یکان

۵

مجلّه ریاضیات

نامه استاد دکتر هشترودی درباره سئوالات امتحانی
فصلی از تاریخ ریاضیات — ترجمه یاقر امامی — ۲
کهنه ربو — — ۴
کثیرالجمله‌های متقارن — ترجمه پروز شهریاری — ۵
نتایج تازه در نمودارهای توپولوژیکی — مهدی بهزاد — ۱۷
روشهای کوتاه درجهار عمل اصلی — حسین ستاری تهرانی — ۲۰
حل مسائل مسابقه — — ۲۶
حل مسائل متفرقه شماره‌های گذشته — — ۳۰
حل دومساله نمونه از مسائل کنکور فرانسه — مهندس امیر صدری — ۴۱
مسائل برای حل — مسائل برای داوطلبان کنکور — ۴۸
مسائل کنکور سال ۴۲ دانشکده فنی — ۴۹
مسائل ریاضی مربوط به شطرنج مهدی بهزاد — ۵۰–۵۷
شانزده مساله دمتاز — علی رضائی — ۵۱
دنباله مسائل ازاستاد دکترهشترودی — ۵۲
حل مسائل ریاضی امتحانات نهائی
ششم ریاضی متفرقه ودبیرستانها — حبیب‌الله عبدالهی — ۵۸
حل مسائل فیزیک ومکانیک امتحانات

موسسه ریاضیات

سال یکم ــ شماره پنجم

خرداد ماه ۱۳۴۲

بهاء : ۲۰ ریال

یکان

مجله ریاضیات

شماره پنجم ـ سال اول
خردادماه ۱۳۴۳

هرسه یکبار منتشر میشود

صاحب امتیاز مدیر و سردبیر
عبدالحسین مصحفی

جای ادارهٔ موقت ـ تهران خیابان سرباز شماره ۳۵۳
نشانی پستی ـ صندوق پستی ۲۴۶۳
تلفن ۷۵۸۵۷۰

اشتراک سالانه (۱۲ شماره) ۲۰۰ ریال

حساب بانکی : حساب جاری شماره ۶۸۶۳ شعبه فردوسی بانک صادرات

مقاله‌های وارده مسترد نمیشود

طبع ونشر مندرجات و مقالات اختصاصی این مجله
بی‌اجازه ممنوع است

چاپخانه محمدعلی علمی

عزیمت دکتر آوانیسیان بفرانسه

دکتر وازگن آوانیسیان ازجمله ریاضیدانان معاصر ایرانی‌است که در رشتهٔ خویش صاحب تحقیقات بوده مرجعیت و مقام علمی‌آنان مورد قبول سایر دانشمندان میباشد . وی دو سال قبل بایران آمد تا در کشور خویش منشاء خدماتی باشد و دانشمندانی دیگررا بپروراند. ولی چون در ایران ، آنطورکه بایست زمینهٔ تحقیقات برای وی فراهم نبود بناچار قصد عزیمت بفرانسه را نمود . بهمین مناسبت دوهفتهٔ قبل ، ازطرف باشگاه مهرگان ، مراسمی درتالار هتل‌هیلتون برگزار شد ؛ بنا بدعوت باشگاه ، عده‌ای از استادان دانشگاه ،دبیران علوم و جمعی از دانشمندان حضور داشتند . ابتدا بحضار خیرمقدم گفته شد و از اینکه دکتر آوانسیان ایران را ترك می‌کند اظهار تأسف گردید . آنگاه استاد دکتر هشترودی طی‌بیانات مبسوطی‌اظهار داشتند که اولاً علم جهانی است و وطن مشخص و معینی ندارد . خدمات یك دانشمند شامل همهٔ کشورهای جهان میشود . استاد اضافه نمودند جای خوشوقتی است‌که برای دکتر آوانیسیان ،که در سن جوانی است و ادامهٔ تحقیقات و مطالعات برای وی میسر است ، فرصتی پیش آمده است تا در یکی از بهترین دانشگاههای جهان ، دانشگاه استراسبورك ، تحقیقات ومطالعات خودرا دنبال نماید .استاد اظهار داشتند چنانچه برای دکتر آوانیسیان میسر شده بود که در ایران ، بجای بحث در معادلات درجه‌دوم و یا حداکثر آنالیزریاضی، در رشتهٔ تخصصی خود، ریاضیات جدید ، بحث وتدریس نمایندشخص ایشان ازجملهٔ مستعدین بودند و بالاخره توفیق دکتر را در ادامهٔ مطالعات علمی و انجام خدماتی بعالم بشریت آرزو نمودند .

در پایان ، آقای دکتر آوانیسیان ضمن اظهار تشکرازحضار، پیرادون ریاضیات جدید و ازجمله دربارهٔ تعریفی‌که درگذشته از تساوی شده است و تعریف صحیحی‌که از آن باید بشود مطالبی‌ایراد نمود و اضافه نمود که در اغلب کشورها ، ریاضیات جدید ، جزو برنامهٔ متوسط شده است و مناسب دارد در ایران هم ضمن تجدیدنظر درکتب درسی دبیرستانی ، علامت‌های جدید ریاضی مورد استفاده واقع شود ودر پایان بخنان خود اضافه نمود که برای تکمیل‌بحثی تحقیقی که درنظر دارد به‌کنگرهٔ آینده بین‌المللی ریاضیدانان ارائه دهد بفرانسه میرود وامیدوار است مجدداً برای‌انجام خدمات‌مؤثرتر بایران مراجعت نماید .

مراسم با پذیرائی گرمی‌که از حضار بعمل آمد پایان یافت درحالیکه هریك از مدعوین حس میکرد دوساعت از بهترین‌اوقات خودرا پشت‌سر گذاشته است .

مقالات و مسائل رسیده

درباره ریاضیات عالی‌ازآقایان: علیرضا سیمی از دانشگاه پهلوی شیراز ، منوچهر بابپوردی از دانشگاه ملی ایران ، مهندس عباس سعیدی .

مسائل رسیده توسط آقایان دبیران

سید حسین علویزاده از تبریز ـ ج . جواهری از کازرون ـ عاطفی از تهران ـ قاسم فتحی ازهفتگل ـ محمد داوری از اردکان یزد ـ علی گهنمویی از تبریز ـ حافظی از نیریز

مسائل رسیده توسط دانش‌آموزان ودانشجویان

احمد داروئی از تهران ـ فرامرز بورقلی زاده از تهران ـ مهدی قهرائی از اصفهان ـ سید حسن متکین از شیراز ـ میرکمال میرکیا ـ هرمز ولی‌پور پاشا از تهران ـ احمد حاج عظیم از تهران ـ آقامحمد آبادی از تهران ـ فرامرز رهبر از تهران ـ نصرت الله جمشو از تهران ـ زهرا معینی از تهران ـ حسین ارشام از مشهد ـ علی دانش از مشهد ـ بهمن ماهری از سنندج ـ مجید شریف واقفی از اصفهان ـ ابوالقاسم محمدی از تهران ـ کامران پور مرادی از تهران ـ ناهیده رزاقی از تهران ـ ایرج همت از تهران فرزاد امان پور از تهران ـ بهروز رشاقی از تهران ـ مهرداد عابدی از تهران ـ پرویزجلیلی ازهمدان ـ مهدی مقدسیان ازتهران ـ محمدخزوی ازقائمشهر ـ امیدعلی کرمزاده ازمحمدسلیمان ـ علی شمه‌بیگی‌از تهران ـ سیروس فخریاسری ـ پرویزطاهری ازتهران ـ احمدسالك زمانخانی ازتهران ـ داودحسینی ازتهران ـ محمدهادی اردبیلی از تهران ـ علی جواهری فراز از آبادان ـ خسرو موحد ازتهران ـ محمد مهدی فیض‌مهدوی از تهران عنایت‌الله وفائی از تهران ـ سید محمد باقر آراب از تهران ـ سیروس فخر یاسری از تهران ـ عبدالعلی رفعتی از جهرم ـ ناصرخ ریاضی از تهران ـ معصومه مهدی پور ازتهران ـ شعبان پرورشی از بهبهان ـ بیژن پرویز از تهران ـ فیروز پیرامی از تهران ـ حسن تاهباز از تهران ـ رضا آذرخویش از تهران ـ محمد محروق علوی از تهران ـ محمدرضا قسیمی از تهران ـ محمد شریف زاده از تهران ـ رضا کاشتی از بنیس ـ غلامحسین راستگو از تبریز ـ عزت‌الله آزاد از تهران ـ سید جعفر وفابخش ـ ابوالقاسم مکانیك از تهران ـ یدالله حاج جعفری از تهران ـ فرخ پورحسن از تهران ـ بهروز سوادکوهی ازتهران ـ محمد رهبران از تهران ـ علی رودگری از شاهی ـ یدالله پیرمرادی از اهر ـ خسرو شکری از تهران ـ حق‌نواز از بابل ـ محمد رضاولی نژاد از خوی ـ رضا عزیزاده از عسدان ـ نصرت‌الله بابائی ازتهران ـ منصور متمامی از تهران ـ محمد ساعی از تهران ـ اسمعیل محمدی ازتهران ـ محمود میرزائی ازتهران ـ داریوش نوریزاده از آمل سید جعفر وفابخش ازتهران ـ نصرالله اسلامی از تهران ـ مرتضی رودگری از آمل ـ عزت‌الله آزاد از تهران ـ مهدی مصراف زاده از تهران ـ محمد محسب تاش از شیراز ـ پرویز ابرار امل از تهران ـ حمید قدوسی از خوی ـ مهدی قهرائی از اصفهان ـ محمد سادقپور از تبریز ـ اردشیر مومنی از تجریش ـ محمود ناهید از تهران ـ محمد رضولزاده از تبریز .

مطالب رسیده

اصغر بنائی از اراك ـ محمد افشار از تبریز ـ ناصر محمدی از نجف آباد ـ عبدالرضا ابوالاحرار از شیراز ـ اکبر قهرمانی از تهران ـ داریوش ارجمند از سمنان ـ فرامرز پورقلی زاده از تهران ـ تقی اصفهانی از تهران ـ سید محمد حسین حق نژاد از بابل .

دربارهٔ سؤالات امتحانی

آقای مدیر محترم مجلهٔ یکان

پیشامدی که در امتحان کتبی جبر سال ششم متوسطه رخ داد باطرز بیان وخبرنگاری روزنامه‌ها قسمی عنوان گردید که موجب اهانت بمقام معلم بطوراعم می‌باشد. خصوصاً اینکه خبرنگارهائی نیز (بدون دلیل) بمن مراجعه کرده ولی در عوض گفتهٔ من از خود مطالبی رطب و یابس بهم بافته و درجرائد منعکس ساختند. بی‌آنکه به توضیحی مفصل بپردازم خواهشمندم این مختصر را در مجله امر بدرج بفرمائید که لااقل زمینهٔ مقدماتی موضوع دردسترس حقیقت جویان قرار گیرد (زیرا مخبرین جرائد بهیچوجه به این امور نپرداختند و با اینکه کراراً از من پرسش شد در روزنامه ها بدان اشاره نکردند)

مسئلهٔ اول امتحان کتبی جبر سال ششم ریاضی درکتاب جبر برای سال ششم ریاضی (کتاب کیهان) تألیف آقایان بیرشك و شمس آوری و آذر نوش و پروفسور فاطمی و آقایان دیگر چاپ اول در صفحهٔ ۱۹۵ شمارهٔ ۱۷ و صفحهٔ ۲۰۷ شمارهٔ ۵۱ و طریقهٔ تعیین ماکزیموم و می نیموم (مورد استفاده در مسئلهٔ امتحانی) در متن کتاب صفحهٔ ۹۷ وقسمت دیگر مسئله (رابطهٔ اتوافقی) در متن کتاب صفحهٔ ۹۹ مذکور است .

و رسم منحنی مسئلهٔ دوم نیز در صفحهٔ ۱۱۲ تمرین شمارهٔ ۳۷ عیناً در کتاب درج شده است ملاحظه میفرمائید که مسائل امتحانی نه تنها درحدودبرنامه بوده‌است بلکه اساساً درکتاب درسی نیز بعنوان تمرین دانش آموز طرح شده است. سر و صدا و هیاهوی بسیار در اطراف این موضوع موجب این زحمت افزائی شد. با عرض معذرت توفیق جنابعالی را آرزومندم .

دکتر محسن هشترودی

فصلی از تاریخ مختصر علوم ریاضی

تألیف موریس دوکانی Maurice d ' Ocagne

ترجمهٔ : باقر امامی

مبادی ریاضیات ـ دانش یونانی

آثار اولیه در کلده ، فنیقیه و مصر

تصورات ذهنی اولیهٔ ریاضیات ظاهراً در **کلده** و **فنیقیه** (حساب) و در **مصر** (هندسه) بوجود آمده است. کلدهای ها و فنیقیان مردم تجارت پیشه‌ای بودند و بخاطر رفع نیازمندی‌هائی که مستلزم این پیشه است . قوانین محاسبه را ایجاد نمودند . مصری‌ها مردمی کشاورز بودند و بخاطر مساحی زمین‌های خود به اولین اطلاعات هندسی دست یافتند .

نظر غالب این است که این مساحی برای تجدید دقیق مرزهای مزارعی که با طغیان سالیانه آب رود خانه نیل از بین میرفت بعمل می آمد . ولی این عمل برای زه‌کشی به منظور خشکانیدن زمین های آب گرفته نیز انجام می گرفت این خود از ابتکارات **سزوستریس** Sesostrice بود .

ارسطو معتقداست که ریاضیات علاوه بر جنبه‌های انتفاعی بخاطر خود و جنبهٔ علمی آن نیز تحصیل می شده است . او می گوید : « کهنهٔ مصری فارغ از گرفتاری های زندگی مادی اوقات خود را صرف مطالعه و آموزش می نمودند» همانطور که کشیشان و کلیساهای قرون وسطی نیز بدین شیوه عمل کرده‌اند

بهرصورت فلاسفهٔ یونان اولین دروس هندسه را از مصری‌ها اقتباس کرده اند .

شرق دور

قبلاً یادآور شویم که متخصصین معاصر آثاری از ریاضیات نظیر آنچه راکه از شرق نزدیک بما رسیده است در شرق دور نیز بدست آورده‌اند ولی گمان نمیرود که دانش شرق دور بخاطر دور افتادگی زیاد در تکوین دانش اروپائی سهمی داشته باشد. بعلاوه باید خاطر نشان کنیم این تصورات ذهنی ابتدائی در کشور های مبداء خود بخصوص در **چین** اگر در حالت رکود مطلق هم نبوده تحول بسیار کندی داشته است و این تحول با آنچه تحت تأثیر نبوغ یونانی در اروپا ببار آمده است قابل مقایسه نیست .

تالس THALES

اولین شکوفه‌های دانش هندسی که در مصر سر زده بوسیلهٔ **تالس** (۶۳۹ ـ تا ۵۴۸ ـ) (۱) به یونان انتقال یافته است **تالس** ازمیان کسانی که بعد ها به **«هفت مرد دانا»** معروف گردیدند مشهورترین آنها است . **تالس** اصلاً فنیقی بود ودر آغازکار تجارت را پیشه ساخت ونیازهای بازرگانی او را به **مصر** کشانید . سکونت طولانی او در **اسکندریه** که در آن زمان پر تو دانشش بهر طرف می تابید ذهن مستعد وکنجکاو او را برای فراگرفتن دانش اختصاصی کاهنان برانگیخت .

پس از کسب دانش بسال (۵۸۷ ـ) در شهر **میله** Milet که از مهمترین شهرهای کلنی یونانیان درسواحل آسیای صغیر مشرف به دریای مدیترانه بود سکنی گزید (از این نظر به **تالس** ملطی معروف است) و در آنجا مکتب **ایونی** Ionienne را تأسیس نمود که بعدها معروفیت عالمگیر یافت و بسیاری از مغزهای بزرگ که دانش هندسی را پی افکنده‌اند تربیت شدهٔ این مکتب می باشند .

تالس در عین حال هم ستاره شناس و هم هندسه دان بود و مسئلهٔ تشابه مثلث ها ، استفادهٔ از قوس‌ها برای اندازه گیری زوایا ، اندازه گیری ارتفاع ساختمان‌ها از روی سایهٔ منتقلهٔ آنها (بخصوص اندازه گیری **هرم ممفیس** برای با راول) ، توجیه علت خسوف وکسوف بدو منسوب است . می گویند که او تاریخ وقوع یك کسوف را [بعقیدهٔ زوتن Zeuthen بیست و هفتم مامه (۵۸۵ ـ) و بعقیدهٔ تانری Tannery سی ام سپتامبر (۶۱۰ ـ)] پیش بینی کرده بود ولی این روایت به افسانه بیشتر شبیه است . زیرا به ادوات نجومی با دقت کافی که برای این نوع پیش گوئی ها مورد نیاراست سه قرن بعد دست یافتند . با این وصف استعداد **تالس** را به عنوان اولین پرچمدار دانش یونانی نمی توان انکارکرد .

شاگردان تالس

مکتب « ایونی » را ، **آنکسیماندروس** Anaximandre

(۱) ـ تاریخ های قبل از میلاد مسیح را با علامت (ـ) نموده ایم

و انکسیمانوس Anaximène و انکساغورس Anaxagosre بترتیب رهبری کردند.

آنکسیماندروس (۵۴۳ ـ تا ۶۱۰ ـ) که بیشتر ستاره شناس بود تا هندسه دان به عنوان مخترع کره‌های نجومی و اولین سازندهٔ نقشه های جغرافیائی شناخته شده است و هم او است که هنر ساختن ساعت های آفتابی را وارد یونان نموده و آنرا تکمیل کرده است و مهمتر از همه **آنکسیماندروس** مؤلف اولین کتاب هندسه است که تاریخ بیاد دارد . اولین کتابی که در آن علم هندسه بصورت یك دانش آموزشی پایه گذاری شده است . هر چند که این کتاب بدست ما نرسیده است ولی در نوشته های دوران کهن از آن کراراً نام برده شده است و گویا در این کتاب خواص زیادی از کره که تا آن تاریخ ناشناخته بوده مورد بررسی قرار گرفته است .

انکسیمانوس (۴۹۹ ـ تا ۵۲۰ ـ) که او هم متخصص ساعت های آفتابی بود اولین کسی است که در راه **تربیع دایره** یعنی رسم مربع معادل دایره قدم بر داشته است .

و بالاخره **انکساغورس** (۴۲۸ ـ تا ۵۰۰ ـ) که پس از رهبری مکتب « میله » اولین مکتب فلسفی را در آتن بنانهاد و این مکتب که بخاطر پروردن دانشمندانی نظیر **پریکلس** Pericles **وئوریپید** Euripide **وسقراط** بلند آوازه شد باعث معروفیت **انکساغورس** گردیده است .

سایر رهبران مکتب ها

سومین مکتب فلسفی که مهد پرورش علوم ریاضی بود و سر و صدای بیشتری داشت مکتبی بود بتوسط **فیثاغورس** Pythagore در یونان بزرگ تأسیس گردید .

از میان شرکت کنندگان در جنبش وسیع فکری که در زمینهٔ علوم نام یونان را بلند آوازه کردند معروفترین آنها عبارتند از **فیثاغورس** ، **اقلیدس** Euclide ، **ارشمیدس** Archiméd ، **آپولونیوس** Apollonius ومخصوصا **افلاطون** Platon **وارسطو** Aristote که به عنوان فیلسوف مشهور شده اند و با این وصف در راه توسعهٔ ریاضیات نقش فراموش نشدنی داشته اند. بعکس آنها **سقراط** به اکراه داشتن از ریاضیات معروف بوده است .

اطلاعاتی که از این مردان بزرگ در دست است آنچنان با افسانه های ساخته و پرداختهٔ شاگردان آنها عجین است و آنچنان این افسانه ها در توی حقایق تاریخ ریشه دوانیده اند که تشخیص حق از باطل امکان ناپذیر می نماید . با توجه به مراتب فوق باید کوشید تا خلاصه ای از آنچه احتمالا به حقیقت نزدیك تر است از متون نوشته ها برگزید .

فیثاغورس

فیثاغورس مسلماً صوری الاصل Tyrienne است و بسال (۵۶۹ ـ) در **ساموس** Samos متولد گردیده است ابتدا بهمراهی پدر در مسافرت های بازرگانی سواحل یونان وآسیای صغیر را زیر پا گذاشت و چون شوق تحصیل در وجودش زبانه می کشید ابتدا در **لسبوس** Lesbos پیش **فرسید** Phérécide و بعد در **میله** پیش **تالس** و **آنکسیماندروس** به تلمذ پرداخت و سپس عازم **مصر** گردید و ۲۲ سال در این کشور و بیشتر در شهر های **ممفیس** Memphis و **تب** Thébe اقامت گزید .

پس از فتح **مصر** بدست **کامبوزیا** ، باسارت به **بابل** آورده شد . این دوره نیز آسیبی به توسعه فرهنگی او نرسانید زیرا در این دوره به آشنائی مستقیم با دانش کلده‌ای توفیق یافت

پس از آزادی از اسارت با مغزی انباشته از اینهمه دانش که فراگرفته بود به نیت تأسیس مکتبی به زادگاه خود **ساموس** مراجعت نمود ولی در این کار بعلت عدم اقبال شاگرد کافی توفیقی بدست نیاورد . بالاخره بسال (۵۲۹ ـ) به قسمتی از **ایتالیا** که متعلق به یونان بزرگ بود و امروزه **کالابر** Calabre نامیده می شود مسافرت و در شهر **کروتن** Crotone مقیم گردید و در این شهر بود که بالاخره مکتب بسیار معروف خود را باکامیابی کامل تأسیس نمود .

چون در کار های سیاسی مداخله می کرد بدنبال یك انقلاب که چیزی نمانده بود او را قربانی عقاید سیاسیش کنند با عده ای از شاگردانش بشهر **تارانت** Tarente مهاجرت نمود و در شهر مجاور آن **متاپونت** Metaponte بسال (۵۰۰ ـ) در حالیکه به پویندگان راه علم درخشانترین مکتب های آن زمان را بارث گذاشته بود رخت از این جهان بر بست .

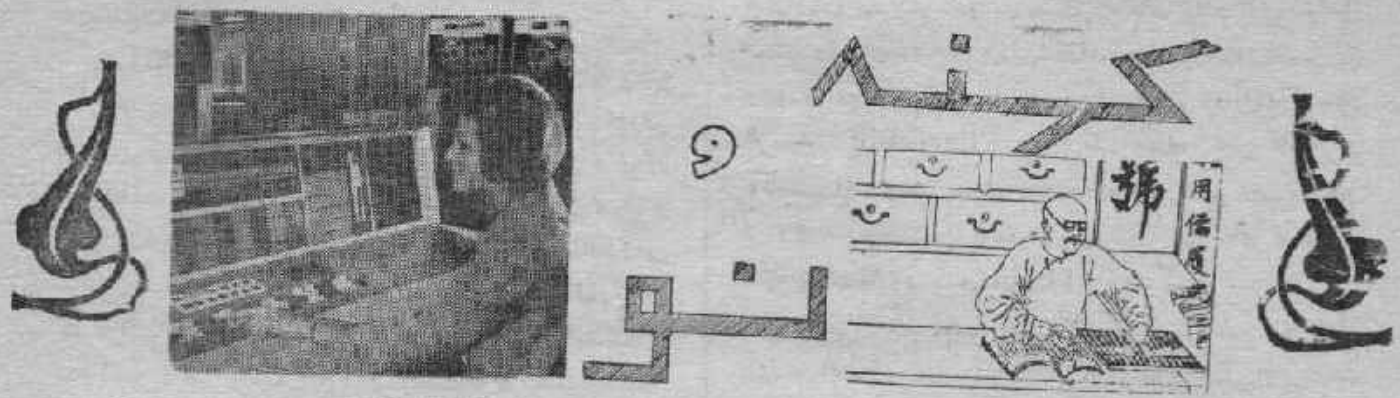
هر کس که کمترین اطلاعی از ریاضیات داشته باشد اسم **فیثاغورس** در خاطره او دو تصویر زنده می کند یکی جدول ضرب و نقشهٔ شطرنجی آن و دیگری مربع و تر مثلث قائم‌الزاویه است .

میشل شال Michel Chasle در جریان تحقیقات خود در بارهٔ تاریخ حساب باین نتیجه رسیده است که جدول موسوم به **جدول فیثاغورس** که بوسیلهٔ دانشمند شهیر ایجاد شده بوده ابتدا به وسایلی اطلاق می گردیده است که بعد ها باسم **آباك** Abacus موسوم گردیده است و این جدول امروزی یا نقشه شطرنجی که به جدول فیثاغورس موسوم است مدتها بعد از او در حدود قرن دوازدهم بتوسط یك «نسخهٔ کتاب نویس» که اسمش معلوم نیست در نسخه‌ای از کتاب

« Traite'del'abacus »

تألیف ژربرت Gerdert (این شخص از ۹۹۹ تا ۱۰۰۳ باسم

(دنباله در پائین صفحهٔ ۱۹)


کهنه و نو

نقل از اطلاعات ۲۸ر۳ر۴۳

دانشمندان با کرات آسمانی تماس رادیوئی برقرار کرده‌اند

دانشمندان امریکا و شوروی که مدتی است برای تماس با کرات دیگر تلاش میکنند در کار خود توفیق بزرگی یافتند. جراید آمریکا و شوروی در شماره امروز خود نوشتند **دانشمندان دو کشور موفق باخذ علائمی از کرات دیگر شدند که باحتمال قوی نشان وجود تمدن‌های بسیار توسعه یافته‌تر از تمدن مردم روی زمین است.** روزنامه نیویورک تایمز مینویسد **دانشمندان امریکائی بااستفاده از تلسکوپهای عظیم و دستگاههای قوی فرستنده و گیرنده رادیوئی موفق به اخذ علائم ارسالی از سایر کرات شدند.** نیویورک تایمز مینویسد.

دانشمندان امریکائی باطول موج ۲۱ سانتیمتر کار میکنند و علائمی که آنها از کرات بسیار دوردست بدست آورده‌اند نشان میدهد در کرات دیگر تمدنهائی وجود دارد که بمراتب از تمدن مردم روی زمین توسعه یافته‌تر است.

نیویورک تایمز می‌افزاید اینک دانشمندان آمریکائی درصدد پیدا کردن کلید رمز این علائم هستند. از طرف دیگر روزنامه کمسومولسکا یا پراودا مینویسد **دانشمندان شوروی به کمک تلسکوپهای بزرگ با بعضی کراتی که در عالم پهناور وجود دارد تماس گرفته‌اند.**

این روزنامه می‌افزاید دانشمندان شوروی روی طول موج سه الی ده سانتیمتر با کرات دیگر در تماس هستند.

روزنامه کمسومولسکا یا پراودا می‌افزاید دانشمندان شوروی موفق شدند **با کراتی که فاصله آنها تا کره زمین ده میلیون سال نوری است تماس بگیرند.**

سرعت نور در هر ثانیه سیصد هزار کیلومتر است.

روزنامه کمسومولسکا یا پراودا میافزاید دانشمندان شوروی با **مطالعه این علائم دریافته‌اند که در بسیاری از کرات آسمانی که با زمین فاصله بسیار زیادی دارند تمدنی برتر از تمدن ساکنین کره زمین وجود دارد.**

اینک دانشمندان درصدد بررسی علائم دریافتی از کرات دیگرند.

نقل از کتاب خلاصهٔ هاشمی در دانستن علم تقویم
تألیف: هاشم شاه

در ذکر افلاک

چون حقیقت کرهٔ خاک و آب معلوم شد میباید دانست که فوق آن دو کره، کرهٔ هوا است وفوق آن کرهٔ آتش است وفوق آن افلاک تسعه است. فلک اول فلک قمر است. دوم فلک عطارد سوم زهره چهارم شمس پنجم مریخ. ششم مشتری. هفتم زحل. هشتم فلک کواکب ثوابت است که آن را فلک البروج نیز گویند وفلک نهم را فلک الافلاک و فلک اطلس گویند وهمین فلک است که فوق او خالی است از خلاء وملاء و بآن منتهی گردد جهات کونیه ولهذا آنرا محدد الجهات نیز گویند ودر هریک از آن افلاک سبعه غیراز هریک از آن سیارات سبعه بترتیب مذکور کوکبی نیست و جمیع کواکب محسوسه وغیرمحسوسه غیراز سیارات سبعه‌اند که درفلک هشتم وفلک نهم ودرهیچ کوکبی نیست وآن کواکب سبعه را سیارات خوانند واسامی آنها علی الترتیب بعربی در این شعر مندرج است.

قمر است و عطارد و زهره — شمس و مریخ و مشتری و زحل

و بفارسی قمررا ماه، عطاردرا تیر، زهره را ناهید، شمس را آفتاب، مریخ را بهرام، مشتری را برجیس وزحل را کیوان خوانند.

مسائلی نقل از کتاب

«مشکلات العلوم»

تألیف: ملامهدی نراقی

مسألهٔ ۱۷ شتر

مرویست هفده شتر میان سه کس مشترک بود، ایشان بخدمت حضرت امیرالمؤمنین علیه السلام آمدند وعرض کردند که ثلث شتران از یکی است و تسع از یکی ونصف از یکی ومیخواهیم شما این شتران را باین طریق قسمت کنید بی کسر. حضرت یک شتر طلبید ازخود و آنرا برهفده افزود تا هیجده شد پس ثلث آنرا که شش بود بصاحب ثلث داد. نصف آنرا که نه باشد بصاحب نصف داد و تسع آنرا که دو باشد بصاحب تسع داد ویکی باقی ماند که شتر خود بود ضبط نمود.

مسألهٔ مربوط به ارث

زنی فوت شده و وارث او منحصرند شوهری وپدری ومادری هر کدام از مال او چیزی غارت کردند چون حاکم شرع ایشان طلبید تا موافق شرع برایشان قسمت کند. شوهر را گفت تو نصف آنچه برده‌ای پس ده وپدر را گفت تو ثلث آنچه برده‌ای پس ده ومادر را گفت تو سدس آنچه برده‌ای پس ده، چون دادند مجموع را بقسمت متساوی قسمت کرد و هر کدام را حصه‌ای داد با آنچه پیش ایشان بود نصیب ایشان باشد آیا دراین صورت مجموع ترکه چند میشود وهریک چقدر بغارت برده بودند که بعد از رد وقسمت مذکور هریک بحصه خود رسیده.

یکان

پرویز شهریاری

ترجمه از مجله « ریاضیات در دبیرستان »

کثیر الجمله‌های متقارن و جبر مقدماتی

برای استفادهٔ دانش آموزان دورهٔ دوم و داوطلبان کنکور

در بحث مربوط به معادلات درجه دوم اغلب به مسائلی شبیه مسئلهٔ زیر برخورد می‌کنیم :

بدون حل معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+6x+10=0$ (۱) ، معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد .

اگر ریشه‌های معادلهٔ مفروض را با x_1 و x_2 وریشه‌های معادلهٔ مجهول‌را با y_1وy_2 و ضرایب معادله مجهول را با qوp نشان دهیم ، طبق قضیهٔ **ویت** : (۱)

$$x_1+x_2=-6 \quad و \quad x_1x_2=10$$

$$y_1+y_2=-p \quad و \quad y_1y_2=q$$

اما طبق شرط مسئله داریم : $y_1=x_1^2$ و $y_2=x_2^2$

و بنابراین :

$$p=-(y_1+y_2)=-(x_1^2+x_2^2) \quad و$$

$$q=y_1\cdot y_2=x_1^2\cdot x_2^2$$

واضح است که :

$$x_1^2\cdot x_2^2=(x_1\cdot x_2)^2=10^2=100$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16$$

و از آنجا $p=-16$ و $q=100$ بوده و معادله مجهول چنین خواهد بود :

$$y^2-16y+100=0$$

با ترتیب مشابهی میتوان معادلهٔ درجهٔ دومی را تشکیل داد که ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادلهٔ (۱) باشد . اگر معادله مجهول را بصورت $z^2+mz+n=0$ در نظر بگیریم داریم:

$$m=-(x^3+x_2^3) \quad و \quad n=x_1^3\cdot x_2^3$$

و بنابراین $x_1^3\cdot x_2^3=(x_1\cdot x_2)^3=10^3=1000$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=-36$$

و در نتیجه معادله مطلوب چنین خواهد بود :

$$z^2+36z+1000=0$$

میتوان مسائل زیادی از این قبیل را طرح نمود که حل آنها منجر به محاسبه مجموع مربعات $x_1^2+x_2^2$ مجموع مکعبات $x_1^3+x_2^3$ و . . . غیره از روی x_1+x_2 و $x_1\cdot x_2$ میشود . دراین دوعبارت مجموع مربعات و مجموع مکعبات ریشه‌ها ، هر دو ریشهٔ x_2وx_1 دارای وضع مشابهی هستند یعنی هر دوعبارت نسبت به x_2وx_1 **متقارن** است . البته عبارتهای سادهٔ x_1+x_2 و $x_1\cdot x_2$ هم نسبت به x_1 و x_2 متقارنند . بنابراین مسئله پاینجا منجر میشود : عبارتهای متقارن نسبت به‌دو متغیر x_1وx_2را برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن نسبت به‌این دو متغیر یعنی x_1+x_2وx_1x_2 حساب کنید . در جبر عالی این مسئله درحالت کلی خود و برای کثیر الجمله‌هائی که نسبت به n متغیر متقارن باشند مورد مطالعه قرار می‌گیرد . دراینجا مطالب اساسی مربوط به‌عبارتهای متقارن را (بدون اثبات آنها) بررسی می‌کنیم و سپس تمرینات زیادی از مسائل متوسطه را بکمک‌این تئوری عمومی حل می‌کنیم . خواهیم دید که توجه به‌عبارتهای متقارن تا چه‌اندازه بسهولت حل مسائل کمک می‌کند . در آخر بحث هم مقداری مسئله برای تمرین خواهیم آورد .

***

تعاریف اساسی

کثیر الجملهٔ $f(x_1 و x_2 و \ldots\ldots و x_n)$ از n متغیر را نسبت باین متغیرها متقارن گویند وقتی که وضع تمام متغیرها در آن مشابه هم باشد یعنی اگر هردو متغیر غیر مشخص را در آن بیکدیگر تبدیل کنیم کثیر الجمله تغییر نکند .

در حقیقت اگر دو متغیر غیرمشخص x_i و x_j را درنظر گرفته و در کثیر الجمله $f(x_1 و x_2 و \ldots و x_n)$ بجای x_i مقدار x_j و بجای x_j مقدار x_i را قرار دهیم . اگر کثیر الجمله نسبت به‌متغیرها متقارن باشد بایستی هر انتخاب x_jوx_i

۱) ویت ریاضیدان بزرگ فرانسوی (۱۵۴۰–۱۶۰۳) برای نخستین‌بار روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دو را معین کرد و بهمین مناسبت این روابط را بنام « قضیهٔ ویت » می‌نامند .

ثابت بماند ، مثلا داشته باشیم :

$$f(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } x_3 \text{ و } \dots \text{ و } x_n) = f(x_2 \text{ و } x_1 \text{ و } x_3 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)$$

(در اینجا جای x_1 و x_2 را با هم عوض کرده‌ایم) .

ویا بطور کلی داشته باشیم :

$$f(x_{i_1} \text{ و } x_{i_2} \text{ و } \dots \text{ و } x_{i_n}) = f(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)$$

همچنین می‌توان گفت که کثیر الجمله $f(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)$ وقتی متقارن است که اگر در آن x_1 را به x_2 و x_2 را به x_3 و ... و x_{n-1} را به x_n و x_n را به x_1 تبدیل کنیم کثیر الجمله به‌خودش تبدیل شود .

مثلا کثیر الجملهٔ :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 \qquad (2)$$

یك کثیر الجمله متقارن است ، زیرا اگر در آن تبدیلات $x_1 \to x_2$ و $x_2 \to x_3$ و $x_3 \to x_1$ را انجام دهیم خواهیم داشت:

$$x_2^3 + x_3^3 + x_1^3 - 3x_2x_3x_1$$

که همان کثیر الجمله (۲) میباشد ، روشن است که اگر در همین کثیر الجمله تنها جای دو متغیر مثلا x_1 و x_2 را با هم عوض می‌کردیم باز هم کثیر الجمله به‌خودش تبدیل میشد .

درزیر کثیر الجمله‌های دیگری که نسبت به‌سه متغیر متقارنند داده شده است :

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 3x_1x_2^3 - 3x_1^3x_2 :$$

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) :$$

$$x_1(x_2^4 + x_3^4) + x_2(x_3^4 + x_1^4) + x_3(x_1^4 + x_2^4) :$$

ولی عبارت $x_1^2 + x_2^2$ عبارتی متقارن نیست زیرا اگر در آن جای x_1 و x_2 را با هم عوض کنیم عبارت $x_2^2 + x_1^3$ را بدست خواهیم آورد که با عبارت اول متفاوت است .

ساده‌ترین کثیر الجمله‌های متقارن عبارتند از : مجموع تمام متغیرها $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ؛ مجموع حملاتی که از حاصلضرب دوبدوی متغیرها بدست می‌آید $x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$ ؛ مجموع حملاتی که از حاصلضرب سه به سه حملات بدست می‌آید

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$$

و غیره و بالاخره حاصل ضرب تمام متغیرها $x_1x_2x_3 \dots x_n$

بنابراین برای n متغیر n کثیر الجمله ساده متقارن خواهیم داشت . که آنها را به $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ نشان می‌دهیم :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ و}$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots x_{n-1}x_n \text{ و} \qquad (3)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\sigma_n = x_1x_2 \dots x_n .$$

برای دو متغیر ، عبارتهای متقارن ساده عبارتند از $\sigma_1 = x_1 + x_2$ و $\sigma_2 = x_1x_2$ و برای سه‌متغیر داریم :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 \text{ و}$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \text{ و} \qquad (4)$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3$$

باکمك عبارتهای متقارن ساده میتوان بسهولت عبارتهای متقارن دیگری‌از همین‌متغیر درست کرد . کافی است کثیر الجمله دلخواهی بشکل $\varphi(\sigma_1 \text{ و } \sigma_2 \text{ و } \dots \text{ و } \sigma_n)$ و از متغیرهای σ_1 و σ_2 و ... σ_n انتخاب کنیم (لازم نیست این کثیر الجمله نسبت به x_1 و x_2 و ... و x_n متقارن باشد) تا عبارت متقارنی نسبت به x_1 و x_2 و ..... و x_n داشته باشیم . مثلا اگر $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3$ باشد که در آن σ_1 و σ_2 و σ_3 همان عبارتهای (٤) هستند . دراینصورت خواهیم داشت :

$$f(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + x_1x_2x_3$$

که پس از خلاصه کردن چنین‌خواهیم داشت :

$$f(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 6x_1x_2x_3 .$$

یکی از نتایج اساسی نظریه چند جمله‌ایهای متقارن اینست که از این راه میتوان همهٔ انواع کثیر الجمله‌هائی راکه نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 و ..... و x_n متقارنند بدست آورد . و یا بعبارت دیگر میتوان قضیه زیر را بیان کرد :

قضیه ۱ ـ اگر $f(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)$ کثیر الجملهٔ متقارنی نسبت به n متغیر خود باشد ، در اینصورت تنها یك کثیر الجمله بشکل $\varphi(\sigma_1 \text{ و } \sigma_2 \text{ و } \dots \text{ و } \sigma_n)$ وجود دارد که اگر در آن بجای σ_1 و σ_2 و ..... و σ_n عبارتهای (۳) را قرار دهیم کثیر الجملهٔ $f(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)$ بدست آید .

اثبات این قضیه مربوط به جبر عالی است و ما دراینجا دربارهٔ آن صحبت نمی‌کنیم . تنها راه جستجوی کثیر الجمله $\varphi(\sigma_1 \text{ و } \sigma_2 \text{ و } \dots \text{ و } \sigma_n)$ را متذکر میشویم : اولا" روشن‌است که هر کثیر الجمله متقارن $f(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)$ را میتوان بصورت مجموعی از کثیر الجمله‌های متقارن نوشت .

فرض کنیم $f(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)$ کثیر الجمله متقارنی از درجه k باشد ، به‌بینیم جملهٔ بصورت $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2} \dots \sigma_n^{\lambda_n}$ بچه صورت میتواند کثیر الجمله $\varphi(\sigma_1 \text{ و } \sigma_2 \text{ و } \dots \text{ و } \sigma_n)$ وجودداشته‌باشد. ساده‌ترین کثیر الجمله

متقارن یعنی σ_1 نسبت به x_1 و x_2 و... و x_n از درجهٔ اول است. σ_2 از درجه دوم و بطور کلی σ_m از درجه m ام و بنابراین درجهٔ جمله $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_n^{\lambda_n}$ نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 و ... و x_n درجه‌ای مساوی $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\dots+n\lambda_n$ خواهد داشت و از اینجا این نتیجه بدست می‌آید که در جملهٔ $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_n^{\lambda_n}$ باید داشته باشیم:

$$\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=k$$

تمام جوابهای صحیح و مثبت این معادله، تمام یک جمله‌ایهائی که میتواند در کثیرالجمله $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ وجود داشته باشد بما خواهد داد.

برای محاسبه ضریب یک جمله‌ای $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_n^{\lambda_n}$ میتوان از روش زیر استفاده کرد:

فرض کنید که میخواهیم عبارت $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ را برحسب کثیرالجمله‌های سادهٔ متقارن σ_1 و σ_2 و σ_3 (روابط ٤ را به‌بینید) محاسبه کنیم: از آنجا که درجهٔ این کثیرالجمله مساوی ۳ میباشد بایستی ابتدا جوابهای مثبت و صحیح معادله زیر را بدست آورد:

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=3$$

	λ_1	λ_2	λ_3
۱)	۳	۰	۰
۲)	۱	۱	۰
۳)	۰	۰	۱

دیده میشود که دارای سه دسته جواب خواهیم بود. بنابراین در عبارت $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ تنها جملات σ_1^3 و $\sigma_1\sigma_2$ و σ_3 میتوانند وجود داشته باشند، بعبارت دیگر داریم:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=A\sigma_1^3+B\sigma_1\sigma_2+C\sigma_3 \quad (٥)$$

این رابطه بایستی برای هرمقدار دلخواه از x_1 و x_2 و x_3 برقرار باشد. بنابراین اگر ابتدا $x_1=1$ و $x_2=0$ و $x_3=0$ را در عبارت بالا قراردهیم (که در اینصورت با توجه به روابط (٤): $\sigma_1=1$ و $\sigma_2=0$ و $\sigma_3=0$ خواهد شد) رابطه (٥) بصورت $A=1$ در خواهد آمد.

اکنون اگر $x_1=1$ و $x_2=1$ و $x_3=0$ بگیریم باتوجه‌باینکه $A=1$ بود $B=-3$ درخواهدآمد وبالاخره بازاء مثلا $x_1=1$ و $x_2=1$ و $x_3=-2$ خواهیم داشت $C=3$ و بنابراین داریم:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

در بسیاری موارد روش عمومی مذکور در بالا برای پیدا کردن کثیرالجمله $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ منجر به عملیات بسیار مفصلی میشود. ولی اغلب لازم است **مجموع قوای متشابه** متغیرها را برحسب عبارتهای ساده‌متقارن بدست‌بیاوریم، مجموع قوای متشابه بصورت زیر است:

$$S_k=x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k$$

در اینحالت میتوان از رابطهٔ زیر استفاده کرد که S_k را برحسب عبارتهای ساده متقارن بدست میدهند:

$$S_k=x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k=$$

$$=k\cdot\Sigma(-1)^{k+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n\times}\times\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n-1)!\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!\dots\lambda_n!}$$

که در آن $\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=k$ می باشد. همچنین اگر دراین عبارت به (٠!) برخورد کردیم آنرا مساوی ۱ خواهیم گرفت. (این رابطه به رابطهٔ «وارنیگا» مشهور است و ما از اثبات آن صرفنظر می‌کنیم).

برای دو متغیر x_1 و x_2 طبق رابطهٔ **وارنیگا** خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_1=x_1^1+x_2^1=\sigma_1^1-2\sigma_2 \\ S_2=x_1^2+x_2^2=\sigma_1^2-3\sigma_1\sigma_2 \\ S_3=x_1^3+x_2^3=\sigma_1^3-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2 \\ S_4=x_1^4+x_2^4=\sigma_1^4-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2 \end{cases} \quad (٦)$$

مثلا در حالتیکه $k=5$ باشد، ابتدا ریشه‌های صحیح و مثبت $\lambda_1+2\lambda_2=5$ را حساب می‌کنیم، این ریشه‌ها عبارتند از:

$$\begin{cases}\lambda_1=5\\ \lambda_2=0\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\lambda_1=3\\ \lambda_2=1\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=2\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$S_5=5\times[(-1)^{5+5+0}\times\frac{4!}{5!0!}\sigma_1^5\sigma_2^0+$$

$$+(-1)^{5+3+1}\times\frac{3!}{3!1!}\sigma_1^3\sigma_2^1+$$

$$+(-1)^{\alpha+1+2}\times\frac{2!}{1!2!}\sigma_1^{\alpha-2}\sigma_2^2]=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$$

همچنین اگر بخواهیم مجموع قوای متشابه سه متغیر را بکمك رابطه «وارنیگاء» بدست آوریم داریم :

$$\begin{cases} S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=\sigma_1^2-2\sigma_2 \\ S_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3 \\ S_4=x_1^4+x_2^4+x_3^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3 \\ S_5=x_1^5+x_2^5+x_3^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+ \\ +5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3 \end{cases} \quad (7)$$

. . . . . :

و برای ٤ متغیر :

$$\begin{cases} S_1=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\sigma_1^2-2\sigma_2 \\ S_2=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3 \\ S_3=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+ \\ +2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4 \end{cases} \quad (8)$$

. . . . . :

باترکیب این روابط میتوان برای سایرعبارتهای متقارن هم روابطی بدست‌آورد . مثلا برای محاسبه عبارت متقارن :

$$x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$$

داریم :

$$(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1^2x_2+ \\ +x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+ \\ +6x_1x_2x_3$$

با استفاده از رابطه دوم شماره (٧) تساوی بالا بصورت زیر بدست می‌آید .

$$\sigma_1^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3+3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+ \\ x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2)+6\sigma_3$$

وازآنجا خواهیم داشت :

$$x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_2^2x_3+ \\ +x_2x_3^2=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3 \quad (9)$$

همچنین با استفاده از اتحاد

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2=x_1^4+x_2^4+x_3^4+2(x_1^2x_2^2+ \\ +x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)$$

خواهیم داشت :

$$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3$$

واز اتحاد

$$(x_1+x_2+x_3)^4=x_1^4+x_2^4+x_3^4+4(x_1^3x_2+ \\ +x_1^3x_3+x_1x_2^3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2^3x_1)+ \\ +6(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)+12x_1x_2x_3(x_1+ \\ +x_2+x_3)$$

خواهیم داشت :

$$x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_1x_2^3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3= \\ =\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3 \quad (11)$$

***

نظریه عبارتهای متقارن میتواند برای حل دستگاههای جبری واثبات اتحادها مورد استفاده قرارگیرد وکارمحاسبه و اثبات را بقدرکافی ساده نماید . در حقیقت بسیاری موارد به دستگاههائی برخورد می‌کنیم که عبارتهای سمت چپ تساوی‌در آنها عبارتهای متقارنی نسبت بمجهولات هستند . دراین حالت میتوان عبارتهای سمت چپ را برحسب عبارتهای ساده متقارن نوشت وباین ترتیب درجه معادله را پائین‌آورد (زیرا σ_1 و σ_2 و ... و σ_n کثیرالجمله‌هائی از x_1 و x_2 و ... و x_n هستند که درجه آنها بالاتر ازواحد است) :

چند مثال ذکر کنیم :

۹۸۲ـ مثال ـ دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^2+y^2=35 \\ x+y=5 \end{cases}$$

مجهولات جدید را چنین انتخاب می‌کنیم :

$$x+y=\sigma_1 \text{ و } x.y=\sigma_2$$

باتوجه برابطهٔ (٦) خواهیم داشت :

$$x^2+y^2=\sigma_1^2-3\sigma_1\sigma_2$$

ودرنتیجه دستگاه معادلات بالا بدستگاه زیرتبدیل‌میشود :

$$\begin{cases} \sigma_1^2-3\sigma_1\sigma_2=35 \\ \sigma_1=5 \end{cases}$$

از این دستگاه بسادگی $\sigma_2=6$ بدست می‌آید و بنا براین‌خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x.y=6 \end{cases} \quad (12)$$

واین دستگاه‌دیگربسادگی حل میشود (مثلابا کمك‌رابطه ویت) وجوابهاچنین خواهند بود .

$$\begin{vmatrix} x_1=2 \\ y_1=3 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} x_2=3 \\ y_2=2 \end{vmatrix}$$

۹۸۳ـ مثال۲ـ دستگاه معادلات زیر راحل کنید :

$$\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$$

اگرشبیه تمرین‌قبل عمل کنیم خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=335 \\ \sigma_1=3 \end{cases}$$

(رابطهٔ ٤ از روابط ٥ رابیینید) . ازاینجا برای‌محاسبه σ_2 معادله درجه دوم زیر را خواهیم داشت :

$$15\sigma_2^2-135\sigma_2+210=0$$

ویا :

$$\sigma_2^2-9\sigma_2+14=0$$

وبنابراین جوابهای σ_2 برابر با۲و۷ میشود . بنابراین حل دستگاه بالا بحل دودستگاه سادهٔ زیر منجر میشود :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x.y=2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x+y=3 \\ x.y=7 \end{cases}$$

که باحل این دو دستگاه جوابهای زیر راخواهیم‌داشت:

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_3=2 \\ y_2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{3+i\sqrt{19}}{2} \\ y_3=\dfrac{3-i\sqrt{19}}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_4=\dfrac{3-i\sqrt{19}}{2} \\ y_4=\dfrac{3+i\sqrt{19}}{2} \end{cases}$$

(که در آن $i=\sqrt{-1}$ درنظر گرفته شده‌است).

***

بهمین ترتیب میتوان دستگاههای سه مجهولی را وقتی‌که عبارتهای سمت چپ آنها نسبت بمجهولات xوyوz متقارن‌باشند حل‌کرد : ولی در اینحالت مطلب کمی دشوار تر است ـ فرض کنید که ازیك دستگاه سه معادله سه مجهولی مقادیر $\sigma_1=b_1$و$\sigma_2=b_2$ و $\sigma_3=b_3$ را بدست آورده باشیم بنابراین بایستی دستگاه زیر راحل نمائیم :

$$\begin{cases} x+y+z=b_1 \\ xy+xz+yz=b_2 \\ x.y.z=b_3 \end{cases} \qquad (14)$$

درحالت دومجهولی میتوانستیم باکمك رابطهٔ ویت‌مجهولات را بدست آوریم ، دراینجاهم میتوان برای حالت سه مجهولی بهمان طریق‌مسئله راحل‌کرد فرض کنیم $x=\alpha$و$y=\beta$و$z=\gamma$ یك دسته جواب‌ازدستگاه (۱۴) باشند ، دراینصورت اتحادهای زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=b_1 \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b_2 \\ \alpha\beta\gamma=b_3 \end{cases}$$

اکنون اگر عبارت $(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)$ را بر حسب قوای u منظم‌کنیم داریم :

$$(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)=u^3-(\alpha+\beta+\gamma)u^2+$$
$$+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)u-\alpha\beta\gamma=u^3-b_1u^2+b_2u-b_3$$

سمت‌چپ‌این‌عبارت بازاء $u=\alpha$و$u=\beta$و$u=\gamma$برابر صفر میشود (وفقط بازاء همین مقادیر مساوی صفر میشود) و بنابراین αوβوγ ریشه‌های معادله زیر خواهند بود :

$$u^3-b_1u^2+b_2u-b_3=0 \qquad (15)$$

بنابراین باحل معادلهٔ (۱۵) ریشه‌های دستگاه (۱۴) را در دست خواهیم داشت . ولی‌روشن‌است‌که دراینصورت‌دستگاه دارای ۶دسته جواب خواهد بود زیرا عبارتها نسبت بهxوy و z متقارن‌اند وبنابراین میتوان نقش مجهولات رابا یکدیگرعوض کرد . یعنی باکمك جوابهای $x=\alpha$و$y=\beta$و$z=\gamma$ جوابهای $x=\alpha$و$z=\beta$و$y=\gamma$ ویا $y=\alpha$و$x=\beta$و$z=\gamma$ وغیره را خواهیم داشت .

همین روش رامیتوان برای مواردی‌که تعداد مجهولات بیشترهم باشد بکاربرد ، درحالت‌کلی داریم .

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=b_1 \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots\cdots x_n=b_n \end{cases} \qquad (16)$$

بایستی معادلهٔ درجه nام زیر راتشکیل داد :

$$u^n-b_1u^{n-1}+b_2u^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^nb_n=0$$

که در اینصورت یك دسته از ریشه‌های دستگاه (۱۶) خواهد بود ،

$x_1=\alpha_1$و$x_2=\alpha_2$و$x_3=\alpha_3$و..... و $x_n=\alpha_n$

وبقیه ریشه‌هاهم باتبدیل دوری این ریشه‌ها بدست‌خواهند آمد .

۹۸۴ـ مثال۳ـ دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی زیرراحل کنید :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$$

اگرمجهولات جدید را σ_1 و σ_2و σ_3 بگیریم

$$\begin{cases} x+y+z=\sigma_1 \\ xy+yz+zx=\sigma_2 \\ xyz=\sigma_3 \end{cases}$$

دستگاه‌جدیدی باین‌شکل خواهیم داشت (باکمك‌رابطه۷)

$$\begin{cases} \sigma_1=a \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=b^2 \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=a^3 \end{cases}$$

باحل این دستگاه ساده مقادیر σ_1وσ_2وσ_3 بدست خواهد آمد :

$$\begin{cases} \sigma_1=a \\ \sigma_2=\dfrac{1}{2}(a^2-b^2) \\ \sigma_3=\dfrac{1}{2}a(a^2-b^2) \end{cases}$$

ازآنجا داریم :

$$\begin{cases} x+z+z=a \\ xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}(a^2-b^2) \\ xyz=\dfrac{1}{2}a(a^2-b^2) \end{cases}$$

و برای پیداکردن ریشه‌های این معادله بایستی معادله درجهٔ سوم زیر راحل‌کرد :

$$u^3-au^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)u-\frac{1}{2}a(a^2-b^2)=0$$

عبارت سمت چپ این معادله قابل تجزیه است و خواهیم داشت :

$$(u-a)[u^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)]=0$$

وازآنجا داریم :

$u_1=a$ و $u_2=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$ و

$u_3=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$

و بنابراین دستگاه معادلات اصلی دارای ۶ دسته جواب خواهند بود که از تبدیل دوری جوابهای زیر بدست خواهد آمد:

$$x=a \text{ و } y=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \text{ و } z=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$$

***

تبدیل به عبارتهای ساده متقارن تنها برای حل دستگاهها مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، بلکه در بسیاری از موارد دیگر جبر هم میتوان از آن استفاده کرد (تبدیل به حاصلضرب اثبات اتحادها و غیره).

۹۸۵ـ مثال ۴ـ عبارت زیر را بصورت حاصلضرب عوامل اول تجزیه کنید:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

به کمک رابطه دوم از روابط (۷) داریم:

$$x^3+y^3+z^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

و بنابراین:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-3\sigma_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_1)=(x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)]=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

۹۸۶ـ مثال ۵ـ عبارت زیر را بصورت ضرب عوامل اول تبدیل کنید:

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4$$

با کمک روابط (۱۰) و (۷) داریم:

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=2(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)-(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)=-\sigma_1^4+4\sigma_1^2\sigma_2-8\sigma_1\sigma_3=\sigma_1(4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3).$$

بنابراین عبارت مفروض بر $\sigma_1=x+y+z$ قابل قسمت است ولی از آنجا که تمام توانهای این عبارت زوج است با تبدیل x به $-x$ عبارت تغییر نمی‌کند (همچنین با تبدیل y به $-y$ و z به $-z$) و بنابراین نه تنها عبارت بر $x+y+z$ بلکه بر $-x+y+z$ و $x-y+z$ و $x+y-z$ نیز قابل قسمت خواهد بود و از آنجا خواهیم داشت:

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)\cdot P(x\text{ و }y\text{ و }z).$$

که در آن $P(x\text{ و }y\text{ و }z)$ کثیرالجمله متقارنی نسبت به x و y و z خواهد بود. با توجه به‌توان عبارت درسمت چپ و سمت راست روشن میشود که $P(x\text{ و }y\text{ و }z)$ عبارتی ازدرجه صفر است و بنابراین مساوی عددی مانند k خواهد بود. برای بدست‌آوردن این عدد مثلا دردوطرف $x=y=z=1$ قرار می‌دهیم و از آنجا $k=1$ را بدست خواهیم آورد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y+z).$$

۹۸۷ـ مثال ۶ـ صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$(x+y+z)(xy+xz+zy)-xyz=(x+y)(x+z)(y+z)$$

سمت چپ تساوی برابر $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$ می‌باشد، اما برای عبارت سمت راست تساوی داریم:

$$(x+y)(x+z)(y+z)=x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz=(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)+2\sigma_3+\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

۹۸۸ـ مثال ۷ـ ثابت کنید که اگر $x+y+z=0$ باشد داریم:

$$x^4+y^4+z^4=2(xy+xz+yz)^2$$

با توجه به‌رابطه سوم از روابط (۷) داریم:

$$x^4+y^4+z^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3$$

و با توجه به $\sigma_1=x+y+z=0$ خواهیم داشت:

$$x^4+y^4+z^4=2\sigma_2^2=2(xy+xz+yz)^2$$

۹۸۹ـ مثال ۸ـ ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$$

در اینصورت $xyz=0$ خواهد بود.

با توجه به روابط (۷) شرط مسئله را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{cases}\sigma_1=1\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=1\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=1\end{cases}$$

با حل این دستگاه ساده $\sigma_2=\sigma_3=0$ بدست می‌آید که از جواب $\sigma_3=0$ داریم: $xyz=0$.

۹۹۰ـ مثال ۹ـ اگر داشته باشیم :

$$\begin{cases} x+y+z=u+v+w \\ x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2 \\ x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+w^3 \end{cases} \quad (۱۷)$$

ثابت کنید که برای هر عدد صحیح و مثبت n خواهیم داشت :

$$x^n+y^n+z^n=u^n+v^n+w^n$$

عبارتهای ساده متقارن نسبت به x و y و z را σ_1 و σ_2 و σ_3 و نسبت به u و v و w را t_1 و t_2 و t_3 مینامیم ، دراینصورت دستگاه (۱۷) بصورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_1=t_1 \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=t_1^2-2t_2 \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=t_1^3-3t_1t_2-2t_3 \end{cases}$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$\sigma_1=t_1 \quad و \quad \sigma_2=t_2 \quad و \quad \sigma_3=t_3$$

و بنابراین رابطه زیر محقق خواهد بود :

$$\varphi(\sigma_1 \text{ و } \sigma_2 \text{ و } \sigma_3)=\varphi(t_1 \text{ و } t_2 \text{ و } t_3)$$

از اینجا باکمک قضیه ۱ نتیجه میشود که اگر f(x و y و z) عبارت متقارنی نسبت به x و y و z باشد خواهیم داشت :

$$f(x \text{ و } y \text{ و } z)=f(u \text{ و } v \text{ و } w)$$

و در حالت خاص :

$$x^n+y^n+z^n=u^n+v^n+w^n$$

* * *

متذکر میشویم که در بسیاری موارد میتوان عبارتهای جبری غیر متقارن را هم باکمی دقت به‌عبارتهای متقارن تبدیل نمود :

۹۹۱ـ مثال ۱۰ـ دستگاه معادلات زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ x^2+4y^2+9z^2=b^2 \\ x^3+8y^3-27z^3=a^3 \end{cases}$$

که اگر $x=u$ و $2y=v$ و $-3z=w$ فرض کنیم دستگاه متقارن زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u+v+w=a \\ u^2+v^2+w^2=b^2 \\ u^3+v^3+w^3=a^3 \end{cases}$$

این دستگاه را هم قبلا حل کرده‌ایم (مثال۳را به‌بینید)

درآنجا دیدیم که یکی‌از ریشه‌های این دستگاه چنین بود :

$$u=a \quad و \quad v=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \quad و \quad w=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$$

و پنج جواب بقیه را نیز میتوان به‌سهولت بدست آورد ودر نتیجه برای دستگاه اصلی ریشه‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1=a \\ y_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ z_1=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x_2=a \\ y_2=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ z_2=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ y_3=\frac{1}{2}a \\ z_3=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ y_4=\frac{1}{2}a \\ z_4=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \end{cases} \quad و$$

$$\begin{cases} x_5=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ y_5=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ z_5=-\frac{1}{3}a \end{cases} \quad و$$

$$\begin{cases} x_6=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ y_6=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ z_6=-\frac{1}{3}a \end{cases}$$

در خاتمه به‌کثیرالجمله‌های « متقارن‌منفی » می‌پردازیم کثیرالجملهٔ $y(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \dots \text{ و } n)$ را « متقارن منفی » گویند وقتی‌که جابجاکردن هردو متغیر دلخواه آن تغییر علامت دهد ، یعنی :

$$y(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)=-y(x_2 \text{ و } x_1 \text{ و } x_3 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)$$

$$y(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)=-y(x_3 \text{ و } x_2 \text{ و } x_1 \text{ و } \dots \text{ و } x_n)$$

و غیره .

ساده‌ترین مثال برای یک کثیرالجمله «متقارن منفی» وقتی که دومتغیر داشته باشیم ، تفاضل آنها $x-y$ است . درحالتی که سه متغیر داشته باشیم کثیرالجمله :

$$D(x, y, z) = (x-y)(x-z)(y-z)$$

متقارن منفی است زیرا روشن است که با جابجا کردن هردو متغیر آن عبارت تغیر علامت می‌دهد .

بطور کلی درحالت n متغیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کثیرالجمله‌ای که از ضرب عبارتهای $x_i - x_j$ $(i<j)$ بدست آمده باشد متقارن منفی خواهد بود .

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x) = \prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j) =$$
$$(x_1-x_2)(x_2-x_3)\ldots(x_{n-1}-x_n) \quad (18)$$

چنین کثیرالجمله‌ای را «دیسکریمینانت» (Discriminant) گویند .

صورت ضرب (۱۸) دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ عامل ضرب است که هریک ازاین عوامل هم از درجه اول هستند وبنابراین کثیرالجمله $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نسبت به x_1 و x_2 و ... و x_n از درجه $\frac{n(n-1)}{2}$ است .

واضح است که اگر $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ کثیرالجمله متقارنی از x_1 و x_2 و ... و x_n باشد ، در اینصورت صورت ضرب :

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

کثیرالجمله متقارن منفی خواهد بود .

قضیه ۳ـ هر کثیرالجملهٔ متقارن منفی $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

از n متغیر x_1 و x_2 و ... و x_n میتواند بصورت :

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

تبدیل شود که در آن $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ کثیرالجمله متقارنی نسبت به این متغیرها باشد . بطوریکه اگر $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عبارتی از درجهٔ k باشد متقارن

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

از درجهٔ $h = \frac{n(n-1)}{2} - k$ خواهد بود .

اثبات ـ طبق تعریف عبارتهای متقارن منفی داریم :

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -g(x_2, x_1, \ldots, x_n)$$

در حالت $x_1 = x_2$ این تساوی بصورت زیر درخواهد آمد :

$$g(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n) = -g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

وبنابراین خواهیم داشت :

$$g(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$$

دراینصورت اگر کثیرالجمله $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را کثیرالجمله‌ای نسبت به x_1 بدانیم $x_1 = x_2$ یکی ازریشه های آن خواهد بود وبنابراین عبارت $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بدون باقیمانده بر $x_1 - x_2$ قابل قسمت خواهد بود . بهمین ترتیب میتوان ثابت کرد که این عبارت برهر تفاضل $x_i - x_j$ $(i<j)$ وبنابراین بر «دیسکریمینانت» $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ قابل قسمت است یعنی میتوان نوشت :

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

که درآن $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ کثیرالجمله‌ای از متغیرهای x_1 و x_2 و ... و x_n است که درجهٔ آن مساوی $h = k - \frac{n(n+1)}{2}$ میباشد .

اکنون بایستی ثابت کنیم که کثیرالجمله :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

یک کثیر الجمله متقارن است . و این هم واضح است ، زیرا با جابجا کردن هر دو متغیر x_1 و x_2 صورت ومخرج کسر هردو تغیر علامت می‌دهند و درنتیجه خود تغییر نمی‌کند .

نمونه هائی از مورد استعمال این قضیه را در حل مسائل جبر ذکر می‌کنیم :

۹۹۳ ـ مثال ۱۱ـ عبارت زیر را بصورت ضرب عوامل اول تجزیه کنید :

$$g(x, y, z) = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$$

واضح است که این کثیرالجمله متقارن منفی است و بنابراین بر $\Delta(x, y, z) = (x-y)(x-z)(y-z)$ قابل قسمت است . چون $g(x, y, z)$ و $\Delta(x, y, z)$ هردو از درجه سوم نیستند بنابراین میتوان نوشت :

$$g(x, y, z) = k \cdot \Delta(x, y, z) \quad (19)$$

برای پیدا کردن ضریب k در تساوی فوق $x=0$ و $y=1$ و $z=2$ قرار می‌دهیم که $k=-3$ خواهد شد. بنابراین:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=$$
$$=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

(برای پیدا کردن ضریب k میتوان از این راه هم استفاده کرد که مثلا در دو طرف تساوی (۱۹) ضریب x^2y را مساوی قرار دهیم).

این مسئله را با استفاده از خواص کثیر الجمله‌های متقارن هم میتوان حل کرد باین ترتیب که اگر فرض کنیم:

$$u=x-y \text{ و } v=y-z \text{ و } w=z-x$$

خواهیم داشت:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=u^3+v^3+w^3$$

ودرضمن داریم:

$$\sigma_1=u+v+w=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$$

و بنابراین باتوجه به رابطه دوم از روابط (۷) خواهیم داشت

$$u^3+v^3+w^3=3\sigma_3=3uvw$$

ویا:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$$
$$=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

۹۹۳ـ مثال ۱۲ـ عبارت زیر را که حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کنید:

$$g(x,y,z)=yz(y^2-z^2)+$$
$$+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)$$

میتوان نوشت:

$$g(x,y,z)=\Delta(x,y,z)\cdot f(x,y,z)$$

که در آن $f(x,y,z)$ عبارت متقارن درجه اولی نسبت به x و y و z می‌باشد وبنابراین میتوان نوشت:

$$yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+yx(x^2-y^2)=$$
$$=k(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z).$$

که برای محاسبهٔ k میتوان فی‌المثل $x=0$ و $y=1$ فرض کرد و در اینصورت $k=1$ میشود.

$$yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)=$$
$$=(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

۹۹۴ ـ مثال ۱۳ـ عبارت زیر را خلاصه کنید.

$$A=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}.$$

ابتدا عبارت را بیك مخرج تحویل می‌کنیم:

$$A=\frac{(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

از طرف دیگر باتوجه باینکه

$$\Delta(a,b,c)=(a-b)(a-c)(b-c)$$

باشد داریم:

$$k(a-b)(a-c)(b-c)=$$

صورت کسر A وبسادگی $k=1$ بدست خواهد آمد وبنابراین خواهیم داشت:

$$A=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

۹۹۵ ـ مثال ۱۴ ـ عبارت زیر را بصورت ضرب عوامل اول تجزیه کنید:

$$B=x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)$$

داریم:

$$B=\Delta(x,y,z)\cdot f(x,y,z)$$

که در آن $f(x,y,z)$ عبارت متقارنی نسبت به x و y و z است. از قضیه ۱ نتیجه میشود که:

$$f(x,y,z)=k\sigma_1^2+l\sigma_2$$

وبنابراین داریم:

$$B=(x-y)(x-z)(y-z)\times$$
$$\times[k(x+y+z)^2+l(xy+xz+yz)]$$

برای محاسبهٔ k و l میتوان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد باین معنی که مثلا یکبار $x=-1$ و $y=0$ و $z=1$ و دفعه دیگر $x=0$ و $y=1$ و $z=2$ فرض کنیم که در نتیجه $l=1$ و $k=0$ بدست خواهد آمد وبنابراین خواهیم داشت:

$$x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)=$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z)(xy+xz+yz)$$

***

کثیر الجمله های «متقارن منفی» که دارای توانهای زوج باشند متقارن‌اند، درحالت خاص عبارتهای «دیسکریمینانت» مربع کامل عبارتهای متقارنی هستند و بنابراین میتوان آنها را همچون عبارتهای متقارن ساده نمود. بعنوان مثال عبارت دیسکریمینانت ازسه متغیر را در نظر می‌گیریم. مربع چنین عبارتی نسبت به سه متغیر متقارن خواهد بود.

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$$

که از درجه ششم است وبنابراین قابل بیان برحسب $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ خواهد بود، ابتدا بایستی ریشه‌های صحیح ومثبت معادله زیر را پیدا کرد:

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=6$$

λ_1	λ_2	λ_3
۶	۰	۰
۴	۱	۰
۳	۰	۱
۲	۲	۰
۱	۱	۱
۰	۳	۰
۰	۰	۲

جوابهای صحیح معادله در جدول داده شده است و بنابراین $f(x_1$ و x_2 و $x_3)$ بصورت زیر خواهد بود :

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2 =$$
$$= A\sigma_1^6 + B\sigma_1^4\sigma_2 + C\sigma_1^3\sigma_3 + D\sigma_1^2\sigma_2^2 + \quad (20)$$
$$+ E\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + F\sigma_2^3 + G\sigma_3^2$$

این تساوی بازاء مقادیر x_1 و x_2 و x_3 صادق است. ابتدا $x_1=1$ و $x_2=x_3=0$ می گیریم، دراینصورت $\sigma_1=1$ و $\sigma_2=\sigma_3=0$ و $f(x_1$ و x_2 و $x_3)=0$ خواهد شد و بنابراین ازتساوی (۲۰) مقدار $A=0$ بدست خواهد آمد. اکنون اگر $x_1=1$ و $x_2=-1$ و $x_3=0$ انتخاب کنیم $\sigma_1=0$ و $\sigma_2=-1$ و $\sigma_3=0$ و $f(x_1$ و x_2 و $x_3)=4$ خواهد شد که دراینصورت $F=-4$ میشود و اگر بهمین ترتیب ادامه دهیم تمام ضرایب بدست خواهند آمد وخواهیم داشت :

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2 = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \quad (21)$$
$$+ \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2$$

از نتیجه بدست آمده فی المثل میتوان در حل مسئلهٔ زیر استفاده کرد :

۹۹۶ - مثال ۱۵- دستگاه زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+xz+yz=11 \\ (x-y)(x-z)(y-z)=-2 \end{cases}$$

اینجا هم دستگاه را برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 مینویسیم از دومعادلهٔ اول نتیجه میشود که $\sigma_1=6$ و $\sigma_2=11$ است اکنون اگر معادلهٔ سوم دستگاه را برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 بنویسیم با توجه باینکه مقادیر σ_1 و σ_2 معلوم است معادله یك مجهولی بر حسب σ_3 بدست خواهیم آورد ، ازآنجا σ_3 ودرنتیجه x_1 و x_2 و x_3 بدست خواهد آمد .

ولی سمت چپ معادله سوم یك عبارت متقارن منفی است واگر بخواهیم به یك عبارت متقارن تبدیل شود طرفین آنرا بتوان دو میرسانیم :

$$(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2=4$$

با توجه به رابطه (۲۱) خواهیم داشت :

$$4=-4\sigma_1^3\sigma_3+\sigma_1^2\sigma_2^2+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_2^3-27\sigma_3^2-$$

وبا توجه باینکه $\sigma_1=6$ و $\sigma_2=11$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$\sigma_3^2-12\sigma_3+36=0$$

و درنتیجه $\sigma_3=6$ خواهد شد .

اکنون با در دست داشتن مقادیر σ_1 و σ_2 و σ_3 میتوان معادله درجه سوم زیررا تشکیل داد که x و y و z ریشه های آن خواهد بود .

$$u^3-6u^2+11u-6=0$$

وریشه های این معادله $u_1=1$ و $u_2=2$ و $u_3=3$ میباشد.

مقادیر u_1 و u_2 و u_3 همان مقادیر x و y و z هستند و درنتیجه ۶ دسته جواب برای x و y و z بدست می‌آید.ولی هرششش دسته جواب دردستگاه صدق نمی کند ، زیر معادله‌سوم دستگاه را بتوان ۲ رساندیم وبنابراین احتمالا ریشه‌های اضافی وارد معادله شده است .

با آزمایش ریشه‌ها ، جوابهای دستگاه چنین‌خواهدبود:

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \\ z_1=3 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=3 \\ z_2=1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_3=3 \\ y_3=1 \\ z_3=2 \end{cases}$$

* * *

اکنون تعریناتی که میتوان با استفاده ازروشهای بالا بحل‌آنها موفق شد درزیر می‌آوریم :

۱ - عبارتهای متقارن زیررا بصورت‌ضرب عوامل اول بنویسید :

۹۹۷- $(x+y)(x+z)(y+z)+xyz$

۹۹۸- $2(a^3+b^3+c^3)+a^2b+a^2c+b^2a+$
$+c^2a+c^2b-3abc+b^2c$

۹۹۹- $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+$
$+abc(a+b+c)$

۱۰۰۰- $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+$
$2abc(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)(bc+ac+ab)$

۱۰۰۱- $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-$
$-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$

۱۰۰۲- $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

۱۰۰۳- $(a+b+c)^5-(-a+b+c)^5-$
$-(a-b+c)^5-(a+b-c)^5$

۲ عبارتهای «متقارن منفی» زیررا به صورت‌ضرب‌عوامل اول بنویسید :

۱۰۰۴ $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$

۱۰۰۵- $(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+$
$+(c-a)(a+b-c)(-a+b+c)+$
$+(a-b)(-a+b+c)(a-b+c)$

۱۰۰۶- $(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+$
$+(a-b)(a+b)^2$

۱۰۰۷- $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

۱۰۰۸- $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

۱۰۰۹- $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

۱۰۱۰- $x(y+z)(y^2-z^2)+y(z+x)(z^2-x^2)+$
$+z(x+y)(x^2-y^2)$

۱۰۱۱- $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+$
$+(a-b)(a+b)^3$

۱۰۱۲- $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

۱۰۱۳- $(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+$
$+(a-b)(a+b)^4$

۱۰۱۴- $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

۱۰۱۵- $a^2(a+b)(a+c)(b-c)+$
$+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+$
$c^2(c+a)(c+b)(a-b)$

۱۰۱۶- $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

۳- صحت اتحادهای زیر را تحقیق کنید :

۱۰۱۷- $(a+b+c)^2-(-a+b+c)^2-$
$-(a-b+c)^2-(a+b-c)^2=24abc$

۱۰۱۸- $a(-a+b+c)^2+b(a-b+c)^2+$
$+c(a+b-c)^2+$
$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=4abc$

۱۰۱۹- $(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+xy+y^2)^2$

۱۰۲۰- $(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-$
$-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4=12abc(a+b+c)$

۱۰۲۱- $(a+b+c)^4+(b+c-a)^4+$
$+(c+a-b)^4+(a+b-c)^4-4(a^4+b^4+c^4)+$
$+24(c^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

۱۰۲۲- $(x+y)^5-x^5-y^5=$
$=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$

۱۰۲۳- $(x+y)^7-x^7-y^7=$
$=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$

۴- ثابت کنید که اگر $a+b+c=0$ باشد هریک از
ازتساویهای زیر صحیح است (۱)

۱۰۲۴- $a^3+b^3+c^3=3abc$

۱۰۲۵- $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=0$

۱۰۲۶- $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+$
$(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0$

۱۰۲۷- $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=$
$=2(ab+bc+ca)^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$

۱۰۲۸- $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$

۱۰۲۹- $7(a^5+b^5+c^5)=$
$=5(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)$

۱۰۳۰- $10(a^7+b^7+c^7)=$
$=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$

۱۰۳۱- $7(a^7+b^7+c^7)=$
$=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$

۱۰۳۲- $25(a^7+b^7+c^7)(a^3+b^3+c^3)=$
$=21(a^5+b^5+c^5)^2$

۱۰۳۳- $50(a^7+d^7+c^7)=$
$=49(a^5+b^5+c^5)(a^3+b^3+c^3)^2$

۱۰۳۴- $\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\times$
$\times\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$

۵- عبارتهای زیر را ساده کنید :

۱۰۳۵- $\frac{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}$

۱۰۳۶- $\frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}$

۱۰۳۷- $(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-$
$-ab-ac-ad-bc-bd-cd)$

۱۰۳۸- $\frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+$
$+\frac{3}{(p+p)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$

۱۰۳۹- $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+$
$+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$

۱۰۴۰- $\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b^2(b-a)(b-c)}+$
$+\frac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$

۱) یادآوری می‌کنیم که اگر $a-x-y$ و $b-y-z$ و $c-z-x$ باشد $a+b+c=0$ خواهد شد بنابراین اگر در هریک از تمرینات بجای a و b و c مقادیر آنها را برحسب x و y و z قرار دهیم روابط جدیدی بدست خواهد آمد که بازاء هر مقدار دلخواه x و y و z صادق خواهند بود.

۶ـ دستگاههای زیر را حل کنید :

۱۰۴۱ـ $\begin{cases} x+y=۷ \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{۲۵}{۱۲} \end{cases}$

۱۰۴۲ـ $\begin{cases} x+xy+y=۰ \\ x^۳+x^۲y^۲+y^۳=۱۲ \end{cases}$

۱۰۴۳ـ $\begin{cases} x+y+۵ \\ x^۲-xy+y^۲=۷ \end{cases}$

۱۰۴۴ـ $\begin{cases} x+y=a \\ x^٤+y^٤=a^٤ \end{cases}$

۱۰۴۵ـ $\begin{cases} x+y=a \\ x^۳+y^۳=b(x^۲+y^۲) \end{cases}$

۱۰۴۶ـ $\begin{cases} x+y=۱ \\ x^٤+y^٤=۷ \end{cases}$

۱۰۴۷ـ $\begin{cases} x+y+xy=۷ \\ x^۲+y^۲+xy=۱۳ \end{cases}$

۱۰۴۸ـ $\begin{cases} x+y=a \\ x^٥+y^٥=b^٥ \end{cases}$

۱۰۴۹ـ $\begin{cases} xy=۱۵ \\ x+y+x^۲+y^۲=٤۲ \end{cases}$

۱۰۵۰ـ $\begin{cases} \frac{x^۲}{y}+\frac{y^۲}{x}=۱۲ \\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۳} \end{cases}$

۱۰۵۱ـ $\begin{cases} x^۲+xy+y^۲=٤ \\ x+xy+y=۲ \end{cases}$

۱۰۵۲ـ $\begin{cases} ۲(x+y)=۵xy \\ ۸(x^۳+y^۳)=۶۵ \end{cases}$

۱۰۵۳ـ $\begin{cases} x+y=a \\ x^۶+y^۶=a^۶ \end{cases}$

۱۰۵۴ـ $\begin{cases} (x^۲+۱)(y^۲+۱)=۱۰ \\ (x+۱)(xy-۱)=۳ \end{cases}$

۱۰۵۵ـ $\begin{cases} x+y=a \\ x^۷+y^۷=a^۷ \end{cases}$

۱۰۵۶ـ $\begin{cases} x^۳+y^۳+xy(x+x)=۱۳ \\ x^۲y^۲(x^۲+y^۲)=٤۶۸ \end{cases}$

۱۰۵۷ـ $\begin{cases} x^۲+xy+y^۲=۳۹ \\ x^٤-x^۲+y^٤-y^۲=۶۱۲ \end{cases}$

۱۰۵۸ـ $\begin{cases} ۷(x^٥+y^٥)=۳۱(x^۳+y^۳) \\ x^۲+xy+y^۲=۳ \end{cases}$

۱۰۵۹ـ $\begin{cases} x^۲+xy+y^۲=۱ \\ x^٤+x^۲y^۲+y^٤=a^۲ \end{cases}$

۱۰۶۰ـ $\begin{cases} x+y+z=۲ \\ x^۲+y^۲+z^۲=۶ \\ x^۳+y^۳+z^۳=۸ \end{cases}$

۱۰۶۱ـ $\begin{cases} x^۲-xy+y^۲=۷ \\ x^٤+x^۲y^۲+y^٤=۹۱ \end{cases}$

۱۰۶۲ـ $\begin{cases} xy=a^۲-b^۲ \\ x^٤+y^٤=۲(a^٤+۶a^۲b^۲+b^٤) \end{cases}$

۱۰۶۳ـ $\begin{cases} x+y+z=۹ \\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=۱ \\ xy+xz+yz=۲۷ \end{cases}$

۱۰۶۴ـ $\begin{cases} (x-y)(x^۳-y^۳)=۱۶ \\ (x+y)(x^۳+y^۳)=٤۰ \end{cases}$

۱۰۶۵ـ $\begin{cases} x+y+z+u=۱ \\ x^۲+y^۲+z^۲+u^۲=۹ \\ x^۳+y^۳+z^۳+u^۳=۱ \\ x^٤+y^٤+z^٤+u^٤=۳۳ \end{cases}$

۱۰۶۶ـ $\begin{cases} xy(x+y)=۳۰ \\ x^۳+y^۳=۳۵ \end{cases}$

۱۰۶۷ـ $\begin{cases} x+y+z=۲ \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+ \\ +(z+x)(x+y)=۱ \\ x^۲(y+z)+y^۲(z+x)+z^۲(x+y)= \\ =-۶ \end{cases}$

۱۰۶۸ـ $\begin{cases} yx(y^۲-z^۲)+xz(z^۲-x^۲)+ \\ +xy(x^۲-y^۲)=-۲ \\ x^۳(y^۲-z^۲)+y^۳(z^۲-x^۲)+ \\ +z^۳(x^۲-y^۲)=-۲۲ \\ (x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳=۶۰ \end{cases}$

بقیه پائین صفحه مقابل

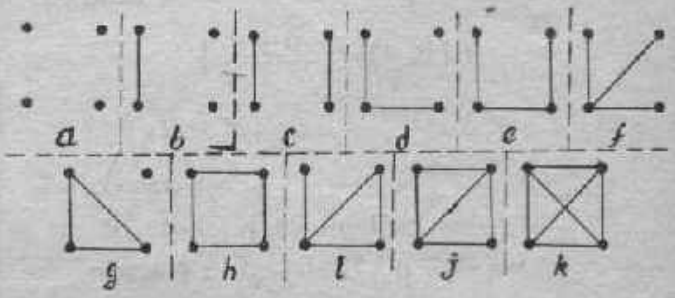
مهدی بهزاد

«نتایج تازه‌ای در نمودارهای توپولوژیکی»

I- مقدمه

معمولا یك **نمودار** از عده‌معدودی نقطه، V ومجموعه‌ای از خطوط ، X تشکیل میشود بطوریکه هریك خط (وتنها یك خط) دو نقطه متمایز را بهم وصل میکند. طبق این تعریف یك نمودار ممکن است در روی یك صفحه ، یك کره و یا بر سطح هندسی دیگری ترسیم شود. دراین مقاله چندجنبهٔ **توپولوژیکی** نمودارها را مورد بحث قرار داده و چند مسئله حل نشده اشاره میکنیم .

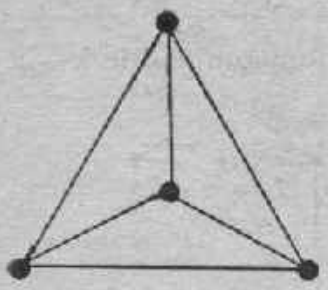
برای وضوح مطلب یادآور میشویم که فقط ۱۱ نمودار **مختلف** (غیر Isomorphic) با چهار نقطه ، $V=4$ میتوان ساخت .



(ش ۱)

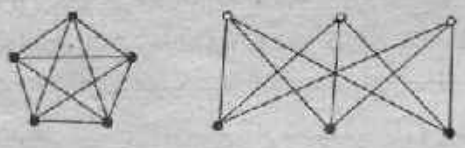
(a) نمودار کاملا مجزا و (k) نمودار کامل (آنرا به k_4 نمایش میدهند) نامیده میشود . (e)و (f) **درخت** نام دارند .

یك **نمودار سطحی** نموداری است که بتوان آنرا در روی صفحه چنان ترسیم نمود که خطوط آن غیرمتقاطع باشند. k_4 را میتوان طبق شکل ۲ نیز رسم نمود اشکال ۲ و(k) (IsomorPhic هستند) بنا براین k_4 یك نمودار سطحی است .



(ش ۲)

یك **نمودار کامل دورنگه** ، $k_{m,n}$ از m نقطه ازیك رنگ مثلا سفید و n نقطه ازرنگ دیگر مثلا سیاه تشکیل میشود بطوریکه دو نقطه با یك خط بهم متصلند اگر واگر رنگ آن نقاط از هم متمایز باشد . (اگر و اگر معادل شرط لازم وکافی است) شکل ۳ یك نمودار کامل پنج نقطه‌ای ، k_5 ویك نمودار کامل دو رنگه $k_{2,3}$ را نشان میدهد .



(ش ۳)

دو نمودار Isomorphic گفته میشوند اگر یك رابطه یك به یك بین نقاط آنها میتوان یافت بطوریکه اگر دونقطه در یك نمودار بهم متصل هستند دونقطه مربوط در نمودار دیگر نیز بهم متصل باشند . **درجه** یك نقطه عبارتست از تعداد خطهائی که به‌آن میرسند .

دو نمودار را Homeomorphic نامند اگرممکن باشد نقاط تازه‌ای از درجه ۲ به خطوط هردو و یا یکی‌از دو نمودار اضافه نمود بطوریکه دو نمودار حاصل Isomorphic شوند .

نمودار فرعی G نموداری است که رؤس (نقاط) و خطوط آن از بعضی ویا تمام نقاط وخطوط G تشکیل شده‌باشد.

$$۱۰۶۹- \quad \begin{cases} x+y+z+u=a \\ x^2+y^2+z^2+u^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3+u^3=a^3 \\ x^4+y^4+z^4+u^4=a^4 \end{cases}$$

۱۰۷۰- ثابت کنید که اگر داشته باشیم :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

تساوی زیر برای هرمقدار n صحیح است :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^n=\frac{1}{a^n+b^n+c_n}=\frac{1}{(a+b+c)^n}$$

۱۰۷۱- دستگاه زیر راحل کنید :

$x+y=a$ و $x^2+y^2=b$ و $x^3+y^3=c$

۱۰۷۲- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2+px+q=0$ باشد حاصل عبارت $\alpha^k+\beta^k$ را بازاء $k=\pm 1$ و ± 2 و ± 3 و ± 4 و ± 5 محاسبه کنید .

۱۰۷۳- ثابت کنید که اگرعبارت متقارن $f(x\ y)$ بر $x-y$ بخش پذیر باشد بر $(x-y)^2$ نیزبخش پذیر است .

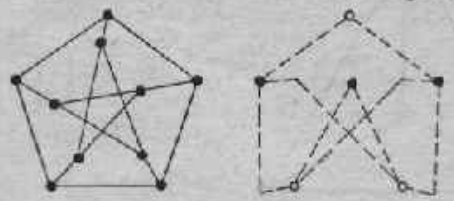
«پایان»

II = قضایا

بکمك این تعاریف میتوانیم اولین قضیه درباره نظریه نمودارهای توپولوژیکی را که به Kuratowski منسوب است بیان کنیم .

قضیه ۱ : G نمودار سطحی است اگر و اگر G دارای هیچ نمودار فرعی Homeomorphic با k_5 و یا $k_{3,3}$ نباشد.

طبق این قضیه نمودار (a)٤ (نمودار **پترسون**) سطحی نیست زیرا دارای نموداری فرعی است که با $k_{3,3}$ Homeomorphic میباشد . (شکل٤)



(a) (ش ٤) (b)

عجیب اینکه نمودار پترسون که ظاهراً شبیه k_5 است دارای هیچ نمودار فرعی Homeomorphic با k_5 نیست .

قضیه ۲ـ یك نمودار با p نقطه و q خط و $q>3p-6$ سطحی نیست (برای اثبات F. HARARY از فرمول **اویلر** $V-E+F=2$ استفاده میکند .)

نتیجهٔ ۱ : K_5 نمودار سطحی نیست زیرا $q=10$ و $p=6$ و $3p-6=9<10$ میباشد .

ضخامت یك نمودار G (G) اقلا دارای یك خط فرض میشود) که به t (G) نموده میشود عبارتست از حداقل تعداد نمودارهای فرعی سطحی آن بطوریکه مجموعه آنها G باشد مثلا

$t(K_5)=2$ و $t(K_{3,3})=2$

نتیجه ۳ : در هر نمودار G با p نقطه و q خط رابطه زیر صادق است .

$$q \leq (3p-6)\ t\ (G)$$

III = هر نمودار سطحی با ۹ نقطه دارای مکمل غیر سطحی است

هر نمودار G با n نقطه را میتوان نمودار فرعی K_n (نمودار کامل متشکل از n نقطه) دانست **مکمل** G که به G نموده میشود نموداری است که از حذف تمام خطوط نمودار G از K_n بدست میآید .

n	۱و۳و٤	۵و۶و۷و۸	۱۵ و ۰۰۰و۱۰و۰	۱۶	۱۷و۰۰۰و۲۰ و	۲۱و۲۲	۲۳و۲۶ و	۲۷و۰۰۰۰
$t(K_n)$	۱	۲	۳	؟	٤	؟	۵	؟

ش (۵)

البته با داشتن $t(K_9)=t(K_{10})-3$ محاسبه $t(K_{10})$ و ... $t(K_{14})$ غیرضروری است .

کوچکترین نمودار کامل که ضخامت آن هنوز برهیچکس روشن نیست K_{12} است . پیش‌بینی میشود که این عدد ٤ است ولی شاید اثبات آن چندین برابر سخت و طولانی‌تر از محاسبه $t(K_9)$ باشد (روش اثبات $t(K_9)=3$ را در زیر ملاحظه خواهید نمود) همچنین حدس میزنند که $t(K_{21})=4$ و $t(K_{22})=5$. اثبات دو فرمول زیر تحت مطالعه است .

برای $n \geq 2$ حدس زده میشود که :

$$t(K_{6n+3}) = n+1 \quad \text{و} \quad t(K_{6n+4}) = n+2$$

ولی قضیه زیر که توسط BEINEKE و HARARY ثابت شده است ضخامت $\frac{2}{3}$ تمام نمودارهای کامل را بدست میدهد .

قضیه۳: ضخامت نمودار کامل Kp برای $p \equiv -1$ و ۰ و ۱ و ۲ (mod ۶) عبارتست از :

$$t(K_p)=\left[\frac{p+7}{6}\right]$$

([x] بزرگترین عدد صحیحی است که از x کوچکتر و یا با آن مساوی باشد .)

اول دفعه $t(K_{17})$ با این فرمول محاسبه شد .

قضیه ۴ : اگر نمودار G با p نقطه و q خط دارای هیچ مثلث نباشد و اگر داشته باشیم : $q>2p-4$ ، G نمودار سطحی نخواهد بود .

نتیجهٔ ۱ : $K_{3,3}$ نمودار سطحی نیست .

نتیجهٔ ۲ : اگر G دارای هیچ مثلث نباشد داریم :

$$q \leq (2p-4)\ t\ (G)$$

مسئله زیر چند سال پیش مطرح شد :

کوچکترین عدد صحیح مثبتی (آنرا n مینامیم) راپیدا کنید که که هر نمودار G با n نقطه غیرسطحی باشد ویا مکمل آن $\bar{G}$. به آسانی دیده میشود که $n>8$، J L . Selfridge حدس زدکه n مساوی ۹ است قضیه زیر این حدس را ثابت میکند .

قضیهٔ اصلی : یکی از دو نمودار G ویا $\bar{G}$ با ۹ نقطه غیرسطحی است .

(اگرخطی دونقطه a و b از یك نمودار را بهم مربوط کنند میگوئیم که a و b بهم **مربوطند** . نقاط هر نمودار را میتوان به یك ویا چند گروه بطوری تقسیم نمود که نقاط هر گروه بهم مربوط ونقاط گروه متمایز نامربوط باشند هر گروه (وخطوط آن) را یك **عضو** نمو دار مینامند)

فرض کنید $p(G)$ و $q(G)$ به ترتیب تعداد نقاط وخطوط نمودار G و $k(G)$ تعداد اعضاء آن باشد از روی قضیه ۱ قضایای ۵ و ۶ را میتوان نتیجه گرفت .

قضیهٔ ۵ : درهریك از حالات زیر G غیرسطحی است .

۱) $q(G) > 6$ و $k(\bar{G}) \geq 4$

۲) $p(G) \geq 7$ و $k(\bar{G}) \geq 3$ و G حداکثر دارای یك **نقطهٔ تنها** است .

۳) $p(G) \geq 7$ و $k(\bar{G}) = 2$ و هرعضوی از $\bar{G}$ حد اقل دارای ۳ نقطه است .

۴) $p(G) \geq 9$ و $k(\bar{G}) \geq 3$.

قضیه ۶ : اگر $p(G) \geq 9$ و $k(\bar{G}) = 2$ و G سطحی باشد ، $\bar{G}$ غیر سطحی است .

برای اثبات قضیه اصلی طبق قضایای ۵ و ۶ کافی است قضیه را با فرض اینکه $\bar{G}$ فقط دارای یك عضو است ثابت کنیم .

فرض کنید G نموداری است سطحی و $p(G) \geq 4$. آنرا دریك **دوکره** S **بخوابانید** طبق قضیه **فری** (FARY) S را میتوان چنان **مثلث بندی** نمود (آنرا T مینامیم) که T_1 (SKELETON — ۱) است شامل G است (بصورت نمودار فرعی) و T_0 (SKELETON — ۰) فقط از نقاط G تشکیل شده میشود .

قضیه ۷ اگر G و $\bar{G}$ هردو نمودار سطحی باشند T_1 و $\bar{T}_1$ نیز هردو سطحی هستند . بنابراین برای اثبات قضیه اصلی کافی است فرض کنیم که G از T_1 یك مثلث بندی با ۹ نقطه تشکیل شده وقضیه را ثابت کنیم.

V_1 و V_2 و V_3 را نقاط G و d_1 و d_2 ... و d_n را بترتیب درجه آنها مینامیم .

بردار $(d_1$ و ... و $d_n) = (d_1$ و d_2 و ... و $d_n) = \pi(G)$ را **تقسیم بندی** G مینامند . آسانتر است که فرض کنیم درجات در $\pi(G)$ بترتیب غیرصعودی نوشته شده اند از آنجائیکه $\bar{G}$ ازیك عضو تشکیل شده و G یك مثلث بندی است داریم .

$$3 < d_i < 7 \qquad i = 1 \text{ و } 2 \text{ و } \ldots \text{ و } 9$$

قضیه ۸ اگر رابطه $d_i = d_{i+1}$ ، باازاء یکی از اعداد ۱ و ۲ و... و ۹ صادق باشد G غیرسطحی است .

قضیه ۹ اگر رابطه $d_i = d_{i+1}$ ، باازاء یکی از اعداد ۱ و ۲ و... و ۹ صادق باشد $\bar{G}$ غیرسطحی است.

برای اثبات قضایای ۸ و ۹ بایدچندحالت در نظر گرفت و درهرحالت ازقضیه ۱ استفاده نمود .

با فرض بالا در مورد G داریم : $p(G) = 12$ ،

بنابراین $\sum_{i=1}^{9} d_i = 42$ حال اگر حالات مختلف قضایای ۸ و ۹ راحذف کنیم خواهیم دید که عدد ۴۲ را فقط وفقط بیك روش میتوانیم به ۹ گروه چنان تقسیم بندی کنیم که هرعضو آن d_i باشد ویزداشته باشیم . $3 < d_i < 7$ وآن چنین است :

$$\pi_0 = (3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 5 \text{ و } 5 \text{ و } 5 \text{ و } 5 \text{ و } 5)$$

قضیه ۱۰ گره را بهیچ ترتیب نمی توان بطوری مثلث بندی نمود که T_1 آن π_0 باشد .

قضایای ۵ تا ۱۰ قضیه اصلی را ثابت میکنند و لذا

$t(K_9) = 3$

بقیه ازصفحه ۴

سیلوستر دوم SylvesterII مقام پاپی داشته است) وارد گردیده است .

اما در بارهٔ مربع و تر مثلث قائم الزاویه ، امروزه این نظریه بعیان کشیده شده است که **فیثاغورس** صورت این قضیه را در **مصر** یا در **کلده** و یا با احتمال زیاد در **هند** که درآن زمان تمدن بسیار پیشرفته ای داشته بدست آورده است چه **فیثاغورث** در دوران اسارت با یك هیئت علمی از طرف **کامبوزیا** برای تکمیل مراتب علمی تا حدی که در کلده میسور نبود به هند گسیل شده بود یکی از چین شناسان بسیار مطلع معتقد است که با احتمال زیاد **فیثاغورس** در مسافرت به هند با **کنفوسیوس** که او هم درآنزمان به هندآمده بوده ملاقات کرده است . و منشاء مثلث باضلاع ۳ و ۴ و ۵ **چین** است . می توان فرض کرد که وجود این مثلث در آن زمان برای فیثاغورس نیز کشف شده است .

(دنباله در شمارهٔ آینده)

حسین ستاری تهرانی

روش‌های کوتاه ومفید درچهارعمل اصلی حساب

دانش‌آموزان نه‌تنها لازم‌است که کاملاً با اصول و قواعد ریاضی وحل مسائل مربوط بآنها آشنا باشند ، بلکه بایستی در استعمال‌این اصول وقواعد دارای مهارت وسرعت عمل نیزباشند شك نیست که امروزه‌وجود ماشین‌های حساب الکترونی مدیران امور محاسباتی‌و بازرگانی‌راازسرعت‌عمل ومهارت درمحاسبات نی‌نیاز ساخته است ، لیکن باید توجه داشت که استفاده ازماشین های حساب نیز مستلزم آشنائی و مهارت دربکاربردن اصول و قواعد ریاضی میباشد : از اینرو بتهیه مقالهٔ زیر مبادرت شد تا دانش‌آموزان عزیز را راهنمائی درکسب مهارت برای سرعت درانجام محاسبات باشد .

جمع اعداد با روش کوتاه ـ برای کسب مهارت و سرعت عمل درجمع لازم است اعداد رابطور مناسب درذهن‌دسته بندی نمائید و حاصل هردسته‌را دردهن معین کنید وسپس حاصل کل را بدست آورید .مثلاً هرگاه‌داشته باشیم ۴+۱۶+۱۵ بایك نگاه فوراً عدد ۳۵ درذهن حاصل شود و لزومی نداشته باشدکه بگوئیم ۱۵=۵+۶+۴ به پنج‌اش ده بریك و ۳=۱+۱+۱ تا باین ترتیب ۳۵ حاصل گردد .

بدیهی است چنین مهارتی تنها ازراه تمرین زیاد امکان پذیر است وبس .

مثال۱ـ ۳+۵+۷+۴

طرزعمل بطور ذهنی :

(۳+۷)+(۵+۴)=۱۰+۹=۱۹

مثال۲ـ ۹+۹+۶+۸+۹

طرزعمل بطور ذهنی :

(۹+۹+۹)+(۶+۸)=۲۷+۱۴=۳۷+۴=۴۱

بدیهی است این اعمال بسرعت درذهن انجام میشود .

مثال۳ـ ۶۸+۷۹+۵۴+۳۰+۹۱

طرز عمل ذهنی :

(۷۱+۷۹+۳۰)+(۵۴+۶۸)=۲۰۰+۱۲۲=۳۲۲

ویا

(۸+۹+۴+۱)+(۶۰+۷۰+۵۰+۳۰+۹۰)=

=۳۰۰+۲۲=۳۲۲

مثال۴ـ ۳۰۰+۵۲۸+۱۳۱+۶۳۷

طرزعمل بطورذهنی :

(۲۰+۳۰+۳۰)+(۳۰۰+۵۰۰+۱۰۰+۶۰۰)+

+(۷+۱+۸)=۱۵۹۶

مثال۵ـ ۱۶۷۳+۲۱۹۱+۱۸۱۴+۱۲۷۱+۲۳۵۳

طرزعمل بطور ذهنی :

(۳×۱۰۰۰+۲×۲۰۰۰)+

+(۶۰۰+۱۰۰+۳۰۰+۸۰۰+۲۰۰)+

+(۲×۷۰+۹۰+۱۰+۵۰)+

+(۲×۳+۲×۱+۴)=

=۷۰۰۰+۲۰۰۰+۲۹۰+۱۲=۹۳۰۲

مثالهای فوق بمنظور راهنمائی درجمع‌های افقی وباروش ذهنی است . درجمع‌های‌ستونی بمنظور سرعت عمل وجلوگیری از اشتباه از دوروش زیر استفاده میشود .

الف ـ ابتدا اعداد را بچند دسته تقسیم وحاصل جمع هردسته راجداگانه تعیین میکنیم سپس حاصل جمع‌های جزءرا باهم جمع مینمائیم تاحاصل جمع‌کل بدست آید .

مثال ـ

۴۵۹۱	
۸۲۱۶	
۹۱۳۷	
۱۶۱۵	
۶۷۸۳۹	
۹۱۳۹۸	حاصل جمع جزء(۱)
۴۳۶۹۵۶۵	
۵۸۴۶۲	
۲۴۶	
۳۶	
۹۸۷۴	
۴۴۳۸۱۸۳	» » » (۲)
۴۵۲۹۵۸۱	» » کل

ب ـ ابتدا آحاد هرمرتبه‌راجداگانه جمع میکنیم وبعد حاصل جمع های مراتب راجمع می‌نمائیم‌تاحاصل جمع کل‌بدست آید .

مثال ـ

۱۶۷۳	
۲۱۹۱	
۱۸۱۴	
۱۲۷۱	
۲۳۵۳	
۶۹۸۵۲۳	
۳۴۷۶۹	
۲۴	حاصل جمع مراتب یکان
۳۷	» » » دهگان
۳۲	» » » صدگان
۱۹	» » » هزار
۱۲	» » » دههزار
۶	» » » صدهزار
۷۴۲۵۹۴	حاصل جمع کل

یکان

تمرین ـ کسب مهارت و سرعت عمل در جمع‌های ذهنی مستلزم انجام تمرین‌های زیاد است . تعداد زیادی ازجمع‌های مختلف‌درنظر گرفته مطابق روشهای گفته شده حاصل هریك‌را ذهنی حساب کنید .

تفریق با روش کوتاه ـ منظور ازتفریق دوعددتعیین عددیست(تفاضل) که چون‌بعدد کوچکتر (مفروق) اضافه شودعدد بزرگتر (مفروق‌منه) بدست‌آید . بنابراین تفریق درواقع نوعی جمع است و هرگاه درجمع اعداد مهارت کافی کسب شده باشد میتوان بسرعت معلوم نمود که مفروق‌ازمفروق‌منه چقدر کوچکتر است . این روش را بخصوص فروشندگان کالا بکارمیبرند. مثلاً هرگاه ازفروشنده‌ای ٦٤ ریال‌کالا خریداری شود ودرمقابل‌یك اسکناس ١٠٠ ریالی باو داده شود . فروشنده ٦ریال میدهدو میگویداین‌شد ٧٠ریال‌وبعد ٣٠ریال‌دیگر نیزمیپردازد. باکمی‌دقت ملاحظه میشودکه فروشنده‌درواقع‌برای‌تعیین تفاضل٦٤ — ١٠٠ بترتیب مذکور عددی تعیین میکندکه چون‌به ٦٤ اضافه شود ١٠٠ ریال گردد .

مثال ١ ـ برای محاسبهٔ ٧٢ — ٩٦ ملاحظه میشود که ٨٠ = ٨ + ٧٢ و ٩٦ = ١٦ + ٨٠ بنابراین ٢٤ = ٨ + ١٦ تفاضل تفریق است .

مثال٢ـ برای محاسبهٔ ٣٠٤ — ٤٨٩ ملاحظه میشودکه

٣١٠ = ٦ + ٣٠٤ و ٣٨٩ = ٧٩ + ٣١٠ و

٤٨٩ = ١٠٠ + ٣٨٩ بنابراین ١٨٥ = (٦ + ٧٩) + ١٠٠ تفاضل‌تفریق است .

نکته : دراین مثال آحاد مراتب مفروق ازآحادنظیر مراتب مفروق‌منه کوچکترند ، بنابراین میتوان آحاد مراتب مفروق را از سمت چپ ازآحاد مراتب مفروق‌منه نظیر به نظیر کم نمود یعنی بترتیب زیر عمل‌شود :

٥ = ٤ — ٩ و ٨ = ٠ — ٨ و ١ = ٣ — ٤

↓

١ ٨ ٥ ↙ ↘

مثال ٣ : برای محاسبه ١٣٤٥ — ٢٩٢٦ ملاحظه میشودکه ٤٠٠ = ٥٥ + ٣٤٥ و ٩٢٦ = ٥٢٦ + ٤٠٠ بنابر- این ٥٨١ = ٥٥ + ٥٢٦ و از اینرو عدد ١٥٨١ تفاضل تفریق است .

باید توجه داشت‌که با افزودن‌یکعدد بمفروق ومفروق‌منه و همچنین باکاستن یکعدد از مفروق و مفروق‌منه تفاضل ثابت خواهد ماند . از اینرو میتوان تفاضل را با روش زیر هم محاسبه نمود .

١ـ برای محاسبهٔ ٧٢ — ٩٦ هرگاه ٢ واحد از مفروق و مفروق‌منه بگاهیم نتیجه میشود :

٢٤ = ٧٠ — ٩٤ = ٧٢ — ٩٦

٢ـ برای محاسبهٔ ٣٠٤ — ٤٨٩ هرگاه٤ واحدازمفروق و مفروق‌منه بگاهیم نتیجه میشود :

١٨٥ = ٣٠٠ — ٤٨٥ = ٣٠٤ — ٤٨٩

٣ـ برای محاسبهٔ ١٣٤٥ — ٢٩٢٦ هرگاه بمفروق و مفروق‌منه ٥٥ واحد بیافزائیم نتیجه میشود :

١٥٨١ = ١٤٠٠ — ٢٩٨١ = ١٣٤٥ — ٢٩٢٦

بطوریکه اشاره شد، چنانچه درجمع اعداد باروش‌کوتاه مهارت‌کافی‌کسب شود : تفریق اعداد با روش‌کوتاه نیز بسرعت انجام خواهد شد . لذا بمنظورکسب مهارت و سرعت عمل در تفریق اعداد بایستی‌کوشش شودکه تمرینهای زیاد انجام‌داد .

روش‌های مفید در ضرب

تعریف ـ ضرب دوعدد درواقع عبارتست ازجمع سریع اعداد متساوی . بنابراین هرگاه درجمع‌کردن اعداد مهارت کافی‌کسب شود ، درضرب دوعدد نیز تسریع حاصل خواهدشد. در ضرب دو عدد ازروش‌های‌کوتاه مشروحه زیر میتوان استفاده‌کرد .

١ـ برای ضرب‌عددی در ١٠ یا در قوای ١٠ (اعدادی که ازقرارگرفتن تعدادی رقم صفر سمت راست رقم یك‌تشکیل شده‌اند) ممیز مضروب‌بشمارهٔ نمایندهٔ قوه١٠ (بشمارهٔ صفرهای سمت راست‌یك) بسمت راست منتقل میشود .

الف‌ـ ٢٤ × ١٠٠ = ٢٤ × ١٠^٢ = ٢٤٠٠

ب‌ـ ٢٧/٦٥ × ١٠٠٠ = ٢٧/٦٥ × ١٠^٣ = ٢٧٦٥٠

٢ـ برای ضرب‌کردن عددی در مقسوم‌علیه‌های ١٠ یا قوای آن مانند مثالهای زیرعمل میشود :

الف‌ـ ٧٤٢ × ٥٠ = ٧٤٢٠٠ ÷ ٢ = ٣٧١٠٠

ب‌ـ ٦٢٤ × ٢٥ = ٦٢٤٠٠ ÷ ٤ = ١٥٦٠٠

ج‌ـ ٤٥٣ × ١٢٥ = ٤٥٣٠٠٠ ÷ ٨ = ٥٦٦٢٥

٣ـ برای ضرب‌کردن عددی در اعدادیکه‌از١٠ یاقوای ١٠ جزئی‌بزرگتر یا کوچکترند مانند مثالهای زیرعمل‌میشود :

الف‌ـ ٤٣٧ × ١١ = ٤٣٧٠ + ٤٣٧ = ٤٨٠٧

ب‌ـ ٣٨ × ١٠١ = ٣٨٠٠ + ٣٨ = ٣٨٣٨

ج‌ـ ٥٢ × ٩٩ = ٥٢٠٠ — ٥٢ = ٥١٤٨

د‌ـ ٢٧ × ٩٨ = ٢٧٠٠ — ٥٤ = ٢٦٤٦

این روش درمورد ضرب اعداد در ١٠٢ ، ١١٠ ، ٨٩، ١٠١١ ، ١٩٩ وغیره نیز بکار برده میشود .

روش‌های کوتاه و سریع ضرب

روش‌های زیر غالباً موجب میشودکه عمل ضرب سریعتر

انجام گیرد .

۱ـ ضرب‌در ۱۱ ، ۱۱۱ و غیره :

الف ۸۲۵×۱۱=۹۰۷۵

رقم اول حاصلضرب ۵ ، رقم دوم ۷=۲+۵ ، رقم سوم ۱۰=۸+۲ ده بریك و رقم چهارم ۹=۱+۸ میباشد.

ب ـ ۹۶۳۵×۱۱۱=۱۰۶۹۴۸۵

رقم اول ۵ ، رقم دوم ۸=۳+۵ ، رقم سوم ۱۴=۶+۳+۵ ده‌بریك، رقم چهارم ۱۹=۹+۶+۳+۱ ده بریك ، رقم پنجم ۱۶=۹+۶+۱ ده‌بریك و جزو ششم ۱۰=۹+۱ میباشد .

ج ـ ۲۶۴×۲۲=۵۸۰۸

ابتدا هریك از ارقام مضروب را دو برابر میکنم تا ۸ ۱۲ ۴ بدست آید و بعد مانند قاعده ضرب در ۱۱ عمل میکنیم . یا اینکه ابتدا حاصل ۲۶۴×۱۱ را بدست آورده و بعد آنرا دوبرابر میکنیم . بنابراین :

۲۶۴×۲۲=۲۶۴×۱۱×۲=۲۶۴×۲×۱۱=۵۸۰۸

۲ـ ضرب‌در ۹۸ ، ۱۱۱ و غیره . این روش ترکیبی‌از روش مذکور و ضرب‌در ۱۰ و قوای ۱۰ میباشد .

الف ـ ۷۶۵×۸۹=۷۶۵۰۰ ـ ۸۴۱۵=۶۵۰۸۵

ابتدا ۷۶۵ را در ۱۰۰ ضرب نموده و از حاصل ۷۶۵×۱۱ کسر مینمائیم .

ب ـ ۹۶۳۵×۱۱۱=۹۶۳۵۰۰+۱۰۵۹۸۵=۱۰۶۹۴۸۵

ابتدا ۹۶۳۵ را در ۱۰۰ ضرب نموده و بحاصل ۹۶۳۵×۱۱ میافزائیم .

۳ـ ضرب دو رقمی در دورقمی که دهگان آنها متماثل و حاصل جمع ارقام یکانشان ۱۰ باشد .

الف ـ ۸۱×۸۹=۷۲۰۹

دو رقم اول حاصل ۹×۱=۰۹ و دو رقم بعدی ۷۲=(۸+۱)×۸ میباشد .

ب ـ ۳۵×۳۵=۱۲۲۵

که ۲۵=۵×۵ و ۱۲=(۱+۳)۳ میباشد .

ج ـ ۲۷×۲۳=۶۲۱

که ۲۱=۳×۷ و ۶=(۱+۲)۲ میباشد .

روش فوقرا میتوان در مورد اعدادیکه بیش از دو رقم دارند نیز بکاربرد .

د ـ ۱۲۶×۱۲۴=۱۵۶۲۴

که ۲۴=۶×۴ و ۱۵۶=(۱+۱۲)۱۲ میباشد .

نکته ـ این روش درضرب دوعدد کسری که اجزاءصحیح آنها متماثل و حاصل جمع اجزاء کسری آنها واحد باشد بکار میرود .

$۴\frac{۱}{۲}\times۴\frac{۱}{۲}=۲۰\frac{۱}{۴}$ و $۳\frac{۱}{۳}\times۳\frac{۲}{۳}=۱۲\frac{۲}{۹}$

۴ـ ضرب‌دوعدد دورقمی که حاصل جمع ارقام دهگانشان ۱۰ و ارقام یکانشان متماثل باشد .

الف ـ ۶۷×۴۷=۳۱۴۹

که ۴۹=۷×۷ و ۳۱=۷+۶×۴ میباشد .

ب ـ ۸۳×۲۳=۱۹۰۹

که ۰۹=۳×۳ و ۱۹=۳+۸×۲ میباشد .

۵ـ ضرب‌دوعدد دو رقمی که حاصل جمع ارقام‌دهگانشان زوج بوده وارقام یکانشان ۵ باشد .

الف ـ ۲۵×۸۵=۲۱۲۵

که ۲۵=۵×۵ و $۲۱=\frac{۸+۲}{۲}+۸\times۲$ میباشد.

ب ـ ۹۵×۷۵=۷۱۲۵

که ۲۵=۵×۵ و $۷۱=\frac{۷+۹}{۲}+۷\times۹$ میباشد .

نکته ـ این روش درضرب دو عدد کسری که حاصل جمع اجزاء صحیح آنها زوج باشد و اجزاء کسری آنها متساوی باشد مفید است .

$۳\frac{۱}{۲}\times۵\frac{۱}{۲}=۱۹\frac{۱}{۴}$ و $۶\frac{۱}{۲}\times۴\frac{۱}{۲}=۲۹\frac{۱}{۴}$

۶ـ ضرب دو عدد دورقمی که مجموع ارقام دهگانشان فرد و ارقام یکانشان ۵ باشد .

الف ـ ۲۵×۷۵=۱۸۷۵

که دو رقم اول ۷۵ و دو رقم دوم $۱۸\frac{۱}{۲}=\frac{۷+۲}{۲}+۷\times۲$ میباشد که از $\frac{۱}{۲}$ صرفنظر میشود .

باید توجه داشت که منظور از $\frac{۱}{۲}$ که سرفنظر شد $\frac{۱}{۲}\times۱۰۰$ میباشد ، از اینرو برای تعیین حاصلضرب میتوان بترتیب زیر عمل نمود :

۵×۵=۲۵

$(۲\times۷)+\frac{۷+۲}{۲}=۱۸\frac{۱}{۲}$ یا ۱۸۵۰

۱۸۵۰+۲۵=۱۸۷۵

ب ـ ۹۵×۴۵=۴۲۷۵

که $۷۵ = ۵ \times ۵ + ۵۰$ و $۴۲\frac{۱}{۲} = \frac{۴+۹}{۲} + ۴ \times ۹$

که از $\frac{۱}{۲}$ صرفنظر میشود .

نکته - این روش درمورد ضرب دوعدد کسری که مجموع اجزاء صحیح آنها فرد و اجزاء کسری آنها متساوی باشد مفید است .

$$۸۰\frac{۳}{۴} = ۸\frac{۱}{۲} \times ۹\frac{۱}{۲} \text{ و } ۳۳\frac{۳}{۴} = ۷\frac{۱}{۲} \times ۴\frac{۱}{۲}$$

۷ - ضرب دو رقمی در دو رقمی که ارقام دهگانشان متماثل است .

الف - $۳۶ \times ۳۷ = ۱۳\ ۳۲$

حاصلضرب بترتیب زیر بدست میآید :

چهل بر ۴ $۶ \times ۷ = ۴۲$

« « $۳(۶+۷)+۴ = ۴۳$

$(۳ \times ۳)+۴ = ۱۳$

ب- « $۶۴ \times ۶۸ = ۴۳\ ۵\ ۲$

که حاصلضرب بترتیب زیر بدست میآید :

سی بر ۳ $۴ \times ۸ = ۳۲$

هفتاد برهفت $۶(۴+۸)+۳ = ۷۵$

$(۶ \times ۶)+۷ = ۴۳$

۸- ضرب دو رقمی در دو رقمی که ارقام یکانشان متماثل است .

الف - $۷۳ \times ۴۳ = ۳۱\ ۳\ ۹$

حاصلضرب بترتیب زیر بدست میآید :

$۳ \times ۳ = ۹$

سی بر ۲ $۳(۷+۴) = ۳۳$

$(۴ \times ۷)+۳ = ۳۱$

ب- $۲۸ \times ۵۸ = ۱۶\ ۲\ ۴$

حاصلضرب بترتیب زیر بدست میآید :

شصت بر ۶ $۸ \times ۸ = ۶۴$

« « $۸(۲+۵)+۶ = ۶۲$

$(۲ \times ۵)+۶ = ۱۶$

۹-برخی ارقام مضروب‌فیه‌شامل مضربی ازارقام دیگرند.

الف - مضروب‌فیه شامل ۶ و ۴ $= ۶ \times ۴ = ۲۴$ میباشد .

زیر ۶ مینویسیم $۴۳۲۷ \times ۶ = ۲۵۹۶۲$

« ۴ « $۲۵۹۶۲ \times ۴ = ۱۰۳۸۴۸$

جمع میکنیم ۲۷۰۰۰۴۸

$$\begin{array}{r} ۴۳۲۷ \\ ۶۲۴ \\ \hline ۲۵۹۶۲ \\ ۱۰۳۸۴۸ \\ \hline ۲۷۰۰۰۴۸ \end{array}$$

ب- مضروب‌فیه شامل ۷ و ۶ $= ۶ \times ۷ = ۴۲$ میباشد .

زیر ۷ بنویسیم $۱۷۳۸۱ = ۲۴۸۳ \times ۷$

« ۲ « $۱۷۳۸۱ \times ۶ = ۱۰۴۲۸۶$

جمع میکنیم ۱۰۶۰۲۴۱

$$\begin{array}{r} ۲۴۸۳ \\ ۴۲۷ \\ \hline ۱۷۴۸۱ \\ ۱۰۴۲۸۶ \\ \hline ۱۰۶۰۲۴۱ \end{array}$$

ج- مضروب‌فیه‌شامل ۸ و ۲ $= ۸ \times ۲ = ۱۶$ و ۱۶ و ۲ $= ۲ \times ۱۶ = ۳۲$ میباشد .

زیر ۸ مینویسیم $۵۹۴۳۷ \times ۸ = ۴۷۵۴۹۶$

« ۶ « $۴۷۵۴۹۶ \times ۲ = ۹۵۰۹۹۲$

« ۲ « $۹۵۰۹۹۲ \times ۲ = ۱۹۰۱۹۸۴$

جمع میکنیم ۱۰۰۰۴۵۳۵۸۴

$$\begin{array}{r} ۵۹۴۳۷ \\ ۱۶۸۳۲ \\ \hline ۴۷۵۴۹۶ \\ ۹۵۰۹۹۲ \\ ۱۹۰۱۹۸۴ \\ \hline ۱۰۰۰۴۴۳۵۸۴ \end{array}$$

۱۰ - ضرب عددی که همه ارقامش ۹ باشد درعدد دیگر.

الف $۹۹۹۹ \times ۵۳۲۷ = ۵۳۲۶۴۶۷۳$

$$\begin{array}{r} ۹۹۹۹ \\ ۵۳۲۶ \\ \hline ۵۳۲۶۴۶۷۳ \end{array}$$

روش ضرب آنستکه ابتدا یکواحد از مضروب‌فیه میکاهیم بعد آنرا از مضروب تفریق میکنیم ، سپس مضروب‌فیه جدید را سمت چپ تفاضل مینویسیم .

نکته - روش فوق بسیار جالب است ولی متأسفانه فقط در مواردیکه ارقام مضروب یا مضروب‌فیه متساوی باشد امکان پذیر است .

۱۱- ضرب دوعدد که بین ۱۰ تا ۲۰ قراردارند .

الف - روش ضرب بترتیب زیر است :

$۱۸ + ۶ = ۲۴$

یکمرتبه بسمت چپ میبریم $۶ \times ۸ = ۴۸$

جمع میکنیم ۲۸۸

$$\begin{array}{r} ۱۸ \\ ۱۶ \\ \hline ۲۴ \\ ۴۸ \\ \hline ۲۸۸ \end{array}$$

ب ـ روش ضرب چنین است :

۱۳ ۱۳ + ۲ = ۱۵

۱۲

۱۵

یکمرتبه بسمت چپ میبریم ۰۶ ۲ × ۳ =

جمع میکنیم ۱۵۶

۰۶

۱۵۶

۱۲ ـ ضرب دوعدد که مضروب فیه دو رقمی وبا رقم یك شروع میشود :

الف ـ روش ضرب بترتیب زیر است :

۹۳٤ × ۱۵

٤٦۷۰

۱٤۰۱۰

۹۳٤ × ۵ = ٤٦۷۰

این حاصلضرب را یکمرتبه بسمت راست میبریم و با ۹۳٤ جمع میکنیم .

ب ـ روش ضرب بترتیب زیراست :

۱۲۷۳ × ۱۶

۷۶۳۸

۲۰۳۶۸

۱۲۷۳ × ۶ = ۷۶۳۸

این حاصلضرب را یکمرتبه بسمت راست میبریم و با ۱۲۷۳ جمع میکنیم .

۱۳ ـ ضرب دو عدد که مضروب فیه دو رقمی و به واحد ختم میشود .

الف ۹۲۸۷ × ٤۱

۳۷۱٤۸

۳۸۰۷۶۷

که ۳۷۱٤۸ = ٤ × ۹۲۸۷ را یك مرتبه بسمت چپ‌میبریم وبا ۹۲۸۷ جمع مینمائیم .

ب ـ ٤۲۳۶ × ۹۱

۳۸۱۲٤

۳۸۵٤۷۶

که ۳۸۵٤۷۶ = ۹ × ٤۲۳۶ را یکمرتبه بسمت چپ میبریم و با مضروب جمع میکنیم .

۱٤ ـ روش کوتاه برای ضرب دورقمی در دورقمی، این روش درمورد ۶۳ × ۷٤ بصورت دستورزیر نمایش داده میشود.

الف ـ

۷ ٤

× |

۶ ۳

٤۶ ۱ ۲

که بترتیب زیرعمل میشود :

ده بریك ۳ × ٤ = ۱۲

چهل بر ٤ (۳ × ۷) + (۶ × ٤) + ۱ = ٤۶

(۶ × ۷) + ٤ = ٤۶

ب ـ ۴۲ × ۳۵ = ۱۸ ۲ ۰

که بترتیب مذکورمیتوان نوشت :

ده بریك ۵ × ۲ = ۱۰

سی بر ۳ (۵ × ۵) + (۳ × ۲) + ۱ = ۳۲

(۳ × ۵) + ۳ = ۱۸

۱۵ ـ روش کوتاه درمورد ضرب سه رقمی درسه رقمی .

دستورضرب ۵۲۶ × ۳٤۵ بصورت زیر است :

۳ ٤ ۵

| × | × |

۵ ۲ ۶

۱۸ ۱٤ ۷ ۰

روش ضرب بترتیب زیراست :

سی بر ۳ ۶ × ۵ = ۳۰

» » (۶ × ٤) + (۲ × ۵) + ۳ = ۳۷

پنجاه‌بر ۵ (۶ × ۲) + (۵ × ۵) + (۲ × ٤) + ۳ = ۵٤

سی‌بر ۳ (۲ × ۳) + (۵ × ٤) + ۵ = ۳۱

(۵ × ۳) + ۳ = ۱۸

۱۶ ـ روش کوتاه برای‌ضرب سه‌رقمی درسه رقمی که رقم وسطی صفرباشد. دستورضرب درمورد ۶۰۵ × ٤۰۷ چنین‌است:

۶ ۰ ۵

| × |

٤ ۰ ۷

۲٤ ۶۲ ۳۵

که بترتیب زیرعمل میشود:

۷ × ۵ = ۳۵

(۷ × ۶) + (٤ × ۵) = ۶۲

۶ × ٤ = ۲٤

۱۷ ـ روش کوتاه برای ضرب سه‌رقمی‌درسه رقمی‌که رقم وسطی مضروب فیه صفر باشد . دستور ضرب در مورد ضرب ۶۰۵ × ۷۱۵ بصورت زیراست :

۷ ۱ ۵

×

۶ ۰ ۵

٤۲ ۲۵ ۷۵

روش ضرب چنین‌است :

۵ × ۱۵ = ۷۵

ده بر ۱ (۶ × ۱۵) + (۵ × ۷) = ۱۲۵

(۶ × ۷) + ۱ = ٤۳

۱۸ ـ روش کوتاه‌درمورد مجذور کردن عدد سه رقمی که رقم وسطی آن صفر باشد .

الف ـ ۲۰۸)² = ٤ ۳۲ ۶٤

که بترتیب زیرعمل میشود :

۸ × ۸ = ۶٤

۲ × (۸ × ۲) + ۳۲ =

۲ × ۲ = ٤

ب ـ ٤۰۳)² = ۱۶ ۲٤ ۰۹

بترتیب زیرعمل میشود :

$$۳\times۳=\underline{۰۹}$$
$$(۳\times۴)+(۳\times۴)=\underline{۲۴}$$
$$۴\times۴=\underline{۱۶}$$

نکته ـ روش‌های کوتاه درمورد اعداد اعشاری نیز بکار میرود و حاصلضرب باندازهٔ مجموع ارقام اعشاری مضروب و مضروب‌فیه ارقام اعشاری خواهد داشت .

روش کلی در مورد ضرب سریع

این روش ابتکار نگارندهٔ این مقاله است و متکی براساس ارزش نسبی ارقام میباشد . با استفاده از این روش میتوان هر گونه ضرب چند رقمی درچندرقمی را بسرعت وبطوردهنی انجام داد. بدیهی است چنانچه جدول ضرب ۶۲۵ = ۲۵ × ۲۵ تائی ازحفظ شود ودرجمع اعداد نیز مهارت کافی حاصل گردد، سرعت ومهارت درعمل ضرب نیز زیاد خواهد شد. ذیلاً روش کلی ضرب سریع درمورد ۳۴۸ × ۷۵۶۴ بطوردهنی شرح داده میشود .

$$۷۵۶۴\times۳۴۸=\underline{۲۶}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۷}\ \underline{۲}$$

روش کوتاه بترتیب زیراست :

سی بر ۳ $\underline{۳۲}=۸\times۴$

شصت بر ۶ $\underline{۶۷}=۳+(۴\times۴)+(۸\times۶)$

هشتاد بر ۸ $\underline{۸۲}=۶+(۳\times۴)+(۴\times۶)+(۸\times۵)$

صد بر ۱۰ $\underline{۱۰۲}=۸+(۳\times۶)+(۴\times۵)+(۸\times۷)$

پنجاه بر ۵ $\underline{۵۳}=۱۰+(۳\times۵)+(۴\times۷)$

$(۳\times۷)+۵=\underline{۲۶}$

بدیهی است عملیات فوق درذهن انجام میشود .

روش‌های مفید در تقسیم

تعریف ـ تقسیم درواقع روش سریع تفریق است. مثلا ۹ سه مرتبه از ۲۷ کاسته میشود . یا بعبارت دیگر ۲۷ به سه ۹ قسمت میگردد . وچون مسأله اساسی درتقسیم تعین عددیست که ضریب آن عدد درمقسوم‌علیه مساوی مقسوم گردد، ازاینرو برای تقسیم سریع اعداد بایستی درعملیات جمع ، تفریق وضرب اعداد مهارت داشت . ضمناً روش‌های مشروحه زیرین درتقسیم مفید است.

۱ـ هرعدد که بر ۱۰ یا قوای ۱۰ تقسیم شود، علامت اعشاری آن (ممیز) باندازه شمارهٔ نمایندهٔ قوه ۱۰ بسمت چپ میرود .

$$۴۳=۴۳۰۰\div۱۰^{۲}\quad و\quad ۵۴/۹۲=۵۴۹/۲\div۱۰$$

۲ـ بجای تقسیم عددی بر ۵ میتوان دوبرابر آن عدد را بر ۱۰ تقسیم نمود

$$۱۴۸۵\div۵=\frac{۱۴۸۵\times۲}{۱۰}=۲۹۷$$

۳ـ بجای تقسیم عددی بر ۲۵ میتوان چهار برابر آنرا بر ۱۰۰ تقسیم نمود .

$$۸۷۵\div۲۵=\frac{۸۷۵\times۴}{۱۰۰}=۳۵$$

۴ ـ بجای تقسیم عددی بر ۱۲۵ میتوان ۸ برابر آنرا بر ۱۰۰۰ تقسیم نمود .

$$۹۳۷۵\div۱۲۵=\frac{۹۳۷۵\times۸}{۱۰۰۰}=۷۵$$

روش کوتاه جمع وتفریق درکسر متعارفی

هرگاه مخرجهای دو کسر نسبت بهم اول (متباین) باشند بکاربردن روش زیر موجب تسریع درجمع دو کسر خواهد شد .

الف ـ $\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۲\times۴+۱\times۳}{۳\times۴}=\frac{۸+۳}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$

ب ـ $\frac{۲}{۷}+\frac{۳}{۵}=\frac{۱۰+۲۱}{۳۵}=\frac{۳۱}{۳۵}$

۲ـ همچنین هرگاه مخرجهای دو کسر متباین باشند روش زیردرتفریق آن دو کسر بکار میرود .

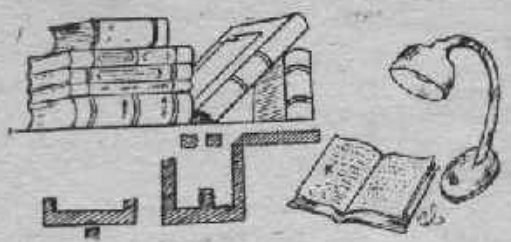
الف ـ $\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۳}=\frac{۳\times۳-۲\times۴}{۴\times۳}=\frac{۹-۸}{۱۲}=\frac{۱}{۱۲}$

ب ـ $\frac{۱۰}{۳}-\frac{۵}{۴}=\frac{۴۰-۱۵}{۳\times۴}=\frac{۲۵}{۱۲}=۲\frac{۱}{۱۲}$

بدیهی است عملیات فوق درذهن انجام میشود و چنانچه مخرجهای دو کسر متباین نباشند بهتر است کوچکترین مخرج مشترک تعیین ویا روش معمولی عمل شود .

برای نوشتن این مقاله کتاب ریاضیات بازرگانی تالیف برادران جمند دکتر حسین سمیعی تهرانی همکار استاد مؤسسه علوم اداری دانشگاه پنسیلوانیا ، و کتاب MATEMATICS ESSENTIAL FOR BUSINESS تألیف R . Snyder Llewellyn استاد کالج شهر سانفرانسیسکو استفاده شده است.

۵ دبیر ریاضیات شهبانو ـ حسین سمیعی تهرانی



حل المسائل عمومی ریاضیات

برای دانشجویان ـــ داوطلبان کنکور فنی ـ علوم ـ پلی تکنیک ـ کشاورزی

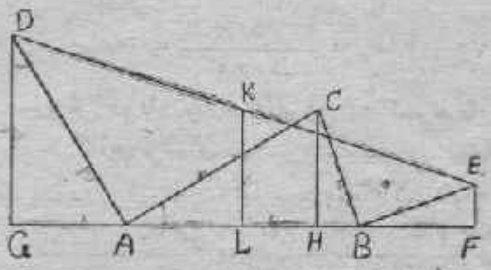
تألیف ـ باقر امامی

از انتشارات شرکت سهامی نشر اندیشه

حل مسائل مسابقه

حل مسألهٔ ۱۳۶ (مسابقهٔ دانش آموزان چهارم ریاضی)

خلاصهٔ صورت مسأله ـ در گنجنامه‌ای که بدست مردی افتاده است چنین ذکر شده است: درفلان جزیره چمنی مسطح است که در آن یك درخت صنوبر ویك درخت بلوط وجود دارد ویك چوبهٔ دار نصب شده است. برای یافتن گنج اول باید از چوبهٔ دار تا درخت بلوط رفت در آنجا باندازهٔ ۹۰ درجه براست پیچیده راهی باندازهٔ مسافت چوبهٔ دار تا درخت بلوط را پیمود ودر انتها یك علامت گذاشت. درثانی ازچوبهٔ دار تادرخت صنوبر رفته در آنجا باندازهٔ ۹۰ درجه بچپ پیچیده ومسافت دار تاصنوبر را پیموده علامت دوم را گذاشت گنج دروسط دوعلامت نهفته است. صاحب گنجنامه بجزیره میرود چمن ودرختان بلوط وصنوبر را می‌یابد اما از چوبهٔ‌دار اثری نیست. حال چگونه میتوان گنج را یافت.



حل ـ ثابت‌میکنیم محل گنج بستگی به‌محل چوبهٔ‌دار ندارد فرض می‌کنیم A جای درخت‌بلوط، B جای درخت‌صنوبر و C جای چوبهٔ دار، D علامت اول وE علامت دوم ودر نتیجه K وسط DE محل گنج باشد داریم.

$BC=BE$ و $\overset{\wedge}{CBE}=۹۰$ و $AC=AD$ و $\overset{\wedge}{DAC}=۹۰$

عمودهای CH و DG و KL و EF را بر AB رسم میکنیم دو زاویهٔ EBF و HCB برابرند چون هردومتمم زاویهٔ CBH میباشند ودومثلث قائم‌الزاویهٔ CBH و BEF درحالت تساوی وتر ویك زاویهٔ حاده متساوی بوده نتیجه میگیریم $BF=HC$ و $EF=BH$ وهمچنین دومثلث قائم‌الزاویهٔ CHA و ADG نیز متساوی بوده نتیجه میشود $AG=CH$ و $DG=AH$ ازمقایسهٔ تساویهای فوق نتیجه میگیریم:

اولاً $AG=BF$ ونقطهٔ وسط AB همان نقطهٔ وسط FG میباشد.

ثانیاً $DG+EF=AH+HB=AB$ (چنانچه H درخارج قطعه خط AB باشد دراین‌صورت خواهیم داشت.

$(|DG-EF|=|AH-BH|\quad AB$

در ذوزنقهٔ DGFE : اولاً چون KL ساق DE را نصف کرده وبا دو قاعده موازی است بنابراین ساق GF را نیز نصف مینماید یعنی L وسط GF ودرنتیجه وسط AB میباشد. ثانیاً طول قطعه خط KL برابر است بانصف مجموع دوقاعده:

$$KL=\frac{DG+EF}{۲}=\frac{AH+BH}{۲}=\frac{AB}{۲}$$

(درحالتیکه H خارج قطعه AB باشد KL اوساط دو قطر ذوزنقه را بهم وصل مینماید و برابراست بانصف تفاضل دو قاعده که بازهم برابرخواهد شد بانصف AB)

نتیجهٔ کلی آنکه جای گنج برعمود منصف AB بوده‌فاصلهٔ آن از وسط AB باندازهٔ نصف AB میباشد وبستگی بجای چوبهٔ دار ندارد.

پاسخ‌های صحیح رسیده از: بهروز توفیق سال‌چهارم ریاضی دبیرستان دارالفنون تهران ـ اسماعیل احمدیان چهارم ریاضی دبیرستان پهلوی ساری ـ محمد صادق دباغیان چهارم ریاضی دبیرستان پهلوی ساری

پاسخ رسیده بدون ذکر دلیل ازاصغر جمالی فرد چهارم ریاضی دبیرستان سعیدالعلماء تهران.

(بحکم قرعه آقای اسماعیل احمدیان برندهٔ یکسال اشتراك مجله میباشد)

***

حل مسأله ۱۳۷ (مسابقهٔ دانش آموزان پنجم ریاضی)

صورت مسأله ـ در یك سیم کشی دریائی، دو کشتی A و B از کشتی حامل قرقره‌های سیم که نزدیکیهای یك جزیره مستقر بوده است سیم دریافت داشته و بقصد دریا می‌انداخته‌اند بطوریکه در لحظات مختلف طول سیم واصل بین دو کشتی حامل قرقره‌ها و هر یك از دو کشتی A و B بایکدیگر مساوی بوده است با توجه باینکه سرعت حرکت کشتی‌ها یکنواخت و متساوی، جهت حرکت کشتی A از جزیره بسمت مشرق، جهت حرکت کشتی B ازجزیره بسمت شمال ودرلحظهٔ حرکت کشتی B ازجزیره کشتی A در فاصله ۲۰ کیلومتری شرق جزیره واقع بوده است موقعیت کشتی حامل قرقره‌ها را نسبت بجزیره معلوم نمائید.

حل ـ جزیره را مبداء مختصات فرض کرده با O نمایش میدهیم محور x'x را در جهت مغرب به شرق و محور y'y را در

جهت جنوب به شمال و هریك واحد محور را معادل با ۱۰ کیلو متر اختیار مینمائیم .

ثابت میکنیم که مسأله امکان‌پذیر است یعنی نقطه‌ای ثابت میتوان یافت که همواره A و B از آن بیك فاصله باشند ، اگر فاصلهٔ B را از جزیره با m نمایش دهیم مختصات نقاط A و B عبارت خواهد شد از A (۲+m و ۰) و B (۰ و m) و فرض میکنیم P (a و b) و ثابت میکنیم مقادیر a و b را میتوان چنان تعیین نمود که در ازاء جمیع مقادیر m داشته باشیم .

$$PA = PB \text{ یا } \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$(a-2-m)^2+b^2 = a^2+(b-m)^2$$

این رابطه را ساده نموده و نسبت به m مرتب مینمائیم .

$$2(b-a+1)m+1-2a=0$$

و رابطه وقتی بازاء جمیع مقادیر m بر قرار خواهد بود که داشته باشیم .

$$\begin{cases} b-a+1=0 \\ 1-2a=0 \end{cases}$$

و نتیجه خواهد شد $a=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{1}{2}$ یعنی نقطهٔ ثابت $P\left(\frac{1}{2} \text{ و } -\frac{1}{2}\right)$ وجود دارد که همواره از دو نقطهٔ A و B بیك فاصله است (میتوان معادله عمودمنصف AB را نوشت و ثابت کرد که همواره از نقطهٔ ثابت میگذرد)

بنا بر این موقعیت کشتی حامل قرقره‌ها ۱۰ کیلو متر شرق و ۱۰ کیلو متر جنوب جزیره میباشد .

پاسخ های صحیح رسیده از : مهدی ساجدی پنجم ریاضی دبیرستان پهلوی ساری ـ فرامرز رهبر پنجم ریاضی دبیرستان شرف تهران ـ فرشید سیروس پنجم ریاضی دبیرستان هدف شماره ۳ تهران ـ محمد روز به پنجم ریاضی دبیرستان رهنما تهران ـ مسعود دیده ور پنجم ریاضی دبیرستان ادیب تهران ـ فرخ پور حسن پنجم ریاضی دبیرستان ادیب تهران .

بهترین حل از آقای مهدی ساجدی است ایشان برنده یکسال اشتراك مجله میباشد .

✿ ✿ ✿

حل مسألهٔ ۱۳۸ ـ (مسابقهٔ دانش آموزان ششم ریاضی)

صورت مسأله : پرویز و خسرو و بیژن با یانوان خودبنامهای افسانه و پروانه ولاله بیازار رفته هریك تعدادی دستمال میخرند بطوری که تعداد دستمالهائی که هریك میخرد از لحاظ عدد مساویست با بهای یك دستمال بحسب ریال ، بنا بر آنکه جمع خرید هر مرد ۶۳ ریال بیش از جمع خرید خانمش باشد وبعلاوه پرویز ۲۳ دستمال بیش از پروانه و خسرو ۱۱ دستمال بیش از افسانه خریده باشد معلوم کنید هریك از خانمها بانوی کدامیك از آقایان میباشد .

تعداد دستمالهائی راکه یکی از مردها خریده است به x و تعداد دستمالهائی راکه بانوی وی خریده است به y نمایش میدهیم در این صورت خرید مرد x^2 و خرید زن y^2 خواهد بود و داریم .

$$x^2-y^2=63$$

$$(x+y)(x-y)=1\times 63=3\times 21=7\times 9$$

و سه دستگاه زیر حاصل خواهد شد .

$$\text{I}\begin{cases} x+y=63 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \text{II}\begin{cases} x+y=21 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \text{III}\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=7 \end{cases}$$

جوابهای دستگاه اول ($x=32$ و $y=31$) و از دستگاه دوم ($x=12$ و $y=9$) و از دستگاه سوم ($x=8$ و $y=1$) میباشد چون $23=9-32$ پس ۳۲ متعلق به پرویز و ۹ متعلق به پروانه میباشد و چون $11=1-12$ بنا بر این ۱۲ متعلق به خسرو و ۱ متعلق به افسانه و از آنجا ۸ متعلق به بیژن و ۳۱ متعلق به لاله میباشد و چون ۳۲ و ۳۱ جوابهای یك دستگاه هستند پس پرویز و لاله همسر یکدیگرند و همچنین خسرو و پروانه و بالاخره بیژن و افسانه همسر میباشند .

(مسأله با تغییر نامها از مجلهٔ « واحد » مجلهٔ ریاضیات چاپ آذر ۱۳۰۹ نقل شده است)

پاسخ‌های صحیح رسیده از : محمد خطیبی دبیرستان رضاشاه کبیر تبریز ـ غلامحسین راستگو دبیرستان رضا شاه‌کبیر تبریز شهباز آذر کده دبیرستان خوارزمی تهران ـ فریدون ایرانی دبیرستان رضا شاه‌کبیر تبریز ـ حق نواز دبیرستان قناد بابل ـ منصور زاهدی شاهرود ـ میرابراهیم سیدگرگانی دبیرستان رضا شاه‌کبیر تبریز ـ محمد قلی چراغعلی دبیرستان امیرکبیر تویسرکان ـ فاطمه ارجمند ساوجی دبیرستان نوباوگان ضرابی تهران ـ عصمت قراگزلو دبیرستان نوباوگان ضرابی تهران ـ مهدی ساجدی و پنجم ریاضی پهلوی ساری ـ پریچهر میرزا پور دبیرستان نوباوگان ضرابی تهران ـ مهدی حکمی دبیرستان رازی آبادان .

بحکم قرعه آقای منصور زاهدی برندهٔ یکسال اشتراك مجله میباشد

***

حل مسألهٔ ۱۳۹ (مسابقهٔ فارغ‌التحصیلان رشتهٔ ریاضی)

حل معادلهٔ مثلثاتی زیر .

$$2\sin\frac{x}{7}-3tg^2\left(\frac{3x}{5}+\frac{3\pi}{10}\right)-2=0$$

خواهیم داشت :

$$\sin\frac{x}{7}=1+\frac{3}{2}tg^2\left(\frac{2x}{5}+\frac{3\pi}{10}\right)$$

$tg^2\left(\frac{2x}{5}+\frac{3\pi}{10}\right)$ منفی نمیتواند باشد وچون $\sin\frac{x}{7}$ نمیتواند بزرگتر از یك باشد بنابراین تساوی وقتی بر قرار خواهد بود که داشته باشیم .

$$tg^{2}\left(\frac{3x}{5}+\frac{3\pi}{10}\right)=0 \quad (1)$$

که نتیجه خواهد شد .

$$\sin\frac{x}{7}=1 \quad (2)$$

و باید مقدار x را چنان تعیین کرد که دو رابطهٔ (۱) (۲) باهم برقرار باشد. ازرابطهٔ(۱) بدست میآید که

$$\frac{3x}{5}+\frac{3\pi}{10}=k_1\pi \text{ و } x=\frac{5}{3}k_1\pi-\frac{\pi}{2}$$

و از رابطهٔ (۲) نتیجه میشود .

$$\frac{x}{7}=2k_2\pi+\frac{\pi}{2} \text{ و } x=14k_2\pi+\frac{7\pi}{2}$$

اکنون باید معلوم نمود k_1 و k_2 که اعداد صحیح هستند برابر باچه مقادیری باشند که داشته باشیم .

$$\frac{5K_1\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=14k_2\pi+\frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{5K_1}{3}-\frac{1}{2}=14k_2+\frac{7}{2}$$

$$\frac{5K_1}{3}=14K_2+4$$

$$5K_1=42K_2+12$$

$$K_1=\frac{42K_2+12}{5}=8K_2+2+\frac{2K_2+2}{5}$$

برای اینکه K_1 عدد صحیح باشد باین $2K_2+2$ مضرب ۵ باشد .

$$2K_2+2=5K_3 \text{ و } K_2=\frac{5K_3-2}{2}=$$

$$2K_2-1+\frac{K_3}{2}$$

و K_3 باید مضرب ۲ باشد که فرض میکنیم $K_3=2K$ ونتیجه خواهد شد .

$$K_2=5K-1 \text{ و } K_1=42K-6$$

و برای x مقدارزیر بدست میآید .

$$\boxed{x=70K\pi-\frac{21\pi}{2}}$$

پاسخهای رسیده از : فرخ پورحسن پنجم ریاضی دبیرستان ادیب تهران ـ مسعود دیده‌ور پنجم ریاضی دبیرستان ادیب تهران ـ شهباز آذرکده ششم ریاضی دبیرستان خوارزمی تهران

(بحکم قرعه آقای شهباز آذرکده برنده یکسال اشتراك مجله میباشد)

* * *

حل مسألهٔ ۴۹۷ (مسابقهٔ شمارهٔ دوم)

x و y دوعدد دلخواه مخالف صفر میباشد . صحت رابطهٔ

$$\frac{|xy|}{xy}+\frac{|x-y|}{x-y}\left[\frac{|x|}{x}-\frac{|y|}{y}\right]=1$$

برحسب اینکه x و y متحد العلامت یا مختلف العلامت باشند دوحالت در نظر میگیریم .

حالت اول . x و y هم‌علامت باشند .دراین‌صورت داریم:

$$|xy|=xy \text{ وازآنجا } \frac{|x|}{x}=\frac{y}{|y|} \text{ یا } \frac{|x|}{x}=\frac{y}{|y|}$$

و بالاخره $\frac{|x|}{x}-\frac{|y|}{y}=0$ مقدارعبارت‌داخل کروشه صفرشده وحاصل عبارت مساوی میشود با

$$\frac{|xy|}{xy}=1$$

حالت دوم x و y مختلف‌العلامت باشند .در این‌صورت داریم .

$$|xy|=-xy \text{ وازآنجا } \frac{|x|}{x}=-\frac{|y|}{y} \text{ یا } \frac{|x|}{x}=-\frac{y}{|y|}$$

ازطرف دیگر داریم

$$|x-y|=|x|+|y| \text{ و میتوانیم بنویسیم :}$$

$$\frac{|x|}{x}=\frac{|y|}{-y}=\frac{|x|+|y|}{x-y}=\frac{|x-y|}{x-y}$$

وعبارت مفروض بصورت زیر نوشته میشود :

$$\frac{|xy|}{xy}+\frac{|x|}{x}\times 2\frac{|x|}{x}=\frac{|xy}{xy}+2\times\frac{|x^2|}{x^2}$$

$$=-1+2\times 1=1$$

پاسخهای صحیح رسیده از : عصمت فراگزلو ششم ریاضی دبیرستان نوباوگان ضرابی تهران ـ م اسلامی ششم ریاضی دبیرستان نوباوگان ضرابی تهران ـ عشرت خیرخواه چهارم طبیعی دبیرستان شاهدخت بابل ـ محمد آگاه چهارم ریاضی دبیرستان دارالفنون تهران ـ خسرو موحد چهارم ریاضی دبیرستان ادیب تهران ـ رضا منصوری پنجم ریاضی دبیرستان‌رهنما ـ جمشیدآزادین ششم‌ریاضی دبیرستان‌شاهپور شیراز ـ فیروز بایرامی چهارم ریاضی دبیرستان ادیب تهران نصرالله اعتمادی ـ عبدالله‌کوبالی ششم ریاضی دبیرستان‌سعدی اصفهان ـ علی بنی هاشم ششم ریاضی دبیرستان جلوه تهران محمد صادق انواری چهارم ریاضی دبیرستان هدف۳ تهران ـ فرامرز رهبر پنجم ریاضی دبیرستان شرف تهران ـ اسماعیل عباسی چهارم طبیعی دبیرستان فردوسی تبریز ـ حق‌نوازششم ریاضی‌دبیرستان‌فناد بابل ـ منصورزاهدی‌ششم ریاضی‌شاهرود بهمن دولتشاهی پنجم ریاضی دبیرستان مروی تهران ـ مهدی سامع‌دیپلمه ریاضی اصفهان ـ اصلی‌زاده‌سال‌اول معماری‌دانشگاه ملی تهران ـ حسن رزاقی‌خمسی سال اول مکانیك دانشکده‌فنی تهران ـ تیمور عموئی‌سال اول‌ریاضی دانشکده علوم ـ مصطفی گودرزی سال سوم ریاضی دانشکده علوم ـ بیوك میر فتاحی سال چهارم دانشکده تهران .

پاسخهای رسیده از : ابراهیم سیگوگانی ششم ریاضی دبیرستان رضاشاه کبیر تبریز ـ محمود گلستانی پنجم ریاضی دبیرستان جم قلهک ـ حسن ریاضی پنجم ریاضی دبیرستان ایران ما عباسعلی شکری پنجم ریاضی دبیرستان رازی شاهی ـ حسن ارشام پنجم دبیرستان ابن یمین مشهد ـ ضیاء امین التولیه ـ اسماعیل دشیدی چهارم ریاضی دبیرستان خسروی مشهد ـ آخوندی پنجم ریاضی دبیرستان مرآت تهران ـ علیرضا پژوهش

(بحکم قرعه آقای بهمن دولتشاهی برندهٔ یکسال اشتراك مجله میباشد)

***

دربارهٔ مسائل مسابقهٔ ممتاز

درشمارهٔ اول مجله دو مسأله بمسابقهٔ ممتاز گذارده شد اولی بشمارهٔ ۱٤۰ بشرح زیر :

مطلوبست تعیین رابطهٔ مستقل از α بین x و y بفرض :

$$\begin{cases} x = \sin\alpha + \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \\ y = \cos\alpha + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \end{cases}$$

متأسفانه درچاپ دوم شمارهٔ اول علامتهای (+) درهر دو رابطه ازقلم افتاده ودرنتیجه مسألهٔ یك مسأله ساده تبدیل شده است و عده‌ای از خوانندگان حل مسألهٔ رادرهمین حالت ساده ارسال داشته‌اند . پاسخ های دیگری که دربارهٔ حل این مسأله واصل شده است اغلب روابطی با رادیکالهای مرکب نسبت به y و x بدست آورده‌اند .

مسألهٔ دوم مسابقهٔ ممتاز شمارهٔ اول مسألهٔ معروف الحسن بود که بشمارهٔ ۱٤۱ چاپ گردید بشرح زیر :

دایرهٔ بمرکز O و نقطهٔ A واقع درداخل آن مفروض است مطلوبست رسم مثلث ABC بقسمی که رأسهای B و C بر محیط دایره قرار داشته نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث بر O مرکز دایره منطبق باشد .

چندین پاسخ که دربارهٔ حل این مسأله واصل شده است ازراههای جبری و تحلیلی استفاده شده است و هنوز حتی یك پاسخ که مطلقاً از استدلال هندسی استفاده شده باشد واصل نگردیده است علیهذا :

حل دو مسألهٔ فوق مجدداً بمسابقه گذارده میشود ومهلت قبول پاسخ تا آخر مردادماه ۱۳۴۳ تعیین می گردد ومتذکر میشود که برای حل کنندهٔ هر یك از دو مسألهٔ فوق جایزه‌ای ممتاز منظور شده است فراموش نفرمائید فقط حل هندسی مسألهٔ الحسن قابل قبول میباشد .

یکان

ارائه روابط و روشهای جدید

تعمیم رابطهٔ اویلر (Euler)

۱ـ اتحاد اویلر :

$$(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+$$
$$+(x-c)(a-b)\equiv 0$$

و بصورت دیگر : اگرچهار نقطهٔ A و B و C و P روی یك محور واقع باشند نتیجه میشود :

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=0$$

۲ـ تعمیم

اولا صحت اتحاد زیر را ثابت کنید .

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{m-2})(x-x_{m-1})(x-x_m)$$
$$+(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{m-1})(x-x_m)(x-x_1)+$$
$$+\cdots+$$
$$+(x-x_m)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{m-3})\times$$
$$(x-x_{m-2})(x-x_{m-1})\equiv 0$$

ثانیاً اگر نقاط A_1 و A_2 و ... و A_m و P روی یك محور واقع باشند ثابت کنید :

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\overline{PA_{m-2}}\cdot\overline{A_{m-2}A_{m-1}}\cdot\overline{A_{m-1}A_m}+\overline{PA_2}\cdot$$
$$\overline{PA_3}\cdots\overline{PA_{m-1}}\cdot\overline{A_{m-1}A_m}\cdot\overline{A_mA_1}+\cdots+$$
$$\overline{PA_m}\cdot\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\overline{PA_{m-3}}\cdot\overline{A_{m-3}A_{m-2}}\cdot\overline{A_{m-2}A_{m-1}}=0$$

سیروس فخریاسری

***

آقای محمود میرزائی دیپلمهٔ ریاضی فرمولی برای تعیین تابع اولیهٔ نوعی ازتوابع مثلثاتی ارائه داده‌است امادلیل خود را بیان نداشته‌است و همچنین روابط زیر را بین x_1 و x_2 قدر مطلقهای ریشه‌های معادلهٔ مجذوری $ax^2+bx^2+c=0$ ارائه داده است .

$$x_1+x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{4ac}-b}{a}} \quad \text{و} \quad x_1x_2=\sqrt{\frac{c}{a}}$$

***

آقای حسین سیفلو فارغ التحصیل ششم ریاضی ازخوی دوشی برای تعیین مجذور اعداد ارائه داده است .

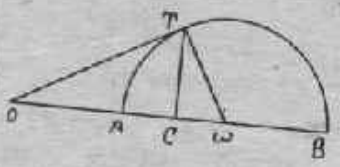
حل مسائل متفرقهٔ شماره‌های گذشته

حل مسألهٔ ۹۶ـ تعریف ـ اگر داشته باشیم

$x=\frac{a+b}{2}$ و $y=\sqrt{ab}$ و $\frac{2}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ مقادیر x و y و z

را به ترتیب **واسطهٔ حسابی ، واسطهٔ هندسی و واسطهٔ توافقی** بین دو مقدار a و b مینامند .

ترسیم ـ بر یك خط ابتدا



از یك نقطهٔ o و دریك جهت قطعه خطهای OA و OB را بترتیب برابر با a و b جدا مینمائیم (چنانچه a و b مقادیر جبری فرض شود از رابطهٔ $y=\sqrt{ab}$ معلوم میشود که a و b باید همعلامت باشند) بقطر AB نیمدایره‌ای رسم نموده مماس OT را بر آن رسم و TC را بر AB عمود مینمائیم اگر ω وسط AB باشد خواهیم داشت :

$$\overline{O\omega}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}=\frac{a+b}{2}$$

$$\overline{OT}^2=\overline{OA}.\overline{OB} \text{ یا } OT=\sqrt{ab}$$

$$\frac{2}{\overline{OC}}=\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

(رابطه دکارت در تقسیم توافقی)

بنا بر این :

$$x=\overline{O\omega} \text{ و } y=\overline{OT} \text{ و } z=\overline{OC}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OT\omega$ خواهیم داشت $OT<O\omega$

و درمثلث قائم‌الزاویهٔ OTC داریم $OC<oT$ بنابراین :

$$|z|<|y|<|x|$$

حل جبری ـ

$$x^2-y^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{4}-ab=\frac{a^2+b^2-2ab}{4}=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{4}>0$$

و نتیجه میشود $x^2-y^2>0$ یا $|x|>|y|$

$$\frac{2}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$

وداریم :

$$\frac{1}{z}=\frac{\frac{a+b}{2}}{ab}=\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{x}{y} \text{ یا } \frac{|y|}{|z|}=\frac{|x|}{|y|}$$

وچون داشتیم $|x|>|y|$ وکسرطرف دوم تساوی بزرگتر از واحد بوده و نتیجه میشود $|y|>|z|$ بنابراین خواهیم داشت .

$$|x>|y>|z|$$

اگر a و b مقادیر مثبت باشند دراین صورت x و y و z نیز مقادیر مثبت بوده و داریم

$$x>y>z$$

حل مسألهٔ ۹۸ـ از تساوی $\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c}$ نتیجه‌شود که :

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma)(a^2+b^2+c^2)=(\alpha a+\beta b+\gamma c)^2$$

فرض میکنیم :

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c}=k \qquad (1)$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2}=\frac{\beta^2}{b^2}=\frac{\gamma^2}{c^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{a^2+b^2+c^2}=$$ نتیجه خواهد شد .

$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}=k^2$$

و نتیجه میشود :

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(a^2+b^2+c^2)=$$
$$k^2(a^2+b^2+c^2)^2 \qquad (2)$$

در رابطهٔ (۱) صورت و مخرج کسر اول را در a و از دوم را در b و سوم را در c ضرب مینمائیم :

$$\frac{\alpha a}{a^2}=\frac{\beta b}{b^2}=\frac{\gamma c}{c^2}=\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a^2+b^2+c^2}=K$$

$$(\alpha a+\beta b+\gamma c)^2=k^2(a^2+b^2+c^2)^2 \qquad (3)$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۲) و (۳) نتیجه میشود :

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(a^2+b^2+c^2)=(\alpha a+\beta b+\gamma c)^2$$

حل از : قاسم اخوان ششم ریاضی دبیرستان خوارزمی‌ـ پاسخ صحیح رسیده از : محمد علی محدثی نجفی همدان

حل مسألهٔ ۹۹ـ بفرض اینکه a و b و c سه‌عدد مثبت باشند اثبات صحت رابطهٔ زیر :

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

واسطهٔ عددی دوعدد مثبت متمایز از واسطهٔ هندسی آنها بزرگتراست (حل مسألهٔ ۹۶):

$$\left|\begin{array}{l} \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \\ \frac{b+c}{2} > \sqrt{bc} \\ \frac{c+a}{2} > \sqrt{ca} \end{array}\right. \quad \text{یا} \quad \left|\begin{array}{l} a+b > 2\sqrt{ab} \\ b+c > 2\sqrt{bc} \\ c+a > 2\sqrt{ca} \end{array}\right.$$

طرفین سه تساوی فوق را نظیر بنظیر در یکدیگر ضرب مینمائیم .

$$(a+b)(b+c)(c+a) > 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$$

حل از قاسم اخوان ششم ریاضی دبیرستان خوارزمی

حل مسألهٔ ۱۰۰ـ a و b و c و x و y و z شش عدد مثبت و بعلاوه a و b و c اعداد صحیح میباشند . اثبات اینکه اگر b واسطهٔ عددی بین a و c و بعلاوه y واسطهٔ هندسی بین x و z باشد خواهیم داشت .

$$x^b y^c z^a = x^c y^a z^b$$

رابطه فوق را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b} = 1$$

و بنا بفرض داریم :

$$2b = a+c \text{ یا } a-b = b-c \text{ و } y^2 = xz$$

و نتیجه خواهد شد .

$$x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b} = x^{b-c} y^{c-a} z^{b-c} =$$

$$= (xz)^{b-c} y^{c-a} = (y^2)^{b-c} y^{c-a} =$$

$$= y^{2b-2c+c-a} = y^{2b-(a+c)} =$$

$$= y^0 = 1$$

پاسخهای صحیح رسیده از : محمد علی محدثی نجفی همدان ـ قاسم اخوان ششم ریاضی دبیرستان خوارزمی

حل مسألهٔ ۱۰۱ـ حل معادلهٔ

$$2^{x-y-1} \times 5^{x-2y+1} = 20^{y-x+4}$$

(چنانچه استاد دکتر هشترودی توضیح داده‌اند و توضیح ایشان در شمارهٔ دوم مجله صفحهٔ ۵۸ بچاپ رسید منظور تعیین جوابهای منطق معادله میباشد یعنی تعیین مقادیری از x و y که در معادله صدق کرده و بعلاوه سه عبارت $2x-y-1$ و $x-2y+1$ و $y-x+4$ برابر مقادیر صحیح مثبت ، منفی یا صفر باشند) .

با توجه اینکه $20 = 2^2 \times 5$ خواهیم داشت .

$$2^{2x-y-1} \times 5^{x-2y+1} = (2^2)^{y-x+4} \times$$

$$\times 5^{y-x+4} = 2^{2y-2x+8} \times 5^{y-x+4}$$

$$2^{2x-y-1-(2y-2x+8)} \times$$

$$\times 5^{x-2y+1-(y-x+4)} = 1$$

پس از اختصار نتیجه خواهد شد .

$$2^{4x-3y-9} \times 5^{2x-3y-3} = 1$$

$$2^{4x-3y-9} = 5^{3y-2x+3}$$

و چون پایه‌ها نسبت بهم اول بوده ونماها اعداد صحیح میباشند تساوی وقتی برقرار خواهد بود که :

$$\begin{cases} 4x-3y-9=0 \\ -2x+3y+3=0 \end{cases}$$

و از حل این این دستگاه مقادیر $x=3$ و $y=1$ بدست میآید که در ازاء آنها خواهیم داشت $2^4 \times 5^2 = 20^2$

پاسخ صحیح رسیده از قاسم اخوان ششم ریاضی دبیرستان خوارزمی

حل مسألهٔ ۱۰۳ـ حل و بحث معادلهٔ زیر :

$$5\sqrt{|x|-x} = m-2x$$

با توجه به $|x|$ دو حالت باید درنظر بگیریم :

حالت اول ـ x مثبت باشد در اینصورت $|x| = x$ بوده و معادلهٔ مفروض بصورت $m-2x=0$ درمیآید که از آن نتیجه میشود $x = \frac{m}{2}$ و چون x مثبت فرض شده است لذا جواب وقتی قبول خواهد بود که $m > 0$ باشد .

حالت دوم ـ x منفی باشد در این صورت $|x| = -x$ و معادلهٔ مفروض چنین نوشته میشود .

$$5\sqrt{-2x} = m-2x$$

و حل این معادله منجر میشود بحل معادلهٔ شرطی زیر

$$\begin{cases} -50x = (m-2x)^2 \\ m-2x > 0 \end{cases} \quad \text{یا}$$

$$\begin{cases} f(x) = 4x^2 - 2(2m-25)x + m^2 = 0 \\ x < \frac{m}{2} \end{cases}$$

معادلهٔ $f(x)=0$ وقتی جواب دارد که :

$$\Delta=(2m-25)^2-4m^2=-25(4m-25)>0$$

و نتیجه خواهد شد $m<\frac{25}{4}$ که در این‌صورت

$-\frac{b}{a}<0$ و $\frac{c}{a}>0$ بوده‌وهردوجواب معادله‌منفی‌میباشد .

$$af(\frac{m}{2})=4[m^2-m(2m-25)+m^2]=100m$$

اولاً اگر $0<m<\frac{25}{4}$ باشد در این صورت :

$$\Delta>0 \quad \frac{c}{a}>0 \quad -\frac{b}{a}<0 \quad af(\frac{m}{2})>0$$

معادله دارای دو جواب قابل قبول

$$x''<x'<0<\frac{m}{2}$$

میباشد .

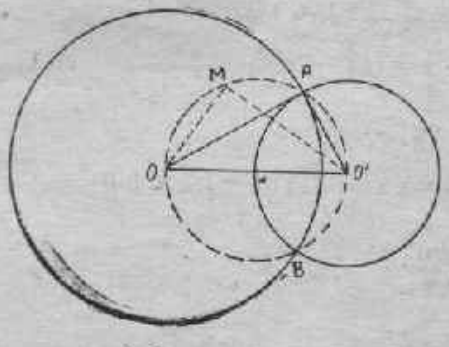
ثانیاً اگر $m<0$ باشد $af(\frac{m}{2})<0$ بوده و $\frac{m}{2}$ بین ریشه‌ها است یعنی $x''<\frac{m}{2}<x'$ و جواب کوچکتر معادله‌قابل قبول میباشد .

ثالثاً اگر $m=0$ باشد $f(\frac{m}{2})=0$ و یکی از ریشه‌ها برابر با $\frac{m}{2}$ یعنی برابر با صفر بوده وجواب دیگرآن برابر خواهد شد با $x''=-\frac{25}{2}$

بالاخره اگر $m=\frac{25}{4}$ باشد $\Delta=0$ ومعادله‌دارای‌ریشهٔ مضاعف $x''=-\frac{25}{8}$ میباشد .

پاسخ رسیده از محمد علی محدثی نجفی ــ همدان

حل مسألهٔ ۱۰۶ــ اگر دودایرهٔ O و O' بریکدیگرعمود باشند دایرهٔ بقطر OO' مکان هندسی نقاطی است که مجموع قوتهای آنها نسبت به‌دو دایره برابربا صفراست. دایرهٔ بقطر OO' را ω مینامیم . چنانچه M نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ ω باشد



قوت M نسبت به‌دایرهٔ O برابر خواهد بود با $\overline{MO}^2-R^2$ و قوت M نسبت به‌دایرهٔ O' برابر است با $\overline{MO'}^2-R'^2$ لذا مجموع قوتها برابر خواهد شدبا

$$\overline{MO}^2+\overline{MO'}^2-(R^2+R'^2)$$

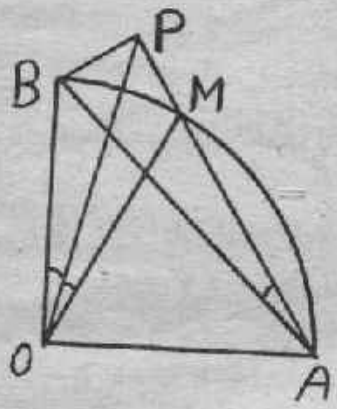
درمثلث قائم‌الزاویهٔ OMO' داریم $\overline{OO'}^2$ $R^2+R'^2$

لذا مجموع قوتهای نقطهٔ M نسبت‌به دودایره برابر است با

$$\overline{OO'}^2-\overline{OO'}^2=0$$

بر عکس اگر M نقطه‌ای باشد که مجموع قوت‌های‌آن نسبت به‌دو دایرهٔ O و O' برابر باصفر باشد خواهیم داشت $\overline{MO}^2+\overline{MO'}^2-(R^2+R'^2)=0$ وچون $R^2+R'^2=\overline{OO'}^2$ است‌نتیجه‌میشود $\overline{MO}^2+\overline{MO'}^2=\overline{OO'}^2$ یعنی M بردایرهٔ بقطر OO' واقع است .

حل مسألهٔ ۱۰۷ ــ ربع دایرهٔ AOB مفروض است

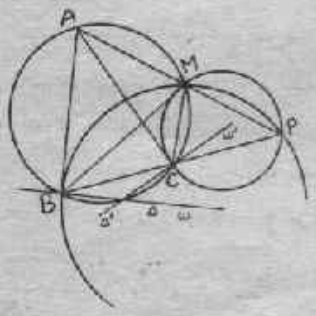


M نقطه‌ایست ازکمان AB . خط AM و BOM نیمساز زاویهٔ یکدیگر را در P تلاقی مینمایند مطلوب تعیین مکان‌هندسی نقطهٔ P است وقتی که M کمان AB را طی کند .

اندازهٔ زاویهٔ BAM برابر است با نصف اندازهٔ کمان BM و اندازهٔ زاویهٔ POB نیز برابربا نصف اندازهٔ کمان BM است .

بنابراین دو زاویهٔ BAP و BOP دو زاویهٔ مقابل به یك ضلع ازچهار ضلعی APBO متساوی بوده این چهارضلعی محاطی میباشد ونتیجه خواهد شدکه APB زاویهٔ قائمه بوده درنتیجه مکان P دایرهٔ بقطر AB میباشد .

حل مسألهٔ ۱۰۸ ــ مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ مفروض‌است. M نقطه‌ایست‌واقع‌بردایرهٔ‌محیطی مثلث و P نقطهٔ تلاقی AM باضلع BC یاامتدادآن . مطلوب تعیین مکان هندسی مراکز دوایر محیطی دو مثلث BPM و CPM است وقتی که M محیط دایره محیطی مثلث رابپیماید.



داریم :

$$\hat{ABM}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$$

$$\hat{APB}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CM})$$

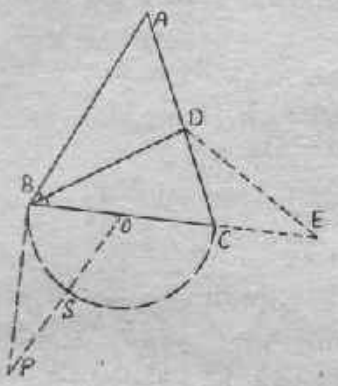
وچون $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$ پس

$$\overset{\wedge}{APB}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{CM})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$$

درنتیجه در زاویهٔ ABM و APB با یکدیگر مساویند (چنانچه P بین B و C واقع باشد اثبات تساوی دو زاویهٔ فوق بطریق مشابه انجام میگیرد).

در دایره‌ای که برسه نقطهٔ B و M و P گذشته باشد زاویهٔ APB محاطی است و اندازه‌اش برابر با نصف اندازهٔ کمان BM میباشد وچون اندازهٔ زاویهٔ ABM نیز با نصف اندازهٔ همین کمان مساوی میشود و BM وتری از دایره میباشد لذا AB در نقطهٔ B بر دایرهٔ محیطی مثلث BMP مماس میباشد و از این رو مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BMP خطی است که در نقطهٔ B بر AB عمود باشد وبهمین ترتیب ثابت خواهد شد دایرهٔ محیطی مثلث CMP در نقطهٔ C بر AC مماس بوده مکان هندسی مرکز آن خطی است که در نقطهٔ C بر AC عمود باشد.

حل مسألهٔ ۱۰۹ ــ مطابق رسم مثلث متساوی‌الساقین



که از آن طول قاعده و طول نیمساز زاویهٔ مجاور بقاعده معلوم است. چنانچه مثلث $(AB=BC)ABC$ مثلث مطلوب باشد که در آن قاعدهٔ $BC=2a$ و نیمساز زاویهٔ B یعنی $BD=d$ برابر با مقادیر داده شده باشد چون BC را از طرف C باندازهٔ $CE=CD$ امتداد دهیم خواهیم داشت .

$$\overset{\wedge}{DEC}=\overset{\wedge}{CDE}=\frac{1}{2}\hat{A}\overset{\wedge}{BC}=\overset{\wedge}{DBC}$$

و دومثلث متساوی‌الساقین BDE و DCE متشابه بوده نتیجه میشود .

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BE}{DE}\quad\text{یا}\quad\frac{d}{x}=\frac{2a+x}{d}$$

که $CD=x$ فرض شده است ویا

$$d^2=x(2a+x)\qquad(1)$$

دو مقدار x و $2a+x$ دارای تفاضل $2a$ وواسطهٔ هندسی d میباشند که براههای مختلف میتوان مقدار x را تعیین کرد از جمله آنکه دایره‌ای بقطر $2a$ BC رسم نموده در نقطهٔ B مماس $BP=d$ را برآن رسم مینمائیم از P که بمرکز دایره وصل شود در نقطه‌ای مانند S (بین P و مرکز) دایره را قطع مینماید $PS=x$ خواهد بود و مثلث BCD با معلومات سه ضلع ساخته شده از روی آن مثلث ABC حاصل میشود .

بحث ــ اولاً از رابطهٔ (۱) همواره برای x یك مقدار بدست میآید . ثانیاً مقدار x وقتی قابل قبول خواهد بود که بتوان مثلث BCD را تشکیل داد یعنی باید داشته باشیم .

$$|2a-d|<x<2a+d$$

و چنانچه فرض کنیم .

$$f(x)=x^2+2ax-d^2$$

لازم وکافیست که

$$f(2a+d)f(|2a-d|)<0$$

که پس از اختصار نتیجه خواهد شد

$$d>\frac{4}{3}a$$

ارسال مسأله و حل از : مهدی بیزاد

حل مسأله ۱۱۰ ــ تعیین حاصل عبارت زیر

$$x=\frac{\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\cdots}}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\cdots}}}}}$$

چنانچه حاصل صورت را با A و حاصل مخرج را با B نمایش دهیم نتیجه خواهد شد .

$$A^2=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\cdots}}}=\frac{3}{4}+A$$

$$A^2-A-\frac{3}{4}=0$$

که جواب مثبت معادله قابل قبول است و نتیجه میشود .

$$A=\frac{3}{2}$$

و بترتیب فوق جواب $B=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ بدست میآید

در نتیجه

$$x=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\frac{3}{1+\sqrt{2}}=\cdots=3(\sqrt{2}-1)$$

طرح وحل مسأله از ــ محمد داوری

پاسخ‌های صحیح رسیده از: سیداشرف‌امجدی پنجم‌ریاضی دبیرستان رهنما ــ محمدعلی محدثی نجفی همدان

حل مسألهٔ ۱۱۱ ــ حل دستگاه دو معادلهٔ

$$\begin{cases}x^2+y=\frac{17}{27}\\ x+y^2=\frac{19}{27}\end{cases}$$

دو معادله را بصورت زیر مینویسیم

$$\begin{cases} x^3-\frac{8}{27}+y-\frac{1}{3}=0 \\ x-\frac{2}{3}+y^3-\frac{1}{27}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-\frac{2}{3})(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9})+(y-\frac{1}{3})=0 \\ (x-\frac{2}{3})+(y-\frac{1}{3})(y^2+\frac{1}{3}y+\frac{1}{9})=0 \end{cases}$$

که چون از معادلهٔ اول مقدار $y-\frac{1}{3}$ رابدست آورده

و در معادلهٔ دوم قرار دهیم حاصل خواهد شد .

$$(x-\frac{2}{3})\ [1-(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9})(y^2+\frac{1}{3}y+\frac{1}{9})]$$

$$=0 \quad (1)$$

از این رابطه نتیجه خواهد شد $x=\frac{2}{3}$ و در ازاء این

مقدار x از معادلهٔ اول برای y مقدار $y=\frac{1}{3}$ بدست میآید .

محمدداوری

تبصره ـ اعمال فوق را نمیتوان حل کامل دستگاه نامید بلکه فقط جوابی از دستگاه بدست‌آمده است چنانچه در رابطهٔ (۱) اینکه آیا عبارت داخل کروشه‌میتواند برابر صفر باشدیانه مسکوت گذارده شده است .

حل مسأله ۱۱۲ ـ تعیین x از معادلهٔ

$$\log_3 x^2+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\sqrt[3]{3x}} \frac{1}{\sqrt{3}}=\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$$

از تساوی $a^x=N$ (که در آن a و N مقادیرمثبت هستند)

نتیجه خواهد شد $(a^n)^n=N$ یعنی

$$\log_a N=\log_a \sqrt[n]{N}$$

و بااستفاده از این خاصیت خواهیم داشت

$$\log_{\sqrt{3}} x=\log_3 x^2 \text{ و } \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{x}=\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^3}$$

$$\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt{3}=\log_3 4$$

و معادلهٔ داده شده بصورت زیر در میآید .

$$\log_3 x^2+\log_3 x^2+\log_3 \frac{1}{x^3}=\log_3 4$$

$$\log_3 \frac{x^2 \cdot x^2}{x^3}=\log_3 4 \quad \text{و} \quad \log_3 x=\log_3 4$$

در نتیجه $x=4$

طرح و حل از : **حبیب‌الله‌عبداللهی**

حل مسأله ۱۱۳ ـ مطلوبست حل معادلهٔ درجهٔ سوم

$$27x^3+27x^2-3(m-8)x-m^3=0$$

اولا وقتی که سه ریشه تصاعد عددی تشکیل دهند

ثانیاً وقتی که سه ریشه تصاعد هندسی تشکیل دهند

اولا ـ هرگاه سه‌ریشه معادله را با $u-v$ و u و $u+v$ نمایش دهیم بااستفاده ازروابط بین ضرائب و ریشه‌های معادله درجه سوم خواهیم داشت .

$$\begin{cases} (u-v)+u+(u+v)=-1 \\ (u-v)u+(u-v)(u+v)+ \\ +u(u+v)=-\frac{3(m-8)}{27} \\ u(u+v)(u-v)=-\frac{m^3}{27} \end{cases}$$

بعداز حذف u و v بین روابط فوق به معادله

$$m^3-m+6=0$$

خواهیم رسید که می‌توان نوشت

$$m^3+2m^2-2m^2-4m+3m+6=0$$

ویا $(m+2)(m^2-2m+3)=0$ پس

$$\boxed{m=-2}$$

وازآنجا $27x^3+27x^2+30x+8=0$

میدانیم $2u=-1$ ویا $u=-\frac{1}{3}$ واز

این‌دو دوریشه دیگرتعیین خواهند گردید.

ثانیاً ـ هرگاه قدرنسبت این تصاعد رابه r نمایش دهیم

در این‌صورت سه ریشه معادله رامی‌توان بصورت $\frac{\alpha}{r}$ و α و $r\alpha$ نوشت پس $\frac{m^3}{27}=(\frac{\alpha}{r})(\alpha)(r\alpha)$ ویا $\alpha^3=\frac{m^3}{3^3}$ یعنی

$$\boxed{\alpha=\frac{m}{3}}$$

ازطرفی باقرار دادن این مقدار درمعادله مفروض

حواهیم داشت $\alpha^3-\frac{3(m-8)}{27}\alpha+(\alpha^3-\frac{m^3}{27})=0$ یعنی

$\alpha^2-\frac{m-8}{9}\alpha=0$ وازآنجا $\alpha=\frac{m-8}{9}$ درنتیجه

$\boxed{m=-4}$ خواهد شد پس $\alpha=\frac{-4}{3}$ بوده‌ودو ریشه‌دیگر

معادله بدست خواهندآمد

طرح وحل از : حبیب‌الله عبداللهی

پاسخ صحیح رسیده از محدثی نجفی - همدان

حل مسأله ۱۱۴ـ مطلوبست حل معادلهٔ

$$2\sin^2 x+7\sin^2 x-8\sin x+2r=0$$

درصورتیکه بدانیم $\frac{1}{\sin x_1}=\frac{1}{\sin x_2}+\frac{1}{\sin x_3}$

هرگاه $\frac{1}{\sin x}=z$ فرض شود می‌توان نوشت

$$2rz^3-8z^2+7z+2r=0 \quad (1)$$

باید $z_1=z_2+z_3$ برقرار باشد بااستفاده ازروابط بین‌ضرائب و ریشه‌های‌معادله درجه سوم خواهیم داشت: $z_1+z_2+z_3=\frac{4}{r}$

و ازآنجا $\boxed{z_1=\frac{2}{r}}$ هرگاه این مقدار را در معادله (۱) قرار دهیم به معادله $r^2+7r-8=0$ خواهیم رسید که $\boxed{r=1}$ و $\boxed{r=-8}$ بدست خواهد آمد چنانچه بجای r در معادله (۱) عدد ۱ را قراردهد خواهیم داشت .

$$(z-2)(2z^2-4z-1)=0$$

که $z=2$ و $z=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$ ازآنجا $\sin x=\frac{1}{2}$ و

$$\begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

بهمین طریق بقیهٔ جوابهای قابل قبول تعیین‌خواهندشد

پاسخ صحیح رسیده از محدثی نجفی

طرح وحل‌از :حبیب‌الله عبداللهی

حل مسأله ۱۱۵ ـ هرگاه $x_1x_2x_3$ ریشه‌های معادله $x^3+x+1=0$ فرض شوند ثابت کنید .

$$\Sigma\frac{x_1^2}{x_1^2+1}+\Sigma\frac{x_1}{x_1^2+1}=0$$

داریم

$$\Sigma\frac{x_1^2}{x_1^2+1}=\frac{x_1^3+x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_1}{x_1^2+1}=x_1-\frac{x_1}{x_1^2+1}$$

و

$$\Sigma\frac{x_1}{x_1^2+1}=\frac{x_1}{x_1^2+2}-\frac{x_2}{x_2^2+1}+\frac{x_3}{x_3^2+1}=\frac{\Sigma x_1x_2^2x_3^2+\Sigma x_1^2x_2+\Sigma x_1}{(x_1x_2x_3)^2+\Sigma x_1^2x_2^2+\Sigma x_1^2+1}$$

اما می‌دانیم :

$$\Sigma x_1x_2^2x_3^2=x_1^2x_2^2x_3^2\Sigma\frac{1}{x_1}$$

ازطرفی $x_1x_2x_3=-1$ پس $\frac{1}{x_1}$ که مجموع ریشه‌های معادله معکوسه معادله مفروض یعنی $y^3+y^2+1=0$ میباشد برابر -1 است چون $\Sigma x_1=0$ است پس

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=\Sigma x_1^2+$$
$$+\Sigma x_1^2x_2^2=0$$

یعنی $\Sigma x_1^2x_2=3$ ازآنجا $\Sigma x_1^2x_2=-\Sigma x_1^2$

و $\Sigma x_1^2x_2=(x_1x_2x_3)^2\Sigma\frac{1}{x_3}=\Sigma\frac{1}{x_1^2}=1$

و همچنین $\Sigma x_1^2=-2$ در نتیجه خواهیم داشت :

$$\Sigma\frac{-x_1}{x_1^2+1}=\frac{-1+3+0}{1+1-2+1}=2$$

$$\Sigma\frac{x_1^3}{x_1^2+1}=-2$$

وازآنجا $\Sigma\frac{x_1}{x_1^2+1}+\Sigma\frac{x_1^3}{x_1^2+1}=0$

طرح وحل از : حبیب‌الله عبداللهی

حل مساله ۱۱۶ ـ معادله

$$x^4-x^3-14x^2+6x+m=0$$

مفروض است اولا بفرض آنکه $x_1x_2=x_3x_4$ باشد معادله‌حل شود .

ثانیاً بفرض اینکه ریشه‌های معادله طولهای چهار نقطه واقع بریك محور باشد مقدارm چنان تعیین شودکه این چهار نقطه تقسیم توافقی تشکیل دهند .

اولا بنا بفرض داریم $x_1x_2=x_3x_4$

فرض میکنیم $\begin{cases} x_1+x_2=p \\ x_1x_2=q \end{cases}$ و $\begin{cases} x_3+x_4=p' \\ x_3x_4=q' \end{cases}$

پس باید $q=q'$ باشد و از آنجا معادله مفروض با معادله $(x^2-px+q)(x^2-p'x+q)=0$ متحد خواهدبود . پس خواهیم داشت :

$$\begin{cases} p+p'=1 \\ pp'+2q=-14 \\ (p+p')q=-6 \\ q^2=m \end{cases}$$

از روابط فوق $q-q'=-6$ نتیجه خواهد شد .

پس $\boxed{m=36}$ و سپس مقادیر $p=2$ و $p'=-1$

از روابط $\begin{cases} p+p'=1 \\ pp'=-2 \end{cases}$ بدست خواهد آمد در نتیجه می توان نوشت :

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=-6 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_3+x_4=-1 \\ x_3x_4=-6 \end{cases}$$

که x_1 و x_2 و x_3 و x_4 بسهولت ازدو معادله درجه دوم $Z_1^2-2Z_1-6=0$ و $Z^2-2Z-6=0$ نتیجه خواهد شد .

ثانیاً هرگاه a و b و c و d ریشه‌های معادله مفروض باشند

$$\frac{c-a}{c-b}=-\frac{d-a}{d-b}$$ واز آنجا

$$(ab+cd)=(a+b)(c+d)$$ ۲

فرض می‌کنیم $ab=y$ و $a+b=z$ و $c+d=u$ و $cd=t$ و با استفاده از روابط بین ضرائب و ریشه‌های معادله درجه چهارم می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} a+b+c+d=+1 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=-14 \text{ و } abcd=m \\ abc+abd+acd+bcd=-6 \end{cases}$$

پس $zu=-\frac{28}{3}$ و $z+u=+1$ واز آنجا z و u ازحل معادله

$$x^2-x-\frac{28}{3}=0$$ بدست خواهد آمد وهمچنین

$yt=m$ و $y+t=-\frac{14}{3}$ که y و t ازحل معادله

$$(2)\quad y^2+\frac{14}{3}y+m=0$$

تعیین میگردند از طرفی $\boxed{uy+tz=-6}$

اکنون برای محاسبه طرف اول ازمعادلات (۱) و (۲) استفاده می‌کنیم پس دو مجموع $x'y''+x''y'$ و $x'y'+x''y''$ در نظر گرفته حاصل جمع و حاصلضرب این دو مجموع بدست میآوریم داریم : $S=-\frac{14}{3}$ و $q=\frac{115m}{2}-\frac{3\times14^3}{27}$

پس $(uy+tz)$ ازحل معادله

$$z^2+\frac{14}{3}z+\frac{115m}{3}-\frac{2\times143}{27}=$$

بدست خواهد آمد و چنانچه این مقدار در رابطه (۳) بیریم مقدار m وسپس ریشه‌ها تعیین خواهد گردید .

پاسخ صحیح رسیده ازمحمد هاشم پیران ـ شیراز

طرح وحل از : حبیب‌الله عبداللهی

مسائل متفرقهٔ شمارهٔ دوم

حل مسألهٔ ۴۲۷ ـ رسم نمایش هندسی تابع

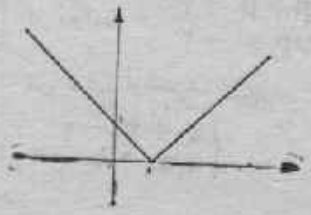
$$y=\sqrt{(x-1)^2}$$

داریم $y=|x-1|$ که درفاصلهٔ $x>1$ خواهیم داشت

$y=x-1$ ودر فاصلهٔ $x<1$

خواهیم داشت $y=-x+1$ و

نمایش هندسی تابع مطابق شکل



مقابل است .

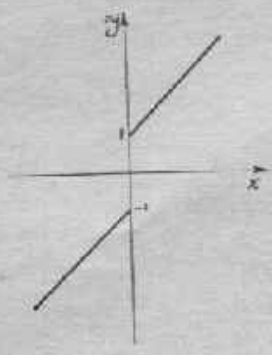
حل مسألهٔ ۴۲۷ مکرر ـ رسم نمایش هندسی تابع

$$y=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

داریم $\sqrt{x^2}=|x|$

۱) اگر $x>0$ تابع مفروض بصورت $y=x+1$ است .

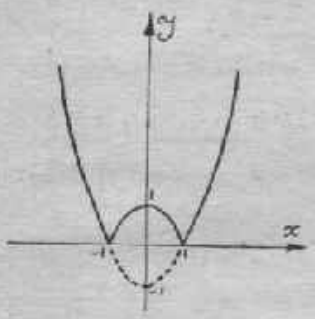
۲) اگر $x<0$ تابع مفروض بصورت $y=x-1$ است .



نمایش‌هندسی تابع‌مطابق شکل مقابل است

حل مسألهٔ ۴۲۸ـ رسم نمایش‌هندسی تابع $y=|x^2-1|$

چنانچه $x^2-1>0$ یا $x>1$ و $x<1$ باشدداریم $y=x^2-1$ وجدول تغییرات این تابع بشرح زیراست



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	0	↗	$+\infty$

واگر $x^2-1<0$ یا $x<1$ و $x>-1$ باشد تابع بصورت $y=-x^2+1$ بوده جدول تغییرات‌آن عبارت خواهد بوداز

x	-1		0		1
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	-1	↗	0

منحنی‌نمایش تابع مفروض مطابق شکل بالا است .

تبصره ـ برای رسم نمایش هندسی تابع $y=|f(x)|$ میتوان منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ را رسم نموده آنگاه قسمتی ازمنحنی راکه زیر محور $x'x$ است حذف وبجای آن قرینه‌اش را نسبت به‌این محور رسم نمود مثلا شکل بالا برای نمایش هندسی تابع $y=|x^2-1|$

حل مسألهٔ ۴۲۹ ـ رسم نمایش هندسی تابع

$$y=\frac{|x-1|}{x+1}$$

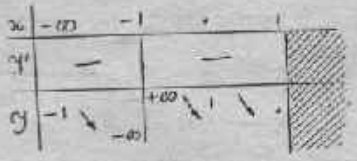
چنانچه $x-1>0$ یا $x>1$ باشد تابع بصورت

$$y=\frac{x-1}{x+1}$$

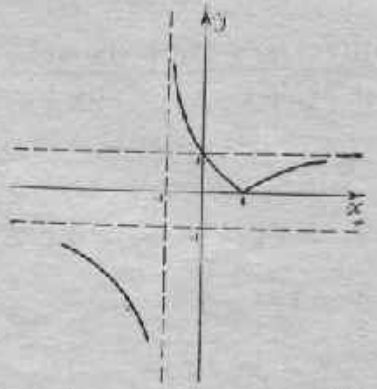
یکان

بوده جدول تغییرات آن بشرح زیر است

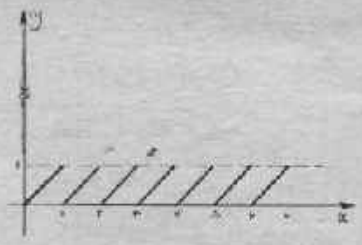
و اگر $x-1<0$ باشد تابع بصورت $y=\frac{-x+1}{x+1}$ بوده جدول تغییرات آن چنین است .



منحنی نمایش تابع مفروض مطابق شکل زیر است .



حل مسألهٔ ۴۳۰ـ رسم نمایش هندسی تابع $y=x-[x]$ که مراد از $[x]$ بزرگترین عدد صحیحی است که در متغیر x موجود میباشد باین معنی که وقتی x مثلا بین صفر و یك تغیر کند $[x]$ برابر با صفر و وقتی x بین ۱ و ۲ تغییر کند $[x]$ برابر با ۱ خواهد بود . نمایش هندسی تابع مفروض در فاصلهٔ ۰ و ۶ مطابق شکل است .



حل مسألهٔ ۴۳۱ـ تعیین کثیرالجمله‌ای از درجهٔ پنجم بصورت $f[x]$ بطوری که $f[x]+1$ بر x^2+1 و $f(x)-1$ بر x^2+1 پخش پذیر باشد . و درحالتیکه ضریب جمله بزرگترین درجه x یك فرض شود $f(x)$ برحسب قوای نزولی $(x+1)$ مرتب گردد .

$$\begin{cases} f(x)+1=A(x^2+1)(x^3+px^2+qx+r) \\ f(x)-1=A(x^2+1)(x^2+mx+n) \end{cases}$$

و چون از هر یك از دو رابطه $f(x)$ را حساب کرده عبارات حاصل را متحدقرار دهیم .

$$A(x^2+1)(x^3+px^2+qx+r)-1\equiv$$
$$\equiv A(x^3+1)(x^2+mx+n)+1$$

وپس از مرتب کردن و مساوی قراردادن ضرائب جمله‌های همدرجه نتیجه میشود :

$$p-q=m=-\frac{1}{A} \quad و \quad r=1+\frac{1}{A} \quad و \quad n=1-\frac{1}{A}$$

و چنانچه $A=1$ اختیار شود در اینصورت :

$$p=q=m=-1 \quad و \quad r=2 \quad و \quad n=0$$
$$f(x)=x^5-x^4+x^2-x+1$$

برای اینکه این عبارت را برحسب قوای نزولی $x+1$ بنویسیم فرض میکنیم $x+1=\alpha$ که $x=\alpha-1$ و $f(x)$ را برحسب α حساب کرده مرتب مینمائیم نتیجه خواهد شد .

$$f(x)=(x+1)^5-5(x+1)^4+14(x+1)^3-$$
$$-15(x+1)^2+6(x+1)+1$$

علی اصغر شیعه بیگی

حل مسألهٔ ۴۳۲ ـ محاسبهٔ مجموع زیر .

$$S_n=tg^2\frac{x}{2}-tgx+2tg^2\frac{x}{2}tg^2\frac{x}{2}+\ldots+$$
$$+2^{n-1}tg^2\frac{x}{2^n}tg\frac{x}{2^{n-1}}$$

$$tg^2a\,tg2a=tg^2a\cdot\frac{2tga}{1-tg^2a}=\frac{2tg^3a+2tga-2tga}{1-tg^2a}=$$
$$=\frac{2tga}{1-tg^2a}-\frac{2tga(1-tg^2a)}{1-tg^2a}=tg2a-2tga$$

و طبق این اتحاد خواهیم داشت .

$$tg^2\frac{x}{2}-tgx=tgx-2tg\frac{x}{2}$$
$$2tg^2\frac{x}{2^2}tg\frac{x}{2}=2tg\frac{x}{2}-4tg\frac{x}{4}$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$2^{n-1}tg^2\frac{x}{2^n}tg\frac{x}{2^{n-1}}=2^{n-1}tg\frac{x}{2^{n-1}}-2^n tg\frac{x}{2^n}$$

از جمع طرفین روابط فوق نظیر بنظیر نتیجه خواهد شد.

$$S_n=tgx-2^n tg\frac{x}{2^n}$$

علی شیعه بیگی

پاسخ صحیح رسیده از یعقوب سلامت ابراهیمی ششم ریاضی دبیرستان مرآت

حل مسألهٔ ۴۳۳ ـ اثبات اینکه بین y' و y'' مشتقات اول و دوم تابع .

$$y=a(x+\sqrt{x^2-1})^n+b(x-\sqrt{x^2-1})^n$$

رابطهٔ $(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$ برقرار است

$$y'=na(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}+$$

$$+nb(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}=$$

$$=\ldots=\frac{n}{\sqrt{x^2-1}}[a(x+\sqrt{x^2-1})^n-$$

$$-b(x-\sqrt{x^2-1})^n]$$

$$y''=\frac{-nx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\times\frac{y'\sqrt{x^2-1}}{n}+\frac{n}{\sqrt{x^2-1}}\times$$

$$[\frac{na(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{nb(x-\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{x^2-1}}]$$

$$y''=\frac{-xy'}{x^2-1}+\frac{n^2}{x^2-1}\times y$$

$$(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$$

محمدمحروق علوی

پاسخ صحیح‌رسیده از محمدعلی محدثی نجفی ـ همدان

حل مسأله ۴۳۴ ـ تعیین معادیر a و b برای اینکه حد تابع $y=\frac{x+b}{x^2+2ax+b}$ وقتیکه $x\to 1$ برابر باشد با یکی از دو حد $+\infty$ یا $-\infty$

در تابعی مانند $y=\frac{f(x)}{(x-\alpha)^n}$ که در آن $f(\alpha)\neq 0$ و n فرد باشد وقتی که x بسمت α میل کند (بازاء مقادیر کوچکتر از α یا بازاء مقادیر بزرگتر از α) در این صورت حد تابع عبارت خواهدبود از $\mp\infty$ اما اگر n زوج باشد وقتی x بسمت α میل نماید (خواه بازاء مقادیر بزرگتر از α و خواه بازاء مقادیر کوچکتر از α) در این صورت $(x-\alpha)^n$ همواره مثبت بوده و حد تابع یا $+\infty$ است و یا $-\infty$ (برحسب اینکه $f(\alpha)$ مثبت باشد یامنفی).

بنا براین برای اینکه حدتابع مفروض مسأله وقتی که $x\to 1$ یا $+\infty$ ویا $-\infty$ باشد باید؛ ریشهٔ مضاعف عبارت $x^2+2ax+b$ باشد یعنی این عبارت تبدیل شود بعبارت $(x-1)^2=x^2-2x+1$ و از آن $a=-1$ و $b=1$ بدست میاید وخواهیم داشت $y=\frac{x+1}{(x-1)^2}$ که هرگاه $x\to 1$ حد تابع عبارت خواهد شد از $+\infty$

طرح و حل از علی ناهباز صالحی پنجم ریاضی دبیرستان هدف ۱

پاسخ صحیح رسیده از محمد هاشم پسران ششم ریاضی دبیرستان نمازی شیراز

حل مسألهٔ ۴۳۵ ـ تعیین مقادیر a و b و c برای اینکه حد تابع $y=\sqrt{ax^3+bx^2+x+1}+x-c$

وقتی که $x\to-\infty$ برابر باشد با صفر

تابع را در مزدوج خویش ضرب وتقسیم مینمائیم پس از ساده‌کردن خواهیم داشت.

$$y=\frac{ax^3+(b-1)x^2+(2c+1)x-c^2+1}{\sqrt{ax^3+bx^2+x+1}-x+c}$$

و برای اینکه حداین کسر وقتی $x\to-\infty$ برابر با صفر باشد باید درجهٔ عبارت صورت از درجهٔ عبارت مخرج کمتر باشدکه نتیجه خواهد شد.

$$a=0 \text{ و } b=1 \text{ و } c=-\frac{1}{2}$$

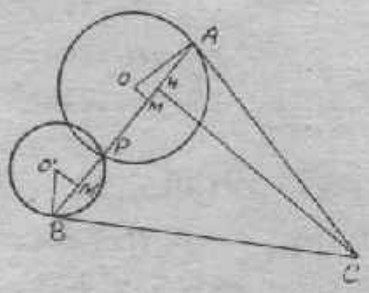
طرح و حل از علی ناهباز صالحی

حل مسأله ۴۳۶ ـ مثلث ABC و نقطهٔ متغیر P را روی ضلع AB از آن درنظر میگیریم دودایره بمراکز O و O' که از P میگذرند واولی در A بر AC و دومی در B بر BC مماس باشد رسم می‌کنیم مطلوبست تعیین نقطهٔ p برای آنکه

۱) دودایرهٔ O و O' از نقطهٔ C بیك زاویه رؤیت شوند.

۲) دودایرهٔ O و O' متساوی باشند.

۳) خط OO' موازی با AB باشد.



اگر CH ارتفاع مثلث و M وسط PA و M' وسط PB باشد و فرض کنیم.

$AM=x$ و $BM'=x'$ و $OA=R$ و $O'B=R'$

$OM=d$

$O'M'=d'$ و $CH=h$ و $HA=K$ و $HB=l$

$BC=a$ و $AC=b$

ازتشابه دومثلث AMO و CHA ودومثلث BM'O' و CHB خواهیم داشت.

$$\frac{R}{b}=\frac{x}{h}=\frac{d}{k} \text{ و } \frac{R'}{a}=\frac{x'}{h}=\frac{d'}{l}$$

و نتیجه خواهد شد

$$\frac{x}{x'}=\frac{aR}{bR'}=\frac{kd'}{ld}$$

۱) چنانچه دو زاویهٔ ACO و BCO' متساوی باشند مثلثهای عمنام آنها متشابه بوده و خواهیم داشت $\frac{R}{R'}=\frac{b}{a}$ و نتیجه خواهدشد $x=x'$ یعنی نقطه P وسط ضلع AB واقع خواهد بود .

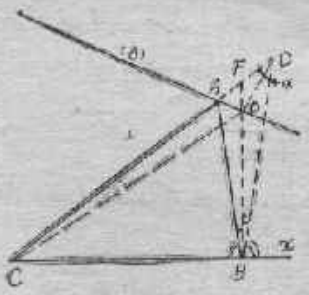
۲) اگر $R=R'$ باشد خواهیم داشت $\frac{x}{x'}=\frac{a}{b}$ و نقطهٔ P پای نیمساز زاویه C خواهد بود .

۳) اگر OO' با AB موازی باشد $d=d'$ بوده و $\frac{x}{x'}=\frac{k}{l}$ ونتیجه میشود که P پای ارتفاع CH است .

ارسالی علی ملاحسنی دبیر دبیرستانهای خوی

حل مسألهٔ ۴۳۷ـ رسم مثلثی که از آن $BC=a$ (CB هم از لحاظ اندازه‌وهم از لحاظ وضع ثابت است) و $\widehat{B}-\widehat{C}=\alpha$ معلوم بوده و رأس A بر خط مفروض Δ واقع میباشد .

بفرض اینکه مثلث رسم شده باشد در نقطهٔ B عمودی بر BC اخراج میکنیم که ضلع یا امتداد ضلع AC را در F و Δ را در O تلاقی مینماید وقرینهٔ BA را نسبت به BF رسم میکنیم



که AC یا امتداد آنرا در D قطع مینماید زاویه OBx با زاویهٔ ABC برابر است و در نتیجه $\widehat{D}=\widehat{B}-\widehat{C}=\alpha$ ومکان D کمان درخور زاویهٔ α است که بر B و C گذشته باشد .

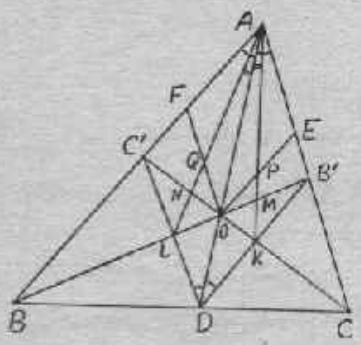
از طرف دیگر ، خطوط BF و BC نیمسازهای داخلی وخارجی زاویهٔ ABD بوده و B.CFAD یك دستگاه اشعهٔ توافقی است و نتیجه میشود که O.CFAD نیز یك دستگاه اشعهٔ توافقی میباشد .

با معلومات داده‌شده وپس از تعیین نقطهٔ O اولا شعاع مزدوج توافقی OA (یا Δ) را نسبت‌به‌دو شعاع OF و OC رسم مینمائیم تا کمان درخور زاویهٔ α وهمار بر نقاط B و C را در نقطهٔ D قطع کند وچون DC رسم شود از تلاقی آن با Δ نقطهٔ A ودر نتیجه مثلث ABC مشخص میشود .

طرح و حل از : یحیی یحیوی

حل مسألهٔ ۴۳۸ـ مثلث ABC مفروض است . AD نیمساز زاویهٔ A را رسم میکنیم و از C و B به یك نقطه O واقع بر AD وصل کرده امتداد میدهیم تا اضلاع AB و AC را بترتیب در C' و B' قطع کنند چنانچه نقطه تلاقی DB' و DC' را با CC' و BB' بترتیب K و L بنامیم ثابت کنید AO نیمساز زاویهٔ KAL است .

با توجه بشکل بآسانی معلوم است که AK قطبی نقطهٔ B است نسبت به‌دو خط متقاطع AD و AC و AL قطبی نقطه C است نسبت به دو خط متقاطع AB و AD پس دستگاههای (A و BMOB') و (A و CNOC') دستگاههای توافقی میباشند .



چنانچه OE موازی با AB و OF موازی با AC رسم شده باشند داریم OP = PE و OE = AE و نیز OF − OQ = QF و OF = AF .

اما چهارضلعی AEOF لوزی است پس OP = PE = OQ = QF و دو مثلث AEP و AFQ بحالت تساوی دوضلع وزاویهٔ بین‌برابر بند ودر نتیجه دو زاویهٔ KAO و LAO با یکدیگر مساویند .

طرح و حل از : محمد علی شیخان

حل مسألهٔ ۴۳۹ـ در روی یك صفحهٔ ثابت دو نقطهٔ ثابت B و C و نقطهٔ متغیر A طوری قرار گرفته‌اند که $BC=a$ و $AB+AC=2l$ میباشد . خطوط AM و HA و AD را که بترتیب میانه وارتفاع واردبرضلع BC و نیمساز زاویهٔ A میباشند رسم کرده حد نسبت $\frac{HM}{DM}$ را بدست آورید وقتیکه در اثر تغییرمکان نقطهٔ A مثلث ABC متساوی الساقین شود (AB = AC)

اگر $AC=b$ و $AB=c$ باشد در مثلث ABC میتوان نوشت :

$$b^2=a^2+c^2-2a.BH$$

$$SH=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

و

$$HM=BH-BM=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}-\frac{a}{2}=$$

$= \frac{(c+b)(c-b)}{2a}$ یا $HM = \frac{1}{a}(c-b)$ (۱)

چون AD نیمساز داخلی زاویهٔ A میباشد داریم :

$$DC = \frac{ab}{c+b}$$

$$MD = MC - DC = \frac{a}{2} - \frac{ab}{c+b} = \frac{a(c-b)}{4l} \quad (2)$$

ازتقسیم طرفین دو رابطهٔ (۱) و (۲) بریکدیگر خواهیم داشت .

$$\frac{HM}{MD} = \frac{4l^2}{a^2}$$

یعنی باتغییر مکان A نسبت $\frac{HM}{MD}$ برابر مقدار ثابت خواهد بودوچنانچه $AB = AC$ شوداندازه‌های MDوHM هریك برابر باصفر بوده و دراین صورت $\frac{HM}{MD} = \frac{0}{0}$ شده و مبهم است ولی چون‌این نسبت همواره برابر مقدار ثابت است درحد یعنی وقتی‌که مثلث متساوی الساقین شود باز برابر با مقدار ثابت $\frac{4l^2}{a^2}$ باقی میماند.

طرح وحل از : مسعود محمدی

حل مسأله ۴۴۰ ـ دو روی خط نیمرخی نقطه‌ای‌چنان بدست‌آوریدکه مجموع چهاربرابر مربع بعدو نه برابر مربع ارتفاع آن مساوی ۳۶ شود .

خط نیمرخ مفروض ab a'b' رادر روی صفحه افق تسطیح مینمائیم . هرگاه بعد نقطه رابا e و ارتفاع آنرا با h نمایش دهیم خواهیم داشت .

$$4e^2 + 9h^2 = 36 \text{ یا } \frac{e^2}{9} + \frac{h^2}{4} = 1$$

یعنی نقطهٔ مطلوب بریك بیضی با نصف قطر اطول ۳ و نصف قطر اقصر ۲قرار دارد وکافیست نقطهٔ تلاقی تسطیح نیمرخ مفروض را بااین بیضی بدست آورده ترفیع نمود .

طرح وحل از :مسعود محمدی

حل مسأله۴۴۱ ـ عدد $N = abba$ چنان تعیین شود که :

$$N = \overline{abba} = a\,\overline{du}^{\,2} + b\,\overline{du} + \overline{me}^{\,2}$$

هریك ازاعدادaوb نمی‌توانند بزرگتر از۲ باشند زیرا اگر $\overline{du}$ کوچکترین مقدار ممکن راکه۱۰ میباشد اختیارنماید $3^{10} = 59049$ خواهد بودکه عددی است پنج رقمی پس $a<2$ و $b<2$ وحالات زیر تمیز داده‌می‌شود .

(۱) $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

(۵) $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

حالتهای(۱) و (۲) غیرقابل قبولند زیرا در اینصورت درازاءجمیع مقادیر $\overline{du}$ و $\overline{me}$ عدد N عددی سه‌رقمی میشود .

درحالت سوم خواهیم داشت .

$$N = 2222 = 2^{\overline{du}} + 2^{\overline{du}} + \overline{me}^{\,2} = 2^{\overline{du}+1} + \overline{me}^{\,2}$$

و دراین حالت $\overline{du}$ نمیتواند بزرگتر از ۱۰ باشد زیرا

$$2^{12} = 4096 > N$$

پس‌اگر مسأله جواب داشته باشد $\overline{du} = 10$ خواهد بود و درازاء آن داریم .

$$N = 2222 = 2^{10} + 2^{10} + \overline{me}^{\,2}$$

$$\overline{me}^{\,2} = 174$$

و غیر قابل قبول میباشد .

در حالت چهارم خواهیم داشت :

$$N = 2112 = 2^{\overline{du}} + 1 + \overline{me}^{\,2}$$

که دراین حالت نیز $\overline{du}$ نمیتواند بزرگتر ۱۱ باشد

اگر $\overline{du} = 10$ باشد داریم .

$$N = 2112 = 2^{10} + 1 + \overline{me}^{\,2}$$

برای $\overline{me}^{\,2}$ مقدار ۱۰۸۷ بدست میآیدو غیرقابل قبول است .

واگر $\overline{du} = 11$ باشد برای $\overline{me}^{\,2}$ مقدار ۷۴ بدست میآیدکه غیرقابل قبول میباشد ،

درحالت پنجم خواهیم داشت :

$$N = 1221 = 1 + 2^{\overline{du}} + \overline{me}^{\,2}$$

و $\overline{du}$ نمیتواند بزرگتراز ۱۰ باشد و درازاء $\overline{du} = 10$ داریم

$$N = 1221 = 1 + 2^{10} + \overline{me}^{\,2}$$

که برای $\overline{me}^{\,2}$ مقدار۱۹۶بدست‌آمده و در نتیجه داریم

$N = 1221$ و $\overline{du} = 10$ و $b = 2$ و $a = 1$ و $\overline{me} = 14$

طرح وحل از: مسعود محمدی

جل مسأله ۴۴۳ ـ مطلوبست حل معادلهٔ

$$\log_{x} 2 \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$$

میدانیم $\log_{b} a = \frac{1}{\log_{a} b}$ $(x>0 \text{ و } x\neq 1)$

پس داریم: $\frac{1}{\log_{2} x} \times \frac{1}{\log_{2} 2x} = \frac{1}{\log_{2} 4x}$ و ازآنجا

$$\log_2 x \times \log_2 2x = \log_2 4x$$

$$\log_2 x(1 + \log_2 x) = 2 + \log_2 x$$ ویا

پس $(\log_{۲}x)^{۲}=۲$ و یا $\log_{۲}x=\pm\sqrt{۲}$ و در نتیجه

$$x=۲^{\pm\sqrt{۲}}$$ نتیجه خواهدشد

طرح وحل از : حبیب‌الله عبداللهی

پاسخ‌های صحیح رسیده از : محمدهاشم پیران ششم ریاضی دبیرستان نمازی شیراز .

حل مسأله ۴۴۴ ـ حل معادلهٔ زیر :

$$۶\times۴^{-\frac{۱}{x}}-۱۳\times۶^{-\frac{۱}{x}}+۶\times۹^{-\frac{۱}{x}}=۰$$

طرفین معادله مفروض را به $۹^{-\frac{۱}{x}}$ بخش می کنیم خواهیم داشت .

$$۶\left(\frac{۴}{۹}\right)^{-\frac{۱}{x}}-۱۳\left(\frac{۶}{۹}\right)^{-\frac{۱}{x}}+۶=۰$$

و یا

$$۶\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۲}{x}}-۱۳\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۱}{x}}+۶=۰$$

چنانچه $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۱}{x}}=A$ فرض شود در اینصورت معادله فوق بصورت زیر نوشته خواهد شد .

$$۶A^{۲}-۱۳A+۶=۰$$

و از آنجا $\begin{cases}A'=\frac{۳}{۲}\\ A''=\frac{۲}{۳}\end{cases}$ نتیجه خواهد شد .

پس $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۱}{x}}=\frac{۲}{۳}$ در اینحالت $\boxed{x=-۱}$ و درحالتی

$\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۱}{x}}=\frac{۳}{۲}$ باشد $\boxed{x=+۱}$ بدست خواهد آمد .

طرح و حل از : حبیب‌الله عبداللهی

پاسخ‌های صحیح رسیده از : محمد هاشم پسران ششم ریاضی دبیرستان نمازی شیراز ــ فرخ پورحسن پنجم ریاضی دبیرستان ادیب تهران

حل مسأله ۴۴۵ ـ حل معادله زیر

$$x^{۳\log^{۲}x-\frac{۲}{۳}\log x}=۱۰۰\sqrt[۲]{۱۰}$$

داریم $x^{۳\log^{۲}x-\frac{۲}{۳}\log x}=۱۰۰\sqrt[۲]{۱۰}=۱۰^{\frac{۷}{۳}}$

از طرفین در پایه ده لگاریتم می گیریم خواهیم داشت .

$$(۳\log^{۲}x-\frac{۲}{۳}\log x)\log x=\frac{۷}{۳}$$

ویا $۳\log^{۳}x-\frac{۲}{۳}\log^{۲}x-\frac{۷}{۳}=۰$

و از آنجا $۹\log^{۳}x-۲\log^{۲}x-۷=۰$

می‌توان نوشت $۹\log^{۳}x-۵\log^{۲}x+۷\log^{۲}x-۷=۰$

ویا $۹\log^{۲}x(\log x-۱)+۷(\log^{۲}x-۱)=۰$

بنابر این $(\log x-۱)(۹\log^{۲}x+۷\log x+۷)=۰$

$$\begin{cases}\log x=۱\\ x=۱۰\end{cases}\qquad \boxed{۹\log^{۲}x+۷\log x+۷=۰}$$

بطوریکه مشاهده می شود معادله درجه دوم فوق جواب ندارد تنها جواب معادله $x=۱۰$ است .

طرح و حل از : حبیب‌الله عبداللهی

حل مسأله ۴۴۶ ـ اثبات صحت تساوی زیر

$$\frac{a^{۳}-۳a+(a^{۲}-۱)\sqrt{a^{۲}-۴}-۲}{a^{۳}-۴a+(a^{۲}-۱)\sqrt{a^{۲}-۴}+۲}\times\sqrt{\frac{a^{۳}-۳a+۲}{a^{۳}-۳a-۲}}=۱$$

داریم :

$$a^{۳}-۳a-۲+(a^{۲}-۱)\sqrt{a^{۲}-۴}=(a+۱)^{۲}(a-۲)+(a+۱)(a-۱)\sqrt{(a+۲)(a-۲)}$$

$$a^{۳}-۳a+۲+(a^{۲}-۱)\sqrt{a^{۲}-۴}=(a-۱)^{۲}(a+۲)+(a+۱)(a-۱)\sqrt{(a+۲)(a-۲)}$$

باتوجه بایکه $a^{۲}-۴>۰$ میباشد میتوان نوشت .

$$\frac{(a+۱)\sqrt{a-۲}[(a+۱)\sqrt{a-۲}+(a-۱)\sqrt{a+۲}]}{(a-۱)\sqrt{a+۲}[(a-۱)\sqrt{a+۲}+(a+۱)\sqrt{a-۲}]}\times\frac{\sqrt{(a-۱)^{۲}(a+۲)}}{\sqrt{(a+۱)^{۲}(a-۲)}}=\frac{(a+۱)\sqrt{a-۲}}{(a-۱)\sqrt{a+۲}}\times\frac{(a-۱)\sqrt{a+۲}}{(a+۱)\sqrt{a-۲}}=۱$$

طرح وحل از : حبیب‌الله‌عبداللی

پاسخ رسیده از : محمدهاشم‌پسران ششم‌ریاضی‌دبیرستان نمازی شیراز

حل مسألهٔ ۴۴۷ـ هرگاه a و b و c جملات مرتبهٔ m ام و n ام و p ام متناسب بیك تصاعد حسابی باشند صحت تساوی زیر ثابت شود .

$$a(n-p)+b(p-m)+c(m-n)=0 \quad (1)$$

و چنانچه متناسب بیك تصاعد هندسی باشند .

$$a^{n-p} \times b^{p-m} \times c^{m-n} = 1$$

اولاً ـ هرگاه جملهٔ اول تصاعد عددی مفروض را α وقدر نسبت آنرا r بنامیم داریم :

$$a=\alpha+(m-1)r \text{ و } b=\alpha+(n-1)r \text{ و } c=\alpha+(p-1)r$$

و نتیجه میشود :

$$b-a=r(n-m) \text{ و } c-a=r(p-m)$$

که بعد از تقسیم طرفین این دو رابطه بریکدیگر ومرتب کردن تساوی (۱) بدست خواهدآمد .

ثانیاً ـ اگر α جمله اول تصاعد هندسی و r قدر نسبت آن باشد داریم

$$a=\alpha r^{m-1} \text{ و } b=\alpha r^{n-1} \text{ و } c=\alpha r^{p-1}$$

و نتیجه میشود $b=a r^{n-m}$ و $c=b r^{p-m}$

طرفین رابطه اول را بتوان $n-p$ و دومی را بتوان $n-m$ میرسانیم .

$$b^{n-p}=a^{n-p} r^{(n-m)(n-p)}$$

$$c^{n-m}=b^{n-m} r^{(n-m)(p-n)}$$

بعدازحذف r بین دورابطه ومرتب نمودن تساوی(۲) نتیجه خواهد شد .

طرح وحل از حبیب‌الله عبداللهی

حل مسألهٔ ۴۴۸ـ اعداد E و E' بصورت $E=N^4+4$ و $E'=N'^4+4$ مفروضند اولا هرگاه تفاضل دوعدد صحیح NوN' دو واحد باشد ثابت کنید EوE' نمیتوانند نسبت بهم اول باشند .

ثانیاً هرگاه N عددصحیح فردباشد مطلوبست تعیین‌دوعدد که‌کوچکترین مضرب مشترك آنها N^4+4 باشد .

داریم :

$$\begin{cases} E=N^4+4=(N^2+2N+2)(N^2-2N+2) \\ E'=N'^4\times 4=(N'^2+2N'+2)(N'^2-2N'+2) \end{cases}$$

میدانیم $N=N'+2$ میباشد پس‌می‌توان نوشت :

$$E=(N'^2+6N'+10)(N'^2+2N'+2)$$

بطوریکه مشاهده می‌شود دوعدد E و E' مضرب $(N'^2+2N'+2)$ بوده ونسبت‌بهم اول نیستند .

ثانیاً ـ هرگاه $N=2p-1$ فرض شود پس داریم $N^4+1=(2p-1)^2+4$ و یا بعد از اختصار .

$$N^4+1=(4p^2+1)(4p^2-8p+5) \quad (1)$$

چنانچه‌دوعدد مطلوب را با αوβ نمایش‌دهیم خواهیم‌داشت

$$\begin{cases} \alpha=N^2+2N+2 \\ \beta=N^2-2N+2 \end{cases}$$

زیرا αوβ نسبت بهم اول‌بوده وجز یاشمقسوم علیه مشترك دیگری ندارند درغیر اینصورت مقسوم علیه مشترك D خواهند داشت پس عدد D که αوβ را عاد خواهدکرد درنتیجه تفاضل $\alpha-\beta=4N=4(2p-1)$ را نیز خواهدشمرداما با توجه برابطه ۱ وفرض مسأله در نتیجه αوβ نسبت بهم اول خواهند بود وکوچکترین مضرب مشترك آنها $\alpha.\beta=N^4+4$ خواهد شد .

طرح وحل از : حبیب‌الله‌عبداللهی

حل مسأله ۴۴۹ـ از روابط

$$\begin{cases} a^2+mx^2+n=0 \\ y^2+my^2+n=0 \\ R^2+mR^2-n=0 \end{cases}$$

نتیجه بگیرید که $x^2+y^2=R^2$

ـ هرگاه روابط اول وسوم را با هم جمع وروابط اول ودوم را از یکدیگر کم کنیم خواهیم داشت .

$$\begin{cases} R^2+x^2+mR^2+mx^2=0 \\ y^2-x^2+my^2-mx^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R^2+x^2)(R^2-R^2x^2+x^4)+m(R^2+y^2)=0 \\ (y^2-x^2)(y^4+x^2y^2+x^4)+m(y^2-x^2)=0 \end{cases} \text{ ویا}$$

$$\begin{cases} R^4-R^2x^2+m+x^4=0 \\ y^4+x^2y^2+x^4+m=0 \end{cases} \text{ و از آنجا}$$

و چنانچه‌طرفین‌رابطه اخیررا از هم‌کم‌کنیم‌خواهیم‌داشت

$$y^4-R^4+x^2(y^2+R^2)=0$$

$$(y^2+R^2)(y^2-R^2)+x^2(y^2+R^2)=0 \text{ ویا}$$

و در نتیجه

$$x^2+y^2=R^2$$

طرح وحل از حبیب‌الله عبداللهی

پاسخ صحیح رسیده از محمد هاشم پسران شیراز

حل مسأله ۴۵۰ـ هرگاه داشته باشیم

$$\begin{cases} x^6+ma^4x^2+na^6=0 \\ y^6+mb^4y^2+nb^6=0 \\ m-n+1=0 \end{cases}$$

نتیجه بگیرید که $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \frac{x^6}{a^6}+m\frac{x^2}{a^2}+n=0 \\ \frac{y^6}{b^6}+m\frac{y^2}{b^2}+n=0 \\ 1+m-n=0 \end{cases}$$

هرگاه $\frac{x^2}{a^2}=u(I)$ و $\frac{y^2}{b^2}=v(II)$ فرض شود خواهیم داشت.

$$\begin{cases} u^3+mu+n=0 \\ v^3+mv+n=0 \\ 1+m-n=0 \end{cases}$$

چنانچه روابط ۱ و ۳ با هم جمع و ۱ و ۲ را از هم کم کنیم خواهیم داشت.

$$\begin{cases} u^3+1+m(u+1)=0 \\ v^3-u^3+m(v-u)=0 \end{cases}$$

و از آنجا بعد از اختصار روابط زیر نتیجه میشوند.

$$\begin{cases} u^2-u+1+m=0 \\ v^2+uv+u^2+m=0 \end{cases}$$

هرگاه دو رابطه اخیر را از هم کم کنیم برابطه زیر میرسیم.

$$v^2-1+uv+u=0$$

که رابطه $v+u-1=0$ بدست میآید پس با توجه بروابط I و II می‌توان نوشت:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

طرح وحل از حبیب‌الله عبداللهی

پاسخ صحیح رسیده از محمدهاشم پسران شیراز

حل مسألهٔ ۴۵۱ـ اگر داشته باشیم

یك روش آسان برای تعیین

کوچکترین مضرب مشترك دو یا چند عدد

درحساب وقتیکه بخواهند کوچکترین مضرب مشترك دو یاچند عدد را پیدا کنند یااز راه تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترك (طریقهٔ حط نردبانی) عمل میکنند ویااز راه تجزیه به حاصلضرب عوامل اول که درهرحال برای رسیدن بمقصودانجام بیش ازیك‌عمل‌بدون اشتباه لازم است.

روش زیر که بادکر یك مثال ارائه میشود فقط باانجام یك عمل تجزیهٔ مشترك اعداد میتوان به نتیجه رسید.

مثال: کوچکترین مضرب مشترك اعداد ۵۰۴ و ۳۶۰ و ۱۴۴ را بدست آورید.

۲	۵۰۴	۳۶۰	۱۴۴
۲	۲۵۲	۱۸۰	۷۲
۲	۱۲۶	۹۰	۳۶
۲	۶۳	۴۵	۱۸
۳	۶۳	۴۵	۹
۳	۲۱	۱۵	۳
۵	۷	۵	۱
۷	۷	۱	۱
	۱	۱	۱

کوچکترین مضرب‌مشترك $=2^4\times3^2\times5\times7=5040$

یحیی یحیوی ــ دبیر دبیرستانهای تهران

$$\begin{cases} a^2x^2+max+n=0 \\ b^2y^2+mby+n=0 \\ c^2+mc+n=0 \end{cases}$$

خواهیم داشت $ax+by+c=0$

روابط مفروض‌رادوبدو از یکدیگر کم می‌کنیم پس‌داریم:

$$\begin{cases} c^2-a^2x^2+m(c-ax)=0 \\ b^2y^2-a^2x^2+m(by+ax)=0 \end{cases}$$

و از آنجا بروابط زیر خواهیم رسید.

$$\begin{cases} c^2+acx+a^2x^2+m=0 \\ b^2y^2+abxy+a^2x^2+m=0 \end{cases}$$

هرگاه روابط اخیر را از یکدیگر کنیم خواهیم داشت:

$$b^2y^2-c^2+abxy-acx=0$$

$$(by+c)(by-c)+ax(by-c)=0$$ ویا

در نتیجه

$$ax+by+c=0$$

طرح و حل از: حبیب‌الله عبداللهی

پاسخ صحیح رسیده از محمدهاشم پسران شیراز

دو مسألهٔ نمونه از مسائل کنکور کشور فرانسه

ارسال وحل توسط : مهندس امیر منصور امیر صدری

I ـ جبر ومثلثات

(کنکور ورودی ۱۹۶۲ دمؤسسهٔ پیشه وهنر» شهر لیل)

۱۰۷۴ـ دومحور ox و oy که با یکدیگر زاویهٔ ۶۰ درجه میسازند درنظر گرفته ونقطهٔ A را بر محور ox بفاصلهٔ a از o (a>۰) انتخاب میکنیم ودایره‌ای بشعاع متغیر R چنان رسم میکنیم که درنقطهٔ A بر ox مماس باشد و خط D را که از نقطهٔ A بموازات oy رسم میشود درنقطهٔ M تلاقی نماید .

فرض میکنیم $\varphi = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$ که $-\frac{2\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3}$

ونقطهٔ تلاقی OM ودایره را نیز P مینامیم .

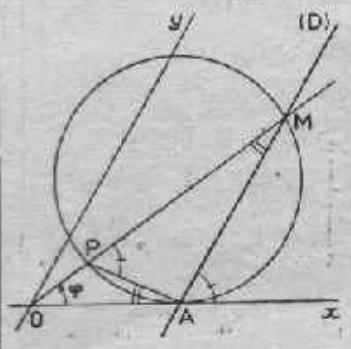
۱) زوایای مثلث APM را برحسب φ حساب کنید(در دوحالت ۰<φ<۰) وهمچنین قطعات OM و OP و AM و AP وشعاع دایرهٔ R را برحسب a و φ بدست آورید . ونیز مقدار φ را درصورتی که OP=OM باشد بدست آورید. ضمناً $\widehat{OAP}$ tg را برحسب a و R حساب کنید

۲) منحنی تغییرات تابع $y = OP + AP$ را بازاء جمیع مقادیر ممکنهٔ φ رسم نمائید .

۳) معادلهٔ $OA + AP = \frac{2ak}{\sqrt{3}}$ را حل وبحث کنید و نتیجه بحث را بکمك منحنی قبلی تحقیق کنید

۴) منحنی نمایش تغییرات تابع $z = \frac{PM}{AP}$ را رسم کنید

حل :



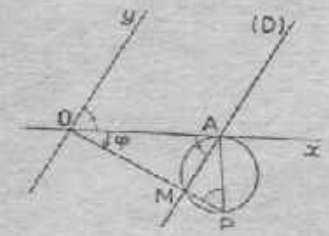
اگر $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$ باشد

(شکل ۱)

$$\widehat{APM} = \widehat{xAM} = \frac{\pi}{3}$$

$$\widehat{AMP} = \widehat{xAM} - \varphi = \frac{\pi}{3} - \varphi$$

$$\widehat{PAM} = \frac{\pi}{3} + \varphi$$



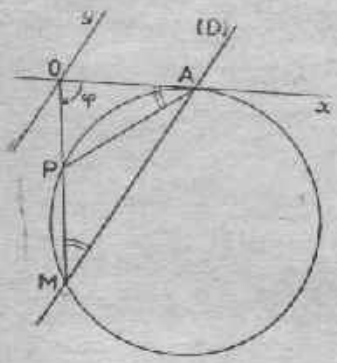
اگر $-\frac{\pi}{3} < \varphi < 0$ باشد

(شکل ۲)

$$\widehat{APM} = \widehat{OAM} = \frac{\pi}{3}$$

$$\widehat{AMP} = \frac{\pi}{3} - \varphi$$

$$\widehat{PAM} = \frac{\pi}{3} + \varphi$$



اگر $-\frac{2\pi}{3} < \varphi < -\frac{\pi}{3}$ باشد

(شکل ۳)

$$\widehat{APM} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\widehat{AMP} = \frac{2\pi}{3} + \varphi$$

$$\widehat{PAM} = -(\frac{\pi}{3} + \varphi)$$

بطور خلاصه برای $-\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3}$ داریم :

$$\widehat{AMP} = \frac{\pi}{3} - \varphi \text{ و } \widehat{APM} = \frac{\pi}{3} \text{ و } \widehat{PAM} = \frac{\pi}{3} + \varphi$$

وبرای $-\frac{2\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3}$ داریم :

$$\widehat{PAM} = -(\frac{\pi}{3} + \varphi) \text{ و } \widehat{AMP} = -\frac{2\pi}{3} + \varphi \text{ و } \widehat{APM} = \frac{2\pi}{3}$$

تبصره ـ برای $\varphi = 0$ نقاط P و M منطبق بر نقطهٔ A میگردند وبرای $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ نیز نقاط P و M منطبق میگردند وخط مستقیم OM بردایره مماس میشود و مثلث OAM متساوی الاضلاع میگردد .

***

محاسبهٔ قطعات OM و OP و AM و AP و R

درجمیع حالات ازمثلث OAM رابطهٔ زیر نتیجه میشود

$$\frac{OM}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{AM}{|\sin\varphi|} = \frac{OA}{\sin(\frac{\pi}{3} - \varphi)}$$

ازآنجا

$$OM \quad \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\varphi - \sin\varphi} \text{ و } AM \quad \frac{2a|\sin\varphi|}{\sqrt{3}\cos\varphi - \sin\varphi}$$

و داریم که $OM.OP=a^2$ پس

$$OP=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$$

$$AP=\frac{2a\sqrt{3}}{3}|\sin\varphi| \quad \text{از آنجا} \quad \frac{AP}{|\sin\varphi|}=\frac{OA}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

همچنین در جمیع حالات از مثلث AMP نتیجه میشود که

$$2R=\frac{AM}{\sin\frac{\pi}{3}} \quad \text{و} \quad R=\frac{AM\sqrt{3}}{3}$$

$$R=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\times\frac{|\sin\varphi|}{\sqrt{3}\cos\varphi-\sin\varphi}$$

* * *

محاسبهٔ φ برای اینکه $OP=OM$ باشد.

$$\frac{3a\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}$$

و یا اینکه

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{3}{4}$$

چون $0<\frac{\pi}{3}-\varphi<\pi$ پس $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)>0$

یعنی $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

واز آنجا $\varphi=0$ و $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. دراین حالت خط OM بر دایره مماس است.

محاسبهٔ $tg\hat{OAP}$

درحالت شکل (۱) داریم

$$tg\hat{OAP}=tg\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}-tg\varphi}{1+\sqrt{3}tg\varphi}$$

اما دیدیم

$$R=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\cos\varphi-\sin\varphi}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{tg\varphi}{\sqrt{3}-tg\varphi}$$

پس

$$tg\varphi=\frac{3R\sqrt{3}}{3R+2a\sqrt{3}}$$

بنابراین

$$tg\hat{OAP}=\frac{\sqrt{3}(3R+2a\sqrt{3})-3R\sqrt{3}}{3R+2a\sqrt{3}+9R}=\frac{3a}{6R+a\sqrt{3}}$$

درحالت (شکل۲)

$$tg\hat{OAP}=\frac{3a}{6R-a\sqrt{3}}$$

درحالت (شکل۳)

$$tg\hat{OAP}=\frac{3a}{6R-a\sqrt{3}}$$

در دو حالت اخیر فرض شده که $a\sqrt{3}\neq 6R$ چنانچه $a\sqrt{3}=6R$ باشد:

$$\hat{OAP}=\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad tg\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad \varphi=-\frac{\pi}{6}$$

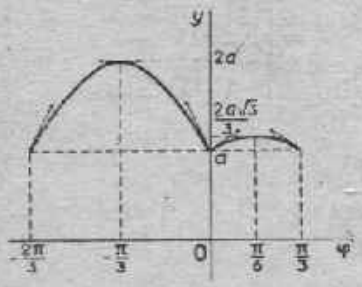
بررسی تابع $y=OP+AP$

پس ازاینکه بجای OP و AP مقادیرشان راقراردهیم تابع زیر بدست میآید.

$$y=2a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right) \quad -\frac{2\pi}{3}<\varphi<0$$

برای $0<\varphi<\frac{\pi}{3}$

$$y=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)$$



که تغییرات y در فاصله $[\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{2\pi}{3}]$ در جدول زیر خلاصه شده است

φ	$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
y'	$+$		0	$-$	0	$+$	0		$-$
y	a	↗	$2a$	↘	a	↗	$\frac{2a\sqrt{3}}{3}$	↘	a

۳ـ حل و بحث معادلهٔ $CP+AP=\frac{2aK}{\sqrt{3}}$

ازقرار دادن مقادیر OP و AP دو دستگاه زیر نتیجه میشود.

$$\text{I}\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)=K\\ 0<\varphi<\frac{\pi}{3}\end{cases} \quad \text{و} \quad \text{II}\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)=\frac{K}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2\pi}{3}<\varphi<0\end{cases}$$

با شرط $0<K<\sqrt{3}$ فرض می کنیم $\sin\alpha=\frac{K}{\sqrt{3}}$

$(0<\alpha<\frac{\pi}{6})$ واز دستگاه(I) بدست میآید که

$$\frac{\pi}{6}-\varphi=\pi-\alpha \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{6}-\varphi=\alpha$$

$$\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{6}-\alpha\\ \varphi=\alpha-\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$ مقادیر قابل قبول

بطور خلاصه اگر $\frac{\sqrt{3}}{2}<K<1$ باشد مسأله چهار جواب دارد (دومثبت ودومنفی) اگر $K=1$ باشد مسأله دارای سه جواب است (دو منفی و یك مثبت برابر $\frac{\pi}{6}$)

اگر $1<K<\sqrt{3}$ باشد مسأله دارای دوجواب منفی‌است .

اگر $K=-\sqrt{3}$ درنتیجه $\varphi=-\frac{\pi}{3}$ میگردد ومسأله یك ریشهٔ مضاعف دادد .

و برای $K=\frac{\sqrt{3}}{2}$ جوابهای برابر $\varphi=0$ و $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$ که ریشهٔ مضاعف هستند وهمچنین $\varphi=\frac{\pi}{3}$

برای تحقیق بحث معادله باشکل منحنی ریشه‌های معادله فوق طولهای نقاط مختلف‌منحنی مرسوم میباشند که باشکل‌قابل تطبیق است .

ترسیم تابع $Z=\frac{PM}{PA}$

ازمثلث APM بدست میآید که :

$$Z=\frac{PM}{PA}=\frac{\sin\widehat{PAM}}{\sin\widehat{AMP}}$$

برای $-\frac{\pi}{3}<\varphi<-\frac{2\pi}{3}$ باتوجه بقسمت اول مسأله

$$Z=\frac{-\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)}{\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)}$$

وبرای $-\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{3}$

$$Z_1=\frac{\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)}{\sin(\frac{\pi}{3}-\varphi)}$$

کافیست منحنی نمایش Z_1 را درفاصله $(-\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3})$ رسم‌نمود وقرینهٔ قسمتی‌ازآنرا که درفاصلهٔ $(-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{2\pi}{3})$ واقع است نسبت به محور $O\varphi$ بدست‌آورد :

$$Z'_1=\frac{\sin(\frac{\pi}{3}-\varphi)\cos(\frac{\pi}{3}+\varphi)+\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)\cos(\frac{\pi}{3}-\varphi)}{\sin^2(\frac{\pi}{3}-\varphi)}$$

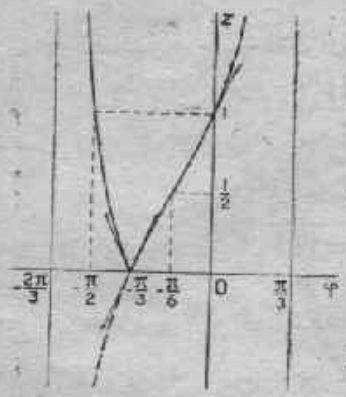
$$Z'_1=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\sin^2(\frac{\pi}{3}-\varphi)}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin^2(\frac{\pi}{3}-\varphi)}$$

برای $\frac{\pi}{3}<\varphi<-\frac{2\pi}{3}$ میتوانیم جدول‌زیر رامرتب نمائیم .

φ	$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$
Z'	$+$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+$
Z	$-\infty$	$\nearrow$	$\cdot$	$\nearrow$	$+\infty$

قسمتی از منحنی که خط چین رسم‌شده‌است ازتابع Z قابل قبول نبوده وبجای آن قرینه‌اش نسبت بمحور $O\varphi$ رسم شده اسب که قسمت‌قابل‌قبول منحنی‌تابع Z_1 میباشد ضمناً مماسهای مرسوم براین‌منحنی

درنقاط $A(-\frac{\pi}{3}$ و $0)$ و $B(0$ و $1)$



بایکدیگر موازیند پس بین‌این‌دونقطه حتمایك نقطهٔ عطف‌وجود داردکه میتوان بآسانی مختصات آنرا بکمك مشتق دوم بدست آورد .

$$Z''_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-2\varphi)}{\sin^3(\frac{\varphi}{3}-\varphi)}$$

واز $Z''_1=0$ نتیجه خواهد شدکه مختصات نقطه عطف عبارتست از $C\left(-\frac{\pi}{6}\text{ و }\frac{1}{2}\right)$

II — مکانیك

۱۰۷۵ـ اطاقك یك آسانسور از ته چاه یك‌معدن بعمق ۶۰۰ متر که درآنجا $g=9/8$ (M.K.S) است بوسیله یك کابل با نیروی ثابتی بطرف بالاکشیده میشود و در آن شتاب $\gamma=\frac{g}{20}$ بوجود میآید پس از t ثانیه مقدار نیرو تغییر میکند بقسمی که اطاقك آسانسور با حرکت‌کند شوندهٔ متشابه‌التغییر با شتاب ثابت $\gamma'=\frac{g}{10}$ بطرف بالا بحرکتش ادامه میدهد ودر دهنهٔ چاه سرعتش صفر میشود زمان‌کلی این حرکت را $t+t'$ مینامیم .

۱ـ فرض میکنیم v سرعت آسانسور درآخر قسمت اول حرکت و e و e' مسافتهای مربوط بدو قسمت حرکت باشند در اینصورت روابطموجودبین v و e و e' و t و t' راددردستگاه M.K.S بنویسید .

۲ـ اگر جرم اطاقك آسانسور یك تن باشد مقادیر دو نیروی ثابت وارد بردستگاه را در دو قسمت حرکت برحسب نیوتن وکاریرا که هریك از این‌دو نیرو انجام میدهند برحسب ژول بدست‌آورید .

حل

در پایان t ثانیهٔ اول پس ازحرکت‌آسانسور از ته چاه معدن با شتاب $\gamma=\frac{g}{۲۰}$ داریم که :

$$(۱)\quad v=\gamma t=\frac{gt}{۲۰}$$

$$(۲)\quad e=\frac{۱}{۲}\gamma t^{۲}=\frac{۱}{۲}vt=\frac{gt^{۲}}{۴۰}$$

$$(۳)\quad v^{۲}=۲\gamma e=\frac{ge}{۱۰}$$

و پس از این زمان برای قسمت دوم حرکت که **شتاب آن منفی است** معادلات سرعت و حرکت عبارتند از :

$$V=\gamma'\theta+v$$

$$y=\frac{۱}{۲}\gamma'\theta^{۲}+v\theta$$

اطاقك‌آسانسور پس از t' ثانیه میایستد بنابراین :

$$(۴)\quad ۰=\gamma' t'+v$$

$$(۵)\quad e'=\frac{۱}{۲}\gamma' t'^{۲}+vt \qquad \text{و}$$

$$(۶)\quad v=-\gamma' t'=\frac{gt'}{۱۰} \qquad \text{از رابطه (۴) نتیجه میشود که}$$

$$(۷)\quad e'=\frac{۱}{۲}\gamma' t'^{۲}-\gamma' t'^{۲}=-\frac{۱}{۲}\gamma' t'^{۲}=-\frac{gt'^{۲}}{۲۰} \qquad \text{و}$$

$$(۸)\quad e'=-\frac{۱}{۲}vt'+vt'=\frac{۱}{۲}vt' \qquad \text{ویا}$$

از حذف t' بین روابط (۶) و(۸) بدست میآوریم که :

$$(۹)\quad v^{۲}=-۲\gamma' e'=\frac{ge'}{۵}$$

و ازروابط (۱) و (۶) داریم که

$$t'=\frac{۱۰v}{g} \quad \text{و} \quad t=\frac{۲۰v}{g} \quad \text{بنابراین}$$

$$(۱۰)\quad t=۲t'$$

و چون‌عمق چاه ۶۰۰ متر است پس

$$(۱۱)\quad e+e'=۶۰۰$$

از روابط (۳) و (۹) بدست میآید که :

$$e=\frac{۱۰v^{۲}}{g} \quad \text{و} \quad e'=\frac{۵v^{۲}}{g}$$

$$(۱۲)\quad e=۲e' \qquad \text{بنابراین}$$

$$\frac{۱۰v^{۲}}{g}+\frac{۵v^{۲}}{g}=۶۰۰$$

$$v^{۲}=\frac{۶۰۰g}{۱۵}=۴۰\times۹/۸$$

$$v=\sqrt{۴۰\times۹/۸}=۱۴\sqrt{۲}=۱۹/۸\,m/s$$

و مسافتهای پیموده شده بترتیب عبارتند از

$$e=\frac{۱۰\times۴۰\times۹/۸}{۹/۸}=۴۰۰\,m$$

$$e'=۲۰۰\,m$$

وزمانهای مربوط باین‌دو حرکت عبارتند از

$$t=۴۰/۴۸\,s \quad \text{و} \quad t'=\frac{۱۰\times۱۴\sqrt{۲}}{۹/۸}=۲۰/۲۸\,s$$

برای تعیین نیروی کابل ـ در قسمت اول حرکت اگر نیروی مولد حرکت را T بنامیم .

$$M\gamma=T-Mg$$

$$T=M(\gamma+g) \qquad \text{یا}$$

در قسمت اول حرکت $\gamma=\frac{g}{۲۰}$ پس نیروی کشش کابل

$$T_{۱}=M\left(\frac{g}{۲۰}+g\right)=\frac{۲۱}{۲۰}Mg=\frac{۲۱}{۲۰}\times۱۰۰۰\times$$

$$\times۹/۸=۱۰۲۹۰\,N$$

و در قسمت دوم حرکت $\gamma'=-\frac{g}{۱۰}$ پس نیروی کشش کابل .

$$T_{۲}=M\left(\frac{-g}{۱۰}+g\right)=\frac{۹}{۱۰}Mg=\frac{۹}{۱۰}\times۱۰۰۰\times$$

$$\times۹/۸=۸۸۲۰\,N$$

کار نیروی کشش در قسمت اول عبارتست از :

$$W_{۱}=T_{۱}\cdot e=۱۰۲۹۰\times۴۰۰=۴۱۱۶\times۱۰^{۲}\,J \qquad \text{یا}$$

$$۴۱۱۶\,KJ$$

و درقسمت دوم حرکت :

$$W_{۲}=T_{۲}\cdot e'=۸۸۲۰\times۲۰۰=۱۷۶۴\times۱۰^{۲}\,J \qquad \text{یا}$$

$$۲۷۶۴\,KJ$$

تبصره ـ کار کلی که اطاقك آسانسور انجام میدهد برابر است با :

$$W=۴۱۱۶+۱۷۶۴=۵۸۸۰\,KJ$$

و این برابر است با :

$$W=\frac{۱۰۰۰\times۹/۸\times۶۰۰}{۱۰۰۰}=۵۸۸۰\,KJ$$

مسائل برای حل

۱ ـ مسائل متفرقه

۱۰۷۶ ـ عبارت زیر را به‌حاصل‌ضرب دو عامل تجزیه کنید .

$$(x-1)^5+x$$

نصرت‌الله حسنلو ـ چهارم ریاضی دبیرستان دارالفنون

۱۰۷۷ ـ صحت تساوی زیررا ثابت کنید .

$$(1024)^{\log_{32}9}=(6561)^{1-\log_9 3}$$

نصرت‌الله حسنلو

۱۰۷۸ ـ بفرض اینکه a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ و c و d ریشه‌های معادلهٔ $x^2+rx+s=0$ باشد مطلوبست تعیین معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن $ad+bc$ و $ac+bd$ باشد .

سعیدمحمودی ـ چهارم ریاضی دبیرستان ادیب

۱۰۷۹ ـ مطلوبست تعیین x از رابطهٔ زیر .

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x+\left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^x=2a$$

سیدنورالدین سیادتان ـ پنجم ریاضی دبیرستان شاهپورشیراز

۱۰۸۰ ـ معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} x^{x+y}=y^{12} \\ y^{x+y}=x^{3} \end{cases}$$

فرستنده : محمدرضا مرعشی‌پور ـ پنجم ریاضی دبیرستان البرز

۱۰۸۱ ـ اگر y' و y'' بترتیب مشتق اول و دوم تابع $y=a\cos 2x+b\sin 2x$ باشد ثابت کنید .

$$y''+4y=0$$

غلامحسین راستگو ـ تبریز

۱۰۸۲ ـ تابع اولیهٔ هریك از توابع زیررا تعیین کنید.

$$1)\ y=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

$$2)\ y=\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x-1)^m}$$

فرستنده : غلامحسین راستگو ـ تبریز

۱۰۸۳ ـ عددی شش رقمی چنان تعیین کنید که اگر رقم سمت راست آنرا بسمت چپ آن ببریم عدد حاصل پنج برابر عدد اول گردد .

فرستنده : شاهرخ ریاضی ـ ششم ریاضی دبیرستان آذرتهران

۱۰۸۴ ـ هرگاه a و b و c اضلاع و A و B و C زوایای مثلثی باشند رابطهٔ زیر را ثابت کنید .

$$(a^2+b^2+c^2)(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)=$$
$$=(a\sin A+b\sin B+c\sin C)^2$$

بهمن ختاری ـ دانشجوی سال اول رشته ریاضی

۱۰۸۵ ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر A وباقیماندهٔ تقسیم‌آن‌بر $x-b$ برابر B فرض‌شودمطلوبست محاسبهٔ باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)(x-b)$

فرستنده ـ علی شیعه‌بیگی دانشجوی دانشکده فنی

۱۰۸۶ ـ حاصل ضرب اعداد متوالی از یك تا n را فاکتوریل n گفته و با علامت $(n!)$ نمایش میدهند :

$$n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n$$

ارقام x و y و z را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$x!+3y!+4z!=\sqrt{xyz}$$

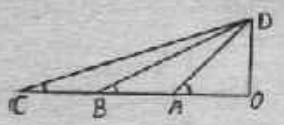
فرستنده مهندس عباس سعیدی

۱۰۸۷ ـ زاویهٔ xoy مفروض است مطلوبست تعیین‌نقطهٔ M بطوریکه اگرعمودهای MA و MB را بترتیب براضلاع ox و oy رسم‌کنیم AB بطول معلوم l بوده و باخط ثابت Δ موازی باشد .

حافظی ـ دبیردبیرستان درخشانی شبستر

۱۰۸۸ ـ اثبات هندسی رابطهٔ

$$\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$



زاویهٔ قائمه xoy را در نظر گرفته بر oy طول OD وبر ox طولهای

$$OA=AB=BC=OD$$

را جدا مینمائیم ثابت کنید .

$$\widehat{OAD}=\widehat{OBD}+\widehat{OCD}$$

(در یکی دوکتاب حل‌المسائل، این مسأله بااستفاده از روابط متری وتشابه مثلثات ثابت‌شده است . دراینجا مقصودحل مسأله است بااستفادهٔ حداکثرازمقالهٔ دوم هندسه)

مسائل برای داوطلبان کنکور دانشگاه

۲ـ پنج مسأله طرح یکی از استادان

۱۰۸۹ ـ u و v و w اعداد دلخواهند .

۱) اتحاد زیر را ثابت کنید .

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=\frac{1}{2}(u+v+w)\times$$
$$\times[(u-v)^2+(v-u)^2+(w-u)^2]$$

و از آن نتیجه بگیرید که اگر داشته باشیم

$$u^3+v^2+w^3=3uvw$$

الزاماً یا $u+v+u=0$ و یا $u=v=w$

۲) فرض کنیم $u=a$ و $v=b\sqrt[3]{2}$ و $w=c\sqrt[3]{4}$ که a و b و c اعداد گویا باشند استنباط کنید که اگر $a^3+2b^3+4c^3=6abc$ باشد الزاماً $a=b=c=0$ خواهد بود .

۱۰۹۰ ـ تحقیق کنید که $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ درمعادلهٔ $x^3=6+6x$ صدق میکند و این معادله را بطور کامل حل کنید .

۱۰۹۱ ـ معادلهٔ درجهٔ سومی باضرائب گویا پیدا کنید که $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ یك ریشهٔ آن باشد .

۱۰۹۲ ـ دستگاه زیررا حل کنید .

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=1 \\ 3x^2y-y^3=\sqrt{2} \end{cases}$$

۱۰۹۳ ـ دستگاه زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=8 \end{cases}$$

۳ـ مسائل کنکور ورودی دانشکدهٔ فنی در شهریور ۱۳۴۲

۱۰۹۴ ـ اگر بین متغیر x و تابع y رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$y^2+2y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

ثابت کنید که مشتقهای اول ودوم y نسبت به x درمعادلهٔ زیر صدق مینماید .

$$2(y+1)y''+2(y')^2+9y^2+18y=0$$

(c_1 و c_2 مقادیر ثابتاند و y' و y'' بترتیب مشتق اول و دوم تابع y نسبت به x میباشد)

۱۰۹۵ ـ دو عدد چنان تعیین کنید که حاصل ضرب آنها مساوی مربع کسر $\frac{\sin b}{\sin a}$ و تفاضل آنها مساوی کسر $\frac{2(\cos a-\cos b)}{\sin^2 a}$ باشد . ثابت کنید که هریك از آن دوعدد مربع کامل است وقتی $a=60^\circ$ و $b=120^\circ$ باشد این دو عدد را پیدا کنید .

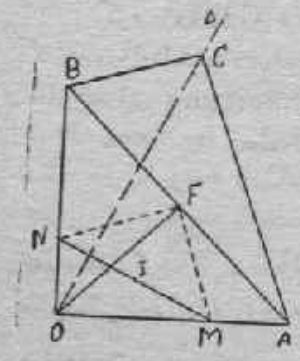
۱۰۹۶ ـ در یك صفحه قطعه خط ثابت $OA=2a$ و قطعه خط متحرك $BO=a$ مفروض‌اند زاویهٔ $AOB=x$ فرض کنید ($0<x<\pi$) برروی AB در خارج مثلث OAB در صفحهٔ مفروض مثلث متساوی الاضلاع ABC را میسازیم مطلوبست اولا تعیین مساحت چهار ضلعی $OACB$ برحسب x و a ثانیاً x را طوری تعیین کنید که مقدارسطح مساوی ka^2 باشد . برحسب k که عدد مثبتی است بحث کنید .

ثالثاً مطلوبست رسم منحنی $y=\frac{S}{a^2}$ (S سطح چهار ضلعی است)

۱۰۹۷ ـ سه جمله‌ای درجهٔ دوم $y=ax^2-2x+\frac{1}{a}$ مفروض است مطلوبست مختصات نقطه‌ای مانند P از منحنی که در آن نقطه ضریب زاویهٔ خط مماس برمنحنی برابر m باشد مکان هندسی نقطهٔ p را وقتی که a تغییر کند m ثابت بماند تعیین کنید .

ثانیاً مطلوبست تشکیل معادلهٔ مماس برمنحنی در نقطهٔ p و تعیین مقادیر m بقسمی که مماس منظور از مبداء مختصات بگذرد . در حالتی که مماسها از مبداء بگذرند مختصات نقاط تماس را تعیین کنید اگر نقاط تماس A و B فرض شوندضریب زاویهٔ خط AB را تعیین و تحقیق کنید وقتی a جمیع مقادیر ممکنه را قبول کند این خط چگونه تغییرمی‌نماید .

۱۰۹۸ ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین AOB بساقهای $OA=OB=2a$ مفروض است . دونقطهٔ M و N بترتیب روی ساقهای OA و OB طوری حرکت می کنند که $OM+ON=2a$ است . اگر F وسط AB باشد .



۱) ثابت کنید $FM=FN$ و $\widehat{MFN}=\frac{\pi}{2}$ است.

۲) مکان هندسی نقطه I وسط MN را بدست آورید.

۳) از نقطهٔ O خط Δ را برصفحهٔ OAB عمود میکنیم و روی آن نقطه‌ای مانند C چنان می‌گیریم که مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد. اگر $AB=1$ فرض شود حجم هرم OABC و ارتفاع وارداز O برصفحهٔ ABC را برحسب l حساب کنید.

(توجه کنید که در این فرض دیگر طول OA مساوی 2a نیست)

۱۰۹۹ – مطلوبست تعیین یك مهمی که دو مماس و خط هادی آن D در دست است (بحث)

۱۱۰۰ – رقومی – برنقطهٔ مفروض a_4 خطی بموازات صفحهٔ معلوم p چنان رسم کنید که بر خط مفروض b_1c_2 واقع در خارج صفحهٔ p عمود باشد.

۱۱۰۱ – تپسیمی – $aba'b'$ تصاویر ضلع AB از مربع ABCD داده شده است. تصاویر مربع را رسم کنید. در صورتی که بدانیم ضلع AD از آن افقیه است.

۱۱۰۲ – رسم فنی – پرسپکتیو کاوالیه جسم داده شده است (شکل پائین). مطلوبست رسم تصاویر زیر بامداد بمقیاس $\frac{1}{2}$ و اندازه‌گذاری کامل.

۱ – مقطع کامل aa در تصویر قائم.

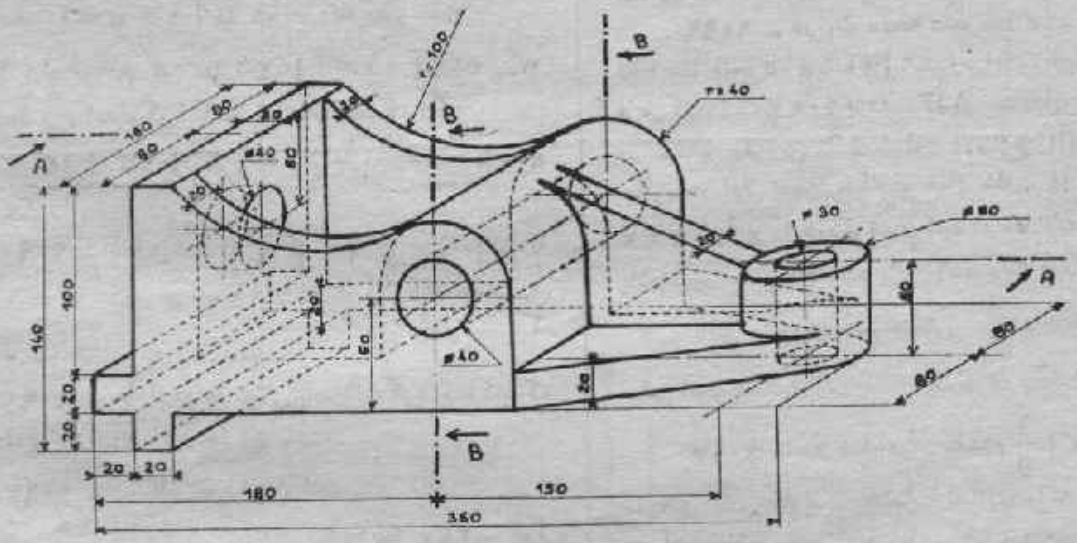
۲ – مقطع کامل bb در تصویر نیمرخ راست.

۳ – تصویر افقی.

تبصره – رسم خطوط منحنی جسم در مقاطع ضروری است

ابعاد کاغذ ۴۲۰ × ۲۹۷ میلیمتر و کادر رسم ۴۱۰ × ۲۸۷ میلیمتر خواهد بود.

مدت دو ساعت و نیم.



مهدی بهزاد

از جمله مسأله‌های ریاضی دربارهٔ «شطرنج»

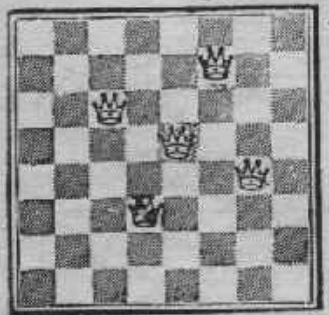
مسألهٔ ۸ وزیر:

دربازی شطرنج ممکن است هشت وزیر را روی صفحه چنان قرارداد که هیچیك دیگری را نزنند.

واضح است که مسألهٔ فوق با بیش از هشت وزیر محال است.

گوس (Gauss) فکر میکرد که این مسأله دارای ۷۶ جواب است. مجلهٔ شطرنج برلین، Schachzeitung درسال ۱۸۵۴ فقط چهل حل مختلف مسأله را که بوسیله بازیکنان کشف شده بود درج کرد. بکمك ریاضیات جدید ثابت کرده‌اند که مسأله دارای ۹۲ جواب است. شکل مقابل یکی از جوابها را نشان میدهد.

مسألهٔ ۵ وزیر:



ثابت کنید که حداقل تعداد وزیرانی که میتوانند تمام خانه های یك صفحهٔ شطرنج را مورد حمله قرار دهند پنج است. مسأله‌دارای چندجواب است؟

یك جواب درشکل مقابل نشان داده شده است.

مسأله‌های ۱۲ اسب و ۸ فیل:

اینرو مسأله را نیزمیتوان بطریق (مسألهٔ پنج‌وزیر) بیان نمود، جوابهای مختلف این دو مسأله راپیدا کنید

۴ ـ شانزده مسأله از آقای علی رضائی بازرس تعلیماتی وزارت فرهنگ

I ـ معادلات زیررا باحیل جبری بمعادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل نموده حل نمائید .

۱۱۰۳ ـ $$\frac{1}{x}=\frac{15-x}{\frac{1}{2}}$$

۱۱۰۴ ـ $$\frac{x^{\frac{2}{3}}-8}{x}=\frac{7}{\frac{1}{2}}$$

$$x^{\frac{1}{2}}-2$$

۱۱۰۵ ـ $$(x+p)(x+p+\alpha)(x+p+\beta)(x+p+\alpha+\beta)=$$
$$=(x+q)(x+q+\alpha)(x+q+\beta)(x+q+\alpha+\beta)$$

۱۱۰۶ ـ $$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a \\ x+y+z=b-3(bxyz)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

۱۱۰۷ ـ $$\begin{cases} x^{2n}+y^{2n}=[17+3(32)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{4}}(2^{\frac{1}{2}}-1) \\ x^{3n}+y^{3n}=[2-(3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\frac{(3^{\frac{1}{2}}+1)}{2} \end{cases}$$

۱۱۰۸ ـ $$(ax\pm b)^4+(ax\pm c)^4=d$$

* * *

II ـ آیا ممکن است معادلات مجهول‌التواء بشکل زیر را در حدود معلومات متوسطه حل کرد ؟

۱۱۰۹ ـ $$(z+\frac{1}{n})^{z+\frac{1}{n}}=(n+1)^{nz}$$

۱۱۱۰ ـ $$y^{y}=y^{[(n-1)y-1]}$$

III ـ حساب

۱۱۱۱ ـ اعدادی مجذور کامل طوری مشخص کنید که اگر عددی مانند a از آن اعداد کم و یا بر آنها اضافه کنیم حاصل مجذور کامل باشد .

$$\begin{cases} z^2-a=x^2 \\ z^2+a=y^2 \end{cases}$$

۱۱۱۲ ـ عددی مجذور کامل طوری پیدا کنید که اگر ده واحد بر آن اضافه کنیم حاصل مجذور کامل باشد .

$$x^2+10=y^2$$

IV ـ قضایا و مسائل هندسه

۱۱۱۳ ـ مثلثی مفروض است . پاره خطی طوری رسم کنید که :

اولا طول پاره خط محصور بین اضلاع مثلث مساوی تفاضل قطعات محدود بین پاره خط محصور و قاعدهٔ مثلث باشد . طول پاره خط محصور میانیم را برحسب اضلاع مثلث و ماکزیمم را بحسب یك ضلع و یك زاویه محاسبه نمائید .

ثانیاً ـ طول پاره خط محصور مساوی مجموع طول قطعات محدود بین پاره خط محصور وقاعدهٔ مثلث باشد .

۱۱۱۴ ـ ثابت کنید اولاً در مثلث غیر مشخص طول نیمساز زاویهٔ یك رأس از طول میانهٔ نظیر آن رأس کوچکتر است .

ثانیاً نیمساز زاویهٔ کوچکتر بزرگتر است از نیمساز زاویهٔ بزرگتر .

۱۱۱۵ ـ هر گاه در چهار ضلعی روابط زیر بین اضلاع و اقطار برقرار باشد .

$$ac+bd=pq$$

ثابت کنید چهارضلعی محاطی است (عکس قضیهٔ بطلمیوس)

۱۱۱۶ ـ مثلث متساوی‌الساقینی باملومات r و d رسم کنید (r شعاع دایرهٔ محاطی و d فاصلهٔ مراکز دوایر محیطی و محاطی)

۱۱۱۷ ـ مثلث متساوی‌الساقینی باملومات زیر رسم کنید؛ ساق و میدانیم که قاعدهٔ آن مساوی فاصلهٔ پای عمود واردبرساق تا رأس مثلث مطلوب میباشد .

۱۱۱۸ ـ مثلثی باملومات زیر رسم کنید A و v_a و m_a (زاویه و نیمساز و میانهٔ نظیر آن زاویه) .

دنبالهٔ مسائل از :

استاد دکتر محسن هشترودی

علاوه بر چند مساله‌ای که از استاد دکتر هشترودی در شمارهٔ اول مجله چاپ شد چهل مساله از ایشان مربوط به ریاضیات متوسطه در شمارهٔ دوم درج گردید . اینک بدنبال آن چهل مساله مسائلی دیگر در زیر چاپ میشود و باطلاع خوانندگان محترم میرساند که استاد دوبهم صدوبیست مساله مربوط بریاضیات متوسطه را در اختیار مجله گذاشته‌اند و با علاقهٔ کاملی که نسبت به پیشرفت امر مجله ابراز میدارند موافقت فرموده‌اند این صدوبیست مساله با حل آنها بصورت یک کتاب در اختیار علاقمندان قرار گیرد .

صدوبیست مساله با حل از استاد دکتر هشترودی اولین کتاب از انتشارات یکان است که بزودی منتشر میشود . ازعلاقمندان تقاضا دارد مراتب را بنشانی صندوق پستی ۴۴۶۳ اطلاع دهند .

۱۱۱۹ــ دو نقطهٔ A و B بر روی دایره‌ای بشعاع R و مرکز O ثابت‌اند نقطهٔ I وسط وتر ثابت AB می‌باشد وتر متغیر CD را چنان رسم می‌کنیم که در مثلث CID نسبت ارتفاع IH بقاعدهٔ CD با عکس قطر دائرهٔ محیطی مثلث CID متناسب باشد یعنی $\frac{IH}{CD}=\frac{a}{2r}$ که در آن a طولی ثابت و r شعاع دائرهٔ محیطی مثلث CID میباشد . دوائر محیطی مثلثهای AIC و BID در نقطهٔ P و دوائر محیطی مثلثهای AID و BIC در نقطهٔ Q تقاطع می‌کند مکان هندسی نقاط P و Q را وقتی وتر CD تغییر می‌کند تعیین کنید . آیا درچه صورت این مکانها منحنی‌های معادل‌اند ؟ همچنین درچه صورت این دو مکان برهم منطبق‌اند ؟

۱۱۲۰ــ نقطه ثابت A و خط ثابت Δ مفروض اند مثلثهای ABC را بر آس A که قاعدهٔ آنها بر خط Δ واقع است چنان رسم می‌کنیم که AB×AC مقدار ثابتی باشد آیا دائرهٔ محیطی این مثلثها چه خاصیتی دارد ؟ همچنین اگر دائرهٔ ثابت O بشعاع R و نقطهٔ A بر روی آن واقع باشد قاعدهٔ مثلثهای ABC محاط در این دائره بقسمی که AB×AC مقدار ثابتی باشد چه خاصیتی دارد ؟

۱۱۲۱ــ در مثلثی رؤس B و C ثابت هستند و زاویهٔ B همواره دو برابر زاویهٔ C باقی میماند مکان هندسی رأس A چه منحنی است ؟

۱۱۲۲ــ مکان هندسی نقاطی که نسبت مربع فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ثابت A به فاصلهٔ آنها از خط ثابت D طول ثابتی باشد چیست ؟

۱۱۲۳ــ قطعه خط ثابت AB ودائرهٔ ثابت O بشعاع R در دست است مطلوبست مکان هندسی رأس مثلثهائی بقاعدهٔ AB بقسمی که سطح آنها متناسب باشد با قوت همین رأس نسبت به دائرهٔ O .

۱۱۲۴ــ منحنی مسطح مسدود Γ درسطح ثابت P در دست است کره‌ای بمرکز O و بشعاع R ثابت است مطلوبست مکان هندسی رؤس مخروطهائی بقاعدهٔ Γ بقسمی که حجم آنها برابر باشد با حاصل ضرب طول ثابتی در قوت رأس مخروط نسبت به کرهٔ O .

۱۱۲۵ــ دو دایرهٔ متقاطع بمرکزهای O و O' و بشعاعهای R و R' مفروض‌اند وقاطعهائی درنظر می‌گیریم که نقاط تقاطع آنها با دوایر O و O' نسبت بهم مزدوج باشند ثابت کنید که اوساط متمم این قاطعها برمقطع مخروط ثابتی مماس می‌باشد .

۱۱۲۶ــ معادلهٔ درجهٔ دوم $bt^2(a+x)-2ayt+\dots=0$ نسبت به t مفروض است . اگر x و y را مختصات نقطه‌ای از صفحه فرض کنیم معادله فوق نمایش یک خط مستقیم است و معمولا از هر نقطه صفحه دو خط از این خطوط میگذرد .

۱) مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که از آنها فقط یک خط از این خطوط مرور کند . این مکان منحنی است که آنرا (γ) می‌نامیم .

۲) منحنی (γ) صفحه را بدو ناحیه تقسیم می‌کند معلوم کنید که نقطه $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ به‌کدام ناحیه تعلق داشته باشد تا از آن دوخط از خطوط مذکور مرور کند . ثابت کنید که جمیع این خطوط عموداره برمنحنی (γ) مماس می‌باشند .

۳) مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که دوخطی که از آنها مرور می‌کنند برهم عمود باشند. نتایج را با قضایای کلاسیك که در متوسطه ذکر میشود تطبیق کنید .

۱۱۲۷ـ اگر در مثلثی $a^2=2(c^2-b^2)$ باشد میانهٔ m_a ، باضلع b برابر است . روشن است که در این مثلثها $c>b$ می‌باشد اگر $\frac{b}{c}$ را برابر $\cos\varphi$ فرض کنیم در اینصورت برای زاویهٔ A مثلث رابطهٔ $\cos A=\frac{3\cos^2\varphi-1}{2\cos\varphi}$ بدست می‌آید تغییرات زاویهٔ A را از روی φ بحث کنید . همچنین ثابت کنید که در این مثلث رابطهٔ $a^4=16b^2(a^2-c^2\sin^2 A)$ نیز صادق است . بنا براین تحقیق کنید که رابطهٔ :

$$a^4=16b^2(a^2-c^2)+4(3b^2-c^2)^2$$

با رابطهٔ $a^2=2(c^2-b^2)$ معادل است . برای رابطهٔ اخیر جزتساوی $m_a=b$ شرط دیگری نیزممکن است رابطه را ایجاب کند تعبیر هندسی این شرط اخیر چیست ؟

۱۱۲۸ـ میدانیم که اگررابطه جبری منطق (رابطه‌ای بین دوکثیرالجمله) بازاء k مقدار محقق گردد و k بزرگتر از n (درجه کثیرالجمله‌ای که از اجتماع طرفین بدست‌می‌آید) باشد رابطه یك‌اتحاد است یا بعبارت دیگراگر معادله‌ای جبری منطق‌از درجهٔ n ام بازاء $n+1$ مقدارصفر شود معادله متماثلاً صفراست . (هر معادلهٔ جبری ازدرجهٔ n بیش‌از nریشه ندارد) .

با استفاده از مطلب فوق ثابت کنید که :

۱) $$\frac{(x-b)(x-c)\dots(x-l)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}+\frac{(x-a)(x-c)\dots(x-l)}{(b-a)(b-c)\dots(b-l)}+\dots+\frac{(x-a)(x-b)\dots(x-k)}{(l-a)(l-b)\dots(l-k)}=1$$

یك اتحاد است .

۲) با استفاده از اتحاد فوق نتیجه بگیرید که مقدار عبارت :

$$\frac{a^p}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}+\frac{b^p}{(b-a)(b-c)\dots(b-l)}+$$

$$+\frac{c^p}{(c-a)(c-b)\dots(c-l)}+\dots+\frac{l^p}{(l-a)(l-b)\dots(l-k)}$$

بازاء جمیع مقادیر مختلف صحیح و مثبت p کوچکتر از $n-1$ $(0<p<n-1)$ برابر صفر است (n عدهٔ اعداد a و b و c ... و k و l می‌باشد) .

و بازاء $p=n-1$ مقدار عبارت فوق برابر واحد است .

۳) مقدار همان عبارت بازاء $p=n$ برابر $a+b+c+\dots+l$ می‌باشد . آیا چگونه می‌توان این نتیجه را محقق کرد ؟

۱۱۲۹ـ چهار نقطهٔ ثابت A و B و C و D برروی یك خط مستقیم واقعند مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ M بقسمی که قطعات AB و CD از این نقطه با یك زاویه دیده شوند .

مسئله ۵۲) دو دایرهٔ ثابت در صفحه مفروض‌اند خطی‌متغیر موازی‌با خط‌المرکزین دوائر را در چهار نقطه قطع‌می‌کند مطلوبست مکان هندسی نقاط تقاطع اشعه‌ای ازدوایر که دراین چهارنقطه‌میگذرند .

۱۱۳۰ـ ثابت کنید که منحنی‌تقاطع (γ) دومخروط دوارکه قاعده‌های آنهادرصفحهٔ افقی تصویر دو دایره می‌باشند وارتفاع آنها برابر است برروی استوانه‌ای قائم ودوار قراردارد (یعنی تصویر منحنی (γ) برروی صفحهٔ مشترك دوقاعدهٔ مخروطها دائره است (برای اثبات از مسئله ۵۲ استفاده‌کنید) صفحهٔ قائم تصویررا موازی خط‌المرکزین قاعدهٔ مخروطها بفاصله‌ای بیشتر ازشعاع

بزرگتر دودایره قاعده انتخاب کنید دراینصورت تصویر منحنی برروی صفحهٔ قائم تصویر قطعه‌ای از سهمی است . طریقه‌ای برای ترسیم ملخص مسئله ارائه کنید که تصویر قائم منحنی تقاطع را با نقاطیابی بدست دهد .

۱۱۳۱ـ بر روی دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ xoy مرتباً نقاط A و B را چنان انتخاب می‌کنیم که رابطهٔ :

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{a}$$

که در آن a طول ثابتی است همواره برقرار باشد .

۱) ثابت کنید که خط AB برنقطهٔ ثابتی می‌گذرد ۲) اگر C چهارمین رأس مستطیلی باشد که AB قطر آن است و $A'B'$ قرینه AB نسبت به‌رأس O خطی که از C بر $A'B'$ عمود میشود برنقطه ثابتی میگذرد .

۳) دوایری بقطرهای OA و OB رسم می‌کنیم تا درنقطهٔ P تلاقی کنند مکان نقطه P را تعیین کنید .

٤) ثابت کنید که منعکس دایرهٔ محیطی مثلث OAB نسبت به‌نقطهٔ O برسهمی ثابتی مماس است .

٥) ثابت کنید که مماس مشترك دوایر شمارهٔ ۳ بردایرهٔ ثابتی مماس است .

۱۱۳۲ـ قطعه خط متغیر AB برضلعین زاویهٔ قائمهٔ xoy میلغزد بقسمی که $OA\times OB=a^2$ است (a طولی است ثابت) برروی منصف الزاویهٔ xoy نقطهٔ F را بطول $OF=2a$ تعیین کنید :

۱) ثابت کنید که زاویهٔ $\widehat{AFB}$ مقدار ثابتی دارد و با تغییر وضع AB تغییر نمی‌کند .

۲) نتیجه بگیرید که اوضاع مختلف خط AB بر هذلولی متساوی‌الساقینی ثابت مماس است و نقطهٔ تماس وسط قطعه AB باشد .

۱۱۳۳ـ زاویه ثابت $xoy=\alpha$ مفروض است نقطهٔ ثابت F در سطح زاویه در دست است زاویهٔ ثابت (β) حول نقطهٔ F دوران می‌کند واضلاع آن اضلاع زاویهٔ α را دردو نقطهٔ P و Q (یا نقاطدیگر P_1 و Q_1) قطع می‌کند ثابت کنید که اوضاع مختلف خطوط PQ با دوران زاویهٔ β همواره بر مقطع مخروطی ثابتی مماس می‌باشد بحث در نوع این مقطع مخروطی بر حسب مقادیر α و β .

۱۱۳۴ـ جوابهای یکسان دستگاه :

$$\begin{aligned}
(-x_1+xa_2+x_3+\ \cdots\ +x_n)x_1&=1(x_1+x_2+\ \cdots\ +x_n)-2\\
(x_1-x_2+x_3+\ \cdots\ +x_n)x_2&=2(x_1+x_2+\ \cdots\ +x_n)-2\times 2^2\\
(x_1+x_2-x_3+\ \cdots\ +x_n)x_3&=3(x_1+x_2+\ \cdots\ +x_n)-2\times 3^2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(x_1+x_2+x_3+\ \cdots\ +x_{n-1}-x_n)x_n&=n(x_1+x_2+\ \cdots\ +x_n)-2\times n^2
\end{aligned}$$

را بدست آورید (دورشته جواب یکسان وجود دارد)

۱۱۳۵ـ آیا معادلهٔ : $5-6t+4u+2t^2+2u^2+v^2-2uv-2tu=0$

بجز رشته جواب : $t=-u=-v=1$ جوابهای حقیقی‌دیگری دارد ؟

۱۱۳۶ـ ثابت کنید که عبارت $a^3+b^3+c^3-3abc$ اگر در عبارت $a'^3+b'^3+c'^3-3a'b'c'$ ضرب شود حاصل را میتوان بصورت $A^3+B^3+C^3-3ABC$ نوشت و یکی از مقادیر A و B و C با عبارتهای زیر تعیین میشود :

$$\begin{cases} A=aa'+bc'+cb' \\ B=ac'+bb'+ca' \\ C=ab'+ba'+cc' \end{cases}$$

(البته با تبدیل مقادیر ممکن است دو رشته جواب‌گیر نیز بدست آید) .

محقق کنید $A+B+C=(a+b+c)(a'+b'+c')$ و نتیجه بگیرید که اگر $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ حتماً $a+b+c=0$ می‌باشد وبالعکس بدیهی است که $a=a'$ و $b=b'$ و $c=c'$ فرض شود اتحاد زیر محقق است .

$$(a^2+b^2+c^2-2abc)^2=A^2+B^2+C^2-2ABC$$
$$A=a^2+2bc \qquad B=b^2+2ac \qquad C=c^2+2ab$$

معلوم کنید که همان اتحاد با مقادیر :

$$A=a^2-bc \qquad B=b^2-ac \qquad C=c^2-ab$$

نیز محقق است . علت را توضیح کنید .

۱۱۳۷ ـ اگر α زاویهٔ نیمساز زاویهٔ A مثلث با میانهٔ ضلع a و β زاویه بین همین نیمساز باارتفاع نظیر ضلع a باشد .

ثابت کنید که : $$tg^2\frac{A}{2}=\frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

ازمثلثی ارتفاع ومیانه ونیمساز نظیر یك رأس دردست است مثلث را ترسیم کنید . اضلاع وزوایای مثلث را حساب کنید .

۱۱۳۸ ـ دستگاه :

$$x_1(x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n) = a^2$$
$$x_2(x_1+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n)+\frac{3}{4}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 = 4a^2$$
$$x_3(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n)+2(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 = 9a^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_k(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_{k+1}+\cdots x_n)+\frac{k^2-1}{4}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2=k^2a^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})+\frac{n^2-1}{4}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 = n^2a^2$$

را برای جوابهای یکسان حل کنید .

۱۱۳۹ ـ معادله $y^2+2qy^3-p^3=0$ را باتبدیل $y^2-xy-p=0$ مبدل کنید و بفرض $q^2+p^2>0$ راه حلی برای معادله درجه سوم پیدا کنید در تبدیل ازبکار بردن رادیکال باید اجتناب شود یعنی اعمال محاسبه که برای تبدیل بکار میرود باید اعمال جبری (جمع و ضرب و تقسیم) بر روی کثیرالجمله‌ها یا کسرهای منطق باشد محقق کنید که اگر j یکی از ریشه‌های موهوم معادله $\lambda^3-1=0$ باشد ازرابطه $x=y-\frac{p}{y}$ میتوان دوریشهٔ دیگر معادلهٔ درجه سومی که درحل مسئله بدست میآید بکمك روابط : $x'=jy-\frac{p}{jy}$ و $x''=j^2y-\frac{p}{j^2y}$ بدست آورد .

۱۱۴۰ ـ تابع $y=(m+1)x^2+(2m-1)x+m-1$ مفروض است .

۱) محقق کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع فوق بازاء مقادیر مختلف m همواره بریك نقطهٔ ثابت A می گذرد .

۲) دومنحنی ازمنحنی‌های فوق بازاء دومقدار m_1 و m_2 ازپارامتر m درهمان نقطهٔ A برعم مماس می‌باشند .

۳) بازاء $m=-1$ منحنی به‌خط‌مستقیم بدل میشود این خط چه خاصیتی دارد ؟

۴) منحنی از دسته منحنیهای فوق پیدا کنید که برمحور xها مماس باشد .

۵) مکان هندسی رؤس این منحنی‌ها (نقطه ماکزیموم ویا می‌نیموم بر روی هر منحنی) خطی است مستقیم که برنقطهٔ ثابت A می گذرد .

۶) خطی دلخواه (باضریب زاویهٔ γ) ازنقطهٔ A رسم می کنیم تامنحنی نظیر پارامتر m رادر نقطهٔ B قطع کند . ضریب زاویهٔ خط BM راتعیین کنید (M نقطه ماکزیموم یامی‌نیموم منحنی است) نشان‌دهید که این ضریب زاویه فقط به λ مربوط است و بمقدار m ارتباطی ندارد . نتیجه بگیرید که اگرهمین خط مفروض منحنی نظیر پارامتر m' را در نقطه B' قطع کند خط BM' (M' نقطه می‌نیموم یا ماکزیمم‌منحنی نظیر m' است) باخط BM موازی است .

۷) نشان دهید که مماس درنقطهٔ B برمنحنی نظیر m بامماس‌درنقطهٔ B' برمنحنی نظیر m' موازی است واز(۶) و(۷) نتیجه بگیرید که دو منحنی نظیر مقادیر m و m' باهمان نسبت‌بمرکز A متجانس‌اند ونسبت تجانس را تعیین کنید علامت تجانس (مستقیم یامعکوس) ؟

۱۱۴۱ـ معادلهٔ‌درجهٔ‌سوم $x^3+ax^2+bx+c=0$ مفروض‌است‌تبدیل $x=\frac{y^2+\alpha y+\beta}{y}$ آنرا بمعادلهٔ‌درجهٔ ششم‌تبدیل می‌کند نشان دهید که ضریب جملهٔ‌درجهٔ پنجم وضریب جملهٔ‌درجهٔ اول این‌معادله باهم متناسب‌اند وهمچنین سرائب جمله‌های درجه چهارم ودرجه دوم نیز باهم متناسب‌اند ـ پس نتیجه بگیرید که ممکن است دراین معادله درجه ششم α و β راچنان انتخاب کرد که ضرائب‌جمله‌های‌درجهٔ‌پنجم‌وچهارم‌ودوم‌واول صفر گردد ومعادلهٔ درجهٔ ششم بصورت $y^6+Ay^3+B=0$ درآید که قابل حل است .

دلیل امکان حل معادله‌های درجه سوم امکان وجود تبدیلی بصورت $x=\frac{y^2+\alpha y+\beta}{y}$ می باشد که مطلب فوق رامیسرمیسازد .

معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+4x^2-2x-15=0$ راحل کنید .

۱۱۴۲ـ تابع $y=(m+1)x^2-(5m+4)x+6(m+1)$ مفروض است .

۱) معلوم کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع فوق بازاء هرمقدار دلخواه m بردونقطهٔ ثابت AوB که برروی‌منصف‌الزاویه اول قرار دارند میگذرد .

۲) منحنی نمایش‌تغییرات منحنی‌های فوق اگردارای‌ماکزیمم باشد حتماً محور xها راقطع میکند ولی درصورتیکه‌می‌نیموم داشته باشد ممکن‌است محور xها راقطع نکند. حالت تقاطع‌راتشخیص‌دهید دومنحنی ازمنحنی‌های فوق‌برمحور xها مماس می‌باشد ودارای نقطه‌می‌نیموم می باشد آیادرصورتیکه منحنی دارای می‌نیموم بوده محور xها راقطع نکند نقاط می‌نیموم درچه ناحیه‌ای از محور x قرار دارند ؟

۳)مکان هندسی رؤس (نقاط ماکزیموم یامی‌نیموم) این منحنی‌ها را تعیین ورسم کنید . وسط AB مرکز تقارن این مکان هندسی است بعلاوه این مکان دو مجانب داردکه بر این مرکز تقارن می گذرد . نقاط A و B برروی این مکان قراردارند (آیا چگونه ممکن است این‌مطلب راپیش‌بینی کرد) قسمتی ازمنحنی راکه نظیرنقاط می‌نیموم است‌ازقسمت‌دیگر که نظیر نقاط ماکزیموم است تفکیک کنید .

۴) دومنحنی از منحنی‌های فوق برمحور Ox مماس است سطح محصور بین آنها راحساب کنید .

۵)ازهر نقطهٔ‌صفحه(بجز نقاط‌منصف‌الزاویه‌اول)فقط یك منحنی ازمنحنیهای فوق میگذردکه بادانستن مختصات نقطه میتوان آنرا مشخص کرد . آیا برای نقطه‌ای ازمنصف‌الزاویه‌اول برای منحنی منظور چه تعبیری میتوان داد ؟

۶) مکان هندسی نقطه $M\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$ رادرصفحه چنان تعیین‌کنیدکه سطح محصور بین‌منحنی‌که ازاین نقطه میگذرد باوتر AB مقدار معلومی باشد (این امر بمحاسبه احتیاجی‌ندارد)

۷) زاویه بین دومماس ازنقاط AوB بریکی ازاین منحنیها راحساب‌کنید .آیا برای کدامیك از این منحنیها این زاویه قائمه‌است ؟

۱۱۴۳ـ ۱) ثابت‌کنید که درهر مثلث متساوی الساقین ABC $(AB=AC)$ اگر D نقطه‌ای‌از BC باشد رابطهٔ زیر محقق است :

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}\cdot\overline{DC}$$

۲) اگر : $\overline{BC}^2+2\overline{AD}^2=4\overline{AB}^2$ باشد زاویه AD و BC برابر 45° می‌باشد .

۳) بطورکلی اگر رابطه : $\overline{BC}^2+k\overline{AD}^2=4\overline{AB}^2$ صادق باشد . (k عددی است مثبت یامنفی) امکان سحت آنرا بحث‌کنید. درصورت امکان زاویه AD را باقاعدهٔ BC تعیین‌کنید .

۴) درمثلث متساوی‌الساقین ABC رؤس AوB (طرفین یك‌ساق) ثابت میمانند مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ D ازقاعدهٔ BC بقسمی که اولا $\overline{BD}\cdot\overline{BC}$ ثابت‌بماند وثانیا همان مکان بفرض اینکه $\overline{BD}\cdot\overline{DC}$ ثابت شود .

۱۱۴۴ـ تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است تابع $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ راچنان تعیین‌کنیدکه منحنی‌اش تغییرات

تغییرات آن منحنی نمایش تغییرات تابع اول را برروی خطوط $x = \pm 1$ قطع کند وبعلاوه اگر نقاط تقاطع منحنی اول بامحور Ox نقاط A و B ونقاط تقاطع منحنی دوم باهمان محورنقاط A' و B' باشد نقاط A و A' بانقاط $x=1$ ($\pm$ برروی محور ox) مزدوج هم باشند وهمچنین B و B' نیز نسبت به نقاط $x=\pm 1$ مزدوج یکدیگر باشد . ثابت کنید که وتر مشترك دو دایره که یکی بر A و A' ودیگری بر B و B' می گذرد بر نقطه O مبداء مختصات می گذرد .

۱) ثابت کنید که دومنحنی مذکور نسبت بهم متجانس‌اند. مرکز تجانس ونسبت تجانس را تعیین کنید . تجانس مستقیم ومعکوس معکوس رانیز دهید .

۲)ـ ثابت کنید که سطح محصور بین محور x ها ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=ax^2+bx+c$ ودوعرض y_1 و y_2 نظیر طولهای x_1 و x_2 برابراست با :

$$\frac{(x_1-x_2)(y_1+y_2+4y_3)}{6}$$

که در آن y_3 عرض نظیر طول $\frac{x_1+x_2}{2}$ می‌باشد .

۳) سطح محصورین دومنحنی مذکوررا درمسأله پیدا کنید .

٤) درحالت خاصیکه نقاط تقاطع دومنحنی بامبداء مختصات بریك استقامت‌اند نسبت تجانس‌دومنحنی برابر (-1) است یعنی‌دو منحنی نسبت به مبداء مختصات قرینهٔ یکدیگرند

۱۱۴۵ـ چنانکه درهندسه دیده شده هرشکلی که بردایره محیط باشد دارای این خاصیت است که نسبت سطح آن به محیط آن همواره برابرنصف شعاع دائره است (یعنی برابر نسبت سطح دائره به محیط دائره) محقق کنید که حکم مذکوربرای اشکال فضائی نیزصحیح است بدین معنی که‌هرشکلی که برکره محیط باشد دارای این خاصیت است که نسبت حجم آن به سطح کل آن برابر نسبت حجم کره‌به سطح کره یعنی ثلث شعاع کره است . خاصیت مذکوررا بامحاسبه برای مکعب‌وهرم چهاروجهی ومنشوروهرم منتظم و هرم ناقص مثلث‌القاعده واستوانه و مخروط ومخروط ناقص ملاحظه کنید . سپس اثباتی ازاین‌حکم بدست دهید .

اولین کتاب از انتشارات یکان :

صدوبیست مسأله با حل دربارهٔ ریاضیات متوسطه

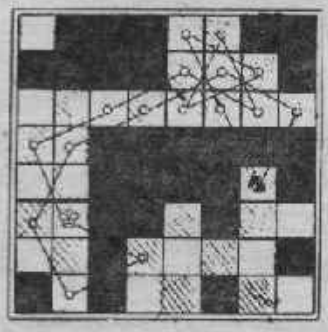
از : استاد دکترهشترودی

(تاکنون صورت ٦٧ مسأله ازاین مسائل در مجلهٔ یکان چاپ شده است)

دنبالهٔ مسائل ریاضی مربوط به شطرنج

مسألهٔ شکارچی آتیلا :

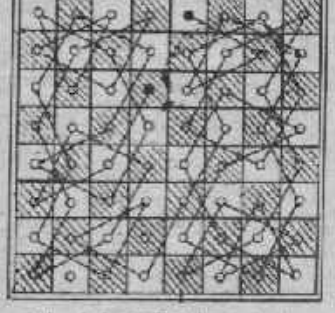
اسب سپاه (شکارچی آتیلا) وشاه سفید را مطابق شکل در روی صفحهٔ شطرنج قرار دهید . مربعات سایه دار راخانه های سوخته بنامید . اسب رامطابق قانون‌حرکت اسب دربازی شطرنج‌بخانه‌شاه‌برسانیدوبمحل اول خودبازگردانید بطوریکه هیچگاه درخانه سوخته قرار نگیرد وهمچنین دو مرتبه در یك‌خانه ننشیند ،زیرا (شکارچی آتیلا جاده‌هائی راکه از آن میگذشت‌خراب مینمود .)



دوراه حل درشکل بالا داده شده است . آیا راه دیگری هم وجود دارد ؟

مسألهٔ مسافرت اسب :

اسب را درصفحهٔ شطرنج طوری حرکت دهید که ازتمام خانه‌ها وازهر خانه‌فقط‌یکمرتبه بگذرد وبنقطه‌شروع بازگردد. یك نمونه‌از حل درشکل مقابل داده شده‌است . به تفاوت آن توجه کنید . باتغییر دادن‌محل شروع‌مسأله‌راحل کنید. آیا از هرخانه‌ای میتوان حرکت را شروع نمود ؟ وآیا با شروع درهر خانه‌ای‌مسألهٔ فقط دارای‌یك جواب است ؟



مهدی بهزاد

حل مسائل ریاضی امتحانات نهائی

ششم ریاضی

متفرقهٔ اردیبهشت ۴۳ ـ دبیرستانها خرداد ۴۳

توسط حبیب‌الله عبداللهی

امتحان هندسه رقومی و ترسیمی سال ششم ریاضی **متفرقه** در اردیبهشت ماه ۴۳ (مدت ۲/۵ ساعت)

الف رقومی ـ ۱۱۴۶ ـ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید محل تلاقی آنها مرکز کاغذ واحد سانتیمتر ومقیاس $\frac{۱}{۱}$ است .

۱ ـ نقطهٔ a را منطبق برمرکز کاغذ و نقطهٔ c روی محور اقصر سمت راست مرکز طوری بگیرید که $ac=۶$ باشد مثلث acB واقع است برصفحهٔ قائمی که اثر آن ac بر محور اقصر کاغذ میگذرد در این مثلث طول ضلع $aB=۳\sqrt{۲}$ و زاویهٔ $\widehat{caB}=۱۳۵$ درجه است بااستفاده از تسطیح ملخص این مثلث را رسم و رقوم رأس B را تعیین کنید در صورتیکه میدانیم این نقطه بالای صفحهٔ مقایسه قرار دارد .

۲ ـ طول ضلع Bc وشیب آنرا حساب کنید .

۳ ـ هرم فضائی DBac را بقسمی بنا کنید که یالهای $Da=DB=Dc$ بوده و زاویهٔ $\widehat{acD}=۷۵°$ باشد بااستفاده از تسطیح مجدد (یابطریق دیگر) ارتفاع این هرم راکه از رأس D خارج میشود ترسیم کنیم .

۴ ـ ملخص هرم فوق را رسم و رقوم رأس D را دقیقاً معین کنید d بالای محور اقصر است .

۵ ـ اگر وجه aBD از هرم فوق یك قاعده از منشور مایلی فرض شودکه پاره خط CD یال جانبی آن باشد ملخص مرقوم این منشور تکمیل و بافرض کدر بودن سطح آن خطوط مرئی را ازمخفی تمیز بدهید صفحه مقایسه حاکی ماوراء فرض میشود .

۶ ـ تصویر و رقوم مرکز ثقل این منشور را پیدا کنید.

ب ـ ترسیمی

۱۱۴۷ ـ روی خط مستقیم مفروض dd' نقطه‌ای پیدا کنیدکه مجموع بعد و ارتفاع آن ۲ باشد .

۱۱۴۸ ـ تیمرخ aba'b' مفروض است از نقطهٔ cc' تیمرخ دیگری موازی آن رسم کرده و آثار صفحهٔ حاصل را ترسیم کنید .

۱۱۴۹ ـ تصویر افقی لوزی و تصویر قائم یك قطر آن داده شده ملخص لوزی را تکمیل کنید .

۱۱۵۰ ـ از نقطهٔ مفروض (aa') بارتفاع ۲ و بعد ۳ خطی چنان رسم شده که زاویهٔ آن با صفحهٔ افق تصویر ۴۵ درجه و زاویهٔ آن با صفحه قائم تصویر ۳۰ درجه است اگر نقطهٔ bb' اثر افقی این خط باشدقبلاً طولهای ab و Ab و a'b' را تعیین و سپس طرز رسم هندسی این خط را بیان کنید .

بارم ـ هر یك از سئوالات دو نمره دارد .

تبصره ـ مرکز ثقل منشور وسط خط واصل محل تلاقی میانه‌های دو قاعده میباشد .

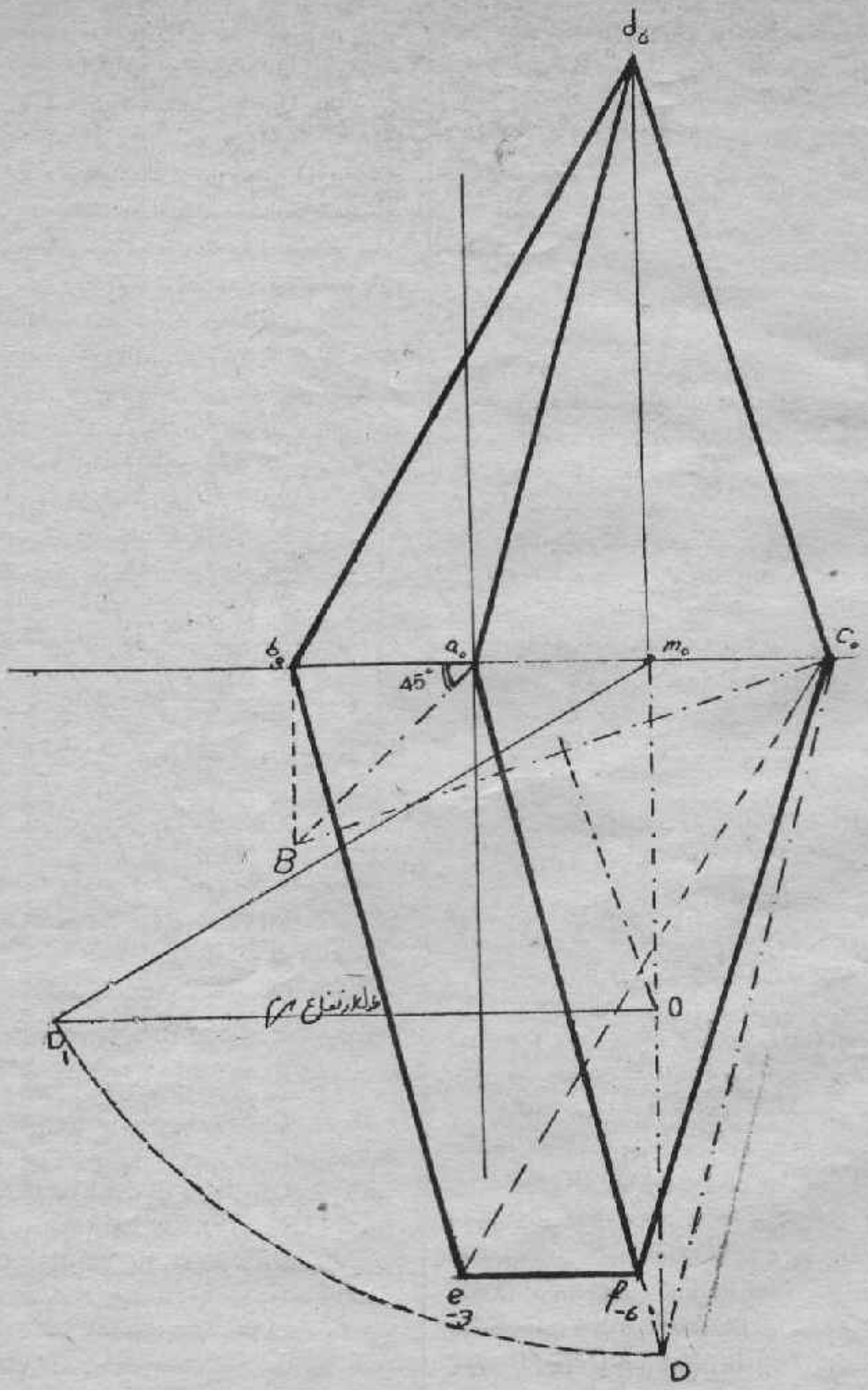
حل ـ

۱ ـ نقطه a را منطبق برمرکز و c راست a روی محور اقصر کاغذ تعیین می‌کنیم چون مثلث acB برصفحه قائم واقع است بنابراین تصویر B براثر این صفحه قرار خواهد گرفت برای تعیین این نقطه صفحه مصور مثلث را حول اثرش برصفحه مقایسه تسطیح می‌کنیم نقطه B بواسطه $۳\sqrt{۲}$ از a روی خطی که با ac زاویه ۱۳۵° میسازد واقع است بدینطریق aB را رسم می‌کنیم باتوجه باینکه B بالای صفحه‌مقایسه‌است درنقطه $b_۲$ ترفیع میگردد .

۲ ـ در مثلث قائم‌الزاویه bcB می توان نوشت

$\overline{Bc}^۲=Bb^۲+\overline{bc}^۲$ و از آنجا $\boxed{BC=۳\sqrt{۱۰}}$ از طرفی میدانیم $\overline{bc}=I(۳-۰)$ پس اساس $۳=I$ و شیب آن $p=\frac{۱}{۳}$ خواهد بود .

۳ ـ وجه acd را حول‌ارتفاع ac تسطیح میکنیم و سپس نقطه o محل‌تلاقی سه عمود منصف acB که مرکزدایرمحیطی مثلث میباشد بدست میآوریم چون $Da=DB=DC$ میباشد بنابراین رأس D از طرفی واقع برعمود منصف ac و ازطرف



d_0
b_0
a_0
m_0
c_0
45°
B
O
D_1
e_{-3}
f_{-6}
D

دیگرواقع بر عمود مرسوم ازنقطه O بر صفحه مثلث acB خواهد بود با توجه باینکه DO افقیه میباشد ازنقطه O خطی موازی ac رسم و بمرکز m وسط ac و بشعاع mD دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط موازی مرسوم ازo رادر D_1 قطع کند، OD_1 طول حقیقی ارتفاع هرم میباشد بمرکز m وبشعاع OD_1 دایره‌ای رسم می‌کنیم تاعمودمنصف ac رادربالای محور اقصر قطع نماید این نقطه تصویر رأس هرم خواهدبودکه رقوم این نقطه برابر رقوم نقطهo یعنی ۶ = $\overline{om}_2$ خواهد بود درقوم نقطه o رامی توان بسهولت بطریقه محاسبه بدست‌آورد »

۵ـ چنانچه وجه aBD ازهرم فوق یك قاعده‌از منشور مایلی‌که یك یال‌آن CD باشدکافیست بالهای دیگر رامساوی‌و موازی این یال رسم نموده ومنشور را کامل‌کنیم و واضح است اختلاف رقوم دوسرباله‌ا۶ خواهد بود چون دورنماهری تصویر جسم مرئی است‌پس‌رقوم نقطه تلاقی تصاویر c_2e_2 و a_2f_2 را تعیین‌می کنیم‌دراین رقوم‌نقطه‌تقاطع‌تصاویر c_2e_2 و a_2f_2 بیشتر است پس یال c_2e_2 مخفی ودیگری مرئی خواهد بود .

۶ـ هرگاه محل تلاقی‌تصاویر سه‌میانه مثلث دو قاعده منشوررا gg' بنامیم‌داریم $\frac{0+3+6}{3}=3$ رقوم g و $\frac{6-3-0}{3}=3$ رقوم g' وازآنجا رقوم مرکز ثقل $\frac{3-3}{2}=0$ یعنی‌مرکزثقل منشوربر صفحه مقایسه واقع‌است.

امتحان هندسه رقومی و ترسیمی سال ششم ریاضی دبیرستانهای کشور در خرداد ماه ۱۳۴۳
(مدت ۵ر۳ساعت)

الف ـ رقومی ـ ۱۱۵۱ـ محور اطول واقصر کاغذ رارسم کنید محل تلاقی آنها مرکز کاغذ واحد سانتیمتر ومقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱ـ پاره خط a_1b رابقسمی اختیارکنیدکه $ab=6$ و موازی محور اقصر کاغذ a درفاصله ۳ زیرمحور اقصر ودرفاصلهٔ ۳راست محور اطول وbست چپ a و رقوم آن ازرقوم a کمتر وبعلاوه طول $AB=10$ باشد رقوم b راتعیین کنید .

۲ـ ازنقطه B افقیهٔ BC راطوری مرورمیدهیم که‌تصویر آن ازمرکز کاغذ بگذرد وشیب‌خط AC برابرواحد ودرتصویر c بالای محور اقصر باشد مخلص مثلث ABC رارسم و شیب صفحه آنرا تعیین کنید .

۳ـ طولهای AC وBC راحساب کنید .

۴ـ مثلث $a_1b_1c_1$ راحول افقیه b_1c_1 تسطیح کنید .

۵ـ هرم SABC را درنظر میگیریم که درآن رأس S بالاتر ازصفحه قاعده قرار دارد و یالهای $SA=SB=SC$ بوده وبعلاوه‌زاویهٔ $\widehat{CSB}=90$ درجه‌باشد ازتسطیح فوق‌استفاده کرده باتسطیح مجدد (ویاطریق دیگر) ارتفاع این‌هرم راکه ازرأس S خارج میشود ترسیم کنید .

۶ـ تصویر ورقوم رأس ناهمرده راتا ۰٫۱ تقریب ازروی شکل معلوم کرده ملخص‌هرم رارسم وبافرض کدر بودن سطح‌آن خطوط مرئی رااز مخفی جدا کنید .

ب ـ ترسیمی :

۱۱۵۲ـ ارتفاع نقطه‌ای ازبعدآن یك‌واحدبیشتر است فاصلهٔ حقیقی آن تاخط زمین پنج است ملخص نقطه را رسم کنید .

۱۱۵۳ـ بر خط مفروض dd' صفحه‌ای مرور دهیدکه آثارش‌برهم منطبق باشد . وضع هندسی این صفحه درفضاچگونه است .

۱۱۵۴ـ ازنقطه مفروض aa' خط نیمرخی چنان رسم کنید که صفحه مواجه مفروض رادرنقطه bb' قطع کند و طول $AB=1$ باشد بحث کنید .

۱۱۵۵ـ روی صفحه مفروض $P\alpha Q'$ تصاویرافقی و قائم مکان هندسی نقاطی رارسم کنیدکه ارتفاع آنها دوبرابر بعدشان باشد :

هریك ازسئوالات دونمره دارد .

حل ـ

۱ـ میدانیم $AB^2=\overline{ad}^2+$ (اختلاف رقوم)^2

پس $10^2=6^2+(9-x)^2$ وازآنجا $\boxed{x=17\text{ و }1}$

۲ـ چون نقاط تقاطع AC و BC برقوم یك است‌پس تصویر AC برابر قدرمطلق اختلاف در اساس‌آن میباشد .

بنابراین b رابمرکز کاغذ وصل کرده امتداد میدهیم تا دایره بمرکز a وبشعاع هشت رادرنقطه c قطع کندبدین‌ترتیب‌ملخص مثلث $a_1b_1c_1$ تعیین خواهد گردید وسپس مقیاس شیب وازآنجا اساس وشیب صفحه مثلث رابدست می‌آوریم .

۳ـ داریم $AC^2=\overline{ac}^2+(9-1)^2$

و $CA^2=8^2+8^2$ پس $\boxed{AC=8\sqrt{2}}$

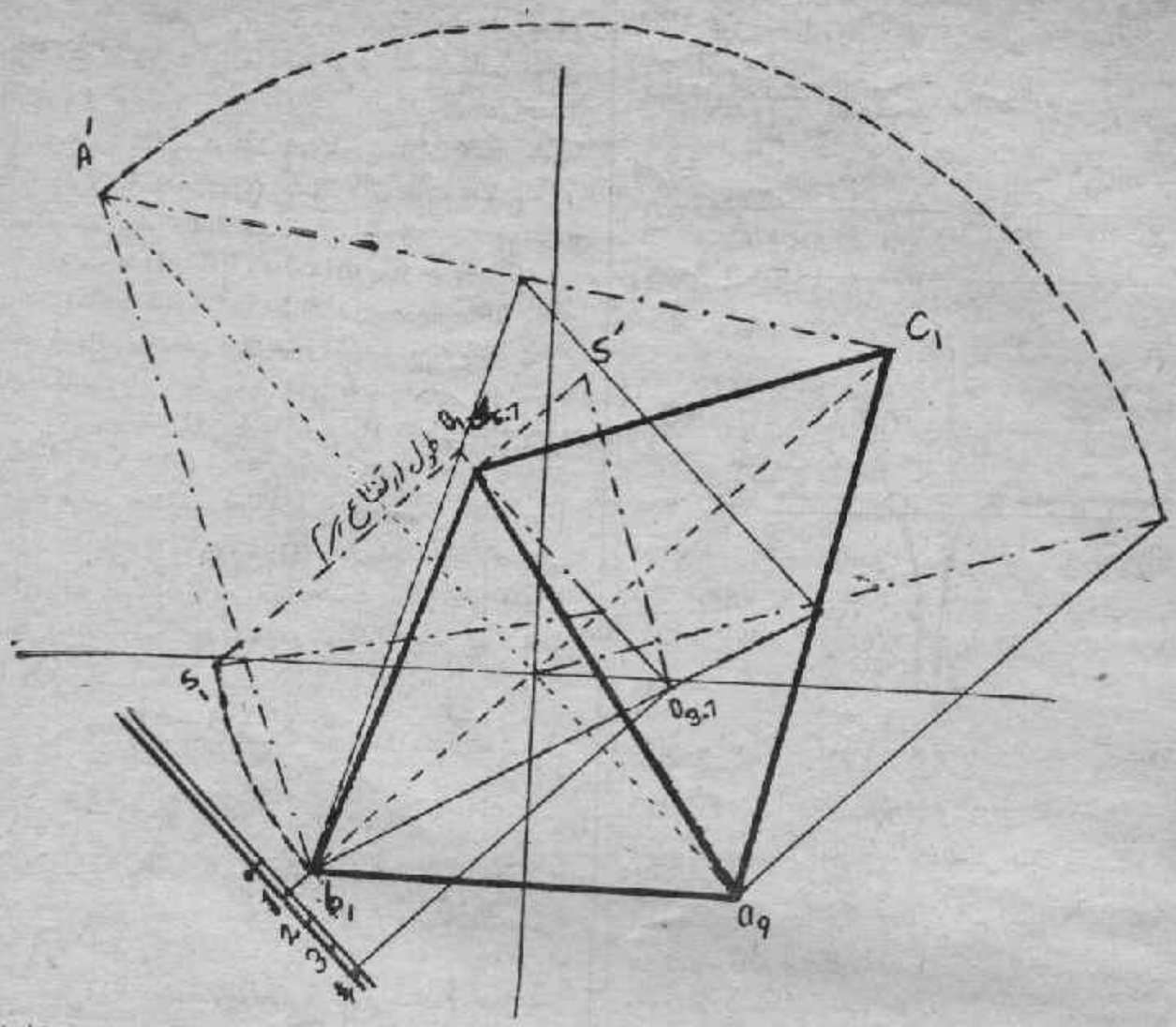
چون BC افقیه است بنابراین طول تصویر آن بااندازه حقیقی برابر خواهد بود و چنانچه مرکز کاغذ را m بنامیم خواهیم داشت $\overline{mb}^2=6^2$ ویا $\boxed{mb=3\sqrt{2}}$

ازطرفی $\overline{mc}^2=\overline{ac}^2-\overline{ma}^2$ وازآنجا $mc=\sqrt{46}$

درنتیجه $BC=bc=mb+mC$

یعنی $\boxed{BC=8\sqrt{2}+\sqrt{46}}$

۴ـ برای تعیین‌تسطیح مثلث $a_1b_1c_1$ حول افقیه b_1c_1 نقطه A' تسطیح a_1 را بقاعده مثلث قائم‌الزاویه بدست میآوریم



۵ـ چون $SA = SB = SC$ میباشد پس پای S روی عمود مرسوم ازمرکز دایره محیطی مثلث ABC برصفحه‌آن واقع است فاصله S ازo یعنی So طول‌ارتفاع هرم خواهدبود بنابراین از مرکز دایره محیطی مثلث خطی موازی لولا رسم می‌کنیم وبعد بمرکز محل تلاقی عمود منصف BC بااین ضلع و بشعاع نصف‌طول BC دایره‌ای رسم می‌کنیم این دایره خطموازی مرسوم از نقطه O_1 رادر S_1 قطع‌میکندبدین‌ترتیب O_1S_1 طول حقیقی ارتفاع هرم خواهد بود .

۶ ـ نقطه O_1 در $O_{۳/۷}$ ترفیع میگردد در نقطه $O_{۳/۷}$ عمودی برصفحه مثلث اخراج کرده وروی این عمود طول O_1S_1 راجدا می‌کنیم بنابراین تصویر آن را موازی مقیاس شیب صفحه مثلث واساس آن راعکس اساس صفحه وترقی رقوم آن درخلاف جهت ترقی رقوم صفحه انتخاب می‌کنیم بدینطریق آنرا مدرج می‌کنیم این خطرا برصفحه افقی‌رقوم ۳/۷ تسطیح کرده وروی آن ازنقطه O طول OS' رابرابر O_1S_1 جدا می‌کنیم که چون S' راترفیع نمائیم $a_{۵/۷}$ بدست میآید وازآنجا ملخص هرم تعیین

وچون دوره ظاهری تصویر جسم مرئی میباشد پس رقوم نقطه تلاقی تصاویر b_1c_1 و $a_{۵/۷}a_{۵/۷}$ روی $a_{۵/۷}$ بیشتر است درنتیجه b_1c_1 مخفی $a_{۵/۷}$ مرئی خواهد بود .

***

امتحان جبر سال ششم ریاضی داوطلبان متفرقه در اردیبهشت ماه ۴۳ (مدت ۳/۵ ساعت)

۱۱۵۶ ـ تابع $y = \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$ مفروض است :

الف ـ در تابع فوق ضرایب a و b و c و d را آنطور تعیین کنید که :

۱ـ منحنی نمایش تغییرات آن محور عرضها رادر نقطهٔ بعرض ۳ـ قطع کند . (۰/۵ نمره)

۲ـ منحنی فقط دارای یک‌مجانب موازی محورعرض به معادلهٔ $x = ۱$ باشد : (۱/۲۵ نمره)

۳ـ منحنی خط $y = ۱$ را قطع نماید . (۱/۲۵ نمره)

ب ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

را رسم کنید . (۴/۵ نمره)

وثابت کنید که مجانب موازی محور عرض محور تقارن منحنی است . (۱/۵ نمره)

ج ـ ثابت کنید که فقط یك مماس بموازات نیمساز ناحیه دوم میتوان بر منحنی (C) رسم کرد مختصات نقطهٔ تماس و ومعادلهٔ خط مماس راپیدا کنید . (۲ نمره)

د ـ خط D بمعادلهٔ $y=m(x-3)$ مفروض است :

۱ـ ثابت کنید که این خط بازاء جمیع مقادیر m از نقطهٔ ثابت A واقع برمنحنی (C) عبور میکند ، مختصات این نقطه راپیدا کنید . (۱ نمره)

۲ ـ خط (D) با منحنی (C) عموماً دردو نقطه دیگر غیراز A تلاقی میکند ، مقادیر m را آنطور بیابید تا دونقطه مزبور درطرفین نقطهٔ A قرار گیرند . (۱/۵ نمره)

۳ـ بازاء $m=-3$ خط (D) رادرصفحهٔ محورهای منحنی (C) بدقت رسم کنید (۱ نمره) و مختصات نقاط تلاقی آنرا با منحنی بدست آورید . (۱/۵ نمره) نقطه بطول بیشتر غیراز A را B بنامید .

ه ـ تابع $y=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ را میتوان بصورت

$$y=1-\frac{4}{(x-1)^2}$$

۱ـ توابع اولیه تابع فوق رابدست آورید . (۲ نمره)

۲ـ سطح محصور منحنی و وتر AB راحساب کنید . (۲ نمره)

حل: الف ـ ۱ـ درتابع بجای x صفرویجای y عدد ۳ـ

راقرار میدهیم داریم (۱) $\boxed{\frac{b}{d}=-3}$

۲ـ بازاء $x=\mp\infty$ داریم $x^2+cx+d=0$

چون باید منحنی فقط یك مجانب موازی محور y بمعادله $x=1$ داشته باشد کافیست $-\frac{c}{2}=1$ و $c^2-4d=0$ گردد و ازآنجا $\boxed{c=-2}$ و $\boxed{d=1}$ وباتوجه برابط (۱)

$\boxed{b=-3}$ خواهد بود

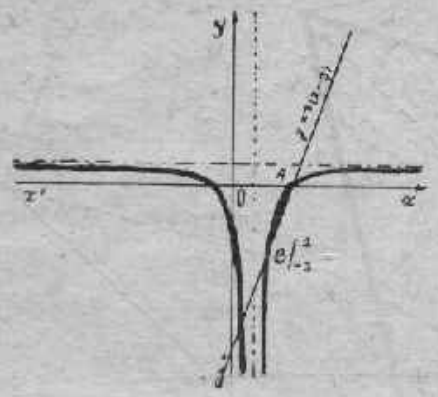
۳ـ طول نقاط تقاطع خط $y=1$ و منحنی نمایش تابع مفروض ازحل دستگاه $\begin{cases}y=\frac{x^2+ax-3}{x^2-2x+1}\\ y=1\end{cases}$ بدست میآید

پس $x^2+ax-3=-2x+1$ ویا $(a+2)x=4$

برای اینکه منحنی خط $y=1$ راقطع نکند باید معادله اخیر جواب نداشته باشد یعنی $a+2=0$ و در نتیجه $\boxed{a=-2}$ باشد .

ب ـ جدول ومنحنی نمایش (c) تغییرات تابع $y=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ بشرح ذیل است .

x	$-\infty$		-1		0		1		3		∞
y'			$-$						$+$		
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$	$\mid$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



برای اثبات آنکه $x=1$ محور تقارن منحنی است کافیست محورهای مختصات را انتقال دهیم تامبدأ مختصات به نقطه $C\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ منطبق گردد پس از انتقال معادلهٔ منحنی نسبت بدستگاه جدید $y=\frac{X^2-4}{X^2}$ میباشد که چون درتابع اخیر X را به $-X$ بدل کنیم درتابع y تغییری حاصل نمیشود درنتیجه خط $x=1$ محور تقارن منحنی است .

ج ـ مشتق تابع بصورت $y'=\frac{8}{(x-1)^3}$ میباشد هرگاه بجای y' عدد ۱ ـ ضریب زاویه نیمساز ربع دوم راقراردهیم در اینصورت طول نقطه تماس مماس بموازات نیمساز ناحیه دوم بر منحنی بدست خواهد آمد پس خواهیم داشت $(x-1)^3=-8$ ویا $x-1=-2$ بنابراین طول نقطه تماس $\boxed{x=-1}$ بوده درنتیجه یك مماس بموازات نیمسازناحیه دوم میتوان بر منحنی رسم نمود و معادله خط مماس بصورت $\boxed{y=-x-1}$ است .

د ـ ۱ـ برای تعیین مختصات نقطه ثابت A ضریب m وy را مساوی صفرقرار میدهیم داریم $A\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}$ چون مختصات A در معادله منحنی (c) صدق میکند پس نقطه A واقع برمنحنی (c) میباشد

۲ـ طول‌های نقاط تقاطع خط با منحنی (c) ازحل معادله زیر بدست میآید

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=m(x-3)$$

یا $(x-3)[mx^2-(2m+1)x+m-1]=0$

پس $\boxed{x=3}$ و (۱) $mx^2-(2m+1)x+m-1=0$

ریشه‌های معادله اخیر را x' و x'' می‌نامیم برای اینکه دو نقطه تقاطع دو طرف فین A واقع باشند باید بین طول این نقاط نامساوی $x'<3<x''$ برقرار باشد پس کافیست $af(3)<0$ باشد و از آنجا $m(4m-4)<0$ در نتیجه باید $\boxed{0<m<1}$

۳ـ بازاء $\boxed{m=3}$ در صفحه دو محور مختصات قائم منحنی (c) و خط $y=3(x-3)$ بدقت رسم شده و نقاط A و B تعیین گردیده‌اند چنانچه بجای m در معادله درجه دوم (۱) مقادیر $\begin{cases}x'=2\\x''=1\\x''=3\end{cases}$ قرار دهیم خواهیم داشت

و از آنجا $\begin{cases}3\\0\end{cases}$ A و $\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}$ B خواهد بود

۵ـ ۱ـ تابع مفروض را بصورت زیر می‌توان نوشت

$$y=1-\frac{4}{(x-1)^2}=1-4(x-1)^{-2}$$

تابع اولیه این تابع عبارتست از

$$\boxed{Y=x+\frac{4}{x-1}+c}$$

۲ـ برای محاسبه مساحت سطح مطلوب تفاضل دو تابع $y_1=3(x-2)$ و $y_2=1-\frac{4}{(x-1)^2}$ را تعیین نموده و از تابع حاصل تابع اولیه می‌گیریم

$$f(x)=y_2-y_1=-3x-\frac{4}{(x-1)^2}+10$$

$$F(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{x-1}+10x+c$$ و مساحت مطلوب برابر است با

$$S=\left[-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{x-1}+10x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

امتحان خرداد سال ششم ریاضی دبیرستانهای کشور

در خرداد ۴۳ (مدت ۲/۵ ساعت)

***

۱۱۵۷ـ مسئله اول ـ تابع $y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m}$ مفروض است که در آن m پارامتر است $(m\neq 0)$

۱ـ ثابت کنید که بازاء جمیع مقادیر m منحنی تابع دارای یک مرکز تقارن و یک مماس است مکان هندسی این نقاط را وقتیکه m متغیر کند بدست آورید .

۲ـ معادلات مجانبهای منحنی نمایش تغییرات این تابع را برحسب m نوشته مکان هندسی محل تلاقی آنها را نیز تعیین کنید این مکان هندسی را با مکان هندسی قبل مقایسه کرده نتیجه استنباط خود را بنویسید

۳ـ اگر پارامتر m تغییر کند منحنی نمایش تغییرات این تابع بر دو خط ثابت مماس است معادلات این دو خط را پیدا کنید.

۴ـ بازاء $m=1$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید .

۵ـ ثابت کنید اگر خط دلخواهی بموازات محور xها رسم شود و منحنی ترسیم شده را در دو نقطه تلاقی نماید تصاویر این دو نقطه و تصاویر مرکز یم و می‌نیمم منحنی بر روی محور xها تشکیل تقسیم توافقی میدهند .

۱۱۵۸ ـ مسئله دوم ـ تابع $y=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ مفروض است که در آن a پارامتر است .

۱ـ ثابت کنید که منحنی نمایش تغییرات این تابع بازاء مقادیر مختلف a از یک نقطه ثابت O مرور می‌کند مماس بر منحنی را در این نقطه بنویسید .

۲ـ خط بمعادله $x=\frac{a}{2}$ منحنی نمایش تغییرات تابع را در دو نقطه A و B قطع میکند اگر $AB=\sqrt{3}$ باشد مقدار a و همچنین اضلاع و زوایای مثلث OAB را حساب کنید .

۳ـ بازاء $a=1$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید .

۱۱۵۹ـ مسئله سوم ـ معادله درجه دوم $2x^2-\lambda x+(2\lambda+1)=0$ مفروض است

۱ـ بین ریشه های x' و x'' این معادله رابطه‌ای پیدا کنید که بستگی به پارامتر λ نداشته باشد و این رابطه را از لحاظ هندسی تعبیر کنید .

۲ـ λ را در چه حدود باید اختیار کرد که هر دو ریشهٔ معادله مثبت باشد یعنی $0<x'<x''$

بارم ـ هریك از سئوالات ۲ نمره دارد .

حل : ۱ ـ تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع

راه اول ـ در توابعی بصورت $y=\frac{g(x)}{h(x)}$ چنانچه α مقداری از x باشد که در معادله $y'=0$ صدق نماید مقدار y نظیر $x=\alpha$ از رابطهٔ $y=\frac{g'(\alpha)}{h'(\alpha)}$ بدست خواهد آمد (کتاب جبر کلاس ششم) بعبارت دیگر مختصات نقاط نظیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع در معادلهٔ $y=\frac{g'(\alpha)}{h'(\alpha)}$ صدق خواهد نمود .

در تابع مفروض $y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m}$ مشتق صورت برابر است با $4x$ و مشتق مخرج برابر است با ۱ بنابراین مختصات نقاط نظیر ماکزیمم و می‌نیمم در معادله $y=4x$ صدق خواهد کرد یعنی $y=4x$ معادلهٔ مکان هندسی نقاط نظیر ماکزیمم و می‌نیمم

تابع میباشد . (بسادگی معلوم میشود که تابع دارای ماکزیمم ومی‌نیمم میباشد).

راه دوم ـ مشتق تابع پس از اختصار عبارتست از :

$$y'=\frac{2x^2-8mx-m^2}{(2x-2m)^2}$$

وطول نقاط نظیر ماکزیمم ومی‌نیمم تابع از معادلهٔ

$2x^2-8mx-m^2=0$ (۱) بدست‌میآید . چنانچه تابع را نسبت به x مرتب نمائیم خواهیم داشت :

$$2x^2-xy+m^2+2my=0$$

که چون مبین آنرا مساوی صفر قرار می‌دهیم معادلهٔ

$$\Delta=y^2-16my-8m^2=0 \qquad (2)$$

بدست‌میآید که ریشه‌های آن عرضهای نقاط نظیرماکزیمم و می‌نیمم تابع خواهد بود و برای تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقاط ماکزیمم و می‌نیمم کافیست که بین معادله‌های (۱) و (۲) پارامتر m را حذف نمود و برای این‌کار طرفین معادلهٔ (۱) را در ۸ ـ ضرب نموده‌حاصل‌را با معادلهٔ (۲) عضو بعضو جمع مینمائیم حاصل میشود :

$$y^2-16x^2-16my+64mx=0$$

یا بصورت دیگر :

$$(y-4x)(y+4x)-16m(y-4x)=0$$

$$(y-4x)(y+4x-16m)=0$$

و رابطهٔ $y-4x=0$ مستقل از m بین x و y بدست میاید که معادلهٔ مکان مطلوب میباشد .

راه سوم ـ ریشه‌های معادله‌های (۱) و (۲) را پیدا می‌کنیم و با توجه باینکه در توابع بصورت $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ در حالتیکه تابع دارای یك‌ماکزیمم و یك می‌نیمم باشد مقدار می‌نیمم از مقدار ماکزیمم بیشتر است مختصات نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم عبارت خواهد شد از

$$\text{Min}\begin{cases} x=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}m \\ y=2(4+3\sqrt{2})m \end{cases} \quad \text{و}$$

$$\text{Max}\begin{cases} x=\frac{4-3\sqrt{2}}{2}m \\ y=2(4-4\sqrt{2})m \end{cases}$$

و چون‌بین xوy هریك از دو نقطه پارامتر mرا حذف نمائیم معادلهٔ $y=4x$ بدست‌میآید که‌معادلهٔ مکان مطلوب‌میباشد.

۲ـ معادلهٔ مجانب موازی محور yها بصورت $x=2m$ و معادلهٔ مجانب مایل آن بصورت $y=2x+4m$ میباشد نقاط‌تقاطع‌این دو مجانب از حل دستگاه

$$C\begin{cases} x=2m \\ y=2x+2^2m \end{cases}$$ بدست میآید که چون m را بین این‌دو معادله حذف‌کنیم معادله مکان C مشخص میشود و از آنجا

$\boxed{y=4x}$ نتیجه می‌گردد بطوریکه ملاحظه میشود این معادله همان معادله‌ایست‌که برای مکان هندسی نقاط ماکزیمم و می‌نیمم پیدا کردیم درنتیجه هرسه مکان یکی است یعنی خط واصل ماکزیمم و می‌نیمم از محل برخورد مجانبها میگذرد.

۳ـ هرگاه $y=ax+b$ خط مطلوب باشد محل تلاقی این خط را بامنحنی نمایش تغییرات تابع مفروض‌بدست‌میآوریم و از آنجا نتیجه میشود :

$$(a-2)x^2+(b-2am)x-m^2-2bm=0$$

ریشه‌های معادلهٔ فوق طول‌های نقاط تلاقی خط و منحنی میباشد وبرای‌اینکه خط و منحنی برهم مماس گردند بایدمعادله مذکور دارای‌ریشه مضاعف‌باشد پس باید رابطه زیرمحقق‌باشد.

$$\Delta=(b-2am)^2+4(a-2)(m^2+2bm)=0$$

و یا $4(a^2+a-2)m^2+4b(a+2)m+b^2=0$

و برای اینکه Δ منحد با صفر گردد کافیست :

$$\begin{cases} 4(a^2+a-2)=0 \\ b(a+2)=0 \\ b^2=0 \end{cases}$$

از دستگاه فوق بدست‌آمد $\begin{cases} a=-2 \\ b=0 \end{cases}$ و $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

و معادلات خطوط ثابت مماس برمنحنی عبارت میشود از :

$$y=x \quad \text{و} \quad y=-2x$$

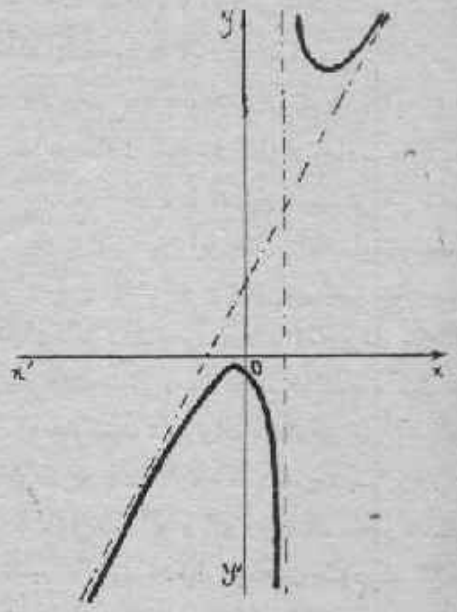
توجه کنید : (می‌توان معادلات خطوط مماس را ازحذف m بین‌دو معادلهٔ $f'_m(z \text{ و } y \text{ و } m)=0$ و $f(x \text{ و } y \text{ و } m)=0$ بدست‌آورد اما این طریق ازبرنامهٔ متوسطه‌خارج است .)

۴ـ بازاء $m=1$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع بشرح زیر است . (در صفحهٔ بعد)

۵ ـ هرگاه $y=k$ خط دلخواهی بموازات محور xها فرض شود طول‌های محل تلاقی این خط با منحنی ترسیم شده ازحل $2x^2-kx+2k+1=0$ بدست خواهند آمدچنانچه تصاویر ماکزیمم و می‌نیمم منحنی را با M و N و تصاویر نقاط تلاقی خط با منحنی را با A و B نمایش دهیم‌میدانیم هرگاه M و Nنسبت به نقاط A و B مزدوج توافقی‌یکدیگر باشند در اینحالت بین طول‌های این نقاط رابطه توافقی

x	$-\infty$		$\frac{4-2\sqrt{2}}{2}$		2		$\frac{4+2\sqrt{2}}{2}$		∞
y'		+	0	−		−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$2(4-3\sqrt{2})$	↘	$-\frac{1}{2}$	↘ $-\infty$ / $+\infty$ ↘	$2(4+3\sqrt{2})$	↗	∞

مجانب مایل منحنی بصورت $y=2x+4$ میباشد .



$(a+b)(m+n)=2(ab+m\cdot n)$ برقرار است اما

و اگر این مقادیر $\begin{cases} m+n=4 \\ m\cdot n=-\frac{1}{2} \end{cases}$ و $\begin{cases} a+b=\frac{k}{2} \\ ab=\frac{2k+1}{2} \end{cases}$

را در رابطه توافقی قرار دهیم خواهیم داشت $4\cdot\frac{k}{2}=2(\frac{2k+1}{2}-\frac{1}{2})$ و یا $\boxed{2k=2k}$

حل مسألهٔ دوم ۱ـ راه ساده ـ در ازاء $x=0$ داریم $y=0$ یعنی مختصات مبداء همواره در تابع صدق میکند. راه کلی: طرفین تابع مفروض بتوان دو رسانده ومعادله حاصل را نسبت به a مرتب می کنیم .

پس داریم $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$ و از آنجا

$a(x^2-y^2)+x(x^2+y^2)=0$

نتیجه میشود که باید رابطه اخیر به ازاء جمیع مقادیر a برقرار باشد و این شرط وقتی برقرار است که داشته باشیم :

O $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x(x^2+y^2)=0 \end{cases}$ پس نقطه ثابت مطلوب عبارتست از .

برای تعیین معادلات مماس از O نقطه ثابت راه ساده : حد $\frac{y}{x}$ را وقتی که $x\to 0$ تعیین میکنیم وداه کلی : مشتق تابع را محاسبه می کنیم پس :

$$y'=\pm\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\pm x\left[\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right]'$$

در ازاء $x=0$ خواهیم داشت $y'=\pm 1$

پس معادلات مماس از نقطهٔ ثابت عبارتند از .

که نیمسازهای ربع اول وسوم میباشند . $\begin{cases} y=x \\ y=-x \end{cases}$

۲ـ مختصات نقاط تلاقی خط $x=\frac{a}{2}$ با منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض از حل دستگاه :

بدست میآیند و از آنجا $\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \end{cases}$

$$B\begin{cases} \frac{a}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \quad A\begin{cases} \frac{a}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases}$$

نتیجه خواهد شد میدانیم :

$$AB=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}=a\sqrt{3}$$

از طرفی $\sqrt{3}-a\sqrt{3}$ بنابراین $\boxed{a=1}$ پس

$$OA=OB=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}=\sqrt{\frac{4a^2}{4}}$$

$\boxed{OA=OB=1}$ خواهد بود و بسهولت می‌توان دریافت که در مثلث متساوی‌الساقین OAB :

$\hat{OBA}=\hat{OAB}=30^\circ$ و $\hat{AOB}=120^\circ$

میباشد .

۳ـ رسم منحنی نمایش تغییرات تابع

$$y=x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

۱ـ تابع فقط بازاء مقادیر محصور بین ۱ و ۱− معین بوده و بازاء $x=1$ متصل است ۲ـ بازاء $\boxed{x=0 \text{ و } -1}$

تابع صفر است ۳- مشتق تابع پس از اختصار عبارت میشود از:

$$y' = \frac{-x^2+x+1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

که بازاء $x' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $x'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ صفر

می‌شود ولی جواب دوم محصور بین ۱ و ۱- نبوده ولذا تابع

بازاء آن نامعین است و فقط ۰٫۶ $\neq -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = x'$ قابل

قبول میباشد بازاء این مقدار از x برای y بدست میآید :

$$y = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2} \neq -0{,}3$$

۴- وقتی x بسمت ۱ میل می‌کند y بسمت $+\infty$ میل

نماید پس $x=1$ مجانب منحنی است .

توجه کنید - اگر منحنی نمایش تابع

$y = -x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ را رسم کنیم منحنی قرینه y بدست میآید

و درشکل نقطه چنین کشیده شده است این دو شاخه با هم یك

منحنی بمعادله $y = \pm x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ و یا

$y^2 = x^2\frac{1+x}{1-x}$ را تشکیل میدهند بطوریکه مشاهده میشود

در تابع اخیر اگر y را به $-y$ بدل کنیم در تابع هیچ تغییری

حاصل نمیشود پس محور xها محور تقارن منحنی میباشد. جدول

ومنحنی نمایش تغییرات تابع بشرح ذیل است .

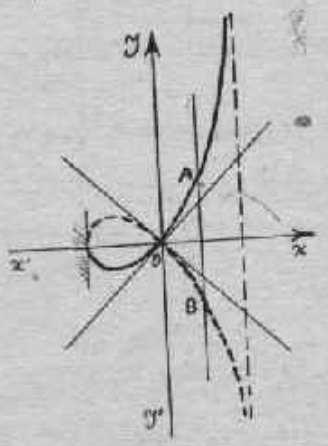
x	-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		۰		$+1$
y'	∞	$-$		$-$	۰	$+$	
y	∞	↘	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}$	↘	۰	↗	∞

حل مسألهٔ سوم

۱- مجموع وحاصلضرب ریشه‌های معادله را تشکیل داده و بین آنها پارامتر λ را حذف می‌کنیم داریم :

$$\begin{cases} x'+x'' = \frac{\lambda}{2} \\ x'x'' = \frac{2\lambda+1}{2} \end{cases}$$

پس از حذف λ بین روابط (۱) $2x'x'' = 4(x'+x'')+1$



نتیجه خواهد شد هر گاه ازمعادله $2x^2-\lambda x+2\lambda+1=0$

λ را برحسب x بدست آوردیم تابع (۳) $\lambda = \frac{2x^2+1}{x-2}$ حاصل خواهد

شد با مقایسه تابع (۳) $y = \frac{2x^2+1}{x-2}$ مندرج در مسأله اول

شماره ۴ با تابع اخیر ۳ می‌توان گفت معادله ۱ و یا ۲ طول‌های

نقاط برخورد خط $y=\lambda$ ومنحنی نمایش تغییرات تابع ۳ میباشند

در مسأله اول قسمت ۵ ثابت کردیم که هر خط دلخواهی بموازات

محور xها رسم شود و منحنی ترسیم شده تابع ۳ را دردو نقطه

تلاقی نماید تصاویر این دو نقطه و تصاویر ماکزیمم و می‌نیمم

منحنی برروی محور xها تشکیل تقسیم توافقی میدهند بنابراین

اگر رابطه توافقی بین این چهار نقطه را بنویسیم برابطه

$2x'x'' = 4(x+x'')+1$ میرسیم یعنی تصاویر دو نقطه متغیر با

طول‌ها x' و x'' روی محور xها با تصاویر دو نقطه ثابت ماکسیم

و می‌نیمم روی همین محور تقسیم توافقی تشکیل میدهند .

توجه کنید : می‌توان باینطریق نیز تعبیر نمود که هر گاه

$x' = x'' = x$ باشد داریم $2x^2-8x-1=0$ یعنی دو نقطه

متغیر با طول‌های x' و x'' روی یك محور نسبت بدو نقطه

ثابت تقسیم توافقی تشکیل میدهند بطوریکه ملاحظه میشود

ریشه‌های معادله اخیر طول نقاط ماکسیم و می‌نیمم منحنی تابع

۳ میباشند .

۲- برای اینکه هردو ریشه معادله مفروض مثبت باشند باید

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(0) > 0 \\ \frac{S}{2} > 0 \end{cases}$$

داشته باشیم اکنون جواب مشترك سه نامعادله

اخیر را بدست میآوریم داریم :

$$\begin{cases} \Delta = \lambda^2-16\lambda-8 \\ af(0) = 2(2\lambda+1) \\ \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

برای تعیین جواب مسأله از جدول زیر استفاده می‌کنیم

در نتیجه باید $\boxed{\lambda > 8+6\sqrt{2}}$ باشد.

λ	$-\frac{1}{2}$		$8-6\sqrt{2}$		۰		$8+6\sqrt{2}$	
Δ	$+$	$+$		$-$		$-$		$+$
$af(0)$	$-$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{S}{2}$	$-$		$-$		$-$		$+$	
نتیجه								جواب

امتحان حساب استدلالی سال ششم ریاضی داوطلبان متفرقه در اردیبهشت ماه ۴۳ (مدت ۲ ساعت)

۱۱۶۰ ـ بنویسید چرا وقتی عدد A مضرب ۱۸ است هرقدرصفر بین ارقامش بگذاریم بازهم مضرب ۱۸ خواهدبود. (۱نمره)

۱۱۶۱ ـ عددی را پیدا کنید که چون آنرا درعدد ۴۸۱ ضرب کنیم حاصلضرب از ارقام ۵ تشکیل شود (۲نمره)

۱۱۶۲ ـ عدد a^3 را که در مبنای اعشاری نوشته شده بمبنای $a-1$ ببرید و حاصل آنرا بنویسید (۲نمره) مقداری راکه باین‌ترتیب بدست آورده‌اید بازاء بعضی از مقادیر عددی a بدست نمیآید علت را ذکر کرده و آن مقادیر را تعین کنید. (۲نمره)

۱۱۶۳ ـ اگرعدد۲۴۵را برعدد a تقسیم کنیم باقیمانده ۵ میشود و اگر عدد ۳۴۵ را بر a تقسیم کنیم باقیمانده ۹ میگردد جوابهای a را تعیین کنید . (۳نمره)

۱۱۶۴ ـ هر یك از دو عدد a و b را بر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان تقسیم کرده‌ایم حاصلضرب خارج قسمتها مساوی بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد a و b شده است این دو عدد را پیدا کنید در صورتیکه بدانیم $ab=27000$ میباشد . (۵نمره)

۱۱۶۵ ـ کسر $\frac{n+5}{n+42}$ مفروض است عدد صحیح n را طوری تعیین کنید که این کسر معادل مکعب کسر غیرممکن التحویل $\frac{a}{b}$ شود . (۵نمره)

حل ـ ۱ ـ چون عدد مفروض مضرب ۲ و ۹ میباشد بنابراین هرقدر صفر بین ارقام آن قراردهیم مجموع ارقام عدد حاصل تغییر نکرده در نتیجه مضرب ۹ و همچنین زوج خواهد بود .

۲ ـ چون حاصلضرب عدد مطلوب در ۴۸۱ به عدد ۵ ختم شده است پس رقم یکان آن ۵ میباشد و ضرب بصورت زیر است .

$$\begin{array}{r} 481 \quad \times \\ \underline{a5} \\ 2405 \\ \cdots \end{array}$$

هرگاه رقم دهگان عدد مطلوب را به α نمایش دهیم پس باید $1\times\alpha=5$ باشدبنابراین $\alpha=5$ بوده وضرب بصورت زیر انجام میگیرد .

$$\begin{array}{r} 481 \quad \times \\ \underline{b55} \\ 2405 \\ 2405 \\ \cdots \end{array}$$

از ضرب فوق نتیجه میشودکه رقم صدگان عدد مطلوب باید ۱ باشد پس داریم .

$$\begin{array}{r} 481 \quad \times \\ \underline{c155} \\ 2405 \\ 2405 \\ 481 \\ \cdots \end{array}$$

و بالاخره عدد مطلوب برابر۱۱۵۵خواهد بود وازآنجا خواهیم داشت .

$$\begin{array}{r} 481 \quad \times \\ \underline{1155} \\ 2405 \\ 2405 \\ 481 \\ 481 \\ \hline 555555 \end{array}$$

۳ ـ عدد a^3 در مبنای $a-1$ بصورت زیر نوشته خواهد شد .

$$(a^3)_{10}=(a-1+1)^3=[(a-1)+1]^3$$
$$=(a-1)^3+3(a-1)^2+3(a-1)+1$$

و از آنجا داریم .

$$(a^3)_{10}=(1331)_{a-1}$$

بطوریکه مشاهده میشود عدد a^3 در مبنای $(a-1)$ بصورت ۱۳۳۱ نوشته میشود و چون در صورت عدد ۱۳۳۱رقم ۳ بکار رفته است بنابراین باید $a-1>3$ باشد و از آنجا $\boxed{a>4}$ نتیجه میشود .

۴ ـ داریم

$$\begin{cases} 245=aq+5 \\ 345=aq'+9 \end{cases}$$

و یا

$$\begin{cases} 240=aq \\ 336=aq' \end{cases}$$

پس عدد مطلوب a اعداد ۲۴۰ و ۳۳۶ را عاد می‌کند و ضمناً عدد a از هر دو باقیمانده یعنی از ۹ بزرگتر است بنابراین عدد a یکی از اعدادیست که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك اعداد ۲۴۰ و ۳۳۶ را می‌شمارندو از ۹ بزرگترهستند

اما بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۲۴۰ و ۳۳۶ عبارتست از ۴۸ پس جوابهای مسأله عبارتند از ۱۲ و ۱۶ و ۲۴ و ۴۸

۵ ـ حل ـ هرگاه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b را D بنامیم داریم

$$\begin{cases} a=a'.D \\ b=b'.D \end{cases}$$ باتوجه بفرض مسأله می توان نوشت

$$\frac{a}{D}\cdot\frac{b}{D}=D$$ و از $a.b=D^3$ ویا $D^3=27000$ پس

آنجا $\boxed{D=30}$ بدست‌میآید ازطرفی $a'.b'=D$ بنابراین $a'.b'=30$ دو عدد a' و b' نسبت بهم اولند وحاصلضربشان برابر ۳۰ میباشد .

$$\begin{cases} a'=30 \\ b'=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a'=15 \\ b'=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a'=10 \\ b'=3 \end{cases} \quad \begin{cases} a'=6 \\ b'=5 \end{cases}$$ پس

جوابهای مسأله عبارتند از :

$$\begin{cases} a=900 \\ b=30 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} a=450 \\ b=60 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} a=300 \\ b=90 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} a=180 \\ b=150 \end{cases}$$

۶ ـ حل ـ می توان نوشت

$$\begin{cases} \dfrac{n+5}{n+42}=\dfrac{a^2}{b^2} \\ n+5=\dfrac{37a^2}{b^2-a^2} \end{cases}$$ کسر $\frac{a}{b}$ غیرممکن‌التحویل میباشد .

پس a^2 و b^2-a^2 نسبت بهم اول خواهند بود برای آنکه کسر $\frac{37a^2}{b^2-a^2}$ بعدد صحیح تبدیل شود باید b^2-a^2 بایکی‌ازمقسوم‌علیه‌های‌صورت‌برابر باشد وچون a^2 و b^2-a^2 نسبت بهم اولند پس b^2-a^2 یا باید برابر ۱ ویا برابر ۳۷ گردد هرگاه $b^2-a^2=1$ باشد لازم میآید که یکی از دوعدد a و یا b برابر صفر شودبنابراین‌تساوی اخیر برقرارنخواهد بود و از آنجا خواهیم داشت .

$$b^2-a^2=37$$ ویا $$(b-a)(b^2+ab+a^2)=37$$

و این رابطه وقتی برقرار است که داشته باشیم

$$\begin{cases} b-a=1 \\ b^2+ab+b^2=37 \end{cases}$$ داریم $$(b-a)^2+3ab=37$$

پس $\boxed{ab=12}$ میدانیم a و b نسبت بهم اول بوده و حاصلضربشان ۱۲ و تفاضل آنها ۱ میباشد در نتیجه $\boxed{a=3}$ و $\boxed{b=4}$ خواهد بود و عدد صحیح n برابر ۲۲ خواهد شد.

امتحان حساب استدلالی سال ششم ریاضی دبیرستانهای کشور در خردادماه ۴۳ (مدت ۲ ساعت)

***

۱۱۶۶ ـ عدد A را در دو مبنا که اختلافشان یك است نوشته ایم بترتیب اعداد ۱۲۰ و ۶۶ بدست آمده است مطلوبست تعیین دو مبنا وعدد A (۳نمره)

۱۱۶۷ ـ عدد $N<1500$ را طوری تعیین کنید که مضرب ۱۳ بوده و باقیماندهٔ تقسیمش بر اعداد ۵ و ۷ و ۱۱ عدد ۲ باشد . (۴نمره)

۱۱۶۸ ـ ثابت‌کنید تمام اعداد ۶ رقمی که بصورت $\overline{abcabc}$ نوشته میشوند براعداد۷ و ۱۱ و ۱۳ قابل‌قسمت‌اند. (۲نمره) و نیز ثابت کنیدکه تمینوان عددی ۶ رقمی بصورت‌فوق پیدا کرد که مجذورکامل باشد . (۲نمره)

۱۱۶۹ ـ اعداد چهار رقمی $\overline{ubcm}$ را که در رابطهٔ زیر صدق میکنند تعیین کنید و تمام جوابها را بنویسید .

(۴نمره)

$$\overline{medu}=49(\overline{mc}+\overline{du})$$

۱۱۷۰ ـ اعداد صحیح a و b را طوری تعیین کنید که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکشان ۸ بوده و تفاضل مجموع آنها از کوچکترین مضرب مشترکشان ۳۷۶ باشد . (۵نمره)

حل ـ ۱ ـ چون در صورت ۶۶ رقم ۶ بکار رفته است پس مبنای این عدد از ۶ بزرگتر است و چون ظاهر عدد ۶۶ از ظاهر عدد ۱۲۰ کوچکتر میباشد بنابراین مبنای عدد ۱۲۰ از مبنای عدد ۶۶ کوچکتر خواهد بود و چنانچه دو مبنا را x و $(x-1)$ فرض کنیم خواهیم داشت .

$$\frac{(120)}{x-1}=\frac{(66)}{x}$$

اکنون دو عدد $\frac{(66)}{x}$ و $\frac{(120)}{x-1}$ را در دستگاه اعشاری می‌نویسیم .

داریم $(x-1)^2+2(x-1)=6x+6$

ویا $(x-1)^2-4(x-1)-12=0$

ازآنجا $x-1=6$ و بالاخره $\boxed{x=7}$ نتیجه خواهد شد .

و جواب مسأله $A=48$ خواهد بود .

۲ ـ عدد مطلوب N را در نظر می‌گیریم داریم :

$$\text{بنابراین} \quad \begin{cases} N-2=5k \\ N-2=7k \\ N-2=11k \end{cases} \quad \text{ویا} \quad \begin{cases} N=5k+2 \\ N=7k+2 \\ N=11k+2 \end{cases}$$

عدد $(N-2)$ مضرب $11\times7\times5$ میباشد و هرگاه k عدد صحیح دلخواهی باشد می‌توان نوشت $N-2=385k$ باتوجه بفرض مسأله بایدداشته باشیم $385k<1500-2$ و ازآنجا $k<3$ نتیجه میشودازطرفی N باید مضرب ۱۳ باشد پس‌می‌توان نوشت مضرب $385k+2=13$ و یامضرب $8k+2=13$ پس باید به k عددی نسبت دادکه وقتی در ۸ ضرب شودمجموع عدد حاصل با ۲ مضرب ۱۳ باشد و این عدد برابر ۳ است و ازآنجا $\boxed{N=1157}$ جواب مسأله خواهد بود .

۳ ـ عدد شش رقمی مفروض‌را می‌توان بصورت‌زیر نوشت

$$\overline{abcabc}=1001\overline{abc}+\overline{abc}=1001\overline{abc}$$

وچون $1001=7\times11\times13$ میباشد بنابراین عدد مفروض براعداد ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر خواهد بود .

میدانیم وقتی‌عددی مجذورکامل است‌که نماینده‌های‌عوامل آن همگی زوج باشند یعنی لااقل باید داشته باشیم

$\overline{abc}=7\times11\times13$ ویا $1001\overline{abc}=7^2\times11^2\times13^2$

اما عدد $7\times11\times13$ چهار رقمی‌است پس تساوی‌اخیرهرگز ممکن نیست برقرار باشددر نتیجه عدد مفروض نمی‌تواندمجذور کامل گردد .

۴ ـ می‌توان نوشت $1100\overline{mc}+\overline{du}=49\overline{mc}+\overline{49du}$

ویا $51\overline{mc}=48du$ وازآنجا $17\overline{mc}-16\overline{du}$ وچون ۱۶ و ۱۷ نسبت بهم اولند پس‌داریم $\begin{cases}\overline{mc}=16k \\ \overline{du}=17k\end{cases}$ دوعدد $\overline{mc}$ و $\overline{du}$ دو رقمی‌اند پس باید $17k<100$ باشد و ازآنجا $k\leq5$ نتیجه میشودکه دراز‌اء $k=1$ و $k=2$ و $k=3$ و $k=4$ و $k=5$ جوابهای مسأله بترتیب ۱۶۱۷ و ۳۲۳۴ و ۴۸۵۱ و ۶۴۶۸ و ۸۰۸۵ خواهد بود .

۵ ـ حل ـ هرگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد را D بنامیم داریم $\begin{cases}a=a'.D \\ b=b'.D\end{cases}$ میدانیم $M=a'.b'.D$

و باتوجه بفرض مسأله می‌توان نوشت $M-(a+b)=276$

و از آنجا خواهیم داشت $a'b'-(a'+b')=47$ و یا

$$a'(b'-1)=b'+47 \quad \text{پس} \quad a'=\frac{b'+47}{b'-1} \quad \text{ویا}$$

$$a'=1+\frac{48}{b'-1}$$

a' و b' دو عدد صحیح بوده و نسبت بهم اول میباشند

بنابراین برای اینکه کسر $\frac{48}{b'-1}$ بعددصحیح‌تبدیل‌شود باید $(b'-1)$ بیکی از مقسوم علیه‌های ۴۸ برابر باشد پس

$b'-1=1$	$b'=2$
$b'-1=2$	$b'=3$
$b'-1=3$	$b'=4$
$b'-1=4$	$b'=5$
$b'-1=6$	$b'=7$
$b'-1=8$	$b'=9$
$b'-1=12$	$b'=13$
$b'-1=16$	$b'=17$
$b'-1=24$	$b'=25$
$b'-1=48$	$b'=49$

بنابراین

$$\begin{cases}a'=13 \\ b'=5\end{cases} \text{ و } \begin{cases}a'=17 \\ b'=4\end{cases} \text{ و } \begin{cases}a'=25 \\ b'=3\end{cases} \text{ و } \begin{cases}a'=49 \\ b'=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a'=9 \\ d'=7\end{cases}$$

و جوابهای مسأله عبارتند از

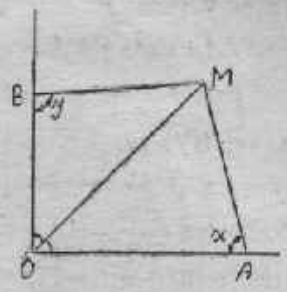
$$\begin{cases}a=104 \\ b=40\end{cases} \quad \begin{cases}a=130 \\ b=32\end{cases} \quad \begin{cases}a=200 \\ b=24\end{cases} \text{ و } \begin{cases}a=392 \\ b=16\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=27 \\ b=56\end{cases}$$

* * *

امتحان مثلثات سال ششم ریاضی داوطلبان متفرقه‌در اردیبهشت ماه ۴۳ (مدت ۳/۵ ساعت)

۱۱۷۱ـ درروی اضلاع



زاویه قائمه $\hat{O}$ دو نقطه A و B رامطابق‌شکل انتخاب میکنیم بقسمیکه $\frac{OA}{OB}=m$ باشد بعدازنقطه M واقع بر روی منصف زاویهٔ $\hat{O}$ بنقاط A و B وصل‌میکنیم‌وفرض میکنیم $\hat{OBM}=y$ و $\hat{OAM}=x$

باشد .

اولاً ثابت کنید بین زوایای x و y رابطهٔ زیر بر قرار است . (۳ نمره)

$$tgy(1+tgx)=mtgx(1+tgy)$$

ثانیاً بفرض برقرار بودن این رابطه وبافرض $y=2x$ این رابطه را برحسب tgx مرتب کرده بازاء مقادیر مختلف m در جوابهای آن بحث کنید . (۲ نمره)

ثالثاً در معادله درجه دومی که باین ترتیب برای tgx بدست آورده‌اید بفرض $m=2+\sqrt{3}$ ریشه‌های آنرا حساب کنید (۲ نمره) واز دوجوابی که برای tgx بدست میآید آنرا که زاویه‌اش بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ است انتخاب کنید و بفرض

اضلاع $OM+MA+AO=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}++\sqrt{6}$ و زوایا ومساحت مثلث OMA راحساب کنید (۵ نمره)

۱۱۷۲ ـ معادله یك مجهولی زیر راحل کرده جوابهای آنرا که بین صفر و π هستند بنویسید (۴ نمره)

$$(6+3\sqrt{3})\sin x\times\cos x-2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$$

۱۱۷۳ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\cos 2x+\sin x$ را رسم کنید . (۴ نمره)

حل ـ اولا دو مثلث AOM و BOM را در نظر می گیریم داریم .

$$\frac{\sin x}{OM}=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+x)}{OA}\ ,\ \frac{\sin y}{OM}=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+y)}{OB}$$

وازآنجا

$$\frac{\sin y}{\sin x}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+y)}{\sin(\frac{\pi}{4}+x)}$$

ویا

$$\frac{\sin y}{\sin x}=m\cdot\frac{\sin y+\cos y}{\sin x+\cos x}$$

و

$$\sin y(\sin x+\cos x)=m\sin x(\sin y+\cos y)$$

طرفین رابطه فوق رابه $\cos x\cos y$ تقسیم می کنیم خواهیم داشت .

$$tgy(1+tgx)=mtgx(1+tgy)$$

ثانیاً ـ بافرض $y=2x$ بعدازحذف $tgx=0$ و $x=0$ معادله فوق برحسب tgx بصورت ذیل خواهد بود .

$$mtg^2x-2(m-1)tgx+2-m=0 \qquad (1)$$

بحث : وقتی نقطه M روی نیساز بینهایت دور شود زاویه x برابر $\frac{3\pi}{4}$ خواهد بود پس این زاویه درفاصله $(0\ و\ \frac{3\pi}{4})$ تغییر خواهد نمود و داریم $0<x<\frac{3\pi}{4}$ و ازآنجا $-\infty<tgx<-1$ و $0<tgx<\infty$ یعنی مسأله وقتی جواب خواهد داشت که مقادیر tgx خارج $(0\ و\ -1)$ واقع باشند .

برای اینکه معادله (۱) یك جواب قابل قبول داشته باشد باید $f(0)\cdot f(-1)<0$ باشد واین شرط وقتی برقراراست که $m<0$ و $m>2$

معادله (۱) وقتی جواب قابل قبول خواهد داشت که $\Delta\geq 0$ و هرگاه $tg\frac{x''}{2}<tg\frac{x'}{2}$ فرض شود .

I ـ درحالتیکه $-1<tg\frac{x''}{2}<tg\frac{x'}{2}<0$ است بایدداشته باشیم .

$$\begin{cases} af(0)>0 \\ \frac{b}{2a}>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} af(-1)>0 \\ -1+\frac{b}{2a}>0 \end{cases}$$

II ـ در حالتیکه $-1<tg\frac{x''}{2}<tg\frac{x'}{2}<0$ میباشدباید

$$\begin{cases} af(0)>0 \\ \frac{b}{2a}<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} af(-1)>0 \\ -1+\frac{b}{2a}<0 \end{cases}$$

III ـ درحالتیکه $tg\frac{x''}{2}<-1<0<tg\frac{x'}{2}$ است باید

$$\begin{cases} af(0)<0 \\ af(-1)<0 \end{cases}$$

ثالثاً ـ در معادله درجه دوم (۱) بجای m عدد $(2+\sqrt{3})$ را قرار داده ومعادله حاصل راحل می کنیم .

$$(2+\sqrt{3})tg^2x-2(\sqrt{3}+1)tgx-\sqrt{3}=0$$

$$tgx=\frac{(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}{2+\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} tgx=\frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3} \\ tgx=\frac{-1}{2+\sqrt{3}}=-(2-\sqrt{3})=tg\frac{11\pi}{12} \end{cases}$$

و ازآنجا $\boxed{x=\frac{\pi}{3}}$ نتیجه می‌شودوسپس زاویه OMA محاسبه شده وخواهیم داشت $\widehat{OMA}=\frac{5\pi}{12}$

میدانیم :

$$\frac{OM}{\sin x}=\frac{MA}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{OA}{\sin\widehat{OMA}}$$

ویا

$$\frac{OM}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{MA}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{OA}{\sin\frac{5\pi}{12}}=\frac{4(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{6})}=4$$

پس $\boxed{OM=2\sqrt{3}}$ و $\boxed{MA=2\sqrt{2}}$ و

و $\boxed{OA=\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ و $S=\frac{1}{2}OA\cdot MA\sin A$

و بالاخره $\boxed{S=3+\sqrt{3}}$

(۲) ـ معادله مفروض را می توان بصورت ذیل نوشت

$$(6+3\sqrt{3})\sin 2x+3\cos 2x=3\sqrt{3}+6$$

وهر گاه طرفین معادله اخیر را به $(6+3\sqrt{3})$ تقسیم کنیم .

$$\sin 2x+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\cos 2x \quad ۱$$

ویا

$$\sin 2x+(2-\sqrt{3})\cos 2x \quad ۱$$

واما داریم $tg\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

پس

$$\sin 2x+tg\frac{\pi}{12}\cos 2x=1$$

ویا

$$\sin 2x\cos\frac{\pi}{12}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}=\sin\frac{5\pi}{12}$$

و

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{5\pi}{12}$$

$$\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{12}=2k\pi+\frac{5\pi}{12} \\ 2x+\frac{\pi}{12}=2k\pi+\pi-\frac{5\pi}{12} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=k\pi+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

وجوابهای بین صفر و π عبارتند از $\boxed{x=\frac{\pi}{6}}$ و $\boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

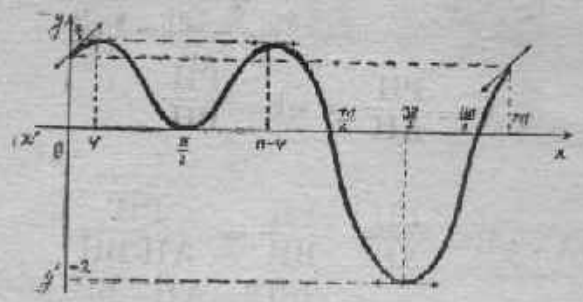
۳ ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع

$y=\cos 2x+\sin x$ در فاصلهٔ $(0\ \text{و}\ 2\pi)$ برابر با یک دورهٔ تناوب تابع بشرح زیر است .

مشتق تابع $\cos x$ است در فاصلهٔ $y'=-4\sin x\cos x+\cos x$

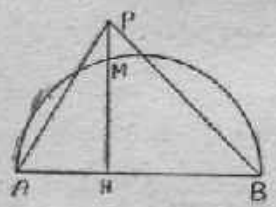
$(0\ \text{و}\ 2\pi)$ دارای ریشه‌های $\varphi=\text{Arc}\sin\frac{1}{4}$ و $\frac{\pi}{2}$ و $\pi-\varphi$ و $\frac{3\pi}{2}$ میباشد

x	0	φ	$\frac{\pi}{2}$	$\pi-\varphi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y'	$1+$	$0-$	$0+$	$0-$	$-$	$+$	1
y	1 ↗	$\frac{9}{8}$ ↘	0 ↗	$\frac{3}{8}$ ↘	↘	↗	1



امتحان مثلثات سال ششم ریاضی دبیرستانهای کشور

در خرداد ماه ۴۳ (مدت ۲ ساعت)



۱۱۷۴ ـ نیمدایره‌ای بقطر $AB=10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ مفروض است نقطهٔ M داروی این نیمدایره فرض کرده عمود MH را بر AB فرود میآوریم و در امتداد MH نقطهٔ P را طوری تعیین میکنیم که $\frac{PH}{MH}=m$ باشد و از نقطهٔ P به نقاط A و B وصل میکنیم .

الف ـ رابطه‌ای بین زوایای A و B و m موجود است این رابطه را بنویسید (۲ نمره)

ب ـ بفرض اینکه $tgA\times tgB=\sqrt{3}$ بوده و $R=20$ باشد (R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث PAB میباشد) اضلاع و زوایا ومساحت مثلث PAB را حساب کنید (۵ نمره)

۱۱۷۵ ـ عبارت زیر را قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم بنمائید . (۳ نمره)

$$\sin^2 a+\cos^2 b-\sin^2(a+b)$$

۱۱۷۶ ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل و بحث کنید (۳ نمره)

و بازاء $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ جوابهای x و y را بدست آورید (۲ نمره)

$$\begin{cases} \cos x=m\cos 2y \\ \cos x+\cos y=-\frac{1}{2m} \end{cases}$$

۱۱۷۷ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید : (۵ نمره)

$$y=\frac{\cos x+(2+\sqrt{3})\sin x}{\sin x+1}$$

حل ۱ ـ الف ـ می‌توان نوشت

$$tg\,A=\frac{PH}{AH}\quad و\quad tgB=\frac{PH}{BH}$$

و از آنجا

$$tgA\cdot tgB=\frac{PH}{AH}\cdot\frac{PH}{BH}=\frac{\overline{PH}^{2}}{AH\cdot BH}$$

میدانیم $\overline{HM}^{2}=AH\cdot BH$ پس

$$\boxed{tgA\cdot tgB=\frac{\overline{PH}^{2}}{\overline{HH}^{2}}=m^{2}}$$

ب ـ داریم $\frac{AB}{\sin P}=2R$ بنابراین

$$\frac{10(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sin P}=2\times 20=40$$

پس $\sin P=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ در نتیجه $\boxed{\hat{P}=75^{\circ}}$ ازطرفی

$$\hat{A}+\hat{B}=105^{\circ}$$

میدانیم

$$tg\,(105)=tg\,(60^{\circ}+45^{\circ})=$$

$$=\frac{tg60^{\circ}+tg45^{\circ}}{1-tg60^{\circ}\,tg45^{\circ}}=-(2+\sqrt{3})$$

و $tg(A+B)=\frac{tgA+tgB}{1-tgA\,tgB}=-(2+\sqrt{3})$

چون $tgA\cdot tgB=\sqrt{3}$ میباشد پس داریم

$$\begin{cases}tgA+tgB=1+\sqrt{3}\\ tgA\cdot tgB=\sqrt{3}\end{cases}$$

از حل معادله $z^{2}-(1+\sqrt{3})z+\sqrt{3}=0$

مقادیر tgA و tgB بدست میآیند و از آنجا

$$\begin{cases}\hat{A}=60^{\circ}\\ \hat{B}=45^{\circ}\end{cases}\quad و بالاخره\quad \begin{cases}tgA=1\\ tgB=\sqrt{3}\end{cases}$$

اکنون اضلاع مثلث PAB را بدست میآوریم داریم

$$\frac{PB}{\sin A}=2R=40$$

پس $\frac{PB}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=40$ و $\boxed{PB=20\sqrt{3}}$ و هم چنین

$$\frac{PA}{\sin B}=2R=40\quad و\quad \boxed{PA=20\sqrt{2}}$$

برای تعیین مساحت مثلث PAB می‌نویسیم

$$S_{PAB}=\frac{1}{2}PA\cdot PB\sin P$$

پس $S^{2}_{PAB}=\frac{1}{2}(20\sqrt{2})(20\sqrt{3})(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$

در نتیجه $\boxed{S_{PAB}=100(4+\sqrt{3})}$

۲ ـ عبارت مفروض را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\sin^{2}a+\sin^{2}b-[\sin a\cos b+\sin b\cos a]^{2}=$$

ویا $=\sin a^{2}+\sin b^{2}-\sin a^{2}(1-\sin^{2}b)-$

$$-\sin^{2}b(1-\sin^{2}a)-2\sin a\sin b\cos a\cos b=$$

پس $=\sin^{2}a\sin^{2}b+\sin^{2}b\sin^{2}a-2\sin a\sin b\cos a\cos b$

و $=-2\sin a\sin b(\cos a\cos b-\sin a\sin b)=$

در نتیجه خواهیم داشت

$$=\boxed{-2\sin a\sin b\cos(a+b)}$$

۳ـ پس از حذف $\cos x$ معادله

$$m\cos 2y+\cos y+\frac{1}{2m}=0$$ حاصل خواهد شد وسپس

معادله درجه دوم $2m\cos^{2}y+\cos y+\frac{1-2m^{2}}{2m}=0$ بدست

خواهد آمد

بحث ـ شرط وجود جواب آنستکه $-1<\cos y<1$

باشد .

برای اینکه معادله مفروض یك جواب قابل قبول داشته باشد باید یکی ازجوابهای معادله بین ۱ و ۱ـ واقع باشدبرای این منظور باید شرط $f(-1)\cdot f(+1)<0$ برقرارباشد اما این شرط هرگز برقرارنخواهد بود زیرا داریم

$$\begin{cases}af(+1)=2m^{2}+2m+1>0\\ af(-1)=2m^{2}-2m+1>0\end{cases}$$

و برای اینکه معادله مفروض دو جواب قابل قبول داشته باشد باید دومقدار قابل قبول برای $\cos y$ وجود داشته باشد یعنی هر دو جواب معادله بین ۱ و ۱ـ واقع باشند بنابراین باید پنج شرط $\Delta>0$ و $af(+1)>0$ و $af(-1)>0$ و $-1+\frac{b}{2a}<0$ و $1+\frac{b}{2a}>0$ برقرار باشد ازاین شرایط دستگاه نامعادلات ذیل نتیجه میشود .

بقیه در پائین صفحه ۷۶

حل مسائل فیزیک و مکانیک

امتحانات نهائی سال ششم ریاضی

متفرقه اردیبهشت ۴۳ - دبیرستانها خرداد ۴۳

توسط طرح کننده : دکتر ابوالقاسم قلمسیاه

سؤالات امتحان فیزیک سال ششم ریاضی متفرقه
(اردیبهشت ۱۳۴۳) (مدت ۳ ساعت)

الف ـ مسائل

۱۱۷۸ـ دو لولهٔ صوتی باز و یکسان A وB داریم که طول هریک ۴۰ سانتی‌متر است . اولاً در لوله A بسلامت هوا میدمیم تا صوت اصلی خودرا تولیدکند . مطلوبست ارتفاع صوت حادث ازآن . سرعت سیرصوت در هوای مورد آزمایش ۳۴۰ متربرثانیه است (۱نمره) ثانیاً درلوله Bدر همان‌شرایط ازت خالص میدمیم ارتفاع صوت اصلی حادث ازآن چه‌اندازه است $N_2=28$ (۱نمره) ثالثاً اگر هردو لوله باهم بصدا درآیند چه‌پدیده‌ای مشاهده میشود و چه‌اندازه باید طول لوله A راکه درآن هوا جریان دارد تغییرداد تا هردو لوله‌یک صدا را تولیدکنند (۲نمره) .

۱۱۷۹ـ در آزمایش یونگ ، فاصله دو شکاف از هم‌یک میلی‌متر است و این شکافها توسط نور یک‌رنگی روشن شده‌اند . ونوارهای تداخلی برروی‌صفحه‌ایکه موازی با صفحه‌شکافها بوده وبفاصله ۲متر از آن قرارگرفته است تشکیل میشوند . فاصله نوار روشن ششم ازنوار وسطی ۷/۲ میلی‌متر است . طول موج نور بکاررفته چندانگسترم است . (۳نمره) .

۱۱۸۰ـ خازن‌مسطحی تشکیل شده است ازدو قرص‌فلزی که شعاع هریک ۱۰ سانتی متربوده وبفاصله ۱ میلی‌متر مقابل‌هم قرارگرفته‌اند و عایق بین‌این جوشن‌ها هوا است . اولاظرفیت این خازن چندمیکروفاراد است (۱نمره)

ثانیاً اگر بین‌دوجوشن خازنی که ظرفیت‌آن $\frac{1}{36000}$ میکروفاراد است‌جریان متناوبی باختلاف پتانسیل مؤثر ۱۸۰۰ ولت وبتواتر ۵۰ برقرار سازیم‌چه شدت جریانی ازاین خازن میگذرد . (۲نمره) .

ب ـ سؤالات :

❁ معادله‌حرکت ارتعاش یک ذره غیرمشخص از محیط قابل ارتجاع را پیداکنید (بحث) (۲نمره)

❁ اصطلاحات زیررا بطورمختصر ودقیق تعریف‌کنید :
تن‌مازور ، دیز ، ساوار ، اکتاو . (۲نمره)

❁ طیف انفصالی‌وطیف جذبی را تعریف کنید وفرق‌آنها را بنویسید . (۲نمره)

❁ امپرمتر حرارتی (شکل وشرح) (۲نمره)

❁ اشعهٔ‌مجرائی یا اشعه مثبت (شرح وشکل) (۲نمره)

حل مسائل

مسأله ۱ : فرمول‌کلی لوله‌های صوتی باز :

$$N_k=\frac{KV}{2l}$$

۱ـ برای صوت اصلی $K=1$ و $N=\frac{V}{2l}$

در لوله A هوا جریان دارد پس باداء $V=340\frac{m}{S}$ و $l=40^{Cm}=0/4^{m}$ داریم :

$$N=\frac{340}{2\times 0/4}=425$$

❁ درلولهٔB ازت جریان دارد و میدانیم سرعت سیر صوت درهر گاز با چگالی‌آن نسبت عکس دارد وچون ارتفاع صوت با سرعت سیر صوت متناسب است پس اگر ارتفاع صوت اصلی حادث از لوله B به 'N نمایش داده شود داریم :

$$\frac{N'}{N}=\frac{V'}{V}=\frac{\sqrt{d_{هوا}}}{\sqrt{d'_{ازت}}}$$

ویا: $N'=N\sqrt{\frac{d}{d'}}=425\sqrt{\frac{1}{28}}=425\sqrt{\frac{29}{28}}$

$$N'\neq 432$$

۳ـ اگرهردو لوله باهم‌بصدا درآیند پدیده ضربان‌حاصل

میشود و تعداد ضربانها در ثانیه برابر است با :

ضربان در ثانیه $n=N'-N=۴۳۲-۴۲۵=۷$

برای اینکه لوله A همان صدای لوله B را تولید کند باید طولش کوتاهتر شود و داریم :

$$\frac{N'}{N}=\frac{l}{l'}$$

و یا $$l'=l\cdot\frac{N}{N'}$$

یعنی $$l'=۴۰\times\frac{۴۲۵}{۴۳۲}=۳۹/۳۵\ Cm$$

باید طول لوله A را باندازه

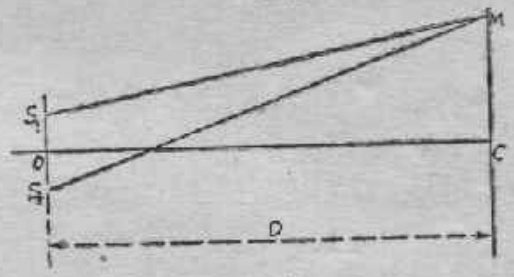
$$\Delta l=l-l'=۴۰-۳۹/۳۵=۰/۶۵\ Cm$$

کم کرد

مسألهٔ ۲

طول موج نور بکار رفته از رابطهٔ :

$$\lambda=\frac{ax}{KD}$$



(ش ۴۶)

بدست میآید که در آن :

فاصله دو شکاف داریم : $a=۸/۸_۲=۱\ mm$

فاصله صفحه شکافها از صفحه نوارها

$$D=OC=۲\ m=۲۰۰۰\ mm$$

فاصله نوار ششم از نوار وسطی : $x=CM=۷/۲\ mm$

و $K=۶$ است .

پس $$\lambda=\frac{ax}{KD}=\frac{۱\times۷/۲}{۶\times۲۰۰۰}=\frac{mm}{۰/۰۰۰۶}$$

چون هر انگستروم $\frac{۷}{۱۰}$ میلیمتر است کافی است برای تبدیل میلیمتر به انگستروم آنرا در $۱۰^۷$ ضرب کنیم .

$$\lambda=۰/۰۰۰۶\times۱۰^۷=۶۰۰۰\ \text{Å}$$

مسألهٔ ۳ ـ

۱) ظرفیت خازن مسطح از فرمول

$$C=\frac{KS}{۹\times۱۰^{۱۱}\times۴\pi e}$$

بر حسب فاراد بدست میآید که بر حسب میکروفاراد برابر است با :

$$C=\frac{KS\times۱۰^۶}{۹\times۱۰^{۱۱}\times۴\pi e}=\frac{KS}{۹\times۱۰^۵\times۴\pi e}$$

سطح مشترک دوجوشن یعنی S برابر است با :

$$S=\pi R^۲=\pi\times۱۰^۲=۱۰۰\pi$$

پس با زاء $K=۱$ و $e=۱=۰/۱\ mm$ داریم :

میکروفاراد $$C=\frac{۱۰۰\pi}{۹\times۱۰^۵\times۴\pi\times۰/۱}=\frac{۱}{۳۶۰۰}$$

ثانیاً مقاومت ظاهری خازن برابر است با

$$Z=\frac{۱}{c\omega}$$

و اختلاف پتانسیل موثر دو سر آن :

$$V_e=I_eZ=\frac{I_e}{c\omega}$$

پس شدت جریان مؤثر یکه از مدار خازن میگذرد :

$$I_e=V_eC\omega$$

با زاء $\omega=۲\pi N=۱۰۰\pi$ داریم :

$$I_e=۱۸۰۰\times\frac{۱۰}{۳۶۰۰}\times۱۰۰\pi=$$

$$=\frac{\pi}{۲\times۱۰^۴}A=۰/۰۰۱۵۷\ A$$

و یا $$\boxed{I_e=۱/۵۷\ m\ A}$$

سؤالات امتحانات فیزیک سال ششم ریاضی دبیرستانها

(خرداد ۱۳۴۳) **مدت (دوساعت)**

مسائل :

۱۱۸۱ـ صوت اصلی لوله بازی بطول ۹۶ = [سانتی‌متر که از آن گاز هیدرژن عبور میکند $mi_۲$ است مطلوبست :

اولا سرعت سیر صوت در این گاز ۲۶۱ = $Ut_۲$ (نمره ۱/۵)

ثانیاً تابع مرتعشی بطول ۵۰ سانتی‌متر با چند کیلوگرم نیرو باید بالا کشیده شود تا صوت اصلی آن $mi_۲$ باشد جرم هر متر از این تار یک گرم است $g=۱۰\frac{m}{۸۲}$

۱۱۸۲ـ بین دو نقطه جریان متناوبی که اختلاف پتانسیل مؤثر آن ۱۲۰ ولت و تواتر آن ۵۰ هرتز است موجود است اولا معادلهٔ اختلاف پتانسیل لحظه‌ای این جریان دانسیت بزمان بنویسید .

ثانیاً ـ بین این دو نقطه یک لامپ چراغ برق که اثر خود

گروه فرهنگی هدف

در مدارس خود بشرح ذیل

دبیرستان شماره ۱ پسران

خیابان پهلوی - چهارراه پهلوی وجامی تلفن ٦٦٨٢٣

وخیابان سپه - کوچه مریخ تلفن ٤٢٠٧٨

دبیرستان شماره ۲ دختران

خیابان شاه- نزدیک چهارراه شاه تلفن ٤٠٦٩٥

دبیرستان شماره ۳ پسران

خیابان ژاله - کوچه فلاح تلفن ٣٢٥٢٢

دبیرستان شماره ٤ پسران

خیابان سوم اسفند - کوچه میرشکار تلفن ٣٤٠٨٠

دبستان شماره ۱ پسران

و

دبستان شماره ۲ دختران

خیابان سپه- چهارراه پهلوی و سپه تلفن ٦٥٠٠٨

برای کلاسهای اول دانش آموز می‌پذیرد

درمورد کلاسهای دوم ببالاتا تاریخ ۱۵ تیرماه فقطنام دانش آموزان خود مدارس هدف ثبت میشود .

از ١٦ تیر ماه درصورت بودن جا دانش آموز ازخارج برای کلاسهای دوم ببالاهم پذیرفته میشود .

نام نویسی برای دبیرستانها فقط دوشنبه و چهارشنبه صبحها از ۷ تا ۱۲ و برای دبستانها همه روزه صبحها.

انتشارات نیل را بخوانید و ذهن خود را
از گنجینه دانش امروز غنی سازید

تازه چاپ

سرگذشت زمین
یك ، دو سه ، بینهایت
پیدایش ومرگ خورشید
} از ژرژگاموف

یکلیا و تنهائی او — اثر تقی مدرسی
دختر رعیت — » م.ا.به‌آذین
هوای تازه — » ا . بامداد

یك مجموعه تازه بنام ادبیات امروز

داستانهائی از یك جیب — از کارل چاپك — ترجمهٔ ایرج نوبخت
وداستانهائی از جیب دیگر
طلا — از بلز ساندرار — » محمد قاضی
شریفجان ، شریفجان — از تقی مدرسی

بزودی منتشر میشود

انتشارات نیل ـ تهران ـ مخبرالدوله ـ تلفن ۲۰۴۱۲۸