' و به شعاعهای R و R' و نقطهٔ I مفروض است. از I خط D را چنان رسم‌کنیدکه از دو دایره دو وتر به نسبت R و R' جدا کند.

(C'' مجانس دایرهٔ C را به‌مرکز I و به نسبت $\frac{R'}{R}$ رسم‌کنید. مسئله به‌این منجر می‌شودکه از I خط D راچنان رسم‌کنیدکه از دایره‌های C' و C'' دو وتر به‌طولهای‌متساوی جداکند.)

مسائل از استاد هشترودی

برای دانش آموزان سال ششم ریاضی

دنباله ازشمارهٔ پیش

LXXVI- دایرهٔ محیطی مثلث ABC معلوم است ونقطهٔ I در درون دایرهٔ محیطی مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است با معلوم بودن زاویهٔ A مثلث را رسم کنید .

LXXVII- تبدیل :

$$x=\frac{y^2+q-p^2}{p}$$

ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^2+px+q=0$$

را محفوظ نگه می‌دارد . دلیل آنرا توضیح کنید .

LXXVIII - معادلهٔ :

$$x^3-3x+1=0$$

را با تبدیل $x=y^2-2$ مبدل کنید . معادلهٔ جدید ریشه‌های معادله اصلی را می‌پذیرد. دلیل امررا توضیح کنید . نتیجه بگیرید که ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^3-3x+1=0$$

همه حقیقی هستند و این ریشه‌ها را تعیین کنید .

LXXIX- زاویهٔ $xOy=\alpha$ در صفحه ثابت است . قاطعی متغیر محورهای Ox و Oy را درنقطهٔ M و N قطع می‌کند بقسمی که :

$$\alpha\cdot\overline{OM}+\beta\overline{ON}=a$$

باشد . α و β دو عدد معین (مثبت یا منفی) و a طول ثابتی است . ثابت کنید که اوضاع مختلف خط MN برسهمی ثابتی مماس است . (دوحالت $\alpha\beta>0$ و $\alpha\beta<0$ را بحث کنید)

(درحالت $\alpha=\beta$ مسئله‌ای که‌درتمرینهای‌ریاضیات‌مقدماتی حل شده است بدست می‌آید که می‌تواند راهنمای حل این‌مسئله گردد .)

LXXX- درمثلثی‌مقادیراضلاع a و b و c باروابط

$$a=\alpha^2+3\beta^2$$
$$b=\alpha^2+2\alpha\beta-3\beta^2$$
$$c=\alpha^2-2\alpha\beta-3\beta^2$$

و

داده شده است . بدیهی است که می‌توان α و β را مثبت فرض کرد زیرا منفی‌بودن آنها مقادیر a و b و c را تغییر نمی‌دهد و اگریکی‌ازآنهامنفی‌باشد اضلاع b و c به هم تبدیل‌می‌شوند. اگر مقادیر اضلاع b و c قدرمطلقهای طرفهای دوم فرض‌شوند ثابت کنید که شرط وجود مثلث آن است که α بین β و 3β نباشد . ثابت‌کنیدکه زاویهٔ A مثلث برابر 60° می‌باشد واگر مقادیر α و β را اعداد صحیح فرض‌کنیم(مثلث‌با اضلاع‌صحیح) نشان دهیدکه $\cos\frac{B-C}{2}$ همواره منطق است .

$tg\frac{B-C}{4}$ را حساب‌کنید و زوایای B و C مثلث را از روی زاویهٔ $\theta\left(\theta=\frac{B-C}{4}\right)$ بدست آورید. حدود تغییرات زاویهٔ θ را تعیین کنید . حالت مثلث قائم‌الزاویه را معلوم کرده وخطوط مثلثاتی زاویهٔ θ نظیر را بدست‌آورید .

مقادیر α و β را برای اینکه مثلث قائم‌الزاویه شود تعیین کنید . بدیهی است که فقط به ازاء $\beta=0$ مثلث متساوی‌الاضلاع می‌گردد .

LXXXI- بردو ضلع Ox و Oy زاویهٔ ثابت $xOy=\alpha$ مرتباً دونقطهٔ M و N انتخاب می‌کنیم بقسمی که

$$\overline{OM}\times\overline{ON}=k^2$$

مقدار ثابتی باشد . ثابت‌کنیدکه اوضاع مختلف خط MN بر هذلولی ثابتی مماس است .

LXXXII- زاویهٔ ثابت $xOy = 2\alpha$ و نقاط A و B مرتباً برروی اضلاع Ox و Oy در دست است . قطعه‌خط MN را بین‌دوضلع Ox و Oy چنان قراردهیدکه‌حاصل‌ضرب

$$\overline{AM} \times \overline{BN} = k^2$$

مقدارمعلومی باشد (M بر Ox و N بر Oy قرار دارد) اگر طولهای OA و OB را مرتباً به a و b بنمائیم ثابت‌کنیدکه

اولا اگر $k^2 = ab$ باشد اوضاع مختلف خط MN یا برنقطهٔ O می‌گذرند (جواب بدیهی وبیهوده) یا برنقطهٔ ثابت دیگری می‌گذرندکه تعیین خواهیدکرد .

ثانیاً اگر $k^2 < ab$ باشد اوضاع مختلف خط MN بر بیضی ثابتی مماس است (اگر $a = b$ و $k^2 = a^2 \sin^2\alpha$) باشد بیضی به دایره مبدل می‌شود .

ثالثاً اگر $k^2 > ab$ باشد اوضاع مختلف این خط بر هذلولی ثابتی مماس است .

(اثبات حالت اول وحالت دوم‌درموقعی‌که جواب دایره است مستقیماً میسر است برای حالتی‌که‌جواب مقطع مخروطی است باید اثبات‌کردکه اگر نقاط F_1 و F_2 کانونهای مقطع مخروطی باشند اولا نیمساز زاویهٔ F_1OF_2 همان‌نیمساز زاویهٔ α است وثانیاً نقطهٔ H وسط AB مرکز مقطع مخروطی است پس وسط قطعه خط F_1F_2 می‌باشد و ثالثاً حاصل ضرب : $OF_1 \times OF_2$ برابر $ab - k^2$ می‌باشد .

تعیین کانونها به رسم مثلثی‌که ازآن میانهٔ m_a وزاویهٔ این میانه با نیمساز زاویهٔ A وحاصل‌ضرب دوضلع $bc = k^2$ در دست است مبدل می‌شود)

LXXXIII- ثابت‌کنیدکه ریشه‌های معادلهٔ‌درجهٔ‌ششم

$$y^6 + 3ay^5 + (3a^2 + 2b)y^4 + (a^3 + 4ab)y^3 + (2a^2b + b^2 + ac)y^2 + (ab^2 + a^2c)y + abc - c^2 = 0$$

شامل ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

می‌باشد . سپس سه ریشهٔ دیگر معادلهٔ درجهٔ ششم را از روی ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم تعیین کنید . در این صورت‌می‌توان با تبدیلی مانند $y = f(x)$ معادلهٔ درجهٔ سوم مذکور را به معادلهٔ درجهٔ ششم مفروض مبدل کرد . این تبدیل را بدست آورید .

LXXXIV- اعداد صحیح ومثبت a و b نسبت‌به‌هم متباین می‌باشند. ثابت‌کنیدکه معادلهٔ سیالهٔ :

$$ax - by = 1$$

بینهایت جواب صحیح و مثبت نسبت به x و y دارد و این جوابها را تعیین‌کنید . نتیجه بگیرید که عوامل اول عبارت : $m^2 + 1$ اعداد اول به صورت $4k + 1$ می‌باشند (یعنی اعداد اولی‌که مجموع دومربع می‌باشند) .

LXXXV- اعداد منطق :

$$A = \frac{3(\alpha^2 - \beta^2) - 4\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

و

$$B = \frac{2(\alpha^2 - \beta^2) + 6\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

که درآنها α و β اعداد منطق می‌باشند (البته ممکن‌است‌بدون اینکه ازکلیت مسئله کاسته شود α و β را اعداد صحیح فرض کرد) چنان‌اند که مجموع مربعات آنها۱۳ می‌باشد .

α و β را فقط به یك نسبت‌تنها ممکن‌است چنان‌انتخاب کردکه A و B اعداد صحیح باشند . این نسبت را تعیین‌کنید ثابت‌کنید که جز برای نسبت معین (که دراین صورت α و β متباین نمی‌باشند) اگر α و β متباین باشند A و B دو کسر غیرممکن التحویل می‌باشند .

اگر $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$ فرض شود (λ کسری‌منطق است) وA وB را به x و y نموده مختصات نقطه‌ای ازصفحه فرض کنیم مکان هندسی نقطهٔ M(x و y) دایره‌ای به‌قطر $\sqrt{13}$ است . λ را مساوی $tg\theta$ فرض‌کرده و x و y را از روی θ بدست آورید . اگر زاویهٔ MOx (زاویهٔ شعاع حامل یك نقطه ازدایره باجهت مثبت محور Ox) را به ω بنمائیم زاویهٔ θ را از روی ω تعیین کنید .

LXXXVI- چهارمماس a و b و c و d بر مقطع مخروطی ثابت‌اند . مماس متغیر t چهارمماس قبل را مرتباً درنقاط A و B و C و D قطع می‌کنند . ثابت‌کنیدکه نسبت ناموزون نقاط A و B و C و D عددی ثابت است و با تغییر t تغییر نمی‌کنند . بدین قسم ممکن است هرمقطع مخروطی را با چهار مماس ویك عدد ثابت تعریف‌کرد (شرایط تعیین مقطع مخروطی همواره برابر پنج است مگر برای سهمی که چهار شرط‌کافی است) آیا با معلوم بودن این پنج شرط(یعنی‌درواقع پنج مماس) چگونه ممکن است کانونهای‌منحنی را ترسیم‌کرد؟

LXXXVII- با استفاده ازقضیهٔ داندلن ثابت کنید

که اگر چهار نقطهٔ A و B و C و D برروی مقطع مخروطی ثابت باشد و نقطهٔ متغیر M را برروی منحنی دلخواه انتخاب کرده و به نقاط A و B و C و D وصل کنیم نسبت ناموزون اشعهٔ $M(A,B,C,D)$ با تغییر M تغییر نمی‌کند . هرمقطع مخروطی از این قرار بـا چهار نقطه و یك عدد ثابت تعریف می‌شود . با معلوم بودن پنج نقطه ازمقطع مخروطی چگونه با ترسیم کانونهای آن را می‌توان بدست آورد ؟

LXXXVIII ـ دوشهر V_1 و V_2 ازیکدیگر به‌فاصلهٔ a قرار دارند اتومبیلی ازشهر V_2 با سرعت v_0 به سوی شهر V_1 حرکت‌می کند و اتومبیل دیگری‌ازشهر V_1 با سرعت $2v_0$ به سوی شهر V_2 حرکت‌می کند. هواپیمائی با سرعت : kv_0 $(k>2)$ ازیکی ازشهرها به‌سوی‌شهر دیگر حرکت‌می کنندوموقعی که‌با اتومبیل‌شهر دیگر در یك خط قائم قرار می گیردمراجعت کرده و به‌سوی شهر اول پرواز می‌کند تا با اتومبیل عازم از این شهر دریك‌خط قائم قرار گیرد در این لحظه مجدداً جهت حرکت خود را تغییر می‌دهدوبه‌سوی اتومبیل دیگر برمی‌گردد تا با آن متلاقی شود و به همین قرار دائماً به صورت حرکت شبه نوسانی مسیر خود را ادامه می‌دهد تاسرانجام اتومبیلهای متحرك با هم برخورد کنند . معلوم کنید مسافتی‌که هواپیما می‌پیماید چقدر است ؟ به فرض اینکه اتومبیلها و هواپیما یك موقع حرکت را شروع کنند. بطور کلی اگر سرعت اتومبیل اول k_1v_0 وسرعت اتومبیل دوم k_2v_0 وسرعت هواپیما kv_0 باشد (به فرض $k>k_1>k_2$) مسافت طی شده توسط هواپیما را تعیین کنید . بدیهی است که در مسئله واحد سرعت بـرای اتومبیلها وهواپیما دریك واحد زمان تعیین شده‌است. مثلافاصلهٔ دوشهر ازهم با کیلومتر و سرعت هر متحرك‌به صورت v کیلو متر در یك ساعت تعیین شده‌اند . مسافت‌دوشهر راازهم دراین قسمت نیز a کیلومتر انتخاب کنید .

مسئله را درصورتی‌که هردو اتومبیل دریك جهت(حرکت هواپیما نیز در اول درهمین جهت است) یعنی درجهت حرکت اتومبیل باسرعت k_1v_0 به‌سوی اتومبیل باسرعت: k_2v_0 $(k_1>k_2)$ حرکت می‌کنند نیز حل کنید . اعداد k_1 و k_2 را چنان تعیین کنید که مسافت طی شده توسط هواپیما درحرکت‌دوم(اتومبیلها دریك جهت حرکت می‌کنند) n برابر مسافت طی شده توسط هواپیما در حرکت اول (اتومبیلها رو بـه سمت هم حرکت می‌کنند) باشد . n عدد صحیح ومثبت است . اگر : $k<k_1+k_2$ باشد مقادیر k و k_1 و k_2 می‌توانند اضلاع مثلثی را بنمایانند، زاویهٔ‌مقابل به‌ضلع k(بزرگترین زاویه)را A و زاویهٔ مقابل به ضلع k_2 (کوچکترین زاویه) را C می‌نامیم زاویهٔ B در این‌صورت زاویهٔ وسطی مثلث است . درصورتی که زاویهٔ‌وسطی 60° باشد سرعت kv_0 فقط یك مقدارقابل‌قبول دارد و زوایای A و C مثلث‌را بدست آورید

در چه صورت مثلث قائم‌الزاویه است ؟

درچه صورت مثلث متساوی‌الاضلاع است ؟

ثابت‌کنید که اگراتومبیلها هیچیك‌ساکن نباشنددرموقعی که نسبت دومسافت پیموده شده بوسیلهٔ هواپیمادرجهتهای واحد برای دو اتومبیل و جهتهای مختلف برای آنها برابر n باشد سرعت kv_0 هیچگاه نمی‌تواند منطق باشد .

درحالت کلی آیا چه موقع سرعتهای : kv_0 و k_1v_0 و k_2v_0 اعداد منطق می‌باشند ؟ چه موقع همین مقادیر اعداد صحیح‌می‌بـاشند ؟

LXXXIX ـ دایرهٔ ثابتی به مرکز O و به شعاع R با نقطهٔ H در سطح دایره مفروض‌اند . مثلثهائی در دایره محاط می‌کنیم‌که ارتفاعهای آنها در نقطهٔ H همدیگر را قطع کنند. ثابت کنید که‌اوضاع مختلف اضلاع این مثلثها بر مقطع مخروطی ثابتی مماس‌اند (بیضی اگر نقطهٔ H درون دایرهٔ‌باشد و هذلولی اگر این نقطه بیرون دایره باشد).

طول OH را برابر a فرض‌کرده سپس بامحاسبه نشان دهیدکه حاصل ضرب فواصل نقاط O و H از هر ضلع این مثلثها برابر است بـا $\frac{1}{4}(R^2-a^2)$:دایرهٔ‌ثابت مفروض‌یکی از دوائر هادی مقطع مخروطی است .ثابت‌کنید که‌دایرهٔ‌نه‌نقطهٔ اولر برای هر مثلثی که با شرط مسئله در دایرهٔ O محـاط شود دایرهٔ ثابتی است .

ثابت‌کنیدکه حاصل ضرب فواصل هر نقطه از محیط یك دایرهٔ هادی از دو کانون مقطع مخروطی با کوسینوس زاویهٔ بین دو مماس‌که از این نقطه بر مقطع مخروطی رسم می‌شوند متناسب است. بینهایت مثلث وجود داردکه بر مقطع مخروطی

معلومی محیط و در یك دایرهٔ هادی آن محاط می‌باشد ثابت کنید که محل تقاطع ارتفاعهای این مثلثها کانون دوم مقطع مخروطی است .

XC ـ ثابت کنید که کثیرالجملهٔ :

$$P_{n+1}=x^{n+1}-(n+1)x+n$$

(اندیس کثیرالجمله نمایندهٔ درجهٔ آن است) بر کثیرالجملهٔ اول $P_2=(x-1)^2$ بخش پذیر است . معادلهٔ $P_{n+1}=0$ حد اکثر سه ریشهٔ حقیقی دارد کـه یکی مضاعف و برابر (-1) است و دیگری دارای حدی است برابر (-2) واین درموقعی است که n زوج بـاشد والا معادلهٔ $P_{n+1}=0$ فقط یك ریشهٔ مضاعف حقیقی دارد .

XCI ـ ثابت کنید که وترهائی از منحنی:

$$x^2+y^2=\frac{xy^2}{x^2+2kxy+y^2}$$

که از مبدأ مختصـات با زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شوند بـر نقطهٔ ثابتی می‌گذرند و وترهایی از منحنی :

$$xy\,(x^2+y^2)=x^2+y^2+\frac{a^2}{2}xy$$

که از مبدأ مختصات با زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شوند دارای طول ثابتی هستند . وترهایی از منحنی :

$$(x^2+y^2)\,(x^2+y^2+\frac{xy}{2a^2})=xy$$

که از مبدأ مختصات با زاویهٔ قائمه دیده می‌شوند بر دایرهٔ ثابتی مماس‌اند . برای منحنیات درجهٔ دوم که مرکز آنها مبدأ مختصات است خاصیت اخیر صادق است یعنی در بیضیهای:

$$ax^2+2kxy+by^2=1$$

(به‌فرض $ab>k^2$) و هذلولیهای :

$$ax^2+2kxy+by^2=1$$

(به‌فرض $a+b<0$ برای اینکه زاویهٔ مجانبهامنفرجه باشد) وترهایی که از مرکز منحنی با زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شوند بر دایرهٔ ثابتی مماس‌اند . اثبات قسمت اخیر با هندسهٔ مقدماتی مورد نظر است .

XCII ـ نقطهٔ P را بر روی ضلع BC مثلث ABC انتخاب کرده و PM و PN را مرتباً به‌موازات AB و AC رسم می‌کنیم تـا نقاط M و N بر روی اضلاع AB و AC بدست‌آیند. ثـابت کنید که اوضاع مختلف خط MN با تغییر نقطهٔ P بر روی BC بر سهمی ثابتی مماس است (مسئله را به مسئلهٔ LXXIX منجر کنید) .

XCIII ـ در چهار ضلعی رؤوس A و B ثابت‌اند و طول اضلاع تغییر نمی‌کند. مکان‌هندسی اوساط اضلاع را تعیین کنید .

(با مسائل XLIV و XLV بسنجید)

XCIV ـ خاصیت منحنی

$$x^2+y^2=\frac{xy^2}{x^2+2kxy+y^2}$$

مسئلهٔ XCI برای بیضیهـائی که بر مبـدأ مختصات می‌گذرد نیز صادق است یعنی اوتاری از بیضی (یا هذلولی) :

$$ax^2+2kxy+by^2+2y=0$$

که از مبدأ مختصات تحت زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شوند بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرند (این نقطه که به **نقطهٔ فرژیه Frégier** موسوم است بر روی قائم منحنی در مبدأ مختصات (نقطهٔ‌تماس) واقع است) . اثباتی مقدماتی برای بیضی ذکر کنید . حکم کلی چنین است : اگر رأس زاویهٔ قـائمه‌ای بر نقطه‌ای از مقطع مخروطی (صاحب مرکز) قرار داشته باشد در اوضاع مختلف این زاویه وتر آن بر روی مقطع مخروطی بر نقطهٔ ثابتی‌مرور می‌کند .

دانش‌آموز رتبهٔ اول شهرستان مهاباد

خرداد ۱۳۴۷

ابراهیم علیزاده

ششم ریاضی دبیرستان محمدرضا شاه

معدل کتبی : ۱۶/۷

معدل کل : ۱۷/۸۹

حل مسائل نمونه

مسئلهٔ لوکاس (Lucas) و حل آن

صورت مسئله از: کتاب جبر چهارم تألیف: مصاحب ـ ارشمید

حل مسئله از **جعفر آقایانی چاوشی**

۵۲/۶ـ هرگاه α و β ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^2-px+q=0$$

باشند و داشته باشیم :

$$U_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \quad \text{و} \quad V_n=\alpha^n+\beta^n$$

صحت روابط زیر را ثابت کنید :

۱) $U_n-pU_{n-1}+qU_{n-2}=0$

۲) $V_n-pV_{n-1}+qV_{n-2}=0$

۳) $V_n-pU_n+2qU_{n-1}=0$

۴) $2U_{2n-1}=V_nU_{n-1}+U_nV_{n-1}$

۵) $U_{2n}=U_nV_n$

۶) $U_{n-1}V_n=U_nV_{n-1}+2q^{n-1}$

حل : ۱) می‌دانیم که $\alpha+\beta=p$ و $\alpha\beta=q$ و

$$pU_{n-1}=\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{\alpha^n-\beta^n+\alpha\beta(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})}{\alpha-\beta}$$

$$pU_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}+\alpha\beta\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}$$

$$U_n-pU_{n-1}+qU_{n-2}=0$$

۲) $pV_{n-1}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})=$

$$+\alpha^n+\beta^n+\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})$$

$$pV_{n-1}=V_n+qV_{n-2}$$

$$V_n-pV_{n-1}+qV_{n-2}=0$$

۳) $pU_n=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)=$

$$=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}+\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}$$

$$pU_n=U_{n+1}+qU_{n-1}$$

$$U_{n+1}-qU_{n-1}+2qU_{n-1}-pU_n=0$$

$$U_{n+1}-qU_{n-1}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}-$$

$$-\frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^n(\alpha-\beta)+\beta^n(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=\alpha^n+\beta^n=V_n$$

$$V_n-pU_n+2qU_{n-1}=0$$

۴) $2U_{2n-1}=\frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}+\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\alpha-\beta}$

$$=\frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}+\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\alpha-\beta}+$$

$$+\frac{\alpha^n\beta^{n-1}+\alpha^n\beta^{n-1}-\alpha^n\beta^{n-1}-\alpha^n\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha_n+\beta^n)+(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}$$

$$2U_{2n-1}=U_{n-1}V_n+U_nV_{n-1}$$

۵) $U_{2n}=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha_n-\beta_n)(\alpha_n+\beta_n)}{\alpha-\beta}$

$$=U_nV_n$$

۶) $U_{n-1}V_n=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}(\alpha^n+\beta^n)$

$$=\dots=$$

$$=\frac{(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})(\alpha^n-\beta^n)+2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}$$

$$=U_nV_{n-1}+2q^{n-1}$$

مسائل برای حل

دانش آموزان هر کلاس می‌توانند راه‌حل مسائلی مربوط به‌کلاس‌خود راکه شمارهٔ‌مسئله باعلامت ✱ مشخص شده است به ادارهٔ مجله ارسال دارند. از ارسال‌حل‌مسائل فاقدعلامت مزبور وهمچنین از ارسال حل‌مسائل‌مربوط‌به کلاسهای پائین‌تر خودداری شود. روی هرورقه‌حل‌مسائل نام وکلاس و دبیرستان مربوط به‌صراحت نوشته شود.

کلاس چهارم طبیعی

۵۲/۲ـ از **ابوالفضل فتح‌الله زاده**

به فرض اینکه ریشهٔ معادلهٔ $۴y^۲-۴y+۱=۰$ برابر با tgx فرض شود حاصل عددی عبارت زیر را حساب‌کنید :

$$\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$$

۵۲/۳ ـ ترجمه ازمجلهٔ دانش آموز ریاضی

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC نقطهٔ D بر وتر AB چنان انتخاب شده که $BC=CD=۱۵$ و $DA=۴۱$ می‌باشد . طول AB را حساب‌کنید .

کلاس چهارم ریاضی

✱ **۵۲/۴ ـ** فرستنده : **محمود کرباسی**

اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$ax^۲+bx+c=۰$$

باشد معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهیدکه ریشه‌هایش $\alpha x'$ و $\beta x''$ باشد . α و β دوعدد متمایزاند.

مثال عددی :

$$۶x^۲+۵x-۴=۰ \text{ و } \alpha=۴ \text{ و } \beta=-۳$$

۵۲/۵ ـ فرستنده : **قوام نحوی**

اگر عدد p واسطهٔ هندسی دو عدد q و r باشد صحت تساوی زیر را محقق‌کنید :

$$\log_q p+\log_r p=۲\log_q p\log_r p$$

✱ **۵۲/۶ ـ** فرستنده: **سیدجمال آشفته**

دو تصاعد عددی و هندسی زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\div x_۱=a\cdot x_۲\cdot x_۳\cdots x_n$$

$$\div\!\!\div y_۱=b:y_۲:y_۳:\cdots:y_n$$

مجموع زیر را بر حسب a و b جملات اول‌دو تصاعدو d و q قدر نسبتهای آنها حساب‌کنید :

$$S=\frac{x_۱}{y_n}+\frac{x_۲}{y_{n-۱}}+\cdots+\frac{x_n}{y_۱}$$

۵۲/۷ـ از **امیر نادری** ششم ریاضی دبیرستان سعدی اصفهان

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم . نیمساز زاویهٔ AHB ضلع AB را در E و نیمساززاویهٔ AHC ضلع AC را درD قطع می‌کند . اگر $I_۱$ و $I_۲$ مراکز دوایر محاطی داخلی مثلثهای AHB و AHC باشد ثابت‌کنیدکه $I_۱I_۲$ با DE موازی است .

✱ **۵۲/۸ـ** از **مسعود حبیب‌الله زاده** ششم ریاضی دبیرستان خوارزمی

سه‌خط متقارب $d_۱$ و $d_۲$ و $d_۳$ مفروض است . دایره‌ای رسم‌کنیدکه مرکزش روی $d_۲$ واقع بوده بر $d_۱$ مماس باشدواز

d_3 وتری به طول معین l جدا کند .

کلاس پنجم طبیعی

۵۲/۹ ـ فرستنده : **منوچهر دهقان** دانشجوی دانشسرای عالی

مقدار مجهول x را n مرتبه اندازه گرفتیم ، اندازه‌های x_1 و x_2 و ... و x_n بدست آمد . ثابت کنید که مجموع مربعات خطاها یعنی :

$$y=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\dots+(x-x_n)^2$$

وقتی می‌نیمم است که x واسطهٔ عددی بین مقادیر x_1 و x_2 و ... و x_3 باشد .

۵۲/۱۰ ـ فرستنده : **محمد مهدی عابدی نژاد**

ثابت کنید که تساوی زیر درست است :

$$\sin^2 12^\circ+\sin^2 21^\circ+\sin^2 39^\circ+\sin^2 48^\circ$$
$$=1+\sin^2 9^\circ+\sin^2 18^\circ$$

کلاس پنجم ریاضی

✲ ۵۲/۱۱ ـ تابع درجهٔ دومی چنان تعیین کنید که از هر نقطهٔ محور طولها دو مماس عمود برهم برمنحنی نمایش آن رسم شود و این منحنی دارای محور تقارن $x=-\frac{2}{5}$ بوده از نیمساز ربع (دوم) محورها وتری به‌طول $\frac{8\sqrt{2}}{5}$ جدا کند .

۵۲/۱۲ ـ تابع به فرم :

$$y=2a\sin^2 x+b\sin x\cos x+a\cos^2 x+c$$

را معین کنید بنا بر آنکه مشتق آن به صورت :

$$y'=2\sin 2x+3\cos 2x$$

بوده و معادلهٔ $y=0$ با معادلهٔ $3tg2x=2$ هم ارز باشد .

✲ ۵۲/۱۳ ـ از **مسعود حبیب‌الله‌زاده**

ثابت کنید که عبارت زیر به a و b و c بستگی ندارد

$$P=\sin^2(a+c)+\sin^2(b+c)+\cos^2(b-a)-$$
$$-2\cos(b-a)\sin(a+c)\sin(b+c)$$

۵۲/۱۴ ـ از **محمدرضا یزدان** دانشجوی پلی تکنیک

صحت تساوی زیر را محقق کنید:

$$cotg86^\circ cotg129^\circ+cotg129^\circ cotg145^\circ+$$
$$+cotg145^\circ cotg86^\circ=1$$

۵۲/۱۵ ـ از **محمدرضا یزدان**

خط Δ و نقطهٔ A واقع در خارج آن مفروض است . مکعب $ABCDEFGH$ به رأس A را چنان بنا کنید که قطر BH از آن بر خط Δ واقع باشد .

کلاس ششم طبیعی

۵۲/۱۶ ـ فرستنده : **منوچهر دهقان**

خط به معادلهٔ $x-2y+4=0$ محور xها را در A و محور yها را در B قطع می‌کند . اولا معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر O مبدأ مختصات و بر نقاط A و B می‌گذرد. ثالثاً هذلولی به‌معادلهٔ x^2-y^2+ax را معین کنید بنابر آنکه طول خط‌المرکزین هذلولی و دایرهٔ فوق برابر با $\sqrt{26}$ باشد.

۵۲/۱۷ ـ فرمول کلی مقادیر کمانهای x و y را از دستگاه زیر بدست آورید :

$$\begin{cases}4\cos 2x=1+\sin y\\ 8\cos^2 x=6+\cos y\end{cases}$$

کلاس ششم ریاضی

۵۲/۱۸ ـ فرستنده : **جمشید موری** دانشجوی دانشگاه مشهد

دو دایرهٔ متحدالمرکز (C) و (C') به مرکز O مبدأ مختصات و به‌شعاعهای a و b $(a>b)$ مفروض‌اند . نقطهٔ M را بر (C) انتخاب کرده در آن مماسی براین دایره رسم می‌کنیم که $x'x$ را در S قطع می‌کند . در نقطهٔ B محل تلاقی (C') با Ox مماسی بر (C') رسم می‌کنیم که OM را در Q تلاقی می‌کند و مستطیل $SBQP$ را می‌سازیم. وقتی M بر دایرهٔ (C) حرکت کند مکان نقطهٔ P را تعیین کنید .

✲ ۵۲/۱۹ ـ فرستنده : **داوید ریحان** دانشجوی دانشکدهٔ فنی

معادلهٔ زیر مفروض است :

$$(1)\quad x^3+px+q=0$$

اولا معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌های آن مربع تفاضل

دو به دوی ریشه‌های معادلهٔ بالا باشد و از معادلهٔ حاصل نتیجه بگیرید شرط آنکه معادلهٔ (۱) دارای ریشهٔ مضاعف باشد آنست که $4p^3+27q^2=0$ باشد.

ثانیاً اگر a و b دو ریشه از معادلهٔ (۱) باشد که تفاضل آنها مقدار ثابت k باشد رابطهٔ بین p و q و k را بدست آورید.

ثالثاً اگر a و b دو ریشه از معادلهٔ (۱) بوده وداشته باشیم $a+b=\lambda ab$ رابطهٔ بین p و q و λ را بدست آورید.

۵۲/۲۰ـ از جلیل راشد پنجم ریاضی دبیرستان فیوضات مشهد

به فرض اینکه a و b و c به‌همین ترتیب تصاعدعددی بسازند معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$a\sin^2 x\cos x+c\cos^3 x=b\sin x$$

۵۲/۲۱ـ از اکبر ابراهیمیان ششم ریاضی دبیرستان سعدی اصفهان

ثابت کنید که در هر مثلث داریم:

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}<\frac{a^2+b^2+c^2}{4abc}$$

۵۲/۲۲ـ از مظاهر امینی دانشجوی دانشگاه تهران

عدد a واسطهٔ هندسی دو عدد b و c است و:

$$c-b=2k$$

و k عدد اول می‌باشد. فرم کلی اعداد مزبور را تعیین کنید و آنهایی راکه دو رقمی‌اند مشخص کنید.

۵۲/۲۳ـ فرستنده داوید ریحان

دایرهٔ محاطی داخلی مثلث در نقاط α و β و γ بر ضلعهای BC و CA و AB مماس می‌باشد. اولا ثابت کنید که خطوط $A\alpha$ و $B\beta$ و $C\gamma$ در یك نقطهٔ I متقارب‌اند. ثانیاً ثابت کنید که:

$$\frac{\overline{I\alpha}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{I\beta}}{\overline{IB}}\cdot\frac{\overline{I\gamma}}{\overline{IC}}=-\frac{r}{4R}$$

ثالثاً اگر به‌جای دایرهٔ محاطی داخلی، یکی ازدوایر محاطی خارجی انتخاب شود رابطهٔ بالا به‌چه‌صورت درمی‌آید.

۵۲/۲۴ـ ترجمه از فرانسه

خط ثابت D و نقطهٔ ثابت O واقع برآن مفروض است. دایرهٔ (C) به‌شعاع ثابت R چنان تغییرمکان می‌دهد که همواره در یك طرف خط D برآن مماس می‌باشد. اگر Δ قطبی O نسبت به دایرهٔ (C) باشد پوش خط Δ را پیدا کنید (منحنی ثابتی تعیین کنید که Δ همواره برآن مماس می‌باشد).

مسائل متفرقه

برای داوطلبان امتحانات ورودی دانشکده‌ها

۵۲/۲۵ـ ازعلی فیاض پنجم ریاضی دبیرستان طبری آمل

اگر ریشه‌های معادلهٔ:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bx+D=0$$

عبارت باشند از $tg\,a$ و $tg\,b$ و $tg\,c$ و $tg\,d$ حاصل:

$$a+b+c+d$$

را بدست آورید.

۵۲/۲۶ـ از مصطفی صفری دبیرستان بوعلی اراك

ثابت کنید که حاصل‌ضرب اعداد:

$$(11)_x \text{ و } (101)_x \text{ و } \ldots \text{ و } \underbrace{(1000\ldots01)_x}_{2^n-1 \text{ مرتبه}}$$

که در مبنای $x>1$ نوشته شده‌اند عددی است 2^n+1 رقمی با ارقام واحد

۵۲/۲۷ـ از مسعود حبیب الله‌زاده ششم ریاضی دبیرستان خوارزمی ۱

عددی چهار رقمی تعیین کنید که هم مجذورکامل باشد و هم مکعب کامل.

۵۲/۲۸ـ از مسعود حبیب‌الله زاده

کوچکترین دو عدد پنج رقمی را با شرط زیر تعیین کنید:

$$\overline{(abcde)}_x=\overline{(mnpqr)}_{x+1}$$

۵۲/۲۹ـ از سیروس مریوانی (فعلا دانشگاه ماساچوست آمریکا)

عدد ۱۷ در مبنای $3x$ به صورت N و عدد ۱۱ در مبنای x به‌صورت مقلوب N نوشته می‌شوند. مقادیر x و N را تعیین کنید.

۵۲/۳۰ـ از سیروس مریوانی

ارقام x و y را از رابطهٔ زیر تعیین کنید:

$$(\overline{xy})_{x+y}+(\overline{yx})_{x+y}=\frac{1}{3}(x^3+y^3)$$

۵۲/۳۱ــ از سیروس مریوانی

به فرض $a \neq 0$ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\log_a(2\cos x - 1) + 2\log_{a^2}(2\cos 2x - 1) + \dots + n\log_{a^n}(2\cos 2^n x - 1) = 0$$

۵۲/۳۲ــ جواد جمشیدی دانشجوی دانشگاه آریامهر

اگر ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^n - px^{n-1} + q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 0$$

عبارت باشند از :

$$\frac{a}{2} \text{ و } \frac{a^2}{4} \text{ و } \frac{a^3}{8} \text{ و} \dots \frac{a^n}{2^n}$$

چه رابطه‌ای بین p و q برقرار است ؟

۵۲/۳۳ ــ از مسعود حبیب‌الله‌زاده

ریشه‌های معادلهٔ $z^3 - 21z^2 + 35z - 7 = 0$

عبارتند از :

$$tg^2\frac{\pi}{7} \text{ و } tg^2\frac{2\pi}{7} \text{ و } tg^2\frac{3\pi}{7}$$

مقدار عددی هریك از دوعبارت زیر را تعیین کنید :

$$A = \sec^6\frac{\pi}{7} + \sec^6\frac{2\pi}{7} + \sec^6\frac{3\pi}{7}$$

$$B = \sec^6\frac{\pi}{7}\sec^6\frac{2\pi}{7}\sec^6\frac{3\pi}{7}$$

۵۲/۳۴ــ از اکبر ابراهیمیان

اگر در مثلثی شعاع دایرهٔ محاطی داخلی واحد باشد می‌نیمم عبارت زیر را حساب کنید :

$$(h_a + h_b + h_c)(r_a + r_b + r_c)$$

۵۲/۳۵ــ از اکبر ابراهیمیان

در صورتی که معادلهٔ درجهٔ سوم :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

دارای سه ریشهٔ مثبت باشد ثابت کنیدکه :

$$bc \geqslant 9ad$$

۵۲/۳۶ــ از کاظم حافظی دبیر دبیرستانهای بنیس

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\log^5 5x + 5\log^5 \frac{5}{x} = 6\left(\log 5x \cdot \log\frac{5}{x}\right)^{\frac{5}{2}}$$

۵۲/۳۷ ــ ترجمهٔ : **جعفر آقایانی چاوشی**

اگر Q مساحت یك چهارضلعی و A و B و C و D مساحتهای چهار مثلثی باشد که بوسیلهٔ اقطار آن تشکیل می‌شود ثابت کنید که :

$$Q^2 = \frac{(A+B)^2(B+C)^2(C+D)^2(D+A)^2}{A \cdot B \cdot C \cdot D}$$

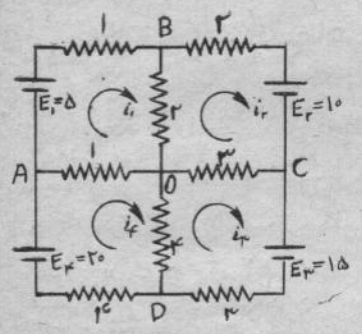
مسائل فیزیك ومکانیك

زیر نظر : حسین فرمان

۵۲/۳۸ ــ از حسین خبازیان دانشجوی دانشگاه آریامهر

تعداد n سلف به ضریب‌سلفهای L_1 و L_2 و... L_n را انشعابی به هم متصل‌کرده و دوسر انشعاب را به جریان‌متناوبی وصل می‌کنیم ، مطلوبست ضریب سلف معادل انشعاب .

۵۲/۳۹ــ از رسول آژیری دبیر دبیرستانهای گچساران



روی شکل مقابل با توجه به مقادیری که یادداشت‌شده شدت‌جریان را در هر حلقه بدست آورید (مقاومت داخلی مولدها ناچیز است)

۵۲/۴۰ــ از رسول آژیری

تعداد ۲۰ عدد پیل را که نیروی محرکهٔ هر کدام $E = 0/5$ ولت ومقاومت هریك $r = 0/5$ اهم است چگونه به هم ببندیم تا شدت جریان در مقاومت خارجی $R = 10$ اهم ماکزیمم شود . مقدار این شدت جریان را نیز حساب کنید .

۵۲/۴۱ــ فرستنده : **داوید ریحان**

صفحهٔ مثلث شکل ABC دریك صفحهٔ قائم روی ضلع افقی AC تکیه می‌کند . با فرض $BC = a$ و $AC = b$ و $C = 120^\circ$ اولا a و b راچگونه بایدانتخاب کرد که‌صفحه‌درحال تعادل باشد ؟ ثانیاً فرض‌می‌کنیم صفحه‌به حال‌تعادل نباشد به‌رأس B نیروی قائم F را ازسمت پائین به طرف‌بالا وارد می‌کنیم‌بقسمی که دستگاه به حال تعادل دربیاید . حدود F را تعیین کنید.

مسائل شیمی

زیر نظر : عطاءالله بزرگ‌نیا

۵۲/۴۲ـ فرستنده : **داوید ریحان**

اولا محلول رقیقی از اسید استیك در نظر می‌گیریم . هرگاه K_A ضریب یونیزاسیون یا ثابت تعادل این محلول ، α درجهٔ یونیزاسیون و C غلظت آن باشد مطلوبست تعیین رابطه‌ای بین α و c و K_A (قانون محلولی اسوالد) .

ثانیاً هرگاه α در مقابل واحد ناچیز باشد مطلوبست محاسبهٔ مقدار تقریبی غلظت یونهای H^+ و همچنین PH محلول رقیقی از این اسید .

ثالثاً PH محلول ۰/۲N اسید استیك که درآن $K_A = ۲ \times ۱۰^{-۵}$ است بدست آورید . غلظت محلول اسید سولفوریکی با همین PH چقدر خواهد بود ؟

رابعاً PH محلولی که از اختلاط ۳ لیتر ازمحلول رقیق ۰/۲ نرمال اسید استیك و ۲ لیتر ازمحلول رقیق ۰/۲ نرمال سود بدست می‌آید چقدر است با فرض آنکه :

$colog K_A = PK_A = ۴/۷$ و $log ۲ = ۰/۳$

۵۲/۴۳ـ فرستنده : **رافیك میناسیان**

ئیدروکربور اتیلنی نرمال A موجوداست. برآن برمور-هیدروژن اثر می‌دهیم. برطبق قانون ومخالف قانون مارکونیکوف دومحصول جداگانهٔ B و C تولید می‌شود . از اثرفلز سدیم بر مجموع B و C کربور D حاصل می‌شودکه به‌یکی ازکربنهای ملکول آن دوبنیان متیل متصل است . مطلوبست :

۱) فرمول تمام فعل و انفعالات ونام مواد A و B و C و D وگستردهٔ ایزومرهای این مواد .

۲) فعل و انفعال ونام‌الفین E حاصل از کربور D را بنویسید درصورتی که ملکول ازمحل پیوند بین کربنهای ۴ و ۵ شکسته شود . با پیروی ازقانون مارکونیکف‌الفین E راهیدرو-کلره نموده ومحصول حاصل رامونوکلره می‌نمائیم سپس محصول کلره را با پتاس الکلی حرارت می‌دهیم ومادهٔ آلی حاصل را جدا کرده وپلیمریزه می‌کنیم .

۳) فرمول تمام فعل و انفعالات را بنویسید و گستردهٔ الکترنی یك واحد ساختمان ازپلیمررابا ذکر نام‌آن رسم‌کنید.

۴) درصورتی که جرم ملکولی این‌پلیمر ۲۰۰۰۰ باشد تعداد مونومرهایی که برای تشکیل یك ملکول پلیمر لازم است محاسبه‌کنید .

حل مسائل یکان شمارهٔ : ۵۰

حل مسائل کلاس چهارم طبیعی

۵۰/۲ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم :

$$bx^۳ + (ab - a)x^۲ + (a + b^۲ - a^۲)x + b - ab$$

بر عبارت $x^۲ + ax + b$ برابر با : $(\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ باشد حاصل عبارت زیر را برحسب a و b بدست آورید :

$$(۱) \quad S = \sqrt[۴]{\alpha} + \sqrt[۴]{\beta}$$

حل‌ـ عمل تقسیم را انجام می‌دهیم . باقیمانده عبارت خواهد شد از : $ax + b$ پس باید اتحاد زیر را داشته‌باشیم :

$$ax + b \equiv (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

و نتیجه خواهد شد :

$$\alpha + \beta = a \quad و \quad \alpha\beta = b$$

طرفین رابطهٔ (۱) را به توان ۴ می‌رسانیم :

$$S^4 = \alpha+\beta+4\sqrt[4]{\alpha\beta}(\sqrt[4]{\alpha^2}\times\sqrt[4]{\beta^2})+6\sqrt[4]{\alpha^2\beta^2}$$

$$S^4 = \alpha+\beta+4\sqrt[4]{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+6\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{a+2\sqrt{b}}$$

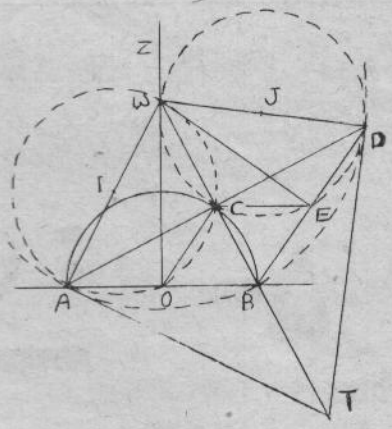
$$S^4 = a+4\sqrt[4]{b}(\sqrt{a+2\sqrt{b}})+6\sqrt{b}$$

۵۰/۳ـ بر نیمدایرهٔ مفروض به‌قطر AB و بـه‌مرکز O نقطهٔ متغیر C را در نظر می‌گیریم . وتر AC را رسم کرده و آنرا به اندازهٔ $CD=AC$ امتداد می‌دهیم .

۱) وقتی C بر نیمدایرهٔ مفروض تغییر مکان دهدمکان هندسی نقطهٔ D و همچنین مکان نقطهٔ ω مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABD را تعیین کنید .

۲) اگر E وسط BD باشد ثابت کنیدکـه چهار ضلعی $AO\omega C$ در یك دایرهٔ I و چهـار ضلعی $C\omega ED$ در یـك دایرهٔ J محاط است و دو دایرهٔ I و J متساوی بوده هر دوبر دایره (ω) مماس می‌بـاشند .

۳) مماس در A بردایرهٔ I و مماس در D بردایرهٔ J یکدیگر را در T قطع می‌کنند . ثابت کنیدکه چهار نقطهٔ T و C و B و ω بریك خط مستقیم قراردارند .



حل ـ۱) زاویـهٔ ACB محاطی وروبرو به قطر بـوده قـائمه می‌باشدپس‌مثلث ABD متساوی‌الساقیـن است زیرا در آن BC هم ارتفاع و هم میانه‌است. بنابراین نقطهٔ D بر دایرهٔ به‌مرکز B وبه‌شعاع مساوی با AB قراردارد . مرکز دایرهٔ محیطی‌مثلث ABD روی عمود منصف اضلاع آن واقع است و چون ضلع AB از این مثلث ثابت است عمـود منصف آن نیزثابت بوده مکان ω نیم خط Oz است‌که در O بر AB عمود می‌باشد .

۲) خـط BC که عمـود منصف AD است از نقطهٔ ω می‌گذرد . هریك از زاویه‌هـای ωCA و ωOA قائمه بوده دایرهٔ به‌قطر $A\omega$ ازدو نقطهٔ C و O می‌گذرد که مرکز آن I وسط $A\omega$ می‌باشد . ωE بر BD عمود است یعنی زاویهٔ ωED وهمچنین زاویهٔ ωCD قائمه‌است. پس‌دایرهٔ به‌قطر ωD (به‌مرکز J) هم از E و هم از C می‌گذرد . دایرهٔ I با دایرهٔ ω در A و دایرهٔ J با دایرهٔ ω در D مشترك است و چون A برخط‌المرکزین $I\omega$ و D برخط‌المرکزین $J\omega$ قرار دارد بنابراین دایره‌های ω و I در A و دایـره‌های ω و J در D مماس می‌باشند .

۳) چون از T دو مماس TA و TD بردایرهٔ (ω) رسم شده است پس T برعمود منصف وتر AD قرار دارد . قبلا معلوم‌شدکه B و C و ω نیز برعمود منصف AD واقع‌انـد پس چهار نقطهٔ مزبور روی یك خط مستقیم قرار دارند .

حل مسائل کلاس چهارم ریاضی

۵۰/۴ـ ثابت کنیدکه هیچ عدد منفی در رابطهٔ زیرصدق نمی‌کند :

$$x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0$$

حل ـ رابطهٔ بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(x^2-2)^2=5x^3+7x$$

طرف اول این رابطه به ازاء همهٔ مقادیر x مثبت است .عبارت طرف دوم شامل جمله‌های درجهٔ فرد x می‌باشد و بنابراین وقتی مثبت‌است‌که x مثبت باشد ؛ x نمی‌تواند مقدار منفی‌قبول کند زیرا در این‌صورت طرف دوم منفی می‌شود و چون طرف اول مثبت است پس تساوی برقرار نخواهد بود .

۵۰/۵ـ ثابت کنیدکه اگر داشته باشیم :

$$\begin{cases} xy=ab(a+b) \\ x^2-xy+y^2=a^3+b^3 \end{cases} \quad \text{و} \quad ab\neq 0$$

خواهیم داشت ،

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{a}\right)=0$$

حل ـ ابتدا فرض می‌کنیم $a+b\neq 0$ که از آن‌نتیجه می‌شود $xy\neq 0$ و طرفین رابطهٔ دوم مفروض را عضو به عضو برطرفین رابطهٔ اول تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab(a+b)}$$

$$\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}-1=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}-1$$

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}+\left(\frac{y}{x}-\frac{b}{a}\right)=0$$

$$\frac{bx-ay}{by}+\frac{ay-bx}{ax}=0$$

$$(bx-ay)\left(\frac{1}{by}-\frac{1}{ax}\right)=0$$

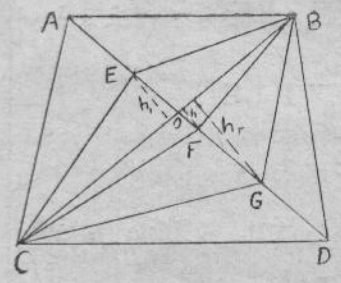
$$(bx-ay)(ax-by)=0$$

از تقسیم طرفین بر $ab\times ab$ خواهیم داشت :

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{a}\right)=0$$

اگر $a+b=0$ باشد نتیجه می‌شود $x=y=0$ و باز هم رابطه صادق است .

۵۰/۶ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$ برقطر AD در جهت A به D نقاط E و F و G را چنان انتخاب می‌کنیم که AD را به‌چهار قسمت برابر تقسیم‌کنند و آنها را به‌نقاط B و C وصل‌می‌کنیم . ثابت‌کنید که تفاضل مساحتهای دو مثلث BGC و BEC برابراست‌با دو برابر مساحت مثلث BFC .



حل ـ فواصل نقاط E و F و G را از قطر BC به‌ترتیب h_1 و h و h_2 و نقطهٔ تلاقی دو قطر را O می‌نامیم . بنا به قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{h_1}{h}=\frac{OE}{OF} \quad و \quad \frac{h_2}{h}=\frac{OG}{OF}$$

$$\frac{h_2}{h}-\frac{h_1}{h}=\frac{OG}{OF}-\frac{OE}{OF}$$

$$(1)\quad \frac{h_2-h_1}{h}=\frac{OG-OE}{OF}$$

تساوی $EF=FG$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$EO+OF=OG-OF \Longrightarrow 2OF=OG-OE$$

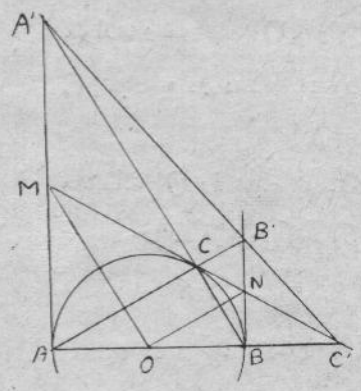
و رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{h_2-h_1}{h}=2 \Longrightarrow h_2-h_1=2h$$

چون‌طرفین‌این‌رابطه را در نصف BC ضرب‌کنیم رابطهٔ‌مطلوب بدست می‌آید .

۵۰/۷ـ در رأسهای A و B و C از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مماسهایی بردایرهٔ محیطی آن رسم می‌کنیم کـه امتداد ضلعهای مقابل را به‌ترتیب در A' و B' و C' قطع‌می‌کنند . ثابت‌کنید که‌سه نقطهٔ A' و B' و C' بریك استقامت می‌باشند.

حل ـ مماس CC' مماسهای BB' و AA' رابه‌ترتیب در N و M قطع می‌کند و این دو نقطه را به O وسط وتر AB وصل می‌کنیم . ON عمود منصف BC و OM عمود منصف AC است پس ON با AC و OM با BC موازی است . درمثلث BAB' خط ON ضلع AB رانصف کرده و با ضلع AB' موازی است پس N وسط BB' می‌باشد . به‌همین ترتیب معلوم خواهد شدکه M وسط AA' است . از C' به B' وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا AA' را در A_1 قطع‌کند . بنا به قضیهٔ خطوط متقارب داریم :



$$\frac{BN}{NB'}=\frac{AM}{MA_1}$$

$$BN=NB' \Longrightarrow AM=MA_1$$

یعنی $MA_1=MA'$ و A_1 بر A' منطبق است یعنی نقاط C' و B' و A' بریك استقامت واقع‌اند .

۵۰/۸ـ از روابط زیر مقادیر x و y را بر حسب a و b بدست آورید :

$$\begin{cases} x^y=y^x \\ x^a=y^b \end{cases}$$

حل ـ یك جواب دستگاه‌عبارتست‌از $x=y=1$ و غیر ازآن از طرفین روابط لگاریتم می‌گیریم :

$$\begin{cases} y\log x=x\log y \\ a\log x=b\log y \end{cases}$$

$$\frac{y}{a}=\frac{x}{b}$$

مقدار مشترك دوکسر اخیر را k فرض‌می‌کنیم پس :

$$x=bk \quad و \quad y=ak$$

$$(bk)^a=(ak)^b \Longrightarrow k=\sqrt[a-b]{\frac{a^b}{b^a}}$$

$$x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} \quad و \quad y=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}$$

حل مسائل کلاس پنجم طبیعی

۵۰/۹ـ در یك صفحه دو دستگاه محورهای مختصات متوازی و هم جهت xOy و $XO'Y$ مفروض است. معادلهٔ منحنی C نسبت به دو دستگاه مزبور به ترتیب عبارتست از :

$$y=x^2+4x-5 \quad \text{و} \quad Y=X^2$$

مختصات O' را نسبت به‌دستگاه xOy بدست آورید .

حل ـ فرض‌می‌کنیم $O'(\alpha \text{ و } \beta)$ در این صورت داریم:

$$x=Y+\alpha \quad \text{و} \quad y=Y+\beta$$

$$Y+\beta=(X+\alpha)^2+4(X+\alpha)-5$$

$$Y=X^2+(2\alpha+4)X+\alpha^2+4\alpha-\beta-5$$

$$\begin{cases} 2\alpha+4=0 \\ \alpha^2+4\alpha-\beta-5=0 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha=-2 \\ \beta=-9 \end{array} \right.$$

۵۰/۱۰ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$ که AB و CD قاعده‌های آن می‌باشند داریم :

$$\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad tg B=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

اولا نسبتهای مثلثاتی چهار زاویهٔ ذوزنقهٔ را حساب کنید.

ثانیاً معلوم کنیدکه بین دو زاویهٔ A و B و همچنین دو زاویهٔ C و D چه رابطه‌ای برقرار است ؟

حل ـ زاویهٔ A منفرجه و زاویهٔ B حاده است و طبق روابط بین نسبتهای مثلثاتی یك زاویه خواهیم داشت :

$$\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ ، } tg A=-\sqrt{2} \text{ و } cotg A=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cotg B=\sqrt{2} \text{ و } \sin B=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } \cos B=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$C=180^\circ-B \text{ و } D=180^\circ-A$$

$$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } \cos C=-\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ و } tg C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{و } cotg C=-\sqrt{2}$$

$$\sin D=\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ و } \cos D=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } tg D=\sqrt{2} \text{ و}$$

$$cotg D=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ثانیاً ـ باتوجه به مقادیر بالا داریم :

$$tg A=-cotg B \Longrightarrow A-B=90^\circ$$

$$A=90^\circ+B \Longrightarrow C=90^\circ+D$$

حل مسائل کلاس پنجم ریاضی

۵۰/۱۱ـ نقطهٔ ثابت A' بر Oy و نقطهٔ ثابت B درربع اول محورها و نقطهٔ متغیر M را بر xx' در نظرمی‌گیریم. عمود AH را بر BM و عمود BK را بر AM رسم‌می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی AH و BK را P می‌نامیم . مختصات P را حساب‌کنید و وقتی M بر xx' حرکت‌کند معادلهٔ مکان P را بدست آورید .

حل ـ فرض می‌کنیم :

$$A(0 \text{ و } a) \text{ و } B(p \text{ و } q) \text{ و } M(m \text{ و } 0)$$

ضریب‌زاویه‌های خطوط AM و BM به‌ترتیب برابر است‌با:

$$\frac{-a}{m} \text{ و } -\frac{q}{m-p}$$

بنابراین معادلات BK و AH می‌شود :

$$BK : y=\frac{m}{a}x-\frac{m}{a}p+q$$

$$AH : y=\frac{m-p}{q}x+a$$

از حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی بالا خواهیم داشت ؛

$$x_P=\frac{q(mp-aq+a^2)}{mq-am+ap}$$

$$y_P=\frac{p(m^2-mp+aq)}{mq-am+ap}$$

برای تعیین معادلهٔ مکان P باید m را بین x و y آن حذف کنیم . برای این‌کار از رابطهٔ اول m را بدست می‌آوریم :

$$m=\frac{a^2q-aq^2-apx}{qx-ax-px}$$

و این مقداررا در رابطهٔ y جایگزین m می‌سازیم . معادله‌ای بدست می‌آید مستقل از m که همان معادلهٔ مکان P می‌باشد.

۵۰/۱۲ـ نمایش هندسی تابع زیر را رسم‌کنید :

$$\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(x+y-4)^2}=2$$

یك مربع رسم خواهد شد ، مختصات مرکز و طول شعاع (و از آنجا طول ضلع) آنرا حساب‌کنید .

توجه ـ بسیاری از دانش آموزان‌که حل مسئلهٔ بالا را

ارسال داشته‌اند رادیکالی به‌صورت $\sqrt{a^2}$ را برابر با $\pm a$ فرض کرده‌و در نتیجه از معادلهٔ مفروض چهارمعادلهٔ مربوط به چهار خط دو به‌دو عمود برهم را بدست آورده‌اند وچون از تقاطع این خطوط یك مربع حاصل می‌شود تصور کرده‌اند که مقصود حاصل است . در صورتی که می‌دانیم مربع از چهارقطعه خط تشکیل می‌شود نه از چهار خط نامحدود . معادلهٔ یك‌مربع در یکان شمارهٔ ۵۱ ضمن مقالهٔ «معادلهٔ متوازی الاضلاع» به صورت‌کلی معلوم شده است ، باوجود این مسئلهٔ بالا مستقلاحل می‌شود :

حلـ می‌دانیم که هر رادیکال با فرجهٔ زوج معرف یك مقدار مثبت است یعنی مثلا $\sqrt{a}$ هیچگاه نمی‌تواند با یك‌مقدار منفی برابر باشد. باتوجه به اینکه اگر a مثبت‌یامنفی باشد a^2 در هردوحال‌مثبت‌است‌پس‌رادیکالی‌مانند $\sqrt{a^2}$ رانمی‌توان مطلقاً برابر با a دانست‌زیرا اگر a مثبت‌باشد تساوی $\sqrt{a^2}=a$ درست است اما این تساوی در حالت $a<0$ درست نیست . از این جهت چنین می‌نویسیم $\sqrt{a^2}=|a|$ یعنی اگر $a\geqslant 0$ باشد داریم $\sqrt{a^2}=a$ و اگر $a<0$ باشد داریم :

$$\sqrt{a^2}=-a$$

با این‌تفاصیل معادلهٔ مفروض به‌چهار صورت زیر نوشته‌می‌شود:

$$\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y-4\geqslant 0 \\ (x-y)+(x+y-4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-4\geqslant 0 \\ -(x-y)+(x+y-4)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-4<0 \\ -(x-y)-(x+y-4)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y-4<0 \\ (x-y)-(x+y-4)=2 \end{cases}$$

چهار دستگاه‌بالاپس از اختصار به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\mathrm{I}\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y-4\geqslant 0 \\ x=3 \end{cases} \qquad \mathrm{II}\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-4\geqslant 0 \\ y=3 \end{cases}$$

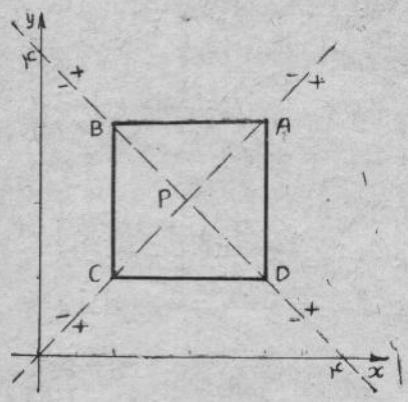
$$\mathrm{III}\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-4<0 \\ x=1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \mathrm{IV}\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y-4<0 \\ y=1 \end{cases}$$

نامعادلهٔ $x-y\geqslant 0$ معرف یکی از دو ناحیه‌ای است که توسط خط $x-y=0$ درصفحهٔ محورهای مختصات پدیدمی‌آید ونا معادلهٔ $x-y<0$ معرف‌ناحیهٔ دیگر خط مزبورمی‌باشد.

نمایش دستگاه I قطعه‌ای از خط $x=3$ است که هم در ناحیهٔ مثبت خط $x-y=0$ و هم‌در ناحیهٔ مثبت خط :

$$x+y-4=0$$

واقع است . و به‌همین ترتیب نمایش هندسی سه‌دستگاه دیگر . طرز عمل ازاین قرار است :



خطوط به‌معادلات :

$$x-y=0$$

و $x+y-4=0$ را رسم می‌کنیم و ناحیه‌های مثبت ومنفی هرکدام را (با امتحان مختصات یك نقطه از هر ناحیه) تعیین می‌کنیم : قسمتی از خط $x=3$ راکه در ناحیه‌های مثبت هردو خط واقع است ، قسمتی از خط $y=3$ راکه در ناحیهٔ منفی اولی و ناحیهٔ‌مثبت دومی ، قسمتی از خط $x=1$ راکه در ناحیه‌های منفی هردو خط و بالاخره قسمتی از خط $y=1$ راکه در ناحیهٔ مثبت‌خط اول و ناحیهٔ منفی خط دوم واقع است رسم می‌کنیم ، مربع ABCD حاصل می‌شود بارأسهای :

$$A(3 \text{ و } 3) \quad \text{و} \quad B(1 \text{ و } 3) \quad \text{و} \quad C(1 \text{ و } 1) \quad \text{و} \quad D(3 \text{ و } 1)$$

دو خط $x-y=0$ و $x+y-4=0$ دو قطر مربع فوق می‌باشد بنابراین P مرکز مربع نقطهٔ تلاقی آنها است :

$$P\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Longrightarrow P\left|\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}\right.$$

$$PA=\sqrt{2} \quad \text{و} \quad AB=2$$

۱۳/۵۰ـ عبارت‌زیر را به‌صورت عبارتی منطق‌درآورید ومعلوم‌کنید انتهای کمان x درچه بخشی از دایرهٔ مثلثاتی‌واقع باشد تا اینکه عبارت حاصل بازهم تابعی متغیر از x باشد:

$$y=1-\sin x-\cos x+\sqrt{2(1+\sin x)(1+\cos x)}$$

حل- ابتدا حاصل عبارت زیر رادیکال را تعیین می‌کنیم:

$$2(1+\sin x)(1+\cos x)=2+2(\sin x+\cos x)+$$
$$+2\sin x\cos x=1+(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)+$$
$$+2(\sin x+\cos x)=1+(\sin x+\cos x)^2+$$
$$+2(\sin x+\cos x)=(1+\sin x+\cos x)^2$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$y=1-\sin x-\cos x+|1+\sin x+\cos x|$$

دو حالت در نظرمی‌گیریم : اولا داشته باشیم :

$$(I)\quad 1+\sin x+\cos x\geqslant 0$$

خواهیم داشت :

$$y=1-\sin x-\cos x+(1+\sin x+\cos x)=2$$

y مقدار ثابت و مستقل از x است .

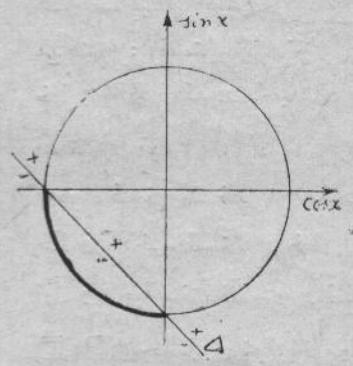
ثانیاً اگر داشته باشیم :

$$(II)\quad 1+\sin x+\cos x<0$$

خواهیم داشت :

$$y=1-\sin x-\cos x-(1+\sin x+\cos x)$$
$$y=-2(\sin x+\cos x)$$

y بازهم تابع متغیر x می‌باشد . برای اینکه نا مساوی (II) برقرار باشد در صفحهٔ محورهای $\sin x$ و $\cos x$ خط به‌معادلهٔ $1+\sin x+\cos x=0$ را رسم می‌کنیم و ناحیه‌های مثبت ومنفی آنرا تعیین می‌کنیم(خط Δ در شکل مقابل) ملاحظه می‌شودکه ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی در ناحیهٔ منفی خط مزبور قرار دارد یعنی انتهای کمان x باید در ربع سوم از دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد .

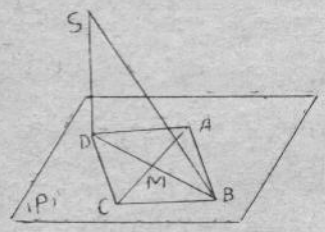


۵۰/۱۴- صفحهٔ P و متوازی‌الاضلاع ABCD واقع درآن مفروض است . در D قطعه خط DS را عمود بر صفحهٔ P اخراج می‌کنیم :

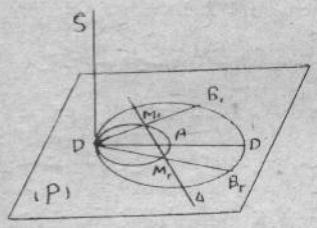
الف -ثابت کنید شرط لازم وکافی برای آنکه AC وSB متعامد باشند آنست‌که داشته باشیم AB = AD

ب- صفحهٔ P و نقاط A و D و S راثابت‌فرض می‌کنیم اما نقاط B و C در صفحه تغییر می‌کنند بقسمی که ABCD همواره متوازی‌الاضلاع است . وضعی از B را تعیین کنید که AC و SB متعامد بوده و M وسط BD روی خط معلوم Δ از P قرار داشته‌باشد . برحسب اوضاع مختلف Δ بحث کنید.

حل- الف : اگر AC بر SB عمود باشد. چون Ac برSD نیزعموداست بنابراین برصفحهٔ SDB ودرنتیجه برBD عمود می‌باشد. وقتی دو قطر متوازی الاضلاع برهم عمود باشند این متوازی‌الاضلاع یک لوزی است بر عکس اگر AD = AB باشددر لوزی ABCD دو قطر AC و BD برهم عموداند و خط AC بردوخط BD و SD از صفحهٔ SDB عمود بوده براین صفحه و در نتیجه‌بر خط SB عمود می‌باشد .



ب- بنا به‌آنچه‌ثابت شدمکان B دایره‌ای‌است به‌مرکز A و به شعاع AD و در نتیجه‌مکان M وسط DB دایره‌ای است به قطر AD .



اگردایرهٔ‌اخیر خط Δ را در M_1 و M_2 قطع‌کند چون DM_1 و DM_2 را رسم‌کنیم از تلاقی آنها با دایرهٔ اول نقاط B_1 و B_2 یعنی دو جواب برای مسئله بدست می‌آید . اگر Δ بر دایرهٔ به‌قطر AD مماس باشد در ازاء آن یك جواب برای B حاصل می‌شود و در حالتی خط و دایرهٔ مزبور متخارج باشند برای B نقطه‌ای بدست نمی‌آید .

حل مسائل کلاس ششم طبیعی

۵۰/۱۵- دو نقطهٔ A(a و ۰) و B(۰ و b) مفروض است . به‌مرکز O مبدأ مختصات و به شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم بقسمی‌که مماسهای AT و BS که براین دایره رسم می‌شود بایکدیگر موازی باشند . مقدار R را برحسب a و b بدست آورید .

حل- معادلهٔ دایره را به صورت : $x^2+y^2=R^2$ و و ضریب زاویهٔ مماسها را m فرض‌می‌کنیم‌و معادلات مماسها را می‌نویسیم :

$$AT : y=mx-ma$$
$$BS : y=mx+b$$

باید هر یك از معادله‌های زیر ریشهٔ مضاعف داشته باشد :

$$x^2+(mx-ma)^2=R^2$$

$$x^2+(mx+b)^2=R^2$$

$$(m^2+1)x^2-2am^2x+a^2m^2-R^2=0$$

$$(m^2+1)x^2+2bmx+b^2-R^2=0$$

$$\Delta'_1=a^2m^4-(m^2+1)(a^2m^2-R^2)$$

$$\Delta'_2=b^2m^2-(m^2+1)(b^2-R^2)=0$$

$$\begin{cases} R^2+R^2m^2-a^2m^2=0 \\ R^2+R^2m^2-b^2=0 \end{cases}$$

$$m=-\frac{b}{a} \text{ و } R=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۵۰/۱۶ ـ اگر $z'=\sin x$ و $z''=\cos x$ ریشه‌های معادلهٔ:

$$2z^2+2\sqrt{z}+1=0$$

باشد و داشته باشیم :

$$(m+1)\sin x\cos x+m(\sin x+\cos x)=$$
$$=m\sqrt{2}+1$$

مقدار m و فرمول کلی مقدارکمان x را تعیین کنید .

حل ـ داریم :

$$\sin x+\cos x=z'+z''=-1$$

$$\sin x\cos x=z'z''=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}(m+1)-m=m\sqrt{2}+1 \Longrightarrow$$

$$m=\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\sin 2x=1 \Longrightarrow x=K\pi+\frac{\pi}{4}$$

چون حاصل جمع $\sin x$ و $\cos x$ منفی و حاصل ضرب آنها مثبت است پس هردو منفی‌اند یعنی انتهای‌کمان x درربع سوم دایرهٔ مثلثاتی واقع است و جواب قابل قبول x عبارت می‌شود از:

$$x=2K\pi+\pi+\frac{\pi}{4}$$

حل مسائل کلاس ششم ریاضی

۵۰/۱۷ ـ مکان هندسی نقاط تلاقی منحنیهای به‌معادلات زیر را تعیین کنید :

$$y=\frac{mx^2+rx+p}{ax^2+bx+m} \quad \text{و}$$

$$y=\frac{rx^2+mx+p}{ax^2+bx+r}$$

حل ـ معادلات بالا را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$ayx^2+byx+my=mx^2+rx+p$$

$$ayx^2+byx+ry=rx^2+mx+p$$

طرفین این دو معادله را از هم‌کم می‌کنیم :

$$(m-r)y=(m-r)x^2-(m-r)x$$

اگر $m=r$ باشد نتیجه خواهد شدکه دو تابع مفروض متحداند یعنی منحنیهای آنها منطبق می‌باشند و اگر $m\neq r$ باشد خواهیم داشت :

$$y=x^2-x$$

۵۰/۱۸ ـ در شکل منحنی نمایش تابع زیر بحث کنید :

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

حل ـ فرض می‌کنیم $a\neq 0$ در این صورت اگر $a<0$ و $b^2-4ac<0$ باشد سه جمله‌ای داخل رادیکال در ازاء همهٔ مقادیر x منفی است و تابع نامعین است .

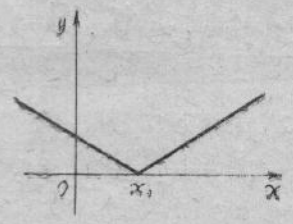
اگر $b^2-4ac=0$ باشد داریم :

$$y=\sqrt{a(x-x_0)^2}$$

در حالت $a<0$ جز در ازاء $x=x_0=-\frac{b}{2a}$ در ازاء بقیهٔ مقادیر x تابع نامعین است . در این حالت نمایش هندسی تابع منحصر به یك نقطهٔ (x_0 و 0) می‌باشد . درحالت $a>0$ خواهیم داشت

$$y=\sqrt{a}\,x-x_0$$

که در ازاء $x\geqslant x_0$ داریم $y=\sqrt{a}(x-x_0)$ و در ازاء $x<x_0$ داریم $y=-\sqrt{a}(x-x_0)$ و نمایش هندسی تابع یك خط شکسته است شامل‌دو نیم‌خط . (شکل‌صفحهٔ‌بعد)



اگر $a>0$ و $b^2-4ac<0$ باشد سه جمله‌ای داخل رادیکال در ازاء جمیع مقادیر x مثبت و در نتیجه تابع در فاصلهٔ $]-\infty$ و $+\infty[$ معین می‌باشد . مشتق تابع یعنی :

$$y'=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

درازاء $x=x_0=-\frac{b}{2a}$ صفر شده ازمنفی به‌مثبت تغییرعلامت می‌دهد . تابع در ازاء $x=x_0$ می‌نیمم می‌باشد . در این حالت داریم :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{x^2}}=\sqrt{a}$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-\sqrt{a}x)=\lim(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x)$$

$$=\lim\frac{bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x}=$$

$$=\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\left(-\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{x^2}}\right)=$$

$$=-\sqrt{a}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y+\sqrt{a}x)=$$

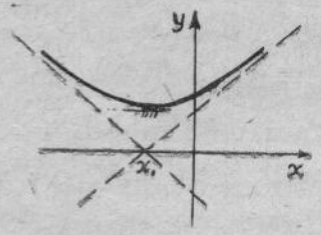
$$=\lim\frac{bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x}=$$

$$=-\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

پس منحنی نمایش تابع دارای دو مجانب به معادله‌های:

$$y=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$$y=-\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}}$$



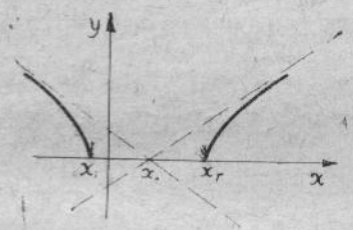
بوده به‌فرض $x_0<0$ منحنی نمایش آن مطابق شکل مقابل است .

اگر $a>0$ و $b^2-4ac>0$ باشد معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای دوریشهٔ x_1 و x_2 می‌باشد به فرض $x_1<x_2$ تابع در فاصله‌های $]-\infty$ و $x_1[$ و $]x_2$ و $+\infty[$ معین و در فاصلهٔ $]x_1$ و $x_2[$ نامعین است .

مشتق تابع هیچگاه صفر نمی‌شود زیرا :

$$x_1<-\frac{b}{2a}<x_2$$

می‌باشد ، اما مشتق در ازاء $x=x_1$ و x_2 برابر با $\pm\infty$ است یعنی در نقاط به طولهای x_1 و x_2 مماسهای برمنحنی با محور عرضها موازی‌اند و علاوه بر آن مشتق در ازاء مقادیر $x<x_1$ منفی و در ازاء مقادیر $x>x_2$ مثبت است .

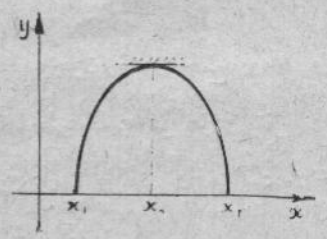


معادلات‌مجانبهای منحنی به‌ترتیب سابق و به همان صورت بدست می‌آید ومنحنی نمایش تابع به فرض $x_1<0<x_2$ مطابق شکل مقابل است .

اگر $a<0$ و $b^2-4ac>0$ باشد تابع فقط درفاصلهٔ $[x_1$ و $x_2]$ معین است . در این حالت مشتق تابع درازاء :

$$x=x_0=-\frac{b}{2a}$$

صفر شده ازمثبت به‌منفی تغییر علامت می‌دهد یعنی تابع در ازاء $x=x_0$ ماکزیمم‌می‌باشد.مماسهای برمنحنی درنقاط به‌طولهای x_1 و x_2 با محور عرضها موازی‌اند و منحنی نمایش تابع به فرض $0<x_1<x_2$ به شکل مقابل است .



وقتی $a=0$ باشد داریم :

$$y=\sqrt{bx+c}$$ و

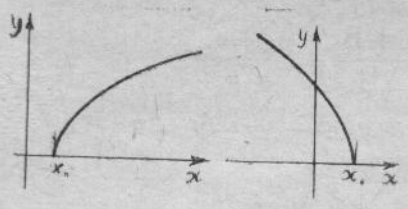
$$y'=\frac{b}{2\sqrt{bx+c}}$$

مشتق در ازاء $x = x_0 = -\frac{c}{b}$ (طول نقطهٔ تلاقی منحنی با محور طولها) بینهایت بوده غیر از آن دارای علامت ثابت است و تابع همواره در یك جهت سیر می‌کند.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \pm\infty} y = \infty$$

یعنی منحنی مجانب ندارد.

برحسب اینکه b مثبت یا منفی باشد و به فرض $x_0 > 0$ منحنی مطابق با یکی از شکلهای مقابل می‌باشد.



۵۰/۱۹ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$cotg\,x + 2cotg\,2x + 3cotg\,3x = 5tg\,x$$

حل ـ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$cotg\,x - tg\,x = \frac{1 - tg^2 x}{tg\,x} = 2cotg\,2x$$

$$4cotg\,2x - 4tg\,x = 4\left(\frac{cos\,2x\,cos\,x - sin\,2x\,sin\,x}{sin\,2x\,cos\,x}\right)$$

$$= \frac{4cos\,3x}{sin\,2x\,cos\,x}$$

$$\frac{4cos\,3x}{sin\,2x\,cos\,x} + \frac{3cos\,3x}{sin\,3x} = 0$$

$$cos\,3x = 0 \implies x = \frac{K\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$4sin\,3x + 3sin\,2x\,cos\,x = 0$$

$$4(3sin\,x - 4sin^3 x) + 6sin\,x\,cos^2 x = 0$$

$$sin\,x = 0 \implies x = K\pi$$

$$18 - 22sin^2 x = 0$$

$$cos\,x = K\pi \pm Arcsin\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

۵۰/۲۰ ـ اعداد صحیح و مثبت x و y را از رابطهٔ زیر بدست آورید:

$$x^8 + 4y^8 = 1280$$

حل ـ x باید زوج باشد. بافرض $x = 2z$ خواهیم داشت:

$$64z^8 + y^8 = 320$$

y باید زوج باشد. با فرض $y = 2u$ بعد از اختصار خواهیم داشت:

$$z^8 + 4u^8 = 5 \implies z = u = 1 \implies x = y = 2$$

۵۰/۲۱ ـ عدد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$N = 2^n \times p$$

که در آن n عدد صحیح دلخواه و p عدد اول می‌باشد.

۱) مقسوم علیه‌های N راکه بین یك وخود N واقع‌اند تعیین‌کرده و S مجموع آنها را برحسب N و p بدست آورید.

۲) چه رابطه‌ای باید بین n و p برقرار باشد برای اینکه N با مجموع مقسوم‌علیه‌های خود (به غیر از خود N) برابر باشد.

حل ـ با توجه به‌اینکه p عدد اول است مقسوم‌علیه‌های N عبارت می‌شوند از:

$$1 \text{ و } 2 \text{ و } 2^2 \text{ و} \ldots \text{و } 2^n \text{ و } p \text{ و } 2p \text{ و} \ldots \text{و } 2^n p$$

به سادگی معلوم خواهد شدکه مجموع این مقسوم‌علیه‌ها برابر است با:

$$S = (1+p)(1+2+2^2+\ldots+2^n)$$

$$S = (1+p)(2^{n+1} - 1)$$

$$S = (1+p)\left(\frac{2N}{p} - 1\right)$$

۲) باید داشته باشیم:

$$N = S - N \text{ یا } S = 2N$$

$$(1+p)\left(\frac{2N}{p} - 1\right) = 2N$$

$$2N = p(p+1)$$

$$2^{n+1} = p + 1 \text{ و } p = 2^{n+1} - 1$$

۵۰/۲۲ ـ دو خط عمود برهم D و D′ را در نظر می‌گیریم که در A متقاطع هستند. دایرهٔ (O) در صفحهٔ این دو خط واقع است و M نقطهٔ متغیری از D بوده و M′ نقطهٔ تلاقی قطبی M نسبت به (O) با خط D′ می‌باشد.

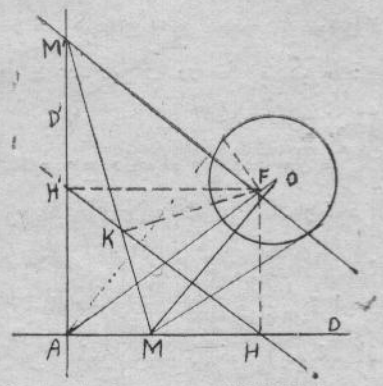
۱) ثابت کنیدکه نقطهٔ ثابتی مانند F وجود دارد که از آن نقطه قطعه خط MM′ به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود.

۲) پوش خط MM′ را تعیین کنید.

حل ـ دایرهٔ به قطر MM′ بر دایرهٔ (O) عمود است وچون دایرهٔ مزبور از A می‌گذرد از نقطهٔ F پای قطبی A نسبت به (O) نیز می‌گذرد. A ثابت است پس F نیز ثابت بوده و زاویهٔ MFM′ همواره قائمه است.

۲) تصویرهای F را بر D و D′ و MM′ به‌ترتیب H

و H' و K می‌نامیم. چون F بر دایرهٔ محیطی مثلث AMM' واقع است پس نقاط H و H' و K روی خط سمسن مثلث



مزبور واقع‌اند. خط MM' بر سهمی مماس است که F کانون و HH' مماس در رأس بر آن می‌باشد.

۵۰/۲۳ ـ بیضی (E) به مرکز O و به‌نصف قطر اطول a و نصف قطر اقصر b مفروض است. مثلث MNP را در نظر می‌گیریم که در بیضی (E) محاط بوده و مرکز ثقل آن بر مرکز بیضی واقع باشد.

۱) پوش اضلاع مثلث MNP را تعیین کنید.

۲) ثابت کنید که مساحت مثلث MNP مقداری است ثابت.

حل ـ بیضی مزبور تصویر دایره‌ای است به شعاع a و مثلث MNP تصویر مثلثی است مانند $M'N'P'$ که در دایرهٔ مزبور محاط است و مرکز ثقل آن بر مرکز دایره واقع است، از این جهت مثلث $M'N'P'$ متساوی‌الاضلاع بوده ضلعهای آن بر دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ اول و به شعاع $\frac{a}{2}$ مماس است، در نتیجه اضلاع مثلث $M'N'P'$ بر یك بیضی که تصویر دایرهٔ اخیر است مماس می‌باشند.

۲) مساحت مثلث $M'N'P'$ برابر است با $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

و از آنجا مساحت مثلث MNP برابر می‌شود با:

$$\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}\times\frac{b}{a}=\frac{3ab\sqrt{3}}{4}$$

حل مسائل متفرقه

۵۰/۲۴ ـ اگر a_1 و a_2 دو واسطهٔ عددی، g_1 و g_2 دو واسطهٔ هندسی و h_1 و h_2 دو واسطهٔ توافقی بین دو عدد مثبت مفروضی باشند، ثابت کنید که رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{a_1+a_2}{g_1g_2}=\frac{h_1+h_2}{h_1h_2}$$

حل ـ چند عدد وقتی تصاعد توافقی تشکیل می‌دهند که عکس آنها تصاعد عددی تشکیل دهند. بنابراین اگر A و B دو عدد مفروض باشد داریم:

$$a_1+a_2=A+B \text{ و } g_1g_2=AB$$

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$$

$$\frac{h_1+h_2}{h_1h_2}=\frac{A+B}{AB}=\frac{a_1+a_2}{g_1g_2}$$

۵۰/۲۵ ـ به‌ازاء چه مقادیر x و y عبارت زیر می‌نیمم است:

$$P=x^2+y^2+xy-3x-3y+4=0$$

حل ـ داریم:

$$2P=2x^2+2y^2+2xy-6x-6y+8=0$$

$$2P=(x+y-2)^2+(y-1)^2+(x-1)^2+2=0$$

P وقتی می‌نیمم است که داشته باشیم:

$$\begin{cases}x+y-2=0\\ y-1=0\\ x-1=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

۵۰/۲۶ ـ در عبارت $f(x)=ax^2+bx+c$ ضرایب مخالف صفر a و b و c را طوری تعیین کنید که عبارت:

$$A=\frac{f(2x+1)-f(x)}{f(x-1)+f(x)}$$

برابر مقدار ثابتی بوده معادلهٔ $f(\sqrt{x+a+1})=0$ نسبت به x منطق باشد.

حل ـ بعد از عملیات لازم خواهیم داشت:

$$A=\frac{3ax^2+(4a+b)x+a+b}{2ax^2+(2b-2a)x+a+2c-b}=K$$

$$\frac{3a}{2a}=\frac{4a+b}{2b-2a}=\frac{a+b}{a+2c-b}=K$$

$$K=\frac{3}{2} \text{ و } \begin{cases}7a=2b\\ 6c+a=5b\end{cases}$$

$$f(\sqrt{x+a+1})=ax+(2a^2+2a+b)\sqrt{x}+\cdots$$

$$2a^2+2a+b=0 \text{ و } 4a^2+4a+7a=0$$

$$a=-\frac{11}{4} \text{ و } b=-\frac{77}{8} \text{ و } c=-\frac{353}{48}$$

۵۰/۲۷ ـ اگر a و b و c عددهای مثبت باشند ثابت کنید که :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{xyz}{x+y+z}$$

$$\Longrightarrow ax\cdot by\cdot cz\geqslant ۲۷$$

حل ـ فرض می‌کنیم :

$$\begin{cases} x=ak \\ y=bk \\ z=ck \\ xyz=(x+y+z)k \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} xyz=abck^{۳} \\ x+y+z=(a+b+c)k \end{cases}$$

$$abck^{۳}=(a+b+c)k \Longrightarrow k=\frac{a+b+c}{abc}$$

$$xyz=abc\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)^{۳}$$

$$ax\cdot by\cdot cz=\frac{(a+b+c)^{۳}}{abc}$$

$$\frac{a+b+c}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{abc} \Longrightarrow \frac{(a+b+c)^{۳}}{abc}\geqslant ۲۷$$

$$ax\cdot by\cdot cz\geqslant ۲۷$$

۵۰/۲۸ ـ ثابت کنید که در هر مثلث بین اندازه‌های اضلاع و ارتفاعات و شعاع دایرهٔ محیطی نامساوی زیر برقرار است :

$$\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{h_a+h_b+h_c}<۴R$$

حل ـ در هر مثلث داریم :

$$|a-b<c \text{ و } b-c<a \text{ و } c-a|<b$$

$$\begin{cases} a^{۲}+b^{۲}-۲ab<c^{۲} \\ b^{۲}+c^{۲}-۲bc<a^{۲} \\ c^{۲}+a^{۲}-۲ac<b^{۲} \end{cases}$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین نامساویهای بالا داریم :

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}<۲(ab+bc+ca)$$

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}<۲(۲Rh_c+۲Rh_b+۲Rh_a)$$

$$\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{h_a+b_b+h_c}<۴R$$

۵۰/۲۹ ـ اگر α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^{۳}-px^{۲}+qx-r=۰$$

باشند ثابت کنید که :

$$\mathrm{Arctg}\alpha+\mathrm{Arctg}\beta+\mathrm{Arctg}\gamma=\mathrm{Arctg}\frac{p-r}{۱-q}$$

حل ـ فرض می‌کنیم که :

$$\mathrm{Arctg}\alpha=a \text{ و } \mathrm{Arctg}\beta=b \text{ و } \mathrm{Arctg}\gamma=c$$

$$\mathrm{Arctg}\alpha+\mathrm{Arctg}\beta+\mathrm{Arctg}\gamma=s$$

$$a+b+c=s \text{ و } tg(a+b+c)=tgs$$

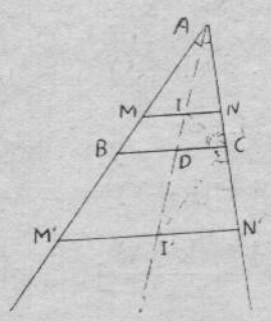
$$\frac{tga+tgb+tgc-tgatgbtgc}{۱-tgatgb-tgbtgc-tgctga}=tgs$$

$$\frac{p-r}{۱-q}=tgs \Longrightarrow s=\mathrm{Arctg}\frac{p-r}{۱-q}$$

۵۰/۳۰ ـ طول قطعه خطهایی را که از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث به موازات ضلعهای a و b و c و محصور بین دو ضلع دیگر رسم می‌شوند به ترتیب با d_a و d_b و d_c و طول قطعه خطهایی راکه از مراکز دایره‌های محاطی خارجی موازی با ضلع نظیر و محصور بین امتداد دو ضلع دیگر رسم می‌شوند به d'_a و d'_b و d'_c نشان می‌دهیم ثابت کنید که :

$$\frac{۱}{d_a}+\frac{۱}{d'_a}=\frac{۲}{a} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{d_b}+\frac{۱}{d'_b}=\frac{۲}{b} \quad \text{و}$$

$$\frac{۱}{d_c}+\frac{۱}{d'_c}=\frac{۲}{c}$$



حل ـ نقاط A و I و D و I' یك تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند و طبق رابطهٔ دکارت داریم :

$$\frac{۱}{AI}+\frac{۱}{AI'}=\frac{۲}{AD}$$

یا

$$\frac{AD}{AI}+\frac{AD}{AI'}=۲$$

از تشابه مثلثهای AMN و AM'N' با ABC داریم:

$$\frac{BC}{MN}=\frac{AD}{AI} \quad \text{و} \quad \frac{BC}{M'N'}=\frac{AD}{AI'}$$

$$\frac{BC}{MN}+\frac{BC}{M'N'}=\frac{AD}{AI}+\frac{AD}{AI'}=۲$$

$$\frac{1}{MN}+\frac{1}{M'N'}=\frac{2}{BC} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{d_a}+\frac{1}{d'_a}=\frac{2}{a}$$

روابط دیگر به همین ترتیب ثابت می‌شود .

۵۰/۳۱ ـ با توجه به روابط زیرفرم‌کلی آنهارا حدس بزنید و آنرا از روش استقراء ریاضی ثابت‌کنید :

$$1=1$$

$$1-4=-(1+2)$$

$$1-4+9=1+2+3$$

$$1-4+9-16=-(1+2+3+4)$$

. . . . . .

حل ـ فرم‌کلی رابطه چنین است :

$$1-4+9-16+\dots+(-1)^{n+1}n=$$
$$=(-1)^{n+1}(1+2+3+\dots+n)$$

درازاء $n=1$ تساوی درست است . فرض می‌کنیم در ازاء $n=k$ تساوی درست بوده و ثابت می‌کنیم که در ازاء $n=k+1$ نیز درست‌است ؛ یعنی فرض می‌کنیم داشته‌باشیم :

$$(I):\ 1-4+9-16+\dots+(-1)^{k+1}k=$$
$$=(-1)^{k+1}(1+2+3+\dots+k)$$

باید ثابت‌کنیم‌که :

$$(II):\ 1-4+9-16+\dots+(-1)^{k+2}(k+1)$$
$$=(-1)^{k+2}(1+2+3+\dots+k+1)$$

رابطهٔ II با توجه به رابطهٔ I به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$=(-1)^{k+1}(1+2+3+\dots+k)+(-1)^{k+2}(k+1)$$
$$=(-1)^{k+2}(1+2+3+\dots+k+1)$$

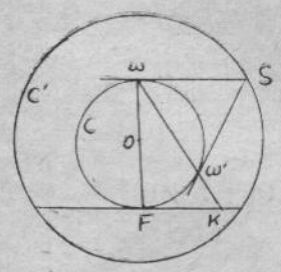
حاصل طرف اول این رابطه می‌شود :

$$(-1)^{k+1}\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]+(-1)^{k+2}(k+1)=$$
$$=(-1)^{k+2}\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]$$

که با حاصل طرف دوم‌آن برابر می‌باشد .

۵۰/۳۲ ـ دوکرهٔ متحدالمرکز Σ و Σ' به شعاعهای R و $2R$ مفروض است . صفحهٔ P در نقطهٔ F بر Σ مماس است. مکان نقاطی مانند S از Σ' را تعیین‌کنید تا اگر سطح مخروطی به رأس S و محیط بر Σ را در نظر بگیریم مقطع آن توسط صفحهٔ P یك سهمی باشد و پوش خطوط هادی این سهمیها را تعیین‌کنید .

حل ـ صفحهٔ Q را از S موازی با صفحهٔ P رسم می‌کنیم . برای اینکه مقطع سطح مخروطی توسط P یك سهمی باشد لازم وکافی است‌که Q بر سطح مخروطی و در نتیجه بر کرهٔ Σ مماس باشد . بنابراین مکان نقاط S دایره‌ای از Σ' است‌که مقطع این‌کره باصفحه‌ای است‌که موازی با صفحهٔ P مماس بر کرهٔ Σ رسم می‌شود . اگر ω نقطهٔ تماس این صفحه با Σ باشدشعاع دایرهٔ مزبور برابراست با $\omega S=R\sqrt{3}$



اگر صفحهٔ شکل را صفحه‌ای اختیارکنیم که بر ωF و S می‌گذردمقطع این صفحه‌درکره‌هاوسطح‌مخروطی دایره‌های C و C' و زاویهٔ $\omega S\omega'$ می‌باشد و خط D نمایش صفحهٔ P خواهد بود. سهمی مورد نظر به‌کانون F و به محور D بوده‌پای خط هادی آن نقطهٔ K محل برخورد $\omega\omega'$ با D می‌باشد . مثلث $S\omega\omega'$ متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه اندازهٔ زاویهٔ $F\omega K$ برابر ۳۰ درجه می‌باشد و در نتیجه داریم :

$$FK=F\omega\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

پوش خط هادی سهمی دایره‌ای است واقع در صفحهٔ P به مرکز F و به شعاع FK برابر مقدار اخیر .

بقیه آمار از صفحهٔ ۳۳۰

برمی‌آیدکه شاخص مزبور هم برگشتی و هم انتقالی است ؛ اما باید توجه داشته باشیم‌که در محاسبهٔ این شاخصها به‌صورت میانگین موزون شاخصهای ویژه ، ضریبهای توان در $I_{1/0}$ و $I_{2/1}$ یکسان‌نیستند(زیرادر ضریبهای شاخص اول‌ارزشهای $p_0^{(k)}$ و در ضریبهای شاخص دوم ارزشهای $p_1^{(k)}$ دخالت دارند) .

د ـ تبصره : تعریف شاخص‌مزبور براین فرضیه‌استوار است‌که‌ترکیب انبار نمونه در عصر صفر همانند ترکیب آن در عصر یك می‌باشد ؛ این فرضیه وقتی قابل قبول است‌که این دو عصر به‌فاصلهٔ چند سال یا اینکه به‌فاصلهٔ چندین ده سال باشند زیرانوع تغذیه و لباس پوشیدن و ... در آن دخالت دارد. یك فرانسوی‌دورهٔ‌میانه شخصی‌بوده‌که نان‌زیاد می‌خورده (وجغرافی خیلی‌کم می‌دانسته است)؛ درحالی‌که فرانسوی امروز نان‌خیلی کم و درعوض گوشت زیاد می‌خورد. **دنباله دارد**

هندسهٔ مقدماتی

(از مجموعهٔ : چه می‌دانم ؛ تألیف : André DELACHET ترجمهٔ : عبدالحسین مصحفی)

دنباله از شمارهٔ پیش

۱۶ § ـ ساختمان فضای برداری خط نشانه‌دار ـ وجود گسترش دو سویهٔ f بین خط نشانه دار ((a و D)) و R به ما اجازه می‌دهد که روی خط مزبور یك قانون ترکیب خارجی (به نام **ضرب اسکالر**) با مجموعهٔ عامل R تعریف کنیم ؛ در این پاراگراف برای وضوح بیشتر ، هرعنصر متعلق به R را که به نفسه مورد نظر باشد با یك حرف یونانی نشان می‌دهیم و استعمال حروف لاتین‌را به نمایش نقاط((a و D)) منحصر می‌کنیم .

تعریف ـ به فرض اینکه x نقطه‌ای از((a و D)) و λ عدد حقیقی دلخواهی باشد ، مقصود از حاصل ضرب x در λ که با λx نشان می‌دهیم نقطه‌ای مانند p از ((a و D)) به‌طول $\lambda f(x)$ می‌باشد . بنابراین تعریف داریم :

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda f(x)$$

و بنا بر قراردادی‌که در پاراگراف قبل کردیم (نقطه را باطول آن مشخص می‌کنیم) می‌توانیم بنویسیم :

$$(\lambda \cdot x) = \lambda x$$

که مقصود از x طرف دوم طول نقطهٔ x و در طرف اول خود نقطهٔ مزبور می‌باشد .

به این ترتیب به سادگی می‌توان خواص جمع و ضرب اعداد حقیقی را دربارهٔ این قانون ترکیب خارجی معمول‌داشت و با توجه به عملیاتی که روی R و جمعی (عمل T) که روی ((a و D)) تعریف‌می‌شود خواص‌زیر را نتیجه گرفت :

۱ـ داریم $1 \cdot x = x$ ، (۱ عنصر بی‌اثر ضرب در R است) .

۲ـ برای هر دو عدد حقیقی λ و λ' و برای هر نقطهٔ x از ((a و D)) داریم:

$$\lambda \cdot (\lambda' \cdot x) = (\lambda\lambda')x$$

۳ـ برای هر دو عدد حقیقی λ و λ' و برای هر نقطهٔ x از ((a و D)) داریم:

$$(\lambda + \lambda') \cdot x = \lambda \cdot x + \lambda' x$$

۴ـ برای هرعدد حقیقی λ و برای هر دونقطهٔ x و x' از((a و D))داریم:

$$\lambda \cdot (x + x') = \lambda \cdot x + \lambda \cdot x'$$

از تعریف یك قانون‌داخلی به نام جمع‌روی ((a و D)) توانستیم از مجموعهٔ مزبور یك ساختمان گروه جمعی فراهم آوریم ، و از تعریف قانون ترکیب خارجی با عاملی از هیئت جابجائی (دراینجا یك هیئت اعداد حقیقی) یعنی ضرب اسکالر با چهار خاصیتی که ذکر شد می‌گوئیم‌که یك ساختمان فضای برداری روی هیئت اعداد حقیقی فراهم آورده‌ایم .

خواص زیردربارهٔ قوانینی که روی ((a و D)) تعریف شد صادق است :

الف ـ برای هرنقطهٔ x از ((a و D))داریم :

$$0 \cdot x = a$$

(صفر عنصر بی‌اثر جمع در R است)

ب ـ برای هر عدد حقیقی λ داریم :

$$\lambda \cdot a = a$$

ج ـ برای هر نقطهٔ x از $((a \text{ و } D))$ داریم :

$$(-1) \cdot x = -x$$

(درطرف دوم $-x$ قرینهٔ x را برای جمع نقاط $((a \text{ و } D))$ می‌رساند و در طرف اول (-1) عنصر متقابل عنصر بی اثر ضرب در R می‌باشد) .

خواص مزبور که از ساختمان فضای برداری $((a \text{ و } D))$ نتیجه شد هرچندکه بنا به تعریفی‌که از ساختمان مزبور بعمل آمد مسلم بنظر می‌رسند با وجود این می‌توان آنها را ثابت کرد . در این جا خاصیت (الف) را ثابت می‌کنیم و اثبات دو خاصیت دیگر را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم :

R نسبت به جمع یك‌گروه است و 0 عنصر بی‌اثر این‌قانون می‌باشد پس :

$$(0+0) \cdot x = 0 \cdot x$$

از طرف دیگر بنا به خاصیت (۳) داریم :

$$(0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

چون برای جمع در $((a \text{ و } D))$ عنصر بی اثر a یکتا است بنابراین خاصیت (الف) نتیجه می‌شود .

مفهوم پایه و بعد ـ فرض می‌کنیم x نقطهٔ دلخواهی از $((a \text{ و } D))$ وغیراز a باشد. برای‌هر نقطهٔ y از $((a \text{ و } D))$ عدد حقیقی یکتایی مانند λ وجود دارد بقسمی که $y = \lambda \cdot x$. چون نقطهٔ x دارای طول مخالف صفر است عدد λ وجوددارد ویکتااست و برابر است با $\frac{y}{x}$ یعنی نسبت بین طولهای نقاط y و x می‌باشد . مجموعهٔ $\{x\}$ را یك پایهٔ فضای برداری $((a \text{ و } D))$ و λ را مؤلفهٔ اسکالر y دراین پایه می‌نامیم . فرض یکتابودن λ برای‌یك نقطهٔ $((a \text{ و } D))$ درپایهٔ $\{x\}$ (که $x \neq 0$ است) از خط مزبور این نقطه را به‌صورت واحد معین می‌کند. موضوع مزبور را به صورت زیر تعبیر می‌کنیم و می‌گوئیم که **هرخط نشانه‌دار روی هیئت اعداد حقیقی یك فضای برداری یك بعدی است.**

تبصره ـ واضح است که بین‌مجموعهٔ نقطه‌ای $((a \text{ و } D))$ و مجموعهٔ V_a بردارهای به مبدأ a و به انتهای نقطهٔ x از $((a \text{ و } D))$ گسترشی‌دو سویه‌وجود داردکه نظیرهر x بردار $\overrightarrow{ax}$ را بدست می‌دهد . این‌گسترش امکان آنرا فراهم می‌آورد که ساختمان $((a \text{ و } D))$ راروی V_a منتقل کنیم . درگذشته خواص مزبورمسلم عینی بنظررسیده است وبنا برآن ریاضیدانان توانسته‌اندکه ترتیب ساختمان فضای برداری را فراهم آورند ، علی‌التدقیق بایدگفت‌که در استعمال مجموعهٔ برداری و بعد از آن فضای برداری‌کلمهٔ فضا نزد ریاضیدانان به مجموعه‌ای از نقاط اتلاق می‌شده است . ایزومورفیسم بین مجموعه‌های V_a و $((a \text{ و } D))$ اشتباه لفظی مزبور را بی‌اهمیت می‌سازد.

§ ۱۷ ساختمان آفین خط ـ خط جهت دار D و دو نقطهٔ متمایز a و b واقع برآن را درنظر می‌گیریم. اندازهٔ جبری یك بردار روی یك خط نشانه‌دار به مبدأ انتخابی روی این خط بستگی ندارد ، وگسترشی کانونیك از $((a \text{ و } D))$ روی $((b \text{ و } D))$ وجوددارد که‌نظیرهر نقطهٔ x از $((a \text{ و } D))$ نقطه‌ای مانند y از $((b \text{ و } D))$ رابدست می‌دهد بقسمی که :

$$\overline{by} = \overline{ax}$$

مسلم‌است‌که گسترش دوسویهٔ مزبوریك ایزومورفیسم ساختمانهای فضای برداری $((a \text{ و } D))$ و $((b \text{ و } D))$ می‌باشدو تحقیق‌این موضوع را به خواننده واگذار می‌کنیم . گسترش مزبور را **انتقال** به بردار $\overrightarrow{ab}$ می‌نامیم . اگر اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{ab}$ روی خط‌جهت دار D برابربا t باشد خواهیم داشت: $\overline{xy} = t$ زیرا بنا به رابطهٔ شال داریم :

$$\overline{xy} = \overline{xa} + \overline{ab} + \overline{by} = \overline{ab} + (\overline{by} - \overline{ax}) = \overline{ab}$$

بنا به قرارداد (حساب نقاط) می‌توانیم روی‌خط‌جهت‌دار D انتقال به بردار با اندازهٔ جبری t را (که آنرا به‌اختصار انتقال t می‌نامیم) چنین تعریف‌کنیم :

$$y = x + t$$

دراین رابطه t یك‌عدد حقیقی مفروض، x نقطهٔ‌دلخواهی از D (یا طول نقطهٔ مزبورروی‌خط‌نشانه‌دار $((o \text{ و } D))$ نظیر نظیر D) و y مبدل x (یا طول نقطهٔ مبدل x) می‌باشد .

واضح‌است که‌درانتقال t مبدل‌یك‌خط‌نشانه‌دار $((o \text{ و } D))$ خط‌نشانه‌دار $((o' \text{ و } D))$ است بقسمی که $\overline{oo'} = t$ می‌باشد .

ازآنچه‌گذشت برمی‌آیدکه y مبدل‌نقطهٔ x از $((o \text{ و } D))$ نقطه‌ای از خط نشانه دار مزبور به طول $x+t$ می‌باشد . بنابراین انتقال t گسترش‌دوسویه از $((o \text{ و } D))$ روی خودش است ، درصورتی‌که انتقال t نه تنهاساختمان‌فضای برداری‌بلکه گروه جمعی $((o \text{ و } D))$ را محفوظ نگاه می‌دارد .

گروه جابجائی انتقالهای D ـ دو انتقال t و t' را درنظر می‌گیریم . اگر x نقطهٔ‌دلخواهی از $((o \text{ و } D))$ با

طول x باشد ، مبدل x در انتقال t نقطهٔ به طول $x+t$ است ومبدل x درگسترش مرکب t و t' نقطهٔ بـه طول : $x+t+t'$ روی خط نشانه‌دار مزبور می‌باشد . پس گسترش مرکـب مزبور انتقال $t+t'$ می‌باشد کـه آنرا **مجموع** انتقالهای t و t' می‌نامیم . اگر T مجموعهٔ انتقالهای روی D باشد ، ترکیب این انتقالها ساختمانی از گروه جابجایی ایزومورف با گروه جمعی اعداد حقیقی فراهم می‌آورد .

مفهوم بردارهای هم‌ارز ـ دوبردار $\overrightarrow{ab}$ و $\overrightarrow{cd}$ از خط جهت‌دار D راهم‌ارز می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $\overline{ab}=\overline{cd}$. رابطهٔ «$\overrightarrow{ab}$ و $\overrightarrow{cd}$ هم‌ارزاند» یك رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ V از بردارهای واقع بر D می‌باشد . مسلم است که رابطهٔ مزبور ، انعکاسی ، تقارنی ومتعدی است . مجموعهٔ خارج قسمت L که توسط رابطهٔ مزبور در V پدید می‌آید مجموعهٔ **بردارهای آزاد** D نامیده می‌شود. یك بردار آزاد روی D یکی از کلاسهای هم‌ارزی آن می‌باشد ، به عبارت دیگر مجموعهٔ بردارهای واقع بر D که همه دارای یك اندازهٔ جبری می‌باشند . بنابراین گسترش کانونیك L روی V_a وجود دارد : مثلا گسترشی که به هرعنصر متعلق به L برداری از V_a را نظیر می‌سازد ، گسترش دوسویهٔ مزبور وهمچنین گسترش وارونهٔ آن ایزومورفیسم فضای برداری با R و V_n با L را فراهم می‌آورد. همچنین ، L و T مجموعهٔ انتقالهای D در تناظر دوطرفی می‌بـاشند ، بقسمی که نتیجهٔ ترکیب انتقال t با عدد حقیقی λ انتقال λt می‌باشد و واضح است که T ساختمانی ازفضای برداری روی R ایزومورف با L فراهم می‌آورد . این را هم اضافه کنیم که انتخاب جهت D به هرتیب که باشد ، $((D \text{ و } a))$ ، V_a ، T و L می‌توانند با R مجموعهٔ اعداد حقیقی در اتحاد باشند . در دنبالهٔ این بخش جائی که حساب نقاط را بکار می‌بریم به این موضوع توجه خواهیم داشت .

صورتهای مختلف ساختمان فضای آفین

ملاحظات فوق‌الذکر امکان آنـرا فـراهم می‌آورد که شکلهای مختلف مفهوم فضای آفین را کـه توسط ریاضیدانها تعریف شده است بررسی بکنیم . **خاصیت آفین** یك فضای E (یا مجموعهٔ E که عنصرهایش نقطه‌ها نامیده می‌شوند) عبارتست ازهرخاصیت E ، با یکی از زیر مجموعه‌های X از E که برپایهٔ مفاهیم **ذاتی** بنا شده باشد ، یعنی به نقطهٔ خاصی از E بستگی نداشته باشد .

مجموعهٔ خواص آفین E **هندسهٔ آفین** فضای مزبور را تشکیل می‌دهد .

نخستین مفهوم ذاتی که دربررسی خط جهت‌دار D ظاهر می‌شود مفهوم اندازهٔ جبری یك قطعه خط روی D می‌باشد که یك مفهوم آفین است . رابطهٔ شال یك خاصیت آفین سه نقطه‌ای $\{x \text{ و } y \text{ و } z\}$ از خط D می‌باشد . هر انتقال روی D که یك گسترش ذاتی است یك گسترش آفین خاص D می‌باشد .

برحسب اینکه مرحلهٔ شروع ، مفهوم انتقال باشد یـا رابطهٔ شال ، تعریفهای مختلفی نتیجه می‌شود ، اما همه بـا مفهوم فضای آفین هم‌ارز می‌باشند . نخستین مـرحله‌ای که در ابتدا بعضی تغییرات ممکن را در نظر می‌گیرد همان است که توسط **بورباکی** پذیرفته شده است (فصل II : «جبر خطی» ضمیمهٔ II) ، دومین مرحله که شاید مقدماتی‌تر باشد زیرا بـه مفهوم طبیعی فاصله بسیار نزدیك است توسط **م. لیشنروویچ** قبول گردیده است (مقدمات حساب تانسوری ، فصل II ، آرمان کلن) .

یك مفهوم آفین اساسی ، مفهوم میان : میان (وسط) دونقطه‌ای $(x \text{ و } y)$ ـ یا اینکه میان قطعه خط $[x \text{ و } y]$ ـ نقطه یکتای m ازخط $D(x \text{ و } y)=D$ است که روی هرخط نشانه‌دار $((D \text{ و } o))$ نظیر $D(x \text{ و } y)$ چنین تعریف می‌شود :

$$2m=x+y$$

واضح است که روی هرخط نشانه‌دار $((D \text{ و } o))$ به‌محمل D یك وفقط یك نقطه وجود دارد که در رابطهٔ بالا صدق بکند. علاوه برآن ، نقطهٔ مزبور نه به‌انتخاب o بستگی دارد و نه به انتخاب جهت روی D ، زیرا رابطهٔ بالا را می‌توان چنین نوشت :

$$\overline{ym}=\overline{mx}$$

درحالت خاص ، نقطهٔ وسط $(x \text{ و } x)$ خود x می‌باشد .

باید درنظر داشت که دونقطهٔ x و y روی خط نشانه‌دار $((D \text{ و } m))$ نسبت به عمل جمع متقارن می‌باشند . بطور خلاصه گفته می‌شود که نقطه‌های مزبور **نسبت به m قرینه‌اند** ، یا اینکه m **مرکز تقارن** دونقطه‌ای $(x \text{ و } y)$ است.

بطورکلی هرگسترش s بین D و خود D که در آن در ازاء هر x نقطهٔ m میان $(s \text{ و } s(x))$ باشد تقارن روی D به مرکز m نامیده می‌شود . واضح است که هرتقارن روی D به مرکز یکی ازنقطه‌های آن نسبت به D ذاتی است وبنابراین

آفین‌می‌باشد: گسترش دو سویهٔ D روی خودش بوده و برگشتی است ، یعنی‌اگر $y=s(x)$ باشد $x=s(y)$ می‌باشد . اگر m مرکز این تقارن باشد مسلم است‌که آن تنها نقطهٔ نا متغیر در این گسترش می‌باشد .

اگر X بخشی از D باشد و یك نقطهٔ m از این خط وجود داشته باشد بقسمی‌که X تصویر آن در تقارن به مرکز m باشد ، در این صورت m مرکز تقارن X نامیده می‌شود.

تعمیم‌مفهوم‌میان، مرکز بار (Barycentre):

n نقطهٔ x_1 و ... و x_n روی D در نظر می‌گیریم . به‌هر یك از آنها یك عدد حقیقی به‌نام ضریب آن نقطه مربوط می‌کنیم (a_i نظیر x_i ، $1 \leq i \leq n$) اگر o و g دونقطهٔ دلخواه از D باشند نسبت به‌هر نقطهٔ x_i بنا به‌رابطهٔ شال داریم :

$$\overline{gx_i} = \overline{go} + \overline{ox_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{gx_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \overline{go} + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \overline{ox_i}$$

۱ـ اگر $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ باشد ، بردار $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{ox_i}$ به نقطهٔ o بستگی ندارد (زیرا در ازاء هریك از دو نقطهٔ مستقل o و g از D یك مقدار دارد) ؛

۲ـ اگر $\sum_{i=1}^{n} a_i = a \neq 0$ باشد یك نقطهٔ یکتای g روی D یافت می‌شود بقسمی‌که :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{gx_i} = 0$$

این نقطه‌که اگروجود داشته باشد یکتا است (زیرا از رابطهٔ: $\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{g'x_i} = 0$ با توجه به رابطهٔ بالا و باتوجه به رابطهٔ شال نتیجه می‌شود که : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \overline{gg'} = 0$ و در نتیجه $g=g'$ است) از روی نقطهٔ o که قبلا فرض شده‌باشد چنین تعریف می‌شود :

$$\overline{og} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \overline{ax_i}}{a}$$

نقطهٔ مزبور **مرکز بار** نقطه‌های x_1 و x_2 و ... و x_n با ضریبهای a_1 و a_2 و ... و a_n نامیده می‌شود . مرکز بار یك مجموعهٔ نقاط خواص جالبی را داراست‌که در زیر بیان می‌شوند و اثبات آنها را به خواننده وا می‌گذاریم :

الف ـ مرکز بار یك مجموعهٔ نقاط به‌ترتیب این نقطه‌ها بستگی ندارد .

ب ـ اگر همهٔ ضریبهای منسوب به نقاط را در یك عدد حقیقی مخالف صفر ضرب‌کنیم مرکز بار تغییر نمی‌کند.

ج ـ اگر به‌جای $q<n$ نقطه از n نقطه مرکز بار آنها را قرار دهیم و ضریب منسوب به‌آن برابر باشد با مجموع ضریبهای q نقطهٔ مزبور ، مرکز بار n نقطه تغییر نمی‌کند.

با وجود این در بررسی هندسهٔ خط یك خاصیت بسیار مهم راثابت‌می‌کنیم : **هر خط D مجموعهٔ مرکزهای‌بار هر دو نقطهٔ دلخواه‌متمایز از نقاط آن‌می‌باشد** .زیرا اگر a و b دو نقطهٔ متمایز از D باشند ، با فرض دو عدد حقیقی (p و q) بقسمی که $p+q \neq 0$ باشد یك نقطهٔ m یافت می‌شودکه داشته باشیم :

$$p \cdot \overline{ma} + q \cdot \overline{mb} = 0$$

m مرکز بار دو نقطهٔ a و b باضریبهای p و q می‌باشد ، برعکس اگر m مفروض باشد و رابطهٔ بالا برقرار باشد عدد حقیقی $k \neq 0$ یافت می‌شود بقسمی‌که :

$$q = k \cdot \overline{am} \text{ و } p = k \cdot \overline{mb}$$

باشد در نتیجه خواهیم داشت $p+q = k \cdot \overline{ab} \neq 0$ ومی‌توان m را مرکز باردو نقطهٔ a و b با ضریبهای p و q دانست، دو عدد (p و q) **مختصات مرکز باری** m نسبت به دو نقطه‌ای (a و b) نامیده می‌شوند . این مختصات با تقریب‌نسبی یك‌ضریب‌تعریف‌می‌شوند و می‌گویندکه آنها **مختصات‌همگن** m می‌باشند .

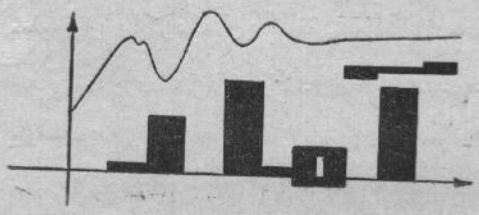
دنباله دارد

Initiation à la

STATISTIQUe

Classe de l^er B et D

par: M. HAGEGE



فصل سوم ـ شاخصهای زندگی اقتصادی

۱ـ کلیات

بوسیلهٔ شاخصها (یا اینکه عددهای شاخص) می‌توان برای یك کمیت یا مجموعه‌ای ازمقادیر ، نه از لحاظ قدر مطلق بلکه نسبت به یك مرجع موسوم به پایه ، مقیاسی برقرار ساخت . شاخصهای زندگی اقتصادی منظره‌های مختلف این زندگی را مشخص می‌کنند (بهای یك کالا یا مجموعه‌ای از کالاها ، حجم محصولات صنعتی ، نرخهای دستمزدها ، . .) و امکان دنبال کردن تغییرات یك متغیر اقتصادی را در زمان (از یك عصر به عصر دیگر) یا در فضا (از محلی به محل دیگر) فراهم می‌آورند .

هرچندکه مثلا میانگین حسابی یك رشتهٔ آماری از نوع کمیت متغیراست (وبا همان واحد بیان می‌شود) اما یك شاخص نسبت بین مقادیر از یك نوع را بیان می‌کند و خود ، همچون در صد ، عددی بدون قید می‌باشد .

۲ـ شاخص ساده

الف ـ اگر بهای گوشت گاو در ۱۹۵۰ هر کیلو ۹ فرانك بوده باشد ، شاخص ساده ، یا بهتر بگوئیم شاخص ویژهٔ بهای گوشت در ۱۹۶۶ ، به پایهٔ ۱۰۰در ۱۹۵۰ ،عبارتست‌از:

$$۱۰۰\frac{۱۶}{۹}=۱۷۶/۶$$

شاخص ساده بـه یك کالا مربوط است : اگرکالایی در عصر ۰ بهای $p_۰$ ودر عنصر ۱ بهای $p_۱$ داشته باشد ، شاخص سادهٔ این‌کالا در عصر ۱ ، به پایهٔ ۱۰۰ در عصر صفر ، برابر است با :

$$p_{۱/۰}=۱۰۰\frac{p_۱}{p_۰}$$

که به خاطر حذف دو رقم اعشار آن را در ۱۰۰ ضرب می‌کنند .

شاخص سادهٔ یك کمیت یا یك حجم نیز به همین ترتیب تعریف می‌شود : اگر محصول سنگهای معدنی آهن در ۱۹۶۰ بالغ بر ۶۳ میلیون تن و در ۱۹۶۵ بالغ بر ۶۶ میلیون تن بـاشد ، شاخص ویژهٔ حجم محصول سنگهای معدنی آهنی در ۱۹۶۵ به پایهٔ ۱۰۰ در ۱۹۶۰ عبارت می‌شود از :

$$p'_{۱۵۶۵/۱۹۶۰}=۱۰۰\frac{۶۶}{۶۳}=۱۰۴/۷$$

ب ـ خواص شاخصهای ویژه : خواص زیـر بـه سادگی محقق می‌باشند :

$$p_{۱/۰}\times p_{۰/۱}=۱۰۰^۲ \qquad \text{(برگشتی)}$$

$$p_{۲/۰}=p_{۲/۱}\times p_{۱/۰} \qquad \text{(انتقالی=متعدی)}$$

تبصره ـ اغلب چنین می‌نویسیم :

$$p_{۱/۰}\times p_{۰/۱}=۱(۱۰۰)$$

یك چنین تساوی جز با تقریب یك عامل ضربی درست نیست کـه این عامل توانی از ۱۰۰ است و به سادگی معین می‌شود .

۳ ـ شاخصهای ترکیبی

وقتی‌که چندکالا مورد نظر باشد ، شاخصهـای ویژهٔ این کالاها در عصر یك ، بـه مبنای ۱۰۰ در عصر صفر ، عموماً مختلف می‌باشند. در این صورت، شاخص ترکیبی یعنی شاخص

مربوط به چندکالا را تعریف می‌کنیم .

بهای هر یك از n کالا را در عصرهای صفر و یك به ترتیب چنین فرض می‌کنیم :

$$p_0^{(1)} ، p_0^{(2)} \dots p_0^{(k)} .. p_0^{(n)}$$

$$p_1^{(1)} ، p_1^{(2)} \dots p_1^{(k)} \dots p_1^{(n)}$$

الف ـ شاخص ناموزون (مربوط به‌بها) ـ شاخص ترکیبی ناموزون مربوط به n کالا را می‌توان با تعیین میانگین حسابی شاخصهای ویژهٔ n کالای مزبور بدست آورد:

$$I_{1/0} = \frac{100}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{p_1^{(k)}}{p_0^{(k)}}$$

این شاخص در سالهای ۱۹۱۰ تا ۱۹۴۰ برای قیمتهای بالای مربوط به ۴۵ بازرگان در فرانسه بکار رفته است .

شاخص مزبور نه برگشتی است و نه انتقالی ؛ برعکس شاخص ترکیبی که از راه تعیین میانگین هندسی شاخصهای ویژه حساب شود هم برگشتی وهم انتقالی است :

$$I_{1/0} = 100 \sqrt[n]{\frac{p_1^{(1)}}{p_0^{(1)}} \cdot \frac{p_1^{(2)}}{p_0^{(1)}} \cdots \frac{p_1^{(n)}}{p_0^{(n)}}}$$

این شاخص در بلژیك بکار رفته است .

ب ـ شاخص ترکیبی موزون (مربوط به بها)ـ شاخص ناموزون به‌ترتیبی که تعریف شد عیبهای مربوط به هریك از شاخصهای ویژه‌را به‌همان نسبت‌دارا می‌باشد ؛ مثلا درهزینه های غذائی خانه‌داری نسبت به‌کیلوگرم‌گوشت وکیلوگرم‌خردل یك موقعیت را نخواهد داشت . از این جهت روش زیر را ترجیح‌می‌دهند : برای یك خانوار نمونه (مثلا دوبزرگسال،دو کودك) از راه پرسش مقادیر متوسط کالاهایی راکه برای مدت معینی لازم است تعیین می‌کنند . به‌این وسیله «انبار نمونه»ای تهیه می‌شود و بهای این انبار نمونه را درعصر پایه و در عصر مورد نظر معلوم‌می‌کنند . فرض‌می‌کنیم که :

$$q^{(1)} \text{ و } q^{(2)} \text{ و } \dots \text{ و } q^{(n)}$$

مقادیر هریك ازکالاهای موجود در انبار نمونه باشد در این صورت شاخص زیر بدست می‌آید :

$$I_{1/0} =$$

$$= 100 \frac{p_1^{(1)}q^{(1)} + \dots + p_1^{(k)}q^{(k)} + \dots + p_1^{(n)}q^{(n)}}{p_0^{(1)}q^{(1)} \dots + p_0^{(k)}q^{(k)} + \dots + p_0^{(n)}q^{(n)}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} p_1^{(k)}q^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n} p_0^{(k)}q^{(k)}}$$

معلوم خواهیم‌کردکه این شاخص میانگین موزون شاخصهای ویژهٔ n کالا می‌باشد . عبارت بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم :

$$I_{1/0} = 100 \frac{p_1^{(1)}}{p_0^{(1)}} \times \frac{p_0^{(1)}q^{(1)}}{p_0^{(1)}q^{(1)} + \dots + p_0^{(n)}q^{(n)}} +$$

$$+ \dots + 100 \frac{p_1^{(n)}}{p_0^{(n)}} \times \frac{p_0^{(n)}q^{(n)}}{p_0^{(1)}q^{(1)} + \dots + p_0^{(n)}q^{(n)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 100 \frac{p_1^{(k)}}{p_0^{(k)}} \cdot \frac{p_0^{(k)}q^{(k)}}{\sum_{j=1}^{n} p_0^{(j)}q^{(j)}}$$

که عبارت از میانگین موزون شاخصهای ویژهٔ $100 \frac{p_1^{(k)}}{p_0^{(k)}}$ می‌باشد ، ضریبهای توازن عبارتند از نسبت ارزشهای عصرصفر کالاهای مختلف موجود در انبار نمونه به ارزش‌کل این انبار نمونه در عصر مزبور :

$$\frac{p_0^{(k)}q^{(k)}}{\sum_{j=1}^{n} p_0^{(j)}q^{(j)}}$$

باید اضافه‌کنیم‌که ضریبهای توازن نه‌تنها به ترکیب انبارنمونه بلکه به ارزشهای یکایك‌کالاها در عصر پایه بستگی دارد .

ج ـ خواص شاخص فوق ـ از رابطه‌های مسلم :

$$\frac{\text{ارزش انبار نمونه در عصریك}}{\text{ارزش انبار نمونه درعصرصفر}} = 1 \times \frac{\text{ارزش انبار نمونه درعصرصفر}}{\text{ارزش انبار نمونه درعصریك}}$$

$$\times \frac{\text{ارزش انبار نمونه در عصر ۲}}{\text{ارزش انبار نمونه درعصریك}}$$

$$= \frac{\text{ارزش انبار نمونه درعصریك}}{\text{ارزش انبار نمونه درعصر صفر}} \times$$

$$= \frac{\text{ارزش انبار نمونه در عصر۲}}{\text{ارزش انبار نمونه در عصر صفر}}$$

بقیه‌درپائین صفحه ۳۲۴

را دارا می‌باشد ؛ بنابراین داریم :

$$PA+PB+PC=\frac{AP+AP_1+AP_2}{3}+$$

$$+\frac{BP+BP_1+BP_2}{3}+\frac{CP+CP_1+CP_2}{3}>$$

$$AM+BM+CM$$

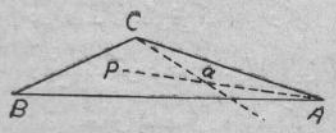
بنابراین در حالتی که مثلث متساوی‌الاضلاع است وضع M که می‌نیمم را بدست دهد مشخص می‌باشد فرض می‌کنیم که هیچکدام از زاویه‌های ABC بزرگتر از $\frac{2\pi}{3}$ نباشد بنا به §۲ نقطه‌ای مانند M وجود دارد بقسمی که سه‌نیم‌خط MA ، MB ، MC با یکدیگر متوالیاً زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$ بسازند(۱).

روی این سه‌نیم‌خط ، نقاطی آن‌سوی A و B و C مانند $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ و به‌یك فاصله از M اختیار می‌کنیم دراین صورت M می‌نیمم را برای مثلث $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}$ و در نتیجه برای ABC بوجود می‌آورد .

فرض می‌کنیم که در مثلث ABC یکی از زاویه‌ها مثلا C بزرگتر از $\frac{2\pi}{3}$ باشد در این صورت معلوم می‌کنیم که C مقدار می‌نیمم را حاصل می‌کند» یعنی نقطهٔ P هر جاکه باشد رابطهٔ زیر برقرار نیست :

$$PA+PB+PC<CA+CB$$

یکی از دو زاویهٔ BCP یا PCA مثلا BCP کوچکتر از $\frac{2\pi}{3}$ است (شکل ۴) . خط Ca راکه با CB زاویهٔ $\frac{2\pi}{3}$ می‌سازد رسم می‌کنیم تا PA را در a قطع کند . اگر نا مساوی فوق صحیح می‌بود می‌توانستیم α را جانشین A کنیم و این غیر ممکن است زیرا C برای مثلث αBC می‌نیمم را حاصل می‌کند .



III

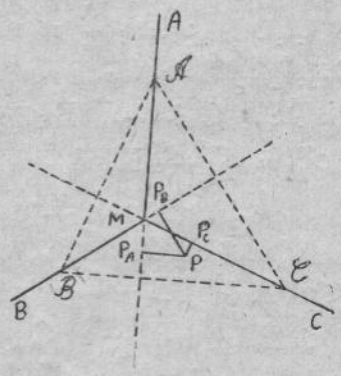
۸ - استدلال §۶ در مورد مجموع : $aPA+bPB+cPC$ نیز بکار می‌رود ؛ ولی با دلایل ابتدای §۷ مشابه نیست .

در حالت کلی می‌توانیم از روش زیر استفاده کنیم :

حالتی را درنظر می‌گیریم که مثلثی مانند θ وجودداشته باشد که در آن $A+\alpha$ و $B+\beta$ و $C+\gamma$ کوچکتر از π باشد . در این مثلث نقطه‌ای مانند M وجود دارد که از این نقطه اضلاع BC ، CA ، AB تحت زوایای $\pi-\alpha$ و $\pi-\beta$ و $\pi-\gamma$ دیده می‌شود(§۲) . این نقطه‌مقدارمی‌نیمم‌را بدست می‌دهد . هرگاه P نقطه‌ای مغایر M باشد فرض :

$$aPA+bPB+cPC<aMA+bMB+cMC$$

به نتیجه‌ای متضاد می‌انجامد .



با فرض اینکه P_A و P_B و P_C تصاویر P روی AM ، BM و CM (شکل ۵) باشند و با این قرارداد که AP_A و BP_B و CP_C را به‌ترتیب درجهتهای AM و BM و CM مثبت بحساب آوریم داریم ،

$$AP\geqslant AP'_A :$$

که درآن عضو طرف اول مثبت و عضو طرف دیگر دارای علامت غیر مشخص است و داریم :

$$AM-AP<AM-AP_A=P_AM$$

سه نا مساوی متشابه داریم که در آنها تساوی تواماً برقرار نیست و از جمع آنها داریم :

$$0<a(AM-AP)+b(BM-BP)$$
$$+c(CM-CP)<aP_AM+bP_BM+cP_CM.$$

بنابراین ،اگر θ' مثلثی مانند باشد که ارتفاعهایش MA و MB و MC باشند ، واضح است که θ' با θ که اضلاعش متناسب با a ، b ، c است متشابه می‌باشد . بانمایش فواصل M و P از اضلاع این مثلث به‌صورت M_a و M_b و M_c و P_a و P_b و P_c بقسمی که وقتی نقاط داخل θ هستند

۱) هرگاه $C=\frac{2\pi}{3}$ باشد ، M بر C واقع است ؛ بنابراین پاره خط MC بوسیلهٔ شرطی که با MB زاویهٔ $+\frac{2\pi}{3}$ بسازد معین می‌شود .

این فواصل مثبت باشند داریم :

$$aM_a+bM_b+cM_c=aP_a+bP_b+cP_c$$

$$a(P_a-M_a)+b(P_b-M_b)+c(P_c-M_c)=0$$

بنابراین با علامتی تقریبی ، چون وضع θ را دقیقاً مشخص نکرده‌ایم ،طرف اول برابراست با :

$$\alpha P_AM+bP_BM+cP_CM$$

و تناقض بدست می‌آید.

حالت اول را بررسی کردیم ، بررسی سه حالت ممکن دیگر باتوجه به اواخر §۷ و §۵ میسر می‌باشد .

IV

۹ـ اکنون به‌بررسی سریع مجموع :

$$aPA+bPB-cPC$$

می‌پردازیم . فرض می‌کنیم $c<a+b$ بدون آنکه می‌نیمم $-\infty$ باشد. یعنی P رابسیار دورانتخاب کنیم.

حالتی‌رادرنظر می‌گیریم که P در نیم صفحهٔ π محدود به AB که شامل C نیست واقع باشد(§۳) . هرگاه Q وضعی از نقطهٔ K باشد که در آن : $aKA+bKB+cKC$ می‌نیمم باشد داریم :

$$aPA+bPB>aQA+bQB+cQC$$

$$aQA+bQB-cQC<aPA+bPB-$$
$$-c(QP+QC)<aPA+bPB-cPC$$

اگر $A>\pi-\alpha$ یا $a\geqslant b+c$ باشد. Q در A و اگر :

$B\geqslant\pi-\beta$ یا $b\geqslant a+c$

باشد در B و بالاخره هرگاه $C\geqslant\pi-\gamma$ باشد در C واقع خواهد بود و اگر هیچکدام از این شرایط برقرار نباشد Q روی کمان Γ که کمان درخور $(\pi-\gamma)$ـ مرسوم‌روی AB ودر ناحیهٔ π است واقع خواهد بود .

بنابراین مسئله برای حالت $a\geqslant b+c$ یا $b\geqslant a+c$ حل‌شده‌است و درحالتی‌که مثلثی مانند θ وجود دارد، کافی است نقاط P را از نیم صفحهٔ π که محصور بین AB و Γ می‌باشد بررسی کنیم .

هرگاه P یکی از این نقاط ، Q نقطهٔ برخورد امتداد CP با Γ باشد ، Q می‌نیمم مقدار :

$$akA+bkB+ckC$$

راوقتی‌که زاویهٔ AQB برابر با $\pi-\alpha$ است بدست می‌دهد. بنابراین :

$$aQA+bQB<aPA+bPB+cPQ$$

$$aQA+bQB-cQC<aPA+bPB-$$
$$-c(QC-PQ)<aPA+bPB-cPC$$

پس کافی‌است حالتهائی راکه P در A یا B یا روی Γ است بررسی‌کنیم .

۱۰ـ فرض می‌کنیم $A=\alpha$ ، $B=\beta$ ، $C=\gamma$ و P روی Γ که اکنون‌کمانی از دایرهٔ محیطی مثلث ABC است واقع باشد . طبق قضیهٔ بطلمیوس :

$$PC\cdot AB=PA\cdot BC+PB\cdot AC$$

و چون AB ، BC ، CA متناسب با a ، b ، c می‌باشند : $cPC=aPA+bPB$ یعنی مقدار مینیمم صفر است ؛ این خاصیت برای تمام نقاط Γ برقرار است .

۱۱ـ نتیجه‌ای‌که در آخر §۶ بدست آمد بدون تغییردر بارهٔ مجموع $aPA+bPB-cPC$ با تبدیل A و B قابل اجراست ، ولی با تبدیل C استنتاج طبیعتاً معکوس است :

می‌توانیم C را بوسیلهٔ نقطه‌ای واقع بر MC و آن‌سوی C یابوسیلهٔ نقطهٔ دیگری روی PC بین P و C اختیار کنیم .

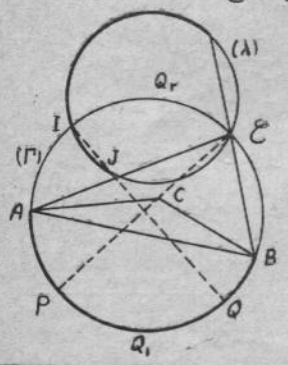
با توجه به‌شرط مزبور اگر $A>\alpha$ ، $B>\beta$ باشد C داخل U'IV (شکل ۱) واقع است و نقطه‌ای مانند M_1 روی AI'B که در محل برخورد Γ با CI وجود داردکه مقدار می‌نیمم را حاصل‌می‌کند ، زیرا وقتی‌که C را درنقطهٔ I اختیارکنیم M_1 مقدار می‌نیمم را بدست می‌دهد .

حال‌فرض‌می‌کنیم‌که C داخل دایرهٔ (Γ)که شامل‌کمان Γ است‌واقع باشد (بنابراین $C>\gamma$) و P نقطه‌ای از Γ باشد (شکل۶) . اگر P مجموع $PA+bPB-cPC$ را از آنچه در نقاط A و B حاصل می‌شود بزرگتر نسازد وقتی هم که C را در نقطهٔ C یعنی نقطهٔ برخورد PC و (Γ) اختیار کنیم وضع به‌همان ترتیب است بنابراین هر گاه Q نقطه‌ای از Γ باشد داریم :

$$cQI=aQA+bQB$$

$$aQA+bQB-cQC=c(QI-QC)$$

روی QI طول $QJ=QC$ را نقل می‌کنیم . چون زاویهٔ CJI ثابت است ، مکان J کمان درخور (λ) است‌که از C و I می‌گذرد وچون J وقتی‌که Q در Q_1 واقع است در I می‌باشد که Q_1 روی عمود بر وسط CI و در همان طرفی‌که A و B واقع‌اند قرار دارد . Q_1I بر (λ) مماس است و Q_2 مرکز (λ) در وسط‌کمانهای CI که شامل A و B نیستند واقع می‌باشد .



* به‌علت فنی‌به جای $\mathscr{C}$ C استفاده شده است

از آنجا نتیجه می‌شود که‌وقتی که Q کمان Γ رامی‌پیماید کمان(λ) که‌توسط J پیموده می‌شود شامل نقطهٔ متقاطر I نیست چون Q به‌وضع Q_2 درنمی‌آید . می‌نیمم تفاضل مثبت یامنفی

$$JI = QI - QC$$

و در نتیجه‌می‌نیمم $aQA + bQB - cQC$ در یکی ازاوضاع حدی است که Q بر A یا B باشد . پس در حالت $C \geqslant \gamma$ مقدار می‌نیمم در وضع یکی از رأسهای A و B حاصل می‌شود.

حال اگر A در وضعی از C می‌نیمم را بدست دهدمسلماً در حالتی‌که C روی AC از A دور می‌شود نیز می‌نیمم را بدست می‌دهد .

تنها حالتی‌که مقدار می‌نیمم نه بوسیلهٔ A و نه بوسیلهٔ B بدست نیاید آنست که داشته باشیم :

$$A > \alpha \quad و \quad B > \beta$$

که در این‌حال می‌نیمم بوسیلهٔ نقطه‌ای مانند M_1 بدست می‌آید .

۱۲- تنها حالت $c > a + b$ باقی‌مانده است دراین‌صورت‌کافیست ماکسیمم $aPA + bPB - cPC$ را بدست آوریم . بنابرآنچه که گذشت‌می‌دانیم که‌برای $c > a + b$ برای هروضعیت P داریم :

$$aPA + bPB < aCA + bCB + cCP$$

$$aPA + bPB - cPC < aCA + bCB$$

و C ماکسیمم مطلوب‌را بدست‌می‌دهد ،

بوسیله تغییرعلامات ، مطالعهٔ ماکسیمم یا می‌نیمم تمام مجموعهای به‌صورت زیر نتیجه‌می‌شود :*

$$\pm aPA \pm bPB \pm cPC$$

**

در زیر راه‌حل متداول مسئله را شرح داده و بررسی می‌کنیم:

فرض‌می‌کنیم M وضع نقطهٔ P باشدکه برای آن‌می‌نیمم حاصل شود . هرگاه نقطهٔ P را روی یك بیضی به کانونهای A وB که‌ازM می‌گذردتغییر دهیم ، $PB + PA$ ثابت‌می‌ماند؛ بنابراین‌نقطهٔ M نقطه‌ای از این بیضی است که به C نزدیك‌تراست و این وقتی است که CM قائم بر بیضی باشد ، در غیر این صورت مماس بر بیضی اگر عمود بر CM نباشد ، نقطهٔ P که بیضی را می‌پیماید در موقع عبور از M دایره‌ای به‌مرکز C و به‌شعاع CM می‌پیماید بقسمی‌که اوضاعی از P نزدیك‌به M که به ازاء آنها $PA + PB + PC$ کمتر از :

$$MA + MB + MC$$

باشد ، وجود خواهد داشت ؛ یا به‌عبارت دیگر ، بیضی باید تماماً خارج‌دایرهٔ مزبور باشد و نقطه‌ای از این دایره درداخل آن واقع‌نباشد . بنابراین نیم‌خط MC باید در امتداد نیم خط نیمساز داخلی پاره‌خطهای MA و MB باشد ؛ چون همین نتایج‌با تبدیل دوری A و B و C عایدمی‌شود ، نتیجه‌می‌گیریم که پاره خطهای MA ، MB ، MC باید با یکدیگرزاویهٔ 120° درجه بسازند . معذلك ، این استدلال متضمن آنست که جهات سه پاره خط‌کاملا مشخص شده باشند و نیز M بر هیچکدام از نقاط A ، B ، C منطبق نباشد . وقتی‌که یکی از زوایای مثلث‌بزرگتریامساوی‌با 120° باشند ، نقطه‌ای‌مانند M پیدا نمی‌شودکه به ازاء آن زاویهٔ بین MA ، MB ، MC برابر با 120° باشد . می‌نیمم برای یك رأس حاصل می‌شود و واضح‌است که‌رأس بزرگترین زاویه منظور است . برعکس‌وقتی که تمام زوایای مثلث‌کوچکتر از 120° باشند ، نقطه‌ای مانند M وجود دارد ؛ به‌سادگی محقق می‌شودکه مجموع :

$$MA + MB + MC$$

کوچکتر از مجموع‌دوضلع غیر مشخص از مثلث است و ازآن نتیجه می‌شودکه M مقدار می‌نیمم رابدست‌می‌دهد .

چرا چنین استدلال ساده‌ای را بوسیلهٔ روشهایی نظیر آنچه‌که خواندیم جایگزین می‌کنند ؟ در این استدلال ذات نقطهٔ M را قبول دارندکه اگر P برآن واقع باشد مجموع $PA + PB + PC$ می‌نیمم خواهد بود .

باوجوداین واضح‌است که وضعی برای P به‌منظورحصول ماکسیمم $PA + PB + PC$ وجود ندارد . در واقع اگر بنظر می‌رسدکه مقدار می‌نیمم وجود دارد برای آنست که‌تصور

---

* روشهای I و III نیز برای این‌مجموع بکارمی‌روند . برای اولی محاسبه مواجه با اشکال می‌شودولی برای‌دومی نحوهٔ استدلال تقریباً بدون تغییر بکار می‌رود . تنها اشکال در مورد وقتی است‌که‌مجموع $aPA + bPB - cPC$ منظور باشد، دراین صورت باید نامساوی $c(CM - CP) < bMP_c$ را بانامساویهای مختلف‌الجهت جمع‌کنیم . ولی با استفاده از دورکردن M روی MC می‌توانیم طرفین این نامساوی را بقدری نزدیك هم‌کنیم‌که تبدیل به‌یك تساوی‌شوند .

نمی‌کنیم نوع دیگری بتواند وجود داشته باشد و این خطای تصور مطمئناً هیچگونه ارزش منطقی ندارد .

مسئلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

دونقطهٔ A و B و خط AT که از B نمی‌گذرد مفروض است . کوچکترین کمانی که دو انتهایش A و B بوده و در A بر AT مماس باشد چیست ؟ چون تمام کمانهایی که A و B را به‌هم وصل می‌کنند دارای حداقل طولی برابر با AB می‌باشند پس فاصلهٔ AB را می‌توانید طول مینیمم کمانهای مفروض بنامیم. (کلمهٔ می‌نیمم در اینجا به‌جای هرچه کمتر استعمال شده است) .ولی واضح است که هیچکدام از این کمانها طولش برابر AB نیست . در این صورت ، آنچه بدست آمده می‌نیمم مطلوب نمی‌باشد ، بنابراین نکتهٔ اساسی اثبات وجود اکسترمی (ماکسیمم یا می‌نیمم) است که در جستجوی اثبات آن هستیم .

روشهای اثباتی مختلفی که در آنها از اثبات وجود ذات موضوع صرف‌نظر شده توسط م . ا. **پرون** به‌نوعی استعاری مورد انتقاد واقع‌شده است . مثالی از وی جستجوی بزرگترین عدد صحیح است ؛ این عدد نمی‌تواند ۲ باشد زیرا مربع عدد ۲ بزرگتر از ۲ است ! ۳ نیز نمی‌تواند باشد زیرا مربع ۳ بزرگتر از عدد ۳ است ونیز ..... بنابراین بزرگترین عدد صحیح عدد یك است .

اولین بار که لزوم اثبات وجود اکسترمم گوشزد شده است بنظر می‌رسید که به‌طریق ذیل بوده است :

آرگان ، متولد در ژنو وکتابدار در پاریس ، در سال ۱۸۰۶ کتابی به‌نام «کوششی در زمینهٔ نمایش مقادیر موهومی در ترسیمات هندسی» منتشر کرد و در آن نوعی نمایش اعداد مزبور را ارائه‌داد .اما قبل‌ازوی ، **دانواکاسپاروسل** دراین کار پیشقدم‌شده بود :شخص اخیر در ۱۷۹۷ اثری عالیتر از کار آرگان را در زمینهٔ نمایش اعداد مختلط به آکادمی سلطنتی کپنهاك تسلیم کرد که چندان مورد توجه واقع نشد و فقط ضمن یادداشتهای آکادمی در ۱۷۹۹ منتشر شد و همین امر باعث شد که کار آرگان نیز کمتر از وسل خاطر نشان شود . ولی **ژاك‌فرانسوا** موقع مرگ برادر بزرگش ، درنامه‌های وی نامه‌ای از **لژاندر** پیداکرد که در آن روش آرگان بکار رفته بود بدون آنکه نام‌وی بمیان آمده باشد .

فرانسوا ازنویسندهٔ گمنام درخواست کرد که‌خود رامعرفی نماید و به‌دنبال آن آرگان کوششهای خود را در سالنامهٔ ریاضیات محض و عملی جلد VI صفحهٔ ۶۱ تا ۷۱ ازسرگرفت و ضمن آن بخصوص اثبات جالبی از قضیهٔ **دالامبر** را ارائه داد که به حکم زیرمنتهی می‌شود : هرگاه مقدار z_0 از متغیر مختلط z برای کثیرالجملهٔ $f(z)$ مدولی مثبت فراهم آورد درهمسایگی z_0 مقادیری مانند z وجود دارد که به ازاء آنها مدول کوچکتر می‌شود و نتیجه گرفت که تنها صفرهای کثیرالجملهٔ $f(z)$ می‌توانند می‌نیمم مدول $f(z)$ را بدهند . آرگان پذیرفته است که این می‌نیمم‌وجود دارد و از آن نتیجه گرفته است که هرمعادلهٔ $f(z)=0$ دارای ریشه است .

سروا در همین جلد از سالنامه در صفحات ۲۲۸ و ۲۳۵ بریادداشت آرگان خرده‌گرفته و چنین نوشته است :«به نظرمن بدست‌آوردن مقادیری از x که بلاانقطاع به‌کثیرالجمله مقادیر نزولی بدهند به‌هیچ وجه کافی نیست ؛ علاوه برآن لازم است که قانون تنازلی الزاماً کثیرالجمله را به‌صفر برساند ، یا بقسمی باشد که صفری وجود نداشته باشد ، اگر بخواهیم عمیقاً بیان کنیم آنرا به‌صورت مجانب کثیرالجمله می‌خوانیم .»

این نقدظریف‌سروادو باره ودقیق‌تر بوسیلهٔ **ویرشتراس** در مورد تحقیقات **ریمان** در بارهٔ توابع جبری برمبنای مسئلهٔ می‌نیمم معروف به‌مسئلهٔ **دیریکله** بیان شد . ویرشتراس ثابت کرد که توابع اتصالی بایك یا چند متغیر وقتی به‌حدخودمی‌رسند که آنها را در میدانهای محدود در نظر نگیریم . از طرف دیگر ، وی اشاره‌ای در بارهٔ آنچه که به نام شرایط کافی در حساب تغییرات بکارمی‌رود نموده است .

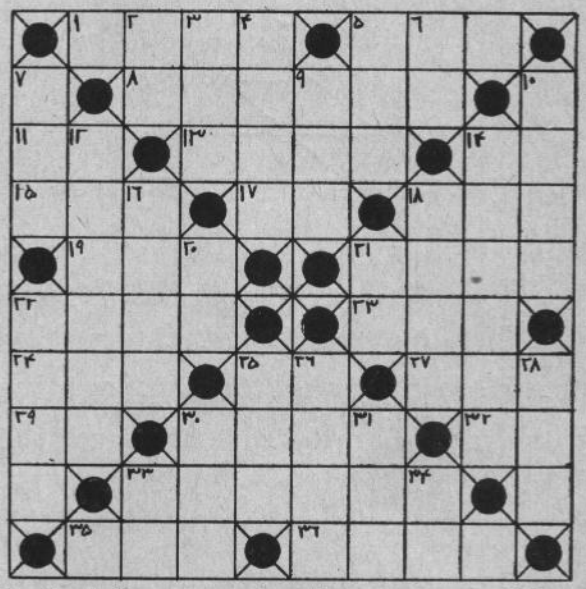
اکنون‌فقط نامگذاریهائی که وی نگاشته است خاطرنشان می‌کنیم . خانواده‌ای از اعداد مفروض‌اند ، کنارهٔ پائینی این اعدادبزرگترین عددی است که‌هیچکدام از اعداد خانواده‌ازآن کوچکتر نباشد .کنارهٔ بالائی نیز مانند حالت نظیر مشخص می‌شود . تمام خانواده‌های اعداد الزاماً دارای کنارهٔ پائین و کنارهٔ بالا می‌باشند ، ممکن است که کنارهٔ پائین $-\infty$ وکنارهٔ بالا $+\infty$ باشد . فرض می‌کنیم خانوادهٔ اعداد مورد نظر خانوادهٔ‌مقادیر مربوط به تابع $f(x)$ باشد . طبق تعریف کنارهٔ پائین، این‌کناره یاکوچکترین اعداد $f(x)$ یا بزرگترین‌اعداد کوچکتر از $f(x)$ می‌باشد .

تنهادرموردحالت اول گوئیم که تابع‌دارای یك‌مینیمم‌است؛ این درموردی است که قبلا می‌گفتیم می‌نیمم حاصل شده است . درحالت‌دوم ، بهتراست کلمهٔ‌کنارهٔ پائینی را به‌جای کلمهٔ‌می‌نیمم بکار بریم .

نبایدزیادتعجب کنیم که‌فرق‌می‌نیمم‌وکنارهٔ‌پائین، یاماکسیمم وکنارهٔ‌بالا بااینقدرتأخیر بیان‌شود .این‌از آن‌جهت‌است که‌موضوع هیچگونه معنی‌مادی‌ندارد . اگریك‌پل‌تاب تحمل یك‌بارمی‌نیمم را نداشته باشد چه‌کسی جرات می‌کند که باری‌ماکسیمم را از آن عبوردهد . فیزیکدانها مسائلی‌بسیاری ازنوع مسئله‌دیریکله را در بارهٔ می‌نیمم مطرح کرده‌اند و تحقیقات ریاضیدانها در بارهٔ این مسائل تفننی نبوده بلکه کارهایی الزامی‌بوده‌است .

جدول اعداد

طرح از : مهدی بهاریان
دانش‌آموز دبیرستان امیرکبیر مشهد

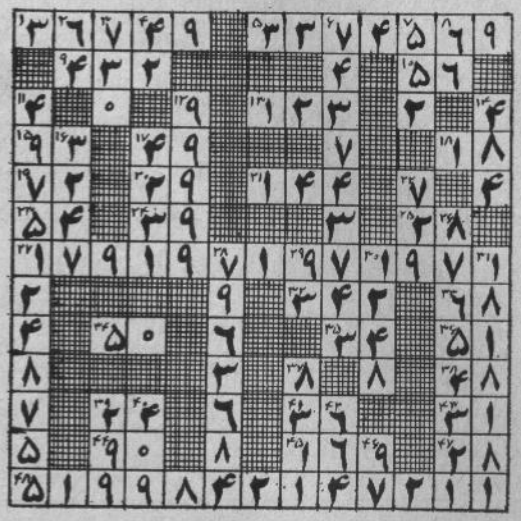


افقی : ۱ـعدد معروف به «بدوح» .۵ـتکرار یك رقم ۸ـ ارقام اولیهٔ عدد e . ۱۱ـ عددی است تام (یا کامل) . ۱۳ـ ازشش برابر مقلوبش ۳۵ واحدکمتر است . ۱۴ـ نصف عدد ۱۱ افقی . ۱۵ـ مجذور عدد ۶ قائم . ۱۷ـ جذرعدد ۳۲ افقی و خودش مکعب کامل است . ۱۸ـ متمم حسابی عدد ۲۸ قائم . ۱۹ـ اگر به رقم دهگانش ۸ واحد اضافه‌کنیم هـر سه رقمش مشابه می‌شوند وعددی است زوج . ۲۱ـ تاریخ میلادی شش سال قبل . ۲۲ـ اگر با عدد ۱۹ افقی جمع شود عددی با چهار رقم مشابه بدست آید . ۲۳ـ حاصل عبارت زیر :

$$a^{\log_a 100} + b^{\log_b 59} + c^{\log_c \sqrt{81}}$$

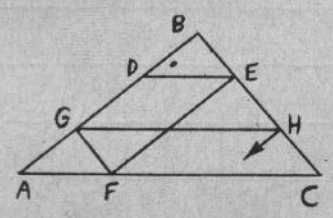
۲۴ـ به فرض $a > 1$ و $b > 1$ به صورت $2^a \times 13^b$ تجزیه می‌شود. ۲۵ـ نصف مقلوب عدد ۱۷ افقی. ۲۷ـ واسطهٔ‌حسابی عدد ۲۵ قائم و ده‌برابر عدد ۲۵ افقی . ۲۹ـ توان پنجم‌است ۳۰ـ از نوشتن ۸۹ سمت راست عدد ۲۹ افقی بدست می‌آید . ۳۲ـ دوبرابر عدد ۲۹ افقی . ۳۳ـ به‌حساب ابجد«ریاضیات» را صدبرابر کنید و با «محض» جمع کنید . ۳۵ـ حاصل‌ضرب نه‌برابر عدد ۲۱ قائم وعدد ۱۷ افقی . ۳۶ـ چون رقمهای‌یکان وسدگان آنرا جابجا کنیم ده برابر توان ششم یك عدد حاصل شود .

قائم : ۲ـ سه‌برابر عدد ۱۴ افقی . ۳ـ همان عدد۲۴ افقی . ۴ـ صدبرابر عدد ۲۰ قائم . ۵ـ مجذور عدد۲۱ قائم ۶ـ مقلوب عدد ۲۰ قائم . ۷ـ کوچکترین عدد سه رقمی که رقمهایش تصاعد حسابی می‌سازند . ۹ـ همان عدد ۱۹ افقی . ۱۰ـ شمارهٔ صندوق پستی یکان . ۱۲ـ مقلوب عدد ۸ افقی . ۱۴ـ مربع تعداد ضربه‌های ساعت دیواری در مدت ۶۳ ساعت ابتدا از ساعت یك . ۱۶ـ توان دوازدهم است . ۱۸ـ تفاضل کوچکترین وبزرگترین عددهای اول‌چهار رقمی. ۲۰ـتوان چهارم است . ۲۱ـ تکرار یك رقم . ۲۲ـ رقمهایش از چپ به راست تصاعد حسابی با قدرنسبت ۳ می‌سازند . ۲۵ـ رقم سدگانش دو برابر هریك از رقمهای یکان و دهگانش است . ۲۶ـ با عددی به شکل $\overline{a(a+1)(a-1)}$ بـرابـر است و مجموع رقمهایش ۲۴ است. ۲۸ـ جذرش مقلوب جذرمقلوبش است. ۳۰ـ به همان شکل عدد ۲۶ قائم نوشته می‌شود با این تفاوت‌که مجموع رقمهایش ۹ است . ۳۱ـ ده برابر «صد» به‌حساب ابجد . ۳۳ـ رقم‌یکانش بامتمم حسابی مقلوبش‌برابر است . ۳۴ـ مقلوب عدد ۱۱ افقی .



PROBLEMS AND SOLUTIONS

Problem 38 : The sides,of triangle ABC are AB=6, BC=5, CA=8. At a point D on side AB, a line is drawn parallel to $\overline{AC}$, intersecting $\overline{BC}$ at E; then parallel to $\overline{AB}$, intersecting $\overline{AC}$



at F; then parallel to $\overline{BC}$, intersecting $\overline{AB}$ at G, then parallel to $\overline{AC}$, intersecting $\overline{BC}$ at H; then parallel to $\overline{AB}$ intersecting $\overline{AC}$ at I, then parallel to $\overline{BC}$, intersecting $\overline{AB}$ at J.

a) Find the length of $\overline{AG}$ and $\overline{GJ}$, when BD=2,3,5.

b) Generalize and prove your results.

Solution: a) Using the proportions as in Part (b), it can be determined that when BD=(2, 3, 5), then AG=(2, 3, 5) and GJ=(2, 0, 4).

b) Since a line parallel to one side of a triangle cuts the other two sides into proportional segments:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{AF}{AC}=\frac{AG}{AB}=\frac{CH}{CB}=\frac{CI}{CA}=\frac{BJ}{AB}$$

Hence BD=AG=BJ, and points D and J coincide.

(Editor: also BE=CH, AF=CI).

زنان ریاضیدان (بقیه‌ازصفحهٔ ۲۷۸)

پیش از پذیرش درمؤسسات مشهوری چون «هاروارد»، «پرینستون»[1] و«مؤسسهٔ تکنولوژی‌کالیفرنیا» شروع شد. لیکن امروزه سازمانهای مذکور نه تنها به روی زنانی که می‌خواهند تحصیل کنند باز هستند بلکه آنها را در همان دوره‌هائی که مردان می‌بینند می‌پذیرند، امروزه برای ریاضیدانهای شایسته در آزمایشگاههای ملی ودولتی موقعیتهای خوبی وجود داردکه کمتر درآنها تبعیضی برای مردان قائل می‌شوند. حقوقهامکفی هستند و یك زن درصورتی‌که بچه داشته باشد می‌تواند به‌سهولت یك خدمتکار استخدام کند تا اینکه وقت لازم برای پرداختن به‌کار را داشته باشد. حتی بعضی از زنان، ضمن ادارهٔ خانه، اشتغالات مختلفی در خارج دارند بطوری که هیچگونه آسیبی هم به هیچیك از اعضاء خانواده نمی‌رسد.

افکاری‌که در مورد شغل و استخدام زنان در نسلهای‌پیش وجود داشته است امروزه جالب و در عین حال مضحك است. نقل قسمتی از نامهٔ سونیاکوالفسکی به میتاگ لفلر در این مورد ارزنده است و مسئله را تا حدی روشن می‌کند که آن قطعهٔ انتخابی چنین‌است: «مقالهٔ **ستریندبرگ**[2] را که خواهرت، همچون هدیهٔ‌کریسمس، برایم فرستاده بود دریافت کردم. در این مقاله اثبات شده است‌که همانطورکه دو دوتا چهارتا می‌شود وشکی درآن نیست وجود زنی‌که استادریاضیات باشد عجیب، غیرضروری، زیان‌آور وبی‌مورد به نظر می‌رسد من تصور می‌کنم‌که نویسندهٔ این مقاله‌کاملا در اشتباه است. تنها امیدوارم وی بتواند به‌سادگی این را بفهمدکه زنان ریاضیدان بسیاری در سوئد بوده‌اند که خیلی بیش از من هم ریاضی می‌دانسته‌اند و این هم یکی از اشتباهات اوست‌که مرا از میان آنها انتخاب‌کرده است!»

حتی امروزه هم بیشتر استخدام‌کنندگان، مردان رابر زنانی با شرایطی مساوی باآنها ترجیح می‌دهند ولی رویهمرفته امروزه مانع‌کلی برای‌کار و تحصیل زنان وجود ندارد و ما به انتظار روزی هستیم‌که زنان دانشمند قضاوت «ستریندبرگ» را در بارهٔ خودشان باطل کنند و کمال خویش را به منتها درجه برسانند.

1- Princeton

2- Strindberg

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ۵۰

کلاس چهارم ریاضی

۵۰/۵ ـ علیرضا حیاتی فلاح ـ منصورکاظم موسوی ـ حسن رسولی ـ محمد ناجی الماسی ـ محمد پور فتحی ماسوله‌ای ـ بیان‌الله معظم ـ ایوب نصرت‌آبادی ـ منصورخاکسار ـ سراب باقری ـ محمدرضا سراج پور ـ بهمن اصغری ـ علی‌اکبر احسانی ـ محمد صناعی ـ فرشاد اسکندر بیاتی ـ پرویز روانی شریف آبادی ـ اشراق جهرمی ـ حسین بهنام رودسری ـ بزرگ کسائیان .

۵۰/۶ ـ محمد جعفر مولوی ـ بیان‌الله معظم ـ حسین بهنام رودسری

۵۰/۸ ـ غلامعلی قائدی

کلاس پنجم ریاضی

۵۰/۱۲ ـ سعید اعتمادی ـ حبیب‌اسلامی ـ ابراهیم شایان

کلاس ششم ریاضی

۵۰/۱۸ ـ مجتبی محزون

۵۰/۲۱ ـ ناصر ناظمی نژاد

مسائل متفرقه

۵۰/۲۴ ـ علی‌کمالی ـ فریدون گنج‌آبادی ـ حسن بیگ محمدی ـ فرهاد معادی ـ اکبر دوستدار ـ علی عسکر کریمی ـ عزیزالله نظری ـ ارسام صبری ـ علی صفرزاده ـ علی هنرپیشه ـ سعید اعتمای ـ محمد شعبانی ـ مجتبی محزون مصطفی رضائی ـ اسفندیار رجائی ـ بهمن گیلکی ـ مرتضی‌مربی هروی ـ مجیدفارسی ـ محمدعلی شبستری ـ اکبر ابراهیمیان علی رحم‌عسکری پور ـ علی‌اکبر آموزگار ـ محمد رحمت‌ستوده محمد باقری ـ بهمن خلیقی ـ قاسم رحمانی ـ سعید حفاظی

۵۰/۲۵ ـ علی‌اکبر آموزگار ـ اکبر ابراهیمیان ـ علی‌صفرزاده ـ عزیزالله نظری ـ منصور آذریان ـ داریوش بنائی ـ عباس جهازیان ـ سبرعلی تقیان ـ احمد توسلی ـ مجتبی محزون ـ مجیدحقیقت ـ مجیدفارسی ـ امیر فریدالدین امیری ـ حسام‌کرباسی آرانی ـ محمد رحمت ستوده ـ توحید زرگر ارشادی ـ کریم عبدالشاه ـ حسین همتی ـ محمد حاج آقاخانی

۵۰/۲۶ ـ سعیدحفاظی ـ محمد رحمت ستوده ـ محمد علی شبستری ـ اکبر دوستدار ـ مجتبی محزون ـ اکبرزعفرانی مجید حقیقت ـ حسام‌کرباسی آرانی ـ جواد فیض ـ ارسام‌صبری احمد توسلی ـ شهریارکوزه‌کنانی ـ حسن گل‌محمدی ـ غلامحسین اردانی ـ ناصر فاطمی نژاد ـ حمید پیروزمند

۵۰/۲۷ ـ توحید زرگر ارشادی ـ اکبر زعفرانی ـ مجتبی محزون ـ اکبر دوستدار ـ عزیزالله نظری ـ علی صفرزاده ـ علی‌اکبر آموزگار ـ علی رحم عسکری پور ـ بهمن گیلکی ـ حسین مهدی زاده ـ ابراهیم ذوالقدری ـ علی‌کمالی علی عسکر کریمی طاهری ـ حسین دانش پژوه ـ فرشاد اسکندر بیاتی ـ علی رحیم‌پور ـ احمد توسلی ـ قاسم رحمانی ـ حمید رضا خورسندی ـ اسفندیار رجائی ـ سعید اعتمادی ـ حسن مقتدری ـ مجید فارسی

۵۰/۲۸ ـ کریم عبدالشاه ـ حسن بیك محمدی ـ مجید حقیقت ـ محمدرضاکسائی ـ محمد باقری ـ محمد رحمت‌ستوده اکبر ابراهیمیان ـ علی رحم عسکری پور ـ حبیب اسلامی ـ توحید زرگر ارشادی ـ اکبردوستدار ـ عزیزالله نظری ـ بهمن گیلکی ـ ابراهیم ذوالقدری ـ قاسم رحمانی ـ محمد خداکرمی فرشاد اسکندر بیاتی ـ علی عسکر کریمی طاهری ـ سعیداعتمادی بهنام مقامی ـ احمد توسلی ـ حمید حمزه زاده نخجوانی ـ علی‌اصغر وفائی

۵۰/۲۹ ـ ناصر فلاحی ـ محمدعلی شبستری ـ حسین همتی ـ امیر فریدالدین امیری ـ سبزعلی‌تقیان ـ منصورآذریان مجید حقیقت ـ فریدون‌گنج‌آبادی ـ حسن بیگ محمدی ـ فرهاد معادی ـ محمد حاج‌آقاخانی ـ حسین دانش‌پژوه ـ علی کمالی علی‌صفرزاده ـ مجتبی‌محزون ـ اکبرزعفرانی ـ مهردادکشاورزیان حمید پیروزمند ـ اکبرابراهیمیان ـ ناصرفاطمی‌نژاد ـ عزیزالله نظری ـ اکبردوستدار ـ توحیدزرگر ارشادی ـ محمد باقری محمدرضا کسائی ـ بهنام مقامی ـ علی‌اکبر آموزگار ـ حسن آقائی کرامت‌اله اشراق جهرمی ـ فرشاد اسکندر بیاتی ـ پرویز پرهامی ـ جلیل روحانی فرد ـ مصطفی راست‌گردانی ـ حسین مهدی زاده ـ ارسام صبری ـ نادر ملائیان ـ عباس جهازیان ـ علی رحیم‌پور ـ احمد توسلی ـ یداله اصنافی ـ منوچهرحقانی مهرداد وحدتی ـ مسلم لاشیدانی ـ محمد شعبانی ـ اسفندیار رجایی ـ محمود انصاری ـ حسن گل محمدی ـ صفر مختاری ـ سعید اعتمادی ـ علیرضا وشاق ـ مجید فارسی ـ علی‌اصغروفائی علی رحم عسکری پور ـ بهروز نجفیان ـ علی امامی

۵۰/۳۰ ـ فریدون گنج‌آبادی ـ حسن بیگ محمدی ـ فرهاد معادی ـ اکبر دوستدار ـ توحید زرگر ارشادی ـ علی رحیم‌پور ـ سعید اعتمادی ـ احمد توسلی ـ علی رحم عسکری

۵۰/۳۱ ـ توحید زرگرارشادی ـ محمد باقری ـ اکبر ابراهیمیان ـ مصطفی راستگردانی ـ حمیدپیرزومند ـ مجتبی‌محزون

۵۰/۳۲ ـ مجتبی محزوی ـ توحیدزرگرارشادی